



**HAL**  
open science

## Groupoïdes et r-faisceaux

Abdessamad Safoui

► **To cite this version:**

Abdessamad Safoui. Groupoïdes et r-faisceaux. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paul Verlaine - Metz, 1984. Français. NNT : 1984METZ010S . tel-01775667

**HAL Id: tel-01775667**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01775667v1>**

Submitted on 24 Apr 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>



**T H E S E**

présentée à l'Université de METZ - le 18 Juin 1984

pour obtenir le titre de *DOCTEUR EN MATHÉMATIQUES*

Spécialité : Equations Différentielles et Contrôle Optimal

Mention : Mathématiques

par Abdessamad **S A F O U I**

**GROUPOÏDES et  $r$ -FAISCEAUX**

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv	19840205
Cote	S/M <sub>3</sub> 84/10
Loc	Magasin

Jury : MM. J.L. LODAY, Maître de Recherches au CNRS - Président  
C. ROGER, Professeur à l'Université de Metz  
A. ROUX, Professeur à l'Université de Metz

### *Remerciements.*

*Je suis très reconnaissant à Monsieur ROGER dont le métier et la sympathie m'ont été d'un grand secours pour mener à terme ce travail.*

*Je remercie également Monsieur ROUX dont les exposés m'ont beaucoup aidé à élargir ma culture et qui a bien voulu cautionner cette thèse.*

*Enfin je tiens à exprimer ma gratitude à Monsieur LODAY qui m'a honoré en présidant le jury de ma thèse.*

A. SAFQUI

## TABLE DES MATIÈRES

<u>CHAPITRE I : GROUPOÏDES, <math>\Gamma</math>-FAISCEAUX ET HOMOMORPHISMES</u> ...	2
1.- Groupoïdes .....	2
2.- Homomorphismes généralisés de groupoïdes .....	2
3.- Les $\Gamma$ -faisceaux .....	6
<u>CHAPITRE II : HOMOMORPHISMES CLASSIQUES - FONCTEUR IMAGE RÉCI- PROQUE ET FONCTEUR IMAGE DIRECTE POUR LES <u><math>\Gamma</math>-FAISCEAUX</u> .....</u>	12
1.- Image directe d'un faisceau .....	12
2.- Image réciproque d'un faisceau .....	12
3.- Homomorphisme de groupes. Image réciproque et image directe de modules .....	13
4.- Image réciproque et image directe d'un $\Gamma$ -faisceau dans le cas d'un homomorphisme classique .....	15
5.- Foncteur adjoint .....	18
<u>CHAPITRE III : HOMOMORPHISME GÉNÉRALISÉ. IMAGE RÉCIPROQUE ET <u>IMAGE DIRECTE DE <math>\Gamma</math>-FAISCEAUX</u> .....</u>	24
1.- Exemples d'homomorphismes généralisés de groupoïdes	24
2.- Image réciproque d'un $\Gamma$ -faisceau .....	28
3.- Image directe d'un $\Gamma$ -faisceau .....	30
4.- Adjonction dans le cas d'un homomorphisme généralisé	32
5.- Composition d'homomorphismes généralisés .....	35
<u>BIBLIOGRAPHIE</u> .....	39

## INTRODUCTION

Dans [6], Haefliger a défini la notion d'homomorphisme généralisé entre groupoïdes. Cette notion est bien plus utile, en particulier pour les applications géométriques, que la notion classique où l'homomorphisme est un foncteur continu de catégories topologiques. Nous définissons d'abord l'image directe et l'image réciproque d'un  $\Gamma$ -faisceau dans le cas classique, ensuite dans le cas d'un homomorphisme généralisé.

Nous montrons que le foncteur image réciproque est l'adjoint à gauche du foncteur image directe dans les deux cas. Par conséquent un homomorphisme généralisé induit un homomorphisme en cohomologie.

## CHAPITRE I : GROUPOÏDES, $\Gamma$ -FAISCEAUX ET HOMOMORPHISMES

---

### 1.- GROUPOÏDES

Un groupoïde topologique est une catégorie topologique où tous les morphismes sont inversibles. Un espace topologique  $X$  définit un groupoïde topologique dont l'espace des unités est  $X$  et dont l'espace des morphismes est également  $X$ . Un groupe topologique  $G$ , éventuellement discret, définit un groupoïde topologique dont l'espace des unités est réduit à un point et dont l'espace des morphismes est  $G$ . Le groupoïde  $\Gamma_n^r$  des germes de difféomorphismes locaux de  $\mathbb{R}^n$  de classe  $C^r$  joue un rôle particulièrement important dans la théorie des feuilletages. (Haefliger [4]). Le groupoïde d'holonomie d'un feuilletage permet d'associer deux  $K$ -théories à une variété feuilletée : la  $K$ -théorie analytique grâce à la  $C^*$ -algèbre du feuilletage (Connes [2]).

Cette  $C^*$ -algèbre est définie comme la complétion des fonctions à support compact sur le groupoïde d'holonomie pour une certaine norme. Et la  $K$ -théorie topologique grâce au classifiant de ce groupoïde. Un homomorphisme de groupoïdes au sens classique est un foncteur de catégories. Une construction détaillée de la cohomologie d'un groupoïde existe dans la thèse de Roger [10] : Elle est construite de telle sorte qu'on retrouve dans le cas d'un groupe discret la cohomologie à valeurs dans un module (voir par exemple [8] ou [7]) et dans le cas d'un espace topologique, la cohomologie à valeurs dans un faisceau ([11]).

### 2.- HOMOMORPHISMES GENERALISES DE GROUPOÏDES

Etant donné deux groupoïdes topologiques  $\Gamma$  et  $\Gamma'$ , nous allons voir une notion d'équivalence entre eux, due à Haefliger [6], qui impliquera qu'alors pour tout espace topologique  $Y$ ,  $H^1(Y, \Gamma)$  et  $H^1(Y, \Gamma')$  sont en bijection, et que les classifiants  $B\Gamma$  et  $B\Gamma'$  ont même cohomologie.

a) Définition de  $H^1(Y, \Gamma)$

Soit  $Y$  un espace topologique et  $\Gamma$  un groupoïde topologique, la définition de  $H^1(Y, \Gamma)$  est la généralisation naturelle de  $H^1(Y, G)$  quand  $G$  est un groupe topologique.

Soit  $(Y_i)_{i \in I}$  un recouvrement ouvert de  $Y$ . Un 1-cocycle à valeurs dans  $\Gamma$  défini sur le recouvrement  $(Y_i)_{i \in I}$  est la donnée pour tout couple  $(i, j)$  d'une application continue  $\gamma_{ij} : Y_i \cap Y_j \rightarrow \Gamma$  de sorte que si  $x \in Y_i \cap Y_j \cap Y_k$ , alors  $\gamma_{ij}(x)$  est composable avec  $\gamma_{jk}(x)$  et  $\gamma_{ik}(x) = \gamma_{ij}(x) \cdot \gamma_{jk}(x)$ . Si  $\{Y_\alpha\}_{\alpha \in A}$  est un autre recouvrement ouvert de  $Y$  et  $\gamma_{\alpha\beta}$  est un 1-cocycle défini sur  $\{Y_\alpha\}_{\alpha \in A}$ , alors il est cohomologue au 1-cocycle  $\gamma_{ij}$  si ces deux cocycles sont la restriction d'un 1-cocycle à valeurs dans  $\Gamma$  défini sur la réunion de ces deux recouvrements. L'ensemble des classes de cohomologie des 1-cocycles à valeurs dans  $\Gamma$  est noté  $H^1(Y, \Gamma)$  et ses éléments sont appelés  $\Gamma$ -structures sur  $Y$ .

Une application continue  $f : Y' \rightarrow Y$  induit une application  $f^* : H^1(Y, \Gamma) \rightarrow H^1(Y', \Gamma)$  faisant correspondre à la classe du 1-cocycle  $\gamma_{ij}$  défini sur le recouvrement  $\{Y_i\}$  la classe du 1-cocycle  $\gamma_{ij} \circ f$  défini sur le recouvrement  $\{f^{-1}(Y_i)\}$  de  $Y'$ .

Exemple : Un feuilletage  $\mathcal{F}$  de codimension  $q$  sur une variété  $V$  peut être considéré comme une  $\Gamma$ -structure particulière, où  $\Gamma$  est le groupoïde des germes de difféomorphismes locaux de  $\mathbb{R}^q$ , représentée par un 1-cocycle sur un recouvrement ouvert  $\{U_i\}$  tel que les  $f_i = \gamma_{ii} : U_i \rightarrow \mathbb{R}^q \subset \Gamma$  soient des submersions.

b) Fibrés  $\Gamma$ -principaux

Comme dans le cas classique des groupes topologiques, les éléments de  $H^1(Y, \Gamma)$  correspondent bijectivement aux classes d'isomorphie des fibrés  $\Gamma$ -principaux sur  $Y$ . Nous allons d'abord rappeler cette correspondance.

Une action à droite de  $\Gamma$  sur un espace  $Z$  relativement à une application continue  $q : Z \rightarrow U$  est une application continue  $Z \times \Gamma \rightarrow Z$  (où  $\Gamma \rightarrow U$  est l'application  $\gamma \rightarrow \beta(\gamma)$ ) telle que, si l'image de  $(z, \gamma)$



est notée  $z.\gamma$ , on ait :

$$(z.\gamma)\gamma' = z.(\gamma.\gamma') \quad z.u = z \text{ si } u \text{ est une unité et} \\ q(z.\gamma) = \alpha(\gamma).$$

Un fibré  $\Gamma$ -principal  $E$  de base  $Y$  est un espace topologique muni d'une application continue  $p : E \rightarrow Y$  et d'une action à droite de  $\Gamma$  sur  $E$  relativement à une application continue  $q : E \rightarrow U$ . On suppose que  $\Gamma$  opère simplement transitivement dans les fibres de  $p$  et que la condition de trivialité locale suivante est satisfaite : Il existe un recouvrement ouvert  $\{Y_i\}$  de  $Y$ , des sections locales continues  $s_i : Y_i \rightarrow E$  de  $p$  et des homéomorphismes équivariants  $h_i : p^{-1}(Y_i) \rightarrow Y_i \times_U \Gamma$  se projetant sur l'identité de  $Y_i$ . Ici  $Y_i$  est muni de l'application continue  $f_i = q \circ s_i$  dans  $U$  et  $\gamma$  opère sur  $(y, \gamma')$  par  $(y, \gamma').\gamma = (y, \gamma'\gamma)$ .

Les  $s_i$  définissent un 1-cocycle  $\gamma_{ij}$  sur le recouvrement  $\{Y_i\}$  de  $Y$  à valeurs dans  $\Gamma$  où  $\gamma_{ij}(x)$  est l'unique élément de  $\Gamma$  tel que  $s_j(y) = s_i(y)\gamma_{ij}(y)$ . Le choix d'un autre recouvrement et d'autres sections conduirait à un cocycle cohomologue.

Réciproquement, étant donné un 1-cocycle  $\gamma_{ij} : Y_i \cap Y_j \rightarrow \Gamma$  on peut construire un fibré  $\Gamma$ -principal  $E$  avec sections locales  $s_i$  qui redonnent le cocycle. On obtient  $E$  comme quotient de l'union disjointe de  $Y_i \times_U \Gamma$  par la relation d'équivalence qui identifie  $(y_i, y_i) \in Y_i \times_U \Gamma$  à  $(y_j, y_j) \in Y_j \times_U \Gamma$  si  $y_i = y_j = y$  et  $g_i = \gamma_{ji}(y)y_j$ .

De cette manière on obtient une bijection entre classes d'isomorphie de fibrés  $\Gamma$ -principaux de base  $Y$  et éléments de  $H^1(Y, \Gamma)$ .

### c) Equivalence entre groupoïdes

Soient  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  des groupoïdes topologiques avec espaces d'unités  $U$  et  $U'$  respectivement. Soit  $\phi$  un espace topologique muni d'applications continues  $p : \phi \rightarrow U$  et  $q : \phi \rightarrow U'$  et supposons que  $\Gamma$  opère à gauche sur  $\phi$  relativement à  $p$  et  $\Gamma'$  à droite sur  $\phi$  relativement à  $q$ , ces deux actions commutant entre elles.

Définition :

On dit que  $\Phi$  définit un homomorphisme généralisé de  $\Gamma$  dans  $\Gamma'$  si  $\Phi$  est un fibré  $\Gamma'$ -principal de base  $U$  et de projection  $p$ . Un homomorphisme  $\Phi$  induit, pour tout espace topologique  $Y$ , une application continue  $H^1(\Phi) : H^1(Y, \Gamma) \rightarrow H^1(Y, \Gamma')$  fonctorielle en  $Y$ . Cette application fait correspondre à la classe d'isomorphie d'un fibré  $\Gamma$ -principal  $E$  sur  $Y$  la classe d'isomorphie du fibré  $\Gamma'$ -principal  $E' = E \times_{\Gamma} \Phi$  sur  $Y$ .

En termes de cocycles, la correspondance est construite comme suit : par hypothèse, il existe un recouvrement ouvert  $\{U_{\alpha}\}$  de  $U$  et des sections locales  $S_{\alpha} : U_{\alpha} \rightarrow \Phi$  de  $p$ . Tout élément de  $H^1(Y, \Gamma)$  peut être représenté par un cocycle  $\gamma_{ij} : Y_i \cap Y_j \rightarrow \Gamma$  tel que l'image de  $\gamma_{ii} : Y_i \rightarrow U$  soit contenue dans un ouvert  $U_{\tau_i}$ . L'élément correspondant de  $H^1(Y, \Gamma')$  sera représenté par le cocycle  $\gamma'_{ij} : Y_i \cap Y_j \rightarrow \Gamma'$  défini par la relation :

$$\gamma_{ij}(y) S_{\tau_j}(\gamma_{jj}(y)) = S_{\tau_i}(\gamma_{ii}(y)) \gamma'_{ij}(y).$$

Exemple :

Soit  $h : \Gamma \rightarrow \Gamma'$  un homomorphisme continu au sens habituel, on prend alors pour  $\Phi$  le produit fibré  $U \times_{\Gamma} \Gamma'$ , où  $U$  est muni de l'application  $h_0 : U \rightarrow U'$ .

Soit  $\Phi$  comme dans la définition précédente. Désignons par  $\Phi^0$  le même espace topologique  $\Phi$  muni des mêmes applications  $p$  et  $q$  dans  $U$  et  $U'$ , mais cette fois  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  opérant à droite et à gauche respectivement en posant :

$$\varphi \cdot \gamma = \gamma^{-1} \varphi \quad \text{et} \quad \gamma' \varphi = \varphi \gamma'^{-1}.$$

Définition :

On dit que  $\Phi$  définit une équivalence de  $\Gamma$  sur  $\Gamma'$  si  $\Phi^0$  est aussi un fibré  $\Gamma$ -principal sur  $U'$  de projection  $q$ .

Proposition :

Une équivalence  $\phi$  de  $\Gamma$  sur  $\Gamma'$  induit une bijection de  $H^1(Y, \Gamma)$  sur  $H^1(Y, \Gamma')$  fonctorielle en  $Y$ .

Démonstration :

$\phi^0$  définit une application  $H^1(\phi^0)$  de  $H^1(Y, \Gamma')$  dans  $H^1(Y, \Gamma)$  inverse de  $H^1(\phi)$ . En effet si  $E$  est un fibré  $\Gamma'$ -principal de base  $Y$ , alors  $(E \times_{\Gamma'} \phi^0)_{\Gamma, \phi^0}$  est canoniquement isomorphe à  $E$ , car  $\phi^0 \times_{\Gamma'} \phi^0$  est canoniquement isomorphe à  $\Gamma$  par l'application qui fait correspondre à la classe de  $(\varphi_1, \varphi_2)$  l'unique élément  $\gamma \in \Gamma$  tel que  $\gamma^{-1} \varphi_1 = \varphi_2$ . De même  $\phi^0 \times_{\Gamma} \phi$  est canoniquement isomorphe à  $\Gamma'$ . C.Q.F.D.

3.- LES  $\Gamma$ -FAISCEAUX

Soit  $\Gamma$  un groupoïde topologique et  $U$  l'espace de ses unités.

Intuitivement, un  $\Gamma$ -faisceau est un faisceau  $F$  au dessus de  $U(\Gamma)$  tel que chaque élément de  $\Gamma$  détermine un isomorphisme de la fibre  $F$  au-dessus de la source dans la fibre au-dessus du but et ce de façon continue. Plus précisément, soit  $F \xrightarrow{\pi} U$  un faisceau d'ensembles sur  $U(\Gamma)$ . On notera  $F_x$  la fibre  $\pi^{-1}(x)$ .

Soit  $\Gamma_\alpha$  (resp.  $\Gamma_\beta$ ) le groupoïde considéré comme espace au dessus de  $U(\Gamma)$  par la projection source  $\alpha$  (resp. par la projection but  $\beta$ ).

On peut alors considérer les produits fibrés :

$$\Gamma_\alpha * F = (\Gamma_\alpha) \times_U F = \{(\gamma, \xi) / \gamma \in \Gamma, \xi \in F, \pi(\xi) = \alpha(\gamma)\}.$$

$$\Gamma_\beta * F = (\Gamma_\beta) \times_U F = \{(\gamma, \xi) / \gamma \in \Gamma, \xi \in F, \pi(\xi) = \beta(\gamma)\}.$$

Il existe des projections évidentes :

$$\pi_\alpha : \Gamma_\alpha * F \rightarrow \Gamma \qquad \pi_\beta : \Gamma_\beta * F \rightarrow \Gamma$$

On suppose que l'on a un isomorphisme d'espaces au-dessus de  $U(\Gamma)$  :

$$\tilde{f} : \Gamma_{\alpha}^*F \rightarrow \Gamma_{\beta}^*F$$

vérifiant  $\pi_{\beta} \circ \tilde{f} = \pi_{\alpha}$ .

On notera alors :

$$\tilde{f}(\gamma, \xi) = (\gamma, f(\gamma)\xi).$$

Définition :

Un  $\Gamma$ -faisceau  $F$  est un faisceau sur  $U(\Gamma)$ , tel qu'il existe un isomorphisme  $\tilde{f} : \Gamma_{\alpha}^*F \rightarrow \Gamma_{\beta}^*F$  vérifiant :

(1)  $\pi_{\beta} \circ \tilde{f} = \pi_{\alpha}$ .

(2) pour tout  $x \in U(\Gamma)$   $f(\text{Id } x) \cdot \xi = \xi$ .

(3) pour tout couple  $(\gamma_1, \gamma_2)$  d'éléments composables :

$$f(\gamma_1 \cdot \gamma_2) = f(\gamma_1) \cdot f(\gamma_2)$$

Exemples :

(a) Tout faisceau constant sur  $U(\Gamma)$  peut être muni d'une structure de  $\Gamma$ -faisceau ; si  $E$  est la fibre du faisceau, il suffira de poser pour tout  $\gamma \in \Gamma$ ,  $f(\gamma) = \text{Id } E$ . C'est le  $\Gamma$ -faisceau trivial de fibre  $E$ .

(b) Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont des homéomorphismes locaux, alors  $\Gamma_{\alpha}$  et  $\Gamma_{\beta}$  définissent des faisceaux sur  $U(\Gamma)$ .

Si l'on pose :

$$f_{\alpha} : \Gamma_{\alpha}^* \Gamma_{\alpha} \rightarrow \Gamma_{\beta}^* \Gamma_{\alpha}$$
$$f_{\alpha}(\gamma, \bar{\gamma}) = (\gamma, \bar{\gamma} \circ \gamma^{-1})$$

$$f_{\beta} : \Gamma_{\alpha}^* \Gamma_{\beta} \rightarrow \Gamma_{\beta}^* \Gamma_{\beta}$$
$$f_{\beta}(\gamma, \bar{\gamma}) = (\gamma, \gamma \cdot \bar{\gamma})$$

$f_{\alpha}$  et  $f_{\beta}$  définissent une structure de  $\Gamma$ -faisceau sur  $\Gamma_{\alpha}$  et  $\Gamma_{\beta}$ .  
Les autres exemples utiles seront des  $\Gamma$ -faisceaux de groupes abéliens, que nous allons définir.

Définition :

Un  $\Gamma$ -faisceau abélien est un faisceau de groupes abéliens, muni d'une structure de  $\Gamma$ -faisceau, tel que pour tout  $\gamma \in \Gamma$ ,  $f(\gamma)$  soit un isomorphisme de groupes.

Exemple :

Pour  $\Gamma = \Gamma_n^{\infty}$  on peut considérer les faisceaux des germes de champs de vecteurs  $T(\mathbb{R}^n)$  et le faisceau des formes différentielles de  $d^{\circ} = p$   $\Omega^p(\mathbb{R}^n)$  sur  $U(\Gamma) = \mathbb{R}^n$ .

On peut les munir d'une structure de  $\Gamma$ -faisceau.

Si  $\gamma \in \Gamma^1$  et  $\xi$  est un germe de champs de vecteurs en  $\alpha(\gamma)$ , on posera  $f(\gamma).\xi$  l'image directe de  $\xi$  par le difféomorphisme  $\gamma$ .

De même si  $\gamma \in \Gamma$  et  $\omega$  est un germe de  $p$ -forme différentielle en  $\alpha(\gamma)$ , on posera  $f(\gamma).\omega = \gamma^{*-1}(\omega)$ , ce qui définit bien un germe de  $p$ -forme différentielle en  $\beta(\gamma)$ .

Les morphismes de  $\Gamma$ -faisceaux :

Rappelons qu'un morphisme  $\varphi$  entre deux faisceaux  $F$  et  $F'$  au-dessus de  $U(\Gamma)$  est un morphisme d'espaces étalés :

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\varphi} & F' \\ \pi \searrow & & \swarrow \pi' \\ & U(\Gamma) & \end{array}$$

$\varphi$  sera un morphisme de  $\Gamma$ -faisceaux (on dira aussi  $\Gamma$ -morphisme) s'il commute à l'action de  $\Gamma$ . Plus précisément :

Définition :

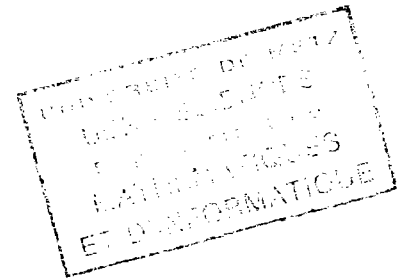
Soient  $(F, f)$  et  $(F', f')$  deux  $\Gamma$ -faisceaux. Un morphisme de faisceaux  $\varphi : F \rightarrow F'$  est un morphisme de  $\Gamma$ -faisceaux si l'on a pour tout  $(\gamma, \xi) \in \Gamma_{\alpha^*F}$

$$\varphi(f(\gamma). \xi) = f'(\gamma). \varphi(\xi)$$

Autrement dit, le diagramme ci-dessous commute :

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_{\alpha^*F} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \Gamma_{\beta^*F} \\ \varphi_{\alpha} \downarrow & & \downarrow \varphi_{\beta} \\ \Gamma_{\alpha^*F'} & \xrightarrow{\tilde{f}'} & \Gamma_{\beta^*F'} \end{array}$$

avec  $\varphi_{\alpha}(\gamma, \xi) = (\gamma, \varphi(\xi))$ ,  $\varphi_{\beta}(\gamma, \xi) = (\gamma, \varphi(\xi))$ .



Définition :

Un morphisme  $\varphi$  entre deux  $\Gamma$ -faisceaux abéliens est un morphisme de  $\Gamma$ -faisceaux abéliens si  $\varphi$  est à la fois un morphisme de  $\Gamma$ -faisceaux et un morphisme de faisceaux de groupes abéliens, autrement dit, il faut que la restriction de  $\varphi$  à chaque fibre soit un homomorphisme de groupes.

Ces notions de morphisme confèrent aux  $\Gamma$ -faisceaux (resp. aux  $\Gamma$ -faisceaux abéliens) une structure de catégorie.

Nous allons maintenant voir quelles sont les propriétés intéressantes de cette catégorie (tous les détails sont dans la thèse de Roger [10]).

Proposition :

La catégorie des  $\Gamma$ -faisceaux abéliens est une catégorie additive.

Nous allons rappeler brièvement la notion de catégorie additive, pour plus de détails, voir Godement [3] ou Mac-Lore [9].

Une catégorie  $\mathcal{C}$  est dite additive si pour tout  $X, Y \in \mathcal{C}$ ,  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  peut être muni de la structure de groupes abéliens et si en plus l'application canonique :

$$\text{Hom}(X, Y) \times \text{Hom}(Y, Z) \rightarrow \text{Hom}(X, Z)$$

est bilinéaire.

La démonstration de la proposition ci-dessus figure dans [10].

La loi de groupe de  $\text{Hom}_{\Gamma}(F, F')$  (ensemble des  $\Gamma$ -morphismes entre deux  $\Gamma$ -faisceaux abéliens  $(F, f)$  et  $(F', f')$ ) est définie par :

$$(\varphi_1 \cdot \varphi_2)(x) = \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x) \quad \text{pour } x \in F \text{ et } \varphi_1, \varphi_2 \in \text{Hom}_{\Gamma}(F, F')$$

On peut aisément définir le produit direct de deux  $\Gamma$ -faisceaux abéliens  $(F, f)$  et  $(F', f')$ . On munit alors le faisceau produit  $F \times F'$  de l'action évidente de  $\Gamma$  :

$$(f \times f')(\gamma)(\xi, \eta) = (f(\gamma) \cdot \xi, f'(\gamma) \cdot \eta).$$

Le produit tensoriel de deux  $\Gamma$ -faisceaux abéliens se définit de la même façon : sur le faisceau produit tensoriel  $F \otimes F'$ , on considère l'action de  $\Gamma$  définie par :

$$(f \otimes f')(\gamma)(\xi \otimes \eta) = f(\gamma) \cdot \xi \otimes f'(\gamma) \cdot \eta$$

Le  $\Gamma$ -faisceau abélien  $(F \otimes F', f \otimes f')$  vérifie la propriété universelle habituelle des produits tensoriels.

Exemple :

Pour  $\Gamma = \Gamma_n^{\infty}$  on a le faisceau produit tensoriel  $T(\mathbb{R}^n) \otimes \Omega^1(\mathbb{R}^n)$

et le morphisme d'évaluation :

$$T(\mathbb{R}^n) \otimes \Omega^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\xi \otimes \omega) \rightarrow \omega(\xi)$$

$\mathbb{R}$  étant le  $\Gamma$ -faisceau trivial de fibre  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}^n$ .

Ce morphisme est un morphisme de  $\Gamma$ -faisceaux abéliens.

Exemple :

Sous les mêmes hypothèses, le produit extérieur des formes différentielles définit bien un morphisme de  $\Gamma$ -faisceaux abéliens.

$$\Omega^p(\mathbb{R}^n) \otimes \Omega^q(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Omega^{p+q}(\mathbb{R}^n).$$

En effet le changement de variable commute au produit extérieur :

$$\gamma^{-1*}(\omega_1 \wedge \omega_2) = \gamma^{-1*}(\omega_1) \wedge \gamma^{-1*}(\omega_2).$$

Proposition :

Avec le produit direct, la catégorie des  $\Gamma$ -faisceaux abéliens est une catégorie abélienne.

La démonstration de la proposition revient à établir que tout morphisme  $\varphi$  de  $\Gamma$ -faisceaux abéliens  $(F, f) \xrightarrow{\varphi} (F', f')$  possède un noyau et un conoyau. L'idée est de considérer le noyau  $N$  et le conoyau  $C$  de  $\varphi$  dans la catégorie des faisceaux de groupes abéliens et de les munir d'une action de  $\Gamma$ , de manière à obtenir une suite exacte de  $\Gamma$ -faisceaux abéliens.



CHAPITRE II : HOMOMORPHISME CLASSIQUE  
FONCTEUR IMAGE RÉCIPROQUE ET  
FONCTEUR IMAGE DIRECTE POUR LES  $\Gamma$ -FAISCEAUX

Etant donné une application continue  $f : X \rightarrow Y$  d'espaces topologiques, nous rappelons ici brièvement les notions d'image directe et d'image réciproque d'un faisceau. Pour plus de détails voir [3] et [1].

1.- IMAGE DIRECTE D'UN FAISCEAU

Soit  $\mathcal{A}$  un faisceau de base  $X$  et  $f : X \rightarrow Y$  une application continue entre espaces topologiques. Nous pouvons alors définir un faisceau  $f_! (\mathcal{A})$  de base  $Y$  de la forme suivante :

Pour tout ouvert  $V \subset Y$  on pose :

$$f_! (\mathcal{A})(V) = \mathcal{A}(f^{-1}(V))$$

et pour  $V' \subset V''$  on définit l'application de restriction

$$f_! (V'') \rightarrow f_! (\mathcal{A})(V')$$

comme étant l'application de restriction

$$\mathcal{A}(f^{-1}(V'')) \rightarrow \mathcal{A}(f^{-1}(V')).$$

Les axiomes de faisceaux sont alors vérifiés de façon évidente.

2.- IMAGE RÉCIPROQUE D'UN FAISCEAU

$f : X \rightarrow Y$  est une application continue comme précédemment.

$\mathcal{B}$  étant un faisceau de base  $Y$ , nous allons définir un faisceau  $f^*(\mathcal{B})$  de base  $X$ .

$\mathcal{B}$  est donc un espace étalé au dessus de  $Y$ .

Pour  $U$  ouvert dans  $X$ , posons :

$$f^*(\mathcal{B})(U) = \{s' : U \rightarrow \mathcal{B} / s'(x) \in \mathcal{B}(f(x))\}$$

on définit les opérations de restriction de façon évidente et on vérifie que l'on a défini ainsi un faisceau de base  $X$  appelé le faisceau image réciproque du faisceau  $\mathcal{B} : f^*(\mathcal{B})$ .

### 3.- HOMOMORPHISMES DE GROUPES : IMAGE RECIPROQUE ET IMAGE DIRECTE DE MODULES

Soient  $G$  et  $G'$  deux groupes discrets. Nous allons définir l'image réciproque et l'image directe de module sur  $G$  et  $G'$ . Rappelons que l'on appelle  $G$ -module un groupe abélien  $M$  et un homomorphisme  $h : G \rightarrow \text{Aut}(M)$ . Le module  $M$  est dit trivial si  $\text{Ker } h = G$ . Pour plus de détails, voir [8].

#### a) Image réciproque d'un $G'$ -module

Soit  $\varphi : G \rightarrow G'$  un homomorphisme de groupes et  $M$  un  $G'$ -module avec  $h : G' \rightarrow \text{Aut}(M)$ . On appelle image réciproque du  $G'$ -module  $M$  le  $G$ -module noté  $\varphi^*(M)$  ayant le même groupe sous-jacent que  $M$  et pour représentation de  $G$  la représentation

$$h \circ \varphi : G \rightarrow \text{Aut}(M).$$

Quand il n'y aura pas risque de confusion, l'image réciproque du module  $M$  est également noté  $M$ .

L'action de  $G$  sur  $M$  est la suivante :

$$\forall g \in G, \forall m \in M \quad g.m \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(g).m$$

On peut d'ailleurs vérifier directement que cette définition munit  $M$  de la structure de  $G$ -module.

b) Image directe d'un G-module

Soit  $\varphi : G \rightarrow G'$  un homomorphisme de groupe. On appelle algèbre du groupe  $G'$  l'algèbre

$$\mathcal{U}[G'] = \{n_1 g'_1 + n_2 g'_2 + \dots + n_p g'_p / n_i \in \mathbb{Z}, g'_j \in G'\}$$

$\mathcal{U}[G']$  est un  $G'$ -module de façon évidente. De plus l'homomorphisme  $\varphi$  munit  $\mathcal{U}[G']$  de la structure de  $G$ -module. Si  $M$  est un  $G$ -module, nous définissons alors  $\varphi_1(M)$  (image directe du module  $M$  par  $\varphi$ ) de la façon suivante :

$$\varphi_1(M) = M \otimes_G \mathcal{U}[G'].$$

$\varphi_1(M)$  est un  $G'$ -module :  $(m \otimes g')g'' = m \otimes g'g''$  où  $m \in M$  et  $g', g''$  sont deux éléments de  $G'$ .

Nous avons deux cas intéressants :

- si  $\varphi$  est surjectif :  $\varphi : G \rightarrow G/K$ .  $\varphi_1(M)$  est le sous-module de  $M$  défini par :

$$\varphi_1(M) = \{m \in M / km = m \quad \forall k \in K\}.$$

Exemple :

Soit  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathcal{U}$  la projection canonique et soit  $C(\mathbb{R})$  l'espace des fonctions continues sur  $\mathbb{R}$ .  $C(\mathbb{R})$  est un  $\mathbb{R}$ -module par l'action suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times C(\mathbb{R}) &\rightarrow C(\mathbb{R}) \\ (t, f) &\rightarrow f^t \end{aligned}$$

où  $f^t$  est la fonction continue sur  $\mathbb{R}$  définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f^t(x) = f(t+x).$$

$p!(C(\mathbb{R})) = C(\mathbb{R})^{\mathbb{Z}}$  est le sous-module de  $C(\mathbb{R})$  constitué par les fonctions périodiques de période 1.

L'espace des fonctions continues sur  $\mathbb{R}$  induit sur  $S^1$  le module des fonctions de période 1.

- un autre cas important est celui où  $\varphi : G \rightarrow G'$  est injectif.

$\varphi_!(M)$  est alors l'extension du module  $M$  à  $G'$ . Un exemple typique est celui où  $i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  est l'inclusion canonique et  $M$  est alors un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et  $\varphi_!(M)$  est son complexifié

$$\varphi_!(M) = M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

Dans le cas général,  $\varphi$  est le composé de  $\psi : G \rightarrow \text{Im } \varphi$  et de  $\psi' : \text{Im } \varphi \rightarrow G'$  où  $\psi$  est surjectif et  $\psi'$  injectif.

On voit alors que  $\varphi_!(M)$  est l'extension à  $G'$  du  $\text{Im } \varphi$ -module  $M^K$  où  $K = \text{Ker } \varphi$ .

#### 4.- IMAGE RÉCIPROQUE ET IMAGE DIRECTE D'UN $\Gamma$ -FAISCEAU DANS LE CAS D'UN HOMOMORPHISME CLASSIQUE

Nous venons de voir les constructions de l'image directe et de l'image réciproque d'un faisceau par une application continue d'une part, celles de l'image réciproque et de l'image directe de modules par des homomorphismes de groupes d'autre part. Nous allons combiner ces deux constructions pour construire l'image réciproque et l'image directe d'un  $\Gamma$ -faisceau dans le cas d'un homomorphisme classique de groupoïdes.

##### a) Image réciproque de $\Gamma$ -faisceau

Soit  $F : \Gamma \rightarrow \Gamma'$  un foncteur continu de catégories topologiques et soit  $M$  un  $\Gamma'$ -faisceau sur l'espace des unités  $U'$  de  $\Gamma'$ .  $F^*(M)$  est un faisceau sur  $U$  espace des unités de  $\Gamma$ . C'est de plus un  $\Gamma$ -faisceau de façon évidente.

Soit en effet  $\gamma : x \rightarrow y, \gamma \in \Gamma$ . La fibre en  $x$  du faisceau  $F^*(M)$  est  $(F^*(M))_x = (M)_{F(x)}$ .

De même  $(F^*(M))_y = (M)_{F(y)}$ , définissons un isomorphisme noté encore  $\gamma$  entre  $(F^*(M))_x$  et  $(F^*(M))_y$  par celui de  $F(\gamma) : M$  est en effet un  $\Gamma'$ -faisceau.

Nous avons donc là une action de  $\Gamma$  sur  $F^*(M)$  et il est clair que cette action dépend continûment de  $x, y$  et  $\gamma$  car le foncteur  $F$  est continu.

$F^*(M)$  est donc bien un  $\Gamma$ -faisceau.

b) Image directe d'un  $\Gamma$ -faisceau par un homomorphisme classique

Soient  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  deux groupoïdes topologiques et  $F : \Gamma \rightarrow \Gamma'$  un foncteur continu.

Si  $x \in \Gamma$  appelons  $\text{Orbite}(x)$  l'ensemble suivant :

$$\text{Orbite}(x) = \{y \in U / \exists \gamma \in \Gamma / \alpha(\gamma) = x, \beta(\gamma) = y\}.$$

Supposons qu'en outre le foncteur  $F$  vérifie la condition suivante :

$$\forall x' \in U' ; \forall x \in U \text{ vérifiant } F(x) = x', \text{ alors}$$

$$F^{-1}(\text{Orbite}(x')) = \text{Orbite}(x).$$

$\mathcal{M}$  étant un  $\Gamma$ -faisceau sur  $U$ , nous allons construire un  $\Gamma'$ -faisceau  $F_!(\mathcal{M})$  sur  $U'$  que nous appellerons l'image directe de  $\mathcal{M}$  par l'homomorphisme  $F$ .  $\mathcal{M}$  est étalé au-dessus de  $U$ , soit  $\pi : \mathcal{M} \rightarrow U$ .

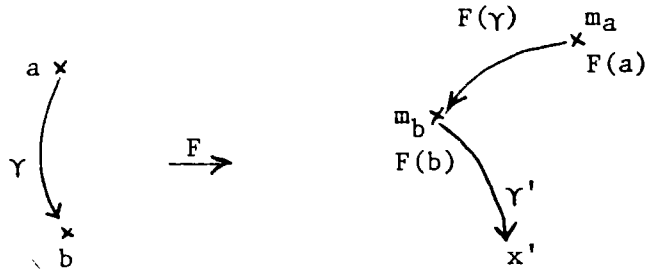
$\forall V' \subset U', V'$  ouvert, le groupe des sections de  $F_!(\mathcal{M})$  au-dessus de  $V'$  est défini de la façon suivante :

Soit  $s'_V$ , une section du faisceau  $\Gamma' \xrightarrow{\beta} U'$  au-dessus de  $V'$ .

Soit  $s''_V$ , une section du faisceau  $\alpha_!(\beta^*(F_*(\mathcal{M})))$  au-dessus de  $V'$  ( $V'(F_*(\mathcal{M}))$  est l'image directe de  $\mathcal{M}$  par  $F$  app. continue). Notons :  $s' \otimes s'' \stackrel{\text{def}}{=} (s', s'') / \sim$  où la relation d'équivalence est la suivante :

$$(s', s'') \text{ est une famille : } \{(m, \gamma')\}$$

$$\text{avec } F(\pi(m)) = \alpha(\gamma'), \beta(\gamma') = x' \in V'\}.$$



C'est l'hypothèse que l'image réciproque de l'orbite de  $x' \in V'$  est une orbite qui permet d'affirmer l'existence de  $\gamma \in \Gamma$ . En effet  $F(\pi(m_a))$  et  $F(\pi(m_b))$  sont sur une même orbite donc  $\pi(m_a)$  et  $\pi(m_b)$  le sont aussi.

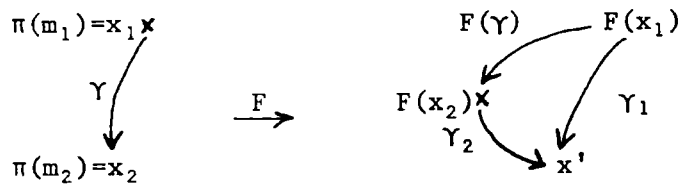
Soit sur  $(s', s'')$  la relation d'équivalence suivante :

$$(m_b, \gamma') \sim (\gamma^{-1}(m_b), \gamma' \circ F(\gamma))$$

Le groupe  $F_!(\mathcal{M})(V')$  est défini de la façon suivante :

$$F_!(\mathcal{M})(V') = \{s' \otimes s' \text{ définies comme ci-dessus}\}.$$

Explicitons la loi de groupe sur cet ensemble  $F_!(\mathcal{M})(V')$  :



Soient  $(m_1, \gamma_1)$  et  $(m_2, \gamma_2) \in F_!(\mathcal{M})(V')$ , avec  $\pi(m_1) = x_1$  et  $\pi(m_2) = x_2$ . Comme  $F(x_1)$  et  $F(x_2)$  sont sur une même orbite,  $x_1$  et  $x_2$  le sont aussi. Donc il existe  $\gamma \in \Gamma$  vérifiant  $\alpha(\gamma) = x_1$  et  $\beta(\gamma) = x_2$ .

Définissons maintenant la loi de groupe sur  $F_!(\mathcal{M})(V')$  :

$$(m_1, \gamma_1) \cdot (m_2, \gamma_2) = (m_1 + \gamma^{-1} m_2, \gamma_1).$$

Si  $V'_1 \subset V'_2$ , nous avons des opérations de restrictions évidentes :

Si  $V_1' \subset V_2'$ , nous avons des opérations de restrictions évidentes

$$F_!(\mathcal{M})(V_2') \rightarrow F_!(\mathcal{M})(V_1').$$

Nous avons donc un faisceau sur  $U'$  dont la fibre en  $x' \in U'$  est :

$$(F_!(\mathcal{M}))_{x'} = \overline{\{(m, \gamma) \mid F(\pi(m)) = \alpha(\gamma), \beta(\gamma) = x'\}}$$

Si de plus  $x' \xrightarrow{\gamma'} y'$  est un élément de  $\Gamma'$ , il définit un isomorphisme de groupes :

$$\begin{aligned} (F_!(\mathcal{M}))_{x'} &\longrightarrow (F_!(\mathcal{M}))_{y'} \\ \overline{(m, \gamma)} &\longrightarrow \overline{(m, \gamma' \circ \gamma)} \end{aligned}$$

car l'application  $(m, \gamma) \rightarrow (m, \gamma' \circ \gamma)$  est clairement compatible à la relation d'équivalence que nous avons définie.

##### 5.- FONCTEUR ADJOINT

Soient  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  deux catégories, nous dirons que le foncteur  $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$  est l'adjoint à droite de  $S : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$  si nous avons une équivalence naturelle  $\text{hom}_{\mathcal{A}}(A, T(C)) \approx \text{hom}_{\mathcal{C}}(S(A), C)$  où  $A$  et  $C$  sont deux objets de  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{C}$  respectivement. (Pour plus de détails voir [7] et [9]).

##### Exemple :

Si  $\Lambda$  est un anneau,  $\mathcal{M}_{\Lambda}$  la catégorie des  $\Lambda$ -modules le foncteur  $T : \mathcal{C} \rightarrow \text{Hom}(B, C)$  est l'adjoint du foncteur  $S : A \rightarrow A \otimes B$  car  $\text{Hom}(A \otimes B, C) \approx \text{Hom}(A, \text{Hom}(B, C))$ .

Exemple :

Soit  $\mathcal{E}$  la catégorie dont les objets sont les ensembles et les morphismes sont les applications. L'adjoint du foncteur  $F : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}_\Lambda$  qui à un ensemble associe le  $\Lambda$ -module libre engendré par cet ensemble est le foncteur  $G : \mathcal{M}_\Lambda \rightarrow \mathcal{E}$  qui à un module associe l'ensemble sous-jacent.

Exemple :

Soit  $\mathcal{U}$  la catégorie des groupes abéliens  $G : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{M}_\Lambda$  le foncteur défini par :  $GC = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, C)$ .

$G$  a pour foncteur adjoint le foncteur  $F : \mathcal{M}_\Lambda \rightarrow \mathcal{U}$  qui oublie la structure de  $\Lambda$ -module.

Exemple :

Si  $f : X \rightarrow Y$  est une application continue entre espaces topologiques, le foncteur  $f^*$  qui à un faisceau de groupes abéliens sur  $Y$  associe son image réciproque est l'adjoint à gauche du foncteur  $f_*$  (image directe) qui à un faisceau sur  $X$  associe le faisceau image directe sur  $Y$ . Si  $F$  est un faisceau sur  $X$ ,  $G$  est un faisceau sur  $Y$ , nous avons

$$\text{hom}(f^*(G), F) \approx \text{hom}(G, f_*(F)).$$

Si  $F$  est un foncteur admettant un foncteur adjoint, alors  $F$  préserve les produits, les noyaux et les produits fibrés.

a) Adjonction dans le cas discret

Soit  $p : G \rightarrow G/K$  un homomorphisme surjectif de groupes et  $M$  un  $G$ -module, alors  $p!(M) = M^K$  est l'image du module  $M$  par  $p$ . Montrons que l'on a une bijection naturelle entre  $\text{hom}_G(N, M) \sim \text{hom}_{G'}(N, M^*) \sim \text{hom}_G(N, M^K)$  où  $N$  est un  $G'$ -module.



$$\underline{\text{hom}_G(N, M) \sim \text{hom}_{G^*}(N, M^K) :}$$

Si  $N$  est un  $G/K$ -module qui peut être regardé comme un  $G$ -module via  $p$  et si  $M$  est un  $G$ -module quelconque, alors tout homomorphisme  $h : N \rightarrow M$  de  $G$ -modules est tel que  $h(N) \subset M^K$ , en effet :

Soit  $n \in N$  ;  $h(n) = m$  et soit  $g \in K$

alors  $h(g.n) = h(p(g).n) = h(e.n) = h(n) = m$ .

D'autre part  $h(g.n) = g.h(n) = g.m = m$

donc  $m \in M^K$ .

$$\underline{\text{hom}_{G'}(N, M^K) \sim \text{hom}_G(N, M^K) :}$$

Cette équivalence est naturelle, si  $\varphi \in \text{hom}_{G'}(N, M^K)$ , nous lui faisons correspondre  $\psi \in \text{hom}_G(N, M^K)$  qui a même application ensembliste sous-jacente.

En effet, si  $\varphi(n) = \psi(n)$ , alors :

$$\begin{aligned} \psi(g.n) &\stackrel{\text{def}}{=} \psi(p(g).n) = \varphi(p(g).n) = p(g).\varphi(n) \\ &= g.\varphi(n) = g.\psi(n). \end{aligned}$$

#### b) Adjonction dans le cas d'un homomorphisme classique

Nous venons de voir que dans le cas d'un homomorphisme de groupe surjectif,  $\varphi : G \rightarrow G'$  le foncteur image réciproque de la catégorie des  $G'$ -modules dans la catégorie des  $G$ -modules est l'adjoint à gauche du foncteur image directe de la catégorie des  $G$ -modules dans la catégorie des  $G'$ -modules. Nous allons maintenant généraliser cette situation au cas d'un foncteur continu entre groupoïdes topologiques, à condition que ce foncteur soit plein (voir [9]) et surjectif sur les unités.

Définition :

Un foncteur  $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  est dit plein si pour tout couple d'objets de  $\mathcal{A} : (A, A')$ , nous avons  $\mathcal{F}(\text{hom}_{\mathcal{A}}(A, A')) = \text{hom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(A'))$  soit donc  $F : \Gamma \rightarrow \Gamma'$  un foncteur plein,  $\mathcal{M}$  un  $\Gamma$ -faisceau  $\mathcal{N}$  un  $\Gamma'$ -faisceau, et montrons que nous avons :

$$\text{hom}_{\Gamma'}(F^*(\mathcal{N}), \mathcal{M}) \sim \text{hom}_{\Gamma}(\mathcal{N}, F(\mathcal{M})).$$

Soient  $x$  et  $y \in U(\Gamma)$ ,  $x \xrightarrow{\gamma} y$  et  $h \in \text{hom}_{\Gamma'}(F^*(\mathcal{N}), \mathcal{M})$  nous avons un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{N}_{F(x)} & \xrightarrow{h_x} & \mathcal{M}_x \\ \downarrow F(\gamma) & & \downarrow \gamma \\ \mathcal{N}_{F(y)} & \xrightarrow{h_y} & \mathcal{M}_y \end{array}$$

Puisque nous avons supposé le foncteur plein  $(F_!(\mathcal{M}))_{F(x)} \approx \mathcal{M}_x^{K_x}$  et de plus si  $\gamma' : F(x) \rightarrow F(y)$ ,  $\gamma' = F(\gamma)$  pour un certain  $\gamma \in \Gamma$ .  
Par ailleurs, comme dans le cas discret  $\text{Im } h_x \subset \mathcal{M}_x^{K_x}$ . Nous associons donc à  $h$  de façon naturelle un élément  $h' \in \text{hom}_{\Gamma'}(\mathcal{N}, F_!(\mathcal{M}))$  vérifiant le même diagramme  $\text{hom}_{\Gamma'}(F^*(\mathcal{N}), \mathcal{M})$  et  $\text{hom}_{\Gamma'}(\mathcal{N}, F_!(\mathcal{M}))$  et le foncteur  $F^*$  est l'adjoint à gauche du foncteur  $F_!$ .

c) La suite spectrale de Grothendick

a) L'image d'un injectif par  $F$  est un injectif :

Définition :

Soient  $X$  un espace topologique,  $\mathcal{A}$  un faisceau d'anneaux sur  $X$ , et  $\mathcal{J}$  un  $\mathcal{A}$ -module à gauche. On dit que  $\mathcal{J}$  est injectif si le foncteur  $\mathcal{L} \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{L}, \mathcal{J})$  défini sur la catégorie des  $\mathcal{A}$ -modules est exact.

Soit maintenant  $\mathcal{M}$  un  $\Gamma$ -faisceau sur  $U$ , montrons que si  $\mathcal{M}$  est injectif, alors  $F_!(\mathcal{M})$  est également injectif.

Soit  $0 \rightarrow K \rightarrow G \rightarrow Q \rightarrow 0$  une suite exacte dans  $\underline{\Gamma}'$  ( $\underline{\Gamma}$  et  $\underline{\Gamma}'$  désignent resp. la catégorie des  $\Gamma$ -faisceaux sur  $U$  et la catégorie des  $\Gamma'$ -faisceaux sur  $U'$ ).

Comme le foncteur  $F^*$  est exact, nous avons dans  $\underline{\Gamma}$  la suite exacte :

$$0 \rightarrow F^*(K) \rightarrow F^*(G) \rightarrow F^*(Q) \rightarrow 0.$$

Comme  $\mathcal{M}$  est injectif, nous avons la suite exacte :

$$0 \rightarrow \text{hom}_{\Gamma}(F^*(K), \mathcal{M}) \rightarrow \text{hom}_{\Gamma}(F^*(G), \mathcal{M}) \rightarrow \text{hom}_{\Gamma}(F^*(Q), \mathcal{M}) \rightarrow 0.$$

Par ailleurs  $F^*$  étant l'adjoint à gauche de  $F_!$ , nous avons :

$$\text{hom}_{\Gamma}(F^*(K), \mathcal{M}) \sim \text{hom}_{\Gamma}(K, F_!(\mathcal{M})),$$

d'où la suite exacte :

$$0 \rightarrow \text{hom}_{\Gamma}(K, F_!(\mathcal{M})) \rightarrow \text{hom}_{\Gamma}(G, F_!(\mathcal{M})) \rightarrow \text{hom}_{\Gamma}(Q, F_!(\mathcal{M})) \rightarrow 0$$

qui montre que  $F_!(\mathcal{M})$  est bien injectif.

### b) La suite spectrale de Grothendick

Commençons par rappeler le théorème de Grothendick (voir [7]).

#### Théorème :

Soient  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$  trois catégories,  $F$  et  $G$  deux foncteurs  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  et  $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  et supposons que si  $\mathcal{I}$  est un injectif dans  $\mathcal{A}$ , alors  $F(\mathcal{I})$  est  $G$ -acyclique. Alors il y a une suite spectrale  $\{E_r(A)\}$  correspondant à chaque objet  $A$  de  $\mathcal{A}$ , telle que :

$$E_1^{p-q} = (R^p G)(R^{q-p} F)(A) \rightarrow R^q(GF)(A)$$

qui converge vers  $R^q(GF)(A)$ .

Nous allons maintenant appliquer ce théorème à notre situation.

Soit  $\mathcal{G}$  la catégorie des groupes. Nous avons un foncteur :

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\Gamma'} : \Gamma' &\rightarrow \mathcal{G} \\ \underline{G} &\rightarrow \text{Hom}_{\Gamma'}(\underline{\mathbb{Z}}, G) \end{aligned}$$

c'est le foncteur sections équivariantes. Ce foncteur admet des foncteurs dérivés :  $R^q \text{Hom}_{\Gamma'}(G) = H^q(B\Gamma', G)$ .

Nous pouvons donc appliquer la suite spectrale de Grothendick et le rôle des catégories  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  est respectivement joué par  $\underline{\Gamma}$ ,  $\underline{\Gamma}'$  et  $\mathcal{G}$ .

Pour tout  $\mathcal{A}$ -faisceau  $\mathcal{M}$ , nous avons donc une suite spectrale :

$$E_2^{p,q} = H^p(B\Gamma', (R^q_{F_1})(\mathcal{M})) \Rightarrow H^{p+q}(B\Gamma, \mathcal{M})$$

Remarque :

Si  $\varphi : G \rightarrow G/K$  est un homomorphisme surjectif de groupes, cette suite spectrale devient la suite spectrale de Hochschild-Serre (voir par exemple [8]).

CHAPITRE III : HOMOMORPHISMES GÉNÉRALISÉS DE  
GRUPOÏDES, FONCTEUR IMAGE RÉCIPROQUE ET  
FONCTEUR IMAGE DIRECTE POUR LES  $\Gamma$ -FAISCEAUX

Le résultat important de ce chapitre est qu'une équivalence de groupoïdes au sens de Haefliger entraîne l'équivalence de catégories des  $\Gamma$ -faisceaux. Nous commençons par traiter quelques exemples d'homomorphismes généralisés de groupoïdes.

L'équivalence entre le groupoïde d'holonomie d'un feuilletage et le groupoïde d'holonomie transverse est construite explicitement, de même que celle entre le groupoïde des germes de difféomorphismes locaux de  $\mathbb{R}^n$  et celui d'une variété de dimension  $n$ . Les constructions de l'image réciproque et de l'image directe d'un  $\Gamma$ -faisceau faites dans le dernier chapitre sont généralisées. Nous terminons le chapitre par la définition du composé de deux homomorphismes généralisés.

1.- EXEMPLES D'HOMOMORPHISMES GÉNÉRALISÉS DE GRUPOÏDES

a) Un homomorphisme classique induit un homomorphisme généralisé

Soient  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  deux groupoïdes topologiques ou différentiables. Un homomorphisme classique de  $\Gamma_1$  dans  $\Gamma_2$  est un foncteur covariant de  $\Gamma_1$  dans  $\Gamma_2$ .

Soit  $U_1$  (resp.  $U_2$ ) l'espace dont les éléments sont les objets de  $\Gamma_1$  (resp.  $\Gamma_2$ ). On a une application  $h : U_1 \rightarrow U_2$ .

Prenons  $\Phi = U_1 \times_{U_2} \Gamma_2$  où  $\Gamma_2$  est muni de la projection  $\alpha : \Gamma_2 \rightarrow U_2$ .

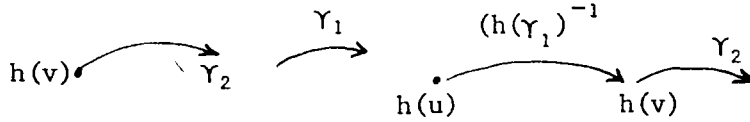
$$\Phi = \{(U_1, \gamma_2) / \alpha(\gamma_2) = h(U_1)\} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\gamma_2} \\ \bullet \\ h(U_1) \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} p(U_1, \gamma_2) = U_1 \\ q(U_1, \gamma_2) = \beta(\gamma_2) \end{array} \right.$$

Action de  $\Gamma_1$  sur  $\Phi$  :

Soit  $\gamma_1 : v \rightarrow u$  nous avons une action de  $\gamma_1$  sur  $\Phi$  équivariante

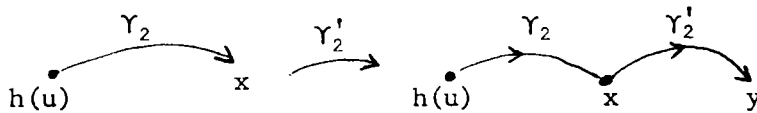
qui envoie la fibre  $\phi_V$  dans la fibre  $\phi_U$ .

$$\gamma_1 \cdot (v, \gamma_2) = (u, \gamma_2 \cdot (h(\gamma_1))^{-1})$$



Action de  $\Gamma_2$  sur  $\phi$  :

Soit  $\gamma'_2 : x \rightarrow y$  nous avons une action de  $\gamma'_2$  sur  $\phi$  équivariante (i.e. qui envoie la fibre  $\phi_x$  sur la fibre  $\phi_y$ ).



La projection  $p : \phi \rightarrow U$  rend  $\phi$   $\Gamma'$ -principal.

En effet si  $\varphi_1 = (x, \gamma_1)$  et  $\varphi_2 = (x, \gamma_2)$  vérifiant  $p(\varphi_1) = p(\varphi_2) = x$  alors  $\varphi_1 \cdot (\gamma_2 \gamma_1^{-1}) = \varphi_2$ .

b) Equivalence entre le groupoïde d'holonomie et le groupoïde d'holonomie transverse

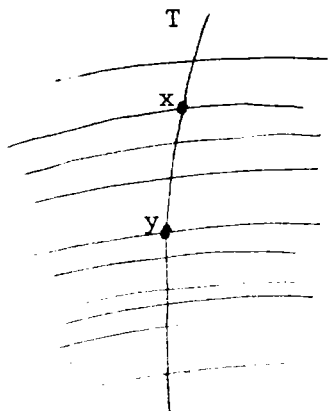
Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage sur une variété  $V$ . Rappelons ce qu'est le groupoïde d'holonomie de  $\mathcal{F}$ . (Pour plus de détails, voir [2]).

C'est un groupoïde topologique dont l'espace des unités est  $V$  et dont les morphismes sont représentés par les triplets  $(x, y, \gamma)$  où  $x$  et  $y$  appartiennent à une même feuille  $L$  de  $(V, \mathcal{F})$  et  $\gamma$  est un chemin reliant  $x$  à  $y$ , contenu dans  $L$ . Deux tels triplets  $(x, y, \gamma)$  et  $(x, y, \gamma')$  sont équivalents s'ils induisent la même holonomie. Le groupoïde d'holonomie  $G$  de  $\mathcal{F}$  est une variété en générale non séparée de dimension :

$$\dim G = \dim V + \dim \mathcal{F}.$$

La projection source  $\alpha : G \rightarrow V$  (resp.  $\beta : G \rightarrow X$ ) fait correspondre à  $(x, \gamma, y)$  le point  $x$  (resp.  $y$ ). Ces projections sont des submersions dont les fibres sont les revêtements d'holonomie des feuilles.

Supposons maintenant que le feuilletage  $\mathcal{F}$  admet une transversale complète  $T$  et rappelons ce qu'est le groupoïde d'holonomie transverse  $\Gamma_T$  associé à  $T$ .



Les éléments de  $T_T$  sont représentés par triplets  $(x, \gamma, y)$  où  $x$  et  $y$  appartiennent à  $T$  et  $\gamma$  un chemin contenu dans une feuille de  $\mathcal{F}$  et reliant  $x$  à  $y$ , deux chemins étant équivalents s'ils déterminent la même holonomie.

$\Gamma_T$  est donc le sous-espace de  $G$  formé des triplets  $(x, \gamma, y)$  avec  $\alpha(\gamma) = x \in T$  et  $\beta(\gamma) = y \in T$ .

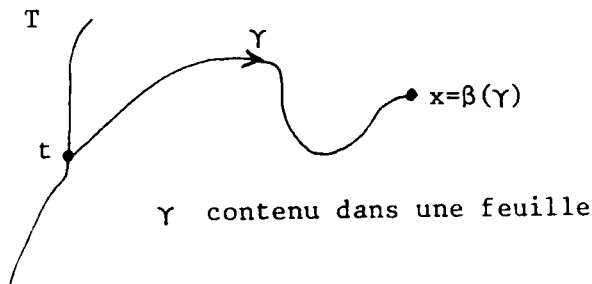
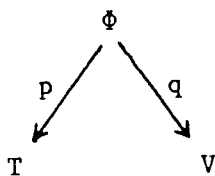
$\Gamma_T$  est une variété de dimension égale à la codimension de  $\mathcal{F}$ , les projections  $\alpha : (x, \gamma, y) \rightarrow x$  et  $\beta : (x, \gamma, y) \rightarrow y$  sont localement des homéomorphismes.

Nous avons donc un homomorphisme naturel entre  $\Gamma_T$  et  $G$  qui est l'inclusion :

$$i : \Gamma_T \rightarrow G$$

$$(x, \gamma, y) \rightarrow (x, \gamma, y)$$

Cet homomorphisme définit un homomorphisme généralisé :



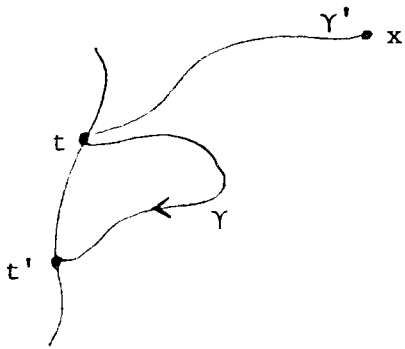
où  $\Phi = T_x V/G$  ( $G$  est muni de la projection  $\alpha$  sur  $V$ ).

$\Phi$  est donc le sous-espace de  $G$  formé par les classes d'équivalence des triplets  $\varphi = (t, \gamma, x)$  avec  $\alpha(\gamma) = t \in T$ .

Les projections  $p$  et  $q$  sont définies par :

$$p(\varphi) = t \text{ et } q(\varphi) = \beta(\gamma) = x \text{ pour } \varphi = (t, \gamma, x).$$

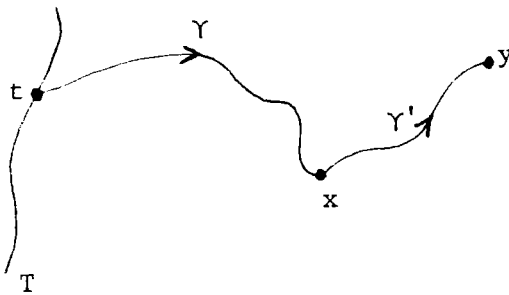
Action de  $\Gamma_T$  sur  $\Phi$  :



Soit  $\varphi = (t, \gamma', x)$  vérifiant  $p(\varphi) = t$  et  $\gamma : t \rightarrow t' \quad \gamma \in \Gamma_T$ .

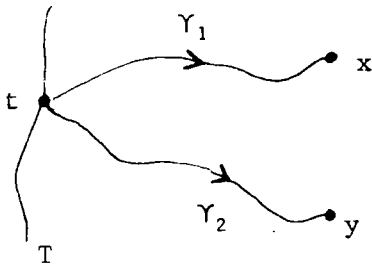
$\gamma \cdot \varphi = (t', \gamma' \circ \gamma^{-1}, x)$  est l'action de  $\gamma$  sur  $\varphi$ .

Action de  $G$  sur  $\Phi$  :



Soit  $\varphi = (t, \gamma, x) \in \Phi$  et  $\gamma' \in G \quad \alpha(\gamma') = x, \beta(\gamma') = y$  alors  $\varphi \cdot \gamma' = (t, \gamma' \circ \gamma, y)$ .

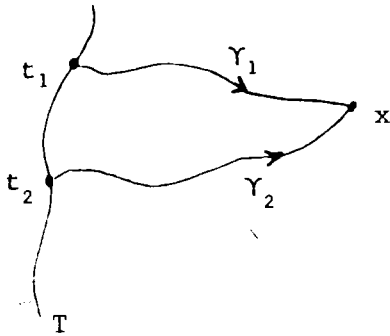
$p : \Phi \rightarrow T$  est  $G$ -principal :



Soient  $\varphi_1 = (t_1, \gamma_1, x)$  et  $\varphi_2 = (t_2, \gamma_2, y)$   $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  appartiennent à  $\Phi$  et vérifient  $p(\varphi_1) = p(\varphi_2) = t$  alors  $\varphi_1 \cdot (\gamma_2 \circ \gamma_1^{-1}) = \varphi_2$ .



$q : \Phi \rightarrow V$  est  $\Gamma_T$ -principal :



Soient  $\varphi_1 = (t_1, \gamma_1, x)$  et  $\varphi_2 = (t_2, \gamma_2, x)$ ,  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  appartiennent à  $\Phi$  et vérifient  $q(\varphi_1) = q(\varphi_2) = x$  alors si nous posons  $\gamma = \gamma_2^{-1} \circ \gamma_1$ , nous avons  $\gamma\varphi_1 = \varphi_2$  et  $\gamma \in \Gamma_T$ .

$\Phi$  définit bien une équivalence entre  $\Gamma_T$  et  $G$ .

c) Equivalence de  $\Gamma_M^r$  et  $\Gamma_n^r$  où  $M$  est une variété de dimension  $n$

Soit  $M$  une variété de dimension  $n$ ,  $\Gamma_M^r$  le groupoïde des germes de difféomorphismes locaux de  $M$  dans  $M$ . Soit  $\Gamma_n^r$  le groupoïde des germes de difféomorphismes locaux de  $\mathbb{R}^n$ . Montrons qu'il y a équivalence entre  $\Gamma_M^r$  et  $\Gamma_n^r$  ( $\sim$  est la classe de différentiabilité des difféomorphismes). Soit  $\Phi$  l'espace des germes de difféomorphismes locaux entre  $M$  et  $\mathbb{R}^n$ . Alors  $\Phi$  réalise une équivalence entre  $\Gamma_M^r$  et  $\Gamma_n^r$ .

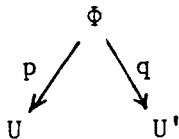
La projection  $p : \Phi \rightarrow M$  est définie par  $p(\varphi) = \alpha(\varphi)$  (source de  $\varphi$ ).

La projection  $q : \Phi \rightarrow \mathbb{R}^n$  est définie par  $q(\varphi) = \beta(\varphi)$  (but de  $\varphi$ ).

Nous avons des actions évidentes de  $\Gamma_M^r$  et de  $\Gamma_n^r$  sur  $\Phi$  données par la composition des germes.

## 2.- IMAGE RECIPROQUE D'UN $\Gamma$ -FAISCEAU PAR UN HOMOMORPHISME GENERALISE

Soit  $\Phi$  un espace topologique définissant un homomorphisme généralisé entre groupoïdes topologiques  $\Gamma$  et  $\Gamma'$ .

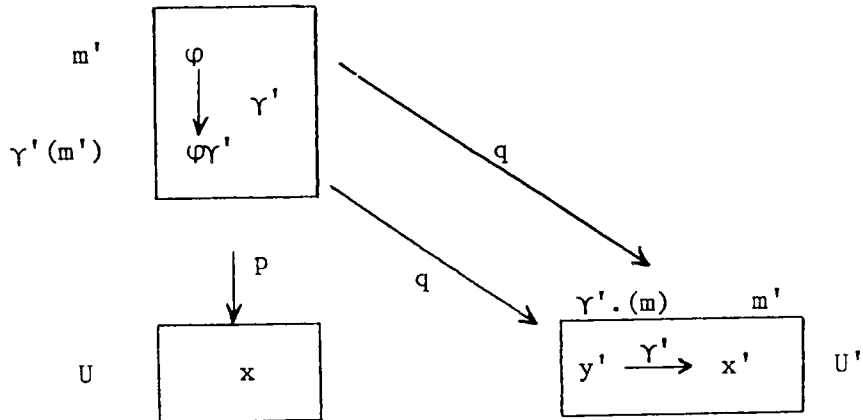


$\Phi$  est donc muni d'une action équivariante de  $\Gamma$  (resp. de  $\Gamma'$ ) à gauche (resp. à droite) et de plus  $p : \Phi \rightarrow U$  est  $\Gamma'$ -principal.

Si  $\mathcal{N}$  est un  $\Gamma$ -faisceau sur  $U'$ , nous allons construire un  $\Gamma$ -faisceau  $\phi^*(\mathcal{N})$  de base  $U$ .

Soit  $V \subset U$  un ouvert, nous allons définir le groupe des sections de  $\phi^*(\mathcal{N})$  au-dessus de  $V$ .

Soit  $s$  une section de  $p_1(q^*(\mathcal{N}))$  au-dessus de  $V \subset U$



Appelons  $\tilde{s} = s/\sim$  où  $\sim$  est la relation suivante :

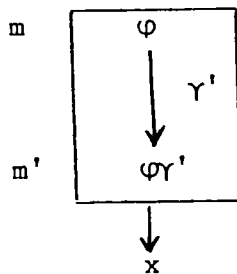
$$m' \sim \gamma'(m') \quad (\text{voir figure ci-dessus})$$

$\phi$  étant  $\Gamma'$ -principal pour tout  $\phi, \phi'$  vérifiant  $p(\phi) = p(\phi')$  il existe  $\gamma' \in \Gamma'$  tel que  $\phi' = \phi\gamma'$ .

Le groupe  $\phi^*(\mathcal{N})(V)$  est défini par :

$$\phi^*(\mathcal{N})(V) = \{\tilde{s} \text{ définies comme ci-dessus}\}.$$

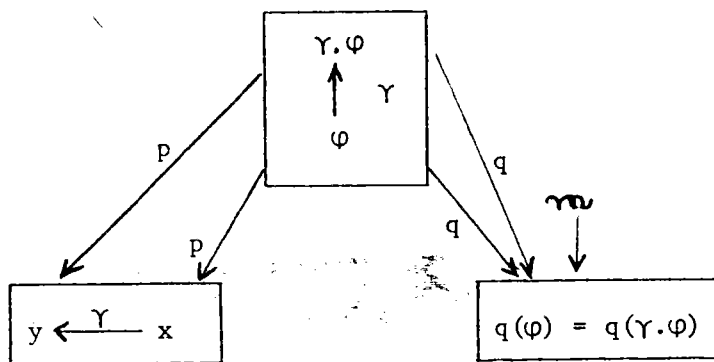
La loi de groupe sur  $\phi^*(\mathcal{N})(V)$  est définie de la façon suivante :



$$m.m' \stackrel{\text{def}}{=} \gamma'(m).m'.$$

Cette définition est compatible à la relation d'équivalence définie précédemment et nous avons donc une structure de groupe sur  $\phi^*(\mathcal{N}_U)(V)$ .

De plus si  $V' \subset V''$ , nous avons les opérations de restriction évidentes.  $\phi^*(\mathcal{N})$  est donc un faisceau de base  $U$ .



La fibre de  $\phi^*(\mathcal{N})$  en  $x$  est :

$$\phi^*(\mathcal{N})_x = \{ \bar{m}^x / \pi(\bar{m}) = q(\varphi) \text{ et } p(\varphi) = x \}.$$

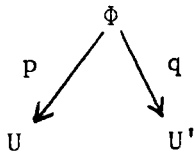
Si  $x \xrightarrow{\gamma} y$ ,  $\gamma$  définit un isomorphisme entre la fibre en  $x$  et celle de  $y$  ;

$$\begin{aligned} \gamma : (\phi^*(\mathcal{N}))_x &\longrightarrow (\phi^*(\mathcal{N}))_y \\ \bar{m}^x &\longrightarrow \bar{m}^y. \end{aligned}$$

$\phi^*(\mathcal{N})$  est donc un  $\Gamma$ -faisceau.

### 3.- IMAGE DIRECTE D'UN $\Gamma$ -FAISCEAU PAR UN HOMOMORPHISME GENERALISE

Soit  $\phi$  un espace topologique définissant un homomorphisme généralisé entre deux groupoïdes  $\Gamma$  et  $\Gamma'$ .



$\phi$  est donc muni d'une action équivalente de  $\Gamma$  (resp. de  $\Gamma'$ ) à gauche (resp. à droite).

De plus  $\phi \xrightarrow{p} U$  est  $\Gamma'$ -principal.

Soit  $(U_i)_{i \in I}$  un recouvrement ouvert de  $U$  trivialisant pour l'homomorphisme généralisé  $\phi$  :

Soit  $\Gamma_i$  la catégorie  $\Gamma_i = \{\gamma \in \Gamma / \alpha(\gamma) \in U_i \text{ et } \beta(\gamma) \in U_i\}$ .

Nous avons donc une famille  $(F_i)$  de foncteurs :

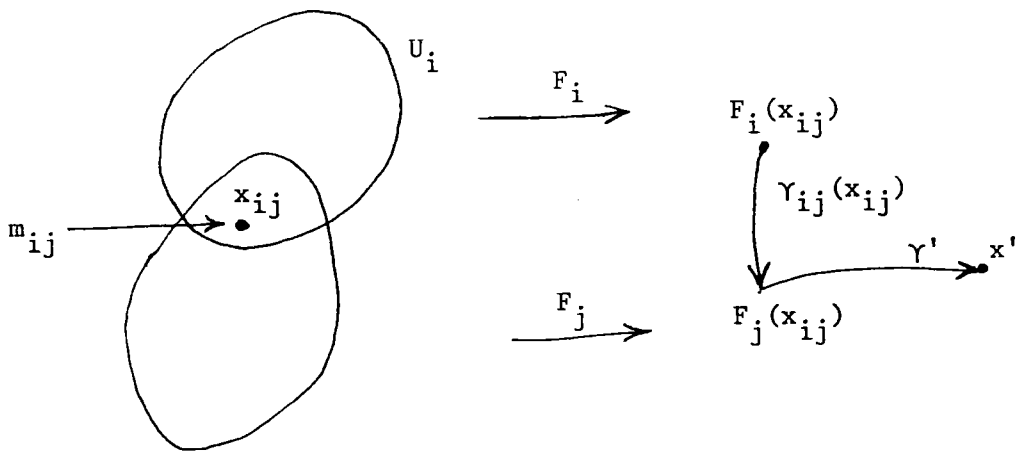
$$F_i : \Gamma_i \rightarrow \Gamma'$$

Supposons que  $\forall i : F_i$  vérifie l'hypothèse :

$$(H) \text{ (i) } F_i^{-1}(x') \text{ est une orbite de } \Gamma_i \text{ pour tout } x' \in U'.$$

Soit maintenant  $\mathcal{M}$  un  $\Gamma$ -faisceau sur  $U$ ,  $\mathcal{M}$  induit un  $\Gamma_i$ -faisceau sur  $U_i$  et comme pour tout  $i$ ,  $F_i$  vérifie l'hypothèse  $(H_i)$ , nous savons construire un faisceau  $F_{i!}(\mathcal{M}_i)$  sur  $U'$  qui est de plus un  $\Gamma'$ -faisceau.

Nous avons donc au-dessus de  $U'$  une famille  $(F_{i!}(\mathcal{M}_i))_{i \in I}$  que nous allons recoller de la façon suivante :



On identifie les germes des sections de  $F_{i!}(\mathcal{M}_i)$  et de  $F_{j!}(\mathcal{M}_j)$  par la relation suivante :

$$(R) \quad (m_{ij}, \gamma', j) \sim (m_{ij}, \gamma' \circ \gamma_{ij}(\pi(m_{ij})), i)$$

pour tout  $m_{ij}$  vérifiant

$$\pi(m_{ij}) \in U_i \cap U_j$$

où  $\pi$  désigne la projection  $\pi : \mathcal{M} \rightarrow U$  qui fait de  $\mathcal{M}$  un espace étalé au-dessus de  $U$ .

Nous obtenons donc un faisceau de base  $U'$  dont la fibre en  $x'$  est :

$$\Phi_!(\mathcal{M})(x') = \{\overline{(m, \gamma')}\} \text{ définies précédemment}.$$

C'est de plus un  $\Gamma'$ -faisceau car si  $\gamma' : x' \rightarrow y'$ ,  $\gamma' \in \Gamma'$  alors  $\gamma'$  définit un isomorphisme :

$$\begin{aligned} \Phi_!(\mathcal{M})_{x'} &\rightarrow \Phi_!(\mathcal{M})_{y'} \\ (m, \gamma'') &\rightarrow \overline{(m, \gamma' \circ \gamma'')} \end{aligned}$$

car l'application  $(m, \gamma'') \rightarrow (m, \gamma' \circ \gamma'')$  est compatible aux relations d'équivalence définissant les faisceaux  $F_{i!}(\mathcal{M}_i)$  et à la relation (R) définie ci-dessus.

#### 4.- ADJONCTION DANS LE CAS D'UN HOMOMORPHISME GENERALISE

Tout comme dans le cas classique, nous allons voir que le foncteur image réciproque  $\Phi^*$  pour les  $\Gamma'$ -faisceaux est, moyennant certaines hypothèses, l'adjoint à gauche du foncteur image directe  $\Phi_!$ .

Définitions :

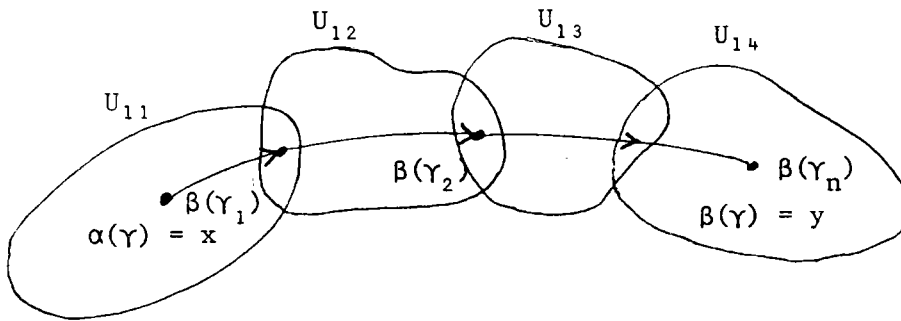
Soit  $\Gamma$  un groupoïde et  $V \subset U(\Gamma)$  un ouvert. Nous noterons

$$\Gamma|_V = \{\gamma \in \Gamma / \alpha(\gamma) \in V \text{ et } \beta(\gamma) \in V\}.$$

Soit  $(U_i)_{i \in I}$  un recouvrement ouvert de  $U(\Gamma)$ . Nous dirons que est un groupoïde régulier si :

$\forall \gamma \in \Gamma ; \exists \gamma_{ij} \in \Gamma|_{U_{ij}}$  famille finie tel que :

$$\gamma = \gamma_{i_1} \circ \gamma_{i_2} \circ \dots \circ \gamma_{i_n}$$

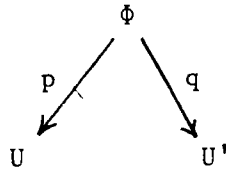


Exemples :

- 1) Le groupoïde d'holonomie d'un feuilletage est régulier.
- 2)  $\Gamma_n^*$  est régulier.
- 3) Le groupoïde fondamental d'un espace topologique est régulier et de façon générale la plupart des groupoïdes fréquemment rencontrés sont réguliers.

Adjonction :

Soit  $\phi$  un espace topologique réalisant un homomorphisme généralisé entre  $\Gamma$  et  $\Gamma'$ .



Supposons que  $\Gamma$  soit régulier et que  $(U_i)_{i \in I}$  soit un recouvrement trivialisant pour  $\phi$  (nous avons des homomorphismes classiques entre  $U_i$  et  $U'$ ).

Supposons que pour tout  $i \in I$  :

$F_i : U_i \rightarrow \Gamma'$  est un foncteur plein.

Soit maintenant  $\mathcal{M}$  un  $\Gamma$ -faisceau sur  $U$  et  $\mathcal{N}$  un  $\Gamma'$ -faisceau sur  $U'$ . D'après ce qui a été fait dans le cas classique, nous avons

$$\forall i \quad \text{hom}_{\Gamma|_{U_i}}((\phi^* \mathcal{M})|_{U_i}, \mathcal{M}|_{U_i}) \sim \text{hom}_{\Gamma'}(\mathcal{N}, \phi_! (\mathcal{M}|_{U_i})).$$

$\Gamma$  étant un groupoïde régulier, l'action des éléments de  $(\Gamma|_{U_i})$  détermine celle de tout élément de  $\Gamma$  puisque

$$\forall x, y \in U_i \quad \forall \gamma_i \in \Gamma_{U_i}, \quad \forall h \in \text{hom}_{\Gamma_i}(\phi^*(\mathcal{M}), \mathcal{M})$$

$$\begin{array}{ccc}
 (\phi^*(\mathcal{M}))_x & \xrightarrow{\gamma_i} & (\phi^*(\mathcal{M}))_y \\
 \downarrow h_x & & \downarrow h_y \\
 \mathcal{M}_x & \xrightarrow{\gamma_i} & \mathcal{M}_y
 \end{array}$$

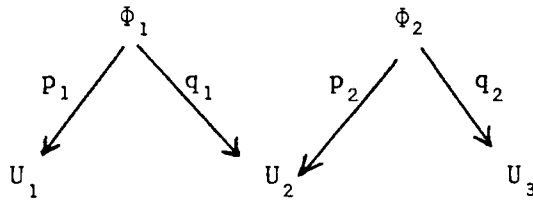
Nous avons donc commutativité du diagramme pour tout  $\gamma \in \Gamma$ .  
 Nous avons bien l'équivalence :

$$\text{hom}_{\Gamma}(\phi^*(\mathcal{M}), \mathcal{M}) \sim \text{hom}_{\Gamma}(\mathcal{M}, \phi_1(\mathcal{M}))$$

5.- COMPOSITION D'HOMOMORPHISMES GENERALISES DE GROUPOÏDES

Soit  $\phi_1$  un espace topologique réalisant un homomorphisme généralisé de groupoïdes entre  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ , et soit  $\phi_2$  un espace réalisant un homomorphisme généralisé entre  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_3$ . Nous allons construire un espace  $\phi$  qui réalisera un homomorphisme généralisé entre  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_3$ . ( $\phi$  pourra être noté  $\phi_2\phi_1$ ).

Nous sommes donc dans la situation suivante :



Prenons  $\phi_1 \times_{U_2} \phi_2$ . Cet espace est muni de deux projections

$$p : \phi_1 \times_{U_2} \phi_2 \rightarrow U_1 \quad p(\varphi_1, \varphi_2) = p_1(\varphi_1)$$

$$q : \phi_1 \times_{U_2} \phi_2 \rightarrow U_3 \quad q(\varphi_1, \varphi_2) = q_2(\varphi_2)$$

De plus nous avons une action de  $\Gamma_2$  sur  $\phi_1 \times_{U_2} \phi_2$  qui est la suivante

$$\text{Si } (\varphi_1, \varphi_2) \in \phi_1 \times_{U_2} \phi_2 \text{ alors } \alpha(\varphi_1) = p_2(\varphi_2) = U_2.$$

$$\text{Soit } \gamma_2 \in \Gamma \text{ tel que } \alpha(\gamma_2) = U_2.$$



Alors  $\gamma_2$  agit sur  $\varphi_1$  avec  $p_1(\varphi_1) = p_1(\varphi_1\varphi_2)$ .

De même  $\gamma_2$  agit sur  $\varphi_2$  avec  $q_2(\varphi_1) = q_2(\gamma_2\varphi_2)$

Autrement dit  $(\varphi_1\gamma_2, \gamma_2\varphi_2)$  est dans la même fibre que  $(\varphi_1, \varphi_2)$  par la projection  $p$  (resp. la projection  $q$ ).

Notons  $\gamma_2 \cdot (\varphi_1, \varphi_2) = (\varphi_1\gamma_2, \gamma_2\varphi_2)$ .

Nous avons donc une action de  $\Gamma_2$  sur  $\phi_1 \times_{U_2} \phi_2$ . Notons  $\Phi$  le quotient de  $\phi_1 \times_{U_2} \phi_2$  par cette action  $\Phi = \phi_1 \times_{U_2} \phi_2 / \Gamma_2$ .

La relation d'équivalence définie par  $\Gamma_2$  laissant chaque fibre de  $p$  (resp. de  $q$ ) invariante la projection  $p : \phi_1 \times_{U_2} \phi_2 \rightarrow U_1$  (resp.  $q : \phi_1 \times_{U_2} \phi_2 \rightarrow U_2$ ) passe au quotient et nous avons une application  $p : \Phi \rightarrow U_1$  (resp.  $q : \Phi \rightarrow U_2$ ).

Remarques :

a) Remarquons que dans le cas d'homomorphismes classiques, on retrouve la composition des fonctions au sens usuel.

C'est-à-dire que si

$$\Gamma_2 \xrightarrow{F} \Gamma_2 \quad \text{et} \quad \Gamma_2 \xrightarrow{G} \Gamma_3$$

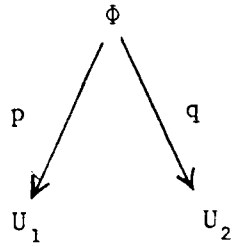
sont deux foncteurs continus covariants,  $F$  définit un homomorphisme généralisé  $\phi_1$  et  $G$  définit un homomorphisme généralisé  $\phi_2$ .



alors  $\Phi = \phi_1 \times_{U_2} \phi_2 / \Gamma_2 \approx U_1 \times_{U_3} \Gamma_3$  où  $U_1$  est muni de la projection

$$U_1 \xrightarrow{GF} U_3$$

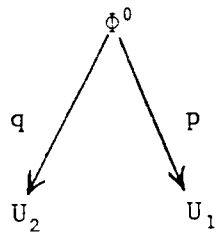
b) Si  $\phi$  définit une équivalence entre  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$



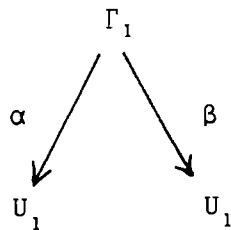
avec  $p : \phi \rightarrow U_1$   $\Gamma_2$ -principal.

De plus soit  $\phi^0$  l'espace topologique ayant même espace sous-jacent que  $\phi$  et muni des deux actions de  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ .

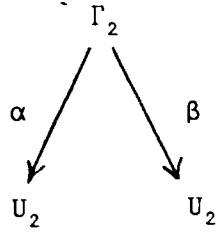
$$\forall \gamma_1 \in \Gamma_1 ; \phi \cdot \gamma_1 \stackrel{\text{def}}{=} \gamma_1^{-1} \cdot \phi \quad \gamma_2 \cdot \phi \stackrel{\text{def}}{=} \phi \gamma_2^{-1}$$



On voit immédiatement que  $\phi = \phi \times_{U_2} \phi^0 / \Gamma_2 \approx \Gamma_1$  et les deux projections sur  $U_1$  ne sont autres que les projections :



De même  $\phi' = \phi^0 \times_{U_1} \phi / \Gamma_1 \approx \Gamma_2$  et les deux projections sur  $U_2$  ne sont autres que les projections :



nous avons donc  $\phi^0 \circ \phi = \text{Id}_{\Gamma_1}$  et  $\phi \circ \phi^0 = \text{Id}_{\Gamma_2}$ .

c) Si  $\phi = \phi_2 \circ \phi_1$  pour tout  $\Gamma_1$ -faisceau  $\mathcal{M}$ , nous avons

$$\phi_1(\mathcal{M}) = \phi_2! \circ \phi_1!(\mathcal{M}).$$

Et pour tout  $\Gamma_3$ -faisceau  $\mathcal{N}$ , nous avons

$$(\phi_2 \circ \phi_1)^*(\mathcal{N}) = \phi_1^* \circ \phi_2^*(\mathcal{N}).$$

En résumé  $(\phi_2 \circ \phi_1)! = \phi_2! \circ \phi_1!$

$$(\phi_2 \circ \phi_1)^* = \phi_1^* \circ \phi_2^*.$$

Il en résulte que si  $\phi$  est un isomorphisme généralisé de groupoïdes, comme nous avons vu qu'il existe  $\phi^0$  tel que  $\phi^0 \circ \phi = \text{id}_{\Gamma_1}$  et  $\phi \circ \phi^0 = \text{id}_{\Gamma_2}$ , la catégorie des  $\Gamma_1$ -faisceaux est équivalente à la catégorie des  $\Gamma_2$ -faisceaux.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BREDON : Sheaf theory. New York : Mc Graw-Hill.
- [2] CONNES : A survey of foliations and operator algebras, preprint, I.H.E.S., 1981.
- [3] CODEMENT : Théorie des faisceaux, Hermann.
- [4] HAEFLIGER : Homotopy and Integrability, Manifolds, Amsterdam, Springer Lectures notes, 197, (1970), 133-163.
- [5] HAEFLIGER : Differentiable cohomology, Cours donné au CIME, 1976.
- [6] HAEFLIGER : Groupoïdes d'holonomie et classifiants. Preprint.
- [7] HILTON and STAMMBACH : A course in homological algebra. G.T.M.L. Springer.
- [8] MAC LANE : Homology 114 Grundlehren der mat. wiss. Springer.
- [9] MAC LANE : Catégories for the working mathematicien. GTM 5, Springer.
- [10] ROGER : Méthodes homotopiques et cohomologiques en théorie des feuilletages - Thèse Paris Orsay 1976.
- [11] SPANIER : Algebraic topology, Springer.