



HAL
open science

Systèmes différentiels périodiques avec symétries de dimension 4

Marie-Hélène Tihami

► **To cite this version:**

Marie-Hélène Tihami. Systèmes différentiels périodiques avec symétries de dimension 4. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paul Verlaine - Metz, 1984. Français. NNT : 1984METZ011S . tel-01775669

HAL Id: tel-01775669

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01775669>

Submitted on 24 Apr 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

T H E S E

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE -METZ	
N° inv.	1984022S
Cote	SM3 84/11
Loc	Magasin

présentée à l'Université de METZ, le 5 Juin 1984.

pour obtenir le titre de Docteur en Mathématiques

Spécialité : *Equations différentielles et Contrôle Optimal*

Mention : *Mathématiques Appliquées*

PAR MADAME MARIE-HÉLÈNE T I H A M I

intitulée : SYSTEMES DIFFERENTIELS PERIODIQUES AVEC SYMETRIES
DE DIMENSION 4.



JURY :

Président : M. MARTINET, professeur à l'Université Louis Pasteur
de STRASBOURG

Membres : MM. J.P. DAX, professeur à l'Université de METZ

C. ROGER, professeur à l'Université de METZ

B. SCHMITT, professeur à l'Université de METZ

INTRODUCTION

Soit (f) un système différentiel p -périodique de la forme :

$$(f) \quad \frac{dx}{dt} = f(t,x); \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

Il est difficile d'étudier en général un tel système et en particulier de pouvoir dire quand est-ce qu'il admet des solutions périodiques.

En faisant des hypothèses de symétrie sur le système, on peut obtenir des résultats comme on l'a vu en dimension 2 dans les thèses de KARR [1] et MAZZANTI [5]. Dans ce travail, nous nous intéressons à des systèmes différentiels dans \mathbb{R}^4 , qui vérifient les hypothèses suivantes :

- P1) (f) est p -périodique c'est à dire $\exists p \in \mathbb{R}, f(t+p,x) = f(t,x)$
- P2) (f) admet la symétrie par rapport à un espace affine S , au temps α , c'est à dire $f(\alpha+t,s(x)) = s(-f(\alpha-t,x))$

Nous allons voir qu'un tel système admet toujours des solutions p -périodiques non triviales lorsque (f) est linéaire et S est un espace affine de dimension 3.

Le premier chapitre est consacré aux propriétés générales des systèmes satisfaisant P1) et P2). A la fin de ce chapitre, nous énonçons un théorème-clé qui permet de détecter s'il existe des solutions p -périodiques ou $2p$ -périodiques en faisant appel à la demi-application de Poincaré.

Dans le chapitre II, nous étudions les systèmes p -périodiques symétriques linéaires qui présentent un grand intérêt.

En effet, un système p -périodique admettant la symétrie S est, au voisinage d'une solution p -périodique, approché au premier ordre par un système linéaire de même nature.

Le théorème-clé du premier chapitre est exploité pour prouver que si S est de dimension 1 ou 3 alors on a une infinité de solutions périodiques pour le système linéaire étudié. Si S est de dimension 2 des exemples de systèmes n'admettant pas de solutions périodiques sont donnés à la fin du chapitre.

Le chapitre III débute par l'étude détaillée des systèmes linéaires autonomes vérifiant P_2). Ensuite, nous montrons que pour des perturbations conservant les symétries suffisamment petites, l'existence de solutions périodiques symétriques est conservée lorsque S est de dimension 3.

Dans le chapitre IV, on s'intéresse aux systèmes non linéaires, à paramètres, symétriques.

Diverses possibilités se présentent et nous arrivons à conclure quant à l'existence de solutions périodiques isolées ou non en regardant l'équation aux variations.

L'objet du dernier chapitre est l'exposé d'un exemple numérique; la méthode utilisée est celle des symétries.

Les résultats que nous avons obtenus dans \mathbb{R}^4 se généralisent sans difficulté aux systèmes différentiels de \mathbb{R}^n admettant des symétries par rapport à un espace S de dimension 1 ou de codimension 1, ainsi qu'aux systèmes différentiels de \mathbb{R}^{2n} admettant des symétries par rapport à un espace S de dimension n .

I. DEFINITIONS ET PROPRIETES DES SYSTEMES DIFFERENTIELS PERIODIQUES AVEC SYMETRIES.

- I.1. Définitions.
- I.2. Propriétés des solutions de systèmes différentiels admettant une symétrie.
- I.3. Propriétés des systèmes différentiels admettant des "symétries composées" et de leurs solutions.
- I.4. Systèmes p-périodiques avec symétries et solutions p-périodiques.
- I.5. Exemples.

II. SYSTEMES DIFFERENTIELS PERIODIQUES ADMETTANT DES SYMETRIES.

- II.1. Forme de la matrice du système et de la matrice fondamentale associée
- II.2. Une classification de L_i^p
- II.3. Une classification de L_{ij}^p

III. SYSTEMES AVEC SYMETRIES ADMETTANT UNE PARTIE LINEAIRE AUTONOME.

- III.1. Systèmes symétriques dont la partie linéaire est un élément de L_1^p
- III.2. Systèmes symétriques dont la partie linéaire est un élément de L_{12}^p

IV. SYSTEMES DIFFERENTIELS PERIODIQUES AVEC SYMETRIES

- IV.1. Equations aux variations.
- IV.2. Stabilité.
- IV.3. Systèmes différentiels périodiques symétriques dépendant de paramètres.

V. ETUDE NUMERIQUE

- V.1. Introduction.
- V.2. Méthode numérique des symétries dans le cas (A_1, E_1)
- V.3. Etude du système paramétré par a et b
$$\begin{aligned}x'' + 2x^3 + bXYZ &= a \cos t \\ Y' &= X \\ Z' &= XY^2\end{aligned}$$

CHAPITRE I - DEFINITIONS ET PROPRIETES DES SYSTEMES DIFFERENTIELS
PERIODIQUES AVEC SYMETRIES.

Dans ce chapitre, nous définissons la notion de système différentiel symétrique par rapport à un espace S de \mathbb{R}^4 .

Nous énonçons certaines propriétés de ces systèmes, en particulier nous montrons comment on obtient des solutions périodiques symétriques.

Nous nous référons aux thèses de B.Karr [1] et S.Mazzanti [5] qui ont abordé ces problèmes en dimension 2.

I.1. Définitions

Notre étude est limitée à \mathbb{R}^4 muni d'une origine 0 et d'un système de coordonnées (x_1, x_2, x_3, x_4) .

Soit :

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (f)$$

un système différentiel de dimension 4,

où $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ et $f = (f_1, f_2, f_3, f_4) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$

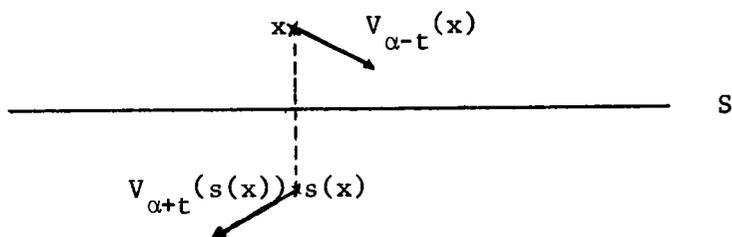
admet des dérivées partielles définies et continues par rapport à x et est continue par morceaux en t .

Remarque. Les conditions imposées sur (f) assurent l'existence et l'unicité d'une solution ainsi que sa dépendance continue en les conditions initiales.

I.1.1. Définition de la symétrie par rapport à un espace $S \subset \mathbb{R}^4$
au temps $\alpha (\alpha \in \mathbb{R})$

On note $V_t(x)$ le vecteur $f(t, x)$ admettant x comme origine et s la symétrie par rapport à S parallèlement à \bar{S} , où \bar{S} est un supplémentaire de S . On dit que (f) est un système différentiel avec symétrie S au temps α si et seulement si :

$$V_{\alpha+t}(s(x)) = s(-V_{\alpha-t}(x)); (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4$$



Remarque. si (f) est un système différentiel avec symétrie S, au temps α , alors :

$$f(\alpha+t, s(x)) = s(-f(\alpha-t, x)), \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4$$

Dans toute la suite, S (ou éventuellement S1, S2, S3) désignera un axe OX_i , un plan $OX_i X_j$, un espace $OX_i X_j X_k$; ($1 \leq i < j < k \leq 4$). En fait, par raison d'analogie évidente, nous n'appliquons la définition géométrique précédente qu'aux systèmes admettant une symétrie au temps $\alpha \in \mathbb{R}$, par rapport à OX_1 , $OX_1 X_2$ ou bien $OX_2 X_3 X_4$.

I.1.2. Propriétés

Symétrie par rapport à l'axe OX_1 (noté A1)

(f) est avec symétrie A1 au temps α si et seulement si

$$f_1(\alpha+t, x_1, x_2, x_3, x_4) = -f_1(\alpha-t, x_1, -x_2, -x_3, -x_4)$$

$$f_j(\alpha+t, x_1, x_2, x_3, x_4) = f_j(\alpha-t, x_1, -x_2, -x_3, -x_4); (j \neq 1)$$

On notera $F_{A_i, \alpha}$ l'ensemble des systèmes différentiels avec symétrie A_i au temps α et $f_{A_i, \alpha}$ un élément de $F_{A_i, \alpha}$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Symétrie par rapport au plan $OX_1 X_2$ (noté P12)

(f) est avec symétrie P12 au temps α si et seulement si

$$f_j(\alpha+t, x_1, x_2, x_3, x_4) = -f_j(\alpha-t, x_1, x_2, -x_3, -x_4); j=1, 2$$

$$f_j(\alpha+t, x_1, x_2, x_3, x_4) = f_j(\alpha-t, x_1, x_2, -x_3, -x_4); j=3, 4$$

On notera $F_{P_{ij},\alpha}$ l'ensemble des systèmes différentiels avec symétrie P_{ij} au temps α et $f_{P_{ij},\alpha}$ un élément de $F_{P_{ij},\alpha}$.

Symétrie par rapport à l'espace $Ox_2x_3x_4$ (noté E_1)

(f) est avec symétrie E_1 au temps α si et seulement si :

$$f_1(\alpha+t, x_1, x_2, x_3, x_4) = f_1(\alpha-t, -x_1, x_2, x_3, x_4)$$

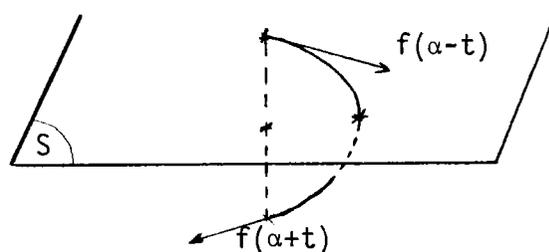
$$f_j(\alpha+t, x_1, x_2, x_3, x_4) = -f_j(\alpha-t, -x_1, x_2, x_3, x_4); j \neq 1$$

On notera $F_{E_i,\alpha}$ l'ensemble des systèmes différentiels avec symétrie E_i au temps α et $f_{E_i,\alpha}$ un élément de $F_{E_i,\alpha}$.

I.2. Propriétés des solutions de systèmes différentiels admettant une symétrie

Soit $S \in \{A_i, P_{ij}, E_i, 1 \leq i < j \leq 4\}$ et $(f_{S,\alpha})$ un système différentiel avec symétrie S au temps α .

Nous montrons que toute orbite d'une solution de $(f_{S,\alpha})$ qui traverse S au temps α est symétrique par rapport à S .



On notera :

$F_{S,\alpha}$: l'ensemble des systèmes différentiels avec symétrie S au temps α

$Sol(f)$: l'ensemble des solutions de (f)

$I(\varphi)$: l'ensemble de définition maximal de $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ où $\varphi \in Sol(f)$

Remarque 1 : Si $\varphi \in Sol(f_{S,\alpha})$ et $\varphi(\alpha) \in S$, alors :

$I(\varphi)$ est un intervalle ouvert contenant α donc il existe un intervalle ouvert

I centré en α maximal contenu dans $I(\varphi)$.

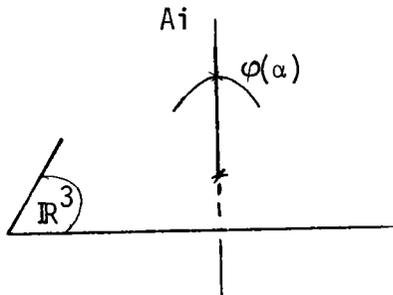
Lemme 1-A

Soit $(f_{A_i, \alpha})$ et $\varphi \in \text{Sol}(f_{A_i, \alpha})$ telle que $\varphi(\alpha) \in A_i$, alors $\forall t \in I$:

$$\varphi_i(t) = \varphi_i(2\alpha - t)$$

$$\varphi_j(t) = -\varphi_j(2\alpha - t), \quad j \neq i.$$

L'orbite de φ dans l'espace des phases $OX_1X_2X_3X_4$ est donc symétrique par rapport à l'axe OX_i (noté A_i).



Démonstration

Soit $u(t) = (u_k(t))_{k=1 \text{ à } 4}$ où :

$$u_i(t) = \varphi_i(2\alpha - t)$$

$$u_j(t) = -\varphi_j(2\alpha - t), \quad j \neq i$$

alors :

$$\dot{u}_i(t) = -\dot{\varphi}_i(2\alpha - t) = -f_i(2\alpha - t, \varphi(2\alpha - t))$$

$$\dot{u}_j(t) = f_j(2\alpha - t, \varphi(2\alpha - t))$$

En appliquant (I.1.2.) pour A_i , au temps α , on obtient :

$$\dot{u}_k(t) = f_k(t, u_k(t)), \quad k \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

D'où $u \in \text{Sol}(f_{A_i, \alpha})$. De plus :

$$\begin{cases} u(\alpha) = \varphi(\alpha) \\ \dot{u}(\alpha) = \dot{\varphi}(\alpha) \end{cases} \Rightarrow \forall t \in I(\varphi), u(t) = \varphi(t).$$

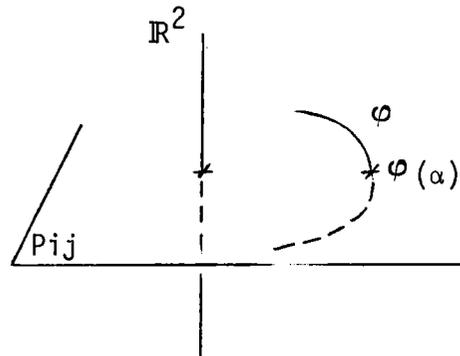
Lemme 1-P

Soit $(f_{P_{ij}, \alpha})$ et $\varphi \in \text{Sol}(f_{P_{ij}, \alpha})$ telle que $\varphi(\alpha) \in P_{ij}$, alors $\forall t \in I$:

$$\varphi_k(t) = \varphi_k(2\alpha - t); k \in \{i, j\}$$

$$\varphi_k(t) = -\varphi_k(2\alpha - t); k \notin \{i, j\}.$$

L'orbite de φ dans l'espace des phases $OX_1X_2X_3X_4$ est donc symétrique par rapport au plan OX_iX_j (noté P_{ij}).



Démonstration

Elle est analogue à celle du lemme 1-A avec u vérifiant :

$$u_k(t) = \varphi_k(2\alpha - t); k \in \{i, j\}$$

$$u_k(t) = -\varphi_k(2\alpha - t); k \notin \{i, j\}$$

Lemme 1-E

Soit $(f_{E_i, \alpha})$ et $\varphi \in \text{Sol}(f_{E_i, \alpha})$ telle que $\varphi(\alpha) \in E_i$; alors $\forall t \in I$:

$$\varphi_i(t) = -\varphi_i(2\alpha - t)$$

$$\varphi_j(t) = \varphi_j(2\alpha - t); j \neq i.$$

L'orbite de φ dans l'espace des phases $OX_1X_2X_3X_4$ est symétrique par rapport à l'espace complémentaire à OX_i dans \mathbb{R}^4 (noté E_i).

Démonstration

Elle est analogue à celle du lemme 1-A avec u vérifiant

$$u_i(t) = -\varphi_i(2\alpha - t)$$

$$u_j(t) = \varphi_j(2\alpha - t); j \neq i.$$

Remarque 2 : Si $\varphi \in \text{Sol}(f_{S,\alpha})$ et $\varphi(\alpha) \in S$, alors :

$I(\varphi)$ est un intervalle ouvert centré en α ; en effet :

$I(\varphi)$ étant un ouvert, supposons que $I(\varphi) =]t_1, t_2[$

D'après la définition de $(f_{S,\alpha})$, on sait que chacune de ses composantes vérifie une relation de la forme :

$$f_k(t, x_1, x_2, x_3, x_4) = (-1)^v f_k(2\alpha - t, y_1, y_2, y_3, y_4); 1 \leq k \leq 4$$

avec v pair ou impair suivant la symétrie S vérifiée et l'indice k utilisé;

$y_j = (-1)^u x_j$ suivant les mêmes critères.

De plus, comme $\varphi(\alpha) \in S$, d'après les lemmes précédents, on a :

$$\varphi_k(t) = (-1)^{v+1} \varphi_k(2\alpha - t); 1 \leq k \leq 4.$$

On en déduit que puisque φ est définie à droite de t_1 (resp. à gauche de t_2)

φ est aussi définie et prolongeable à droite de $2\alpha - t_1$ (resp. à gauche de $2\alpha - t_2$)

d'où : $t_2 \geq 2\alpha - t_1$ (resp. $t_1 \leq 2\alpha - t_2$)

On a donc :

$$t_2 = 2\alpha - t_1.$$

Résumé

Les trois cas précédents se résument de la manière suivante :

Soit $(f_{S,\alpha})$ et $\varphi \in \text{Sol}(f_{S,\alpha})$ telle que $\varphi(\alpha) \in S$; alors :

- a) $I(\varphi)$ est centré en α
- b) $\varphi(t) = s(\varphi(2\alpha - t)), \forall t \in I(\varphi)$

où s est la symétrie par rapport à S parallèlement à \bar{S}

1.3. Propriétés des systèmes différentiels admettant des "symétries composées" et de leurs solutions

Nous verrons qu'un système différentiel (f) admettant deux symétries, en des temps différents, a des propriétés nouvelles intéressantes :

(f) est périodique (i.e. $\exists T \in \mathbb{R}^*$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t+T,x) = f(t,x)$) et alors, sous certaines conditions, il peut admettre des orbites périodiques.

Dans ce cadre là, nous étudions d'abord les systèmes admettant deux symétries et nous en tirons les conséquences pour des systèmes particuliers : linéaires, par exemple.

Puis, nous généralisons aux systèmes différentiels admettant plus de deux symétries.

I.3.1. Systèmes différentiels admettant deux symétries en des temps différents.

Proposition 1

Soit $S_1, S_2 \in \{A_i, P_{ij}; E_i; \leq i < j \leq 4\}$ et $(f) \in F_{S_1, \alpha} \cap F_{S_2, \beta}$,

alors (f) est :

$2(\beta-\alpha)$ périodique, si $S_1=S_2$

$4(\beta-\alpha)$ périodique, si $S_1 \neq S_2$.

Démonstration

Pour $S_1=S_2=S$, puisque $(f) \in F_{S, \alpha}$ on a :

$$f_k(t, x_1, x_2, x_3, x_4) = (-1)^v f_k(2\alpha - t, y_1, y_2, y_3, y_4)$$

avec v pair ou impair suivant la symétrie S vérifiée et l'indice k utilisé; $y_j = (-1)^u x_j$ suivant les mêmes critères.

De même puisque $(f) \in F_{S, \beta}$:

$$f_k(t, x_1, x_2, x_3, x_4) = (-1)^v f_k(2\beta - t, y_1, y_2, y_3, y_4)$$

d'où l'on déduit :

$$f_k(t, y_1, y_2, y_3, y_4) = f_k(2(\beta-\alpha) + t, y_1, y_2, y_3, y_4)$$

La démonstration se fait de manière analogue pour $S_1 \neq S_2$ en utilisant successivement le fait que $(f) \in F_{S_1, \alpha}$ puis $(f) \in F_{S_2, \alpha}$ deux fois.

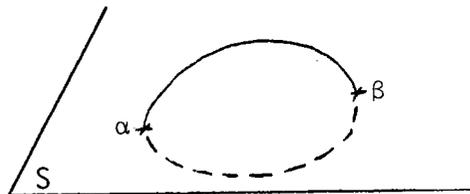
Lemme 2.1.

Soit $(f) \in F_{S, \alpha} \cap F_{S, \beta}$ ($\alpha < \beta$)

Si φ est une solution de (f) vérifiant : $\varphi(\alpha) \in S$ et $\varphi(\beta) \in S$; (i.e. φ vérifie les hypothèses du lemme 1.S aux temps α et β) alors :

- a) $I(\varphi) = \mathbb{R}$
- b) φ est périodique de période $2(\beta - \alpha)$

De plus, l'orbite de φ est symétrique par rapport à S



Démonstration

- a) $I(\varphi) = \mathbb{R}$ car $I(\varphi)$ est centré en α et β avec $\alpha \neq \beta$
- b) Dans chaque cas, on utilise les fonctions u définies au lemme 1.S

On a :

$$u(\beta) = \varphi(2\alpha - \beta)$$

$$\dot{u}(\beta) = \dot{\varphi}(2\alpha - \beta)$$

$$\Rightarrow u(t) = \varphi(t), \forall t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \varphi(2(\beta - \alpha) + t) = \varphi(t), \forall t \in \mathbb{R}$$

Lemme 2.2.

Soit $(f) \in F_{S_1, \alpha} \cap F_{S_2, \beta}$ avec $S_1, S_2 \in \{A_i, P_{ij}, E_i, 1 \leq i < j \leq 4\}$, $S_1 \neq S_2$, $\alpha \leq \beta$.

Si φ est une solution de (f) vérifiant : $\varphi(\alpha) \in S_1$ et $\varphi(\beta) \in S_2$, alors :

- a) $I(\varphi) = \mathbb{R}$
- b) φ est une solution $4(\beta - \alpha)$ périodique; d'orbite symétrique par rapport à S_1 et S_2 donc aussi par rapport à $S_1 \cap S_2$.

En particulier,

si $S_1 \oplus S_2 = \mathbb{R}^4$ alors φ est $2(\beta-\alpha)$ anti-périodique

(i.e. : $\varphi(2(\beta-\alpha)+t) = -\varphi(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$).

et l'orbite de φ est symétrique par rapport à l'origine de l'espace des phases.

Démonstration

Soit u la fonction définie au lemme 1-S pour $S=S_1$ puisque $(f) \in F_{S_1,\alpha}$ et v celle définie pour $S=S_2$ puisque $(f) \in F_{S_2,\beta}$.

Comme $u=\varphi$ et $v=\varphi$, on déduit que $v(2\beta-\alpha)$ appartient à S_1 .

On a donc :

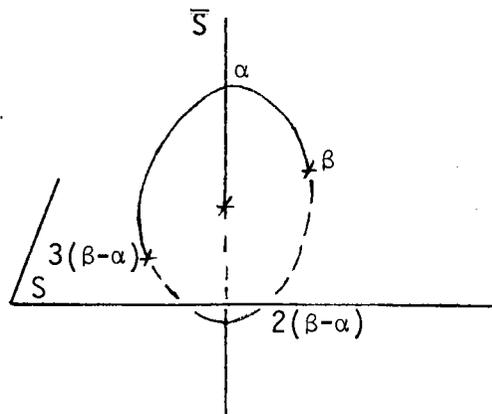
$$(f) \in F_{S_1,\alpha} \cap F_{S_2,2\beta-\alpha}, \varphi(\alpha) \in S_1 \text{ et } \varphi(2\beta-\alpha) \in S_2$$

D'où en appliquant 2.1, on obtient que φ est $2(2\beta-2\alpha)$ périodique. Si

$S_1 \oplus S_2 = \mathbb{R}^4$, φ est symétrique par rapport à S_1 et S_2 donc par rapport à l'origine des phases puisque $S_1 \cap S_2 = o$.

φ est donc impaire par rapport au temps $2(\beta-\alpha)$.

On en déduit que φ est anti-périodique



Examinons le cas particulier où (f) admet deux symétries au même temps α .

I.3.2. Systèmes différentiels admettant deux symétries au même temps α .

Proposition 2

a) Si $S_1 \oplus S_2 = \mathbb{R}^4$, alors $f(t,x) = -f(t,-x)$ et donc $f(t,o) = o$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

La seule solution φ périodique vérifiant $\varphi(\alpha) \in S1$ et $\varphi(\alpha) \in S2$ est la solution identiquement nulle.

b) Réciproquement, si $(f) \in F_{S,\alpha}$ et $f(t,x) = -f(t,-x)$ alors $(f) \in F_{\overline{S},\alpha}$ où \overline{S} est un supplémentaire de S dans \mathbb{R}^4 .

Démonstration

a) Soit si la symétrie par rapport à S_i parallèlement à $\overline{S_i}$; ($i=1,2$)

Comme $\overline{S1}=S2$, on a : $s2 \circ s1 = -Id$.

On va appliquer successivement la définition de $(f) \in F_{S1,\alpha}$ puis celle de $(f) \in F_{S2,\alpha}$. On obtient :

$$f(\alpha+t,x) = -s2 \circ s1(f(\alpha+t,x)) = -s2(f(\alpha-t,s1(x)))$$

$$f(\alpha+t,x) = -f(\alpha-t,s2 \circ s1(x)) = -f(\alpha-t,-x).$$

En outre, puisque $S1 \cap S2 = \{0\}$, $\varphi(\alpha) \in S1$ et $\varphi(\alpha) \in S2 \Rightarrow \varphi(\alpha) = 0$.

De plus, pour tout t ,

$$f(t,0) = -f(t,0) \Rightarrow f(t,0) = 0 \Rightarrow \dot{\varphi}(t) = 0.$$

Sachant qu'il y a existence et unicité des solutions, on en déduit que

$$\varphi \equiv 0.$$

b) Si $(f) \in F_{S,\alpha}$, $f_k(t,x) = (-1)^v f_k(2\alpha-t,y)$

où $y_j = (-1)^u x_j$ avec v et u pairs ou impairs suivant la symétrie S vérifiée et l'indice k utilisé

$$f_k(t,x) = -f_k(t,-x) \Rightarrow f_k(t,x) = (-1)^v f_k(2\alpha-t,-y)$$

D'où :

$$(f) \in F_{\overline{S},\alpha}.$$

I.3.3. Systèmes différentiels admettant plus de deux symétries.

Après l'étude des systèmes différentiels admettant deux symétries, nous examinons si l'on obtient de nouvelles propriétés pour les systèmes différentiels ayant plus de deux symétries.

Par exemple, si $(f) \in F_{S1,\alpha} \cap F_{S2,\alpha+p} \cap F_{S3,\alpha+p'}$, $0 < p < p'$

alors d'après la proposition 1, on sait que (f) est périodique.

Une période est le minimum de $(4(p'-p), 4p)$ pour $S1 \neq S2$; $S2 \neq S3$; $S1 \neq S3$ et p' est multiple de p .

De même dans les autres cas, on obtient la période de (f) en examinant tous les cas possibles de symétries 2 à 2 pour (f) et en appliquant la proposition 1. On fait de même pour toutes les autres propriétés de (f) et des solutions du système différentiel.

L'étude des systèmes différentiels admettant plus de deux symétries revient donc à l'étude des propriétés de (f) en considérant toutes les symétries 2 à 2 possibles pour (f) et les propriétés qui en découlent.

C'est pourquoi, dorénavant, nous nous limiterons à l'étude des systèmes différentiels admettant deux symétries au plus.

I.4. Systèmes p-périodiques avec symétries et solutions p-périodiques

Un système différentiel admettant deux symétries en des temps différents est périodique (cf. I.3. prop. 1). Réciproquement, est-ce qu'un système différentiel périodique avec symétrie $S1$ admet forcément une autre symétrie $S2$? La réponse est affirmative.

Nous appliquons alors I.3. aux systèmes p-périodiques (de période $p \in \mathbb{R}$) et nous énonçons les conditions d'obtention de solutions p-périodiques pour de tels systèmes.

On désignera par :

$F_{S,\alpha}^p$: l'ensemble des systèmes différentiels p-périodiques avec symétrie S au temps α .

$P(f)$: l'ensemble des périodes de (f) .

Lemme 3

- a) si $(f) \in F_{S,\alpha}^p$, alors $\forall p' \in P(f)$, $(f) \in F_{S,\alpha+p'/2}^p$
- b) si $(f) \in F_{S,\alpha}^p \cap F_{S,\beta}^p$, alors $\exists p' \in P(f)$, tel que $\beta \equiv \alpha \pmod{p'/2}$
- c) si $(f) \in F_{S_1,\alpha}^p \cap F_{S_2,\beta}^p (S_1 \neq S_2)$, alors $\exists p' \in P(f)$ tel que $\beta \equiv \alpha \pmod{p'/4}$

Démonstration

a) $f_k(\alpha + \frac{p'}{2} - t, x) = (-1)^v f_k(\alpha - \frac{p'}{2} + t, y)$

où v est pair ou impair suivant la symétrie S vérifiée et l'indice k utilisé; de même $x_k = (-1)^u y_k$. Or $p' \in P(f)$ d'où :

$$f_k(\alpha + \frac{p'}{2} - t, x) = (-1)^v f_k(\alpha + \frac{p'}{2} + t, y).$$

On obtient donc que $(f) \in F_{S,\alpha+p'/2}$.

b) et c) se déduisent de I.3.

Rappel. Soit $(f) \in F_{S,\alpha}^p$ et $\varphi \in \text{Sol}(f)$. Alors l'application :

$$\begin{aligned} T_p : \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ x_0 &\rightarrow \varphi(p+\alpha, \alpha, x_0) \end{aligned}$$

est appelée l'application de Poincaré associée à la période p du système, où $\varphi(t, \alpha, x^0)$ est la solution unique de (f) issue de x^0 au temps initial α . On appellera demi- (resp. quart) d'application de Poincaré, noté $T_{p/2}$ (resp. $T_{p/4}$) l'application :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ x_0 &\rightarrow \varphi(\frac{p}{2} + \alpha, \alpha, x_0) \text{ (resp. } \varphi(\frac{p}{4} + \alpha, \alpha, x_0)). \end{aligned}$$

Des lemmes précédents, on déduit, en posant $\beta = \alpha + \frac{p}{4}$, le théorème :

Théorème 1

En notant $Sol_{S,\alpha}^P(f)$ l'ensemble des solutions $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4)$ de $(f) \in F_{S,\alpha}^P$ qui vérifient $\varphi(\alpha) \in S$ et $\varphi(\alpha+\frac{P}{2}) \in S$; on a :

a) Soit $(f) \in F_{S,\alpha}^P$

$T_{p/2}(S) \cap S \neq \emptyset$ si et seulement si (f) admet des solutions p -périodiques φ appartenant à $Sol_{S,\alpha}^P(f)$ dont les orbites sont symétriques par rapport à S .

b) Soit $(f) \in F_{S_1,\alpha}^P \cap F_{S_2,\alpha+p/4}^P$ avec $S_1 \oplus S_2 = \mathbb{R}^4$

$T_{p/4}(S_1) \cap S_2 \neq \emptyset$ si et seulement si (f) admet des solutions p -périodiques φ appartenant à $Sol_{S_1,\alpha}^P(f) \cap Sol_{S_2,\alpha+p/4}^P(f)$ dont les orbites sont symétriques par rapport à S_1 et S_2 donc par rapport à l'origine de l'espace des phases.

c) Soit $(f) \in F_{S_1,\alpha}^P \cap F_{S_2,\alpha+p/4}^P$ avec S_1 et S_2 non supplémentaires.

$T_{p/4}(S_1) \cap S_2 \neq \emptyset$ si et seulement si (f) admet des solutions p -périodiques φ appartenant à $Sol_{S_1,\alpha}^P(f) \cap Sol_{S_2,\alpha+p/4}^P(f)$ dont les orbites sont symétriques par rapport à S_1 et S_2 , donc par rapport à $S_1 \cap S_2$.

Remarque

a. (OX_i) est porté par A_i et $(OX_j X_k X_l; j \neq i, k \neq i, l \neq i)$ est porté par E_i . On choisit E_i (resp. A_i) comme supplémentaire à A_i (resp. E_i).

b. $(OX_i X_j)$ est porté par P_{ij} et $(OX_k X_l; k, l \notin \{i, j\})$ est porté par P_{kl} . On choisit P_{kl} comme supplémentaire de P_{ij} et on le notera $\overline{P_{ij}}$.

Notations

On notera :

$$F_{(Ai, Ei), \alpha}^p \text{ (resp. } F_{(Pij, \overline{Pij}), \alpha}^p) \text{ l'ensemble } F_{Ai, \alpha}^p \cap F_{Ei, \alpha+p/4}^p$$

$$\text{(resp. } F_{Pij, \alpha}^p \cap F_{\overline{Pij}, \alpha+p/4}^p)$$

$$\text{Sol}_{(Ai, Ei), \alpha}^p(f) \text{ l'ensemble } \text{Sol}_{Ai, \alpha}^p(f) \cap \text{Sol}_{Ei, \alpha+p/4}^p(f)$$

$$\text{Sol}_{(Pij, \overline{Pij}), \alpha}^p(f) \text{ l'ensemble } \text{Sol}_{Pij, \alpha}^p(f) \cap \text{Sol}_{\overline{Pij}, \alpha+p/4}^p(f)$$

I.5. Exemples

a) Soit $x^{(1V)} + f(t, x, x', x'', x''') = 0$ (1) une équation d'ordre 4 avec $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux en t et de classe C^1 par rapport aux quatre derniers arguments. Le système différentiel (1) s'écrit sous la forme d'un système différentiel d'ordre 4 :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= -f(t, x_1, x_2, x_3, x_4) \end{aligned} \quad (1')$$

alors (1') ne vérifie pas les conditions de symétrie par rapport à E1 car on devrait avoir

$$f_2(\alpha+t, x_1, x_2, x_3, x_4) = -f_2(\alpha-t, -x_1, x_2, x_3, x_4)$$

Or,

$$f_2(\alpha+t, x_1, x_2, x_3, x_4) = x_3$$

On vérifie de même que : le système (1) n'admet pas de symétrie par rapport à un espace de dimension 1 ou de dimension 3.

Par contre, (1) peut admettre des symétries par rapport à un espace de dimension 2.

Dans l'espace des phases $(0, X, X', X'', X''')$, ces symétries sont :

symétrie $0XX''$, au temps α , si $f(\alpha+t, x, x', x'', x''') = f(\alpha-t, x, -x', x'', -x''')$

symétrie $0X'X'''$, au temps α , si $f(\alpha+t, x, x', x'', x''') = -f(\alpha-t, -x, x', -x'', x''')$.

b) Soit $x^{(iv)} + f(t) g(x, x'') = 0$ (2) avec $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux en t et $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 .

Si f est paire, alors (2) admet la symétrie $0XX''$ au temps α quelle que soit la fonction g .

c) Soit

$$\begin{aligned} x''' + f(t, x, x', x'', y) &= 0 \\ y' + g(t, x, x', x'', y) &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

avec $f, g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ continues par morceaux en t et de classe C^1 par rapport aux quatre derniers arguments.

Le système (3) peut admettre une symétrie par rapport à un espace de dimension 3

Dans l'espace des phases $(0, X, X', X'', Y)$ cette symétrie est :

symétrie $0XX''Y$ au temps α , si $f(\alpha+t, x, x', x'', y) = -f(\alpha-t, x, -x', x'', y)$

$g(\alpha+t, x, x', x'', y) = -g(\alpha-t, x, -x', x'', y)$

Le système (3) peut admettre la symétrie par rapport à l'axe $0X'$ au temps α , si

$$f(\alpha+t, x, x', x'', y) = f(\alpha-t, -x, x', -x'', -y)$$

$$g(\alpha+t, x, x', x'', y) = g(\alpha-t, -x, x', -x'', -y)$$

Le système $x''' + \sin t y = 0$

$$y' + \sin t x'' = 0$$

admet les symétries $0X'X''Y$ et $0X'$ au temps 0.

En outre, (3) peut admettre sous certaines conditions portant sur f et g les symétries OXX'' et OXY' .

d) Examinons les différentes symétries que peut admettre un système de deux équations du second ordre :

$$\begin{aligned} x'' + f(t, x, x', y, y') &= 0 \\ y'' + g(t, x, x', y, y') &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

avec $f, g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 par rapport aux quatre derniers arguments et continues par morceaux en t .

Le système différentiel (4) peut admettre des symétries planes.

Dans l'espace des phases $(0, X, X', Y, Y')$, ces symétries, au temps α , sont :

Symétrie OXY au temps α si :

$$\begin{aligned} f(\alpha+t, x, x', y, y') &= f(\alpha-t, x, -x', y, -y') \\ g(\alpha+t, x, x', y, y') &= g(\alpha-t, x, -x', y, -y') \end{aligned}$$

Symétrie $OX'Y'$ au temps α si :

$$\begin{aligned} f(\alpha+t, x, x', y, y') &= -f(\alpha-t, -x, x', -y, y') \\ g(\alpha+t, x, x', y, y') &= -g(\alpha-t, -x, x', -y, y') \end{aligned}$$

Symétrie OXY' au temps α si :

$$\begin{aligned} f(\alpha+t, x, x', y, y') &= f(\alpha-t, x, -x', -y, y') \\ g(\alpha+t, x, x', y, y') &= -g(\alpha-t, x, -x', -y, y') \end{aligned}$$

Symétrie $OX'Y$ au temps α si :

$$\begin{aligned} f(\alpha+t, x, x', y, y') &= -f(\alpha-t, -x, x', y, -y') \\ g(\alpha+t, x, x', y, y') &= g(\alpha-t, -x, x', y, -y') \end{aligned}$$

Le système différentiel (4) ne peut admettre de symétries par rapport à un axe ou par rapport à un espace de dimension 3.

En effet, si (4) admettait la symétrie OX , (resp. $OX'Y'Y'$), par exemple, on aurait

$$\begin{aligned} f_3(\alpha+t, x, x', y, y') &= +f_3(\alpha-t, x, -x', -y, -y') \\ &(\text{resp.} = -f_3(\alpha-t, -x, x', y, y')) \end{aligned}$$

or $f_3(t, x, x', y, y') = y'$

donc (4) n'admet pas la symétrie OX , (resp. $OX'YY'$).

On montre de même, que (4) n'admet pas les autres symétries.

En particulier, si l'on a

$$x'' + f(t, x, x') = 0, (5a)$$

$$y'' + g(t, y, y') = 0, (5b)$$

avec $f, g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continues par morceaux en t et de classe C^1 par rapport aux quatre derniers arguments.

Alors le système admet la symétrie plane OXY (resp. $OX'Y'$; resp. $OX'Y$; resp. resp. OXY') dans l'espace des phases $(0, X, X', Y, Y')$ si et seulement si

5a) admet la symétrie OX (resp. OX' ; resp. OX' ; resp. OX) dans l'espace des phases OXX'

5b) admet la symétrie OY (resp. OY' ; resp. OY ; resp. OY') dans l'espace des phases OYY'

CHAPITRE II. SYSTEMES DIFFERENTIELS LINEAIRES PERIODIQUES DE DIMENSION 4
ADMETTANT DES SYMETRIES

L'étude des systèmes différentiels linéaires est une étape importante dans l'étude des systèmes différentiels car la linéarisation permet d'obtenir une première approximation dans de nombreux problèmes non linéaires. Nous verrons en particulier dans le paragraphe (II.2.) que cette étude permet d'obtenir des résultats précis dans le cas non linéaire.

II.1. Forme de la matrice du système et de la matrice fondamentale associée

Nous montrons que l'ensemble des systèmes différentiels linéaires p-périodiques symétriques L^*P , se décompose en deux parties (les systèmes admettant les symétries (A_i, E_i) ou $(P_{ij}, \overline{P_{ij}})$).

Pour un élément (A) de L^*P , nous verrons qu'il suffit de déterminer la matrice fondamentale associée au temps $\frac{p}{2}$, $X_A(\frac{p}{2})$, pour obtenir la dimension de l'espace vectoriel des solutions p-périodiques.

Nous donnons donc les propriétés de $X_A(t)$ pour A élément de L^P .

II.1.1. Généralités sur les systèmes différentiels linéaires périodiques symétriques.

a) Soit L^P l'ensemble des systèmes différentiels linéaires p-périodiques de dimension 4

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \quad (A)$$

avec $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ et où $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}(4, \mathbb{R})$ est continue par morceaux et p-périodique (p n'est pas forcément la période minimale).

Les coefficients de A seront désignés par $a_{k\ell}$; $k, \ell \in \{1, 2, 3, 4\}$

b) Soit $L_{S, \alpha}^P$ l'ensemble des systèmes différentiels p-périodiques linéaires de dimension 4 admettant la symétrie S au temps $\alpha \in \mathbb{R}$; $S \in \{A_i, P_{ij}, E_i \mid 1 \leq i < j \leq 4\}$

$$\text{On a : } L_{S, \alpha}^P = F_{S, \alpha}^P \cap L^P$$



Remarque 1. Soit $(A) \in L^p$, alors $A(t) x = -A(t)(-x)$

On déduit de la proposition (2) (§ I.3.) que :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, L_{S,\alpha}^p = L_{\bar{S},\alpha}^p$$

où \bar{S} est le supplémentaire de S dans \mathbb{R}^4 défini dans I.4.

Remarque 2. a) Si $(A) \in L_{S,\alpha}^p$, alors $(A) \in L_{S,\alpha+p/2}^p$ d'après le lemme 3.

b) Si $(A) \in L_{S,\alpha}^p \cap L_{\bar{S},\alpha+p/4}^p$, alors d'après le lemme 3 (§I.4.)

et la remarque 1, on en déduit que (A) est un système différentiel linéaire $p/2$ périodique (i.e. $(A) \in L^{p/2}$).

Conclusion

Des deux remarques précédentes, on déduit que

$$\text{si } (A) \in L_{A1,0}^p, \text{ alors } (A) \in L_{E1,p/2}^p;$$

en effet

$$L_{A1,0}^p = L_{A1,p/2}^p = L_{E1,p/2}^p = L_{E1,0}^p$$

Sans restreindre la généralité on peut supposer $\alpha = 0$.

On désignera par

$$L_i^p = L_{Ai,0}^p = L_{Ei,0}^p; \quad i \in \{1,2,3,4\}$$

$$L_{ij}^p = L_{Pij,0}^p = L_{\bar{P}ij,0}^p; \quad 1 \leq i < j \leq 4$$

$$L^{*p} = \bigcup_{i,j} (L_i^p, L_{ij}^p)$$

En utilisant la remarque 2, on s'aperçoit que :

$$L^{*p/2} = \bigcup_S (L_{S,0}^p \cap L_{\bar{S},p/4}^p)$$

En utilisant les définitions des systèmes différentiels symétriques, on obtient la proposition suivante qui donne la forme d'un système différentiel.

Proposition 3

a) Un système (A) appartenant à L^P est dans L^P_i ($i \in \{1,2,3,4\}$) si et seulement si

.) $a_{k\ell} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, (k ou $\ell = i$; $k \neq \ell$) est une fonction paire

.) $a_{k\ell} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction impaire, sinon

b) Un système (A) appartenant à L^P est dans L^P_{ij} ($1 \leq i < j \leq 4$) si et seulement si

.) $a_{k\ell} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction paire, (k ou $\ell \in \{i,j\}$; $k \neq \ell$)

.) $a_{k\ell} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction impaire, sinon.

II.1.2. Nous montrons, maintenant, que les matrices fondamentales associées aux éléments de L^*P ont des propriétés intéressantes :

Soit $X_A : \mathbb{R} \rightarrow GL^+(4, \mathbb{R})$ la solution matricielle fondamentale de (A) vérifiant $X_A(0) = 1_A$

Soit (A) élément de L^P , si $X_A(t)$ est une solution matricielle alors $X_A(t+p)$ aussi, donc il existe C matrice carrée indépendante du temps telle que :

$$X_A(t+p) = X_A(t) \times C.$$

Or, $X_A(0) = 1_A$

d'où :

$$X_A(t+p) = X_A(t)X_A(p)$$

D'après le théorème de Liouville, on sait que

$$\det X_A(p) = \exp\left(\int_0^p \text{trace}(A(t))dt\right)$$

or d'après la proposition 4, $\text{trace} A(t)$ est une fonction impaire.

On en déduit : si (A) $\in L^*P$, alors $\det X_A(p) = 1$.

On en déduit aussi que le produit des valeurs propres de $X_A(p)$ est égal à 1.

On rappelle que les valeurs propres de $X_A(p)$ sont les valeurs caractéristiques de A.

Proposition 4

L'application de Poincaré $X_A(p)$ d'un système différentiel (A) appartenant à L^*P est conservative c'est à dire qu'elle conserve les volumes. En particulier, un système différentiel appartenant à L^*P ne peut être asymptotiquement stable.

Proposition 5

a) Un système différentiel (A) appartenant à L^P est dans L_i^P si et seulement si

$$X_A(-t) = J_i X_A(t) J_i, \quad t \in \mathbb{R},$$

avec $J_i = (j_{k\ell})$ vérifiant

$$\begin{cases} j_{kk} = -1 \text{ pour } k = i \\ j_{kk} = 1 \text{ pour } k \neq i \\ j_{k\ell} = 0 \text{ pour } k \neq \ell \end{cases} ; \text{ en particulier, } J_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Un système différentiel (A) appartenant à L^P est dans L_{ij}^P si et seulement si :

$$X_A(-t) = J_{ij} X_A(t) J_{ij}; \quad t \in \mathbb{R}$$

avec $J_{ij} = (j_{k\ell})$ vérifiant

$$\begin{cases} j_{kk} = -1 \text{ pour } k \in \{i, j\} \\ j_{kk} = 1 \text{ pour } k \notin \{i, j\} \\ j_k = 0 \text{ pour } k \neq \ell \end{cases} ; \text{ en particulier, } J_{12} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Démonstration

On pose $X_A(t) = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)(t)$

Comme $X_A(0) = 1_A$ alors pour (A) $\in L_i^P$ on a :

φ_i vérifie les conditions du lemme 1 pour A_i

φ_j vérifie les conditions du lemme 1 pour E_i ($j \neq i$).

On applique alors les résultats des lemmes 1_{Ai} et 1_{Ei} aux φ_k ; $k \in \{1,2,3,4\}$ et l'on obtient le résultat cherché.

On fait de même pour $(A) \in L_{ij}^p$.

Résumé. Un système (A) appartenant à L^p est dans L^{*p} si et seulement si

$$X_A(-t) = J X_A(t) J, t \in \mathbb{R}$$

où $J = J_S$ pour $(A) \in L_S^p$ et $S \in \{i, ij; 1 \leq i < j \leq 4\}$.

Corollaire

Si (A) appartient à L^{*p} , on en déduit que

$$X_A(t + \frac{p}{2}) = J X_A(\frac{p}{2} - t) X_A^{-1}(\frac{p}{2}) J X_A(\frac{p}{2}); t \in \mathbb{R}$$

Donc, $(X_A(t), t \in \mathbb{R})$ est déterminé par $(X_A(t), t \in [0, \frac{p}{2}])$ pour $A \in L^{*p}$.

Démonstration

$$X_A(\frac{p}{2}) = X_A(p - \frac{p}{2}) = X_A(-\frac{p}{2}) X_A(p)$$

$$X_A(p) = X_A^{-1}(-\frac{p}{2}) X_A(\frac{p}{2})$$

$$X_A(p) = J X_A^{-1}(\frac{p}{2}) J X_A(\frac{p}{2})$$

$$\text{De plus, } X_A(t + \frac{p}{2}) = J X_A(-\frac{p}{2} - t) J$$

$$= J X_A(\frac{p}{2} - t) X_A(-p) J$$

$$= J X_A(\frac{p}{2} - t) J X_A(p)$$

D'après ce qui précède, on obtient :

$$X_A(t + \frac{p}{2}) = J X_A(\frac{p}{2} - t) X_A^{-1}(\frac{p}{2}) J X_A(\frac{p}{2})$$

Soit X l'ensemble des chemins matriciels dérivable par morceaux :

$$X : [0, \frac{p}{2}] \rightarrow G L^+(R, R)$$

$$t \rightarrow X(t)$$

On munit \mathfrak{X} d'une distance, en posant :

$$d(x_1, x_2) = \sup_{[0, p/2]} |x_1(t) - x_2(t)| + \int_0^{p/2} |x_1'(\tau) - x_2'(\tau)| d\tau, \quad x_1 \text{ et } x_2 \in \mathfrak{X}$$

où $|M| = (\sum |m_{ij}|^2)^{1/2}$ et $x' = \frac{dx}{dt}$

L^{*p} est muni d'une topologie naturelle, celle induite par $L(p)$.

On a :

Proposition 6

L'ensemble L^{*p} est homéomorphe à \mathfrak{X}

Démonstration

Soit une fonction matricielle $X(t)$, $t \in [0, \frac{p}{2}]$, régulière pour tout t , dérivable par morceaux telle que $X(0) = I$

On peut alors définir $X(t)$, $t \in \mathbb{R}$ satisfaisant aux relations :

$$X(t + \frac{p}{2}) = J X(\frac{p}{2} - t) X^{-1}(\frac{p}{2}) J X(\frac{p}{2})$$

$$X(t + p) = X(t) X(p)$$

On en déduit que $A(t) = X'(t) X^{-1}(t)$ est la matrice d'un système linéaire qui est dans L^{*p} .

La bicontinuité de l'homéomorphisme se trouve dans [12]

II.2. Une classification de L_i^p

Le but de ce paragraphe est de classer les éléments (A) de L_i^p (systèmes p-périodiques linéaires symétriques par rapport à E_i et A_i) par la dimension de l'espace vectoriel des solutions p-périodiques.

L'étude de la matrice fondamentale $X_A(p)$ de (A) élément de L_i^p au temps p montrera qu'en fait la dimension de l'espace vectoriel des solutions p-périodiques

diques est la même que celle de l'espace vectoriel engendré par les solutions p-périodiques symétriques (§2.3.).

Nous sommes donc ramenés à déterminer la dimension de l'espace vectoriel engendré par les solutions p-périodiques symétriques d'un élément $(A) \in L_1^p$. Celle-ci est toujours supérieure ou égale à 2 (§2.1.) et directement liée à la forme de la matrice fondamentale de (A) au temps $\frac{p}{2}$: $X_A(\frac{p}{2})$ (§2.2.).

II.2.1. Dans ce paragraphe, nous montrons que tout élément de L_1^p admet au moins 2 solutions indépendantes, p-périodiques d'orbite symétrique par rapport à E_i . Nous donnons de plus, les conditions d'existence de solutions 2p-périodiques d'orbite symétrique à la fois à A_i et E_i .

La proposition suivante est l'application du théorème 1 à notre cas.

Proposition 7

a) Tout élément de L_1^p admet au moins un plan de conditions initiales de solutions p-périodiques. Ces solutions sont d'orbites symétriques par rapport à l'espace E_i .

b) Soit $(A) \in L_1^p$; $X_A(t) = (\varphi_{k\ell}(t))_{k,\ell \in \{1,2,3,4\}}$ la matrice fondamentale associée à (A) au temps t et $\text{Com}(X_A(t)) = (D_{k\ell}(t))_{k,\ell \in \{1,2,3,4\}}$ la comatrice associée à $X_A(t)$.

(A) admet une solution 2p-périodique d'orbite symétrique par rapport à l'axe A_i et à l'espace E_i si et seulement si :

$$\varphi_{1i}(\frac{p}{2}) = 0 \quad \text{ou} \quad D_{1i}(\frac{p}{2}) = 0$$

De plus, cette orbite est p-anti-périodique.

Démonstration

a) $T_{p/2}$ étant un isomorphisme, $T_{p/2}(E_i) \cap E_i$ représente au moins un plan π' de E_i .

Soit $\pi = T_{p/2}^{-1}(E_i \cap T_{p/2}(E_i))$. Tous les points de π sont conditions initiales de solutions p-périodiques d'après le théorème 1.a. De plus, leurs orbites sont symétriques par rapport à E_i .

b) Pour $i=1$; on pose $\varphi_\ell = (\varphi_{k\ell})_{k,\ell \in \{1,2,3,4\}}$

Soit φ la solution de (A) de condition initiale $(\alpha, 0, 0, 0)$, alors :

$$\varphi\left(\frac{p}{2}\right) = \alpha \varphi_1\left(\frac{p}{2}\right)$$

D'où : $\varphi\left(\frac{p}{2}\right) \in E_1 (= 0 \times X_2 \times X_3 \times X_4) \Leftrightarrow \varphi_{11}\left(\frac{p}{2}\right) = 0$ (lemme 2)

Soit φ la solution de (A) de condition initiale $(0, \alpha, \beta, \gamma)$, alors :

$$\varphi\left(\frac{p}{2}\right) = \alpha \varphi_2\left(\frac{p}{2}\right) + \beta \varphi_3\left(\frac{p}{2}\right) + \gamma \varphi_4\left(\frac{p}{2}\right)$$

D'où $\varphi\left(\frac{p}{2}\right) \in A_1 (= 0 \times X_1)$

$$\Leftrightarrow \alpha \varphi_{j2}\left(\frac{p}{2}\right) + \beta \varphi_{j3}\left(\frac{p}{2}\right) + \gamma \varphi_{j4}\left(\frac{p}{2}\right) = 0; j = 2, 3, 4.$$

$$\Leftrightarrow D_{11}\left(\frac{p}{2}\right) = 0$$

Remarque. Sachant que le produit des valeurs propres de $X_A(p)$ vaut 1 et que l'espace des solutions p-périodiques est au moins de dimension 2, on en conclut que 1 est au moins valeur propre double et que le produit des deux autres valeurs propres vaut 1.

Exemple.

Soit (A) un système linéaire autonome admettant la symétrie (A_1, E_1) .

Alors, pour tout réel p, (A) est élément de L_1^p . Il s'écrit sous la forme suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_2 & & & \\ b_3 & & & \\ b_4 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'après la proposition 7, (A) admet au moins un plan π de conditions initiales de solutions périodiques situées dans l'espace E_1 .

En effet, le système (A) admet un espace de dimension 2 au moins de solutions périodiques symétriques. Ces solutions sont les fonctions constantes $(0, c_2, c_3, c_4)$ vérifiant :

$$a_2 c_2 + a_3 c_3 + a_4 c_4 = 0$$

Si l'on suppose que :

$$\alpha = a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4 < 0 \text{ et } \beta = \sqrt{-\alpha}$$

alors on peut préciser que pour $p = \frac{2\pi}{\beta}$ le système (A) admet deux autres solutions périodiques indépendantes.

En effet, $X(t)$ s'écrit :

$$X(t) = \begin{pmatrix} \cos \beta t & \frac{+a_2}{\beta} \sin \beta t & \frac{+a_3}{\beta} \sin \beta t & \frac{+a_4}{\beta} \sin \beta t \\ \frac{b_2}{\beta} \sin \beta t & \frac{a_2 b_2}{\alpha} (\cos \beta t - 1) + 1 & \frac{a_3 b_2}{\alpha} \cos \beta t - 1 & \frac{a_4 b_2}{\alpha} (\cos \beta t - 1) \\ \frac{b_3}{\beta} \sin \beta t & \frac{b_3 a_2}{\alpha} (\cos \beta t - 1) & \frac{a_3 b_3}{\alpha} (\cos \beta t - 1) + 1 & \frac{a_4 b_3}{\alpha} (\cos \beta t - 1) \\ \frac{b_4}{\beta} \sin \beta t & \frac{b_4 a_2}{\alpha} (\cos \beta t - 1) & \frac{a_3 b_4}{\alpha} (\cos \beta t - 1) & \frac{a_4 b_4}{\alpha} (\cos \beta t - 1) + 1 \end{pmatrix}$$

D'où, pour $p = \frac{2\pi}{\beta}$

on a $\varphi_{11}\left(\frac{p}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $D_{11}\left(\frac{p}{4}\right) = 0$.

Le système (A) admet donc deux solutions $\frac{2\pi}{\beta}$ -périodiques symétriques d'orbites symétriques par rapport à A_1 et E_1 et deux solutions constantes indépendantes situées dans l'espace E_1 .

Une étude détaillée du système différentiel (A) est exposée au chapitre III.

II.2.2. Dans le paragraphe (2.4.), nous caractérisons la dimension de l'espace vectoriel engendré par les solutions p-périodiques symétriques d'un élément de L_i^p par la forme de la matrice fondamentale au temps $\frac{p}{2}$ associée : $X_A(\frac{p}{2})$.

Auparavant, nous montrons que $X_A(\frac{p}{2})$ peut s'écrire sous une forme particulière dans une base convenablement choisie.

Pour des commodités d'écriture, nous nous restreignons à l'étude des systèmes différentiels de L_1^p . Les résultats énoncés pourront facilement être adaptés à L_i^p ; $i = 2, 3, 4$.

Lemme 4.

Pour tout élément (A) de L_1^p , il existe une base de \mathbb{R}^4 respectant les propriétés de symétrie telle que $X_A(\frac{p}{2})$ s'écrive sous la forme :

$$X_A(\frac{p}{2}) = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Démonstration

D'après la proposition 7, (A) admet au moins un plan π , inclus dans E_1 , de conditions initiales de solutions périodiques. On a :

$$T_{p/2}(\pi) \subset E_1$$

On choisit donc deux vecteurs directeurs de π , notés e_3, e_4 , de manière que e_3 (resp. e_4) soit le vecteur directeur de X_3 (resp. X_4).

On complète en une base de \mathbb{R}^4 avec e_1 et e_2 de sorte que

$$\mathbb{R}e_2 \oplus \mathbb{R}e_3 \oplus \mathbb{R}e_4 = E_1.$$

La base choisie respecte les propriétés de symétries et l'espace E_1 .

De plus, $X_A(\frac{p}{2})$ vérifie

$$X(\frac{p}{2}) \cdot e_3 \in E_1; X(\frac{p}{2}) \cdot e_4 \in E_1$$

II.2.3. Nous calculons $X_A(p)$ dans la nouvelle base. Cela nous permettra de déterminer la dimension de l'espace des solutions p-périodiques.

On pose $\text{Com}(X_A(\frac{p}{2})) = (D_{k\ell})_{k,\ell \in \{1,2,3,4\}}$ et $\Delta = \det(X_A(\frac{p}{2}))$

$$X_A(\frac{p}{2}) = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & 0 & 0 \\ u_2 & v_2 & w_2 & z_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 & z_3 \\ u_4 & v_4 & w_4 & z_4 \end{pmatrix}$$

$$X_A^{-1}(\frac{p}{2}) = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} D_{11} & -D_{21} & D_{31} & -D_{41} \\ -D_{12} & D_{22} & -D_{32} & D_{42} \\ D_{13} & -D_{23} & D_{33} & -D_{43} \\ -D_{14} & D_{24} & -D_{34} & D_{44} \end{pmatrix}$$

Sachant que : $X_A(p) = J X_A^{-1}(\frac{p}{2}) J X_A(\frac{p}{2})$ où $J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$X_A(p) = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} 2 D_{11} u_1^{-\Delta} & 2 D_{11} v_1 & 0 & 0 \\ 2 D_{12} u_1 & 2 D_{12} v_1^{+\Delta} & 0 & 0 \\ -2 D_{13} u_1 & -2 D_{13} v_1 & \Delta & 0 \\ 2 D_{14} u_1 & 2 D_{14} v_1 & 0 & \Delta \end{pmatrix}$$

Comme $X_A(\frac{p}{2}) \cdot X_A^{-1}(\frac{p}{2}) = 1_A$,

on a :

$$\begin{aligned} \Delta &= u_1 D_{11} - v_1 D_{12} \\ D_{11} u_2 - D_{12} v_2 + D_{13} w_2 - D_{14} z_2 &= 0 \\ D_{11} u_3 - D_{12} v_3 + D_{13} w_3 - D_{14} z_3 &= 0 \\ D_{11} u_4 - D_{12} v_4 + D_{13} w_4 - D_{14} z_4 &= 0 \end{aligned} \quad (\mathcal{R})$$

$$|X_A(p) - \lambda I| = (1-\lambda)^2 \left(\lambda^2 - 2\lambda \left(\frac{D_{11}u_1 + D_{12}v_1}{\Delta} \right) + 1 \right)$$

or $\Delta = u_1 D_{11} - v_1 D_{12}$, d'où :

$$|X_A(p) - \lambda I| = (1-\lambda)^2 \left(\lambda^2 - 2\lambda \left(1 - \frac{D_{12}v_1}{\Delta} \right) + 1 \right)$$

Remarque. 1) Comme prévu $X_A(p)$ admet la valeur propre 1 avec une multiplicité au moins égale à 2.

2) On vérifie aisément que $\det X_A(p) = 1$

3) Tous les points de π sont conditions initiales de solutions p-périodiques symétriques (§ II.2.2.)

II.2.4. Les deux propositions suivantes donnent la caractérisation de l'espace vectoriel des solutions p-périodiques par la forme de $X_A(\frac{p}{2})$.

Notons $\mathcal{A}_k(p)$ le sous-ensemble de L_1^p constitué des systèmes différentiels admettant k-solutions p-périodiques symétriques indépendantes, autre que la solution nulle, $0 \leq k \leq 4$.

On sait que $\mathcal{A}_0(p) = \mathcal{A}_1(p) = \emptyset$.

Proposition 8

Les matrices fondamentales étant exprimées dans la base énoncée au lemme 4,

on a : $\mathcal{A}_2(p) = \{ (A) \in L_1^p, \text{ tel que}$

$$X_A(\frac{p}{2}) = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & 0 & 0 \\ u_2 & (D_{11}) & & \\ u_3 & & & \\ u_4 & & & \end{pmatrix} \left. \begin{array}{l} \text{avec } v_1 \neq 0, (u_2, u_3, u_4) \neq (0, 0, 0) \text{ et} \\ u_1 D_{11} - v_1 D_{12} > 0 \end{array} \right\}$$

$\mathcal{A}_3(p) = \mathcal{A}'_3(p) \cup \mathcal{A}''_3(p)$ où :

$\mathcal{A}'_3(p) = \{(A) \in L_1^p, \text{ tel que}$

$$X_A\left(\frac{p}{2}\right) = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & (\mathcal{D}_{11}) & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \text{ avec } v_1 \neq 0, u_1 D_{11} > 0\}$$

$\mathcal{A}''_3(p) = \{(A) \in L_1^p, \text{ tel que}$

$$X_A\left(\frac{p}{2}\right) = \begin{pmatrix} u_1 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & & & \\ u_3 & (\mathcal{D}_{11}) & & \\ u_4 & & & \end{pmatrix} \text{ avec } (u_2, u_3, u_4) \neq (0, 0, 0), u_1 D_{11} > 0\}$$

$\mathcal{A}_4(p) = \{(A) \in L_1^p, \text{ tel que}$

$$X_A\left(\frac{p}{2}\right) = \begin{pmatrix} u_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & (\mathcal{D}_{11}) & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \text{ avec } u_1 D_{11} > 0\}$$

où $D_{11} = \det \mathcal{D}_{11}$.

Commentaire

La connaissance de la matrice fondamentale au temps $p/2$ permet de savoir si $T_{p/2}(E1)$ est transverse ou non à $E1$.

La proposition 8 affirme que pour (A) élément de L_1^p , (A) appartient à $\mathcal{A}_2(p) \cup \mathcal{A}'_3(p)$ si et seulement si $T_{p/2}(E1)$ est transverse à $E1$. $E1$ étant un hyperplan de \mathbb{R}^4 , on en déduit que par perturbation d'un tel système, ces cas de transversalité demeurent.

Nous nous apercevons donc de l'importance de l'étude des systèmes linéaires symétriques, dans ce cas, car elle permet d'obtenir des résultats précis pour les systèmes non linéaires symétriques (§ III.1.2. et § IV.3.)

Démonstration

On a :

$$\det \chi_A\left(\frac{p}{2}\right) = u_1 D_{11} - v_1 D_{12} \text{ avec } D_{12} = u_2 \alpha - u_3 \beta + u_4 \gamma, (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$$

D'où,

$$\text{si } (v_1 = 0 \text{ ou } (u_2, u_3, u_4) = (0, 0, 0)) \text{ alors } \det \chi_A\left(\frac{p}{2}\right) = u_1 D_{11}.$$

Nous appliquons le théorème 1.

Les matrices fondamentales au temps $\frac{p}{2}$ sont exprimées dans la base (e_1, e_2, e_3, e_4) explicitée dans le lemme 4.

On a :

$$(e_3, e_4) \text{ est une famille libre de } \pi = T_{p/2}^{-1}(E1 \cap T_{p/2}(E1))$$

$$E1 = \mathbb{R}e_2 \oplus \mathbb{R}e_3 \oplus \mathbb{R}e_4 \text{ et } T_{p/2}(\pi) \subset E1.$$

De plus,

$$[(T_{p/2}(e_1) \notin \mathbb{R}e_1) \Leftrightarrow (u_2, u_3, u_4) \neq (0, 0, 0)]$$

$$T_{p/2}(e_2) \notin E1 \Leftrightarrow v_1 \neq 0$$

D'où :

$$\text{si } (A) \in \mathcal{A}_2(p) \text{ alors } T_{p/2}(e_1) \notin \mathbb{R}e_1 \text{ et } T_{p/2}(e_2) \notin E1$$

$$\text{si } (A) \in \mathcal{A}_3(p) \text{ alors soit } T_{p/2}(E1) = E1 \text{ et alors } T_{p/2}(e_2) \in E1, T_{p/2}(e_1) \notin \mathbb{R}e_1$$

$$\text{soit } T_{p/2}(E1) \neq E1 \text{ et alors } T_{p/2}(e_1) \in \mathbb{R}e_1$$

$$\text{si } (A) \in \mathcal{A}_4(p) \text{ alors } T_{p/2}(E1) = E1 \text{ et } T_{p/2}(e_1) \in \mathbb{R}e_1.$$

La réciproque est évidente.

Remarque. 1. A priori, nous avons déterminé $\mathcal{A}_k(p)$ comme étant un sous-ensemble de L_1^p dont les éléments admettent k -solutions p -périodiques symétriques indépendantes. Nous allons montrer que la dimension de l'espace vectoriel de solutions engendré par les solutions p -périodiques symétriques est la même

que celle de l'espace des solutions p-périodiques. Cela fera l'objet de la proposition suivante.

2. Nous pouvons de même déterminer les éléments de L_1^p admettant au moins une solution 2 p-périodique.

(A) admet une solution p-anti-périodique si et seulement si :

$u_1^{D_{11}} = 0$ où $(D_{k\ell})$; $k, \ell \in \{1, 2, 3, 4\}$ est la comatrice de $X_A(\frac{p}{2})$

Ce résultat provient de la proposition 7.b.

3. Les espaces topologiques $\mathcal{A}_2(p)$, $\mathcal{A}'_3(p)$, $\mathcal{A}''_3(p)$, $\mathcal{A}_4(p)$ ne sont pas connexes. L'inéquation $\det X_A(\frac{p}{2}) > 0$ ne permet pas de connaître le nombre de composantes connexes de ces espaces. On peut toutefois affirmer que $\mathcal{A}'_3(p)$ admet au moins 4 composantes connexes.

Nous allons discuter de la dimension de l'espace vectoriel des solutions p-périodiques suivant les valeurs caractéristiques du système.

Rappel

Les valeurs propres de $X_A(p)$ sont solutions de

$$(1-\lambda)^2(\lambda^2 - 2\lambda(1 - 2 \frac{D_{12}v_1}{\Delta}) + 1)$$

Le produit des valeurs propres vaut 1.

Nous en déduisons la proposition suivante :

Proposition 9

$\mathcal{A}_k(p)$, $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ est le sous-ensemble de L_1^p dont les éléments admettent un espace vectoriel de dimension k de solutions p-périodiques.

Démonstration

Notons $\mathcal{B}_k(p)$ le sous-ensemble de L_1^p admettent un espace vectoriel de dimension k de solutions p-périodiques.

Montrons que $\mathcal{B}_k(p)$ est égal à $\mathcal{A}_k(p)$ où $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

1er cas : $(A) \in \mathcal{B}_4(p)$ si et seulement si toutes les valeurs propres de $\chi_A(p)$ sont égales à 1 et l'espace propre associé est de dimension 4. On utilise les relations (\mathcal{R}) et la forme de $\chi_A(p)$ définies au paragraphe (2.3.)

$$(A) \in \mathcal{B}_4(p) \Leftrightarrow \chi_A(p) = I$$

$$(A) \in \mathcal{B}_4(p) \Leftrightarrow \begin{cases} D_{12}v_1 = 0 \\ D_{11}u_1 \neq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} D_{11}v_1 = 0 \\ D_{12}u_1 = 0 \\ -D_{13}u_1 = 0 \\ D_{14}u_1 = 0 \end{cases}$$

$$(A) \in \mathcal{B}_4(p) \Leftrightarrow \begin{cases} D_{12}v_1 = 0 \\ D_{11}u_1 \neq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_1 = 0 \\ D_{12} = D_{13} = D_{14} = 0 \end{cases}$$

Or, d'après les relations données dans 2.3. (\mathcal{R})

$$(A) \in \mathcal{B}_4(p) \Leftrightarrow (u_2 = 0; u_3 = 0; u_4 = 0; v_1 = 0) \Leftrightarrow (A) \in \mathcal{A}_4(p)$$

2me cas : $(A) \in \mathcal{B}_3(p)$ si et seulement si toutes les valeurs caractéristiques valent 1 et l'espace propre associé est de dimension 3

$$(A) \in \mathcal{B}_3(p) \Leftrightarrow \begin{cases} D_{12}v_1 = 0 \\ D_{11}u_1 \neq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \chi_A(p) - I \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec } a \text{ ou } b \text{ ou } c \text{ ou } d \text{ nul.}$$

$$(A) \in \mathcal{B}_3(p) \Leftrightarrow \begin{cases} D_{12}v_1 = 0 \\ D_{11}u_1 \neq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 2D_{11}v_1b = 0 \\ D_{12}u_1a = 0 \\ -D_{13}(u_1a + v_1b) = 0 \\ D_{14}(u_1a + v_1b) = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{avec } a \text{ ou } b \text{ nul} \\ a^2 + b^2 \neq 0 \end{matrix}$$

$$(A) \in \mathcal{B}_3(p) \Leftrightarrow \begin{cases} D_{12}v_1 = 0 \\ D_{11}u_1 \neq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \left(\begin{cases} v_1 \neq 0 \\ D_{12} = D_{13} = D_{14} = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} v_1 = 0 \\ (D_{12}, D_{13}, D_{14}) \neq (0, 0, 0) \end{cases} \right)$$

$$(A) \in \mathcal{B}_3(p) \Leftrightarrow (v_1 \neq 0 \text{ et } u_2 = u_3 = u_4 = 0) \text{ ou } (v_1 = 0 \text{ et } (u_2, u_3, u_4) \neq (0, 0, 0))$$

$$(A) \in \mathcal{B}_3(p) \Leftrightarrow (A) \in \mathcal{A}'_3(p) \text{ ou } (A) \in \mathcal{A}''_3(p) \Leftrightarrow (A) \in \mathcal{A}_3(p)$$

3me cas : $(A) \in \mathcal{B}_2(p)$ si et seulement si toutes les valeurs caractéristiques valent 1 et l'espace propre associé est de dimension 2 ou la valeur caractéristique 1 est de multiplicité 2.

$$(A) \in \mathcal{B}_2(p) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \text{ est de multiplicité 4 et l'espace propre associé} \\ \text{est de dimension 2} \\ \lambda = 1 \text{ est de multiplicité 2 et l'espace propre associé} \\ \text{est de dimension 2.} \end{cases}$$

$$(A) \in \mathcal{B}_2(p) \Leftrightarrow \begin{cases} D_{12}v_1 = 0 \text{ et } \\ D_{11}u_1 \neq 0 \end{cases} \text{ et } \chi_A(p) - I \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec deux termes} \\ \text{parmi } a, b, c, d \text{ nuls.}$$

$$\text{ou } \begin{cases} D_{12}v_1 \neq 0 \text{ et } \\ \Delta \neq 0 \end{cases} \text{ et } \chi_A(p) - I \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec deux termes} \\ \text{parmi } a, b, c, d \text{ nuls.}$$

Nous résolvons ces deux cas séparément.

$\lambda=1$ est de multiplicité 4 et l'espace propre associé est de dimension 2

Les conditions précédentes s'écrivent :

$$\begin{cases} D_{11}v_1b = 0 \\ D_{12}u_1a = 0 \\ D_{13}(u_1a + v_1b) = 0 \\ D_{14}(u_1a + v_1b) = 0 \\ D_{11}u_1 \neq 0 \end{cases}$$

Cela entraîne que :

$$v_1 \neq 0 \text{ et } (D_{12}, D_{13}, D_{14}) \neq (0, 0, 0)$$

$\lambda = 1$ est de multiplicité 2 et l'espace propre associé est de dimension 2

Les conditions précédentes s'écrivent :

$$\begin{cases} D_{12}v_1 \neq 0 \\ (D_{11}u_1 + D_{12}v_1)a + 2D_{11}v_1b = 0 \\ 2D_{12}u_1a + (D_{11}u_1 + D_{12}v_1)b = 0 \\ D_{13}(u_1a + v_1b) = 0 \\ D_{14}(u_1a + v_1b) = 0 \end{cases}$$

On obtient, puisque $D_{11}u_1 - D_{12}v_1 \neq 0$:

$$v_1 \neq 0, D_{12} \neq 0 \text{ et } a = b = 0.$$

D'où :

$$(A) \in \mathcal{B}_2(p) \Leftrightarrow (v_1 \neq 0; (u_2, u_3, u_4) \neq (0, 0, 0)) \Leftrightarrow (A) \in \mathcal{A}_2(p).$$

Nous avons donc montré que la dimension de l'espace vectoriel des solutions p-périodiques est la même que celle de l'espace vectoriel engendré par les solutions p-périodiques symétriques. Celle-ci est en fait déterminée dès que l'on connaît la matrice fondamentale associée, au temps $\frac{p}{2}$.

Remarque. Numériquement, les résultats précédents sont très importants :

Nous voyons que la détermination de $\chi_A(\frac{p}{2})$ pour (A) appartenant à L_1^p permet de connaître le nombre de solutions p-périodiques ou p-anti-périodiques qu'admet le système différentiel linéaire, p-périodique, symétrique (A). Ceci n'est pas le cas pour un système linéaire quelconque.

II.2.5. Stabilité

Les résultats précédents permettent de conclure sur la stabilité de la solution nulle d'un système de L_1^p .

Deux valeurs caractéristiques étant égales à 1, la solution nulle d'un tel système ne peut être asymptotiquement stable.

Corollaire

- a. Si $(A) \in \mathcal{A}_4(p)$ alors la solution nulle est stable.
- b. Si $(A) \in \mathcal{A}_3(p)$ alors la solution nulle est instable.
- c. Si $(A) \in \mathcal{A}_2(p)$ et $X_A(\frac{p}{2})$ s'écrit dans une base sous la forme :

$$X_A(\frac{p}{2}) = \begin{pmatrix} \cdot & v_1 & 0 & 0 \\ u_2 & \left(\cdot \right) & & \\ u_3 & & & \\ u_4 & & & \end{pmatrix} \text{ avec } v_1 \neq 0 \text{ et } (u_2, u_3, u_4) \neq (0, 0, 0) \text{ o}$$

en posant $((D_{k\ell}), k, \ell \in \{1, 2, 3, 4\}) = \text{Com}(X_A(\frac{p}{2}))$, alors :

si $D_{12}v_1 \geq 0$, alors la solution nulle est instable

si $D_{12}v_1 < 0$, alors la solution nulle est stable.

Démonstration

- a. les valeurs caractéristiques valent 1 et la matrice $X_A(p)$ est diagonalisable
- b. les valeurs caractéristiques valent 1 et la matrice $X_A(p)$ n'est pas diagonalisable
- c. si $D_{12}v_1 = 0$ alors les valeurs caractéristiques valent 1 et $X_A(p)$ n'est pas diagonalisable, la solution nulle est instable
si $D_{12}v_1 \neq 0$ alors deux valeurs caractéristiques valent 1 et la sous-matrice de Poincaré correspondante est diagonalisable;

1er cas. $D_{12}v_1 > 0$

les deux autres valeurs caractéristiques sont réelles et valent

$$1 + \sqrt{1 - \frac{2D_{12}v_1}{\Delta}} \quad \text{ou} \quad 1 - \sqrt{1 - \frac{2D_{12}v_1}{\Delta}};$$

l'une des valeurs caractéristique est plus grande que 1 donc la solution nulle est instable.

2me cas. $D_{12}v_1 < 0$

les deux autres valeurs caractéristiques sont complexes conjuguées de parties réelles

$$1 + \frac{D_{12}v_1}{\Delta} < 1$$

donc la solution nulle est stable.

II.3. Une classification de L_{ij}^P

II.3.1. Dans le paragraphe suivant, nous établissons les conditions d'existence de solutions p-périodiques dont les orbites sont symétriques par rapport au plan P_{ij} ou à son supplémentaire. Nous en déduisons la stabilité d'un système linéaire p-périodique symétrique n'admettant pas de solutions p-périodiques autre que la solution nulle.

Nous verrons dans ce paragraphe que la situation est moins favorable que pour L_i^P . En effet, les cas de transversalité rencontrés ici concernent des espaces de dimension 2. Or un plan ne sépare pas un espace de dimension 4 en deux régions.

Aussi, ces cas de transversalités peuvent disparaître par une petite perturbation. Les résultats trouvés ne permettront pas d'obtenir des résultats dans le cas non linéaire.

Proposition 10

Soit $(A) \in L_{ij}^P$, $X_A(t) = (\varphi_{k\ell})(t)$ la matrice fondamentale associée à (A) au temps t .

a) Un système (A) appartenant à L_{ij}^P admet une solution p-périodique d'orbite symétrique par rapport au plan P_{ij} si et seulement si :

$$\varphi_{ki}\left(\frac{p}{2}\right) \varphi_{lj}\left(\frac{p}{2}\right) - \varphi_{kj}\left(\frac{p}{2}\right) \varphi_{li}\left(\frac{p}{2}\right) = 0 \quad \text{où } P_{k\ell} = \overline{P_{ij}}$$

On a donc, pour $i=1, j=2$ $\varphi_{31}\left(\frac{p}{2}\right) \varphi_{42}\left(\frac{p}{2}\right) - \varphi_{41}\left(\frac{p}{2}\right) \varphi_{32}\left(\frac{p}{2}\right) = 0$.

b) Un système (A) appartenant à L_{ij}^p admet une solution p-périodique d'orbite symétrique par rapport au plan $P_{k\ell} = \overline{P_{ij}}$ si et seulement si :

$$\varphi_{ik}\left(\frac{p}{2}\right) \varphi_{j\ell}\left(\frac{p}{2}\right) - \varphi_{i\ell}\left(\frac{p}{2}\right) \varphi_{jk}\left(\frac{p}{2}\right) = 0.$$

c) Un système (A) appartenant à L_{ij}^p admet une solution 2p-périodique d'orbite symétrique par rapport aux deux plans P_{ij} et $P_{k\ell}$ si et seulement si :

$$\varphi_{ii}\left(\frac{p}{2}\right) \varphi_{jj}\left(\frac{p}{2}\right) - \varphi_{ji}\left(\frac{p}{2}\right) \varphi_{ij}\left(\frac{p}{2}\right) = 0 \quad \text{ou}$$

$$\varphi_{kk}\left(\frac{p}{2}\right) \varphi_{\ell\ell}\left(\frac{p}{2}\right) - \varphi_{k\ell}\left(\frac{p}{2}\right) \varphi_{\ell k}\left(\frac{p}{2}\right) = 0.$$

Cette orbite est p-anti-périodique.

Démonstration

Pour $i=1, j=2$, soit $\varphi_\ell = (\varphi_{k\ell})_{k,\ell \in \{1,2,3,4\}}$

a) Soit φ la solution de condition initiale $(\alpha, \beta, 0, 0)$,

alors $\varphi(0) \in P_{12}$ et $\varphi\left(\frac{p}{2}\right) = \alpha \varphi_1\left(\frac{p}{2}\right) + \beta \varphi_2\left(\frac{p}{2}\right)$.

$$\varphi\left(\frac{p}{2}\right) \in 0_{x_1 x_2} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \varphi_{31}\left(\frac{p}{2}\right) + \beta \varphi_{32}\left(\frac{p}{2}\right) = 0 \\ \alpha \varphi_{41}\left(\frac{p}{2}\right) + \beta \varphi_{42}\left(\frac{p}{2}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \varphi_{31}\left(\frac{p}{2}\right) \varphi_{42}\left(\frac{p}{2}\right) - \varphi_{41}\left(\frac{p}{2}\right) \varphi_{32}\left(\frac{p}{2}\right) = 0$$

Alors $\varphi(0) \in P_{12}$ et $\varphi\left(\frac{p}{2}\right) \in P_{12}$ d'où :

φ est p-périodique d'orbite symétrique par rapport à P_{12} .

b) Si (A) $\in L_{12}^p$ alors (A) $\in L_{34}^p$ puisque $L_{12}^p = L_{34}^p$, d'où la condition similaire.

c) Soit φ la solution de condition initiale $(\alpha, \beta, 0, 0)$,

alors $\varphi(\frac{p}{2}) = \alpha\varphi_1(\frac{p}{2}) + \beta\varphi_2(\frac{p}{2})$

$$\varphi(\frac{p}{2}) \in P_{34} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\varphi_{11}(\frac{p}{2}) + \beta\varphi_{12}(\frac{p}{2}) = 0 \\ \alpha\varphi_{21}(\frac{p}{2}) + \beta\varphi_{22}(\frac{p}{2}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \varphi_{11}(\frac{p}{2})\varphi_{22}(\frac{p}{2}) - \varphi_{21}(\frac{p}{2})\varphi_{12}(\frac{p}{2}) = 0$$

Idem, pour la solution φ de condition initiale $(0,0,\alpha,\beta)$ telle que $\varphi(\frac{p}{2}) \in P_{12}$.

Remarque. Si $(A) \in L_{12}^p$,

en posant $X_A(t) = \begin{pmatrix} U(t) & V(t) \\ W(t) & T(t) \end{pmatrix}$ où $U, V, W, T \in \mathcal{M}_b(2, \mathbb{R})$

alors a) devient $\det W(\frac{p}{2}) = 0$

b) devient $\det V(\frac{p}{2}) = 0$

c) devient $\det U(\frac{p}{2}) \det T(\frac{p}{2}) = 0$

Il convient de noter l'analogie entre ces résultats et ceux énoncés pour les systèmes différentiels linéaires p-périodiques symétriques de dimension 2.

En dimension 2, les matrices U, V, W, T sont éléments de $\mathcal{M}_b(1, \mathbb{R})$ c'est à dire des réels. Dans ce cas $\det U=0$ équivaut à $U=0$.

La proposition suivante montre que l'on obtient les mêmes résultats en dimension 2 et en dimension 4 pour $(A) \in L_{12}^p$.

II.3.2. Stabilité

Définition

Un système $(A) \in L^*{}^p$ est dit exceptionnel pour la période p si et seulement si $\det(X_A(p) - I) = 0$; si (A) n'est pas exceptionnel, on appelle indice de

Poincaré de (A) pour la période p, le nombre $\gamma_p(A)$ appartenant à $\{-1;1\}$ tel que :

$$\gamma_p(A) = \text{sgn}(\det(X_A(p) - I))$$

Nous allons appliquer les deux propositions précédentes pour définir la stabilité d'un système linéaire p-périodique symétrique.

Proposition 11

Soit $(A) \in L_{12}^p$ et $X_A\left(\frac{p}{2}\right) = \begin{pmatrix} U & V \\ W & T \end{pmatrix}$

- a) Si $\det U \det V \det W \det T = 0$ (resp. $\det V \det W = 0$) alors (A) est exceptionnel pour la période (2p)(resp.p) et (A) admet au moins une solution p-anti-périodique ou p-périodique (resp. p-périodique) non triviale.
- b) Toutes les solutions sont p-anti-périodiques (resp. p-périodiques) et alors (A) est stable au sens de Liapunov, si et seulement si $U = T = 0$ (resp. $V = W = 0$).
- c) Si $\det U \det V \det W \det T \neq 0$ (resp. $\det V \det W \neq 0$) alors (A) n'est pas exceptionnel pour la période 2p(resp.p) et on a :

$$\gamma_{2p}(A) = \text{sgn}(\det U \det V \det W \det T)$$

$$\text{(resp. } \gamma_p(A) = \text{sgn}(\det V \det W))$$

(A) est donc instable au sens de Liapunov si $(\det U \det V \det W \det T) < 0$ et stable si $(\det U \det V \det W \det T) > 0$

Démonstration

- a) Elle provient de la proposition précédente.

En effet par exemple si $V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{pmatrix}$; c'est à dire que $\det V = 0$,

c'est à dire qu'il existe α et β réels

$$\alpha \begin{pmatrix} v_1 \\ v_3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} v_2 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Alors la solution φ telle que $\varphi(t) = \alpha\varphi_3(t) + \beta\varphi_4(t)$ vérifie $\varphi(0) \in P_{34}$ et $\varphi(\frac{p}{2}) \in P_{34}$ d'où φ est p-périodique.

c) Montrons par le calcul que :

$$\gamma_p(A) = \det V \det W$$

$$\text{Posons } \text{Com}(X_A(\frac{p}{2})) = ((D_{k\ell}), k, \ell \in \{1, 2, 3, 4\}) \text{ et } \Delta = \det X_A(\frac{p}{2})$$

$$\text{On sait que } X_A(p) = J X_A^{-1}(\frac{p}{2}) J X_A(\frac{p}{2})$$

$$\text{avec } J = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$X_A(p) = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \Delta - 2D_{31}a_{31} + 2D_{41}a_{41} & -2D_{31}a_{32} + 2D_{41}a_{42} & -2D_{31}a_{33} + 2D_{41}a_{43} & -2D_{31}a_{34} + 2D_{41}a_{44} \\ 2D_{32}a_{31} - 2D_{42}a_{41} & \Delta + 2D_{32}a_{32} - 2D_{42}a_{42} & 2D_{32}a_{33} - 2D_{42}a_{43} & 2D_{32}a_{34} - 2D_{42}a_{44} \\ 2D_{33}a_{31} - 2D_{43}a_{41} & 2D_{33}a_{32} - 2D_{43}a_{42} & -\Delta + 2D_{33}a_{33} - 2D_{43}a_{43} & 2D_{33}a_{34} - 2D_{43}a_{44} \\ -2D_{34}a_{31} + D_{44}a_{41} & -2D_{34}a_{32} + 2D_{44}a_{42} & -2D_{34}a_{33} + 2D_{44}a_{43} & -\Delta - 2D_{34}a_{34} + 2D_{44}a_{44} \end{pmatrix}$$

d'où

$$|X_A(p) - I| = \frac{16}{\Delta^4} \begin{vmatrix} -D_{31}a_{31} & D_{41}a_{42} & 0 & 0 \\ D_{32}a_{31} & -D_{42}a_{42} & 0 & 0 \\ D_{33}a_{31} & -D_{43}a_{42} & -\Delta & 0 \\ -D_{34}a_{31} & D_{44}a_{42} & 0 & -\Delta \end{vmatrix} + \frac{16a_{41}a_{32}}{\Delta^4} \begin{vmatrix} D_{41} & -D_{31} & 0 & 0 \\ -D_{42} & D_{32} & 0 & 0 \\ -D_{43} & D_{33} & -\Delta & 0 \\ D_{44} & -D_{34} & 0 & -\Delta \end{vmatrix}$$

$$|X_A(p) - I| = \frac{16}{\Delta} (a_{31}a_{42} - a_{41}a_{32})(D_{31}D_{42} - D_{32}D_{41})$$

De plus $D_{31}D_{42} - D_{32}D_{41} = (a_{13}a_{24} - a_{23}a_{14}) \times \Delta$

$$|X_A(p) - I| = \frac{16}{\Delta} (a_{31}a_{42} - a_{41}a_{32})(a_{13}a_{24} - a_{14}a_{23})$$

d'où : $|X_A(p) - I| = \frac{16}{\Delta} (\det V \det W)$

et $\Delta > 0$ car $\forall t, \det X(t) \neq 0$ et $\det X(p) = 1$.

On a bien :

$$\gamma_p(A) = \det V \det W$$

b) Toutes les solutions sont p-anti-périodiques

$$T_{p/2}(P_{12}) = P_{34} \text{ et } T_{p/2}(P_{34}) = P_{12} \text{ d'où le résultat.}$$

De même, toutes les solutions sont p-périodiques

$$T_{p/2}(P_{12}) = P_{12} \text{ et } T_{p/2}(P_{34}) = P_{34} \text{ d'où } W = V = 0.$$

Remarque. De même que pour (A) appartenant à L_1^p , nous voyons qu'il suffit de déterminer la matrice fondamentale associée au système différentiel au temps p/2 pour connaître la dimension de l'espace vectoriel des solutions p-périodiques ou p-anti-périodiques.

II.3.3. Nous examinons la connexité de L_{12}^p

Proposition 12

L'ensemble des systèmes non exceptionnels L_{12}^{*p} de L_{12}^p n'est pas connexe. L'ensemble des systèmes exceptionnels de L_{12}^p sépare l'ensemble des systèmes non exceptionnels en au moins 2 composantes connexes.

Démonstration

L'application $\gamma : L_{12}^{*p} \rightarrow \{-1,1\}$ est continue car $X_A(p)$ dépend continûment de A. Donc, γ est constante sur chaque composante connexe de L_{12}^{*p} . Il suffit donc d'exhiber deux éléments (A) et (B) de L_{12}^p tels que :

$$\gamma_A(p) = 1 \quad \text{et} \quad \gamma_B(p) = -1$$

On pose :

$$A = \begin{pmatrix} \circ & \circ & 1 \\ 1 & \circ & \circ \\ \circ & 1 & \circ \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} \circ & 1 & \circ \\ 1 & \circ & 1 \\ \circ & 1 & \circ \end{pmatrix}$$

On a :

$$|X_A(t) - I| = \begin{vmatrix} \frac{1}{4}(e^t + e^{-t}) + \frac{1}{2} \cos t & \frac{1}{4}(e^t + e^{-t}) - \frac{1}{2} \cos t & \frac{1}{4}(e^t - e^{-t}) - \frac{1}{2} \sin t \\ \frac{1}{4}(e^t + e^{-t}) - \frac{1}{2} \cos t & \frac{1}{4}(e^t + e^{-t}) + \frac{1}{2} \cos t & \frac{1}{4}(e^t - e^{-t}) + \frac{1}{2} \sin t \\ \frac{1}{4}(e^t - e^{-t}) + \frac{1}{2} \sin t & \frac{1}{4}(e^t - e^{-t}) - \frac{1}{2} \sin t & \frac{1}{4}(e^t + e^{-t}) + \frac{1}{2} \cos t \\ \frac{1}{4}(e^t - e^{-t}) - \frac{1}{2} \sin t & \frac{1}{4}(e^t - e^{-t}) + \frac{1}{2} \sin t & \frac{1}{4}(e^t + e^{-t}) - \frac{1}{2} \cos t \end{vmatrix}$$

$$|X_A(t) - I| = (e^t - 1)(e^{-t} + 1)((\cos t - 1)^2 + \sin^2 t)$$

Si la période p est distincte de $\{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ le système (A) est non exceptionnel.

Alors, $\forall p \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi\}$; $\gamma_p(A) = -1$

$$|X_B(t) - I| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) - 1 & 0 & \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) - 1 & 0 & \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) \\ \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) & 0 & \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) - 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) & 0 & \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) - 1 \end{vmatrix}$$

Alors $\forall p \in \mathbb{R}$, $\gamma_p(B) = 1$

Soit (A_λ) une famille continue de systèmes différentiels de L_{12}^p où λ appartient à un domaine Λ de \mathbb{R}^m .

Soit $X_{A_\lambda}(\frac{p}{2}) = \begin{pmatrix} U(\lambda) & V(\lambda) \\ W(\lambda) & T(\lambda) \end{pmatrix}$ la matrice fondamentale associée à (A_λ) au temps $\frac{p}{2}$.

Soit $F(\lambda) = \det V(\lambda)$

$G(\lambda) = \det W(\lambda)$

et $H(\lambda) = (F(\lambda), G(\lambda))$

D'après la proposition 10, on sait que :

$$H(\lambda) \neq 0 \Leftrightarrow (A_\lambda) \text{ non exceptionnel.}$$

On obtient la proposition suivante :

Proposition 13

L'ensemble des systèmes différentiels non exceptionnels L_{12}^{*p} de L_{12}^p admet au moins 4 composantes connexes.

Démonstration

Soit (A_{λ_1}) et (A_{λ_2}) appartenant à L_{12}^{*p} et vérifiant $F(\lambda_1)F(\lambda_2) < 0$ (resp. $G(\lambda_1)G(\lambda_2) < 0$). Tout chemin continu reliant (A_{λ_1}) et (A_{λ_2}) contient donc

un système $(A\lambda)$ de L_{12}^p vérifiant $F(\lambda) = 0$ (resp. $G(\lambda) = 0$).

On définit donc quatre composantes connexes.

Montrons qu'elles sont non vides.

$$\text{Soit } A\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le système $(A\lambda_1)$ est dans L_{12}^p et

$$F(\lambda_1) = -\frac{1}{4}(e^{p/2} - e^{-p/2})^2 < 0$$

$$G(\lambda_1) = -\frac{1}{4}(e^{p/2} - e^{-p/2})^2 < 0$$

$$\text{Soit } A\lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le système $(A\lambda_2)$ est dans L_{12}^p et

$$F(\lambda_2) = \frac{1}{4}(e^{p/2} - e^{-p/2})^2 > 0$$

$$G(\lambda_2) = \frac{1}{4}(e^{p/2} - e^{-p/2})^2 > 0$$

$$\text{Soit } A\lambda_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A\lambda_3 \in L_{12}^p \text{ et si } 0 < p < 2\pi,$$

Le système $(A\lambda_3)$ est dans L_{12}^p et si $0 < p < 2\pi$, alors :

$$F(\lambda_3) = \frac{1}{2} \sin \frac{p}{2}(e^{p/2} - e^{-p/2}) > 0$$

$$G(\lambda_3) = -\frac{1}{2} \sin \frac{p}{2}(e^{p/2} - e^{-p/2}) < 0$$

$$\text{Soit } (A\lambda_4) = \begin{pmatrix} & 1 & 0 \\ 0 & & 1 \\ 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le système $(A\lambda_4)$ est dans L_{12}^p et si $0 < p < 2\pi$, alors :

$$F(\lambda_4) = -\frac{1}{2} \sin \frac{p}{2}(e^{p/2} - e^{-p/2}) < 0$$

$$G(\lambda_4) = \frac{1}{2} \sin \frac{p}{2}(e^{p/2} - e^{-p/2}) > 0$$

Remarque. On ne peut obtenir de résultats précis concernant les composantes connexes car on ne sait pas comment s'entrelacent les variétés définies dans \mathbb{R}^{16} par :

$$\det U = 0, \det V = 0, \det W = 0, \det T = 0.$$

CHAPITRE III - SYSTEMES AVEC SYMETRIES ADMETTANT UNE PARTIE
LINEAIRE AUTONOME

Nous étudions les systèmes autonomes linéaires de L_1^P et nous en déduisons les possibilités d'obtention de solutions périodiques pour des systèmes non linéaires particuliers, à savoir les systèmes non linéaires perturbés $\dot{X} = AX + \epsilon F(t, X)$, admettant la symétrie E1.

Ceci peut constituer une approche du cas non linéaire qui sera traité ultérieurement (§ IV).

III.1. Systèmes symétriques dont la partie linéaire est un élément de L_1^P

III.1.1. Systèmes linéaires autonomes de L_1^P

Soit $\dot{X} = AX$ (A)

un système différentiel autonome linéaire où A est élément $\mathcal{M}(4, \mathbb{R})$.

(A) appartenant à L_1^P , A admet la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'équation caractéristique associée à la matrice A est :

$$\lambda^2 (\lambda^2 - \sum_{j=2}^4 a_{j1} a_{1j}) = 0. \quad (1)$$

On a donc deux valeurs propres $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ et deux valeurs propres λ_3, λ_4 opposées.

Posons $\alpha = \sum_{j=2}^4 a_{j1} a_{1j}$

Le système (A) est équivalent à :

$$\begin{cases} \ddot{X}_1 = \alpha X_1 \\ \dot{X}_2 = a_{21} X_1 \\ \dot{X}_3 = a_{31} X_1 \\ \dot{X}_4 = a_{42} X_1 \end{cases}$$

Déterminons maintenant suivant que α est positif, négatif ou nul, si $T_{p/2}(E1)$ est transverse à $E1$:

1er cas

$$\alpha = \sum_{j=2}^4 a_{1j} a_{j1} > 0; \lambda_3 \text{ et } \lambda_4 \text{ sont réelles et opposées.}$$

Soit $\beta = \sqrt{\alpha}$, la matrice fondamentale associée à (A) est :

$$X\left(\frac{t}{\beta}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) & \frac{a_{12}}{2\beta}(e^t - e^{-t}) & \frac{a_{13}}{2\beta}(e^t - e^{-t}) & \frac{a_{14}}{2\beta}(e^t - e^{-t}) \\ \frac{a_{21}}{2\beta}(e^t - e^{-t}) & \frac{a_{12}a_{21}}{2\alpha}(e^t + e^{-t} - 2) + 1 & \frac{a_{13}a_{21}}{2\alpha}(e^t + e^{-t} - 2) & \frac{a_{14}a_{21}}{2\alpha}(e^t + e^{-t} - 2) \\ \frac{a_{31}}{2\beta}(e^t - e^{-t}) & \frac{a_{12}a_{31}}{2\alpha}(e^t + e^{-t} - 2) & \frac{a_{13}a_{31}}{2\alpha}(e^t + e^{-t} - 2) + 1 & \frac{a_{14}a_{31}}{2\alpha}(e^t + e^{-t} - 2) \\ \frac{a_{41}}{2\beta}(e^t - e^{-t}) & \frac{a_{12}a_{41}}{2\alpha}(e^t + e^{-t} - 2) & \frac{a_{13}a_{41}}{2\alpha}(e^t + e^{-t} - 2) & \frac{a_{14}a_{41}}{2\alpha}(e^t + e^{-t} - 2) + 1 \end{pmatrix}$$

Les solutions φ p-périodiques d'orbites symétriques par rapport à $E1$ ont pour conditions initiales $x_0 = (0, c_2, c_3, c_4)$ et vérifient $\varphi(p/2) \in E1$.

$$\varphi\left(\frac{p}{2}\right) \in E1 \Leftrightarrow a_{12}c_2 + a_{13}c_3 + a_{14}c_4 = 0.$$

Comme $\alpha \neq 0$, on a $(a_{12}, a_{13}, a_{14}) \neq (0, 0, 0)$.

Le système (A) admet deux solutions p-périodiques symétriques indépendantes dont les conditions initiales appartiennent à $E1$. Ce sont les solutions constantes $(0, c_2, c_3, c_4)$ vérifiant $a_{12}c_2 + a_{13}c_3 + a_{14}c_4 = 0$.

On déduit : $T_{p/2}(E1)$ est transverse à $E1$.

De plus, $T_{p/2}(A1) \neq A1$

2me cas

$$\alpha = \sum_{j=2}^4 a_{1j} a_{j1} < 0; \lambda_3 \text{ et } \lambda_4 \text{ sont imaginaires pures.}$$

Soit $\beta = \sqrt{-\alpha}$, la matrice fondamentale associée à (A) est :

$$X\left(\frac{t}{\beta}\right) = \begin{pmatrix} \cos t & \frac{a_{12}}{\beta} \sin t & \frac{a_{13}}{\beta} \sin t & \frac{a_{14}}{\beta} \sin t \\ \frac{a_{21}}{\beta} \sin t & \frac{a_{21}a_{12}}{\alpha}(\cos t - 1) + 1 & \frac{a_{21}a_{13}}{\alpha}(\cos t - 1) & \frac{a_{21}a_{14}}{\alpha}(\cos t - 1) \\ \frac{a_{31}}{\beta} \sin t & \frac{a_{31}a_{12}}{\alpha}(\cos t - 1) & \frac{a_{31}a_{13}}{\alpha}(\cos t - 1) + 1 & \frac{a_{31}a_{14}}{\alpha}(\cos t - 1) \\ \frac{a_{41}}{\beta} \sin t & \frac{a_{41}a_{12}}{\alpha}(\cos t - 1) & \frac{a_{41}a_{13}}{\alpha}(\cos t - 1) & \frac{a_{41}a_{14}}{\alpha}(\cos t - 1) + 1 \end{pmatrix}$$

(A) admet les mêmes solutions constantes p-périodiques que dans le premier cas.

Soit φ une solution de (A) telle que :

$$\varphi(0) \in E1 \text{ où } \varphi(0) = (0, c_2, c_3, c_4)$$

$$\varphi\left(\frac{p}{2}\right) \in E1 \Leftrightarrow (a_{12}c_2 + a_{13}c_3 + a_{14}c_4) \sin\left(\frac{p}{2}\right) = 0.$$

Si $(p = 2k\pi, k \in \mathbb{Z})$ alors $T_{p/2}(E1) = E1$ et $T_{p/2}(A1) = A1$ d'où $(A) \in \mathcal{A}_4(p)$.

Si $(p \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z})$ alors $T_{p/2}(E1)$ est transverse à $E1$

et $T_{p/2}(A1) \neq A1$ d'où $(A) \in \mathcal{A}_2(p)$.

3me cas

$$\alpha = \sum_{j=2}^4 a_{1j} a_{j1} = 0; \text{ toutes les valeurs propres sont nulles (cf.(1))}$$

La matrice fondamentale associée à (A) s'écrit :

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}t & a_{13}t & a_{14}t \\ 0 & a_{12}a_{21} \frac{t^2}{2} + 1 & a_{13}a_{21} \frac{t^2}{2} & a_{14}a_{21} \frac{t^2}{2} \\ 0 & a_{12}a_{31} \frac{t^2}{2} & a_{13}a_{31} \frac{t^2}{2} + 1 & a_{14}a_{31} \frac{t^2}{2} \\ 0 & a_{12}a_{41} \frac{t^2}{2} & a_{13}a_{41} \frac{t^2}{2} & a_{14}a_{41} \frac{t^2}{2} + 1 \end{pmatrix}$$

On a $T_{p/2}(A1) = A1$ et

$$T_{p/2}(E1) = \{(0, c_2, c_3, c_4) \in \mathbb{R}^4 / (a_{12}c_2 + a_{13}c_3 + a_{14}c_4) = 0\}$$

Si $(a_{12}, a_{13}, a_{14}) = (0, 0, 0)$ alors $T_{p/2}(E1) = E1$.

Toutes les solutions sont p-périodiques. (A) appartient à $\mathcal{A}_4(p)$. (cf.II.2.)

Si $(a_{12}, a_{13}, a_{14}) \neq (0, 0, 0)$ alors $T_{p/2}(E1)$ est transverse à E1.

(A) admet trois solutions p-périodiques symétriques indépendantes.

Remarque. Pour $(a_{12}, a_{13}, a_{14}) \neq (0, 0, 0)$ et $p \neq \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha}}$ où $\alpha = a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} + a_{14}a_{41}$ le système différentiel (A) est tel que :

$T_{p/2}(E1)$ est transverse à E1.

E est un hyperplan de \mathbb{R}^4 donc si l'on perturbe le système (A) de manière à conserver la symétrie E1, ce cas de transversalité persiste.

III.1.2. Perturbations de systèmes différentiels linéaires autonomes L_1^p

Soit (A_ε) le système différentiel de $F_{S,0}^p$ avec $S \in \{A1, E1, (A1, E1)\}$

$$\dot{X} = AX + \varepsilon F(t, X), \quad \varepsilon \in \Lambda \subset \mathbb{R}; \quad 0 \in \Lambda$$

$$X \in \mathbb{R}^4.$$

Le système homogène (A₀) $\dot{X} = AX$ admet au moins un plan P de conditions initiales de solutions p-périodiques symétriques

$$P = \{(0, c_2, c_3, c_4) \in \mathbb{R}^4 \text{ tel que } c_2 a_{12} + c_3 a_{13} + c_4 a_{14} = 0\}$$

Si $(a_{12}, a_{13}, a_{14}) \neq (0, 0, 0)$ et $p \neq \frac{2\pi k}{\alpha}$ où $\alpha = a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} + a_{14}a_{41}$; $k \in \mathbb{Z}$

alors (A₀) est tel que $T_{p/2}(E1) \neq E1$.

On en déduit que : il existe un voisinage V de 0 dans Λ tel que pour tout ε de V on a :

1. (A_ε) admet une surface (de dimension 2) de conditions initiales de solutions p-périodiques. Ces solutions rencontrent E1 aux temps 0 et $\frac{p}{2}$. La surface se réduit au plan P de E1 défini par les solutions constantes $(0, c_2, c_3, c_4)$ vérifiant $a_{12}c_2 + a_{13}c_3 + a_{14}c_4 = 0$ lorsque $\varepsilon = 0$.
2. L'orbite de ces solutions est symétrique par rapport à E1.

Le résultat précédent peut être généralisé de manière très simple aux systèmes linéaires non autonomes de la manière suivante :

Soit (A_ε) le système différentiel de $F_{S,0}^D$ avec $S \in \{A1, E1, (A1, E1)\}$

$$\begin{aligned} \dot{X}' &= A(t)X + F(t, X), \quad \varepsilon \in \Lambda \subset \mathbb{R}, \quad 0 \in \Lambda \\ X &\in \mathbb{R}^4 \end{aligned}$$

On sait que le système homogène

$$(A_0) \quad \dot{X} = A(t)X$$

admet au moins deux solutions p-périodiques indépendantes dont les orbites sont symétriques par rapport à E1.

On a la généralisation suivante :

Proposition 14

Si :

- 1) pour tout (x, t, ε) élément de $\mathbb{R}^5 \times \Lambda$, (A_ε) vérifie les conditions de symétrie par rapport à l'espace E_1 ;
- 2) (A_0) admet un plan P de E_1 de conditions initiales de solutions p -périodiques;
- 3) $T_{p/2}(A_0)(E_1)$ rencontre E_1 transversalement, où $T_{p/2}$ est la demi-application de Poincaré.

Alors,

il existe un voisinage V de 0 dans Λ tel que pour tout ε de V , on a :

1. (A_ε) admet une surface de dimension 2 dans E_1 de conditions initiales de solutions p -périodiques. Ces solutions rencontrent E_1 aux temps 0 et $\frac{p}{2}$.
2. L'orbite de ces solutions est symétrique par rapport à E_1 .

Commentaire. Une généralisation aux systèmes non linéaires symétriques sera donnée par les théorèmes 2 et 3 (§ IV).

III.2. Systèmes symétriques dont la partie linéaire est un élément de L_{12}^p

III.2.1. Systèmes linéaires autonomes de $L_{12}^p, p \in \mathbb{R}$

Soit $\dot{X} = AX$ (A)

un système différentiel autonome avec A élément de $\mathcal{M}(4, \mathbb{R})$.

(A) appartenant à L_{12}^p , A a la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 \\ c_3 & c_4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminons comme dans III.1. les différents cas de transversalités possibles en vue d'une application à la théorie des perturbations.

L'équation caractéristique est de la forme :

$$\lambda^4 - \lambda^2 X + Y = 0$$

avec :

$$X = b_1 c_1 + b_2 c_3 + b_3 c_2 + b_4 c_4$$

$$Y = (b_1 b_4 - b_2 b_3)(c_1 c_4 - c_2 c_3)$$

Si $A = \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$; Y s'écrit : $Y = \det B \det C$

Si $(\lambda_i; 1 \leq i \leq 4)$ sont les valeurs propres de A , on doit avoir

$$\text{tr } A = \sum_{i=1}^4 \lambda_i = 0$$

On résoud,

$$\lambda^2 - \lambda X + Y = 0 \text{ avec } \Delta = X^2 - 4Y$$

1er cas $\Delta > 0$

a) Toutes les valeurs propres sont réelles non nulles :

$$X > \sqrt{\Delta} > 0 \text{ et } Y > 0$$

Alors, (A) n'admet aucune solution périodique non nulle et

$$T_{p/2}(P_{12}) \cap P_{12} = \{0\}; T_{p/2}(P_{34}) \cap P_{34} = \{0\}.$$

b) Deux valeurs propres sont nulles, les deux autres sont réelles opposées :

$$X = \sqrt{\Delta} > 0 \text{ et } Y = 0$$

Le système (A) admet un ensemble de dimension 1, de solutions périodiques constantes vérifiant :

$$\begin{cases} b_1 X_3 + b_2 X_4 = 0 \\ X_1 = X_2 = 0 \end{cases}, \text{ si } \det B = 0 \quad \text{ou} \quad \begin{cases} c_1 X_1 + c_2 X_2 = 0 \\ X_3 = X_4 = 0 \end{cases}, \text{ si } \det C = 0$$

Dans le premier cas, les solutions constantes appartiennent à P_{34} , dans l'autre à P_{12}

D'où :

si $\det B=0$, $T_{p/2}(P_{34})$ rencontre P_{34} transversalement selon une droite.

si $\det C=0$, $T_{p/2}(P_{12})$ rencontre P_{12} transversalement selon une droite.

c) Deux valeurs propres sont nulles, les deux autres sont imaginaires pures

$$\begin{cases} X = -\sqrt{\Delta} < 0 \\ Y = 0 \end{cases}$$

(A) admet des solutions périodiques constantes comme celles ci-dessus et deux autres solutions indépendantes de période $\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}$ avec $\Lambda = -\sqrt{\Delta}$

Pour $p = \frac{2\pi}{\sqrt{\Lambda}}$, toutes les solutions sont périodiques si $\det B = \det C = 0$.

Dans ce cas, $T_{p/2}(P_{12}) = P_{12}$ et $T_{p/2}(P_{34}) = P_{34}$.

d) Toutes les valeurs propres sont imaginaires pures.

$$\begin{cases} X < -\sqrt{\Delta} < 0 \\ Y > 0 \end{cases}$$

(A) admet deux solutions périodiques indépendantes de période $\frac{2\pi}{\sqrt{-\Lambda_1}}$

où $\Lambda_1 = \frac{X+\sqrt{\Delta}}{2}$ et deux autres de période $\frac{2\pi}{\sqrt{-\Lambda_2}}$ où $\Lambda_2 = \frac{X-\sqrt{\Delta}}{2}$

2me cas $\Delta = 0$

a) Toutes les valeurs propres sont réelles opposées deux à deux, de multiplicité 2

$$\begin{cases} X > 0 \\ Y > 0 \end{cases} ; \lambda = \pm \sqrt{\frac{X}{2}}$$

(A) n'admet aucune solution périodique. On a :

$$T_{p/2}(P_{12}) \cap P_{12} = \{0\} \quad \text{et} \quad T_{p/2}(P_{34}) \cap P_{34} = \{0\}.$$

b) Toutes les valeurs propres sont nulles

$$\begin{cases} X = 0 \\ Y = 0 \end{cases}$$

(A) admet les mêmes droites de solutions périodiques constantes que dans le premier cas b).

Si $\det B = \det C = 0$, on a deux solutions périodiques constantes indépendantes;

c) Toutes les valeurs propres sont imaginaires pures

$$\begin{cases} X < 0 \\ Y < 0 \end{cases}, \quad \lambda = \pm i \sqrt{\frac{-X}{2}}$$

Même conclusion que pour 1.d)

3me cas $\Delta < 0$

$$X^2 < 4Y \Rightarrow \lambda = X \pm i \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$$

λ doit être imaginaire pur ce qui n'est pas possible dans ce cas car si $\lambda = \pm ib$ on doit avoir $b^2 = \lambda$ d'où $\Delta = 0$.

III.2.2. Récapitulation

A) l'espace des solutions p-périodiques est de dimension 0 si et seulement si

$$\Delta \geq 0, X > \sqrt{\Delta} \quad \text{et} \quad Y > 0$$

B) l'espace des solutions p-périodiques est de dimension 1 si et seulement si

$$\Delta \geq 0, Y = 0 \quad \text{avec} \quad (\det B, \det C) \neq (0,0) \quad \text{et} \quad (X = \sqrt{\Delta} \quad \text{ou} \quad X = -\sqrt{\Delta} \quad \text{avec} \quad p \neq \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}})$$

- C) l'espace des solutions p-périodiques est de dimension 2 si et seulement si $\det B = \det C = 0$; $\Delta \geq 0$ et $X = \sqrt{\Delta}$
 $Y > 0$, $\Delta \geq 0$, $X < -\sqrt{\Delta}$ et $p = \frac{2\pi}{\sqrt{-\Lambda}}$ où $\Lambda = \frac{X \pm \sqrt{\Delta}}{2}$
- D) l'espace des solutions p-périodiques est de dimension 3 si et seulement si $\Delta \geq 0$, $X = -\sqrt{\Delta}$, $Y = 0$ avec $(\det B, \det C) \neq (0, 0)$ et $p = \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}$
- E) l'espace des solutions p-périodiques est de dimension 4 si et seulement si $\Delta \geq 0$, $X = -\sqrt{\Delta}$, $\det B = \det C = 0$ et $p = \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}$

Commentaire

L'existence de solutions périodiques admettant la symétrie P_{12} (resp. P_{34}) est liée à la position relative de $T_{p/2}(P_{12})$ (resp. $T_{p/2}(P_{34})$) par rapport à P_{12} (resp. P_{34}).

Or un plan ne sépare pas un espace de dimension 4 en deux régions distinctes. Si l'intersection de deux surfaces (de dimension 2) est réduite à un point, alors une petite perturbation peut faire disparaître cela.

Nous voyons donc que les cas de transversalité obtenus ci-dessus ne permettent pas de conclure quant aux systèmes linéaires autonomes perturbés.

CHAPITRE IV - SYSTEMES DIFFERENTIELS PERIODIQUES AVEC SYMETRIES

Nous étudions les systèmes différentiels périodiques non linéaires avec symétries. Nous montrons tout d'abord le lien qui existe entre une solution périodique symétrique d'un tel système et les symétries de l'équation aux variations associée.

Cela nous permet ensuite d'étudier les systèmes différentiels dépendant de paramètres en utilisant les résultats des systèmes différentiels linéaires périodiques avec symétrie (§ II).

IV.1. Equations aux variations

Soit (f) un système différentiel p -périodique avec symétries, c'est à dire tel qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $S \in \{A_i, E_i, P_{ij}, (A_i, E_i), (P_{ij}, \bar{P}_{ij}); 1 \leq i < j \leq 4\}$ tel que $(f) \in F_{S, \alpha}^p$

Proposition 15

Soit φ une solution de (f) et $(\ell\varphi)$ l'équation aux variations associée à φ .

a) Soit $S_1 = \{A_i, E_i, P_{ij}; 1 \leq i < j \leq 4\}$; si φ appartient à $\text{Sol}_{S_1, \alpha}^p(f)$ alors $(\ell\varphi)$ appartient à $L_{S_1, \alpha}^p$.

b) Soit $S_2 = \{(A_i, E_i), (P_{ij}, \bar{P}_{ij}); 1 \leq i < j \leq 4\}$; si φ appartient à $\text{Sol}_{S_2, \alpha}^p(f)$ alors $(\ell\varphi)$ appartient à $L_{S_2, \alpha}^{p/2}$.

Démonstration

Soit $\alpha = 0$; on a :

$$\ell\varphi(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, \varphi(t)); t \in \mathbb{R}$$

$(\ell\varphi)$ est p -périodique car φ est p -périodique ainsi que f .

Supposons que $(f) \in F_{A_i, 0}^p$, alors

$$f_i(t, x_1, x_2, x_3, x_4) = -f_i(-t, y_1, y_2, y_3, y_4)$$

$$f_j(t, x_1, x_2, x_3, x_4) = f_j(-t, y_1, y_2, y_3, y_4); \quad j \neq i$$

où ($y_i = x_i$ et $y_j = -x_j$ pour $j \neq i$)

On obtient :

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(t, x_1, x_2, x_3, x_4) = - \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(-t, y_1, y_2, y_3, y_4)$$

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(t, x_1, x_2, x_3, x_4) = + \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(-t, y_1, y_2, y_3, y_4)$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, x_1, x_2, x_3, x_4) = + \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(-t, y_1, y_2, y_3, y_4)$$

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(t, x_1, x_2, x_3, x_4) = - \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(-t, y_1, y_2, y_3, y_4), \quad j \neq i; \quad k \neq i$$

On a donc :

$$(\ell\varphi)_{jk}(-t) = \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(-t, \varphi_1(-t), \varphi_2(-t), \varphi_3(-t), \varphi_4(-t)); \quad j \neq i$$

$$(\ell\varphi)_{jk}(-t) = \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(-t, \psi_1(t), \psi_2(t), \psi_3(t), \psi_4(t))$$

avec $\psi_\ell(t) = -\varphi_\ell(+t)$ pour $\ell \neq i$ et $\psi_i(t) = \varphi_i(t)$ car $\varphi \in \text{Sol}_{A_i, 0}^p$

Il en résulte que :

$$(\ell\varphi)_{ji}(-t) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(t, \varphi(t)) = (\ell\varphi)_{ji}(t) \quad \text{pour } j \neq i$$

$$(\ell\varphi)_{jk}(-t) = - \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(t, \varphi(t)) = -(\ell\varphi)_{jk}(t) \quad \text{pour } j \neq i \text{ et } k \neq i$$

De même,

$$(\mathcal{L}\varphi)_{ik}(-t) = \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(-t, \varphi_1(-t), \varphi_2(-t), \varphi_3(-t), \varphi_4(-t))$$

$$(\mathcal{L}\varphi)_{ik}(-t) = \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(-t, \psi_1(t), \psi_2(t), \psi_3(t), \psi_4(t))$$

D'où :

$$(\mathcal{L}\varphi)_{ii}(-t) = - \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(t, \varphi(t)) = -(\mathcal{L}\varphi)_{ii}(t)$$

$$(\mathcal{L}\varphi)_{ik}(-t) = + \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(t, \varphi(t)) = (\mathcal{L}\varphi)_{ik}(t), \text{ pour } k \neq i$$

On a montré :

$$(\mathcal{L}\varphi) \in L_{Ai,0}^p$$

Les autres cas se démontrent de la même manière.

Soit $\varphi \in \text{Sol}_{i,0}^p$ alors $\varphi \in \text{Sol}_{Ai,0}^p \cap \text{Sol}_{Ei,p/4}^p$

en appliquant a) on obtient :

$$(\mathcal{L}\varphi) \in L_{Ai,0}^p \cap L_{Ai,p/4}^p$$

La remarque 1 § II permet de conclure.

La proposition précédente permet de lier les systèmes linéaires symétriques aux systèmes non linéaires symétriques.

Nous allons appliquer les résultats du Chapitre II aux systèmes non linéaires symétriques.

Commençons par la stabilité.

IV.2. Stabilité

Définition

Soit φ une solution p -périodique du système différentiel (f).

On appelle indice de Poincaré de φ pour la période p , et on le note $\gamma_p(\varphi)$, l'indice de Poincaré de $(\mathcal{L}\varphi)$ pour la période p , lorsque celui-ci est défini.

Notons $\varphi(\cdot, \alpha, x^0) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$, la solution de (f) telle que :

$$\varphi(\alpha, \alpha, x^0) = x^0; \text{ où } x^0 \in \mathbb{R}^4$$

Remarque

Si $\varphi(\cdot, \alpha, x^0)$ appartient à $\text{Sol}_{S, \alpha}^p(f)$ où $S = \{A_i, P_{ij}, E_i; 1 \leq i < j \leq 4\}$ alors d'après le théorème 1 :

$$x^0 \in S \text{ et } \varphi(\alpha + \frac{p}{2}, \alpha, x^0) \in S.$$

En particulier :

si $\varphi(\cdot, \alpha, x^0) \in \text{Sol}_{(A_i, E_i), \alpha}^p(f)$ (resp. $\text{Sol}_{(P_{ij}, \bar{P}_{ij}), \alpha}^p(f)$) alors $x^0 \in A_i$ (resp. P_{ij})

Proposition 16

a) Si φ appartient à $\text{Sol}_{S, \alpha}^p(f)$ avec $S = \{A_i, E_i, (A_i, E_i); 1 \leq i \leq 4\}$, alors

$\gamma_{p'}(\mathcal{L}\varphi)$ n'est pas défini; avec $p' = p/2$ pour $S = (A_i, E_i)$, $p' = p$ sinon

Si φ est telle que $(\mathcal{L}\varphi)$ appartient à $\mathcal{A}_3(p)$ alors φ est instable au sens de Lyapunov.

b) Soit φ appartenant à $\text{Sol}_{P_{ij}, \alpha}^p(f)$ (resp. $\text{Sol}_{(P_{ij}, \bar{P}_{ij}), \alpha}^p(f)$) avec $1 \leq i < j \leq 4$

$$\text{et } M_{\alpha}^p = ((a_{k\ell}), k, \ell \in \{1, 2, 3, 4\}) = \frac{\partial \varphi}{\partial w}(\alpha + \frac{p'}{2}, \alpha, x^0 + w) / w = (0, 0, 0, 0)$$

Posons $p' = p$ (resp. $p' = \frac{p}{2}$);

On a :

$$\gamma_p'(\varphi) = \text{sgn} [(a_{ik}a_{jl} - a_{il}a_{jk})(a_{ki}a_{lj} - a_{kj}a_{li})]$$

$$\gamma_{2p}'(\varphi) = \text{sgn} [(a_{ik}a_{jl} - a_{il}a_{jk})(a_{ki}a_{lj} - a_{kj}a_{li})(a_{ii}a_{jj} - a_{ij}a_{ji})(a_{kk}a_{ll} - a_{kl}a_{lk})]$$

où $\bar{P}_{ij} = P_{k\ell}$, si chacun des termes est non nul.

Si $\gamma_{2p}'(\varphi) = -1$, alors φ est instable au sens de Lyapunov; par contre si $\gamma_{2p}'(\varphi) = 1$, la solution nulle du système d'équations aux variations associée à φ est stable au sens de Lyapunov mais φ n'est pas nécessairement stable pour (f) : on dit que φ est stable au sens infinitésimal.

Démonstration

a) On applique la proposition 7 et le corollaire (§ II.2.4.).

b) On constate que M_α^p est la valeur au temps $\alpha + \frac{p}{2}$ de la solution matricielle fondamentale en $t=\alpha$ de l'équation aux variations associée à φ .

On applique alors, la proposition 10.

Proposition 17

Si φ appartenant à $\text{Sol}_{S,\alpha}^p(f)$ avec $S = \{A_i, P_{ij}, E_i; 1 \leq i < j \leq 4\}$ est stable (resp. instable) pour $t \rightarrow +\infty$, alors φ est stable (resp. instable) pour $t \rightarrow -\infty$ et réciproquement.

Démonstration

Prenons $\alpha=0$. Soit T_p l'application de Poincaré associé à la période p du système.

Soit $\varphi(.,0,x^0)$ appartenant à $\text{Sol}_{S,\alpha}^p(f)$

La solution p -périodique $\varphi(.,0,x^0)$ est stable au sens de Lyapunov si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathbb{R}^4, \forall n \in \mathbb{N}^*, \|x - x^0\| < \eta \Rightarrow \|T^n(x) - x^0\| < \varepsilon$$

où $\|\cdot\|$ est une norme sur \mathbb{R}^4 .

Si l'on note $s(x)$ le symétrique de x par rapport à S parallèlement à \bar{S} alors en utilisant le lemme 1, on montre par récurrence que

$$s(T^n(x)) = T^{-n}s(x)$$

Cette propriété et la définition de la stabilité achèvent la démonstration.

IV.3. Systèmes différentiels périodiques symétriques dépendant de paramètres

Nous appliquons les résultats du chapitre II aux systèmes différentiels dépendant de paramètres. Nous étudions à quelles conditions une solution périodique φ symétrique d'un système différentiel périodique (f) symétrique est isolée ou non, prolongeable ou non dans l'ensemble des solutions périodiques de (f) .

Nous appliquerons le théorème de prolongement de Poincaré ([7] . cf.IV.3.1.) lorsque l'équation aux variations $(\lambda\varphi)$ associée à φ est non exceptionnelle, ce qui peut être le cas pour (f)

$$(f) \in F_{S,\alpha}^p \text{ où } S = \{P_{ij}, \overline{P_{ij}}\}; 1 \leq i < j \leq 4\}$$

Par contre,

$$\text{si } (f) \in F_{S,\alpha}^p \text{ où } S = \{A_i, E_i, (A_i, E_i), 1 \leq i \leq 4\}$$

alors $(\lambda\varphi)$ est toujours exceptionnelle. Nous montrons, grâce aux résultats du chapitre II.2. que nous pouvons quand même obtenir des réponses très précises. Munissons l'ensemble des systèmes différentiels p -périodiques de dimension 4 (en tant qu'ensemble d'application $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$) de la topologie de la convergence compacte; ce qui fait des ensembles

$$F_{S,\alpha}^p, \alpha \in \mathbb{R}, S \in \{A_i, E_i, P_{ij}, (A_i, E_i), (P_{ij}, \overline{P_{ij}}); 1 \leq i < j \leq 4\}$$

des espaces topologiques.

De même munissons l'ensemble des solutions, continues et p -périodiques de tels systèmes, de cette même topologie.

Soient $m \in \mathbb{N}$ et Λ un domaine de \mathbb{R}^m .

On définit $F : \Lambda \rightarrow F_{S,\alpha}^p$ une application continue, dite famille continue de systèmes différentiels p-périodiques avec symétrie S et paramétrée par $\lambda \in \Lambda$.

On note : $F(\lambda) = (\lambda f)$ et ${}^\lambda \varphi$ une solution de (λf) .

IV.3.1. Points exceptionnels et points ordinaires

On sait que si $(\eta \varphi)$ équation aux variations associée à ${}^\eta \varphi$, solution p-périodique n'est pas exceptionnelle pour la période p alors il existe pour $\lambda \in \Lambda$ voisin de η , une solution p-périodique et une seule ${}^\lambda \varphi \in (\lambda f)$ qui soit une petite perturbation de ${}^\eta \varphi$. ([7])

Définition

Etant donné $F : \Lambda \rightarrow F_{S,\alpha}^p$, soit ${}^\eta \varphi \in \text{Sol}_{S,\alpha}^p({}^\eta f)$; on dit que ${}^\eta \varphi$ est un point ou élément exceptionnel dans $\text{Sol}_{S,\alpha}^p({}^\eta f)$ si $(\eta \varphi)$ est exceptionnelle pour la période $2p'$ ($p' = \frac{p}{2}$ dans le cas de symétries combinées (A_i, E_i) ou $(P_{ij}, \overline{P_{ij}})$; $p' = p$ sinon)

Dans le cas contraire, ${}^\eta \varphi$ est dit point ordinaire dans $\text{Sol}_{S,\alpha}^p({}^\eta f)$.

Remarque. Si $S \in \{A_i, E_i, (A_i, E_i); 1 \leq i \leq 4\}$ alors toute solution de $({}^\eta f)$ est exceptionnelle dans $\text{Sol}_{S,\alpha}^p({}^\eta f)$.

Les deux théorèmes suivants traitent le cas où

$$({}^\lambda f) \in F_{S,\alpha}^p; S \in \{A_1, E_1, (A_1, E_1)\}$$

Si φ est une solution de $({}^\lambda f)$ alors $(\lambda \varphi)$ appartient à L_1^p .

Dans ce cas, les résultats de Poincaré ne sont pas applicables.

Supposons $\alpha = 0$.

Théorème 2

Soit $({}^\lambda f) \in F_{E_1,0}^p$ une famille de systèmes différentiels dépendant continûment de $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}^m$.

Si pour $\lambda = \eta \in \Lambda$, il existe une solution $\hat{\varphi} \in \text{Sol}_{E1,0}^p({}^n f)$ telle que l'équation aux variations associée $(\lambda \hat{\varphi})$ soit dans $\mathcal{A}_2(p)$, alors :

- a. la solution $\hat{\varphi}$ est non isolée dans $\text{Sol}_{E1,0}^p({}^n f)$; de manière plus précise, il existe dans $E1$ un élément de surface (P) ouvert, de classe C^1 en (x_2, x_3, x_4) , passant par $\hat{\varphi}(0) \in E1$, tel que pour tout $\mu \in (P)$, la solution ${}^\mu \varphi$ de $({}^n f)$ définie par ${}^\mu \varphi(0) = \mu$ soit telle que ${}^\mu \varphi \in \text{Sol}_{E1,0}^p({}^n f)$
- b. la famille ${}^\mu \varphi$ de solutions périodiques de $({}^n f)$ peut être prolongée à tout un voisinage \mathcal{V} de η dans Λ , de manière unique et continue en λ .

Démonstration

Soit $T_{p/2}({}^n f)$ la demi-application de Poincaré associée à $({}^n f)$

$\hat{\varphi} \in \text{Sol}_{E1,0}^p({}^n f)$ donc $\hat{\varphi}(0) \in E1$ et $\hat{\varphi}(\frac{p}{2}) \in E1$.

Par hypothèse, $(\lambda \hat{\varphi}) \in \mathcal{A}_2(p)$. Dans une base bien choisie, respectant les symétries $X_{(\lambda \hat{\varphi})}(\frac{p}{2})$ est de la forme :

$$X_{(\lambda \hat{\varphi})}(\frac{p}{2}) = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & 0 & 0 \\ u_2 & \left(\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right) \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \text{ avec } v_1 \neq 0 \text{ et } (u_2, u_3, u_4) \neq (0, 0, 0)$$

Soit $T_{p/2}^*$ l'application tangente à $T_{p/2}$ au point $\hat{\varphi}(0)$. $T_{p/2}^*$ est identifiable à $T_{p/2}(\lambda \hat{\varphi})$ d'où $T_{p/2}^*(E1)$ est transverse à $E1$ puisque $v_1 \neq 0$.

Cela entraîne que $T_{p/2}(E1)$ est transverse à $E1$ au point $\hat{\varphi}(\frac{p}{2})$ et coupe $E1$ au voisinage de ce point, selon un élément de surface (P) de classe C^1 .

Le théorème 1 permet de conclure.

Remarques. 1. Soit $(\lambda \hat{\varphi}) \in \mathcal{A}'_3(p)$ c'est à dire que $(\lambda \hat{\varphi})$ admet trois solutions linéairement indépendantes p -périodiques, deux d'orbite symétrique par rapport à $E1$ et l'autre par rapport à $A1$.

On a :

$$X_{(\ell\hat{\varphi})\left(\frac{p}{2}\right)} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right) \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \text{ avec } v_1 \neq 0$$

Dans ce cas, $T_{p/2}^*(E1)$ est encore transverse à $E1$.

On en déduit que le théorème précédent reste vrai pour $(\ell\hat{\varphi}) \in \mathcal{A}'_3(p)$

2. Si (f) et φ sont de symétrie $A1$ sans être de symétrie $E1$, alors le théorème n'est pas applicable car la transversalité entre $A1$ (de dimension 1) et $T_{p/2}(A1)$ (de dimension 1) n'est pas générique dans \mathbb{R}^4 .

Théorème 3

Soit $(^\lambda f) \in F_{(A1,E1),0}^p(p)$ une famille de systèmes différentiels dépendant continûment de $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}^m$

Si pour $\lambda = \eta \in \Lambda$, il existe une solution $\hat{\varphi} \in \text{Sol}_{(A1,E1),0}^p({}^\eta f)$ telle que l'équation aux variations associée $(\ell\hat{\varphi})$ soit dans $\mathcal{A}_2(p)$, alors :

- a) la solution $\hat{\varphi}$ est isolée dans $\text{Sol}_{(A1,E1),0}^p({}^\eta f)$, mais non dans $\text{Sol}_{E1,0}^p({}^\eta f)$
- b) la solution $\hat{\varphi}$ de $({}^\eta f)$ peut être prolongée à tout un voisinage \mathcal{V} de η dans Λ de manière unique dans $\text{Sol}_{(A1,E1),0}^p({}^\lambda f)$, continûment en λ .

Démonstration

Par hypothèse $\hat{\varphi}(0) \in A1$ et $\hat{\varphi}\left(\frac{p}{4}\right) \in E1$

$(\ell\hat{\varphi}) \in \mathcal{A}_2(p)$ d'où $X_{(\ell\hat{\varphi})\left(\frac{p}{4}\right)}$ est de la forme :

$$X_{(\ell\hat{\varphi})\left(\frac{p}{4}\right)} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & 0 & 0 \\ u_2 & \left(\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right) \\ u_3 & & & \\ u_4 & & & \end{pmatrix}$$

avec $u_1 \times v_1 \times D_{11} \neq 0$ et $(u_2, u_3, u_4) \neq (0, 0, 0)$

d'où $T_{p/4}^*(A1)$ est transverse à $E1$ car $u_1 \neq 0$.

Cela entraîne que $T_{p/4}(A1)$ est transverse à $E1$ au point $\hat{\varphi}(\frac{p}{4})$

Il en résulte que $\hat{\varphi}$ est isolée dans $\text{Sol}_{(A1,E1),0}^P({}^n f)$.

$\hat{\varphi}$ est non isolée dans $\text{Sol}_{E1,p/4}^P({}^n f)$ du fait du théorème 1 avec $\alpha = \frac{p}{4}$

Remarque. Le théorème 3 reste vrai si l'on suppose $(\ell\hat{\varphi}) \in \mathcal{A}'_3(p)$.

Les résultats précédents nous conduisent à énoncer les définitions suivantes :

IV.3.2. Point S-ordinaire, point S-bifurcation

Définition

Soit $F : \Lambda \rightarrow F_{S,\alpha}^P$ et ${}^n\varphi \in \text{Sol}_{S,\alpha}^P({}^n f)$

On dit que ${}^n\varphi$ est un point S-ordinaire dans $\text{Sol}_{S,\alpha}^P({}^n f)$ si il existe un voisinage \mathcal{V} de ${}^n\varphi$ dans Λ tel que pour tout $\lambda \in \mathcal{V}$, il existe une unique solution $\lambda\varphi \in \text{Sol}_{S,\alpha}^P({}^\lambda f)$ telle que $\lambda\varphi \rightarrow {}^n\varphi$ lorsque $\lambda \rightarrow {}^n$

Un point ${}^n\varphi$ appartenant à $\text{Sol}_{S,\alpha}^P({}^n f)$ qui n'est pas S-ordinaire est dit point S-bifurcation dans $\text{Sol}_{S,\alpha}^P({}^n f)$.

Remarque. 1. Les théorèmes 2 et 3 définissent des conditions d'existence de points (A1,E1)-ordinaires. On voit donc qu'un point exceptionnel peut être (A1,E1)-ordinaire.

Nous examinons maintenant le cas où $S \in \{P_{ij}, (P_{ij}, \overline{P_{ij}})\}; 1 \leq i < j \leq 4\}$.

Proposition 18

Soit ${}^n\varphi \in \text{Sol}_{S,\alpha}^P(f)$ et $M_\alpha^P = (a_{mn})$ la matrice associée à ${}^n\varphi$ par la proposition 16.

Si $S = P_{ij}$ (resp. $(P_{ij}, \overline{P_{ij}})$) où $\overline{P_{ij}} = P_{k\ell}$ et si $(a_{ki} a_{\ell j} - a_{kj} a_{\ell i} \neq 0)$

(resp. $a_{ii}a_{jj} - a_{ij}a_{ji} \neq 0$) alors η_0 est un point Pij-ordinaire
(resp. $(P_{ij}, \overline{P_{ij}})$ -ordinaire) dans $\text{Sol}_{S, \alpha}^p({}^n f)$

Démonstration

Soit $S = P_{ij}$, et $\overline{S} = P_{kl}$

Posons $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0)$ avec $x_m^0 = 0$ pour $m \neq i$ et $m \neq j$

Soit $H(x_i^0, x_j^0, \lambda) = (H1(x_i^0, x_j^0, \lambda), H2(x_i^0, x_j^0, \lambda))$

avec $H1(x_i^0, x_j^0, \lambda) = \lambda \varphi_k(\alpha + \frac{p}{2}, \alpha, x^0)$

$$H2(x_i^0, x_j^0, \lambda) = \lambda \varphi_l(\alpha + \frac{p}{2}, \alpha, x^0)$$

$\lambda \varphi \in \text{Sol}_{P_{ij}, \alpha}^p({}^\lambda f)$ si et seulement si $H(x_i^0, x_j^0, \lambda) = 0$

Or, on a :

$$H({}^n \varphi_i(\alpha), {}^n \varphi_j(\alpha), \eta) = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_i^0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial {}^n \varphi_k}{\partial x_i^0} & \frac{\partial {}^n \varphi_l}{\partial x_i^0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{ki} & a_{li} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_j^0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial {}^n \varphi_k}{\partial x_j^0} & \frac{\partial {}^n \varphi_l}{\partial x_j^0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{kj} & a_{lj} \end{pmatrix}$$

Le théorème des fonctions implicites nous assure que si :

$$(a_{ki}a_{lj} - a_{kj}a_{li} \neq 0)$$

alors $H(x_i^0, x_j^0, \lambda) = 0$

admet une unique solution $(x_i^0, x_j^0)(\lambda)$ pour λ voisin de η .

Commentaire

Nous avons vu par les théorèmes 2 et 3 qu'un point exceptionnel, élément d'une famille de solutions p-périodiques avec symétrie S peut être un point S-ordinaire, pour $S = (A1, E1)$.

La proposition suivante montre dans quel cas il est possible d'obtenir une affirmation analogue pour S élément de $\{P_{12}, (\overline{P_{12}}, P_{34})\}$ pour la période np ($n \in \mathbb{N}^*$).

Proposition 19

Soit $S = \{P_{12}, \overline{P_{12}}, (P_{12}, \overline{P_{12}})\}$ et n appartenant à \mathbb{N}^*

Supposons que pour tout $\lambda \in \Lambda$, $(\lambda f) \in F_{S, \alpha}^p$; soit λ_ϕ un point exceptionnel dans $\text{Sol}_{S, \alpha}^p(\lambda f)$ tel que la matrice associée par la proposition 16 soit de la forme $\begin{pmatrix} U & V \\ W & T \end{pmatrix}$; on a alors

1. Si $U = T = 0$ et $S = (P_{12}, \overline{P_{12}})$, alors λ_ϕ est un point P_{12} -ordinaire dans $\text{Sol}_{P_{12}}^{(2n+1)p}(\lambda f)$ dès que $\det V \det W \neq 0$.

λ_ϕ est un point P_{12} -ordinaire dans $\text{Sol}_{P_{12}}^{2np}(\lambda f)$

λ_ϕ est un point $(P_{12}, \overline{P_{12}})$ -ordinaire dans $\text{Sol}_{P_{12}}^{2np}(\lambda f)$, si $\det V \det W \neq 0$;

λ_ϕ est un point $(P_{12}, \overline{P_{12}})$ -ordinaire dans $\text{Sol}_{P_{12}}^{(2n+1)p}(\lambda f)$

2. Si $V = 0$ et $S = \overline{P_{12}}$, alors λ_ϕ est un point $(P_{12}, \overline{P_{12}})$ -ordinaire dans $\text{Sol}_{(P_{12}, \overline{P_{12}})}^{np}(\lambda f)$ si $\det U \det T \neq 0$.

3. Si $W = 0$ et $S = P_{12}$, alors λ_ϕ est un point $(P_{12}, \overline{P_{12}})$ -ordinaire dans $\text{Sol}_{(P_{12}, \overline{P_{12}})}^{np}(\lambda f)$ dès que $\det U \det T \neq 0$.

Démonstration

On a

$$M_{\alpha}^p = \begin{pmatrix} U & V \\ W & T \end{pmatrix} \quad \text{et}$$

$$M_{\alpha}^{np} = M_{\alpha}^{(n-1)p} M_{\alpha}^p$$

On calcule les différentes matrices dans les trois cas suivants :

$$U = T = 0; V = 0; W = 0$$

La proposition en découle.

Commentaire

En dimension 2 des résultats analogues ont été énoncés.

La matrice M_{α}^p est de la forme $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et les résultats sont donnés en fonction de la nullité de a,b,c ou d.

Dans notre cas, la nullité de a,b,c,d est remplacée par la nullité de $\det U$, $\det V$, $\det W$, $\det T$.

Cela rend moins souple, l'étude en dimension 4.

Par conséquent, nous avons des résultats moins généraux qu'en dimension 2.

CHAPITRE V - ETUDE NUMERIQUE

V.1. Introduction

Depuis longtemps, on essaie de rechercher numériquement des solutions périodiques de systèmes différentiels.

De nombreuses méthodes ont été élaborées dans ce but, faisant appel le plus souvent à l'analyse fonctionnelle.

L'étude des systèmes différentiels périodiques symétriques qui est développée précédemment permet, par une méthode numérique simple, de localiser des solutions périodiques symétriques de tels systèmes lorsque l'un des espaces de symétrie est de codimension 1.

Cette méthode simple repose sur les faits suivants :

- a) Une solution φ , d'un système p -périodique admettant la symétrie S au temps 0 et $\frac{p}{2}$, est p -périodique d'orbite symétrique par rapport à S si et seulement si $\varphi(0)$ et $\varphi(p/2)$ appartiennent à S .
- b) Dans le cas, où le système différentiel admet des symétries par rapport aux deux espaces supplémentaires S et \bar{S} , aux temps 0 et $p/2$ respectivement, on a :

Une solution φ est $2p$ -périodique d'orbite symétrique par rapport à 0 si et seulement si $\varphi(0)$ appartient à S et $\varphi(p/2)$ appartient à \bar{S} .

On se limitera donc à étudier des systèmes différentiels p -périodiques admettant les symétries E_i ou (A_i, E_i) pour i appartenant à $\{1, 2, 3, 4\}$.

Le principe de détermination d'une solution p -périodique (resp. $2p$ -périodique) est le suivant :

On considère l'ensemble des solutions φ du système différentiel vérifiant $\varphi(0) \in E_i$ (resp. $\varphi(0) \in A_i$)

Si φ_1 et φ_2 sont deux solutions vérifiant cette condition telles que $\varphi_1(p/2)$ et $\varphi_2(p/2)$ soient de part et d'autre de E_i (c'est à dire $\varphi_{1i}(p/2) \cdot \varphi_{2i}(p/2) \leq 0$), alors pour tout chemin joignant $\varphi_1(0)$ à $\varphi_2(0)$ dans E_i (resp. A_i) on sait qu'il existe un réel x_0 tel que si φ vérifie $\varphi(0) = x_0$ alors $\varphi(p/2)$ appartient à E_i (resp. à A_i).

Notre étude est parfaitement adaptée à la variation de paramètres comme le montrera le paragraphe suivant.

V.2. Méthode numérique des symétries dans les cas (A1, E1)

Nous donnons les grandes lignes de la méthode numérique dans le cadre d'une famille de systèmes différentiels p-périodiques de symétries (A1, E1) dépendant de deux paramètres.

Une étude détaillée est donnée dans [10] par B. SCHMITT en dimension 2; elle est valable encore dans notre cas.

Rappelons auparavant les résultats que nous utiliserons.

V.2.1. Propriétés des solutions

Soit :

$$\dot{x} = f(t, x, \lambda) \quad (f_\lambda)$$

une famille de systèmes différentiels p-périodiques de symétrie A1 au temps 0 et E1 au temps p/2, paramétrée par λ . On suppose que :

f est analytique par rapport à x et t ,

λ appartient à un ouvert $\Lambda = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ de \mathbb{R} ($\lambda = (a, b)$),

$x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ appartient à \mathbb{R}^4

On désigne par $\varphi(t, t_0, x^0, \lambda)$ la solution unique de (f_λ) dépendant analytiquement de (t, t_0, x^0, λ) issue au temps initial t_0 du point $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0)$.

Les composantes de φ sont notées : $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$

On note \mathcal{X}_1 (resp. $\overline{\mathcal{X}}_1$) l'ensemble des x_1^0 (resp. (x_2^0, x_3^0, x_4^0)).

Nous avons montré :

$\varphi_1(\frac{p}{4}, 0, x_1^0, 0, 0, 0, \lambda) = 0 \Leftrightarrow \varphi$ est p-périodique symétrique par rapport à 0.

$\varphi_1(\frac{p}{4} + k\frac{p}{2}, 0, x_1^0, 0, 0, 0, \lambda) = 0 \Leftrightarrow \varphi$ est $(2k+1)p$ -périodique symétrique par rapport à

$\varphi_1(\frac{p}{2} + \frac{p}{4}, \frac{p}{4}, 0, x_2^0, x_3^0, x_4^0, \lambda) = 0 \Leftrightarrow \varphi$ est p-périodique symétrique par rapport à E1.

Notations

Soit $\Sigma_1 \subset \mathcal{X}_1 \times \Lambda$ l'ensemble des (x_1, λ) tels que

$$\varphi_1(\frac{p}{4}, 0, x_1, 0, 0, 0, \lambda) = 0$$

A chaque point (x_1, λ) de Σ_1 correspond $\varphi(t, 0, x_1, 0, 0, 0, \lambda)$ solution de (f_λ) qui est p-périodique, harmonique impaire (ie. $\varphi(t + \frac{p}{2}) = -\varphi(t)$).

Soit $\Sigma_1(k) \subset \mathcal{X}_1 \times \Lambda$ l'ensemble des (x_1, λ) tels que

$$\varphi_1(\frac{p}{4} + k\frac{p}{2}, 0, x_1, 0, 0, 0, \lambda) = 0$$

A chaque point (x_1, λ) de $\Sigma_1(k)$ correspond une solution de (f_λ) qui est $(2k+1)p$ -périodique harmonique impaire.

Soit $\Sigma_2 \subset \overline{\mathcal{X}}_1 \times \Lambda$ l'ensemble des (x_2, x_3, x_4) tels que

$$\varphi_1(\frac{p}{2} + \frac{p}{4} + \frac{p}{4}, 0, x_2, x_3, x_4) = 0$$

A chaque point de Σ_2 correspond une solution p-périodique d'orbite symétrique par rapport à E1.

Remarque. Les ensembles précédents sont, chacun, définis par une équation analytique liant x_1, λ ou x_2, x_3, x_4, λ ; ce sont des surfaces analytiques de codimension 1 dans $\mathcal{X}_1 \times \Lambda \approx \mathbb{R}^3$ ou $\overline{\mathcal{X}}_1 \times \Lambda \approx \mathbb{R}^5$.

V.2.2. Méthode numérique

Nous voulons déterminer Σ_1 .

Σ_1 étant une surface analytique de dimension 2, nous déterminons les sections de Σ_1 par des plans $P_b = \mathcal{X}_1 \times \{b\} \times \mathcal{A}$ rapportés aux repères $(OX_1, 0a)$

Soit $m = (x, a)$ un point de P_b et

$$\sigma(m) = \varphi_1\left(\frac{P}{4}, 0, x, 0, 0, 0, a, b\right)$$

On suppose que l'on sait déterminer $\sigma(m)$ avec la précision désirée. Comme $\sigma(m)$ dépend continûment de m , la courbe $\Sigma_1^b = P_b \cap \Sigma_1$ partage le plan P_b en deux régions ouvertes :

$$\Sigma_1^b(+)$$
 d'équation $\sigma(m) > 0$ et $\Sigma_1^b(-)$ d'équation $\sigma(m) < 0$

1) Détermination d'un point de Σ_1^b (Procédure 1)

On choisit m_1 et m_2 de façon que

$$\sigma(m_1) \cdot \sigma(m_2) \leq 0$$

Alors, le segment $[m_1, m_2]$ contient au moins un point m^* de Σ_1^b

On détermine alors m^* par dichotomie.

2) Détermination d'un second point de Σ_1^b (Procédure 2)

On se donne m^* de Σ_1^b et une direction D

Soit n_1 le point situé à une distance L_1 de m^* dans la direction D

Soit m_1, m_2 les points de P_b situés de part et d'autre de n_1 dans la direction perpendiculaire à D à une distance L_2 .

Si $\sigma(m_1) \cdot \sigma(m_2) \leq 0$, alors on applique la procédure 1.

Sinon on diminue les longueurs L_1 et L_2 et on recommence.

3) Détermination d'une branche de Σ_1^b

On commence par déterminer deux points m^*, n^* suivant les procédés 1 et 2 puis on se donne pour direction D , la direction de la droite (m^*, n^*) et on cherche un nouveau point à partir de n^* en réappliquant la procédure 2 et ainsi de suite...

(voir annexes).

En application, nous présentons une étude numérique.

V.3. Etude du système paramétré par a et b :

$$\begin{cases} X'' + 2X^3 + bXYZ = a \cos t \\ Y' = X \\ Z' = XY^2 \end{cases} \quad (I b)$$

V.3.1. Soit $(0, X, X', Y, Z)$ l'espace des phases associé au système différentiel.

Ce système admet les symétries $(A1, \alpha = k\pi)$; $(E1, \alpha = k\pi + \frac{\pi}{2})$

Nous savons déterminer des solutions harmoniques impaires vérifiant

$$X'(0) = Y(0) = Z(0) = 0 \text{ et } X(2k+1)\frac{\pi}{2} = 0$$

c'est à dire les solutions qui à l'instant initial sont situées sur l'axe OX et traversent l'espace (OX', OY, OZ) à l'instant $(2k+1)\frac{\pi}{2}$.

Ces solutions sont $(2k+1) \times 2\pi$ -périodiques d'orbites symétriques par rapport aux espaces $A1$ et $E1$.

De plus, si φ est une telle solution, $\varphi((2k+1)\frac{\pi}{2})$ et $\varphi(3(2k+1)\frac{\pi}{2})$ appartiennent à $E1$.

D'où, si T est la demi-application de Poincaré associée à la période $(2k+1) \times 2\pi$, alors $T(E_1) \cap E_1$ est un espace de dimension 2 passant par $\varphi(3.(2k+1)\frac{\pi}{2})$.

Soit $E'_1 = T^{-1}(T(E_1) \cap E_1)$. Cet ensemble est composé de conditions initiales de solutions périodiques d'orbite symétrique par rapport à E_1 . Pour déterminer cet ensemble, on peut par exemple appliquer la méthode numérique précédente en fixant a et b et en paramétrant par x_2, x_3, x_4 . La solution φ étant périodique, son équation aux variations admet une surface de conditions initiales de solutions périodiques dont les conditions initiales sont situées dans E_1 .

Cette surface est tangente à E'_1 au voisinage de φ .

V.3.2. Soit l'équation de Duffing :

$$x'' + 2x^3 + bx = a \cos t \quad (\text{II b})$$

Cette équation a été étudiée dans [10].

Nous montrons que si $b = 0$, alors Σ_1^0 admet la même structure pour (I_0) et (II_0) .

Ceci reste vrai pour $\Sigma_1^0(k)$.

Etude du cas $b = 0$

La projection d'une solution harmonique impaire de (I_0) de condition initiale $(X(0), X'(0) = 0, Y(0) = 0, Z(0) = 0)$ périodique de période 2π dans l'espace des phases $(0, X, X')$ est une solution paire et harmonique impaire de (II_0) , de condition initiale $(X(0), X'(0) = 0)$ périodique de période 2π .

Réciproquement,

Soit φ une solution de (II_0) de condition initiale $(X(0), X'(0) = 0)$ paire et harmonique impaire. On a :

$$X\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{et} \quad X'(0) = 0$$

La première équation de (I_0) étant indépendante des deux autres, on peut intégrer séparément les deux dernières équations, une fois la première intégrée.

Le développement en série de Fourier de φ est de la forme :

$$\varphi(t) = a_1 \cos t + a_2 \cos 3t + a_3 \cos 5t + \dots$$

Montrons alors que φ induit une solution harmonique impaire, 2π -périodique dans $(0, X, X', Y, Z)$ vérifiant :

$$X'(0) = Y(0) = Z(0) = X\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

En effet :

Si X_m est la valeur moyenne de $X(t)$ sur l'intervalle $[0, 2\pi]$, alors

$$Y(t) = \int_0^t (X(u) - X_m) du \text{ est } 2\pi\text{-périodique et vérifie } Y(0) = 0.$$

De même, si Y_m est la valeur moyenne de $Y(t) \varphi^2(t)$ sur l'intervalle $[0, 2\pi]$,

$$\text{alors } Z(t) = \int_0^t Y(u) \varphi^2(u) du \text{ est } 2\pi\text{-périodique et vérifie } Z(0) = 0.$$

On en déduit que Σ_1^0 (pour I_0) est une courbe connexe, symétrique par rapport à 0, homéomorphe à \mathbb{R} , coupant OX_1 en une infinité de points et partageant le plan $X_1 \times \{0\} \times \mathcal{A}$ en deux composantes connexes ouvertes.

Les conditions initiales de sous-harmoniques de I_0 coïncident, de même, avec celles de II_0 (fig. 1).

V.3.3. Etude du cas $b \neq 0$

A. Harmonique

Nous avons déterminé (voir figures 1 et 2) des familles de conditions initiales de solutions périodiques pour I_b , pour les valeurs de b suivantes :

$$b = 1, b = 3, b = 5.$$

On peut remarquer que pour $b = 1$, la portion de courbe Σ_1^1 est connexe; cependant, la disposition de cette courbe diffère suffisamment de celle de Σ_1^0 pour qu'on puisse affirmer que nécessairement, il existe entre les valeurs $b = 0$ et $b = 1$ au moins une valeur de b pour laquelle la courbe Σ_1^b présente un point multiple. Il semble donc que pour notre équation, Σ_1^b n'est pas, pour tout b , une courbe homéomorphe à \mathbb{R} .

Le même phénomène se produit d'ailleurs pour b compris entre 3 et 5.

B. Sous-harmoniques d'ordre 3

Nous avons déterminé (figures 3-4) quelques familles de solutions sous-harmoniques d'ordre 3. On peut remarquer que certaines de ces familles, pour b fixé, viennent bifurquer avec les familles de solutions harmoniques, d'autres non.

Nous avons tracé quelques solutions 6π -périodiques (voir figures 5,6,7 et 8).

$b=1$ ---
 $b=0$ -
 $p=2\pi$

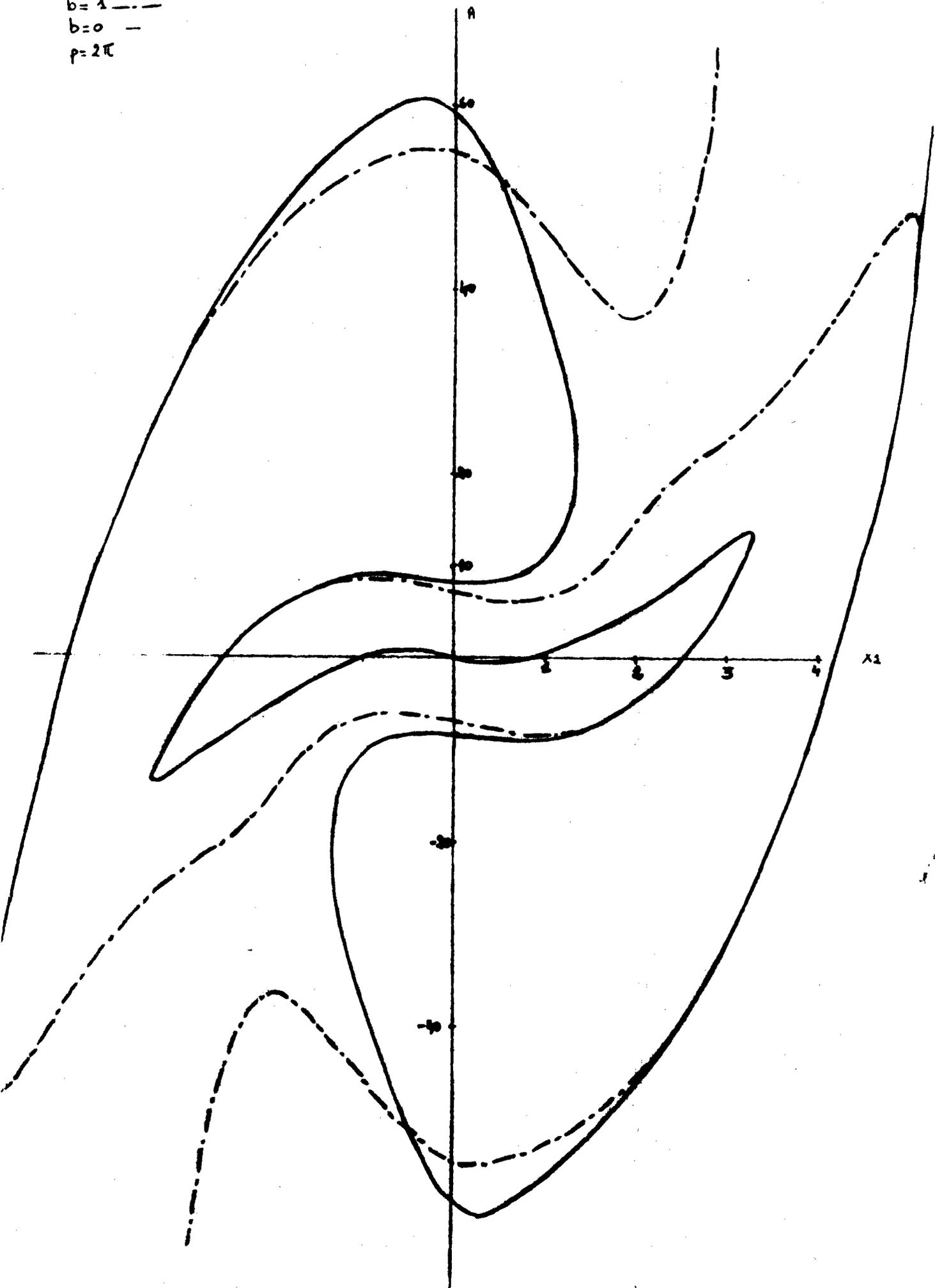


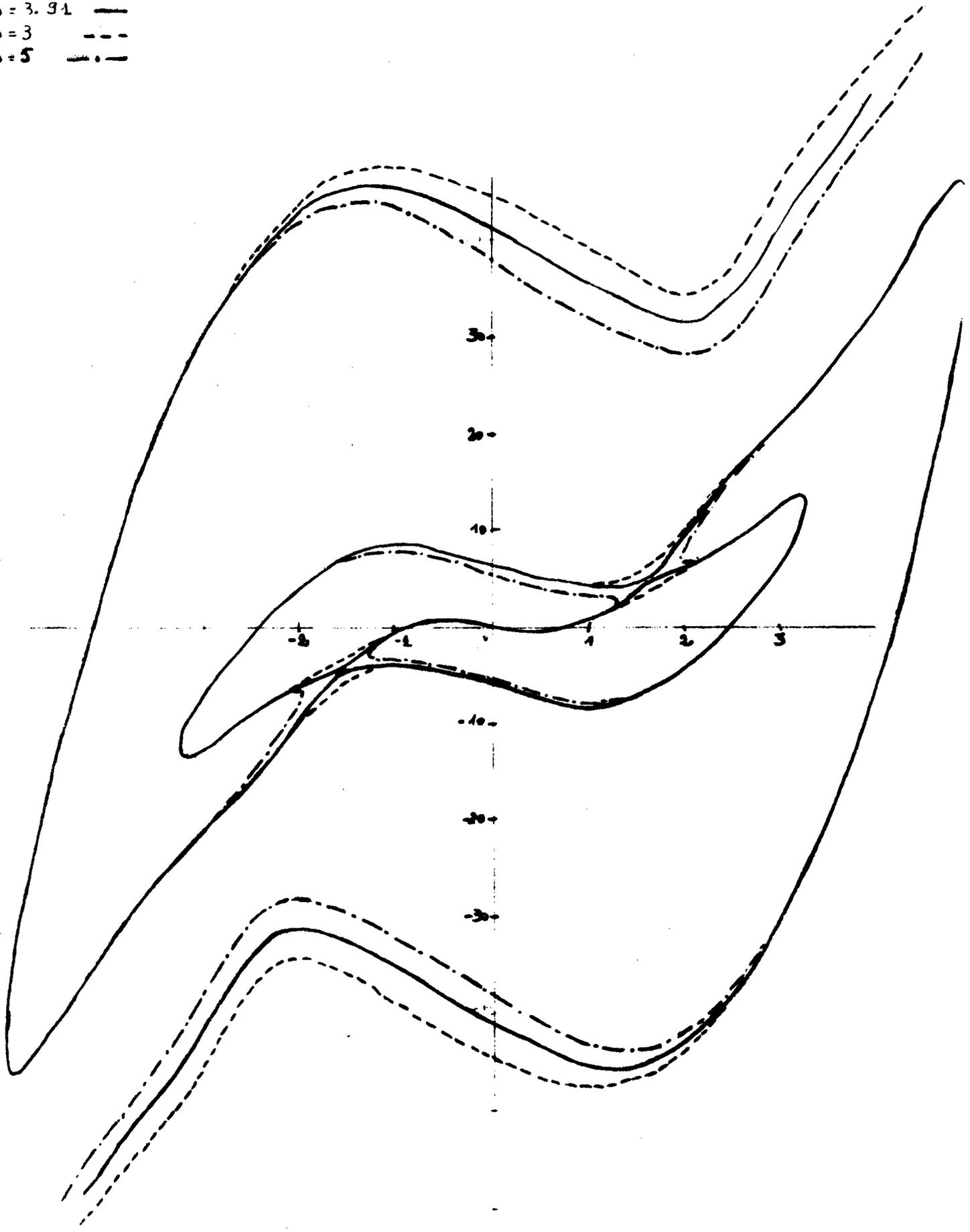
Figure 1

$\rho = 2\pi$

$b = 3.91$ —

$b = 3$ - - -

$b = 5$ - . -

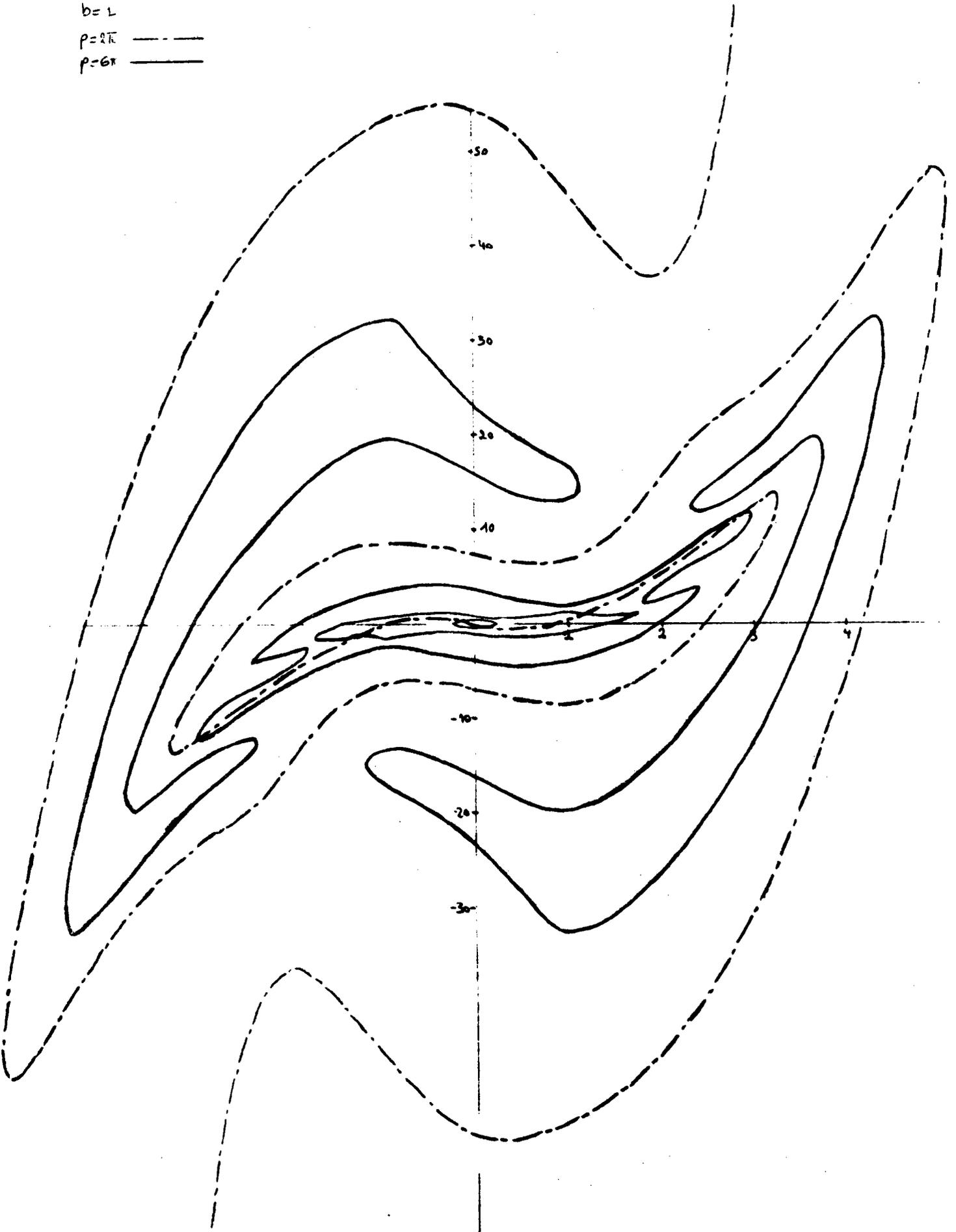


— figure 2 —

$b = L$

$p = 2\pi$ ———

$p = 6\pi$ ———



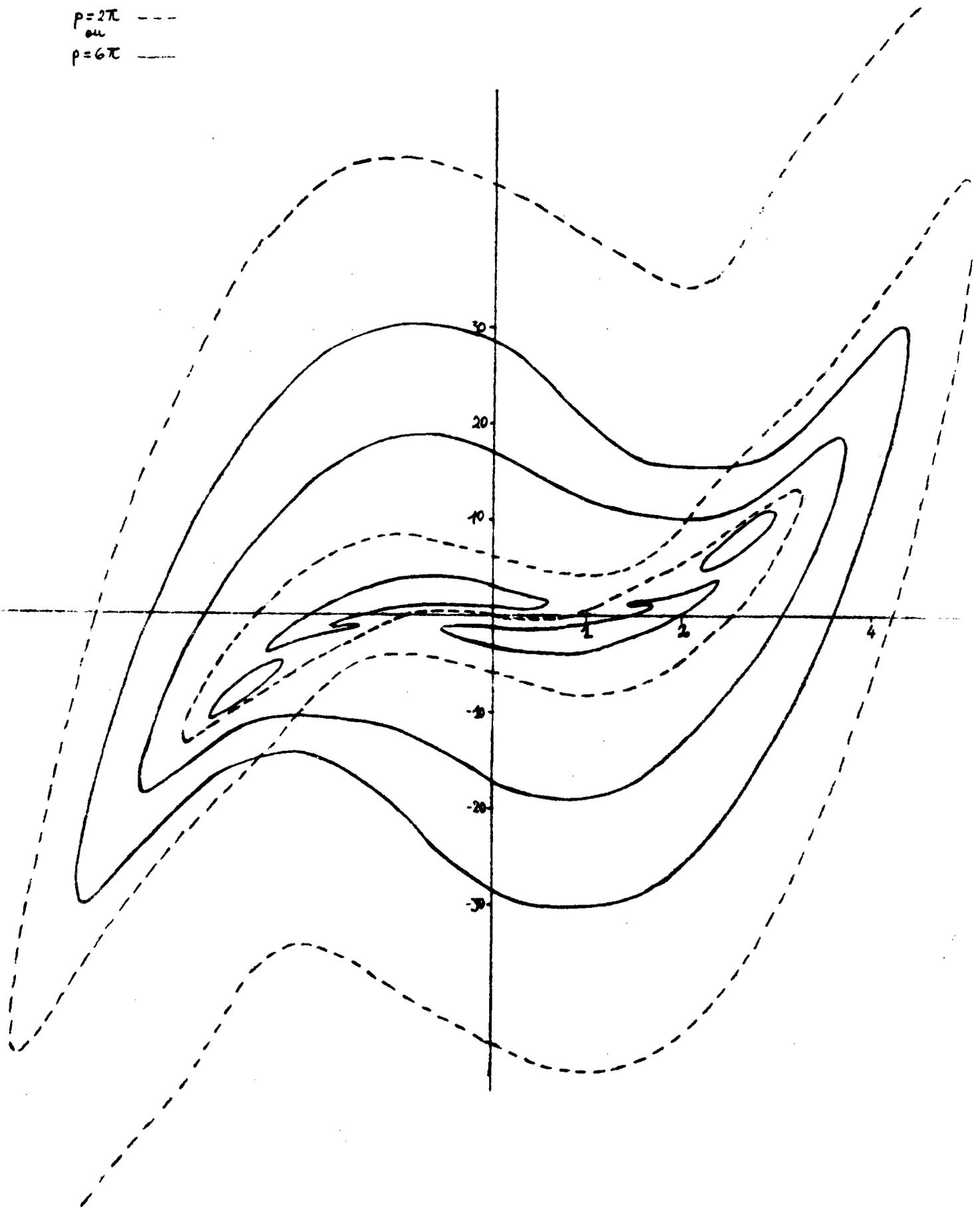
— Figure 3 —

$B=3$

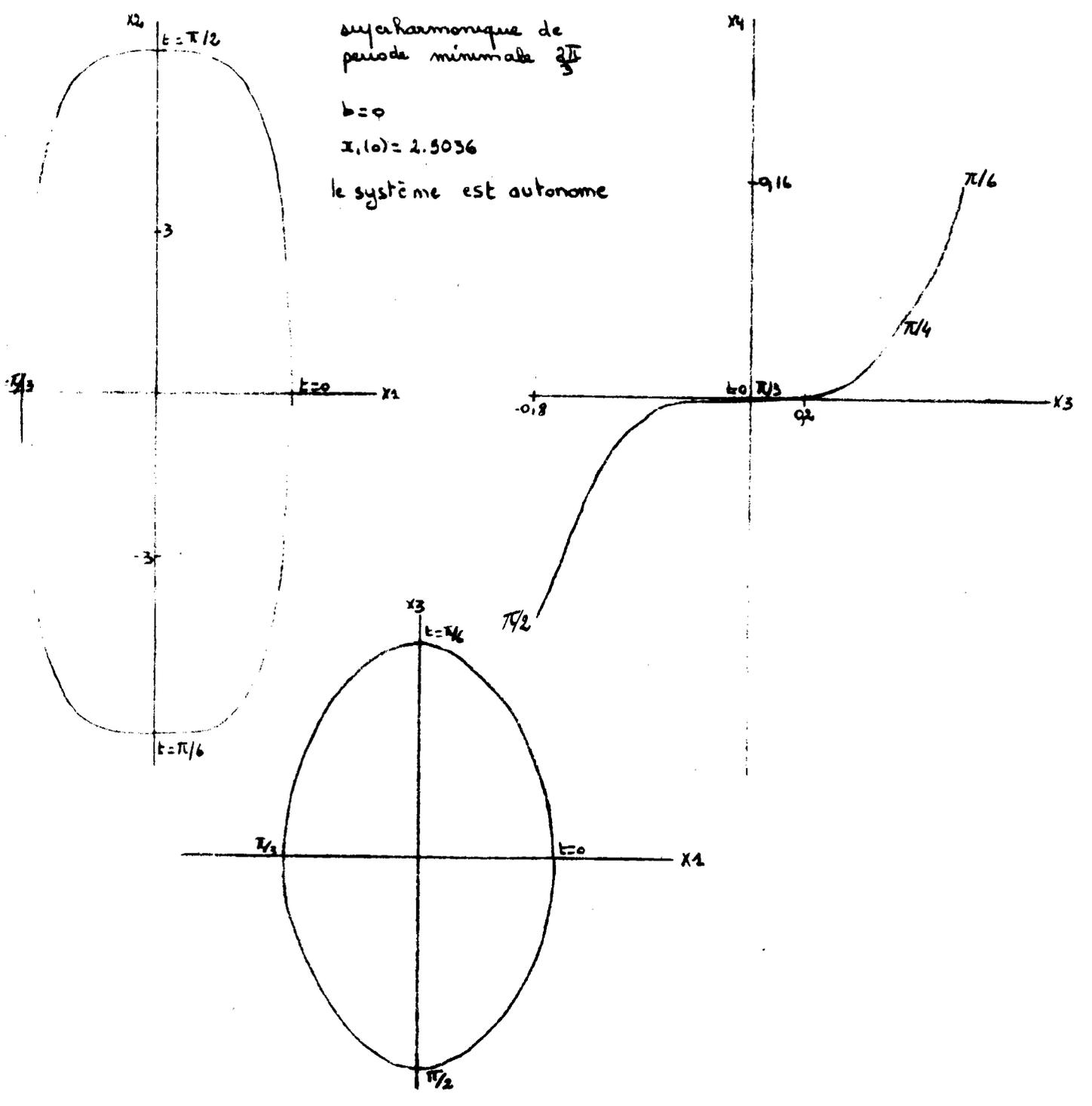
$p=2\pi$ ---

or

$p=6\pi$ ---

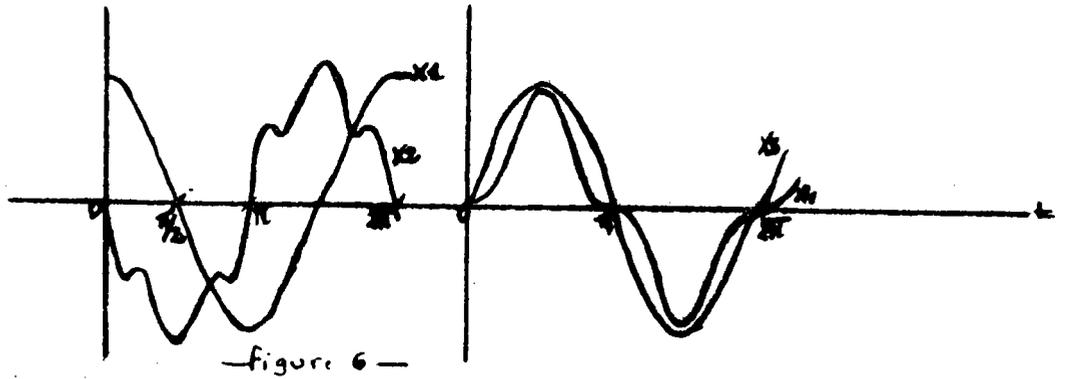


— Figure 4 —

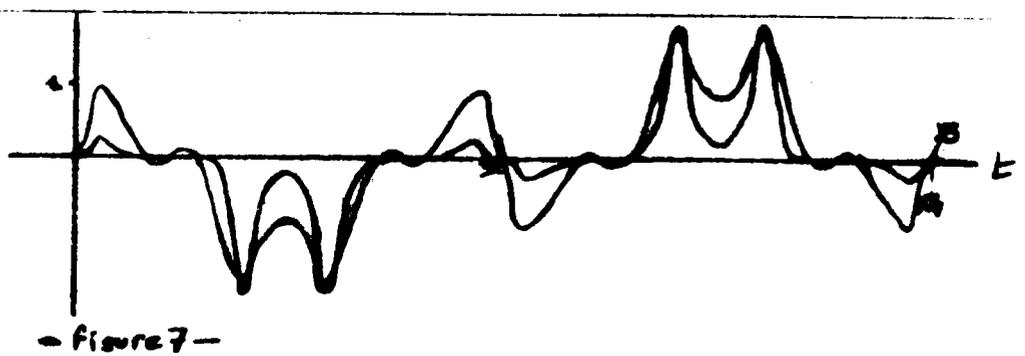
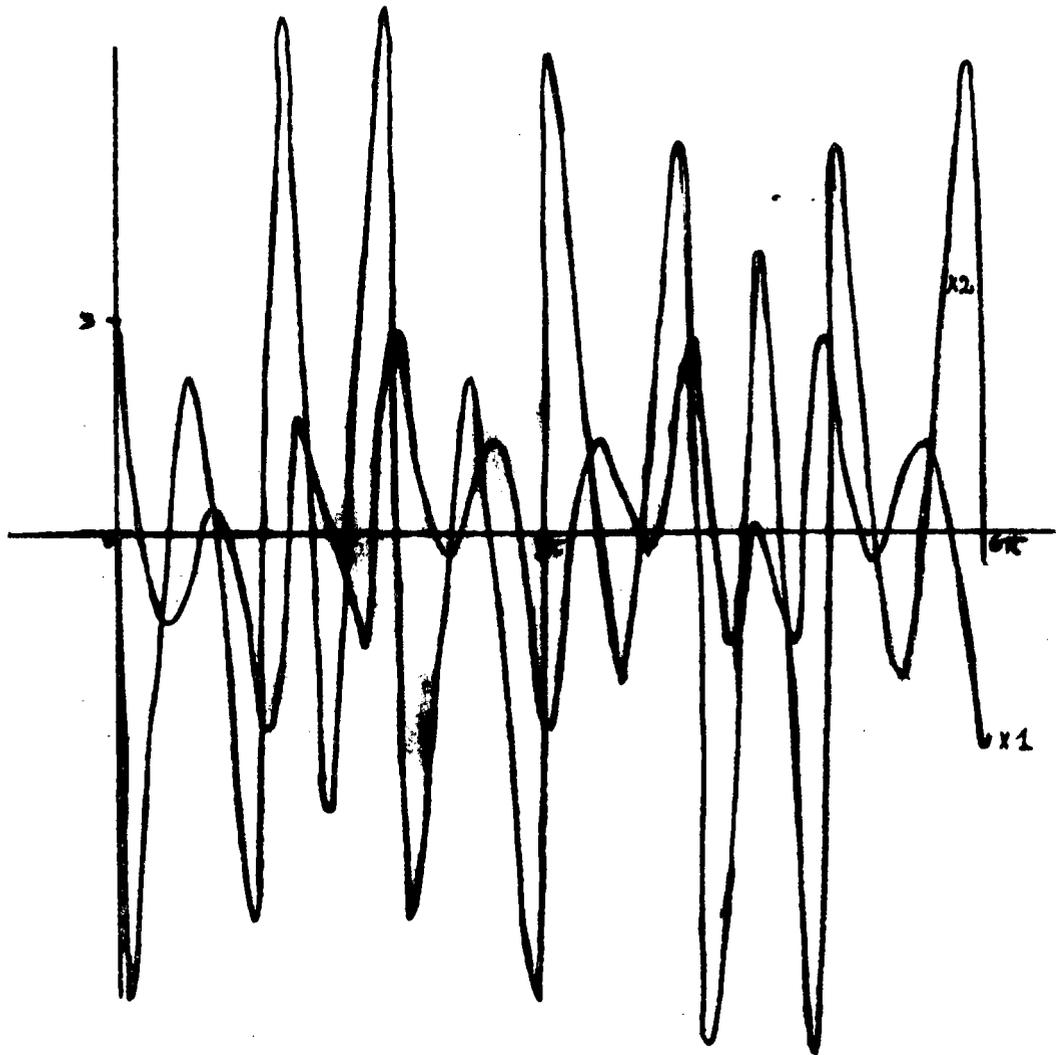


— figure 5 —

$b=3$
 $a=7.5$
 $x_1=1.79375$
 $p=2\pi$

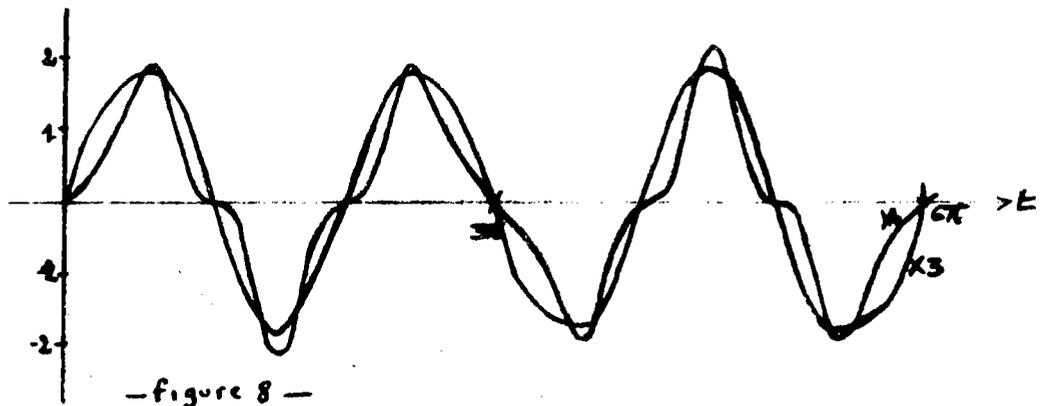
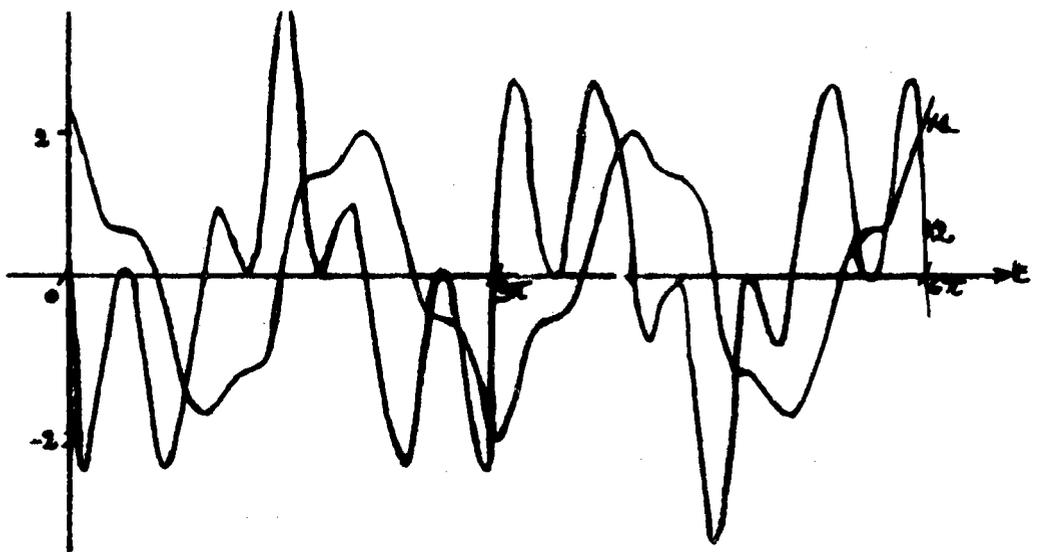


$b=3$
 $a=10$
 $x_1=2.94296$
 $p=6\pi$



$b=3$
 $a=10$
 $X_1=2.271875$

$p=6\pi$

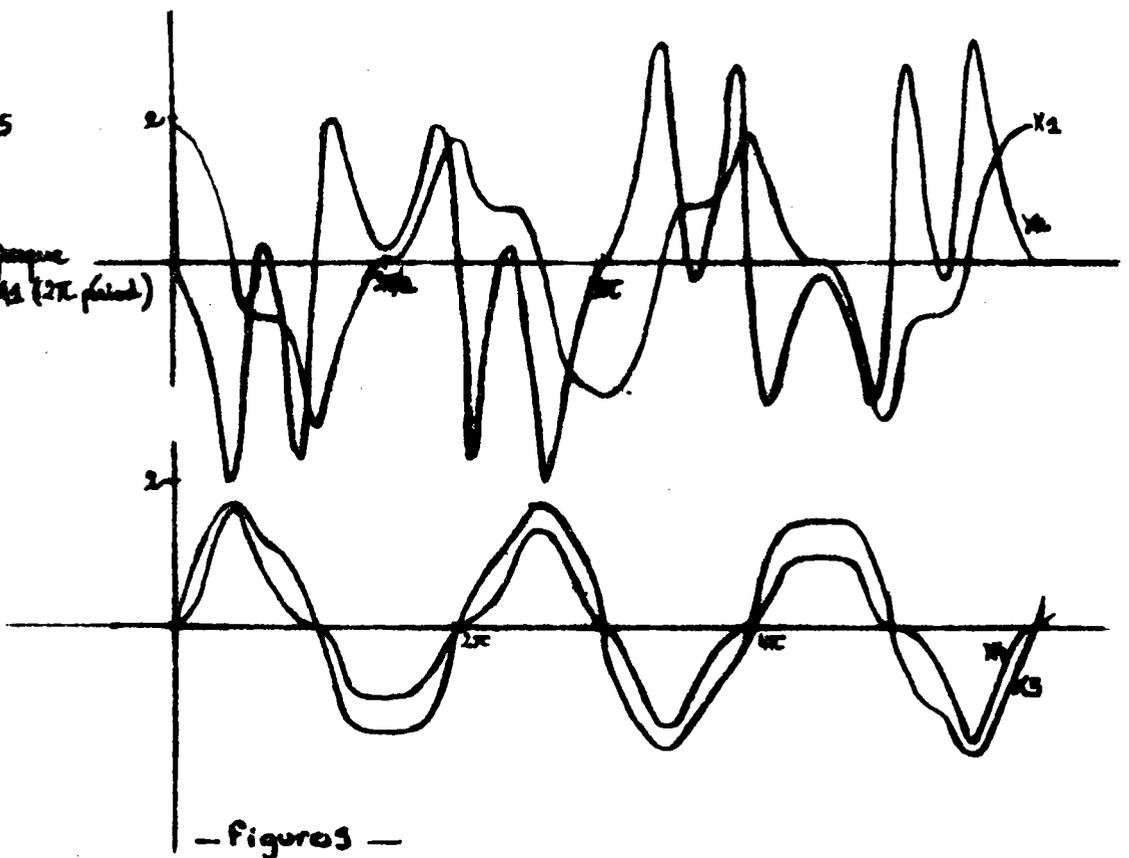


$B=5$

$a=10$

$X_1=1.8575$

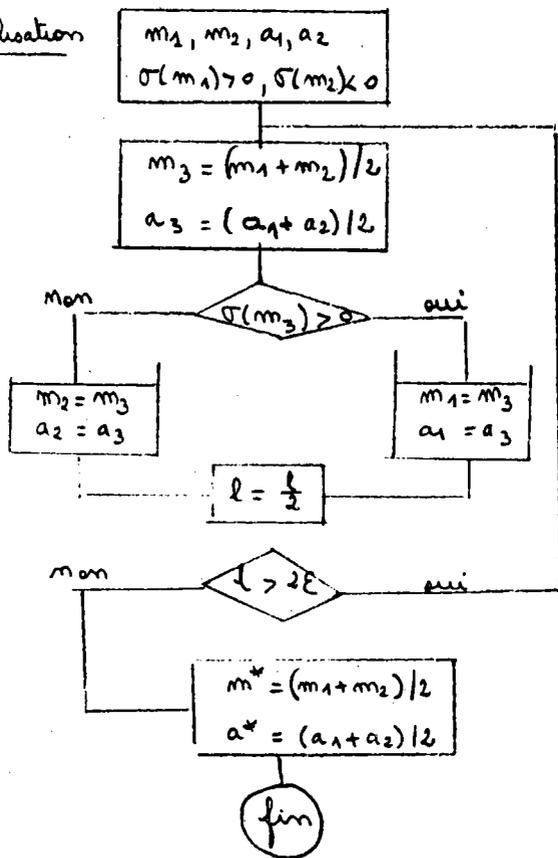
l'orbite de la
 solution est presque
 symétrique / A_1 (2π périodes)



procédé 1

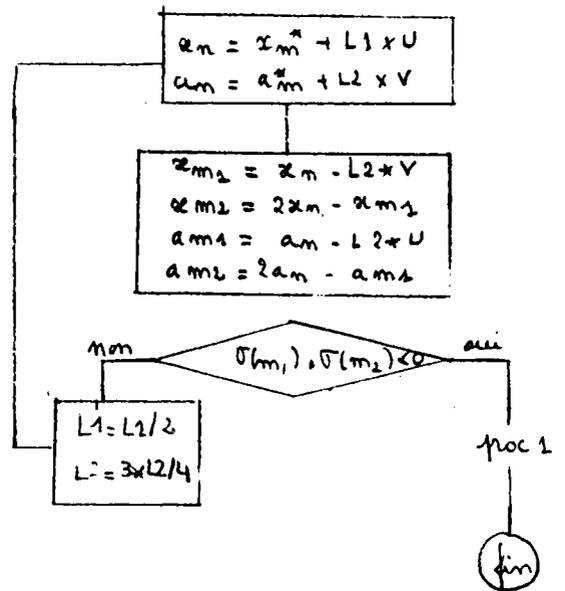
données : $m_1, m_2, l, a_1, a_2, \epsilon$

initialisation



procédé 2

données $\epsilon, L_1, L_2, m^*(\alpha m^*, a_m^*), D(u, v)$



BIBLIOGRAPHIE

- [1] B. KARR, *Systèmes différentiels périodiques avec symétrie : stabilité et bifurcations; application à l'équation du pendule forcé.*
Thèse, Université de Metz - Oct. 1981.
- [2] B. KARR et B.V. SCHMITT, *Systèmes différentiels périodiques avec symétries : stabilité et bifurcations.*
Analysis.
- [3] S. LEFSCHETZ, *Differential equations : geometric theory.*
New-York, Interscience, 1950, 164-166.
- [4] W.S. LOUD, *Branching of periodic solutions of second orders equations.*
- [5] S. MAZZANTI, *Famille de solutions périodiques symétriques d'un système différentiel à coefficients périodiques avec symétries.*
Thèse, Univ. Louis Pasteur, Strasbourg, 1978.
- [6] E. PODOLAK et D. WESTREICH, *Systems of first order differential equations with global periodic solutions.*
Indiana University Mathematics Journal, Vol. 28. N° 6 (1979).
- [7] POINCARÉ, *Méthode nouvelle de la mécanique céleste.* Paris, 1892.
- [8] N. ROUCHE et J. MAWHIN, *Equations différentielles ordinaires. T. 2 : Stabilité et solutions périodiques.* Masson, Paris, 1973.
- [9] G. SANSONE et R. CONTI, *Non linear differential equations,* Mac Millan, N.Y. 1964
- [10] B.V. SCHMITT, *Sur la structure de l'équation de Duffing sans dissipation.*
- SIAM Journal Applied Math. -
- [11] B.V. SCHMITT et S. MAZZANTI, *Solutions périodiques symétriques de l'équation de Duffing sans dissipation.*
J. Differential Equations, Vol. 42, n° 2, Nov. 1981.
- [12] YAKUBOVITCH et STARZHINSKI, *Linear Differential Equations with periodic coefficients.*
- Translated from Russian by D. LOUVICH. John WILEY and SOUS,
Keter Pub. House, Jerusalem, 1975.