



HAL
open science

Sur la controlabilité des familles des champs de vecteurs uniformement presque-périodiques

Yves Peraire

► **To cite this version:**

Yves Peraire. Sur la controlabilité des familles des champs de vecteurs uniformement presque-périodiques. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paul Verlaine - Metz, 1982. Français. NNT : 1982METZ008S . tel-01775645

HAL Id: tel-01775645

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01775645>

Submitted on 24 Apr 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

THÈSE

présentée

A L'UNIVERSITÉ DE METZ

pour obtenir le titre de

DOCTEUR EN MATHÉMATIQUES

Spécialité: Equations différentielles et Contrôle Optimal des Systèmes

Mention: Mathématiques Appliquées

par

Yves PERAIRE

| BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE -METZ | |
|-------------------------------------|-----------------------|
| N° inv. | 19820165 |
| Cote | S/M ₃ 82/8 |
| Loc | Magasin |

**SUR LA CONTROLABILITÉ DES FAMILLES
DES CHAMPS DE VECTEURS
UNIFORMÉMENT PRESQUE-PÉRIODIQUES**



Soutenu le 15 juin 1982, devant la Commission d'Examen

Président: Madame A. SEC, Université de METZ

Examineurs: Messieurs J. MARTINET, Université de STRASBOURG
C. ROGER Université de METZ

T H E S E

présentée

à l'UNIVERSITE de METZ

pour obtenir le titre de :

DOCTEUR EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Equations différentielles
et Contrôle Optimal des Systèmes

Mention : Mathématiques Appliquées

par

Yves P E R A I R E

SUR LA CONTROLABILITE DES FAMILLES DE CHAMPS DE VECTEURS
UNIFORMEMENT PRESQUE-PERIODIQUES

soutenue le 15 JUIN 1982, devant la Commission d'Examen.

Président : Madame A. SEC, Université de METZ

Examineurs : Messieurs J. MARTINET, Université de STRASBOURG
C. ROGER, Université de METZ

Madame SEC a assuré la direction de cette thèse.

Je lui sais gré de s'en être acquittée avec psychologie en ne se montrant pas trop directive. Ses conseils d'ordre méthodologique me furent précieux.

Je dois à Monsieur ROGER d'avoir pu mener à son terme la troisième partie de ce travail grâce à d'efficaces discussions relatives à la géométrie riemannienne. Je lui exprime ici ma gratitude.

Je remercie également Monsieur MARTINET qui lors d'une entrevue à Strasbourg m'a permis de faire le point et a accepté de faire partie du jury.

Madame DAUTRICHE a dactylographié ce texte avec compétence, Monsieur LAVIGNE en a assuré le tirage; je les en remercie.

TABLE DES MATIERES

0 - INTRODUCTION

- A. Présentation des résultats.
- B. Premières notations.

1 - FAMILLES DE CHAMPS DE VECTEURS (FCV) UNIFORMEMENT PRESQUE-PERIODIQUES (UPP) SUR UNE VARIETE

- A. Eléments sur les familles UPP d'applications de \mathbb{R} dans des espaces normés.
- B. Translations (à ϵ près) des trajectoires de champs de vecteurs UPP sur une variété.

II - CONTROLABILITE DES FCV UPP SUR UNE VARIETE

- A. Intérieur des ensembles d'états accessibles.
 - Exemples.
- B. Quand a-t on la contrôlabilité ?
 - 1. Position du problème : Comment "remonter" les arcs de trajectoire "négatifs"
 - un théorème du retour non autonome
 - utilisation des translations
 - 2. Une condition suffisante et calculable de contrôlabilité des FCV UPP.
 - 3. Exemples :
 - exemple d'application du théorème principal
 - les conditions du théorème principal ne sont pas nécessaires : contre exemple.

III - COMPARAISON DES TRAJECTOIRES DE DEUX CHAMPS DE VECTEURS VOISINS SUR UNE VARIETE

- A. Position du problème.
- B. Quelques éléments et notations de géométrie riemannienne.
- C. Comparaison sur un intervalle des trajectoires de champs de vecteurs voisins.

0 - INTRODUCTION

A. Présentation des résultats

Dans ce travail, nous nous proposons d'établir des conditions suffisantes de contrôlabilité des familles de champs de vecteurs (FCV) uniformément presque périodiques (UPP) sur une variété M .

Ceci nous a conduit, dans le chapitre I, à étudier dans quelle mesure la trajectoire d'un champ de vecteur X , UPP, peut être translatée dans le temps; en clair, à comparer les points d'arrivée lorsque l'on décale d'une même valeur τ , l'instant de départ et l'instant d'arrivée.

Nous donnons une réponse, sur certaines variétés, avec éventuellement des conditions supplémentaires sur X , dans les propositions I 1 et I 2.

Toujours dans le but d'obtenir des résultats de contrôlabilité, nous avons établi, quand X est conservatif, une sorte de théorème du retour à la Poincaré, non autonome (proposition II 1). Remarquons que les trajectoires d'un CV non autonome ne forment pas un système dynamique et que ceci constitue donc un résultat original.

La partie II est plus directement consacrée au problème de contrôle.

Sur le même sujet, on connaît l'article de L. Markus et G.R. SELL [6]. Par des méthodes sensiblement différentes, nous obtenons un résultat légèrement plus faible mais qui présente sur celui de [6] une supériorité : les hypothèses sont toutes calculables. Essentiellement, nous nous débarassons de l'hypothèse désagréable d'uniforme contrôlabilité (voir [6], p. 474 UC).

Notre théorème principal (théorème II 1) ne s'applique qu'à des cas compacts toutefois, la partie I contient des éléments permettant éventuellement d'obtenir des résultats dans des cas non compacts. Seul fait défaut le théorème du retour; ceci constitue cependant un gros obstacle !

Le chapitre II peut être considéré comme une annexe dans laquelle nous avons puisé des outils pour les chapitres I et II, toutefois il semble que les résultats qui y sont exposés, ainsi que les modes de démonstration (utilisation de la théorie des connexions et des transports parallèles) ne figurent pas dans la littérature sur le sujet.

B. Premières notations

L'espace des phases sera une variété différentiable M connexe et à base dénombrable, de classe C^∞ , parfois analytique. Nous noterons :

$V(M)$, l'ensemble des champs de vecteurs C^∞ et non autonomes sur M

Si $X \in V(M)$ nous noterons :

$$X.x_{t_0} \text{ la solution du problème de Cauchy } \begin{cases} \dot{x}(t) = X(x(t), t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Dans le cas où X est autonome, $X.x_{t_0}$
 $t_0 + \tau, t_0$
 est indépendant de t_0 et sera noté $X.x_{\tau, t_0}$.

Soit $\mathbb{D} = \{X^u\}_{u \in \Omega}$ une partie de $V(M)$ nous lui associerons une partie de $V(M \times \mathbb{R})$

$$\tilde{\mathbb{D}} = \{ \tilde{X}^u \}_{u \in \Omega}, \quad \tilde{X}^u$$

étant défini par $v_* = (x, t) \in M \times \mathbb{R}$

$$\tilde{X}^u(v_*) = \begin{bmatrix} X^u(x, t) \\ 1 \end{bmatrix}$$

en identifiant $T_*(M \times \mathbb{R})$ à $T_x M \times \mathbb{R}$.

Nous remarquons que les \tilde{X}^u sont des champs de vecteurs autonomes sur $M \times \mathbb{R}$.

Si \mathbb{D} est une famille de champs de vecteurs autonomes sur M nous noterons :
 $\mathbb{L} \mathbb{D}$, l'algèbre de Lie engendrée par \mathbb{D} (la plus petite sous-algèbre de $V(M)$ contenant \mathbb{D}).

$\mathbb{L}_0 \mathbb{D}$, l'algèbre de Lie engendrée par les différences $X - Y$ de champs de \mathbb{D} et par les crochets de Lie de tout ordre d'éléments de \mathbb{D} .

Nous distinguerons les ensembles d'états accessibles suivants

a) si \mathbb{D} est une famille de champs de vecteurs autonomes, nous noterons :

$$\mathbb{D}.x_o = \{X_{t_k}^k \circ \dots \circ X_{t_1}^1, k \in \mathbb{N}, t_i \in \mathbb{R}, x^i \in \mathbb{D}\}$$

$$\mathbb{D}^+.x_o = \{X_{t_k}^k \circ \dots \circ X_{t_1}^1, k \in \mathbb{N}, t_i \geq 0, x^i \in \mathbb{D}\}$$

Si $\theta \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{D}_\theta^+.x_o = \{X_{t_k}^k \circ \dots \circ X_{t_1}^1, k \in \mathbb{N} (t_i \geq 0 \forall i \text{ ou } t_i \leq 0 \forall i) x^i \in \mathbb{D}\}$$

et $\sum t_i = \theta$

Remarquons que θ peut être positif ou négatif, ce n'est donc pas la définition classique de $\mathbb{D}_\theta^+.x_o$ ([2]) Définition II 1.1.)

b) si \mathbb{D} est une famille de champs de vecteurs quelconque sur M et si l'on note

$$\begin{aligned} \pi : M \times \mathbb{R} &\rightarrow M \\ (x, t) &\rightarrow x \end{aligned}$$

la projection sur M , nous noterons :

$$\mathbb{D}_{t_o}.x_o = \pi(\tilde{\mathbb{D}}_{t_o}.x_o) \text{ avec } x_o = (x_o, t_o)$$

$$\mathbb{D}_{t_o}^+.x_o = \pi(\tilde{\mathbb{D}}_{t_o}^+.x_o)$$

$$\mathbb{D}_{t_1, t_o}^+.x_o = \pi(\tilde{\mathbb{D}}_{t_1 - t_o}^+.x_o)$$

Dans cette notation, contrairement à ce que le symbole $+$ pourrait suggérer, t_1 peut être plus petit que t_o .

Les éléments de $\mathbb{D}_{t_o}.x_o$ sont de la forme

$$y = X_{t_k, t_{k-1}}^k \circ \dots \circ X_{t_2, t_1}^2 \circ X_{t_1, t_o}^1.x_o$$

avec $t_i \in \mathbb{R}$, ceux de $\mathbb{D}_{t_o}^+.x_o$

$$y = X_{t_k, t_{k-1}}^k \circ \dots \circ X_{t_2, t_1}^2 \circ X_{t_1, t_0}^1$$

avec $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k$

ceux de $\mathbb{D} \cdot x_{t_1, t_0}^+$ s'écrivent :

$$y = X_{t_1, t_0}^k \circ X_{\theta_{k-1}, \theta_{k-1}}^{k-1} \circ \dots \circ X_{\theta_1, t_0}^1$$

avec $t_0 \leq \theta_1 \leq \dots \leq \theta_{k-1} \leq t_1$

ou $t_0 \geq \theta_1 \geq \dots \geq \theta_{k-1} \geq t_1$

[a b] désignera l'ensemble des $t \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq t \leq b$
ou $b \leq t \leq a$

I - FAMILLES DE CHAMPS DE VECTEURS UNIFORMEMENT
PRESQUE-PERIODIQUES SUR UNE VARIETE

A - Eléments sur les familles uniformément presque-périodiques
d'applications de \mathbb{R} dans des espaces normés.

Définition I 1 :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé (e.n), l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow E$ sera dite presque périodique (PP) si : $\forall \epsilon > 0$, l'ensemble

$T(f, \epsilon) = \{\tau \in \mathbb{R} / \|f(t + \tau) - f(t)\| < \epsilon \quad \forall t \in \mathbb{R}\}$
est relativement dense dans \mathbb{R} .

Définition I 2 :

Soit $\mathbb{F} = \{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$, une famille d'applications de \mathbb{R} dans des e.n

$(E_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$. Nous dirons que \mathbb{F} est uniformément presque-périodique (UPP) si : $\forall \epsilon > 0$ $T(\mathbb{F}, \epsilon) = \bigcap_{\alpha \in A} T(f_\alpha, \epsilon)$ est relativement dense dans \mathbb{R} .

Si la variété M est munie d'une métrique riemannienne g , on notera $\|\cdot\|_x$ la norme sur $T_x M$ définie par $\|v\|_x^2 = g_x(v, v)$.

Définition I 3 :

Soit $X \in V(M)$, K une partie de M , nous dirons que X est UPP sur K (ou UPP, lorsque $K = M$) si la famille

$$X|_K = \{X(x, \cdot)\}_{x \in K}$$

d'applications de \mathbb{R} dans $(T_x M, \|\cdot\|_x)$ est UPP.

Pour $K = M$ nous noterons $X|_M$ par X

Définition I 4 :

Soit \mathbb{D} une partie de $V(M)$, K une partie de M . Nous dirons que \mathbb{D} est UPP sur K si toute réunion finie de $X^i|_K$, $X^i \in \mathbb{D}$ est UPP.

Les quelques propriétés qui vont suivre nous aiderons à construire des exemples de champs de vecteurs uniformément presque-périodiques. Bien que nous n'ayons aucune référence sur ce sujet, du moins dans le cas de champs de vecteurs sur des variétés, nous pouvons difficilement considérer ce qui va suivre comme original. Les démonstrations suivantes sont similaires à celles que l'on peut trouver dans [8], dans le cas d'applications de \mathbb{R} dans C . On notera cependant que nous avons opté pour une définition moins restrictive de l'uniforme presque périodicité

Propriété I 1

Soit $\mathbb{F} = \{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ une famille d'applications de \mathbb{R} dans des e.v.n

$(E_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$, si $v(\tau) = \sup_{\substack{\alpha \in A \\ t \in \mathbb{R}}} (\|f_\alpha(t+\tau) - f_\alpha(t)\|)$ existe et est une fonction

presque périodique alors :

\mathbb{F} est uniformément presque périodique.

Preuve

$$\begin{aligned} \tau \in T(\mathbb{F}, \varepsilon) &\Leftrightarrow \forall \alpha \in A \quad \tau \in T(f_\alpha, \varepsilon) \\ &\Leftrightarrow \forall \alpha \in A \quad \forall t \in \mathbb{R}, \|f_\alpha(t + \tau) - f_\alpha(t)\|_\alpha < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \sup_{\alpha \in A} (\sup_{t \in \mathbb{R}} \|f_\alpha(t + \tau) - f_\alpha(t)\|_\alpha) = v(\tau) < \varepsilon \end{aligned}$$

Si v presque périodique, l'ensemble des τ tels que $v(\tau) < \varepsilon$, qui contient $T(v, \varepsilon)$, est relativement dense dans \mathbb{R} donc : $T(\mathbb{F}, \varepsilon)$ est relativement dense dans \mathbb{R} .

Propriété I 2

Si \mathbb{F} est uniformément bornée alors, \mathbb{F} UPP $\Rightarrow v$ presque périodique.

C'est une sorte de réciproque de la propriété II 1.

Preuve

Soit $K = \sup_{\substack{\alpha \in A \\ t \in \mathbb{R}}} \|f_\alpha(t)\|_\alpha$ on a :

$$\|f_\alpha(t + \tau) - f_\alpha(t)\|_\alpha \leq 2K \quad \forall \alpha \in A, \forall t \in \mathbb{R}$$

donc : v est définie partout. D'autre part, on peut vérifier les propriétés suivantes de v .

- a) $v(\tau) = v(-\tau)$
- b) $v(\sigma + \tau) \leq v(\sigma) + v(\tau)$

desquelles on tire :

- c) $|v(t + \tau) - v(t)| \leq v(\tau).$

Le résultat final se déduit du fait que $\tau \in T(\mathbb{F}, \epsilon) \Leftrightarrow v(\tau) < \epsilon.$

En corollaire de la propriété II 2 on a :

Propriété I 3

Soit $\mathbb{F}_i, i \in \{1, 2, \dots, k\}$ et $\mathbb{F} = \bigcup_{1 \leq i \leq k} \mathbb{F}_i.$

Si chaque \mathbb{F}_i est UPP et uniformément bornée alors, \mathbb{F} est UPP.

Preuve

C'est une conséquence immédiate de la propriété I 2 et du fait que la borne supérieure d'une famille finie de fonctions PP est PP.

Corollaire I 1

Soient $\mathbb{D} \subset V(M), K \subset M.$ Si tout $X \in \mathbb{D}$ est borné et UPP sur $K,$ alors \mathbb{D} est UPP sur $K.$

Ce qui suit a pour but de relier l'uniforme presque périodicité d'un champ de vecteurs à celle de ses composantes dans un système de coordonnées locales.

Soit $X \in V(M).$ Soient $(U_\alpha, x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha), \alpha \in A,$ des cartes de M telles que $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ recouvre $M.$ Relativement à chacune de ces cartes on a

$$X \Big|_{U_\alpha} = \sum_{i=1}^n X_\alpha^i \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha} \quad \text{avec } X_\alpha^i \in C^\infty(U_\alpha).$$

Nous noterons :

$$\mathbb{F}_{\alpha, i} = \{X_\alpha^i(x,)\}_{x \in U_\alpha}.$$

C'est une famille de fonctions de \mathbb{R} dans $\mathbb{R}.$

Propriété I 4

Soit $X \in V(M).$ Si M est compacte et si chaque $\mathbb{F}_{\alpha, i}$ est UPP et uniformément bornée alors : X est UPP.

Preuve

Grâce à la compacité de M, on peut trouver des boules compactes

$$\{\bar{B}_{\alpha_j}\}_{j \in \{1, \dots, p\}}$$

telles que

$$j \in \{1, \dots, p\}, \bar{B}_{\alpha_j} \subset U_{\alpha_j}, \{\bar{B}_{\alpha_j}\}_{j \in \{1, \dots, p\}}$$

est un recouvrement de M.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \alpha_j \in V(U_{\alpha_j}) \text{ et } \bar{B}_{\alpha_j} \text{ compact donc :}$$

$$k = \max_{i,j} \sup_{x \in \bar{B}_{\alpha_j}} \left(\left\| \frac{\partial}{\partial x_i} \alpha_j \right\|_x \right) \text{ existe.}$$

$$\forall j \in \{1, \dots, p\}, \forall x \in U_{\alpha_j}, \forall \tau \in \mathbb{R}$$

$$X(x, t+\tau) - X(x, t) = \sum_{i=1}^n (X_{\alpha_j}^i(x, t+\tau) - X_{\alpha_j}^i(x, t)) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \alpha_j \right)(x)$$

$$\text{donc } \|X(x, t+\tau) - X(x, t)\|_x \leq \tau \sum_{i=1}^n |X_{\alpha_j}^i(x, t+\tau) - X_{\alpha_j}^i(x, t)| k$$

$$\text{Soit } \mathbb{F} = \bigcup_{j,i} \mathbb{F}_{\alpha_j, i}, \text{ si } \tau \in T(\mathbb{F}, \varepsilon/k.n)$$

$$\text{alors } \forall x \in U_{\alpha_j} |X_{\alpha_j}^i(x, t+\tau) - X_{\alpha_j}^i(x, t)| \leq \varepsilon/k.n \text{ donc :}$$

$$\forall x \in M \|X(x, t+\theta) - X(x, t)\|_x \leq \varepsilon,$$

or il découle de la propriété I 3 que \mathbb{F} est UPP par conséquent $T(\mathbb{F}, \varepsilon/k.n)$ est relativement dense dans \mathbb{R} donc : X est UPP.

Remarque I 1

Il est clair que l'on peut trouver des propriétés analogues à la propriété I 4 quand M n'est pas compacte.

Remarque I 2

La propriété I 4 admet une sorte de réciproque ! en effet, il est clair que si X est UPP (M pas forcément compacte), on peut trouver des cartes (U_α, ϕ_α) telles que les U_α recouvrent M et les $F_{\alpha,i}$ sont UPP (prendre autour de chaque $x \in M$, une carte orthonormée).

B - Translations (à ϵ près) des trajectoires de champs de vecteurs uniformément presque périodiques sur une variété.

Nous allons maintenant, essentiellement, nous intéresser au problème de la comparaison des trajectoires d'un champ de vecteur issues d'un point donné de M mais à des temps initiaux variables.

Précisons notre propos :

Si X est un champ de vecteur autonome sur une variété M on a ;

$$\forall t, t_0 \in \mathbb{R}, \quad X_{t, t_0} = X_{t+\tau, t_0+\tau}$$

Si X est p-périodique en t on a ;

$$\forall t, t_0 \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}, \quad X_{t, t_0} = X_{t+kp, t_0+kp}$$

Ceci nous conduit, pour un $\epsilon > 0$ et pour $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ quelconques à étudier les ensembles :

$$E_{x, t_1, t_0}(\epsilon) = \{ \tau \in \mathbb{R} / d(X_{t_1+\tau, t_0+\tau}, X_{t_1, t_0}(x)) \leq \epsilon \}$$

$$E_{t_1, t_0}(\epsilon) = \{ \tau \in \mathbb{R} / d(X_{t_1+\tau, t_0+\tau}, X_{t_1, t_0}(x)) \leq \epsilon \quad \forall x \in M \}$$

où d désigne la distance associée à la métrique riemannienne g.

On obtient alors les propositions suivantes :

Proposition I 1

Soit $X \in V(M)$, UPP sur les ensembles compacts alors ;

$$\forall \epsilon > 0, \forall t_0, t_1 \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in M,$$

$E(\epsilon)_{x, t_1, t_0}$ est relativement dense dans \mathbb{R} .

On notera ∇ la connexion de Levi-Civita associée à la métrique g (voir [14] ou [15]).

Proposition I 2

Soit $X \in V(M)$, UPP si

- a) M possède la propriété (P) (voir III p.) et si pour tous $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$,
- b) X est borné sur $M \times [t_0, t_1]$
- c) il existe une constante $k(t_0, t_1)$ telle que :

$$\|(\nabla_v X(\cdot, t))(x)\|_x \leq k(t_0, t_1) \|v\|_x$$

$\forall (x, t) \in M \times [t_0, t_1], \quad \forall v \in T_x M$ alors :

$\forall \epsilon > 0, \forall t_0, t_1 \in \mathbb{R} \quad E(\epsilon)_{t_1, t_0}$ est relativement dense dans \mathbb{R} .

Corollaire I 2

Si M est compacte, $\forall X \in V(M)$, X UPP

$\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \forall t_0, t_1 \in \mathbb{R} \quad E(\epsilon)_{t_1, t_0}$ relativement dense dans \mathbb{R} .

Si M est un espace homogène et si on a les propriétés b) et c) de la proposition II 3, on a la même conclusion.

Preuve

Nous nous contenterons de démontrer la proposition I 4, la même méthode marche pour la proposition I 2. C'est une application immédiate de la proposition III 2. En effet, à tout $\tau \in \mathbb{R}$, associons $X^\tau \in V(M)$ défini par $X^\tau(x, t) = X(x, t + \tau)$. La proposition III 2 nous dit que si $\|X^\tau(x, t) - X(x, t)\|_x$ est inférieur à un certain μ sur $K \times [t_0, t_1]$ ou K est un voisinage compact de l'arc de trajectoire issu de x au temps t_0 et parcouru

pendant le temps, éventuellement négatif, $t_1 - t_0$; alors :

$$d \left(X_{t_1, t_0}^T \bullet x, X_{t_1, t_0} \bullet x \right) \leq \epsilon.$$

Or, X étant UPP sur les compacts et donc, sur K , cela se produit pour tous les appartenant à l'ensemble relativement dense $T(X|_K, \mu)$ pour un certain $\mu \geq 0$.

Si l'on remarque que $X_{t_1, t_0}^T = X_{t_1 + \tau, t_0 + \tau}$ on a

$$\tau \in T(X|_K, \mu) \Rightarrow d \left(X_{t_1 + \tau, t_0 + \tau} \bullet x, X_{t_1, t_0} \bullet x \right) \leq \epsilon$$

donc : $E_{x, t_1, t_0}(\epsilon)$ contient $T(X|_K, \mu)$.

X étant UPP sur les compacts, $E_{x, t_1, t_0}(\epsilon)$

est relativement dense dans \mathbb{R} .

Les nécessités techniques des démonstrations qui vont suivre, nous amènent à poser une nouvelle définition.

Définition I 5

Si $\mathbb{D} \subset V(M)$ est UPP, nous appellerons ensemble de translations, tout ensemble de la forme :

$$\bigcap_{\substack{1 \leq i \leq k \\ i \in \mathbb{N}}} T(X^i, \epsilon_i), \quad X^i \in \mathbb{D}, \quad \epsilon_i > 0, \quad k \in \mathbb{N}^*$$

Remarque I 1

Les ensembles de translation sont relativement dense dans \mathbb{R} .

Voici une autre proposition, sous une forme directement utilisable dans la solution de notre problème de contrôle.

Soient $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$, $X^1, \dots, X^k \in \mathbb{D}$,

$$\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{k-1}) \in \mathbb{R}^{k-1}, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad x \in M.$$

Nous poserons :

$$h_x^\tau(\theta) = X_{t_1+\tau, \theta_{k-1}+\tau}^k \circ \dots \circ X_{\theta_2+\tau, \theta_1+\tau}^2 \circ X_{\theta_1+\tau, t_0+\tau}^1 \cdot x$$

Proposition I 3

Soient $x_0 \in M$, V_0 un voisinage compact de x_0 , $\varepsilon > 0$, $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$. Si \mathbb{D} est UPP alors l'ensemble des $\tau \in \mathbb{R}$ tels que,

$$\forall x \in V_0, \forall \theta \in [t_0, t_1]^{k-1},$$

$d(h_x^\tau(\theta), h_x^0(\theta)) \leq \varepsilon$, contient un ensemble de translations.

Preuve

Soit $\emptyset : [t_0, t_1]^k \times V_0 \longrightarrow M$

$$((u_0, u_1, \dots, u_k), x) \quad X_{u_k, u_{k-1}}^k \circ \dots \circ X_{u_1, u_0}^1 \cdot x$$

\emptyset étant continue par rapport à l'ensemble des variables,

$K_0 = \emptyset([t_0, t_1]^k \times V_0)$ est compact.

Soient K un voisinage compact de K_0 et

$\lambda = d(K_0, K) = \inf \{d(x, y), x \in K_0, y \in \text{Fr } K\}$, en convenant de poser

$\lambda = +\infty$ si la frontière de K est vide.

Nous remarquons que $\forall (x, \theta) \in V_0 \times [t_0, t_1]^{k-1}$, $h_x(\theta) \in K_0$.

Les applications :

$$[t_0, t_1]^2 \times M \rightarrow M$$

$$((\theta', \theta), x) \quad X_{\theta', \theta}^i \cdot x$$

sont continues donc, elles sont uniformément continues sur le compact $[t_0, t_1]^2 \times K$. On en déduit l'existence, $\forall i \in \{1, \dots, k\}$ de $\alpha_i > 0$ tels que : si $y, y' \in K, \theta, \theta' \in [t_0, t_1]$,

$$d(y, y') \leq \alpha_i \Rightarrow d(X^i \cdot y, X^i \cdot y') \leq \epsilon/k$$

$\theta, \theta \quad \theta', \theta$

Soient $\epsilon_i = \min\{\alpha_i, \epsilon/k, \lambda/k\}$; de la démonstration des propositions III 2 et I 2 on tire qu'il existe des $\mu_i > 0$ tels que :

$$\tau \in T(X^i, \mu_i) \Rightarrow (\forall (\theta, \theta') \in [t_0, t_1]^2, \forall x \in K,$$

$$d(X^i \cdot x_{\theta'+\tau, \theta+\tau}, X^i \cdot x_{\theta', \theta}) \leq \epsilon_i.$$

Soient maintenant $\tau \in \bigcap_{1 \leq i \leq k} T(X^i, \mu_i), \theta \in [t_0, t_1]^{k-1}, x \in V_0,$

$$\text{on a } d(X^1 \cdot x_{\theta_1+\tau, t_0+\tau}, X^1 \cdot x_{\theta_1, t_0}) \leq \epsilon_1 \leq \epsilon/k \text{ car } \tau \in T(X^1, \mu_1).$$

On remarque que $X^1 \cdot x_{\theta_1+\tau, t_0+\tau}$ reste dans K .

$$d(X^2 \circ X^1 \cdot x_{\theta_2+\tau, \theta_1+\tau}, X^2 \circ X^1 \cdot x_{\theta_2, \theta_1}) \leq$$

$$d(X^2 \circ X^1 \cdot x_{\theta_2+\tau, \theta_1+\tau}, X^2 \circ X^1 \cdot x_{\theta_2, \theta_1}) +$$

$$d(X^2 \circ X^1 \cdot x_{\theta_2, \theta_1}, X^2 \circ X^1 \cdot x_{\theta_2, \theta_1})$$

$(X_{\theta_1+\tau, t_0+\tau}^1 \cdot x \in K \text{ et } \tau \in T(X^2, \mu_2)) \Rightarrow$ le premier terme de la somme est inférieur

ou égal à $\varepsilon_2 \leq \varepsilon/k$

D'autre part : $d(X_{\theta_1+\tau, t_0+\tau}^1 \cdot x, X_{\theta_1, t_0}^1 \cdot x) \leq \varepsilon_1 \leq \alpha_1$

donc : le second terme de la somme est également inférieur à ε/k d'où :

$$d(X_{\theta_2+\tau, \theta_1+\tau}^2 \circ X_{\theta_1+\tau, t_0+\tau}^1 \cdot x, X_{\theta_2, \theta_1}^2 \circ X_{\theta_1, t_0}^1 \cdot x) \leq 2 \varepsilon/k$$

De proche en proche on aboutit à

$\forall x \in V_0, \forall \theta \in [t_0, t_1]^{k-1}, d(h_x^\tau(\theta), h_x^0(\theta)) \leq \varepsilon$ donc :

$\bigcap_{1 \leq i \leq k} T(X^1, \mu_i)$ est l'ensemble de translations cherché !

II - CONTROLABILITE DES FAMILLES DE CHAMPS
DE VECTEURS UNIFORMEMENT PRESQUE-PERIODIQUE
SUR UNE VARIETE.

A - Intérieur des ensembles d'états accessibles :

Rappelons le théorème, désormais classique, de Sussmann et Jurdjevic [1], sous la forme donnée par Lobry dans [2], proposition II 2.1. (La démonstration originale est due à Krener).

□ Soit \mathbb{D} une famille de champs de vecteurs (autonomes) sur une variété de dimension n si la dimension de l'algèbre de Lie engendrée par \mathbb{D} est égale à n au point x alors, pour tout voisinage V de x , l'intérieur de $\mathbb{D}^+x \cap V$ est non vide.

Remarque II.1

Si l'on suit en détail la démonstration de Lobry, on voit que l'on peut trouver des champs X^1, \dots, X^n de \mathbb{D} et des réels positifs $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ tels que si Q est le domaine de \mathbb{R}^n défini par les inégalités :

$$\tau_1 < t_1 < \varepsilon_1$$

$$\tau_2 < t_2 < \varepsilon_2$$

$$\tau_{n-1} < t_{n-1} < \tau_n$$

$$0 < t_n < \varepsilon_n, \text{ alors;}$$

l'application

$$(t_1, t_2, \dots, t_n) \xrightarrow{Q} M \begin{matrix} X_{t_n}^1 \circ \\ \circ X_{t_2}^2 \circ \\ X_{t_1}^1(x) \end{matrix}$$

est de rang n partout dans Q et son image est contenue dans V .

On a donc démontré en fait que pour tout V il existe un ouvert contenu dans $\mathbb{D}^+x \cap V$, où $\mathbb{D}_0 = \{X^1, \dots, X^n\}$ est une partie finie de \mathbb{D} .

Lobry déduit immédiatement de la proposition précédente

$$\text{Si } \dim(\mathbb{L} \mathbb{D})(x) = n \text{ alors } \mathbb{D}^+x \subset \overline{\text{int } \mathbb{D}^+x}$$

Remarque II.2

En fait, il découle clairement de la remarque I.1 que pour tout $y \in \mathbb{D}^+x$, tout ouvert U autour de y , il existe un ouvert Ω contenu dans U , une partie finie $\mathbb{D}_\Omega = \{X^1, \dots, X^n, X^{n+1}, \dots, X^k\}$ de \mathbb{D} , un cube ouvert Q de $(\mathbb{R}^+)^n$, des réels $\lambda_{n+1}, \dots, \lambda_k$ positifs, tels que l'application :

$$h : Q \rightarrow M$$

$$(\theta_1, \dots, \theta_n) \rightarrow X^k_{\lambda_k} \circ \dots \circ X^{n+1}_{\lambda_{n+1}} \circ X^n_{\theta_n} \circ \dots \circ X^1_{\theta_1}$$

soit de rang constant n et $h(Q) = \Omega$

La proposition suivante sera donnée sans démonstration. Sa démonstration est contenue dans celle de la proposition II.2. Cependant ce n'est pas un corollaire de celle-ci, à cause de la condition d'uniforme presque-périodicité qui figure dans les hypothèses de la proposition II.2.

Proposition II.1

Soit $x_0 = (x_0, t_0) \in M \times \mathbb{R}$. Si $\dim(\mathbb{L} \tilde{\mathbb{D}})_{x_0} = n+1$ alors, pour tout $t_1 \neq t_0$,

$\mathbb{D}^+_{t_1, t_0} x_0$ est contenu dans l'adhérence de son intérieur.

Dans le cas autonome, les ensembles $\mathbb{D}^+_{t_1, t_0} x_0$ et $\mathbb{D}^+_{t_1+\tau, t_0+\tau} x_0$ sont égaux pour

tous x_0, t_0, t_1 et τ . Ce n'est plus vrai si les champs sont non autonomes.

Ceci nous conduit naturellement à la question suivante : x_0, t_0, t_1 étant fixés peut-on, dans certains cas, trouver un ouvert U contenu dans tous les

$\mathbb{D}^+_{t_1+\tau, t_0+\tau} x_0$ pour tout $\tau \in \mathbb{R}$? Pour tout τ appartenant à une partie de \mathbb{R} ?

La proposition suivante est une réponse partielle, mais utile, à cette question dans le cas où \mathbb{D} est UPP.

Proposition II.2

Soit $x_0 = (x_0, t_0) \in M \times \mathbb{R}$. Si \mathbb{D} est UPP sur les compacts et si :

$$\dim(\mathbb{L} \tilde{\mathbb{D}})_{x_0} = n+1 \text{ alors}$$

$\forall t_1 \neq t_0, \forall y \in \mathbb{D}^+_{t_1, t_0} x_0 \quad \forall V$ voisinage de y , il existe un ensemble de transla-

tions E et un ouvert U tels que :

$$U \subset \left(\bigcap_{\tau \in E} D_{t_1+\tau, t_0+\tau}^+ x_0 \right) \cap V$$

Nous aurons besoin d'un lemme topologique; sa démonstration est similaire à celle du lemme 3.1 dans [13] et repose sur le théorème du point fixe de Brouwer.

Lemme II.1

Soient U et V des ouverts de \mathbb{R}^n et $h : U \rightarrow V$ une application continue admettant en chaque point de V , un inverse à droite continu. Soit $y \in V$; alors, il existe $\delta > 0$ et un compact K de U tels que :

- i) la boule fermée de centre y et de rayon δ (pour une norme de \mathbb{R}^n), $\bar{B}(y, \delta)$ soit contenue dans V .
- ii) si $\tilde{h} : K \rightarrow V$ est une application continue telle que $\|h(x) - \tilde{h}(x)\| \leq \delta \quad \forall x \in K$, alors $\tilde{h}(K) \supset \bar{B}(y, \delta)$

Preuve de la Proposition II.2

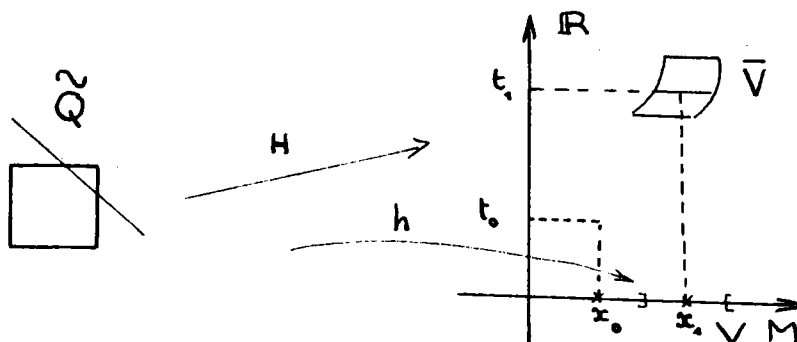
Soient $*_0 = (x_0, t_0)$, $*_1 = (x_1, t_1)$ dans $M \times \mathbb{R}$ et soit V un voisinage de x_1

$$x_1 \text{ s'écrit : } x_1 = Z_{t_1, \eta_k}^1 \circ \dots \circ Z_{\eta_1, t_0}^k x_0 \text{ avec } t_1 \neq \eta_k.$$

On a donc $Z^1(x_1, t_1) \neq 0$. On en déduit qu'il existe un voisinage $V_1 \subset V$ et $\varepsilon > 0$ tels que $Z^1(x, t) \neq 0$ sur $V_1 \times]t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon[$, ce qui implique que l'application :

$$\begin{aligned} \phi : V_1 \times]t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon[&\rightarrow M \times \mathbb{R} \\ (x, \theta) &\quad (Z^1 x, \theta) \\ &\quad \theta, t_1 \end{aligned}$$

est régulière sur $V_1 \times]t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon[$ et que $\bar{V} = \phi(V_1 \times]t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon[)$ est un voisinage de $*_1$. La technique est similaire à celle utilisée dans le théorème 3.3, [1]



Supposons $t_1 > t_0$, pour fixer les idées; une démonstration analogue tient pour $t_1 < t_0$.

□ D'après la remarque II 2, il existe un cube ouvert \tilde{Q} dans $(\mathbb{R}^+)^{n+1}$ des champs de vecteurs $X^1, X^2, \dots, X^{n+1}, X^{n+2}, X^k$ de \mathbb{D} et des réels positifs $\lambda_{n+2}, \dots, \lambda_k$ tels que :

1. L'application :

$$H : \tilde{Q} \rightarrow M \times \mathbb{R}$$

$$\mathbb{H} = (\theta_1, \dots, \theta_{n+1}) \rightarrow H(\mathbb{H}) = \tilde{X}_{\lambda_k}^k \circ \dots \circ \tilde{X}_{\lambda_{n+2}}^{n+2} \circ \tilde{X}_{\theta_{n+1}}^{n+1} \circ \dots \circ \tilde{X}_{\theta_1}^1 \cdot x_0$$

soit de rang constant, égal à $n+1$.

2. $H(\tilde{Q}) \subset \bar{V}$

Soit α tel que

$$t_1^{-\varepsilon} < t_1^{-\alpha} < t_1 \text{ et}$$

$$H(\tilde{Q}) \cap \{t=t_1^{-\alpha}\} \neq \emptyset$$

Posons
$$\tilde{h} = \tilde{Z}_{\alpha}^1 \circ H$$

$$\tilde{h}(\tilde{Q}) = \mathcal{U}$$

Soit Q l'ensemble des $\mathbb{H} \in \tilde{Q}$ tels que :

$$\sum_{i=1}^{n+1} \theta_i + \sum_{j=n+2}^k \lambda_j = (t_1^{-\alpha}) - t_0; \text{ c'est un hyperplan de } \tilde{Q}.$$

Si l'on pose $h = \pi \circ \tilde{h}$ et $U = \pi(\mathcal{U})$ il est clair que :

1. $h : Q \rightarrow U$ est différentiable
2. $\forall y \in U$, h admet un inverse local continu.

On remarque que si $\mathbb{H} \in Q$, $h(\mathbb{H})$ peut s'écrire :

$$h(\mathbb{H}) = \tilde{Z}_{t_1, t_1^{-\alpha}}^1 \circ \tilde{X}_{u_k, u_{k-1}}^k \circ \dots \circ \tilde{X}_{u_{n+2}, u_{n+1}}^{n+2} \circ \dots \circ \tilde{X}_{u_1, u_0}^1 \cdot x_0$$

avec : $u_0 = t_0$

$u_1 = t_0 + \theta_1$

$u_2 = t_0 + \theta_1 + \theta_2$

⋮

$u_{n+1} = t_0 + \theta_1 + \dots + \theta_{n+1}$

$u_{n+2} = t_0 + \theta_1 + \dots + \theta_{n+1} + \lambda_{n+2}$

⋮

$u_k = t_0 + \theta_1 + \dots + \theta_{n+1} + \lambda_{n+2} + \dots + \lambda_k.$

Posons, pour $\tau \in \mathbb{R}$, $\mathbb{H} \in Q$

$$h^\tau(\mathbb{H}) = Z^1 \begin{matrix} t_1 + \tau, (t_1 - \alpha) + \tau \\ \circ X^k \\ u_k + \tau, u_{k-1} + \tau \\ \circ \dots \circ X^1 \cdot x_0 \\ u_1 + \tau, u_0 + \tau \end{matrix}$$

Si l'on fait en sorte que U soit contenu dans une carte, on peut identifier Q et U à des ouverts de \mathbb{R}^n , l'application $h : Q \rightarrow U$ satisfait bien aux hypothèses du lemme II 1 donc : il existe $\delta > 0$ tel que, si $x_2 \in U$ on a $B(x, \delta) \subset U$ et un compact K dans Q tel que $(\|h^\tau(\mathbb{H}) - h(\mathbb{H})\| \leq \delta \quad \forall \mathbb{H} \in K)$

$\Rightarrow (h^\tau(K) \supset \bar{B}(x_2, \delta)).$

Or nous avons $\|h^\tau(\mathbb{H}) - h(\mathbb{H})\| \leq \delta$

$\forall \mathbb{H} \in Q$ et pour tout τ appartenant à un ensemble de translations, E (C'est la proposition I 3).

Comme $h^\tau(Q)$ est contenu dans $\mathbb{D}^+_{x_0} \begin{matrix} t_1 + \tau, t_0 + \tau \end{matrix}$

on a : $\forall \tau \in E, \bar{B}(x_1, \delta) \subset (\mathbb{D}^+_{x_0} \begin{matrix} t_1 + \tau, t_0 + \tau \end{matrix}) \cap V$

C.Q.F.D.

Nous allons voir que $\mathbb{D}^+_{x_0}$ peut fort bien avoir un intérieur non vide même si

$(\mathbb{L} \tilde{\mathbb{D}})(x_0)$ n'est pas de dimension maximale.

Proposition II 3

Si M ainsi que les champs de vecteurs sont analytiques, si

$$*_{0} = (x_{0}, t_{0}) \in M \times \mathbb{R} \text{ et si } \dim(\mathbb{L} \tilde{\mathbb{D}})(*_{0}) = n \text{ alors : } \text{int}(\mathbb{L}_{t_{0}}^{+}.x_{0}) \neq \emptyset$$

si et seulement si, il existe $*_{1} = (x_{1}, t_{1})$ tel que

- a. $x_{1} \in \mathbb{D}^{+}.x_{0}$
 t_{1}, t_{0}
- b. $(0,1) \notin (\mathbb{L} \tilde{\mathbb{D}})(x_{1})$

Preuve

La condition est suffisante :

On sait ([1]) lemmes 2-4 et 2-5) que $\tilde{\mathbb{D}}.*_{0}$ est une sous-variété immerse de $M \times \mathbb{R}$ telle que $T_{*} \tilde{\mathbb{D}}.*_{0} = (\mathbb{L} \tilde{\mathbb{D}})(*_{0})$, $\forall * \in \tilde{\mathbb{D}}.*_{0}$.

Nous noterons encore Π la restriction à $\tilde{\mathbb{D}}.*_{0}$ de la projection $(m,t) \rightarrow m$ de $M \times \mathbb{R}$ sur M.

Soit $*_{1} \in \tilde{\mathbb{D}}.*_{0}$ tel que $(0,1) \notin (\mathbb{L} \tilde{\mathbb{D}})*_{1}$ et soit :

$$\Pi_{**_{1}} : T_{*_{1}} \tilde{\mathbb{D}}.*_{0} \rightarrow T_{x_{1}} M \text{ l'application linéaire tangente en } *_{1} \text{ à } \Pi.*_{1}$$

est un isomorphisme d'espace vectoriel; en effet, soit $\vec{V} = (\vec{U}, \vec{u}) \in T_{*_{1}} \tilde{\mathbb{D}}.*_{0}$,

identifié à un sous-espace vectoriel de $(T_{x_{1}} M) \times \mathbb{R}$ tel que $\vec{U} \in T_{x_{1}} M$,

$$\vec{u} \in \mathbb{R}. \Pi_{**_{1}} \vec{V} = \vec{U} \text{ donc } \Pi_{**_{1}} \vec{V} = 0 \Leftrightarrow \vec{V} = (0, u) \text{ ce qui est impossible si } \vec{u} \neq 0$$

à cause de la condition $(0,1) \notin (\mathbb{L} \tilde{\mathbb{D}})*_{1}$, donc : $\Pi_{**_{1}}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

D'après le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage U de $*_{1}$ pour la topologie de variété de $\tilde{\mathbb{D}}.*_{0}$ et un voisinage W de x_{1} pour la topologie de variété de M tels que $\Pi|_{U} : U \rightarrow W$ soit un difféomorphisme. Le théorème 3.3, [1] nous dit : $\tilde{\mathbb{D}}.*_{0} \subset \overline{\text{int. } \tilde{\mathbb{D}}.*_{0}}$ l'intérieur et l'adhérence étant relatifs à la topologie de variété de $\tilde{\mathbb{D}}.*_{0}$.

$x_1 \in \mathbb{D}^+_{x_0}$ donc il existe Ω ouvert pour la topologie de $\mathbb{D}^+_{x_0}$ et contenu dans $U \cap \mathbb{D}^+_{x_0}$. $\pi(\Omega)$ est un ouvert de M , clairement contenu dans $\mathbb{D}^+_{x_0, t_0}$.

La condition est nécessaire :

En effet si tous les points de $\mathbb{D}^+_{x_0}$ étaient des points singuliers de π on aurait d'après le théorème de Sard $\mathbb{D}^+_{x_0, t_0} = \pi(\mathbb{D}^+_{x_0})$ de mesure nulle et donc d'intérieur vide.

Dans le cas d'un système linéaire sur \mathbb{R}^n : $\mathbb{D} = \{X^u\}$ avec :
 $u \in \mathbb{R}^p$

$$X^u(x,t) = A(t).x + \sum_{i=1}^p u_i b_i(t), \quad u = (u_1, \dots, u_p), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad b_i(t) \in \mathbb{R}^n \text{ et } A(t)$$

matrice $n \times n$, on connaît le résultat suivant : soient

$$D_A \text{ l'opérateur : } (D_A V)(t) = -A(t) V(t) + \frac{d}{dt} V(t)$$

et $F(t)$ la matrice $[\dots (D_A^k b_i(t)) \dots k \in \mathbb{N}, i \in \{1, \dots, p\}]$

alors, si $\text{Rang } F(t) = n \quad \forall t \in \mathbb{R}$, on a $\mathbb{D}^+_{x_0, t_0} = \mathbb{R}^n$ pour tous x, t_0, t_1 .

Voir, par exemple [10]. En corollaire de la proposition II 3 on obtient, dans le cas linéaire en posant :

$$H(x,t) = [A(t).x \dots D_A^k b_i(t) \dots k \in \mathbb{N}, i \in \{1, \dots, p\}]$$

Corollaire II 1

Soit $x_0 = (x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, si $\text{Rang } F(t_0) = n-1$ alors :

$\text{int}(\mathbb{D}^+_{x_0, t_0}) \neq \emptyset$ si et seulement si il existe $t_1 > t_0$ et $x_1 \in \mathbb{D}^+_{t_1, t_0}$

tels que : $\text{Rang } H(x_1, t_1) = n$.

Preuve :

- la condition $\dim(\mathbb{L} \mathbb{D}^+_{x_0}) = n$ équivaut à $\text{Rang } F(t_0) = n-1$.
- la condition $(0,1) \notin (\mathbb{L} \mathbb{D}^+_{x_0})$ équivaut à $\text{Rang } H(x_1, t_1) = n$.

Remarque II 3

Les conditions fournies dans la proposition I 3 et son corollaire ne sont pas intrinsèques car elles supposent que l'on sait déterminer si $x_1 \in \mathbb{D}^+_{x_0}$. Nous

allons voir, à travers l'exemple qui suit que l'on peut tout de même conclure dans des cas particuliers, même si l'on ne connaît pas complètement les ensembles $\mathbb{D}^+_{x_0}$.
 t_1, t_0

Remarque II 4

Nous n'aurions aucun mal à établir un corollaire analogue au corollaire II 1 pour les systèmes bilinéaires et non autonomes.

Exemple

Soit sur $M = \mathbb{R}^2$ la famille de champs de vecteurs $\mathbb{D} = \{X^u\}_u$

avec $X^u(x, t) = A x + B(t) \cdot u$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

Soit $x_0 = (x_0, t_0) \in M \times \mathbb{R}$, nous nous proposons de montrer que $\mathbb{D}^+_{x_0}$ est d'intérieur non vide.

$$D_A B(t_0) = - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

donc : $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad (D_A^k B)(t) \equiv 0$

On a donc :

$$F(t) = [B(t)], \quad H(x, t) = [A x, B(t)]$$

On voit que $\text{Rang } F(t_0) = 1$, ce qui exclu que les ensembles $\mathbb{D}^+_{t_1, t_0}$ soient d'intérieur non vide

Montrons qu'il existe $t_1 > t_0$ et $x_1 \in \mathbb{D}_{t_1, t_0}^+ x_0$ tels que $\text{Rang } H(x_1, t_1) = 2$

En effet, soit $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ la trajectoire d'un $X^u \in \mathbb{D}$ passant par x_0 au temps t_0 on a

$$\dot{x}_1(t) = -x_2(t) + \cos t \cdot u$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t) + \sin t \cdot u$$

En multipliant par $\sin t$ la première équation, par $\cos t$ la deuxième et en retranchant membre à membre on obtient :

$$\frac{d}{dt} [x_1(t) \sin t - x_2(t) \cos t] = 0$$

ce qui implique :

i) $x_1(t) \sin t - x_2(t) \cos t = \text{constante}$

Supposons que $\text{Rang } H(x(t), t) = 1 \quad \forall t > t_0$ cela équivaut à :

ii) $x_1(t) \cos t + x_2(t) \sin t = 0 \quad \forall t > t_0$

de i) et ii) on tire :

$$x_1(t) = C \sin t$$

$$x_2(t) = -C \cos t$$

Si $\forall t > t_0, \forall x \in \mathbb{D}_{t, t_0}^+ x_0$ on avait $\text{rang } H(x, t) = 1$ alors, en recollant les arcs

des trajectoires, on voit que si $\varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{D}_{t, t_0}^+ x_0$ alors :

$$\varphi_1(t) = C \sin t \quad \text{et}$$

$$\varphi_2(t) = -C \cos t.$$

$\mathbb{D}_{t, t_0}^+ x_0$ serait donc borné, or on sait que c'est un espace affine donc :

$\mathbb{D}_{t, t_0}^+ x_0 = \{x_0\}$ ce qui est impossible puisque les X^u sont non nuls.

On peut donc conclure qu'il existe $t_1 > t_0$ et $x_1 \in \mathbb{D}_{t_1, t_0}^+ x_0 / \text{Rang } H(x_1, t_1) = 2$

donc : d'après le corollaire II 1, $\text{int } \mathbb{D}_{t_0}^+ x \neq \emptyset$.

Nous irons plus loin dans l'étude de la famille \mathbb{D} à la fin du paragraphe II B.

B.- Quand a-t-on la contrôlabilité ?

1. Position du problème :

Qu'entendons-nous par contrôlabilité ? Traditionnellement, en théorie du contrôle, on dit qu'une famille \mathbb{D} de champs de vecteurs est contrôlable si :

1 $\forall x \in M, \forall t_0 \in \mathbb{R} \quad \mathbb{D}_{t_0}^+ x = M$ ou bien,

2 $\forall x \in M, \forall t_0 \in \mathbb{R}, \forall t_1 \in \mathbb{R} \text{ t.q } t_1 > t_0, \mathbb{D}_{t_1, t_0}^+ x = M$ ou bien,

3 $\forall x \in M, \forall t_0 \in \mathbb{R}, \forall t_1 \in \mathbb{R} \text{ t.q } t_1 > t_0 : \bigcup_{t \in [t_1, t_0]} \mathbb{D}_{t_1, t}^+ x = M$

Diverses précisions terminologiques permettent de distinguer ces différents types de contrôlabilité. Il est clair que les deux derniers cités sont les plus forts du point de vue mathématique et surtout les plus intéressants pour les applications pratiques. La définition 3 est la plus réaliste pratiquement.

Dans le cas autonome, les ensembles $\mathbb{D}_{t_0}^+ x$ ne dépendant pas de t_0 et peuvent être

notés $\mathbb{D}^+ x$, Aussi les ensembles $\mathbb{D}_{t_0}^+ x$ peuvent-ils apparaître comme la généralisation

la plus naturelle des ensembles $\mathbb{D}_{t_0}^+ x_0$ et la condition $\mathbb{D}_{t_0}^+ x = M$

$\forall (x, t_0) \in M \times \mathbb{R}$, comme la généralisation la plus naturelle de la contrôlabilité dans le cas autonome : $\mathbb{D}^+ x = M \quad \forall x \in M$.

Ce n'est pourtant pas celle que nous adopterons :

Définition II 1

La famille \mathbb{D} de champs de vecteurs sur M sera dite contrôlable si :

$\forall (x, t_0) \in M \times \mathbb{R}, \bigcup_{t_0 > t_0} \mathbb{D}_{t_0}^+ x = M$

Discussion de la définition

1. Dans le cas où les champs de vecteurs sont autonomes, on retombe bien sur une définition classique de la contrôlabilité !
2. Nous avons là une notion de contrôlabilité plus faible que la notion 1, puisque le temps Θ_0 où "l'on met le système effectivement en route" n'est pas connu. Nous remarquons cependant que, si dans la définition 1, on connaît le "temps de départ" effectif du système, le temps d'enclenchement de la première commutation (terminologie classique) est inconnu et pourrait bien être très supérieur au temps de départ, t_0 . Aussi, la définition II 1 de la contrôlabilité n'est-elle pas beaucoup plus faible, pratiquement, que la définition classique.
3. Avec notre définition, nous pouvons interpréter le temps t_0 comme l'instant où "l'on se met aux commandes". Θ_0 est la date de mise en route effective du système.

Cette définition étant posée, nous nous proposons principalement de démontrer une condition suffisante de contrôlabilité pour des familles de champs de vecteurs non autonomes (théorème III 1) sur des variétés compactes. Plus précisément, je me propose de généraliser à des cas non autonomes, le théorème de Lobry [7] qui s'énonce ainsi :

Soit \mathbb{D} une famille de champs de vecteurs de classe C^∞ sur la variété M de classe C^∞ . Si tous les champs sont Poisson-stables et si $\dim(\mathbb{L} \mathbb{D})(x) = \dim M \quad \forall x \in M$ alors : $\mathbb{D}^+ \cdot x = M \quad \forall x \in M$.

Rappelons qu'un champ de vecteur X sur M est dit Poisson-stable si, pour tout x d'un ensemble dense dans M , tout voisinage de x, V , et tout réel positif A , il existe $t \gg A$ et $t' \ll -A$ tels que $X_t \cdot x \in V$ et $X_{t'} \cdot x \in V$.

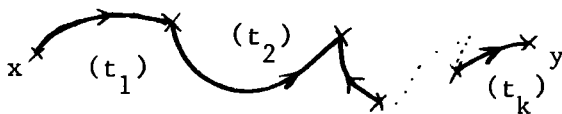
L'hypothèse de Poisson-stabilité est réalisée en particulier quand tous les champs sont conservatifs et la variété M compacte. C'est le théorème du retour de Poincaré, appliqué aux systèmes dynamiques particuliers sur $M, \Pi(x, t) = X_t \cdot x$ (voir [4])

Principe de la démonstration du théorème de Lobry :

1. De la condition du rang ($\dim(\mathbb{L} \mathbb{D})x = n \quad x \in M$) et de la proposition II 2.1 de [2] on tire : $\forall x \in M \quad \mathbb{D} \cdot x$ est un ouvert de M . Les $\mathbb{D} \cdot x$ formant une partition de M (supposée connexe) on a $\mathbb{D} \cdot x = M \quad \forall x \in M$.

2. Donc, si $x \in M$, $y \in M$ on peut trouver des champs X^1, \dots, X^k dans \mathbb{D} et des temps $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}$ tels que

$$y = X_{t_k}^k \circ \dots \circ X_{t_1}^1 . x$$



Nous serions satisfaits si tous les t_i étaient positifs. La méthode de Lobry consiste à "remplacer" les arcs de trajectoire "négatifs" par des arcs "positifs" en utilisant la stabilité au sens de Poisson.

Revenons au cas non autonome. Dans une première étape il nous sera facile, en travaillant dans l'espace des phases élargi $M \times \mathbb{R}$ d'établir une condition suffisante de "faible contrôlabilité". Nous entendons par là, que pour tout $x \in M$ et tout $y \in M$ et tout $t_0 \in \mathbb{R}$, il existe des champs $X^1, \dots, X^k \in \mathbb{D}$ et des temps $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}$ tels que

$$y = X_{t_k, t_{k-1}}^k \circ \dots \circ X_{t_2, t_1}^2 \circ X_{t_1, t_0}^1 . x$$

($y \in \mathbb{D}_{t_0} . x$).

A ce niveau, le problème se pose ainsi :

Peut-on "remplacer" les arcs de trajectoires "négatives" par des arcs de trajectoires positives.

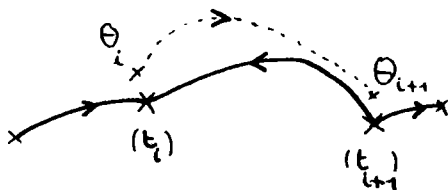
Nous rencontrerons les deux difficultés suivantes :

1°) Les trajectoires des champs de vecteurs non autonomes, ne constituent pas un système dynamique et l'on ne peut pas appliquer le théorème de Poincaré même si M est compact. On pourrait se ramener à un système dynamique en considérant le système élargi, d'une manière traditionnelle à $M \times \mathbb{R}$. Inconvénient : on perd la compacité de l'espace des phases.

Dans [5] et [6] Markus et Sell ont exposé un procédé de construction d'un système dynamique sur un espace de phase élargi $M \times \mathbb{R}$ compact et qui "se projette bien" sur M . Inconvénient : cette méthode nous semble mal adaptée lorsque l'on s'intéresse à des trajectoires de polysystèmes.

Aussi, construisons nous un "théorème du retour" non autonome (proposition II.1) qui nous assurera une sorte de Poisson-stabilité.

2°) Si nous réussissons à "remonter" les trajectoires négatives (voir figure)



il va se poser un problème de raccordement des arcs trajectoires, dû au fait que dans les cas non autonomes, on ne peut pas faire subir aux trajectoires toutes les translations dans le temps que l'on souhaiterait. Aussi devons nous faire des hypothèses supplémentaires sur les champs (champs uniformément presque périodiques).

La proposition qui suit est une sorte de théorème du retour à la Poincaré, non autonome. Sa démonstration est similaire à celle du théorème 3.05 [4].

Rappelons qu'un champ de vecteur X est conservatif si pour toute partie mesurable A de M , pour la mesure μ associée naturellement à la structure riemannienne de M on a $\mu(X_{t_1, t_0} \cdot A) = \mu(A) \quad \forall t_0, t_1 \in \mathbb{R}$

(nous rappelons que X est complet).

La condition X conservatif équivaut à $\dim_x X(x, t) \equiv 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Proposition II.4

Soit M une variété compacte, $X \in V(M)$ conservatif, $\Lambda = \{\lambda_m\}$ une suite numérique telle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_m = +\infty, \text{ alors, } \forall K > 0$$

μ -presque tous les $x \in M$ vérifient la propriété suivante :

(R) Pour tout voisinage V de x , il existe λ et $\lambda' \in \Lambda$ tels que $\lambda - \lambda' \geq K$ et $X_{\lambda, \lambda'} \cdot x \in V$

Preuve

Soit A une partie ouverte de M et $\{\alpha_n\}$ une sous suite de Λ telle que $\alpha_{n+1} - \alpha_n \geq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Posons $A_{0,\infty} = A - \bigcup_{\substack{p=d \\ q>p}}^{+\infty} X.A_{p,q}$

□ Montrons que $\mu(A_{0,\infty}) = 0$

Posons $A_{n,\infty} = X.A_{0,\infty} - \bigcup_{\substack{p=0 \\ q>p}}^{+\infty} X.A_{p,q}$

a) si $m \neq n$ $A_{n,\infty} \cap A_{m,\infty} = \emptyset$.

En effet, supposons $m > n$,

$x \in A_{n,\infty} \implies x \notin X.A_{p,q} \quad \forall p,q \in \mathbb{N}$

tels que $p < q$, en particulier,

$x \notin X.A_{n,m} = X.A_{0,m}$

donc : $x \notin A_{m,\infty}$

b) Un calcul ensembliste conduit à :

$A_{n,\infty} = X.A_{0,\infty}$

X conservatif $\implies \mu(A_{n,\infty}) = \mu(A_{0,\infty}) \quad \forall n \in \mathbb{N}$. μ étant de mesure finie et les $A_{n,\infty}$ en nombre infini et disjoints, ceci n'est possible que si $\mu(A_{0,\infty}) = 0$

Soit $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une base d'ouvert de la topologie de variété de M , et posons

$\mathcal{E} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (U_n)_{0,\infty}$

Montrons que tout $x \in M - \mathcal{E}$ vérifie la propriété (R) de la proposition II 1.

En effet, $x \in M - \mathcal{E} \iff \forall n \in \mathbb{N}, x \notin (U_n)_{0,\infty}$

$\iff \forall n \in \mathbb{N}, \exists p,q \in \mathbb{N}$
tels que $p < q$ et $x \in X.A_{p,q} \cap U_n$

La dernière proposition peut aussi s'écrire, $\forall U_n, \exists p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p < q$ et $X_{q,p} \cdot x \in U_n$; comme $\alpha_q - \alpha_p \geq K$ et que \mathcal{E} est de mesure nulle (réunion dénombrable d'ensembles de mesure nulle), ceci achève notre démonstration.

2. Une condition suffisante et calculable de contrôlabilité des Familles de champs de vecteurs uniformément presque-périodiques.

Je peux maintenant énoncer le théorème principal.

Théorème II 1

Soit \mathbb{D} une famille UPP de champs de vecteurs sur une variété compacte M , M_0 une sous-variété ouverte et connexe de M si

a) $\forall * = (x, t) \in M_0 \times \mathbb{R}, \dim(\mathbb{L} \tilde{\mathbb{D}})(*) = n+1$

b) tous les champs sont conservatifs alors

1. La famille \mathbb{D} est contrôlable sur M_0

2. Si $M_0 = M$ alors : $\forall x_0 \in M, \forall t_0 \in \mathbb{R}, \exists T > t_0$ tel que :

$$\bigcup_{t_0 \leq \theta_0 < \theta_1 \leq T} \mathbb{D}_{\theta_1, \theta_0}^+ \cdot x_0 = M$$

Lemme II 1

Si $\dim(\mathbb{L} \tilde{\mathbb{D}})(*) = n+1 \quad \forall * \in M_0 \times \mathbb{R}$ alors $\forall x_0 \in M_0 \quad \forall t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ avec $t_1 \neq t_0$

on a :

$$\mathbb{D}_{t_1, t_0} \cdot x_0 = M_0$$

Preuve : $\mathbb{D}_{t_1, t_0} \cdot x_0 = \pi(\tilde{\mathbb{D}}_{(t_1-t_0)} \cdot *_{x_0})$ avec $*_{x_0} = (x_0, t_0)$

$$= \pi(\tilde{\mathbb{D}} \cdot x_0 \cap \{t=t_1\})$$

mais $\dim(\mathbb{L} \tilde{\mathbb{D}}) * = n+1 \quad \forall * \in M_0 \times \mathbb{R}$ et M_0 connexe $\tilde{\mathbb{D}} \cdot x_0 = M_0 \times \mathbb{R}$ (démonstration standard) donc :

$$\tilde{\mathbb{D}} \cdot x_0 \cap \{t=t_1\} = M_0 \times \{t_1\} \text{ et}$$

$$\pi(\tilde{\mathbb{D}} \cdot x_0 \cap \{t=t_1\}) = M_0$$

Définition II 2

Soient $x, y \in M$, $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$, nous dirons que y est k -faiblement accessible au temps t_1 en partant de x au temps t_0 si

$$y \in \mathbb{D}.x_{t_1, t_0}$$

et si l'on peut passer de x à y avec k commutations.

Remarque II.5

1. Le k de la définition n'est pas unique en général.
2. Le lemme II 1 est une condition suffisante de faible accessibilité (terminologie évidente.).

Définition II 3

Soient $x, y \in M$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $t_1 \in \mathbb{R}$; $t_1 > t_0$ nous dirons que y est presque accessible au temps t_1 en partant de x au temps t_0 si $\forall \varepsilon > 0$ et pour tout ensemble de translations E , il existe $\bar{x} \in B(x, \varepsilon)$, $\bar{y} \in B(y, \varepsilon)$, α et $\beta \in E$ tels que :

$$t_1 + \beta > t_0 + \alpha \quad \text{et} \quad \bar{y} \in \mathbb{D}^{+}_{t_1 + \beta, t_0 + \alpha} \bar{x}$$

Lemme II 2

Soient M, M_0, \mathbb{D} avec les hypothèses du théorème II 1 alors, $\forall x, y \in M_0$, $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ tels que $t_0 < t_1$, y est presque accessible au temps t_1 en partant de x au temps t_0

Preuve

.Compte tenu du lemme II 1, il nous reste à prouver que la propriété P_k suivante est vraie pour tout k .

$$P_k : (\forall t_0, t_1 \in \mathbb{R} / t_1 > t_0, (y \text{ k-faiblement accessible au temps } t_1 \text{ en partant de } x \text{ au temps } t_0) \Rightarrow (y \text{ presque accessible au temps } t_1 \text{ en partant de } x \text{ au temps } t_0)).$$

Nous raisonnerons par récurrence sur k .

□ P_1 est vraie :

Soient $t_0, t_1 / t_1 > t_0, \varepsilon > 0, E$ un ensemble de translations. y 1-faiblement accessible au temps t_1 en partant de x au temps t_0 équivaut à :

$$y = X.x_{t_1, t_0} \quad \text{avec} \quad X \in \mathbb{D}$$

donc, y est presque accessible au temps t_1 en partant de x au temps t_0
 (prendre $\bar{x} = x, \bar{y} = y, \alpha = \beta = 0$)

Supposons P_k vraie et montrons que P_{k+1} est vraie :

Soient $t_0, t_1 \in \mathbb{R} / t_1 > t_0, \varepsilon > 0, E$ un ensemble de translations.

Si y est $k+1$ -faiblement accessible au temps t_1 en partant de x au temps t_0 ,
 y s'écrit :

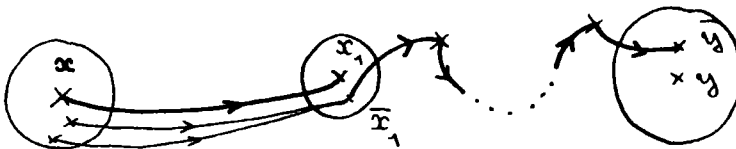
$$y = X_{t_1, \theta_k}^{k+1} \dots X_{\theta_1, t_0}^1 \cdot x \quad X^i \in \mathbb{D} \quad \theta_i \in \mathbb{R} \quad \forall i$$

Grace à la continuité des solutions de l'équation différentielle $\dot{x} = X^1(x, t)$ par rapport aux conditions initiales, on peut trouver $\eta > 0$ tel que :

$$X_{t_0, \theta_1}^1 \cdot B(x_1, \eta) \subset B(x, \varepsilon/2) \text{ avec } x_1 = X_{\theta_1, t_0}^1 \cdot x$$

Deux cas sont à envisager :

a) si $\theta_1 > t_0$:



soit $\Psi > 0$ tel que

$$\tau \in T(X^1, \Psi) \quad d(X_{t_0+\tau, \theta_1+\tau}^1 \cdot x_1, X_{t_0, \theta_1}^1 \cdot x_1) < \varepsilon/2$$

dont l'existence est garantie par la proposition I.

Grace à l'hypothèse de récurrence, on peut trouver β et $\alpha \in E \cap T(X^1, \Psi)$, qui est aussi un ensemble de translations $\bar{x}_1 \in B(x_1, \eta), \bar{y} \in B(y, \varepsilon)$ tels que

$$t_1 + \beta > \theta_1 + \alpha \text{ et :}$$

$$\bar{y} \in \mathbb{D}_{t_1+\beta, \theta_1+\alpha}^+ \cdot \bar{x}_1 \quad (i)$$

d'autre part, il découle du choix de α et η que

$$\bar{x} = X^1_{t_0 + \alpha, \theta_1 + \alpha} \cdot \bar{x}_1 \in B(x, \xi) \quad (ii)$$

$$((i) \text{ et } (ii)) \implies \bar{y} \in \mathbb{D}^+_{t_1 + \beta, t_0 + \alpha} \bar{x}$$

comme il est clair que $t_1 + \beta > t_0 + \alpha$ on peut conclure : y est presque accessible au temps t_1 en partant de x au temps t_0 .

b) si $\theta_1 < t_0$:

L'ensemble de translations E s'écrit :

$$E = \bigcap_{1 \leq i \leq p} T(Z^i, \mathcal{N}_i) \quad Z^i \in \mathbb{D},$$

considérons l'ensemble de translations

$$E' = \bigcap_{1 \leq i \leq p} T(Z^i, \mathcal{N}_i/2)$$

Il découle clairement des définitions que

$$(\sigma \in E' \text{ et } \tau \in E') \implies \sigma + \tau \in E$$

Appliquons l'hypothèse de récurrence :

$\exists \alpha, \beta \in E', \bar{x}_1 \in B(x_1, \eta), \bar{y} \in B(y, \xi)$ tels que :

$$\bar{y} \in \mathbb{D}^+_{t_1 + \beta, \theta_1 + \alpha} \cdot \bar{x}_1.$$

\bar{y} s'écrit donc :

$$\bar{y} = Y^k_{t_1 + \beta, U_{k-1}} \dots Y^1_{U_1, \theta_1 + \alpha} \cdot \bar{x}, \quad Y^i \in \mathbb{D} \quad \forall i$$

si l'on pose pour $\tau \in \mathbb{R}$,

$$h^\tau(Z) = Y^k_{t_1 + \beta + \tau, U_{k-1} + \tau} \dots Y^1_{U_1 + \tau, \theta_1 + \alpha + \tau} \cdot Z$$

il est clair que $h^0(\bar{x}_1) = \bar{y}$

Posons $\bar{x} = X^1_{t_0 + \alpha, \theta_1 + \alpha} \cdot \bar{x}_1$ et soient :

$\rho > 0$ tel que $B(\bar{y}, \rho) \subset B(y, \xi)$

$\delta > 0$ tel que $d(x_1, z) < \delta \Rightarrow h^0(z) \in B(\bar{y}, \rho/2)$

$\psi > 0$ tel que $\tau \in T(X^1, \psi) \Rightarrow$

$$d(X^1_{t_0 + \alpha + \tau, \theta_1 + \alpha + \tau} \cdot x_1, X^1_{t_0 + \alpha, \theta_0 + \alpha} \cdot x_1) < \xi/2$$

\mathcal{U} un voisinage de \bar{x} tel que

$$X^1_{\theta_1 + \alpha, t_0 + \alpha} \mathcal{U} \subset B(\bar{x}_1, \delta/2).$$

D'après la proposition I 3 il existe un ensemble de translations, E'' tel que :

$$\tau \in E'' \Rightarrow d(h^\tau(z), h^0(z)) < \delta/2 \quad \forall z \in M,$$

posons :

$$E''' = E' \cap E'' \cap T(X^1, \psi)$$

E''' est relativement dense dans \mathbb{R} donc, il contient une suite tendant vers l'infini je peux appliquer la proposition II 4 donc :

$\exists \bar{x} \in \mathcal{U}, \lambda$ et $\nu \in E''$ tels que;

$$\nu - \lambda > t_0 - \theta_1$$

$$\bar{\bar{x}} = X^1_{t_0 + \alpha + \nu, t_0 + \alpha + \lambda} \cdot \bar{\bar{x}} \in \mathcal{U} \text{ donc :}$$

$$X^1_{\theta_1 + \alpha, t_0 + \alpha} \bar{\bar{x}} \in B(x_1, \delta/2), \text{ comme } \nu \in T(X^1, \psi),$$

$$X^1_{\theta_1 + \alpha + \nu, t_0 + \alpha + \lambda} \bar{\bar{x}} \in B(\bar{x}_1, \delta) \text{ d'où l'on tire :}$$

$$X^1_{\theta_1 + \alpha + \nu, t_0 + \alpha + \lambda} \bar{\bar{x}} \in B(\bar{x}_1, \delta) \text{ on en déduit que}$$

$$h^0(X^1_{\theta_1 + \alpha + \nu, t_0 + \alpha + \lambda} \bar{\bar{x}}) \in B(\bar{y}, \rho/2) \text{ et, comme } \nu \in E''$$

$$h^\nu(X^1_{\theta_1 + \alpha + \nu, t_0 + \alpha + \lambda} \bar{\bar{x}}) \in B(\bar{y}, \rho) \text{ ce qui s'écrit aussi}$$

$$\bar{y} = Y^k \begin{matrix} t_1 + \beta + \nu \\ \dots \dots \dots \\ Y^1 \\ \theta_1 + \alpha + \nu \end{matrix} \circ X^1 \begin{matrix} \theta_1 + \alpha + \nu \\ \dots \dots \dots \\ X^1 \\ \theta_1 + \alpha + \nu \end{matrix} \bar{x} \begin{matrix} t_0 + \alpha + \lambda \end{matrix}$$

formule dans laquelle les temps sont bien ordonnés.

Si nous récapitulons, nous avons :

$$\begin{aligned} \bar{y} &\in B(y, \xi) \\ \bar{x} &\in B(x, \xi) \\ \bar{y} &\in \mathbb{D}^+ \begin{matrix} \bar{x} \\ t_1 + \beta + \nu, t_0 + \alpha + \lambda \end{matrix} \end{aligned}$$

$\beta + \nu \in E$ et $\alpha + \lambda \in E$ (car $\alpha, \beta, \lambda, \nu \in E'$) et il est clair que $t_1 + \beta + \nu > t_0 + \alpha + \lambda$ donc y est presque accessible au temps t_1 en partant de x au temps t_0 .

Ceci achève la démonstration du lemme II 2

Démonstration du théorème principal

Soient $x, y \in M_0$, $t_0 \in \mathbb{R}$, fixons-nous des temps θ_0, θ_1, t_1 , d'après la proposition II2 ; il existe des ouverts U_1 et U_2 et des ensembles de translations E_1 et E_2 tels que :

$$\begin{aligned} U_1 &\subset \bigcap_{\tau \in E_1} \mathbb{D}^+ \begin{matrix} .x \\ \theta_0 + \tau, t_0 + \tau \end{matrix} \\ U_2 &\subset \bigcap_{\tau \in E_2} \mathbb{D}^+ \begin{matrix} .y \\ \theta_1 + \tau, t_1 + \tau \end{matrix} \end{aligned}$$

Le lemme II 2, nous fournit un $\bar{x} \in U_1$ un $\bar{y} \in U_2$ $\alpha, \beta \in E_1 \cap E_2$, qui est un ensemble de translations, tels que :

$$\begin{aligned} \theta_0 + \alpha < \theta_1 + \beta \text{ et} \\ \bar{y} \in \mathbb{D}^+ \begin{matrix} \bar{x} \\ \theta_1 + \beta, \theta_0 + \alpha \end{matrix} \end{aligned} \tag{i}$$

$$(\bar{x} \in U_1 \text{ et } \alpha \in E_1) \Rightarrow \bar{x} \in \mathbb{D}^+ \begin{matrix} .x \\ \theta_0 + \alpha, t_0 + \alpha \end{matrix} \tag{ii}$$

$$(\bar{y} \in U_2 \text{ et } \beta \in E_2) \Rightarrow \bar{y} \in \mathbb{D}^+ \begin{matrix} .y \\ \theta_1 + \beta, t_1 + \beta \end{matrix} \text{ ce qui équivaut à}$$

$$y \in \mathbb{D}^+_{t_1+\beta, \theta_1+\beta} \cdot \bar{y} \quad (\text{iii})$$

$$((i), (ii) \text{ et } (iii)) \Rightarrow y \in \mathbb{D}^+_{t_1+\beta, t_0+\alpha} \cdot x$$

comme $t_1+\beta > t_0+\alpha$, ceci achève la démonstration de la première partie du théorème.

Remarque II 6

On a démontré un peu plus qu'annoncé. En fait on a prouvé que, sous les hypothèses du théorème, pour tous $x, y \in M$, $t_0, t_1 \in \mathbb{R} / t_0 < t_1$ et tout ensemble E de translations, il existe

$$\alpha, \beta \in E \text{ tels que } y \in \mathbb{D}^+_{t_1+\beta, t_0+\alpha} \cdot x \text{ avec } t_0+\alpha < t_1+\beta.$$

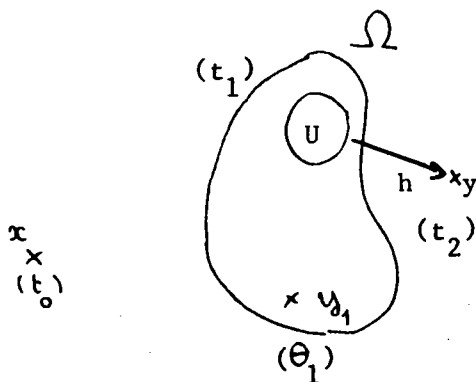
Pour la deuxième partie du théorème, fixons nous $x \in M$, $t_0 \in \mathbb{R}$

soient θ_1, t_1, t_2 tels que $t_0 < \theta_1 < t_1 < t_2$ à chaque y de M on peut associer un ouvert Ω_y et un ensemble de translations E_y tels que

$$\Omega_y \subset \bigcap_{\tau \in E_y} \mathbb{D}^+_{t_1+\tau, t_2+\tau} \cdot y \quad (\text{proposition II 2})$$

Soit $y_1 \in \Omega$, toujours grâce à la proposition II 2 il existe un ouvert U_y et un ensemble de translations E'_y tels que :

$$U_y \subset \Omega_y \cap \left(\bigcap_{\tau \in E'_y} \mathbb{D}^+_{t_1+\tau, \theta_1+\tau} \cdot y_1 \right)$$



D'après la remarque II 6, il existe $\alpha_y, \beta_y \in E_y \cap E'_y$ tels que

$$y_1 \in \mathbb{D}^+_{\theta_1 + \beta_y, t_0 + \alpha_y} \cdot x \text{ et } \theta_1 + \beta_y \leq t_0 + \alpha_y.$$

$$\forall z \in U, z \in \mathbb{D}^+_{t_1 + \beta_y, \theta_1 + \beta_y} \cdot y_1 \text{ puisque } \beta_y \in E'_y \text{ donc :}$$

$$\forall z \in U, z \in \mathbb{D}^+_{t_1 + \beta_y, t_0 + \alpha_y} \cdot x$$

Soit $z_1 \in U_y, y \in \mathbb{D}^+_{t_2 + \beta_y, t_1 + \beta_y} \cdot z_1$ puisque $\beta_y \in E_y$ donc; y s'écrit :

$$y = Y^k_{t_2 + \beta_y, u_{k-1}} \dots Y^1_{u_1, t_1 + \beta_y} \cdot z_1$$

si l'on pose

$$h(z) = Y^k_{t_2 + \beta_y, u_{k-1}} \dots Y^1_{u_1, t_1 + \beta_y} \cdot z,$$

h est un difféomorphisme donc :

$$W_y = h(U_y) \text{ est un ouvert contenant } y.$$

D'autre part, $W_y \subset \mathbb{D}^+_{t_2 + \beta_y, t_0 + \alpha_y} \cdot x$ et les W_y recouvrent M comme

$t_2 + \beta_y > t_0 + \alpha_y$, on peut conclure en utilisant la compacité de M .

Dans le cas particulier où tous les champs sont périodiques et de même période p , on obtient le théorème suivant :

Théorème II 2

Soit \mathbb{D} une F.C.V. conservatifs et p -périodiques sur une variété compacte M , soit M_0 une sous-variété ouverte et connexe de M si

$$\forall * \in M_0 \times \mathbb{R} \dim(L \tilde{\mathbb{D}}) * = n+1 \text{ alors,}$$

$$1. \forall (x, t_0) \in M_0 \times \mathbb{R}, M_0 \subset \mathbb{D}^+_{t_0} \cdot x$$

2. si $M_0 = M$ alors, $\forall (x, t_0) \in M \times \mathbb{R}, \exists k_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\bigcup_{0 < k \leq k_0} \mathbb{D}^+_{t_0 + kp, t_0} \cdot x = M$$

Preuve

Dans le cas de champs p-périodiques, on peut refaire une démonstration analogue à celle du théorème I 1, dans laquelle l'ensemble $p\mathbb{Z}$ jouera le rôle des ensembles de translations. Avec les hypothèses du théorème, on montrera que $\forall x, y \in M_0, \exists k', k \in \mathbb{N} / k' > k \geq 0$ et

$$y \in \mathbb{D}^+ .x \\ t_0 + k'p, t_0 + kp$$

Or, on a déjà remarqué que si les champs sont p-périodiques, ce dernier ensemble est égal à

$$\mathbb{D}^+ .x \\ t_0 + (k' - k)p, t_0$$

La deuxième partie se démontre comme la deuxième partie du théorème II 1.

3. Exemples

Pour se convaincre de la non vacuité des hypothèses II 1 et II 2, voici un exemple.

Exemple II 1

□ L'espace des phases sera la sphère S^2

$$S^2 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1 \}$$

On considère les ouverts de S^2 :

$$U_1 = S^2 - \{ (x, 0, z) / x \geq 0 \}$$

$$U_2 = S^2 - \{ (x, y, 0) / x \leq 0 \}$$

Soit $p \in U_1$; x, y, z les coordonnées de p dans \mathbb{R}^3 . On pose $\varphi_1(p) = (\varphi(p), \psi(p))$ ou simplement (φ, ψ) φ et ψ étant déterminés par les relations

$$x = \cos \varphi \cos \psi \\ y = \sin \varphi \cos \psi \\ z = \sin \psi \\ |\psi| < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \varphi < 2\pi$$

Si $p \in U_2$ on posera $\varphi_2(p) = (\varphi', \psi')$; φ' et ψ' étant déterminés par les relations

$$x = \cos \varphi' \cos \psi' \\ y = \sin \varphi' \\ z = \sin \varphi' \cos \psi' \\ |\psi'| < \frac{\pi}{2}, \quad |\varphi'| < \pi$$

Il est bien connu que φ_1 et φ_2 sont bien définies et que

$\mathcal{A} = \{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$ est un atlas de S^2 considéré comme sous-variété de \mathbb{R}^3 .

En fait (φ, ψ) ou (φ', ψ') sont des coordonnées sphériques du point p .

□ Soit g la métrique riemannienne sur S^2 induite par le produit scalaire usuel de \mathbb{R}^3 . Si $p \in U_1$ les composantes $g(p)$, $g(p)$, $g(p)$ de g au point p dans la base $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial \psi} \right)_p \right\}$ de $T_p S^2$ valent respectivement 1, 0 et $\cos^2 \psi$.

Si $p \in U_2$ on obtient pour $g(p)$, $g(p)$, $g(p)$ les valeurs 1, 0 et $\cos^2 \psi'$.

□ Soient les champs de vecteurs sur U_1 définis par :

$$X^u(p, t) = X^u_{\varphi}(p, t) \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \right)_p + X^u_{\psi}(p, t) \left(\frac{\partial}{\partial \psi} \right)_p$$

avec $u \in \{0, 1\}$ et :

$$(*) \quad \begin{cases} X^u_{\varphi}(p, t) = 3 \sin \varphi \sin \psi \cos \psi + f(t) \cdot u \\ X^u_{\psi}(p, t) = \cos \varphi \cos^2 \psi \end{cases}$$

où $f(t)$ est une fonction différentiable presque périodique et strictement positive si $p \in U_2 \cap U_1$, exprimons $X^u(p, t)$ dans la base

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \varphi'} \right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial \psi'} \right)_p \right\}.$$

On a les relations suivantes :

$$(1) \quad \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \right)_p = \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial \varphi} \right)(p) \left(\frac{\partial}{\partial \varphi'} \right)_p + \left(\frac{\partial \psi'}{\partial \varphi} \right)(p) \left(\frac{\partial}{\partial \psi'} \right)_p$$

$$(2) \quad \left(\frac{\partial}{\partial \psi} \right)_p = \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial \psi} \right)(p) \left(\frac{\partial}{\partial \varphi'} \right)_p + \left(\frac{\partial \psi'}{\partial \psi} \right)(p) \left(\frac{\partial}{\partial \psi'} \right)_p$$

$$(3) \quad \cos \varphi \cos \psi = \cos \varphi' \cos \psi'$$

$$(4) \quad \sin \varphi \cos \psi = \sin \psi'$$

$$(5) \quad \sin \psi = \sin \varphi' \cos \psi'$$

En dérivant (4) par rapport à φ on obtient :

$$\cos \varphi \cos \psi = \cos \psi' \frac{\partial \psi'}{\partial \varphi}$$

Compte tenu de (3) il vient :

$$(6) \quad \frac{\partial \psi'}{\partial \varphi} = \cos \varphi'$$

En dérivant (3) par rapport à φ et en remplaçant $\frac{\partial \psi'}{\partial \varphi}$ par la valeur trouvée en (6) on obtient :

$$(7) \quad \frac{\partial \varphi'}{\partial \varphi} = \frac{\sin^2 \psi' \sin \varphi'}{\cos \psi'}$$

Par des calculs analogues on trouve :

$$(8) \quad \frac{\partial \psi'}{\partial \psi} = \frac{-\sin \varphi' \sin \psi'}{\cos \psi}$$

$$(9) \quad \frac{\partial \varphi'}{\partial \psi} = \frac{\cos \varphi'}{\cos \psi \cos \psi'}$$

Compte tenu des relations (1) à (9) $X^u(p,t)$ admet dans la base $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \varphi'} \right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial \psi'} \right)_p \right\}$ les composantes :

$$(**) \begin{cases} X^u_{\varphi'}(p,t) = 3 \sin^2 \psi' \sin^2 \varphi' + \cos^2 \varphi' + f(t) \frac{\sin \varphi' \sin \psi'}{\cos \psi'} \cdot u \\ X^u_{\psi'}(p,t) = 2 \sin \psi' \cos \psi' \sin \varphi' \cos \psi' + f(t) \cos \varphi' \cdot u \end{cases}$$

Les fonctions $X^u_{\varphi'}$ et $X^u_{\psi'}$ étant différentiables par rapport à (φ', ψ', t) sur $]-\pi, \pi[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times \mathbb{R}$, les formules (*) et (**) définissent bien des champs de vecteurs sur S^2 .

□ Les champs X^u , $u \in \{0,1\}$ sont conservatifs.

En effet, si $p \in U_1$ on a, relativement aux coordonnées (φ, ψ) :

$$\operatorname{div}_p X^u(p,t) = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} (X^u_{\varphi}(p,t) \sqrt{|g|}) + \frac{\partial}{\partial \psi} (X^u_{\psi}(p,t) \sqrt{|g|}) \right] |g| =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 \psi \end{vmatrix} = \cos^2 \psi \quad \text{d'où : } \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{div}_p X^u(p,t) = \frac{1}{\cos \psi} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} (3 \sin \varphi \sin \psi \cos^2 \psi) + \frac{\partial}{\partial \psi} (\cos \varphi \cos^2 \psi) \right] = 0$$

compte tenu de $|\psi| < \frac{\pi}{2}$

Par un calcul analogue dans U_2 relativement aux coordonnées (φ', ψ') on montre que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall p \in U_2 \quad \operatorname{div}_p X^u(p,t) = 0$$

Donc $\operatorname{div}_p X^u(p,t) \equiv 0$

C.Q.F.D.

□ La condition d'uniforme presque-périodicité est vérifiée :

X° étant autonome, il suffit de vérifier que X^1 est U.P.P. sur S^2 .

a) X^1 est U.P.P. sur U_1 : Montrons que les composantes X_φ^1 et X_ψ^1 de X^1 sont U.P.P. sur U_1 .

- pour X_ψ^1 c'est évident; X_ψ^1 est autonome

- pour X_φ^1 :

$$\begin{aligned} \text{Soit } \varphi(\tau) &= \sup_{\substack{x \in U_1 \\ t \in \mathbb{R}}} |X_\varphi^1(x, t+\tau) - X_\varphi^1(x, t)| \\ &= \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t+\tau) - f(t)|. \end{aligned}$$

On vérifie facilement que :

* $\varphi(\tau) = \varphi(-\tau)$

* $\varphi(\tau+\sigma) = \varphi(\tau) + \varphi(\sigma)$

d'où l'on tire : $|\varphi(t+\tau) - \varphi(t)| \leq \varphi(\tau)$ donc : $\forall t \in \mathbb{R}, \forall \tau \in \mathbb{R}$

$$|\varphi(t+\tau) - \varphi(t)| \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t+\tau) - f(t)|$$

f étant P.P. on en déduit que φ est P.P.

On déduit de la propriété II 1 que la famille

$$\mathcal{F}_{\varphi,1} = \{X_\varphi^1(x, \cdot)\}_{x \in U_1} \text{ est U.P.P.}$$

$$\mathcal{F}_{\psi,1} = \{X_\psi^1(x, \cdot)\}_{x \in U_1} \text{ est U.P.P.}$$

$(X_\psi^1$ indépendant de t)

$\mathcal{F}_{\varphi,1}$ et $\mathcal{F}_{\psi,1}$ sont uniformément bornées sur U_1 donc $X^1|_{U_1}$, restriction de X^1 à U_1 est U.P.P. sur U_1 d'après la propriété II 4; ce qui s'écrit aussi

$$\mathcal{F}_1 = \{X^1(x, \cdot)\}_{x \in U_1} \text{ est U.P.P.}$$

b) X^1 est U.P.P. sur U_2 :

X^1_φ n'étant pas borné sur U_2 nous ne pouvons appliquer la même méthode.

Un calcul direct donne :

$$\begin{aligned} \left\| X^1(x, t+\tau) - X^1(x, t) \right\|_x^2 &= \left(X^1_{\varphi'}(x, t+\tau) - X^1_{\varphi'}(x, t) \right)^2 \cos^2 \psi' \\ &\quad + \left(X^1_{\psi'}(x, t+\tau) - X^1_{\psi'}(x, t) \right)^2 \end{aligned}$$

$$= \sin^2 \varphi' \sin^2 \psi' \cos^2 \psi' (f(t+\tau) - f(t))^2 + \cos^2 \varphi' (f(t+\tau) - f(t))^2 \text{ d'où,}$$

$$\text{si l'on pose } v(\tau) = \sup_{\substack{x \in U_2 \\ t \in \mathbb{R}}} \left\| X^1(x, t+\tau) - X^1(x, t) \right\|_x, \quad v(\tau) \leq \sqrt{2} |f(t+\tau) - f(t)|.$$

Par un raisonnement déjà rencontré plus haut on montre que

$$|v(t+\tau) - v(t)| \leq v(\tau) \leq \sqrt{2} |f(t+\tau) - f(t)|$$

($v(\tau)$ existe pour tout τ car f est bornée, toute fonction P.P. est bornée) donc f étant P.P., v est P.P.

On tire de la propriété II 1 que

$$\mathcal{F}_2 = \{X^1(x, \cdot)\}_{x \in U_2} \text{ est U.P.P.}$$

c) X^1 est borné sur S^2 donc : les familles \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 sont uniformément bornées et d'après la proposition II 2 $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ est U.P.P. ou, en d'autres termes :

$$X^1 \text{ U.P.P. sur } S^2$$

□ Soit $M_0 = U_1$. La condition du rang est vérifiée en tout point de $U_1 \times \mathbb{R}$:

En effet les champs de vecteurs \tilde{X} et \tilde{Y} définis par

$$\tilde{X}(\ast) = \begin{pmatrix} 3 \sin \varphi \cos \psi \\ \cos \varphi \cos^2 \varphi \\ 1 \end{pmatrix}, \tilde{Y}(\ast) = \begin{pmatrix} f(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec $x = (x, t)$ φ et ψ coordonnées sphériques de x , sont dans $\mathbb{L} \tilde{\mathbb{D}}$. (Evidemment, les coefficients des vecteurs colonnes sont les composantes de $\tilde{X}(\ast)$ et $\tilde{Y}(\ast)$ dans la base $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \right)_{\ast}, \left(\frac{\partial}{\partial \psi} \right)_{\ast}, \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{\ast} \right\}$ de $T_{\ast}(S^2 \times \mathbb{R})$

D'autre part,

$$\begin{bmatrix} \tilde{X} & \tilde{Y} \end{bmatrix} (\ast) = \begin{pmatrix} \ast & \ast & \ast \\ -\sin \varphi & \cos^2 \psi & f(t) \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{Y} \\ [\tilde{X} \ \tilde{Y}] \end{bmatrix} \ast = \begin{pmatrix} \ast & \ast & \ast \\ \cos \varphi & \ast & \ast \\ 0 & \cos^2 \psi & f^2(t) \end{pmatrix}$$

Le signe \ast signifie que la composante ainsi notée ne nous intéresse pas, on se dispense de la calculer.

Si $\varphi = 0$ $\tilde{X}(\ast)$, $\tilde{Y}(\ast)$ et $[\tilde{X} \ \tilde{Y}] (\ast)$ sont linéairement indépendants

Si $\varphi \neq 0$ $\tilde{X}(\ast)$, $\tilde{Y}(\ast)$ et $[\tilde{X} \ \tilde{Y}] \ast$ sont linéairement indépendants

donc : $\dim (\mathbb{L} \tilde{\mathbb{D}})(\ast) = n+1 \quad \forall \ast \in M_0 \times \mathbb{R}$

Conclusion : \mathbb{D} est contrôlable sur M_0
 =====

Dans l'exemple qui suit, l'espace des phases ne sera pas compact. De plus, la condition du rang n'est pas réalisée pourtant, on a la contrôlabilité.

Exemple II 2

Soit, sur $M = \mathbb{R}^2$, la famille de champs de vecteurs déjà rencontrée au chapitre I

$$\mathbb{D} = \{ X^u \}_{u \in \mathbb{R}} \quad \text{avec :}$$

$$X^u(x, t) = A x + B(t).u$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

Si X^u et $X^v \in \mathbb{D}$ on vérifie aisément que $[\tilde{X}^u \ \tilde{X}^v] = 0$ donc : pour tout $p = (x_1, x_2) \in M$, $t \in \mathbb{R}$, si l'on pose $\ast = (p, t)$,

$$(\mathbb{L} \tilde{\mathbb{D}})_x = \left\{ \begin{pmatrix} -x_2 + u \cos t \\ x_1 + u \sin t \\ 1 \end{pmatrix}, u \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{E.V.}$$

donc : $\dim (\mathbb{L} \tilde{\mathbb{D}})_x = 2.$

Nous allons voir que malgré cela \mathbb{D} est contrôlable et que l'on a même mieux. En effet, pour tous $P_0, P_1 \in M$, $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ tels que $t_1 - t_0 \geq \pi$, il existe $\theta_0 \in [t_0, t_0 + \pi]$ et $\theta_1 \in [t_1, t_1 + 2\pi]$ tels que $P_1 \in \mathbb{D}_{\theta_1, \theta_0}^+ . P_0$.

Pour le montrer, il suffit de regarder de plus près la géométrie des $\mathbb{D}_{\theta, \theta_0}^+ . P_0$.

Les champs étant linéaires et u prenant toutes les valeurs dans \mathbb{R} (espace vectoriel) on sait, c'est un résultat classique, que $\mathbb{D}_{\theta, \theta_0}^+ . P_0$ est un espace vectoriel.

On peut déjà remarquer que si $\theta \neq \theta_0$, $\mathbb{D}_{\theta, \theta_0}^+ . P_0$ n'est pas réduit à $\{P_0\}$.

D'autre part, on a :

$$\mathbb{D}_{\theta, \theta_0}^+ . P_0 = \pi(\tilde{\mathbb{D}}_{\theta - \theta_0}^+ . (P_0, \theta_0)) \text{ (voir Ch. 0)}$$

$$\tilde{\mathbb{D}}_{\theta - \theta_0}^+ . (P_0, \theta_0) \subset I(\mathbb{L}_0 \tilde{\mathbb{D}}, \tilde{X}_{\theta - \theta_0}^0 . (P_0, \theta_0)), \\ I(\mathbb{L}_0 \tilde{\mathbb{D}}, \tilde{X}_{\theta - \theta_0}^0 . (P_0, \theta_0))$$

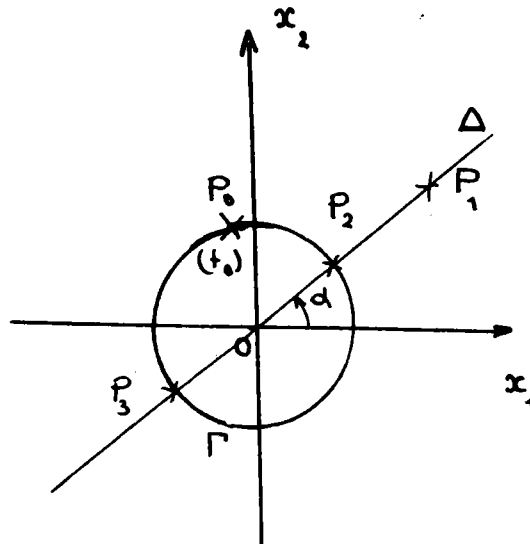
désignant la variété intégrale maximale de $\mathbb{L}_0 \tilde{\mathbb{D}}$ passant par $\tilde{X}_{\theta - \theta_0}^0 . (P_0, \theta_0)$, dont l'existence est assurée par le théorème de Frobenius. (Voir théorème 3.9, [1]).

On a déjà vu que tous les crochets de Lie dans $\tilde{\mathbb{D}}$ sont nuls; on en déduit que $\mathbb{L}_0 \tilde{\mathbb{D}}$, qui est engendré par les différences et les crochets de Lie d'éléments de $\tilde{\mathbb{D}}$ est de dimension 1 et que si $(P, \theta) \in M \times \mathbb{R}$,

$$(\mathbb{L}_0 \tilde{\mathbb{D}})(P, \theta) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{E.V.}$$

On en déduit que si $M = \mathbb{R}^2$ est rapporté au système d'axes (Ox_1, Ox_2) , $\mathbb{D}_{\theta, \theta_0}^+ . P_0$ est la droite passant par $X_{\theta, \theta_0}^0 . P_0$ et faisant avec l'axe Ox_1 , l'angle θ , défini modulo π .

Pour terminer notre démonstration donnons nous $P_0, P_1 \in M$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $t_1 \in \mathbb{R}$, $t_1 > t_0$. On vérifie sans difficultés que la trajectoire $X_{t, t_0}^0 . P_0$ du système libre, est 2π périodique. Son graphe est le cercle Γ centré en 0 et passant par P_0 .



Pour tout t , les points $X_{t+\pi, t_0}^O \cdot P_0$ et $X_{t, t_0}^O \cdot P_0$ sont symétriques.

Soit Δ la droite passant par P_1 et O et soit α l'angle (déterminé à $k\pi$ près) formé par Δ et Ox_1 . Δ coupe Γ en deux points P_2 et P_3 diamétralement opposés.

Soit t_2 tel que $P_2 = X_{t_2, t_0}^O \cdot P_0$, l'ensemble $t_2 + \pi \mathbb{Z}$ rencontre $[t_1, t_1 + \pi]$ donc :

$$t_3 \in [t_1, t_1 + \pi] \text{ tel que } t_3 \equiv t_2 \pmod{\pi}.$$

D'autre part, l'ensemble $\alpha + \pi \mathbb{Z}$ rencontre $[t_3, t_3 + \pi]$ donc, il existe $\tau \in [0, \pi]$ tel que

$$\alpha \equiv t_3 + \tau \pmod{\pi}$$

$$X_{t_3+\tau, t_0+\tau}^O \cdot P_0 = X_{t_3, t_0}^O \cdot P_0 = P_2 \text{ ou } P_3$$

car X^O est autonome. On conclut en remarquant que $\mathbb{D}_{t_3+\tau, t_0+\tau}^+$ est la droite

passant par P_2 ou P_3 et faisant avec Ox_1 l'angle $t_3 + \tau$. Comme $t_3 + \tau \equiv \alpha \pmod{\pi}$ on en déduit que $\mathbb{D}_{t_3 + \tau, t_0 + \tau}^+ \cdot P_0 = \Delta$.

Si l'on pose $\theta_0 = t_0 + \tau$, $\theta_1 = t_3 + \tau$ on a bien :

$$\theta_0 \in [t_0, t_0 + \pi]$$

$$\theta_1 \in [t_1, t_1 + 2\pi]$$

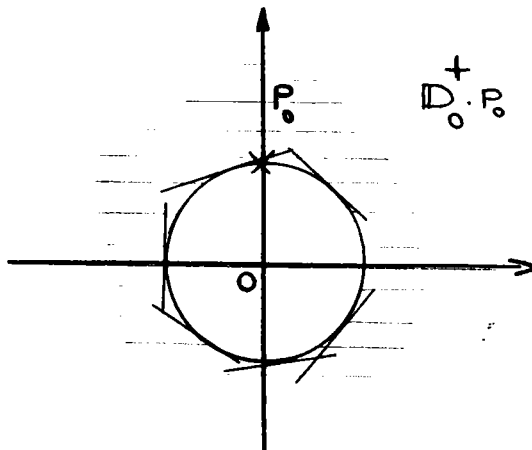
$$P_1 \in \mathbb{D}_{\theta_1, \theta_0}^+ \cdot P_0$$

C.Q.F.D.

Remarque

Pour la famille \mathbb{D} ci-dessus, on n'a pas en général $\mathbb{D}_{t_0}^+ \cdot P_0 = M$. Prenons

$P_0 = (0, 1)$, $t_0 = 0$; $\mathbb{D}_{t_0}^+ \cdot P_0$ est l'ensemble fermé des points extérieurs au domaine limité par Γ



III - COMPARAISON DES TRAJECTOIRES
DE DEUX CHAMPS DE VECTEURS VOISINS
SUR UNE VARIETE.

A - Position du problème :

Soient une variété M, X, Y deux éléments de $V(M)$ $[t_0, t_1]$ un intervalle borné,
 $x \in M, \epsilon > 0$

1. Peut-on dire que si X et Y sont assez voisins, dans un sens à déterminer, alors
 $d(X.x_{t,t_0}, Y.x_{t,t_0}) \leq \epsilon$ pour tout $t \in [t_0, t_1]$?
2. $d(X.x_{t,t_0}, Y.x_{t,t_0}) \leq \epsilon$ pour tout $t \in [t_0, t_1]$ et $x \in M$?

On peut trouver une réponse (classique) à ce problème dans le cas où $M = \mathbb{R}^n$ par exemple dans [17]. Dans le cas où M est une variété quelconque, on peut trouver dans des articles de recherche (voir [13] par exemple) une réponse similaire dans laquelle on utilise un recouvrement de la trajectoire $X.x_{t,t_0}$ considérée comme tra-

jectoire de référence par des cartes en nombre fini. On se ramène ainsi au cas $M = \mathbb{R}^n$. Pour notre part, nous avons préféré donner une démonstration intrinsèque (n'utilisant pas les cartes), outre qu'elle nous semble plus élégante cette méthode nous permet de répondre à la question 2 même dans des cas où M n'est pas compacte.

B - Quelques éléments et notations de géométrie riemannienne

Soit M une variété munie de la métrique riemannienne g , et de la connexion de Levi-Civita ∇ , associée. Voir [14] ou [15] pour les définitions.

Rappelons, cependant, quelques définitions et propriétés.

Définition III 1

Soit $x \in M$, on dit qu'un ouvert U contenant x est un voisinage normal de x , si il existe dans $T_x M$ un voisinage ouvert étoilé de 0 tel que : $\exp_x : V \rightarrow U$ soit un difféomorphisme.

Définition III 2

On dit que U est un voisinage convexe normal de x si :

- i) U est un voisinage normal de x
- ii) pour tout couple (u,v) de points de U, il existe une et une seule géodésique $\sigma : [0, 1] \rightarrow M$ minimisant la longueur telle que $\sigma(0) = u$, $\sigma(1) = v$
- iii) σ est l'unique géodésique reliant u à v et contenue entièrement dans U.

Propriété III 1

Tout point de M admet un système fondamental de voisinages formé d'ouverts convexes normaux.

Propriété III 2

Si U est un ouvert convexe normal, l'application $\sigma : [0, 1] \times U \times U \rightarrow U$ définie par $\sigma(t, u, v)$ est de classe C^∞ .

Définition III 3

On appelle rectangle C^∞ dans une variété M, toute application $Q : [a, b] \times [c, d] \rightarrow M$ qui soit la restriction d'une application C^∞ définie sur un voisinage ouvert de $[a, b] \times [c, d]$.

Notations :

- si $u \in [a, b]$, Q_u désigne l'application de $[c, d]$ dans M définie par $Q_u(v) = Q(u, v)$.
- si $v \in [c, d]$, Q^v désigne l'application de $[a, b]$ dans M définie par $Q^v(u) = Q(u, v)$.
- si γ est une courbe différentiable définie sur un intervalle fermé, on notera $|\gamma|$ la longueur de γ .

Définition III 4

On appelle déformation de classe C^∞ d'une courbe $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ de classe C^∞ , tout rectangle $Q : [a, b] \times [c, d] \rightarrow M$ de classe C^∞ tel que $Q^0 = \gamma$.

Exemple

Soient : U un voisinage convexe normal, $u : [-c, c] \rightarrow M$ et $v : [-c, c] \rightarrow M$ deux courbes différentiables dont l'image est dans U. $Q : [0, 1] \times [-c, c] \rightarrow M$ définie par $Q(s, t) = \sigma(s, u(t), v(t))$ est une déformation de classe C^∞ de $\gamma = \sigma(u(0), v(0))$.

Remarque III 1

Si U est un voisinage convexe normal, le carré de la distance est différentiable sur $U \times U$.

On dira qu'une partie K d'une variété M possède la propriété (P) si il existe $\xi > 0$ tel que : $\forall x \in K$ la boule ouverte $B(x, \xi)$ est contenue dans un voisinage convexe normal de x .

Exemples :

1. Si K est une partie compacte d'une variété quelconque M , on a la propriété (P)
2. Si $K = M = \mathbb{R}^n$, on a la propriété (P).

Nous allons généraliser l'exemple 2 en montrant que toute partie K d'un espace homogène M possède la propriété (P).

Rappelons ce que l'on entend par espace homogène.

Définition III 5

On dit que la variété M est un espace homogène si il existe un groupe d'isométries G agissant transitivement sur M .

(Voir [15] ou [16]).

Proposition III.1

Tout espace homogène possède la propriété (P).

Preuve

□ Nous allons d'abord montrer que l'image par une isométrie d'un voisinage convexe normal est un voisinage convexe normal.

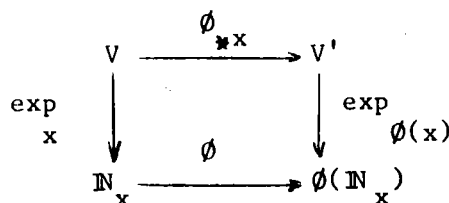
Soit ϕ une isométrie de M , N_x un voisinage convexe normal de x . Par définition, il existe un ouvert étoilé V dans $T_x M$ tel que $\exp_x : V \rightarrow N_x$ soit un difféomorphisme.

Soit $V' = \phi_{*x}(V)$, V' est un ouvert étoilé de $T_{\phi(x)} M$ à cause de la linéarité de ϕ_{*x} .

$$\phi_{*x}$$

Montrons que $\exp_{\phi(x)} \circ \phi_{*x}$ est un difféomorphisme de V' sur $N_{\phi(x)}$.

Il suffit de montrer que le diagramme suivant est commutatif.



Autrement dit, que $\phi \circ \exp_x \circ \phi_{*x}^{-1} = \exp_{\phi(x)}$.

Le premier nombre étant une fonction composée de difféomorphismes on aura gagné !

Pour le prouver il suffit de remarquer

a) que ϕ envoie les géodésiques sur les géodésiques, voir proposition 2-6 IV dans [15] vol.I.

b) si on pose $\varphi(t) = (\phi \circ \exp_x \circ \phi_{*x}^{-1})(tv)$ avec $v \in TM$ en différentiant par rapport à t on obtient

$$\begin{aligned} \varphi'(0) &= \phi_{*x} \circ \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\exp t \phi_{*x}^{-1} v) \\ &= \phi_{*x} \circ \phi_{*x}^{-1} v = v \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à montrer que $\phi(\mathbb{N}_x)$ satisfait aux conditions ii) et iii) de la définition III 2.

C'est évident compte tenu de a) ci-dessus et du fait que ϕ est injective (voir définition d'une isométrie dans [15] tome I p. 161).

□ Pour conclure, considérons un groupe G d'isométries agissant transitivement sur M , et fixons-nous $x \in M$. Il existe δ tel que la boule ouverte $B(x, \delta)$ soit contenue dans un voisinage convexe normal \mathbb{N}_x de M . Soit y quelconque dans M , $\exists \phi \in G$ tel que $y = \phi(x)$.

$$\phi(B(x, \delta)) = B(y, \delta) \subset \phi(\mathbb{N}_x)$$

$\phi(\mathbb{N}_x)$ étant un voisinage convexe normal de y , c'est terminé.

C - Comparaison sur un intervalle des trajectoires de deux C.V. voisins

Lemme III 1

Soient, K une partie de M , \mathbb{B} une partie de $V(M)$, I un intervalle de \mathbb{R} . Si

a) K vérifie la propriété (P)

b) \mathbb{B} est uniformément bornée sur $K \times I$ alors il existe $\delta > 0$ tel que :
 $\forall x \in K, \exists \mathbb{N}_x$, voisinage convexe normal de x tel que si $\theta \in I, \theta' \in I$

$$|\theta - \theta'| \leq \delta \quad x \in \mathbb{B} \text{ et } X_x \in K \quad \forall t \in [\theta, \theta']$$

alors $X_{t, \theta} \in \mathbb{N}_x \quad \forall t \in [\theta, \theta']$.

Preuve :

Soit $X \in \mathbb{B}$, $\theta \in I$, $\theta' \in I$ et $A = \sup_{\substack{X \in \mathbb{B} \\ (x,t) \in K \times I}} (\|X(x,t)\|_x)$

Si l'on note $\ell(X,x,\theta,\theta')$ la longueur de l'arc de trajectoire $[\theta, \theta'] \rightarrow M$, on a :

$$\ell(X,x,\theta,\theta') = \left| \int_{\theta}^{\theta'} \left\| \frac{X(X,x,t)}{t,\theta'} \right\|_{X,x,t,\theta'} dt \right|$$

Si $X,x \in K$ $\forall t \in [\theta, \theta']$ on a :

$\ell(X,x,\theta,\theta') \leq |\theta - \theta'| A$. On voit qu'il suffit de prendre $\eta = \frac{\xi}{A}$, ξ étant tel que, $\forall x \in K$ $B(x,\xi)$ est contenu dans un voisinage convexe normal de x , N_x .
En effet, $\forall t \in [\theta, \theta']$, si $|\theta - \theta'| \leq \eta$ $d(X,x,x) \leq L(X,x,\theta,t) \leq L(X,x,\theta,\theta') \leq \xi$ donc :

$$X,x \in B(x,\xi) \subset N_x$$

C.Q.F.D.

Lemme III 2

Soient $\sigma : [ab] \rightarrow M$ et $\tau : [ab] \rightarrow M$ des courbes différentiables telle que

1. $\sigma(a) = \tau(a)$
2. $\sigma(s) \neq \tau(s) \quad s \in]ab]$

Alors la fonction $\delta : [ab] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\delta(s) = d(\sigma(s), \tau(s))$ admet, à droite de a une dérivée $\delta'(a)$ et $\delta'(a) = \left\| \frac{d\sigma(a) - d\tau(a)}{da} \right\|$

On pourra trouver la démonstration de ce lemme dans [14.]

Dans ce qui suit, ∇ désigne la connexion de Lévi-Civita.

Lemme III 3

Soit $Q : [ab] \times [-c, c] \rightarrow M$ une déformation de classe C^∞ d'une courbe X , uniformément paramétrée, non réduite à un point, et soit $\ell(s) = |Q^s|$. Alors ℓ est dérivable en 0 et

$$\ell'(0) = \frac{b-a}{|\gamma|} \left[g\left(\frac{Q_b}{\gamma(b)}(0), \gamma(b)\right) - g\left(\frac{Q_a}{\gamma(a)}(0), \gamma(a)\right) - \int_a^b g_{\gamma(u)}\left(\frac{(\nabla_{\gamma_u})}{\gamma_u}(u), \frac{Q_u}{u}(0)\right) du \right]$$

Pour la démonstration de ce lemme voir [14] ou [15]. Nous utiliserons également le lemme de Gronwall sous la forme suivante :

Lemme III 4

Soient $t_0 < t_1$, α et γ deux fonctions continues de $[t_0, t_1]$ dans \mathbb{R} . Si $\alpha(t)$ et $\gamma(t)$ sont positives sur $[t_0, t_1]$, si a et b sont deux constantes strictement positives et si on a l'inégalité :

$$\alpha(t) \leq a + b \int_{t_0}^t \alpha(\tau) \gamma(\tau) d\tau \quad \text{pour tout } t \in [t_0, t_1] \text{ alors :}$$

$$\alpha(t) \leq a e^{b \int_{t_0}^t \gamma(\tau) d\tau} \quad \forall t \in [t_0, t_1]$$

Lemme III 5

Soient K une partie de X , $X \in V(M)$, I un intervalle tels que

- a) K possède la propriété (P)
- b) X est borné sur $K \times I$
- c) il existe une constante k telle que : $\forall (x, t) \in M \times I, \forall v \in T_x M$

$$\|(\nabla_v X)(x, t)\|_x \leq k \|v\|_x$$

Alors, $\exists \delta > 0$ tel que, $\forall x \in K, \forall \theta, \theta' \in I$ tels que $|\theta - \theta'| \leq \delta$; si $\|X(x, t) - Y(x, t)\| \leq \varepsilon$ sur $K \times I$ et $X_{t, \theta} \in K, Y_{t, \theta} \in K \quad \forall t \in [\theta, \theta']$ on a

$$d(X_{\theta', \theta}, Y_{\theta', \theta}) \leq \varepsilon e^{k|\theta - \theta'|}$$

Preuve

Soient $\varepsilon \geq 0, Y \in V(M)$ tels que $\|X(x, t) - Y(x, t)\|_x \leq \varepsilon$ sur $K \times I$. $\mathbb{B} = \{X, Y\}$ est uniformément bornée sur $K \times I$; il découle donc du lemme III 1 qu' $\exists \delta > 0$ tel que, $\forall x \in K, \exists N_x$ voisinage convexe normal de x tel que si $|\theta - \theta'| \leq \delta$ alors $\forall t \in [\theta', \theta]$.

$$X_{t, \theta} \in N_x \text{ et } Y_{t, \theta} \in N_x \text{ si } X_{t, \theta} \in K \text{ et } Y_{t, \theta} \in K \quad \forall t \in [\theta, \theta'].$$

Fixons-nous $\theta \in [t_0, t_1]$ et posons pour $x \in K$ $P(t) = X_{t, \theta}, q(t) = Y_{t, \theta}$ si

$P(t) \in N_x, q(t) \in N_x$ (où N_x est un voisinage convexe normal de x)



Désignons par $\sigma_{p(t),q(t)} : [0, 1] \rightarrow M$ l'unique géodésique minimisant la distance et telle que $\sigma_{p(t),q(t)}(0) = p(t)$, $\sigma_{p(t),q(t)}(1) = q(t)$.

On notera $\tau_{p,q}$ le transport parallèle de p à q le long de $\sigma_{p,q}$ (voir [14], [15] ou [16] pour la définition du transport parallèle).

Posons $V(t) = \tau_{p(t),q(t)} X(p(t), t)$. On a : $V(t) \in TM_{q(t)}$

□ Si $p(t) \neq q(t)$ et $Y(q(t), t) \neq V(t)$.

Posons $s_t(u) = \exp_{q(t)} u \cdot V(t)$

$$\alpha(t) = d(p(t), q(t))$$

$$\delta_t(u) = d(q(t+u), s_t(u))$$

$$\beta_t(u) = d(p(t+u), s_t(u))$$

$$\alpha_t(u) = \alpha(t+u).$$

Pour chaque t, u pour lesquels les expressions sont définies, on a les relations suivantes entre $\alpha_t, \delta_t, \beta_t$

i) $\alpha_t(0) = (\delta_t + \beta_t)(0) = x$

ii) $\alpha_t(u) \leq (\delta_t + \beta_t)(u)$ ainsi que les propriétés suivantes :

iii) α_t est dérivable au voisinage de 0

iv) δ_t admet une dérivée à droite de 0 et

$$(\delta_t)'(0) = \|Y(q(t), t) - V(t)\|_{q(t)}$$

En effet :

$$\left. \frac{d}{du} \right|_{u=0} \begin{cases} q(t+u) = Y(q(t), t) \\ (s_t)'(0) = V(t) \end{cases}$$

Comme $V(t) \neq Y(q(t), t)$ on a, pour $u \neq 0$ et assez petit $q(t+u) \neq s_t(u)$. On peut donc appliquer le lemme III 2

v) β_t est dérivable en 0 et $(\beta_t)'(0) = 0$

En effet, si l'on considère la déformation Q de σ définie par :

$$Q : [0, 1] \times [-c, c] \rightarrow M, \quad Q(s, u) = \begin{matrix} \sigma(s) \\ p(t+u), s_t(u) \end{matrix}$$

c étant choisi assez petit pour que l'on reste dans \mathbb{M}_x , alors :

$$\beta_t(u) = |Q^u|$$

Si l'on remarque que :

a) $(Q_{0*})(o) = X(p(t), t)$

$$(Q_{1*})(o) = \tau X(p(t), t)_{p(t), q(t)}$$

b) $(\sigma_{p(t), q(t)*})(1) = \tau (\sigma_{p(t), q(t)*})(o)$

(C'est une propriété des géodésiques)

c) $(\nabla_{\sigma_*})(u) = 0 \quad \forall u \in [0, 1]$
 $(\sigma_*)(u)$

ou σ est mis pour $\sigma_{p(t), q(t)}$ et compte tenu du fait que la connexion de Levi-Civita conserve le produit scalaire, l'application du lemme III 3 donne le résultat cherché

De i), ii), iii), iv) et v) on tire : $(\alpha_t)'(o) \leq (\delta_t)'(o) + (\beta_t)'(o)$ d'où ;

$$\alpha'(t) \leq \| Y(q(t), t) - \tau X(p(t), t) \|_{q(t)}$$

$$\leq \| Y(q(t), t) - X(q(t), t) \|_{q(t)} +$$

$$\| X(q(t), t) - \tau X(p(t), t) \|_{q(t)}$$

On sait que $q(t) \in K$, et $t \in I$

$$\Rightarrow \| X(q(t), t) - Y(q(t), t) \|_{q(t)} \leq \varepsilon .$$

Pour le second terme du deuxième membre, posons $W(s, t) = X(\sigma(s), t) - \tau X(p(t), t)$
 $p(t), \sigma(s)$

$W(s, t) \in TM$.
 $\sigma(s)$

On se ramène à TM en posant $\bar{W}(s,t) = \tau_{\sigma(s),a(t)} W(s,t)$.

On remarque que :

$$\| X(q(t),t) - \tau_{p(t),q(t)} X(p(t),t) \|_{q(t)} = \| \bar{W}(1,t) - \bar{W}(0,t) \|_{q(t)}$$

Montrons que :

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{u} [\bar{W}(s+u,t) - \bar{W}(s,t)] \text{ existe.}$$

Nous la noterons $\frac{\partial}{\partial s} \bar{W}(s,t)$.

$$\frac{1}{\theta} [\bar{W}(s+\theta,t) - \bar{W}(s,t)] = \frac{1}{\theta} \tau_{\sigma(s),q(t)} \left[\tau_{\sigma(s+\theta),\sigma(s)} W(s+\theta,t) - W(s,t) \right]$$

d'où $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\theta} [\bar{W}(s+\theta,t) - \bar{W}(s,t)]$ vaut, si elle a un sens :

$$\tau_{\sigma(s),q(t)} (\nabla_{\sigma_*} W)(s)$$

(On applique la définition de ∇ et le fait que τ est un isomorphisme de $T_p M$ sur $T_q M$ donc, est continu).

Il nous reste à montrer que $(\nabla_{\sigma_*} W)(s)$ à un sens.

Il suffit d'observer la définition de W en effet :

a) $(\nabla_{\sigma_*} X(\sigma(.),t))(s)$ existe

b) le champ de vecteur sur σ

$s \rightarrow \tau_{p(t),\sigma(s)} X(p(t),t)$ est autoparallèle donc :

$$(\nabla_{\sigma_*} (s \rightarrow \tau_{p(t),\sigma(s)} X(p(t),t)))(s) \equiv 0$$

On déduit de a) et b) que :

$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial s}(s,t) = \tau_{\sigma(s),q(t)} (\nabla_{\sigma_*} X(\sigma(.),t))(s) \text{ et}$$

$$\| \frac{\partial \bar{W}}{\partial s}(s,t) \|_{q(t)} = \| \tau_{\sigma(s),q(t)} (\nabla_{\sigma_*} X(\sigma(.),t))(s) \|_{q(t)}$$

$$= \| (\nabla_{\sigma_*} X(\sigma(.),t))(s) \|_{\sigma(s)}$$

car le transport parallèle conserve le produit scalaire et donc : la norme.

On a donc :

$$\alpha'(t) \leq \varepsilon + \|\bar{W}(1,t) - \bar{W}(0,t)\|_{q(t)}$$

Soit $\bar{W}(s,t) = \sum_{i=1}^n W_i(s,t) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{q(t)}$, la décomposition de $W(s,t)$ dans la base de

T.M. attachée au système local de coordonnées (U, x^1, \dots, x^n) autour de $q(t)$; on a :

$$\bar{W}(1,t) - \bar{W}(0,t) = \sum_{i=1}^n (W_i(s,t) - W_i(0,t)) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{q(t)}$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 \frac{\partial W_i}{\partial s}(s,t) ds \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{q(t)}$$

$$\|W(1,t) - W(0,t)\|_{q(t)} = \left\| \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial W}{\partial s}(s,t) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{q(t)} \right) ds \right\|_{q(t)}$$

$$\leq \int_0^1 \left\| \frac{\partial W}{\partial s}(s,t) \right\|_{q(t)} ds.$$

D'où l'inégalité :

$$\alpha'(t) \leq \varepsilon + \int_0^1 \left\| \frac{\partial W}{\partial s}(s,t) \right\|_{q(t)} ds \quad \text{où}$$

$$\alpha'(t) \leq \varepsilon + \int_0^1 \left\| (\nabla_{\sigma^*(s)} X(\sigma(\cdot), t))(s) \right\|_{(s)}$$

J'applique l'hypothèse relative à la dérivée covariante, il vient :

vi) $\alpha'(t) \leq \varepsilon + k \alpha(t)$

Si $p(t) = q(t)$, $\alpha(t) = 0$

Si $Y(q(t), t) = V(t)$, le lemme III 3 nous donne : $\alpha'(t) = 0$ donc :

la formule vi) est vraie pour tout $t \in [\theta, \theta']$

Supposons $\theta' > \theta$. Pour tout $t \in [\theta, \theta']$ on a :

$$\alpha(t) \leq \epsilon (\theta' - \theta) + \int_{\theta}^t k \alpha(s) ds$$

$$\frac{\alpha(t)}{t-\theta} \leq \epsilon + k \int_{\theta}^t \frac{\alpha(s)}{t-\theta} ds \leq \epsilon + k \int_{\theta}^t \frac{\alpha(s)}{s-\theta} ds$$

L'intégrale du dernier terme a bien un sens du fait que α admet une dérivée à droite de θ .

Appliquons le lemme III 4, il vient :

$$\frac{\alpha(t)}{t-\theta} \leq \epsilon e^{k(t-\theta)}$$

$$\alpha(t) \leq \epsilon (t-\theta) e^{k(t-\theta)}$$

Dans le cas $\theta' < \theta$, on écrit : $\beta_t(u) \leq \alpha_t(u) + \delta_t(u) \quad \forall t \in [\theta \theta']$

$$(\alpha_t)'(o) \geq -(\delta_t)'(o)$$

et l'on poursuit comme dans le cas $\theta' > \theta$.

Finalement on obtient la relation : $\forall Y \in V(M)$ telle que $\|X(x,t) - Y(x,t)\|_x \leq \epsilon$ sur $K \times I$, si $\theta, \theta' \in I$ $|\theta - \theta'| \leq \delta$ et $X.x$ et $Y.x \in K \quad \forall t \in [\theta \theta']$ alors :

$$d(X.x, Y.x)_{\theta', \theta \quad \theta', \theta} \leq \epsilon |\theta - \theta'| e^{k|\theta - \theta'|}$$

C.Q.F.D.

Proposition III.2

Soient $X \in V(M)$, $x_o \in M$, $t_o, t_1 \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$, V_o un voisinage compact de x_o , K un voisinage compact de $\emptyset([t_o t_1] \times V_o)$ \emptyset étant définie par

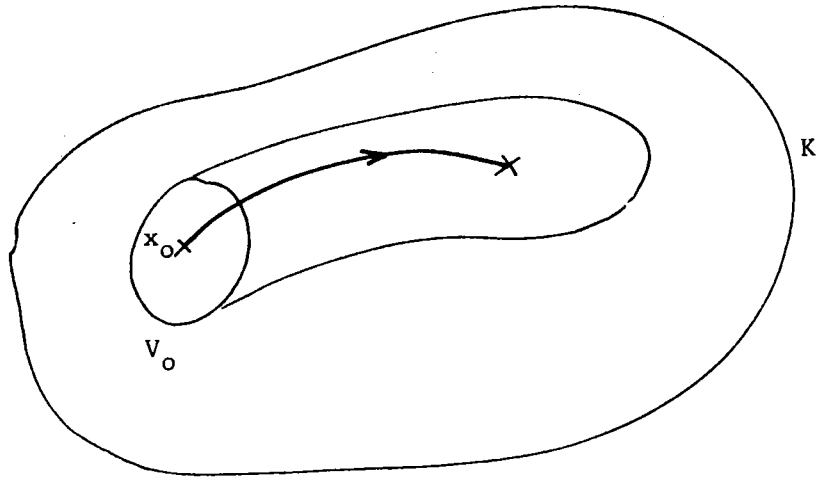
$$\emptyset(t,x) = X.x_{t,t_o}$$

Alors, il existe $\mu(K, x_o, t_o, t_1, \epsilon)$ tel que :

$$(Y \in V(M) \text{ et } \|Y(x,t) - X(x,t)\|_x \leq \mu(K, x_o, t_o, t_1, \epsilon) \text{ sur } K \times [t_o t_1])$$

$$\Rightarrow (d(Y.x, X.x)_{t,t_o \quad t,t_o} \leq \epsilon \text{ sur } V_o \times [t_o t_1])$$

Preuve :



Soit $\mathcal{B} = \{Y \in V(M) / \|Y(x,t) - X(x,t)\|_x \leq 1 \quad \forall (x,t) \in K \times [t_0, t_1]\}$

1. \mathcal{B} est uniformément bornée sur le compact $K \times [t_0, t_1]$.
2. A cause de la compacité de $K \times [t_0, t_1]$, il existe $k(K, t_0, t_1)$ telle que :

$\forall (x,t) \in K \times [t_0, t_1], \quad \forall v \in T_x M$ on a :

$$\|(\nabla_v X(x,t))\|_x \leq k(K, t_0, t_1) \cdot \|v\|_x$$

3. K vérifie la propriété (P), puisque c'est un compact.

Nous pouvons donc appliquer le lemme III 5, donc : il existe $\delta > 0$ tel que :

$\forall x \in K, \theta, \theta' \in [t_0, t_1]$, si :

$\|Y(x,t) - X(x,t)\|_x \leq \mu$ sur $K \times [t_0, t_1]$, $X_{\theta'}(x) \in K, Y_{\theta'}(x) \in K$ alors :

$$(*) \quad d(X_{\theta'}(x), Y_{\theta'}(x)) \leq \mu |\theta' - \theta| e^{k(K, t_0, t_1) |\theta' - \theta|}$$

Soit $P \in \mathbb{N}^*$ tel que $\left| \frac{t_1 - t_0}{P} \right| \leq \delta$, posons $\theta_0 = t_0, \theta_1 = \frac{t - t_0}{P}, \dots$

$$\theta_k = \frac{k(t - t_0)}{P} \dots \theta_p = t$$

L'application :

$$\begin{matrix} [t_0, t_1]^2 \times K & \rightarrow & M \\ ((\theta, \theta'), x) & & X_{\theta'}(x) \\ & & \theta, \theta' \end{matrix}$$

est continue donc, $[t_0, t_1]^2 \times K$ étant compact, elle est uniformément continue. On en déduit l'existence d'un $\alpha_\epsilon > 0$ tel que :

$$\left. \begin{array}{l} d(y,Z) \leq \alpha_\epsilon \\ \text{et} \\ d(\theta,\lambda) \leq \alpha_\epsilon \\ \text{et} \\ d(\theta',\lambda') \leq \alpha_\epsilon \end{array} \right\} \Rightarrow (d(X.y, X.z)_{\theta,\theta'} \leq \epsilon/p)$$

pour $(\theta,\theta',y)(\lambda,\lambda',z)$ dans $[t_0 t_1]^2 \times K$.

En particulier : pour tout $(\theta,\theta') \in [t_0 t_1]^2$ et $y,z \in K$,

$$(**) \quad d(y,z) \leq \alpha_\epsilon \Rightarrow d(X.y, X.z)_{\theta,\theta'} \leq \epsilon/p.$$

Soient $\lambda = d(\emptyset([t_0 t_1] \times V), Fr K) = \inf \{d(x,y)/x \in \emptyset([t_0 t_1] \times V), y \in Fr K\}$

(en convenant de poser $\lambda = +\infty$ si la frontière de K est vide) et

$$\epsilon' = \min \{\alpha_\epsilon, \epsilon/p, \lambda/p\}.$$

Choisissons $\mu(K, x_0, t_0, t_1, \epsilon)$ de telle sorte que

$$\mu(K, x_0, t_0, t_1, \epsilon) \cdot \frac{|t_1 - t_0|}{P} \leq \epsilon'$$

La démonstration s'achève ainsi : d'après (*) $\forall x \in V_0$

$$d(X.x_{\theta_1, \theta_0}, Y.x_{\theta_1, \theta_0}) \leq \epsilon' \leq \epsilon/p \quad (***)$$

$$d(X.x_{\theta_2, \theta_0}, Y.x_{\theta_2, \theta_0}) = d(X.x_{\theta_2, \theta_1} \cdot X.x_{\theta_1, \theta_0}, Y.x_{\theta_2, \theta_1} \cdot Y.x_{\theta_1, \theta_0})$$

$$\leq d(X.x_{\theta_2, \theta_1} \cdot X.x_{\theta_1, \theta_0}, Y.x_{\theta_2, \theta_1} \cdot X.x_{\theta_1, \theta_0}) + d(Y.x_{\theta_2, \theta_1} \cdot Y.x_{\theta_1, \theta_0}, Y.x_{\theta_2, \theta_1} \cdot X.x_{\theta_1, \theta_0})$$

Grace à (*), on peut affirmer que le premier terme du second membre est inférieur à ϵ/p , tandis que, des relations (**) et (***) on tire que le second terme est inférieur à ϵ/p donc : $\forall x \in V_0$

$$d(X.x_{\theta_2, \theta_0}, Y.x_{\theta_2, \theta_0}) \leq 2 \epsilon/p$$

De proche en proche on obtient :

si $\|Y(x,t) - X(x,t)\|_x \leq \mu(K, x_0, t_0, t_1, \epsilon)$ sur $K \times [t_0, t_1]$ alors : $\forall x \in V_0$

$$d(X.x, Y.x)_{\theta_p, \theta_o} \leq p \epsilon/p = \epsilon.$$

Proposition III.3

Si :

- a) M possède la propriété (P)
- b) X est borné sur $M \times [t_0, t_1]$
- c) il existe une constante positive $k(t_0, t_1)$ telle que :

$$\forall (x,t) \in M \times [t_0, t_1], \forall v \in T_x M :$$

$$\|(\nabla_v X(\cdot, t))(x)\|_x \leq k(t_0, t_1) \|v\|_x$$

alors il existe $\mu(t_0, t_1, \epsilon) > 0$ tel que :

$$(\|X(x,t) - Y(x,t)\|_x \leq \mu(t_0, t_1, \epsilon) \text{ sur } M \times [t_0, t_1])$$

$$\Rightarrow (d(X.x, Y.x)_{t, t_0} \leq \epsilon \text{ sur } M \times [t_0, t_1])$$

Preuve

Il suffit de remarquer que sous les hypothèses de la proposition III.3

1. $\lambda = +\infty$ donc : ϵ' ne dépend que de ϵ et de t_0, t_1 (car α_ϵ dépend de t_0 et t_1).
2. La constante $k(K, t_0, t_1)$ ne dépend que de t_0 et t_1 .

Ceci montre bien que dans ce cas $\mu(K, x_0, t_0, t_1, \epsilon)$ ne dépend en fait que de t_0, t_1 et ϵ .

Corollaire III 1

□ Si M est compacte, $X \in V(M)$, $Y \in V(M)$, alors

$\forall \epsilon > 0, t_0, t_1 \in \mathbb{R}, \exists \mu(t_0, t_1, \epsilon) > 0$ tel que

$$(\|X(x,t) - Y(x,t)\|_x \leq \mu(t_0, t_1, \epsilon) \quad \forall (x,t) \in M \times [t_0, t_1])$$

$$\Rightarrow (d(X.x, Y.x)_{t, t_0} \leq \epsilon \quad \forall (x,t) \in M \times [t_0, t_1])$$

□ Si M est un espace homogène et si $X \in V(M)$ et possède les propriétés b) et c) de la proposition III.3, on a la même conclusion.

Remarque III 2

1. Dans le cas $M = \mathbb{R}^n$, la condition c) s'écrit :

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x} X(x, t) \right\| \leq k(t_0, t_1) \text{ sur } M \times [t_0, t_1].$$

2. Dans le cas $M = \mathbb{R}^n$, l'hypothèse b) est inutile car \mathbb{R}^n est un voisinage convexe normal de tous ses points.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] H.SUSSMANN and V.JURDJEVIC :
Controllabilité of non linear systems.
Journal of Dif. eq. 12 (1972).
- [2] C.LOBRY :
Cours de 3me cycle, Bordeaux (1974).
- [3] H.HERMES and J.P.LASALLE :
Functional Analysis and time Optimal control,
Academic Press, New-York (1969).
- [4] NEMYTSKII and STEPANOV :
Qualitative theory of differential equations.
Princeton (1960).
- [5] G.R.SELL :
Non autonomous differential equations and topological dynamics.
Trans. A.M.S. 127, pp. 241-282 (1967).
- [6] G.R.SELL and L.MARKUS :
Control in conservative dynamical systems.
Differential equations n° 16, pp. 472-505 (1974).
- [7] C.LOBRY :
Controllability of non linear systems on compact manifolds.
SIAM J. Control (12).1, (1974).
- [8] A.M.FINK
Almost periodic differential equations.
Lectures notes in Math. n° 377 (Springer Verlag).
- [9] E.J.DAVISON and E.G.KUNZE :
Some sufficient conditions for the global and local controllability
of non-linear time-varying systems.
SIAM J. Control Vol. 8, n° 4 (1970).
- [10] C.LOBRY
Critères de controlabilité des asservissements non linéaires.
RAIRO Automatique, Vol. 10, n° 11, pp. 41 à 54 (1976).

- [11] H.SUSSMANN :
Some properties of vector fields which are not altered by small perturbations
J. differential equations, 20 (1976).
- [12] G.ARONOSON :
Global controllability and bang-bang steering of certain non linear systems.
SIAM J. Control, 11, (1973), pp. 607-619.
- [13] K.A.GRASSE :
Perturbations of non linear controllability systems.
SIAM J. Control, Vol. 19, n° 2 (Mars 1981).
- [14] P.Ver EECKE :
Géométrie des espaces de Riemann.
Publications de l'UER de Mathématiques de l'Université de Picardie (1976).
- [15] KOBAYASHI and NOMIZU :
Foundations of differential geometry
Vol. I (1963) and Vol. II (1969) Interscience publishers J.Wiley and Sons.
- [16] HELGASON
Differential geometry and Symetric Spaces.
Académic Press.
-