



**HAL**  
open science

# Controlabilité des systèmes bilinéaires homogènes à contrôles non bornés dans $\mathbb{R}^3$

Omar Merine

► **To cite this version:**

Omar Merine. Controlabilité des systèmes bilinéaires homogènes à contrôles non bornés dans  $\mathbb{R}^3$ . Mathématiques générales [math.GM]. Université Paul Verlaine - Metz, 1985. Français. NNT : 1985METZ003S . tel-01775680

**HAL Id: tel-01775680**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01775680v1>**

Submitted on 24 Apr 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

3<sup>e</sup> Cycle  
d'Enseignement Supérieur  
ERA-CNRS 040399

# THESE

présentée

A L'UNIVERSITE DE METZ

pour obtenir le titre de

DOCTEUR EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Equations Différentielles et Contrôle Optimal  
Mention : Mathématiques

par

**Omar MERINE**

**CONTROLABILITE DES SYSTEMES BILINEAIRES  
HOMOGENES A CONTROLES NON BORNES  
DANS  $\mathbb{R}^3$**

JURY

Président : André ROUX, Professeur à l'Université de METZ

Membres : Claude ROGER, Professeur à l'Université de METZ  
Bernard KLARES, Professeur à l'Université de METZ  
Gauthier SALLET, Professeur à l'Université de METZ

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE DE METZ



022 420227 1

1984-1985

# THESE

présentée

A L'UNIVERSITE DE METZ

pour obtenir le titre de

DOCTEUR EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Equations Différentielles et Contrôle Optimal

Mention : Mathématiques

par

**Omar MERINE**



## CONTROLABILITE DES SYSTEMES BILINEAIRES HOMOGENES A CONTROLES NON BORNES DANS $R^3$

JURY

Président : André ROUX, Professeur à l'Université de METZ

Membres : Claude ROGER, Professeur à l'Université de METZ  
Bernard KLARES, Professeur à l'Université de METZ  
Gauthier SALLET, Professeur à l'Université de METZ

Année Universitaire 1984-1985

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE  
- METZ

N° inv.	1985 0065
Cote	S/M <sub>3</sub> 85/3
Loc	Magasin

Je voudrais témoigner ma profonde reconnaissance à Monsieur le Professeur G.SALLET qui a inspiré, dirigé et animé ce travail. Son enseignement, ses conseils et ses encouragements m'ont beaucoup aidé à l'élaboration de cette thèse.

Je tiens à exprimer tous mes remerciements à Monsieur le Professeur A.ROUX pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le Jury.

J'exprime toute ma gratitude à Monsieur le Professeur C.ROGER ainsi qu'à Monsieur le Professeur B.KLARES qui m'ont fait l'honneur de participer à ce Jury.

C'est avec plaisir que je remercie le Département de Mathématiques de Metz et tous ses membres, qui m'ont permis de préparer ce travail dans d'excellentes conditions.

Enfin, je remercie également M. Jean-Luc COYARD du service reprographie, qui a assuré le tirage et la mise en pages de cette thèse.-

TABLE DES MATIERES

---

INTRODUCTION .....	1
HISTORIQUE ET POSITION DU PROBLEME .....	5
I. PRELIMINAIRES .....	7
I.1. Définitions et notations .....	7
I.2. Champs équivalents et techniques d'extension..	11
II. PROPRIETES ET CLASSIFICATIONS DES CHAMPS LINEAIRES	16
II.1. Théorème de Gauthier-Bornard-Sallet .....	16
II.2. Propriétés des champs linéaires de $\mathbb{R}^3$ .....	17
II.3. Classification des champs linéaires projetés sur $S^2$ .....	18
III. CONTROLABILITE DES CHAMPS LINEAIRES SUR $\mathbb{R}^3$ .....	24
III.1. Généralités .....	24
III.2. Préliminaires .....	25
III.3. Principaux résultats .....	30
B $\in$ I. ....	32
B $\in$ II. ....	33
B $\in$ III. ....	39
B $\in$ IV. ....	49
B $\in$ V. ....	57
B $\in$ VI. ....	63
B $\in$ VII. ....	70
CONCLUSION .....	77
BIBLIOGRAPHIE .....	79

-----

## INTRODUCTION

Notre travail consiste à étudier les familles de champs de vecteurs, F.C.V en abrégé, bilinéaires sur  $\mathbb{R}^3$ .

Rappelons que si  $M$  est une variété métrisable connexe,  $\mathcal{C}^\infty(M)$  désigne l'ensemble de champs de vecteurs  $C^\infty$  sur  $M$ .

Un système de champs de vecteurs est la donnée d'une partie de  $\mathcal{C}^\infty(M)$ .

Notre étude se fera particulièrement sur les systèmes bilinéaires

c'est à dire la donnée d'une F.C.V  $\mathcal{F}$  vérifiant :

$$X^u \in \mathcal{F} \text{ si } X^u \text{ vérifie le système : } \begin{cases} X^u(x) = (A + \sum_{i=1}^m u_i B_i)x \\ u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathcal{U} \\ x \in \mathbb{R}^3 - \{0\} \end{cases} \quad (o)$$

$\mathcal{U}$  est l'ensemble des contrôles ou des commandes admissibles,  $A$  et  $B$  sont des matrices de  $\mathbb{R}^3$ .

Pour notre cas, on prendra  $\mathcal{U} = \mathbb{R}^m$ .

Parmi les questions que l'on peut se poser dans l'étude de tels systèmes l'une d'elle est :

A partir d'un point initial de  $M$ , quels sont tous les points qu'on peut atteindre avec la famille de champs de vecteurs  $\mathcal{F}$ , en utilisant les trajectoires de  $X^u$ ,  $u \in \mathcal{U}$ , avec des temps positifs.

En particulier un système sera dit contrôlable ou transitif sur  $M$  si tous les états sont ainsi accessibles à partir de n'importe quel autre état.

La description de l'ensemble des états accessibles à partir d'un état donné, c'est à dire l'étude de la contrôlabilité, a justifié de nombreuses publications récentes, citons en particulier : [5] [6] [15] [16] [26] ... et bien d'autres.

Par la suite on s'intéresse à la contrôlabilité du système suivant :

$$(1) \begin{cases} \dot{x}^u(x) = (A + uB)x. \\ x \in \mathbb{R}^3 - \{0\} \\ u \in \mathbb{R} \end{cases}$$

où  $A, B$  désignent des matrices d'ordre 3.

La raison en est que si l'on a plus de deux contrôles, alors le système (o) est génériquement contrôlable.

En effet, l'ensemble des couples de matrices engendrant l'algèbre de Lie des endomorphismes est un ouvert dense.

On se limitera donc au cas où l'on a un seul contrôle [14].



Le but de ce travail, est justement de donner des conditions d'ordres algébriques, sur les coefficients  $(a_{ij})$  de la matrice A, pour que le système (1) soit contrôlable sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ , en supposant la condition du rang vérifiée.

La méthode utilisée consiste à considérer tous les types de représentations possibles de la matrice B compte tenu des différentes formes des valeurs propres ainsi que les dimensions des sous espaces propres associés.

D'après un théorème de Gauthier-Bornard-Sallet, une condition nécessaire et suffisante pour que le système (1) soit complètement contrôlable sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ , est que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

$$1) \text{ Le semi groupe } S(\mathcal{F}) = \left\{ x_{t_1}^{u_1} \circ \dots \circ x_{t_p}^{u_p}, \quad x^{u_i} \in \mathcal{F}, \quad t_i \geq 0 \right\}$$

soit contrôlable sur les directions de  $\mathbb{R}^3$ , c'est à dire les demi-droites passant par l'origine ; ce qui revient à dire contrôlable sur  $S^2$ .

2) Il existe une trajectoire de  $S(\mathcal{F})$  qui s'approche arbitrairement près de l'origine et une autre qui s'éloigne arbitrairement loin de l'origine. Ceci nous conduit donc à étudier la contrôlabilité sur  $S^2$ , de la famille de champs de vecteurs  $\tilde{\mathcal{F}}$  obtenue en projetant radialement les champs de  $\mathcal{F}$ .

On démontre que beaucoup de propriétés passent de  $\mathcal{F}$  à  $\tilde{\mathcal{F}}$  et réciproquement. Par ailleurs, ce travail contient des résultats de contrôlabilité des systèmes bilinéaires projetés sur la sphère  $S^2$ , qui ont été démontré par l'une des quatre méthodes suivantes.

1) Méthode purement géométrique utilisant le théorème de Jordan, sur une variété de dimension deux.

2) Méthode consistant à exploiter le fait que  $u \in \mathbb{R}$  donc non borné et montrer dans certains cas que le système admet des solutions du type II ou du type V.

3) Méthode utilisant la classification des champs bilinéaires sur  $\mathbb{R}^3$ , d'après leur forme de Jordan réelle.

4) Méthode utilisant la stabilité du saturé de  $\mathcal{F}$ ,  $\text{Sat}(\mathcal{F})$ , c'est à dire les techniques d'extension [24].

L'intérêt pratique de l'étude des systèmes bilinéaires, est qu'ils représentent par leurs équations une bonne approximation linéaire [8] pour de nombreux phénomènes ou comportements physiques ou mécaniques.

Dans notre travail il a été prouvé que :

1°) Si le champs B est du type II (hyperbolique complexe) ou du type VI (nilpotent d'ordre 2) alors le système (1) est complètement contrôlable sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$  pour tout champs A pour lequel la condition du rang est réalisée.

2°) Si B est quelconque et si A réalise certaines conditions, qui sont génériques, alors (1) est contrôlable sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ .

## HISTORIQUE ET POSITION DU PROBLEME

Dans ce paragraphe, nous allons énoncer les résultats connus concernant la transitivité des champs de vecteurs bilinéaires sur une variété  $M$  de dimension  $n$ , et dégager l'idée du problème que nous allons traiter dans ce travail.

Théorème 1 [19] : Soit  $\mathcal{F}$  une famille de champs de vecteurs sur  $M$ . Si la condition du rang est réalisée en tout point de  $M$  et  $\mathcal{F}$  est symétrique, alors elle est transitive sur  $M$ .

Théorème 2 [19] : On considère la famille  $\mathcal{F} = \{X, \pm Y\}$  sur  $M$ . Si la condition du rang est vérifiée en tout point et le champ  $X$  possède la propriété que l'ensemble des points de  $M$  sur lequel  $X$  est **Poisson** stable et dense, alors le système  $\mathcal{F}$  est transitif sur  $M$ .

Théorème 3 [28] : On considère sur  $M$ , le système :

$$(2) \begin{cases} \dot{x}(t) = X(x(t)) + \sum_{i=1}^p u_i(t) Y_i(x(t)) \\ u_i \in \mathbb{R}^p \end{cases}$$

si :  $\forall x \in M \dim \text{Lie}(\pm Y_i)(x) = \dim M$

Alors (2) est contrôlable sur  $M$ .

A part ces théorèmes et ceux de [16] [9] [10] [6], on ne connaît pas d'autres résultats de contrôlabilité concernant les systèmes bilinéaires sauf en dimension deux :

- En effet dans le plan, ce problème a été complètement résolu par Adda et Chabour. Un récent travail a été effectué dans I E E E (85) et qui reprend exactement celui fait par ces derniers.

En dimension 3, à part les théorèmes cités ci-dessus, il n'existe pas de résultats complets de ce qui se passe. Le but de notre travail est de faire avancer ce problème.

Nous allons considérer la famille de champs de vecteurs bilinéaires  $\mathcal{K} = \{A + uB, u \in \mathbb{R}\}$  sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$  et lui trouver des conditions suffisantes de contrôlabilité sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ .

Puisque  $u \in \mathbb{R}$ , et d'après les techniques d'extension de Kupka [24], au lieu de considérer la famille  $\mathcal{K}$ , nous allons axer notre étude sur la famille  $\mathcal{K}' = \{A, \pm B\}$  qui est équivalente à  $\mathcal{K}$  du point de vue de la contrôlabilité. Nous choisissons une base de telle façon que  $B$  soit sous forme canonique de Jordan réelle dans laquelle nous donnerons des conditions suffisantes pour que le système  $\mathcal{K}'$  soit transitif.

Le plan de ce travail est comme suit :

Le chapitre I donne des préliminaires, définitions et des rappels de quelques résultats généraux.

Le chapitre II classe les champs de vecteurs bilinéaires sur  $\mathbb{R}^3$ . On donnera quelques propriétés des champs projetés sur la sphère  $S^2$ .

Le chapitre III contient des résultats de contrôlabilité sur  $S^2$  et par suite sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ .

CHAPITRE I : PRELIMINAIRES

---

Ce chapitre concerne essentiellement les rappels et définitions qui nous seront utiles pour la suite de notre travail.

(I.1) Définitions et notations :

On désigne par  $M$  une variété connexe de dimension  $n$  et par  $\mathcal{F} = \{X^u, u \in \mathcal{U}\}$  une famille de champs de vecteurs, notée en abrégé F.C.V, et où  $\mathcal{U}$  est l'ensemble des contrôles admissibles ou encore l'ensemble des commandes. Les champs de vecteurs  $X^u$  sont supposés complets et partout définis pour chaque contrôle  $u \in \mathcal{U}$ , ce qui est le cas pour les champs bilinéaires.

Le système de champs de vecteurs  $\mathcal{F} = \{X^u, u \in \mathcal{U}\}$  est appelé système bilinéaire, si pour tout contrôle  $u \in \mathcal{U}$ , l'application définie par :

$$\begin{array}{ccc} X^u : \dot{M} & \longrightarrow & TM \\ \mathcal{X} & \longmapsto & X^u(\mathcal{X}) \end{array}$$

est linéaire.

Si  $X^u$  est un champs de vecteurs de  $\mathcal{F}$  on notera  $X_t^u$  le groupe à un paramètre qu'il engendre. On rappelle que si  $\mathcal{X}_0 \in M$  alors  $X_t^u(\mathcal{X}_0)$  est, par définition, la valeur à l'instant  $t$  de l'unique solution au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \left. \frac{d}{dt} (X_t^u(\mathcal{X}_0)) \right|_{t=0} = X^u(\mathcal{X}_0) \\ X_0^u(\mathcal{X}_0) = \mathcal{X}_0 \end{cases}$$

Comme le champs  $X^u$  est linéaire on a :  $X_t^u(\mathcal{X}_0) = \text{Exp}tX^u \cdot \mathcal{X}_0$ .

D'une façon générale, à tout contrôle  $u \in \mathcal{U}$  et à toute condition initiale  $x_0 \in M$ , on associe une solution  $X_t^u(x_0)$  qui est l'unique solution maximale du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} (X_t^u(x_0)) \Big|_{t=Z} = X^u (X_Z^u(x_0)) \\ X_0^u(x_0) = x_0 \end{cases}$$

La famille  $\mathcal{F}$  est dite symétrique si pour tout champs  $X \in \mathcal{F}$ , le symétrique  $(-X) \in \mathcal{F}$ .

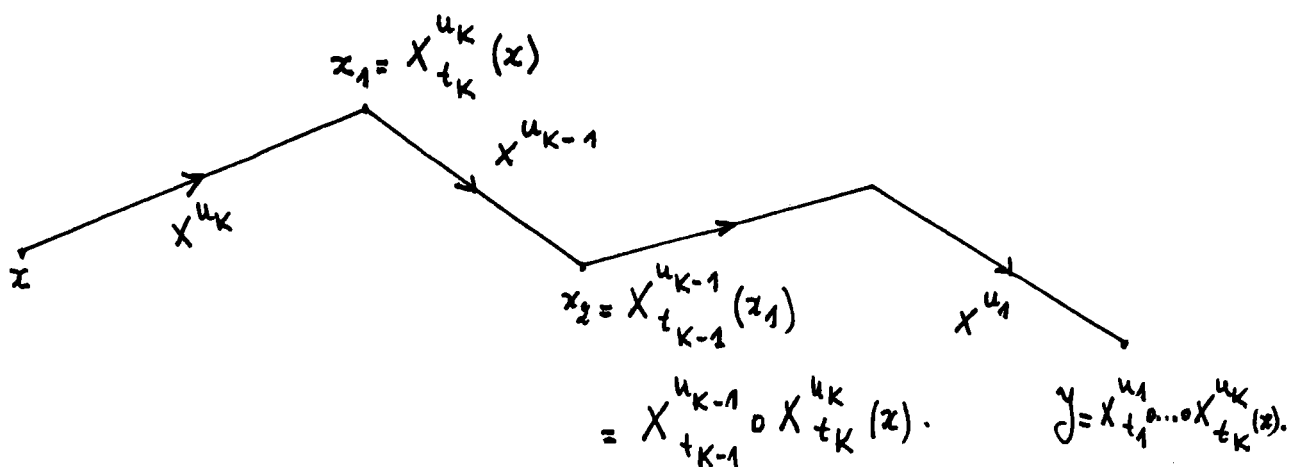
Un champs  $X \in \mathcal{F}$  est poisson stable en un point  $x_0 \in M$ , si pour tout voisinage  $v(x_0)$ , pour tout temps  $T > 0$ , il existe un temps  $t \geq T$  tel que :  $X_t(x_0) \in v(x_0)$ .

$x_0$  est un point singulier du champs  $X$  si :  $X(x_0) = 0$

Soient  $x$  et  $y$  deux points de  $M$ . On dira que  $y$  est accessible à partir de  $x$  s'il existe un entier  $k$ ,  $k$  contrôles  $u_1, u_2, \dots, u_k$  et  $k$  réels positifs  $t_1, t_2, \dots, t_k$  tels que :

$$y = X_{t_1}^{u_1} \circ X_{t_2}^{u_2} \circ \dots \circ X_{t_k}^{u_k}(x).$$

Ce qui signifie géométriquement que l'on atteint  $y$  à partir de  $x$  en empruntant dans le sens des temps positifs, les trajectoires associées aux champs de vecteurs  $X^{u_k}, X^{u_{k-1}}, \dots, X^{u_1}$



On dira que  $y$  est recalable en  $x$  si  $x$  est accessible à partir de  $y$ . L'ensemble de tous les états accessibles à partir de  $x$  à l'aide du système  $\mathcal{F}$  sera noté  $S(\mathcal{F}).x$ , on a donc :

$$S(\mathcal{F}).x = \left\{ x_{t_1}^{u_1} \circ \dots \circ x_{t_k}^{u_k}(x), x^{u_i} \in \mathcal{F}, t_i \geq 0 \forall i, k \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Sachant que  $S(\mathcal{F})$  est un semi groupe engendré par  $\left\{ x_{t_1}^{u_1} \circ \dots \circ x_{t_k}^{u_k}, x^u \in \mathcal{F} \right\}$

donc l'ensemble des états accessibles à partir de  $x$  est l'orbite positive de ce semi groupe d'où la notation  $S(\mathcal{F})$ .

Le système  $\mathcal{F}$  vérifie la propriété d'accessibilité si pour tout point  $x_0 \in M$ , l'intérieur de  $S(\mathcal{F}).x_0$ , par rapport à la topologie de  $M$ , est non vide.

$\mathcal{F}$  sera localement contrôlable en  $x_0 \in M$  si  $S(\mathcal{F}).x_0$  contient un voisinage de  $x_0$ . On notera l'ensemble des états accessibles à partir de  $x_0$  en un temps  $T$  par  $A(x_0, T, \mathcal{F})$  donc :  $A(x_0, T, \mathcal{F}) =$

$$\left\{ x_{t_1}^{u_1} \circ \dots \circ x_{t_k}^{u_k}(x_0) \quad x^{u_i} \in \mathcal{F}, t_i \geq 0, \sum_{i=1}^k t_i = T, k \in \mathbb{N}^* \right\}$$

L'ensemble des états accessibles à partir de  $x_0$  en un temps  $t$  inférieur ou égal à  $T$  est noté par  $A(x_0, [0, T], \mathcal{F}) = \bigcup_{t \leq T} A(x_0, t, \mathcal{F})$ .

On appelle région d'accessibilité de  $x_0 \in M$ , le plus grand ouvert  $U$  accessible à partir de  $x_0$ ; donc on a :  $U = \overline{S(\mathcal{F}).x_0}$

On appelle orbite de  $x_0$ , qu'on notera  $G(\mathcal{F}).x_0$ , l'ensemble des états accessibles à partir de  $x_0$  du système symétrisé, c'est à dire du système  $\bar{\mathcal{F}} = \{x^u, -x^u, u \in \mathcal{U}\}$

on a :  $G(\mathcal{F}).x_0 = S(\bar{\mathcal{F}}).x_0$ .

On dira que le système  $\mathcal{F}$  est contrôlable ou transitif en un point  $x_0 \in M$  si l'ensemble des états accessibles  $S(\mathcal{F}).x_0$  coïncide avec  $M$  ie :  $S(\mathcal{F}).x_0 = M$ .

$\mathcal{F}$  est dit contrôlable ou transitif sur  $M$  s'il l'est pour tout point  $x_0 \in M$ .

ie :  $\forall x_0 \in M, S(\mathcal{F}).x_0 = M$

On notera  $[X^u, X^v]$  le crochet de Lie des champs  $X^u$  et  $X^v$ . On sait que pour des champs linéaires on a :  $[X^u, X^v] = X^v X^u - X^u X^v$

On désigne par  $\text{Lie}(\mathcal{F})$  l'algèbre de Lie engendrée par  $\mathcal{F}$ , c'est donc la plus petite sous-algèbre de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs de  $M$  contenant  $\mathcal{F}$ ,  $\text{Lie}(\mathcal{F})$  est la plus petite sous-algèbre de Lie stable par le crochet de Lie. On a :  $\forall x \in M, \text{Lie}(\mathcal{F})(x) \subset T_x M$  où  $T_x M$  est l'espace tangent en  $x$  à  $M$ .

La famille est dite auto-invariante si en chaque point  $x \in M$ , on a :

$$T_x G(\mathcal{F}).x = \text{Lie}(\mathcal{F}).x.$$

Le système vérifie la condition du rang en un point  $x \in M$  si l'algèbre de Lie en  $x$  coïncide avec l'espace tangent en  $x$  à  $M$ .

ie :  $\text{Lie}(\mathcal{F})(x) = T_x M$ .

Dans ce travail, on considère la famille  $\mathcal{F} = \{X^u = A + uB, u \in \mathbb{R}\}$  où  $A \in M(3)$  et  $B \in M(3)$ .

$M(3)$  étant l'ensemble des matrices d'ordre 3.

Pour la suite on supposera que la famille  $\mathcal{F}$  vérifie la condition du rang en tout point de  $M$ . On verra que bien souvent il suffira de la vérifier en un seul point.



## (I.2) Champs équivalents et techniques d'extension [24]

Etant donnée une famille  $\mathcal{F}$  de champs de vecteurs sur  $M$ , on définit l'ensemble d'accessibilité de  $x$ , noté  $A_{\mathcal{F}}(x)$ , comme étant l'adhérence, par rapport à la topologie de  $G(\mathcal{F}) \cdot x$ , de  $S(\mathcal{F}) \cdot x$ . i.e. :  $A_{\mathcal{F}}(x) = \overline{S(\mathcal{F}) \cdot x}$ .

On a donc défini l'application d'accessibilité  $A_{\mathcal{F}}$  :

$$A_{\mathcal{F}} : M \longrightarrow \mathcal{C}(M)$$

$$x \longmapsto A_{\mathcal{F}}(x) = \overline{S(\mathcal{F}) \cdot x}$$

où  $\mathcal{C}(M)$  est la collection des fermés de  $M$ .

### Définition :

On dira que deux familles de champs de vecteurs  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}'$  sont équivalentes si leur ensemble d'accessibilité sont égaux, et on noté

$$\mathcal{F} \sim \mathcal{F}'$$

$$\text{Donc } \mathcal{F} \sim \mathcal{F}' \iff A_{\mathcal{F}} = A_{\mathcal{F}'} \iff \forall x \in M, \overline{S(\mathcal{F}) \cdot x} = \overline{S(\mathcal{F}') \cdot x}.$$

où les fermetures sont prises respectivement par rapport à la topologie de  $G(\mathcal{F}) \cdot x$  et de  $G(\mathcal{F}') \cdot x$ .

### Propriétés :

1)  $\forall \lambda > 0, \lambda \mathcal{F} \sim \mathcal{F}$   
ou  $\lambda \mathcal{F} = \{ \lambda x, x \in \mathcal{F} \}$ .

2) L'adhérence du cône convexe  $\mathcal{C}$  engendré par  $\mathcal{F}$  est équivalente à  $\mathcal{F}$

En effet, cette propriété résulte des trois suivantes :

a)  $\forall x \in \mathcal{F}, \forall y \in \mathcal{F}, \{x + y\} \cup \mathcal{F} \sim \mathcal{F}$

b)  $\forall \lambda > 0, \forall x \in \mathcal{F}, \{\lambda x\} \cup \mathcal{F} \sim \mathcal{F}$

c) Si une suite  $(x_n)_n \subset \mathcal{F}$  converge vers  $x$ , alors  $\{x\} \cup \mathcal{F} \sim \mathcal{F}$ .

3) Si  $\pm x \in \mathcal{F}$ , alors  $\forall y \in \mathcal{F}$ :

$$\{(x_t)_* y\} \cup \mathcal{F} \sim \mathcal{F}$$

$$\text{où } ((x_t)_* y)_\Delta(x) = X_t \circ Y_\Delta \circ X_{-t}(x) \quad \forall \Delta > 0$$

4) Si  $\pm x \in \mathcal{F}$  et  $\pm y \in \mathcal{F}$ ; alors  $[x, y] \cup \mathcal{F} \sim \mathcal{F}$ .

### Définition :

On appelle saturé de  $\mathcal{F}$  et on note  $\text{Sat}(\mathcal{F})$ , le plus grand système équivalent à  $\mathcal{F}$ .

### Propriétés du saturé de $\mathcal{F}$ :

$$1) \text{Sat}(\mathcal{F}) = \bigcup_{\mathcal{F}' \sim \mathcal{F}} \mathcal{F}'$$

$$2) \text{Sat}(\mathcal{F}) \text{ est stable ie } \mathbb{R}^+ \text{Sat}(\mathcal{F}) = \text{Sat}(\mathcal{F}).$$

3)  $\text{Sat}(\mathcal{F})$  est fermé.

$$4) \text{Sat}(\mathcal{F}) + \text{Sat}(\mathcal{F}) \subset \text{Sat}(\mathcal{F})$$

$$5) \text{Si } \pm x \in \text{Sat}(\mathcal{F}) \text{ alors } (x_t)_* \text{Sat}(\mathcal{F}) \subset \text{Sat}(\mathcal{F})$$

6) Si  $V$  est un sous-espace vectoriel tel que  $V \subset \text{Sat}(\mathcal{F})$ , alors :

$$\text{Lie}(V) \subset \text{Sat}(\mathcal{F})$$

### Proposition 1 :

Le système (1) est équivalent au système  $\mathcal{F} = \{A, \pm B\}$ .

### Preuve :

Il suffit de montrer que  $A$ ,  $+B$  et  $-B$  sont dans l'adhérence du cône convexe  $\mathcal{C}$ .

En effet :

$$A = \frac{1}{2} (A + uB) + \frac{1}{2} (A - uB) \implies A \in \overline{\mathcal{C}}$$

$$\forall m \in \mathbb{N}, \text{ on a : } (A + mB) \in (1) \implies \frac{1}{m} (A + mB) \in \mathcal{C}$$

$$\text{donc : } \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} (A + mB) \in \overline{\mathcal{C}}$$

Or si on prend  $t \in \mathbb{R}^+$  et  $x \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$ , on aura :

$$Z = \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{m} (A + m B) \right)_t (x) = \lim_{m \rightarrow \infty} (A + m B)_{t/m} (x)$$

$$\begin{aligned} \text{or : } (A + m B)_{t/m} (x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{A}{mn} \circ \frac{(mB)}{m \cdot n} \right)^n (x) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{A}{mn} \circ B \frac{t}{n} \right)^n (x) \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} Z &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \left( A \frac{t}{m \cdot n} \circ B \frac{t}{n} \right)^n \right) (x) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \lim_{m \rightarrow \infty} \left( A \frac{t}{m \cdot n} \circ B \frac{t}{n} \right)^n \right) (x) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( B \frac{t}{n} \right)^n (x) = B_t (x) \end{aligned}$$

donc :  $\forall t \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}^3 - \{0\}, B_t(x) \in \overline{S(\mathcal{F}) \cdot x}$   
d'où :  $+B \in \overline{\mathcal{E}}$ .

On peut faire le même raisonnement avec  $(A - mB)$  et on trouve que  $-B \in \overline{\mathcal{E}}$ .

Donc  $(1) \sim \{A, \pm B\}$ .

Remarque : Au lieu d'étudier le système  $\{A + uB, u \in \mathbb{R}\}$ , on peut faire l'étude du système  $\{A, \pm B\}$  puisqu'ils sont équivalents d'après la propriété ci-dessus.

Proposition 2 :

Soit  $E$  un ensemble dense dans  $M$ . On suppose que le système vérifie :

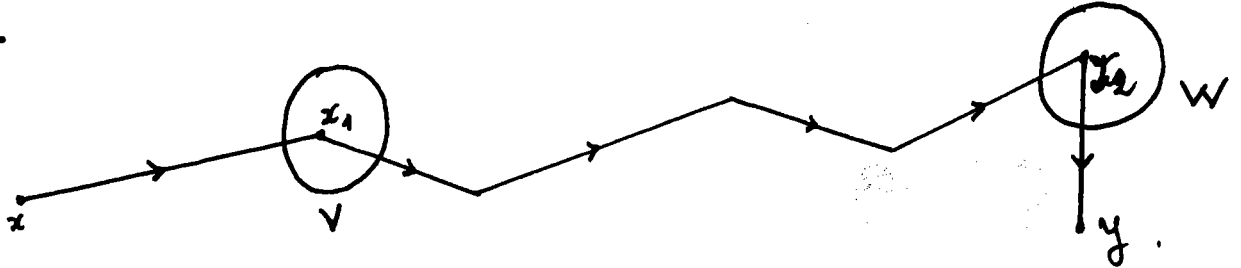
$$1^\circ) \forall x \in M \quad \dim \text{Lie}(\mathcal{F})(x) = \dim M$$

$$2^\circ) \forall x \in E \quad ; \quad \overline{S(\mathcal{F}) \cdot x} = M$$

Alors  $(\mathcal{F})$  est transitif sur  $M$ .

Preuve :

Soient  $x$  et  $y$  deux points quelconques de  $M$ . Montrons que  $y \in S(f).x$  en effet, d'après le lemme de Chow, il existe un voisinage  $V$  qui est accessible à partir de  $x$ , et un voisinage  $W$  qui est recalable à  $y$ .



$E$  étant dense, dont il existe au moins un point  $x_1 \in V \cap E$ .

$$x_1 \in V \cap E \implies \overline{S(f).x_1} = M$$

donc :  $S(f).x_1$  rencontre  $W$  en un point  $y_1 \in W \cap S(f).x_1$

$$x_1 \in S(f).x$$

$$x_2 \in S(f).x_1$$

$$y \in S(f).x_2$$

donc :  $y \in S(f).x$  Ce qui achève la preuve.

### Corollaire 1

Si  $f \sim f'$  alors :  $f$  est transitif sur  $M$ , si et seulement si  $f'$  est transitif sur  $M$

En effet si  $f$  est transitif sur  $M$ , on peut appliquer la proposition (2) pour  $E = S(f).x_0$  ; car :

$$\overline{E} = \overline{S(f).x_0} = M \quad \text{et} \quad \forall y \in E, \quad \overline{S(f).y} = \overline{S(f').y}$$

donc  $f'$  est transitif sur  $M$ .

Corollaire 2

Le système  $\{A + u B, u \in \mathbb{R}\}$  est transitif sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$  si et seulement si  $\{A, \pm B\}$  est transitif sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$

Ce qui justifie l'étude du système  $\{A, \pm B\}$  dans la suite de ce travail.

## CHAPITRE II : PROPRIETES ET CLASSIFICATION

### DES CHAMPS LINEAIRES

Dans cette partie nous donnerons les outils qui nous seront nécessaires pour entamer l'étude de la contrôlabilité.

Nous commencerons par donner des propriétés particulièrement intéressantes des champs bilinéaires de  $\mathbb{R}^3$ , ainsi que leurs projections radiales sur  $S^2$ .

Le but de cette étude est de se mettre dans les conditions du théorème de G.B.S sur lequel est basé la suite de notre travail.

En effet, ce théorème ramène l'étude de la contrôlabilité d'un système  $\mathcal{F}$  sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$  à la contrôlabilité directionnelle ou encore à l'étude de la transitivité sur  $S^2$  du système projeté.

Une des conditions de ce théorème est automatiquement réalisée dans le cadre de ce travail sauf en un seul cas pour lequel une étude spéciale lui sera consacrée.

#### (II,1) Théorème [10]

Soit  $\mathcal{F}$  une famille de champs de vecteurs bilinéaires sur  $\mathbb{R}^m$ .

Le semi-groupe  $S(\mathcal{F})$  opère transitivement sur  $\mathbb{R}^m - \{0\}$  si et seulement si :

(i)  $S(\mathcal{F})$  est transitif sur les directions de  $\mathbb{R}^m$  (ie les demi-droites issues de l'origine). donc transitif sur  $S^{n-1}$ .

(ii) Il existe une trajectoire de  $S(\mathcal{F})$  qui s'approche arbitrairement près de l'origine, et une autre qui s'éloigne arbitrairement loin de l'origine. Cette condition est équivalente à dire que les semi-groupes  $S(\mathcal{F})$  et  $S(-\mathcal{F})$  sont non bornés. C'est la condition (ii) qui est toujours réalisée sauf dans le cas où le spectre de B est imaginaire pur.

Nous démontrerons ces résultats en étudiant la classification des champs linéaires de  $\mathbb{R}^3$  projetés sur  $S^2$ , dans le prochain paragraphe. Il reste donc à étudier la contrôlabilité sur les directions du système  $\mathcal{F}$  sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ , ce qui est équivalent à l'étude de la contrôlabilité de  $\tilde{\mathcal{F}}$  sur  $S^2$ ,  $\tilde{\mathcal{F}}$  étant le projeté de  $\mathcal{F}$  sur  $S^2$ .

(II.2) Propriétés des champs linéaires de  $\mathbb{R}^n$  ainsi que leur projection sur la sphère  $S^{n-1}$ .

Ceci va nous faciliter le travail dans l'étude de la contrôlabilité des systèmes bilinéaires sur  $\mathbb{R}^n$ .

Soit  $X$  un champ de vecteurs linéaire dans  $\mathbb{R}^n$  et  $x \in S^{n-1}$

l'application :  $\tilde{X} : S^{n-1} \longrightarrow TS^{n-1} \simeq \mathbb{R}^{n-1}$

$$x \longmapsto \tilde{X}(x) = X(x) - \langle X(x)/x \rangle x$$

où  $\langle, \rangle$  désigne le produit scalaire sur  $\mathbb{R}^n$ ,

définit un champ de vecteurs sur  $S^{n-1}$ , et il est évident que, puisque  $X$  est bilinéaire,  $\tilde{X}_t(x) = \frac{X_t(x)}{\|X_t(x)\|}$

est le groupe à un paramètre de  $\tilde{X}$ .

Il est facile de voir que  $B$  et  $B + \lambda I$  ont même projection sur  $S^{n-1}$ , et que deux champs qui ont la même projection diffèrent de  $\lambda I$ .

### (II.3) Classification des champs linéaires projetés sur $S^2$

On va maintenant suivant la nature de  $B$ , regarder l'aspect du champ  $\tilde{B}$ .

On choisit une base de Jordan réelle pour  $B$ , et la sphère unité dans cette base. On obtient ainsi la classification des champs linéaires projetés sur la sphère.

Suivant chaque type de champ  $B$ , on vérifiera la condition (ii) du théorème de G.B.S. On étudiera l'ensemble des points invariants, l'ensemble des points singuliers et on donnera la configuration correspondante de  $\tilde{B}$  sur  $S^2$ .

Remarque :

a) Si  $\tilde{B}$  a un grand cercle invariant sur  $S^2$ ,  $B$  admet un plan invariant sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ .

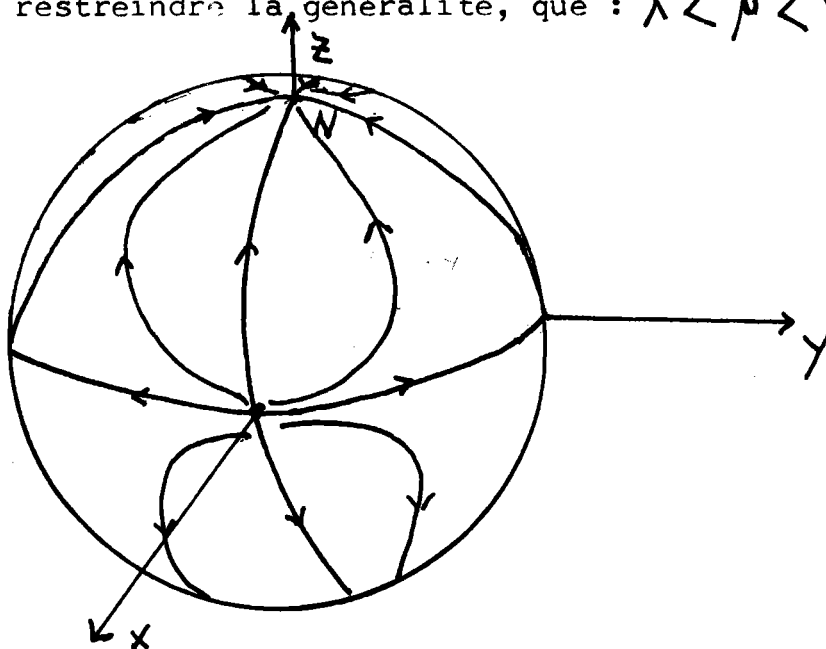
b) Si  $\tilde{B}$  possède un point singulier, alors  $B$  admet une demi-droite invariante sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ .

Type I : Hyperbolique réel :

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$$

$\lambda, \mu, \nu$  étant des réels distincts deux à deux.

On supposera sans restreindre la généralité, que :  $\lambda < \mu < \nu$ .



on a : - 3 grands cercles invariants.

- 6 points singuliers situés dans l'intersection des cercles dont deux sont attractifs, ce sont des noeuds attractifs,



deux sont répulsifs, ce sont des noeuds répulsifs,

deux sont des points selles.

On remarque que tout point situé strictement dans l'hémisphère nord pourra s'approcher aussi près que l'on veut du pôle nord N.

La même situation se présente par rapport à l'hémisphère sud avec le pôle sud S.

Cas II : Hyperbolique :

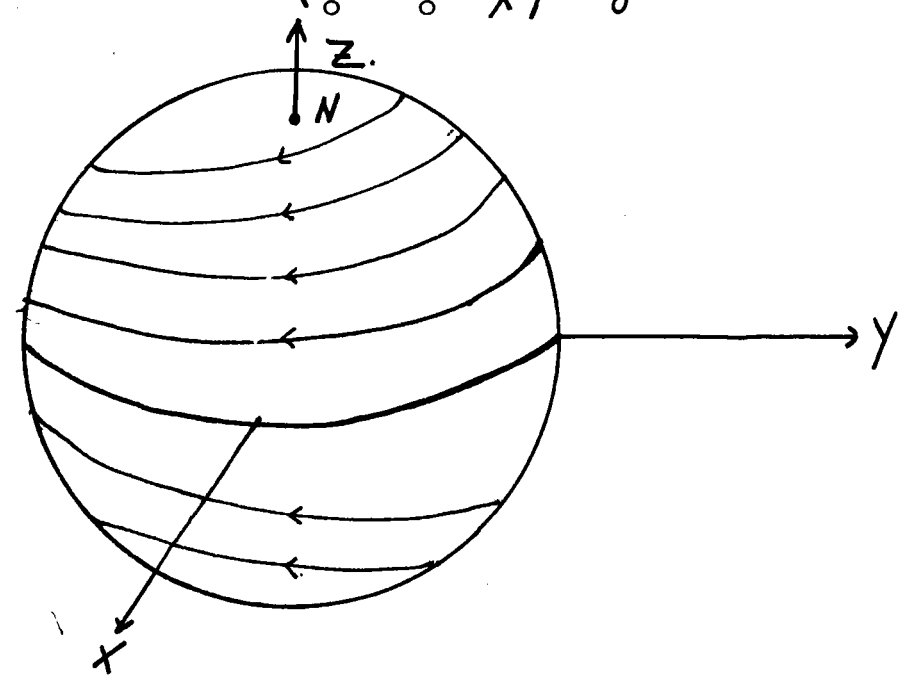
A a deux valeurs propres complexes conjuguées  $z_1, \bar{z}_1$  et une réelle  $\lambda$

tel que :  $\lambda \neq \operatorname{Re} z_1$

$$A = \begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\lambda \neq a$$

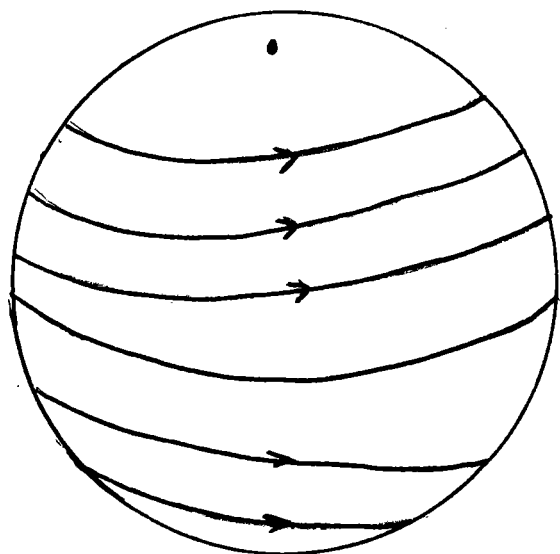
$$z_1 = a + i b$$



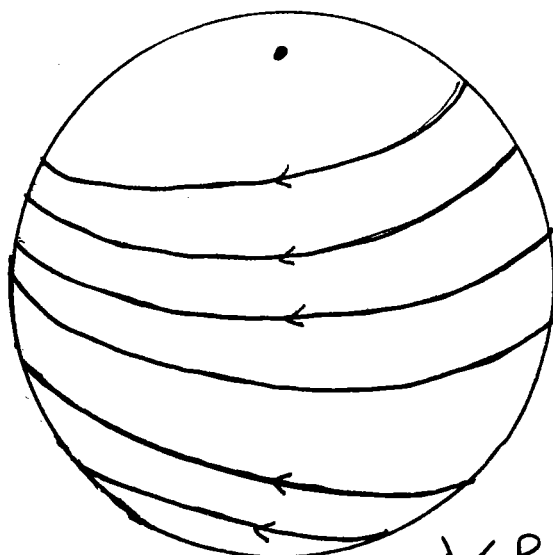
L'équateur est invariant et on a deux points singuliers diamétralement opposés non contenus dans l'équateur.

Si  $\lambda > \operatorname{Re}(z_1) = a$ , l'équateur est répulsif et donc les points singuliers sont attractifs pour leur hémisphère respectif, ce sont des foyers stables et donc tout point peut s'approcher arbitrairement près du pôle.

Si  $\lambda < \operatorname{Re}(z_1)$ , l'équateur est attractif et les points singuliers seront des foyers instables. Tout point de l'hémisphère pourra s'approcher aussi près que l'on veut de l'équateur sauf les pôles. L'équateur est un cycle limite.

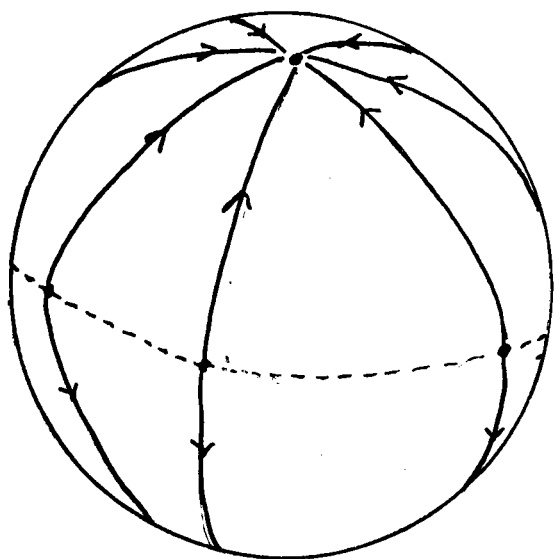


$$\lambda > \operatorname{Re}(z_1)$$

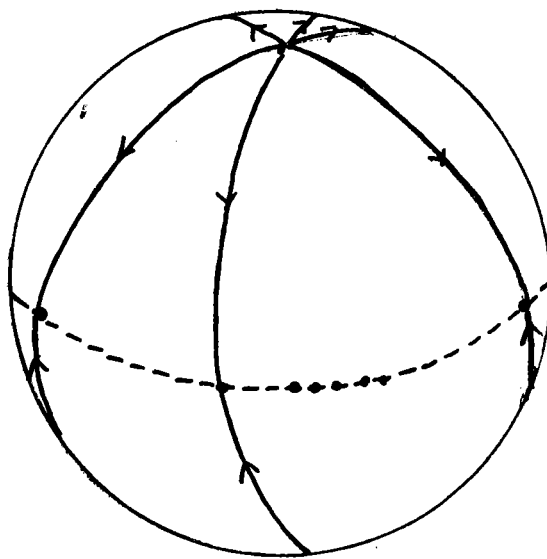


$$\lambda < \operatorname{Re}(z_1)$$

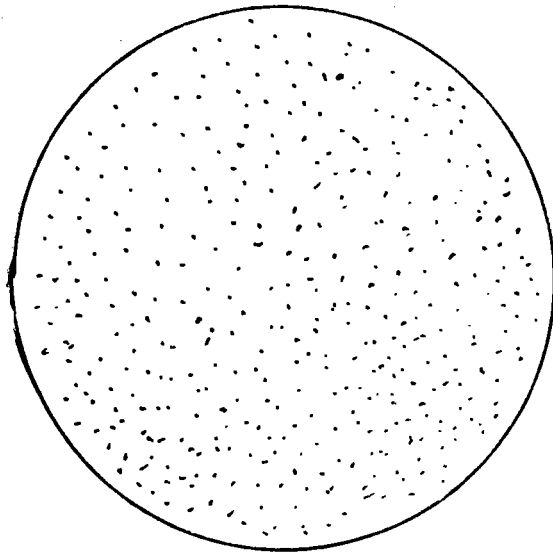
Cas III : A s'écrit dans sa base propre :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$$


$$\mu > \lambda$$



$$\mu < \lambda$$



$$\mu = \lambda$$

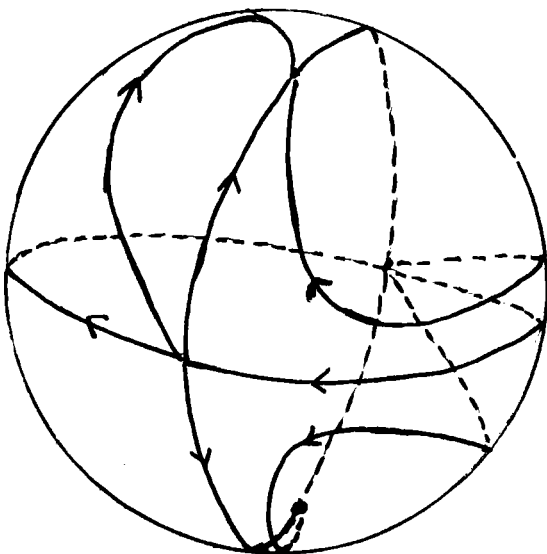
Un grand cercle de point singulier et deux points singuliers non situés sur ce cercle. Tous les cercles contenant les deux pôles sont invariants.

si  $\mu > \lambda$ , les poles sont attractifs, ce sont des noeuds stables.

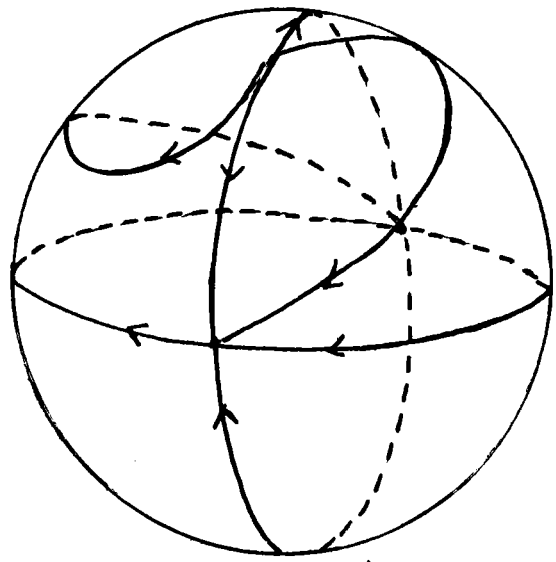
si  $\mu < \lambda$ , les points singuliers de l'équateur sont attractifs.

si  $\mu = \lambda$ , tous les points de  $S^2$  seront des points singuliers.

Cas IV :  $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \lambda \neq \mu$



$$\mu > \lambda$$



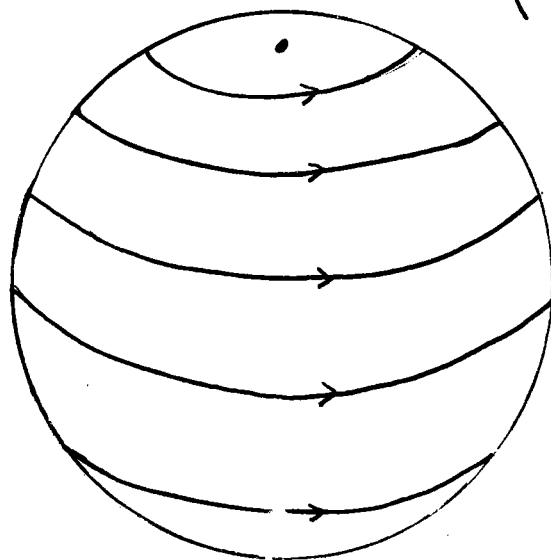
$$\mu < \lambda$$

on a deux grands cercles invariants et quatre points singuliers, situés sur ces cercles, dont deux sont attractifs ou répulsifs.

si  $u > \lambda$  tout point de l'hémisphère peut s'approcher aussi près que l'on veut du pôle.

si  $u < \lambda$  tout point de l'hémisphère peut être recalé suffisamment près du pôle par le champ  $(-A)$ .

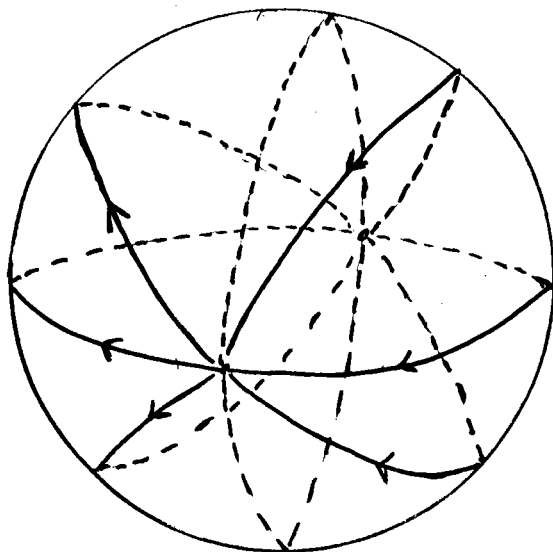
Cas V : A est une similitude : 
$$A = \begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$



Tout cercle est invariant.  $\tilde{A}$  a deux points singuliers, le pôle nord N et le pôle sud S.

Remarque : Dans ce cas le champ A est équivalent à IA.

Cas VI : A est la matrice nilpotente d'ordre 2 : 
$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

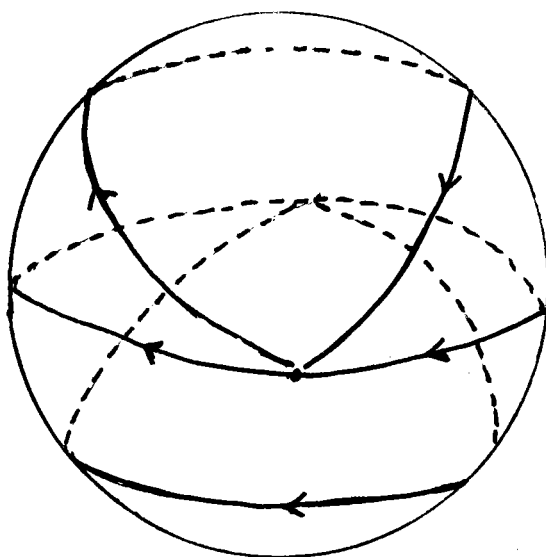


A a un équateur de points singuliers qui représente le noyau de A, et deux points singuliers situés sur cet équateur.

L'un des deux points singuliers est attractif et l'autre répulsif pour leur hémisphère qui représente l'image de A

Tous les cercles passant par les points singuliers sont invariants.

Cas VII : A est la matrice nilpotente d'ordre 3 :  $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$



A a un grand cercle invariant qui représente l'image de A, et deux points singuliers contenus sur ce cercle et qui sont attractifs pour leur hémisphère.

## CHAPITRE III : CONTROLABILITE DES CHAMPS

### BILINEAIRES SUR $\mathbb{R}^3$

#### (III.A) Généralités :

Dans ce chapitre, on considère le système :

$$\begin{cases} X' = (A + u B)X \\ X \in \mathbb{R}^3 - \{0\} \quad , \quad u \in \mathbb{R} \\ A = (a_{ij}) \in M_3(\mathbb{R}) \quad , \quad B = (b_{ij}) \in M_3(\mathbb{R}) \end{cases}$$

On a vu que l'étude de la contrôlabilité de ce système est équivalente à celle de la famille  $\mathcal{F} = \{A, \pm B\}$

D'après le théorème de [9], [10] il suffit dans presque tous les cas, sauf dans le cas où B admet des valeurs propres imaginaires pures, de montrer que  $\mathcal{F} = \{\tilde{A}, \pm \tilde{B}\}$  est transitif sur  $S^2$ , où  $\tilde{A}$  (resp  $\pm \tilde{B}$ ) désigne le champ projeté de A (resp  $\pm B$ ) sur  $S^2$ .

On va donc étudier la contrôlabilité de  $\{\tilde{A}, \pm \tilde{B}\}$  sur  $S^2$ , pour cela il y a plusieurs techniques.

Parmi les techniques utilisées, il y a celle de la "spirale".

Elle consiste à prouver qu'il existe un certain contrôle  $u_0$  telle que la matrice  $(A + u_0 B)$  soit du type II.

Pour cela on calcule le polynôme caractéristique de  $(A + u B)$ , c'est l'objet du paragraphe (III.2) qui exprime ce polynôme en u, en fonction de coefficients invariants dépendant de A et B.

Dans le paragraphe (III.3) on résume les principaux résultats trouvés au cours de ce travail.

(III.2) Préliminaires :

a) Pour l'étude de la contrôlabilité, nous allons regarder les valeurs propres de la matrice  $(A + u B)$ , ce qui revient à étudier son polynôme caractéristique : ceci nous permet de situer le type de champ représenté par  $(A + u B)$ .

On va exprimer le polynôme caractéristique  $Pu(\lambda) = \det(A + u B - \lambda I)$  à l'aide d'invariants de la paire  $\{A, B\}$ .

Plus exactement, on va l'exprimer à l'aide de  $\text{Tr}(A)$  (trace de A),  $\sum(A)$  (la somme des mineurs principaux d'ordre deux de A),  $\det A$  (le déterminant de A),  $\text{Tr}(B)$ ,  $\sum(B)$  et  $\det B$ .

$Pu(\lambda)$  étant de degré trois, par un changement de variable, on peut se ramener à un polynôme du type :  $Pu(\lambda) = \lambda^3 + P\lambda + q$ .

On calculera par la suite  $\Delta(A + u B)$  le discriminant de  $Pu(\lambda)$ .

Le signe de  $\Delta(A + u B)$  détermine la nature des valeurs propres de  $(A + u B)$ , en effet :

$$1^\circ) \Delta(A + u B) < 0 \implies (A + u B) \in (I)$$

$$2^\circ) \Delta(A + u B) > 0 \implies (A + u B) \in (II) \cup (V)$$

$$3^\circ) \Delta(A + u B) = 0 \implies (A + u B) \in (III) \cup (IV) \cup (VI) \cup (VII)$$

Exprimons le polynôme caractéristique  $Pu(\lambda)$  de  $(A + u B)$

on prendra  $A = (a_{ij}) = (A_1, A_2, A_3)$  ;  $B = (b_{ij}) = (B_1, B_2, B_3)$ .

$$Pu(\lambda) = \det(A + u B - \lambda I) = -\lambda^3 + \text{Tr}(A + u B)\lambda^2 - \sum(A + u B)\lambda + \det(A + u B)$$

avec :

$$\text{Tr}(A + u B) = \text{Tr}(A) + u \text{Tr}(B)$$

$$\sum(A + u B) = \sum(A) + \sum(A, B)u + \sum(B)u^2$$

$$\text{ou } \sum(A, B) = \sum_{\substack{i, j \\ i \neq j}} a_{ij} b_{ji} - \sum_{\substack{i, j \\ i \neq j}} a_{ij} b_{ji}$$

$$\det(A + uB) = \det(A) + \det(A, B)u + \det(B, A)u^2 + \det(B)u^3$$

où :  $\det(A, B) = \det(B_1, A_2, A_3) + \det(A_1, B_2, A_3) + \det(A_1, A_2, B_3)$

$\det(B, A) = \det(A_1, B_2, B_3) + \det(B_1, A_2, B_3) + \det(B_1, B_2, A_3)$

Si l'on pose :  $X = \lambda - \frac{\text{Tr}(A + uB)}{3}$  , alors le polynôme caractéristique devient :

$$Q_u(X) = -X^3 + \left[ \frac{\text{Tr}^2(A + uB)}{3} - \sum(A + uB) \right] X + \frac{2}{27} \text{Tr}^3(A + uB) - \frac{1}{3} \left( \sum(A + uB) \text{Tr}(A + uB) \right) + \det(A + uB)$$

posons :  $p(u) = \sum(A + uB) - \frac{1}{3} \text{Tr}^2(A + uB)$

$$q(u) = -\frac{2}{27} \text{Tr}^3(A + uB) + \frac{1}{3} \left( \sum(A + uB) \text{Tr}(A + uB) \right) - \det(A + uB)$$

donc :

$$p(u) = \sum(A) + u \sum(A, B) + u^2 \sum(B) - \frac{\text{Tr}^2(A)}{3} - \frac{2}{3} u \text{Tr}(A) \text{Tr}(B) - u^2 \frac{\text{Tr}^2(B)}{3}$$

$$= \left( \sum(A) - \frac{1}{3} \text{Tr}^2(A) \right) + u \left( \sum(A, B) - \frac{2}{3} \text{Tr}(A) \text{Tr}(B) \right) + u^2 \left( \sum(B) - \frac{1}{3} \text{Tr}^2(B) \right)$$

Posons :  $S_0 = \sum(A) - \frac{1}{3} \text{Tr}^2(A)$

$$S_1 = \sum(A, B) - \frac{2}{3} \text{Tr}(A) \text{Tr}(B)$$

$$S_2 = \sum(B) - \frac{1}{3} \text{Tr}^2(B)$$

donc :

$$p(u) = S_0 + u S_1 + u^2 S_2$$



$$\begin{aligned}
q(u) = & \left( -\frac{2}{27} \text{Tr}^3 A + \frac{1}{3} \sum (A) \text{Tr} A - \det A \right) + u \left( -\frac{2}{9} \text{Tr}^2(A) \text{Tr} B \right. \\
& \left. + \frac{1}{3} \sum (A) \text{Tr}(B) + \frac{1}{3} \sum (A, B) \text{Tr}(A) - \det(A, B) \right) \\
& + u^2 \left( -\frac{2}{9} \text{Tr}(A) \text{Tr}^2(B) + \frac{1}{3} \sum (A, B) \text{Tr}(B) \right. \\
& \left. + \frac{1}{3} \sum (B) \text{Tr}(A) - \det(B, A) \right) + u^3 \left( -\frac{2}{27} \text{Tr}^3(B) \right. \\
& \left. + \frac{1}{3} \sum (B) \text{Tr}(B) - \det B \right)
\end{aligned}$$

on pose :

$$K_0 = -\frac{2}{27} \text{Tr}^3(A) + \frac{1}{3} \sum (A) \text{Tr}(A) - \det(A)$$

$$K_1 = -\frac{2}{9} \text{Tr}^2(A) \text{Tr}(B) + \frac{1}{3} \sum (A) \text{Tr}(B) + \frac{1}{3} \sum (A, B) \text{Tr}(A) - \det(A, B)$$

$$K_2 = -\frac{2}{9} \text{Tr}(A) \text{Tr}^2(B) + \frac{1}{3} \sum (A, B) \text{Tr}(B) + \frac{1}{3} \sum (B) \text{Tr}(A) - \det(B, A)$$

$$K_3 = -\frac{2}{27} \text{Tr}^3(B) + \frac{1}{3} \sum (B) \text{Tr}(B) - \det(B)$$

donc :

$$q(u) = K_0 + u K_1 + u^2 K_2 + u^3 K_3$$

Maintenant on va calculer le discriminant  $\Delta(A + uB)$  du polynôme caractéristique et déterminer ses coefficients en fonction des invariants dépendant de la paire  $\{A, B\}$ .

$$\Delta(A + uB) = 4p^3(u) + 27q^2(u)$$

Après calcul on trouve :

$$\begin{aligned}
\Delta(A + uB) = & (4 S_0^3 + 27 K_0^2) + u (12 S_0^2 S_1 + 54 K_0 K_1) \\
& + u^2 \left[ 12 S_0 (S_1^2 + S_0 S_2) + 27 (K_1^2 + 2 K_0 K_1) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + u^3 \left[ 4 s_1 (s_1^2 + 6 s_0 s_2) + 27 (2K_0 K_3 + 2 K_1 K_2) \right] \\
& + u^4 \left[ 12 s_2 (s_1^2 + s_0 s_2) + 27 (K_2^2 + 2 K_1 K_3) \right] \\
& + u^5 \left[ 12 s_1 s_2^2 + 54 K_2 K_3 \right] \\
& + u^6 \left( 4 s_2^3 + 27 K_3^2 \right)
\end{aligned}$$

Si l'on pose :

$$f_0 = 4 s_0^3 + 27 K_0^2$$

$$f_1 = 12 s_0^2 s_1 + 54 K_0 K_1$$

$$f_2 = 12 s_0 (s_1^2 + s_0 s_2) + 27 (K_1^2 + 2 K_0 K_1)$$

$$f_3 = 4 s_1 (s_1^2 + 6 s_0 s_2) + 54 (K_0 K_3 + K_1 K_2)$$

$$f_4 = 12 s_2 (s_1^2 + s_0 s_2) + 27 (K_2^2 + 2 K_1 K_3)$$

$$f_5 = 12 s_1 s_2^2 + 54 K_2 K_3$$

$$f_6 = 4 s_2^3 + 27 K_3^2$$

Alors le discriminant devient :

$$\Delta(A + uB) = f_0 + u f_1 + u^2 f_2 + u^3 f_3 + u^4 f_4 + u^5 f_5 + u^6 f_6$$

b) Technique de la "spirale".

Elle consiste à prouver que pour un certain contrôle  $u_0$ , le champ  $\underbrace{(A + uB)}_0$  est du type II, c'est à dire admet des valeurs propres complexes.

Pour cela on calcul le discriminant  $\Delta(A + uB)$  du polynôme caractéristique qu'on vient d'exprimer dans (III.2.a) en fonction de coefficients

invariants dépendants uniquement de A et de B.

Donc en fait, le problème revient à chercher  $u_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $\Delta(A + u_0 B)$  soit strictement positif.

Or  $\Delta(A + u_0 B) > 0$  n'implique pas que la partie réelle des valeurs propres est non nulle, c'est dans ce cas précisément que le champ  $(A + u_0 B)$  est du type (II).

Dans le cas où la valeur propre réelle coïncide avec la partie réelle des valeurs propres complexes alors on a un champ du type (V), ce type de champ est instable, ce qui nous permettra de nous ramener au cas du type (II).

### (III.3) Résumé des principaux résultats

On va donc étudier la contrôlabilité du système  $(\tilde{A}, \pm \tilde{B})$  sur  $S^2$ , pour cela il y a plusieurs techniques.

On fera l'étude suivant le type de champ donné par la matrice B représentée dans une base de Jordan réelle.

Le champ donné par A étant exprimé dans cette même base. Une classification complète des champs linéaires dans  $\mathbb{R}^3$  selon leur forme réelle de Jordan a été faite dans (II.3)

BE(I) : ce cas a été traité par Gauthier-Bernard [10], d'après le théorème de J.K [14].

En fait une condition suffisante pour que le système  $\{A, \pm B\}$  soit transitif sur  $SL(3, \mathbb{R})$  est que :

- (i)  $\{A, B\}$  vérifie la condition du rang.
- (ii)  $a_{13} \ a_{31} < 0$ .

BE(II) :

On montre que si BE(II) une condition nécessaire et suffisante de complète contrôlabilité sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$  est que  $\{A, B\}$  vérifie la condition du rang. On le démontre géométriquement.

BE(III) :

Dans ce cas, on donnera une condition suffisante de contrôlabilité on utilise la technique qui permet d'obtenir dans le système une spirale.

BE(IV) :

On obtient une condition suffisante de contrôlabilité.

On démontre qu'il existe une spirale dans le système puis géométriquement on prouve qu'on a transitivité sur  $S^2$  et par suite sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ .

B E(V) :

On utilise les techniques d'extension sur la sphère, notamment la stabilité du saturé, pour obtenir une condition suffisante.

B E(VI) :

Pour que  $\{A, \pm B\}$  soit transitif, il faut et il suffit que la condition du rang soit réalisée en tout point.

On utilise la technique de la spirale et on prouve géométriquement la transitivité en s'aidant du théorème de "passage des douanes".

B E(VII) :

On suppose que  $\Delta(A)$  est positif, et géométriquement on montre qu'il suffit de choisir astucieusement la composante, suivant l'axe oz, du champ A au point  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

B EST DU TYPE (I)

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$$

Théorème de Kupka : [6] [19]

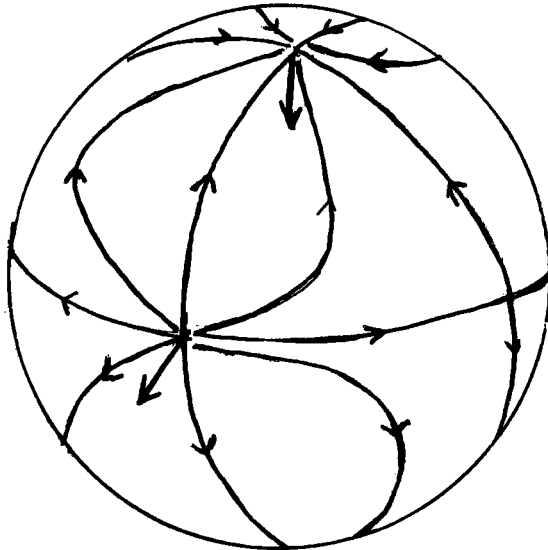
Pour que le système (1) soit transitif sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ , il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

- (i)  $\{A, B\}$  vérifie la condition du rang sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$
- (ii)  $a_{13} \cdot a_{31} < 0$

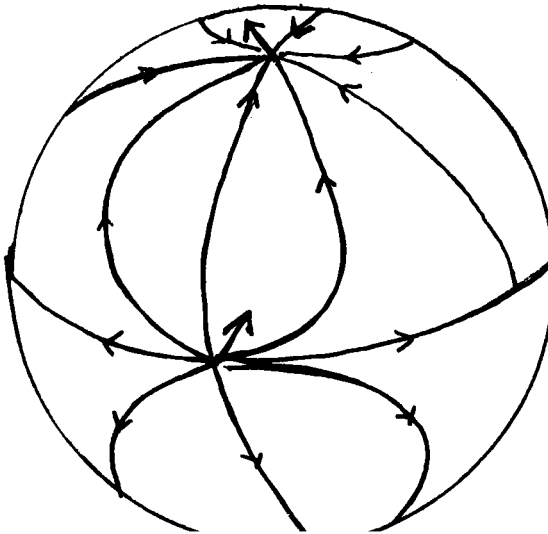
La condition (ii) signifie géométriquement que l'on peut passer de l'hémisphère nord à l'hémisphère sud et réciproquement.

En effet, on a l'une des deux situations suivantes :

$$a_{31} < 0, a_{13} > 0$$



$$a_{31} > 0, a_{13} < 0$$



B EST DU TYPE II

On suppose  $B = \begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$  avec  $\lambda \neq a$

Théorème :

Pour que le système (1) soit transitif sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ , il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

(i)  $(a_{13}, a_{23}) \neq (0,0)$   
(ii)  $(a_{31}, a_{32}) \neq (0,0)$

Pour prouver que les conditions sont nécessaires il suffit de montrer qu'elles sont équivalentes à la condition du rang du système  $\{A, \pm B\}$ .

Pour montrer que le système est transitif sur  $S^2$ , moyennant les conditions (i) et (ii), on utilise le fait que le point singulier  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  de  $\tilde{B}$  est localement contrôlable et qu'il existe un voisinage de l'équateur (D) de  $\tilde{B}$  qui est complètement contrôlable.

Preuve du théorème :

1) Les conditions sont nécessaires :

En effet, si l'une des conditions (i) ou (ii) n'est pas vérifiée, alors la condition du rang n'est pas réalisée en tout point de  $S^2$ .

Lemme 1 :

$$\left( \begin{array}{l} (a_{13}, a_{23}) \neq (0,0) \\ (a_{31}, a_{32}) \neq (0,0) \end{array} \right) \iff \left( \forall x \in S^2 \dim \text{Lie}(\tilde{B})_x = 2 \right)$$

§) Si  $(a_{13}, a_{23}) = (0,0)$   
on aura :  $\tilde{A} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

donc le point  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  est un point singulier de  $\tilde{A}$  et  $\pm \tilde{B}$ , par conséquence la condition du rang n'est pas réalisée en ce point.

§) Si  $(a_{31}, a_{32}) = (0, 0)$

Soit  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$  un point de l'équateur (D) de  $\tilde{B}$ .

on a :

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc :

$$\tilde{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} - \left( A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui signifie que l'équateur (D) est invariant par  $\tilde{A}$ , donc invariant par  $\tilde{F} = \{ \tilde{A}, \pm \tilde{B} \}$ , la condition du rang n'est donc pas réalisée sur (D).

§) Si  $(a_{13}, a_{23}) \neq (0, 0)$

$$(a_{31}, a_{32}) \neq (0, 0)$$

On va prouver plus loin que le système est transitif sur  $S^2$  et par suite la condition du rang est réalisée en tout point de  $S^2$ .

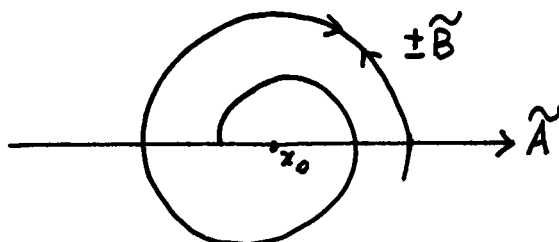
Ce qui achève la preuve du lemme 1.

2) Les conditions sont suffisantes :

Lemme 2 :

si  $(a_{13}, a_{23}) \neq (0, 0)$  alors il existe un voisinage  $V$  de  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  qui est complètement contrôlable.

Preuve : Sur une carte locale, on aura la situation suivante :





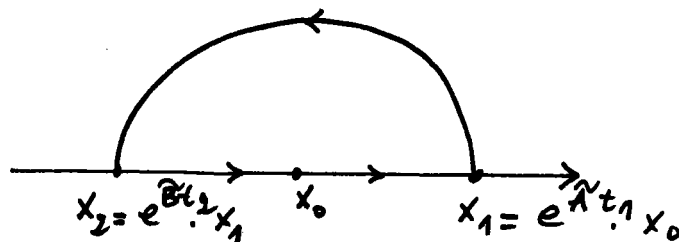
On va montrer que  $X_0$  est auto-normalement accessible.

En effet, à partir de  $X_0$  on peut emprunter la trajectoire de  $A$  pendant un certain temps  $t_1$ .

A partir de  $X_1 = e^{\tilde{A}t_1} X_0$ , on utilise la trajectoire de  $\tilde{B}$  qui coupe la trajectoire de  $\tilde{A}$  au bout d'un temps  $t_2$ .

On choisit  $t_2$  de façon que le point  $X_0$  soit compris entre  $e^{\tilde{A}t_1} X_0$  et

$$e^{\tilde{B}t_2} X_1$$



Le point  $X_0$  est donc auto-normalement accessible.

Il existe deux voisinages  $U_1$  et  $U_2$  de  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  tel que pour tout couple  $(x_1, x_2)$  de  $U_1 \times U_2$ , il existe une trajectoire qui va de  $x_1$  à  $x_2$

On pose :  $V = U_1 \cap U_2$

$V$  est donc complètement contrôlable.

Lemme 3 :

Si  $(a_{31}, a_{32}) \neq (0, 0)$  alors il existe un ouvert autour de l'équateur complètement contrôlable.

On va montrer que tout point de l'équateur (D) est auto-normalement accessible.

En effet, soit  $p$  un point quelconque de l'équateur.

Supposons, sans restreindre la généralité, que  $a_{31} \neq 0$

on sait recaler  $p$  au point  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , puisque  $(D)$  est complètement contrôlable.

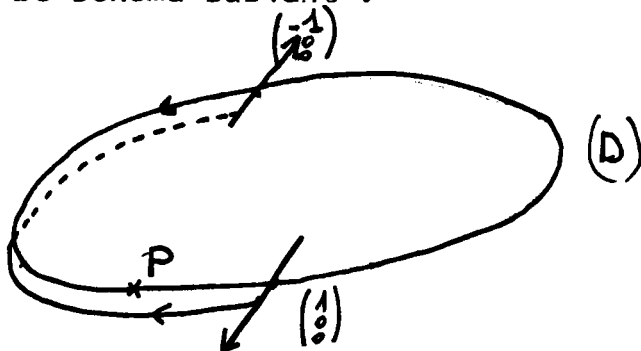
Au point  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , on emprunte la trajectoire de  $\tilde{A}$ , celle-ci va nous permettre de quitter  $(D)$  car la composante suivant  $oz$  de  $\tilde{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  est non nulle.

On atteindra donc un point  $X_1 = e^{\tilde{A}t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  non sur l'équateur.

Avec le champ  $\tilde{B}$  on peut recaler  $X_1$  aussi près que l'on veut du point  $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  et donc pour les mêmes raisons évoquées ci-dessus, on peut le rejoindre.

Comme  $(D)$  est transitif, on sait recaler  $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  à  $p$ .

On peut illustrer ça par le schéma suivant :



Donc on vient de prouver que pour tout point  $p \in (D)$ , il existe un ouvert  $V(p)$  de  $p$  complètement contrôlable.

On pose :  $V = \bigcup_{p \in (D)} V(p)$

$V$  est un ouvert de  $(D)$  qui est complètement contrôlable car  $(D)$  l'est.

Lemme 4 :  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Si le point  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  est localement contrôlable et il existe un voisinage de l'équateur qui est complètement contrôlable alors le système (1) est transitif sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ .

Preuve :

On suppose que  $\tilde{B}$  est a équateur attractif.

Soit  $V$  le voisinage de  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $W$  le voisinage de (D) qui sont complètement contrôlables.

On va prouver par la suite, que tout point de  $V$  peut être recalé à  $W$  et inversement.

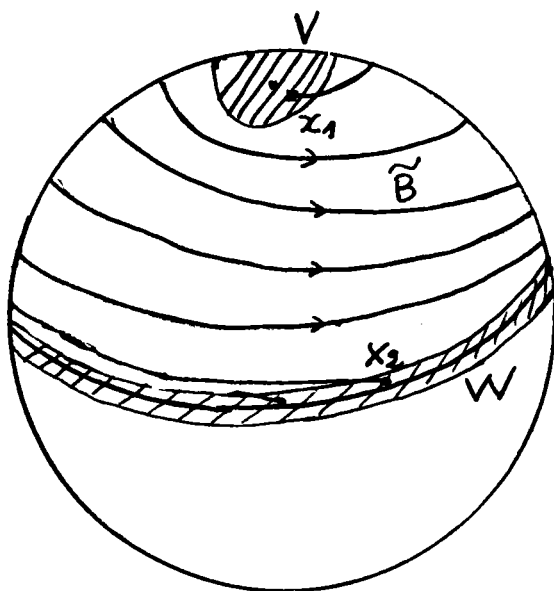
En effet, soit  $x_1 \in V$ , on peut supposer que  $x_1 \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

sinon, on recalc  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  à un point  $x_2$  de  $V$  tel que :  $x_2 \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

A partir de  $x_1$  on emprunte la trajectoire de  $B$ .

On peut recalculer  $x_1$  arbitrairement près de l'équateur, donc à partir d'un certain temps  $\tilde{\epsilon}$ , la trajectoire de  $\tilde{B}$  va être incluse dans  $W$ .

On a la situation suivante :



Réciproquement, soit  $X_3$  un point de  $W$ , on peut supposer  $X_3 \notin (D)$  si non on sait recalculer un point de  $(D)$  à un point de  $W - (D)$ .

On emprunte la trajectoire de  $\tilde{B}$  issue de  $X_3$ . Ce qui permet de recalculer le point  $X_3$  aussi près que l'on veut du point  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Donc à partir d'un certain temps la courbe intégrale de  $\tilde{B}$  va rester à l'intérieur de  $V$ . Ceci achève la preuve du théorème.

Remarque :

Ce résultat n'est pas nouveau, mais on retrouve d'une autre façon la contrôlabilité sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ . En fait c'est une conséquence de [6] [14].

En effet :

Théorème [6] :

On suppose que  $\tilde{B}$  est fortement régulière sur  $SL(3, \mathbb{R})$

Le système  $\{\tilde{A}, \pm \tilde{B}\}$  est transitif sur  $SL(3, \mathbb{R})$  si la condition du rang est réalisée en tout point.

Pour notre cas,  $\tilde{B} \in (II)$  donc elle est fortement régulière.

De plus on peut choisir  $\tilde{A}'$  et  $\tilde{B}'$  dans  $SL(3, \mathbb{R})$ , en effet :

on pose :

$$A' = A - \frac{1}{3} \text{Tr}(A).I$$

$$B' = B - \frac{1}{3} \text{Tr}(B).I$$

$A$  et  $A'$  (resp  $B$  et  $B'$ ) ont la même projection radiale sur  $S^2$ .

Donc les systèmes  $\{A, \pm B\}$  et  $\{A', \pm B'\}$  sont équivalents.

De plus :  $A' \in SL(3, \mathbb{R})$  et  $B' \in SL(3, \mathbb{R})$

Donc pour que le système  $\{A', \pm B'\}$  soit transitif sur  $SL(3, \mathbb{R})$ , il suffit que la condition du rang soit vérifiée.

Or la transitivité de  $\{A', \pm B'\}$  sur  $SL(3, \mathbb{R})$  entraîne celle de  $\{A, \pm B\}$  sur  $SL(3, \mathbb{R})$  et par suite sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ .

B EST DU TYPE III

ie  $B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \quad \lambda \neq \mu$

Théorème :

Pour que le système (1) soit transitif sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ , il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

- (i)  $(a_{11} - a_{22}) a_{13} a_{23} + a_{12} a_{13}^2 - a_{21} a_{23}^2 \neq 0$
- (ii)  $(a_{11} - a_{22})^2 + 4 a_{12} a_{21} < 0$

Remarque :

La condition (i) signifie géométriquement que les champs A et B ne laissent pas invariant un même plan.

En effet, supposant que A et B laissent invariant un plan P.

On va prouver que P est de la forme :

$$P = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by = 0, (a, b) \neq (0, 0) \right\}$$

$$\text{Supposons : } P = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0, (a, b, c) \neq (0, 0, 0) \right\}$$

On peut supposer que  $a \neq 0$  ; donc :

$$x = -\frac{b}{a} y - \frac{c}{a} z$$

P étant invariant par B, on aura alors :

$$B \begin{pmatrix} -\frac{b}{a} y - \frac{c}{a} z \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{b}{a} y - \frac{c}{a} z \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\lambda b}{a} y - \frac{\lambda c}{a} z \\ \lambda y \\ \mu z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Cherchons à quelle condition  $(x', y', z') \in P$

$$ax' + by' + cz' = 0 \iff -\lambda by - \lambda cz + \lambda by + \mu z = 0$$

$$\iff \lambda cz = \mu cz$$

or :  $\lambda \neq \mu$  , donc  $c=0$  C Q F. D

d'où :

$$P = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by = 0, (a, b) \neq (0, 0) \right\}$$

Soit  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$  un vecteur normal à P et H l'orthogonal de  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\text{ie } H = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}^\perp \right\}$$

A laisse P invariant, donc :

$$A H \subset H \iff \left\langle A H / \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \iff \left\langle H / {}^t_A \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\iff \forall h \in H \left\langle h / {}^t_A \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\text{donc : } {}^t_A \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \in H^\perp$$

ce qui signifie que :  ${}^t_A \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$  sont colinéaires.

$${}^t_A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \implies {}^t_A \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}a + a_{21}b \\ a_{12}a + a_{22}b \\ a_{13}a + a_{23}b \end{pmatrix}$$

Or  ${}^t_A \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$  , donc :

$$\begin{pmatrix} a_{11}a + a_{21}b \\ a_{12}a + a_{22}b \\ a_{13}a + a_{23}b \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} - (a_{13}ab + a_{23}b^2) \\ (a_{13}a^2 + a_{23}ab) \\ a_{11}ab + a_{21}b^2 - a_{12}a^2 - a_{22}ab \end{pmatrix}$$

d'où le système :

$$\begin{cases} b(a_{13}a + a_{23}b) = 0 \\ a(a_{13}a + a_{23}b) = 0 \\ (a_{11} - a_{22})ab + a_{21}b^2 - a_{12}a^2 = 0 \end{cases}$$

$(a, b) \neq (0, 0)$ , on a nécessairement le système suivant :

$$\begin{cases} a_{13}a + a_{23}b = 0 & (1) \\ (a_{11} - a_{22})ab + a_{21}b^2 - a_{12}a^2 = 0 & (2) \end{cases}$$

Pour que  $(a_{13}a + a_{23}b) = 0$  soit l'équation d'un plan, il suffit que :

$(a_{13}, a_{23}) \neq (0, 0)$  cette condition est donnée par le 1°)

Les solutions de (1) sont sous la forme :

$$\begin{cases} a = -\lambda a_{23} \\ b = \lambda a_{13} \end{cases} \quad \text{avec } \lambda \neq 0$$

On remplace ces valeurs dans (2) :

$$\lambda^2 \left[ - (a_{11} - a_{22}) a_{13} a_{23} + a_{21} a_{13}^2 - a_{12} a_{23}^2 \right] = 0$$

$$\text{d'où : } (a_{11} - a_{22}) a_{13} a_{23} - a_{21} a_{13}^2 + a_{12} a_{23}^2 = 0$$

Ce qui contredit l'hypothèse 1°).

Donc la condition 1°) prouve que A et B ne laissent pas invariant le même plan.

Preuve du théorème :

D'après ce qui a été dit au début de ce chapitre, il suffit de prouver que  $\tilde{(1)}$  est transitif sur  $S^2$ .

Pour cela, on va montrer, dans le lemme 2, qu'il existe un contrôle  $u_0$  tel que :

a)  $\tilde{A} + u_0 \tilde{B}$  soit une hélice à équateur répulsif.

b)  $\tilde{A} - u_0 \tilde{B}$  soit une hélice à équateur attractif.

Dans cette situation, on prouvera, dans le lemme 3, que le système  $\tilde{(1)}$  est transitif sur  $S^2$ , ce qui permet de conclure sur la contrôlabilité de (1) sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ .

Lemme 1 :

On suppose que  $(\tilde{A} + u \tilde{B})$  est une hélice ; alors :

(i)  $(\tilde{A} + u \tilde{B})$  est à équateur répulsif si et seulement si  $q(u) < 0$

(ii)  $(\tilde{A} + u \tilde{B})$  est à équateur attractif si et seulement si  $q(u) > 0$

Preuve :

Soient  $\alpha, \bar{\alpha}$  les valeurs propres complexes de  $(A + u B)$  et  $\gamma$  sa valeur propre réelle.

On sait que  $(\tilde{A} + u \tilde{B})$  est à équateur répulsif si et seulement si la partie réelle de  $\alpha$  est plus petite que  $\gamma$ . ie  $\text{Re}(\alpha) < \gamma$

Posons :

$$r_1 = \left( -\frac{27}{2} q(u) + \frac{3\sqrt{3}}{2} \sqrt{\Delta(A + u B)} \right)^{1/3}$$

$$r_2 = \left( -\frac{27}{2} q(u) - \frac{3\sqrt{3}}{2} \sqrt{\Delta(A + u B)} \right)^{1/3}$$





Les valeurs propres  $\alpha, \bar{\alpha}$  et  $\gamma$  sont données par :

$$\alpha = \frac{1}{3} (j r_1 + \bar{j} r_2)$$

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{3} (\bar{j} r_1 + j r_2)$$

$$\gamma = \frac{1}{3} (r_1 + r_2)$$

où  $j, \bar{j}$  désignent les racines cubiques de l'unité :

$$\text{donc : } \operatorname{Re}(\alpha) = \frac{\alpha + \bar{\alpha}}{2} = \frac{1}{3} \frac{(j + \bar{j})}{2} (r_1 + r_2) = -\frac{1}{6} (r_1 + r_2)$$

$$\operatorname{Re}(\alpha) < \gamma \iff -\frac{1}{6} (r_1 + r_2) < \frac{1}{3} (r_1 + r_2)$$

$$\iff -\frac{1}{2} (r_1 + r_2) < 0 \iff r_1 + r_2 > 0$$

$$\iff r_1 > -r_2 \iff r_1^3 > -r_2^3$$

$$\iff -\frac{27}{2} q(u) + \frac{3\sqrt{3}}{2} \sqrt{\Delta(A + u B)} > \frac{27}{2} q(u) + \frac{3\sqrt{3}}{2} \sqrt{\Delta(A + u B)}$$

$$\iff -27q(u) > 0 \iff q(u) < 0$$

L'hélice  $(\tilde{A} + u \tilde{B})$  est à équateur répulsif si et seulement si  $q(u) < 0$

Si  $(\tilde{A} + u \tilde{B})$  est à équateur attractif, on fera la même démonstration,

on trouve  $q(u) > 0$ . Ce qui achève la preuve du lemme 1.

Lemme 2 :

Il existe un contrôle  $u_0 \in \mathbb{R}$  tel que :

a) (i)  $\tilde{A} + u_0 \tilde{B}$  est une hélice à équateur répulsif.

(ii)  $\tilde{A} - u_0 \tilde{B}$  est une hélice à équateur attractif.

b) Les deux équateurs sont distincts.

Preuve :

Montrons a)

$$\text{Soit } B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \quad \mu \neq \lambda$$

Sachant que B et  $(B - \lambda I)$  ont même projection radiale sur  $S^2$  ; on peut donc considérer la matrice :

$$B' = (B - \lambda I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu - \lambda \end{pmatrix} \quad \mu - \lambda \neq 0$$

Maintenant on va calculer les coefficients  $f_6$  ;  $f_5$  ;  $f_4$  du discriminant  $\Delta(A + u B)$ . On a :

$$S_2 = -\frac{1}{3} (\mu - \lambda)^2$$

$$K_3 = -\frac{2}{27} (\mu - \lambda)^3. \text{ On remarque que } K_3 \neq 0 \text{ car } \mu \neq \lambda$$

$$S_0 = \sum(A) - \frac{1}{3} (\text{tr } A)^2$$

$$K_1 = -\frac{2}{9} (\text{tr } A)^2 (\mu - \lambda) + \frac{1}{3} \sum(A) (\mu - \lambda) + \frac{1}{3} \sum(A, B) \text{tr } A - \det(A, B)$$

$$\sum(A, B) = (\mu - \lambda) (a_{11} + a_{22})$$

$$\det(A, B) = (\mu - \lambda) (a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12})$$

$$S_1 = \sum(A, B) - \frac{2}{3} \text{tr } A (\mu - \lambda)$$

$$K_2 = -\frac{2}{9} (\text{tr } A) (\mu - \lambda)^2 + \frac{1}{3} \sum(A, B) (\mu - \lambda)$$

$$K_0 = -\frac{2}{27} (\text{tr } A)^3 + \frac{1}{3} \sum(A) \text{tr } A - \det A$$

donc :

$$f_6 = 4 S_2^3 + 27 K_3^2 = -\frac{4}{27} (\mu - \lambda)^6 + 27 \frac{4}{(27)^2} (\mu - \lambda)^6 = 0$$

$$f_5 = 12 S_1 S_2^2 + 54 K_2 K_3$$

$$\begin{aligned}
&= 12 \left[ \sum(A, B) - \frac{2}{3} (\text{Tr } A) (\mu - \lambda) \right] \left( -\frac{1}{3} (\mu - \lambda)^2 \right)^2 + 54 \left[ -\frac{2}{9} \text{tr} A (\mu - \lambda)^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{3} \sum(A, B) (\mu - \lambda) \right] \left( -\frac{2}{27} (\mu - \lambda)^3 \right) \\
&= \frac{4}{3} (\mu - \lambda)^4 \left[ \sum(A, B) - \frac{2}{3} \text{tr} A (\mu - \lambda) + \frac{2}{3} \text{tr} A (\mu - \lambda) - \sum(A, B) \right] = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_4 &= 12 S_2 (S_1^2 + S_0 S_2) + 27 (K_2^2 + 2 K_1 K_3) \\
&= 12 \left( -\frac{1}{3} (\mu - \lambda)^2 \right)^2 \left[ \sum(A, B) - \frac{2}{3} \text{tr} A (\mu - \lambda)^2 + \left( \sum(A) - \frac{1}{3} (\text{tr} A)^2 \right) \times \right. \\
&\quad \left. \left( -\frac{1}{3} (\mu - \lambda)^2 \right) \right] + 27 \left[ \left( -\frac{2}{9} \text{tr} A (\mu - \lambda)^2 + \frac{1}{3} \sum(A, B) (\mu - \lambda) \right)^2 + 2 \left( -\frac{2}{9} (\text{tr} A)^2 (\mu - \lambda) \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{3} \sum(A) (\mu - \lambda) + \frac{1}{3} \sum(A, B) \text{tr} A - \det(A, B) \right] \left( -\frac{2}{27} (\mu - \lambda)^3 \right) \\
&= (\mu - \lambda)^4 \left[ 4 (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) - (a_{11} + a_{22})^2 \right] \\
&= -(\mu - \lambda)^4 \left[ (a_{11} - a_{22})^2 + 4 a_{12} a_{21} \right]
\end{aligned}$$

$(a_{11} - a_{22})^2 + 4 a_{12} a_{21}$  étant négatif donc  $f_4$  est positif.

Dans ce cas,  $(A + u B)$  est un polynôme d'ordre 4, dont le coefficient  $f_4$  est positif. On sait donc qu'il existe  $u_1 \in \mathbb{R}$  vérifiant :

$$\forall u \in \mathbb{R} \text{ si } |u| > |u_1| \text{ alors } \Delta(A + u B) > 0 \quad (*)$$

d'autre part, sachant que :

$$q(u) = K_0 + u K_1 + u^2 K_2 + u^3 K_3$$

avec, comme on l'a remarqué :  $K_3 = 0$

On peut donc choisir  $u_0$  vérifiant  $(\Psi)$  et tel que :

$$\begin{cases} q(u_0) < 0 \\ q(-u_0) > 0 \end{cases} \quad (**)$$

donc  $u_0$  vérifie :

$$\begin{cases} \Delta(A + u_0 B) > 0 \text{ et } q(u_0) < 0 \\ \Delta(A - u_0 B) > 0 \text{ et } q(-u_0) > 0 \end{cases}$$

Ceci signifie, d'après le lemme 1, que  $\tilde{A} + u_0 \tilde{B}$  est une hélice à équateur répulsif et  $\tilde{A} - u_0 \tilde{B}$  est une hélice à équateur attractif.

Montrons b) :

Supposons que les deux équateurs de  $(\tilde{A} + u_0 \tilde{B})$  et  $(\tilde{A} - u_0 \tilde{B})$  ne sont pas distincts.

Donc  $(A + u_0 B)$  et  $(A - u_0 B)$  laissent un même plan  $P$  invariant.

La somme  $(A + u_0 B) + (A - u_0 B)$  laisse invariant le plan  $P$ .

La différence  $(A + u_0 B) - (A - u_0 B)$  laisse  $P$  invariant.

Donc :  $A$  et  $B$  laissent  $P$  invariant, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse 1°). Ce qui achève la preuve du lemme 2.

On a donc montré qu'il existe deux hélices  $\tilde{H}_1$  et  $\tilde{H}_2$  telle que l'une est à équateur répulsif et l'autre à équateur attractif.

De plus, leurs plans équatoriaux sont distincts d'après le lemme 2.

On va démontrer un lemme qui nous permet de conclure sur la transitivité de  $(\tilde{1})$  sur  $S^2$ . Ce qui achèvera alors la preuve du théorème.

Lemme 3 :

Soit  $\tilde{\mathcal{F}}$  une F.C.V sur  $S^2$ . Si  $\tilde{\mathcal{F}}$  contient deux hélices  $\tilde{Z}_1$  et  $\tilde{Z}_2$  à équateur distinct telle que  $\tilde{Z}_1$  est à équateur répulsif et  $\tilde{Z}_2$  à équateur attractif alors  $\tilde{\mathcal{F}}$  est transitive sur  $S^2$ .

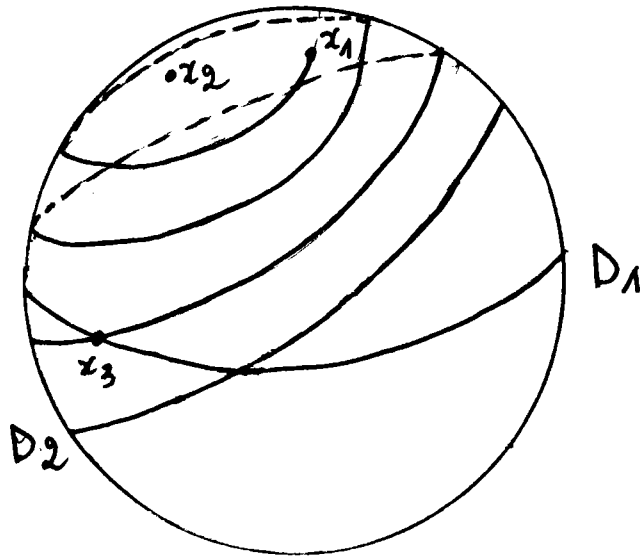
Preuve :

Soit  $x_1 \in S^2$  tel que  $\tilde{Z}_1(x_1) = 0$  et soit  $D_1$  l'équateur de  $\tilde{Z}_1$ . La démonstration de ce lemme consiste à recaler le point  $x_1$  à  $D_1$  et réciproquement.

$\tilde{Z}_2(x_1) \neq 0$ , ce qui permet de bouger  $x_1$  avec le champ  $\tilde{Z}_2$ .

L'hélice  $\tilde{Z}_2$  étant descendante, on peut recalculer  $x_1$  aussi près que l'on veut de l'équateur  $D_2$  de  $\tilde{Z}_2$ .

$\tilde{Z}_1$  et  $\tilde{Z}_2$  sont indépendantes donc les deux équateurs  $D_1$  et  $D_2$  se coupent.



Donc le point singulier  $x_1$  est recalable à  $D_1$ .

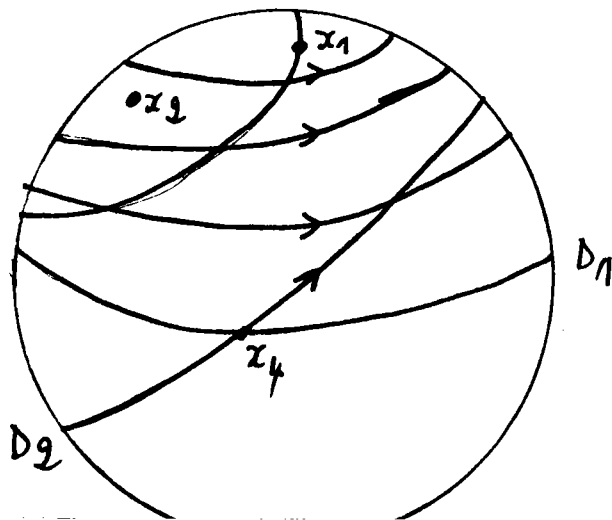
Réciproquement soit  $x_4$  un point d'intersection de  $D_1$  avec  $D_2$  ie

$$x_4 \in D_1 \cap D_2.$$

On suivra la trajectoire de  $D_2$  tel que l'on soit dans l'hémisphère contenant  $x_1$ . L'hélice  $\tilde{Z}_1$  étant montante, donc on peut recalculer le point  $x_4$  de  $D_1$  aussi près qu'on veut de  $x_1$ .

D'après ce qui a été dit ci-dessus, il existe une trajectoire de  $\tilde{Z}_2$  passant par  $x_1$ .

Cette trajectoire coupera nécessairement l'hélice  $\tilde{Z}_1$ .



L'équateur  $D_1$  est contrôlable ; donc on vient de montrer que tout point de l'équateur est recalable à  $x_1$ . Ce qui achève la preuve du lemme 3.

---

B EST DU TYPE IV

C'est à dire :  $B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$  avec  $\mu \neq \lambda$

L'étude du système (1) se fera en deux étapes :  $a_{21} \neq 0$  et  $a_{21} = 0$  et selon le cas, la technique utilisée est différente.

1er cas :  $a_{21} \neq 0$

Théorème :

Une condition suffisante de contrôlabilité sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ , est que le système (1) vérifie :

$$a_{31} a_{23} > 0$$

Preuve :

Dans ce cas nous allons montrer qu'il existe un contrôle  $u_0 \in \mathbb{R}$  telle que  $(\tilde{A} + u_0 \tilde{B})$  soit du type II (hélice)

La condition 2) exprimera le fait qu'on peut trouver une courbe continue passant par un point singulier de  $\tilde{B}$  et s'approchant aussi près que l'on veut de son point anti-podale qui lui aussi est un point singulier de  $\tilde{B}$ .

Pour la démonstration, nous utiliserons le fait qu'un méridien sépare strictement la sphère en deux hémisphères  $H_1$ ,  $H_2$  et que toute courbe continue issue d'un point  $p$  non contenu dans ce méridien et s'approchant arbitrairement près de  $(-p)$  ( $-p$  est l'antipodale de  $p$ ) rencontre le méridien en un point intérieur de la courbe.

Lemme 1 :

Si  $a_{21} \neq 0$ , il existe  $u_0 \in \mathbb{R}$  telle que  $\tilde{A} + u_0 \tilde{B}$  soit un champ du type (II).

Preuve :

Considérons la matrice  $B' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu - \lambda \end{pmatrix}$  on sait que B et B' ont la même projection radiale sur  $S^2$ .

Dans ce qui suit, on va calculer les coefficients  $f_6$  et  $f_5$  du discriminant  $\Delta(A + u B)$

$$\text{On a : } S_1 = \sum (A, B) - \frac{2}{3} \text{tr} A (\mu - \lambda)$$

$$S_2 = -\frac{1}{3} (\mu - \lambda)^2$$

$$K_2 = -\frac{2}{9} \text{tr} A (\mu - \lambda)^2 + \frac{1}{3} \sum (A, B) (\mu - \lambda) - \det (B, A)$$

$$K_3 = -\frac{2}{27} (\mu - \lambda)^3 \text{ } \mu \text{ étant différent de } \lambda \text{ donc } K_3 \neq 0$$

$$\det (B, A) = -a_{21} (\mu - \lambda)$$

D'où :

$$f_6 = 4 S_2^3 + 27 K_3^2 = -\frac{4}{27} (\mu - \lambda)^6 + 27 \frac{a_{21}^2}{(27)^2} (\mu - \lambda)^6 = 0$$

$$\begin{aligned} f_5 &= 12 S_1 S_2^2 + 54 K_2 K_3 = 12 \left( \sum (A, B) - \frac{2}{3} \text{tr} A (\mu - \lambda) \right) \times \\ &\quad \left( \frac{1}{9} (\mu - \lambda)^4 \right) + 54 \left( -\frac{2}{9} \text{tr} A (\mu - \lambda)^2 + \frac{1}{3} \sum (A, B) (\mu - \lambda) \right. \\ &\quad \left. - \det (B, A) \right) \left( -\frac{2}{27} (\mu - \lambda)^3 \right) \\ &= 4 \det(B, A) (\mu - \lambda)^3 = -a_{21} (\mu - \lambda)^4 \end{aligned}$$

Comme  $a_{21} \neq 0$ , donc  $f_5 \neq 0$



Par conséquent il existe  $u_0 \in \mathbb{R}$  telle que :

$$\Delta(A + u_0 B) > 0 \quad (*)$$

$$q(u_0) \neq 0 \quad (**)$$

La condition  $(**)$  peut être réalisée car  $K_3 \neq 0$

On vient donc de montrer qu'il existe  $u_0 \in \mathbb{R}$  telle que  $\tilde{A} + u_0 \tilde{B}$  soit une hélice, ce qui achève la preuve du lemme 1.

Lemme 2 :

La condition  $a_{23} a_{31} > 0$  va nous permettre de construire une courbe partant d'un point singulier  $P$  de  $\tilde{B}$  et passant aussi près que l'on veut de son antipodale  $(-p)$ .

Preuve :

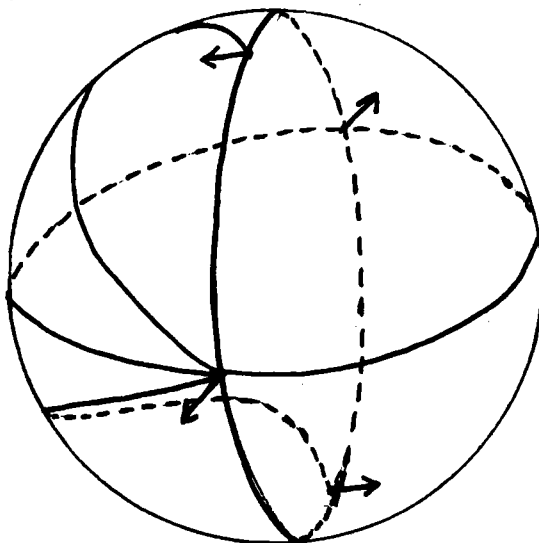
On va prouver le lemme 2 pour le point singulier de  $\tilde{B}$ ,  $N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , ce qui ne change rien à la généralité car un même raisonnement conduira au même résultat en prenant un autre point singulier de  $\tilde{B}$  qui ne lui est pas symétrique  $+\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  par exemple.

La condition du rang prouve qu'il existe une trajectoire qui passe par  $N$  et qui le ramène, suivant le signe  $(a_{23})$ , dans :

(i) l'hémisphère  $H_1 = \left\{ (x, y, z) \in S^2 \mid y > 0 \right\}$  si  $a_{23} > 0$

(ii) l'hémisphère  $H_2 = \left\{ (x, y, z) \in S^2 \mid y < 0 \right\}$  si  $a_{23} < 0$

On va faire la démonstration dans le cas où  $a_{23} < 0$ , ce qui ne restreint pas la généralité.



D'après ce qui vient d'être dit, il existe une trajectoire qui ramène le point singulier de  $\tilde{B}$ ,  $N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  à l'hémisphère  $H_2$ .

A l'aide des trajectoires de  $\tilde{B}$  qui sont parcourues dans les deux sens du temps, tout point de  $H_2$  peut être recalé arbitrairement près du point  $P(1,0,0)$ , or,  $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  est un vecteur transversal au plan équatorial, donc il existe un voisinage  $V$  de  $(1,0,0)$  tel que tout  $\chi \in V$ ,  $A\chi$  est transverse au plan équatorial.

Par conséquent, tout point de  $H_2$  est recalé dans  $V$ , et est ramené à l'aide des trajectoires de  $\tilde{B}$  arbitrairement près de  $(-N)$ , l'antipodale de  $N$ .

Finalement, on a construit une courbe issue de  $N$  et s'approchant aussi près que l'on veut de  $(-N)$ .

Il est clair que dans la démonstration, on a eu besoin du fait que  $a_{31} < 0$ , ce qui nous a permis de recaler le point  $N$  à  $H_2 \cap E$

où  $E = \left\{ (x,y,z) \in S^2 / z < 0 \right\}$ .

### Lemme 3 :

Soit  $(D)$  l'équateur d'une hélice et  $p$  un point de  $S^2$  non contenu dans  $(D)$ .

Si  $T$  est une courbe continue qui relie  $p$  à un point arbitrairement près du point antipodale  $(-p)$  de  $p$ , alors  $T$  coupe l'équateur ; ie  $T \cap (D) \neq \emptyset$ .

Le lemme 3 achève la démonstration du théorème ; en effet :

Remarquons d'abord que l'équateur de l'hélice  $(\tilde{A} + u_0 \tilde{B})$  trouvé au lemme 1, ne peut pas passer par les quatre points singuliers de  $\tilde{B}$ , à savoir  $\pm \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\pm \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , sinon on aurait le plan  $(0,z)$  qui serait invariant.

Donc :

$$A \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{13}z \\ a_{21}x + a_{23}z \\ a_{31}x + a_{33}z \end{pmatrix}$$

Il faut donc que :  $\forall x, z, a_{21}x + a_{23}z = 0$

Ce qui impose :  $a_{21} = a_{23} = 0$  ; c'est en contradiction avec  $a_{31} a_{23} > 0$ .

Supposant, sans restreindre la généralité, que le point singulier  $N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  de  $\tilde{B}$  n'est pas situé sur l'équateur de l'hélice  $(\tilde{A} + u_0 \tilde{B})$ .

D'après le lemme 2, il existe une trajectoire construite par concaténations des champs  $\tilde{A}$  et  $\pm \tilde{B}$  et qui relie le point N suffisamment près de son antipodale  $(-N)$  de même, en raison de la symétrie de la sphère  $S^2$ , il existe une trajectoire issue de  $(-N)$  et s'approchant suffisamment près de N.

Par conséquence tout point de la sphère peut être atteint ou recalé à l'équateur en utilisant le lemme 3 ; ce qui permet alors de conclure sur la transitivité de  $(1)$  sur  $S^2$  et par suite de (1) sur

$$\mathbb{R}^3 - \{0\}.$$

Reste donc à prouver le lemme 3.

Preuve de lemme 3 :

(D) étant l'équateur donc il sépare strictement la sphère  $S^2$  en deux hémisphères  $A_1$  et  $A_2$ .

Il est clair que si p est dans  $A_1$  alors  $(-p)$  est dans  $A_2$  et inversement.

La courbe T est continue et joint un point de  $A_1$  à un point de  $A_2$ .

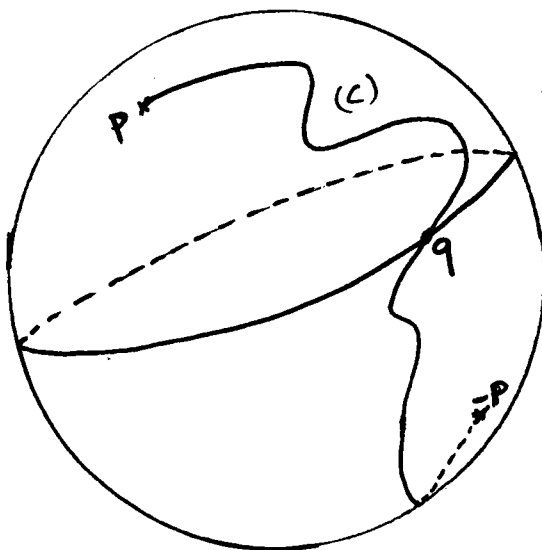
Or :  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ , donc d'après le théorème du passage des douanes, énoncé ci-dessous, T contient un point de la frontière ie de l'équateur (D).

Théorème du passage des douanes :

Soit  $X$  un espace topologique et  $A \subset X$ .

Soit  $C$  un connexe contenant un point de  $A$  et un point de  $A^c$   
alors  $C$  contient un point  $q$  de la frontière.

Ce qu'on peut illustrer par le dessin suivant :



2ème cas :  $a_{21} = 0$

---

Théorème :

Le système (1) est transitif sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$  si en plus de la condition du rang on a :

$$(\mu - \lambda) \left[ 4 a_{31} a_{23} - (\mu - \lambda) (a_{11} - a_{22})^2 \right] > 0$$

On va montrer qu'il existe  $u_0 \in \mathbb{R}$  tel que :

- (i)  $\tilde{A} + u_0 \tilde{B}$  soit une hélice à équateur attractif.
- (ii)  $\tilde{A} - u_0 \tilde{B}$  soit une hélice à équateur répulsif.

Ce qui nous permettra de conclure d'après le lemme 3 du (III.3)

Preuve :

On va calculer les coefficients  $f_6$ ,  $f_5$ , et  $f_4$  du discriminant

$\Delta(A + u B)$ , on trouve :

$$\Sigma(A, B) = (\mu - \lambda) (a_{11} + a_{22})$$

$$S_0 = \Sigma(A) - \frac{1}{3} (\text{tr } A)^2$$

$$K_1 = -\frac{2}{9} (\text{tr } A)^2 (\mu - \lambda) + \frac{1}{3} \Sigma(A) (\mu - \lambda) + \frac{1}{3} \Sigma(A, B) \text{tr } A - \det(A, B)$$

$$\det(A, B) = a_{31} a_{23} + (\mu - \lambda) a_{11} a_{22}$$

$$\text{d'où : } f_6 = f_5 = 0$$

$$f_4 = 12 S_2 (S_1^2 + S_0 S_2) + 27 (K_2^2 + 2 K_1 K_3)$$

$$\begin{aligned} &= -4 (\mu - \lambda)^2 \left[ \Sigma^2(A, B) - \frac{4}{3} \Sigma(A, B) \text{tr } A (\mu - \lambda) + \frac{4}{9} (\text{tr } A)^2 \right. \\ &\quad \left. (\mu - \lambda)^2 - \frac{1}{3} \Sigma(A) (\mu - \lambda)^2 + \frac{1}{9} (\text{tr } A)^2 (\mu - \lambda)^2 \right] + 27 \left[ \frac{4}{9} (\text{tr } A)^2 \right. \\ &\quad \left. (\mu - \lambda)^4 + \frac{1}{9} \Sigma^2(A, B) (\mu - \lambda)^2 + \det^2(B, A) - \frac{4}{27} \Sigma(A, B) (\text{tr } A)^2 \right. \\ &\quad \left. (\mu - \lambda)^3 - \frac{2}{3} \Sigma(A, B) \det(B, A) (\mu - \lambda) + \frac{4}{9} \det(B, A) (\text{tr } A)^2 \right. \\ &\quad \left. (\mu - \lambda)^2 + \frac{8}{27 \times 9} (\text{tr } A)^2 (\mu - \lambda)^4 - \frac{4}{27 \times 3} \Sigma(A) (\mu - \lambda)^4 - \frac{4}{27 \times 3} \right. \\ &\quad \left. \Sigma(A, B) \text{tr } A (\mu - \lambda)^3 + \frac{4 \det(A, B)}{27} (\mu - \lambda)^3 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_4 &= (\mu - \lambda)^2 \left[ 4 (\mu - \lambda) \det(A, B) - \Sigma^2(A, B) \right] = (\mu - \lambda)^3 \times \\ &\quad \left[ 4 a_{31} a_{23} - (\mu - \lambda) (a_{11} - a_{22})^2 \right] \end{aligned}$$

D'après nos hypothèses,  $f_4$  est donc positif.

Il existe  $u_0 \in \mathbb{R}$  tel que :

$$(*) \quad \begin{cases} \Delta(A + u_0 B) > 0 \\ \Delta(A - u_0 B) > 0 \end{cases}$$

De plus on a  $q(u) = K_0 + uK_1 + u^2 K_2 + u^3 K_3$

$$\text{et } K_3 = -\frac{2}{27} (u - \lambda)^3 \neq 0 \quad \text{car } u \neq \lambda$$

Donc on peut affirmer qu'il existe  $u_0 \in \mathbb{R}$  vérifiant (\*) et telle que :

$$(**) \quad \begin{cases} q(u_0) > 0 \\ q(-u_0) < 0 \end{cases}$$

Les deux conditions (\*) et \*\* prouvent qu'il existe deux hélices  $\tilde{Z}_1$  et  $\tilde{Z}_2$  telles que l'une est à équateur attractif et l'autre à équateur répulsif, et donc d'après le lemme 3 du (III.3) le système ( $\tilde{1}$ ) est transitif sur  $S^2$  et donc (1) l'est sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ . Ce qui achève la preuve du 2ème cas.

B EST DU TYPE V

C'est à dire  $B = \begin{pmatrix} \lambda & -u & 0 \\ u & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Théorème :

On suppose que  $A = (a_{ij})$  possède des valeurs propres complexes et la condition du rang réalisée en tout point de  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ .

Si 1°)  $\left(-\frac{2}{27} (\text{tr } A)^3 + \frac{1}{3} \Sigma(A) \text{tr } A - \det A\right) (a_{11} + a_{22} - 2a_{33}) < 0$

2°) l'une des deux conditions (i) et (ii) suivantes est vérifiée :

(i)  $a_{12} \neq a_{21}$

(ii)  $a_{33} \neq 0$

Alors le système (1) est transitif sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ .

Pour la démonstration de ce résultat, on utilisera les propriétés du saturé de  $\mathcal{F}$ . En effet, d'après les propriétés du  $\text{Sat}(\mathcal{F})$  [24], énoncés au chapitre I. On a :

1)  $\pm B \in \mathcal{F} \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}, e^{tB} A e^{-tB} \in \text{Sat}(\mathcal{F})$ .

2) Le saturé de  $\mathcal{F}$  est stable pour les combinaisons positives :

donc :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}, \left( \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n-1} e^{(2\pi pt)B} A e^{(-2\pi pt)B} \right) \in \text{Sat}(\mathcal{F})$

3)  $\text{Sat}(\mathcal{F})$  est fermé, donc :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{n} \left( \sum_{p=0}^{n-1} e^{(2\pi pt)B} A e^{(-2\pi pt)B} \right) \right] = c \in \text{Sat}(\mathcal{F})$$

En calculant cette quantité, on trouve une matrice hyperbolique complexe H. La condition 1°) prouve que si l'équateur de A est transitif alors celui de H est attractif et inversement.

Preuve :

Il suffit de considérer la matrice  $B' = \begin{pmatrix} 0 & -u & 0 \\ u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  car B et B' ont même projection radiale sur  $S^2$ .

On sait que :

$$e^{tB'} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc :

$$e^{tB'} A = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \cos t + a_{21} \sin t & a_{12} \cos t + a_{22} \sin t & a_{13} \cos t + a_{23} \sin t \\ -a_{11} \sin t + a_{21} \cos t & -a_{12} \sin t + a_{22} \cos t & -a_{13} \sin t + a_{23} \cos t \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$e^{tB'} A e^{-tB'} = e^{tB'} A \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$



Avec :

$$A_{11} = a_{11} \cos^2 t + a_{22} \sin^2 t + (a_{21} + a_{12}) \sin t \cos t$$

$$A_{12} = a_{12} \cos^2 t - a_{21} \sin^2 t + (a_{22} - a_{11}) \sin t \cos t$$

$$A_{13} = a_{13} \cos t + a_{23} \sin t$$

$$A_{21} = a_{21} \cos^2 t - a_{12} \sin^2 t + (a_{22} - a_{11}) \cos t \sin t$$

$$A_{22} = a_{22} \cos^2 t + a_{11} \sin^2 t - (a_{21} + a_{12}) \sin t \cos t$$

$$A_{23} = a_{23} \cos t - a_{13} \sin t$$

$$A_{31} = a_{31} \cos t + a_{32} \sin t$$

$$A_{32} = a_{32} \cos t - a_{31} \sin t$$

$$A_{33} = a_{33}$$

Maintenant on va calculer :

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{n} \left( \sum_{p=0}^{n-1} e^{(2\pi pt)B} A e^{-(2\pi pt)B} \right) \right] = \int_0^{2\pi} e^{tB'} A e^{-tB'} dt$$

$$\text{On a : } \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \cos t dt = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin t dt = 0$$

$$\text{Donc : } \int_0^{2\pi} A_{11} dt = \pi (a_{11} + a_{22})$$

$$\int_0^{2\pi} A_{12} dt = \pi(a_{12} - a_{21})$$

$$\int_0^{2\pi} A_{13} dt = 0$$

$$\int_0^{2\pi} A_{21} dt = \pi(a_{12} - a_{21})$$

$$\int_0^{2\pi} A_{22} dt = \pi(a_{11} + a_{22})$$

$$\int_0^{2\pi} A_{23} dt = \int_0^{2\pi} A_{31} dt = \int_0^{2\pi} A_{32} dt = 0$$

$$\int_0^{2\pi} A_{33} dt = 2\pi a_{33}$$

d'où :

$$C = \int_0^{2\pi} e^{tB'} A e^{-tB'} dt = \begin{pmatrix} \pi(a_{11} + a_{22}) & \pi(a_{12} - a_{21}) & 0 \\ -\pi(a_{12} - a_{21}) & \pi(a_{11} + a_{22}) & 0 \\ 0 & 0 & 2\pi a_{33} \end{pmatrix}$$

le cas : supposons que (i) soit vérifiée, donc :  $a_{12} \neq a_{21}$

la matrice C est donc hyperbolique dans  $\mathbb{C}$ ,  $\tilde{C}$  est une hélice sur  $S^2$ .

En calculant la différence entre la partie réelle de la valeur propre complexe de C et la valeur propre réelle, on est ramené à discuter les trois sois-cas suivants :

1)  $a_{11} + a_{22} - 2a_{33} < 0$

dans ce cas l'équateur (D') de  $\tilde{C}$  est répulsif.

Pour avoir la transitivité sur  $S^2$ , il suffit que l'équateur (D) de  $\tilde{A}$  soit attractif, donc  $K_0 > 0$

2)  $a_{11} + a_{22} - 2a_{33} > 0$

(D') l'équateur de  $\tilde{C}$  est attractif, il suffit donc que l'équateur (D) de  $\tilde{A}$  soit répulsif pour avoir contrôlabilité sur  $S^2$ , donc  $K_0 < 0$ .

d'où l'on a :  $K_0 (a_{11} + a_{22} - 2a_{33}) < 0$

Ce qui achève la preuve dans le cas où  $a_{12} \neq a_{21}$

2ème cas : on suppose que la condition (ii) est vérifiée et (i) ne l'est pas.

Donc :  $a_{33} \neq 0$  et  $a_{12} = a_{21}$

Dans ce cas la matrice C devient :

$$C = \pi \begin{pmatrix} a_{11} + a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} + a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 2a_{33} \end{pmatrix}$$

Or  $C \in \text{Sat}(\mathcal{F})$ ,  $\pm B \in \mathcal{F}$

donc :  $\{C, \pm B\} \subset \text{Sat}(\mathcal{F}) \Rightarrow \{C + uB, u \in \mathbb{R}\} \subset \text{Sat}(\mathcal{F})$ .

On va calculer les coefficients  $f'_0, f'_1, f'_2, f'_3, f'_4$  de  $\Delta(C + uB)$

$$\text{On a : } S'_0 = -\frac{1}{3} (2a_{33} - a_{11} - a_{22})^2$$

$$K'_0 = -\frac{2}{27} (2a_{33} - a_{11} - a_{22})^3$$

$$\left. \begin{array}{l} \Sigma(C, B) = 0 \\ \det(C, B) = 0 \\ S'_1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow K'_1 = 0$$

$$\det(B, C) = 2a_{33} \pi u^2 \Rightarrow K'_2 = -\det(B, C) = -2a_{33} \pi u^2$$

$$\text{Donc : } f'_0 = f'_1 = f'_2 = f'_3 = 0$$

$$f'_4 = 27 K'_2{}^2 = 108 a_{33}^2 \pi^2 u^4$$

$$a_{33} \neq 0 ; u \neq 0 \Rightarrow f'_4 > 0$$

Donc il existe un contrôle  $u_0 \in \mathbb{R}$  tel que :  $\tilde{C} + u_0 \tilde{B}$  soit une hélice.

De plus on peut choisir  $u_0$  assez petit pour que :  $q'(u_0)$  et  $K'_0$  aient le même signe.

Pour que le système (1) soit transitif sur  $S^2$ , il suffit que :

$$K'_0 K_0 < 0.$$

$$\begin{aligned} \text{C'est à dire :} \quad & -\frac{2}{27} K_0 (2a_{33} - a_{11} - a_{22})^3 < 0 \\ \implies & K_0 (2a_{33} - a_{11} - a_{22}) > 0 \\ \implies & K_0 (a_{11} + a_{22} - 2a_{33}) < 0 \end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve du théorème.

Corollaire 1 : On suppose que A est du type (IV)

Pour que (1) soit transitif sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ , il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

$$1) \left( -\frac{2}{27} (\text{tr } A)^3 + \frac{1}{3} \Sigma(A) \text{tr } A - \det A \right) (a_{11} + a_{22} - 2a_{33}) < 0$$

$$2) \alpha_1 \Sigma(A, B) - \det(A, B) \neq 0$$

où  $\alpha_1$  désigne la valeur propre de multiplicité deux de A.

La condition 2) prouve l'existence d'une hélice H pour u assez petit, la condition 1) impose à H d'être de sens inverse que celle trouvée dans le saturé.

Corollaire 2 : Supposons que A est du type III

Pour que (1) soit transitif sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$  il suffit que :

$$1) \left( -\frac{2}{27} (\text{tr } A)^3 + \frac{1}{3} \Sigma(A) \text{tr } A - \det A \right) (a_{11} + a_{22} - 2a_{33}) < 0$$

$$2) \frac{1}{9} \Sigma^2(A, B) (\alpha_1 - \alpha_2) - 4 \det(A, B) \neq 0$$

où  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont les valeurs propres de A.

B EST DU TYPE VI

ie : B est la matrice nilpotente d'ordre deux.

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Théorème :

Pour que le système (1) soit transitif sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ , il faut et il suffit que la condition du rang soit vérifiée en tout point.

On montrera que si B est le nilpotent d'ordre deux, alors il existe un contrôle  $u_0$  tel que :  $(A + u_0 B)$  admette des valeurs propres complexes.

L'équateur (E) de  $(A + u_0 B)$ , la projection radiale de  $(A + u_0 B)$  sur  $S^2$ , ne peut pas coïncider avec le noyau de  $\tilde{B}$  et ne contient ni  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  ni  $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Par conséquent le point singulier  $X_0$  de l'hélice  $(A + u_0 B)$  vérifie :

$$\begin{aligned} X_0 &\notin \text{Ker } \tilde{B} \\ X_0 &\neq \pm \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On démontre alors que dans ces conditions  $X_0$  peut être recalé à l'équateur (E) et inversement. Ce qui achèvera la preuve du théorème.

Preuve :

La condition du rang est évidemment nécessaire [29].

Montrons qu'elle est suffisante, pour cela on va énoncer et démontrer certains lemmes qui nous permettront de conclure.

Lemme 1 :

Si B est la matrice nilpotente d'ordre 2, et si le système (1) vérifie la condition du rang, alors il existe un contrôle  $u_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $(A + u_0 B)$  admette des valeurs propres complexes.

Preuve :

En effet on a :

$$f_6 = 4 S_2^3 + 27 K_3^2$$

$$f_5 = 12 S_1 S_2^2 + 54 K_2 K_3$$

or :  $S_2 = K_3 = 0 = K_2$

donc :  $f_6 = f_5 = 0$

$$f_4 = 12 S_2 (S_1^2 + S_0 S_2) + 27 (K_2^2 + 2 K_1 K_3) = 27 K_2^2$$

$$K_2 = -\frac{2}{9} (\text{tr } A) (\text{tr } B)^2 + \frac{1}{3} \sum(A, B) (\text{tr } B) + \frac{1}{3} \sum(B) \text{tr } A - \det(B, A) = 0$$

donc  $f_4 = 0$

$$f_3 = 4 S_1 (S_1^2 + 6 S_0 S_2) + 27 (2 K_0 K_3 + 2 K_1 K_2) = 4 S_1^3$$

$$S_1 = \sum(A, B) - \frac{2}{3} (\text{tr } A) (\text{tr } B) = \sum(A, B) = -a_{21}$$

Si  $a_{21} \neq 0$  alors  $f_3 \neq 0$

On peut donc choisir  $u_0$  tel que :  $\Delta(A + u_0 B)$  soit positive.

Supposons le cas où  $a_{21} = 0$

$$a_{21} = 0 \implies S_1 = 0 \implies f_3 = 0$$

$$f_2 = 12 S_0 (S_1^2 + S_0 S_2) + 27 (K_1^2 + 2 K_0 K_2) = 27 K_1^2$$

$$K_1 = -\frac{2}{9} (\text{tr } A)^2 (\text{tr } B) + \frac{1}{3} \sum (A) \text{tr } B + \frac{1}{3} \overline{\sum (A, B)} \text{tr } A - \det (A, B)$$

$$= \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= -a_{31} a_{23}$$

$f_2 = 27 (a_{31} a_{23})^2$ , donc si  $a_{31} a_{23} \neq 0$ , il existe  $u_0 \in \mathbb{R}$ , tel que  $\Delta(A + u_0 B)$  soit positive.

On va montrer que lorsque  $a_{31} a_{23} = 0$  la condition du rang n'est pas réalisée.

1er cas :  $a_{31} = 0$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Donc :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

La condition n'est pas réalisée au point  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2ème cas :  $a_{23} = 0$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{13}z \\ 0 \\ a_{31}x + a_{33}z \end{pmatrix}$$

Dans ce cas le plan  $\chi_0 z$  est invariant par A et par B, donc ce qui signifie que la condition du rang n'est pas réalisée sur ce plan. On a donc nécessairement soit  $a_{21} \neq 0$  soit  $a_{31} a_{23} \neq 0$

Par conséquent, il suffit que la condition du rang soit réalisée en tout point pour qu'il existe un contrôle  $u_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $(A + u_0 B)$  admette de valeurs propres complexes.

Désignons par  $(E)$  l'équateur de l'hélice  $(A + u_0 B)$  et  $X_0$  son point singulier.

Lemme 2 :

L'hélice  $(A + u_0 B)$  vérifie les propriétés suivantes :

- (i)  $(E) \neq \text{Ker } B$
- (ii)  $\pm \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin (E)$
- (iii)  $X_0 \notin \text{Ker } B$

Preuve :

(i) supposons que  $(E) = \text{Ker } B$

On va prouver que dans ce cas, la condition n'est pas réalisée sur  $(E)$ .

En effet :

$A + u_0 B$  laisse l'équateur  $(E)$  invariant.

$B$  laisse invariant tous les points de  $\text{Ker } B$  donc de  $E$ , il en est de même pour  $u_0 B$ .

Donc la différence :  $A + u_0 B - u_0 B = A + u_0 B - u_0 B = A$

laisse l'équateur  $(E)$  invariant.

Par conséquent sur  $(E)$  la condition du rang n'est pas vérifiée.



Ceci est en contradiction avec l'hypothèse, d'où  $(E) \not\subset \widetilde{\text{Ker } B}$

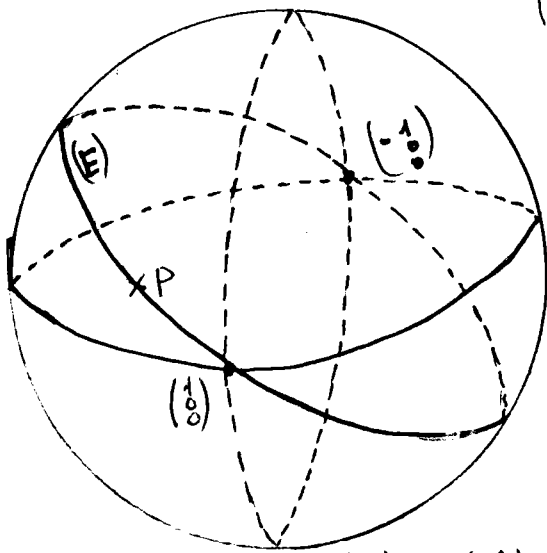
(ii) Si  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in (E)$  alors il existe un point  $p$  tel que :

$$(E) = \left\{ e^{\widetilde{B}t} \cdot p, t \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ -e^{\widetilde{B}t} \cdot p, t \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

en effet, les trajectoires de  $\pm \widetilde{B}$  vérifient pour tout point  $p$  distinct de  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ; et n'appartenant pas à  $\widetilde{\text{Ker } B}$ ;

$$\text{adh} \left( \left\{ e^{\widetilde{B}t} \cdot p, t \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ -e^{\widetilde{B}t} \cdot p, t \in \mathbb{R} \right\} \right) = C$$

où  $C$  est un équateur passant par  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  et contenant  $(p)$  et  $(-p)$ .



Puisque  $(E)$  passe par  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , il coïncide avec deux courbes intégrales, à savoir  $\left\{ e^{\widetilde{B}t} \cdot p, t \in \mathbb{R} \right\}$  et  $\left\{ -e^{\widetilde{B}t} \cdot p, t \in \mathbb{R} \right\}$

Donc la condition du rang n'est pas vérifiée sur ces deux trajectoires, et ceci est en contradiction avec l'hypothèse, d'où :  $\pm \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin (E)$

(iii) supposons que  $x_0 \in \widetilde{\text{Ker } B}$

$x_0$  étant un point singulier de  $(A + u_0 B)$ , donc :

$$(\tilde{A} + u \tilde{B})(X_0) = 0 \implies \tilde{A}(X_0) + u \tilde{B}(X_0) = 0$$

or :  $X_0 \notin \text{Ker } \tilde{B}$  entraîne que  $\tilde{B}(X_0) \neq 0$

d'où l'on a  $\tilde{A}(X_0) = 0$

Donc au point  $X_0$  la condition du rang n'est pas vérifiée, ce qui contredit l'hypothèse, d'où  $X_0 \notin \text{Ker } \tilde{B}$ .

Lemme 3 :

Pour tout point  $p$  de  $S^2$  n'appartenant pas à  $\text{Ker } \tilde{B}$ , on a :

$$(E) \subset S(\tilde{F}) \cdot p \text{ et } p \in S(\tilde{F})(E)$$

Il est clair que le lemme 3, nous permet de dire que le point singulier  $X_0$  de  $(\tilde{A} + u_0 \tilde{B})$  peut être recalé à  $(E)$  et que tout point de  $(E)$  peut atteindre  $X_0$ .

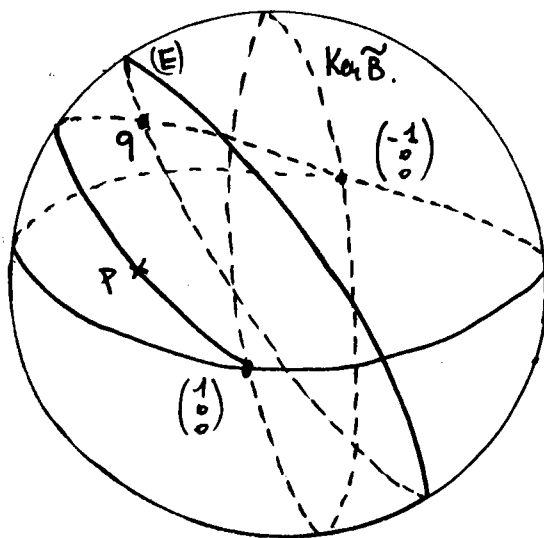
Ce qui achèvera alors la preuve du théorème.

Preuve du lemme 3 :

Soit  $p$  un point de  $S^2$  tel que :  $p \notin \text{Ker } \tilde{B}$

On sait d'après le lemme 2 que :  $\pm \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin (E)$

Graphiquement on aura la situation suivante :



$p \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , donc sa courbe intégrale  $\{e^{\tilde{B}t} \cdot p, t \in \mathbb{R}\}$  s'approche arbitrairement près de  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  et de  $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Les points  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  étant antipodaux, dont d'après le théorème de passage des douanes la courbe intégrale  $\{e^{\tilde{B}t} \cdot p, t \in \mathbb{R}\}$  est transverse à l'équateur (E). Ce qui achève la preuve du lemme 3 et donc du théorème.

---

B est la matrice nilpotente d'ordre trois.

C'est à dire : 
$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

On suppose que A possède deux valeurs propres complexes conjuguées  $\alpha$  et  $\bar{\alpha}$ .

Théorème :

Une condition suffisante pour que le système (1) soit transitif sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$  est que :

$$\left( -\frac{2}{27} (\text{tr } A)^3 + \frac{1}{3} \sum(A) \text{tr } A - \det A \right) a_{31} > 0 \quad (*)$$

Avec la condition (\*) on impose à la composante suivant (oz) du point  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  d'être positive si l'équateur de l'hélice A est attractif et d'être négative si l'équateur est répulsif.

Dans le cas où les valeurs propres complexes sont imaginaires pures, le système (1) est transitif. En effet puisque A est compact alors le système (1) est équivalent à  $\left\{ \pm A, \pm B \right\}$

Preuve :

Dans la suite on va considérer  $B' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  puisque B et B' ont même projection radiale sur  $S^2$ .

On supposera, sans restreindre la généralité, que l'équateur de A est répulsif.

Donc, d'après le lemme 1 du (III.3) on a  $q(o) < 0$

Or  $q(o) = K_o = -\frac{2}{27} (\text{tr } A)^3 + \frac{1}{3} \sum(A) \text{tr } A - \det A < 0$

Le champ de vecteur  $\tilde{B}'$  admet deux points singuliers à savoir :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En effet :  $\tilde{B}' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \left( B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

$$\tilde{B}' \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\tilde{B}' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Notons que ces deux points singuliers sont situés sur l'équateur  $E$  du champ  $\tilde{B}$ , et par suite l'équateur  $D$  de  $\tilde{A}$  coupe nécessairement  $E$  en deux points  $p$  et  $(-p)$  diamétralement opposés.

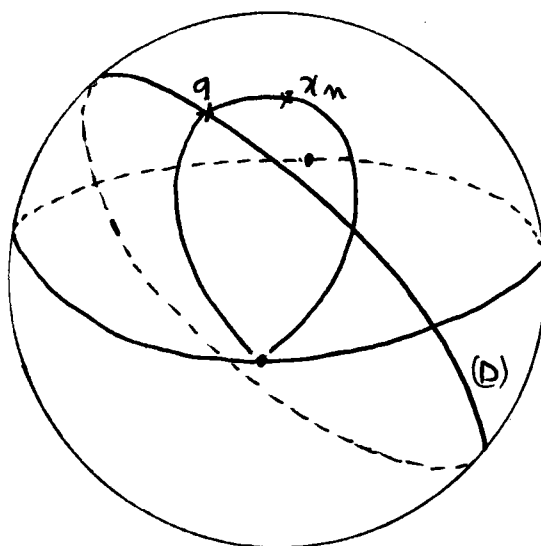
Soient  $x_n$  (respectivement  $x_s$ ) le point singulier de  $\tilde{A}$  situé sur l'hémisphère Nord (respectivement de l'hémisphère Sud).

Deux cas se présentent :

1er cas : L'équateur ( $D$ ) coupe la courbe intégrale du champ  $\tilde{B}$ , passant par  $x_n$ ; c'est à dire :  $D \cap \{e^{Bt} x_n, t \in \mathbb{R}\} \neq \emptyset$

Dans ce cas on sait recaler le point singulier  $x_n$  de  $\tilde{A}$  à son équateur. Ce qui achève la preuve.

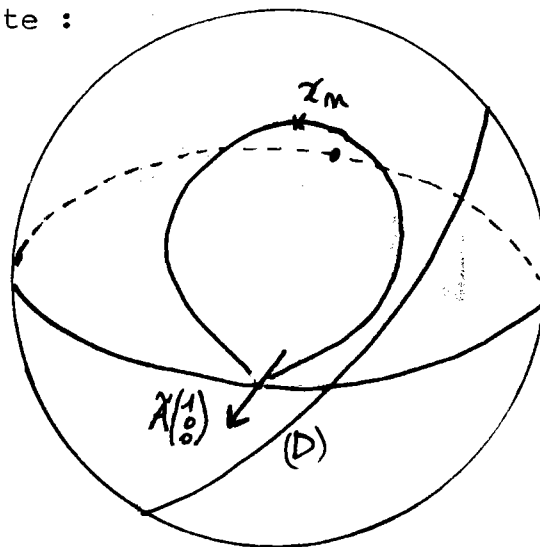
On peut illustrer la situation à l'aide du schéma suivant :



2ème cas : On suppose que la courbe intégrale de  $\tilde{A}$  issue de  $x_n$  ne rencontre pas (D) l'équateur de A.

$$\text{ie : } (D) \cap \left\{ e^{\tilde{A}t} x_n, t \in \mathbb{R} \right\} = \emptyset$$

On a donc la situation suivante :



Mais on remarque, dans ce cas, que si on peut passer de l'hémisphère nord à l'hémisphère sud, on coupera nécessairement l'équateur (D).

En effet, si on passe de l'hémisphère nord à l'hémisphère sud, on pourra alors construire une courbe continue joignant un point  $p$  suffisamment près de son antipodale ( $-p$ ).

Ce qui nous permettra de conclure que le système (1) est transitif sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ . puisque d'après le lemme 3, cette courbe coupe l'équateur (D), ce qui signifie alors qu'on peut recaler le point singulier  $x_n$  de  $\tilde{A}$  à son équateur et comme  $\tilde{A}$  est à équateur répulsif  $x_n$  peut être atteint à partir d'un point de l'équateur, donc le système est transitif sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ .

C'est justement la condition  $a_{31} < 0$  qui nous fait passer de l'hémisphère nord à l'hémisphère sud.

Dans le cas où  $K_0 > 0$ , on fera le même type de démonstration, on trouve la condition  $a_{31} > 0$ .

En effet ; posons :  $C = -A$

Donc :  $\text{tr } C = \text{tr } (-A) = -\text{tr } A$

$$\sum(c) = \sum(A)$$

$\det C = -\det A$

On trouve :  $K_C = -K_O$

Donc ce qui vient d'être démontré ci-dessus :

$$K_C < 0 \implies c_{31} < 0$$

$$\text{ie } K_O > 0 \implies a_{31} > 0$$

Donc en définitive la condition  $a_{31} K_O > 0$  est suffisante pour la complète contrôlabilité de (1) sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ .

Remarque :

Dans la démonstration, on n'utilise pas le fait que  $\pm \tilde{B} \in \tilde{\mathcal{F}}$ , ce qui nous permet d'énoncer le corollaire suivant :

Corollaire 1 :

Si  $a_{31} K_O > 0$ , le système  $\{A, B\}$  est transitif sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ .

Corollaire 2 :

On suppose que A est un champ du type IV.

Pour que le système (1) soit transitif sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ , il suffit que :

$$1) a_{31} K_O > 0$$

$$2) \alpha_1 \underline{\Sigma}(A, B) - \det(A, B) \neq 0$$

avec  $\alpha_1$  la valeur propre de multiplicité deux

$$\underline{\Sigma}(A, B) = -(a_{21} + a_{32})$$

$$\det(A, B) = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

La condition (2) prouve que pour  $\alpha$  assez petit on peut trouver une

hélice H, on peut donc appliquer le corollaire 1.

Preuve :

Calculons les coefficients  $f_0, f_1$  de  $\Delta(A + u B)$

On suppose que A dans sa base propre s'écrit :  $A_0 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}$   
 $\alpha_1 \neq \alpha_2$

$$\text{On a : } \text{tr } A = 2\alpha_1 + \alpha_2$$

$$\Sigma(A) = \alpha_1^2 + 2\alpha_1\alpha_2$$

$$\det(A) = \alpha_1^2\alpha_2$$

$$S_0 = \Sigma(A) - \frac{1}{3} (\text{tr } A)^2 = \frac{1}{3} (\alpha_1 - \alpha_2)^2$$

$$K_0 = -\frac{2}{27} (\text{tr } A)^3 + \frac{1}{3} \Sigma(A) \text{tr } A - \det A = \frac{2}{27} (\alpha_1 - \alpha_2)^3$$

Donc :

$$f_0 = 4 S_0^3 + 27 K_0^2 = 0$$

$$S_1 = \Sigma(A, B) - \frac{2}{3} \text{tr } A \text{tr } B = \Sigma(A, B)$$

$$K_1 = -\frac{2}{9} (\text{tr } A)^2 \text{tr } B + \frac{1}{3} \Sigma(A) \text{tr } B + \frac{1}{3} \Sigma(A, B) \cdot \text{tr } A - \det(A, B)$$

$$= \frac{1}{3} \Sigma(A, B) \text{tr } A - \det(A, B)$$

$$\text{Donc } f_1 = 12 S_0^2 S_1 + 54 K_0 K_1 = \frac{4}{3} (\alpha_1 - \alpha_2)^3 \left( \alpha_1 \Sigma(A, B) - \det(A, B) \right)$$

Si  $\alpha_1 \Sigma(A, B) - \det(A, B) = 0$  alors  $f_1 = 0$ .

On peut donc trouver  $u_0$  assez petit de façon que :

$$\Delta(A + u_0 B) > 0$$



D'où l'existence d'une hélice H.

Si  $u_0$  est convenablement choisi, le signe de  $q(u_0)$  est le même que celui de  $K_0$ .

Donc la condition  $a_{31} K_0 > 0$ , suffit pour conclure sur la transitivité du système (1) sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ .

### Corollaire 3 :

Supposons que le champ A est du type III.

Pour que le système (1) soit transitif sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ , il suffit que :

$$1) a_{31} K_0 > 0$$

$$2) \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \neq 0$$

On montre de la même manière que le corollaire 2, qu'il existe  $u_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $(A + u_0 B)$  soit une hélice et on applique le corollaire 1.

### Preuve :

Calculons  $f_0, f_1$  les coefficients de  $\Delta(A + u_0 B)$

On suppose que dans sa base propre, la matrice A s'écrit :

$$A' = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} \quad \alpha_1 \neq \alpha_2$$

Donc :

$$\text{tr } A = 2\alpha_1 + \alpha_2$$

$$\Sigma(A) = \alpha_1^2 + 2\alpha_1\alpha_2$$

$$\det(A) = \alpha_1^2 \alpha_2$$

$$S_0 = -\frac{1}{3} (\alpha_1 - \alpha_2)^2$$

$$K_0 = \frac{2}{27} (\alpha_1 - \alpha_2)^3$$

$$f_0 = 4 S_0^3 + 27 K_0^2 = 0$$

$$S_1 = 0$$

$$K_1 = -\det(A, B) \text{ avec } \det(A, B) = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Donc :

$$f_1 = 12 S_0^2 S_1 + 54 K_0 K_1 = -4 \det(A, B) (\alpha_1 - \alpha_2)^3$$

si  $\det(A, B) \neq 0$  alors  $f_1 \neq 0$ .

et par suite il existe  $u_0 \in \mathbb{R}$  telle que  $\Delta(A + u_0 B)$  soit positive.

D'où l'existence d'une hélice  $(\tilde{A} + u_0 \tilde{B})$ .

On peut choisir  $u_0 \in \mathbb{R}$  de telle sorte que :

$$(i) \Delta(A + u_0 B) > 0$$

(ii)  $q(u_0)$  et  $K_0$  ont même signe.

Considérons la matrice  $C = A + u_0 B$

Le système (1) est équivalent au système :

$$(2) : \{C, \pm B\}$$

C étant une matrice possédant des valeurs propres complexes, on peut donc lui appliquer le corollaire 1.

D'après la condition (ii)  $q(u_0)$  et  $K_0$  ont même signe, donc pour avoir transitivité de (1) sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$  il suffit d'avoir :  $C_{31} K_0 > 0$

$$\text{Or : } C_{31} = a_{31} + u_0 b_{31} = a_{31} \quad \text{car } b_{31} = 0$$

D'où la condition suffisante de transitivité :  $a_{31} K_0 > 0$

Ce qui achève la preuve du corollaire 3.

## CONCLUSION

La situation peut se résumer par le tableau suivant :

B \ A	I	II	III	IV	V	VI	VII
I	c	c	c	c	c	c	c
II	c	c	c	c	c	c	c
III	c	c	c	c	c	c	c
IV	c	c	c	c	c	c	c
V	?	c	c	c	c	c	c
VI	c	c	c	c	c	c	c
VII	?	c	c	c	c	c	c

(c) signifie que la paire  $\{A, \pm B\}$  est contrôlable moyennant certaines conditions qui peuvent changer selon le choix du type de A.

Ainsi le problème de la contrôlabilité des champs bilinéaires, dans  $\mathbb{R}^3$  à contrôles non bornés trouve dans presque tous les cas une réponse positive moyennant des conditions algébriques faciles à vérifier. Le cas où je n'ai rien pu dire, demande une autre technique pour les étudier. Il serait intéressant de les voir et de donner une conclusion même de non contrôlabilité.

Une question qui mérite d'être posée est : que se passe-t-il du point de vue contrôlabilité sur  $SL(3, \mathbb{R})$  quand le champ  $\tilde{B}$  est du type (VI)? sachant que si  $\tilde{B}$  est dans (II) alors  $\{A, \pm B\}$  est complètement contrôlable sur  $SL(3, \mathbb{R})$ , on peut prévoir un résultat analogue pour le type (VI).

On peut encore se pose la question s'il n'existe pas une condition commune de complète contrôlabilité du système  $\{A, \pm B\}$  sur  $\mathbb{R}^3$  pour tous les types de champ B considérés.

## BIBLIOGRAPHIE

1. A. Bacciotti, G. Stéfani  
"On the relation ship between global and loral controllability".  
Math. Systems theory 16 (1981) 57-84
2. A. Bacciotti, G. Stefani  
"The region of attainability of non linear systems with un-  
bounded controls". J. optm. Theory applications 35 (1981) 79-81
3. B. Bonnard - Thèse Université de Grenoble et INPG (1983)
4. B. Bonnard : "Controllable pairs of vectors fields ou  $SL(m, \mathbb{R})$ "  
Control theory center. Report 78 (1979)
5. B. Bonnard, V. Jurdjevic, I. Kupka, G. Sallet :  
"Transitivity of families of invariant vector fields on the semi-  
direct product of lie groups.  
Trans. Amer. Math. Soc Vol 271 (2) 525-535 (1982)
6. B. Bonnard, V. Jurdjevic, I. Kupka, G. Sallet :  
"Systèmes de champs de vecteurs transitifs sur les groupes de  
lie semi-simples et leurs espaces homogènes" Astérisque 75-76  
(1980) 19-46
7. W.M Boothly "Some comments on positive orthant controllability  
of bilinear systems" SIAM J. Control optim Vol 20(5) 634-644 (82)
8. M. Fliess, D. Normand - Cyrot :  
"La propriété d'approximation des systèmes bilinéaires"  
Outils et modèles mathématiques pour l'automatique.  
I. London Ed Vol 1 CNRS Paris 1981 379-384
9. JP. Gauthier, G. Bornard :  
"Contrôlabilité des systèmes bilinéaires".  
Siam J. Optimal Control 20 (1982) 377-384

10. JP. Gauthier, G. Bornard  
"A theorem of controllability for bilinear systems and some consequence".  
I.N.P.G note interne LAG 81-14 (1981)
11. R. Hermann, AJ. Kremer  
"Non linear controllability and observability"  
IEEE trans. Automat. Control AC 22 (1977) 728-740
12. H. Hermes "on local and global controllability".
13. L.R. Hunt : "Global controllability of non linear systems in two dimensions. Math system theory 13 (1980) 361-376
14. V. Jurdjevic, I. Kupka.  
"Controls systems subordinated to a group action : Accessibility  
J. Differential Equations 39,2 (1980) 186-211
15. V. Jurdjevic, G. Sallet  
"Controllability of affine systems"  
In Differential geometric control theory. R.W Brockett, R.S Millman, H.J Sussmann Eds Birkhauser progres in Math. (1983) 299-309
16. V. Jurdjovic, G. Sallet "Controllability properties of affine systems". Siam J. Control Optim. 22,3 (1984)
17. B. Lee, L. Markus "Foundations of optimal control theory" Siam series in applied math. J. Wiley N.Y (1967)
18. R.G. Rink R.R Mohler "Completely controllable bilinear systems"  
Siam J. Control 6,3 (1968) 477-486
19. C. Lobry "Controlabilité des systèmes non linéaires".  
Siam J. Control 8,4 (1970) 573-605

20. G. Lobry "Controllability of non linear systems on compact manifolds" Siam. J. Control 12,1 (1974) 1-4
21. C. Lobry "Quelques aspects qualitatifs de la théorie de la commande" Thèse Université de Grenoble (1972)
22. G. Sallet "Couples de champs de vecteurs complètement contrôlables sur les sphères et les espaces euclidiens".  
Thèse troisième cycle université de Metz (1976)
23. G. Sallet "Complete controllability sur les groupes linéaires".  
In outils et modèles mathématiques pour l'automatique, l'analyse des systèmes et le traitement du signal " I. Landan Ed. CNRS Paris Vol 1.215-228.
24. G. Sallet "Sur la structure de l'ensemble d'accessibilité de certains systèmes. Applications à l'équivalence des systèmes".  
A paraître Math-Système. Théory.
25. H.J Sussmann, V. Jurdjevic : "Controllability of non linear systems". J. Differential Equations 12 (1972) 95-116
26. H.J Sussmann "Lie Brackets and local controllability : A sufficient condition for scalar input systems".  
Siam J. Control optim 21,5 (1983)
27. D.E Koditschek and Kumpatis Narendra.  
"The controllability of planar bilinear systems".  
IEEE transactions on automatic control. Vol AC-30 N°1. January 1985
28. P. Brunovski - C. Lobry  
"Contrôlabilité Bang-Bang, contrôlabilité différentiable et perturbation des systèmes linéaires".  
Ann. Math. Appel série 4 Vol 55 (1975) 93-119
29. R.E Kalman Y I O et K S Narendra : "Contrôlabilité of linear dynamical systems". Contributions of différential équations (1963)