



HAL
open science

Le problème de la paire d'inclusions plastiques et hétérogènes dans une matrice anisotrope : application à l'étude du comportement des matériaux composites et de la plasticité

Omar Fassi-Fehri

► **To cite this version:**

Omar Fassi-Fehri. Le problème de la paire d'inclusions plastiques et hétérogènes dans une matrice anisotrope : application à l'étude du comportement des matériaux composites et de la plasticité. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université Paul Verlaine - Metz, 1985. Français. NNT : 1985METZ013S . tel-01775688

HAL Id: tel-01775688

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01775688>

Submitted on 24 Apr 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

UNIVERSITE DE METZ

INSTITUT DE GENIE MECANIQUE ET PRODUCTIQUE

THESE DE DOCTORAT D'ETAT ES-SCIENCES

présentée par

Omar FASSI-FEHRI

Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de RABAT (MAROC)

pour obtenir le grade de Docteur d'ETAT ES-SCIENCES.

sur le sujet

"le problème de la paire d'inclusions plastiques et hétérogènes dans une matrice anisotrope - Application à l'étude du comportement des matériaux composites et de la plasticité."

le : 3 décembre 1985 à l'Université de METZ

devant le jury

A. AUTHIER, Professeur à l'Université PARIS VI

P.F. GOBIN, Professeur à l'I.N.S.A. de LYON

A. ZAQUI , Professeur à l'université PARIS XIII

A. HIHI , Professeur à la Faculté des Sciences de RABAT

J.D. WEBER, Professeur à l'Université de METZ

M. B. de METZ

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE DE METZ



022 420237 0

Ce travail a été réalisé au Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux de la Faculté des Sciences de METZ, et au Laboratoire de Mécanique et des Matériaux de la Faculté des Sciences de RABAT, sous la direction de Monsieur le Professeur M. BERWEILLER, directeur du L.P.M.M., ces travaux entrent en partie dans le cadre d'une action intégrée de coopération entre ces deux Laboratoires, sous l'égide du Centre National de la Recherche Scientifique français et du Centre National pour la Coordination et la Planification de la Recherche Scientifique et Technique marocain.

Je remercie Messieurs les Professeurs P.F. GOBIN, Professeur à l'Institut National des Sciences Appliquées de LYON, A. AUTHIER, Professeur à l'Université PARIS VI, et J.D. WEBER, Professeur à l'Université de METZ, qui m'ont fait l'honneur de faire partie de mon jury de thèse et de juger ce travail.

Mes remerciements les plus vifs vont à M.A. ZAOUJ, Professeur à l'Université PARIS XIII, qui a accepté de juger ce travail, et qui m'avait permis lors d'un entretien qu'il m'avait accordé avant que ce travail ne soit entrepris, d'avoir un aperçu sur toutes les questions qui restaient ouvertes après le travail effectué par lui-même et par Messieurs BERWEILLER et HIHI sur le modèle self-consistant.

Je remercie très sincèrement Monsieur le Professeur M. BERWEILLER d'avoir accepté de diriger ce travail qui n'aurait pu être mené à terme sans son aide, ses conseils et sans l'apport scientifique que j'ai gagné à son contact; je suis aussi particulièrement sensible à ses qualités humaines qui m'ont permis d'effectuer ce travail dans des conditions morales des plus satisfaisantes.



Je remercie Monsieur le Professeur A. HIHI qui m'a convaincu de m'engager dans le domaine de la recherche en mécanique du solide, et sans l'aide duquel toute la partie numérique et informatique dans ce travail n'aurait pu être menée à bien; les discussions constantes que j'ai eues avec lui m'ont été d'un encouragement permanent.

Je voudrais aussi exprimer toute ma reconnaissance à Mademoiselle MARCELET pour le soin et la qualité avec lesquels elle a réalisé la présentation et la dactylographie de ce travail.

dédié à Khadija,

Sidi El Bachir

Zeyd

et Hasna

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv.	19850265
Cote	S/M ₃ 85/13
Loc	Magasin

P L A N

I - Introduction

II - Problème de la paire d'inclusions plastiques

II - 1. Rappels des équations fondamentales de la mécanique des milieux continus.

II - 2. Formulation générale du problème de la paire d'inclusions plastiques.

II - 2 - 1 Détermination du gradient de déplacement total

II - 2 - 2 Champ du gradient de déplacement moyen dans une inclusion.

II - 2 - 3 Détermination des déformations et rotations totales moyennes.

II - 3. Calculs de l'énergie élastique associée à la paire d'inclusions plastiques.

II - 3 - 1 Cas général

II - 3 - 2 Cas de la paire d'inclusions

II - 4. Energie d'interaction avec un champ extérieur

II - 4 - 1 Calcul de l'énergie élastique

II - 4 - 2 Energie d'interaction entre le champ extérieur et une paire d'inclusions plastiques.

II - 5. Conclusions

II - 6. Bibliographie du chapitre II.

III - Problème de la paire d'inclusions hétérogènes

III - 1. Equation intégrale pour les milieux hétérogènes élastiques

III - 2. Solution de l'équation générale pour une paire d'inclusions hétérogènes

III - 3. Calcul de l'énergie élastique

III - 4. Applications et conclusions

III - 5. Bibliographie chapitre III

IV - Problème mixte d'une paire d'inclusions hétérogènes et plastiques

- IV - 1. Equation intégrale pour un milieu hétérogène et plastique
- IV - 2. Le problème de la paire d'inclusions plastiques et hétérogènes.
 - IV - 2 - 1. Résolution de l'équation intégrale
 - IV - 2 - 2. Conclusions et remarques
- IV - 3. Calcul de l'énergie élastique
 - IV - 3 - 1. Formulation générale du problème
 - IV - 3 - 2. Evaluation de l'énergie par la méthode du milieu homogène équivalent (M H E).
 - IV - 3 - 3. Cas particuliers et applications
- IV - 4. Conclusions
- IV - 5. Bibliographie chapitre IV

V - Détermination des tenseurs T^{II} et T^{IJ}

- V - 1. Détermination de T^{II}
 - V - 1 - 1. Cas général
 - V - 1 - 2. Cas de l'inclusion sphérique
 - V - 1 - 3. Cas de l'inclusion ellipsoïdale
- V - 2. Détermination de T^{IJ} pour 2 inclusions ellipsoïdales
- V - 3. Détermination de T^{II} et T^{IJ} pour un milieu isotrope et des inclusions sphériques.
 - V - 3 - 1. Cas d'une inclusion sphérique (T^{II})
 - V - 3 - 2. Cas de deux inclusions sphériques (T^{IJ})
- V - 4. Bibliographie chapitre V

VI - Modélisation du comportement pseudo élastique et plastique des métaux

- VI - 1. Application à la modélisation du comportement pseudo élastique lors d'une transformation martensitique sous contrainte.
 - VI - 1 - 1. Introduction
 - VI - 1 - 2. Rappels sur la transformation martensitique - aspects cinématiques.

VI - 1 - 3. Ecrrouissage en pseudo-élasticité

VI - 1 - 4. Interaction entre deux inclusions de martensite

VI - 1 - 5. Application - cas de l'alliage Fe-31 % Ni.

VI - 2. Application à l'écrrouissage par les contraintes internes dans les matériaux cristallins.

VI - 2 - 1. Introduction

VI - 2 - 2. Loi d'écrrouissage non locale pour le monocristal

VI - 2 - 3. Cas particuliers :

- A - Paire d'inclusions plastiques

- B - Approche par le calcul de l'énergie

VI - 3. Conclusions

VI - 4. Bibliographie du chapitre VI

VII - Matériaux composites

VII - 1. Généralités

VII - 2. Déterminations des coefficients effectifs - Position du problème

VII - 3. Rappel du schéma self-consistent à un site

VII - 3 - 1. Calcul général

VII - 3 - 2. Détermination du module de cisaillement μ_f dans le schéma S.C. à un site.

VII - 3 - 3. Détermination du coefficient λ_f dans le schéma self-consistent à un site.

VII - 3 - 4. Conclusion

VII - 4. Détermination des constantes élastiques effectives du milieu homogène équivalent à partir de la solution du problème de la paire d'inclusions hétérogènes.

VII - 4 - 1. Modélisation - solution générale - Schéma self-consistent à 2 sites

VII - 4 - 2. Solution analytique avec des hypothèses simplificatrices.

VII - 4 - 3. Détermination du tenseur de localisation.

VII - 5. Résultats et conclusions.

VII - 5 - 1. Caractéristique de la cellule élémentaire d'hétérogénéité.

VII - 5 - 2. Détermination du module de cisaillement effectif dans le modèle à 2 sites.

VII - 5 - 3. Applications et conclusions

VII - 5 - 4. Etude de l'anisotropie

VII - 6. Bibliographie

VIII- Annexes

- Notation matricielle des tenseurs d'ordre 2 et 4

- Calcul de l'intégrale t^{ij}

- Calcul numérique - organigrammes.

- I -

INTRODUCTION

Nous assistons depuis plusieurs décennies à un développement considérable des matériaux hétérogènes, tant dans le domaine des matériaux nouveaux (composites fibre - plastiques, composite métal - céramique,...) que dans celui des matériaux plus traditionnels qui sont examinés en tant que matériaux hétérogènes (plasticité des polycristaux, effets des inclusions sur l'endommagement...).

Ce développement tardif est en apparence assez paradoxal; en effet alors que les physiciens étudiaient les mécanismes élémentaires de déformation des matériaux (mouvement de dislocation, maclage, diffusion, transformation de phase...), l'approche des mécaniciens restait purement macroscopique et phénoménologique. Les progrès liés à l'emploi de ces matériaux hétérogènes ne relèvent pas directement de ces deux approches extrêmes. Ils sont dûs plutôt à des études mécaniques et physiques qui se situent à l'échelle des hétérogénéités, c'est-à-dire à une échelle où les théories continues sont encore applicables mais où il faut déjà tenir compte directement des mécanismes physiques décrits par le physicien; dans ce contexte, les travaux de mécanique physique jouent un rôle considérable.

Les premiers travaux dans ce domaine ont cherché à relier les grandeurs locales aux grandeurs macroscopiques (VOIGT [1], REUSS [2], HILL [3]), mais ce n'est qu'avec l'étude de l'"hétérogénéité élémentaire" ou inclusion, qui est due à ESHELHY [4] et à d'autres, que des progrès considérables ont été obtenus dans la compréhension des propriétés des matériaux hétérogènes.

Les problèmes de base, qui se posent dans de telles études, sont les suivants :

* analyse des contraintes, déformations, rotations élastiques (pour les problèmes de texture) dans le cas d'une inclusion plastique considérée comme source élémentaire volumique de contraintes internes: le problème d'une source linéaire (dislocation) est quant à lui connu depuis longtemps.

* analyse des contraintes, déformations, rotation dans le cas d'une hétérogénéité, c'est-à-dire d'une inclusion de caractéristiques mécaniques différentes de celles de la matrice.

La solution de ces problèmes est essentiellement utilisée dans deux optiques différentes :

* d'une part, la détermination des propriétés effectives des milieux macrohomogènes et microhétérogènes;

* d'autre part, la détermination des champs locaux (à l'intérieur du volume, et sur les interfaces) afin de prévoir l'amorçage de l'endommagement.

Il existe de nombreux travaux sur le problème fondamental de l'inclusion pour lequel une revue complète et remarquable a été faite par GILORMINI [5] dans sa thèse à laquelle nous renvoyons le lecteur de ce travail.

La solution du problème de l'inclusion unique est cependant insuffisante dans certaines situations: nous citerons deux cas particuliers. Tout d'abord, dans le cas d'un matériau composite biphasé les méthodes self-consistent à un site développées à partir de la

solution de l'inclusion unique fournissent des valeurs exactes dans le cas du désordre parfait (KRONER [6]) mais ne peuvent prendre en compte la "texture de répartition"; par exemple dans le cas d'un composite ordonné à constituants isotropes, les propriétés effectives du composite calculées à partir du schéma à 1 site sont isotropes, alors qu'il est évident que l'ordre de la texture de répartition conduira à un comportement anisotrope.

De même, dans les hypothèses de précipitation ou de changement de phase, il est admis [7] que les interactions entre inclusions ont un effet important sur la microstructure.

Il apparaît donc important et utile de développer les études sur les hétérogénéités en ne se limitant pas à l'inclusion unique; une voie générale et globale consiste à utiliser les fonctions de corrélation introduites par KRONER [8]; cette approche reste toutefois encore complexe.

Nous lui préférons une autre approche, qui étudie le problème de la paire d'inclusions en tant que source d'hétérogénéité. Un certain nombre de travaux restreints ont déjà été proposés; STENBERG et SADOWSKY [9] ont étudié les déformations associées à une paire d'inclusions rigides, sphériques et alignées dans la direction de traction, tandis que CHEN et ACRIVOS [10] généralisent le problème par une utilisation de coordonnées bisphériques au cas d'un champ extérieur uniforme mais général. Une approche plus globale proposée par MOSCOVIDIS et MURA [11] consiste à utiliser un développement polynomial pour les déformations, et à résoudre, pour un milieu isotrope les équations générales du problème; une conclusion intéressante est que le champ de contraintes à l'intérieur des inclusions est pratiquement uniforme. Et si l'on tient compte d'emblée de ce résultat dans la résolution de notre problème, nous pouvons alors développer des méthodes de calcul performantes; c'est ce qui a été fait par BERWEILLER et ZAOUÏ [12] pour le problème de la paire d'inclusions sphériques et plastiques dans un milieu isotrope, et pour une paire hétérogène par JOHNSON [13] qui s'est limité à l'approximation de BORN valable uniquement dans le cas de faibles hétérogénéités.

Le présent travail a pour objet l'étude du problème de la paire d'inclusions plastiques et hétérogènes dans une matrice élastique anisotrope dans la situation où l'hypothèse des champs uniformes dans chaque inclusion est réaliste.

On étudie d'abord (chapitre II) le problème de la paire d'inclusions plastiques; après avoir rappelé la formulation générale du problème en utilisant la technique du tenseur de GREEN, on calcule les champs de déformations, de rotations et de contraintes, ainsi que l'énergie élastique associée à la paire d'inclusions plastiques.

Au chapitre III, on étudie le problème de la paire d'inclusions hétérogènes, qui trouve des applications dans les problèmes de matériaux composites et d'endommagement; dans la partie IV on considère le problème mixte d'inclusions plastiques et hétérogènes où, après avoir rappelé l'équation intégrale démontrée par BERWEILLER et ZAOUÏ [14] pour un milieu hétérogène et plastique, on l'applique à notre problème mixte.

Le calcul des contraintes, des déformations et de l'énergie élastique pour la paire d'inclusions dans un milieu anisotrope se ramène en fin de compte à l'évaluation d'un tenseur T (du 4^e ordre) d'interaction analogue,

au tenseur S d'ESHELBY pour le cas d'une inclusion; nous montrons également que l'on peut généraliser le concept d'inclusion plastique équivalente d'ESHELBY à un champ de déformation plastique fictif.

Dans la partie V on donne une méthode pour calculer les composantes de ce tenseur dans le cas de deux inclusions ellipsoïdales et pour un milieu anisotrope; et après avoir donné la solution générale pour calculer les composantes de T, on retrouve analytiquement la solution particulière trouvée par BERVEILLER [15] pour le cas de deux inclusions sphériques dans un milieu isotrope et obtenue à partir des potentiels d'ESHELBY.

Nous appliquons ensuite les solution obtenues à deux classes de problèmes.

Le chapitre VI est consacré à l'étude des contraintes internes induites par une déformation anélastique plastique, due soit à un glissement plastique soit à une transformation martensitique. Dans le cas de la transformation martensitique on décrit les interactions entre deux variants considérés comme inclusions plastiques (mais homogènes pour simplifier); cette étude permet de décrire le comportement global du "monocristal" d'austénite pendant la transformation par l'intermédiaire d'une "matrice d'écrouissage" caractérisant les interactions entre variants. Et pour le mécanisme de déformation plastique, où c'est le glissement plastique qui intervient, on propose de manière formelle une matrice d'écrouissage globale non locale prenant en compte à la fois les interactions de contact entre dislocations, et les effets à distance dus au comportement collectif des défauts; nous illustrons ces effets sur la situation particulière de paire d'inclusions.

Dans la dernière partie (chapitre VII) nous utilisons la solution de la paire hétérogène dans un milieu isotrope (ou anisotrope), pour étudier l'effet de la "texture de répartition" d'un matériau composite à phases isotropes sur les propriétés effectives globales et leur anisotropie de répartition.

On définit ainsi une nouvelle classe de schéma self-consistent où l'hétérogénéité élémentaire n'est plus l'inclusion mais une "cellule élémentaire" d'hétérogénéité. Nous donnons la procédure générale de résolution numérique du problème, et une solution approchée mais analytique dans le cas d'inclusions sphériques isotropes à répartition cubique centrée périodique, situées dans une matrice isotrope.

BIBLIOGRAPHIE INTRODUCTION

- 1 - W. VOIGT, Wied Ann., 38 (1889)
- 2 - A. REUSS, Z.A.M.M., 9 (1929)
- 3 - R. HILL, Proc. Phys. Soc., A 65 (1952)
- 4 - J.D. ESHELBY, Prog. Sol. Mech., 1961, North-Holland
- 5 - P. GILORMINI, Thèse d'Etat GRENOBLE (1985)
- 6 - E. KRONER, J.M.P.S., 25 (1977)
- 7 - W.C. JOHNSON, Acta Metall., vol. 32, n°3 (1984)
- 8 - E. KRONER, 15° Colloque du G.F.R. (PARIS 1981)
- 9 - E. STENBERG et M.A. SADOWSKY, J. Appl. Mech., 19 (1952)
- 10 - A.S. CHEN et A. ACRIVOS, Int. J. Solid Structures (1978)
- 11 - Z.A. MOSCHOVIDIS et T. MURA, J. Appl. Mech., 42 (1975)
- 12 - M. BERVEILLER et A. ZAQUI, 4° Congrès français de Mécanique (NANCY 1979)
- 13 - W.C. JOHNSON, Met. Trans., 14 A (1983)
- 14 - M. BERVEILLER et A. ZAQUI, Colloque Int. du C.N.R.S. n° 319 (1982)
- 15 - M. BERVEILLER, Thèse d'Etat - Université PARIS 13° (1978)

CHAPITRE II

II - Problème de la paire d'inclusions plastiques

- II - 1. Rappel des équations de la mécanique des milieux continus
- II - 2. Formulation générale du problème de la paire d'inclusions plastiques.
 - II - 2 - 1 Détermination du gradient de déplacement total
 - II - 2 - 2 Champ du gradient de déplacement moyen dans une inclusion.
 - II - 2 - 3 Détermination des déformations et rotations totales moyennes.
- II - 3. Calcul de l'énergie élastique associée à la paire d'inclusions plastiques.
 - II - 3 - 1 Cas général
 - II - 3 - 2 Cas de la paire d'inclusions
- II - 4. Energie d'interaction avec un champ extérieur de contraintes
 - II - 4 - 1 Calcul de l'énergie élastique
 - II - 4 - 2 Energie d'interaction entre le champ extérieur et une paire d'inclusions plastiques.
- II - 5. Conclusions
- II - 6. Bibliographie

Dans ce problème partiel, on s'attache à calculer les champs de contrainte et de déformation, ainsi que l'énergie élastique associée à la présence de deux régions (inclusions) qui ont subi une déformation anélastique (plastique, thermique, ou autre...) mais pour lesquelles les constantes élastiques sont les mêmes que celles du milieu infini (matrice) qui les contient.

Nous rappelons d'abord les équations de base de la mécanique des milieux continus, puis par la méthode du tenseur de GREEN nous donnerons la solution du problème.

II - 1 - Rappel des équations fondamentales de la mécanique des milieux continus

Nous nous limitons aux transformations infinitésimales, c'est-à-dire que nous travaillons en petites déformations et petites rotations, et ce dans l'approximation quasi-statique, les forces d'inertie étant négligées. L'hypothèse de continuité impose de plus des conditions aux champs de déformation, qui se traduisent par des équations de compatibilité, et le principe fondamental de la dynamique impose au champ de contraintes des restrictions qui se traduisent par les équations d'équilibre. Nous travaillerons toujours dans un système de coordonnées cartésiennes, dans lequel x_1, x_2, x_3 , désigneront les coordonnées d'un point du milieu, \vec{u} , de coordonnées u_1, u_2, u_3 , désignera le champ de déplacement, et le gradient de déplacement est donné par :

$$\beta_{ij} = \mu_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad ; \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (\text{II} - 1)$$

Nous noterons par σ_{ij} les composantes du tenseur de contraintes σ , par ϵ_{ij} celles du tenseur de déformations ϵ , et par ω_{ij} celles du tenseur rotation ω .

Nous utiliserons systématiquement la convention d'EINSTEIN de sommation sur les indices répétés.

* Equations de compatibilité

Pour que le milieu ne perde pas sa compacité dans l'espace euclidien, il faut que β_{ij} dérive d'un champ de déplacement, donc :

$$du_i = \beta_{ij} dx_j \quad (\text{II} - 2)$$

β_{ij} doit être une différentielle totale exacte et vérifier la condition de CAUCHY

$$\beta_{ij,k} = \beta_{ik,j} \quad (\text{II} - 3)$$

ce qui permet d'écrire, ϵ_{ijk} étant le tenseur permutation, tel que :

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si permutation } (i, j, k) \text{ paire} \\ 0 & \text{si 2 indices sont égaux} \\ -1 & \text{si permutation } (i, j, k) \text{ impaire} \end{cases} \quad (\text{II} - 4)$$

$$\text{et} \quad \text{Rot } \beta = \epsilon_{ijk} \beta_{ki,j} \quad (\text{II} - 5)$$

La partie symétrique de β_{ij} donnera le tenseur déformation et sa partie anti-symétrique le tenseur rotation, c'est-à-dire :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\mu_{i,j} + \mu_{j,i}) = \frac{1}{2} (\beta_{ij} + \beta_{ji}) \quad (\text{II} - 6)$$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} (\mu_{i,j} - \mu_{j,i}) = \frac{1}{2} (\beta_{ij} - \beta_{ji}) \quad (\text{II} - 7)$$

Enfin l'équation (II - 4) permet d'aboutir aux équations de compatibilité de KRONER qui sont aussi les conditions de SAINT - VENANT :

$$\epsilon_{ikl} \epsilon_{jmn} \epsilon_{lmn} = 0 \quad (\text{II} - 8)$$

Les composantes de la contrainte vérifient les équations d'équilibre :

- des moments : $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$

- des forces : $\sigma_{ij,j} = 0$ ou $\text{Div } \sigma = 0$ (II - 9)

- à la surface : $\sigma_{ij} n_j^s = T_i^s$ (où n vecteur normal

unitaire extérieur à la surface S et T vecteur contrainte)

Le gradient du déplacement total se décompose, dans le cas où il existe une déformation plastique, en une partie plastique β^p et une partie élastique β^e , tel que :

$$\beta_{ij}^T = \beta_{ij}^p + \beta_{ij}^e \quad (\text{II} - 10)$$

Cette déformation plastique (stress free strain au sens d'ESHELBY) peut en fait être d'origine thermique, mécanique (plastique), chimique (retrait, séchage...) ou métallurgique (transformation de phase ou précipitation). Elle obéit à des lois physiques propres qui peuvent être indépendantes des lois de la mécanique ou éventuellement couplées.

II - 2 - Formulation générale du problème de la paire d'inclusions plastiques

II - 2 - 1. Détermination du gradient de déplacement total

Considérons un milieu infini homogène de constantes élastiques C_{ijkl} ; ce milieu contient deux inclusions (I) et (J), de volume V_I et V_J , les constantes élastiques étant les mêmes dans les inclusions et la matrice; nous supposons que chaque inclusion a subi une déformation plastique uniforme définie par la partie plastique du gradient de déplacement total, soit β_I^p et β_J^p ; utilisons les fonctions indicatrices d'Heaviside θ^I et θ^J pour écrire la partie plastique du gradient de déplacement total en un point r , sous la forme :

$$\beta^p(\vec{r}) = \beta^p_I \theta^I(\vec{r}) + \beta^p_J \theta^J(\vec{r}) \quad (\text{II} - 11)$$

avec $\theta^T(\vec{n}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \vec{n} \in V_T \\ 0 & \text{si } \vec{n} \notin V_T \end{cases}$ et $\theta^J(\vec{n}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \vec{n} \in V_J \\ 0 & \text{si } \vec{n} \notin V_J \end{cases}$ (II - 12)

La déformation totale β^T_{ij} est supposée compatible, et composée d'une partie élastique β^e_{ij} et de la partie plastique précédemment décrite :

Nous avons alors pour le gradient du déplacement total u^T_{ij} :

$$u^T_{ij} = \beta^T_{ij} = \beta^e_{ij} + \beta^p_{ij} \tag{II - 13}$$

En tenant compte de l'équation d'équilibre (en l'absence de forces volumiques), nous avons :

$$\sigma_{ij,j} = 0 \tag{II - 14}$$

et la loi de HOOKE :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} E_{kl}^e \tag{II - 15}$$

où e^* est la partie symétrique de β^* :

On obtient alors :

$$C_{ijkl} E_{kl,j}^e = 0 \tag{II - 16}$$

les constantes élastiques vérifiant les symétries :

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij} \tag{II - 17}$$

l'équation (II - 16) devient alors :

$$C_{ijkl} \beta_{kl,j}^e = 0 \tag{II - 18}$$

ou encore

$$C_{ijkl} \left\{ u_{kl,j}^T - \beta_{kl,j}^p \right\} = 0 \tag{II - 19}$$

c'est-à-dire encore :

$$C_{ijkl} \left\{ u_{kl,j}^T - E_{kl,j}^p \right\} = 0 \tag{II - 20}$$

ou bien :

$$C_{ijkl} u_{kl,j}^T - C_{ijkl} \beta_{kl,j}^p = 0 \tag{II - 21}$$

Le terme $\left\{ -C_{ijkl} \beta_{kl,j}^p \right\}$ dans (II - 21) peut être considéré comme une distribution fictive de forces volumiques; et alors pour résoudre l'équation (II - 21) on peut alors avantageusement utiliser la technique du tenseur de GREEN G du milieu infini de constantes élastiques C^p_{ijkl} .

Le tenseur G de GREEN est défini par [1] :

$$C_{ijkl}^0 G_{km, lj}(\vec{r}-\vec{r}') + \delta_{km} \delta(\vec{r}-\vec{r}') = 0 \quad (II - 22)$$

où $\delta_{,m}$ est le tenseur de KRONECKER, $\delta(\vec{r}, \vec{r}')$ est la fonction de DIRAC à trois dimensions, telle que pour une fonction $f(\vec{r})$ continue on ait :

$$\int_{\text{espace}} f(\vec{r}') \delta(\vec{r}-\vec{r}') d\vec{r}' = f(\vec{r})$$

l'intégrale étant étendue à tout l'espace; $G(\vec{r}, \vec{r}')$ représente le déplacement dans la direction de l'axe k, au point r, lorsqu'une force unité $f_k = \delta_{,m} \delta(\vec{r}, \vec{r}')$ est appliqué au point \vec{r}' , dans la direction de l'axe m ; G_{km} est symétrique par rapport à k et m ;

Le déplacement total en un point r est alors donné par la solution de (II - 21) pour un milieu infini de volume V :

$$\mu_m^T(\vec{r}) = - \int_V G_{mi}(\vec{r}-\vec{r}') C_{ijkl}^0 \beta_{kl, ij}^p(\vec{r}') d\vec{r}' \quad (II - 23)$$

où $d\vec{r}'$ est l'élément de volume $d\vec{r}' = dx'_1 dx'_2 dx'_3$; x'_1, x'_2, x'_3 étant les coordonnées cartésiennes du point \vec{r}' , et où l'intégrale est étendue à tout le volume V du milieu. En utilisant l'expression (II - 11) de β^p pour le cas de la paire d'inclusions on a :

$$\beta_{kl, ij}^p(\vec{r}) = \beta_{kl}^{p_1} \theta_{ij}^1(\vec{r}) + \beta_{kl}^{p_2} \theta_{ij}^2(\vec{r}) \quad (II - 24)$$

Or d'après les propriétés de la fonction d'HEAVISIDE θ , on a :

$$\frac{\partial \theta(x)}{\partial x} = \delta(x) \quad (\text{distribution de Dirac}) \quad (II - 25)$$

et
$$\theta_{ij}^1(\vec{r}) = - \delta_j(s) = - \delta(s) n_j \quad (II - 26)$$

où S est la frontière de l'inclusion

Le déplacement total devient alors :

(II - 23) →

$$\mu_m^T(\vec{r}) = \int_V G_{mi}(\vec{r}-\vec{r}') C_{ijkl}^0 \beta_{kl}^{p_1} n_j^1 \delta(s_1) d\vec{r}' + \int_V G_{mi}(\vec{r}-\vec{r}') C_{ijkl}^0 \beta_{kl}^{p_2} n_j^2 \delta(s_2) d\vec{r}' \quad (II - 27)$$

où \vec{n}^i de composantes $(n_i^i)_{i=1,2,3}$ est le vecteur unitaire normal à la surface S_i frontière de I, et \vec{n}^j le vecteur unitaire à S_j frontière de J.

En appliquant le théorème de STOKES, on obtient :

$$\mu_m^T(\vec{r}) = \int_{S_I} G_{mi}(\vec{r}-\vec{r}') C_{ijkl}^0 \beta_{kl}^{P_I} dS_I^j + \int_{S_J} G_{mi}(\vec{r}-\vec{r}') C_{ijkl}^0 \beta_{kl}^{P_J} dS_J^j \quad (II - 28)$$

Où, S_I^j est la projection du vecteur surface de I, S_I suivant l'axe j; d'où en transformant l'intégrale de surface en intégrale de volume :

$$\mu_m^T(\vec{r}) = \int_{V_I} G_{mi,j'}(\vec{r}-\vec{r}') C_{ijkl}^0 \beta_{kl}^{P_I} dV_I + \int_{V_J} G_{mi,j'}(\vec{r}-\vec{r}') C_{ijkl}^0 \beta_{kl}^{P_J} dV_J \quad (II - 29)$$

Or, si on note x_1, x_2, x_3 , les coordonnées cartésiennes de \vec{r} , x'_1, x'_2, x'_3 étant celles de \vec{r}' , on a la propriété suivante :

$$G_{mi,j'}(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{\partial G_{mi}}{\partial x'_j} : -G_{mi,j}(\vec{r}-\vec{r}') = -\frac{\partial G_{mi}(\vec{r}-\vec{r}')}{\partial x_j} \quad (II - 30)$$

Si de plus, on tient compte du fait que $C_{ijkl}^0, \beta_{kl}^{P_I}$ et $\beta_{kl}^{P_J}$ sont constants, alors (II - 29) devient :

$$\mu_m^T(\vec{r}) = -C_{ijkl}^0 \beta_{kl}^{P_I} \int_{V_I} G_{mi,j}(\vec{r}-\vec{r}') d\vec{r}' - C_{ijkl}^0 \beta_{kl}^{P_J} \int_{V_J} G_{mi,j}(\vec{r}-\vec{r}') d\vec{r}' \quad (II - 31)$$

Le gradient du déplacement total s'écrit alors :

$$\mu_{m,n}^T(\vec{r}) = \beta_{mn}^T = -C_{ijkl}^0 \beta_{kl}^{P_I} \int_{V_I} G_{mi,nj}(\vec{r}-\vec{r}') d\vec{r}' - C_{ijkl}^0 \beta_{kl}^{P_J} \int_{V_J} G_{mi,nj}(\vec{r}-\vec{r}') d\vec{r}' \quad (II - 32)$$

En général le champ β^T n'est pas uniforme, y compris dans les inclusions, même si les inclusions ont des formes particulières (ellipsoïdales par exemple); ceci constitue une difficulté fondamentale pour le problème de la paire; nous allons en conséquence développer une méthode approchée permettant de trouver les champs moyens dans chaque inclusion.

II - 2 - 2 - Champ du gradient de déplacement moyen dans une inclusion

En prenant la valeur moyenne de β^T dans chaque inclusion, on obtient :

$$\beta_{mn}^I = \overline{\beta_{mn}^T} = \frac{1}{V_I} \int_{V_I} \beta_{mn}^T(\vec{z}) d\vec{z} \quad (\text{II} - 33)$$

et

$$\beta_{mn}^J = \overline{\beta_{mn}^T} = \frac{1}{V_J} \int_{V_J} \beta_{mn}^T(\vec{z}) d\vec{z} \quad (\text{II} - 34)$$

et en tenant compte de II - 32 nous avons :

$$\beta_{mn}^I = -\frac{1}{V_I} C_{ijkl}^0 \beta_{kl}^I \iint_{V_I} G_{mi,nj}(\vec{z}-\vec{z}') d\vec{z} d\vec{z}' - \frac{1}{V_I} C_{ijkl}^0 \beta_{kl}^J \iint_{V_J} G_{mi,nj}(\vec{z}-\vec{z}') d\vec{z} d\vec{z}' \quad (\text{II} - 35)$$

Posons alors :

$$t_{mnij}^{II} = - \iint_{V_I} G_{mi,nj}(\vec{z}-\vec{z}') d\vec{z} d\vec{z}' \quad (\text{II} - 36)$$

et

$$t_{mnij}^{IJ} = - \iint_{V_J} G_{mi,nj}(\vec{z}-\vec{z}') d\vec{z} d\vec{z}' \quad (\text{II} - 37)$$

alors :

$$\beta_{mn}^I = \frac{1}{V_I} t_{mnij}^{II} C_{ijkl}^0 \beta_{kl}^I + \frac{1}{V_I} t_{mnij}^{IJ} C_{ijkl}^0 \beta_{kl}^J \quad (\text{II} - 38)$$

II - 2 - 3 - Détermination des déformations et rotations totales moyennes

Nous obtenons, dans l'inclusion I par exemple :

$$\varepsilon_{mn}^I = \frac{1}{2V_I} \left(t_{mnij}^{II} + t_{nmij}^{II} \right) C_{ijkl}^0 \varepsilon_{kl}^I + \frac{1}{2V_I} \left(t_{mnij}^{IJ} + t_{nmij}^{IJ} \right) C_{ijkl}^0 \varepsilon_{kl}^J \quad (\text{II} - 39)$$

Posons :

$$\overline{\Gamma_{mnij}^{(\vec{a}-\vec{a}')}} = -\frac{1}{2} \left\{ G_{mi,nj}^{(\vec{a}-\vec{a}')} + G_{ni,mj}^{(\vec{a}-\vec{a}')} \right\} \quad (\text{II} - 40)$$

$$T_{mnij}^{II} = t_{\{mn\}ij}^{II} = \int_{V_I} \int_{V_I} \overline{\Gamma_{mnij}^{(\vec{a}-\vec{a}')}} d\vec{r} d\vec{r}' \quad (\text{II} - 41)$$

$$T_{mnij}^{IJ} = t_{\{mn\}ij}^{IJ} = \int_{V_I} \int_{V_J} \overline{\Gamma_{mnij}^{(\vec{a}-\vec{a}')}} d\vec{r} d\vec{r}' \quad (\text{II} - 42)$$

Le symbole $t_{\{mn\}ij}^{II}$ signifiant la partie symétrique de t_{mnij}^{II} par rapport aux 2 premiers indices.

Dans ces conditions nous obtenons (II - 39) dans les inclusions I et J :

$$\xi_{mn}^{I} = \frac{1}{V_I} T_{mnij}^{II} C_{ijkl}^{\circ} \xi_{kl}^{P_I} + \frac{1}{V_I} T_{mnij}^{IJ} C_{ijkl}^{\circ} \xi_{kl}^{P_J} \quad (\text{II} - 43)$$

$$\xi_{mn}^{J} = \frac{1}{V_J} T_{mnij}^{JJ} C_{ijkl}^{\circ} \xi_{kl}^{P_J} + \frac{1}{V_J} T_{mnij}^{JI} C_{ijkl}^{\circ} \xi_{kl}^{P_I} \quad (\text{II} - 44)$$

Pour une inclusion ellipsoïdale unique ($\xi^{P_J} = 0$), alors le tenseur S d'ESHELBY [2] est relié à notre tenseur T^{II} par la relation :

$$S = \frac{1}{V_I} T^{II} C^{\circ} \quad (\text{II} - 45)$$

Les déformations élastiques moyennes dans chaque inclusion s'écrivent simplement sous la forme :

$$\xi_{mn}^{e_I} = \xi_{mn}^{I} - \xi_{mn}^{P_I} \quad (\text{II} - 46)$$

et

$$\xi_{mn}^{e_J} = \xi_{mn}^{J} - \xi_{mn}^{P_J} \quad (\text{II} - 47)$$

et les contraintes moyennes sont obtenues à partir de la loi de HOOKE sous la forme :

$$\sigma_{ij}^{I} = C_{ijmn}^{\circ} \xi_{mn}^{e_I} = C_{ijmn}^{\circ} \left\{ \frac{1}{V_I} T_{mnhl}^{II} C_{klas}^{\circ} \xi_{rs}^{P_I} + \frac{1}{V_I} T_{mnhl}^{IJ} C_{klas}^{\circ} \xi_{rs}^{P_J} - \xi_{mn}^{P_I} \right\} \quad (\text{II} - 48)$$

$$\sigma_{ij}^{J} = C_{ijmn}^{\circ} \xi_{mn}^{e_J} = C_{ijmn}^{\circ} \left\{ \frac{1}{V_J} T_{mnhl}^{JJ} C_{klas}^{\circ} \xi_{rs}^{P_J} + \frac{1}{V_J} T_{mnhl}^{JI} C_{klas}^{\circ} \xi_{rs}^{P_I} - \xi_{mn}^{P_J} \right\} \quad (\text{II} - 49)$$

On notera que les tenseurs T^{IJ} et T^{JI} sont bien les mêmes (II - 43). On peut enfin obtenir aisément les rotations élastiques et plastiques moyennes; la rotation totale moyenne est, dans chaque inclusion, la partie anti-symétrique du gradient de déplacement; on a alors, si l'on note par des accolades ouvertes $\{ij\}$ la partie anti-symétrique par rapport aux indices i et j :

$$\omega_{mn}^{T_I} = \frac{1}{2} (\beta_{mn}^{T_I} - \beta_{nm}^{T_I}) \tag{II - 50}$$

puisque

$$C_{ijkl}^{\circ} \epsilon_{kl}^{P_I} = C_{ijlk}^{\circ} \epsilon_{lk}^{P_I}$$

soit, si l'on pose :

$$t_{mn\{ij\}}^{II} = -\frac{1}{2} \int_{V_I} \int_{V_I} \left\{ G_{mi,nj}^{(z-z')} - G_{ni,mj}^{(z-z')} \right\} d\mathbf{z} d\mathbf{z}' \tag{II - 51}$$

et

$$t_{mn\{ij\}}^{IJ} = -\frac{1}{2} \int_{V_I} \int_{V_J} \left\{ G_{mi,nj}^{(z-z')} - G_{ni,mj}^{(z-z')} \right\} d\mathbf{z} d\mathbf{z}' \tag{II - 52}$$

alors :

$$\omega_{mn}^{T_I} = \frac{1}{V_I} t_{mn\{ij\}}^{II} C_{ijkl}^{\circ} \epsilon_{kl}^{P_I} + \frac{1}{V_I} t_{mn\{ij\}}^{IJ} C_{ijkl}^{\circ} \epsilon_{kl}^{P_J} \tag{II - 53}$$

et :

$$\omega_{mn}^{T_J} = \frac{1}{V_J} t_{mn\{ij\}}^{JJ} C_{ijkl}^{\circ} \epsilon_{kl}^{P_J} + \frac{1}{V_J} t_{mn\{ij\}}^{IJ} C_{ijkl}^{\circ} \epsilon_{kl}^{P_I} \tag{II - 54}$$

enfin pour les rotations élastiques, on les obtient ainsi :

$$\omega_{mn}^e = \omega_{mn}^{T_I} - \omega_{mn}^{P_I} \tag{II - 55}$$

$$\omega_{mn}^e = \omega_{mn}^{T_J} - \omega_{mn}^{P_J} \tag{II - 56}$$

où ω_{mn}^I et ω_{mn}^J sont données par la partie anti-symétrique du gradient de déplacement déjà calculé.

On a ainsi obtenu les contraintes moyennes dans chaque inclusion, éventuellement aussi le champ local par l'intermédiaire de la relation (II - 32).

Nous allons maintenant procéder au calcul de l'énergie élastique associée à ces contraintes internes.

II - 3 - Calcul de l'énergie élastique associée à la paire d'inclusions plastiques.

II - 3 - 1 Cas général

L'énergie élastique W , pour un milieu infini de volume V s'écrit :

$$W = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}^{(r)} \varepsilon_{ij}^{(r)} d\vec{r} \quad (\text{II} - 57)$$

or la déformation élastique ε_{ij}^e est donnée par :

$$\varepsilon_{ij}^e(\vec{r}) = \frac{1}{2} \left(u_{i,j}^T + u_{j,i}^T \right) - \varepsilon_{ij}^P(\vec{r}) \quad (\text{II} - 58)$$

Soit, en tenant compte de la symétrie de σ_{ij} :

$$W = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}^{(r)} \left(\frac{1}{2} (u_{i,j}^T + u_{j,i}^T) - \varepsilon_{ij}^P(\vec{r}) \right) d\vec{r} \quad (\text{II} - 59)$$

ou
$$W = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}^{(r)} u_{i,j}^T d\vec{r} - \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}^{(r)} \varepsilon_{ij}^P(\vec{r}) d\vec{r} \quad (\text{II} - 60)$$

or
$$\sigma_{ij} u_{i,j}^T = \left[\sigma_{ij} u_i^T \right]_{,j} - \sigma_{ij,j} u_i^T \quad (\text{II} - 61)$$

donc :

$$W = -\frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}^{(r)} \varepsilon_{ij}^P(\vec{r}) d\vec{r} + \frac{1}{2} \int_V \left[\sigma_{ij} u_i^T \right]_{,j} d\vec{r} - \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij,j}^{(r)} u_i^T d\vec{r} \quad (\text{II} - 62)$$

et d'après (II - 9), équation d'équilibre :

$\sigma_{ij,j} = 0$, donc :

$$\frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} u_{i,j}^T d\vec{r} = \frac{1}{2} \int_V \left[\sigma_{ij} u_i^T \right]_{,j} d\vec{r} \quad (\text{II} - 63)$$

d'après le théorème de GAUSS :

$$\frac{1}{2} \int_V [\sigma_{ij}(\vec{r}) u_i^T(\vec{r})]_{,j} d\vec{r} = \frac{1}{2} \int_S \sigma_{ij}(\vec{r}) u_i^T(\vec{r}) n_j dS \quad (II - 64)$$

et d'après (II - 63) →

$$\frac{1}{2} \int_V [\sigma_{ij}(\vec{r}) u_i^T(\vec{r})]_{,j} d\vec{r} = 0 \quad (II - 65)$$

et donc finalement on a :

$$W = -\frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}(\vec{r}) \varepsilon_{ij}^P(\vec{r}) d\vec{r} \quad (II - 66)$$

II - 3 - 2 Cas de la paire d'inclusions

L'énergie élastique W associée à la paire d'inclusions plastiques, s'écrira à partir de (II - 66) et compte-tenu de la forme particulière (II - 24) de ε_{ij}^P :

$$W = -\frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}(\vec{r}) \varepsilon_{ij}^{P_I} e^I(\vec{r}) d\vec{r} - \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}(\vec{r}) \varepsilon_{ij}^{P_J} e^J(\vec{r}) d\vec{r} \quad (II - 67)$$

ou encore

$$W = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^{P_I} \int_V \sigma_{ij}(\vec{r}) d\vec{r} - \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^{P_J} \int_V \sigma_{ij}(\vec{r}) d\vec{r} \quad (II - 68)$$

Les contraintes σ_{ij} sont données par $\sigma_{ij}(\vec{r}) = C_{ijkl}^0 \varepsilon_{kl}^e(\vec{r})$, et ont été calculées dans le paragraphe précédent (II - 2 à 3) et sont données par les formules (II - 49); on a donc, après intégration sur V_I et V_J :

$$W = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^{P_I} C_{ijkl}^0 \left\{ T_{klmn}^{II} C_{mnpq}^0 \varepsilon_{pq}^{P_I} + T_{klmn}^{IJ} C_{mnpq}^0 \varepsilon_{pq}^{P_J} - V_I \varepsilon_{kl}^{P_I} \right\} - \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^{P_J} C_{ijkl}^0 \left\{ T_{klmn}^{JJ} C_{mnpq}^0 \varepsilon_{pq}^{P_J} + T_{klmn}^{JI} C_{mnpq}^0 \varepsilon_{pq}^{P_I} - V_J \varepsilon_{kl}^{P_J} \right\}$$

Nous pouvons écrire W sous la forme d'une somme de 3 termes :

$$W = W^I + W^J + W^{IJ} \quad (\text{II} - 70)$$

avec

$$W^I = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^I C_{ijkl}^{\circ} T_{klmn}^{II} C_{mnpq}^{\circ} \varepsilon_{pq}^I + \frac{1}{2} V_I \varepsilon_{ij}^I C_{ijkl}^{\circ} \varepsilon_{kl}^I \quad (\text{II} - 71)$$

$$W^J = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^J C_{ijkl}^{\circ} T_{klmn}^{JJ} C_{mnpq}^{\circ} \varepsilon_{pq}^J + \frac{1}{2} V_J \varepsilon_{ij}^J C_{ijkl}^{\circ} \varepsilon_{kl}^J \quad (\text{II} - 72)$$

$$W^{IJ} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^I C_{ijkl}^{\circ} T_{klmn}^{IJ} C_{mnpq}^{\circ} \varepsilon_{pq}^J - \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^J C_{ijkl}^{\circ} T_{klmn}^{IJ} C_{mnpq}^{\circ} \varepsilon_{pq}^I \quad (\text{II} - 73)$$

W^I et W^J représentent respectivement l'énergie propre associée aux inclusions I et J, alors que W^{IJ} représente l'énergie d'inter-action due à la présence des 2 inclusions I et J.

II - 4 Energie d'interaction avec un champ extérieur Σ

II - 4 - 1 Calcul de l'énergie élastique

Considérons toujours un milieu infini homogène de constantes élastiques C_{ijkl}° , de volume V , contenant deux inclusions I et J dont chacune a subi une déformation plastique ε^I et ε^J et soumis à un champ de contrainte Σ dû à des forces de surface; donc en plus des contraintes internes que l'on notera σ^i , il faut tenir compte dans ce cas du champ extérieur Σ ; l'énergie élastique de déformation est alors [3] :

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij}^i + \Sigma_{ij}) (\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ij}^T - \varepsilon_{ij}^P) dV \quad (\text{II} - 74)$$

où ε° est la déformation élastique associée à la contrainte Σ ; on notera $\vec{u}^{\circ} (u_i^{\circ})_{i=1,2,3}$ le déplacement associé à ε° . En développant (II - 74) et en tenant compte du fait que :

$$\Sigma_{ij} = C_{ijkl}^{\circ} \varepsilon_{kl}^{\circ} = C_{ijkl}^{\circ} u_{kl}^{\circ} \quad (\text{II} - 75)$$

$$\sum_{i,j} \sigma_{i,j} = 0 \quad (\text{II} - 78)$$

d'où :

$$\int_V \sigma_{ij}^i (\varepsilon_{ij}^0 + \varepsilon_{ij}^T) d\vec{r} = 0 \quad (\text{II} - 77)$$

de même, puisque :

$$\sum_{ij} (\mu_{i,j}^T - \varepsilon_{i,j}^P) = c_{ijkp}^0 \mu_{k,l}^0 (\mu_{i,j}^T - \varepsilon_{i,j}^P) = \mu_{k,l}^0 \sigma_{kl}^i \quad (\text{II} - 78)$$

et
$$\int_V \sigma_{ij}^i \mu_{i,j}^0 d\vec{r} = 0 \quad (\text{II} - 79)$$

on a :
$$\int_V \sum_{ij} (\varepsilon_{ij}^T - \varepsilon_{ij}^P) d\vec{r} = 0 \quad (\text{II} - 80)$$

d'où (II - 74)
$$\rightarrow W = \frac{1}{2} \int_V \sum_{ij} \varepsilon_{ij}^0(\vec{r}) d\vec{r} - \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}^i \varepsilon_{ij}^P d\vec{r} \quad (\text{II} - 81)$$

Dans le cas d'une paire d'inclusions plastiques le 2^e terme dans (II - 81) a été calculé; il est donné par (II - 69); donc en appelant :

$$W^0 = \frac{1}{2} \int_V \sum_{ij} \varepsilon_{ij}^0 d\vec{r} \quad (\text{II} - 82)$$

on a :
$$W = W^0 + W^I + W^J + W^{IJ} \quad (\text{II} - 83)$$

et on voit que l'énergie élastique est la somme de deux termes, l'un dû à la présence de Σ , l'autre aux déformations plastiques ε^I et ε^J .

II - 4 - 2 Energie d'interaction entre le champ extérieur et une paire d'inclusions plastiques.

L'énergie potentielle totale W^{pot} , considérée dans le paragraphe II - 4 - 1, est égale à :

$$W^{\text{pot}} = W - \int_S F_i (\mu_i^0 + \mu_i^T) dS \quad (\text{II} - 84)$$

où F_i représente les forces surfaciques appliquées à la frontière S du

milieu tel que
$$\sum_{ij} h_j = F_i \quad \text{sur } S$$

L'énergie d'interaction W^{int} entre la paire d'inclusions plastiques et les forces extérieures F_i , est définie par :

$$W^{int} = W^{pot} - W_{(\varepsilon^p=0)}^{pot} - W_{(F_i=0)}^{pot} \quad (II - 85)$$

or :

$$W_{(\varepsilon^p=0)}^{pot} = \frac{1}{2} \int_V \Sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^0 dV - \int_S F_i u_i^0 dS = W^0 - \int_S F_i u_i^0 dS \quad (II - 86)$$

et

$$W_{(F_i=0)}^{pot} = W^I + W^J + W^{IJ} \quad (II - 87)$$

donc (II - 83) et (II - 85) →

$$W^{int} = W^0 + W^I + W^J + W^{IJ} - \int_S F_i (u_i^0 + u_i^T) dS - W^0 + \int_S F_i u_i^0 dS = W^I + W^J + W^{IJ} \quad (II - 88)$$

on peut donc écrire :

$$W^{int} = - \int_S F_i u_i^T dS = - \int_S \Sigma_{ij} n_j u_i^T dS \quad (II - 89)$$

or :

$$- \int_S \Sigma_{ij} n_j u_i^T dS = \int_V \Sigma_{ij} u_{i,j}^T dV = \int_V \Sigma_{ij} (u_{i,j}^T - \varepsilon_{ij}^p) dV = \int_V \Sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^p dV \quad (II - 90)$$

et tenant compte de II - 80 on a :

$$W^{int} = - \int_V \Sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^p dV \quad (II - 91)$$

cas où l'on a une paire d'inclusions plastiques et Σ uniforme :

Lorsqu'on a une paire d'inclusions plastiques de volumes V_I et V_J , dans le milieu infini, et lorsqu'on suppose Σ_{ij} uniforme alors (II - 91) se réduit simplement à :

$$W^{int} = - V_I \Sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^p - V_J \Sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^p \quad (II - 92)$$

II - 5 Conclusion

Dans ce chapitre on a donc calculé les contraintes et les déformations totales pour le problème de la paire d'inclusions plastiques et homogènes; la résolution complète du problème nécessite le calcul du tenseur T^{ij} (qui se déduit simplement du tenseur S d'ESHELBY) et d'un tenseur d'interaction T^{IJ} que l'on retrouvera encore pour le problème de la paire hétérogène, qui est traité dans le chapitre suivant; le calcul explicite du tenseur T^{IJ} fait l'objet du chapitre V dans le cas d'un milieu anisotrope pour deux inclusions ellipsoïdales.

II - 6 - BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE II

- 1 - R. de WITT , N.B.S., 77 A (1972)
- 2 - J.D. ESHELBY, Prog. Sol. Mech., (1961) NORTH-HOLLAND
- 3 - T. MURA , Mechanics of elastic and inelastic solids 3
MARTINUS NIJHOFF (1982)

CHAPITRE III

Problème de la paire d'inclusions hétérogènes

- III - 1 - Equation intégrale pour les milieux hétérogènes élastiques.
- III - 2 - Solution de l'équation générale pour une paire d'inclusions hétérogènes.
- III - 3 - Calcul de l'énergie élastique
- III - 4 - Applications et conclusions
- III - 5 - Bibliographie chapitre III

Dans ce chapitre, nous traitons le problème de la paire d'inclusions hétérogènes, c'est-à-dire le cas d'un milieu où deux régions possèdent des constantes élastiques différentes de celles de la matrice, soumise à l'infini à une contrainte ou déformation uniforme. Ce problème trouve des applications dans les problèmes de matériaux composites, d'endommagement (interaction de deux précipités, de deux fissures...) et de métallurgie physique (précipitation). Nous rappelons d'abord l'équation intégrale de DEDERICHS et ZELLER [1] que nous appliquons au problème de la paire d'inclusions; nous comparons ensuite les résultats obtenus avec ceux déduits d'une méthode approchée dite approximation de BORN; et nous illustrons enfin les calculs sur un cas particulier.

III - 1 - Equation intégrale pour les milieux hétérogènes linéaires (élastiques)

Considérons un milieu infini dont les constantes élastiques locales $C(\vec{r})$ dépendent de la position \vec{r} ; il s'agit par exemple de polycristaux, _{ijkl}

de polyphasés, de composites ou de matériaux endommagés. Ce milieu est soumis à des forces surfaciques F qui créent des contraintes $\sigma(\vec{r})$ et des déformations $\epsilon(\vec{r})$ variables dans le milieu à cause de l'hétérogénéité des propriétés élastiques et des conditions particulières d'application des forces F .

Nous nous intéressons ici au cas particulier d'un système de force F qui créent un champ uniforme (Σ, ξ^0) dans le milieu infini homogène. Un tel problème est défini par les équations suivantes :

- l'équation d'équilibre (on suppose qu'il n'existe pas de forces volumiques) :

$$\sigma_{ij,j}(\vec{r}) = 0 \tag{III - 1}$$

- la compatibilité du champ ϵ :

$$\epsilon_{ij}(\vec{r}) = \frac{1}{2} (u_{i,j}(\vec{r}) + u_{j,i}(\vec{r})) \tag{III - 2}$$

- le comportement linéaire local :

$$\sigma_{ij}(\vec{r}) = c_{ijkl}(\vec{r}) \epsilon_{kl}(\vec{r}) \tag{III - 3}$$

- et les conditions aux frontières

Nous cherchons un système d'équations portant uniquement sur le déplacement $\vec{u}(\vec{r})$, en portant (III - 2) dans (III - 3) :

$$\sigma_{ij}(\vec{r}) = c_{ijkl}(\vec{r}) \frac{1}{2} (u_{k,l}(\vec{r}) + u_{l,k}(\vec{r})) = c_{ijkl}(\vec{r}) u_{k,l}(\vec{r}) \tag{III - 4}$$

et en portant (III - 4) dans (III - 1), nous sommes conduits au système d'équations aux dérivées partielles :

$$\left(c_{ijkl}(\vec{r}) u_{k,l}(\vec{r}) \right)_{,j} = 0 \tag{III - 5}$$

Il est alors avantageux d'introduire un milieu homogène fictif de constantes élastiques C_{ijkl}^0 tel que :

$$c_{ijkl}(\vec{r}) = C_{ijkl}^0 + \delta c_{ijkl}(\vec{r}) \quad (\text{III} - 6)$$

(III - 5) devient alors :

$$C_{ijkl}^0 u_{k,lj} + \left(\delta c_{ijkl}(\vec{r}) u_{k,l} \right)_{,j} = 0 \quad (\text{III} - 7)$$

Le deuxième terme $\left(\delta c_{ijkl}(\vec{r}) u_{k,l} \right)_{,j}$ dans le 1er membre de (III - 7) peut être considéré comme une distribution de forces volumiques fictives. Utilisons le tenseur de GREEN du milieu infini de constantes élastiques C_{ijkl}^0 défini par :

$$C_{ijkl}^0 G_{km,lj}(\vec{r}-\vec{r}') + \delta_{im} \delta(\vec{r}-\vec{r}') = 0 \quad (\text{III} - 8)$$

pour écrire la solution de (III - 7) ainsi :

$$u_m(\vec{r}) = u_m^0(\vec{r}) + \int_V G_{mi}(\vec{r}-\vec{r}') \left(\delta c_{ijkl}(\vec{r}') \varepsilon_{kl}(\vec{r}') \right)_{,j'} d\vec{r}' \quad (\text{III} - 9)$$

où u_m^0 est une solution de l'équation homogène associée, et V le volume du milieu considéré.

Pour obtenir la déformation locale $\varepsilon(\vec{r})$ il faut calculer le gradient $u_{m,n}$, d'où :

$$u_{m,n}(\vec{r}) = u_{m,n}^0(\vec{r}) + \int_V G_{mi,n}(\vec{r}-\vec{r}') \left(\delta c_{ijkl}(\vec{r}') \varepsilon_{kl}(\vec{r}') \right)_{,j'} d\vec{r}' \quad (\text{III} - 10)$$

d'où la déformation locale :

$$\varepsilon_{mn}(\vec{r}) = \varepsilon_{mn}^0(\vec{r}) + \int_V \frac{1}{2} \left\{ G_{mi,nj'}(\vec{r}-\vec{r}') + G_{ni,mj'}(\vec{r}-\vec{r}') \right\} \left\{ \delta c_{ijkl}(\vec{r}') \varepsilon_{kl}(\vec{r}') \right\}_{,j'} d\vec{r}' \quad (\text{III} - 11)$$

que l'on peut intégrer par parties pour obtenir l'expression suivante, en supposant qu'elle s'annule à la frontière :

$$\varepsilon_{mn}(\vec{r}) = \varepsilon_{mn}^0(\vec{r}) - \int_V \left\{ G_{mi,nj'}(\vec{r}-\vec{r}') + G_{ni,mj'}(\vec{r}-\vec{r}') \right\} \delta c_{ijkl}(\vec{r}') \varepsilon_{kl}(\vec{r}') d\vec{r}' \quad (\text{III} - 12)$$

et tenant compte de (II - 30), on obtient

$$\epsilon_{mn}(\vec{r}) = \epsilon_{mn}^0 - \int_V \Gamma_{mnij}(\vec{r}, \vec{r}') \delta c_{ijkl}(\vec{r}') \epsilon_{kl}(\vec{r}') d\vec{r}' \quad (III - 13)$$

où

$$\Gamma_{mnij}(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{2} \left\{ G_{mi, nj}(\vec{r}, \vec{r}') + G_{ni, mj}(\vec{r}, \vec{r}') \right\} \quad (III - 14)$$

Cette équation intégrale appelée équation L S D par KRONER [2] a été proposée sous cette forme par DEDERICH et ZELLER [1]; Nous l'utilisons pour résoudre le problème particulier de la paire d'inclusions.

III - 2 Solution de l'équation générale pour une paire d'inclusions hétérogènes

La solution du problème pour une hétérogénéité quelconque présente de nombreuses difficultés; par contre pour le problème de la paire d'inclusions, nous pouvons obtenir une solution approchée pour les déformations moyennes. Nous considérons donc un milieu infini de constantes élastiques C_{ijkl}^0 contenant deux inclusions I et J de volume V_I et V_J , et de constantes élastiques C_{ijkl}^I et C_{ijkl}^J , supposées uniformes dans V_I et V_J . A l'infini le milieu est sollicité par un système de forces surfaciques créant dans tout le milieu homogène (C^0) une déformation uniforme ϵ_{mn}^0 ; l'équation (III - 13) donne alors :

$$\epsilon_{mn}(\vec{r}) = \epsilon_{mn}^0 - \int_V \Gamma_{mnij}(\vec{r}, \vec{r}') \delta c_{ijkl}(\vec{r}') \epsilon_{kl}(\vec{r}') d\vec{r}' \quad (III - 15)$$

δc_{ijkl} est donné par :

$$\delta c_{ijkl}(\vec{r}) = \left\{ C_{ijkl}^I - C_{ijkl}^0 \right\} \theta^I(\vec{r}) + \left\{ C_{ijkl}^J - C_{ijkl}^0 \right\} \theta^J(\vec{r}) \quad (III - 16)$$

que nous écrivons sous la forme :

$$\delta c_{ijkl}(\vec{r}) = \Delta C_{ijkl}^I \theta^I(\vec{r}) + \Delta C_{ijkl}^J \theta^J(\vec{r})$$

Les déformations moyennes dans les inclusions I et J sont données par :

dans I :
$$\xi_{mn}^I = \frac{1}{V_I} \int_{V_I} \xi_{mn}(\vec{r}) d\vec{r}$$

$$\begin{aligned} \xi_{mn}^I = \xi_{mn}^0 &- \frac{1}{V_I} \int_{V_I} \int_V \left[\overline{\Gamma_{mnij}^{(\vec{r}-\vec{r}')}} \Delta C_{ijkl}^I \theta^I(\vec{r}) \xi_{kl}(\vec{r}') d\vec{r}' d\vec{r} \right. \\ &\left. - \frac{1}{V_I} \int_{V_I} \int_V \left[\overline{\Gamma_{mnij}^{(\vec{r}-\vec{r}')}} \Delta C_{ijkl}^J \theta^J(\vec{r}) \xi_{kl}(\vec{r}') d\vec{r}' d\vec{r} \right] \end{aligned} \quad \text{(III - 17)}$$

on obtient pour ξ^J une formule analogue :

$$\begin{aligned} \xi_{mn}^J &= \frac{1}{V_J} \int_{V_J} \xi_{mn}(\vec{r}) d\vec{r} \\ \xi_{mn}^J = \xi_{mn}^0 &- \frac{1}{V_J} \int_{V_J} \int_V \left[\overline{\Gamma_{mnij}^{(\vec{r}-\vec{r}')}} \Delta C_{ijkl}^J \theta^J(\vec{r}) \xi_{kl}(\vec{r}') d\vec{r}' d\vec{r} \right. \\ &\left. - \frac{1}{V_J} \int_{V_J} \int_V \left[\overline{\Gamma_{mnij}^{(\vec{r}-\vec{r}')}} \Delta C_{ijkl}^I \theta^I(\vec{r}) \xi_{kl}(\vec{r}') d\vec{r}' d\vec{r} \right] \end{aligned} \quad \text{(III - 18)}$$

La solution exacte de ces équations est encore très complexe et difficile à déduire en général; nous pouvons obtenir une solution approchée en remplaçant dans les intégrales dans (III - 17) et (III - 18), les déformations $\xi(\vec{r})$ par leur valeur moyenne ξ^I et ξ^J dans les inclusions I et J.

Nous avons alors (III - 17) →

$$\begin{aligned} \xi_{mn}^I &= \xi_{mn}^0 - \frac{1}{V_I} \int_{V_I} \int_{V_I} \left[\overline{\Gamma_{mnij}^{(\vec{r}-\vec{r}')}} \Delta C_{ijkl}^I \xi_{kl}^I d\vec{r}' d\vec{r} \right. \\ &\left. - \frac{1}{V_I} \int_{V_I} \int_{V_J} \left[\overline{\Gamma_{mnij}^{(\vec{r}-\vec{r}')}} \Delta C_{ijkl}^J \xi_{kl}^J d\vec{r}' d\vec{r} \right] \end{aligned} \quad \text{(III - 19)}$$

et en posant :

$$T_{mnij}^{II} = \int_{V_I} \int_{V_I} \sqrt{\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{mnij}} d\vec{r} d\vec{r}'$$

$$T_{mnij}^{JJ} = \int_{V_J} \int_{V_J} \sqrt{\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{mnij}} d\vec{r} d\vec{r}'$$

(III - 20)

$$T_{mnij}^{IJ} = \int_{V_I} \int_{V_J} \sqrt{\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{mnij}} d\vec{r} d\vec{r}'$$

et l'on a alors le système linéaire :

$$\xi_{mn}^I = \xi_{mn}^0 - \frac{1}{V_I} T_{mnij}^{II} \Delta C_{ijkl}^I \xi_{kl}^I - \frac{1}{V_I} T_{mnij}^{IJ} \Delta C_{ijkl}^J \xi_{kl}^J$$

(III - 21)

$$\xi_{mn}^J = \xi_{mn}^0 - \frac{1}{V_J} T_{mnij}^{JJ} \Delta C_{ijkl}^J \xi_{kl}^J - \frac{1}{V_J} T_{mnij}^{IJ} \Delta C_{ijkl}^I \xi_{kl}^I$$

et l'on voit que la solution du problème de la paire hétérogène se ramène également au calcul des tenseurs T^{II} , T^{JJ} et T^{IJ} , qu'il était déjà nécessaire de calculer dans le cas du problème de la paire plastique.

III - 3 Calcul de l'énergie élastique

Soit un milieu solide de volume V soumis à des contraintes uniformes à l'infini créant une déformation élastique uniforme à l'infini ; On suppose de plus que le milieu contient une paire d'inclusions I et J hétérogènes.

Pour déterminer l'énergie élastique, il est commode de remplacer le problème hétérogène par un problème homogène avec des déformations plastiques fictives qui conduisent aux mêmes contraintes et déformations totales que dans le problème réel; cette méthode de l'inclusion équivalente a été proposée par ESHELBY [3]; nous l'étendons au cas de la paire d'inclusions; déterminons donc de telles déformations plastiques fictives qu'on notera ξ_{kl}^I pour l'inclusion (I) et ξ_{kl}^J pour (J).

L'énergie élastique s'écrit toujours sous la forme :

$$W = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}^e \varepsilon_{ij}^e d\vec{r} \quad (\text{III} - 22)$$

qu'on peut encore écrire ainsi :
$$W = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \mu_{i,j}^T d\vec{r} \quad (\text{III} - 23)$$

ou encore
$$W = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij} \mu_{i,j}^T)_{,j} d\vec{r} - \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij,j} \mu_i^T d\vec{r} \quad (\text{III} - 24)$$

et compte tenu de l'équation de continuité, il vient :

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij} \mu_{i,j}^T)_{,j} d\vec{r} = \frac{1}{2} \int_S \sigma_{ij} \mu_i^T n_j dS \quad (\text{III} - 25)$$

sur S frontière de V, on a :
$$\sigma_{ij} n_j = \sum_{ij} n_j \quad (\text{III} - 26)$$

\sum_{ij} étant supposée uniforme, il vient en définitive :

$$W = \frac{1}{2} \sum_{ij} \int_V \mu_{i,j}^T d\vec{r} \quad (\text{III} - 27)$$

d'ou encore, à cause des symétries de \sum_{ij} et ε_{ij} :

$$W = \frac{1}{2} \sum_{ij} \int_V \varepsilon_{ij}^T d\vec{r} \quad (\text{III} - 28)$$

et
$$\int_V \varepsilon_{ij}^T d\vec{r} = \int_V (\varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p) d\vec{r} \quad (\text{III} - 29)$$

et
$$\frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij}^e d\vec{r} = \frac{1}{V} \int_V s_{ijkl} \sigma_{kl} d\vec{r} \quad (\text{III} - 30)$$

où s_{ijkl} sont les compliances locales; mais comme nous travaillons dans le milieu homogène équivalent de constantes élastiques C_{ijkl} alors :

$$s_{ijkl} = S_{ijkl}^0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{V} \int_V s_{ijkl} \sigma_{kl} d\vec{r} = \frac{1}{V} S_{ijkl}^0 \int_V \sigma_{kl} d\vec{r} = S_{ijkl}^0 \sum_{kl} \quad (\text{III} - 31)$$

ou encore, puisque

$$\int_{ijh\ell} \Sigma_{h\ell} = E_{h\ell}^e = \varepsilon_{h\ell}^e \quad (\text{III} - 32)$$

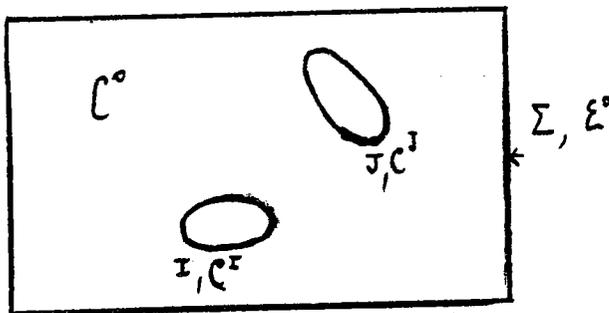
$$\frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij}^e d\mathbf{r} = \varepsilon_{ij}^e \quad (\text{III} - 33)$$

d'autre part

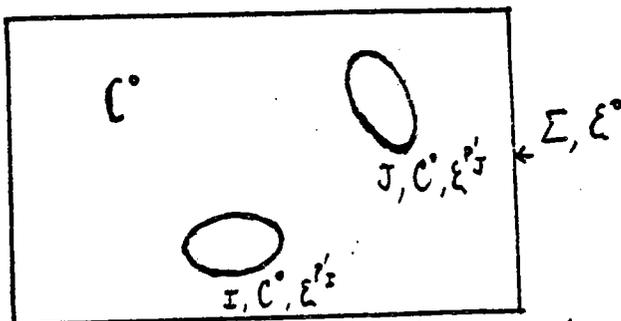
$$\frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij}^{P'} d\mathbf{r} = \frac{V_I}{V} \varepsilon_{ij}^{P'I} + \frac{V_J}{V} \varepsilon_{ij}^{P'J} \quad (\text{III} - 34)$$

puisque $\varepsilon^{P'}$ est différent de zéro uniquement dans les inclusions I et J; pour évaluer $\varepsilon^{P'I}$ et $\varepsilon^{P'J}$ on utilise la technique de l'inclusion équivalente; on a le schéma suivant.

paire hétérogène



et pour la paire équivalente homogène :



Les déformations plastiques moyennes $\varepsilon^{P'I}$ et $\varepsilon^{P'J}$, pour le problème homogène équivalent, dans I et J, doivent être telles que, les déformations totales moyennes dans les deux inclusions soient identiques dans les deux cas, et les contraintes moyennes dans I et J soient les mêmes pour les deux problèmes.

or pour le problème hétérogène on a, d'après (III - 21), pour les déformations totales :

$$\varepsilon_{mn}^{T_I} = \varepsilon_{mn}^e - \frac{1}{V_I} T_{mnij}^{II} \Delta C_{ij\ell\ell}^I \varepsilon_{h\ell}^{T_I} - \frac{1}{V_I} T^{IJ} \Delta C_{ij\ell\ell}^J \varepsilon_{h\ell}^{T_J} = \varepsilon_{mn}^e + \varepsilon_{mn}' \quad (\text{III} - 35)$$

$$\text{et } \varepsilon_{mn}^{T_J} = \varepsilon_{mn}^e - \frac{1}{V_J} T_{mnij}^{JJ} \Delta C_{ij\ell\ell}^J \varepsilon_{h\ell}^{T_J} - \frac{1}{V_J} T_{mnij}^{IJ} \Delta C_{ij\ell\ell}^I \varepsilon_{h\ell}^{T_I} = \varepsilon_{mn}^e + \varepsilon_{mn}' \quad (\text{III} - 36)$$

et pour la paire équivalente homogène, on a, d'après (II - 44)

$$\xi_{mn}^{T_I} = \xi_{mn}^{\circ} + \frac{1}{V_I} T_{mnij}^{II} C_{ijke}^{\circ} \xi_{ke}^{P'_I} + \frac{1}{V_I} T_{mnij}^{IJ} C_{ijke}^{\circ} \xi_{ke}^{P'_J} \quad (III - 37)$$

$$\xi_{mn}^{T_J} = \xi_{mn}^{\circ} + \frac{1}{V_J} T_{mnij}^{JJ} C_{ijke}^{\circ} \xi_{ke}^{P'_J} + \frac{1}{V_J} T_{mnij}^{IJ} C_{ijke}^{\circ} \xi_{ke}^{P'_I} \quad (III - 38)$$

et pour les déformations élastiques, pour le problème hétérogène, ce sont les mêmes que les déformations totales, et pour le problème de la paire équivalente homogène elles sont données par :

$$\xi_{mn}^e = \xi_{mn}^{T_I} - \xi_{mn}^{P'_I} \quad (III - 39)$$

et

$$\xi_{mn}^e = \xi_{mn}^{T_J} - \xi_{mn}^{P'_J} \quad (III - 40)$$

évaluons maintenant les contraintes moyennes pour les deux problèmes:
on a d'une part :

$$\sigma_{ij}^I = C_{ijke}^I \xi_{ke}^I \quad (III - 41)$$

et

$$\sigma_{ij}^J = C_{ijke}^J \xi_{ke}^J \quad (III - 42)$$

et d'autre part, compte tenu de (III - 39) et (III - 40)

$$\sigma_{ij}^I = C_{ijke}^{\circ} (\xi_{ke}^{T_I} - \xi_{ke}^{P'_I}) \quad (III - 43)$$

et

$$\sigma_{ij}^J = C_{ijke}^{\circ} (\xi_{ke}^{T_J} - \xi_{ke}^{P'_J}) \quad (III - 44)$$

Les contraintes moyennes dans I et J doivent être égales pour les deux problèmes, donc :

$$C_{ijke}^I \xi_{ke}^{T_I} = C_{ijke}^{\circ} \xi_{ke}^{T_I} - C_{ijke}^{\circ} \xi_{ke}^{P'_I} \quad (III - 45)$$

et

$$C_{ijke}^J \xi_{ke}^{T_J} = C_{ijke}^{\circ} \xi_{ke}^{T_J} - C_{ijke}^{\circ} \xi_{ke}^{P'_J} \quad (III - 46)$$

et en posant

$$\Delta C_{ijke}^I = C_{ijke}^I - C_{ijke}^{\circ} \quad (III - 47)$$

et

$$\Delta C_{ijke}^J = C_{ijke}^J - C_{ijke}^{\circ} \quad (III - 48)$$

d'où les relations vérifiées par $\varepsilon_{I}^{P'}$ et $\varepsilon_{J}^{P'}$

$$C_{ijkl}^{\circ} \varepsilon_{kl}^{P'I} = -\Delta C_{ijkl}^I \varepsilon_{kl}^{T_I} \quad (III - 49)$$

$$C_{ijkl}^{\circ} \varepsilon_{kl}^{P'J} = -\Delta C_{ijkl}^J \varepsilon_{kl}^{T_J} \quad (III - 50)$$

Finalement, compte tenu des relations (III - 33) et (III - 34), nous avons pour l'énergie W dans le cas d'un paire d'inclusions hétérogènes non plastiques :

(III - 28) →

$$W = \frac{1}{2} \sum_{ij} \varepsilon_{ij}^{\circ} V + \frac{1}{2} V_I \sum_{ij} \varepsilon_{ij}^{P'I} + \frac{1}{2} V_J \sum_{ij} \varepsilon_{ij}^{P'J} \quad (III - 51)$$

où $\varepsilon_{I}^{P'}$ et $\varepsilon_{J}^{P'}$ sont données par (III - 49) et (III - 50) et par le système (III - 35) et (III - 36)

Comparaison avec l'approximation de BORN :

Dans le cadre de l'approximation de BORN [4], on aura pour les déformations totales, dans le cas d'une paire hétérogène et non plastique :

$$(III - 35) \rightarrow \varepsilon_{mn}^{T_I} = \varepsilon_{mn}^{\circ} - \frac{1}{V_I} T_{mnij}^{II} \Delta C_{ijkl}^I \varepsilon_{kl}^{\circ} - \frac{1}{V_I} T_{mnij}^{IJ} \Delta C_{ijkl}^J \varepsilon_{kl}^{\circ} \quad (III - 52)$$

$$(III - 36) \rightarrow \varepsilon_{mn}^{T_J} = \varepsilon_{mn}^{\circ} - \frac{1}{V_J} T_{mnij}^{JJ} \Delta C_{ijkl}^J \varepsilon_{kl}^{\circ} - \frac{1}{V_J} T_{mnij}^{JI} \Delta C_{ijkl}^I \varepsilon_{kl}^{\circ} \quad (III - 53)$$

et pour les déformations plastiques fictives :

$$(III - 49) \rightarrow C_{ijkl}^{\circ} \varepsilon_{kl}^{P'I} = -\Delta C_{ijkl}^I \left\{ \varepsilon_{kl}^{\circ} - \frac{1}{V_I} T_{klmn}^{II} \Delta C_{mnpq}^I \varepsilon_{pq}^{\circ} - \frac{1}{V_I} T_{klmn}^{IJ} \Delta C_{mnpq}^J \varepsilon_{pq}^{\circ} \right\} \quad (III - 54)$$

$$(III - 50) \rightarrow C_{ijkl}^{\circ} \varepsilon_{kl}^{P'J} = -\Delta C_{ijkl}^J \left\{ \varepsilon_{kl}^{\circ} - \frac{1}{V_J} T_{klmn}^{JJ} \Delta C_{mnpq}^J \varepsilon_{pq}^{\circ} - \frac{1}{V_J} T_{klmn}^{JI} \Delta C_{mnpq}^I \varepsilon_{pq}^{\circ} \right\} \quad (III - 55)$$

d'où l'expression de l'énergie W_B , dans le cas de l'approximation de BORN. (III - 51), (III - 54) et (III - 55), compte tenu de ce que

$$\sum_{ij} S_{ijkl}^0 = \varepsilon_{kk}^0 \quad (S^0 \text{ compliance})$$

$$W_B = \frac{1}{2} \sum_{ij} \varepsilon_{ij}^0 v - \frac{1}{2} v_I \varepsilon_{ij}^0 \Delta C_{ijkl}^I \left\{ \varepsilon_{kk}^0 - \frac{1}{v_I} T_{klmn}^{II} \Delta C_{mnpq}^I \varepsilon_{pq}^0 - \frac{1}{v_I} T_{klmn}^{IJ} \Delta C_{mnpq}^J \varepsilon_{pq}^J \right\} - \frac{1}{2} v_J \varepsilon_{ij}^0 \Delta C_{ijkl}^J \left\{ \varepsilon_{kk}^0 - \frac{1}{v_J} T_{klmn}^{JJ} \Delta C_{mnpq}^J \varepsilon_{pq}^0 - \frac{1}{v_J} T_{klmn}^{IJ} \Delta C_{mnpq}^I \varepsilon_{pq}^I \right\} \quad (III - 58)$$

Cette solution approchée n'est en fait valable que pour les faibles valeurs de l'hétérogénéité relative des inclusions par rapport à la matrice. Nous allons voir sur un cas particulier de deux inclusions sphériques isotropes dans un milieu isotrope les limites de l'approximation de BORN.

III - 4 Application et conclusions

Envisageons donc la situation particulière de deux inclusions sphériques I et J, de même rayon R dont les centres situés sur l'axe des x_3 sont à une distance ρ ; nous supposons de plus que l'élasticité est isotrope dans la matrice (modules de Lamé étant λ^0 et μ^0 , et rapport de Poisson ν^0), et également dans les inclusions (λ, μ et ν). Nous supposons de plus qu'il n'y a pas de déformations plastiques et que la déformation macroscopique uniforme ε^0 correspond à un cisaillement pur de la forme :

$$(\varepsilon_{ij}^0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E \\ 0 & E & 0 \end{pmatrix}$$

On a alors à traiter le problème de la paire hétérogène non plastique, dans le cas simplifié où on a les relations suivantes :

$$\Delta C_{ijke}^I = \Delta C_{ijkl}^J \equiv \Delta C_{ijke} = \Delta \lambda \delta_{ij} \delta_{ke} + \Delta \mu (\delta_{ik} \delta_{je} + \delta_{ie} \delta_{jk}) \quad (III - 57)$$

avec
$$\Delta \lambda = \lambda - \lambda^0 \quad \text{et} \quad \Delta \mu = \mu - \mu^0 \quad (III - 58)$$

les 2 inclusions sphériques étant identiques, on a :

$$T_{ijke}^{II} = T_{ijke}^{JJ} \equiv T_{ijke} \quad (III - 59)$$

et on posera

$$T_{ijke}^{IJ} = T_{ijke}^{JI} \equiv T'_{ijke} \quad (III - 60)$$

et
$$\varepsilon_{ij}^{P'} = \varepsilon_{ij}^{P''} \equiv \varepsilon_{ij}^{P'} \quad (\text{III} - 61)$$

et
$$V_I = V_J \quad (\text{III} - 62)$$

Dans cette situation l'énergie élastique W s'écrit à partir de (III - 51)

si l'on pose
$$W^0 = \frac{1}{2} \sum_{ij} \varepsilon_{ij}^0 V$$

$$W = W^0 + V_I \sum_{ij} \varepsilon_{ij}^{P'} \quad (\text{III} - 63)$$

$\varepsilon_{ij}^{P'}$ étant solution de (III - 37), (III - 38), (III - 41) et (III - 50):

$$C_{ijkl}^0 \varepsilon_{kl}^{P'} + \frac{1}{V_I} \Delta C_{ijkl} \left\{ T_{klmn} + T'_{klmn} \right\} C_{mnpq}^0 \varepsilon_{pq}^{P'} = -\Delta C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^0 \quad (\text{III} - 64)$$

dont on tire :

$$C_{mnpq}^0 \varepsilon_{pq}^{P'} = \left\{ \delta_{im} \delta_{jn} + \frac{\Delta C_{ijkl}}{V_I} (T_{klmn} + T'_{klmn}) \right\}^{-1} \Delta C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^0 \quad (\text{III} - 65)$$

de plus sachant que :

$$\sum_{ij} = C_{ijkl}^0 \varepsilon_{kl}^0 = 2E\mu^0 (\delta_{i2} \delta_{j3} + \delta_{i3} \delta_{j2}) \quad (\text{III} - 66)$$

où l'on peut voir que les seules composantes de \sum non nulles sont \sum_{23} et \sum_{32} qui sont alors égales à $2E\mu^0$.

Par ailleurs on a :

$$-\Delta C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^0 = -\Delta C_{ij23} \varepsilon_{23}^0 - \Delta C_{ij32} \varepsilon_{32}^0 = -2E\mu^0 (\delta_{i2} \delta_{j3} + \delta_{i3} \delta_{j2}) \quad (\text{III} - 67)$$

pour $i = 2, j = 3$ (ou bien $i = 3, j = 2$) on trouve pour le 1er membre de (III - 68), en tenant compte du fait que $T_{k\ell mn}$ et $T'_{k\ell mn}$ sont symétriques par rapport aux 2 premiers indices k et l :

$$C_{ijkl}^0 \varepsilon_{kl}^{P'} + \frac{1}{V_I} \Delta C_{ijkl} \left\{ T_{klmn} + T'_{klmn} \right\} C_{mnpq}^0 \varepsilon_{pq}^{P'} = \mu^0 (\varepsilon_{23}^{P'} + \varepsilon_{32}^{P'}) \left(1 + \frac{2\Delta M}{V_I} T \right) \quad (\text{III} - 68)$$

où l'on a posé
$$T = T_{2323} + T'_{2323} + T_{2332} + T'_{2332} \quad (\text{III} - 70)$$

et les relations (III - 64) (III - 67) et (III - 69) conduisent à :

$$\varepsilon'_{23} + \varepsilon'_{32} = \frac{-2 \Delta^\mu E}{1 + \frac{2 \Delta^\mu T}{V_I}} \times \frac{1}{\mu^0} \quad (\text{III} - 71)$$

d'où, pour l'énergie W en tenant compte de (III - 63), (III - 66) et (III - 71) :

$$W = W^0 + 2 V_I E \mu^0 (\delta_{12} \delta_{13} + \delta_{13} \delta_{12}) = W^0 + 2 V_I E \mu^0 (\varepsilon'_{23} + \varepsilon'_{32}) \quad (\text{III} - 72)$$

ou encore, d'après (III - 63) et (III - 71) :

$$W = W^0 - \frac{4 V_I \Delta^\mu E^2}{1 + \frac{2 \Delta^\mu T}{V_I}} \quad (\text{III} - 73)$$

Dans le cas de l'approximation de BORN, l'énergie est donnée par (III - 56)

$$W_B = W^0 - V_I \varepsilon'_{ij} \Delta C_{ijkl} \varepsilon'_{kl} + \varepsilon'_{ij} \Delta C_{ijkl} \left\{ T_{klmn} + T'_{klmn} \right\} \Delta C_{mnpq} \varepsilon'_{pq} \quad (\text{III} - 74)$$

Dans le cas particulier considéré ici on a :

$$W_B = W^0 - 4 V_I E^2 \Delta^\mu + 8 E^2 (\Delta^\mu)^2 T \quad (\text{III} - 75)$$

(III - 73) et (III - 75) nous permettent de déterminer la part de l'énergie, qu'on notera respectivement W^{Ind} et W_B^{Incl} , liée à la présence de la paire d'inclusions :

$$W^{Ind} = - \frac{4 V_I \Delta^\mu E^2}{1 + \frac{2 \Delta^\mu T}{V_I}} \quad (\text{III} - 76)$$

et

$$W_B^{Incl} = - 4 V_I E^2 \Delta^\mu + 8 E^2 (\Delta^\mu)^2 T \quad (\text{III} - 77)$$

expressions que l'on peut mettre sous la forme réduite :

$$\frac{W^{Incl}}{4 V_I E^2 \mu^0} = - \frac{\Delta^\mu}{\mu^0} \frac{1}{1 + \frac{2 \Delta^\mu T}{V_I}} \quad (\text{III} - 78)$$

et
$$\frac{W_3^{Incl}}{4 V_I E^2 \mu^0} = - \frac{\Delta \mu}{\mu^0} + \frac{(\Delta \mu)^2}{\mu^0} \frac{2T}{V_I} \tag{III - 79}$$

Le terme T peut être déduit des résultats du chapitre V, donnant T^{II} et T^{IJ} pour des sphères, dans le cas isotrope;

on a:

$$T = \frac{V_I}{\mu^0 (1-\nu^0)} \left\{ \frac{1}{15} (4-5\nu^0) + \frac{R^3}{6s^3} \left(1 + \nu^0 - \frac{24}{5} \frac{R^2}{s^2} \right) \right\} \tag{III - 80}$$

La figure (III - 1) représente, en fonction de l'hétérogénéité relative $\frac{\Delta \mu}{\mu^0}$, la variation de l'énergie associée à la présence de la paire d'inclusions (divisée par $4 \mu^0 E^2 V_I$) pour un rapport de Poisson $\nu^0 = \frac{1}{3}$ et pour une valeur du rapport $\frac{R}{s}$ correspondant au contact entre les inclusions $\left(\frac{R}{s} = \frac{1}{2} \right)$.

Nous observons un accord satisfaisant entre la méthode approchée de BORN et le calcul exact tant que l'hétérogénéité relative $\frac{\Delta \mu}{\mu^0}$ est inférieure à l'unité. Au delà les écarts sont sensibles et pour des valeurs de $\frac{\Delta \mu}{\mu^0}$ de l'ordre de 2 les résultats déduits de la méthode de BORN n'ont plus de signification.

Nous voyons aussi que dans ces calculs la part de l'énergie propre relative à chque inclusion reste prépondérante par rapport à l'énergie d'interaction liée à la présence de l'autre inclusion, en effet dans l'expression de T (III - 70), à l'intérieur de l'accolade le 1er terme correspondant au terme T^{II} est beaucoup plus grand que le 2ème dû à T^{IJ}.

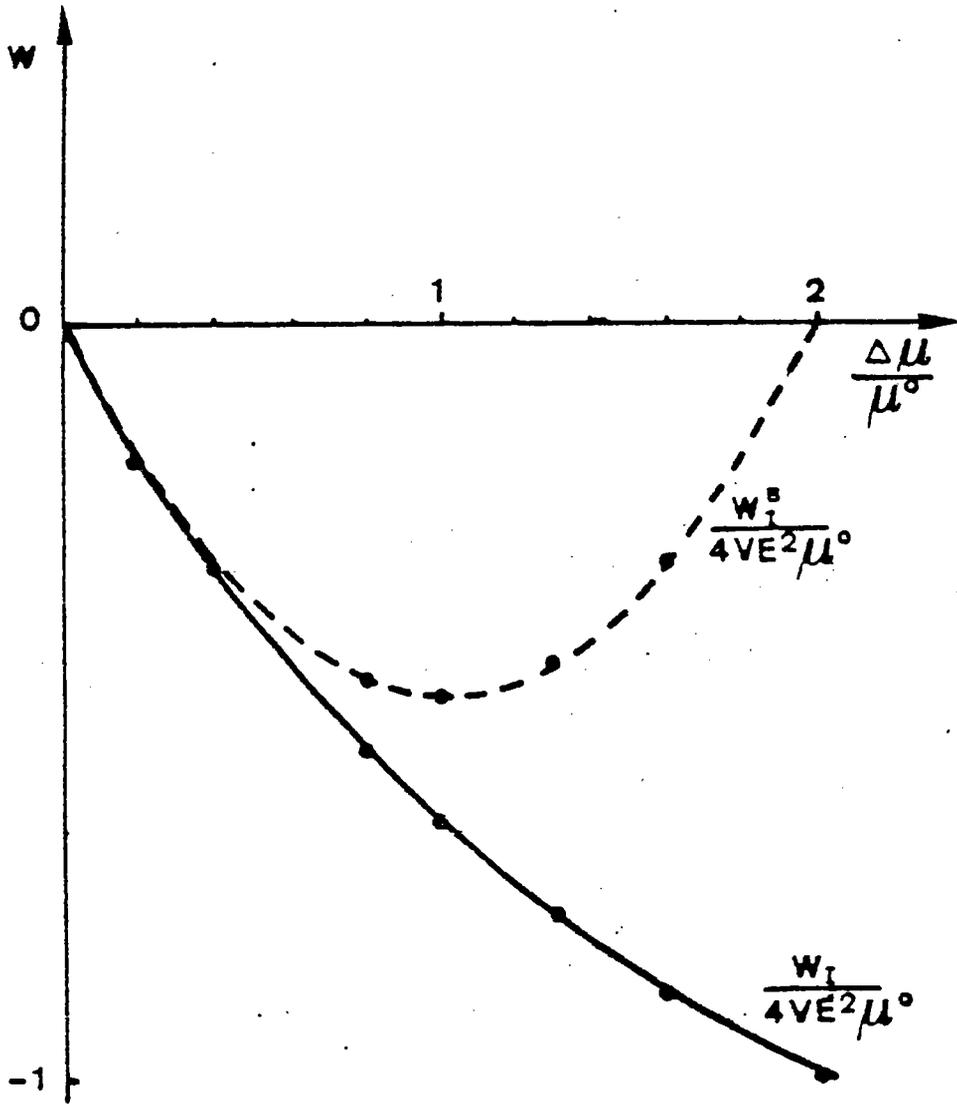


Fig III - 1 La courbe en trait plein représente la variation de l'énergie associée à la présence de la paire en fonction de l'hétérogénéité relative dans notre calcul; La courbe en pointillé représente la même variation dans le cas de l'approximation de BORN.

III - 5 - BIBLIOGRAPHIE CHAPITRE III

- 1 - P.H. DEDERICH et R. ZELLER, Phys. Stat. Sol., BSS (1973)
- 2 - E. KRONER , 15*** colloque de G.F.R. (1981)
- 3 - J.D. ESHELBY , Prog. Sol. Mech., (1961)
- 4 - W.C. JOHNSON , Met. Trans., 14 A (1983)

CHAPITRE IV

Le problème mixte d'une paire d'inclusions hétérogènes et plastiques

- IV - 1 - Equation intégrale pour un milieu hétérogène et plastique
- IV - 2 - Le problème de la paire d'inclusions plastiques et hétérogènes
 - IV - 2 - 1 . Résolution de l'équation intégrale
 - IV - 2 - 2 . Conclusions et remarques
- IV - 3 - Calcul de l'énergie élastique
 - IV - 3 - 1 . Formulation générale
 - IV - 3 - 2 . Evaluation de l'énergie par la méthode du milieu homogène équivalent (M.H.E.)
 - IV - 3 - 3 . Cas particuliers et applications
- IV - 4 - Conclusions
- IV - 5 - Bibliographie du chapitre IV

Les deux cas traités dans les deux chapitres précédents sont en fait des cas particuliers d'un problème plus général de paire d'inclusions plastiques et hétérogènes, c'est-à-dire de deux régions V_1 et V_2 d'un matériau subissant à la fois une déformation anélastique et ayant des modules élastiques différents; c'est le cas par exemple des transformations de phase.

Pour traiter ce problème plus complexe, nous partons d'une équation intégrale proposée par BERVEILLER et ZAOUÏ [1], et nous l'appliquons au problème de la paire hétérogène et plastique. Dans ce cas, nous montrons que le concept d'inclusion plastique équivalente d'ESHELBY peut se généraliser à un champ de déformation plastique fictive.

Nous considérons donc un milieu infini hétérogène pour lequel les constantes élastiques en un point \vec{r} sont $c(\vec{r})$ et où une déformation sans contrainte $\mathcal{E}^p(\vec{r})$ s'est produite à partir d'un état initial sans contrainte. Des contraintes Σ sont appliquées à la surface du milieu infini et nous supposons qu'elles sont telles que, si le milieu était homogène, elles provoqueraient une déformation uniforme élastique.

IV - 1 Equation intégrale pour un milieu hétérogène et plastique

La présence des déformations sans contrainte $\mathcal{E}^p(\vec{r})$, qui à priori sont incompatibles, engendre des contraintes internes et des déformations élastiques \mathcal{E}^e dans le milieu, tel que la déformation totale locale soit compatible, c'est-à-dire dérive d'un déplacement. On a alors :

$$\mathcal{E}_{ij}^T(\vec{r}) = \frac{1}{2} \left(u_{i,j}^T + u_{j,i}^T \right) = \mathcal{E}_{ij}^p(\vec{r}) + \mathcal{E}_{ij}^e(\vec{r}) \quad (IV - 1)$$

La partie élastique est reliée aux contraintes par la loi de Hooke :

$$\sigma_{ij}(\vec{r}) = c_{ijkl}(\vec{r}) \mathcal{E}_{kl}^e(\vec{r}) = c_{ijkl}(\vec{r}) \left\{ \mathcal{E}_{kl}^T(\vec{r}) - \mathcal{E}_{kl}^p(\vec{r}) \right\} = c_{ijkl}(\vec{r}) \left\{ u_{kl}^T(\vec{r}) - \mathcal{E}_{kl}^p(\vec{r}) \right\} \quad (IV - 2)$$

La dernière égalité est déduite des symétries usuelles du tenseur c

$$c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk} \quad (IV - 3)$$

Le champ des contraintes doit être en équilibre, ce qui, en l'absence de forces volumiques s'écrit :

$$\left\{ c_{ijkl} \left(u_{kl}^T - \mathcal{E}_{kl}^p \right) \right\}_{,j} = 0 \quad (IV - 4)$$

comme dans (III - 8), on introduit un milieu homogène infini, de constantes élastiques C^0 tel que :

$$c_{ijkl}(\vec{r}) = C_{ijkl}^0 + \delta c_{ijkl}(\vec{r}) \quad (IV - 5)$$

nous déduisons alors de (IV - 4) :

$$C_{ijkl}^0 \mu_{k,lj}^T = \left\{ c_{ijkl}(\vec{r}) \varepsilon_{kl}^T(\vec{r}) - \delta c_{ijkl}(\vec{r}) \varepsilon_{kl}^T(\vec{r}) \right\}_{,j} \quad (IV - 6)$$

où encore le deuxième membre peut être considéré comme une distribution de forces volumiques fictives f_i :

$$f_i = - \left\{ c_{ijkl}(\vec{r}) \varepsilon_{kl}^T(\vec{r}) - \delta c_{ijkl}(\vec{r}) \varepsilon_{kl}^T(\vec{r}) \right\}_{,j} \quad (IV - 7)$$

et la solution de (IV - 6) obtenue à partir du tenseur de GREEN, s'écrit pour un milieu infini de volume V :

$$\mu_m^T(\vec{r}) = \mu_m^0(\vec{r}) + \int_V G_{mi}(\vec{r}-\vec{r}') f_i(\vec{r}') d\vec{r}' \quad (IV - 8)$$

où \vec{u}^0 est le déplacement correspondant à la déformation ε^0 .
En tenant compte de (IV - 7) on a alors :

$$\mu_m^T(\vec{r}) = \mu_m^0(\vec{r}) - \int_V G_{mi}(\vec{r}-\vec{r}') \left\{ c_{ijkl}(\vec{r}') \varepsilon_{kl}^T(\vec{r}') - \delta c_{ijkl}(\vec{r}') \varepsilon_{kl}^T(\vec{r}') \right\}_{,j'} d\vec{r}' \quad (IV - 9)$$

que l'on peut intégrer par parties pour obtenir, compte tenu des relations (II - 30) et (II - 40), l'équation proposée par BERVEILLER et ZAOUÏ [1] pour les déformations totales locales :

$$\varepsilon_{mn}^T(\vec{r}) = \varepsilon_{mn}^0(\vec{r}) + \int_V \Gamma_{mnij}(\vec{r}-\vec{r}') \left\{ c_{ijkl}(\vec{r}') \varepsilon_{kl}^T(\vec{r}') - \delta c_{ijkl}(\vec{r}') \varepsilon_{kl}^T(\vec{r}') \right\} d\vec{r}' \quad (IV - 10)$$

Cette équation intégrale contient à la fois celle de DEDERICHS et ZELLER [2], pour les milieux élastiques hétérogènes, ($\varepsilon^T(\vec{r}) = 0$) et celle de MURA - WILLIS [3] [4] pour un milieu homogène plastique ($\delta c = 0$). Elle sert de base, dans la situation où $\varepsilon^0(\vec{r}) = 0$, aux méthodes de calcul des propriétés effectives linéaires des milieux hétérogènes [5], pour lesquelles

on utilise un développement en puissance de δc pour résoudre l'équation intégrale; nous allons l'utiliser dans ce qui suit pour traiter le problème de la paire d'inclusions plastiques et hétérogènes situées dans un milieu anisotrope.

IV - 2 Le problème de la paire d'inclusions plastiques et hétérogènes

IV - 2 - 1 Résolution de l'équation intégrale

Dans cette situation particulière de matériaux hétérogènes et plastiques, le milieu infini de constantes C^0 contient 2 inclusions (I) et (J) de volume V_I et V_J , ayant respectivement des constantes élastiques C^I et C^J et ayant subi des déformations plastiques ξ^I et ξ^J uniformes dans V_I et V_J ; la déformation plastique dans la matrice est supposée nulle, et ξ^0 est maintenant la déformation élastique dans la matrice supposée homogène.

En introduisant les fonction d'HEAVISIDE $\theta^I(\vec{r})$ et $\theta^J(\vec{r})$ tel que :

$$\theta^I(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \vec{r} \notin V_I \\ 1 & \text{si } \vec{r} \in V_I \end{cases}$$

nous avons pour $\xi^P(\vec{r})$, $c(\vec{r})$ et $\delta c(\vec{r})$:

$$\xi^P_{ij}(\vec{r}) = \xi^I_{ij} \theta^I(\vec{r}) + \xi^J_{ij} \theta^J(\vec{r}) \tag{IV - 11}$$

$$c_{ijkl}(\vec{r}) = C^0_{ijkl} + \left\{ C^I_{ijkl} - C^0_{ijkl} \right\} \theta^I(\vec{r}) + \left\{ C^J_{ijkl} - C^0_{ijkl} \right\} \theta^J(\vec{r}) \tag{IV - 12}$$

ou encore :

$$c_{ijkl}(\vec{r}) = C^0_{ijkl} + \Delta C^I_{ijkl} \theta^I(\vec{r}) + \Delta C^J_{ijkl} \theta^J(\vec{r}) \tag{IV - 13}$$

et

$$\delta c_{ijkl}(\vec{r}) = \Delta C^I_{ijkl} \theta^I(\vec{r}) + \Delta C^J_{ijkl} \theta^J(\vec{r}) \tag{IV - 14}$$

En reportant ces expressions dans l'équation (IV - 10), la déformation totale en un point (\vec{r}) est alors donnée par :

$$\xi^T_{mn}(\vec{r}) = \xi^0_{mn} + \int_V \left[\sum_{mnij} \left\{ C^I_{ijkl} \xi^I_{kl} \theta^I(\vec{r}') + C^J_{ijkl} \xi^J_{kl} \theta^J(\vec{r}') - \Delta C^I_{ijkl} \xi^I_{kl}(\vec{r}') \theta^I(\vec{r}') - \Delta C^J_{ijkl} \xi^J_{kl}(\vec{r}') \theta^J(\vec{r}') \right\} d\vec{r}' \right]$$

ou encore

$$\underline{\xi}_{mn}^T(\vec{n}) = \underline{\xi}_{mn}^0 + \int_{V_I} \int_{V_I} \left[\underline{\xi}(\vec{n}-\vec{n}') \right]_{mnij} \left\{ C_{ijkl}^I \underline{\xi}_{kl}^I - \Delta C_{ijkl}^I \underline{\xi}_{kl}^T(\vec{n}') \right\} d\vec{n}' + \int_{V_J} \int_{V_J} \left[\underline{\xi}(\vec{n}-\vec{n}') \right]_{mnij} \left\{ C_{ijkl}^J \underline{\xi}_{kl}^J - \Delta C_{ijkl}^J \underline{\xi}_{kl}^T(\vec{n}') \right\} d\vec{n}'$$

(IV - 16)

Dans ces intégrales, les termes $C^I \underline{\xi}^I$ et $C^J \underline{\xi}^J$ sont constants, alors que la déformation $\underline{\xi}^T(\vec{n}')$ dans les inclusions I et J n'a aucune raison d'être uniforme dans V_I et V_J , même pour des inclusions de forme ellipsoïdale. Ici, réside la difficulté centrale du problème; JOHNSON [6] l'a surmontée de manière approximative en utilisant pour le problème inhomogène l'approximation de BORN qui consiste à remplacer $\underline{\xi}^T(\vec{n}')$ dans les intégrales considérées dans (IV - 16) par le champ uniforme $\underline{\xi}^0$. Une meilleure approximation, plus intuitive et justifiée par MOSHOVIDIS et MURA [7], consiste à remplacer respectivement dans des volumes V_I et V_J , $\underline{\xi}^T(\vec{n}')$ par les valeurs moyennes de $\underline{\xi}^T(\vec{n})$ sur ces volumes, et que l'on définit par :

$$\underline{\xi}_{kl}^{T_I} = \frac{1}{V_I} \int_{\vec{n} \in V_I} \underline{\xi}_{kl}^T(\vec{n}) d\vec{n}$$

(IV - 17)

et

$$\underline{\xi}_{kl}^{T_J} = \frac{1}{V_J} \int_{\vec{n} \in V_J} \underline{\xi}_{kl}^T(\vec{n}) d\vec{n}$$

(IV - 18)

Ces valeurs moyennes peuvent être calculées à partir de l'équation (IV - 16); nous avons donc pour l'inclusion (I) :

$$\underline{\xi}_{mn}^{T_I} = \underline{\xi}_{mn}^0 + \frac{1}{V_I} \int_{V_I} \int_{V_I} \left[\underline{\xi}(\vec{n}-\vec{n}') \right]_{mnij} \left\{ C_{ijkl}^I \underline{\xi}_{kl}^I - \Delta C_{ijkl}^I \underline{\xi}_{kl}^{T_I} \right\} d\vec{n}' d\vec{n} + \frac{1}{V_I} \int_{V_I} \int_{V_J} \left[\underline{\xi}(\vec{n}-\vec{n}') \right]_{mnij} \left\{ C_{ijkl}^J \underline{\xi}_{kl}^J - \Delta C_{ijkl}^J \underline{\xi}_{kl}^{T_J} \right\} d\vec{n}' d\vec{n}$$

(IV - 19)

et en utilisant les tenseurs

$$T_{mnij}^{II} = \int_{V_I} \int_{V_I} \left[\underline{\xi}(\vec{n}-\vec{n}') \right]_{mnij} d\vec{n}' d\vec{n} \quad \text{et} \quad T_{mnij}^{IJ} = \int_{V_I} \int_{V_J} \left[\underline{\xi}(\vec{n}-\vec{n}') \right]_{mnij} d\vec{n}' d\vec{n}$$

(IV - 20)

et en remarquant que $T_{mni j}^{IJ} = T_{mni j}^{JI}$, alors on a :

$$\varepsilon_{mn}^{I} = \varepsilon_{mn}^{\circ} + \frac{1}{V_I} T_{mni j}^{II} \left\{ C_{ijkl}^I \varepsilon_{kl}^{P_I} - \Delta C_{ijkl}^I \varepsilon_{kl}^{T_I} \right\} + \frac{1}{V_I} T_{mni j}^{IJ} \left\{ C_{ijkl}^J \varepsilon_{kl}^{P_J} - \Delta C_{ijkl}^J \varepsilon_{kl}^{T_J} \right\}$$

(IV - 21)

Pour l'inclusion J, nous avons de la manière analogue :

$$\varepsilon_{mn}^{J} = \varepsilon_{mn}^{\circ} + \frac{1}{V_J} T_{mni j}^{JJ} \left\{ C_{ijkl}^J \varepsilon_{kl}^{P_J} - \Delta C_{ijkl}^J \varepsilon_{kl}^{T_J} \right\} + \frac{1}{V_J} T_{mni j}^{JI} \left\{ C_{ijkl}^I \varepsilon_{kl}^{P_I} - \Delta C_{ijkl}^I \varepsilon_{kl}^{T_I} \right\}$$

(IV - 22)

Les équations IV - 21 et IV - 22 constituent un système linéaire pour les inconnues $\varepsilon_{mn}^{T_I}$ et $\varepsilon_{mn}^{T_J}$; Nous pouvons écrire ces résultats sous forme condensée aussi, en utilisant des relations entre tenseurs :

$$\begin{aligned} V_I \varepsilon_{mn}^{T_I} + T^{II} \Delta C^I \varepsilon_{mn}^{T_I} + T^{IJ} \Delta C^J \varepsilon_{mn}^{T_J} &= V_I \varepsilon_{mn}^{\circ} + T^{II} C^I \varepsilon_{mn}^{P_I} + T^{IJ} C^J \varepsilon_{mn}^{P_J} \\ V_J \varepsilon_{mn}^{T_J} + T^{JJ} \Delta C^J \varepsilon_{mn}^{T_J} + T^{JI} \Delta C^I \varepsilon_{mn}^{T_I} &= V_J \varepsilon_{mn}^{\circ} + T^{JJ} C^J \varepsilon_{mn}^{P_J} + T^{JI} C^I \varepsilon_{mn}^{P_I} \end{aligned}$$

(IV - 23)

La connaissance des déformations totales de chaque inclusion permet de calculer les déformations élastiques à partir de :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{mn}^{e_I} &= \varepsilon_{mn}^{T_I} - \varepsilon_{mn}^{P_I} \\ \varepsilon_{mn}^{e_J} &= \varepsilon_{mn}^{T_J} - \varepsilon_{mn}^{P_J} \end{aligned}$$

(IV - 24)

et les contraintes moyennes dans chaque inclusion, comme suit :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^I &= C_{ijkl}^I \left(\varepsilon_{kl}^{T_I} - \varepsilon_{kl}^{P_I} \right) \\ \sigma_{ij}^J &= C_{ijkl}^J \left(\varepsilon_{kl}^{T_J} - \varepsilon_{kl}^{P_J} \right) \end{aligned}$$

(IV - 25)

L'approximation de BORN pour l'équation intégrale (IV - 10) donnerait le résultat suivant :

$$\begin{aligned} \xi^I &\approx \xi^0 + \frac{1}{V_I} T^{II} (C^I \xi^I - \Delta C^I \xi^0) + \frac{1}{V_I} T^{IJ} (C^J \xi^J - \Delta C^J \xi^0) \\ \xi^J &\approx \xi^0 + \frac{1}{V_J} T^{JJ} (C^J \xi^J - \Delta C^J \xi^0) + \frac{1}{V_J} T^{IJ} (C^I \xi^I - \Delta C^I \xi^0) \end{aligned}$$

(IV - 26)

On retrouve ainsi le fait que cette approximation n'est valable que lorsque les termes

$$\frac{1}{V_I} T^{II} \Delta C^I, \frac{1}{V_I} T^{IJ} \Delta C^J, \frac{1}{V_J} T^{JJ} \Delta C^J, \frac{1}{V_J} T^{IJ} \Delta C^I$$

sont faibles par rapport au tenseur unité; or ces termes ne sont pas de même nature, à cause de la présence des tenseurs T^{II} et T^{IJ} qui jouent un rôle différent, les termes contenant T^{II} et T^{JJ} étant, en général prépondérants par rapport au terme T^{IJ} (chapitre V et annexes)

IV - 2 - 2 Conclusions et remarques

Ainsi à part le calcul des tenseurs T^{II} et T^{IJ} , la résolution d'un problème de paire d'inclusions se ramène à des opérations d'algèbre tensorielle courantes, et on peut calculer à partir de IV-23,24,25, les différents champs de déformations et de contrainte dans les inclusions. Le calcul des tenseurs T^{II} et T^{IJ} est complexe en général; au chapitre V et dans les annexes, nous donnons une méthode, basée sur l'emploi de la transformée de FOURIER, pour évaluer T^{IJ} dans le cas d'une paire d'inclusions ellipsoïdales dans une matrice anisotrope; le calcul de T^{II} est classique, puisqu'il correspond au problème d'ESHELBY.

La méthode proposée dans le paragraphe (IV - 2 - 1) de ce chapitre, se généralise sans difficultés, au cas où le nombre d'inclusions est supérieur à deux, le nombre d'équations tensorielles du système linéaire à résoudre étant égal au nombre d'inclusions.

La solution proposée ici, contient évidemment les cas particuliers précédents d'inclusions plastiques et d'inclusions hétérogènes examinés aux chapitres II et III; elle s'applique bien sûr, au cas d'une inclusion (on prend alors $\xi^J = 0$ et $\Delta C^J = 0$), traité par ESHELBY [8], pour lequel on retrouve la signification du tenseur S d'ESHELBY qui est égale à $\frac{1}{V_I} T^{II} C^I$ dans le cas d'une inclusions ellipsoïdale.

La formulation générale utilisée permet de justifier la méthode de l'inclusion équivalente élaborée par ESHELBY [8]; pour le cas de l'inclusion hétérogène, et par MOSCHOVIDIS et MURA [7] pour la paire d'inclusions hétérogènes.

Un calcul analogue peut être conduit pour la partie antisymétrique du gradient de déplacement total, qui permette d'accéder aux rotations du réseau cristallin, responsable de la formation des textures de déformation plastique, dans les problèmes de plasticité des polycristaux métalliques. [9]

La formulation ainsi proposée, dans IV - 1 et IV - 2 - 1, pour le problème de la paire d'inclusions, est valable quelle que soit la forme des inclusions et leur position relative; ces paramètres géométriques interviennent par l'intermédiaire des tenseurs T^{ij} et T^{ij} .

Nous nous sommes intéressés plus particulièrement aux champs moyens dans les inclusions: il est évident que lorsque ces champs moyens sont calculés, la formule (IV - 10) permet le calcul de ϵ_{ij}^p en un point r quelconque du milieu infini; en particulier pour les problèmes d'endommagement, il est intéressant de connaître le champ de contraintes entre les inclusions.

IV - 3 Calcul de l'énergie élastique

Nous proposons une méthode pour calculer les différentes parties de l'énergie élastique, associée à la présence d'une paire d'inclusions plastiques et hétérogènes dans un milieu élastique anisotrope. En partant d'une formulation générale, on introduit naturellement le concept de paire d'inclusions plastiques fictives dont l'idée est due à ESHELBY [8], et qui permet des calculs simples relatifs aux problèmes d'inclusions.

IV - 3 - 1 Formulation générale

Un solide de volume V est soumis à des contraintes uniformes Σ_{ij} à l'infini et est le siège d'un champ de déformation plastique $\epsilon_{ij}^p(\vec{r})$ créant des contraintes internes $\sigma_{ij} - \Sigma_{ij}$

l'énergie élastique stockée dans le milieu s'écrit :

$$W = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}(\vec{r}) \epsilon_{ij}^e(\vec{r}) d\vec{r} \tag{IV - 27}$$

et d'après IV - 1 :

$$W = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}(\vec{r}) \left(u_{ij}^T(\vec{r}) - \epsilon_{ij}^p(\vec{r}) \right) d\vec{r} \tag{IV - 28}$$

On peut encore transformer (IV - 28) :

$$W = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}(\vec{r}) u_{ij}^T(\vec{r}) d\vec{r} - \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}(\vec{r}) \epsilon_{ij}^p(\vec{r}) d\vec{r} \tag{IV - 29}$$

or

$$\frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}^T u_{i,j}^T d\vec{r} = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij}^T u_{i,j}^T)_{,j} d\vec{r} - \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij,j}^T u_i^T d\vec{r} \quad (\text{IV} - 30)$$

en tenant compte de l'équation de continuité pour évaluer la 2^{ème} intégrale et en transformant la 1^{ère} intégrale du 2^{ème} membre de (IV - 30) en intégrale de surface, alors il vient :

$$W = \frac{1}{2} \int_S \sigma_{ij}^T u_i^T n_j dS - \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij,j}^T u_i^T d\vec{r} \quad (\text{IV} - 31)$$

où S est la frontière du milieu, et $\vec{n}(n_j)$ le vecteur normal unité orienté vers l'extérieur; sur S nous avons :

$$\sigma_{ij}^T n_j = \Sigma_{ij} n_j \quad (\text{IV} - 32)$$

et en repassant à l'intégrale de volume :

$$W = \frac{1}{2} \int_V \Sigma_{ij} u_{i,j}^T d\vec{r} - \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij,j}^T(\vec{r}) u_i^T(\vec{r}) d\vec{r} \quad (\text{IV} - 33)$$

Σ_{ij} étant uniforme, et en posant :

$$E_{ij}^T = \frac{1}{2V} \int_V (u_{i,j}^T + u_{j,i}^T) d\vec{r} \quad (\text{IV} - 34)$$

il vient en définitive pour W :

$$W = \frac{1}{2} \Sigma_{ij} E_{ij}^T V - \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij,j}^T(\vec{r}) u_i^T(\vec{r}) d\vec{r} \quad (\text{IV} - 35)$$

dans le cas d'une inclusions unique I qui subit une déformation plastique uniforme ξ_{ij}^I , L'énergie est :

$$W = \frac{1}{2} \Sigma_{ij} E_{ij}^T V - \frac{1}{2} V_I \sigma_{ij}^I \xi_{ij}^I \quad (\text{IV} - 36)$$

où

$$\sigma_{ij}^I = \frac{1}{V_I} \int_V \sigma_{ij}^T d\vec{r} \quad (\text{IV} - 37)$$

et dans le cas de 2 inclusions I et J subissant une déformation plastique ξ^I et ξ^J uniformes, tel que :

$$\xi_{ij}^P(\vec{n}) = \xi_{ij}^I \theta^I(\vec{n}) + \xi_{ij}^J \theta^J(\vec{n}) \quad (IV - 38)$$

alors l'énergie est :

$$W = \frac{1}{2} \sum_{ij} E_{ij}^T V - \frac{1}{2} V_I \sigma_{ij}^I \xi_{ij}^I - \frac{1}{2} V_J \sigma_{ij}^J \xi_{ij}^J \quad (IV - 39)$$

σ_{ij}^J étant défini comme l'a été σ_{ij}^I dans (IV - 37).

IV - 3 - 2 Evaluation du terme E^T milieu homogène équivalent

Il reste maintenant à calculer le terme E^T donné par (IV - 34); on a alors intérêt à introduire un milieu homogène équivalent de constantes élastiques C^o , pour lequel on va évaluer la déformation plastique fictive correspondante $\xi_{ij}^{P'}(\vec{n})$.

Considérons un milieu hétérogène et plastique, alors (IV - 10) permet d'écrire la déformation totale locale dans un tel milieu :

$$\xi_{mn}^T(\vec{n}) = \xi_{mn}^o(\vec{n}) + \int_V \frac{(\vec{n} - \vec{n}')}{mnij} \left\{ c_{ijkl}(\vec{n}') \xi_{kl}^{P'}(\vec{n}') - \delta c_{ijkl}(\vec{n}') \xi_{kl}^T(\vec{n}') \right\} d\vec{n}' \quad (IV - 40)$$

Pour le problème homogène, c'est-à-dire pour le milieu homogène équivalent avec une déformation plastique fictive $\xi^{P'}$, la déformation locale totale sera donnée par, en partant de (II - 24):

$$\xi_{mn}^T(\vec{n}) = \xi_{mn}^o(\vec{n}) + \int_V \frac{(\vec{n} - \vec{n}')}{mnij} C_{ijkl}^o \xi_{kl}^{P'}(\vec{n}') d\vec{n}' \quad (IV - 41)$$

On cherche un milieu homogène équivalent qui soit le siège d'une déformation totale égale à celle du problème initial; et en comparant les deux expressions (IV - 40) et (IV - 41), la déformation plastique fictive $\xi^{P'}$ introduite dans ce milieu doit être telle que :

$$\forall \vec{n} \in V \text{ on a } C_{ijkl}^o \xi_{kl}^{P'}(\vec{n}) = c_{ijmn}(\vec{n}) \xi_{mn}^I(\vec{n}) - \delta c_{ijmn}(\vec{n}) \xi_{mn}^T(\vec{n}) \quad (IV - 42)$$

La déformation totale macroscopique E^T donnée par (IV - 34) est alors égale à :

$$E_{ij}^T = \frac{1}{V} \int_V \xi_{ij}^T(\vec{n}) d\vec{n} \quad (IV - 43)$$

ou encore

$$E_{ij}^T = \frac{1}{V} \int_V (\xi_{ij}^T(\vec{r}) + \xi_{ij}^{P'}(\vec{r})) d\vec{r} \quad (IV - 44)$$

le milieu fictif étant homogène on peut encore écrire :

$$E_{ij}^T = E_{ij}^{P'} + E_{ij}^e \quad (IV - 45)$$

avec :

$$E_{ij}^{P'} = \frac{1}{V} \int_V \xi_{ij}^{P'}(\vec{r}) d\vec{r} \quad \text{et} \quad E_{ij}^e = \frac{1}{V} \int_V \xi_{ij}^e(\vec{r}) d\vec{r} \quad (IV - 46)$$

et où $\xi_{ij}^{P'}$ est déduit des expressions (IV - 10) et (IV - 42), et ξ_{ij}^e de $\xi_{ij}^e = \xi_{ij}^T - \xi_{ij}^{P'}$

L'énergie élastique du solide V s'écrit en définitive :

$$W = \frac{1}{2} \sum_{ij} \int_V (\xi_{ij}^{P'}(\vec{r}) + \xi_{ij}^e(\vec{r})) d\vec{r} - \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}^T(\vec{r}) \xi_{ij}^{P'}(\vec{r}) d\vec{r} \quad (IV - 47)$$

IV - 3 - 3 Cas particuliers

Appliquons le formalisme précédent tout à fait général à des situations particulières; et évaluons tout d'abord le tenseur E dans le cas du problème homogène; nous avons en général :

$$E_{ij}^T = \frac{1}{V} \int_V \xi_{ij}^T(\vec{r}) d\vec{r} = \frac{1}{V} \int_V (\xi_{ij}^e + \xi_{ij}^{P'}) d\vec{r} \quad (IV - 48)$$

or, on a $\xi_{ij}^e = s_{ijkl} \sigma_{kl}$ (IV - 49)

où s_{ijkl} est la compliance; mais comme on a supposé le milieu homogène alors $s = S^o$ ou S^o est l'inverse du tenseur C^o ; il vient donc :

$$\frac{1}{V} \int_V \xi_{ij}^e d\vec{r} = \frac{1}{V} S_{ijkl}^o \int_V \sigma_{kl} d\vec{r} \quad (IV - 50)$$

et $\frac{1}{V} \int_V \sigma_{kl} d\vec{r}$ n'est autre que la contrainte macroscopique Σ_{ij} ; donc :

$$\frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij}^e d\vec{r} = \frac{1}{V} S_{ijkl} \Sigma_{kl} \int_V d\vec{r} = S_{ijkl} \Sigma_{kl} \quad (IV - 51)$$

enfin, sachant que

$$S_{ijkl} \Sigma_{kl} = \varepsilon_{ij}^o \quad (IV - 52)$$

on peut écrire :

$$\varepsilon_{ij}^o = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij}^e d\vec{r} \quad (IV - 53)$$

En reportant dans (IV - 48) on a donc dans le cas homogène :

$$E_{ij}^T = \varepsilon_{ij}^o + \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij}^{p'} d\vec{r} \equiv \varepsilon_{ij}^o + \overline{\varepsilon_{ij}^{p'}} \quad (IV - 54)$$

et donc pour l'énergie :

$$W = \frac{1}{2} \Sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^o V + \frac{1}{2} \Sigma_{ij} \overline{\varepsilon_{ij}^{p'}} - \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}^p \varepsilon_{ij}^p d\vec{r} \quad (IV - 55)$$

* Cas d'une inclusion unique

Les résultats précédents sont applicables au problème d'inclusions uniques et permettent de retrouver par une voie plus directe les résultats classiques d'ESHELBY.

Dans le cas d'une inclusion I plastique, soumise à une déformation plastique uniforme , et homogène, nous avons :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{ij}^{p'}(\vec{r}) &= \varepsilon_{ij}^I \theta^I(\vec{r}) \\ C_{ijkl}^I &= C_{ijkl}^o \end{aligned} \right\} \quad (IV - 56)$$

et les relations (IV - 36) et (IV - 55) donnent pour l'énergie :

$$W = \frac{1}{2} \Sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^o V + \frac{1}{2} V \Sigma_{ij} \int_V \frac{1}{V} \varepsilon_{ij}^{p'}(\vec{r}) d\vec{r} - \frac{1}{2} V \sigma_{ij}^I \varepsilon_{ij}^{p2} \quad (IV - 57)$$

or d'après (IV - 56) on a :

$$\frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij}^{p'} d\vec{z} = \frac{V_I}{V} \varepsilon_{ij}^{p_I} \quad (\text{IV} - 58)$$

et d'autre part :

$$\sigma_{ij}^I = C_{ijkl}^I (\varepsilon_{kl}^I - \varepsilon_{kl}^{p_I}) = C_{ijkl}^0 (\varepsilon_{kl}^I - \varepsilon_{kl}^{p_I}) \quad (\text{IV} - 59)$$

et d'après les résultats du chapitre II (cas homogène) on a :

$$\varepsilon_{kl}^I = \varepsilon_{kl}^0 + \frac{1}{V_I} T_{klmn}^{II} C_{mnpq}^0 \varepsilon_{pq}^{p_I} \quad (\text{IV} - 60)$$

d'où pour σ^I :

$$\sigma_{ij}^I = \frac{C_{ijkl}^0}{V_I} \left\{ V_I \varepsilon_{kl}^0 + T_{klmn}^{II} C_{mnpq}^0 \varepsilon_{pq}^{p_I} - V_I \varepsilon_{kl}^{p_I} \right\} \quad (\text{IV} - 61)$$

d'où pour W , (IV - 57) →

$$W = \frac{1}{2} \sum_{ij} \varepsilon_{ij}^0 \varepsilon_{ij}^0 V + \frac{1}{2} \frac{V_I}{V} \sum_{ij} \varepsilon_{ij}^{p_I} \varepsilon_{ij}^{p_I} - \frac{1}{2} \frac{V_I}{V} \frac{C_{ijkl}^0}{V_I} \left\{ V_I \varepsilon_{kl}^0 + T_{klmn}^{II} C_{mnpq}^0 \varepsilon_{pq}^{p_I} - V_I \varepsilon_{kl}^{p_I} \right\} \varepsilon_{ij}^{p_I} \quad (\text{IV} - 62)$$

d'où encore, compte tenu de :

$$\Sigma_{ij} = C_{ijkl}^0 \varepsilon_{kl}^0 \quad (\text{IV} - 63)$$

$$W = \frac{1}{2} \sum_{ij} \varepsilon_{ij}^0 \varepsilon_{ij}^0 V - \frac{1}{2} \frac{V_I}{V} C_{ijkl}^0 \left\{ T_{klmn}^{II} C_{mnpq}^0 \varepsilon_{pq}^{p_I} - V_I \varepsilon_{kl}^{p_I} \right\} \varepsilon_{ij}^{p_I} \quad (\text{IV} - 64)$$

et en posant :

$$W^0 = \frac{1}{2} \sum_{ij} \varepsilon_{ij}^0 \varepsilon_{ij}^0 V, \quad (\text{IV} - 65)$$

$$W^I = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^{p_I} C_{ijkl}^0 T_{klmn}^{II} C_{mnpq}^0 \varepsilon_{pq}^{p_I} + \frac{1}{2} \frac{V_I}{V} \varepsilon_{ij}^{p_I} C_{ijkl}^0 \varepsilon_{kl}^{p_I} \quad (\text{IV} - 66)$$

et

$$W = W^0 + W^I \quad (\text{IV} - 67)$$

Dans le cas d'une inclusion I hétérogène, non plastique, de constantes élastiques $C_{ijne}^I \neq C_{ijne}^0$ et telle que $\varepsilon_{ij}^{p_I} = 0$, alors on a pour la déformation plastique fictive, correspondant au milieu homogène équivalent :

$$\forall \vec{n} \in V_I : C_{ijkl}^0 \varepsilon_{kl}^{p_I} = -\Delta C_{ijmn}^I \varepsilon_{mn}^I \quad (\text{IV} - 68)$$

avec $\Delta C_{ijkl}^I = C_{ijkl}^I - C_{ijkl}^0$

et
$$\varepsilon_{mn}^{T_I} = \varepsilon_{mn}^0 - \frac{1}{V_I} T_{mnpq}^{II} \Delta C_{pqrs}^I \varepsilon_{rs}^{T_I} \quad (IV - 69)$$

ou encore, en appelant I_{mnpq} le tenseur identité du 4^{ème} ordre

$$\varepsilon_{rs}^{T_I} \left\{ I_{mnpq} + \frac{1}{V_I} T_{mnpq}^{II} \Delta C_{pqrs}^I \right\} = \varepsilon^0 \quad (IV - 70)$$

d'où :

$$\varepsilon_{rs}^{T_I} = \left\{ I_{mnpq} + \frac{1}{V_I} T_{mnpq}^{II} \Delta C_{pqrs}^I \right\}^{-1} \varepsilon_{mn}^0 \quad (IV - 71)$$

d'où pour (IV - 68), en utilisant le tenseur S^0 inverse de C^0 :

$$\varepsilon_{kl}^{P_I} = -S_{ijkl}^0 \Delta C_{ijmn}^I \left\{ I_{nmrs} + \frac{1}{V_I} T_{nrpq}^{II} \Delta C_{pqmn}^I \right\}^{-1} \varepsilon_{rs}^0 \quad (IV - 72)$$

d'où en appliquant (IV - 54) et (IV - 35) :

$$W = \frac{1}{2} \sum_{ij} \varepsilon_{ij}^0 V - \frac{1}{2} V_I \sum_{ij} S_{ijkl}^0 \Delta C_{klmn}^I \left\{ I_{mnpq} + \frac{1}{V_I} T_{nrpq}^{II} \Delta C_{pqmn}^I \right\}^{-1} \varepsilon_{rs}^0 \quad (IV - 73)$$

et l'on voit que si $\varepsilon^0 = 0$ alors $W = 0$, de même si $\Sigma = 0, W = 0$

et si $\Delta C^I = 0$ alors $W = W^0 = \frac{1}{2} \sum_{ij} \varepsilon_{ij}^0 V$

*** Cas d'une paire d'inclusions**

Dans ce cas les déformations plastique fictives des inclusions I et J, pour le milieu homogène équivalent s'écrivent à partir de (IV - 42)

$$C_{ijkl}^0 \varepsilon_{kl}^{P_I} = C_{ijmn}^I \varepsilon_{mn}^I - \Delta C_{ijmn}^I \varepsilon_{mn}^{T_I} \quad (IV - 74)$$

et
$$C_{ijkl}^0 \varepsilon_{kl}^{P_J} = C_{ijmn}^J \varepsilon_{mn}^J - \Delta C_{ijmn}^J \varepsilon_{mn}^{T_J} \quad (IV - 75)$$

où C^I (resp. C^J) sont les constantes élastiques dans I (resp. J), $\Delta C^I = C^I - C^0$, $\Delta C^J = C^J - C^0$, et $\varepsilon_{mn}^{T_I}$ (resp. $\varepsilon_{mn}^{T_J}$) la déformation totale moyenne dans V_I (resp. V_J), enfin $\varepsilon_{mn}^{P_I}$ (resp. $\varepsilon_{mn}^{P_J}$) la déformation plastique supposée uniforme dans V_I (resp. V_J).

La déformation macroscopique E^T s'écrit à partir de (IV - 54) :

$$E_{ij}^T = \varepsilon_{ij}^0 + \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij}^{P'}(\vec{r}) d\vec{r} \quad (IV - 76)$$

or $\varepsilon_{ij}^{P'}$, en dehors de I et J, est nulle, d'après (IV - 42) puisque ε^P est nulle en dehors de I et J ainsi que $\delta.c$, donc :

$$E_{ij}^T = \varepsilon_{ij}^0 + \frac{V_I}{V} \varepsilon_{ij}^{P_I} + \frac{V_J}{V} \varepsilon_{ij}^{P_J} \quad (IV - 77)$$

$\varepsilon_{ij}^{T_I}$ et $\varepsilon_{ij}^{T_J}$ sont obtenues à partir de (IV - 21) et (IV - 22) → en posant $W^0 = \frac{1}{2} \sum_{ij} \varepsilon_{ij}^0 V$, l'énergie élastique s'obtient sous la forme générale, à partir de (IV - 35), (IV - 39) et (IV - 54) :

$$W = W^0 + \frac{1}{2} V_I \left\{ \sum_{ij} \varepsilon_{ij}^{P_I} - \sigma_{ij}^I \varepsilon_{ij}^{T_I} \right\} + \frac{1}{2} V_J \left\{ \sum_{ij} \varepsilon_{ij}^{P_J} - \sigma_{ij}^J \varepsilon_{ij}^{T_J} \right\} \quad (IV - 78)$$

Les termes $\varepsilon_{ij}^{P_I}$ et $\varepsilon_{ij}^{P_J}$ sont solutions de (IV - 74) et (IV - 75) σ_{ij}^I et σ_{ij}^J sont obtenus à partir de (IV - 22) et (IV - 25).

IV - 3 - 4 Applications

* paire plastique homogène alors $\Delta C^I = \Delta C^J = 0$ et l'on a d'après (IV - 74) et (IV - 75)

$$\varepsilon_{ij}^{P_I} = \varepsilon_{ij}^{P_I} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{ij}^{P_J} = \varepsilon_{ij}^{P_J} \quad (IV - 79)$$

de plus

$$\sigma_{ij}^I = C_{ijkl}^0 (\varepsilon_{kl}^{T_I} - \varepsilon_{kl}^{P_I}) \quad (IV - 80)$$

$$\sigma_{ij}^J = C_{ijkl}^0 (\varepsilon_{kl}^{T_J} - \varepsilon_{kl}^{P_J}) \quad (IV - 81)$$

or
$$\varepsilon_{kl}^{T_I} = \varepsilon_{kl}^0 + \frac{1}{V_I} T_{klmn}^{II} C_{mnpq}^0 \varepsilon_{pq}^{P_I} + \frac{1}{V_I} T_{klmn}^{IJ} C_{mnpq}^0 \varepsilon_{pq}^{P_J} \quad (IV - 82)$$

et
$$\varepsilon_{kl}^{T_J} = \varepsilon_{kl}^0 + \frac{1}{V_J} T_{klmn}^{JJ} C_{mnpq}^0 \varepsilon_{pq}^{P_J} + \frac{1}{V_J} T_{klmn}^{JI} C_{mnpq}^0 \varepsilon_{pq}^{P_I} \quad (IV - 83)$$

d'où en appliquant (IV - 78) et en tenant compte des relations précédentes

$$W = W^0 + \frac{1}{2} V_I \left\{ \sum_{ij} \varepsilon_{ij}^{P_I} - \frac{1}{V_I} \varepsilon_{ij}^{P_I} C_{ijkl}^0 \left(\varepsilon_{kl}^0 V_I + T_{klmn}^{II} C_{mnpq}^0 \varepsilon_{pq}^{P_I} + T_{klmn}^{IJ} C_{mnpq}^0 \varepsilon_{pq}^{P_J} - V_I \varepsilon_{kl}^{P_I} \right) \right\} + \frac{1}{2} V_J \left\{ \sum_{ij} \varepsilon_{ij}^{P_J} - \frac{1}{V_J} \varepsilon_{ij}^{P_J} C_{ijkl}^0 \left(\varepsilon_{kl}^0 V_J + T_{klmn}^{JJ} C_{mnpq}^0 \varepsilon_{pq}^{P_J} + T_{klmn}^{IJ} C_{mnpq}^0 \varepsilon_{pq}^{P_I} - V_J \varepsilon_{kl}^{P_J} \right) \right\}$$

(IV - 84)

En développant et en tenant compte de ce que l'on a :

$$\sum_{ij} \varepsilon_{ij}^0 = C_{ijkl}^0 E_{kl}^0 = C_{ijkl}^0 \varepsilon_{kl}^0 \quad (IV - 85)$$

W apparaît alors comme la somme de quatre termes :

$$W = W^0 + W^I + W^J + W^{IJ} \quad (IV - 86)$$

où $W^0 = \frac{1}{2} \sum_{ij} \varepsilon_{ij}^0 V$ représente l'énergie élastique du milieu homogène due aux contraintes ε_{ij}^0 ; W^I , W^J et W^{IJ} ont la même signification que dans les formules trouvées directement dans (II - 71), (II - 72) et (II - 73) et (II - 79).

W^I représente l'énergie élastique associée à la présence de l'inclusion I de même pour W^J vis-à-vis de l'inclusions J, et W^{IJ} représentant l'énergie d'interaction entre les inclusions I et J.

* paire hétérogène mais non plastique

on a : $\varepsilon_{ij}^{P_I} = \varepsilon_{ij}^{P_J} = 0 \quad (IV - 87)$

et (IV - 42) →

$$C_{ijkl}^0 \varepsilon_{kl}^{P_I} = -\Delta C_{ijkl}^I \varepsilon_{kl}^I \quad (IV - 88)$$

$$C_{ijkl}^0 \varepsilon_{kl}^{P_J} = -\Delta C_{ijkl}^J \varepsilon_{kl}^J$$

, formules identiques à celles trouvées dans (III - 49)

et (IV - 78) → $W = W^0 + \frac{1}{2} V_I \sum_{ij} \varepsilon_{ij}^{P_I} + \frac{1}{2} V_J \sum_{ij} \varepsilon_{ij}^{P_J} \quad (IV - 89)$

ξ^I et ξ^J sont donnés par :

$$\left. \begin{aligned} \xi_{ij}^I &= \xi_{ij}^0 + \frac{1}{V_I} T_{ijkl}^{II} C_{klmn}^0 \xi_{mn}^{P'I} + \frac{1}{V_I} T_{ijkl}^{IJ} C_{klmn}^0 \xi_{mn}^{P'J} \\ \xi_{ij}^J &= \xi_{ij}^0 + \frac{1}{V_J} T_{ijkl}^{JJ} C_{klmn}^0 \xi_{mn}^{P'J} + \frac{1}{V_J} T_{ijkl}^{IJ} C_{klmn}^0 \xi_{mn}^{P'I} \end{aligned} \right\} \quad (IV - 90)$$

et donc ξ^I et ξ^J sont solutions du système linéaire suivant :
(IV - 88) et (IV - 90) →

$$\begin{aligned} C_{ijkl}^0 \xi_{kl}^{P'I} + \frac{\Delta C_{ijkl}^I}{V_I} T_{klmn}^{II} C_{mnpq}^0 \xi_{pq}^{P'I} + \frac{\Delta C_{ijkl}^I}{V_I} T_{klmn}^{IJ} C_{mnpq}^0 \xi_{pq}^{P'J} &= -\Delta C_{ijkl}^I \xi_{kl}^0 \\ \text{et } C_{ijkl}^0 \xi_{kl}^{P'J} + \frac{\Delta C_{ijkl}^J}{V_J} T_{klmn}^{JJ} C_{mnpq}^0 \xi_{pq}^{P'J} + \frac{\Delta C_{ijkl}^J}{V_J} T_{klmn}^{IJ} C_{mnpq}^0 \xi_{pq}^{P'I} &= -\Delta C_{ijkl}^J \xi_{kl}^0 \end{aligned} \quad (IV - 91)$$

Dans cette situation, il apparaît encore des termes d'énergie propre aux inclusions I et J et un terme d'interaction dont l'origine provient du système (IV - 85), mais dont l'expression directe est complexe.

Examinons l'approximation de BORN; on a toujours les relations (IV - 88) et ξ^I et ξ^J sont alors donnés par (III - 21) où l'on fait l'approximation de BORN, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \xi_{ij}^I &\approx \xi_{ij}^0 - \frac{1}{V_I} T_{ijkl}^{II} \Delta C_{klpq}^I \xi_{pq}^0 - \frac{1}{V_I} T_{ijkl}^{IJ} \Delta C_{klpq}^J \xi_{pq}^0 \\ \text{et } \xi_{ij}^J &\approx \xi_{ij}^0 - \frac{1}{V_J} T_{ijkl}^{JJ} \Delta C_{klpq}^J \xi_{pq}^0 - \frac{1}{V_J} T_{ijkl}^{IJ} \Delta C_{klpq}^I \xi_{pq}^0 \end{aligned} \quad (IV - 92)$$

et W_B , l'énergie dans l'approximation de BORN, s'écrit en appliquant (IV - 89) et en tenant compte de ce que

$$\sum_{ij} (C_{ijkl}^0)^{-1} = \xi_{kl}^0$$

$$\begin{aligned} W_B = W^0 - \frac{1}{2} V_I \xi_{ij}^0 \Delta C_{ijkl}^I \left\{ \xi_{kl}^0 - \frac{1}{V_I} T_{klmn}^{II} \Delta C_{mnpq}^I \xi_{pq}^0 - \frac{1}{V_I} T_{klmn}^{IJ} \Delta C_{mnpq}^J \xi_{pq}^0 \right\} - \\ \frac{1}{2} V_J \xi_{ij}^0 \Delta C_{ijkl}^J \left\{ \xi_{kl}^0 - \frac{1}{V_I} T_{klmn}^{JJ} \Delta C_{mnpq}^J \xi_{pq}^0 - \frac{1}{V_J} T_{klmn}^{IJ} \Delta C_{mnpq}^I \xi_{pq}^0 \right\} \end{aligned} \quad (IV - 93)$$

Cette solution approchée n'est en fait valable que pour les faibles valeurs de l'hétérogénéité relative des inclusions par rapport à la matrice, comme cela a été vu pour le problème de la paire hétérogène.

IV - 4 Conclusion

Pour tous ces problèmes d'inclusions, la solution effective nécessite le calcul des tenseurs T^{11} , T^{10} et T^{00} qui sont complexes en général; nous donnons une méthode générale dans le chapitre suivant, valable pour des inclusions ellipsoïdales dans un milieu anisotrope; nous nous sommes limités à cette morphologie car elle contient suffisamment de situations particulières.

IU - 5 BIBLIOGRAPHIE - CHAPITRE IU

- 1 - M. BERVEILLER et A. ZAOUI , Colloque International du
C.N.R.S. n° 319 (1982)
- 2 - P.H. DEDERICH et R. ZELLER , P.S.S., B55 (1973)
- 3 - T. MURA, J. Appl. Mech., 38 (1971)
- 4 - J.R. WILLIS , Phil. Mag., 21 (1970)
- 5 - E. KRÖNER et H. KOCH , Sol. Mech. Arch., 1 (1976)
- 6 - W.C. JOHNSON, Met. Trans., 14 a (1983)
- 7 - Z.A. MOSCHOVIDIS et T. MURA , J. Appl. Mech., 42 (1975)
- 8 - J.D. ESHELBY, Prog. Sol. Mech (1961) NORTH - HOLLAND
- 9 - M. BERVEILLER et A. ZAOUI, ICOTOM AACHEN (1978)

CHAPITRE U

Détermination des tenseurs T^{11} et T^{1j}

U - 1 - Détermination de T^{11}

V - 1 - 1 Cas général

V - 1 - 2 Cas de l'inclusion sphérique

V - 1 - 3 Cas de l'inclusion ellipsoïdale

U - 2 - Détermination de T^{1j}

U - 3 - Détermination de T^{11} et T^{1j} pour un milieu isotrope et des inclusions sphériques

V - 3 - 1 Cas d'une inclusion sphérique

V - 3 - 2 Cas de 2 inclusions sphériques

U - 4 - Bibliographie U

L'évaluation du tenseur T^{ij} pour un milieu anisotrope est complexe à cause de la présence du tenseur de GREEN, qui, pour un tel milieu ne peut se calculer explicitement pour une anisotropie quelconque. Une méthode numérique, pour le problème d'une inclusion ellipsoïdale (calcul de T^{ij}) a été proposée par KNEER [1] et reprise par MURA [2], LAWS [3] et GHARHEMANI [4] [5]; elles consistent à utiliser la transformée de FOURIER du tenseur de GREEN G et à intégrer sur l'espace de k (conjugué de r); pour le calcul de T^{ij} nous utiliserons une méthode analogue pour le calcul des composantes du tenseur T^{ij} , dans le cas de deux inclusions ellipsoïdales dans un milieu anisotrope.

V - 1 Détermination de T^{ij}

V - 1 - 1 Cas général

La transformée de FOURIER de G sera définie par :

$$\tilde{G}_{km}(\vec{k}) = \int G_{km}(\vec{r}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d\vec{r} \quad * \quad (V - 1)$$

et sa transformée de FOURIER inverse :

$$G_{km}(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi^3} \int \tilde{G}_{km}(\vec{k}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} d\vec{k} \quad (V - 2)$$

* aucune confusion n'est possible entre le vecteur \vec{k} conjugué de \vec{r} (et appartenant à l'espace R^3) et l'indice k qui intervient dans différents tenseur (tel que G_{km}) et qui prend les valeurs 1,2,3.

si k_1, k_2, k_3 sont les coordonnées cartésiennes du vecteur \vec{k} , et x_1, x_2, x_3 celles de \vec{r} alors l'élément différentiel $d\vec{k}$ est :

$$d\vec{k} = dk_1 dk_2 dk_3$$

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 \quad (V - 3)$$

et

V - 2 →

$$G_{km,l}(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi^3} \int \tilde{G}_{km}(\vec{k}) (-ik_l) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} d\vec{k} \quad (V - 4)$$

et

$$G_{km,lj}(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi^3} \int -k_l k_j \tilde{G}_{km}(\vec{k}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} d\vec{k} \quad (V - 5)$$

de plus la transformée de FOURIER de la fonction δ de dirac est donnée par :

$$\tilde{\delta}(\vec{k}) = \int e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \delta(\vec{r}) d\vec{r} = 1 \quad (V - 6)$$

et la transformée inverse :

$$\delta(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi^3} \int e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} d\vec{k} \quad (V - 7)$$

Or les composantes du tenseur de GREEN vérifient la relation II - 25 que l'on rappelle :

$$C_{ijkl} G_{km,lj}(\vec{r}) + \delta_{im} \delta(\vec{r}) = 0 \quad (V - 8)$$

ce qui permet d'écrire, compte tenu de (V - 5) et (V - 7) :

$$\frac{1}{8\pi^3} C_{ijkl} \int -k_l k_j \tilde{G}_{km}(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} d\vec{k} + \frac{1}{8\pi^3} \delta_{im} \int e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} d\vec{k} = 0 \quad (V - 9)$$

ce qui donne :

$$C_{ijkl} \tilde{G}_{km}(\vec{k}) k_l k_j = \delta_{im} \quad (V - 10)$$

or :

$$T_{klmj}^{II} = -\frac{1}{2} \left\{ G_{km,lj}(\vec{r}-\vec{r}') + G_{lm,kj}(\vec{r}-\vec{r}') \right\} = t_{\{kl\}mj}^{II} \quad (V - 11)$$

avec

$$t_{klmj}^{II} = - \int_{V_I} \int_{V_J} G_{km,lj}(\vec{r}-\vec{r}') d\vec{r}' d\vec{r} \quad (V - 12)$$

et d'après (V - 5) on a :

$$t_{klmj}^{II} = \int_{V_I} \int_{V_J} \int_{V_K} \frac{1}{8\pi^3} k_l k_j \tilde{G}_{km}(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')} d\vec{k} d\vec{r}' d\vec{r} \quad (V - 13)$$

U - 1 - 2 Cas où l'inclusion I est sphérique

Introduisons les cosinus directeurs de \vec{k} qu'on notera soit k le module du vecteur \vec{k} : prenons comme repère le repère R^1 d'origine o , centre de l'inclusion sphérique, ayant pour axes, 3 diamètres orthogonaux de la sphère: on a alors :

$$\forall j=1,2,3 \quad k_j = k \chi_j \tag{V - 14}$$

avec $\chi_1 = \sin\theta \cos\varphi$, $\chi_2 = \sin\theta \sin\varphi$, $\chi_3 = \cos\theta$ (V - 15)

k, θ, φ coordonnées sphériques de \vec{k} , et tels que :

$$k = |\vec{k}| \in [0, +\infty] , \theta \in [0, \pi] , \varphi \in [0, 2\pi]$$

alors (V - 10) s'écrit :

$$C_{ijkl} \chi_l \chi_j (k^2 \tilde{G}_{km}) = \delta_{im} \tag{V - 16}$$

en posant

$$C_{ijkl} \chi_l \chi_j = M_{ik} \tag{V - 17}$$

alors (V - 16) devient

$$M_{ik} (k^2 \tilde{G}_{km}) = \delta_{im} \tag{V - 18}$$

ou encore

$$k^2 \tilde{G}_{km} = (M_{km})^{-1} \tag{V - 19}$$

Le tenseur M ne dépend que de la direction de \vec{k} , c'est-à-dire des angles fixant cette direction donc $(k^2 \tilde{G}_{km})$ lui même dépend uniquement de ces angles θ et φ .

Par ailleurs en coordonnées sphériques l'élément de volume $d\vec{k}$ s'écrit :

$$d\vec{k} = k^2 \sin\theta d\theta d\varphi dk \tag{V - 20}$$

d'où pour (V - 13) :

$$t_{klemj}^{II} = \frac{1}{8\pi^3} \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} \chi_l \chi_j (k^2 \tilde{G}_{km}) d\varphi \int_0^{+\infty} k^2 dk \int_{V_I} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} d\vec{r} \int_{V_J} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}'} d\vec{r}' \tag{V - 21}$$

Pour évaluer l'intégrale $\int_{V_I} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d\vec{r}$, on choisit l'axe x_3 suivant \vec{k} , l'origine au centre de l'inclusion (supposée de rayon a) et l'on trouve

$$\int_{V_I} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d\vec{r} = \frac{4\pi}{k^3} (\sin(ak) - ak \cos(ak)) \quad (V - 22)$$

on vérifie que $\int e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}'} d\vec{r}' = \int e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d\vec{r}$, donc :

$$t_{klmj}^{II} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} \chi_l \chi_j (k^2 \tilde{G}_{km}) d\varphi \int_0^{+\infty} \frac{\sin ak - ak \cos ak}{k^4} dk \quad (V - 23)$$

On peut aisément vérifier que l'intégrale pourtant sur k est convergente au voisinage de 0 et de l' ∞ , et la calculer par les techniques des intégrales trigonométriques ou encore par la méthode des résidus et l'on trouve :

$$\int_0^{+\infty} (\sin ak - ak \cos ak) \frac{dk}{k^4} = \frac{\pi}{6} a^3 \quad (V - 24)$$

et alors :

$$t_{klmj}^{II} = \frac{a^3}{3} \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} \chi_l \chi_j (k^2 \tilde{G}_{km}) d\varphi \quad (V - 25)$$

où $(k^2 \tilde{G}_{km})$ est obtenu à partir de (V - 19)

on en tire T^{II} dans le cas d'une inclusion sphérique :

$$T_{klmj}^{II} = \frac{a^3}{6} \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} (\chi_l \chi_j k^2 \tilde{G}_{km} + \chi_k \chi_j k^2 \tilde{G}_{lm}) d\varphi \quad (V - 26)$$

U - 1 - 3 Cas où l'inclusion I est ellipsoïdale [7]

Soit a_1, b_1, c_1 les demi-axes de l'ellipsoïde I, tel que a_1 soit le plus grand; on passe de l'inclusion sphérique de rayon a_1 à I par le changement de variables suivant, où tous les vecteurs sont pris dans le repère principal d'inertie de l'ellipsoïde I, noté R^I :

$$\vec{r} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} \xrightarrow{R^I} \vec{R} \begin{matrix} X_1 = x_1 \\ X_2 = \frac{a_1}{b_1} x_2 \\ X_3 = \frac{a_1}{c_1} x_3 \end{matrix} \quad (V - 27)$$

et

$$\vec{k} \begin{matrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{matrix} \xrightarrow{R^I} \vec{K} \begin{matrix} K_1 = k_1 \\ K_2 = \frac{k_1}{a_1} k_2 \\ K_3 = \frac{c_1}{a_1} k_3 \end{matrix}$$

Le changement ainsi effectué est donc tel que :

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = \vec{K} \cdot \vec{R} \quad (V - 28)$$

l'ellipsoïdale $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{b_1^2} + \frac{x_3^2}{c_1^2} = 1$, étant décrit par la sphère $R = a_1$;

De plus nous avons les formules de passage :

$$\forall i = 1, 2, 3 \quad k_i = \phi_{it} K_t \quad \text{avec} \quad (\phi_{it}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1/b_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_1/c_1 \end{pmatrix} \quad (V - 29)$$

$$\text{et} \quad \forall j = 1, 2, 3 \quad x_j = \psi_{js} X_s \quad \text{avec} \quad (\psi_{js}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b_1/a_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_1/a_1 \end{pmatrix} \quad (V - 30)$$

Pour ce qui est des éléments de volumes nous avons :

$$d\vec{r} = \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(X_1, X_2, X_3)} d\vec{R} = \frac{b_1 c_1}{a_1^2} d\vec{R} \quad (V - 31)$$

et

$$d\vec{k} = \frac{a_1^2}{b_1 c_1} d\vec{K} \quad (V - 32)$$

L'expression (V - 13) du tenseur t_{klmj}^{II} dans le cas d'une inclusion ellipsoïdale s'écrit donc en utilisant les formules de transformation précédentes et en notant V_1^t le volume transformé de V_1 et V_1^t l'espace de \vec{k} transformé :

$$t_{klmj}^{II} = \frac{1}{8\pi^3} \iiint_{V_1^t} \iiint_{V_1^t} \iiint_{V_1^t} \phi_{lt} K_t \phi_{ju} K_u \tilde{G}_{km}(\vec{K}) e^{-i\vec{K}(\vec{R}-\vec{R}')} \frac{b_1 c_1}{a_1^2} d\vec{R} d\vec{R}' d\vec{K} \quad (V - 33)$$

$\tilde{G}_{km}(\vec{K})$ étant maintenant défini par les relations qu'on déduit de (V - 8) et (V - 27)

$$C_{ijkl} \tilde{G}_{km}(\vec{K}) K_t \phi_{lt} K_u \phi_{ju} = \delta_{im} \quad (V - 34)$$

et en posant

$$K_t = K \chi_t, \quad \text{où } K \text{ est le module de } \vec{K} \text{ et } \chi_t \text{ les cosinus directeurs}$$

$$\text{tels que } \chi_1 = \sin\theta \cos\varphi, \quad \chi_2 = \sin\theta \sin\varphi, \quad \chi_3 = \cos\theta$$

$$\text{alors si } C_{ijkl} \phi_{lt} \phi_{ju} \chi_t \chi_u = M_{ki} \quad (V - 35)$$

$$\text{on a (V - 34) } \rightarrow K^2 \tilde{G}_{km}(\vec{K}) = M_{km}^{-1} \quad (V - 36)$$

et l'on voit que $K^2 \tilde{G}_{km}(\vec{K})$ ne dépend que de la direction de \vec{K} .

alors on déduit de (V - 33) :

$$t_{klmj}^{II} = \frac{1}{8\pi^3} \frac{b_1 c_1}{a_1^2} \iiint_{V_1^t} \iiint_{V_1^t} \iiint_{V_1^t} K^2 \tilde{G}_{km}(\vec{K}) \chi_t \phi_{lt} \chi_u \phi_{ju} e^{-i\vec{K}(\vec{R}-\vec{R}')} d\vec{R}' d\vec{R} d\vec{K} \quad (V - 37)$$

or V_1^t est la sphère de rayon a_1 dont le centre est celui de l'ellipsoïde I; on peut donc, pour intégrer sur \vec{R} , \vec{R}' et \vec{K} , utiliser le résultat obtenu pour une inclusion sphérique (V - 25) et obtenir :

$$t_{klmj}^{II} = \frac{a_1 b_1 c_1}{3} \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} K^2 \tilde{G}_{km} \chi_t \phi_{lt} \chi_u \phi_{ju} d\varphi \quad (V - 38)$$

et on obtient les composantes de T^{II} en prenant la partie symétrique de t^{II} tel que :

$$T_{klmj}^{II} = \frac{1}{2} \left\{ t_{klmj}^{II} + t_{lkmj}^{II} \right\} \quad (V - 39)$$

U - 2 Détermination de T^{IJ}

Nous supposons I et J deux inclusions ellipsoïdales, (fig. V - 1); Par définition nous avons :

$$T_{klmj}^{IJ} = \int_{V_I} \int_{V_J} \overline{G}_{klmj}(\vec{r}-\vec{r}') d\vec{r} d\vec{r}' \quad (V - 40)$$

avec

$$\overline{G}_{klmj}(\vec{r}-\vec{r}') = -\frac{1}{2} \left\{ G_{km,lj}(\vec{r}-\vec{r}') + G_{lm,kj}(\vec{r}-\vec{r}') \right\} \quad (V - 41)$$

et en appelant

$$t_{klmj}^{IJ} = - \int_{V_I} \int_{V_J} G_{km,lj}(\vec{r}-\vec{r}') d\vec{r} d\vec{r}' \quad (V - 42)$$

$$t_{lkmj}^{IJ} = - \int_{V_I} \int_{V_J} G_{lm,kj}(\vec{r}-\vec{r}') d\vec{r} d\vec{r}' \quad (V - 43)$$

on a donc :

$$T_{klmj}^{II} = \frac{1}{2} \left\{ t_{klmj}^{IJ} + t_{lkmj}^{IJ} \right\} \quad (V - 44)$$

On est ramené à calculer t^{IJ} , qui est donné par [(V - 5) et (V - 42)] :

$$t_{klmj}^{IJ} = \frac{1}{8\pi^3} \int_{V_I} \int_{V_J} \int_{V_k} k_l k_j \tilde{G}_{km}(\vec{k}) e^{-i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')} d\vec{k} d\vec{r} d\vec{r}' \quad (V - 45)$$

où k_l et k_j sont des composantes de \vec{k} qui décrit l'espace R^3 tout entier où $\vec{r} \in$ inclusion I, et $\vec{r}' \in$ inclusion J, et où $\tilde{G}_{km}(\vec{k})$ est la transformée de FOURIER du tenseur de GREEN.

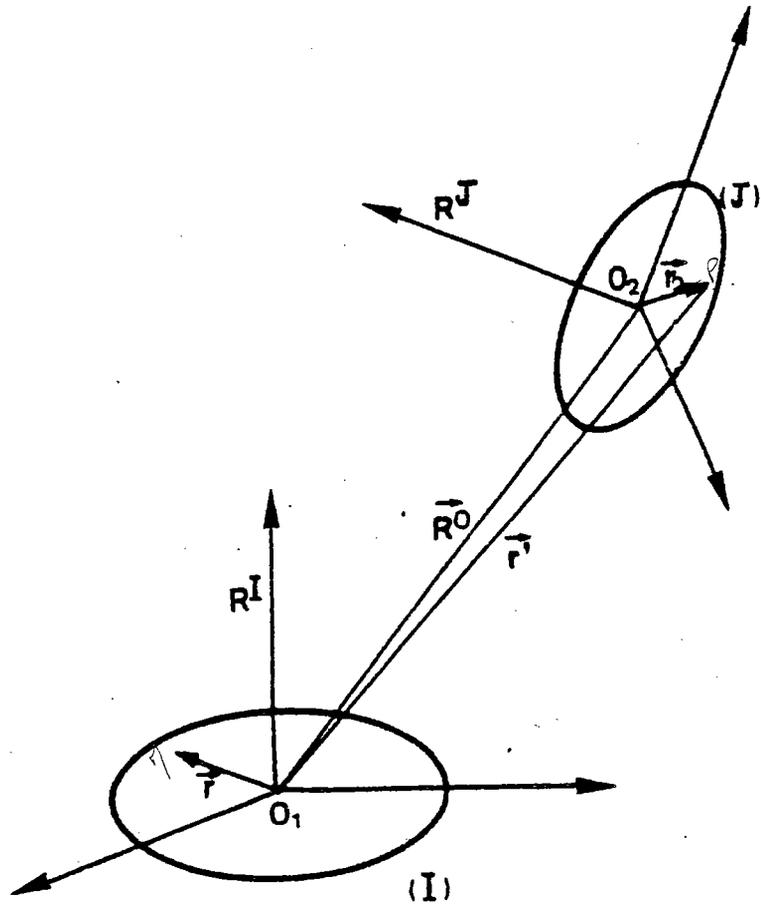


Fig. V - 1. 2 inclusions (I) et (J) ellipsoïdales quelconques

Nous calculons t^{IJ} dans le repère principal d'inertie de l'ellipsoïde I, d'origine confondue avec le centre O_1 de I; notons R^I ce repère, (fig. V - 1), les axes de I sont a_1, b_1, c_1 ; ceux de J sont a_2, b_2, c_2 ; J a son centre en O_2 tel que $\vec{O_1O_2} = \vec{R}^0$; notons R^J le repère principal d'inertie de l'ellipsoïde J; soit γ, θ, φ les angles d'EULER qui fixent la position de R^J par rapport à R^I ; notons alors α_{ij} la matrice de passage de R^I à R^J ; elle est donnée par :

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \cos \gamma \cos \varphi - \sin \gamma \sin \varphi \cos \theta \\ \alpha_{12} &= \sin \gamma \cos \varphi + \sin \varphi \cos \gamma \cos \theta \\ \alpha_{13} &= \sin \theta \sin \varphi \\ \alpha_{21} &= -\cos \gamma \sin \varphi - \sin \gamma \cos \theta \cos \varphi \\ \alpha_{22} &= -\sin \gamma \sin \varphi + \cos \gamma \cos \theta \cos \varphi \\ \alpha_{23} &= \sin \theta \cos \varphi \\ \alpha_{31} &= \sin \gamma \sin \theta \\ \alpha_{32} &= -\cos \gamma \sin \theta \\ \alpha_{33} &= \cos \theta \end{aligned} \tag{V - 46}$$

Soit R_1^0, R_2^0, R_3^0 , les composantes de \vec{R}^0 dans R^I , c'est-à-dire

$$\vec{R}^0 = \vec{O_1O_2} \begin{cases} R_1^0 \\ R_2^0 \\ R_3^0 \end{cases} \tag{V - 47}$$

et posons :

$$\forall M \in (I) \Rightarrow \vec{O_1M} = \vec{r} \tag{V - 48}$$

$$\forall P \in (J) \Rightarrow \begin{aligned} \vec{O_1P} &= \vec{r}' \\ \vec{O_2P} &= \vec{r}_2 \end{aligned} \tag{V - 49}$$

$$\tag{V - 50}$$

Alors nous avons : $\vec{r}' = \vec{R}^0 + \vec{r}_2$ (V - 51)

d'où : $d\vec{r}' = d\vec{r}_2$ (V - 52)

On déduit alors de (V - 45) :

$$t_{klmj}^{IJ} = \frac{1}{8\pi^3} \int_{V_k} \int_{V_l} \int_{V_j} \tilde{G}_{km}(\vec{r}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}^0} d\vec{k} \int_{V_I} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} d\vec{r} \int_{V_J} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}_2} d\vec{r}_2 \tag{V - 53}$$

Pour évaluer l'intégral sur V_1 , nous pouvons la transformer en une intégrale sur la sphère de centre O_1 et de rayon a_1 (a_1 choisi tel que $a_1 = \sup(a_2, b_1, c_1)$) en effectuant le changement de variable sur \vec{r} et \vec{k} :

$$\vec{r} \begin{cases} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{cases} \xrightarrow{\quad} \vec{R} \begin{cases} X_1 = x_1 \\ X_2 = \frac{a_1}{b_1} x_2 \\ X_3 = \frac{a_1}{c_1} x_3 \end{cases} \tag{V - 54}$$

$$\vec{k} \begin{cases} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{cases} \xrightarrow{\quad} \vec{K} \begin{cases} K_1 = k_1 \\ K_2 = \frac{b_1}{a_1} k_2 \\ K_3 = \frac{c_1}{a_1} k_3 \end{cases} \tag{V - 55}$$

pour l'élément de volume $d\vec{r}$ nous avons :

$$d\vec{r} = \frac{b_1 c_1}{a_1^2} d\vec{R} \tag{V - 56}$$

et alors on a :

$$\int_{V_1} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} d\vec{r} = \int_{\text{Sphère}(O_1, a_1)} e^{-i\vec{K}\cdot\vec{R}} \frac{b_1 c_1}{a_1^2} d\vec{R} \tag{V - 57}$$

et en appliquant le résultat (V - 22), on a :

$$\int_{\text{Sphère}(O_1, a_1)} e^{-i\vec{K}\cdot\vec{R}} d\vec{R} = \frac{4\pi}{K^3} (\sin a_1 K - a_1 K \cos a_1 K) \tag{V - 58}$$

où K est le module du vecteur \vec{K} , c'est-à-dire :

$$K = \left\{ k_1^2 + \frac{b_1^2}{a_1^2} k_2^2 + \frac{c_1^2}{a_1^2} k_3^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{V - 59}$$

qu'on peut encore écrire en posant :

$$k_1 = k \chi_1, \quad k_2 = k \chi_2, \quad k_3 = k \chi_3 \tag{V - 60}$$

où k est le module de \vec{k} et χ_1, χ_2, χ_3 les cosinus directeurs de \vec{k} :

$$\Rightarrow K = \frac{k}{a_1} \left(a_1^2 \chi_1^2 + b_1^2 \chi_2^2 + c_1^2 \chi_3^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (V - 61)$$

De la même façon, nous pouvons transformer l'intégrale sur V_J , mais après avoir exprimé le vecteur \vec{k} dans le repère R^J : on a ainsi les différents changements :

$$\vec{k} \begin{matrix} \left\{ \begin{matrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{matrix} \right. \\ R^I \end{matrix} \longrightarrow \vec{k}' \begin{matrix} \left\{ \begin{matrix} k'_1 = \alpha_{1j} k_j \\ k'_2 = \alpha_{2j} k_j \\ k'_3 = \alpha_{3j} k_j \end{matrix} \right. \\ R^J \end{matrix} \quad (V - 62)$$

$$\vec{R}_2 \begin{matrix} \left\{ \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{matrix} \right. \\ R^J \end{matrix} \longrightarrow \vec{R}_2 \begin{matrix} \left\{ \begin{matrix} Y_1 = y_1 \\ Y_2 = \frac{a_2}{b_2} y_2 \\ Y_3 = \frac{a_2}{c_2} y_3 \end{matrix} \right. \\ R^J \end{matrix} \quad (V - 63)$$

et enfin (V - 64)

$$\vec{k}' \begin{matrix} \left\{ \begin{matrix} k'_1 \\ k'_2 \\ k'_3 \end{matrix} \right. \\ R^J \end{matrix} \longrightarrow \vec{K}' \begin{matrix} \left\{ \begin{matrix} K'_1 = \frac{b'_1}{a_2} k'_1 \\ K'_2 = \frac{b_2}{a_2} k'_2 \\ K'_3 = \frac{c_2}{a_2} k'_3 \end{matrix} \right. \\ R^J \end{matrix}$$

d'où (V - 65)

$$d\vec{k}_2 = \frac{b_2 c_2}{a_2^2} d\vec{R}_2$$

et

$$\int_{V_J} e^{i \vec{k} \cdot \vec{R}_2} d\vec{R}_2 = \int_{\text{Sphère}(0, a_2)} e^{i \vec{K}' \cdot \vec{R}_2} \frac{b_2 c_2}{a_2^2} d\vec{R}_2 \quad (V - 66)$$

ou encore, en appliquant le résultat valable pour une inclusion sphérique :

$$\int_{\text{Sphère}(a_2, a_2)} e^{i \vec{k}' \cdot \vec{R}_2} d\vec{R}_2 = \frac{4\pi}{K'^3} \left(\sin a_2 K' - a_2 K' \cos a_2 K' \right) \quad (V - 67)$$

où K' module de \vec{k}' est donné par :

$$K' = \frac{k}{a_2} \left\{ a_2^2 (\alpha_{2j} \chi_j)^2 + b_2^2 (\alpha_{2j} \chi_j)^2 + c_2^2 (\alpha_{3j} \chi_j)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (V - 68)$$

On déduit de (V - 58) et (V - 66) pour t_{klmj}^{IJ} :

$$t_{klmj}^{IJ} = \frac{2}{\pi} \frac{b_1 c_1 b_2 c_2}{a_1^2 a_2^2} \int_{V_k} \left(k^2 \tilde{G}_{km} \right) \chi_l \chi_j \frac{e^{i \vec{k} \cdot \vec{R}^0}}{K^3 K'^3} \left\{ \sin a_1 K - a_1 K \cos a_1 K \right\} \left\{ \sin a_2 K' - a_2 K' \cos a_2 K' \right\} d\vec{k} \quad (V - 69)$$

or $\left(k^2 \tilde{G}_{km} \right)$ ne dépend que de la partie angulaire d'après (V - 16) :

donc nous pouvons écrire :

$$t_{klmj}^{IJ} = \frac{2}{\pi} \frac{b_1 c_1 b_2 c_2}{a_1^2 a_2^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta \chi_l \chi_j \left(k^2 \tilde{G}_{km} \right) d\theta \int_0^{+\infty} \frac{k^2 e^{i \vec{k} \cdot \vec{R}^0}}{K^3 K'^3} \left\{ \sin a_1 K - a_1 K \cos a_1 K \right\} \left\{ \sin a_2 K' - a_2 K' \cos a_2 K' \right\} dk \quad (V - 70)$$

l'intégrale sur \vec{k} est complexe or $\left(k^2 \tilde{G}_{km} \chi_l \chi_j \right)$ d'après (V - 16) est réel; donc seule la partie réelle de l'intégrale sur \vec{k} doit donner une contribution non nulle.

d'où en définitive :

$$t_{klmj}^{IJ} = \frac{2}{\pi} \frac{b_1 c_1 b_2 c_2}{a_1^2 a_2^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta \chi_l \chi_j \left(k^2 \tilde{G}_{km} \right) d\varphi \int_0^{+\infty} k^2 \cos \left(k \chi_i R_i^0 \right) \times \frac{\sin(a_1 K) - (a_1 K) \cos a_1 K}{K^3} \times \frac{\sin(a_2 K') - (a_2 K') \cos(a_2 K')}{K'^3} dk \quad (V - 71)$$

On peut facilement voir que ces intégrales convergent quand k tend vers zéro ou lorsque k tend vers l'infini

Posons
$$a = \left\{ a_1^2 \chi_1^2 + b_1^2 \chi_2^2 + c_1^2 \chi_3^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (V - 72)$$

$$b = \left\{ a_2^2 (\chi_j a_{ij})^2 + b_2^2 (a_{2j} \chi_j)^2 + c_2^2 (a_{3j} \chi_j)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (V - 73)$$

$$c = \chi_1 R_1^0 + \chi_2 R_2^0 + \chi_3 R_3^0 \quad (V - 74)$$

alors on a, en ce qui concerne l'intégrale dans (V - 71) sur k, en tenant compte aussi de (V - 61, 68)

$$\int_0^{+\infty} \frac{b^2}{k^2} \cos(k \chi_i R_i^0) \frac{\sin a_1 k - a_1 k \cos a_1 k}{k^3} \cdot \frac{\sin a_2 k' - a_2 k' \cos a_2 k'}{k'^3} dk =$$

$$\frac{a_1^3 a_2^3}{a^3 b^3} \int_0^{+\infty} \cos(kc) \cdot \frac{(\sin ak - ak \cos ak)(\sin bk - bk \cos bk)}{k^4} dk$$

(V - 75)

Le détail du calcul de cette dernière intégrale est donnée en annexe. Nous trouvons,

si l'on pose
$$F = \int_0^{+\infty} \cos(kc) \frac{(\sin ak - ak \cos ak)(\sin bk - bk \cos bk)}{k^4} dk$$

que :

$$F(\theta, \gamma) = \frac{1}{24} \left\{ -\alpha^3 + 3b\alpha^2 + 3a\alpha^2 - 6ab\alpha \right\} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha k}{k} dk +$$

$$\frac{1}{24} \left\{ \beta^3 - 3b\beta^2 + 3a\beta^2 - 6ab\beta \right\} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta k}{k} dk +$$

$$\frac{1}{24} \left\{ \gamma^3 + 3b\gamma^2 - 3a\gamma^2 - 6ab\gamma \right\} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \gamma k}{k} dk +$$

$$\frac{1}{24} \left\{ -\delta^3 + 3b\delta^2 + 3a\delta^2 - 6ab\delta \right\} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \delta k}{k} dk$$

(V - 76)

avec :

$$\alpha = a + b - c$$

$$\beta = b + c - a$$

$$\gamma = c + a - b$$

$$\delta = a + b + c$$

(V - 77)

et où les intégrales telles que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin ak}{k} dk$ sont données par les relations bien connues :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin ak}{k} dk = \begin{cases} +\frac{\pi}{2} & a > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & a < 0 \end{cases}$$

Nous obtenons en définitive pour t^{IJ}

$$t_{klmj}^{IJ} = \frac{2}{\pi} (a_1 b_1 c_1) (a_2 b_2 c_2) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \chi_l \chi_j \left(\frac{1}{k^2} \tilde{G}_{km} \right) \times \frac{F(\theta, \varphi) d\theta}{\left\{ a_1^2 \chi_1^2 + b_1^2 \chi_2^2 + c_1^2 \chi_3^2 \right\}^{3/2} \left\{ a_2^2 (a_{1j} \chi_j)^2 + b_2^2 (a_{2j} \chi_j)^2 + c_2^2 (a_{3j} \chi_j)^2 \right\}^{3/2}}$$

(V - 78)

qu'on peut encore écrire en introduisant les volumes V_I et V_J des 2 ellipsoïdes

$$V_I = \frac{4}{3} \pi a_1 b_1 c_1 \quad V_J = \frac{4}{3} \pi a_2 b_2 c_2$$

$$t_{klmj}^{IJ} = \frac{9}{8\pi^3} V_I V_J \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta \chi_l \chi_j}{k^2} \tilde{G}_{km} \left| \frac{F(\theta, \varphi) d\theta}{\left\{ a_1^2 \chi_1^2 + b_1^2 \chi_2^2 + c_1^2 \chi_3^2 \right\}^{3/2} \left\{ a_2^2 (a_{1j} \chi_j)^2 + b_2^2 (a_{2j} \chi_j)^2 + c_2^2 (a_{3j} \chi_j)^2 \right\}^{3/2}} \right|$$

(V - 79)

et le tenseur T^{IJ} est obtenu à partir de (V - 44): Dans les applications examinées plus loin, pour des problèmes de mécanique physique l'intégrale (V - 79) est résolue numériquement sur machine IBM 43 - 31 (cf. annexes).

U - 3 Détermination du tenseur T^{II} pour un milieu isotrope et deux inclusions sphériques

U - 3 - 1 Cas d'une inclusion - détermination de T^{II}

Soit une inclusion sphérique de rayon a alors d'après (V - 29) on a :

$$t_{klmj}^{II} = \frac{a^3}{3} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} \chi_k \chi_l \chi_j \left(k^2 G_{km} \right) d\varphi \quad (V - 80)$$

et

$$T_{klmj}^{II} = \frac{1}{2} \left(t_{klmj}^{II} + t_{lkmj}^{II} \right) \quad (V - 81)$$

appelons μ, ν et λ les constantes élastiques qui caractérisent le milieu isotrope; alors dans le cas isotrope la transformée de FOURIER du tenseur de GREEN est donné par [8] :

$$k^2 \tilde{G}_{km} = \frac{1}{\mu} \left(\delta_{km} - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \chi_k \chi_m \right) \equiv \frac{1}{\mu} \left(\delta_{km} - \frac{1}{2(1-\nu)} \chi_k \chi_m \right) \quad (V - 82)$$

où

$$\chi_1 = \sin \theta \cos \varphi, \quad \chi_2 = \sin \theta \sin \varphi, \quad \chi_3 = \cos \theta$$

On trouve, si on appelle V le volume de l'inclusion, les composantes non nulles suivantes :

$$T_{1111}^{II} = T_{2222}^{II} = T_{3333}^{II} = V \frac{7 - 10\nu}{30\mu(1-\nu)}$$

$$T_{1122}^{II} = T_{2211}^{II} = T_{1133}^{II} = T_{3311}^{II} = T_{2233}^{II} = T_{3322}^{II} = \frac{-V}{30\mu(1-\nu)} \quad (V - 83)$$

$$T_{1212}^{II} = T_{1221}^{II} = T_{1313}^{II} = T_{1331}^{II} = T_{2323}^{II} = T_{2332}^{II} = V \frac{4 - 5\nu}{30\mu(1-\nu)}$$

On peut remarquer que nous avons la formule générale suivante :

$$t_{mnij}^{II} = \frac{1}{30\mu(1-\nu)} \left\{ (9 - 10\nu) \delta_{jn} \delta_{im} - (\delta_{ij} \delta_{mn} + \delta_{in} \delta_{jm}) \right\} \quad (V - 84)$$

On peut aussi remarquer que nous pouvons retrouver les expressions connues des composantes du tenseur S d'ESHELBY (dans le cas isotrope) à partir de la formule (II - 46) qui s'écrit :

$$S_{ijkl} = \frac{1}{V} T_{ijmn}^{II} C_{mnlk} \quad (V - 85)$$

avec, comme le milieu est supposé isotrope :

$$C_{mnlk} = \lambda \delta_{mn} \delta_{kl} + \mu (\delta_{mk} \delta_{nl} + \delta_{ml} \delta_{nk}) \quad (V - 86)$$

alors, on a par exemple :

$$S_{1111} = \frac{1}{V} T_{11mn}^{II} \left\{ \lambda \delta_{mn} + 2\mu \delta_{m1} \delta_{n1} \right\} \quad (V - 87)$$

ou encore, sachant que $\lambda = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu}$ et compte tenu des résultats (V - 83) :

$$S_{1111} = (\lambda + 2\mu) T_{1111}^{II} + \lambda (T_{1122}^{II} + T_{1133}^{II}) \quad (V - 88)$$

d'où

$$S_{1111} = \frac{7-5\nu}{15(1-\nu)}$$

de même, nous trouvons :

$$S_{2222} = S_{3333} = S_{1111} = \frac{7-5\nu}{15(1-\nu)}$$

$$S_{1122} = S_{2211} = S_{1133} = S_{3311} = S_{3322} = S_{2233} = \frac{5\nu-1}{15(1-\nu)} \quad (V - 89)$$

$$S_{1212} = S_{2323} = S_{1313} = \frac{4-5\nu}{15(1-\nu)}$$

U - 3 - 2 Cas de deux inclusions sphériques isotropes - détermination de T^{IJ}

Nous allons calculer le tenseur T^{IJ} dans le cas de deux inclusions sphériques (fig. V - 2), dont les rayons sont respectivement a et b ($a > b$), pour un milieu isotrope caractérisé par les constantes élastiques λ, μ (ou μ, ν). Dans ce cas, nous pouvons calculer t_{kijn}^{IJ} analytiquement.

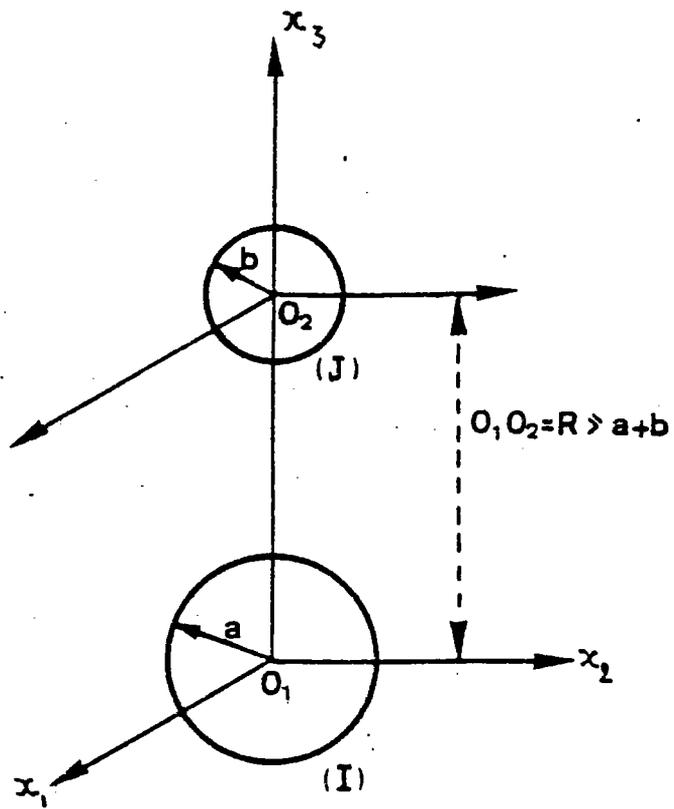


Fig. V - 2 Cas de deux inclusions sphériques (I) et (J)
l'axe x_3 passant par la ligne des centres

Nous pouvons choisir les repères R^1 et R^2 parallèles et tel que le 3^{ème} axe x_3 passe par les centres O_1 et O_2 des deux sphères (fig. V - 2); dans ce cas la matrice de passage est la matrice identité ($\psi = \theta = \varphi = 0$) ; la distance des centres est égale à R .

En appliquant la formule générale (V - 76) et en discutant par rapport aux signes des quantités $\alpha, \beta, \gamma,$ et δ nous trouvons (le détail des calculs est donné en annexe)

$$t_{klmj}^{II} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi d\varphi \int_0^\pi \sin\theta \chi_j \chi_l \cdot h^2 \tilde{G}_{km} d\theta \int_0^{+\infty} \cos(hR \cos\theta) \frac{\sin ak - ak \cos ak}{k^3} \cdot \frac{\sin bk - bk \cos bk}{k^3} h^2 dk$$

et θ est l'angle $(\vec{R}, \vec{k}) \equiv (\vec{x}_3, \vec{r}_k)$ (V - 90)

on en déduit si on pose

$$f(\theta, R) = \int_0^{+\infty} \cos(hR \cos\theta) \cdot (\sin ak - ak \cos ak) (\sin bk - bk \cos bk) \frac{dk}{k^4} \quad (V - 91)$$

ou encore (voir annexes)

$$f(\theta, R) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq \theta \leq \theta_1 \\ \frac{\pi}{24} \left(R^3 \cos^3 \theta - 3R(a^2 + b^2) \cos \theta + 2(a^3 + b^3) \right) & \text{si } \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \\ \frac{\pi}{6} b^3 & \text{si } \theta_2 \leq \theta \leq \pi - \theta_2 \\ \frac{\pi}{24} \left(-R^3 \cos^3 \theta + 3R(a^2 + b^2) \cos \theta + 2(a^3 + b^3) \right) & \text{si } \pi - \theta_2 \leq \theta \leq \pi - \theta_1 \\ 0 & \text{si } \pi - \theta_1 \leq \theta \leq \pi \end{cases} \quad (V - 92)$$

où θ_1 et θ_2 sont tels que :

$$0 \leq \theta_1 < \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \cos \theta_1 = \frac{a+b}{R} \quad (V - 93)$$

$$0 \leq \theta_2 < \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \cos \theta_2 = \frac{a-b}{R}$$

Nous pouvons vérifier aisément la continuité de la fonction $f(\theta)$ quand θ tend vers θ_1 ou vers θ_2 aussi bien par valeurs supérieures que par valeurs inférieures.

On en déduit l'expression de t^{IJ} suivante

$$(V - 90) \rightarrow t_{klmj}^{IJ} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta \chi_l \chi_j \left(\frac{2}{R} \tilde{G}_{km} \right) f(\theta) d\theta \quad (V - 94)$$

avec

$$\chi_1 = \sin \theta \cos \varphi$$

$$\chi_2 = \sin \theta \sin \varphi$$

$$\chi_3 = \cos \theta$$

θ et φ étant la longitude et la distance polaire (coordonnées sphériques) du vecteur \vec{K} . $\frac{2}{R} \tilde{G}_{km}$ est encore donné dans le cas isotrope par la relation (V - 82) et dépend de θ et φ seulement.

Nous remarquons en particulier que le tenseur t^{IJ} possède les symétries suivantes :

$$t_{klmj}^{IJ} = t_{mlkj}^{IJ} \quad (V - 95)$$

et

$$t_{klmj}^{IJ} = t_{kjml}^{IJ} \quad (V - 96)$$

Enfin T^{IJ} est obtenu en prenant la partie symétrique de t^{IJ} par :

$$T_{klmj}^{IJ} = T_{lkmj}^{IJ} = \frac{1}{2} \left\{ t_{klmj}^{IJ} + t_{lkmj}^{IJ} \right\} \quad (V - 97)$$

Appelons alors V_1 et V_2 les volumes des deux inclusions sphériques, ν le rapport de Poisson, μ le module de cisaillement, ρ^2 la quantité

$$\frac{a^2 + b^2}{R^2} = \rho^2 \quad (V - 98)$$

alors, nous pouvons calculer à partir de (V - 94) les composantes de T^{IJ} non nulles; le détail des calculs est indiqué en annexe:

nous trouvons :

$$T_{1111}^{IJ} = T_{2222}^{IJ} = \frac{V_1 V_2}{16 \pi R^3} \frac{1}{\mu(1-\nu)} \left(1 - 4\nu + \frac{9}{5} \rho^2 \right)$$

$$T_{1122}^{IJ} = T_{2211}^{IJ} = \frac{V_1 V_2}{16 \pi R^3} \frac{1}{\mu(1-\nu)} \left(-1 + \frac{3}{5} \rho^2 \right)$$

$$T_{1133}^{IJ} = T_{2233}^{IJ} = T_{3311}^{IJ} = T_{3322}^{IJ} = \frac{V_1 V_2}{16 \pi R^3} \frac{1}{\mu(1-\nu)} \left(2 - \frac{12}{5} \rho^2 \right)$$

$$T_{1212}^{IJ} = T_{1221}^{IJ} = \frac{V_1 V_2}{16 \pi R^3} \frac{1}{\mu(1-\nu)} \left(1 - 2\nu + \frac{3}{5} \rho^2 \right)$$

(V - 99)

$$T_{1313}^{IJ} = T_{2323}^{IJ} = \frac{V_1 V_2}{16 \pi R^3} \frac{1}{\mu(1-\nu)} \left(-2 + 4\nu - \frac{12}{5} \rho^2 \right)$$

$$T_{1331}^{IJ} = T_{2332}^{IJ} = \frac{V_1 V_2}{16 \pi R^3} \frac{1}{\mu(1-\nu)} \left(4 - 2\nu - \frac{12}{5} \rho^2 \right)$$

$$T_{3333}^{IJ} = \frac{V_1 V_2}{16 \pi R^3} \frac{1}{\mu(1-\nu)} \left(-8 + 8\nu + \frac{24}{5} \rho^2 \right)$$

Nous remarquons en particulier que $T_{mmkk}^{IJ} = 0$ (V - 99)

Tous les termes tels que T^{IJK} , T^{IJK} , T^{IJK} où il y a trois indices différents, et les termes tels que T^{IJJ} ou T^{IJJ} ou T^{IJJ} avec 3 indices identiques et $i \neq j$, sont nuls.

Par ailleurs, nous pouvons remarquer que notre tenseur T^{IJ} dans le cas de deux inclusions sphériques pour un milieu isotrope est relié au tenseur M^{IJ} défini dans la thèse de M. BERVEILLER [8]

par
$$M_{ijmn}^{IJ} = T_{ijkl}^{IJ} C_{klmn}$$
 (V - 100)

d'où :

$$M_{ijkl}^{IJ} = \lambda T_{ijmm}^{IJ} \delta_{kl} + \mu \left(T_{ijkl}^{IJ} + T_{ijlk}^{IJ} \right)$$
 (V - 101)

avec M^{IJ} donné par [8] :

$$M_{ijkl}^{IJ} = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \gamma_{ijkl}^* - \frac{1}{8\pi} \left\{ \delta_{ie} \phi_{ikj}^* + \delta_{ik} \phi_{ilj}^* + \delta_{je} \phi_{kji}^* + \delta_{jk} \phi_{lji}^* + \frac{2\nu}{1-\nu} \delta_{kl} \phi_{ij}^* \right\} \tag{V - 102}$$

où
$$\gamma_{ijkl}^* = \int_{V_1} \int_{V_2} \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \delta_{ijkl} d\vec{r} d\vec{r}' \tag{V - 103}$$

et
$$\phi_{ij}^* = \int_{V_1} \int_{V_2} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta_{ij} d\vec{r} d\vec{r}' \tag{V - 104}$$

et on [8] :

$$M_{1111}^{IJ} = M_{2222}^{IJ} = \frac{V_1 V_2}{8\pi R^3} \frac{1}{1-\nu} \left(1 - 2\nu + \frac{9}{5} \rho^2 \right)$$

$$M_{1122}^{IJ} = M_{2211}^{IJ} = \frac{V_1 V_2}{8\pi R^3} \frac{1}{1-\nu} \left(-1 + 2\nu + \frac{3}{5} \rho^2 \right) \tag{V - 105}$$

$$M_{1212}^{IJ} = M_{2121}^{IJ} = \frac{V_1 V_2}{8\pi R^3} \frac{1}{1-\nu} \left(1 - 2\nu + \frac{3}{5} \rho^2 \right)$$

$$M_{1313}^{IJ} = M_{2323}^{IJ} = \frac{V_1 V_2}{8\pi R^3} \frac{1}{1-\nu} \left(1 + \nu - \frac{12}{5} \rho^2 \right)$$

$$M_{2333}^{IJ} = M_{1133}^{IJ} = \frac{V_1 V_2}{8\pi R^3} \frac{1}{1-\nu} \left(2 + 2\nu - \frac{12}{5} \rho^2 \right)$$

$$M_{3322}^{IJ} = M_{3311}^{IJ} = \frac{V_1 V_2}{8\pi R^3} \frac{1}{1-\nu} \left(2 - 4\nu - \frac{12}{5} \rho^2 \right)$$

$$M_{3333}^{IJ} = \frac{V_1 V_2}{8\pi R^3} \frac{1}{1-\nu} \left(-8 + 4\nu + \frac{24}{5} \rho^2 \right)$$

Les composantes M_{ijkl}^{IJ} sont symétriques par rapport à i et j ; ainsi que par rapport à k et l ; on vérifie qu'en remplaçant dans (V - 101) les T_{ijkl}^{IJ} par leurs expressions (V - 99) et C_{ijkl} par l'expression dans le cas isotrope, alors on retrouve les expressions (V - 105).

U - 4 BIBLIOGRAPHIE CHAPITRE U

- 1 - G. KNEER, Phys. stat. sol., 9, (1965)
- 2 - T. MURA , Phys. stat. sol. 45 (1973)
- 3 - N. LAWS, J. Elasticity, (1977)
- 4 - F. GHARHEMANI , Mech. Res. Comm., 4 (2), (1977)
- 5 - S. TIEM - rapport de DEA - METZ , (1983)
- 6 - P.R. MORRIS - Int. J. Eng. Science, 9, (1971) ✓
- 7 - G. FAIVRE - J. de Physique
- 8 - M. BERVEILLER - Thèse d'Etat - Université PARIS 13 (1978)

CHAPITRE VI

Modélisation du comportement pseudo-élastique et plastique des métaux

- VI - 1 - Application à la modélisation du comportement pseudo-élastique
lors d'une transformation martensitique sous contrainte.
 - VI - 1 - 1 Introduction
 - VI - 1 - 2 Rappels sur la transformation martensitique -
aspects cinématiques
 - VI - 1 - 3 Ecrouissage en pseudo-élasticité
 - VI - 1 - 4 Interaction entre deux inclusions de martensite
 - VI - 1 - 5 Application - cas de l'alliage Fe - 31 % Ni

- VI - 2 - Application à l'écrouissage par les contraintes internes dans
les matériaux cristallins.
 - VI - 2 - 1 Introduction
 - VI - 2 - 2 Loi d'écrouissage non locale pour le monocristal
 - VI - 2 - 3 Cas particuliers : - A - paire d'inclusions
plastiques
B - approche par le calcul
de l'énergie
 - VI - 3 - Conclusion
 - VI - 4 - Bibliographie du chapitre VI

Nous utilisons les résultats des chapitres précédents dans le cas de l'élasticité homogène (paire plastique), pour analyser quelques effets spécifiques de contraintes internes, dans le cas de la plasticité classique (par glissement plastique) et de la plasticité de transformation ou pseudo-élasticité par transformation martensitique. Dans ce dernier cas on sait que, dans des conditions de chargement isothermes, des plaquettes de martensite, dont l'orientation dépend de l'état de contraintes, se forment; mis à part quelques cas particuliers où on peut observer plusieurs transformations en cascade, les interactions entre différents variants d'une même martensite conditionnent l'aptitude à la déformation en pseudo-élasticité. Par opposition à la plasticité classique où on peut avoir localement un glissement multiple, les interactions entre variants seront plutôt à distance ou éventuellement des actions de contact. La présence des contraintes internes associées à ces multiples variants entraîne un effet d'écrouissage, c'est-à-dire que la contrainte macroscopique doit être modifiée pour poursuivre la déformation. Nous proposons ici un modèle pour décrire ce phénomène qui peut être décrit par l'intermédiaire d'une matrice d'écrouissage analogue à celle de la plasticité classique mais qui a une origine physique au moins partiellement différente.

Ce travail est développé dans la première partie de ce chapitre que nous concluons en évaluant deux termes de cette matrice d'écrouissage à partir de la solution du problème de la paire d'inclusions. Dans le cas de la plasticité classique par glissement plastique, nous proposons formellement de décrire simultanément l'écrouissage dû aux actions de contact entre dislocations et aux actions à distance par l'introduction d'une matrice d'écrouissage globale non locale.

UI - 1 Application à la modélisation du comportement pseudo-élastique lors d'une transformation martensitique sous contrainte.

UI - 1 - 1 Introduction [1] [2] [3] [4] [5]

Les transformations martensitiques désignent à l'origine la transformation de phase du premier ordre qui se produit au cours du refroidissement rapide de l'austénite des aciers à base de carbone; la martensite est alors le constituant de trempe des aciers. Cette transformation martensitique est à la base des traitements thermiques des aciers, car la martensite est beaucoup plus dure que l'austénite ou la structure ferrite - perlite.

Du point de vue mécanique physique, le passage de la structure cristalline initiale (ou phase mère) à la nouvelle phase s'effectue par un mécanisme cristallographique analogue à un cisaillement et qui s'effectue grâce à des déplacements atomiques très faibles d'amplitude qui ne nécessitent pas l'intervention de la diffusion.

La transformation martensitique, a été observée à l'origine sur les aciers, elle se rencontre aussi dans un grand nombre d'alliages, de métaux purs, ou de certains composés minéraux. Le même phénomène se rencontre dans certains alliages dits "matériaux à mémoire de forme" ou pseudo-élastique qui suscitent beaucoup d'intérêt quant à leurs applications pratiques.

De nombreux problèmes mécaniques et métallurgiques restent encore sans solution satisfaisante dans le cas de telles transformations martensitiques. Nous pouvons citer à titre d'exemple, celui de la création de contraintes internes lors de la transformation par traitement thermique (en volume ou en surface) ou lors du soudage des aciers qui font intervenir des phénomènes thermomécaniques complexes tels que des effets thermiques, ou la plasticité classique ou la plasticité de transformation.

Ici, nous nous limitons au problème de la plasticité de transformation pris de manière isolée tel qu'il apparaît dans le cas de la pseudo-élasticité. Dans ce cas, la transformation martensitique apparaît comme un mécanisme de déformation analogue au maclage ou au glissement plastique, mais avec des caractéristiques propres. Nous supposons par la suite qu'il n'y a que ce mode de déformation qui apparaît dans le matériau, et nous excluons ici tout autre mécanisme tel que la plasticité classique. Ces restrictions sont justifiées dans le cas de la pseudo-élasticité.

Au paragraphe suivant, nous rappelons quelques propriétés essentielles de la transformation martensitique en insistant sur les aspects cinématiques et les contraintes internes dues à la présence simultanée de plusieurs variants.

Nous nous attachons ensuite à évaluer "l'écrouissage" dans une transformation martensitique en conditions isothermes, c'est-à-dire à déterminer la relation entre l'état de contraintes macroscopiques et la fraction volumique des différents variants présents dans le matériau; l'évaluation des différents termes intervenant dans le calcul de l'énergie élastique associée à la formation de martensite permet d'introduire une matrice "d'écrouissage" reliant la contrainte résolue sur un variant à la fraction volumique des autres variants; formellement cette matrice est analogue à celle que l'on rencontre en plasticité classique.

Nous illustrons enfin, dans une quatrième partie le modèle précédent sur un cas particulier constitué par deux inclusions ellipsoïdales - paire d'inclusions - représentant deux variants en interaction.

VI - 1 - 2 Rappels sur la transformation martensitique - Aspects cinématiques

On admet généralement que la déformation associée à la transformation martensitique résulte d'une transformation du réseau cristallographique ξ^B (déformation de BAIN), mesurable par des méthodes radio-cristallographiques et d'une transformation à réseau invariant ξ^P (glissement plastique ou maclage) dont le rôle est de diminuer l'énergie de déformation associée aux contraintes internes provoquée par la déformation (incompatible) de BAIN. La déformation totale s'écrit donc :

$$\xi_{ij} = \xi_{ij}^B + \xi_{ij}^P \tag{VI - 1}$$

Lorsque un volume V_M de martensite se forme dans un volume V d'austénite, une interface austénite - martensite se forme, et pour des raisons de compatibilité celle-ci prend souvent la forme d'un plan appelé plan d'habitat; la martensite possède alors la forme d'une plaquette; ce plan d'habitat caractérise la transformation.

Soit \vec{n} la normale unitaire au plan d'habitat, \vec{u} le déplacement d'un point M suivant une direction \vec{m}' (fig. VI - 1); les composantes du déplacement \vec{u} sont données par :

$$u_i = g \sum_k x_k n_k m'_i \tag{VI - 2}$$

où les x_k sont les coordonnées de M , n_k celles de \vec{n} et m'_i celles de \vec{m}'

la déformation ξ_{ij} est alors donnée par :

$$\xi_{ij} = \frac{1}{2} g (m'_i n_j + m'_j n_i) = R'_{ij} g \tag{VI - 3}$$

où R'_{ij} est le facteur d'orientation et g le taux de déformation unitaire, si α est l'angle (\vec{n}, \vec{m}') alors dans le repère $(o; \vec{m}, \vec{n}, \vec{m} \wedge \vec{n})$ où \vec{m} est la projection orthogonale de \vec{m}' sur le plan d'habitat,

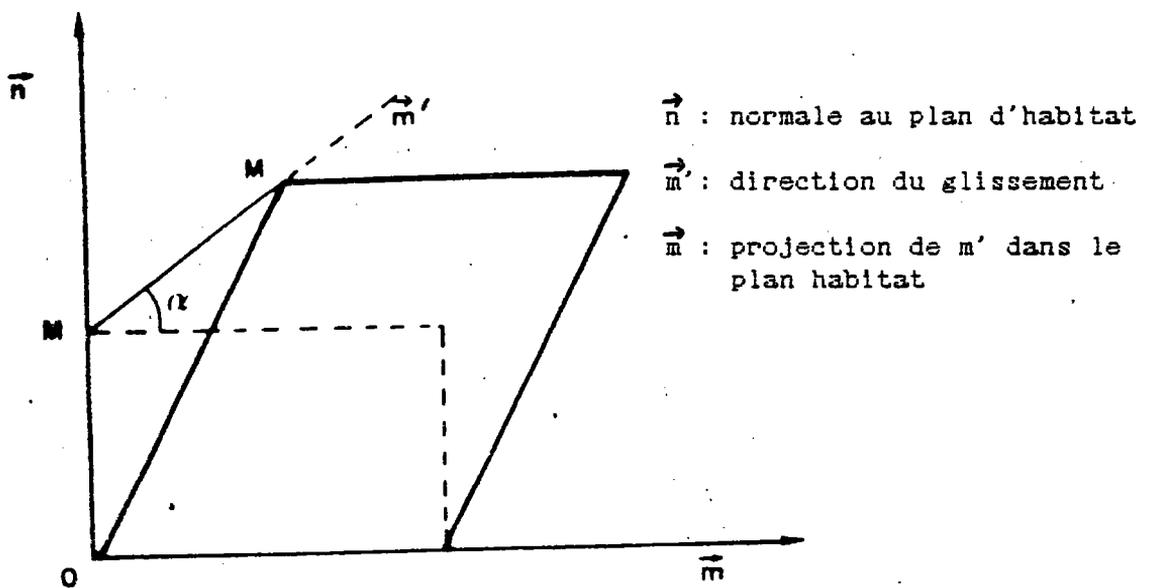


Fig. VI - 1 : Déformation par transformation martensitique d'un élément de volume

alors ϵ_{ij} s'écrit :

$$(\epsilon_{ij}) = \frac{1}{2} g \begin{pmatrix} 0 & \cos \alpha & 0 \\ \cos \alpha & 2 \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{VI} - 4)$$

Lorsque la transformation martensitique se produit, seule bien entendu une partie V_M du volume^v d'austénite de départ est transformée. Si donc cette partie de martensite croît de dV_M , la déformation moyenne du mélange (fig. VI - 2) austénite - martensite s'accroît d'une quantité $d\epsilon_{ij}$ telle que :

$$d\epsilon_{ij} = g R'_{ij} \frac{dV_M}{V} = g R'_{ij} df = \epsilon_{ij}^{am} df \quad (\text{VI} - 5)$$

où f est la fraction volumique de la martensite formée et df son accroissement résultat de la variation $d\epsilon_{ij}$.

A cause de la symétrie cristalline de l'austénite plusieurs variants peuvent co-exister pour un chargement thermomécanique donné. En général, le nombre possible de variants est de 24 (cas du Fe-Ni, Cu-Zn-Al); désignons alors par h le variant particulier dont la fraction volumique croît de df^h et par R'_{ij}^h son tenseur d'orientation, l'accroissement de la déformation moyenne du "monocristal" s'écrit donc :

$$d\epsilon_{ij} = g \sum_h R'_{ij}^h df^h \quad (\text{VI} - 6)$$

A partir de l'analyse purement cinématique précédente, nous en déduisons que :

* la variation de volume est donnée par ($\frac{\Delta V}{V} = \epsilon_{ii}$) :

$$d\epsilon_{ii} = g \sum_h R'_{ii}^h df^h \quad (\text{VI} - 7)$$

$$\text{ou encore } d\epsilon_{ii} = g \sin \alpha df \quad \text{avec } df = \sum_h df^h \quad (\text{VI} - 8)$$

* la fraction volumique de martensite formée pouvant varier de 0 à 1, la déformation de transformation est donc limitée et dépendra des variants actifs.

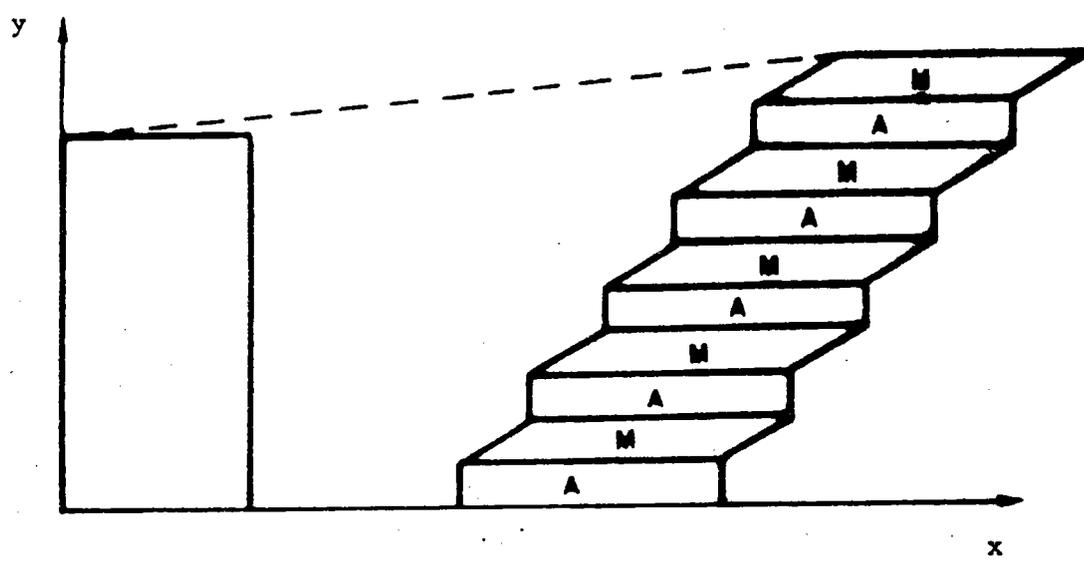


Fig. VI - 2 : Déformation par transformation partielle

* les tenseurs d'orientation R_{ij}^h possèdent les propriétés suivantes :

$$V_h, R_{ii}^h = \sin \alpha \tag{VI - 9}$$

$$R_{ij}^h R_{ij}^h = \frac{1}{2} (1 + \sin^2 \alpha) \tag{VI - 10}$$

* la transformation pouvant être réversible les quantités df^h peuvent être négatives, ce qui n'est pas le cas des f^h .

Dans une telle approche cinématique globale pour le "monocristal", nous avons calculé la déformation moyenne de l'élément de volume. Or, il est évident que pour ce mécanisme de déformation, localement on ne peut avoir qu'un variant actif. Le problème, ici, est donc différent de la plasticité classique pour laquelle il est raisonnable de supposer localement un mécanisme de glissement multiple; c'est là une différence fondamentale entre les deux mécanismes de déformation que sont plasticité classique et plasticité de transformation. Dans le cas de la transformation martensitique, nous pouvons raisonnablement penser que cette hétérogénéité de la déformation due à l'activation de plusieurs variants, aura des effets importants sur le comportement pseudo-élastique.

Si, pour simplifier l'analyse, on suppose qu'il n'y a que deux variants actifs (fig. VI - 3), l'hétérogénéité de la déformation de transformation va entraîner la présence de contraintes internes et d'une énergie élastique associée qui pourra modifier profondément la morphologie de la structure, ainsi que la réponse macroscopique par l'intermédiaire des interactions entre variants et des interactions avec les contraintes appliquées.

Nous pouvons distinguer deux stades dans le développement des variants :

* le premier, correspondant aux actions à distance entre variants, intervient au début de la transformation martensitique (fig. VI - 3).

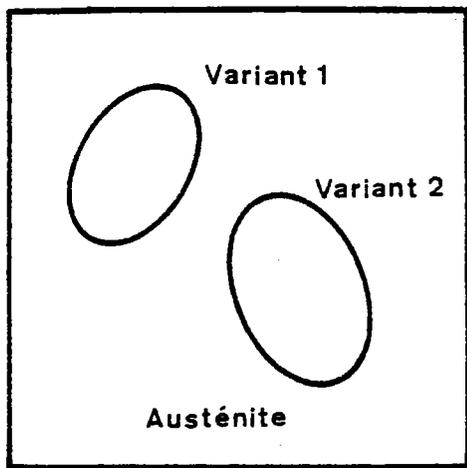


Fig. VI - 3 Cas de deux variants actifs situés à distance

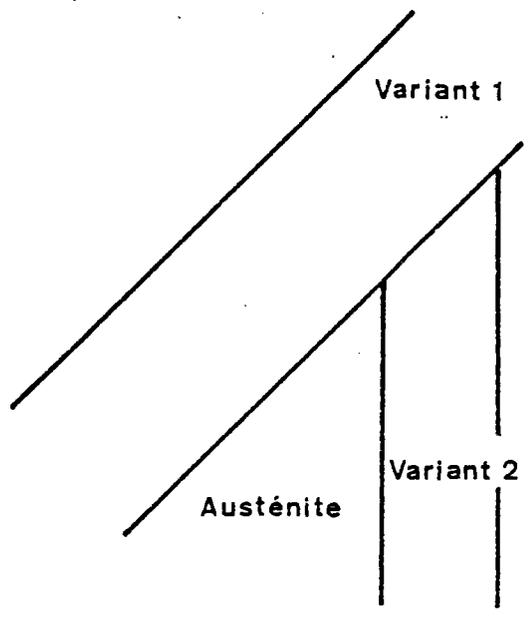


Fig VI - 4 Cas de deux variants en contact

* le second stade correspond aux actions de contact entre variants et est responsable de "l'écroutissage" lorsque la transformation est bien avancée (fig VI - 4).

Les interactions à distance ou de contact entre variants de martensite dépendront de la morphologie (présence d'une "paire d'inclusions pour les unes, interface entre variants pour les autres) et de la nature des variants.

Dans un travail récent, M. BEN SALAH [6] a montré que dans le cas de contact on peut distinguer deux familles de couples de variants, celles pour lesquelles l'interface est compatible et ne crée donc pas de contraintes internes (elles forment ce qui est couramment appelé "variants auto-accommodants [1]), et celles pour lesquelles l'interface est incompatible, créant des contraintes internes qui vont s'opposer ou favoriser le développement de la transformation.

Nous savons par ailleurs que, en l'absence d'une accommodation non élastique notable, l'énergie due à une incompatibilité d'une déformation anélastique peut être considérable; on doit donc s'attendre à ce que le comportement global en pseudo-élasticité soit directement lié à la nature des interactions entre variants. C'est d'ailleurs ce même terme d'énergie élastique qui explique avec beaucoup de succès le mécanisme de transformation lui-même, et on postule que l'interface entre austénite et martensite est un plan d'habitat, c'est-à-dire compatible.

Les effets des actions de contact entre variants sont étudiés par BEN SALAH [7] dans sa thèse. Nous nous limiterons pour notre part, à l'étude des actions à distance, cette restriction toutefois n'intervenant dans notre raisonnement et nos calcul que dans la 4^{ème} partie de cette étude. Nous donnerons en effet dans la 3^{ème} partie une théorie générale valable pour les deux problèmes examinés ci-dessus.

VI - 1 - 3 Ecroutissage en pseudo-élasticité

Nous nous intéressons ici à la formation de la martensite dans des conditions isothermes. Expérimentalement, on observe que lorsqu'on augmente la contrainte appliquée, il existe un seuil au-delà duquel apparaît la martensite qui se développe jusqu'à envahir tout le volume de l'échantillon, le développement de la martensite nécessite donc une augmentation de la contrainte dont l'origine est multiple :

- création de nouvelles plaquettes;
- déplacement des interfaces austénite - martensite;
- interactions entre variants;
- éventuellement écroutissage par création de dislocation.

Nous nous limiterons ici au 3^{ème} effet, interactions entre variants, qui d'après ce qui a été dit plus haut doit être le plus important, tout particulièrement dans le cas de sollicitations triaxiales non radiales.

Pour analyser et étudier ce problème, nous partons de la variation de l'énergie libre de GIBBS du système austénite - martensite - sollicitations extérieures, telle qu'elle a été définie par ESHELBY [8]

$$\Delta G = \Delta G_c V_M + \Gamma_{AM} \Delta S_{AM} + \Gamma_{MM} \Delta S_{MM} + W_{incl} + W_{int} \quad (VI - 11)$$

Où ΔG_c représente la variation de l'énergie chimique, $\Gamma_{AM} \Delta S_{AM}$ correspond à l'énergie d'interface entre austénite - martensite, $\Gamma_{MM} \Delta S_{MM}$ correspond à l'interface entre les variants; les termes d'énergie mécanique W_{incl} et W_{int} correspondent respectivement à l'énergie élastique stockée dans le milieu et due aux incompatibilités de la transformation, et à l'énergie d'interaction avec le champ de contraintes extérieures.

Si nous supposons qu'il y a N flots de martensite de volume V_I et que dans chaque flot un seul variant est actif avec une déformation de transformation $\xi_{ij}^I = R_{ij}^{I'} g$ (fig. VI - 5), alors pour tout le volume

V de l'échantillon, nous pouvons écrire pour la déformation de transformation :

$$\xi_{ij}^{am}(\vec{r}) = \sum_{I=1}^N \xi_{ij}^I \theta^I(\vec{r}) = \sum_{I=1}^N R_{ij}^{I'} g \theta^I(\vec{r}) \quad (VI - 12)$$

avec
$$\theta^I(\vec{r}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \vec{r} \in V_I \\ 0 & \text{si } \vec{r} \notin V_I \end{cases}$$

et pour l'énergie d'interaction avec le champ extérieur Σ (supposé uniforme) nous avons :

$$W_{int} = - \int_V \sum_{ij} \xi_{ij}^{am}(\vec{r}) d\vec{r} \quad (VI - 13)$$

soit :

$$W_{int} = - \int_V \sum_{ij} \left(\sum_{I=1}^N R_{ij}^{I'} g \theta^I(\vec{r}) \right) d\vec{r} \quad (VI - 14)$$

ou encore

$$W_{int} = - \sum_{I=1}^N \left(\sum_{ij} R_{ij}^{I'} g V_I \right) \quad (VI - 15)$$

le terme $\sigma^I = \sum_{ij} R_{ij}^{I'}$ représente une contrainte résolue sur le variant I; c'est la projection dans la direction \vec{m}' de déformation du variant I du vecteur contrainte associé à la normale au plan d'habitat \vec{n}^I . En général cette contrainte résolue comporte une cisssion dans le plan d'habitat et une contrainte normale à ce plan.

Et pour l'énergie élastique due aux contraintes internes, nous avons :

$$W_{incl} = - \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}(\vec{r}) \xi_{ij}^{am}(\vec{r}) d\vec{r} \quad (VI - 16)$$

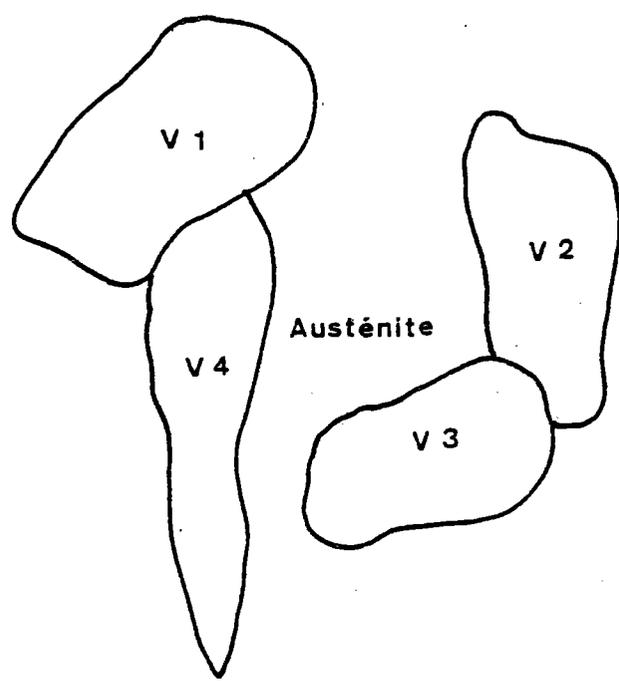


Fig. VI - 5 Cas où il existe plusieurs (4) flots de martensite

où $\sigma_{ij}^I(\vec{r})$ désigne les contraintes internes

en tenant compte des relations (VI - 3 et 16) on a :

$$W_{incl} = -\frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}^I(\vec{r}) \sum_{I=1}^N R_{ij}^I g \theta^I(\vec{r}) d\vec{r} \quad (VI - 17)$$

soit

$$W_{incl} = -\frac{1}{2} \sum_{I=1}^N R_{ij}^I g \int_{V_I} \sigma_{ij}^I(\vec{r}) d\vec{r} \quad (VI - 18)$$

Appelons $\bar{\sigma}^I$ la contrainte moyenne dans V_I telle que :

$$\bar{\sigma}_{ij}^I = \frac{1}{V_I} \int_{V_I} \sigma_{ij}^I(\vec{r}) d\vec{r} \quad (VI - 19)$$

alors on a :

$$W_{incl} = -\frac{1}{2} \sum_{I=1}^N R_{ij}^I g V_I \bar{\sigma}_{ij}^I \quad (VI - 20)$$

D'après les résultats des premiers chapitres (II, II et IV) les contraintes internes dans l'flot I proviennent de la déformation ϵ_{am}^I dans I qu'on notera $(\epsilon^{am})^I$ mais également des autres flots de martensite.

De manière générale nous pouvons écrire, -d'après (II - 49) et les résultats du chapitre V concernant l'évaluation du tenseur T^{IJ} , que :

$$\bar{\sigma}_{ij}^I = A_{ijkle}^{II} R_{kl}^I g + \sum_{J \neq I}^N A_{ijkle}^{IJ} R_{kl}^J \frac{V_J}{R_{IJ}^3} g \quad (VI - 21)$$

où R_{IJ} est la distance entre les centres des flots I et J, A^{II} et A^{IJ} sont reliés simplement aux tenseurs T^{II} et T^{IJ} .

Dans ces conditions (VI - 20) →

$$W_{incl} = -\frac{1}{2} \sum_I R_{ij}^I g V_I \left\{ A_{ijkle}^{II} R_{kl}^I g + \sum_{J \neq I}^N \frac{V_J}{R_{IJ}^3} A_{ijkle}^{IJ} R_{kl}^J g \right\} \quad (VI - 22)$$

ou encore :

$$W_{ind} = -\frac{1}{2} g^2 \sum_{I=1}^N \left(R_{ij}^{I} A_{ijkl}^{II} R_{kl}^{I} V_I \right) - \frac{1}{2} g^2 \sum_{I=1}^N \sum_{J \neq I} \left(R_{ij}^{I} A_{ijkl}^{IJ} R_{kl}^{J} \frac{V_I V_J}{R_{IJ}^3} \right) \quad (VI - 23)$$

D'autre part, dans le cas des transformations martensitiques, les termes d'énergie superficielles ($\Gamma \Delta S$) sont en général négligeables par rapport aux termes d'énergie d'origine mécanique; on a en conséquence (VI - 11) →

$$\Delta G = \Delta G_c \sum_{I=1}^N V_I - \sum_{I=1}^N \tau^I g V_I - \frac{1}{2} g^2 \sum_{I=1}^N \left(R_{ij}^{I} A_{ijkl}^{II} R_{kl}^{I} V_I \right) - \frac{1}{2} g^2 \sum_{I=1}^N \sum_{J \neq I} \left(R_{ij}^{I} A_{ijkl}^{IJ} R_{kl}^{J} \frac{V_I V_J}{R_{IJ}^3} \right) \quad (VI - 24)$$

A l'équilibre on doit avoir $\Delta G = 0$. c'est-à-dire :

$$\sum_{I=1}^N \tau^I g V_I = \Delta G_c \sum_{I=1}^N V_I - \frac{1}{2} g^2 \sum_{I=1}^N \left(R_{ij}^{I} A_{ijkl}^{II} R_{kl}^{I} V_I \right) - \frac{1}{2} g^2 \sum_{I=1}^N \sum_{J \neq I} \left(R_{ij}^{I} A_{ijkl}^{IJ} R_{kl}^{J} \frac{V_I V_J}{R_{IJ}^3} \right) \quad (VI - 25)$$

en divisant par g les 2 membres et après dérivation par rapport à V_I , on obtient :

$\forall I :$

$$\tau^I = \frac{\Delta G_c}{g} - \frac{1}{2} g R_{ij}^{I} A_{ijkl}^{II} R_{kl}^{I} - \frac{1}{2} g \sum_{J \neq I} \left(R_{ij}^{I} A_{ijkl}^{IJ} R_{kl}^{J} + R_{ij}^{J} A_{ijkl}^{JI} R_{kl}^{I} \right) \frac{V_J}{R_{IJ}^3} \quad (VI - 26)$$

Et si on prend donc un volume total égal à l'unité (VI - 26) se met sous la forme

$$\tau^I = \frac{\Delta G_c}{g} - \frac{1}{2} g R_{ij}^{I} A_{ijkl}^{II} R_{kl}^{I} - \frac{1}{2} g \sum_{J \neq I} \left(R_{ij}^{I} A_{ijkl}^{IJ} R_{kl}^{J} + R_{ij}^{J} A_{ijkl}^{JI} R_{kl}^{I} \right) \frac{V_J}{R_{IJ}^3}$$

(VI - 27)

Dans cette expression le premier terme $\frac{\Delta G_c}{g}$ correspond à la contrainte critique pour former le premier variant; une telle contrainte critique dépend de la température et est la même pour tous les variants.

Le deuxième terme dans (VI - 27) correspond aux contraintes internes propres du variant I, qui dans la réalité diminuent et s'annulent lorsque la force du volume V_1 approche d'une plaquette d'axes a,b,c, telle que le rapport c/a tende vers zéro; nous y reviendrons dans l'application numérique prévue plus loin; enfin le 3^{ème} terme dans (VI - 27) est associé à l'énergie d'interaction entre les variants I et J et décrit "l'écroutissage" croisé correspondant à la variation (augmentation ou diminution) de la contrainte résolue τ^I sur le variant I en fonction des fractions volumiques f_J des autres variants J.

En définitive, nous pouvons réécrire (VI - 27) sous la forme :

$$\tau^I = \tau^0 + f_J H^{IJ} \tag{VI - 28}$$

le terme H^{IJ} rend compte à la fois :

- des effets morphologiques associés à la forme des deux inclusions I et J et à leur position relative;
- des effets de désorientation des deux variants et de l'incompatibilité associée, qui sont prise en compte dans les termes R'^I et R'^J .

Pour aller plus loin et pour décrire de manière plus précise la matrice H, il serait nécessaire soit d'introduire une étude statistique en fonction des sites de germination de la martensite et de la propagation des plaquettes. Nous préférons dans ce travail utiliser une situation particulière dans laquelle deux variants incompatibles, de forme ellipsoïdale sont présents, ce qui nous permettra d'utiliser la solution de la paire d'inclusions plastiques (chapitre II); dans ce calcul on négligera les variations des constantes élastiques entre l'austénite et la martensite; une telle approche se justifie pour les interactions à distance entre variants comme cela a déjà été signalé précédemment.

VI - 1 - 4 Interaction entre deux inclusions de martensite

Considérons deux inclusions (1) et (2), ellipsoïdales, d'axes a_1, b_1, c_1 et a_2, b_2, c_2 (fig. VI - 6) telles que $a_1 = b_1 \gg c_1$ et $a_2 = b_2 \gg c_2$, constituées de martensite pour laquelle la déformation est respectivement $R'^1_{ij} g_1$ et $R'^2_{ij} g_2$, et nous supposons l'élasticité isotrope (λ, μ) ; dans ce cas l'énergie W_{incl} s'écrit (voir annexes)

$$W_{incl} = W_1 + W_2 + W_{12} \tag{VI - 29}$$

avec

$$W_1 = \frac{\mu V_1}{1-\nu} (g_1)^2 \frac{c_1}{a_1} \frac{\pi}{2} \left\{ (2-\nu) (R'^1_{13})^2 + (R'^1_{33})^2 \right\} \tag{VI - 30}$$

$$W_2 = \frac{\mu V_2}{1-\nu} (g_2)^2 \frac{c_2}{a_2} \frac{\pi}{2} \left\{ (2-\nu) (R_{13}^{12})^2 + (R_{33}^{12})^2 \right\} \quad (\text{VI} - 31)$$

et

$$W_{12} = \mu \frac{V_1 V_2}{(R_{12})^3} g_1 g_2 A^{12} \quad (\text{VI} - 32)$$

Où $(R_{12})^3$ est le cube de la distance séparant les centres des inclusions 1 et 2, et A^{12} sera donné dans l'annexe pour la géométrie particulière envisagée (fig. VI - 6 cas a).

Ainsi donc pour des plaquettes d'épaisseur très faible par rapport au diamètre, les termes W_1 et W_2 sont négligeables $\frac{c_1}{a_1} \ll 1$, et alors :

$$W_{\text{incl}} \approx \mu \frac{V_1 V_2}{(R_{12})^3} g_1 g_2 A^{12} \quad (\text{VI} - 33)$$

d'où les contraintes résolues τ^1 et τ^2 :

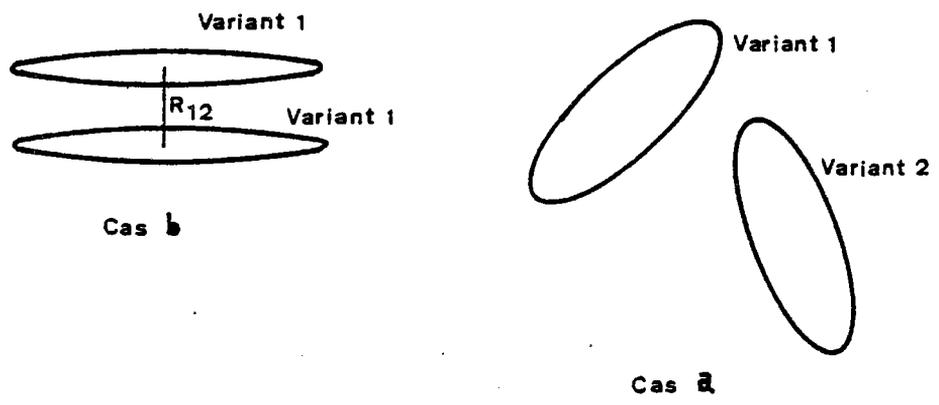


Fig. VI - 6 Cas a : deux inclusions de martensite ellipsoïdales quelconques

Cas b : deux inclusions de martensite identiques constituées du même variant

$$\tau^1 = \tau^0 + f_1 H^{12} \tag{VI - 34}$$

$$\tau^2 = \tau^0 + f_2 H^{21} \tag{VI - 35}$$

avec
$$H^{12} = H^{21} = \mu \frac{g_1 g_2}{(R_{12})^3} A^{12} \tag{VI - 36}$$

Nous pouvons également définir un terme d'écrouissage propre H^1 en partant non pas de W_1 et W_2 tel que envisagé jusqu'à maintenant, mais en étudiant l'interaction entre deux plaquettes de martensites identiques constituées de même variant et séparées de R_{12} (fig. VI - 8 - b); un tel problème peut être appréhendé de manière identique au cas de deux variants distincts, et on peut toutefois s'attendre à une contribution beaucoup plus faible.

VI - 1 - 5 Application - Calcul - cas de l'alliage Fe - 31 % Ni [3]

Nous allons nous intéresser au cas de l'alliage Fe - 31 % Ni dans lequel peuvent coexister plusieurs variants et plus particulièrement à deux variants dont nous avons pris les caractéristiques suivantes dans "Martensitic transformation" par Zenji NISHIYAMA [3],

$$\vec{n}_1 \begin{cases} 2 \\ 5 \\ 9 \end{cases} \quad \vec{n}'_1 \begin{cases} -0.05 \\ 0.160 \\ -0.152 \end{cases} \quad \vec{n}_2 \begin{cases} 2 \\ 9 \\ -5 \end{cases} \quad \vec{m}'_2 \begin{cases} -0.05 \\ -0.152 \\ 0.160 \end{cases}$$

(VI - 37)

\mathcal{E} étant le repère cristallographique.

Nous pouvons vérifier par ailleurs que les 2 variants choisis sont bien incompatibles, car le déterminant du tenseur $\xi^1 \cdot \xi^2$ est différent de zéro [6]

En calculant les normes des vecteurs donnés par (VI - 37) nous obtenons :

$$\vec{n}_1 \begin{cases} 0.191 \\ 0.477 \\ 0.858 \end{cases} \quad \vec{m}'_1 \begin{cases} -0.221 \\ 0.707 \\ -0.672 \end{cases} \quad \vec{n}_2 \begin{cases} 0.191 \\ 0.858 \\ -0.477 \end{cases} \quad \vec{m}'_2 \begin{cases} -0.221 \\ -0.672 \\ 0.707 \end{cases} \tag{VI - 38}$$

Le calcul de T^{11} et T^{1j} nécessaire pour obtenir l'énergie d'interaction et les énergies propres nécessite d'exprimer tous les vecteurs et tenseurs dans le repère principal d'inertie de l'ellipsoïde (1) qu'on notera \mathcal{R}^1 (r rond)

On appellera $\vec{I}^1, \vec{J}^1, \vec{K}^1 = \vec{n}^1$ les vecteurs unitaires du repère \mathcal{R}^1 , dont nous allons déterminer les coordonnées dans \mathcal{C} afin d'obtenir la matrice de passage de \mathcal{C} à \mathcal{R}^1 .

Appelons α, β, γ les coordonnées de \vec{I}^1 dans \mathcal{C} , alors \vec{I}^1 vérifie :

$$\begin{aligned} (\vec{I}^1 \wedge \vec{n}^1) \cdot \vec{m}^1 &= 0 \\ \vec{I}^1 \cdot \vec{n}^1 &= 0 \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{VI} - 39)$$

d'où

$$\vec{I}^1 \begin{cases} \alpha = -0.173 \\ \beta = 0.877 \\ \gamma = -0.449 \end{cases} \quad (\text{VI} - 40)$$

\vec{J}^1 est obtenu comme produit vectoriel de \vec{n}^1 et \vec{I}^1 , on a $\vec{J}^1 = \vec{n}^1 \wedge \vec{I}^1$

d'où

$$\vec{J}^1 \begin{cases} -0.966 \\ -0.063 \\ 0.250 \end{cases} \quad (\text{VI} - 41)$$

d'où la matrice de passage du repère \mathcal{R}^1 au repère \mathcal{C}

$$\begin{pmatrix} -0.173 & 0.877 & -0.449 \\ -0.966 & -0.063 & 0.250 \\ 0.191 & 0.477 & 0.859 \end{pmatrix} \quad (\text{VI} - 42)$$

avec (VI - 42) nous pouvons obtenir \vec{m}^1 dans \mathcal{R}^1 , on a

$$\vec{m}^1 \begin{cases} 0.960 \\ 0 \\ -0.281 \end{cases} \quad (\text{VI} - 43)$$

sachant que \vec{n}^1 est tel que $\vec{n}^1 \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 1 \end{cases}$ dans \mathcal{R}^1 , nous pouvons écrire le tenseur $\hat{\epsilon}_{ij}^1$

dans \mathcal{R}^1 :

$$\hat{\epsilon}_{ij}^1 = g_1, \quad R_{ij}^1 = \frac{g_1}{2} (n_i^1 m_j^1 + n_j^1 m_i^1) \quad (\text{VI} - 44)$$

d'où :

$$R^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.48 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.48 & 0 & -0.28 \end{pmatrix}_{R^1} \quad (\text{VI} - 45)$$

Les plaquettes 1 et 2 étant symétriques telles que $\vec{n}^1 \cdot \vec{m}^1 = \vec{n}^2 \cdot \vec{m}^2 = -0.281$, le tenseur R^{12} relatif à l'inclusion 2 s'écrit de la même manière que R^1 dans le repère principal d'inertie R^1 de la plaquette 2. Donc :

$$R^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.48 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.48 & 0 & -0.28 \end{pmatrix}_{R^1} \quad (\text{VI} - 46)$$

- Détermination des termes W_1 et W_2

l'énergie propre de l'inclusion (1) est donnée par (II - 71)

$$W_1 = -\frac{1}{2} g_1^2 R_{ij}^{11} C_{ijkl} T_{klmn}^{11} C_{mnpq} R_{pq}^{11} + \frac{1}{2} g_1^2 R_{ij}^{12} C_{ijkl} R_{kl}^{12} \quad (\text{VI} - 47)$$

avec $C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$, il vient :

$$W_1 = g_1^2 (R_{33}^{11})^2 \left\{ -\frac{\lambda^2}{2} T_{kkmm}^{11} - \mu \lambda (T_{kk33}^{11} + T_{33kk}^{11}) - 2\mu^2 T_{3333}^{11} \right\} + g_1^2 (R_{13}^{11})^2 \left\{ -4\mu^2 (T_{1313}^{11} + T_{1331}^{11}) \right\}$$

(VI - 48)

avec $\lambda = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu}$: les termes T^{11} sont calculés à partir des résultats d'ESHELBY [8] dans le cas d'une pastille (penny - shape) à partir de notre formule reliant le tenseur S d'ESHELBY à T^{11} :

$$S_{ijkl} = \frac{1}{V} T_{ijmn}^{11} C_{mnkl} \quad (\text{VI} - 49)$$

et dans le cas isotrope :

$$V S_{ijkl} = \lambda T_{ijmm}^{11} \delta_{kl} + \mu (T_{ijkl}^{11} + T_{ijlk}^{11}) \quad (\text{VI} - 50)$$

et pour une pastille "penny -shape" ($a. = b \gg c$), on a les composantes non nulles de S [9] :

$$S_{1111} = S_{2222} = \frac{13 - 8\nu}{32(1-\nu)} \pi \frac{c_1}{a_1}$$

$$S_{3333} = 1 - \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} \frac{\pi}{4} \frac{c_1}{a_1}$$

$$S_{1122} = S_{2211} = \frac{8\nu - 1}{32(1-\nu)} \pi \frac{c_1}{a_1}$$

(VI - 51)

$$S_{1133} = S_{2233} = \frac{2\nu - 1}{8(1-\nu)} \pi \frac{c_1}{a_1}$$

$$S_{3311} = S_{3322} = \frac{\nu}{1-\nu} \left(1 - \frac{4\nu+1}{8\nu} \pi \frac{c_1}{a_1} \right)$$

$$S_{1212} = \frac{7 - 8\nu}{32(1-\nu)} \pi \frac{c_1}{a_1} \quad S_{1313} = S_{2323} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2-2\nu}{1-\nu} \frac{\pi}{4} \frac{c_1}{a_1} \right)$$

Dans ces conditions, nous trouvons pour W_1

$$W_1 = \frac{\pi}{2} \frac{\mu V_1}{1-\nu} (g_1)^2 \frac{c_1}{a_1} \left\{ (2-\nu) (R'_{13})^2 + (R'_{33})^2 \right\}$$

(VI - 52)

qui est aussi l'expression trouvée par ESHELBY [8]

Pour W_2 bien entendu, nous trouvons la même expression :

$$W_2 = \frac{\pi}{2} \frac{\mu V_2}{1-\nu} (g_2)^2 \frac{c_2}{a_2} \left\{ (2-\nu) (R'_{13})^2 + (R'_{33})^2 \right\}$$

(VI - 53)

Détermination de $W_{1,2}$

Pour ce calcul, il faut exprimer les composantes des tenseurs R, R et T dans le repère principal d'inertie (1) \mathcal{R}^1 en utilisant la matrice de passage (VI - 42), on a ainsi :

$$\vec{h}^2 \begin{cases} 0.933 \\ -0.357 \\ 0.036 \end{cases}$$

$$\vec{m}^2 \begin{cases} -0.233 \\ 0.079 \\ -0.969 \end{cases}$$

(VI - 54)

d'où

$$R'^2 = \begin{pmatrix} -0.217 & 0.078 & -0.456 \\ 0.078 & -0.028 & 0.174 \\ -0.456 & 0.174 & -0.035 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}^1} \quad (VI - 55)$$

Détermination de T'^2 . Pour cela, on a besoin de connaître les angles d'Euler qui fixent la position de l'inclusion (2) par rapport à (1), ou encore la position de \mathcal{R}^2 (repère principal d'inertie de 2) par rapport à \mathcal{R}^1 .

Appelons $\vec{I}^2, \vec{J}^2, \vec{K}^2$ les vecteurs unitaires de \mathcal{R}^2 , bien entendu on prendra $\vec{K}^2 = \vec{n}^2$; la ligne des noeuds de vecteur unitaire \vec{u} est collinéaire au produit vectoriel $\vec{n}^1 \wedge \vec{n}^2$:

$$\vec{u} = \vec{n}^1 \wedge \vec{n}^2 \begin{cases} -0.357 \\ 0.933 \\ 0 \end{cases}_{\mathcal{R}^1} \quad (VI - 56)$$

l'angle de nutation θ est celui formé par \vec{n}^1 et \vec{n}^2 or $\cos(\vec{n}^1, \vec{n}^2) = 0.036$

$$d'où \quad \theta = 87.91 \quad (VI - 57)$$

l'angle de précession γ est formé par \vec{I}^1 et \vec{u}

$$d'où \quad \gamma = 110.91 \quad (VI - 58)$$

Enfin pour déterminer la rotation propre ψ il faut déterminer \vec{I}^2 qui vérifie :

$$\left(\vec{I}^2 \wedge \vec{n}^2 \right) \cdot \vec{m}^2 = 0 \quad (VI - 59)$$

$$\vec{I}^2 \cdot \vec{n}^2 = 0$$

$$|\vec{I}^2| = 1$$

d'où

$$\vec{I}^2 \begin{cases} -0.037 \\ 0.022 \\ 0.998 \end{cases}_{\mathcal{R}^1} \quad (VI - 60)$$

et

$$\cos(\vec{u}, \vec{I}^2) = \vec{I}^2 \cdot \vec{u} = 0.034 \Rightarrow \psi = (\vec{u}, \vec{I}^2) = 88.06 \quad (VI - 61)$$

Les angles γ, θ, φ ainsi déterminés permettront de calculer la matrice de passage α_{ij} dont les termes interviennent dans l'expression de l'intégrale donnant T^{12} (V - 71 et V - 73)

Il reste maintenant à déterminer les composantes dans \mathcal{R}^1 du vecteur \vec{R}_{12} joignant les centres des deux inclusions (1) et (2). Nous pouvons prendre comme plan \vec{I}_1^2, \vec{J}_1^2 , le plan de la plaquette, celui qui passe par l'extrémité de \vec{I}^1 et qui contient \vec{I}^2 de manière que les deux inclusions soient suffisamment proches sans qu'elles se coupent, alors par exemple (fig. VI)

$$\vec{R}_{12} = \vec{I}^1 \vec{I}_1 + 0.5 \vec{I}_1 \vec{J}_1$$

alors
$$\vec{I}^2 = \vec{R}_{12} \begin{cases} 0.945 \\ 0.033 \\ 1.497 \end{cases} \quad (VI - 62)$$

et
$$\vec{J}_1^2 = \vec{n}^2 \wedge \vec{I}^2 \Rightarrow \vec{J}_1^2 \begin{cases} -0.357 \\ -0.932 \\ 0 \end{cases} \quad (VI - 63)$$

L'énergie d'interaction W_{12} est donnée par (II - 73) :

$$W_{12} = -\frac{1}{2} g_2 g_1 R_{ij}^{11} C_{ijkl} T_{klmn}^{12} C_{mnpq} R_{pq}^{12} - \frac{1}{2} g_1 g_2 R_{ij}^{12} C_{ijkl} T_{klmn}^{12} C_{mnpq} R_{pq}^{11} \quad (VI - 64)$$

Or T^{12} est donné par (V - 79) :

$$T_{klmj}^{12} = \frac{1}{2} (t_{klmj}^{12} + t_{klmj}^{12})$$

avec

$$t_{klmj}^{12} = \frac{g}{8\pi^3} V_1 V_2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta \chi_l \chi_j \left(\frac{1}{R} \tilde{G}_{km} \right) \frac{F(\theta, \varphi) d\theta}{\left\{ a_1^2 \chi_1^2 + b_1^2 \chi_2^2 + c_1^2 \chi_3^2 \right\}^{3/2} \left\{ a_2^2 (\alpha_{ij} \chi_j)^2 + b_2^2 (\alpha_{ij} \chi_j)^2 + c_2^2 (\alpha_{ij} \chi_j)^2 \right\}^{3/2}}$$

(VI - 65)

où F est donné par (V - 76), et $\chi_1 = \sin\theta \cos\varphi$, $\chi_2 = \sin\theta \sin\varphi$, $\chi_3 = \cos\theta$
 et où α_{ij} est la matrice de passage de \mathcal{R}^2 à \mathcal{R}^1

Posons
$$\Delta_{klmn}^{12} = \frac{g}{8\pi^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta \chi_l \chi_j \left(\frac{1}{R} \tilde{G}_{km} \right) \frac{F d\theta}{a^3 b^3} \quad (VI - 66)$$

avec a et b donnés par (V - 72 et 73);

et posons
$$S_{klmn}^{12} = \frac{1}{2} (\Delta_{klmn}^{12} + \Delta_{lkmn}^{12}) \quad (VI - 67)$$

alors
$$T_{klmn}^{12} = V_1 V_2 \Delta_{klmn}^{12} \quad \text{et} \quad S_{klmn}^{12} = V_1 V_2 T_{klmn}^{12} \quad (VI - 68)$$

et dans ces conditions (VI - 64) conduit à :

$$W_{12} = V_1 V_2 g_1 g_2 \left\{ -\frac{1}{2} R_{ij}^{12} C_{ijkl} S_{klmn}^{12} C_{mnpq} R_{pq}^{12} - \frac{1}{2} R_{ij}^{12} C_{ijkl} S_{klmn}^{12} C_{mnpq} R_{pq}^{12} \right\} \quad (VI - 69)$$

Les composantes de T et donc celles de S dépendent des dimensions des inclusions à travers les quantités a et b; mais nous pouvons nous inspirer des résultats analytiques mais pour des inclusions sphériques (chapitre V) et écrire S^{12} sous la forme (ce qui est toujours possible)

$$S_{klmn}^{12} = \frac{1}{(R_{12})^3} T_{klmn}^{*12} \quad \text{ou} \quad T_{klmn}^{*12} = (R_{12})^3 S_{klmn}^{12} \quad (VI - 70)$$

et dans ces conditions W^{12} s'écrit :

$$W_{12} = \frac{V_1 V_2 g_1 g_2}{(R_{12})^3} \left\{ -\frac{1}{2} R_{ij}^{12} C_{ijkl} S_{klmn}^{12} C_{mnpq} R_{pq}^{12} - \frac{1}{2} R_{ij}^{12} C_{ijkl} S_{klmn}^{12} C_{mnpq} R_{pq}^{12} \right\} \quad (VI - 71)$$

Application numérique

Nous envisageons dans cette application deux plaquettes (a = b >> c) telles que considérées ci-dessus; et nous mettons le terme d'écroutissage sous la forme $\mu \alpha$ (α constante).

* Pour la détermination du terme H^{12} , on considère la configuration (fig. VI - 6 - a) où les deux inclusions sont caractérisées par les données (VI - 45, VI - 46, VI - 55, VI - 54, VI - 57, VI - 62) et pour $\lambda = \frac{1}{2}$, $a_1 = b_1 = 1$, et $c_1 = 10^{-2}$, $g_1 = 0.257$ [3], $a_2 = b_2 = 1$, $c_2 = 10^{-2.5}$, $g_2 = g_1$; nous obtenons H^{12} par une intégration numérique du terme T^{12} (annexes) et nous trouvons :

$$H^{12} \approx \frac{\mu}{56}$$



* Pour obtenir le terme H^{11} nous adoptons la configuration donnée par (fig. VI - 6 - cos b) où les deux inclusions sont identiques, subissent la même déformation (VI - 45) et sont situées par exemple à la distance

et $\vec{R}_{12} (0, 0, 10^{-4})$ pour $D=0.33$, $a_1=a_2=b_1=b_2=1$, $c_1=c_2=10^{-4}$,
 $g_1=g_2=0.257^{[3]}$; les angles d'Enler $\gamma=\theta=\varphi=0$

alors dans ces conditions nous trouvons un terme d'écroutissage donné par :

$$H^{11} \approx \frac{\mu}{1300} \tag{VI - 73}$$

On voit bien en particulier que $H^{11} \ll H^{12}$, ce qui était prévisible.

La valeur de H^{11} ainsi trouvée correspond en fait à la pente d'écroutissage (courbe \mathcal{E}, \mathcal{P}) dans le cas où un seul variant est actif; les essais expérimentaux [10] obtenus dans le cas d'un alliage de Cu-Zu-Al donnent des résultats en accord avec les calculs précédents.

Pour le terme H^{12} la comparaison avec les observations expérimentales est plus difficile, car il est pratiquement impossible de conduire des essais d'écroutissage latent dans ce type de situations.

On peut cependant penser que cette valeur constitue une bonne approximation des contraintes internes, dans le cas de transformation multiple à variants incompatibles, parce qu'on obtient dans ce cas une rupture précoce du matériau; bien entendu, dans le cas de variants distincts compatibles, le terme H^{12} sera notamment plus faible et du même ordre de grandeur que H^{11} .

Cette approche montre que dans le cas de plasticité de transformation, le mode de déformation multiple sera difficile (sauf dans le cas de variants auto-accommodants) et que l'on doit s'attendre à la prédominance du mode à un variant: c'est ce qui a été observé par PATOR [11], dans le cas de métaux Cu-Zu-Al où environ 70 % du volume transformé l'était pour un seul variant.

VI - 2 Application à l'écroutissage par les contraintes internes dans les matériaux cristallins

U - 2 - 1 Introduction

Dans le cas où le mécanisme de déformation plastique est constitué par le glissement plastique cristallographique provoqué par le mouvement de dislocations, il est courant d'observer qu'il se forme une microstructure sous forme de paroi de dislocations, limitant des cellules où la densité de dislocations est beaucoup plus faible.

A une échelle plus fine, au niveau des dislocations prises individuellement par exemple, la multiplication des dislocations et leur mobilité sont directement liées aux interactions entre dislocations mobiles et dislocations immobiles.

En fin de compte, l'écroutissage du monocristal résulte de l'ensemble des mécanismes précédents.

Au niveau individuel correspondant aux interactions entre dislocations, il est maintenant bien admis que les interactions de contact entre dislocations constitue l'essentiel de l'écroutissage [12] [13] [14]: de telles interactions ont donné lieu à diverses modélisations [15], et sont prises en compte directement ou indirectement dans la matrice d'écroutissage H reliant l'évolution de la cission critique τ^n sur un système de glissement n à l'amplitude de glissement γ^m sur un autre système de glissement m . Cette loi d'écroutissage :

$$\dot{\tau}^n = H^{nm} \dot{\gamma}^m$$

représente en fait la partie locale de l'écroutissage dues aux interactions de contact entre dislocations.

Le glissement plastique résulte en fait d'un mouvement collectif de dislocations, qui peuvent se déplacer facilement dans les zones à faible densité de dislocation, ou se bloque sur des obstacles constitués par des verrous ou d'autres défauts. En envisageant ce mouvement collectif, il est alors essentiel d'analyser les effets à distance de l'ensemble des dislocations, mobiles et immobiles.

Nous savons aussi [16], que certaines distributions de dislocations arrangées sous forme de parois par exemple conduisent, suivant les caractéristiques de la paroi, ou bien à des contraintes nulles, ou bien à des contraintes internes à distance considérables. Ces contraintes internes pouvant être localement et partiellement relaxées par des mouvements de dislocations, elles contribuent néanmoins à l'écroutissage global du monocristal.

Ce problème en général est difficile à étudier, car il faudrait décrire à chaque instant la configuration des dislocations, d'évaluer les contraintes internes associées, d'envisager les relaxations possibles, et donc aussi de tenir compte de la partie locale de l'écroutissage due aux interactions de contact.

Dans le paragraphe suivant, nous proposons une formulation générale de ce problème en établissant, formellement au moins, une loi d'écroutissage tenant compte à la fois des actions de contact et des effets à distance; dans un dernier paragraphe, nous illustrons les effets à distance en calculant pour des situations particulières les contraintes internes et les termes non locaux de l'écroutissage.

UI - 2 - 2 Loi d'écroutissage non locale pour le monocristal

Considérons un solide homogène et à élasticité isotrope, dans lequel une distribution de déformation plastique ϵ_{ij}^p a été obtenue par un chargement donné.

Cette déformation plastique est le fait d'un glissement multiple sur des systèmes de glissement d'orientation R^m définis par :

$$R_{ij}^n = \frac{1}{2} (m_i^n n_j^n + m_j^n n_i^n) \tag{VI - 74}$$

Nous avons alors :

$$\xi_{ij}^p(\vec{r}) = \sum_n R_{ij}^n \gamma(\vec{r}) \tag{VI - 75}$$

Cette déformation plastique étant (au moins partiellement) incompatible développe un champ de contraintes internes que l'on peut calculer à partir de (II - 2).

Nous avons pour un milieu isotrope, sachant que dans le cas traité ici $\xi_{ii}^p = 0$:

$$\xi_{ij}^T(\vec{r}) = E_{ij}^c + \int_V \left[\begin{matrix} (r-r') \\ ijkl \end{matrix} \right] \mu R_{kl}^n \gamma(\vec{r}') d\vec{r}' \tag{VI - 76}$$

et pour les contraintes nous avons, au point \vec{r} :

$$\sigma_{ij}(\vec{r}) = \sum_{ij} -\mu R_{ij}^n \gamma(\vec{r}) + \mu \int_V \left[\begin{matrix} (r-r') \\ ijkl \end{matrix} \right] \mu R_{kl}^n \delta(\vec{r}') d\vec{r}' \tag{VI - 77}$$

où \sum_{ij} sont les contraintes imposées que nous supposons uniformes; au point \vec{r} la cission résolue sur le système de glissement m s'écrit :

$$\tau^m = R_{ij}^m \sigma_{ij}(\vec{r}) \tag{VI - 78}$$

soit :

$$\tau^m(\vec{r}) = R_{ij}^m \sum_{ij} -\mu R_{ij}^m \gamma(\vec{r}) R_{ij}^m + 4(\mu)^2 R_{ij}^m \int_V \left[\begin{matrix} (r-r') \\ ijkl \end{matrix} \right] R_{kl}^n \delta(\vec{r}') d\vec{r}' \tag{VI - 79}$$

Et le système de glissement m sera potentiellement actif au point \vec{r} , si la cission réduite locale est égale à la cission critique locale τ_c^m ; cette dernière quantité contient à la fois la cission critique initiale τ^0 représentant les interactions des dislocations avec le réseau cristallin (forces de Peierls - Nabarro) et un terme d'écroutissage dû aux dislocations présentes en \vec{r} représenté par la matrice d'écroutissage locale H .

Nous avons alors :

$$R_{ij}^m \Sigma_{ij}^n = \mathcal{G}^0 + H^{mn}(\vec{z}) \delta(\vec{z}) + 2^\mu R_{ij}^m(\vec{z}) R_{ij}^n(\vec{z}) \delta(\vec{z}) - 4(\mu)^\mu R_{ij}^m(\vec{z}) \int_V \frac{(\vec{z}-\vec{z}')_{ijk\ell}}{|\vec{z}-\vec{z}'|^3} R_{k\ell}^n(\vec{z}') \delta(\vec{z}') d\vec{z}' \quad (VI - 80)$$

c'est-à-dire, encore sous une forme plus compacte :

$$\mathcal{G}^m(\vec{z}) = \mathcal{G}^0 + \int_V \mathcal{H}^{mn}(\vec{z}-\vec{z}') \delta(\vec{z}') d\vec{z}' \quad (VI - 81)$$

où \mathcal{H}^{mn} désigne la matrice d'érouissage globale non locale, tel que :

$$\mathcal{H}^{mn}(\vec{z}-\vec{z}') = \left\{ H^{mn}(\vec{z}') + 2^\mu R_{ij}^m(\vec{z}') R_{ij}^n(\vec{z}') \right\} \delta(\vec{z}-\vec{z}') - 4(\mu)^\mu R_{ij}^m(\vec{z}) \int \frac{(\vec{z}-\vec{z}')_{ijk\ell}}{|\vec{z}-\vec{z}'|^3} R_{k\ell}^n(\vec{z}')$$

et si l'on pose $\rho = |\vec{r} - \vec{r}'|$, et en explicitant le tenseur de GREEN Γ pour un milieu isotrope (chapitre V),

on a :

$$\mathcal{H}^{mn}(\rho) = \delta(\rho) \left\{ H^{mn}(\vec{z}') + 2^\mu R_{ij}^m(\vec{z}') R_{ij}^n(\vec{z}') \right\} - \frac{\mu}{4\pi} R_{ij}^m(\vec{z}) \left\{ \int_{ijk\ell} \frac{R_{k\ell}^n(\vec{z}')}{\rho^3} + \int_{ijk\ell} \frac{R_{k\ell}^n(\vec{z}')}{\rho^3} - \frac{1}{1-\nu} \int_{ijk\ell} \frac{R_{k\ell}^n(\vec{z}')}{\rho^3} \right\} \quad (VI - 82)$$

et dans cette matrice non locale \mathcal{H} nous retrouvons à la fois :

- les termes, dus aux actions de contact entre dislocations, représentés par la matrice locale H^{mn}
- les termes locaux $2^\mu R_{ij}^m R_{ij}^n$ et la partie locale du dernier terme qui correspondent aux contraintes internes auto-induites.
- les termes non locaux dus aux contraintes internes induites à distance.

Ces deux derniers termes vont créer, par l'intermédiaire du module de cisaillement μ , un champ de contraintes internes suffisant pour qu'une relaxation plastique puisse se produire; celle-ci affectera l'hétérogénéité de la déformation plastique, la morphologie des cellules, ainsi que l'amplitude de glissement sur les différents systèmes.

L'importance de ces deux derniers termes par rapport à la matrice H local va dépendre directement du seuil d'écoulement plastique, plus celui-ci est élevé, plus le niveau des contraintes internes avant relaxation plastique peut être important.

A ce stade, avant de poursuivre la discussion générale, nous préférons discuter ces résultats sur un cas particulier simplifié constitué de deux zones à glissement simple uniforme, problème pour lequel nous utilisons la solution de la paire d'inclusions plastiques.

VI - 2 - 3 Cas particuliers

- A - Paire d'inclusions plastiques

Nous illustrons ce qui précède dans le cas de deux zones sphériques tangentes de même rayon (fig. V - 2), en calculant les cisssions résolues sur les systèmes de glissement dans la zone due aux contraintes internes provoquées par un glissement plastique dans la zone 1: cette situation décrit grossièrement le cas de deux cellules de dislocations dans un monocristal.

Nous supposons dans la zone 1 que le glissement d'amplitude γ^1 a été obtenu sur le système de normale $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$, de direction de glissement $\vec{m} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$, qui correspond au système B4 dans la nomenclature de SCHMID et BOAS pour les métaux C.F.C.

Le tenseur d'orientation R_{ij}^{B4} pour ce système s'écrit :

$$\left(R_{ij}^{B4} \right) = \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{VI} - 84)$$

La déformation plastique dans la zone 1 induit une contrainte moyenne dans la zone 2 qui peut être calculée à partir des formules (II - 48) et (V - 83), valables pour 2 sphères; dans le cas de l'élasticité isotrope où ν est égal à $1/4$, on a les contraintes :

$$\sigma_{11} = - \frac{\mu \gamma^1}{18\sqrt{6}} \frac{43}{10}$$

$$\sigma_{22} = - \frac{\mu \gamma^1}{18\sqrt{6}} \frac{59}{10}$$

$$\sigma_{33} = - \frac{\mu \gamma^1}{18\sqrt{6}} \frac{102}{10}$$

$$\sigma_{12} = \frac{\mu \gamma^1}{18\sqrt{6}} \frac{16}{30}$$

$$\sigma_{13} = 0, \quad \sigma_{23} = - \frac{\mu \gamma^1}{18\sqrt{6}} \frac{1}{10}$$

(VI - 85)

Les cisssions induites sur les systèmes de glissement dans la zone 2 dépendent bien entendu de leur orientation par rapport à l'état de contrainte.

Les différents tenseurs d'orientation pour les différents systèmes sont donnés dans le (tableau VI - 1), ainsi que les cisssions moyennes induites dans les zones 1 et 2.

L'examen des résultats contenus dans ce tableau montre ainsi que les contraintes internes, comme on pouvait s'y attendre, sont très importantes: ceci est dû au fait que dans ce calcul nous n'autorisons aucune relaxation plastique ni dans la zone 1, ni dans la zone 2; nous remarquons que globalement les contraintes induites dans la zone 2 sont d'un ordre de grandeur inférieures à celles dans la zone 1; par ailleurs, les cisssions résolues peuvent être négatives selon l'orientation de la direction de glissement, et présentent une "anisotropie" qui atteint des valeurs de l'ordre de 6 pour les cisssions induites dans la zone 1, et 5 pour celles de la zone 2.

Ces résultats sont à considérer plutôt comme des indications du niveau des contraintes internes, plutôt que comme des valeurs absolues significatives; d'une part, la morphologie des deux zones intervient directement sur le calcul des contraintes et peut permettre une relaxation globale ou partielle, d'autre part, il est évident qu'une relaxation va intervenir par activation d'autres systèmes de glissement, à la fois dans la zone 1 et dans la zone 2; cette relaxation n'est pas forcément totale, c'est-à-dire qu'il peut subsister une partie des contraintes internes précédentes, éventuellement modifiées par le champ de déformation plastique complémentaire de relaxation; la partie de la déformation associée à la relaxation de la déformation primaire va dépendre de manière directe du seuil d'écoulement plastique initial, et de l'écrouissage primaire et latent dû aux actions de contact entre dislocations. Ce problème est difficile à analyser en général, et d'un point de vue expérimental, il n'est pas facile de mettre en évidence, de manière séparée, les effets de contact et les effets à distance de l'écrouissage du monocristal; une première voie dans le sens pourrait être développée lors d'essais d'écrouissage latent pour lesquels il faudrait solliciter les secondes éprouvettes dans deux sens différents.

Une autre voie permettant d'approcher les problèmes précédents consiste à calculer l'énergie d'interaction et l'énergie propre associées à deux zones déformées plastiquement.

Ce calcul est développé dans le paragraphe (B) suivant pour deux ellipsoïdes, dans un milieu isotrope et anisotrope.

Système	Plan (\vec{n})	Direction (\vec{m})	Tenseur d'orientation R_{ij}	Cission induite - Zone 1	Cission induite - Zone 2
A2	$\bar{1}11$	$0\bar{1}1$	$\frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \bar{1} \\ 1 & \bar{2} & 0 \\ \bar{1} & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\frac{\mu\gamma}{12}$	$-\frac{\mu\gamma}{30}$
A3	$\bar{1}11$	101	$\frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \bar{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\frac{\mu\gamma}{3}$	$-\frac{\mu\gamma}{20}$
A6	$\bar{1}11$	110	$\frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \bar{2} & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\frac{\mu\gamma}{4}$	$-\frac{\mu\gamma}{60}$
B2	111	$0\bar{1}1$	$\frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 & \bar{1} & 1 \\ \bar{1} & \bar{2} & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\frac{\mu\gamma}{4}$	$-\frac{\mu\gamma}{20}$
B4	111	$\bar{1}01$	$\frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \bar{1} \\ 0 & \bar{1} & \bar{2} \end{pmatrix}$	$-\frac{\mu\gamma}{2}$	$\frac{\mu\gamma}{15}$
B5	111	$\bar{1}01$	$\frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \bar{2} & 0 & \bar{1} \\ 0 & 2 & 1 \\ \bar{1} & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\frac{\mu\gamma}{4}$	$-\frac{\mu\gamma}{60}$
C1	$11\bar{1}$	011	$\frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & \bar{2} \end{pmatrix}$	$-\frac{\mu\gamma}{4}$	$\frac{\mu\gamma}{20}$
C3	$11\bar{1}$	101	$\frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \bar{2} \end{pmatrix}$	$-\frac{\mu\gamma}{3}$	$\frac{\mu\gamma}{15}$
C5	$11\bar{1}$	110	$\frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \bar{2} & 0 & 1 \\ 0 & 2 & \bar{1} \\ 0 & \bar{1} & 0 \end{pmatrix}$	$\frac{\mu\gamma}{12}$	$-\frac{\mu\gamma}{70}$
D1	$1\bar{1}1$	011	$\frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & \bar{2} & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\frac{\mu\gamma}{12}$	$-\frac{\mu\gamma}{30}$
D4	$1\bar{1}1$	$\bar{1}01$	$\frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 & \bar{1} & 0 \\ \bar{1} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \bar{2} \end{pmatrix}$	$-\frac{\mu\gamma}{6}$	$\frac{\mu\gamma}{20}$
D6	$1\bar{1}1$	110	$\frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & \bar{2} & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$-\frac{\mu\gamma}{12}$	$\frac{\mu\gamma}{70}$

TABLEAU VI - 1

B - Approche par le calcul de l'énergie

Nous allons nous attacher maintenant à calculer l'énergie d'interaction de deux inclusions homogènes et plastiques, comparer sa valeur dans le cas isotrope ou anisotrope, étudier sa variation en fonction de la distance séparant les deux inclusions, et ce dans un certain nombre de situations.

Rappelons les expressions des énergies propres et d'interaction données dans le chapitre II (II - 71) et (II - 73) :

$$W^I = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^{PI} C_{ijkl}^0 T_{klmn}^{II} C_{mnpq}^0 \varepsilon_{pq}^{PI} + \frac{1}{2} V_I \varepsilon_{ij}^{PI} C_{ijkl}^0 \varepsilon_{kl}^{PI} \quad (VI - 86)$$

et
$$W^{IJ} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^{PI} C_{ijkl}^0 T_{klmn}^{IJ} C_{mnpq}^0 \varepsilon_{pq}^{PJ} - \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^{PJ} C_{ijkl}^0 T_{klmn}^{IJ} C_{mnpq}^0 \varepsilon_{pq}^{PI} \quad (VI - 87)$$

où ε_{ij}^{PI} et ε_{ij}^{PJ} sont les déformations plastiques dans les inclusions I et J.

Donc, si \vec{m}^I (respectivement \vec{m}^J) représente la direction de glissement de l'inclusion I (resp. J), et si \vec{n}^I (resp. \vec{n}^J) la direction du plan de glissement, tels que le produit scalaire :

$$\vec{m}^I \cdot \vec{n}^I = \vec{m}^J \cdot \vec{n}^J = 0 \quad (VI - 88)$$

alors d'après (VI - 75), les déformations plastiques dans I et J sont données par :

$$\varepsilon_{ij}^{PI} = \frac{\gamma^I}{2} \left(m_i^I n_j^I + m_j^I n_i^I \right) \quad (VI - 89)$$

$$\varepsilon_{ij}^{PJ} = \frac{\gamma^J}{2} \left(m_i^J n_j^J + m_j^J n_i^J \right) \quad (VI - 90)$$

où γ^I (resp. γ^J) est le coefficient de glissement unitaire et tel que $\varepsilon_{-i,-i}^{PI} = \varepsilon_{-i,-i}^{PJ} = 0$

Si le milieu est isotrope, de constantes de Lamé λ et μ de rapport de Poisson ν , alors on a :

$$C_{ijkl}^0 = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (VI - 91)$$

d'où

$$\varepsilon_{ij}^{PI} C_{ijkl}^0 = \mu \gamma^I \left(m_k^I n_l^I + m_l^I n_k^I \right) \quad (VI - 92)$$

et on en déduit :

$$W^I = -\frac{1}{2} \mu^2 (\gamma^I)^2 \left(m_k^I n_l^I + m_l^I n_k^I \right) T_{klpq}^{II} \left(m_p^I n_q^I + m_q^I n_p^I \right) + \frac{1}{4} V_I \mu (\gamma^I)^2 \left(m_k^I n_l^I + m_l^I n_k^I \right) \left(m_k^I n_l^I + m_l^I n_k^I \right) \quad (VI - 93)$$

et pour l'énergie d'interaction nous trouvons :

$$\frac{W^{IJ}}{\gamma^I \gamma^J} = -\frac{(\mu)^2}{2} \left\{ \left(m_k^I n_l^I + m_l^I n_k^I \right) T_{klpq}^{IJ} \left(m_p^J n_q^J + m_q^J n_p^J \right) + \left(m_k^J n_l^J + m_l^J n_k^J \right) T_{klpq}^{IJ} \left(m_p^I n_q^I + m_q^I n_p^I \right) \right\} \quad (VI - 94)$$

Nous allons maintenant examiner un certain nombre de situations particulières

a - Cas de deux inclusions qui possèdent le même système de glissement (fig. VI - 6 - a ou b)

* Cas isotrope

Soit ξ^I et ξ^J les déformations plastiques des inclusions I et J définies par :

$$n^I \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad m^I \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad n^J \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad m^J \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (VI - 94)$$

alors l'énergie propre de chaque inclusion, donnée par (VI - 86), est :

$$W^I = -(\mu)^2 (\gamma^I)^2 \left\{ T_{2323}^{II} + T_{2332}^{II} \right\} + V_I \mu (\gamma^I)^2 \quad (VI - 95)$$

si l'inclusion I est une sphère alors on a $T_{2323}^{II} = T_{2332}^{II} = V \frac{4-5\nu}{30\mu(1-\nu)}$ d'après la relation (V - 83), d'où alors :

$$W^I = V_I \mu (\gamma^I)^2 \left(1 + \frac{5\nu - 4}{15(1-\nu)} \right) \quad (VI - 96)$$

pour $\nu = 0.3$, on a par exemple :

$$W^I = V_I \mu (\gamma^I)^2 \left(1 - \frac{\nu}{50}\right) = V_I \mu (\gamma^I)^2 \frac{23}{30} \quad (\text{VI} - 97)$$

et pour l'énergie d'interaction de 2 inclusions sphériques qui se déforment plastiquement suivant le même système de glissement (VI - 11) et dans un milieu isotrope, nous avons :

$$\frac{W^{IJ}}{\gamma^I \gamma^J} = -2 (\mu)^2 \left(T_{2323}^{IJ} + T_{2332}^{IJ} \right) \quad (\text{VI} - 98)$$

dans le cas envisagé ici, les composantes T_{2323}^{IJ} et T_{2332}^{IJ} ont été calculées au chapitre V (V - 99); on a donc :

$$\frac{W^{IJ}}{\gamma^I \gamma^J} = \frac{V_I V_J}{4\pi R^3} \frac{-\mu}{1-\nu} \left(1 + \nu - \frac{12}{5} \rho^2\right) \quad (\text{VI} - 99)$$

si $\nu = \frac{1}{3}$, $R = 2$, $a = b = 1$ (rayons des deux sphères) alors, si de plus $\gamma^I = \gamma^J$

$$\frac{W^{IJ}}{(\gamma^I)^2} = \frac{(V_I)^2}{32\pi} \frac{-\mu}{1-\nu} \left(1 + \nu - \frac{6}{5}\right) \quad (\text{VI} - 100)$$

ou encore :

$$\frac{W^{IJ}}{(\gamma^I)^2} = -\mu V_I \frac{1}{120} \quad (\text{VI} - 101)$$

et l'on voit dans ce cas là que l'énergie propre est environ 100 fois plus grande que l'énergie d'interaction.

* Nous avons également fait le calcul numérique pour le cas de deux pastilles ($a_1 = b_1 \gg c_1$ et $a_2 = b_2 = a_1 \gg c_2 = c_1$) et nous avons obtenu les résultats donnés par le tableau VI - 1, et la Fig. VI - 7 { cas A_1 et A_2 } .

b - Cas de deux inclusions coplanaires (même plan de glissement), mais dont les directions de glissement forment entre elles un angle α .

On examinera le cas par exemple où $\alpha = \frac{2\pi}{3}$

alors $\vec{n}^I \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 1 \end{cases} \quad \vec{m}^I \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 0 \end{cases} \quad \vec{n}^J \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 1 \end{cases} \quad \vec{m}^J \begin{cases} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{cases}$ (VI - 102)

d'où, dans le cas isotrope (λ, μ) :

$$\epsilon_{P_I} = \frac{\delta^I}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
 (VI - 103)

$$\epsilon_{P_J} = \frac{\delta^J}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

d'où (VI - 104)

$$W^I = -\mu^2 (\delta^I)^2 \left\{ T_{2323}^{II} + T_{2332}^{II} \right\} + \nu_I \mu (\delta^I)^2$$

et pour W^J :

$$W^J = -\frac{\mu^2}{2} (\delta^J)^2 \left\{ \frac{3}{2} (T_{1313}^{JJ} + T_{1331}^{JJ}) + \frac{\sqrt{3}}{2} (T_{1323}^{JJ} + T_{1332}^{JJ}) + \frac{\sqrt{3}}{2} (T_{2343}^{JJ} + T_{2354}^{JJ}) + \frac{1}{2} (T_{2323}^{JJ} + T_{2332}^{JJ}) \right\} + \nu_I \mu (\delta^J)^2 \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$
 (VI - 105)

et pour l'énergie d'interaction, nous avons :

$$\frac{W^{IJ}}{\gamma^I \gamma^J} = (\mu)^2 \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} (T_{2343}^{IJ} + T_{2354}^{IJ}) + \frac{1}{2} (T_{2323}^{IJ} + T_{2332}^{IJ}) + \frac{\sqrt{3}}{2} (T_{1323}^{IJ} + T_{1332}^{IJ}) + \frac{1}{2} (T_{2323}^{IJ} + T_{2332}^{IJ}) \right\}$$
 (VI - 106)

ou encore : $\frac{W^{IJ}}{\gamma^I \gamma^J} = (\mu)^2 \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} (T_{2313}^{IJ} + T_{2331}^{IJ} + T_{1323}^{IJ} + T_{1332}^{IJ}) + T_{2323}^{IJ} + T_{2332}^{IJ} \right\}$ (VI-107)

Les résultats numériques sont résumés dans le tableau (VI - 2) et la fig (VI - 7) pour le cas $(B)_1$ et $(B)_2$.

Les calculs ont été, pour le cas isotrope, faits pour les systèmes de glissement définis par (VI - 11), avec $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = 1$, $c_1 = c_2 = 10^{-2}$, $\gamma^I = \gamma^J = 1$, $\lambda = 0.33$, $\mu = 7568 \text{ daN/mm}^2$, les angles d'Euler qui fixent la position de (J) par rapport à (I) étant $\psi = \theta = \varphi = 0$. Nous avons donné les valeurs des énergies d'interaction en fonction de la distance R séparant les centres des deux inclusions: enfin, nous avons calculé W^{IJ} aussi bien dans le cas isotrope que anisotrope. Dans les deux cas, nous voyons que l'énergie d'interaction décroît lorsque la distance croît (fig. VI - 7) et d'autre part, l'énergie dans le cas anisotrope est supérieure à celle dans le cas isotrope (fig. VI - 7). Dans le cas isotrope les constantes élastiques sont celles indiquées ci-dessus $\mu = 7568 \text{ daN/mm}^2$ et $\lambda = 0.33$; et dans le cas anisotrope les constantes prises sont les suivantes, la convention avec deux indices étant la convention classique :

$$\begin{array}{l} 1 \text{ pour } 11, \quad 2 \text{ pour } 22, \quad 3 \text{ pour } 33, \quad 4 \text{ pour } 23 \text{ et } 32 \\ 5 \text{ pour } 13 \text{ et } 31, \quad 6 \text{ pour } 12 \text{ et } 21. \end{array} \quad (\text{VI} - 108)$$

$$\begin{array}{l} C_{11} = 0.17637 \times 10^5, \quad C_{22} = 0.17657 \times 10^5 = C_{33} \\ C_{12} = C_{13} = C_{23} = 0.12920 \times 10^5 \\ C_{44} = C_{55} = C_{66} = 0.75188 \times 10^5 \end{array} \quad (\text{VI} - 109)$$

les unités étant des daN/mm^2 , et le repère dans lequel sont données ces constantes étant le repère Cristallographique;

* si nous prenons pour les mêmes inclusions étudiées ci-dessus, aussi bien dans le cas de deux sphères que dans celui de 2 pastilles, deux systèmes de glissement tels que :

$$\vec{n}^I = \vec{n}^J \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 1 \end{cases} \quad \vec{m}^J = -\vec{m}^I \quad \text{et} \quad \vec{m}^I \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 0 \end{cases}$$

alors les résultats pour l'énergie d'interaction sont ceux du cas précédent, mais changés de signe.

b - Cas de 2 inclusions ellipsoïdales qui glissent dans des plans de glissement différents

Nous avons également examiné le cas de deux inclusions non coplanaires et non collinéaires.

Soit 2 inclusions ellipsoïdales (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2) dont les plans de glissement sont $(1 \bar{1} 1)$ et $(\bar{1} 1 1)$ et les directions de glissement respectivement $[\bar{1} 0 1]$ et $[0 \bar{1} 1]$; d'où l'expression de ces vecteurs normés dans le repère Cristallographique \mathcal{C} :

$$\vec{n}^I \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \quad \vec{m}^I \begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \vec{n}^J \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \quad \vec{m}^J \begin{cases} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad (VI - 110)$$

Soit $\vec{I}_1, \vec{I}_2, \vec{I}_3$ les vecteurs de base dans le repère principal d'inertie \mathcal{R}^I de l'inclusion I, alors la matrice de passage du repère \mathcal{C} à \mathcal{R}^I est

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \quad (VI - 111)$$

tel que \vec{n}^I soit confondu avec l'axe x_3 de \mathcal{R}^I et \vec{m}^I avec l'axe x_1 de \mathcal{R}^I ; nous avons dans ces conditions :

$$\vec{n}^I \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 1 \end{cases} \quad \vec{m}^I \begin{cases} 1 \\ 0 \\ 0 \end{cases} \quad \vec{n}^J \begin{cases} \frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{cases} \quad \vec{m}^J \begin{cases} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{cases} \quad (VI - 112)$$

on en déduit les angles d'Euler : $\psi = 103.47^\circ, \theta = \varphi = 60^\circ$ (VI - 1)

on déduit alors de (VI - 93) et (VI - 94) l'énergie propre de I et celle de J, ainsi que leur énergie d'interaction, dans le cas isotrope.

Le vecteur \vec{R}^0 reliant les centres des deux inclusions étant donné en fonction d'un paramètre t variable dépendant de la distance d séparant les deux centres, tels que :

$$\vec{R}^0 \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{t}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \\ -\frac{2\sqrt{3}}{6} + t \frac{\sqrt{6}}{3} \end{cases}$$

avec $t = \frac{5\sqrt{3}}{12} + \sqrt{4d^2 - \frac{107}{18}}$ avec $d \gg \left(\frac{107}{72}\right)^{\frac{1}{2}} = 1.21$, cette valeur

correspondant à la plus courte distance (contact entre les deux inclusions); pour le cas isotrope les résultats sont résumés dans tableau VI - 3.

Pour d minimum, correspondant au contact (point C sur fig. VI 7), on a $W^{IJ} = 0.31$, valeur qu'on peut comparer à celle donnée pour les cas A_1 et A_2 (FIG. VI - 7) correspondant également au contact et à la distance minimale entre les deux inclusions, et l'on constate que cette valeur 0.31 est supérieure à celle des 2 autres cas.

$d = \vec{IJ} $	2	2.1	2.2	2.3	2.5	3.	3.5	4	5	6
W^{IJ} cas isotrope	0.11	0.083	0.06	0.05	0.04	0.02	0.01	0.008	0.003 ≈ 0	-10^{-3} ≈ 0
W^{IJ} cas anisotrope	0.14	0.11	0.09	0.08	0.06	0.03	0.02	0.01	0.007	0.3×10^{-3} ≈ 0

Tableau UI - 1

* variation de l'énergie d'interaction dans les cas isotrope et anisotrope pour le cas de 2 inclusions coplanaires et collinéaires. (Nous avons pris $\gamma^i = \delta^j = 1$ et $a_1 = b_2 = 1; c_1 = c_2 = 10^{-2}$) ; $\odot \ominus$: $\frac{W^{IJ}}{\gamma^i \delta^j}$ est en d a N x mm

l'énergie propre étant 0.244 (cas anisotrope) et 0.288 (cas isotrope)

$d = \vec{IJ} $	2	2.2	2.5	2.8	3	3.5	4	5	6
W^{IJ} cas isotrope	0.027	0.016	0.009	0.006	0.005	0.003	0.002	8×10^{-4} ≈ 0	3×10^{-4} ≈ 0
W^{IJ} cas anisotrope	0.035	0.023	0.015	0.010	0.009	0.005	0.004	0.002	0.8×10^{-4} ≈ 0

Tableau UI - 2

* variation de l'énergie d'interaction dans les cas isotropes et anisotropes pour 2 inclusions coplanaires et non collinéaires (on a pris $\gamma^i = \delta^j = 1$ $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = 1$, $c_1 = c_2 = 10^{-2}$ et $(\vec{m}^i, \vec{m}^j) = \omega = \frac{2\pi}{3}$) : $\frac{W^{IJ}}{\gamma^i \delta^j}$ est en d a N x mm

l'énergie propre étant $W^i = 0.244$ (cas anisotrope) et 0.288 (cas isotrope)

$d(= I\vec{J})$	1.22	1.30	1.4
$ W^{IJ} $	0.305	0.160	0.0331

Tableau UI - 3

Variation de l'énergie d'interaction ($\frac{W^{IJ}}{r^{2+q}}$ en da N x mm) pour 2 inclusions isotropes non coplanaires et non collinéaires

UI - 3 Conclusion

Nous avons développé deux théories pour décrire les phénomènes d'écroutissage dus essentiellement aux contraintes internes d'incompatibilité des déformations anélastiques.

Dans les deux cas, la formulation générale proposée conduit à l'introduction d'une matrice d'écroutissage. Dans le cas de la pseudo-élasticité, on donne une évaluation des termes de la matrice à partir de la solution de la paire d'inclusions plastiques; les valeurs obtenues indiquent une très grande interaction entre variants incompatibles, ce qui explique la relative fragilité des matériaux polycristallins lorsque ce mécanisme intervient de manière unique. Les modèles proposés permettront également d'augmenter la "ductilité" de tels matériaux en jouant sur la texture cristallographique.

Dans le cas de la plasticité classique, la théorie proposée conduit à introduire un terme d'écroutissage non local qui s'ajoute à la matrice d'écroutissage classique pour prendre en compte les contraintes internes. Dans ce cas, le problème général est plus difficile, car non linéaire à cause des seuils de plasticité; ce modèle devrait être utilisé conjointement à une loi d'évolution et d'écoulement pour trouver l'état relaxé (partiellement); ce travail difficile n'a pas été abordé dans le cadre de cette thèse.

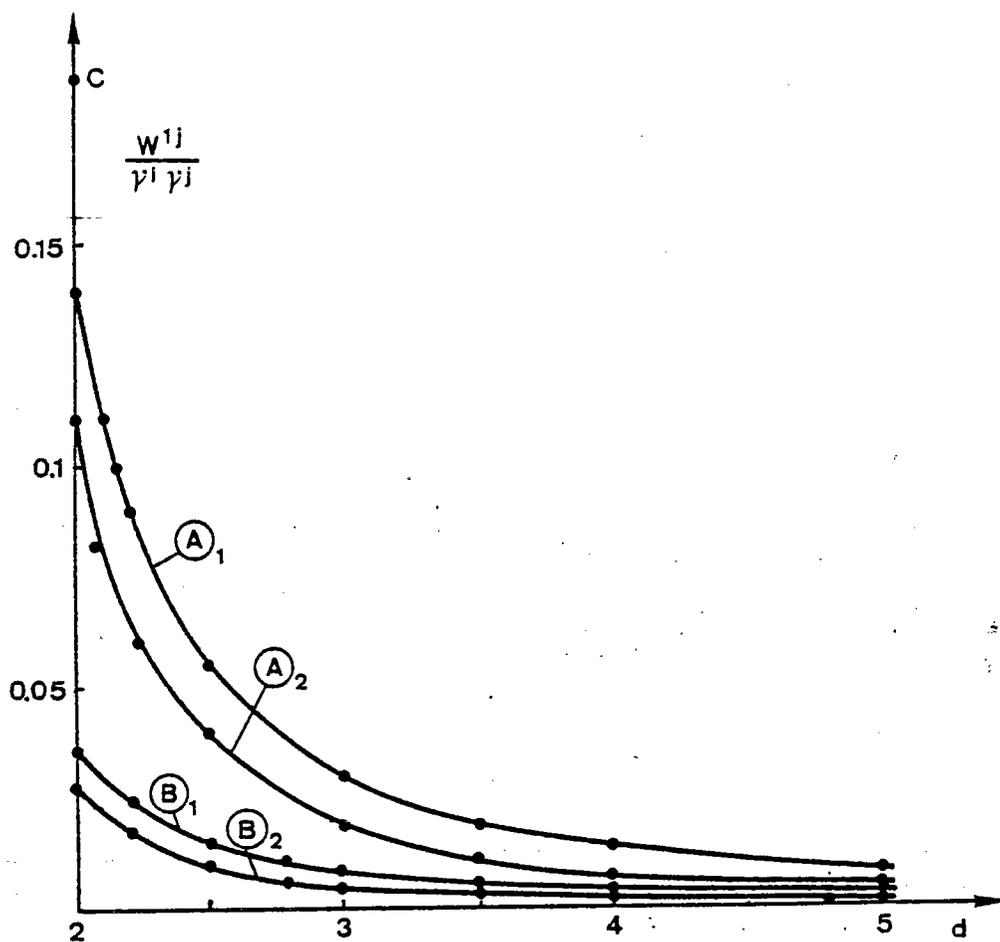


Fig VI - 7 : variation de l'énergie d'interaction entre 2 inclusions 1 et j en fonction de la distance d séparant les centres des 2 inclusions dans différentes situation :

- A₁ 2 inclusions coplanaires et collinéaires (anisotropes)
- A₂ 2 inclusions coplanaires et collinéaires (isotropes)
- B₁ 2 inclusions coplanaires et non collinéaires (anisotropes)
- B₂ 2 inclusions coplanaires et non collinéaires (isotropes)
- C énergie d'interaction entre 2 inclusions non coplanaires et non collinéaires (isotropes) en contact.

UI - 4 BIBLIOGRAPHIE CHAPITRE VI

- 1 - H. WARLIMONT, L. DELAY, RV Krishnan H. Tas J. Mat. Sciences , 9 (1974)
- 2 - B. GUERIN, P.F. GOBIN, Solid State Transformation in Metals and alloys - les Editions de Physique (1978)
- 3 - Z. NISHYAMA, Martensitic transformation - Academic Press (1978)
- 4 - J.W. CHRISTIAN, The Theory of transformation in metals and alloys - Pergamon LONDRES (1965)
- 5 - L. KAUFMAN , M. COHEN, Progress in Metals Physics, 7, 165 (1958)
- 6 - M. BEN SALAH , rapport de DEA - METZ (1983)
- 7 - M. BEN SALAH, thèse (à paraître) - METZ
- 8 - J.D. ESHELBY, Prog. in Mech. t2 (1961)
- 9 - L.M. BROWN, D.R. CLARTE Acta. Met. t 23 (1975)
- 10 - Rapport ATP (C.N.R.S.) : Mat 4 - Plasticité des matériaux solides (1983 - 1985) - L.P.M.M. (METZ)
- 11 - E. PATOR, thèse METZ (à paraître)
- 12 - G. SAADA, PUB. IRSID A 251 (1961)
- 13 - J. FRIEDEL, Les Dislocations GAUTHIERS - VILLARS 1964
- 14 - P. FRANCIOSI, M. BERVEILLER, A. ZAOUI Acta Met., 28 t 273 (1980)
- 15 - P. FRANCIOSI, A. ZAOUI Acta Met., t 30 (1982)
- 16 - M. BERVEILLER, H. BOUAQUINE (à paraître)
- 17 - J.F. NYE " P^his Physiques de cristaux" Dunod 1961
- 18 - A. HIHI ,Thèse d'Etat - Université PARIS XIII (1982)

CHAPITRE VII

Matériaux composites

VII - 1 - Généralités

VII - 2 - Détermination des coefficients effectifs - Position du problème.

VII - 3 - Schéma self-consistant à un site

VII - 3 - 1 Calcul général

VII - 3 - 2 Détermination du module de cisaillement

VII - 3 - 3 Détermination de la constante élastique

VII - 3 - 4 Conclusion

VII - 4 - Détermination des constantes élastiques effectives du milieu homogène équivalent à partir de la solution du problème de la paire d'inclusions hétérogènes.

VII - 4 - 1 Modélisation - solution générale

VII - 4 - 2 Solution analytique avec des hypothèses simplificatrices.

VII - 4 - 3 Détermination du tenseur localisation

VII - 5 Résultats et conclusions

VII - 5 - 1 Caractéristiques de la "cellule élémentaire d'hétérogénéité".

VII - 5 - 2 Détermination du module de cisaillement effectif dans le modèle à deux sites.

VII - 5 - 3 Applications et étude de l'anisotropie

VII - 6 Bibliographie - chapitre VII

Un matériau composite est un matériau hétérogène, comme par exemple les bétons, les plastiques armés; les papiers syntétiques, les métaux renforcés; comme leur nom l'indique, ils sont composés de plusieurs constituants, de façon à améliorer les qualités du produit désiré, surtout en ce qui concerne ses propriétés mécaniques ou thermiques ou diélectriques. On utilise essentiellement les matériaux composites obtenus par renfort de fibres ou de particules, isotropes ou anisotropes; ils sont généralement composés de deux constituants, ayant des propriétés mécaniques différentes, une matrice ou liant, et un renfort sous forme de particules ou fibres (inclusions).

L'idée est d'associer deux matériaux ayant chacun des propriétés différentes de manière à ce que le composite ait les propriétés désirées; il s'agit de définir un compromis pour satisfaire à la légèreté, rigidité, résistance à la traction, à la torsion, tenue en fatigue et au vieillissement. Le renfort est le plus souvent à base de verre, de silice, de bore, d'alumine, de graphite, de polymères spéciaux; les matrices sont le plus souvent constituées de matières plastiques, de métaux, ou de céramique [1]. La figure VII - 1 illustre un résultat expérimental selon lequel les constantes élastiques (ici le module d'YOUNG suivant la direction x_1), croît avec la fraction volumique de la fibre.

Les problèmes de mécanique des composites sont essentiellement de deux ordres :

- Tout d'abord, il s'agit de fournir aux spécialistes de calcul des structures une loi de comportement homogénéisée représentant la réponse d'un élément de volume considéré comme macrohomogène.
- D'autre part, pour la prévision de tenue en service des structures composites, il est essentiel d'évaluer les contraintes locales dans chacun des constituants et à l'interface entre fibre et matrice, pour préciser les limites d'emplois de tels matériaux en évitant la rupture ou la décohésion.

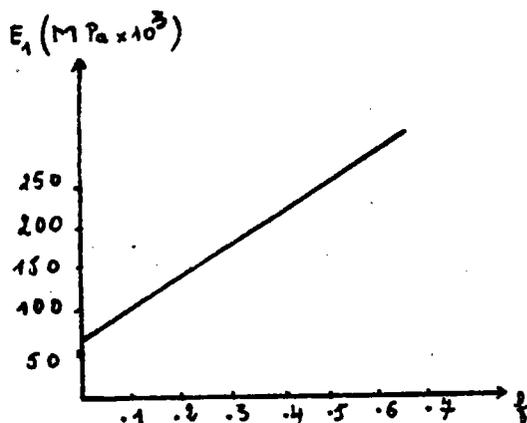
A ces problèmes de caractère fondamental il faut ajouter ceux qui sont liés à la conception des pièces en matériaux composites et à leur fabrication.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons essentiellement à la détermination d'une loi de comportement homogénéisée pour un matériau composite à élasticité linéaire, constituée de deux phases différentes.

Les premiers travaux dans ce domaine sont ceux de VOIGT [6] et REUSS qui, moyennant des approximations fortes (moyenne volumique arithmétique pour l'un, harmonique pour l'autre), fournissent des bornes supérieure et inférieure pour les constantes élastiques effectives, ainsi que l'a montré HILL [8]. De plus ESHELBY [9] propose des modèles plus performants mais limités aux milieux faiblement dilués, à partir de la solution du problème de l'inclusion hétérogène.

Fig. VII - 1

Exemples de propriétés mécaniques obtenues avec des composites industriels [1]



La courbe ci-dessus fournit les variations du module d'YOUNG dans la direction x_1 des fibres en fonction de la fraction volumique des fibres f , pour un composite métallique, aluminium renforcé de fibres de bore, et tel que les caractéristiques des fibres et matrice soient :

$$E_{\text{FIBRE}} = 390\,000 \text{ M Pa} \quad \text{et} \quad E_{\text{MATRICE}} = 68\,000 \text{ M Pa}$$

Les premiers travaux significatifs qui s'écartent des approximations fortes précédentes sont l'oeuvre d'HERSHEY [10] et de KRONER [11] qui ont introduit le schéma self-consistent dont l'utilisation s'est élargie à d'autres domaines (viscoélasticité, plasticité) et même à d'autres branches de la physique.

Parallèlement, des méthodes variationnelles plus performantes que celle de HILL et due à HASHIN et STRICKMANN [12] ont permis d'avoir de bien meilleurs résultats et de resserrer les bornes obtenues à partir des modèles de VOIGT et REUSS.

Ce n'est que plus récemment [13] [14] [15], et grâce à DEDERICHS, ZELLER et KRONER en particulier, que des méthodes statistiques systématiques ont permis d'aborder le problème de façon générale en introduisant des fonctions de corrélation des modules élastiques qui décrivent complètement la structure; ces méthodes restent toutefois complexes.

Dans ce qui suit, nous proposons une nouvelle méthode self-consistent, susceptible de prendre en compte la répartition ordonnée ou désordonnée du renfort ou des inclusions. Ce modèle self-consistent part, non pas des interactions entre une inclusion et le milieu homogène équivalent, mais plutôt des interactions entre les inclusions d'une "cellule élémentaire" représentative de la répartition de la deuxième phase et le milieu homogène équivalent (M.H.E).

Cet élargissement du schéma self-consistent est possible à partir de la solution du problème de la paire d'inclusions.

Dans le paragraphe 2 de ce chapitre, nous rappelons comment on peut, dans le cadre des hypothèses de macrohomogénéité de MANDEL [16], introduire un tenseur localisation et en déduire les propriétés effectives macroscopiques du M.H.E.

Dans le 3^{ème} paragraphe, nous rappelons le principe du schéma self-consistent à 1 site et nous le développons pour un composite isotrope, biphasé, à constituants isotropes du type inclusions sphériques et matrice; nous obtenons les variations du module de cisaillement effectif macroscopique en fonction du degré d'hétérogénéité et de la fraction volumique des inclusions.

Dans la dernière partie de ce chapitre, nous présentons d'abord le schéma self-consistent étendu qui tient compte de la répartition spatiale des inclusions, ensuite, moyennant quelques hypothèses simplificatrices supplémentaires, nous proposons une solution analytique dans le cas d'une répartition cubique centrée d'inclusions sphériques isotropes.

VII - 2 Détermination des coefficients effectifs

Position du problème

On considère un composite formé d'inclusions dans une matrice: on suppose que la matrice possède des constantes élastiques, qu'on notera C^m , (caractérisées par exemples par les coefficients de Lamé λ^m , μ^m et ν^m) on suppose que les inclusions sont toutes de même forme, de même volume (même rayon), de mêmes constantes élastiques C^i (λ^i , μ^i et ν^i) différentes de C^m ; la distribution des inclusions est supposée statistiquement uniforme; on notera V le volume total, V^i celui de la phase I représentant les inclusions, V^m celui de la matrice.

Nous allons déterminer les constantes élastiques C^{eff} du milieu homogène équivalent à partir d'un tenseur de localisation.

La déformation d'ensemble E_{ij} imposée à l'infini au milieu est la moyenne des déformations locales :

$$E_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij}(\vec{r}) d\vec{r} \quad (VII - 1)$$

où $\varepsilon_{ij}(\vec{r})$ est la déformation au point \vec{r}

En appelant ε_{ij}^I la déformation moyenne dans la phase I et ε_{ij}^M celle dans la matrice, on peut écrire à partir de (VII - 1) :

$$E_{ij} = \frac{V^I}{V} \varepsilon_{ij}^I + \frac{V^M}{V} \varepsilon_{ij}^M \quad (VII - 2)$$

Appelons $f = \frac{V^I}{V}$ la fraction volumique de la phase I, alors on déduit de (VII - 2)

$$E_{ij} = f \varepsilon_{ij}^I + (1-f) \varepsilon_{ij}^M \quad (VII - 3)$$

On a de même pour les contraintes, si l'on appelle Σ_{ij} la contrainte d'ensemble, σ_{ij}^I la contrainte moyenne dans la phase I et σ_{ij}^M dans la matrice.

$$\Sigma_{ij} = f \sigma_{ij}^I + (1-f) \sigma_{ij}^M \quad (VII - 4)$$

relation qui découle de la relation $\Sigma_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij}(\vec{r}) d\vec{r} \quad (VII - 4)$

Comme on considère un composite élastique, on déduit de la linéarité du problème qu'il existe un tenseur A^I tel que :

$$\varepsilon_{ij}^I = A_{ijmn}^I E_{mn} \quad (VII - 5)$$

où A^I est un tenseur du 4^{ème} ordre, appelé tenseur de localisation, qu'il s'agira de déterminer afin de calculer les propriétés effectives du composite.

Par ailleurs, la loi de HOOKE permet d'écrire :

$$\sigma_{ij}^I = C_{ijkl}^I \epsilon_{kl}^I \tag{VII - 6}$$

et compte tenu de (VII - 5), on a :

$$\sigma_{ij}^I = C_{ijkl}^I A_{klmn}^I E_{mn} \tag{VII - 7}$$

De même, dans la matrice, on a :

$$\sigma_{ij}^M = C_{ijkl}^M \epsilon_{kl}^M \tag{VII - 8}$$

or, d'après (VII - 3) on a:

$$(1-f) \epsilon_{ij}^M = E_{ij} - f \epsilon_{ij}^I \tag{VII - 9}$$

et l'on déduit de (VII - 5) et (VII - 9)

$$\epsilon_{ij}^M = \frac{1}{1-f} \left\{ E_{ij} - f A_{ijkl}^I E_{kl} \right\} \tag{VII - 10}$$

on déduit de (VII - 8) et (VII - 10)

$$\sigma_{ij}^M = \frac{1}{1-f} C_{ijkl}^M \left\{ I_{klmn} - f A_{klmn}^I \right\} E_{mn} \tag{VII - 11}$$

où I_{klmn} est le tenseur unité d'ordre 4

Des relations (VII - 4, 7, 11) nous déduisons pour Σ_{ij}

$$\Sigma_{ij} = \left\{ f C_{ijkl}^I A_{klmn}^I + C_{ijkl}^M \left(I_{klmn} - f A_{klmn}^I \right) \right\} E_{mn} \tag{VII - 12}$$

d'où, puisque ici

$$I_{klmn} = \frac{1}{2} \left(\delta_{km} \delta_{ln} + \delta_{kn} \delta_{lm} \right) \tag{VII - 13}$$

relation qui permet d'obtenir les constantes élastiques C^{eff} du milieu homogène équivalent sous la forme :

$$C_{ijmn}^{eff} = C_{ijmn}^M + f (C_{ijkl}^I - C_{ijkl}^M) A_{klmn}^I \quad (VII - 15)$$

Cette forme est générale; pour être explicite il suffit de calculer le tenseur A^I .

Dans le modèle de VOIGT, on suppose que $A^I = I$ ce qui revient à écrire que C^{eff} est égal à la valeur moyenne volumique de $C(r)$. Une formulation duale consistant à introduire un tenseur localisation B pour les contraintes aurait donné à la place de (VII - 15) la relation suivante pour les compliances S .

$$S_{ijmn}^{eff} = S_{ijmn}^M + f (S_{ijkl}^I - S_{ijkl}^M) B_{klmn}^I \quad (VII - 16)$$

En prenant $B^I = I$ (tenseur unité) on aboutit au modèle de REUSS. Les deux modèles de VOIGT et REUSS conduisent à des valeurs extrémales de C^{eff} ainsi qu'il a été montré par HILL [8].

Ces approximations peuvent être suffisantes dans le cas de milieux faiblement hétérogènes ($\Delta C \ll C$) ou de milieux faiblement dilués. Elles ne sont pas cependant suffisantes dans le cas des matériaux composites réels où on peut atteindre des hétérogénéités relatives de l'ordre de 100.

Il est donc nécessaire d'effectuer une meilleure évaluation des tenseurs A^I et B^I . En général une telle opération est complexe, et nécessite le recours à des méthodes statistiques complètes et systématiques, telles qu'elles ont été développées par KRONER [15], WILLIS [17], DEDERICHS et ZELLER (1).

Nous préférons utiliser les méthodes auto-cohérentes, car elles sont plus faciles à mettre en œuvre et par ailleurs conduisent à des résultats exacts dans le cas du désordre parfait [19]. Dans le cas où il existe des corrélations entre les hétérogénéités, il est nécessaire de développer ces méthodes. C'est ce que nous proposerons, en introduisant l'effet de paire, après avoir rappelé le principe et les résultats concernant le schéma self-consistent à un site.

VII - 3 Le schéma self-consistent à un site

Initialement dû à HERSHEY [10] et KRONER [11] qui l'ont développé pour les polycristaux, il consiste à remplacer les interactions entre une hétérogénéité particulière (l'inclusion) et le milieu réel environnant par celles existant entre une inclusion et un milieu homogène qui a les propriétés effectives C^{eff} .

Ce problème revient à celui de l'inclusion hétérogène dont les résultats sont rappelés au chapitre (III) et repris ici.

VII - 3 - 1 Calcul général

On a pour la déformation dans l'inclusion (I) (III - 21) :

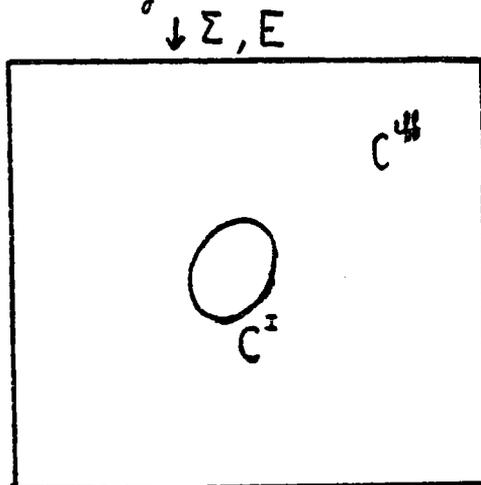
$$\epsilon_{ij}^I = E_{ij} - \frac{1}{V_I} T_{ijkl}^{II} \Delta C_{klmn}^I \epsilon_{mn}^I \quad (VII - 17)$$

et le tenseur localisation A^I s'écrit :

$$A_{ijkl}^I = \left(I_{ijkl} + \frac{1}{V_I} T_{ijmn}^{II} \Delta C_{mnlk}^I \right)^{-1} \quad (VII - 18)$$

Le calcul explicite de T^{II} dépend de la forme de l'inclusion I et des modules C^{eff} qui sont pour le moment inconnus. Avec l'aide de la relation (VII - 15) on obtient une équation implicite pour C^{eff} que nous précisons maintenant pour des milieux isotropes et des inclusions sphériques.

Considérons donc un milieu élastique isotrope contenant une seule inclusion, à élasticité isotrope, caractérisée par les constantes élastiques C^I ($\lambda^I, \mu^I, \rho^I, \chi^I$), les constantes de la matrice supposée isotrope étant notées C^M ($\lambda^M, \mu^M, \rho^M, \chi^M$). Le milieu est soumis à une contrainte Σ_{ij} à l'infini créant une déformation élastique uniforme E_{ij} .



Appelons f la fraction volumique de la phase I:

Nous nous proposons alors de chercher les solutions $C^{eff}(\lambda^e, \mu^e)$ du milieu homogène équivalent.

Pour un milieu isotrope, on a :

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (VII - 19)$$

d'où

$$C_{1212} = \mu \quad (VII - 20)$$

et

$$C_{1122} = \lambda \quad (VII - 21)$$

De (VII - 15), nous déduisons :

$$C_{1212}^{eff} = C_{1212}^M + f (C_{12mn}^I - C_{12mn}^M) A_{mn12}^I \quad (VII - 22)$$

Or, les seuls termes C_{12mn} non nuls d'après (VII - 19), sont C_{1212} et C_{1221} donc on déduit de (VII - 22) :

$$C_{1212}^{eff} = C_{1212}^M + f (C_{1212}^I - C_{1212}^M) A_{1212}^I + f (C_{1221}^I - C_{1221}^M) A_{2112}^I \quad (VII - 23)$$

d'où, puisque $C_{1212} = C_{1221} = \mu$:

$$C_{1212}^{eff} = C_{1212}^M + f (\mu^I - \mu^M) (A_{1212}^I + A_{2112}^I) \quad (VII - 24)$$

ou encore

$$\mu^e = \mu^M + f (\mu^I - \mu^M) (A_{1212}^I + A_{2112}^I) \quad (VII - 25)$$

de même on a pour λ^e :

$$C_{1122}^{eff} = C_{1122}^M + f (C_{11mn}^I - C_{11mn}^M) A_{mn22}^I \quad (VII - 26)$$

et d'après (VII - 20), les seuls termes $C_{1,1mn}$ non nuls sont ceux pour lesquels $(m,n) = (1,1)$ ou $(m,n) = (2,2)$ ou $(m,n) = (3,3)$, d'où :

$$C_{1122}^{eff} = C_{1122}^M + f(C_{1111}^I - C_{1111}^M) A_{1122}^I + f(C_{2222}^I - C_{2222}^M) A_{2222}^I + f(C_{3333}^I - C_{3333}^M) A_{3322}^I$$

(VII - 27)

d'où, en posant :

$$C_{1111}^I - C_{1111}^M = \lambda^I + 2\mu^I - \lambda^M - 2\mu^M = \Delta(\lambda + 2\mu)$$

(VII - 28)

$$C_{1122}^I - C_{1122}^M = \lambda^I - \lambda^M = \Delta\lambda$$

(VII - 29)

$$C_{1133}^I - C_{1133}^M = \lambda^I - \lambda^M = \Delta\lambda$$

(VII - 30)

on en déduit pour $C_{1122}^{eff} = \lambda^e$:

$$\lambda^e = \lambda^M + f \left\{ \Delta(\lambda + 2\mu) A_{1122}^I + \Delta\lambda A_{2222}^I + \Delta\lambda A_{3322}^I \right\}$$

(VII - 31)

$$\text{c'est-à-dire : } \lambda^e = \lambda^M + f \Delta\lambda \left(A_{1122}^I + A_{2222}^I + A_{3322}^I \right) + 2f \Delta\mu A_{1122}^I$$

(VII - 31)

Déterminons maintenant λ^e et μ^e pour le problème à un site: on notera dans ce cas les constantes effectives respectivement par λ_1^e et μ_1^e .

a * Détermination de μ_1^e

D'après le résultat établi par ESHELBY [9], on a:

$$\varepsilon_{ij}^I = E_{ij} + S_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{p'}$$

(VII - 32)

où $\varepsilon_{kl}^{p'}$ est la déformation plastique fictive de l'inclusion inhomogène, qui conduit aux mêmes contraintes et aux mêmes déformations totale que celles de l'inclusion hétérogène et où S_{ijkl} est le tenseur d'ESHELBY.

On déduit de (VII - 32) :

$$\varepsilon_{12}^I = E_{12} + S_{12kl} \varepsilon_{kl}^{p'}$$

(VII - 33)

et pour une sphère (ce qu'on suppose dans notre modèle) on a [19] :

$$\xi_{ij}^{p'} = B E_{ij} + \frac{1}{3} (A - B) E_{kk} \delta_{ij} \quad (\text{VII} - 34)$$

avec :

$$A = \frac{\chi^I - \chi_1^e}{(\chi_1^e - \chi^I) \alpha_1^e - \chi_1^e} \quad (\text{VII} - 35)$$

et

$$B = \frac{\mu^I - \mu_1^e}{(\mu_1^e - \mu^I) \beta_1^e - \mu_1^e} \quad (\text{VII} - 36)$$

où χ est la compressibilité donnée par :

$$\chi = \frac{1}{3} (3\lambda + 2\mu) \quad (\text{VII} - 37)$$

et dans le cas d'une sphère (VII - 33) devient : $\xi_{12}^I = E_{12} + \beta^e \xi_{12}^{p'}$ (VII - 38)

α et β sont donnés par (dans le cas d'une inclusion sphérique) :

$$\alpha = \frac{1}{3} \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \quad (\text{VII} - 39)$$

$$\beta = \frac{2}{15} \frac{4 - 5\nu}{1 - \nu} \quad (\text{VII} - 40)$$

ν étant le rapport de Poisson;

de (VII - 38) et (VII - 34) on déduit :

$$\xi_{12}^I = E_{12} + \beta_1^e \frac{\mu^I - \mu_1^e}{(\mu_1^e - \mu^I) \beta_1^e - \mu_1^e} E_{12} \quad (\text{VII} - 41)$$

D'autre part, d'après (VII - 8) on a, en tenant compte de la forme de :

$$\xi_{12}^I = A_{1212}^I E_{12} + A_{1122}^I E_{12} \quad (\text{VII} - 42)$$

d'où
$$\xi_{12}^I = \left(A_{1212}^I + A_{1221}^I \right) E_{12} \quad (\text{VII} - 43)$$

de même, on a :

$$\xi_{21}^I = \left(A_{2112}^I + A_{2121}^I \right) E_{12} \quad (\text{VII} - 44)$$

en comparant (VII - 41) , (VII - 43) et (VII - 44), on en tire :

$$A_{1212}^I = A_{2112}^I = \frac{1}{2} \frac{\mu_1^e}{\mu_1^e - (\mu_1^e - \mu^I) \beta_1^e} \quad (\text{VII} - 45)$$

d'où l'on tire, à partir de (VII - 25) :

$$\mu_1^e = \mu^M + f (\mu^I - \mu^M) \frac{\mu_1^e}{\mu_1^e - (\mu_1^e - \mu^I) \beta_1^e} \quad (\text{VII} - 46)$$

expression qu'on peut mettre sous la forme :

$$\frac{\mu_1^e}{\mu^M} = 1 + f (\mu^I - \mu^M) \frac{\mu_1^e / \mu^M}{\mu_1^e - (\mu_1^e - \mu^I) \beta_1^e} \quad (\text{VII} - 47)$$

Etudions les variations de μ_1^e en fonction de la fraction volumique f

Notons tout d'abord, que β dépendant uniquement de ρ , qui varie très peu, est pratiquement constant: si l'on prend $\rho = 0.2$ alors $\beta^e \simeq \frac{1}{2}$;

d'où (VII - 47) \rightarrow avec $\Delta\mu = \mu^I - \mu^M$

$$\frac{\mu_1^e}{\mu^M} = 1 + f \frac{\Delta\mu}{\mu^M} \frac{\mu_1^e / \mu^M}{\frac{\mu_1^e}{\mu^M} - \frac{\mu_1^e - \mu^I}{\mu^M} \frac{1}{2}} \quad (\text{VII} - 48)$$

et en posant :

$$\frac{\mu_1^e}{\mu^M} = x \quad \text{et} \quad \frac{\Delta\mu}{\mu^M} = H \quad (\text{VII} - 49)$$

alors, on obtient à partir de (VII - 48) et (VII - 49) :

$$\frac{\mu^I}{\mu^M} = 1 + H \quad \text{et}$$

$$x^2 + (1 - 2f)Hx - (1 + H) = 0 \quad (\text{VII} - 50)$$

or. H est toujours positif, car dans les composites on prend généralement $\mu^I > \mu^M$; on voit que l'équation (VII - 50) à un discriminant toujours positif, admet des racines de signes opposés, car leur produit égal à $-(1 + H) < 0$;

$$\text{d'où} \quad x = \frac{-H(1 - 2f) \pm \sqrt{H^2(1 - 2f)^2 + 4(1 + H)}}{2} \quad (\text{VII} - 51)$$

avec $x > 0$; on a donc x fonction de f avec H comme paramètre.

On notera, que pour $f = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow \mu^I = \mu^M$, ce qui est normal et que pour $f = 1$, $x = H + 1 \rightarrow \mu^I = \mu^I$;

Etudions les variations de x en fonction de f en prenant comme matériau hétérogène, un matériau tel que les modules d'YOUNG de l'inclusion et de la matrice aient par exemple les valeurs réalistes suivantes :

$$E^I = 360 \text{ GN/m}^2 \quad E^M = 3.60 \text{ GN/m}^2$$

correspondant par exemple à une matrice de résine époxyde et des fibres de carbone. On prendra pour rapports de Poisson

$$\nu^I = \nu^M = \frac{1}{5}$$

$$\text{alors puisque } \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \Rightarrow \mu^I = 150 \text{ GN/m}^2, \mu^M = 1.5 \text{ GN/m}^2 \quad (\text{VII} - 52)$$

$$H = 99 \approx 100$$

Nous obtenons ainsi une courbe qui varie peu jusqu'à $f = 0.3, 0.4$ et qui ensuite croit rapidement pour $f > 0.4$, pratiquement linéairement.

Nous pouvons obtenir d'autres tracés en faisant varier le paramètre H , c'est-à-dire le rapport μ^2/μ^m , et on observe ce qui est évident à partir de (VII - 51) que plus H est grand, plus x est grand. On obtient les résultats consignés dans tableau VII - 1 et représentés par fig. VII - 2.

f	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.10
x , pour $\left(\frac{\mu^2}{\mu^m} = 100\right)$	1	1.24	1.65	2.44	4.51	14.14	44.3	82.0	121	160	200
x $\left(\frac{\mu^2}{\mu^m} = 100\right)$	1	1.24	1.64	2.38	4.17	10	23.9	42	61	80.4	100
x $\left(\frac{\mu^2}{\mu^m} = 80\right)$	1	1.24	1.63	2.35	4.03	8.94	19.83	33.95	48.93	64.44	80
x $\left(\frac{\mu^2}{\mu^m} = 50\right)$	1	1.24	1.61	2.28	3.70	7.07	13.50	21.88	31.0	40.4	50
x $\left(\frac{\mu^2}{\mu^m} = 20\right)$	1	1.24	1.54	2.07	2.98	4.47	6.76	9.67	12.9	16.42	20

Tableau VII - 1

Variation du rapport $x = \mu^2/\mu^m$ du module de cisaillement dans le modèle à 1 site, en fonction de la fraction volumique f , pour différentes valeurs du rapport $H = \mu^2/\mu^m$.

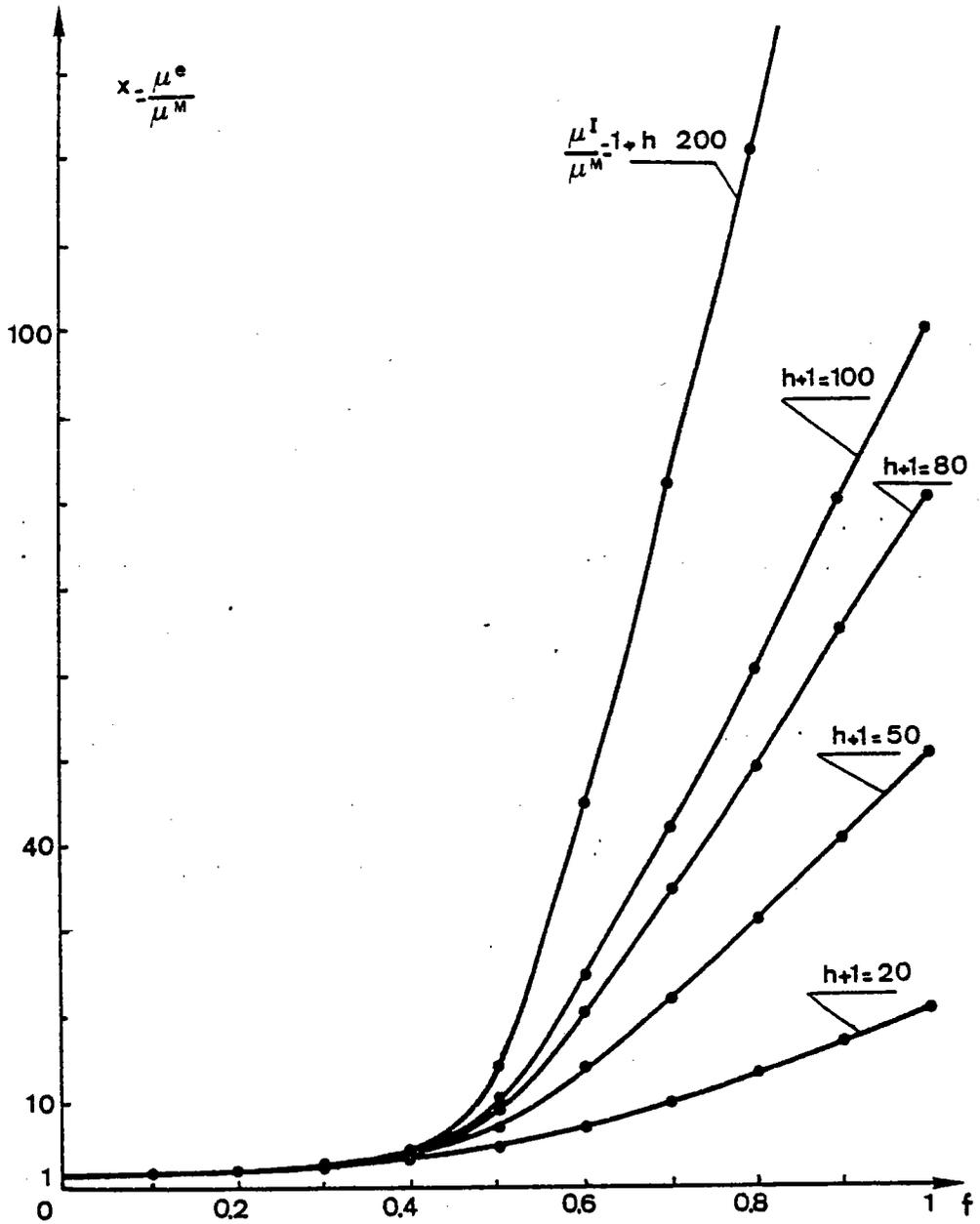


Fig. VII - 2 variation du rapport $x = \frac{\mu^e}{\mu^M}$ en fonction de f ,
fraction volumique pour différentes valeurs du rapport $h = \frac{\mu^I - \mu^M}{\mu^M}$

VII - 3 - 3 Détermination de λ_1^e

Nous avons vu que (VII - 22) :

$$C_{1122}^e = \lambda_1^e \quad (\text{VII} - 53)$$

en tenant compte de l'isotropie (VII - 20), on a d'après (VII - 15) :

$$\lambda_1^e = C_{1122}^e = C_{1122}^M + f (C_{1111}^I - C_{1111}^M) A_{1122}^I + f (C_{1122}^I - C_{1122}^M) A_{2222}^I + f (C_{1133}^I - C_{1133}^M) A_{33}^I$$

$$\text{ou encore : } \lambda_1^e = \lambda^M + f \Delta(\lambda + 2\mu) A_{1122}^I + f \Delta\lambda A_{2222}^I + f \Delta\lambda A_{3322}^I \quad (\text{VII} - 53)$$

$$\text{ou encore : } \lambda_1^e = \lambda^M + f \Delta\lambda (A_{1122}^I + A_{2222}^I + A_{3322}^I) + 2f \Delta\mu A_{1122}^I \quad (\text{VII} - 54)$$

$$\text{avec } \Delta\lambda = \lambda^I - \lambda^M \quad (\text{VII} - 55)$$

$$\text{et } \Delta\mu = \mu^I - \mu^M \quad (\text{VII} - 56)$$

On peut écrire d'après le résultat établi par ESHELBY [9] pour une inclusion sphérique et inhomogène :

$$\xi_{ij}^I = M E_{ij} + \frac{1}{3} (M - N) E_{kk} \delta_{ij} \quad (\text{VII} - 57)$$

$$\text{avec } M = 1 + \beta B \quad (\text{VII} - 58)$$

$$\text{et } N = 1 + 2A \quad (\text{VII} - 59)$$

où A et B, α et β ont été définis aux paragraphes précédents (VII - 35, 36, 39, 40), alors d'après (VII - 5) et (VII - 57) :

$$\xi_{11}^I = A_{1111}^I E_{11} + A_{1122}^I E_{22} + A_{1133}^I E_{33} \quad (\text{VII} - 60)$$

avec donc :

$$A_{1122}^I = \frac{N - M}{3} \quad (\text{VII} - 61)$$

de même, on a :

$$\xi_{22}^I = A_{2211}^I E_{11} + A_{2222}^I E_{22} + A_{2233}^I E_{33} \quad (\text{VII} - 62)$$

d'où :

$$A_{2222}^I = \frac{2M - N}{3} \quad (\text{VII} - 63)$$

de même

$$\xi_{33}^I = A_{3311}^I E_{11} + A_{3322}^I E_{22} + A_{3333}^I E_{33} \quad (\text{VII} - 64)$$

d'où :

$$A_{2233}^I = \frac{N - M}{3} \quad (\text{VII} - 65)$$

d'où en reportant ces résultats dans (VII - 54)

$$\lambda_1^e = \lambda^M + f \Delta \lambda (A_{1122}^I + A_{2222}^I + A_{3322}^I) + 2 f \Delta \mu A_{1122}^I \quad (\text{VII} - 66)$$

$$\Rightarrow \lambda_1^e = \lambda^M + f \Delta \lambda N + 2 f \Delta \mu \frac{N - M}{3} \quad (\text{VII} - 67)$$

et en tenant compte des valeurs de N et M (VII - 35, 36, 58, 59) :

$$\lambda_1^e = \lambda^M + f \Delta \lambda \frac{\chi_1^e}{\chi_1^e - \alpha_1^e (\chi_1^e - \chi^I)} + \frac{2}{3} f \Delta \mu \left\{ \frac{\chi_1^e}{\chi_1^e - \alpha_1^e (\chi_1^e - \chi^I)} - \frac{\mu_1^e}{\mu_1^e - \beta_1^e (\mu_1^e - \mu^I)} \right\} \quad (\text{VII} - 68)$$

avec

$$\chi_1^e = \frac{1}{3} (3\lambda_1^e - 2\mu_1^e), \quad \chi^I = \frac{1}{3} (3\lambda^I - 2\mu^I), \quad \Delta \lambda = \lambda^I - \lambda^M, \quad \Delta \mu = \mu^I - \mu^M$$

Dans les calculs numériques, nous prenons $\alpha_1^e = \beta_1^e \approx \frac{1}{2} \left(\lambda = \frac{1}{5} \right)$; l'équation (VII - 68) est une équation du second degré en λ_1^e , de discriminant positif, dont le produit des racines est négatif; et on prendra la racine positive. On résoudra l'équation (VII - 68) numériquement pour chaque f donné on trouve λ_1^e .

VII - 3 - 4 Conclusion

Ainsi comme il a été indiqué plus haut, les modèles de VOIGT et REUSS ne conviennent que lorsque le paramètre d'hétérogénéité est très faible.

Dans les calculs précédents, nous nous sommes limités au cas des composites isotropes à constituants isotropes dans le cas de renforts sous la forme d'inclusions sphériques. La méthode précédente, peut être également développée dans le cas de matériaux anisotropes, localement et globalement. C'est le cas qui a été traité par MORRIS [20] et qui concerne les polycristaux métalliques possédant une texture cristallographique.

Nous n'avons pas voulu traiter ce type de situation particulière qui conduit à des calculs numériques complexes; mais nous avons plutôt cherché à étendre le schéma self-consistent au cas d'un matériau possédant une anisotropie de répartition de la seconde phase. Le tableau VII - 2 montre les effets des différentes parties de la microstructure sur le comportement effectif global anisotrope. Si le schéma self-consistent à un site est capable de prendre en compte l'anisotropie du comportement local, la texture cristallographique et morphologique (forme et orientation des grains). Il n'est par contre pas prévu pour faire intervenir la répartition de la seconde phase. Ainsi, par exemple, l'anisotropie macroscopique due à une répartition périodique d'inclusions sphériques isotropes dans une matrice isotrope ne peut être modélisée par le schéma self-consistent à un site.

Dans le paragraphe suivant, nous proposons une méthode approchée basée sur la solution du problème de la paire d'inclusions pour tenir compte des effets de la répartition des grains ou inclusions sur les propriétés macroscopiques.

Comportement effectif global anisotrope	tenseur C^{eff} anisotrope
dû à :	pris en compte par :
* comportement local anisotrope	* tenseur C^i anisotrope
* texture cristallographique	* Fonction de distribution des orientations cristallographiques
* texture morphologique - forme des grains ou inclusions - orientation des grains - répartition des grains	- inclusion ellipsoïdale → T^{ii} - fonction de distribution des orientations géométriques - aléatoire, ordonnée, périodique.

Tableau VII - 2 : Effet de microstructure sur les propriétés anisotropes globales du composite.

VII - 4 Détermination des constantes élastiques effectives du milieu homogène équivalent à partir de la solution du problème de la paire d'inclusion hétérogènes. Modèle à plusieurs sites

VII - 4 - 1 Solution générale - modélisation du composite

Pour tenir compte de la répartition des inclusions dans le composite, il faudrait disposer d'une description statistique du composite, par exemple sous la forme des fonctions de corrélation introduites par KRONER [15]. Ces méthodes systématiques quoique exactes sont longues et fastidieuses.

Nous proposons une méthode approchée qui reprend les idées de base du schéma self-consistent à un site, mais qui part des interactions entre "une cellule hétérogène élémentaire" et le milieu homogène équivalent.

Dans le cas présent "la cellule hétérogène élémentaire" ne sera pas constituée par une inclusion unique, mais par un ensemble d'inclusions représentatif à la fois de l'anisotropie géométrique et mécanique de chacune d'entre elles et de leur répartition mutuelle.

Cette "cellule hétérogène élémentaire" doit être suffisamment simple pour conduire à des calculs compacts, mais également représentative de la structure. Au vu du comportement en $\frac{1}{R^3}$ et $\frac{1}{R^3}$ (chapitre V) des tenseurs T^{IJ} et des calculs concernant les différentes parties de l'énergie élastique dans le chapitre III, on peut raisonnablement limiter les interactions aux premiers voisins. La présence des autres inclusions est prise en compte du fait que nous choisissons pour milieu homogène, le milieu homogène équivalent. Même dans ce cas, les calculs sont encore difficiles à cause de l'anisotropie du milieu homogène équivalent, mais sont faisables numériquement.

En effet partons de l'expression de la déformation moyenne dans une inclusion I trouvée au chapitre III: alors si N est le nombre d'inclusions dans l'environnement de I, ξ_{ij}^I s'écrit (III - 21) :

$$\xi_{ij}^I = E_{ij} - \frac{1}{V_I} T_{ijkl}^{II} \Delta C_{klmn}^I \xi_{mn}^I - \frac{1}{V_I} \sum_{J=1}^N T_{ijkl}^{IJ} \Delta C_{klmn}^I \xi_{mn}^J \quad (\text{VII} - 69)$$

où $\Delta C_{ijkl}^I = C_{ijkl}^I - C_{ijkl}^{eff}$ est le même (par hypothèse) pour toutes les inclusions et V_I le volume de l'inclusion I.

On en déduit :

$$\xi_{mn}^I \left\{ \delta_{mi} \delta_{nj} + \frac{1}{V_I} T_{ijkl}^{II} \Delta C_{klmn}^I + \frac{1}{V_I} \sum_J T_{ijkl}^{IJ} \Delta C_{klmn}^I \right\} = E_{ij} \quad (\text{VII} - 70)$$

et en comparant (VII - 5) et (VII - 70), nous en déduisons l'expression du tenseur A^I :

$$A^I_{mnij} = \left\{ \delta_{mi} \delta_{nj} + \frac{1}{V_I} \Delta C^I_{klmn} \left(T^{II}_{ijkl} + \sum_J T^{IJ}_{ijkl} \right) \right\}^{-1} \quad (\text{VII} - 71)$$

le système (VII - 70) peut être écrit sous la forme

$$B \varepsilon = V_I E \quad (\text{VII} - 72)$$

ou encore

$$B_{ijmn} \varepsilon_{mn} = V_I E_{ij} \quad (\text{VII} - 73)$$

avec

$$B_{ijmn} = V_I \delta_{mi} \delta_{nj} + T^{II}_{ijkl} \Delta C^I_{klmn} + \sum_J T^{IJ}_{ijkl} \Delta C^I_{klmn} \quad (\text{VII} - 74)$$

et alors : $A^I = V_I B^{-1}$ (VII - 75)

Pour déterminer les composantes B_{ijmn} , nous calculons T^{II} et T^{IJ} en utilisant les coefficients C^{eff} du milieu homogène équivalent; les composantes de T^{II} et T^{IJ} sont calculées numériquement (listings donnés en annexe et voir chapitre V) dans un repère principal d'inertie de l'inclusion I.

Une fois obtenues les composantes de A^I , nous en déduisons les C^{eff} à partir de la relation (VII - 5)

$$C^{eff}_{ijkl} = C^M_{ijkl} + f \left(C^I_{ijmn} - C^M_{ijmn} \right) A^I_{mnkl} \quad (\text{VII} - 76)$$

Dans le 1er pas de calcul, nous injectons dans T^{II} et T^{IJ} les solutions μ_1^e et λ_1^e du problème à un site, nous en déduisons les composantes de B, que nous inversons pour obtenir A, et à partir de (VII - 76) nous en déduisons pour une fraction volumique f donnée, les valeurs de C^{eff}_{ijkl} ; nous réinjectons ces valeurs dans T^{II} et T^{IJ} pour obtenir une nouvelle matrice B d'où une nouvelle expression de A^I et de nouvelles valeurs pour C^{eff} , et ainsi de suite jusqu'à ce que nous obtenions des valeurs pour C^{eff} telles que les différences entre les nouvelles et les précédentes valeurs, en valeur relative, deviennent inférieures à une valeur fixée à l'avance, par exemple 10^{-2} , de manière à ce que le processus itératif converge.

Ces calculs sont possibles numériquement et les programmes permettant de calculer T_{ijkl}^I et T_{klmn}^I pour le cas le plus général de deux inclusions ellipsoïdales sont donnés en annexe.

Nous allons développer maintenant des calculs analytiques en faisant des hypothèses simplificatrices supplémentaires.

VII - 4 - 2 Solution analytique avec des hypothèses simplificatrices supplémentaires

Nous simplifions le problème en supposant les hypothèses supplémentaires suivantes :

* Nous supposons que le milieu homogène équivalent est isotrope pour le calcul des composantes de T^I et T^I et que les inclusions sont sphériques. Ceci permet d'utiliser les formules (V - 99) du chapitre V. Le tenseur A^I est par contre anisotrope.

* Nous supposons en outre que la "cellule hétérogène élémentaire" est constituée de 9 inclusions situées aux sommets et au centre d'un cube (fig. VII - 3). Cette répartition simplifie les calculs de A^I si on suppose que les déformations sont identiques dans chaque inclusion comme il est raisonnable de le faire.

Nous considérons donc un matériau composite contenant des inclusions sphériques de même rayon r , qui constituent un réseau cubique centré; inclusions et matrices sont supposées isotropes, les constantes élastiques de l'inclusion étant notées C^I (λ^I, μ^I), celles de la matrice C^M (λ^M, μ^M). On prendra I au centre d'un cube du réseau ("cellule d'hétérogénéité élémentaire") et dans le calcul des termes tels que dans l'expression (VII - 74) on ne tiendra compte que des 8 inclusions J se trouvant aux sommets de ce cube.

L'inclusion située au centre du cube sera indexée par 0 (zéro), les 8 autres par $J = 1, 2, \dots, 8$, et les sommets du cube élémentaire seront appelés A_1, A_2, \dots, A_8 comme indiqué sur fig. VII - 1.

En posant $\epsilon_{mn}^I = \epsilon_{mn}$ (hypothèse simplificatrice), l'expression (VII - 70) s'écrit avec les hypothèses ci-dessus :

$$\epsilon_{mn}^I \left\{ \delta_{mi} \delta_{nj} + \frac{1}{V_I} T_{ijkl}^{00} \Delta C_{klmn}^I + \frac{1}{V_I} \sum_{J=1}^8 T_{ijkl}^{0J} \Delta C_{klmn}^I \right\} = E_{ij} \quad (\text{VII} - 77)$$

La propriété d'isotropie supposée permet d'écrire :

$$\Delta C_{klmn}^I = \Delta \lambda \delta_{kl} \delta_{mn} + \Delta \mu \left(\delta_{km} \delta_{ln} + \delta_{kn} \delta_{lm} \right) \quad (\text{VII} - 78)$$

où δ_{kl} est le symbole de KRONECKER tel que :

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq l \\ 1 & \text{si } k = l \end{cases}$$

avec $\Delta \lambda = \lambda^I - \lambda^{II}$ et $\Delta \mu = \mu^I - \mu^{II}$

(VII - 79)

on a alors :

$$\epsilon_{mn} \left(V \delta_{mi} \delta_{nj} + \delta_{mn} \left(\sum_{J=0}^8 T_{ijkl}^{0J} \right) + \Delta \mu \sum_{J=0}^8 \left(T_{ijmn}^{0J} + T_{ijnm}^{0J} \right) \right) = V E_{ij} \quad (\text{VII} - 80)$$

où $J = 0$ correspond à l'inclusion située au centre du cube et $V = V_1$

Nous pouvons écrire ce système sous forme matricielle, en utilisant la convention introduite par VOIGT [21] qui permet d'écrire des tenseurs symétriques d'ordre 2 sous forme matricielle (à 6 composantes), et des tenseurs symétriques d'ordre 4 sous forme de matrice (6 x 6) :

$$B \epsilon = V E \quad (\text{VII} - 81)$$

où B n'est autre que l'inverse de $V A^I$

$$B^{-1} = V A^I \quad (\text{VII} - 82)$$

et en écrivant B sous forme matricielle d'élément B_{ij} , que nous donnons dans le système "cristallographique du réseau cubique" considéré pour la répartition des inclusions, toutes les sommations telles que \sum_J portent sur J de 0 à 8 :

$$B_{11} = V + \Delta \lambda \sum_J T_{11mm}^{0J} + 2 \Delta \mu \sum_J T_{1111}^{0J}$$

$$B_{12} = \Delta \lambda \sum_J T_{11mn}^{0J} + 2 \Delta \mu \sum_J T_{1122}^{0J}$$

$$B_{13} = \Delta \lambda \sum_J T_{11mn}^{0J} + 2 \Delta \mu \sum_J T_{1133}^{0J}$$

$$B_{14} = 2 \Delta \mu \sum_J \left(T_{1123}^{0J} + T_{1132}^{0J} \right); \quad B_{15} = 2 \Delta \mu \sum_J \left(T_{1123}^{0J} + T_{1131}^{0J} \right); \quad B_{16} = 2 \Delta \mu \sum_J \left(T_{1112}^{0J} + T_{1121}^{0J} \right)$$

$$B_{21} = \Delta \lambda \sum_J T_{22mm}^{0J} + 2 \Delta \mu \sum_J T_{2211}^{0J}$$

$$B_{22} = \Delta \lambda \sum_J T_{22mm}^{0J} + 2 \Delta \mu \sum_J T_{2222}^{0J} + V$$

$$B_{23} = \Delta \lambda \sum_J T_{22mn}^{0J} + 2 \Delta \mu \sum_J T_{2233}^{0J}$$

$$B_{24} = 2 \Delta \mu \sum_J \left(T_{2223}^{0J} + T_{2232}^{0J} \right); \quad B_{25} = 2 \Delta \mu \sum_J \left(T_{2213}^{0J} + T_{2231}^{0J} \right); \quad B_{26} = 2 \Delta \mu \sum_J \left(T_{2212}^{0J} + T_{2221}^{0J} \right)$$

$$B_{31} = \Delta\lambda \sum_J T_{33mm}^{0J} + 2\Delta\mu \sum_J T_{3344}^{0J}$$

$$B_{32} = \Delta\lambda \sum_J T_{33mm}^{0J} + 2\Delta\mu \sum_J T_{3322}^{0J}$$

$$B_{33} = V + \Delta\lambda \sum_J T_{33mm}^{0J} + 2\Delta\mu \sum_J T_{3333}^{0J}$$

$$B_{34} = 2\Delta\mu \sum_J (T_{3323}^{0J} + T_{3332}^{0J}); \quad B_{35} = 2\Delta\mu \sum_J (T_{3343}^{0J} + T_{3331}^{0J}); \quad B_{36} = 2\Delta\mu \sum_J (T_{3342}^{0J} + T_{3334}^{0J})$$

$$B_{41} = \Delta\lambda \sum_J T_{23mm}^{0J} + 2\Delta\mu \sum_J T_{2344}^{0J}$$

$$B_{42} = \Delta\lambda \sum_J T_{23mm}^{0J} + 2\Delta\mu \sum_J T_{2322}^{0J}$$

$$B_{43} = \Delta\lambda \sum_J T_{23mm}^{0J} + 2\Delta\mu \sum_J T_{2333}^{0J}$$

$$B_{44} = V + 2\Delta\mu \sum_J (T_{2323}^{0J} + T_{2332}^{0J})$$

$$B_{45} = 2\Delta\mu \sum_J (T_{2343}^{0J} + T_{2331}^{0J}); \quad B_{46} = 2\Delta\mu \sum_J (T_{2342}^{0J} + T_{2321}^{0J})$$

$$B_{51} = \Delta\lambda \sum_J T_{13mm}^{0J} + 2\Delta\mu \sum_J T_{1344}^{0J}$$

$$B_{52} = \Delta\lambda \sum_J T_{13mm}^{0J} + 2\Delta\mu \sum_J T_{1322}^{0J}$$

$$B_{53} = \Delta\lambda \sum_J T_{13mm}^{0J} + 2\Delta\mu \sum_J T_{1333}^{0J}$$

$$B_{54} = 2\Delta\mu \sum_J (T_{1323}^{0J} + T_{1332}^{0J})$$

$$B_{55} = V + 2\Delta\mu \sum_J (T_{1343}^{0J} + T_{1331}^{0J})$$

$$B_{56} = 2\Delta\mu \sum_J (T_{1342}^{0J} + T_{1321}^{0J})$$

$$B_{61} = \Delta\lambda \sum_J T_{12mm}^{0J} + 2\Delta\mu \sum_J T_{1244}^{0J}$$

$$B_{62} = \Delta\lambda \sum_J T_{12mm}^{0J} + 2\Delta\mu \sum_J T_{1222}^{0J}$$

$$B_{63} = \Delta\lambda \sum_J T_{12mm}^{0J} + 2\Delta\mu \sum_J T_{1233}^{0J}$$

$$B_{64} = 2\Delta\mu \sum_J (T_{1223}^{0J} + T_{1232}^{0J}); \quad B_{65} = 2\Delta\mu \sum_J (T_{1243}^{0J} + T_{1231}^{0J})$$

$$B_{66} = V + 2\Delta\mu \sum_J (T_{1242}^{0J} + T_{1221}^{0J})$$

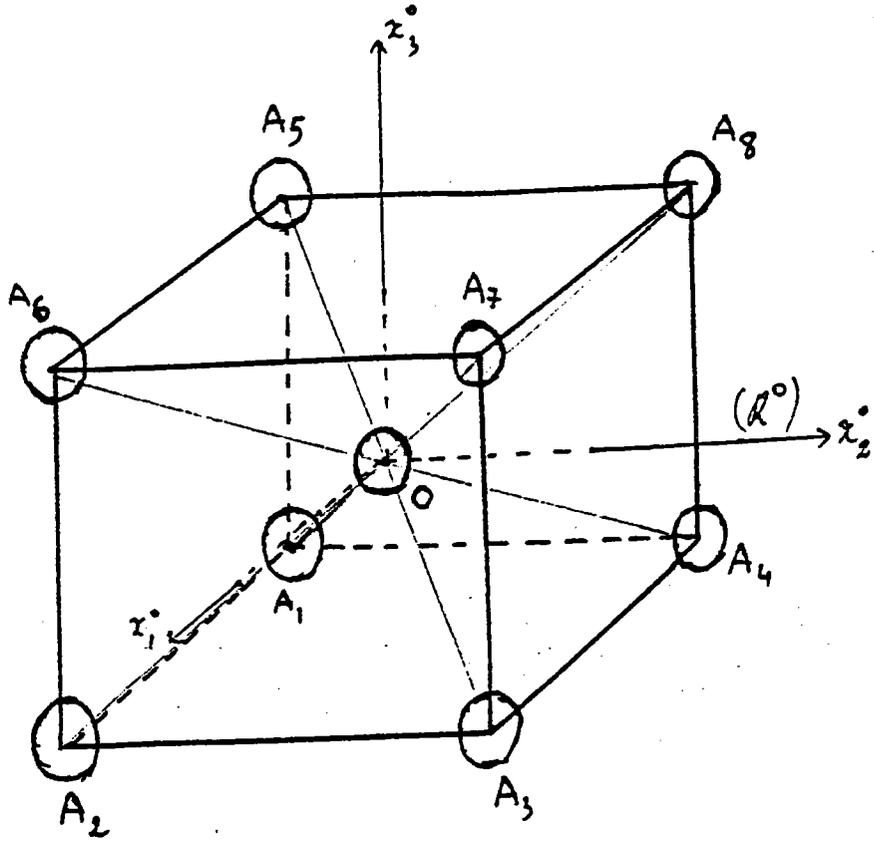


Fig VII-3

cellule d'hétérogénéité élémentaire

Les différents T_{ij}^{0j} pour $J = 0, 1, \dots, 8$, nécessaires pour obtenir les éléments B_{ij} de la matrice B ont été calculés au chapitre V , pour le cas isotrope de 2 inclusions sphériques, dans un système de coordonnées tel que l'axe x_3 coïncide avec la ligne des centres des 2 sphères.

Dans notre cas ici, les différents axes x_3 coïncident avec les différentes diagonales du cube; ce sont (fig. VII - 3) $A_1 A_7$, $A_2 A_8$, $A_3 A_5$ et $A_4 A_6$, et on prendra les deux autres axes dans un plan perpendiculaire à ces diagonales, ainsi :

A_1	A_7	est perpendiculaire au plan	$(A_2$	A_4	$A_5)$		
A_2	A_8	"	"	"	$(A_1$	A_3	$A_6)$
A_3	A_5	"	"	"	$(A_2$	A_4	$A_7)$
A_4	A_6	"	"	"	$(A_1$	A_3	$A_8)$

On prendra ensuite dans chaque plan une droite perpendiculaire à la diagonale correspondante, par exemple :

dans	$(A_2$	A_4	$A_5)$	on prendra	$\overrightarrow{A_2 A_4}$
dans	$(A_1$	A_3	$A_6)$	on prendra	$\overrightarrow{A_2 A_3}$
dans	$(A_2$	A_4	$A_7)$	" "	$\overrightarrow{A_2 A_4}$
dans	$(A_1$	A_3	$A_8)$	" "	$\overrightarrow{A_1 A_3}$

Enfin on prendra comme 3^{ème} axe, une droite appartenant au plan considéré et qui soit perpendiculaire à l'axe pris dans ce plan; par exemple on peut prendre successivement comme 3^{ème} axe la médiatrice relative au segment envisagé; ainsi si $A_{2,4}$ est le milieu de $A_2 A_4$, $A_{1,3}$ celui $A_1 A_3$ on a:

dans	$(A_2$	A_4	$A_5)$	on prendra comme 3 ^{ème} axe, une droite collinéaire à	$\overrightarrow{A_5 A_{2,4}}$
"	$(A_1$	A_3	$A_6)$	" " " " " " " "	$\overrightarrow{A_6 A_{1,3}}$
"	$(A_2$	A_4	$A_7)$	" " " " " " " "	$\overrightarrow{A_7 A_2}$
"	$(A_1$	A_3	$A_8)$	" " " " " " " "	$\overrightarrow{A_8 A_1}$

Nous exprimons les différents vecteurs unitaires des 8 systèmes de coordonnées correspondant à deux inclusions, telles celles centrées par exemple en O et A₁ (respect. en O et A₂, ..., en O et A₈), dans le repère R⁰ d'origine O, d'axes parallèles aux arêtes du cube (repère cristallographique); et on appellera R¹, R², ..., R⁸ les repères directs (déterminant de matrice de passage = 1), correspondant aux paires d'inclusions centrées respectivement en O et A₁, en O et A₂, ..., en O et A₈; alors les matrices de passage de R¹ à R⁰, de R² à R⁰, ..., de R⁸ à R⁰, qu'on notera respectivement α¹, α², ..., α⁸, sont données par :

$$\alpha^1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$\alpha^5 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$\alpha^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$\alpha^6 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$\alpha^3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$\alpha^7 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$\alpha^4 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$\alpha^8 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Ainsi donc si on note σ_{ijkl}^{0J} (pour $J = 1, \dots, 8$) les composantes du tenseur d'interaction, exprimées dans le repère R^J , alors les composantes du même tenseur exprimées dans le repère R^0 (cristallographique) s'écrivent, par application du critère de tensorialité.

$$\forall J=0,1,\dots,8 : T_{pqmn}^{0J} = \alpha_{pi}^J \alpha_{qj}^J \alpha_{mk}^J \alpha_{nl}^J \sigma_{ijkl}^{0J} \quad (\text{VII} - 85)$$

Pour le calcul des termes T_{pqmn}^{00} , nous les obtenons à partir des formules (V - 83), et les termes σ_{ijkl}^{0J} à partir de (V - 99) nous avons dans ces conditions :

$$T_{1111}^{00} = T_{2222}^{00} = T_{3333}^{00} = V \frac{4 - 10\nu^e}{30\mu^e(1-\nu^e)}$$

$$T_{1122}^{00} = T_{2211}^{00} = T_{1133}^{00} = T_{3311}^{00} = T_{2233}^{00} = T_{3322}^{00} = \frac{-V}{30\mu^e(1-\nu^e)} \quad (\text{VII} - 86)$$

$$T_{2323}^{00} = T_{2332}^{00} = T_{1313}^{00} = T_{1331}^{00} = T_{1212}^{00} = T_{1221}^{00} = V \frac{4 - 5\nu^e}{30\mu^e(1-\nu^e)}$$

et pour les termes T^{0J} on obtient, (pour $J = 1, \dots, 8$) :

$$\text{en posant } A = \frac{V^2}{l^3} \cdot \frac{1}{16\pi\mu^e(1-\nu^e)}$$

$$\text{avec } l = OA_1 = OA_2 = \dots = OA_8 \quad (\text{VII} - 87)$$

$$\text{et } k = \frac{2r^2}{l^2} \quad , \quad r \text{ rayon de chaque inclusion sphérique,}$$

$$T_{1111}^{01} = \dots = T_{1111}^{08} = \frac{A}{3} \left(4 - \frac{28}{5} k^2 \right)$$

$$T_{2222}^{01} = \dots = T_{2222}^{08} = \frac{A}{3} \left(4 - \frac{28}{5} k^2 \right)$$

$$T_{3333}^{01} = \dots = T_{3333}^{08} = \frac{A}{3} \left(4 - \frac{28}{5} k^2 \right)$$

$$T_{1122}^{01} = \dots = T_{1122}^{08} = \frac{A}{3} \left(-2 + \frac{14}{5} k^2 \right)$$

$$T_{2211}^{01} = \dots = T_{2211}^{08} = \frac{A}{3} \left(-2 + \frac{14}{5} k^2 \right)$$

$$T_{2233}^{01} = \dots = T_{2233}^{08} = \frac{A}{3} \left(-2 + \frac{14}{5} k^2 \right)$$

$$T_{3322}^{01} = \dots = T_{3322}^{08} = \frac{A}{3} \left(-2 + \frac{14}{5} k^2 \right)$$

$$T_{1133}^{01} = \dots = T_{1133}^{08} = \frac{A}{3} \left(-2 + \frac{14}{5} k^2 \right)$$

$$T_{3311}^{01} = \dots = T_{3311}^{08} = \frac{A}{3} \left(-2 + \frac{14}{5} k^2 \right)$$

$$T_{2323}^{01} = \dots = T_{2323}^{08} = \frac{A}{3} \left(-2 + \frac{14}{5} k^2 \right)$$

(VII - 89)

$$T_{1313}^{01} = \dots = T_{1313}^{08} = \frac{A}{3} \left(-2 + \frac{14}{5} k^2 \right)$$

$$T_{2332}^{01} = \dots = T_{2332}^{08} = \frac{A}{3} \left(-2 + \frac{14}{5} k^2 \right)$$

$$T_{1331}^{01} = \dots = T_{1331}^{08} = \frac{A}{3} \left(-2 + \frac{14}{5} k^2 \right)$$

$$T_{1212}^{01} = \dots = T_{1212}^{08} = \frac{A}{3} \left(-2 + \frac{14}{5} k^2 \right)$$

$$T_{1221}^{01} = \dots = T_{1221}^{08} = \frac{A}{3} \left(-2 + \frac{14}{5} k^2 \right)$$

Tous les autres termes T^{0j} , pour $j = 0, \dots, 8$, sont nuls.

On en déduit :

$$\sum_{j=0}^8 T_{11mm}^{0j} = \sum_{j=0}^8 T_{22mm}^{0j} = \sum_{j=0}^8 T_{33mm}^{0j} = V \frac{1-2\nu^e}{6\mu^e(1-\nu^e)}$$

(VII - 89)

et nous obtenons alors pour la matrice B (VII - 71)

$$B_{11} = V + \Delta \lambda \left\{ V \frac{1-2\nu^e}{6\mu^e(1-\nu^e)} \right\} + 2 \Delta \mu \left\{ V \frac{7-10\nu^e}{30\mu^e(1-\nu^e)} + \frac{8A}{3} \left(4 - \frac{28}{5} k^2 \right) \right\}$$

$$B_{12} = A \lambda \left\{ V \frac{1-2\nu^e}{6\mu^e(1-\nu^e)} \right\} + 2 \Delta \mu \left\{ -V \frac{1}{30\mu^e(1-\nu^e)} + \frac{8A}{3} \left(-2 + \frac{14}{5} k^2 \right) \right\}$$

forme analogue à la matrice des constantes élastiques pour des cristaux du système cubique, résultat auquel on pouvait s'attendre compte tenu de la distribution choisie pour les inclusions sphériques.

VII - 4 - 3 Détermination du tenseur A^I de localisation

Le tenseur A^I défini par (VII - 5) apparaît comme le tenseur inverse de B, qu'on vient de calculer, puisque l'on a

$$\begin{aligned} \varepsilon &= A^I E \quad \text{et} \quad B \varepsilon = \nu E \\ \Rightarrow A^I &= B^{-1} \nu \end{aligned} \tag{VII - 91}$$

Vu la forme particulière du tenseur B (VII - 87), son inverse se calcule facilement.

Le déterminant Δ de la matrice B se calcule simplement: on a:

$$\Delta = (B_{44})^3 \left\{ B_{11}^3 + 2 B_{12}^3 - 3 B_{11} (B_{12})^2 \right\} \tag{VII - 92}$$

ou encore en posant $B_{11}^3 + 2 B_{12}^3 - 3 B_{11} B_{12}^2 = \delta$ (VII - 93)

alors $\Delta = (B_{44})^3 \delta$ (VII - 94)

et on obtient pour la matrice A^I qui est la même forme que B :

$$A_{11}^I = \frac{\nu}{\delta} (B_{11}^2 - B_{12}^2)$$

$$A_{12}^I = \frac{\nu}{\delta} (B_{12}^2 - B_{11} B_{12})$$

$$A_{13}^I = A_{21}^I = A_{31}^I = A_{32}^I = A_{12}^I \tag{VII - 95}$$

$$A_{22}^I = A_{33}^I = A_{11}^I$$

$$A_{44}^I = A_{55}^I = A_{66}^I = \frac{\nu}{B_{44}}$$

Ainsi donc ayant explicitement les éléments du tenseur localisation de λ_{ijkl}^c (Amoré) A^I , nous pouvons en déduire, à partir de la formule (VII - 76) :

$$C_{ijmn}^{eff} = C_{ijmn}^M + f (C_{ijkl}^I - C_{ijkl}^M) A_{klmn}^I \quad (VII - 96)$$

les valeurs de λ_{ijkl}^{eff} et μ_{ijkl}^{eff} , pour une fraction volumique f donnée, et en introduisant dans A^I les valeurs trouvées pour un site pour μ_1^c et λ_1^c

VII - 5 Résultats et conclusions

Dans le cadre du modèle choisi avec les hypothèses simplificatrices qu'on a supposées, nous allons évaluer les valeurs de $\mu_{ij}^c = C_{44}^c$ pour une fraction volumique f donnée et comparer ce résultat à celui obtenu pour un site, ainsi qu'aux approximations limites dues à VOIGT et REUSS; nous allons enfin évaluer le taux d'anisotropie du milieu homogène équivalent pour une fraction volumique f de la phase I donnée.

VII - 5 - 1 Détermination du volume V , du rayon r de chaque inclusion

et du rapport $\frac{\rho^2}{R} = \frac{2r^2}{\rho^2}$, en fonction de f

Le modèle adopté consiste dans une distribution uniforme et régulière d'inclusions sphériques suivant un réseau cubique centré, on peut donc écrire que la fraction volumique f affectée à la phase I est celle qui correspond au volume de la "cellule d'hétérogénéité élémentaire", c'est-à-dire ici à un cube d'arête a (que nous prendrons égale à l'unité): nous pouvons alors écrire :

$$f = \frac{V + 8 \frac{V}{8}}{a^3} = \frac{2V}{a^3} \quad (VII - 97)$$

pour $a = 1 \rightarrow V = \frac{f}{2} \quad (VII - 98)$

Pour le rayon r de l'inclusion, on a:

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 \Rightarrow r = a \left(\frac{3f}{8\pi} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (VII - 99)$$

et pour $a = 1 \rightarrow r = \left(\frac{3f}{8\pi} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (VII - 100)$

La distance l séparant les centres de deux inclusions ($I = 0$,

$J = 1, \dots, 8$) est donnée par $l = a \frac{\sqrt{3}}{2}$

et pour $a = 1 \rightarrow l = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (VII - 101)

De plus, les inclusions devront être extérieures les unes aux autres, nous devons avoir :

$l > 2r$, d'où en tenant compte des relations (VII - 100) et (VII - 101) :

$$f \leq 0.68 \quad \text{(VII - 102)}$$

Nous ferons en conséquence varier f de 0 à 0.6.

Enfin le coefficient k^2 qui intervient dans le calcul des composantes de B (VII - 89) est donné par :

$$k^2 = \frac{2r^2}{\rho^2} = \frac{8}{3} \left(\frac{3\rho}{8\pi} \right)^{\frac{2}{3}} \quad \text{(VII - 103)}$$

VII - 5 - 2 Détermination du coefficient μ_2^{eff} dans le modèle à N sites (N ici = 9)

Le coefficient μ_2^e est donné par application de (VII - 96)

$$\mu_2^e = C_{1212}^{\text{eff}} = C_{1212}^M + f \left(C_{12mn}^I - C_{12mn}^M \right) A_{mn12}^I \quad \text{(VII - 104)}$$

ou encore :
$$\mu_2^e = \mu^M + f \left(C_{12mn}^I - C_{12mn}^M \right) A_{mn12}^I \quad \text{(VII - 105)}$$

et en tenant compte de l'hypothèse d'isotropie des inclusions et matrices, on obtient :

$$\mu_2^e = \mu^M + f \left(\mu^I (\delta_{m_1} \delta_{n_2} + \delta_{m_2} \delta_{n_1}) - \mu^M (\delta_{m_1} \delta_{n_2} + \delta_{m_2} \delta_{n_1}) \right) A_{mn12}^I$$

(VII - 106)

d'où
$$\mu_2^e = \mu^M + f (\mu^I - \mu^M) (A_{1212}^I + A_{2112}^I)$$

le terme $(A_{212}^I + A_{112}^I)$ est donné à partir de (VII - 91) et (VII - 95) est égal à $\frac{V}{B_{44}}$, ou en tenant compte de la valeur de B_{44} (VII - 89)

$$A_{44} = \frac{30\mu_1^e (1-\nu^e) V}{30\mu_1^e (1-\nu^e) V + 4A^\mu V (4-5\nu^e) + 320A\mu_1^e (1-\nu^e) \Delta\mu \left(-L + \frac{14}{5} \frac{B^2}{L}\right)} \quad (\text{VII} - 107)$$

où $A^\mu = \mu^I - \mu_1^e$
 et $A = \frac{V^2}{l^3} \cdot \frac{1}{16\pi\mu_1^e (1-\nu^e)} = \frac{f^2}{\mu_1^e} \frac{1}{1-\nu^e} \approx 0.029$ (VII - 108)

VII - 5 - 3 Applications - anisotropie et conclusions

Nous prendrons pour μ^M et μ^I les valeurs données par (VII - 52), c'est-à-dire :

$$\mu^I = 0.15 \cdot 10^{12} \text{ N/m}^2$$

$$\mu^M = 0.15 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

pour ν , nous prendrons $\nu = 0.2$

Les résultats sont résumés dans le tableau VII - 2 et représentés par (fig. VII - 3), sur ce tableau et cette figure, nous avons également représenté les limites données par l'approximation de VOIGT et REUSS; c'est-à-dire si nous notons μ_V^e et μ_R^e ces approximations, nous avons :

$$\mu_V^e = \mu^M (1-f) + f \mu^I \quad \text{et} \quad \frac{1}{\mu_R^e} = \frac{1-f}{\mu^M} + \frac{f}{\mu^I} \quad (\text{VII} - 109)$$

et μ_R^e est tel que : $\frac{1}{\mu_R^e} = \frac{1-f}{\mu^M} + \frac{f}{\mu^I}$ (VII - 110)

d'où $\mu_R^e = \frac{\mu^I \mu^M}{\mu^I (1-f) + \mu^M f}$ (VII - 111)

et en posant $H = \frac{\mu^I - \mu^M}{\mu^M} \Rightarrow 1+H = \frac{\mu^I}{\mu^M}$ (VII - 112)

on obtient en définitive :

$$\mu_V^e = \mu^M (1 + Hf) \Rightarrow \frac{\mu_V^e}{\mu^M} = 1 + Hf \quad (\text{VII} - 113)$$

$$\mu_R^e = \frac{\mu^I}{H(1-f) + 1} \Rightarrow \frac{\mu_R^e}{\mu^M} = \frac{1+H}{1+H-Hf} \quad (\text{VII} - 114)$$

Dans le cas numérique envisagé $\mu^I/\mu^M \approx 100$, on a $1 + H = 100$ (VII - 115)

Nous voyons que $\frac{\mu_V^e}{\mu^M}$ varie linéairement en fonction de f , alors que $\frac{\mu_R^e}{\mu^M}$ varie comme $-\frac{1}{f}$.

Les résultats pour les différents modèles sont consignés dans les tableaux VII - 3 et VII - 4 et dans les graphiques Fig. VII - 4 et VII -

En conclusion, nous voyons que les modèles de VOIGT et REUSS constituent pour les constantes effectives des limites extrêmes, l'une supérieure, l'autre inférieure, bien trop éloignées de la réalité, beaucoup mieux décrite par les schémas à 1 ou N sites: de plus, nous voyons dans le cadre de notre modélisation que pour la détermination des constantes effectives (ou celle du rapport α donnant) le modèle à 2 sites n'apporte pas de grande correction au résultat donné par le modèle à 1 site, au moins pour la structure envisagée; et surtout avec les hypothèses simplificatrices supposées dans les calculs analytiques (VII - 4 - 2 et VII - 4 - 3); nous estimons que ce calcul analytique approché donne des valeurs inférieures à la réalité que nous comptons approcher beaucoup mieux dans des publications prochaines à partir de calculs numériques excluant l'hypothèse d'isotropie. Le modèle à plusieurs sites donne de plus, comme nous allons le voir, une idée sur l'anisotropie de répartition à partir des C_{eff} calculés analytiquement, ce dont était incapable le modèle à 1 site.

Etude de l'anisotropie

Reprenons la formule donnant l'expression des constantes effectives du milieu homogène équivalent (VII - 115) :

$$C_{ijmn}^{eff} = C_{ijmn}^M + f (C_{ijkl}^I - C_{ijkl}^M) A_{klmn}^I \quad (VII - 116)$$

Dans notre modèle, matrice et inclusions sont supposées isotropes donc, dans cette relation (VII - 116), C^I et C^M sont isotropes: et l'anisotropie des C^{eff} , modules du milieu homogène équivalent ne pourrait parvenir que d'une anisotropie du tenseur A^I : A^I ayant la forme du système cubique, on peut évaluer le facteur d'anisotropie en évaluant

le rapport $\frac{2C_{44}^e}{C_{11}^e - C_{12}^e}$. Remarquons encore que pour évaluer A^I , on a besoin de déterminer les composantes des tenseurs T^{II} et T^{JJ} en utilisant les constantes effectives C^e , ainsi que les variations $\Delta C = C^I - C^e$ donc l'anisotropie de C^e est liée à celle de A^I .

Evaluons le facteur d'anisotropie :
$$a = \frac{2C_{44}^e}{C_{11}^e - C_{12}^e}$$

A partir de (VII - 116), nous pouvons écrire :

$$C_{1111}^e = C_{1111}^M + f \left\{ \Delta C_{1111} A_{1111}^I + \Delta C_{1122} A_{2211}^I + \Delta C_{1133} A_{3311}^I \right\} \quad (VII - 117)$$

C^I et C^M étant isotropes, nous avons $\Delta C_{ijkl} = (\lambda^I - \lambda^M) \delta_{ij} \delta_{kl} + (\mu^I - \mu^M) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$

d'où

$$C_{1111}^e = \lambda^M + 2\mu^M + f(\lambda^I - \lambda^M)(A_{1111}^I + 2A_{1122}^I) + 2f(\mu^I - \mu^M)A_{1111}^I \quad (VII - 118)$$

de même pour C_{1122}^e nous avons :

$$C_{1122}^e = \lambda^M + f(\lambda^I - \lambda^M) + (2A_{1122}^I + A_{2222}^I) + 2f(\mu^I - \mu^M)A_{1122}^I \quad (VII - 119)$$

et enfin, nous avons :

$$C_{1212}^e = \mu^M + f(\mu^I - \mu^M)(A_{1212}^I + A_{2112}^I) \quad (\text{VII} - 120)$$

et en revenant aux notations du paragraphe 4 et en posant : $\Delta\lambda = \lambda^I - \lambda^M$, $\Delta\mu = \mu^I - \mu^M$

$$C_{11}^e = \lambda^M + 2\mu^M + f\Delta\lambda(2A_{12}^I + A_{11}^I) + 2f\Delta\mu A_{11}^I \quad (\text{VII} - 121)$$

$$C_{12}^e = \lambda^M + f\Delta\lambda(2A_{12}^I + A_{22}^I) + 2f\Delta\mu A_{12}^I \quad (\text{VII} - 122)$$

$$C_{44}^e = \mu^M + f\Delta\mu A_{44}^I \quad (\text{VII} - 123)$$

d'où pour le facteur d'anisotropie, en tenant compte des propriétés et symétrie des termes A^I

$$a = \frac{2C_{44}^e}{C_{11}^e - C_{12}^e} = \frac{\mu^M + f\Delta\mu A_{44}^I}{\mu^M + f\Delta\mu(A_{11}^I - A_{12}^I)} \quad (\text{VII} - 124)$$

et en utilisant le paramètre $H = \frac{\Delta\mu}{\mu^M}$, il vient :

$$a = \frac{1 + fH A_{44}^I}{1 + fH(A_{11}^I - A_{12}^I)} \quad (\text{VII} - 125)$$

les termes A_{11}^I , A_{12}^I , et A_{44}^I étant donnés par les relations (VII - 95); nous avons aussi :

$$A_{44}^I = V \cdot \frac{1}{B_{44}} \quad \text{et} \quad A_{11}^I - A_{12}^I = V \frac{B_{11}^2 - 2B_{12}^2 + B_{11}B_{12}}{B_{11}^3 + 2B_{12}^3 - 3B_{11}B_{12}^2} \quad (\text{VII} - 126)$$

B_{11} , B_{12} et B_{44} étant donnés par les relations (VII - 99) en fonction de la fraction volumique, de μ^e et λ^e dont nous prendrons les valeurs données par le schéma à un site.

Nous obtenons dans ces conditions les résultats, résumés par le tableau VII - 5, qu'on a obtenus pour :

$$\begin{aligned} \mu^I &= 0.15 \times 10^{12} \text{ N.m}^{-2}, & \mu^M &= 0.15 \times 10^{10} \text{ N.m}^{-2} \\ \lambda^I &= 10^{11} \text{ N.m}^{-2}, & \lambda^M &= 10^9 \text{ N.m}^{-2}, & \nu^I &= \nu^M = 0.2 \end{aligned}$$

En conclusion alors que le schéma self-consistent à 1 site ne donne pas de renseignement sur l'anisotropie du matériau hétérogène pour une telle répartition (l'anisotropie étant dans ce cas égal à 1), le modèle à N sites, malgré les hypothèses simplificatrices "d'isotropie" que nous avons supposées, permet de conclure à l'anisotropie du composite due à l'existence d'inclusions: le modèle à un site est donc insuffisant pour pouvoir étudier l'anisotropie de répartition des matériaux hétérogènes et déterminer le facteur d'anisotropie: il est nécessaire d'adopter le schéma à plusieurs sites et de tenir compte de l'effet de paire pour pouvoir être renseigné sur une telle anisotropie.

f	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$v = \frac{f}{2}$	0	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3
μ^M (matrice)	0.15×10^{10}	0.15×10^{10}	0.15×10^{10}	0.15×10^{10}	0.15×10^{10}	0.15×10^{10}	0.15×10^{10}
μ_R^e (Reuss)	μ^M	0.166×10^{10}	0.187×10^{10}	0.213×10^{10}	0.248×10^{10}	0.297×10^{10}	0.369×10^{10}
μ_1^e (1 site)	μ^M	0.186×10^{10}	0.246×10^{10}	0.357×10^{10}	0.625×10^{10}	1.5×10^{10}	3.585×10^{10}
μ_2^e (2 sites)	μ^M	0.188×10^{10}	0.257×10^{10}	0.389×10^{10}	0.707×10^{10}	1.717×10^{10}	3.98×10^{10}
μ_V^e (Voigt)	μ^M	1.63×10^{10}	3.12×10^{10}	4.605×10^{10}	6.09×10^{10}	7.57×10^{10}	9.06×10^{10}
μ^I (inclusion)	15×10^{10}	15×10^{10}	15×10^{10}	15×10^{10}	15×10^{10}	15×10^{10}	15×10^{10}

Tableau VII - 3

Variation du module de cisaillement μ^e en fonction de la fraction volumique f dans les différents modèles.

pour $\frac{\mu^I}{\mu^M} = 100$ (les μ sont donnés en N/m^2)

f	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$x^M = \frac{\mu^M}{\mu}$	1	1	1	1	1	1	1
$x^R = \frac{\mu_R^e}{\mu^M}$ (Reuss)	1	1.12	1.24	1.42	1.65	1.98	2.46
$x_1^e = \frac{\mu_1^e}{\mu^M}$ (1 site)	1	1.24	1.64	2.38	4.17	10	23.9
$x_1^e = \frac{\mu_1^e}{\mu^M}$ (2 sites)	1	1.26	1.71	2.60	4.71	11.45	26.55
$x^v = \frac{\mu_v^e}{\mu^M}$ (Voigt)	1	10.86	20.8	30.7	40.6	50.5	60.4
$x^I = \frac{\mu^I}{\mu^M}$ (=100)	100	100	100	100	100	100	100

Tableau UII - 4

Variation du rapport du module de cisaillement effectif à celui de la matrice en fonction de la fraction volumique dans les différents modèles.

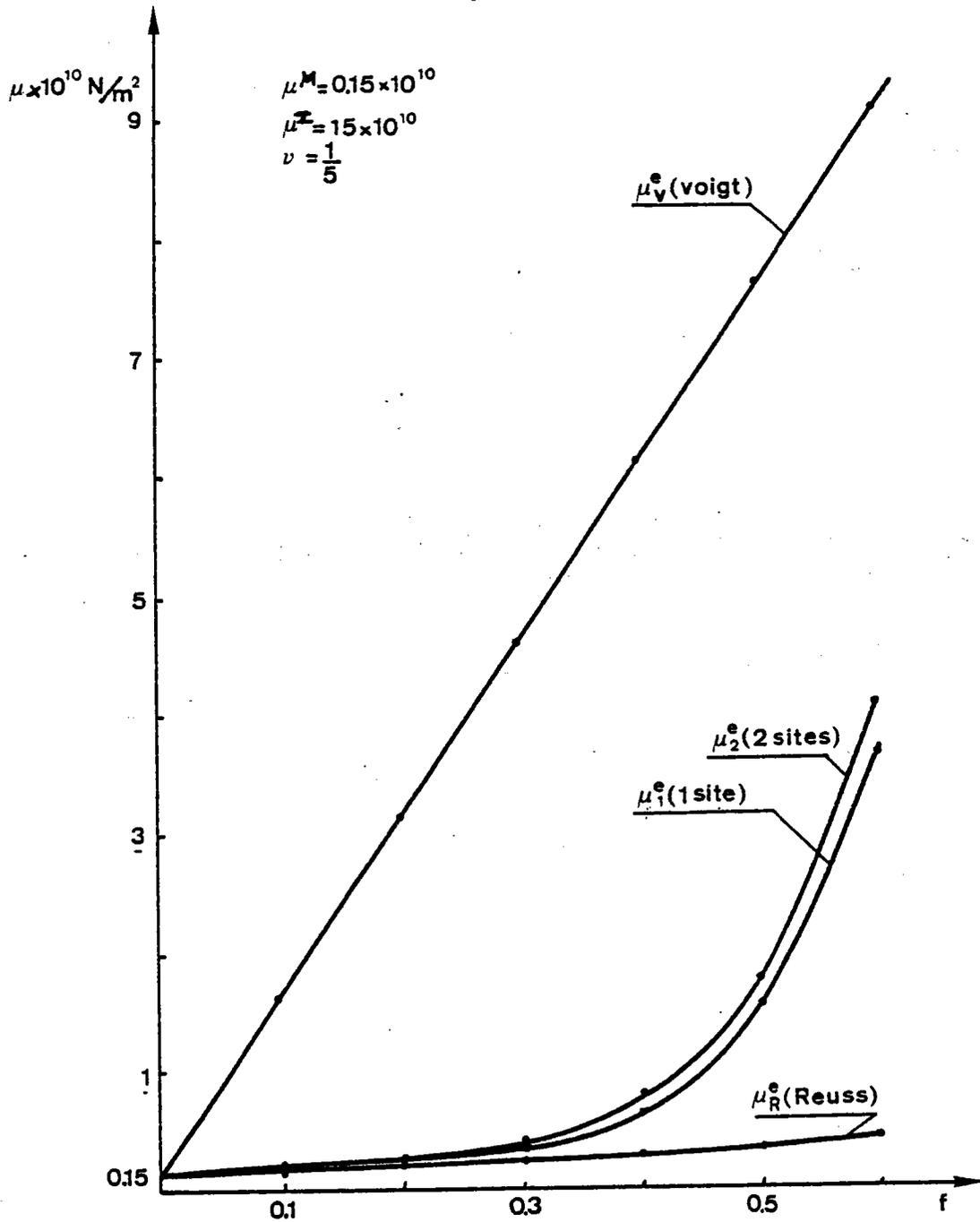


Fig. VII - 4 variation du module de cisaillement μ , en fonction de f, fraction volumique, pour différents modèles.

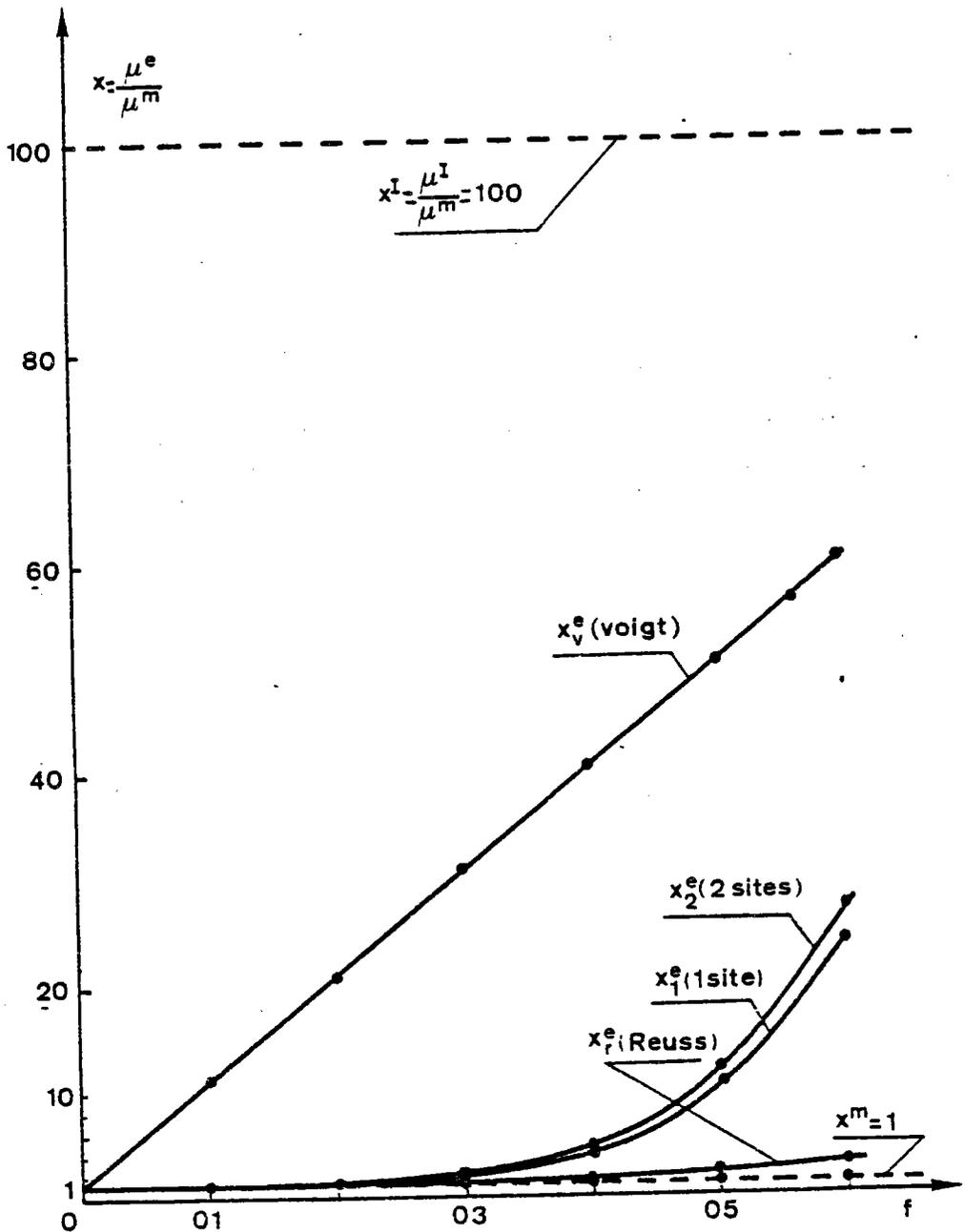


Fig. VII - 5 variation du rapport $x = \frac{\mu^e}{\mu^m}$ en fonction de la fraction volumique, pour différents modèles.

f	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
B_{11}	0	2.169	3.428	3.664	2.865	1.565
B_{12}	0	- 0.064	-0.165	- 0.219	- 0.183	- 0.095
A_{44}		0.026	0.036	0.054	0.024	0.211
$A_{11} - A_{12}$		0.022	0.028	0.038	0.065	0.150
α facteur d' anisotropie	1	1.031	1.11	1.22	1.31	1.35

Tableau VII - 5

Variation du facteur d'anisotropie A du composite en fonction de la fraction volumique f

UII - 6 BIBLIOGRAPHIE - CHAPITRE UII

- 1 - D. HULL " An Introduction to composite materials"
Cambridge Solid State Science Série 1981
- 2 - R.M. CHRISTENSEN "Mechanics of composite Materials"
J. WILEY NEW-YORK 1979
- 3 - J. WEISS & C. BORD "Les matériaux composites" Ed. Usine Nouvelle (1983)
- 4 - R. HILL J. Mech. Phys. Solids 13, 213 (1965)
- 5 - B. BUDIANSKY J. Mech. Phys. Solids 13, 223 (1965)
- 6 - W. VOIGT Wied. Ann. Mech. 10 226 (1930)
- 8 - R. HILL Proc. Roy. Soc. A. 65, 349 (1960)
- 9 - J.D. ESHELBY Progress in Solid Mechanics (1961) Ed. NORTH HOLLAND
AMSTERDAM
- 10 - A.V. HERSHEY J. Appl. Mech. 21, 236 (1954)
- 11 - E. KRONER Z. Phys. 151, 504 (1958)
- 12 - Z. HASHIN & S. STRICKMANN J. Mech. Phys. Solids 10, 343 (1962)
- 13 - P.H. DEIDERICH - R. ZELLER Phys. Stat. Sol. (b) 55 831 (1973)
- 14 - M.J. BERAN Statistical Continuum theories, Interscience Pub.
NEW-YORK 1968
- 15 - E. KRONER 15*** Colloque du groupe Français de Rhéologie
E.N.P.C. PARIS 1980
- 16 - J. MANDEL Proc. 11th Int. Cong. Appl. Mech. SPRINGER VERLAG
BERLIN 1980

17 - J.R. WILLIS J. Mech. Phys. Solids 25 185 (1977)

18 - E. KRONER J. Mech. Phys. Solids 25 137 (1977)

19 - M. BERVEILLER & A. ZAOUÏ 15*** Colloque du Groupe Français de Rhéologie
E.N.P.C. PARIS 1980

20 - P.R. MORRIS Int. J. Eng. Sci, 8 p.49 (1970)

21 - "Standards on piezoelectric crystals" (1949)

- VIII -

CONCLUSION GENERALE

Dans ce travail, nous avons donné une solution approchée pour les champs moyens dans le cas d'une paire d'inclusions plastiques et hétérogènes. L'approximation, nécessaire pour obtenir des calculs compacts et relativement simples, peut être justifiée par les calculs particuliers de MOSCHOVIDIS et MURA.

En fait, cette approximation n'est plus significative dans un certain nombre de cas lorsqu'il s'agit de la paire hétérogène; en effet dans ce cas la solution du problème passe par la résolution d'une équation intégrale pour laquelle il a été nécessaire de faire l'hypothèse d'une déformation moyenne uniforme dans les deux inclusions.

En première approximation, on peut penser que la solution obtenue est correcte lorsque l'ensemble des points d'une inclusion se trouve dans le même champ induit par l'autre. Ainsi pour deux fibres cylindriques infinies parallèles les résultats obtenus doivent être corrects alors qu'ils le seront moins dans le cas des mêmes fibres perpendiculaires; dans ce dernier cas la notion même de champ moyen dans l'inclusion n'a plus de sens: il faudrait alors approcher les champs dans chaque inclusion par des valeurs, constantes par morceaux, dans chaque inclusion.

Malgré ces restrictions, les résultats obtenus sont cependant significatifs dans un certain nombre de situations.

Les solutions obtenues ont été appliquées dans un premier temps pour décrire l'écroutissage lors de la transformation martensitique sous la forme d'une matrice d'écroutissage dont certains termes ont été évalués. Ces résultats devraient pouvoir être utilisés pour optimiser la structure de tels matériaux dont l'emploi se développe.

Dans un deuxième temps, nous avons proposé de manière globale une méthode permettant la prise en compte des effets à distance d'une collection de dislocations, effets qui se superposent aux actions de contact lors de l'écroutissage en plasticité par glissement cristallographique.

En toute rigueur l'état du monocristal décrit par la matrice d'écroutissage non locale devrait correspondre à l'état le plus relaxé possible compte tenu des seuils de plasticité actuels sur les différents systèmes de glissement; la prise en compte de cette relaxation partielle n'a pas été envisagée dans ce travail et le sera lors de travaux ultérieurs.

Dans la première partie, nous avons développé une nouvelle classe de schéma self-consistent permettant à partir de la solution de la paire d'inclusions hétérogènes de prendre en compte les effets de la texture de répartition sur les propriétés effectives globales et comparer à d'autres méthodes (homogénéisation, méthodes directes).

Appliquée ici au cas d'inclusions sphériques formant un réseau cubique, la méthode proposée se généralise évidemment à des situations plus complexes (grains ellipsoïdaux, réseaux cubique ou non); Dans le cas de réseaux autres que cubique on peut procéder par sommation sur des ensembles différents d'inclusions réparties dans chaque ensemble selon le même réseau. De même dans le cas de matériaux désordonnés on peut développer cette méthode en utilisant l'hypothèse ergodique et les techniques probabilistes associées aux probabilités de présence de la phase I en un point \vec{r} .

- IX -

ANNEXES

- Annexe A1 - Notation matricielle des tenseurs symétriques d'ordre 2 et 4
- Annexe A2 - Calcul de T^{ij} - intégration de t^{ij}
- Annexe A3 - Programmation et calculs numériques

Annexe - A1 -

Notation matricielle des tenseurs symétriques d'ordre 2 et 4

Pour résoudre les systèmes VII - 81 et VII - 91, au chapitre VII, nous avons utilisé une notation matricielle. Nous passons des éléments des matrices ε , E , A à ceux des tenseurs correspondants par la règle suivante, tirée de "Standards on piezoelectric crystals" (1949) et due à VOIGT.

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{sera noté}} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \frac{1}{2}\varepsilon_6 & \frac{1}{2}\varepsilon_5 \\ \frac{1}{2}\varepsilon_6 & \varepsilon_2 & \frac{1}{2}\varepsilon_4 \\ \frac{1}{2}\varepsilon_5 & \frac{1}{2}\varepsilon_4 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{12} & E_{22} & E_{23} \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{noté}]{\text{sera}} \begin{pmatrix} E_1 & E_6 & E_5 \\ E_6 & E_2 & E_4 \\ E_5 & E_4 & E_3 \end{pmatrix}$$

avec le tableau de correspondance

{	notation tensorielle :	11	22	33	23,32	31,13	21,12
	notation matricielle :	1	2	3	4	5	6

Pour le tenseur A_{ijkl} on a la règle :

$$A_{ijkl} = A_{mn} \quad \text{quand } m \text{ et } n \text{ ont pour valeur } 1, 2 \text{ ou } 3$$

$$2A_{ijkl} = A_{mn} \quad \text{quand } m \text{ ou } n \text{ a pour valeur } 4, 5 \text{ ou } 6$$

$$4A_{ijkl} = A_{mn} \quad \text{quand } m \text{ et } n \text{ ont pour valeur } 4, 5 \text{ ou } 6$$

Annexe - A2 -

Calcul de l'intégrale t^{1j}

Pour calculer la composante $t_{k_{emj}}^{ij}$ (V - 42), nous sommes ramenés à calculer l'intégrale (V - 75) suivante qu'on notera Δ :

$$\Delta = \int_0^{+\infty} \cos(kc) \left\{ \sin(ak) - ak \cos(ak) \right\} \left\{ \sin(bk) - bk \cos(bk) \right\} \frac{dk}{k^4} \quad A2 - 1$$

où, a, b et c sont indépendants de k et donnés par (V - 72, 73, 74) :

$$a = \left(a_1^2 \chi_1^2 + b_1^2 \chi_2^2 + c_1^2 \chi_3^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$b = \left(a_2^2 (\alpha_{1j} \chi_j)^2 + b_2^2 (\alpha_{2j} \chi_j)^2 + c_2^2 (\alpha_{3j} \chi_j)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad A2 - 2$$

$$c = \chi_1 R_1^0 + \chi_2 R_2^0 + \chi_3 R_3^0$$

avec $\chi_1 = \sin\theta \cos\varphi$, $\chi_2 = \sin\theta \sin\varphi$, $\chi_3 = \cos\theta$ (θ, φ, k

coordonnées sphériques de \vec{k}); R_1^0, R_2^0, R_3^0 les coordonnées de \vec{R}^0 (vecteur reliant les centres des 2 inclusions), α_{ij} la matrice de passage du repère principal d'inertie de l'inclusion J à celui de l'inclusion I.

Tout d'abord, l'intégrale Δ est bien convergente; en effet au voisinage de zéro la fonction à intégrer est équivalente à $\frac{2}{3} a^3 b^3 k^2$

qui reste borné quand k tend vers zéro, sa limite étant zéro; et quand k tend vers l'infini, la fonction à intégrer peut être majorée en valeur absolue par $\frac{(1+ak)(1+bk)}{k^4}$ qui est équivalente à $\frac{ab}{k^2}$ quand $k \rightarrow +\infty$ (a et b ne peuvent s'annuler) et comme l'exposant de k dans $\frac{ab}{k^2}$

est supérieur à 1, alors l'intégrale Δ est bien convergente quand $k \rightarrow +\infty$.

Pour intégrer A2 - 1, nous transformons les différents produits de 3 fonctions trigonométriques en somme de lignes trigonométriques, en utilisant les relations classiques suivantes :

$\forall \alpha, \beta$ et γ on a:

$$\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = \frac{1}{4} \left\{ \sin(\alpha + \beta - \gamma) + \sin(\beta + \gamma - \alpha) + \sin(\gamma + \alpha - \beta) - \sin(\alpha + \beta + \gamma) \right\}$$

$$\sin \alpha \sin \beta \cos \gamma = \frac{1}{4} \left\{ -\cos(\alpha + \beta - \gamma) + \cos(\beta + \gamma - \alpha) + \cos(\gamma + \alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta + \gamma) \right\}$$

$$\sin \alpha \cos \beta \cos \gamma = \frac{1}{4} \left\{ \sin(\alpha + \beta - \gamma) - \sin(\beta + \gamma - \alpha) + \sin(\gamma + \alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta + \gamma) \right\}$$

A2 - 3

$$\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = \frac{1}{4} \left\{ \cos(\alpha + \beta - \gamma) + \cos(\beta + \gamma - \alpha) + \cos(\gamma + \alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta + \gamma) \right\}$$

De plus, nous serons amenés à utiliser les intégrales classiques suivantes :

pour $n \neq 1$
$$\int \frac{\cos ax}{x^n} dx = -\frac{\cos ax}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{a}{n-1} \int \frac{\sin ax}{x^{n-1}} dx \quad \text{A2 - 4}$$

pour $n \neq 1$
$$\int \frac{\sin ax}{x^n} dx = -\frac{1}{n-1} \frac{\sin ax}{x^{n-1}} + \frac{a}{n-1} \int \frac{\cos ax}{x^{n-1}} dx \quad \text{A2 - 4}$$

et
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin dx}{x} dx = \begin{cases} +\frac{\pi}{2} & \text{si } d > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } d < 0 \end{cases} \quad \text{A2 - 5}$$

Nous intégrons A2 - 1 entre ξ et $+\infty$, et ensuite on élimine ξ ; en utilisant A2 - 3, l'intégrale A2 - 1 est alors la somme d'intégrales de la forme :

$$\int_{\xi}^{+\infty} \sin ak \sin bk \cos ck \frac{dk}{k^4} = \frac{1}{4} \left\{ \int_{\xi}^{+\infty} \frac{-\cos[(a+b-c)k]}{k^4} dk + \int_{\xi}^{+\infty} \frac{\cos[(b+c-a)k]}{k^4} dk + \int_{\xi}^{+\infty} \frac{\cos[(c+a-b)k]}{k^4} dk - \int_{\xi}^{+\infty} \frac{\cos[(a+b+c)k]}{k^4} dk \right\}$$

A2 - 6

par ailleurs, on a d'après A2 - 4 :

$$\int_{\xi}^{+\infty} \frac{\cos ak}{k^4} dk = \frac{\cos a\xi}{3\xi^3} - \frac{a}{6} \frac{\sin a\xi}{\xi^2} - \frac{a^2}{6} \frac{\cos a\xi}{\xi} + \frac{a^3}{6} \int_{\xi}^{+\infty} \frac{\sin ak}{k} dk \quad \text{A2 - 7}$$

Cette expression s'écrit en utilisant les développements limités des fonctions cos et sin au voisinage de zéro :

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\cos \alpha k}{k^4} dk = -\frac{\alpha^2}{2\varepsilon} + \frac{1}{3\varepsilon^3} + o(1) + \frac{\alpha^3}{6} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\sin \alpha k}{k} dk \quad A2 - 8$$

où $O(1)$ est la notation de Landau (fonction qui tend vers zéro avec ε)

Nous avons de même les résultats suivants :

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\sin \alpha k}{k^4} dk = \frac{\alpha}{2\varepsilon^2} - \frac{11}{36} \alpha^3 - \frac{\alpha^3}{6} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\cos \alpha k}{k} dk + o(1) \quad A2 - 9$$

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\cos \alpha k}{k^3} dk = \frac{1}{2\varepsilon^2} - \frac{3}{4} \alpha^2 - \frac{\alpha^2}{2} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\cos \alpha k}{k} dk + o(1) \quad A2 - 10$$

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\sin \alpha k}{k^3} dk = \frac{\alpha}{\varepsilon} - \frac{\alpha^2}{2} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\sin \alpha k}{k} dk + o(1) \quad A2 - 11$$

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\cos \alpha k}{k^2} dk = \frac{1}{\varepsilon} - \alpha \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\sin \alpha k}{k} dk + o(1) \quad A2 - 12$$

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\sin \alpha k}{k^2} dk = \alpha + \alpha \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\cos \alpha k}{k} dk + o(1) \quad A2 - 13$$

Dans ces conditions l'intégrale A2 - 1 se décompose en la somme de quatre intégrales et s'écrit :

$$\Delta = \int_{\varepsilon \rightarrow 0}^{+\infty} \frac{\sin(ak) \sin(bk) \cos(ck)}{k^4} dk - b \int_{\varepsilon \rightarrow 0}^{+\infty} \frac{\sin(ak) \cos(bk) \cos(ck)}{k^3} dk -$$

$$a \int_{\varepsilon \rightarrow 0}^{+\infty} \frac{\cos(ak) \sin(bk) \cos(ck)}{k^3} dk + ab \int_{\varepsilon \rightarrow 0}^{+\infty} \frac{\cos(ak) \cos(bk) \cos(ck)}{k^2} dk \quad A2 - 14$$

qu'on écrit encore sous la forme :

$$\Delta = \Delta_1 - b \Delta_2 - a \Delta_3 + ab \Delta_4 \quad A2 - 15$$

Posons alors $\alpha = a + b - c$, $\beta = b + c - a$, $\gamma = c + a - b$, $\delta = a + b + c$. A2 - 16

On déduit alors des relations (A2 - 8,9,10,11,12,13) et A2 - 6 :

$$\Delta_1 = \frac{ab}{\varepsilon} + o(1) - \frac{\alpha^3}{24} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\sin \alpha k}{k} dk + \frac{\beta^3}{24} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\sin \beta k}{k} dk + \frac{\gamma^3}{24} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\sin \gamma k}{k} dk - \frac{\delta^3}{24} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\sin \delta k}{k} dk$$

$$\Delta_4 = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{4} \left\{ \alpha \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\sin \alpha k}{k} dk + \beta \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\sin \beta k}{k} dk + \gamma \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\sin \gamma k}{k} dk + \delta \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\sin \delta k}{k} dk \right\} + o(1) \quad A2 - 17$$

A2 - 18

$$\Delta_2 = \frac{a}{\varepsilon} - \frac{\alpha^2}{8} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\sin \alpha k}{k} dk + \frac{\beta^2}{8} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\sin \beta k}{k} dk - \frac{\gamma^2}{8} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\sin \gamma k}{k} dk - \frac{\delta^2}{8} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\sin \delta k}{k} dk + o(1)$$

A2 - 19

$$\Delta_3 = \frac{b}{\varepsilon} - \frac{\alpha^2}{8} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\sin \alpha k}{k} dk - \frac{\beta^2}{8} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\sin \beta k}{k} dk + \frac{\gamma^2}{8} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\sin \gamma k}{k} dk - \frac{\delta^2}{8} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\sin \delta k}{k} dk + o(1)$$

A2 - 20

Finalement, en faisant la somme des termes qui interviennent dans le 2^{ème} membre de A2 - 15, les termes en $\frac{1}{\varepsilon}$ s'éliminent et il reste en faisant tendre ε vers zéro :

$$\Delta = \frac{1}{24} (-\alpha^3 + 3b\alpha^2 + 3a\alpha^2 - 6ab\alpha) \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha k}{k} dk +$$

$$\frac{1}{24} (\beta^3 - 3b\beta^2 + 3a\beta^2 - 6ab\beta) \int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta k}{k} dk +$$

$$\frac{1}{24} (\gamma^3 + 3b\gamma^2 - 3a\gamma^2 - 6ab\gamma) \int_0^{+\infty} \frac{\sin \gamma k}{k} dk +$$

$$\frac{1}{24} (-\delta^3 + 3b\delta^2 + 3a\delta^2 - 6ab\delta) \int_0^{+\infty} \frac{\sin \delta k}{k} dk$$

A2 - 21

Pour poursuivre les calculs, il est nécessaire de connaître les signes des quantités α , β , γ et δ , qui se déduisent de A2 - 16 et A2 - 2, pour pouvoir appliquer A2 - 5. Ceci est relativement simple dans le cas où les 2 inclusions sont des sphères.

Cas où les deux inclusions sont sphériques

Dans ce cas représenté par Fig. V - 2, il s'agit de calculer l'intégrale donnée par (V - 91) au chapitre V et qu'on déduit aussi directement de A2 - 1; a n'est autre dans ce cas que le rayon de la sphère (I), b celui de (J) et c donné par $R \cos \theta$, où R est la distance des centres des 2 sphères et θ l'angle (\vec{x}_1, \vec{k}) . De plus nous devons avoir $R > a + b$ et pour fixer les idées supposons $a > b$. Alors on peut classer par ordre croissant.

$$\begin{array}{ccccccc} -a-b & < & b-a & < & 0 & < & a-b & < & a+b \\ \hline -a-b & & b-a & & 0 & & a-b & & a+b \end{array}$$

l'intégrale Δ s'écrit dans ce cas (V - 91) \rightarrow

$$f(R, \theta) = \int_0^{+\infty} \cos(kR \cos \theta) \cdot (\sin ak - ak \cos ak) (\sin bk - bk \cos bk) \frac{dk}{k^4} \tag{A2 - 22}$$

On discute suivant le signe de α , β , γ , δ donnés par A2 - 16

* 1er cas $a - b < c < a + b$ A2 - 23

alors $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0, \delta > 0$ A2 - 24

et donc :

$$f(R, \theta) = \frac{\pi}{24} \left\{ c^3 - 3c(a^2 + b^2) + 2(a+b)(a^2 + b^2 + ab) \right\} \tag{A2 - 25}$$

ou encore puisque $c = R \cos \theta$:

$$f(R, \theta) = \frac{\pi}{24} \left\{ R^3 \cos^3 \theta - 3R \cos \theta (a^2 + b^2) + 2(a+b)(a^2 + b^2 + ab) \right\} \tag{A2 - 26}$$

et d'après le double inégalité A2 - 23 on a:

$$0 \leq a - b < R \cos \theta < a + b \tag{A2 - 27}$$

considérons $\theta_1 \in [0, \pi]$ et $\theta_2 \in [0, \pi]$ tels que :

$$\cos \theta_1 = \frac{a+b}{R} \quad A2 - 28$$

$$\cos \theta_2 = \frac{a-b}{R} \quad A2 - 29$$

alors la formule A2 - 25 est valable pour :

$$\theta_1 < \theta < \theta_2 \quad A2 - 30$$

* 2°°° cas $b - a < c < a - b \Leftrightarrow \theta_2 < \pi < \pi - \theta_1$ A2 - 31

d'où : $\alpha > 0, \beta < 0, \gamma > 0, \delta > 0$ A2 - 32

et alors $f(\theta, R) = \frac{\pi}{6} b^3$ A2 - 33

dans ce cas là le résultat est donc indépendant de θ .

* 3°°° cas $-a - b < c < b - a \Leftrightarrow \pi - \theta_2 < \theta < \pi - \theta_1$ A2 - 34

→ $\alpha > 0, \beta < 0, \gamma < 0, \delta > 0$ A2 - 35

et alors

$$f(\theta, R) = \frac{\pi}{24} \left\{ R^3 \cos^3 \theta + 3R \cos \theta (a^2 + b^2) + 2(a+b)(a^2 + b^2 - ab) \right\} \quad A2 - 36$$

* 4°°° cas $a + b < c \Leftrightarrow 0 \leq \theta < \theta_1 \Rightarrow \alpha < 0, \beta > 0, \gamma > 0, \delta > 0$ A2 - 36

ou

$c < -a - b \rightarrow \pi - \theta_1 < \theta \leq \pi \Rightarrow \alpha < 0, \beta < 0, \gamma < 0, \delta < 0$ A2 - 37

alors dans ces deux situations l'intégrale est nulle.

$$f(\theta, R) = 0$$

* Etude de la continuité

Nous allons montrer que $f(R, \theta)$ a même limite à droite et à gauche quand $\theta \rightarrow \theta_1$ et $\theta \rightarrow \theta_2$, de même $\theta \rightarrow \pi - \theta_1$, et enfin quand $\theta \rightarrow \pi - \theta_2$

$\theta \rightarrow \theta_1^+$ ($\theta > 0$), alors $c \rightarrow a + b$ et $c < a + b$, on doit retrouver dans cette situation la même limite pour $f(R, \theta)$ quand $c \rightarrow a + b$ avec $c > a + b$ en effet

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_1^-} f(R, \theta) = 0$$

$$\text{et } \lim_{\theta \rightarrow \theta_1^+} f(R, \theta) = \frac{\pi}{24} \left\{ (a+b)^3 - 3(a+b)(a^2+b^2) + 2(a+b)(a^2+b^2-ab) \right\} = 0$$

donc $f(R, \theta)$ continue en θ_1 . on montre de même que cette fonction est continue pour $\pi - \theta_1$, θ_2 et $\pi - \theta_2$.

Comme conséquence de la continuité on peut dire que dans les 4 cas examinés on peut remplacer les signes $<$ et $>$ par \ll et \gg . Ceci montre que l'on a considéré tous les cas possibles; on a en résumé

$$f(\theta, R) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq \theta \leq \theta_1 \\ \frac{\pi}{24} \left\{ R^3 \cos^3 \theta - 3R \cos \theta (a^2 + b^2) + 2(a+b)(a^2 + b^2 - ab) \right\} & \text{si } \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \\ \frac{\pi}{6} b^3 & \\ \frac{\pi}{24} \left\{ -R^3 \cos^3 \theta + 3R \cos \theta (a^2 + b^2) + 2(a+b)(a^2 + b^2 + ab) \right\} & \text{si } \pi - \theta_2 \leq \theta \leq \pi \\ 0 & \text{si } \pi - \theta_1 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

Cas particuliers

* si $a = b$

$$\rightarrow \theta_2 = \pi - \theta_1 = \frac{\pi}{2} \quad \text{et donc :}$$

$$f(R, \theta) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq \theta \leq \theta_1 \\ \frac{\pi}{24} \left(R^3 \cos^3 \theta - 6R a^2 \cos \theta + 4a^3 \right) & \text{si } \theta_1 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{24} \left(-R^3 \cos^3 \theta + 6R a^2 \cos \theta + 4a^3 \right) & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi - \theta_1 \\ 0 & \text{si } \pi - \theta_1 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

* si $a = b$ et $R = a + b$ (les 2 inclusions sont en contact) et de même rayon

alors $\theta_1 = 0$ ($\cos \theta_1 = 1$)

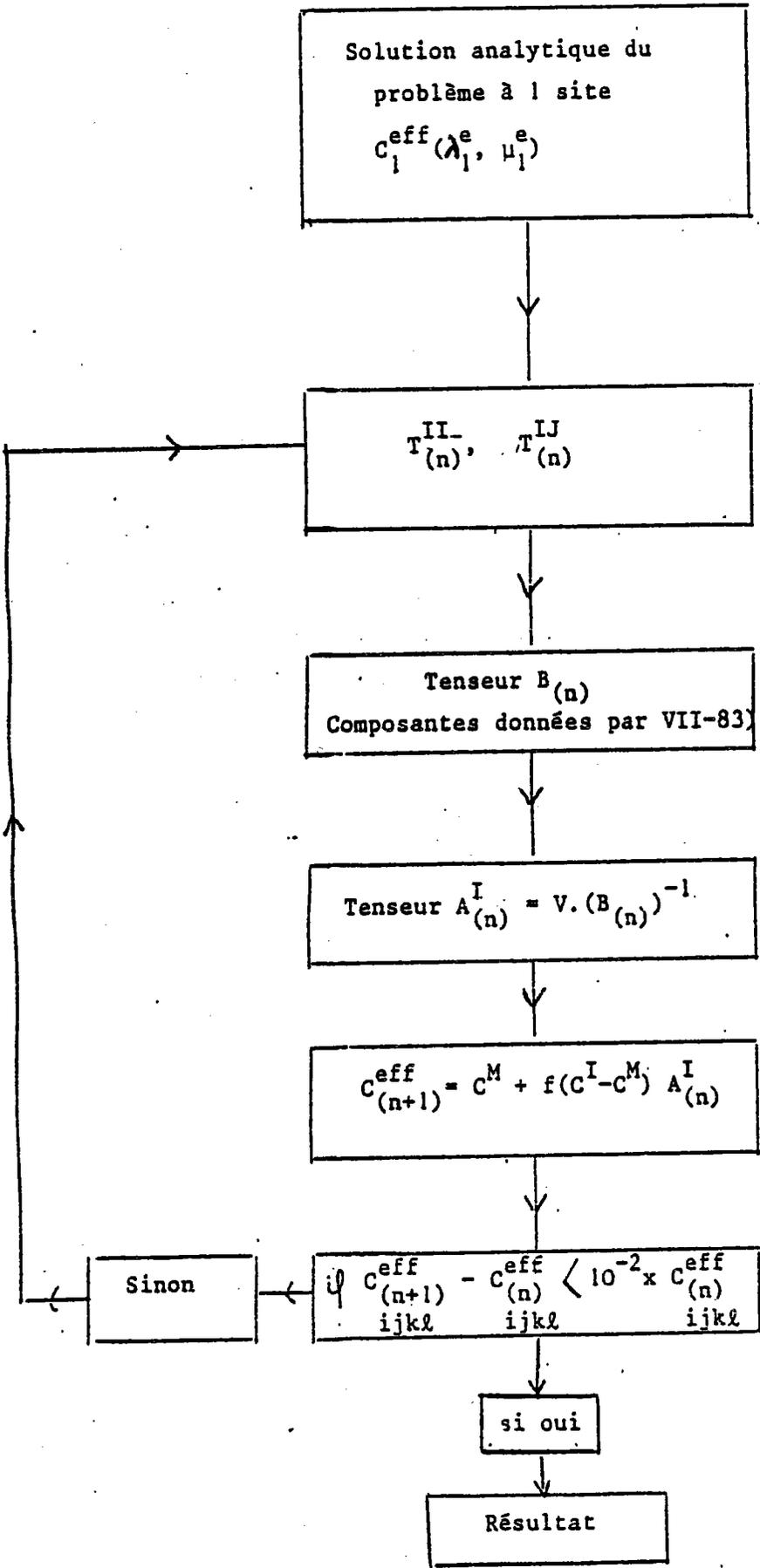
$$f(R, \theta) = \begin{cases} \frac{\pi}{24} \left(R^3 \cos^3 \theta - 6R a^2 \cos \theta + 4a^3 \right) & \text{si } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{24} \left(-R^3 \cos^3 \theta + 6R a^2 \cos \theta + 4a^3 \right) & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

ANNEXE - A 3 -Programmation et calculs numériques

Dans cette annexe nous présentons essentiellement cinq résultats (listing) assez représentatifs de tous les calculs numériques et programmes informatiques effectués pour ce travail, qui l'ont tous été sur machine IBM 43 - 31 de l'Ecole Nationale des industries minérales (RABAT).

- 1 - le cas isotrope de deux sphères ayant même système de glissement: ce programme nous permet de calculer l'énergie propre de chaque sphère ainsi que leur énergie d'interaction à partir de nos expressions II - 71 et II - 73, calculées en fonction des tenseurs T^{ij} et T^{ij} que nous déterminons; nous calculons par ailleurs le tenseur M^{ij} à partir de la formule V - 101 utilisant T^{ij} , et nous trouvons un résultat identique à celui trouvé à partir des expressions V - 105 données par M. BERVEILLER. Nous calculons aussi le tenseur S d'ESHELBY à partir de la formule (II - 45) qui la relie à T^{ij} et là encore nous trouvons les mêmes valeurs que celles données directement par ESHELBY.
- 2 - le cas anisotrope de deux ellipsoïdes coplanaires et non colinéaires; ce programme calcule en particulier les composantes de la transformée de FOURIER \tilde{G}_{km} du tenseur de GREEN à partir de la formule (V - 16) en se donnant les constantes élastiques anisotropes; on peut alors déterminer numériquement les composantes de T^{ij} et T^{ij} et en déduire les champs de déformation, de contrainte et l'énergie d'interaction et les énergies propres.
- 3 - le cas de deux ellipsoïdes non coplanaires et non collinéaires (isotrope)
- 4 - le cas étudié au chapitre VI pour déterminer l'énergie d'interaction de deux inclusions ellipsoïdales de martensite (détermination du taux d'écroutissage H^{ij})
- 5 - l'organigramme du programme permettant le calcul des constantes élastiques effectives d'un composite où les inclusions sont réparties suivant un système cubique centré, dans le schéma self-consistent à plusieurs sites.

Organigramme du programme permettant le calcul des constantes élastiques effectives du composite tel que envisagé dans le chapitre VII, dans le schéma self-consistent à plusieurs (N = 9) sites, par un procédé itératif.



Cas 3

2 ellipsoïdes non coplanaires et non colinéaires (isotropes)

Données: $\nu = \frac{1}{2}, \mu = 4330 \text{ day}^{-1}$

*I: $a_1 = b_1 = 1, c_1 = 10^{-2}$
 $\vec{n}(0, 0, 1) \quad \vec{m}(1, 0, 0)$

*J: $a_1 = b_1 = 1, c_1 = 10^{-2}$
 $\vec{n}(0.8465, -0.471, -0.333)$
 $\vec{m}(0.5, 0.2186, 0.7165)$
 $\vec{p}(1.026, 0.296, -0.057)$
 $\vec{r}^2 = \vec{s}^2 = 1; \psi = 109.41, \theta = \rho$

DIMENSION DE L'INCLUSION I
 A B C C.100000E+01 0.100000E+01 0.100000E+01
 NCMALE G.C 0.0 0.0 0.100000E+01
 DIRECTION C.100000E+01 C.0 C.0
 NCMALE G.816500E+00 -0.471470E+00 -0.333333E+00
 DIRECTION C.500000E+00 0.296475E+00 0.816500E+00
 VI = 0.41867861E-C1VJ = 0.41867861E-01
 VECTEUR RO C.102600E+01 0.296000E+00 -0.570000E-01
 DIMENSIONS DE L'INCLUSION I
 A1 E1 C1 C.100000E+01 0.100000E+01 0.100000E+01
 A2 E2 C2 C.100000E+01 0.100000E+01 0.100000E+01
 NL = 0.333333E+00 MU = 0.473000E+04
 DIMENSIONS DE L'INCLUSION J A2 E2 C2 0.100000E+01 0.100000E+01 0.100000E+01

L'INTEGRALE TIJ

(1111)	=	C.386526E-09	(1112)	=	-0.377700E-09	(1113)	=	0.159906E-08
(1121)	=	C.431574E-09	(1122)	=	0.164127E-10	(1123)	=	0.100106E-09
(1131)	=	-C.172815E-09	(1132)	=	0.107106E-09	(1133)	=	-0.451949E-09
(1211)	=	-0.677700E-09	(1212)	=	0.597471E-08	(1213)	=	-0.160079E-08
(1221)	=	-C.184127E-10	(1222)	=	0.369694E-09	(1223)	=	-0.243030E-09
(1231)	=	C.100106E-09	(1232)	=	-0.243030E-09	(1233)	=	0.180608E-09
(1311)	=	C.159906E-08	(1312)	=	-0.160079E-08	(1313)	=	0.120117E-07
(1321)	=	C.100106E-09	(1322)	=	-0.243030E-09	(1323)	=	0.180608E-09
(1331)	=	-C.451949E-09	(1332)	=	0.160079E-08	(1333)	=	-0.912940E-09
(2111)	=	C.431574E-09	(2112)	=	-0.164126E-10	(2113)	=	0.100106E-09
(2121)	=	-C.352860E-09	(2122)	=	-0.929578E-09	(2123)	=	0.152980E-08
(2131)	=	C.100106E-09	(2132)	=	0.243030E-09	(2133)	=	0.180608E-09
(2211)	=	-C.184127E-10	(2212)	=	0.369694E-09	(2213)	=	-0.243030E-09
(2221)	=	-C.939578E-09	(2222)	=	0.318456E-08	(2223)	=	-0.113707E-08
(2231)	=	-C.243030E-09	(2232)	=	0.563738E-09	(2233)	=	-0.166833E-08
(2311)	=	C.100106E-09	(2312)	=	-0.243030E-09	(2313)	=	0.180608E-09
(2321)	=	C.152860E-08	(2322)	=	-0.113707E-08	(2323)	=	0.107953E-07
(2331)	=	C.180608E-09	(2332)	=	-0.166833E-08	(2333)	=	0.611711E-09
(3111)	=	-C.172815E-09	(3112)	=	0.107106E-09	(3113)	=	-0.451949E-09
(3121)	=	C.100106E-09	(3122)	=	-0.243030E-09	(3123)	=	0.180608E-09
(3131)	=	-C.787491E-09	(3132)	=	-0.112859E-08	(3133)	=	0.858806E-09
(3211)	=	C.100106E-09	(3212)	=	0.243030E-09	(3213)	=	0.180608E-09
(3221)	=	-0.243030E-09	(3222)	=	0.563738E-09	(3223)	=	-0.166833E-08
(3231)	=	-C.112859E-08	(3232)	=	0.422494E-08	(3233)	=	-0.108709E-08
(3311)	=	-C.451949E-09	(3312)	=	0.160079E-08	(3313)	=	-0.912940E-09
(3321)	=	0.180608E-09	(3322)	=	0.166833E-08	(3323)	=	0.611711E-09
(3331)	=	C.858806E-09	(3332)	=	0.108709E-08	(3333)	=	0.523516E-08

terme t^{IJ}

LA PARTIE SYMETRIQUE DE TIJ = STIJ

(1111)	=	C.386526E-09	(1112)	=	0.377700E-09	(1113)	=	0.159906E-08
(1121)	=	C.431574E-09	(1122)	=	0.164127E-10	(1123)	=	0.100106E-09
(1131)	=	-C.172815E-09	(1132)	=	0.107106E-09	(1133)	=	-0.451949E-09
(1211)	=	-0.677700E-09	(1212)	=	0.297815E-08	(1213)	=	0.750340E-09
(1221)	=	-C.184127E-10	(1222)	=	-0.284942E-09	(1223)	=	0.642847E-09
(1231)	=	C.100106E-09	(1232)	=	-0.243030E-09	(1233)	=	0.180608E-09
(1311)	=	C.159906E-08	(1312)	=	-0.750340E-09	(1313)	=	0.577987E-08
(1321)	=	C.100106E-09	(1322)	=	0.243030E-09	(1323)	=	0.180608E-09
(1331)	=	-C.451949E-09	(1332)	=	0.474042E-09	(1333)	=	-0.270362E-10
(2111)	=	C.431574E-09	(2112)	=	0.297815E-08	(2113)	=	-0.750340E-09
(2121)	=	-C.223030E-09	(2122)	=	-0.284942E-09	(2123)	=	0.642847E-09
(2131)	=	C.100106E-09	(2132)	=	0.243030E-09	(2133)	=	0.180608E-09
(2211)	=	-C.184127E-10	(2212)	=	0.369694E-09	(2213)	=	-0.243030E-09
(2221)	=	-C.939578E-09	(2222)	=	0.318456E-08	(2223)	=	-0.113707E-08
(2231)	=	-C.243030E-09	(2232)	=	0.563738E-09	(2233)	=	-0.166833E-08
(2311)	=	C.100106E-09	(2312)	=	-0.243030E-09	(2313)	=	0.180608E-09
(2321)	=	C.152860E-08	(2322)	=	-0.113707E-08	(2323)	=	0.456347E-08
(2331)	=	-0.474042E-09	(2332)	=	-0.166833E-08	(2333)	=	-0.238691E-09
(3111)	=	C.172815E-09	(3112)	=	0.107106E-09	(3113)	=	0.577987E-08
(3121)	=	C.100106E-09	(3122)	=	-0.243030E-09	(3123)	=	0.180608E-09
(3131)	=	-C.615715E-09	(3132)	=	-0.474042E-09	(3133)	=	-0.270362E-10
(3211)	=	C.100106E-09	(3212)	=	0.243030E-09	(3213)	=	0.180608E-09
(3221)	=	-0.243030E-09	(3222)	=	0.563738E-09	(3223)	=	0.456347E-08
(3231)	=	-0.474042E-09	(3232)	=	0.132230E-08	(3233)	=	-0.238691E-09
(3311)	=	-C.451949E-09	(3312)	=	0.160079E-08	(3313)	=	-0.912940E-09
(3321)	=	0.180608E-09	(3322)	=	0.166833E-08	(3323)	=	0.611711E-09
(3331)	=	C.858806E-09	(3332)	=	0.108709E-08	(3333)	=	0.523516E-08

terme T^{IJ}

ENERGIE PROPRE: WI = C.298147E+00 WJ = 0.440619E+02
 C.115447700 -0.75718933E-01
 ENERGIE D'INTERACTION = 0.19115664E+00

energies propres W^I, W^J
 énergie W^{IJ}

PARTIE SYMETRIQUE DE T_{IJ} = STIJ

(1111) = 0.621954E+09	(1112) = 0.924827E-17	(1113) = 0.179102E+16
(1121) = 0.339864E-15	(1122) = 0.173756E-08	(1123) = 0.132360E-16
(1131) = 0.315652E-18	(1132) = 0.161986E-16	(1133) = 0.424496E-09
(1211) = 0.170641E-15	(1212) = 0.939064E-09	(1213) = 0.227789E-16
(1221) = 0.956128E+09	(1222) = 0.287683E-15	(1223) = 0.186026E-16
(1231) = 0.179766E+16	(1232) = 0.336447E-17	(1233) = 0.115585E+15
(1311) = 0.339456E+16	(1312) = 0.354074E-17	(1313) = 0.425862E+09
(1321) = 0.159390E+16	(1322) = 0.223611E-16	(1323) = 0.598189E+16
(1331) = 0.471106E+09	(1332) = 0.200087E-15	(1333) = 0.264032E+16
(2111) = 0.170641E-15	(2112) = 0.939064E-09	(2113) = 0.227789E-16
(2121) = 0.956128E+09	(2122) = 0.287683E-15	(2123) = 0.186026E-16
(2131) = 0.179766E+16	(2132) = 0.336447E-17	(2133) = 0.115585E+15
(2211) = 0.173756E+08	(2212) = 0.542021E-15	(2213) = 0.456014E-16
(2221) = 0.107283E-15	(2222) = 0.327288E-08	(2223) = 0.175520E+15
(2231) = 0.199028E-16	(2232) = 0.111031E-15	(2233) = 0.539687E-09
(2311) = 0.187923E+16	(2312) = 0.232244E-16	(2313) = 0.178899E+15
(2321) = 0.428000E-16	(2322) = 0.325149E-16	(2323) = 0.339239E-10
(2331) = 0.740350E-16	(2332) = 0.120276E-08	(2333) = 0.528171E+16
(3111) = 0.339456E+16	(3112) = 0.354074E-17	(3113) = 0.425862E+09
(3121) = 0.159390E-16	(3122) = 0.223611E-16	(3123) = 0.598189E+16
(3131) = 0.471106E-09	(3132) = 0.200087E-15	(3133) = 0.264032E+16
(3211) = 0.187923E-16	(3212) = 0.232244E-16	(3213) = 0.178899E+15
(3221) = 0.428000E-16	(3222) = 0.325149E-16	(3223) = 0.339239E-10
(3231) = 0.740350E-16	(3232) = 0.120276E-08	(3233) = 0.528171E+16
(3311) = 0.424496E-09	(3312) = 0.237664E-15	(3313) = 0.353412E+16
(3321) = 0.114868E-16	(3322) = 0.539687E-09	(3323) = 0.165964E+16
(3331) = 0.335589E-16	(3332) = 0.422174E-16	(3333) = 0.283990E-09

Composantes du
tenseur T^{IV}

ENERGIE PROPRE: W^I = 0.244598E+00 W^J = 0.244431E+00
 0.695123740E-01 0.349569321E-01
 ENERGIE D'INTERACTION = 0.34955442E-01

Resultats pour W^I, W^J
et energie d'interaction W^{IJ}

E TENSEUR ESHELBY S = 1 T.C

(1111) = 0.533330E+00	(1112) = -0.102427E-06	(1113) = -0.124176E-07
(1121) = -0.290844E-07	(1122) = 0.666681E-01	(1123) = -0.290544E-07
(1131) = -0.213431E-07	(1132) = 0.528892E-10	(1133) = 0.666670E+01
(1211) = -0.485222E-07	(1212) = 0.233333E+00	(1213) = -0.187606E-07
(1221) = 0.233333E+09	(1222) = 0.348074E-07	(1223) = 0.490290E+08
(1231) = 0.644900E-08	(1232) = -0.274482E-08	(1233) = 0.522413E+08
(1311) = -0.965940E+08	(1312) = -0.138808E-07	(1313) = 0.233332E+00
(1321) = 0.698857E-09	(1322) = 0.636854E-09	(1323) = 0.162872E+08
(1331) = 0.233334E+09	(1332) = -0.718354E-08	(1333) = 0.196549E-08
(2111) = -0.485222E-07	(2112) = 0.233333E+00	(2113) = -0.187606E-07
(2121) = 0.233333E+00	(2122) = 0.348074E-07	(2123) = 0.490290E+08
(2131) = 0.644900E-08	(2132) = -0.274482E-08	(2133) = 0.522413E+08
(2211) = 0.666684E-01	(2212) = 0.789880E-07	(2213) = -0.925424E-08
(2221) = -0.213476E+07	(2222) = 0.533329E+00	(2223) = -0.266457E-07
(2231) = -0.529757E-08	(2232) = -0.102795E-07	(2233) = 0.666667E+01
(2311) = -0.383607E-09	(2312) = -0.211937E-08	(2313) = 0.313641E-08
(2321) = 0.416825E-09	(2322) = -0.139177E-07	(2323) = 0.233332E+00
(2331) = 0.102214E+07	(2332) = 0.233334E+00	(2333) = -0.403276E-09
(3111) = -0.965940E-08	(3112) = -0.138808E-07	(3113) = 0.233332E+00
(3121) = -0.688557E-09	(3122) = 0.636854E-09	(3123) = 0.162872E+08
(3131) = 0.233334E+00	(3132) = -0.718354E-08	(3133) = 0.196549E-08
(3211) = 0.383607E-08	(3212) = -0.211937E-08	(3213) = 0.313641E-08
(3221) = 0.416825E-08	(3222) = -0.139177E-07	(3223) = 0.233332E+00
(3231) = 0.102214E-07	(3232) = 0.233334E+00	(3233) = -0.403276E-09
(3311) = 0.666686E+01	(3312) = -0.232373E-08	(3313) = -0.611319E+08
(3321) = -0.107855E-07	(3322) = 0.666681E-01	(3323) = -0.274728E-07
(3331) = -0.413349E-08	(3332) = 0.328539E-08	(3333) = 0.533326E+00

Tenseur S d'Eshelby
donné par II-45

CT^{TC}

(1111) = 0.569977E+03	(1112) = -0.228496E-03	(1113) = -0.749987E-05
(1121) = -0.228496E-03	(1122) = 0.202115E+03	(1123) = 0.103946E-04
(1131) = -0.749987E-05	(1132) = 0.103946E+04	(1133) = 0.321867E+03
(1211) = -0.267130E+03	(1212) = 0.183845E+03	(1213) = -0.243257E+04
(1221) = 0.183845E+03	(1222) = -0.471673E-03	(1223) = -0.112550E-04
(1231) = -0.243257E+04	(1232) = -0.112550E-04	(1233) = -0.772079E-03
(1311) = -0.702064E+04	(1312) = 0.388530E-04	(1313) = 0.303529E+03
(1321) = -0.388530E-04	(1322) = -0.946407E+04	(1323) = -0.742780E-03
(1331) = 0.303529E+03	(1332) = -0.742780E-03	(1333) = -0.219776E-04
(2111) = -0.267130E+03	(2112) = 0.183845E+03	(2113) = -0.243257E+04
(2121) = 0.183845E+03	(2122) = -0.471673E-03	(2123) = -0.112550E-04
(2131) = -0.243257E+04	(2132) = -0.112550E-04	(2133) = -0.772079E-03
(2211) = 0.202115E+03	(2212) = -0.504629E-03	(2213) = -0.517317E-05
(2221) = -0.504629E-03	(2222) = 0.569978E+03	(2223) = 0.677579E-04
(2231) = -0.517317E-05	(2232) = 0.877579E-04	(2233) = 0.321870E+03
(2311) = 0.148629E-04	(2312) = -0.392921E-04	(2313) = -0.756952E-03
(2321) = -0.392921E-04	(2322) = 0.605666E-04	(2323) = 0.303531E+03
(2331) = -0.756952E-03	(2332) = 0.303531E+03	(2333) = 0.100903E-03
(3111) = -0.702064E+04	(3112) = -0.388530E-04	(3113) = 0.303529E+03
(3121) = -0.388530E-04	(3122) = 0.946407E-04	(3123) = -0.742780E-03
(3131) = 0.303529E+03	(3132) = -0.742780E-03	(3133) = -0.219776E-04
(3211) = 0.148629E-04	(3212) = 0.392921E-04	(3213) = -0.756952E-03
(3221) = -0.392921E-04	(3222) = 0.605666E-04	(3223) = 0.303531E+03
(3231) = -0.756952E-03	(3232) = 0.303531E+03	(3233) = 0.100903E-03
(3311) = 0.321867E+03	(3312) = -0.757240E-03	(3313) = 0.598451E-04
(3321) = -0.757240E-03	(3322) = 0.321872E+03	(3323) = 0.978372E-04
(3331) = 0.598451E-04	(3332) = 0.478372E-04	(3333) = -0.253969E+04

produit contracté
CT^{TC}

ENERGIE PROPRE: $\pi I = 0.528346E+04$ $\pi J = 0.528346E+04$ (o.f.f.)
 -151.814331 -151.814331
 ENERGIE D'INTERACTION = $0.30362866E+03$ (o.f.f.)
 $EI = 0.52834414E+04$ $EJ = 0.52834414E+04 = \mu \cdot V^T \cdot (1-\beta) \epsilon^T \epsilon^T = \mu \cdot V^T \cdot (1-\beta) \epsilon^T \epsilon^T$

Energies propres π^F, π^J
energie d'interaction -
energie propre pour Pauli d'Eshelby.

MIJKE-TIJSYH-CU

(1111) = 0.314413E-01	(1112) = 0.162638E-07	(1113) = -0.203927E-08
(1121) = 0.152389E-07	(1122) = 0.756442E-02	(1123) = -0.408060E-08
(1131) = -0.203927E-08	(1132) = 0.408060E-08	(1133) = 0.841241E-01
(1211) = -0.232379E-07	(1212) = 0.194339E-01	(1213) = 0.257143E-08
(1221) = 0.194339E-01	(1222) = 0.498597E-07	(1223) = -0.118975E-08
(1231) = -0.257143E-08	(1232) = 0.118975E-08	(1233) = -0.816152E-07
(1311) = 0.742140E-08	(1312) = 0.411131E-09	(1313) = 0.320961E-01
(1321) = -0.411131E-09	(1322) = 0.108043E-07	(1323) = 0.785179E-07
(1331) = 0.320961E-01	(1332) = 0.785179E-07	(1333) = -0.232321E-08
(2111) = -0.282379E-07	(2112) = 0.194339E-01	(2113) = -0.257143E-08
(2121) = 0.194339E-01	(2122) = 0.498597E-07	(2123) = -0.118975E-08
(2131) = -0.257143E-08	(2132) = 0.118975E-08	(2133) = -0.816152E-07
(2211) = -0.754466E-02	(2212) = 0.129007E-07	(2213) = -0.179389E-08
(2221) = 0.129007E-07	(2222) = 0.313413E-01	(2223) = 0.409754E-06
(2231) = -0.179389E-08	(2232) = 0.409754E-06	(2233) = 0.841244E-01
(2311) = 0.157113E-08	(2312) = 0.415350E-08	(2313) = -0.800161E-07
(2321) = -0.415350E-08	(2322) = 0.646239E-08	(2323) = 0.320963E-01
(2331) = -0.800161E-07	(2332) = 0.320963E-01	(2333) = 0.106662E-07
(3111) = -0.742140E-08	(3112) = 0.411131E-08	(3113) = 0.320961E-01
(3121) = -0.411131E-08	(3122) = 0.108043E-07	(3123) = -0.785179E-07
(3131) = 0.320961E-01	(3132) = 0.785179E-07	(3133) = -0.232321E-08
(3211) = 0.157113E-08	(3212) = 0.415350E-08	(3213) = -0.800161E-07
(3221) = -0.415350E-08	(3222) = 0.646239E-08	(3223) = 0.320963E-01
(3231) = -0.800161E-07	(3232) = 0.320963E-01	(3233) = 0.106662E-07
(3311) = 0.511414E-02	(3312) = 0.438321E-07	(3313) = 0.507964E-08
(3321) = 0.438321E-07	(3322) = 0.511414E-02	(3323) = 0.515251E-08
(3331) = 0.507964E-08	(3332) = 0.516241E-08	(3333) = -0.218362E-00

tenue M^{IJ}
donné par T^{IJ}C°
 (v-104)

PARTITE SYM. DE TIII = T^{II}

(1111) = 0.162355E-03	(1112) = 0.425019E-10	(1113) = -0.242269E-11
(1121) = -0.810303E-11	(1122) = -0.442776E-04	(1123) = -0.666982E-12
(1131) = -0.404391E-11	(1132) = 0.791229E-12	(1133) = -0.442775E-04
(1211) = 0.214851E-10	(1212) = 0.103318E-03	(1213) = -0.830599E-11
(1221) = 0.103317E-03	(1222) = 0.154124E-10	(1223) = 0.217095E-11
(1231) = 0.285555E-11	(1232) = -0.121536E-11	(1233) = 0.231319E-11
(1311) = -0.427708E-11	(1312) = -0.614625E-11	(1313) = 0.103317E-03
(1321) = -0.305019E-12	(1322) = 0.281992E-12	(1323) = 0.721181E-12
(1331) = 0.103318E-03	(1332) = -0.318090E-11	(1333) = 0.870298E-12
(2111) = -0.214851E-10	(2112) = 0.103318E-03	(2113) = -0.930699E-11
(2121) = 0.103317E-03	(2122) = 0.154124E-10	(2123) = 0.217095E-11
(2131) = 0.285555E-11	(2132) = -0.121536E-11	(2133) = 0.231319E-11
(2211) = -0.442776E-04	(2212) = 0.378269E-10	(2213) = -0.102197E-11
(2221) = 0.287549E-11	(2222) = 0.162355E-03	(2223) = -0.358553E-11
(2231) = 0.106088E-11	(2232) = -0.378338E-11	(2233) = -0.442776E-04
(2311) = 0.189554E-11	(2312) = 0.388436E-12	(2313) = 0.138877E-11
(2321) = 0.184565E-11	(2322) = 0.416263E-11	(2323) = 0.103317E-03
(2331) = -0.452595E-11	(2332) = 0.103318E-03	(2333) = -0.178566E-12
(3111) = -0.427708E-11	(3112) = -0.614625E-11	(3113) = 0.103317E-03
(3121) = -0.305019E-12	(3122) = 0.281992E-12	(3123) = 0.721181E-12
(3131) = 0.103318E-03	(3132) = -0.318090E-11	(3133) = 0.870298E-12
(3211) = 0.189554E-11	(3212) = -0.938436E-12	(3213) = 0.138877E-11
(3221) = 0.184565E-11	(3222) = -0.616263E-11	(3223) = 0.103317E-03
(3231) = -0.452595E-11	(3232) = 0.103318E-03	(3233) = -0.178566E-12
(3311) = -0.442775E-04	(3312) = 0.182297E-11	(3313) = 0.368855E-12
(3321) = 0.200131E-11	(3322) = -0.442776E-04	(3323) = -0.396063E-11
(3331) = 0.157633E-11	(3332) = 0.222432E-11	(3333) = 0.162354E-03

Calcul du tenue
T^{II} donné par
 (v-38 et v-39)

LA PARTIE SYMETRIQUE DE T I J = ST I J

(1111) = J.460928E-06	(1112) = 0.587198E-11	(1113) = -0.235165E-12
(1121) = -0.242825E-11	(1122) = 0.364966E-09	(1123) = -0.283885E-12
(1131) = -0.195971E-12	(1132) = -0.578821E-12	(1133) = 0.604093E-05
(1211) = C.123573E-11	(1212) = 0.2C5433E-05	(1213) = -0.277151E-12
(1221) = 0.205432E-05	(1222) = -0.104988E-11	(1223) = 0.138917E-12
(1231) = -C.266493E-12	(1232) = 0.112615E-12	(1233) = -0.440670E-11
(1311) = -C.262601E-12	(1312) = 0.641044E-12	(1313) = -0.495953E-05
(1321) = -0.228156E-12	(1322) = 0.535636E-12	(1323) = -0.465362E-11
(1331) = 0.117442E-04	(1332) = 0.119464E-10	(1333) = 0.276319E-12
(2111) = 0.123573E-11	(2112) = 0.205433E-05	(2113) = -0.277151E-12
(2121) = C.205432E-05	(2122) = -0.104988E-11	(2123) = 0.138917E-12
(2131) = -0.266493E-12	(2132) = 0.112615E-12	(2133) = -0.440670E-11
(2211) = -0.364966E-05	(2212) = 0.751112E-12	(2213) = -0.388904E-12
(2221) = -0.193631E-11	(2222) = 0.460914E-06	(2223) = -0.738807E-12
(2231) = 0.955391E-14	(2232) = 0.127439E-12	(2233) = 0.604096E-05
(2311) = -0.326509E-12	(2312) = -0.581758E-12	(2313) = -0.465779E-11
(2321) = -0.296300E-12	(2322) = 0.184196E-12	(2323) = -0.495855E-05
(2331) = -C.122589E-10	(2332) = 0.117442E-04	(2333) = 0.634919E-12
(3111) = -C.262601E-12	(3112) = -0.641044E-12	(3113) = -0.495953E-05
(3121) = -0.228156E-12	(3122) = 0.535636E-12	(3123) = -0.465362E-11
(3131) = C.117442E-04	(3132) = 0.119464E-10	(3133) = 0.276319E-12
(3211) = -0.326509E-12	(3212) = -0.581758E-12	(3213) = -0.465779E-11
(3221) = -C.296300E-12	(3222) = 0.184196E-12	(3223) = -0.495855E-05
(3231) = -C.122589E-10	(3232) = 0.117442E-04	(3233) = 0.634919E-12
(3311) = 0.604093E-05	(3312) = -0.463537E-11	(3313) = -0.783884E-13
(3321) = -C.463145E-11	(3322) = 0.6C4096E-05	(3323) = 0.915912E-13
(3331) = 0.115231E-11	(3332) = 0.999913E-12	(3333) = -0.175824E-04

Calcul des composantes

du tenseur T^{IJ}

symétrique de T^{IJ}) donné

par X-60 et Y-44...

(1111) = 0.313413E-01	(1112) = 0.597631E-07	(1113) = -0.886875E-08
(1121) = -0.108071E-06	(1122) = -0.754464E-02	(1123) = 0.248430E-08
(1131) = 0.728317E-08	(1132) = 0.285711E-09	(1133) = 0.511414E-02
(1211) = C.110903E-07	(1212) = -0.194340E-01	(1213) = -0.262184E-08
(1221) = C.194333E-01	(1222) = -0.993182E-08	(1223) = -0.131416E-08
(1231) = -0.252102E-08	(1232) = -0.126533E-08	(1233) = -0.416874E-07
(1311) = -C.248421E-08	(1312) = -0.306429E-08	(1313) = -0.469077E-01
(1321) = -0.215835E-03	(1322) = -0.505712E-08	(1323) = -0.440233E-07
(1331) = C.111100E-02	(1332) = -0.113013E-06	(1333) = 0.261398E-08
(2111) = C.116900E-07	(2112) = -0.194340E-01	(2113) = -0.262184E-08
(2121) = C.194333E-01	(2122) = -0.993182E-08	(2123) = -0.131416E-08
(2131) = -C.252102E-08	(2132) = -0.126533E-08	(2133) = -0.416874E-07
(2211) = -0.754464E-02	(2212) = 0.325965E-08	(2213) = -0.103222E-07
(2221) = -C.108071E-06	(2222) = 0.313413E-01	(2223) = 0.121597E-07
(2231) = 0.922743E-09	(2232) = 0.639450E-08	(2233) = 0.511444E-02
(2311) = -C.378877E-08	(2312) = -0.550342E-08	(2313) = -0.440627E-07
(2321) = -0.280357E-08	(2322) = 0.174249E-08	(2323) = -0.469079E-01
(2331) = -0.115969E-06	(2332) = 0.111100E-02	(2333) = 0.600633E-08
(3111) = -C.248421E-08	(3112) = -0.306429E-08	(3113) = -0.469077E-01
(3121) = -0.215835E-03	(3122) = -0.506712E-08	(3123) = -0.440233E-07
(3131) = C.111100E-02	(3132) = -0.113013E-06	(3133) = 0.261398E-08
(3211) = -C.308877E-08	(3212) = -0.550342E-08	(3213) = -0.440627E-07
(3221) = -C.280357E-08	(3222) = 0.174249E-08	(3223) = -0.469079E-01
(3231) = -C.115969E-06	(3232) = 0.111100E-02	(3233) = 0.600633E-08
(3311) = 0.641207E-01	(3312) = 0.396363E-07	(3313) = -0.738505E-08
(3321) = -0.128913E-06	(3322) = 0.941239E-01	(3323) = 0.603631E-08
(3331) = 0.208379E-07	(3332) = 0.146451E-07	(3333) = -0.218362E-00

Produit contracté

C^o T^{IJ}
ijke T^{klmn}

Cas 1

deux sphères ayant même système de glissement

INCLUSION I
 C.100000E-C1 C.100000E-C1 C.100000E-C1
 LE C.100000E-C1 0.0 C.C C.100000E-C1
 TION C.C 0.0 C.C
 LE C.100000E-C1 0.0 C.C C.100000E-C1
 TION 0.0 0.0 C.100000E-C1
 +1887856E+01VJ= 0.-1887856E+01 0.300000E-01
 EUR MO C.C 0.0
 INCLUSION I
 C1 C.100000E-C1 C.100000E-C1 C.100000E-C1
 33333CE-00 MU= C.473000E-C4
 INCLUSION J A2 B2 C2 C.100000E-C1 C.100000E-C1 C.100000E-C1
 NY= 54

données

$a_1 = b_1 = c_1 = a_2 = b_2 = c_2 = 1$
 $\vec{n}^1 = \vec{n}^2 = (1, 0, 0)$, $\vec{n}^3 = \vec{n}^4 = (0, 0, 1)$
 $\vec{R}^1 = \vec{R}^2 = (0, 0, 1)$, $\nu = \frac{1}{2}$, $\mu = \frac{1}{2}$ de la
 $\vec{r}^1 = \vec{r}^2 = 1$, angle d'alignement $\gamma = \delta = \rho = 0$

1111) = C.185167E+05	(1112) = 0.0	(1113) = 0.0
1121) = C.C	(1122) = 0.945971E+04	(1123) = 0.0
1131) = C.C	(1132) = 0.0	(1133) = 0.945971E+04
1211) = C.C	(1212) = 0.473000E-C4	(1213) = 0.0
1221) = C.473000E+C4	(1222) = 0.0	(1223) = 0.0
1231) = C.C	(1232) = 0.0	(1233) = 0.0
1311) = C.C	(1312) = 0.0	(1313) = 0.473000E+C4
1321) = C.C	(1322) = 0.0	(1323) = 0.0
1331) = 0.473000E+C4	(1332) = 0.0	(1333) = 0.0
2111) = C.C	(2112) = 0.473000E+C4	(2113) = 0.0
2121) = C.473000E+C4	(2122) = 0.0	(2123) = 0.0
2131) = 0.0	(2132) = 0.0	(2133) = 0.0
2211) = 0.945971E+04	(2212) = 0.0	(2213) = 0.0
2221) = 0.0	(2222) = 0.189197E+05	(2223) = 0.0
2231) = C.C	(2232) = 0.0	(2233) = 0.945971E+04
2311) = C.C	(2312) = 0.0	(2313) = 0.0
2321) = C.C	(2322) = 0.0	(2323) = 0.473000E+C4
2331) = C.C	(2332) = 0.473000E+C4	(2333) = 0.0
3111) = 0.0	(3112) = 0.0	(3113) = 0.473000E+C4
3121) = 0.0	(3122) = 0.0	(3123) = 0.0
3131) = C.473000E-C4	(3132) = 0.0	(3133) = 0.0
3211) = C.C	(3212) = 0.0	(3213) = 0.0
3221) = C.C	(3222) = 0.0	(3223) = 0.473000E+C4
3231) = C.C	(3232) = 0.473000E+C4	(3233) = 0.0
3311) = C.945971E+04	(3312) = 0.0	(3313) = 0.0
3321) = 0.0	(3322) = 0.945971E+04	(3323) = 0.0
3331) = C.C	(3332) = 0.0	(3333) = 0.189197E+05

Constantes C° du

milieu isotrope.

INTEGRALE T1J

(1111) = 0.460928E+06	(1112) = 0.587198E-11	(1113) = 0.235165E+12
(1121) = -0.242825E-11	(1122) = 0.264966E-05	(1123) = -0.283885E-12
(1131) = 0.195971E-12	(1132) = 0.578222E-12	(1133) = 0.604093E+05
(1211) = C.581074E-11	(1212) = 0.775833E-05	(1213) = 0.404901E-12
(1221) = -0.364966E+05	(1222) = -0.541172E-12	(1223) = 0.485564E-12
(1231) = 0.516111E-12	(1232) = 0.125695E-12	(1233) = 0.407906E-11
(1311) = 0.783884E-13	(1312) = 0.597443E-12	(1313) = 0.159580E+04
(1321) = -0.153564E-12	(1322) = 0.607158E-12	(1323) = 0.455404E-11
(1331) = C.604092E-05	(1332) = 0.425127E-11	(1333) = 0.348829E-12
(2111) = -0.333927E-11	(2112) = 0.384966E-05	(2113) = 0.149400E-12
(2121) = 0.775833E-05	(2122) = 0.159858E-11	(2123) = 0.207729E-12
(2131) = -0.158746E-13	(2132) = 0.250298E-12	(2133) = -0.473434E-11
(2211) = 0.364966E+05	(2212) = 0.751112E-12	(2213) = -0.388804E-12
(2221) = -0.193631E-11	(2222) = 0.460914E+06	(2223) = 0.738807E-12
(2231) = C.955351E-14	(2232) = 0.127435E-12	(2233) = 0.604096E+05
(2311) = -0.148665E-12	(2312) = 0.500793E-12	(2313) = 0.474659E-11
(2321) = 0.293957E-12	(2322) = 0.733643E-12	(2323) = 0.159581E+04
(2331) = 0.473948E-11	(2332) = 0.604096E+05	(2333) = 0.325042E-12
(3111) = 0.603591E-12	(3112) = 0.684646E-12	(3113) = 0.604093E+05
(3121) = 0.302747E-12	(3122) = 0.464115E-12	(3123) = 0.475320E-11
(3131) = 0.174474E+C4	(3132) = 0.196415E-10	(3133) = 0.901467E+12
(3211) = 0.504353E-12	(3212) = 0.662734E-12	(3213) = 0.456899E-11
(3221) = 0.298764E-12	(3222) = 0.365272E-12	(3223) = 0.604096E+05
(3231) = 0.197784E-10	(3232) = 0.174475E+C4	(3233) = 0.944796E-12
(3311) = C.604093E+05	(3312) = 0.463537E-11	(3313) = 0.783884E-13
(3321) = -0.463145E-11	(3322) = 0.684096E+05	(3323) = 0.915912E-13
(3331) = C.115231E-11	(3332) = 0.955913E-12	(3333) = 0.175324E+04

Calcul des composantes

distances et donne par

(Y-42)

~~Exclu du Ref~~



IV