



**HAL**  
open science

# Sur les lois constitutives des matériaux thermoélastiques hétérogènes

Manuel Buisson

► **To cite this version:**

Manuel Buisson. Sur les lois constitutives des matériaux thermoélastiques hétérogènes. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université Paul Verlaine - Metz, 1984. Français. NNT : 1984METZ003S . tel-01775662

**HAL Id: tel-01775662**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01775662>**

Submitted on 24 Apr 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

DS2

3<sup>me</sup> CYCLE

D'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

Année 1984

# THÈSE

PRESENTÉE A

L' UNIVERSITE DE METZ

POUR L'OBTENTION DU DIPLOME DE

DOCTEUR - INGENIEUR

EN MECANIQUE

PAR

MANUEL BUISSON

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv	19840065
Cote	S/M3 84/3
Loc	Magasin



---

Sur les lois constitutives des  
matériaux thermoélastiques hétérogènes

---

Soutenue le 13 décembre 1984, devant la Commission d'Examen :

Président : M. ZAQUI , Professeur à l'Université de PARIS-NORD

Membres : M. BERVEILLER , Professeur à l'Université de METZ

M. BRUN , Professeur à l'Ecole Polytechnique

M. MOLINARI , Professeur à l'Université de METZ

M. SUQUET , Professeur à l'Université de MONTPELLIER.

À mes parents

Gisèle et René.

C'est un grand honneur pour moi de présenter ce travail devant Monsieur le Professeur A. ZAOUÏ de l'Université de PARIS-NORD. Je le remercie vivement d'être à la présidence de ce jury.

Je tiens à témoigner de ma reconnaissance et de mon profond respect à Monsieur le Professeur BRUN de l'Ecole Polytechnique. Je le remercie de bien vouloir assumer la tâche de rapporteur.

J'adresse avec enthousiasme et respect mes très sincères remerciements à Monsieur le Professeur SUQUET, de l'Université de MONTPELLIER, d'accepter d'être examinateur.

Cette étude a été effectuée au sein du Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux de l'Université de METZ. Je ne remercierai jamais assez Monsieur le Professeur A. MOLINARI pour l'encadrement de cette thèse et la formation à la recherche qu'il m'a apportée, ainsi que Monsieur le Professeur M. BERVEILLER, directeur du laboratoire, pour les conseils, enseignements et encouragements qu'il m'a prodigués.

Durant ces deux années passionnantes, j'ai ressenti que la mécanique est une science riche jouant à la fois de l'intuition et de l'observation du physicien et de la rigueur du mathématicien.

J'ai également bénéficié du climat scientifique de l'équipe des enseignants chercheurs du laboratoire : Melle BRULE, Messieurs BERADAÏ, BEITZ, CANOVA, CARMASOL, DOMINIAK, DUDZINSKI, EBERHARDT, FRESSENGEAS, GUIBERT, LIPINSKI, REMY-VINCENT, SERO-GUILLAUME, WIERZBANOWSKI, ainsi que Monsieur A. HIHI de l'Université de RABAT. J'adresse aussi des remerciements amicaux aux étudiants de DEA et de thèse, Messieurs AHZI, BASSOUT-LELLICH, BENSALAH, BOUAOUINE, ECHAABI, EL MAJDOUBI, PATOOR et TIEM.

Je remercie également le service de documentation de l'Université de METZ, et Mme MARCELET, Messieurs MOLL et BILOCQ, pour avoir assuré l'existence matérielle de ce travail : les idées naissent et se cristallisent en écrits.

P L A N

-----

Dédicace  
Remerciements

INTRODUCTION

CHAPITRE I Thermoélasticité et milieu hétérogène  
Aspect statique

1) ELASTICITE	-6-
2) ANELASTICITE - CONDITION DE COUPLAGE	-7-
3) L'EFFET THERMOELASTIQUE - PRESENTATION	-7-
4) THERMOELASTICITE	
4.1. Présentation générale	-8-
4.2 Formulation	-9-
4.3 Formulation duale	-13-
4.4 Interprétation des coefficients-Résumé	-13-
5) THERMOELASTOSTATIQUE	
5.1 Loi de comportement macroscopique Coefficients effectifs	-16-
5.2 Lois locales	-18-
5.3 Tenseur concentration-Définition	-19-
6) EQUATIONS INTEGRALES ET PROBLEMES D'INCLUSIONS	
6.1 Formulation	-24-
6.2 Milieu granulaire	-26-
6.3 Problème d'inclusion (Eshelby)	-29-
7) LE SCHEMA SELF-CONSISTENT	
7.1 Caractérisation	-33-
8) EQUATION L.S.D	-36-
9) PRINCIPES D'ENERGIE	-40-
10) MILIEU BIPHASE	-41-
11) HOMOGENEISATION DES MILIEUX PERIODIQUES	-42-

CHAPITRE II Conduction de la chaleur  
Effet dissipatif et effet viscoélastique

1) FORME INTEGRALE DE L'EQUATION DE LA CHALEUR	-44-
2) RECHERCHE DE LA SOLUTION ELEMENTAIRE DE LA CHALEUR	-48-
3) THERMOELASTICITE TRANSITOIRE	-51-
4) MILIEU GRANULAIRE	-53-

CHAPITRE	III	Exemple monodimensionnel	
	1)	ETUDE	
		1.1 L'étude de Zener	-60-
		1.2 Etude monodimensionnelle	-63-
	2)	PRESENTATION DE L'ECHANTILLON	-63-
	3)	EQUATIONS	-64-
	4)	DISSIPATION	
		4.1 Entropie	-66-
		4.2 Linéarisation	-67-
		annexe: expression de l'indice adiabatique	
	5)	REPONSES VISCOELASTIQUES	
		5.1 Compliances locales instantanée et relaxée	-70-
		5.2 Méthode de perturbation directe	-73-
		5.2.a) Réponse à un échelon de contrainte	
		5.2.b) Essai de contrainte cyclique	
		5.3 Méthode de résolution par série de Fourier tronquée	-78-
	6)	COHERENCE DES RESULTATS	
		6.1 Essai quasistatique	-78-
		6.2 Essai cyclique	-79-
	7)	ENERGIE DISSIPEE	
		7.1 Description du cycle contrainte-déformation	-80-
		7.2 Quantité de chaleur produite	-82-
		7.3 Evaluation de la solution approchée	-83-
		7.4 Frottement interne	-85-
		7.5 Mesure de la dissipation	-88-
		Annexe	-94-
CHAPITRE	IV	Illustration numérique	
	1)	LA METHODE DE CRANK-NICHOLSON	-100-
	2)	ESSAI QUASISTATIQUE	
		2.1 Problème numérique	-103-
		2.2 Choix du nombre de noeuds	-103-
		2.3 Comparaison avec la méthode de perturbation	-104-
	3)	ESSAI CYCLIQUE	
		3.1 Problème numérique	-105-
		3.2 Graphiques	-106-
		3.3 Le cycle contrainte-déformation	-106-
CONCLUSION			-110-
ANNEXE		Viscoélasticité	- A1-
		Thermoélasticité	- A4-
		Conduction de la chaleur	-A12-
		Calculs du chapitre III	-A20-
BIBLIOGRAPHIE			

I N T R O D U C T I O N

Le champ d'application des matériaux composites connaît depuis quelques années un développement important à en juger par leurs usages industriels fréquents et par les activités nombreuses des laboratoires de recherche. Sans négliger l'emploi des milieux naturels, anisotropes comme le bois ou hétérogènes comme les roches, on produit en effet de plus en plus de nouveaux matériaux tels que les structures renforcées de fibres, les laminés...

Il est en effet motivant de ne retenir que les qualités des constituants et d'annihiler leurs défauts. Si le principe est posé, il reste cependant de nombreuses difficultés d'ordre technologique dans la mise en oeuvre et aussi d'ordre théorique. De plus, les conditions d'emploi du matériau composite sont de plus en plus variées et sévères : outre la nécessité de bien connaître son comportement à température ambiante, on le soumet dans de nombreux cas à des sollicitations thermiques (tuyère d'une fusée, ailettes d'un turbocompresseur...)

En premier lieu, l'ingénieur utilise les propriétés effectives du matériau : il le considère comme un milieu homogène. Mais cette analogie de comportement demande plus de précision au-delà de certaines conditions de sollicitation. Il faut alors tenir compte de sa configuration hétérogène. Prenons par exemple le cas d'un matériau homogène isotrope uniformément chauffé de forme géométrique simple et à frontière libre. On observe une dilatation uniforme et à contrainte nulle. Par contre, si le milieu est hétérogène, certaines parties se dilatent plus que d'autres engendrant ainsi des contraintes thermiques qui peuvent conduire à une plastification ou à une rupture locale.

Dans ce travail, nous examinons les propriétés élastiques et thermiques d'un matériau hétérogène : en restant dans le cadre de la mécanique des milieux continus, nous nous intéressons à un phénomène thermomécanique propre à l'existence même de l'hétérogénéité. Il s'agit d'étudier la dissipation thermique et les phénomènes de relaxation de nature viscoélastique engendrés par l'action in situ de la conduction de la chaleur. En effet, sous l'action d'un chargement mécanique ou thermique, il se crée localement des gradients de température pour lesquels l'hétérogénéité apporte sa propre contribution. L'existence des courants thermiques internes, qui résultent de ces fluctuations de température, provoque alors par irréversibilité thermique une dissipation d'énergie et par couplage thermomécanique une relaxation des variables définissant l'état du matériau.

Cette étude s'articule en quatre chapitres :

Le problème qui nous concerne, où nous négligeons les phénomènes d'inertie et où les trois variables utilisées : la contrainte, la déformation et la température vérifient les hypothèses des petites perturbations, sort du cadre de l'élasticité linéaire et est un exemple particulier d'anélasticité. Il s'agit de l'effet thermoélastique que nous modélisons à l'aide des équations locales de la thermoélasticité linéaire couplée non dynamique (chapitre premier). Nous insistons tout d'abord sur la thermoélastostatique (elle ne tient pas compte de la loi d'évolution de la température) qui décrit le champ des contraintes, des températures et des déformations à un instant donné. Nous examinons successivement la formulation intégrale du problème et l'approximation faite pour un milieu granulaire dont le formalisme peut d'ailleurs se retrouver en considérant les problèmes d'inclusions d'Eshelby. Dans le

but de connaître le comportement global et local du matériau, nous résumons les différentes méthodes de résolutions qui donnent une solution approchée des équations intégrales (Méthode L.S.D., Méthodes Self. Consistentes pour les matériaux parfaitement désordonnés vérifiant les hypothèses de macrohomogénéité de Hill ; Méthode d'Homogénéisation des milieux microhétérogènes périodiques) ou un encadrement des propriétés effectives du matériau (Principes d'énergie).

Dans le chapitre deuxième, nous étudions l'évolution des champs de contrainte, déformation et température (thermoélasticité transitoire). Nous écrivons l'équation de la chaleur sous forme intégrale et nous proposons une résolution approchée par l'approximation du milieu granulaire. La solution ainsi déduite précise plus clairement et de façon qualitative l'aspect dissipatif et viscoélastique du comportement.

Les formalismes employés sont cependant complexes et pour passer à une étude quantitative permettant d'évaluer l'importance de ces effets, nous traitons dans le chapitre suivant d'un problème unidimensionnel.

L'étude fondamentale de Zener nous confirme pour un milieu homogène que l'effet thermoélastique engendre un phénomène de dissipation d'énergie et de relaxation viscoélastique. Il en va de même pour un matériau hétérogène (nous étudions le cas d'un échantillon monodimensionnel continûment hétérogène) mais le formalisme se complique : les équations aux dérivées partielles sont à coefficients dépendant de la position. Nous pouvons cependant les résoudre en les linéarisant après avoir au préalable montré que cette linéarisation ne masque pas l'effet thermoélastique :

- nous modélisons par différentes méthodes, dont nous vérifions la cohérence, les réponses viscoélastiques du matériau, lorsqu'il est soumis à deux types différents d'essais en contrainte (essai de fluage et essai de frottement interne),

- nous calculons une mesure caractéristique de l'énergie dissipée engendrée par l'action de la conduction de la chaleur.

Au cours de ce chapitre, nous avons le souci constant de montrer qu'un matériau hétérogène, obéissant aux lois locales de la thermoélasticité se comporte globalement comme un matériau viscoélastique (phénomènes de relaxation, dissipation de l'énergie). Pour compléter alors la confrontation des deux points de vue, l'un thermoélastique et l'autre viscoélastique, nous proposons dans le dernier chapitre une illustration numérique simulant les réponses du matériau soumis à un essai de fluage ou de frottement interne.

Pour simuler la réponse du matériau, nous discrétisons les équations aux dérivées partielles. Pour les deux essais, outre l'illustration qu'elle propose, l'étude numérique permet de contrôler la convergence d'une méthode de résolution analytique employée dans le chapitre troisième (méthode de perturbation directe). De plus, pour les essais de frottement interne sous contraintes périodiques de pulsations différentes, nous vérifions que les deux méthodes fournissent des courbes représentant l'énergie dissipée en fonction de la pulsation ayant la même allure et que le maximum de dissipation se produit pour une fréquence identique.

C H A P I T R E I

PRESENTATION DU PROBLEME

ET ASPECT STATIQUE

## 1) ELASTICITE

Hooke a mis en évidence à la fin du XVIIIème siècle la notion d'élasticité selon laquelle un corps se déforme proportionnellement à la force qui lui est appliquée. Cette définition très sommaire de l'élasticité linéaire s'écrit pour un solide isotrope suivant la loi de Hooke avec la convention habituelle de sommation sur l'indice (latin uniquement) répété :

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2\mu \epsilon_{ij}$$

où  $\sigma_{ij}$  est le tenseur des contraintes

$\epsilon_{ij}$  est le tenseur des déformations

$\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients d'élasticité de Lamé.

$\delta_{ij}$  est l'indice de Kronecker :

$$\delta_{ij} = 1 \quad \text{si } i = j$$

$$\delta_{ij} = 0 \quad \text{si } i \neq j$$

Valable sous les hypothèses de linéarité et de quasistatisme que nous préciserons et compléterons pour notre sujet d'étude au paragraphe (3), elle se généralise pour les milieux anisotropes en utilisant le tenseur d'élasticité  $C_{ijkl}$  suivant\* :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}$$

Selon cette loi de comportement ainsi énoncée, l'élasticité apparaît comme une relation linéaire biunivoque entre la contrainte et la déformation dans laquelle le temps n'intervient pas.

Quoique suffisamment précise dans la plupart des cas pratiques, cette théorie ne peut décrire par exemple le phénomène de trainage élastique (Elastische Nachwirkung) mis en évidence par Weber en 1825 lors de l'étude des galvanomètres.

Intervient alors la notion d'anélasticité dans laquelle, sans que le solide ne présente de déformation permanente, l'effort et la déformation ne sont pas fonctions univoques l'une de l'autre et peuvent, par exemple dans le cas de sollicitations périodiques, présenter un certain déphasage l'une par rapport à l'autre.

\* N.B. : on écrira, "en bref" :  $\sigma = C\epsilon$

## 2) ANELASTICITE - CONDITION DE COUPLAGE

Pour l'anélasticité, précisément, la loi linéaire,

$$\sigma = C \epsilon$$

n'est plus valable. Il intervient une (ou des) variable(s) auxiliaire(s)  $V$  liée(s) par COUPLAGE, à la fois à  $\sigma$  mais aussi à  $\epsilon$  de telle sorte que ((1)) :

"L'application de la contrainte produit d'une part une déformation élastique instantanée et d'autre part modifie une (ou des) variable (s) définissant l'équilibre du système qui, de fait, évolue vers un nouvel état d'équilibre, cette évolution entraînant une variation de la déformation".

Cette interaction mutuelle différencie le comportement du matériau par rapport à un matériau purement élastique. Le phénomène d'anélasticité repose essentiellement sur l'existence du couplage entre les variables  $\sigma$ ,  $\epsilon$  et  $V$ .

## 3) L'EFFET THERMOELASTIQUE - PRESENTATION

Pour l'étude qui nous concerne, la variable  $V$  est représentée par la température locale. Son évolution est gouvernée par la loi de la conduction de la chaleur (Loi de Fourier).

Sous une certaine sollicitation en contrainte (resp-déformation), on observe, d'une part, une élasticité instantanée adiabatique du matériau, et d'autre part, la formation de gradients de température disparaissant sous l'action de la conduction de la chaleur. Cette uniformisation de la température provoque par couplage une relaxation de la déformation (resp-contrainte).

Dans ce cas, le phénomène d'anélasticité n'est autre que l'effet thermoélastique.

Nous rappelons et complétons alors les hypothèses évoquées au paragraphe (1) de l'élasticité en précisant que :

- nous négligeons les phénomènes d'inertie.
- nous nous plaçons dans le cadre d'un comportement linéaire contrainte déformation.
- l'état de déformation du solide évolue dans le domaine préplastique (pas de plasticité).
- nous n'attribuons aucune influence de la température absolue  $T$  sur la valeur des coefficients d'élasticité  $C_{ijkl}$ .

Ces hypothèses assemblées, dites Hypothèses des Petites Perturbations (H.P.P.) imposent de faire subir à l'échantillon, sous l'action d'une force appliquée QUASISTATIQUÉMENT, de PETITES DÉFORMATIONS accompagnées de FAIBLES ECARTS  $\theta$  de température par rapport à la température de référence  $T_0$ .

En respectant l'H.P.P., nous sommes amenés à utiliser le système des équations de la Thermoélasticité linéaire Couplée Quasistatique.

#### 4) THERMOELASTICITE (Quasistatique)

##### 4.1. Présentation Générale :

La thermoélasticité, comme la structure du mot l'indique, résulte de la combinaison de deux phénomènes caractéristiques coexistants dans le matériau :

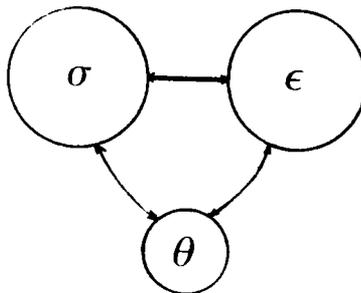
- l'un de nature élastique ; une partie de la déformation totale  $\epsilon$  est élastique  $\epsilon^e$ .
- l'autre de nature thermique ; la partie complémentaire de la déformation élastique est anélastique  $\epsilon^a$ . Par linéarité :

$$\epsilon_{ij}^a = \alpha_{ij} \theta$$

où  $\alpha_{ij}$  est le tenseur dilatation thermique libre.

- la déformation résulte de la superposition de ces deux composantes

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^a$$



La thermoélasticité linéaire est fondée sur trois relations :

- la première, relation de Duhamel-Neumann, traduit la rigidité élastique du matériau. Nous verrons qu'elle s'écrit sous la forme

$$\sigma = C \epsilon^e$$

On retrouve la loi  $\sigma = C \epsilon$  d'un matériau purement élastique mais il convient en fait de remplacer la déformation totale par sa partie élastique uniquement :

$$\sigma = C (\epsilon - \epsilon^a)$$

Cette loi s'avère suffisante pour étudier le comportement du matériau lorsque celui-ci est soumis à des sollicitations respectant des conditions thermiques isothermes (dans ce cas  $\epsilon^a = 0$ ) ou à l'opposé des conditions adiabatiques (dans ce cas, il convient de considérer le tenseur  $C_{ad}$  des coefficients adiabatiques de l'élasticité  $\sigma = C_{ad} \epsilon$ ).

Pour les cas intermédiaires (ni isothermes, ni adiabatiques)

- la seconde relation, déduite de la conservation de l'énergie (loi standard de la conduction de la chaleur) complète la première. En tenir compte permet de suivre l'évolution transitoire du champ de température dans le matériau.

Quant à la troisième relation, déduite du deuxième principe de la thermodynamique, elle exprime que le couplage entre les effets élastiques et thermiques mis en jeu induit un processus de dissipation d'énergie. C'est l'expression d'une production d'irréversibilité d'origine thermomécanique.

L'établissement de ces trois relations se fait dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles. Nous résumons les étapes principales (nous proposons cependant en annexe une introduction à la thermoélasticité plus détaillée mais se voulant très simple).

#### 4.2. Formulation :

Notation :  $\rho$  masse volumique constante

$r$  apport d'énergie massique  
(prise ici égale à zéro)

$\dot{\eta}$  taux d'évolution de l'entropie  
massique ( $\dot{\cdot}$  désigne la dérivée en temps)

$e$  énergie interne massique

$q_i$   $i^{\text{ième}}$  composante du vecteur flux  
de chaleur ( $a_{,i}$  désigne la dérivée partielle  
de  $a$  par rapport à la  $i^{\text{ième}}$  coordonnée)

nous utilisons

- la loi locale de la conservation de l'énergie

$$4.1. \quad \rho \dot{e} - \rho r - \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} + q_{i,i} = 0$$

- l'inégalité de Clausius Duhem

$$4.2. \quad e^T \dot{\eta} - e^r + q_{i,i} - q_i \left( \frac{T_{,i}}{T} \right) \geq 0$$

Nous supposons que la donnée des variables  $\epsilon_{ij}$  et  $\theta$  suffit pour décrire l'état du système. IL est intéressant d'utiliser l'expression de l'énergie libre massique de Helmholtz  $\psi$  définie par

$$4.3. \quad e\psi = e e - e^T \eta$$

En écrivant

$$e \dot{e} = e \dot{\psi} + e^T \dot{\eta} + e^T \dot{\eta}$$

$$\text{et} \quad e \dot{\psi} = e \left. \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon_{ij}} \right|_{\theta} \dot{\epsilon}_{ij} + e \left. \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right|_{\epsilon_{ij}} \dot{\theta}$$

la loi de conservation (1) s'écrit :

$$4.4. \quad \left[ e \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon_{ij}} - \bar{\sigma}_{ij} \right] \dot{\epsilon}_{ij} + e \left[ \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \eta \right] \dot{\theta} + \left[ e^T \dot{\eta} + q_{i,i} - e^r \right] = 0$$

substituant dans (2) le terme  $\left[ e^T \dot{\eta} + q_{i,i} - e^r \right]$

l'inégalité de Clausius Duhem devient :

$$4.5. \quad \left[ \bar{\sigma}_{ij} - e \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon_{ij}} \right] \dot{\epsilon}_{ij} - e \left[ \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \eta \right] \dot{\theta} - q_i \left( \frac{T_{,i}}{T} \right) \geq 0$$

Cette nouvelle inégalité doit être vérifiée pour tout  $\epsilon_{ij}$  et  $\theta$  (processus admissibles) et impose donc l'annulation des coefficients de  $\epsilon_{ij}$  et  $\theta$ . D'où les trois relations :

$$4.6. \quad \bar{\sigma}_{ij} = e \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon_{ij}}$$

$$4.7. \quad \eta = - \frac{\delta \Psi}{\delta \theta}$$

$$4.8. \quad -q_i \left( \frac{T_{,i}}{T} \right) \geq 0$$

L'inégalité de dissipation (8) est automatiquement vérifiée si on lie le flux de chaleur  $q_i$  (effet) aux gradients de Température  $\theta_{,j}$  (cause) par une relation linéaire (relations de Onsager) :

$$4.9. \quad q_i = - k_{ij} \theta_{,j}$$

où la matrice  $[k_{ij}]$  est définie positive.

L'inégalité (8) devient :

$$4.10. \quad \frac{k_{ij}}{T} \theta_{,i} \theta_{,j} \geq 0$$

Utilisant (6) et (7) dans la loi de conservation (4), nous obtenons (avec  $r = 0$ ) :

$$4.11. \quad e^{T\eta} = -q_{i,i}$$

et de (9)

$$4.12. \quad e^{T\eta} = \operatorname{div} [k \vec{\operatorname{grad}} \theta]$$

C'est la loi d'évolution de l'entropie qui, linéarisée, nous donnera la loi standard de la conduction de la chaleur.

Il est légitime en H.P.P. de développer  $\psi$  en une série des  $\epsilon_{ij}$  et  $\theta$  tronquée au-delà des termes carrés\* :

$$4.13. \quad e\Psi = e\Psi_0 + \sigma_{ij}^0 \epsilon_{ij} - e\eta^0 \theta + \frac{1}{2} C_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} - \beta_{ij} \epsilon_{ij} \theta - \frac{1}{2} h \theta^2$$

\* les coefficients  $C_{ijkl}$ ,  $\beta_{ij}$ ,  $h$ ,  $\alpha_{ij}$  avec  $\beta_{ij} = C_{ijk} \alpha_k$  sont introduits de façon purement formelle et trouveront leur interprétation.

(6) et (13) donnent

$$4.14. \quad \bar{\sigma}_{ij} = \bar{\sigma}_{ij}^{\circ} + C_{ijkl} \epsilon_{kl} - \beta_{ij} \theta$$

et de (7) et (13) :

$$4.15. \quad \rho \eta = \rho \eta^{\circ} + \beta_{ij} \epsilon_{ij} + h \theta$$

Nous définissons l'état de référence par :

- la température  $T_0$
- l'état libre de contrainte  $\sigma_{ij} = 0$
- pas de déformation  $\epsilon_{ij} = 0$
- la variation d'entropie est nulle.

Ce qui revient à annuler les termes du premier ordre  $\sigma_{ij}$  et  $\eta^{\circ}$  et, dorénavant,  $\eta$  désigne la variation d'entropie par rapport à l'état de référence.

Nous déduisons de (14) et (15) :

- la loi de comportement (Duhamel-Neumann) :

$$4.16. \quad \bar{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} - \beta_{ij} \theta$$

ou aussi

$$\bar{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} (\epsilon_{kl} - \alpha_{kl} \theta)$$

- l'expression de la variation d'entropie

$$4.17. \quad \rho \eta = \beta_{ij} \epsilon_{ij} + h \theta$$

Si nous linéarisons la loi d'évolution (12) suivant

$$\rho T_0 \dot{\eta} = \text{div} [k \text{ grad } \theta]$$

en utilisant (17) nous obtenons l'équation de la chaleur :

4.18.

$$T_0 h \dot{\theta} = [k_{ij} \theta_{,i}]_{,j} - T_0 \beta_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}$$

## 4.3. Formulation duale :

Si nous choisissons  $\sigma$  et  $\theta$  comme variables d'état du système, un raisonnement analogue utilisant cette fois l'énergie libre de Gibbs  $G$  définie par :

$$eG = e e - e T \gamma - \sigma_{ij} \epsilon_{ij}$$

conduit

a) à la loi de comportement :

$$4.19. \quad \epsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl} + \alpha_{ij} \theta$$

b) à l'expression de la variation d'entropie :

$$4.20. \quad e\gamma = \alpha_{ij} \sigma_{ij} + g \theta$$

avec

$$4.21. \quad g = h + \alpha_{ij} \beta_{ij}$$

où  $C_\sigma = T_0 g$  désigne la chaleur spécifique à contrainte constante.

$C_\epsilon = T_0 h$  désigne la chaleur spécifique à déformation constante.

c) à la loi de la conduction de la chaleur :

$$4.22. \quad T_0 g \dot{\theta} = [k_{ij} \theta_{,i}]_{,j} - T_0 \alpha_{ij} \dot{\sigma}_{ij}$$

## 4.4. Interprétation des coefficients - Résumé :

loi de comportement : (formes équivalentes)

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= C_{ijkl} \epsilon_{kl} - \beta_{ij} \theta \\ \sigma_{ij} &= C_{ijkl} (\epsilon_{kl} - \alpha_{kl} \theta) \\ \epsilon_{ij} &= S_{ijkl} \sigma_{kl} + \alpha_{ij} \theta \end{aligned}$$

loi d'évolution de la température : (formes équivalentes)

$$\begin{aligned} C_\epsilon \dot{\theta} &= [k_{ij} \theta_{,i}]_{,j} - T_0 \beta_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \\ C_\sigma \dot{\theta} &= [k_{ij} \theta_{,i}]_{,j} - T_0 \alpha_{ij} \dot{\sigma}_{ij} \end{aligned}$$

entropie :

$$\rho \eta = \beta_{ij} \epsilon_{ij} + \frac{C_\epsilon}{T_0} \Theta$$

$$\rho \eta = \alpha_{ij} \sigma_{ij} + \frac{C_\sigma}{T_0} \Theta$$

- $\alpha_{kl}$  est le tenseur dilatation thermique libre.  
 $\alpha_{kl} \Theta$  est la déformation atteinte si l'échantillon homogène (loi locale) est chauffé et laissé libre de contrainte.
- $C_{ijkl}$  est le tenseur d'élasticité isotherme (pour une évolution à  $\Theta = 0$ , on retrouve la loi  $\sigma = C\bar{\epsilon}$ ).

irréversibilité : de (11) on déduit :

$$\rho \dot{\eta} = - \frac{q_{i,i}}{T}$$

En intégrant sur le volume de l'échantillon et en appliquant le théorème de la divergence, on obtient successivement :

$$\int_V \rho \dot{\eta} dV = - \int_V \frac{q_{i,i}}{T} dV$$

$$= - \int_V \left[ \left( \frac{q_i}{T} \right)_{,i} + \frac{q_i T_{,i}}{T^2} \right] dV$$

$$= - \int_S \frac{q_i n_i}{T} dS - \int_V \frac{q_i T_{,i}}{T^2} dV$$

et de (9) :

$$\int_V \rho \dot{\eta} dV = - \int_S \frac{q_i n_i}{T} dS + \int_V \frac{k_{ij} \Theta_{,i} \Theta_{,j}}{T^2} dV$$

Le premier terme du membre de droite représente le changement d'entropie du système induit par le flux de chaleur à travers l'enveloppe  $S$  du solide et imposé par les conditions MACROSCOPIQUES de frontières.

Le dernier terme représente la production d'entropie induite par la conduction de la chaleur agissant dans le volume. Il quantifie la production IN SITU irréversible d'entropie par unité de volume, et on note :

$$\rho \dot{\eta}_I = \frac{k_{ij}}{T^2} \Theta_{,i} \Theta_{,j}$$

Le second principe de la thermodynamique exprime que

$$\rho T \dot{\eta}_I \geq 0$$

ce qui n'est autre que l'inégalité (10).

Thermoélasticité quasistatique couplée :

La loi d'évolution de la température couplée avec la loi de comportement et l'équation d'équilibre en l'absence de forces volumiques ;

$$\operatorname{div} \sigma = 0$$

(où on néglige les termes d'inertie, thermoélasticité quasistatique), conduit à un système couplé d'équations aux dérivées partielles. Le problème aux limites ainsi défini est d'une grande difficulté mathématique.

Cependant, dans de nombreux cas, les auteurs négligent le terme de couplage thermomécanique  $T_{0\beta ij} \epsilon_{ij}$  (ou  $T_{0\alpha ij} \sigma_{ij}$ , thermoélasticité découplée).

En effet, les déformations engendrées par un chargement sont accompagnées par de très faibles variations de température. Il serait raisonnable de calculer donc ces déformations sans tenir compte de la dilatation thermique : en négligeant le terme  $T_{0\beta ij} \epsilon_{ij}$  la loi d'évolution devient

$$c_{\epsilon} \dot{\theta} = \operatorname{div} [k \operatorname{grad} \theta]$$

dont la solution se décompose en un régime transitoire correspondant à l'uniformisation de la température initiale et un régime permanent représenté par le champ de température vérifiant :

$$\operatorname{div} [k \operatorname{grad} \theta] = 0 \quad (\text{avec } \dot{\theta} = 0)$$

Si nous dérivons alors par rapport au temps la loi de comportement, en tenant compte pour le régime permanent que :  $\dot{\theta} = 0$

on obtient :  $\dot{\sigma} = C \dot{\epsilon}$

et on constate ainsi que la contrainte et la déformation évoluent en phase l'une vis à vis de l'autre ; il n'y a pas de phénomène anélastique.

Pour observer l'effet thermoélastique, il est nécessaire de tenir compte du terme de couplage. Effectivement avec ce terme dans l'équation d'évolution, on constate que (et ce, avec réciprocity) une sollicitation mécanique provoque une variation de la déformation qui s'accompagne alors d'une variation de température. Le flux de chaleur qui résulte de cette variation de la température accroît l'entropie du système ( $\rho T \dot{\eta} = - q_{i,j}$ ) : la présence du terme mécanique  $T_{0\beta ij} \epsilon_{ij}$  dans l'équation de la chaleur est essentielle pour décrire le phénomène de dissipation thermoélastique.

## 5) THERMOELASTICITE STATIONNAIRE

Nous restreignons dans ce paragraphe l'étude du système des équations de la thermoélasticité à la loi de comportement de Duhamel-Neumann.

Nous supposons que la température  $\theta$  de l'échantillon est uniforme, la conduction de la chaleur n'agit pas. Ce domaine de la thermoélasticité où  $\theta$  est stationnaire se nomme suivant les auteurs Thermostatique ou plus précisément ((2)) Thermoélastostatique ou aussi Thermoélasticité stationnaire.

Le matériau hétérogène est en équilibre sous l'action d'une contrainte  $\Sigma$  et déformation  $E$  (dites MACROSCOPIQUES) imposées sur la frontière. Pour le mécanicien, il est utile de connaître la relation entre  $\Sigma$ ,  $E$  et  $\theta$  (dite loi de comportement globale ou macroscopique) et de décrire la répartition des contraintes et déformations microscopiques afin de prédire des phénomènes de concentration de contraintes, de fissuration...

Nous résumons les principaux formalismes traitant de l'aspect stationnaire de la thermoélasticité.

## 5.1. Loi de Comportement Macroscopique

## 5.1. a) Coefficients effectifs :

En premier lieu, le mécanicien s'intéresse à la loi de comportement globale de la forme :

$$5.1.1 \quad \Sigma_{ij} = C_{ijkl}^{eff} [E_{kl} - \alpha_{kl}^{eff} \theta]$$

ou de façon équivalente :

$$5.1.2 \quad \Sigma = C^{eff} E - \beta^{eff} \theta$$

$$E = \Delta^{eff} \Sigma + \alpha^{eff} \theta$$

où  $\Delta_{ijkl}^{eff}$ ,  $C_{ijkl}^{eff}$ ,  $\alpha_{ij}^{eff}$ ,  $\beta_{ij}^{eff}$  sont les coefficients effectifs du matériau homogène équivalent\* (MHE).  
Ils vérifient :

$$5.1.3 \quad [C^{eff}]^{-1} = \Delta^{eff}$$

$$5.1.4 \quad \beta^{eff} = C^{eff} \alpha^{eff}$$

\* Le MHE est le matériau homogène dont le comportement est le même que le comportement macroscopique du matériau hétérogène considéré.

Les méthodes utilisées dans cette thèse pour obtenir le comportement macroscopique s'appliquent aux milieux hétérogènes vérifiant les hypothèses de Hill\*. On peut alors définir le volume  $V$  global de l'échantillon en tant que volume représentatif (au sens statistique) et on lui associe la valeur moyenne volumique notée  $\langle \cdot \rangle$  et Hill a démontré que :

$$5.1.5 \quad \begin{aligned} \langle \sigma \rangle &= \Sigma \\ \langle \epsilon \rangle &= E \\ \langle \sigma \rangle \langle \epsilon \rangle &= \langle \sigma \epsilon \rangle \end{aligned}$$

Ces méthodes partent d'une approche physique de la microstructure (décrite ici par la loi locale de la thermoélasticité stationnaire) et déduisent les coefficients effectifs. Ces derniers ne dépendent que de la nature même de cette microstructure. Il serait en effet moins pertinent que la formulation théorique du MHE dépende de conditions extérieures telles que la forme géométrique de l'échantillon ou des conditions de frontières ((3)).

#### 5.1. b) L'approximation du milieu granulaire :

Pour une microstructure, il est raisonnable de considérer le matériau constitué de  $N$  grains "incrustés" dans une matrice ou, plus généralement, composé de  $N$  phases de propriétés physico-chimiques différentes. On affecte à chaque phase, indiquée par une lettre grecque, une concentration volumique  $f^\alpha$ , une déformation  $\epsilon^\alpha$  et une contrainte  $\sigma^\alpha$  moyennées par rapport au volume  $V_\alpha$  :

$$5.1.6 \quad \begin{aligned} f^\alpha &= \frac{V_\alpha}{V} \quad ; \quad \sum_{\alpha=1}^N f^\alpha = 1 \\ \epsilon^\alpha &= \frac{1}{V_\alpha} \int_{V_\alpha} \epsilon(r_\alpha) dV_\alpha \quad ; \quad \sigma^\alpha = \frac{1}{V_\alpha} \int_{V_\alpha} \sigma(r_\alpha) dV_\alpha \end{aligned}$$

les valeurs moyennes globales s'écrivent

$$5.1.7 \quad \begin{aligned} \langle \sigma \rangle &= \sum_{\alpha=1}^N f^\alpha \sigma^\alpha \\ \langle \epsilon \rangle &= \sum_{\alpha=1}^N f^\alpha \epsilon^\alpha \end{aligned}$$

#### \* HYPOTHESES DE HILL

- pas de forces volumiques,
- l'échantillon subit de faibles déformations,
- la taille de l'hétérogénéité est petite par rapport à la taille de l'échantillon,

Cette forme de représentation, commode pour les calculs, est une approximation assez bonne du milieu réel. En utilisant la fonction indicatrice  $\Delta_\alpha$  définie par :

$$5.1.8 \quad \begin{aligned} \Delta_\alpha(r) &= 0 & \text{si } r \notin V_\alpha \\ \Delta_\alpha(r) &= 1 & \text{si } r \in V_\alpha \end{aligned}$$

où la position est repérée par le vecteur coordonnées  $r$ . La déformation au point  $r_\alpha$  est approchée par sa valeur moyenne volumique calculée pour le volume du grain  $\alpha$ . Remarquons à ce sujet que Eshelby a démontré l'uniformité ((4)) de la déformation d'une inclusion de forme ellipsoïdale de déformation anélastique  $\epsilon^\alpha$  supposée uniforme.

On écrit ainsi l'approximation :

$$5.1.9 \quad \epsilon(r) = \sum_{\alpha=1}^N \Delta_\alpha(r) \epsilon^\alpha$$

## 5.2. Lois locales :

A l'équilibre, en négligeant les forces volumiques,

- le tenseur des contraintes vérifie :

$$5.2.1 \quad \text{div } \sigma = 0$$

- le tenseur des déformations obéit aux conditions de compatibilité. En rappelant que la déformation totale  $\epsilon$  est la somme d'une déformation anélastique d'origine thermique

$$5.2.2 \quad \epsilon_{ij}^\alpha = \alpha_{ij} \theta$$

et d'une déformation élastique  $\epsilon^e$

$$5.2.3 \quad \epsilon = \epsilon^e + \epsilon^\alpha$$

la loi de comportement locale de Duhamel-Neumann s'écrit (cf 4.16)

$$5.2.4 \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}^e$$

On peut remarquer l'analogie des équations 5.2.1 à 5.2.4 régissant la thermo-statique avec celles d'un problème d'élastoplastique ((5)), à savoir :

$$\text{div } \sigma = 0$$

si  $\epsilon^p$  désigne la déformation plastique, alors de même

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p$$

et

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}^e$$

L'analogie n'apparaît pas seulement dans la forme de ces équations (et donc dans la manière de les traiter) mais elle est aussi physiquement fondée ((6)) : l'évolution des déformations liée à des champs thermiques est assimilable à une déformation plastique (eine Art Plastischer Verformung). L'analogie s'arrête cependant sur l'écriture des lois d'évolution ; l'une concerne la conduction de la chaleur, l'autre un seuil de plasticité et des lois d'écoulement.

### 5.3. Tenseur Concentration

#### 5.3. a) Définitions :

Le mécanicien ne s'intéresse pas seulement à la recherche des coefficients effectifs et au comportement global du matériau. Il est aussi concerné par une description aussi précise que possible de la répartition des contraintes et déformations in situ. On définit par l'intermédiaire des tenseurs dits de concentrations que nous déterminerons, un lien entre la microstructure et le comportement macroscopique par les relations dont on postule l'existence.

- tenseurs concentration de déformation A et a :

$$5.3.1. \quad \epsilon = A \langle \epsilon \rangle - a \theta$$

- tenseurs concentration de contrainte B et b :

$$5.3.2 \quad \sigma = B \langle \sigma \rangle + b \theta$$

En passant aux valeurs moyennes, il est immédiat que (en théorie linéaire, A et a sont indépendants de  $\theta$ )

$$5.3.3 \quad (\text{où } \mathbb{1} \text{ désigne le tenseur unité}) \quad ((7))$$

$$\langle A \rangle = \mathbb{1} \quad , \quad \langle a \rangle = 0$$

$$\langle B \rangle = \mathbb{1} \quad , \quad \langle b \rangle = 0$$

Si nous reprenons la définition du tenseur effectif de dilatation thermique  $\alpha_{ij}^{eff}$  ((8)) :

- c'est la déformation moyenne  $\langle \epsilon_{ij} \rangle$  résultant d'un accroissement unité de température pour un matériau libre de contrainte ( $\Sigma = 0$ ) ; on écrit donc selon cette définition :

$$E^a = \alpha^{eff} \theta$$

et il serait faux d'écrire alors que la déformation macroscopique anélastique est en général la moyenne des déformations microscopiques anélastiques :

$$\text{soit } E_{ij}^a \neq \langle \alpha_{ij} \theta \rangle$$

Il faut en effet tenir compte des interactions élastiques entre grains et on écrit pour la déformation totale macroscopique :

$$E = \langle \epsilon^e + \epsilon^a \rangle$$

$$\text{avec } \epsilon^e + \epsilon^a = \Delta \sigma + \alpha \theta \quad (\text{cf 4.19})$$

en remplaçant  $\sigma$  par  $B \langle \sigma \rangle + b \theta$

et après passage à la valeur moyenne

$$E = \langle \Delta B \rangle \langle \sigma \rangle + \langle \Delta b + \alpha \rangle \theta$$

en comparant cette expression avec l'équation 5.1.2 définissant les tenseurs effectifs  $\Delta^{eff}$  et  $\alpha^{eff}$ ,

On déduit

$$5.3.4 \quad \Delta^{eff} = \langle \Delta B \rangle$$

$$5.3.5 \quad \alpha^{eff} = \langle \Delta b + \alpha \rangle$$

Par une formulation duale sur le tenseur  $\beta^{eff}$ , on montrerait de même que ((9))

$$5.3.6 \quad C^{eff} = \langle CA \rangle$$

$$5.3.7 \quad \beta^{eff} = \langle Ca + \beta \rangle$$

De 5.3.4 et 5.3.5 nous constatons que  $\Delta^{eff}$  se déduit de la connaissance du tenseur concentration  $B$  tandis que  $\alpha^{eff}$  nécessite la connaissance du tenseur concentration  $b$ . On obtient cependant une autre formulation plus intéressante de  $\alpha^{eff}$  en considérant les deux problèmes suivants ((10)) ((8)) :

Problème I (resp. II) :

Nous chauffons le milieu uniformément à la température  $\theta = \theta_0$  (resp.  $\theta_1$ ) en imposant la contrainte macroscopique  $\Sigma_0$  (resp.  $\Sigma_1$ ).

Les équations pour chacun des deux problèmes s'écrivent pour  $\mu = 0$  ou  $1$ .

$$5.3.7 \text{ a) } \Sigma^\mu = \langle \sigma^\mu \rangle$$

$$5.3.7 \text{ e) } E^\mu = \langle \epsilon^\mu \rangle$$

$$5.3.7 \text{ b) } \epsilon^\mu = \lambda \sigma^\mu + \alpha \theta^\mu$$

$$5.3.7 \text{ f) } E^\mu = \lambda_0^{\text{eff}} \Sigma_0^\mu + \alpha_0^{\text{eff}} \theta_0^\mu$$

$$5.3.7 \text{ c) } \sigma^\mu = B^\mu \Sigma^\mu + \theta^\mu \Theta^\mu$$

$$5.3.7 \text{ d) } \text{div} \sigma^\mu = 0$$

Soit  $u_{i,j}^\mu$  le gradient du déplacement total tel que :

$$\epsilon_{ij}^\mu = \frac{1}{2} (u_{ij}^\mu + u_{ji}^\mu)$$

nous combinons les deux problèmes en étudiant l'intégrale  $I$  :

$$I = \int_V \epsilon_{ij}^0 \sigma_{ij}^1 dV$$

De la symétrie de  $\sigma_{ij}^1$  on a :  $I = \int_V \epsilon_{ij}^0 \sigma_{ij}^1 dV = \int_V u_{ij}^0 \sigma_{ij}^1 dV$

en intégrant par parties :  $I = \int_V (u_{ij}^0)_{,j} \sigma_{ij}^1 dV - \int_V u_{ij}^0 \sigma_{ij,j}^1 dV$

or  $\text{div} \sigma^1 = 0$  :  $I = \int_V (u_{ij}^0)_{,j} \sigma_{ij}^1 dV$

avec le théorème de la divergence :  $I = \int_S u_{ij}^0 n_j \sigma_{ij}^1 dS$

sur  $S$ ,  $\sigma_{ij}^1 = \Sigma_{ij}^1$  :  $I = \Sigma_{ij}^1 \int_S u_{ij}^0 n_i dS$

tenant compte de la symétrie

de  $\Sigma_{ij}^1$  et du théorème de la divergence :  $I = \Sigma_{ij}^1 \int_V u_{ij}^0 dV = \Sigma_{ij}^1 \int_V \epsilon_{ij}^0 dV$

Par conséquent, on a établi

$$5.3.8 \quad \langle \epsilon^0 \sigma^1 \rangle = E^0 \Sigma^1$$

on montrerait de même que

$$5.3.9 \quad \langle \epsilon^1 \sigma^0 \rangle = E^1 \Sigma^0$$

En substituant  $E^\cdot$  par  $\lambda_0^{\text{eff}} \Sigma_0^\cdot + \alpha_0^{\text{eff}} \theta_0^\cdot$ , le second membre de 5.3.8 s'écrit :

$$E^0 \Sigma^1 = [ \lambda_0^{\text{eff}} \Sigma_0^1 + \alpha_0^{\text{eff}} \theta_0^1 ] \Sigma^1$$

Le premier membre de 5.3.8 devient successivement :

$$\begin{aligned} \text{de 5.3.7 b :} \quad & \langle \epsilon^0 \sigma^1 \rangle = \langle (b \sigma^0 + \alpha \theta_0) \sigma^1 \rangle \\ & \langle \epsilon^0 \sigma^1 \rangle = \langle (b \sigma^1) \sigma^0 + \alpha \theta_0 \sigma^1 \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{de 5.3.7 b :} \quad & \langle \epsilon^0 \sigma^1 \rangle = \langle (\epsilon^1 - \alpha \theta_1) \sigma^0 + \alpha \theta_0 \sigma^1 \rangle \\ & \langle \epsilon^0 \sigma^1 \rangle = \langle \epsilon^1 \sigma^0 \rangle + \langle \alpha \theta_0 \sigma^1 \rangle - \langle \alpha \sigma^0 \rangle \theta_1 \end{aligned}$$

$$\text{de 5.3.9 et 5.3.7 c :} \quad \langle \epsilon^0 \sigma^1 \rangle = \epsilon^1 \Sigma^0 + \langle \alpha \theta_0 (B^1 \Sigma^1 + b^1 \theta_1) \rangle - \langle \alpha \sigma^0 \rangle \theta_1$$

$$\begin{aligned} \text{de 5.3.7 f :} \quad & \langle \epsilon^0 \sigma^1 \rangle = [ b_1^{\text{eff}} \Sigma_1 + \alpha_1^{\text{eff}} \theta_1 ] \Sigma^0 \\ & \quad + \langle \alpha B^1 \rangle \Sigma^1 \theta_0 \\ & \quad + [ \langle \alpha b^1 \rangle \theta_0 - \langle \alpha \sigma^0 \rangle ] \theta_1 \end{aligned}$$

En utilisant ce résultat dans 5.3.8 et en regroupant les termes  $\Sigma_1$  et  $\theta_1$ , on obtient :

$$0 = [ (b_1^{\text{eff}} - b_0^{\text{eff}}) \Sigma^0 + \langle \alpha B^1 \rangle \theta_0 - \alpha_0^{\text{eff}} \theta_0 ] \Sigma^1 + [ \alpha_1^{\text{eff}} \Sigma^0 + \langle \alpha b^1 \rangle \theta_0 - \langle \alpha \sigma^0 \rangle ] \theta_1$$

Puisque les variables  $\Sigma^1$  et  $\theta_1$  sont indépendantes, on déduit les deux résultats :

$$\begin{aligned} & (b_1^{\text{eff}} - b_0^{\text{eff}}) \Sigma^0 + (\langle \alpha B^1 \rangle - \alpha_0^{\text{eff}}) \theta_0 = 0 \\ \text{et} \quad & \alpha_1^{\text{eff}} \Sigma^0 + \langle \alpha b^1 \rangle \theta_0 - \langle \alpha \sigma^0 \rangle = 0 \end{aligned}$$

La dernière expression s'écrit en substituant  $\sigma^0$

$$\alpha_1^{\text{eff}} \Sigma^0 + \langle \alpha b^1 \rangle \theta_0 - \langle \alpha (B_0 \Sigma^0 + b_0 \theta_0) \rangle = 0$$

D'où les deux équations, en regroupant les termes en  $\Sigma_0$  et  $\theta_0$  :

$$\begin{aligned} & (b_1^{\text{eff}} - b_0^{\text{eff}}) \Sigma^0 + (\langle \alpha B^1 \rangle - \alpha_0^{\text{eff}}) \theta_0 = 0 \\ & (\alpha_1^{\text{eff}} - \langle \alpha B_0 \rangle) \Sigma^0 + (\langle \alpha b^1 \rangle - \langle \alpha b_0 \rangle) \theta_0 = 0 \end{aligned}$$

De même, on déduit, de ces deux équations, les quatre relations suivantes :

$$\begin{aligned} b_1^{\text{eff}} &= b_0^{\text{eff}} \\ \alpha_0^{\text{eff}} &= \langle \alpha B^1 \rangle \\ \alpha_1^{\text{eff}} &= \langle \alpha B^0 \rangle \\ \langle \alpha b^1 \rangle &= \langle \alpha b^0 \rangle \end{aligned}$$

Par dualité, un raisonnement analogue montrerait :

$$\begin{aligned} C_1^{\text{eff}} &= C_0^{\text{eff}} \\ \beta_0^{\text{eff}} &= \langle \beta A^1 \rangle \quad ; \quad \beta_1^{\text{eff}} = \langle \beta A^0 \rangle \\ \langle \beta A^1 \rangle &= \langle \beta A^0 \rangle \end{aligned}$$

Ces résultats essentiels nous permettent de conclure par deux remarques :

- d'une part, en rappelant l'hypothèse que les tenseurs  $C_{ijkl}(r)$  ou  $D_{ijkl}(r)$  ne dépendent pas de la température, l'égalité  $D_{ijkl}^{\text{eff}} = D_{ijkl}^{\text{eff}}$  (ou  $C_{ijkl}^{\text{eff}} = C_{ijkl}^{\text{eff}}$ ) exprime que les tenseurs effectifs de l'élasticité sont indépendants du champ de température.

C'est aussi le cas, en ce qui concerne la théorie linéaire, des tenseurs concentrations. On pourra par conséquent déduire les tenseurs effectifs de l'élasticité et les tenseurs concentrations A ou B en considérant simplement le problème isotherme ( $\theta = 0$ ) examiné au paragraphe (8) où on utilise le raisonnement de Zeller et Dederichs.

- connaissant ainsi les tenseurs concentrations, nous pouvons alors utiliser la formulation effectivement plus intéressante des tenseurs thermiques effectifs :

$$\alpha^{\text{eff}} = \langle \alpha B \rangle \quad ; \quad \beta^{\text{eff}} = \langle \beta A \rangle$$

En nous résumant nous écrivons :

$$\begin{aligned} C^{\text{eff}} &= \langle CA \rangle \quad ; \quad D^{\text{eff}} = \langle \beta B \rangle \quad ; \quad C^{\text{eff}-1} = D^{\text{eff}} \\ \beta^{\text{eff}} &= \langle \beta A \rangle \quad ; \quad \alpha^{\text{eff}} = \langle \alpha B \rangle \quad ; \quad \alpha^{\text{eff}} = D^{\text{eff}} \beta^{\text{eff}} \end{aligned}$$

Signalons qu'il est aussi possible de déduire ces résultats en utilisant un raisonnement ((10)) basé sur un principe variationnel qui permet (entre autres) d'établir le résultat intermédiaire important :

$$\langle \sigma \rangle = \frac{\delta \langle \Psi \rangle}{\delta \langle \epsilon \rangle} \Big|_{\theta}$$

où  $\Psi$  est l'énergie libre volumique de Helmholtz (cf Laws ((2))).

Les résultats précédents sont des conséquences assez directes des définitions des tenseurs effectifs et des tenseurs concentrations. Développons l'étude en nous proposant à présent de résoudre le problème thermoélastique sans évolution de température dont nous rappelons les équations locales :

$$\begin{aligned} \epsilon &= \epsilon^e + \epsilon^a \\ \epsilon^a &= \alpha \theta \\ \sigma &= C \epsilon^e \\ \text{div } \sigma &= 0 \end{aligned}$$

et nous citerons deux raisonnements principaux :

. nous transformons l'équation aux dérivées partielles

$$\operatorname{div} \sigma = 0$$

en une équation intégrale à partir de laquelle se basent les problèmes d'inclusion, les méthodes self-consistentes ou les méthodes de résolution L.S.D. On obtiendra une expression des tenseurs concentrations.

. nous utilisons les principes variationnels de l'élasticité qui fournissent un encadrement des coefficients thermoélastiques effectifs ((10)) ((8)).

## 6) EQUATIONS INTEGRALES ET PROBLEMES D'INCLUSIONS

### 6.1. Formulation ((4))

La déformation totale  $\epsilon_{ij}$  se décompose en une partie élastique  $\epsilon_{ij}^e$  et anélastique  $\epsilon_{ij}^a$  d'origine thermique. Si  $u_i$  désigne la ième composante du vecteur déplacement total, on a :

$$6.1.1 \quad \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$$

La loi de comportement locale de Duhamel s'écrit en tenant compte des propriétés de symétrie du tenseur  $C_{ijkl}$  :

$$6.1.2 \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl} [u_{k,l} - \epsilon_{kl}^a]$$

L'équation d'équilibre  $\operatorname{div} \sigma = 0$

(on néglige les forces volumiques) conduit à l'équation aux dérivées partielles :

$$6.1.3 \quad [C_{ijkl}(n) [u_{k,l}(n) - \epsilon_{kl}^a(n)]]_{,i} = 0$$

Il s'agit d'une équation aux dérivées partielles à coefficients variables. Pour obtenir une formulation intégrale, nous décomposerons toute grandeur dépendant de la position en une partie uniforme (pour l'instant arbitrairement choisie) et une partie fluctuante.

$$6.1.4 \quad \begin{aligned} C_{ijkl}(n) &= C_{ijkl}^0 + \tilde{C}_{ijkl}(n) \\ u_{i,j}(n) &= u_{i,j}^0 + \tilde{u}_{i,j}(n) \end{aligned}$$

N.B. Il y a liberté sur le choix de  $u^0$ , il peut représenter par exemple la valeur moyenne spatiale  $\langle u \rangle$  ou le déplacement constaté sur la frontière.

En substituant les formes composées 6.1.4 de  $C_{ijkl}$  et  $u_{i,j}$  dans l'équation d'équilibre 6.1.3, nous obtenons l'équation :

$$6.1.5 \quad C_{ijkl}^{\circ} \tilde{u}_{l,ki} + [ \tilde{C}_{ijkl} u_{l,k} - C_{ijkl} \epsilon_{l,k}^a ],_i = 0$$

où le terme entre crochets est assimilé à la composante  $f_j(r)$  de forces volumiques fictives. L'équation aux dérivées partielles ainsi obtenue

$$C_{ijkl}^{\circ} \tilde{u}_{l,ki} + f_j(r) = 0$$

se résoud ((4)) à l'aide du tenseur de Green  $G_{jn}$  du milieu infini de constantes élastiques  $C_{ijkl}^{\circ}$  et pour un déplacement nul à la frontière.

$$\tilde{u}_m(r) = \int_V G_{jm}(r-r') f_j(r') dV'$$

ou aussi

$$\tilde{u}_m(r) = G_{jn} * f_j$$

Avec la notation du produit de convolution

\* ((11)) et les propriétés aux limites de  $G$ , l'expression de  $\tilde{u}_n$  s'écrit :

$$\tilde{u}_m = G_{jn} * f_j$$

dérivation

$$\tilde{u}_{n,m} = G_{jn,m} * f_j$$

ainsi en reprenant la décomposition 6.1.4 de  $u_{n,m}$  :

$$u_{n,m} = u_{n,m}^{\circ} + G_{jn,m} * f_j$$

substituons  $f_j$  :

$$u_{n,m} = u_{n,m}^{\circ} + G_{jn,m} * [ \tilde{C}_{ijkl} u_{l,k} - C_{ijkl} \epsilon_{l,k}^a ],_i$$

6.1.6

$$u_{m,m} = u_{m,m}^{\circ} + G_{jm,mi} * [ \tilde{C}_{ijkl} u_{l,k} - C_{ijkl} \epsilon_{l,k}^a ]$$

en définissant  $\Gamma_{mnij}^{\dagger}$  la partie symétrisée de  $G_{jn,mi}$  par rapport au couple  $(m,n)$  :

$$\Gamma_{mnij}^{\dagger} = \frac{1}{2} [ G_{jn,mi} + G_{jn,mi} ]$$

on obtient en identifiant les parties symétriques

$$6.1.7 \quad \epsilon_{mn} = \epsilon_{mn}^{\circ} + \Gamma_{mnij}^{\dagger} * [ \tilde{C}_{ijkl} \epsilon_{kl} - C_{ijkl} \epsilon_{kl}^a ]$$

revenons au formalisme intégral

$$6.1.8 \quad \epsilon_{mn}^{(r)} = \epsilon_{mn}^{\circ} + \int_V \Gamma_{mnij}^{\dagger}(r-r') [ \tilde{C}_{ijkl}(r') \epsilon_{kl}(r') - C_{ijkl}(r') \epsilon_{kl}^a(r') ] dV'$$

En accord avec les résultats établis par M. Berveiller et A. Zaoui ((4)) (on peut le vérifier aussi pour la formule 2.25 de ((12))) ; c'est une équation intégrale où  $\epsilon_{mn}$  est l'inconnue. Les méthodes de résolution sont complexes d'autant plus qu'il faut connaître la déformation anélastique  $\epsilon_{kl}^a(r')$ . Pour le cas statique, on peut considérer la répartition de température connue ( $\epsilon^a = \alpha\theta$ ) mais dans le cas contraire, il faut coupler à cette équation intégrale, l'équation d'évolution de la température (cf chapitre II). Nous citerons cependant pour  $\epsilon^a = 0$  une méthode de résolution par substitutions successives (Zeller - Déderichs ((13)), T.W. Chou ((9))). Nous nous proposons à présent de discrétiser cette équation en utilisant l'approximation du milieu granulaire (cf 5.1.b)

## 6.2. Milieu Granulaire :

Pour  $r_\alpha$  situé dans le grain  $\alpha$ , nous faisons une double approximation en remplaçant par leurs valeurs moyennes :

- la déformation totale :  $\epsilon(r_\alpha) \simeq \epsilon^\alpha = \frac{1}{V_\alpha} \int_{V_\alpha} \epsilon(r') dV'$
- la déformation anélastique :  $\epsilon^a(r_\alpha) \simeq \epsilon^{a\alpha} = \frac{1}{V_\alpha} \int_{V_\alpha} \epsilon^a(r') dV'$

En utilisant la fonction indicatrice  $\Delta_\alpha(r)$ , la déformation en un point  $r$  s'écrit suivant la somme :

$$\epsilon(r) = \sum_{\alpha=1}^N \epsilon^\alpha \Delta_\alpha(r)$$

L'équation intégrale en  $\epsilon$  6.1.8 s'écrit successivement :

Reprenons 6.1.8 :

$$\epsilon_{mn}(r) = \epsilon_{mn}^0 + \int_V \Gamma_{mnijs}^t(r-r') \left[ \tilde{C}_{ijkl}(r') \epsilon_{kl}(r') - C_{ijkl}(r') \epsilon_{kl}^a(r') \right] dV'$$

en bref :

$$\epsilon(r) = \epsilon^0 + \int_V \Gamma(r-r') \left[ \tilde{C}(r') \epsilon(r') - C(r') \epsilon^a(r') \right] dV'$$

discrétisons

$$\epsilon(r) = \epsilon^0 + \int_V \Gamma(r-r') \left[ \sum_{\alpha=1}^N (\tilde{C}^\alpha \epsilon^\alpha - C^\alpha \epsilon^{a\alpha}) \Delta_\alpha(r') \right] dV'$$

isolons les termes constants :

$$\epsilon(r) = \epsilon^0 + \sum_{\alpha=1}^N (\tilde{C}^\alpha \epsilon^\alpha - C^\alpha \epsilon^{a\alpha}) \int_V \Gamma(r-r') \Delta_\alpha(r') dV'$$

or

$$\int_V \Gamma(r-r') \Delta_\alpha(r') dV' = \int_{V_\alpha} \Gamma(r-r'_\alpha) dV'_\alpha$$

ainsi

$$\epsilon(r) = \epsilon^0 + \sum_{\alpha=1}^N (\tilde{C}^\alpha \epsilon^\alpha - C^\alpha \epsilon^{a\alpha}) \int_{V_\alpha} \Gamma(r-r'_\alpha) dV'_\alpha$$

en moyennant cette équation sur le volume du grain  $\beta$  et en définissant le tenseur d'ordre 4  $\Gamma_{mnijs}^{\beta\alpha}$  par :

6.2.1

$$\Gamma_{mnijs}^{\beta\alpha} = \frac{1}{V_\beta} \int_{V_\alpha} \int_{V_\beta} \Gamma_{mnijs}^t(r-r'_\alpha) dV'_\alpha dV'_\beta$$

c'est à dire

$$\Gamma_{mni j}^{\beta\alpha} = \frac{1}{V_\beta} \int_V \int_V \Gamma_{mni j}(\pi-\pi') \Delta_\beta(\pi) \Delta_\alpha(\pi') dV dV'$$

nous obtenons

$$6.2.2 \quad \epsilon^\beta = \epsilon^\circ + \sum_{\alpha=1}^N \Gamma^{\beta\alpha} (\tilde{C}^{\alpha} \epsilon^\alpha - C^{\alpha} \epsilon^{\alpha\alpha})$$

C'est un système linéaire de  $2N$  inconnues ( $\epsilon^\beta$  et  $\epsilon^{\alpha\beta}$ ) à  $N$  équations. Les  $N$  équations complémentaires sont les équations d'évolution de  $\epsilon^{\alpha\alpha}$ .

Sous forme indicielle :

$$6.2.3 \quad \epsilon_{ij}^\beta = \epsilon_{ij}^\circ + \sum_{\alpha=1}^N \Gamma_{ijpq}^{\beta\alpha} ( \tilde{C}_{pqmn}^{\alpha} \epsilon_{mn}^\alpha - C_{pqrs}^{\alpha} \epsilon_{rs}^{\alpha\alpha} )$$

En notant le tenseur  $\mathbb{I}^{\alpha\beta}$  par

$$\mathbb{I}^{\alpha\beta} = 0 \quad \text{si } \alpha \neq \beta$$

$$\mathbb{I}^{\alpha\beta} = \mathbb{1} \quad \text{si } \alpha = \beta \quad (\text{tenseur unité d'ordre 4 ; ((7))})$$

défini par

$$\mathbb{1}_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

Nous écrivons que

$$\epsilon_{ij}^\beta = \sum_{\alpha=1}^N \mathbb{I}_{ijpq}^{\beta\alpha} \epsilon_{pq}^\alpha$$

et le système linéaire devient en transposant les  $\epsilon_{mn}^\alpha$  :

$$\sum_{\alpha=1}^N [ \mathbb{I}_{ijmn}^{\beta\alpha} - \Gamma_{ijpq}^{\beta\alpha} \tilde{C}_{pqmn}^{\alpha} ] [ \epsilon_{mn}^\alpha ] = \epsilon_{mn}^\circ + \sum_{\alpha=1}^N ( -\Gamma_{ijpq}^{\beta\alpha} C_{pqrs}^{\alpha} \epsilon_{rs}^{\alpha\alpha} )$$

en bref :

$$\sum_{\alpha=1}^N [ \mathbb{I}^{\beta\alpha} - \Gamma^{\beta\alpha} \tilde{C}^{\alpha} ] [ \epsilon^\alpha ] = \epsilon^\circ - \sum_{\alpha=1}^N \Gamma^{\beta\alpha} C^{\alpha} \epsilon^{\alpha\alpha}$$

Nous pouvons disposer ce système linéaire en un système matriciel dont les inconnues sont les "blocs" matrices  $[\epsilon^\alpha]$  ; il faudra (formellement, numériquement peut-être) inverser la matrice  $[\mathbb{I} - \Gamma\tilde{C}]$  constituée des sous-matrices  $(\mathbb{I}^{\beta\alpha} - \Gamma^{\beta\alpha} \tilde{C}^{\alpha})$ .

Formellement, nous écrivons le système suivant :

$$[\mathbb{I} - \Gamma\tilde{C}][\epsilon] = \epsilon^\circ - \Gamma C \epsilon^a$$

d'où en recherchant l'inverse de  $[\mathbb{I} - \Gamma\tilde{C}]$

$$\epsilon = [\mathbb{I} - \Gamma\tilde{C}]^{-1} \epsilon^\circ - [\mathbb{I} - \Gamma\tilde{C}]^{-1} \Gamma C \epsilon^a$$

C'est une loi de localisation de la forme :

$$\epsilon = A \epsilon^o - a \epsilon^a$$

Nous obtenons un formalisme difficilement exploitable mais il mène cependant à la connaissance des tenseurs localisations (concentrations) et permet de décrire (avec l'approximation du milieu granulaire) la répartition des contraintes et déformations à l'échelle du grain et aussi de déduire le comportement macroscopique de l'échantillon.

C'est aussi ce que proposent les méthodes Self-Consistentes. Dans un premier temps, la mise en oeuvre d'un schéma Self-Consistent nécessite la résolution d'un problème d'interaction entre une inclusion et une matrice ((16)). Nous allons montrer d'abord qu'il existe un lien entre ce système d'équations et les problèmes d'inclusion d'Eshelby.

## 6.3 Problème d'Inclusion (Eshelby):

## 6.3.1 Conséquence de la formulation intégrale

En tenant compte de l'expression du tenseur

$$\Gamma_{mnij} = \frac{1}{2} (G_{jn,mi} + G_{jm,ni})$$

nous écrivons la formule intégrale 6.1.7 suivant:

$$\epsilon_{mn} = \epsilon_{mn}^0 + \frac{1}{2} [G_{jn,m} + G_{jm,n}] * [\tilde{C}_{ijkl} \epsilon_{kl} - C_{ijkl} \epsilon_{kl}^a], i$$

on ne change pas le derniers terme en introduisant la déformation anélastique arbitraire  $\xi^a$  mais supposée uniforme. En effet, puisque par dérivation:

$$[C_{ijkl} \xi_{kl}^a], i = 0$$

on peut écrire successivement pour ce terme:

$$\begin{aligned} & [\tilde{C}_{ijkl} \epsilon_{kl} - C_{ijkl} \epsilon_{kl}^a], i = \\ & [\tilde{C}_{ijkl} (\epsilon_{kl}^e + \epsilon_{kl}^a) - C_{ijkl} \epsilon_{kl}^e + C_{ijkl} \xi_{kl}^a], i = \\ & [\tilde{C}_{ijkl} \epsilon_{kl}^e - C_{ijkl} \tilde{\epsilon}_{kl}^a], i \end{aligned}$$

en définissant la notation:

$$\begin{aligned} \tilde{C} &= C - C^0 \\ \tilde{\epsilon}^a &= \epsilon^a - \xi^a \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi la forme intégrale équivalente à 6.1.7 suivant:

$$\epsilon_{mn} = \epsilon_{mn}^0 + \Gamma_{mnij} * [\tilde{C}_{ijkl} \epsilon_{kl}^e - C_{ijkl}^0 \tilde{\epsilon}_{kl}^a]$$

forme que nous discrétisons pour un milieu granulaire suivant:

$$6.3.1 \quad \epsilon_{mn}^\beta = \epsilon_{mn}^0 + \sum_{\alpha=1}^N \Gamma_{mnij}^{\beta\alpha} [\tilde{C}_{ijkl}^{\alpha} \epsilon_{kl}^{e\alpha} - C_{ijkl}^0 \tilde{\epsilon}_{kl}^{a\alpha}]$$

Pour un milieu biphasé constitué d'une inclusion ( $\beta=I$ ) plongée dans une matrice ( $\beta=M$ ) on obtient l'expression de la déformation totale dans l'inclusion:

$$\begin{aligned} \epsilon^I &= \epsilon^0 + \Gamma^{II} [ (C^I - C^0) \epsilon^{eI} - C^0 (\epsilon^{aI} - \xi^a) ] \\ &\quad + \Gamma^{IM} [ (C^M - C^0) \epsilon^{eM} - C^0 (\epsilon^{aM} - \xi^a) ] \end{aligned}$$

$C^0$  et  $\xi^a$  étant jusqu'ici arbitraires, il est judicieux à présent de choisir

$$C^0 = C^M \quad \text{et} \quad \xi^a = \epsilon^{aM}$$

afin d'obtenir l'expression plus simple (qui peut se déduire directement de 6.3.1 en posant  $\Gamma^{\beta\alpha} = 0$  si  $\alpha \neq \beta$ ):

$$\epsilon^I = \epsilon^0 + \Gamma^{II} [ (C^I - C^M) \epsilon^{eI} - C^M (\epsilon^{aI} - \epsilon^{aM}) ]$$

Soulignons que  $\epsilon^{\circ}$  désigne la déformation totale macroscopique (inclusion + matrice) et se décompose en une partie anélastique  $\epsilon^a$  et élastique  $\epsilon^e$  liée à la présence de la contrainte macroscopique  $\Sigma$

$$\Sigma = C^{eff} \epsilon^e$$

En décomposant en partie élastique et anélastique, nous obtenons:

$$[1 - \Gamma^{II} (c^I - c^N)] \epsilon^{eI} = \epsilon^e - [\epsilon^{aI} - \epsilon^a] - \Gamma^{II} c^N [\epsilon^{aI} - \epsilon^{aN}]$$

Posons P, un tenseur d'ordre 4 tel que:

$$(\epsilon^{aI} - \epsilon^a) = P (\epsilon^{aI} - \epsilon^{aN})$$

( si l'existence de P est délicate à déterminer, on pourra choisir  $\epsilon^{aN} = \epsilon^a$  ce qui revient à prendre P égal au tenseur unité; ce choix étant justifié par les méthodes self-consistantes examinées au paragraphe suivant ).

Si nous annulons la contrainte macroscopique  $\Sigma$  ( matrice libre), la déformation élastique globale disparaît mais il reste le champ des contraintes internes:

$$\sigma^I = C^I \epsilon^{eI}$$

lié à l'hétérogénéité des constantes élastiques et thermiques de l'inclusion et de la matrice.

Formellement, ce champ des contraintes résiduelles s'exprime suivant:

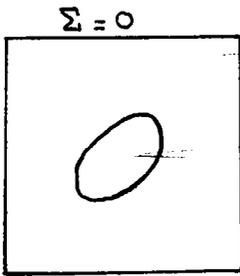
$$6.3.2 \quad \sigma^I = -C^I [1 - \Gamma^{II} (c^I - c^N)]^{-1} [P + \Gamma^{II} c^N] [\epsilon^{aI} - \epsilon^{aN}]$$

Sans insister alors sur la commutativité des produits des tenseurs utilisés, nous nous proposons à présent de montrer que Eshelby obtient avec une approche différente un formalisme analogue. Il considère pour cela une inclusion ellipsoïdale plongée dans une matrice libre de contrainte macroscopique, de constantes élastiques  $C_{ijkl}^M$  et déformée anélastiquement  $\epsilon^{aN}$ .

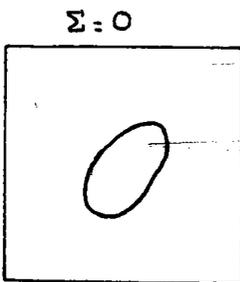
### 6.3.2 Formalisme d'Eshelby:

On calcule la déformation et la contrainte, uniformes, dans une inclusion ellipsoïdale, déformée anélastiquement et de constantes élastiques  $C_{ijkl}^I$ . Pour cela, nous considérons le problème équivalent:

- nous créons une déformation anélastique fictive (dite équivalente) dans une inclusion élastiquement homogène à la matrice et provoquant le même champ de contraintes et déformations que le problème réel.

Problème "réel"

- > Matrice d'élasticité  $C^M$   
(non déformée anélastiquement)
- > Inclusion d'élasticité  $C^I$
- > Déformation anélastique:  $\tilde{\epsilon}^{aI} = \epsilon^{aI} - \epsilon^{aM}$   
(on a transposé la déformation anélastique de la matrice)

Problème équivalent

- > Matrice d'élasticité  $C^M$
- > Inclusion d'élasticité  $C^M$
- > Déformation anélastique  $\epsilon_{eq}^A$

Pour le problème réel, la déformation totale s'écrit:

$$\epsilon^I = \epsilon^{eI} + \tilde{\epsilon}^{aI}$$

la contrainte s'écrit:

$$\sigma^I = C^I \epsilon^{eI}$$

Pour le problème équivalent, la déformation totale s'écrit selon Eshelby:

$$\epsilon^I = S \epsilon_{eq}^A$$

où  $S$  est le tenseur d'Eshelby et  $\epsilon_{eq}^A$  serait la déformation anélastique effectivement atteinte si l'inclusion n'était pas cernée par la matrice (déformation sans contrainte).

la contrainte s'écrit:

$$\sigma^I = C^M (\epsilon^I - \epsilon_{eq}^A)$$

Nous ne connaissons pas la déformation élastique du problème réel, mais nous disposons dans le problème équivalent du choix de la déformation anélastique  $\epsilon_{eq}^A$ . On choisit  $\epsilon_{eq}^A$  pour obtenir le même champ de contrainte:

$$\sigma^I = C^I \epsilon^{eI} = C^M (\epsilon^I - \epsilon_{eq}^A)$$

La condition d'égalité du champ des contraintes entraîne nécessairement l'égalité des déformations totales lorsqu'elles sont supposées continues sur la frontière de l'inclusion. En effet, puisque les matrices de chaque problème sont de même élasticité, on obtient la même déformation totale dans la matrice donc aussi dans l'inclusion compte tenu de l'uniformité de celle-ci dans le grain ellipsoïdal (Eshelby).

Nous écrivons par conséquent:

$$\epsilon^{\text{I}} = \epsilon^{\text{eI}} + \tilde{\epsilon}^{\text{A}} = S \epsilon_{\text{eI}}^{\text{A}}$$

en éliminant  $\epsilon^{\text{eI}}$  et  $\epsilon_{\text{eI}}^{\text{A}}$ , nous obtenons formellement:

$$6.3.3 \quad \sigma^{\text{I}} = c^{\text{M}} (S-1) [(c^{\text{I}} - c^{\text{M}}) S + c^{\text{M}}]^{-1} c^{\text{I}} [\epsilon^{\text{aI}} - \epsilon^{\text{aM}}]$$

Les formules donnant  $\sigma^{\text{I}}$  (6.3.2) et (6.3.3), l'une déduite de la formulation intégrale du problème pour un milieu granulaire dilué et l'autre, basée sur le raisonnement d'Eshelby pour une inclusion ellipsoïdale plongée dans une matrice d'élasticité uniforme sont équivalentes. Pour s'en assurer, retrouvons tout d'abord la définition du tenseur d'Eshelby  $S$  en considérant un milieu élastiquement homogène:

- l'équation 6.3.2

$$\sigma^{\text{I}} = -c^{\text{I}} [1 - \Gamma^{\text{II}} (c^{\text{I}} - c^{\text{M}})]^{-1} [P + \Gamma^{\text{II}} c^{\text{M}}] [\epsilon^{\text{aI}} - \epsilon^{\text{aM}}]$$

devient avec  $c^{\text{M}} = c^{\text{I}}$

$$\sigma^{\text{I}} = -c^{\text{M}} [P + \Gamma^{\text{II}} c^{\text{M}}] [\epsilon^{\text{aI}} - \epsilon^{\text{aM}}]$$

- l'équation 6.3.3 devient également:

$$\sigma^{\text{M}} = c^{\text{M}} (S-1) (\epsilon^{\text{aI}} - \epsilon^{\text{aM}})$$

En comparant ces deux équations, nous déduisons:

$$S = 1 - P - \Gamma^{\text{II}} c^{\text{M}}$$

En rappelant que  $P$  est défini par:  $(\epsilon^{\text{aI}} - \tilde{\epsilon}^{\text{A}}) = P (\epsilon^{\text{aI}} - \epsilon^{\text{aM}})$

nous retrouvons la définition du tenseur d'Eshelby ((15)):

$$S = -\Gamma^{\text{II}} c^{\text{M}}$$

et ce, lorsque  $P$  est le tenseur unité, c'est à dire lorsque

$$\tilde{\epsilon}^{\text{A}} = \epsilon^{\text{aM}}$$

ce qui revient à choisir une matrice d'anélasticité  $\epsilon^{\text{aM}}$  égale à celle  $\tilde{\epsilon}^{\text{A}}$  du milieu homogène équivalent. Les méthodes self-consistantes justifient ce choix; elles peuvent reprendre alors l'opération de

résolution d'un problème d'interaction entre une inclusion et une matrice ou bien reprendre le formalisme des équations intégrales utilisant le tenseur de Green .

En substituant  $S = -\Gamma^{II} C^M$

dans 6.3.2 et 6.3.3 nous obtenons deux formules en effet analogues :  
 expression de 6.3.2 ( on remplace  $-(P + \Gamma^{II} C^M)$  par  $(S-1)$  )

$$\sigma^I = C^I [1 - \Gamma^{II} (C^I - C^M)]^{-1} (S-1) (\epsilon^{aI} - \epsilon^{aM})$$

expression de 6.3.3 ( $[(C^I - C^M)S + C^M]^{-1}$  est remplacé par  $C^{M-1} [1 - (C^I - C^M) \Gamma^{II}]^{-1}$  )

$$\sigma^I = C^M (S-1) C^{M-1} [1 - (C^I - C^M) \Gamma^{II}]^{-1} C^I (\epsilon^{aI} - \epsilon^{aM})$$

## 7) LE SCHEMA SELF-CONSISTENT (à un site)

### 7.1. Caractérisation ((16)) :

Dans les équations intégrales précédentes, le tenseur d'élasticité  $C_{ijkl}^0$  est introduit de façon formelle en tant que partie uniforme du tenseur  $C_{ijkl}(r)$ . En se basant alors

- d'une part, sur un traitement statistique de l'ensemble des grains de l'échantillon (polycristal) afin de déduire un volume représentatif et
- d'autre part, sur l'étude de l'interaction entre une "inclusion" et une "matrice" ; le schéma Self-Consistent impose le choix

$$7.1.1 \quad C_{ijkl}^0 = C_{ijkl}^{eff}$$

et signifie ainsi que ((16))

"Les interactions entre un grain particulier et tous les autres, sont assimilées à celle entre le grain considéré et un milieu homogène constitué d'un matériau équivalent dont le comportement est celui du polycristal pris globalement".

Par conséquent, on écrit pour chaque grain, l'expression de la déformation totale  $\epsilon^a$  en reprenant 6.2.2

$$7.1.2 \quad \epsilon^{\beta} = \epsilon^0 + \sum_{\alpha=1}^N \Gamma^{\beta\alpha} ( \tilde{C}^{\alpha} \epsilon^{\alpha} - C^{\alpha} \epsilon^{a\alpha} )$$

$$\text{avec} \quad \tilde{C}^{\alpha} = C^{\alpha} - C^{eff}$$

où  $C^{eff}$  intervient dans la loi de comportement macroscopique :

$$\Sigma = C^{eff} [ E - \alpha^{eff} \theta ]$$

Pour un échantillon de  $N$  grains vérifiant les hypothèses de macrohomogénéité de Hill (dans ce cas  $E = \langle \epsilon \rangle = E^0$ ), le système 7.1.2 constitue  $N$  équations où  $\epsilon^\alpha$  ( $\alpha = 1$  à  $N$ ) et  $C^{\text{eff}}$  sont les  $N + 1$  inconnues (les  $N$  déformations anélastiques  $\epsilon^{\alpha\alpha}$  sont données par les équations d'évolution). On dispose (cf 5.1.5) de la  $N + 1$  ième équation en écrivant que la déformation macroscopique résulte de la moyenne des déformations de chaque grain :

$$7.1.3 \quad E = \sum_{\alpha=1}^N f^\alpha \epsilon^\alpha$$

La résolution du système non linéaire ainsi déduit n'est pas simple, les équations 7.1.2 et 7.1.3 sont couplées. On ne peut résoudre le système linéaire 7.1.2 en  $\epsilon^\alpha$  sans connaître  $C^{\text{eff}}$  d'autant plus que le tenseur  $\Gamma^{\alpha\beta}$  déduit du tenseur de Green de l'élasticité dépend implicitement de  $C^{\text{eff}}$ .

Nous simplifions ce système en supposant l'uniformité de  $\Gamma^{\alpha\beta}$  déduit du tenseur  $G_{(n,n)}$  ce qui annule les coefficients  $\Gamma^{\alpha\beta}$  pour  $\alpha \neq \beta$ , et nous obtenons pour chaque grain la configuration d'une inclusion plongée dans une matrice d'élasticité  $C^{\text{eff}}$ . C'est le cas le plus simple où l'on rejoint le problème d'interaction de la matrice avec une inclusion (schéma Self-Consistent à 1 site). On peut montrer sur des considérations statistiques que, pour un milieu parfaitement désordonné, ce schéma est exact. En effet, dans ce cas, l'assimilation des interactions mécaniques entre chaque grain et tous les autres à celles entre ce grain et la matrice du milieu homogène équivalent ((4)), est exacte. Mais il convient de développer le schéma Self-Consistent à 1 site dès qu'il apparaît pour les grains des "particularités géographiques" de voisinage. Traiter le modèle de la paire d'inclusion permet alors d'élaborer le schéma plus précis à deux sites (on peut effectivement généraliser le schéma Self-Consistent avec une formulation à  $N$  sites).

Pour  $\Gamma^{\alpha\beta} = 0$  lorsque  $\alpha \neq \beta$  nous reprenons 6.2.3

$$\epsilon^\alpha = (\mathbb{1} - \Gamma^{\alpha\alpha} \tilde{C}^\alpha)^{-1} E - (\mathbb{1} - \Gamma^{\alpha\alpha} \tilde{C}^\alpha)^{-1} \Gamma^{\alpha\alpha} C^\alpha \epsilon^{\alpha\alpha}$$

en substituant  $\epsilon^{\alpha\alpha}$  par  $\alpha^{\alpha\theta}$

et en notant :

$$7.1.4 \quad A^\alpha = (\mathbb{1} - \Gamma^{\alpha\alpha} \tilde{C}^\alpha)^{-1} = (\mathbb{1} - \Gamma^{\alpha\alpha} (C^\alpha - C^{\text{eff}}))^{-1}$$

$$7.1.5 \quad \alpha^\alpha = (\mathbb{1} - \Gamma^{\alpha\alpha} \tilde{C}^\alpha)^{-1} \Gamma^{\alpha\alpha} C^\alpha \alpha^\alpha$$

nous obtenons la loi de localisation :

$$7.1.6 \quad \epsilon^\alpha = A^\alpha E - \alpha^\alpha \theta$$

Nous joignons à ces N équations donnant  $\epsilon^\alpha$  en fonction de  $C^{\text{eff}}$ , l'équation supplémentaire :

$$E = \sum_{\alpha=1}^N f^\alpha \epsilon^\alpha \quad (\text{qui traduit : } E = \langle \epsilon \rangle).$$

Cherchons tout d'abord le tenseur effectif d'élasticité  $C^{\text{eff}}$ . Il dépend de la rigidité élastique du matériau et il suffit (cf paragraphe 5.3.) de considérer le problème isotherme  $\theta = 0$ .

En annulant  $\theta$  dans la loi de localisation  $\epsilon^\alpha = A^\alpha E - \alpha^\alpha \theta$  et en substituant alors  $\epsilon^\alpha$  dans :

$$E = \sum_{\alpha=1}^N f^\alpha \epsilon^\alpha$$

nous obtenons l'équation :

$$\sum_{\alpha=1}^N f^\alpha A^\alpha = \mathbb{1}$$

où les  $A^\alpha$  sont donnés par 7.1.4 et dépendent de  $C^{\text{eff}}$ .

Nous obtenons ainsi une équation implicite en  $C^{\text{eff}}$ .

Connaissant alors  $C^{\text{eff}}$  nous déduisons chaque tenseur concentration  $A^\alpha$  et  $\alpha^\alpha$  (de 7.1.4 et 7.1.5) et en rappelant que les tenseurs effectifs

$$\text{vérifient :} \quad \beta^{\text{eff}} = \langle \beta A \rangle$$

$$\text{c'est à dire} \quad \beta^{\text{eff}} = \sum_{\alpha=1}^N \beta^\alpha A^\alpha f^\alpha$$

nous pouvons donc aussi connaître  $\beta^{\text{eff}}$ .

Les calculs ne sont pas simples. B. Budiansky ((17)) par exemple donne les résultats pour des grains isotropes tandis que l'étude de Zeller et Dédérichs ((13)) par la méthode de substitutions successives (L.S.D.) proposent un développement de  $C^{eff}$ .

## 8) EQUATIONS L.S.D ((13))

Nous considérons le problème isotherme ( $\theta = 0$ ) et définissons le tenseur concentration A reliant la déformation macroscopique et la déformation locale

$$8.1 \quad \epsilon = A \langle \epsilon \rangle$$

L'intégration des équations locales, traduisant l'équilibre

$$\text{div } \sigma = 0$$

et la loi de comportement

$$8.2 \quad \sigma = C \epsilon$$

conduisent à l'équation intégrale

$$8.3 \quad \epsilon_{mn}(r) = \epsilon_{mn}^0 + \int_V \Gamma_{mni j} (r-r') [\tilde{C}_{ij kl}(r') \epsilon_{kl}(r')] dV'$$

(Il suffit de reprendre le raisonnement du paragraphe 6 des équations intégrales en annulant la partie anélastique des déformations ; 8.3 est déduite de 6.1.8)

L'intégrale de convolution s'écrit à l'aide du formalisme L.S.D. ((13)), (Lippman, Schwinger, Dyson) suivant

$$8.4 \quad \epsilon_{mn} = \epsilon_{mn}^0 + \Gamma_{mni j} \tilde{C}_{ij kl} \epsilon_{kl}$$

Symboliquement nous avons remplacé le produit de convolution \* par le produit multiplicatif. Dans certains calculs formels, nous appliquerons littéralement la règle de multiplication dans l'anneau (non commutatif) défini par le produit de convolution.

L'équation intégrale précédente s'écrit en substituant  $\epsilon$  par la loi de localisation :

$$8.5 \quad \epsilon = \epsilon^{\circ} + \Gamma \tilde{C} A \langle \epsilon \rangle$$

ou aussi 
$$A \langle \epsilon \rangle = \epsilon^{\circ} + \Gamma \tilde{C} A \langle \epsilon \rangle$$

En passant à la valeur moyenne de 8.5 nous obtenons :

$$\langle \epsilon \rangle = \epsilon^{\circ} + \langle \Gamma \tilde{C} A \rangle \langle \epsilon \rangle$$

et nous éliminons la partie uniforme  $\epsilon^{\circ}$  par soustraction :

$$A \langle \epsilon \rangle - \langle \epsilon \rangle = \Gamma \tilde{C} A \langle \epsilon \rangle - \langle \Gamma \tilde{C} A \rangle \langle \epsilon \rangle$$

Pour des grains de même taille, Zeller et Déderichs considèrent  $\Gamma$  uniforme.

En factorisant  $\Gamma$  et  $\langle \epsilon \rangle$

$$(A - \mathbb{1}) \langle \epsilon \rangle = \Gamma [\tilde{C} A - \langle \tilde{C} A \rangle] \langle \epsilon \rangle$$

"Simplifiant" par  $\langle \epsilon \rangle$ , nous obtenons l'équation où  $A$  est l'inconnue et où  $\Gamma$  dépend du tenseur de Green de l'élasticité pour les composantes  $C_{ijkl}^{\circ}$  uniformes arbitrairement choisies ( $\tilde{C} = C - C^{\circ}$ )

$$A - \mathbb{1} = \Gamma [\tilde{C} A - \langle \tilde{C} A \rangle]$$

Si nous imposons le choix  $C^{\circ} = C^{\text{eff}}$

en rappelant que  $C^{\text{eff}} = \langle CA \rangle$

on obtient le même schéma de résolution exposé dans le paragraphe précédent (méthodes Self-Consistentes). Pour ce choix :

$$\langle \tilde{C} A \rangle = 0$$

on déduit

$$A = (1 - \Gamma \tilde{C})^{-1}$$

et de

$$C^{\text{eff}} = \langle CA \rangle$$

on obtient l'équation implicite en  $C^{\text{eff}}$  :

$$C^{\text{eff}} = \langle C (1 - \Gamma \tilde{C})^{-1} \rangle$$

Il est cependant possible ((13)) d'obtenir une forme explicite de  $C^{\text{eff}}$  par l'intermédiaire de la "T matrice" reliant par définition la déformation  $\epsilon$  à la partie uniforme  $\epsilon^{\circ}$  :

$$\epsilon = \epsilon^{\circ} + \Gamma T \epsilon^{\circ} \quad (\text{en symbolisme L.S.D})$$

Substituant  $\epsilon$  dans 8.4, on déduit successivement ;  
8.4 s'écrit :

$$\epsilon = \epsilon^{\circ} + \Gamma \tilde{C} \epsilon$$

d'où

$$\epsilon^{\circ} + \Gamma T \epsilon^{\circ} = \epsilon^{\circ} + \Gamma \tilde{C} [\epsilon^{\circ} + \Gamma T \epsilon^{\circ}]$$

d'où

$$T = \tilde{C} + \tilde{C} \Gamma T$$

et symboliquement :

$$T = \frac{\tilde{C}}{1 - \Gamma \tilde{C}}$$

Reprenant la définition de T, du tenseur concentration A et l'équation intégrale en  $\epsilon$  (8.4), nous obtenons par passage à la valeur moyenne (avec l'hypothèse,  $\Gamma$  uniforme)

$$\epsilon^{\circ} + \Gamma \langle T \rangle \epsilon^{\circ} = \epsilon^{\circ} + \Gamma \langle CA \rangle \langle \epsilon \rangle$$

mais

$$\langle \tilde{C} A \rangle = \langle CA \rangle - C^{\circ} \langle A \rangle$$

rappelons que

$$\langle A \rangle = 1$$

et

$$\langle CA \rangle = C^{\text{eff}}$$

ainsi

$$\langle \tilde{C} A \rangle = C^{\text{eff}} - C^{\circ} = \tilde{C}^{\text{eff}}$$

en substituant  $\tilde{C} A$ , on obtient en éliminant  $\epsilon^{\circ}$  et en "simplifiant" par  $\Gamma$  :

$$\langle T \rangle \epsilon^{\circ} = \tilde{C}^{\text{eff}} \langle \epsilon \rangle$$

substituons  $\langle \epsilon \rangle$  par

$$\langle \epsilon \rangle = \epsilon^{\circ} + \Gamma \langle T \rangle \epsilon^{\circ}$$

nous déduisons l'équation intégrale :

$$\langle T \rangle \epsilon^{\circ} = [C^{\text{eff}} - C^{\circ}] [\epsilon^{\circ} + \Gamma \langle T \rangle \epsilon^{\circ}]$$

c'est à dire

8.7

$$C^{\text{eff}} - C^{\circ} = \frac{\langle T \rangle}{1 + \Gamma \langle T \rangle}$$

Nous choisissons  $C^0$  comme la valeur moyenne volumique du tenseur d'élasticité  $C$

$$C^0 = \langle C \rangle$$

Pour un milieu microhétérogène, le terme  $\tilde{C}$  est petit et assimilable à un terme de perturbation. On peut obtenir une solution approchée de  $C^{\text{eff}}$  sous la forme d'un développement limité en série des "puissances" de l'hétérogénéité  $\tilde{C}$  par substitutions successives dans l'équation intégrale 8.7 :

$$C^{\text{eff}} = \langle C \rangle + \frac{\langle T \rangle}{1 + \Gamma \langle T \rangle}$$

mais de 8.6, en moyennant :

$$\langle T \rangle = \left\langle \frac{\tilde{C}}{1 - \Gamma \tilde{C}} \right\rangle$$

c'est à dire

$$\langle T \rangle = \langle \tilde{C} (1 + \Gamma \tilde{C} + \Gamma \tilde{C} \Gamma \tilde{C} + \Gamma \tilde{C} \Gamma \tilde{C} \Gamma \tilde{C} + \dots) \rangle$$

(nous appliquons en fait la règle, pour un produit multiplicatif de l'approximation

$$\frac{1}{1-\epsilon} \approx 1 + \epsilon + \epsilon^2 + \epsilon^3 + \dots \quad \text{pour } \epsilon \text{ petit})$$

D'où :

$$C^{\text{eff}} = \langle C \rangle + \frac{\langle \tilde{C} \Gamma \tilde{C} + \tilde{C} \Gamma \tilde{C} \Gamma \tilde{C} + \dots \rangle}{1 + \Gamma \langle \tilde{C} (1 + \Gamma \tilde{C} + \Gamma \tilde{C} \Gamma \tilde{C} + \dots) \rangle}$$

et à l'ordre 4 en  $\tilde{C}$  ((13)) :

$$C^{\text{eff}} = \langle C \rangle + \langle \tilde{C} \Gamma \tilde{C} \rangle + \langle \tilde{C} \Gamma \tilde{C} \Gamma \tilde{C} \rangle + \langle \tilde{C} \Gamma \tilde{C} \Gamma \tilde{C} \Gamma \tilde{C} \rangle - \langle \tilde{C} \Gamma \tilde{C} \rangle \Gamma \langle \tilde{C} \Gamma \tilde{C} \rangle + \dots$$

## 9) PRINCIPES D'ENERGIE ((10))

D'autres méthodes, dont nous indiquons l'essentiel du raisonnement, utilisent les principes d'extremums de l'élasticité et établissent un encadrement des valeurs des coefficients effectifs. Elles sont dites méthodes d'énergie et elles permettent d'écrire, pour un problème aux limites données (déplacement  $\epsilon^0$  et contrainte  $\sigma^0$  imposés sur la frontière), un encadrement de l'énergie thermoélastique potentielle  $U_p$  et complémentaire  $U_c$  du système. L'encadrement ainsi défini permet de déduire une borne supérieure et une borne inférieure des coefficients effectifs.

On définit  $U_p$  et  $U_c$  par :

$$9.1 \quad U_p = \frac{1}{V} \left[ \int_V \Psi \, dv - \int_{S_\sigma} \sigma_{ij} u_i n_j \, ds - \int_V F_i u_i \, dv \right]$$

$$9.2 \quad U_c = -\frac{1}{V} \left[ \int_V G \, dv + \int_{S_u} \sigma_{ij} n_j u_i \, ds \right]$$

où  $\Psi$  est l'énergie libre volumique de Helmholtz

$G$  est l'énergie libre volumique de Gibbs

$S_\sigma$  est la partie de la frontière  $S$  du solide sur laquelle les contraintes sont imposées.

$S_u$  est la partie de la frontière  $S$  du solide sur laquelle les déplacements sont imposés.

$F_i$  sont les composantes des forces volumiques.

Soit alors le problème en contrainte défini par

$$S = S_{\sigma^0} \quad (\text{on impose la contrainte } \sigma^0 \text{ sur la surface du solide)}$$

dont les énergies thermoélastiques sont notées :  $U_p^{\sigma^0}$  et  $U_c^{\sigma^0}$ .

En utilisant les principes variationnels de l'élasticité, nous déduisons l'encadrement :

$$9.3 \quad -\tilde{U}_c^\sigma \leq -U_c^{\sigma^0} \leq \tilde{U}_p^\epsilon$$

où  $\tilde{U}_c^\sigma$  est l'énergie thermoélastique complémentaire calculée pour un champ de contrainte admissible  $\sigma_{ij}$ .

où  $\tilde{U}_p^\epsilon$  est l'énergie thermoélastique potentielle calculée pour un champ de déplacement admissible  $\epsilon_{ij}$ .

En substituant les termes de 9.3 par leurs expressions en fonction des tenseurs élastiques, thermiques et des champs de contraintes et déformations, on démontre le résultat (cf ((10)), ((17)) pour plus de détails et de rigueur) permettant de déduire les bornes des modules effectifs élastiques ou thermiques.

$$\begin{aligned}
 9.4 \quad & -\frac{1}{V} \int_V \left[ \frac{1}{2} \Delta_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} + \alpha_{ij} \sigma_{ij} \Theta + \frac{1}{2} g \Theta^2 \right] dV \\
 & \leq -\frac{1}{2} \Delta_{ijkl}^{\text{eff}} \sigma_{ij}^{\circ} \sigma_{kl}^{\circ} - \alpha_{ij} \sigma_{ij}^{\circ} \Theta - \frac{1}{2} g^{\text{eff}} \Theta^2 \\
 & \leq \frac{1}{V} \int_V \left[ \frac{1}{2} C_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} - \beta_{ij} \epsilon_{ij} \Theta - \frac{1}{2} h \Theta^2 \right] dV - \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij}^{\circ} \epsilon_{ij} dV
 \end{aligned}$$

Ces méthodes basées sur les principes variationnels de l'élasticité ne permettent pas de déduire les tenseurs concentrations mais elles apportent un complément d'informations très utile aux résultats approchés fournis par les méthodes Self-Consistentes. L'emploi simultané de telles méthodes est intéressant.

## 10) MILIEU BIPHASE

Si, pour un milieu biphasé, nous reprenons l'expression des tenseurs effectifs (5.3.10) et (5.3.11) :

$$\Delta^{\text{eff}} = \langle \Delta B \rangle$$

et

$$\alpha^{\text{eff}} = \langle \alpha B \rangle$$

nous obtenons les équations :

$$\Delta^{\text{eff}} = \sum_{\alpha=1}^2 f^{\alpha} \Delta^{\alpha} B^{\alpha} = f^{(1)} \Delta^{(1)} B^{(1)} + f^{(2)} \Delta^{(2)} B^{(2)}$$

et

$$\alpha^{\text{eff}} = f^{(1)} \alpha^{(1)} B^{(1)} + f^{(2)} \alpha^{(2)} B^{(2)}$$

en rappelant que

$$\langle B \rangle = \mathbb{1}$$

c'est à dire

$$f^{(1)} B^{(1)} + f^{(2)} B^{(2)} = \mathbb{1}$$

nous obtenons trois équations. Il est possible d'éliminer  $B^{(1)}$  et  $B^{(2)}$  et c'est la particularité offerte dans le cas d'un matériau biphasé, afin de déduire ainsi  $\alpha^{\text{eff}}$  connaissant  $\Delta^{\text{eff}}$ , en notant P l'inverse de  $[\Delta^{(1)} - \Delta^{(2)}]$

on obtient ((10))

$$\alpha^{\text{eff}} = [\alpha^{(1)} - \alpha^{(2)}] P [\Delta^{\text{eff}} - \Delta^{(2)}] + \alpha^{(2)}$$

De cette formule générale, on peut en particulier (Christensen, 10) déduire l'expression de la dilatation thermique effective pour un solide macroscopiquement isotrope constitué de deux phases isotropes. On a, avec des grandeurs scalaires :

$$\alpha^{eff} = [f^{(1)} \alpha^{(1)} + f^{(2)} \alpha^{(2)}] + \frac{[\alpha^{(1)} - \alpha^{(2)}]}{[\gamma_{K^{(1)}} - \gamma_{K^{(2)}}]} \left[ \frac{1}{K^{eff}} - \frac{f^{(1)}}{K^{(1)}} - \frac{f^{(2)}}{K^{(2)}} \right]$$

où K désigne le module de compressibilité.

## 11) HOMOGENEISATION DES MILIEUX PERIODIQUES

Dans les chapitres précédents, les méthodes utilisées raisonnent en termes de concentrations de phases et de fait, ne tiennent pas compte, en première approche (à un site), de la position des grains. Elles s'adaptent à des milieux dont les inclusions de même taille sont réparties aléatoirement. On déduit alors le milieu homogène équivalent par la méthode des valeurs moyennes ou la méthode variationnelle (établissement des bornes) en choisissant un volume représentatif (au sens statistique) du milieu.

Ces méthodes sont moins fondées pour des textures morphologiques telles que les milieux périodiques ou quasi-périodiques. Pour ces milieux, le volume représentatif se réduit à la cellule élémentaire (celle qui par juxtapositions successives engendre le milieu). Un argument mathématique, très utile, consiste à s'intéresser à deux échelles géographiques proportionnelles  $x$  et  $y$ . Précisons l'intérêt de ces deux échelles.

Un facteur déterminant dans le choix d'une méthode de modélisation est la taille de la cellule hétérogène (grain) par rapport à la matrice de volume imposé fixe. Pour des grains de grandes tailles, le nombre d'inclusions est réduit et une étude directe est possible. On signifie par étude directe, la possibilité de discrétiser le milieu en plusieurs sous domaines et de le modéliser, analytiquement ou numériquement, en tenant compte des conditions de liaisons tout en manipulant un nombre raisonnable d'inconnues. Par contre, pour de petites tailles, la discrétisation du milieu est fastidieuse.

D'où l'intérêt de la méthode d'homogénéisation des milieux périodiques utilisant (théorie des perturbations ((18))) un "artifice" mathématique : il s'agit de mettre en évidence les deux "traits de caractère" du matériau, à savoir, d'une part le comportement macroscopique et d'autre part son comportement microscopique. Pour cela, on fait apparaître dans les équations locales de la thermoélasticité :

- d'une part la variable  $x$ , dite échelle macroscopique, dont le rôle est de repérer la position d'une cellule dans la matrice par rapport à toutes les autres.

- et d'autre part la variable  $y$ , dite échelle microscopique, affectée à la cellule élémentaire dont le caractère local la destine à recueillir les informations d'ordre microscopiques (contributions de la microstructure).

Détaillons et par là même, nous citons une variante de la méthode d'homogénéisation. Les lois locales s'écrivent ((3)) :

$$\text{comportement : } \sigma_{ij}^{\Delta}(x, t) = C_{ijkl}^{\Delta}(x) \epsilon_{kl}^{\Delta}(x, t) - \beta_{ij}^{\Delta}(x) \theta^{\Delta}(x, t)$$

$$\text{évolution : } \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ k_{ij}^{\Delta} \frac{\partial \theta^{\Delta}}{\partial x_j} \right] - T_0 \beta_{ij}^{\Delta} \frac{\partial \epsilon_{ij}^{\Delta}}{\partial t} - T_0 h^{\Delta} \frac{\partial \theta^{\Delta}}{\partial t} = 0$$

équilibre (tenant compte des effets d'inerties et annulant les forces volumiques).

$$\sigma_{ij,j}^{\Delta} = \rho^{\Delta} \frac{\partial^2 u^{\Delta}}{\partial t^2}$$

L'indice  $\Delta$  témoigne de la taille du grain, c'est le rapport de réduction d'une échelle à l'autre :

$$x = \Delta y$$

Les coefficients sont définis par, insistant ainsi sur la variable microscopique  $y$  :

$$C_{ijkl}^{\Delta} = C_{ijkl} \left( \frac{x}{\Delta} \right) \quad \beta_{ij}^{\Delta} = \beta_{ij} \left( \frac{x}{\Delta} \right) \quad \text{etc...}$$

$\Delta$  étant un petit paramètre, nous exploitons les techniques des méthodes de perturbations et nous considérons que les variables  $x$  et  $y$  sont indépendantes : on suppose que les champs des contraintes, des déformations et des températures s'écrivent sous la forme des développements asymptotiques

$$u^{\Delta}(x, t) = u_0(x, t) + \Delta u_1(x, y, t) + \Delta^2 u_2(x, y, t) + \dots$$

$$\theta^{\Delta}(x, t) = \theta_0(x, y, t) + \Delta \theta_1(x, y, t) + \Delta^2 \theta_2(x, y, t) + \dots$$

$$\sigma^{\Delta}(x, t) = \sigma_0^{\Delta}(x, y, t) + \Delta \sigma_1^{\Delta}(x, y, t) + \Delta^2 \sigma_2^{\Delta}(x, y, t) + \dots$$

On substitue ces équations dans les lois locales précédentes en prenant garde de transformer les dérivations

$$\frac{d}{dx_i} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{\Delta} \frac{\partial}{\partial y_i}$$

En raison de l'indépendance des variables  $x$  et  $y$ .

Il reste, selon le schéma classique des méthodes de perturbations, à identifier suivant les puissances successives de  $\Delta$  obtenant ainsi une série d'équations aux dérivées partielles sur les  $u_0, u_1, \dots$  ;  $\theta_0, \theta_1, \dots$  ;  $\sigma_0, \sigma_1, \dots$

Ces équations sont considérées comme formulations fortes de problèmes variationnels et sont remplacées par leurs formulations faibles. Non spécialiste, j'invite le lecteur à se référer aux ouvrages de Sanchez-Palencia ((19)), Suquet ((20)), Francfort ((3)).

Pour résoudre la série des équations aux dérivées partielles, nous substituons aux conditions aux limites une condition de périodicité en  $y$  sur les fonctions  $u_0, u_1, \dots, \sigma_0, \sigma_1, \dots; \theta_0, \theta_1, \dots$ . Cette condition de périodicité peut se justifier en remarquant qu'elle traduit le fait assez intuitif que :

- les fonctions en deux points homologues par  $y$  périodicité, séparés de quelques cellules sont presque égales. (proximité et similitude microscopique)
- les fonctions en deux points de la même cellule mais non homologues par  $y$  périodicité peuvent être différentes (rapidité des variations microscopiques)
- les fonctions en deux points même homologues mais éloignés dans l'échelle macroscopique sont différentes (variations sensibles sur une grande échelle).

Pour la méthode d'homogénéisation, le comportement du milieu homogène équivalent est donné par la limite des champs  $\sigma^\Delta, \theta^\Delta$  et  $u^\Delta$  lorsque  $\Delta$  tend vers zéro : il est naturel en effet, pour une microstructure, que la solution limite trouvée (elle existe et est unique) corresponde au M.H.E.

Remarquons que les travaux des auteurs cités ne se cantonnent pas à l'aspect statique mais conviennent aussi à la thermoélasticité linéaire couplée dynamique. Le matériau hétérogène soumis à des conditions de frontières par exemple de type Dirichlet ((3)) est approximé, via homogénéisation, par le M.H.E. muni des mêmes conditions de frontières.

Ainsi, l'homogénéisation tient compte du couplage thermoélastique et peut mettre en évidence l'effet anélastique engendré par une différence de température entre l'extérieur et l'intérieur du matériau. Il s'agit là du couplage lié aux conditions de frontières et donc de nature macroscopique.

Il est à noter, au cours de la recherche des tenseurs concentrations (§5.3) et à l'ordre des développements employés, qu'il faut prendre garde à l'aspect microscopique de la dissipation thermoélastique liée aux gradients internes de température afin, en fait, de ne pas masquer ceux-ci par le processus même d'homogénéisation. Cependant, l'homogénéisation modélise la dissipation interne pour des milieux viscoélastiques. On peut envisager, comme l'indique Zener ((21)) par une méthode de séparation des variables (temps et espace) d'éliminer l'aspect position des gradients de température et de déduire une fonctionnelle en temps analogue à la fonctionnelle d'un milieu viscoélastique et de là, d'utiliser les résultats de la méthode d'homogénéisation.

## C H A P I T R E    I I

### EFFET DISSIPATIF

ET

### EFFET VISCOELASTIQUE

Nous abordons à présent la partie de  
la thermoélasticité liée à l'aspect  
évolution de la conduction de la chaleur.  
Il s'agit de la thermoélasticité transitoire.

Nous reprenons l'équation 4.18 de la conduction de la chaleur

$$1.1 \quad T_0 h \dot{\theta} = [k_{ij} \theta_{,i}]_{,j} - T_0 \beta_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}$$

en rappelant que

$\theta$  est l'écart de température par rapport à la température de référence  $T$

$\epsilon_{ij}$  la déformation

$\beta_{ij}$  le tenseur de dilatation thermique qui apparaît dans cette équation comme le coefficient de couplage entre  $\theta$  et  $\epsilon_{ij}$

$k_{ij}$  le tenseur de conduction thermique

$T_0 h$  la chaleur spécifique à déformation constante.

Nous nous proposons de transformer cette équation aux dérivées partielles de type parabolique en une équation intégrale. La procédure employée s'applique pour les équations de la forme :

$$1.2 \quad \mathcal{C}(x) \dot{\theta} = [k_{ij} \theta_{,i}]_{,j} + H(x,t)$$

Nous notons donc  $\mathcal{C}(x) = T_0 h(x)$

et nous remplaçons le terme de couplage thermomécanique

$- T_0 \beta_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}$  par le terme  $H(x,t)$ .

Nous nous intéressons ainsi à l'aspect thermocinétique de l'équation de la conduction de la chaleur 1.2 où  $H(x,t)$  désigne un terme source ((22)).

## 1) FORME INTEGRALE DE L'EQUATION DE LA CHALEUR

Plutôt que d'introduire immédiatement (comme nous l'avons fait dans le chapitre I pour les équations aux dérivées partielles de l'élasticité) la forme de l'équation intégrale cherchée, nous présentons un plan de calculs, certes artificiel, mais qui permet de comprendre et de justifier la notion et l'emploi de la solution élémentaire de la chaleur.

Nous décomposons tout d'abord la chaleur spécifique  $C(x)$  et le tenseur conductivité  $k_{ij}(x)$  en une partie uniforme et une partie fluctuante :

$$1.3 \quad \begin{aligned} C(x) &= C^0 + \tilde{C}(x) \\ k_{ij}(x) &= k_{ij}^0 + \tilde{k}_{ij}(x) \end{aligned}$$

Pour le milieu anisotrope homogène défini par les parties uniformes précédentes, nous indiquons la solution élémentaire de l'opérateur de la chaleur. C'est la température  $\Psi(x, t/x', t')$  observée à l'instant  $t$  en un point  $x$  qui résulte de la naissance à l'instant antérieur  $t'$  au point  $x'$  d'une source  $G_\Psi(x, t/x', t')$  ponctuelle et instantanée de chaleur. Dans l'équation aux dérivées partielles qui définit  $\Psi(x, t/x', t')$ , le "dépôt" ponctuel de chaleur est représenté à l'aide de la fonction de Dirac par :

$$1.4 \quad G_\Psi(x, t/x', t') = \delta(x - x') \delta(t - t')$$

l'équation s'écrit :

$$1.5 \quad C^0 \dot{\Psi} = k_{ij}^0 \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} [\Psi(x, t/x', t')] + \delta(x - x') \delta(t - t')$$

et  $\Psi(x, t/x', t')$  vérifie le principe de causalité :

$$1.6 \quad \Psi(x, t/x', t') = 0 \quad \text{si} \quad t \leq t'$$

(l'instant d'observation est postérieur à la naissance de la source de chaleur. La partie  $x, t$  situe le lieu et la date d'observation tandis que la partie  $x', t'$  situe la cause).

Nous nous proposons d'examiner l'intégrale  $J(x, t)$  ainsi définie :

$$1.7 \quad J(x, t) = \int_0^t \int_V \left[ \Psi(x, t/x', t') \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ k_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \Theta(x', t') \right] - \Theta(x', t') \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ k_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \Psi(x, t/x', t') \right] \right] dV dt'$$

Dans une première étape, puisque  $\theta$  est solution de l'équation de la chaleur 1.2 et puisque  $\Psi$  est solution élémentaire de 1.5, on déduit de 1.2, 1.3 et 1.5 :

$$\Psi \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \Theta(x', t') \right) \right] = \Psi \cdot \left[ C(x) \dot{\Theta} - H(x', t') \right] = \Psi \left[ \tilde{C} \dot{\Theta} - H(x', t') + C^0 \dot{\Theta} \right]$$

et

$$\Theta \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} (k_{ij} \frac{\partial \Psi}{\partial x_j}) \right] = \Theta \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} (\tilde{k} \frac{\partial \Psi}{\partial x_j}) \right] + \Theta \left[ -\delta(x-x') \delta(t-t') - \Theta^0 \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right]$$

De ces deux égalités,  $J(x,t)$  s'écrit comme la somme de trois termes :

$$\begin{aligned} J(x,t) = & \int_0^t \int_V \Theta(x',t') \delta(x-x') \delta(t-t') dV' dt' \\ & + \int_0^t \int_V \Theta^0 (\Psi(x,t|x',t') \dot{\Theta}(x',t') + \frac{\partial \Psi}{\partial t'}(x,t|x',t') \Theta(x',t')) dV' dt' \\ & + \int_0^t \int_V \left[ \tilde{\Theta}(x') \Psi(x,t|x',t') \dot{\Theta}(x',t') - \Psi(x,t|x',t') H(x',t') - \Theta(x',t') \frac{\partial}{\partial x_i} (\tilde{k}(x') \frac{\partial \Psi}{\partial x_j}) \right] dV' dt' \end{aligned}$$

Selon la définition de la fonction de Dirac, le premier terme permet d'isoler  $\theta(x,t)$  ; on a :

$$\int_0^t \int_V \Theta(x',t') \delta(x-x') \delta(t-t') dV' dt' = \Theta(x,t)$$

Le second terme fait apparaître la condition initiale qui donne le profil de la température initiale :  $\theta(x,0)$ . On a :

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_V \Theta^0 (\Psi \dot{\Theta} + \dot{\Psi} \Theta) dV' dt' &= \int_0^t \int_V \Theta^0 \frac{\partial}{\partial t'} [\Psi \Theta] dV' dt' = \Theta^0 \int_V [\Psi \Theta]_0^t dV' \\ &= \Theta^0 \int_V [\Psi(x,t|x',t) \Theta(x',t) - \Psi(x,t|x',0) \Theta(x',0)] dV' \end{aligned}$$

or, selon le principe de causalité :  $\Psi(x, t/x', t) = 0$  ainsi le second terme est égal à l'intégrale

$$- \Theta^0 \int_V \Psi(x, t|x',0) \Theta(x',0) dV'$$

où apparaît la température initiale  $\theta(x',0)$ .

Le troisième terme met en évidence l'influence du terme source  $H(x,t)$ , mais il reste cependant les coefficients des parties fluctuantes  $\tilde{C}$  et  $k_{ij}$  que nous ne pouvons présenter sous une forme plus pratique. On a :

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_V \left[ \tilde{\Theta}(x') \Psi \dot{\Theta} - \Psi H - \Theta \frac{\partial}{\partial x_i} (\tilde{k} \frac{\partial \Psi}{\partial x_j}) \right] dV' dt' \\ &= - \int_0^t \int_V \Psi(x,t|x',t') H(x',t') dV' dt' + \int_0^t \int_V \left[ \tilde{\Theta}(x') \Psi \dot{\Theta} - \Theta \frac{\partial}{\partial x_i} (\tilde{k} \frac{\partial \Psi}{\partial x_j}) \right] dV' dt' \end{aligned}$$

De ces trois transformations, l'intégrale  $J(x,t)$  peut s'écrire sous la forme plus pratique que 1.7 :

INFLUENCES de la condition initiale et du terme source H

$$\begin{aligned} 1.8 \quad J(x,t) = & \Theta(x,t) - \Theta^0 \int_V \Psi(x,t|x',0) \Theta(x',0) dV' - \int_0^t \int_V \Psi(x,t|x',t') H(x',t') dV' dt' \\ & + \int_0^t \int_V \left[ \tilde{\Theta}(x') \Psi(x,t|x',t') \dot{\Theta}(x',t') - \Theta(x',t') \frac{\partial}{\partial x_i} (\tilde{k}(x',t') \frac{\partial \Psi(x,t|x',t')}{\partial x_j}) \right] dV' dt' \end{aligned}$$

contributions des parties fluctuantes

Dans une seconde étape, il est intéressant d'utiliser la seconde formule de Green qui permet de transformer l'intégrale de volume de l'expression 1.7 de  $J(x,t)$  en une intégrale de surface faisant ainsi intervenir la notion de condition de surface (condition de frontière) :

En désignant par  $a$  un point de la surface  $S$  du solide et en notant par  $q_\theta$  le flux de chaleur à la surface :

$$q_\theta = -\vec{n} \cdot [K \vec{\text{grad}} \theta]$$

où  $n$  désigne la normale sortante et  $K$  la matrice  $[k_{ij}]$  de même, on définit le flux  $q_\psi$  par :

$$q_\psi(x,t|a',t') = -\vec{n} \cdot [K \vec{\text{grad}} \psi]$$

la forme 1.7 de  $J(x,t)$  se transforme (deuxième formule de Green) :

$$J(x,t) = \int_0^t \int_S [\psi_{m'i} k_{ij} \theta_{,j}' - \theta_{m'i} k_{ij} \psi_{,j}'] dS' dt'$$

$$1.9 \quad J(x,t) = \int_0^t \int_S [\theta(a',t') q_\psi(x,t|a',t') - \psi(x,t|a',t') q_\theta(a',t')] dS' dt'$$

Cette forme de  $J(x,t)$  est intéressante puisqu'elle fait intervenir les expressions de la température et du flux chaleur sur  $S$  connus puisque donnés par les conditions de Frontière. On peut déduire alors, en égalisant les formes 1.8 et 1.9 de  $J(x,t)$ , l'expression de l'équation intégrale cherchée. C'est la somme de quatre termes :

$$1.10 \quad \begin{aligned} \theta(x,t) = & \int_0^t \int_V \psi(x,t|x',t') H(x',t') dV' dt' \\ & + \int_0^t \int_V \psi(x,t|x',0) \theta(x',0) dV' \\ & - \int_0^t \int_S [\psi(x,t|a',t') q_\theta(a',t') - \theta(x',t') q_\psi(x,t|a',t')] dS' dt' \\ & - \int_0^t \int_V [\tilde{C}(x') \psi(x,t|x',t') \dot{\theta}(x',t') - \theta(x',t') \frac{\partial}{\partial x'_i} [\tilde{k}(x') \frac{\partial}{\partial x'_j} \psi(x,t|x',t')]] dV' dt' \end{aligned}$$

C'est une équation intégrale implicite où l'inconnue  $\theta$  se retrouve dans le dernier terme avec les coefficients  $\tilde{C}$  et  $\tilde{k}$  qui traduisent les fluctuations de la chaleur spécifique et du tenseur conductivité.

Le premier terme correspond à la composante de la température induite par le terme source  $H(x,t)$ . On s'aperçoit ici de la signification de la solution élémentaire de la chaleur. La température qui résulte de la source de chaleur  $H(x,t)$  n'est autre que la superposition de solutions élémentaires  $\psi(x,t|x',t')$  créées par une suite d'impulsions élémentaires de chaleur, suite qui reconstitue la source  $H(x,t)$ .

Le deuxième terme correspond à la composante de la température liée à l'uniformisation de la température initiale  $\theta(x',0)$ .

Le troisième terme correspond à la contribution des conditions de frontière sur la température interne du matériau.

Le quatrième terme représente l'influence des parties fluctuantes.

## 2) RECHERCHE DE LA SOLUTION ELEMENTAIRE $\psi$ POUR UN MILIEU INFINI

Pour un milieu homogène isotrope, la solution élémentaire de l'équation

$$2.1 \quad \frac{\partial \Theta_{iso}}{\partial t} = \left[ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right] \Theta_{iso}$$

s'écrit ((11)) ((23)) :

$$2.2 \quad \Theta_{iso}(\vec{x}, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\vec{x}^2/4t} \quad (\text{où } n=3)$$

A l'aide de la transformation de Fourier, on déduit, connaissant  $\theta_{iso}$ , la solution élémentaire de l'équation de la chaleur en milieu anisotrope homogène :

$\theta_{anis}$  est définie par

$$2.3 \quad \frac{\partial \Theta_{anis}}{\partial t} = k_{ij}^o \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (\Theta_{anis})$$

par transformation de Fourier

$$\Theta_{anis}(\vec{x}, t) \xrightarrow{\mathcal{F}^o} \hat{\Theta}_{anis}(\vec{\xi}, t)$$

l'équation 2.3 devient

$$2.4 \quad \frac{\partial \hat{\Theta}_{anis}}{\partial t} + 4\pi^2 \xi_i \xi_j k_{ij}^o \hat{\Theta}_{anis}(\vec{\xi}, t) = 0$$

Soit A une matrice de passage que nous définirons et X le vecteur tel que

$$\vec{\xi} = A \vec{X}$$

(2.4) devient en substituant les  $\vec{\xi}$ :

$$\frac{\partial \hat{\theta}_{anis}}{\partial t} + 4\pi^2 A_{i\ell} X_{\ell} A_{jm} X_m k_{ij} \hat{\theta}_{anis}(\vec{\xi}, t) = 0$$

regroupons les termes  $A_{i\ell} k_{ij} A_{jm}$  et notons par  $\tilde{A}$  la transposée de A :

$$\frac{\partial \hat{\theta}_{anis}}{\partial t} + 4\pi^2 [\tilde{A}_{\ell i} k_{ij} A_{jm}] X_{\ell} X_m \hat{\theta}_{anis}(\vec{\xi}, t) = 0$$

Il apparaît\* que si nous choisissons A telle que  $\tilde{A}KA = \mathbb{1}$ , où  $\mathbb{1}$  est la matrice unité alors

$$\frac{\partial \hat{\theta}_{anis}}{\partial t} + 4\pi^2 \partial_{\ell m} X_{\ell} X_m \hat{\theta}_{anis}(\vec{\xi}, t) = 0$$

Définissons  $\hat{\theta}_{iso}(X, t)$  (la notation sera justifiée) par

$$\hat{\theta}_{iso}(\vec{X}, t) = \hat{\theta}_{anis}(\vec{\xi}, t)$$

l'équation devient :

$$\frac{\partial \hat{\theta}_{iso}}{\partial t} + 4\pi^2 (X_1^2 + X_2^2 + X_3^2) \hat{\theta}_{iso}(\vec{X}, t) = 0$$

Par la transformation inverse de Fourier, on obtient :

$$\hat{\theta}_{iso}(\vec{X}, t) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \theta_{iso}(\vec{z}, t)$$

avec

$$\frac{\partial \theta_{iso}}{\partial t} - \left( \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_3^2} \right) \theta_{iso}(\vec{z}, t) = 0$$

Il s'agit de l'équation de la chaleur en milieu isotrope ; la notation  $\hat{\theta}_{iso}(X, t) = \hat{\theta}_{anis}(\vec{\xi}, t)$  est ainsi justifiée et elle exprime l'égalité fonctionnelle :

$$\hat{\theta}_{iso} \circ A^{-1} = \hat{\theta}_{anis}$$

où  $\circ$  est le symbole de la composition.

\*  $\tilde{A}KA = \mathbb{1}$

$K = \tilde{A}^{-1} A^{-1}$  où K est définie positive symétrique

$K^{-1} = \tilde{A}\tilde{A}$  les composantes de  $K^{-1}$   
sont notées  $k_{ij}^0$

On sait que ((24)) :

$$\hat{\Theta}_{iso} \circ A^{-1} = |\det A| \widehat{\Theta_{iso} \circ \tilde{A}}$$

ainsi

$$\hat{\Theta}_{anis} = |\det A| \widehat{\Theta_{iso} \circ \tilde{A}}$$

et par linéarité de la transformation de Fourier :

$$\hat{\Theta}_{anis} = \widehat{|\det A| \Theta_{iso} \circ \tilde{A}}$$

d'où par transformation inverse :

$$\Theta_{anis} = |\det A| \Theta_{iso} \circ \tilde{A}$$

en substituant  $\theta_{iso}$

$$\Theta_{anis}(\vec{Y}, t) = |\det A| (4\pi t)^{-n/2} e^{-z^2/4t}$$

avec

$$z^2 = z \cdot \tilde{z} \quad (\text{produit scalaire})$$

$$z^2 = (\tilde{A}Y)(\tilde{A}Y) = \tilde{A}Y\tilde{A}Y$$

$$= \tilde{A}_{mi} Y_i Y_p A_{pm}$$

$$= A_{pm} \tilde{A}_{mi} Y_p Y_i$$

or

$$A_{pm} \tilde{A}_{mi} = \delta_{po}$$

d'où l'expression de  $\theta_{anis}(Y, t)$  :

$$\Theta_{anis}(\vec{Y}, t) = \sqrt{|\det k_o^{ij}|} (4\pi t)^{-n/2} e^{-\delta_{po}^{mj} Y_p Y_m / 4t}$$

Par translation de Vecteur  $\vec{X}'$ , on déduit la solution de

$$\mathcal{L}^0 \frac{\partial \Psi(\vec{x} - \vec{x}', t - \tau)}{\partial t} - \delta_{ij}^0 \frac{\partial^2 \Psi(\vec{x} - \vec{x}', t - \tau)}{\partial x_i \partial x_j} = 0$$

ou de façon équivalente ((23))

$$\mathcal{L}^0 \frac{\partial \Psi(\vec{x} - \vec{x}', t - \tau)}{\partial t} + \delta_{ij}^0 \frac{\partial^2 \Psi(\vec{x} - \vec{x}', t - \tau)}{\partial x_i \partial x_j} = 0$$

à savoir :

$$\Psi(\vec{x} - \vec{x}', t - t') = \frac{\sqrt{|\det \mathcal{L}^0 k_o^{ij}|}}{[4\pi(t-t')]^{n/2}} \exp\left[-\mathcal{L}^0 k_o^{ml} \frac{(x_p - x'_p)(x_m - x'_m)}{4(t-t')}\right]$$

## 3) THERMOELASTICITE TRANSITOIRE

Si dans l'équation intégrale (1.10) nous remplaçons le terme source  $H(x,t)$  par  $-T_0 \beta_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}$  et  $C(x)$  par  $T_0 h(x)$ , nous obtenons la loi d'évolution de la température sous forme intégrale :

$$\begin{aligned}
 3.1 \quad \Theta(x,t) = & \int_0^t \int_V - \left[ T_0 \tilde{h} \Psi \dot{\Theta} - \Theta \frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{h} \frac{\partial}{\partial x_j} \Psi \right] dV' dt' \\
 & - \int_0^t \int_V T_0 \beta_{ij} \Psi(x-x', t-t') \dot{\epsilon}_{ij}(x', t') dV' dt' \\
 & + T_0 h^0 \int_V \Psi(x-x', t) \Theta(x', 0) dV' \\
 & - \int_0^t \int_S \left( \Psi(x-a', t-t') q_\theta(a', t') - \Theta(a', t') q_\psi(x-a', t-t') \right) dS' dt'
 \end{aligned}$$

Nous joignons pour obtenir le système des équations couplées de la thermoélasticité transitoire quasistatique, la loi de comportement :

$$3.2 \quad \sigma = C \epsilon - \beta \theta$$

où la contrainte  $\sigma$  vérifie la condition d'équilibre

$$3.3 \quad \text{div } \sigma = 0$$

Si nous restons dans un cadre très général, l'emploi d'une notation symbolique telle que celle de Lippman-Schwinger pour les intégrales de volume et telle que celle proposée par Gurtin et Sternberg ((25)) pour les intégrales en temps seraient fort utiles. Cela revient, pour remplacer les intégrales de convolution précédentes, à définir un produit multiplicatif dans un anneau de convolution ((11)) produit dont les règles de calcul symbolique peuvent être prouvées rigoureusement ((11)), ((24)).

Toutefois, pour obtenir des résultats moins généraux mais principaux concernant la thermoélasticité avec l'approximation des milieux granulaires, nous simplifions le formalisme en adoptant les hypothèses suivantes :

- a) le solide est isolé thermiquement (ou de matrice infinie) (les intégrales de surface s'annulent)
- b) on ne retient que la partie permanente du régime : le terme  $+ \int_V \theta(x', 0) \Psi(x, t/x', 0) dV'$  qui correspond à l'uniformisation de la répartition instantanée initiale de la température devient vite négligeable lorsque le temps  $t$  augmente.

c) On suppose l'uniformité de la chaleur spécifique à déformation constante et du tenseur de conductivité thermique  $k$ .

d) Nous condensons l'intégrale de volume  $\int_V F(x, x') f(x') dV'$  par le "produit"  $F \otimes f$

Nous condensons l'intégrale de volume et du temps

par le "produit"  $\int_0^t \int_V F(x, t | x', t') f(x', t') dV' dt'$   
 $F \boxtimes f$

Ces hypothèses restrictives sur la configuration du matériau sont utilisées à titre d'exemple dans lequel on éliminera la température  $\theta$  dans l'une des équations du système (3.1, 3.2, 3.3) afin d'obtenir une relation reliant uniquement la contrainte et la déformation.

En tenant compte de ces hypothèses, l'équation intégrale en  $\theta$  s'écrit en bref :

$$3.4 \quad \Theta(x, t) = -\Psi \boxtimes T_0 \beta_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}$$

En substituant  $\theta$  dans la loi locale de comportement, nous obtenons la relation entre la contrainte et la déformation :

$$\sigma = C \epsilon + \beta [\Psi \boxtimes T_0 \beta \dot{\epsilon}]$$

A ce stade, la démonstration de l'analogie de cette loi avec une loi de comportement de type viscoélastique nécessite une bonne maîtrise des règles de calcul de ces produits. Pour mettre en évidence cette analogie, nous utiliserons l'approximation des milieux granulaires.

Dans l'immédiat, nous reprenons la loi de localisation reliant la déformation locale à la déformation macroscopique  $\epsilon^o$ . Nous avons établi pour un champ de déformation anélastique  $\epsilon^a$  (avec  $\epsilon^a = \alpha \theta$ , tenseur dilatation thermique libre) vérifiant les hypothèses des petites perturbations que :

$$3.5 \quad \epsilon_{mn} = \epsilon_{mn}^o + \Gamma_{mnij} * (\tilde{C}_{ijkl} \epsilon_{kl} - C_{ijkl} \tilde{\epsilon}_{kl})$$

où  $\Gamma$  est déduit du tenseur de Green de l'élasticité relatif aux coefficients uniformes  $C_{ijkl}^o$  et où le tenseur des constantes élastiques  $C$  se décompose suivant

$$C(\pi) = C^o + \tilde{C}(\pi)$$

En substituant  $\epsilon^a$  par  $\alpha\theta$  et  $\theta$  par la forme intégrale (3.4), nous obtenons :

$$\epsilon_{mn} = \epsilon_{mn}^0 + \Gamma_{mnij} * \tilde{C}_{ijkl} \epsilon_{kl} - \Gamma_{mnij} * C_{ijkl} \alpha_{kl} \theta$$

$$\epsilon = \epsilon^0 + \Gamma * \tilde{C} \epsilon + \Gamma * [C \alpha (\Psi \boxtimes T_0 \beta \dot{\epsilon})]$$

Nous retrouvons le terme  $\epsilon^0 + \Gamma * \tilde{C} \epsilon$  caractérisant ici l'élasticité instantanée à laquelle se superpose un phénomène de nature visco-élastique évoqué par le terme

$$\Gamma * [C \alpha (\Psi \boxtimes T_0 \beta \dot{\epsilon})]$$

#### 4) MILIEU GRANULAIRE

##### 4.1 Discrétisation :

Pour un milieu granulaire où nous faisons l'approximation de remplacer la déformation  $\epsilon(r_\alpha)$  au point  $r$  du grain  $\alpha$  par la valeur moyenne volumique

$$\epsilon(r_\alpha) \simeq \epsilon^\alpha \simeq \frac{1}{V_\alpha} \int_{V_\alpha} \epsilon(r) dV_\alpha$$

la forme discrétisée de l'équation 3.5 s'écrit (cf I. 6.2.2)

$$4.1 \quad \epsilon^\beta = \epsilon^0 + \sum_{\alpha=1}^N \Gamma^{\beta\alpha} (\tilde{C}^\alpha \epsilon^\alpha - C^\alpha \epsilon^{\alpha\alpha})$$

Nous effectuons alors l'approximation supplémentaire en remplaçant  $\epsilon^{\alpha\alpha}$  par

$$\epsilon^{\alpha\alpha} = \alpha^\alpha \Theta^\alpha(t)$$

avec

$$\Theta^\alpha(t) = \frac{1}{V_\alpha} \int_{V_\alpha} \theta(r, t) dV_\alpha$$

c'est à dire en utilisant la fonction indicatrice du grain  $\alpha$  :

$$\Theta^\alpha(t) = \frac{1}{V_\alpha} \int_V \theta(r, t) \Delta_\alpha(r) dV$$

La forme intégrale (3.4) de  $\theta(r, t)$  se discrétise de la même façon que la forme intégrale (I.6.1.8) de  $\epsilon(r, t)$  :

On a :

$$\Theta(x, t) = - \int_t \Psi \boxtimes T_0 \beta_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}$$

c'est à dire

$$\Theta(x, t) = - \int_0^t \int_V T_0 \beta_{ij}(x') \Psi(x-x', t-t') \dot{\epsilon}_{ij}(x', t') dV' dt'$$

nous remplaçons  $\beta_{ij}(x') \dot{\epsilon}_{ij}(x', t')$  par l'approximation

$$\sum_{\gamma=1}^N \beta_{ij}^{\gamma} \dot{\epsilon}_{ij}^{\gamma}(t') \Delta_{\gamma}(x')$$

ainsi

$$\Theta(x, t) = - \int_0^t \int_V \left[ \sum_{\gamma=1}^N T_0 \beta_{ij}^{\gamma} \dot{\epsilon}_{ij}^{\gamma}(t') \Delta_{\gamma}(x') \Psi(x-x', t-t') \right] dV' dt'$$

isolons les termes uniformes :

$$\Theta(x, t) = - \int_0^t T_0 \sum_{\gamma=1}^N \beta_{ij}^{\gamma} \dot{\epsilon}_{ij}^{\gamma}(t') \int_V \Psi(x-x', t-t') \Delta_{\gamma}(x') dV' dt'$$

nous déduisons ainsi  $\theta^{\alpha}(t)$  :

$$\Theta^{\alpha}(t) = \frac{1}{V_{\alpha}} \int_V \Theta(x, t) \Delta_{\alpha}(x) dV$$

$$\Theta^{\alpha}(t) = - \int_0^t T_0 \sum_{\gamma=1}^N \beta_{ij}^{\gamma} \dot{\epsilon}_{ij}^{\gamma} \frac{1}{V_{\alpha}} \int_V \int_V \Psi(x-x', t-t') \Delta_{\gamma}(x') \Delta_{\alpha}(x) dV' dV dt$$

en notant par  $\Psi^{\alpha\gamma}(t-t')$  le terme

$$\Psi^{\alpha\gamma}(t-t') = \frac{1}{V_{\alpha}} \int_V \int_V \Psi(x-x', t-t') \Delta_{\gamma}(x') \Delta_{\alpha}(x) dV' dV$$

nous obtenons :

$$\Theta^{\alpha}(t) = \sum_{\gamma=1}^N - T_0 \beta_{ij}^{\gamma} \int_0^t \dot{\epsilon}_{ij}^{\gamma}(\tau) \Psi^{\alpha\gamma}(t-\tau) d\tau$$

et de là :

$$\epsilon^{\alpha\gamma}(t) = \sum_{\gamma=1}^N - T_0 \alpha^{\gamma} \beta_{ij}^{\gamma} \int_0^t \Psi^{\alpha\gamma}(t-\tau) \dot{\epsilon}_{ij}^{\gamma}(\tau) d\tau$$

En substituant  $\epsilon^{\alpha\gamma}$  dans l'expression (4.1) de  $\epsilon^{\beta}$ , nous obtenons :

$$\epsilon^{\beta}(t) + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\gamma=1}^N - T_0 C_{\alpha}^{\beta} \beta_{ij}^{\gamma} \Gamma^{\beta\alpha} \int_0^t \Psi^{\alpha\gamma}(t-\tau) \dot{\epsilon}_{ij}^{\gamma}(\tau) d\tau - \sum_{\alpha=1}^N \Gamma^{\beta\alpha} \tilde{C}^{\alpha} \epsilon^{\alpha} = \epsilon^{\circ}(t)$$

Il s'agit d'un système intégrodifférentiel à N équations dont les N inconnues  $\epsilon^{\beta}$  sont les déformations moyennes de chaque grain et assurent le comportement macroscopique donné par le second membre  $\epsilon^{\circ}(t)$ .

Dans le principe, la solution élémentaire de ce système sera une fonction fluage  $\Omega_{ijkl}$  continue par morceaux et vérifiant le système où l'on remplace  $\epsilon_{ij}(t)$  par  $\delta(t) \delta_{ij}$  :

$$\Omega_{ijpq}^{\beta} = \delta(t) \delta_{pi} \delta_{qj} + \sum_{\alpha=1}^N \Gamma_{ijm}^{\beta\alpha} C_{mnop}^{\alpha} \Omega_{opkl}^{\alpha}$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\gamma=1}^N T_0 \Gamma_{ijmn}^{\beta\alpha} C_{mnop}^{\alpha} \alpha_{qr}^{\alpha} \beta_{qs}^{\gamma} \int_0^t \Psi_{opwr}^{\alpha\gamma}(t-\tau) \Omega_{wvkl}^{\gamma}(\tau) d\tau$$

La solution élémentaire supposée connue, on déduit la solution du système intégrodifférentiel sous la forme d'un produit de convolution :

$$\epsilon_{ij}^{\beta} = \int_0^t \Omega_{ijkl}^{\beta}(t-\tau) \epsilon_{kl}^{\circ}(\tau) d\tau$$

La loi de localisation d'un milieu élastique s'écrit :

$$\epsilon_{ij}^{\beta} = A_{ijkl}^{\beta} \epsilon_{kl}^{\circ}$$

et nous avons obtenu pour un milieu thermoélastique :

$$\epsilon_{ij}^{\beta} = \int_0^t \Omega_{ijkl}^{\beta}(t-\tau) \epsilon_{kl}^{\circ}(\tau) d\tau$$

Il apparaît ici clairement que l'on tient compte de l'histoire de la déformation macroscopique appliquée pour décrire la déformation locale actuelle. Si nous reprenons la loi de comportement de Duhamel Neumann :

$$\sigma_{ij}^{\alpha} = C_{ijkl}^{\alpha} [\epsilon_{kl}^{\alpha} - \epsilon_{kl}^{\alpha\alpha}]$$

On écrit successivement :

$$\begin{aligned} * C_{ijkl}^{\alpha} \epsilon_{kl}^{\alpha} &= C_{ijkl}^{\alpha} \int_0^t \Omega_{klpq}^{\alpha}(t-\tau) \epsilon_{pq}^{\circ}(\tau) d\tau \\ &= C_{ijkl}^{\alpha} \int_0^t \int_0^{\tau} \Omega_{klpq}^{\alpha}(t-\tau) \delta(\tau-\tau') \epsilon_{pq}^{\circ}(\tau') d\tau' d\tau \\ &= \int_0^t \int_0^{\tau} \left[ \sum_{\gamma=1}^N C_{ijkl}^{\alpha} \mathbb{I}_{klpq}^{\alpha\gamma} \Omega_{pqrs}^{\gamma}(t-\tau) \delta(\tau-\tau') \right] \epsilon_{rs}^{\circ}(\tau') d\tau' d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * -\epsilon_{kl}^{\alpha} &= \alpha_{kl}^{\alpha} T_0 \sum_{\gamma} \beta_{pq}^{\gamma} \int_0^t \Psi_{pqrs}^{\alpha\gamma}(t-\tau) \frac{d}{dt} \epsilon_{rs}^{\circ}(\tau) d\tau \\ &= \alpha_{kl}^{\alpha} T_0 \sum_{\gamma} \beta_{pq}^{\gamma} \int_0^t \dot{\Psi}_{pqrs}^{\alpha\gamma}(t-\tau) \epsilon_{rs}^{\circ}(\tau) d\tau \\ &= \alpha_{kl}^{\alpha} T_0 \sum_{\gamma} \beta_{pq}^{\gamma} \int_0^{\tau} \dot{\Psi}_{pqmn}^{\alpha\gamma}(t-\tau) \Omega_{mrs}^{\gamma}(\tau-\tau') \epsilon_{rs}^{\circ}(\tau') d\tau \end{aligned}$$

En rappelant que :  $C_{ijkl}^{\alpha} \alpha_{kl}^{\alpha} = \beta_{ij}$

on déduit pour la loi de localisation

$$\sigma_{ij}^{\alpha}(t) = \int_0^t \int_0^{\tau} \left[ C_{ijkl}^{\alpha} \mathbb{I}_{klpq}^{\alpha\gamma} \Omega_{pqrs}^{\gamma}(t-\tau) \delta(\tau-\tau') + \beta_{ij}^{\alpha} T_0 \beta_{pq}^{\gamma} \dot{\Psi}_{pqmn}^{\alpha\gamma}(t-\tau) \Omega_{mrs}^{\gamma}(\tau-\tau') \right] \epsilon_{rs}^{\circ}(\tau') d\tau' d\tau$$

et en passant à la valeur moyenne, on déduit la loi de comportement macroscopique:

$$\Sigma_{ij}(t) = \iint_0^t \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \left[ \rho^{\alpha} C_{ijkl} \Pi_{klpq}^{\alpha\beta} \Omega_{pqrs}^{\beta} (t-\tau) \delta(\tau-\tau') + \beta_{ij}^{\alpha} T_0 \beta_{pq}^{\beta} \Psi_{pqmn}^{\alpha\beta} (t-\tau) \Omega_{mnpq}^{\beta} (t-\tau') \right] \epsilon_{rs}^{\alpha}(\tau) d\tau' d\tau.$$

Avec les hypothèses restrictives du paragraphe (3) nous avons montré, de façon qualitative et très formelle que l'action de la conduction de la chaleur intergranulaire dans un milieu thermoélastique infini engendre un comportement de nature viscoélastique. Il est certainement possible de généraliser pour un milieu fini en demandant cependant plus de rigueur sur le formalisme mathématique et notamment sur les intégrales de surface. Ces intégrales de surface tiennent compte de la différence de température entre l'intérieur et l'extérieur du matériau et modélisent l'influence des flux de chaleur liés aux conditions MACROSCOPIQUES de frontière.

En effet, si nous nous rappelons que le phénomène de relaxation de nature viscoélastique est lié ici à la notion d'irréversibilité thermique et que cette dernière est gouvernée par l'action de la conduction de la chaleur uniformisant les gradients de température ; il apparaît que deux types d'hétérogénéités de température sont à considérer :

- l'une, que nous avons modélisée formellement, est à l'échelle du grain. Elle résulte de la nature microhétérogène du matériau et provoque l'existence de la conduction in situ (intragranulaire) de la chaleur.
- l'autre, étudiée en détail par Zener ((21)), est à l'échelle de l'échantillon et est du même type que la non uniformité de température pouvant apparaître dans un matériau homogène soumis à des conditions thermomécaniques extérieures (conditions macroscopiques de frontière).

### Dissipation

Il est important de constater dans les chapitres précédents que, partant des lois locales de la thermoélasticité, lois où entrent en jeu des gradients de température (aspect espace), nous obtenons des lois de relaxation (aspect temps).

Ces lois traduisent un comportement de nature viscoélastique et mettent en évidence la présence d'un déphasage entre la contrainte et la déformation. Par exemple, pour une sollicitation en contrainte périodique, on observe ((21)) ((26)) expérimentalement une déformation de même période mais déphasée par rapport à la contrainte. Ce retard de phase exprime en quelque sorte que la déformation est freinée par rapport à la contrainte, d'où le nom de FROTTEMENT INTERNE donné à ce phénomène, frottement qui se constate par l'échauffement progressif du matériau (expérience de Tauchert ((27))) et qui produit une montée irréversible de température.

De nombreux auteurs (Zener, 1935, Budiansky 1980) ((17)) procèdent à l'étude de la dissipation thermoélastique. L'étude de Zener ((21)), quoique monodimensionnelle, est fondamentale. Nous nous proposons, à présent, de passer à une étude monodimensionnelle, illustrant de façon plus concrète le comportement viscoélastique du matériau.

## COMPLEMENT

Au cours de ce chapitre, le processus de recherche et de discrétisation de l'équation intégrale issue de l'équation aux dérivées partielles gouvernant l'évolution de la température:

$$\tau_0 h \dot{\theta} = [h_{ij} \theta_{,i}]_{,j} - \tau_0 \beta_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}$$

suit le même plan que celui du problème de thermoélastostatique ou du problème élastoplastique.:

$$c_{ijkl}^0 \tilde{u}_{l,k} + (c_{ijkl}^0 u_{l,k} - c_{ijkl}^0 \epsilon_{kl}^0)_{,i} = 0$$

Nous adoptons en effet la méthode du tenseur de Green en recherchant la solution élémentaire de chaque équation et nous discrétisons en utilisant l'approximation du milieu granulaire.

Nous pouvons alors déduire le comportement effectif et local dans le cas d'un milieu microhétérogène parfaitement désordonné. D'autre part, au cours de l'étude bibliographique, nous avons remarqué l'existence de méthodes d'homogénéisation adaptées à la modélisation de milieux périodiques.

Nous avons là deux cas extrêmes de structures microhétérogènes. Qu'en est il pour une morphologie intermédiaire, voire plus générale ?

Les méthodes variationnelles nous fournissent la réponse. Outre la possibilité de donner un encadrement des coefficients effectifs, certaines permettent d'accéder à une formulation complète et générale du comportement.

Citons le formalisme élégant évoqué par Biot ((37)) et développé par Brun\* où l'on fait appel à la notion de coordonnées généralisées et de formulation variationnelle lagrangienne du problème de la thermoélasticité des milieux hétérogènes.

\* communication privée .

CHAPITRE III

ETUDE MONODIMENSIONNELLE

## 1) ETUDE

## 1.1. L'étude de Zener :

Pour plus de clarté, Zener ((21)) utilise dans le formalisme suivant des variables scalaires étudiant ainsi un problème monodimensionnel. Le raisonnement peut cependant se généraliser au cas tridimensionnel.

Si  $E$  désigne le module d'Young isotherme la loi de Comportement générale (I.4.19)

$$\epsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl} + \alpha_{ij} \theta$$

devient

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha \theta$$

La variation de température dépend de deux phénomènes qui se superposent :

- la diffusion calorifique (conduction) qui uniformise et relaxe les fluctuations de température.
- le couplage thermoélastique : une variation de température entraîne une variation de longueur et réciproquement, un allongement adiabatique entraîne une chute de température.

La loi générale d'évolution de la température (I.4.18)

$$\tau_0 \rho \dot{\theta} = [k_{ij} \theta_{,i}]_{,j} - \tau_0 \beta_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}$$

devient

$$\dot{\theta} = D \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \beta \dot{\epsilon}$$

où :  $D$  est le coefficient uniforme de diffusivité thermique  
 $\beta$ , le coefficient de couplage.

Pour éliminer la dérivée seconde en espace, Zener propose de développer  $\theta$ ,  $\epsilon$  et  $\sigma$  en une série de fonctions à variables séparées suivant :

$$\begin{aligned} \epsilon(x,t) &= \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon_j(t) u_j(x) \\ \theta(x,t) &= \sum \theta_j(t) u_j(x) \\ \sigma(x,t) &= \sum \sigma_j(t) u_j(x) \end{aligned}$$

- où les fonctions de l'espace  $u_j$  représentent les  $j$ -fonctions orthogonales normées, chacune solution de l'équation aux dérivées partielles

$$D u_j'' + \frac{u_j}{\tau_j} = 0 \quad (u_j \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2})$$

avec  $\tau_j$ , une suite discrète des valeurs de  $\tau$  pour lesquelles et en respectant les conditions aux limites du problème, l'équation

$$D u'' + u/\tau = 0 \quad \text{est vérifiée.}$$

- où  $\epsilon_j(t)$ ,  $e_j(t)$  et  $\sigma_j(t)$  appelés potentiels,

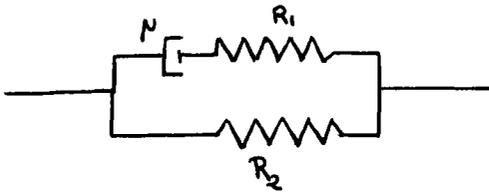
vérifient le système :

$$\begin{cases} \epsilon_j(t) = \frac{\sigma_j(t)}{E} + \alpha \theta_j(t) \\ \dot{\theta}_j(t) = -\frac{\theta_j(t)}{\tau_j} - \beta \dot{\epsilon}_j(t) \end{cases}$$

En éliminant  $\theta_j$  de ce système, les potentiels  $\epsilon_j$  et  $\sigma_j$  sont liés par (sans sommation sur  $j$ )

$$\sigma_j + \tau_j \dot{\sigma}_j = E \epsilon_j + E \tau_j (1 + \alpha \beta) \dot{\epsilon}_j$$

Relation qui n'est autre que celle d'un solide viscoélastique de ZENER dont l'équivalent mécanique est représenté par le schéma :



en fonction de la viscosité  $\mu$  de l'amortisseur ( $\sigma = \mu \dot{\epsilon}$ ) et des raideurs  $R$ , et  $R_\alpha$  des ressorts ( $\sigma = R \epsilon$ ) on obtient la relation analogue à la précédente :

$$\sigma + \frac{\mu}{R_1} \dot{\sigma} = R_2 \epsilon + \mu \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \dot{\epsilon}$$

Conclusion : Par cette formulation du problème dans le cas d'un solide monodimensionnel homogène, Zener montre ainsi que les fonctions potentiels ( $\sigma_j$ ,  $\epsilon_j$ ) sont des potentiels viscoélastiques qui, nonobstant une légère modulation en espace, confèrent au solide thermoélastique, un comportement de nature viscoélastique.

### Dissipation

Pour une sollicitation périodique en contrainte de pulsation  $\omega$  et d'amplitude  $\sigma_0$ , on observe une réponse en déformation de même période, d'amplitude  $\epsilon_0$  dont l'angle  $\delta$  de déphasage par rapport à la contrainte, généralement petit, suffit pour caractériser la dissipation.

En effet, on démontre ((21)), ((26)) la relation entre le rapport de l'énergie dissipée par cycle  $W^d$  et l'énergie de vibration  $W^e = \frac{1}{2} \sigma_0 \epsilon_0$ .

1.1.1

$$\frac{W^d}{W^e} = 2\pi \tau_j \delta$$

et  $\operatorname{tg} \delta$  est suffisamment bien approximé par :

1.1.2

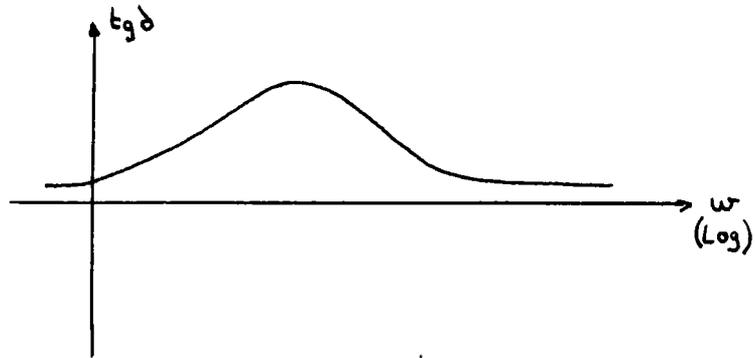
$$\operatorname{tg} \delta \approx \Delta \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2}$$

où  $\Delta$ , sans dimension, est dite intensité de relaxation et caractérise la relaxation totale de l'effort.

et  $\tau$  est le temps caractéristique de relaxation thermique et évalué à

$$\tau = \frac{L^2}{\pi^2 D} \quad (L, \text{ épaisseur de l'échantillon})$$

Si nous représentons  $\operatorname{tg} \delta$  en fonction de la pulsation, nous obtenons une courbe en cloche de Lorentz dont le maximum se trouve pour  $\omega \tau = 1$ .



- . Pour les basses fréquences, ( $\omega$  petite), le problème est isotherme, la dissipation est faible (la conduction uniformise "instantanément" la température).
- . Pour les hautes fréquences ( $\omega$  élevée), le comportement est adiabatique, la dissipation est faible (la conduction "n'a pas le temps" d'agir).
- . L'énergie dissipée n'est appréciable que pour les fréquences intermédiaires (ni isothermes, ni adiabatiques).

#### Remarque

Nous avons utilisé dans le résumé de cette étude, un coefficient de diffusivité  $D$  uniforme ce qui exclut, à fortiori, la modélisation d'un milieu continûment hétérogène. Nous nous employons dans la suite à étudier le cas d'un matériau hétérogène.

## 1.2 Etude monodimensionnelle :

L'étude monodimensionnelle envisagée dans la suite nous permet pour un matériau hétérogène particulier de décrire le comportement anélastique engendré par le couplage contrainte  $\sigma(x,t)$ , déformation  $\epsilon(x,t)$ , température  $\theta(x,t)$ . Les théories tridimensionnelles précédemment résumées sont en effet générales et actuellement difficiles à exploiter d'un point de vue quantitatif.

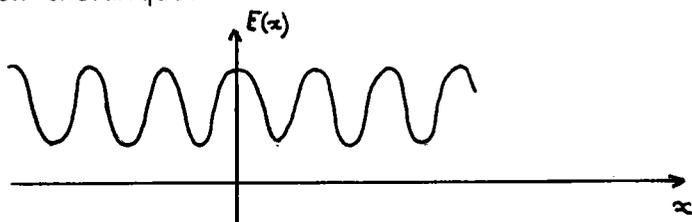
Nous nous proposons d'une part de donner une détermination explicite de la réponse viscoélastique du matériau (caractérisée par ses compliances instantanées et relaxées et les temps de relaxation) et d'autre part de quantifier la dissipation engendrée par l'effet thermoélastique.

Pour cela, nous soumettons l'échantillon à deux types d'essais différents de sollicitation en contrainte, l'un quasistatique et l'autre dynamique, et nous calculons par différentes méthodes la réponse du matériau et l'énergie dissipée au cours de chaque essai : nous vérifions alors la cohérence des résultats obtenus. En effet, les méthodes employées utilisent soit un point de vue thermoélastique ou soit un point de vue viscoélastique ; nous avons alors le souci constant de montrer que le matériau obéissant aux lois locales de la thermoélasticité se comporte comme un matériau viscoélastique.

## 2) PRESENTATION DE L'ECHANTILLON

L'étude monodimensionnelle s'applique à une tige cylindrique isotrope de longueur pratiquement infinie dont l'hétérogénéité est assurée par la seule variation longitudinale du module d'Young  $E(x)$  ; les autres coefficients thermomécaniques étant pris constants :

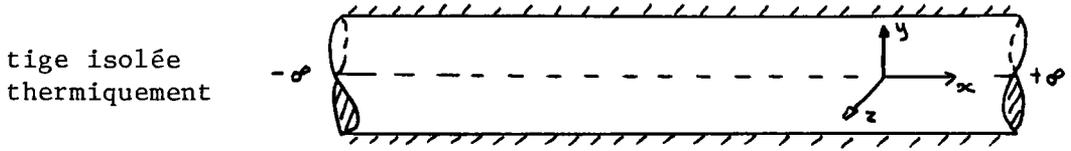
- $\nu$  coefficient de Poisson
- $\alpha$  dilatation thermique libre
- $\rho C_e$  chaleur volumique
- $k$  conduction thermique.



Nous sollicitons cette tige par un essai de traction uniaxiale quasistatique. Les phénomènes d'inertie négligés, la contrainte, quoique variable dans le temps, est uniforme le long de la tige.

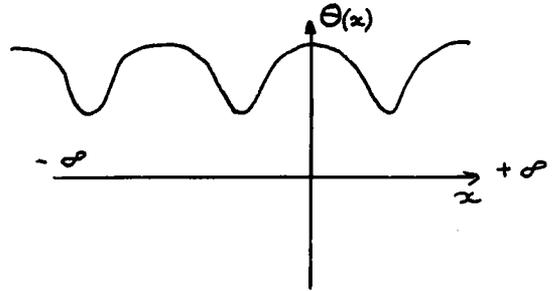
Nous supposons la fonction  $E(x)$  sinusoïdale en  $x$  et nous isolons adiabatiquement les parois de la tige.

(Figure 1)

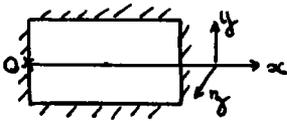


(Figure 2)

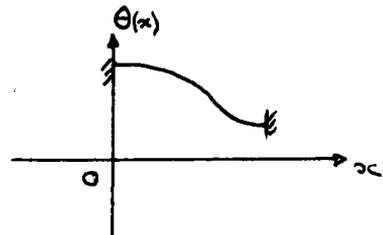
profil périodique de température



Avec ces hypothèses, le profil de température dans l'échantillon est aussi périodique et, par raison de symétrie, l'étude du profil de température le long de la tige de longueur infinie, revient à l'étude du profil de température dans une cellule élémentaire constituée par un tronçon de la tige, long d'une demi-période et isolé thermiquement à chaque extrémité.



Cellule élémentaire



Profil de température le long de la cellule  
(Figure 3)

### 3) EQUATIONS

Dans le repère  $(x, y, z)$ , le tenseur des contraintes  $\sigma$  et des déformations  $\epsilon$  s'écrivent sous forme matricielle :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{bmatrix}$$

pour un milieu isotrope, la loi de comportement générale (I. 4.19)

$$\epsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl} + \alpha_{ij} \theta$$

s'écrit ((28))

$$3.1 \quad \epsilon = \frac{1+\nu}{E} \sigma - \frac{\nu}{E} \sigma_I \mathbb{1} + \alpha \theta \mathbb{1}$$

où  $\mathbb{1}$  désigne la matrice unité.

De même, l'expression générale de la variation d'entropie et sa forme duale déduites de I. 4.17 ; I. 4.20 et I. 4.21

$$\begin{aligned} e \, d\eta &= \beta_{ij} \, d\epsilon_{ij} + h \, d\theta \\ e \, d\eta &= \alpha_{ij} \, d\sigma_{ij} + g \, d\theta \end{aligned}$$

deviennent pour un milieu isotrope :

$$3.2 \quad e T_0 d\eta = 3KT_0 \alpha \, d\epsilon_I + e C_\epsilon \, d\theta$$

$$3.3 \quad e T_0 d\eta = T_0 \alpha \, d\sigma_I + e C_\sigma \, d\theta$$

où  $\epsilon_I$  et  $\sigma_I$  désignent respectivement le premier invariant de  $\epsilon$  et  $\sigma$ .

où  $K$ , module de compressibilité, dépend de  $x$  et s'exprime en fonction du module d'Young suivant :

$$K(x) = \frac{E(x)}{3(1-2\nu)}$$

La loi d'évolution I. 4.12 de l'entropie

$$e T \eta_j = \operatorname{div} [k \vec{g} \operatorname{grad} \theta]$$

s'exprime pour l'étude monodimensionnelle suivant :

$$3.4 \quad e T \eta_j = k \theta_{,xx}$$

Avant de déduire des équations 1, 2, 3, 4 précédentes, la loi d'évolution de la température et sa forme duale, nous pouvons obtenir de 3.4 une remarque importante concernant la dissipation thermodynamique au sein de l'échantillon considéré.

#### 4) DISSIPATION

##### 4.1. Entropie :

Nous nous proposons de mettre en évidence l'évolution de l'entropie et la dissipation induites par l'effet thermoélastique dans un corps hétérogène isolé thermiquement et nous constatons une différence fondamentale avec un corps homogène.

La loi d'évolution de l'entropie déduite de la conservation de l'énergie

$$\rho T \dot{\eta} = \text{div} [k \vec{\text{grad}} \theta]$$

devient en passant à la valeur moyenne volumique sur la cellule constituée du tronçon de la figure (3) isolé thermiquement :

$$\langle \rho T \dot{\eta} \rangle = \langle \text{div} [k \vec{\text{grad}} \theta] \rangle$$

or

$$\langle \text{div} [k \vec{\text{grad}} \theta] \rangle = \frac{1}{V} \int_V \text{div} [k \vec{\text{grad}} \theta] dV$$

et en utilisant le théorème de la divergence :

$$\langle \text{div} [k \vec{\text{grad}} \theta] \rangle = \frac{1}{V} \int_{\partial V} k \vec{\text{grad}} \theta \cdot \vec{n} dS$$

Sur  $V$ , l'hypothèse d'adiabaticité impose :

$$k \vec{\text{grad}} \theta \cdot \vec{n} = 0$$

Par conséquent :

$$\langle \rho T \dot{\eta} \rangle = 0$$

Conclusion : Pour un corps homogène de température initiale uniforme,  $T$  et  $\eta$  sont uniformes, ainsi  $\dot{\eta} = 0$

et l'expression de la dissipation donnée par l'intégrale (cf paragraphe I. 4.4)

$$\int_0^t \int_V \frac{k_{ij} \theta_{,i} \theta_{,j}}{T^2} dV dt$$

est nulle également. Il n'y a pas de dissipation et l'entropie est stationnaire.

Par contre, pour un corps hétérogène (isolé), même si  $\rho$  est uniforme, l'expression

$$\langle T \dot{\eta} \rangle = 0$$

ne permet pas de déduire  $\dot{\eta} = 0$ .

De plus, du fait même de l'hétérogénéité du matériau, il se crée une répartition de gradients de température, l'intégrale

$$\int_V k_{ij} \frac{\theta_{,i} \theta_{,j}}{T^2} dV$$

n'est pas nulle, il y a dissipation et création irréversible d'entropie.

#### 4.2. Linéarisation :

Comment mettre en évidence cette dissipation ? Si nous éliminons l'entropie entre 3.3 et 3.4, nous obtenons l'équation aux dérivées partielles en  $\theta$  de type parabolique :

$$k \theta_{,xx} = \rho C_\sigma \dot{\theta} + \alpha \dot{\sigma}_I \theta + \alpha T_0 \dot{\sigma}_I + \rho C_\sigma \frac{\dot{\theta} \theta}{T_0}$$

L'étude directe analytique de cette équation est rendue délicate par la présence du terme  $\rho C_\sigma \theta$  à coefficient variable  $C_\sigma(x)$ . En effet, quoique  $\rho C_\epsilon$ , la chaleur volumique à déformation constante, soit supposée uniforme, la chaleur à contrainte constante  $\rho C_\sigma$  dépend de  $x$  ; on a la relation ((28))

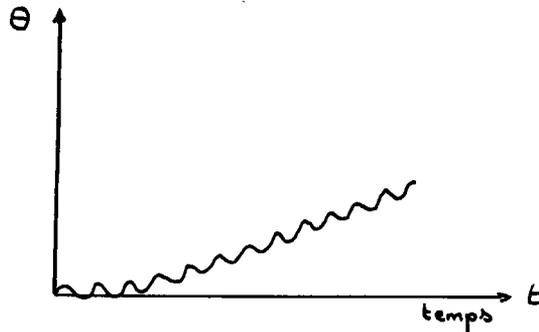
$$C_\sigma(x) = \gamma(x) C_\epsilon$$

où  $\gamma(x)$  est nommé l'indice adiabatique et s'exprime en fonction du "bulk modulus" suivant

$$4.1 \quad \gamma(x) = 1 + \frac{\alpha K(x) T_0 \alpha^2}{\rho C_\epsilon}$$

(démonstration située à la fin du paragraphe).

Une intégration numérique de cette équation, dans le cas d'une contrainte imposée alternative ( $\sigma_I = \sigma_0 \cos \omega t$ ) montrerait au bout d'un temps de simulation suffisant, une montée globale sensible de la température de l'échantillon. Cette montée irréversible de température traduit directement la dissipation thermique induite par l'effet thermoélastique :



(Figure 4)

#### Montée irréversible de température

Par contre, si nous linéarisons cette équation (cela revient à faire l'approximation  $T = T_0$  dans 3.4 ; on obtient :  $\rho T_0 \dot{\eta} = k \theta_{,xx}$ ) la résolution en devient plus aisée. Cependant, nous perdons alors l'information  $\langle T \dot{\eta} \rangle = 0$  en la substituant par :

$\langle T_0 \dot{\eta} \rangle = 0$ . Nous constatons alors que nous n'avons plus accès, de façon directe, à la production irréversible d'entropie.

Mais nous allons montrer qu'on peut toutefois accéder indirectement à la dissipation :

la forme linéarisée de  $\rho T \dot{\eta} = \text{div} [k \text{grad} \theta]$

s'écrit  $\rho T_0 \dot{\eta} = \text{div} [k \text{grad} \theta]$

et nous obtenons l'équation de la chaleur :

$$4.2 \quad \rho c_\sigma(x) \dot{\Theta} + \rho T_0 \dot{\sigma} = k \Theta_{,xx}$$

Nous perdons certes le moyen de modéliser la montée irréversible en température ; en passant à la valeur moyenne de la loi d'évolution linéarisée de l'entropie, on a :

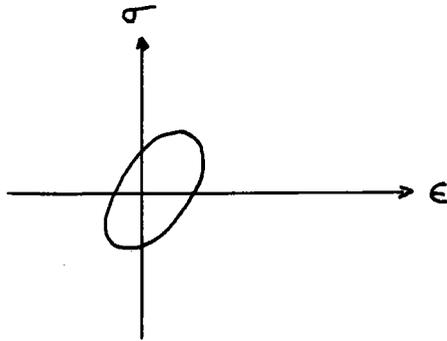
ainsi

$$\langle \rho T_0 \dot{\eta} \rangle = 0$$

$$\langle \dot{\eta} \rangle = 0$$

l'entropie globale du matériau demeure constante.

Mais cette formulation nous permet à chaque instant de mettre en évidence le déphasage de la température et de la déformation par rapport à la contrainte. En effet si nous représentons le diagramme contrainte-déformation lorsque l'échantillon est soumis à une contrainte périodique, nous obtenons un cycle (la réponse en déformation est aussi périodique mais déphasée par rapport à la contrainte).



(Figure 5)

Si nous reprenons alors la formule classique  
 "L'aire du cycle représente le travail dissipé sous forme de chaleur au cours d'une période"  
 nous décrivons indirectement la dissipation du phénomène.

#### Expression de l'indice adiabatique :

Pour un milieu isotrope, nous reprenons les formes duales de l'expression (3.2 et 3.3) de l'entropie :

$$e T_0 d\eta = 3 K T_0 \alpha d\epsilon_I + e C_e d\theta$$

et

$$e T_0 d\eta = T_0 \alpha d\sigma_I + e C_\sigma d\theta$$

Or,  $\sigma_I$  et  $\epsilon_I$ , premiers invariants respectivement de  $\sigma$  et  $\epsilon$ , on déduit de la loi de comportement :

$$\epsilon = \frac{1+\nu}{E} \sigma - \frac{\nu}{E} \sigma_I + \alpha \theta$$

que

$$\epsilon_I = (1-2\nu) \frac{\sigma_I}{E} + 3\alpha \theta$$

ainsi

$$d\epsilon_I = (1-2\nu) \frac{d\sigma_I}{E} + 3\alpha d\theta$$

on reporte  $d\epsilon_I$  dans l'expression de l'entropie que nous éliminons afin d'obtenir l'égalité :

$$3 K T_0 \alpha \frac{(1-2\nu)}{E} d\sigma_I + (3 K T_0 \alpha^2 + e C_e) d\theta = T_0 \alpha d\sigma_I + e C_\sigma d\theta$$

par identification :

$$\rho C_{\sigma} = \rho C_{\epsilon} + 3KT_0 \alpha^2$$

d'où

$$\gamma(\alpha) = \frac{C_{\sigma}}{C_{\epsilon}} = 1 + \frac{3KT_0 \alpha^2}{\rho C_{\epsilon}}$$

$$(1-2\nu) 3KT_0 \alpha \frac{d\sigma_I}{E} = T_0 \alpha d\sigma_I$$

d'où

$$E = 3(1-2\nu)K$$

## 5) REPONSES VISCOELASTIQUES

Nous nous proposons de soumettre l'échantillon respectivement à un essai de contrainte quasistatique (essai de fluage) et de contrainte cyclique (contrainte périodique, essai de frottement interne) et d'examiner les réponses en déformation. Cela revient à déterminer les compliances (rapport de la déformation observée sur la contrainte imposée) : on utilise différentes méthodes de calculs dont les résultats sont confrontés afin de vérifier leur validité.

### 5.1. Compliances locales instantanée et relaxée :

En posant  $\xi = \epsilon_{11}$ , nous déduisons de la forme matricielle (3.1) de la loi de comportement, la loi contrainte-déformation :

$$5.1.1 \quad \xi = \frac{\sigma}{E(\alpha)} + \alpha \theta$$

En substituant  $\theta$  à l'aide de l'expression de l'entropie 3.3, nous obtenons la déformation en fonction de l'entropie :

$$5.1.2 \quad \xi = \sigma \left( \frac{1}{E(\alpha)} - \frac{T_0 \alpha^2}{\rho C_{\epsilon} \gamma(\alpha)} \right) + \frac{\alpha T_0}{C_{\epsilon} \gamma(\alpha)} \eta$$

où nous avons utilisé la définition de l'indice adiabatique

$$C_{\sigma}(\alpha) = \gamma(\alpha) C_{\epsilon}$$

La relation 5.1.2 est importante car elle nous permet de déduire :

- la compliance instantanée adiabatique définie par :

$$J_u = \left. \frac{\delta \mathcal{E}}{\delta \sigma} \right|_{\eta}$$

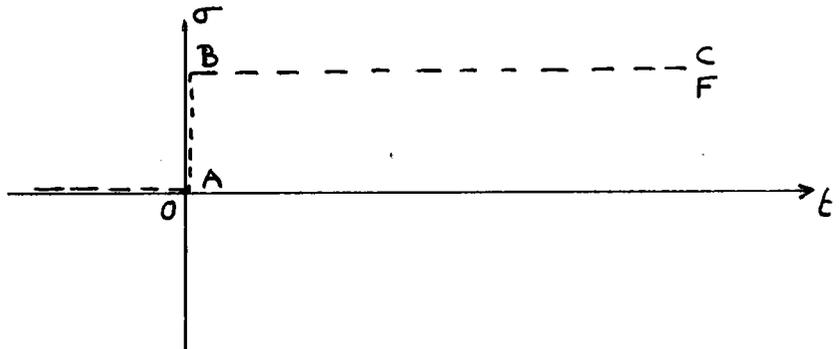
(la notation est celle employée par Nowick et Berry ((26)), l'indice u rappelle le mot "unrelaxed").

$$5.1.3 \quad J_u = \frac{1}{E(x)} - \frac{T_0 \alpha^2}{\rho c_E \delta(x)}$$

La formule 5.1.1 nous donnerait l'expression classique de la compliance instantanée isotherme :

$$\left. \frac{\delta \mathcal{E}}{\delta \sigma} \right|_{\theta} = \frac{1}{E(x)} \quad (\text{inverse du module d'Young}).$$

Connaissant la compliance instantanée adiabatique, nous cherchons à présent la compliance relaxée. Pour cela nous examinons la réponse du matériau à l'échelon de contrainte quasistatique représenté par la figure :



(Figure 6)

La phase AB est un incrément de contrainte instantané ; nous considérons que la conduction de la chaleur n'a pas le temps d'agir ; le phénomène est adiabatique et on déduit de la forme linéarisée 4.2 de l'équation de la chaleur la température atteinte en B :

. Avant l'impulsion de contrainte la température initiale en A est nulle :

$$\Theta_A(x) = 0$$

. L'incrément de contrainte est adiabatique :

$$\Theta_{,xx} = 0$$

de l'équation de la chaleur, on déduit :

$$\rho c_E(x) \dot{\Theta} + \alpha T_0 \dot{\sigma} = 0$$

en intégrant de A à B :

$$\Theta_B(x) - \Theta_A(x) = -\frac{\alpha T_0 \sigma_0}{\rho c_E \delta(x)}$$

La phase BC est une relaxation de la déformation à contrainte constante (fluage) ; le profil de la température  $\theta_B(x)$  s'uniformise pour atteindre la température d'équilibre  $\theta_F$  :

. L'évolution est à contrainte constante :  $\dot{\sigma} = 0$

. L'équation de la chaleur devient :  $\rho c_\sigma(x) \dot{\theta} = k \theta_{,xx}$

. En intégrant sur le volume de la cellule isolée, on déduit :

$$\langle \rho c_\sigma(x) \dot{\theta} \rangle = 0$$

. Par intégration en temps, on déduit :

$$\langle \rho c_\epsilon \gamma(x) \theta_F \rangle = \langle \rho c_\epsilon \gamma(x) \theta_B(x) \rangle$$

. Puisque  $\theta_F$  est uniforme :

$$5.1.4 \quad \theta_F = \frac{\langle \gamma(x) \theta_B(x) \rangle}{\langle \gamma(x) \rangle} = - \frac{\alpha T_0 \sigma_0}{\rho c_\epsilon \langle \gamma \rangle}$$

$$5.1.5 \quad \text{en ayant utilisé} \quad \theta_B(x) = - \frac{\alpha T_0 \sigma_0}{\rho c_\epsilon \gamma(x)}$$

La température finale  $\theta_F$  de l'évolution anélastique étant connue, on déduit la compliance relaxée  $J_R$

$$5.1.6 \quad J_R - J_u = \frac{\xi_F^{an} - \xi_{initiale}^{an}}{\sigma_0} = \frac{\alpha \theta_F - \alpha \theta_B}{\sigma_0} = \frac{\alpha^2 T_0}{\rho c_\epsilon} \left[ \frac{1}{\gamma(x)} - \frac{1}{\langle \gamma \rangle} \right]$$

et en reprenant l'expression 5.1.3 de la compliance non relaxée  $J_u$  :

$$5.1.7 \quad \boxed{J_R = \frac{1}{E(x)} - \frac{\alpha^2 T_0}{\rho c_\epsilon \langle \gamma \rangle}}$$

Dans ce paragraphe, en étudiant la réponse du matériau à un essai de fluage, nous avons obtenu les expressions exactes locales des compliances instantanées et relaxées. Mais nous n'avons aucune information sur l'évolution de l'échantillon entre l'état initial et l'état final. Le but du paragraphe suivant est d'apporter cette information.

Par l'utilisation d'une méthode de perturbation, nous obtenons :

- d'une part, la description approchée du régime transitoire ;
- d'autre part, des expressions approchées des compliances moyennes instantanées et relaxées que nous comparerons aux compliances exactes précédemment calculées.

## 5.2. Méthode de Perturbation directe :

## 5.2. a) Réponse à un échelon de contrainte :

Si nous reprenons la figure (6) nous décrivons l'évolution BC à l'aide de l'équation de la chaleur en prenant  $\sigma$  constante :

$$5.2.1 \quad \rho C_{\sigma}(x) \dot{\theta} = k \theta_{,xx}$$

Il s'agit dans ce paragraphe de résoudre l'équation aux dérivées partielles :

$$\gamma(x) \dot{\theta} = \frac{k}{\rho C_{\sigma}} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (\text{c.f N.B})$$

dont on connaît la condition initiale :

$$\theta(x,0) = \theta_B(x)$$

et la condition de frontière (en raisonnant sur la cellule élémentaire) :

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \quad \text{en } x = 0 \quad \text{et en } x = 1$$

Nous utilisons une méthode de perturbation directe dont le petit paramètre  $\epsilon$  (coefficient de perturbation) dépend de la microhétérogénéité du matériau. Par hypothèse, l'hétérogénéité de l'échantillon est assurée par la seule variation longitudinale périodique du module d'Young  $E(x)$  et dans l'équation à résoudre apparaît seulement le terme variable  $\gamma(x)$  dépendant de  $E(x)$  par :

$$5.2.2 \quad \gamma(x) = 1 + \frac{3E(x) T_0 \alpha^2}{(1-2\nu) \rho C_{\sigma}}$$

On définit ainsi le paramètre d'hétérogénéité  $\epsilon$  en écrivant  $\gamma(x)$  sous la forme :

$$5.2.3 \quad \gamma(x) = \langle \gamma \rangle [ 1 + \epsilon \cos \pi x ]$$

La solution analytique trouvée par la méthode de perturbation basée sur  $\epsilon$  sera proche de la solution exacte si ce paramètre d'hétérogénéité est petit. Elle est intéressante pour des milieux microhétérogènes. Cependant ((30)), l'écart entre la solution exacte et l'approximation calculée en tronquant le développement analytique au-delà d'un certain ordre choisi est inconnu.

Une résolution numérique, que nous examinerons, est alors justifiée car sa comparaison avec la solution approchée nous permet de contrôler la convergence du développement.

N.B: la longueur de l'échantillon est l'unité. Si on veut revenir à une formulation où apparaît la longueur  $l$  de la cellule, il suffit de remplacer  $k$  par  $k/l^2$

Selon le schéma classique des méthodes de perturbations directes, nous développons  $\theta$  suivant :

$$\Theta(x,t) = \Theta_0(x,t) + \epsilon \Theta_1(x,t) + \epsilon^2 \Theta_2(x,t) + \dots$$

et nous identifions à l'ordre  $\epsilon$  après avoir substitué  $\theta$  dans l'équation 5.2.1

Nous avons détaillé les calculs en annexe pour le problème aux limites de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma(x) \dot{\Theta} = \alpha^2 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} \\ \Theta(x,0) = \phi(x) \quad \text{condition initiale connue} \\ \frac{\partial \Theta}{\partial x} = 0, \quad x=0 \text{ et } x=1 \end{array} \right.$$

Résultat : Nous obtenons l'expression de la valeur moyenne volumique de la température notée  $\theta^*(t)$

$$\theta^*(t) = \langle \Theta(x,t) \rangle$$

on a :

$$5.2.4 \quad \theta^*(t) = \phi_0 + \frac{\epsilon \phi_1}{2} [1 - e^{\alpha_1 t}] + \frac{\epsilon^2}{4} \alpha_2 \phi_2 \frac{(e^{\alpha_2 t} - e^{\alpha_1 t})}{\alpha_2 - \alpha_1} + O(\epsilon^3)$$

où les  $\phi_j$  sont les scalaires déduits du développement de la température initiale  $\phi(x)$  en série de Fourier :

$$5.2.5 \quad \phi(x) = \phi_0 + \phi_1 \cos \pi x + \phi_2 \cos 2\pi x + \phi_3 \cos 3\pi x + \dots$$

et où les  $\alpha_j$  sont les inverses de temps caractéristiques :

$$\alpha_j = - \frac{(j\pi \alpha)^2}{\langle \gamma \rangle}$$

$$5.2.6 \quad \alpha_j = - (j\pi)^2 \frac{k}{\rho c \epsilon \langle \gamma \rangle}$$

(la longueur de la cellule est unité)

Connaissant  $\theta^*(t)$  nous pouvons déduire la déformation moyenne  $\langle \xi(x,t) \rangle$  notée  $\xi^*(t)$  :

$$5.2.7 \quad \xi^*(t) = \sigma(t) \langle \frac{1}{E} \rangle + \alpha \theta^*(t)$$

d'où la fonction fluage de l'essai de relaxation pour un échelon de contrainte :

$$5.2.8 \quad \sigma(t) = \sigma_0$$

$$J^*(t) = \frac{\xi^*(t)}{\sigma_0} = \langle \frac{1}{E} \rangle + \frac{\alpha \Theta^*(t)}{\sigma_0}$$

Mais de 5.1.5 nous connaissons la température initiale :

$$5.2.9 \quad \phi(x) = - \frac{\alpha T_0 \sigma_0}{\rho c_\epsilon \delta(x)} = \frac{- \alpha T_0 \sigma_0}{\rho c_\epsilon \langle \delta \rangle [1 + \epsilon \cos \pi x]}$$

que nous développons suivant :

$$\phi(x) = - \frac{\alpha T_0 \sigma_0}{\rho c_\epsilon \langle \delta \rangle} \left[ 1 - \epsilon \cos \pi x + \epsilon^2 \cos^2 \pi x + G(\epsilon^3) \right]$$

afin de déduire à l'ordre  $\epsilon^3$  les coefficients du développement en série de Fourier de la fonction  $\phi(x)$  :

$$5.2.10 \quad \phi_0 = - \frac{\alpha T_0 \sigma_0}{\rho c_\epsilon \langle \delta \rangle} \left[ 1 + \frac{\epsilon^2}{2} \right] + G(\epsilon^3)$$

$$\phi_1 = \frac{\alpha T_0 \sigma_0}{\rho c_\epsilon \langle \delta \rangle} \epsilon + G(\epsilon^3)$$

En tenant compte de l'expression 5.2.4 de  $\theta^*(t)$  on déduit pour la fonction fluage (on connaît ainsi l'évolution transitoire du matériau) :

$$5.2.11 \quad J^*(t) = \langle \frac{1}{E} \rangle - \frac{\alpha^2 T_0}{\rho c_\epsilon \langle \delta \rangle} \left( 1 + \frac{\epsilon^2}{2} \right) + \frac{\alpha^2 \epsilon^2 T_0}{2 \rho c_\epsilon \langle \delta \rangle} [1 - e^{-t/\tau}] + G(\epsilon^3)$$

En reprenant l'étude de Zener, nous constatons que  $J^*(t)$  a la même forme que la fonction fluage de l'essai quasistatique du solide de Zener ; à savoir :

$$5.2.12 \quad J^*(t) = J_u^P + (J_R^P - J_u^P) (1 - e^{-t/\tau})$$

(cf annexe anélasticité)

où  $J_u^P$  est la compliance instantanée déduite par la méthode de perturbation :

$$5.2.13 \quad J_u^P = \langle \frac{1}{E} \rangle - \frac{\alpha^2 T_0}{\rho c_\epsilon \langle \delta \rangle} \left( 1 + \frac{\epsilon^2}{2} \right)$$

où  $J_R^P$  est la compliance relaxée moyenne :

$$5.2.14 \quad J_R^P = J_u^P + \frac{\alpha^2 \epsilon^2 T_0}{2 \rho c_\epsilon \langle \delta \rangle}$$

où de plus nous obtenons (à l'ordre  $\epsilon^3$  près) une expression du temps de relaxation : ( en revenant en grandeurs dimensionnées )

5.2.15

$$\tau = -\frac{1}{\alpha_1} = \frac{\langle \delta \rangle}{\pi^2 \alpha^2} = \frac{\rho c \epsilon \langle \delta \rangle l^2}{\pi^2 k}$$

Par la fonction fluage précédemment calculée, nous avons obtenu une approximation de la réponse transitoire du matériau : on constate (à l'ordre des calculs en  $\epsilon^3$ ) que, pour l'essai quasistatique en question, le matériau présente une fonction fluage analogue à celle d'un solide idéal de Zener. Nous examinerons au paragraphe 6 que les compliances moyennes relaxées et instantanées déduites de cette fonction fluage sont effectivement les expressions approchées à l'ordre  $\epsilon^3$  des moyennes des compliances locales exactes relaxées et instantanées

calculées au paragraphe 5.1. A présent, nous nous proposons de soumettre l'échantillon à un autre type d'essai ; il s'agit de l'essai cyclique où l'on soumet l'échantillon à une contrainte périodique : nous approximerons la réponse du matériau à l'aide de la méthode de perturbation basée sur le coefficient d'hétérogénéité et en nous reportant aux ouvrages de Nowick et Berry ou de Zener ((26)), ((21)), nous vérifierons (au paragraphe 6) que le comportement est toujours celui d'un solide viscoélastique de Zener : en effet, pour un tel solide, les auteurs précédemment cités ont établi l'existence d'une relation (dite équations de Debye) entre la fonction fluage déduite de l'essai quasistatique et la réponse à un essai cyclique. C'est effectivement cette relation que nous vérifierons.

5.2. b) Essai de contrainte cyclique :

Nous imposons une contrainte périodique complexe  $\sigma(t) = \sigma_0 e^{iat}$

La température est donnée par l'équation déduite de l'équation de la chaleur 4.2. :

$$5.2.16 \quad \delta(x) \dot{\theta} = \frac{k}{\rho c \epsilon} \frac{\delta^2 \theta}{\delta x^2} - \frac{\alpha T_0 \sigma_0}{\rho c \epsilon} ia e^{iat}$$

En annexe nous avons résolu par une méthode de perturbation analogue le problème de la forme :

$$5.2.17 \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta(x) \dot{\theta} = \alpha^2 \frac{\delta^2 \theta}{\delta x^2} + \beta e^{iat} \\ \theta(x, 0) = 0 \\ \frac{\delta \theta}{\delta x} = 0, \quad x=0 \text{ et } x=1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(condition initiale)} \\ \text{(condition de frontière)} \end{array}$$

Résultat : Après une phase transitoire, la température moyenne de l'échantillon oscille périodiquement autour d'une valeur fixe

$$\theta^* : \quad \theta^*(t) = \theta_F + \tilde{\theta}^*(t)$$

où  $\tilde{\theta}^*(t)$  est la valeur moyenne volumique de la partie permanente pulsante de la température. Nous avons obtenu :

$$5.2.18 \quad \tilde{\theta}^*(t) = \frac{\beta e^{iat}}{\langle \gamma \rangle} \left[ \frac{1}{ia} + \frac{\epsilon^2}{2(i\alpha - \alpha_1)} \right] + G(\epsilon^3)$$

Connaissant  $\tilde{\theta}^*(t)$ , nous déduisons la fonction fluage complexe  $J_c^*$  :

$$5.2.19 \quad J_c^* = \frac{\tilde{\theta}^*(t)}{\sigma(t)} = \frac{[\sigma_0 e^{iat} \langle \frac{1}{\epsilon} \rangle + \alpha \theta^*(t)]}{\sigma_0 e^{iat}}$$

Les calculs détaillés en annexe donnent :

$$5.2.20 \quad J_c^*(a) = \left[ \langle \frac{1}{\epsilon} \rangle + \frac{\alpha \delta}{\sigma_0} \left( 1 + \frac{\epsilon^2}{2} \right) - \frac{\alpha \delta \epsilon^2}{2\sigma_0 (1 + a^2/\alpha_1^2)} \right] - i \left[ \frac{\alpha \delta \epsilon^2}{2\sigma_0} \frac{a/\alpha_1}{1 + a^2/\alpha_1^2} \right]$$

et en revenant aux notations du paragraphe 5.2. a), on écrit que la partie de  $J_c^*(a)$  en phase avec la contrainte est  $J_1(a)$  avec :

$$5.2.21 \quad J_1(a) = \langle \frac{1}{\epsilon} \rangle - \frac{\alpha^2 T_0}{\rho c \epsilon \langle \gamma \rangle} \left( 1 + \frac{\epsilon^2}{2} \right) + \frac{\alpha^2 T_0 \epsilon^2}{2\rho c \epsilon \langle \gamma \rangle (1 + a^2/\alpha_1^2)}$$

La partie de  $J_c$  déphasée de  $\frac{\pi}{2}$  par rapport à  $\sigma_0 e^{iat}$  est  $J_2(a)$  avec :

$$5.2.22 \quad J_2(a) = \frac{\alpha^2 T_0 \epsilon^2}{2\rho c \epsilon \langle \gamma \rangle} \left[ \frac{a/(-\alpha_1)}{1 + a^2/\alpha_1^2} \right]$$

En comparant les expressions de  $J_1(a)$  et  $J_2(a)$  avec celles des fonctions fluages 5.2.13 et 5.2.14 de l'essai quasistatique, on constate que :

$$5.2.23 \quad \left\{ \begin{array}{l} J_1(a) = J_u^P + (J_R^P - J_u^P) \frac{1}{(1 + a^2 \tau^2)} \\ J_2(a) = (J_R^P - J_u^P) \frac{a \tau}{(1 + a^2 \tau^2)} \end{array} \right.$$

Cette relation est utilisée dans le paragraphe (6) où on établit la cohérence des résultats.

### 5.3. Méthode de résolution par série de Fourier tronquée :

L'équation 5.2.17 de la forme :

$$\gamma(x) \dot{\theta} = \alpha^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \beta e^{i\omega t}$$

peut aussi être résolue en développant  $\theta$  sous la forme d'une série de Fourier :

$$\theta(x,t) = (a_0 + a_1 \cos \pi x + a_2 \cos 2\pi x + \dots) e^{i\omega t}$$

Nous démontrons en annexe que la solution trouvée tronquée à partir du quatrième terme est la même que la solution obtenue à l'aide de la méthode de perturbation du paragraphe 5.2. b) en ayant supprimé les termes d'ordre 3 et plus en  $\epsilon$ . Cela constitue une première confrontation visant à justifier l'emploi et la validité de la méthode de perturbation lorsque le coefficient d'hétérogénéité  $\epsilon$  est assez petit.

## 6) COHERENCE DES RESULTATS

Nous comparons les résultats des paragraphes précédents :

- l'un concerne les compliances locales exactes instantanées et relaxées déduites sous un essai de fluage.
- l'autre donne une approximation de ces compliances et de la fonction fluage. Il approxime aussi la réponse à un essai de contrainte périodique.

La cohérence, que nous nous proposons de montrer pour ces résultats, justifie la nature viscoélastique du comportement de l'échantillon obéissant au système des lois locales de la thermoélasticité.

### 6.1. Essai quasistatique

Pour le paramètre d'hétérogénéité  $\epsilon$  assez petit, nous vérifions que :

a) les compliances instantanées moyennes sont égales :

$$* \text{ la valeur exacte déduite de (5.1.3) vaut } \langle J_u \rangle = \frac{\langle 1 \rangle}{E} - \frac{T_0 \alpha^2}{\rho \epsilon \langle \gamma \rangle} \langle 1 \rangle$$

c'est à dire en calculant à l'ordre  $\epsilon^3$  la valeur de  $\langle \frac{1}{\gamma} \rangle$ , on a :

$$\langle \frac{1}{\gamma} \rangle = \frac{1}{\langle \gamma \rangle} \left\langle \frac{1}{1 + \epsilon \cos \pi x} \right\rangle = \frac{1}{\langle \gamma \rangle} \left( 1 + \frac{\epsilon^2}{2} \right) + O(\epsilon^3)$$

ainsi

$$\langle J_u \rangle = \frac{\langle 1 \rangle}{E} - \frac{T_0 \alpha^2}{\rho \epsilon \langle \gamma \rangle} \left( 1 + \frac{\epsilon^2}{2} \right) + O(\epsilon^3)$$

\* l'autre déduite de la méthode de perturbation vaut (5.2.13)

$$J_u^P = \left\langle \frac{1}{\epsilon} \right\rangle - \frac{T_0 \alpha^2}{\rho C_\epsilon \langle \gamma \rangle} \left( 1 + \frac{\epsilon^2}{2} \right)$$

On vérifie bien que  $\langle J_u \rangle = J_u^P$  à l'ordre  $o(\epsilon^3)$ .

nous vérifions que

b) les compliances relaxées moyennes sont égales :

\* de la valeur exacte (5.1.6), nous obtenons :

$$\langle J_R \rangle - \langle J_u \rangle = \frac{\alpha^2 T_0}{\rho C_\epsilon} \left[ \left\langle \frac{1}{\gamma} \right\rangle - \frac{1}{\langle \gamma \rangle} \right]$$

\* de la méthode de perturbation, de 5.2.14 on a :

$$J_R^P - J_u^P = \frac{\alpha^2 \epsilon^2 T_0}{2 \rho C_\epsilon \langle \gamma \rangle}$$

En remarquant au préalable que, à l'ordre  $\epsilon^3$

$$\left\langle \frac{1}{\gamma} \right\rangle - \frac{1}{\langle \gamma \rangle} = \frac{1}{\langle \gamma \rangle} \frac{\epsilon^2}{2}$$

et en reprenant le résultat précédent :  $\langle J_u \rangle = J_u^P$

on vérifie bien que, à l'ordre  $\epsilon^3$  :

$$\langle J_R \rangle = J_R^P$$

## 6.2. Essai cyclique :

Nous avons calculé par une méthode de perturbation dans le paragraphe (5.2.b) la fonction fluage complexe pour l'essai cyclique où la contrainte périodique complexe s'écrit :  $\sigma(t) = \sigma_0 e^{i\omega t}$

Pour vérifier l'exactitude de cette solution, il suffit d'examiner si les relations de Debye (cf annexe Anélasticité) sont vérifiées. Ces relations lient en effet les valeurs caractéristiques déduites d'un essai quasistatique à celles déduites d'un essai cyclique, elles s'écrivent ((26))

$$\left\{ \begin{array}{l} J_1(a) = J_u + (J_R - J_u) \frac{1}{1 + a^2 \tau^2} \\ J_2(a) = (J_R - J_u) \frac{a \tau}{(1 + a^2 \tau^2)} \end{array} \right.$$

où  $J_1(a)$  est la partie de la fonction fluage en phase avec la contrainte

où  $J_2(a)$  est la partie de la fonction fluage déphasée de  $\frac{\pi}{2}$  avec la contrainte.

où  $\tau$  est le temps caractéristique de la relaxation.

Ces relations sont bien les mêmes que celles de la formule 5.2.23. Les équations de Debye sont vérifiées.

Conclusion : Après avoir résumé dans l'annexe Anélasticité et Viscoélasticité les formalismes empruntés à Zener, Nowick et Berry, nous constatons que les réponses en déformation globale de l'échantillon soumis à une sollicitation en contrainte quasi-statique ou cyclique sont celles d'un solide linéaire idéal viscoélastique de Zener dont les caractéristiques sont : ( à l'ordre de l'approximation considérée )

- la compliance instantanée  $J_U$  (5.1.3)
- la compliance relaxée  $J_R$  (5.1.7)
- le temps de relaxation à contrainte constante  $\tau$  (5.2.15)

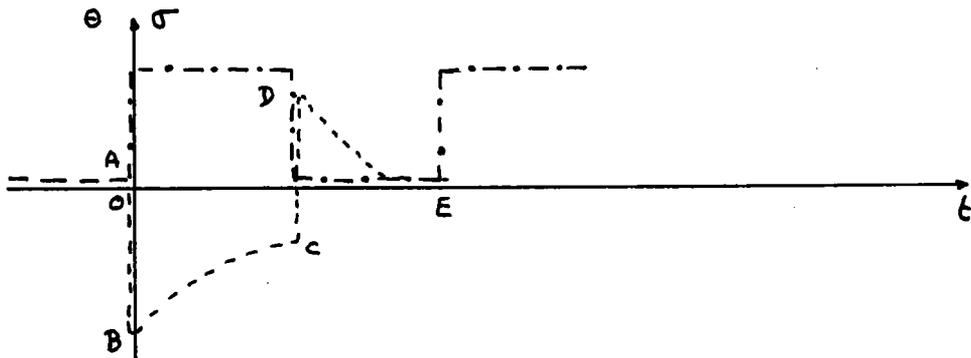
## 7) ENERGIE DISSIPÉE :

Nous nous proposons de décrire un cycle contrainte déformation en appliquant un échelon de contrainte, suivi une fois la température uniformisée, d'un échelon de compression d'égale intensité. L'aire du cycle ainsi décrit représente l'énergie dissipée. Nous la calculons et nous la comparons à l'expression de la chaleur produite par la variation d'entropie irréversible  $\eta_I$  déduite de la formule établie au chapitre I. 4.4).

$$e\dot{\eta}_I = k_{ij} \frac{\theta_{,i} \theta_{,j}}{\tau^2}$$

### 7.1. Description du cycle contrainte-déformation :

Contrainte et Température moyenne :



Les étapes de calculs sont les suivantes

\* la température initiale à  $t = 0$  est prise nulle

$$\theta_A(0) = 0$$

- \* la température à l'impulsion +  $\sigma_0$  est obtenue sous des conditions adiabatiques (cf 5.1.5)

$$\theta_B(0^+) = - \frac{\alpha T_0 \sigma_0}{\rho c_\epsilon \gamma(x)}$$

- \* la température finale uniforme atteinte sous  $\sigma_0$  maintenue constante vaut (cf 5.1.4)

$$\theta_c = - \frac{\alpha T_0 \sigma_0}{\rho c_\epsilon \langle \gamma \rangle}$$

- \* la température à l'impulsion

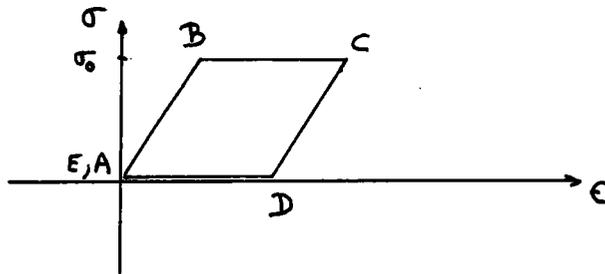
- $\sigma_0$ , c'est à dire sous la contrainte  $\sigma_0 - \sigma_0$ , se calcule de la même façon en prenant cependant  $\theta_c$  comme température initiale :

$$\theta_D = \theta_c + \frac{\alpha T_0 \sigma_0}{\rho c_\epsilon \gamma(x)}$$

- \* la température finale uniforme atteinte sous  $-\sigma_0$  maintenue constante vaut (cf 5.1.4) en prenant  $\theta_D$  pour température initiale :

$$\theta_E = \frac{\langle \gamma(x) \theta_D(x) \rangle}{\langle \gamma \rangle} = \frac{1}{\langle \gamma \rangle} \left[ \langle \gamma \rangle \theta_c + \frac{\alpha T_0 \sigma_0}{\rho c_\epsilon} \right]$$

On remarque l'annulation de  $\theta_E$  ce qui traduit ainsi naturellement que le cycle contrainte-déformation (ABCDE) se referme.



L'aire du cycle se calcule suivant :

$$W^d = \sigma_0 (\epsilon_C - \epsilon_B)$$

$$\text{or } \epsilon_C = \sigma_0 \langle \frac{1}{E} \rangle + \alpha \theta_c$$

$$\text{et } \epsilon_B = \sigma_0 \langle \frac{1}{E} \rangle + \alpha \langle \theta_B \rangle$$

en substituant les valeurs de  $\theta_B$  et  $\theta_c$  :

$$W^d = \frac{\sigma_0^2 \alpha^2 T_0}{\rho c_\epsilon} \left[ \langle \frac{1}{\gamma} \rangle - \frac{1}{\langle \gamma \rangle} \right]$$

en reprenant l'expression de  $\gamma(x)$  :

$$\gamma(x) = \langle \gamma \rangle [1 + \epsilon \cos \pi x]$$

avec  $\langle \gamma \rangle = \int_0^1 \gamma(x) dx$

on obtient exactement

$$7.1.1 \quad \left\langle \frac{1}{\gamma} \right\rangle - \frac{1}{\langle \gamma \rangle} = \frac{1}{\langle \gamma \rangle} \left[ \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2}} - 1 \right]$$

et nous déduisons la valeur exacte du travail dissipé :

$$7.1.2 \quad W^d = \frac{\sigma_0^2 \alpha^2 T_0}{\rho c_\epsilon \langle \gamma \rangle} \left[ \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2}} - 1 \right]$$

Nous aurons à utiliser la valeur approchée à l'ordre  $\epsilon^3$  de  $W^d$  :

$$7.1.3 \quad W^d \simeq \frac{\sigma_0^2 \alpha^2 T_0}{2 \rho c_\epsilon \langle \gamma \rangle} \epsilon^2 + O(\epsilon^3)$$

7.2. Quantité de chaleur produite :

Le taux de production d'entropie irréversible d'un solide thermoélastique de longueur unité est donné par (cf I. 4.4) :

$$\dot{\eta}_I = \int_0^1 \frac{k \Theta_{,x}^2}{T^2} dx$$

Nous approximos  $\frac{k \Theta_{,x}^2}{T^2}$  par  $\frac{k \Theta_{,x}^2}{T_0^2}$  et nous reprenons le

résultat établi en annexe pour l'échelon de contrainte  $\sigma_0$  :

$$\Theta(x,t) = \phi_0 + \phi_1 \cos \pi x e^{\alpha_1 t} + \frac{\epsilon \phi_1}{2} (1 - e^{\alpha_1 t}) + O(\epsilon^3)$$

ainsi 
$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} = -\phi_1 \pi \sin \pi x e^{\alpha_1 t} + O(\epsilon^3)$$

et 
$$\frac{k}{T^2} \left( \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right)^2 = \frac{k \phi_1^2 \pi^2}{2 T_0^2} \sin^2 \pi x e^{2\alpha_1 t} + O(\epsilon^3)$$

en intégrant sur la longueur de l'échantillon, on obtient :

$$\dot{\eta}_I = \frac{k}{2} \phi_1^2 \pi^2 e^{2\alpha_1 t} / T_0^2$$

nous déduisons la variation d'entropie irréversible lors de l'évolution de A à C :

$$\Delta_A^C \eta_I = \int_0^{+\infty} \dot{\eta}_I dt = \frac{k \phi_1^2 \pi^2}{2 T_0^2} \left( \frac{-1}{2\alpha_1} \right)$$

en substituant les expressions 5.2.10 et 5.2.6 de  $\phi_1$  et  $\alpha_1$ , on trouve

$$\Delta_A^C \eta_I = \frac{\alpha^2 \epsilon^2 \sigma_0^2}{4e c_\epsilon \langle \delta \rangle}$$

de même, la variation d'entropie irréversible de C à E vaut

$$\Delta_C^E \eta_I = \frac{\alpha^2 \epsilon^2 \sigma_0^2}{4e c_\epsilon \langle \delta \rangle}$$

et pour le cycle entier, le travail dissipé s'exprime suivant

$$W_D = T_0 \left( \Delta_A^C \eta_I + \Delta_C^E \eta_I \right)$$

7.2.1

$$W_D = \frac{\alpha^2 \epsilon^2 \sigma_0^2 T_0}{2e c_\epsilon \langle \delta \rangle}$$

Il est remarquable et on pouvait s'y attendre que cette expression de l'énergie thermoélastique dissipée est la même que l'aire du cycle (7.1.3)  $W^d$  précédemment calculée, aire qui est uniquement déduite de l'observation du comportement viscoélastique de l'échantillon. Cette égalité confirme encore l'analogie de comportement de ce solide thermoélastique avec le comportement de nature viscoélastique.

De plus, en comparant les expressions 7.1.2 et 7.2.1 de l'énergie dissipée, nous avons la possibilité de tester la précision des résultats obtenus par la méthode de perturbation.

### 7.3. Evaluation de la solution approchée (essai quasistatique) :

La précision de la méthode de perturbation est meilleure si le coefficient d'hétérogénéité  $\epsilon$  est petit. Si alors on désire respecter un degré de précision fixé, on pourra déterminer la valeur maximale admissible de  $\epsilon$  en comparant l'expression exacte et l'expression approchée du travail dissipé lors de l'essai quasistatique.

Le travail dissipé moyen par unité de volume s'écrit (7.1.2) :

$$W^d = \sigma_0 \left[ \alpha \Theta_{\text{final}}^* - \alpha \Theta_{\text{initial}}^* \right] = \frac{\sigma_0^2 \alpha^2 T_0}{e c_\epsilon} \left[ \left\langle \frac{1}{\delta} \right\rangle - \frac{1}{\langle \delta \rangle} \right]$$

$$W^d = \frac{\sigma_0^2 \alpha^2 T_0}{e c_\epsilon \langle \delta \rangle} \left[ \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2}} - 1 \right] \quad (\text{J/m}^3)$$

avec

$$\delta(x) = \langle \delta \rangle \left[ 1 + \epsilon \cos(\pi x/L) \right]$$

Le travail dissipé obtenu par la méthode de perturbation s'écrit :

$$W^{dp} = \frac{\sigma_0^2 \alpha^2 T_0}{e c_\epsilon \langle \delta \rangle} \frac{\epsilon^2}{2} \quad (\text{J/m}^3)$$

Les résultats sont en Joules par mètre cube et nous indiquons les unités employées :

la contrainte  $\sigma_0$  est en  $\text{Nm}^{-2}$  (Newton, mètre)

le coefficient de dilatation  $\alpha$  en  $^{\circ}\text{C}^{-1}$  (degré Celsius)

la température de référence  $T_0$  en  $^{\circ}\text{C}$

la masse volumique en  $\text{kg m}^{-3}$

la chaleur spécifique en  $\text{Nm kg}^{-1} \text{C}^{-1}$

l'indice adiabatique  $\gamma$  et le coefficient d'hétérogénéité sont sans dimensions.

Pour les métaux  $\gamma$  est de l'ordre ((28)) de 1.02 à 1.05. A titre d'indication, nous dressons le tableau des valeurs de  $\frac{W^d - W^{dp}}{W^{dp}}$  pour différentes valeurs de  $\epsilon$ .

Valeurs de $\epsilon$	rapport $\frac{W^d - W^{dp}}{W^{dp}}$
0.001	$\approx 0$
0.01	$75 \cdot 10^{-4} \%$
0.1	$75 \cdot 10^{-2} \%$
0.2	3 %
0.25	4,7 %
0.3	6,8 %
0.4	12,3 %
0.5	19,2 %
0.6	28 %
0.7	38,8 %
0.8	52 %
0.9	68,7 %
0.99	99,7 %

Des valeurs de ce tableau, il apparaît que la méthode de perturbation est applicable avec une précision acceptable ( $\approx$  de 5 %) pour un coefficient d'hétérogénéité ne dépassant pas la valeur :  $\epsilon_{\text{max}} = 0.3$ .

Après avoir étudié la dissipation d'énergie lors de l'essai quasistatique, nous nous proposons à présent de calculer l'aire du cycle décrit dans le diagramme contrainte-déformation lors de l'essai cyclique que : nous obtenons ainsi l'expression de l'énergie dissipée lors de l'essai de frottement interne, expérience plus fréquente dans la littérature pour évaluer la dissipation thermoélastique d'un solide ((21)).

#### 7.4. Frottement interne :

Si nous appliquons une contrainte périodique de la forme :

$$\sigma(t) = \sigma_0 \cos \omega t$$

nous observons une réponse en déformation moyenne qui s'écrit :

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \cos \omega t + \alpha \theta^*(t)$$

où, lorsque le régime permanent est atteint,  $\theta^*(t)$  est la température moyenne de même pulsation  $\omega$  et que nous mettons sous la forme

$$\theta^*(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t + c$$

nous sommes amenés à résoudre l'équation (on remplace  $\sigma(t)$  dans l'équation de la chaleur III. 4.2) :

$$7.4.1 \quad \gamma(x) \dot{\theta} = \frac{k}{\rho c \epsilon} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\alpha T_0 \sigma_0}{\rho c \epsilon} \omega \sin \omega t$$

qui est de la forme

$$7.4.2 \quad \gamma(x) \dot{\theta} = \alpha_c \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \beta \sigma_0 \omega \sin \omega t$$

$$\text{où nous avons posé : } \alpha_c = \frac{k}{\rho c \epsilon} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{\alpha T_0}{\rho c \epsilon}$$

Nous montrerons (dans le chapitre : Illustration numérique) que le diagramme contrainte-déformation ainsi décrit est une ellipse de surface  $S$  avec

$$7.4.3 \quad S = \pi \alpha |b| \sigma_0$$

Elle représente la valeur de l'énergie dissipée par cycle lors de l'essai cyclique. Nous la notons  $\tilde{W}^d$ .

$$7.4.4 \quad \tilde{W}^d = \pi \alpha |b| \sigma_0$$

Nous pouvons connaître le terme  $b$  en reprenant l'expression de la réponse en température 5.2.18 lorsque l'échantillon est soumis à la contrainte complexe  $\sigma = \sigma_0 e^{i\omega t}$ .

En effet, la solution complexe moyenne du régime permanent pour l'équation : (III. 5.2.17)

$$\gamma(x) \dot{\theta} = \alpha^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \beta e^{i\omega t}$$

possède la partie pulsante  $\tilde{\theta}^*(t)$  qui s'écrit (III. 5.2.18)

$$\tilde{\theta}^*(t) = \frac{\beta e^{i\omega t}}{\langle \gamma \rangle} \left[ \frac{1}{i\omega} + \frac{\epsilon^2}{2(i\omega - \alpha_1)} \right]$$

En décomposant en parties réelles et imaginaires  $\tilde{\theta}^*$  et  $\beta$  suivant

$$\tilde{\theta}^* = \theta_R + i \theta_m \quad \beta = \beta_R + i \beta_{im}$$

nous obtenons les deux équations :

$$\gamma(x) \dot{\theta}_R(t) = \alpha^2 \theta_R'' + \beta_R \cos \omega t - \beta_{im} \sin \omega t$$

$$\gamma(x) \dot{\theta}_{im}(t) = \alpha^2 \theta_{im}'' + \beta_{im} \cos \omega t + \beta_R \sin \omega t$$

en imposant

$$\beta = \beta \omega \sigma_0$$

$$\text{et} \quad \alpha^2 = \alpha_c$$

nous déduisons alors que la partie imaginaire de  $\tilde{\theta}^*$  est la solution de l'équation 7.4.2

$$\gamma(x) \dot{\theta} = \alpha_c \theta'' + \beta \omega \sigma_0 \sin \omega t$$

Recherchons donc la partie imaginaire de  $\tilde{\theta}^*$  :

on a en substituant dans 5.2.18 la valeur de  $\beta$

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}(t) &= \frac{\beta \omega \sigma_0}{\langle \gamma \rangle} (\cos \omega t + i \sin \omega t) \left( \frac{1}{i\omega} + \frac{\epsilon^2}{2(i\omega - \alpha_1)} \right) \\ &= \frac{\beta \omega \sigma_0}{\langle \gamma \rangle} \left\{ \cos \omega t \left( \frac{-\epsilon^2 \alpha_1}{2(\omega^2 + \alpha_1^2)} \right) + \sin \omega t \left( \frac{1}{\omega} + \frac{\epsilon^2 \omega}{2(\omega^2 + \alpha_1^2)} \right) \right\} \\ &\quad + i \frac{\beta \omega \sigma_0}{\langle \gamma \rangle} \left\{ \sin \omega t \left( \frac{-\epsilon^2 \alpha_1}{2(\omega^2 + \alpha_1^2)} \right) + \cos \omega t \left( \frac{-1}{\omega} - \frac{\epsilon^2 \omega}{2(\omega^2 + \alpha_1^2)} \right) \right\} \end{aligned}$$

La partie imaginaire cherchée, qui est, nous le rappelons, déduite de la méthode de perturbation s'écrit :

$$7.4.5 \quad \theta^{*P} = \frac{\beta \omega \sigma_0}{\langle \gamma \rangle} \left\{ \cos \omega t \left( -\frac{1}{\omega} - \frac{\epsilon^2 \omega}{2(\omega^2 + \alpha_1^2)} \right) + \sin \omega t \left( -\frac{\epsilon^2 \alpha_1}{2(\omega^2 + \alpha_1^2)} \right) \right\}$$

Le coefficient b est le terme facteur de  $\sin \omega t$

$$b = -\frac{\beta \omega \sigma_0 \epsilon^2 \alpha_1}{2 \langle \gamma \rangle (\omega^2 + \alpha_1^2)}$$

et l'expression de l'énergie dissipée par cycle lors de l'essai cyclique que devient :

$$\tilde{W}^{dP} = \pi \alpha \sigma_0 \frac{\beta \omega \sigma_0 \epsilon^2 |\alpha_1|}{2 \langle \gamma \rangle (\omega^2 + \alpha_1^2)}$$

avec  $\alpha_1 = -1/\tau$  (cf 5.2.15, inverse du temps de relaxation)

et  $\beta = \frac{\alpha T_0}{e c_e}$  (définition de  $\beta$  ; cf 7.4.2)

on obtient :

$$7.4.6 \quad \tilde{W}^{dP} = \frac{\pi \alpha^2 \sigma_0^2 T_0 \omega \tau \epsilon^2}{2 e c_e \langle \gamma \rangle (1 + \omega^2 \tau^2)}$$

En rappelant que l'énergie dissipée  $W^{dP}$  lors de l'essai quasi-statique s'écrit (7.1.3) :

$$W^{dP} = \frac{\sigma_0^2 \alpha^2 T_0 \epsilon^2}{2 e c_e \langle \gamma \rangle}$$

on remarque alors la relation entre  $\tilde{W}^{dP}$  (essai cyclique) et  $W^{dP}$  (essai statique) :

$$7.4.7 \quad \tilde{W}^{dP} = \pi W^{dP} \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2}$$

Si nous représentons l'énergie  $\tilde{W}^{dP}$  en fonction de la pulsation  $\omega$ , nous obtenons, de la même façon que Zener, une courbe en cloche de Lorentz qui présente un maximum de dissipation pour la pulsation :

$$\omega_{(MAX)}^P = \frac{1}{\tau}$$

où  $\tau$  est le temps caractéristique de la relaxation et vaut (cf 5.2.6)

$$7.4.8 \quad \tau = -\frac{1}{\alpha_1} = \frac{1}{\pi^2 \alpha_c}$$

$$\tau = \frac{e c_e}{k \pi^2} \quad (\text{où la longueur de l'échantillon, } l, \text{ est prise égale à l'unité)}$$

Ces formules sont identiques à celles de l'étude monodimensionnelle de Zener (cf paragraphe III. 1.1). Nous les rappelons :

$$\omega_{(max)} = 1/\tau$$

et 
$$\tau = \frac{L^2}{\pi^2 D}$$
 (où  $D = \frac{k}{\rho c_\sigma}$  est le coefficient de diffusivité).

De plus, la relation 7.4.7 nous permet de déduire, dans le paragraphe suivant, l'expression de l'angle  $\delta$  (ou de sa tangente) de déphasage de la déformation par rapport à la contrainte ; angle qui est, nous le rappelons, une mesure caractérisant parfaitement la dissipation engendrée par l'effet thermoélastique.

Au préalable, nous remplaçons dans la relation 7.4.7 l'expression (approchée à l'ordre  $\epsilon^3$ )  $W^{dp}$  de l'énergie dissipée lors de l'essai quasistatique par sa valeur exacte  $W^d$  donnée par la formule 7.1.2. Si alors  $W^d$  désigne la valeur exacte de l'énergie dissipée par cycle lors de l'essai cyclique, nous supposons ne pas commettre une grande erreur en écrivant la relation :

$$7.4.9 \quad \tilde{W}^d \simeq \pi W^d \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2}$$

(nous le justifierons dans l'annexe du paragraphe suivant).

### 7.5. Mesure de la Dissipation : $\text{tg } \delta$

En substituant dans l'expression 7.4.9 de  $\tilde{W}^d$  la valeur  $W^d$  de l'énergie dissipée lors de l'essai quasistatique avec

$$W^d = \frac{\sigma_0^2 \alpha^2 T_0}{\rho c_\epsilon \langle \delta \rangle} \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} - 1 \right] \quad (\text{cf III 7.1.2})$$

on a :

$$7.5.1 \quad \tilde{W}^d = \frac{\pi \sigma_0^2 \alpha^2 T_0}{\rho c_\epsilon \langle \delta \rangle} \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} - 1 \right] \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2}$$

Nous obtenons ainsi l'expression de l'énergie dissipée par cycle lors de l'essai cyclique. Il est alors intéressant d'étudier le rapport adimensionnel de l'énergie dissipée et de l'énergie de vibration  $W^e$  définie par :

$$W^e = \frac{1}{2} \sigma_0 \epsilon_0$$

où  $\sigma_0$  est l'amplitude de la contrainte appliquée lors de l'essai  
où  $\sigma(t) = \sigma_0 e^{i\omega t}$

et  $\epsilon_0$  est l'amplitude de la réponse en déformation observée, de pulsation  $\omega$  mais déphasée de l'angle  $\delta$  avec la contrainte :  $\epsilon(t) = \epsilon_0 e^{i(\omega t - \delta)}$

Si nous exprimons la compliance complexe  $J_1 + iJ_2$  par

$$\epsilon(t) = (J_1 + iJ_2) \sigma(t)$$

où  $J_1$  et  $J_2$  sont donnés en fonction de la compliance instantanée  $J_u$  et relaxée  $J_R$  par les relations de Debye (cf paragraphe 6.2.) :

$$\begin{cases} J_1 = J_u + (J_R - J_u) \frac{1}{1 + \omega^2 \tau^2} \\ J_2 = (J_R - J_u) \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} \end{cases}$$

l'angle de déphasage vérifie :

$$\text{tg } \delta = \frac{J_2}{J_1}$$

et on démontre (pour  $\delta$  généralement petit). ((21)) ((26)) que :

$$\frac{\tilde{W}^d}{W^e} = 2\pi \text{tg } \delta \quad (\text{cf II. 5.3.1})$$

L'angle  $\delta$  est le paramètre le plus courant dans la bibliographie pour caractériser la dissipation.

En substituant  $J_1$  et  $J_2$  nous obtenons :

$$\text{tg } \delta = \frac{J_R - J_u}{J_u + \frac{J_R - J_u}{1 + \omega^2 \tau^2}} \cdot \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2}$$

Zener et d'autres auteurs (Randall-Rose-Bennewitz-Rötger) présentent  $\text{tg } \delta$  sous la forme

$$\text{tg } \delta = \frac{\Delta \omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2}$$

où  $\tau$  est le temps caractéristique de la relaxation

où on retrouve que le maximum de dissipation se situe pour  $\omega_{\text{max}} = \frac{1}{\tau}$

où  $\Delta$  sans dimension, caractérise l'intensité de la relaxation :

$$\Delta(\omega) = \frac{J_R - J_u}{J_u + \frac{J_R - J_u}{1 + \omega^2 \tau^2}}$$

Suivant la pulsation,  $\Delta$  est compris entre les deux bornes :

$$\omega = +\infty \rightarrow \Delta_{+\infty} = \frac{J_R - J_u}{J_u}$$

$$\omega = 0 \rightarrow \Delta_0 = \frac{J_R - J_u}{J_R}$$

Une très petite erreur est commise ((21)) si dans l'expression de  $\text{tg} \delta$  on remplace  $\Delta$  par  $\Delta_{\omega=0}$  ou  $\Delta_{\omega=+\infty}$

Zener a obtenu pour un matériau micro-homogène présentant donc uniquement une dissipation macroscopique (liée par exemple aux conditions de frontière) l'expression de  $\text{tg} \delta$ . Employons à présent la notation "macro" pour les résultats indiqués par C.Zener:

\* en substituant  $\Delta_{\omega=0}$  :

$$\text{tg} \delta^{\text{MACRO}} = \frac{\alpha^2 T_0 E^0}{\rho c_\epsilon \gamma^0} \frac{\omega \tau^{\text{macro}}}{(1 + \omega^2 \tau^{\text{macro}2})}$$

en rappelant la relation entre le module d'Young  $E^0$  et l'indice adiabatique  $\gamma^0$  de ce solide homogène :

$$\gamma^0 = 1 + 3\alpha^2 T_0 E^0 [\rho c_\epsilon (1-2\nu)]^{-1}$$

on peut écrire :

$$\text{tg} \delta^{\text{MACRO}} = \frac{1-2\nu}{3} \cdot \frac{\gamma^0 - 1}{\gamma^0} \cdot \frac{\omega \tau^{\text{macro}}}{1 + \omega^2 \tau^{\text{macro}2}}$$

\* en substituant  $\Delta_{\omega=+\infty}$ , on obtient ((21)) :

$$\text{tg} \delta^{\text{MACRO}} = \frac{1-2\nu}{3} \frac{c_\sigma - c_\epsilon}{c_\epsilon} \frac{\omega \tau^{\text{macro}}}{1 + \omega^2 \tau^{\text{macro}2}}$$

c'est à dire

$$\text{tg} \delta^{\text{MACRO}} = \frac{1-2\nu}{3} (\gamma^0 - 1) \frac{\omega \tau^{\text{macro}}}{1 + \omega^2 \tau^{\text{macro}2}}$$

La première forme de  $\text{tg} \delta^{\text{Macro}}$  se prête mieux à une confrontation de nos résultats (employons pour ceux-ci la notation "micro"):

$$\text{De la relation } 2\pi \text{tg} \delta = \frac{\tilde{W}_d}{W_e}$$

avec  $W_e = \frac{1}{2} \sigma_0 \epsilon_0$  et en approximant  $\epsilon_0$

par  $\epsilon_0 \approx \frac{\sigma_0}{\langle E \rangle}$  on obtient en reprenant 7.5.1

$$2\pi \text{tg} \delta^{\text{micro}} = \frac{\pi \sigma_0^2 \alpha^2 T_0}{\rho c_\epsilon \langle \gamma \rangle} \left[ \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2}} - 1 \right] \frac{\omega \tau^{\text{micro}}}{1 + \omega^2 \tau^{\text{micro}2}} \left[ \frac{1}{2} \frac{\sigma_0^2}{\langle E \rangle} \right]^{-1}$$

Ainsi, pour caractériser la dissipation liée à l'hétérogénéité microscopique ( $\gamma(x) = \langle \gamma \rangle (1 + \epsilon \cos^2 x)$ ), on obtient :

$$t_g \delta^{\text{micro}} = \frac{\alpha^2 T_0 \langle E \rangle}{\rho c_E \langle \gamma \rangle} \left[ \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2}} - 1 \right] \frac{\omega \tau^{\text{micro}}}{1 + \omega^2 (\tau^{\text{micro}})^2}$$

c'est à dire, puisque :

$$\gamma(x) = 1 + \frac{3 \alpha^2 T_0 E(x)}{\rho c_E (1-2\nu)}$$

$$\langle \gamma \rangle = 1 + \frac{3 \alpha^2 T_0 \langle E \rangle}{\rho c_E (1-2\nu)}$$

on déduit :

$$t_g \delta^{\text{micro}} = \frac{1-2\nu}{3} \cdot \frac{\langle \gamma \rangle - 1}{\langle \gamma \rangle} \cdot \frac{\omega \tau^{\text{micro}}}{1 + \omega^2 (\tau^{\text{micro}})^2} \left[ \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2}} - 1 \right]$$

et on établit le rapport :

$$\frac{t_g \delta^{\text{micro}}}{t_g \delta^{\text{macro}}} = \frac{\langle \gamma \rangle - 1}{\langle \gamma \rangle} \cdot \frac{\gamma^0}{\gamma^0 - 1} \cdot \left[ \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2}} - 1 \right] \frac{\tau^{\text{micro}}}{\tau^{\text{macro}}} \cdot \frac{1 + \omega^2 \tau^{\text{macro}2}}{1 + \omega^2 \tau^{\text{micro}2}}$$

Il s'agit par conséquent du rapport des mesures de la dissipation liée à l'effet thermoélastique où :

- l'une correspond à un milieu hétérogène isolé thermiquement ; elle caractérise la contribution de l'hétérogénéité à la dissipation d'énergie.
- l'autre correspond à la diffusion macroscopique de la chaleur dans un milieu micro-homogène.

Il est intéressant d'évaluer quantitativement ce rapport lorsque les deux milieux considérés sont de caractéristiques macroscopiques semblables. Pour cela, nous choisissons un milieu homogène tel que :

$$E^0 = \langle E \rangle$$

$$\gamma^0 = \langle \gamma \rangle$$

et nous utilisons les valeurs expérimentales de l'indice adiabatique  $\gamma^0$ , de la diffusivité thermique  $D$  et de l'intensité de la relaxation  $\Delta$  établies par C.Zener.

### CONSTANTES DE RELAXATION THERMIQUE

Métal	$\gamma^\circ - 1$	D cm <sup>2</sup> /s	$\Delta$
Cd.....	0.06	0.46	0.010
Zn.....	0.052	0.41	0.0088
Mg.....		0.60	0.0050
Al.....		0.88	0.0046
Be.....		0.53	0.0046
Sn.....	0.04	0.40	0.0040
Laiton (70-30)		0.38	0.0036
Ag.....	0.04	1.74	0.0034
Cu.....	0.028	1.2	0.0030
Ni.....	0.021	0.15	0.0029
Pb.....	0.067	0.24	0.0025
Fe.....		0.20	0.0021
Pd.....		0.26	0.0020
Sb.....		0.12	0.0018
Au.....	0.038	1.1	0.0017
Pt.....		0.26	0.0015
Bi.....		0.065	0.0014
W.....	0.006	0.61	0.00078
Rh.....		0.29	0.00069
Ta.....		0.22	0.00030

En rappelant que le terme  $\left[ \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2}} - 1 \right]$

est issu du calcul de  $\langle \frac{1}{\gamma} \rangle$ , on a (cf 7.1.1)

$$\langle \gamma \rangle \langle \frac{1}{\gamma} \rangle - 1 = \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2}} - 1$$

et on écrit ainsi sous une forme plus générale; en nous résumant:

avec:

$$tg \delta^{micro} = \Delta^{micro} \omega \tau^{micro} [1 + \omega^2 \tau^{micro 2}]^{-1}$$

$$tg \delta^{macro} = \Delta^{macro} \omega \tau^{macro} [1 + \omega^2 \tau^{macro 2}]^{-1}$$

$$\frac{tg \delta^{micro}}{tg \delta^{macro}} = \frac{\Delta^{micro}}{\Delta^{macro}} \cdot \frac{\tau^{micro}}{\tau^{macro}} [1 + \omega^2 \tau^{macro 2}] [1 + \omega^2 \tau^{micro 2}]^{-1}$$

$$\Delta^{macro} = \frac{\alpha^2 T_0 \epsilon^0}{\rho C_e \gamma^0}$$

$$\Delta^{micro} = \frac{\alpha^2 T_0 \langle \epsilon \rangle}{\rho C_e \langle \gamma \rangle} \left[ \langle \gamma \rangle \langle \frac{1}{\gamma} \rangle - 1 \right]$$

$$\frac{\Delta^{micro}}{\Delta^{macro}} = \langle \gamma \rangle \langle \frac{1}{\gamma} \rangle - 1$$

$$\tau^{micro} = \ell^2 \pi^{-2} D^{-1} \quad (\ell, \text{longueur microscopique de la cellule d'hétérogénéité})$$

$$\tau^{macro} = L^2 \pi^{-2} D^{-1} \quad (L, \text{longueur macroscopique de l'échantillon})$$

Si on se réfère aux valeurs du tableau précédent et pour un milieu périodique où:

$$\gamma(x) = \gamma^0 [1 + \cos(\pi x \ell^{-1})]$$

on peut estimer que  $\epsilon$  ne dépasse pas la valeur:

$$\epsilon = 0.03$$

Dans le cas des métaux, le paramètre d'hétérogénéité est donc très petit. On peut écrire:

$$\langle \gamma \rangle \langle \frac{1}{\gamma} \rangle - 1 = \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2}} - 1 \approx \epsilon^2/2$$

Si nous représentons  $tg \delta^{micro}$  et  $tg \delta^{macro}$  en fonction de la pulsation de sollicitation, nous obtenons deux courbes en cloche de Lorentz présentant chacune un maximum:

- l'une pour  $\omega = (\tau^{macro})^{-1}$  ----->  $(tg \delta^{macro})_{max} = \Delta^{macro} / 2$
- l'autre pour  $\omega = (\tau^{micro})^{-1}$  ----->  $(tg \delta^{micro})_{max} = \Delta^{macro} \epsilon^2 / 4$

Le rapport  $\frac{(\epsilon \delta^{\text{micro}})_{\text{max}}}{(\epsilon \delta^{\text{macro}})_{\text{max}}}$  de l'ordre de  $\epsilon^2/4$  exprime clairement que la dissipation microscopique est généralement négligeable devant la dissipation macroscopique. Cependant pour la pulsation

$$\omega = (\tau^{\text{micro}})^{-1}$$

le rapport

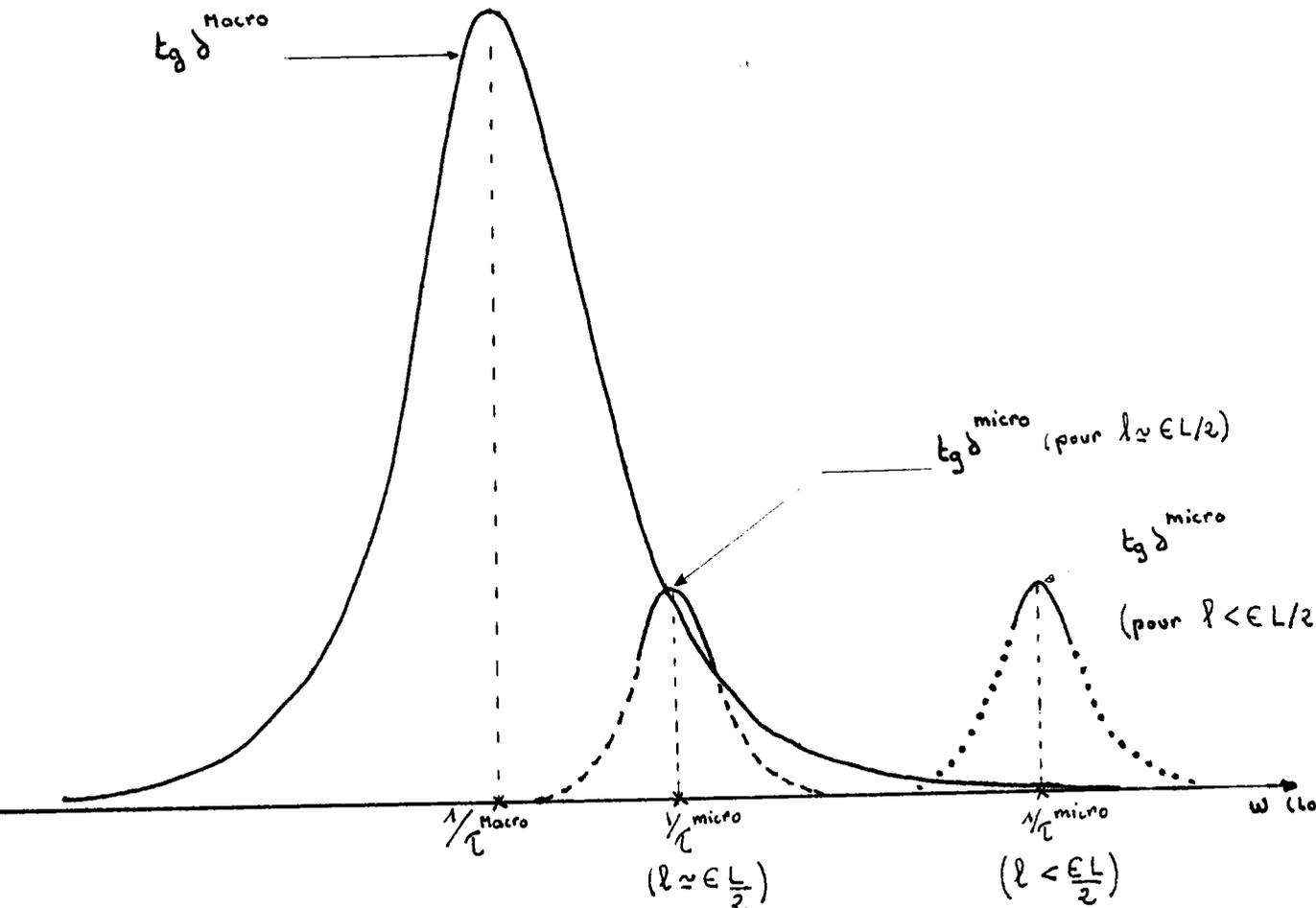
s'écrit

$$\frac{\epsilon \delta^{\text{micro}}}{\epsilon \delta^{\text{macro}}} = \frac{\epsilon^2}{4} \frac{L^2}{\lambda^2} \left( 1 + \frac{\lambda^4}{L^4} \right)$$

nous indiquant ainsi que pour une taille d'hétérogénéité suffisamment petite devant la taille de l'échantillon ( c'est à dire pour un nombre de cellules suffisamment élevé ) la microhétérogénéité contribue le plus à la dissipation d'énergie.

Nous illustrons ce fait par les figures suivantes:

COURBES DES DISSIPATIONS MACROSCOPIQUE ET MICROSCOPIQUE  
suivant le nombre de cellules d'hétérogénéité:



Annexe du paragraphe III. 7.5.

Nous justifions la formule 7.4.9 :

$$\tilde{W}^d \approx \pi W^d \frac{\omega \tau_{\sigma}}{1 + \omega^2 \tau_{\sigma}^2}$$

où  $W^d$  est l'expression de l'énergie dissipée lors d'un cycle de l'essai quasistatique (fluage)

où  $W^d$  est l'énergie dissipée lors d'un cycle de l'essai cyclique (essai de frottement interne).

La fonction de fluage s'écrit sous la forme

$$J(t) = \frac{\epsilon(t)}{\sigma_0} = J_u + (J_R - J_u)(1 - e^{-t/\tau_{\sigma}})$$

l'expression du travail lors de l'essai quasistatique s'écrit donc :

$$W^d = \sigma_0 [\epsilon(+\infty) - \epsilon(0)] = \sigma_0^2 (J_R - J_u)$$

et pour  $\delta$ , généralement petit, on a :

$$\tilde{W}^d = 2\pi t_g \delta W^e$$

avec  $W^e = \frac{1}{2} \sigma_0 \epsilon_0$  (énergie de vibration)

où  $t_g \delta$  est de la forme

$$t_g \delta = \Delta \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2}, \quad \Delta = \frac{J_R - J_u}{J_u + \frac{J_R - J_u}{1 + \omega^2 \tau^2}}$$

Avec ces relations, on écrit le rapport :

$$\frac{\tilde{W}^d}{W^d} = \frac{\pi \omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} \left[ \frac{\epsilon_0 \Delta}{\sigma_0 (J_R - J_u)} \right]$$

le terme  $\frac{\epsilon_0}{\sigma_0}$  représente la compliance moyenne. On prend souvent ((21))

$$\frac{\epsilon_0}{\sigma_0} = J_u \quad \text{ou} \quad \frac{\epsilon_0}{\sigma_0} = J_R \quad \text{ou plutôt} \quad \frac{\epsilon_0}{\sigma_0} = \sqrt{J_u J_R}$$

et, en reprenant Zener, on ne commet pas une grande erreur en donnant à l'intensité de la relaxation  $\Delta$ , la valeur (respectivement) :

$$\frac{J_R - J_u}{J_u} \quad \text{ou} \quad \frac{J_R - J_u}{J_R} \quad \text{ou} \quad \frac{J_R - J_u}{\sqrt{J_u J_R}} \quad ((21))$$

ce qui ainsi nous permet d'établir 7.4.9

$$\tilde{W}^d \approx \pi W^d \frac{\omega \tau_{\sigma}}{1 + \omega^2 \tau_{\sigma}^2}$$

Pour compléter cette étude monodimensionnelle et notamment pour vérifier la convergence de la méthode de perturbation, nous nous proposons, à présent, de discrétiser les équations aux dérivées partielles écrites pour l'étude de l'essai quasistatique et dynamique afin d'obtenir une illustration numérique du phénomène de relaxation.

CHAPITRE IV

ILLUSTRATION NUMERIQUE

Nous discrétisons et intégrons numériquement l'équation aux dérivées partielles de l'étude monodimensionnelle. La simulation obtenue nous permet d'illustrer le phénomène de relaxation de la déformation lors de l'essai quasistatique ou l'influence de la conduction de la chaleur sur le cycle contrainte-déformation lors de l'essai cyclique .

Nous comparons les résultats de l'étude monodimensionnelle obtenue à l'aide de la méthode de perturbation et ceux résolus numériquement.

## 1) LA METHODE DE CRANK-NICHOLSON

Aussi bien pour l'essai de fluage (on applique un échelon de contrainte) que pour l'essai de frottement interne (contrainte périodique), nous préférons utiliser la méthode numérique implicite de Crank-Nicholson.

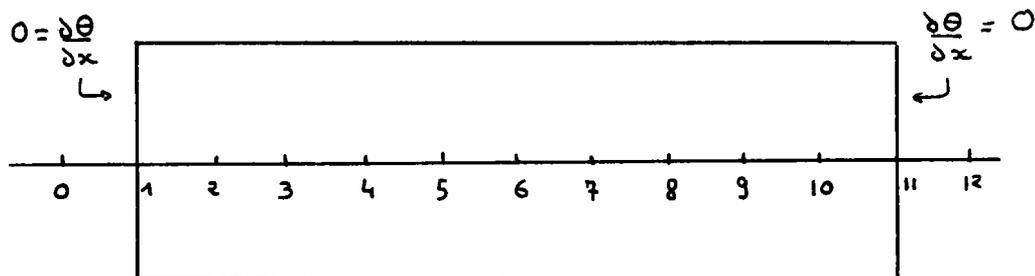
La méthode explicite directe, plus simple à élaborer, donne aussi de bons résultats mais la condition de stabilité et de convergence imposée pour le choix du pas de temps et du pas d'espace devient délicate si nous augmentons le coefficient d'hétérogénéité du matériau : à pas d'espace constant, le pas de temps diminue sensiblement et augmente ainsi le temps des calculs.

Nous nous proposons de discrétiser l'équation aux dérivées partielles :

$$\gamma(x) \dot{\theta} = \alpha_c \frac{\delta^2 \theta}{\delta x^2}$$

en respectant la condition de frontière :  $\frac{\delta \theta}{\delta x} = 0$  en  $x = 0$  et  $x = 1$

Choix du maillage : Nous utilisons 10 noeuds (ou plus) pour mailler la cellule élémentaire et nous notons P le pas d'espace ( $P = 0.1$ ). Pour respecter la condition de frontière nous introduisons les noeuds supplémentaires n° 0 et n° 12 indiqués sur la figure suivante :



Processus numérique : Nous notons par  $\Delta$  le pas de temps et par  $\theta_i^n$  la température au noeud  $n^o i$  et à l'instant  $t = n$  ; la discrétisation s'effectue suivant (3.4.)

$$\gamma_i \frac{\theta_i^{n+1} - \theta_i^n}{\Delta} = \frac{\alpha_c}{p^2} \left[ \theta_{i+1}^n - 2\theta_i^n + \theta_{i-1}^n \right]$$

et

$$\gamma_i \frac{\theta_i^{n+1} - \theta_i^n}{\Delta} = \frac{\alpha_c}{p^2} \left[ \theta_{i+1}^{n+1} - 2\theta_i^{n+1} + \theta_{i-1}^{n+1} \right]$$

En effectuant la demi-somme de ces deux égalités et en groupant les termes en  $\theta^{n+1}$  à gauche, nous obtenons finalement :

$$-\frac{\alpha_c \Delta}{2p^2} \theta_{i-1}^{n+1} + \left[ \frac{\alpha_c \Delta}{p^2} + \gamma_i \right] \theta_i^{n+1} - \frac{\alpha_c \Delta}{2p^2} \theta_{i+1}^{n+1} = \frac{\alpha_c \Delta}{2p^2} (\theta_{i-1}^n + \theta_{i+1}^n) + (\gamma_i - \frac{\alpha_c \Delta}{p^2}) \theta_i^n$$

Pour respecter la condition de frontière en  $x = 0$  et  $x = 1$  nous écrivons que :

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad \rightarrow \quad \theta_0 = \theta_2$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=1} = 0 \quad \rightarrow \quad \theta_{10} = \theta_{12}$$

d'où les deux équations :

$$\left( \frac{\alpha_c \Delta}{p^2} + \gamma_1 \right) \theta_1^{n+1} - \frac{\alpha_c \Delta}{p^2} \theta_2^{n+1} = \left( -\frac{\alpha_c \Delta}{p^2} + \gamma_1 \right) \theta_1^n + \frac{\alpha_c \Delta}{p^2} \theta_2^n$$

$$-\left( \frac{\alpha_c \Delta}{p^2} \right) \theta_{10}^{n+1} + \left( \frac{\alpha_c \Delta}{p^2} + \gamma_{11} \right) \theta_{11}^{n+1} = \left( \frac{\alpha_c \Delta}{p^2} + \gamma_{11} \right) \theta_{11}^n + \frac{\alpha_c \Delta}{p^2} \theta_{10}^n$$

Le processus numérique consiste à calculer  $\theta_i^{n+1}$  ( $1 \leq i \leq 11$ ) connaissant  $\theta_i^n$ . L'initialisation de ce processus se déduit de la connaissance de la température initiale : nous avons donc à résoudre à chaque pas de temps le système linéaire d'équations s'exprimant sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & - & - & - & - & - & - & 0 \\ a_1 & b_2 & c_2 & 0 & 0 & - & - & - & - & - & \cdot \\ 0 & a_2 & b_3 & c_3 & 0 & 0 & - & - & - & - & \cdot \\ 0 & 0 & a_3 & b_4 & c_4 & 0 & 0 & - & - & - & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & a_4 & b_5 & c_5 & 0 & 0 & - & - & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 & a_5 & b_6 & c_6 & 0 & 0 & - & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & a_6 & b_7 & c_7 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & a_7 & b_8 & c_8 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & a_8 & b_9 & c_9 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & a_9 & b_{10} & c_{10} \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & a_{10} & b_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1^{n+1} \\ \theta_2^{n+1} \\ \theta_3^{n+1} \\ \theta_4^{n+1} \\ \theta_5^{n+1} \\ \theta_6^{n+1} \\ \theta_7^{n+1} \\ \theta_8^{n+1} \\ \theta_9^{n+1} \\ \theta_{10}^{n+1} \\ \theta_{11}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1^n \\ D_2^n \\ D_3^n \\ D_4^n \\ D_5^n \\ D_6^n \\ D_7^n \\ D_8^n \\ D_9^n \\ D_{10}^n \\ D_{11}^n \end{bmatrix}$$

avec

$$b_1 = \frac{\alpha_c \Delta}{p^2} + \gamma_1 \quad a_{10} = -\frac{\alpha_c \Delta}{p^2}$$

$$c_1 = -\alpha_c \Delta / p^2 \quad b_m = \gamma_{11} + \alpha_c \Delta / p^2$$

$$D_1^m = [-\alpha_c \Delta / p^2 + \gamma_1] \theta_1^n + \alpha_c \Delta / p^2 \theta_2^n$$

$$D_m^{\hat{}} = [-\alpha_c \Delta / p^2 + \gamma_m] \theta_m^n + \alpha_c \Delta / p^2 \theta_{10}^n$$

et pour

$$2 \leq i \leq 10 \quad b_i = \alpha_c \Delta / p^2 \quad c_i = -\alpha_c \Delta / p^2$$

$$D_i^{\hat{}} = \alpha_c \Delta / (2p^2) \cdot \theta_{i-1}^m + (-\alpha_c \Delta / p^2 + \gamma_i) \theta_i^n + \frac{\alpha_c \Delta}{2p^2} \theta_{i+1}^n$$

et pour

$$1 \leq i \leq 9 \quad a_i = -\frac{\alpha_c \Delta}{2p^2}$$

La matrice obtenue est tridiagonale, nous résolvons le système selon l'algorithme suivant ((31)) :

le système tridiagonal :

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \dots & \\ a_1 & b_2 & c_2 & 0 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & 0 & a_{n-1} & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

est équivalent au système :

$$\begin{bmatrix} 1 & c_1^* & 0 & & \\ 0 & 1 & c_2^* & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & c_{n-1}^* & \\ & & & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1^* \\ d_2^* \\ \vdots \\ d_n^* \end{bmatrix}$$

lorsque

$$c_1^* = c_1 / b_1 \quad c_{j+1}^* = \frac{c_{j+1}}{b_{j+1} - a_j c_j^*} \quad \text{pour } j = 1 \text{ à } n - 2$$

$$\text{et } d_1^* = d_1 / b_1 \quad d_{j+1}^* = \frac{d_{j+1} - a_j d_j^*}{b_{j+1} - a_j c_j^*} \quad \text{pour } j = 1 \text{ à } n - 1$$

d'où l'on déduit les inconnues :

$$x_n = d_n^* \quad \text{et } x_j = d_j^* - c_j^* x_{j+1} \quad \text{pour } j = n - 1 \text{ à } 1$$

Remarque : La discrétisation de l'équation  $\gamma(x) \dot{\theta} = \alpha_c \theta'' + \beta_1 w \sigma_0 \sin wt$  s'effectue d'une façon analogue. On inclut le terme source  $\beta_1 w \sigma_0 \sin wt$  dans l'expression des  $D_i^n$ .

## 2) ESSAI QUASISTATIQUE

### 2.1. Problème numérique :

Nous imposons à l'échantillon un échelon de contrainte adiabatique  $\sigma_0$ . Nous sommes amenés à résoudre le problème de la forme (cf équation III. 5.2.1 de l'étude monodimensionnelle) :

équation de la conduction de la chaleur en milieu hétérogène :

$$\gamma(x) \dot{\theta} = \alpha_c \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

avec  $\gamma(x) = \gamma^* (1 + \epsilon \cos \pi x)$

assurant l'hétérogénéité périodique du milieu dont la cellule élémentaire vérifie les conditions de frontière :

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0$$

$$\text{en } x = 0 \text{ et } x = 1$$

et la condition initiale traduisant que la température naît d'une impulsion de contrainte  $\sigma_0$ ,

$$\theta(x, 0) = \sigma_0 C_\psi / \gamma(x)$$

où  $C_\psi$  est un coefficient de proportionalité connu (cf 5.1.5)

### 2.2. Choix du nombre de noeuds :

Pour l'essai quasistatique nous calculons la valeur de la température moyenne de l'échantillon à l'instant  $m$  suivant la formule immédiate :

$$\theta^{*m} = \sum_{i=1}^N \frac{\theta_i^m}{N}$$

C'est la discrétisation la plus simple de  $\langle \theta(x, t) \rangle = \int_0^1 \theta(x, t) dx$

La précision qui résulte dépend évidemment du choix du nombre de noeuds ; plus la répartition de température est écrasée entre son minimum et son maximum, moins grand sera le nombre de noeuds nécessaires. A titre d'indication, nous représentons les profils de températures initiales (c'est l'instant où la répartition est la moins amortie) pour différents  $N$  et pour deux coefficients d'hétérogénéité :  $\epsilon = 0.1$  et  $\epsilon = 0.9$

### 2.3. Comparaison avec la méthode de perturbation :

Lors de l'étude monodimensionnelle, nous avons obtenu par la méthode de perturbation l'expression de la température moyenne  $\theta^*(t)$  :

$$2.3.1 \quad \theta^*(t) = \phi_0 + \frac{\epsilon \phi_1}{2} [1 - e^{-\gamma_1 t}] + O(\epsilon^2)$$

où les  $\phi_j$  sont les coefficients du développement de la température initiale  $\theta(x,0)$  notée  $\phi(x)$  sous forme de série de Fourier :

$$\phi(x) = \phi_0 + \phi_1 \cos \pi x + \phi_2 \cos 2\pi x + \dots$$

On peut écrire  $\theta^*(t)$  sous la forme

$$\theta^*(t) = \theta_F + (\theta_{\text{initial}}^* - \theta_F) e^{-\gamma_1 t}$$

et on vérifie bien que

$$\text{pour } t = 0 \quad \theta^*(0) = \phi_0 = \langle \phi(x) \rangle$$

$$\text{et pour } t = +\infty \quad \theta^*(+\infty) = \theta_F \simeq \phi_0 + \epsilon \phi_1 / 2$$

Cette expression de  $\theta^*(t)$  nous incite à prendre pour l'étude numérique l'expression approchée de la température :

$$\theta^{*p}(x,t) = \theta_F + [\phi(x) - \theta_F] e^{-\gamma_1 t}$$

Cette solution n'est pas rigoureuse mais, comparée à la méthode de perturbation, elle donne de bons résultats et vérifie de plus :

- la condition initiale :  $\theta^{*p}(x,0) = \phi(x)$
- la condition finale :  $\theta^{*p}(x,+\infty) = \theta_F$
- la condition de frontière :  $\frac{\partial \theta^{*p}}{\partial x} = 0$  en  $x = 0$  et  $x = 1$

les résultats sont présentés en pointillés pour la méthode de perturbation et en trait continu pour la résolution numérique.

Nous fixons les valeurs :

$$\begin{aligned} N &= 150 && (\text{nombre de noeuds}) \\ \langle \gamma \rangle &= 1 \\ C &= -1. \\ \sigma_0 &= 1. \\ \alpha_C &= 1. \\ \epsilon &= 0.1 \text{ ou } 0.9 \end{aligned}$$

### 3) ESSAI CYCLIQUE

#### 3.1. Problème numérique :

Nous imposons une contrainte périodique :

$$3.1.1 \quad \sigma(t) = \sigma_0 \cos \omega t$$

Nous sommes amenés à résoudre l'équation de la forme (on remplace  $\sigma(t)$  dans l'équation de la chaleur III. 4.2)

$$3.1.2 \quad \gamma(x) \dot{\theta} = \frac{k}{\rho c_e} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\gamma T_0 \sigma_0}{\rho c_e} \omega \sin \omega t$$

Nous discrétisons l'équation

$$3.1.3 \quad \delta(x) \dot{\theta} = \gamma_c \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \beta \sigma_0 \omega \sin \omega t$$

en respectant la condition de frontière :

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \quad \text{en } x = 0 \text{ et } x = 1$$

et en remarquant que pour  $t = 0$  la valeur initiale de la contrainte est brusquement  $\sigma_0$ , nous choisissons pour la température initiale celle induite adiabatiquement par un échelon de contrainte. Par ce choix, la durée de la partie transitoire de ce Forcing Périodique ((20)) est diminuée et la solution oscille très tôt et en permanence autour de la valeur moyenne nulle de la température, ce qui permet de la comparer à la solution  $\hat{\theta}^*$  obtenue par la méthode de perturbation.

## 3.2. Graphiques :

$$\begin{aligned} \text{Pour} \quad \langle \gamma \rangle &= 1 \\ \sigma_0 &= 1 \\ \alpha_c &= 1 \\ \beta &= 1 \\ \alpha &= 0.1 \end{aligned}$$

et pour différentes valeurs du coefficient d'hétérogénéité  $\epsilon$ , de la pulsation de sollicitation  $\omega$  et du nombre de noeuds  $N$  ; nous représentons

- en pointillé pour la méthode de perturbation,
- en trait continu pour la solution numérique,

- 1) l'évolution : nous indiquons au cours du temps la température en un point de l'échantillon.
- 2) la "photographie" : nous indiquons le profil de température dans la cellule à différentes dates successives (cadre A) et les "niveaux" successifs de la moyenne volumique de la température (cadre B).
- 3) le cycle contrainte-déformation : nous établissons le cycle de dissipation en portant en abscisse la déformation moyenne et en ordonnée la contrainte observée au même instant.

## 3.3. Le cycle contrainte-déformation :

Le diagramme contrainte-déformation est donné par les équations où le temps  $t$  est paramètre :

$$3.3.1 \quad \left\{ \begin{aligned} \sigma &= \sigma_0 \cos \omega t \\ \xi &= \frac{\sigma_0}{E} \cos \omega t + \alpha \theta^*(t) \end{aligned} \right.$$

où  $\theta^*(t)$  est la température moyenne périodique du régime permanent, nous l'écrivons sous la forme :

$$3.3.2 \quad \theta^*(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t + c$$

Éliminons  $t$  dans le système :

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma &= \sigma_0 \cos \omega t \\ \xi &= \left( \frac{\sigma_0}{E} + \alpha a \right) \cos \omega t + \alpha b \sin \omega t + \alpha c \end{aligned} \right.$$

en posant  $X = \xi - \alpha c$  et  $Y = \sigma$

nous obtenons l'équation générale d'une conique :

$$AX^2 + CY^2 + 2BXY + 2DX + 2EY + F = 0$$

avec  $A = 1$

$$E = 0$$

$$B = \frac{-1}{\sigma_0} \left[ \frac{\sigma_0}{\sigma_0^2} + \alpha a \right]$$

$$D = 0$$

$$C = \left[ \frac{\sigma_0}{E} + \alpha a \right]^2 \frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{\alpha^2 b^2}{\sigma_0^2}$$

$$F = -\alpha^2 b^2$$

En calculant :

$$B^2 - AC = -\frac{\alpha^2 b^2}{\sigma_0^2}$$

et

$$(BE - CD)^2 - (B^2 - AC)(E^2 - CF) = \frac{\alpha^2 b^2}{\sigma_0^2} \left[ \left( \frac{\sigma_0}{E} + \alpha a \right)^2 \frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{\alpha^2 b^2}{\sigma_0^2} \right] \alpha^2 b^2$$

nous prouvons que

$$B^2 - AC < 0$$

$$\text{et } (BE - CD)^2 - (B^2 - AC)(E^2 - CF) > 0$$

ce qui suffit ((32)) pour montrer que la conique décrite par le système précédent est une ellipse, dont la surface est donnée par :

$$S_{\text{ellipse}} = \pi a_0 b_0$$

où  $a_0$  et  $b_0$  sont les demi-axes dont les carrés s'écrivent ((32))

$$a_0^2 = -\frac{\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}}{(AC - B^2)S_1} \quad b_0^2 = -\frac{\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}}{(AC - B^2)S_2}$$

où  $S_1$  et  $S_2$  sont les racines de l'équation du second degré :

$$S^2 - (A + C)S + AC - B^2 = 0$$

ainsi

$$S_{\text{ellipse}}^2 = \pi^2 a_0^2 b_0^2 = \frac{\pi^2 \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}^2}{(AC - B^2)^2 S_1 S_2}$$

$$S_{\text{ellipse}}^2 = \frac{\pi^2 F^2}{(AC - B^2)}$$

et en reprenant les valeurs de  $A$ ,  $C$ ,  $B$  et  $F$  ; nous obtenons l'expression de la surface de l'ellipse :

3.3.3

$$S_{\text{ellipse}} = \pi \alpha |b| \sigma_0$$

Cette surface représente la surface du cycle contrainte-déformation. Elle caractérise donc l'intensité de la dissipation et en utilisant cette formule, nous pouvons comparer deux valeurs, l'une déduite de la solution numérique et l'autre de la solution obtenue par la méthode de perturbation :

le cycle décrit numériquement :

En relevant, une fois le régime permanent atteint, la valeur  $\theta^* 1/4$ , température moyenne au quart de la période et la valeur  $\theta^* 3/4$ , température moyenne aux trois quart de la période on déduit de 3.3.2 une valeur approchée de  $b$  :

$$\left. \begin{array}{l} \theta_{1/4}^* = b+c \\ \theta_{3/4}^* = -b+c \end{array} \right\} \rightarrow |b| = \frac{|\theta_{1/4}^* - \theta_{3/4}^*|}{2}$$

Ainsi la valeur de l'énergie dissipée déduite de la résolution numérique s'écrit :

$$(3.3.3) \quad W^{dN} = \pi \alpha \frac{|\theta_{1/4}^* - \theta_{3/4}^*|}{2} \sigma_0$$

Pour différents coefficients d'hétérogénéité  $\epsilon$ , nous représentons en abscisses (logarithmique) les pulsations  $\omega$  et en ordonnées la surface de l'ellipse  $W^{dN}$ . Nous observons alors que :

- . pour  $\omega$  faible, le processus est à température uniforme, la dissipation est nulle (la conduction "a le temps" d'uniformiser le profil de température) ;
- . pour  $\omega$  élevée, le processus est adiabatique, la dissipation est nulle (la conduction "n'a pas le temps" d'agir sur le profil de température.
- . pour les pulsations  $\omega$  intermédiaires, la courbe présente un maximum de dissipation.

Nous obtenons en fait, de la même façon que la méthode de perturbation ou que l'étude de Zener, une courbe en cloche de Lorentz et nous vérifions que, pour les valeurs du coefficient d'hétérogénéité inférieures à 0.3 (et même 0.4, correspondantes au domaine de validité de la méthode de perturbation) le maximum de dissipation se situe pour la pulsation  $\omega \approx 10$ , valeur voisine de celle déduite de la formule :

$$\omega = \frac{1}{\tau_\sigma} \approx 9,87$$

$$\text{avec } \tau_\sigma = \frac{1}{\pi^2 \alpha_c} \quad (\text{cf } 7.4.8)$$

où nous avons choisi  $\alpha_c = 1$ .

## PROFILS INITIAUX

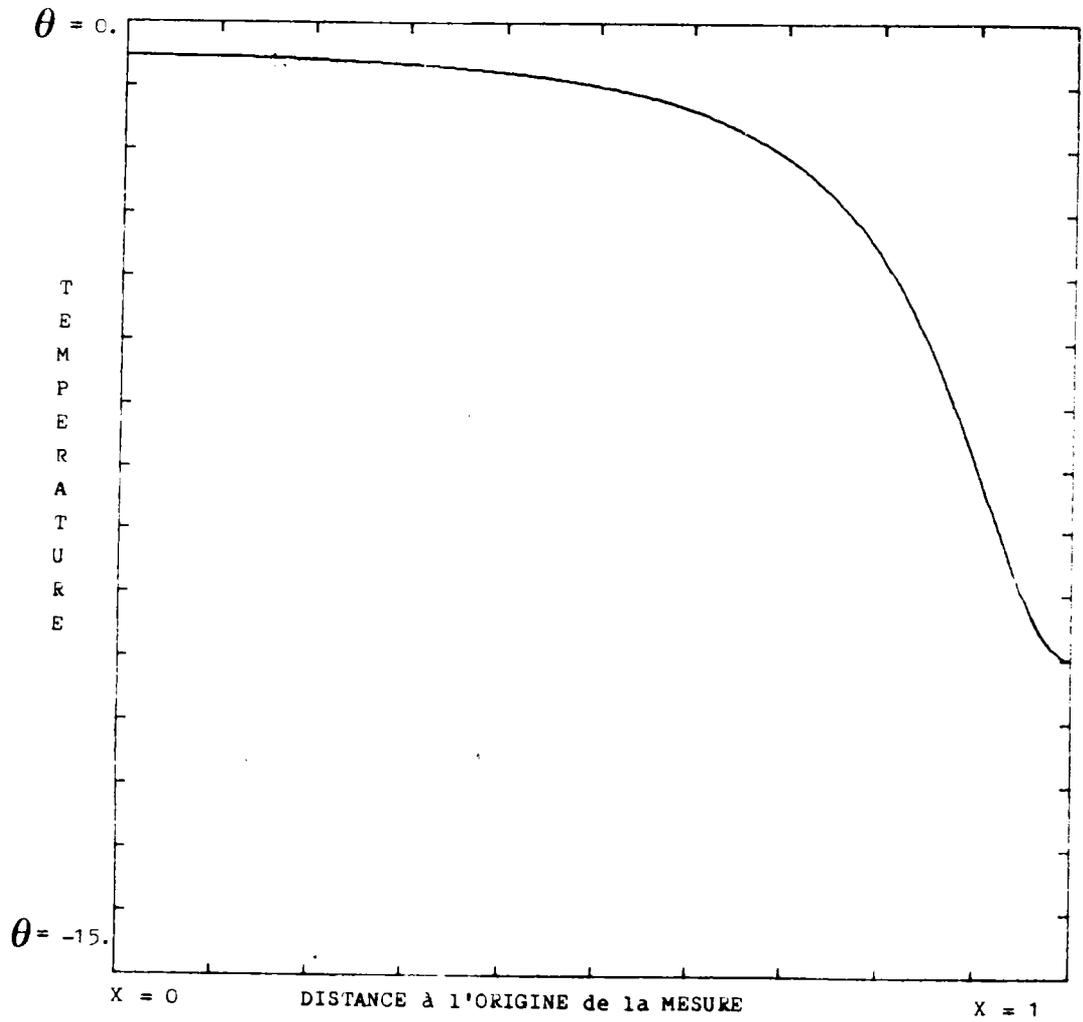
de température issus d'un échelon de traction.

Pour la discrétisation la plus simple de

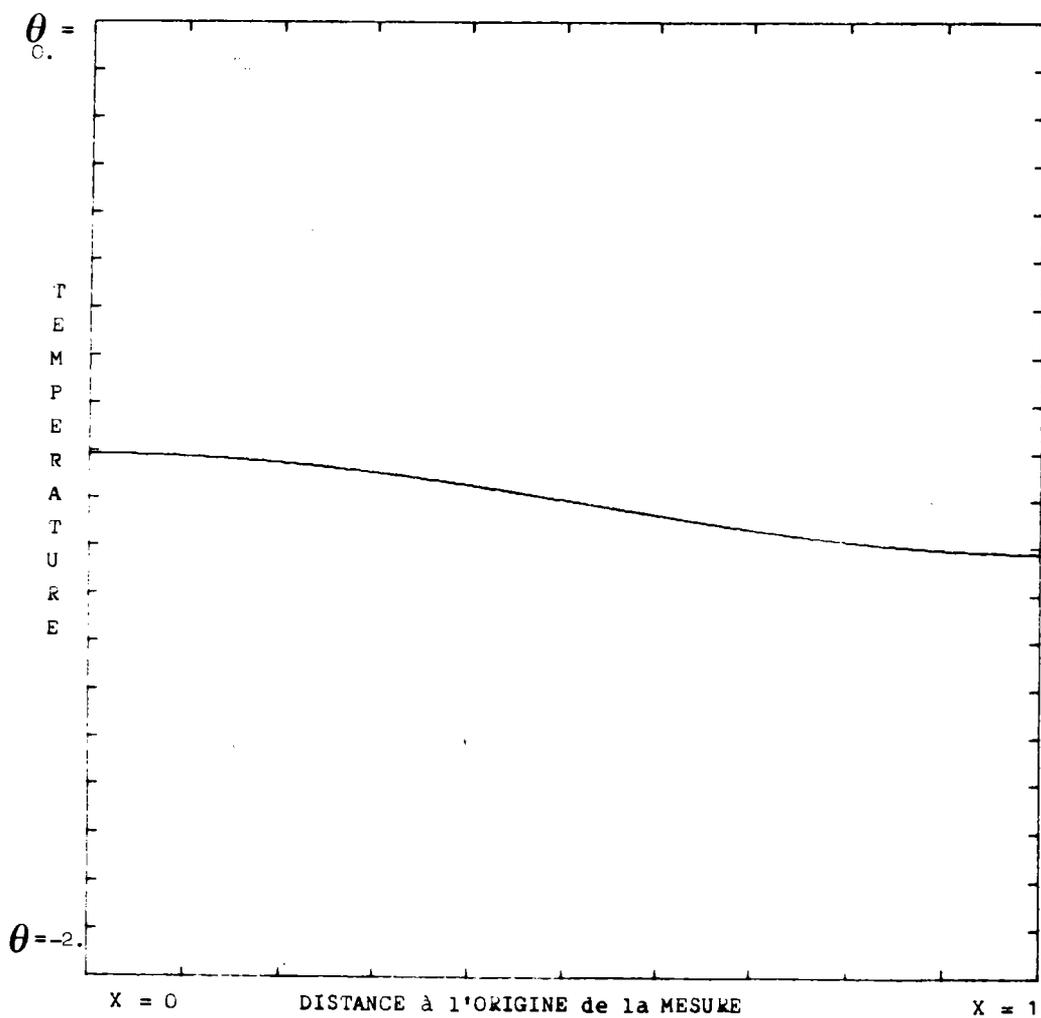
la valeur moyenne :  $\langle \theta(x,t) \rangle = \sum_{i=1}^N \frac{\theta_i}{N}$

la précision est meilleure si le profil

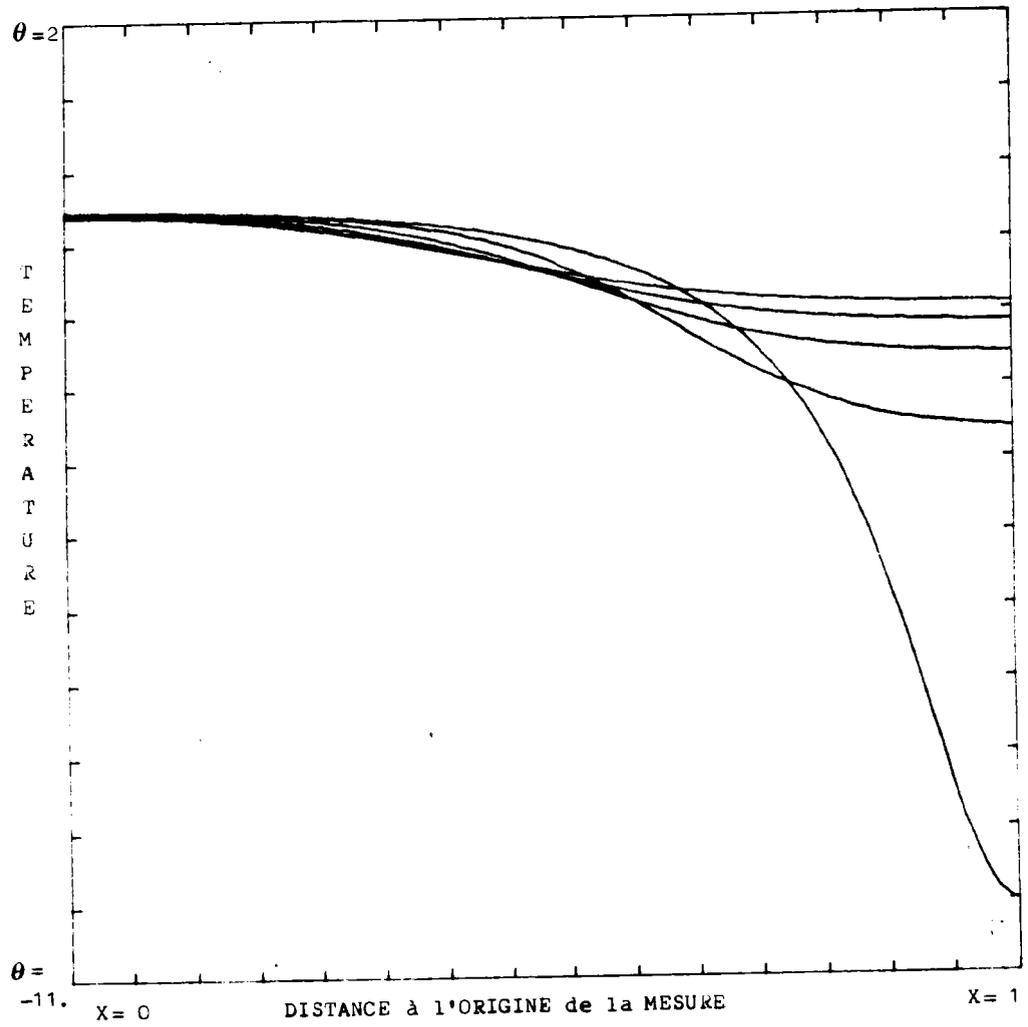
de température est plus écrasé.



PROFIL DE LA TEMPERATURE INITIALE  
noeuds: 250  
hétérogénéité:  $\epsilon = 0.9$



PROFIL DE LA TEMPERATURE INITIALE  
noeuds: 250  
hétérogénéité:  $\epsilon = 0.1$

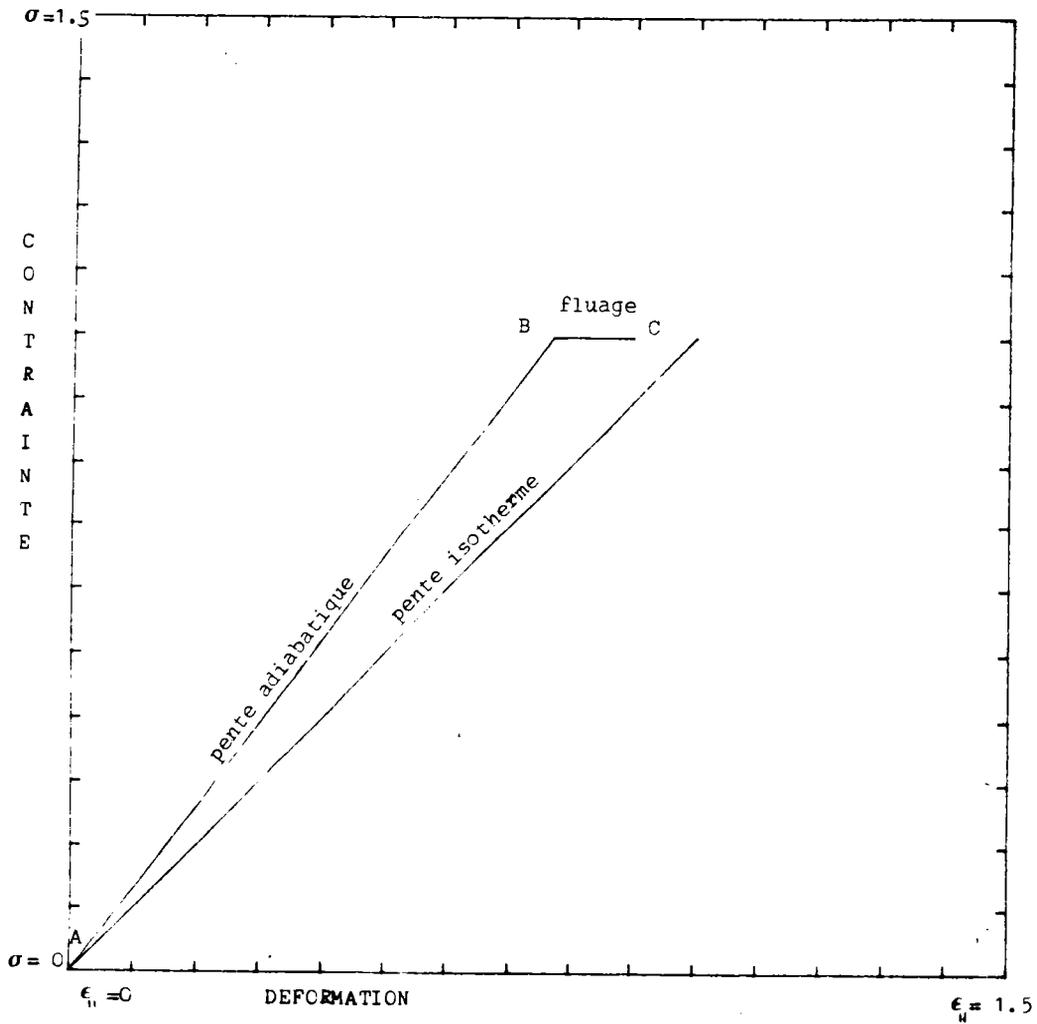


PHOTOGRAPHIES SUCCESSIVES  
 DU PROFIL DES TEMPERATURES : UNIFORMISATION  
 hétérogénéité:  $\epsilon = 0.9$

## ESSAI DE FLUAGE

A B : échelon instantané de contrainte,  
la pente AB correspond au  
module adiabatique.

B C : relaxation de la déformation  
sous contrainte constante, la pente  
AC correspond au module relaxé.  
A titre d'indication, nous traçons  
la pente isotherme ( essai de traction  
lent pour un solide non isolé thermiquement ).

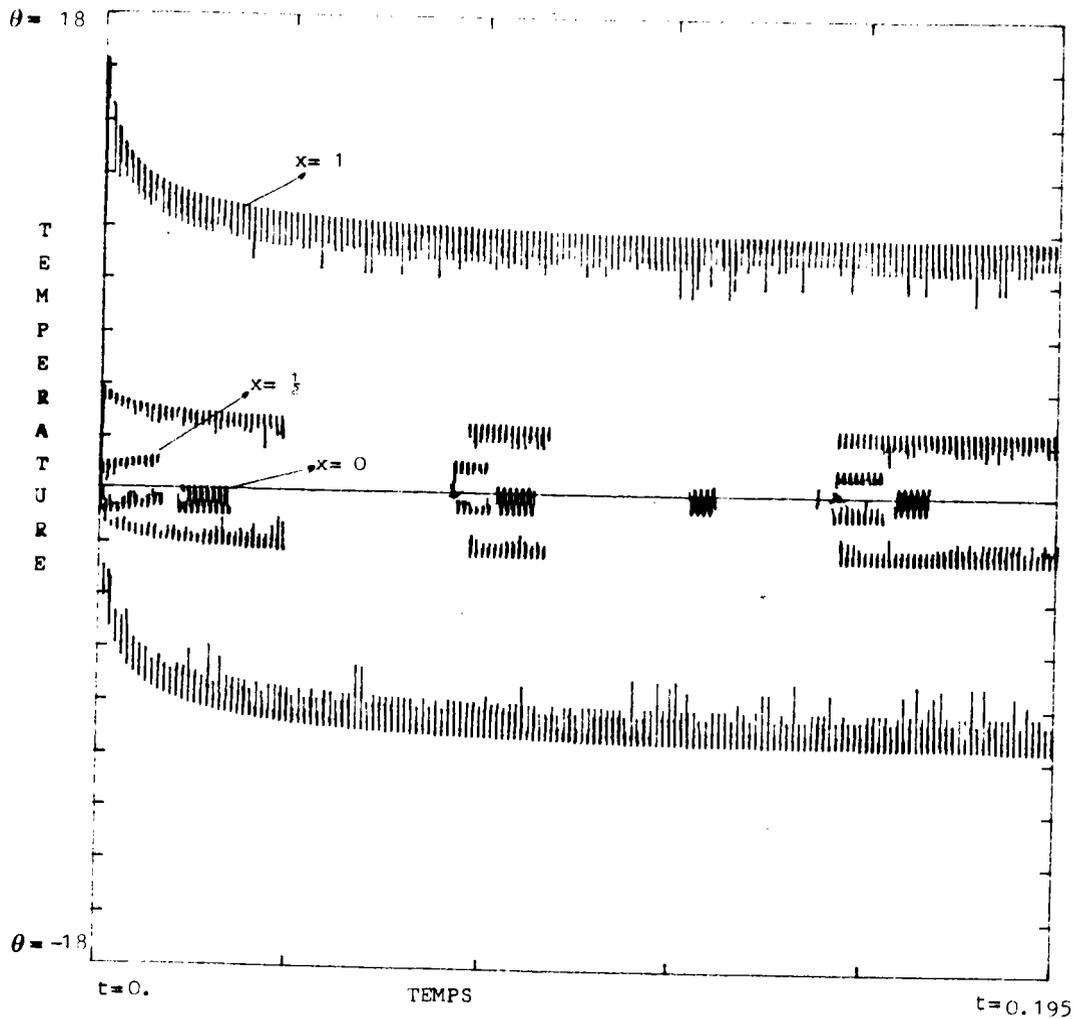


ESSAI QUASISTATIQUE  
 DIAGRAMME CONTRAINTE-DEFORMATION

hétérogénéité:  $\epsilon = 0.9$   
 noeuds: 10

E X E M P L E   D E   R E G I M E   T R A N S I T O I R E

- nous ne représentons, pour quelques points de mesure,  
que les crêtes des sinusoïdes.



"ESSAI DYNAMIQUE"  
 EVOLUTION DE LA  
 TEMPERATURE  
 en quelques points  
 de mesure  
 pulsation:  $\omega = 5000$ .  
 hétérogénéité:  $\epsilon = 0.9$   
 noeuds: 10

## ESSAIS DE FLUAGE

Evolution de la température aux points

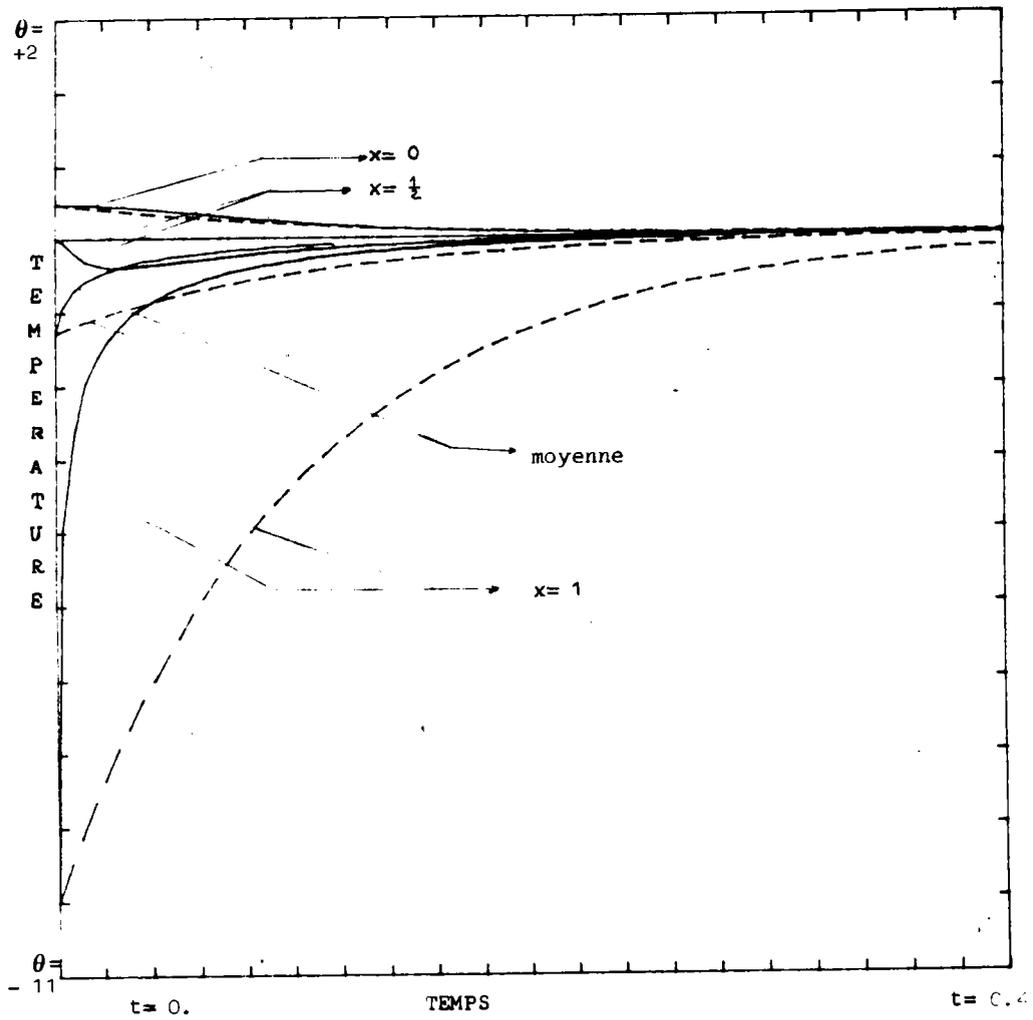
$$x = 0, \quad x = 0.5, \quad x = 1$$

et valeur moyenne.

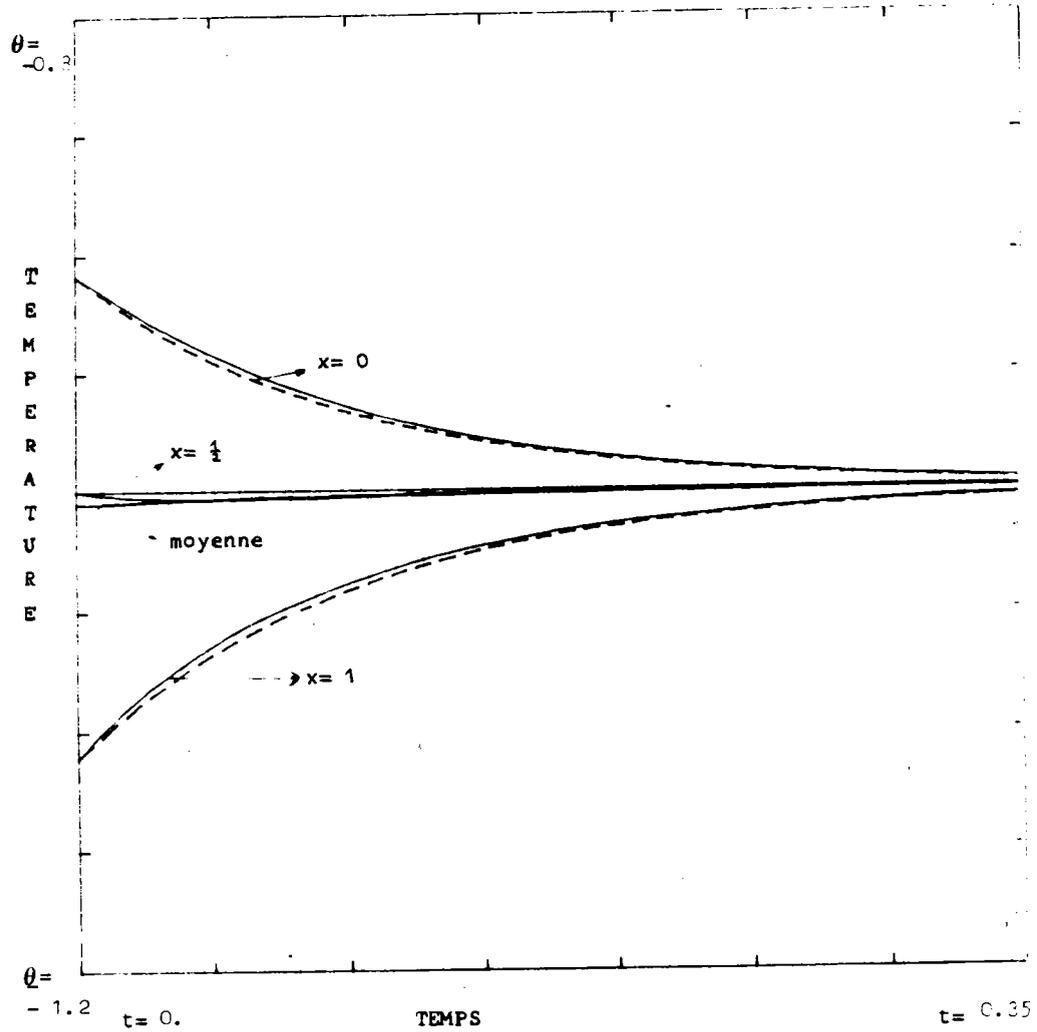
On compare la simulation numérique et la  
méthode de perturbation (pointillés).

Cette dernière est acceptable pour  $\epsilon \leq 0.3$

au-delà, le coefficient d'hétérogénéité  
est un paramètre de perturbation trop grand.



EVOLUTION DE LA TEMPERATURE  
 en quelques points de mesure  
 ---- solution analytique approchée  
 ——— solution numérique  
 hétérogénéité:  $\epsilon = 0.9$



EVOLUTION DE LA TEMPERATURE  
 en quelques points de mesure  
 ---- solution analytique approchée  
 ——— solution numérique  
 hétérogénéité:  $\epsilon = 0.1$

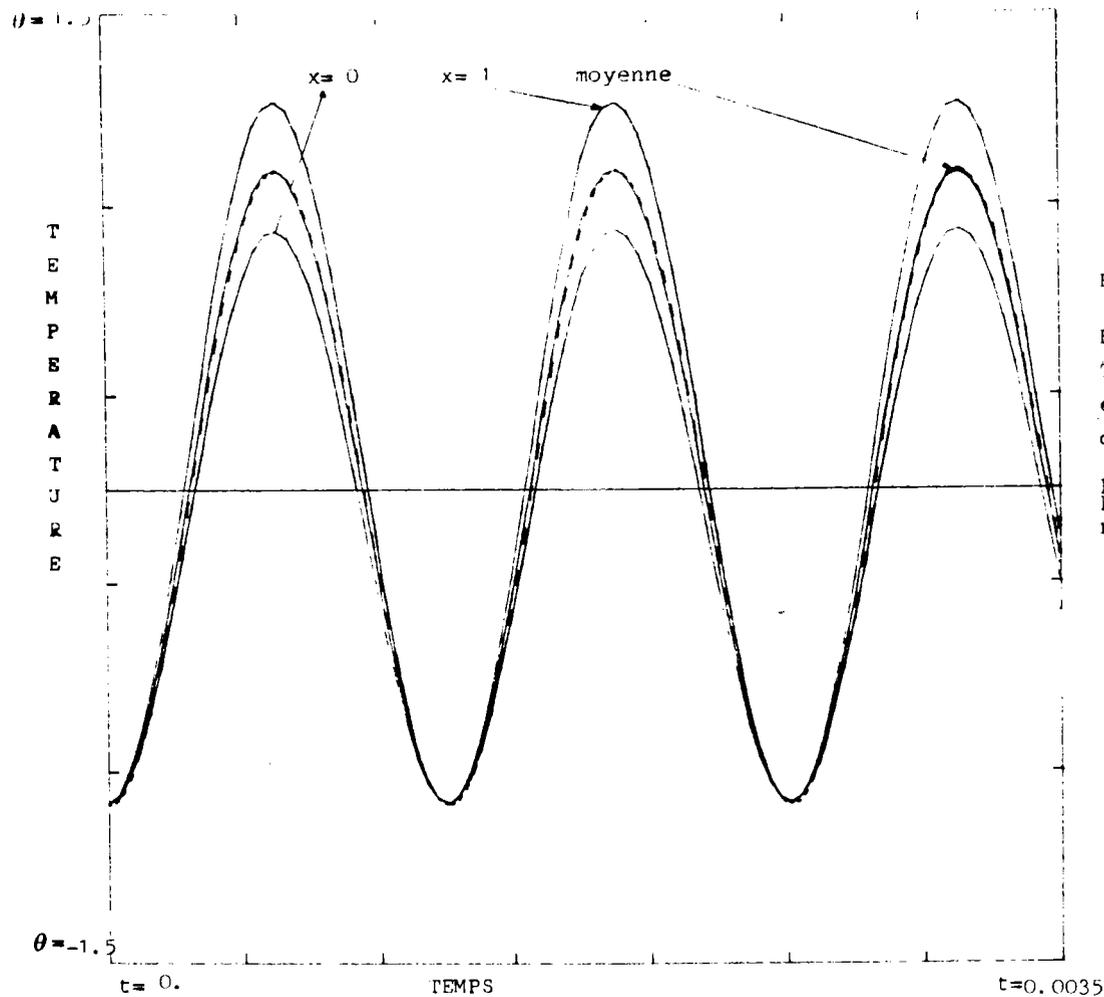
E V O L U T I O N D E L A T E M P E R A T U R E

lors d'un essai de traction-compression.

On compare la méthode de perturbation ( pointillés)  
et la résolution numérique pour un  
coefficient d'hétérogénéité :

$$\epsilon = 0.1$$

$$\epsilon = 0.9$$

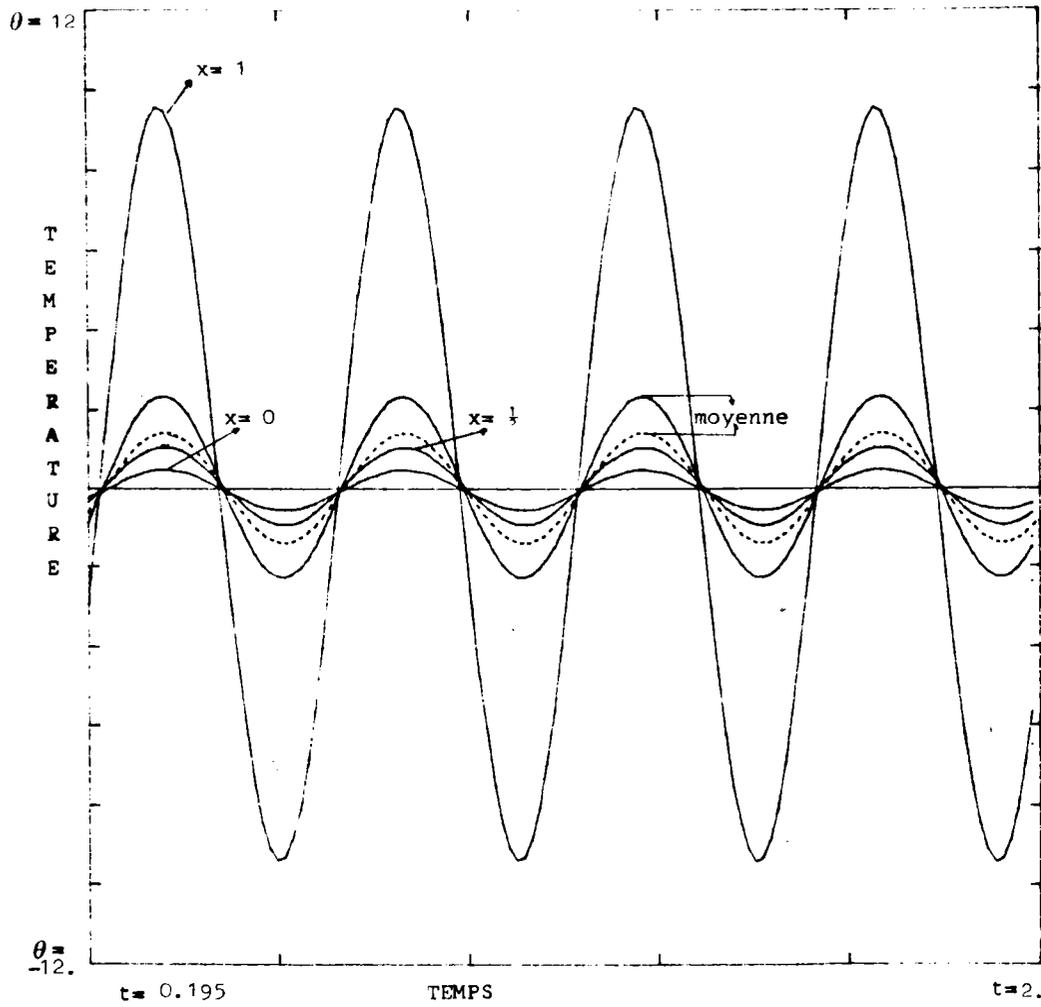


ESSAI DYNAMIQUE

EVOLUTION DE LA  
TEMPERATURE

en quelques points  
de mesure

pulsation:  $\omega = 5000$ .  
 hétérogénéité:  $\epsilon = 0.1$   
 noeuds: 150



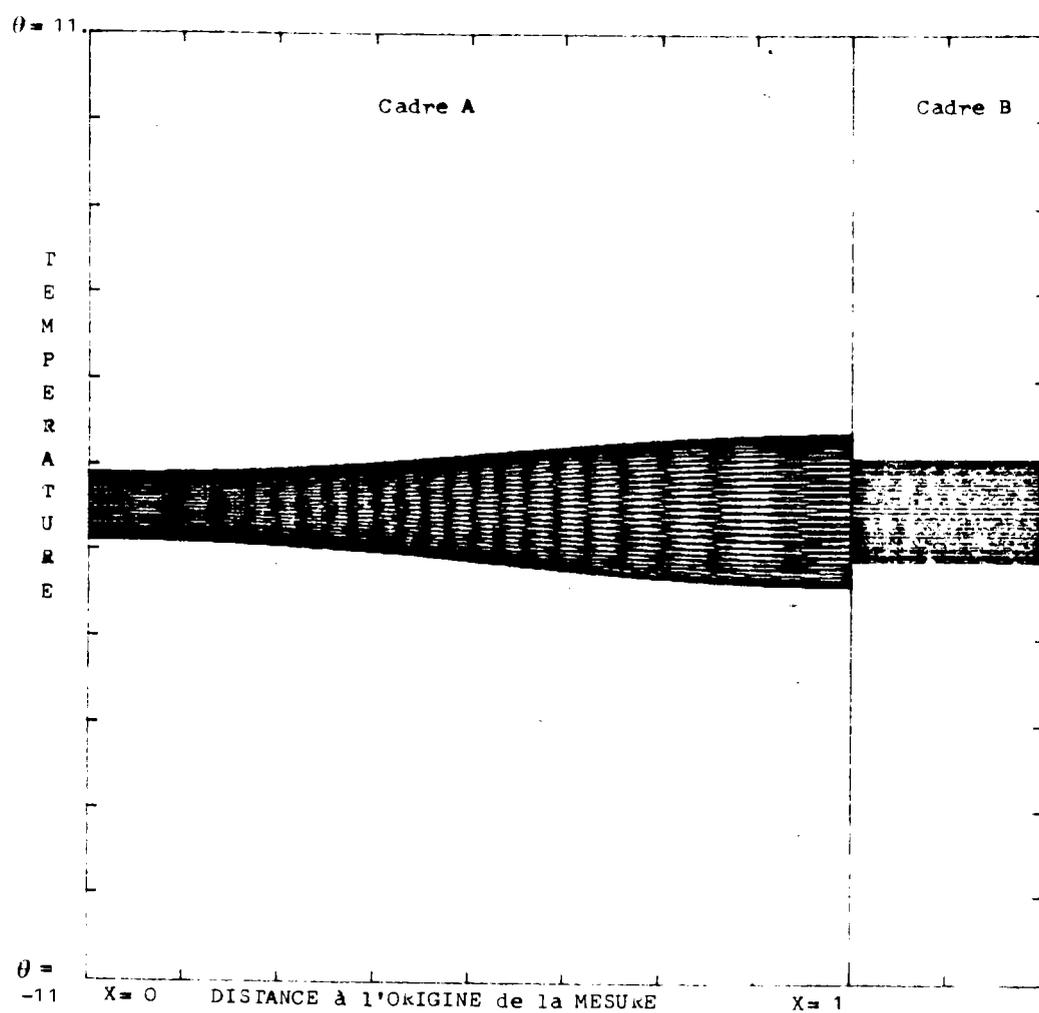
ESSAI "DYNAMIQUE"

EVOLUTION DE LA  
TEMPERATURE  
en quelques points  
de mesure

pulsation:  $\omega = 5000$ .  
hétérogénéité:  $\epsilon = 0.9$   
noeuds: 150

A C T I O N D E L A C O N D U C T I O N

de la chaleur sur le profil des températures  
pour différentes pulsations.



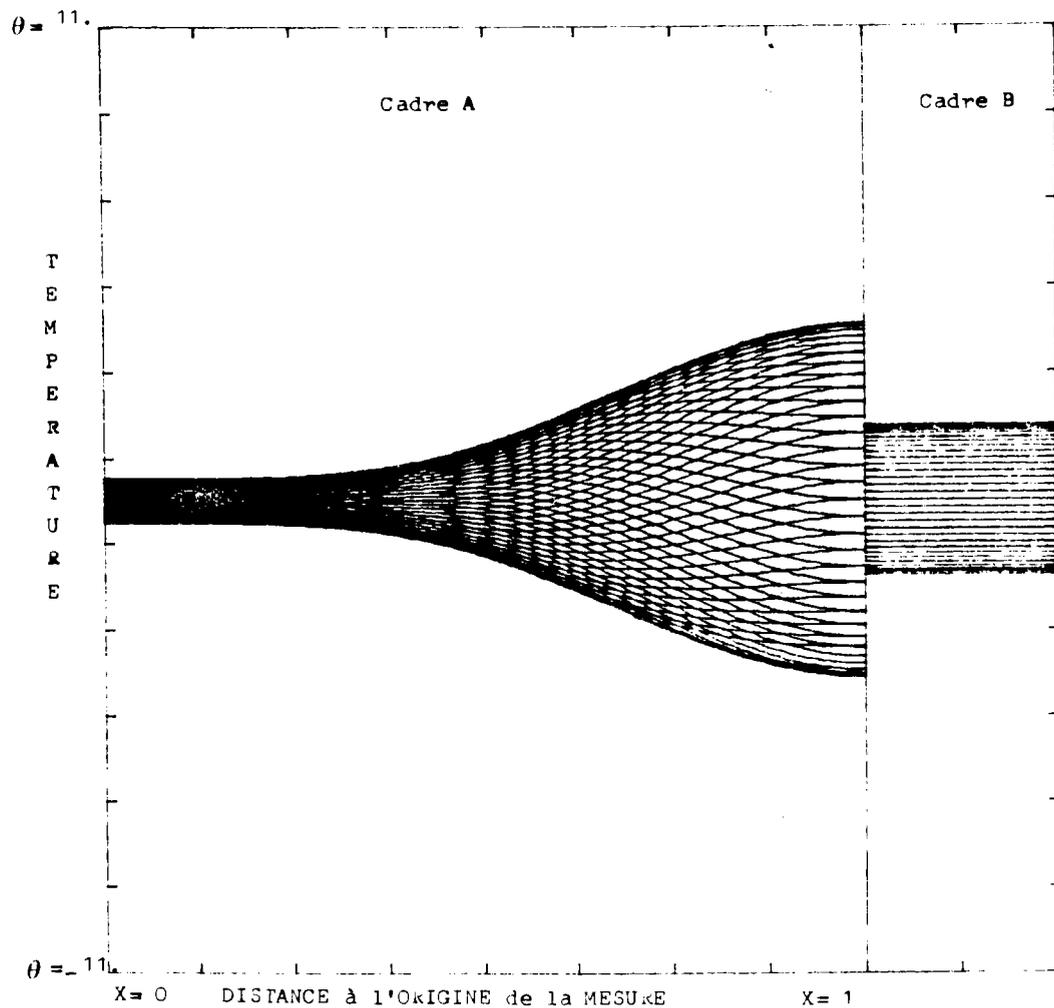
ESSAI DYNAMIQUE

(A) PHOTOGRAPHIES  
SUCCESSIVES DU  
PROFIL DES  
TEMPERATURES

(B) NIVEAUX  
SUCCESSIFS DE  
LA TEMPERATURE  
MOYENNE

pulsation :  $\omega = 10$ .  
hétérogénéité :  $\epsilon = 0.9$   
noeuds : 150

PROFIL  
RELAXE



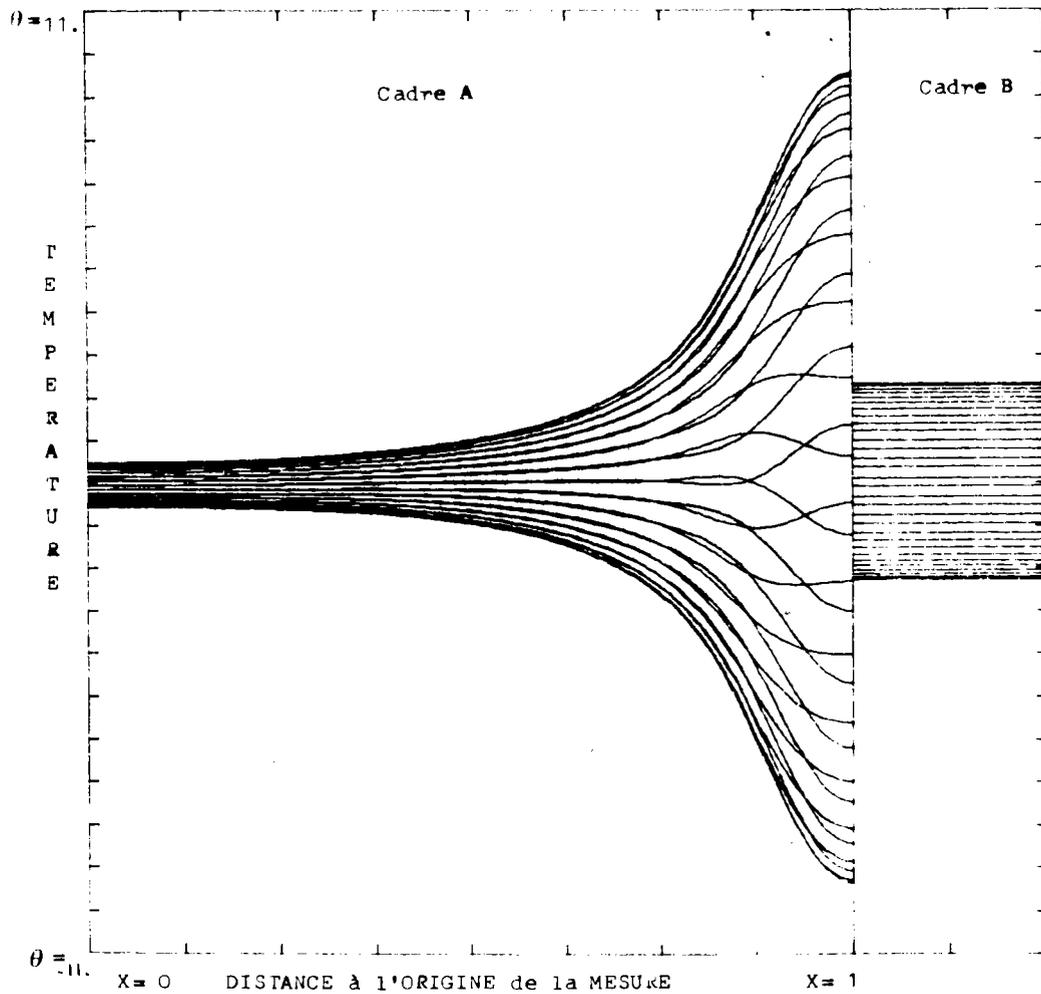
ESSAI DYNAMIQUE

(A) PHOTOGRAPHIES  
SUCCESSIVES DU  
PROFIL DES  
TEMPERATURES

(B) NIVEAUX  
SUCCESSIFS DE  
LA TEMPERATURE  
MOYENNE

pulsation :  $\omega = 800.$   
hétérogénéité :  $\epsilon = 0.9$   
noeuds : 150

PROFIL  
INTERMEDIAIRE



ESSAI "DYNAMIQUE"

(A) PHOTOGRAPHIES  
SUCCESSIVES DU  
PROFIL DES  
TEMPERATURES

(B) NIVEAUX  
SUCCESSIFS DE  
LA TEMPERATURE  
MOYENNE

pulsation :  $\omega = 5000$ .  
hétérogénéité :  $\epsilon = 0.9$   
noeuds : 150

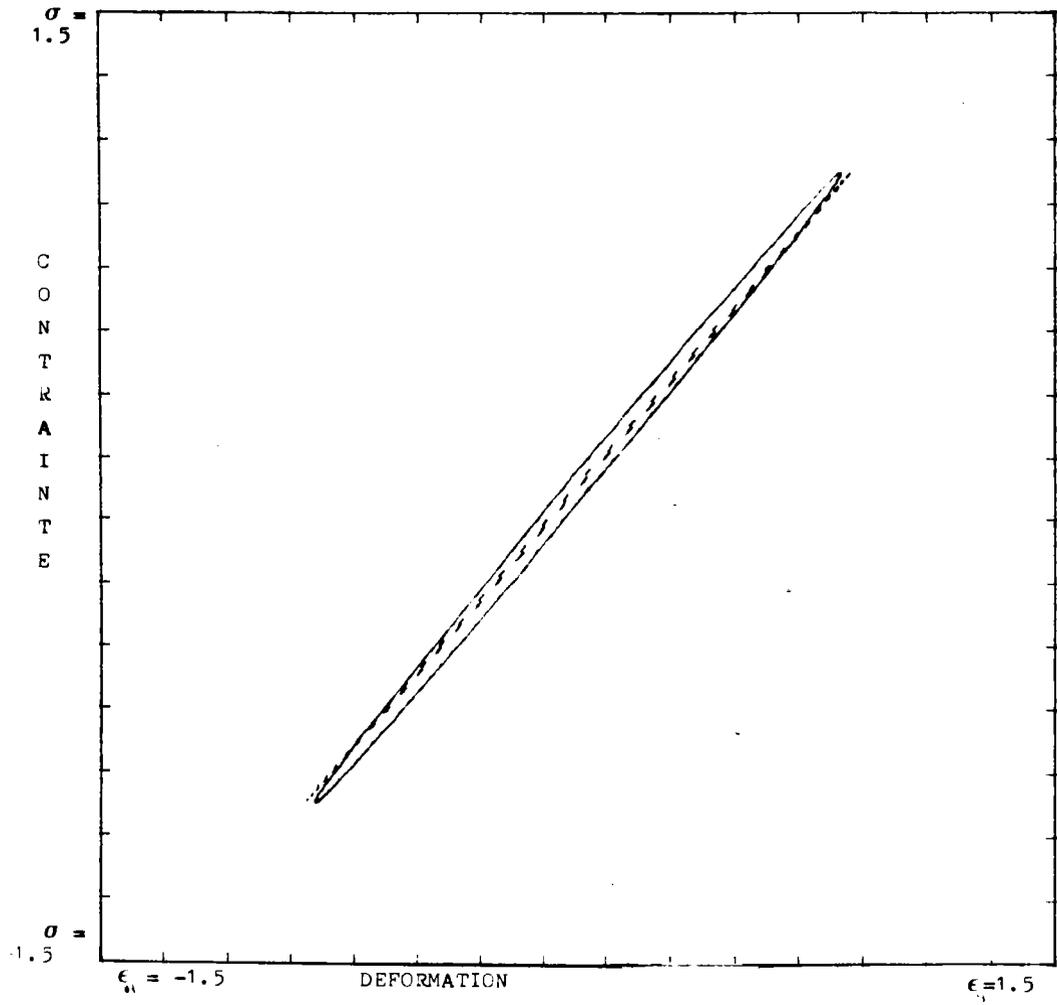
PROFIL  
ADIABATIQUE

C Y C L E S   D E   D I S S I P A T I O N

- pour  $\omega = 80$ .

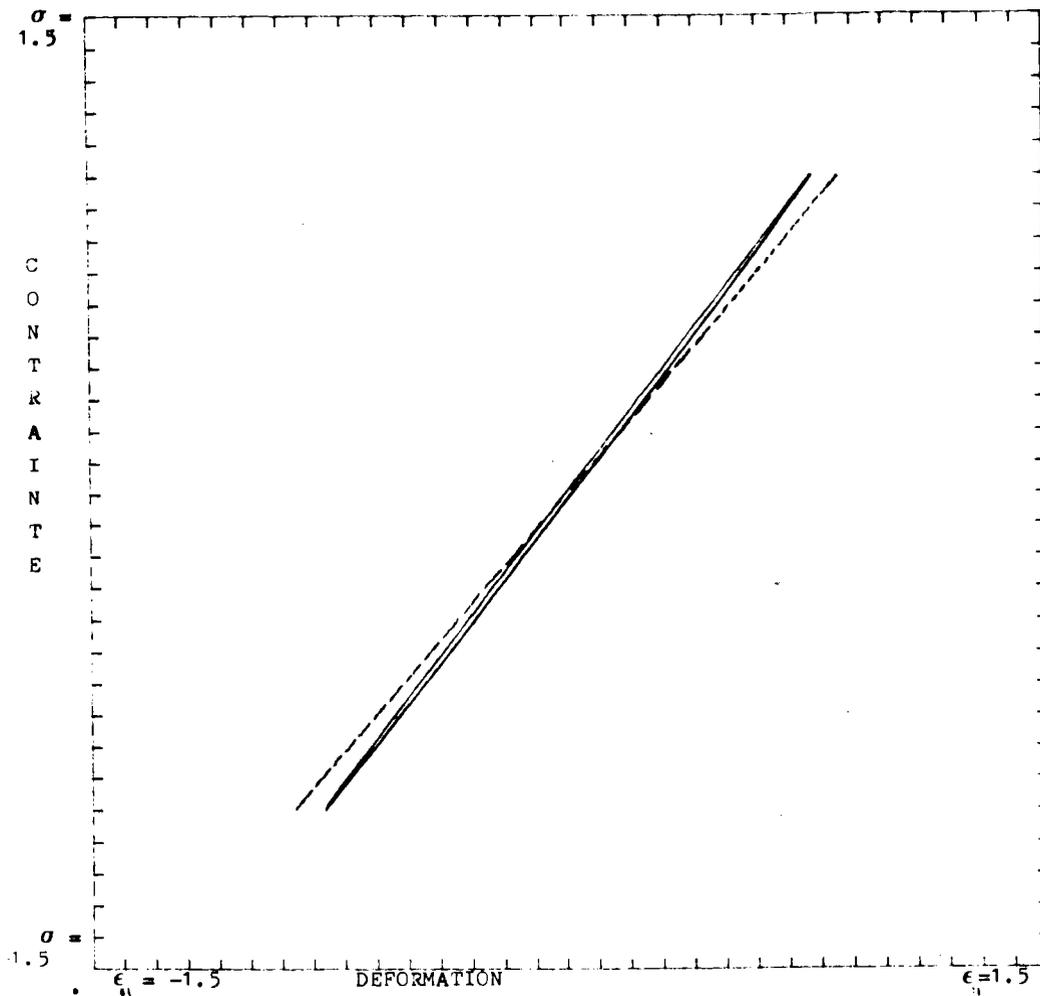
et  $\omega = 5000$ .

Pour  $\xi = 0.9$ , la méthode de perturbation (pointillés)  
ne perçoit pas la dissipation.



ESSAI DYNAMIQUE  
CYCLE  
CONTRAÎNTE-DEFORMATION

pulsation  $\omega = 80.$   
hétérogénéité  $\epsilon = 0.9$   
noeuds: 150



ESSAI "DYNAMIQUE"  
CYCLE  
CONTRAINTE-DEFORMATION  
pulsation  $\omega = 5000$ .  
hétérogénéité  $\epsilon = 0.9$   
noeuds: 150

I N F L U E N C E   D E   L ' H E T E R O G E N E I T E

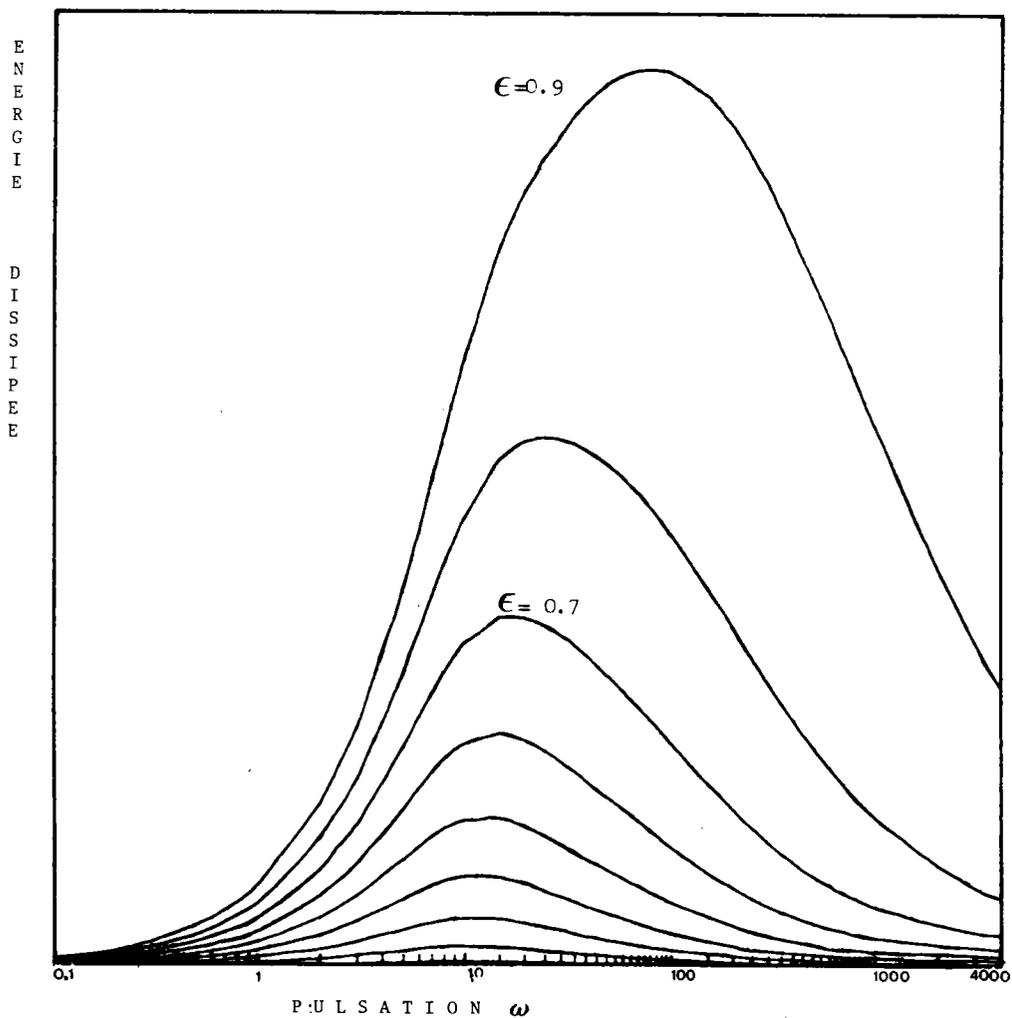
SUR LA DISSIPATION EN FONCTION DE LA PULSATION.

ESSAIS "DYNAMIQUES"<sup>11</sup> : Dissipation pour différentes  
hétérogénéités en fonction  
de la pulsation.

POSITIONS DES MAXIMA :

pour  $\xi = 0.9$ ,  $\omega = 80$ .

pour  $\xi \leq 0.3$ ,  $\omega = 10$ .



## C O N C L U S I O N

Les deux problèmes unidimensionnels examinés au chapitre III sont des exemples simples mais ils ont l'avantage de contenir toute la base du comportement ANELASTIQUE engendré par la CONDUCTION THERMIQUE.

L'étude de Zener, pour un solide thermoélastique HOMOGENE non isolé thermiquement illustre parfaitement l'EFFET THERMOELASTIQUE.

Il en va de même pour l'étude concernant l'échantillon HETEROGENE. Et si on veut décrire le comportement VISCOELASTIQUE d'un solide hétérogène obéissant aux lois locales de la thermoélasticité nous avons constaté qu'il faut distinguer deux types de gradients thermiques :

- l'un externe : la différence de température liée aux conditions macroscopiques de frontière.
- l'autre intrinsèque : l'influence de l'hétérogénéité sur l'importance et la répartition des gradients thermiques.

Dans chaque problème, nous avons obtenu les compliances exactes instantanées et relaxées, et une méthode de perturbation directe nous a permis une bonne description du phénomène physique et une approximation du régime transitoire. En effet, dans cette méthode mais aussi dans la résolution par série de Fourier, nous avons éliminé, par le processus de séparation des variables d'espace et de temps, les gradients et obtenons un comportement viscoélastique. D'autres méthodes telles que la transformation de Laplace sont certainement utilisables mais délicates par la présence des coefficients dépendant de la position.

Il en a été de même pour l'étude tridimensionnelle générale. En utilisant la formulation intégrale de l'équation de la chaleur nous avons de même éliminé la température dans la loi de comportement et obtenu une fonctionnelle en temps  $\sigma = \mathcal{F}(\epsilon)$  de type viscoélastique. Malgré les hypothèses employées, le formalisme reste difficile mais il est certainement abordable mathématiquement, sous sa forme la plus générale.

Par contre, l'approximation du milieu granulaire et la discrétisation qui en résulte, exploitée par les méthodes Self-Consistentes et appuyée par un solide outil numérique, constitue le moyen, notamment pour les milieux biphasés, d'obtenir des résultats concrets.

Certes, nous avons constaté que la contribution de l'hétérogénéité dans la dissipation d'énergie est généralement faible mais le principe de l'étude est aussi applicable et constitue une première approche à d'autres formalismes généraux concernant les milieux hétérogènes ou plusieurs variables sont linéairement couplées et respectent une loi d'évolution : changement de phase, effets électrothermiques, électromécaniques...

A N N E X E

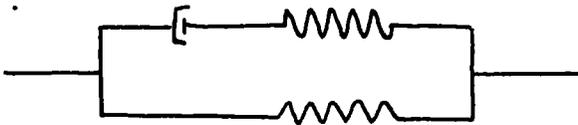
## V I S C O E L A S T I C I T E

## Le solide de Zener

## Un exemple de relaxation

I) Exemple d'anélasticité - le solide de Zener :

L'exemple standard approchant la modélisation du comportement anélastique d'un matériau peut être défini par le solide de Zener dont l'équivalent mécanique est constitué de deux ressorts et d'un amortisseur :



Nous supposons avec l'hypothèse des petites perturbations que le comportement du solide est linéaire ; nous entendons par là que si une sollicitation (contrainte  $\sigma_1(t)$  ou déformation) produit la réponse (déformation  $\epsilon_1(t)$  ou contrainte), et si la sollicitation ( $\sigma_2(t)$ ) produit la réponse ( $\epsilon_2(t)$ ) alors ( $\sigma_1 + \sigma_2$ ) provoque ( $\epsilon_1 + \epsilon_2$ ).

II) Loi de comportement :

La loi de comportement du solide de Zener s'écrit

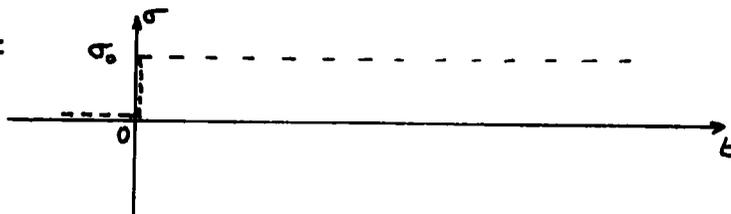
$$J_R \sigma + \tau J_U \dot{\sigma} = \epsilon + \tau \dot{\epsilon}$$

L'interprétation des coefficients ( $J_R$ ), ( $J_U$ ) et ( $\tau$ ) est immédiate si nous examinons la réponse du solide soumis à un échelon de contrainte.

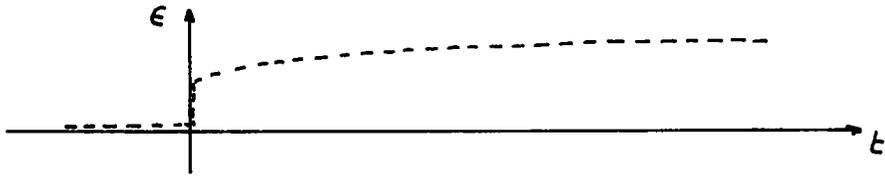
III) Essai quasistatique :

Appliquons à l'instant ( $t = 0$ ) un incrément de contrainte ( $\sigma_0$ ) et observons la réponse en déformation ( $\epsilon(t)$ )

- sollicitation :



- réponse : dès l'application de la contrainte une déformation élastique instantanée apparaît (influence des ressorts) puis la déformation évolue vers une valeur limite d'équilibre (influence de l'amortisseur)



Puisque nous supposons le comportement linéaire, la réponse en déformation est proportionnelle à  $(\sigma_0)$  ; il est intéressant de considérer la fonction  $(J(t))$  appelée fonction de fluage et homogène à une compliance.

$$J(t) = \epsilon(t) / \sigma_0$$

On montre que pour l'essai en question ((21))

$$J(t) = J_u + (J_R - J_u)(1 - e^{-t/\tau})$$

ainsi

- $J(0) = J_u = \frac{\epsilon(0^*)}{\sigma_0}$  est nommée la compliance non relaxée et caractérise l'élasticité instantanée.
- $J(+\infty) = J_R = \frac{\epsilon(+\infty)}{\sigma_0}$  est nommée la compliance relaxée et caractérise la déformation finale atteinte à l'équilibre.
- $\tau$  est un temps nommé temps caractéristique de la déformation à contrainte constante.

IV) Essai cyclique : (appelé aussi "dynamique", on néglige cependant les phénomènes d'inertie)

Si à présent nous appliquons une contrainte périodique, l'hypothèse de linéarité implique alors que la réponse est également périodique et de même fréquence mais elle présente un certain déphasage. Passons à des grandeurs complexes en considérant que nous imposons une contrainte

$$\sigma(t) = \sigma_0 e^{i\omega t}$$

La réponse est de la forme

$$\epsilon(t) = \epsilon_0 e^{i(\omega t - \varphi)}$$

ou encore

$$\epsilon(t) = (\epsilon_1 - i\epsilon_2) e^{i\omega t}$$

$(\epsilon_1)$  représente la composante de la déformation en phase avec la contrainte tandis que  $(\epsilon_2)$  représente la composante de  $(\epsilon)$  déphasée de  $(\pi/2)$ .

De même façon que pour l'essai quasistatique, on s'intéresse à la fonction fluage, cette fois-ci complexe

$$J^*(\omega) = \frac{\epsilon(t)}{\sigma(t)} = \frac{\epsilon_1(\omega)}{\sigma_0} - i \frac{\epsilon_2(\omega)}{\sigma_0} \equiv J_1(\omega) - i J_2(\omega)$$

On montre ((26)) la relation entre les grandeurs définies lors de l'essai statique et cyclique par l'écriture des équations de Debye :

$$J_1(\omega) = J_u + (J_R - J_u) / (1 + \omega^2 \tau^2)$$

$$J_2(\omega) = (J_R - J_u) \omega \tau / (1 + \omega^2 \tau^2)$$

#### V) Compliance instantanée :

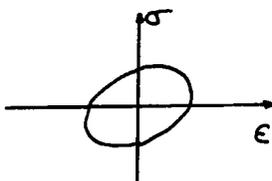
On peut généraliser la notion d'élasticité instantanée pour une sollicitation quelconque. Si à l'instant (t) arbitraire se produit un incrément de contrainte ( $d\sigma$ ) on observe un incrément de la déformation ( $d\epsilon$ ) ; on définit alors l'élasticité instantanée comme

$$J_u = \frac{\delta \epsilon}{\delta \sigma}$$

#### VI) Notion de friction intérieure - dissipation :

Lors de l'essai cyclique, la présence de déphasage entre la déformation et la contrainte met en évidence un phénomène de retard de l'une vis-à-vis de l'autre comme si la déformation était "freinée", d'où le nom de friction intérieure qui si on représente le diagramme contrainte-déformation peut s'identifier à un phénomène de dissipation intérieure d'énergie selon la formule classique.

L'aire du cycle représente le travail dissipé au cours d'une période sous forme de chaleur.



#### VII) Le principe de Boltzmann :

Le principe de Boltzmann n'est autre qu'un principe de superposition lié à la linéarité du comportement du matériau : il suffit de connaître la fonction fluage pour déduire la réponse du matériau sous n'importe quelle sollicitation en contrainte et ce, d'après la relation :

$$\epsilon(t) = \int_{-\infty}^t J(t-\tau) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} d\tau$$

## THERMOELASTICITE ((33 - 28 - 34))

Une loi de comportement

Une loi d'évolution

I) Tenseur des déformations :

La notion de déformation d'un corps (s) étant purement cinématique, nous nous repérons dans un système de coordonnées cartésiennes dans lequel chaque particule est positionnée à l'instant (t) par le vecteur coordonnées :

$$\vec{x} (x_1, x_2, x_3)$$

noté aussi :

$$\vec{x} (x, y, z)$$

En supposant que le solide s'écarte peu de sa configuration de référence (Hypothèse des Petites Perturbations), nous définissons le tenseur des déformations ( $\epsilon$ ) à partir du vecteur déplacement ( $\vec{u}$ ) par :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$$

II) Equations du mouvement - Tenseur des contraintes :

Le milieu déformable occupant le volume (D) limité par la frontière (B) est soumis à l'action de forces extérieures représentées par :

(S) : forces surfaciques définies sur (B)

(f) : forces massiques agissant sur chaque élément de (D)  
nous incluons dans (f) les forces d'inerties, pour les distinguer nous notons :

$$\vec{f} = \vec{F} - \vec{\ddot{u}}$$

Dans le référentiel galiléen où nous observons le mouvement, la loi fondamentale de la dynamique implique :

- la résultante des forces et moments appliqués est nulle

$$(1) \int_D \rho \vec{f} dV + \int_B \vec{S} dA = \vec{0} \quad (2) \int_D \rho \vec{f} \wedge \vec{x} dV + \int_B \vec{S} \wedge \vec{x} dA = \vec{0}$$

Utilisant le postulat de Cauchy, nous supposons que la densité surfacique (S) en un point (P) de (B) dépend uniquement du point considéré et de la normale ( $\vec{n}$ ) et nous écrivons :

$$\vec{S}(P, \vec{n}) = \sigma \vec{n}$$

(σ) désignant le tenseur des contraintes.

Substituant dans (1) l'expression de (S) et utilisant le théorème de la divergence, nous déduisons la forme globale pour tout volume (D) en notation indicielle :

$$\int_D (\sigma_{ij,j} + \rho f_i) dV = 0$$

D'où la forme locale :  $\sigma_{ij,j} + \rho f_i = 0$

De la même façon, nous déduisons de (2) la symétrie du tenseur ( $\sigma$ )

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

### III) Thermodynamique - 1) Notions de base :

Nous supposons pouvoir décrire l'état thermodynamique d'un système fermé (n'échangeant pas de masse avec l'extérieur) par la donnée de (n) informations quantifiables décrivant chacune une propriété caractéristique du système. Les valeurs de ces données sont représentées par (n) variables d'état :

$$X_j, j = 1 \text{ à } n$$

dont certaines seront extensives (additives) et d'autres intensives.

Nous introduisons alors les notions suivantes :

- système en équilibre thermodynamique : les variables d'état ne dépendent pas du temps.
- système uniforme : les variables d'état intensives sont indépendantes de l'espace.

Rappelons les résultats classiques de la thermodynamique des systèmes uniformes.

### 2) Systèmes uniformes - Définitions et résultats :

Lors de l'équilibre thermodynamique, il existe (p) relations dites équations d'état reliant les (n) variables d'état. En choisissant (n - p =  $\alpha$ ) variables, le système est décrit à l'équilibre par :

$$X_j = f_j(X_1, X_2, \dots, X_\alpha) \quad j = \alpha + 1 \text{ à } p + \alpha$$

Deux systèmes initialement en équilibre thermodynamique sont dits en équilibre thermique mutuel si, une fois accolés, ils restent chacun en équilibre (pas d'évolution des variables d'état). Par transitivité, on déduit que deux systèmes en équilibre thermique mutuel avec un même troisième sont en équilibre entre eux (principe du zéro) et on déduit le repérage d'une température empirique par ce raisonnement :

De l'équilibre thermique de deux systèmes, on peut déduire une relation entre les équations d'état du premier et celles du second.

Cette relation est symboliquement représentée par :

$$f(1;2) = 0$$

De même, si le premier système est en équilibre thermique mutuel avec un troisième, on déduit une relation du type :

$$g(1;3) = 0$$

Et si le second est en équilibre avec le troisième

$$h(2;3) = 0$$

Selon le principe du zéro, si seulement deux des trois relations sont vérifiées, alors la troisième l'est automatiquement. Cela n'est possible que si les équations précédentes sont de la forme :

$$f(1;2) = \theta_1 - \theta_2 = 0$$

$$g(1;3) = \theta_1 - \theta_3 = 0$$

$$h(2;3) = \theta_2 - \theta_3 = 0$$

La valeur commune déduite définit à un choix d'origine près la température empirique de ces systèmes. Elle peut être considérée comme variable d'état.

Travail : Sous l'action des forces extérieures précédemment définies chaque particule (P) du milieu subit un déplacement ( $\vec{u}(P,t)$ ) et pour l'ensemble du système, nous déduisons la forme différentielle du travail fourni :

$$dW = \int_{\mathcal{D}} \rho \vec{F}(P,t) d\vec{u} dV + \int_{\mathcal{B}} \vec{S}(P_B,t) d\vec{u}(P_B,t) dA$$

Energie interne : Deux systèmes en équilibre thermodynamique mais non mutuellement en équilibre thermique sont dits accolés par un mur adiabatique s'ils restent dans le même état thermodynamique. On dit alors qu'un procédé thermodynamique est adiabatique s'il s'applique à un système isolé adiabatiquement de son entourage.

Si nous considérons un procédé adiabatique faisant évoluer un système d'un état d'équilibre (à  $t = t^0$ ) thermodynamique à l'état d'équilibre (à  $t = t^1$ ) final, on montre alors que le travail effectué est indépendant du cheminement adiabatique suivi. On montre aussi que deux états d'équilibres thermodynamiques quelconques peuvent être reliés l'un à l'autre par un procédé adiabatique : on définit par conséquent et en tant que variable d'état intensive l'énergie interne (U) d'un système comme le travail nécessaire pour passer de façon adiabatique d'un état de référence à l'état actuel :

$$\text{énergie interne : } U(t^1) - U(t^0) = \int_{t^0}^{t^1} \dot{W}(\tau) d\tau = W$$

## Chaleur - Le premier principe de la thermodynamique - Principe de conservation :

Si à présent, nous considérons un procédé thermodynamique non adiabatique faisant évoluer le système d'un état initial (à  $t = t^0$ ) à l'état final (à  $t = t^1$ ), la différence entre la variation d'énergie interne et le travail effectué n'est pas nulle : cela met en évidence la chaleur apportée au système lors de l'évolution et nous notons :

$$[U(t^1) - U(t^0)] - W = Q$$

La valeur de (Q) change suivant le procédé mais la valeur de (W + Q) exprimant la variation d'énergie interne de l'instant initial à l'instant final est indépendante du cheminement suivi : nous écrivons ainsi une première loi de conservation :

$$U(t^1) - U(t^0) = W + Q$$

$$\dot{U} = \dot{W} + \dot{Q}$$

ou encore

$$dU = dW + dQ$$

Généralisons ces résultats dans le cas des systèmes non-uniformes.

### 3) Systèmes non-uniformes :

Nous établissons une certaine correspondance entre les résultats obtenus pour un milieu uniforme et ceux posés pour un milieu non-uniforme. La théorie des milieux non-uniformes doit inclure les principes précédents dans le cas particulier d'un milieu uniforme.

Les fonctions d'état intensives précédentes deviennent aussi variables d'état mais dépendent de l'espace. Quand aux fonctions d'état extensives, nous les convertissons en variables locales en les divisant par la masse du système ; les densités ainsi déduites sont aussi variables d'état.

Conservation de l'énergie : Le premier principe exprime la variation de l'énergie totale d'un corps (D) en fonction de la puissance des efforts extérieurs exercés sur (D) et du taux de chaleur apportée :

$$\frac{d}{dt} [K + U] = \mathcal{P}^{ext} + \dot{Q}$$

avec

$$K = \frac{1}{2} \int_D \rho \dot{u}_i \dot{u}_i dV$$

$$U = \int_D \rho \epsilon dV$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{ext} dt = W^e &= \int_B \sigma_{ij} m_j (\dot{u}_i dt) dA + \int_D \rho F_i (\dot{u}_i dt) dV \\ &= \int_D [(\sigma_{ij} \dot{u}_i)_{,j}] dV dt + \int_D \rho F_i dV dt \end{aligned}$$

$$\dot{Q} = - \int_B \vec{q} \cdot \vec{m} dA = - \int_D q_{i,i} dV$$

En tenant compte de la forme locale de l'équation du mouvement, nous déduisons la forme globale du principe de conservation :

$$\int_{\mathcal{D}} (\sigma_{ij,j} + \rho F_i - \rho \ddot{u}_i) \dot{u}_i dV + \int_{\mathcal{D}} (\sigma_{ij} \dot{u}_{i,j} - q_{i,i} - \rho \dot{\epsilon}) dV = 0$$

$$\int_{\mathcal{D}} (\sigma_{ij} \dot{u}_{i,j} - q_{i,i} - \rho \dot{\epsilon}) dV = 0$$

D'où la forme locale :

$$\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - q_{i,i} = \rho \dot{\epsilon}$$

### Définitions préliminaires à l'énoncé du second principe :

Etat de référence : Etat initial de l'échantillon caractérisé par une température uniforme ( $T_0$ ) et la nullité des tenseurs déformation et contrainte.

Variables d'état de la déformation : La déformation à l'état actuel est décrite par rapport à l'état de référence par la donnée de (n) variables d'état

$$\xi_\alpha, \alpha = 1 \dots m$$

Dans le cas d'un solide thermoélastique, il n'apparaît pas de variables de nature purement dissipatives liées par exemple à des phénomènes de viscosités.

$$\xi_\alpha = \epsilon_{\pi\alpha} \quad \alpha = 1, \dots, 6 \quad \{n, \alpha\} = \{1, 2, 3\}$$

Processus localement réversible : Cheminement fait d'une suite d'états d'équilibres thermodynamiques voisins. On peut exprimer à chaque instant l'énergie interne suivant :

$$\epsilon(t) = \epsilon[\xi_\alpha(t), \theta(t)] \quad ; \quad \dot{\epsilon}(t) = \frac{\partial \epsilon}{\partial \xi_\alpha} \dot{\xi}_\alpha + \frac{\partial \epsilon}{\partial \theta} \dot{\theta}$$

Processus localement adiabatique : Le flux de chaleur est nul

$$\vec{q} = \vec{0}$$

Définition d'une équation intégrale : L'équation différentielle

$$P_\alpha(x_1, \dots, x_m) \frac{dx_\alpha}{dt} = 0 \quad ; \quad \alpha = 1 \dots, m$$

est intégrale s'il existe deux fonctions

$$\lambda(x_1, \dots, x_m) \quad ; \quad F(x_1, \dots, x_m)$$

telles que

$$\frac{1}{\lambda} P_\alpha \frac{dx_\alpha}{dt} = \frac{dF}{dt} \quad \alpha = 1, \dots, m.$$

lemme : si au voisinage d'un point ( $G^0$ ), il existe des points ( $G$ ) inaccessibles le long des courbes intégrales de l'équation différentielle

$$P_\alpha(x_1, \dots, x_m) \frac{dx_\alpha}{dt} = 0 \quad \alpha = 1, \dots, m$$

alors cette équation est intégrale.

Postulat de Carathéodory : soit l'état initial ( $I^0$ ) caractérisé par la donnée des variables d'état ( $\xi_\alpha^0$ ) et ( $\theta^0$ ) ; il existe d'autres états ( $I(\xi_\alpha, \theta)$ ) qui ne sont pas accessibles à partir de l'état ( $I^0$ ) en suivant des procédés localement réversibles et localement adiabatiques.

Conséquences du postulat de Carathéodory : pour un modèle sans viscosités, l'équation de conservation

$$\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - q_{i,i} = \rho \dot{\epsilon} \quad (3)$$

s'écrit sous la forme, dans le cas d'un procédé localement adiabatique :

$$\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = \rho \dot{\epsilon}$$

soit 
$$\sigma_\alpha \dot{\xi}_\alpha = \rho \dot{\epsilon}(\xi_\alpha, \theta)$$

ou encore 
$$\left( \sigma_\alpha - \rho \frac{\partial \epsilon}{\partial \xi_\alpha} \right) \dot{\xi}_\alpha - \rho \frac{\partial \epsilon}{\partial \theta} \dot{\theta} = 0$$

Cette équation est de la forme

$$P_\alpha(x_1, \dots, x_m) \frac{dx_\alpha}{dt} = 0$$

Traduisons qu'il existe des états thermodynamiques non accessibles le long des courbes intégrales de cette équation : nous introduisons ( $\lambda$ ) et ( $F$ ) telles que :

$$\frac{1}{\lambda} \left[ \left( \rho \frac{\partial \epsilon}{\partial \xi_\alpha} \right) - \sigma_\alpha \right] \dot{\xi}_\alpha + \rho \frac{\partial \epsilon}{\partial \theta} \dot{\theta} = \dot{F}(\xi_\alpha, \theta)$$

et de (3) on déduit

$$\rho \dot{\epsilon} - \sigma_\alpha \dot{\xi}_\alpha = \lambda(\xi_\alpha, \theta) \dot{F}(\xi_\alpha, \theta)$$

$$-q_{i,i} = \lambda(\xi_\alpha, \theta) \dot{F}(\xi_\alpha, \theta)$$

Identifions ( $\lambda$ ) et ( $F$ )

Intégrons sur le volume l'équation et déduisons l'expression du taux d'apport de chaleur

$$\dot{Q} = \int_V \lambda \dot{F} dV$$

Pour un système uniforme de volume ( $V$ ) et de masse ( $M = \rho V$ )

$$\dot{Q} = \lambda \dot{F} V = \lambda \dot{F} M / \rho \equiv \lambda^* \dot{F} M$$

Par correspondance avec la thermodynamique des milieux uniformes, on déduit :

$\lambda^* = T$  température absolue

$S = MF$  entropie du système dont la quantité spécifique associée est notée  $\eta(\xi_\alpha, \theta)$

Conclusion : Nous écrivons pour un processus localement réversible et sans effets de viscosité

$$\sigma_{\alpha} \dot{\xi}_{\alpha} + \rho T \dot{\eta} = \rho \dot{\epsilon}$$

$$-q_{i,i} = \rho T \dot{\eta}$$

Second principe - Production d'entropie :

Intégrons

$$-q_{i,i} = \rho T \dot{\eta}$$

et utilisons le théorème de la divergence

$$\dot{S} = \int_{\mathcal{D}} \rho \dot{\eta} dV = - \int_{\mathcal{D}} \frac{q_{i,i}}{T} dV = - \int_{\mathcal{D}} \left( \frac{q_i}{T} \right)_{,i} dV - \int_{\mathcal{D}} \frac{q_i T_{,i}}{T^2} dV$$

$$\dot{S} = - \int_{\mathcal{B}} \frac{q_i n_i}{T} dA - \int_{\mathcal{D}} \frac{q_i T_{,i}}{T^2} dV$$

Le premier terme du second membre représente le taux de production d'entropie liée aux échanges de chaleur avec l'extérieur.

Le second terme correspond à la production interne d'entropie, on note

$$\rho \dot{\eta}_{\text{I}} = - \frac{q_i T_{,i}}{T^2}$$

Le second principe exprime que la production interne d'entropie est toujours positive :

$$\dot{\eta}_{\text{I}} \geq 0$$

4) Loi de comportement :

La connaissance de l'énergie libre volumique définie par`

$$\Psi(\epsilon_{ij}, T) = \rho \epsilon(\epsilon_{ij}, T) - \rho \eta(\epsilon_{ij}, T) T$$

permet de déduire ( $\sigma$ ) et ( $\eta$ ) en exprimant sa forme différentielle suivant

$$d\Psi = \frac{\delta\Psi}{\delta\epsilon_{ij}} d\epsilon_{ij} + \frac{\delta\Psi}{\delta\theta} d\theta = \rho d\epsilon - \rho \eta dT - \rho T d\eta$$

$$d\Psi = \sigma_{\alpha} d\xi_{\alpha} - \rho \eta d\theta$$

$$d\Psi = \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} - \rho \eta d\theta$$

ainsi

$$\sigma_{ij} = \frac{\delta\Psi}{\delta\epsilon_{ij}} \quad \rho \eta = - \frac{\delta\Psi}{\delta\theta}$$

Dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations, les valeurs  $(\epsilon_{ij})$  et  $(\theta)$  sont petites (et nulles à l'état de référence) ; il est convenable de développer l'énergie libre volumique au voisinage de  $(\epsilon_{ij} = 0)$  et  $(\theta = 0)$  en une série des  $(\epsilon_{ij})$  et  $(\theta)$  tronquée au-delà des termes quadratiques et ce suivant

$$\Psi = \Psi_0 + \frac{1}{2} C_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} - \beta_{ij} \epsilon_{ij} \theta - \mathcal{C}_v \theta^2 / 2T_0 + \dots$$

(il n'apparaît pas des termes linéaires puisque à l'état de référence) :

$$\sigma_{ij}^0 = 0 = \left. \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_{ij}} \right|_0 \quad e\eta^0 = 0 = - \left. \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right|_0$$

Nous déduisons pour un solide élastique anisotrope avec

$$\beta_{ij} = C_{ijkl} \alpha_{kl}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_{ij}} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} - \beta_{ij} \theta$$

$$e\eta = - \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = \beta_{ij} \epsilon_{ij} + \mathcal{C}_v \theta / T_0$$

(C) désigne le tenseur d'élasticité,  $(\alpha)$  le tenseur dilatation thermique libre,  $(\mathcal{C}_v)$  la chaleur volumique à déformation constante.

### 5) Loi de Fourier - Equation d'évolution de la chaleur :

Dans le cadre de la conduction de la chaleur, la loi expérimentale linéaire reliant le flux de chaleur ( $J = q$ ) à la "force thermodynamique" ( $\vec{\text{Grad}} \theta$ ) s'écrit :

$$\vec{J} = -K \vec{\text{grad}} \theta$$

soit en notation indicielle

$$q_i = -k_{ij} \theta_{,j}$$

(K) représente le tenseur conductivité thermique.

Pour un processus réversible, on écrit donc :

$$e^T \dot{\eta} = - q_{i,i} = \text{div} (K \vec{\text{grad}} \theta)$$

$$e(T_0 + \theta) \dot{\eta} = \text{div} (K \vec{\text{grad}} \theta)$$

## CONDUCTION DE LA CHALEUR ((35))

## L'évolution de la température

I) Liaison avec la thermoélasticité :

De l'expression de l'entropie et de son évolution en fonction du gradient de température formulées dans l'annexe "Thermoélasticité" à savoir :

$$\rho \eta = \beta_{ij} \epsilon_{ij} + \rho_v \theta / T_0$$

$$\rho (T_0 + \theta) \dot{\eta} = \text{div} [ \kappa \vec{q}_{\text{rad}} \theta ]$$

nous déduisons :

$$\rho_v \dot{\theta} = \text{div} [ \kappa \vec{q}_{\text{rad}} \theta ] - T_0 \beta_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}$$

Soulignons ici avec importance que, puisque nous nous plaçons dans l'hypothèse des petites perturbations, nous négligeons les termes  $(\theta \dot{\epsilon}_{ij})$  et  $(\theta \dot{\eta})$ .

II) Introduction indépendante :

Sans détailler les équations de la thermoélasticité, nous pouvons justifier plus rapidement l'équation obtenue pour un milieu isotrope par exemple.

Pour tout volume (V), l'équation de la conduction de la chaleur se déduit en effet de la conservation de l'énergie sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{taux de chaleur} \\ \text{entrant par la} \\ \text{frontière } \delta V \text{ de } V \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{taux de} \\ \text{production} \\ \text{d'énergie} \\ \text{intérieurement} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{taux} \\ \text{de restauration} \\ \text{d'énergie} \\ \text{par } V \end{array} \right\}$$

Le flux de chaleur apportée de l'extérieur à travers la frontière s'écrit avec la convention habituelle de la normale sortante et en respectant la loi de conduction de Fourier :

$$\dot{Q} = \int_{\delta V} -\vec{q} \cdot \vec{n} \, dV = \int_V \text{div} [ \kappa \vec{q}_{\text{rad}} \theta ] \, dV$$

La chaleur générée intérieurement à V s'exprime en faisant appel à la densité volumique de production interne  $g(r, t)$  :

$$\int_V g(r, t) \, dV$$

Le taux de restauration s'exprime en fonction de la chaleur volumique à contrainte ou volume constants :

$$\int_V \rho_v \frac{\partial \theta}{\partial t} \, dV$$

D'où l'équation locale exprimée cette fois avec une chaleur spécifique :

$$\rho c \dot{\theta} = \text{div} [k \vec{\text{grad}} \theta] + g(\pi, t)$$

dont la forme est à rapprocher de celle déduite de la thermoélasticité

$$\rho c_v \dot{\theta} = \text{div} [K \vec{\text{grad}} \theta] - T_0 \beta_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}$$

Nous obtenons ainsi une équation aux dérivées partielles de type parabolique d'ordre deux. Examinons quelques méthodes de résolution.

### III) Méthodes de résolution :

#### 1) Enoncé du théorème de Duhamel :

Si nous supposons que la fonction  $g(r, t)$  dépend linéairement de la température ( $\theta$ ) et s'écrit

$$g(\pi, t) = \rho c [C_0(\pi) \theta + G(\pi, t)]$$

Nous sommes amenés à considérer l'opérateur linéaire ( $\mathcal{L}$ ) ((36))

$$\mathcal{L} = \frac{1}{\rho c} \text{div} (k \vec{\text{grad}}) + C_0(\pi)$$

De plus, résoudre l'équation de la chaleur implique qu'il faut se donner deux conditions à savoir :

- une condition initiale : la température du corps (à  $t = 0$ ) est supposée connue.  $\theta(\pi, 0) = \phi(\pi)$
- une condition de frontière : la température ou le flux de chaleur (fonction de  $\vec{\text{grad}}(\theta) \cdot \vec{n}$ ) sont connus sur la surface ( $S$ ) limitant le volume ( $V$ ). Cette relation s'écrit linéairement :

$$\pi \in S : \quad S(\pi, t) = C_0(\pi) \theta(\pi, t) + C_1(\pi) \theta_{,\alpha} + C_2(\pi) \theta_{,\beta} + C_3(\pi) \theta_{,\gamma}$$

Introduisant l'opérateur ( $\lambda$ )

$$\lambda = C_0 + C_1 \partial/\partial x + C_2 \partial/\partial y + C_3 \partial/\partial z$$

Le problème à résoudre s'écrit comme la donnée d'une équation aux dérivées partielles, une condition de frontière (B), une condition initiale (I) :

$$\dot{\theta} = \mathcal{L} \theta + G(\pi, t)$$

$$\lambda \theta = S(\pi, t) \quad \pi \in S$$

$$\theta(\pi, 0) = \phi(\pi)$$

La solution de ce problème est donnée, selon le théorème de Duhamel, en fonction de la solution ( $\Phi$ ) de

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \Phi(\pi, t, \tau) = \mathcal{L} \Phi + G(\pi, t)$$

$$\lambda \Phi(\pi, t, \tau) = S(\pi, \tau)$$

$$\Phi(\pi, 0, \tau) = \phi(\pi)$$

- où  $(\tau)$  est assimilé à un paramètre, ce qui offre l'avantage d'obtenir une condition (B) et (I) indépendantes du temps.

Solution :

$$\Theta(n, t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \Phi(n, t-\tau, \tau) d\tau$$

## 2) Utilisation des fonctions de Green :

N.B : Un développement plus théorique est donné pour un milieu anisotrope dans l'étude tridimensionnelle.

Notation :  $\alpha = k/\rho c$

Hypothèse :  $\alpha$  et  $k$  sont supposés constants.

Avec la notation et l'hypothèse précédentes, l'équation locale de la chaleur s'écrit :

$$\frac{1}{\alpha} \dot{\Theta} = \nabla^2 \Theta + \frac{1}{k} g(n, t)$$

Donnons nous alors

- une condition de frontière  $k \frac{\partial \Theta}{\partial n} \Big|_S = f(n, t) - h \Theta, n \in S$

- une condition initiale  $\Theta(n, 0) = \phi(n)$

On se propose de chercher tout d'abord la fonction de Green vérifiant

$$\nabla^2 G(n, t | n', \tau) + \frac{1}{\alpha} \delta(n-n') \delta(t-\tau) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial G}{\partial t}$$

$$k_i \frac{\partial G}{\partial n} = -h_i G \quad (S = \bigcup_{i=1}^N S_i, n \in S_i)$$

$$G(n, t | n', \tau) = 0 \quad \text{pour } t < \tau$$

Cette fonction représente la distribution de température dans une région (R) initialement à la température nulle où apparaît à l'instant  $(\tau)$  une impulsion de chaleur au point  $(r')$  :

- $(r')$  et  $(\tau)$  situent la cause,  $(r)$  et  $(t)$  observent l'effet correspondant.

On montre que la solution de notre problème s'écrit en fonction de (G) suivant :

$$\Theta(n, t) = \int_V G(n, t | n', \tau) \Big|_{\tau=0} \phi(n') dV'$$

$$+ \frac{\alpha}{k} \int_{\tau=0}^t d\tau \int_V G(n, t | n', \tau) g(n', \tau) dV + \alpha \int_{\tau=0}^t d\tau \int_S G(n, t | n', \tau) \Big|_{n'=n_i} f_i(n, \tau) \frac{d\omega_i}{k_i}$$

Interprétons ce résultat :

La solution découle naturellement du principe de superposition : elle s'exprime comme la somme de trois contributions :

- la première correspond à l'effet d'uniformisation de la température initiale ( $\phi(r)$ ). Il suffit de considérer cette partie comme l'effet observé au point ( $r$ ) à l'instant ( $t$ ) lié à la superposition d'impulsions de températures apparues à l'instant ( $\tau = 0$ ) au point ( $r'$ ) et d'amplitudes ( $\phi(r')$ ) d'où le terme :

$$\int_V G(r, t | r', \tau) \Big|_{\tau=0} \phi(r') dV'$$

- la deuxième correspond à l'effet provoqué par la génération de chaleur  $g(r, t)$ . Il suffit de considérer qu'il s'agit d'une superposition d'impulsions apparues successivement de l'instant ( $\tau = 0$ ) à l'instant ( $t$ ) au point ( $r'$ ) ; d'où :

$$\int_{\tau=0}^t d\tau \int_S G(r, t | r', \tau) \cdot g(r', \tau) dV'$$

- la dernière correspond à l'effet provoqué par l'apport de chaleur à travers la frontière du volume :

$$\int_{\tau=0}^t d\tau \int_S G(r, t | r', \tau) \Big|_{r'=\pi_i} f_i(r', \tau) / k_i d\omega_i$$

### 3) Méthode de séparation des variables :

La méthode de séparation des variables est utile pour les cas simples car elle nous permet d'obtenir une expression analytique de la solution aisément manipulable. Intéressons nous par exemple à la résolution de l'équation à une dimension :

$$\dot{\theta} = \alpha^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + g(x, t)$$

$$\theta(x, 0) = \phi(x)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0$$

Nous décomposons la solution suivante ( $\theta = \theta_1 + \theta_2$ ) avec

$$I \begin{cases} \dot{\theta}_1 = \alpha^2 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} \\ \theta_1(x, 0) = \phi(x) \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0 \end{cases} \quad II \begin{cases} \dot{\theta}_2 = \alpha^2 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x^2} + g(x, t) \quad (2) \\ \theta_2(x, 0) = 0 \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0 \end{cases}$$

#### 3) a) Résolution de (I) :

Soit

$$\theta_1(x, t) = X(x) \cdot \Delta(t)$$

Alors de façon habituelle

$$X \dot{\Delta} = \alpha^2 X'' \Delta$$

$$\frac{\dot{\Delta}}{\alpha^2 \Delta} = \frac{X''}{X} = \text{ " constante " } = K$$

la solution physiquement acceptable est amortie en temps, on choisit

$$K = -k^2, \quad \dot{\Delta} = -k^2 \alpha^2 \Delta, \quad X'' = -k^2 X$$

la forme générale de  $(X)$  est  $X = a \cos(kx) + b \sin(kx)$

on choisit les constantes d'intégration d'après les conditions de frontière :

$$\left. \frac{\partial \Theta_1}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad \left. \frac{\partial \Theta_1}{\partial x} \right|_{x=1} = 0$$

on trouve alors une infinité de solutions de la forme :

$$\Theta_{1,m} = A_m e^{-(m\pi\alpha)^2 t} \cos(m\pi x) ; m=0, 1, \dots$$

la solution générale peut s'écrire :

$$\Theta_1 = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(n\pi\alpha)^2 t} \cos(n\pi x)$$

les  $(A_n)$  sont identifiées en développant  $(\phi(x))$  en une série de Fourier et en respectant

$$\Theta_1(x, 0) = \phi(x)$$

$$\phi(x) = \phi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n \cos(n\pi x) ; \phi_0 = \int_0^1 \phi(x) dx, \dots, \phi_n = 2 \int_0^1 \phi(y) \cos(n\pi y) dy$$

$$\Theta_1(x, 0) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\pi x)$$

d'où

$$\Theta_1(x, t) = \phi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n e^{-(n\pi\alpha)^2 t} \cos(n\pi x)$$

### 3)b) Résolution de II :

D'une façon analogue, nous développons  $g(r, t)$  en une série de Fourier

$$g(x, t) = g_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) \cos n\pi x ; g_0(t) = \int_0^1 g(x, t) dx ; g_n(t) = 2 \int_0^1 g(x, t) \cos(n\pi x) dx$$

soit

$$\Theta_2(x, t) = T_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cos(n\pi x)$$

en substituant  $(\Theta_2)$  dans (2) et en identifiant

$$\dot{T}_0(t) = g_0(t) ; \dot{T}_m(t) = -(m\pi\alpha)^2 T_m + g_m(t) , m \geq 1$$

en respectant la condition initiale, on déduit

$$T_0(t) = \int_0^t g_0(\tau) d\tau ; T_m(t) = \int_0^t g_m(\tau) e^{-(m\pi\alpha)^2(t-\tau)} d\tau$$

d'où

$$\Theta_2(x, t) = \int_0^t g_0(\tau) d\tau + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi x) e^{-(n\pi\alpha)^2 t} \int_0^t g_n(\tau) e^{(n\pi\alpha)^2 \tau} d\tau$$

D'où  $(\theta)$  se décompose en une partie transitoire correspondant à l'uniformisation de la température initiale  $(\phi(x))$  et une partie permanente correspondant à la génération de chaleur  $g(x, t)$  :

$$\Theta(x, t) = \phi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n e^{-(n\pi\alpha)^2 t} \cos(n\pi x) + \int_0^t g_0(\tau) d\tau + \sum_{m=1}^{\infty} \cos(m\pi x) \int_0^t e^{-(m\pi\alpha)^2(t-\tau)} g_m(\tau) d\tau$$

A N N E X E   C A L C U L S

**Annexe - Résolution de**

$$\left\{ \begin{aligned} \gamma(x) \dot{\theta} &= \alpha^2 \theta'' \\ \phi(x) &= \theta(x, 0) \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= 0 \text{ en } x=0 \text{ et } x=1 \end{aligned} \right.$$

Notation :

$$\begin{aligned} X_j &= \cos j\pi x \quad ; \quad \alpha^2 = \alpha^2 / \gamma^* \\ \gamma(x) &= \gamma^* (1 + \epsilon X_1) \quad ; \quad \alpha_j = -(j\pi\alpha)^2 \end{aligned}$$

$$\theta(x, t) = \theta_0(x, t) + \epsilon \theta_1(x, t) + \epsilon^2 \theta_2(x, t) + \epsilon^3 \theta_3(x, t) + \dots$$

$$\gamma(x) \dot{\theta} = \alpha^2 \theta''$$

$$(1 + \epsilon X_1) (\dot{\theta}_0 + \epsilon \dot{\theta}_1 + \epsilon^2 \dot{\theta}_2 + \dots) = \alpha^2 (\theta_0'' + \epsilon \theta_1'' + \epsilon^2 \theta_2'' + \dots)$$

Identification à l'ordre  $\epsilon$  :

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\theta}_0 &= \alpha^2 \theta_0'' \\ \theta_0(x, 0) &= \phi(x) \end{aligned} \right. \quad j > 1 \quad \left\{ \begin{aligned} \dot{\theta}_j &= \alpha^2 \theta_j'' - X_1 \dot{\theta}_{j-1} \\ \frac{\partial \theta_j}{\partial x} &= 0 \text{ en } x=0 \text{ et } x=1 \quad ; \quad \theta_j(x, 0) = 0 \end{aligned} \right.$$

(Suite d'équations de la chaleur en milieu

homogène en présence de terme de

génération de chaleur :  $f(x, t) = -X_1 \dot{\theta}_{j-1}$ )

Recherche à l'ordre  $\epsilon^2$  :

nous utilisons la méthode de séparation

des variables expliquée en annexe "Conduction de la chaleur"

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \theta_0(x, t) &= \phi_0 + \phi_1 X_1 e^{\alpha_1 t} + \sum_{n=2}^{\infty} \phi_n X_n e^{\alpha_n t} \\ \phi(x) &= \phi_0 + \phi_1 X_1 + \phi_2 X_2 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \theta_1(x, t) &= \int_0^t \textcircled{1} f_0(\tau) d\tau + \sum_n X_n e^{\alpha_n t} \int_0^t e^{-\alpha_n \tau} \textcircled{1} f_n(\tau) d\tau \\ \textcircled{1} f_0(x, t) &= -X_1 \dot{\theta}_0 = \textcircled{1} f_0^0(t) + \sum_n \textcircled{1} f_n^0(t) X_n \\ \theta_1(x, t) &= \int_0^t \textcircled{1} f_0(\tau) d\tau + \sum_n X_n e^{\alpha_n t} * \textcircled{1} f_n(t) \end{aligned}$$

Evaluons les  $\textcircled{1} f_j$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} f_0(x, t) &= -X_1 \dot{\theta}_0 = -X_1 \left[ \alpha_1 \phi_1 X_1 e^{\alpha_1 t} + \sum_n \alpha_n \phi_n X_n e^{\alpha_n t} \right] \\ &= -X_1 \dot{T}_0 - \sum_n X_1 \dot{T}_n X_n \quad \text{avec } \dot{T}_n = \alpha_n \phi_n e^{\alpha_n t} \end{aligned}$$

$$\textcircled{1} f_1(x, t) = - \left[ \sum_n \frac{X_{n+1} + X_{n-1}}{2} \dot{T}_n \right] - X_1 \dot{T}_0$$

$$f^{(1)}(x, t) = - \left[ \sum_1 \frac{\chi_{n+1}}{2} \dot{T}_n + \sum_1 \frac{\chi_{n-1}}{2} \dot{T}_n \right] - \chi_1 \dot{T}_0 = - \left[ \sum_2 \frac{\chi_n}{2} \dot{T}_{n-1} + \sum_0 \chi_n \frac{\dot{T}_{n+1}}{2} \right]$$

$$f^{(1)}(x, t) = - \left[ \frac{\dot{T}_1^{(1)}}{2} + \chi_1 \left( \frac{\dot{T}_2^{(1)}}{2} + \dot{T}_0 \right) + \sum_2 \chi_n \left( \frac{\dot{T}_{n-1}^{(1)}}{2} + \frac{\dot{T}_{n+1}^{(1)}}{2} \right) \right] \equiv f_0^{(1)}(t) + \sum_1 \chi_n f_n^{(1)}(t)$$

$$\begin{aligned} \text{avec } \dot{T}_n^{(1)} &= \alpha_n \phi_n e^{\alpha_n t} & \dot{T}_0^{(1)} &= 0 \\ T_m &= \phi_m e^{\alpha_m t} & T_0 &= \phi_0 \\ \Theta_0(x, t) &= \phi_0 + \phi_1 \chi_1 e^{\alpha_1 t} + \phi_2 \chi_2 e^{\alpha_2 t} + \dots \\ \Theta_0(x, t) &\equiv T_0^{(1)} + \chi_1 T_1^{(1)} + \chi_2 T_2^{(1)} + \dots \end{aligned}$$

Reprenons l'expression de  $\Theta_1(x, t)$ :

$$\begin{aligned} \Theta_1(x, t) &= \sum_1 \chi_n \left( e^{\alpha_n t} * f_n^{(1)}(t) \right) + \int_0^t f_0(\tau) d\tau \\ &= \sum_2 \chi_n e^{\alpha_n t} * \left[ - \frac{\dot{T}_{n-1}^{(1)} + \dot{T}_{n+1}^{(1)}}{2} \right] + \int_0^t - \frac{\dot{T}_1^{(1)}}{2} d\tau + \chi_1 e^{\alpha_1 t} * \left( - \frac{\dot{T}_2^{(1)}}{2} - \dot{T}_0 \right) \end{aligned}$$

$$\Theta_1(x, t) = - \left\{ \int_0^t \frac{\dot{T}_1^{(1)}}{2} d\tau + \chi_1 \left( e^{\alpha_1 t} * \left( \frac{\dot{T}_2^{(1)}}{2} + \dot{T}_0 \right) \right) + \sum_2 \chi_n e^{\alpha_n t} * \left( \frac{\dot{T}_{n-1}^{(1)} + \dot{T}_{n+1}^{(1)}}{2} \right) \right\}$$

De la même façon:  $i \geq 1$

$$\Theta_i(x, t) = - \left\{ \int_0^t \frac{\dot{T}_1^{(i-1)}}{2} d\tau + \chi_1 \left( e^{\alpha_1 t} * \left( \frac{\dot{T}_2^{(i-1)}}{2} + \dot{T}_0 \right) \right) + \sum_2 \chi_n e^{\alpha_n t} * \left( \frac{\dot{T}_{n-1}^{(i-1)} + \dot{T}_{n+1}^{(i-1)}}{2} \right) \right\}$$

avec:

$$\Theta_{i-1}(x, t) = T_0^{(i-1)} + \sum_1 \chi_n T_n^{(i-1)}$$

Précisons les  $\dot{T}_i^{(1)}$

$$\dot{T}_0^{(1)} = \dot{\phi}_0 = 0$$

$$\frac{\dot{T}_1^{(1)}}{2} = \frac{\alpha_1 \phi_1 e^{\alpha_1 t}}{2} \rightarrow \int_0^t \frac{\dot{T}_1^{(1)}}{2} d\tau = \frac{\phi_1}{2} (e^{\alpha_1 t} - 1)$$

$$\frac{\dot{T}_2^{(1)}}{2} = \frac{\alpha_2 \phi_2 e^{\alpha_2 t}}{2} \rightarrow e^{\alpha_1 t} * \left( \frac{\dot{T}_2^{(1)}}{2} + \dot{T}_0 \right) = \frac{\alpha_2 \phi_2}{2} e^{\alpha_1 t} \int_0^t e^{-\alpha_1 \tau} e^{\alpha_2 \tau} d\tau$$

$$= \frac{\alpha_2 \phi_2}{2(\alpha_2 - \alpha_1)} e^{\alpha_1 t} [e^{(\alpha_2 - \alpha_1)t} - 1]$$

$$\frac{\dot{T}_{n-1}^{\circledast}}{2} + \frac{\dot{T}_{n+1}^{\circledast}}{2} = \frac{\alpha_{n-1}}{2} \phi_{n-1} e^{\alpha_{n-1}t} + \frac{\alpha_{n+1}}{2} \phi_{n+1} e^{\alpha_{n+1}t}$$

$$\rightarrow e^{\alpha_n t} * \left( \frac{\dot{T}_{n-1}^{\circledast} + \dot{T}_{n+1}^{\circledast}}{2} \right) = \frac{\alpha_{n-1} \phi_{n-1} e^{\alpha_n t}}{2(\alpha_{n-1} - \alpha_n)} \left[ e^{(\alpha_{n-1} - \alpha_n)t} - 1 \right] + \frac{\alpha_{n+1} \phi_{n+1}}{2(\alpha_{n+1} - \alpha_n)} \left[ e^{(\alpha_{n+1} - \alpha_n)t} - 1 \right]$$

Ainsi pour  $\Theta_1(x, t)$ :

$$\Theta_1(x, t) = \int_0^1 \left[ \frac{\phi_1}{2} (1 - e^{\alpha_1 t}) + \frac{\chi_1 \alpha_2 \phi_2}{2(\alpha_2 - \alpha_1)} [e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t}] \right. \\ \left. + \sum_n \chi_n \left[ \frac{\alpha_{n-1} \phi_{n-1}}{2(\alpha_{n-1} - \alpha_n)} (e^{\alpha_n t} - e^{\alpha_{n-1} t}) + \frac{\alpha_{n+1} \phi_{n+1}}{2(\alpha_{n+1} - \alpha_n)} (e^{\alpha_n t} - e^{\alpha_{n+1} t}) \right] \right] dx$$

Passons à  $\Theta_2(x, t)$ : Nous ne recherchons que la composante non spatiale.

$$\int_0^t \rho_0^{\circledast}(\tau) d\tau = -\frac{1}{2} \int_0^t \frac{\dot{T}_1^{\circledast}}{2} dt = -\frac{T_1(t)}{2} = -\frac{1}{4} \frac{\alpha_2 \phi_2}{(\alpha_2 - \alpha_1)} (e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t})$$

Nous déduisons à l'ordre  $\epsilon^2$  l'expression de la valeur moyenne :

$$\Theta^*(t) = \int_0^1 \Theta(x, t) dx = \int_0^1 [\Theta_0(x, t) + \epsilon \Theta_1(x, t) + \epsilon^2 \Theta_2(x, t) + \dots] dx \\ = \int_0^1 \phi_0 dx + \int_0^1 \epsilon \frac{\phi_1}{2} (1 - e^{\alpha_1 t}) dx + \int_0^1 \frac{\epsilon^2 \alpha_2 \phi_2}{4(\alpha_2 - \alpha_1)} e^{(\alpha_2 t - \alpha_1 t)} dx$$

$$\Theta^*(t) = \phi_0 + \frac{\epsilon \phi_1}{2} [1 - e^{\alpha_1 t}] + \frac{\epsilon^2 \alpha_2 \phi_2}{4(\alpha_2 - \alpha_1)} (e^{\alpha_2 t} - e^{\alpha_1 t}) + O(\epsilon^3)$$

Annexe: Résolution de

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma(x) \dot{\Theta} = \alpha^2 \Theta'' + \beta e^{iat} \\ \Theta_i(x) = \Theta(x, 0) = 0 \\ \frac{\partial \Theta}{\partial x} = 0, \quad x = 0 \text{ et } x = 1. \end{array} \right.$$

Notation:  $\gamma(x) = \gamma^* (1 + \epsilon \cos \pi x)$

$$\Theta(x, t) = \Theta_0(x, t) + \epsilon \Theta_1(x, t) + \epsilon^2 \Theta_2(x, t) + \dots$$

$$X_j = \cos(j\pi x) \quad \alpha^2 = \alpha^2 / \gamma^* \quad \beta^2 = \beta / \gamma^* \quad d_j = -(j\pi \alpha)^2$$

Identifications à l'ordre  $\epsilon$ :

$$\dot{\Theta}_0 = \alpha^2 \Theta_0'' + \beta e^{iat}$$

$$i \geq 1 \quad \dot{\Theta}_i = \alpha^2 \Theta_i'' - X_i \dot{\Theta}_{i-1}$$

Résolutions successives:

$$\Theta_0 = \frac{\beta}{ia} [e^{iat} - 1]$$

$$\dot{\Theta}_1 = \alpha^2 \Theta_1'' - X_1 \dot{\Theta}_0$$

soit:  $\Theta_1(x, t) = X_1 \Delta_1(t)$

$$\Delta_1 \text{ vérifie: } \dot{\Delta}_1 = \alpha^2 \Delta_1 - \beta e^{iat}$$

$$\Delta_1 = -\beta e^{d_1 t} \int_0^t e^{-\alpha^2 \tau} e^{iat} d\tau = -\beta \left[ \frac{e^{iat} - e^{d_1 t}}{(ia - d_1)} \right]$$

d'où  $\Theta_1 = -\frac{\beta X_1}{(ia - d_1)} (e^{iat} - e^{d_1 t})$

Passons à  $\dot{\Theta}_2 = \alpha^2 \Theta_2'' - X_1 \dot{\Theta}_1 = \alpha^2 \Theta_2'' + \frac{\beta X_1^2}{(ia - d_1)} (e^{iat} - e^{d_1 t})$

$$= \alpha^2 \Theta_2'' + \frac{\beta}{2(ia - d_1)} (1 + X_2) (e^{iat} - e^{d_1 t})$$

$$\Theta_2 = \frac{\beta}{2(ia - d_1)} \left[ (e^{iat} - 1) + (1 - e^{d_1 t}) \right] + \frac{X_2 \beta}{2(ia - d_1)} e^{d_2 t} \int_0^t [ia e^{ia\tau} - d_1 e^{(d_1 - d_2)\tau}] d\tau$$

$$\Theta_2 = \frac{\beta}{2(ia - d_1)} [e^{iat} - e^{d_1 t}] + \frac{X_2 \beta}{2(ia - d_1)} \left[ \frac{ia (e^{iat} - e^{d_2 t})}{ia - d_2} - \frac{d_1 (e^{d_1 t} - e^{d_2 t})}{d_1 - d_2} \right]$$

$$\Theta_2 = \frac{\beta}{2(i\alpha - \alpha_1)} [e^{i\alpha t} - e^{\alpha_1 t}] + \frac{\chi_2 \beta}{2(i\alpha - \alpha_1)} \left[ i\alpha \frac{(e^{i\alpha t} - e^{\alpha_1 t})}{(i\alpha - \alpha_1)} + \frac{d_1 (e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t})}{\alpha_1 - \alpha_2} \right]$$

Valeur moyenne:

$$\Theta^*(t) = \frac{\beta}{i\alpha} [e^{i\alpha t} - 1] + \frac{\epsilon^2 \beta}{2(i\alpha - \alpha_1)} [e^{i\alpha t} - e^{\alpha_1 t}] + G(\epsilon^3)$$

Partie Permanente pulsante (au delà du régime transitoire):

$$\tilde{\Theta}^*(t) = \beta e^{i\alpha t} \left[ \frac{1}{i\alpha} + \frac{\epsilon^2}{2(i\alpha - \alpha_1)} \right] + G(\epsilon^3)$$

Précisions:  $\beta = \beta/\gamma^* = -\frac{\alpha T_0 \sigma_0}{e c_e \gamma^*} \quad i\alpha \equiv \delta i\alpha$

$$\begin{aligned} \tilde{\Theta}^*(t) &= \delta i\alpha e^{i\alpha t} \left[ \frac{1}{i\alpha} + \frac{\epsilon^2}{2(i\alpha - \alpha_1)} \right] = \delta e^{i\alpha t} \left[ 1 + \frac{i\alpha \epsilon^2}{2(i\alpha - \alpha_1)} \right] \\ &= \delta e^{i\alpha t} \left[ 1 + \frac{i\alpha (i\alpha + \alpha_1) \epsilon^2}{-2(\alpha^2 + \alpha_1^2)} \right] = \delta e^{i\alpha t} \left[ 1 + \frac{\alpha^2 \epsilon^2}{2(\alpha^2 + \alpha_1^2)} - \frac{i\alpha \alpha_1 \epsilon^2}{2(\alpha^2 + \alpha_1^2)} \right] \end{aligned}$$

Passons à la déformation et à la fonction fluage complexe:

$$\tilde{\epsilon}^*(t) = \sigma_0 e^{i\alpha t} \left\langle \frac{1}{\epsilon} \right\rangle + \alpha \tilde{\Theta}^* = e^{i\alpha t} \left[ \sigma_0 \left\langle \frac{1}{\epsilon} \right\rangle + \alpha \delta \left[ 1 + \frac{\epsilon^2 \alpha^2}{2(\alpha^2 + \alpha_1^2)} \right] - i \frac{\delta \alpha \alpha_1 \epsilon^2 \alpha}{2(\alpha^2 + \alpha_1^2)} \right]$$

$$J_c^*(\alpha) = \left[ \left\langle \frac{1}{\epsilon} \right\rangle + \frac{\alpha \delta}{\sigma_0} \left[ 1 + \frac{\epsilon^2 \alpha^2}{2(\alpha^2 + \alpha_1^2)} \right] - i \frac{\delta \alpha \alpha_1 \epsilon^2}{2\sigma_0 (\alpha^2 + \alpha_1^2)} \right]$$

Partie de  $J_c^*$  en phase avec la contrainte.

$$J_1(\alpha) = \left\langle \frac{1}{\epsilon} \right\rangle + \frac{\alpha \delta}{\sigma_0} + \frac{\alpha \delta \epsilon^2}{2\sigma_0} \left[ \frac{\alpha^2/d_1^2}{(1 + \alpha^2/d_1^2)} \right]$$

Partie de  $J_c^*$  déphasée de  $\pi/2$ :

$$J_2(\alpha) = \frac{\alpha \delta}{2\sigma_0} \left[ \frac{\alpha/d_1}{1 + \alpha^2/d_1^2} \right]$$

Pour  $J_1(\alpha)$ , on écrit aussi:

$$J_1(\alpha) = \left\langle \frac{1}{\epsilon} \right\rangle + \frac{\alpha \delta}{\sigma_0} + \frac{\alpha \delta}{2\sigma_0} \left[ \epsilon^2 \left( 1 - \frac{1}{1 + \alpha^2/d_1^2} \right) \right]$$

Annexe : Exercice cyclique - Résolution par série de Fourier

$$\gamma(x) \dot{\theta} = \alpha^2 \theta'' + \beta e^{i\omega t}$$

$$\gamma(x) = \gamma^* (1 + \epsilon \cos \pi x)$$

$$X_j = \cos j\pi x \quad \alpha^2 = \alpha^2 / \gamma^* \quad \beta = \beta / \gamma^* \quad d_j = -a_j (j\pi \alpha)^2$$

Développons :  $\theta(x, t) = (a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots) e^{i\omega t}$

identifications :  $i\omega \left[ \sum_{j=0}^{\infty} a_j X_j (1 + \epsilon X_1) \right] e^{i\omega t} = \sum_{j=1}^{\infty} d_j X_j e^{i\omega t} + \beta e^{i\omega t}$

$$i\omega = \left[ \sum_0 a_j X_j \right] \epsilon X_1 = [\beta - a_0 \omega i] + \sum_1 (d_j - a_j i\omega) X_j$$

$$\begin{aligned} \text{or } \sum_0 a_j X_j X_1 &= a_0 X_1 + \sum_1 \frac{a_j}{2} X_{j+1} + \sum_1 \frac{a_j}{2} X_{j-1} \\ &= a_0 X_1 + \sum_2 \frac{a_{j-1}}{2} X_j + \sum_0 \frac{a_{j+1}}{2} X_j \\ &= \frac{a_1}{2} X_0 + (a_0 + a_2/2) X_1 + \sum_2 \left( \frac{a_{j-1} + a_{j+1}}{2} \right) X_j \end{aligned}$$

ainsi :

$$a_1 i\omega \frac{\epsilon}{2} = \beta - a_0 i\omega \quad ; \quad i\omega \epsilon \left( \frac{a_0 + a_2}{2} \right) = d_1 - a_1 i\omega$$

$$i\omega \frac{\epsilon}{2} (a_1 + a_3) = d_2 - a_2 i\omega$$

Trouvons à partir du terme  $\cos 3\pi x \rightarrow a_3 = 0$

Notons  $d_j - a_j i\omega = -a_j (j\pi \alpha)^2 - a_j i\omega \equiv a_j (d_j - i\omega)$  ;  $d_j \equiv -(j\pi \alpha)^2$

$$a_3 = 0 \rightarrow a_2 = i\omega \frac{\epsilon}{2} (d_2 - i\omega)^{-1} a_1$$

$$(d_1 - i\omega) a_1 = i\omega \epsilon \left[ a_0 + i\omega \frac{\epsilon}{2} (d_2 - i\omega)^{-1} a_1 \right]$$

$$a_1 \cdot \left[ 1 - \frac{i^2 \omega^2 \epsilon^2}{4 (d_2 - i\omega)(d_1 - i\omega)} \right] = \frac{i\omega \epsilon a_0}{(d_1 - i\omega)}$$

Pour  $\epsilon^2$  assez petit, nous retrouvons le résultat établi à l'aide de la méthode de perturbation, à savoir :

$$a_1 = \left[ 1 + \frac{i^2 \omega^2 \epsilon^2}{4 (d_2 - i\omega)(d_1 - i\omega)} \right] \frac{i\omega \epsilon a_0}{d_1 - i\omega} + G(\epsilon^2)$$

pour  $a_0$  :  $\left[ 1 + \frac{i^2 \omega^2 \epsilon^2}{4 (d_2 - i\omega)(d_1 - i\omega)} \right] \frac{i\omega \epsilon a_0}{d_1 - i\omega} \cdot \frac{i\omega \epsilon}{2} = \beta - a_0 i\omega + G(\epsilon^2)$

Retenons le terme en  $\epsilon^2$  :  $\frac{i^2 \omega^2 \epsilon^2 a_0}{2(d_1 - i\omega)} = \beta - a_0 i\omega$

$$a_0 \left( i\omega - \frac{\omega^2 \epsilon^2}{2(d_1 - i\omega)} \right) = \beta$$

On retrouve :

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}^*(t) &= \beta e^{i\omega t} \left[ i\omega - \frac{\epsilon^2 \omega^2}{2(d_1 - i\omega)} \right]^{-1} = \frac{\beta}{i\omega} e^{i\omega t} \left[ 1 - \frac{\epsilon^2 \omega^2}{2i(d_1 - i\omega)} \right]^{-1} \\ &\approx \frac{\beta}{i\omega} e^{i\omega t} \left( 1 + \frac{\epsilon^2 \omega}{2i(d_1 - i\omega)} \right) \end{aligned}$$

$$\tilde{\theta}^*(t) = \beta e^{i\omega t} \left[ \frac{1}{i\omega} + \frac{\epsilon^2}{2(i\omega - d_1)} \right]$$

résultat identique obtenu par la méthode de perturbation.

B I B L I O G R A P H I E

- 1  
Y. Adda  
J.M. Dupouy  
J. Philibert  
Y. Quere  
Eléments de Métallurgie Physique  
La documentation Française - PARIS
- 2  
N. Laws  
On the thermostatics of composite materials  
J. Mech. Phys. Solids Vol 21 pp 9 to 17  
1973 Pergamon G.B.
- 3  
G.A Francfort  
Two Variational Problems in Thermoelasticity  
PHD Stanford university 1982
- G.A Francfort  
P Suquet  
Homogénéisation et dissipation intrinsèque  
en thermoviscoélasticité linéaire de  
Kelvin-Voigt  
6ième Congrès Français de Mécanique  
Lyon 5-9 Sept. 1983
- 4  
M. Berveiller  
A. Zaoui  
Méthodes Self-Consistentes en mécanique  
des solides hétérogènes  
Comportements rhéologiques et structure  
des matériaux  
CR 15ième Coll GFR Paris 1980
- 5  
M. Berveiller  
Contribution à l'étude du comportement  
plastique et des textures de déformation  
des polycristaux métalliques.  
Sciences et Techniques de l'armement.  
4ième Fascicule 1980
- 6  
E. Kröner  
Kontinuums theorie der Versetzungen  
und Eigenspannungen  
Springer Verlag 1958
- 7  
R. Hill  
A Self Consistent mechanics of composite  
materials  
J. Mech Phys Solids Vol 13 pp 213 to 222  
1965 Pergamon Press G.B.
- 8  
Z. Hashin  
B.W. Rosen  
Effective Thermal expansion coefficients  
an specifie heats of composite materials  
Int. J. Engng Sci Vol 8 pp 157-173  
1970 Pergamon Press G.B.

- 9  
T.W. Chou  
S. Nomura  
Effective Thermoelastic constants of  
short - fiber composites  
Int. J. Engng Sci Vol 19 pp 1-9  
1981 Pergamon Press G.B.
- 10  
R.M. Christensen  
Mechanics of composite Materials  
Wiley 1979
- 11  
L. Schwartz  
Théorie des distributions  
Hermann 1973
- 11  
Schwartz  
Méthodes Mathématiques  
pour les sciences physiques. Hermann 1961
- 12  
M. Berveiller  
Thèse de doctorat d'état ès-sciences physiques  
Paris Nord Villeneuve 1978
- M. Berveiller  
A. Zaoui  
Coll. int. du CNAS n°319  
Comportement plastique des solides anisotropes  
Plasticité anisotrope des polycristaux  
métalliques.  
Ed. JP Boekler
- 13  
P.H. Dederichs  
R. Zeller  
Elastic Constants of Polycrystals  
phys-stat-sol (b) 55-831 (1973)
- 14  
J.D. Eshelby  
Elastic inclusions and inhomogeneities
- E. Kröner  
On the physics and mathematics of  
Self-Stresses  
Topics in Applied Continuum Mechanics  
Symposium Vienna March 1-2 1974  
Springer Verlag
- 15  
G. Faivre  
Hétérogénéité ellipsoïdales dans un  
milieu élastique anisotrope  
Le journal de physique Tome 32, Avril 1971, page 325

- 16  
A. Zaoui Aspects fondamentaux de la plasticité des polycristaux métalliques.  
Dislocations et déformation plastique  
Yrarals 1979 - Les Editions de Physique.
- 17  
B. Budiansky Thermal and Thermoelastic properties of isotropic composites  
J. Composite Materials Vol 4 - July 1970 p 286
- B. Budiansky Micromechanics  
Computers et Structures Vol 16 N° 1-4 pp 3-12  
1983 Pergamon Press G.B.
- 18  
A.H. Nayfeh : Introduction to perturbation techniques  
Wiley 1981
- 19  
E. Sanchez-Palencia Méthode d'homogénéisation en théorie des suspensions et milieux composites  
6ième congrès français de Mécanique  
Lyon 5-9 Septembre 1983
- 20  
Suquet Thèse de doctorat d'état ès sciences mathématiques  
Plasticité et homogénéisation  
1982 Paris - (Pierre et MarieCurie)
- 21  
C. Zener Elasticité et Anélasticité des Métaux  
Dunod 1952
- C. Zener Internal friction in Solids - General Theory  
Physical Review - Vol 53 - January 1938
- C. Zener Theory of Internal friction in Reeds  
Physical Review - Vol 52 - August 1937

- 22  
F.M. Camia                    Traité de Thermocinétique Impulsionnelle  
Dunod 1967
- Y.P. Chang  
C.S. Kang  
D.J. Chen                    The use of fundamental Green's functions for the  
solution of problems of heat conduction in  
anisotropic média.  
J. Heat Mass Transfer Vol 16. pp 1905-1918  
Pergamon Press 1973
- B.T. Chao                    A note on conduction of heat in anisotropic media.  
App Sci Res Section A Vol 12
- 23  
S.L. Sobolev                Partial Differential équations of mathematical  
physics.  
Pergamon Press 1964.
- K. Tanaka  
M. Tanaka                Time-space boundary elements for transient heat  
conduction problems  
Appl. Math. Modelling 1980 Vol 4 October  
1980 IPC Business Press
- 24  
Vo Khac Koan              Distributions. Analyse de Fourier  
Opérateurs aux dérivées partielles.  
Vuibert 1972
- 25  
Gurtin et Sternberg On the linear theory of Viscoelasticity
- J. Meixner                Thermodynamische Theorie der elastischen  
Relaxation  
Z. Naturforschg 9a 654-663 (1954)
- Molinari                Viscoélasticité linéaire et fonctions  
complément monotones.  
Journal de Mécanique Vol 12 n° 4 Décembre 1973.
- 26  
A.S. Nowick  
B.S Berry                Anelastic Relaxation in Crystalline  
Solids  
Academic Press 1972
- 27  
Tauchert                Symposium East Kilbride June 25-28 1968  
Thermoinelasticity  
Thermomechanical Coupling in Viscoelastic Solids  
Springer Verlag 1970

- 28 Germain P. Thermoélasticité et élasticité dynamique.  
Cours Ecole Polytechnique. Juin Juillet 1979
- Molinari A. Thèse de doctorat d'état ès sciences  
mathématiques. Ondes transitoires en  
milieux solides dissipatifs.  
Metz 1979
- Piquet Cours mécanique des milieux continus.  
Ensm Nantes.
- 29  
M.A. Brull On the solution to transient coupled  
A.I. Soler thermoelastic problems by perturbations techniques  
Journal of Applied Mechanics June 1965/389
- 30  
C. Jacquin C.R. Acad. Sc. Paris t 292 (12 Janvier 1981)  
Série II-117
- 31  
S.J. Farlow Partial differential équations for scientists and  
engineers  
Wiley 1982
- 32  
Dunod 1960  
Aide Mémoire
- 33 Boley B.A. Theory of thermal stresses  
Weiner J.H. Wiley 1960
- Chadwick P. Thermoelasticity. The dynamical theory  
Progress in Solid Mechanics. Chap 6 .  
Vol I I.N Sneddon R. Hill  
1964 North Holland.
- 34 Sidoroff Cours de mécanique des solides.  
tome 1. Mécanique des milieux continus.
- Ziegler H. An introduction to thermomechanics.  
North Holland 1977

- 35  
M. Necati Ozisick Heat Conduction  
Wiley 1980
- 36  
W.E. Boyce Elementary differential equations  
R.C. DiPrima Wiley 1965
- 37 Biot M.A. (Thermoélasticité)  
Thermoelasticity and Irreversible Thermodynamics  
J. of Applied Physics Vol 27 number 3 March 1956
- 37  
M.A. Biot Variational Principles in Heat Transfer  
Oxford University press 1970
- M.A. Biot Theory of Stress-Strain Relations in Anisotropic  
Viscoelasticity and Relaxation Phenomena.  
Journal of Applied Physics Vol 25 n° 11 Novemb 1954
- E. Sanchez Palencia Non Homogeneous Media and Vibration Theory  
Lecture Notes in Physics  
Springer Verlag - Berlin 1980
- G. Francfort Thermodynamique et lois de comportement thermo-  
Quoc Son Nguyen mécanique homogénéisées.  
P. Suquet C.R. Acad. Sc. Paris, t. 296 (18 avril 1983)  
Série II - 1007
- P. Germain Continuum Thermodynamics  
Q. S. Nguyen Transactions of the ASME 1010 / Vol. 50, DEC 1983  
P. Suquet



022 031011 6