



HAL
open science

Instabilités thermo-viscoplastiques aux grandes vitesses de déformation

Claude Fressengeas

► **To cite this version:**

Claude Fressengeas. Instabilités thermo-viscoplastiques aux grandes vitesses de déformation. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université Paul Verlaine - Metz, 1986. Français. NNT : 1986METZ004S . tel-01775696

HAL Id: tel-01775696

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01775696v1>

Submitted on 24 Apr 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

THESE
DE DOCTORAT D'ETAT ES SCIENCES MATHÉMATIQUES
MECANIQUE

présentée à l'Université de Metz

pour obtenir le grade de
DOCTEUR ES SCIENCES

par

Claude FRESSENGEAS



INSTABILITES THERMO-VISCOPLASTIQUES
AUX GRANDES VITESSES DE DEFORMATION

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE
- METZ

N° inv.

1986 0085

Cote

S/M₃ 86/4

Loc

Magasin

Soutenue publiquement le 6 Juin 1986 devant le Jury composé de:

. L. BRUN	Ecole Polytechnique	Président
. J. KLEPACZKO	Université de Metz	Rapporteur
. A. MOLINARI	Université de Metz	"
. Q.S. NGUYEN	Ecole Polytechnique	"
. G. FERRON	Université de Metz	Examineur
. M. POTIER-FERRY	Université de Metz	"

A la mémoire de mon père.

Cette étude a été réalisée à la Faculté de Sciences de Metz, au Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux, associé au C.N.R.S. depuis cette année 1986; elle a été financée en grande partie par la D.R.E.T.(Direction des Recherches Etudes et Techniques) que je remercie pour ce concours financier.(Contrats 83/1071 et 85/1160)

M. Louis BRUN, professeur à l'Ecole Polytechnique a accepté de présider le Jury chargé de juger cette thèse. Il me fait ainsi un honneur et un plaisir pour lesquels je tient à lui exprimer ma respectueuse reconnaissance.

M.NGUYEN Quoc Son, Directeur de Recherche C.N.R.S. à l'Ecole Polytechnique, et M. Janusz KLEPACZKO, Professeur et chercheur C.N.R.S. à l'Université de Metz, ont bien voulu participer à ce Jury, et se charger de la lourde tâche de rapporteur. Qu'ils veuillent bien trouver ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

Alain MOLINARI occupe dans ce jury une place privilégiée: la perspicacité et la finesse de son jugement scientifique, son infatigable rigueur, son goût passionné pour la recherche scientifique et son amitié bienveillante sont pour beaucoup dans l'aboutissement de ce travail, car ils m'ont apporté un exemple stimulant, en même temps que l'aide la plus efficace. Il m'est agréable de pouvoir lui exprimer ici toute mon amicale reconnaissance.

Mes remerciements vont également à Gérard FERRON et Michel POTIER-FERRY, professeurs à l'Université de Metz, qui m'ont fait l'amitié de s'intéresser à mon travail, et ont bien voulu participer à ce Jury.

Je suis également redevable à Gilles CANOVA, qui m'a dévoilé les Mystères du Polycristal; son insatiable curiosité scientifique, son dynamisme et son enthousiasme communicatifs, en même temps que sa

gentillesse, ont fait de notre travail en commun une expérience dont j'ai tiré beaucoup de plaisir et d'enseignements.

Je tiens à associer à ce travail les enseignants de Mécanique de la Faculté des Sciences de Metz (Maîtrise de Technologie de Construction, de Génie Mécanique, CAPET, Agrégation de Mécanique..) et cela à double titre: d'une part pour l'ambiance chaleureuse qu'ils ont su créer entre nous et dans laquelle s'est déroulé ce travail, d'autre part pour la disponibilité qu'ils m'ont apportée et sans laquelle cette étude n'aurait pu voir le jour. Je ne puis remercier l'un plus que l'autre; chacun m'ayant aidé à son heure a droit également à ma gratitude.

Ma reconnaissance la plus sincère et la plus profonde va à Martine, mon épouse, sans laquelle rien de tout cela n'aurait été possible.

Alain Bilocq a réalisé avec soin et compétence les figures et leur mise en page; il a assuré l'édition de cette thèse et je l'en remercie vivement.

Enfin je remercie Mademoiselle Corinne Marcelet qui m'a aidé dans la frappe du premier chapitre de ce texte.

Table des matières.	P
Introduction.	6
Chapitre 1.	
I- Représentations du comportement plastique anisotrope aux grandes déformations.	10
1-Introduction.	10
2-Ecrouissage cinématique corotationnel.	15
3-Ecrouissage cinématique convectif.	18
4-Ecrouissage cinématique en rotation propre.	22
5-Interprétation dans la théorie des repères directeurs.	24
Annexe 1: Changements de repères.	28
Annexe 2: Cinématique de la rotation propre.	29
Annexe 3: Cinématique du glissement.	31
Références du chapitre 1-I.	33
Liste des figures du chapitre 1-I.	35
II- Approche de l'écrouissage textural aux grandes vitesses de déformation.	36
Références du Chapitre 1-II	47

Chapitre 2: Effets d'inertie et effets thermiques sur la localisation de la déformation plastique à grande vitesse.

48

1-Introduction.	48
2-Equations fondamentales.	52
3-Analyse de stabilité linéaire.	56
3-1:Equations linéarisées.	56
3-2:Déformation dynamique isotherme.	58
3-3:Déformation quasi-statique.	63
3-4:Déformation dynamique.	67
3-5:Aspects tridimensionnels.	70
4-Analyses non-linéaires.	71
4-1:Chargement quasi-statique.	71
4-2:Déformation dynamique.	75
4-3:Processus dynamiques quasi-adiabatiques.	80
5-Conclusion.	83
Annexe:Analyse tridimensionnelle linéarisée.	85
Références du Chapitre 2.	87
Liste de figures du Chapitre 2.	91

Chapitre 3: Instabilité et localisation de la déformation plastique de glissement simple à grande vitesse.

1-Introduction.	93
2-Equations fondamentales.	97
3-Méthodes de perturbation linéaires classiques.	102
4-Méthode de perturbation relative.	111
5-Résultats non-linéaires; discussion.	121
Annexe: Théorème de CODDINGTON-LEVINSON.	136
Références du Chapitre 3.	140
Liste de figures du chapitre 3.	143

Chapitre 4: Analyse non-linéaire approchée de la formation des bandes de cisaillement.

1-Introduction.	144
2-Formulation du problème.	146
3-Solutions stationnaires.	149
4-Stabilité des solutions stationnaires.	152
5-Frontières adiabatiques.	151
Références du Chapitre 4.	159
Liste de figures du Chapitre 4.	172

Conclusions.	173
--------------	-----

1-Introduction.

L'instabilité de la déformation plastique de nombreux matériaux, métaux ou polymères, est couramment observée lors de processus où la vitesse de déformation est importante. C'est notamment le cas de l'usinage à grande vitesse, du formage par explosion ou du magnéto-formage, et des déformations provoquées par l'impact d'un véhicule ou d'un projectile. De nombreuses observations conduisent à penser que la localisation de la déformation plastique qui en résulte agit comme un précurseur de la rupture du matériau; on comprend dès lors l'intérêt considérable porté à ces phénomènes, comme en témoigne l'abondance de la littérature internationale.

Néanmoins les instabilités des déformations plastiques produites à grande vitesse demeurent en général mal comprises. On reste en effet perplexe devant l'énumération des facteurs physiques qui sont jugés importants dans leur développement: écrouissage du matériau, sensibilité à la vitesse de déformation, adoucissement thermique et couplage thermo-mécanique, conduction thermique, transformations de phase, effets d'inertie, adoucissement lié à l'évolution des textures, à l'endommagement du matériau, adoucissement géométrique et conditions aux limites. La prévision des instabilités des structures soumises à des chargements complexes à grande vitesse est hors de portée à ce jour, et les études en cours portent en général sur la prévision et l'interprétation d'instabilités observées sur des configurations expérimentales relativement simples et sous des conditions à la limite contrôlables: striction en traction uniaxiale et biaxiale, bandes de cisaillement obtenues par la torsion de tubes minces par exemple.

Néanmoins, les problèmes rencontrés demeurent nombreux, et l'on peut pour les besoins de l'exposé les répartir un peu arbitrairement en trois classes:

1) Les problèmes liés à la formulation des lois de comportement des matériaux, tant aux grandes déformations qu'aux grandes vitesses de déformation, tant du point de vue de la description phénoménologique que de l'interprétation ontologique basée sur la physique microscopique.

2) La description de l'instabilité proprement dite, c'est-à-dire de la compétition qui se produit entre facteurs stabilisants: écrouissage, sensibilité à la vitesse de déformation, conduction thermique, effets d'inertie d'une part, et les facteurs déstabilisants d'autre part: adoucissement géométrique, textural, thermique, et endommagement.

3) Les problèmes méthodologiques liés à l'étude de l'instabilité et de la localisation de déformations plastiques homogènes en général instationnaires.

Ces trois aspects seront successivement traités au cours de ce travail. Il n'est naturellement pas question d'épuiser le sujet, ni même d'en faire une revue exhaustive. Nous prenons le parti de n'exposer ici que nos travaux personnels, obtenus en collaboration avec A.MOLINARI et G.CANOVA, au risque de ne présenter ainsi qu'une vue partielle du sujet.

Au Chapitre 1, nous discutons de la formulation de lois de comportement adaptées aux grandes déformations plastiques et aux grandes vitesses de déformation. Nous présentons tout d'abord un certain nombre de modèles d'écrouissage cinématique en grande déformation plastique, basés sur différentes dérivées objectives, et pourvus d'effets de mémoire. Nous discutons leurs propriétés en traction-compression simple et en glissement simple, notamment du point de vue de l'instabilité des

déformations plastiques homogènes. Leurs statuts thermodynamiques sont précisés, et une interprétation en est donnée dans le cadre de la théorie des repères directeurs de J.MANDEL lorsque cela est possible (FRESENGEAS- MOLINARI 1983 ; 1,2). Puis une approche de l'adoucissement textural des métaux aux grandes vitesses de déformation est proposée (CANOVA- MOLINARI -FRESENGEAS 1984 , CANOVA et al 1986), où l'on considère que les glissements sur les plans cristallographiques suivent une loi visqueuse. La loi de comportement obtenue peut être représentative du comportement du monocristal aux grandes vitesses de déformation. Les conséquences relatives à l'instabilité de la déformation plastique sont également discutées.

Le chapitre 2 illustre les influences contradictoires des facteurs stabilisants: écrouissage, sensibilité à la vitesse ,inertie, conduction thermique, et des facteurs déstabilisants: adoucissement thermique et géométrique, sur la ductilité des matériaux en traction uniaxiale (FRESENGEAS- MOLINARI 1985). Les aspects "isothermes": textures et endommagement ne sont pas pris en considération dans ce chapitre, et l'accent est porté sur l'influence des effets d'inertie et des effets thermiques, qui peuvent être prépondérants aux grandes vitesses de déformation. Les méthodes de linéarisation, classiques dans l'étude des phénomènes d'instabilité, au moins pour une première approximation, sont utilisées et discutées. Des analyses non linéaires analytiques et numériques sont présentées, qui permettent de décrire convenablement l'accroissement dynamique de la ductilité, et son affaiblissement adiabatique. Les résultats théoriques obtenus sont comparés aux résultats expérimentaux disponibles.

Au chapitre 3, on montre que les concepts d'instabilité et de localisation de l'écoulement plastique sont en général différents, et

que la formation des bandes de cisaillement n'est pas en général correctement prédite par le concept classique d'instabilité de la déformation plastique, mais au contraire par celui de localisation. Une nouvelle méthode de perturbations, appelée méthode de perturbations relatives est présentée (FRESENCEAS- MOLINARI 1986) , qui prend en compte le caractère instationnaire de la déformation plastique homogène, et permet d'étudier la localisation de la déformation. Les critères d'instabilité fournis par les méthodes classiques et les critères de localisation fournis par la méthode relative sont comparés, pour diverses conditions aux limites, et ils sont confrontés aux données expérimentales actuelles. L'influence de la taille des défauts et de l'adiabaticité de la déformation sur l'instabilité et la localisation de la déformation plastique sont discutées.

Le chapitre 4 présente des résultats analytiques et numériques non-linéaires relatifs à la formation de bandes de cisaillement sous contrainte imposée dans des matériaux à très faible écrouissage, comme certains alliages de Titane. Pour des conditions à la limite isothermes, on met en évidence une contrainte critique au delà de laquelle la déformation plastique est nécessairement instable. En dessous de cette contrainte , l'instabilité est conditionnelle: une méthode de perturbations non-linéaires permet de montrer l'existence de défauts critiques et d'approcher les déformations critiques de localisation. Pour des conditions adiabatiques à la frontière, une méthode de perturbations non-linéaires relative fournit également une approximation des déformations critiques de localisation.

C H A P I T R E 1

I Représentations du comportement plastique anisotrope aux grandes déformations

1. Introduction

Les modèles d'écroûissage cinématique représentent l'anisotropie d'écroûissage par le déplacement tensoriel \underline{X} du centre de la surface d'écoulement; dans le domaine des faibles déformations plastiques, l'évolution de la variable interne \underline{X} est régie classiquement par la loi de Prager-Ziegler:

$$(1.1) \quad \dot{\underline{X}} = B(\bar{\gamma}) \underline{D}$$

pour laquelle la dérivée particulaire $\dot{\underline{X}}$ de \underline{X} est colinéaire au tenseur des vitesses de déformation plastique \underline{D} ; B est une fonction scalaire de la déformation plastique cumulée :

$$\bar{\gamma} = \int_0^t (2\underline{D} : \underline{D})^{1/2} dt. \text{ La dérivée particulaire n'étant pas objective,}$$

l'extension de (1.1) aux grandes déformations plastiques n'est pas possible sous cette forme; on fait généralement appel à la dérivée de Jaumann $\overset{\nabla}{\underline{X}}$ de \underline{X} :

$$(1.2) \quad \overset{\nabla}{\underline{X}} = \dot{\underline{X}} + \underline{X} \cdot \underline{\Omega} - \underline{\Omega} \cdot \underline{X}$$

($\underline{\Omega}$: tenseur des vitesses de rotation) pour en assurer l'objectivité, et l'on pose :

$$(1.3) \quad \overset{\nabla}{\underline{X}} = B(\bar{\gamma}) \underline{D}$$

Ce modèle donne des résultats satisfaisants en traction-compression simple; en revanche, les prédictions obtenues en traction-compression cyclique, ou il n'apparaît pas d'hystérésis, et surtout en glissement

simple, de gradient de déformation $F = \begin{vmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ (Figure 1), où la

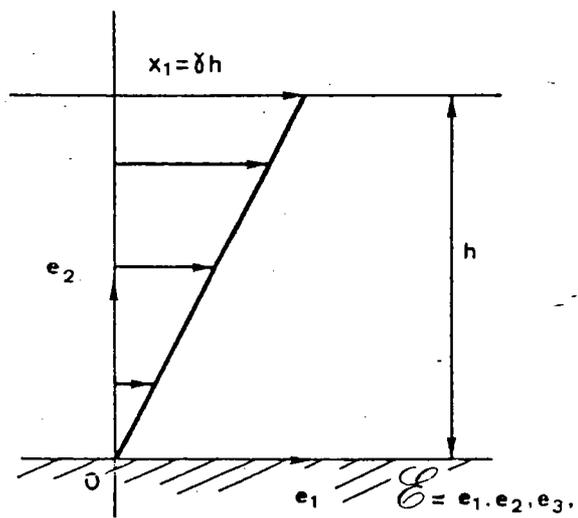


Fig. 1. Glissement simple.

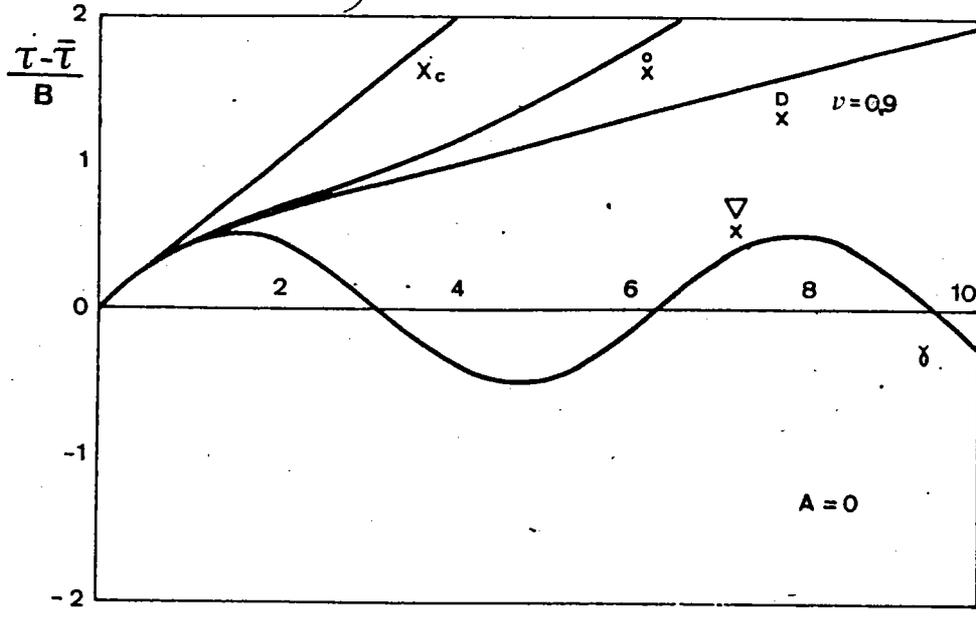


Fig. 2. Contrainte de cisaillement en fonction de la distorsion, $\dot{\underline{X}}_c$ — dérivée convective covariante, $\overset{\nabla}{\underline{X}}$ — dérivée de Jaumann, $\overset{\circ}{\underline{X}}$ — dérivée en rotation propre. Aux grandes valeurs de γ la courbe ($\overset{\circ}{\underline{X}}$) possède une asymptote parallèle à $\dot{\underline{X}}_c$, $\overset{\circ}{\underline{X}}$ — dérivée type rotation propre, $\nu = 0.9$.

contrainte de cisaillement τ évolue de manière cyclique en fonction du glissement γ [1], sont inhabituelles (Figure 2). L'analyse cinématique du glissement montre que le repère corotationnel est affecté dans ce cas d'une vitesse de rotation constante $\dot{\gamma}/2$ par rapport au repère de référence E : cette rotation continue est à l'origine des oscillations engendrées par la dérivée de Jaumann. On verra néanmoins au cours de ce chapitre qu'un tel comportement peut être rencontré, notamment aux grandes vitesses de déformation. Différents auteurs ont proposé des lois d'évolution de X modifiées de manière à prédire des comportements plus classiques ; E.H.Lee *et al.* [2] définissent dans le cas du glissement simple une dérivée de Jaumann modifiée: la dérivée de X est effectuée par rapport à un repère dont la rotation est limitée empiriquement. Ce modèle ne prédit pas d'oscillations; cependant sa généralisation à d'autres types de sollicitations paraît difficile.

E.T. DNAT [3] et Y.F. DAFALIAS [4] modifient également la dérivée de Jaumann. Les oscillations sont supprimées ou non suivant les cas. Aucun de ces modèles ne décrit l'hystérésis de l'écrouissage cyclique.

C.FRESSENGEAS et A.MOLINARI [5,13] étudient les possibilités offertes par les dérivées convectives covariante X_c et contravariante X^c : les modèles

$$(1.4) \quad X_c = B(\gamma)D \text{ et } X^c = B(\gamma)D$$

éliminent le comportement cyclique inhérent aux modèles corotationnels.

Il y a toutefois des difficultés d'ordre cinématique liées à la convection et à l'incompressibilité de l'écoulement. Un terme de restauration destiné à introduire un effet de mémoire évanescence dans les modèles corotationnels ou convectifs est introduit dans [5] :

$$(1.5) \quad \bar{X} = B(\bar{\gamma})D - A(\bar{\gamma})\bar{\gamma}X$$

$$(1.6) \quad X_c = B(\bar{\gamma})D - A(\bar{\gamma})\bar{\gamma}X$$

$$(1.7) \quad X^c = B(\bar{\gamma})D - A(\bar{\gamma})\bar{\gamma}X$$

Aux grandes déformations, il atténue les effets cinématiques de

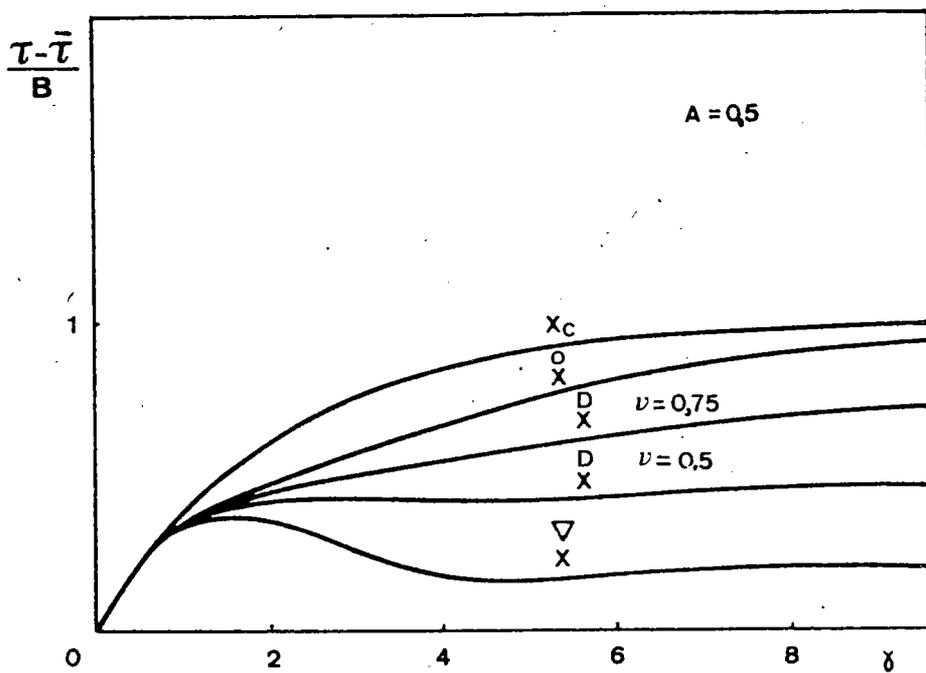


Fig. 3. Influence de la restauration sur la contrainte de cisaillement

rotation ou de convection; de plus, il permet la description de l'écoulement cyclique. C.FRESSENGEAS, A.MOLINARI [5] et Y.F.DAFALIAS [4] proposent en outre l'emploi de la dérivée en rotation propre $\overset{f}{X}$ de X définie par :

$$(1.8) \quad \overset{f}{X} = \dot{X} + X \cdot \dot{R} \cdot R^t - \dot{R} \cdot R^t \cdot X,$$

R est issu de la décomposition polaire $F = R \cdot U = U \cdot R$ du gradient F .

La loi d'évolution avec restauration :

$$(1.9) \quad \overset{f}{X} = B(\bar{\gamma})D - A(\bar{\gamma})\bar{\gamma}X$$

du tenseur X élimine notamment le comportement cyclique en glissement simple: la solution coïncide avec la solution corotationnelle aux valeurs assez faibles du glissement, puis évolue parallèlement à la solution convective aux grandes déformations, tout en assurant l'incompressibilité de l'écoulement. Une autre approche par variables internes a été proposée par F. SIDOROFF [6].

Les modèles (1.5), (1.6), (1.7), (1.9), introduits ci-dessus sont développés dans ce chapitre en limitant le propos à l'écoulement cinématique. Cependant, les considérations présentées peuvent être étendues à un écoulement mixte isotrope-cinématique. L'écoulement cinématique corotationnel est développé dans le paragraphe 2; le paragraphe 3 présente l'écoulement cinématique convectif, puis on définit au paragraphe 4 la dérivée en rotation propre et on présente son application à l'écoulement cinématique.

Dans chaque cas, l'influence de la restauration est analysée; les modèles sont testés en traction-compression et en glissement simple. Le statut thermodynamique de chaque modèle est précisé; enfin, dans le paragraphe 5, une présentation en est faite, lorsque cela est possible, dans le cadre théorique des repères directeurs établi par J.MANDEL [7].

2. Ecoulement cinématique corotationnel

Nous considérons un matériau initialement isotrope, soumis à un écoulement plastique incompressible. La loi d'écoulement est déduite de

la fonction seuil de von Mises :

$$(2.1) \quad D = \frac{\lambda}{\tau} (s - X), \quad \lambda \geq 0.$$

On représente par s le tenseur déviateur des contraintes, et par τ une contrainte équivalente :

$$(2.2) \quad \tau = \frac{1}{2} (s - X) : (s - X)^{1/2}$$

Le signe $:$ représente le produit contracté de deux tenseurs. Les lois d'écoulement sont spécifiées par la fonction $\tau(\gamma)$, et par l'équation d'évolution corotationnelle (1.5) de la variable interne X . Limitant notre propos à l'écoulement cinématique seul, nous supposons $\tau(\gamma)$ constant.

Dans le cas du glissement simple, de vitesse $\dot{\gamma}$ constante, les coordonnées dans le repère de référence du tenseur gradient de vitesses $L = \dot{F} \cdot F^{-1}$, du tenseur des vitesses de déformation D , et du tenseur des vitesses de rotation Ω sont respectivement :

$$(2.3) \quad L = \begin{vmatrix} 0 & \dot{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad D = \frac{\dot{\gamma}}{2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \Omega = \frac{\dot{\gamma}}{2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

En outre, la déformation plastique cumulée $\bar{\gamma}$ et sa dérivée $\bar{\dot{\gamma}}$ sont alors simplement données par :

$$(2.4) \quad \bar{\gamma} = \gamma, \quad \bar{\dot{\gamma}} = \dot{\gamma}$$

Si l'on définit le tenseur α par :

$$(2.5) \quad X = B(\gamma)\alpha$$

la relation (1.5) fournit le système différentiel :

$$(2.6) \quad \frac{d\alpha_{11}}{d\gamma} = \alpha_{12} - A(\bar{\gamma})\alpha_{11},$$

$$\frac{d\alpha_{12}}{d\gamma} = -\alpha_{11} + \frac{1}{2} - A(\bar{\gamma})\alpha_{12},$$

$$\alpha_{22} = -\alpha_{11}.$$

Supposons le coefficient de restauration $A(\bar{\gamma})$ constant, et prenons pour conditions initiales :

$$(2.7) \quad \alpha_{i,j}(0) = 0, \quad i,j = 1,2$$

Nous obtenons alors pour solution :

$$(2.8) \quad \alpha_{1,2} = \frac{1}{2(1 + A^2)} (A + \exp(-A\gamma)) (\sin\gamma - A\cos\gamma)$$

et la loi d'écoulement (2.1) fournit la contrainte de cisaillement τ :

$$(2.9) \quad \tau = s_{1,2} = \bar{\tau} + \frac{B}{2(1 + A^2)} (A + \exp(-A\gamma)) (\sin\gamma - A\cos\gamma)$$

Pour un coefficient de restauration A nul et pour B constant, τ est donné par :

$$(2.10) \quad \tau = \bar{\tau} + \frac{B}{2} \sin\gamma$$

et présente les oscillations mentionnées en [11]. Pour les grandes valeurs de A , les oscillations disparaissent complètement; pour les valeurs moyennes, la contrainte de cisaillement passe par une valeur maximum, puis présente une limite finie lorsque le glissement γ devient infini (figure 3). Ce comportement est qualitativement semblable aux résultats de la théorie du vertex [8].

En traction-compression pure, la dérivée de Jaumann $\overset{\nabla}{\dot{\chi}}$ s'identifie à la dérivée particulaire $\dot{\chi}$. Les calculs effectués en petites déformations [9,12] s'étendent sans difficultés aux grandes déformations; il en résulte notamment que le modèle (1.5) décrit l'hystérésis de l'écroutissage cyclique.

Envisageons maintenant le statut thermodynamique des modèles (1.3) et (1.5) : la loi d'évolution (1.3) est compatible avec le schéma des matériaux standards généralisés.

Donnons nous en effet l'énergie libre ψ :

$$(2.11) \quad \psi = \frac{1}{2} B\alpha:\alpha.$$

La dissipation Φ :

$$(2.12) \quad \rho\Phi = s:D - \rho\dot{\psi}$$

vaut alors :

$$(2.13) \quad \rho\dot{\Phi} = s:D - B\alpha:\dot{\alpha}$$

c'est à dire compte tenu de (1.2), (1.3) (2.5) :

$$(2.14) \quad \rho\dot{\Phi} = (s - X):D - B(\alpha:\Omega.\alpha - \alpha:\alpha.\Omega).$$

Mais, α est un tenseur déviateur symétrique, par suite :

$$(2.15) \quad \alpha:\Omega.\alpha = \alpha:\alpha.\Omega$$

de sorte que, d'après la loi d'écoulement (2.1) :

$$(2.16) \quad \rho\dot{\Phi} > 0$$

L'inégalité de Clausius-Duhem est donc satisfaite dans toute évolution gouvernée par la relation (1.3). On peut également vérifier que choisissant l'énergie libre (2.11), et $A > 0$, le modèle (1.5) satisfait à l'inégalité de CLAUSIUS-DUHEM; toutefois, il ne vérifie pas l'hypothèse de normalité généralisée.

3. Ecrouissage cinématique convectif

L'emploi des dérivées convectives covariante :

$$(3.1) \quad X_c = \dot{X} + X.L + L^t.X$$

et contravariante :

$$(3.2) \quad X^c = \dot{X} - X.L^t - L.X$$

dans les lois d'évolution (1.6) et (1.7) permet d'éliminer simplement le comportement cyclique du modèle corotationnel (1.3) en glissement simple, tout en satisfaisant au principe d'objectivité.

Le problème posé par les équations (1.6), (1.7), (2.1), (2.3), (2.5), (3.1), (3.2) se réduit aux deux systèmes différentiels vérifiés par le tenseur α , dans les cas respectivement covariant (1.6), (3.1):

$$\frac{d\alpha_{11}}{d\gamma} = -A\alpha_{11},$$

$$(3.3) \quad \frac{d\alpha_{12}}{d\gamma} + \alpha_{11} = \frac{1}{2} - A\alpha_{12},$$

$$\frac{d\alpha_{22}}{d\gamma} + 2\alpha_{12} = -A\alpha_{22},$$

et contravariant : (1.7), (3.2) :

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \frac{d\alpha_{11}}{d\gamma} - 2\alpha_{12} &= -A\alpha_{11}, \\ \frac{d\alpha_{12}}{d\gamma} - \alpha_{22} &= \frac{1}{2} - A\alpha_{12}, \\ \frac{d\alpha_{22}}{d\gamma} &= -A\alpha_{22}. \end{aligned}$$

Pour les conditions initiales (2.7), un écoulement cinématique linéaire (B constant) et un coefficient de restauration A constant, la contrainte tangentielle est donnée par :

$$(3.5) \quad \tau = \bar{\tau} + \frac{B}{2A} (1 - \exp(-A\gamma))$$

Dans le modèle sans restauration ($A = 0$), τ varie linéairement en fonction de γ :

$$(3.6) \quad \tau = \bar{\tau} + B\gamma/2$$

En revanche, la trace de α devient non nulle de sorte que l'incompressibilité n'est plus assurée. Ce résultat est d'ailleurs général; par exemple pour la loi d'évolution (1.6) sans restauration :

$$(3.7) \quad \text{tr}(\dot{X}_c) = B\text{tr}(D) = 0$$

De sorte qu'après (1.6), (3.1), (3.7)

$$(3.8) \quad \text{tr}(\dot{X}) = 2D:X.$$

Ceci est en général non nul, ce qui conduit à la conclusion annoncée.

Une modification simple de la loi d'écoulement (2.1) permet cependant d'assurer l'incompressibilité, et de conférer un comportement convenable aux modèles convectifs; il suffit en effet d'imposer la présence du déviateur X' de X en écrivant :

$$(3.9) \quad D = \frac{\lambda}{\tau} (s - X').$$

Cela ne modifie pas le résultat (3.5), mais seulement les contraintes normales, dont la répartition est par ailleurs plus satisfaisante dans le cadre du modèle covariant (1.6) [10]

Examinons maintenant le comportement du modèle convectif covariant

(1.6), (3.1), (3.9) dans une sollicitation de traction simple ou de compression simple, de gradient de déformation :

$$(3.10) \quad F = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1/\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1/\lambda \end{vmatrix}$$

Le tenseur gradient de vitesses L est confondu avec le tenseur des vitesses de déformation D ; ses coordonnées dans le repère de référence sont :

$$(3.11) \quad L = D = \dot{\epsilon} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{vmatrix}$$

On a posé $\dot{\epsilon} = \dot{\lambda}/\lambda$; la déformation plastique cumulée $\bar{\gamma}$ vaut ϵ en traction et $-\epsilon$ en compression. Les équations gouvernant l'évolution de α sont alors en traction :

$$(3.12) \quad \begin{aligned} \frac{d\alpha_{11}}{d\epsilon} + (2 + A)\alpha_{11} &= 1, \\ \frac{d\alpha_{22}}{d\epsilon} + (A - 1)\alpha_{22} &= -1/2, \\ \alpha_{33} &= \alpha_{22} \end{aligned}$$

et en compression :

$$(3.13) \quad \begin{aligned} \frac{d\alpha_{11}}{d\epsilon} + (2 - A)\alpha_{11} &= 1, \\ \frac{d\alpha_{22}}{d\epsilon} - (1 + A)\alpha_{22} &= -1/2, \\ \alpha_{33} &= \alpha_{22}. \end{aligned}$$

Compte tenu des conditions initiales (2.7), les solutions de (3.12) et (3.13) sont respectivement;

$$(3.14) \quad \begin{aligned} \alpha_{11} &= \frac{1}{2 + A} (1 - \exp(-(2+A)\epsilon)) \\ \alpha_{22} &= -\frac{1}{2(A - 1)} (1 - \exp(-(A-1)\epsilon)) \\ \alpha_{33} &= \alpha_{22}, \end{aligned}$$

et :

$$\alpha_{11} = \frac{1}{2-A} (1 - \exp(-(2-A)\epsilon))$$

$$(3.15) \quad \alpha_{22} = \frac{1}{2(A+1)} (1 - \exp(1+A)\epsilon),$$

$$\alpha_{33} = \alpha_{22}.$$

La contrainte σ qui en résulte vaut en traction ($\epsilon > 0$)

$$(3.16) \quad \sigma = \sqrt{3}\tau + B \left(\frac{1}{2+A} (1 - \exp(-(2+A)\epsilon)) + \frac{1}{2(A-1)} (1 - \exp(-(A-1)\epsilon)) \right)$$

et en compression ($\epsilon < 0$)

$$(3.17) \quad \sigma = \sqrt{3}\tau + B \left(\frac{1}{2-A} (1 - \exp(-(2-A)\epsilon)) - \frac{1}{2(1+A)} (1 - \exp(1+A)\epsilon) \right)$$

Il est clair que le comportement ainsi obtenu n'est pas satisfaisant en tous points; on doit notamment exiger: $A > 2$ pour que σ garde une limite finie. En outre, les comportements en traction et en compression sont dissymétriques; en particulier, les contraintes asymptotiques obtenues sont, en traction :

$$(3.18) \quad \sqrt{3}\tau + B \left(\frac{1}{2+A} + \frac{1}{2(A-1)} \right)$$

et en compression :

$$(3.19) \quad -\sqrt{3}\tau + B \left(\frac{1}{2-A} - \frac{1}{2(A+1)} \right)$$

Cette propriété est cependant fortement atténuée par la restauration; de plus, elle est sans conséquence en chargement monotone. Enfin, le modèle permet de décrire un cycle stabilisé d'écrouissage cyclique.

Les modèles convectifs sont incompatibles avec une formulation thermodynamique basée sur le choix de l'énergie libre (2.11) : par exemple la dissipation s'écrit pour le modèle covariant sans restauration :

$$(3.20) \quad \rho\dot{\Phi} = (s - X):D - 2B D:\alpha.\alpha$$

La quantité $D:\alpha.\alpha$ est de signe quelconque, de sorte que l'inégalité de

Clausius-Duhem ne peut en général être satisfaite.

4. Ecrouissage cinématique en rotation propre

Dans le but de lever les difficultés cinématiques des modèles corotationnel et convectif, nous considérons la dérivation par rapport au repère orthonormé $E^* = (l_i^*)$, déduit du repère $E = (l_i)$ dans le transport par la rotation R :

$$(4.1) \quad l_i^* = R \cdot l_i,$$

R est défini par la décomposition polaire :

$$(4.2) \quad F = U \cdot R = R \cdot U$$

du gradient de déformation F . Soit un tenseur X défini par ses coordonnées dans E^* :

$$(4.3) \quad X = X^{ij} l_i^* \otimes l_j^*$$

Nous appellerons dérivée en rotation propre de X le tenseur $\overset{\mathcal{L}}{X}$ défini par:

$$(4.4) \quad \overset{\mathcal{L}}{X} = \dot{X}^{ij} l_j^* \otimes l_i^*.$$

On vérifie que cette définition est intrinsèque (voir Annexe 1), c'est-à-dire indépendante du choix du repère E . Le tenseur $\overset{\mathcal{L}}{X}$ est lié à la dérivée particulière \dot{X} par :

$$(4.5) \quad \overset{\mathcal{L}}{X} = \dot{X} + X \cdot \Omega^* - \Omega^* \cdot X$$

où :

$$(4.6) \quad \Omega^* = \dot{R} \cdot R^t$$

Le tenseur vitesse de rotation propre Ω^* diffère en général de la vitesse de rotation Ω qui définit la dérivée de Jaumann, et l'on a (voir annexe 2) :

$$(4.7) \quad \Omega = \Omega^* + \frac{1}{2} R \cdot (\dot{U} \cdot U^{-1} - U^{-1} \cdot \dot{U}) \cdot R^t.$$

La dérivée $\overset{\mathcal{L}}{X}$ est objective. A notre connaissance, elle apparaît pour la

première fois dans GREEN-NAGHDI [11]. Nous avons proposé son emploi dans la loi d'évolution (1.9) du tenseur d'écoulement \mathbf{X} .

Il importe de souligner une caractéristique essentielle de cette loi: le calcul de \mathbf{X} nécessite la connaissance du gradient \mathbf{F} par rapport à une configuration privilégiée. L'intensité de l'écoulement fait référence à l'état idéalement recuit du matériau, pour lequel les contraintes internes sont nulles. Cet état constitue la configuration initiale choisie pour le calcul de \mathbf{X} dans la loi d'évolution (1.9).

Dans une expérience de traction-compression, la dérivée \mathbf{X} s'identifie avec la dérivée de Jaumann $\overset{\vee}{\mathbf{X}}$ et la dérivée particulaire $\dot{\mathbf{X}}$; les prédictions du modèle (1.9) sont dans ce cas les mêmes que celles du modèle corotationnel (1.5). En glissement simple, les coordonnées dans E^* du tenseur Ω^* sont :

$$(4.8) \quad \Omega^* = \begin{vmatrix} 0 & \dot{\theta} & 0 \\ -\dot{\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

si l'on pose (voir annexe 3) :

$$(4.9) \quad \dot{\theta} = \frac{2\dot{\gamma}}{4 + \gamma^2} \quad \text{et} \quad \theta = \text{Arctg} \frac{\gamma}{2} = \theta(\gamma)$$

La loi d'évolution (1.9) du tenseur α fournit alors le système différentiel :

$$(4.10) \quad \begin{aligned} \frac{d\alpha_{11}}{d\gamma} + 2 \frac{d\theta}{d\gamma} \alpha_{12} &= -A\alpha_{11}, \\ \frac{d\alpha_{12}}{d\gamma} - 2 \frac{d\theta}{d\gamma} \alpha_{11} &= \frac{1}{2} - A\alpha_{12}, \\ \frac{d\alpha_{22}}{d\gamma} - 2 \frac{d\theta}{d\gamma} \alpha_{12} &= -A\alpha_{22}, \end{aligned}$$

dont l'intégration, compte tenu des conditions initiales (2.7) conduit à la valeur :

$$(4.11) \quad \tau = \bar{\tau} + \frac{B}{2} \exp(-A\gamma) \left(\sin 2\theta \int_0^\gamma \exp(A\alpha) \sin 2\theta(\alpha) d\alpha + \cos 2\theta \int_0^\gamma \exp(A\alpha) \cos 2\theta(\alpha) d\alpha \right)$$

de la contrainte de cisaillement.

Il apparaît sur les figures (2 et 3) que cette fonction coïncide avec

la solution corotationnelle aux valeurs du glissement assez faibles, puis évolue parallèlement à la solution convective aux grandes déformations. Les oscillations sont supprimées; on observe cependant un adoucissement dû à la rotation, puis une reprise de l'écrouissage. En outre, l'incompressibilité de l'écoulement est assurée.

Le modèle d'écrouissage en rotation propre (1.9) bénéficie du même statut thermodynamique que les modèles corotationnels (1.3) et (1.5) : la loi d'évolution (1.9) sans restauration est compatible avec le schéma des matériaux standard généralisés.

5. Interprétations dans la théorie des repères directeurs

La théorie des repères directeurs présentée par J.MANDEL [7] peut servir de cadre pour une présentation phénoménologique de l'écrouissage cinématique en grande déformation. Dans cette théorie, la loi d'écoulement du matériau précise complètement le tenseur de vitesses, partie antisymétrique comprise, sous la forme :

$$(5.1) \quad \overset{D}{F} \cdot F^{-1} = \lambda G,$$

G est un tenseur en général non symétrique, dont les arguments sont précisés plus loin; $\overset{D}{F}$ désigne la dérivée de F par rapport à un repère D dont la vitesse de rotation est Ω_0 , et que l'on appelle repère directeur

$$(5.2) \quad \overset{D}{F} = \dot{F} - \Omega_0 \cdot F.$$

Le tenseur Ω_0 est connu dès lors que la fonction G est donnée; en effet, la loi d'écoulement (5.1) dédoublée en sa partie symétrique :

$$(5.3) \quad D = \lambda G$$

et en sa partie anti-symétrique :

$$(5.4) \quad \Omega - \Omega_0 = \lambda G$$

fournit :

$$(5.5) \quad \Omega_0 = \Omega - \lambda G.$$

La détermination de G , et notamment de sa partie antisymétrique \underline{G} , peut être fondée sur une analyse des micro-rotations du polycristal, et c'est peut-être le cadre naturel de cette théorie, ou effectuée de manière phénoménologique (C.FRESSENGEAS, A.MOLINARI [13]), et c'est la voie que nous choisissons ici : Nous posons de manière classique

$$(5.6) \quad D = \lambda G = \lambda(s - X)$$

pour la partie symétrique (5.3).

Si d'autre part, nous précisons la loi d'évolution de la dérivée $\overset{D}{X}$:

$$(5.7) \quad \overset{D}{X} = B(\bar{\gamma})D - A(\bar{\gamma})\bar{\gamma} X$$

avec, par définition :

$$(5.8) \quad \overset{D}{X} = \dot{X} + X.\Omega_0 - \Omega_0.X$$

nous obtenons un modèle d'écrouissage cinématique complet : (5.5), (5.6), (5.7) (5.8). Un résultat identique est obtenu par E.T. ONAT [3,(79); p. 259] au terme d'une argumentation complètement indépendante de la théorie des repères directeurs. On peut observer tout d'abord que si G est réduit à sa partie symétrique. Le repère directeur D n'est autre que le repère corotationnel, et le modèle (5.7) coïncide avec le modèle corotationnel (1.5).

E.T. ONAT [3] et Y.F. DAFALIAS [4] suggèrent le choix :

$$(5.9) \quad \lambda G = \nu(D.X - X.D)$$

dans lequel ν est un coefficient déterminé sur la base de données expérimentales. Ce choix génère une famille de rotations Ω_0 :

$$(5.10) \quad \Omega_0 = \Omega - \nu(D.X - X.D)$$

et une famille de modèles corotationnels (5.7) correspondants.

Selon les valeurs de ν , les oscillations corotationnelles sont supprimées, ou au contraire subsistent [3,4]; elles sont amorties par le terme de restauration ou par un écrouissage cinématique non linéaire.

Les modèles convectifs ne reçoivent pas d'interprétation dans la théorie des repères directeurs, car ceux-ci sont nécessairement orthonormés, ce qui n'est pas en général le cas des repères convectifs.

En revanche, le modèle d'écrouissage en rotation propre (1.9) reçoit une interprétation dans cette théorie et conduit à une famille de modèles en rotation propre, distincte de la famille corotationnelle (5.8), (5.10). Posons en effet pour la partie antisymétrique de la loi d'écoulement, par analogie avec (4.7):

$$(5.11) \quad \lambda G = \frac{\nu}{2} R.(\dot{U}.U^{-1} - U^{-1}.\dot{U}).R^t.$$

La relation (5.4) fournit alors le tenseur vitesse de rotation Ω_0 du repère directeur :

$$(5.12) \quad \Omega_0 = \Omega - \frac{\nu}{2} R.(\dot{U}.U^{-1} - U^{-1}.\dot{U}).R^t.$$

D'après (4.7), le choix $\nu = 1$ conduit à l'égalité $\Omega_0 = \Omega^*$; le repère directeur est alors confondu avec le repère E^* . De la même façon, le repère D s'identifie avec le repère corotationnel pour le choix $\nu = 0$.

Les différents choix de ν fournissent une famille de dérivées objectives X et de modèles (5.7), (5.8), (5,12) correspondants, aux propriétés thermodynamiques identiques à celles des modèles corotationnels (1.3) et (1.5). Dans le cas du glissement simple, la loi d'évolution (5.7) pour la famille de dérivées (5.8), (5.12) est traduite par le système différentiel (4.10) avec (voir Annexe 3):

$$(5.13) \quad \frac{d\theta}{d\gamma} = \frac{1}{2} \left(1 - \nu \frac{\gamma^2}{4 + \gamma^2} \right)$$

Les solutions sont de la forme (4.11) avec :

$$(5.14) \quad \theta(\gamma) = (1 - \nu) \frac{\gamma}{2} + \nu \operatorname{Arctg} \frac{\gamma}{2}$$

Pour : $0 \leq \nu \leq 1$, elles évoluent continuellement de la solution corotationnelle à la solution en rotation propre (Figures 2,3).

L'adoucissement géométrique de rotation est modulé par ν .

La famille de modèles en rotation propre, que l'on peut compléter par une fonction d'écroûissage cinématique non linéaire :

$$(5.15) \quad B(\gamma) = B(1 - k(D:D)^{1/2})$$

met en jeu quatre paramètres (A, B, k, ν) et paraît susceptible de rendre compte d'un certain nombre de comportements. Les modèles d'écroûissage cinématique (1.5) et (1.9) complétés par un écroûissage isotrope ont été notamment utilisés par D.DUDZINKI et A.MOLINARI [14] pour le calcul de courbes limites de formage. Il apparaît à ce sujet que le modèle en rotation propre permet de mieux rendre compte de certains résultats expérimentaux dans le domaine du rétreint.

ANNEXE 1. Changements de repères

Soient $E = (l_i)$ et $A = (a_i)$ deux repères covariants lagrangiens; dans le transport par la rotation propre R , ils se transforment respectivement en $E^* = (l_i^*)$ et $A^* = (a_i^*)$ tels que :

$$(A.1.1) \quad l_i^* = R.l_i \quad a_i^* = R.a_i$$

Le tenseur X peut être donné par ses coordonnées dans E^* ou dans A^*

$$(A.1.2) \quad X = X^{ij} l_i^* \otimes l_j^* = A^{ij} a_i^* \otimes a_j^*$$

La transformation linéaire reliant les vecteurs de E^* et de A^* est :

$$(A.1.3) \quad l_i^* = (l_i^* . a^{k*}) a_k^*$$

ou a^{k*} désigne les vecteurs du repère contravariant réciproque de A^* . La règle de transformation des coordonnées contravariantes de X , découle de (A.1.2) et (A.1.3) :

$$(A.1.4) \quad A^{k1} = X^{ij} (l_i^* . a^{k*}) (l_j^* . a^{1*})$$

Tous les termes du type : $(l_i^* . a^{k*})$ sont invariants au cours de la transformation. En effet :

$$(A.1.5) \quad l_i^* . a^{k*} = l_i . R^t . R . a^k = l_i . a^k$$

Par la suite, la dérivation de (A.1.4) fournit :

$$(A.1.6) \quad \dot{A}^{k1} = \dot{X}^{ij} (l_i^* . a^{k*}) (l_j^* . a^{1*})$$

et compte tenu de (A.1.3) :

$$(A.1.7) \quad \dot{A}^{k1} a_k^* \otimes a_1^* = \dot{X}^{ij} l_i^* \otimes l_j^* = \frac{f}{X}$$

Le résultat (A.1.7) montre le caractère intrinsèque de la dérivation en rotation propre.

ANNEXE 2. Cinématique de la rotation propre

La décomposition polaire du gradient de déformation F :

$$(A.2.1) \quad F = R.U = U.R$$

conduit à la définition de la rotation R et des tenseurs de déformation pure droit et gauche U et U .

Le tenseur gradient de vitesses L :

$$(A.2.2) \quad L = \dot{F}.F^{-1}$$

peut être exprimé en fonction de R et U :

$$(A.2.3) \quad L = \dot{R}.R^t + R.\dot{U}.U^{-1}.R^t.$$

Sa partie antisymétrique Ω :

$$(A.2.4) \quad \Omega = \frac{1}{2} (L - L^t)$$

s'écrit alors :

$$(A.2.5) \quad \Omega = \dot{R}.R^t + \frac{1}{2} R.(\dot{U}.U^{-1} - U^{-1}.\dot{U}).R^t$$

Nous définissons le tenseur vitesse de rotation propre Ω^* par :

$$(A.2.6) \quad \Omega^* = \dot{R}.R^t$$

Le tenseur vitesse de rotation Ω s'écrit de même :

$$(A.2.7) \quad \Omega = \hat{\dot{R}}.\hat{R}^t$$

Soit en effet R^* , la rotation telle que :

$$(A.2.8) \quad \dot{R}^*.R^{*t} + \frac{1}{2} R^*.(\dot{U}.U^{-1} - U^{-1}.\dot{U}).R^{*t} = 0$$

Il est clair que :

$$(A.2.9) \quad \frac{1}{2} (\dot{U}.U^{-1} - U^{-1}.\dot{U}) = -R^{*t}.\dot{R}^*$$

Compte tenu de (A.2.5) et (A.2.9) :

$$(A.2.10) \quad \Omega = \dot{R}.R^t - R.R^{*t}.\dot{R}^*.R^t$$

comme R^* est orthogonal (A.2.10) s'écrit aussi :

$$(A.2.11) \quad \Omega = \dot{R}.R^t + R.\dot{R}^{*t}.R^*.R^t$$

ou encore :

$$(A.2.12) \quad \Omega = (\dot{R}.R^{*t} + R.\dot{R}^{*t}).R^*.R^t$$

La formule (A2-12) s'identifie avec (A.2.7) si l'on pose :

$$(A.2.13) \quad \hat{R} = R.R^{*t}$$

\hat{R} représente la rotation du repère corotationnel $\hat{E}_i = (\hat{I}_i)$ par rapport au repère lagrangien :

$$(A.2.14) \quad \hat{l}_i = R . l_i$$

ANNEXE 3. Cinématique du glissement

La décomposition polaire (A.2.1) du gradient $F = U.R$

$$(A.3.1) \quad F = \begin{vmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

permet le calcul de U et de R :

$$(A.3.2) \quad U^2 = F.F^t, \quad R = U^{-1}.F$$

La matrice de U^{-1} dans son repère principal est

$$(A.3.3) \quad U^{-1} = \begin{vmatrix} 1/\sqrt{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

où :

$$(A.3.4) \quad \lambda_1 = \frac{1}{2} (2 + \gamma^2 + \gamma \sqrt{4 + \gamma^2}),$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} (2 + \gamma^2 - \gamma \sqrt{4 + \gamma^2}),$$

sont les valeurs propres de $U^2 = F.F^t$

Un calcul simple mais fastidieux conduit aux coordonnées de R dans $E(l_1, l_2, l_3)$, repère de référence.

$$(A.3.5) \quad R = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

avec :

$$(A.3.6) \quad \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{4 + \gamma^2 - \gamma\sqrt{4 + \gamma^2}} \left(\frac{2}{(2 + \gamma^2 + \gamma\sqrt{4 + \gamma^2})^{1/2}} \right) \frac{1}{2} \frac{(\sqrt{4 + \gamma^2} - \gamma)^2}{(2 + \gamma^2 - \gamma\sqrt{4 + \gamma^2})^{1/2}}$$

ou, plus simplement :

$$(A.3.7) \quad \theta = \text{Arctg} \frac{\gamma}{2}$$

La vitesse de rotation propre Ω^* en découle d'après (A.2.6) :

$$(A.3.8) \quad \Omega^* = \frac{2\dot{\gamma}}{4 + \gamma^2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

D'autre part, la vitesse de rotation Ω :

$$(A.3.9) \quad \Omega = \frac{\dot{\gamma}}{2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

s'écrit sous la forme (A.2.7) pour :

$$(A.3.10) \quad \hat{R} = \begin{vmatrix} \cos \hat{\theta} & \sin \hat{\theta} & 0 \\ -\sin \hat{\theta} & \cos \hat{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

où :

$$(A.3.11) \quad \hat{\theta} = \frac{\gamma}{2}$$

Lorsque γ devient infini, la rotation $\hat{\theta}$ du repère corotationnel tend vers l'infini, alors que la rotation θ du repère en rotation propre définie par (A.3.7), tend vers $\pi/2$.

Par soustraction de (A.3.8) et (A.3.9), on obtient simplement :

$$(A.3.12) \quad \frac{1}{2} R.(\dot{U}.U^{-1} - U^{-1}.\dot{U}).R^t = \Omega - \Omega^* = \frac{\dot{\gamma}}{2} \frac{\gamma^2}{4 + \gamma^2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

References du chapitre I-1.

1. J.C. NAGTEGALL, J.E. De JONG, *Some aspects of non-isotropic work-hardening in finite deformation plasticity, Proceedings of the Workshop : Plasticity of Finite Deformation, Division of Applied Mechanics, Stanford University, Stanford, California 1981.*
2. E.H. LEE, R.L. MALLETT, T.B. WERTHEIMER, *Stress analysis for kinematic hardening in finite deformation plasticity, SUDAM report n°81.11, Stanford University, Stanford, California 1981.*
3. E.T. ONAT, *Recent advances in creep and fracture of engineering materials and structures, Wilshive and Onen (eds.), Pineridge Press, 1982*
4. Y.F. DAFALIAS, *Corotational rates for kinematic hardening at plastic deformations, J. Appl. Mech. J., 50, 561-565, 1983.*
5. C. FRESSENGEAS, A. MOLINARI, *Modèles d'écroutissage cinématique en grande déformation, C.R.A.S., II 372, 1983.*
6. SIDOROFF, *Ecroutissage cinématique et anisotropie induite en grandes déformations élastoplastiques, J. Mec. Th. Appl. (à paraître)*
7. J. MANDEL, *Equations constitutives et directeurs dans les milieux plastiques et viscoplastiques, Int. J. Solids Struct., 9, 725-740, 1973.*
8. A. NEEDLEMAN, communication privée
9. D. MARQUIS, *Modélisation et identification de l'écroutissage anisotrope des métaux, Thèse 3^e cycles, LMT Cachan, 1979.*
10. W. GAMBIN, *On the Prandtl-Reuss equations for a large-plastic strain, Arch. Mech. °à paraître§.*
11. A.E. GREEN, P.M. NAGHDI, *A general theory of an elastic-plastic continuum, Arch. Rat. Anal., 18, 251-281, 1965.*
12. J.L. CHABOCHE, *Bul. Acad. Polon. Sci. tech., 25, 33-42, 1975.*

13. C.FRESSENGEAS, A.MOLINARI, *Représentations du comportement plastique anisotrope aux grandes déformations*, Arch. Mech. 36,4,483-498,1983.
14. D.DUDZINSKI, A.MOLINARI, 1986. [à paraître]

Fig. 1. Glissement simple.

Fig. 2. Contrainte de cisaillement en fonction de la distorsion, κ_c — dérivée convective covariante, $\overset{\nabla}{\kappa}$ — dérivée de Jaumann, $\overset{D}{\kappa}$ — dérivée en rotation propre. Aux grandes valeurs de γ la courbe ($\overset{D}{\kappa}$) possède une asymptote parallèle à κ_c , $\overset{D}{\kappa}$ — dérivée type rotation propre, $\nu = 0.9$.

Fig. 3. Influence de la restauration sur la contrainte de cisaillement

II-Approche de l'écrouissage textural aux grandes vitesses de déformation.

La section I ci-dessus aborde la formulation des lois de comportement d'un point de vue macroscopique et phénoménologique. Les lois constitutives obtenues présentent une forme qui peut les rendre avantageuses dans les codes de calcul pour la résolution de problèmes aux limites de déformation plastique des matériaux, notamment pour rendre compte d'instabilités de la déformation. En revanche elles ne fournissent évidemment pas une description basée sur la physique microscopique des matériaux polycristallins. Notre objet n'est pas ici, loin s'en faut, de fournir une telle description, mais seulement de tenter une première exploration de l'influence des textures cristallographiques sur la stabilité des déformations plastiques obtenues aux grandes vitesses.

Considérons un polycristal constitué de grains se déformant uniquement par glissements le long des plans cristallographiques. On impose au matériau un gradient de déformation macroscopique F et l'on admet que ce gradient est le même au niveau de chaque grain. C'est l'hypothèse de TAYLOR. La déformation élastique du réseau cristallographique est supposée négligeable. Par contre le réseau subit une rotation de solide parfait; le gradient de déformation s'écrit donc au niveau du grain sous la forme:

$$F = R \cdot P \quad (1-1)$$

P est le gradient de déformation plastique dû uniquement aux glissements cristallographiques; P laisse le réseau invariant. Un système de glissement i est spécifié par la direction de glissement s_i ,

et par la normale n_i au plan de glissement. Les vecteurs s_i et n_i sont orthonormés, et tournent dans la rotation R du réseau, de manière à devenir s_i^* et n_i^* :

$$s_i^* = R \cdot s_i ; \quad n_i^* = R \cdot n_i \quad (1-2)$$

Le tenseur gradient de vitesse L du réseau cristallographique vaut:

$$L = \dot{F} \cdot F^{-1} = (\dot{R} \cdot P + R \cdot \dot{P}) \cdot P^{-1} \cdot R^{-1} = \dot{R} \cdot R^{-1} + R \cdot \dot{P} \cdot P^{-1} \cdot R^{-1} \quad (1-3)$$

Soit Ω^* le tenseur vitesse de rotation du réseau cristallographique:

$$\Omega^* = \dot{R} \cdot R^{-1} \quad (1-4)$$

On peut associer au tenseur vitesse de rotation le vecteur vitesse de rotation du repère cristallographique; tous deux s'expriment par exemple en fonction des angles d'EULER du réseau et de leurs dérivées. Par ailleurs le tenseur gradient de déformation plastique s'écrit:

$$\dot{P} \cdot P^{-1} = \dot{\gamma}_i s_i \otimes n_i = \dot{\gamma}_i M_i \quad (1-5)$$

$\dot{\gamma}_i$ est la vitesse de glissement sur le système de glissement i ; $s_i \otimes n_i$ représente le produit tensoriel des deux vecteurs s_i et n_i appelé aussi tenseur de SCHMID et noté M_i . Une somme est effectuée sur l'ensemble des systèmes de glissement du cristal. D'après la relation (1-2):

$$R \cdot \dot{P} \cdot P^{-1} \cdot R^{-1} = \dot{\gamma}_i s_i^* \otimes n_i^* \quad (1-6)$$

Pour chaque système de glissement, on définit le tenseur symétrique P_i et le tenseur antisymétrique W_i par:

$$P_i = 1/2(s_i^* \otimes n_i^* + n_i^* \otimes s_i^*) \quad (1-7)$$

$$W_i = 1/2(s_i^* \otimes n_i^* - n_i^* \otimes s_i^*) \quad (1-8)$$

de sorte que la partie symétrique D de L s'écrit, compte-tenu de (1-3), (1-4) et (1-7):

$$D = \dot{\gamma}_i P_i$$

et la partie antisymétrique, d'après (1-3), (1-4), et (1-6):

$$\Omega = \Omega^* + \dot{\gamma}_i W_i \quad (1-9)$$

Le tenseur vitesse de rotation total s'exprime comme la somme de la vitesse de rotation du réseau et de la vitesse de rotation plastique Ω_p :

$$\Omega_p = \dot{\gamma}_i W_i \quad (1-10)$$

Soit par ailleurs τ_i la contrainte résolue sur le système de glissement i:

$$\tau_i = s_i^* \cdot \tau \cdot n_i^* \quad (1-11)$$

où τ est le tenseur des contraintes de CAUCHY ou son déviateur; la contrainte résolue s'exprime aussi par:

$$\tau_i = P_i : \tau = M_i : \tau \quad (1-12)$$

Le signe : indique un produit doublement contracté des deux

tenseurs. On suppose que le glissement sur le système i est de type visqueux newtonien:

$$\dot{\gamma}_i = \dot{\gamma}_{0i} \tau_i / \tau_{0i} \quad (1-13)$$

et que tous les systèmes de glissement sont actifs. Cette hypothèse est justifiée par les expériences de CAMPBELL et DUBY (1957) qui ont observé une répartition uniforme des systèmes de glissement actifs aux grandes vitesses de déformation, et une répartition moins homogène aux faibles vitesses. D'autre part, des expériences de glissement simple à grande vitesse, effectuées sur des monocristaux (KUMAR-KUMBLE 1969, CHIEM-DUFFY 1981) ont permis d'indiquer que la contrainte de cisaillement est reliée à la vitesse de glissement par une relation affine du type:

$$\tau = \tau_0 + \mu \dot{\gamma} \quad (1-14)$$

On suppose ici que τ_0 est petit devant $\mu \dot{\gamma}$, ce qui est justifié aux très grandes vitesses de déformation. En outre cette relation macroscopique est supposée être vérifiée au niveau "microscopique" des systèmes de glissement. Compte-tenu de cette hypothèse et des relations (1-8), (1-12) et (1-13), le tenseur des vitesses de déformation D peut maintenant être écrit:

$$D = \dot{\gamma}_{0i} / \tau_{0i} (P_i : \tau) P_i \quad (1-15)$$

ou encore:

$$D = \dot{\gamma}_{0i} / \tau_{0i} P_i \otimes P_i : \tau \quad (1-16)$$

En définissant le tenseur du quatrième ordre Q'^{-1} par:

$$Q'^{-1} = \dot{\gamma}_{0i} / \tau_{0i} P_i \otimes P_i \quad (1-17)$$

l'équation (1-16) s'écrit :

$$D = Q'^{-1} : \tau \quad (1-18)$$

d'où l'on déduit par inversion:

$$\tau = Q' : D \quad (1-19)$$

Dans l'hypothèse d'un écrouissage isotrope du cristal, identique sur tous les systèmes de glissement:

$$\tau_{0i} = \tau ; \dot{\gamma}_{0i} = \dot{\gamma}_0 \quad (1-20)$$

de sorte que :

$$Q'^{-1} = \dot{\gamma}_0 / \tau_0 P_i \otimes P_i \quad (1-21)$$

Définissant Q^{-1} par :

$$Q^{-1} = P_i \otimes P_i \quad (1-22)$$

les relations (1-18) et (1-19) sont remplacées par:

$$D = \dot{\gamma}_0 / \tau_0 Q^{-1} : \tau ; \tau = \tau_0 / \dot{\gamma}_0 Q : D \quad (1-23)$$

Cette loi constitutive relie le tenseur des contraintes au tenseur des vitesses de déformation D au moyen des caractéristiques du

glissement microscopique et du tenseur d'orientation du cristal Q. Les variations de ce tenseur sont directement reliées à l'évolution de la texture. Le tenseur des vitesses de rotation plastique Ω_p peut également être déterminé. En effet:

$$\Omega_p = \dot{\gamma}_i W_i = \dot{\gamma}_0 / \tau_0 \tau_i W_i \quad (1-25)$$

soit d'après (1-12) et (1-23):

$$\Omega_p = \dot{\gamma}_0 / \tau_0 P_i : \tau W_i = (P_i : Q : D) W_i \quad (1-26)$$

ou encore:

$$\Omega_p = (W_i \otimes P_i : Q) : D = S : D \quad (1-27)$$

Le tenseur du quatrième ordre S ainsi défini possède les propriétés de symétrie et d'antisymétrie suivantes:

$$S_{ijkl} = -S_{jikl} = S_{ijlk} \quad (1-28)$$

Si de plus l'une des propriétés :

$$S_{ijkl} = S_{jilk} \quad ; \quad S_{ijkl} = -S_{ijlk} \quad (1-29)$$

est vérifiée, la vitesse de rotation plastique s'annule. C'est notamment le cas des matériaux cfc (G.CANOVA, A.MOLINARI, C.FRESSENGEAS 1984); la vitesse de rotation du réseau Ω^* est alors égale à la vitesse de rotation macroscopique imposée Ω . Par suite il n'y a pas d'évolution de

la texture en traction simple, pour laquelle $\Omega=0$. Au contraire la texture initiale subit une évolution cyclique en glissement simple; en effet la vitesse de rotation Ω est constante dans cette sollicitation. Chaque grain tourne par rapport au repère du laboratoire à la vitesse macroscopique imposée; cela produit un écrouissage macroscopique cyclique lorsque la texture initiale est non uniforme.

Ce résultat est lié à la symétrie du réseau cfc, ainsi qu'au fait que tous les systèmes de glissement sont actifs. Certains résultats expérimentaux aux grandes vitesses de déformation (HARDING-HUDDART 1979) ont mis en évidence dans l'uranium- α des oscillations dans la courbe contrainte-déformation en cisaillement, mais pas en traction. Ce comportement resté inexplicé pourrait donc être interprété comme un adoucissement dû à la rotation d'une texture initiale non uniforme aux grandes vitesses de déformation.

Soient D_e et D_0 la vitesse de glissement effective et le tenseur des vitesses de déformation normalisé définis par:

$$D = D_e D_0, \quad D_0 : D_0 = 3/2 \quad (1-30)$$

Soit encore la contrainte effective S_e conjuguée définie par

$$S_e = \tau : D \quad (1-31)$$

D'après la relation (1-23):

$$S_e = \tau_0 / \dot{\gamma}_0 \quad D : Q : D = \tau_0 / \dot{\gamma}_0 D_e^2 \quad D_0 : Q : D_0 \quad (1-32)$$

Le facteur scalaire P , appelé facteur de TAYLOR, et défini par:

$$P = D_0 : Q : D_0 \quad , \quad S_e = \tau_0 / \dot{\gamma}_0 \quad D_e^2 P \quad (1-33)$$

ne dépend que de l'orientation des plans cristallographiques; la relation (1-33) permet de définir une surface de charge à vitesse de déformation effective donnée dans l'espace des tenseurs vitesse de déformation. P représente la distance à l'origine d'un plan tangent à cette surface, et D_0 est normal à ce plan tangent au point de charge.

Examinons parallèlement le cas d'un cisaillement plan où deux systèmes de glissement seulement sont actifs. Soit $R(o, e_1, e_2)$ le repère du laboratoire; les angles $\varphi_1 = (e_1, s_1^*)$ et $\varphi_2 = (e_1, s_2^*)$ repèrent les directions de glissement. On pose :

$$\varphi_1 = \varphi \quad \varphi_2 = \varphi_1 + \alpha \quad (1-34)$$

L'angle α est constant car le réseau est conservé dans la déformation; la déformation élastique est négligée. Les tenseurs macroscopiques imposés sont représentés dans le repère R par:

$$L = \dot{\gamma} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad D = \dot{\gamma}/2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \Omega = \dot{\gamma}/2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \quad \tau = \begin{vmatrix} 0 & \tau \\ \tau & n \end{vmatrix} \quad (1-35)$$

La contrainte résolue τ_i s'écrit:

$$\tau_i = \tau \cos 2\varphi_i + 1/2 n \sin 2\varphi_i \quad (1-36)$$

Les tenseurs P_i , W_i et Ω^* ont pour matrices dans R :

$$P_i = 1/2 \begin{vmatrix} -\sin 2\varphi_i & \cos 2\varphi_i \\ \cos 2\varphi_i & \sin 2\varphi_i \end{vmatrix} ; \quad W_i = 1/2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} ; \quad \Omega^* = -\dot{\varphi} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \quad (1-37)$$

Les relations (1-8), (1-9) fournissent respectivement:

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_1 \cos 2\varphi_1 + \dot{\gamma}_2 \cos 2\varphi_2 \quad (1-38)$$

$$0 = \dot{\gamma}_1 \sin 2\varphi_1 + \dot{\gamma}_2 \sin 2\varphi_2 \quad (1-39)$$

et

$$\dot{\gamma} = -2\dot{\varphi} + \dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2 \quad (1-40)$$

Ces trois relations permettent de calculer la vitesse de rotation du réseau et les vitesses de glissement sur chaque système. On obtient:

$$-\dot{\varphi} = (1 + (\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_2) / \sin 2\alpha) \dot{\gamma} / 2 \quad (1-41)$$

$$\dot{\gamma}_1 = \sin 2\varphi_2 / \sin 2\alpha \dot{\gamma} ; \dot{\gamma}_2 = -\sin 2\varphi_1 / \sin 2\alpha \dot{\gamma} \quad (1-42)$$

La compatibilité cinématique microscopique-macroscopique est suffisante pour assurer ce résultat. L'intégration de ces relations fournit notamment la rotation des systèmes de glissement sous la forme:

$$\text{tg}(\varphi + \alpha/2) = -\text{tg}\alpha/2 (1 + k \exp(\gamma \text{tg}\alpha)) / (1 - k \exp(\gamma \text{tg}\alpha)) \quad (1-43)$$

avec:

$$k = \sin(\varphi(0) + \alpha) / \sin \varphi(0) \quad (1-44)$$

Lorsque γ tend vers l'infini, on obtient:

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \text{tg}(\varphi + \alpha/2) = \text{tg}\alpha/2 \quad (1-45)$$

$\gamma \rightarrow \infty$

de sorte que la rotation du réseau: $-\varphi$ tend vers une valeur constante ,

et que la sa vitesse de rotation tend vers zéro. Au contraire du cas des matériaux cfc exposé précédemment, la vitesse de rotation plastique ne tend pas vers zéro mais vers la vitesse de rotation totale. Dans l'hypothèse faite ici où deux systèmes de glissement seulement sont actifs, cette conclusion est indépendante de la nature du matériau. L'écriture des lois de glissement microscopiques isotropes (1-13) (1-20) fournit les contraintes résolues τ_1 , τ_2 puis la contrainte de cisaillement macroscopique τ :

$$\tau = (\tau_1 \sin 2(\varphi + \alpha) - \tau_2 \sin 2\varphi) / \sin 2\alpha = \dot{\gamma} \tau_0 / \dot{\gamma}_0 (1 - \cos \alpha \cos(2\varphi + \alpha)) / \sin^2 2\alpha \quad (1-46)$$

On voit que la contrainte de cisaillement tend vers une constante lorsque γ tend vers l'infini alors qu'elle oscille dans le cas d'un matériau cfc. Ainsi, on n'observe pas l'écrouissage cyclique caractéristique des matériaux à forte symétrie.

Les résultats obtenus pour les métaux cfc peuvent être interprétés dans le cadre d'une théorie phénoménologique du type de celles que nous avons exposées au Chapitre 1-I; comme le repère cristallographique, appelé également repère directeur de MANDEL, tourne à la vitesse de rotation macroscopique Ω , c'est la dérivée de JAUMANN que l'on doit choisir pour rendre compte de l'évolution des tenseurs d'écrouissage, par exemple dans un modèle d'écrouissage cinématique. Rappelons que ce résultat est obtenu dans les conditions suivantes: déformation à très grande vitesse d'un polycristal à forte symétrie, pour un glissement newtonien isotrope où tous les systèmes sont actifs.

Les implications d'un tel résultat relatives aux instabilités de la déformation plastique de glissement simple sont les suivantes: l'adoucissement textural qui ne peut manquer de se produire en raison du

caractère cyclique de l'écroutissage est déstabilisant à terme et peut entraîner la formation de bandes de cisaillement. Cependant un choix judicieux de la texture initiale peut placer l'écroutissage dans une phase de durcissement au bon moment, c'est-à-dire au moment où pour d'autres raisons (adoucissement thermique ...) la localisation commence à se produire: ainsi la ductilité du matériau se trouverait-elle augmentée. D'autre part le grand nombre de systèmes de glissement actifs est un facteur stabilisant ainsi que le caractère visqueux newtonien du glissement, car les vertex de la surface de charge s'en trouvent adoucis et les variations du tenseur des vitesses de déformation sont plus progressives en présence d'une perturbation du tenseur des contraintes.

References du chapitre I-2.

J.D.CAMPBELL, J.DUBY, in " Proc.Conf.on the Properties of Materials at High Rates of Strain", Inst. of Mech.Eng. London ,214., 1957

G.R. CANOVA , A. MOLINARI ,C. FRESSENGEAS ," Approach to the texture hardening of metals at high strain rates", Congrès G.F.R. PARIS 1984.

G.R.CANOVA, A.MOLINARI, U.F.KOCKS C.FRESSENGEAS; " Texture hardening of linear viscous materials" , T.M.S., A.I.M.E.-Fall Meeting TORONTO 1985.

G.R.CANOVA,C.FRESSENGEAS,A.MOLINARI,U.F.KOCKS;" Viscoplastic behaviour of the single crystal at low and high strain rates", soumis pour publication au J.Mech.Phys.Sol.

C.Y. CHIEM ,J. DUFFFY; "Strain rate History Effects in LiF Single Crystals during Dynamic Loading in Shear", Mat. Sc. Eng.48,pp 207-222, 1981

J.HARDING , J.HUDDART, "The use of the double-notch shear test in determining the mechanical properties of uranium at very high rates of strain", Inst. Phys. Conf. Ser. No. 47, Ch 1 , pp49-61, Oxford 1979.

A.KUMAR ,R.G. KUMBLE; J. App.Phys.,40,9,1969,pp3475

Chapitre 2: Effets d'inertie et effets thermiques sur la localisation de la déformation plastique à grande vitesse.

1-Introduction .

Aux grandes vitesses de déformation , l'instabilité de la déformation plastique de traction simple - la striction - est un phénomène complexe ,en raison du grand nombre de facteurs physiques qui deviennent significatifs. Pour une sollicitation quasi-statique , le critère classique de force maximum (CONSIDERE 1885) décrit correctement la compétition qui s'établit entre l'adoucissement géométrique dû à la diminution de section de l'éprouvette , et l'écrouissage du matériau: il donne ainsi une estimation raisonnable de la déformation critique de localisation de la déformation , si le spécimen est suffisamment élançé, et lorsque le matériau est insensible aux effets de la vitesse de déformation et aux effets thermiques.

Cependant, si le matériau est sensible à la vitesse de déformation , on a pu observer un accroissement considérable de sa ductilité isotherme (GHOSH 1977) . Cet effet a été largement étudié dans le cas d'un chargement quasi-statique (HART 1967 , JONAS et al 1976 , ARGON 1973 , HUTCHINSON-NEALE 1977,1978) . Par ailleurs , de nombreuses observations font au contraire état d'une diminution de la ductilité associée à un accroissement de la vitesse de déformation (ZENER-HOLLOMON 1944 , FERRON 1981,1982 , KORHONEN 1982). L'interprétation proposée est alors la suivante : la vitesse de la

déformation favorise son adiabaticité . Par manque de temps , la chaleur engendrée par la déformation plastique ne peut être évacuée par la conduction thermique , et il en résulte une augmentation locale de la température . Comme la contrainte d'écoulement des matériaux est le plus souvent une fonction décroissante de la température - matériaux thermo-adoucissants- il en résulte un supplément de déformation plastique dans les régions les plus chaudes et se déformant aux plus grandes vitesses . Ceci produit en retour un dépôt de chaleur supplémentaire; ainsi est enclenché un processus conduisant à la localisation de la déformation plastique.

Ces effets peuvent être mis en évidence à l'aide des figures (2-1) et (2-2) publiées par FERRON (1981); sur ces figures sont tracées les courbes expérimentales effort-élongation obtenues lors d'essais de traction simple d'aciers austénitiques de type 304 , à des vitesses de déformation A,B,C croissantes . Une première série d'essais est effectuée dans l'air , et l'adiabaticité de la déformation va croissante (figure 2-1); la seconde série est réalisée dans l'eau , où les conditions sont quasi-isothermes (figure 2-2). On observe que la ductilité est quasi-constante dans le cas isotherme, et qu'elle diminue lorsque l'adiabaticité de la déformation augmente.

Pour interpréter les tests dynamiques, c'est-à-dire pour les aciers à des vitesses de déformation à partir de 5.10^3 s^{-1} , l'analyse doit inclure les effets d'inertie qui deviennent alors significatifs , et qui produisent le plus souvent un accroissement de la ductilité (TAYLOR et al 1978 , MOLINARI 1982 , RAJENDRAN-FYFE 1982 , FRESSENGEAS-MOLINARI 1983, 1985). Cependant leurs effets peuvent être difficilement mesurables car , dans cette zone de vitesses, les mécanismes micro-structuraux de la déformation plastique peuvent également être altérés ,

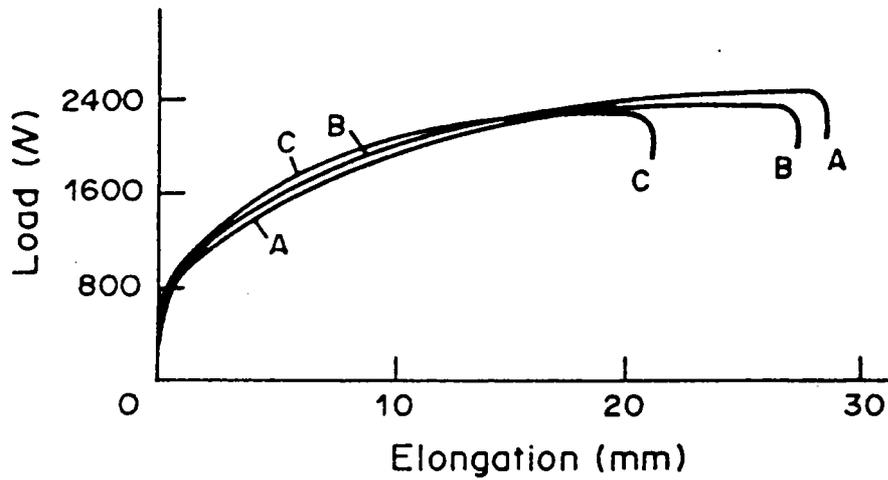


figure 1: Courbes effort-déformation dans l'air,
d'après FERRON.

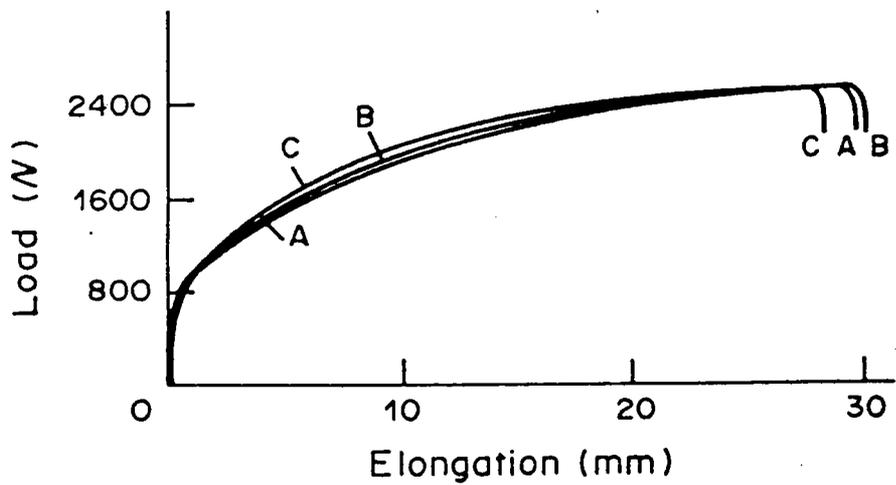


figure 2: Courbes effort-déformation dans l'eau,
d'après FERRON.

et passer d'un mécanisme quasi-statique thermiquement activé , à un mécanisme de frottement visqueux des dislocations (CAMPBELL 1970 , LINDHOLM 1974 , STELLY-DORMEVAL 1977). Un effet de ce changement est notamment de produire un accroissement de la ductilité intrinsèque du matériau, difficilement discernable de son accroissement dynamique .

Ce chapitre est consacré à l'étude des effets thermiques et des effets dynamiques sur la localisation de la déformation plastique de traction simple. On discute la compétition qui existe pour la localisation entre différents phénomènes physiques significatifs: adoucissement thermique et géométrique, écrouissage et sensibilité à la vitesse de déformation, effets d'inertie et conduction thermique. Les effets de l'endommagement ou de la texture cristallographique aux grandes vitesses ne sont pas pris en considération ici.

L'analyse utilise un modèle uniaxial de la traction simple; on teste la stabilité de la déformation plastique homogène en la perturbant soit par un défaut géométrique initial , soit par une inhomogénéité initiale des variables. Aussi, quelques limites du modèle employé apparaissent-elles: tout d'abord , la déformation ne peut être considérée comme uniaxiale que lorsque les inhomogénéités ont une longueur d'onde assez grande devant le diamètre de l'échantillon. Cette hypothèse ne doit pas être faite lorsque la striction devient très prononcée, car les aspects tridimensionnels de la répartition des contraintes et des déformations ne sont alors plus négligeables . Les effets de triaxialité des contraintes sont cependant évalués au moyen d'une analyse simplifiée de type BRIDGMAN , et leur influence sur le développement de la striction est discutée. En outre , les effets de l'inertie latérale sont négligés ; cette hypothèse est vérifiée lorsque

l'élanement de l'échantillon est suffisamment grand (NARIBOLI 1969).

Cependant, les résultats obtenus en supposant des inhomogénéités de grande longueur d'onde, et un élanement suffisant du spécimen, rendent compte des caractéristiques essentielles des effets dynamiques et thermiques sur la ductilité, comme on pourra le constater à partir des comparaisons effectuées avec les résultats expérimentaux.

Le plan de ce chapitre est le suivant: les équations fondamentales sont présentées dans la section 2 ; on discute les analyses classiques de perturbations linéaires dans la troisième section, et les résultats sont confrontés aux données expérimentales de FERRON, relatives aux chargements quasi-statiques adiabatiques et isothermes. La quatrième section traite des solutions des équations non linéaires : dans le cas quasi-statique, on fournit des critères de localisation exacts, que le matériau soit sensible ou non à la vitesse de déformation. Pour une sollicitation dynamique, on résout numériquement les équations fondamentales du problème, au moyen d'une méthode de différences finies. Les résultats de ces calculs sont confrontés aux données expérimentales de GIANOTTA et al (1983).

2-Equations fondamentales.

Nous considérons une barre axisymétrique, soumise à un test de traction uniaxiale. La déformation élastique est négligée, et le matériau est supposé incompressible, et de masse volumique ρ . La fonction:

$$\tilde{\sigma} = \psi(\tilde{\theta}, \epsilon, \dot{\epsilon}) = \mu \tilde{\theta}^{\nu} \dot{\epsilon}^m \epsilon^n \quad (2-1)$$

modélise le comportement thermo-viscoplastique du matériau; $\tilde{\sigma}$ désigne la contrainte vraie, ϵ la déformation naturelle ou logarithmique, $\dot{\epsilon}$ la

vitesse de déformation naturelle, et $\tilde{\theta}$ la température. μ , ν , m et n sont des coefficients supposés constants, qui caractérisent respectivement la viscosité, la sensibilité à la température et à la vitesse de déformation de la contrainte d'écoulement, et l'écroutissage du matériau. μ , m et n sont supposés positifs; ν négatif signifie que le matériau est thermo-adoucissant.

La barre, de longueur initiale l_0 , possède une section droite d'aire initiale $A_0(\tilde{X})$ variant le long de l'axe des \tilde{X} ; \tilde{X} représente la coordonnée matérielle, ou coordonnée de LAGRANGE de la section droite. Lorsque la configuration initiale est utilisée comme configuration de référence, l'équation de la dynamique s'écrit:

$$\rho A_0 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{X}} (\tilde{\sigma} A) \quad (2-2)$$

Les variables $\tilde{v}(\tilde{t}, \tilde{X})$ et $A(\tilde{t}, \tilde{X})$ représentent la vitesse et l'aire de la section droite de coordonnée matérielle \tilde{X} à l'instant \tilde{t} . Naturellement: $A(0, \tilde{X}) = A_0(\tilde{X})$. La conservation de la masse est exprimée par:

$$\frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \tilde{t}} = - \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \tilde{t}} \quad (2-3)$$

L'équation de compatibilité entre les variables \tilde{v} et $\tilde{\xi}$ est:

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{X}} = \frac{A_0}{A} \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \tilde{t}} \quad (2-4)$$

Lorsque la surface latérale de l'échantillon est supposée adiabatique, l'équation thermique s'écrit:

$$C \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{t}} = K \left(\frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \tilde{x}} \right) + \beta \tilde{\sigma} \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \tilde{t}} \quad (2-5)$$

C, K, β désignent respectivement la capacité thermique volumique, le coefficient de conduction thermique, et la fraction du travail de la déformation plastique qui est convertie en chaleur, appelée aussi coefficient de TAYLOR-QUINNEY. Nous supposons que dans les processus envisagés ci-dessous, tous ces paramètres restent constants. β garde notamment la valeur 0.9; certaines données expérimentales (CHRYSOCHOOS 1983) indiquent que, dans les conditions usuelles d'un essai de traction, ce coefficient prend la valeur initiale 0.6, puis tend rapidement vers une valeur limite grossièrement égale à 0.95. Les effets de conduction dus à la variation de section de l'échantillon:

$$- K \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \tilde{x}}$$

sont très petits dans l'approximation des grandes longueurs d'ondes, et disparaissent dans une analyse linéarisée. La variable \tilde{x} désigne la coordonnée spatiale au temps \tilde{t} , ou coordonnée d'Euler, de la section droite de coordonnée matérielle \tilde{X} :

$$\tilde{x} = \tilde{X} + \int_0^t \tilde{v}(\tau, \tilde{X}) d\tau \quad (2-6)$$

Nous exprimons toutes les variables en coordonnées de Lagrange. Les frontières sont soumises aux conditions (2-7), ou (2-8):

$$\tilde{v}(\tilde{t}, 0) = 0, \quad v(\tilde{t}, 1_0) = V, \quad \tilde{t} \geq 0 \quad (2-7)$$

$$\tilde{v}(\tilde{t}, 0) = 0, \quad \tilde{F}(\tilde{t}, 1_0) = F_0, \quad \tilde{t} \geq 0 \quad (2-8)$$

En outre, les conditions à la limite thermiques sont supposées adiabatiques:

$$\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial X}(\tilde{t}, 0) = \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial X}(\tilde{t}, 1_0) = 0, \quad \tilde{t} \geq 0 \quad (2-9)$$

Lorsque les variables adimensionnelles:

$$\begin{aligned} t &= \bar{\epsilon}_0 \tilde{t}, \quad \dot{\epsilon} = \dot{\tilde{\epsilon}}/\bar{\epsilon}_0 \\ x &= \tilde{x}/l_0, \quad X = \tilde{X}/l_0 \\ v &= \tilde{v}/V, \quad F = \tilde{F}/F_0 \\ \theta &= \tilde{\theta}/\bar{\theta}_0, \quad \sigma = \tilde{\sigma}/\bar{\sigma}_0 \end{aligned} \quad (2-10)$$

sont introduites, où $\bar{\theta}_0$ et $\bar{\epsilon}_0$ désignent respectivement les valeurs uniformes initiales de la température et de la vitesses de déformation, reliées à $\bar{\sigma}_0$, F_0 et V par :

$$\bar{\sigma}_0 = \mu \bar{\theta}_0^{\nu} \bar{\epsilon}_0^m, \quad \bar{\epsilon}_0 = V/l_0, \quad F_0/A_0 = \bar{\sigma}_0 \quad (2-11)$$

les equations fondamentales se réduisent, après élimination de (x, σ, v, A) au système d'équations aux dérivées partielles non linéaires:

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0} e^{-\epsilon} \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} (\theta^{\nu} \dot{\epsilon}^m \epsilon^n e^{-\epsilon}) - \dot{\epsilon}^2 \quad (2-12)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} = \dot{\epsilon} \quad (2-13)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} - 2 \frac{\partial \theta}{\partial X} \frac{\partial \epsilon}{\partial X} \right) e^{-2\epsilon} + \alpha \theta^{\nu} \epsilon^{n,m+1} \quad (2-14)$$

ρ_0 , k et α sont des paramètres adimensionnels; ρ_0 est significatif des effets d'inertie, k est le paramètre d'adiabaticité de la déformation, et α contrôle la source de chaleur:

$$\rho_0 = \rho V^2 / \bar{\sigma}_0, \quad k = K / Cl_0^2 \bar{\epsilon}_0, \quad \alpha = \beta \bar{\sigma}_0 / C \bar{\theta}_0 \quad (2-15)$$

Les conditions à la limite réduites en v et F sont:

$$v(t, 0) = 0, \quad v(t, 1) = 1, \quad t \geq 0 \quad (2-16)$$

$$v(t, 0) = 0, \quad F(t, 1) = 1, \quad t \geq 0 \quad (2-17)$$

avec:

$$\frac{\partial \theta}{\partial X}(t,0) = \frac{\partial \theta}{\partial X}(t,1) = 0 \quad , \quad t \geq 0 \quad (2-18)$$

Pour les conditions aux limites (2-16,2-18) et les conditions initiales:

$$\epsilon(0,X) = 0 \quad , \quad \frac{\partial \epsilon}{\partial t}(0,X) = 1 \quad , \quad \theta(0,X) = 1 \quad (2-19)$$

les équations (2-12,2-14) admettent une solution homogène instationnaire:

$$\dot{\epsilon}_0 = 1/(1+t) \quad , \quad \epsilon_0 = \text{Log}(1+t) \quad , \quad \theta_0 = \left(1 + \alpha(1-\nu) \int_0^{\epsilon_0} u^n e^{-\mu u} du \right)^{1/(1-\nu)} \quad (2-20)$$

Pour les conditions à la limite (2-17) au lieu de (2-15), on n'obtient qu'une solution approchée, dans le domaine quasi-statique:

$$t = \int_0^{\epsilon_0} u^{n/m} \theta_0(u)^{\nu/m} e^{-u/m} du \quad , \quad \dot{\epsilon}_0 = \epsilon_0^{-n/m} \theta_0^{-\nu/m} e^{\epsilon_0/m} \quad , \quad \theta_0 = 1 + \alpha(e^{\theta_0} - 1) \quad (2-21)$$

En général, il n'est pas possible de fournir une solution inhomogène explicite des équations (2-12,2-14); aussi cherche-t-on en première approximation, et de manière classique, à étudier la stabilité de la solution homogène (2-20) ou (2-21) au moyen d'une méthode de perturbations linéaires .

3- Analyse de stabilité linéaire.

3-1: Equations linéarisées.

La stabilité de la solution homogène ($\dot{\epsilon}_0, \epsilon_0, \theta_0$) peut être testée en étudiant l'évolution de solutions inhomogènes de la forme:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}(X,t) &= \dot{\epsilon}_0(t) + \delta \dot{\epsilon}(t) \exp(i\xi X) \\ \epsilon(X,t) &= \epsilon_0(t) + \delta \epsilon(t) \exp(i\xi X) \\ \theta(X,t) &= \theta_0(t) + \delta \theta(t) \exp(i\xi X) \end{aligned} \quad (3-1)$$

où $(\delta\dot{\epsilon}, \delta\epsilon, \delta\theta)$ représentent l'amplitude de la perturbation, supposée petite devant la solution homogène. Pour cette raison, la perturbation inhomogène peut être limitée au premier ordre de son développement en série de FOURIER, de longueur d'onde ξ . Cette méthode est d'un usage classique lorsque la solution perturbée est stationnaire; elle sera utilisée ici en supposant que la perturbation évolue beaucoup plus vite que la solution homogène, qui est ainsi considérée comme "quasi-stationnaire". Nous verrons au cours de ce chapitre dans quelles conditions cette hypothèse est vérifiée. La substitution des développements (3-1) dans les équations (2-12, 2-14) conduit à un système d'équations différentielles ordinaires:

$$\frac{dX}{dt} = A(t).X$$

dont les coefficients dépendent du temps:

$$\frac{d}{dt} \delta\dot{\epsilon} = -\sigma_0 e^{-2\epsilon_0} \xi^2 \left(m \frac{\delta\dot{\epsilon}}{\epsilon_0} + \left(\frac{n}{\epsilon_0} - 1 \right) + \nu \frac{\delta\theta}{\theta_0} \right) - 2\dot{\epsilon}_0 \delta\dot{\epsilon} \quad (3-2)$$

$$\frac{d}{dt} \delta\epsilon = \delta\dot{\epsilon} \quad (3-3)$$

$$\frac{d}{dt} \delta\theta = -k\xi^2 e^{-2\epsilon_0} \delta\theta + \alpha\dot{\theta}_0 \left((m+1) \frac{\delta\dot{\epsilon}}{\epsilon_0} + n \frac{\delta\epsilon}{\epsilon_0} + \nu \frac{\delta\theta}{\theta_0} \right) \quad (3-4)$$

Lorsque la solution homogène varie lentement devant la perturbation, on peut admettre que les coefficients de la matrice $A(t)$ sont constants, au moins pendant un certain temps. C'est ce que nous ferons ici; au chapitre 3, nous proposerons une méthode prenant en compte l'aspect instationnaire de la déformation homogène. Dans le cadre d'une théorie linéarisée classique, la bifurcation vers une solution inhomogène du type (3-1) est possible lorsque le déterminant du système (3-2, 3-4) est nul; en outre, si toutes les valeurs propres sont négatives, la

solution perturbée est linéairement stable. Elle est au contraire instable si l'une de ces valeurs propres est positive.

Dans le but d'étudier séparément les effets dynamiques et les effets thermiques, cette analyse est appliquée dans la suite à deux cas particuliers: nous considérons tout d'abord un processus dynamique isotherme dans lequel les effets thermiques sont ignorés, puis une déformation quasi-statique où ils sont pris en considération. Naturellement, les processus dynamiques ne sont pas isothermes; aussi étudierons nous le cas dynamique "quasi-adiabatique", qui combine les deux études élémentaires précédentes.

3-2- Déformation dynamique isotherme.

L'approximation isotherme est obtenue en posant formellement α égal à zéro dans les équations (3-2,3-4). La température est éliminée, et le déterminant caractéristique $\det(A-\eta I)=0$ de ce système se réduit simplement à l'équation du second degré:

$$\eta^2 + \eta(2\dot{\epsilon}_0 + m \frac{\xi^2 \sigma_0}{\rho_0} e^{-2\epsilon_0}) + (n/\epsilon_0 - 1) \frac{\xi^2 \sigma_0}{\rho_0} e^{-2\epsilon_0} = 0 \quad (3-5)$$

L'une des racines est positive, et la solution homogène est instable lorsque:

$$\epsilon_0 > n \quad (3-6)$$

Cette inégalité est identique au critère de force maximum de CONSIDERE. Dans l'approximation quasi-statique, le taux de variation η^* de la perturbation est obtenu en écrivant formellement $\rho_0=0$ dans l'équation (3-5):

$$\eta^* = \frac{\dot{\epsilon}_0}{m} (1 - n/\epsilon_0) \quad (3-7)$$

Le signe de η^* devient positif quand $\epsilon_0 > n$; cependant, comme HUTCHINSON-NEALE (1977) l'ont noté, la vitesse de croissance de la perturbation peut être très faible si ϵ_0 est seulement peu supérieure à n , et cela d'autant plus que la sensibilité du matériau à la vitesse de déformation est plus forte. Dans le contexte d'une déformation homogène instationnaire, la perturbation a un développement significatif si sa vitesse de croissance η^* est beaucoup plus grande que la vitesse $\dot{\epsilon}_0$ de la déformation homogène. Aussi considèrerons nous que la solution homogène est instable lorsque ϵ_0 atteint une valeur critique ϵ_{0c} telle que :

$$\frac{\eta^*}{\dot{\epsilon}_0} = \frac{1}{m} (1 - n/\epsilon_{0c}) = P \quad (3-8)$$

où P est un nombre positif assez grand, par exemple $O(10)$. La vitesse de croissance dynamique η , normalisée par η^* , est tracée sur la figure 3 en fonction du nombre d'ondes ξ de la perturbation. Le matériau est supposé purement visqueux, et la vitesse de déformation homogène est $\dot{\epsilon}_0 = 10^4 \text{ s}^{-1}$. Lorsque le nombre d'ondes ξ tend vers l'infini, η tend asymptotiquement vers sa valeur quasi-statique η^* . Observons que, bien que restant positive, η est inférieure à la valeur quasi-statique; ceci montre que les effets d'inertie jouent un rôle stabilisateur, mais qu'ils ne peuvent pas prévenir l'instabilité. En outre, plus le nombre d'ondes de la perturbation est petit, plus le rôle joué par les efforts d'inertie est important, puisque η tend vers zéro avec ξ . Cependant cette analyse perd une part de sa validité lorsque η est petit, car la croissance de la perturbation devient lente, et l'hypothèse

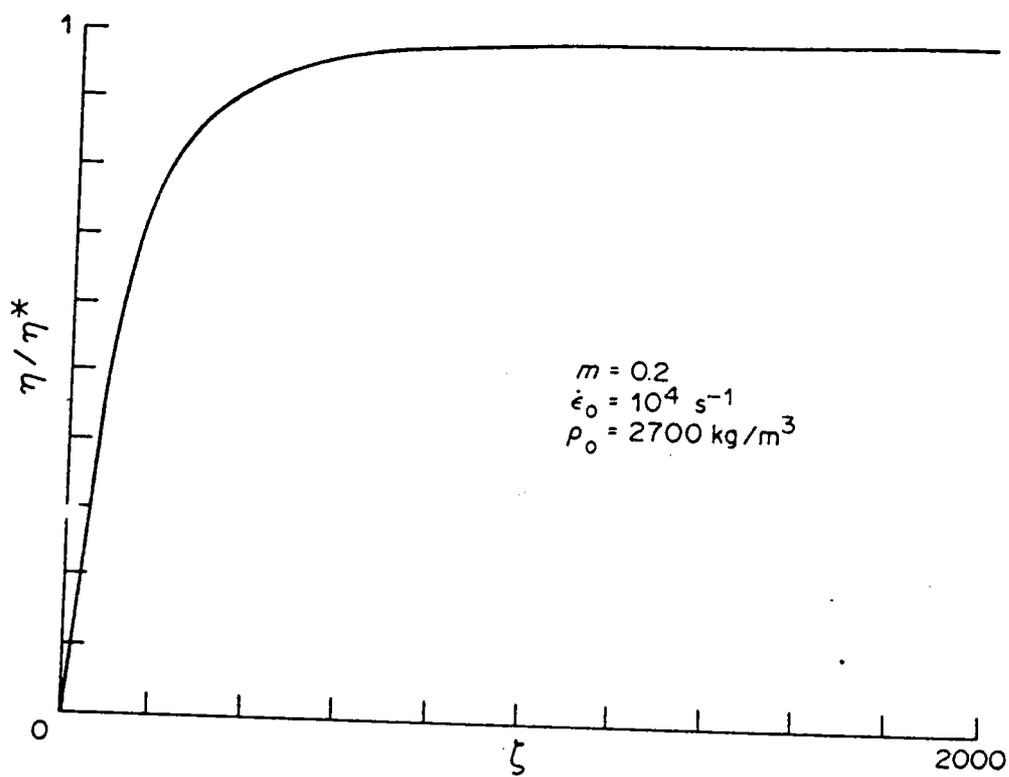


figure 3: Vitesse de croissance dynamique d'une perturbation.

quasi-stationnaire n'est plus vérifiée.

Dans le but de s'assurer de la validité de l'analyse de stabilité linéaire, nous avons réalisé une intégration numérique des équations fondamentales (2-12, 2-14) pour les conditions à la limite (2-16, 2-18) et les conditions initiales:

$$\epsilon(0, X) = 0, \quad \dot{\epsilon}(0, X) = 1, \quad \theta(0, X) = 1 - \zeta \cos(2\pi X/l_0) \quad (3-9)$$

La vitesse de déformation imposée dans ce calcul est: $\dot{\epsilon}_0 = 10^4 \text{ s}^{-1}$

Les résultats obtenus sont tracés sur la figure 4 ; on a représenté ϵ_b , déformation au niveau du défaut, et ϵ_a , déformation à l'extrémité de l'éprouvette, en fonction de la déformation homogène ϵ_0 . Les courbes non linéaires sont notées (1), les courbes linéaires analogues sont notées (2). La comparaison suggère les commentaires suivants: la théorie linéarisée prévoit qualitativement l'instabilité de la déformation plastique, mais la localisation a lieu pour des valeurs de ϵ_0 beaucoup plus grandes que celles qui sont prévues par la théorie linéaire. Cela est dû au fait que la sensibilité à la vitesse de déformation et les effets d'inertie ralentissent la croissance de la perturbation; nous verrons que c'est aussi le cas des effets de triaxialité dans la striction. Nous avons déjà indiqué que la théorie linéarisée classique ne pouvait donner un résultat acceptable d'un point de vue quantitatif, que si la croissance de la perturbation est beaucoup plus rapide que celle de la déformation homogène. Ceci pourra donc être réalisé dans une sollicitation quasi-statique d'un matériau dont la réponse est très faiblement dépendante de la sensibilité à la vitesse de déformation, et si les effets tridimensionnels peuvent être négligés; ce sont aussi les conditions dans lesquelles le critère de CONSIDERE fournit une estimation raisonnable des déformations critiques. Dans le domaine

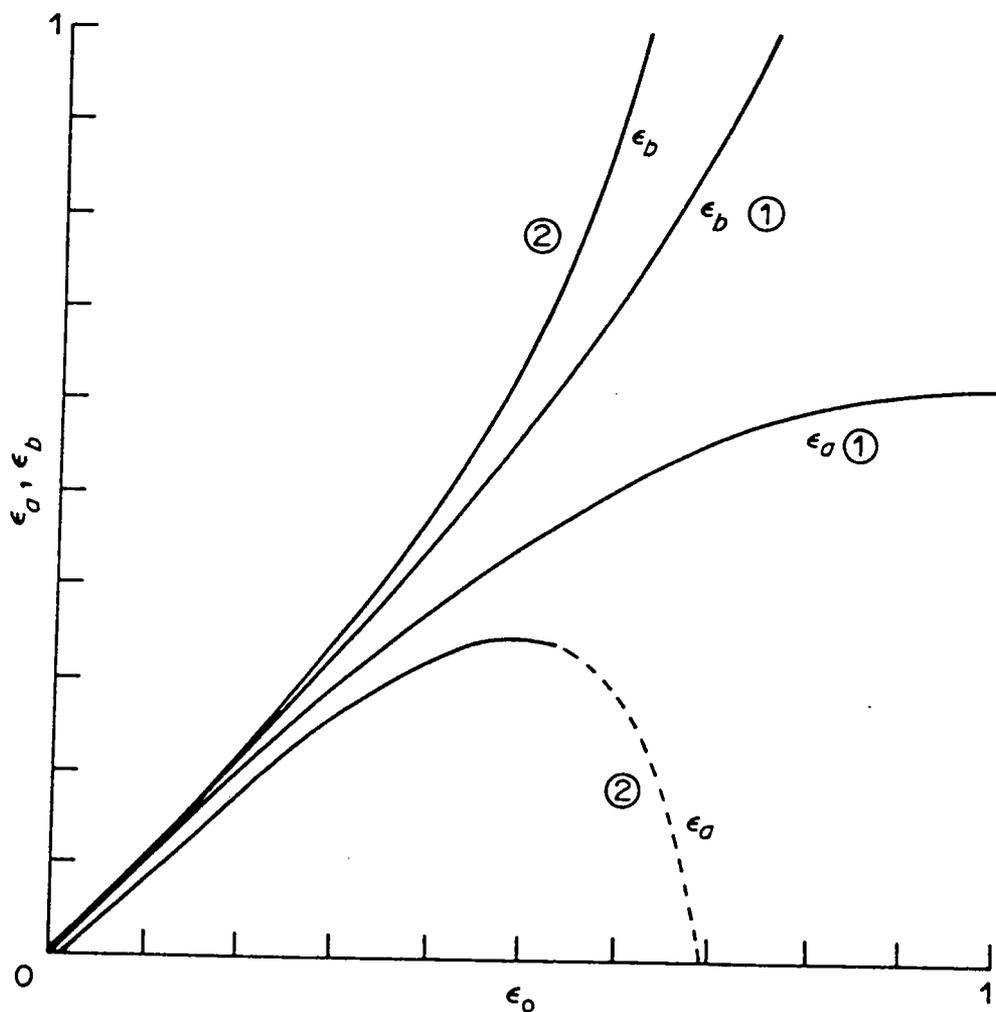


figure 4: Déformation ϵ_b dans la striction,
 et déformation ϵ_a à l'extrémité de la barre
 en fonction de la déformation homogène:

(1): Théorie non linéaire.

(2): Théorie linéaire.

dynamique, et pour des matériaux sensibles à la vitesse de déformation l'analyse linéarisée ne peut être utilisée que dans le but d'obtenir des renseignements qualitatifs sur les tendances .

3-3-Déformation quasi-statique.

Le cas d'une déformation quasi-statique est obtenu simplement en posant ρ_0 égal à zéro dans les équations différentielles (3-2,3-4). Celles-ci se réduisent alors au système:

$$\frac{d}{dt} \delta \epsilon = - \frac{\dot{\epsilon}_0}{m} \left(\left(\frac{n}{\epsilon_0} - 1 \right) \delta \epsilon + \nu \frac{\delta \theta}{\theta_0} \right) \quad (3-10)$$

$$\frac{d}{dt} \delta \theta = - k \xi^2 e^{-2\epsilon_0} \delta \theta - \frac{\dot{\theta}_0}{m} \left(\left(\frac{n}{\epsilon_0} - 1 - m \right) \delta \epsilon + \nu \frac{\delta \theta}{\theta_0} \right) \quad (3-11)$$

dont le déterminant caractéristique est:

$$\eta^2 + \eta \frac{\dot{\epsilon}_0}{m} \left(\frac{n-1+\alpha\nu\sigma_0}{\epsilon_0 \theta_0} + \frac{m}{Q} \right) + \frac{\dot{\epsilon}_0^2}{m} \frac{1}{Q} \left(\frac{n-1+\alpha\nu\sigma_0}{\epsilon_0} Q \right) = 0 \quad (3-12)$$

avec:

$$Q = \dot{\epsilon}_0 / k \xi^2 e^{-2\epsilon_0} \quad (3-13)$$

Q représente un paramètre d'adiabaticité de la déformation; dans un processus quasi- isotherme, Q est faible. Un développement asymptotique en Q des solutions de l'équation (3-12) montre que le critère de stabilité linéaire est alors:

$$\epsilon_0 < n \left(1 - Q \alpha \nu \frac{\sigma_0}{\theta_0} \right)^{-1} \quad (3-14)$$

L'inégalité (3-14) signifie que le produit des racines est négatif, et

que , par suite, une racine positive existe . En négligeant le couplage thermo-mécanique ($\alpha=0$), le critère de CONSIDERE est de nouveau obtenu. Dans une déformation quasi-adiabatique, le paramètre Q est grand; un développement asymptotique en termes de Q^{-1} des solutions de l'équation (3-12) montre qu'il n'existe pas de racine positive si:

$$\epsilon_0 < n (1 - \alpha \nu \frac{\dot{\sigma}_0}{\dot{\theta}_0} - m)^{-1} \quad (3-15)$$

Cette inégalité constitue donc un critère de stabilité linéaire de la déformation plastique homogène. Elle exprime l'influence déstabilisante de l'adoucissement thermique. Lorsque le paramètre d'adiabaticité Q est très grand, la déformation critique tend vers sa limite adiabatique:

$$\epsilon_0 < n (1 - \alpha \nu \frac{\dot{\sigma}_0}{\dot{\theta}_0})^{-1} \quad (3-16)$$

Une présentation légèrement différente du critère (3-16) fait apparaître l'identité qui existe entre une analyse de perturbations linéaires et une analyse de force maximum, si la déformation est quasi-statique et le matériau non conducteur et insensible à la vitesse de déformation (ou pour un essai piloté à vitesse de déformation constante). En effet, d'après l'équation thermique:

$$\dot{\theta}_0 = \alpha \dot{\sigma}_0 \epsilon_0 \quad (3-17)$$

de sorte que l'inégalité (3-16) s'écrit:

$$n \frac{\dot{\epsilon}_0}{\dot{\sigma}_0} - \dot{\epsilon}_0 + \nu \frac{\dot{\theta}_0}{\dot{\theta}_0} > 0 \quad (3-18)$$

La force à l'extrémité du spécimen est:

$$F = \theta_0 \nu \epsilon_0 e^{n - \epsilon_0} \quad (3-19)$$

de sorte que l'inégalité (3-18) n'est autre que:

$$\frac{\dot{F}}{F} > 0 \quad (3-20)$$

ce qui montre que les deux théories sont alors identiques.

Nous avons confronté le critère (3-16) aux résultats expérimentaux obtenus par FERRON (1981) sur des aciers austénitiques de type 304, dont il fournit les paramètres mécaniques:

$$\mu = 2.486 \cdot 10^{10} \text{ SI} \quad , \quad n = 0.52 \quad , \quad m = 0.02 \quad (3-21)$$

$$\rho = 7800. \text{ kg/m}^3 \quad , \quad C = 3.6 \cdot 10^6 \text{ J/m}^3\text{K} \quad , \quad K = 15. \text{ W/mK}$$

Le paramètre d'érouissage n est identifié à la déformation apparente à la charge maximum isotherme. Les conditions expérimentales sont spécifiées par:

$$l_0 = 50 \text{ mm} \quad , \quad A_0 = 4 \text{ mm}^2$$

$$\bar{\theta}_0 = 294. \text{ K} \quad , \quad \bar{\epsilon}_0 = 1.66 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1} \quad (3-22)$$

Pour cet ensemble de valeurs (3-21,3-22), nous avons tracé sur la figure 5 les racines de l'équation (3-12). Le terme m/Q est approximativement égal à 10^{-3} , et peut être négligé. On peut voir que le produit des racines est toujours négatif, mais que cela n'entraîne pas d'instabilité significative au début du processus car la racine positive reste très faible. La somme des racines change de signe pour:

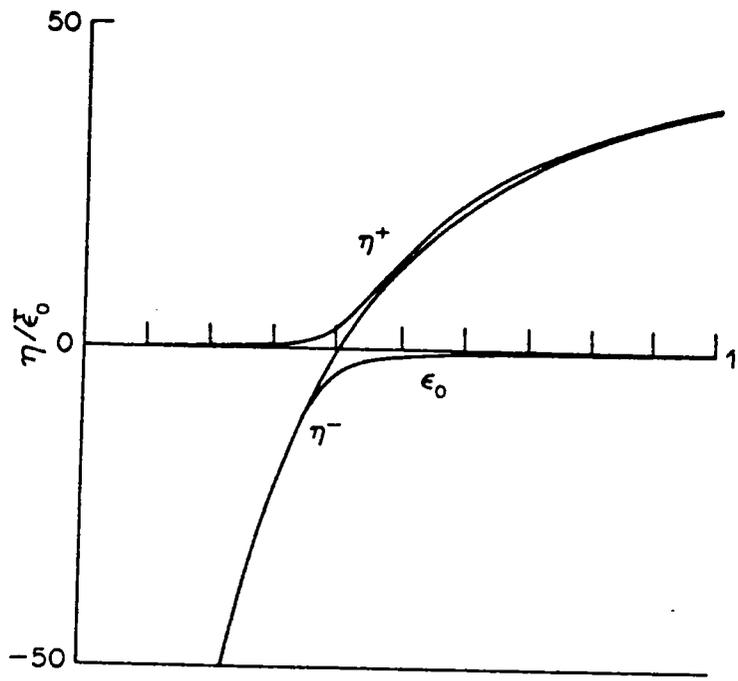


figure 5: Vitesses de croissance η^+, η^- des perturbations, et leur somme en fonction de la déformation homogène ϵ_0 .

$$\epsilon_{oc} \approx 0.40$$

(3-23)

A partir de cette valeur de ϵ_0 , la valeur positive suffisamment grande de $\eta/\dot{\epsilon}_0$ conduit à une instabilité significative. Pour de plus grandes valeurs de m , $\eta/\dot{\epsilon}_0$ serait plus petit pour une même valeur de ϵ_0 et la déformation critique d'instabilité significative serait plus grande, ainsi que nous l'avons déjà indiqué ci dessus.

La valeur critique ϵ_{oc} prédite par cette théorie est en bon accord avec le résultat présenté par FERRON qui observe $\epsilon_{oc} \approx 0.41$ à la charge maximum. L'élévation de température calculée au moyen de la solution homogène (2-20) est d'environ 55 C; elle est également de l'ordre de celles qui sont observées. La déformation critique obtenue dans les conditions quasi-isothermes : $\epsilon_{oc} = 0.52$ est naturellement identiquement prédite par la théorie, puisque la loi constitutive du matériau a été identifiée à partir de cette valeur.

3-4-Déformation dynamique.

Dans ce paragraphe, nous cherchons à mettre en évidence les effets combinés de l'inertie et de la conduction thermique sur le développement d'une perturbation linéaire. Seules des conclusions qualitatives sont attendues de cette discussion. Pour cela nous avons représenté sur la figure 6 la racine positive de l'équation caractéristique du système différentiel (3-2, 3-4) en fonction de ξ :

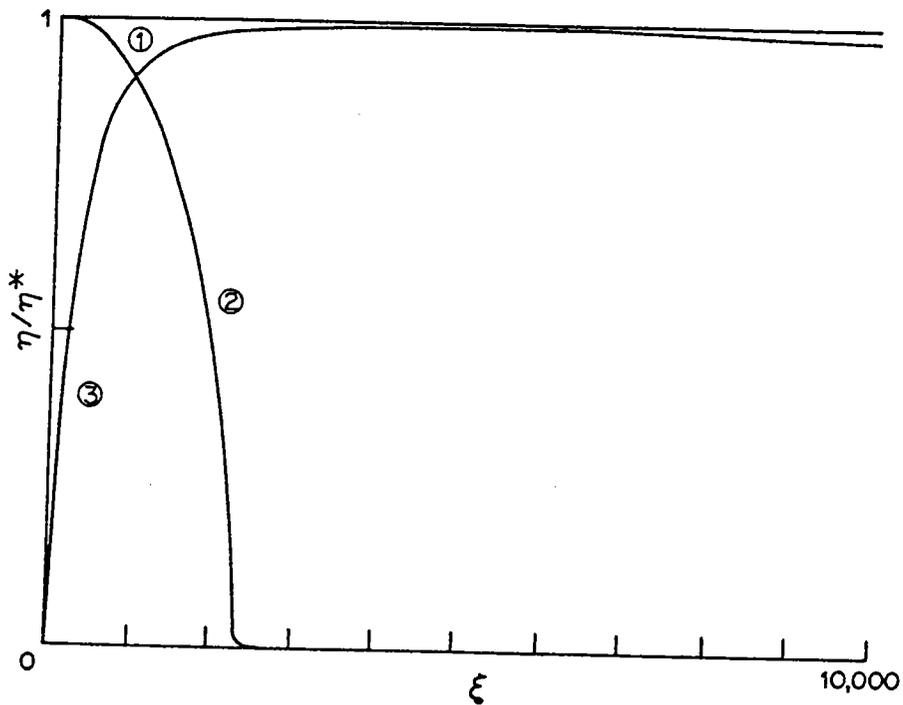


figure 6: Vitesse de croissance des perturbations:
 (1) déformation adiabatique quasi-statique.
 (2) déformation quasi-statique; matériau conducteur.
 (3) déformation dynamique; matériau conducteur.
 en fonction du nombre d'ondes ξ .

$$\rho_0 \eta^3 + (\rho_0 k \xi^2 e^{-2\epsilon_0} + (\dot{\epsilon}_0 + m \frac{\sigma_0}{\theta_0} \xi^2 e^{-2\epsilon_0}) - \alpha \nu \rho_0 \frac{\sigma_0}{\theta_0} \dot{\epsilon}_0) \eta^2 + (k \xi^2 e^{-2\epsilon_0} (\rho_0 \dot{\epsilon}_0 + m \frac{\sigma_0}{\theta_0} \xi^2 e^{-2\epsilon_0}) + (\frac{\eta}{\epsilon_0} - 1) \sigma_0 \xi^2 e^{-2\epsilon_0} - \alpha \nu \frac{\sigma_0}{\theta_0} (\rho_0 \dot{\epsilon}_0^2 - \sigma_0 \xi^2 e^{-2\epsilon_0})) \eta + (\alpha \nu \frac{\sigma_0}{\theta_0} \xi^2 e^{-2\epsilon_0} + k (\frac{\eta}{\epsilon_0} - 1) \sigma_0 \xi^4 e^{-4\epsilon_0}) = 0$$

(3-24)

Les données numériques utilisées sont spécifiées par (3-21, 3-22); la déformation a sa valeur critique ϵ_{0c} . Les courbes obtenues suggèrent les commentaires suivants:

Courbe (1): dans un processus quasi-statique ($\rho_0=0$) et adiabatique ($k=0$) η garde une valeur constante positive η^* , que nous utilisons pour normer l'ensemble des résultats.

Courbe (2): lorsque le matériau est conducteur ($k \neq 0$) et la déformation quasi-statique ($\rho_0=0$), la croissance des perturbations de grand nombre d'ondes est freinée par la conduction thermique. En effet η tend vers zéro lorsque ξ croît.

Courbe (3): dans un processus dynamique ($\rho_0 \neq 0$) obtenu à une vitesse de déformation $\dot{\epsilon}_0 = 5.10^3 \text{ s}^{-1}$, et pour un matériau conducteur ($k \neq 0$), les effets d'inertie freinent la croissance des perturbations de faible nombre d'ondes, car η tend vers zéro avec ξ . Lorsque ξ croît, η tend d'abord vers sa limite quasi-statique η^* , puis décroît aux très grandes valeurs de ξ , en raison des effets stabilisants de la conduction thermique. Toutefois, les conclusions que l'on pourrait tirer ici doivent tenir compte des effets de la triaxialité qui ne peut plus être négligée aux très grandes valeurs du nombre d'ondes.

3-5-Aspects tridimensionnels.

Les effets tridimensionnels ont été jusqu'à maintenant négligés dans cette étude. Cependant, on sait, depuis les travaux de BRIDGMAN (1964), que l'approximation des grandes longueurs d'ondes conduit à sous estimer la ductilité du matériau; en effet, son analyse de l'état de contraintes dans la striction d'un matériau rigide plastique parfait sous chargement quasi-statique, montre que la contrainte équivalente σ_e est plus faible que la contrainte uniaxiale σ , et que la déformation réelle dans la striction est plus faible que la déformation calculée dans un modèle uniaxial. Cela implique que la déformation critique uniaxiale soit atteinte plus rapidement que dans un modèle tenant compte des effets tridimensionnels. Cette analyse a déjà été invoquée dans le cas de modèles de comportement plus complexe, comme celui de matériaux sensibles à la vitesse de déformation (HUTCHINSON-NEALE 1977, G'SELL et al 1985); de la même façon, nous donnons en annexe une analyse linéarisée de type BRIDGMAN, de manière à fournir des indications approchées sur l'étendue de la validité du modèle uniaxial proposé au cours de ce chapitre. Il ressort de cette analyse que la correction due aux effets tridimensionnels augmente la déformation critique de bifurcation uniaxiale, qui intervient donc après la force maximum. Une telle conclusion avait également été obtenue par MILES (1971) et NEEDLEMAN (1972) pour un processus isotherme. Cette correction est très faible dans le cas des expériences de FERRON commentées ci-dessus, et l'approximation des grandes longueurs d'ondes semble donc justifiée.

4-Analyses non linéaires.

Nous avons fait remarquer dans la section précédente que l'analyse de stabilité linéaire ne pouvait rendre compte des déformations critiques de traction simple, lorsque le comportement du matériau est sensible à la vitesse de la déformation. Aussi présentons nous maintenant une étude non linéaire, basée également sur l'approximation des grandes longueurs d'ondes, destinée à l'examen de la croissance de défauts géométriques dans un matériau sensible à la vitesse de déformation. Dans un premier temps, nous donnons des résultats exacts, lorsque le matériau est non conducteur, et chargé de manière quasi-statique. En second lieu, une étude non linéaire numérique est consacrée au cas dynamique.

4-1-Chargement quasi-statique.

Nous distinguons par les indices "a" et "b" les variables respectivement associées à une section droite appartenant à la zone de déformation homogène, et à une section où la déformation plastique se localise. Nous caractérisons le défaut géométrique initial par χ :

$$\chi = (A_{0a} - A_{0b}) / A_{0a} \quad (4-1)$$

Nous avons, en accord avec l'approximation des grandes longueurs d'ondes:

$$F = \sigma_a A_a = \sigma_b A_b \quad (4-2)$$

En outre, comme le matériau est incompressible:

$$A_a = A_{0a} e^{-\epsilon_a}, \quad A_b = A_{0b} e^{-\epsilon_b} \quad (4-3)$$

La loi de comportement (2-1) est de nouveau employée; jointe aux relations (4-1,4-3), elle fournit une relation reliant la vitesse de déformation locale $\dot{\epsilon}_b$ à la vitesse de déformation homogène $\dot{\epsilon}_a$:

$$(1-x) \theta_a^{-1/m} \epsilon_a^{\nu/m} e^{-\epsilon_a/m} \dot{\epsilon}_a = \theta_b^{\nu/m} \epsilon_b^{n/m} e^{-\epsilon_b/m} \dot{\epsilon}_b \quad (4-4)$$

Une forme intégrée exacte de l'équation (4-4) est possible lorsque la force appliquée F est constante; en effet, la contrainte vraie est alors donnée par:

$$\sigma = e^{\epsilon} \quad (4-5)$$

et l'équation thermique devient:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha e^{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial t} \quad (4-6)$$

Ceci conduit à une relation exprimant la température θ en fonction de la déformation, avec les conditions initiales $\theta(0) = 1$, $\epsilon(0) = 0$:

$$\theta = 1 + \alpha(e^{\epsilon} - 1) \quad (4-7)$$

Nous pouvons éliminer la température de (4-4) et intégrer:

$$(1-x)^{-1/m} \int_0^{\epsilon_a} \theta(u)^{\nu/m} u^{n/m} e^{-u/m} du = \int_0^{\epsilon_b} \theta(u)^{\nu/m} u^{n/m} e^{-u/m} du \quad (4-8)$$

Nous dirons qu'il y a localisation L_{∞} de la déformation au niveau de la section droite "b" si et seulement si (MOLINARI-CLIFTON 1983):

$$\int_0^{\infty} \theta(u)^{\nu/m} u^{n/m} e^{-u/m} du < +\infty \quad (4-9)$$

La déformation homogène critique de localisation ϵ_{ac} est alors obtenue

en résolvant l'équation implicite (4-8) dans laquelle: $\epsilon_a \rightarrow \epsilon_{ac}$ et $\epsilon_b \rightarrow \infty$.

La fonction:

$$\theta(\epsilon) = \frac{\nu/m}{\epsilon} \frac{n/m}{e} - \frac{\epsilon/m}{e}$$

est intégrable si:

$$\nu - 1 < 0 \quad (m > 0) \quad (4-10)$$

par suite, cette inégalité apparaît comme un critère de localisation. Nous entendons par là qu'il s'agit d'une relation vérifiée par les paramètres mécaniques du matériau, et indiquant que, pour une déformation suffisamment grande, la localisation de la déformation plastique sera obtenue. Ainsi, un matériau thermo-adoucissant conduit-il nécessairement à la localisation de la déformation. En revanche, dans le cas d'un matériau thermo-durcissant, l'inégalité $\nu - 1 < 0$ exprime la compétition qui existe pour la localisation entre le durcissement thermique stabilisant, et l'adoucissement géométrique qui apparaît par le terme: -1 . Les conclusions seraient d'ailleurs quelque peu différentes si l'on utilisait pour loi de comportement:

$$\sigma = e \frac{\alpha \theta}{\epsilon} \frac{n \cdot m}{\dot{\epsilon}} \quad (4-11)$$

En effet, la condition de localisation devient alors: $\nu < 0$ pour $m > 0$, et les propriétés thermiques du matériau apparaissent alors comme le seul facteur critique de la localisation. Nous avons résolu numériquement l'équation (4-8); les résultats de ce calcul sont représentés sur la figure 7, où l'on a tracé l'évolution de ϵ_b/ϵ_a en fonction de ϵ_a/n pour différentes valeurs de ν . On notera la diminution de la déformation critique ϵ_{ac} due à l'adoucissement thermique, et au contraire l'effet fortement stabilisant du durcissement thermique.

Pour un matériau dont le comportement est indépendant de la vitesse de déformation ($m=0$), l'analyse présentée ci-dessus devient plus simple; en outre elle s'étend à toute histoire de chargement $F(t)$. En

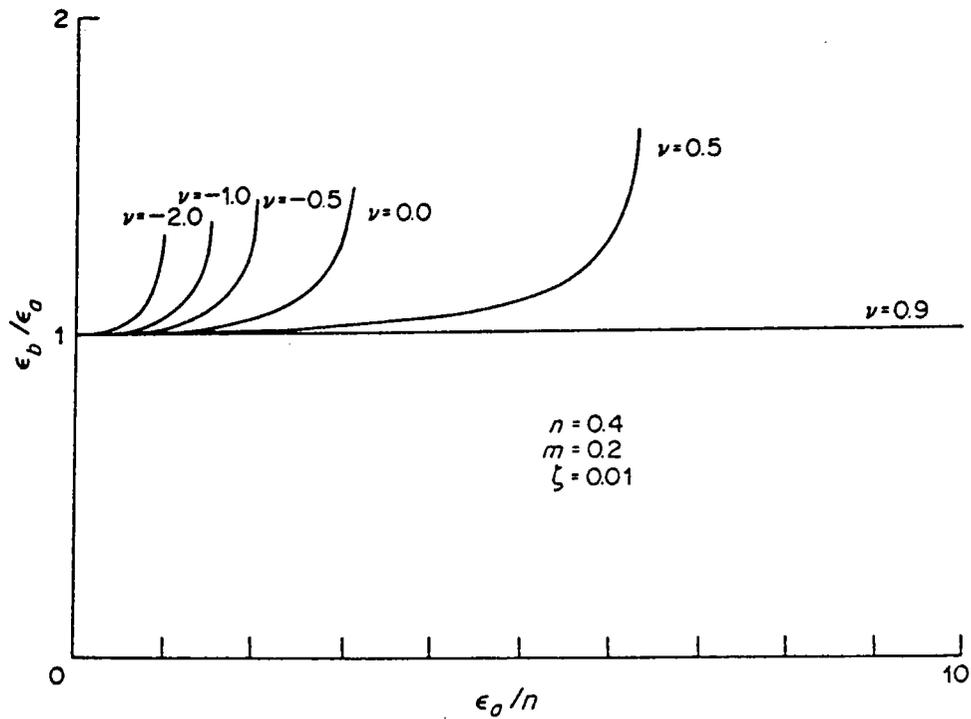


figure 7: Rapport ϵ_b/ϵ_a de la déformation dans la striction à la déformation homogène en fonction de la déformation homogène normalisée ϵ_a/n ; influence de l'adoucissement thermique.

effet, l'équation thermique s'écrit:

$$\theta^{-\nu} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha \epsilon^n \frac{\partial \epsilon}{\partial t} \quad (4-12)$$

d'où l'on tire:

$$\theta(\epsilon) = \left(1 + \alpha \frac{(1-\nu)}{1+n} \epsilon^{n+1}\right)^{1/(1-\nu)} \quad (4-13)$$

Compte tenu de (4-1), (4-2), (4-3) et (4-13), on obtient donc:

$$(1-\chi)^{-1} \theta(\epsilon_a)^\nu \epsilon_a^n e^{-\epsilon_a} = \theta(\epsilon_b)^\nu \epsilon_b^n e^{-\epsilon_b} \quad (4-14)$$

Lorsque $\chi=0$, cette analyse se réduit à une étude de type force maximum, et le résultat (3-16) est retrouvé.

4-2-Déformation dynamique.

Dans le domaine dynamique, la solution du système d'équations aux dérivées partielles non linéaires (2-12,2-14) obéissant aux conditions aux limites (2-16,2-18) et aux conditions initiales (3-9), a été obtenue grâce à une méthode de différences finies utilisant un schéma mixte explicite-implicite. Les résultats de ces calculs sont d'abord présentés dans l'approximation isotherme, de manière à mettre en évidence les effets dynamiques indépendamment des effets thermiques. Naturellement, les deux effets sont couplés dans le processus réel, et nous envisagerons également une déformation dynamique quasi-adiabatique.

Le matériau utilisé est purement visqueux; ses paramètres mécaniques sont:

$$\bar{\mu}_0^\nu = 10^8 \text{ SI}, \quad n=0, \quad m = 0.2, \quad \rho = 2700. \text{ kg/m}^3 \quad (4-15)$$

L'échantillon, de longueur initiale $l_0 = 2.5$ cm, possède un défaut initial $x/2 = \zeta = 0.01$; le nombre d'ondes de la perturbation est $\xi = 2\pi/l_0 = 250\text{m}^{-1}$.

Pour un tel matériau, il est possible de calculer la solution non linéaire exacte dans le cas d'un chargement quasi-statique. On trouve d'après (4-8):

$$\epsilon_b = -m \text{Log}(1+(1-x)^{-1/m} (e^{-\epsilon_a/m} - 1)) \quad (4-16)$$

Une comparaison est donc possible avec la solution numérique dans la cas dynamique: sur la figure 8, le résultat $\epsilon_b(\epsilon_a)$ quasi-statique exact est représenté par la courbe numérotée (0). Les courbes $\epsilon_b(\epsilon_a)$ numérotées (1) et (2) sont obtenues respectivement pour les valeurs initiales de la vitesse de déformation $\dot{\epsilon}_0 = 10^4 \text{ s}^{-1}$ et $\dot{\epsilon}_0 = 10^5 \text{ s}^{-1}$. Il apparait que la croissance d'une inhomogénéité initiale est considérablement freinée lorsque l'on augmente la vitesse de déformation; le délai pour la localisation qui en résulte ne peut être attribué qu'aux effets d'inertie. On remarquera que pour le nombre d'ondes ξ utilisé dans ce calcul, la théorie de la stabilité linéaire prévoit également, de manière qualitative, un effet significatif des efforts d'inertie. En effet, on observe sur la figure 3 que pour cette valeur de ξ , la vitesse de croissance η de la perturbation est beaucoup plus petite que sa valeur quasi-statique η^* . La convergence de ces deux résultats indépendants semble donc confirmer le freinage exercé par les efforts d'inertie sur la croissance des inhomogénéités.

Nous avons également recherché une confrontation avec les résultats expérimentaux obtenus dans d'autres laboratoires; la difficulté principale tient dans le fait que, dans le domaine dynamique, la ductilité des matériaux est affectée non seulement par les effets d'inertie mais encore par les mutations éventuelles des mécanismes

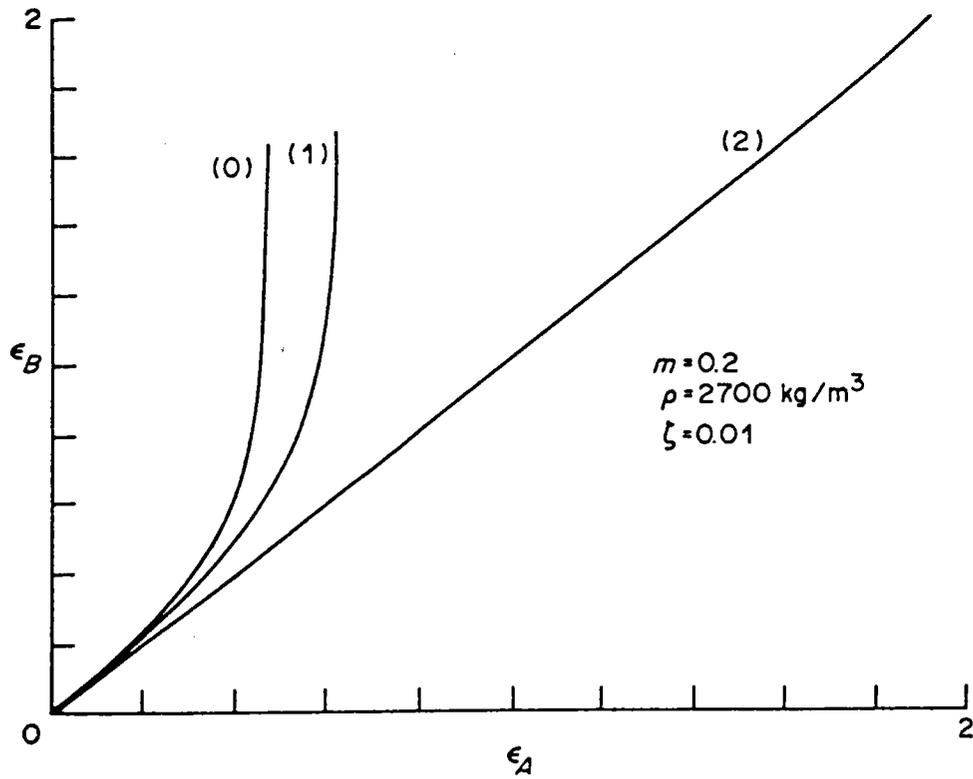


figure 8: Effets de l'inertie sur la localisation:

(0) déformation quasi-statique.

(1) $\dot{\epsilon}_0=10^4 \text{ s}^{-1}$

(2) $\dot{\epsilon}_0=10^5 \text{ s}^{-1}$

élémentaires de la déformation plastique, qui passent d'un comportement thermiquement activé aux faibles vitesses à un comportement visqueux aux grandes vitesses. La frontière entre ces deux zones fait encore l'objet de controverses (FOLLANSBEE et al 1984) et est située selon les auteurs entre 10^3s^{-1} et 10^6s^{-1} . La séparation de l'accroissement dynamique de la ductilité de son augmentation intrinsèque est donc difficile. A cet égard, le comportement du Tantale à 500 C semble pouvoir constituer un test pertinent du modèle proposé ci-dessus. Dans ces conditions en effet, la loi de comportement de ce matériau ne subit pas d'altération aux grandes vitesses de déformation (GIANOTTA et al 1983), au moins jusqu'à $5 \cdot 10^3 \text{s}^{-1}$, alors que compte-tenu de la forte masse volumique du Tantale, les effets d'inertie sont déjà significatifs. Il en résulte qu'une augmentation de la ductilité aux grandes vitesses pourra être attribuée à l'influence stabilisante des efforts d'inertie. De fait, les résultats expérimentaux de GIANOTTA et al indiquent une forte augmentation de l'allongement à la rupture e_r dans le domaine des vitesses de déformation de l'ordre de 10^3s^{-1} , ainsi qu'un accroissement un peu moins prononcé de l'allongement homogène à la rupture e_h (figure 9).

La longueur initiale de l'éprouvette, et l'aire initiale d'une section droite sont respectivement: $l_0 = 1.57 \cdot 10^{-2} \text{m}$ et $A_0 = 4.9 \cdot 10^{-6} \text{m}^2$. D'autre part, les valeurs expérimentales relatées par GIANOTTA et al nous permettent d'assigner approximativement à ce matériau la loi de comportement:

$$\tilde{\sigma} = \mu \epsilon^n \tilde{\epsilon}^m$$

avec: $\mu \approx 3.8 \cdot 10^8 \text{SI}$, $n=0.21$, $m=0.02$

Nous définissons numériquement la rupture de l'éprouvette par l'allongement u pour lequel une diminution brutale de l'effort appliqué

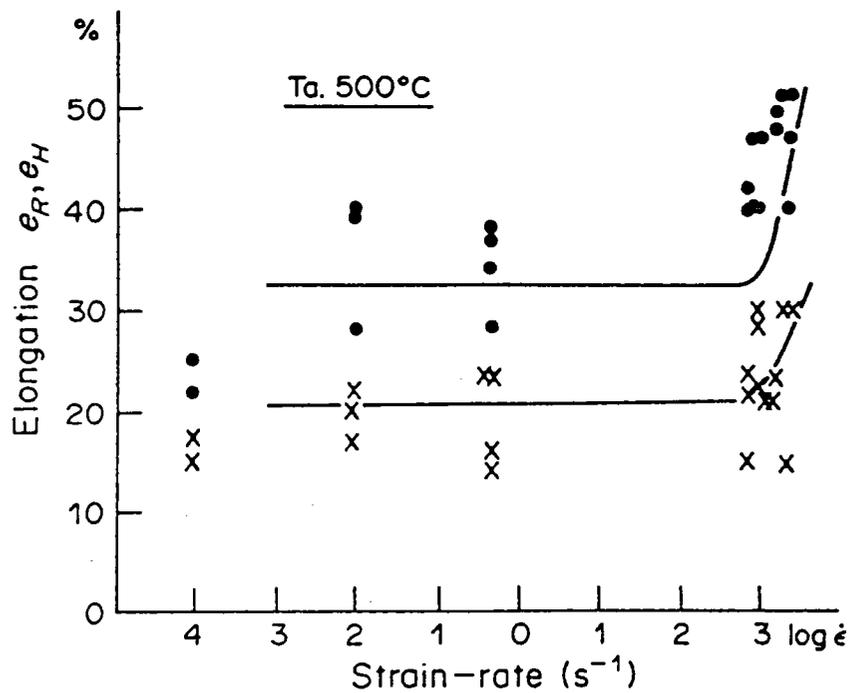


figure 9: Ductilité du Tantale à 500 C. Données expérimentales (GIANOTTA et al): * pour e_r , . pour e_h ;
courbes théoriques e_r, e_h .

est calculée (figure 10), et nous identifions e_h avec la déformation de l'extrémité du spécimen à cet instant. Le modèle conduit à des prévisions qui sont en bon accord avec les observations (figure 9). En effet, l'allongement homogène calculé e_h est parfaitement compatible avec les résultats expérimentaux, pour une valeur réaliste du défaut initial de surface, de l'ordre de 1%. L'allongement à la rupture calculé semble légèrement inférieur à l'allongement e_r observé; cela pourrait être dû au fait que les effets stabilisants de la triaxialité, qui deviennent importants à la rupture, ont été négligés dans cette analyse. L'allongement à la rupture calculé reste cependant compatible avec les observations. De plus, il reproduit bien l'accroissement considérable de e_r aux grandes vitesses. La comparaison avec les données expérimentales suggère donc que le modèle décrit correctement les aspects essentiels des processus dynamiques; de même la ductilité accrue du Tantale à 500 C dans le domaine des grandes vitesses semble bien due aux effets d'inertie. Pourtant des conclusions plus détaillées ne pourront être obtenues que lorsque de nouveaux résultats expérimentaux seront disponibles.

4-3-Processus dynamiques quasi-adiabatiques.

Les données (3-21) de l'acier austénitique testé par FERRON sont utilisées dans la résolution numérique des équations (2-5,2-6); les échantillons sont supposés être de longueur initiale $l_0=10^{-2}m$, et le défaut est de 1%.

Les effets de l'adoucissement thermique sont illustrés sur la figure 11, pour laquelle deux courbes de ductilité calculée sont tracées, l'une, numérotée (1) dans des conditions isothermes, l'autre

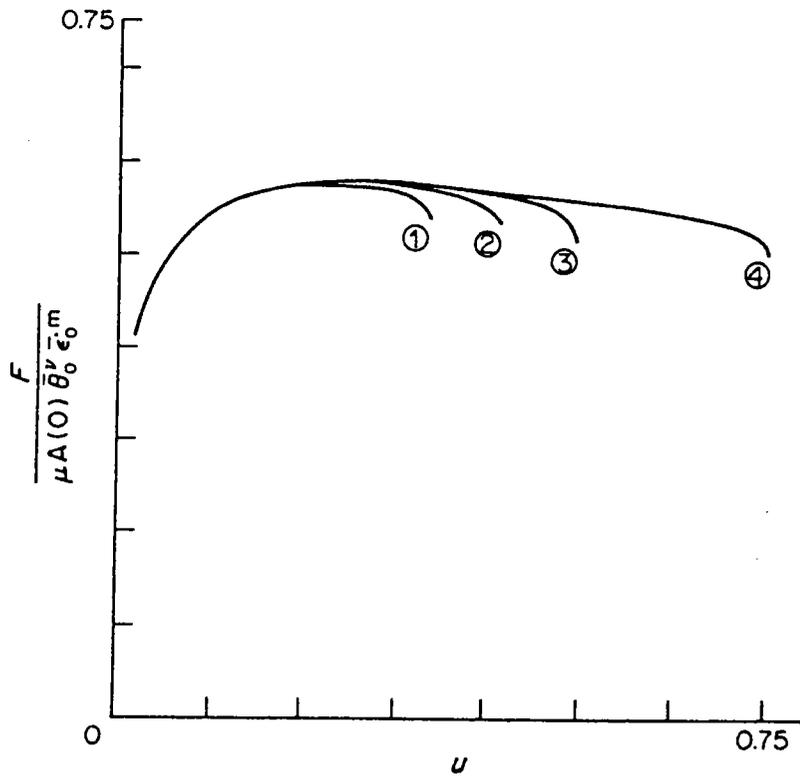


figure 10: Courbes effort-déformation.

(1) $\dot{\epsilon}_0 = 10^3 \text{ s}^{-1}$

(2) $\dot{\epsilon}_0 = 2 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$

(3) $\dot{\epsilon}_0 = 3 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$

(4) $\dot{\epsilon}_0 = 5 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$

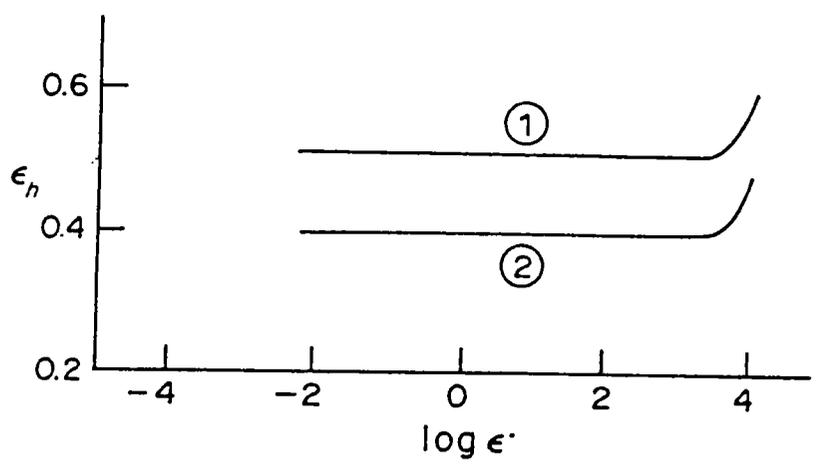


figure 11: Ductilité isotherme (1) et adiabatique (2) calculées.

(2) pour une déformation quasi-adiabatique. Toutes deux représentent l'allongement homogène e_h à la rupture numérique définie ci-dessus. Dans les deux cas, les calculs tiennent compte de la sensibilité à la vitesse de déformation, de l'écrouissage et des effets d'inertie. La courbe (2) ne peut être distinguée de celle que l'on obtient dans un processus adiabatique ($k=0$).

Lorsque les effets d'inertie sont négligeables, pour $\dot{\epsilon}_0 < 5.10^{-3} s^{-1}$, l'allongement homogène tend vers les valeurs critiques obtenues au moyen des analyses linéarisées quasi-statiques: $\epsilon_{oc} \approx 0.40$ dans le cas adiabatique et $\epsilon_{oc} = 0.52$ dans le cas isotherme. On peut de nouveau observer l'accroissement dynamique de la ductilité aux grandes vitesses de déformation, ainsi que la déstabilisation de la déformation plastique par l'adoucissement thermique, puisque la courbe de ductilité adiabatique se trouve au dessous de la courbe isotherme.

Le bon accord observé avec les valeurs quasi-statiques, obtenues de manière indépendante donne des indications favorables quant à la valeur des modèles utilisés. Cependant, des réserves doivent être formulées à propos des conclusions que l'on pourrait en tirer dans le domaine dynamique, en raison du manque, à notre connaissance, de données expérimentales incluant la dépendance de la loi de comportement vis à vis de la température. En outre, d'éventuels changements microstructuraux des mécanismes élémentaires de la déformation plastique pourraient bien accroître la ductilité dans ce domaine.

5-Conclusions.

Ce second chapitre apparaît comme étant relativement indépendant du chapitre 1, qui était consacré à l'élaboration de lois de

comportement utilisables aux grandes déformations et aux grandes vitesses de déformation. En effet, nous avons davantage mis l'accent sur la compréhension du processus d'instabilité proprement dit, mettant tout particulièrement en relief les effets d'inertie et les effets thermiques. A cet effet, une loi de comportement empirique simple a été utilisée. Nous nous réservons de reprendre un tel travail à l'avenir, munis des lois de comportement polycristallines présentées au chapitre précédent.

Les caractéristiques essentielles du travail présenté dans ce chapitre 2 résident dans la prise en considération des effets dynamiques et des effets thermiques sur la ductilité en traction simple; cependant, d'autres aspects n'ont pas été étudiés ici, comme le durcissement textural ou l'endommagement. En dépit de ses limites, le modèle uniaxial que nous avons développé fournit des résultats en bon accord avec les données expérimentales, et qui permettent d'interpréter, au moins en partie l'accroissement dynamique de la ductilité, ainsi que sa diminution adiabatique. L'analyse linéaire "quasi-stationnaire" est suffisante lorsque la sensibilité du matériau à la vitesse est faible, et lorsque les effets dynamiques sont négligeables. Au cours du chapitre suivant, une analyse de stabilité de la solution homogène prenant en considération son caractère instationnaire sera présentée.

Annexe: Analyse tridimensionnelle linéarisée.

Pour un état de contraintes tri-axial, nous définissons la contrainte effective par:

$$\sigma_e = \frac{3}{2} (s_{i,j} s_{i,j})^{1/2} \quad (a-1)$$

où $s_{i,j}$ est le déviateur des contraintes. Le facteur de triaxialité F_t est défini par:

$$F_t = \sigma_e / \sigma \quad (a-2)$$

et la loi de comportement est maintenant:

$$\sigma_e = \psi(\epsilon, \dot{\epsilon}, \theta) \quad (a-3)$$

Le facteur adimensionnel F_t exprime l'influence de la triaxialité sur la contrainte effective; il dépend de la géométrie de l'échantillon et des propriétés mécaniques du matériau. Pour un matériau rigide-plastique en chargement quasi-statique, la valeur de F_t est donnée en un point de l'axe de l'échantillon par BRIDGMAN (1964):

$$F_t = ((1+2R_c/R)\text{Log}(1+R/2R_c))^{-1} \quad (a-4)$$

dans cette expression R désigne le rayon de la section droite considérée et R_c le rayon de courbure local du profil de l'éprouvette.

Une perturbation linéaire des équations (a-2,a-4) fournit, en addition au système différentiel (3-2,3-4):

$$F_t(t, X) = F_{t_0} + \delta F_t(t) \exp(i\xi X) \quad (a-5)$$

où $F_{t_0}=1$ est le facteur de BRIDGMAN de la déformation homogène. Si l'on utilise:

$$\frac{1}{R_c} = \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} / (1 + (\frac{\partial R}{\partial x})^2)^{3/2} \quad (a-6)$$

on obtient pour l'équation caractéristique (3-12):

$$\eta^2 + \eta \frac{\dot{\epsilon}_0}{m_0} \left(\frac{n-1 + \alpha \nu \sigma_0}{\theta_0} + \frac{m + A_0}{2\pi} \xi^2 e^{-2\epsilon_0} \right) + \frac{\dot{\epsilon}_0^2}{m_0^2} \frac{1}{\theta_0 - \epsilon_0} \left(\frac{n-1 + \alpha \nu \sigma_0}{\theta_0} + \frac{A_0}{2\pi} \xi^2 e^{-2\epsilon_0} \right) = 0 \quad (a-7)$$

Lorsque la déformation est adiabatique, le critère de localisation s'écrit alors:

$$\epsilon_0 > n / \left(1 - \frac{\alpha \nu \sigma_0}{\theta_0} - \frac{A_0}{2\pi} \xi^2 e^{-2\epsilon_0} \right) \quad (a-8)$$

La correction par rapport au critère (3-16) est très faible dans le cas décrit par FERRON et interprété dans le texte ci-dessus; en effet pour

$$A_0 = 4.10^{-6} \text{ m}^2, \quad \xi \cong 125 \text{ m}^{-1}, \quad \epsilon_0 \cong 0.40 \quad (a-9)$$

la valeur:

$$\frac{A_0}{2\pi} \xi^2 \exp(-2\epsilon_0) \cong 4.5 \cdot 10^{-3}$$

peut être négligée devant: $1 - \alpha \nu \sigma_0 / \theta_0 \cong 1.3$

Références du chapitre 2.

A.S. ARGON; "The inhomogeneity of plastic deformation", Chapter 7, American Society of Metals, Metals Park, Ohio (1973)

P.W. BRIDGMAN; " Studies in large plastic flow and fracture", Harvard University Press (1964)

J.D.CAMPBELL; "Dynamic plasticity of Metals", CISM Udine, Springer Verlag (1970).

A. CHRYSOCHOOS; "Contribution à l'étude de la dissipation intrinsèque pour des matériaux élasto-plastiques en grandes déformations", Thèse D.I., Montpellier (1983)

R.J. CLIFTON, J. DUFFY, K.A. HARTLEY, T.G. SHAWKI; "On critical conditions for shear band formation at high strain rates", Scripta Met 18, 443, 1984.

A. CONSIDERE; " L'emploi du fer et de l'acier dans les constructions", Ann. des Ponts et Chaussées, 9, p574, 1885.

G.FERRON; " Influence of heat generation and conduction on plastic stability under uniaxial tension", Mat. Sci. and Eng., 49, p241, 1981.

G.FERRON; " The effect of the interruption of straining on non uniform plastic flow in tension", Mat. Sci. and Eng., 52, p166, 1982.

P.S.FOLLANSBEE,G.REGAZZONI,U.F.KOCKS;"High strain rate measurements of dislocation mobility", "The mechanics of dislocations",E.C. AIFANTIS and J.P.HIRTH eds, ASM, Metals Park 237,1984.

C.FRESSENGEAS,A.MOLINARI;"Localisation de la deformation plastique en traction simple: Effets dynamiques et effets thermiques", Journées GAMI: Déformation des matériaux aux grandes vitesses, Paris 1983

C.FRESSENGEAS,A.MOLINARI;"Inertia and thermal effects on the localization of plastic flow", Acta Metall,33, 387,1985.

A.K.GHOSH;"Tensile instability and necking in materials with strain-hardening and strain-rate hardening", Acta Metall,25,1413,1977.

J.C.GIANOTTA,G.REGAZZONI,F.MONTHEILLET,J.P.ANSART,R.DORMEVAL;" Déformation et ductilité dans le domaine des très grandes vitesses. Comportement et ductilité du Tantale à 500 C",Rapport CETAM/ARMINES,6b, 1983.

C.G'SELL,A.MARQUEZ-LUCERO,P.GILORMIMI,J.J.JONAS;" Flow localization and the determination of constitutive relations in highly drawn polymers: one-dimensional eulerian formulations of the effect of stress triaxiality", Acta Metall,33,759,1985.

E.W.HART, Acta Metall 15,351,1967.

J.W.HUTCHINSON, K.W. NEALE;" Influence of strain-rate sensitivity under uniaxial tension", Acta Metall,35,389,1977.

J.W.HUTCHINSON, K.W.NEALE;" Sheet necking III: strain-rate effects" in "Mechanics of sheet-metal forming", ed. by D.P.KOISTINEN and N.M.WANG, 269, Plenum Press, New-York, 1978.

J.J.JONAS, R.A.HOLT, C.E.COLEMAN; Acta Metall, 24, 911, 1976.

A.S.KORHONEN;" Effect of forming and testing speed on formability and mechanical properties of sheet metals", 12th Biennial Congress I.D.D.R.G., Santa Maria Ligure (Italy), 191, 1982.

U.S.LINDHOLM;" Review of dynamic testing techniques and material behaviour", in " Mechanical properties at high rates of strain", Conf. Series 3, 21, Oxford, 1974.

J.P.MILES; J.Mech.Phys.Sol., 20, 111, 1972.

A.MOLINARI;"Etude des processus à grande vitesse de déformation", Rapport DRET 81/1199 , 1982.

A.MOLINARI, R.J.CLIFTON; C.R.A.S., Paris 296, 1, 1983.

A.MOLINARI;"Instabilité visco-plastique en cisaillement simple", 5^{me} Colloque Mécanique et Métallurgie de Tarbes, ADISTA/ATS, 1-43, 1984.

G.A.NARIBOLI;"Asymptotic theory of wave-motion in rods", Z.A.M.M., 49, 6, 525, 1969.

K.W.NEALE,P.TUGCU;" Analysis of Necking and Neck Propagation in Polymeric Materials" , J.Mech.Phys.Sol, , 1985.

A.NEEDLEMAN;" A numerical study of necking in circular cylindrical bars", J.Mech.Phys.Sol,20,111,1972.

A.M.RAJENDRAN,I.M.FYFE;" Inertia effects on the ductile failure of thin rings", J. of Appl. Mech.,49,31,1982.

M.STELLY,R.DORMEVAL;"Some results on the dynamic deformation of copper" in "High velocity deformation of solids", ed. K.KAWATA and J.SHIOIRI, Tokyo,82,1977.

J.W.TAYLOR, F.H.HARLOW,A.A.AMSDEN; " Dynamic plastic instabilities in stretching plates and shells", J. of Appl. Mech., 45, 105, 1978.

C.ZENER,J.H.HOLLOMON; "Effect of strain rate upon plastic flow of steel", J. of Appl. Mech.,15,22,1944.

figure 1: Courbes effort-déformation dans l'air, d'après FERRON.

figure 2: Courbes effort-déformation dans l'eau, d'après FERRON.

figure 3: Vitesse de croissance dynamique d'une perturbation.

figure 4: Déformation ϵ_b dans la striction, et déformation ϵ_a à l'extrémité de la barre en fonction de la déformation homogène:

(1): Théorie non linéaire.

(2): Théorie linéaire.

figure 5: Vitesses de croissance η^+, η^- des perturbations, et leur somme en fonction de la déformation homogène ϵ_0 .

figure 6: Vitesse de croissance des perturbations:

(1) déformation adiabatique quasi-statique.

(2) déformation quasi-statique; matériau conducteur.

(3) déformation dynamique; matériau conducteur.

en fonction du nombre d'ondes ξ .

figure 7: Rapport ϵ_b/ϵ_a de la déformation dans la striction à la déformation homogène en fonction de la déformation homogène normalisée ϵ_a/n ; influence de l'adoucissement thermique.

figure 8: Effets de l'inertie sur la localisation:

(0) déformation quasi-statique.

(1) $\dot{\epsilon}_0 = 10^4 \text{ s}^{-1}$

(2) $\dot{\epsilon}_0 = 10^5 \text{ s}^{-1}$

figure 9: Ductilité du Tantale à 500 C. Données expérimentales (GIANOTTA et al): * pour e_r , . pour e_h ; courbes théoriques e_r, e_h .

figure 10: Courbes effort-déformation.

(1) $\dot{\epsilon}_0 = 10^3 \text{ s}^{-1}$

(2) $\dot{\epsilon}_0 = 2.10^3 \text{ s}^{-1}$

(3) $\dot{\epsilon}_0 = 3.10^3 \text{ s}^{-1}$

(4) $\dot{\epsilon}_0 = 5.10^3 \text{ s}^{-1}$

figure 11: Ductilité isotherme (1) et adiabatique (2) calculées.

Chapitre 3 : Instabilité et localisation de la déformation

plastique de glissement simple à grande vitesse .

1-Introduction

Les bandes de cisaillement sont des zones étroites dans lesquelles la déformation plastique se localise . On a pu les observer de façon courante lors de la déformation à grande vitesse de nombreux matériaux , métaux ou polymères, par exemple lors de l'impact de projectiles et de véhicules , ou lors de processus d'usinage et de mise en forme rapide des matériaux :magnéto-formage , formage par explosion . Les bandes de cisaillement sont également observées lors de processus quasi-statiques , comme la striction des éprouvettes de traction simple. Expérimentalement , on s'efforce notamment de les obtenir par la torsion à grande vitesse de tubes à paroi mince . Les observations suggèrent très souvent que les bandes de cisaillement agissent comme des précurseurs de la rupture du matériau . On comprends dès lors l'intérêt qui leur est porté , et qui se manifeste par l'abondance de la littérature internationale qui leur est consacrée.

Depuis l'article originel de ZENER- HOLLLOMON (1944) la formation des bandes de cisaillement aux grandes vitesses de déformation est le plus souvent attribuée aux faits suivants : environ 90 % du travail de la déformation plastique sont dissipés de manière quasi-adiabatique sous forme de chaleur, et la température peut ainsi subir une augmentation locale allant jusqu'à plusieurs centaines de degrés .Comme la contrainte

d'écoulement des matériaux est souvent une fonction décroissante de la température (matériau thermo-adoucissant) , il en résulte une augmentation locale de la déformation plastique lorsque le durcissement dû à l'écrouissage est dépassé ; ceci produit en retour une quantité de chaleur supplémentaire . Ainsi est enclenché un processus catastrophique qui conduit à la localisation de la déformation plastique dans les zones les plus chaudes , et se déformant aux plus grandes vitesses . L'élévation de température peut aller jusqu'à produire des changements structuraux notables ; ainsi on pense que des transformations de phase peuvent se produire dans certains aciers austénitiques, se traduisant *post-mortem* par la présence de martensite . Les bandes de cisaillement sont alors très étroites, d'une largeur de quelque dizaines de microns . On parle dans ce cas (ROGERS 1974) de bandes de transformation ; lorsque l'on n'observe pas de changements structuraux aussi brutaux , les bandes de cisaillement présentent un aspect plus diffus et sont appelées bandes de déformation. On trouvera une revue complète des aspects microstructuraux du cisaillement adiabatique , incluant notamment les transformations de phase chez ROGERS (1974) ,BEDFORD et al. (1974) et ROGERS-SHASTRY(1981). D'autres types d'explications peuvent cependant être invoqués de manière concurrente ou complémentaire : ainsi l'apparition d'un écrouissage négatif pourrait-elle être due à une évolution isotherme des textures cristallographiques (CANOVA- MOLINARI-FRESSENGEAS 1984 et chapitre 1), ou à l'endommagement du matériau (DODD-ATKINS 1983 ,SHOCKEY-ERLICH 1981).Cependant ce type d'explications isothermes ne sera pris en considération au cours de ce chapitre . De nombreux auteurs ont tenté de déterminer les conditions critiques d'apparition des bandes de cisaillement de manière analytique: CULVER

(1973), STAKER (1981) proposent un critère d'instabilité de la déformation plastique basé sur l'existence d'une contrainte de cisaillement homogène maximum, de même que RECHT (1964) qui inclut dans son analyse les effets de l'adoucissement et de conduction thermiques. ARGON (1973) analyse la stabilité d'une déformation adiabatique faiblement non homogène. CLIFTON (1978), BAI (1982), BURNS-TRUCANO (1982) et PAN (1983) proposent des critères obtenus à partir d'analyses de stabilité linéaire de la déformation homogène. De telles théories permettent de savoir si une petite perturbation initiale de la déformation homogène est initialement croissante ou non, c'est-à-dire de savoir si la déformation homogène a tendance ou non à être instable. Cependant ces théories ne prennent pas en considération le caractère instationnaire de la déformation homogène. Elles ne peuvent donc pas en général fournir un résultat de stabilité à long terme; cette remarque prend tout son effet lorsque le processus d'instabilité est allongé par les effets de sensibilité à la vitesse de déformation et par les effets d'inertie. En outre ces théories ne fournissent en général que des résultats relatifs à la stabilité de la déformation, et non à sa localisation. Par le terme de localisation, nous entendons que la déformation prend dans une région très étroite des valeurs beaucoup plus fortes que partout ailleurs. Les critères de localisation pourraient être fournis par des analyses non linéaires exactes; malheureusement, de telles analyses n'ont pu être menées à bien que dans un nombre restreint de cas particuliers comme le glissement simple quasi-statique à contrainte imposée et la traction uniaxiale quasi-statique à force imposée, d'un matériau thermo-viscoplastique non conducteur de la chaleur: MOLINARI- CLIFTON (1983), FRESSENGEAS-MOLINARI (1985).

Le but poursuivi dans ce chapitre est de fournir des critères de

localisation étendus au cas plus général de la déformation dynamique d'un matériau thermo-viscoplastique conducteur de la chaleur, soumis à des conditions à la limite variées en vitesses ou en contraintes. Nous désignons par critère de localisation, une condition reliant les paramètres mécaniques du matériau et indiquant si la localisation est possible pour des valeurs assez grandes du temps et de la déformation homogène. Il faut insister sur le fait que nous ne cherchons pas ici à prédire le début de la localisation, ni à en décrire le processus, ni enfin à calculer les déformations ultimes avant la rupture du matériau, mais seulement à répondre à la question: un matériau étant donné par ses caractéristiques mécaniques, existe-t-il une déformation assez grande pour que la localisation de la déformation sous forme de bande de cisaillement ait lieu, pour un défaut initial donné, et sous des conditions à la limite déterminées? Ce but est atteint grâce à une nouvelle méthode de perturbations, appelée méthode de perturbations relative; cette méthode prend en considération l'aspect instationnaire de la déformation plastique homogène. Les effets stabilisants de l'écroutissage, de la sensibilité à la vitesse, de la conduction thermique et des effets d'inertie d'une part, les effets déstabilisants de l'adoucissement thermique d'autre part, ont déjà été étudiés dans le chapitre 2 à propos de la traction uniaxiale, et, bien que pris en considération, ils ne feront pas l'objet de commentaires supplémentaires lors de cette étude.

Le plan de ce chapitre est donc le suivant: on écrit tout d'abord les équations fondamentales du problème. Puis les méthodes de perturbation classiques sont rappelées, en tenant compte de l'aspect instationnaire de la déformation homogène, et on en déduit des critères de stabilité à long terme de la déformation. Enfin la méthode de

perturbations relatives est présentée ; le concept de localisation est défini par l'instabilité à long terme des défauts relatifs. Des critères de localisation sont obtenus pour différentes conditions aux limites; ils sont comparés aux critères d'instabilité et l'on montre notamment qu'il peut y avoir instabilité de la déformation plastique homogène sans pour autant que cela débouche sur la localisation de cette déformation. Les critères linéaires de localisation sont de plus comparés, quand cela est possible , aux critères non linéaires exacts et aux résultats expérimentaux actuellement disponibles .

2- Equations fondamentales.

Nous considérons le problème du glissement simple, issu de la modélisation d'une expérience de torsion d'un tube mince entaillé . Soit une tranche de matériau , d'épaisseur constante h dans la direction \tilde{y} , s'étendant à l'infini dans les directions \tilde{x} et \tilde{z} . On suppose que tous les déplacements sont nuls dans les directions \tilde{y} et \tilde{z} , et que toutes les dérivées partielles par rapport à \tilde{x} et \tilde{z} sont nulles . La vitesse \tilde{v} dans la direction \tilde{x} est en général une fonction de \tilde{y} et du temps $t\tilde{t}$, et elle peut être soumise aux conditions à la frontière :

$$\tilde{v}(0, \tilde{t}) = 0 \quad , \quad \tilde{v}(h, \tilde{t}) = V \quad , \quad \tilde{t} \geq 0 \quad (2-1)$$

où V est la vitesse constante du bord supérieur de la tranche de matériau considérée (figure 1). De manière alternative nous considèrerons les conditions de contrainte imposée à la frontière :

$$\tilde{\tau}(0, t\tilde{t}) = \tilde{\tau}(h, \tilde{t}) = \tau_0 \quad , \quad \tilde{t} \geq 0 \quad (2-2)$$

$\tilde{\tau}$ désigne la contrainte de cisaillement et τ_0 la contrainte constante appliquée aux frontières . Les conditions à la limite thermiques sont supposées adiabatiques :

$$\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{y}}(0, \tilde{t}) = \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{y}}(h, \tilde{t}) = 0 \quad , \quad \tilde{t} \geq 0 \quad (2-3)$$

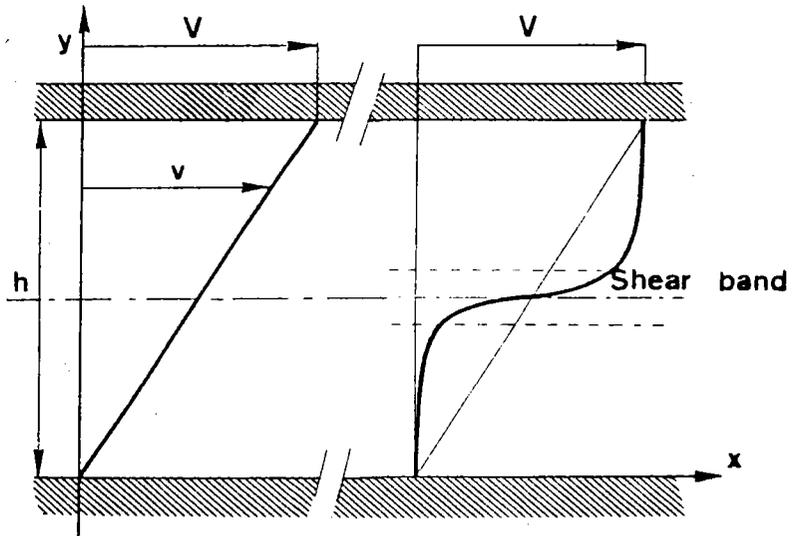


Figure 1: Cinématique du glissement simple et de la formation des bandes de cisaillement.

$\tilde{\theta}$ désigne la température . La déformation élastique est négligée , et l'on utilise une loi de comportement thermo-viscoplastique de la forme :

$$\tilde{\tau} = \mu \tilde{\theta}^{\nu} \dot{\tilde{\gamma}}^m \gamma^n \quad (2-4)$$

où γ et $\dot{\tilde{\gamma}}$ représentent le glissement et la vitesse de glissement ; μ , ν , n et m sont des coefficients empiriques caractérisant respectivement la viscosité , la sensibilité à la température (l'adoucissement thermique si ν est négatif) , l'écrouissage et la sensibilité à la vitesse de déformation. μ, n et m sont supposés positifs . Le matériau est de plus supposé incompressible , de masse volumique ρ . Les équations fondamentales du problème sont , avec la loi de comportement (2-4) , l'équation dynamique :

$$\rho \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial y} \quad (2-5)$$

les équations de compatibilité cinématique :

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \dot{\tilde{\gamma}} = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \quad (2-6)$$

et l'équation de l'énergie :

$$C \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial t} = K \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial y^2} + \beta \tilde{\tau} \dot{\tilde{\gamma}} \quad (2-7)$$

C, K et β sont respectivement la chaleur spécifique volumique , le coefficient de conduction thermique et la fraction du travail de déformation plastique convertie en chaleur , appelée aussi : coefficient de TAYLOR-QUINNEY . Tous ces paramètres sont considérés comme constants au cours de cette étude. Si les variables adimensionnelles suivantes :

$$\begin{aligned} t &= \tilde{\gamma}_0 \bar{t} & , & \dot{\gamma} = \dot{\tilde{\gamma}} / \tilde{\gamma}_0 \\ y &= \tilde{y} / h & , & v = \tilde{v} / V \\ \theta &= \tilde{\theta} / \tilde{\theta}_0 & , & \tau = \tilde{\tau} / \tilde{\tau}_0 \end{aligned} \quad (2-8)$$

sont introduites, où $\bar{\theta}_0$ et $\bar{\dot{\gamma}}_0$ sont respectivement les valeurs initiales homogènes de la température et de la vitesse de déformation, reliées à $\bar{\tau}_0$, V et h par :

$$\bar{\tau}_0 = \mu \bar{\theta}_0^{\nu} \bar{\dot{\gamma}}_0^m, \quad \bar{\dot{\gamma}}_0 = V/h \quad (2-9)$$

alors, après avoir éliminé v et τ , les équations fondamentales se réduisent au système d'équations aux dérivées partielles non linéaires suivant:

$$\frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\theta^{\nu} \dot{\gamma}^m \gamma^n) \quad (2-10)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \dot{\gamma} \quad (2-11)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = k \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \alpha \theta^{\nu} \dot{\gamma}^{m+1} \gamma^n \quad (2-12)$$

Les constantes ρ_0 , k et α sont des paramètres sans dimension. ρ_0 est significatif des effets d'inertie:

$$\rho_0 = \rho V^2 / \bar{\tau}_0 \quad (2-13)$$

k est le paramètre d'adiabaticité de la déformation :

$$k = K / Ch^2 \bar{\dot{\gamma}}_0 \quad (2-14)$$

α contrôle la production thermique de la déformation plastique:

$$\alpha = \beta \bar{\tau}_0 / C \bar{\theta}_0 \quad (2-15)$$

Nous pouvons en outre définir le temps caractéristique t_c de l'adiabaticité de la déformation, appelé aussi temps de relaxation thermique : $t_c = 1/k$.

Les conditions à la limite réduites sont, en vitesses :

$$v(0,t) = 0, \quad v(1,t) = 1, \quad t \geq 0 \quad (2-16)$$

ou en contraintes :

$$\tau(0,t) = \tau(1,t) = 1, \quad t \geq 0 \quad (2-17)$$

et les conditions à la limite thermiques deviennent :

$$\frac{\partial \theta(0,t)}{\partial y} = \frac{\partial \theta(1,t)}{\partial y} = 0 \quad , \quad t \geq 0 \quad (2-18)$$

Pour les conditions initiales homogènes suivantes:

$$\gamma(y,0) = 0 \quad , \quad \dot{\gamma}(y,0) = 1 \quad , \quad \theta(y,0) = 1 \quad , \quad 0 \leq y \leq 1 \quad (2-19)$$

et sous les conditions aux limites en vitesses (2-16) , les équations (2-10,2-12) admettent une solution homogène exacte : nous obtenons pour $\nu \neq 1$:

$$\dot{\gamma}_0(t) = 1 \quad , \quad \gamma_0(t) = t \quad , \quad \theta_0(t) = (1 + \alpha \frac{1-\nu}{1+n} \gamma_0^{1+n})^{1/(1-\nu)} \quad (2-20)$$

Le lecteur aura noté que le comportement de cette solution homogène dépend beaucoup du coefficient ν de sensibilité de la contrainte d'écoulement à la température : lorsque $\nu < 1$ la température et la déformation tendent vers l'infini en un temps infini . Dans le cas contraire : $\nu > 1$, la température tend vers l'infini en un temps et une déformation finis donnés par :

$$\gamma_{0c} = \frac{(1+n)}{1-\nu}^{1/(n+1)}$$

Nous supposons $\nu < 1$ dans la suite de cette étude .

Pour les conditions aux limites en contraintes (2-17) , nous n'obtenons qu'une solution approchée, valable dans le domaine quasi-statique ($\rho_0=0$):

$$t = \int_0^{\gamma_0} u^{n/m} (1+\alpha u)^{\nu/m} du \quad , \quad \dot{\gamma}_0 = \gamma_0^{-n/m} (1+\alpha \gamma_0)^{-\nu/m} \quad , \quad \theta_0 = 1 + \alpha \gamma_0 \quad (2-21)$$

Le comportement de cette solution dépend de la quantité $\nu+n+m$; en effet si : $\nu+n+m > 0$, la température et la déformation tendent vers l'infini en un temps infini . Dans le cas contraire : $\nu+n+m < 0$, température et déformation deviennent infinis en un temps t_h fini donné par :

$$t_h = \int_0^{\infty} u^{n/m} (1+\alpha u)^{\nu/m} du \quad (2-22)$$

Le cas particulier d'un matériau dépourvu d'écrouissage ($n=0$) conduit à des expressions plus simples :

$$\theta_0(t) = (1 + \frac{\nu+m}{m} \alpha t)^{m/\nu+m}, \quad \dot{\gamma}_0(t) = \theta_0^{-\nu/m}(t), \quad \gamma_0(t) = \frac{\theta_0(t) - 1}{\alpha} \quad (2-23)$$

le temps critique t_h devenant quant à lui , pour $\nu+m < 0$:

$$t_h = - m/(\nu+m) , \quad (2-24)$$

Une propriété essentielle des déformations plastiques homogènes (2-20,2-21,2-23) ainsi déterminées est leur caractère instationnaire ; en effet cet aspect complique singulièrement l'étude de leur stabilité . S'il est relativement facile de calculer des solutions homogènes exactes des équations fondamentales (2-10 ,2-12) , il n'en va pas de même pour d'éventuelles solutions exactes non homogènes ; d'une manière classique , on est ainsi conduit à rechercher en premier lieu des résultats approchés , au moyen de méthodes de perturbations linéaires.

3-Méthodes de perturbation linéaires classiques.

La stabilité de la solution homogène $(\dot{\gamma}_0, \gamma_0, \theta_0)$ peut être testée en recherchant l'existence et l'évolution de solutions non homogènes de la forme:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(y,t) &= \dot{\gamma}_0(t) + \delta\dot{\gamma}(t) \exp(i\xi y) \\ \gamma(y,t) &= \gamma_0(t) + \delta\gamma(t) \exp(i\xi y) \\ \theta(y,t) &= \theta_0(t) + \delta\theta(t) \exp(i\xi y) \end{aligned} \quad (3-1)$$

où : $(\delta\dot{\gamma}, \delta\gamma, \delta\theta)$ représentent l'amplitude de la perturbation, supposée petite devant la solution homogène . Pour cette raison , la perturbation non homogène peut être limitée au premier terme de son développement de FOURIER , de longueur d'onde ξ . Cette méthode est d'un usage classique lorsque la solution perturbée est stationnaire ; cependant , elle a aussi été utilisée dans le cas instationnaire : CLIFTON(1978) , BAI (1982); il est alors supposé que la perturbation varie beaucoup plus vite que la déformation homogène , qui est ainsi considérée comme quasi-

stationnaire . Cette hypothèse peut être mise en défaut lorsque le matériau est sensible à la vitesse de déformation , ou lorsque les effets d'inertie sont significatifs (FRESENGEAS-MOLINARI (1985) et chapitre 2) ; elle n'est pas nécessaire dans la suite de cette étude .

La substitution des développements (3-1) dans les équations (2-10,2-12) , et la sélection des termes du premier ordre en $(\delta\dot{\gamma}, \delta\gamma, \delta\theta)$ conduit à un système d'équations différentielles ordinaires

$$\frac{dX}{dt} = A(t).X$$

dont les coefficients dépendent du temps :

$$\frac{d}{dt} \delta\dot{\gamma} = -\frac{\xi^2}{\rho_0} \tau_0 \left(m \frac{\delta\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_0} + n \frac{\delta\gamma}{\dot{\gamma}_0} + \nu \frac{\delta\theta}{\theta_0} \right) \quad (3-2)$$

$$\frac{d}{dt} \delta\gamma = \delta\dot{\gamma} \quad (3-3)$$

$$\frac{d}{dt} \delta\theta = \dot{\theta}_0 \left((m+1) \frac{\delta\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_0} + n \frac{\delta\gamma}{\dot{\gamma}_0} + \nu \frac{\delta\theta}{\theta_0} \right) - k\xi^2 \delta\theta \quad (3-4)$$

τ_0 désigne la contrainte de cisaillement homogène . Comme cela été indiqué par CLIFTON et al.(1983) , la matrice $A(t)$ possède des propriétés qui rendent possible la détermination du comportement asymptotique des solutions $X(t)$ lorsque $t \rightarrow \infty$, si les caractéristiques mécaniques du matériau remplissent certaines conditions , par ailleurs suffisamment larges pour inclure nombre de situations physiques intéressantes . Cette étude est réalisée au moyen d'un théorème dû à CODDINGTON-LEVINSON (1955) , que nous rappelons en Annexe avec ses conditions d'application. Il ressort de ce résultat que la stabilité linéaire de la déformation homogène instationnaire est gouvernée par le comportement asymptotique des valeurs propres η_k de la partie non intégrable de $A(t)$; plus précisément , si :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \operatorname{Re}(\eta_k(\tau)) d\tau = -\infty \quad \forall k \quad (3-5)$$

la stabilité linéaire asymptotique de la déformation homogène est assurée. Par l'expression "stabilité linéaire", nous entendons que ce résultat n'est fondé que lorsque l'inhomogénéité initiale est assez petite pour qu'une théorie linéarisée demeure consistante.

Le lecteur pourra se reporter à la Table II, au cours des développements qui vont suivre, et y trouver une présentation synthétique de l'ensemble des résultats obtenus dans cette section et dans la suivante. Cette table est discutée de manière plus approfondie dans la Section 5.

Nous poursuivons la discussion en supposant la déformation quasi-statique ($\rho_0=0$), de manière à obtenir des résultats explicites ; le cas dynamique sera également envisagé dans la Section 4. Dans cette hypothèse, le système différentiel (3-2,3-4) se réduit à :

$$\frac{d}{dt} \delta\gamma = -\dot{\gamma}_0 \left(\frac{n}{m} \frac{\delta\gamma}{\gamma_0} + \frac{\nu}{m} \frac{\delta\theta}{\theta_0} \right) \quad (3-6)$$

$$\frac{d}{dt} \delta\theta = -\dot{\theta}_0 \left(\frac{n}{m} \frac{\delta\gamma}{\gamma_0} + \frac{\nu}{m} \frac{\delta\theta}{\theta_0} \right) - k\xi^2 \delta\theta \quad (3-7)$$

Supposons tout d'abord que l'on impose les conditions aux limites en vitesse (2-16). On peut se rendre compte en utilisant la solution homogène (2-20) ou la Table I que si :

$$-1 < n < 1-2\nu \quad \text{et} \quad \nu < 1 \quad (3-8)$$

les termes non constants de la matrice $A(t)$: $\dot{\gamma}_0/\gamma_0$, $\dot{\theta}_0/\theta_0$, $\dot{\theta}_0/\theta_0$ et $\dot{\theta}_0/\theta_0$ tendent vers zéro lorsque $t \rightarrow \infty$. Par suite, la matrice $A(t)$ tend vers la matrice constante A_∞ :

$$A_\infty = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -k\xi^2 \end{vmatrix} \quad (3-9)$$

En outre, ni $\dot{\gamma}_0/\gamma_0$ ni $\dot{\theta}_0/\theta_0$ ne sont intégrables, alors que l'intégrabilité de $\dot{\theta}_0/\gamma_0$ et de $\dot{\gamma}_0/\theta_0$ dépend du signe de la quantité $\nu+n$:

$\dot{\theta}_0/\gamma_0$ et $\dot{\gamma}_0/\theta_0$ sont intégrables si $\nu+n < 0$, et non intégrables dans le cas contraire. Supposons d'abord:

$$\nu + n > 0 \quad (3-10)$$

Dans ce cas aucun terme de la matrice $A(t)$ n'est intégrable, et l'équation caractéristique du système (3-6,-3-7): $\det(A - \eta I) = 0$ est de la forme :

$$\eta^2 + \left(\frac{\nu}{m} \frac{\dot{\theta}_0}{\theta_0} + \frac{n}{m} \frac{\dot{\gamma}_0}{\gamma_0} + k\xi^2 \right) \eta + \frac{\nu}{m} \frac{\dot{\gamma}_0}{\gamma_0} k\xi^2 = 0 \quad (3-11)$$

Les racines η_1 et η_2 de cette équation du second degré ont pour comportement asymptotique :

$$\eta_1 \sim -k\xi^2, \quad \eta_2 \sim -\frac{n}{m} \frac{\dot{\gamma}_0}{\gamma_0}, \quad t \rightarrow \infty \quad (3-12)$$

η_1 et η_2 sont négatives à l'infini et non intégrables. Il en résulte que la condition (3-5) est satisfaite ; nous concluons donc à la stabilité linéaire asymptotique de la déformation plastique homogène. Lorsque le coefficient d'adiabaticité est nul (matériau non conducteur de la chaleur), les solutions de l'équation (3-11) sont:

$$\eta_1 = 0, \quad \eta_2 = - \left(\frac{\nu}{m} \frac{\dot{\theta}_0}{\theta_0} + \frac{n}{m} \frac{\dot{\gamma}_0}{\gamma_0} \right) \quad (3-13)$$

ce qui entraîne :

$$\eta_2 \sim -\frac{\nu+n}{m(1-\nu)} \frac{\dot{\gamma}_0}{\gamma_0}, \quad t \rightarrow \infty \quad (3-14)$$

L'équivalence (3-14) montre que η_2 est négative à l'infini et non intégrable ; nous concluons à la stabilité linéaire de la déformation plastique homogène. La stabilité n'est pas asymptotique, car la valeur

propre η_1 est égale à zéro .

A l'opposé de (3-10) nous supposons maintenant :

$$\nu + n < 0 \quad (3-15)$$

Cela implique notamment que le matériau soit thermo-adoucissant ($\nu < 0$). La sélection des termes non intégrables de la matrice $A(t)$ conduit à l'équation caractéristique réduite :

$$\left(\eta + \frac{n}{m} \frac{\dot{\gamma}_0}{\dot{\gamma}_0}\right) \left(\eta + \frac{\nu}{m} \frac{\dot{\theta}_0}{\dot{\theta}_0} + k\xi^2\right) = 0 \quad (3-16)$$

Lorsque le matériau est conducteur de la chaleur ($k \neq 0$) , les solutions (η_1, η_2) de l'équation (3-16) sont telles que :

$$\eta_1 = -\frac{n}{m} \frac{\dot{\gamma}_0}{\dot{\gamma}_0} \quad , \quad \eta_2 \sim -k\xi^2 \quad , \quad t \rightarrow \infty \quad (3-17)$$

Ces racines sont négatives à l'infini et non intégrables . Par suite , nous pouvons conclure à la stabilité linéaire asymptotique de la déformation plastique homogène . Si le matériau est non conducteur , les racines de l'équation (3-16) sont :

$$\eta_1 = -\frac{n}{m} \frac{\dot{\gamma}_0}{\dot{\gamma}_0} \quad , \quad \eta_2 = -\frac{\nu}{m} \frac{\dot{\theta}_0}{\dot{\theta}_0} \quad (3-18)$$

On remarque que η_2 est positive et non intégrable ; par conséquent la déformation plastique homogène est instable . Ce résultat d'instabilité est valable quelle que soit la taille des défauts initiaux ; il n'est pas astreint comme les résultats de stabilité linéaire à une condition de validité relative à la taille des défauts . La différence entre les équivalences (3-17) et (3-18) illustre le rôle joué par l'adiabaticité de la déformation dans le processus conduisant à la stabilité asymptotique: pour $\nu+n < 0$, on montre à partir de la solution (2-20) que la contrainte homogène τ_0 passe par un maximum , puis tend vers zéro

lorsque γ_0 tend vers l'infini. Dès lors, une perturbation d'un état homogène arbitraire va croissant le long de la branche descendante de cette courbe, si k n'est pas trop grand. La racine η_2 est alors positive; cependant la tendance à l'instabilité s'affaiblit lorsque le plateau final de la courbe est atteint. La conduction thermique peut alors en venir à bout, et ainsi amortir la perturbation à l'infini où η_2 devient négatif. Cependant ce schéma explicatif peut nécessiter de grandes valeurs de k , ou de faibles valeurs du défaut initial; des indications numériques plus précises seront fournies dans la section 5.

Nous considérons maintenant une déformation quasi-statique sous contrainte imposée. Il suffit d'examiner la solution homogène approchée (2-21) pour se persuader que la fonction $\gamma_0(t)$ n'est pas d'un emploi commode; aussi préférons nous utiliser la déformation homogène γ_0 plutôt que le temps t pour définir une chronologie du processus. Dans ce changement de variable, les équations différentielles (3-6,3-7) deviennent :

$$\frac{dX}{d\gamma_0} = A(\gamma_0) \cdot X$$

soit:

$$\frac{d}{d\gamma_0} \delta\gamma = - \left(\frac{n}{\bar{m}} \frac{\delta\gamma}{\gamma_0} + \frac{\nu}{\bar{m}} \frac{\delta\theta}{\theta_0} \right) \quad (3-19)$$

$$\frac{d}{d\gamma_0} \delta\theta = - \alpha \left(\frac{n}{\bar{m}} \frac{\delta\gamma}{\gamma_0} + \frac{\nu}{\bar{m}} \frac{\delta\theta}{\theta_0} \right) - \frac{k\xi^2 \delta\theta}{\dot{\gamma}_0} \quad (3-20)$$

L'examen de (2-21) ou de la Table I montre que les termes $1/\gamma_0$ et $1/\theta_0$ tendent vers zéro lorsque γ_0 tend vers l'infini. Le comportement à l'infini de $1/\dot{\gamma}_0$ dépend quant à lui de $\nu+n$: $1/\dot{\gamma}_0$ tend vers zéro lorsque cette quantité est négative, mais tend vers l'infini dans le cas contraire. Ainsi, si $\nu+n > 0$, le théorème de CODDINGTON -LEVINSON ne peut être appliqué à un matériau conducteur de la chaleur, car l'un des termes de la matrice $A(\gamma_0)$: $-k\xi^2/\dot{\gamma}_0$ devient alors infini.

Cependant , l'influence de la conduction devenant infinie , nous pouvons conjecturer que cela conduit à la stabilité linéaire asymptotique de la déformation plastique . Le cas d'un matériau non conducteur sera traité un peu plus loin , et nous supposons maintenant $\nu+n<0$. Il est clair que les termes $1/\gamma_0$ et $1/\theta_0$ ne sont pas intégrables , alors que l'intégrabilité de $1/\dot{\gamma}_0$ dépend de la quantité $\nu+n+m$: $1/\dot{\gamma}_0$ est intégrable si $\nu+n+m<0$, et non intégrable dans le cas contraire .

Supposons :

$$\nu + n + m < 0 \quad (3-21)$$

L'équation caractéristique : $\det(A_\infty + V - \eta I) = 0$ de la partie non intégrable de $A(\gamma_0)$ (voir en annexe la définition de V) se réduit alors à :

$$\eta \left(\eta + \frac{n}{m} \frac{1}{\dot{\gamma}_0} + \alpha \frac{\nu}{m} \frac{1}{\theta_0} \right) = 0 \quad (3-22)$$

On peut vérifier que les racines η_1, η_2 de (3-22) sont:

$$\eta_1 = 0 \quad , \quad \eta_2 = - \left(\frac{n}{m} \frac{1}{\dot{\gamma}_0} + \alpha \frac{\nu}{m} \frac{1}{\theta_0} \right) \quad (3-23)$$

et que :

$$\eta_2 \sim -\frac{\nu+n}{m} \frac{1}{\dot{\gamma}_0} \quad , \quad \gamma_0 \rightarrow \infty \quad (3-24)$$

La valeur propre η_2 est positive et non intégrable ; nous pouvons donc conclure à l'instabilité de la déformation plastique homogène lorsque l'inégalité (3-21) est vérifiée , et cela quelle que soit la valeur du coefficient d'adiabaticité k . A l'opposé de (3-21) , nous supposons maintenant :

$$\nu + n < 0 \quad , \quad \nu + n + m > 0 \quad (3-25)$$

L'équation caractéristique de la partie non intégrable de $A(\gamma_0)$ est :

$$\eta^2 + \eta \left(\frac{n}{m} \frac{1}{\dot{\gamma}_0} + \alpha \frac{\nu}{m} \frac{1}{\dot{\theta}_0} + \frac{k\xi^2}{\dot{\gamma}_0 \dot{\gamma}_0} \right) + \frac{n}{m} \frac{k\xi^2}{\dot{\gamma}_0 \dot{\gamma}_0} = 0 \quad (3-26)$$

Les racines η_1, η_2 de l'équation (3-26) sont telles que :

$$\eta_1 \sim - \frac{k\xi^2}{\dot{\gamma}_0} , \quad \eta_2 \sim - \frac{n}{m} \frac{1}{\dot{\gamma}_0} , \quad \gamma_0 \rightarrow \infty \quad (3-27)$$

Toutes deux sont non intégrables et négatives à l'infini ; on en déduit la stabilité linéaire asymptotique de la déformation plastique homogène. Comme pour les conditions aux limites en vitesses , la stabilité asymptotique est due aux effets de conduction thermique . Lorsque celle-ci est nulle , l'équation caractéristique de la partie non intégrable de $A(\gamma_0)$ n'est autre que l'équation (3-22) , dont les solutions et leur comportement asymptotique sont données par (3-23), (3-24). Ainsi les conclusions dépendent elles dans ce cas du signe de la quantité $\nu+n$: pour $k=0$ et $\nu+n > 0$, nous concluons à la stabilité linéaire de la déformation plastique homogène . La stabilité est non asymptotique car la racine η_1 est nulle . Pour $k=0$ et $\nu+n < 0$ la déformation plastique homogène est instable .

Les critères d'instabilité linéaires établis ci-dessus dépendent donc des conditions aux limites et de l'adiabaticité de la déformation .

L'inégalité:

$$\nu + n < 0 \quad (3-28)$$

apparaît ainsi comme un critère d'instabilité des matériaux non conducteurs soumis à un glissement simple à vitesse ou contrainte imposée . Le lecteur aura noté que , selon cette inégalité , la sensibilité à la vitesse de déformation est sans incidence sur

l'existence d'une instabilité ; cela n'exclut pas qu'elle ait une influence sur sa vitesse de développement . Nous avons d'autre part montré , pour un matériau conducteur , la stabilité linéaire asymptotique du glissement simple à vitesse imposée . Le critère d'instabilité linéaire prend la forme :

$$\nu + n + m < 0 \quad (3-29)$$

pour les matériaux conducteurs sous contrainte imposée. Ainsi la sollicitation de glissement simple apparaît-elle plus instable à contrainte imposée qu'à vitesse imposée; la conduction thermique joue quant à elle un rôle stabilisateur à long terme. Insistons sur le fait qu'il s'agit là de résultats de stabilité linéaire, qui ne sont fondés que si les défauts initiaux sont suffisamment petits. Le cas où la taille des défauts est plus grande sera examiné dans la section 5 grâce à l'intégration numérique des équations fondamentales (2-10,2-12) .

Dans l'étude présentée ci-dessus nous nous sommes intéressés à l'instabilité de la déformation plastique homogène : cela signifie que l'on examine l'évolution de la mesure absolue $(\delta\dot{\gamma}, \delta\gamma, \delta\theta)$ d'une perturbation inhomogène . Les résultats obtenus sont significatifs de l'instabilité de la déformation , mais non en général de sa localisation. En effet l'accroissement de la mesure absolue d'une perturbation peut ne pas conduire à la localisation , si la déformation homogène a elle-même une croissance plus rapide que la perturbation , de sorte que le défaut relatif $(\delta\dot{\gamma}/\dot{\gamma}_0, \delta\gamma/\gamma_0, \delta\theta/\theta_0)$ soit en fait décroissant . C'est la croissance du défaut relatif qui fournit un indice pertinent de la localisation de la déformation plastique instationnaire : MOLINARI-CLIFTON (1983), MOLINARI (1984,1985). Ainsi , le critère

d'instabilité du glissement simple quasi-statique homogène sous contrainte imposée d'un matériau non conducteur : $\nu+n<0$ est-il différent du critère de localisation non linéaire exact fourni par MOLINARI-CLIFTON (1983) dans les mêmes conditions: $\nu+n+m<0$. Dans la section suivante , notre objectif est de développer ce point de vue au moyen de la méthode de perturbations relatives.

4-Méthode de perturbations relatives.

Nous définissons les nouvelles variables (λ, φ, ψ) , appelées "variables relatives" , obtenues en normant les $(\dot{\gamma}, \gamma, \theta)$ par une solution homogène $(\dot{\gamma}_0, \gamma_0, \theta_0)$ des équations fondamentales (2-10,2-12)

$$\lambda = \dot{\gamma}/\dot{\gamma}_0 \quad , \quad \psi = \gamma/\gamma_0 \quad , \quad \varphi = \theta/\theta_0 \quad (4-1)$$

La substitution des variables relatives dans les équations (2-10,2-12) conduit à un nouveau système d'équations aux dérivées partielles non linéaires:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0 \dot{\gamma}_0} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\varphi \lambda^{\nu} \psi^m \psi^n) \quad (4-2)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\dot{\gamma}_0}{\dot{\gamma}_0} (\lambda - \psi) \quad (4-3)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\dot{\theta}_0}{\theta_0} (\varphi \lambda^{\nu} \psi^{m+1} \psi^n - \varphi) \quad (4-4)$$

Ce système admet naturellement la solution homogène stationnaire:

$$\lambda_0 = 1 \quad , \quad \psi_0 = 1 \quad , \quad \varphi_0 = 1 \quad (4-5)$$

Nous dirons qu'il y a localisation de la déformation plastique lorsque la solution homogène relative (4-5) est instable , et non localisation linéaire dans le cas contraire . Nous voulons maintenant tester la stabilité de cette solution homogène en étudiant l'évolution d'une solution inhomogène de la forme :

$$\begin{aligned}
 \lambda(y,t) &= 1 + \delta\lambda(t) \exp(i\xi y) \\
 \psi(y,t) &= 1 + \delta\psi(t) \exp(i\xi y) \\
 \varphi(y,t) &= 1 + \delta\varphi(t) \exp(i\xi y)
 \end{aligned}
 \tag{4-6}$$

$(\delta\lambda, \delta\psi, \delta\varphi)$ représente la mesure d'une perturbation relative inhomogène, dont on suppose qu'elle est suffisamment petite devant 1 pour que l'on puisse se contenter de l'approximation linéaire, et limiter son développement de FOURIER au terme du premier ordre, de longueur d'onde ξ . On notera que le problème de localisation ainsi formulé est plus classique que le problème de stabilité (3-1) dans la mesure où la solution perturbée est maintenant stationnaire. La substitution de la solution (4-6) dans les équations aux dérivées partielles (4-2,4-4) conduit à un nouveau système d'équations différentielles linéaires, dont les coefficients dépendent du temps:

$$\frac{dX}{dt} = B(t).X$$

soit:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \delta\lambda &= \frac{-\xi^2 \Gamma_0}{\rho_0 \gamma_0} (m \delta\lambda + n \delta\psi + \nu \delta\varphi) \\
 \frac{d}{dt} \delta\psi &= \frac{\dot{\gamma}_0}{\gamma_0} (\delta\lambda - \delta\psi) \\
 \frac{d}{dt} \delta\varphi &= -k \xi^2 \delta\varphi + \frac{\dot{\theta}_0}{\theta_0} ((m+1) \delta\lambda + n \delta\psi + (\nu-1) \delta\varphi)
 \end{aligned}
 \tag{4-7}$$

Nous envisageons dans la suite de cette étude deux situations physiques différentes : nous supposons d'abord les effets d'inertie négligeables ($\rho_0=0$), afin de comparer les résultats de l'analyse de localisation et les résultats obtenus ci-dessus lors de l'analyse de stabilité. Puis nous étudions le problème dynamique ($\rho_0 \neq 0$), sans toutefois inclure les effets d'érouissage ($n=0$), de manière à obtenir des résultats explicites simples.

Approximation quasi-statique

Lorsque ρ_0 est nul, les équations (4-7) se réduisent simplement au système suivant :

$$\frac{d}{dt} \delta\psi = - \frac{\dot{\gamma}_0}{\gamma_0} \left(\frac{n+m}{m} \delta\psi + \frac{\nu}{m} \delta\varphi \right) \quad (4-8)$$

$$\frac{d}{dt} \delta\varphi = - k\xi^2 \delta\varphi - \frac{\dot{\theta}_0}{\theta_0} \left(\frac{n}{m} \delta\psi + \frac{\nu+m}{m} \delta\varphi \right) \quad (4-9)$$

Les conclusions sur la localisation de la déformation vont dépendre des conditions aux limites. Considérons tout d'abord les conditions en vitesse (2-16); rappelons que, si ν et n vérifient les inéquations (3-8), $\dot{\gamma}_0/\gamma_0$ et $\dot{\theta}_0/\theta_0$ tendent vers zéro lorsque $t \rightarrow \infty$, mais ne sont pas intégrables. Par suite tous les termes non constants de la matrice $B(t)$ tendent vers zéro, et $B(t)$ tend vers la matrice A_∞ . En outre, le déterminant caractéristique de la partie non intégrable de $B(t)$ se confond avec le déterminant de $B(t)$:

$$\eta^2 + \eta \left(\frac{n+m}{m} \frac{\dot{\gamma}_0}{\gamma_0} + \frac{\nu+m}{m} \frac{\dot{\theta}_0}{\theta_0} + k\xi^2 \right) + \frac{\dot{\gamma}_0}{\gamma_0} \left(\frac{\nu+n+m}{m} \frac{\dot{\theta}_0}{\theta_0} + \frac{n+m}{m} k\xi^2 \right) = 0 \quad (4-10)$$

Supposons d'abord :

$$\nu + n + m > 0 \quad (4-11)$$

On vérifie que les valeurs propres η_1, η_2 , sont telles que :

$$\eta_1 \sim -k \xi^2, \quad \eta_2 \sim - \frac{n+m}{m} \frac{\dot{\gamma}_0}{\gamma_0}, \quad t \rightarrow \infty \quad (4-12)$$

Toutes deux sont négatives à l'infini et non intégrables; on peut conclure, d'après le théorème de CODDINGTON-LEVINSON, à la stabilité linéaire asymptotique de la solution homogène relative, c'est-à-dire à la non localisation linéaire de la déformation plastique. Lorsque la conduction thermique est nulle ($k=0$), nous obtenons :

$$\eta_1 \sim -\frac{(\nu+n+m(n+2-\nu))}{m(1-\nu)} \frac{\dot{\gamma}_0}{\gamma_0}, \quad \eta_2 \sim -\frac{(\nu+n+m)(1-\nu)}{\nu+n+m(n+2-\nu)} \frac{\dot{\theta}_0}{\theta_0} \quad (4-13)$$

Les équivalences (4-13) montrent que les valeurs propres η_1, η_2 sont négatives à l'infini et non intégrables. On peut conclure à la stabilité linéaire asymptotique de la solution homogène relative, c'est-à-dire à la non localisation linéaire de la déformation plastique.

A l'opposé de (4-11) supposons:

$$\nu + n + m < 0 \quad (4-14)$$

Si le matériau est non conducteur ($k=0$), le produit des racines de l'équation (4-10) :

$$P = \frac{\dot{\gamma}_0}{\gamma_0} \frac{\nu+n+m}{m} \frac{\dot{\theta}_0}{\theta_0}$$

est négatif. L'une des valeurs propres est donc positive ; les développements (4-13) montrent en outre que ces valeurs propres ne sont pas intégrables. Par suite nous pouvons conclure à l'instabilité de la solution homogène relative, c'est-à-dire à la localisation de la déformation plastique. Au contraire, pour un matériau conducteur ($k \neq 0$), nous pouvons conclure d'après les relations (4-12) à la stabilité linéaire asymptotique de la solution homogène relative, c'est-à-dire à la non localisation linéaire de la déformation plastique. L'inégalité (4-14) apparaît donc comme un critère de localisation linéaire de la déformation plastique à vitesse imposée d'un matériau non conducteur.

On notera que pour ce matériau, soumis à des conditions aux limites en vitesses, les critères d'instabilité et de localisation sont différents : ainsi, pour ($\nu+n < 0, \nu+n+m > 0$) il y a instabilité, mais non localisation linéaire de la déformation plastique. (Voir aussi Table II)

On peut illustrer simplement les conclusions différentes auxquelles peuvent aboutir les analyses de localisation linéaire et non linéaire avec l'exemple d'un matériau non écrouissable ($n=0$). En effet, il est alors possible de calculer exactement les incréments ($\delta\lambda, \delta\psi, \delta\varphi$); nous obtenons à partir des équations différentielles (4-8, 4-9):

$$\frac{d}{dt} \delta\varphi = - \left(k\xi^2 + \frac{\dot{\theta}_0}{\theta_0} \frac{\nu+m}{m} \right) \delta\varphi \quad (4-15)$$

et:

$$\delta\varphi(t) = \delta\varphi(0) \theta_0^{-\frac{(\nu+m)}{m}} \exp(-k\xi^2 t) \quad (4-16)$$

Compte-tenu de la solution homogène (2-20), il vient:

$$\delta\varphi(t) = \delta\varphi(0) (1 + \alpha(1-\nu)t)^{-\frac{(\nu+m)}{m(1-\nu)}} \exp(-k\xi^2 t) \quad (4-17)$$

Sous la condition (4-14), la perturbation relative $\delta\varphi(t)$ commence d'abord par croître jusqu'à un maximum $\delta\varphi_m$, puis tend asymptotiquement vers zéro lorsque t tend vers l'infini, en raison de l'influence stabilisante à long terme de la conduction thermique. La théorie linéarisée demeure consistante si $\delta\varphi_m$ reste assez petit, ce qui est réalisé si le défaut initial $\delta\varphi(0)$ est suffisamment faible. Dans le cas contraire les termes de degré supérieur en $(\delta\lambda, \delta\psi, \delta\varphi)$ ne peuvent plus être négligés, et ils conduisent à une réponse éventuellement très différente de la non localisation asymptotique linéaire. Les résultats de l'intégration numérique des équations fondamentales (2-10, 2-12) exposés dans la Section 5 montrent que même pour de petites valeurs de l'inhomogénéité initiale, la non linéarité peut être essentielle, et conduire à la localisation, si la valeur du coefficient d'adiabaticité n'est pas trop forte. Des exemples numériques sont fournis à cette occasion.

Nous considérons maintenant une sollicitation quasi-statique sous contrainte constante (conditions à la limite (2-17)). Comme cela a été indiqué dans la section précédente , il est dans ce cas plus commode d'utiliser la déformation homogène γ_0 pour fixer la chronologie du processus . Les équations différentielles (4-8,4-9) s'écrivent , avec cette nouvelle variable:

$$\frac{dX}{d\gamma_0} = B(\gamma_0).X$$

ou:

$$\frac{d}{d\gamma_0} \delta\psi = - \frac{1}{\gamma_0} \left(\frac{n+m}{m} \delta\psi + \frac{\nu}{m} \delta\varphi \right) \quad (4-19)$$

$$\frac{d}{d\gamma_0} \delta\varphi = - \frac{k\xi^2}{\gamma_0} \delta\varphi - \frac{\alpha}{\theta_0} \left(\frac{n}{m} \delta\psi + \frac{\nu+m}{m} \delta\varphi \right) \quad (4-20)$$

Rappelons que $1/\gamma_0$ et $1/\theta_0$ tendent vers zéro lorsque $\gamma_0 \rightarrow \infty$, et que $1/\dot{\gamma}_0$ tend vers zéro ou l'infini selon que $\nu+n$ est respectivement négatif ou positif . Comme pour l'analyse de stabilité , le théorème de CODDINGTON-LEVINSON ne peut être appliqué dans ce dernier cas si le matériau est conducteur ; en effet le terme de conduction de la matrice $B(\gamma_0)$ devient alors infini . Nous conjecturons cependant que cela conduit à la stabilité de la solution homogène relative , c'est-à-dire à la non localisation de la déformation plastique. Le cas : $\nu+n > 0, k=0$ sera discuté un peu plus loin . Nous supposons maintenant : $\nu+n < 0$; l'intégrabilité de $1/\gamma_0$, $1/\theta_0$ et $1/\dot{\gamma}_0$ a déjà été discutée ; nous avons trouvé que $1/\gamma_0$ et $1/\theta_0$ n'étaient pas intégrables, et que $1/\dot{\gamma}_0$ était ou non intégrable suivant que la quantité $\nu+n+m$ était respectivement négative ou positive .

Supposons :

$$\nu + n + m < 0 \quad (4-21)$$

L'équation caractéristique de la partie non intégrable de $B(\gamma_0)$ est:

$$\eta^2 + \eta \left(\frac{1}{\gamma_0} \frac{n+m}{m} + \frac{\alpha}{\theta_0} \frac{\nu+m}{m} \right) + \frac{\alpha}{\theta_0} \frac{1}{\gamma_0} \frac{\nu+n+m}{m} = 0 \quad (4-22)$$

Les racines η_1, η_2 de cette équation ont pour comportement asymptotique:

$$\eta_1 \sim - \frac{1}{\gamma_0}, \quad \eta_2 \sim - \frac{(\nu+n+m)}{m} \frac{1}{\gamma_0}, \quad \gamma_0 \rightarrow \infty \quad (4-23)$$

Elles ne sont pas intégrables ; de plus, η_2 est positive lorsque γ_0 tend vers l'infini. Par suite, nous concluons à l'instabilité de la solution homogène relative, c'est-à-dire à la localisation de la déformation plastique. Ce résultat est indépendant de la valeur du coefficient d'adiabaticité k . Cette conclusion peut facilement être étayée par l'intégration directe du système différentiel (4-8, 4-9) dans le cas d'un matériau sans écouissage ($n=0$); utilisant les relations (2-23, 2-24 et 4-16) nous obtenons en effet :

$$\delta\varphi(t) = \delta\varphi(0) \frac{\exp(-k\xi^2 t)}{1-t/t_h} \quad (4-24)$$

On voit que la conduction thermique provoque la décroissance initiale de la perturbation relative au travers du terme exponentiel, mais ne peut empêcher finalement sa croissance lorsque $t \rightarrow t_h$; cela signifie la localisation de la déformation plastique.

Au contraire de (4-21) nous envisageons maintenant le cas:

$$\nu + n < 0, \quad \nu + n + m > 0 \quad (4-25)$$

Les termes de la matrice $B(\gamma_0)$ sont non intégrables ; on doit donc considérer son déterminant caractéristique entier. Il s'écrit:

$$\eta^2 + \eta \left(\frac{1}{\gamma_0} \frac{n+m}{m} + \frac{\alpha}{\theta_0} \frac{\nu+m}{m} + \frac{k\xi^2}{\gamma_0} \right) + \frac{\alpha}{\theta_0} \frac{1}{\gamma_0} \frac{\nu+n+m}{m} + \frac{1}{\gamma_0} \frac{n+m}{m} \frac{k\xi^2}{\gamma_0} = 0 \quad (4-26)$$

Les racines η_1, η_2 de cette équation sont telles que :

$$\eta_1 \sim -\frac{n+m}{m} \frac{1}{\bar{\gamma}_0}, \quad \eta_2 \sim -\frac{k\xi^2}{\bar{\gamma}_0}, \quad \gamma_0 \rightarrow \infty \quad (4-27)$$

Elles sont toutes deux négatives à l'infini et non intégrables ; nous pouvons donc conclure à la stabilité linéaire asymptotique de la solution homogène relative , c'est-à-dire à la non localisation linéaire de la déformation plastique . Enfin considérons le cas où les relations (4-25) sont encore vérifiées , mais où le matériau est non conducteur . L'équation (4-26) se réduit alors à l'équation (4-22); les équivalences (4-23) montrent que les valeurs propres η_1, η_2 sont négatives à l'infini et qu'elles ne sont pas intégrables . Nous obtenons ainsi la non localisation linéaire de la déformation plastique , comme pour un matériau conducteur .

Par suite l'inégalité (4-21) apparait comme un critère de localisation linéaire de la déformation plastique quasi-statique sous contrainte imposée . Ce résultat généralise aux matériaux conducteurs de la chaleur le critère de localisation non linéaire obtenu par MOLINARI-CLIFTON (1983) pour les matériaux non conducteurs soumis au même chargement . En retour , le critère non linéaire permet de compléter le résultat de localisation linéaire : en effet il est indépendant de la taille de l'inhomogénéité initiale , de sorte qu'il en est nécessairement de même pour un matériau conducteur , précisément en raison du rôle stabilisant que joue la conduction thermique . (voir la Section 5 et la Table II)

Déformation dynamique ; matériau sans écrouissage

Nous passons maintenant à la seconde situation physique envisagée: nous supposons que les effets d'inertie soient significatifs ($\rho_0 \neq 0$), mais nous ignorons les effets stabilisants de l'écrouissage ($n=0$). Le système d'équations différentielles (4-7) se réduit dans ces conditions à :

$$\frac{dx}{dt} = C(t).X$$

ou:

$$\frac{d}{dt} \delta\lambda = - \frac{\xi^2 \tau_0}{\rho_0 \dot{\gamma}_0} (m \delta\lambda + \nu \delta\varphi) \quad (4-28)$$

$$\frac{d}{dt} \delta\varphi = - k\xi^2 \delta\varphi + \frac{\dot{\theta}_0}{\theta_0} ((m+1)\delta\lambda + (\nu-1)\delta\varphi) \quad (4-29)$$

avec $\delta\psi$ obtenu simplement par :

$$\frac{d}{dt} \delta\psi = \frac{\dot{\gamma}_0}{\gamma_0} (\delta\lambda - \delta\psi) \quad (4-30)$$

Nous limitons notre propos aux conditions aux limites en vitesse (2-16), dans la mesure où seule la solution homogène (2-20) obtenue dans ces conditions, est validée dans le domaine dynamique. Nous obtenons par conséquent pour les coefficients de la matrice $C(t)$:

$$\frac{\tau_0}{\dot{\gamma}_0} = (1 + \alpha(1-\nu)\gamma_0)^{\nu/(1-\nu)}, \quad \frac{\dot{\theta}_0}{\theta_0} = \alpha/(1 + \alpha(1-\nu)\gamma_0) \quad (4-31)$$

de sorte que, si le matériau est thermo-adoucissant ($\nu < 0$), $\tau_0/\dot{\gamma}_0$ et $\dot{\theta}_0/\theta_0$ tendent vers zéro lorsque t tend vers l'infini, et ne sont pas intégrables. La matrice $C(t)$ est donc non intégrable, et elle tend vers la matrice A_∞ (3-9) lorsque $t \rightarrow \infty$. Son déterminant caractéristique s'écrit:

$$\eta^2 + \eta(-(\nu-1)\frac{\dot{\theta}_0}{\theta_0} + m \frac{\xi^2 \tau_0}{\rho_0 \dot{\gamma}_0} + k\xi^2) + m \frac{\xi^2 \tau_0}{\rho_0 \dot{\gamma}_0} (\frac{\nu+m}{m} \frac{\dot{\theta}_0}{\theta_0} + k\xi^2) = 0 \quad (4-32)$$

Supposons d'abord :

$$\nu + m > 0 \quad (4-33)$$

Les racines de l'équation (4-21) vérifient :

$$\eta_1 \sim - m \frac{\xi^2 \tau_0}{\rho_0 \dot{\gamma}_0}, \quad \eta_2 \sim - k\xi^2, \quad t \rightarrow \infty \quad (4-34)$$

Les valeurs propres η_1, η_2 sont non intégrables et négatives à l'infini ; on conclut donc à la stabilité asymptotique de la solution homogène relative, et à la non localisation linéaire de la déformation plastique .

Si le matériau n'est pas conducteur de la chaleur , les racines η_1, η_2 ont pour comportement asymptotique :

$$\eta_1 \sim -m \frac{\xi^2 \tau_0}{\rho_0 \gamma_0} , \quad \eta_2 \sim -\frac{\nu+m}{m} \frac{\dot{\theta}_0}{\theta_0} , \quad t \rightarrow \infty \quad (4-35)$$

Comme ci-dessus elles sont négatives à l'infini et non intégrables , et on en déduit la non localisation linéaire de la déformation plastique .

A l'opposé de (4-33), supposons:

$$\nu + m < 0 \quad (4-36)$$

Lorsque le matériau est conducteur de la chaleur, les développements asymptotiques (4-34) ont cours de nouveau, et ils entraînent la même conclusion, à savoir la non localisation linéaire de la déformation plastique. Au contraire, si le matériau est non conducteur, les développements asymptotiques (4-35) conduisent à la conclusion opposée, car η_2 est maintenant positive à l'infini. Il y a donc localisation de la déformation plastique.

L'inégalité (4-36) apparait donc comme un critère de localisation linéaire des matériaux non conducteurs dépourvus d'écrouissage. En outre, on peut montrer en utilisant les méthodes décrites dans la Section 3, que le critère d'instabilité linéaire s'écrit :

$$\nu < 0 \quad (4-37)$$

dans le cas dynamique considéré ici. Il est donc différent du critère

de localisation linéaire (4-36) lorsque le matériau est sensible à la vitesse de déformation . Ces conclusions ne sont pas différentes de celles que nous avons obtenues pour une déformation quasi-statique . Les effets d'inertie ne peuvent donc pas prévenir l'instabilité ou la localisation de la déformation plastique . En revanche, ils peuvent ralentir la croissance d'une perturbation , et apporter ainsi un délai considérable dans le processus de localisation MOLINARI (1985) et FRESSENGEAS-MOLINARI(1985) dans le contexte de la traction simple .

5-Résultats non-linéaires ; discussion

Tous les résultats obtenus sont représentés sur la table II , que nous allons maintenant commenter . Cette table contient des diagrammes symboliques dans le plan Π : (taille des défauts initiaux - paramètre d'adiabaticité k); un diagramme correspond à l'une des différentes situations physiques évoquées ci-dessus , en fonction des différentes conditions à la limite , des valeurs positives ou négatives des quantités $\nu+n$ et $\nu+n+m$. Chaque diagramme est divisé , selon le cas , en zones de stabilité et d'instabilité , ou bien de localisation et de non localisation . La table permet notamment de mettre en évidence les différences entre les critères d'instabilité et de localisation linéaires .

La discussion est nourrie essentiellement par les résultats de l'intégration numérique des équations non linéaires (2-10,2-12) , qui vont permettre de dégager les rôles joués par l'adiabaticité de la déformation et la taille des défauts . Nous avons développé à cet effet un programme basé sur la méthode des différences finies , selon un schéma mixte implicite-explicite . On impose les conditions aux limites en vitesses (2-16) , et les conditions initiales sont :

$$\gamma(y,0) = 0, \dot{\gamma}(y,0) = 1, \theta(y,0) = 1 + \frac{\epsilon}{2}(1 - \cos 2\pi y), 0 \leq y \leq 1 \quad (5-1)$$

ϵ est une mesure de l'inhomogénéité initiale de la température. La première situation décrite est la sollicitation quasi-statique d'un matériau conducteur dont les paramètres mécaniques sont :

$$\mu = 2.5 \cdot 10^8 \text{ SI}, \nu = -.5, n=0, m = .01 \quad (5-2)$$

$$\rho = 7800 \text{ kg/m}^3, \beta = .9, C = 3.9 \cdot 10^6 \text{ J/m}^3\text{K}, K = 54 \text{ W/mK}$$

avec

$$\dot{\gamma}_0 = 500 \text{ s}^{-1}, \bar{\theta}_0 = 300 \text{ K}, h = 10^{-2} \text{ m}, \epsilon = 10^{-4}$$

Les paramètres adimensionnels ρ_0 et k ont alors pour valeur :

$$\rho_0 \approx .01, k \approx 6 \cdot 10^{-5} \quad (5-3)$$

La déformation est donc quasi-statique et quasi-adiabatique. La figure 2, où l'on a représenté les vitesses de déformation au centre et sur le bord de la bande en fonction de la déformation au bord, montre que la localisation de la déformation a lieu au centre de la bande. Cependant, le résultat indiqué par la théorie linéaire dans cette situation ($\rho_0 = 0, K \neq 0, \nu + m < 0$) est la non localisation linéaire. On voit donc que même pour des défauts initiaux très petits, la non linéarité peut modifier le résultat. Pourtant, il se peut qu'il y ait non localisation pour un défaut initial donné si l'adiabaticité de l'écoulement est plus faible, c'est-à-dire si k est plus grand. Les figures 3,4,5 illustrent ainsi l'influence du coefficient d'adiabaticité k ; les paramètres du matériau utilisés sont :

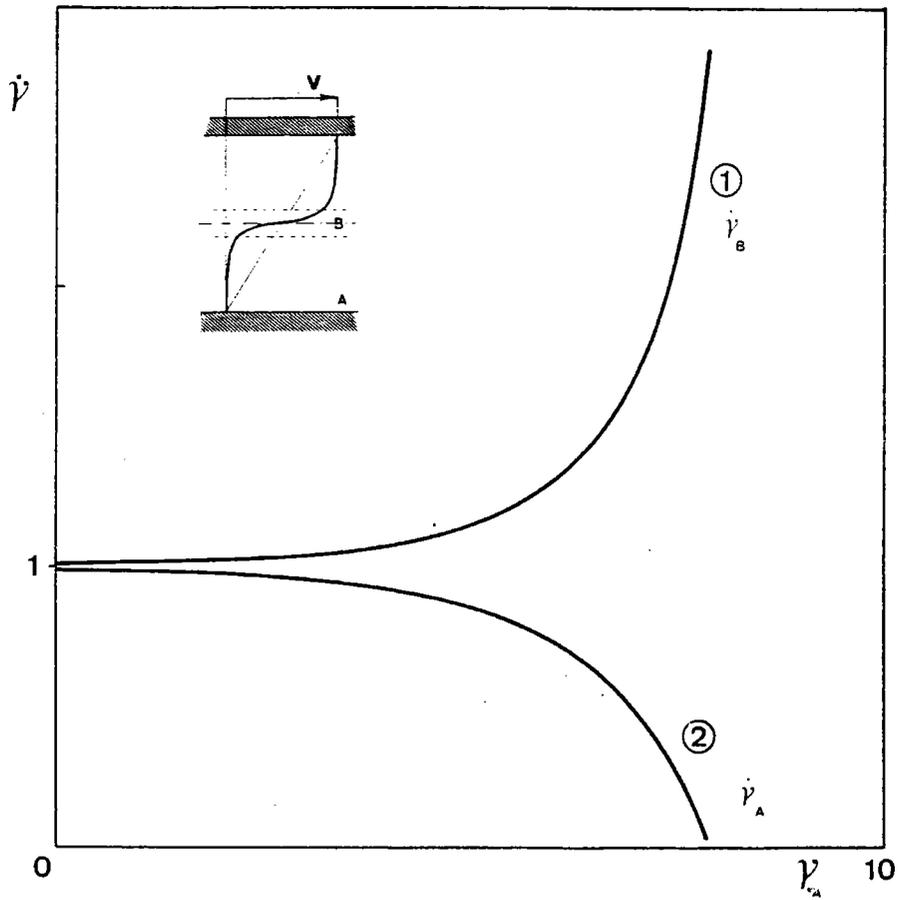


Figure 2: Test dynamique: Localisation.

(1) Vitesse de déformation $(0.5, t)$ en fonction de $\gamma(1, t)$

(2) Vitesse de déformation $(1, t)$ en fonction de $\gamma(1, t)$

$$\mu = 3.58 \cdot 10^9 \text{ SI} , \nu = -.38 , n=.015 , m = .019 \quad (5-4)$$

$$\rho = 7800 \text{ kg/m}^3 , \beta = .9 , C = 3.9 \cdot 10^6 \text{ J/m}^3\text{K} , K = 54 \text{ W/mK}$$

avec:

$$h = 10^{-2} \text{ m} , \bar{\theta}_0 = 300 \text{ K} , \epsilon = 5 \cdot 10^{-3}$$

Plusieurs calculs sont effectués en faisant varier la vitesse homogène initiale , et en conservant la même valeur du défaut ϵ . $\dot{\gamma}_0$ et k évoluent conjointement entre les bornes :

$$0.5 \text{ s}^{-1} \leq \dot{\gamma}_0 \leq 5 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$$

$$2.76 \cdot 10^{-1} \leq k \leq 2.76 \cdot 10^{-5}$$

Dans tous les cas , la déformation peut être considérée comme quasi-statique . Pour $k \approx 0$ (déformation quasi-adiabatique) , la figure 3 , sur laquelle est représentée la déformation $\gamma(.5,t)$ au centre de la bande en fonction de la déformation au bord $\gamma(0,t)$, démontre la localisation de la déformation au centre de la bande . La figure 4 montre les courbes contrainte - déformation correspondantes au centre et au bord de la bande ; l'aspect inhomogène de la déformation γ est également évident . Sur la figure 3 , on a également représenté deux cas où le coefficient d'adiabaticité est plus grand ($k \approx 10^{-1}$) ; le défaut de température a dans ce cas été imposé au sommet de la courbe contrainte-déformation homogène c'est-à-dire dans des conditions très défavorables à la stabilité de la déformation homogène. Néanmoins, lorsque $k \approx 0.276$, la perturbation est amortie, la localisation est évitée et la partie descendante de la courbe contrainte- déformation est parcourue de façon homogène (Figure 5) . Ainsi , la localisation de la déformation plastique n'est-elle pas nécessairement liée à l'existence d'un maximum sur cette courbe . Une

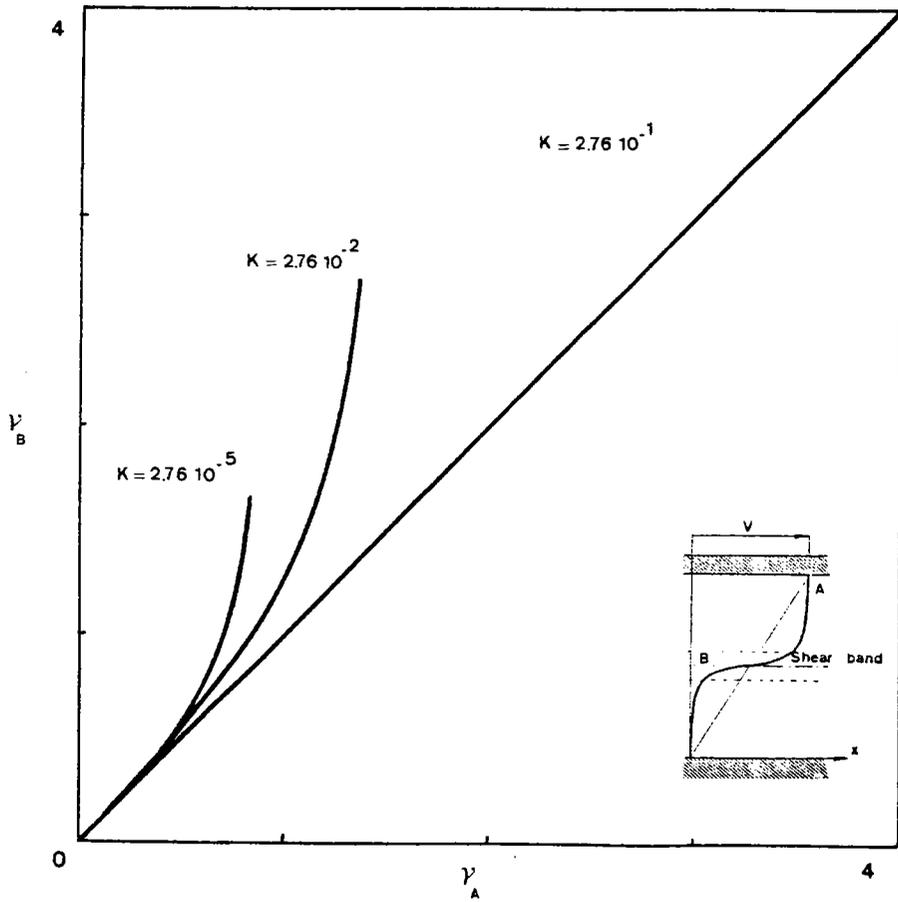


Figure 3: Influence de l'adiabaticité de la déformation sur la localisation. Courbes $\gamma(0.5,t)/\gamma(1,t)$.

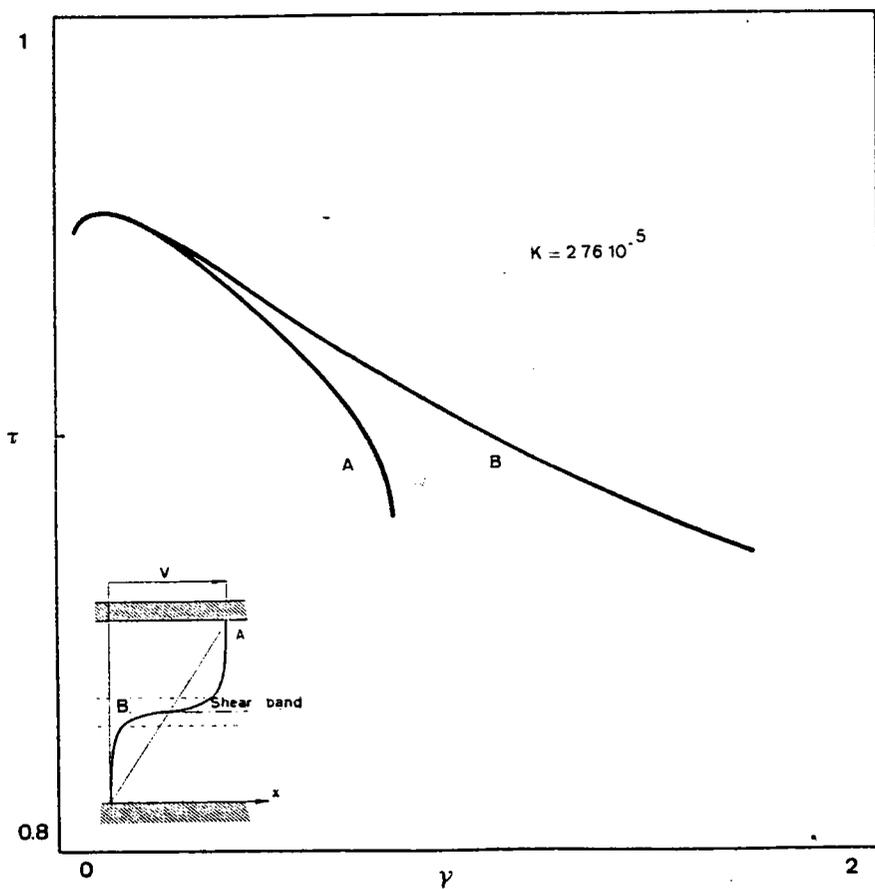


Figure 4: Courbes contrainte-déformation au centre et au bord; $k \neq 0$.

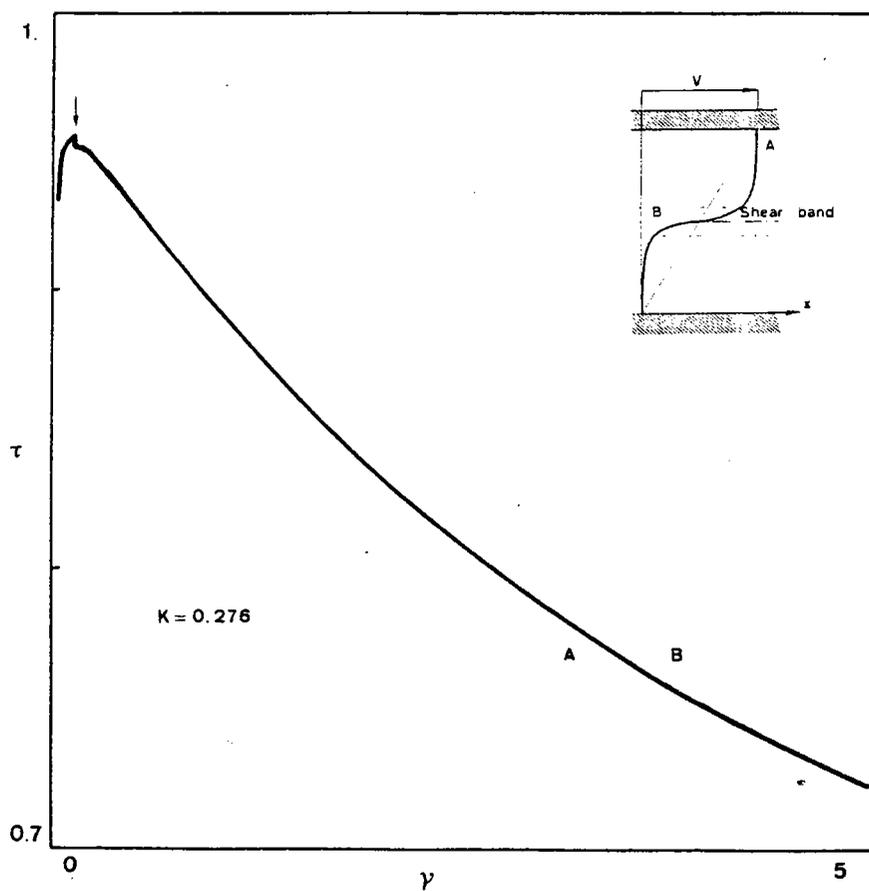


Figure 5: Courbes contrainte-déformation au centre et au bord; $k=0.276$.

situation semblable est démontrée sur les figures 6,7 , avec les mêmes valeurs des paramètres , mais pour un défaut géométrique initial , au lieu d'un défaut de température . On s'aperçoit sur la figure 6 que le rapport $\gamma(.5,t)/\gamma(0,t)$ tend vers une constante lorsque $t \rightarrow \infty$, comme on pourrait d'ailleurs aisément le montrer analytiquement . La localisation de la déformation est donc évitée , mais les courbes contrainte-déformation au centre et au bord de la bande sont différentes (figure 7) . Naturellement , les valeurs de k nécessaires à l'obtention d'une telle stabilisation ne peuvent être rencontrées aux grandes vitesses de déformation , pour lesquelles le processus est quasi- adiabatique . Le résultat précédent peut être interprété comme suit : il existe une courbe C dans le plan Π , qui sépare une zone d'instabilité (ou de localisation) à gauche et au dessus, d'une zone de stabilité (resp. de non localisation) à droite et en dessous; pour une valeur donnée de l'adiabaticité, les prédictions de stabilité et de localisation linéaires sont correctes jusqu'au défaut critique indiqué par la courbe C . Dans l'exemple de la figure 3, $\epsilon \approx 5.10^{-3}$ est le défaut critique pour une valeur de k comprise entre $2.76 \cdot 10^{-2}$ et $2.76 \cdot 10^{-1}$. Cette courbe C est confondue avec l'axe k , pour un chargement à contrainte imposée et $\nu+n+m < 0$; dans ce cas la zone d'instabilité (de localisation) s'étend à tout le plan Π . Lorsque la courbe C passe par l'origine , il y a instabilité (localisation) adiabatique , quelle que soit la taille du défaut initial . La courbe C est au contraire rejetée à l'infini pour $\nu+n > 0$ dans le diagramme de stabilité et pour $\nu+n+m > 0$ dans le diagramme de localisation à contrainte imposée , et la zone de stabilité s'étend à tout le plan Π . Cela signifie que la stabilité ou la non localisation

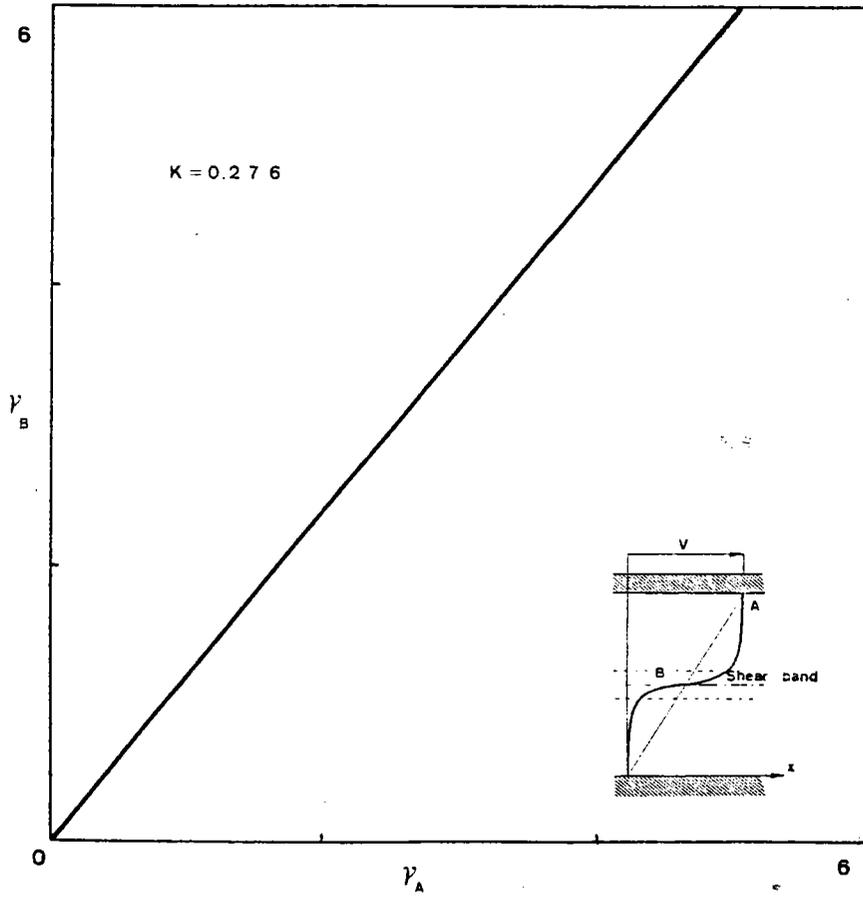


Figure 6: Non localisation pour $k \leq 0.276$; défaut géométrique..

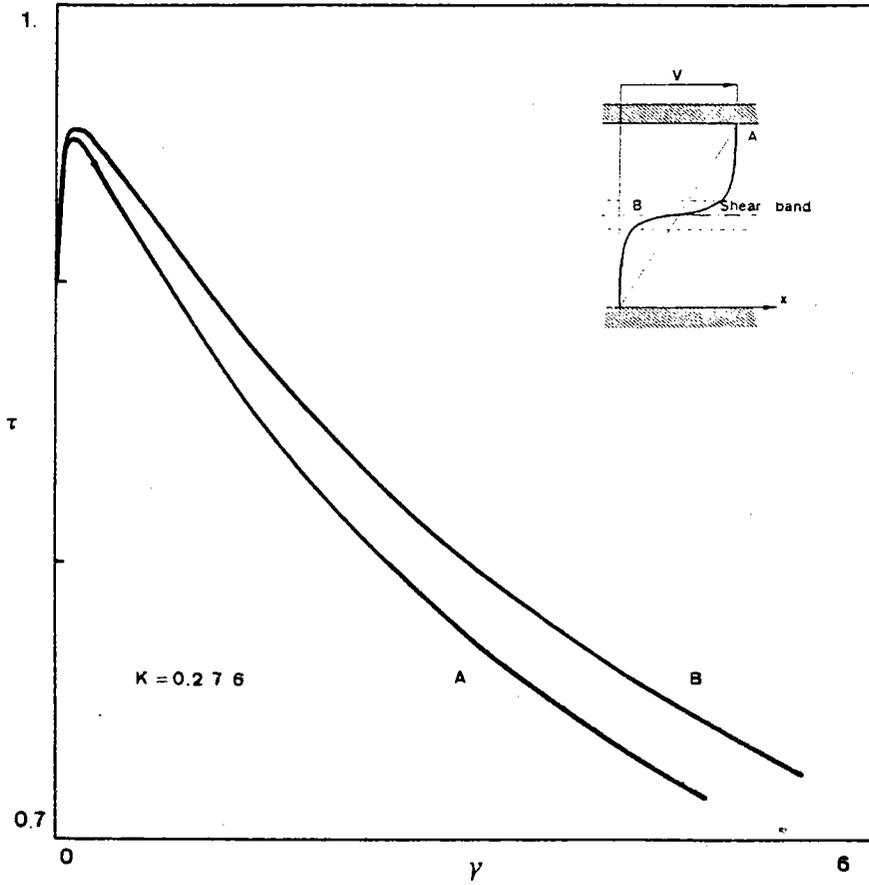
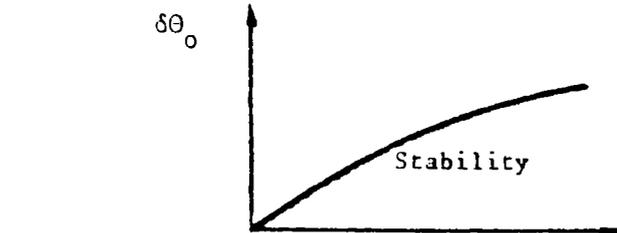
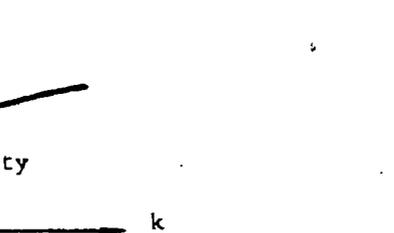
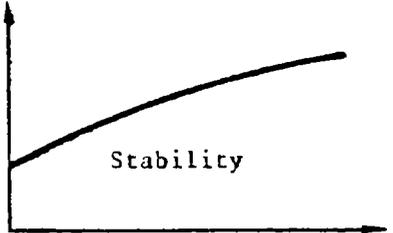
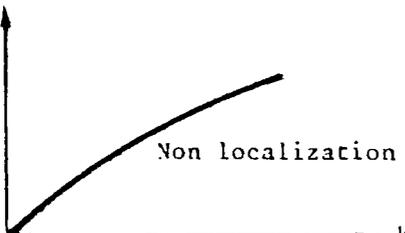
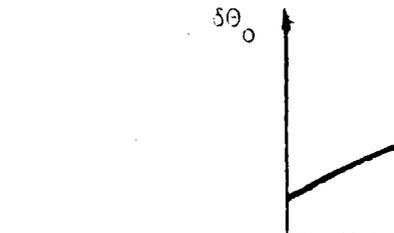
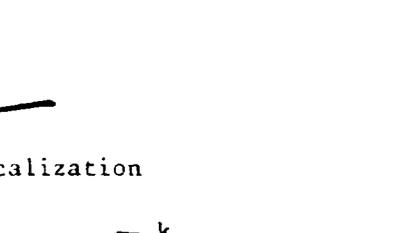
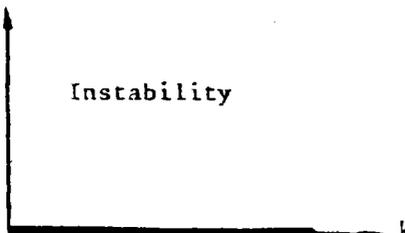
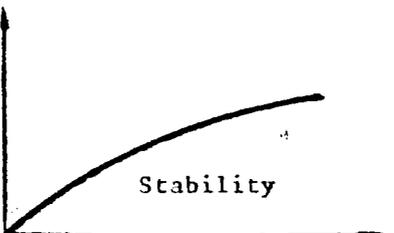
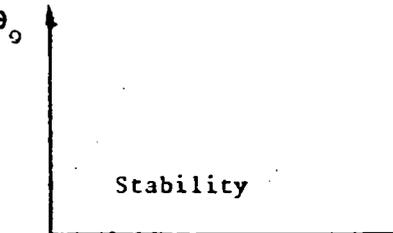
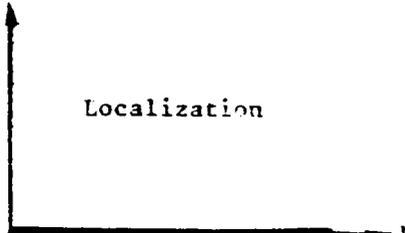
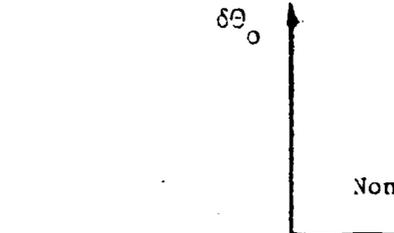


Figure 7: Courbes contrainte-déformation au centre et au bord; $k=0.276$

Défaut géométrique.

TABLE 2 : ASYMPTOTIC INSTABILITY AND LOCALIZATION DIAGRAMS

$\delta\theta_0$: initial defect ; k = adimensional adiabaticity parameter

Boundary conditions	$\nu + n + m < 0$	$\nu + n + m > 0 ; \nu + n < 0$	$\nu + n > 0$
$\nu = 1$ $\rho_0 = 0$ or $\rho_0 \neq 0 ; n = 0$			
			
$\tau = 1$ $\rho_0 = 0$			
			

KEY

ont lieu quelle que soit la taille du défaut initial . Rappelons que ce résultat est acquis grâce à une analyse non linéaire exacte MOLINARI-CLIFTON (1983). Enfin , notons que la courbe C est croissante en raison des effets stabilisateurs de la conduction thermique, tout en restant représentative de défauts critiques petits comme l'indiquent les résultats numériques rapportés ci-dessus .

Comme cela est habituel pour une théorie linéarisée, seuls les résultats de stabilité sont cohérents. En effet , en cas d'instabilité , les perturbations sont croissantes, de sorte qu'après un certain temps , il n'est plus possible de négliger les termes non linéaires . Les prédictions linéaires sur le comportement ultime des perturbations : temps critiques, déformation à la rupture..., sont donc dénuées de sens ; en revanche la prédiction de l'instabilité elle même n'est pas discutable. Nous conjecturons donc que les critères indiqués fournissent également des prédictions consistentes de l'instabilité et de la localisation de la déformation plastique. Cet argument est conforté par le fait que, lorsqu'une comparaison est possible , les critères de localisation linéaire et non linéaire se révèlent être identiques ; c'est le cas notamment de la déformation quasi-statique d'un matériau non conducteur sous contrainte imposée .

Les résultats numériques apportent également une confirmation des critères d'instabilité et de localisation . Les courbes tracées sur la figure 8 représentent l'évolution de la déformation $\gamma(.5,t)$ au centre de la bande en fonction de la déformation au bord $\gamma(1,t)$. Les conditions aux limites en vitesse (2-16), et les conditions initiales (5-1) sont utilisées . Les valeurs numériques adoptées pour les différents paramètres sont :

$$\begin{aligned} K &= 54 \text{ W/mK} & C &= 3.9 \cdot 10^6 \text{ J/m}^3\text{K} & \beta &= .9 \\ \rho &= 7800 \text{ kg/m}^3 & h &= 5 \cdot 10^{-3} \text{ m} & \epsilon &= .01 \end{aligned} \quad (5-5)$$

$$\bar{\dot{\gamma}}_0 = 10^4 \text{ s}^{-1} \quad \bar{\theta}_0 = 300 \text{ K}$$

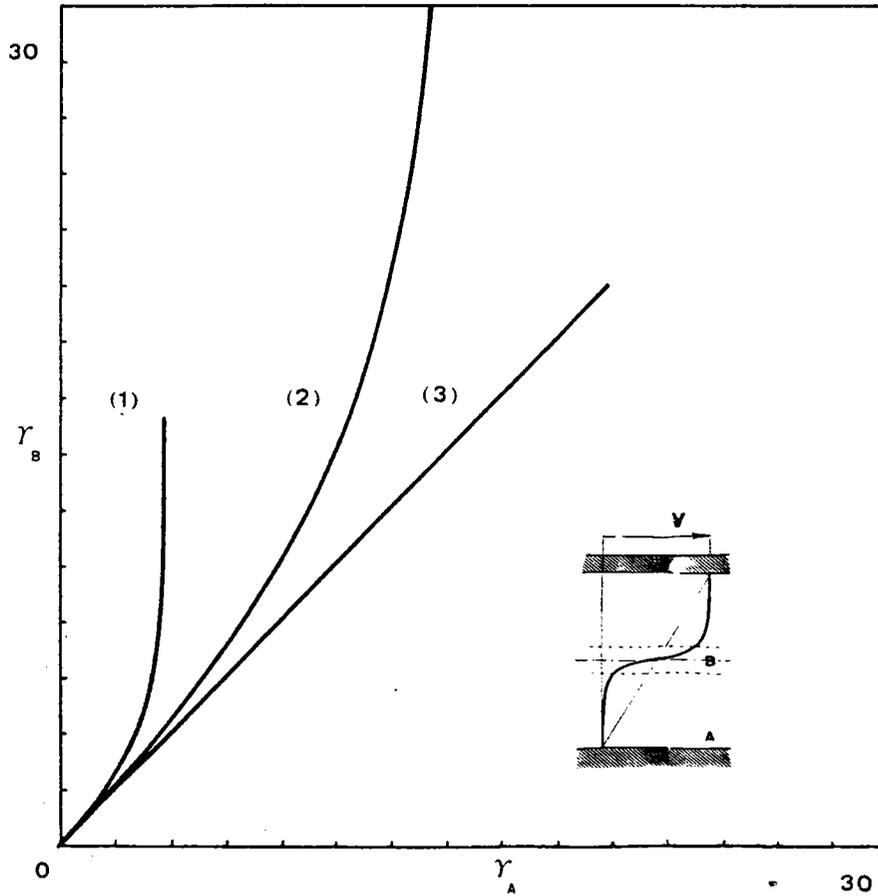


Figure 8: Test dynamique: influence de ^{sensibilité à} la vitesse de déformation sur la localisation; Vérification du critère de localisation dynamique.

On obtient pour le coefficient d'adiabaticité la valeur $k \approx 5 \cdot 10^{-5}$; la déformation est donc quasi-adiabatique . Trois matériaux différents sont définis , pour lesquels $n=0$, $\nu = -.38$ et:

$$\mu = 4.36 \cdot 10^8 \text{ SI} \quad m = .019 \quad (5-6-1)$$

$$\mu = 3.28 \cdot 10^8 \text{ SI} \quad m = .05 \quad (5-6-2)$$

$$\mu = 1.30 \cdot 10^7 \text{ SI} \quad m = .4 \quad (5-6-3)$$

Pour les deux premiers, $\nu+m$ est négatif , et positif pour le troisième . Dans les trois cas les effets d'inertie sont significatifs . On constate qu'il y a localisation de la déformation au milieu de la bande dans les deux premiers cas ; la perturbation croît plus lentement lorsque la sensibilité à la vitesse augmente . Dans le troisième cas , on n'observe pas de localisation de la déformation , aussi loin que les calculs soient poussés . Ces résultats numériques viennent confirmer le critère de localisation dynamique (4-35) .

Les critères de localisation sont également en accord avec les résultats expérimentaux disponibles actuellement. En effet HARTLEY et al (1986) a récemment rendu compte de l'observation de bandes de cisaillement produites par la torsion à vitesse imposée de tubes minces d' aciers différents CRS 1018 et HRS 1020 . La loi de comportement adoptée pour représenter le comportement mécanique de ces matériaux est la même que celle qui a été utilisée au cours de ce travail (2-4) ; les valeurs des paramètres mécaniques , fournies sur la base de résultats expérimentaux , sont respectivement :

CRS 1018 : $\mu=3.58 \cdot 10^9$ SI , $\nu=-.38$, $n=.015$, $m=.019$

HRS 1020 : $\mu=4.36 \cdot 10^9$ SI , $\nu=-.51$, $n=.12$, $m=.0133$

On voit que les critères d'instabilité (3-28) et de localisation (4-14) sont vérifiés dans les deux cas. Naturellement ces deux résultats ne sauraient constituer à eux seuls une confirmation expérimentale complète des critères proposés , mais ils ne sont pas en contradiction avec eux . D'autres expériences sont nécessaires pour affiner la comparaison , notamment sur des matériaux plus sensibles à la vitesse de déformation .

Enfin quelques conclusions générales peuvent être rappelées: tout d'abord les critères d'instabilité et de localisation sont en général différents. Ensuite , l'accroissement de l'indice d'adiabaticité k possède un effet stabilisant, et il peut prévenir l'instabilité (la localisation) si le défaut initial est assez petit. Enfin les conditions aux limites en contraintes sont plus déstabilisantes que les conditions en vitesses .

Annexe 1 : Théorème de Coddington-Levinson

Soit une matrice $A(t)$ à variations bornées sur l'intervalle $(0, \infty[$, tendant vers une matrice constante A_∞ lorsque $t \rightarrow \infty$. On suppose que la matrice $A(t)$ peut être décomposée sous la forme :

$$A(t) = A_\infty + V(t) + R(t) \quad (a1-1)$$

où $V(t)$ est une matrice différentiable satisfaisant :

$$\int_0^\infty |V'(t)| dt < \infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = 0 \quad (a1-2)$$

et où $R(t)$ est une matrice intégrable telle que :

$$\int_0^\infty |R(t)| dt < \infty \quad (a1-3)$$

Il en résulte que si les racines $\eta_j(t)$ de l'équation :

$$\det(A_\infty + V(t) - \eta I) = 0 \quad (a1-4)$$

vérifient, ou bien :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \operatorname{Re}(\eta_k(t) - \eta_j(t)) dt = \infty, \quad k \neq j$$

et : (a1-5)

$$\int_{t_1}^{t_2} \operatorname{Re}(\eta_k(t) - \eta_j(t)) dt > -K_0, \quad t_2 \geq t_1 \geq 0$$

ou bien :

$$\int_{t_1}^{t_2} \operatorname{Re}(\eta_k(t) - \eta_j(t)) dt < K_0, \quad t_2 \geq t_1 \geq 0 \quad (a1-6)$$

où K_0 est une constante fixée, alors, si p_k désigne le vecteur propre de la matrice A_∞ associé à la valeur propre μ_k de sorte que :

$$A_\infty p_k = \mu_k p_k \quad (a1-7)$$

il existe une solution $X_k(t)$ du système d'équations différentielles ordinaires

$$\frac{dX}{dt} = A(t).X \quad (a1-8)$$

telle que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X_k(t) \exp(-\int_{t_0}^t \eta_k(\tau) d\tau) = p_k \quad (a1-9)$$

où t_0 est une constante finie , positive ou nulle .

Ainsi ,il apparait que le comportement asymptotique des solutions $X_k(t)$ du système différentiel (a1-8) est colinéaire aux vecteurs propres de la partie constante A_∞ de $A(t)$, et que l'amplitude est donnée par :

$$\exp\left(\int_{t_0}^t \eta_k(\tau) d\tau\right) \quad (a1-10)$$

Il est intéressant de noter que la partie intégrable $R(t)$ de $A(t)$ est sans influence sur ce comportement asymptotique , alors que le signe à l'infini des valeurs propres de la partie non intégrable est au contraire d'une importance capitale : en effet , s'il existe k tel que :

$$\int_{t_0}^{\infty} \eta_k(\tau) d\tau = + \infty \quad (a1-11)$$

alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |X_k(t)| = + \infty \quad (a1-12)$$

Au contraire , si quel que soit k :

$$\int_{t_0}^{\infty} \eta_k(\tau) d\tau = - \infty \quad (a1-13)$$

il vient :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |X_k(t)| = 0 \quad (a1-14)$$

Si par ailleurs la condition (a1-11) est satisfaite , à l'exception de valeurs de k pour lesquelles :

$$- \infty < \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \operatorname{Re}(\eta_k(\tau) d\tau) < + \infty \quad (a1-15)$$

$X_k(t)$ tend vers une limite finie X_k^∞

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |X_k(t)| = X_k^\infty \quad (\text{a1-16})$$

Il ressort de ce résultat que si le système (a1-8) décrit l'évolution d'une perturbation linéaire, la solution perturbée est respectivement instable, asymptotiquement stable ou indifféremment stable, selon que les conditions (a1-11), (a1-13) ou (a1-15) sont vérifiées.

A chaque application du théorème effectuée dans cette étude, on pourra vérifier que les conditions (a1-1), (a1-2), (a1-3), et (a1-5) ou (a1-6) sont satisfaites, pour la valeur $K_0=0$ de la constante; dans un souci d'allègement du texte, cela ne sera pas mentionné davantage.

TABLE 1

EXACT AND APPROXIMATE HOMOGENEOUS SOLUTIONS

Boundary conditions	γ_0	$\dot{\gamma}_0/\gamma_0$	θ_0	$\dot{\theta}_0/\theta_0$		
$V = 1$	t	$1/t$	$(1 + \alpha \frac{1-v}{1+n} \gamma_0^{n+1})^{\frac{1}{1-v}}$	$\frac{\alpha \gamma_0^n}{1 + \alpha \frac{1-v}{1+n} \gamma_0^{n+1}}$	$\theta_0 \Big _{\infty} = +\infty$ $v < 1$	$\theta_0 \Big _{\gamma_{oc}} = +\infty$ $v > 1$
$\tau = 1$	$n \neq 0$	$\gamma_0^{\frac{n+m}{m}} (1 + \alpha \gamma_0)^{-\frac{v}{m}}$	$1 + \alpha \gamma_0$	$\frac{\alpha \gamma_0^{\frac{n}{m}}}{(1 + \alpha \gamma_0)^{(v+m)/m}}$	$v + n + m < 0$	$v + n + m > 0$
					$\frac{\dot{\gamma}_0}{\gamma_0} \Big _{th} = +\infty$	$\frac{\dot{\gamma}_0}{\gamma_0} \Big _{\infty} = 0$
$\tau = 1$	$n = 0$	$\alpha \frac{\theta_0^{-v/m}}{\theta_0^{-1}}$	$(1 + \frac{v+m}{m} \alpha t)^{\frac{m}{v+m}}$	$1 / (1 + \frac{v+m}{m} \alpha t)$	$\frac{\dot{\theta}_0}{\theta_0} \Big _{th} = +\infty$	$\frac{\dot{\theta}_0}{\theta_0} \Big _{\infty} = 0$
					$\frac{\dot{\theta}_0}{\theta_0} \Big _{th} = +\infty$	$\frac{\dot{\theta}_0}{\theta_0} \Big _{\infty} = 0$

135

- HUTCHINSON, J.W. 1977 Acta Metall., 25, 839.
NEALE, K.W.
- MOLINARI, A. 1983 C.R.A.S., Paris, 296, 1.
CLIFTON, R.J.
- MOLINARI, A. 1985 J.Mec.Th.App., 4, 5, 659-684.
- PAN, J. 1983 Int.J.Sol.Struct., 19, 153;
- RECHT, R.F. 1964 Trans.A.S.M.E. 86, 189.
- ROGERS, H.C. 1974 Adiabatic Shearing; a review; Drexel
University Report.
- ROGERS, H.C. 1981 In Shock waves and High Strain-rate
SHASTRY, C.V. Phenomena (ed. by MEYERS, M.A. and MURR, L.E.)
Ch18, Plenum Press, N-Y
- SHOCKEY, D.A. 1981 Op.Cit.Ch.15.
ERLICH, D.C
- STAKER, M.R. 1981 Acta Metall., 4, 683.
- ZENER, C. 1944 J. of Appl. Phys., 15, 22.
HOLLOMON, J.H.

Figure 1: Cinématique du glissement simple et de la formation des bandes de cisaillement.

Figure 2: Test dynamique: Localisation.

(1) Vitesse de déformation $\dot{\gamma}(0.5,t)$ en fonction de $\gamma(1,t)$

(2) Vitesse de déformation $\dot{\gamma}(1,t)$ en fonction de $\gamma(1,t)$

Figure 3: Influence d l'adiabaticité de la déformation sur la localisation. Courbes $\gamma(0.5,t)/\gamma(1,t)$.

Figure 4: Courbes contrainte-déformation au centre et au bord; $k \neq 0$.

Figure 5: Courbes contrainte-déformation au centre et au bord; $k \neq 0.276$.

Figure 6: Non localisation pour $k \neq 0.276$; défaut géométrique.

Figure 7: Courbes contrainte-déformation au centre et au bord; $k \neq 0.276$
Défaut géométrique.

Figure 8: Test dynamique: influence de la sensibilité à la vitesse de déformation sur la localisation; Vérification du critère de localisation dynamique.

Chapitre 4: Analyse non linéaire approchée de la formation des bandes de cisaillement

1-Introduction.

De nombreux auteurs ont tenté de déterminer de façon analytique les conditions critiques présidant à l'apparition des bandes de cisaillement adiabatiques, ou même de fournir une estimation de la déformation ultime précédant la rupture du matériau. RECHT (1963), ARGON (1973), CULVER (1973) et STAKER (1981) ont proposé un critère de stabilité de la déformation plastique homogène basé sur l'existence d'une contrainte de cisaillement maximum; ils fournissent ainsi une estimation du seuil de déformation à partir duquel l'écoulement plastique homogène a tendance à être instable. C'est aussi le cas des analyses de stabilité linéarisées de CLIFTON (1978), BAI (1982), BURNS-TRUCANO (1982) et PAN (1983). Ces théories ne prennent pas en considération l'aspect instationnaire de la déformation plastique; elles ne peuvent fournir de bonnes estimations des déformations critiques d'apparition des bandes de cisaillement que dans le cas où le développement des perturbations est très rapide devant la vitesse de déformation homogène; cela exclut les matériaux dont le comportement est sensible à la vitesse de déformation, ainsi que les sollicitations dynamiques. Dans chacun de ces cas en effet, le développement des perturbations est freiné soit par la sensibilité à la vitesse, soit par les effets d'inertie. Cet aspect instationnaire a été pris en compte par les analyses présentées au Chapitre 3, qui ont permis de fournir des critères de localisation de la déformation plastique homogène. Cependant les méthodes linéarisées employées ne permettent pas

à *a priori* de fournir des prédictions sûres des déformations critiques de rupture du matériau. Aussi de nombreuses études prenant en compte les aspects non linéaires ont elles été entreprises, tant du point de vue numérique (WADA et al 1978, COSTIN et al 1979, MERZER 1982, CLIFTON et al 1984, MOLINARI 1985, FRESSENGEAS- MOLINARI 1985) qu'analytique (VON TURKOVITCH 1972, DAFERMOS- HSIAO 1983, MOLINARI- CLIFTON 1983 , MOLINARI 1985). DAFERMOS et HSIAO étudient l'écoulement plan dynamique d'un fluide newtonien dont la viscosité dépend de la température. Von TURKOVITCH fournit une contrainte critique au delà de laquelle aucune solution stationnaire n'est possible; le matériau est supposé sans écrouissage et il obéit à un mécanisme d'activation thermique, la contrainte et la température sont imposées aux frontières et elle sont constantes. Ce travail n'est pas sans analogie avec celui de JOSEPH (1965) qui étudie la distribution des températures dans un solide conducteur soumis à une génération de chaleur due à un effet JOULE non linéaire, et aux frontières maintenues isothermes; JOSEPH conclut en effet à l'existence d'une intensité limite au delà de laquelle il ne peut y avoir de distribution stationnaire de la température. Au dessous de cette valeur critique, il existe deux solutions stationnaires, et une analyse de stabilité linéaire montre que la solution "basse" est stable, alors que la solution "haute" est instable.

Le travail que nous avons entrepris concerne le cisaillement quasi-statique sous contrainte constante d'un matériau thermo-viscoplastique dépourvu d'écrouissage. Il se scinde en deux parties:

1) Conditions à la limite isothermes:

Lorsque la contrainte de cisaillement est inférieure à la contrainte limite, nous étudions de manière approchée le comportement non linéaire d'une perturbation de la distribution stationnaire appartenant à la

branche instable. Il est notamment possible d'en déduire une estimation de la déformation critique de rupture.

2) Conditions à la limite adiabatiques:

Lorsque la contrainte de cisaillement est supérieure à sa valeur critique, nous étudions l'instabilité d'une déformation plastique homogène ainsi que sa localisation sous forme de bande.

Dans chaque cas, nous utilisons une méthode de perturbations non linéaire. Ces méthodes ont été utilisées de manière extensive dans d'autres domaines, comme les instabilités hydrodynamiques, et ont notamment été clarifiées et formalisées par ECKHAUS (1965). L'idée générale est d'utiliser un développement en série des perturbations selon les fonctions propres du problème linéaire, lorsqu'elles existent.

Le plan de ce chapitre est donc le suivant: en premier lieu nous formulons le problème posé. Puis les résultats relatifs aux solutions stationnaires de JOSEPH et VON TURKOVITCH sont rappelés; ensuite les résultats issus de l'application des méthodes de perturbations non linéaires sont exposés dans le cas isotherme. Dans le cas adiabatique, une méthode de perturbations non linéaires relative est présentée, et les résultats sont discutés.

2-Formulation du problème.

Nous considérons le problème du glissement simple, issu de la modélisation d'une expérience de torsion d'un tube mince entaillé. Soit une tranche de matériau, d'épaisseur constante h dans la direction \tilde{y} , s'étendant à l'infini dans les directions \tilde{x} et \tilde{z} . On suppose que tous les déplacements sont nuls dans les directions \tilde{y} et \tilde{z} , et que toutes les dérivées partielles par rapport à \tilde{x} et \tilde{z} sont nulles. La vitesse \tilde{v} dans la direction \tilde{x} est en général une fonction de \tilde{y} et du temps \tilde{t} . Nous considérons les conditions à la limite en contraintes:

$$\tilde{\tau}(0, \tilde{t}) = \tilde{\tau}(h, \tilde{t}) = \tau_0, \quad \tilde{t} \geq 0 \quad (2-1)$$

$\tilde{\tau}$ désigne la contrainte de cisaillement et τ_0 la contrainte constante appliquée aux frontières. Les conditions à la limite thermiques sont supposées isothermes (2-2) ou adiabatiques (2-3):

$$\tilde{\theta}(0, \tilde{t}) = \tilde{\theta}(h, \tilde{t}) = \bar{\theta}_0, \quad \tilde{t} \geq 0 \quad (2-2)$$

$$\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{y}}(0, \tilde{t}) = \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{y}}(h, \tilde{t}) = 0, \quad \tilde{t} \geq 0 \quad (2-3)$$

$\tilde{\theta}$ désigne la température. La déformation élastique est négligée, et l'on utilise une loi de comportement thermo-viscoplastique de la forme :

$$\tilde{\tau} = \mu \tilde{\theta}^\nu \dot{\tilde{\gamma}}^m \quad (2-4)$$

$\dot{\tilde{\gamma}}$ représente la vitesse de glissement; μ , ν et m sont des coefficients empiriques caractérisant respectivement la viscosité, la sensibilité à la température (l'adoucissement thermique si ν est négatif) et la sensibilité à la vitesse de déformation. μ et m sont supposés positifs. Le matériau est de plus supposé incompressible de masse volumique ρ . De manière alternative, nous pourrions aussi utiliser la loi d'activation thermique:

$$\dot{\tilde{\gamma}} = \dot{\tilde{\gamma}}_0 \exp(-H/K\tilde{\theta}) \quad (2-5)$$

H est une énergie d'activation et K est la constante de BOLTZMANN. H , K , et $\dot{\tilde{\gamma}}_0$ sont supposés constants. Cette équation peut être utilisée pour caractériser la vitesse de déformation plastique lorsque l'écroutissage du matériau est très faible.

Les équations fondamentales du problème sont, avec la loi de comportement (2-4) ou (2-5), l'équation d'équilibre:

$$\frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial \tilde{y}} = 0 \quad (2-6)$$

et l'équation de l'énergie :

$$C \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial t} = K \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial \tilde{y}^2} + \beta \tilde{\tau} \dot{\tilde{\gamma}} \quad (2-7)$$

C, K et β sont respectivement la chaleur spécifique volumique, le coefficient de conduction thermique et la fraction du travail de déformation plastique convertie en chaleur, appelée aussi : coefficient de TAYLOR-QUINNEY. Tous ces paramètres sont considérés comme constants au cours de cette étude. Si les variables adimensionnelles suivantes :

$$\begin{aligned} t &= \tilde{t}/t_c, \quad \dot{\gamma} = \dot{\tilde{\gamma}}/\dot{\tilde{\gamma}}_0 \\ y &= \tilde{y}/h \\ \theta &= \tilde{\theta}/\bar{\theta}_0 = 1 + \psi, \quad \tau = \tilde{\tau}/\bar{\tau}_0 \end{aligned} \quad (2-8)$$

sont introduites, où $\bar{\theta}_0$ est la valeur initiale de la température à la frontière, reliée à $\bar{\tau}_0$ et t_c par :

$$\bar{\tau}_0 = \mu \bar{\theta}_0^{\nu} \dot{\tilde{\gamma}}_0^m, \quad \dot{\tilde{\gamma}}_0 = 1/t_c, \quad t_c = \rho C h^2 / K \quad (2-9)$$

alors, pour la loi puissance (2-4), les équations (2-4, 2-6, 2-7) se réduisent à l'équation de la chaleur non linéaire :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \lambda f(\psi) ; \quad f(\psi) = (1 + \psi)^n \quad (2-10)$$

avec les conditions à la limite :

$$\psi(0, t) = \psi(1, t) = 0 \quad (2-11)$$

Nous avons posé :

$$-\nu/m = n, \quad \dot{\tilde{\gamma}}(h, 0) = \dot{\tilde{\gamma}}_0 \dot{\tilde{\gamma}}_0, \quad \lambda = \beta \bar{\tau}_0 \dot{\tilde{\gamma}}_0^m / \rho C \bar{\theta}_0 = t_c / t_q \quad (2-12)$$

t_c représente un temps de relaxation caractéristique de la conduction thermique, et t_q un temps caractéristique de la source de chaleur. $\dot{\tilde{\gamma}}_0$ est la vitesse de déformation adimensionnelle initiale à la frontière. Toutes les caractéristiques mécaniques du système sont liées par le paramètre de similitude λ , que nous baptiserons paramètre de contrainte;

la signification de λ est la suivante: si $\lambda \ll 1$ c'est à dire si $t_c \ll t_q$, la conduction thermique dispose d'un temps suffisant pour évacuer la quantité de chaleur produite par la déformation plastique, et une solution stationnaire est éventuellement possible. Naturellement on obtient la conclusion inverse pour $\lambda \gg 1$. On sépare ainsi grossièrement une région dans laquelle les conditions à la limite peuvent être supposées isothermes ($\lambda \ll 1$) d'une région où elles doivent être considérées comme quasi-adiabatiques ($\lambda \gg 1$).

Pour la loi de comportement thermiquement activée (2-5) la normalisation conduit à l'équation adimensionnelle:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \lambda e^{\psi} \quad (2-13)$$

avec

$$\psi = (H/K\bar{\theta}_0^2)(\bar{\theta} - \bar{\theta}_0) ; \lambda = \beta \tilde{\gamma}_0 \frac{H}{K\bar{\theta}_0} \exp(-H/K\bar{\theta}_0) \bar{\tau}_0 \frac{h^2}{K} \quad (2-14)$$

et aux conditions aux limites (2-11). On a supposé que la température varie peu et que:

$$\frac{H}{K\bar{\theta}} \cong \frac{H}{K\bar{\theta}_0} \left(1 - \frac{\bar{\theta} - \bar{\theta}_0}{\bar{\theta}_0}\right)$$

3- Solutions stationnaires.

Nous cherchons maintenant à savoir s'il existe une solution stationnaire à l'équation (2-10) puis à l'équation (2-13), vérifiant les conditions à la limite (2-11). Soit ψ_m la température maximum; pour raisons de symétrie, c'est la température au milieu de la bande. Il est facile de montrer par quadratures que pour toute valeur ψ_m que l'on se donne, il existe une solution stationnaire $\psi(y)$ telle que le paramètre de contraintes λ soit donné par:

$$\lambda = \frac{1}{2} \left(\int_0^{\psi_m} (g(\psi_m) - g(\psi)) d\psi \right)^{-1/2} \quad (3-1)$$

où:

$$g(\psi) = \int_0^{\psi} f(\psi) d\psi \quad (3-2)$$

$\psi(y)$ est alors telle que:

$$\int_0^{\psi} (g(\psi_m) - g(\alpha))^{-1/2} d\alpha = (2\lambda(\psi_m))^{1/2} y \quad (3-3)$$

Nous avons tracé sur la figure 1 la fonction $\lambda(\psi_m)$; trois cas doivent être distingués.

1) $\nu+m > 0$ ($n < 1$): $\lambda(\psi_m)$ est une fonction croissante. Pour chaque valeur de la contrainte λ il existe une valeur de ψ_m et une solution stationnaire.

2) $\nu+m = 0$ ($n = 1$): C'est le cas linéaire; $\lambda(\psi_m)$ est une fonction croissante. Cependant il existe une asymptote horizontale et une valeur finie λ_{c_1} de la contrainte au delà de laquelle il n'existe pas de solution stationnaire.

3) $\nu+m < 0$ ($n > 1$): La contrainte λ n'est plus une fonction univoque de la température maximum ψ_m . En outre, il existe une valeur critique λ_c de λ au delà de laquelle il n'y a plus de solution stationnaire. Au dessous de cette contrainte critique, on obtient deux valeurs de ψ_m et deux solutions stationnaires pour une valeur donnée de λ . Plus l'exposant n est grand, plus la contrainte critique λ_c est faible.

Le même raisonnement peut être tenu pour la loi thermiquement activée, mais il est plus simple d'exploiter une solution fournie par CARSLAW et JAEGER (1941) et d'écrire avec VON TURKOVITCH:

$$\psi = \psi_m - 2 \text{Log} \cosh\left(\frac{y-1}{2}\left(\frac{\lambda}{2} \exp \psi_m\right)^{1/2}\right) \quad (3-4)$$

avec:

$$\exp(\psi_m/2) = \cosh\left(\frac{\lambda}{4} \exp \psi_m\right)^{1/2} \quad (3-5)$$

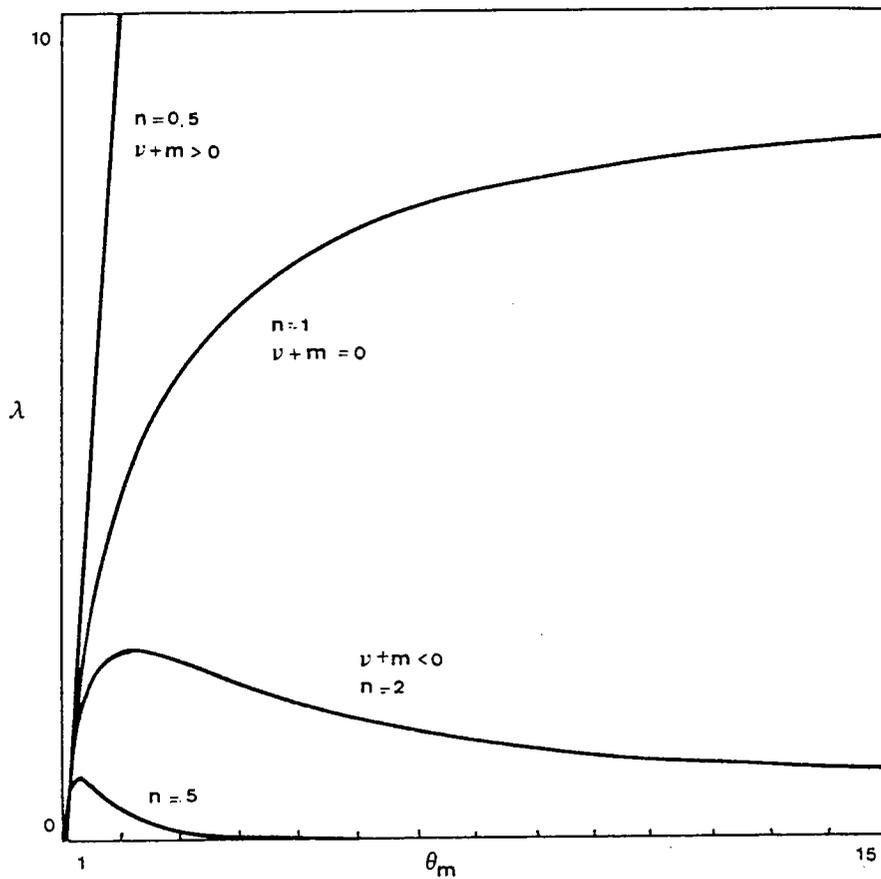


Figure 1: Facteur de contrainte en fonction de la température maximum.

Pour $0 < \lambda < \lambda_c = 0.88$, cette équation admet deux racines correspondant à deux valeurs possibles de ψ_m et donc à deux solutions stationnaires. Si $\lambda > \lambda_c$ l'équation n'a pas de solution réelle, et il n'y a pas de solution stationnaire.

4-Stabilité des solutions stationnaires.

Dans cette section, nous examinons la stabilité de la solution stationnaire (3-3) de l'équation (2-10), vérifiant les conditions à la limite (2-11); nous utilisons la loi de comportement (2-4-1), mais nous supposons que les variations de température sont assez faibles pour que l'on puisse approcher $f(\psi)$ par le développement:

$$f(\psi) = 1 + a_0 \psi + a_1 \psi^2 \quad ; \quad a_0 = n > 1 \quad ; \quad a_1 = n(n-1)/2 > 0 \quad (4-1)$$

JOSEPH (1965) a montré dans le cadre d'une analyse de stabilité linéarisée que dans le cas (1) mentionné ci-dessus ($\nu+m > 0$) la solution stationnaire est stable. C'est vrai aussi dans le cas (2) ($\nu+m=0$), mais pour la valeur asymptotique λ_c de λ la stabilité est indifférente. Enfin, dans le cas (3) ($\nu+m < 0$), la branche basse de la courbe $\lambda(\psi_m)$ correspond à des solutions stationnaires linéairement stables, et la branche haute est quant à elle associée à des solutions stationnaires instables. Au point critique λ_c , la stabilité est indifférente.

Notre but est de donner davantage de détails sur le comportement des perturbations dans le cas $\nu+m < 0$, notamment pour des solutions stationnaires hautes. Un théorème démontré par SATTINGER (1973) (p 35) fournit à cet égard un certain nombre d'indications utiles sur les solutions instationnaires dont les conditions initiales se trouvent

entre la solution stationnaire haute $\psi_0(y)$ et la solution basse $\psi_1(y)$. Plus précisément, si la solution $\psi(y,t)$ est telle que:

$$\psi_1(y) \leq \psi(y,0) \leq \psi_0(y) \quad (4-2)$$

alors:

$$\forall t > 0 \quad \psi_1(y) \leq \psi(y,t) \leq \psi_0(y) \quad (4-3)$$

Ainsi une perturbation de $\psi_0(y)$ telle que les inégalités (4-2) soient vérifiées a nécessairement des variations bornées.

Nous considérons maintenant des solutions instationnaires de la forme:

$$\psi(y,t) = \psi_0(y) + \delta\psi(y,t) \quad (4-4)$$

La substitution de (4-4) dans (2-10) conduit, compte tenu du développement (4-1) à

$$\frac{\partial \delta\psi}{\partial t} = l(\delta\psi) + n(\delta\psi) \quad (4-5)$$

où l'opérateur linéaire l est:

$$l(\delta\psi) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \delta\psi + \lambda a_0 \delta\psi \quad (4-6)$$

et l'opérateur non linéaire n :

$$n(\delta\psi) = \lambda a_1 (2a_0 \delta\psi + \delta\psi^2) \quad (4-7)$$

La substitution dans les conditions aux limites (2-11) fournit en outre

$$\delta\psi(0,t)=\delta\psi(1,t)=0, \quad t \geq 0 \quad (4-8)$$

En premier lieu, nous considérons le problème de stabilité linéaire pour lequel $|\delta\psi| \ll \psi_0$, et nous cherchons des solutions de l'équation (2-10) de la forme:

$$\delta\psi(y,t) = \varphi(y) \exp(\eta t) \quad (4-9)$$

La fonction φ doit vérifier:

$$\frac{d^2\varphi}{dy^2} + (\lambda a_0 - \eta)\varphi = 0 \quad (4-10)$$

et

$$\varphi(0)=\varphi(1)=0 \quad (4-11)$$

Les solutions de ce problème sont les fonctions propres orthogonales

$$\varphi_l(y) = \sin(\pi l y) \quad , \quad l=1,2,\dots \quad (4-12)$$

et les valeurs propres η_l

$$\frac{\eta_l}{a_0} = \lambda - \pi^2 l^2 / a_0 \quad , \quad l=1,2,\dots \quad (4-13)$$

La solution stationnaire est stable lorsque toutes les valeurs propres sont négatives, et instable si l'une au moins est positive. La plus grande valeur propre est η_1 ; aussi concluons nous à la stabilité de la solution stationnaire si $\eta_1 < 0$ soit:

$$\lambda < \lambda_{c1} = \pi^2 / a_0 \quad (4-14)$$

En cas d'instabilité, la perturbation (4-9) tends vers l'infini, et

après un certain temps les termes non linéaires $n(\delta\psi)$ ne peuvent plus être négligés devant les termes linéaires $l(\delta\psi)$.

On a pu montrer(voir ECKHAUS 1965) que pour un opérateur de STURM- LIOUVILLE comme l , il est possible de développer la solution $\delta\psi$ du problème de stabilité non linéaire (4-5) suivant les fonctions propres η_e du problème linéarisé. Aussi posons nous:

$$\delta\psi(y, t) = \sum_1^{\infty} A_m(t) \varphi_m(y) \quad (4-15)$$

où $A_m(t)$ est l' amplitude du mode m . Pour déterminer ces fonctions, nous substituons le développement (4-15) dans l'équation non linéaire (4-5), puis nous multiplions par la fonction propre φ_e et nous intégrons sur l'épaisseur de la bande. Nous obtenons alors:

$$\frac{d}{dt} A_e = \eta_e A_e + \lambda a_1 (2 \sum_m A_m \int_0^1 \psi_0(u) \varphi_e(u) \varphi_m(u) du + \sum_m \sum_p A_m A_p \int_0^1 \varphi_e(u) \varphi_m(u) \varphi_p(u) du) \quad (4-16)$$

pour chaque fonction $A_e(t)$. Nous avons ainsi substitué à l'équation aux dérivées partielles initiale un système d'équations différentielles ordinaires couplées, en nombre infini. Nous nous limiterons au problème approché obtenu en limitant le développement (4-15) à l'ordre 2. Cette troncature conduit aux deux équations différentielles quadratiques:

$$\frac{d}{dt} A_1 = (\eta_1 + 4\lambda a_1 \psi_1) A_1 + \frac{8\lambda}{3\pi} a_1 (A_1^2 + 4 \frac{A_2^2}{5}) \quad (4-17)$$

$$\frac{d}{dt} A_2 = (\eta_2 + 4\lambda a_1 \psi_2) A_2 + \frac{64\lambda}{15\pi} a_1 A_1 A_2 \quad (4-18)$$

avec:

$$\psi_1 = \int_0^1 \psi_0(u) \varphi_1^2(u) du ; \quad \psi_2 = \int_0^1 \psi_0(u) \varphi_2^2(u) du \quad (4-19)$$

De cette manière, nous avons construit un système autonome d'équations différentielles ordinaires quadratiques couplées. Ce système intervient

après deux simplifications du problème initialement posé: d'une part le développement en série de la fonction $f(\psi)$ est limité aux deux premiers ordres, d'autre part la perturbation est limitée aux deux premiers modes, possédant les deux plus grandes longueurs d'onde. Ce sont évidemment deux raisons pour lesquelles le résultat obtenu ne peut être qu'approché. Cependant, ces approximations sont justifiées lorsque la température réduite ψ n'est pas trop forte, et lorsque l'influence de la conduction thermique est assez grande. La première hypothèse n'est pas satisfaite à la localisation, mais elle apporte néanmoins une amélioration par rapport à un développement purement linéaire. Dans la seconde hypothèse, les perturbations de faible longueur d'onde sont puissamment amorties par la conduction thermique (MOLINARI 1985), et seules subsistent les premiers modes de la perturbation. Cette hypothèse est qualitativement vérifiée lorsque $\lambda \ll 1$, c'est à dire lorsqu'une distribution stationnaire des températures peut s'établir.

Malgré ces simplifications, la solution analytique du système (4-17,3-18) n'est pas simple en général. Cependant, si l'on suppose que la perturbation est initialement colinéaire au premier mode seulement, c'est à dire si les conditions initiales sont:

$$A_1(0) \neq 0, \quad A_2(0) = 0 \quad (4-20)$$

alors les équations (3-17) et (3-18) sont découplées, et l'on obtient pour A_2 : $A_2(t) = 0$, $t \geq 0$, et pour A_1 :

$$\frac{dA_1}{dt} = \zeta_1 A_1 + \xi_1 A_1^2 \quad (4-21)$$

avec

$$\zeta_1 = \eta_1 + 4\lambda a_1 \psi_1, \quad \xi_1 = \frac{8\lambda}{3\pi} a_1 \quad (4-22)$$

L'hypothèse (4-20) est encore justifiée si l'influence de la conduction thermique est assez forte pour que le développement du deuxième mode ne soit pas possible, au moins dans les premières phases du processus, c'est à dire si:

$$\zeta_2 = \eta_2 + 4\lambda a_1 \psi_2 < 0 \quad (4-23)$$

En effet, le deuxième mode commence d'abord par décroître si (4-23) est vérifiée, et les deux équations (4-17), (4-18) sont alors "quasi-découplées". La croissance du premier mode finit cependant par entraîner le second, par l'intermédiaire du couplage non linéaire visible sur l'équation (4-18); de la sorte, les résultats découlant de cette hypothèse de découplage ne sont plus valables au voisinage de la localisation, mais ils apportent cependant une amélioration par rapport à l'approximation linéaire. L'intégration de l'équation différentielle ordinaire (4-21) fournit:

$$A_1(t) = A_1(0) \zeta_1 \exp(\eta_1 t) / (\zeta_1 + \xi_1 A_1(0)(1 - \exp(\zeta_1 t))) \quad (4-24)$$

La solution (4-24) se réduit à l'approximation linéaire:

$$A_1(t) = A_1(0) \exp(\eta_1 t) \quad (4-25)$$

lorsque l'amplitude initiale $A_1(0)$ est assez faible. En outre, un potentiel $V(A_1)$ peut être défini par:

$$\frac{dA_1}{dt} = - \frac{dV}{dA_1}, \quad V(A_1) = - \frac{1}{2} \zeta_1 A_1^2 - \frac{1}{3} \xi_1 A_1^3 \quad (4-26)$$

Si l'on compare la solution explicite (4-24) à la solution $A_1(t)$ fournie par l'intégration numérique des équations couplées (4-17,4-18), on s'aperçoit que la différence n'est pas significative si les hypothèses qui président au découplage sont respectées, et cela jusqu'au voisinage de la localisation. D'autre part la richesse des informations contenues dans la solution explicite (4-24) justifie également son usage, même si elles ne représentent que des indications approchées.

Ainsi, il est facile de voir que le comportement des perturbations est très différent selon le signe de l'amplitude initiale $A_1(0)$. Lorsque $A_1(0)$ est négatif, $A_1(t)$ tends vers une limite finie négative:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A_1(t) = -\zeta_1 / \xi_1 \quad (4-27)$$

Un minimum du potentiel V est atteint, et une nouvelle solution stationnaire est obtenue. Ce résultat est compatible à la fois avec les résultats de JOSEPH (1965) et avec le théorème de SATTINGER (1972). Lorsque au contraire $A_1(0)$ est positif, l'amplitude $A_1(t)$ de la perturbation croît vers l'infini en un temps fini t^* :

$$t^* = \frac{1}{\zeta_1} \text{Log}((\zeta_1 + \xi_1 A_1(0)) / \xi_1 A_1(0)) \quad (4-28)$$

Le temps critique t^* dépend à la fois des propriétés mécaniques du matériau et des conditions initiales; son existence ne peut pas être prédite à l'aide d'une théorie linéarisée. Un autre aspect intéressant de la solution non linéaire (4-24) est la mise en évidence d'un défaut critique initial au delà duquel l'analyse de stabilité linéaire n'est

plus valable. En effet, supposons que:

$$\zeta_1 < 0, A_1(0) > 0, \zeta_1 + \xi_1 A_1(0) < 0 \quad (4-29)$$

Il est facile de s'assurer que dans ces conditions la dérivée de $A_1(t)$ est négative; ainsi, la perturbation non linéaire est-elle décroissante, comme la perturbation linéaire, et la solution stationnaire est stable. Si maintenant $A_1(0)$ est assez grand pour que:

$$\zeta_1 < 0, A_1(0) > 0, \zeta_1 + \xi_1 A_1(0) > 0 \quad (4-30)$$

la perturbation non linéaire tend vers l'infini, alors que la perturbation linéaire tend toujours vers zéro. Le défaut critique au delà duquel la stabilité non linéaire diffère de la stabilité linéaire est:

$$A_{1c}(0) = -\zeta_1 / \xi_1 \quad (4-31)$$

Il dépend de la contrainte appliquée λ :

$$A_{1c} = (\lambda_{ce} - \lambda - \lambda \psi_1 a_1 / a_0) / (2\lambda a_1 / 3\pi a_0) \quad (4-32)$$

Nous avons cherché à comparer les résultats analytiques exposés ci dessus aux résultats fournis par l'intégration numérique de l'équation (2-10). Celle-ci est réalisée au moyen d'une méthode de différences finies analogue à celles que nous avons utilisées dans les chapitres précédents; nous avons naturellement imposé pour conditions initiales la distribution stationnaire de températures dont il s'agit de tester la

stabilité. Les valeurs numériques utilisées sont:

$$\mu = 0.5 \cdot 10^9 \text{ SI} , \nu = -0.04 , m = 0.02 \quad (4-33)$$

$$\rho = 7800. \text{ kg/m}^3 , K = 50. \text{ W/mK} , C = 3.9 \cdot 10^6 \text{ J/m}^3\text{K} , \beta = 0.9$$

$$\bar{\gamma}_0 = 90. \text{ s}^{-1} , \bar{\theta}_0 = 300 \text{ K} , h = 10^{-3} , \epsilon = 10^{-2}$$

Dans ces conditions, la valeur maximum de λ est $\lambda_{\max} = 2.42$. Elle est obtenue pour $\theta_m = 2.2$. Pour la valeur $\theta_m = 2.7$, la contrainte λ est:

$\lambda = 2.35$, et:

$$\psi_1 = 1.22 , \zeta_1 = 3.16 , \zeta_2 = -11.63$$

La conduction thermique joue un rôle important car le deuxième mode est puissamment amorti: les hypothèses nécessaires à l'analyse non linéaire approchée sont donc respectées. La valeur critique de la déformation, fournie par la relation (4-28) est :

$$\gamma_c = 12.79$$

Elle doit être comparée à la valeur fournie par l'intégration numérique:

$$\gamma_c = 16.09$$

Ces deux valeurs diffèrent assez fortement, mais restent cependant du même ordre de grandeur. La théorie proposée apporte donc une amélioration du modèle linéaire qui fournirait une valeur critique infinie, mais elle reste d'une utilité seulement qualitative. En outre,

La solution perturbée n'est pas atteinte, puisque instable; cela limite l'intérêt de l'analyse exposée pour les faibles valeurs de n . En effet, les deux solutions stationnaires sont alors éloignées l'une de l'autre, et une perturbation de la solution basse ne peut être également considérée comme une perturbation de la solution haute. Au contraire, lorsque n est grand, comme c'est le cas pour nombre de matériaux, la solution stationnaire haute est voisine de la solution basse, de sorte que la stabilité de cette dernière n'a que peu de signification si la perturbation est assez forte. En effet, celle-ci peut alors être considérée comme une perturbation de la solution haute; la théorie présentée ci-dessus trouve alors son domaine d'application.

Lorsque la contrainte λ est très supérieure à 1, les conditions à la limite thermiques ne peuvent plus être supposées isothermes; nous nous proposons d'étudier maintenant la localisation de la déformation plastique sous les conditions à la limite adiabatiques, et de fournir une déformation critique approchée, au moyen d'une méthode de perturbation non linéaire.

5-Frontières adiabatiques.

Nous considérons l'équation de la chaleur non linéaire :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \bar{\lambda} \theta^n \quad (5-1)$$

La température adimensionnelle θ est soumise aux conditions aux limites:

$$\frac{\partial \theta(0, t)}{\partial y} = \frac{\partial \theta(1, t)}{\partial y} = 0 \quad (5-2)$$

Nous notons $\bar{\lambda}$ le paramètre de contrainte habituellement noté λ . Il existe des solutions homogènes θ_0 à cette équation; soit en effet $\theta_0(0)$ la valeur initiale homogène de la température. On obtient:

$$\theta_0(t) = \theta_0(0) (1-t/t_h)^{1-n} \quad (5-3)$$

La solution homogène (5-3) met en évidence l'existence d'un temps critique fini t_h :

$$t_h = 1/\bar{\lambda}(n-1)\theta_0(0)^{n-1} = \bar{t}_h \theta_0(0)^{n-1} \quad (5-4)$$

pour lequel la température devient infinie. $\bar{t}_h = 1/\bar{\lambda}(n-1)$ est le temps critique lorsque $\theta_0(0)=1$. Par suite une analyse de stabilité basée sur l'étude de la croissance de perturbations n'est pas significative de la localisation de la déformation et nous sommes conduits de nouveau à une analyse basée sur la méthode des perturbations relatives. Nous introduisons la variable relative u définie par:

$$u(y,t) = (\theta(y,t) - \theta_0(t))/\theta_0(t) \quad (5-5)$$

Le changement de variable dans l'équation (5-1) conduit à l'équation relative:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\lambda f(u)}{1-\tau/t_h} \quad (5-6)$$

où l'on a posé:

$$\lambda = \bar{\lambda} \theta_0(0)^{n-1}; \quad f(u) = (1+u)^n - (1+u) \quad (5-7)$$

et aux conditions aux limites:

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial y} = \frac{\partial u(1,t)}{\partial y} = 0 \quad (5-8)$$

L'équation de la chaleur (5-6) admet un terme source de chaleur non linéaire et instationnaire, tendant vers l'infini lorsque $t \rightarrow t_h$. Le traitement de cette équation est plus facile si l'aspect instationnaire est reporté sur le terme linéaire de conduction thermique par le changement de chronologie $t_1(t)$:

$$\frac{dt_1}{dt} = 1/(1-t/t_h) \quad , \quad \exp(-t_1/t_h) = 1-t/t_h \quad (5-9)$$

En effet l'utilisation du temps lent t_1 conduit à l'équation:

$$\frac{\partial u}{\partial t_1} = \exp(-t_1/t_h) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda f(u) \quad (5-10)$$

où le paramètre de contrainte demeure constant. Lorsque t varie dans l'intervalle $^{\circ}0, t_h^{\circ}$, t_1 varie dans l'intervalle $^{\circ}0, +\infty^{\circ}$, et l'on voit que l'influence de la conduction thermique tend vers zéro lorsque $t \rightarrow t_h$ et $t_1 \rightarrow \infty$. Les conditions à la limite (5-8) s'appliquent toujours, en substituant t_1 à t . L'équation (5-10) admet des solutions homogènes u_0 ; la solution homogène: $u_0(t_1) = 0$, $t_1 \geq 0$, correspond à la température homogène θ_0 de valeur initiale $\theta_0(0)$.

En première approximation, nous rappellerons la solution du problème linéarisé qui a déjà été traité au chapitre 3 (4-24). Nous supposons u assez petit pour que:

$$f(u) \cong u f'(0) = (n-1)u \quad (5-11)$$

et nous cherchons des solutions non-homogènes de l'équation (5-10) sous la forme:

$$u(y, t_1) = \varphi_l(t_1) \cos(2\pi l y) \quad ; \quad l=1, 2, \dots \quad (5-12)$$

la solution qui correspondrait à $l=0$ est une perturbation homogène, et nous l'intégrerons dans la solution homogène θ_0 . Les amplitudes φ_l associées aux fonctions propres $\cos(2\pi l y)$ satisfont à l'équation différentielle:

$$\frac{d\varphi_e}{dt_1} = -4\pi^2 l^2 \exp(-t_1/t_h) \varphi_e + \lambda(n-1)\varphi_e \quad (5-13)$$

dont les solutions sont:

$$\varphi_e(t_1) = \varphi_e(0) \exp(t_1/t_h) \exp(4\pi^2 l^2 t_h (\exp(-t_1/t_h) - 1)) \quad (5-14)$$

c'est-à-dire en fonction du temps rapide initial t :

$$\varphi_e(t) = \varphi_e(0) \exp(-4\pi^2 l^2 t) / (1 - t/t_h) \quad (5-15)$$

Les conclusions que l'on peut tirer de ce résultat sont les suivantes: la conduction thermique freine le développement des perturbations relatives d'autant plus fortement que le nombre d'ondes l est important. Cependant, elle ne peut les empêcher de tendre vers l'infini lorsque $t \rightarrow t_h$; il y a alors localisation de la déformation plastique. Le temps critique obtenu: t_h est indépendant de la conduction thermique. Comme nous l'avons indiqué au chapitre précédent, il n'est pas douteux que la localisation prévue par cette théorie linéarisée ne se produise; cependant, le temps critique t_h prévu par cette théorie, et qui est confondu avec le temps critique de la solution homogène (5-3), n'est pas établi de façon certaine, car l'hypothèse de linéarité (5-11) n'est plus vérifiée lorsque $t \rightarrow t_h$. t_h devrait dépendre de la conduction thermique; il représente en fait une borne supérieure du temps critique réel de localisation.

Pour tenter d'améliorer ce résultat, nous considérons les termes suivants du développement de $f(u)$ en posant:

$$f(u) \cong (n-1)u + \frac{1}{2} n(n-1)u^2 + \frac{1}{6} n(n-1)(n-2)u^3 \quad (5-16)$$

et nous écrivons u sous la forme issue du problème linéaire:

$$u = \sum A_p(t) \cos(2\pi l y) , \quad l \geq 1 \quad (5-17)$$

Ce développement commence à l'ordre $l=1$, car le mode homogène $l=0$ est intégré à la solution homogène. Comme dans la section précédente où nous avons considéré le cas isotherme, nous serons amenés à simplifier considérablement le problème posé en ne considérant que le premier mode, et en négligeant donc le couplage avec les modes d'ordre supérieur. Il est bien clair que l'on ne peut espérer une bonne description de la distribution de température au voisinage de la localisation avec le premier mode seulement. Ainsi par exemple la fonction de DIRAC, qui représenterait une localisation de l'augmentation de température en un point, nécessite-t-elle une contribution égale de tous les modes. Cependant cette démarche est justifiable si elle permet d'obtenir un temps critique plus petit que celui qui est fourni par la solution linéaire (5-15), car une amélioration est alors obtenue. Dans ce but nous écrivons simplement:

$$u = A(t)\cos(2\pi y) \quad (5-18)$$

Compte-tenu de (5-10), (5-16) et (5-18) on obtient en intégrant sur l'épaisseur de la bande:

$$\frac{dA}{dt_1} = -4\pi^2 \exp(-t_1/t_h)A + \lambda(n-1)A + \frac{1}{8}\lambda n(n-1)(n-2)A^3 \quad (5-19)$$

On peut calculer de manière relativement simple la solution de cette équation différentielle non linéaire; elle fait intervenir des fonctions exponentielle-intégrale. Cependant, compte-tenu des approximations qui

ont été pratiquées, nous ne sommes pas intéressés ici par une solution numérique, qu'il est plus rationnel de calculer à partir de l'équation non-linéaire initiale (5-1). Une expression très simple du temps critique de localisation peut être obtenue en négligeant l'influence de la conduction thermique; cela est légitime au voisinage de la localisation ($t_1 \rightarrow \infty$), car $\exp(-t_1/t_h) \rightarrow 0$, mais néglige la décroissance initiale éventuelle de la perturbation. Une approche plus fine consiste à calculer la décroissance initiale de la perturbation dans la zone où la conduction thermique joue un rôle significatif, en négligeant les termes non-linéaires, puis à négliger la conduction lorsque la perturbation devient croissante, tout en tenant compte des effets non-linéaires. Le raccordement des deux solutions se fait en prenant pour conditions initiales du second calcul les conditions au minimum éventuel de la perturbation. L'analyse qui consiste à ignorer la conduction thermique majore la valeur du défaut initial, et fournit une borne inférieure du temps critique que l'on peut obtenir dans le cadre fixé par les hypothèses (5-16) et (5-18). C'est ce que nous ferons ici, dans la mesure où ces hypothèses sont déjà très fortes. L'intégration de l'équation (5-19):

$$\frac{dA}{dt_1} = \lambda(n-1)A + \frac{1}{8}\lambda n(n-1)(n-2)A^3 \quad (5-20)$$

où l'on a négligé la conduction, fournit:

$$A(t_1) = A(0) \exp(t_1/t_h) / (1 + \kappa A(0)^2 - \kappa A(0)^2 \exp(2t_1/t_h))^{1/2} \quad (5-21)$$

et le temps critique t_1^* :

$$t_1^* = \frac{t_h}{2} \text{Log}((1 + \kappa A(0)^2) / \kappa A(0)^2) \quad (5-22)$$

avec:

$$\kappa = \frac{1}{8} n(n-2) \quad (5-23)$$

Le temps lent correspondant est:

$$t_c^* = t_h (1 - (\kappa A(0)^2 / (1 + \kappa A(0)^2)^{1/2})) \quad (5-24)$$

Cette valeur du temps critique de localisation est plus faible que le temps critique t_h de la solution linéaire. Elle dépend du coefficient κ de non-linéarité et de l'amplitude du défaut initial; lorsque $\kappa=0$, t_c^* se réduit au temps critique t_h de la solution linéaire. Pour les conditions initiales:

$$\theta(y, 0) = 1 + \epsilon(1 - \cos(2\pi y))/2 \quad (5-25)$$

le temps critique t_c^* s'écrit :

$$t_c^* = \tilde{t}_h (1 + \epsilon/2)^{1-\nu} (1 - (\kappa \epsilon^2 / 4(1 + \kappa \epsilon^2 / 4))^{1/2}) \quad (5-26)$$

soit, pour ϵ petit:

$$t_c^* \approx \tilde{t}_h (1 - \epsilon(n-1 - \kappa^{1/2})/2) \quad (5-27)$$

Cette valeur doit être comparée au temps critique de localisation que l'on obtient par intégration numérique de l'équation (5-1) sous les conditions initiales (5-2). Nous avons utilisé les valeurs suivantes des paramètres mécaniques:

$$\mu = 3.58 \cdot 10^9 \text{ SI} , \nu = -0.38 , m = .019 \quad (n = 20.)$$

$$C = 3.9 \cdot 10^6 \text{ J/m}^3\text{K} , K = 54 \text{ W/mK} , \beta = 0.9 \quad (5-28)$$

$$\bar{\theta}_0 = 300. \text{ K} , \bar{\dot{\gamma}}_0 = 5 \text{ s}^{-1} , h = 10^{-2} \text{ m} , \epsilon = 10^{-2}$$

L'intégration numérique fournit pour le temps critique de localisation:

$$\bar{\tau} \approx 1.35 \cdot 10^{-1} \bar{\dot{\gamma}}_0^{-1} \quad (5-29)$$

Le temps critique de la solution homogène $\theta_0(0)=1$ est:

$$\bar{\tau}_h \approx 1.62 \cdot 10^{-1} \bar{\dot{\gamma}}_0^{-1} \quad (5-30)$$

Le temps critique de la solution homogène $\theta_0(0)=1+\epsilon/2$ et de la perturbation relative linéaire est:

$$t_h \approx 1.47 \cdot 10^{-1} \bar{\dot{\gamma}}_0^{-1} \quad (5-31)$$

et le temps critique $\bar{\tau}_c^*$ non-linéaire est donné par:

$$\bar{\tau}_c^* \approx 1.41 \cdot 10^{-1} \bar{\dot{\gamma}}_0^{-1} \quad (5-32)$$

Un résultat tenant compte de l'influence stabilisante de la conduction, mais établi à partir des hypothèses de troncature (5-16) et (5-18) se situerait entre $1.41 \cdot 10^{-1} \bar{\dot{\gamma}}_0^{-1}$ et $1.47 \cdot 10^{-1} \bar{\dot{\gamma}}_0^{-1}$. Enfin le temps critique numérique non-linéaire pour une conduction nulle est $1.33 \cdot 10^{-1} \bar{\dot{\gamma}}_0^{-1}$. On peut donc estimer avoir obtenu avec (5-32) une approximation raisonnable du temps critique de localisation, compte-tenu des hypothèses très fortes qui sont à la base de ce résultat. Ce résultat pourrait permettre d'interpréter des expériences menées avec des matériaux très peu écrouissables, comme certains alliages de Titane (Ta6V).

References du chapitre 4.

- ARGON, A.S. 1973 The Inhomogeneity of Plastic Deformation
 ch7, Am.Soc.Metals, Metals Park, OH
- BAI, Y.L. 1982 J.Mech.Phys.Sol. 30,195.
- BURNS, T.J. 1982 Mech. of Mat. 1,313
TRUCANO, T.G.
- CARSLAW, H.S. 1941 Conduction of Heat in Solids. Oxford
 University Press.
JAEGER, J.C.
- CLIFTON, R.J. 1978 Report to the NRC committee on Material
 Responses to ultra-sonic loading rates.
- CLIFTON, R.J. 1984 Scripta Met. 18,443.
DUFFY, J.
HARTLEY, K.A.
SHAWKI, T.G.
- CULVER, R.S. 1973 In Metallurgical Effects at High Strain-
 rates(ed. RHODE) p519, Plenum Press N-Y
- DAFERMOS, C.M. 1983 Quart.Appl.Math., 1,45
HSIAO, L.

- ECKHAUS, W. 1965 Studies in Non-Linear Stability Theory.
Springer-Verlag
- FRESSENGEAS, C. 1986 J.Mech.Phys.Sol, à paraitre.
MOLINARI, A.
- JOSEPH, D.D. 1965 Int.J.Heat.Mass.Transfer, 8, 281
- JOSEPH, D.D. 1965 The Phys.of.Fluids, 8, 12, 2195
- MERZER, A.M. 1982 J.Mech.Phys.Sol., 30, 323
- MOLINARI, A. 1983 C.R.A.S., Paris, 296, 1.
CLIFTON, R.J.
- MOLINARI, A. 1985 J.Mec.Th.App., 4, 5, 659-684.
- PAN, J. 1983 Int.J.Sol.Struct., 19, 153;
- RECHT, R.F. 1964 Trans.A.S.M.E. 86, 189.
- SATTINGER, D.H. 1973 Topics in Stability and Bifurcation Theory.
Springer Verlag
- STAKER, M.R. 1981 Acta Metall., 4, 683.

VON TURKOVITCH, D.F. 1972 On a Class of Thermo-Mechanical Processes
 during Rapid Plastic Deformation. XXII
 General Assembly of C.I.R.P., Stockholm

WADA, M. 1978 Phil. Mag., 38, 2, 167

NAKAMURA, T.

KINOSHITA, N.

Figure 1: Facteur de contrainte en fonction de la température maximum.

5-Conclusions.

Au cours du premier chapitre, nous avons développé deux aspects bien différents de la formulation de lois de comportement dans le domaine des grandes déformations et/ou des grandes vitesses de déformation des matériaux: le premier est le point de vue phénoménologique; on sait qu'il consiste en une description macroscopique du comportement, notamment à l'aide de "variables internes" dont il convient de se donner l'évolution, mais sans faire référence aux mécanismes intimes de la déformation plastique. Cette démarche est justifiable si les lois ainsi formulées demeurent assez simples pour permettre leur utilisation "à la main" ou dans des codes de calcul, et si elles permettent de décrire le comportement des matériaux pour des trajets de déformation suffisamment variés. Elles doivent en outre satisfaire à un principe d'économie de paramètres identifiables à partir de données expérimentales. Il nous semble que ces critères sont remplis par les lois d'écrouissage cinématique que nous avons proposées. (A cet égard, les règles de la déontologie scientifique exigent qu'un jeu de paramètres identifiés sur la base d'un chemin de déformation donné, serve à décrire tous les chemins de déformation.) Le mérite des lois de comportement phénoménologiques "simples" n'est pas mince; elles permettent en effet de formuler, puis d'élucider un certain nombre de situations physiques complexes en elles mêmes, comme les phénomènes d'instabilité, et nous pensons que nos chapitres 2 et 3 en sont un exemple. En revanche, elles ne possèdent au mieux qu'une aptitude à la description des comportements, mais pas un pouvoir d'explication ou d'interprétation. C'est pourquoi on est amené parallèlement à rechercher des lois de comportement offrant une

description ontologique, basée sur des mécanismes physiques considérés comme élémentaires, comme les glissements sur les plans cristallographiques. C'est ce que nous avons esquissé dans la seconde partie du chapitre 1; généralisée aux matériaux visqueux non-newtoniens, cette approche conduit à des développements importants dans la prédiction des textures cristallographiques aux faibles et grandes vitesses de déformation. Avec une telle approche "microscopique-macroscopique", ce qui est gagné sur le plan de l'interprétation physique est en général perdu sur celui de la simplicité de l'utilisation, et sur le pouvoir de suggestion des relations explicites; on est en effet conduit le plus souvent à une formulation numérique, et à des temps de calcul importants. Il nous semble que nous avons évité ces écueils, puisque nous avons pu fournir un exemple de calcul explicite non-académique, et de manière générale une loi constitutive (ch 1-II,1-23) simple. Une étape de notre travail à venir sera l'utilisation de ces lois de comportement dans l'étude de l'influence du développement des textures cristallographiques sur la formation des bandes de cisaillement.

Les chapitres 2 et 3 sont dominés par l'étude de l'instabilité de phénomènes essentiellement non-linéaires et instationnaires. Au chapitre 2, nous avons utilisé les méthodes de perturbation linéaire classiques, en les étendant aux phénomènes quasi-stationnaires. Nous avons montré que, lorsque tel était bien le cas, elles pouvaient rendre compte qualitativement et quantitativement des résultats expérimentaux. Nous avons pu également établir des relations et des recoupements entre les différentes méthodes d'étude utilisées: méthodes de perturbation, résultats analytiques explicites et calculs numériques, et nous avons constaté la convergence des résultats obtenus de manières aussi différentes, ainsi qu'un bon accord avec les résultats expérimentaux. Au

chapitre 3, nous avons étendu les méthodes de perturbation classiques au cas des phénomènes instationnaires; en outre, elles ont été adaptées à l'étude plus spécifique de la localisation de la déformation, par l'introduction de la méthode de perturbation relative. Nous avons montré que cette méthode était mieux à même de rendre compte de la localisation d'une déformation instationnaire, grâce à une analyse plus fine du processus; des liens et des recoupements ont également été établis avec les calculs non-linéaires exacts ou numériques, et la compatibilité des résultats a été obtenue. Nous avons utilisé la méthode de perturbation relative dans le cas de la traction simple, développé précédemment dans le chapitre 2; cependant nous n'avons pas rendu compte plus avant de ce travail car les résultats de l'analyse de localisation ne sont pas différents de ceux qui sont issus de l'analyse de stabilité. En effet, il est bien connu que l'instabilité de la traction simple est beaucoup moins sensible aux effets de vitesse de déformation que l'instabilité de glissement; ce sont les effets géométriques et thermiques qui prédominent. La croissance des perturbations est moins affectée par les effets de viscosité, de sorte qu'instabilité et localisation de la déformation plastique sont moins différents. La poursuite de ce travail nécessite avant tout de pouvoir disposer d'une base de données expérimentales, à ce jour encore insuffisante; nous espérons pouvoir développer cet aspect au L.P.M.M. dans les prochaines années.

Le chapitre 4 de ce travail doit être considéré comme un essai en direction des méthodes de perturbation non-linéaires. Utilisées de manière extensive notamment en Mécanique de Fluides pour l'étude des instabilités d'écoulement, elles n'ont pas encore fait l'objet d'applications dans le domaine qui nous intéresse ici. Bien qu'adaptées aux problèmes de localisation de la déformation, les méthodes que nous

avons développées dans ce chapitre s'inspirent des études relatives aux fluides, dans la mesure où, l'écoulement étant ignoré, il peut encore exister un écoulement stationnaire inhomogène. Naturellement, elles pourraient rendre compte de la localisation de la déformation plastique de matériaux très peu écrouissables, comme certains alliages de Titane, ou encore d'expériences pratiquées jusqu'à une déformation donnée. (à supposer que la déformation soit une bonne mesure de l'écrouissage.) L'étape ultérieure devra néanmoins être la prise en considération de l'écrouissage du matériau. Il n'est d'ailleurs pas certain que les méthodes de perturbation non-linéaires puissent atteindre le but qui leur est fixé: fournir une estimation des déformations ultimes avant rupture, de manière satisfaisante. Il en est de même des méthodes d'échelles multiples qui recourent aussi à des troncatures du problème initial; cependant, même des résultats explicites approchés seraient intéressants car, outre leur utilité pratique immédiate due à leur concision, ils suggèrent des pistes à explorer par les moyens plus lourds du calcul numérique, en mettant en valeur les aspects physiques du problème.