



**HAL**  
open science

# Relations entre texture, anisotropie, lois de comportement et instabilités plastiques dans les polycristaux

Gilles Canova

► **To cite this version:**

Gilles Canova. Relations entre texture, anisotropie, lois de comportement et instabilités plastiques dans les polycristaux. Chimie. Université Paul Verlaine - Metz, 1986. Français. NNT : 1986METZ005S . tel-01775697

**HAL Id: tel-01775697**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01775697v1>**

Submitted on 24 Apr 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

RELATIONS ENTRE  
TEXTURE, ANISOTROPIE  
LOIS DE COMPORTEMENT  
ET INSTABILITES PLASTIQUES  
DANS LES POLYCRISTAUX

par

Gilles CANOVA

Ingénieur Civil des Mines

M.Eng., PhD.

Thèse soutenue le 5 Juin 1986 à l'Université de  
METZ pour obtenir le titre de DOCTEUR ES SCIENCES devant le  
Jury composé de:

U.F.KOCKS	Los Alamos National Laboratory, USA
R.J.ASARO	Brown University, Providence, USA
A.MOLINARI	Université de METZ
J.KLEPACKO	Université de METZ
P.FRANCIOSI	Université PARIS IX
R.PENELLE	Université d'ORSAY
J.M.JALINIER	DAST, RENAULT
F.RONDE OUSTEAU	SOLLAC

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE -METZ	
N° inv.	19860105
Cote	S/M3 86/5
Loc	Magasin

Je dédie cette thèse à  
mes parents, qui n'ont pas  
cru mes profs de 3eme  
lorsque ces derniers m'ont  
jugé inapte aux études  
scientifiques.

Je voudrais tout d'abord remercier les Drs Jonas et Kocks, qui m'ont encadré pour la majeure partie de ce travail. Ils m'ont transmis contagieusement la passion qu'ils ont pour la recherche. Ils ont aussi guidé mes pas quand (souvent) le besoin s'en ressentait. Le reste du travail a été fait avec les conseils avisés de Alain Molinari et Claude Fressengeas (disciples de Jaumann) qui m'ont initié aux concepts ardue de la mécanique.

Je remercie également mes collègues de travail, N.Christodoulou, B.Bacroix, E.Rauch, C.Tomé, A.Molinari et C.Fressengeas pour les innombrables discussions sur le sujet qui ont permis à ce travail d'être (enfin) terminé.

Je dois finalement beaucoup à ma femme, Marie, qui m'a permis de trouver le temps de rédiger cette thèse à la maison.

Je remercie enfin tous les membres du Jury pour avoir eu la patience de lire cet ouvrage.

## TABLE DES MATIERES

### CHAPITRE 1: INTRODUCTION

### CHAPITRE 2: BIBLIOGRAPHIE

- 2.1 Les modèles auto-cohérents
  - 2.1.1 Le modèle de Kröner
  - 2.1.2 Le modèle de Hill
  - 2.1.3 Le modèle de Zaoui et Berveiller
- 2.2 Le modèle "statique"
- 2.3 Les modèles type "Taylor"
- 2.4 Analyse critique
  - 2.4.1 Les modèles auto-cohérents
  - 2.4.2 Le modèle statique
  - 2.4.3 Les modèles du type "Taylor"

### CHAPITRE 3: LA THEORIE

- 3.1 Les principes
- 3.2 Les conditions aux limites
  - 3.2.1 La traction uniaxiale
  - 3.2.2 La compression uniaxiale
  - 3.2.3 Le laminage
  - 3.2.4 La torsion
  - 3.2.5 Discussion
- 3.3 La sélection des systèmes actifs
  - 3.3.1 Analyse des sous-surfaces de charge

- 3.3.2 Algorithme de sélection des systèmes
- 3.4 Calcul des changements d'orientation
  - 3.4.1 L'approche moyennée
  - 3.4.2 L'approche probabiliste
  - 3.4.3 L'approche de Renouard et Wintenberger
  - 3.4.4 Un critère visco-plastique

## CHAPITRE 4: RESULTATS DES SIMULATIONS DE TEXTURE

- 4.1 Methodes de description des textures
- 4.2 L'incrément de déformation
- 4.3 Choix des orientations initiales
- 4.4 Résultats des simulations
  - 4.4.1 La traction
  - 4.4.2 La compression
  - 4.4.3 Le laminage
  - 4.4.4 La torsion

## CHAPITRE 5: RELATION MICROSCOPIQUE-MACROSCOPIQUE

- 5.1 Les expériences
  - 5.1.1 Les tests de traction
  - 5.1.2 Les tests de compression
  - 5.1.3 Les tests de torsion
- 5.2 Description de la plasticité
  - 5.2.1 Approche macroscopique
  - 5.2.2 La plasticité du polycristal
  - 5.2.3 Procédure de calcul
- 5.3 Les résultats
- 5.4 Discussion et conclusions

## CHAPITRE 6: RELATION ENTRE SYMETRIE DES TEXTURES ET DES SURFACES DE CHARGE

- 6.1 Construction des surfaces de charge
  - 6.1.1 Notation
  - 6.1.2 Définitions
  - 6.1.3 Méthode de construction des surfaces de charge
- 6.2 Analyse des symétries
  - 6.2.1 Un plan de symétrie
  - 6.2.2 Trois plans de symétrie
  - 6.2.3 Symétrie cubique et hexagonale
  - 6.2.4 Symétrie de fibre
  - 6.2.5 Isotropie
- 6.3 Applications
  - 6.3.1 Le laminage
  - 6.3.2 La torsion

## CHAPITRE 7: TEXTURES ET INSTABILITES PLASTIQUES

- 7.1 Les bandes de cisaillement en laminage
- 7.2 Les courbes limites de formage

## CHAPITRE 8: DISCUSSION: LIMITES ET EXTENSIONS DU MODELE

- 8.1 Hétérogénéités de déformation plastique
- 8.2 Extension aux grandes vitesses de déformation.

## CHAPITRE 9: CONCLUSIONS

ANNEXE 1: CALCUL DE L'EQUATION D'INTERACTION POUR UNE INCLUSION ELLIPSOIDALE.

ANNEXE 2: ETUDE DES ETATS PLASTIQUES D'ORDRE 4, 3 et 2.

ANNEXE 3: RESULTATS COMPLEMENTAIRES SUR LA TORSION.



## 1 INTRODUCTION

Le présent ouvrage est le résultat de cinq années de travail sur la modélisation des textures dans les polycristaux. Ayant travaillé de 1977 à 1980 avec le Professeur J.J.Jonas sur l'élaboration d'une méthode permettant de calculer avec précision les contraintes de cisaillement en surface de barres cylindriques (1) lors de l'essai de torsion, d'autre part les Dr. Ch.G'sell et N.Christodoulou ayant aussi mis au point une méthode fine de test de traction uniaxiale aux grandes déformations, il est devenu possible de comparer les courbes contrainte équivalente-déformation équivalente. L'écart croissant entre ces deux courbes, Fig.1, le critère de von Mises étant appliqué ici, montre bien l'inadéquation d'un tel critère aux grandes déformations. Le même constat a été fait par beaucoup d'autres auteurs, et grossièrement deux hypothèses ont été émises (2,3) pour expliquer cette différence croissante: un effet de texture qui tend à 'durcir' l'éprouvette de traction et à 'adoucir' celle de torsion, ainsi qu'un effet d'écroutissage microscopique qui, lié à la texture, tend à activer plus de systèmes de glissement en traction qu'en torsion et ainsi qualitativement à favoriser un plus fort écroutissage lors du premier type de test. Pour avoir une réponse un peu plus quantitative sur l'importance

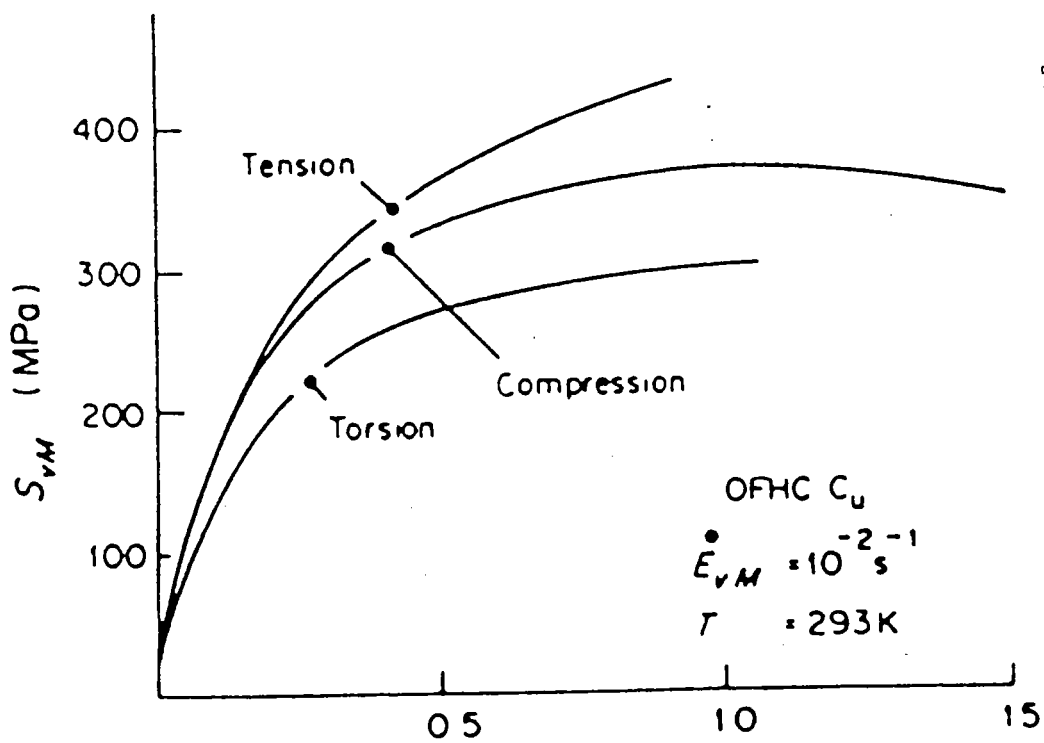


Figure 1. Comparaison des tests de traction, compression et torsion en grandes déformations, utilisant le critère de von Mises. On note l'écart croissant entre les courbes.

relative de ces phénomènes, il fallait pouvoir modéliser le développement de la texture aux grandes déformations.

Ce travail a été donc fait d'abord à l'Université MCGILL, à Montréal, dans le laboratoire du Professeur J.J.Jonas, en collaboration avec le Dr.U.F.Kocks de Los Alamos National Laboratory, puis continué avec ce dernier, et enfin achevé à l'Université de METZ, dans le Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux, avec les Professeurs A.Molinari et M.Berveiller, toujours en collaboration avec U.F.Kocks. Il est bien évident que les concepts ont évolué au fil des publications, ils vont être décrits, jugés, et les erreurs commises et publiées pendant ces années vont être soulignées.

Le but d'un tel travail est donc la modélisation aux grandes déformations de la plasticité des polycristaux, pour en décrire l'écroutissage puis l'application à des problèmes mécaniques à l'échelle industrielle ou à celle du laboratoire. Le modèle est considéré ici d'abord comme un outil, et donc utilise autant que possible un formalisme simple et compréhensible. Le formalisme développé n'est pas le plus général possible, mais il utilise d'emblée des hypothèses simplificatrices (qui seront naturellement discutées) et qui le rendent d'autant plus maniable. Les modèles plus rigoureux trouvent leur utilité dans ce contexte en tant que 'sécurité', c'est-à-dire qu'ils peuvent confirmer ou infirmer le bien-fondé de telle ou telle hypothèse.

Les prochains chapitres vont traiter les sujets suivants:

-Chapitre 2: Bibliographie.

-Chapitre 3: La théorie, fondements et méthode de calculs.

-Chapitre 4: Résultats de prédictions de textures.

-Chapitre 5: Relation microscopique-macroscopique

-Chapitre 6: Relation entre la symétrie des textures et la symétrie des surfaces de charge.

-Chapitre 7: Problèmes d'instabilités plastiques, bandes de cisaillement et CLF.

-Chapitre 8: Discussion, des problèmes d'ambiguïté, des phénomènes d'accomodation plastique, et des textures aux grandes vitesses de deformation.

-Chapitre 9: Conclusions.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUESDU CHAPITRE 1

- (1) G.R.Canova, S.Shrivastava, J.J.Jonas and C.G'sell, in "Formability of Metallic Materials", 2000A.D., ASTM STP 753, J.R.Newby and B.A.Niemeier eds, 1982, p.189.
- (2) J.J.Jonas, G.R.Canova, S.C.Shrivastava and N.Christodoulou, Proc.Res. Workshop Plasticity of Metals at Finite Strain: Theory, Experiment and Computation, E.H.Lee and R.L.Mallett eds, 1982, p.206.
- (3) C.Tomé, G.R.Canova, U.F.Kocks, N.Christodoulou and J.J.Jonas, Acta.Met., vol.32 n°10, 1984, p.1637.

## 2 BIBLIOGRAPHIE

Lorsqu'un matériau polycristallin, donc hétérogène, est déformé dans des conditions quasi-statiques, la continuité de la matière étant supposée préservée, il devra obéir à des relations d'équilibre et de compatibilité. Si on désigne par  $\underline{\sigma}$  le tenseur des contraintes locales, l'absence de forces d'inertie et de forces de volume permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\underline{\sigma}) &= 0 \\ \text{ou} & \qquad \qquad \qquad (2.1) \\ \sigma_{ij,j} &= 0 \end{aligned}$$

ce qui représente l'équilibre en tout point du matériau. La déformation de chaque grain doit aussi être compatible avec la continuité de la matière, ce qui peut être formulé en écrivant que l'incrément de déplacement  $d\vec{u}$  est une différentielle totale :

$$du_i = (\partial u_i / \partial x_j) dx_j = \beta_{ij} dx_j \qquad (2.2)$$

Les relations de Cauchy peuvent donc être écrites :

$$(\partial \beta_{ji} / \partial x_k) = (\partial \beta_{ki} / \partial x_j)$$

ou encore que le tenseur :

$$\text{rot}(\underline{\beta})=0 \quad (2.3)$$

où  $\underline{\beta}$  est le tenseur gradient de déplacement total. Lorsque est écrit à l'aide des tenseurs de déformation plastique et élastique,  $\underline{\underline{\xi}}^p$  et  $\underline{\underline{\xi}}^e$ , et de la rotation totale,  $\underline{\underline{w}}^T$ , il vient :

$$\text{rot}(\underline{\underline{\xi}}^p + \underline{\underline{\xi}}^e + \underline{\underline{w}}^T)=0 \quad (2.4)$$

Cette relation doit être interprétée en termes de vitesses (de déformation et de rotation, lorsque la déformation élastique est petite devant la déformation plastique) ou alors restreinte aux petites déformations.

Tout modèle tentant d'expliquer la formation des textures, la forme des lois de comportement et l'anisotropie mécanique devra tenir compte des relations (2.1) et (2.4), ce qui conduit à des calculs fort complexes. Les sections suivantes de ce chapitre vont présenter trois types de modèles simplifiés. Ces modèles admettent tous l'hypothèse suivante, à savoir que chaque monocristal constituant l'agrégat obéit à la loi de Schmid :

$$\tau^s = m_{ij} \sigma_{ij} \leq \tau_c^s \quad (2.5)$$

où  $m_{ij}^s = n_j^s \cdot b_i^s$

autrement dit, un système de glissement  $s$  se déformera plastiquement sous un état de contrainte  $\underline{\underline{\sigma}}$  si sa contrainte résolue  $\tau^s$  atteint une valeur critique  $\tau_c^s$  ( $n^s$  et  $b^s$  sont

respectivement la normale au plan de glissement et la direction associée au système  $s$ ). On néglige donc, pour l'instant, l'aspect viscosité de l'écoulement plastique; on se place donc dans le cadre de la déformation à froid où la sensibilité à la vitesse de déformation est supposée nulle. Nous utiliserons, dans la suite des chapitres, la viscoplasticité pour obtenir une répartition unique des cisaillements microscopiques sur les systèmes de glissement et aussi dans le cadre des grandes vitesses de déformation.

## 2.1 LES MODELES AUTO-COHERENTS

Lorsqu'un polycristal est chargé progressivement, les inéquations (2.5) montrent qu'en général un seul système par grain va être d'abord activé. Plusieurs systèmes pourront être actifs si l'orientation du cristallite est suffisamment symétrique pour que la condition de Schmid soit remplie sur plusieurs systèmes simultanément. Ces grains vont produire des déformations plastiques  $d\underline{\underline{\epsilon}}^P$  telles que:

$$d\underline{\underline{\epsilon}}^P = (1/2) \sum_s (\underline{\underline{m}}^s + {}^t\underline{\underline{m}}^s) dy^s \quad (2.6)$$

le tenseur  $\underline{\underline{m}}^s$  étant défini par la relation (2.5), et  $dy^s$  étant le cisaillement microscopique sur le système  $s$ . Dans cette équation, la sommation est faite sur  $s$ , c'est-à-dire sur les systèmes actifs. Du fait de la désorientation des cristaux les uns par rapport aux autres, les systèmes actifs



de chaque cristallite seront différents, de même les tenseurs  $\underline{m}^S$  seront différents et ainsi la déformation plastique des grains sera différente dans les premiers stades de la déformation, particulièrement lorsque le nombre de systèmes actifs est réduit. Les conditions d'équilibre aux joints de grains ainsi que les incompatibilités dues au nombre insuffisant de systèmes créent des contraintes de réaction qui modifient en retour l'état de contrainte interne des grains et tend à activer des systèmes supplémentaires. Il est donc important de pouvoir quantifier les réactions entre le grain et son environnement pour pouvoir prédire l'activité des systèmes et la formation des textures.

### 2.1.1 Le modèle de Kröner

Kröner (1) considère le cas de grains sphériques, homogènes, élastiquement isotropes, inclus dans une matrice qui possède les mêmes propriétés élastiques. Eshelby (5) avait calculé l'interaction mécanique entre une inclusion élastoplastique et une matrice élastique, Kröner a étendu ce calcul au cas où la matrice aussi subit une déformation plastique. La loi d'interaction mécanique s'écrit :

$$\underline{\sigma} = \underline{\underline{\sigma}} + \frac{2\mu \cdot (7-5\nu)}{15(1-\nu)} \cdot (\underline{\underline{E}}_p - \underline{\underline{\epsilon}}_p) \quad (2.7)$$

où  $\underline{\underline{\epsilon}}$  et  $\underline{\underline{\epsilon}}^P$  sont les contraintes et déformations plastiques macroscopiques,  $\underline{\underline{\sigma}}$  et  $\underline{\underline{\epsilon}}^P$  étant celles du grain.  $\mu$  et  $\nu$  représentent le module de cisaillement élastique et le coefficient de Poisson. Il est visible sur cette relation que l'interaction élastique va produire des contraintes de réaction très fortes. La dispersion des  $\underline{\underline{\epsilon}}^P$  par rapport aux  $\underline{\underline{\epsilon}}^P$  sera très faible, c'est-à-dire de l'ordre de la déformation élastique.

### 2.1.2 Le modèle de HILL

De manière à prendre en compte non plus une interaction purement élastique mais plutôt de type plastique, Hill (2) a formulé une théorie plus générale.

Soit  $\underline{\underline{L}}$  et  $\underline{\underline{L}}$  les tenseurs des modules tangents respectivement du grain et de l'agrégat, l'interaction grain-matrice s'écrit:

$$\underline{\underline{d\sigma}} = \underline{\underline{d\epsilon}} + \underline{\underline{L}}^* \cdot (\underline{\underline{dE}} - \underline{\underline{d\epsilon}}) \quad (2.8)$$

où  $\underline{\underline{L}}^*$  est calculé en résolvant le problème de l'inclusion dans une matrice infinie de comportement tangent donné par  $\underline{\underline{L}}$ . Ce tenseur peut être calculé en résolvant l'équation implicite:

$$\underline{\underline{L}} = \langle \underline{\underline{L}} \cdot (\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{L}})^{-1} \cdot (\underline{\underline{L}} + \underline{\underline{L}}^*) \rangle \quad (2.9)$$

où  $\langle \rangle$  indique la moyenne volumique sur la population de grains représentant le polycristal. Le calcul impliqué ici

est très complexe si une exploitation directe de cette théorie est désirée.

### 2.1.3 Le modèle de ZAOUI et BERVEILLER

A la fois pour simplifier les calculs et rendre leur interprétation physique plus accessible, Zaoui et Berveiller (3) ont modifié l'approche de Kröner en introduisant un paramètre scalaire  $\alpha \ll 1$  qui "adoucit" l'interaction grain-matrice et la rend plus réaliste. Celle-ci s'écrit:

$$\underline{\underline{d\sigma}} = \underline{\underline{dZ}} + \frac{2\alpha\mu \cdot (7-5\nu)}{15(1-\nu)} \cdot (\underline{\underline{dEP}} - \underline{\underline{dEP}}) \quad (2.10)$$

En prenant une valeur de  $\nu=1/3$ , un tenseur  $\underline{\underline{Q}}$  peut être défini:

$$\underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{Z}} + \alpha\mu \cdot \underline{\underline{EP}} \quad (2.11)$$

En projetant l'équation (2.10) sur les systèmes actifs, celle-ci peut se réécrire sous la forme:

$$\begin{aligned} Z(H^{Sg} + \mu(\underline{\underline{m}}^S + \underline{\underline{t}}_{\underline{\underline{m}}^S}) : (\underline{\underline{m}}^g + \underline{\underline{t}}_{\underline{\underline{m}}^g}) + 2(\underline{\underline{m}}^g + \underline{\underline{t}}_{\underline{\underline{m}}^g}) \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot (\underline{\underline{m}}^S + \underline{\underline{t}}_{\underline{\underline{m}}^S})) dy^g \\ = (\underline{\underline{m}}^S + \underline{\underline{t}}_{\underline{\underline{m}}^S}) : d\underline{\underline{Q}} \end{aligned} \quad (2.12)$$

$H^{Sg}$  représente la matrice d'écroissage intracristallin, le terme voisin correspond à un écroissage intercristallin et le dernier à un écroissage géométrique. On voit ici que, de manière assez simple, il est possible de tenir compte des propriétés physiques du matériau. Néanmoins, ce modèle, pour rendre viables les calculs numériques, doit négliger le

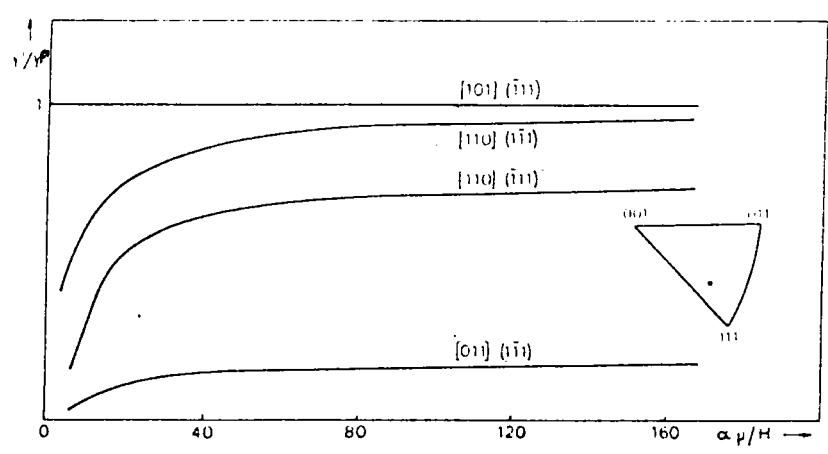
terme d'écroutissement géométrique. Les valeurs de  $\alpha$  s'avèrent être très influentes, en effet, comme on le montre sur la figure 2.1, le nombre de systèmes actifs décroît lorsque  $\alpha$  décroît. Le développement de la texture prédite est donc fortement lié à la valeur estimée de  $\alpha$ .

## 2.2 LE MODELE "STATIQUE"

Dans ce type de modèles, une situation extrême est supposée, à savoir que seul l'équilibre aux joints de grains est imposé, les relations de compatibilité sont considérées non importantes. Il est, en effet, supposé que l'état de contrainte dans chaque grain est l'état de contrainte macroscopique. Ce type de modèles est à différencier du modèle de Sachs (4) dans lequel la contrainte résolue critique est égale pour tous les systèmes primaires dans chaque grain. Donc, pour le modèle statique, il est posé:

$$\tilde{\sigma} = \tilde{\Sigma} \quad (2.13)$$

ce qui vérifie bien les conditions d'équilibre. Néanmoins, pour un matériau obéissant à la loi de Schmid, équation (2.5), ceci ne va, en général, activer qu'un seul système de glissement par grain, et donc provoquer de fortes incompatibilités aux joints. Ce modèle correspond à prendre une valeur de  $\alpha = 0$  (coefficient d'accommodation élastoplastique) dans le modèle précédent.



100  
100

Figure 2.1. Cisaillements microscopiques des systèmes actifs en traction uniaxiale, relativement au cisaillement du système primaire, en fonction du terme  $\alpha\psi/H$ .

### 2.3 LES MODELES TYPE "TAYLOR"

Contrairement aux modèles précédents, l'hypothèse de base est que les conditions de compatibilité sont très importantes. Le modèle de Lin (5) suppose que la déformation totale est uniforme, c'est-à-dire :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^T = \underline{\underline{E}}^T \quad (2.14)$$

L'hypothèse de Taylor (6) est que, les déformations élastiques étant supposées négligeables, la condition imposée est une uniformité des déformations plastiques, soit :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^P = \underline{\underline{E}}^P \quad (2.15)$$

autrement dit, les contraintes de réaction engendrées par une différence  $\underline{\underline{E}}^P - \underline{\underline{\varepsilon}}^P$  sont supposées très grandes de sorte que l'égalité stricte de la relation (2.15) doit être imposée. Les systèmes de glissement  $s$  choisis sont ceux qui vérifient la relation :

$$(1/2) \sum (\underline{\underline{m}}^s + \underline{\underline{t}}^s) \cdot d\underline{\underline{\gamma}}^s = d\underline{\underline{E}}^P \quad (2.16)$$

Le volume étant constant, un grain aura besoin, en général, de cinq systèmes indépendants pour satisfaire la condition (2.16). Lorsque plusieurs solutions sont possibles, celles qui sont retenues doivent minimiser la relation :

$$\tau_c^s \cdot d\underline{\underline{\gamma}}^s = dW_1 \quad (2.17)$$

L'approche de Bishop et Hill (7), ainsi que le montrent Chin et Mammel (8), est équivalente à celle de

Taylor. Elle consiste à dire que la déformation plastique est entièrement imposée, de sorte que cinq systèmes sont aussi nécessaires, mais qu'ils doivent être dans les conditions critiques, puisqu'ils se déforment plastiquement. La première étape consiste donc à établir une liste des états de contrainte qui placent toutes les combinaisons possibles de cinq systèmes indépendants dans l'état critique, sans toutefois dépasser la contrainte critique sur aucun des systèmes restants, ce qui constitue la surface de charge du monocristal. La deuxième étape consiste à considérer cette surface ainsi construite, dans l'espace des contraintes comme le potentiel plastique, et à appliquer la théorie de l'écoulement: connaissant l'incrément de déformation, l'état de contrainte de chaque monocristal est celui, parmi ceux établis plus haut, qui va maximiser la puissance dissipée:

$$\underline{\sigma} : d\underline{\epsilon}^P = dW_2 \quad (2.18)$$

Le matériau obéissant à la loi de Schmid, la surface de charge est un polyèdre à cinq dimensions, et l'état de contrainte choisi dans les conditions définies ci-dessus correspond à un sommet de ce polyèdre.

Dans la relation (2.4),  $\underline{\epsilon}^e$  étant négligé et  $\underline{\epsilon}^P$  étant pris uniforme, pour satisfaire aux conditions de

compatibilité, équation (2.3), il reste la relation tensorielle:

$$\text{rot}(\underline{\underline{w}}^T) = 0 \quad (2.19)$$

que l'on simplifie en écrivant que la rotation totale,  $\underline{\underline{w}}^T$ , est aussi uniforme, et que la rotation du réseau s'écrit incrémentalement sous la forme:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{dw}}^* &= \underline{\underline{dw}}^T - \underline{\underline{dw}}^P \\ \text{ou} \\ \underline{\underline{dw}}^* &= \underline{\underline{dw}}^T - (1/2) \sum_S (\underline{\underline{m}}^S - \underline{\underline{t}}_m^S) d\gamma^S \end{aligned} \quad (2.20)$$

## 2.4 ANALYSE CRITIQUE

### 2.4.1 Les modèles auto-cohérents

Ce type de modèles semble le plus proche de la réalité physique et se situe entre les deux extrêmes formés par les autres types d'approche. Lorsque, dans l'approche de Zaoui et Berveiller, le terme  $\alpha$  varie de 0 à  $\infty$ , l'approche auto-cohérente peut aller artificiellement des modèles statiques aux modèles type "Taylor". Ce type de modèles qui inclut à la fois les conditions d'équilibre et de compatibilité est très utile pour retracer l'histoire du changement élastoplastique, et peut fournir une modélisation de l'effet Bauschinger, ce qui est impossible avec les autres modèles. Seul le modèle élasto-viscoplastique d'Asaro et Needleman (9), basé sur l'hypothèse de Lin peut prédire cet effet. Le facteur d'accommodation plastique  $\alpha$  peut être



mesuré, par exemple, lors d'un test, et ensuite pris comme donnée du matériau. Des valeurs de  $10^{-1}$  à  $10^{-2}$  semblent être réalistes. Sur la figure 2.1 sont représentées les cisaillements microscopiques sur les systèmes actifs, en fonction de  $\alpha\mu/H$  ( $H$  étant le durcissement microscopique isotrope). Pour une valeur typique (en Stade II) de  $\mu/H=300$ , lorsqu'on a  $\alpha > 0.2$ , les cisaillements restent à peu près stables  $\forall \alpha$ . Par contre, pour des valeurs réalistes de l'ordre de  $10^{-1}$ , les courbes se situent dans une sorte de régime transitoire entre les cas "statiques" ( $\alpha=0$ ) et "Taylor" ( $\alpha=\infty$ ).

Berveiller (3) a montré aussi l'influence du durcissement latent sur l'évolution de la texture. Ainsi, sur la figure 2.2, une forte accommodation plastique et un fort écrouissage latent ( $H_2 > H_1$ ) ont tendance à augmenter l'intensité de la fibre (100), en traction uniaxiale des polycristaux c.f.c.. Ceci est en accord avec l'expérience.

Il est aussi possible de faire intervenir un facteur comme la taille de grain. Il est connu qu'une petite taille de grains a tendance à augmenter le niveau des contraintes. A partir d'une série d'essais sur du cuivre OFHC recuit à différentes températures, il a été possible (3) de mesurer, pour les différentes tailles de grain

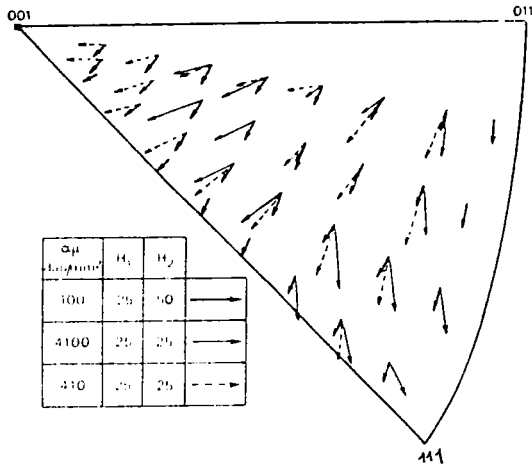


Figure 2.2. Influence du durcissement latent et de l'accommodation plastique sur les changements d'orientation en traction.

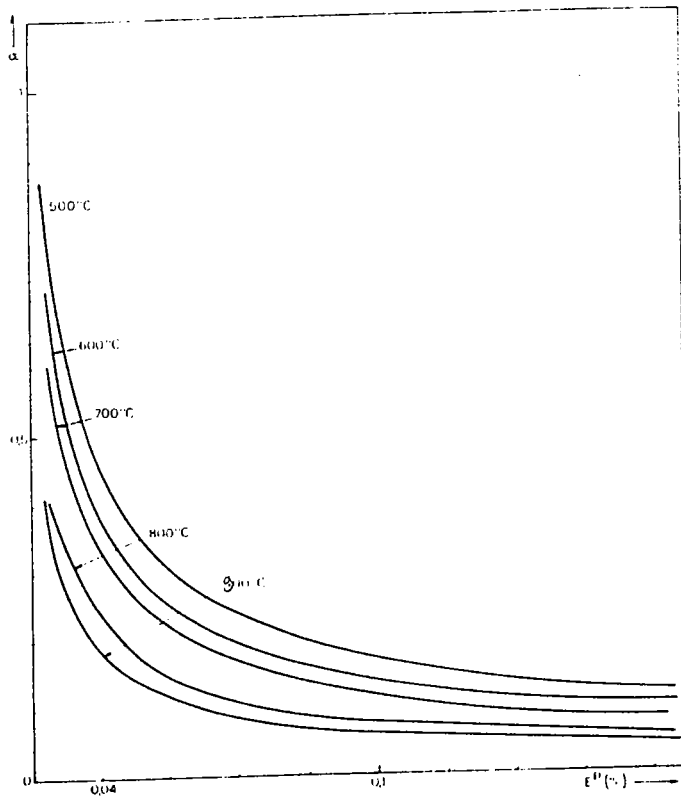


Figure 2.3. Evolution du facteur d'accommodation plastique du cuivre OFHC en fonction de la déformation de traction pour différentes tailles de grain (c'est-à-dire différents temps de recuit).

obtenues, le terme  $\alpha$  à différents taux de déformation (figure 2.3).

Ce modèle, qui a aussi été appliqué aux métaux polyphasés, présente la possibilité de prendre en compte un assez grand nombre de paramètres physiques; il possède néanmoins quelques limites. La première est intrinsèque au modèle:

- On peut difficilement estimer comment le terme  $\alpha$ , qui n'est mesuré que sur un type de test, peut changer suivant la sollicitation. Ceci peut, en particulier poser des problèmes lors de changements du trajet de chargement, de telle sorte que la modélisation du comportement pour ces changements non radiaux n'est qu'une estimation et peut s'avérer être imprécise.

D'autres limitations proviennent du traitement actuel analytique et numérique du modèle:

- Le formalisme de Zaoui et Berveiller ne se justifie que par la théorie de la déformation. Le calcul, notamment, suppose un chargement radial en tout point du polycristal, ce qui n'est pas fondé physiquement, puisqu'il s'agit de matériaux hétérogènes.

- Il y a une simplification, dans l'équation (2.12), qui consiste à négliger le terme d'écroutissage textural. Cette hypothèse, qui n'est qu'un artifice de calcul peut ne pas

être importante en moyenne, au niveau du polycristal, mais engendrent certainement des imprécisions importantes au niveau du monocristal.

- Le fait de prendre  $\alpha$  scalaire suppose une accommodation élastoplastique isotrope, et donc, bien que la présente analyse puisse tenir en compte la taille des grains, elle les suppose équiaxes. Néanmoins, le calcul d'Eshelby faite par Tiem et al. (10), et qui sera exposé plus loin, permet de généraliser cette hypothèse et de prendre un terme tensoriel permettant au modèle de s'appliquer à des grains de forme non équiaxe.

- Le traitement du calcul auto-cohérent suppose, pour l'instant, des calculs assez lourds, ce qui les rend prohibitifs, au moins pour des applications industrielles mettant en jeu des grandes déformations.

- Finalement, il n'y a pas de raisons de supposer que la déformation est homogène dans la matrice, ni dans le grain. En effet, l'expérience montre une activité plus forte es systèmes de glissement proche des joints de grains, lié probablement à un gradient de déformation intragranulaire. Dans la matrice, on peut, de même, s'attendre à un gradient de déformation plastique. Donc, en fait, le terme  $\alpha$  scalaire est censé représenter à la fois l'interaction élastoplastique réelle entre le grain et son environnement,

mais aussi les gradients intra- et extragranulaires, qui tendent à abaisser les valeurs de ce scalaire.

Tous ces facteurs limitent le domaine d'application des modèles auto-cohérents.

#### 2.4.2 Le modèle statique

On a montré, sur la figure 2.1, qu'il est très improbable que les grains constituant le polycristal se déforment durablement en glissement simple. Ce type d'analyse, d'ailleurs, ne donne pas de bons résultats en grandes, ni en moyennes déformations ainsi qu'en témoigne la figure 2.4.

L'analyse des lignes de glissement des grains de surface infirme aussi cette hypothèse. Il est vrai que la valeur de  $H$  lors du stade II est plus grande pour les matériaux à plus faible énergie de faute d'empilement, et donc moins de systèmes seront probablement actifs. Néanmoins, en stade III,  $H$  décroît notablement, augmentant ainsi le nombre de systèmes actifs. Donc, s'il apparaît que les modèles statiques prédisent mieux les textures de laminage du laiton, comme l'a montré Wierzbanski (11), cela ne constitue pas une preuve de validité de ces modèles qui fournissent un résultat correct dans ce cas précis. En effet, P. van Houtte (12) a aussi pu prédire la texture de

Sachs:  $-\sigma_{xx} = \sigma_{zz}$

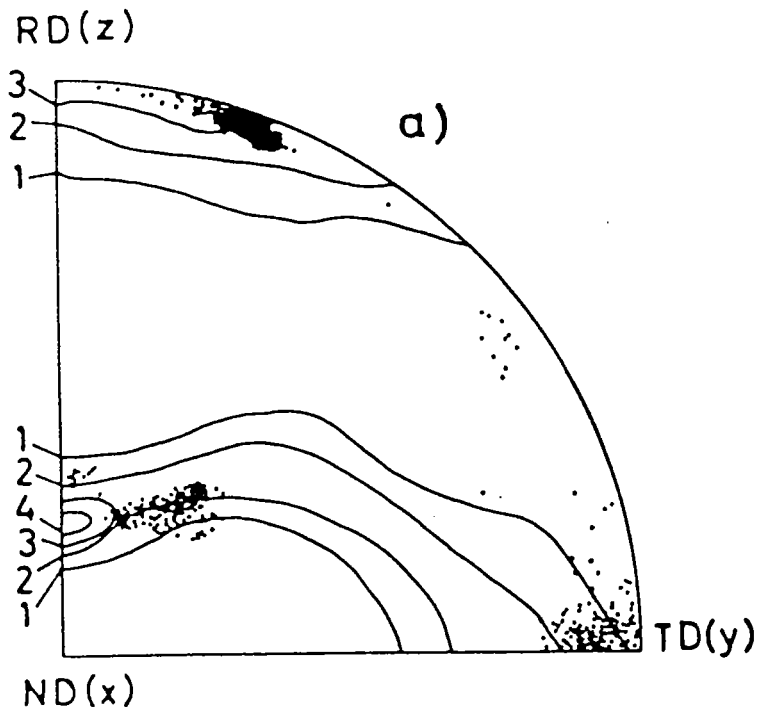


Figure 2.4. Comparaison de la texture prédite par le modèle de Sachs (points) et la texture expérimentale (lignes pleines), à grandes déformations de laminage. L'unique composante prédite par le modèle est la composante 'Laiton'.

laminage du laiton en utilisant la théorie de Taylor en introduisant le maillage ce qui est une réalité physique.

### 2.4.3 Les modèles du type "Taylor"

En prenant pour  $\mu/h$  une valeur typique de 300 (en stade II) et pour  $\alpha$  une valeur de 0.05, ce qui est déjà assez faible, on se trouve sur la figure 2.2, dans le régime transitoire. Par contre, lorsqu'on cherche à étudier les grandes déformations, le stade III est celui qu'il faut prendre en compte, où les valeurs de  $H$  peuvent être facilement diminuées d'un ordre de grandeur. Ceci ramène le cristal dans des conditions très proches des conditions de Taylor. Il est possible de dire que la vitesse à laquelle un cristal atteindra les conditions de Taylor est proportionnelle à son énergie de faute d'empilement et inversement proportionnelle à sa taille de grain.

L'hypothèse de Taylor suppose donc qu'un grain va se déformer suivant le nombre de systèmes nécessaires pour préserver la compatibilité, c'est-à-dire cinq systèmes ou moins, suivant la symétrie de l'orientation du réseau. Ceci veut dire que si l'on désire comparer l'écroutissage d'un monocristal encastré dans un agrégat avec celui d'un monocristal testé isolément, il faudra étudier ce dernier en l'orientant préalablement de manière à favoriser l'activation de cinq systèmes environ. Lorsqu'un monocristal

c.f.c. est étiré suivant une direction (111) ou une direction proche, son orientation est pratiquement stable et quasiment six systèmes de glissement sont également actifs. Kocks (13) a comparé le monocristal d'aluminium, dont le durcissement des systèmes est très rapidement isotrope (14), en traction uniaxiale suivant la direction (111), avec le polycristal du même matériau possédant une assez petite taille de grains. L'accord (figure 2.5) entre la courbe prédite utilisant un facteur d'orientation moyen de 3.06 et la courbe d'écroutissage du monocristal (111) est assez bon, ce qui tend à confirmer l'hypothèse de polyslip implicite à la théorie de Taylor. Un accord similaire avait été aussi obtenu par Kochendörfer et Swanson (15), figure 2.6. Il faut néanmoins être prudent sur les conclusions à tirer de ces expériences, car s'il est vrai qu'en moyenne le facteur d'orientation varie peu au début, et que  $\tau_c$  peut être pris à peu près égal dans chaque grain au début du test (et aussi sur chaque système), la variation de ce facteur est localement forte et donc  $\tau_c$  va être rapidement différent d'un grain à l'autre (tout en conservant l'hypothèse de durcissement isotrope). Le but était ici de montrer que chaque grain constituant l'agrégat subit un écroutissage plus proche d'une loi type (111) que d'une loi moyennée sur les



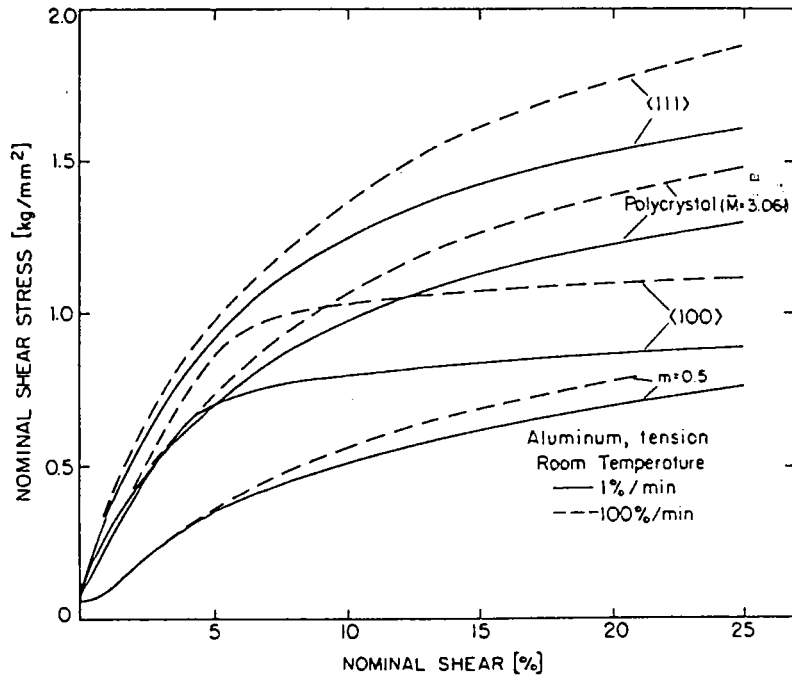


Figure 2.5. Comparaison des courbes de contrainte-déformation nominales de cisaillement en traction sur de l'aluminium 99,99% pour les orientations (111) et (100) et pour le polycristal. L'écroutissage de ce dernier est plus proche de celui de l'orientation (111) affermissant l'hypothèse du polyslip.

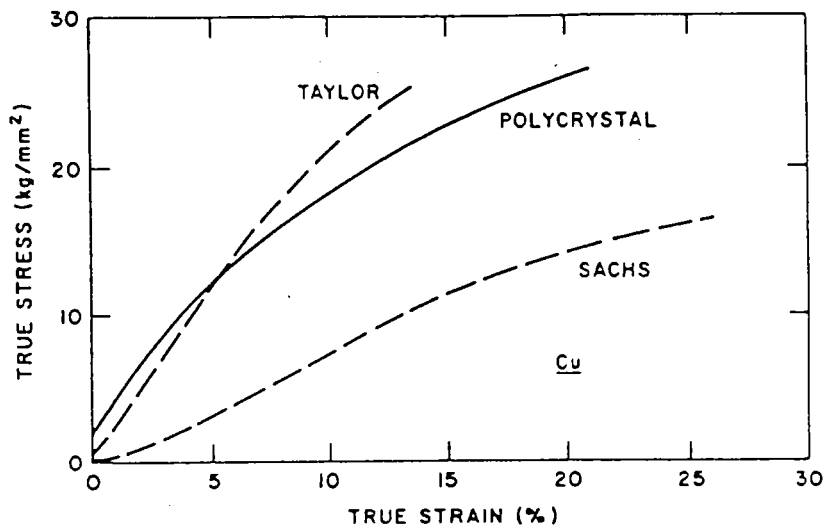


Figure 2.6. Comparaison entre l'écroutissage d'un polycristal (Cu 99,98%), celui calculé suivant l'hypothèse de Taylor (basé sur un écroutissage microscopique associé à l'orientation  $\langle 111 \rangle$ ) et celui calculé suivant l'hypothèse de Sachs (basé sur un écroutissage microscopique moyenné sur les orientations).

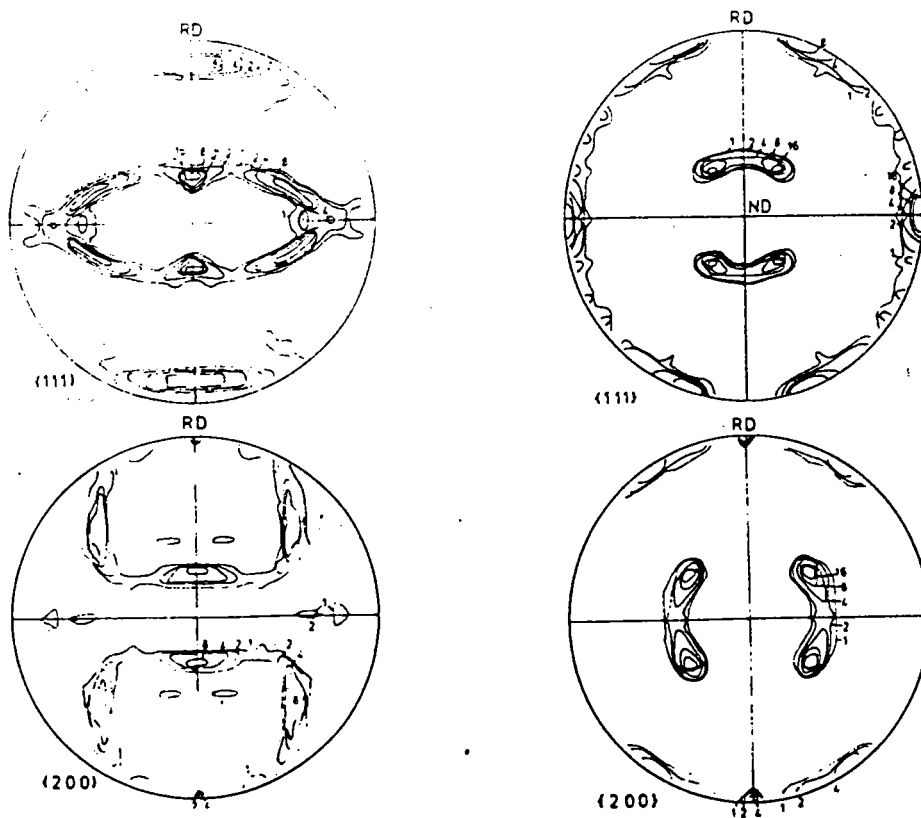


Figure 2.7. Figures de poles obtenues par des simulations utilisant la théorie de Taylor sans maillage (figures de gauche) et avec maillage (figures de droite). On note que la composante 'Laiton' est obtenue à droite.

orientations, donc que le nombre de systèmes actifs est proche de cinq.

Dans l'hypothèse du durcissement isotrope, Gil Sevillano et al. (16), utilisant la théorie de Taylor ont pu calculer correctement les textures du cuivre et de l'aluminium pour les essais de traction, compression, torsion et laminage, malgré certaines imprécisions dont nous reparlerons. P. van Houtte (12) a aussi pu tenir compte des macles pour prédire les textures du laiton. Les résultats sont montrés sur la figure 2.7.

Malgré le succès que cette théorie connaît depuis assez longtemps, il y a certains problèmes qui sont de deux ordres. Lorsque les systèmes durcissent de façon isotrope, c'est-à-dire ont une loi du type :

$$d\tau_c^s = \sum_{\theta} H^{\theta} d\gamma^{\theta} \text{ avec } H^{\theta} = H \text{ donc}$$

$$d\tau_c^s = H \cdot d\Gamma \quad (2.21)$$

où  $d\Gamma$  est la somme des incréments de cisaillement sur tous les systèmes actifs, la surface de charge du monocristal croît homothétiquement et chaque coin associé à un ensemble de cinq systèmes indépendants est, en fait, associé à six ou huit systèmes. Le tableau 2.1, calculé par Bishop et Hill (7) représente les 28 sommets et leurs systèmes de glissement associés. On peut remarquer que les états de contrainte sont répartis en cinq catégories indexées de A à

Tableau 2.1

Table des 28 états plastiques d'ordre 5 calculés par Bishop et Hill, pour le monocristal c.f.c. à durcissement isotrope des systèmes de glissement. Il est notable que tous les états de contrainte activent plus de cinq systèmes à la fois.

VERTEX NUMBER	POS	NEG	CUBIC YIELD PENTAVECTORS UNIT OF $\sqrt{3}$						CRYSTALLOGRAPHIC TYPE		SLIP SYSTEM INDICES
			5 COMP'S:			6 COMP'S					
			M1	M2	M3	M4	M5	M6	M1	M2	
A: PQ, FU, UF, UK, KU, KQ, QK, QP											
1	29		2/3	-1/3	-1/3	0	0	0	1/2	-1/2	2, 3, 5, 6, 9, 8, 11, 12
2	30		-1/3	2/3	-1/3	0	0	0	-1/2	-1/2	1, 15, 16, 18, 19, 21, 10, 24
3	31		-1/3	-1/3	2/3	0	0	0	0	1	13, 14, 4, 17, 7, 20, 22, 23
B: PQ, FK, KP, KR, QK, QP											
4	32		0	0	0	1/2	1/2	1/2	0	0	1, 2, 17, 18, 7, 9
5	33		0	0	0	-1/2	1/2	1/2	0	0	1, 15, 7, 20, 11, 12
6	34		0	0	0	1/2	-1/2	1/2	0	0	2, 3, 4, 17, 10, 24
7	35		0	0	0	1/2	1/2	-1/2	0	0	16, 18, 8, 9, 22, 23
C: PQ, FU, UF, UK, KU, KQ, QK, QP											
8	36		0	0	0	1	0	0	0	0	2, 3, 17, 18, 9, 8, 23, 24
9	37		0	0	0	0	1	0	0	0	1, 15, 16, 18, 7, 9, 22, 12
10	38		0	0	0	0	0	1	0	0	1, 2, 4, 17, 7, 20, 10, 11
D: PQ, FK, KP, KR, UF, UK											
11	39		1/3	-1/6	-1/6	0	1/2	1/2	1/4	-1/4	1, 2, 7, 9, 11, 12
12	40		1/3	-1/6	-1/6	0	-1/2	-1/2	1/4	-1/4	13, 3, 5, 6, 19, 8
13	41		1/3	-1/6	-1/6	0	1/2	-1/2	1/4	-1/4	16, 5, 8, 9, 22, 12
14	42		1/3	-1/6	-1/6	0	-1/2	1/2	1/4	-1/4	2, 3, 4, 6, 10, 11
15	43		-1/6	1/3	-1/6	1/2	0	1/2	-1/4	-1/4	1, 2, 17, 18, 10, 24
16	44		-1/6	1/3	-1/6	-1/2	0	-1/2	-1/4	-1/4	14, 15, 16, 5, 19, 21
17	45		-1/6	1/3	-1/6	-1/2	0	1/2	-1/4	-1/4	1, 15, 20, 21, 11, 10
18	46		-1/6	1/3	-1/6	1/2	0	-1/2	-1/4	-1/4	16, 18, 19, 8, 23, 24
19	47		-1/6	-1/6	1/3	1/2	1/2	0	0	1/2	17, 18, 7, 9, 22, 23
20	48		-1/6	-1/6	1/3	-1/2	-1/2	0	0	1/2	13, 14, 4, 6, 21, 20
21	49		-1/6	-1/6	1/3	1/2	-1/2	0	0	1/2	13, 3, 4, 17, 24, 23
22	50		-1/6	-1/6	1/3	-1/2	1/2	0	0	1/2	14, 15, 7, 20, 12, 22
E: PQ, FU, UF, UR, UK, UF, QK, QU											
23	51		0	1/2	-1/2	1/2	0	0	-1/4	-3/4	1, 2, 16, 18, 19, 8, 10, 24
24	52		0	1/2	-1/2	-1/2	0	0	-1/4	-3/4	1, 15, 16, 5, 19, 21, 10, 11
25	53		-1/2	0	1/2	0	1/2	0	-1/4	3/4	14, 15, 17, 18, 7, 20, 22, 23
26	54		-1/2	0	1/2	0	-1/2	0	-1/4	3/4	13, 14, 4, 17, 21, 20, 23, 24
27	55		1/2	-1/2	0	0	0	1/2	1/2	-3/4	2, 3, 4, 6, 7, 9, 11, 12
28	56		1/2	-1/2	0	0	0	-1/2	1/2	-3/4	13, 3, 5, 6, 9, 8, 22, 12

E correspondant à cinq types distincts d'interaction de systèmes de glissement. Ces derniers sont identifiés suivant la notation de Diehl (17) où les plans de glissement sont notés P, Q, K et U. Un système de glissement appartenant, par exemple, au plan Q et dont la direction de glissement est une direction (110) commune aux plans Q et U, sera appelé QU. L'état de contrainte étant choisi de manière à maximiser la puissance dissipée, les cisaillements microscopiques ayant lieu sur les systèmes sélectionnés se calculent en résolvant les cinq équations (2.16). Elles se réduisent en effet à cinq, car :

$$\begin{aligned} \text{tr}(\underline{m}^S) &= \sum_i n_i^S \cdot b_i^S = 0 \\ \text{donc} & \\ \text{tr}(\underline{E}^P) &= \sum \text{tr}(\underline{m}^S) \gamma^S \end{aligned} \quad (2.22)$$

La répartition des cisaillements microscopiques n'est donc pas unique et le calcul des changements d'orientation par l'équation (2.20) n'est pas unique non plus. Plusieurs méthodes existent pour lever cette indétermination, elles seront exposées ultérieurement et une autre approche sera proposée.

Enfin, il existe des cas où les textures finales calculées diffèrent des textures réelles connues à grandes déformations: le laminage et la torsion. Ceci peut être remarqué sur la figure 2.8. Dans le cas du laminage, il est visible sur cette figure que les poles (111) prédits proches

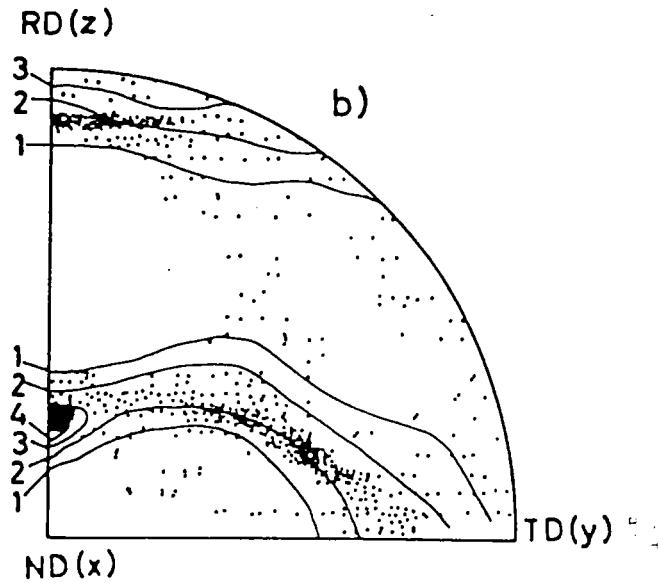


Figure 2.8. Comparaison entre la texture prédite (points) par le modèle de Taylor et la texture expérimentale (lignes) à grandes déformations de laminage. On notera que la composante 'T' positionne des poles (111) décalés de la direction RD.

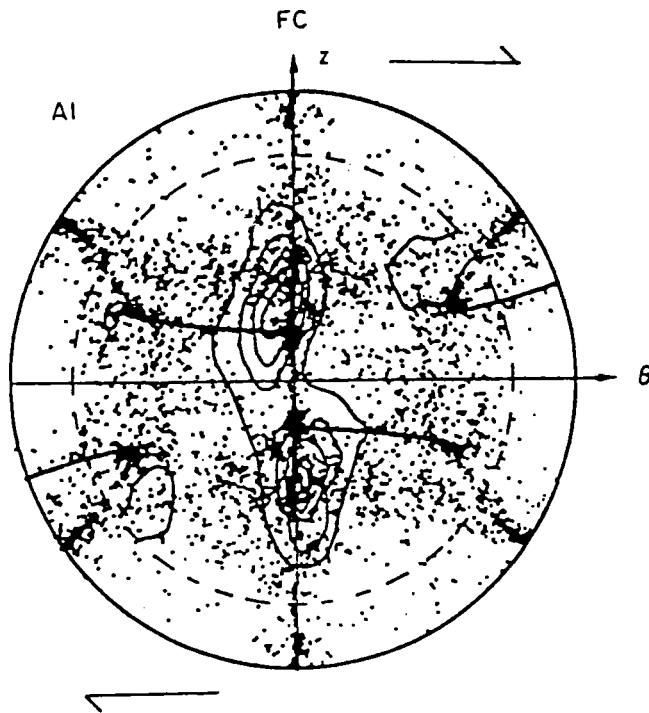


Figure 2.9. Comparaison entre la texture prédite (points) en utilisant la théorie de Bishop et Hill et la texture réelle (lignes) de torsion à grandes déformations. On voit, en particulier, que la fibre (111) partielle n'existe plus en réalité.

de la direction de laminage ne coïncident pas avec cette direction, mais sont légèrement décalés. La composante correspondante de texture prédite (composante Taylor) n'est pas alignée avec la composante Cuivre. Cette différence est de plus en plus notable aux déformations croissantes. Il est à noter (figure 2.9) que, dans le cas de la torsion, la texture prédite correspond à la texture réelle jusqu'à une déformation de cisaillement  $\gamma=3$ , au-delà, la texture évolue différemment; la théorie de Bishop et Hill ne peut effectivement s'appliquer que jusqu'à des déformations moyennes. En effet, à la lumière des schémas auto-cohérents, il est apparu que l'hypothèse de Taylor surestimait les contraintes internes, mais supposait, de plus, toutes les composantes de la contrainte de réaction très grandes, ce qui, implicitement, revient à dire que la forme des grains est plus ou moins équiaxe. Par contre, intuitivement, il peut être affirmé que, lorsque le grain aura une forme très plate ou/et très allongée, certaines composantes de la contrainte de réaction seront nettement inférieures à d'autres auxquels cas certaines incompatibilités de déformation pourront être supposées.

C'est dans ce sens que le modèle de Bishop et Hill a été modifié. L'idée de laisser libres certaines incompatibilités de la déformation plastique a été

initialement introduite par Honneff et Mecking (18) pour le laminage. Le présent travail constitue un développement approfondi de ce type de modèles et a permis d'en établir les améliorations et les prolongements dont les applications vont des prédictions de texture aux lois de comportement et aux problèmes mécaniques d'instabilités plastiques.

On rappelle tout d'abord, dans le prochain chapitre, les bases théoriques du modèle développé.



REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUESDU CHAPITRE 2

- (1) E.Kröner, Acta.Met., vol.9, 1961, p.155.
- (2) R.Hill, J.Mech.Phys.Sol., vol.13, 1965, p.89.
- (3) M.Berveiller et A.Zaoui, C.R. 15e Colloque GFR, paris 1980, p.175.
- (4) G.Sachs, Z.Verein Deut.Ing., vol.72, 1924, p.734.
- (5) T.H.Lin, J.Mech.Phys.Sol., vol.5, 1957, p.143.
- (6) G.I.Taylor, J.Inst.Metals, vol.62, 1938, p.143.
- (7) J.F.W.Bishop and R.Hill, Phil.Mag., vol.42, 1951, p.414.
- (8) G.Y.Chin and W.L.Mammel, Trans. TMS-AIME, vol.245, 1969, p.1211.
- (9) R.J.Asaro and A.Needleman, Acta.Met., vol.33 n°6, 1985, p.923.
- (10) S.Tiem, M.Berveiller and G.R.Canova, Acta.Met., in press.
- (11) K.Wierzbanski, Archivum Hutnictwa, 1978, vol.23, p.355
- (12) P.van Houtte Acta.Met., vol.26, 1978, p.591.
- (13) U.F.Kocks, Met.Trans., vol.1, 1970, p.1121.
- (14) P.Franciosi, M.Berveiller et A.Zaoui, Acta.Met., vol.28, 1980, p.273

- (15) A.Kochendörfer and M.Swanson, Arch.Eisenhüttenw.,  
vol.31, 1960, p.549.
- (16) J.Gil Sevillano, P.van Houtte and E.Aernoudt,  
Progr.Mat.Sci., vol.25, 1981, P.69.
- (17) J.Diehl, T.H.Stuttgart, Dissertation, 1955.
- (18) H.Honneff and H.Mecking, "Textures of Materials",  
G.Gottstein and K.Lücke eds), 1978, p.265.

114

## 3 LA THEORIE

### 3.1 LES PRINCIPES

Ainsi qu'on vient de l'exposer, l'hypothèse stricte de Taylor sur l'uniformité de la déformation suppose implicitement une forme de grains pratiquement équiaxe. Dorénavant, ce type de modèles sera nommé DTI (Déformation Totale<sup>ment</sup> Imposée), dans la littérature anglophone, il a été nommé FC (Full Constraints). Lorsque la forme des grains est prise en compte, et que certaines composantes de déformation sont relaxées, ainsi qu'on va l'exposer, ce type d'approche sera nommée DPI (Déformation Partiellement Imposée), la notation anglophone dans ce cas est RC (Relaxed Constraints).

Supposons un grain d'un polycristal fortement laminé, sa géométrie, représentée sur la figure 3.1, est supposée être la géométrie de l'éprouvette. On peut affirmer intuitivement qu'une assez forte déviation standard des composantes  $\epsilon_{NL}$  et  $\epsilon_{NT}$  pourront être permises. Ainsi que

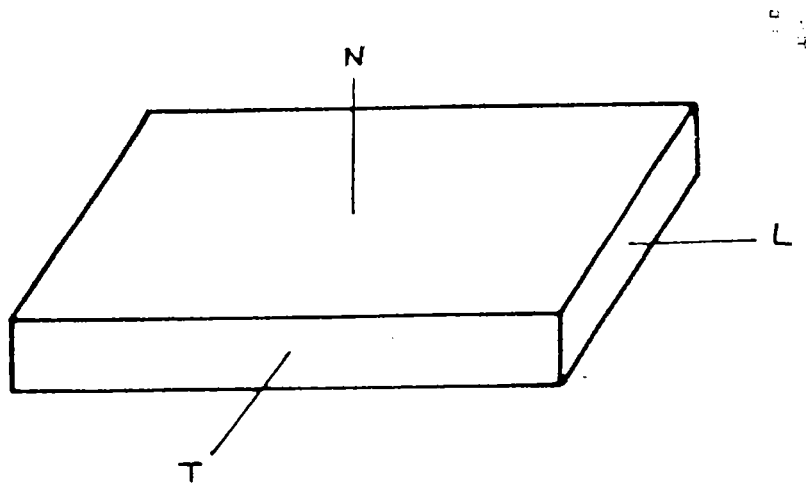


Figure 3.1. Représentation d'un grain pris dans une éprouvette laminée.

l'ont expliqué Honneff et Mecking (1), même une différence finie de ces composantes entre un grain et ses voisins va provoquer des changements de forme qui ne seront perçus que localement dans les grains et non pas dans la majorité de leur volume. Les contraintes internes induites par ces différences de déformation seront négligeables en raison de la forme des grains, ce qui revient à dire que lorsque la forme est suffisamment aplatie, les deux composantes de déformation décrites ci-dessus pourront ne pas être imposées. Honneff et Mecking ont modifié l'approche de Kröner, en imposant des contraintes de réaction nulles correspondantes à ces composantes de déformation. Ils ont appliqué ce type d'approche au laminage de l'aluminium. La figure de pole (111) (figure 3.2) compare les résultats expérimentaux (lignes d'intensité) avec les prédictions (points). Le résultat le plus remarquable concerne les poles (111) proches de la direction de laminage. En effet la théorie de Kröner prédit une zone d'intensité décalée par rapport à la direction de laminage, correspondant à ce qui a été noté comme la composante Taylor de la texture. La nouvelle approche, quant à elle, rectifie bien la position de cette zone d'intensité pour trouver la composante de texture expérimentale nommée S.

Honneff and Mecking

$$\epsilon_{xx} = -\epsilon_{zz} ; \epsilon_{xz} = \text{free}$$

$$\epsilon_{yy} = \epsilon_{xy} = \epsilon_{yz} = 0$$

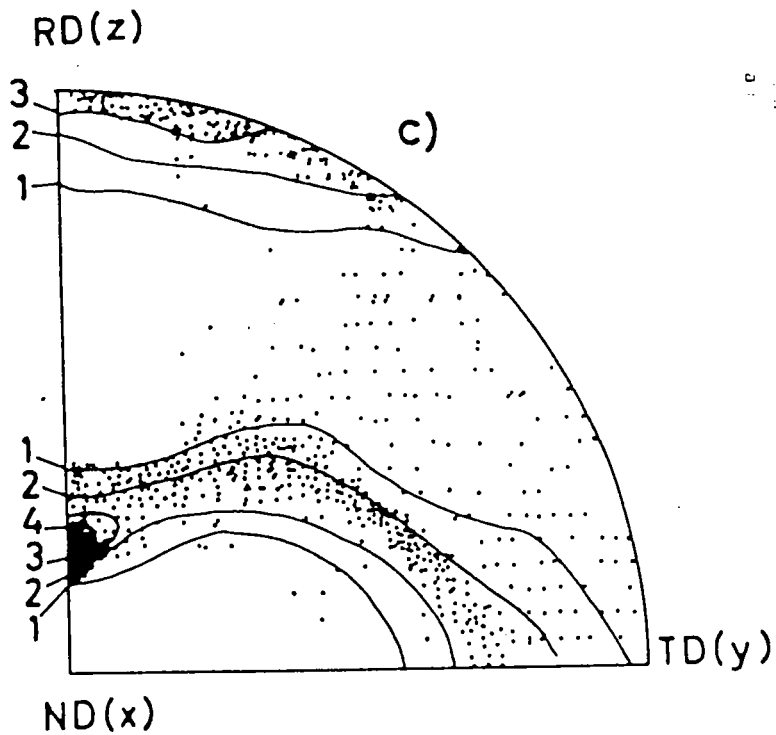


Figure 3.2. Comparaison entre la texture prédite (points) par le modèle de Honneff et Mecking et la texture expérimentale (lignes) de laminage à grandes déformations. On notera le meilleur accord par rapport à la figure 2.8.

Kocks et Canova (2) ont généralisé cette approche en termes de relations de compatibilité. Le succès de la théorie de Taylor/Bishop et Hill a montré que l'imposition des conditions de compatibilité (pour les déformations plastiques) est plus importante que celle des conditions d'équilibre. Ceci peut être appliqué aux relations à imposer sur une face particulière d'un grain, en ce sens, le principe de base est d'imposer d'abord les déformations, et lorsque celles-ci sont relaxées, d'imposer les contraintes correspondantes. La violation des conditions d'équilibre est supposée être rectifiée par le biais des déformations élastiques. Dans un repère orthogonal X,Y,Z, les relations d'équilibre et de compatibilité d'un plan perpendiculaire à X sont équivalentes à écrire:

$$\epsilon_{YY} = e_{YY}, \quad \epsilon_{ZZ} = e_{ZZ}, \quad \epsilon_{YZ} = e_{YZ} \quad (3.1)$$

$$\sigma_{XX} = \Sigma_{XX}, \quad \sigma_{XY} = \Sigma_{XY}, \quad \sigma_{XZ} = \Sigma_{XZ} \quad (3.2)$$

Bien que  $\sigma_{XX}$  soit continu, la composante correspondante du tenseur déviateur, ne l'est pas et donc peut varier de part et d'autre de l'interface. Il est également proposé par ces deux auteurs, que lorsque la forme du grain devient très anisotrope, certaines faces deviennent plus importantes que d'autres et qu'elles influent de manière prépondérante sur presque tout le volume du grain. Ainsi, sur la figure 3.1, la face N devient plus importante, il faut donc imposer les

conditions (2.1) et (2.2), et ainsi relaxer les composantes  $\epsilon_{NL}$  et  $\epsilon_{NT}$ . Il est désormais possible d'établir les conditions aux limites affectant la plus grosse partie des grains lorsqu'ils sont très déformés. L'étude systématique des conditions limites pour des types de tests connus sera abordée au paragraphe suivant. La prédiction des textures pourra désormais être faite en considérant deux cas extrêmes où les grains sont soit équiaxes soit très anisotropes géométriquement, c'est à dire dans des conditions DTI<sup>3</sup> ou DPI.

Il est très intéressant de comparer cette première étape avec les résultats de Tiem et al.(3) concernant une extension des calculs d'Eshelby au cas de grains de forme ellipsoïdale quelconque et non plus limités à la forme sphérique. Ce calcul est important, car il permet d'estimer les contraintes de réaction provoquées par des différences entre les composantes de déformation plastique entre le grain et son environnement. Le détail du calcul est exposé dans l'Annexe I, il faut rappeler que les propriétés élastiques du grain sont ici supposées isotropes ainsi que celles de la matrice. La contrainte interne existant dans le grain peut être formulée, dans ces conditions, par l'équation:

$$\sigma_{ij} = \sum_{kl} \mu (S_{ijkl} - I_{ijkl}) (\epsilon_{kl}^p - \bar{\epsilon}_{kl}^p) \quad (3.3)$$



$\underline{S}$  est le tenseur d'Eshelby et  $\underline{I}$  le tenseur unité d'ordre quatre. En supposant que les essais de traction et de compression sont effectués respectivement suivant les axes 1 et 3, et que le laminage est fait en comprimant suivant l'axe 3, la direction de laminage étant l'axe 1, il est intéressant d'étudier la variation de ces coefficients en fonction de la déformation et donc de la forme des grains. Qualitativement, plus un terme  $S_{ijkl}$  est grand, plus la contrainte de réaction provoquée par une différence  $\epsilon_{kl} - E_{kl}$  sera forte, de sorte que de fortes différences de ces termes de déformation seront prévenues par l'activation de systèmes de glissement supplémentaires. Par contre, une réaction faible aura tendance à permettre une grande déviation entre les déformations, et dans le cas limite, une réaction nulle permettra de relaxer entièrement la composante de déformation correspondante.

Pour rendre les résultats suivants plus lisibles, on a choisi de vectoriser les tenseurs d'ordre 4 de la manière suivante: les indices 1,2,3,4,5 et 6 réfèrent aux composantes des tenseurs respectives, 11, 22, 33, 23, 13 et 12, ces tenseurs (contrainte et déformation) étant symétriques, six indices suffisent. Ainsi, par exemple, la composante  $Q_{21}$  reflète l'influence sur la composante de contrainte  $\sigma_{22}$  de la composante de déformation  $\epsilon_{11}$ . Sur la

figure 3.3, correspondant à un grain étiré uniaxialement, les termes de réaction reliés à la composante  $\epsilon_{11}$  croissent de sorte que les grains seront susceptibles de n'avoir qu'une faible déviation autour de la valeur  $E_{11}$ . Il faut noter que ceci n'est pas le cas pour les composantes de cisaillement qui auront une certaine déviation. Néanmoins ces composantes de cisaillement n'ont ici aucune raison d'être relaxées, les contraintes de réaction associées ne tendant pas vers zéro. Il est cependant important de voir que la réaction associée à la composante  $\epsilon_{23}$  est plus faible que celle correspondante aux deux autres composantes de cisaillement.

Dans la figure 3.4, correspondant à la compression uniaxiale, il est visible qu'à grandes déformations, la relaxation des composantes  $\epsilon_{13}$  et  $\epsilon_{23}$  paraît raisonnable, les autres composantes devant, en revanche, être imposées.

Par un raisonnement analogue, la figure 3.5 nous informe que  $\epsilon_{23}$  et  $\epsilon_{13}$  pourront être relaxées ce qui confirme bien les hypothèses simples faites par Honneff et Mecking (1).

Les résultats de Tiem et al.(3), qui font aussi des hypothèses de départ simplificatrices (élasticité isotrope de la matrice et du grain, homogénéité de la déformation dans les deux et interaction mécanique de type

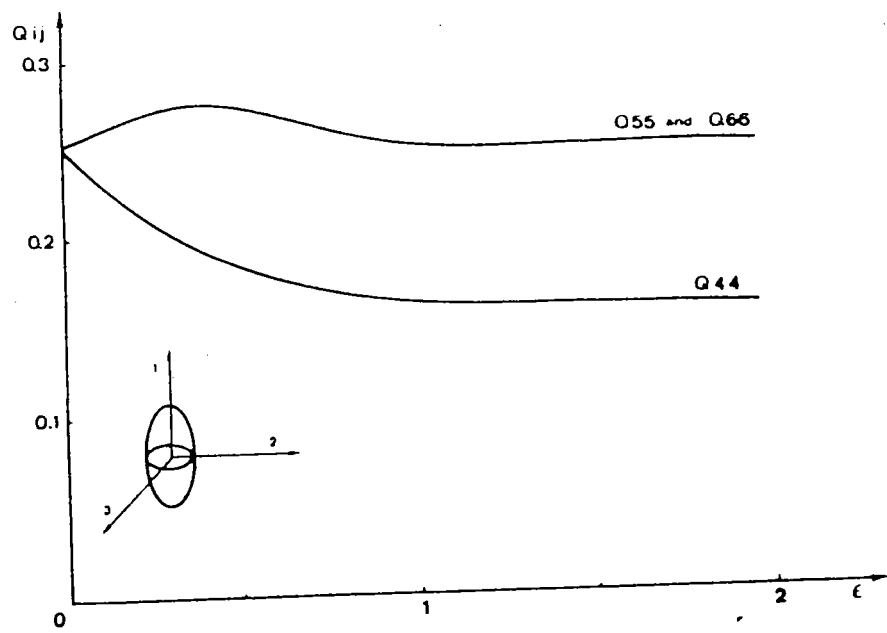
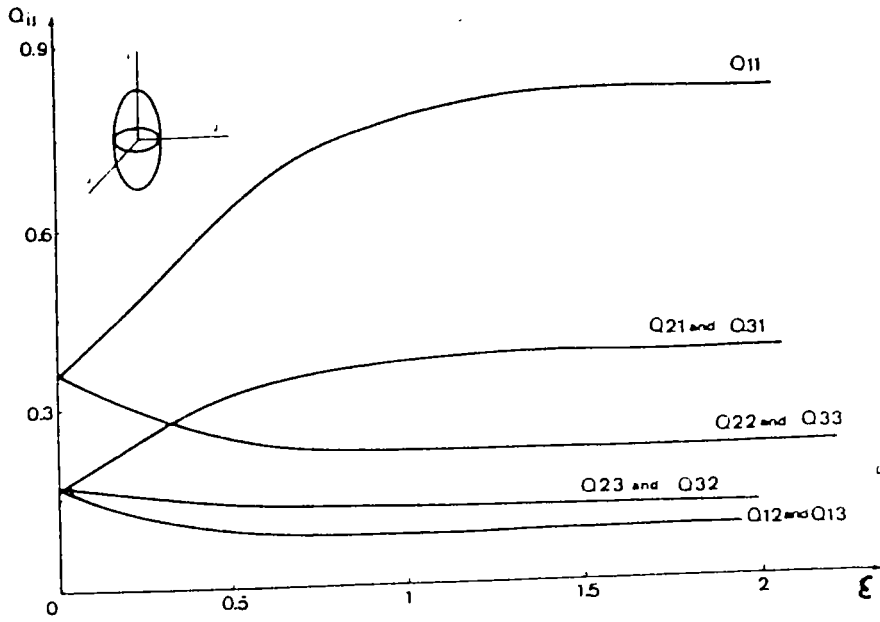


Figure 3.3. Evolution des coefficients  $Q_{ij}$  en fonction de la déformation vraie, pour un test de traction où le grain conserve la forme ellipsoïdale schématisée ci-dessus.

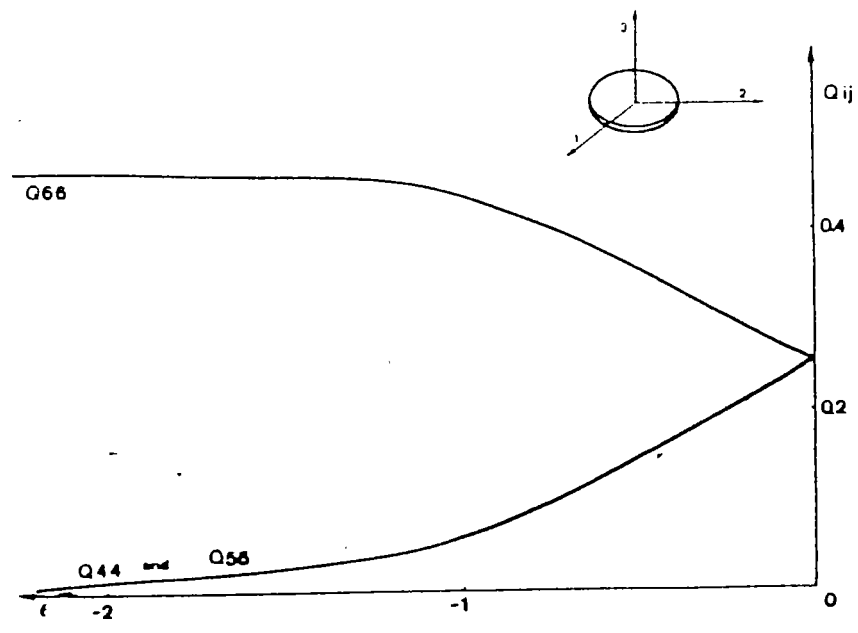
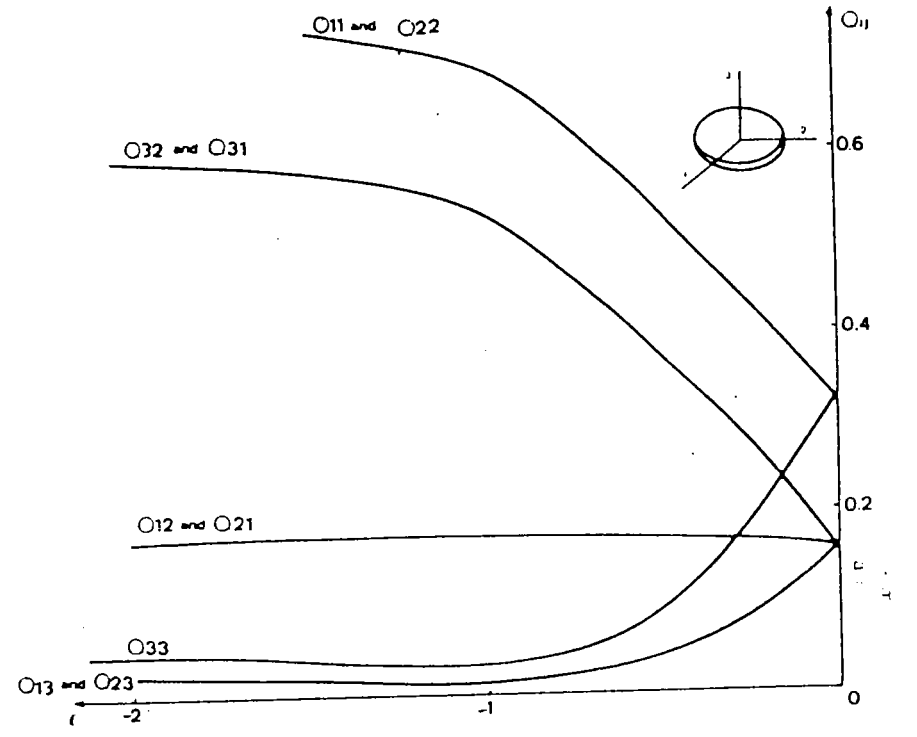


Figure 3.4. Evolution des coefficients du tenseur  $\tilde{Q}$  en fonction de la déformation vraie en compression uniaxiale. La forme du grain est schématisée ci-dessus.

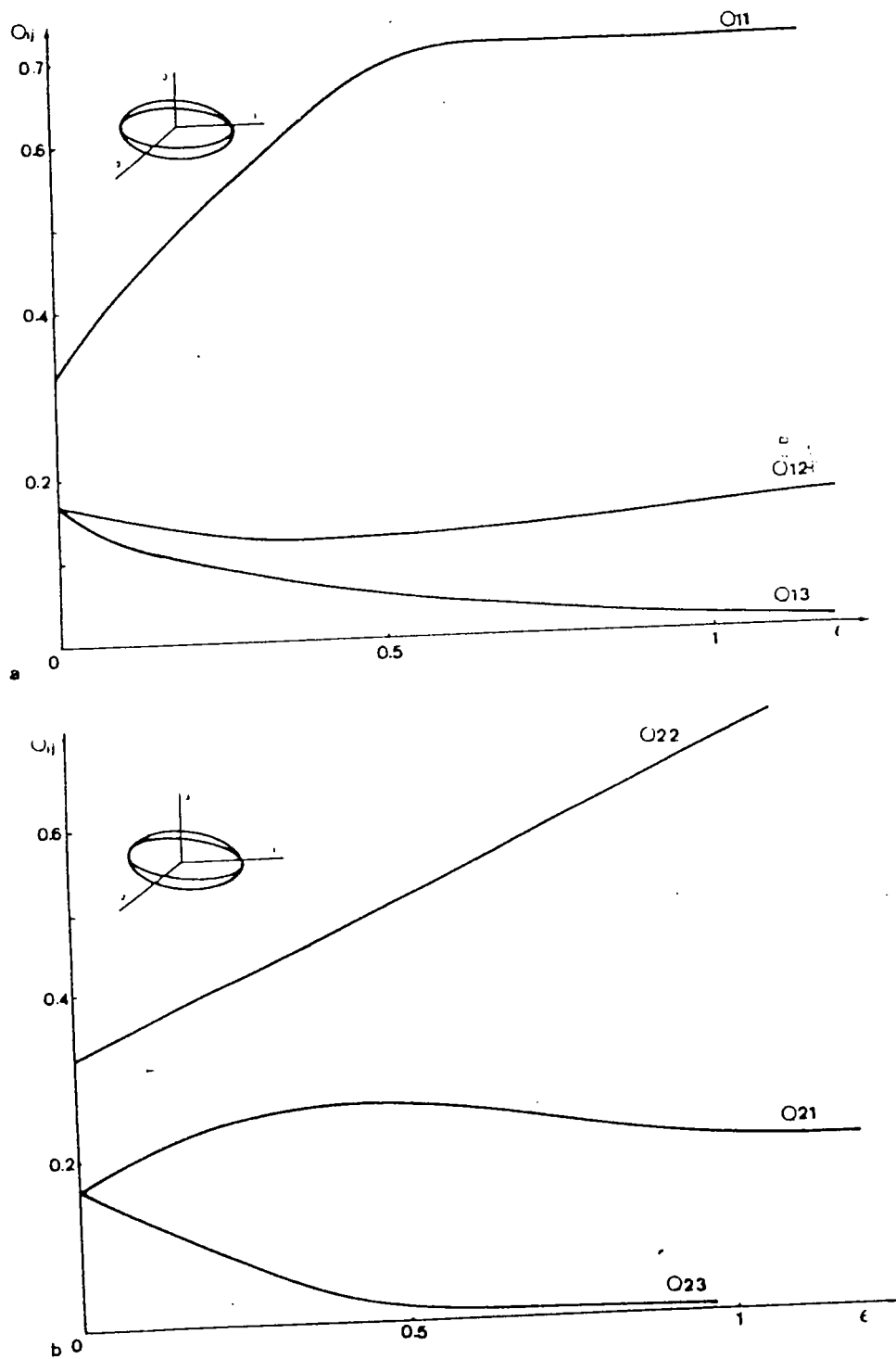


Figure 3.5. Evolution des coefficients du tenseur  $Q$  en fonction de la déformation vraie en laminage.

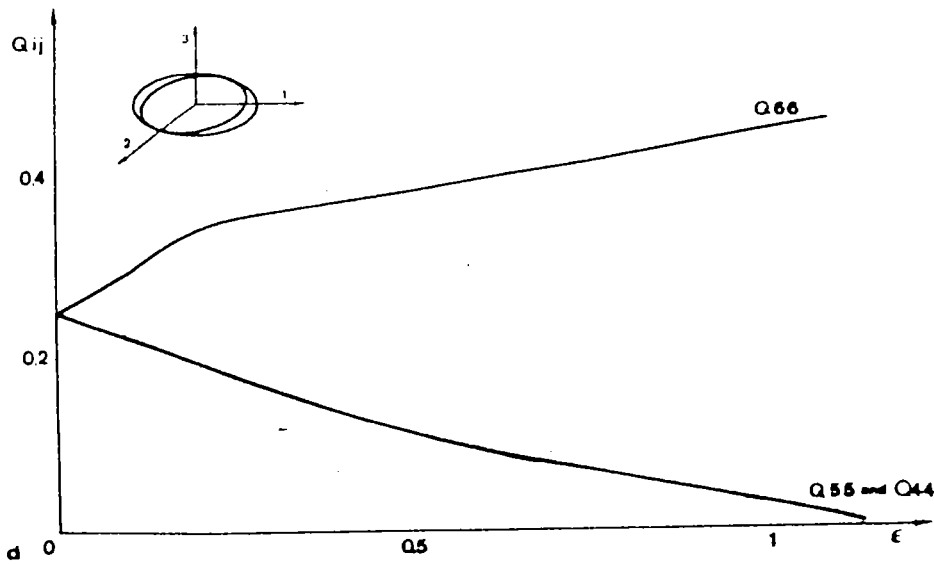
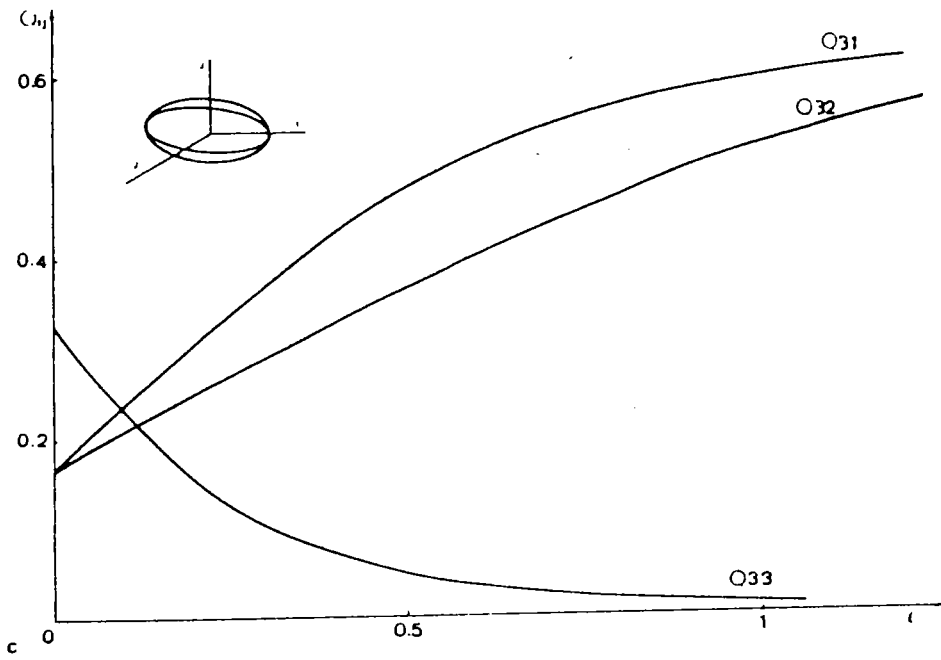


Figure 3.5. (suite)

élastique), sont néanmoins une base quantitative sur laquelle l'analyse suivante peut être évaluée

### 3.2 LES CONDITIONS AUX LIMITES

Les principes généraux qui viennent d'être formulés vont maintenant être appliqués à quatre types de tests de laboratoire courants: la traction et la compression uniaxiales, la torsion et le laminage.

#### 3.2.1 La traction uniaxiale

Un grain qui, pour simplifier, est pris de forme initiale cubique, va se déformer en traction suivant la forme indiquée sur la figure 3.3. Les axes vont dorénavant être choisis de manière à garder l'ordre suivant:

$$L_1 > L_2 > L_3 \quad (3.3)$$

où ces trois paramètres représentent les longueurs principales du grain suivant les directions 1, 2 et 3. D'après ce qui a été postulé précédemment, il est clair que les relations de compatibilité sur les faces 2 et 3 deviendront prépondérantes, elles s'écrivent:

$$\epsilon_{22} = E_{22}, \quad \epsilon_{33} = E_{33}, \quad \epsilon_{12} = E_{12}, \quad (3.4)$$

$$\text{et } \epsilon_{13} = E_{13}$$

La relation d'équilibre complémentaire est donc:

$$\sigma_{23} = \tau_{23} \quad (3.5)$$

qui s'annule en l'absence de frottement de surface. Les relations (3.4) ont été obtenues en réunissant toutes les conditions de compatibilité sur les faces 2 et 3, la relation (3.5), en gardant la relation d'équilibre commune à ces faces.

### 3.2.2 La compression uniaxiale

Lorsqu'il est comprimé, le grain va adopter la géométrie schématisée sur la figure 3.4. La face 3 devenant prépondérante, il est possible de déterminer les conditions sur les déformations:

$$\epsilon_{11} = E_{11}, \quad \epsilon_{22} = E_{22} \text{ et } \epsilon_{12} = E_{12} \quad (3.6)$$

les conditions d'équilibre restantes sont donc:

$$\sigma_{13} = \Sigma_{13}, \quad \sigma_{23} = \Sigma_{23} \quad (3.7)$$

### 3.2.3 Le laminage

Il est tout d'abord important de noter que le laminage est un processus industriel très complexe, qui est en fait approché par le calcul par une simulation de l'essai de compression plane sans aucune friction de surface. En réalité le frottement exercé par les laminoirs sur les toles influe sur le développement de la texture de surface. Néanmoins, ce frottement étant symétrique, il existe un domaine où il n'influe plus, et qui est proche des conditions simulées ici. Les conditions limites sont les



mêmes que dans le cas de la compression uniaxiale (figure 3.5).

#### 3.2.4 La torsion

L'essai de traction est limité par la striction, et même lorsque la déformation est contrôlée localement (10,11), des effets dus à la triaxialité doivent être corrigés. L'essai de compression, lui, est limité du fait du frottement entre les mors et l'éprouvette qui accroît son diamètre. Ces problèmes de lubrification ont été maintes fois soulignés (12,13). Le cas de la torsion est, de loin, le plus compliqué, car les axes principaux du grain subissent une rotation lors de la déformation. Ce cas a été étudié en détail par Canova (4) et Canova et al. (5). L'intérêt de la torsion des barres cylindriques pleines comme test de laboratoire est évident pour l'étude des lois de comportement. En effet, il n'y a pas de changement notable de la forme de l'éprouvette au cours des tests, même lorsqu'il y a localisation de l'écoulement. Les seuls changements géométriques sont dus aux effets axiaux et ne sont pas très importants. L'écoulement, de plus, est très stable, il ne localise que lorsque des effets thermiques rentrent en jeu, pour des matériaux qui durcissent au cours de la déformation, ou alors lorsque des changements de structure ont lieu conduisant à un adoucissement. Ces

phénomènes ont été étudiés par Rauch (6), Rauch et al. (7,8) et dans le cas du cisaillement par Fressengeas et Molinari (9). La difficulté, dans ce type d'essais, réside dans le calcul de la contrainte de cisaillement, la donnée brute du test étant le couple exercé en bout d'éprouvette. Plusieurs méthodes existent dues à Nadai (14), Fields et Backofen (15) et Canova et al. (4,5), qui donnent une assez bonne précision.

La démarche, pour établir les conditions limites, consiste ici à calculer le tenseur macroscopique dans les axes principaux du grain, puis à décider des composantes qui devront être continues.

Le vecteur déplacement  $\vec{U}$ , dans le repère cylindrique de l'éprouvette se met sous la forme :

$$\begin{aligned} U_r &= f(r) \\ U_\theta &= r \cdot \theta(z, r) \\ U_z &= g(z, r) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Le fait que les fonctions  $\theta$  et  $g$  puissent dépendre à la fois de  $r$  et de  $z$  implique en particulier que des lignes radiales peuvent ne pas rester droites ( $dE_{r\theta} \neq 0$ , voir figure 3.6). Supposons  $dE_{r\theta}$  et  $dE_{rz} \neq 0$ , le test étant exempt de toute inhomogénéité, les états de contrainte et de déformation sont considérés comme uniformes le long de l'axe de l'éprouvette, dans sa partie utile. Par contre, ces états

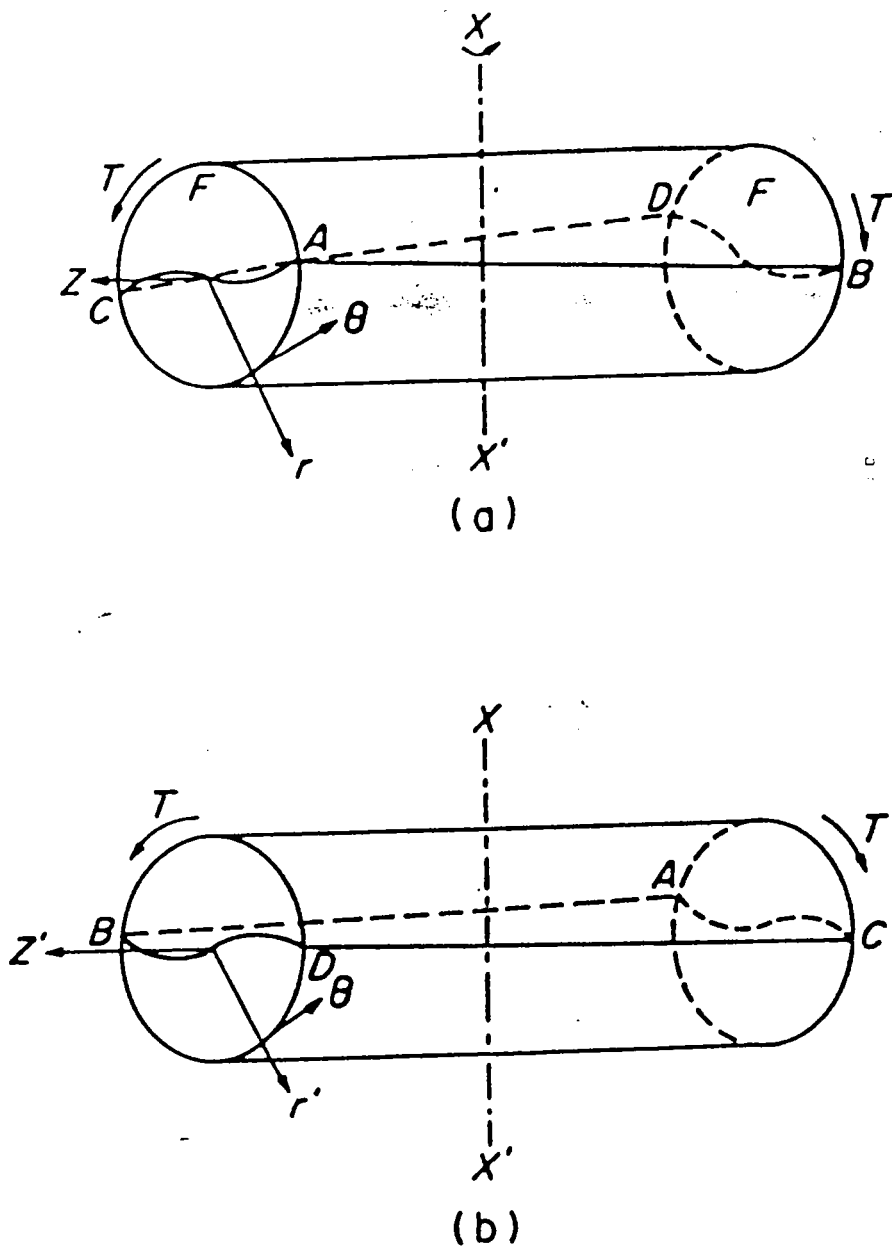


Figure 3.6. Effet d'une rotation de  $\pi$  d'axe  $XX'$  sur les cisaillements éventuels  $dE_{rz}$ . On notera le changement de signe. L'effet est le même concernant le cisaillement  $dE_{rz'}$ .

vont dépendre de la position radiale. Les équations d'équilibre, en coordonnées cylindriques, sachant que  $\sigma$  ne dépend ni de  $z$ , ni de  $\theta$ , se réduisent à:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rz}}{r} &= 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Les deux dernières équations aboutissent aux relations:

$$\sigma_{rz} = (A/r^2) ; \quad \sigma_{r\theta} = (B/r) \quad (3.9)$$

qui, en raison de la symétrie par rapport à l'axe  $r=0$ , conduisent à:

$$\sigma_{rz} = \sigma_{r\theta} = 0 \quad (3.10)$$

Une rotation autour d'un axe radial ( $XX'$  sur la figure 3.6), d'un angle  $\pi$ , ne va pas modifier l'état de contrainte grâce à la relation (3.10). Par contre, par cette rotation, le tenseur des déformations incrémentales devient:

$$\begin{array}{ccc} dE_{rr} & -dE_{r\theta} & -dE_{rz} \\ -dE_{r\theta} & dE_{\theta\theta} & dE_{\theta z} \\ -dE_{rz} & dE_{\theta z} & dE_{zz} \end{array} \quad (3.11)$$

ce qui n'est possible que si:

$$dE_{r\theta} = dE_{rz} = 0 \quad (3.12)$$

Ce raisonnement valable lorsque le matériau est homogène et isotrope, l'est aussi lorsque les propriétés mécaniques sont invariantes par rotation de  $\pi$  autour de l'axe  $r$ , ce qui est le cas, compte tenu du fait que le test de torsion possède

cette symétrie et qu'en général l'histoire préalable des barres testées possède au moins aussi cette symétrie. Ce point sera développé plus loin lorsque la liaison sera faite entre la symétrie de la texture et la symétrie de l'anisotropie mécanique.

Grace aux relations (3.12), il peut être établi que  $\vec{U}$  peut maintenant s'écrire :

$$\begin{aligned} U_r &= f(r) \\ U_\theta &= r \cdot g(z) \\ U_z &= g(z) \end{aligned} \quad (3.13)$$

La conservation du volume s'exprime, à l'aide des relations (3.13) :

$$E_{rr} + E_{\theta\theta} + E_{zz} = (df/dr) + (f/r) + (dg/dz) \quad (3.14)$$

La fonction  $g$  ne dépendant que de  $z$  et  $f$  que de  $r$ ,  $g$  devra être proportionnelle à  $z$  et donc  $f$  à  $r$ , ce qui implique les égalités :

$$E_{rr} = E_{\theta\theta} = -E_{zz}/2 \quad (3.15)$$

Il est important de noter que cette dernière relation ne s'applique, en général, qu'aux barres et pas aux tubes. En effet, la résolution générale de l'équation (3.14) implique :

$$\begin{aligned} g &= -2Az + B \\ f &= Ar + C/r \end{aligned} \quad (3.16)$$

$C$  est nul pour les barres pleines, car  $f$  doit être fini au point  $r=0$ , par contre la condition  $C=0$  est aussi raisonnable pour les tubes car  $f$  n'a pas à être définie en  $r=0$ .

Ayant établi la forme du tenseur macroscopique  $dE$ , il est désormais possible de déterminer les conditions limites en comparant  $dE$  et  $d\varepsilon$  dans les axes principaux du grain. Ceux-ci sont établis facilement en calculant l'équation de l'ellipse transformée d'un cercle par cisaillement simple (on prend ici  $dE_{zz}=0$ ). Le grand axe  $X$  est incliné par rapport à l'axe  $0$  d'un angle  $\beta$ , tel que :

$$\operatorname{tg}(2\beta) = 2/\gamma \quad (3.17)$$

où  $\gamma$  est le cisaillement macroscopique. L'expression de  $d\varepsilon$  dans les axes  $(r, X, Y)$  s'écrit :

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{XX} &= d\varepsilon_{\theta\theta} \cos^2\beta + d\varepsilon_{zz} \sin^2\beta + d\varepsilon_{\theta z} \sin 2\beta \\ d\varepsilon_{YY} &= d\varepsilon_{\theta\theta} \sin^2\beta + d\varepsilon_{zz} \cos^2\beta - d\varepsilon_{\theta z} \sin 2\beta \\ d\varepsilon_{rX} &= d\varepsilon_{r\theta} \cos\beta + d\varepsilon_{rz} \sin\beta \\ d\varepsilon_{rY} &= d\varepsilon_{r\theta} \sin\beta + d\varepsilon_{rz} \cos\beta \\ d\varepsilon_{XY} &= \frac{1}{2} \cdot (d\varepsilon_{zz} - d\varepsilon_{\theta\theta}) \sin 2\beta + d\varepsilon_{\theta z} \cos 2\beta \end{aligned} \quad (2.18)$$

D'après les principes énoncés plus haut, la face  $Y$  devenant plus importante, les déformations imposées dans la plus grosse partie du grain sont :

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{rr} &= d\varepsilon_{rr} = 0 \\ d\varepsilon_{XX} &= d\varepsilon_{\theta z} \sin 2\beta = d\gamma \cdot \sin 2\beta \\ d\varepsilon_{rX} &= d\varepsilon_{rX} = 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Il est visible, dans ces relations, que, lorsque  $\beta$  est nul, il n'y a plus de déformation plastique du tout, ce qui n'a pas de sens physique, alors qu'en fait, la déformation primaire  $d\varepsilon_{\theta z}$ , bien que n'étant pas continue active un système supplémentaire. Ceci nous amène à modifier légèrement les principes de base en ces termes: il faut

imposer les relations de compatibilité sur les faces importantes ainsi que la composante de déformation primaire si celle-ci n'est pas déjà incluse dans les relations précédentes. Ainsi donc aux équations (3.19) s'ajoute la continuité de  $d\mathcal{E}_{\theta z}$ , ce qui revient à imposer:

$$\begin{aligned} d\mathcal{E}_{XY} &= dE_{XY} = dy \cdot \cos 2\theta \\ \text{et } \sigma_{rY} &= \Sigma_{rY} \end{aligned} \quad (3.20)$$

### 3.2.4 Discussion

Un parallèle peut être fait concernant ces conditions limites avec les calculs effectués par Tiem et al. (3). Il est visible sur les figures 3.4 et 3.5, que la théorie DPI est en accord rigoureux avec les résultats de Tiem et al. lorsque la déformation est infinie. La théorie DPI apparaît donc ici comme un cas limite et donc une approximation qui n'est vraie qu'asymptotiquement. Il est aussi visible que, la théorie de Kröner (donc la théorie DTI), n'est qu'une approximation valable aux petites déformations. Il semble, par contre, qu'il y ait contradiction entre les résultats de Tiem et ceux de Kocks et Canova (2) dans le cas de la traction uniaxiale, où ces derniers relaxent la composante  $\mathcal{E}_{23}$ . Tiem et al., en effet, trouvent la contrainte de réaction associée à cette composante, plus petite que les autres, mais ne tendant pas vers zéro, elle ne doit donc pas être relaxée. Bien que les

résultats concernant les simulations de texture ne diffèrent pas notablement dans le cas DTI par rapport aux conditions DPI, l'hypothèse de départ n'en est pas moins erronée. En fait l'argument de Kocks et Canova concernant les conditions de compatibilité peut être amélioré de la façon suivante, ainsi qu'il l'a été expliqué par Tiem et al.:

Considérons qu'un grain veuille se déformer suivant un tenseur gradient de déplacement  $u_{i,j}$ . Il est possible de voir, suivant la forme du grain, quelle est (figure 3.7) le volume du voisinage affecté par telle ou telle composante  $u_{i,j}$ . Lorsque ce volume tend vers zéro, la déformation correspondante tendra de plus en plus à être relaxée. Le raisonnement consiste à évaluer qualitativement la fraction volumique 'dérangée' dans la matrice, supposant que celle-ci est inerte, c'est-à-dire sans déformation à l'infini. Sur la figure 3.7, par exemple, un gradient de déplacement  $u_{2,3}$  devra être continu dans un volume extérieur au grain, dans la direction 1, dont la longueur est fixée (approximativement) égale à la hauteur du grain,  $L_3$ , c'est-à-dire, en fait, la plus petite dimension de la face 1. Par contre ce terme peut être discontinu dans la direction 2, le volume affecté est donc nul dans cette direction. On peut donc évaluer le volume affecté, dans la direction 1 comme étant égal à:  $(L_3.L_3.L_2/L_1.L_2.L_3) = L_3/L_1$ .



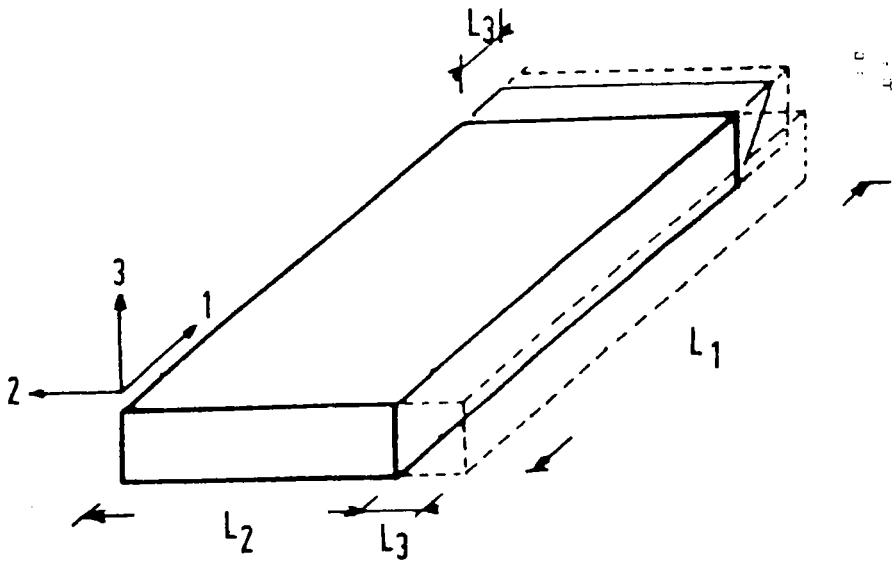


Figure 3.7. Schématisation des zones voisines du grain plat, affectées par des gradients de déplacement  $u_{1,3}$  et  $u_{2,3}$  induits par la plasticité du grain.

En général un terme  $u_{i,j}$  devra être continu dans un volume  $L_k/L_i$ , dans la direction  $i$  (si  $L_k < L_j$ ). Il faut noter que ce terme  $u_{i,j}$  n'a pas à être continu dans la direction  $j$ . Le volume total affecté sera donc la somme des volumes calculés pour les trois directions 1,2 et 3. Sur le tableau 3.1, sont récapitulés, pour chaque  $u_{i,j}$ , et chaque type de test envisagé, les fractions volumiques affectées et les conclusions quant à la relaxation de telle ou telle composante de déformation. Il est possible de voir que, en traction, aucune fraction volumique ne tend vers zéro, et ainsi que ce test doit être simulé dans les conditions DTI. Les résultats obtenus pour les autres tests confirment également les résultats précédents qui étaient déjà en accord avec les résultats de Tiem et al.

Ayant désormais établi les conditions limites permettant de décrire dans les conditions DPI et DTI les tests de laboratoire d'usage courant, on va maintenant exposer la méthode de sélection des systèmes de glissement actifs, qui est à la base de la simulation.

### 3.2 LA SELECTION DES SYSTEMES ACTIFS

Comme dit au chapitre précédent, il y a deux méthodes possibles pour sélectionner les systèmes de glissement actifs dans le cas DTI:

Tableau 3.1

Estimation qualitative des fractions volumiques affectées par différents gradients de déplacement, en traction, compression et laminage. E est ici la déformation vraie associée aux tests.

	TENSION	COMPRESSION	ROLLING
	along 3	along 3	(RPN=3, RD=1)
$u_{1,1}$	2	$\exp(3E/2) + \exp(-3E/2)$	$\exp(E) + \exp(-E)$
$u_{2,1}$	"	"	"
$u_{3,1}$	"	"	"
$u_{1,2}$	$1 + \exp(-3E/2)$	"	$\exp(-2E) + \exp(E)$
$u_{2,2}$	"	"	"
$u_{3,2}$	"	"	"
$u_{1,3}$	"	$2\exp(-3E/2)$	$2\exp(-E)$
$u_{2,3}$	"	"	"
$u_{3,3}$	"	"	"

- L'approche de Taylor, qui consiste d'abord à choisir les ensembles (s) de cinq systèmes indépendants qui résolvent les équations:

$$dE_{ij} = (1/2) \sum (m_{ij}^s + m_{ji}^s) dy^s = dE_{ij} \quad (3.21)$$

( $m_{ij}^s$  est défini par l'équation (1.6)). Parmi ces ensembles, il faut ne retenir que ceux qui minimisent:

$$dW = \sum \tau_c^s dy^s = \min \quad (3.22)$$

D'après Chin et Mammel (16) et Kocks (17), si on définit le tenseur  $\underline{\sigma}^s$  associé à l'ensemble des systèmes (s), tel que:

$$\underline{m}^s : \underline{\sigma}^s = \tau_c^s \quad \forall s \in (s) \quad (3.23)$$

alors, en général, pour tout système n'appartenant pas à cet ensemble, on a:

$$\underline{m}^s : \underline{\sigma}^s < \tau_c^s \quad (3.24)$$

c'est-à-dire, les systèmes choisis vont être à l'état critique et tous les autres systèmes non actifs, à l'état sub-critique

- L'approche de Bishop et Hill (18), qui, d'abord consiste à obtenir les tenseurs  $\underline{\sigma}$  associés aux ensembles (s) de systèmes à l'état critique, donc vérifiant l'équation (3.24). Parmi ces ensembles, sera retenu celui (ou ceux) qui maximise la relation:

$$dW = \underline{\sigma} : d\underline{E} = \max \quad (3.25)$$

Il a été montré par Chin et Mammel que l'état de contrainte obtenu par les deux méthodes sont rigoureusement identiques

et donc que les systèmes choisis comme actifs sont aussi les mêmes.

Dans les conditions DPI où  $p$  composantes de déformation sont imposées, l'approche de Taylor développée par van Houtte (19) consiste à résoudre les équations (3.21) et (3.22) uniquement pour ces composantes, à partir des ensembles de systèmes indépendants à l'ordre  $p$ . L'approche de Bishop et Hill, qui est plus pratique et élégante dans le cas DTI, va maintenant être développée dans les conditions DPI. Une fois de plus, les deux types de méthodes sont rigoureusement équivalentes, ainsi que l'a démontré van Houtte (20), dans les conditions DPI. L'approche proposée ici repose sur la connaissance des sous-surfaces de charge.

### 3.3.1 Analyse des sous-surfaces de charge

Lorsque  $p$  composantes de  $d\bar{E}$  sont imposées, il reste  $5-p$  composantes de  $\underline{\Sigma}$  prescrites, et donc, à l'aide de la relation (3.25), il est possible de construire la sous-surface de charge qui n'est que l'intersection de la surface de charge de dimension cinq avec les hyperplans des contraintes imposées. Ensuite, il faut trouver  $P_{\underline{\sigma}}$ , tel que:

$$\langle P_{\underline{\sigma}} - P_{\underline{\sigma}^v} \rangle : d\bar{E}' > 0 \quad (3.26)$$

où ici  $v$  désigne un sommet quelconque de cette sous-surface de dimension  $p$ , associé à un ensemble de systèmes de glissement indépendants à l'ordre  $p$  et à l'état critique.

$dE'$  est le tenseur des déformations imposées, c'est-à-dire  $dE$  projeté dans ce sous-espace. Cette méthode a été utilisée par Kocks et Chandra (21) et par Driver (22). Elle présente le désavantage que les conditions aux limites sont toujours imposées dans les axes principaux des grains et non les axes cristallographiques, et donc que la sous-surface de charge doit être reconstruite à chaque itération, ce qui peut être lent et coûteux. Canova (23) et Kocks et al. (24) ont proposé une méthode pour rendre ce calcul plus efficace: elle est basée sur la représentation paramétrique de toute la surface de charge, à supposer qu'il y ait un nombre fini de systèmes de glissement et que la loi de Schmid soit vérifiée. Cette approche consiste à séparer la surface en sommets (cinq systèmes indépendants), arêtes du quatrième ordre, du troisième ordre, deuxième ordre et plans. Chaque sommet de la surface à cinq dimensions est associé à un ensemble de systèmes indépendants à l'ordre cinq. Il est possible d'étudier toutes les combinaisons de sommets deux à deux, pour ne retenir que ceux ayant en commun des systèmes indépendants à l'ordre quatre. Ainsi, sur le tableau 2.1, il est possible de voir que, par exemple les sommets 1 et 8 ont quatre systèmes en commun. Une analyse des sous-déterminants du tenseur formé des quatre tenseurs  $\underline{m}^S$  permet d'établir s'ils sont ou non indépendants à l'ordre quatre. Lorsqu'il

arrive que deux sommets aient plus de quatre systèmes communs (par exemple les sommets 2 et 27), ces derniers ne pourront être indépendants à l'ordre cinq, sinon ils auraient formé un sommet qui serait indiqué dans le tableau. Ce tableau indique les douze systèmes. La notation de Diehl (25) est employée pour les indexer, ainsi qu'il l'a été exposé au chapitre précédent. Les 28 sommets du (demi) polyèdre de charge sont classés en cinq catégories correspondant chacune à un type d'interaction entre systèmes.

Tous les résultats concernant les EP4, EP3 et EP2, c'est-à-dire la liste et la représentation paramétrique sont présentés en Annexe 2.

### 3.3.2 Algorithme de sélection des systèmes

Ayant établi une description paramétrique de la surface de charge, il est désormais possible de mettre au point une méthode systématique de choix des systèmes actifs.

Supposons, pour illustrer un cas à l'ordre quatre, qu'un grain plat soit assujéti aux conditions limites (3.19) et (3.20). Les 28 états de contrainte  $\sigma$  étant tabulés pour le repère cristallographique, il convient d'abord de les exprimer dans le repère principal du grain à l'aide d'une matrice de passage A. Un premier tri des EP4

est ensuite fait en ne conservant que ceux qui coupent le plan  $\sigma_{rY} = \Sigma_{rY}$ , c'est-à-dire vérifiant l'équation:

$$x_U(\sigma_{rY}^U - \Sigma_{rY}) + x_V(\sigma_{rY}^V - \Sigma_{rY}) = 0 \quad (3.27)$$

avec  $x^U + x^V = 1$ ;  $x^U$  et  $x^V > 0$

qui seront vérifiées si:

$$(\sigma_{rY}^U - \Sigma_{rY})(\sigma_{rY}^V - \Sigma_{rY}) < 0 \quad (3.28)$$

Si les conditions (3.28) sont remplies, des valeurs admissibles de  $x_U$  et  $x_V$  sont calculées permettant ainsi à  $4\sigma$  d'être entièrement déterminé, grâce à l'équation (A2.1). La dernière sélection consiste à appliquer la condition (3.27) sur les états plastiques préalablement choisis. Les systèmes de glissement se lisent dans la table A2.1

Imaginons maintenant que l'on souhaite déterminer les systèmes actifs dans un grain plat en compression uniaxiale. Ayant, comme précédemment, exprimé les EP5 (sommets de la surface de charge) dans le repère principal du grain, il faut garder les EP3 obéissant aux équations (3.6), donc vérifiant:

$$\begin{aligned} 0 &= x_U(\sigma_{13}^U - \Sigma_{13}) + x_V(\sigma_{13}^V - \Sigma_{13}) + x_W(\sigma_{13}^W - \Sigma_{13}) \\ 0 &= x_U(\sigma_{23}^U - \Sigma_{23}) + x_V(\sigma_{23}^V - \Sigma_{23}) + x_W(\sigma_{23}^W - \Sigma_{23}) \\ &\text{avec } x_U + x_V + x_W = 1 \text{ et } x_U, x_V \text{ et } x_W > 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

Une fois la première sélection faite, les états de contrainte sont entièrement calculés à l'aide de l'équation (A2.2). Comme avant, la sélection finale se fait en appliquant la relation (3.27).



Dans les tests que l'on veut simuler, il n'y a aucun cas à l'ordre deux, ce cas a donc été écarté ici.

Dans tous les cas exposés, ayant le choix final de systèmes actifs, il faudra pour le calcul des textures pouvoir établir la répartition, sur ces systèmes, des glissements microscopiques. Pour cela, il faut pouvoir résoudre l'équation:

$$dE'_{ij} = (1/2) \sum_S (m_{ij}^S + m_{ji}^S) dy^S \quad (3.30)$$

où les inconnues sont les  $dy^S$ , ce qui permettra de calculer la rotation du réseau.

### 3.4 CALCUL DES CHANGEMENTS D'ORIENTATION

Le premier problème, dans le calcul de la rotation du réseau, réside dans le manque d'unicité de la répartition des glissements microscopiques et donc de la rotation plastique:

$$d\omega^P = (1/2) \sum_S (\underline{m}^S - t \underline{m}^S) dy^S \quad (3.31)$$

et qui est à la base du calcul des changements d'orientation. Ce problème d'ambiguïté, qui est moins important dans le cas DPI, comme on l'a montré plus haut, existe néanmoins toujours, il convient donc de le résoudre correctement. Plusieurs approches ont été utilisées dans le passé.

### 3.4.1 L'approche moyennée

Cette approche (27,28) consiste à supposer que lorsqu'un grain quelconque, d'orientation donnée, dispose de  $p$  systèmes pour accommoder  $p'$  composantes de déformation ( $p' < p$ ), toutes les solutions sont équiprobables. En fait, dans les simulations, une orientation ne simule pas un grain, mais une famille de grains ayant des voisinages légèrement différents, chacun prenant une solution particulière. L'orientation utilisée pour représenter cette famille aura une rotation qui est la moyenne de toutes les rotations possibles. Dans la pratique, puisqu'on dispose en général d'une infinité de solutions, on ne retient que les solutions extrêmes où  $p'$  systèmes sont actifs. La rotation plastique résultante s'obtient comme moyenne arithmétique de toutes les rotations plastiques obtenues avec toutes les combinaisons possibles de  $p'$  systèmes vérifiant les conditions limitées.

### 3.4.2 L'approche probabiliste

Cette méthode utilisée surtout par van Houtte (29), suppose que les systèmes de glissement n'ont pas une valeur de  $\tau_c^s$  fixée rigoureusement, mais plutôt que  $\tau_c^s$  admet une légère variation aléatoire autour d'une valeur moyenne bien définie, de sorte que les sommets ambigus de la

surface de charge se multiplie en un groupe de sommets avoisinants. Ainsi le principe du travail maximal ne va sélectionner qu'une seule combinaison de  $p'$  systèmes. En pratique, la méthode consiste, à partir d'une liste des  $p$  systèmes à avoir une liste de toutes les combinaisons de  $p'$  systèmes satisfaisant aux conditions limites et à en choisir une au hasard.

### 3.4.3 L'approche de Renouard et Wintenberger

Cette méthode (30) conditionne la sélection des systèmes actifs par l'incrément de puissance dépensée pendant la déformation. En effet, si le principe du travail maximal est l'outil de base pour tous les calculs de texture, cette approche utilise l'incrément de travail. Des systèmes de glissement seront pris comme étant actifs si l'incrément de travail dépensé pendant un incrément de déformation est minimal. Quand il y a ambiguïté, toutes les combinaisons de  $p'$  systèmes sont associés au même travail  $dW$ . Par contre, après un incrément de déformation, suivant la combinaison choisie comme active, la nouvelle orientation sera différente et donc le nouveau travail sera  $dW(s)$ , dépendant de la combinaison choisie. Le choix se fait en prenant la combinaison  $(s)$  telle que le travail  $dW(s)$  après un incrément de déformation soit minimal. Ceci revient à dire que  $(s)$  doit minimiser la quantité  $d^2W$ . Le matériau, en

quelque sorte, doit produire un écrouissage minimum. Ce type d'approche a été généralisé par Franciosi aux cas des contraintes imposées non nécessairement nulles et identifié à une exigence de stabilité pour l'écoulement.

#### 3.4.4 Un critère visco-plastique

La méthode maintenant présentée est basée sur une simplification du calcul viscoplastique faite par Canova et al (31). Une loi couramment employée concernant l'activation de systèmes est la loi puissance:

$$\dot{\gamma}^s = \dot{\gamma}_0 (\tau^s / \tau_c^s)^n \quad (3.32)$$

où la vitesse de glissement sur un système  $s$  s'exprime en fonction d'une vitesse de référence  $\dot{\gamma}_0$ , et du rapport de la contrainte résolue  $\tau^s$  à la contrainte de référence  $\tau_c^s$ , à une puissance  $n$  généralement très élevée (de 50 à 1000) pour la déformation à froid. Sur la figure 3.8 est représentée une telle fonction; on peut voir une zone où  $v$  est pratiquement nul, puis la zone suivante où  $\dot{\gamma}$  croît très vite. Il est possible d'approcher cette loi par une loi linéaire du type:

$$\dot{\gamma}^s = p \left( \left( \tau^s / \tau_c^s \right) - \eta_0 \right) \quad (3.33)$$

$$= 0 \text{ si } \tau^s < \eta_0 \tau_c^s$$

ou  $p$  représente la pente (en  $s^{-1}$ ) et  $\eta_0$  un terme adimensionnel marquant l'abscisse à l'origine. Lorsque le rapport des contraintes est inférieur à ce seuil, le système est considéré comme inactif. Il est à noter que, ainsi qu'on

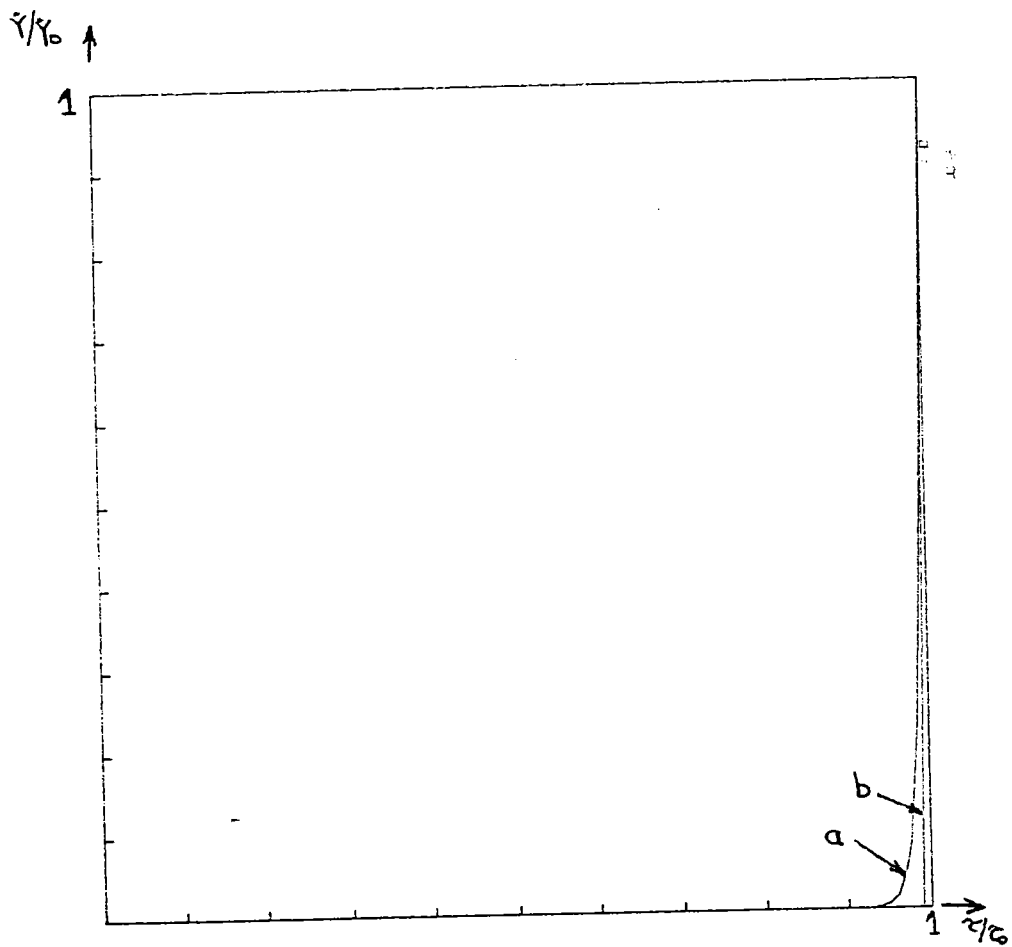


Figure 3.8. Comparaison entre la loi viscoplastique de type puissance (a) et de type bilinéaire (b). On notera la faible déviation entre les courbes. Cas  $m=0.01$ .

peut le constater sur la figure 3.8, il est très difficile de distinguer expérimentalement laquelle des deux fonctions correspond le mieux à la réalité. La vitesse de déformation s'écrivant:

$$\dot{\underline{\xi}} = \sum_s (\underline{m}^s + t\underline{m}^s) \cdot \dot{\gamma}^s / 2 \quad (3.34)$$

soit encore:

$$= p \sum (\underline{m}^s + t\underline{m}^s) ((\underline{m}^s : \underline{\sigma} / \tau_c^s) - \eta_0) / 2 \quad (3.35)$$

et donc:

$$\underline{\sigma} = \underline{P}^{-1} : ((\dot{\underline{\xi}} / p) + \eta_0 \underline{I}) \quad (3.36)$$

avec  $\underline{P} = \sum (\underline{m}^s + t\underline{m}^s) \otimes \underline{m}^s / \tau_c^s / 2$   
 et  $\underline{I} = \sum (\underline{m}^s + t\underline{m}^s) / 2$

L'équation précédente montre que, connaissant les systèmes actifs, il est possible de trouver de manière unique, le tenseur des contraintes. Imaginons que les systèmes actifs sont connus, en faisant tendre  $p$  vers  $\infty$  et  $\eta_0$  vers 1, nous nous rapprochons du cas limite  $m=0$  (ou  $1/n=0$ ). Dans l'équation (3.36), il est visible que  $\underline{\sigma}$  tend vers  $\underline{P}^{-1} : \underline{I}$ , qui n'est autre que le sommet de la surface de charge trouvé en appliquant la méthode de Bishop et Hill.

Il est aussi possible de voir que pour des valeurs de  $\eta_0$  proches de 1, la contrainte est proche de celle correspondant au sommet de la surface critique, et donc que seuls les systèmes associés à ce sommet seront potentiellement actifs. La contrainte résolue sur tous les autres systèmes étant trop basse.

La méthode consiste donc à d'abord choisir le sommet par la méthode classique et supposer tous les systèmes associés actifs. Si, sur un système, le produit  $\tau^s \dot{\gamma}^s < 0$ , celui-ci doit être désactivé et la contrainte 'corrigée' en conséquence. Il peut être démontré facilement, en manipulant simultanément les équations (3.33) et (3.36) que la vitesse de glissement microscopique sur chaque système actif est obtenue sans ambiguïté par la formule:

$$\dot{\gamma}^s = \frac{m^s p^1 : \dot{\epsilon}}{\tau_c^s} \quad (3.37)$$

Sur cette équation, il est remarquable qu'aucun paramètre décrivant la sensibilité à la vitesse de déformation n'apparaît, de sorte que pour des valeurs courantes de  $m$  (terme de sensibilité à la vitesse), l'ensemble des systèmes actifs est stable et la répartition des cisaillements microscopiques, unique. Ainsi, cette solution peut aussi être considérée comme valable, par continuité, dans le cas extrême où  $m=0$ .

En conclusion, la sensibilité à la vitesse n'a aucun effet sur la répartition des cisaillements microscopiques, son seul effet concerne la contrainte. On voit, en effet, sur l'équation (3.36), que pour les mêmes systèmes actifs, la contrainte change dépendant des paramètres  $p$  et  $\eta_0$ .

Il est facilement remarquable qu'une faible sensibilité à la vitesse a permis de rendre les calculs linéaires et donc de les simplifier considérablement.

Cette méthode est différente de celle proposée par Canova et Kocks (32), qui consistait simplement à positionner une sphère tangente à tous les plans de la surface de charge joignant le sommet choisi par la méthode classique, puis ayant fixé arbitrairement le centre et le rayon, en déduisait la contrainte par la loi de la normalité.

Ayant donc déterminé le terme de rotation plastique de manière unique, le calcul du changement d'orientation se fait comme suit. Dans le cas DTI, la méthode connue consiste à soustraire la rotation plastique de la rotation totale, car, bien que l'hypothèse de Taylor ne suppose explicitement que la continuité de la déformation, elle suppose implicitement la continuité du tenseur gradient de déplacement total. Par contre, lorsque les grains adoptent des formes très anisotropes, le tenseur des déformations est continu en partie, ainsi que le tenseur gradient de déplacement. Un plan  $k$  est considéré comme fixe dans l'espace, de grain en grain si  $u_{k,i}$  et  $u_{k,j}$  sont des termes indépendants de l'endroit où ils sont mesurés. La méthode exposée au paragraphe 3.2.4 permet de déterminer



quels sont les plans et les lignes continus d'un grain à l'autre. Le calcul des changements d'orientation seront donc faits en soustrayant la rotation plastique de la partie continue du tenseur de rotation totale. Ceci est encore à mettre en parallèle avec le calcul de Tiem et al. Si on appelle  $\underline{w}^{To}$ , la rotation totale correspondante au cas DTI, la rotation du réseau, dans le cas général peut s'écrire dans le cadre du calcul d'Eshelby:

$$\underline{w}^* = \underline{w}^{To} + \begin{matrix} 0 & p \cdot \Delta \epsilon_{12} & q \cdot \Delta \epsilon_{13} \\ X & 0 & r \cdot \Delta \epsilon_{23} \\ X & X & X \end{matrix} \quad (3.38)$$

Les valeurs de p, q et r sont représentées pour les cas de la traction sur les figures 3.9a et b. Les valeurs équivalentes de ces paramètres pour les cas DPI sont aussi mises sur ces graphes. Il est notable que ces valeurs correspondent aux cas extrêmes de ceux calculés par Tiem et al.

Le prochain chapitre va désormais s'attacher à décrire les prédictions de textures de déformation pour des trajets du type traction, compression laminage et torsion monotones à l'aide des méthodes exposées plus haut.

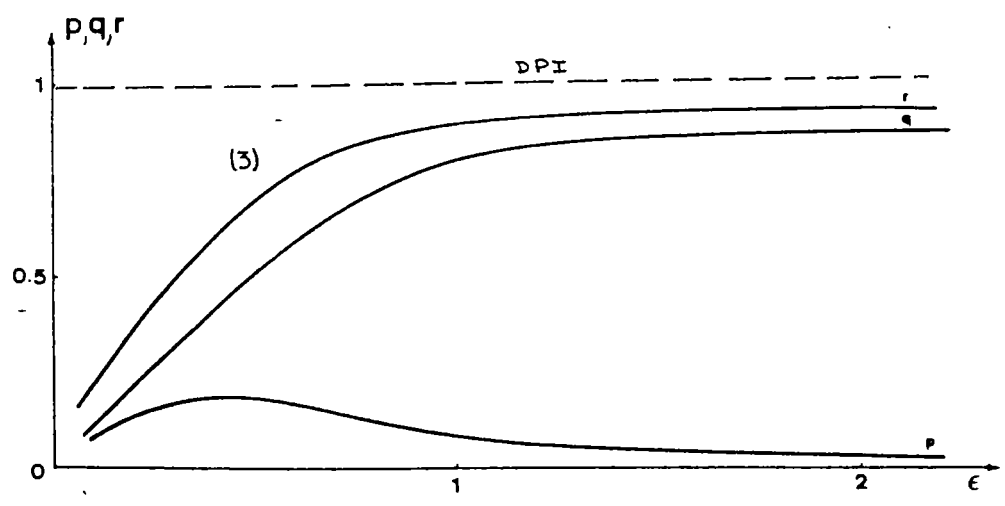
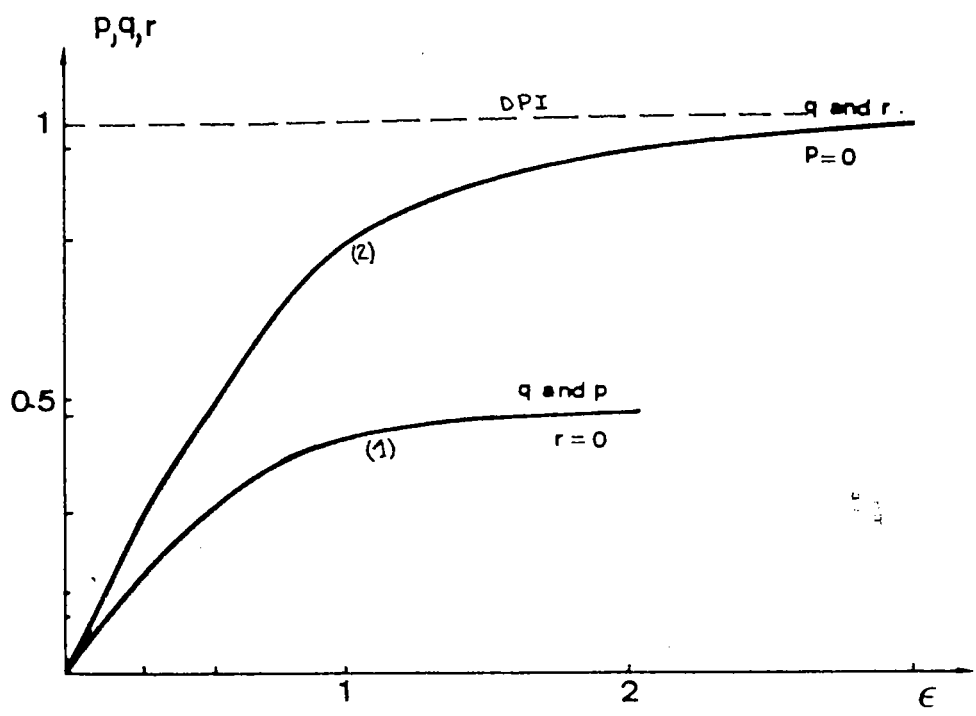


Figure 3.9. Evolution des paramètres p, q et r en fonction de la déformation vraie pour les cas de la traction uniaxiale (1), la compression uniaxiale (2) et le laminage (3)

75

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

DU CHAPITRE 3

- (1) H.Honneff and H.Mecking, "Textures of Materials", G.Gottstein and K.Lücke eds), 1978, p.265.
- (2) U.F.Kocks, G.R.Canova and J.J.Jonas, Acta.Met., vol.31, 1983, p.1243.
- (3) S.Tiem, M.Berveiller and G.R.Canova, Acta.Met., in press.
- (4) G.R.Canova, M.Eng. thesis McGill University, Montréal, Canada, 1980.
- (5) G.R.Canova, S.Shrivastava, J.J.Jonas and C.G'sell, in "Formability of Metallic Materials", 2000A.D., ASTM STP 753, J.R.Newby and B.A.Niemeier eds, 1982, p.189.
- (6) E.F.Rauch, M.Eng. thesis McGill University, Montréal, Canada, 1983.
- (7) E.F.Rauch, G.R.Canova, J.J.Jonas and S.L.Semiatin, Acta.Met., vol.33 n°3, 1985, p.465.
- (8) E.F.Rauch, G.R.Canova, J.J.Jonas and J.P.Michel, Proc. Considère Memorial, Paris, 1985.
- (9) C.Fressengeas et A.Molinari, J.Phys., Tome 46, 1985, p.C5-283.

(10) C.G'sell and J.J.Jonas, J.Mat.Sci., vol.14, 1979, p.583.

(11) N.Christodoulou, J.J.Jonas and G.R.Canova, ASTM STP 765, R.W.Rhode and J.C.Swearengen, 1982, p.51.

(12) S.S.Hecker, M.G.Stout and D.T.Eash, Proc. workshop on plasticity of metals at finite strain, experiment and computation, E.H.Lee and R.L.Mallett eds, 1982, p.162.

(13) M.G.Stout, private communication

(14) A.Nadai, "Theory of flow and fracture", McGraw Hill, vol.1, 1959, p.349.

(15) D.S.Fields and W.A.Backofen, ASTM, vol.57, 1957, p.1259.

(16) G.Y.Chin and W.L.Mammel, Trans. TMS-AIME, vol.245, 1969, p.1211.

(17) U.F.Kocks, Met.Trans., vol.1, 1970, p.1121.

(18) J.F.W.Bishop and R.Hill, Phil.Mag., vol.42, 1951, p.414.

(19) P.van Houtte, Acta.Met., vol.26, 1978, p.591.

(20) P.van Houtte, Proc. ICOTOM6 (S.Nagashima ed.), Iron and Steel Institute of Japan, 1981, p.428.

(21) U.F.Kocks and H.Chandra, Acta.Met., vol.30, 1982, p.695.

(22) J.H.Driver, A.Skalli et M.Wintenberger, Mem.Et.Sci.Rev.Met., vol.8, 1983, p.241.

- (23) G.R.Canova, PhD thesis, McGill University, Montréal, Canada, 1983.
- (24) U.F.Kocks, G.R.Canova and J.J.Jonas, Acta.Met., vol.31, 1983, p.1243.
- (25) J.Diehl, T.H.Stuttgart, Dissertation, 1955.
- (26) A.V.Hershey, J.Appl.Mech., vol.21, 1954, p.241
- (27) H.J.Bunge, Kr. und Tech., vol.3, 1970, p.145.
- (28) P.van Houtte, PhD thesis, Dept Metaalkunde, Katholieke Universiteit Leuven, 1975.
- (29) P.van Houtte, Proc. ICOTOM7, C.M.Brakman et al. eds, Netherlands Society for Metals, 1984, p.5.
- (30) M.Renouard et M.Wintenberger, C.R.Acad.Sci., Paris, B290, 1980, p.403.
- (31) U.F.Kocks, C.N.Tomé and G.R.Canova, Proc.Mandel Symposium, Paris, 1985.
- (32) G.R.Canova and U.F.Kocks, Proc.ICOTOM7, C.M.Brakman et al. eds, Netherlands Society for Metals, 1984, p.573.

#### 4 RESULTATS DES SIMULATIONS DE TEXTURE

Avant les résultats proprement dits, il convient d'abord de fixer la procédure pratique permettant d'effectuer les simulations. Comme dit précédemment, l'évolution de la texture est basé sur le calcul d'une vitesse de rotation instantanée qui est intégrée de manière à établir les changements d'orientation. Le procédé numérique permettant cette intégration est un calcul itératif dont il est nécessaire de fixer le pas, c'est-à-dire l'incrément de déformation.

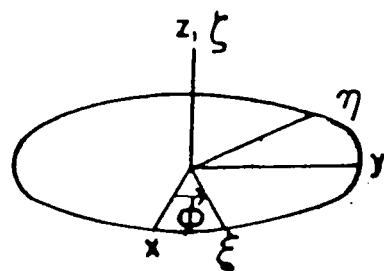
D'autre part, étant donné que l'on veut simuler la texture d'un polycristal, il faut aussi établir quelle est la population d'orientations adéquate qui peut prétendre représenter ce polycristal. Ce problème est important, à la fois pour la visualisation des textures, mais aussi pour le calcul des propriétés mécaniques de l'agrégat. Ces deux problèmes seront abordés avant la partie concernant la description des résultats. Après les résultats des

simulations, les statistiques associées à ceux-ci seront aussi présentées. Auparavant, nous exposons rapidement les méthodes utilisées pour décrire les textures.

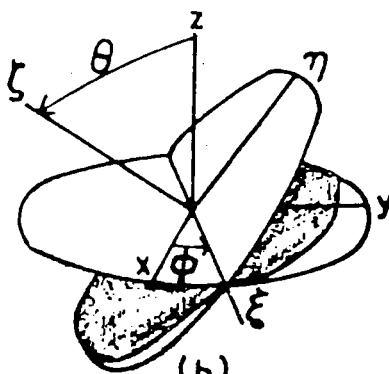
#### 4.1 METHODES DE DESCRIPTION DES TEXTURES

Chaque grain constituant le polycristal a une orientation par rapport aux axes de l'éprouvette, qui peut être décrite au moyen de trois angles d'Euler. Pour passer du repère cristallin au repère extérieur, supposons pour simplifier un cristal cubique d'axes 100, 010 et 001, le passage se fait par trois rotations successives d'abord autour de l'axe 001 (figure 4.1) d'un angle  $\varphi$  puis autour de l'axe E d'un angle  $\theta$ , et enfin autour de l'axe S d'un angle  $\omega$ . Le choix des axes de rotations successives est arbitraire, ce choix précis correspond à celui fait par Aernoudt et van Houtte (1). Bunge(2) utilise une autre notation ainsi que Roe (3). Les différentes notations sont exposées et comparées par Aernoudt et van Houtte et par Canova (4). La matrice de passage associée à ces rotations successives est unique et il est donc possible de décrire une texture dans l'espace défini par les angles d'Euler.

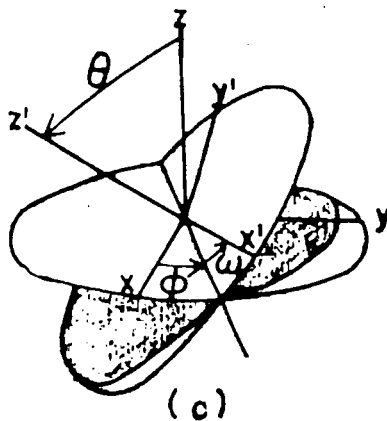
Dans ce repère tridimensionnel, un point représente une orientation et donc il est possible de décrire une texture par un ensemble de points ou plutôt une



(a)



(b)



(c)

Figure 4.1. Schématisation des trois angles d'Euler  $\phi, \theta, \omega$  permettant de relier les axes cristallographiques  $(x, y, z)$  aux axes macroscopiques  $(x', y', z')$



densité de points. Le "squelette" de la texture (figure 4.2) sera le lieu des coordonnées de densité maximale. Ce champ des densités représente la Fonction de Distribution des Orientations Cristallines (FDOC).

Un autre moyen de visualiser une texture est la figure inverse de pole, qui est une projection stéréographique faite dans les axes cristallographiques. Ici, on fixe le cristal par rapport à une sphère, et le repère de l'éprouvette (ou du test) sont désorientés par rapport aux premiers axes. Les axes extérieurs viennent couper la sphère en trois points (plus les trois opposés), dont on fait la projection stéréographique. Etant donné que l'on n'utilisera que les matériaux à structure cubique, il y a 24 opérations de symétrie permettant de mettre un cristal en coïncidence avec lui-même, ce qui veut dire qu'en fait, par rapport au repère cristallin, il y a 24 systèmes de références extérieurs équivalents. Donc au lieu d'avoir 3 points, les opérateurs de symétrie peuvent en fournir  $3 \times 24$ . C'est ainsi qu'il est possible de ramener n'importe quel axe du test dans un triangle standard 001-111-011 (la symétrie miroir est aussi supposée par rapport aux plans type (110)).

Finalement, un autre moyen courant consiste à se placer dans les axes de l'éprouvette et à faire la projection stéréographique des axes (poles) des cristaux.

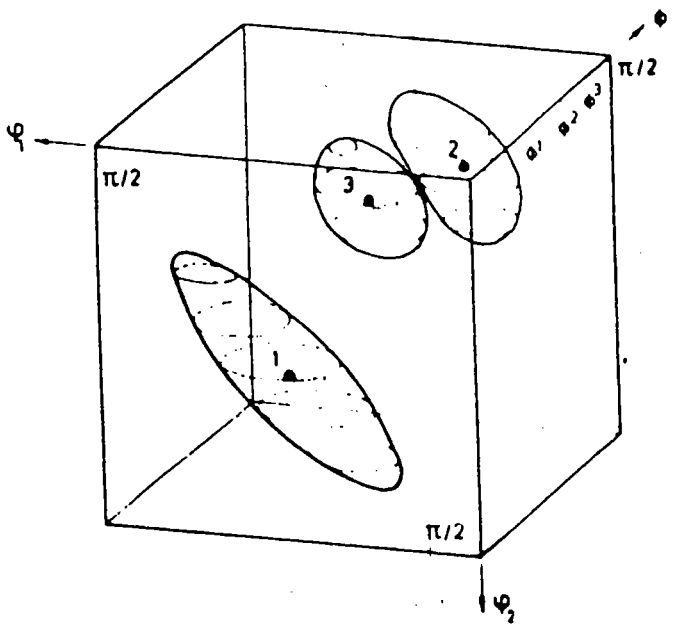


Figure 4.2. Représentation de volumes d'équidensité de répartition des orientations dans l'espace d'Euler. Le "squelette" de la texture est le lieu des densités maximales.

Ainsi (figure 4.3) une figure de pole (111) est une projection stéréographique de tous les axes (111) de tous les cristaux analysés. Il n'est pas possible de réduire les figures de pole, comme c'est le cas pour les figures inverses de pole, sauf lorsque la texture a une certaine symétrie. La symétrie orthotrope des textures de laminage permet de réduire la figure à un quart, par exemple.

Les méthodes de construction des figures de pole et figures inverses de pole sont détaillées dans la référence 4.

#### 4.2 L'INCREMENT DE DEFORMATION

Pour illustrer ce problème, on a choisi arbitrairement 9 orientations tests qui sont réparties arbitrairement le plus uniformément possible. Sur les figures 4.4a, b et c on visualise l'uniformité de la texture. Supposons qu'une déformation de traction uniaxiale soit imposée dans les conditions DTI à chaque grain constituant l'agrégat, et que les orientations soient "photographiées" tous les 5% de déformation. La figure inverse de pole représentant (fig.4.5) l'axe de traction montre que les orientations se stabilisent peu à peu au fur et à mesure que la déformation croît. On peut noter, en particulier, que la vitesse de rotation décroît avec la

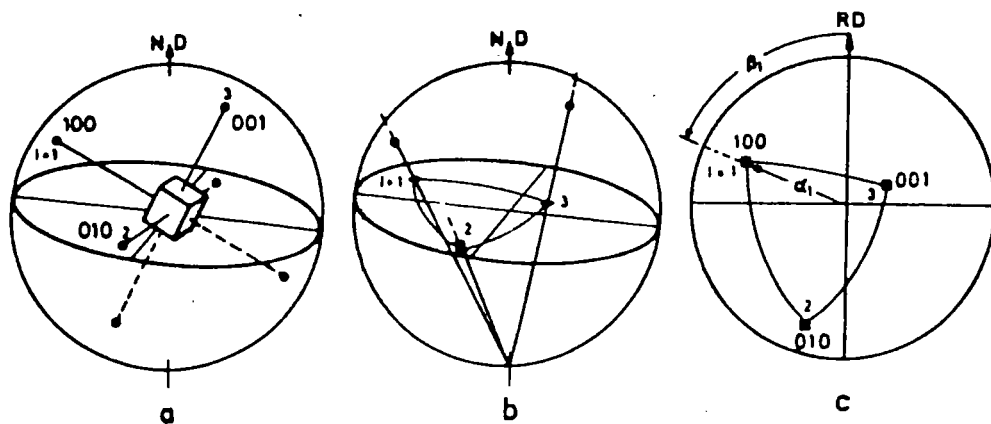


Figure 4.3. Méthode géométrique de construction d'une figure de poles (100).

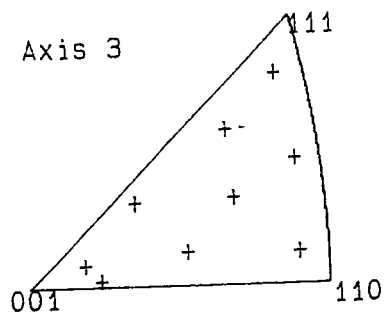
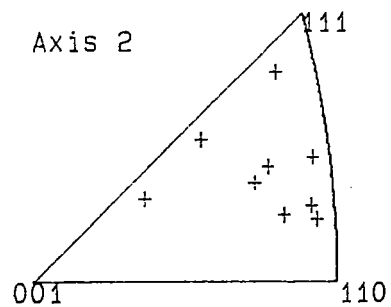
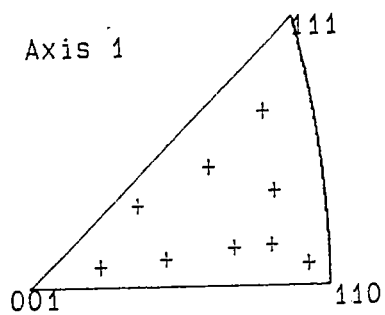


Figure 4.4. Figures inverses de poles représentant les trois axes (1, 2 et 3) macroscopiques correspondant aux 9 orientations tests choisies.

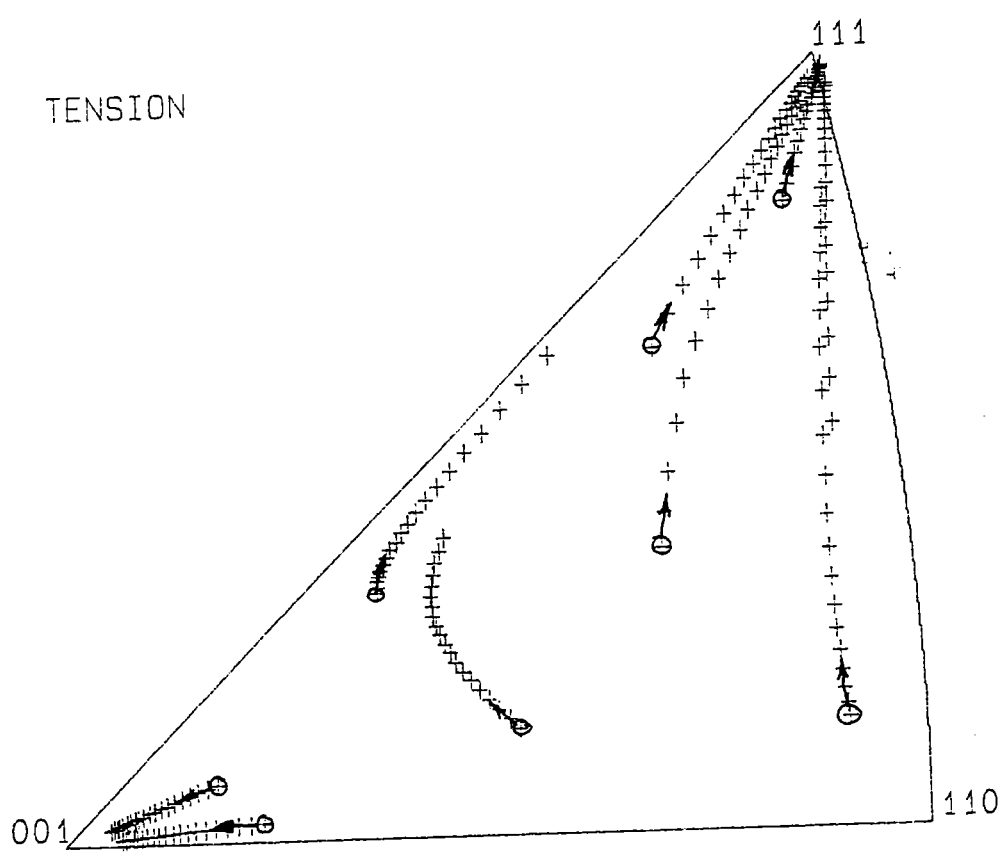


Figure 4.5. Evolution de l'axe de traction pour les 9 orientations choisies. On a tracé cet axe tous les 5% de déformation.

déformation, à partir d'un certain taux de déformation, la texture évoluant progressivement vers une texture finale stable. L'incrément de déformation arbitrairement choisi ici est de 0.025.

Il peut facilement être conclu de manière qualitative, que la taille de l'incrément de déformation n'affectera pas tellement la texture finale à très fort taux de déformation, mais plutôt la vitesse d'évolution de la texture à taux moyen (ou petit) de déformation. C'est donc l'écart autour des orientations finales qui sera agrandi<sup>u</sup> par l'imprécision induite par un trop grand incrément de déformation plutôt que la texture finale elle-même. Un grand incrément de déformation et l'erreur qu'elle engendre aura tendance à accroître la déviation autour des orientations idéales.

Une étude comparative a été faite dans les premiers 10% de déformation où les changements d'orientation sont assez rapides. On a appliqué un incrément de déformation allant de  $10^{-4}$  à  $10^{-1}$ , de manière à voir la précision estimée sur le résultat final. Le calcul des changements d'orientation étant supposé correct pour le plus petit incrément, on a évalué l'erreur en notant la plus grande déviation prise sur les 3 angles d'Euler et sur les 9

grains. Sur la figure 4.6 sont reportées les erreurs en fonction des tailles d'incrément.

Il convient de définir un critère permettant de fixer un seuil d'erreur admissible. Celui-ci peut provenir, en particulier, de l'expérience. Il est, en effet, très difficile de mesurer l'orientation exacte d'un grain déformé avec une précision meilleure que 2 ou 3 degrés d'angle. Donc si l'on désire une précision vérifiable expérimentalement après une déformation de 100% par exemple, une taille d'incrément inférieure ou égale à 0.025 paraît raisonnable.

#### 4.3 CHOIX DES ORIENTATIONS INITIALES

Dans le premier paragraphe, on a vu qu'une texture est liée à un champ de densité des orientations dans l'espace d'Euler. Il faut cependant remarquer que, si un repère orthonormé  $\varphi, \theta, \omega$  est pris comme base de cet espace, une densité uniforme, dans ce repère, ne correspond pas à une texture isotrope. En effet, sur la figure 4.1, il est possible de voir qu'une texture uniforme correspondrait à répartir uniformément l'espace avec les axes de référence de l'éprouvette (lorsque le système cristallographique est pris comme référence de base). Ceci revient à faire balayer à chaque axe des éléments de surface sphérique égaux,

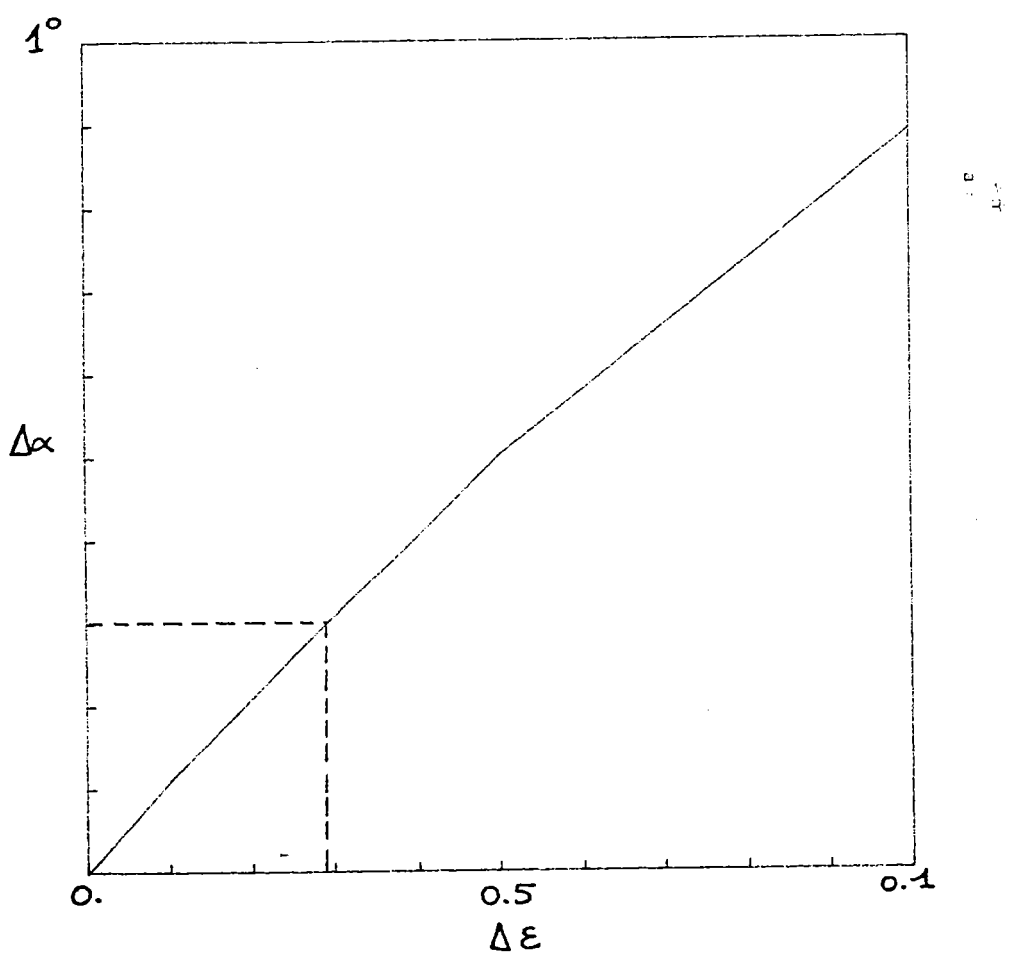


Figure 4.6. Estimation de l'erreur commise sur les orientations finales, après 10% de déformation en fonction de l'incrément de déformation choisi.



autrement dit à répartir uniformément les orientations dans l'espace  $\varphi, \cos(\theta), w$ .

Reste le problème de savoir comment choisir ces orientations. Trois solutions peuvent être envisagées: quadriller cet espace par une grille régulière et prendre les orientations correspondantes aux noeuds de cet arrangement, ou alors effectuer un quadrillage très fin et choisir au hasard un certain nombre de noeuds, ou encore simplement générer un certain nombre d'orientations aléatoires dans cet espace  $\varphi, \cos(\theta), w$ .

Ainsi que l'a montré Aernoudt et van Houtte (1), l'avantage d'un arrangement régulier est qu'on peut le découper en fonction du type de test à simuler. En effet, si une texture de fibre est le résultat attendu (autour de l'axe  $X_3$ ) l'angle  $w$  importe peu et un arrangement régulier dans l'espace  $\varphi, \cos(\theta)$  est suffisant. Cet échantillonnage de base peut ensuite être multiplié en prenant plusieurs choix de l'angle  $w$  à chaque cas, lorsque la texture attendue n'a pas la symétrie de fibre. Néanmoins, pour que l'angle  $w$  puisse être négligé, il faut que le tenseur de déformation imposé à chaque grain soit aussi invariant par cette symétrie de fibre. Or, en fait, dès que des hétérogénéités de déformation plastique apparaissent entre les grains,

cette condition, bien que remplie en moyenne, ne l'est plus localement, donc l'angle  $w$  devient important.

Il apparait donc que la population complète sera utilisée dès que le problème d'hétérogénéité plastique apparaitra, c'est-à-dire dans les conditions DPI et aussi lorsque la déformation imposée est elle-même différente d'un grain à l'autre (dernier chapitre de cet ouvrage). Il reste donc à choisir entre une texture régulière et une texture aléatoire. Il apparait qu'un choix au hasard d'orientations prises parmi des orientations régulièrement disposées ne représentera en fait que cet arrangement régulier avec une population inférieure. La précision du calcul sur des valeurs macroscopiques (facteur de Taylor, contraintes) moyennes, ne dépassera donc pas celle obtenue en prenant l'échantillonnage total de cet arrangement régulier. On a donc choisi de générer dans l'espace décrit ci-dessus un certain nombre d'orientations distribuées aléatoirement. C'est, en fait, comme si une grille avait été générée par l'ordinateur, dont l'espacement est uniquement la limite de précision de cet ordinateur, et qu'un choix au hasard parmi les noeuds de cette grille avait été fait. Ce choix aléatoire est donc représentatif de cet arrangement régulier très fin et la précision maximale obtenue sur les valeurs

macroscopiques moyennes n'est donc liée qu'à la précision de l'ordinateur.

Pour établir la taille de l'échantillonnage d'orientations, un fichier de 1200 orientations aléatoires a été fait, sur lequel une compression plane incrémentale a été faite de manière à obtenir des statistiques. Il existe une taille critique au dessus de laquelle les résultats statistiques ne diffèrent plus tellement. Sur le tableau 4.1 sont représentés les résultats. La répartition des grains par nombre de systèmes actifs est une donnée intéressante. Le facteur de Taylor moyen, c'est-à-dire le travail macroscopique moyen par unité de déformation (et en supposant toutes les contraintes résolues critiques égales à 1), est aussi un outil important. Finalement, la répartition statistique suivant les types d'interaction de dislocations est aussi très utile. Bishop a montré que, dans les conditions DTI, et en supposant un durcissement isotrope, il pouvait y avoir 5 types d'interactions indexés de A à E, la proportion relative des grains ayant tel ou tel type d'interaction est ici calculée. Sur le tableau 4.1 sont reportés les résultats. Il est visible que pour une population supérieure ou égale à 200, les résultats diffèrent très peu.

Tableau 4.1

Comparaison des résultats statistiques suivant la taille de l'échantillonnage choisi.

RESULTATS STATISTIQUES (DTI)						
nombre de grains	9	50	100	209	400	800
M	*3.459	*3.334	*3.320	*3.364	*3.359	*3.343 *

répartition des grains par type d'interaction de systèmes

5A	* 0.0 *	8.0 *	6.0 *	3.8 *	3.0 *	4.0 *
5B	* 0.0 *	10.0 *	11.0 *	15.8 *	12.8 *	13.3 *
5C	* 55.6 *	46.0 *	43.0 *	40.7 *	42.5 *	41.5 *
5D	* 22.2 *	14.0 *	20.0 *	23.4 *	25.0 *	22.6 *
5E	* 22.2 *	22.0 *	20.0 *	16.3 *	16.8 *	18.6 *

répartition des grains par nombre de systèmes actifs

1	* 0.0 *	0.0 *	0.0 *	0.0 *	0.5 *	0.5 *
2	* 0.0 *	2.0 *	6.0 *	3.8 *	5.0 *	5.1 *
3	* 22.2 *	14.0 *	18.0 *	17.7 *	15.2 *	15.7 *
4	* 55.5 *	50.0 *	39.0 *	38.7 *	38.2 *	37.7 *
5	* 11.1 *	10.0 *	18.0 *	19.1 *	18.0 *	17.6 *
6	* 0.0 *	2.0 *	7.0 *	7.7 *	9.0 *	10.0 *
7	* 0.0 *	8.0 *	4.0 *	2.8 *	5.5 *	4.6 *
8	* 11.1 *	14.0 *	8.0 *	10.0 *	8.5 *	8.6 *

Les résultats qui suivent (les récents du moins) vont donc être basés sur cette population de 200 grains orientés aléatoirement. Les 9 premiers grains sont aussi laissés en permanence dans le fichier, ce qui en porte le nombre à 209.

#### 4.4 RESULTATS DES SIMULATIONS

Les simulations ont donc été faites à partir de la même population d'orientations initiales, dans les conditions DTI et DPI (si justifié), en prenant soin de comparer les méthodes de résolution des ambiguïtés, à savoir la méthode moyennée (que l'on notera Aver. sur les figures), la récente méthode de traitement viscoplastique (notée Viscopla.) et enfin la méthode, qui s'est avérée erronée, proposée par Canova et Kocks (notée r.s.). A chaque fois des statistiques seront effectuées, pour calculer la répartition des grains par nombre de systèmes actifs, le nombre moyen de systèmes actifs, le facteur de Taylor moyen et la répartition des grains suivant le type d'interaction de systèmes. Un système est ici considéré comme actif si son cisaillement microscopique excède 10% du cisaillement microscopique maximal parmi les systèmes du grain considéré.

#### 4.4.1 La traction

Sur les figures 4.7a, b et c sont tracées les figures inverses de poles correspondant aux textures de traction pour une déformation de 1, calculées suivant les trois méthodes de résolution des ambiguïtés. Il est clair que, sur la figure 4.7c apparaissent des composantes de texture qui n'existent pas expérimentalement. En revanche, les deux autres méthodes donnent des textures très similaires. Seule l'approche viscoplastique laisse quelques orientations proche de (110) sans les concentrer toutefois. En regardant les statistiques sur le tableau 4.2, on remarque les mêmes caractéristiques, en particulier, un même rapport des concentrations des poles dans les zones A (100) et B (111). Ce rapport est bouleversé de manière significative lorsque la troisième méthode (n.s.) est employée. Bien qu'il ait été établi que l'essai de traction doit être simulé dans les conditions DTI même aux grandes déformations, la figure 4.7d montre que la texture n'est pas significativement changée en DPI et les statistiques associées (tableau 4.2) montrent, en revanche, un changement dans la répartition des grains par nombre de systèmes actifs du précisément à l'imposition des conditions DPI. Le facteur de Taylor moyen n'est, quant à lui, pas tellement changé.

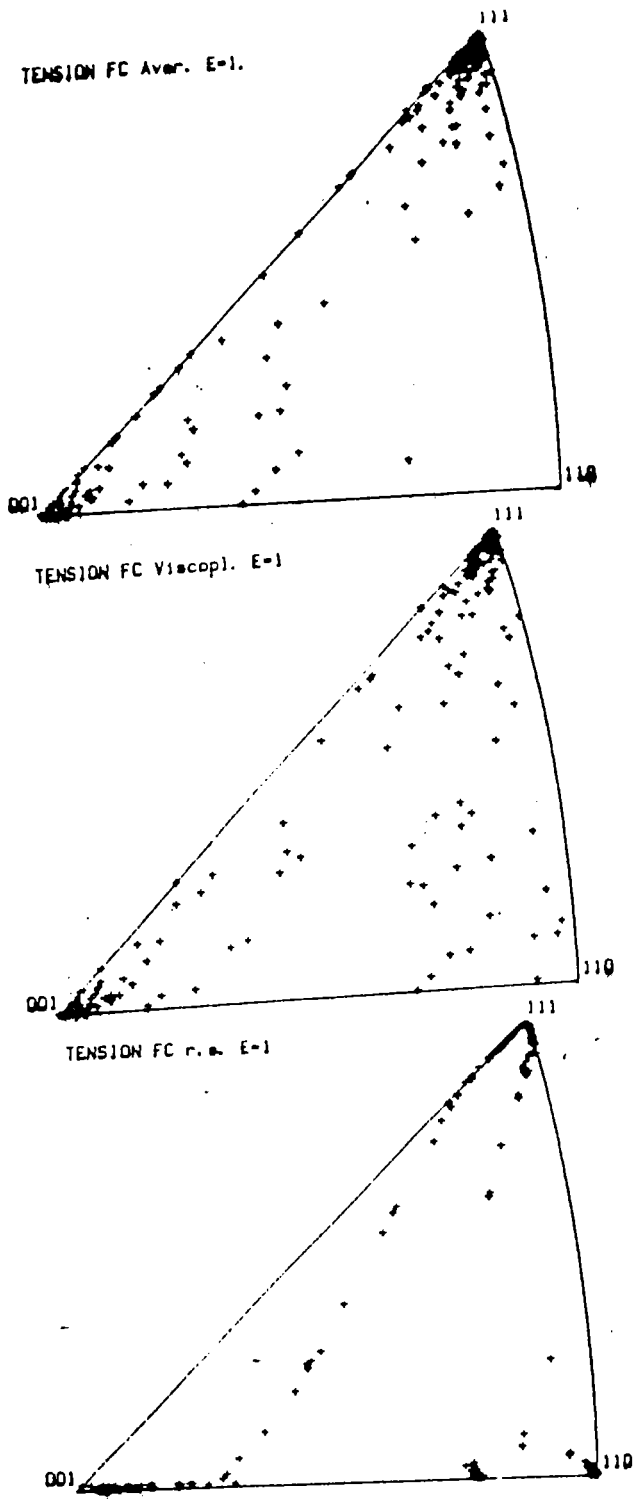


Figure 4.7. Figures inverses de poles des axes de traction calculés à 100% de déformation par la théorie DTI en résolvant les ambiguïtés par trois méthodes différentes.

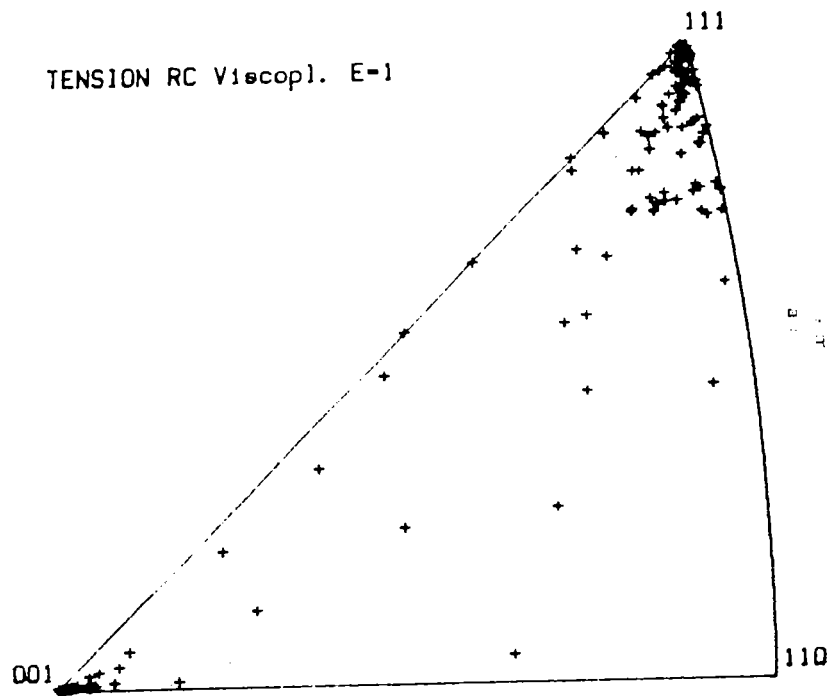


Figure 4.7d. Figure inverse de pole montrant l'axe de traction à une déformation de 100% lorsque la texture est simulée en utilisant la viscoplasticité et en relaxant la composante de déformation  $\epsilon_{23}$ .



Tableau 4.2

Statistiques associées aux textures représentées sur la figure 4.7a, b et c.

M	TRACTION (DTI)		
	Aver.	Viscopl.	r.s.
M	3.31186	3.33376	3.35308

répartition des grains par type d'interaction de systèmes

5A	16.7	17.2	16.3
5B	71.3	66.0	58.4
5C	1.0	10.5	17.7
5D	6.2	4.3	3.3
5E	4.8	1.9	4.3

répartition des grains par nombre de systèmes actifs

1	0	0	0
2	0	0	0
3	0	0	32.0
4	0.9	0.9	35.9
5	1.4	7.2	32.0
6	77.5	68.9	0.0
7	0.0	4.8	0.0
8	20.1	18.2	0.0

#### 4.4.2 La compression

Sur la figure 4.8a, b et c, on a les figures inverses de poles obtenues en compression dans les conditions DTI, on peut apercevoir de grandes différences suivant la méthode employée. La méthode moyennée donne une concentration des poles près de la direction  $(110)$ , ce qui correspond à la réalité expérimentale. Par contre, le traitement viscoplastique tend à concentrer les poles dans une position intermédiaire entre  $(110)$  et  $(100)$ , ce qui est en contradiction avec la réalité. La troisième méthode concentre beaucoup plus rapidement les poles vers des positions encore différentes de celles trouvées par les autres méthodes. Les statistiques (tableau 4.3) montrent effectivement une plus grande densité de la region C pour la méthode moyennée, qui tend à accroître le facteur de Taylor moyen. Le fait que cette dernière méthode semble mieux prédire la texture expérimentale de compression ne prouve en aucun cas sa validité: il est possible de trouver un résultat correct avec des mauvaises raisons. Le fait que le traitement viscoplastique ne donne pas la bonne texture, ne l'élimine pas pour autant. Nous verrons plus tard, que, en fait, le test de compression des polycristaux c.f.c. infirme l'hypothèse même d'uniformité de la déformation de Taylor. Cette affirmation est encore plus évidente lorsque les

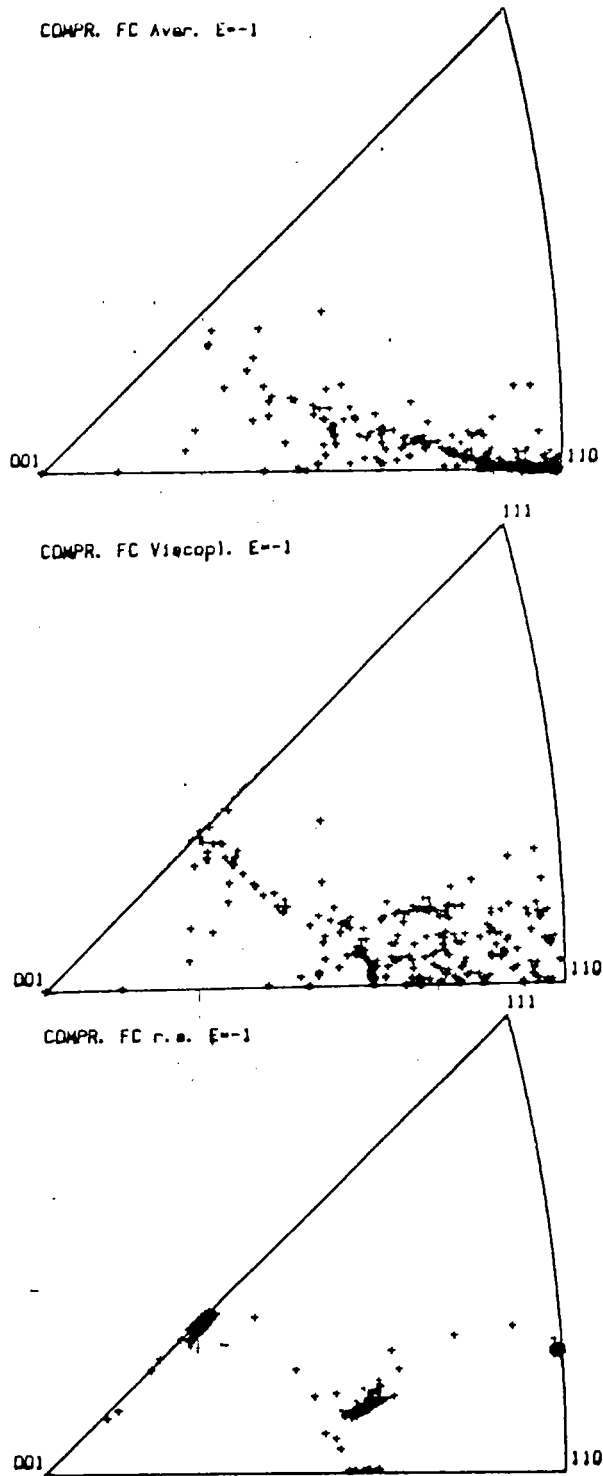


Figure 4.8. Figures inverses de poles montrant les axes de compression à 100% de déformation. Le développement des textures est simulé en utilisant la théorie DTI et les trois méthodes exposées de résolution des ambiguïtés.

Tableau 4.3

Statistiques associées aux textures montrées sur la figure 4.8.

<u>COMPRESSION (DTI)</u>			
	Aver.	Viscopl.	r.s.
M	3.35953	3.21183	3.02270

repartition des grains par type d'interaction de systemes

5A	1.0	1.0	1.0
5B	0.0	0.0	0.0
5C	90.4	82.3	73.7
5D	4.8	14.4	24.9
5E	3.8	2.4	0.5

repartition des grains par nombre de systemes actifs

1	0	0	0
2	0	0	0
3	0.9	0.1	1.4
4	2.4	7.7	17.2
5	1.9	9.1	81.3
6	2.9	34.0	0.0
7	0.0	16.3	0.0
8	91.4	32.1	0.0

grains sont dans les conditions DPI. Sur les figures 4.9a, b et c, les textures finales sont très ressemblantes. Ceci n'est pas un hasard, mais est plutôt dû au fait que le problème des ambiguïtés est beaucoup moins aigu lorsque deux composantes de déformation sont relaxées. Sur le tableau 4.4, on voit que les EP3 3D et 3G sont choisis où, précisément, il n'y a aucun problème d'ambiguïté. La texture prédite, dans ces cas, ne correspond pas non plus à la réalité. Ceci montre bien, que la méthode utilisée pour résoudre les ambiguïtés (quand il y en a) n'est probablement pas la cause du mauvais résultat. Le cas de la compression sera discuté plus en détail dans le dernier chapitre de cet ouvrage.

#### 4.4.3 Le laminage

Les figures 4.10a, b et c montrent les figures inverses de poles des normales au plan de laminage prédites dans les conditions DTI par les trois méthodes. Les figures correspondantes des directions de laminage sont sur les figures 4.11. Les figures de poles (111) sont tracées sur les figures 4.12. On remarque une assez grande similarité dans les trois prédictions, la seule différence notable est, cependant, entre la méthode r.s. et les deux autres, dans le fait que cette méthode est la seule à prédire une composante de texture de type  $\langle 110 \rangle \langle 110 \rangle$  qui n'est d'ailleurs pas

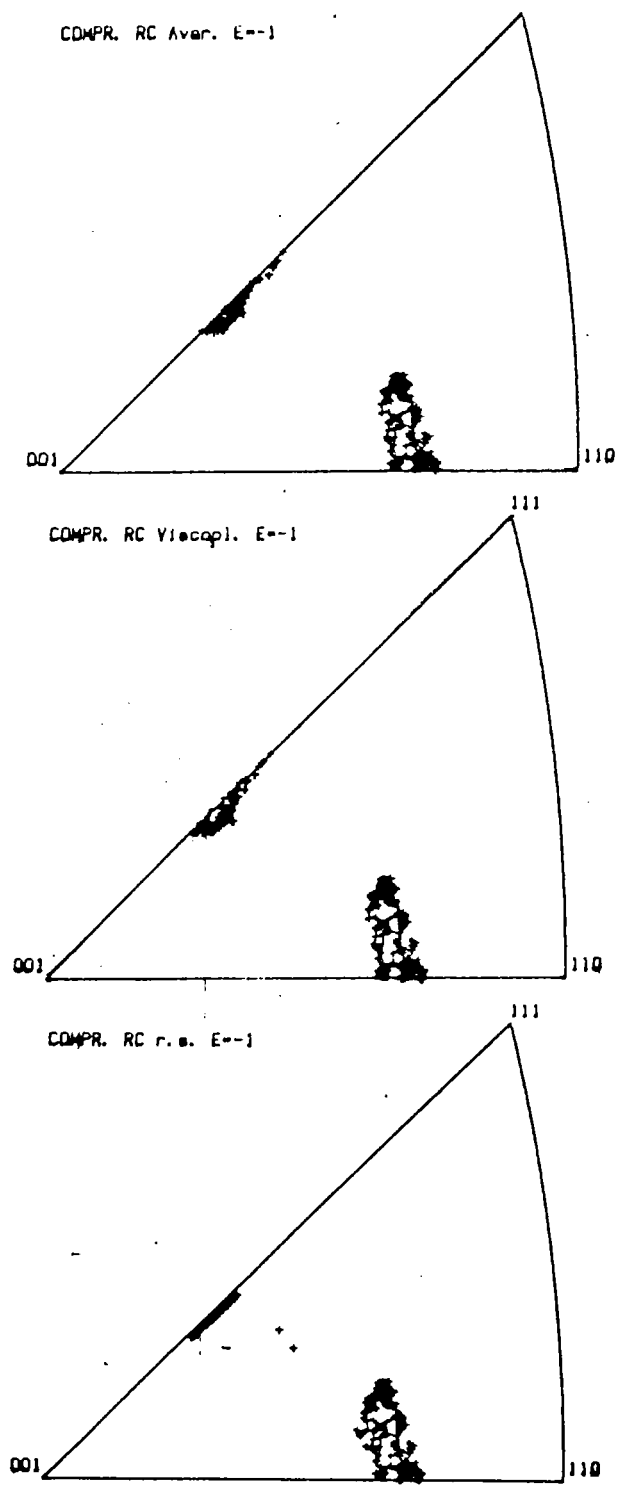


Figure 4.9. Figures inverses de poles obtenues en compression uniaxiale (100% de deformation) en utilisant la theorie DPI et les trois methodes de resolution des ambiguites.

105  
 Tableau 4.4

Statistiques associées aux textures montrées sur la figure 4.9

<u>COMPRESSION (DPI)</u>			
	Aver.	Viscopl.	r.s.
M	2.60715	2.60908	2.61581

repartition des grains par type d'interaction de systemes

3A	0.0	0.0	0.0
3B	0.0	0.0	0.0
3C	26.8	26.3	22.0
3D	0.0	0.0	0.0
3E	0.0	0.0	0.0
3F	0.0	0.0	0.0
3G	73.2	73.7	78.0

repartition des grains par nombre de systemes actifs

1	0	0	0
2	0	0	0
3	73.2	73.7	21.1
4	26.8	26.3	78.9
5	0.0	0.0	0.0
6	0.0	0.0	0.0
7	0.0	0.0	0.0
8	0.0	0.0	0.0

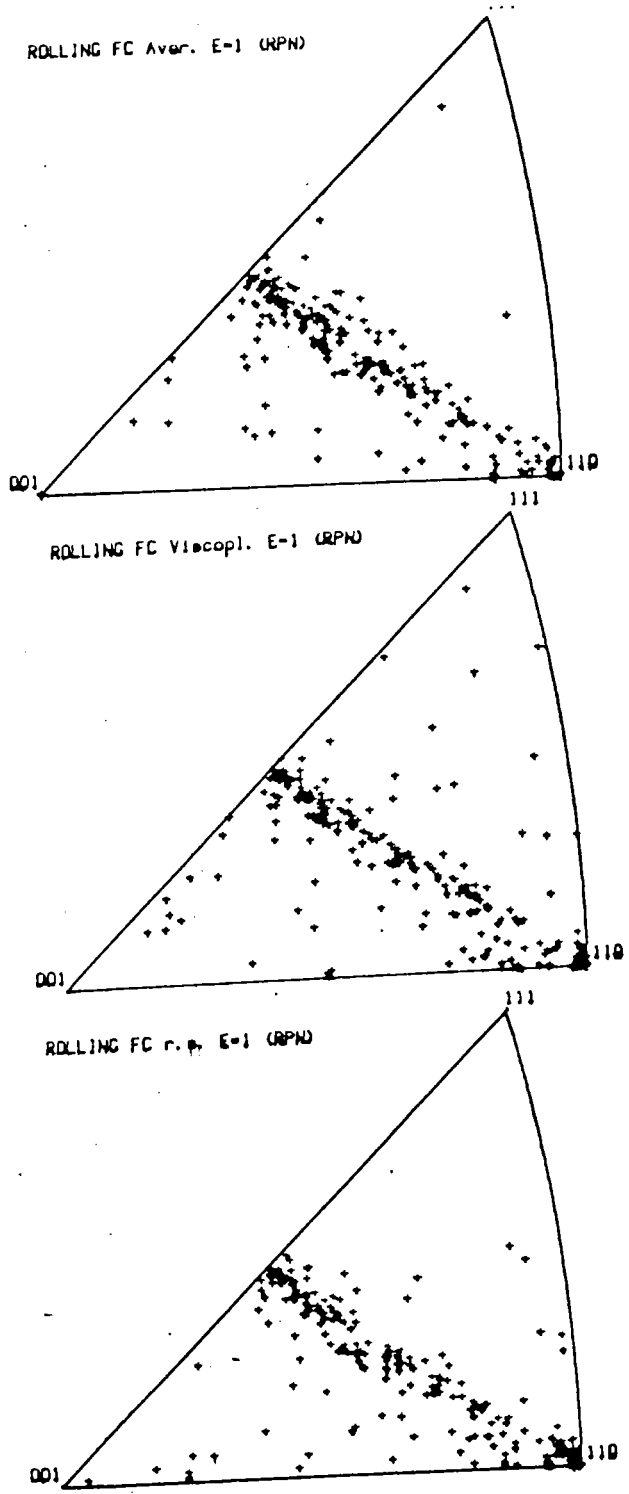


Figure 4.10. Figures inverses de poles liées aux textures calculées suivant la théorie DTI en laminage à 100% de déformation. Les ambiguïtés sont levées suivant les trois méthodes décrites. On représente ici les normales aux plans de laminage.



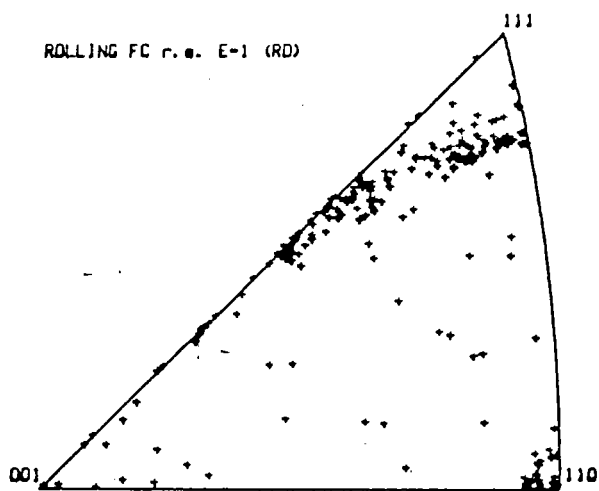
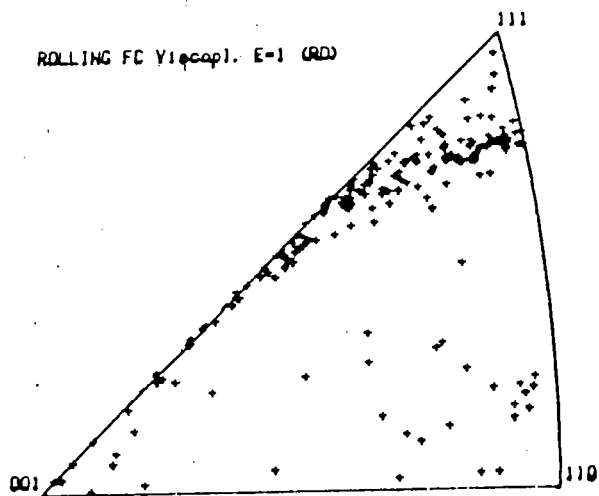
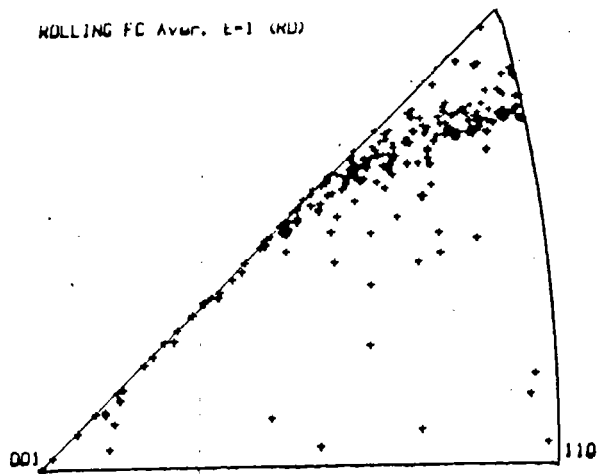


Figure 4.11. Les textures prédites correspondent à celles de la figure 4.10. On représente ici les directions de laminage.

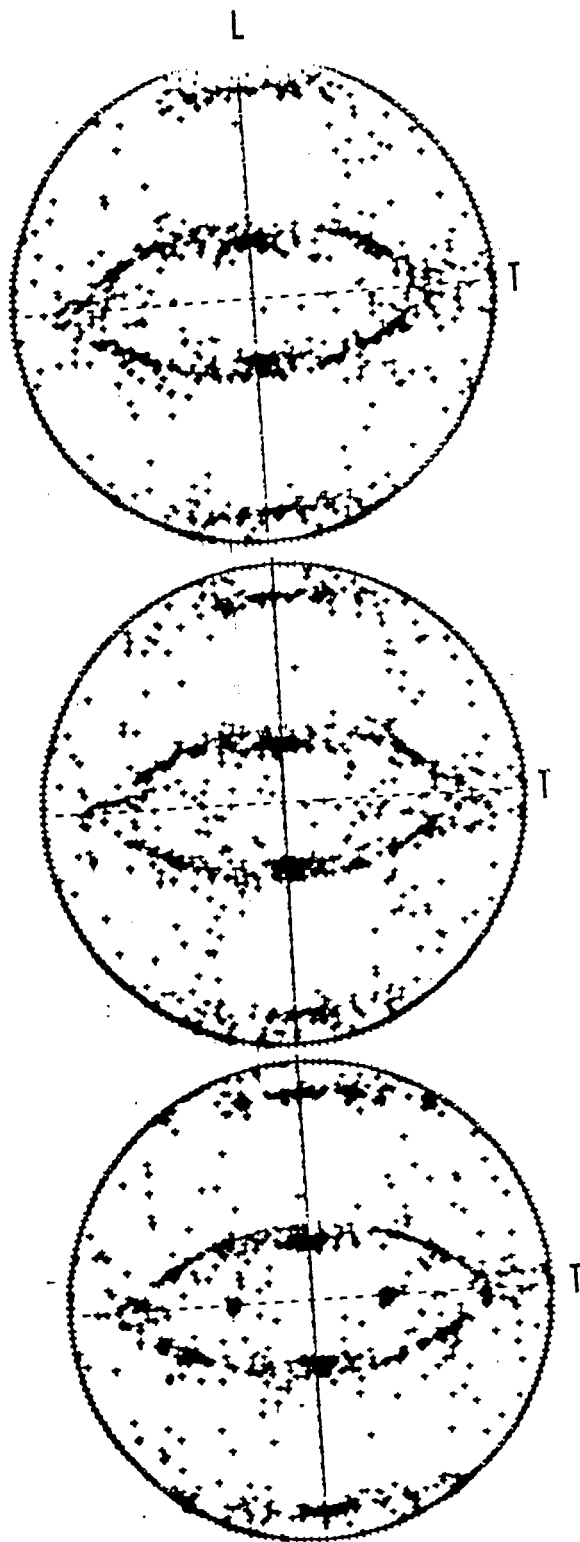


Figure 4.12. Figures de poles (111) associées aux textures des figures 4.10 et 4.11.

107  
Tableau 4.5

Statistiques associées aux textures calculées selon la théorie DTI et présentées sur les figures 4.10, 4.11 et 4.12

LAMINAGE (DTI)

	Aver.	Viscopl.	r.s.
M	3.38220	3.44083	3.49357

répartition des grains par type d'interaction de systèmes

5A	1.4	2.1	3.8
5B	31.1	28.9	27.8
5C	19.6	26.3	26.8
5D	43.1	36.3	37.3
5E	4.8	6.3	4.3

répartition des grains par nombre de systèmes actifs

1	0	0	0
2	0	0	9.1
3	5.3	6.8	10.5
4	71.3	68.9	71.3
5	2.4	7.9	9.1
6	7.2	4.2	0.0
7	0.0	2.4	0.0
8	13.9	9.5	0.0

reportée par les expériences. Par contre, toutes ces méthodes engendrent la composante T (Taylor), qui a des poles (111) légèrement décalés de la direction de laminage. Les statistiques, sur le tableau 4.5, montrent des facteurs de Taylor assez différents d'une méthode à l'autre, ce qui semblerait indiquer que les propriétés plastiques prédites d'un matériau laminé sont sensibles à la précision de la texture. On notera aussi une certaine différence dans la répartition des états plastiques, la méthode moyennée donnant des résultats significativement différents des deux autres méthodes.

Dans les conditions DPI, les figures 4.13, 4.14 et 4.15 montrent une très grande ressemblance, en raison notamment du fait que les EP3B et EP3C, qui sont les seules à provoquer des ambiguïtés, sont très peu voire pas représentées (tableau 4.6). La méthode viscoplastique, à l'encontre des autres méthodes, choisit plus fréquemment l'EP3D. La texture, analysée par cette méthode, semble aussi favoriser l'existence de glissement triple, contrairement aux autres. Les facteurs de Taylor, quant à eux, sont très proches les uns des autres.

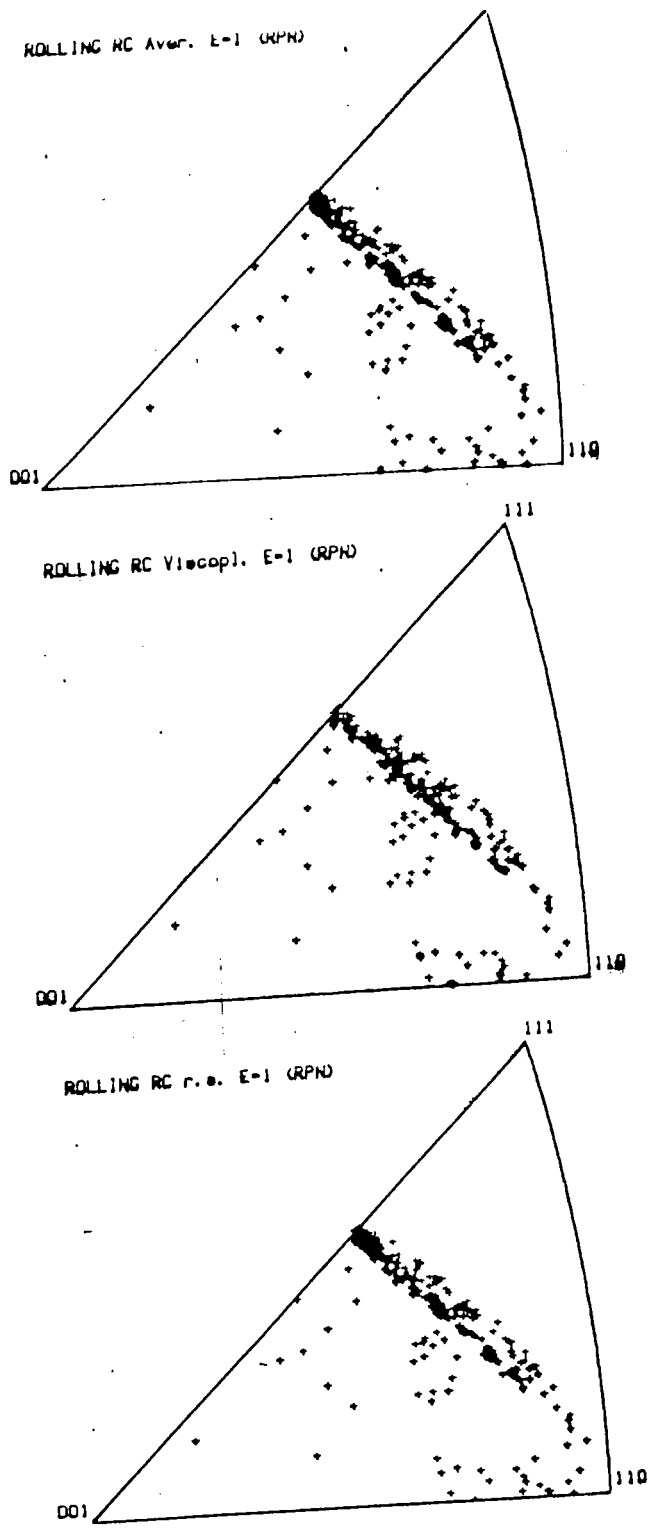


Figure 4.13. Figures inverses de poles associées à des textures calculées d'après la théorie DPI à 100% de déformation; les ambiguïtés sont levées successivement par les trois méthodes décrites. On représente ici les normales aux plans de laminage.

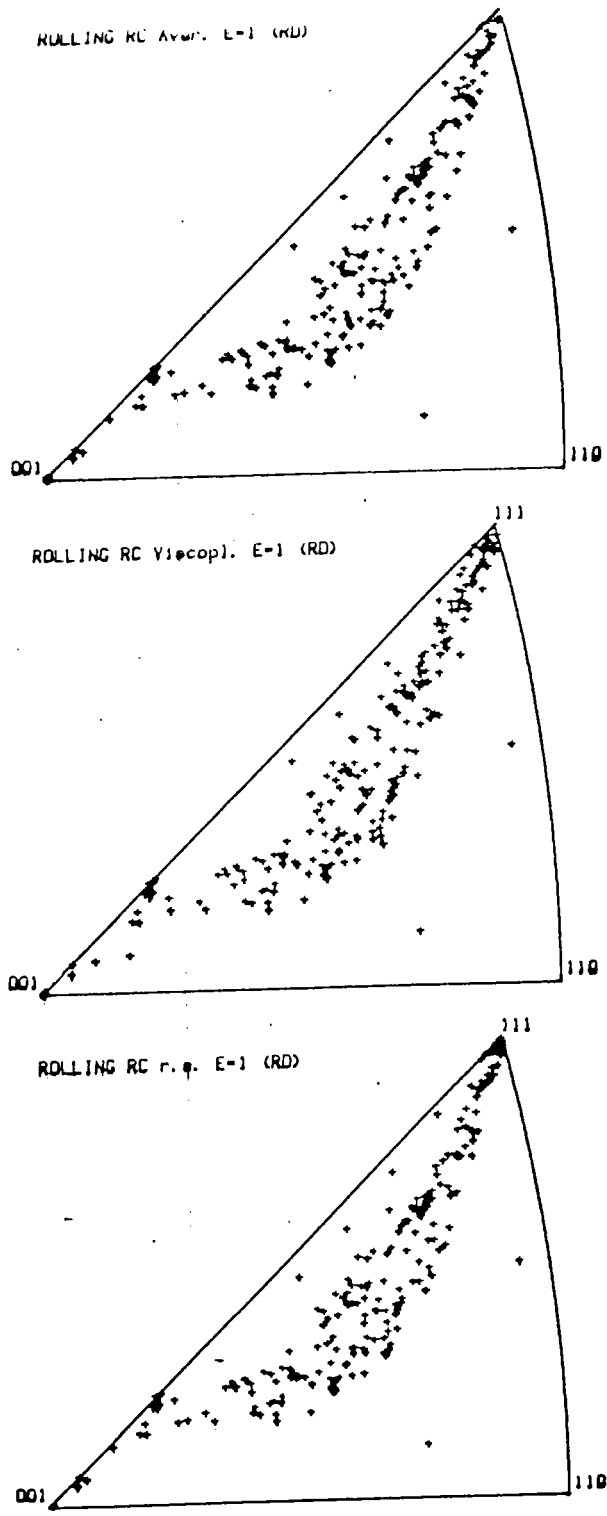


Figure 4.14. Figures inverses de poles associées aux textures de la figure 4.13. On représente ici les directions de laminage.

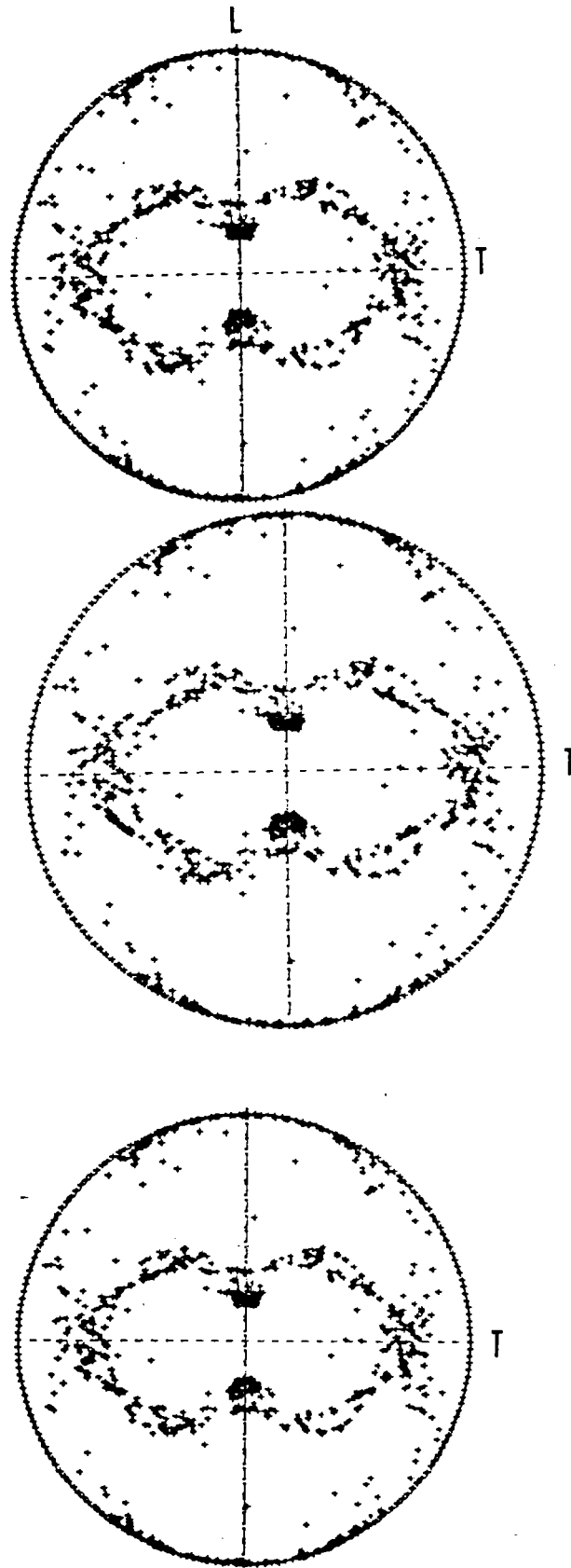


Figure 4.15. Figures de poles (111) associées aux textures déjà présentées sur les figures 4.13 et 4.14.

112  
Tableau 4.6

Statistiques associées aux précédentes textures des figures 4.13, 4.14 et 4.15.

LAMINAGE (DPI)

	Aver.	Viscopl.	r.s.
M	3.11336	3.120424	3.11990

repartition des grains par type d'interaction de systemes

3A	30.1	28.7	28.2
3B	0.0	0.0	0.0
3C	5.7	2.9	4.3
3D	5.7	21.1	7.2
3E	25.8	19.1	26.3
3F	24.4	22.5	24.4
3G	8.1	5.7	9.6

repartition des grains par nombre de systemes actifs

1	21.5	15.8	21.1
2	40.7	24.4	42.1
3	37.3	50.7	36.8
4	0.5	6.2	0.0
5	0.0	2.4	0.0
6	0.0	0.5	0.0
7	0.0	0.0	0.0
8	0.0	0.0	0.0



#### 4.4.4 La torsion

Pour des raisons de clarté, on ne montrera dans ce chapitre que les résultats pour  $\gamma=5$ . Tous les résultats intermédiaires, pour  $\gamma=2.5$  sont regroupés en Annexe 3. Les résultats DTI et DPI en torsion ont déjà été étudiés en détail par Canova (4) et Canova et al.(5). On remarque, sur les figures 4.16 à 4.18, que les textures prédites dans les conditions DTI sont assez insensibles aux types de méthodes employées pour résoudre les ambiguïtés. Ceci peut être dû, notamment, au fait que, dès le début, ainsi que l'ont montré Tomé et al.(6), le nombre moyen de systèmes actifs est inférieur à cinq. Cette absence pratique d'ambiguïté réelle est encore plus accentuée dans les conditions DPI (figures 4.19 à 4.21), où il peut être remarqué aussi, une grande similarité dans les textures. On remarque notamment que la composante de texture de fibre partielle de type  $(uvw)\langle 110 \rangle$  disparaît au profit de la composante  $(001)\langle 110 \rangle$ . Dans le tableau 4.7, les statistiques sont assez similaires, on y remarque notamment une prédominance du glissement double. La méthode r.s. donne néanmoins une répartition différente des états de contrainte. Dans le cas DPI, la quasi-absence d'ambiguïtés aboutit à une grande similarité dans les résultats statistiques, quelle que soit la méthode employée

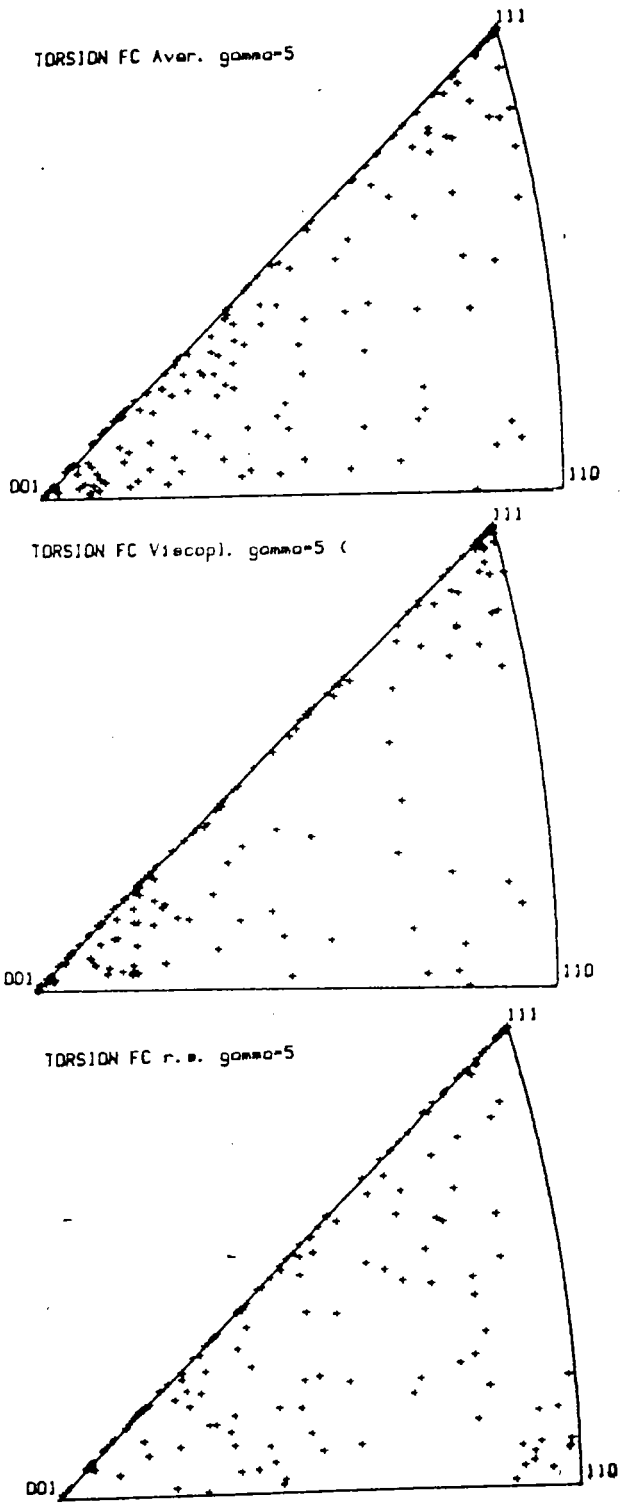


Figure 4.16. Figures inverses de poles montrant les normales aux plans de cisaillement, pour des textures simulées en torsion DTI ( $\gamma=5$ ).

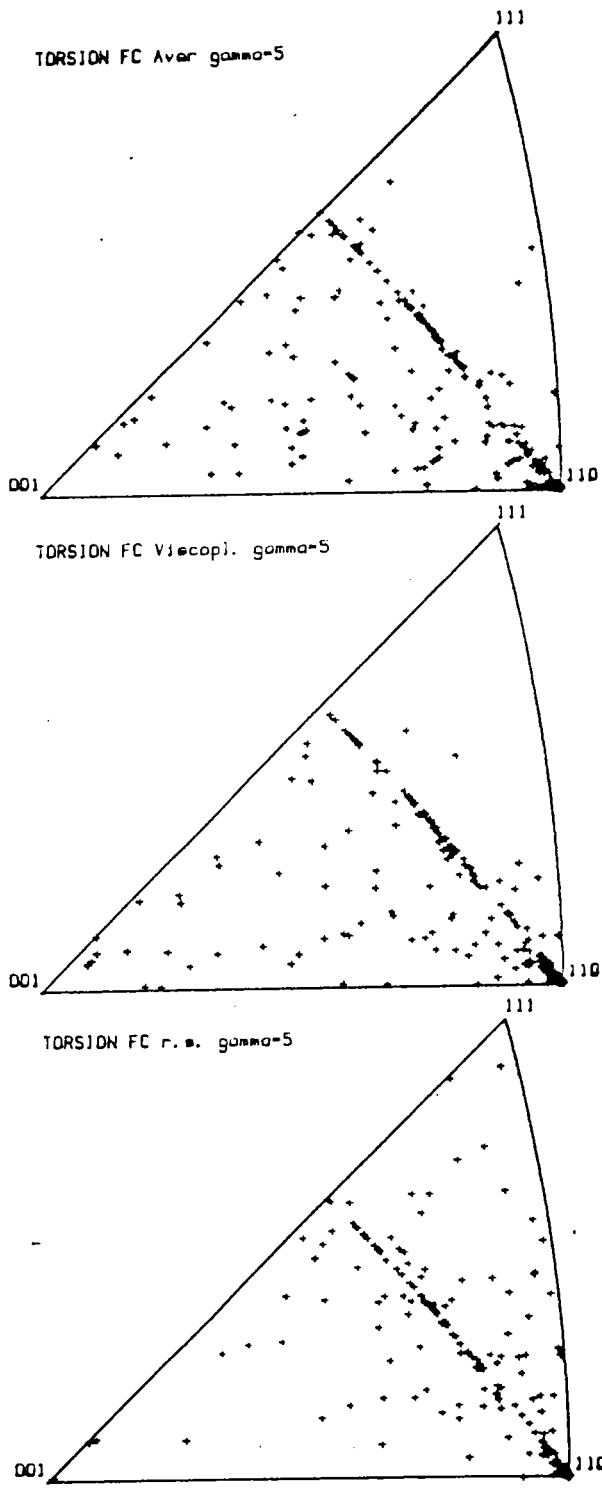


Figure 4.17. Figures inverses de poles montrant les directions de cisaillement pour les mêmes textures que sur la figure précédente.

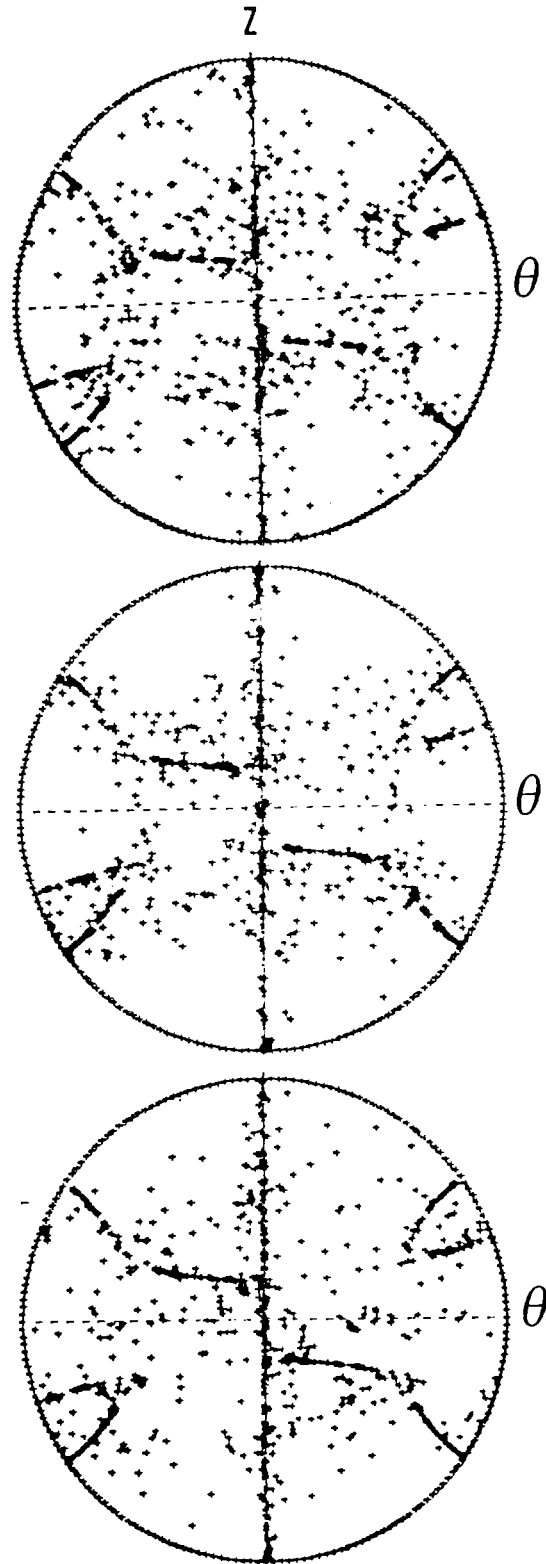


Figure 4.18. Figures de poles (111) associées aux textures décrites sur les figures 4.16 et 4.17.

117  
Tableau 4.7

Statistiques associées aux textures décrites sur les figures 4.16 à 4.19.

TORSION (DTI) gamma=5.0

	Aver.	Viscopl.	r.s.
M	1.54067	1.52093	1.46225

repartition des grains par type d'interaction de systemes

5A	0.5	1.4	1.4
5B	25.8	35.9	27.8
5C	35.4	31.6	10.0
5D	21.5	16.7	49.3
5E	16.7	14.4	11.5

repartition des grains par nombre de systemes actifs

1	2.9	4.3	2.9
2	49.3	61.2	58.9
3	3.8	8.6	10.0
4	5.3	9.1	14.8
5	5.3	8.1	13.4
6	3.8	5.3	0.0
7	0.0	1.4	0.0
8	29.7	1.9	0.0

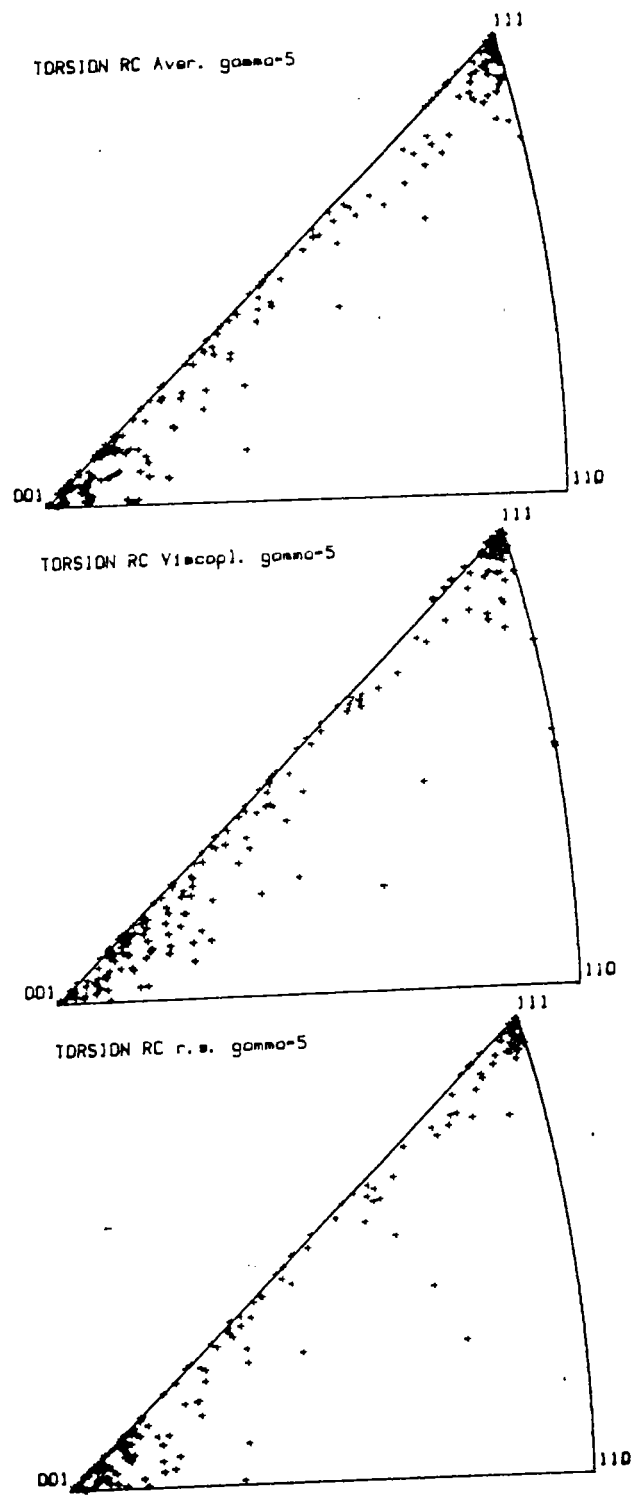


Figure 4.20. Figures inverses de poles montrant les normales aux plans de cisaillement pour des textures calculées suivant la théorie DPI en torsion à  $\gamma=5$ .

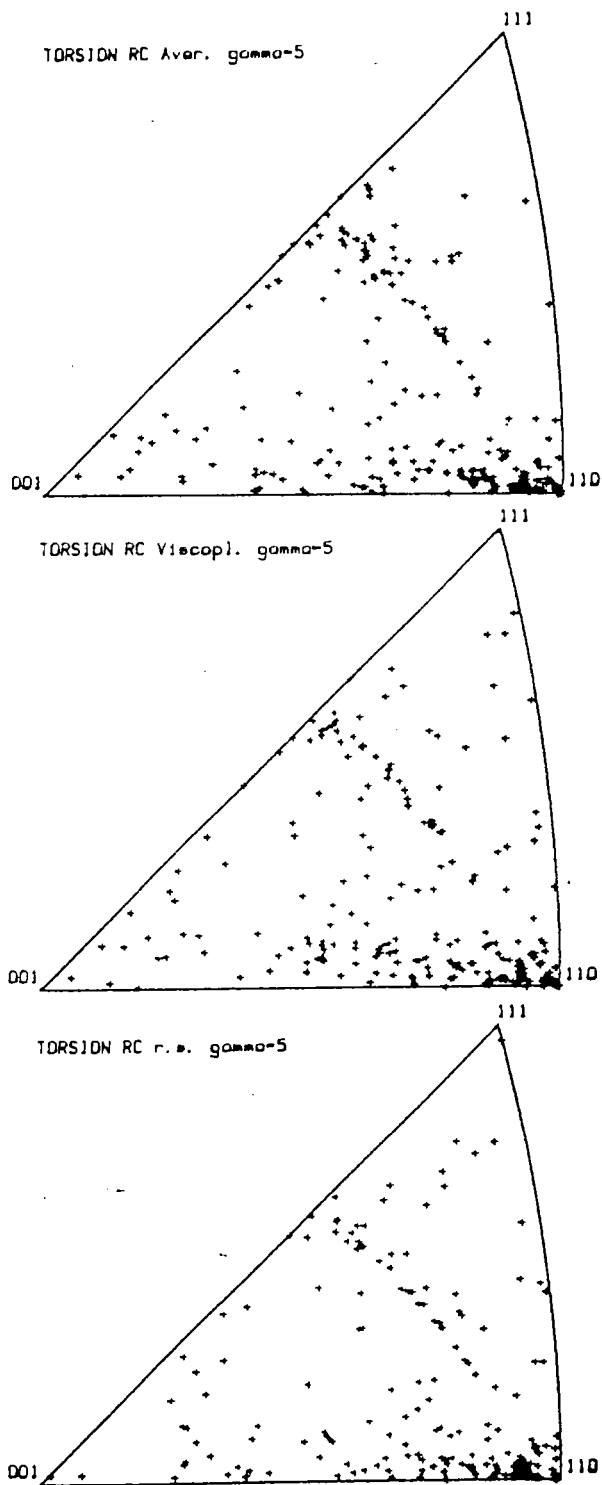


Figure 4.21. Figures inverses de poles associées aux mêmes textures qu'à la figure 4.20, mais montrant les directions de cisaillement.

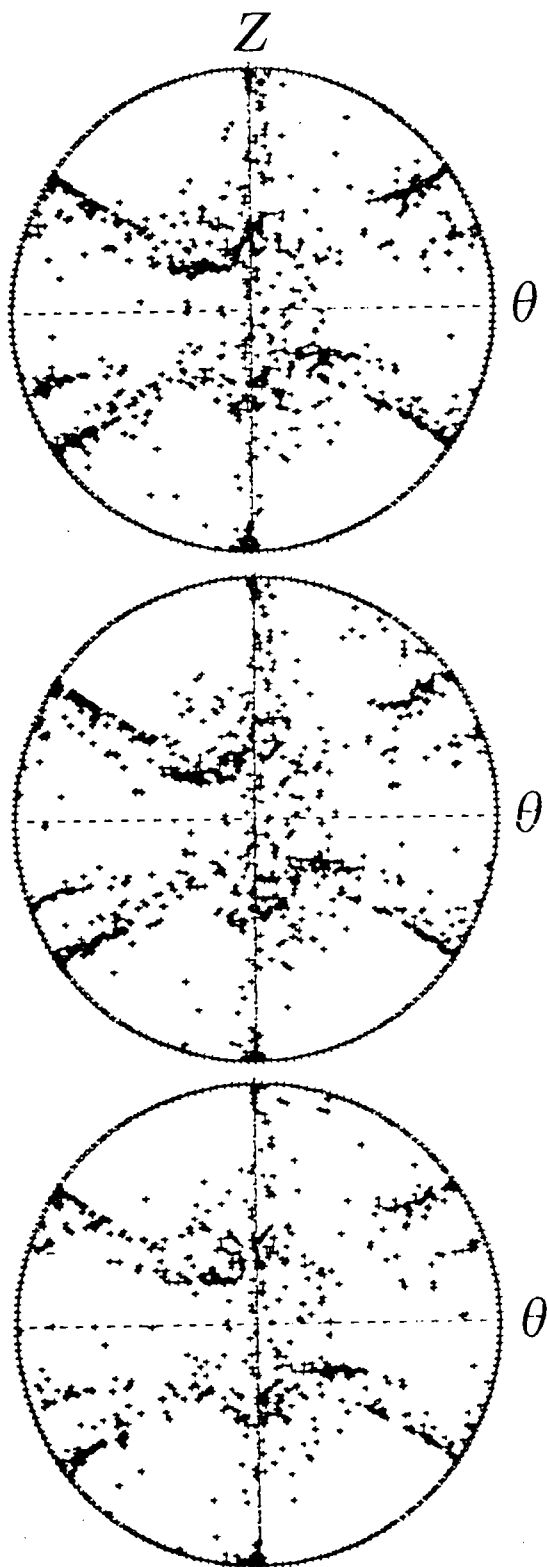


Figure 4.22. Figures de poles (111) associées aux textures déjà décrites sur les figures 4.21 et 4.22.



121  
Tableau 4.8

Statistiques associées aux textures décrites sur les figures 4.20 à 4.22.

TORSION (DPI) gamma=5.0

	Aver.	Viscopl.	r.s.
M	1.56071	1.57378	1.57584

repartition des grains par type d'interaction de systemes

4A	2.4	3.3	2.4
4B	11.5	8.1	10.7
4C	7.7	27.3	10.7
4D	1.4	3.8	1.2
4E	5.7	9.1	5.9
4F	61.2	39.7	62.7
4G	0.0	0.0	0.6
4H	10.0	8.6	5.9

repartition des grains par nombre de systemes actifs

1	8.6	4.8	9.5
2	67.9	64.6	65.1
3	15.8	12.9	18.3
4	5.3	13.4	7.1
5	2.4	0.5	0.0
6	0.0	1.9	0.0
7	0.0	0.5	0.0
8	0.0	0.0	0.0

(tableau 4.8). On peut remarquer notamment une prédominance de l'état plastique 4F et du glissement double.

Ayant utilisé le modèle pour faire les prédictions de texture, celui-ci va être maintenant employé pour étudier les lois de comportement en changement monotone, pour des tests de laboratoire: traction, compression et torsion.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUESDU CHAPITRE 4

- (1) P.van Houtte and E.Aernoudt, Mater.Sci.Eng., vol.23, 1976, p.11.
- (2) H.J.Bunge, Kr. und Tech., vol.3, 1970, p.145.
- (3) R.J.Roe, J.Appl.Phys., vol.36, 1965, p.2024
- (4) G.R.Canova, PhD thesis, McGill University, Montréal, Canada, 1983.
- (5) G.R.Canova, U.F.Kocks and J.J.Jonas, Acta.Met., vol.32 n°2, 1984, p.211.

## 5 RELATION MICROSCOPIQUE-MACROSCOPIQUE

Le but que l'on se fixe, en modélisant le développement des textures est de pouvoir prédire le comportement des matériaux aux grandes déformations pour être capable de simuler le développement de l'anisotropie mécanique et des problèmes d'instabilités plastiques associés. Ayant mis au point une simulation des textures, l'approche suivante consiste à voir s'il est possible de prédire correctement le comportement de polycristaux lors de tests différents. Le cas particulier étudié ici est limité aux tests de traction uniaxiale, de compression uniaxiale et de torsion. Le travail a été publié par Tomé et al.(1).

La simulation étant limitée ici par le durcissement isotrope des systèmes de glissement, l'étude ne s'applique donc qu'aux métaux à haute énergie de faute d'empilement. Donc, dans la classe des c.f.c., on est restreint à l'aluminium ou le cuivre par exemple, c'est

pourquoi les tests mécaniques à la base de cette étude ont été faits sur du cuivre OFHC (99.95% Cu).

## 5.1 LES EXPERIENCES

Les éprouvettes ont été taillées et recuites pendant 60mn à 723K sous vide ( $2 \times 10^{-6}$  torr). La taille de grain était après traitement thermique de 0.02mm.

### 5.1.1 Les tests de traction

Les éprouvettes de traction ont été taillées de manière à avoir initialement un défaut géométrique de rayon de courbure constant, où la striction va apparaître. Un transducteur (LVDT) a été fixé au point de diamètre minimum pour en contrôler localement la vitesse de déformation. Ce transducteur a été connecté à une machine MTS hydraulique, et le test contrôlé par un ordinateur PDP11/04. Une description détaillée de cet équipement est faite en référence 2. Il faut aussi souligner que la courbure locale tendant à croître lors de la déformation, à cause de la striction, des effets triaxiaux apparaissent qui perturbent la précision sur la contrainte calculée. La correction de Bridgman (3) a été donc aussi effectuée. Les tests ont été faits en appliquant une vitesse locale de  $0.01s^{-1}$ .

### 5.1.2 Les tests de compression

Les éprouvettes de compression de forme cylindrique ont été taillées de manière à avoir une longueur de 8.3mm et un rapport longueur/diamètre de 1.5. Les surfaces en contact avec les mors de compression ont été entaillées de petites rainures concentriques pour que le lubrifiant ne s'échappe pas. La déformation maximale appliquée est de 1.8 avec des interruptions à 0.6, 1.0 et 1.2 pour relubrifier les éprouvettes. La vitesse de déformation vraie est la même que pour les essais de traction. Un grand soin a donc été pris pour éliminer les effets dus aux frottements et obtenir des courbes précises et reproductibles.

### 5.1.3 Les tests de torsion

On a choisi de tester des barres pleines plutôt que des tubes, car ces derniers sont souvent sujets à des problèmes mécaniques comme le flambage par exemple, ce qui en limite la ductilité. L'essai de torsion fournit des données couple-nombre de tours qu'il faut convertir en contrainte de cisaillement-déformation de cisaillement. Ceci peut être fait de différentes manières: méthode de Nadai, de Fields et Backofen, méthode différentielle. Toutes ces méthodes ont été étudiées et analysées par Canova (4), la

méthode la plus précise (mais néanmoins la moins pratique à mettre en oeuvre) est la méthode différentielle généralisée de Canova et al.(5), qui utilise des barres pleines de rayon croissant. En l'occurrence, les rayons étaient compris entre 2 et 4mm. La vitesse de déformation équivalente (au sens de von Mises) appliquée est égale à celle des autres tests.

En prenant un critère de von Mises pour tracer les trois courbes expérimentales, on obtient la figure 5.1, voyons maintenant comment utiliser la modélisation des textures pour obtenir les lois de comportement.

5.2 DESCRIPTION DE LA PLASTICITE

L'approche concernant la description de la plasticité des polycristaux est faite de deux manières.

5.2.1 Approche macroscopique

On suppose ici l'existence d'un potentiel plastique de la forme:

$$f(\underline{S}) = S_e \tag{5.1}$$

où  $\underline{S}$  est le tenseur déviateur des contraintes et  $S_e$  un scalaire. Il est aussi couramment admis que la surface de charge, c'est-à-dire, la surface seuil de plasticité coïncide avec ce potentiel plastique.  $f(\underline{S})$  décrit donc la surface de charge, tandis que  $f$  en décrit la forme,  $S_e$  en

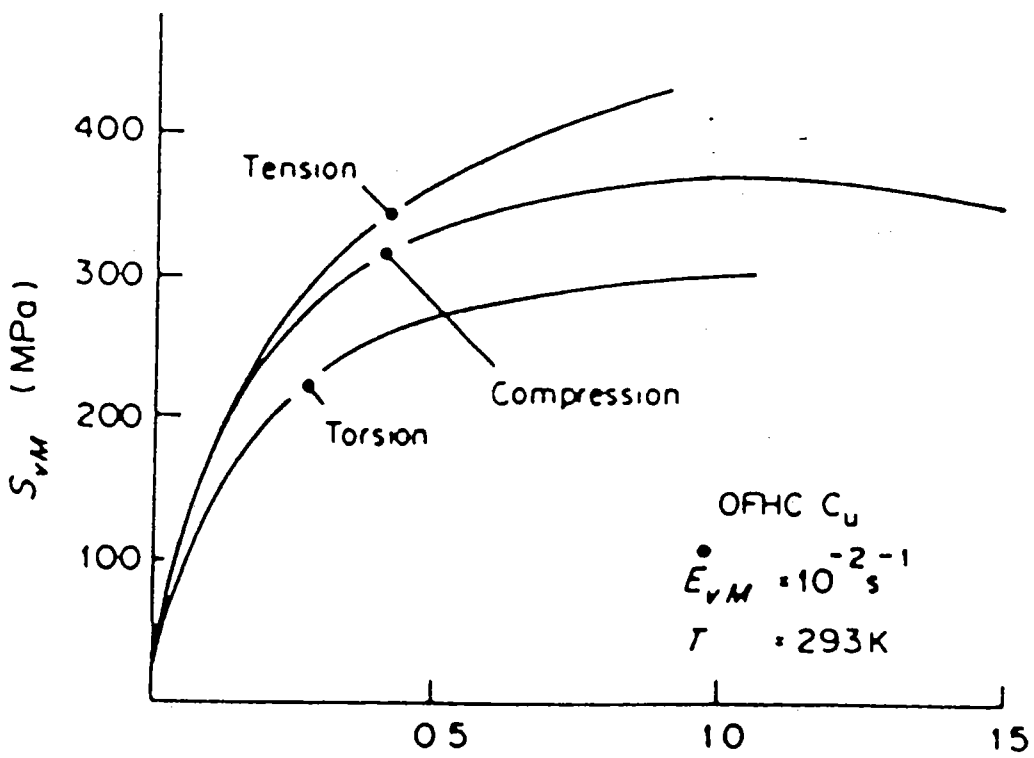


Figure 5.1. Courbes expérimentales contrainte-déformation équivalentes au sens de von Mises obtenues en traction, compression uniaxiales et torsion. On note l'écart croissant entre les courbes.



décrit la taille. Selon von Mises, la forme de cette surface est une sphère, de telle sorte que :

$$f(\underline{S}) = ((3/2)S_{ij}S_{ij})^{1/2} = S_e \quad (5.2)$$

Lorsqu'un incrément de déformation est appliqué au polycristal,  $dE_{ij}$ , le travail plastique élémentaire dissipé est :

$$S_{ij}dE_{ij} = S_e dE_e \quad (5.3)$$

$S_e$  étant défini par l'équation (5.2),  $dE_e$  découle du fait que  $f(S)$  est le potentiel plastique, et on trouve :

$$dE_e = ((2/3)dE_{ij}dE_{ij})^{1/2} \quad (5.4)$$

Par contre, si le matériau s'avère anisotrope, les définitions de von Mises deviennent incompatibles avec le fait que la surface de charge est aussi le potentiel plastique et avec l'équation (5.3). En ce cas, connaissant, à la fois l'état de contrainte et de déformation, on peut se fixer, par exemple une définition de la déformation équivalente au sens de von Mises, néanmoins, la définition de la contrainte équivalente découlera de l'équation (5.3). On peut ainsi se fixer une déformation normalisée  $\underline{E}^0$  telle que :

$$\underline{dE} = \underline{E}^0 dE_e \quad (5.5)$$

$$\text{et } \underline{E}^0 : \underline{E}^0 = 3/2 \quad (5.6)$$

l'équation (5.3) se réécrit donc :

$$\underline{S} : \underline{dE} = \underline{S} : \underline{E}^0 dE_e = S_e dE_e \quad (5.7)$$

La contrainte équivalente devient donc la projection du tenseur des contraintes sur la direction de déformation normalisée. Hill (6) a proposé la solution duale, en ce sens qu'il normalise la contrainte et définit une contrainte équivalente au sens de von Mises, puis projette la direction de contrainte sur le tenseur de déformation incrémentale pour obtenir la déformation incrémentale équivalente. On a pensé que ce schéma était plus simple puisque dans les simulations de textures, la déformation est imposée et non la contrainte. Il faut noter que dans nos cas expérimentaux, qui sont assez simples, la contrainte que l'on mesure est la contrainte équivalente. Ceci est évident pour les tests axisymétriques, mais peut le paraître moins pour la torsion, ou des effets axiaux peuvent apparaître. Etant donné que l'on garde les bords fixes, la contrainte axiale sera, en général, non nulle, et donc un critère de von Mises perdrait son sens ici, alors qu'en projetant le tenseur des contraintes sur une déformation normalisée, qui correspond à un cisaillement simple, le résultat donne effectivement la contrainte de cisaillement qui est mesurée expérimentalement.

### 5.2.2 La plasticité du polycristal

Le monocristal ayant, par hypothèse, un durcissement isotrope et obéissant à la loi de Schmid, l'état de contrainte dans le grain donné par la connaissance de la surface de charge et le principe du travail maximal, correspond à un sommet de la surface de charge dans les conditions DTI ou un sommet d'une sous-surface de charge dans les conditions DPI. Dans tous les cas, cet état de contrainte peut s'exprimer sous la forme:

$$\underline{s} = \underline{M} \tau_c \quad (5.8)$$

où  $\underline{M}$  représente les coordonnées du sommet de la (sous-) surface de charge choisi, lorsque celle-ci est normalisée par la contrainte résolue critique  $\tau_c$ . Donc le tenseur  $\underline{M}$  ne dépend que de l'orientation du monocristal, pour une déformation appliquée donnée. Nous noterons dorénavant  $\underline{s}$  et  $\underline{de}$  les tenseurs des contraintes et déformation incrémentale associés au grain et  $\underline{S}$  et  $\underline{dE}$  les équivalents associés au polycristal. De manière formelle, le travail plastique effectué incrémentalement par le polycristal, lorsque les déformations sont uniformes, est une borne supérieure du travail plastique réel, il sera ici supposé que le travail plastique moyen calculé est égal au travail réel, pour pouvoir comparer expérience et simulation. On a donc:

$$\underline{S} : \underline{dE} = \langle \underline{s} : \underline{de} \rangle = \langle \tau_c \underline{M} : \underline{de} \rangle \quad (5.9)$$

et en utilisant les définitions des équations (5.5) à (5.7), on a, dans les conditions DTI:

$$\underline{\underline{S}} : \underline{\underline{E}}^0 dE_e = \langle \tau_c \underline{\underline{M}} : \underline{\underline{E}}^0 dE_e \rangle \quad (5.10)$$

soit encore:

$$S_e = \langle \tau_c M \rangle \quad (5.11)$$

où le scalaire M est défini comme la projection du tenseur  $\underline{\underline{M}}$  sur la déformation normalisée. Ce scalaire est ici proposé comme définition générale du facteur de Taylor. Lorsqu'on veut le relier aux glissements microscopiques, on écrit:

$$\underline{\underline{s}} : d\underline{\underline{e}} = \underline{\underline{s}} : d\underline{\underline{E}} = \tau_c M dE_e = \tau_c \sum_s d\gamma^s \quad (5.12)$$

et donc, on obtient:

$$M = \sum_s d\gamma^s / dE_e \quad (5.13)$$

On peut remarquer que l'équation (5.12) s'applique aussi bien aux conditions DPI, dans les cas particuliers où les composantes de contrainte correspondant aux composantes de déformation relaxées sont nulles, ce qui est le cas ici.

En ayant admis l'hypothèse de durcissement isotrope des systèmes de glissement, il est équivalent de dire que l'on a: -

$$\tau_c = f(\Gamma, \text{mode de chargement}) \quad (5.14)$$

où  $\Gamma$  est l'intégrale sur le temps de la somme des glissements microscopiques accumulés sur les systèmes actifs. Si cette fonction était unique, c'est-à-dire indépendante du type de test appliqué, elle pourrait être

utilisée comme une loi contrainte équivalente-déformation équivalente qui serait unique pour tous les tests.

### 5.2.3 Procédure de calcul

Dans le calcul à venir, nous allons supposer que tous les grains du polycristal, pour un chargement donné, suivent une loi unique de durcissement microscopique, sachant néanmoins que la valeur de la contrainte résolue critique est différente dans chaque grain du au fait que le glissement accumulé  $\Gamma$  est différent. Il suffit donc de garder en mémoire l'évolution du scalaire  $M$  pour tous les grains. La procédure numérique est la suivante: appliquer  $dE$ , en déduire, pour chaque grain, à chaque increment, la valeur du scalaire  $M$ , d'après l'équation (5.13), on en déduit  $d\Gamma$ , donc, par intégration, on peut calculer  $\tau_c$ , connaissant la fonction  $f$ , puis ayant fait ce calcul pour tous les grains, et appliquant l'équation (5.11), il est possible de calculer la contrainte équivalente macroscopique.

On voit que la procédure exposée suppose, en fait, la connaissance de la loi microscopique d'écrouissage. Une loi du type:

$$\tau_c = \tau_0 + (\tau_1 + \theta_1 \Gamma) (1 - \exp(-\Gamma \theta_0 / \tau_1)) \quad (5.15)$$

a été prise, et les paramètres  $\tau_0, \tau_1, \theta_0$  et  $\theta_1$  ont été calculés d'après les données expérimentales.

Finalement, le problème pratique s'est posé de savoir comment effectuer la transition entre les conditions DTI et DPI. En effet, comme on l'a vu précédemment, il s'agit, en fait, de deux types de conditions extrêmes, et le calcul de Tiem et al. le montre bien. Lorsqu'un grain est moyennement aplati (figure 5.2), on peut estimer que la différence entre les composantes de cisaillement  $\epsilon_{23}$ , par exemple, pourra être accommodé localement, au voisinage du joint de grain, dans une zone dont la profondeur est de l'ordre de la plus petite dimension de la surface de contact (cet argument a déjà été développé dans le paragraphe 3.2.4). Cette zone en bordure des grains est soumise aux conditions DTI, alors que la zone intérieure est dans les conditions DPI. Ici, encore, le calcul fait par Tomé et al. est erroné, car il considère séparément des zones se déformant sur 5, 4 et 3 systèmes de glissement, dans le cas de la compression. Sur les figures 5.3a, b et c sont reportées les fractions volumiques calculées par Tomé et al.. Le calcul est effectué sur une population de N grains (800 dans ce cas) et la transition DTI-DPI est faite de la façon suivante: en appelant  $f_5$ , la fraction volumique des grains devant subir les conditions DTI, la simulation traitera  $f_5 \times N$  grains dans les conditions DTI, et les autres grains seront traités dans les conditions DPI. Le facteur  $f_5$

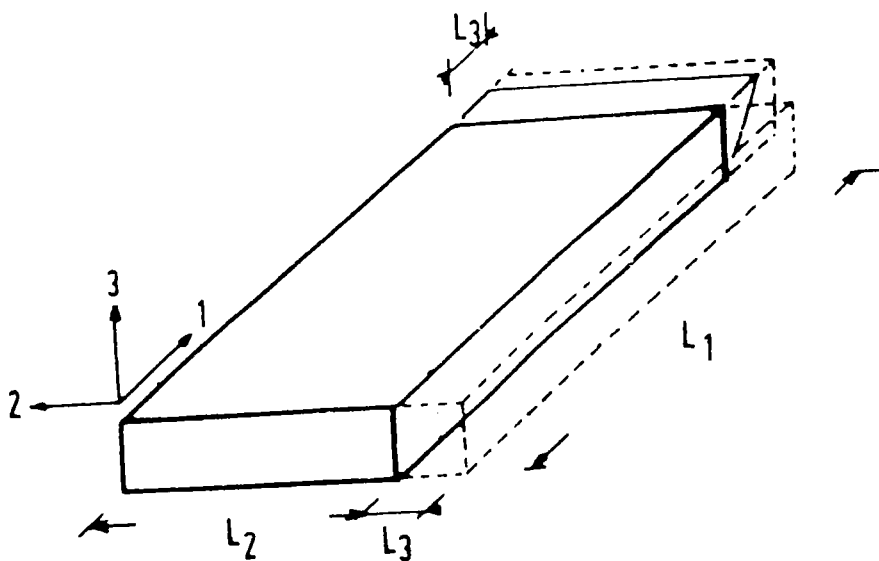


Figure 5.2. Schématisation d'un grain plat et de la zone de l'environnement affecté par des gradients de déplacement  $u_{1,3}$  et  $u_{2,3}$ .

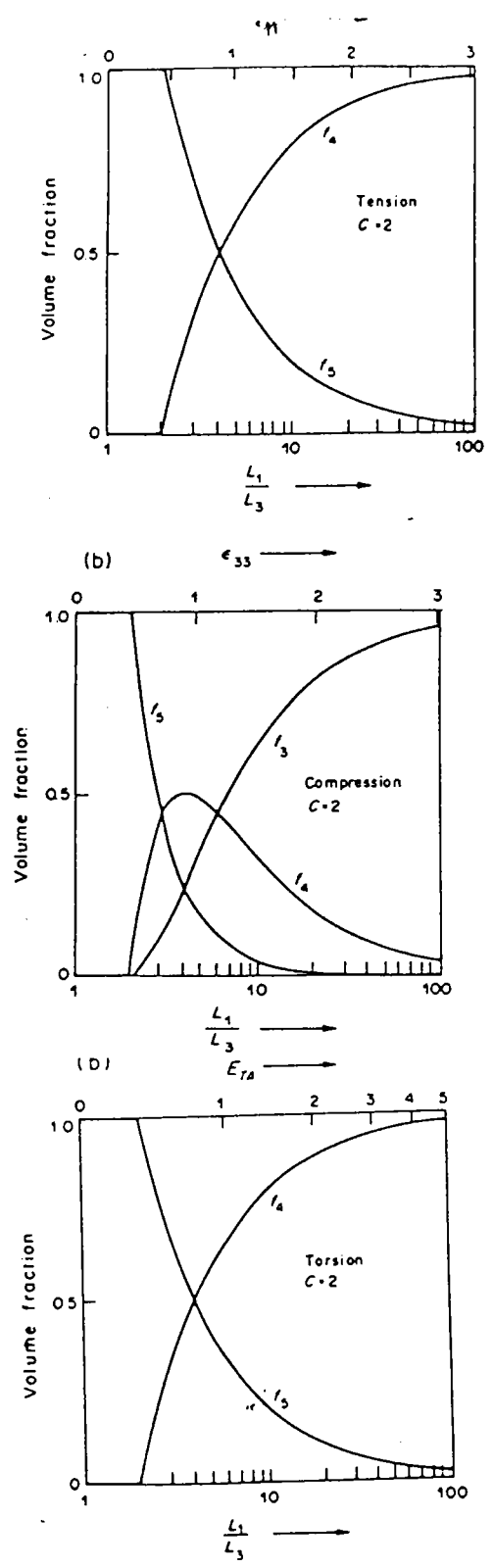


Figure 5.3. Evaluation des fractions volumiques associées aux conditions DTI et DPI pour les trois types de tests considérés.



évoluant au cours de la déformation, le nombre de grains en DTI fera de même, assurant ainsi une transition douce.

### 5.3 LES RESULTATS

Le calcul présent utilisant l'approche moyennée pour résoudre les ambiguïtés, la simulation calcule une évolution des textures qui est représentée sur les figures 5.4a, b, c, d et e. Les régressions faites pour calculer les coefficients de la loi equ.(5.15) sont effectuées en minimisant l'erreur quadratique, les résultats sont indiqués dans le tableau 5.1, et les courbes correspondantes à ces paramètres sont tracées sur la figure 5.6. Les figures 5.5a et b attestent de la précision liée à la régression. On note que la loi microscopique d'écroûissage fournit un meilleur accord en tant que loi équivalente qu'en utilisant le critère de von Mises, mais il faut néanmoins traiter ces résultats avec précaution, pour les raisons exposées au paragraphe suivant.

Il est possible d'analyser les résultats d'une autre manière: l'équation (5.11) peut aussi être écrite:

$$S_e = \langle M \rangle \bar{\tau} \quad (5.17)$$

où  $\bar{\tau}$  est ici une moyenne des  $\tau_c$  pondérés par les facteurs de Taylor. Supposons que la loi microscopique moyenne d'écroûissage soit une loi du type:

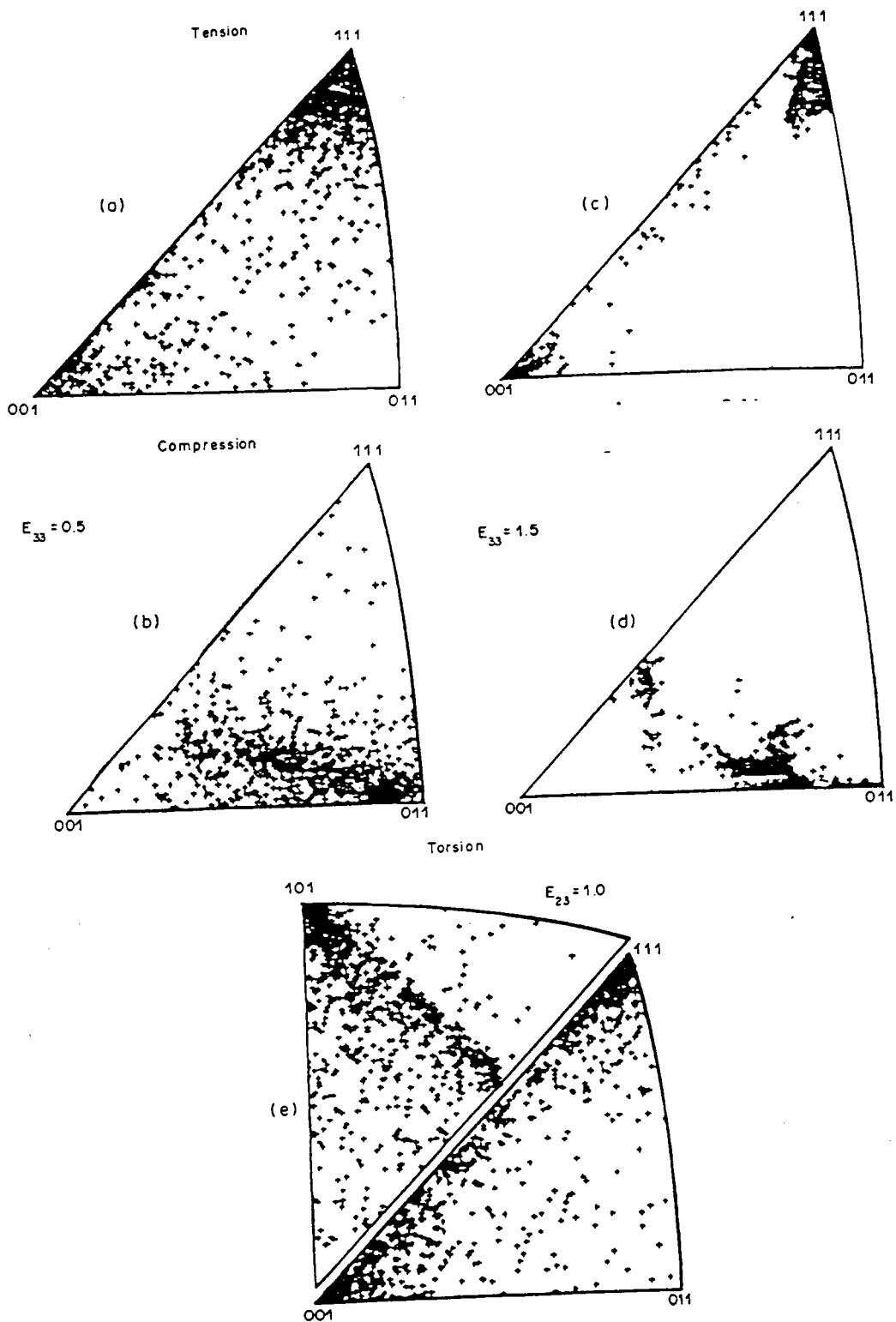


Figure 5.4. Figures inverses de poles pour les textures obtenues en grandes déformations en faisant une transition douce entre les conditions DTI et DPI.

Tableau 5.1

Résultats des coefficients des lois microscopiques d'écroutissage obtenues par régression sur les données expérimentales à l'aide des prédictions de textures.

	$\tau_0$	$\theta_0$	$\tau_1$	$\theta_1$
Tension	12	160	98	7
Compression	12	160	98	4
Torsion	12	160	75	9

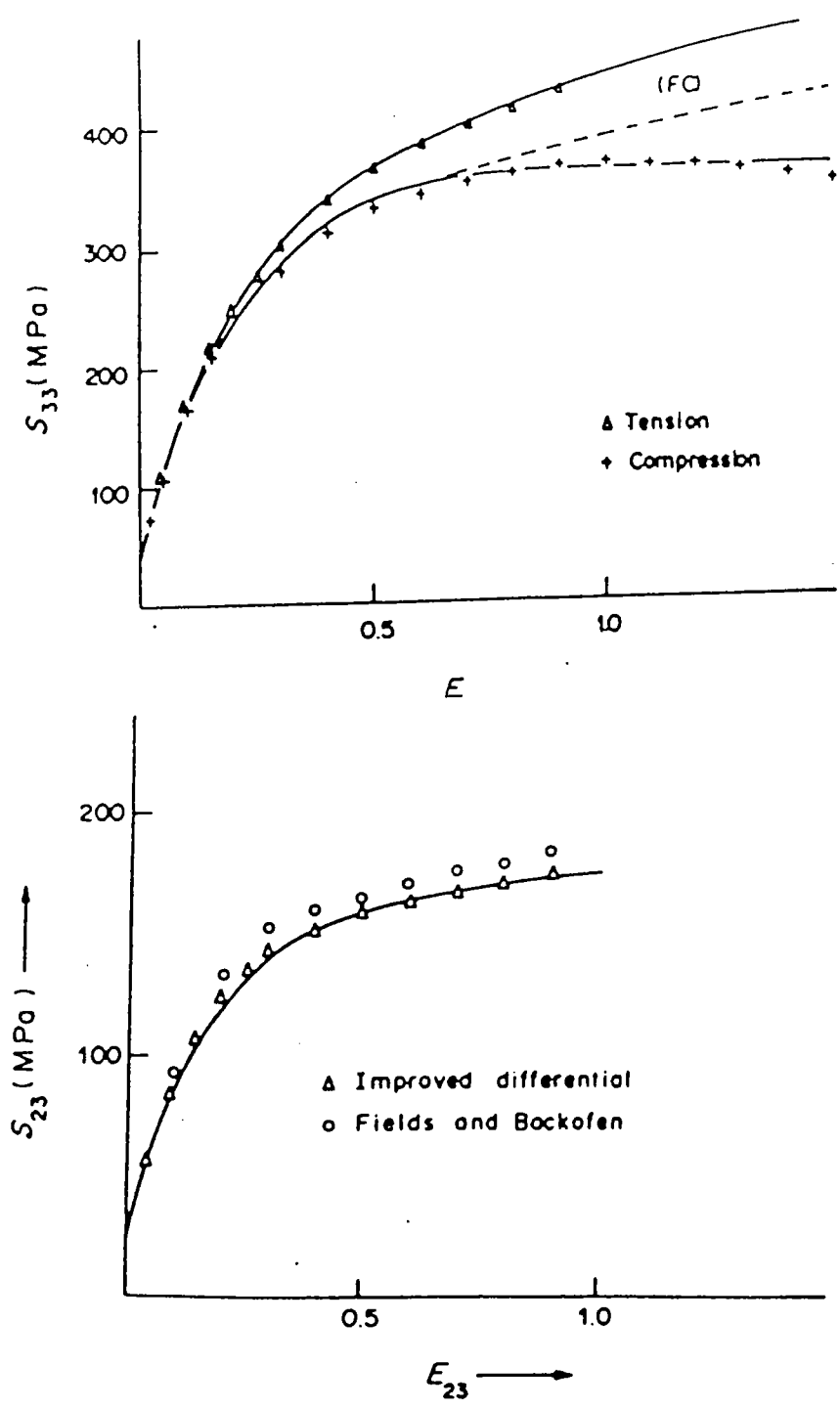


Figure 5.5. Schémas montrant la précision obtenue avec les coefficients du tableau 5.1 en comparaison avec les données expérimentales.

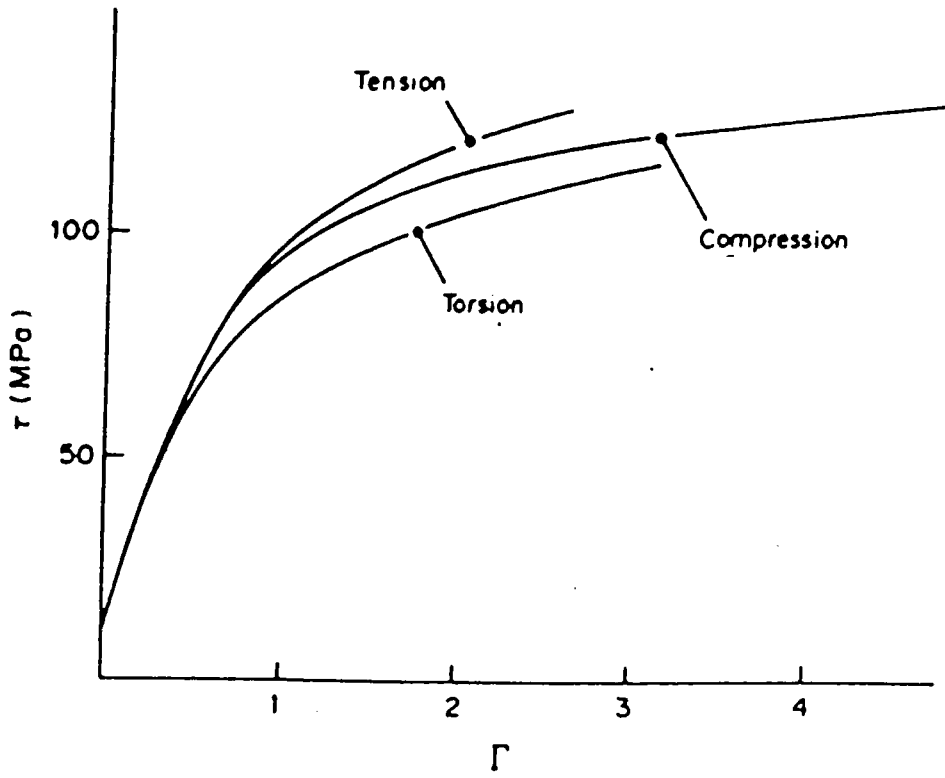


Figure 5.6. Courbes microscopiques d'écroutissage tracées à l'aide des coefficients du tableau 5.1 et selon l'équation (5.15).

$$\bar{\tau} = g \langle \Gamma \rangle, \text{ mode de chargement} \quad (5.16)$$

où  $\langle \Gamma \rangle$  est ici le glissement microscopique intégré sur le temps et les systèmes actifs, mais moyenné sur les grains. Avec l'équation (5.13), il est possible, connaissant  $\langle M \rangle$  de calculer directement  $\langle \Gamma \rangle$ , et, à l'aide des équations (5.16) et (5.15) successivement, de calculer la contrainte équivalente. Cette approche a déjà été utilisée par Gil Sevillano et al. (7). Il est donc aussi possible, connaissant les données expérimentales de calculer la loi équ.(5.16) sans en supposer initialement une forme explicite. Les résultats de cette méthode sont tracés sur la figure 5.7. En pointillé, sur cette même figure, sont aussi tracées les courbes où le calcul a été fait en ne prenant que les valeurs initiales des facteurs de Taylor. On remarque une divergence accrue entre les courbes, dans ce cas.

La faible différence existant entre les courbes de la figure 5.6 et celles en trait plein de la figure 5.7, montrent que la méthode simplifiée peut aussi être appliquée. Par contre l'écart restant entre les courbes que l'on suppose correctes dépasse l'erreur expérimentale, et deux explications peuvent être utilisées pour expliquer ces différences. La première repose simplement sur le nombre de systèmes actifs, à savoir que qualitativement, plus le

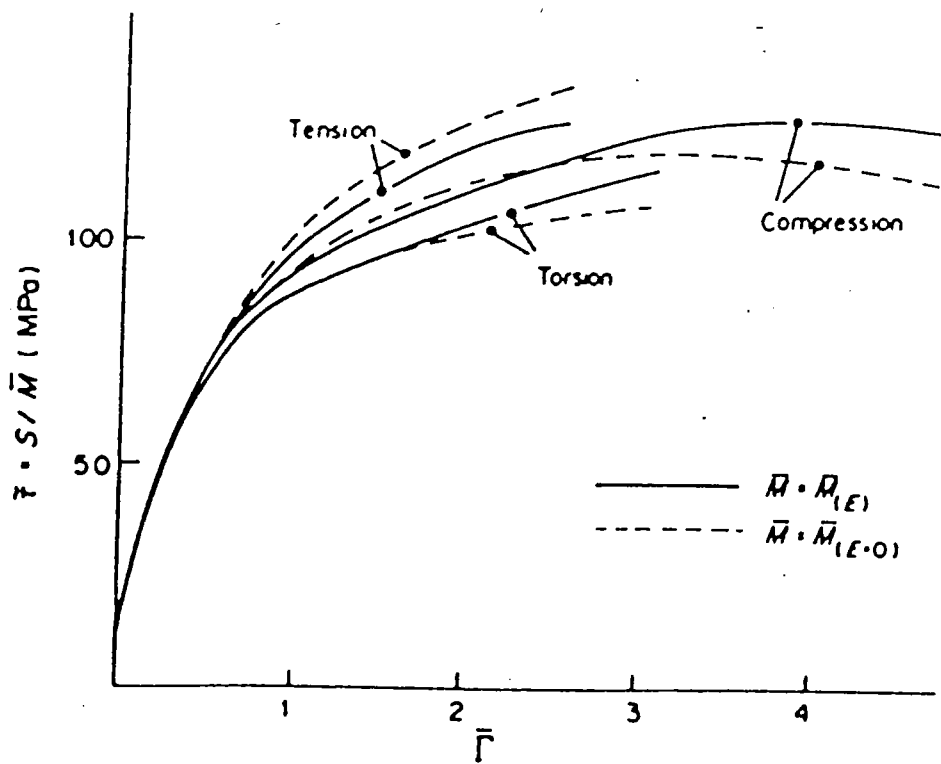


Figure 5.7. Courbes microscopiques d'écroutissage obtenues à l'aide de méthodes simplifiées. La courbe en traits pleins consiste à utiliser le facteur de Taylor moyen actualisé au cours de la déformation. La courbe en pointillés consiste à n'utiliser que le facteur d'orientation moyen initial.

nombre de systèmes actifs est grand, plus la probabilité d'interaction est grande, et ainsi plus l'écroutissement peut être fort. Le deuxième argument repose sur le type d'interaction. En effet, lorsque des monocristaux sont testés en traction uniaxiale, dans les directions (100) et (111), bien que la première orientation favorise l'activation de 8 systèmes, l'écroutissement est moins fort que dans le deuxième cas où seulement 6 sont activés. Le type d'interaction peut donc aussi être important. Pour pouvoir étudier ces effets, des statistiques ont été faites, de la même manière qu'au chapitre précédent, elles sont présentées dans le tableau 5.2 et sur la figure 5.8. On aperçoit que le nombre de systèmes actifs décroît dans le sens traction compression torsion, et donc pourrait expliquer probablement les différences. La configuration cristallographique des systèmes actifs, en revanche, semblerait prédire la torsion au-dessus de la compression, car c'est le type B qui, sur les monocristaux produit le plus fort durcissement.

#### 5.4 DISCUSSION ET CONCLUSIONS

Quelques remarques s'imposent, à la fois concernant les résultats expérimentaux, les prédictions de textures mêmes, et les lois d'écroutissement.



Tableau 5.2

Statistiques, sur les trois tests, pour deux niveaux de déformation, concernant le pourcentage de la population des grains associé à certains types particuliers d'interaction de dislocations.

	$E = 0.5$					$E = 1.5$					
	5A	5B	5C	5D	5E	4C	4E	4F	4G	4H	3G
Tension	12	72	—	—	—	31	29	—	—	—	—
Compression	—	—	76	12	—	—	—	14	17	—	55
Torsion	—	19	32	30	18	14	—	33	—	11	—

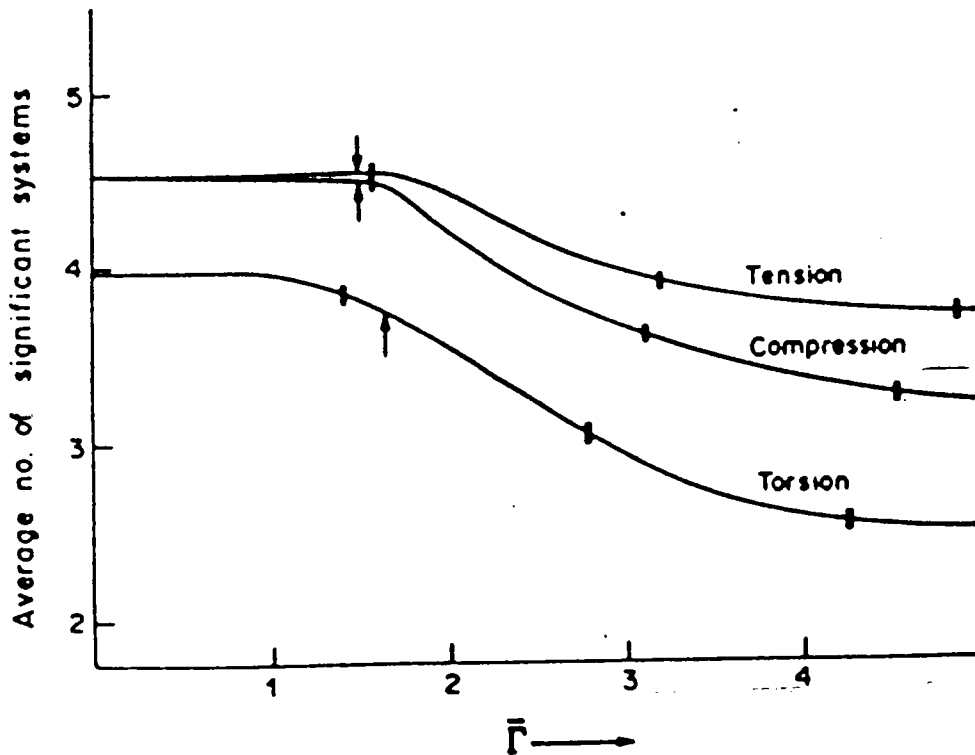


Figure 5.8. Evolution du nombre moyen de systèmes actifs au cours de la déformation pour les trois types de chargement considérés.

Comme on le voit sur la figure 5.1, l'essai de compression exhibe un adoucissement. Depuis longtemps déjà, Taylor et Quinney ont observé une saturation, sans néanmoins obtenir d'adoucissement. Tomé et al. ont d'abord attribué ce plateau au fait que Taylor et Quinney ont effectué leurs tests à des vitesses d'allongement constantes, c'est-à-dire, en compression, à des vitesses de déformation croissantes, qui, pour un matériau sensible à la vitesse de déformation aurait tendance à augmenter le niveau de la contrainte. En fait, d'après M.G.Stout, qui a répété les expériences à Los Alamos National Laboratory sur le même matériau, l'adoucissement n'existe pas, et est probablement dû au fait que l'élasticité a été négligée dans le contrôle expérimental de la déformation plastique. Néanmoins, cet adoucissement n'étant pas très prononcé, il ne peut constituer une source d'erreur importante.

Comme discuté dans la partie théorique, il n'est pas correct d'appliquer les conditions DPI à l'essai de traction aux grandes déformations. Heureusement, la texture ne change que très peu. Sur la figure 5.8, on voit de même que l'évolution du facteur de Taylor est aussi peu affectée. Si l'on suppose l'hypothèse de Taylor valable, ce qui est le cadre de ce travail, il ne peut y avoir de grosse erreur engendrée par la simulation de l'essai de traction. La texture de torsion, correspond bien à ce qui est couramment observé expérimentalement, et le procédé artificiel qui

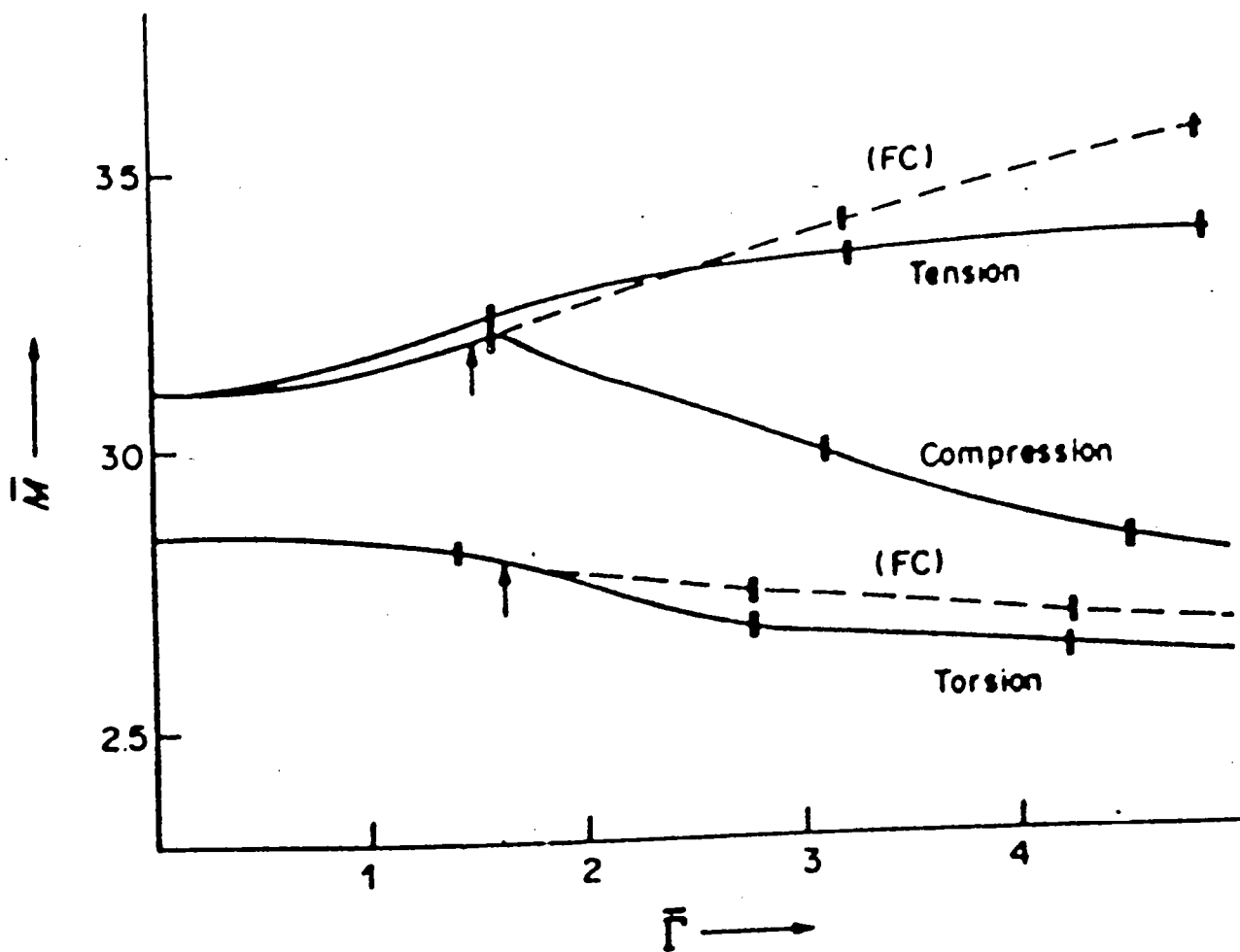


Figure 5.9. Evolution du facteur d'orientation moyen au cours de la déformation en fonction du cisaillement microscopique moyen. On remarque un adoucissement en compression.

consiste à passer des conditions DTI aux conditions DPI, ne fait pas une grosse différence sur l'évolution du facteur de Taylor. D'autre part, ces deux textures sont assez insensibles au type de méthode employée (approche moyennée ou viscoplastique) pour résoudre les ambiguïtés. Il a été aussi déjà observé que les textures simulées se développent plus vite que les textures réelles, mais, comme on peut le voir sur la figure 5.9, cela affectera peu les résultats. En conclusion, on peut dire qu'une loi microscopique d'écroutissage unique fournira sans aucun doute une meilleure estimation des lois de comportement macroscopiques que le critère de von Mises. Par contre, on a pu remarquer que l'hypothèse d'un écroutissage microscopique unique n'était pas tout-à-fait correct, et qu'il subsiste quelques différences. Celles-ci sont explicables, pour l'instant, en termes de nombre de systèmes actifs et de types d'interaction entre ces systèmes.

Il existe néanmoins un problème concernant la compression, qui fausse en partie l'analyse des lois microscopiques d'écroutissage, car la texture prédite aux grandes déformations ne correspond pas à la texture réelle. Ce cas particulier de la compression sera rediscuté au chapitre 8, en effet la texture expérimentale de compression semble liée à la distorsion des grains ('grain curling') qui est incompatible avec l'hypothèse de Taylor.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUESDU CHAPITRE 5

- (1) C.Tomé, G.R.Canova, U.F.Kocks, N.Christodoulou and J.J.Jonas, Acta.Met., vol.32 n°10, 1984, p.1637.
- (2) N.Christodoulou, J.J.Jonas and G.R.Canova, ASTM STP 765, R.W.Rhode and J.C.Swearengen, 1982, p.51.
- (3) P.W.Bridgman, in "Studies in large plastic flow and fracture", McGraw Hill, New York, 1952.
- (4) G.R.Canova, M.Eng. thesis McGill University, Montréal, Canada, 1980.
- (5) G.R.Canova, S.Shrivastava, J.J.Jonas and C.G'sell, in "Formability of Metallic Materials", 2000A.D., ASTM STP 753, J.R.Newby and B.A.Niemeier eds, 1982, p.189.
- (6) R.Hill, Proc.Roy.Soc.Lond., A193, 1948, p.281.
- (7) J.Gil Sevillano, P.van Houtte and E.Aernoudt, Progr.Mat.Sci., vol.25, 1981, P.69.

## 6 RELATION ENTRE LA SYMETRIE DES TEXTURES ET DES SURFACES DE CHARGE

Lorsqu'un matériau a subi une histoire de déformation, l'état dans le lequel il est à la fin de cette histoire peut être caractérisé d'un point de vue mécanique par sa surface de charge. En effet, lorsque celle-ci est assimilée au potentiel plastique, elle décrit, à la fois l'état de contrainte à appliquer pour créer une déformation plastique et l'incrément de déformation plastique résultante, lorsque le chargement est en contrainte. Elle peut être utilisée aussi dans des cas mixtes, plus réalistes, où une déformation est partiellement imposée macroscopiquement à l'éprouvette, ainsi que la contrainte.

Elles sont donc un outil de base, non seulement pour décrire les propriétés plastiques et l'anisotropie associée, mais aussi pour pouvoir modéliser correctement les problèmes mécaniques aux grandes déformations: instabilités au cours de l'emboutissage, bandes de cisaillement, effets axiaux en cisaillement... . Les surfaces de charge ont

souvent, dans le passé été décrites de manière analytique pour pouvoir formaliser les problèmes mécaniques. Cependant, il arrive que ces formulations perdent leur sens physique (ou que celui-ci soit justifié à posteriori), ou simplement ne représentent pas la réalité.

Les surfaces de charge calculées dans le présent travail reposent sur l'approche polycristalline exposée précédemment, et n'ont pas de forme explicite analytique.

L'étude d'un problème mécanique, qui doit donc être basé sur la connaissance de la surface de plasticité, doit, en général, être effectué en utilisant les cinq dimensions de l'espace des contraintes. Ceci peut être simplifié considérablement si l'on est capable de réduire le nombre de dimensions, dans cet espace, nécessaire à l'étude.

Dans ce chapitre tiré du travail de Canova et al. (1), il va être montré comment des considérations simples sur la symétrie des textures permettent de conclure sur la symétrie de la surface de charge du polycristal, et ainsi réduire la dimension du problème mécanique éventuel. La méthode de construction de ces surfaces va être d'abord abordée, puis suivra l'analyse des symétries et enfin quelques applications seront présentées.

## 6.1 CONSTRUCTION DES SURFACES DE CHARGE

### 6.1.1 Notation

Dans les travaux concernant les textures, une notation a été employée, qui consiste à vectoriser les tenseurs déviateur de contrainte et déformation incrémentale. La définition est rappelée ici. Si  $\underline{S}$  et  $\underline{dE}$  sont ces deux tenseurs, les vecteurs associés sont:

$$\begin{aligned} \underline{S} &= ((S_{11}-S_{22})/2, (3/2)S_{33}, S_{23}, S_{13}, S_{12}) \\ \text{et} \\ \underline{dE} &= (dE_{11}-dE_{22}, dE_{33}, dE_{23}+dE_{32}, dE_{13}+dE_{31}, dE_{12}+dE_{21}) \end{aligned} \quad (6.1)$$

Les deux premières composantes du vecteur  $S$  définissent un sous-espace utilisé sous le nom de plan  $\pi$ .

Cette notation a été choisie initialement pour simplifier les calculs, tout en restant cohérente avec, en particulier le travail plastique. On peut, en effet, vérifier que le produit scalaire de ces deux vecteurs est bien le produit doublement contracté des tenseurs associés, c'est-à-dire le travail plastique. On peut aussi montrer que la règle de normalité s'applique aussi si la surface d'écoulement est décrite à l'aide du vecteur  $S$ . En effet, la théorie de l'écoulement donne:

$$dE_{ij} = d\lambda \cdot (\partial f(\underline{S}) / \partial S_{ij}) \quad (6.2)$$

$f(\underline{S})$  étant la fonction décrivant le potentiel plastique. Si maintenant  $f^*(\underline{S})$  est cette même surface décrite à l'aide du



vecteur  $\underline{S}$ , il est possible aussi d'appliquer la théorie de l'écoulement pour en déduire:

$$dE_i = d\lambda^*(\partial f^*(S)/\partial S_i) \quad (6.3)$$

La preuve mathématique détaillée est en référence (1), annexe 1.

Dans la suite du travail, on utilisera soit la notation vectorielle (à un indice) soit la notation tensorielle (à deux indices).

### 6.1.2 Définitions

Avant de procéder directement aux méthodes de construction, il convient d'abord de définir ce qu'est une coupe, une projection de la surface de charge, et aussi ce qu'est un sous-espace fermé, dans l'espace des contraintes.

Une coupe de la surface de charge dans le sous-espace  $\langle S_i \rangle$  où  $i$  peut prendre  $p$  valeurs entre 1 et 5, est l'intersection de la surface de charge par les sous-espaces  $S_j=0$  pour tout  $j=i$ . Ainsi, une coupe  $\langle S_1, S_2 \rangle$  est obtenue en écrivant  $f(\underline{S})=k$  avec les conditions  $S_3=S_4=S_5=0$ . On peut, naturellement effectuer des coupes par des sous-espaces ne passant pas par l'origine. Il faut souligner que, en général, lorsqu'une coupe est représentée, la règle de la normalité ne s'applique pas toujours.

Une projection, en revanche, est définie à partir de la normale à la surface. La projection (orthogonale) de

la surface sur le sous-espace  $(S_i)$  le long du sous-espace complémentaire  $(S_j)$  avec  $j=i$ , est obtenue en représentant dans le premier sous-espace tous les points de la surface de charge rassemblant les conditions  $dE_j=0$ . Ainsi, une projection dans le plan  $\pi$  consiste à trouver tous les états de contrainte associés à des incréments nuls des composantes de cisaillement de la déformation. Les états de contrainte associés n'appartiennent pas toujours au sous-espace de projection.

En général, projection et coupe dans un même sous-espace ne sont pas associés aux mêmes états de contrainte sur la surface de charge. En effet, sur la figure 6.1, qui est une schématisation tridimensionnelle, on peut remarquer que la sous-surface obtenue par projection sur l'espace  $(\sigma_1, \sigma_2)$  est faite à partir de points non contenus dans ce sous-espace. De même, la sous-surface obtenue en effectuant une coupe par le même plan, a des directions de déformation non contenues dans ce plan. Par définition, un sous-espace où coupe et projection coïncident sera appelé fermé. Sa signification est que, si l'on applique un incrément de déformation contenu dedans, l'état de contrainte associé est aussi dans ce sous-espace. Si, par exemple, l'incrément de déformation est uniquement du type:

$$dE = (0, 0, dE_3, 0, dE_5) \quad (6.4)$$

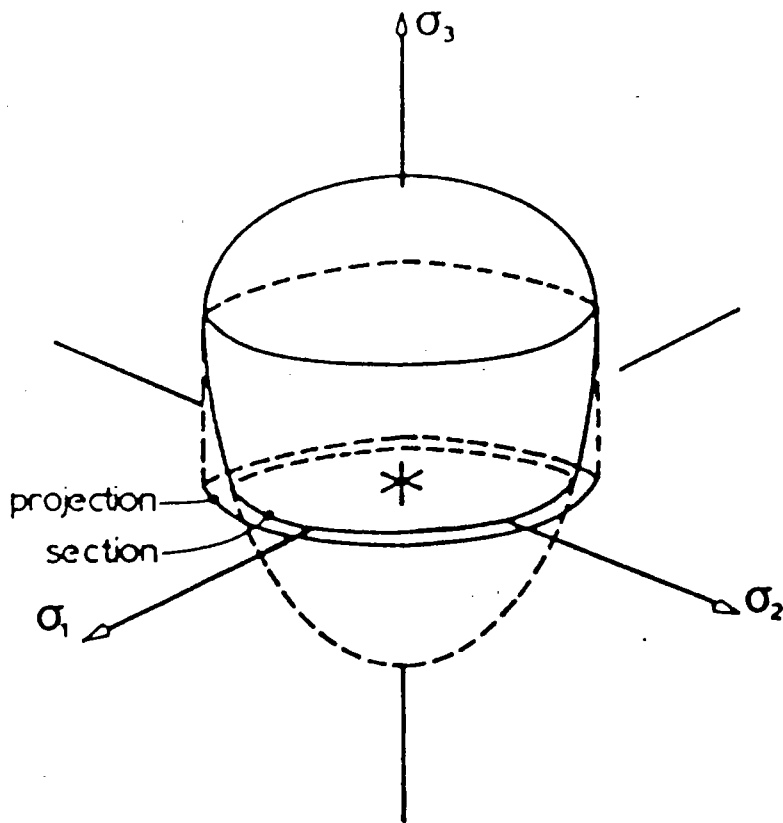


Figure 6.1. Schéma montrant la différence éventuelle entre la projection (orthogonale) et la section d'une surface de charge.

et si l'état de contrainte associé est ,lui, du type:

$$S=(0,0,S_3,0,S_5) \quad (6.5)$$

alors, le sous-espace  $(S_3, S_5)$  est fermé. Pour un matériau dont l'anisotropie est générale, c'est-à-dire sans symétrie particulière, une déformation (6.4) ne sera pas associée à un état de contrainte (6.5), mais plutôt à un tenseur de contrainte n'ayant aucune composante nulle.

Connaissant la symétrie de la texture, il est possible de déterminer la symétrie du comportement mécanique, c'est-à-dire, en particulier, quels sous-espaces particuliers seront fermés.

Lorsque la surface de charge est décrite par un ellipsoïde, ce qui, d'après Hill (2) peut être le cas si on prend les axes principaux d'anisotropie comme axes de référence, l'équation, dans la notation définie en équ.(6.1), s'écrit:

$$a_{ij}S_iS_j=k \quad (6.6)$$

où la matrice  $a_{ij}$  s'écrit sous la forme:

$$a = \begin{matrix} & A & C & 0 & 0 & 0 \\ & C & B & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & L & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & M & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & N \end{matrix} \quad (6.7)$$

l'incrément de déformation s'écrivant:

$$dE_i = d\lambda a_{ij}S_j \quad (6.8)$$

on voit, en particulier, que le plan  $\pi$  est fermé, et aussi que tout sous-espace  $\langle S_j \rangle$ , pour  $j \geq 2$  est fermé, ainsi que toute réunion de ces sous-espaces. Nous verrons plus loin que ce cas se limite à la texture orthotrope.

### 6.1.3 Méthode de construction des surfaces de charge

On a déjà vu que, lorsqu'on applique un incrément de déformation et que celui-ci est uniforme dans le polycristal, la puissance dissipée est une borne supérieure de la puissance dissipée réelle. Le travail macroscopique s'exprime :

$$\underline{S} : \underline{E}^0 = \langle \underline{\varepsilon} \rangle : \underline{E}^0 = \langle \tau_c M \rangle \quad (6.9)$$

avec les mêmes notations que dans le chapitre précédent. Donc pour une déformation normalisée  $\underline{E}^0$  appliquée à l'agrégat, il est possible de calculer une distance, dans l'espace des contraintes égale au travail moyen. L'équation (6.9) définit ainsi un plan de normale  $\underline{E}^0$  et de distance à l'origine égale au travail moyen. Il suffit donc de balayer l'espace des contraintes par des directions  $\underline{E}^0$  et de construire l'enveloppe formée par les plans. De fait, puisque, d'après Tomé et al.(3), la loi microscopique d'écrouissage moyennée ne semble pas trop dépendre de la répartition des facteurs de Taylor, on peut raisonnablement supposer qu'elle ne changera pas tellement avec des directions  $\underline{E}^0$  différentes, et donc, la construction se fait

effectivement en prenant comme distance le facteur de Taylor moyen.

Il faut aussi souligner un point important concernant l'hypothèse de centro-symétrie de la surface de charge. La simulation ne peut, en effet, prédire des effets comme l'effet Bauschinger qui fait perdre la centro-symétrie de la surface d'écoulement. Les conclusions qui vont suivre, vont néanmoins considérer les deux cas séparément.

Finalement, il faut aussi définir quel seuil de plasticité est ici simulé. Les surfaces de charge calculées sont basées sur l'hypothèse d'uniformité (partielle dans les conditions DPI) de la déformation, donc le seuil de plasticité simulé correspond, dans chaque grain, à l'activation d'autant de systèmes que nécessaire à la réalisation de cette déformation. Il ne s'agit donc pas d'un seuil de microplasticité correspondant expérimentalement à une post-déformation de l'ordre de  $10^{-6}$  ou moins, mais plutôt à une macro-plasticité plus proche expérimentalement de tests effectués à  $10^{-3}$  de déformation.

## 6.2 ANALYSE DES SYMETRIES

Quand un matériau de texture initiale isotrope est déformé suivant un trajet de déformation, la texture produite va posséder la symétrie du test. Van Houtte et

Aernoudt (4) ont utilisé cette propriété pour réduire la population initiale d'orientations. La symétrie du test est le groupe de tous les opérateurs de symétrie, qui laissent invariant le tenseur gradient de déplacement. La symétrie de la texture peut aussi être décrite par un groupe d'opérateurs de symétrie. Il peut être défini comme le groupe des opérateurs laissant invariante la FDOC. En pratique, on peut le définir de manière équivalente de la façon suivante: soit  $\underline{A}$ , la matrice de passage des axes cristallographiques aux axes de l'éprouvette associée à une orientation donnée, et  $f(\underline{A})$ , la fonction densité d'orientations liée à  $\underline{A}$ . Si  $\underline{P}$  est un opérateur du groupe de symétrie de la texture, alors on a:

$$f(\underline{A}) = f(\underline{t}_{\underline{P}\underline{A}\underline{P}}) \quad (6.10)$$

c'est-à-dire que la probabilité d'obtenir une orientation définie par  $\underline{A}$  est égale à la probabilité d'obtenir l'orientation définie par  $\underline{t}_{\underline{P}\underline{A}\underline{P}}$ . Ceci veut, en particulier, dire que les lignes d'intensité, visibles sur les figures de poles auront cette symétrie.

Lorsque  $G$  définit le groupe de symétrie du test et  $G'$  celui de la texture initiale, on peut s'attendre à ce que la texture développée pendant le test ait un groupe de symétrie  $G''$  égale à l'intersection de  $G$  et de  $G'$ . En fait, ce groupe  $G''$  constitue la symétrie minimale que va posséder

la nouvelle texture, car il se peut que lorsque la déformation devient très grande,  $G''$  tende vers  $G$ .

Pour définir la symétrie du comportement mécanique, il convient de bien différencier les deux exemples suivants. Supposons  $(X_1, X_2, X_3)$  un repère lié à une éprouvette, en appliquant un tenseur des contraintes  $S$  dans ce repère, un incrément de déformation  $dE$  y sera associé. Soit  $R$ , l'opérateur géométrique permettant de passer de ce repère à un repère  $(X'_1, X'_2, X'_3)$ , on peut exprimer qu'un tenseur  $\underline{t}_{RSR}$  sera associé à un tenseur  $\underline{t}_{RdER}$  dans ce nouveau repère. Ceci n'est que l'expression des propriétés mécaniques dans le nouveau repère. Supposons maintenant que,

dans le repère originel, on applique une contrainte  $\underline{t}_{RSR}$ , rien ne nous permet d'affirmer que la déformation associée sera  $\underline{t}_{RdER}$ . Intuitivement, on peut affirmer que ceci sera le cas si la texture est aussi invariante par cette rotation  $R$ .

Le postulat à la base de ce travail est que: tout opérateur de symétrie  $R$  laissant la texture invariante, sera aussi tel que, si  $\underline{S}$  et  $dE$  sont associés dans un certain référentiel, alors  $\underline{t}_{RSR}$  et  $\underline{t}_{RdER}$  seront aussi associés dans ce même repère.

Plusieurs cas courants de symétrie vont maintenant être étudiés.



### 6.2.1 Un plan de symétrie

C'est une texture observée fréquemment lorsque, par exemple, le tenseur gradient de déplacement n'est pas diagonal, ce qui est le cas du cisaillement. La figure de poles d'un essai de torsion (fig.6.2) montre cette symétrie par rapport au plan perpendiculaire au rayon de l'éprouvette. Cette figure étant tracée avec le rayon au centre, la symétrie apparaît par l'intermédiaire d'une centro-symétrie de la figure de pole (l'origine de la sphère de projection étant toujours centre d'inversion).

Supposons, par exemple, le plan de symétrie perpendiculaire à l'axe  $X_2$ , l'opérateur de symétrie peut s'écrire:

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.11)$$

Et ainsi, un tenseur de contraintes  $\underline{S}$  transformé par  $M_2$  s'écrira:

$$\underline{S} = \begin{pmatrix} S_{11} & -S_{12} & S_{13} \\ x & S_{22} & -S_{23} \\ x & x & S_{33} \end{pmatrix} \quad (6.12)$$

et la déformation incrémentale transformée par  $M_2$  s'écrit de même:

$$dE = \begin{pmatrix} dE_{11} & -dE_{12} & dE_{13} \\ x & dE_{22} & -dE_{23} \\ x & x & dE_{33} \end{pmatrix} \quad (6.13)$$

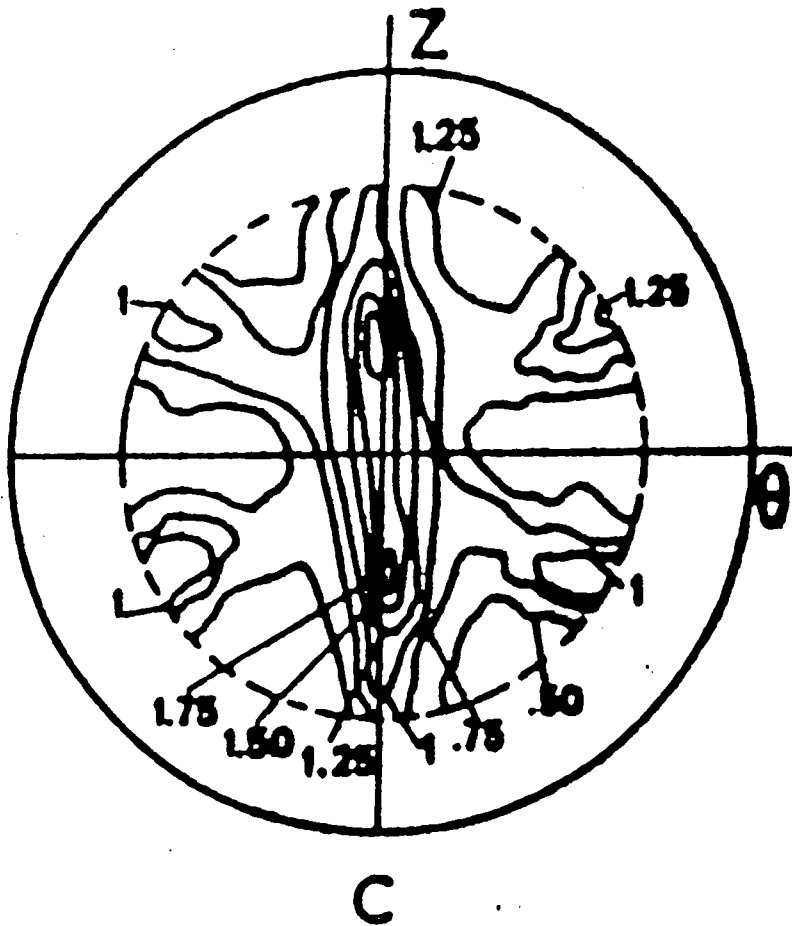


Figure 6.2. Figure de poles (111) obtenue en torsion à grandes déformations. On remarque une symétrie d'ordre deux par rapport au centre. Celle-ci, en fait, est due à une symétrie plane à travers le plan de normale  $r$ , combinée à une centro-symétrie de la sphère de projection stéréographique.

Supposons que l'on choisisse arbitrairement d'appliquer un incrément de déformation du type :

$$\underline{dE} = \begin{pmatrix} dE_{11} & 0 & dE_{13} \\ x & dE_{22} & 0 \\ x & x & dE_{33} \end{pmatrix} \quad (6.14)$$

on voit qu'il va rester inchangé par la symétrie  $M_2$ . L'unicité de la relation  $\underline{S} \sim \underline{dE}$  impose à  $\underline{S}$  d'être tel que l'on ait :

$$S_{12} = S_{23} = 0 \quad (6.15)$$

On remarque ainsi que le sous-espace  $(\pi, S_{13})$  est fermé.

Il faut noter au passage que la notion de sous-espace fermé peut être problématique si la surface de plasticité possède des singularités et où l'unicité n'est donc pas vérifiée. On peut, dans ce cas étendre la définition du sous-espace fermé, en ajoutant que si un état de contrainte est contenu dans ce sous-espace, il doit exister un incrément de déformation associé appartenant à ce même sous-espace.

Si on choisit maintenant  $\underline{dE}$  dans le sous-espace complémentaire, c'est-à-dire de la forme :

$$\underline{dE} = \begin{pmatrix} 0 & dE_{12} & 0 \\ x & 0 & dE_{23} \\ x & x & 0 \end{pmatrix} \quad (6.16)$$

on voit que  $M_2$  transformera  $\underline{dE}$  en  $-\underline{dE}$ . Si le matériau nous laisse admettre qu'il n'y aura pas d'effet Bauschinger, par exemple (c'est-à-dire centro-symétrie de la surface de charge), alors  $-\underline{dE}$  sera associé à  $-\underline{S}$ . Ceci veut dire, en

particulier, que le tenseur des contraintes, la centro-symétrie de la surface de charge étant admise, devra posséder les conditions:

$$S_{11}=S_{22}=S_{33}=S_{13}=0 \quad (6.17)$$

En d'autres termes, le sous-espace  $(S_{12}, S_{23})$  est fermé.

Ceci peut être généralisé en exprimant que si une texture possède une symétrie par rapport à un plan de normale  $X_k$ , alors le sous-espace  $(\pi, S_{ij})$  est fermé et son complémentaire  $(S_{ki}, S_{kj})$  le sera aussi si la surface de charge est centro-symétrique.

### 6.2.2 Trois plans de symétrie: orthotropie

Une texture orthotrope se développe lorsque tous les éléments non diagonaux du tenseur gradient de déplacement sont nuls (et que la texture initiale est isotrope). Elle se caractérise par trois opérateurs de symétrie  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$ .  $M_2$  a déjà été défini à l'équation (6.11), les deux autres opérateurs se déduisent facilement.

Utilisant les propriétés établies précédemment, on voit que les sous-espaces  $(\pi, S_{12})$ ,  $(\pi, S_{13})$  et  $(\pi, S_{23})$  sont tous fermés. On montrerait (cf référence (1), annexe 2) que l'intersection de sous-espaces fermés est aussi fermée, et donc que  $(\pi)$  lui-même est un sous-espace fermé. Si, de plus, la centro-symétrie est aussi supposée, les sous-espaces  $(S_{13}, S_{23})$ ,  $(S_{12}, S_{23})$  et  $(S_{12}, S_{13})$  sont fermés ainsi que

leurs intersections, c'est-à-dire  $(S_{23})$ ,  $(S_{13})$  et  $(S_{12})$ . Toute combinaison de réunion de sous-espaces est, de même, fermée (Annexe 2 ref.(1)), dans le cas où la surface de charge est centro-symétrique.

L'ellipsoïde de Hill a toutes ces propriétés, mais on voit qu'il ne peut décrire le cas précédent de manière générale: il faut toujours supposer qu'il existe des axes dans lesquels la texture peut être décrite comme orthotrope.

### 6.2.3 Symétrie cubique et hexagonale

Ces cas ne représentent, en fait, que des cas particuliers de la section précédente. En effet, ceux-ci possédant au moins l'orthotropie, ils posséderont aussi les sous-espaces fermés décrits ci-dessus. Néanmoins, ils ont des symétries supplémentaires de rotation qui donnent des informations supplémentaires sur la forme de la surface de charge.

Le matériau cubique possède, en outre, un axe de rotation d'ordre 3 aligné avec la direction  $(111)$ , et un plan de symétrie de type  $(110)$ . Les opérateurs associés sont:

$$C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.18)$$

Le tenseur des contraintes, par exemple, est transformé par ces opérateurs, respectivement sous la forme:

$$S' = \begin{pmatrix} S_{22} & S_{23} & S_{12} \\ x & S_{33} & S_{13} \\ x & x & S_{11} \end{pmatrix} \quad S'' = \begin{pmatrix} S_{22} & S_{12} & S_{23} \\ x & S_{11} & S_{13} \\ x & x & S_{33} \end{pmatrix} \quad (6.19)$$

On voit que les axes de cisaillement sont permutés de manière cyclique, de sorte que l'espace  $(S_{23}, S_{13}, S_{12})$  a la symétrie cubique, et des propriétés analogues peuvent être déduites concernant le plan  $\pi$ . Le résultat est que la surface de charge n'a pas à être définie dans tout l'espace à cinq dimensions, mais plutôt dans une fraction irréductible qui est représentée sur la figure 6.3. C'est cette symétrie qui permet à Bishop de réduire les sommets de la surface de charge du cristal cubique à faces centrées à cinq classes, tous les sommets, dans une classe donnée pouvant être reliés par des opérateurs de symétrie.

Les cristaux hexagonaux, quant à eux possèdent un axe de rotation d'ordre 6 perpendiculaire au plan basal. Ceci a pour effet de transformer les composantes dans le sous-espace  $(S_{13}, S_{23})$  par une rotation d'ordre 6, et donc ce sous-espace a la même symétrie que la texture. Ceci peut être montré très facilement.

Une rotation d'un angle  $\theta$  autour de l'axe de fibre (ici noté  $X_3$ ) transforme le tenseur des contraintes de la manière suivante:

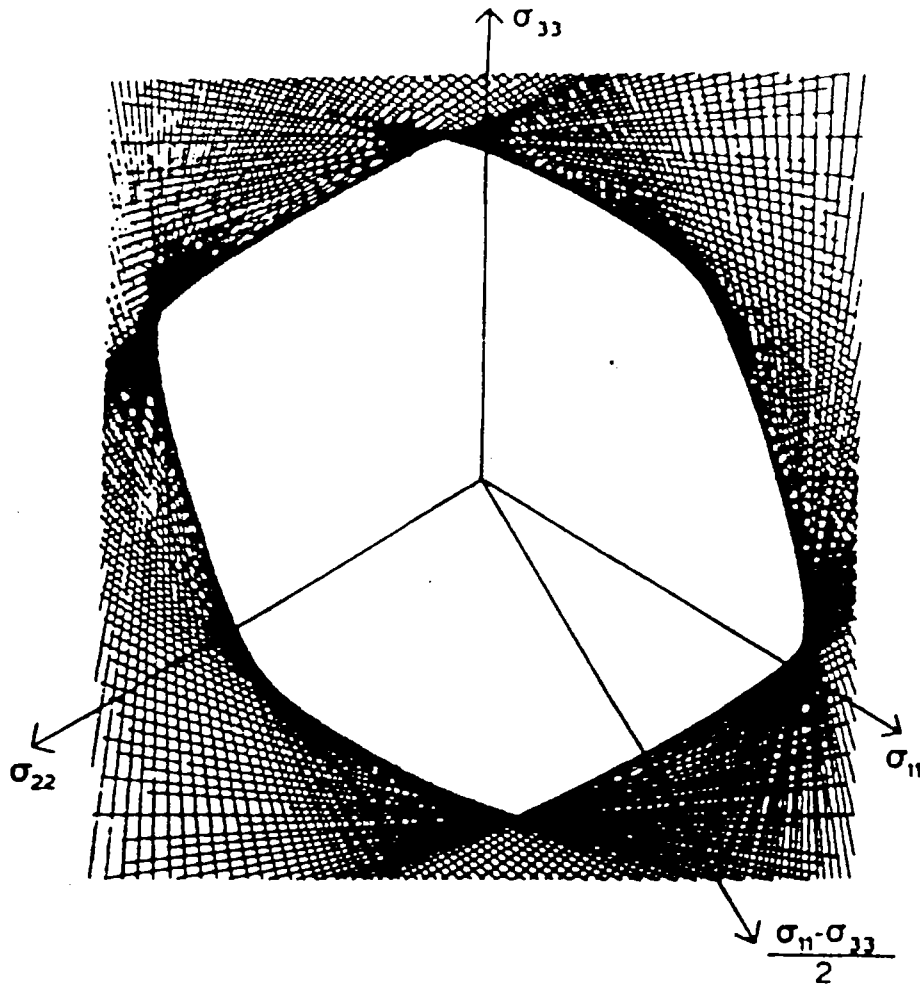


Figure 6.3. Projection sur le plan  $\pi$  de la surface de charge d'un matériau laminé à grandes déformations. On remarque la formation de coins.

$$\begin{aligned}
S'_1 &= S_1 \cos(2\theta) + S_5 \sin(2\theta) \\
S'_2 &= S_2 \\
S'_5 &= S_1 \cos(2\theta) - S_5 \sin(2\theta) \\
S'_3 &= S_3 \cos(\theta) + S_4 \sin(\theta) \\
S'_4 &= S_3 \cos(\theta) - S_4 \sin(\theta)
\end{aligned}
\tag{6.20}$$

On voit, sur ces équations, que l'espace  $(\pi, S_{12})$  a subi une rotation de  $2\theta$  autour de l'axe  $S_{33}$ , alors que le sous-espace  $(S_{13}, S_{12})$  a subi une rotation totale de  $\theta$ . On voit donc que ce dernier sous-espace aura la symétrie hexagonale, alors que la section  $(S_1, S_5)$  aura une symétrie trigonale.

### 6.2.3 Symétrie de fibre

C'est une symétrie très courante, et qui est souvent associée aux tests axisymétriques: traction et compression uniaxiales. On peut la caractériser par une rotation d'ordre infini autour de l'axe de fibre et un plan de symétrie perpendiculaire à cet axe. On voit donc que, si  $X_3$  est un axe de rotation d'ordre infini, la surface de charge aura des sections circulaires dans les sous-espaces  $(S_3, S_4)$  et  $(S_1, S_5)$ . Il suffira donc de trois dimensions pour décrire totalement la surface de charge.

### 6.2.4 Isotropie

Puisque tout plan peut être pris comme plan de symétrie et que tout axe est un axe de rotation d'ordre infini, la surface de charge aura des sections circulaires dans tout sous-espace de dimension deux excepté le plan  $\pi$ .



Conformément à ce qui a été établi pour la symétrie cubique, un secteur de 30 degrés dans le plan  $\pi$  suffira à décrire entièrement la surface de charge. Ce résultat est aussi connu.

Les résultats généraux sont résumés sur le tableau 6.1, concernant tous les cas étudiés.

### 6.3 APPLICATIONS

On va maintenant étudier deux cas pratiques: le laminage et la torsion.

#### 6.3.1 Le laminage

Une conclusion des arguments de symétrie concernant le laminage est que le plan  $\pi$  est fermé. Ceci veut dire, en particulier, qu'un état de contrainte diagonal ne peut être associé qu'à un état de déformation diagonal. Une projection  $\pi$  est montrée sur la figure 6.3 correspondant, dans les axes d'orthotropie, à une déformation vraie de 2, la texture ayant été simulée par l'intermédiaire du modèle DPI établi dans le chapitre 3. On remarque que cette surface est significativement différente d'une ellipse et que, de plus, elle possède des singularités proches de l'axe  $\sigma_{33}$ . La direction de laminage est indiquée, ainsi que la direction d'étirement équibiaxial. On voit

190

Tableau 6.1

Tableau résumant les propriétés des symétries de textures étudiées. On analyse, en particulier, les sous-espaces fermés (et leur centro-symétrie respective), les sous-espaces irréductibles, ainsi que les formes géométriques particulières des sous-surfaces de charge.

Symmetry elements	Type of texture	Sign-indep.	Closed subspaces	Irreducible space	Special shapes
$M_2$ (or $C_2$ )	(torsion)	no	$\{\pi, \sigma_{13}\}$	5D 1/2 of $\{\sigma_{12}, \sigma_{23}\}$	
		yes	$\{\sigma_{12}, \sigma_{23}\}$	1/2 of $\{\pi\}$	
$M_1, M_2, M_3$	orthotropic (rolling, plane strain)	no	$\{\pi, \sigma_{ij}\}$ $\{\pi\}$	5D 1/4 of $\{\sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12}\}$	
		yes	$\{\sigma_{ij}\}, \{\sigma_{ij}, \sigma_{kj}\},$ $\{\sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12}\},$ $\{\pi, \sigma_{ij}, \sigma_{kj}\}$	1/2 of $\{\pi\}$ 1/8 of $\{\sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12}\}$	
$M_1, M_2, M_3$ $C_3 // (1, 1, 1)$ $M_{12}$	cubic (fcc and bcc monocrystals)	no	as above	5D 1/24 of $\{\sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12}\}$ 1/6 of $\{\pi\}$	cubic sym. for $\{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}\}$
		yes	as above	1/12 of $\{\pi\}$ 1/48 of $\{\sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12}\}$	and $\{\sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12}\}$
$M_1, M_2, M$ $C_6 // (0, 0, 1)$	hexagonal (hcp monocrystals)	no	as above	5D 1/12 $\{\sigma_{13}, \sigma_{23}\}$ 1/6 $\left\{ \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2}, \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}, \sigma_{12} \right\}$	hexag. for $\{\sigma_{23}, \sigma_{31}\}$ trigonal for $\left\{ \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}, \sigma_{12} \right\}$
		yes	as above	1/2 $\{\pi\}$	
$M$ $C_\infty // (0, 0, 1)$	fiber (tension and compression: axisym. strain)	no	as above	3D $\{\pi, \sigma_{23}\}$ 1/2 $\{\pi\}$	circle for $\{\sigma_{23}, \sigma_{31}\}$ and $\left\{ \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}, \sigma_{12} \right\}$
		yes	as above		
$M$ $C_\infty$ (any orientation)	isotropic	no	as above	2D 1/6 of $\{\pi\}$ 1/12 of $\{\pi\}$	sphere for $\{\sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12}\}$ ; circle for $\left\{ \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}, \sigma_{ij} \right\}$
		yes			

qu'il n'est pas besoin d'une grande déviation de la contrainte pour passer d'une direction de déformation à l'autre. Il est connu que dans le domaine de déformation où la tôle laminée est étirée biaxialement, les phénomènes d'instabilité plastique sont accompagnés d'une déviation de la direction de déformation (dans la zone de localisation) vers l'état de déformation plane (c'est-à-dire le laminage). Ceci est rendu plus facile grâce à cette singularité.

Si un test est maintenant effectué à un certain angle par rapport aux axes d'orthotropie, dans le plan de la tôle, on voit que la texture, dans ces nouveaux axes (fig.6.4) ne possède plus l'orthotropie mais uniquement une symétrie plane  $M_3$  à travers le plan de laminage. L'argument développé dans le paragraphe 6.2.1 permet de conclure qu'en particulier un état de déformation appliqué, de type diagonal (sans cisaillement) pourra probablement produire une contrainte de cisaillement et inversement, du au fait que le sous-espace  $(\pi, S_{1,2'})$  est fermé. Ceci est observé lorsque des tests de traction sont effectués à des angles différents. Il est d'ailleurs possible, à l'aide de tels graphiques, de calculer la déformation incrémentale à appliquer (la composante de cisaillement étant imposée nulle) de manière à effectuer une traction uniaxiale. Cette procédure permet de calculer les coefficients de Lankford.

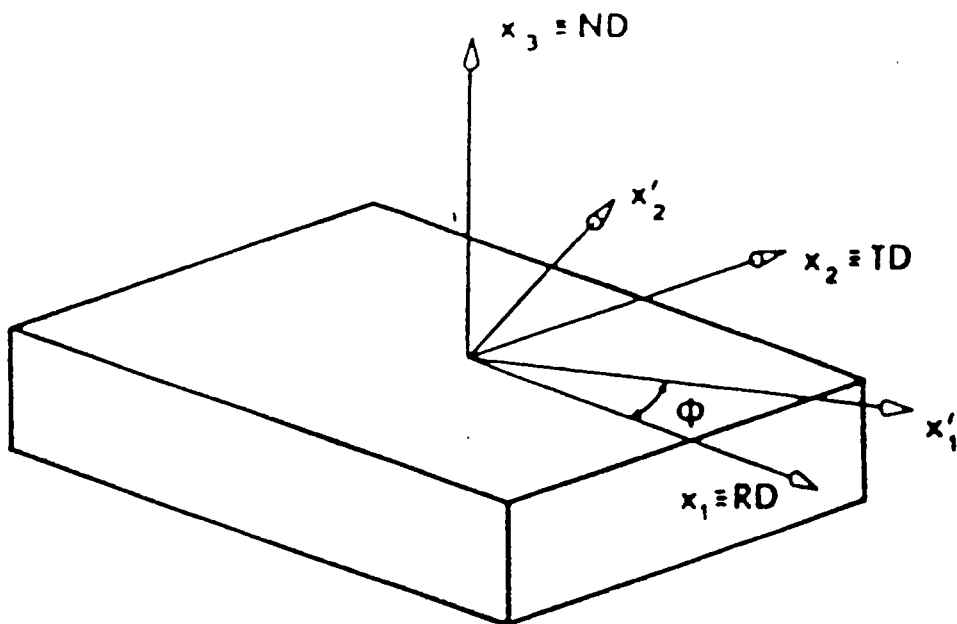


Figure 6.4. Définition des axes de test sur un matériau préalablement laminé. Ayant une texture orthotrope dans les axes (RD, TD, ND), la même texture dans les nouveaux axes n'aura plus que la symétrie plane à travers le plan de normale  $X_3$ .

Les résultats sont montrés sur la figure 6.5 et comparés avec ceux de Hirsch et al. (5). L'accord est qualitativement bon, néanmoins les différences sont liées à plusieurs facteurs: Les calculs ont été faits pour une déformation de 2, les résultats expérimentaux correspondent à une déformation de 3. Bien que la texture soit correctement représentée, et en supposant que la surface de charge le soit aussi, une petite imprécision sur celle-ci peut créer de fortes déviations sur l'incrément de déformation en raison de la règle de la normalité: il est beaucoup plus facile d'avoir une bonne précision sur une contrainte en imposant une déformation, que sur une direction de déformation en chargeant en contrainte.

### 6.3.2 La torsion

La texture de torsion, ainsi qu'on le voit sur la figure 6.1, ne possède qu'un plan de symétrie perpendiculaire à  $X_2$  (fig.6.5a), ce qui veut dire, en particulier que le sous-espace  $(\pi, S_{13})$  est fermé.

Si l'on applique une déformation de cisaillement  $dE_{13}$ , celle-ci va donc probablement créer des contraintes axiales, ce qui est fréquemment observé expérimentalement. Le signe de la contrainte axiale ne peut être donné par un argument de symétrie, mais plutôt en étudiant la projection adéquate de la surface de charge. Sur la figure 6.5b, dans

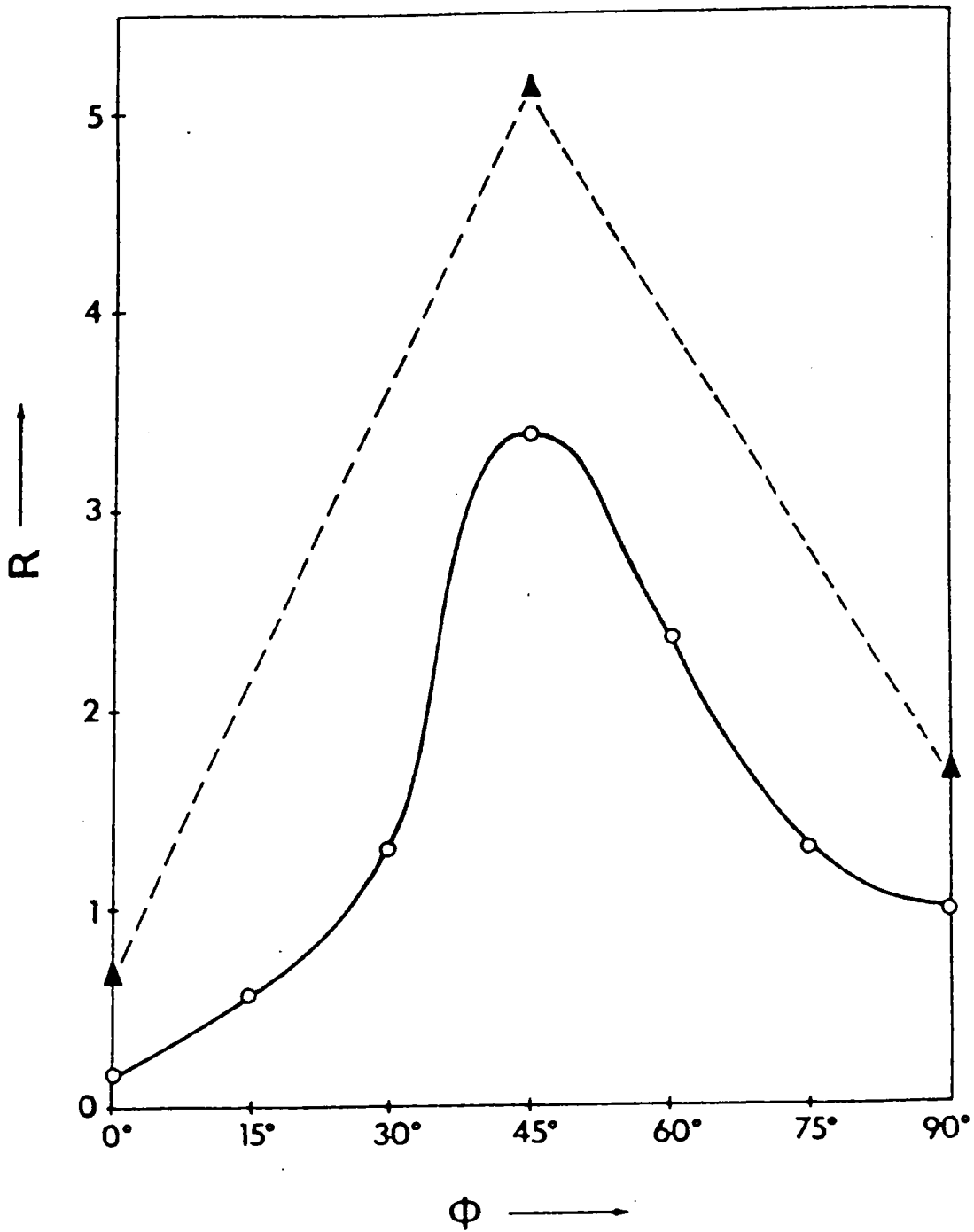


Figure 6.5. Calcul des coefficients de Lankford pour un matériau laminé. Comparaison avec les résultats expérimentaux de J.Hirsch et al.(5).

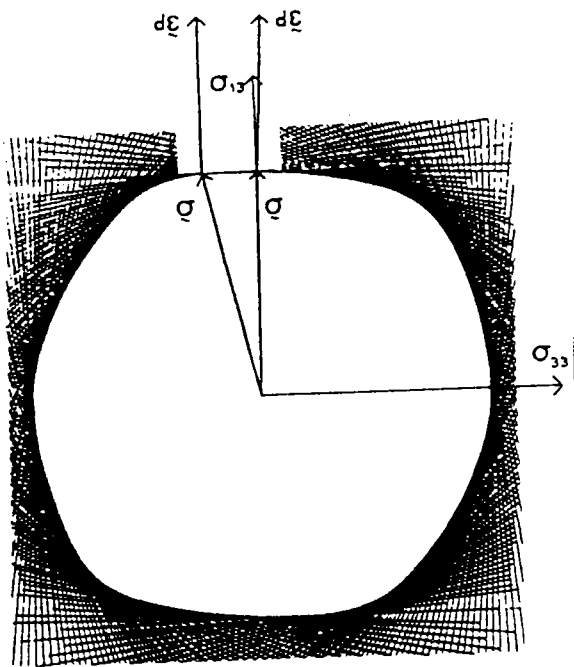
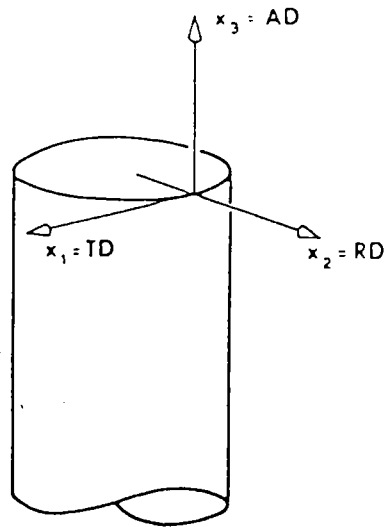


Figure 6.6. Etude de la sous-surface de charge permettant d'évaluer les effets axiaux en torsion.

l'espace  $(\sigma_{33}, \sigma_{13})$ , la direction de déformation correspondante à l'essai de torsion est indiquée, on voit qu'elle est associée à une contrainte axiale compressive, ce qui est le cas expérimentalement au cours de la déformation à froid. Cohen et al.(6) ont signalé que, suivant la température, les effets axiaux peuvent changer de signe. Montheillet et al.(7) ont attribué cela au fait que les composantes de la texture ne sont jamais alignées exactement avec les axes de l'éprouvette, et qu'elles oscillent de manière différente selon les conditions expérimentales.

Inversement, à l'aide de la surface de charge, il est possible de déduire la déformation incrémentale à appliquer pour ne pas avoir d'effets axiaux. Ce calcul fait incrémentalement, il est possible de calculer quelle serait la déformation axiale accumulée au cours du test. La figure 6.7 montre les résultats de cette déformation lors d'un test de torsion à bout libre ainsi que de la contrainte axiale lors du test à bouts fixes.

Un cas, plus académique, peut aussi être étudié: la traction uniaxiale d'une éprouvette initialement testée en torsion. La symétrie des figures 6.6a et b indique la possibilité d'un cisaillement en contrainte ou déformation suivant que l'éprouvette est bloquée ou non en torsion. Il est difficile de savoir si cet effet a été observé ou non.



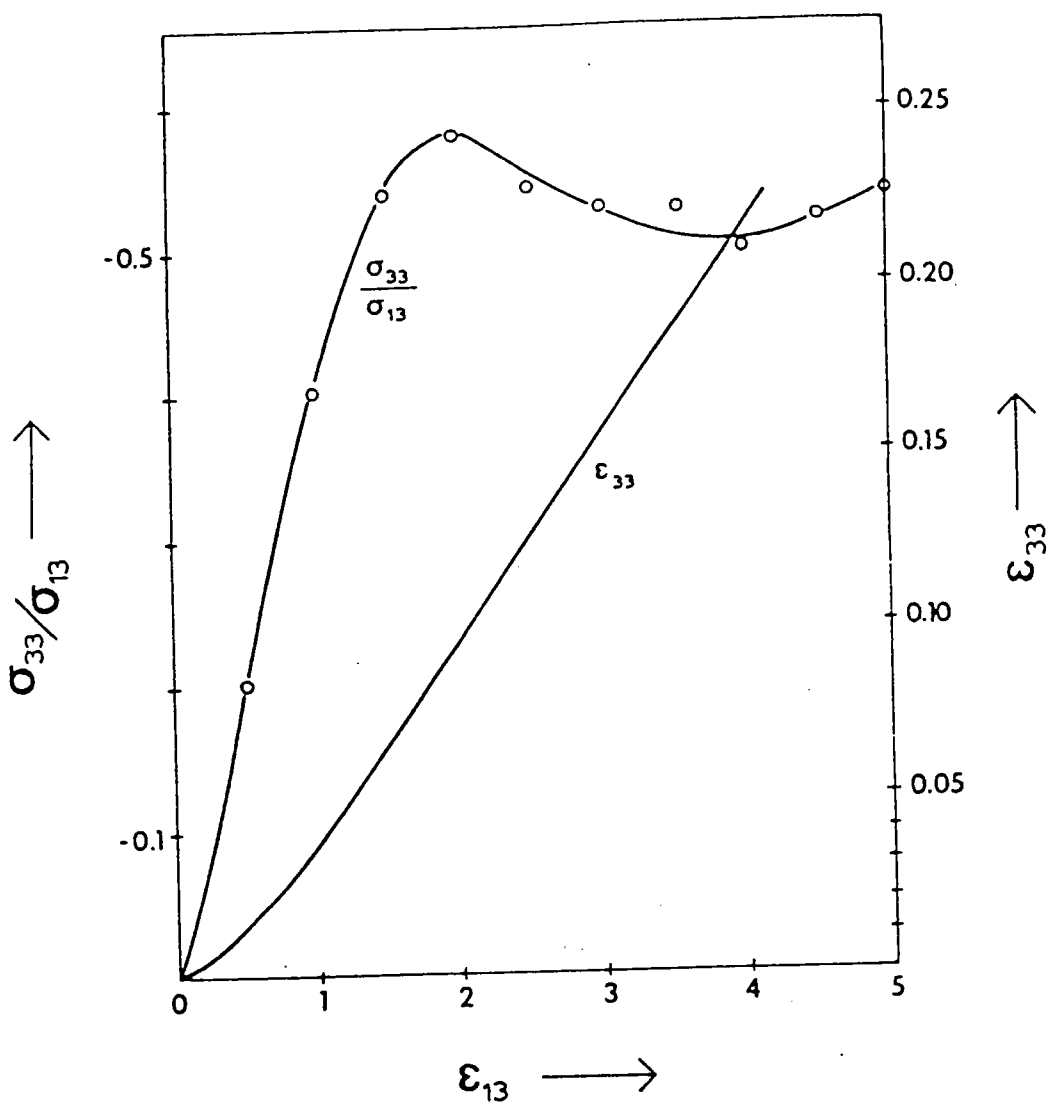


Figure 6.7. Prédiction, à l'aide du modèle de texture préalablement décrit, de l'allongement des éprouvettes de torsion à bout libre, et des contraintes de compression pour la torsion à bouts fixes.

Finalement, on voit ici les limites de l'argument de symétrie: il prédit, pour une déformation donnée quelle forme le tenseur de contrainte pourrait avoir (et réciproquement). On a vu effectivement qu'il pouvait montrer l'existence probable d'effets axiaux en cisaillement sans toutefois être capable d'en dire le signe. Par contre, il peut être très utile pour prédire quelles composantes (de contrainte ou de déformation) seront nulles suivant les cas.

Le chapitre suivant va utiliser ces notions pour l'étude de certains phénomènes d'instabilité: bandes de cisaillement en laminage et instabilité en étirage biaxé des toles.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUESDU CHAPITRE 6

- (1) G.R.Canova, U.F.Kocks, C.N.Tomé and J.J.Jonas, J.Mech.Phys.Sol., vol.33 n°4, 1985, p.371.
- (2) R.Hill, in "Mathematical theory of plasticity", Clarendon Press, Oxford, 1950.
- (3) C.Tomé, G.R.Canova, U.F.Kocks, N.Christodoulou and J.J.Jonas, Acta.Met., vol.32 n°10, 1984, p.1637.
- (4) P.van Houtte and E.Aernoudt, Mater.Sci.Eng., vol.23, 1976, p.11.
- (5) J.Hirsch, R.Musick and K.Lücke, in "Textures of Materials", G.Gottstein and K.Lücke eds, vol.2, 1978, P.437.
- (6) M.Cohen et F.Montheillet, rapport ATP CNRS contrat n°3136, 1979.
- (7) F.Montheillet, M.Cohen and J.J.Jonas, Acta.Met., vol.32, 1984, p.2077.

## 7 TEXTURES ET INSTABILITES PLASTIQUES

Ainsi qu'on a pu le constater dans les chapitres précédents, les textures influent sur les lois de comportement (chap.5) et sur l'anisotropie mécanique notamment par le biais des surfaces de charge (chap.6). Ces deux facteurs sont précisément ceux qui sont importants pour le développement des instabilités plastiques. Dans ce chapitre, on a essayé d'utiliser les propriétés mécaniques prédites pour étudier deux cas courants d'instabilités plastiques: celui des bandes de cisaillement lors du laminage, et celui de l'étirement biaxé des toles métalliques. Ces résultats sont tirés des travaux de Canova et al.(1) et de Kocks et al.(2).

### 7.1 Les bandes de cisaillement en laminage

L'étude des bandes de cisaillement a retenu l'attention de nombreux auteurs, dans le passé, à la fois d'un point de vue théorique et expérimental. Lorsqu'une éprouvette est testée en cisaillement simple, par exemple,

si la contrainte de cisaillement passe par un maximum, cela peut conduire à une localisation. En fait, si l'on définit par localisation l'aggravation catastrophique d'un gradient de déformation, il a été montré par Rauch et al. (3), par Bai et al. (4) et par Fressengeas et Molinari (5) que cette aggravation ne pouvait exister, pour des lois de comportement réalistes, que si il y a aussi des effets thermiques (adiabaticité ou quasi-adiabaticité) associés. Au point de vue théorique, le problème a été attaqué par différents biais. Une étude mécanique phénoménologique peut montrer, en utilisant la dérivée objective de Jaumann, qu'un durcissement cinématique donne lieu à une oscillation de la contrainte de cisaillement qui, en retour, peut produire une localisation de l'écoulement (6). Néanmoins l'utilisation de modèles phénoménologiques peut parfois ne pas représenter la réalité (comme c'est le cas en utilisant la dérivée de Jaumann). Quelques auteurs (7,8) ont associé un adoucissement de la loi de comportement avec un adoucissement textural, étant donné que l'écoulement quasi-statique ne pouvait donner lieu à de forts effets thermiques.

Des études expérimentales ont aussi été faites, et dans le laminage un travail exhaustif a été conduit par Hatherly (9). Il a observé deux types de bandes de

cisaillement: les micro-bandes de cisaillement qui s'étendent sur quelques grains seulement et les bandes macroscopiques qui traversent toute l'éprouvette. Ces bandes de cisaillement ne sont pas coincidentes avec des plans de glissement cristallographiques. Dans les matériaux à haute énergie de faute d'empilement, il est souvent observé un arrangement des bandes de cisaillement en "arêtes de poisson", qui se croisent rarement. Dans les matériaux à basse énergie de faute, l'arrangement est beaucoup plus complexe, moins ordonné et le croisement y est plus fréquent.

Etant donné que nous traiterons le polycristal dans son ensemble, le problème devient très complexe et des hypothèses simplificatrices vont être faites. Plus précisément, le critère de création des bandes de cisaillement est simplifié dans ce sens: soit un élément de matière soumis (figure 7.1) à une déformation plane plus un cisaillement, donc de la forme:

$$E = \begin{pmatrix} +1 & 0 & \gamma/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\gamma/2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (7.1)$$

(ici le cisaillement est normalisé par rapport à la composante de compression.)

si on réécrit ce tenseur dans un repère tourné autour de la direction  $X_2$  d'un angle  $\theta$  tel que:

$$\theta = (1/2) \text{Arctg}(2/\gamma) \quad (7.2)$$

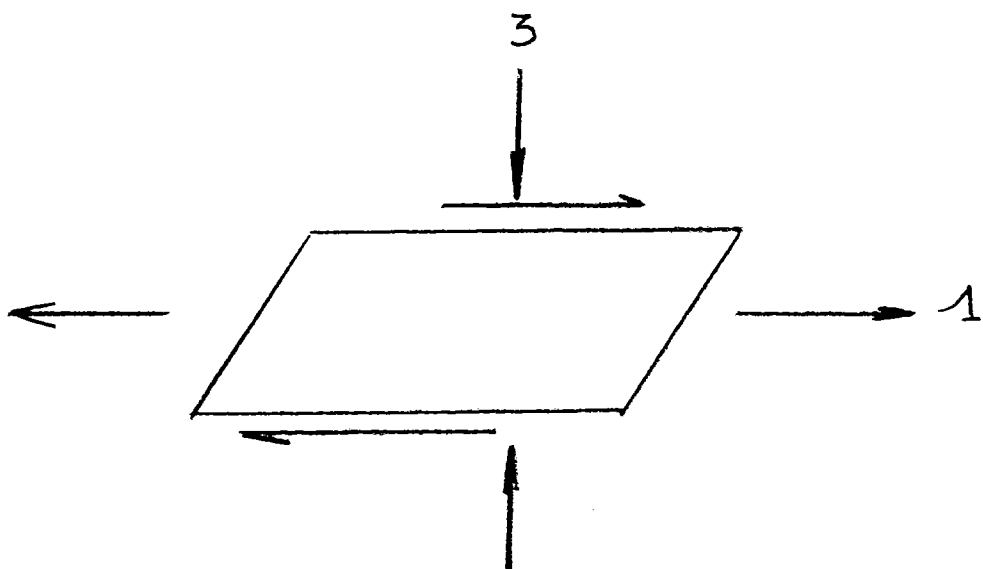


Figure 7.1. Schématisation d'une déformation plane dans les axes du test. Les axes 1, 2 et 3 correspondent respectivement aux axes longitudinal (L), transverse (T) et normal au plan de laminage (N).

on trouve:

$$E' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma'/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\gamma'/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.3)$$

c'est-à-dire un cisaillement. On supposera, dans la suite, qu'une bande de cisaillement apparaîtra dans cet élément de matière, à un angle  $\theta$ , si la contrainte de cisaillement dans ce repère tourné passe par un maximum. Le tenseur des contraintes, dans le repère tourné peut posséder une symétrie quelconque, néanmoins, si on le projette sur le tenseur des déformations, équ.(7.3), pour obtenir la contrainte équivalente (cf. chap.5), celle-ci est en fait la composante de cisaillement. Comme la contrainte équivalente est indépendante du repère, on peut dire que la contrainte de cisaillement dans le repère tourné passera par un maximum lorsque la contrainte équivalente évaluée par exemple dans le repère du laboratoire passera par un maximum. Le critère est donc le suivant: une bande de cisaillement apparaîtra lorsque la contrainte équivalente passera par un maximum.

On voit tout de suite que, si l'hypothèse stricte de Taylor est utilisée, étant donné que toutes les composantes de déformation de cisaillement sont localement nulles, l'application d'un tel critère ne peut prédire que des bandes de cisaillement à 45 degrés. C'est donc à l'aide du modèle DPI que l'analyse suivante va être effectuée. Il



convient de noter que le laminage est simulé par le biais de la compression plane sans aucun frottement extérieur, et que les résultats pourront être probablement quelque peu différents lorsque le processus réel de laminage est envisagé.

Etant donné que l'on va travailler à un niveau microscopique, il convient d'abord de vérifier l'hypothèse de déformation plane. Pour cela des statistiques ont été faites sur la population des orientations (ici 800 grains). Rappelons que les deux composantes  $E_{31}$  et  $E_{32}$  (figure 7.1) sont relaxées et que l'hypothèse de déformation plane requiert localement  $E_{32}=0$ . Les axes 1, 2 et 3 correspondent respectivement aux axes longitudinal (L) transverse (T) et normal au plan de laminage (N). Sur la figure 7.2, représentant le nombre de grains en fonction des valeurs de ce cisaillement, pour une simulation conduite à une déformation totale de 2, on peut remarquer que cet histogramme est centré en 0 avec une déviation standard assez faible. On peut donc raisonnablement valider cette hypothèse de déformation plane locale.

En traçant le même histogramme pour l'autre composante de cisaillement, on remarque que, la moyenne étant toujours 0, il possède des pics pour des valeurs de  $E_{31}=0, 0.3$  et  $1.1$  respectivement indiquant l'existence de

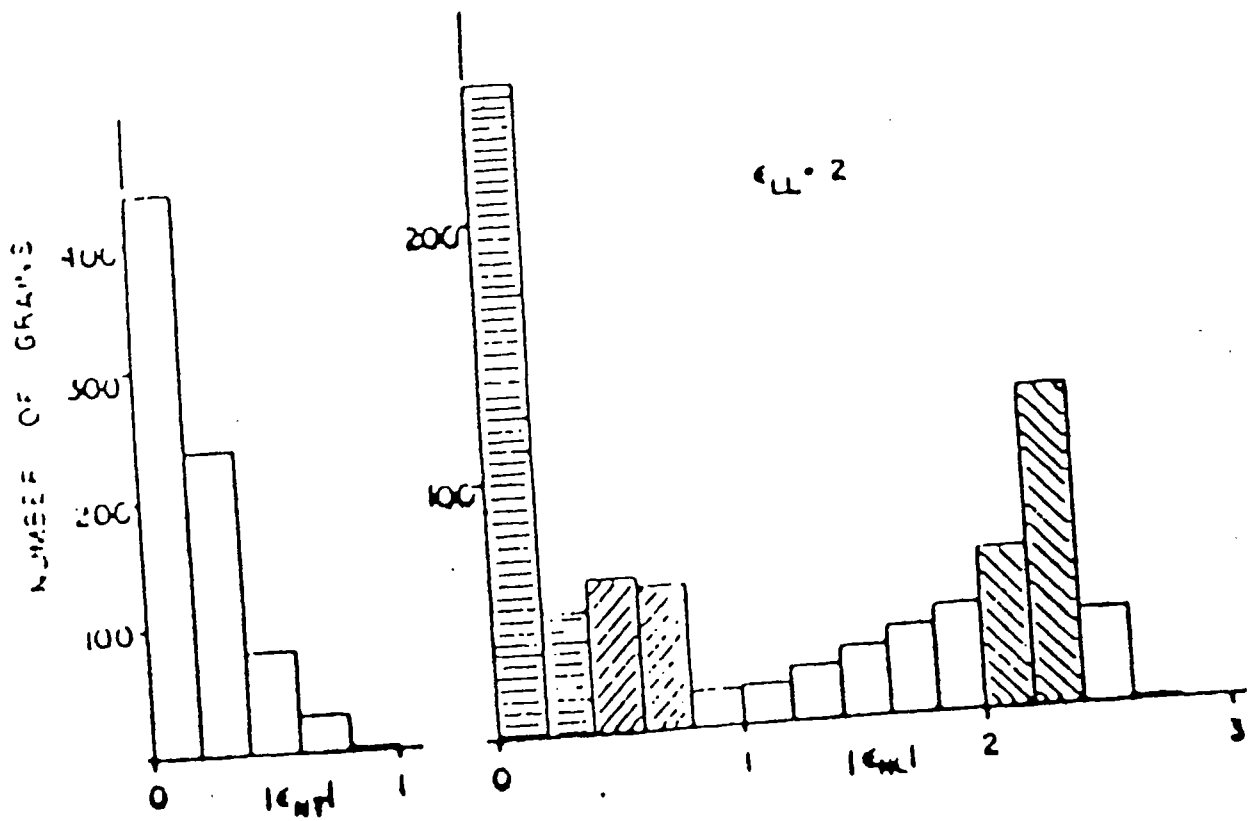


Figure 7.2. Histogrammes montrant la répartition des grains par taux de cisaillement. Ces taux sont normalisés par rapport à  $c_{LL}=c_{11}=2$ . Ces résultats correspondent à une texture calculée d'après le modèle DPI à une déformation de 2.

trois familles d'orientations que nous allons étudier séparément.

Ainsi qu'on l'a montré au chapitre 5, la contrainte équivalente macroscopique peut être exprimée sous la forme:

$$S_e = M \tau \text{ avec } d\Gamma = M dE_e \quad (7.4)$$

et donc, en dérivant:

$$\frac{dS_e}{dE_e} = M^2 \frac{d\tau}{d\Gamma} + \tau \frac{dM}{dE_e} \quad (7.5)$$

la condition d'instabilité arrivera donc dans les grains (ou, la famille de grains) qui produira, le plus vite, une décroissance du facteur de Taylor moyen. Lorsqu'on analyse le comportement de ce facteur pour les trois familles définies précédemment, on trouve les résultats de la figure 7.3. On remarque, sur cette figure, que la plus forte décroissance est liée à la famille  $E_{31}=0.3$ , mais qu'un adoucissement significatif existe aussi, dans la famille  $E_{31}=1.1$ , alors que dans la troisième famille, il est assez faible. Ces trois groupes d'orientations étant associés à des bandes de cisaillement éventuelles inclinées à 37, 23 et 45 degrés respectivement, on peut en conclure que la plus grande probabilité d'apparition des bandes est à 37 degrés, ce qui est un fait bien établi expérimentalement. Il peut néanmoins être conclu que, pour un matériau ne possédant pas un fort écrouissage microscopique, il serait aussi possible

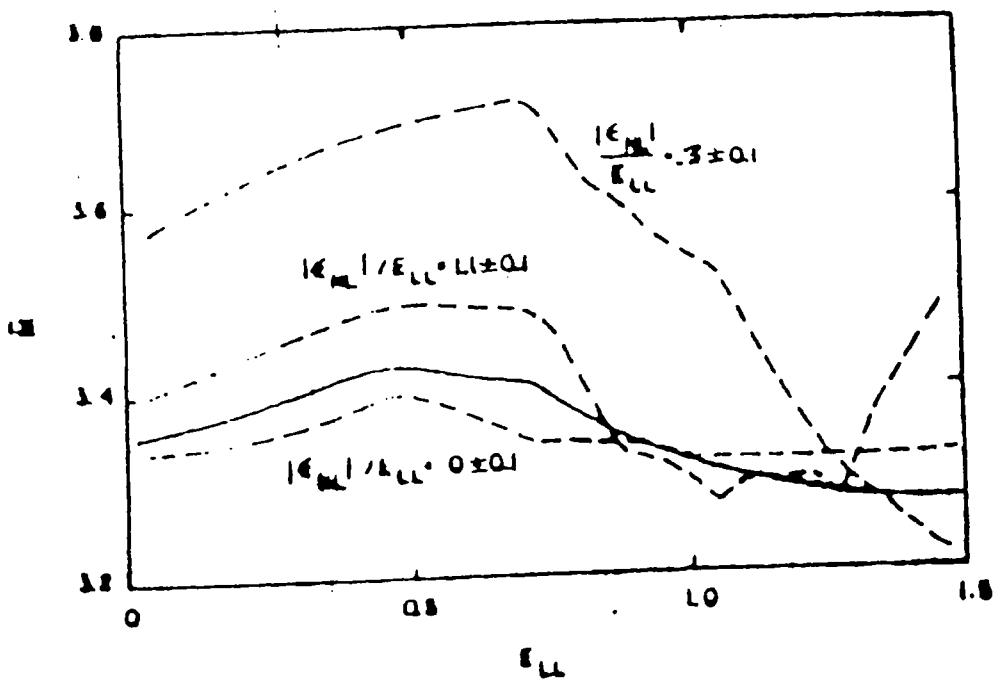


Figure 7.3. Tracé des écrouissages pour chacune des trois familles de grains choisis (en pointillé), et du polycristal (trait plein).

d'observer des bandes à 23 degrés. Ceci semble avoir été observé par P. Martin (10) dans l'aluminium. Il est aussi peu probable de voir apparaître des bandes de cisaillement au niveau microscopique à 45 degrés.

Ayant ainsi établi une approche permettant d'estimer la probabilité de naissance des bandes de cisaillement, la seconde étape consiste à estimer leur probabilité de propagation.

Supposons (figure 7.4) quatre grains voisins  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$  et  $B_2$ , les grains de type A ayant des cisaillements positifs et les autres négatifs. Si une bande de cisaillement naît dans le grain  $A_1$ , la propagation se fait en détruisant localement la planarité des grains voisins, créant ainsi des contraintes internes modifiant l'état de contrainte des grains voisins, ce qui permettra à la bande de se propager ou, au contraire, la bloquer. On peut dire intuitivement, que si l'état de contrainte du voisin est proche de celui où la bande a été créée, une faible contrainte interne sera suffisante pour faire propager la bande. En revanche, si l'état des contraintes dans le grain voisin est significativement différent, ce qui est le cas lorsque les composantes de déformation de cisaillement sont de signe opposé, par exemple, la contrainte interne devra être très forte pour faire propager la bande, et la

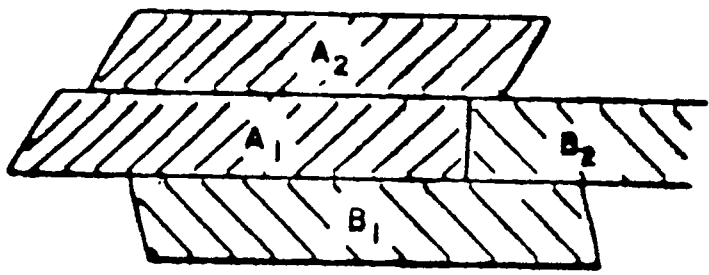


Figure 7.4. Représentation de quatre grains voisins ayant des cisaillements différents.

probabilité de propagation est ainsi diminuée. On est ainsi amené à considérer maintenant deux classes de grains, ceux qui ont des composantes de cisaillement  $E_{31}$  positives et les autres. Ces deux classes de grains ont globalement un adoucissement textural puisque le facteur de Taylor du polycristal passe par un maximum (figure 7.3). Lorsqu'on regarde la projection adéquate de la surface de charge du polycristal, à savoir, dans le sous-espace  $(S_1, S_4)$  (voir notation au chapitre 6), pour tous les grains du type "positif", on remarque, pour une contrainte de cisaillement proche de zéro, la déformation résultante a une composante de cisaillement de 0.3 environ (figure 7.5). Ceci montre que, lorsque la contrainte équivalente moyenne passe par un maximum, les bandes de cisaillement inclinées à 37 degrés environ ont la probabilité maximale de se propager. Ceci semble confirmer ce qui se passe expérimentalement dans les matériaux à haute énergie de faute d'empilement, c'est-à-dire un arrangement des bandes de cisaillement en "arête de poisson".

Il faut ici être conscient de l'hypothèse implicite faite dans ce calcul, à savoir que l'on suppose pouvoir trouver dans le matériau des grains de type A dans un même voisinage et de même pour ceux de type B. Si l'on suppose un mélange géographique total des grains,

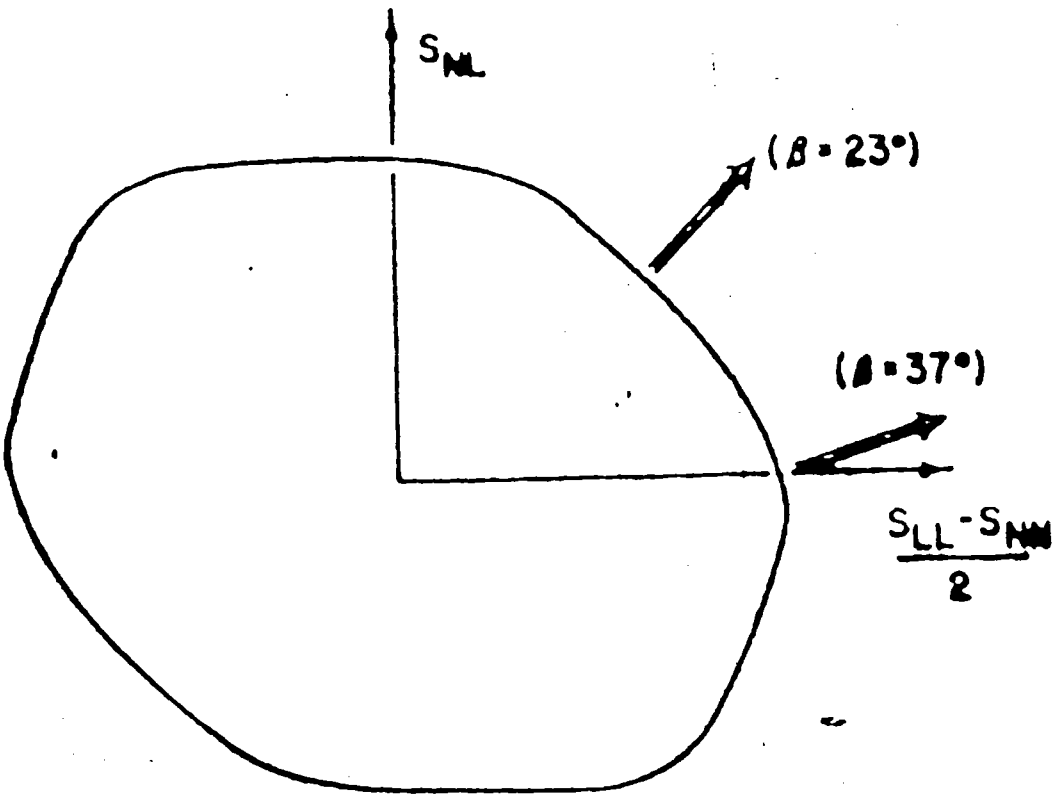


Figure 7.5. Projection de la surface de charge d'un matériau constitué des grains ayant des cisaillements positifs.



c'est-à-dire un voisinage équiprobable pour toutes les orientations, la contrainte interne requise, en moyenne, pour permettre la propagation, est élevée, et donc la probabilité de propagation faible.

Un même raisonnement peut être fait pour savoir quel type de bande de cisaillement a le plus de chances de traverser tout l'échantillon. En regardant la même projection de la surface de charge (figure 7.6), mais tracée pour la population entière de grains, on remarque que, pour une contrainte macroscopique de cisaillement nulle la surface de charge présente une courbure assez élevée. Pour savoir quelle direction de déformation va être privilégiée par le matériau, il faut étudier la direction d'adoucissement maximal. On a tracé, sur la figure 7.7, les variations de l'écroutissage textural testé suivant des directions différentes. On peut remarquer que la direction d'écroutissage minimal correspond à un cisaillement nul, ce qui voudrait dire que les bandes à 45 degrés sont celles qui peuvent le plus facilement traverser l'éprouvette dans toute sa largeur. On n'observe pas ce phénomène dans les matériaux à haute énergie de faute d'empilement, car les bandes de cisaillement ne traversent pratiquement jamais les éprouvettes entièrement.

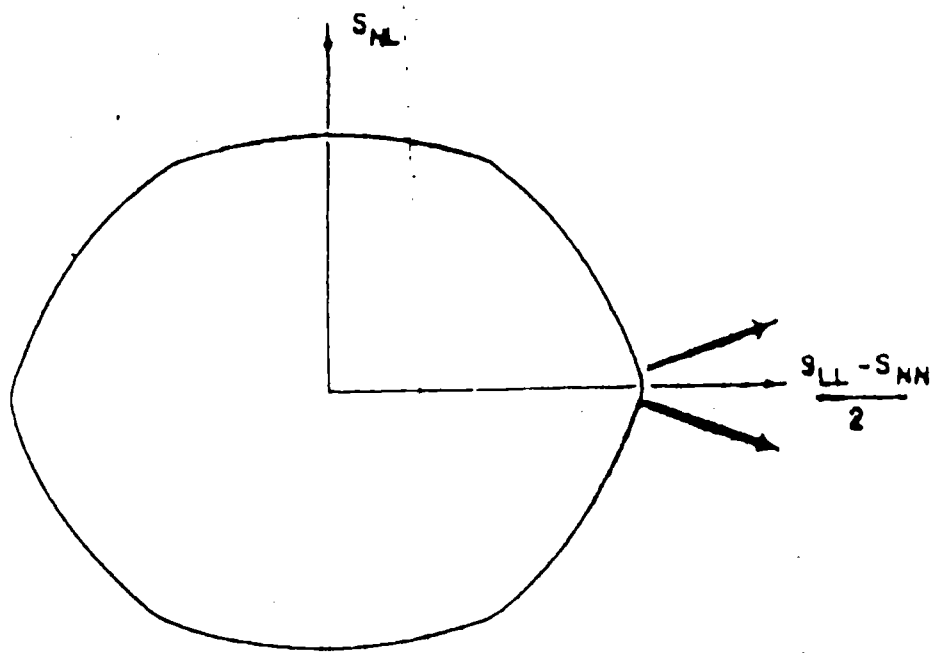


Figure 7.6. Projection de la surface de charge du polycristal. On voit l'existence d'un point de charge assez anguleux.

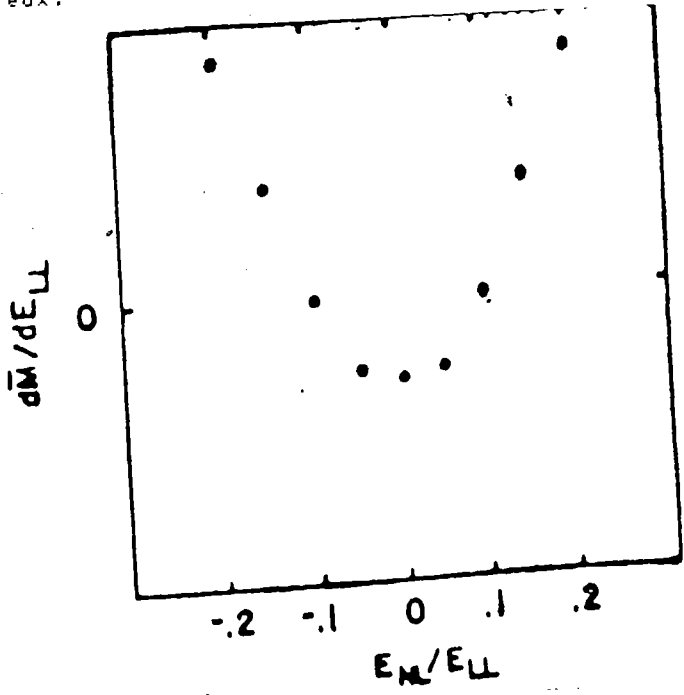


Figure 7.7. Représentation de l'écroissage textural du polycristal pour des directions de déformation voisines de la déformation macroscopique.

## 7.2 Les courbes limites de formage

Un autre aspect des processus d'instabilités plastiques concerne les courbes limites de formage, qui ont une application industrielle en emboutissage de toles. Lorsqu'une tole est étirée de façon biaxiale, ce qui est une modélisation de l'emboutissage, l'instabilité apparait à un moment donné, lorsqu'une bande du matériau, inclinée d'un angle  $\theta$  par rapport aux axes de l'éprouvette, prend une autre direction de déformation que le reste du matériau. Ces problèmes ont été simulés pratiquement exclusivement de manière phénoménologique (11,12,13,14,15). Si on appelle  $p$  le rapport des vitesses principales de déformation, on peut dire que l'instabilité plastique va dépendre à la fois de la loi de comportement, mais aussi de la forme de la surface de charge. Dans le domaine  $p < 0$ , la loi de comportement joue un rôle prédominant, alors que dans le domaine  $p > 0$ , la forme de la surface de charge, et notamment l'existence de fortes courbures au point de charge semble être le fait prédominant. Comme on l'a vu au chapitre 6, les surfaces de charges prédites après laminage montrent de telles régions de forte courbure, ce qui laisse supposer que la texture joue un rôle non négligeable dans l'évolution de l'instabilité.

La seule étude d'instabilité basée sur les simulations de texture a été faite par Asaro (16) dans le cadre du calcul élasto-viscoplastique basé sur l'hypothèse de Lin. Ce calcul, néanmoins, n'est pas complet puisqu'il n'a considéré que le cas de l'étirement équibiaxé ( $p=1$ ). En se basant sur une analyse de défaut du type Marciniak (17), il a montré que le matériau localise pour  $p=1$ , du à un effet de texture. Marciniak, en effet, ne trouve pas de localisation dans le cas  $p=1$ , si le matériau possède un durcissement global isotrope, pour des défauts réalistes. Seules des théories pouvant amener à des variations de la courbure de la surface d'écoulement au point de charge (théorie de la déformation, théorie de l'écoulement avec durcissement cinématique) ont pu, jusqu'alors, prédire une localisation pour  $p > 0$ . Il est aussi possible d'obtenir cette localisation en prenant une surface de charge ellipsoïdale et en choisissant l'angle  $\theta$  de localisation .

Dans le présent travail, on utilise premièrement la symétrie de la texture pour simplifier le problème. En effet, la texture qui se développe dans la tôle possède toujours au moins l'orthotropie, dans les axes principaux, et donc , dans les axes  $n, t$  (figure 7.8), la texture aura donc au moins une symétrie plane à travers le plan formé par les axes  $(n, t)$ . Ceci a pour résultat que le sous-espace

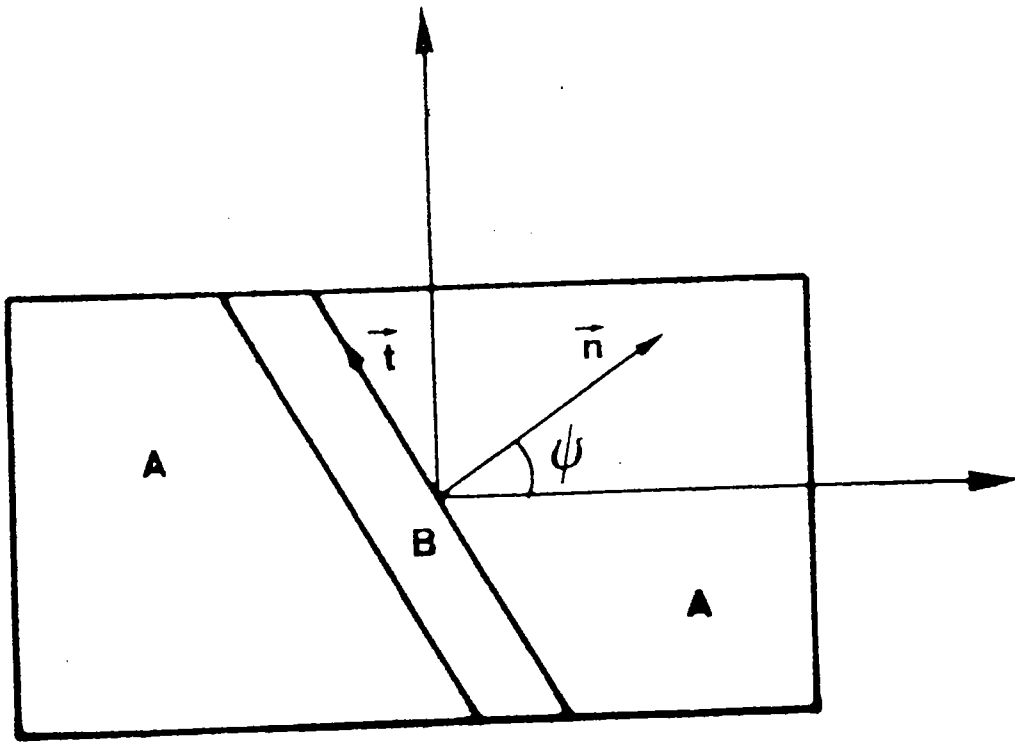


Figure 7.8. Représentation de l'éprouvette à deux zones pour une étude de défaut.

$(\pi, S_{nt})$  est fermé. En l'absence de toute déformation du type  $dE_{13}$  ou/et  $dE_{23}$ , les contraintes de cisaillement associées seront nulles, et par rotation, il n'y aura aucun cisaillement (en contrainte ou déformation) du type  $3n$  ou  $3t$ . L'analyse de ce problème mécanique peut donc être restreint au sous-espace  $(\pi, S_{nt})$ .

Le principe de l'analyse de défaut est le suivant: soit a une zone défectueuse, c'est-à-dire possédant déjà un défaut initial, par exemple de section. Du au rapport longueur/hauteur de la bande (figure 7.8), une seule condition de compatibilité peut être écrite, dans les axes  $(n, t)$  de la bande:

$$dE_{tt}(a) = dE_{tt}(b) \quad (7.6)$$

où, b est le reste de l'éprouvette (la matrice). Par contre, deux conditions d'équilibre doivent être respectées:

$$\begin{aligned} \text{et} \quad & h(a)\sigma_{nn}(a) = h(b)\sigma_{nn}(b) \\ & h(a)\sigma_{nt}(a) = h(b)\sigma_{nt}(b) \end{aligned} \quad (7.7)$$

où  $h(a)$  et  $h(b)$  sont les épaisseurs respectives des deux zones. Une hypothèse de contrainte plane est aussi faite macroscopiquement c'est-à-dire:

$$\sigma_{33}(a) = \sigma_{33}(b) = 0 \quad (7.8)$$

Chaque partie a et b est considérée comme un polycristal dans lequel l'état de contrainte macroscopique est décrit (cf. chapitre 5) de la manière suivante:

$$S = M \tau \quad (7.9)$$

En se fixant comme axes 1 et 2 respectivement les axes n et t, et en gardant la convention de l'équation 6.1, il est possible d'écrire, à l'aide de l'équation (7.8):

$$\begin{aligned} \sigma_{nn} &= -(1/2)(S_1 + S_2) \\ \text{et } \sigma_{tt} &= (1/2)(S_1 - S_2) \end{aligned} \quad (7.10)$$

Les équations (7.7) peuvent donc se réécrire:

$$h(a)(M_1(a) + M_2(a)) \tau(\Gamma(a)) = h(b)(M_1(b) + M_2(b)) \tau(\Gamma(b))$$

$$h(a)M_5(a) \tau(\Gamma(a)) = h(b)M_5(b) \tau(\Gamma(b)) \quad (7.11)$$

L'évolution de l'écroutissage microscopique se fait en écrivant que:

$$d\Gamma = M dE_e \quad (7.11)$$

et en se fixant une loi explicite  $\tau(\Gamma)$  telle que calculée dans le chapitre 5. On se fixe ensuite deux variables p et q telles que:

$$dE_{nn}(a) = p dE_{nn}(b) \text{ et } dE_{nt}(a) = q dE_{nt}(b) \quad (7.12)$$

la résolution du problème de l'évolution de l'instabilité plastique se réduit à calculer incrémentalement les valeurs des paramètres p et q. L'hypothèse d'un chargement radial dans la matrice étant faite, connaissant ces deux paramètres, il est possible de calculer la direction de déformation en a, donc le tenseur M(a), et le scalaire  $d\Gamma(a)$ . Lorsque p et q sont égaux à 1, respectivement, il n'y a pas de localisation, par contre lorsque p croît en laissant q nettement inférieur, il y a striction, et

inversement, lorsque  $q$  croit en laissant  $p$  très inférieur il y a formation d'une bande de cisaillement.

Le résultat présenté maintenant n'est qu'une simplification du calcul proposé plus haut. Bien que ce calcul complet soit actuellement en cours, le calcul simplifié permet de fournir des informations d'ordre qualitatif sur l'importance des textures dans les CLF (Courbes Limites de Formage). Le raisonnement à la base de cette simplification est la suivante: appelons  $F$  et  $G$  les fonctions représentant les conditions d'équilibre, (equ.7.7), on doit donc avoir:

$$F_a = F_b \text{ et } G_a = G_b \quad (7.13)$$

Posons des valeurs arbitraires de  $p$  et  $q$ , et calculons ces fonctions  $F$  et  $G$  à chaque incrément de déformation. S'il existe un moment où on a:

$$F_a < F_b \text{ et } G_a < G_b \quad (7.14)$$

alors, il est plus facile pour le matériau en  $a$  de se déformer suivant la direction de déformation déduite des valeurs de  $p, q$  et  $p$ . Par contre, si, à cet instant, on trouve que les différences par incrément de déformation:

$$dF_a > dF_b \text{ et } dG_a > dG_b \quad (7.15)$$

alors l'écoulement ne peut localiser car le matériau durcira plus vite en  $a$  qu'en  $b$ . Le critère d'instabilité est ici de se fixer  $p$  et  $q$  légèrement supérieurs à 1 (on a pris 2 pour



les présents résultats) et de voir quand le matériau permettra une localisation, c'est-à-dire quand on aura réunies les conditions:

$$F_a < F_b, G_a < G_b, dF_a < dF_b, \text{ et } dG_a < dG_b \quad (7.16)$$

On a fait varier l'angle  $\theta$  de manière à trouver celui qui minimise la déformation critique.

Trois cas ont été étudiés. Dans le premier, la texture a été artificiellement bloquée, et elle est donc restée isotrope. Dans le deuxième, la texture initiale étant isotrope, on l'a laissé évoluer suivant les valeurs de  $\rho$ . Dans le dernier cas, la texture initiale est une texture simulée de laminage pour une déformation de 2. Les résultats, sur la figure 7.9, calculés pour cinq chemins de déformation, la loi microscopique d'écroutissage étant la même, montrent que pour  $\rho=0$  jusque  $-1/2$ , la CLF semble ne dépendre que de la loi microscopique d'écroutissage. Pour  $\rho=-1$  (cisaillement plan), par contre, on obtient une instabilité en cisaillement qui est différée plus ou moins suivant la loi de comportement macroscopique. En effet, la texture fixée comme isotrope a un comportement macroscopique croissant, uniquement du au comportement microscopique, alors que la texture produite par un tel chemin de déformation tend à adoucir l'écroutissage macroscopique. L'adoucissement textural est encore plus marquant lorsqu'on

- ▲ ISOTROPE  $\forall t$
- \* ISOTROPE ( $t=0$ )
- △ TEXTURE DE LAMINAGE ( $t=0$ )

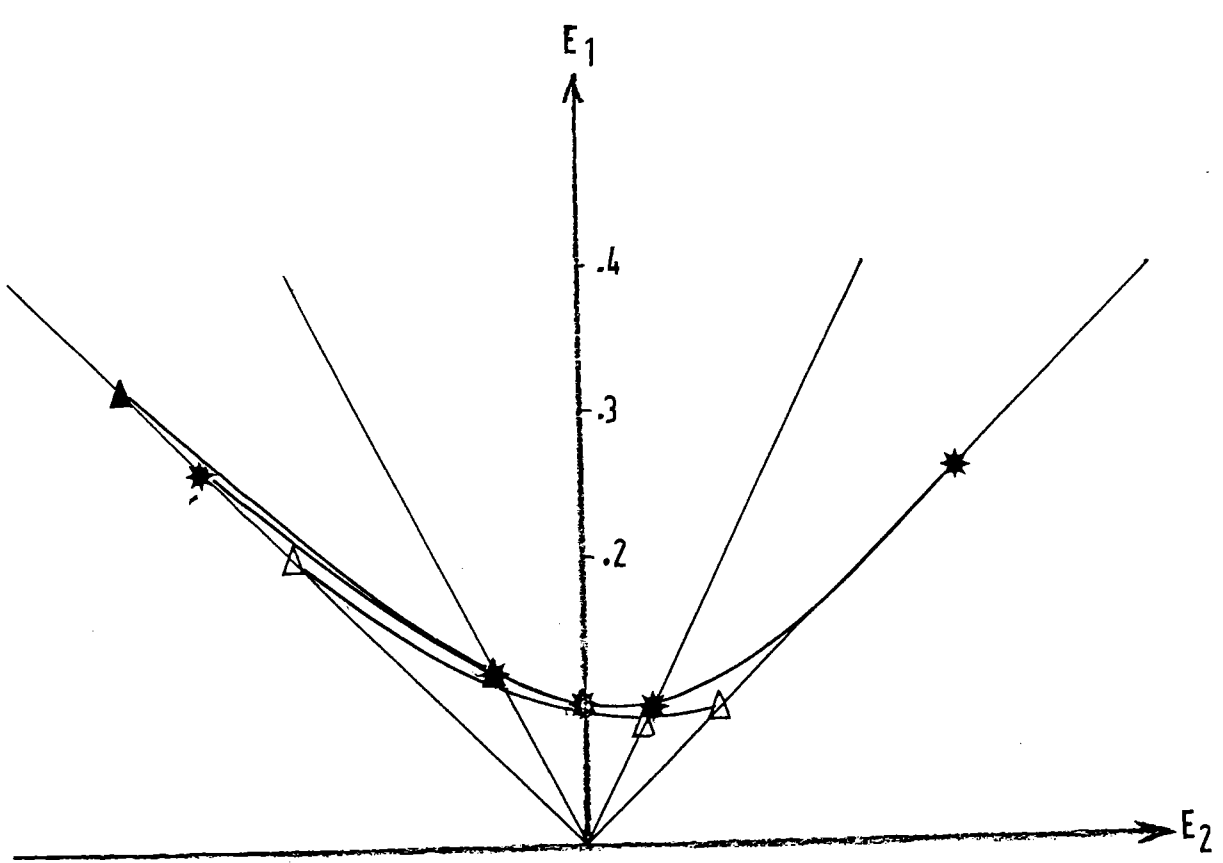


Figure 7.9. CLF obtenue avec l'analyse simplifiée pour trois cas: texture isotrope initiale et conservée artificiellement isotrope (▲), texture initiale isotrope évoluant suivant les différents trajets de chargement (\*), et texture initiale de laminage évoluant suivant les différents trajets (△).

part d'une texture initiale de laminage. Dans le domaine  $p > 0$ , il est notable que la texture qui est gardée isotrope ne produit pas de localisation pour  $p = 1/2$  et  $p = 1$ . Ceci est dû au fait que la surface de charge, au point de charge, ne présente qu'un grand rayon de courbure. La texture, initialement isotrope, produite par un chemin de déformation  $p = 1$ , par contre, forme un coin de haute courbure au point de charge, comme le montre la figure 7.20. Ainsi qu'il l'a été montré dans le chapitre 6, La surface de charge d'un polycristal laminé montre aussi l'existence d'un coin, ce qui facilite le changement de direction de déformation (vers la déformation plane en particulier) et qui, donc, abaisse la ductilité du matériau.

Cette étude n'est qu'une première étape vers un calcul plus complet. Il ne représente pas le développement de la localisation, mais plutôt une sorte de condition de bifurcation. Cette condition s'avérera insuffisante lorsque la sensibilité à la vitesse de déformation sera prise en compte. Elle permet néanmoins de mettre en évidence les effets importants des textures sur les CLF, à la fois par leur influence sur les lois de comportement et sur la forme des surfaces de charge.

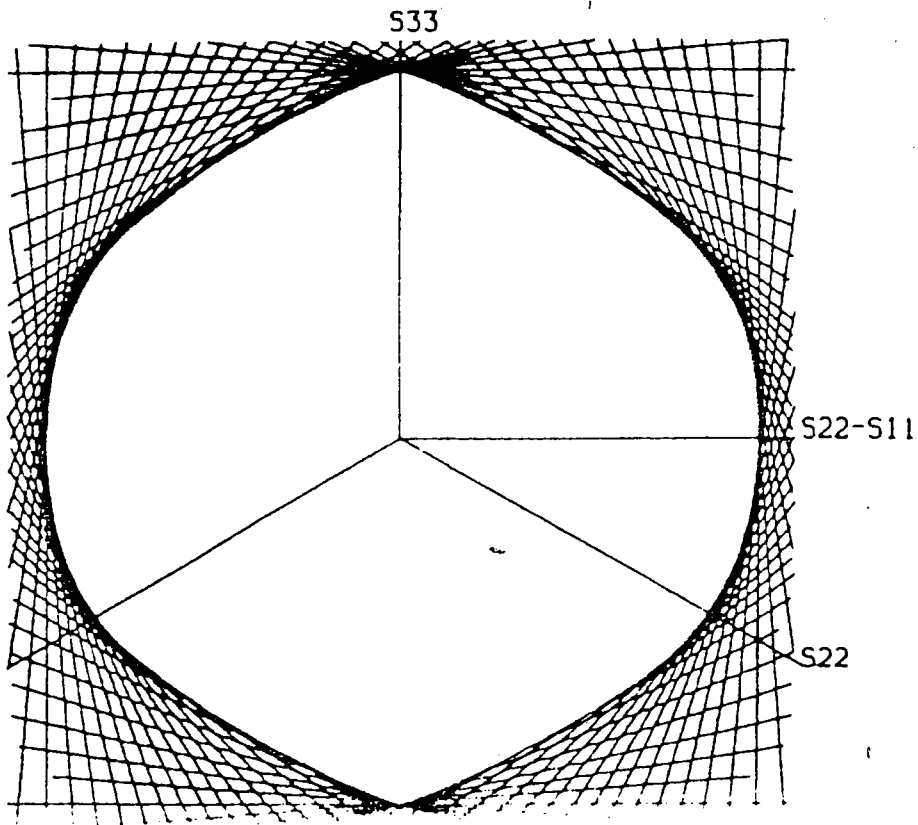


Figure 7.10. Projection  $\pi$  de la surface de charge obtenue par simulation DPI de la texture de traction équi-biaxiée (compression uniaxiale).

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUESDU CHAPITRE 7

- (1) G.R.Canova, U.F.Kocks and M.G.Stout, Scripta Met., 1984
- (2) U.F.Kocks, M.G.Stout, G.R.Canova and D.E.Helling, Proc. TMS-AIME, New York, 1985, p.44.
- (3) E.F.Rauch, G.R.Canova, J.J.Jonas and S.L.Semiatin, Acta.Met., vol.33 n°3, 1985, p.465.
- (4) J.L.Bai, J.Mech.Phys.Sol., vol.30, 1982, p.195.
- (5) C.Fressengeas et A.Molinari, J.Phys., Tome 46, 1985, p.C5-283.
- (6) C.Fressengeas and A.Molinari, Arch.Mech., vol.36 n°4, 1983, p.483.
- (7) I.Dillamore and H.Katch, Met.Sci., vol.8, 1974, p.21.
- (8) J.Gil Sevillano, P.van Houtte and E.Aernoudt, Progr.Mat.Sci., vol.25, 1981, P.69.
- (9) M.Hatherly, Proc. ICITOM5, G.Gottstein and K.Lücke eds, vol.1, 1978, p.81.
- (10) P.L.Martin, private communication

## 8 DISCUSSION: LIMITES ET EXTENSIONS DU MODELE

### 8.1 HETEROGENEITE DE DEFORMATION PLASTIQUE

Les résultats exposés dans les chapitres précédents montrent que, pour les matériaux obéissant aux hypothèses que l'on s'est fixées, le modèle prédit correctement les textures. Les hypothèses de base sont que le matériau est monophasé et que le durcissement microscopique est isotrope, ce qui est le cas des matériaux à haute énergie de faute d'empilement. Il aurait été également possible de prendre en compte d'autres types de matériaux monophasés à plus basse énergie de faute d'empilement, où le durcissement latent et le maclage interviennent. Ceci a été fait avec succès par van Houtte et al.(1). On a vu, de plus, que les conditions DPI font une nette différence aux grandes déformations, lorsque les grains deviennent de forme très anisotrope. Les résultats les plus significatifs, par rapport à la réalité expérimentale, concernent le laminage et la torsion où les

textures finales sont beaucoup mieux représentées lorsque l'interaction mécanique due à la forme des grains est prise en compte. Tiem et al.(2) ont prouvé la validité d'une telle approche en tant que cas extrême du calcul d'Eshelby étendu aux inclusions de forme ellipsoïdale quelconque. L'hypothèse de base du calcul type DPI semble donc pouvoir être acceptée comme un principe mécanique.

Bien que les résultats soient, en général satisfaisants, on a vu que ni la théorie DTI ni la théorie DPI ne prédit correctement la texture de compression. Ce fait, on l'a vu, n'est pas du tout imputable aux méthodes utilisées pour résoudre les ambiguïtés. Il semble que ce soit plutôt dû au fait que la déformation plastique imposée n'est pas correcte. Lorsqu'on fait une micrographie d'une éprouvette compressée à grandes déformations, on aperçoit (figure 8.1) que les grains ne restent pas cylindriques comme l'éprouvette, mais que, localement, les grains ont tendance à produire une déformation plane et un cisaillement. Ceci est schématisé sur la figure 8.2, où la composante de déformation plane est  $E_1$ , (cf. notation equation (6.1)) et celle de cisaillement est  $E_5$ . Bien que ces composantes soient nulles en moyenne, au niveau du polycristal, elles s'écartent de zéro de manière significative localement. On voit que ceci n'est pas en

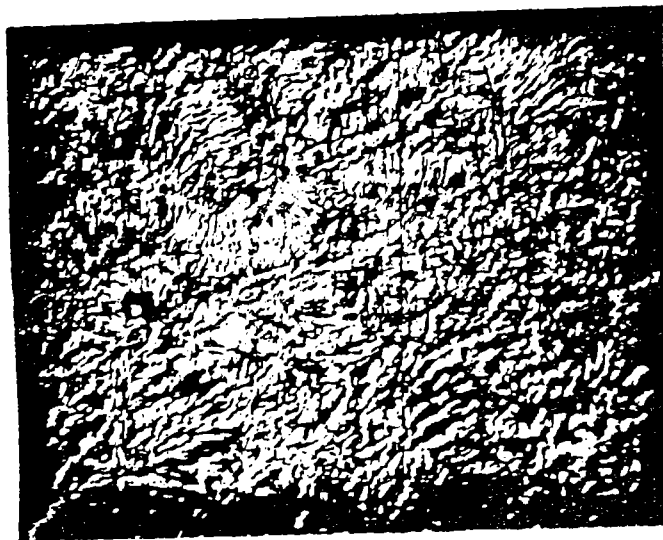


Figure 8.1. Micrographie montrant l'apparition de l'effet de courbure des grains en compression uniaxiale de l'aluminium.

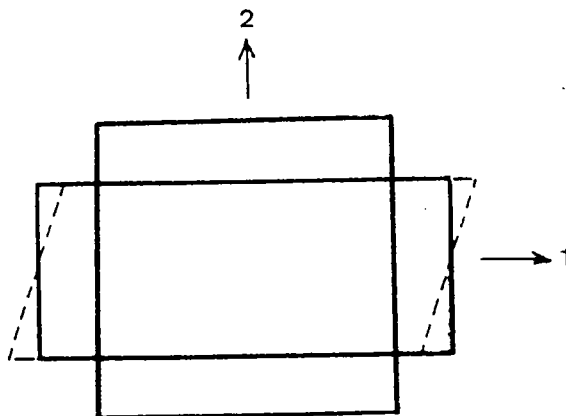


Figure 8.2. Schématisation de cet effet: les grains ont tendance à produire une déformation plane et/ou un cisaillement plan.



contradiction avec la théorie DPI, pour les composantes relaxées de déformation, lorsque le grain est aplati, mais la contradiction existe pour les déformations imposées. En effet, les théories DTI et DPI imposent la continuité des composantes  $E_1$  et  $E_5$  (et aussi  $E_2$  bien entendu).

Hosford (3) analyse ce problème de la façon suivante: lorsqu'un grain est orienté suivant la direction (110), une compression suivant cet axe (figure 8.3) va activer quatre systèmes symétriquement disposés, qui ne peuvent, en aucun cas fournir une déformation axisymétrique. L'état de déformation le plus facile, pour ces systèmes est la déformation plane. Par contre, lorsqu'une déformation axisymétrique est imposée, l'activation d'un cinquième système de glissement est nécessaire, ce qui nécessite un état de contrainte très différent. Le calcul montre que cette contrainte est de la forme:

$$S = (-1.225, -3.673, 0.000, 0.000, 0.000) \quad (8.1)$$

On remarque qu'elle est très déviée de l'état de contrainte moyen qui est de la forme:

$$S = (0.000, -3.101, 0.000, 0.000, 0.000) \quad (8.2)$$

En fait, l'hypothèse de Taylor suppose implicitement que les déformations élastiques vont pouvoir rectifier les conditions d'équilibre. Ceci ne semble plus être le cas lorsque de grandes déformations sont atteintes et que l'état

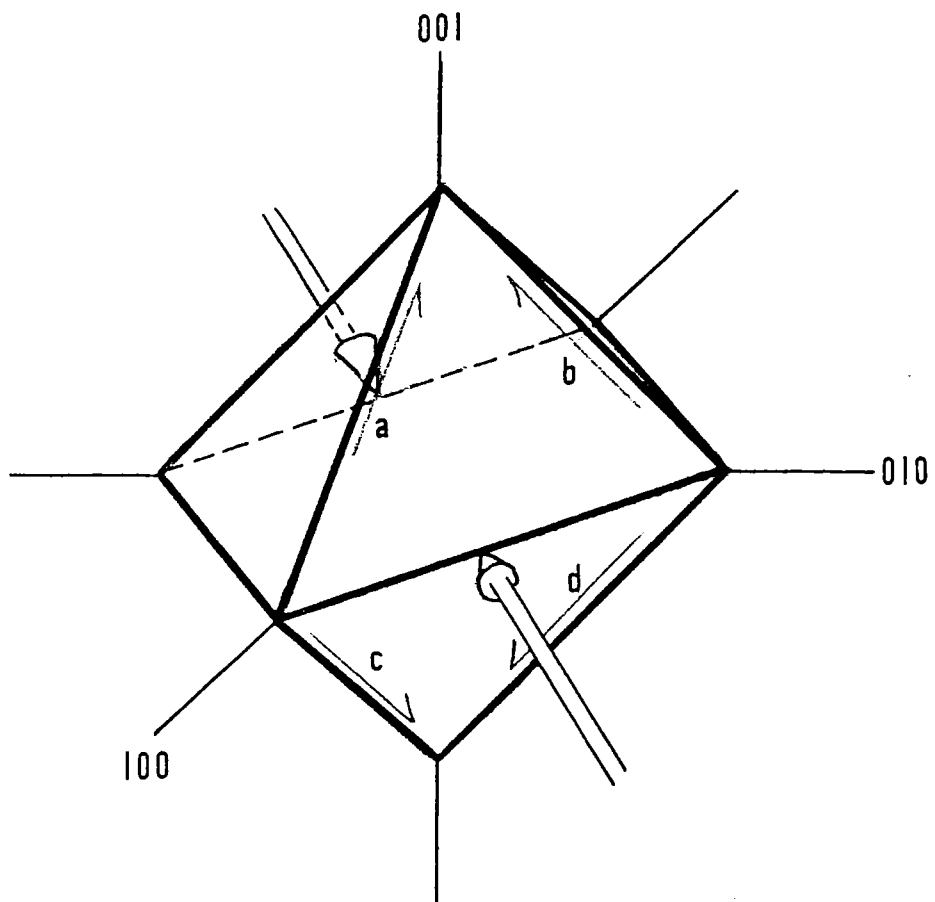


Figure 8.3. Représentation des systèmes de glissement d'un grain sur lequel on effectue une compression suivant un axe  $\langle 110 \rangle$ . On note quatre systèmes (a, b, c et d) également chargés.

de contrainte dans un grain est très dévié de l'état de contrainte moyen. En analysant les composantes de texture prédites correctement par les théories DTI et/ou DPI, on remarque que leurs états de contrainte respectifs sont moins déviés de la moyenne que la composante (110) en compression, de sorte que les petites déviations associées peuvent effectivement être considérées comme accommodées par les déformations élastiques. Ceci est résumé sur le tableau 8.1. Les théories DTI et DPI ne peuvent donc stabiliser des composantes dont l'état de contrainte est trop dévié de l'état moyen, car, en fait, la stabilisation semble associée à une forte déviation de certaines composantes de la déformation plastique et ne peut être obtenue en imposant trop strictement ces composantes de déformation. Sur le même tableau 8.1, on remarque que la composante laiton de la texture de laminage est aussi associée à un état de contrainte assez éloigné de la moyenne, et d'ailleurs lorsque la théorie DPI est appliquée jusqu'à très fortes déformations (figure 8.4) on remarque que la texture simulée, bien que proche de la réalité, ne possède pas cette composante. Finalement, on peut dire que la théorie DTI ou DPI est difficilement concevable pour les matériaux polyphasés, et ceci, pour les mêmes raisons, c'est-à-dire que l'uniformité de la déformation est incompatible avec une

Tableau 8.1

Tableau comparatif des états de contrainte pour différentes composantes de texture et deux types de chargements. La contrainte pour une texture isotrope est aussi donnée comme référence.

ETATS DE CONTRAINTE DES COMPOSANTES DE TEXTURE DE LAMINAGE  
EN CONDITIONS DTI

	S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	S <sub>3</sub>	S <sub>4</sub>	S <sub>5</sub>
Moyenne	-0.816	-2.526	0.025	-0.042	0.031
Cuivre	-0.612	-3.062	0.000	0.000	0.000
S <sub>1</sub>	-0.467	-2.987	-0.545	-0.214	-0.401
S <sub>2</sub>	-1.047	-1.793	-1.128	0.187	0.152
S <sub>3</sub>	-0.556	-2.931	-0.125	-0.437	-0.348
Laiton	-1.428	-1.837	0.000	0.000	-1.155
Goss	1.225	-3.674	0.000	0.000	0.000
Cubique	-0.612	-1.837	1.225	0.000	0.000
Taylor	-0.576	-2.954	-0.509	0.000	0.000

ETATS DE CONTRAINTE DES COMPOSANTES DE TRACTION ET DE  
COMPRESSION DANS LES CONDITIONS DTI

	S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	S <sub>3</sub>	S <sub>4</sub>	S <sub>5</sub>
Moyenne	0.000	3.100	0.000	0.000	0.000
(100)	0.000	2.449	0.000	0.000	0.000
(111)	0.000	3.674	0.000	0.000	0.000
(110)a	0.000	-3.674	0.000	0.000	1.225
(110)b	-1.225	-3.674	0.000	0.000	0.000

## 111 POLE FIGURE

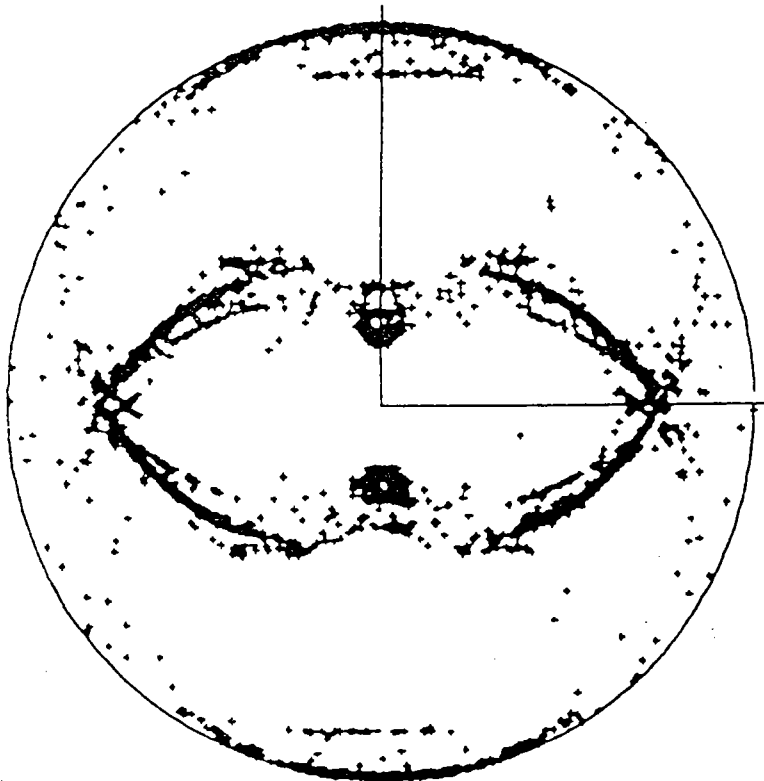


Figure 8.4. Figure de poles (111) représentant la texture calculée en grandes déformations par le modèle DPI. On peut remarquer la quasi-absence de la composante Laiton.

trop forte hétérogénéité du comportement des cristallites constituant le polycristal.

Les seuls modèles existant pour simuler ces hétérogénéités du comportement plastique sont les modèles de Hill (4) et de Zaoui et Berveiller (5). Ces modèles self-consistants sont néanmoins très durs à mettre en oeuvre, comme on l'a vu au chapitre 2. Van Houtte (6) a établi un modèle pour expliquer le comportement des grains c.f.c. en compression uniaxiale. Il a tout d'abord relaxé les composantes de déformation plane  $E_1$  et de cisaillement  $E_5$ , pour calculer le développement de la texture sur cette base. La texture est effectivement du type (110) en compression, en accord avec l'expérience (figure 8.5), et les grains ont aussi tendance à se déformer en déformation plane. Lorsqu'on trace la variation du facteur de Taylor (figure 8.6), on remarque qu'il est inférieur à celui obtenu en appliquant la théorie DPI classique, c'est-à-dire en relaxant les composantes  $E_3$  et  $E_4$ . Van Houtte justifie donc ce type de relaxation par cet argument de variation de la puissance dissipée. Cette analyse semble erronée pour plusieurs raisons: tout d'abord l'interaction mécanique entre le grain et son voisinage est telle que  $E_3$  et  $E_4$  peuvent être relaxées, c'est-à-dire que la forme du grain est telle que des contraintes de réaction engendrées par de

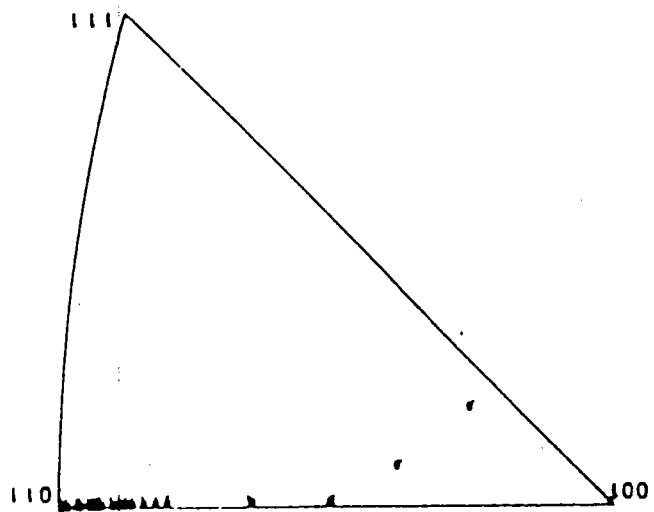


Figure 8.5. Figure inverse de poles calculée par van Houtte (6) en relaxant les composantes  $E_1$  et  $E_5$ .

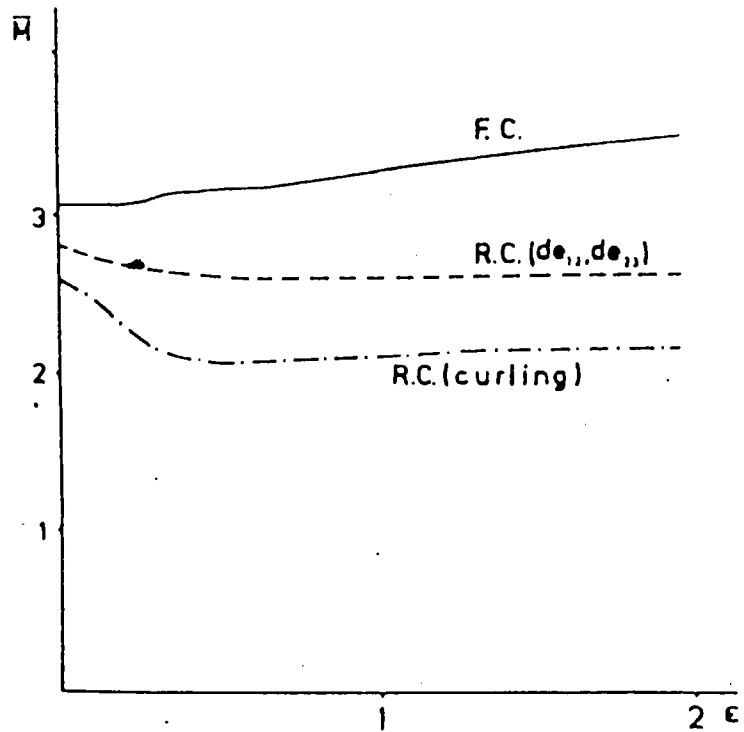


Figure 8.6. Evolution du facteur de Taylor moyen en fonction de la déformation, suivant les théories DTI, DPI et le modèle "curling" de van Houtte.

fortes différences entre ces composantes et celles correspondant au voisinage sont quasiment nulles, l'effet de ces composantes de cisaillement est négligeable et elles sont donc libres de choisir leur valeur. Finalement, cette simulation traite le grain indépendamment de ses voisins, car les composantes de déformation relaxées provoquent précisément de fortes contraintes de réaction. Si, de plus, les composantes choisies par van Houtte doivent aussi être relaxées, la déformation plastique, dans les conditions DPI doivent donc se faire en relaxant quatre composantes de déformation, et donc sur un système de glissement, ce qui paraît douteux, car cela provoquerait de fortes incompatibilités entre grains voisins. La puissance dissipée en forçant la déformation plastique sur un seul système serait sans doute aussi inférieure à celle sur deux systèmes ou plus.

Si on se réfère à la théorie de Kröner, un grain est soumis à une interaction élastique avec son environnement supposé infini et ayant une déformation homogène. Cette hypothèse est très forte, car elle implique que la matrice va imposer la déformation au grain. En fait, on pourrait imaginer une expérience fictive où on activerait la déformation plastique dans un grain seulement, la matrice (à l'infini) étant inerte. Intuitivement, on peut affirmer



que le voisinage immédiat sera affecté par le grain, mais qu'au delà d'une certaine distance, la déformation sera nulle. Ceci veut dire que l'importance relative de la matrice n'est pas aussi forte que le prédit Kroner, mais qu'en fait, il existe une zone où la compatibilité est totale et qu'un gradient de déformation plastique existe.

Un modèle simple est proposé, comme extension des modèles DTI et DPI. Si l'on considère un grain de forme sphérique, par exemple, la zone de compatibilité totale est une sphère concentrique de la première, dont le rayon est moins de deux fois le rayon du grain. Ainsi le volume de matrice impliqué dans les relations de compatibilité est inférieur à 7 fois le volume du grain. Si on appelle  $\underline{\Sigma}(EP)$ , le tenseur des contraintes moyen de la matrice soumise à une déformation plastique  $\underline{EP}$ , et  $\underline{\sigma}(EP)$  celui du grain soumis à la même déformation plastique, l'état de contrainte dans l'agrégat formé du grain et d'une partie de matrice de fraction volumique  $f$  (inférieur à 7) s'écrit:

$$\underline{\Sigma}(EP) = f\underline{\Sigma} + (1-f)\underline{\sigma} \quad (8.3)$$

Il paraît contradictoire de vouloir simuler une hétérogénéité de déformation plastique en utilisant une pareille équation, en fait, ici, on considère que chaque grain représente une famille de grains de voisinages différents, et donc que le voisinage de ce grain

représentatif est la moyenne des voisinages de tous les constituants de cette famille. Donc l'équation (8.3) ne suppose pas que la matrice entière est dans les conditions DTI (ou DPI), mais uniquement que le voisinage du grain est dans ces conditions.

Le rôle du gradient de déformation plastique est de pouvoir permettre à la contrainte de se modifier peu à peu au fur et à mesure que l'on s'éloigne du grain et de se rapprocher de la contrainte macroscopique. L'hypothèse suivante qui découle de cette remarque est que la déformation plastique de l'agrégat simulé plus haut s'ajuste de manière à ce que l'état de contrainte dans cet agrégat soit aussi proche que possible de l'état de contrainte à l'infini. En fait, on ne connaît que les composantes nulles de la contrainte moyenne, et non la contrainte équivalente. Par exemple, on sait qu'en traction toutes les composantes sont nulles excepté la composante de traction dont on ne sait pas la valeur. Le calcul se fait donc en ajustant la déformation plastique  $E_p$  dans l'agrégat pour que la direction de contrainte correspondante soit aussi proche que possible de la direction de contrainte macroscopique.

Les résultats suivants sont obtenus, malheureusement en utilisant la méthode r.s. de Kocks et Canova (7), qui, on l'a vu n'est qu'une grossière

approximation du calcul viscoplastique rigoureux. Néanmoins, les résultats obtenus en compression dans les conditions DTI sont le plus éloigné de la réalité, en comparaison des résultats obtenus avec les deux autres méthodes et, donc, les résultats suivants n'en sont que plus significatifs. On a vu aussi que, dans les conditions DPI, du fait qu'il n'y a pas d'ambiguïté, les résultats sont identiques à ceux obtenus avec les autres méthodes. Ce dernier résultat est aussi valable en laminage. Dans les conditions DTI, la seule différence marquante est que la présente méthode induit une composante  $(110)\langle 110 \rangle$  qui n'existe nulle part ailleurs.

On peut dorénavant noter DTI' les conditions où la déformation plastique est imposée au grain, mais ajustée selon la méthode décrite plus haut. De manière analogue, on notera DPI' les conditions DPI où les composantes de déformation imposées sont ajustées de la même façon.

Tomé et al.(8) ont effectué la simulation d'abord en compression. Sur la figure 8.7a, où est tracée la figure inverse de poles des axes de compression obtenue dans les conditions DTI', on remarque déjà à 0.5 de déformation une tendance à former une texture de fibre  $(110)$  qui est bien la texture expérimentale. Lorsque le calcul est poursuivi dans les conditions DPI', figure 8.7b, cette tendance ne fait que s'accroître. En étudiant les statistiques associées à ces

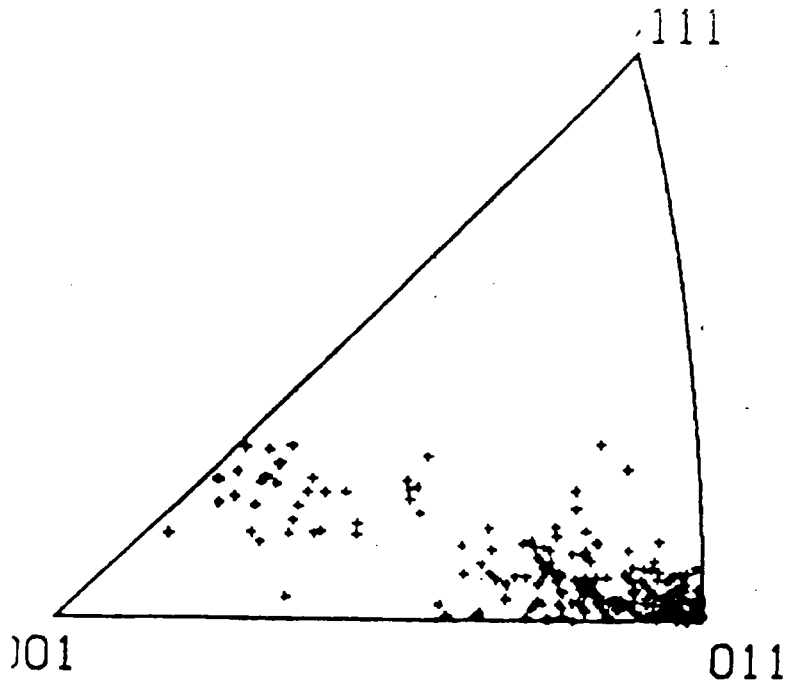
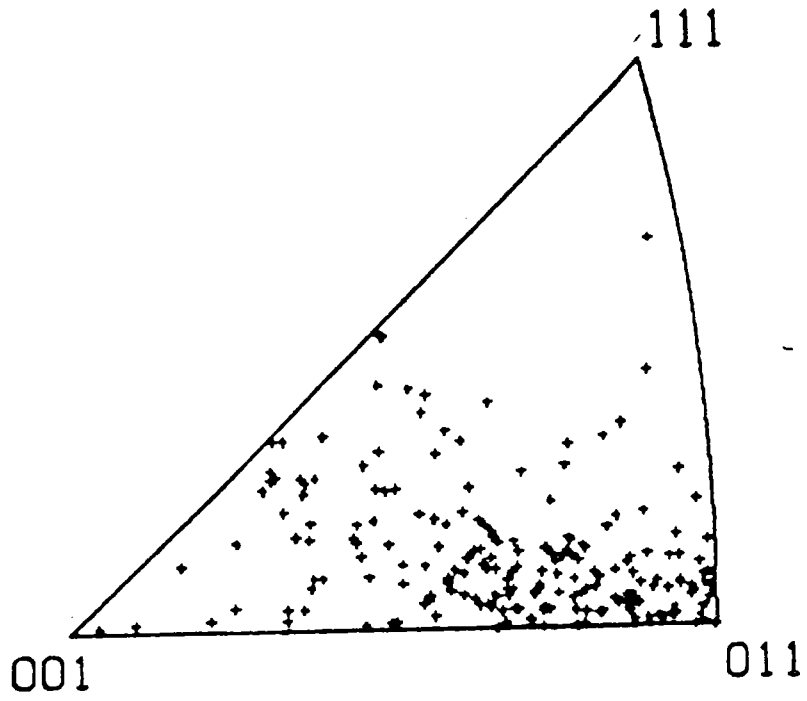


Figure 8.7. Figures inverses de poles calculées par le modèle "cluster" en compression uniaxiale pour 50% et 100% de déformation.

221

résultats, on remarque (tableau 8.2) que la répartition des systèmes de glissement se fait différemment, notamment en faisant décroître le nombre de systèmes actifs de manière significative. On voit sur ce tableau que pour une texture initiale isotrope, le phénomène d'accommodation plastique tendait à augmenter le nombre de grains se déformant sur quatre systèmes, alors que la même texture interprétée selon l'hypothèse DTI stricte résulte en une très grande majorité de grains glissant sur cinq systèmes.

Lorsque la texture évolue suivant les conditions DTI' (pour 0.50 de déformation), et qu'on fait une analyse statistique type DTI et DTI' sur cette texture, on obtient des résultats analogues. Sur le tableau 8.3, on s'aperçoit qu'en fait le trislip et tétraslip sont favorisés par les hétérogénéités de déformation plastique, alors que si l'on supposait une déformation uniforme, on obtiendrait encore une grande majorité de grains en pentaslip. On peut facilement en conclure qu'une texture (110) de compression sera "dure" dans les conditions DTI, c'est-à-dire que son facteur de Taylor sera élevé, alors qu'en fait l'hétérogénéité de déformation plastique la rend beaucoup plus "douce". Lorsque l'analyse est poursuivie dans les conditions DPI', (ici une transition graduelle a été effectuée entre les conditions DTI' et DPI', ce qui explique qu'il reste encore des grains

Tableau 8.1

Statistiques associées à une texture isotrope en compression uniaxiale. Les résultats sont présentés pour deux méthodes de traitement de la texture: le modèle DTI et le modèle "cluster".

COMPRESSION r.s. E=0.

repartition des grains par nombre de systemes actifs

	DTI	DTI'
1	0.0	0.0
2	0.5	0.5
3	3.5	10.5
4	31.0	46.5
5	65.0	42.5
6	0.0	0.0
7	0.0	0.0
8	0.0	0.0

Tableau 8.3

Même analyse qu'au tableau précédent, mais pour une texture de compression à 50% de déformation simulée avec le modèle "cluster".

COMPRESSION r.s. E=0.50

répartition des grains par nombre de systèmes actifs

	DTI	DTI'
1	0.0	0.0
2	0.0	8.5
3	10.5	40.0
4	30.0	42.5
5	59.5	9.0
6	0.0	0.0
7	0.0	0.0
8	0.0	0.0

Tableau 8.4

Statistiques identiques au précédent tableau, mais pour une texture simulée à 100% de déformation.

COMPRESSION r.s. E=1.0

répartition des grains par nombre de systèmes actifs

	DTI	DTI'
1	0.0	0.5
2	2.5	26.5
3	32.0	26.0
4	24.5	36.5
5	41.0	10.5
6	0.0	0.0
7	0.0	0.0
8	0.0	0.0

22)

dans les conditions DTI') on observe (tableau 8.4) encore le même comportement, à savoir une tendance à abaisser le nombre de systèmes de glissement actifs.

Lorsque la simulation est effectuée pour l'essai de laminage, on remarque, figure 8.8, que la composante type laiton qui manquait à la simulation faite dans les conditions DPI (figure 8.4) apparaît et se stabilise ce qui correspond bien à la réalité expérimentale.

Dans l'équation (8.3), la contrainte est la combinaison de deux termes: un tenseur lié à l'orientation (cf. équation (5.8)) et un scalaire représentant l'écroutissage microscopique. On peut, à l'aide du modèle présenté, tester l'influence de la loi d'écroutissage microscopique sur le développement de la texture. D'après les travaux de Cohen et al.(9), les textures à grandes déformations de torsion pour le cuivre et l'aluminium diffèrent légèrement. Afin de tester si l'écroutissage microscopique peut avoir une influence, la simulation a été faite en utilisant deux lois très différentes. Les paramètres sont inscrits dans le tableau 8.4. La texture de torsion pour un cisaillement macroscopique de 2 ne montre pas de différence notable, figure 8.9a et b.

En conclusion de cette étude, l'analyse DTI ou DPI, cette dernière étant faite suivant des critères



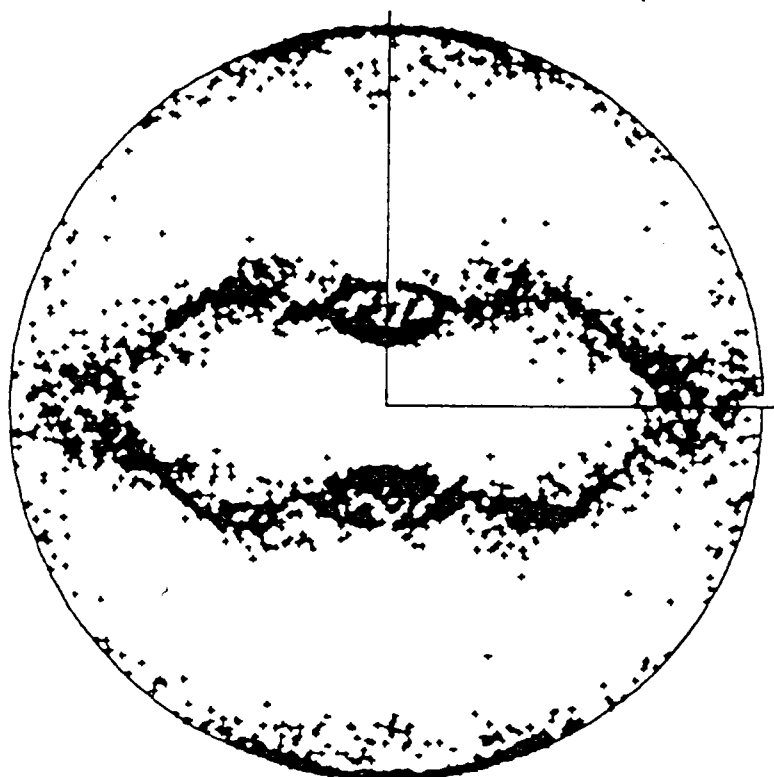


Figure 8.8. Figure de poles (111) correspondant à une texture simulée d'après le modèle "cluster" à 200% de déformation en laminage. On note l'apparition et le renforcement de la composante Laiton.

111 POLE FIGURE

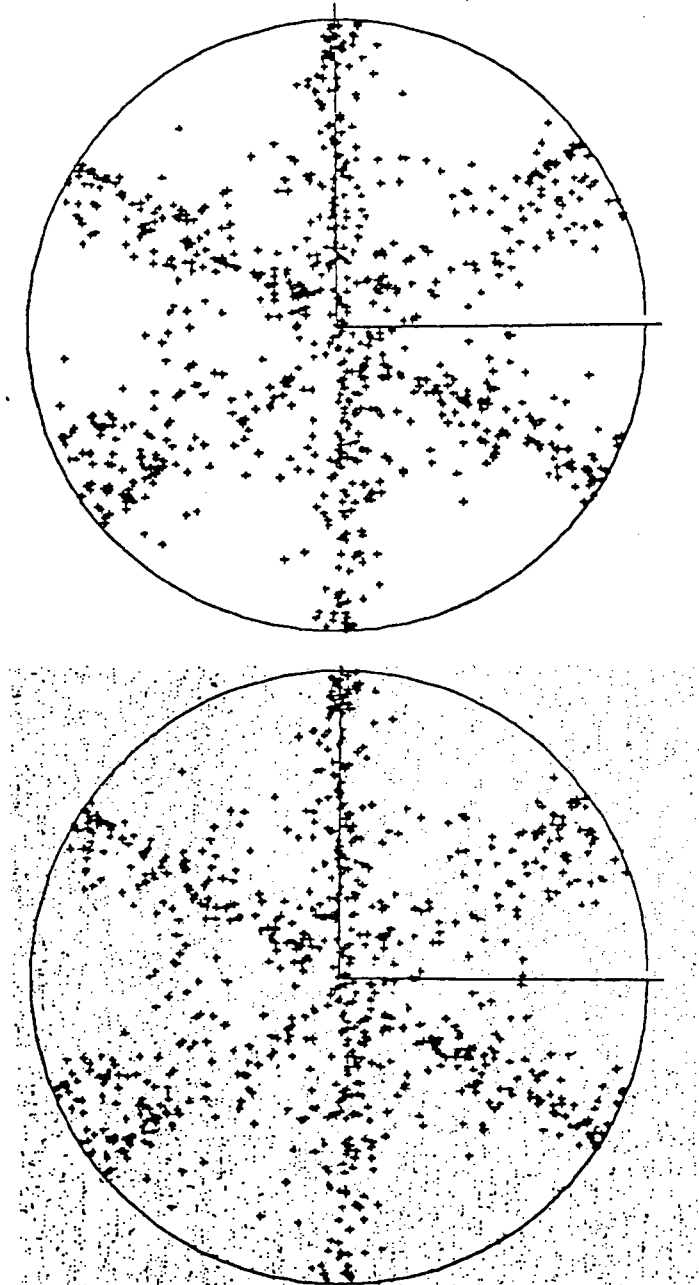


Figure 8.9. Figures de poles associées à des textures simulées en torsion ( $\gamma=2$ ) avec deux lois d'écroutissage microscopiques très différentes. On peut remarquer la faible différence entre les textures calculées.

227

d'interaction mécanique, ne peut donner des résultats corrects que si les textures analysées selon ces critères ont des états de contrainte assez proche de la moyenne macroscopique. Elle ne pourront donc pas prédire correctement des textures expérimentales associées à des hétérogénéités plastiques liées à ces écarts de contrainte. Il semble donc que les phénomènes d'accommodation plastique soient très importants et doivent être pris en compte.

On a aussi montré la différence entre relaxer une composante de déformation, lorsque la contrainte de réaction associée est faible, et ajuster cette composante, lorsque la réaction associée est forte.

On a aussi pu évaluer que les effets d'écroutissage sur les textures sont du second ordre. Ayant d'autre part pu noter, à partir du calcul viscoplastique, que la sensibilité à la vitesse de déformation, dans le domaine de la déformation à froid, n'a aucune influence sur le choix des systèmes de glissement actifs, ni sur la répartition des cisaillements microscopiques, les différences mineures existant entre les textures de déformation des matériaux de même classe (ici c.f.c.) et de même type (ici à haute énergie de faute d'empilement) ne peuvent être imputés à de tels paramètres, mais probablement plutôt à des anisotropies microscopiques (durcissement latent) légèrement différentes.

## 8.2 EXTENSION AUX GRANDES VITESSES DE DEFORMATION

On a vu qu'il était possible de faire une bonne description analytique au premier ordre du comportement viscoplastique à froid des matériaux en les supposant linéaires visqueux avec une contrainte seuil. La vitesse glissement sur un système  $s$  est donné par l'équation:

$$\dot{\gamma}^s = p((\tau^s / \tau_0) - \gamma_0) \quad (8.4)$$

Cette description permet de résoudre de manière rigoureuse le problème des ambiguïtés inhérent aux matériaux obéissant à la loi de Schmid et ayant un durcissement isotrope des systèmes de glissement.

Il a été montré, de manière expérimentale, que cette description s'applique aussi au comportement des métaux aux grandes vitesses de déformation, c'est-à-dire pour des vitesses supérieures à  $10^3 \text{ s}^{-1}$  environ. Sur la figure 8.10, Chiem et Duffy (10) et Dormeval (11) montrent un tel comportement sur des monocristaux orientés pour le glissement simple (en quasi-statique). Il est intéressant d'essayer une première approche de simulation des textures aux grandes vitesses, pour évaluer qualitativement les phénomènes. Une question importante est l'influence de la vitesse de déformation sur le développement des textures.

Ainsi qu'il l'a été montré au chapitre 3, l'équation (8.4), qui ne s'applique qu'aux systèmes actifs,

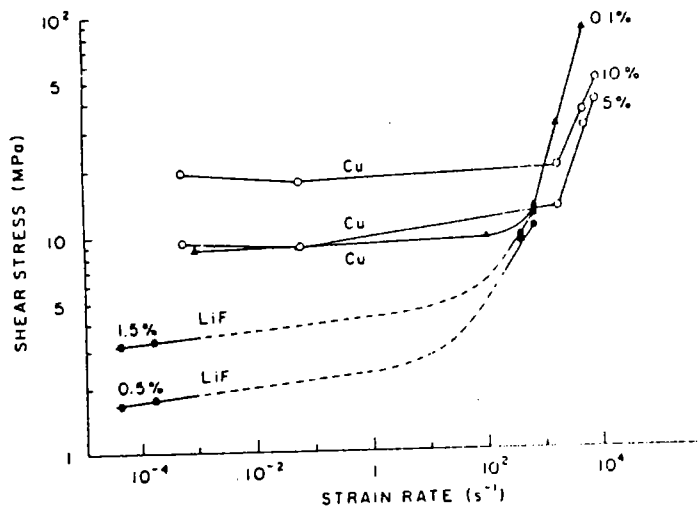


Figure 8.10. Courbes expérimentales reliant les contraintes et les vitesses de déformation en cisaillement. On note un coude à environ  $\dot{\gamma}=1000$ .

conduit à la relation liant la contrainte à la vitesse de déformation, dans un grain quelconque :

$$\underline{\sigma} = \underline{Q}^{-1} : (\langle \underline{\dot{E}} / p \rangle + \tau_0 T) \quad (8.5)$$

On peut remarquer que, dans cette équation, la vitesse de déformation influe par sa direction, mais aussi par son module  $\dot{E}_e$ . Une première approche consiste à évaluer l'influence de la vitesse de déformation équivalente  $E_e$  sur le développement de la texture.

Un cas limite qui peut être effectué entièrement analytiquement est lorsque le terme  $p \tau_0$  peut être négligé devant la vitesse qui est donc très grande. Les présents résultats sont tirés du travail de Canova et al. (12), et ne constituent qu'un cas limite irréaliste, mais qui fournit déjà des tendances.  $p$  est pris égal à 1 dans le présent calcul. Le fait de négliger ce terme permet de ramener l'équation (8.4) à la forme suivante :

$$\dot{\gamma} = \langle m_i \sigma_i \rangle / \tau_0 \quad (8.6)$$

Ceci revient à dire que tous les systèmes de glissement sont actifs et que leur vitesse de cisaillement microscopique est, elle aussi, très grande. La vitesse de déformation résultante est donc :

$$\dot{\epsilon}_i = \langle m_i^s m_j^s \sigma_j \rangle / \tau_0 \quad (8.7)$$

soit encore, en définissant la matrice  $\underline{Q}$  comme au chapitre 3, on obtient :

$$\dot{\epsilon}_i = Q_{ij} \sigma_j \quad (8.8)$$

que l'on peut inverser puisqu'ici tous les systèmes sont actifs. On peut définir un facteur d'orientation de la manière suivante, en appliquant une vitesse de déformation normalisée (cf. chap.5) et en projetant la contrainte obtenue sur ce tenseur :

$$P' = \underline{\underline{E}}^0 \cdot \underline{\underline{Q}}^{-1} \cdot \underline{\underline{E}}^0 \quad (8.9)$$

Ce terme, en toute rigueur, ne dépend pas que de l'orientation, puisque les contraintes résolues critiques sont dans  $\underline{\underline{Q}}$ . Lorsque l'écroutissage des systèmes est supposé isotrope,  $\tau_0$  peut être sorti de  $\underline{\underline{Q}}$ , et le terme P d'orientation est simplement P' divisé par  $\tau_0$ . P n'est pas le facteur de Taylor, en effet, le travail plastique s'écrit :

$$\begin{aligned} \tau^s \dot{\gamma}^s &= \tau_0 \dot{\gamma}^2 \\ &= \sigma_i^s \dot{\epsilon}_i^s \\ &= \underline{\underline{E}}^s \cdot \underline{\underline{Q}}^{-1} \cdot \underline{\underline{E}}^0 \dot{\epsilon}_e^2 \end{aligned} \quad (8.10)$$

On en déduit que :

$$P = \sum \dot{\gamma}^2 / E_e^2 \quad (8.11)$$

On peut chercher à exprimer le tenseur de rotation plastique, dans ces conditions, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \beta &= \sum (\underline{\underline{n}}^s \otimes \underline{\underline{b}}^s) \dot{\gamma}^s \\ &= \sum (\underline{\underline{n}}^s \otimes \underline{\underline{b}}^s) (m_i^s Q_{ij}^{-1} \dot{\epsilon}_j) / \tau_0 \end{aligned} \quad (8.12)$$

ou encore sous forme développée :

$$P_{ij} = \sum n_i^s b_j^s m_k^s Q_{ik}^{-1} \dot{\epsilon}_k / \tau_0 \quad (8.13)$$

Ce tenseur peut être calculé facilement pour un cristal c.f.c. ayant un durcissement isotrope. On trouve que ce tenseur est symétrique, de sorte que la rotation plastique, sa partie antisymétrique, est nulle. Jusqu'à présent, aucun modèle de texture n'est employé, seulement les propriétés physiques du monocristal sont décrites. Si on utilise la théorie DTI pour prédire les développements des textures, les changements d'orientation sont calculés en soustrayant la rotation plastique de la rotation totale. Ceci veut dire, en particulier, que les textures en traction uniaxiale, compression uniaxiale et laminage, par exemple n'évoluent pas, alors que la texture de cisaillement évolue de manière cyclique. Ces résultats montrent, en fait, que lorsque tous les systèmes de glissement d'un monocristal linéaire visqueux sont activés, la rotation plastique est nulle, et donc que le module de la vitesse de déformation, qui, en augmentant accroît le nombre de systèmes actifs, tend aussi à "ralentir" l'évolution de la texture.

Ce calcul peut aussi être effectué sans négliger le terme  $\eta_0 \alpha_0$  à partir de l'équation (8.4), mais de manière numérique, en utilisant simultanément les équations (3.36) et (3.39), jusqu'à ce que l'ensemble des systèmes actifs soit stable. La procédure consiste à choisir un ensemble de départ. Cet ensemble est pris d'après le calcul DTI du type



Bishop et Hill (uniquement le durcissement isotrope est ici considéré). Le tenseur des contraintes est alors calculé et on vérifie avec l'équation (3.36) si d'autres systèmes de glissement sont aussi activés sous cette contrainte. Les systèmes sont ensuite éventuellement rajoutés suivant l'état de contrainte, jusqu'à convergence de l'ensemble des systèmes actifs. Néanmoins cette méthode est très laborieuse quant à son exécution numérique, car, en fait chaque système peut être soit inactif, soit actif mais encore dans le régime des basses vitesses, soit actif en grandes vitesses. Les itérations aboutissant au choix final de l'activité des systèmes deviennent vite très nombreuses. On a donc choisi de modéliser le comportement macroscopique du monocristal, en utilisant la loi puissance sous la forme :

$$\dot{\gamma}^s / \dot{\gamma}_0 = (\tau^s / \tau_0)^n \quad (8.14)$$

avec

$$n=100 \text{ si } \tau^s / \tau_0 < 1$$

$$n=3.33 \text{ sinon.}$$

données qui proviennent de la référence (13) mesurées sur l'aluminium. Le procédé numérique consiste à appliquer un tenseur de vitesse de déformation et calculer le déviateur des contraintes associé puis les cisaillements microscopiques équ.(8.14) en utilisant la méthode de

Newton-Raphson. Cette méthode, si elle est utilisée en régime quasi-statique est moins efficace qu'un schéma bilinéaire. Par contre elle devient plus adaptée lorsque la sensibilité à la vitesse change, et aussi lorsque l'écroutissage microscopique devient anisotrope. Les résultats sont tirés du travail de Canova et al.(14). On a calculé le module de la rotation plastique en fonction de la vitesse de déformation équivalente pour deux chargements différents. Les résultats, figure 8.11, montrent que cette vitesse de rotation relative (puisque divisée par la vitesse de déformation équivalente) décroît avec la vitesse de déformation. On voit notamment, que, passé un certain seuil de vitesse, les textures évolueront beaucoup moins rapidement lorsque la rotation totale est nulle ou petite.

Un exemple illustrant bien cette décroissance du module de la rotation plastique, consiste à choisir une orientation dont on sait qu'elle est stable en cisaillement, en régime quasi-statique, et à lui appliquer une vitesse de déformation de plus en plus forte. On a choisi ici l'orientation  $(111)\langle 110 \rangle$  avec un durcissement isotrope. L'évolution du facteur d'orientation, figure 8.12, est tracée. Comme on l'attendait, à faibles vitesses, ce facteur est constant. Lorsque la vitesse augmente, en revanche, une oscillation dont la période dépend de la vitesse appliquée

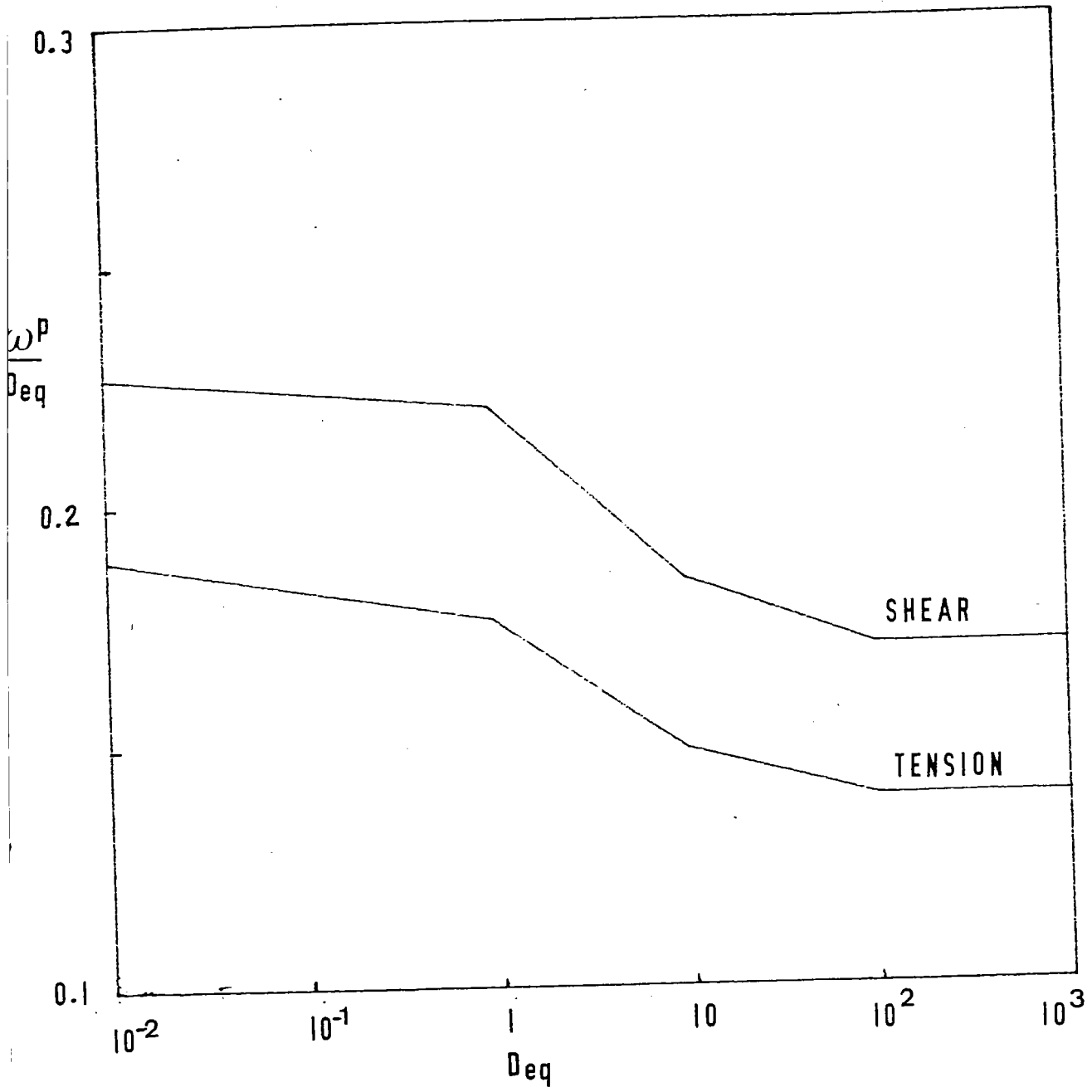


Figure 8.11. Evolution de la rotation plastique (normalisée par la vitesse de déformation équivalente) en fonction de la vitesse de déformation équivalente.

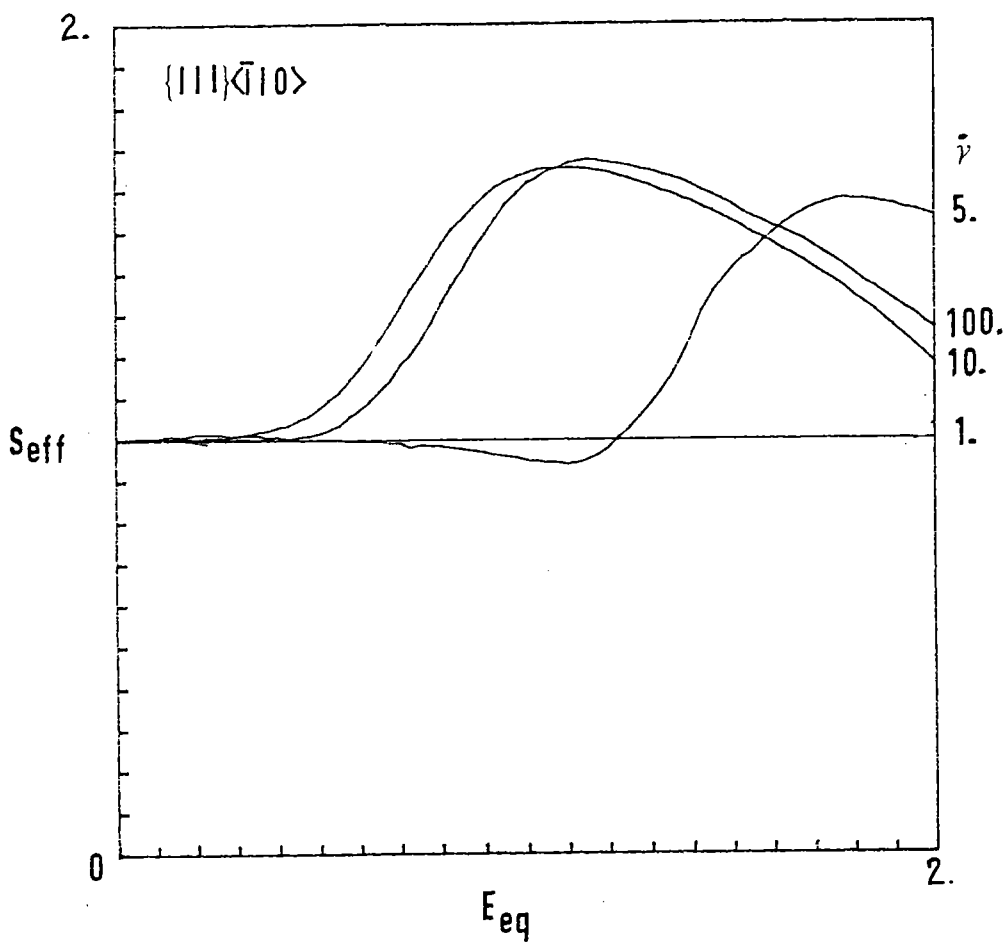


Figure 8.12. Evolution du facteur d'orientation (divisé par le facteur initial) pour l'orientation  $\{111\}\langle 110 \rangle$ . On peut noter la stabilité pour  $\nu=1$  ce qui n'est plus le cas à plus hautes vitesses.

(c'est-à-dire du nombre de systèmes actifs) apparait en régime dynamique.

Il faut noter que le changement de régime viscoplastique se fait pour  $\dot{\gamma}/\dot{\gamma}_0=1$  qui constitue une référence indépendante des matériaux. Par contre la valeur de  $\dot{\gamma}_0$  peut changer suivant les matériaux. L'existence de ce coude dans la figure 8.10 est encore sujet à débats: Les auteurs s'accordent sur l'existence de ce coude mais pas tous sur la valeur de  $\dot{\gamma}_0$ . Selon Follansbee et al.(15),  $\dot{\gamma}_0$  dépend de la manière dont les tests ont été effectués: en comparant des tests monotones ou en faisant des sauts de vitesse. Néanmoins, si l'on effectue un test de cisaillement avec une vitesse appliquée légèrement inférieure à  $\dot{\gamma}_0$ , l'apparition de bandes de cisaillement produira vraisemblablement des vitesses locales supérieures à  $\dot{\gamma}_0$ , et ainsi des oscillations dans le comportement local du matériau.

En conclusion, cette étude, qui constitue une extension du calcul DTI viscoplastique montre qu'une vitesse croissante de déformation plastique aura tendance à augmenter le nombre de systèmes de glissement actifs et donc à réduire la rotation plastique. Ceci conduit à stabiliser le développement de la texture en traction, par exemple, mais à le déstabiliser en cisaillement. Une orientation

stable en régime quasi-statique sera déstabilisée dans les conditions dynamiques. Ce résultat est d'ailleurs facilement vérifiable expérimentalement. La déstabilisation en cisaillement est liée à un comportement périodique en contrainte qui pourrait être utilisé pour augmenter la ductilité des matériaux présentant des bandes de cisaillement adiabatiques en régime dynamique, par exemple.

255

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

DU CHAPITRE 8

- (1) J.Gil Sevillano, P.van Houtte and E.Aernoudt, Progr.Mat.Sci., vol.25, 1981, P.69.
- (2) S.Tiem, M.Berveiller and G.R.Canova, Acta.Met., in press.
- (3) W.Hosford, Trans.Met.Soc.AIME, vol.12, 1961, p.230.
- (4) R.Hill, J.Mech.Phys.Sol., vol.13, 1965, p.89.
- (5) M.Berveiller et A.Zaoui, C.R. 15<sup>e</sup> Colloque GFR, paris 1980, p.175.
- (6) P.van Houtte, Proc. ICOTOM7, C.M.Brakman et al. eds, Netherlands Society for Metals, 1984, p.5.
- (7) G.R.Canova and U.F.Kocks, Proc.ICOTOM7, C.M.Brakman et al. eds, Netherlands Society for Metals, 1984, p.573.
- (8) C.N.Tomé, U.F.Kocks and G.R.Canova en préparation.
- (9) M.Cohen et F.Montheillet, rapport ATP CNRS contrat n°3136, 1979.
- (10) Chiem and Duffy, Mat.Sci.Eng., vol.48, 1981, p.207.
- (11) M.Stelly and R.Dormeval, Proc.IUTAM Symp.on High Velocity Deformations of Solids, Tokyo, 1977, p.82.
- (12) G.R.Canova, A.Molinari et C.Fressengeas, GFR Colloquium, Paris 1984.

- (13) U.S.Lindholm, J.Mech.Phys.Sol., vol.12, 1964, p.317
- (14) G.R.Canova, C.Fressengeas, A.Molinari and U.F.Kocks,  
soumis pour publication à J.Mech.Phys.Sol.



## 9 CONCLUSIONS

Un modèle de prédiction de textures a tout d'abord été établi permettant de prendre en compte l'effet morphologique des grains. Une analyse basée sur l'évaluation qualitative des fractions volumiques des grains affectées par des incompatibilités partielles entre grains voisins, a permis de savoir quelles composantes de déformation relaxer. Ce calcul a aussi permis de relier la rotation totale au niveau du grain avec la rotation totale macroscopique. Les résultats sont en accord, en tant que limites, avec des calculs plus rigoureux de type Eshelby. Une méthode basée sur la viscoplasticité a été exposée permettant de résoudre les problèmes de répartition des cisaillements microscopiques sur les systèmes de glissement actifs. Les trois méthodes testées de résolution des ambiguïtés donnent les mêmes résultats dans les conditions DPI (Déformation Partiellement Imposée), et la nouvelle méthode viscoplastique donne des résultats proches de la méthode de la moyenne aussi dans les cas DTI (Déformation Totale Imposée) sauf dans le cas de la compression uniaxiale. Les prédictions de textures faites en grandes déformations sur un matériau c.f.c. à durcissement isotrope des systèmes de glissement en traction, laminage et torsion sont en bon

accord avec l'expérience. Seul le cas de la compression uniaxiale est en désaccord avec l'expérience. Ce fait semble pouvoir être expliqué par l'effet de courbure des grains qui apparaît dans ce type de tests et qui contredit l'hypothèse de Taylor.

A partir du modèle et de tests de laboratoire, en traction, compression et torsion sur du cuivre OFHC, il a été possible d'éliminer par la modélisation l'effet textural sur les lois de comportement macroscopiques et ainsi d'obtenir des courbes d'écroutissement microscopique calculées. On a montré que les lois de comportement microscopiques sont une meilleure représentation d'une loi contrainte déformation équivalentes. Des différences subsistent néanmoins, qui ont été attribuées à deux effets. Les textures induites par ces différents trajets de chargement produisent, en effet, un nombre différent de systèmes actifs et aussi différents types d'interaction entre les systèmes.

Un concept a été exposé permettant de déduire certaines symétries dans les propriétés plastiques à partir des symétries de la texture: le concept de sous-espace fermé. Un sous-espace de contraintes fermé est tel que tout état de contrainte sur la surface de charge dans ce sous-espace est lié, par la loi de normalité, à un incrément de déformation appartenant à ce même sous-espace. Ce

principe permet de simplifier l'étude de certains problèmes mécaniques en réduisant le nombre de dimensions nécessaires à la surface de charge pour effectuer les calculs. Il permet entre autre d'expliquer les effets axiaux en torsion, et d'établir dans quel sous-espace de contraintes minimum faire le calcul des courbes limites de formage.

Une analyse de bandes de cisaillement en laminage a aussi été effectuée, basée sur le fait que les grains s'appâtissent au cours du processus. On a considéré qu'une bande de cisaillement allait naître, en déformation plane, suivant un angle correspondant à une élongation nulle lorsque la contrainte de cisaillement le long de cette bande passait par un maximum. Les statistiques associées à la population de grains utilisée dans la simulation montrent qu'il existe trois classes de grains. On a pu montrer que le schéma en "arêtes de poissons" observé expérimentalement possédait une probabilité maximum d'être orienté à  $37^\circ$ , alors que la probabilité maximum pour qu'une bande traverse l'échantillon entier était pour une orientation de  $45^\circ$ . On a aussi étudié de manière simplifiée l'influence des textures sur les courbes limites de formage. On a pu montrer, en particulier, que l'instabilité apparaît, dans le domaine de l'expansion lorsque la surface de charge associée à la texture présentait une forte courbure au point de charge.

Finalement, on a pu étudier les limites de l'hypothèse de Taylor, au travers du phénomène de courbure des grains en compression uniaxiale. Lorsque l'état de contrainte associé à une orientation, pour la déformation de Taylor, est très éloigné de l'état de contrainte moyen, des hétérogénéités de déformation plastique rentrent en jeu. Cette explication semble aussi cohérente avec le fait que la composante de texture du type Laiton manque dans les prédictions DPI et DTI et existe en réalité. Une amélioration du modèle a été présentée, qui donne plus de libertés aux grains d'ajuster leurs composantes de déformation non relaxées. On considère dans ce nouveau modèle que le grain est compatible avec son environnement immédiat et que l'agrégat ("cluster") formé est en équilibre avec la matrice. Les résultats permettent en effet de retrouver la composante (110) de texture de compression uniaxiale, en expliquant l'effet de courbure des grains et aussi la composante Laiton en laminage. Une première approche de modèles texturaux a enfin été effectuée dans le domaine des grandes vitesses, où la viscosité joue un rôle important. On a pu montrer qu'une vitesse de déformation croissante a tendance à augmenter le nombre de systèmes de glissement actifs, et à diminuer le terme de rotation

plastique. Ceci a pour effet, entre autre, de provoquer des phénomènes oscillatoires en cisaillement simple.

## ANNEXE 1

### CALCUL DE L'EQUATION D'INTERACTION POUR UNE INCLUSION ELLIPSOIDALE

La formule de Kröner peut être obtenue directement en supposant que la déformation plastique est constante par morceaux et égale à  $\underline{\underline{\epsilon}}^P$  dans l'inclusion et  $\underline{\underline{\epsilon}}^P$  dans la matrice.

Si  $\theta_V(r)$  est la fonction indicatrice pour l'inclusion, ou :

$$\begin{aligned}\theta_V(r) &= 1 \text{ si } r \in V \\ &= 0 \text{ sinon}\end{aligned}$$

La déformation plastique peut s'écrire :

$$\underline{\underline{\epsilon}}^P = \underline{\underline{\epsilon}}^P + (\underline{\underline{\epsilon}}^P - \underline{\underline{\epsilon}}^P) \theta_V(r)$$

Pour un milieu infini ayant des propriétés élastiques isotropes, le gradient de déplacement total en tout point  $r$  peut être obtenu en utilisant le tenseur de Green selon l'expression :

$$u_{n,m}^T = u_{n,m}^{T_0} + \int C_{ijkl} G_{j,n,im}(r-r') \Delta \epsilon_{kl}^P dV' \quad (A1.1)$$

où  $u_{n,m}^{T_0}$  est le tenseur gradient de déplacement total à l'infini, et l'intégrale est calculée sur le volume  $V$  de l'inclusion;  $\Delta \epsilon^P$  est la différence des déformations plastiques entre l'inclusion et la matrice. Bien que le tenseur de Green ait une forme analytique simple pour un milieu isotrope, le volume de l'inclusion peut changer de forme, modifiant les résultats. On obtient :

\*pour la partie symétrique de  $u_{n,m}$ :

$$\epsilon_{nm}^T = \epsilon_{nm}^T + S_{nmkl} \Delta \epsilon_{kl}^P \quad (A1.2)$$

$$\text{avec } S_{nmkl} = (1/2V) \iint_{V'} C_{ijkl} (G_{jn,im} + G_{jm,in}) dV dV'$$

\*pour la partie antisymétrique:

$$\omega_{nm}^T = \omega_{nm}^T + A_{nmkl} \Delta \epsilon_{kl}^P \quad (A1.3)$$

$$\text{avec } A_{nmkl} = (1/2V) \iint_{V'} C_{ijkl} (G_{jn,im} - G_{jm,in}) dV dV'$$

Les différents volumes d'intégration dus aux différentes formes des inclusions modifient les valeurs des tenseurs  $S$  et  $A$ , qui, en retour, affecte l'interaction mécanique et les changements d'orientation.

En utilisant l'équ.(A1.1), les composantes de contrainte dans l'inclusion peuvent être obtenues d'abord en décomposant la déformation totale en sa partie élastique et plastique:

$$\epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^P = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^P + S_{ijkl} (\epsilon_{kl}^P - E_{kl}^P)$$

et on obtient pour la contrainte:

$$\sigma_{ij} = \tau_{ij} + C_{ijkl} (I_{klmn} - S_{klmn}) (E_{mn}^P - \epsilon_{mn}^P) \quad (A1.4)$$

qui est la formule de Kröner généralisée.

Un résultat similaire est obtenu avec la partie antisymétrique:

$$\omega_{mn}^* = \omega_{mn}^T - \omega_{mn}^P + A_{mnkl} (\epsilon_{kl}^P - E_{kl}^P) \quad (A1.5)$$

248

## ANNEXE 2

### ETUDE DES ETATS PLASTIQUES D'ORDRE

#### 4, 3 et 2

L'ensemble des états de contrainte qui peuvent être associés à l'activité de quatre systèmes indépendants dans l'état critique, est décrit par la relation:

$$\underline{\sigma} = x_U \underline{\sigma}^U + x_V \underline{\sigma}^V$$

avec  $x_U + x_V = 1$  et  $x_U$  et  $x_V > 0$  (A2.1)

Il est donc possible de dresser une table décrivant, ainsi que les norme Hershey, les états plastiques du quatrième ordre (EP4). Ceux-ci sont représentés sur la table A2.1 avec les sommets adjacents et les systèmes associés. Les résultats sont en accord avec ceux de Hershey, malgré que ce dernier n'ait pas distingué les groupes 4D et 4E. Ceux-ci, bien que joignant les mêmes classes de sommets, vont activer respectivement deux et trois plans de glissement.

A noter également le fait que les groupes EP4B et 4H vont encore donner lieu à des ambiguïtés. Néanmoins seulement 36 EP4 sur 108 vont poser ces problèmes d'ambiguïtés.

Pour trouver les EP3, il suffit d'analyser chaque paire d'EP4 (ou chaque triplet de sommets) pour ne retenir que celles ayant trois systèmes indépendants en commun. Les



135 EP3 tabulés sur le tableau A2.2 correspondent encore à ceux trouvés par Hershey, sauf que ce dernier a regroupé les familles 3D et 3E qui n'ont pas le même nombre de plans de glissement. On voit aussi, sur cette table, que les EP3B et 3C vont aussi poser ce problème d'ambiguïtés. De manière analogue à la description paramétrique des EP4, il est possible de décrire les EP3 de la manière suivante:

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}^3 &= x_U \underline{\sigma}^U + x_V \underline{\sigma}^V + x_W \underline{\sigma}^W \\ \text{avec } x_U, x_V \text{ et } x_W &> 0 \end{aligned} \quad (\text{A2.2})$$

où  $\underline{\sigma}^U$ ,  $\underline{\sigma}^V$  et  $\underline{\sigma}^W$  représentent les trois sommets tabulés comme limitant l'EP3

Enfin pour les EP2, la méthode est la même, et les résultats, tableau A2.3, coïncident avec ceux de Hershey. Bien que ce cas n'ait que peu d'intérêt pratique, il faut noter qu'aucun EP2 n'est ambigu.

CONNECTING VERTICES			SLIP SYSTEMS ACTIVATED				CONNECTING VERTICES			SLIP SYSTEMS ACTIVATED			
TYPE NO.	TYPE INDICES	TYPE INDICES	TYPE NO.	TYPE INDICES	TYPE INDICES								
<b>4A</b>	<b>A - C</b>	<b>FQ; FK; UF; UK</b>	<b>4F</b>	<b>C - D</b>	<b>FQ; FK; KF; UK</b>								
1	1 8	2 3 9 8	55	8 15	2 17 18 24								
2	1 36	5 6 11 12	56	8 18	18 8 23 24								
3	2 9	1 15 16 18	57	8 19	17 18 9 23								
4	2 37	19 21 10 24	58	8 21	3 17 23 24								
5	3 10	4 17 7 20	59	8 44	2 3 17 9								
6	3 38	13 14 22 23	60	8 45	3 9 8 23								
<b>4B</b>	<b>A - E</b>	<b>FQ; UK; KQ; UF; OQ; FU</b>	61	8 48	2 18 9 8								
7	1 27	2 3 6 9 11 12	62	8 50	2 3 8 24								
8	1 28	3 5 6 9 8 12	63	9 11	1 7 9 12								
9	1 53	2 3 5 6 8 11	64	9 13	16 9 22 12								
10	1 54	2 5 9 8 11 12	65	9 19	18 7 9 22								
11	2 23	1 16 18 19 10 24	66	9 22	15 7 22 12								
12	2 24	1 15 16 19 21 10	67	9 40	1 15 18 7								
13	2 55	15 16 18 19 21 24	68	9 42	15 16 18 22								
14	2 56	1 15 18 21 10 24	69	9 48	1 16 18 9								
15	3 25	14 17 7 20 22 23	70	9 49	1 15 16 12								
16	3 26	13 14 4 17 20 23	71	10 11	1 2 7 11								
17	3 51	13 14 4 7 20 22	72	10 14	2 4 10 11								
18	3 52	13 4 17 7 22 23	73	10 15	1 2 17 10								
<b>4C</b>	<b>K - C</b>	<b>FQ; OF; KQ; OK</b>	74	10 17	1 20 10 11								
19	4 8	2 17 18 9	75	10 40	1 17 7 20								
20	4 9	1 18 7 9	76	10 41	4 17 20 10								
21	4 10	1 2 17 7	77	10 44	2 4 17 7								
22	5 9	1 15 7 12	78	10 46	4 7 20 11								
23	5 10	1 7 20 11	<b>4G</b>	<b>C - E</b>	<b>FQ; QF; UK; KF</b>								
24	5 36	15 20 11 12	79	8 23	2 18 8 24								
25	6 8	2 3 17 24	80	8 52	3 17 9 23								
26	6 10	2 4 17 10	81	9 25	15 18 7 22								
27	6 37	3 4 10 24	82	9 54	1 16 9 12								
28	7 8	18 8 9 23	83	10 27	2 4 7 11								
29	7 9	16 18 9 22	84	10 56	1 17 20 10								
30	7 38	16 8 22 23	<b>4H</b>	<b>D - E</b>	<b>FQ; UK; UF; KQ; KF</b>								
<b>4D</b>	<b>B - D</b>	<b>FQ; FK; KF; KQ</b>	85	11 27	2 7 9 11 12								
31	4 11	1 2 7 9	86	11 54	1 2 9 11 12								
32	4 15	1 2 17 18	87	12 28	13 3 5 6 8								
33	4 19	17 18 7 9	88	12 53	3 5 6 19 8								
34	5 40	1 15 7 20	89	13 28	5 8 9 22 12								
35	5 46	7 20 11 12	90	13 54	16 5 8 9 12								
36	5 49	1 15 11 12	91	14 27	2 3 4 6 11								
37	6 41	4 17 10 24	92	14 53	2 3 6 10 11								
38	6 44	2 3 4 17	93	15 23	1 2 18 10 24								
39	6 50	2 3 10 24	94	15 56	1 17 18 10 24								
40	7 42	16 18 22 23	95	16 24	15 16 5 19 21								
41	7 45	8 9 22 23	96	16 55	14 15 16 19 21								
42	7 48	16 18 8 9	97	17 24	1 15 21 11 10								
<b>4E</b>	<b>K - D</b>	<b>FQ; FK; KQ; OK</b>	98	17 56	1 15 20 21 10								
43	4 40	1 17 18 7	99	18 23	16 18 19 8 24								
44	4 44	2 17 7 9	100	18 55	16 18 19 23 24								
45	4 48	1 2 18 9	101	19 25	17 18 7 22 23								
46	5 11	1 7 11 12	102	19 52	17 7 9 22 23								
47	5 17	1 15 20 11	103	20 26	13 14 4 21 20								
48	5 22	15 7 20 12	104	20 51	13 14 4 6 20								
49	6 14	2 3 4 10	105	21 26	13 4 17 24 23								
50	6 15	2 17 10 24	106	21 52	13 3 4 17 23								
51	6 21	3 4 17 24	107	22 25	14 15 7 20 22								
52	7 13	16 8 9 22	108	22 51	14 7 20 12 22								
53	7 18	16 18 8 23											
54	7 19	18 9 22 23											

Tableau A2.1

Liste des états plastiques d'ordre 4. Ceux-ci sont classés par type d'interaction. Les sommets de la surface de charge limitant le domaine des EP4 sont tabulés, ainsi que les systèmes de glissement associés.



Tableau A2.3

Liste des EP2, classés par type d'interaction. Les EP5 limitants le domaine de ces EP2 sont tabulés, ainsi que les systèmes associés. On peut noter qu'aucun EP2 n'est sujet au problème des ambiguïtés.

TYPE NO.	VERTICES CONNECTED INDICES								SLIP SYSTEMS INDICES		TYPE NO.	VERTICES CONNECTED INDICES								SLIP SYSTEMS INDICES	
									FR	FK										FR	QU
<u>2A</u>											<u>2D</u>										
1	1	6	8	14	27	44	50	53	2	3	31	4	8	15	23	48			2	18	
2	1	7	8	13	28	45	48	54	9	8	32	4	9	11	48	54			1	9	
3	1	5	11	27	36	46	49	54	11	12	33	4	9	19	25	40			18	7	
4	1	12	28	32	36	43	47	53	5	6	34	5	10	17	40	56			1	20	
5	2	7	9	19	23	42	48	55	16	18	35	5	17	24	36	49			15	11	
6	2	5	9	17	24	40	49	56	1	15	36	5	22	36	46	51			20	12	
7	2	6	15	23	37	41	50	56	10	24	37	6	10	14	27	44			2	4	
8	2	16	24	32	37	39	47	55	19	21	38	6	14	37	50	53			3	10	
9	3	5	10	22	25	40	46	51	7	20	39	6	21	26	37	41			4	24	
10	3	6	10	21	26	41	44	52	4	17	40	7	8	18	23	48			18	8	
11	3	7	19	25	38	42	45	52	22	23	41	7	13	28	38	45			8	22	
12	3	20	26	32	38	39	43	51	13	14	42	7	18	38	42	55			16	23	
											43	4	8	19	44	52			17	9	
											44	4	10	11	27	44			2	7	
<u>2B</u>									<u>FR</u> <u>QP</u>												
13	4	6	8	10	15	44			2	17	45	4	10	15	40	56			1	17	
14	4	7	8	9	19	48			18	9	46	5	9	11	49	54			1	12	
15	4	5	9	10	11	40			1	7	47	5	9	22	25	40			15	7	
16	5	9	22	34	36	49			15	12	48	5	10	11	27	46			7	11	
17	5	10	17	35	36	46			20	11	49	6	8	15	23	50			2	24	
18	6	10	14	35	37	41			4	10	50	6	8	21	44	52			3	17	
											51	6	10	15	41	56			17	10	
											52	7	8	19	45	52			9	23	
											53	7	9	13	48	54			16	9	
											54	7	9	19	25	42			18	22	
<u>2C</u>									<u>FR</u> <u>KQ</u>												
19	1	4	8	11	27	44	48	54	2	9											
20	1	8	12	28	33	45	50	53	3	8											
21	1	14	27	35	36	46	47	53	6	11											
22	1	13	28	34	36	43	49	54	5	12											
23	2	4	9	15	23	40	48	56	1	18											
24	2	9	16	24	34	42	49	55	15	16											
25	2	18	23	33	37	39	50	55	19	24											
26	2	17	24	35	37	41	47	56	21	10											
27	3	4	10	19	25	40	44	52	17	7											
28	3	10	20	26	35	41	46	51	4	20											
29	3	22	25	34	38	42	43	51	14	22											
30	3	21	26	33	38	39	45	52	13	23											
											<u>2E</u>										
											55	1	8	27	28	30	44	45	52	3	9
											56	1	8	23	31	48	50	53	54	2	8
											57	1	27	28	30	36	43	46	51	6	12
											58	1	12	14	27	28	30	37	53	3	6
											59	1	9	11	13	27	28	30	54	9	12
											60	1	10	11	14	27	31	53	54	2	11
											61	1	12	13	28	31	38	53	54	5	8
											62	1	24	31	36	47	49	53	54	5	11
											63	2	9	23	24	31	48	49	54	1	16
											64	2	23	24	31	37	47	50	53	19	10
											65	2	16	18	23	24	31	38	55	16	19
											66	2	10	15	17	23	24	31	56	1	10

253

### ANNEXE 3

## RESULTATS COMPLEMENTAIRES SUR LA TORSION

Nous présentons ici deux tableaux (tableaux A3.1, A3.2) et les figures (de A3.1 à A3.6) correspondant respectivement aux cas DTI à  $\gamma=2.5$  et DPI à  $\gamma=2.5$ . Ces résultats, qui sont ici à titre indicatifs, sont les étapes intermédiaires entre les textures initiales ( $\gamma=0$ ) et les résultats présentés au chapitre 4.

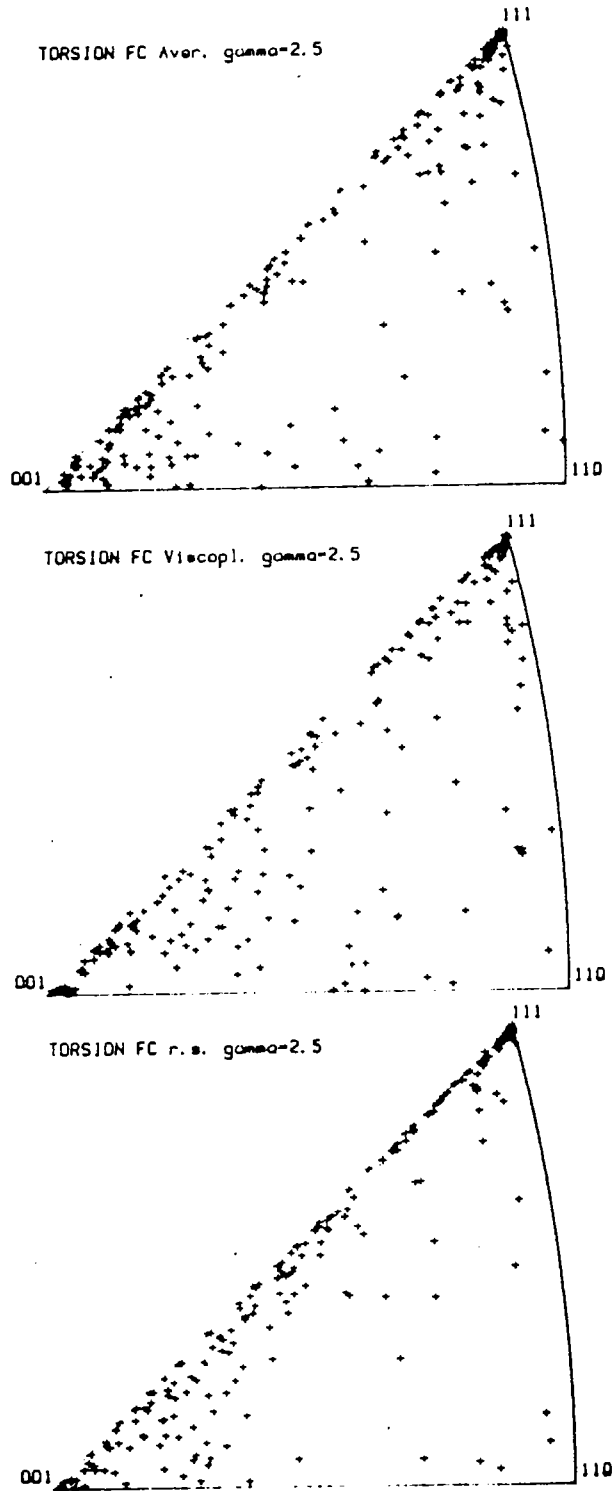


Figure A3.1. Figures inverses de poles montrant la normale au plan de cisaillement pour des textures simulées en torsion selon la méthode DTI, pour une déformation de cisaillement  $\gamma=2.5$ . On résout les ambiguïtés suivant les trois schémas déjà exposés (Aver., Viscop. et r.s.).

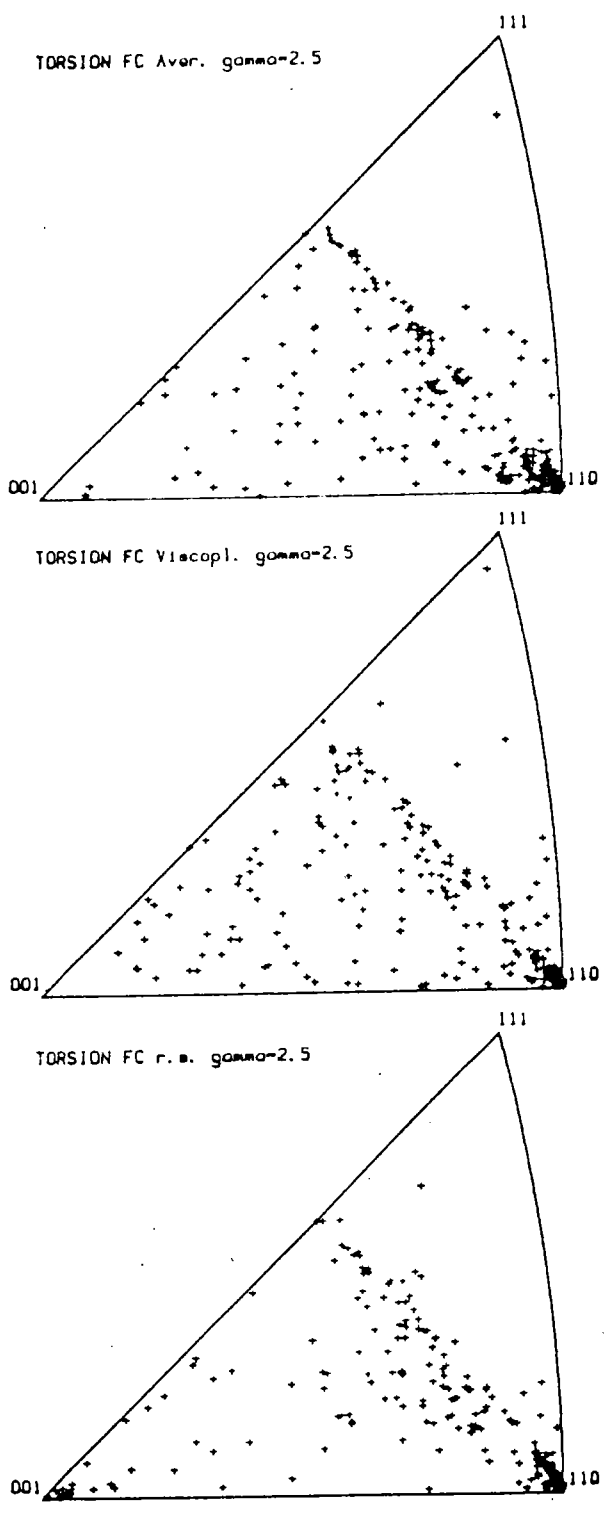


Figure A3.2. Figures inverses de poles montrant la direction de cisaillement pour les textures correspondantes à la figure A3.1.

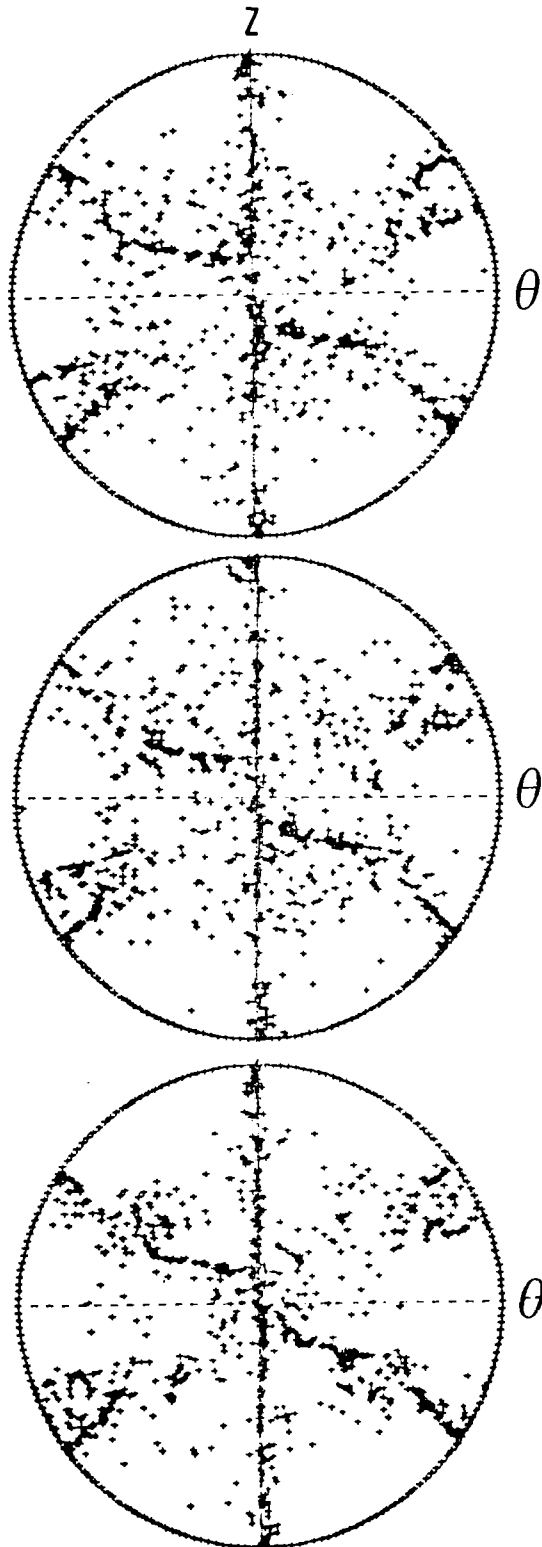


Figure A3.3. Figures de poles (111) décrivant les textures de torsion précédemment montrées sur les figures A3.1 et A3.2



Tableau A3.1  
 Statistiques associées aux textures de torsion DTI ( $\gamma=2.5$ )  
 décrites sur les figures A3.1 à A3.3.

TORSION (DTI)  $\gamma=2.5$

	Aver.	Viscopl.	r.s.
M	1.55806	1.58400	1.60438

répartition des grains par type d'interaction de systèmes

5A	0.5	0.5	0.0
5B	22.5	26.3	25.8
5C	31.1	33.0	30.1
5D	29.2	28.7	38.3
5E	16.7	11.5	5.7

répartition des grains par nombre de systèmes actifs

1	2.3	1.9	2.4
2	43.5	38.3	46.9
3	9.5	18.7	17.7
4	8.6	14.8	21.1
5	2.3	6.7	12.0
6	1.4	10.0	0.0
7	2.3	5.7	0.0
8	29.7	3.8	0.0

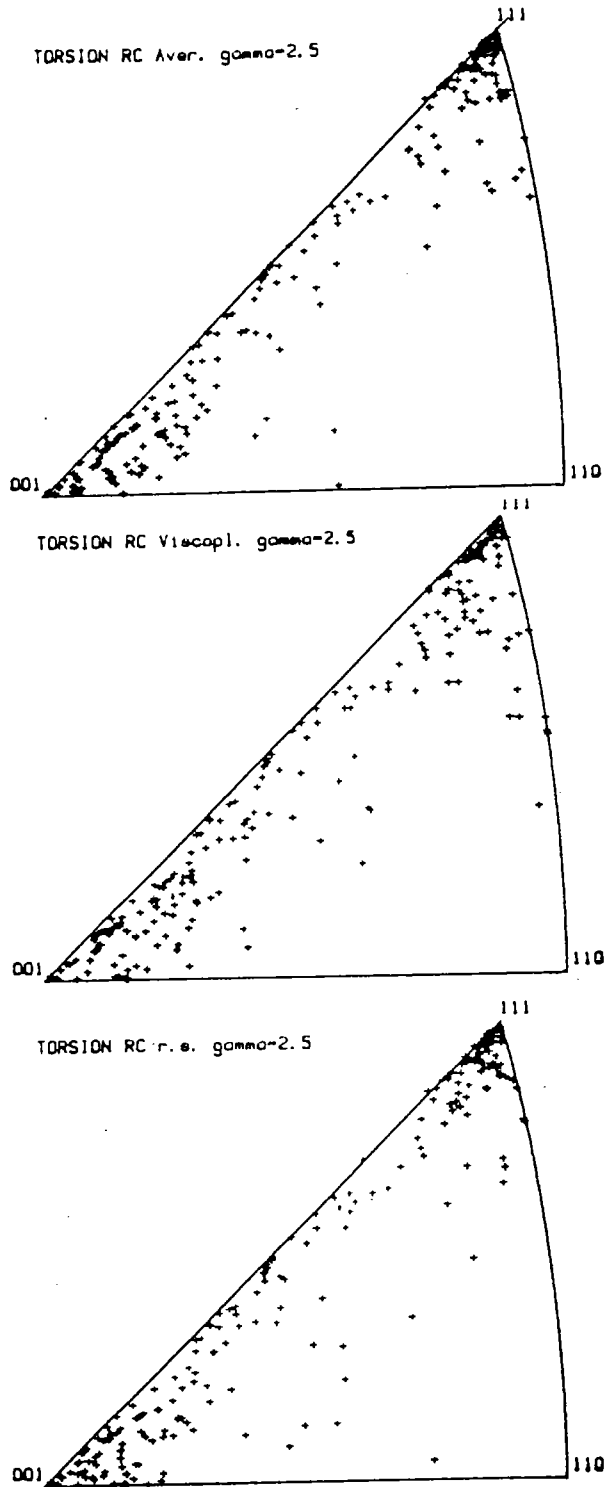


Figure A3.4. Figures inverses de poles montrant les normales aux plans de cisaillement correspondant aux textures calculées suivant la théorie DPI à  $\gamma=2.5$ , avec les trois méthodes de résolution des ambiguïtés.

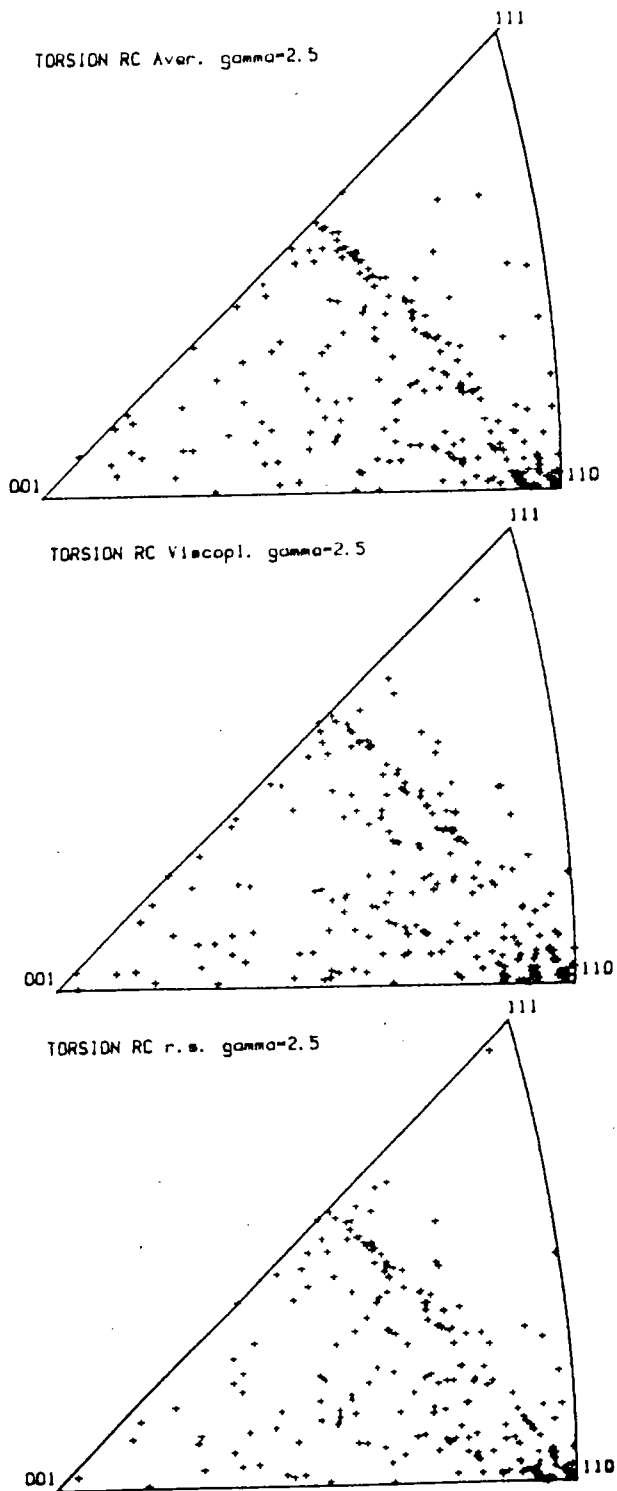


Figure A3.5. Figures inverses de poles montrant les directions de cisaillement pour les mêmes textures que sur la figure A3.4.

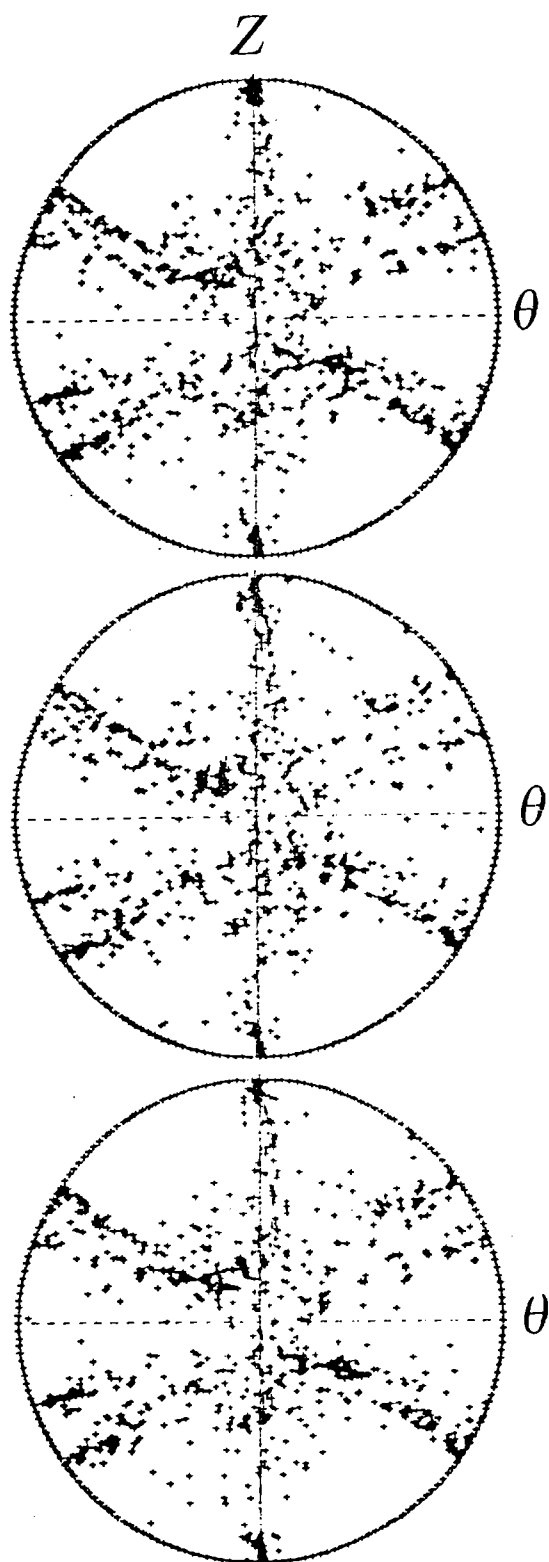


Figure A3.4. Figures de poles (111) associées aux textures des figures précédentes.

Tableau A3.2

Statistiques associées aux textures décrites sur les figures A3.4 à A3.6.

TORSION (DPI)  $\gamma=2.5$

	Aver.	Viscopl.	r.s.
M	1.52552	1.53044	1.51624

répartition des grains par type d'interaction de systèmes

4A	1.4	0.0	1.0
4B	6.7	8.6	6.7
4C	8.1	16.7	7.7
4D	9.1	5.7	9.1
4E	8.6	7.7	8.2
4F	52.2	44.5	51.9
4G	0.5	0.5	0.5
4H	13.4	16.3	14.9

répartition des grains par nombre de systèmes actifs

1	7.6	3.8	6.7
2	52.6	47.8	51.7
3	26.3	28.2	32.5
4	9.1	13.9	8.6
5	3.3	1.0	0.0
6	1.0	4.3	0.0
7	0.0	0.5	0.0
8	0.0	0.5	0.0