



**HAL**  
open science

## Systèmes affines à contrôles arbitrairement petits

Omar Bouabdallah

► **To cite this version:**

Omar Bouabdallah. Systèmes affines à contrôles arbitrairement petits. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paul Verlaine - Metz, 1985. Français. NNT : 1985METZ002S . tel-01775679

**HAL Id: tel-01775679**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01775679v1>**

Submitted on 24 Apr 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

**T H È S E**



présentée à l'Université de **METZ**

par Omar **BOUABDALLAH**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR EN MATHÉMATIQUES**

Spécialité : Equations différentielles et Théorie du Contrôle  
intitulée "Systèmes affines à contrôles  
arbitrairement petits"

soutenue le 9 Mai 1985 - Salle 368 -

devant la Commission d'Examen :

BIBLIOTHÈQUE UNIVERSITAIRE  
-METZ

N° inv	1985004 S
Cote	S/M3 85/2
Loc	Magasin

Messieurs C. ROGER, professeur Université de Metz,  
Président

B. SCHMITT, professeur Université de Metz

G. SALLET, Maître de Conférences,  
Université de Metz

Madame D. MICHEL, Chargée de Recherche CNRS, Paris VI

---

A la Mémoire de Mon Père

Je remercie Monsieur SALLET d'avoir bien voulu diriger mon travail. Ses conseils et ses critiques me furent très utiles pour l'élaboration de ma thèse.

Monsieur ROGER m'a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse, je lui en suis très reconnaissant.

Mes remerciements vont aussi à Monsieur SCHMITT et à Madame MICHEL qui m'ont fait l'honneur de participer au jury.

C'est également avec plaisir que je remercie les membres du Département de Mathématiques ainsi que Madame SEC. Leur gentillesse m'a beaucoup impressionné et m'a permis de travailler dans de bonnes conditions.

TABLE DES MATIERES

---

Introduction .....	1
<b>Chapitre I : HISTORIQUE ET POSITION DU PROBLEME.....</b>	<b>5</b>
I.1: Position du problème.....	5
I.2: Définitions et notations .....	8
<b>Chapitre II : CONTROLABILITE EN DIMENSION 2.....</b>	<b>12</b>
II.1 : Généralités et démonstration du théorème de Sussmann sur la STLC en dimension 2.....	12
II.2 : Etude de la contrôlabilité en dimension 2 ....	17
<b>Chapitre III : CONTROLABILITE EN DIMENSION 3 .....</b>	<b>22</b>
Introduction .....	22
III.0 : Eléments de la démonstration de la complète contrôlabilité sur $S^2$ .....	25
III.1 : Projection des champs linéaires de $R^3$ sur $S^2$ et leur classification .....	27
III.2 : La STLC .....	35
III.3 : Contrôlabilité du système homogène sur $S^2$ Cas nilpotent d'ordre 2 .....	37
III.4 : Contrôlabilité du système homogène sur $S^2$ Cas nilpotent d'ordre 3 .....	47
III.5 : Contrôlabilité sur $(R^*)^3$ et $R^3$ .....	61
III.6 : Quelques remarques concernant la non contrô- labilité sur $R^3$ .....	64
<b>Conclusion .....</b>	<b>66</b>
<b>Bibliographie .....</b>	<b>67</b>

## INTRODUCTION

Ce travail s'intéresse à la contrôlabilité des systèmes affines en dimension 2 et 3.

Un système affine en l'état ou simplement affine [7] est la donnée d'un espace vectoriel  $M$  de dimension finie, d'une famille de champs de vecteurs  $\mathcal{F} = \{ \mathcal{F}_u, u \in \Omega \}$  définie sur  $M$  et où  $\Omega$  désigne l'ensemble des contrôles admissibles, vérifiant :

i/  $u \longrightarrow \mathcal{F}_u$  est une application affine de  $\Omega$  dans  $\mathcal{F}$ .

ii/  $h : M \longrightarrow E$  est une application affine où  $h$  désigne l'application de sorties,  $E$  l'espace des sorties.

Dans ce travail, on considère les systèmes affines de la forme :

$$(1) : \quad x' = A x + \sum_{i=1}^m u_i (B_i x + C_i).$$

tel que :

-  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ .

-  $A, B_k$  ;  $1 \leq k \leq m$  des matrices réelles constantes d'ordre  $(n \times n)$ .

-  $C_i$  ;  $1 \leq i \leq m$  des éléments de  $\mathbb{R}^n$ .

-  $u = (u_1, \dots, u_m)$  appartenant à l'ensemble des contrôles admissibles constants par morceaux à valeurs dans  $\Omega = ([-\varepsilon, \varepsilon])^m$ .

Dans la littérature, les systèmes du type (1) sont aussi appelés systèmes bilinéaires parce qu'on peut les mettre sous la forme :

$$(1') : \quad x' = (A + \sum_{i=1}^m u_i B_i) x + C u. \quad [5] ; [23]$$

Où  $C$  est la matrice d'ordre  $(n \times m)$  constituée par les vecteurs colonnes  $C_i$  de (1)  $1 \leq i \leq m$ .

A tout contrôle  $u \in \Omega$ , et toute condition initiale  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  on associe une solution  $\varphi_u(t, x_0)$  qui par définition est la valeur à l'instant  $t = \tau$  de l'unique solution maximale du problème de Cauchy :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{d}{dt} \left( \varphi_u(t, x_0) \right) \right)_{t=\tau} = A \left( \varphi_u(\tau, x_0) \right) + \sum_{i=1}^m u_i \left( B_i \left( \varphi_u(\tau, x_0) \right) + C_i \right) \\ \varphi_u(0, x_0) = x_0. \end{array} \right.$$

Par leurs applications dans divers situations, l'étude des systèmes affines (ou bilinéaires) a fait l'objet de plusieurs travaux fructueux, notamment dans le domaine de contrôlabilité. [ 5 ] [21]

En effet, abstraction faite sur le côté théorique de ces travaux, l'intérêt de l'étude des systèmes affines est qu'ils modélisent de nombreux phénomènes dans le domaine industriel, biologique, etc... C'est aussi les systèmes non linéaires qui offrent quelques avantages sur les systèmes linéaires du point de vue contrôlabilité, optimisation...

Parmi les questions que l'on peut se poser dans l'étude d'un quelconque système, il y en a une qui s'impose tout naturellement. A partir d'un état initial  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , quels sont les autres états accessibles  $x_1$  en empruntant les trajectoires du système en les parcourant dans le sens positif des temps ?

En particulier, un système sera dit complètement contrôlable ou transitif si tous les états de l'espace des phases sont accessibles à partir de tout état initial du système.

L'étude de la contrôlabilité d'un système est précisément la description de l'ensemble des états accessibles.

Le but de ce travail est de répondre à la question suivante :

Etant donné un système affine :



$$(2) \quad x' = A x + \sum_{i=1}^m u_i (B_i x + C_i)$$

avec  $A$  un opérateur nilpotent ; en supposant la condition du rang de l'Algèbre de Lie réalisée en tout point de l'espace des phases, est il vrai que (2) est complètement contrôlable pour contrôle  $u \in ([-\varepsilon, \varepsilon])^m$  avec  $\varepsilon$  un réel positif arbitrairement petit ?

Ce travail est aussi l'extension aux systèmes affines d'un résultat bien connu sur les systèmes linéaires [19] (voir théorèmes).

Nous savons qu'un système affine peut avoir une Algèbre de Lie associée aussi compliquée que l'on veut, alors que pour les systèmes linéaires, la structure de cette Algèbre de Lie en est très simple, un certain nombre de crochet s'annulant.

Il est prouvé dans ce travail, que le système (2) est complètement contrôlable sur  $\mathbb{R}^2$  pour des contrôles aussi petits que l'on veut, si et seulement si, la condition du rang de l'Algèbre de Lie est réalisée en tout point de  $\mathbb{R}^2$ .

Pour  $n = 3$ , la contrôlabilité de (2) sur  $\mathbb{R}^3$  est une conséquence de la contrôlabilité du système homogène sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ .

$$(3) \quad x' = \left( A + \sum_{i=1}^m u_i B_i \right) x$$

Celui-ci est complètement contrôlable sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ , si et seulement si, la condition du rang est vérifiée en tout point de  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ .

Le plan de ce travail est comme suit :

Dans une première partie, je situe le travail par rapport à la littérature connue et explique la raison de cette recherche.

Je donne ensuite quelques définitions classiques générales.

Dans le deuxième chapitre, je démontre le théorème en dimension deux.

Dans le troisième, je démontre le résultat correspondant à  $n=3$ .

## CHAPITRE I

Dans une première partie de ce chapitre, nous situons notre travail par rapport aux résultats connus. La seconde partie sera consacrée aux définitions classiques et aux notations.

### I. 1 : Historique et position du problème :

Considérons le système différentiel :

$$* \begin{cases} \mathbf{x}'(t) = X(\mathbf{x}(t)) + \sum_{i=1}^m u_i(t) Y_i(\mathbf{x}(t)) \\ u \in \Omega \subset \mathbb{R}^m, \quad 0 \in \text{Int}(\Omega). \\ \mathbf{x} \in M \text{ une variété connexe de dimension } n. \end{cases}$$

Théorème 1 (Cas non borné :  $\Omega = \mathbb{R}^m$ ) [ 28 ]

Le système (\*) est transitif sur M si

$$\forall \mathbf{x} \in M, \text{Lie}(Y_i(\mathbf{x})) = T_{\mathbf{x}} M.$$

Théorème 2 (Cas restreint :  $\Omega$  compact connexe de  $\mathbb{R}^m$ ) [ 28 ]

En supposant  $\mathbf{x}$  poisson stable, une condition suffisante de transitivité sur M est que :

$$\text{Lie} \left\{ \mathbf{x}, \pm Y_i \right\}(\mathbf{x}) = T_{\mathbf{x}} M \quad \forall \mathbf{x} \in M$$

La condition est aussi nécessaire pour les systèmes auto-invariants. Rappelons qu'une famille de champs de vecteurs F est auto-Invariante, si en tout point  $\mathbf{x} \in M$ , l'espace tangent à la variété orbite  $G(F).\mathbf{x}$  est donné par  $\text{Lie}(F)\mathbf{x}$ .

Les familles de champs de vecteurs analytiques, de rang constant ainsi que celles de types finis sont auto-Invariantes.

## I. 2 : Cas linéaires.

Considérons le système linéaire :

$$(**) : \dot{x} = Ax + Bu. \quad \text{avec}$$

$$x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \Omega, \quad A \in M(n,n), \quad B \in M(n,m)$$

### Théorème 3 : (cas non borné) [19]

Une condition nécessaire est suffisante pour que (\*\*) soit transitif sur  $\mathbb{R}^n$  est que :

$$\text{Rang} \left\{ A, AB, \dots, A^{n-1} B \right\} = n \quad (\text{condition de Kalman})$$

### Théorème 4 : (cas restreint $\Omega$ : compact connexe de $\mathbb{R}^m$ ) [28]

(\*\*) est complètement contrôlable sur  $\mathbb{R}^n$  si

- i/ La condition de Kalman est vérifiée.
- ii/ Spectre  $(A) \subset i\mathbb{R}$
- iii/ A semi-simple (diagonalisable dans  $\mathbb{C}$ ).

Les conditions (ii), (iii) expriment tout simplement le fait que A est poisson-stable.

On a maintenant le théorème bien connu dû à Lee-Markuo : [19].

### Théorème 5 :

Le système  $\dot{x} = Ax + bu$ ,  $|u| < \varepsilon$ ,  $\varepsilon$  un réel positif arbitrairement petit, est complètement contrôlable sur  $\mathbb{R}^n$ , si et seulement si :

- i/ la condition du Kalman est vérifiée
- ii/ Spectre  $(A) \subset i\mathbb{R}$ .

Le problème que nous pouvons nous poser est :

Existe-t-il un analogue au théorème 5 pour les systèmes affines ?

Si l'on suppose la condition du rang et spectre  $(A) \subset i\mathbb{R}$ , avons-nous complète contrôlabilité pour des contrôles arbitrairement petits pour le système (1) ?

Il faut donc arriver à supprimer la condition (iii) du théorème (4).

Pour vérifier que cette conjecture est raisonnable, nous avons traité le problème en dimension 2 et 3.

Or, pour  $n=2, 3$ , les opérateurs qui ont un spectre imaginaire pur non réduit à  $\{0\}$  sont semi-simples. Il reste donc à regarder le cas où spectre  $(A)=\{0\}$ , c'est à dire les opérateurs nilpotents.

C'est le but de ce travail.

I. 2 : Définitions et Notations [26], [28], [30]

Soit  $F$  une fouille de champs de vecteurs (F.C.V) sur une variété  $M$  connexe de dimension  $n$ .

Pour but  $x \in F$ ,  $x_t(\cdot)$  désigne le groupe local à un paramètre engendré par  $x$ . Nous supposerons les champs complets et analytiques, ce qui sera le cas dans cette étude.

Définition 1

On dit que  $x \in M$  est accessible à partir de  $x_0$  à l'aide de la F.C.V.  $F$ , s'il existe un  $p$ . uple,  $(x^1, x^2, \dots, x^p)$  de  $F$ ,  $(t_1, t_2, \dots, t_p)$  des réels positifs tels que :

$$x = x_{t_p}^p \circ \dots \circ x_{t_1}^1(x_0).$$

L'ensemble des états accessibles à partir de  $x_0$  est noté  $\mathcal{A}(x_0, F)$ .

Si  $S(F)$  désigne le semi-groupe des difféomorphismes engendré par

$$\left\{ x_{t_k}^k \circ \dots \circ x_{t_1}^1(\cdot) \mid t_i \geq 0, k \in \mathbb{N}, x_i \in F \right\}, \text{ alors}$$

$\mathcal{A}(x_0, F)$  est l'orbite de  $S(F)$  au point  $x_0$ .

Définition 2

$F$  est dite complètement contrôlable ou transitif sur  $M$  si :

$$\forall x \in M, \mathcal{A}(x, F) = M$$

Définition 3

Un point  $x \in M$ , est dit accessible à l'aide  $F$  en un temps  $T > 0$  à partir de  $x_0$ , s'il est accessible et si  $\sum_{i=1}^k t_i = T$

Nous noterons cet ensemble par  $A(x, F, T)$ .

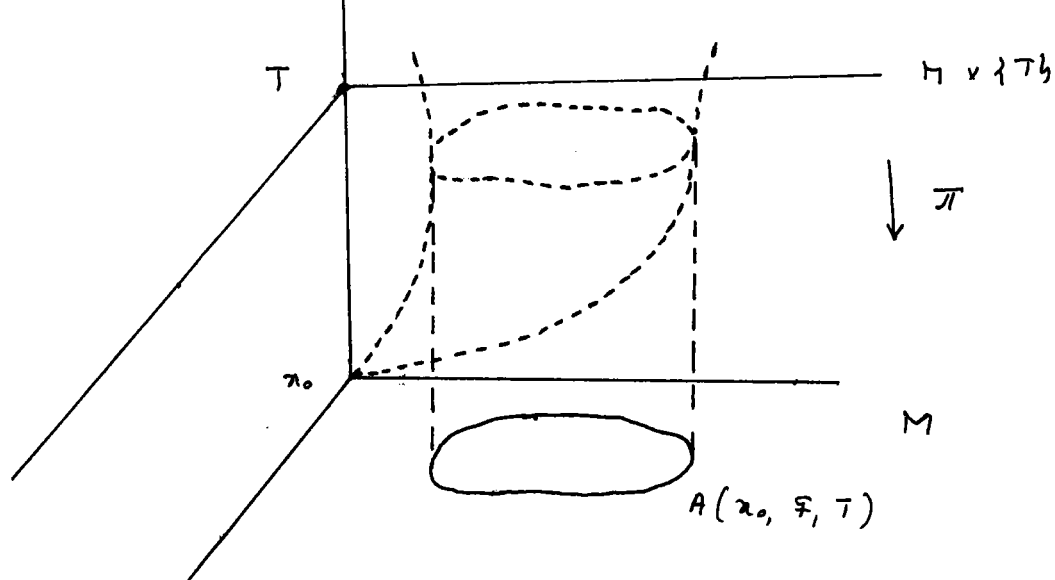
En identifiant  $M$  à  $M \times \{T\}$ ,  $x_0 \in M$  à  $(x, 0)$  ; Alors ;

si  $\tilde{F}$

désigne le système augmenté :  $\tilde{F} = F \times \{1\}$  alors :

$$A(x_0, F, T) = \pi \left( \mathcal{A}((x_0, 0), \tilde{F}) \cap M \times \{T\} \right)$$

où  $\pi : M \times \mathbb{R} \longrightarrow M$  désigne la projection sur  $M$ .



L'ensemble des points accessibles à partir de  $x_0$  à l'aide de  $F$  en des temps inférieurs à  $T$  est noté  $A(x_0, F, [0, T])$  et on a :

$$A(x_0, F, [0, T]) = \bigcup_{0 \leq t \leq T} A(x_0, F, t)$$

#### Définition 4

On dira que  $F$  possède la propriété d'accessibilité si pour tout  $x \in M$ ,

$\text{Int} A(x, F)$  est d'intérieur non vide.

#### Définition 5

La F.C.V est dite localement contrôlable en  $x_0$ , s'il existe un voisinage  $U$  de  $x_0$  inclus dans  $A(x_0, F)$ . Ceci implique en particulier que  $\text{Int} A(x_0, F)$  est un ouvert.

$F$  à la propriété de Locale locale contrôlabilité en  $x_0$  si pour tout voisinage  $U$  de  $x_0$ , il existe  $V$  un voisinage de  $x_0$ ,  $V \subset U$  tel que  $V \subset A(x_0, F/U)$ . Cela signifie que tout point de  $V$  est atteint par des trajectoires de  $F$  contenues dans  $U$ .

$F$  à la propriété de locale contrôlabilité en temps petits ou STLC en  $x_0$  (Small time local-controllability [31]) si pour tout  $T > 0$ ,  $A(x_0, F, [0, T])$  est un voisinage de  $x_0$ .

Il est clair que :

STLC en  $x_0 \Rightarrow$  locale locale contrôlabilité en  $x_0 \Rightarrow$  locale contrôlabilité en  $x_0$ .

### Définition 6 :

Soient  $x, y$  deux points de  $M$ .

On dira que  $y$  est normalement accessible à partir de  $x$  à l'aide de  $F$  s'il existe un entier  $p \geq n = \dim M$ , un  $p$ -uple  $(\tau_1, \dots, \tau_p)$  de réels strictement positifs,  $p$  champs de vecteurs  $x^1, \dots, x^p$  de  $F$  tels que si l'on appelle

$$\varphi \text{ l'application : } \varphi : (\mathbb{R}^+)^p \longrightarrow IA(x, F)$$

$$(t_1, \dots, t_p) \longmapsto x_{t_p}^p \circ \dots \circ x_{t_1}^1(x)$$

vérifiant  $\varphi(\tau_1, \dots, \tau_p) = y$  alors  $\varphi$  est de rang  $n$ .

### Corollaire :

Si  $y$  est normalement accessible à partir de  $x$  alors il existe un voisinage  $U$  de  $x$  et un voisinage  $V$  de  $y$  dans  $M$  tels que l'application :

$$\psi = U \xrightarrow{\quad} V$$

$$x \xrightarrow{\quad} x_{t_p}^p \circ \dots \circ x_{t_1}^1(x)$$

soit un difféomorphisme, et tout point de  $V$  est normalement accessible à partir d'un point de  $U$ .

Ceci est une conséquence immédiate du théorème des fonctions implicites. Quoique cela puisse paraître surprenant, Sussmann [52] a démontré que la normale accessibilité et l'accessibilité sont deux propriétés équivalentes dans le cas d'une F.C.V  $C^\infty$  et dénombrable. En effet :

### Théorème :

Soit  $F$  une F.C.V dénombrables de classe  $C^\infty$  sur  $M$ .

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i/  $F$  est contrôlable sur  $M$ .
- ii/  $F$  est normalement contrôlable sur  $M$ .
- iii/  $\forall x \in M, x$  est normalement Auto-Accessible.



A toute F.C.V.  $F$ , on associe son algèbre de Lie en tout point  $x$  de  $M$  noté  $\text{Lie}(F)_x \subset T_x M$ . C'est le plus petit sous espace vectoriel de  $T_x M$  stable par le crochet et contenant  $F$ .

### Définition 7

On dit que  $F$  vérifie la condition du rang en  $x_0 \in M$ , si et seulement si  $\text{Lie}(F)_{x_0} = T_{x_0} M$ .

La condition du rang en tout point de  $M$  est une condition nécessaire de contrôlabilité pour les F.C.V.  $C^\infty$ . [30]

C'est une condition nécessaire et suffisante pour l'accéssibilité si  $F$  est analytique.

Etude de la contrôlabilité dans

Considérons le système affine :

(a)  $x' = A x + u (B x + C)$  avec

-  $x = (x, y) \in \mathbb{R}^2$

-  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  un champ nilpotent

-  $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$  une matrice réelle quelconque

-  $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$  un vecteur dans  $\mathbb{R}^2$

-  $u \in [-\varepsilon, \varepsilon], \quad \varepsilon > 0$

En supposant la condition du rang, qui est une condition nécessaire de contrôlabilité, comment choisir B et C pour que le système (a) soit complètement contrôlable sur  $\mathbb{R}^2$  pour des contrôles arbitrairement petits ? Avant de répondre à cette question, nous allons démontrer un théorème énoncé par Sussmann [31] qui nous sera utile dans la suite.

Théorème II - 1

Soient  $X, Y$  de champs de vecteurs de classe  $C^\infty$  dans  $\mathbb{R}^2$ , vérifiant en un point  $x_0 \in \mathbb{R}^2$ :

(b) :  $X(x_0) = -\alpha Y(x_0) \quad \alpha > 0.$

Soit  $k$  (s'il existe) le premier entier vérifiant :

(c) :  $X(x_0)$  et  $ad^k X \cdot Y(x_0)$  linéairement indépendants, et pour tout  $j < k$   $X(x_0), ad^j X \cdot Y(x_0)$  linéairement dépendants.

Alors :

- i/ si  $k$  est impair, la famille  $\{X, Y\}$  est localement complètement contrôlable en  $x_0$ , (STLC.C en  $x_0$ ).
- ii/ si  $k$  est pair,  $\{X, Y\}$  n'est pas localement contrôlable en  $x_0$ .

Preuve :

Au lieu d'étudier la STLCC de  $F$ , nous étudions celle d'une famille équivalente  $F' = \{\varphi_*(X), \varphi_*(Y)\}$  où  $\varphi$  est un difféomorphisme de plan. Les conditions (i), (ii) sont invariantes par tout difféomorphisme.

Nous supposons  $x_0 = 0$ , et nous choisissons  $\varphi$  tel que  $\varphi_*(X) = \frac{\partial}{\partial x} = X^*$ ,  $\varphi_*(Y) = Y^*$  vérifiant (b) en 0. (c'est une application du théorème de redressement au voisinage de 0).

La condition (i) implique que les courbes intégrales de  $X^*$  et de  $Y^*$  se coupent tangentiellement en 0 sans se croiser.

En effet ; au voisinage de  $t = 0$  nous avons la relation : [30]

$$Y^*(X_t^*(0)) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{n!} \text{ad}^n X^* \cdot Y^*(0)$$

soit  $k$  l'entier vérifiant (c),  $k$  impair. Nous aurons :

$$Y^*(X_t^*(0)) = \begin{pmatrix} f(t) \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + o(t^{2k+2})$$

avec 
$$\begin{pmatrix} f(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{2k} (-1)^n \frac{t^n}{n!} \text{ad}^n X^* \cdot Y^*(0)$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \text{ad}^{2k+1} X^* \cdot Y^*(0)$$

$\alpha_2$  est non nul à cause de (c). Supposons  $\alpha_2 > 0$  pour se fixer les idées.

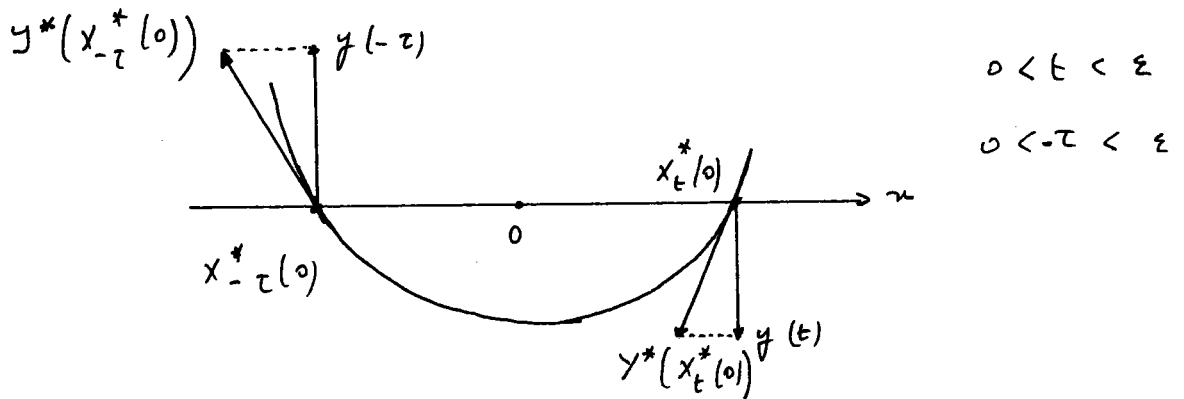
La deuxième composante de  $Y^*(X_t^*(0))$  :

$$y(t) = -\beta \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(t^{2k+1})$$

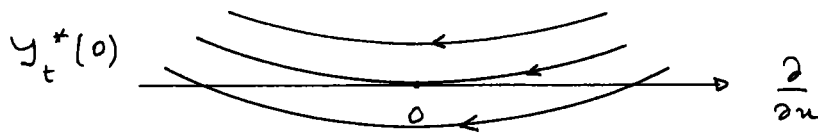
est une fonction impaire dans un voisinage symétrique de 0 donc change de signe quand  $t$  varie dans  $]-\varepsilon, \varepsilon[$ .

Donc  $y(t) > 0$  si  $t \in ]-\varepsilon, 0[$ ,  $y(t) < 0$  si  $t \in ]0, +\varepsilon[$

$x_t^*(0)$  et  $x_{-t}^*(0)$  étant proche et sans singularité nous impliquera que les courbes intégrales de  $y$  issues de  $x_t(0)$  recroisent l'axe  $(Ox)$ .



et par suite la courbe intégrale de  $y^*$  issue de  $O$  ne croise pas celle de  $X^*$  au voisinage de  $x = 0$ . On a donc la situation suivante



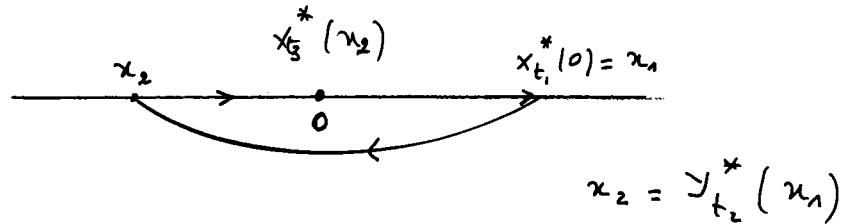
Montrons qu'on a STLC en  $o$ .

Pour cela, il suffit de montrer que pour tout  $T > 0$ ,  $o$  est auto-Accessible en un temps  $t \leq T$ . Sachant que l'auto-Accessibilité implique la normale accessibilité, on conclut qu'on a STLC en  $o$ .

Comme on est en dimension 2, pour avoir l'auto-Accessibilité, il suffit de faire une commutation là où les champs  $X^*$ ,  $Y^*$  sont linéairement indépendants.

Il est clair qu'une trajectoire correspondant au dessin ci-dessous vérifie

cette hypothèse :



On aura 
$$X_{t_3}^*(x_2) = X_{t_3}^* \left[ Y_{t_2}^*(X_{t_1}^*(0)) \right] = 0$$

Les temps passés sur les trajectoires étant arbitrairement petits.

Ce qui termine la démonstration.

ii/ Soit maintenant  $k$  pair vérifiant (c). Comme précédemment nous aurons :

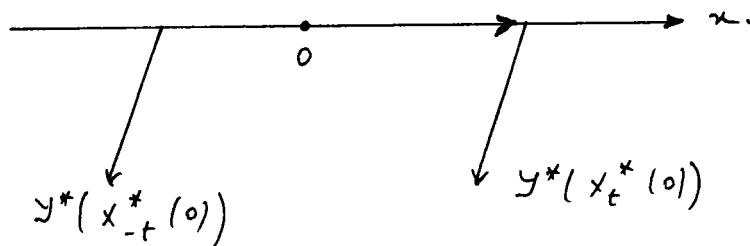
$$Y^*(X_t^*(0)) = \begin{pmatrix} g(t) \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t^{2k}}{(2k)!} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} + o(t^{2k+1})$$

avec 
$$\begin{pmatrix} g(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{2k-1} \frac{(-1)^n}{n!} t^n \operatorname{ad}^n X^* \cdot Y^*(0)$$

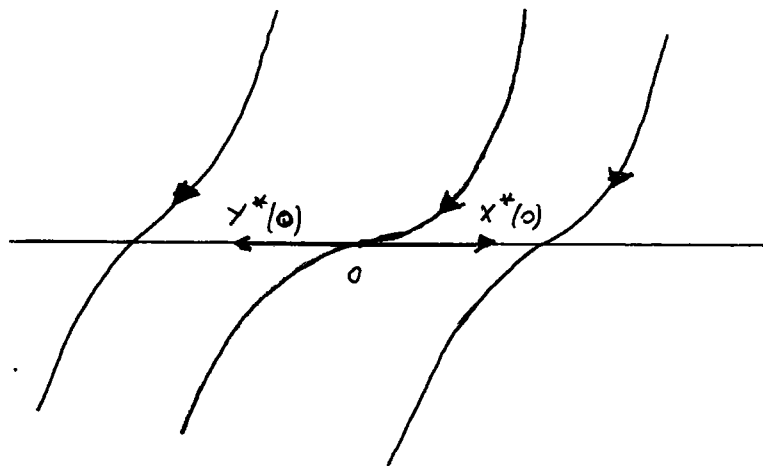
$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \operatorname{ad}^{2k} X^* \cdot Y^*(0) + o(t^{2k+1})$$

Nous remarquons alors que la deuxième composante est une fonction paire quand  $t$  varie dans  $]-\varepsilon, \varepsilon[$ .

$\gamma^*(X_t^*(0))$  pointe vers la même région délimitée par l'axe  $(0x)$  au voisinage de  $0$ , sauf pour  $t = 0$  où il lui est tangent.



Donc les trajectoires de  $Y^*$  passant par  $X_t^*(0)$ ,  $-\varepsilon < t < \varepsilon$  coupe une seule fois, dans un voisinage de  $0$  l'axe  $0x$ . Donc la trajectoire passant par  $0$ , croise celle de  $X^*$  passant par  $0$ .



Puisque  $Y^*(x_t^*(o))$  pointe vers la même région, on ne peut avoir locale contrôlabilité dans un voisinage de  $o$ . D'où le théorème.

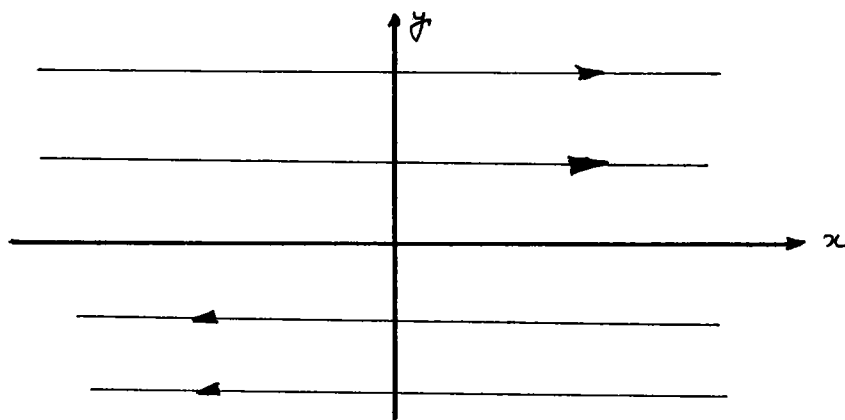
Remarque :

Ce théorème et cette démonstration ne sont valables que dans des variétés de dimension 2. Pour les dimensions plus grandes  $n \geq 3$ , Sussmann a donné un autre théorème plus général pour les systèmes  $x' = f_0(x) + u f_1(x)$  avec une démonstration plus compliquée que celle-ci. [32]

Revenons maintenant à notre problème. Le système (a) s'exprime à l'aide des coordonnées de par :

$$\begin{cases} x' = ub_{11}x + (1 + ub_{12})y + uc_1 \\ y' = ub_{21}x + ub_{22}y + uc_2 \end{cases}$$

Pour  $u = 0$ , les orbites du champ nilpotents sont des droites



Tout point de l'axe des  $x$  est une singularité de  $A$ .

### Proposition 1

Si  $b_{21} = b_{22} = 0$ ,  $c_2 \neq 0$  alors le système (a) est STLC en tout point de l'axe des  $x$

Preuve :

Nous allons vérifier que le système vérifie la condition du rang en tout point de la forme  $(x, 0)$ .

Soit  $u \in [-\varepsilon, \varepsilon] - \{0\}$ . Nous posons :

$$X^u \begin{pmatrix} (x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ub_{11}x + (1 + ub_{12})y + uc_1 \\ u c_2 \end{pmatrix}$$

On aura :

$$X^u \begin{pmatrix} (x, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ub_{11}x + u c_1 \\ u c_2 \end{pmatrix} = -X^{-u} \begin{pmatrix} (x, 0) \end{pmatrix}$$

De plus :

$$\left[ X^u, X^{-u} \right] \begin{pmatrix} (x, 0) \end{pmatrix} = -2u \begin{pmatrix} c_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

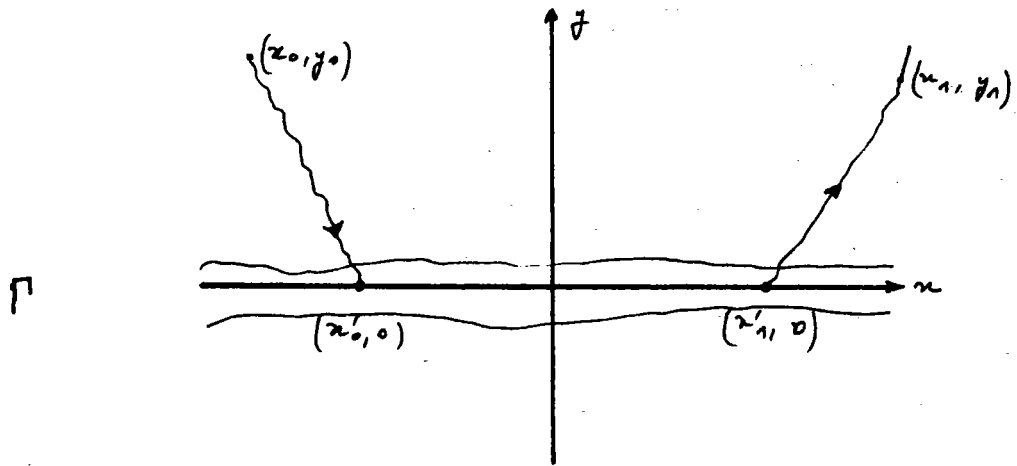
Donc  $X^u \begin{pmatrix} (x, 0) \end{pmatrix}$  et  $\text{ad}^1 X^u \cdot X^{-u} \cdot \begin{pmatrix} (x, 0) \end{pmatrix}$  sont linéairement indépendants pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . On a donc la condition du rang et de plus on a STLC en  $(x, 0)$  d'après le théorème II.1 précédent. Ce qui implique qu'on locale complète contrôlabilité sur un voisinage de l'axe des  $x$ .

### Proposition 2

Sous les hypothèses de la proposition précédente, le système (a) est complètement contrôlable sur  $\mathbb{R}^2$ .

Preuve :

Nous allons montrer que tout point de  $\mathbb{R}^2$  peut être recalé sur l'axe des  $x$  et que tout de  $\mathbb{R}^2$  peut être atteint à partir d'un point de l'axe des  $x$ . Ce qui prouvera la complète contrôlabilité.



La composante du champ suivant l'axe (oy) est  $u c_2 \neq 0$ .

Pour toute condition initiale  $(x_0, y_0)$  la solution passant par  $(x_0, y_0)$  traverse l'axe des  $x$ . Il suffit de choisir  $u$  tel que  $\text{Sgn}(u) = -\text{Sgn}(C_2 y_0)$ .

Donc étant donnés deux points quelconques  $(x_0, y_0)$  ;  $(x_1, y_1)$ , pour  $u_1$  vérifiant  $\text{Sgn}(u_1) = -\text{Sgn}(C_2 y_0)$ , la trajectoire issue de ce point coupera l'axe (ox) en  $(x'_0, 0)$ .

Le point  $(x_1, y_1)$  est atteint à l'aide d'une trajectoire issue d'un point  $(x'_1, 0)$  pour un contrôle  $u_2$  vérifiant  $\text{sgn}(u_2) = \text{Sgn}(C_2 y_1)$ .

Comme on a contrôlabilité sur l'axe (ox) on déduit que (a) est complètement contrôlable sur  $\mathbb{R}^2$ .

### Proposition 3

Une condition nécessaire pour que la condition du rang soit réalisée en tout point de  $\mathbb{R}^2$  est que  $b_{21} \neq 0$ , quand  $b_{22} \neq 0$ .

#### Preuve :

Supposons  $b_{21} = 0$ . (nous supposons que  $b_{22} \neq 0$  car sinon le système (a) est complètement contrôlable si  $C_2 \neq 0$  et non contrôlable si  $C_2 = 0$  à cause de la condition du rang).

La droite d'équation  $y = \frac{-C_2}{b_{22}}$  est une séparatrice du champs (a) tel que <sup>en</sup> chacun de ses points la dimension de l'Algèbre de Lie est 1.



#### Proposition 4

Une condition suffisante de contrôlabilité du système (a) est que  $b_{21} \neq 0$ .

#### Preuve :

Nous allons montrer que le système homogène  $x' = (A + uB) x$  est complètement contrôlable sur  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ .

$$P(\lambda) = \det(A + uB - \lambda I) = \lambda^2 - \lambda uT + u^2 \det B - u b_{21}$$

le polynôme caractéristique du système homogène où T désigne la trace de B.

Soit  $\delta$  le discriminant de ce polynôme.

$$\delta = u^2 T^2 - 4 u^2 \det B + 4 u b_{21} = u^2 [(b_{11} - b_{22})^2 + 4 b_{21} b_{12}] + 4 u b_{21}$$

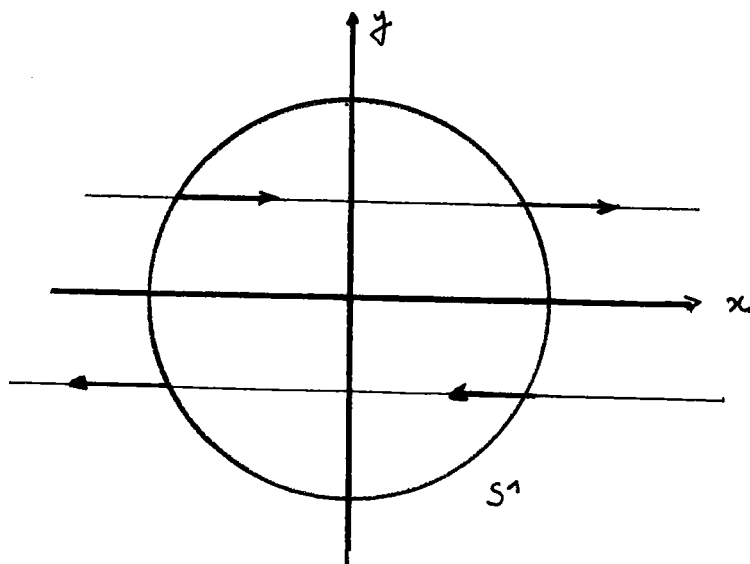
Pour u suffisamment petit, le signe de  $\delta$  est celui de  $u b_{21}$  :

$\text{sgn}(\delta) = \text{sgn}(u b_{21})$ . Donc la matrice  $(A + uB)$  est régulière.

En choisissant u convenablement, nous pouvons avoir  $\delta < 0$ .

Il suffit de prendre u tel que  $\text{sgn}(u) = -\text{sgn}(b_{21})$

Dans ce cas, le polynôme caractéristique admet deux racines complexes conjuguées. Les solutions du système (a) sont soit des cercles (si  $T = 0$ ) soit des spirales. Celles-ci se projettent sur  $S^1$  en des cercles. D'où contrôlabilité sur  $S^1$  c'est à dire sur les directions.



Avec le champ nilpotent A ( $u = 0$ ) on conclut qu'on a contrôlabilité sur  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ . Le champ A permet d'avoir une direction rentrante et une direction sortante [10]. [11]

De plus, l'application : 
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longrightarrow & (A + u B) x + C u. \end{array}$$

n'a pas de point fixe commun à toutes les valeurs de contrôles  $u$  à cause de la condition du rang.

D'où complète contrôlabilité sur  $\mathbb{R}^2$ .

Remarque :

$b_{21} \neq 0$  implique aussi la S.T.L.C.C en  $p = (1, 0)$  du système homogène.

En effet :

Soient  $u, v$  deux valeurs de contrôles dans  $] -\varepsilon, \varepsilon [$ ,  $u \cdot v < 0$ .

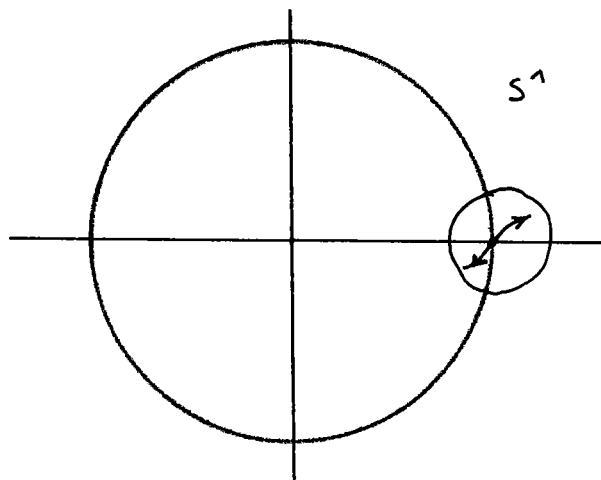
$(A + u B)(p) = u \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix}$  et  $(A + v B)(p) = v \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix}$  sont colinéaires

$[A + u B, A + v B](p) = (v - u) [A, B](p) = (v - u) \begin{pmatrix} b_{21} \\ 0 \end{pmatrix}$

linéairement indépendant avec  $(A + u B)(p)$ .

Donc S.T.L.C.C en  $p$ , d'où la direction sortante et rentrante.

De plus, on a S.T.L.C en tout point de l'axe  $(0, x)$ .



Enfinement :

En rassemblant les quatre propositions, nous pouvons conclure

## Théorème II.2

Le système Affine  $x' = A x + u (Bx + C)$  est complètement contrôlable sur  $\mathbb{R}^2$ , pour des contrôles arbitrairement petits avec  $A$  nilpotent si et seulement si la condition du rang est réalisée en tout point de  $\mathbb{R}^2$ .

CHAPITRE III  
Etude de la contrôlabilité dans  $\mathbb{R}^3$

Dans cette partie, nous nous intéressons au vif du sujet, à savoir : la contrôlabilité dans  $\mathbb{R}^3$  des systèmes affines à dérivées nilpotentes avec des contrôles aussi petits que l'on veut.

Nous nous intéressons particulièrement à l'étude de la contrôlabilité du système homogène  $x' = (A + uB) x$  sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ . Si celui ci présente le bon aspect d'être contrôlable alors, à cause du théorème Jurdjevic - Sallet [16], [17] le système affine initial est complètement contrôlable sur  $\mathbb{R}^3$ .

En effet, nous avons le théorème [16] :

$$\text{Le système affine } x' = Ax + \sum_{i=1}^m u_i (B_i x + C_i), A, B_i, 1 \leq i \leq m$$

des matrices réelles,  $C_i \in \mathbb{R}^n$  est complètement contrôlable sur  $\mathbb{R}^n$  si :

i/ Le système homogène :  $x' = (A + \sum_{i=1}^m u_i B_i) x$  est contrôlable sur  $\mathbb{R}^n - \{0\}$ .

ii/ L'application :  $x \longrightarrow Ax + \sum_{i=1}^m u_i (B_i x + C_i)$  n'a pas de points fixe commun à tous les  $u = (u_1, \dots, u_m)$ ,  $u$  appartenant à l'ensemble des contrôles admissibles.

Or, dans notre cas, on n'a obligatoirement aucun point fixe puisque l'on suppose la condition du rang réalisée en tout point.

Pour l'étude de la contrôlabilité du système homogène, nous utiliserons la méthode de Gauthier-Bornard [11],[12] ; c'est à dire projeter le système homogène (qui est linéaire) sur la sphère  $S^2$ . Sachant que la dérivée est nilpotente, le théorème de Gauthier-Bornard-Sallet [GBS] nous assure qu'il suffit de montrer que le système est transitif sur les directions, c'est à dire sur  $S^2$ .

La méthode utilisée pour montrer la transitivité sur  $S^2$ , utilise parfois la locale contrôlabilité aux points fixes du champ nilpotent  $A$  (ses pôles) sur  $S^2$ . L'idée est de montrer qu'il y a locale contrôlabilité en ces pôles. En effet, nous avons le théorème suivant :

### Théorème 1

Le système homogène est localement contrôlable au pôle  $p = (1, 0, \dots, 0)$  de  $S^{n-1}$  ( $p$  appartenant à l'ensemble des points fixes de  $A$ ) si et seulement si il est complètement contrôlable sur  $S^{n-1}$ .

### Preuve :

Dire qu'on a locale contrôlabilité en  $p$ , c'est dire que  $\mathcal{A}(p)$ , l'ensemble des états accessibles est un ouvert contenant  $p$ .

Par symétrie,  $\mathcal{A}(-p)$  est aussi ouvert et contient  $(-p)$ ,  $\mathcal{A}(p)$  et  $\mathcal{A}(-p)$  étant symétriques. Cette symétrie entraînera aussi la locale complète contrôlabilité en  $\pm p$ . Nous aurons donc un ouvert autour des pôles où le système est complètement contrôlable.

Mais de part la nature des champs nilpotents, tout point de  $S^{n-1}$  peut être recallé à partir d'un ouvert des pôles  $\pm p$  ou atteint. D'où complète contrôlabilité sur  $S^{n-1}$ .

La condition est évidemment suffisante. D'où le théorème.

Ainsi, l'étude de la locale contrôlabilité en  $p$  offre un intérêt pratique, surtout si sa réalisation dépend d'un critère algébrique comme la STLC.

Cependant, prouver qu'on a cette propriété en  $\pm p$  n'est pas chose toujours aisée, si l'on n'impose pas d'autres hypothèses sur la matrice  $B$ .

En ce cas, et pour contourner cette difficulté apparente à priori, nous étudierons directement la complète contrôlabilité du système homogène sur  $S^2$ .

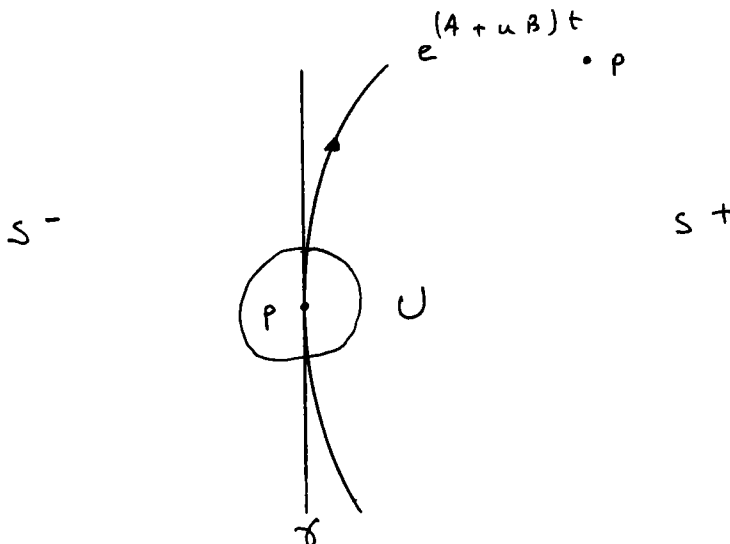
Ce qui nous impliquera entre-autre la locale contrôlabilité.

L'étude de la transitivité sur  $S^2$  (dans le cas où il n'est pas évident de la déduire de la locale contrôlabilité aux pôles de A) est basée sur trois propriétés (P1) ; (P2) ; (P3) ; ainsi qu'une forme du théorème du "passage des douanes" que l'on énoncera.

Considérons la situation au voisinage de  $p = (1,0,0) \in S^2$ .

Dans le cas le plus défavorable, on a la situation suivante :

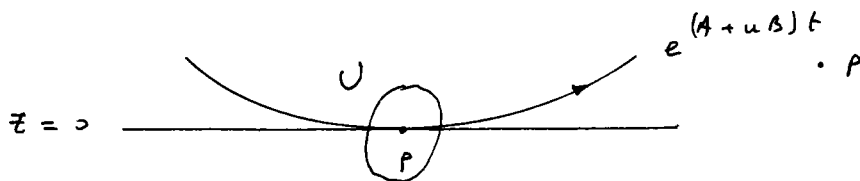
a/ Quand A est nilpotent d'ordre 2



Les solutions, pour des contrôles petits,  $u \in ]-\epsilon, \epsilon[$ , passant par le point  $p = (1,0,0)$  sont tangentes au grand cercle des points singuliers  $\gamma$  du champ A. Le problème à résoudre est de pouvoir franchir  $\gamma$  et de passer de  $S^+ = \{(x,y,z) \in S^2 / y \geq 0\}$  à  $S^- = \{(x,y,z) \in S^2 / y \leq 0\}$  et réciproquement.

b/ Quand A est nilpotent d'ordre 3.

On a la situation suivante :



Dans le cas défavorable, les solutions passant par p pour  $u \in ]-\epsilon, \epsilon[$  sont tangentes au grand cercle équatorial ( $z=0$ ).

Nous allons montrer que l'on peut franchir cet équateur et de passer de l'hémisphère nord à l'hémisphère sud et réciproquement.

### III. o Eléments de la démonstration de la complète contrôlabilité sur $S^2$

(P1) : On démontrera que dans chaque cas, il existe un ouvert  $U$  autour de  $p$  (ou de  $-p$  par symétrie) tel que pour tout point de  $U$ , on peut tracer une courbe continue s'approchant arbitrairement près de  $(-p)$ .

(P2) : Dans tous les cas, on aura une valeur de contrôle qui nous donne un champ  $x^u$  spirale dont l'équateur (plan invariant) ne contient pas le point  $p$ . Nous démontrerons que tout point de  $S^2$  peut être atteint et recalé sur cet équateur.

Quitte à le restreindre, si nécessaire, nous choisissons  $U$  l'ouvert défini dans (P1) de façon à ce qu'il ne rencontre pas l'équateur.

(P3) : Deux points non diamétralement opposés déterminent de façon unique un grand cercle sur  $S^2$ .

Un plan passant par l'origine et par ces deux points détermine deux demi-espaces convexes. Le plan sépare strictement deux points diamétralement opposés non contenus dans ce plan.

**Théorème des passages des frontières :**

Toute courbe convexe non fermée passant par un point de  $U$  et s'approchant strictement près de  $(-p)$  rencontre l'équateur du champ  $x^u$ .

Nous verrons que ces 4 propriétés sont naturellement vérifiées.

Le plan de ce chapitre est comme suit :

Dans le paragraphe 1, nous nous intéresserons à la classification des champs linéaires de  $\mathbb{R}^3$  projetés sur  $S^2$  d'après leur décomposition sous forme de Jordan.

Dans le paragraphe 2, nous étudierons la notion de STLC [31] ou locale contrôlabilité en temps petits. Cette notion nous sera d'un grand secours pour la contrôlabilité sur  $S^2$ . (voir théorème 1).

Les paragraphes 3 et 4, qui rentrent dans le vif du sujet pour  $n = 3$ , sont consacrés respectivement à l'étude de la transitivité sur  $S^2$ .

Dans la dernière partie, on étend le résultat sur  $\mathbb{R}^3$ .



### III 1.1 / Projection des champs linéaires de $\mathbb{R}^3$ sur $S^2$ .

Le but de cette étude est de donner une propriété importante dont jouissent les champs linéaires de  $\mathbb{R}^n$ .

Ce sont des champs dont les trajectoires se projettent radialement sur  $S^{n-1}$  et qui constituent des solutions d'équations différentielles du champ projeté sur  $S^{n-1}$ . De plus, les trajectoires d'un champ linéaire sont homothétiques par rapport à l'origine, donc admettent une même projection sur  $S^{n-1}$ .

En effet, si  $X$  désigne un champ linéaire, on a pour tout  $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ .

$$- X(\lambda x) = \lambda X(x)$$

pour  $\lambda > 0$ .

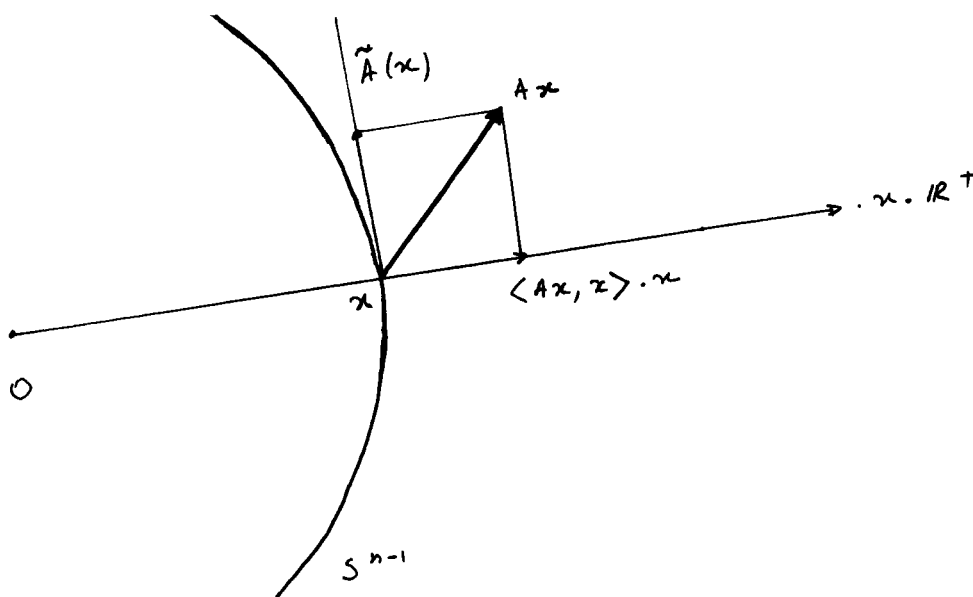
$$- e^{tX}(\lambda x) = \lambda (e^{tX}x)$$

Donc à toute famille de champs de vecteurs linéaires  $F = \{A_i\}_{i \in I}$  sur  $\mathbb{R}^n$ , on peut lui associer une famille de champs de vecteurs  $\tilde{F} = \{\tilde{A}_i\}_{i \in I}$  sur  $S^{n-1}$  appelée projection de  $F$  sur  $S^{n-1}$ , tel que :

Pour tout  $A \in F$ , pour tout  $x \in S^{n-1}$

$$\tilde{A}(x) = Ax - \langle Ax, x \rangle x$$

où le  $\langle , \rangle$  désigne le produit scalaire dans  $\mathbb{R}^n$ .  $\langle Ax, x \rangle x$  désigne donc la projection orthogonale de  $Ax$  sur le rayon vecteur  $x/\mathbb{R}^+$



Géométriquement,  $\tilde{A}(\alpha)$  est la composante tangentielle à  $S^{n-1}$  du vecteur  $A\alpha$ .

Ce qui nous définit bien un champ de vecteurs sur  $S^{n-1}$ .

Certaines propriétés de  $\tilde{F}$  se déduisent à partir de celles de  $F$  telles que l'accéssibilité, la conservation du crochet ... [A].

Il arrive aussi que 2 champs de vecteurs linéaires sur  $\mathbb{R}^n$ ,  $A, B$  admettent la même projection sur  $S^{n-1}$ . Un tel cas se produit si et seulement si :

$$A = \alpha I + B, \alpha \in \mathbb{R}, I : \text{identité}$$

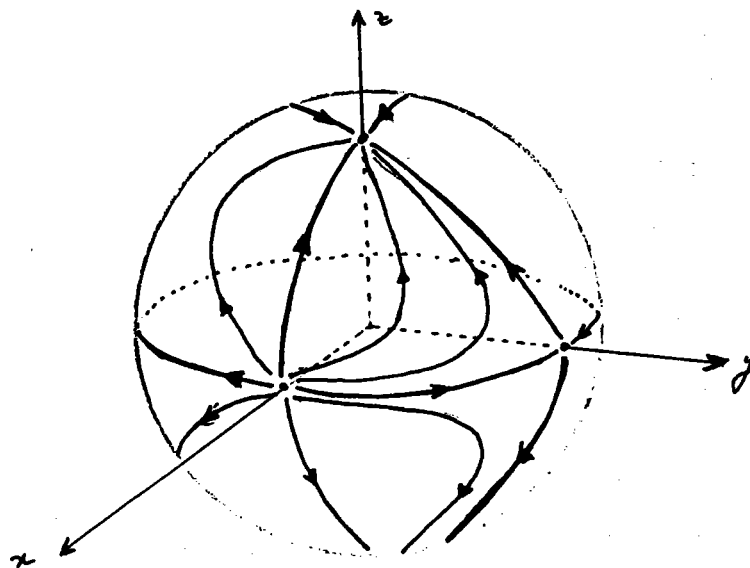
Dans  $\mathbb{R}^3$ , il existe 7 types de champs linéaires. Nous allons les classer ainsi que leur projection sur  $S^2$  d'après leur forme de Jordan.

### III 1.2 Classification des champs linéaires de $\mathbb{R}^3$ .

1/ Champ de type I ;

Le champ est diagonal.

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}; \text{ on suppose que } \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3.$$



Ce champ présente :

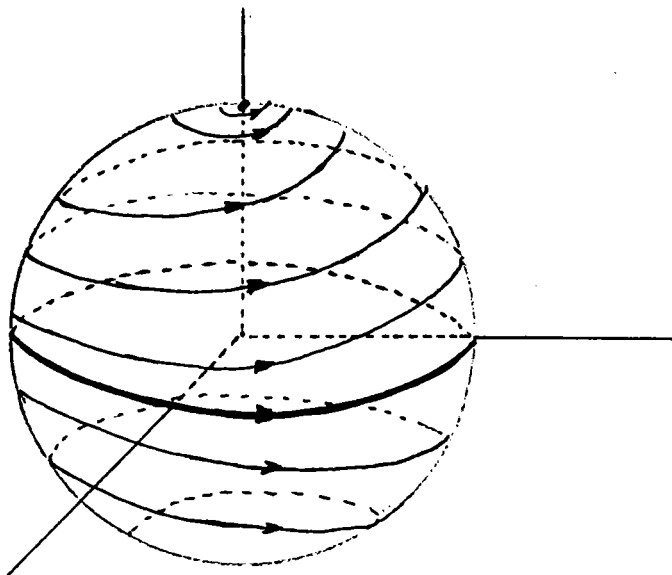
- 3 grands cercles invariants qui correspondent aux plans invariants du champ dans  $\mathbb{R}^3$ .
- 3 paires de points singuliers qui sont les points d'intersection des grands cercles tels que :
  - 2 points attractifs (noeuds stables) correspondant à la valeur propre la plus grande.
  - 2 points répulsifs (noeuds instables) correspondant à la valeur propre la plus petite.
  - 2 points singuliers du type col, correspondant à la valeur propre intermédiaire.



2/ Champ du type II.

Le champ M admet des valeurs propres complexes  $\lambda_{1,2} = a \pm ib$  et une réelle  $\lambda$ .

$$M = \begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{on suppose } \lambda \neq a.$$



On a :

- un grand cercle invariant correspondant au plan équatorial invariant par le système dans  $\mathbb{R}^3$ .

- 2 points singuliers non contenus dans ce grand cercle.

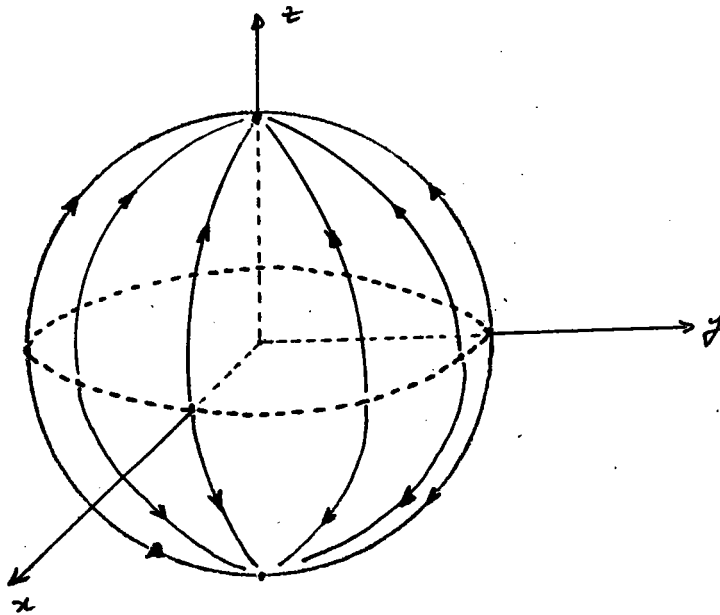
Si  $\lambda > a$ , les points singuliers sont attractifs, ce sont des foyers stables. L'équateur étant répulsif.

Si  $\lambda < a$ , l'équateur est attractif, les points singuliers répulsifs. Ce sont des foyers instables.

Dans les deux cas, l'équateur est un cycle limite.

3/ Champ du type III.

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} ; \quad \lambda \neq \mu$$



Ce champ présente :

- un grand cercle invariant de points singuliers. Ceux-ci correspondent aux projections des solutions (droites) contenues dans le plan  $Xoy$ .

- deux points singuliers non contenus dans ce grand cercle. Tous les grands cercles passant par ces deux points singuliers sont invariants.

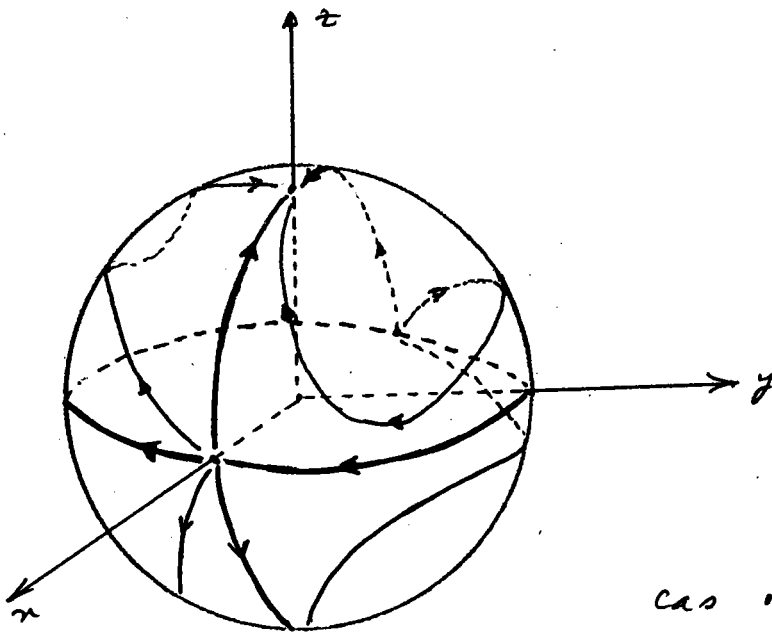
Si  $\mu > \lambda$ , les deux points singuliers sont attractifs, sinon répulsifs pour  $\mu < \lambda$ .

4/ Champ de type IV

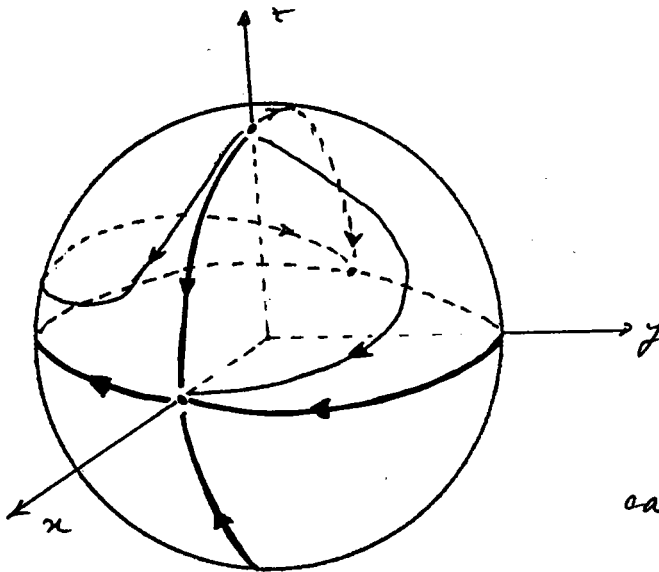
$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \quad \lambda \neq \mu$$

Ce champ présente : (voir figure page 32)

- 2 plans invariants : le grand cercle équatorial et le grand cercle passant par les points singuliers qui sont au nombre de quatre, dont deux attractifs.



cas où  $d < \mu$ .



cas où  $d > \mu$ .

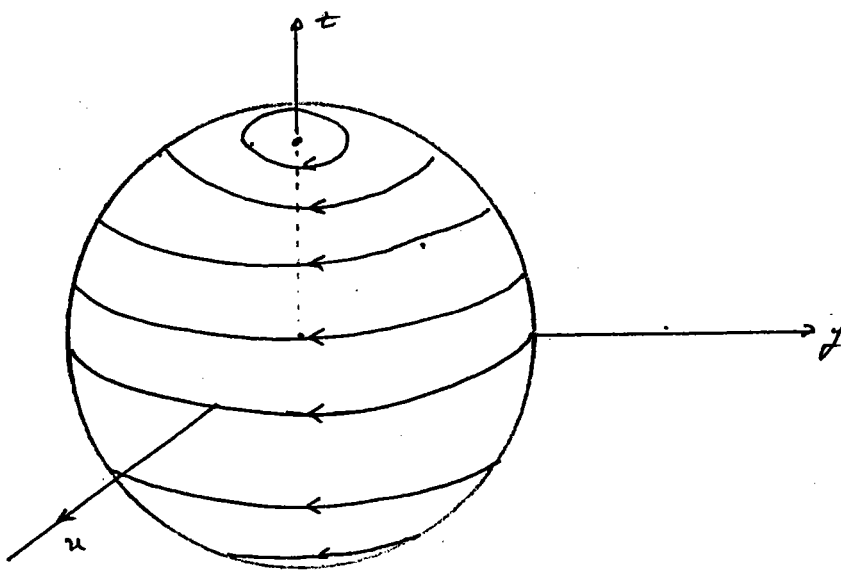
5/ Champ du type V.

$$M = \begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Ce champ est une similitude. Les trajectoires sont des hélices contenues dans des cylindres dans  $\mathbb{R}^3$ , qui se projettent en cercle sur  $S^2$ .

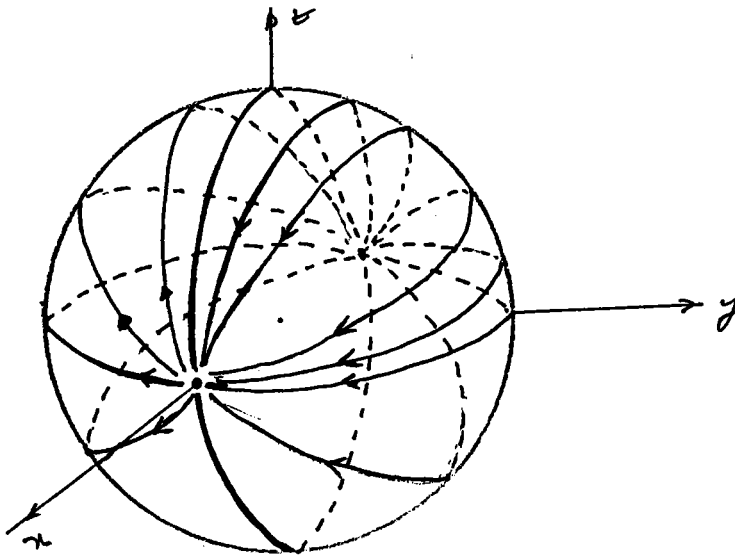
M présente :

- un plan équatorial stable
- deux points singuliers non contenus dans ce plan. Ce sont des centres



6/ Champ du type VI.

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$



On a :

- Un grand cercle de points singuliers qui correspond au noyau de M (le plan  $\chi oz$ ).
- Deux points singuliers sur ce grand cercle qui sont attractifs dans une demi-sphère et répulsif sur l'autre.

Les grands cercles passant par ces deux points sont invariants par M.

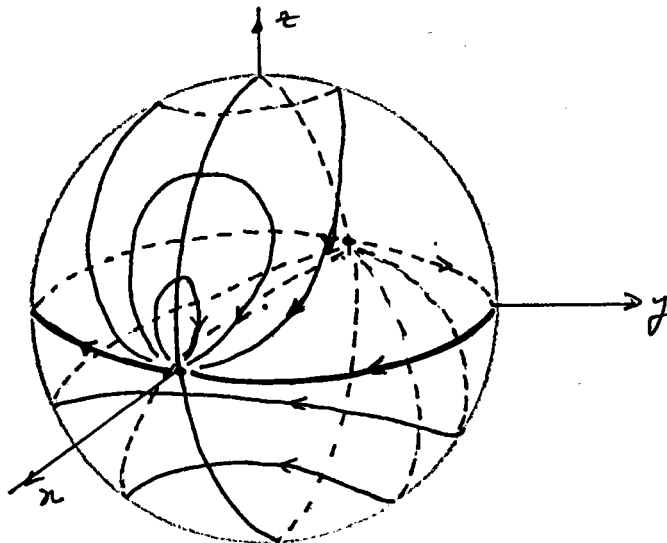
Notons que ce champ admet la même projection sur  $S^2$  que le nilpotent

d'ordre 2

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7/ Champ du type VII.

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



On a :

Un plan invariant qui correspond à l'image de  $M$  ( $z = 0$ )

Deux points singuliers sur l'équateur, attractifs dans leur hémisphère. Notons que ce champ admet la même projection que le nilpotent

d'ordre 3

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



### III 2/ La STLC ou locale contrôlabilité en temps petits.

Nous avons vu que la notion de STLC du système homogène du champ affine était une propriété importante dans notre cas puisqu'elle impliquait la transitivité.

L'introduction de cette notion est suscitée pour deux raisons :

1°/ Au pôle  $p = (A, 0, 0)$  du champ nilpotent, la tangente à la solution passant par  $p$  est  $u \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix}$ . En choisissant  $u_1, u_2$  dans  $]-\varepsilon, \varepsilon[$ ,  $u_1 \cdot u_2 < 0$ , les solutions sont tangentes entre-elles, mais parcourues dans des sens opposés.

D'où la première condition du théorème de Sussmann (théorème II.1).

2°/ La notion de STLC dans ce cas en vérifiant par un calcul algébrique certaines conditions. D'où l'intérêt de l'utilisation de cette notion.

Dans ce qui va suivre, nous allons introduire en détail la notion de la STLC pour pouvoir l'appliquer dans le cadre de l'étude de la contrôlabilité de notre système. Nous étudierons séparément le cas nilpotent d'ordre 2 et 3.

Dans un cas général, Sussmann [32] donne des conditions suffisantes de la STLC pour les systèmes différentiels du type  $x' = f_0(x) + u f_1(x)$  où  $x \in M$  une variété de dimension  $n$ ,  $|u| \leq a$   $a > 0$ ,  $f_0, f_1 \in \mathcal{C}^\infty(M)$ .

Théorème :

Le système  $x' = f_0(x) + u f_1(x)$  est STLC en  $x_0$  si :

- i/  $x_0$  est un point régulier singulier
- ii/  $\dim \text{Lie}(f_0, f_1)(x_0) = \dim M$ .
- iii/  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $k$  impair

$$J^k(f_0, f_1)(x_0) = J^{k+1}(f_0, f_1)(x_0).$$

Dire que  $\chi_0$  est un point singulier régulier c'est dire qu'il existe un  $\bar{u}$  unique,  $|\bar{u}| < a$  tel  $f_0(\chi_0) + \bar{u} f_1(\chi_0) = 0$

$\mathcal{J}^k(f_0, f_1)(\chi_0)$  est l'espace vectoriel engendré par les crochets de Lie au point  $\chi_0$  de  $f_1, f_2$  et contenant au plus  $k$  fois le terme  $f_1$ .

Par exemple :

Considérons le système linéaire :

$$\dot{\chi} = A\chi + bu, \quad A \in M(n, n), \quad b \in \mathbb{R}^n, \quad |u| \leq a, \quad a > 0$$

D'après Kalman, ce système est localement contrôlable en 0, si et seulement si  $\text{Rang} \{ b, Ab, \dots, A^{n-1}b \} = n$ .

Or  $\mathcal{J}^1(A\chi + \bar{u}b, A\chi - \bar{u}b)(0) = \langle b, Ab, \dots, A^{n-1}b \rangle_{e.v} = \mathbb{R}^n$ .

Donc, un système linéaire vérifiant la condition du rang est STLC en 0 puisque :

$$\mathbb{R}^n = \mathcal{J}^1(A\chi + \bar{u}b, A\chi - \bar{u}b)(0) \subset \mathcal{J}^2(A\chi + \bar{u}b, A\chi - \bar{u}b)(0) \subset \dots \subset \mathcal{J}^k(A\chi + \bar{u}b, A\chi - \bar{u}b)(0).$$

On va appliquer ce théorème, qui prend une forme plus simple dans les variétés de dimension 2 en  $\chi_0 = p = (1, 0, 0) \in S^2$ .

### III.3 Etude de la contrôlabilité du système homogène sur $S^2$ :

cas nilpotent d'ordre 2

Dans ce paragraphe, nous donnerons les conditions suffisantes pour que le système  $x' = (A + uB)x$  ;  $x = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$ ,  $A^2 = 0$   $u \in ]-\epsilon, \epsilon[$  soit transitif sur les Directions.

Nous commencerons par voir s'il y a STLC en p. Si ce n'est pas le cas nous étudierons directement la contrôlabilité sur  $S^2$ , en s'aidant des propriétés (P1), (P2), (P3). Ce qui nous permettra de franchir le méridien singulier  $\sigma$  de A.

La conjonction de ses propriétés plus celle de la condition du rang entraînera la complète contrôlabilité sur  $S^2$ .

A cet effet, nous étudierons le polynôme caractéristique de  $(A + uB)$  qui va nous permettre de vérifier la propriété (P2). Les propriétés (P1), (P3) seront des conséquences de la présence du champ nilpotent, de la continuité des solutions ainsi que de la condition du rang.

#### III. 3.1 Etude de la STLC en p.

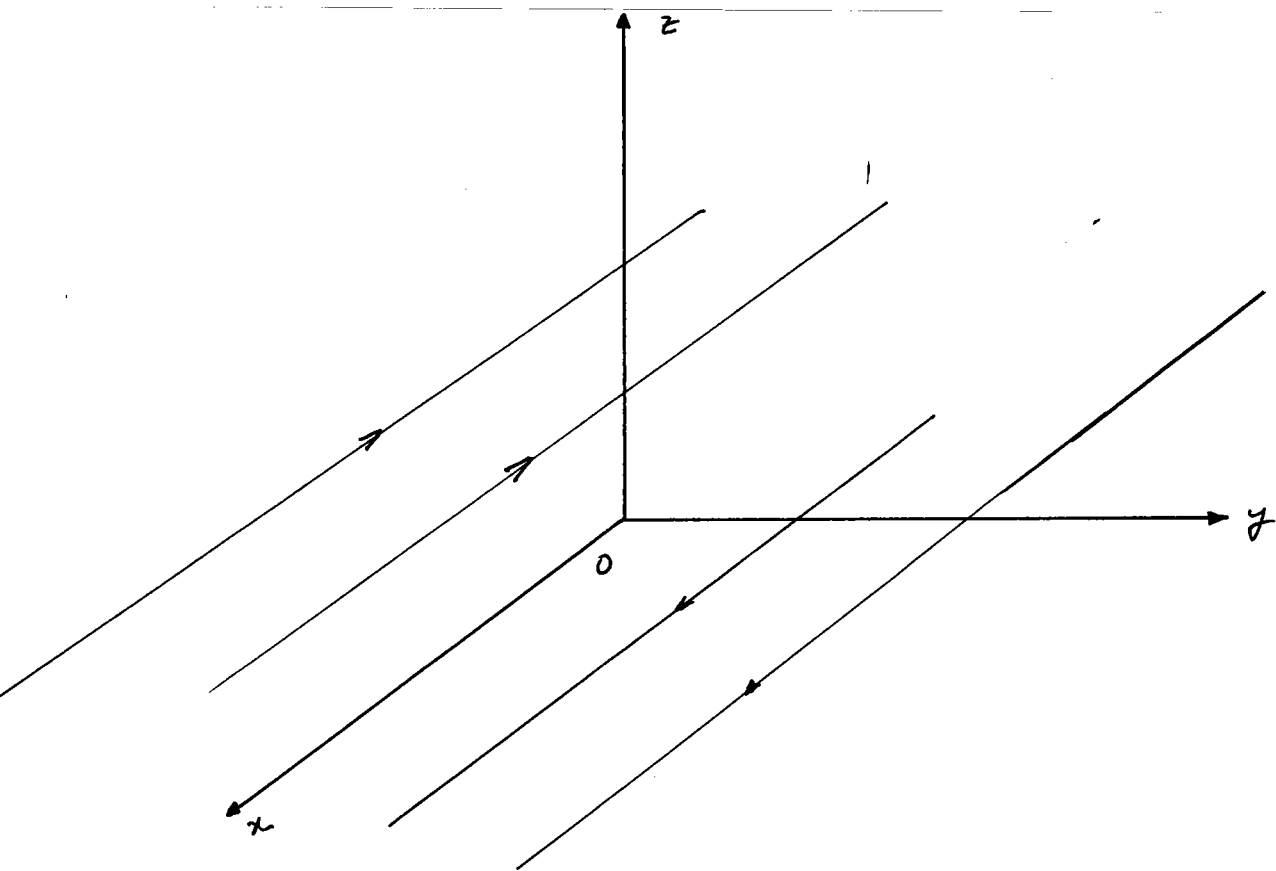
Soit A le champ nilpotent d'ordre A =  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , et considérons le

système  $x' = (A + uB)x$ . Pour  $u = 0$ , on obtient :

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = 0 \\ z' = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x(t) = y_0 t + x_0 \\ y(t) = y_0 \\ z(t) = z_0 \end{cases}$$

$x_0, y_0, z_0$ , étant les conditions initiales du système homogène. Les trajectoires sont alors des droites de direction  $(\text{sgn } y_0) \cdot \vec{x}$ .

Tout point du plan  $(xoz)$  est un point singulier de A.



La projection de ce champ sur  $S^2$  donne le champ du type VI avec  $\mathcal{O} = (x \circ z) \cap S^2$  ensemble des points fixes de  $\tilde{A}$  sur  $S^2$ .

Soient  $u_1, u_2$  deux contrôles dans  $] -\varepsilon, \varepsilon [$  ;  $u_1, u_2 < 0$

On pose  $X = A + u_1 B$  ;  $Y = A + u_2 B$

On a donc :

$$X(p) = u_1 \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} \quad Y(p) = u_2 \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix}$$

$X(p), Y(p)$  étant linéairement dépendants et de sens opposés, on aura STLC en  $p \iff$  le premier entier  $k$  vérifiant  $\text{ad}^k x \cdot Y(p)$  linéairement indépendant de  $x(p)$  est impair.

•  $[X, Y](p) = (u_2 - u_1) \begin{pmatrix} b_{21} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  qui se projette en le vecteur nul sur  $S^2$ .

•  $[X, [X, Y]](p) = u_1 (u_2 - u_1) \begin{pmatrix} b_{21} b_{11} - b_{21} b_{22} - b_{23} b_{31} \\ 2 b_{21}^2 \\ 2 b_{21} b_{31} \end{pmatrix}$

qui est linéairement dépendant avec  $X(p)$ .

•  $\text{ad}^3 X \cdot Y(p) = 4 u_1 (u_2 - u_1) \begin{pmatrix} b_{21}^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u_1^2 (u_2 - u_1) \left[ \begin{pmatrix} 3 x_1 \\ 0 \\ 3 z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$

$$\text{avec } \alpha_1 = b_{21}^2 \cdot b_{12} + b_{13} \cdot b_{21} \cdot b_{31} - b_{11} \cdot b_{21} \cdot b_{31} - b_{11} \cdot b_{23} \cdot b_{31}$$

$$z_1 = 2b_{21}^2 \cdot b_{32} + b_{21} \cdot b_{31} \cdot b_{33} - b_{21} \cdot b_{22} \cdot b_{31} - b_{23} \cdot b_{31}^2$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A B^3 (P).$$

Donc sur  $S^2$ , les vecteurs  $X(p)$ ;  $\text{ad } X \cdot y(p)$  et  $\text{ad}^2 X \cdot y(p)$  sont linéairement dépendants.

$\text{ad}^3 X \cdot y(p)$  et  $X(p)$  sont linéairement indépendants si et seulement si :

$b_{21} \cdot z_1 \neq 0$ . En effet :

$$\tilde{X}(p) = u \begin{pmatrix} 0 \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix}$$

$$[\tilde{X}, y](p) = 0$$

$$\widetilde{\text{ad}^2 X \cdot y}(p) = 2 b_{21} (u_2 - u_1) u_1 \begin{pmatrix} 0 \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{\text{ad}^3 X \cdot y}(p) = 3 u_1^2 (u_2 - u_1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

$\tilde{x}(p)$  et  $\widetilde{\text{ad}^3 x \cdot y}(p)$  sont indépendants  $\iff$

$$\begin{vmatrix} b_{21} & 0 \\ b_{31} & z_1 \end{vmatrix} \neq 0 \iff b_{21} z_1 \neq 0$$

D'où :

### Proposition III 3.2

Le système homogène est STLC en  $p$  si  $b_{21} z_1 \neq 0$ .

A ce moment là, le système est complètement contrôlable sur  $S^2$ . Les crochets d'ordre supérieur à 3 demande un calcul long et inutile. A chaque fois que nous voulons la STLC, on doit restreindre les choix de la matrice  $B$ . Dans ce travail, on s'intéresse à la complète contrôlabilité sur  $S^2$  qui peut être réalisée sans avoir la STLC en  $p$ .

Entamons maintenant l'étude du polynôme caractéristique de  $(A + uB)$

$$P(\lambda) = \det(A + uB - \lambda I) = -\lambda^3 + (uT)\lambda^2 - (u\sigma - ub_{21})\lambda + u^3\Delta + u^2 m$$

avec :

$T$  = trace  $B$

$\sigma$  = somme des mineurs d'ordre 2 de  $B$

$$= b_{11} b_{22} - b_{21} b_{12} + b_{22} b_{33} - b_{32} b_{23} + b_{11} b_{33} - b_{31} b_{13}$$

$$m = b_{31} b_{23} - b_{21} b_{33}$$

$\Delta$  = déterminant de  $B$

En procédant au changement de variables  $\lambda = -x + \frac{uT}{3}$  on obtient le polynôme :  $\Phi = x^3 + px + q$  avec

$$p = \frac{u^2 (3\sigma - T^2) - 3u b_{21}}{3}$$

$$q = \frac{u^3 (9T\sigma - 2T^3 - 27\Delta) - u^2 (9 b_{21} T + 27 m)}{27}$$

Or, pour que le polynôme caractéristique admette deux racines complexes et une réelle, il faut et il suffit que le discriminant :

$$4p^3 + 27q^2 > 0$$

$$\text{Or } 4p^3 + 27q^2 = u^6 \alpha_1 + u^5 \alpha_2 + u^4 \alpha_3 - 4u^3 b_{21}^3.$$

$$\text{où } \alpha_3 = 12 b_{21}^2 \sigma - b_{21}^2 T^2 + 27m^2 + 18 m b_{21} T.$$

Les  $\alpha_i, i = 1, 2$  sont des constantes dépendant de  $T, \sigma, \Delta, m$ .

Remarquons qu'au voisinage de  $u = 0, u \in ]-\epsilon, \epsilon[$ , une condition suffisante pour que le discriminant soit positif pour tout  $u$ , est  $b_{21} = 0$ .

$4p^3 + 27q^2$  est alors du signe  $m^2$  donc positif.

Donc le champ est du type II  $\forall u \in ]-\epsilon, \epsilon[$  quand  $b_{21} = 0$ .

De plus  $b_{21} = 0 \implies m \neq 0$  ; car sinon :

$$m = 0 \implies \begin{cases} b_{31} = 0 \\ \text{ou} \\ b_{23} = 0 \end{cases}$$

Si  $b_{31} = 0$ , la matrice  $B$  laisse la droite  $(o\mathcal{X})$  invariante. Donc le champ  $(A + uB)$  laisse  $(o\mathcal{X})$  invariant et par suite la condition du rang n'est pas réalisée en  $p$ .

De même  $b_{23} = 0$ ,  $(A + uB)$  laisse tout le plan  $(\mathcal{X} o y)$  invariant. En conclusion on a le théorème suivant :

Théorème III 3.3

Le système homogène  $x' = (A + uB) x$  est transitif sur  $S^2$  si et seulement si la condition du rang est réalisée au point  $p = (1, 0, 0)$ .

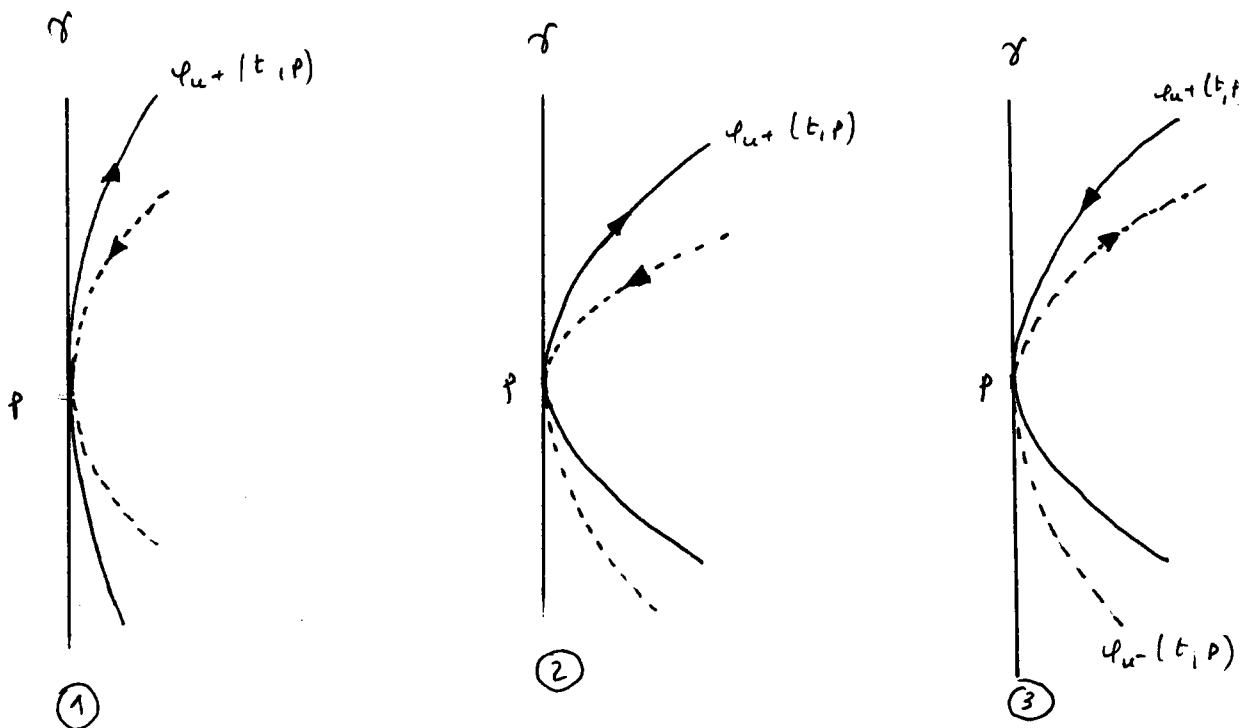
Preuve :

Nous démontrons le théorème dans le cas où  $b_{21} = 0$ . L'autre cas s'en déduit aisément.

Considérons le point  $p = (1, 0, 0)$

$b_{21} = 0$  implique que les trajectoires issues de  $p$  sont tangentes au vecteur  $u \begin{pmatrix} b_{11} \\ 0 \\ b_{31} \end{pmatrix}$ . Les solutions projetées radialement sur  $S^2$  sont donc toutes tangentes à  $\gamma$ .

Localement au voisinage de  $p$ , on a les trois possibilités suivantes :



$\varphi_{u^+}(t,p)$ ,  $\varphi_{u^-}(t,p)$  désignent les solutions issues de  $p$  pour des contrôles  $u^+ \in ]0, \varepsilon[$ ,  $u^- \in ]-\varepsilon, 0[$

Le cas ① est le cas typique de STLC en  $p$  en dimension 2. On a donc locale contrôlabilité avec des temps arbitrairement petits. La situation étant symétrique, le système opposé vérifiera la même propriété. On a donc locale complète contrôlabilité en  $\pm p$ . Donc complète contrôlabilité sur  $S^2$ .

Dans le cas ②, on n'a pas STLC, mais on va montrer qu'on a complète contrôlabilité.

$b_{21} = 0$ , implique qu'il  $\varepsilon > 0$  tel que  $\forall u^+$ ,  $\forall u^-$  appartenant à  $] -\varepsilon, \varepsilon [$

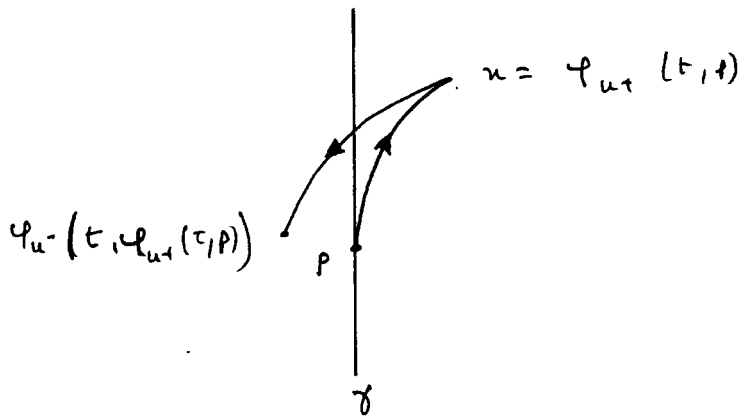
$u^+ \cdot u^- < 0$  de sorte que  $\varphi_{u^\pm}(t,p)$  soient des hélices (champ du type II).

On va montrer que tout point de  $S^2$  peut être recalé et atteint à partir d'un équateur d'une hélice.

En empruntant l'une des trajectoires issues de  $p$ ,  $\varphi_{u^+}(t,p)$  par exemple pendant un temps  $\tau$  assez petit et en commutant avec  $\varphi_{u^-}(t,x)$ ,  $x = \varphi_{u^+}(\tau, p)$

on ramène le point  $p$  dans  $\{(x,y,z) \in S^2 / y < 0\}$ .

C'est à dire que  $\varphi_{u^-}(t, \varphi_{u^+}(\tau, p))$  est strictement à l'ouest du méridien



On utilise ensuite la trajectoire du champ nilpotent passant par  $\varphi_{u^-}(t,x)$  qui nous rapproche arbitrairement près de  $(-p)$ .

Ainsi, on a construit une courbe continue (convexe) non fermée qui va de  $p$  à  $(-p)$  sans atteindre  $(-p)$ .

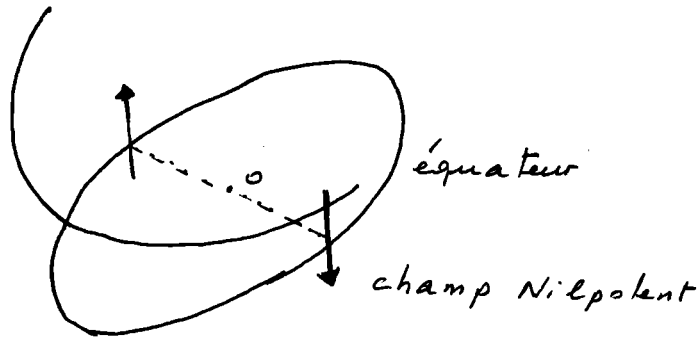


Par continuité du champ (champ analytique), il existe un ouvert  $U$  contenant  $p$  tel que  $\forall x \in U$  on peut tracer une courbe convexe issue de  $x$  et s'approchant ainsi près de  $(-p)$ . D'où la propriété (P1).

Sachant que la condition du rang est réalisée en  $p$ , on peut choisir un des équateurs des solutions ne contenant pas  $p$ . D'où le choix de  $U$  assez petit pour qu'il ne rencontre pas cet équateur.

Supposons les *hélices* toutes répulsives par leur équateur (ce qui ne change à rien à la généralité), tout point de  $S^2$  est atteint à partir d'un point de l'équateur.

En effet, le système opposé rapproche tout point de  $S^2$  de l'équateur arbitrairement près. Le champ nilpotent étant transverse à l'équateur, on coupe forcément une trajectoire du champ nilpotent qui nous ramènera sur l'équateur.



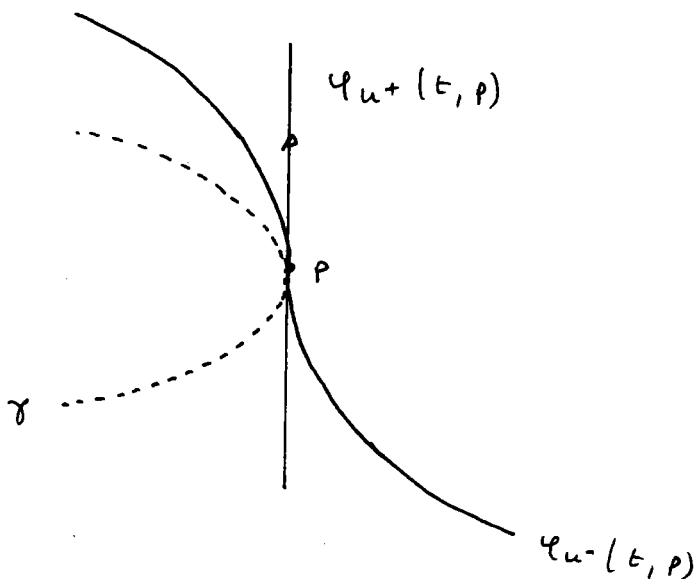
Donc tout point de  $S^2$  est atteint à partir d'un point de l'équateur.

Réciproquement, tout point  $x \in S^2$  peut être recalé aussi près de  $(p)$  ou de  $(-p)$  avec le champ  $A$ . Donc  $\forall x \in S^2, \exists t, x \in U$  (ou  $V$ , un ouvert symétrique de  $U$ , contenant  $(-p)$ ) pour  $t$  assez grand. D'après la propriété (P3), la courbe issue de  $x$  coupera forcément l'équateur de notre hélice en un point de son intérieur. Ce qui nous entraîne la complète contrôlabilité du champ homogène sur  $S^2$ .

Que se passe-t-il si l'on a le troisième cas ?

Nous allons montrer, comme précédemment, que l'on peut faire passer tout point voisin de  $p$  à l'ouest du méridien singulier  $\gamma$ . Ce qui nous ramènera au 2ème cas.

Remarquons auparavant que toute commutation au voisinage de  $p$  des solutions  $\varphi_{u^+}(t, \cdot)$ ,  $\varphi_{u^-}(t, \cdot)$  nous laisse dans le même hémisphère. Ceci se voit clairement, en procédant à un redressement des champs au voisinage de  $p$ .



Avec un choix convenable <sup>de</sup>  $u^+$ ,  $u^-$ , on voit que l'on peut modifier le cas (3) et le ramener au cas (2) et ceci en étudiant de près les solutions au voisinage de  $p$  pour des temps assez petits.

Soient  $e^{(A + u^+ B)t} \cdot (p)$  la solution du système homogène issue de  $p$  et  $e^{-(A + u^- B)t} \cdot (p)$  celle du système opposée,  $x' = -(A + u^- B)x$ .

Le problème étant locale, on peut se mettre dans un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et mesurer la composante selon  $y$  de  $(e^{(A + u^+ B)t} - e^{-(A + u^- B)t}) \cdot p$ .

Si la projection de cette dernière expression sur l'axe  $(oy)$  change de signe en fonction de  $u^+$ ,  $u^-$  pour tout temps  $t$  voisin de 0, nous pouvons conclure que nous pouvons ramener le cas (3) au cas (2).

En effet, en procédant à un développement limité au voisinage de  $t = 0$  nous obtenons :

$$\left( e^{(A + u^+ B)t} - e^{-(A + u^- B)t} \right) (p) = t (u^+ + u^-) \begin{pmatrix} b_{11} \\ 0 \\ b_{31} \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} (u^{+2} - u^{-2}) \cdot \begin{pmatrix} b_{11}^2 + b_{12} b_{31} \\ b_{23} b_{31} \\ b_{31} (b_{11} + b_{32}) \end{pmatrix} + o(t^3)$$

Or,  $b_{31} b_{23} \neq 0$  car  $b_{21} = 0$  (condition du rang en  $p$ ). Donc  $y = \frac{t^2}{2} (u^{+2} - u^{-2})$ .  
 $b_{23} b_{31}$  change de signe selon le choix de  $u^+$  et  $u^-$  dans  $]-\xi, \xi[$ . Ce qui fait qu'avec un choix convenable, nous pouvons redresser la situation (3) et se ramener au cas (2). D'où complète contrôlabilité sur  $S^2$ .

Remarque :

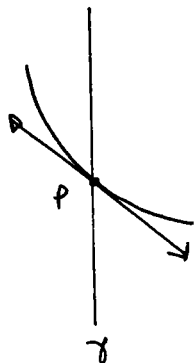
Dans la démonstration précédente, nous avons utilisé le fait qu'il existe une trajectoire du type II (hélice) tel que son équateur ne contient pas le point  $p$ . La contrôlabilité était assurée du fait que l'on pouvait franchir l'ensemble  $\gamma$ . Dans le cas où  $b_{21} \neq 0$ , nous pouvons énoncer le corollaire suivant :

Corollaire III 3.4

Si  $b_{21} \neq 0$ , alors le système homogène est contrôlable sur  $S^2$ .

En effet le vecteur tangent aux solutions passant par  $p$  est donné par

$$u \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} \text{ donc transverse à } \gamma.$$



$b_{21} \neq 0$ , nous assure l'existence d'un champ du type II pour un choix de  $u$  assez petit,  $\text{sgn}(u) = -\text{sgn}(b_{21})$ .

D'après ce que nous avons dit, nous aurons complète contrôlabilité sur  $S^2$ .  
Ce qui démontre le théorème.

III 4/ Etude de la complète contrôlabilité du système homogène sur  $S^2$  :  
Cas nilpotent d'ordre 3.

Dans cette partie, nous adopterons le même plan que précédemment pour l'étude de la transitivité sur  $S^2$ . Ceci provient du fait que le système avec la dérive nilpotent d'ordre 3 présente des analogies avec le système précédent, à savoir que les trajectoires passant par p et projetées sur  $S^2$  sont toutes tangentes au méridien équatorial de  $S^2$  quand  $b_{31} = 0$ .

Nous démontrerons dans tous les cas qu'il est toujours possible de franchir ce méridien en utilisant les propriétés (P1), (P2), (P3). Nous étudierons en premier lieu STLC en p.

Notons qu'un cas intéressant de contrôlabilité existe ne faisant pas intervenir le champ A.

Proposition III 4.1

S'il existe deux valeurs de contrôles  $u_1, u_2$  dans  $]-\xi, \xi[$  pour lesquelles les trajectoires qu'on note  $\varphi_{u_1}(t), \varphi_{u_2}(t)$  sont du type II (hélice) tel que  $\varphi_{u_1}(t)$  soit attractive par son équateur,  $\varphi_{u_2}(t)$  répulsive ou inversement. Si la condition du rang est réalisée alors le système est complètement contrôlable sur les Directions.

Preuve :

La condition du rang implique que les équateurs ne sont pas confondus. D'où le passage d'un équateur à un autre.

$\varphi_{u_1}(t)$  recale tout point de  $S^2$  arbitrairement près de son équateur donc sur l'équateur de  $\varphi_{u_2}(t)$ .

Réciproquement, en considérant  $\varphi_{u_2}(-t)$  solution du système opposé, celle-ci est attractive par son équateur. Donc  $\varphi_{u_2}(-t)$  ramène tout point de  $S^2$  sur l'équateur de  $\varphi_{u_1}(t)$ . Donc  $\varphi_{u_2}(t)$  atteint tout point de  $S^2$  à partir d'un point de son équateur. D'où la proposition.

L'étude du polynôme caractéristique nous confirmera qu'un tel cas peut avoir lieu (voir proposition III 4.3)

Nous démontrerons que la condition du rang du système homogène sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$  suffit pour avoir la complète contrôlabilité. La démonstration se fera en plusieurs étapes selon les coefficients de la matrice B.

### III.4.2 Etude de la STLC en p

Considérons la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $A^3 = 0$

Le système homogène  $\dot{x} = (A + uB)x$ ,  $x = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$  admet pour solution  $\varphi_u(t, x) = e^{(A + uB)t} \cdot x$

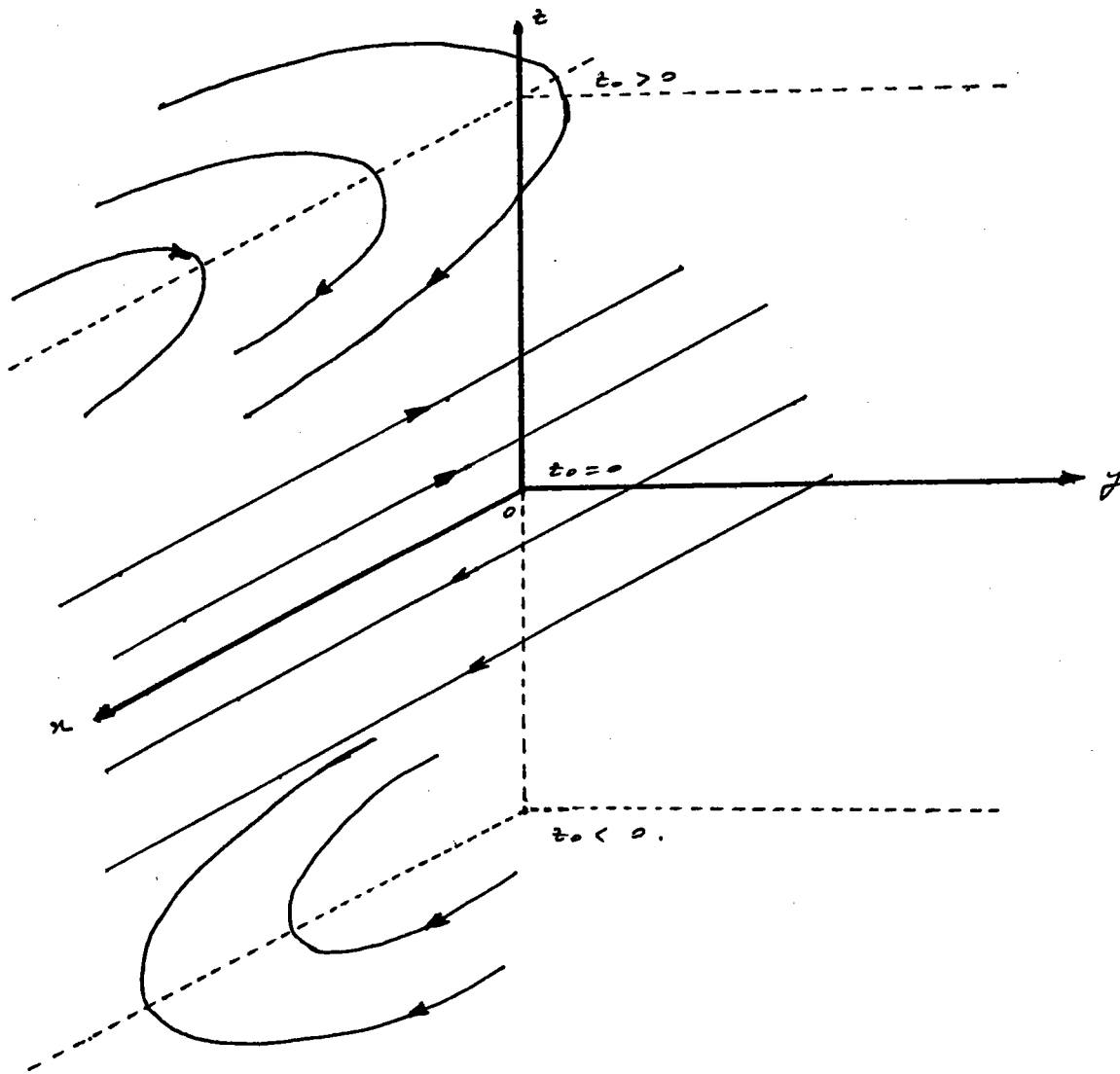
Pour  $u = 0$ , on obtient les solutions du champ nilpotent :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = 0 \end{cases} \quad e^{At} \cdot x_0 = \begin{cases} x(t) = z_0 \frac{t^2}{2} + y_0 t + x_0 \\ y(t) = z_0 t + y_0 \\ z(t) = z_0 \end{cases}$$

$$\text{où } x_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

Les trajectoires sont des droites de direction  $\vec{\alpha}$  pour  $z_0 = 0, y_0 > 0$ .  
de direction  $-(\vec{\alpha})$  pour  $z_0 = 0, y_0 < 0$ .

Pour  $z_0 \neq 0$ , c'est des paraboles contenus dans les plans  $z = z_0$  (voir dessin)



Posons  $X = A + u_1 B$   $Y = A + u_2 B$  avec  $u_1 \cdot u_2 < 0$ ,  $u_1$ ,  $u_2$  très petits de sorte que les trajectoires issues de  $p$  admettent le même vecteur tangent en  $p$  ;  $x(p) = u_1 \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix}$  ;  $y(p) = u_2 \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix}$  mais parcourues dans des sens opposés.

Proposition III 4.3

Le système homogène est STLC en  $p$ , si  $b_{31} \neq 0$ .

Preuve :

En effet,  $[X, Y](p) = (u_2 - u_1) [A, B] = (u_2 - u_1) \begin{pmatrix} b_{21} \\ b_{31} \\ 0 \end{pmatrix}$

Or sur  $S^2$ ,  $X(p), [X, Y](p)$  sont linéairement indépendants. D'où STLC en  $p$  et par conséquent complète contrôlabilité sur  $S^2$ .

Si  $b_{31} = 0$ , nous sommes amenés à calculer les crochets d'ordre supérieur à deux en  $p$ .

$$\begin{aligned} \bullet \text{ ad}^2 X \cdot Y(p) &= (u_2 - u_1) \text{ ad}^2 A \cdot B(p) + u_1 (u_2 - u_1) [B, [A, B]](p) \\ &= (u_2 - u_1) A^2 \cdot B(p) + u_1 (u_2 - u_1) (2 B \cdot A \cdot B(p) - A B^2(p)) \\ &= u_1 (u_2 - u_1) \begin{pmatrix} b_{11} b_{21} - b_{21} b_{22} \\ 2 b_{21}^2 - b_{21} b_{32} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ ad}^3 X \cdot Y(p) &= (u_2 - u_1) \text{ ad}^3 A \cdot B(p) + 2 u_1 (u_2 - u_1) [A, [B, [A, B]]](p) \\ &\quad + u_1^2 (u_2 - u_1) [B, [B, [A, B]]](p) \\ &= 2 u_1 (u_2 - u_1) (2 AB AB(p) - A^2 B^2(p)) + u_1^2 (u_2 - u_1) \cdot \\ &\quad \cdot (3 (B^2 AB(p) - BAB^2(p)) + AB^3(p)) \\ &= 2 u_1 (u_2 - u_1) \left[ 2 \begin{pmatrix} b_{21}^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{21} b_{32} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + \end{aligned}$$

$$+ u_1^2 (u_2 - u_1) \left[ 3 \begin{pmatrix} b_{21}^2 b_{12} - b_{11} b_{21} b_{22} - b_{21} b_{12} b_{32} \\ - b_{21} b_{22} b_{32} \\ b_{21}^2 b_{32} - b_{21} b_{32}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$\text{Avec } \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix} = A B^3(p)$$

$$\text{Donc ad}^3 X \cdot Y(p) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 3 u_1^2 (u_2 - u_1) b_{21} b_{32} (b_{21} - b_{32}) \end{pmatrix}$$



En conclusion, les vecteurs :

$X(p)$ ,  $[X, Y](p)$ ,  $ad^2 X \cdot Y(p)$ ,  $ad^3 X \cdot Y(p)$  sont linéairement indépendants si et seulement si :

$$\begin{vmatrix} b_{21} & b_{11} & \chi_1 \\ 0 & b_{21} & \chi_2 \\ 0 & 0 & b_{21} - b_{32} \end{vmatrix} = b_{21}^2 (b_{21} - b_{32}) \neq 0$$

Proposition III 4.4

Une condition suffisante, pour que le système soit STLC en p quand  $b_{31} = 0$  est que  $b_{21} \neq b_{32}$ .  $ad^3 X \cdot Y(p)$  étant le premier crochet linéairement indépendant de  $\widetilde{X}(p)$  sur  $S^2$ .

Il est sans intérêt de calculer les crochets d'ordre supérieur à 3.

Car à chaque fois que nous désirons la STLC en p, nous sommes ramenés à imposer d'autres conditions sur B.

Etudions maintenant la contrôlabilité du système sur  $S^2$  dans le cas où la STLC n'est pas réalisée jusqu'au crochet d'ordre 3.

Nous commencerons par l'étude du polynôme caractéristique et nous adopterons le même plan que dans le cas précédent.

$$P(\lambda) = \det(A + uB - \lambda I) = -\lambda^3 + (uT)\lambda^2 - (u\sigma - uS)\lambda + u^3\Delta - u^2m + ub_{31}$$

avec les notations :

T = trace B

$\sigma$  = somme des mineurs d'ordre 2 de B

$$m = b_{11}b_{32} - b_{31}b_{23} + b_{21}b_{33} - b_{12}b_{31}$$

$$s = b_{21} + b_{32}$$

En procédant au changement de variable  $\lambda = -\chi + \frac{uT}{3}$ , on obtient :

$$P = \chi^3 + p\chi + q \quad \text{avec}$$

$$p = \frac{u^2 (3\sigma - T^2) - 3us}{3}$$

$$q = \frac{u^3 (9 \sigma T - 2 T^3 - 27 \Delta) + u^2 (27m - 9 TS) - 27 u b_{31}}{27}$$

Le polynôme caractéristique admet 2 racines complexes si et seulement si le discriminant  $4p^3 + 27q^2 > 0$

Le calcul de celui-ci donne :

$$\begin{aligned} 27 (4p^3 + 27q^2) = & u^6 \left[ 4 (3\sigma - T^2)^3 + (9T\sigma - 2T^3 - 27\Delta)^2 \right] \\ & + u^5 \left[ -36 (3\sigma - T^2)^2 S + (9T\sigma - 2T^3 - 27\Delta) \cdot (27m - 9TS) \right] \\ & + u^4 \left[ 108 (3\sigma - T^2) S^2 + (27m - 9TS)^2 - 54 (9T\sigma - 2T^3 - 27\Delta) b_{31} \right] \\ & + u^3 \left[ -108 S^3 - 54 (27m - 9TS) b_{31} \right] + u^2 (27 b_{31})^2. \end{aligned}$$

Donc une condition suffisante pour que  $4p^3 + 27q^2 > 0 \quad \forall u \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$ ;  $\varepsilon$  assez petit est que  $b_{31} \neq 0$

Ainsi  $P(\lambda)$  admet deux racines complexes et une réelle d'où existence de champ du type II.

Nous allons calculer ces racines puis les approximer au voisinage de  $u = 0$ .

Nous allons montrer qu'il existe des champs du type II dont les trajectoires sont répulsives par leur équateur si  $\text{sgn}(ub_{31}) > 0$  attractives si  $\text{sgn}(ub_{31}) < 0$

En effet :

La solution réelle s'exprime par :

$$\chi_1(u) = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}$$

La racine complexe par :

$$\chi_2(u) = -\frac{\chi_1(u)}{2} + i \alpha(u) \quad \text{avec}$$

$$\alpha(u) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} \right)$$

Dans une base de Jordan,  $(A + uB)$  s'écrit :

$$\begin{pmatrix} -\frac{\chi_1(u)}{2} & \alpha(u) & 0 \\ -\alpha(u) & -\frac{\chi_1(u)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_1(u) \end{pmatrix} + \frac{uT}{3} \text{Id}$$

Au voisinage de  $u = 0$ , la racine réelle  $\chi_1(u)$  est équivalente à  $(ub_{31})^{1/3}$  donc  $\chi_1(u)$  change de signe lorsque  $u$  parcourt un voisinage assez petit de 0.

Si pour  $u^* \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$ ,  $\chi_1(u^*) > 0$ , alors  $-\frac{\chi_1(u^*)}{2} < 0$  et par suite notre hélice est répulsive par son équateur.

Pour  $u = -u^*$  on aura évidemment  $\chi_1(u) < -\frac{\chi_1(u^*)}{2}$  et par suite l'hélice

correspondante est attractive d'où :

#### Proposition III 4.5

Le système  $x' = (A + uB)x$  est contrôlable sur  $S^2$  si

i/  $b_{31} \neq 0$

ii/ La condition du rang est réalisée en p.

#### Preuve :

On a vu que (i) impliquait qu'on avait STLC en p.

Or ce résultat peut être déduit grâce à la proposition III 4.1 indépendamment de la STLC.

Etudions maintenant le cas  $b_{31} = 0$

Si  $b_{31} = 0$  alors  $b_{21} b_{32} \neq 0$  En effet :

si  $b_{21} = 0$ , alors le champ  $(A + uB)$  laisse l'axe  $(o\alpha)$  invariant.

si  $b_{32} = 0$ , alors le champ  $(A + uB)$  laisse la plan  $(\alpha oy)$  invariant

et dans les deux cas, on n'aura pas de transitivité car la condition du rang n'est pas réalisée.

Ainsi, pour  $b_{31} = 0$ , le polynôme caractéristique admet des solutions complexes, donc un champ du type II. pour des valeurs de  $u \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$  [vérifiant  $\text{sgn}(u) = -\text{sgn}(S)$ , quand  $S$  est non nul.

### Proposition III 4.6

Si  $b_{31} = 0$ , alors une condition suffisante pour que le système homogène soit contrôlable sur  $S^2$  est que :

i/  $S \neq 0$

ii/ la condition au rang est réalisée en  $p$ .

### Preuve :

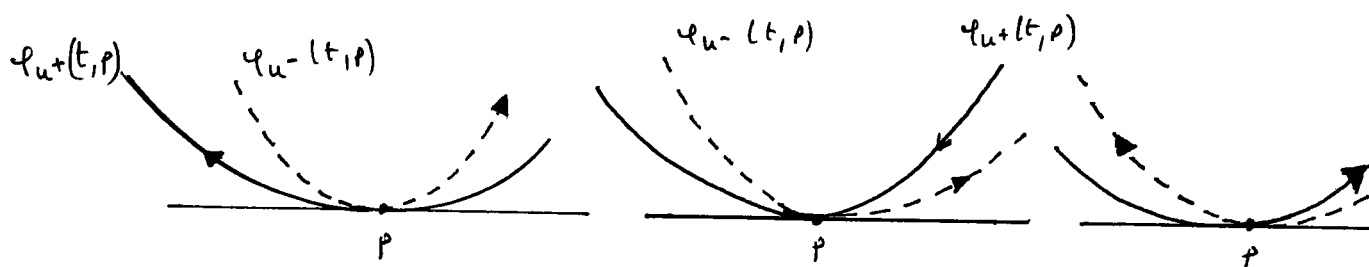
Nous supposons  $S < 0$  pour se fixer les idées.

Les solutions passant par  $p = (1, 0, 0)$  sont tangentes au plan  $(\alpha oy)$  de vecteur tangent  $u \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ 0 \end{pmatrix}$

Leur projection sur  $S^2$  sont tangentes au méridien équatorial

$$c = \{ \alpha^2 + y^2 = 1, z = 0 \}$$

Comme dans le cas nilpotent d'ordre 2, 3 possibilités peuvent avoir lieu :

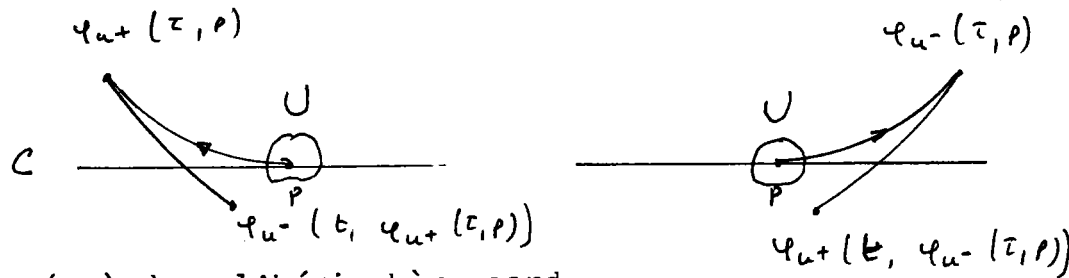


Avec  $\psi_{u^+}(t, p)$  la solution passant par  $p$  pour  $u^+ \in ]0, \varepsilon[$ .

$\psi_{u^-}(t, p)$  pour  $u^- \in ]-\varepsilon, 0[$ .

Le cas (1) est encore une fois, la cas typique de STLC en p. Les trajectoires se coupent en p sans se croiser. On a par conséquence complète contrôlabilité.

Si c'est le cas (2) qui se présente, alors pour  $u^+$ ,  $u^-$  assez petit  $u^+ \cdot u^- < 0$ , une commutation du type  $\varphi_{u^+}(t, \varphi_{u^-}(\tau, p))$  ou  $\varphi_{u^-}(t, \varphi_{u^+}(\tau, p))$  permet de recaler le point p strictement dans l'hémisphère sud c'est à dire :

$$\{(x, y, z) \in S^2 / z < 0\}$$


Par symétrie, on ramène  $(-p)$  dans l'hémisphère nord.

Puisque les champs sont continus, on peut recaler tout point  $x$  d'un ouvert  $U$  contenant  $p$  dans l'hémisphère sud.

De tout point de  $x$  de  $U$ , on peut tracer une courbe connexe issue de  $x$  et s'approchant arbitrairement près de  $(-p)$  :

$e^{At} [\varphi_{u^+}(t_1, \varphi_{u^-}(t_1, x))]$  pour  $t$  assez grand est aussi près que l'on veut de  $(-p)$ .  $t_1, t_2$  petits.

Sachant qu'on a la condition du rang en  $p$ , on peut choisir  $u^+ > 0$  tel que l'hélice qui lui correspond ne passe pas par  $p$ . Quitte à le restreindre, on peut choisir  $U$  de telle façon qu'il ne rencontre pas l'équateur de cette hélice. D'où les propriétés (P1), (P2).

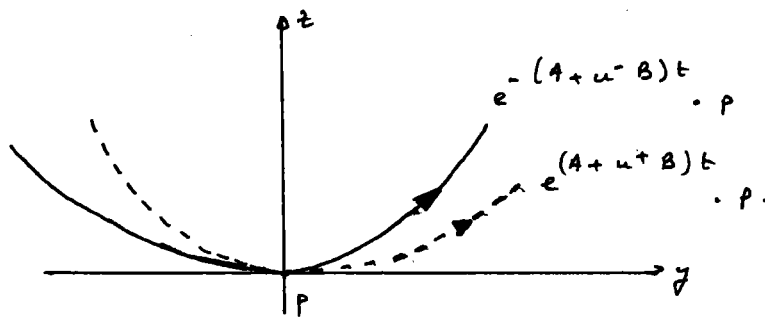
Un raisonnement analogue au cas nilpotent d'ordre 2 permet de déduire la complète contrôlabilité sur  $S^2$ .

Quand à la situation donnée par le cas (3), en choisissant convenablement  $u^+$ ,  $u^-$ , on peut, par un développement limité, se ramener au cas (2).

En effet :

Soient  $e^{(A + u^+ B)t} \cdot p$ , la solution du système passant par  $p$  ;

$e^{-(A + u^- B)t} \cdot p$ , celle du système opposé.



On procède à un développement limité au voisinage de  $t = 0$  de

$\left[ e^{(A + u^+ B)t} - e^{-(A + u^- B)t} \right] (p)$  et on mesure la composante selon  $z$  et vérifie que celle-ci change de signe avec  $u^+$ ,  $u^-$  dans  $]-\xi, \xi[$  pour tout  $t$  voisin de zéro.

$$\left[ e^{(A + u^+ B)t} - e^{-(A + u^- B)t} \right] (p) = \begin{bmatrix} t(u^+ + u^-) + \frac{t^2}{2}(u^+ - u^-)b_{21} + \\ (u^{+2} - u^{-2})(b_{11}^2 + b_{12}b_{21}) \\ \frac{t^2}{2}b_{21}(u^{+2} - u^{-2})(b_{11} + b_{22}) \\ \frac{t^2}{2}(u^{+2} - u^{-2})b_{21}b_{32} \\ + o(t^3) \end{bmatrix}$$

$z = \frac{t^2}{2}(u^{+2} - u^{-2})b_{21}b_{32}$  change de signe en fonction de  $u^+$ ,  $u^-$ .

Avec un choix de  $u^+$ ,  $u^-$  convenable, la situation (3) peut être modifiée et transformée en la situation (2).

D'où contrôlabilité. D'où la proposition .

Examinons le cas où  $S = b_{31} = 0$

Proposition III 4.7

Si  $b_{31} = S = 0$ , alors le système est STLC en p, si la condition du rang est réalisé en p.

Preuve :

$b_{31} = S = 0$ , implique que  $b_{21} - b_{32}$  non nul, car sinon :

$$\begin{array}{l} S = b_{32} + b_{21} = 0 \\ b_{21} - b_{32} = 0 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad b_{21} = b_{32} = 0$$

Ce qui est impossible à cause de la condition du rang en p.

Ce qui fait que  $b_{21} - b_{32} \neq 0$  implique que le système est STLC en p. (voir proposition III 4.4). D'où complète contrôlabilité sur  $S^2$ .

Remarque :

On pouvait prévoir la complète contrôlabilité dans le cas où  $S = b_{31} = 0$ ,  $m \neq 0$  sans faire appel à la notion de la STLC en p. En effet ;  $b_{31} = S = 0$ , implique que le polynôme caractéristique admet 2 racines complexes et une réelle  $\forall u \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$ ,  $\varepsilon$  suffisamment petit. Dans cet intervalle, toutes les solutions sont du type II. Celles ci sont toutes de même nature, c'est à dire toutes attractives ou toutes répulsives par leur équateur. La valeur propre réelle étant équivalente à  $(-m^{1/3} u^{2/3})$  donc de signe constant, la partie réelle de la valeur propre complexe est équivalente à  $\frac{m^{1/3} u^{2/3}}{2}$ . La différence est donc de signe constant. pour tout u voisin de 0.

On est dans les mêmes conditions que le cas nilpotent d'ordre 2 quand  $b_{21} = 0$

Ce qui nous permet de conclure quant à transitivité sur  $S^2$ .

Dans le cas où  $m = 0$ , il n'est pas évident de prévoir le résultat.

Ce que nous pouvons affirmer c'est :

si  $4(3\sigma - T^2)^3 + (9T\sigma - 2T^3 - 27\Delta)^2 > 0$ , alors nous avons complète contrôlabilité sur  $S^2$  modulo la condition du rang en p.

Mais si  $4(3\sigma - T^2)^3 + (9T\sigma - 2T^3 - 27\Delta) \leq 0$ , le problème devient compliqué parce que dans ces conditions, il n'existe pas de champ du type II. Le passage par le SLTC en p nous relève cette difficulté.

### Cas particulier :

Un cas particulièrement intéressant de contrôlabilité sur  $S^2$  existe quand :

$$(*) \quad 3\sigma - T^2 = 9T\sigma - 2T^3 - 27\Delta = 0 \quad (b_{31} = S = m = 0)$$

La condition (\*) implique :

$$\begin{cases} 3\sigma = T^2 \\ T^3 = 27\Delta \\ p = q = 0 \end{cases}$$

Le polynôme caractéristique admet une racine triple  $\lambda = \frac{uT}{3}$ .

Nous avons donc affaire avec un champ du type VII, un nilpotent d'ordre 3 sur  $S^2$ .

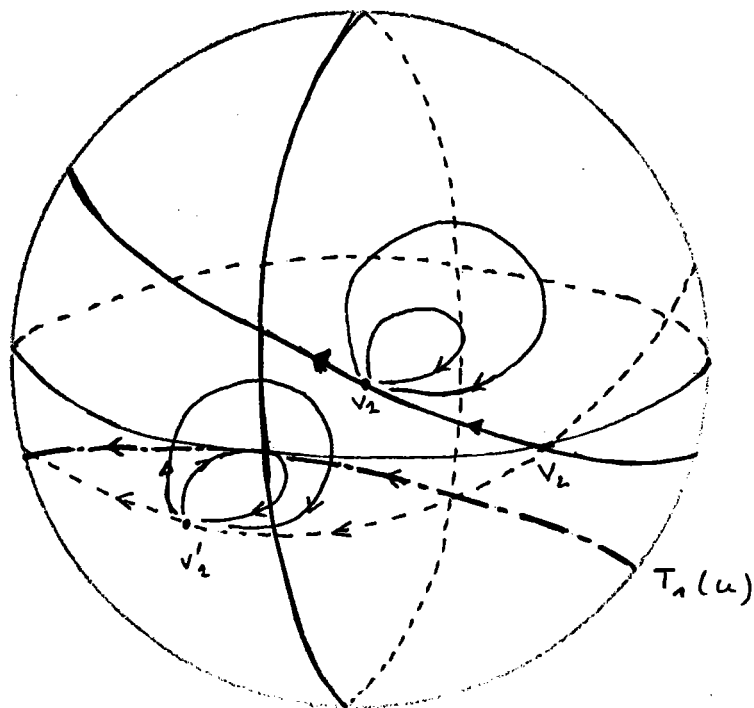
Sous forme de Jordan, la matrice  $A + uB$  s'écrit :

$$A \quad \begin{pmatrix} \frac{uT}{3} & & 1 & 0 \\ 0 & & \frac{uT}{3} & 1 \\ 0 & & 0 & \frac{uT}{3} \end{pmatrix}$$

On verra plus loin que la condition (\*) n'est pas vide de sens.

Projetons les solutions sur  $S^2$ . Qualitativement (voir dessin), on a la situation suivante :





où  $v_1$ ,  $v_2$  désignent les vecteurs propres de  $(A + u B)$  respectivement pour  $u = u_1 > 0$ ,  $u = -u_1 < 0$ . dans  $] -\varepsilon, \varepsilon [$ .

$T_1(u)$  désigne la trajectoire de  $(A + u B)$ ,  $u = u_1$  tangente en  $p$  au méridien équatorial. En  $p$ , on a STLC

Considérons la matrice  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

nous allons montrer sur cet exemple que la condition (\*) n'est pas vide.

Pour  $B$  ainsi choisie, elle vérifie :

$$\begin{cases} T = 3 \\ \nabla = 3 \\ \Delta = 1 \end{cases} \quad \begin{aligned} \text{donc } 3\nabla &= T^2 = 9 \\ T^3 &= 27\Delta = 27 \end{aligned}$$

$$\bullet \quad X(p) = u \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \text{ad } X \cdot y(p) = (u_2 - u_1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \text{ad}^2 X \cdot y(p) = u_1 (u_2 - u_1) \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \text{ad}^3 X \cdot y(p) = -u_1^2 (u_2 - u_1) \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Donc le système :

$$\dot{x}' = \left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right] x$$

vérifie la condition du rang en  $p$ , il est complètement contrôlable sur  $S^2$ .

De plus, il est STLC en  $p$ , puisque  $b_{21} - b_{32} = -2 \neq 0$  ;  $S = -1 + 1 = 0$

En conclusion, en rassemblant toutes les propositions, on peut énoncer le théorème suivant :

#### Théorème III 4.8

Une condition nécessaire et suffisante pour que le système homogène  $\dot{x}' = (A + u B)x$ ,  $x = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$  ;  $A$  nilpotent d'ordre 3, soit transitif sur  $S^2$  pour des contrôles arbitrairement petits est que la condition du rang soit réalisée au point  $p$ .

### III. 5 Etude de la contrôlabilité sur $\mathbb{R}^3 - \{0\}$

Ainsi nous avons montré dans tous les cas possibles que la contrôlabilité du système homogène est une conséquence de la condition du rang en p. Pour montrer que le système est transitif sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$  il suffit de montrer qu'il existe 2 points  $M_1, M_2$  tel que les trajectoires passant par  $M_1, M_2$  admettent respectivement un vecteur tangent  $\vec{V}_1$  dirigé vers l'extérieur de  $S^2$ ,  $\vec{V}_2$  vers l'intérieur, ceci permet le passage d'une sphère à une autre vu que les trajectoires sont homothétiques.

Dans un cas général, il suffit de vérifier le théorème de Gauthier-Bornard-Sallet.

#### Théorème [G.B.S]

soit  $F = \{A + u B, |u| \leq \xi\}$ ;  $S(F)$  le semi-groupe engendré par :

$$\{e^{(A + u B)t}, t \geq 0, |u| \leq \xi\}.$$

Le système  $x' = (A + u B)x$  est transitif sur  $\mathbb{R}^n - \{0\}$  si et seulement si :

i/ le système projeté sur  $S^{n-1}$  est transitif sur  $S^{n-1}$

ii/  $S(F), S(-F)$  ne sont pas bornés, c'est à dire qu'il existe une trajectoire de  $S(F)$  qui s'éloigne de l'origine (augmentation de la norme) et une trajectoire de  $S(F)$  qui s'approche arbitrairement près de l'origine.

Or dans le cas nilpotent, la condition (ii) est automatique réalisée. Donc un champ nilpotent vérifie la condition du théorème de Gauthier-Bornard [9], à savoir qu'il existe une direction rentrante et une direction sortante.

D'où :

Proposition III 5.1

$x' = (A + u B) x$  est transitif sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$  si et seulement si la condition du rang est réalisée en p.

Il nous reste donc à montrer la contrôlabilité sur  $\mathbb{R}^3$ .

Pour cela il suffit de montrer qu'il n'y a pas de point fixe pour tout contrôle  $u \in [-\xi, \xi]$

Considérons le système affine :

$$x' = A x + u (Bx + c) \quad ; \quad x = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad ; \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

un élément de  $\mathbb{R}^3$  ,  $c \neq 0$ .

On pose :  $\Gamma_u = \{x \in \mathbb{R}^3 / (A + u B) x + c u = x\}$  pour  $|u| \leq \xi$

Proposition III 5.2

Pour tout  $u, v$  dans  $[-\xi, \xi]$ , vérifiant  $u \neq v$  on a :

$$\Gamma_u \cap \Gamma_v = \emptyset$$

Preuve :

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe  $x^* \in \mathbb{R}^3$  tel que

$$x^* = (A + u B) x^* + c u = (A + v B) x^* + c v \quad (1)$$

Nous aurons :

$$(u - v) B x^* = - (u - v) c. \text{ Ce qui nous implique}$$

$$B x^* = - c \quad (2)$$

En reportant (2) dans (1) nous obtenons :

$$X^* = (A + u B)X^* - u B X^* = A X^*$$

donc :  $(A - I) X^* = 0$

Or 1 n'est pas valeur propre de A (A - I est régulier).

Donc  $\ker(A - I) = \{0\}$  et par suite  $X^* = 0$ . Ce qui entraîne :  $cu = 0$  ;

donc  $u = 0$  ;  $v = 0$ .

D'où contradiction.

Le champ affine  $x \longrightarrow Ax + u(Bx + c)$  ,  $|u| \leq \varepsilon$

n'a pas de point fixe.

Le théorème de Jurdjevie-Sallet permet de conclure :

### Théorème III 5.3

Le système affine  $x' = A + u(Bx + c)$  ;  $x \in \mathbb{R}^3$  ,  $|u| \leq \varepsilon$  est complètement contrôlable sur  $\mathbb{R}^3$  si le système homogène associé vérifie la condition du rang en p.

### Remarque :

Le théorème de Jurdjevie-Sallet donne seulement une condition *suffisante de* transitivité sur  $\mathbb{R}^n$  quand le système homogène l'est sur  $\mathbb{R}^n - \{0\}$ . Pour l'étude des systèmes affines à dérive nilpotente on ne peut espérer mieux qu'une condition suffisante de la contrôlabilité du système homogène sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$  que celle-ci est nécessaire et suffisante pour la condition du rang en p.

### III.6 Quelques remarques concernant la non transitivité sur $\mathbb{R}^3$

A part dans  $\mathbb{R}^2$ , la contrôlabilité du système affine sur  $\mathbb{R}^3$  était déduite à partir de celle du système homogène associé sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$  quand celui-ci vérifie la condition du rang p.

Dans le cas où celle-ci n'est pas assurée, le problème reste sans réponse pour le moment.

Parmi les cas simples où la condition du rang n'est pas réalisée c'est quand les éléments de la matrice B vérifient :  $b_{31} = b_{32} = 0$  ou  $b_{31} = b_{21} = 0$

a/ Si  $b_{31} = b_{32} = 0$ , alors le système affine ne peut être contrôlable sur  $\mathbb{R}^3$  quand  $b_{33} \neq 0$ . En effet, la troisième composante du champ affine est  $z' = ub_{33} z + uc_3$  qui s'annule sur le plan (P) d'équation  $z = -\frac{c_3}{b_{33}}$  indépendamment de u.

Toute solution passant par (P) reste dans (P) car la projection de celle-ci sur l'axe (oz) est  $z(t) : e^{ub_{33}t} z_0 - \frac{c_3}{b_{33}}$

Or pour  $(x_0, y_0, z_0) \in (P)$  nous aurons  $z(t) = -\frac{c_3}{b_{33}} \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$

Ce qui exprime le fait que la solution est dans (P)  $\forall t \in \mathbb{R}^+$

Donc une condition nécessaire de contrôlabilité sur  $\mathbb{R}^3$  quand  $b_{31} = b_{32} = 0$  est que  $c_3 \neq 0$ ,  $b_{33} = 0$

Nous pouvons rajouter dans ces conditions quand A est nilpotent d'ordre 3, que le système affine est localement contrôlable en tout point de l'axe des  $x$ . C'est le théorème de Lee-Markus qui nous assure ce résultat. En effet, nous posons pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,

$$M = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (A + u B) x + C u \right\} \begin{matrix} u = 0 \\ x = (\alpha, 0, 0) \end{matrix} = A$$

$$b = \frac{\partial}{\partial u} \left\{ (A + u B) x + Cu \right\}_{\substack{u = 0 \\ x = (\alpha, 0, 0)}} = B x + c = \begin{pmatrix} b_{11}\alpha + c_1 \\ b_{21}\alpha + c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$\det \{ b, Mb, M^2 b \} = \det \begin{pmatrix} b_{11}\alpha + c_1 & b_{21}\alpha + c_2 & c_3 \\ b_{21}\alpha + c_2 & c_3 & 0 \\ c_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (c_3)^3 \neq 0$$

Donc rang ( b, Mb, M<sup>2</sup>b ) = 3. donc le système est localement contrôlable en tout point de l'axe (o $\alpha$ ).

b/ Si  $b_{21} = b_{31} = 0$ , si A est nilpotent d'ordre 2, (A + u B) inversible, alors la condition du rang du système affine n'est pas réalisée en tout point de  $\mathbb{R}^3$ .

En effet, l'ensemble des points singuliers pour  $u \neq 0$ , est contenu dans la droite ( $\Delta$ ) passant par le point

$$\begin{pmatrix} y = \frac{c_3 b_{23} - c_2 b_{33}}{b_{22} b_{33} - b_{23} b_{32}} \\ z = \frac{c_2 b_{32} - c_3 b_{22}}{b_{22} b_{33} - b_{23} b_{32}} \end{pmatrix}$$

et parallèle à l'axe (o $\alpha$ ).

Toute solution passant par un point singulier reste contenue dans ( $\Delta$ ). D'où  $\dim \text{Lie} \{ x \in \Gamma \rightarrow A x + u (Bx + c) \} = 1$ , où  $\Gamma$  désigne l'ensemble des points singuliers pour les contrôles non nuls.

Donc une condition nécessaire de contrôlabilité quand  $b_{21} = b_{31} = 0$  est que (A + u B) non inversible pour tout u non nul, quand A est nilpotent d'ordre 2.

## CONCLUSION

Ainsi, la question que nous nous sommes posée trouve une réponse positive en dimension 2 et 3.

Le travail fait dans ces deux espaces a été accompli en exploitant les propriétés des variétés de dimension 2 ( $\mathbb{R}^2$ ,  $S^2$ ) en utilisant les théorèmes de Jordan.

Pour  $n \geq 4$ , cet outil nous est plus utile pour l'étude de la contrôlabilité.

Ce que nous pouvons affirmer dans un cas général est :

### Théorème :

Le système affine  $x' = A x + u (B x + c)$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$   
A opérateur nilpotent d'ordre n,  $B = (b_{ij})$ ;  $1 \leq i, j \leq n$  est transitif sur  $\mathbb{R}^n$  si  $b_{n1} \neq 0$

### Preuve :

La démonstration utilise le théorème de Lee-Markus. Nous montrerons que le système homogène associé est localement contrôlable en tout point de l'axe  $(0, x_1) - \{0\}$ . Sachant que les trajectoires sont homothétiques, il suffit donc de le montrer pour  $p = (1, 0, \dots, 0)$ .

Celui-ci étant un point singulier du système libre  $x' = Ax$ , nous posons :

$$M = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (A + u B) x \right\} \quad \begin{matrix} x = p \\ u = 0 \end{matrix} = A$$
$$b = \frac{\partial}{\partial u} \left\{ (A + u B) x \right\} \quad \begin{matrix} x = p \\ u = 0 \end{matrix} = B p = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}$$

Le rang de  $\mathcal{L}(M, b) = \{b, Mb, \dots, M^{n-1}b\}$  est n car :



$$\det d(n, b) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & \dots & b_{n1} \\ b_{21} & b_{31} & & b_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = (b_{n1})^n$$

donc non nul.

D'après le théorème de Lee-Markus, le système homogène est localement contrôlable en  $p$ . Il est même STLC en  $p$  car  $\text{Rang}(M, b) = n \iff$

$$\mathcal{J}^1(A + uB, A + vB)(p) = \mathbb{R}^n.$$

Donc il existe un voisinage conique de l'axe  $(0, \gamma)$  dans lequel le système homogène est localement contrôlable.

En projetant le système sur  $S^{n-1}$ , nous aurons locale contrôlabilité en  $(\pm p)$  sur  $S^{n-1}$ . D'où complète contrôlabilité sur  $\mathbb{R}^n$ .

Cependant une question qui mérite une attention particulière reste sans réponse.

A part la dimension 2 ( $n=2$ ) où le problème est résolu, comment entreprendre l'étude de la contrôlabilité dans le cas où le système homogène ne vérifie pas la condition du rang en  $p$ , pour  $n=3$  ?

Remarquons que ce genre de problème n'a pas encore trouvé une réponse affirmative dans le cas général, c'est à dire quand  $A, B, C$  sont quelconques choisis pour que la condition du rang soit réalisée. Dans  $\mathbb{R}^3$ , le problème devient plus compliqué.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- / A / Adda : " Thèse 3<sup>ème</sup> cycle" . Université de Metz. 1984
- / 1 / B. Bonnard ; V. Jurdjevic ; I. Kupka ; G. Sallet : "Transitivity of families of invariant vector fields on the semi-direct product of Lie groups." Trans . Amer. Math. Soc. Vol 271 (2) 525-535 (1982)
- / 2 / R.W. Brockett : " Nonlinear systems and differential geometry". IEEE Proceedings 64 (2) (1976) 61-72 .
- / 3 / R.W. Brockett : "On the algebraic structure of bilinear systems". in theory and applications of variable structure systems. Mohler and Ruberti Eds. Academic Press 1972.
- / 4 / C. Bruni; D. Dipillo; G. Koch : " Bilinear systems : an appealing class of nearly linear systems in theory and applications ". IEEE Trans. Automat. Control. Vol AC 19 334-348 .
- / 5 / M.D. Espana; I. Landau: "Bilinear approximations of the distillation systems" . Ricerche di Automatica G(1) 1975 .
- / 6 // M.Fliess; D.Normand-Cyrot: "La propriété d'approximation des systèmes bilinéaires". Outils et modèles mathématiques pour l'automatique. I.Landau Ed. Vol 1 CNRS Paris 1981. 379-384.
- / 7 / M. Fliess; I. Kupka: " A finiteness criterium for nonlinear input-output differential systems". SIAM J. Control Optim. 21(5) 1983.
- / 8 / J.P. Gauthier: " Thèse". Université Scientifique et Médicale Grenoble. INPG. 1982.
- / 9 / J.P. Gauthier et G. Bornard: " Contrôlabilité des systèmes bilinéaires". SIAM J. Control Optim. 20 (1982) 377-384.
- /10 / J.P. Gauthier; G. Bornard: " A theorem of controllability for bilinear systems and some consequence". INPG note interne LAG 81-114 (1981).

- [11 ] J.P. Gauthier; G. Bornard: "Modélisation dynamique des colonnes à distiller". Outils et Modèles mathématiques pour l'automatique l'analyse des systèmes et la théorie du signal.  
I. Landau Ed CNRS Paris (1981) 385-408.
- /12 / R. Hermann ; A.J. Krener : "Nonlinear controllability and observability". IEEE Trans Automat. Control AC 22 (1977) 728-740.
- /13 / H.Hermes: "On local and global controllability".  
SIAM J. Control Optim. 12 (1974) 252-261.
- /14 / A. Isidori ; P. D'Allessandro ; A. Ruberti: "A Structural analysis of linear and bilinear systems i" . in theory and applications of variable structure systems. R. R. Mohler ;A. Ruberti. Eds Academic press N.Y. 1972 . 25-36.
- /15 / V. Jurdjevic ; I. Kupka : "Controls systems subordinated to group action: Accessibility".  
J. Differential Equations 39 . 2 (1980) 186-211.
- /16 / V. Jurdjevic ; G. Sallet : " Controllability of affine systems ". in différential geometric control theory. R. W. Brockett ; R.S. Millman; H.J. Sussmann Eds Birkhäuser Progress in Math. (1983).  
299-309.
- /17 / V. Jurdjevic ; G. sallet : " Controllability properties of affines systems". SIAM J. Control Optim. 22,3 (1984).
- /18 / A.J. Krener : "Bilinear and Nonlinear realizations of input-Output maps". SIAM J. Control Optim. 13,4 (1975) 827-834.
- /19 / B. Lee ; L. Markus : " Foundations of optimal control theory". SIAM Series in applied math . J. wiley N.Y. 1967.
- /20 / R.R. Mohler : " Bilinear control processus ". Academic press N.Y. 1973.
- /21 / R.R. Mohler : " Bilinear strucures and man".  
Theory and applications of variable structure systems R.R. Mohler A. Ruberti Eds Academic Press N.Y. 1972 ; 169-182.

- /22 / R.R. Mohler; C.N. Chen : " Optimal control of nuclear reactors".  
Academic press N.Y. 1970.
- /23 / R. G. Rink ; R.R. Mohler: " Completely controllabl bilinear systems"  
SIAM J. Control -, " 6,3 (1968) 477-486.
- /24 / R.G. Rink ; R.R. Mohler : " Controllability and optimal control  
of bilinear systems". Tech. rep. EE 143 Bureau of Engineering  
research. University of New Mexico (1967).
- /25 / C. Lobry : " Contrôlabilité des systèmes non linéaires".  
SIAM J. Control 8,4 (1970) 573-605;
- /26 / C. Lobry : " Controllability of nonlinear systems on compact mani  
folds ". SIAM J. Control 12,1 (1974) 1-4.
- /27 / C. Lobry : " Quelques aspects qualitatifs de la théorie de la com-  
mande" . Thèse. Université de Grenoble . (1972).
- /28 / C. Lobry : " Bases mathématiques des asservissements non lineaires".  
Université de Bordeaux. 1976 . Cours de 3<sup>ème</sup> cycle .
- /30 / H.J. Sussmann; V Jurdjevic : "Controllability of nonlinear systems".  
J. Differential Equations 12 (1972) 95-116.
- /31 / H.J. Sussmann : "A sufficient condition for local controllability".  
SIAM J. Control Optim. 16,5 (1978).
- /32 / H.J. Sussmann: " Lie Brackets and local controllability: A sufficient  
condition for scalar input systems".  
SIAM J. Control Optim. 21, 5 (1983).