



**HAL**  
open science

# Modélisation de la propagation d'une fissure de fatigue après application des chargements à amplitudes variables

Ahmed Bia

## ► To cite this version:

Ahmed Bia. Modélisation de la propagation d'une fissure de fatigue après application des chargements à amplitudes variables. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université Paul Verlaine - Metz, 1986. Français. NNT : 1986METZ012S . tel-01775703

**HAL Id: tel-01775703**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01775703>**

Submitted on 24 Apr 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

# THESE

présentée  
à l'UER SCIENCES EXACTES ET NATURELLES  
DE L'UNIVERSITE DE METZ

Pour obtenir  
le grade de DOCTEUR de l'Université de Metz

en GENIE PHYSIQUE et MECANIQUE

par

**Ahmed BIA**

| BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE<br>- METZ |                        |
|--------------------------------------|------------------------|
| N° inv.                              | 1986 024 S             |
| Cote                                 | S/M <sub>3</sub> 86/12 |
| Loc                                  | Magasin                |

*MODELISATION DE LA PROPAGATION D'UNE FISSURE DE FATIGUE*

*APRES APPLICATION DES CHARGEMENTS A AMPLITUDES VARIABLES*

Soutenue le 17 octobre 1986 à 14 H. Amphi Poncelet, devant la Commission

Directeur de Thèse

M. le Professeur G. PLUVINAGE - Université de Metz

Rapporteurs

MM. Professeur C. GASC  
Docteur M. GUEURY  
Professeur J.D. WEBER

ENSMA Poitiers  
INPL-ENSEM de Nancy  
Université de Metz

Examineurs

MM. Docteur M. AFZALI  
Professeur J.J. HEIZMANN  
Docteur H.P. LIEURADE

CETIM-Senlis  
Université de Metz  
IRSID St-Germain-en-Laye

*A mes parents*

# SOMMAIRE

|  | <u>Pages</u> |
|--|--------------|
| AVANT-PROPOS   |              |
| RESUME   |              |
| LISTE DES SYMBOLES   |              |
| I - INTRODUCTION   | I            |
| 2 - PHENOMENOLOGIE   | 3            |
| 2-1) Description du phénomène de surcharge   | 3            |
| 2-2) Définition des caractéristiques   | 3            |
| 2-3) Causes du phénomène de ralentissement   | 5            |
| 2.3.1) Phénomène primaire : les contraintes résiduelles  | 5            |
| 2.3.1.1) Origine de contraintes résiduelles  | 5            |
| 2.3.1.2) Calcul de contraintes résiduelles   | 5            |
| 2.3.2) Phénomène secondaire : le concept de fermeture  | 7            |
| 2.3.2.1) Origine du phénomène de fermeture   | 7            |
| 3 - MODELE EXPLIQUANT L'INFLUENCE DES SURCHARGES SUR LE<br>RETARD DE LA PROPAGATION DES FISSURES | 8            |
| 3.1) Introduction  | 8            |
| 3.2) Etude bibliographique   | 9            |
| 3.2.1) Modèles basés sur le concept de fermeture de fissure                                      | 9            |
| 3.2.1.1) Rappel du modèle d'Elber  | 9            |
| 3.2.1.2) Modèle de Trebules  | 10           |
| 3.2.1.3) Modèle de Schijve   | 11           |
| 3.2.2) Modèles basés sur l'interaction des zones plastifiées                                     | 12           |

|            |   |    |
|------------|---|----|
| 3.2.2.1)   | Modèle de Wheeler   | 12 |
| 3.2.2.2)   | Modèle de Willenborg  | 13 |
| 3.2.2.3)   | Modèle de Führung   | 15 |
| 3.2.3)     | Modèles basés sur le concept de fermeture de fissure et de l'interaction des zones plastifiées                                      | 16 |
| 3.2.3.1)   | Modèle de Clerivet  | 16 |
| 3.2.3.2)   | Modèle de Matsuoka  | 18 |
| 3.2.3.3)   | Modèle de Taira   | 22 |
| 3.2.3.4)   | Modèle de Sunder  | 24 |
| 3.2.4)     | Modèles basés sur le concept de la mini-éprouvette  | 27 |
| 3.2.4.1)   | Modèle basé sur le concept de la mini-éprouvette sans accumulation du dommage   | 27 |
| 3.2.4.1.1) | Modèle de Glinka  | 27 |
| 3.2.4.2)   | Modèles basés sur le concept de la mini-éprouvette avec accumulation du dommage   | 35 |
| 3.2.4.2.1) | Modèle de Glinka  | 35 |
| 3.2.4.2.2) | Modèle de Stouffer  | 37 |
| 3.3)       | Discussion  | 41 |
| 3.4)       | Modélisation  | 44 |
|            | Modèle de vitesse de fissuration basé sur l'analyse des contraintes et des déformations à la pointe de fissure en déformation plane | 44 |
| 3.4.1)     | Introduction  | 44 |
| 3.4.2)     | Expression du champ des contraintes et des déformations sous chargements cycliques en état de déformation plane                     | 45 |
| 3.4.3)     | Calcul du coefficient d'entrave à la plasticité $\beta$   | 46 |
| 3.4.3.1)   | Calcul de $\beta$ dans le cas de chargement monotone  | 46 |
| 3.4.3.2)   | Calcul de $\beta$ dans le cas de chargement cyclique  | 49 |
| 3.4.4)     | Prise en compte des effets de fermeture de fissure  | 51 |
| 3.4.5)     | Vérifications expérimentales  | 55 |

|   |    |
|---|----|
| 3.4.5.1) Conditions expérimentales  | 55 |
| 3.5.5.2) Eprouvette utilisée  | 56 |
| 3.4.5.3) Comparaison avec les résultats expérimentaux                                     | 57 |
| 3.4.5.4) Résultats et discussion  | 58 |
| 3.5) Conclusion   | 61 |
| 4 - SIMULATION NUMERIQUE BASEE SUR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS                          | 62 |
| 4.1) Introduction   | 62 |
| 4.2) Rappel de technique de la progression de la fissure                                  | 64 |
| 4.3) Etude bibliographique  | 66 |
| 4.3.1) Simulation de Newman   | 66 |
| 4.3.1.1) Cas de chargements à amplitude constante   | 68 |
| 4.3.1.2) Cas de chargements à amplitude variable  | 69 |
| 4.3.2) Simulation d'Ogura   | 71 |
| 4.3.3) Simulation de Wästberg   | 72 |
| 4.4) Discussion   | 73 |
| 4.5) Simulation   |    |
| Simulation par méthode aux éléments finis de la propagation d'une fissure après surcharge | 75 |
| 4.5.1) Principe du programme d'éléments finis proposé                                     | 75 |
| 4.5.2) L'approche numérique en élastoplasticité   | 75 |
| 4.5.2.1) Méthode de la raideur variable   | 78 |
| 4.5.2.2) Méthode de la contrainte initiale  | 82 |
| 4.5.2.3) Comparaison de deux méthodes   | 86 |
| 4.5.3) Structure de programme   | 87 |

|   |     |
|---|-----|
| 4.5.3.1) La description de chaque module                              |     |
| 4.5.3.1.1) Module de maillage (option dans le code<br>CASTOR-2D)      | 88  |
| 4.5.3.1.2) Module de calcul élasto-plastique                          | 88  |
| 4.5.4) Processus de résolution  | 89  |
| 4.5.5) Critère de propagation de la fissure                           | 92  |
| 4.5.6) Applications   | 95  |
| 4.5.6.1) Nature des essais simulés                                    | 96  |
| 4.5.6.2) Configuration du chargement                                  | 97  |
| 4.5.6.3) Maillage   | 97  |
| 4.5.6.4) Conditions aux limites sur les déplacements                  | 98  |
| 4.5.6.5) Résultats et discussion                                      | 99  |
| 4.6) Conclusion   | 100 |
| <b>5 - MODELES BASES SUR LA THEORIE DES DISLOCATIONS</b>              |     |
| 5.1) Introduction   | 103 |
| 5.2) Étude bibliographique  |     |
| 5.2.1) Modèle de McCartney  | 103 |
| 5.2.2) Modèle de Kanninen   | 111 |
| 5.2.3) Modèle de Ma Delin   | 117 |
| 5.3) Discussion   | 118 |
| 5.4) Modélisation   |     |
| Modèle de vitesse de fissuration basé sur la théorie des dislocations |     |
| 5.4.1) Principe du modèle   | 120 |
| 5.4.2) Calcul de la longueur de plans de glissements                  | 121 |
| 5.4.3) Calcul de l'écartement à la pointe de fissure                  | 123 |

|   |     |
|---|-----|
| 5.4.3.1) Conditions aux limites   | 124 |
| 5.4.4) Calcul de la vitesse de fissuration en fatigue sous chargement à amplitude variable          | 129 |
| 5.4.5) Comparaison avec les résultats expérimentaux   |     |
| 5.4.5.1) Vérification expérimentale   | 131 |
| 5.4.5.2) Résultats et discussion  | 132 |
| 5.5) Conclusion   | 132 |
| 6 - RESULTATS ET DISCUSSION   | 135 |
| 6.1) Performances des modèles   | 138 |
| 6.2) Facilité d'utilisation et coût de calcul   | 140 |
| 6.3) Hypothèses, données expérimentales et critères de propagation utilisée                         | 141 |
| 6.4) Commentaires   | 145 |
| 7 - CONCLUSION  | 147 |
| 8 - BIBLIOGRAPHIE   | 148 |
| 9 - ANNEXES   |     |
| 9.1) Annexe A   |     |
| 9.1.1) Relations de comportement du matériau élastoplastique  | 152 |
| 9.1.2) Analyse des contraintes et des déformations au voisinage de l'extrémité d'une fissure        | 153 |
| 9.1.3) Organigramme :<br>Modèle basé sur le concept de mini-éprouvette sans accumulation du dommage | 159 |
| 9.1.4) Calcul de l'écartement de fissure (CTOD)   | 162 |
| 9.2) Annexe B   |     |
| 9.2.1) Exploitation des programmes  |     |
| 9.2.1.1) La mise en données   | 164 |

|   |     |
|---|-----|
| 9.2.1.2) Organigramme global des programmes<br>élastoplastiques                       | 166 |
| 9.2.1.3) Approche simplifiée des problèmes de plasticité<br>cyclique bidimensionnelle | 170 |
| 9.3) Annexe C   |     |
| 9.3.1) Distribution des dislocations  | 177 |
| 9.3.2) Equilibre d'une fissure  | 180 |
| 9.3.3) Définition des fonctions $M_i$ et $H_i$  | 187 |
| 9.3.4) Organigramme : Calcul de la vitesse de fissuration                             | 188 |

## AVANT-PROPOS

Ce travail a été réalisé au Laboratoire de Fiabilité Mécanique de l'Université de Metz, sous la direction de Monsieur le Professeur Guy PLUVINAGE. Qu'il trouve ici l'expression de ma gratitude pour le soutien qu'il m'a fourni.

Je remercie tout particulièrement Messieurs les Professeurs C. GASC et J.D. WEBER et le Dr M. GUEURY, qui ont bien voulu être les rapporteurs de ma thèse, ainsi que pour leurs lectures minutieuses et pour les commentaires précis dont ils m'ont fait profiter.

Ma reconnaissance s'adresse aussi à Monsieur le Professeur J.J. HEIZMANN et Messieurs les Drs M. AFZALI et H.P. LIEURADE, pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail en acceptant de faire partie de mon Jury.

J'aimerais également remercier Mademoiselle C. ROBIN, Messieurs M. LOUAH et Madame MM. HONNERT pour l'aide qu'ils m'ont fournie.

Je remercie chaleureusement mes camarades de Laboratoires. Ainsi, à tous les collaborateurs Scientifiques, Techniques et Administratifs du "Département Calcul des Structures", et plus largement du CETIM-Senlis qui m'ont fait découvrir l'apport enrichissant de leurs connaissances, et le caractère indispensable de leur fonction, je souhaite rendre un hommage particulier.

"Ce travail a été réalisé avec l'appui financier du Ministère de l'Industrie et de la Recherche - DGRST - "

## R E S U M E

La modélisation de la progression d'une fissure soumise à un chargement d'amplitude constante après l'application d'une surcharge est réalisé à partir de 3 méthodes :

- 1) Méthode analytique,
- 2) Méthode numérique basée sur la méthode des éléments finis (EF),
- 3) Méthode basée sur la théorie des dislocations.

### 1 - Méthode analytique

La vitesse de fissuration est calculée en utilisant la procédure suivante :

. la distribution des contraintes et des déformations à la pointe de fissure est déterminée par la valeur de  $\Delta K$  donnée,

. l'amplitude de déformation  $\Delta \epsilon^*$  correspondant à la distance  $X^*$  en est alors déduite,

. le nombre de cycles  $N^*$ , correspondant à la rupture du matériau sous l'amplitude de déformation  $\Delta \epsilon^*$ , est obtenu à partir de la relation de Manson-Coffin,

. la vitesse de fissuration supposée uniforme dans l'intervalle  $X^*$  est définie par le rapport :

$$\frac{da}{dN} = \frac{X^*}{N^*} \quad (6.1.)$$

### 2 - Méthode numérique EF. :

La simulation de la progression des fissures de fatigue est obtenue en utilisant le critère suivant :

Lorsque la charge atteint sa valeur maximale et que l'écartement à fond de fissure (CTOD<sub>ef</sub>) dépasse une valeur seuil, il y a une libération du noeud situé à la pointe de fissure. La fissure avance alors par bonds successifs, chacun des bonds étant égal à la longueur d'un élément de maillage.

La vitesse de fissuration est calculée en faisant appel au concept d'écartement de fissure (CTOD<sub>ef</sub>) :

$$\frac{da}{dN} = f (CTOD_{ef}) \quad (6.2)$$

### 3 - Méthode basée sur la théorie des dislocations:

La vitesse de fissuration est basée sur la détermination de l'écartement à fond de la fissure CTOD<sub>d</sub> (où le CTOD<sub>d</sub> est calculé par la méthode de dislocation).

Le modèle est basé sur une méthode de superposition en vue de représenter l'effet de contraintes résiduelles dans les zones plastiques. L'expression du CTOD<sub>d</sub> dérivée est valable au cours de la propagation de l'extrémité de la fissure au travers de la zone de déformation plastique correspondant à la surcharge.

La vitesse de fissuration est définie par la relation suivante :

$$\frac{da}{dN} = f (CTOD_d) \quad (6.3)$$

A l'aide des trois méthodes utilisées nous avons obtenu des courbes très voisines des résultats expérimentaux.

Nous pouvons conclure que le modèle basé sur la théorie des dislocations est la plus aisée d'utilisation, et est plus adéquat que celui de la simulation numérique ou du modèle analytique.

- 1 -

LISTE DES SYMBOLES

A

- $a$  : longueur de fissure
- $a_0$  : longueur initiale de fissure
- $a_d$  : longueur de fissure perturbée par les surcharges
- $a_d^*$  : longueur de fissure affectée par le ralentissement, l'origine étant prise au point de fin d'application des surcharges.
- $a_{N_d}$  : longueur de fissure correspondant au nombre des cycles  $N_d$  après surcharges.
- $a_{V_{min}}$  : longueur de fissure pour laquelle la fissure a atteint la vitesse minimale après surcharges, l'origine étant prise au point de fin d'application des surcharges.
- $\Delta a$  : incrément d'avancement de la fissure.
- $a_{b1}, a_{b2}$  : paramètres du modèle basé sur la théorie des dislocations.
- $A$  : constante qui dépend du matériau.
- $A(X_1, X_2, X_3)$  : fonction logarithmique dans le modèle basé sur la théorie des dislocations.
- $A_{1CP}, A_{2CP}, A_{3CP}, A_{4CP}$  : constantes dans le modèle basé sur le concept de la mini-éprouvette en état de contrainte plane.
- $A_{1DP}, A_{2DP}, A_{3DP}, A_{4DP}$  : constantes dans le modèle basé sur le concept de la mini-éprouvette en état de déformation plane.
- $\mathbb{A}, \mathbb{A}(r, \theta)$  : fonction d'Airy

B

- $b_f$  : exposant de résistance à la fatigue.
- $b$  : vecteur de Burgers
- $B(X_1, X_2, X_3)$  : fonction logarithmique dans le modèle basé sur la théorie des dislocations.

- $B_{I_{CP}}$  : paramètre du modèle d'Irwin en état de contrainte plane.  
 $B_{I_{DP}}$  : paramètre du modèle d'Irwin en état de déformation plane.  
 $B$  : constante qui dépend du matériau.  
 $B_e$  : épaisseur de l'éprouvette.  
 $IB$  : matrice de passage de  $dIU'$  à  $d\epsilon'$ .  
 $b_I$  : résistance associée à la superdislocation avant la propagation.  
 $IB_0$  : résistance associée à la superdislocation correspondant au chargement d'amplitude constante.  
 $IB_I$  : résistance associée à la superdislocation après un incrément de propagation correspondant au chargement d'amplitude variable.

C

- $c$  : exposant de la loi de MANSO-COFFIN.  
 $C$  : constante de l'équation de PARIS.  
 $C'$  : constante de l'équation d'ELBER  
 $C_E$  : constante de l'équation de CLERIVET  
 $C_P$  : coefficient de retard du modèle de WHEELER  
 $C_{1_{CP}}, C_{2_{CP}}, C_{3_{CP}}$  : paramètres du modèle d'HUTCHINSON en état de contrainte plane.  
 $C_{1_{DP}}, C_{2_{DP}}, C_{3_{DP}}$  : paramètres du modèle d'HUTCHINSON en état de déformation plane.  
 $CTOD$  : écartement de fissure  
 $CTOD^0_{DP}$  : écartement de fissure avant l'application de surcharge en état de déformation plane.  
 $CTOD^s_{DP}$  : écartement de fissure après l'application de surcharge en état de déformation plane.  
 $CTOD_s$  : déplacement vertical seuil de non propagation du premier noeud situé en avant de la pointe de la fissure.

- CTOD<sub>ef</sub> : déplacement vertical donné par le calcul aux éléments finis.  
CTOD<sub>d</sub> : écartement à fond de fissure calculée par la méthode basée sur la théorie des dislocations. (le saut du déplacement normal au point X).

D

- $d_0$  : distance où il y a l'action de forces d'attraction moléculaire.  
 $D_0$  : constante de l'ordre de grandeur des modules élastiques du cristal.  
 $D, D_i$  : dommage.  
 $D_{el}$  : matrice d'élasticité.  
 $D_p$  : matrice des modules d'écrouissage.  
 $D_{ep}$  : matrice élasto-plastique  
 $da/dN$  : vitesse de fissuration.  
 $(da/dN)_0$  : vitesse de fissuration correspondant au chargement monotone.  
 $(da/dN)_s$  : vitesse de fissuration affectée par le ralentissement.  
 $da/dN/min$  : vitesse de fissuration minimale obtenue après l'application des surcharges.

E

- $E$  : module d'élasticité.  
 $E' = E$  ; dans l'état de contrainte plane.  
 $= E/(1-\nu^2)$  ; dans l'état de déformation plane.

F

- $F$  : le critère de plasticité (le potentiel plastique).  
 $\frac{\partial F}{\partial \sigma}$  : matrice colonne  
 $\frac{\partial F}{\partial \sigma}^T$  : matrice ligne, transposée de  $\frac{\partial F}{\partial \sigma}$

- $F(X)$  : fonction dans le modèle de Ma DELIN  
 $df'$  : vecteur représentant les forces nodales équilibrant les contraintes et les distributions de charges.  
 $f(l), f(L)$  : fonction dans le modèle de KANNINEN  
 $\mathbb{F}$  : force appliquée  
 $\Delta \mathbb{F}_p$  : incrément des forces "plastiques" sur lesquelles on itère jusqu'à stabilisation.

### G

- $G$  : force de cohésion moléculaire.  
 $g_{CP}$  : paramètre décrivant la fermeture de fissure dans l'état de contrainte plane.  
 $g_{DP}$  : paramètre décrivant la fermeture de fissure dans l'état de déformation plane.  
 $g_{DPmax}$  : valeur maximum de paramètre décrivant la fermeture de fissure dans l'état de déformation plane.  
 $g(l), g(L,l)$  : fonctions dans le modèle de KANNINEN.

### H

- $h$  : paramètre d'écroûissage.  
 $h(X), h(X_1, X_2, X_3)$  : composante normale du déplacement.  
 $h(l)$  : fonction dans le modèle de KANNINEN.  
 $H'$  : module tangente de la courbe d'écroûissage.  
 $H_i$  : fonction dans le modèle basé sur la théorie des dislocations.  
 $H(X, X_g)$  : fonction logarithmique dans le modèle de Ma DELIN.  
 $H(u, v)$  : fonction cosinus hyperbolique dans le modèle de M c. CARTNEY.

### I

- $i$  : ième incrément

- I : ième itération.
- $l_N$  : paramètre sans dimension du modèle d'HUTCHINSON.
- $\uparrow$  : facteur qui introduit d'éroussement dans le modèle de MATSUOKA ( $\uparrow = 1$ ).

K

- $K'$  : coefficient de la loi d'érouissage cyclique.
- K : facteur d'intensité de contrainte.
- $K_1, K_2$  : constantes de la relation d'ELBER ( $U = K_1 + K_2 R$ ).
- $K_I$  : facteur d'intensité de contrainte en mode I
- $K_{min}$  : facteur d'intensité de contrainte minimum
- $K_{ouv}$  : facteur d'intensité de contrainte à l'ouverture de fissure.
- $K_{max}$  : facteur d'intensité de contrainte maximale.
- $K_{pic}$  : facteur d'intensité de contrainte correspondant aux pics de surcharge.
- $K_{ap}$  : facteur d'intensité de contrainte appliqué.
- $K_{red}$  : facteur de réduction.
- $K_{fer}$  : facteur d'intensité de contrainte correspondant à la fermeture.
- $(K_{min})_{eff}$  : facteur d'intensité de contrainte minimum efficace du modèle de WILLENBORG.
- $(K_{max})_{eff}$  : facteur d'intensité de contrainte maximum efficace du modèle de WILLENBORG.
- $\Delta K$  : amplitude du facteur d'intensité de contrainte ( $\Delta K = K_{max} - K_{min}$ ).
- $\Delta K_{eff}$  : amplitude du facteur d'intensité de contrainte efficace ( $\Delta K_{eff} = K_{max} - K_{ouv}$ ).
- $\Delta K_{pic}$  : amplitude du facteur d'intensité de contrainte correspondant aux pics de surcharge ( $\Delta K_{pic} = K_{pic} - K_{min}$ ).

- $\Delta K_s$  : amplitude du facteur d'intensité de contrainte au seuil de non fissuration.
- $\Delta K_{\text{eff}_W}$  : amplitude du facteur d'intensité de contrainte efficace du modèle de WILLENBORG. ( $\Delta K_{\text{eff}_W} = (K_{\text{max}})_{\text{eff}} - (K_{\text{min}})_{\text{eff}}$ )
- $\Delta K_{\text{eff}_T}$  : amplitude du facteur d'intensité de contrainte efficace du modèle de TAIRA ( $\Delta K_{\text{eff}_T} = K_{\text{ap}} - K_{\text{ouv}}$ ).
- $\Delta K_{\text{L.S.}}$  : amplitude du facteur d'intensité de contrainte pour un chargement aléatoire du modèle de FUHRING.
- $\Delta K_{\text{eff}_{\text{min}}}$  : amplitude du facteur d'intensité de contrainte efficace minimum.
- $\Delta K_{\text{eff}_{N_d}}$  : amplitude du facteur d'intensité de contrainte efficace correspondant à  $N_d$ .
- $\Delta K_{\text{ouv}}$  : amplitude du facteur d'intensité de contrainte correspondant à l'ouverture de fissure.
- $k$  : constante caractérisant le domaine d'application du modèle d'HRR.
- $k_{\alpha_1}, k_{\alpha_2}$  : coefficients inversements proportionnels à  $K_{\text{max}}^2$  et  $\Delta K^2$
- $k_e$  : variable d'écrouissage.
- $K$  : constante qui dépend du matériau et de l'environnement.

## L

- $l$  : position de superdislocation suivant le plan de glissement avant la propagation.
- $L_o$  : position de superdislocation suivant le plan de glissement après un incrément de propagation correspondant au chargement d'amplitude constante.
- $L$  : position de superdislocation suivant le plan de glissement après un incrément de propagation correspondant au chargement d'amplitude variable.

## M

- $m$  : exposant de la loi de PARIS

- $m'$  : exposant de la loi d'ELBER  
 $M$  : module d'écroissage.  
 $M_1, M_2$  : paramètres sans dimensions  
 $M_t$  : nombre total des éléments finis.  
 $M_i$  : fonction dans le modèle basé sur la théorie des dislocations.

N

- $n$  : nombre d'itération pour avoir la convergence.  
 $n'$  : exposant de la loi d'écroissage cyclique.  
 $N$  : nombre des cycles.  
 $N'$  : l'inverse de l'exposant de la loi d'écroissage cyclique.  
 $N_f$  : nombre de cycles à rupture  
 $N_d$  : nombre de cycles affecté par le ralentissement.  
 $N_p$  : nombre de pics de surcharge.  
 $N^*$  : nombre de cycles nécessaires pour obtenir la rupture d'une mini-éprouvette.  
 $IN$  : matrice d'interpolation.

P

- $p$  : coefficient dans le modèle de Mc CARTNEY.  
 $P$  : charge.  
 $P(X)$  : face extérieure.

Q

- $Q_a$  : facteur d'accélération  
 $Q_R$  : facteur du retard.

R

- $r$  : coordonnée polaire

- $r_o$  : distance où il y a l'attraction moléculaire dans le modèle basé sur la théorie des dislocations.
- $R$  : rapport de charge ( $R = K_{\min} / K_{\max}$ ).
- $R_{\text{pic}}$  : rapport de surcharge ( $R = K_{\text{pic}} / K_{\max}$ ).
- $R_p$  : taille de la zone plastique.
- $R_p^*$  : taille de la zone plastique effective dans le modèle de STOUFFER.
- $R_{\text{ouv}}$  : rapport de charge pour lequel il y a ouverture de la fissure.
- $R_{\text{fer}}$  : rapport de charge pour lequel il y a fermeture de la fissure.
- $R_e$  : limite d'élasticité monotone.
- $R'_e$  : limite d'élasticité cyclique.
- $R_{e_o}, R_{e_I}$  : limite d'élasticité.
- $|R$  : réaction en pointe de la fissure avant libération de noeud.
- $d|R_o$  : incrément de toutes les forces qui s'exercent en chaque noeud du modèle.
- $d|\tilde{R}$  ( $dIU$ ) : incrément de toutes les forces nodales.
- $d|R_{\text{rééq}}$  : forces qu'il faut appliquer aux noeuds de chaque élément en déformation élastoplastique pour équilibrer la contrainte initiale ( $d\sigma_{\text{rééq}}$ ).

S

- $S$  : contrainte
- $S_{ij}$  : déviateur.
- $STIF$  : matrice de rigidité élastique.
- $STIF_{el}$  : matrice de rigidité globale initiale (en domaine élastique).
- $STIF_{pl}$  : matrice de rigidité élastoplastique globale, définie au début de l'incrément de charge.
- $STIF_{res}$  : matrice de rigidité imposée par le ressort.
- $STIF^e$  : matrice de rigidité d'un élément.

$\Delta$  STIF : une forte matrice de rigidité.

T

t : exposant.

U

u : variable de la fonction H (u,v).

U : le taux d'ouverture de la fissure.

$U_s$  : le taux d'ouverture de la fissure au seuil.

$U_I$  : rapport des limites d'élasticité monotone et cyclique.

$\mathbb{U}$  : vecteur déplacement total.

$\Delta \mathbb{U}$  : vecteur des incréments des déplacements nodaux.

d  $\mathbb{U}$  : incréments des déplacements de noeuds.

d  $\mathbb{U}'$  : le déplacement des noeuds sous l'effet des incréments de forces qui s'exercent en ces noeuds.

$\mathbb{U}(X_1, X_2)$ ,  $\mathbb{U}(r, \theta)$  : déplacement horizontale (suivant l'axe des X).

V

$V_o$  : vitesse de fissuration correspondant au chargement de référence.

$V_{min}$  : vitesse de fissuration minimale obtenue après l'application des surcharges (da/dN/min).

$V(X)$ ,  $V_1(X)$ ,  $V_2(X)$ ,  $V_3(X)$  : les composantes normales du déplacement le long du plan de fissure

$V_{MLR}$  : la distribution du déplacement normal le long du plan de fissuration donnée par la Mécanique Linéaire de la Rupture.

$V_{ouv}$  : la distribution du déplacement normal le long du plan de fissuration correspondant à l'ouverture de la fissure.

$V_{eff}(X)$  : la composante normale du déplacement efficace le long du plan de glissement.

$W, W(X_1, X_2), W(r, \theta)$  : déplacement vertical (suivant l'axe des y).

## W

- $dW$  : le travail par unité de volume par les contraintes lors d'un accroissement infiniment petit de la déformation.
- $W_o^m$  : taille de la zone plastique monotone courante
- $w_o^c$  : taille de la zone plastique cyclique courante.
- $W_s^m$  : taille de la zone plastique monotone de surcharge.
- $W_s^c$  : taille de la zone plastique cyclique de surcharge.
- $W_o^m CP$  : taille de la zone plastique monotone courante en état de contrainte plane.
- $W_o^m DP$  : taille de la zone plastique monotone courante en état de déformation plane.
- $W_o^c CP$  : taille de la zone plastique cyclique courante en état de contrainte plane.
- $W_o^c DP$  : taille de la zone plastique cyclique courante en état de déformation plane.
- $W_s^m CP$  : taille de la zone plastique monotone de surcharge en état de contrainte plane.
- $W_s^m DP$  : taille de la zone plastique monotone de surcharge en état de déformation plane.
- $W_s^c CP$  : taille de la zone plastique cyclique de surcharge en état de contrainte plane.
- $W_{ap}$  : taille de la zone plastique correspondant au facteur d'intensité de contrainte appliqué du modèle de WILLENBORG.
- $W_{L.S.}$  : taille de la zone plastique correspondant à un chargement aléatoire.

## X

- X : distance à la pointe de fissure.
- X\* : largeur de la mini-éprouvette.

- $X_c$  : distance représentant l'émoussement de la pointe de fissure.
- $\Delta X_j$  : incrément de longueur de fissure dans le modèle de STOUFFER.
- $X_i, X_k$  : paramètre du modèle de GLINKA (avec accumulation de dommage).
- $X_n, X_{n+1}$  : valeur d'essai pour résoudre une équation non-linéaire  $\Psi(X) = 0$ .
- $X_g$  : la taille de zone plastique du modèle basé sur la théorie des dislocations.
- $X_{gI}, X_{gA}$  : taille de zone plastique correspondant à la surcharge ( $\sigma_{pic}$ ).
- $X_{g2}, X_{gB}$  : taille de zone plastique correspondant à la charge minimum ( $\sigma_{min}$ ).
- $X_{g3}, X_{gC}$  : taille de zone plastique correspondant à la charge maximum ( $\sigma_{max}$ ).

Z

Z : variable complexe ( $Z = X + i y$ )

$\sigma$

- $\sigma, \sigma_{ij}$  : contrainte locale.
- $\sigma_r$  : contrainte résiduelle.
- $\sigma_r^0$  : intensité maximum de la contrainte résiduelle.
- $\sigma_m$  : contrainte moyenne.
- $\sigma_{pic}, \sigma_{Iv}$  : contrainte correspondant aux pics de surcharge.
- $\sigma_{min}, \sigma_{2r}$  : contrainte minimum.
- $\sigma_{max}, \sigma_{3v}$  : contrainte maximum
- $\sigma_{red}$  : facteur de réduction
- $\sigma_{ouv}$  : contrainte correspondant à l'ouverture de fissure.
- $\sigma_c$  : contrainte appliquée correspondant au point où il y a contact.
- $\sigma_{cl}$  : contrainte de fermeture de fissure.

- $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  : contraintes principales à la pointe de la fissure.
- $\sigma_{yy}$  : contrainte normale.
- $\sigma_{yy}^{ext}(X, 0)$  : contraintes provenant des charges extérieures.
- $\sigma_{yy}^{fis}(X)$  : contraintes créées par la déformation provenant de la fissure.
- $\sigma_e$  : contrainte équivalente.
- $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_{r\theta}$  : composantes des contraintes au voisinage de l'extrémité d'une fissure en coordonnée plane.
- $\sigma_{o_1}, \sigma_{o_2}, \sigma_{o_3}$  : contrainte de friction.
- $\sigma^T$  : matrice ligne transposée de la matrice colonne
- $d\sigma$  : incrément de contrainte.
- $d\sigma_{rééq}$  : contraintes initiales dites de rééquilibrage.
- $\Delta\sigma$  : amplitude de contrainte.
- $\Delta\sigma_{ct}$  : amplitude de contrainte ultime.
- $\Delta\sigma_y$  : amplitude de la limite de contrainte.
- $\Delta\sigma_{pic}$  : amplitude de contrainte correspondant aux pics de surcharge.
- $\Delta\sigma_{eff}$  : amplitude de contrainte efficace
- $\sigma_f'$  : coefficient de résistance cyclique.
- $\tilde{\sigma}_r, \tilde{\sigma}_\theta, \tilde{\sigma}_e$  : paramètres sans dimension du modèle d'HUTCHINSON.

ε

- $\epsilon, \epsilon_{ij}$  : déformation locale.
- $\epsilon_r$  : déformation résiduelle.
- $\epsilon_m$  : déformation moyenne.

- $\epsilon_e$  : déformation équivalente.
- $\Delta\epsilon$  : amplitude de déformation
- $\Delta\epsilon^*$  : amplitude de déformation dans la région X\*.
- $\Delta\epsilon_s$  : amplitude de déformation au seuil de non fissuration.
- $\Delta\epsilon_{s_{CP}}$  : amplitude de déformation au seuil de non fissuration en état de contrainte plane.
- $\Delta\epsilon_{s_{DP}}$  : amplitude de déformation au seuil de non fissuration en état de déformation plane.
- $\Delta\epsilon_y$  : amplitude de la limite élastique de déformation.
- $\Delta\epsilon^{el}$  : amplitude de déformation élastique.
- $\Delta\epsilon^P$  : amplitude de déformation plastique.
- $\Delta\epsilon_o$  : constante numérique dans le modèle de KANNINEN.
- $\epsilon_f'$  : valeur de ductilité à la fatigue.
- $\delta$
- $\delta$  : ouverture de la fissure mesurée à l'aide d'un capteur de déplacement au niveau de l'entaille mécanique.
- $\delta(X)$  : l'écartement de fissure calculée par le modèle basé sur la théorie des dislocations.
- $\delta_{ouv}(X)$  : l'écartement de fissure correspondant au rapport de charge d'ouverture à la fissure ( $R_{ouv}$ ).
- $\delta_{fer}(X)$  : l'écartement de fissure correspondant au rapport de charge pour lequel il y a fermeture  $R_{fer}$ .
- $\Delta\delta_{t_{CP}}$  : amplitude de l'ouverture à la pointe de fissure dans l'état de contrainte plane.
- $\Delta\delta_{t_{DP}}$  : amplitude de l'ouverture à la pointe de fissure dans l'état de déformation plane.

$\delta_{ij}$  : symbole de KRONECKER

$\alpha$

$\alpha$  : un paramètre qui dépend du matériau.

$\alpha'$  : un paramètre qui dépend de l'écroissage du matériau et la limite d'élasticité monotone.

$\alpha''$  : un paramètre qui dépend de l'écroissage du matériau et la limite d'élasticité cyclique.

$\alpha_1, \alpha_2$  : paramètre d'ajustement.

$\bar{\alpha}$  : est un coefficient déterminé expérimentalement.

$\beta$

$\beta$  : coefficient d'entrave à la plasticité.

$\beta_{ij}$  : paramètre lié à la déformation plastique avec la vitesse de chargement ( $\bar{\xi}$ ).

$\rho$

$\rho^*$  : le rayon du fond d'entaille.

$\rho(X), \rho(\xi)$  : la densité des dislocations.

$\rho_{1V}(X)$  : la densité des dislocations correspondant aux pics de surcharge.

$\rho_{2V}(X)$  : la densité des dislocations correspondent à la contrainte minimum.

$\rho_{3V}(X)$  : la densité des dislocations correspondent à la contrainte maximum.

$\xi$

$\bar{\xi}$  : vitesse de charge.

$\xi$  : variable

$\chi$

- $\chi$  : paramètre d'écroissage.  
 $d\chi$  : incrément de paramètre d'écroissage.

$\lambda \quad \mu$

- $\lambda$  : la déformation plastique cumulée  
 $\mu, \lambda$  : coefficient de LAME.

$\theta$

- $\theta$  : coordonnée polaire.  
 $\bar{\theta}_d$  : inclinaison de plan de glissement dans le modèle de KANNINEN.

$\nu$

- $\nu$  : coefficient de POISSON.

$\Psi, \Omega, \varnothing$  : fonction complexe.

$\varphi(\varepsilon^P)$  : fonction.

$\alpha(\xi)$  : contrainte dans le modèle basé sur la théorie des dislocations.

## I - INTRODUCTION

Tout constructeur doit constater, un jour ou l'autre l'apparition de défauts considérés comme des fissures dans un produit de sa responsabilité ; leur découverte étant faite soit pendant la fabrication, soit lors d'une inspection en service.

Après l'expertise métallurgique et les contrôles destructifs ou non destructifs, venant d'analyse mécanique, la synthèse de tous les renseignements permettra de se prononcer sur les mesures à prendre :

- Peut-on laisser en l'état ?
- Pour combien de temps ?
- Périodicité des contrôles de suivi en exploitation de cette fissure ?
- Ou leur réparation immédiate ?

Donc, pour assurer la fiabilité d'une structure, il est nécessaire de prédire sa durée de vie, en tenant compte du fait qu'elle peut contenir des défauts, par exemple des fissures de fatigue.

Le calcul de la durée de vie en fatigue de structures, soumise à des chargements aléatoires n'est pas chose aisée. En effet, en raison de l'existence ininterrompue de phénomènes transitoires, la connaissance des résultats d'amorçage et de propagation de fissure de fatigue, sous chargement continu, n'est guère transposable directement au cas des chargements réels. Le problème des chargements complexes est généralement étudié, en simulant sur des éprouvettes soit le chargement réel préalablement enregistré sur des éléments de structures aux contraintes significatives, soit un chargement considéré comme équivalent (par exemple dans la méthode des blocs programmés). Toutefois, l'étude de la fatigue aléatoire se heurte actuellement aux problèmes de la représentativité de ces chargements équivalents, à la complexité et au coût de la mise en oeuvre des essais.

Le présent travail est une contribution à la résolution de ce problème. Il est axé sur la nécessité de la connaissance précise des phénomènes transitoires élémentaires et de leurs interactions.

Cette étude sera composée de trois parties, dans chaque partie :

- nous commençons par une étude bibliographique,
- puis, nous proposons un modèle analytique dans la première partie, une simulation basée sur la méthode aux éléments finis dans la deuxième partie, et un modèle basé sur la théorie des dislocations dans la troisième partie,
- à la fin nous faisons la comparaison entre les résultats obtenus par l'intermédiaire de modélisation et de résultats expérimentaux obtenus dans le cas stabilisé (un grand nombre de pics de surcharge, dans notre cas  $N_p = 50$ ) pour justifier sa validité, dans le cas d'un acier E 36 Z.

## 2 - PHENOMENOLOGIE

### 2.1 - Description du phénomène de surcharge :

Au cours d'un essai de fissuration par fatigue, l'application d'une ou plusieurs surcharges se caractérise, après avoir retrouvé les conditions de chargement initial, par un ralentissement ou un blocage (arrêt total) de la progression de la fissure.

### 2.2. - Définition des caractéristiques :

Les paramètres essentiels qui jouent un rôle sur le retard ou blocage de la progression d'une fissure sont généralement (Figure 2.1a) :

$R_{pic}$  = rapport de surcharge,

$K_{max}$  = facteur d'intensité de contrainte maximum,

et  $N_p$  = nombre de pics de surcharge.

Le phénomène de ralentissement est décrit à l'aide de cinq paramètres physiques (Figure 2.1b et c) :

$V_{min}$  = vitesse de fissuration minimale obtenue après l'application des surcharges ( $da/dN/min$ ),

$a_{V_{min}}$  = longueur de fissure pour laquelle la fissure a atteint la vitesse minimale après surcharges, l'origine étant prise au point de fin d'application des surcharges,

$a_d^*$  = longueur de fissure affectée par le ralentissement, l'origine étant prise au point de fin d'application des surcharges,

$a_d$  = longueur de fissure perturbée par les surcharges,

$N_d$  = nombre de cycles affectés par le ralentissement.

La figure 2.1 représente les conséquences de l'application de plusieurs surcharges sur la progression d'une fissure soumise à un chargement dont l'amplitude de la variation du facteur d'intensité de contrainte est constante :

- avant l'application de la surcharge, la progression se fait à vitesse constante

- après l'application de cette surcharge, le phénomène se traduit par :

- \* une accélération
- \* un ralentissement de la vitesse de progression de fissure jusqu'à une vitesse minimale atteinte pour la longueur  $a_{Vmin}$ ,
- \* un retour progressif à la vitesse initiale pour une longueur  $a_d^*$ ,
- \* une phase de stabilisation.

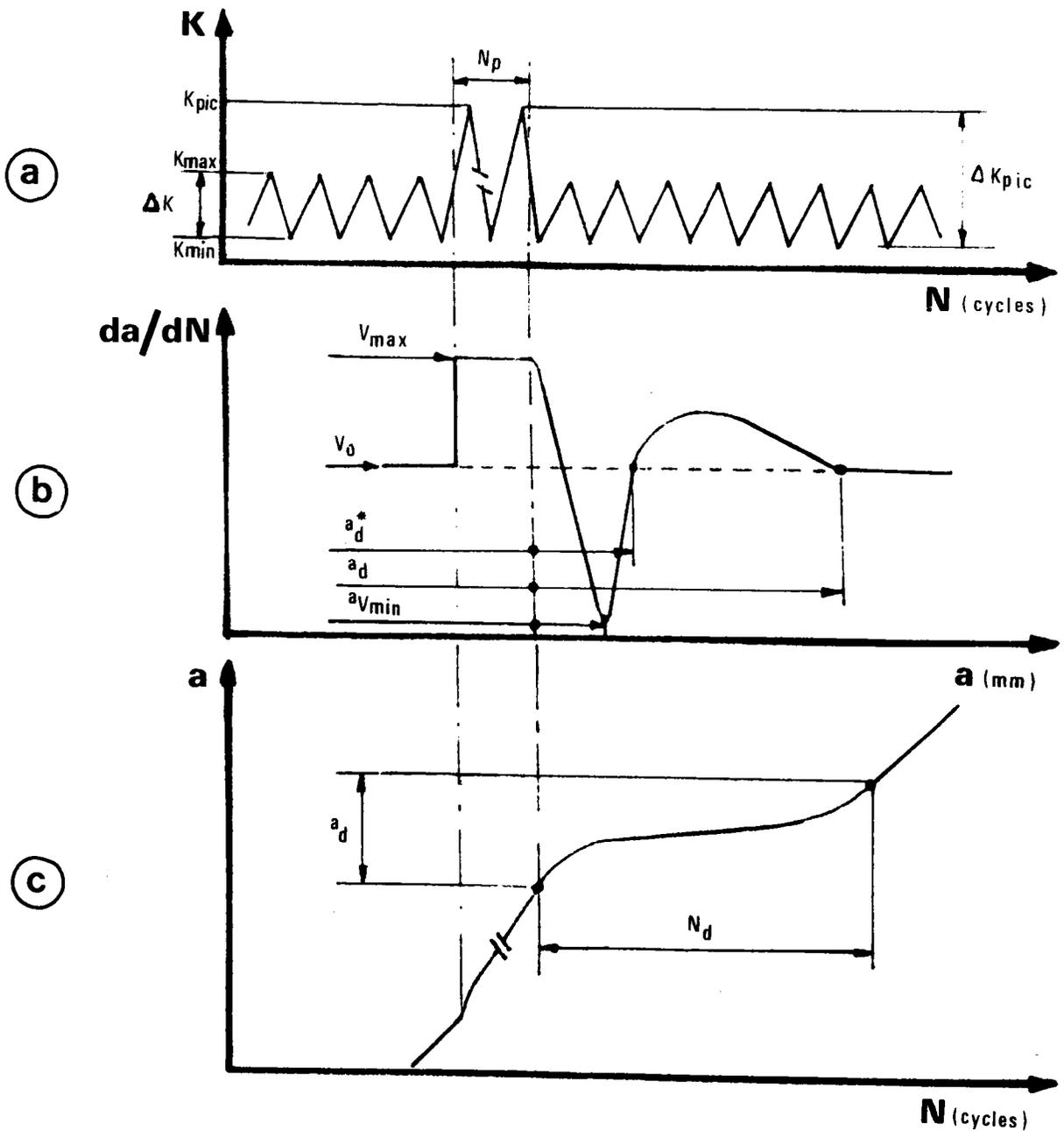


Figure 2.1 : Schéma de principe du phénomène de ralentissement

### 2.3. Causes du phénomène de ralentissement

Les causes du phénomène de ralentissement (blocage) d'une fissure après application de surcharge sont groupées en deux classes :

#### 2.3.1. Phénomène primaire : les contraintes résiduelles

Les contraintes résiduelles sont la cause du ralentissement (blocage) de la fissure (expérience de Schijve [5])

##### 2.3.1.1. Origine de contraintes résiduelles

Les contraintes résiduelles présentes dans le sillage de la fissure et la zone plastique proviennent de la plastification qui se produit en fond de fissure au chargement et au déchargement. D'une façon générale, ces contraintes résiduelles sont des contraintes de compression près de la pointe de la fissure et de traction à une certaine distance en avant de celle-ci, et ceci pour une raison d'équilibre interne.

##### 2.3.1.2. Calcul de contraintes résiduelles

Deux cas de distribution sont habituellement considérés :

##### . Le cas d'une fissure idéale :

Les calculs sont effectués en supposant que la fissure n'avance pas et qu'elle n'est pas accompagnée de sillage plastique. Dans ce cas, toutes les contraintes résiduelles sont localisées à la pointe de la fissure.

Rice [1] a montré l'existence de deux zones plastiques à la pointe de la fissure de fatigue soumise à un chargement cyclique à amplitude constante dans les conditions d'état de contrainte plane:

◇ une zone plastique monotone dont la taille est donnée par la formule suivante :

$$W_o^m = \frac{1}{\pi} \left( \frac{K_{\max}}{R_e} \right)^2 \quad (2.1)$$

où  $R_e$  est la limite élastique pour un chargement à amplitude constante.

◇ une zone plastique cyclique dont la taille est quatre fois plus petite et donnée par la relation :

$$W_o^c = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\Delta K}{2 R_e} \right)^2 \quad (2.2)$$

où  $\Delta K$  est l'amplitude du facteur d'intensité de contrainte. Ceci provient du fait que l'amplitude de variation de la contrainte passe de  $(+R_e)$  pendant le chargement à  $(-R_e)$  après le déchargement, soit une amplitude de  $2 R_e$ .

Dugdale [ 2 ] a considéré que le matériaux est rigide parfaitement plastique et que la zone plastique est confiné dans une bande étroite parallèle à la fissure. Il a proposé une formulation différente des relations donnée par Rice [ 1 ] (2.1.) et (2.2.) et qui s'énonce (Etat de contrainte plane) :

$$W_o^m = \frac{\pi}{2} \left( \frac{K_{\max}}{R_e} \right)^2 \quad (2.3)$$

et

$$W_o^c = \frac{\pi}{32} \left( \frac{\Delta K}{R_e} \right)^2 \quad (2.4.)$$

### . Le cas d'une fissure réelle

La tendance actuelle est de faire intervenir dans les calculs l'histoire de la fissure par le biais du sillage enserrant le trajet de fissuration et de tenir compte du fait que la fissure avance.

Plusieurs auteurs ont étudié la distribution des contraintes et des déformations résiduelles dans le cas d'un chargement aléatoire par exemple Matsuoka [ 11 ] et Führung [ 9 ]. Ces auteurs ont pris comme base le modèle de Dugdale [ 2 ].

### 2.3.2. Phénomène secondaire : le concept de fermeture

Le concept de fermeture appliqué aux problèmes des surcharges peut expliquer aussi le phénomène de retard (blocage).

#### 2.3.2.1. Origine du phénomène de fermeture

C'est à l'existence des contraintes résiduelles de compression à la pointe de la fissure de fatigue que l'on attribue le phénomène dit de fermeture. Ce dernier a été mis en évidence par Elber [ 3 ] sur un alliage d'aluminium en montrant que la pointe d'une fissure de fatigue peut se fermer avant que l'effort de traction appliqué à l'éprouvette ne s'annule. C'est uniquement la partie du cycle où la pointe de la fissure est totalement ouverte qui participe à l'endommagement ; c'est pourquoi ce phénomène est souvent invoqué pour essayer d'expliquer l'influence de certains paramètres importants dans le domaine de fissuration par fatigue tels que la valeur maximale du facteur d'intensité de contrainte ( $K_{max}$ ), le rapport de charge (R), l'épaisseur de l'éprouvette, l'environnement et bien sûr les surcharges.

### 3 - MODELE EXPLIQUANT L'INFLUENCE DES SURCHARGES SUR LE RETARD DE LA PROPAGATION DES FISSURES

#### 3.1. Introduction

La propagation d'une fissure est influencée par de nombreux paramètres que l'on peut classer en deux catégories :

- les paramètres intrinsèques qui dépendent de la nature du matériau, tels le module d'Young , la limite d'élasticité, les propriétés mécaniques cycliques et l'état microstructural.
- les paramètres extrinsèques qui dépendent des conditions d'essai, tels le nombre de pics de surcharges ( $N_p$ ), le taux de surcharges ( $R_{pic}$ ), le rapport de charge ( $R$ ), l'environnement, les dimensions de l'éprouvette, etc.

Compte tenu de la multiplicité de ces paramètres, il n'est pas possible de les considérer en totalité au cours d'une modélisation. Certains paramètres intrinsèques sont plus difficiles à introduire (propriétés mécaniques cycliques, état microstructural) etc.

Dans le cas de la représentation de la progression d'une fissure en fonction d'un chargement d'amplitude variable, on fait généralement appel au concept de fermeture introduit par Elber [ 3 ] , qui constitue directement les fondements de nombreux modèles. Au concept de fermeture de fissure associé aux contraintes résiduelles, le phénomène d'émoussement de la fissure est souvent invoqué pour le blocage mais aussi parfois pour les problèmes de propagation.

Dans une première partie, nous examinerons différents modèles choisis parmi les plus significatifs. Dans une deuxième partie, nous proposerons une modélisation qui permet de représenter analytiquement la fissuration sous chargement à amplitude constante après application de plusieurs surcharges.

### 3.2. Etude bibliographique

#### 3.2.1. Modèles basés sur le concept de fermeture de fissure

##### 3.2.1.1. Rappel du modèle d'Elber

Comme nous l'avons indiqué précédemment, la plus grande partie des modèles est basée sur le concept de fermeture de fissure qui fut introduit par Elber [ 3 ] et que nous rappelons brièvement. Cet auteur a postulé qu'une fissure ne pouvait se propager que lorsqu'elle était ouverte, il a mis en évidence, que les contraintes résiduelles voisines de la fissure, et notamment celles dans la zone plastifiée, ont pour effet de maintenir la fissure fermée durant une fraction du chargement. La fraction du chargement durant laquelle la fissure est ouverte, est considérée comme la partie durant laquelle se produit la progression de la fissure et il lui correspond une amplitude efficace du facteur d'intensité de contrainte  $\Delta K_{\text{eff}}$ .

Elber a proposé une loi de propagation des fissures dérivée de la loi de Paris :

$$\frac{da}{dN} : C' \Delta K_{\text{eff}}^m \quad (3.1)$$

où  $C'$  et  $m'$  sont des constantes qui dépendent du matériau.

avec 
$$\Delta K_{\text{eff}} = K_{\text{max}} - K_{\text{ouv}}$$

où  $K_{\text{ouv}}$  est le facteur d'intensité de contrainte correspondant à l'ouverture de la fissure.

Il est coutumier de caractériser l'évolution du facteur d'intensité de contrainte efficace ( $\Delta K_{\text{eff}}$ ) à l'aide d'une normalisation par rapport au facteur d'intensité de contrainte appliqué en introduisant le rapport  $U$  (où  $U$  est le taux

d'ouverture de la fissure) :

$$U = \frac{\Delta K_{\text{eff}}}{\Delta K} \quad (3.2)$$

D'après ses résultats expérimentaux sur les alliages d'aluminium, Elber montre que :

$$U = 0.5 + 0.4 R \quad (3.3)$$

Cependant, cette relation n'est pas généralisable à d'autres matériaux et d'autres conditions d'essais. De nombreux auteurs ont montré en particulier que  $U$  dépend fortement de la valeur de  $K_{\text{max}}$  [ 7 ] et [ 61 ] .

### 3.2.1.2. Modèle de Trebules

Trebules [ 4 ] a proposé le premier un schéma qualitatif de l'évolution du facteur d'intensité de contrainte efficace après application d'un bloc de surcharge (Figure 3.1).

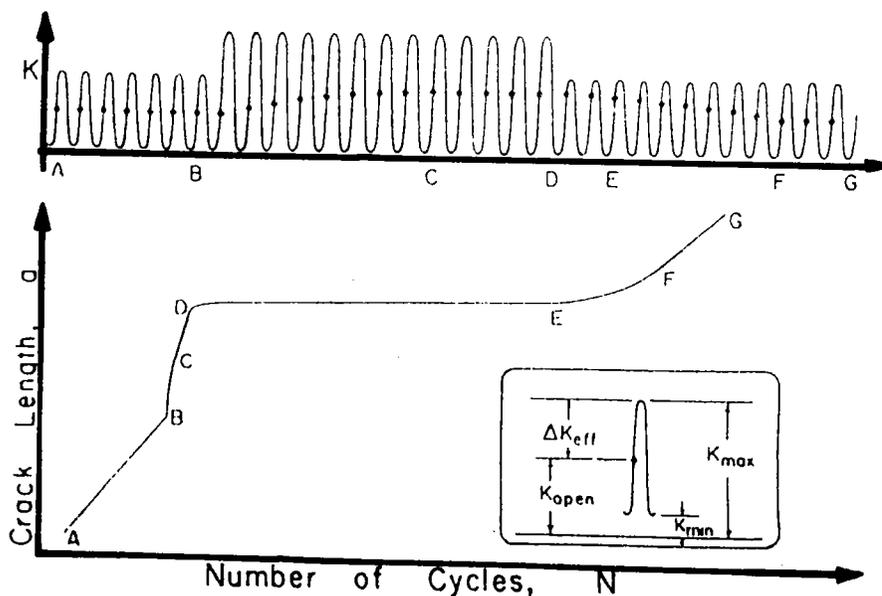


Figure 3.1 : Schéma de Trebules [ 4 ] montrant l'évolution du point d'ouverture de fissure après surcharges.

La figure 3.1 représente l'évolution du point d'ouverture et la longueur de fissure en fonction du nombre de cycles. L'évaluation du point d'ouverture se produit déjà durant l'application du bloc de surcharge (partie CD). Après retour au niveau initial du facteur d'intensité de contrainte (point D), le point d'ouverture n'évolue plus pendant un certain nombre de cycles. L'amplitude du facteur d'intensité de contrainte efficace est plus faible, la fissure est donc ralentie (DE). Ensuite, le point d'ouverture et la vitesse de fissuration retrouvent lentement leur niveau initial.

Le modèle de Trubules ne permet pas de rendre compte des accélérations après surcharge.

### 3.2.1.3. Modèle de Schijve

Schijve [ 5 ] prédit l'évolution du point d'ouverture après application d'une ou plusieurs surcharges. Ce modèle est basé aussi sur la validité du modèle d'Elber, accélération et décélération de la vitesse de fissuration sont liées d'une façon biunivoque à l'évolution du point d'ouverture. D'après Schijve, le blocage correspondant à  $\Delta K_{eff} = 0$  (Figure 3.2).

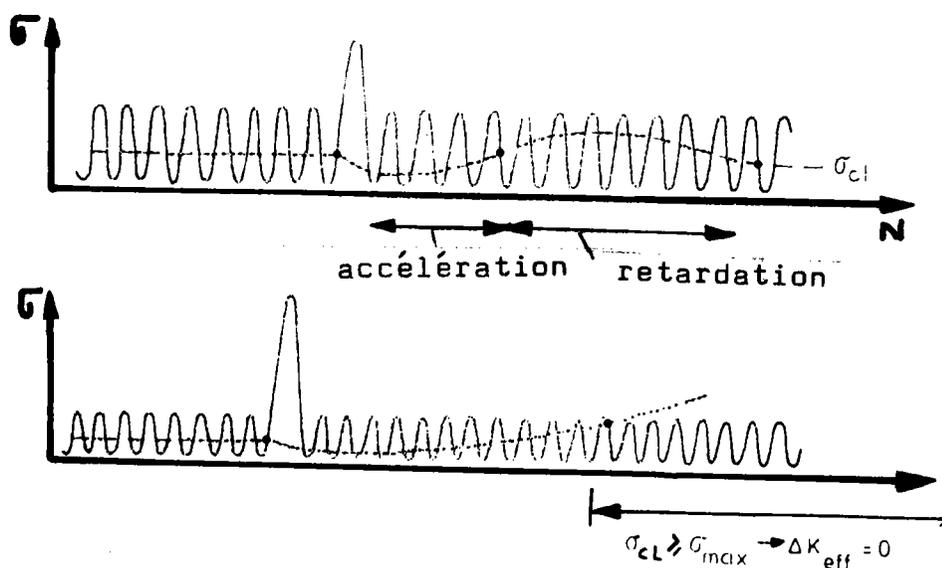


Figure 3.2 : Modèle de Schijve [ 5 ] .

### 3.2.2. Modèles basés sur l'interaction des zones plastifiées

#### 3.2.2.1. Modèle de Wheeler

Wheeler [ 6 ] a proposé un modèle empirique qui consiste à introduire dans la loi de fissuration le rapport de deux zones plastiques (Figure 3.3.)

- la zone plastique monotone de surcharge  $W_s^m$  qui existe en fond de fissure.
- la zone plastique monotone créée par le chargement initial pour une longueur de fissure  $a_0$ ,  $W_0^m$  (qui aurait été créée si le chargement avait été d'amplitude constante).

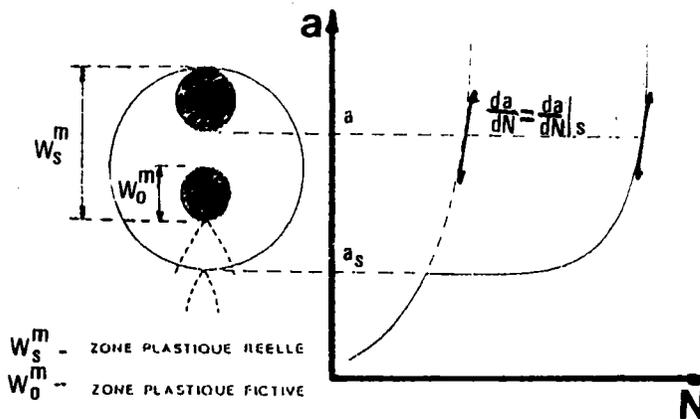


Figure 3.3. : Modèle de Wheeler [ 6 ] .

La loi de fissuration s'exprime par la relation suivante :

$$\frac{da}{dN} = C_p \left( \frac{da}{dN} \right)_0 \quad (3.4)$$

où  $C_p$  est un coefficient de retard.

$$\text{avec } C_p = \left( \frac{W_o^m}{W_o^m - X} \right)^{\bar{\alpha}} \quad ; \text{ quand } X + W_o^m < W_s^m$$

$$\text{et } C_p = 1 \quad ; \text{ quand } X + W_o^m > W_s^m$$

où  $\bar{\alpha}$  est un coefficient déterminé expérimentalement,  
 $(da/dN)_o$ , valeur de la vitesse initiale avant la surcharge, et  
 $(da/dN)$ , valeur de la vitesse après la surcharge.

Notons que l'effet d'histoire s'évanouit pour  $C_p = 1$ , lorsque les deux zones plastiques deviennent tangentes (Figure 3.3).

Les résultats de ce modèle ont été comparés avec des expériences [7].  
On peut tirer les remarques suivantes :

- le rapport des vitesses de fissuration avant et après la surcharge ne dépend pas uniquement du rapport  $C_p$  des zones plastiques. Il dépend également des conditions d'essai. La loi proposée n'est donc pas intrinsèque.
- le paramètre  $C_p$  ne tient compte que de l'histoire du chargement après la surcharge.
- le modèle n'explique pas le retard différé.
- enfin, un tel modèle ne traduit pas l'existence du phénomène de blocage des fissures.

#### 3.2.2.2. Modèle de Willenborg

Willenborg [8] a modifié le modèle de Wheeler. Il considère une loi de fissuration du type (Figure 3.4a) :

$$\frac{da}{dN} = C' \Delta K_{effw}^{m'} \quad (3.5)$$

avec  $\Delta K_{effw} = (K_{max})_{eff} - (K_{min})_{eff}$  (3.6)

où  $(K_{max})_{eff} = K_{max} - K_{red}$

et  $(K_{min})_{eff} = K_{min} - K_{red}$

où  $K_{red}$  est un facteur de réduction qui lorsque la fissure progresse dans la zone plastique de surcharge pour un chargement donné est égal à (Figure 3.4b) :

$$K_{red} = K_{ap} - K_{max}$$

et  $K_{ap}$  est le facteur d'intensité de contrainte qu'il faudrait appliquer pour que la zone plastique  $W_{ap}$  correspondante vienne tangenter celle due à la surcharge  $W_s^m$  :

$$W_{ap} = \frac{I}{\pi} \left( \frac{K_{ap}}{R_e} \right)^2 \quad (3.7a)$$

ou

$$W_{ap} = W_s^m - a_I \quad (3.7b)$$

Quand la zone monotone courante vient tangenter la zone plastique de surcharge, il n'y a plus de retard. La vitesse est alors déterminée en utilisant une courbe de fissuration établie pour un chargement à amplitude constante. Remarquons aussi que le modèle de Willenborg n'explique pas le retard différé.

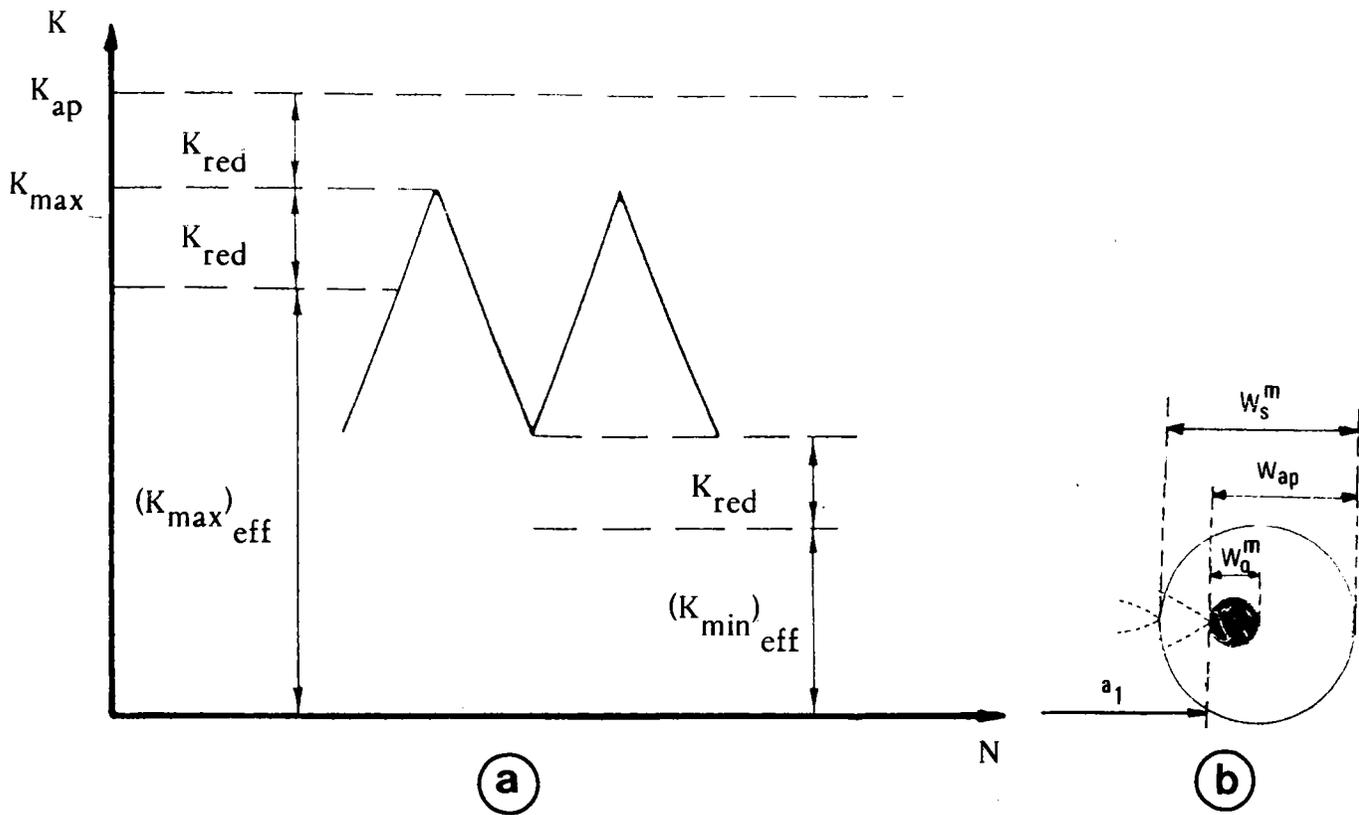


Figure 3.4 : Modèle de Willenborg [ 8 ] .

### 3.2.2.3. Modèle de Führung

Führung [ 9 ] étudie la distribution des contraintes et des déformations résiduelles dans le cas d'un chargement aléatoire. Il part du modèle de Dugdale [ 2 ] ; ce qui conduit à considérer que le matériau est rigide et parfaitement plastique et que la zone plastique est confiné dans une bande étroite parallèle à la fissure. Le calcul a été effectué sur une plaque de longueur infinie soumise à un état de contrainte plane qui est bien représentatif de l'état plastique limite confiné .

Führung a remarqué une série de discontinuités dans l'état de contraintes résiduelles qui correspond aux frontières des différentes zones plastifiées. Ces discontinuités constituent d'après lui l'effet de mémoire dû aux différents chargements. A partir de ces observations, il propose une nouvelle formulation de la loi

de progression de la fissure pour un chargement aléatoire :

$$\frac{da}{dN} = C \cdot \Delta K_{L.S.}^m \quad (3.8)$$

l'indice L.S. indique qu'il s'agit d'un chargement à amplitude aléatoire.

$$\Delta K_{L.S.} = Q_R \cdot Q_a \cdot \Delta K \quad (3.9)$$

où  $Q_R$  est le facteur du retard,

et  $Q_a$ , le facteur d'accélération (que l'on néglige dans le cas d'application d'un seul pic de surcharge).

Fühling pose que le facteur du retard est proportionnel à la racine carrée du rapport des zones plastiques monotones correspondant respectivement à un chargement aléatoire  $W_{L.S.}$  et à un chargement sous amplitude constante  $W_o^m$  et fonction du rapport de chargement :

$$Q_R = \sqrt{\frac{W_{L.S.}}{W_o^m}} (1 - R) ; \text{ si } R \geq 0$$

et

$$Q_R = \sqrt{\frac{W_{L.S.}}{W_o^m}} ; \text{ si } R \leq 0$$

### 3.2.3. Modèles basés sur le concept de fermeture de fissure et l'interaction des zones plastifiées

#### 3.2.3.1. Modèle de Clerivet

Clerivet [ 10 ] a proposé un modèle pour calculer les nombres des cycles  $N_d$  après surcharges. Ce modèle est basé sur des résultats expérimentaux. Il a

supposé que la vitesse de fissuration est de type Elber :

$$\frac{da}{dN} = C_E \cdot \Delta K_{eff}^m \quad (3.10)$$

avec  $C_E = C \cdot U^m$

où  $U$  est la constante d'Elber (l'évolution de l'ouverture de la fissure), et  $C$ ,  $m$  sont les constantes de la loi de Paris.  $U$ ,  $C$  et  $m$  sont déterminés à partir d'un essai de fissuration à rapport  $R$  nul.

Après application d'une surcharge, Clerivet a supposé que la relation (3.10) reste vraie, mais le rapport  $U$  devient une fonction de la longueur de fissure jusqu'à atteindre sa valeur avant surcharge (valeur constante), au moment où la fissure sort de la zone perturbée.

Pour calculer le nombre de cycles  $N_d$  après surcharges il intègre numériquement la relation (3.10) par la méthode de Simpson :

$$dN = \frac{da}{C_E \cdot \Delta K_{eff}^m} \quad (3.11)$$

où les bornes initiales d'intégration étant supposées connues, et les bornes finales d'intégration sont déterminées par la connaissance de  $a_{Nd}$  (la longueur de fissure correspondant à  $N_d$ ).

Clerivet se base sur le modèle de Wheeler [ 6 ] pour calculer la taille de la zone plastique cyclique de surcharge (en état de contrainte plane) :

$$W_s^C = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\Delta K \cdot R_{pic}}{R_e} \right)^2 \quad (3.12)$$

Il trouve :

$$a_{Nd} = a_0 + W_s^C$$

où  $a_0$  est la longueur initiale de fissure

Clerivet a calculé les bornes d'intégration dans deux zones suivant le plan de propagation de la fissure :

- dans le cas où  $X = W_s^C$

La borne initiale est  $\Delta K_{\text{effmin}}$

et la borne finale est  $\Delta K_{\text{effNd}}$ , ce qui correspond à la valeur de  $\Delta K_{\text{eff}}$

$$\text{à } a_{\text{Nd}} = a_o + W_s^C$$

- dans les cas où  $X < W_s^C$

La borne initiale est toujours  $\Delta K_{\text{effmin}}$

et la borne finale demande la connaissance de la variation :

◇ soit de U

◇ soit de  $\Delta K_{\text{eff}}$  entre  $a_o$  et  $a_{\text{Nd}}$  où :

$$\Delta K_{\text{eff}} = \sqrt{\left( \frac{\Delta K_{\text{effNd}}^2 - \Delta K_{\text{effmin}}^2}{W_s^C} \right) \cdot X + \Delta K_{\text{effmin}}^2} \quad (3.13)$$

On remarque que l'hypothèse de Clerivet pour déterminer les nombres des cycles Nd par la relation (3.11), reste à vérifier à cause de l'existence de 2 relations pour calculer U ( $C_E = cU^m$  et  $\Delta K_{\text{eff}} = U \cdot \Delta K$  ?). La relation (3.13) également nécessite que l'on identifie par l'expérience les quantités  $\Delta K_{\text{effmin}}$  et  $\Delta K_{\text{effNd}}$ .

### 3.2.3.2. Modèle de Matsuoka

Matsuoka [ 11 ] étudie la distribution des contraintes et des déformations résiduelles dans le cas d'un chargement aléatoire. Il part du modèle de Dugdale [ 2 ], et il se place dans le cas où le taux de surcharge appliqué ( $R_{\text{pic}}$ ) est de 2 avec un rapport de charge  $R = 0$ . La distribution des contraintes résiduelles avant, pendant et après surcharges est donnée par la Figure 3.5. Les relations entre les différentes zones plastiques sont alors les suivantes :

$$W_O^m = 4 W_O^C \text{ avant la surcharge} \quad (3.14)$$

$$W_S^m = 4 W_O^m \text{ pendant la surcharge} \quad (3.15)$$

$$W_S^C = \frac{1}{4} W_S^m = W_O^m$$

Lorsque l'on retrouve le chargement initial, la zone plastique monotone devient 4 fois plus petite que précédemment. Ce résultat est l'inverse du résultat obtenu avant l'application de la surcharge.

Dans le cas où la fissure progresse, le rapport des zones plastiques cycliques et monotone tend progressivement à passer du rapport 1/4 au rapport 4/1.

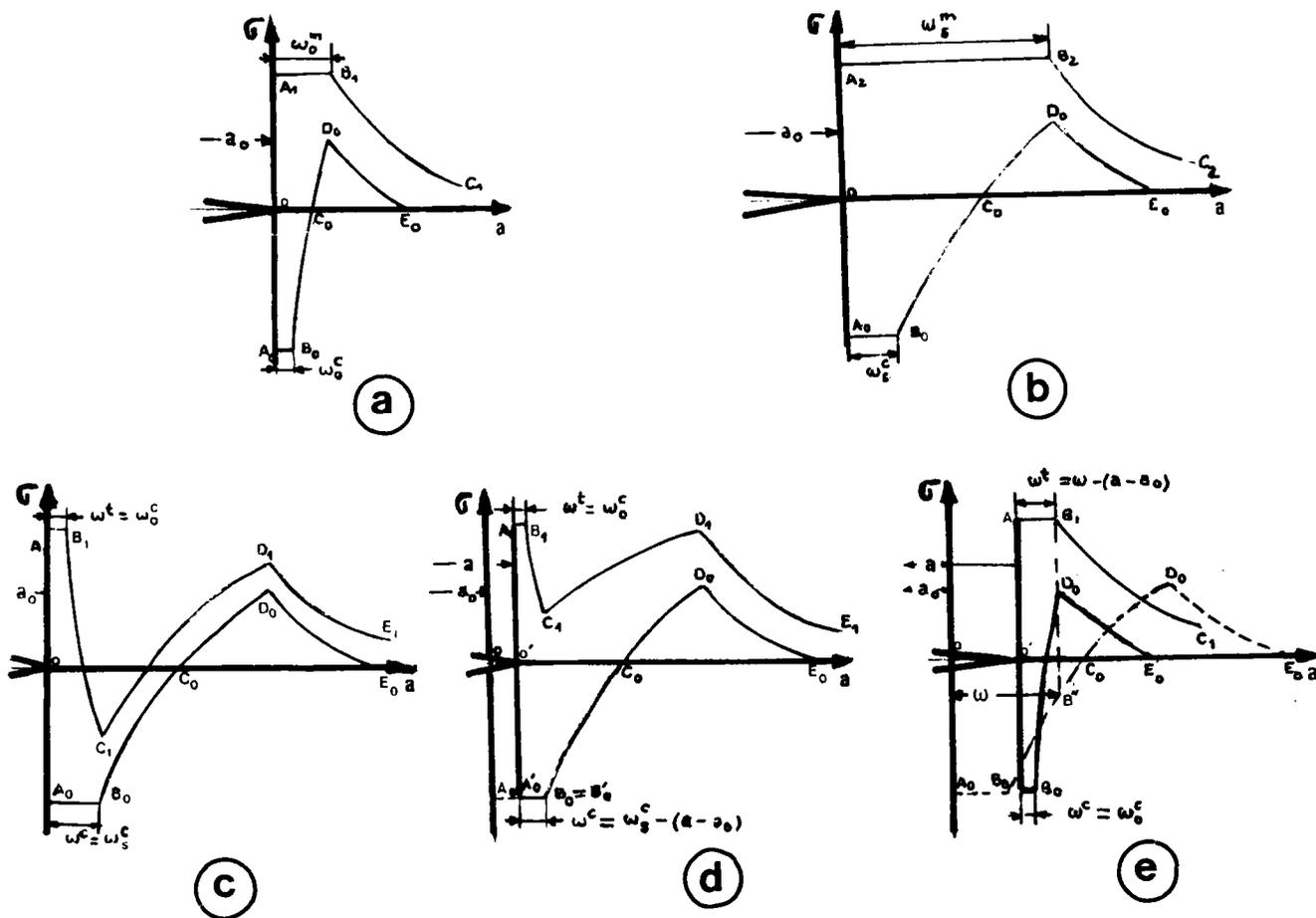


Figure 3.5 : Schéma illustrant les tailles des zones plastiques et la distribution des contraintes résiduelles avant (a), pendant (b) et après surcharge (c, d, e), d'après le modèle de Matsuoka [11].

Matsuoka a imaginé de remplacer l'influence des contraintes résiduelles par une séquence de chargement équivalente (Figure 3.6)

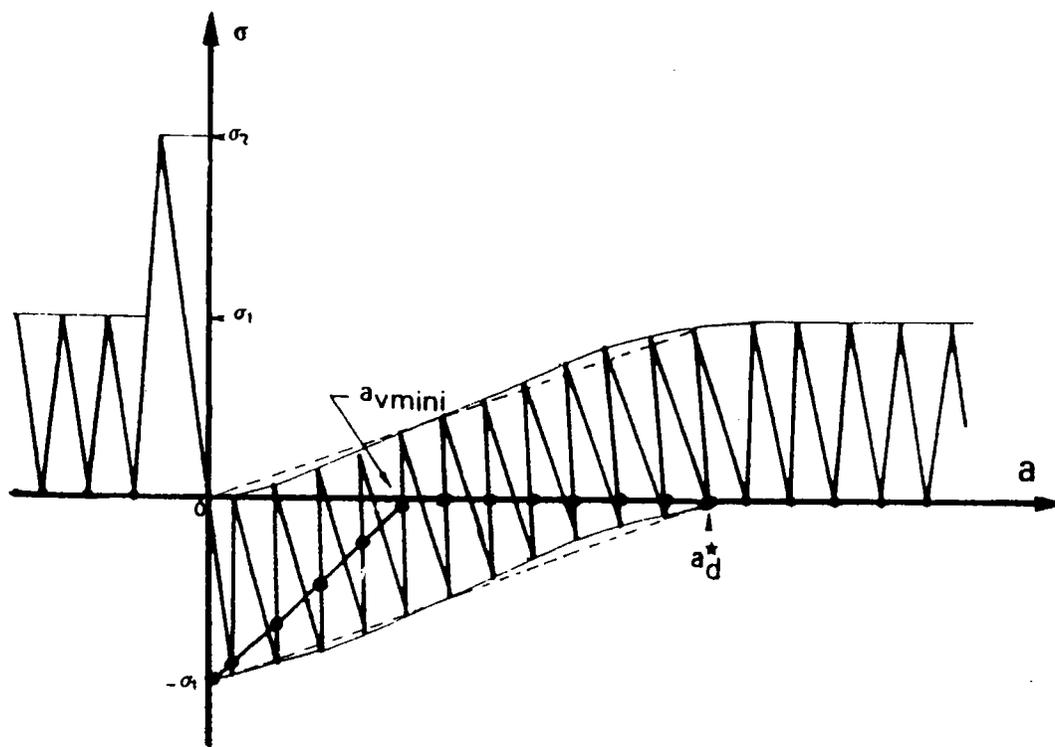


Figure 3.6 : Schéma du chargement équivalent dans le modèle de Matsuoka [ 11 ] .

On retrouve la distribution du chargement initial à une distance équivalente de 1.5 fois la zone plastique monotone courante  $W_0^m$  . Cette longueur correspond à la longueur affectée, si ce modèle était vérifié.

Matsuoka a suggéré que l'augmentation momentanée de l'amplitude de charge au cours de la fissuration par fatigue entraîne un émoussement de la pointe de la fissure. Le nombre de cycles  $N_d$  correspondrait alors au nombre de cycles nécessaires pour que la fissure émoussée retrouve sa forme géométrique initiale. Ce phénomène d'émoussement existe, mais sur une longueur de fissure très faible en comparaison de la longueur de fissure  $a_d$ .

Cette méthode a été utilisée par Matsuoka pour en déduire un chargement équivalent sans contraintes résiduelles.

Ce chargement varie de façon linéaire avec l'accroissement de la fissure et conduit à une évolution de U de la forme :

$$U = 1 - \mathbf{1} \cdot \left( \frac{1}{a_{Vmin}} - \frac{1}{a_d^*} \right) \cdot X ; \text{ pour } 0 \leq X \leq a_{Vmin} \quad (3.16)$$

$$U = \mathbf{1} \cdot \frac{X}{a_d^*} ; \text{ pour } a_{Vmin} \leq X \leq a_d^* \quad (3.17)$$

l'existence d'un émoussement immédiatement présente après surcharge qui s'introduit par le facteur  $\mathbf{1}$  dans les formules (3.16) et 3.17) ( $\mathbf{1} = 1$ ).

Dans l'expression (3.16),  $a_{Vmin}$  représente la longueur pour laquelle le minimum de U est atteint et  $a_d^*$  la longueur pour laquelle ce rapport a retrouvé sa valeur normale.

Dans le cas d'un taux de surcharge ( $R_{pic}$ ) égal à 2, cas considéré par Matsuoka, le concept de chargement équivalent conduit à :

$$a_{Vmin} = 0.53 W_s^C \quad (3.18)$$

$$a_d^* = 1.5 W_s^C \quad (3.19)$$

L'intérêt supplémentaire du modèle de Matsuoka est qu'il présente la possibilité de décrire le cas des surcharges multiples. L'auteur a postulé que l'effet de surcharges multiples pouvait être décrit à partir de l'évolution de la limite d'élasticité du matériau au cours du cyclage mécanique.

Les relations (3.16) et (3.17) sont alors modifiées en introduisant le rapport ( $R_e/R_e'$ ), des limites d'élasticité monotone et cyclique et le taux de surcharge  $R_{pic}$ .

$$U = 1 - \frac{R_e R_{pic}}{2R_e'} \left( \frac{1}{a_{Vmin}} - \frac{1}{a_d^*} \right) \cdot X ; \text{ pour } 0 \leq X \leq a_{Vmin} \quad (3.20)$$

et

$$U = 1 - \frac{R_e \cdot R_{pic}}{2 R'_e} \left( 1 - \frac{X}{a_d^*} \right) ; \text{ pour } a_{Vmin} < X \leq a_d^* \quad (3.21)$$

### 3.2.3.3. Modèle de Taira

Taira [ 13 ] a déterminé expérimentalement la distribution des contraintes résiduelles  $\sigma_r (X)$  à la pointe de fissure à l'aide d'une méthode de rayons X, et a calculé le facteur d'intensité de contrainte qui lui correspond selon une formulation du type Green :

$$K_{ouv} = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{\sigma_r (X)}{-X} dX \quad (3.22)$$

Ce qui lui a permis de déterminer l'amplitude efficace du facteur d'intensité de contrainte :

$$\Delta K_{eff_T} = K_{ap} - K_{ouv} \quad (3.23)$$

où  $K_{ap}$  représente le facteur d'intensité de contrainte appliqué.

Les résultats expérimentaux représentés sur la Figure 3.7 montrent que cette distribution de contraintes résiduelles est une distribution de contraintes de compression. Son intensité est inférieure à celle prévue par la solution de Rice [ 1 ], et qu'approximativement cette distribution est linéaire en fonction de la distance à la pointe de fissure. Cette distribution peut se mettre sous la forme :

$$\sigma_r (X) = \sigma_r^0 - \frac{\sigma_r^0}{W_s^C} \cdot \Delta a - \frac{\sigma_r^0}{W_s^C} \cdot X \quad (3.24)$$

où  $\sigma_r^0$  est l'intensité maximale,  $\Delta a$  est l'incrément d'avancement de la fissure et  $X$  est la distance au-delà de la pointe de fissure. Les contraintes résiduelles s'annulent pour la distance  $W_s^C$  qui correspond à la taille de la zone plastique de surcharge .

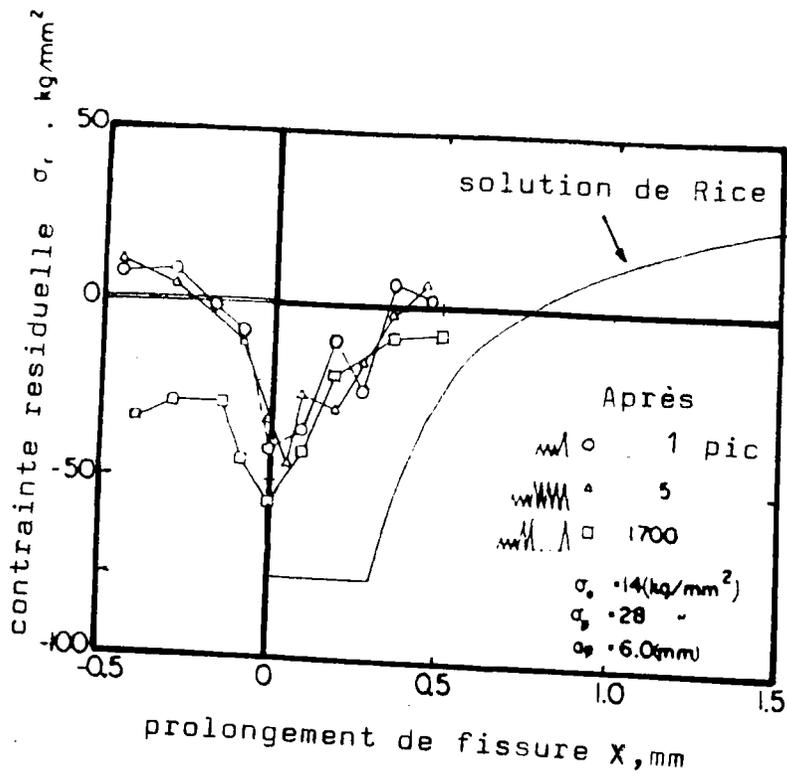


Figure 3.7 : Distribution des contraintes résiduelles déterminée par rayon X par Taira [ 13 ]

L'intégration de (3.24) conduit à la valeur de  $K_{ouv}$  :

$$K_{ouv} = 2 \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sigma_r^0 \left( 1 - \frac{2 \Delta a}{3 W_s^C} \right) \cdot \sqrt{\Delta a} \quad (3.25)$$

Dans ce modèle, l'évolution du rapport U est représenté sur la Figure 3.8, il décroît après l'application de la surcharge comme l'indique l'expérience pour remonter ensuite. Le minimum est atteint pour une progression de fissure égale à la moitié de  $W_s^C$  et correspond à la valeur :

$$K_{ouv} = \frac{4 \sigma_r^0}{3 \sqrt{\pi W_s^C}} \quad ; \text{ pour } \Delta a = W_s^C/2 \quad (3.26)$$

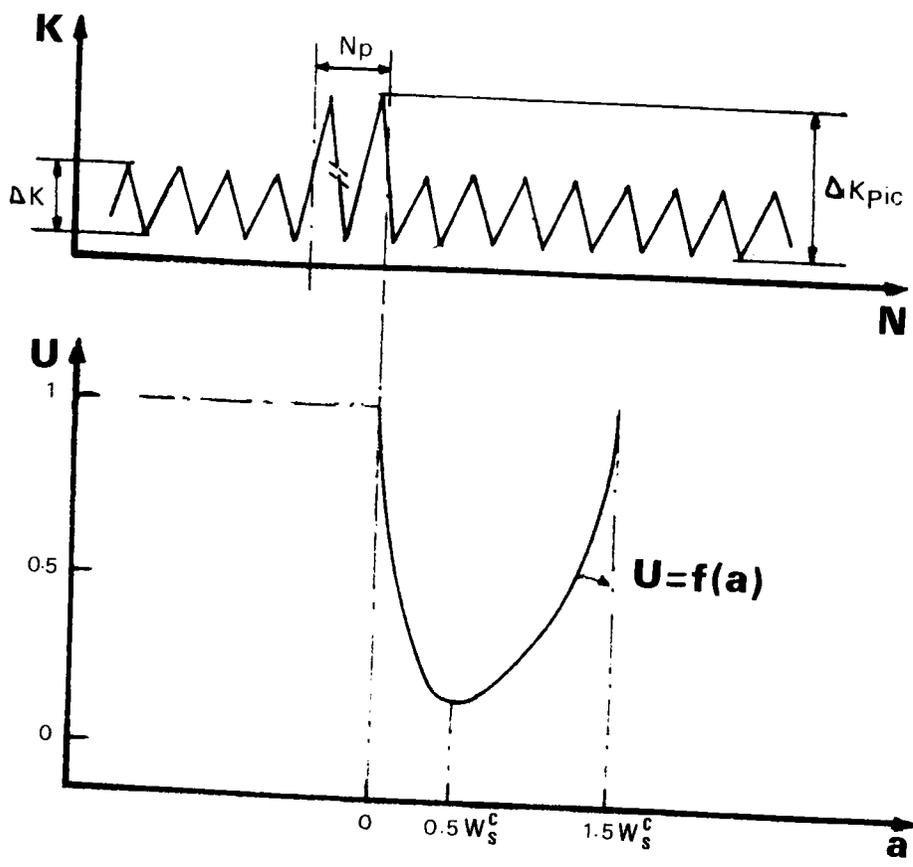


Figure 3.8 : Evolution du rapport U selon le modèle de Taira [ 13 ] .

3.2.3.4. Modèle de Sunder

Sunder [ 14 ] a postulé une évolution du point d'ouverture dans le cas particulier des chargements "haut-bas" et "bas-haut". Cette évolution représentée sur la Figure 3.9 est formulée de la façon suivante :

- cas de chargements "haut-bas" (  $a \geq a_1$  ) :

$$K_{ouv} = K_{ouv_2} + \Delta K_{ouv} \exp ( -\alpha_1^2 ( a - a_1 ) ) \tag{3.26}$$

- cas des chargements "bas-haut" (  $a \geq a_2$  ) :

$$K_{ouv} = K_{ouv_2} + \Delta K_{ouv} \exp ( -\alpha_2^2 ( a - a_2 ) ) \tag{3.27}$$

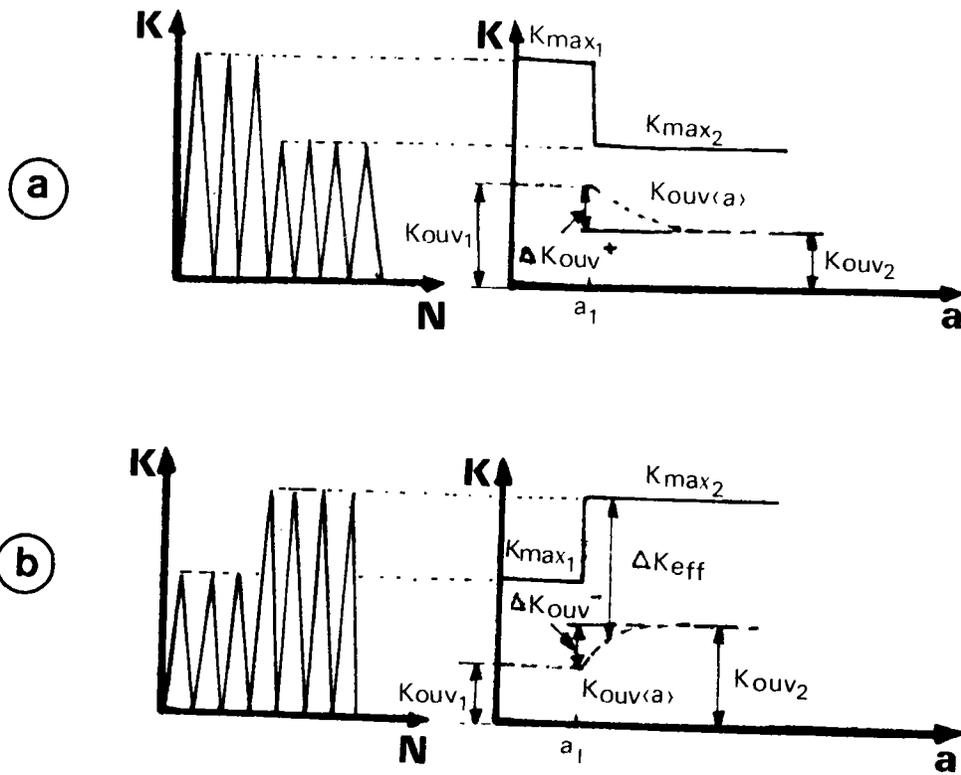


Figure 3.9 : Evolution de fissure selon le modèle de Sunder [14] dans le cas des chargements "haut bas" (a) et "bas haut" (b)

Sunder a considéré que l'évolution des forces de fermeture se faisait exponentiellement jusqu'à la valeur  $K_{ouv2}$  relative au deuxième chargement. Les coefficients  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont définis par :

$$\alpha_1 = \frac{K_{\alpha 1}}{K_{max}^2} \quad ; \quad \alpha_2 = \frac{K_{\alpha 2}}{\Delta K^2} \tag{3.28}$$

où  $K_{\alpha 1}$  et  $K_{\alpha 2}$  sont les coefficients de proportionnalité.

Sunder a précisé que ce modèle peut être étendu au cas des surcharges multiples. Pour tenir compte du rapport de charge R, il propose d'utiliser la relation d'Elber [3] :

$$U = K_1 + K_2 R \tag{3.29}$$

où  $K_1$  et  $K_2$  sont des constantes.

L'évolution de  $K_{ouv}$  est représentée par une relation qui dépend des quantités  $K_{max}$ ,  $K_{min}$  et  $K_{pic}$  :

$$K_{ouv} = (1 - K_I) K_{max} + [ K_I - K_2 (1 - R_{pic}) ] K_{min} + 5(1 - K_I) (K_{pic} - K_{max}) \cdot (\exp(-\alpha_1^2 (a - a_0)) - \exp(-\alpha_2^2 (a - a_0))) \quad (3.30)$$

Il résulte de cette relation, que l'évolution du rapport  $U$  a la forme décrite par la figure 3.10.

On remarque que le minimum de  $U$  est bien observé dans cette modélisation mais sa position dépend du taux de surcharge et varie entre  $1/8$  et  $1/4$  de  $W_s^m$ . Ceci est donc contraire aux observations expérimentales, décrites précédemment [ 13 ] où l'on observe que le minimum est indépendant du point de fin d'application de surcharge.

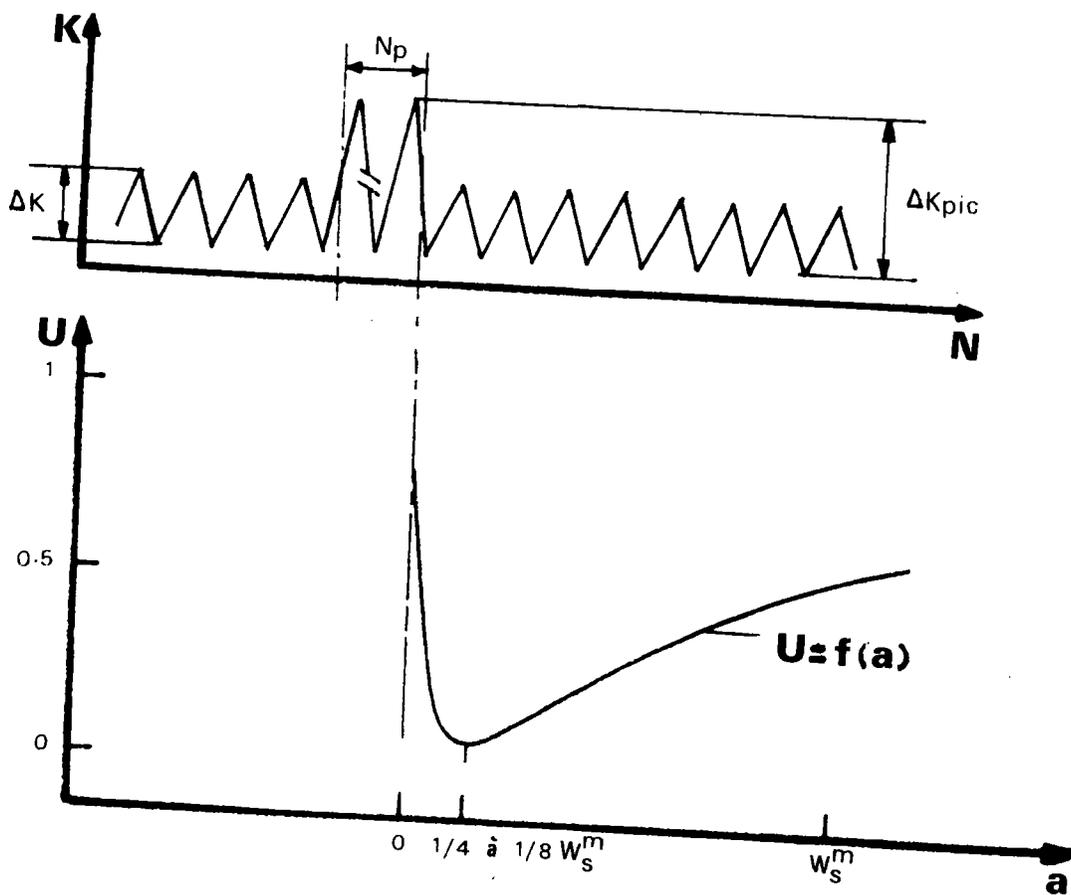


Figure 3.10 : Evolution du rapport  $U$  selon le modèle de Sunder dans le cas des surcharges multiples.

### 3.2.4. Modèles basés sur le concept de la mini-éprouvette

La progression d'une fissure de fatigue peut être modélisée en considérant une propagation incrémentale par rupture de "mini-éprouvettes" soumises à une déformation plastique importante.

Les auteurs de ces modèles ne tentent pas de préciser le mécanisme de propagation. Ils supposent que le matériau en tête de fissure est fatigué sous grande amplitude de déformation et se comporte comme un matériau massif subissant les mêmes déformations, c'est-à-dire obéissant aux lois de fatigue oligocyclique.

Ces modèles sont fondés soit :

- \* sur la propagation de fissure sans accumulation du dommage,
- \* sur la propagation de fissure avec accumulation du dommage.

Durant ces dernières années, un grand nombre de travaux a été publié sur ce sujet. Il est évidemment impossible dans le cadre limite de ce mémoire, de tous les citer. Nous allons seulement essayer de présenter deux modèles à titre d'exemple :

#### 3.2.4.1. Modèle basé sur le concept de la mini-éprouvette sans accumulation du dommage

Glinka [ 15 ] a proposé un modèle qui prédit la propagation des fissures de fatigue dans le cas d'un chargement cyclique  $cst$ ,\* et étendu ensuite à un chargement cyclique non constant [ 16 ] .

Pour évaluer la progression d'une fissure de fatigue, Glinka fait l'hypothèse qui consiste à assimiler le fond de fissure sur une distance  $X^*$  à une mini-éprouvette se rompant en fatigue oligocyclique.

---

\*constant

i - Description du modèle :

Glinka fait l'hypothèse que c'est la déformation  $\Delta\epsilon^*$  sur la distance  $X^*$  qui contribue au dommage et que cette déformation est uniforme sur  $X^*$  (où  $X^*$  est considéré comme une caractéristique du matériau). Il s'agit donc :

- ◇ d'évaluer analytiquement cette déformation  $\Delta\epsilon^*$ ,
- ◇ de déterminer à l'aide de la courbe de Manson-Coffin le nombre de cycles  $N^*$  à rupture correspond à  $\Delta\epsilon^*$ ,
- ◇ la vitesse de fissuration est moyenne sur la distance  $X^*$  est donnée par la relation (Figure 3.11) :

$$\frac{da}{dN} = \frac{X^*}{N^*} \quad (3.31)$$

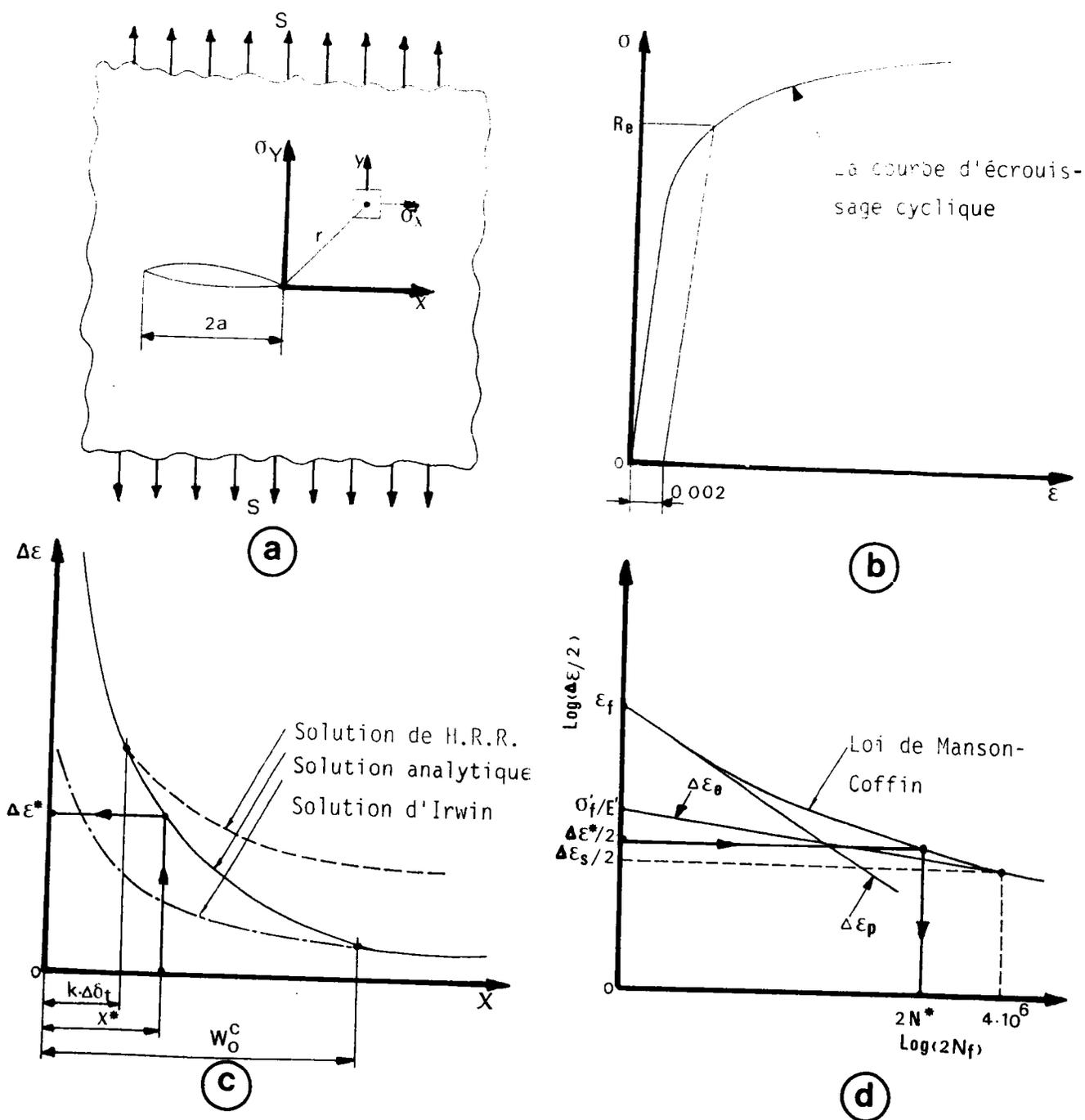


Figure 3.11 : Procédure de calcul de la vitesse de fissuration

- a. fissure dans une plaque infinie
- b. courbe d'écroûissage cyclique
- c. distribution de l'amplitude de déformation à la pointe de fissure
- d. relation entre la durée de vie et la déformation.

ii - Calcul des déformations à la pointe de la fissure

Deux solutions analytiques donnent l'état de déformation : celle de Hutchinson [ 17 ] et celle d'Irwin [ 18 ] . Bien que la solution d'Hutchinson ait été développée pour des chargements monotones , Chalant [ 19 ] a montré qu'il était possible de l'étendre aux chargements cycliques en tenant compte du phénomène de fermeture. Glinka suppose que ces deux solutions s'appliquent au cas du chargement cyclique.

Le calcul des déformations à la pointe de la fissure est effectué en état de contraintes planes, en raison du niveau du facteur d'intensité de contrainte atteint durant la surcharge ( $K_{pic}$ )

A partir de la solution d'Hutchinson les relations définissant les contraintes et déformations en fonction de la distance X à la pointe de fissure sont alors données par la formule suivante :

$$\Delta \varepsilon = C_{1cp} \left( \frac{\Delta K_{eff}^2}{X} \right)^{1/(N'+1)} + C_{2cp} \left( \frac{\Delta K_{eff}^2}{X} \right)^{N'/(N'+1)} \quad (3.32)$$

$$\Delta \sigma = C_{3cp} \left( \frac{\Delta K_{eff}^2}{X} \right)^{1/(N'+1)} \quad (3.33)$$

avec

$$\begin{aligned} C_{1cp} &= (\tilde{\sigma}_\theta - \nu \tilde{\sigma}_r) \frac{2 \frac{(N'-1)/(N'+1)}{I/(N'+1)} K' N' (N'+*)}{E (N'+2)/(N'+1)} \\ C_{2cp} &= (\tilde{\sigma}_\theta - \tilde{\sigma}_{r/2}) \frac{2 \frac{(1-N')}{(1+N')}}{E K' \mathbb{I}_N^{N'/(N'+1)}} \\ C_{3cp} &= \tilde{\sigma}_\theta \frac{2 \frac{(N'-1)/(N'+2)}{I/(N'+1)} K' N'/(N'+1)}{E I/(N'+1)} \end{aligned} \quad (3.34)$$

et  $N' = 1/n'$  où  $n'$  est le coefficient d'écrouissage cyclique.

où  $\tilde{\sigma}_\theta$ ,  $\tilde{\sigma}_r$ , et  $\mathbb{I}_N$  sont les paramètres sans dimensions du modèle d'Hutchinson, et  $K'$ , coefficient de la loi d'écrouissage cyclique, et  $E$  est le module d'YOUNG du matériau.

Shih [20] a montré que le modèle d'Hutchinson n'est valable que sur une distance  $X$  très proche de la pointe de fissure, de l'ordre de plusieurs fois l'ouverture  $\Delta \delta_{tcp}$  de la fissure  $X \leq k \Delta \sigma_{tcp}$  :

avec

$$\Delta \delta_{tcp} = \frac{\Delta K_{eff}^2}{2 R_e' E} \quad (3.35)$$

Par ailleurs, la solution issue des travaux d'Irwin :

$$\Delta \epsilon = B_{icp} \frac{\Delta K_{eff}}{\sqrt{X}} \quad (3.36)$$

avec

$$B_{icp} = (1 - \nu) / (E \sqrt{2\pi}) \quad (3.37)$$

n'est valable qu'au-delà de la zone plastique cyclique ( $W_{ocp}^c$ ) dont la taille est donnée par :

$$W_{ocp}^c = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\Delta K_{eff}}{R_e'} \right)^2 \quad (3.38)$$

Une relation empirique est proposée par Glinka pour décrire la zone intermédiaire :

$$\Delta \epsilon = A_{icp} + A_{2cp} \cdot \ln(X) + A_{3cp} \cdot X^{-1} + A_{4cp} \cdot X^{-2} \quad (3.39)$$

dont les coefficients  $A_{icp}$  sont déterminés en imposant des conditions de raccordement aux équations (3.32) et (3.36).

### iii - Evaluation de la distance $X^*$

La détermination de la distance  $X^*$  peut se faire de deux façons :

- la propagation ne peut se faire que si  $\Delta \epsilon^*$  est supérieure ou égale à l'amplitude

de déformation  $\Delta \epsilon_{scp}$  correspondant au seuil de non propagation. La déformation  $\Delta \epsilon_{scp}$  pouvant être considérée comme faible et seulement élastique. Selon la solution d'Irwin, on trouve :

$$X^* = \frac{1}{2 \pi} \left( \frac{(1 - \nu) \Delta K_{eff} s}{\Delta \epsilon_{scp} E} \right)^2 \quad (3.40)$$

avec

$$\Delta K_{effs} = U_s \Delta K_s$$

Dans le cas de l'acier E 36Z, connaissant :  $\Delta K_s = 8 \text{ MPa } \sqrt{\text{m}}$ ,  $U_s = 0.5$  et  $\Delta \sigma_s = 0.002$ , on trouve  $X^* = 0.00735 \text{ mm}$ .

- Pour les grandes amplitudes du facteur d'intensité de contrainte, la composante élastique de la déformation dans la solution d'Hutchinson (3.32) peut être négligée. Par conséquent, connaissant la loi de Paris du matériau et en se plaçant dans des conditions où  $\Delta K_{eff}$  est connu, nous avons :

$$\frac{da}{dN} = C \cdot \Delta K^m = \frac{X^*}{N^*}$$

Or  $N^*$  est relié à  $\Delta \epsilon^*$  par la loi de Manson-Coffin et par identification à l'équation (3.32) :

$$m = - 2 N' / (c (N' + 1))$$

$$C = 2 \left( \frac{\epsilon_f' (4 \mu K' E)^{N'/(N'+1)}}{\tilde{\sigma}_\theta - \tilde{\sigma}_{r/2}} X \frac{N' + c (N' + 1)}{(N' + 1)} \right)^{1/c} \quad (3.41)$$

où  $\epsilon_f'$  est le coefficient de ductilité cyclique, et  $c$ , l'exposant de ductilité de la relation de Manson-Coffin.

Ayant déterminé pour l'acier E 36 Z :  $m = 2.9$ ,  $C = 8.9 \times 10^{-12}$ , le paramètre  $X^*$  calculé vaut :  $X^* = 0.0071 \text{ mm}$ .

Les valeurs de  $X^*$  calculées par les deux méthodes sont équivalentes.

iv - Prise en compte du phénomène de fermeture

Pour exprimer l'amplitude de déformation  $\Delta \varepsilon$  en fonction du rapport de fermeture de U ( $U = \Delta K_{\text{eff}} / \Delta K$ ) les équations (3.32) et 3.36) deviennent :

$$\Delta \varepsilon = C_{\text{Icp}} \left( \frac{U \cdot \Delta K^2}{X^*} \right)^{1/(N'+1)} + C_{2\text{cp}} \left( \frac{U \cdot \Delta K^2}{X^*} \right)^{N'/(N'+1)} \quad (3.42)$$

et

$$\Delta \varepsilon = B_{\text{Icp}} \frac{U \cdot \Delta K}{X^*} \quad (3.43)$$

Glinka [ 16 ] a fait l'hypothèse que le phénomène de fermeture peut être simulé par l'effet qu'induirait une zone de contact fictive  $g_{\text{cp}}$  (correspond à l'état de contrainte plane) en fond de fissure. En effet, postuler l'existence d'une telle zone revient à décaler la distribution de contrainte produite par l'amplitude du facteur d'intensité de contrainte  $\Delta K$ . Il suffit alors de déterminer  $g_{\text{cp}}$  de telle sorte que cette distribution soit équivalente à celle donnée par  $\Delta K_{\text{eff}}$ . Les déformations à la pointe de la fissure sont alors données par :

$$\Delta \varepsilon = C_{\text{Icp}} \left( \frac{\Delta K^2}{X^* + g_{\text{cp}}} \right)^{1/(N'+1)} + C_{2\text{cp}} \left( \frac{\Delta K^2}{X^* + g_{\text{cp}}} \right)^{N'/(N'+1)} \quad (3.44)$$

et

$$\Delta \varepsilon = B_{\text{Icp}} \frac{\Delta K}{\sqrt{X^* + g_{\text{cp}}}} \quad (3.45)$$

La composition des équations (3.42) et (3.44) ou (3.43) et (3.45) nous donne une relation entre le rapport de fermeture et le paramètre  $g_{\text{cp}}$  :

$$\frac{g_{\text{cp}}}{X^*} = \frac{1 - U^2}{U^2} \quad (3.46)$$

Dans le cas d'un spectre de charge comportant deux niveaux l'analyse du déplacement en fond de fissure conduit Glinka à l'expression suivante :

$$g_{cp} = X^* \cdot 2^{(N' - 1)} \cdot \left( \frac{W_{scp}^m}{W_{ocp}^m} \right)^{3 N'/2 (N' + 1)} \quad (3.47)$$

où  $W_{scp}^m$  est la zone plastique monotone de surcharge en état de contrainte plane.

$$\text{avec} \quad W_{scp}^m = \frac{I}{\pi} \cdot \left( \frac{K_{pic}}{R'_e} \right)^2 \quad (3.48)$$

et  $W_{ocp}^m$  est la zone plastifiée monotone courante en état de contrainte plane

$$W_{ocp}^m = \frac{I}{\pi} \cdot \left( \frac{K_{max}}{R'_e} \right)^2 \quad (3.49)$$

Pour calculer la distance  $g_{cp}$ ; Chehimi [ 12 ] a pris l'hypothèse comme dans des nombreux modèles de ce type, que l'amplitude efficace du facteur d'intensité de contrainte gouverne la progression de la fissure sous chargement variable. Il est alors nécessaire de se donner une loi d'évolution du rapport de fermeture U.

D'une façon similaire à Matsuoka [ 11 ], Chehimi a postulé que la pente des courbes représentant les évolutions linéaires du rapport U en fonction de la longueur a, peuvent être modifiées par l'accroissement du nombre des pics de surcharge.

Un facteur correctif  $U_I$  est donc à introduire dans les formules (3.16) et (3.17) pour tenir compte de ce fait. Chehimi considère que  $U_I$  est dans le rapport des limites d'élasticité monotone et cyclique ( $R_e/R'_e$ ). Les formules (3.16) et (3.17) peuvent se réécrire :

$$U = 1 - U_I \left( \frac{I}{a_{Vmin}} - \frac{I}{a_d^*} \right) \cdot X ; \text{ pour } 0 \leq X \leq a_{Vmin} \quad (3.50)$$

et

$$U = 1 - U_I \left( 1 - \frac{X}{a_d^*} \right); \text{ pour } a_{Vmin} \leq X \leq a_d^* \quad (3.51)$$

L'évolution du rapport U est reportée dans la relation (3.46) :

$$g_{cp} = \frac{1 - U^2}{U^2} \cdot X^* \quad (3.52)$$

où  $a_{Vmin}$  représente la longueur de la fissure correspondant à la vitesse minimale ;

avec 
$$a_{Vmin} = W_{scp}^C / 3 \quad (3.53)$$

et  $a_d^*$  représente la longueur de la fissure affectée par le ralentissement qui est égal à  $W_{scp}^C$  (où  $W_{scp}^C$  la taille de la zone plastique cyclique de surcharge).

### 3.2.4.2. Modèles basés sur le concept de la mini éprouvette avec accumulation du dommage

#### 3.2.4.2.1. Modèle de Glinka

Glinka [ 53 ] a proposé un autre modèle à partir de ses propres travaux décrits précédemment [ 15-16 ]. Ce modèle est fondé sur l'accumulation du dommage dans le cas d'une fissure avec émoussement mais dans le cas de chargement à amplitude constante. Il a trouvé que la vitesse de propagation de la fissure de fatigue est de la forme suivante :

$$\frac{da}{dN} = C \Delta K^m$$

avec

$$m = - 2 / (c (N' + 1)) \quad (3.54a)$$

et

$$C = \frac{2 \epsilon t^1}{\phi_j} \cdot \left( \frac{16 \pi E K'}{X_I^2 (N' + 1)} \right)^{1/(c(N+1))} \cdot \rho^* \quad (3.54b)$$

où  $\Phi_j$  est une fonction dépendant de nombre, de cycles, et  $\rho^*$  le rayon de fond d'entaille (Figure 3.12).

$$\begin{aligned} \Phi_j &\equiv 1 \quad ; \text{ pour } W_0^C = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\Delta K}{R_e} \right)^2 \leq \rho^* \\ \Phi_j &\equiv 1 - \Phi_{j-3} \left( \frac{N_{fI}}{N_{f4}} \right) - \Phi_{j-2} \left( \frac{N_{fI}}{N_{f3}} \right) - \Phi_{j-1} \left( \frac{N_{fI}}{N_{f2}} \right) ; \text{ pour } W_0^C > \rho^* \end{aligned} \quad (3.55)$$

avec

$$\frac{N_{fi}}{N_{fk}} = \left( \frac{x_i}{x_k} \right)^{2 / (c(N^i + 1))} \quad (3.56)$$

et

$$x_1 = 1.633, \quad x_2 = 0.8967, \quad x_3 = 0.6763 \quad \text{et} \quad x_4 = 0.5641$$

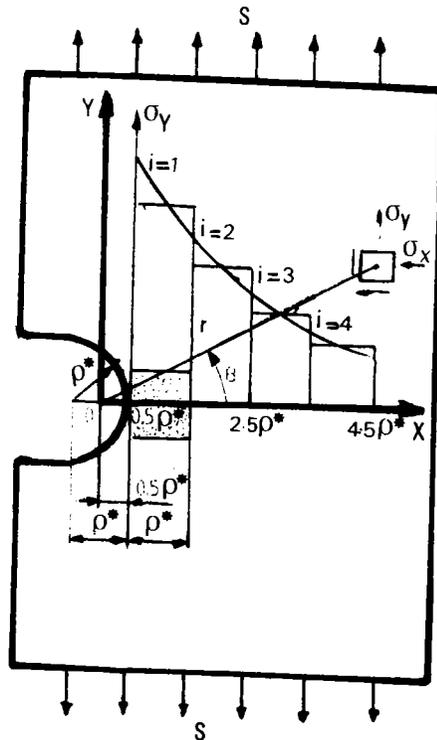


Figure 3.12 : Modèle de Glinka [ 53 ]

### 3.2.4.2.2. Modèle de Stouffer

Stouffer [ 21 ] a proposé un modèle de propagation de fissure par fatigue basé sur celui de Majumdar [ 22 ] . Ce modèle est fondé sur l'accumulation du dommage en avant de la pointe de fissure par déformation plastique d'amplitude constante :

#### i - Calcul des déformations et des contraintes à la pointe de la fissure

Le calcul des déformations et des contraintes au voisinage de la pointe de fissure pour un matériau élastoplastique écrouissable.

A partir de la solution de Majumdar, la relation définit les contraintes et déformations en fonction de la distance X à la pointe de fissure est alors donnée par la formule suivante :

$$\Delta\sigma \cdot \Delta\epsilon = \frac{\Delta K^2}{(n' + 1) E \cdot \pi \cdot X} \quad (3.57)$$

où n' est le coefficient d'écrouissage cyclique du matériau.

Quand X tend vers 0, on trouve la limite de  $\Delta\sigma \cdot \Delta\epsilon$  tend vers l'infini ( $\lim_{X \rightarrow 0} \frac{\Delta\sigma \cdot \Delta\epsilon}{X} \rightarrow \infty$ ). Stouffer a introduit un facteur  $X_c$  qui représente l'émoussement de la pointe de fissure ( $X_c = 1/2 \text{ COD}$ , où le COD est l'écartement à fond de fissure) et qui permet d'éviter la singularité quand X tend vers 0. Donc, il remplace X par  $X + X_c$  dans l'équation (3.57), on trouve (Figure 3.12).

$$\Delta\sigma \cdot \Delta\epsilon = \frac{\Delta K^2}{(n' + 1) E \pi (X + X_c)} \quad (3.58)$$

D'un point de vue mathématique, cette situation peut s'analyser par superposition d'une fissure de longueur  $a + X_c$  soumise d'une part au chargement réel, et d'autre part à des contraintes de compression égale à l'amplitude de contrainte ultime  $\Delta\sigma_{ct}$  pour une distance  $X = X_c$ .

Les déformations et les contraintes à la pointe de la fissure sont données par :

$$\Delta \epsilon = \Delta \epsilon_y \left[ \frac{\Delta K^2}{(n'+1) \pi \cdot \Delta \sigma_y^2 (X + X_c)} \right]^{n'/(n'+1)} \quad (3.59)$$

et

$$\Delta \sigma = \Delta \sigma_y \left[ \frac{K^2}{(n'+1) \cdot \pi \cdot \Delta \sigma_y^2 (X + X_c)} \right]^{1/(n'+1)} \quad (3.60)$$

où  $\Delta \sigma_y$  est l'amplitude de la limite élastique de contrainte,

$\Delta \epsilon_y$ , l'amplitude de la limite élastique de déformation.

et  $X_c$ , représente l'émoussement de la pointe de fissure, est tiré de l'équation (3.60) après quand on applique la condition suivante :

pour  $X = 0$  et  $\Delta \sigma = \Delta \sigma_{ct}$ , on trouve

$$X_c = \frac{\Delta K^2}{(n'+1) \pi \Delta \sigma_y^2} \cdot \left( \frac{\Delta \sigma_y}{\Delta \sigma_{ct}} \right)^{(n'+1)/n'} \quad (3.61)$$

Lorsque la taille de la zone plastique n'est pas négligeable par rapport aux dimensions de l'éprouvette utilisée ou de la longueur de fissure, cette dernière doit être corrigée. La longueur à considérer est alors une longueur dite effective telle que (Figure 3.13) :

$$R_p^* = X_c + R_p \quad (3.62)$$

avec

$$R_p = \frac{\Delta K^2}{(n'+1) \pi \cdot \Delta \sigma_y^2} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{\Delta \sigma_y}{\Delta \sigma_{ct}} \right)^{(n'+1)/n'} \right] \quad (3.63)$$

où  $R_p$  est la taille de la zone plastique.

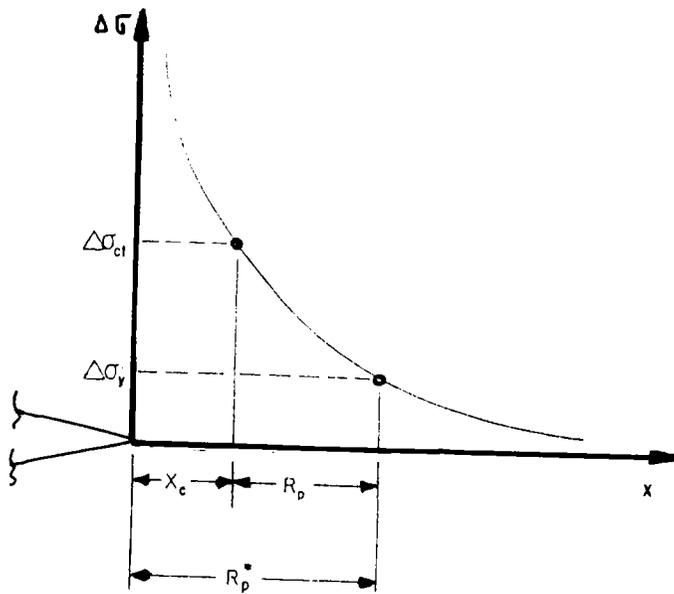


Figure 3.12 : Schéma représentant la relation entre  $X_c$ ,  $R_p$  et  $R_p^*$  [ 21 ]

Stouffer a fait l'hypothèse que l'amplitude de la déformation plastique  $\Delta \epsilon^P$  à une distance  $R_p^*$  du fond de fissure est donnée par :

$$\Delta \epsilon^P = \Delta \epsilon - \Delta \epsilon \text{ el} = \Delta \epsilon - \frac{\Delta \sigma}{E}$$

On peut trouver pour  $X \leq R_p$ , la relation suivante :

$$\Delta \epsilon^P = \Delta \epsilon_y \left[ \frac{\Delta K^2}{(n'+1) \pi \cdot \Delta \sigma_y^2 (X+X_c)} \right]^{1/(n'+1)} - \Delta \epsilon_y \left[ \frac{\Delta K^2}{(n'+1) \pi \cdot \Delta \sigma_y^2 (X+X_c)} \right]^{n' / -n'+1} \quad (3.64)$$

Stouffer a pris en compte également l'hypothèse que le dommage au fond de fissure résulte d'une fatigue plastique localisée, d'amplitude de déformation croissante, cumulée selon la règle de Miner :

$$D = \sum D_i = 1 \quad (3.65)$$

avec

$$D_i = \frac{I}{N_{fi}} = \epsilon_f' (\Delta \epsilon P_i)^c \quad (3.66)$$

Stouffer propose une nouvelle formulation de la relation qui donne la vitesse de propagation de la fissure en tenant compte de l'effet de mémoire associé à la zone plastique à la pointe de la fissure (Figure 3.14) :

$$\frac{da}{dN} = \sum_{i=1}^N D_i \left( a - \sum_{j=i}^N \Delta X_j, \sum_{j=i}^N \Delta X_j \right) \Delta X_j \quad (3.67)$$

On peut réécrire la relation (3.67) sous forme d'intégrale :

$$\frac{da}{dN} = \int_0^{R_p} D(a - X, X) dX \quad (3.68)$$

avec

$$R_p = \sum_{j=1}^N \Delta X_j$$

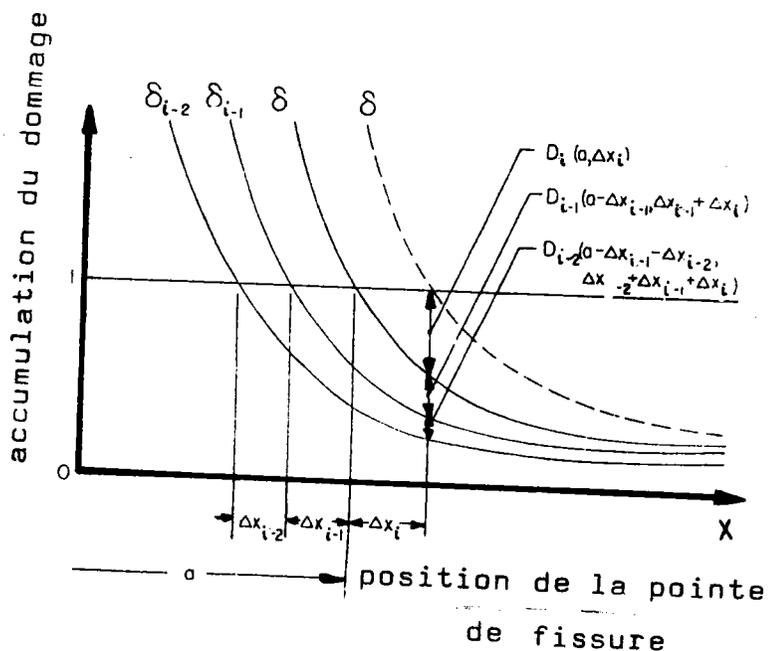


Figure 3.14 : L'accumulation du dommage pour chaque cycle après l'application de chargement ( $\delta = D$ )

### 3.3. Discussion

Les modèles utilisés sont, en majorité déduits du concept de fermeture de fissure développé par Elber [ 3 ] pour décrire le ralentissement d'une fissure après surcharge.

Pour la bonne compréhension des mécanismes régissant le retard, une analyse en terme de contraintes résiduelles à la pointe de fissure a été menée. Le phénomène d'émoussement de la fissure est souvent invoqué pour le blocage mais aussi parfois pour les problèmes de propagation.

i- Dans les modèles basés sur l'interaction des zones plastifiées, on trouve de simples modèles empiriques comme ceux de Wheeler [ 6 ] et Willenborg [ 8 ] et un modèle analytique de Führung [ 9 ]. Ces modèles ne sont pas entièrement satisfaisants. Ceci est principalement dû aux modes de calculs théoriques de la zone plastique où le phénomène d'écrouissage cyclique n'est pas pris en considération.

ii - Dans les modèles basés sur le concept de fermeture de fissure et l'interaction des zones plastifiées, on trouve les modèles expérimentaux comme ceux de Clerivet [ 10 ] et Taira [ 13 ] , et des modèles analytiques comme ceux de Matsuoka [ 11 ] et Sunder [ 14 ] .

Les désaccords entre les modèles de ce type existent surtout au niveau de la relation  $U = f(a)$ , relation qui sert de base de calcul. Ce désaccord existe plus précisément entre les points suivants :

\* le retour du rapport  $U$  depuis sa valeur minimale jusqu'à sa valeur normale se fait d'une façon :

- linéaire pour Matsuoka [ 11 ]
- polynomiale pour Clerivet [ 10 ]
- parabolique pour Taira [ 13 ]
- exponentielle pour Sunder [ 14 ]

Des résultats expérimentaux [ 7 ] donnent une relation proche de la forme linéaire.

\* l'accroissement de fissure pour lequel la vitesse de fissuration atteint sa valeur minimale est situé :

$$a_{Vmin} = 0.53 W_s^C \quad \text{pour Matsuoka}$$

$$a_{Vmin} = 0 \quad \text{pour Clerivet}$$

$$a_{Vmin} = 0.5 W_s^C \quad \text{pour Taira}$$

$$a_{Vmin} = (1/8 \text{ à } 1/4) W_s^C \quad \text{pour Sunder}$$

\* l'accroissement de fissure pour lequel la vitesse de fissuration retrouve sa valeur initiale

$$a_d = 1.5 W_s^C \quad \text{pour Matsuoka et Taira}$$

$$a_d = W_s^m \quad \text{pour Clerivet et Sunder}$$

De l'ensemble de ces modèles, on remarque que les modèles de Matsuoka et Taira n'ont pas de désaccord fondamental avec de nombreuses expériences publiées. Des imprécisions existent au niveau des valeurs de  $a_d$  et  $a_{Vmin}$ , mais les deux modèles donnent des valeurs voisines pour ces quantités.

Le modèle de Taira nécessite une détermination expérimentale délicate des contraintes résiduelles, le modèle de Matsuoka uniquement analytique est donc plus facile d'utilisation.

Les hypothèses concernant la loi de comportement du matériau dans le modèle de Matsuoka nécessiteraient d'être modifiées pour tenir compte des possibilités d'écroûissage cyclique.

iii - Dans les modèles basés sur le concept de la mini-éprouvette, on trouve deux modèles analytiques, le modèle de Glinka [ 16, 53 ] et le modèle de Stouffer [ 21 ] .

Ces modèles nécessitent une détermination expérimentale des données de fatigue oligocycliques.

- Le modèle de Glinka [ 16 ] a été proposé pour le cas de la propagation de fissure sans accumulation du dommage. Glinka, en faisant appel au principe de superposition a remarqué qu'ajouter des contraintes résiduelles de compression ou décaler la distribution originelle des contraintes produisait un effet similaire sur la forme de répartition des contraintes à la pointe de fissure. La modélisation de la fermeture de fissure peut être faite en décalant la distribution de la quantité  $g_{cp}$ .
- Glinka [ 53 ] a proposé également un modèle pour le cas de la propagation de fissure avec accumulation du dommage dans la condition de chargement à amplitude constante. Il se base sur les mêmes hypothèses de modèle précédent [ 16 ] , mais il calcule la vitesse de fissuration par l'intermédiaire de facteur de concentration de contrainte. Dans ce modèle, il n'a pas tenu compte de l'effet du phénomène de fermeture.

En effet, la limitation du deuxième modèle de Glinka réside dans la précision des coefficients qu'il fait ajuster (ex.  $\rho^*$ ,  $X_i$  etc).

- Le modèle de Stouffer a été proposé pour le cas de la propagation de fissure avec accumulation du dommage dans la condition de chargement variable.

Stouffer n'a pas tenu compte de l'effet de fermeture.

- On remarque que les modèles de Glinka et Stouffer permettent de réaliser des prévisions de comportement de la progression d'une fissure d'une façon rapide à l'aide d'un petit calculateur et est, cela utile pour les concepteurs de structures. Cependant sous leurs formes actuelles, nécessitent encore quelques développements, notamment.

\* Dans le premier modèle de Glinka [ 16 ] (sans accumulation du dommage), il est nécessaire de vérifier sa validité en conditions de déformation plane en mode **I**, en conditions de déformation plane et contrainte plane en modes **II** et **III**, en outre le modèle ne permet pas de prédire quantitativement le nombre de

cycles de retard.

- \* Dans le modèle de Stouffer [ 21 ] (avec accumulation du dommage), il est nécessaire d'introduire l'effet du phénomène de fermeture.
- Nous pensons que ces approches qui consistent à traiter le fond de fissure comme une mini-éprouvette de fatigue oligocyclique doivent être améliorées et en particulier il serait intéressant de revoir l'expression de la zone de contact  $g$  qui traduit le phénomène de fermeture dans les conditions d'état de déformation plane et les conditions d'état de contrainte plane.

### 3.4. Modélisation

#### Modèle de vitesse de fissuration basé sur l'analyse des contraintes et des déformations à la pointe de fissure en déformation plane

##### 3.4.1. Introduction

Glinka [ 16 ] a proposé un modèle basé sur la distribution des contraintes et des déformations à la pointe de fissure uniquement dans l'hypothèse de contraintes planes. Or, dans la réalité, le processus de déformation a souvent un comportement tridimensionnel (3D) (contrainte plane et déformation plane) ou peut-être assimilé à un comportement en déformation plane (éprouvette épaisse).

Une partie de notre étude consistera donc en l'adaptation du modèle proposé par Glinka en le formulant à partir de l'hypothèse de déformation plane (Annexe A.9.1.3.)

La validité de cette hypothèse sera ensuite examinée grâce à l'utilisation des résultats expérimentaux obtenus dans le cas de l'application d'un grand nombre de pics de surcharge pour un Acier E36 Z.

3.4.2. Expression du champ des contraintes et des déformations sous chargements cycliques en état de déformation plane

Nous suivons une démarche similaire au modèle de Glinka [ 16 ] mais l'hypothèse de déformation plane est introduite de la façon suivante :

- A partir de la solution d'HRR [ 17 ] (Hutchinson-Rice-Rosengren), les déformations et les contraintes en fonction de la distance X à la pointe de fissure sont alors reformulées comme suit :

pour  $X \leq K \Delta \delta_{tDp}$  ; où  $\Delta \delta_{tDp} = \frac{(1 - \nu^2) \Delta K^2}{2 R'_e E}$

$$\Delta \epsilon = C_{1Dp} \left( \frac{\Delta K^2_{eff}}{X} \right)^{1/(N'+1)} + C_{2Dp} \left( \frac{\Delta K^2_{eff}}{X} \right)^{N'/(N'+1)} \quad (3.69)$$

$$\Delta \sigma = C_{3Dp} \left( \frac{\Delta K^2_{eff}}{X} \right)^{1/(N'+1)} \quad (3.70)$$

où  $C_{1Dp}$ ,  $C_{2Dp}$  et  $C_{3Dp}$  sont les constantes de la relation d'HRR en état de déformation plane (Annexe A.9.I.I.)

Avec

$$C_{1Dp} = C_{1cp} \cdot \frac{(1+\nu) [(1-\nu) \tilde{\sigma}_\theta - \nu \tilde{\sigma}_r]}{(\tilde{\sigma}_\theta - \nu \tilde{\sigma}_r)} \cdot \left( \frac{1-\nu^2}{2\beta} \right)^{1/(N'+1)}$$

$$C_{2Dp} = C_{2cp} \cdot \frac{3 \tilde{\sigma}_e (N'-1) (\tilde{\sigma}_\theta - \tilde{\sigma}_r)}{2^{(1+4N')/(1+N')} (\tilde{\sigma}_\theta - \tilde{\sigma}_r/2)} \cdot \left( \frac{1-\nu^2}{2\beta} \right)^{N'/(N'+1)} \quad (3.71)$$

$$C_{3Dp} = C_{3cp} \cdot \left( \frac{1-\nu^2}{2\beta} \right)^{1/(N'+1)}$$

où  $C_{1cp}$ ,  $C_{2cp}$  et  $C_{3cp}$  sont les constantes de la relation d'HRR en état de contrainte plane donnée dans la formule (3.34),  $\beta$  est le facteur d'entrave à la plasticité , et  $\tilde{\sigma}_\theta$ ,  $\tilde{\sigma}_r$ , et  $\tilde{\sigma}_e$  paramètres sans dimensions du modèle d'Hutchinson.

- Par ailleurs, la solution issue des travaux d'Irwin [ 18 ] en état de déformation plane est donnée par l'expression suivante :

pour  $X \geq W_{oDp}^C$  ; où  $W_{oDp}^C = \frac{1}{2 \beta \pi} \left( \frac{\Delta K_{eff}}{Re} \right)^2$

$$\Delta \epsilon = B_{iDp} \frac{\Delta K_{eff}}{\sqrt{X}} \tag{3.72}$$

avec

$$B_{iDp} = B_{iCp} \frac{(1 - \nu^2)(1 - 2\nu)}{\sqrt{\beta}} \tag{3.73}$$

où  $B_{iCp}$  est la constante de la relation d'Irwin en état de contrainte plane donnée dans la formule (3.37).

- La solution analytique proposée dans le domaine transitoire est :

$$\Delta \epsilon = A_{iDp} + A_{2Dp} \cdot \ln(X) + A_{3Dp} \cdot X^{-1} + A_{4Dp} \cdot X^{-2} \tag{3.74}$$

pour

$$k \Delta \delta_{tDp} \leq X \leq W_{oDp}^C$$

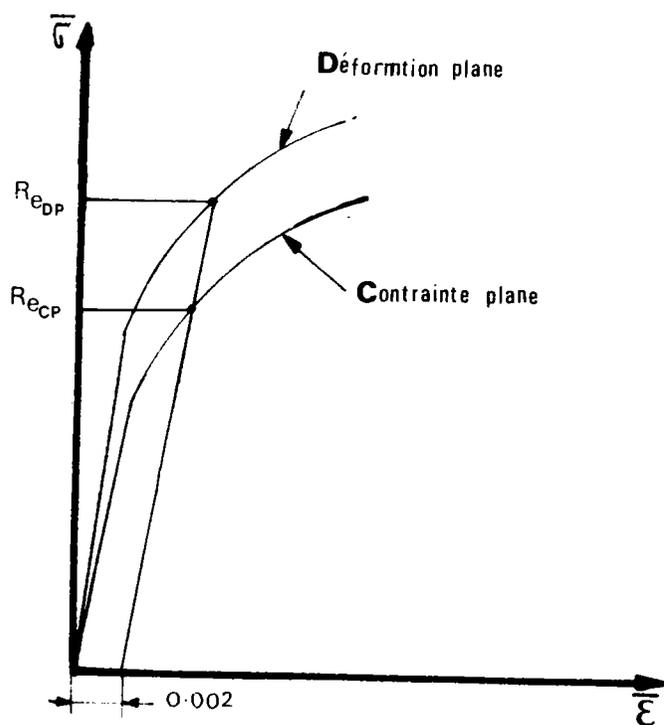
Les coefficients  $A_{iDp}$  ont été identifiés en imposant les conditions de raccordement avec les équations ( 3.69) et (3.72) pour les valeurs de  $X = k \Delta \delta_{tDp}$  et  $X = W_{oDp}^C$

### 3.4.3. Calcul du coefficient d'entrave à la plasticité $\beta$

#### 3.4.3.1. Calcul de $\beta$ dans le cas de chargement monotone

Lorsque l'on est en état de déformation plane, la triaxialité des contraintes augmente la limite d'élasticité d'un facteur  $\beta$  par rapport à un essai conduit

en traction uniaxiale en contrainte plane, (Figure 3.15). Il en résulte que la zone plastique en déformation plane est sensiblement plus petite que la zone plastique en contrainte plane (Figure 16). Ce coefficient  $\beta$  est appelé facteur d'entrave à la plasticité.



*Figure 3.15 : Limite d'élasticité*

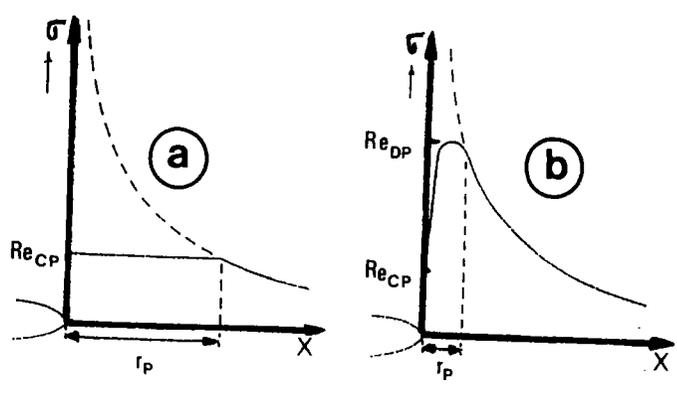


Figure 3.16 : La distribution de contrainte approchée en état de contrainte plane (a) et en état de déformation plane (b).

La contrainte maximale dans la zone plastique en déformation plane peut être  $\beta$  fois plus élevée que la limite d'élasticité en traction uniaxiale. Le rapport de contrainte maximale par rapport à la limite d'élasticité en traction uniaxiale est appelé facteur d'entrave à la plasticité :

$$\beta = \frac{\sigma_{\max}}{R_e} \tag{3.75}$$

Dans la littérature le facteur d'entrave à la plasticité  $\beta$  est calculé de la manière suivante :

La surface d'écoulement plastique est représentée dans l'espace des contraintes principales par le critère de Von-Mises :

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2 R_e^2 (K_e) \tag{3.76}$$

où  $\sigma_1, \sigma_2$  et  $\sigma_3$  sont les contraintes principales à la pointe de la fissure. et  $K_e$  est une variable d'écroûissage. avec

$$\sigma_1 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left(1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

$$\sigma_2 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left(1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \tag{3.77}$$

et

$$\sigma_3 = 2\nu \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

On se place dans les conditions où :

$$\sigma_1 = \sigma_{\max}, \sigma_2 = M_1 \sigma_1 \text{ et } \sigma_3 = M_2 \sigma_1 \quad (3.78)$$

avec  $M_1 = f(\theta)$  et  $M_2 = f(\theta, \nu)$

On introduit les expressions (3.78) dans (3.76), ceci conduit à la relation suivante :

$$\left[ (1 - M_1)^2 + (M_1 - M_2)^2 + (1 - M_2)^2 \right] \sigma_1^2 = 2 R_e^2 \quad (3.79)$$

ou

$$\frac{\sigma_1}{R_e} = (1 - M_1 - M_2 + M_1^2 + M_2^2 - M_1 M_2)^{-1/2} \quad (3.80)$$

de l'expression (3.75) et l'expression (3.80), on trouve :

$$\beta = (1 - M_1 - M_2 + M_1^2 + M_2^2 - M_1 M_2)^{-1/2} \quad (3.81)$$

avec

$$M_1 = \frac{(1 - \sin(\theta/2))}{(1 + \sin(\frac{\theta}{2}))} \text{ et } M_2 = \frac{2\nu}{(1 + \sin(\frac{\theta}{2}))} \quad (3.82)$$

Dans le cas où  $\theta = 0$  et  $\nu = 1/3$ , le facteur d'entrave à la plasticité  $\beta$  est égal à 3 ( $\beta = 3$ ).

La solution précédente de  $\beta$  a été développée uniquement pour un chargement monotone. Dans notre cas de chargement cyclique nous avons proposé une autre méthode de calcul de  $\beta$ .

#### 3.4.3.2. Calcul de $\beta$ dans le cas de chargement cyclique

On suppose que la distance  $X^*$  (relation 3.40) dépend seulement du matériau, elle a donc la même valeur en état de contrainte plane et en état de

déformation plane ( $X_{cp}^* = X_{Dp}^* = X^*$ ).

Nous connaissons la valeur de la déformation au seuil de non fissuration  $\Delta\epsilon_{s,cp}$  en état de contrainte plane et la valeur du facteur d'intensité de contrainte seuil ( $\Delta K_s$ ). En introduisant ces données dans la relation d'Irwin en contrainte plane (3.36), on peut en déduire la valeur de  $X_{cp}^*$  en contrainte plane par l'intermédiaire de la relation (3.40).

La déformation  $\Delta\epsilon_s$  déduite comme la limite d'endurance mesurée sur éprouvette de fatigue oligocyclique est a priori en état de contrainte plane (Figure 3.17). Nous supposons que la distance  $X^*$  reste constante que nous soyons en contrainte plane ou en déformation plane, ceci est justifié par le fait que cette distance est théoriquement une caractéristique intrinsèque du matériau.

En déformation plane la connaissance de  $X^*$  (déterminé préalablement en contrainte plane) et de la distribution de déformation au seuil permet de calculer  $\Delta\sigma_{s,Dp}$  (Figure 3.17). On peut déduire le rapport :

$$\frac{\Delta\epsilon_{s,Dp}}{\Delta\epsilon_{s,cp}} = \sqrt{\beta} \tag{3.83}$$

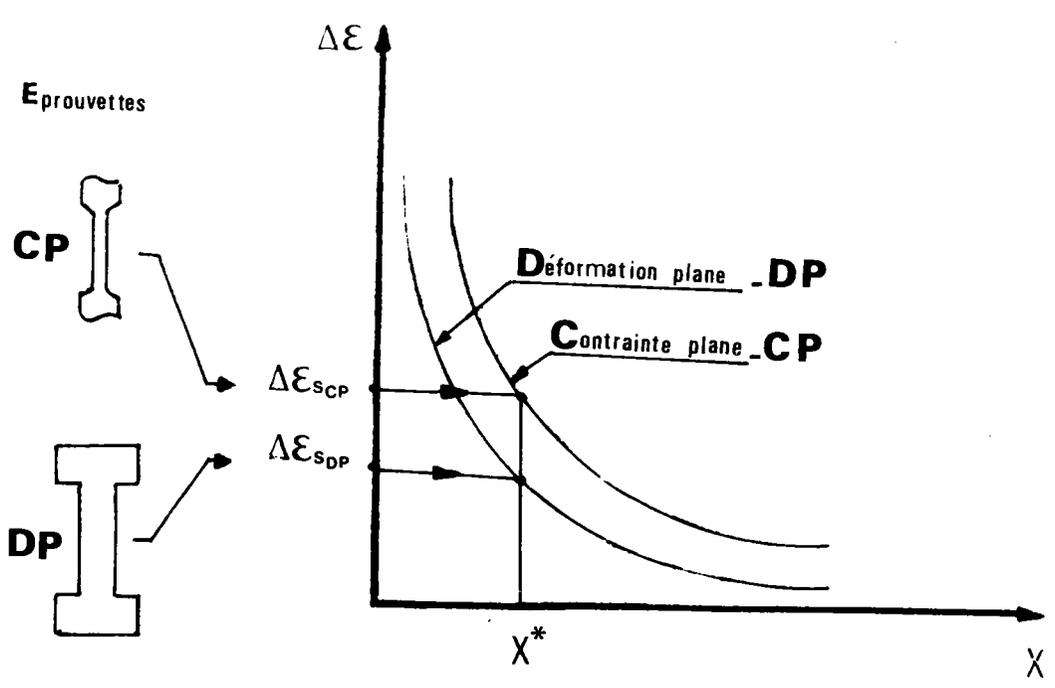


Figure 3.17 :

des relations (3.40), (3.72) et (3.83), on peut trouver la valeur de  $\beta$ , d'où :

\* dans le cas de l'acier E 36 Z, connaissant :

$\Delta K_s = 8 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ ,  $\Delta \epsilon_s = 0.002$  et  $X^* = 0.0073 \text{ mm}$ ,  
on trouve

$\beta = 2.736$

\* dans le cas de l'acier 35 CD4 [24] connaissant :

$\Delta K_s = 7 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ ,  $\Delta \epsilon_s = 0.00385$  et  $X^* = 0.00111 \text{ mm}$ ,  
on trouve

$\beta = 2.758$

\* dans le cas de l'acier 35 NCD16, connaissant :

$\Delta K_s = 5 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ ,  $\Delta \epsilon_s = 0.007$  et  $X^* = 0.00039 \text{ mm}$ ,  
on trouve

$\beta = 2.689$

La littérature donne beaucoup de valeur de  $\beta$  mais uniquement dans le cas de chargement monotone avec :

$\beta = 2.4 \quad \text{à} \quad 3$

3.4.4. Prise en compte des effets de fermeture de fissure

On reprend l'hypothèse d'une zone de contact [16] mais dont la taille est alors différente et égale à  $g_{Dp}$ .

Nous postulons que la valeur du paramètre  $g_{Dp}$  est proportionnelle au rapport des écartements de fissure après surcharge et avant surcharge en déformation plane (Figure 3.18).

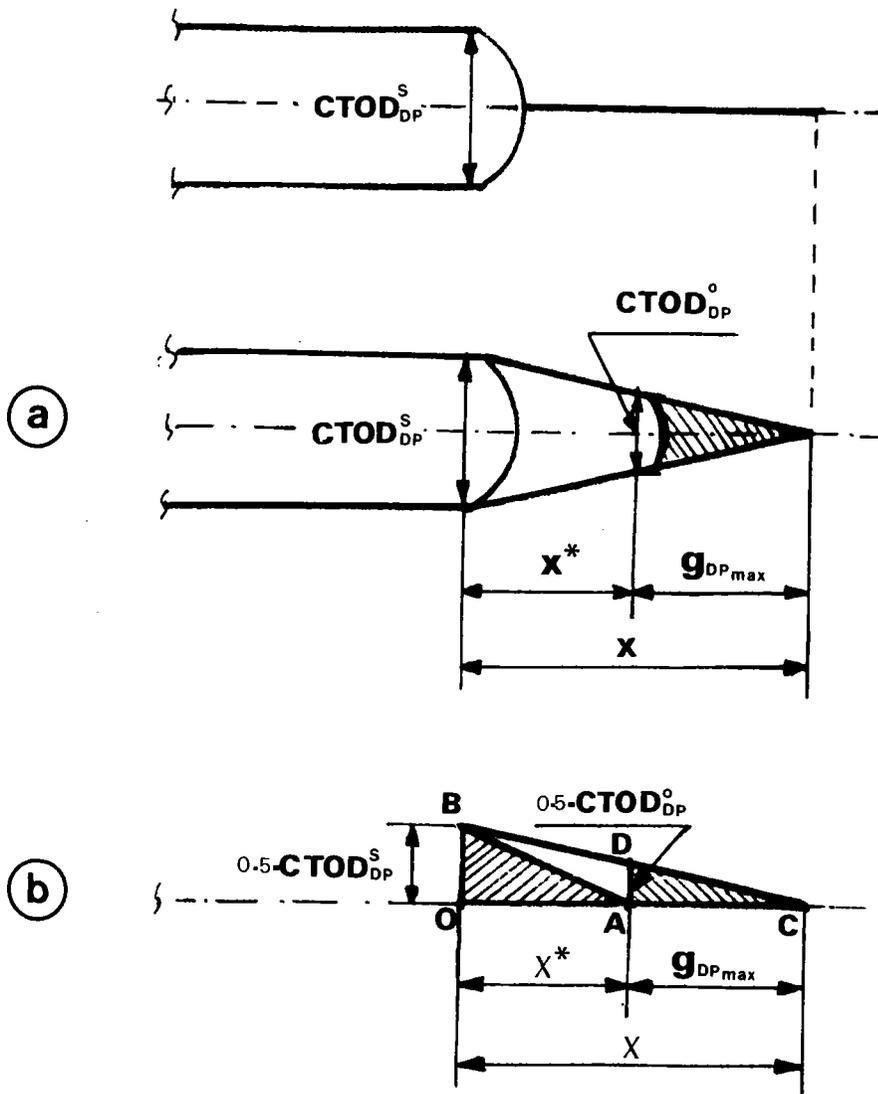


Figure : 3.18

La valeur de  $g_{DPmax}$  est donnée par la proportionnalité entre les deux triangles  $\triangle OAB$  et  $\triangle ACD$  (Figure 3.18b) à la pointe de fissure, on trouve:

$$\frac{OA}{AC} = \frac{OB}{AD} = \frac{CTOD_{DP}^0 / 2}{CTOD_{DP}^s / 2}$$

$$AC = OA \frac{CTOD_{DP}^s}{CTOD_{DP}^0}$$

ou

$$g_{DPmax} = X^* \frac{CTOD_{Dp}^s}{CTOD_{Dp}^o} \quad (3.84)$$

où  $CTOD_{Dp}^s$  est l'écartement de fissure après surcharge correspondant au chargement d'amplitude variable ( $\Delta K_{pic}$ ),  $CTOD_{Dp}^o$  est l'écartement de fissure avant la surcharge correspondant à la charge de régérence ( $K_{max}$ ).

En état de déformation plane, l'écartement de fissure avant l'application de surcharge est donnée par l'expression suivante (Annexe A.9.1.4.) :

$$CTOD_{Dp}^o = B_e \cdot \left[ \left( \frac{1+N'}{N'} \right) \cdot \alpha' \right]^{1/N'} \cdot \frac{(1-\nu^2) \cdot K_{max}^2}{B_e \cdot E} \quad (3.85)$$

où  $B_e$  est l'épaisseur de l'éprouvette

avec

$$\alpha' = E / \left[ (K')^{N'} \cdot R_e^{(1-N')} \right]$$

où  $K'$  est le coefficient de la loi d'érouissage cyclique .

et l'expression de l'écartement de fissure après surcharge :

$$CTOD_{Dp}^s = B_e \cdot \left[ \left( \frac{1+N'}{N'} \right) \cdot \alpha'' \right]^{1/N'} \cdot \frac{(1-\nu^2) \cdot \Delta K_{pic}^2}{B_e \cdot E} \quad (3.86)$$

avec

$$\alpha'' = 2 E / \left[ (2 K')^{N'} \cdot R_e^{(1-N')} \right]$$

Dans le cas de l'acier E 36Z, connaissant :

$$R = 0.1, R_{pic} = 1.6, K_{max} = 1,8 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}, K' = 1255 \text{ MPa}$$

$$X^* = 0.007 \text{ mm}, N' = 4.762, R_e \equiv 350 \text{ MPa}$$

on trouve :  $g_{Dpmax} =$

$$1.074 \times 10^{-3} \text{ mm}$$

On peut déterminer l'évolution du paramètre  $g_{Dp}$  (la zone de contact) après application de la surcharge en fonction de la distance  $X$  de la propagation (du prolongement de la fissure). Cette zone est comprise entre les points zéro et  $a_{Vmin}$ , et  $a_{Vmin}$  et  $a_d^*$ . Cette évolution se décompose en deux parties :

- Pour  $0 \leq X \leq a_{Vmin}$

$$g_{Dp} = X^* \left( \frac{\alpha''}{\alpha'} \right)^{1/(N'+1)} \cdot \left( \frac{\Delta K_{pic}}{K_{max}} \right)^{2N'/(N'+1)} \cdot R_{pic} \left( \frac{X}{a_{Vmin}} \right)^2 \quad (3.87)$$

et

- Pour  $a_{Vmin} \leq X \leq a_d^*$

$$g_{Dp} = X^* \cdot \left( \frac{\alpha''}{\alpha'} \right)^{1/(N'+1)} \cdot \left( \frac{\Delta K_{pic}}{K_{max}} \right)^{2N'/(N'+1)} \cdot R_{pic} \left( \frac{a_d^* - X}{a_d^* - a_{Vmin}} \right)^2 \quad (3.88)$$

où  $a_{Vmin}$  représente la longueur de la fissure correspondant à la vitesse minimale, et  $a_d^*$  représente la longueur de la fissure affectée par le ralentissement.

Lorsqu'on sollicite une éprouvette épaisse avec un chargement variable, on remarque que la plastification n'est pas uniforme en avant du front de fissure (Figure 3.19).

Après application de surcharge (Figure 3.9b), on remarque que l'accroissement de la zone plastique en surface (en état de contrainte plane) est presque nulle. Ceci conduit à supposer que l'accroissement de fissure pour laquelle la vitesse de fissuration atteint sa valeur minimale est proportionnelle à la taille de la zone plastique cyclique de surcharge en état de contrainte plane :

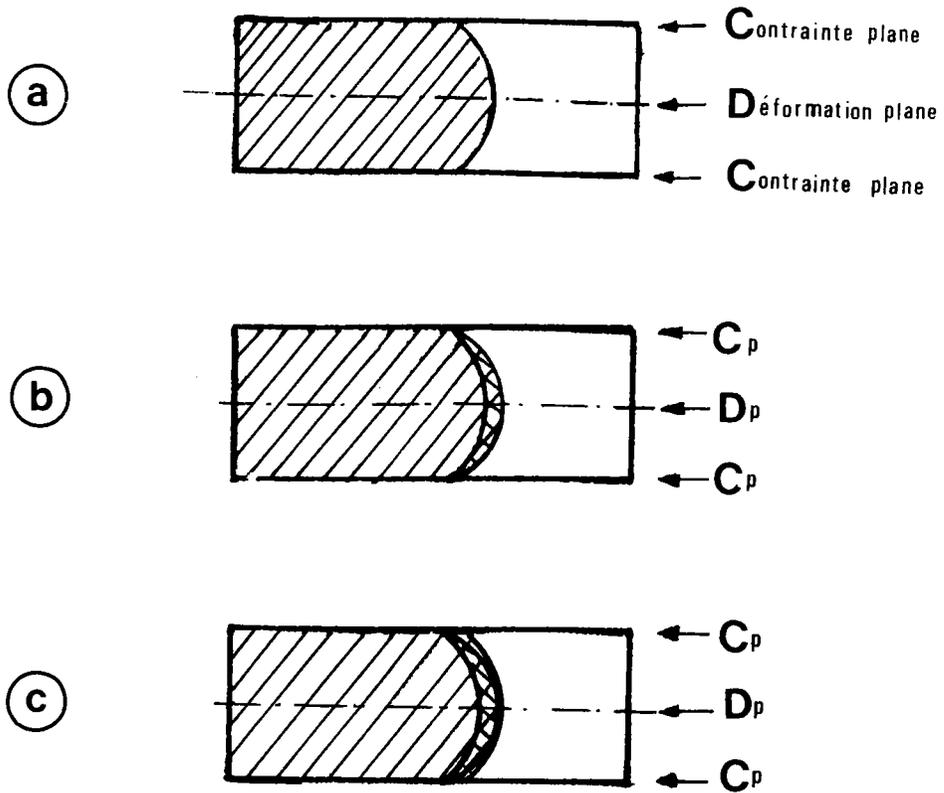
$$a_{Vmin} = W_{scp}^c / \beta \quad (3.89)$$

avec

$$W_{scp}^c = \frac{1}{4\pi} \cdot \left( \frac{\Delta K_{pic}}{R_e} \right)^2 \quad (3.90)$$

et l'accroissement de fissure pour lequel la fissure retrouve sa valeur initiale :

$$a_d^* = W_{scp}^c \quad (3.91)$$



*Figure 3.19 : Influence d'une surcharge sur le front de fissure : (a) front de fissure avant la surcharge, (b) après surcharge et (c) après une nouvelle propagation.*

### 3.4.5. Vérfications expérimentales

#### 3.4.5.1. Conditions expérimentales

La vérification expérimentale de ce modèle a été faite à partir d'essais de fissuration réalisé sur un acier E 36Z à l'état normalisé, couramment utilisé dans la construction mécanique.

Les compositions chimiques (en % de masse) et les caractéristiques mécaniques sont données respectivement dans les tableaux n° (3.1), (3.2) et (3.3).

Tableau n° 31 : Composition chimique (en % de masse)

| C    | Mn  | Si   | Ni   | S     | P     | Al   | Ti    | Cr   | Cu   | Mo    |
|------|-----|------|------|-------|-------|------|-------|------|------|-------|
| 0,14 | 1,4 | 0,29 | 0,42 | 0,003 | 0,007 | 0,02 | 0,005 | 0,07 | 0,07 | 0,035 |

Tableau n° 3.2 : Propriétés mécaniques

| E      | R <sub>e</sub> | R' <sub>e</sub>  |                   |           | σ <sub>uls</sub> | K'   | σ' <sub>f</sub> | ε' <sub>f</sub> | N'    | b <sub>f</sub> | c      | Δε <sub>s</sub> |
|--------|----------------|------------------|-------------------|-----------|------------------|------|-----------------|-----------------|-------|----------------|--------|-----------------|
|        |                | N <sub>p=1</sub> | N <sub>p=50</sub> | stabilisé |                  |      |                 |                 |       |                |        |                 |
| Mpa    |                |                  |                   |           |                  |      |                 |                 |       |                |        |                 |
| 206000 | 390            | 380              | 362               | 350       | 550              | 1255 | 1194            | 0,6             | 4.762 | - 0.124        | - 0,54 | 0,002           |

Tableau n° 3.3. : Paramètres du modèle d'HRR en déformation plane pour N' = 4.762

| $\tilde{\sigma}_{\theta}$ | $\tilde{\sigma}_r$ | $\tilde{\sigma}_e$ | I <sub>N</sub> |
|---------------------------|--------------------|--------------------|----------------|
| 2.2982                    | 1.7809             | 0,5551             | 4.9815         |

### 3.5.5.2. Eprouvette utilisée

Les essais ont été réalisés sur des éprouvettes compactes CT 40 à entaille en chevron, d'épaisseur 15 mm et de largeur 80 mm. Toutes les éprouvettes ont subi un polissage mécanique (Figure 3.20).

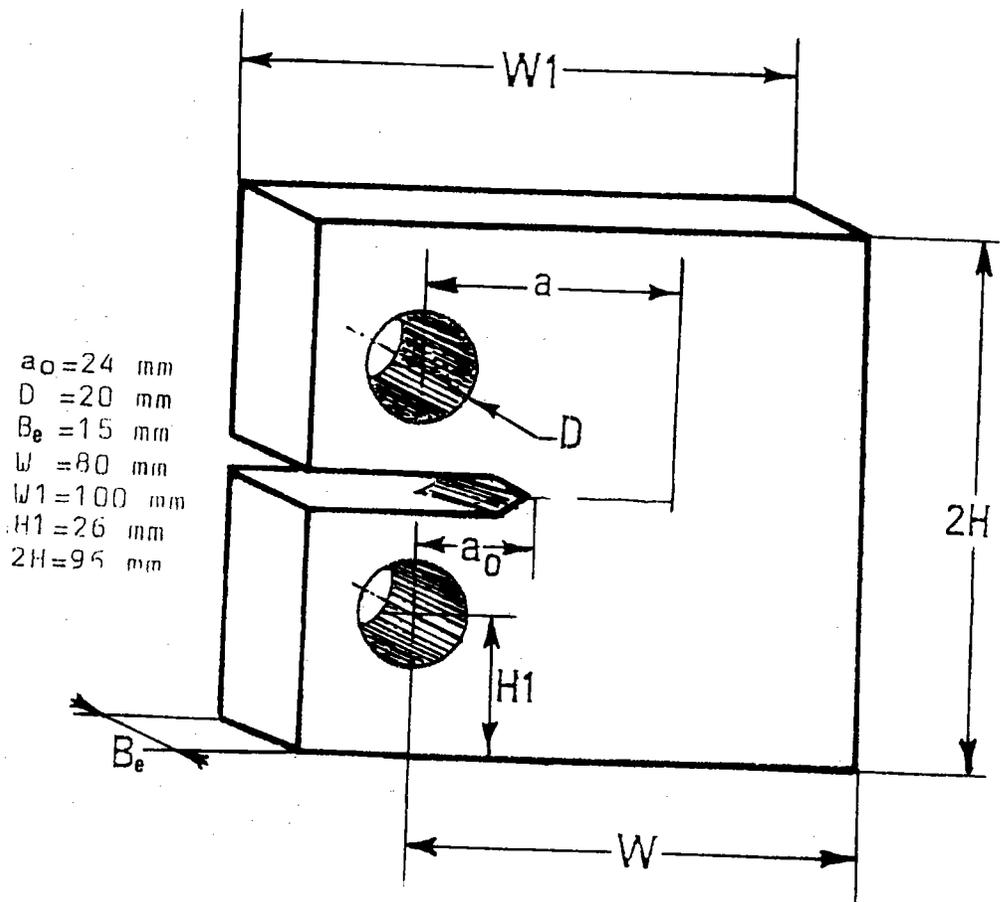


Figure 3.20 : Epreuve utilisée

### 3.4.5.3. Comparaison avec les résultats expérimentaux

Des expériences de retard après surcharge ont été réalisées dans les conditions suivantes :

- Rapport de charge :  $R = 0.1$
- Nombre de cycles de surcharge :  $N_p = 50$
- Facteur d'intensité de contrainte maximale :  $K_{\max} = 18 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$
- Rapport de surcharge était variable :  $R_{\text{pic}} = 1.6, 1.9$   
et 2.2

Le modèle permet de prédire la vitesse de fissuration ( $da/dN$ ) en fonction de la progression de la fissure et sous cette forme qu'il sera comparé aux résultats expérimentaux.

#### 3.4.5.4. Résultats et discussion

Influence du taux de surcharge  $R_{pic}$  : ( $K_{max} = 18 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ ,  $N_p = 50$  et  $B_e = 15 \text{ mm}$ ) :

Les évolutions de la vitesse de fissuration par la méthode analytique en état de déformation plane, méthode analytique en contrainte plane [ 16 ] et les résultats expérimentaux sont reportés dans les Figures (3.21), (3.22) et (3.23).

On remarque que les deux modèles analytiques donnent des valeurs proches de résultats expérimentaux. On voit également que le blocage apparaît trop tardivement avec le deuxième modèle lorsque l'on fait croître le taux de surcharge.

Les paramètres expérimentaux, vitesse de fissuration minimale après surcharge ( $da/dN/\text{min}$ ), longueur de fissure où apparaît la vitesse minimale ( $a_{Vmin}$ ), longueur de fissure affectée par la surcharge ( $a_d^*$ ), et leurs homologues calculés sont reportés dans le tableau n° 3.4.

L'étude de la comparaison avec les résultats expérimentaux nous permet de dire que :

- Le calcul en état de contrainte plane ou en état de déformation plane, nous donne une bonne prédiction de la vitesse de fissuration minimale ( $da/dN/\text{min}$ ) et leur longueur de fissure qui correspond à cette dernière ( $a_{Vmin}$ ) dans le cas du faible taux de surcharge ( $R_{pic} = 1.6$  et  $1.9$ ).
- A plus forte valeur du taux de surcharge ( $R_{pic} = 2.2$ ), expérimentalement il existe un nombre limite de cycles de surcharge (cycle stabilisé) à partir duquel la propagation est bloquée.  
La modélisation ne prévoit pas ce phénomène de blocage dans les mêmes conditions de chargements.
- La comparaison entre les résultats expérimentaux et théoriques dans les états de contrainte plane et déformation plane laisse supposer un mode de comportement tridimensionnel (3D) c'est le cas de nos expériences.

| Conditions d'essais<br>$K_{max} = 18 \text{ MPa} \sqrt{\text{m}}$<br>$R = 0.1$<br>$N_p = 50, B_e = 15 \text{ mm}$ |                        |       | $\frac{da}{dN}/\text{min}$<br>(mm/cycle) | $a_{Vmin}$<br>(mm) | $a_d^*$<br>(mm) |
|---|------------------------|-------|--|--------------------|-----------------|
| $R_{pic} = 1.6$   | Mesures expérimentales |       | $1.8 \cdot 10^{-6}$                      | 0.1                | 0.51            |
|   | Calculs analytiques    | C.p*  | $1.2 \cdot 10^{-6}$                      | 0.14               | 0.401           |
|   |                        | D.p** | $1.02 \cdot 10^{-6}$                     | 0.14               | 0.402           |
| $R_{pic} = 1.9$   | Mesures expérimentales |       | $3 \cdot 10^{-7}$                        | 0.28               | 0.80            |
|   | Calculs analytiques    | C.p   | $2.69 \cdot 10^{-7}$                     | 0.14               | 0.57            |
|   |                        | D.p   | $5.039 \cdot 10^{-7}$                    | 0.214              | 0.57            |
| $R_{pic} = 2.2$   | Mesures expérimentales |       | fissure bloquée                          | 0.4                | -               |
|   | Calculs analytiques    | C.p   | $3.70 \cdot 10^{-8}$                     | 0.14               | 0.78            |
|   |                        | D.p   | $2.0 \cdot 10^{-7}$                      | 0.29               | 0.78            |

Tableau n° 3.4. : Comparaison entre les résultats expérimentaux et les calculs analytiques  
(C.P.\* : contrainte plane, D.P \*\* : déformation plane)

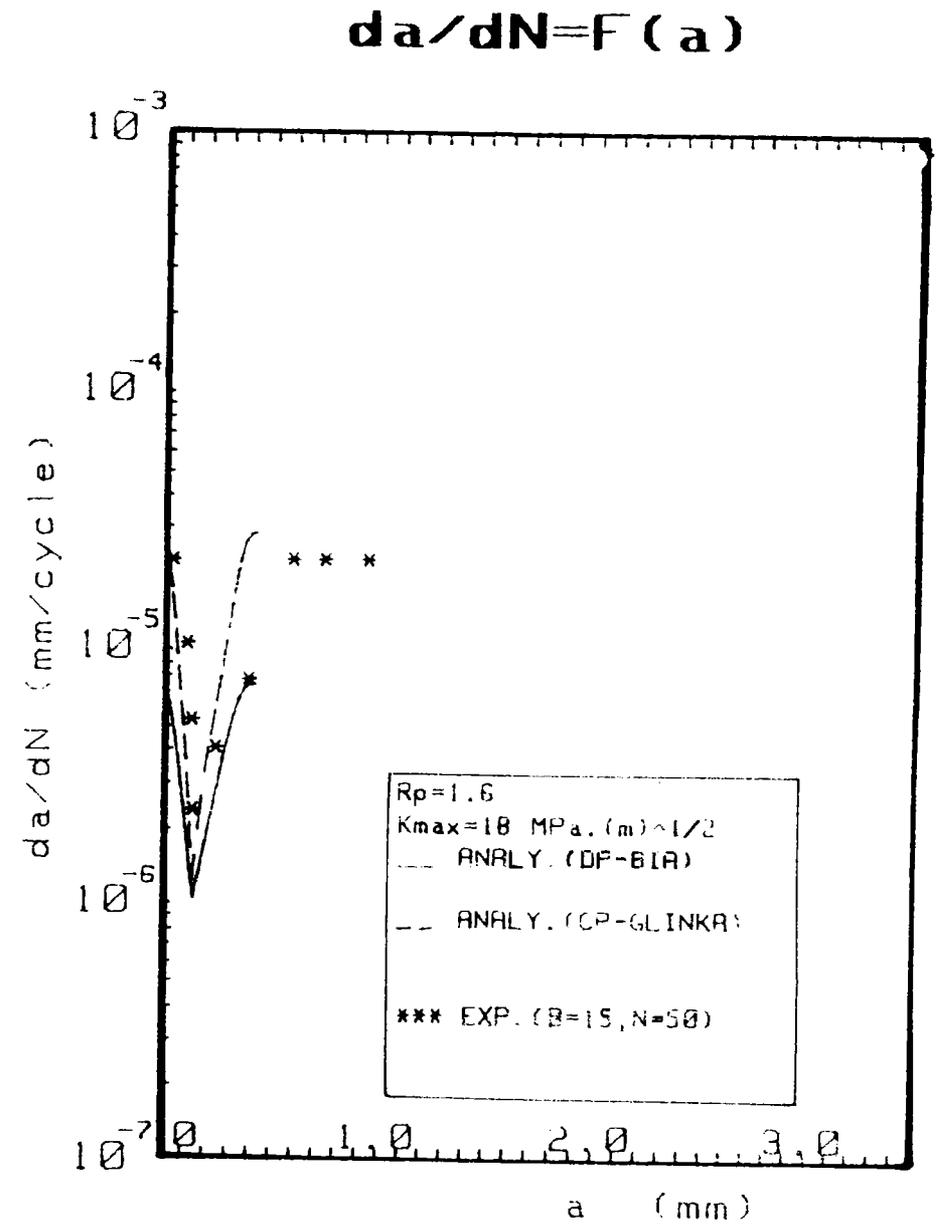


Figure 3.21

$$da/dN = F(a)$$

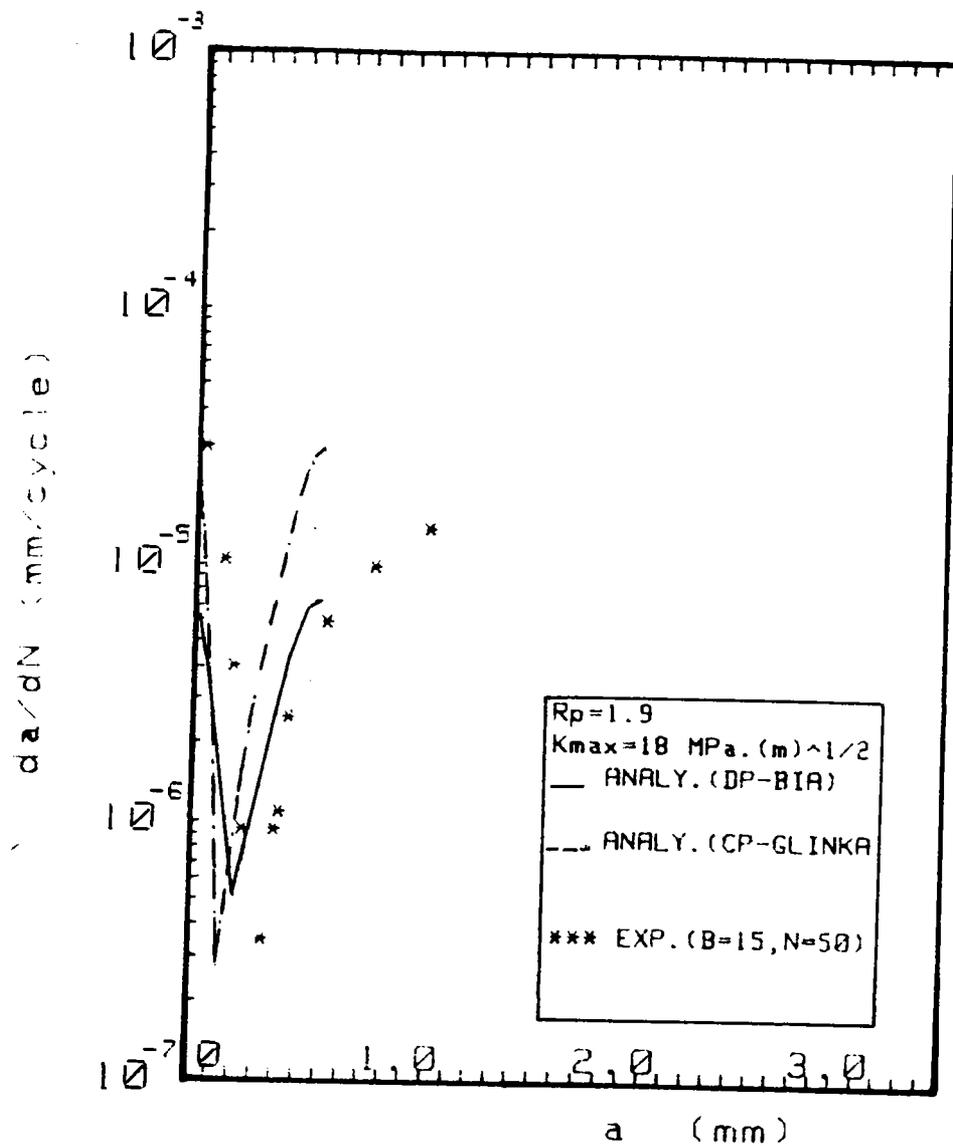


Figure 3.22

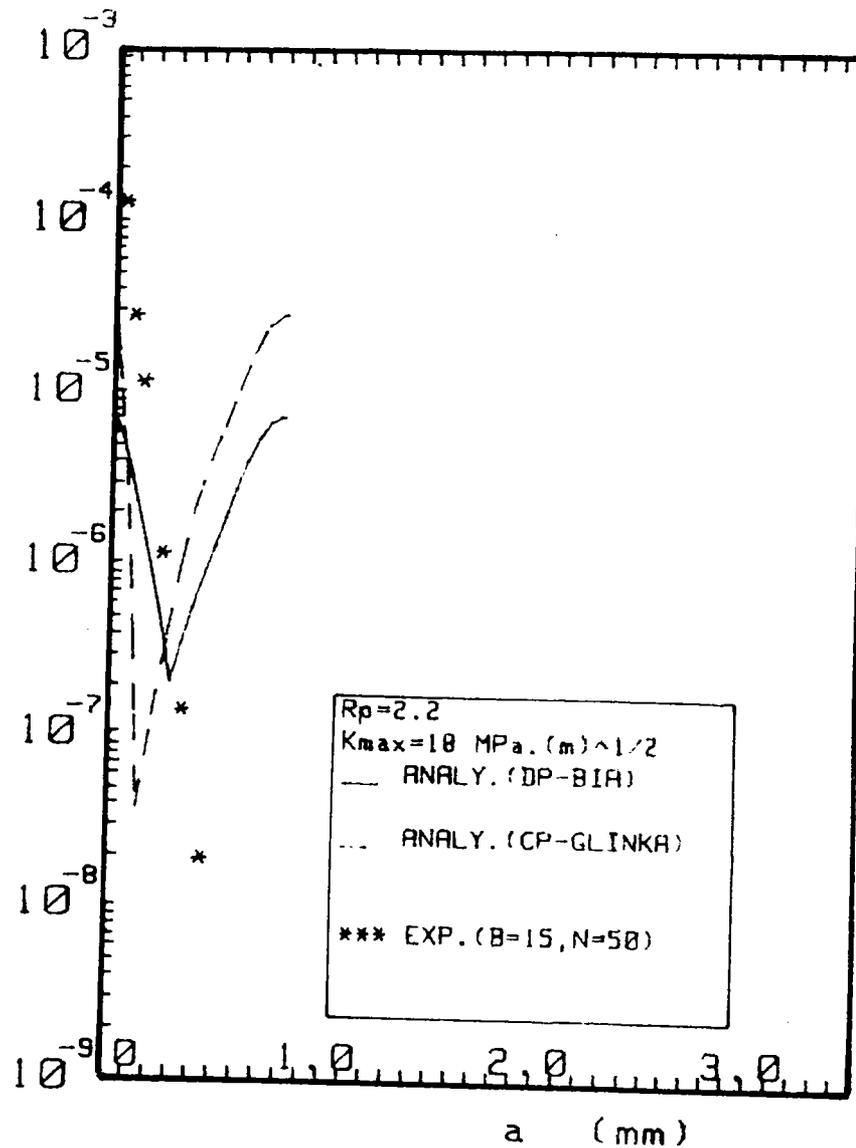


Figure 3.23

### 3.5. Conclusion

Le modèle permet de réaliser des prévisions de comportement de la progression d'une fissure d'une façon rapide à l'aide d'un petit calculateur et est, dans cela, utile pour les concepteurs de structure.

Les caractéristiques essentielles de ce modèle résident dans une approche de type mécanique des milieux continus, l'endommagement du matériau n'étant pas pris en compte.

La comparaison entre les résultats expérimentaux et théoriques dans les états de contrainte plane [ 16 ] et déformation plane ( $R_{pic} = 1.6$  et  $1.9$ ) laisse supposer un mode de comportement tridimensionnel (3D).

Ce travail peut être considéré comme une étape de modélisation de la progression d'une fissure sous chargement variable.

Pour améliorer le champ d'application de notre modèle (en état de déformation plane ou en contrainte plane), nous proposons de le modifier en tenant compte :

- du cumul de dommage ,
- de l'érousement,
- du nombre de pics de surcharge.

## 4 - SIMULATION NUMERIQUE BASEE SUR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

### 4.1. Introduction

Les techniques de calcul des structures ont connu ces vingt dernières années un développement considérable, motivé par les besoins des industries de pointe et soutenu par les progrès effectués dans le domaine des ordinateurs. Ainsi la méthode des éléments finis (en abrégé MEF) est-elle communément utilisée aujourd'hui pour l'analyse des structures dans de nombreux secteurs de l'industrie : aérospatial, nucléaire, génie civil, construction navale, mécanique, techniques Off-shore, etc...

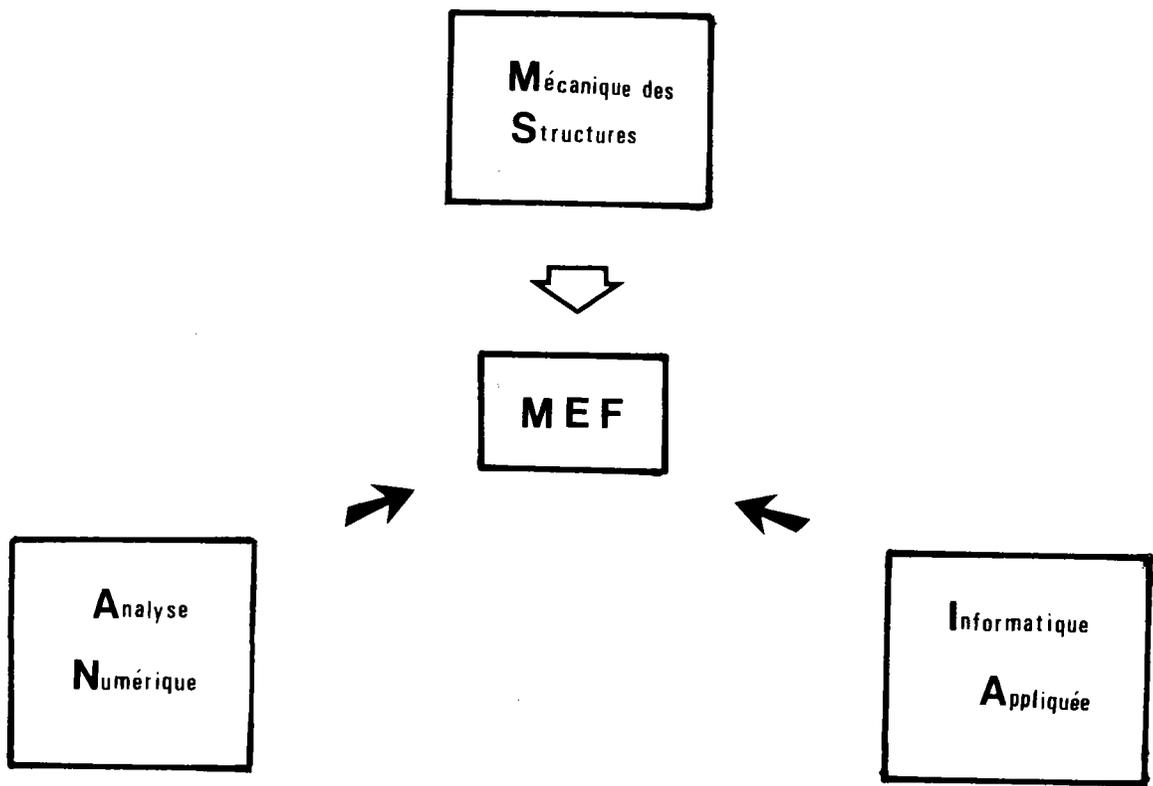
Par ailleurs, il est intéressant de remarquer que la MEF appliquée au calcul des structures est une technique récente, à caractère pluridisciplinaire (Figure 4.1), car elle met en oeuvre les connaissances de trois disciplines de base :

- la mécanique des structures : élasticité, résistance des matériaux, dynamique, plasticité, etc...
- l'analyse numérique : méthodes d'approximation, résolution des systèmes linéaires, des problèmes aux valeurs propres...
- l'informatique appliquée : techniques de développement et de maintenance des grands logiciels.

L'application de cette méthode s'est révélée très efficace en analyse linéaire élastique de structures en état de contraintes planes et de déformations planes [125-28] .

Paris [29] , Erdogan [31] et beaucoup d'auteurs ont calculé le facteur d'intensité de contrainte en utilisant des méthodes analytiques pour différentes configurations simples de fissure. Cependant, les géométries et les chargements des structures réelles sont souvent complexes si bien que la détermination analytique exacte est laborieuse et fait appel à des procédures mathématiques où il est alors

nécessaire d'avoir recours à des méthodes numériques : méthodes de Collocation et méthodes des éléments finis (MEF) [ 28-31 ] .



*Figure 4.1. :*

La méthode des éléments finis a été largement utilisée pour déterminer la singularité des contraintes au voisinage de l'extrémité d'une fissure dans le cas d'un comportement linéaire [ 27 ] [ 32-33 ] [ 62 ] .

En analyse non-linéaire élasto-plastique, on trouve peu d'auteurs qui tiennent compte à la fois de la plasticité et du chargement cyclique surtout dans le cas de structures fissurées sous chargement non-stationnaire.

4.2. Rappel de technique de la progression de la fissure

Dans la majorité des simulations numériques basées sur la méthode aux éléments finis pour avancer la fissure, on utilise la procédure de relâchement de noeuds sur le prolongement de la fissure.

Il existe plusieurs méthodes de relâchement des noeuds. Parmi celles-ci, par exemple la méthode basée sur la technique de relaxation des forces nodales imposées (conditions imposées).

Dans le cas d'une structure possédant un plan de symétrie dans lequel se trouve une fissure préexistante que l'on va faire se propager (Figure 4.2), la pointe de fissure est au noeud A, la lèvres de la fissure est libre (ni efforts, ni liaison), le prolongement AB de la fissure présente des noeuds bloqués dans la direction Y (condition de symétrie).

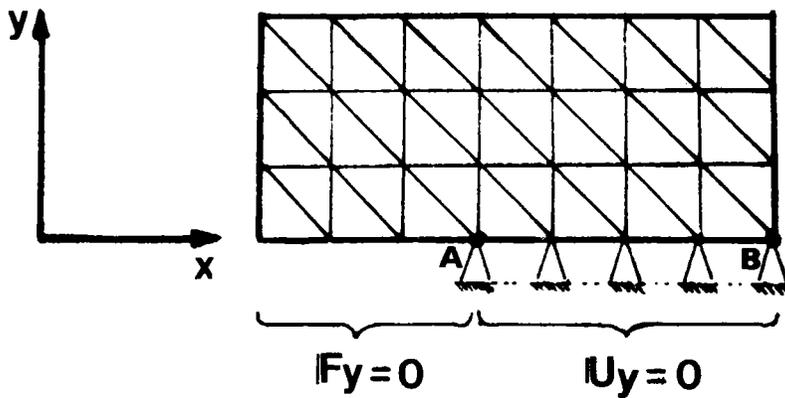


Figure 4.2. : Conditions aux limites définissant une fissure dans un calcul par éléments finis.

Ce processus de progression est effectué à force constante. Supposons donc que, soumise à une force  $F$ , l'équilibre de la structure soit traduite par l'équation :

$$[STIF] \cdot \{U\} = \{F\} \tag{4.1}$$

où  $[STIF]$  est la matrice de rigidité élastique de la structure,  $\{U\}$  le vecteur déplacement total et  $\{F\}$  la force appliquée.

L'encastrement vertical du noeud de pointe (condition de symétrie) est assuré par pénalisation, c'est-à-dire que le terme diagonale de la matrice  $[STIF]$  correspondant à ce degré de liberté est la somme d'une rigidité élastique et d'une très forte raideur que l'on note  $[\Delta STIF]$ .

On cherche le système d'équation incrémental que l'on va résoudre de manière itérative (plasticité par exemple) qui permet de passer de l'état initial défini par l'équation (4.1) à l'état final défini par :

$$([STIF] + [\Delta STIF]) \cdot (\{U\} + \{\Delta U\}) = \{F\} + \{\Delta F_p\} \quad (4.2)$$

par différence, on obtient :

$$[\Delta STIF] \cdot \{U\} + ([STIF] + [\Delta STIF]) \cdot \{\Delta U\} = \{\Delta F_p\} \quad (4.3)$$

où  $\{\Delta U\}$  est le vecteur des incréments des déplacements nodaux et  $\{\Delta F_p\}$  par l'incrément des forces "plastiques" sur lesquelles on itère jusqu'à stabilisation.

Comme  $\{\Delta STIF\} \cdot \{U\}$  n'est autre que la réaction en pointe avant libération, on peut aussi bien écrire :

$$([STIF] + [\Delta STIF]) \cdot \{\Delta U\} = -\{R\} + \{\Delta F_p\} \quad (4.4)$$

avec

$$\{R\} = [\Delta STIF] \cdot \{U\}$$

La résolution de ce système d'équations permet de passer de manière incrémentale de l'état initial où un noeud de pointe est bloqué à l'état final où ce même noeud est libéré, simulant ainsi une progression de longueur de fissure égale à la longueur de la maille dans la zone de progression.

### 4.3. Etude bibliographique

Des méthodes de calcul des éléments finis ont été développés afin d'analyser l'évolution du point d'ouverture de la fissure après application de surcharge en modélisant le comportement du matériau. Durant ces dernières années, peu de travaux ont été présentés sur ce sujet. Nous allons essayer d'en présenter quelques uns.

#### 4.3.1. Simulation de Newman

Newman [ 34 ] considère un matériau élastique parfaitement plastique, qui présente une limite d'élasticité  $R_e = 350$  MPa. L'éprouvette utilisée est une éprouvette à entaille centrale (Figure 4.3) que l'auteur sollicite à une contrainte maximale égale à  $0.4 R_e$  pour un rapport de charge nul, dans les conditions de contraintes planes.

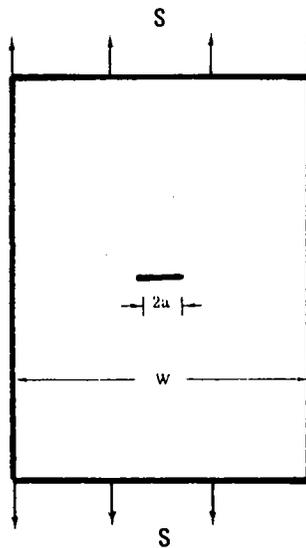


Figure 4.3 : Eprouvette utilisée par Newman [ 34 ]

A cause de la symétrie, seule un quart de l'éprouvette a été maillé (Figure 4.4a). Le découpage de l'éprouvette en éléments finis est réalisé selon trois réseaux de finesse variable, les longueurs des mailles au voisinage de la pointe de la fissure étant respectivement égales à 14 %, 3,5% et 2 % de la zone plastifiée créée au cours du chargement (Figure 4.4b).

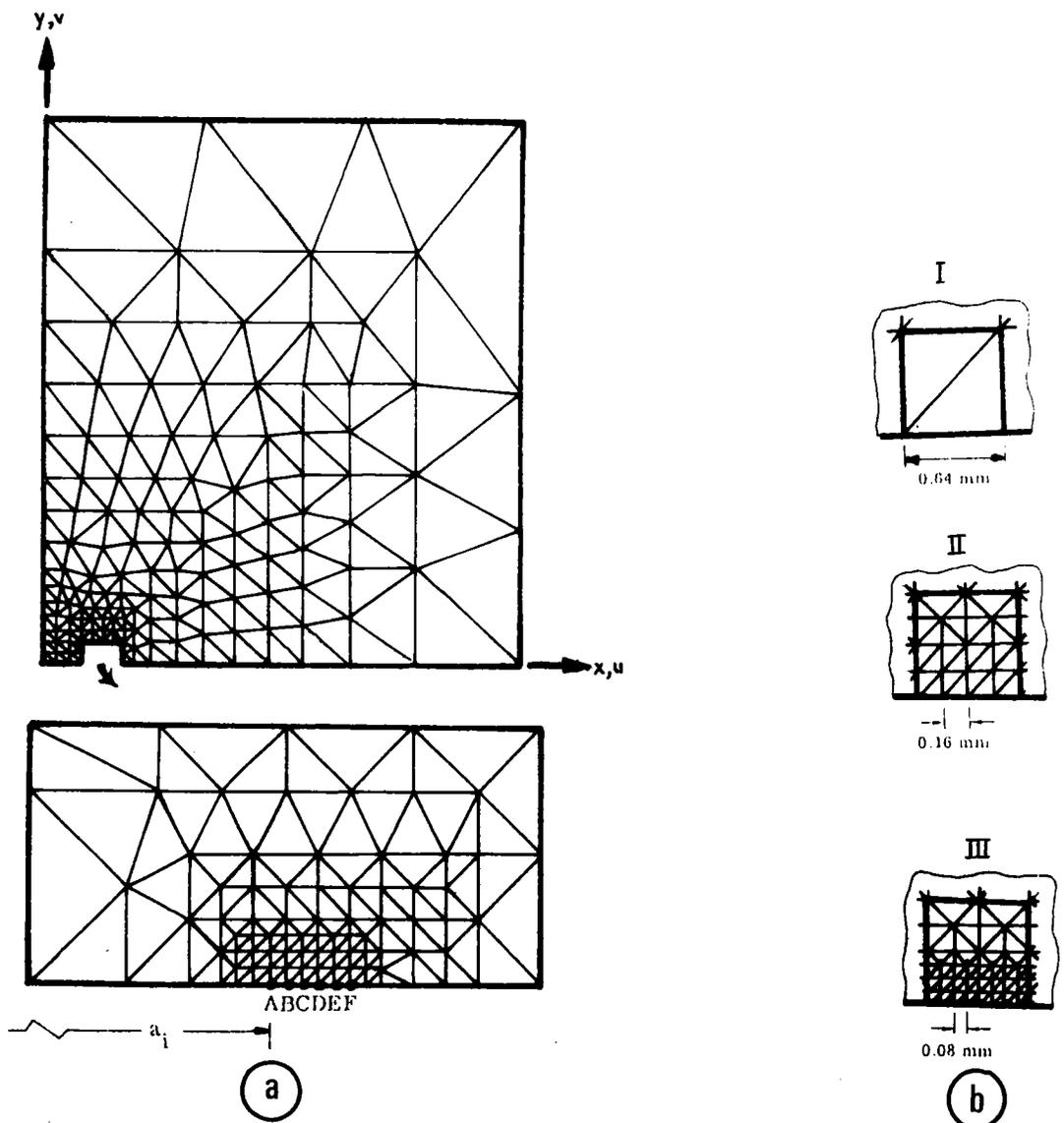


Figure 4.4. : (a) Maillage utilisé par Newman [34] (A,B,C,D,E,F sont les positions successives de la pointe de fissure)  
(b) Forme de maillage à la pointe de fissure

Newman n'a pas utilisé un critère de propagation de fissure. Il a choisi seulement de faire progresser la fissure d'un noeud du réseau à un autre (ex. du noeud A au noeud B, Figure 4.4.a) dans la direction de propagation (prolongement de fissure), chaque fois que la contrainte appliquée passe par sa valeur maximale. Pour une longueur de fissure donnée, Newman étudie donc les déplacements au voisinage de la pointe de la fissure et leur point d'ouverture correspondant pour deux cas de chargements.

#### 4.3.1.1. Cas de chargements à amplitude constante

La figure 4.5. donne les résultats du calcul lorsque l'éprouvette est sollicitée depuis un état initial, où la pointe de la fissure est exempte de toute contrainte résiduelle. Au cours de la première montée en charge, on note la contrainte globale pour laquelle le point le plus sollicité passe dans le domaine plastique. Au cours de la décharge qui suit, le calcul met en évidence la fermeture à la pointe de la fissure. Ce calcul montre également qu'il faut attendre un certain nombre de cycles avant que se stabilise le niveau de contrainte pour lequel on a fermeture.

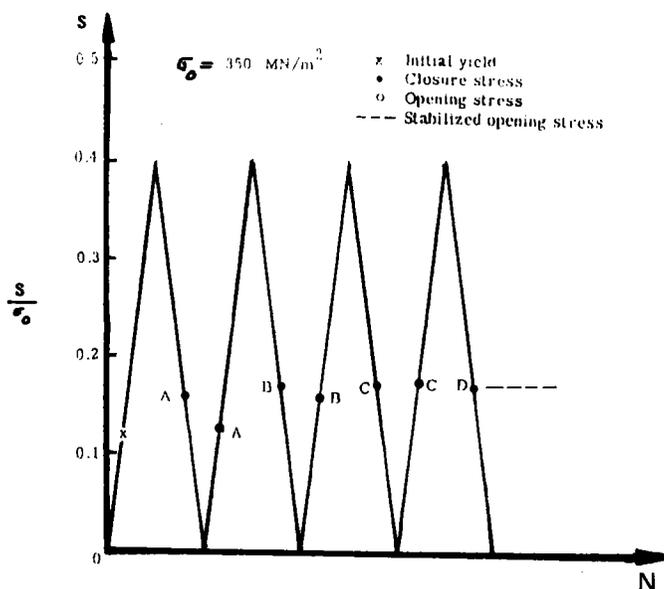


Figure 4.5 : Evolution de la contrainte à fermeture au cours d'une sollicitation à amplitude constante [ 34 ]

La figure 4.6 montre l'évolution de la forme de la pointe de la fissure de fatigue au cours de la décharge de l'éprouvette. Il précise la façon dont se ferme la fissure au cours d'une alternance  $\sigma_{\max} \rightarrow 0$ , quand on la considère après - stabilisation du niveau de contrainte à fermeture.

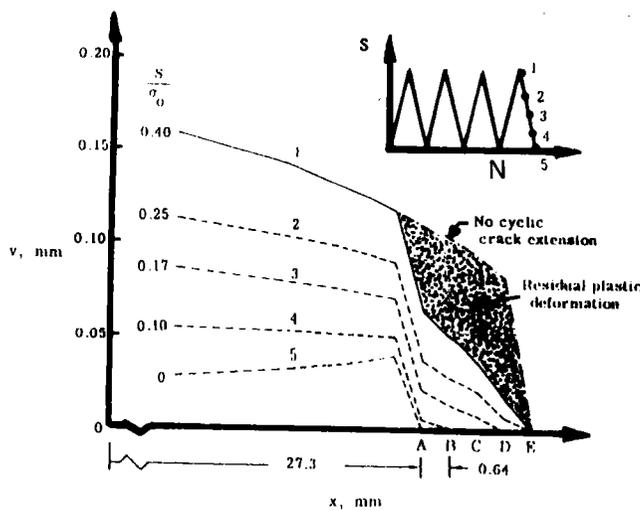


Figure 4.6 : Evolution du profil de la pointe de la fissure de fatigue au cours de la décharge de l'éprouvette [34] .

#### 4.3.1.2. Cas de chargement à amplitude variable (Figure 4.7)

Newman [35] a confirmé à l'aide de sa méthode de calcul l'hypothèse donnée par Trebules [4] : "l'élévation du point d'ouverture s'effectue durant l'application du bloc de surcharge, et après retour au niveau initial du facteur d'intensité de contrainte, le point d'ouverture n'évolue plus pendant un certain nombre de cycles. L'amplitude du facteur d'intensité de contrainte efficace est plus faible, la fissure est donc ralentie. Ensuite, le point d'ouverture retrouve lentement leur niveau initial".

Les figures 4.7a et 4.7b montrent qu'à la suite de passage niveau bas-haut et niveau haut-bas, il existe une période transitoire pendant laquelle la contrainte correspondant à l'ouverture évolue depuis la valeur stable au premier niveau jusqu'à la valeur stable du second.

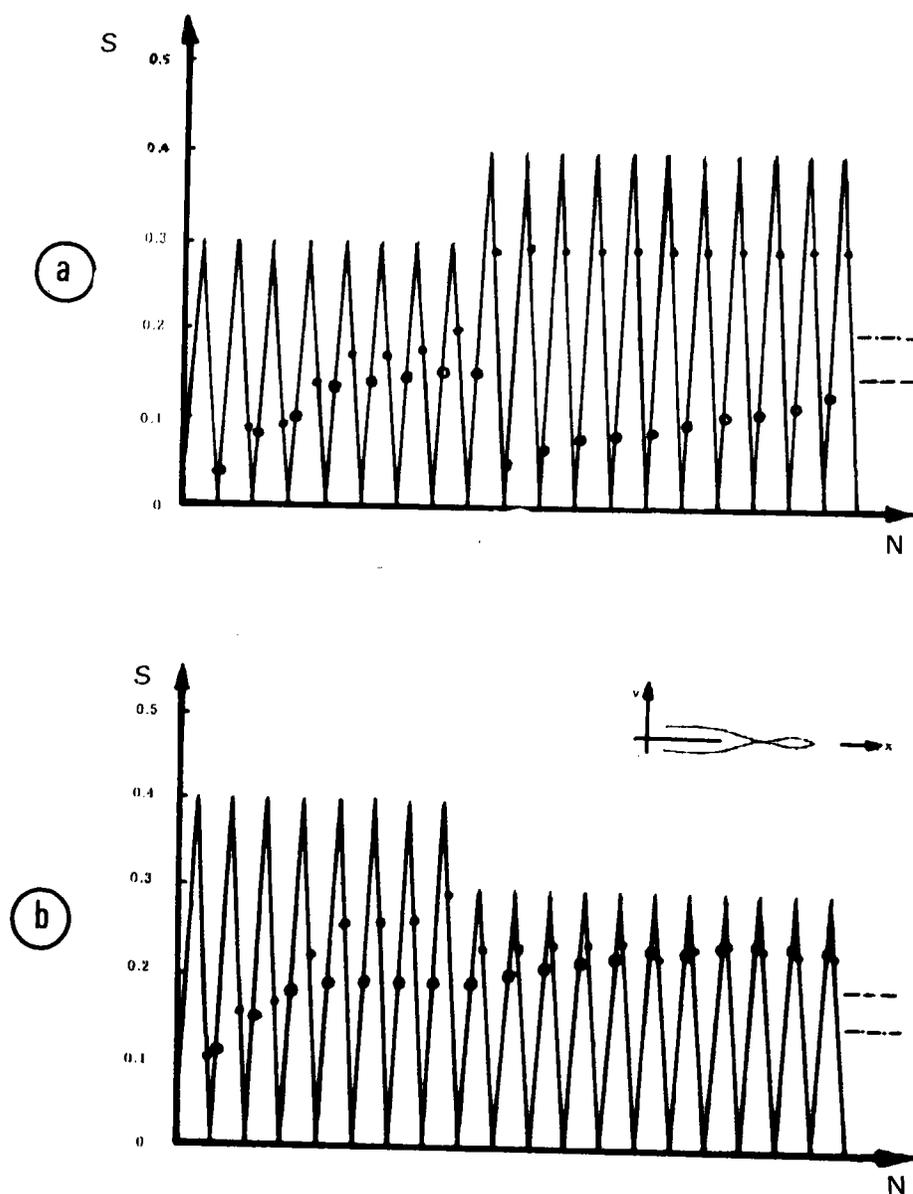


Figure 4.7 : Prévision par le calcul du comportement de la pointe d'une fissure de fatigue dans le cas d'une sollicitation à deux niveaux de contrainte [ 35 ] :

(a) niveau bas-haut

(b) niveau haut-bas)

4.3.2. Simulation d'Ogura

Ogura [ 40 ] considère un matériau élasto-plastique avec écrouissage cinématique, qui présente une limite d'élasticité  $R_e = 300 \text{ MPa}$  et le module tangent de la courbe d'écrouissage  $H' = 0.06 E$  avec  $E = 200000 \text{ MPa}$ . L'éprouvette utilisée est une éprouvette à double entaille (Figure 4.8a), dans la condition de l'état de contrainte plane.

A cause de la symétrie, seule un quart de l'éprouvette a été maillé. L'éprouvette est maillée très finement près de la pointe de la fissure (Figure 4.8b), les longueurs des mailles étant égales à 1 % de la longueur de fissure initiale  $a_0$ .

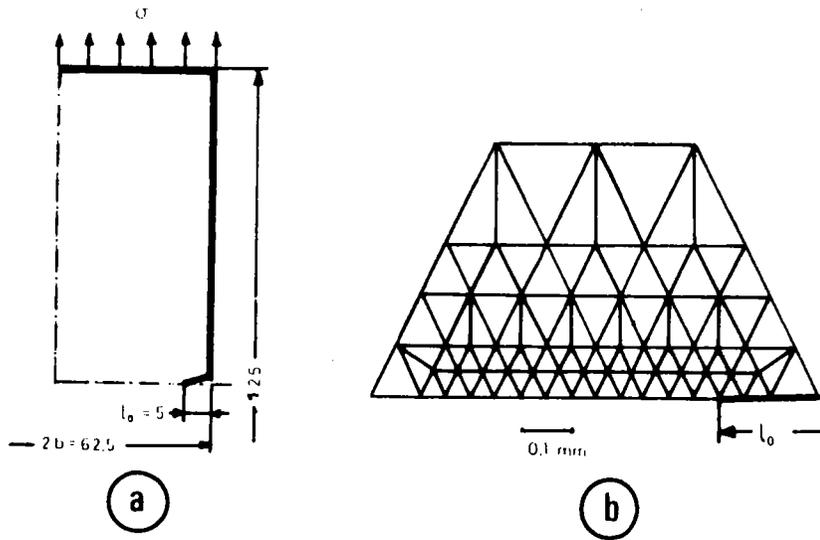
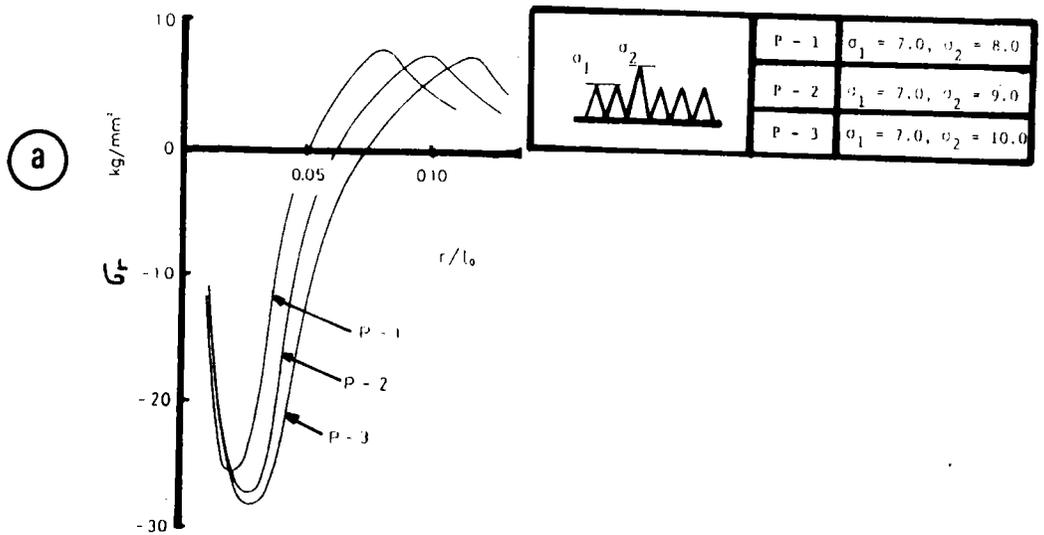


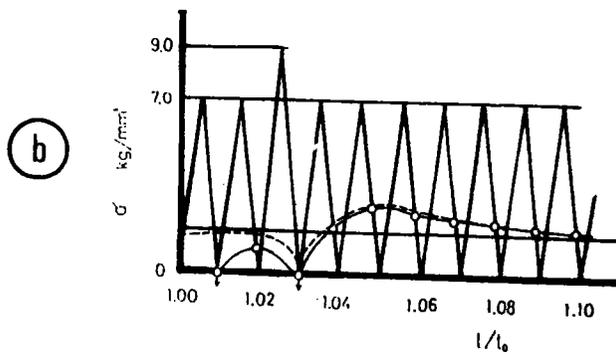
Figure 4.8 : (a) . Eprouvette utilisée ( $a_0 = l_0$ ) [ 40 ]  
(b) . Forme de maillage à la pointe de fissure.

Ogura montre que le niveau de fermeture de la fissure, augmente tant que la pointe de la fissure reste dans une région à fortes contraintes résiduelles de compression induites par la surcharge (Figure 4.9a et 4.9b).

Il remarque aussi que le maximum de fermeture est obtenue quand la pointe de la fissure atteint le point où les contraintes résiduelles de compression s'annulent. Le retour au niveau de fermeture initial se produit quand la pointe de la fissure se trouve à la frontière de la zone plastique de surcharge.



(a) Exemple de distribution des contraintes résiduelles obtenu dans le cas d'une simple surcharge pour les taux de surcharge croissant



(b) Variation du point de fermeture de fissure, dans le cas d'une simple surcharge.

Figure 4.9 : Simulation d'Ogura [40]

#### 4.3.3. Simulation de Wästberg

Wästberg [41] considère un matériau élasto-plastique avec écrouissage cinématique, qui présente une limite d'élasticité  $R_e = 400$  MPa et un module tan-

gent de la courbe d'écrouissage  $H' = 2000 \text{ MPa}$  avec  $E = 205000 \text{ MPa}$ . L'éprouvette utilisée est une éprouvette compacte CT (Figure 3.20), dans les conditions de contrainte plane. L'éprouvette est maillée avec des éléments rectangulaires bilinéaires près de la pointe de la fissure, les longueurs des mailles étant égales à  $0.05 \text{ mm}$  (Figure 4.10).

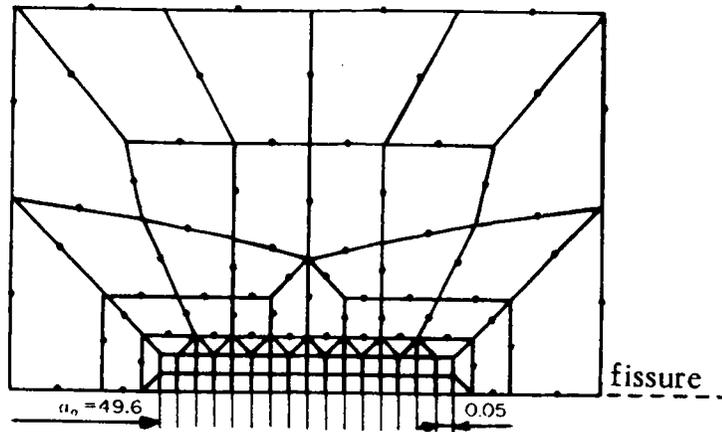


Figure 4.10 : Forme de maillage à la pointe de fissure [ 41 ]

Wästberg a confirmé lui aussi, l'influence des surcharges sur le point de fermeture de la fissure par le calcul aux éléments finis. Il a montré lui aussi que le niveau de fermeture de la fissure augmente tant que la pointe de la fissure reste dans une région à fortes contraintes résiduelles de compression induites par la surcharge.

#### 4.4. Discussion

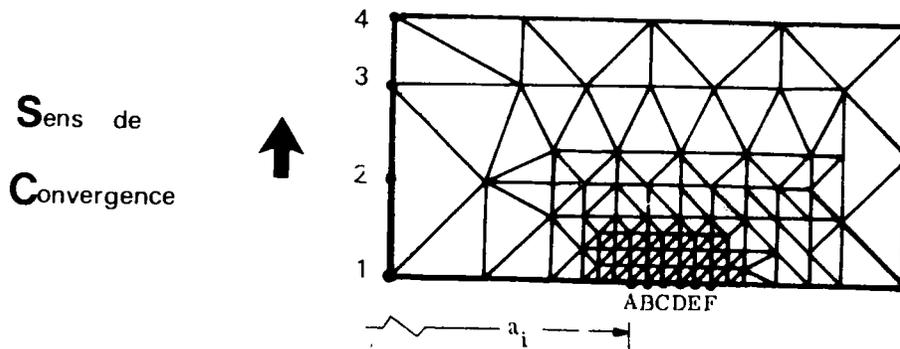
La majorité des simulations utilisées pour décrire le ralentissement d'une fissure après surcharge sont déduits d'une technique de relaxation des forces nodales à la pointe de la fissure.

Nous remarquons que la différence entre les simulations étudiées précédemment existe surtout entre les points suivants :

- le maillage à la pointe de la fissure,
- la procédure d'avancée de fissure;

i - Le maillage à la pointe de la fissure

\*Newman et Ogura ont utilisé un maillage très fin, convergent à la pointe de la fissure : éléments finis classiques à 3 noeuds : un nombre suffisant de secteurs doivent converger vers la pointe (au moins 3) (Figure 4.11).



*Figure 4.11 : Exemple de maillage par éléments finis [ 34 ] .*

\* Wästberg a utilisé des éléments bilinéaires pour le voisinage de la pointe : éléments finis à 4 noeuds (Figure 4.10).

ii - La procédure d'avancée de fissure :

\*Newman a utilisé la procédure de relâchement de noeud, lorsque la charge atteint sa valeur maximale, il y a libération du noeud situé à la pointe de fissure.

\*Ogura, libère le noeud, lorsque les forces nodales à la pointe de la fissure atteignent une valeur nulle.

\*Wastberg a utilisé une procédure spéciale de relaxation, qui a été développée par Rydholm [ 57 ] , Anderson [ 58 ] et Keegstra [ 59 ] pour le cas de propagation dynamique de fissure où les forces nodales sont contrôlées par la position de la pointe de fissure entre deux points nodaux consécutifs.

De l'ensemble de ces simulations, on remarque que la simulation de Newman est le plus économique de point de vue maillage. En effet dans son cas un seul maillage automatique est nécessaire pour traiter toutes les longueurs de fissure ; également la procédure utilisée pour avancer la fissure est plus simple à introduire dans le calcul aux éléments finis.

Dans le prochain paragraphe (4.5), nous proposons une simulation basée sur la méthode des éléments finis similaire à la méthode de Newman, mais dans laquelle un nouveau critère de propagation est introduit, ainsi que la loi de comportement cyclique au matériau.

#### 4.5. Simulation

##### Simulation par méthode aux éléments finis de la propagation d'une fissure après surcharge

###### 4.5.1. Principe du programme d'éléments finis proposé

Le programme d'éléments finis proposé permet actuellement de traiter les problèmes élasto-plastiques plans (contraintes planes, déformations planes) et axisymétriques. Il est basé sur une méthode mixte "IS-VS-CBC" : méthode de la contrainte initiale (Initial Stress [ 27 ] ) couplée à la méthode de la matrice de rigidité variable (Variable Stiffness [ 25 ] ) et à la méthode de changement de la condition aux limites (the Changing Boundary Condition [ 35 ] - [ 42-43 ] ).

###### 4.5.2. L'approche numérique en élastoplasticité [ 63 , 64 ]

Pour un matériau élastique sans contraintes initiales, la formulation conduit au problème linéaire (relation 4.1).

Considérons maintenant un milieu élastoplastique dans lequel l'état des contraintes est représenté par  $\sigma$  ( $\sigma_{ij}$ ) et désignons par  $\epsilon$  ( $\epsilon_{ij}$ ) les déformations correspondantes, de sorte que :

$$dW = \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} = \sigma^T d\epsilon \quad (4.5)$$

soit le travail par unité de volume fourni par les contraintes lors d'un accroissement infiniment petit de la déformation (la dernière expression de (4.5) correspond à la notation matricielle habituelle,  $\sigma^T$  désignant la matrice ligne transposée de la matrice colonne  $\sigma$ ).

En petites déformations et pour des conditions aux limites classiques, la non-linéarité des problèmes de l'élasto-plasticité est due aux lois de comportement suivantes relations entre incréments de contraintes et incréments de déformations). Ce sont les relations :

$$d\sigma = D_{ep} d\epsilon \quad (4.6a)$$

avec d'autre part les relations inverses, qui s'écrivent :

$$d\epsilon = D_{ep}^{-1} d\sigma; (d\epsilon = d\epsilon_{ij}^p + d\epsilon_{ij}^{el}) \quad (4.6b)$$

où la matrice élasto-plastique  $D_{ep}$  est définie par :

$$D_{ep} = D_{el}^{-1} \alpha [ M + \left( \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right)^T D_{el} \left( \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right) ]^{-1} D_{el} \frac{\partial F}{\partial \sigma} \left( \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right)^T D_{el} \quad (4.7)$$

et la matrice élasto-plastique inverse, définie par :

$$D_{ep}^{-1} = D_{el}^{-1} + \alpha M^{-1} \frac{\partial F}{\partial \sigma} \cdot \left( \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right)^T D_e \quad (4.8)$$

$$\alpha = \begin{cases} 1 & \text{si } F = 0 \text{ et } \left( \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right)^T d\sigma \geq 0 \\ 0 & \text{si } F < 0 \text{ ou } F = 0 \text{ et } \left( \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right)^T d\sigma < 0 \end{cases}$$

avec  $F$  est le potentiel plastique (le seuil d'écoulement),  $\frac{\partial F}{\partial \sigma}$  est la matrice colonne de composantes  $\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}$  et  $\left( \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right)^T$  est la matrice ligne, transposée de  $\frac{\partial F}{\partial \sigma}$

où  $M$  est le module d'écroutissage, et,  $D_{e1}$  la matrice des constantes élastiques du matériau. (matrice d'élasticité).

De la nature incrémentale de ces lois (relations 4.6a ou 4.6b), il résulte que la résolution numérique ne peut en général s'effectuer que pas à pas. On étudie à chaque étape le problème en incréments (incrément de déplacements ou incréments de contraintes) ; avant de passer à l'étape suivante, il est nécessaire de déterminer les zones en chargement plastique.

Certains auteurs ont proposé la résolution des équations (locales) par différences finies, mais les principes variationnels sont d'une utilisation plus commode et permettent de se ramener, soit aux méthodes de la programmation non-linéaire (forme quadratique à minimiser avec des "contraintes" linéaires ou quadratiques), soit à l'utilisation des méthodes itératives dont les significations physiques sont simples et qui permettent d'obtenir très rapidement la solution.

L'idée générale des approches itératives est de se ramener aux méthodes numériques de l'élasticité linéaire linéarisée : discrétiser les équations différentielles ou intégrales, ou les fonctionnelles introduites dans les principes variationnels puis, par approximations successives, remplacer la résolution du système linéaire jusqu'à convergence suivant un critère qui dépend de l'approche choisie.

Dans les analyses aux petits déplacements de problèmes d'élasticité classique, on peut remplacer par ajustement la relation (4.6a) par une loi linéaire :

$$d \sigma^e = D_{e1} d \epsilon^e \quad (4.9)$$

Par une approche itérative, cette relation (4.9) et la relation (4.6a) conduisent aux mêmes valeurs des incréments de contraintes et déformations. Le choix de la grandeur à ajuster ( $D_{e1}$  ou  $d \sigma^e$  ou  $d \epsilon^e$ ) dans le procédé itératif dépend d'une part de la méthode de résolution utilisée pour le problème élastique linéaire équivalent et d'autre part de la nature de la loi physique reliant les incréments de déformations ( $d \epsilon$ ) et de contraintes ( $d \sigma$ ).

Si l'itération est conduite par ajustement de  $D_{e1}$  le procédé est appelé méthode d'élasticité variable ou méthode de la raideur variable (approche tangente).

Si l'ajustement porte sur  $d\sigma^e$ , on parlera de méthode de la contrainte initiale.

Si l'ajustement porte sur  $d\varepsilon^e$ , on parlera de méthode de la déformation initiale.

La spécification de  $D_{e1}$ ,  $d\varepsilon^e$  et  $d\sigma^e$  est la donnée essentielle que l'on introduit dans n'importe quel programme d'analyse élastique. De tels programmes vont constituer le noyau de toute nouvelle solution d'analyse élasto-plastique.

Dans le cadre de l'élasto-plasticité et pour la méthode des éléments finis aux déplacements, des diverses approches itératives mentionnées ci-dessus, nous en avons choisies deux : méthode de la raideur variable et la méthode de contrainte initiale.

#### 4.5.2.1. Méthode de la raideur variable [ 25 ]

Pour chaque élément fini, soit  $dU'$  le déplacement des noeuds sous l'effet des incréments de forces qui s'exercent en ces noeuds, et soit  $df'$  le vecteur représentant les forces nodales équilibrant les contraintes et les distributions de charges.

D'après le théorème du travail virtuel, compte tenu de (4.6a) et de relation :

$$du' = IN dU' \tag{4.10}$$

et

$$d\varepsilon' = IB dU' \tag{4.11}$$

où  $IB$  est la matrice de passage de  $dU'$  à  $d\varepsilon'$ , et  $IN$  la matrice d'interpolation .

Pour tout déplacement virtuel  $\delta dU'$  des noeuds, on peut écrire pour chaque élément  $e$  en déformation élasto-plastique :

$$\begin{aligned}
 (\delta dU')^T df' &= \int_e (\mathbf{B} \delta dU')^T D_{ep} \mathbf{B} dU' dV \\
 &- \int_e (\mathbf{N} \delta dU')^T dp dV - \int_{\partial e} (\mathbf{N} \delta dU')^T dg ds
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

d'où par élimination de  $\delta dU'$  :

$$df' = STIF_{ep} \cdot dU' - dR'_0 \tag{4.13}$$

avec

$$STIF_{ep}^e = \int_e \mathbf{B}^T D_{ep} \mathbf{B} dV \tag{4.14a}$$

et

$$dR'_0 = \int_0 dp dV + \int_{\partial e} \mathbf{N}^T dg ds \tag{4.14b}$$

et par assemblage on obtient :

$$\Psi(dU) \equiv STIF_{ep} dU - dR_0 = 0 \tag{4.15}$$

où  $\Psi$  est le vecteur somme des forces internes et externes,  $dR_0$  représente l'incrément de toutes les forces qui s'exercent en chaque noeud du modèle, et,  $dU$  représentant les incréments des déplacements de ces noeuds.  $STIF_{ep}$  est la matrice de raideur élasto-plastique globale, assemblage des matrices de raideur élémentaires  $STIF_{ep}^e$  données par (4.14a) qui dépendent de l'état actuel des contraintes par l'intermédiaire de  $D_{ep}$ . En ce sens  $STIF_{ep}$  n'est pas une matrice constante et (4.15) est une équation non-linéaire.

L'équation (4.15) exprime que la résultante de toutes les forces nodales appliquées est nulle si l'on assure l'équilibre du milieu. Elle peut s'obtenir plus

directement, sans introduire les  $df'$ , par l'application globale du théorème du travail virtuel (les intégrales étant étendues à l'ensemble des éléments finis du milieu considéré).

Pour résoudre une équation non-linéaire du type  $\psi (X) = 0$ , on peut utiliser le procédé de Newton : si une valeur d'essai  $X_n$  est trouvée, suffisamment voisine de la solution exacte, mais telle que  $\psi (X_n) \neq 0$ , cette valeur d'essai peut être améliorée en trouvant :

$$X_{n+1} = X_n + \Delta X_{n+1}$$

avec

$$\Delta X_{n+1} = - \psi (X_n) / \left( \frac{d\psi}{dX} \right)_n$$

La convergence de ce procédé est illustrée par la Figure 4.12.

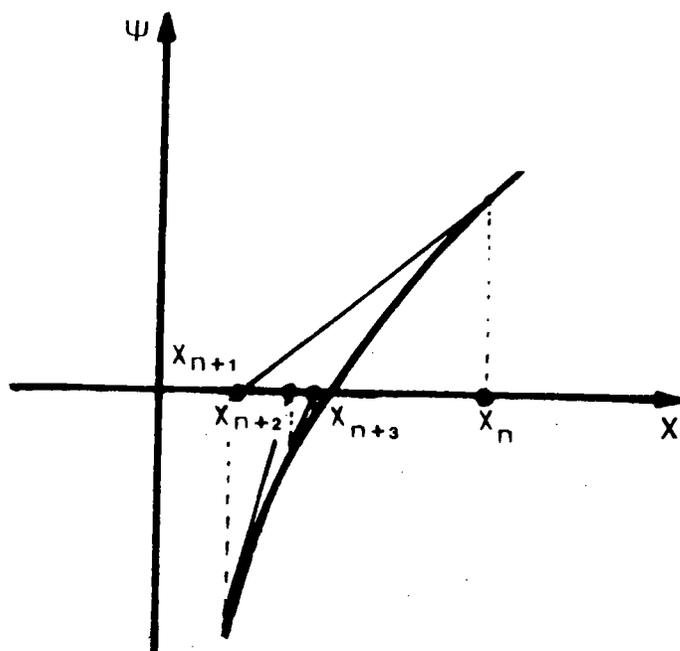


Figure 4.12

Si l'on applique la méthode de Newton à (4.15), sur une valeur d'essai  $dU_n$  telle que :

$$\Psi (dU_n) \equiv \text{STIF}_{epn} \cdot dU_n - dR_0 \neq 0$$

où  $\text{STIF}_{epn}$  est la matrice de raideur élasto-plastique globale évaluée pour les déformations correspond à  $dU_n$ , on obtient en faisant varier  $dU$  :

$$\delta \Psi (dU_n) \equiv \text{STIF}_{epn} \cdot \delta dU_n$$

de sorte que l'on peut écrire la valeur d'essai améliorée selon :

$$dU_{n+1} = dU_n + \Delta dU_{n+1} \quad (4.16a)$$

avec

$$\Delta dU_{n+1} = - (\text{STIF}_{epn})^{-1} \cdot \Psi (dU_n) \quad (4.16b)$$

Afin d'accélérer la convergence du procédé, on peut utiliser comme première approximation la valeur d'essai  $dU_0$ , solution du problème élastique, soit :

$$dU_0 = \text{STIF}_{el}^{-1} \cdot dR_0 \quad (4.17)$$

avec  $\text{STIF}_e$  est la matrice de raideur élastique globale.

Le procédé étant ainsi amorcé, on a d'après (4.16) et (4.5) la formule :

$$dU_{n+1} = \text{STIF}_{epn}^{-1} \cdot dR_0 \quad (4.18)$$

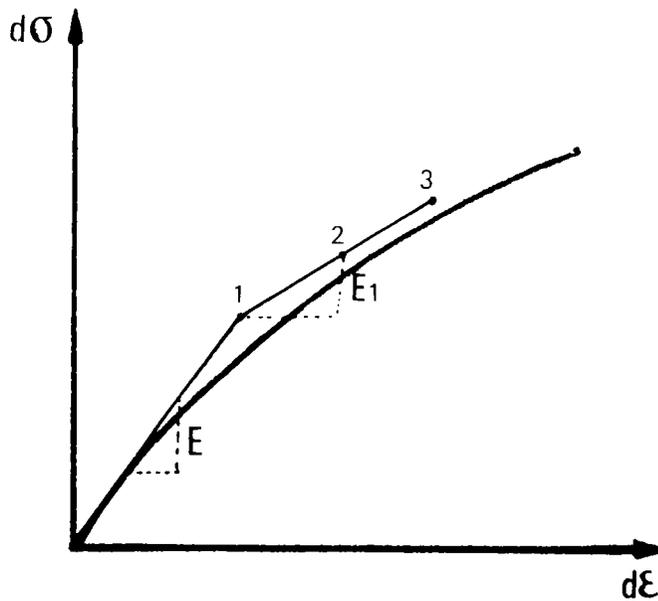
et l'itération est poursuivie jusqu'à ce que  $\Delta dU$  soit suffisamment petit (Figure 4.13).

où la loi de comportement s'écrit :

$$d\sigma = (D_{el}^{-1} + D_p^{-1})^{-1} d\varepsilon$$

où  $D_p$  désigne la matrice des modules d'écroissage ; elle dépend de l'état actuel

(donc des inconnues  $dU$ ).



*Figure 4.13 : Méthode de la raideur variable*

Dans cette méthode, on doit donc, à chaque étape, spécifier les accroissements de charges par un calcul particulier et, bien que le temps de calcul sur ordinateur puisse s'en trouver augmenté, le procédé a l'avantage de fournir le déroulement de la plastification des divers éléments finis dans l'ordre correct. C'est une méthode qui tient compte, non seulement des caractéristiques d'écrouissage du matériau, mais aussi du changement de forme dû aux grands déplacements. De plus, il est simple d'y introduire les effets de déchargements ou de rechargement des éléments.

#### 4.5.2.2. Méthode de la contrainte initiale [ 27 ]

On utilise de même le théorème du travail virtuel, mais en séparant les contraintes réellement atteintes  $d\sigma'$  des contraintes  $d\sigma^{el}$  correspondant au problème élastique. Compte tenu de (4.6a), (4.7) et (4.8), on a :

$$\begin{aligned}
 d\sigma_{\text{rééq}} &= d\sigma^e - d\sigma' \\
 &= D_{el} d\varepsilon' - D_{ep} d\varepsilon' \\
 &= \tilde{D}_{ep} \cdot B \cdot dU'
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

où l'on a posé :

$$\tilde{D}_{ep} = \alpha \cdot \left[ M + \left( \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right)^T D_{el} \frac{\partial F}{\partial \sigma}^{-1} D_{el} \frac{\partial F}{\partial \sigma} \left( \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right)^T D_{el} \right] \tag{4.20}$$

de sorte que (4.12) s'écrit cette fois :

$$\begin{aligned}
 (\delta dU')^T df' &= \int_e (B \delta dU')^T \tilde{D}_{ep} B dU' dV - \int_e (B \delta dU')^T \tilde{D}_{ep} B dU' dV \\
 &\quad - \int_e (N \delta dU')^T dp dV - \int_{\partial e} (N \delta dU')^T dg ds
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

d'où

$$df' = STIF_{el}' \cdot dU' - dR_{\text{rééq}} \cdot dU' - dR'_0 \tag{4.22}$$

avec

$$STIF_{el}^e = \int_e B^T D_{el} B dU \tag{4.23a}$$

et

$$dR_{\text{rééq}} = \int_e B^T \tilde{D}_{ep} B dU' dV = \int_e B^T d\sigma_{\text{rééq}} dV \tag{4.23b}$$

et par assemblage on obtient :

$$\Psi(dU) \equiv STIF_{el} \cdot dU - dR(dU) = 0 \tag{4.24}$$

où

$$dR(dU) = dR_0 + \tilde{dR}(dU)$$

$dR_0$  ayant la même signification que dans la méthode de la raideur variable,  $\tilde{dR}$  ( $dU$ ) étant l'incrément de toutes les forces nodales,  $dR_{rééq}$  correspondant aux "contraintes initiales dites de rééquilibrage"  $\sigma_{rééq}$ .

Les  $dR_{rééq}$ , données par (4.23b) sont les forces qu'il faut appliquer aux noeuds de chaque élément en déformation élasto-plastique pour équilibrer la "contrainte initiale"  $\sigma_{rééq}$  nécessaire pour amener la solution élastique à coïncider avec les vraies contraintes (vérifiant (4.6a)) requises par les déformations totales atteintes.  $STIF_{ep}$  est la matrice de raideur globale, assemblage des matrices de raideur élémentaires  $STIF^e$  par (4.23a).

L'équation (4.24) est encore une équation non-linéaire de la forme  $\Psi(X)=0$  et on peut cette fois utiliser le procédé de Newton à pente constante qui consiste à prendre à chaque stade d'itération une valeur constante  $(\frac{d\Psi}{dX})_0$  afin d'obtenir la valeur d'essai améliorée selon :

$$X_{n+1} = X_n + \Delta X_{n+1}$$

avec

$$\Delta X_{n+1} = -\Psi(X_n) / (\frac{d\Psi}{dX})_0$$

La convergence de ce procédé est illustrée par la figure 4.14

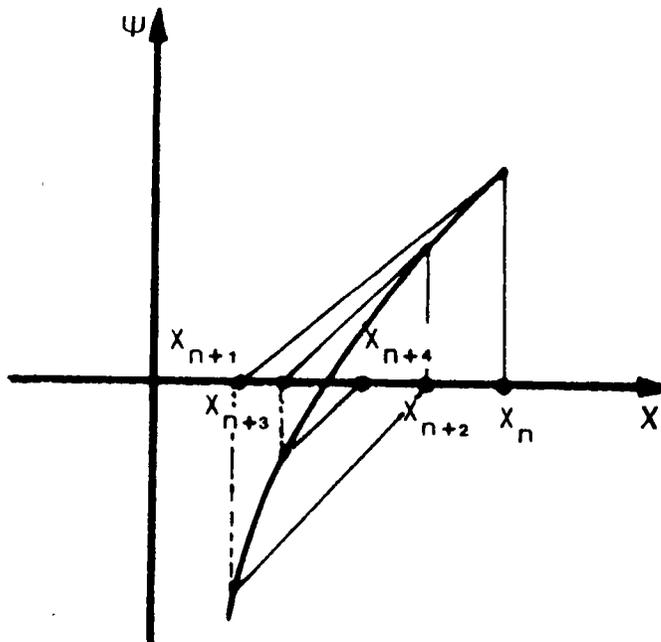


Figure 4.14

Si l'on applique le principe de réduction de Pasternak à (4.24) sur une valeur d'essai  $dU_n$  telle que  $\Psi(dU_n) \neq 0$ , on peut écrire la valeur d'essai améliorée comme :

$$dU_{n+1} = dU_n + \Delta dU_{n+1}$$

avec

$$\Delta dU_{n+1} = - STIF_{el}^{-1} \cdot \Psi(dU_n)$$

soit d'après (4.24) :

$$dU_{n+1} = STIF_{el}^{-1} \cdot dR(dU_n) \quad (4.25)$$

qui remplace la formule (4.17) de la méthode de la raideur variable. On peut également prendre comme première approximation la solution du problème élastique :

$$dU_0 = STIF_{el}^{-1} \cdot dR_0$$

puis,  $dR_0$  étant indépendant de  $dU$  :

$$dU_{n+1} = STIF_{el}^{-1} \cdot \tilde{dR}(dU_n) \quad (4.26)$$

l'itération étant poursuivie jusqu'à ce que les forces de rééquilibrage  $\tilde{dR}_{rééq}$  soient suffisamment petites.

La signification physique de la méthode est la suivante : à chaque stade, on détermine en tout point de la structure la différence  $-d\sigma_{rééq}$  entre le niveau des vraies contraintes et celui correspondant à la solution élastique. Cette différence de contraintes est ensuite redistribuée élastiquement, suivant (4.26), pour rétablir l'équilibre (Figure 4.15).

où la loi de comportement s'écrit :

$$d\sigma = D_{ep} d\epsilon - d\sigma_{rééq}$$

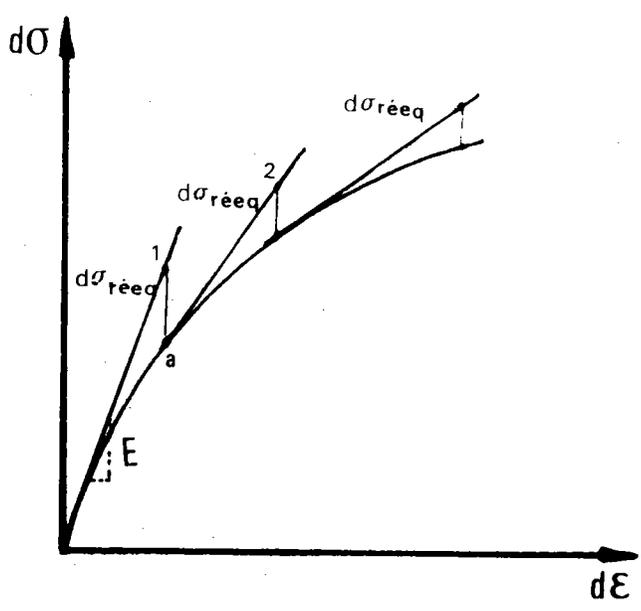


Figure 4.15 : Méthode de la contrainte initiale

Cette méthode est actuellement considérée comme étant la plus sûre au point de vue de la convergence. Le cas de la plasticité parfaite est automatiquement pris en compte et aucune modification n'est nécessaire si un déchargement se produit dans un élément.

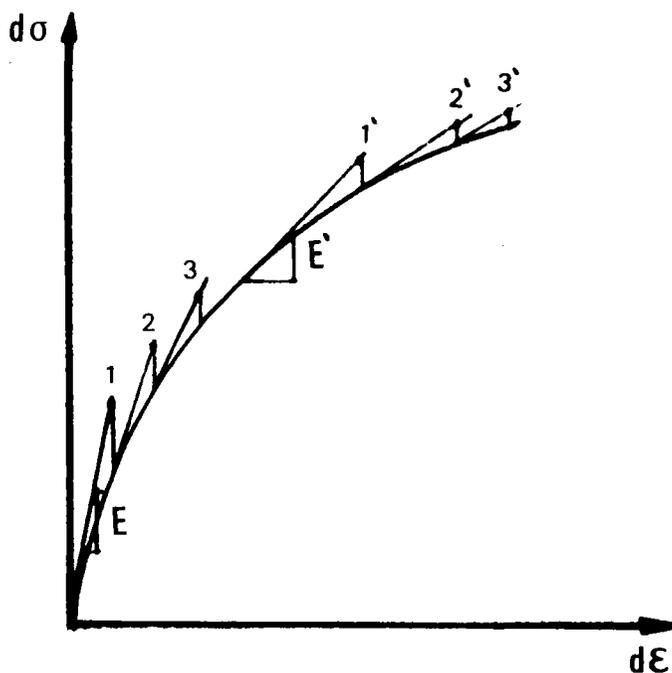
4.5.2.3. Comparaison de deux méthodes

Dans les deux méthodes décrites précédemment, le niveau des contraintes et déformations atteint à la première approximation est le point 1 (Figure 4.13 et 4.15). Dans la méthode de la raideur variable, la pente  $\text{Arctg}(E(dU))$  est ajustée ensuite à chaque étape. Dans la méthode de la contrainte initiale, les contraintes sont ramenées à un niveau correct par l'introduction des  $d\sigma_{\text{rééqi}}$ .

Il est clair que la deuxième méthode (la méthode de la contrainte initiale) est plus avantageuse par rapport à la première (la méthode de la raideur variable) lorsque  $d\varepsilon$  croissent rapidement par rapport aux  $d\sigma$ . Une méthode d'ajustement systématique peut ne pas être toujours rapidement convergente ; par contre,

il est possible d'étudier la convergence pendant le calcul et de l'accélérer par autocorrection à chaque étape.

Dans nos travaux, la méthode de la contrainte initiale a été préférée, elle y apparaît comme la mieux adaptée, puisque toute décharge à partir du seuil d'écoulement plastique (Figure 4.25 ex : (1) à (a) ) procède automatiquement de base purement élastique (ex : (a) ) jusqu'à ce qu'on intercepte de nouveau la surface de seuil d'écoulement plastique (ex : 2), aspect important si des charges cycliques sont introduites (comme dans notre cas des chargements) et surtout pour assurer la convergence. La méthode de la raideur variable est appliquée pour accélérer cette convergence (Figure 4.16).



*Figure 4.16 : Méthode mixte (méthode de la contrainte initiale  
(Méthode de la raideur variable)*

#### 4.5.3. Structure de programme

Le code de calcul proposé est composé d'un ensemble de modules d'analyse statique des structures bidimensionnelles par la méthode des éléments finis, ainsi

que d'un module de maillage automatique et d'un module de dessin. Les résultats de chaque module peuvent être sauvegardés sur fichier et servir de données à d'autres modules.

Les structures sont soumises à des chargements mécaniques évolutifs en fonction du nombre de cycles.

Les lois de comportement qui peuvent être prises en compte sont du type :

- \* comportement élastique
- \* comportement élasto-plastique avec ou sans écrouissage.

#### 4.5.3.1. La description de chaque module

##### 4.5.3.1.1. Module de maillage (option dans le code CASTOR-2D\*\*) :

Ce module réalise le découpage d'une pièce plane ou axisymétrique en éléments triangulaires isoparamétriques (6 noeuds).

Le découpage est élaboré à partir des données géométriques du contour de la pièce et des dimensions souhaitées pour les triangles, et la numérotation des noeuds dans le maillage final est optimisée par le programme de façon à minimiser le temps de traitement lors des calculs par éléments finis.

##### 4.5.3.1.2. Module de calcul élasto-plastique (Code SIFMEPA\*\*\*)

Il s'agit d'un programme de calcul statique des structures à comportement non-linéaire élasto-plastique.

---

\*\* CASTOR : un programme de calcul statique et dynamique des structures à comportement élastique (plastique), écrit en FORTRAN 77, et développé au CETIM-Senlis, par le département CALCUL.

\*\*\* SIFMEPA : un programme de calcul statique des structures à comportement élastoplastique, écrit en FORTRAN IV, par BIA [66 ]

On introduit la contrainte initiale dans les relations charge-déplacement, en tenant compte des conditions qui satisfont le critère de plasticité pour le matériau étudié.

On peut représenter la relation charge-déplacement par une équation non-linéaire matricielle écrite comme suit :

$$[STIF_{e1}] \{U\}_I^i = \{F\}_I^i + \{F_{rééq}\}_I^{i-1} \quad (4.27)$$

où  $\{STIF_{e1}\}$  est la matrice de rigidité élastique,  $\{U\}_I^i$  les déplacements nodaux pour le  $i$ ème incrément de charge et de  $I$ ème itération,  $\{F\}_I^i$  la charge appliquée au  $i$ ème incrément, et  $\{R_{rééq}\}_I^{i-1}$  la charge de rééquilibrage (les efforts nodaux équivalents aux contraintes initiales "de rééquilibrages") calculé pour l'incrément de charge précédent ( $i-1$ ).

#### 4.5.4. Processus de résolution

On fait, au préalable, les entrées de données relatives au matériau et aux noeuds :

- \* Propriétés mécaniques de matériau
- \* Paramètres analytiques de courbes de traction "cyclique"

Les opérations de traitement sont les suivantes :

a) - La relation incrémentale des déformations (de contraintes : (4.6a) ou (4.6b) ).

La relation (4.6a) est valable à partir du moment où les contraintes atteignent la surface de seuil ( $F = 0$  ou  $\alpha = 1$ ). Si  $F < 0$  ( $\alpha = 0$ ) le comportement est toujours dans le domaine élastique.

b) - Cette relation (4.6a) est seulement valable pour des variations infinitésimales des déformations. Pour des variations finies il est possible que les

contraintes quittent quelque part la surface de seuil. Afin d'éviter ces inconvénients on procède comme suit :

b-1) - après avoir exercé un incrément de charge, on résout le problème purement élastique par un programme standard par éléments finis.

b-2) - un test permet ensuite de spécifier parmi tous les éléments finis de la structure étudiée ceux pour lesquels le critère est violé ( $F \geq 0$ ).

b-3) - on détermine pour chacun de ces éléments le champ de contraintes pour lequel la déformation plastique commence et on calcule les forces de rééquilibrage  $dR_{rééd}$  données par la relation (4.23).

b-4) - à partir de cet état de contraintes (pour lesquelles  $F = 0$ ), on obtient alors l'incrément de toutes les forces nodales correspondant aux contraintes initiales  $\{R_{rééq}\}$  (où le champ de forces de rééquilibrage dans toute la structure). Si ces forces sont suffisamment petites, la procédure est arrêtée. Si non, on résout de nouveau le problème élastique global pour la distribution de forces  $\{R_{rééq}\}$ , c'est-à-dire l'expression suivante :

$$\{dU\}_{n+1} = [STIF_{el}]^{-1} \cdot \{dR_{rééq} \quad (dU_n)\} \quad (4.28)$$

où l'itération est poursuivie jusqu'à ce que les forces de rééquilibrage  $\{dR_{rééq}\}$  soient suffisamment petites.

Le processus converge lorsque les forces de rééquilibrage s'évanouissent. Lorsque la convergence s'est effectuée en un nombre de cycles inférieur à une limite fixée, le critère est vérifié en tout point de la structure. D'autre part, le problème plastique est résolu grâce à une superposition de déformations élastiques fictives qui vérifient chacune les conditions de comptabilité. Enfin, les forces de rééquilibrage s'étant évanouies, les équations d'équilibre sont également vérifiées.

b-5) - la convergence étant assurée pour l'incrément de charge considéré, on construit une nouvelle matrice de rigidité globale par assemblage

des matrices de rigidité élémentaires suivantes :

$$[STIF_{e1}] = \sum_{j=1}^{M_t} \int_e [B]^T [D_{ep}] [B] dV_j + [STIF_{res}] \quad (4.29)$$

où  $[STIF_{res}]$  est la matrice de rigidité imposée pour le ressort,

et  $\{j \dots M_t\}$  est le nombre des éléments finis (ex. triangle).

La nouvelle matrice de rigidité globale est alors adaptée à l'état actuel de contraintes-déformations et on peut appliquer l'incrément de charge suivant en reprenant la procédure de (b1).

Pour un incrément de charge donné, le procédé d'ajustement des contraintes décrit en (b1) - (b5) est illustré (Figure 4.17) dans un espace de contraintes à deux dimensions. On peut constater graphiquement que, après un petit nombre de cycles, les contraintes résultantes sont toujours ramenées à la surface seuil.

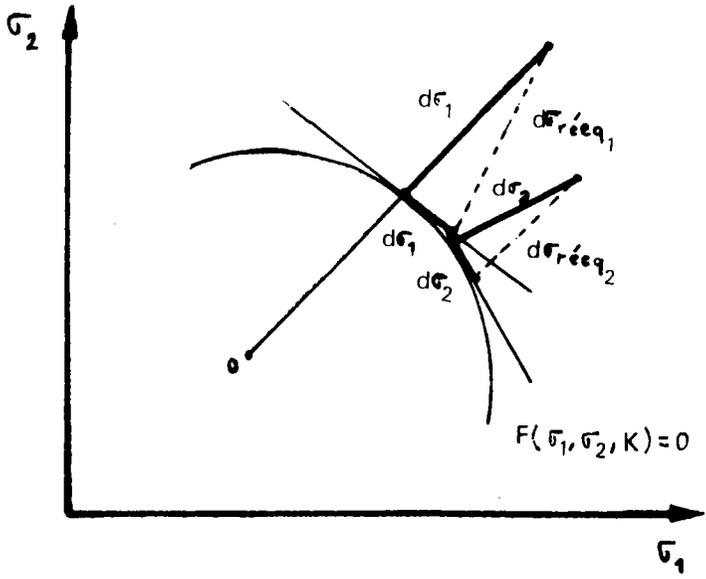


Figure 4.17 : Interprétation graphique de l'ajustement des contraintes.

Bien que la relation (4.6a) soit seulement incrémentale, si les charges sont appliquées en un seul grand pas, la méthode conduit effectivement à une solution équilibrée et qui n'excède pas les contraintes de seuil.

Par incrément de charge on entend implicitement tout ensemble de charges extérieures ou de déformations initiales. La méthode s'applique donc aux problèmes de contraintes thermiques.

#### 4.5.5. Critère de propagation de la fissure

Pour pouvoir rendre compte des phénomènes observés dans la propagation d'une fissure, après application d'un chargement cyclique constant ou variable, nous avons simulé l'avancée de la fissure en libérant les noeuds pour ne plus les contraindre à rester fixés sur l'axe de propagation de fissure.

Pour cela, il est nécessaire d'utiliser une procédure de relâchement de noeuds pour faire avancer la fissure.

Il existe plusieurs méthodes de relâchement des noeuds. Parmi celles-ci, nous avons choisi une méthode basée sur le changement de condition aux limites en imposant un effort vertical : les conditions sont réalisées simplement en associant à chaque noeud situé au-delà de la pointe de la fissure, deux ressorts dirigés respectivement suivant les directions X et Y. La valeur de la rigidité des ressorts appliquée est (Figure 4.18) :

\* Pour un noeud fixe : la rigidité du ressort est égale à une valeur extrême ( $STIF_{res} = (10^3 \div 10^8)$  multiplié par le module d'élasticité).

\* Pour un noeud libre : la rigidité du ressort est égale à une valeur nulle ( $STIF_{res} = 0$ ).

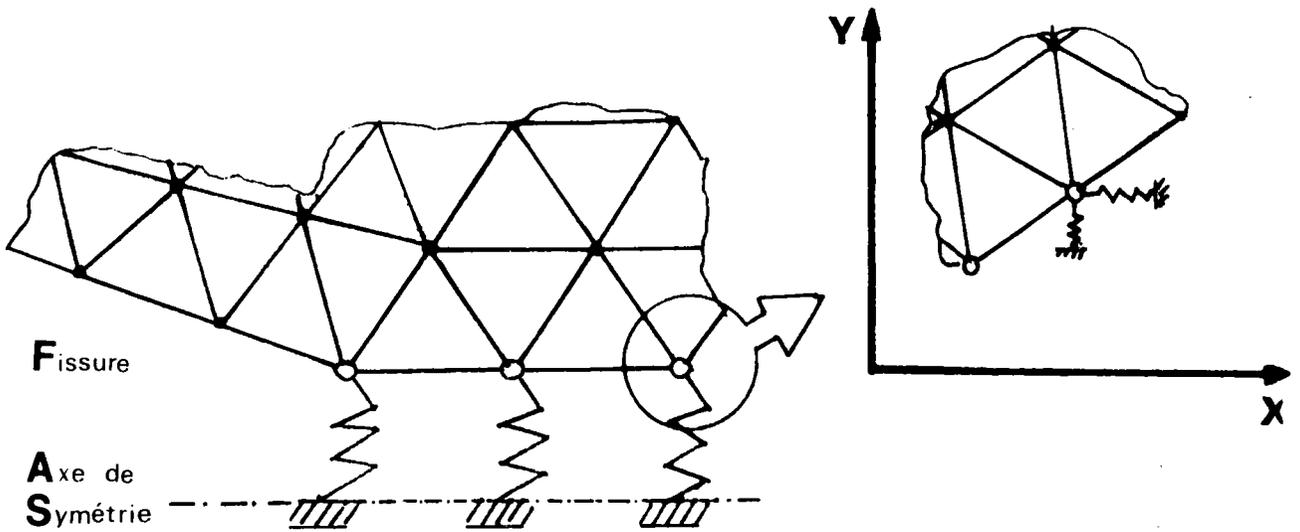


Figure 4.18 : Conditions aux limites à la pointe des fissures

Les conditions requises pour la libération de chacun de ces noeuds (propagation de fissures) sont les suivantes :

Lorsque l'écartement à fond de fissure  $CTOD_{ef}$  (le fond de fissure a été défini dans le programme comme la zone entre la pointe de la fissure et le noeud la précédente) (Figure 4.19) atteint une valeur seuil ( $CTOD_s$ ). Cette valeur seuil  $CTOD_s$  est calculée à partir du facteur d'intensité de contrainte du seuil de non propagation ( $\Delta K_s$ ).

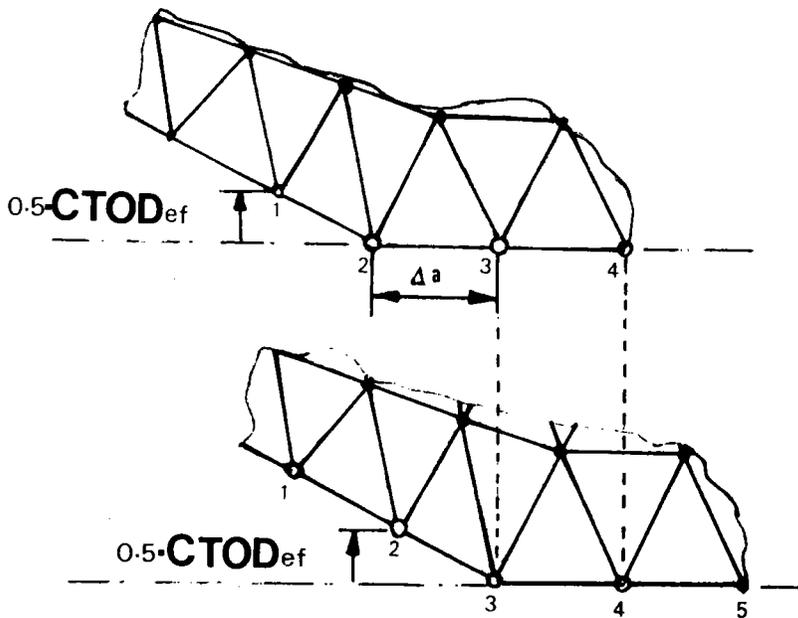
Le déplacement vertical seuil de non propagation ( $CTOD_s$ ) du premier noeud situé en avant de la pointe de la fissure est calculé par la formule suivante :

$$CTOD_s = 0.425 \cdot \left( \frac{\Delta K_s^2}{E \cdot R'_e} \right) \quad (4.30)$$

où  $R'_e$  est la limite d'élasticité cyclique, et,  $\Delta K_s$  est l'amplitude de facteur d'intensité de contrainte au seuil de non propagation.

Lorsque cette valeur est atteinte, il y a libération du noeud situé à la pointe de fissure. La fissure avance alors par bonds successifs, chacun des bonds

étant égal à la longueur d'un élément du maillage (la distance entre deux noeuds qui succède  $\Delta a$ ) (Figure 4.19).



*Figure 4.19*

A ce critère est associée une définition particulière de la vitesse de fissuration :

$$\frac{da}{dN} = A \cdot \text{CTOD}_{ef}^B \quad (4.31)$$

avec

$$A = C \cdot \left( \frac{E \cdot R'_e}{0.73} \right)^2$$

et

$$B = 2 \text{ m}$$

où C et m sont des constantes qui dépendent du matériau,

et  $\text{CTOD}_{ef}$  est le déplacement vertical donné par le calcul aux éléments finis.

Les constantes C et m ont été identifiées sur une courbe expérimentale de dans le cas de chargement monotone (ex. Acier E 36 Z, Figure 4.20).

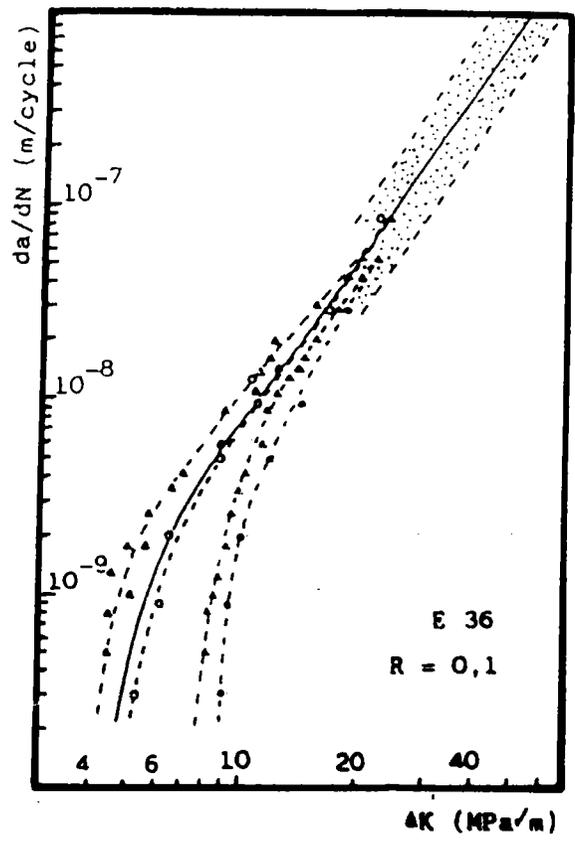


Figure 4.20 : Vitesse de fissuration pour l'acier E36,  $R = 0.1$ ,  $\Delta K_s = 8 MPa$

4.5.6. Applications

Simulation de la progression d'une fissure soumise à un chargement d'amplitude constante après application d'une surcharge (Annexes B.9.2.1.1. et B.9.2.1.2.).

#### 4.5.6.1. Nature des essais simulés

Les essais ont été réalisés sur des éprouvettes compactes CT40 en acier E 36 Z (Figure 3.20) dont les lois de comportement monotone, cyclique stabilisée du matériau (un grand nombre de pics de surcharge, dans notre cas  $N_p = 50$ ) et la courbe d'écroissage cinématique calculée (Annexe B.9.2.1.3) sont reportés sur la Figure 4.21.

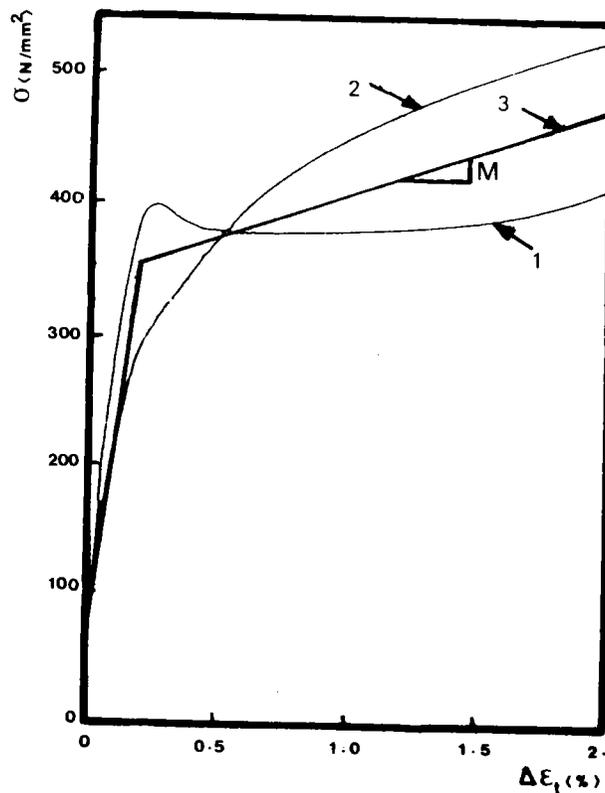


Figure 4.21 : Evolution de la courbe de traction cyclique de l'acier E 36 Z au cours du cyclage mécanique

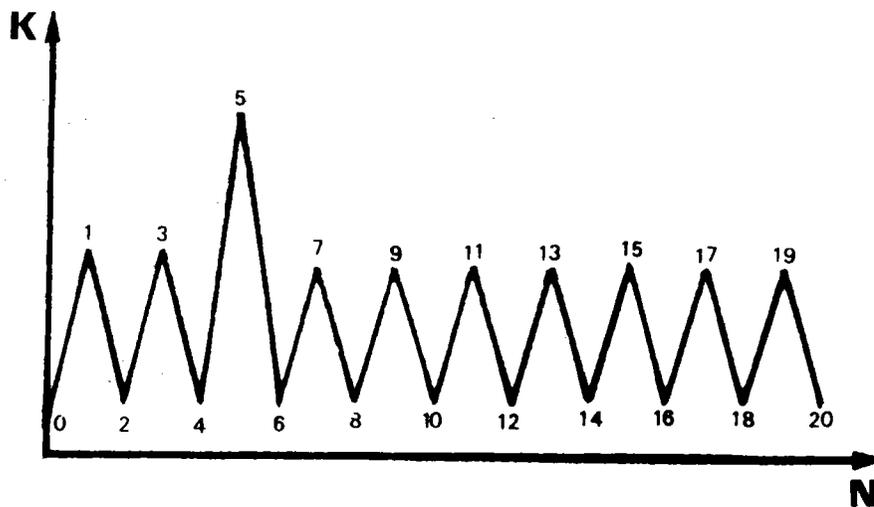
(1) monotone [ 65 ]

(2) cyclique [ 65 ]

(3) approximation de la courbe cyclique

#### 4.5.6.2. Configuration du chargement

Les calculs ont été effectués au chargement et au déchargement. La séquence de charge a été définie à partir d'une table de temps (Figure 4.22).



*Figure 4.22*

L'évolution de la longueur de fissure après surcharge a été examinée dans les conditions expérimentales suivantes :

- \* rapport de charge :  $R = 0.1$
- \* facteur d'intensité de contrainte maximal :  $K_{\max} = 18 \text{ MPa m}$
- \* taux de surcharge variable :  $R_{\text{pic}} = 1.6, 1.9 \text{ et } 2.2$

#### 4.5.6.3. Maillage

Le maillage a été réalisé à l'aide du programme de maillage automatique M2D (option dans le code CASTOR-2D). En raison de la symétrie, seule une

moitié de l'éprouvette a été maillée. L'éprouvette est maillée très finement près de la pointe de la fissure par des éléments triangulaires isocèles de largeur 0.06 mm. Il y a 20 éléments de ce type qui servent à simuler la progression de fissure. La taille des éléments augmente au fur et à mesure que l'on s'éloigne de la pointe de fissure. Le maillage total comporte 381 noeuds et 655 éléments (Figures 4.23).

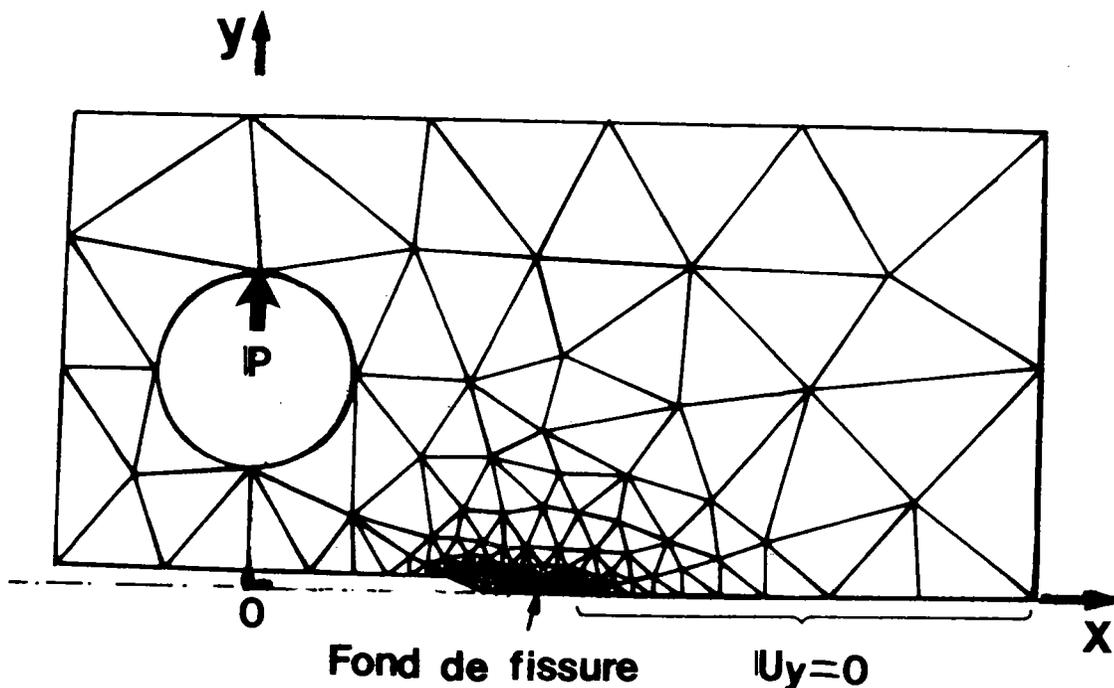
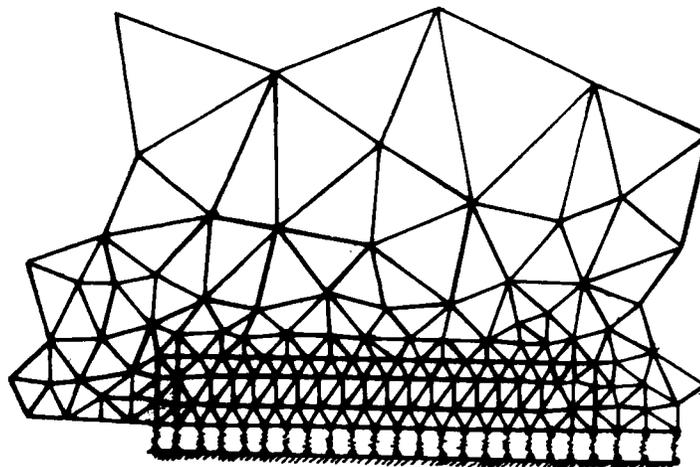


Figure 4.23 : Maillage utilisé pour l'éprouvette CT

#### 4.5.6.4. Conditions aux limites sur les déplacements

Les noeuds situés dans le prolongement de la fissure sont astreints à se déplacer sur l'axe de celle-ci. Les noeuds de la fissure proprement dite sont entièrement libres.

La procédure de relâchement des noeuds utilisés est celle décrite au paragraphe (4.5.5.) (Figure 4.24).



*Figure 4.24 : Conditions aux limites à la pointe des fissures*

#### 4.5.6.5. Résultats et discussion

Les calculs ont permis d'étudier plus particulièrement l'évolution de la vitesse de fissuration.

Les évolutions de la vitesse de fissuration par la méthode des éléments finis et les résultats de l'expérience sont reportés dans les Figures 4.25, 4.26 et 4.27.

Les paramètres expérimentaux, vitesse de fissuration minimale après surcharge ( $da/dN/min$ ), longueur de fissure où apparaît la vitesse minimale ( $a_{Vmin}$ ), longueur de fissure affectée par la surcharge ( $a_d^*$ ), et leurs homologues calculés sont reportés dans le Tableau n° 4.1

On remarque que la méthode des éléments finis donne des résultats en bon accord aux expériences et prévoit le blocage (ou le retard) dans la progression de la fissure, dans les conditions d'expérience où le blocage (retard) se produit réellement.

#### 4.6. Conclusion

La méthode des éléments finis se révèle un outil intéressant pour la simulation de la progression d'une fissure soumise à des conditions de chargements à amplitude variable.

De bons accords ont été obtenus entre simulation et expérience en couplant la procédure de progression numérique de la fissure et les phénomènes physiques qui la régissent et notamment l'ouverture de fissure de fatigue. Cette méthode constitue un progrès par rapport à la procédure d'avancée de fissure noeud par noeud.

Le coût de calculs en domaine non linéaire est toutefois un facteur limitant leur utilisation.

| Conditions d'essais  |                        | $\frac{da}{dN}$ / min<br>(mm/cycle) | $a_{Vmin}$<br>(mm) | $a_d^*$<br>(mm) |
|--|------------------------|-------------------------------------|--------------------|-----------------|
| $K_{max} = 18 \text{ MPa } \sqrt{m}$<br>$R = 0.1$<br>$N_p = 50, B_e = 15 \text{ mm}$ |                        |                                     |                    |                 |
| $R_{pic}=1.6$  | Mesures expérimentales | $1.8 * 10^6$                        | 0.1                | 0.51            |
|  | Calculs aux E.F.       | $0.93 * 10^6$                       | 0.24               | 0.66            |
| $R_{pic}=1.9$  | Mesures expérimentales | $3 * 10^{-7}$                       | 0.28               | 0.80            |
|  | Calculs aux E.F.       | $0.33 * 10^{-7}$                    | 0.24               | 0.72            |
| $R_{pic}=2.2$  | Mesures expérimentales | Fissure bloquée                     | 0.4                | -               |
|  | Calculs aux E.F.       | Fissure bloquée                     | 0.42               | -               |

Tableau n° IV-1 : Comparaison entre les résultats expérimentaux et les calculs par la méthode des Éléments Finis.

$$da/dN = F(a)$$

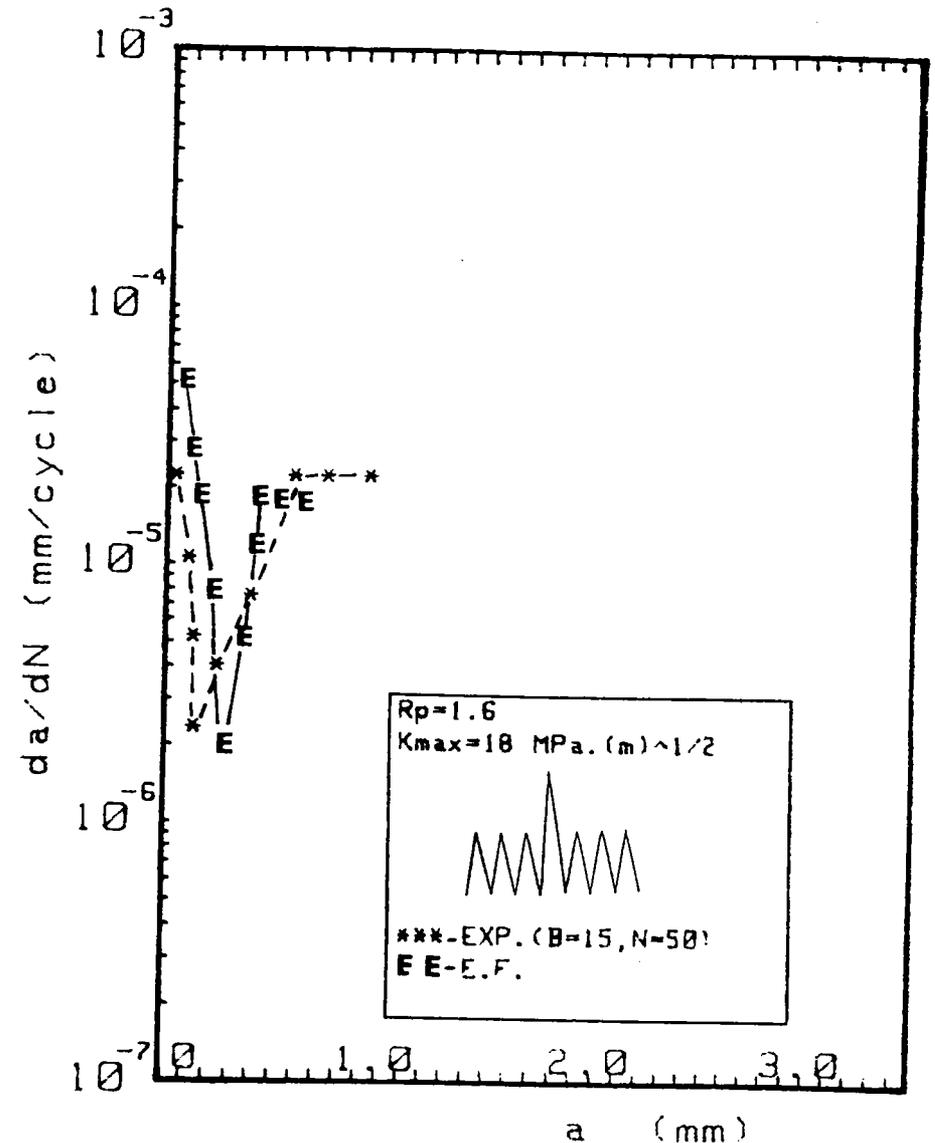


Figure 4.25

$$da/dN = F(a)$$

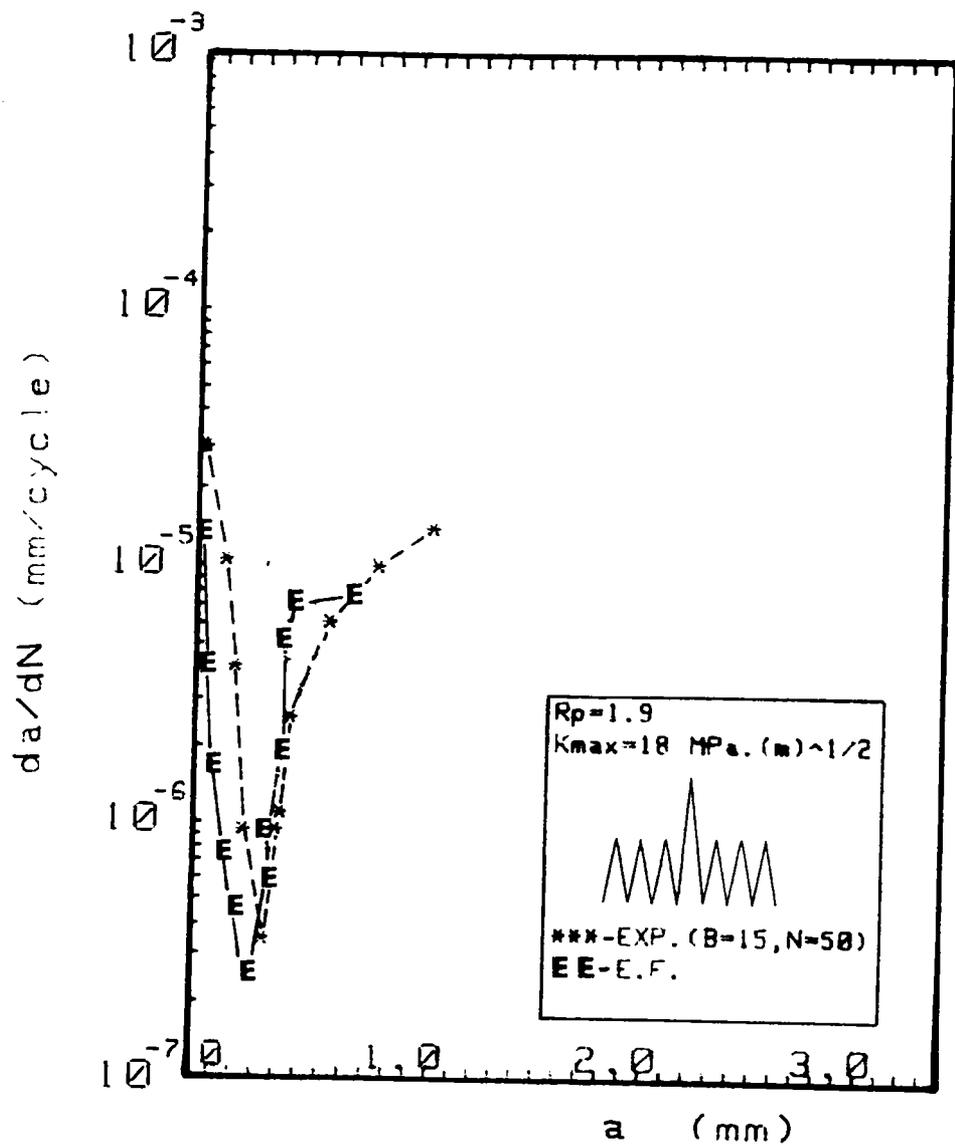


Figure 4.26

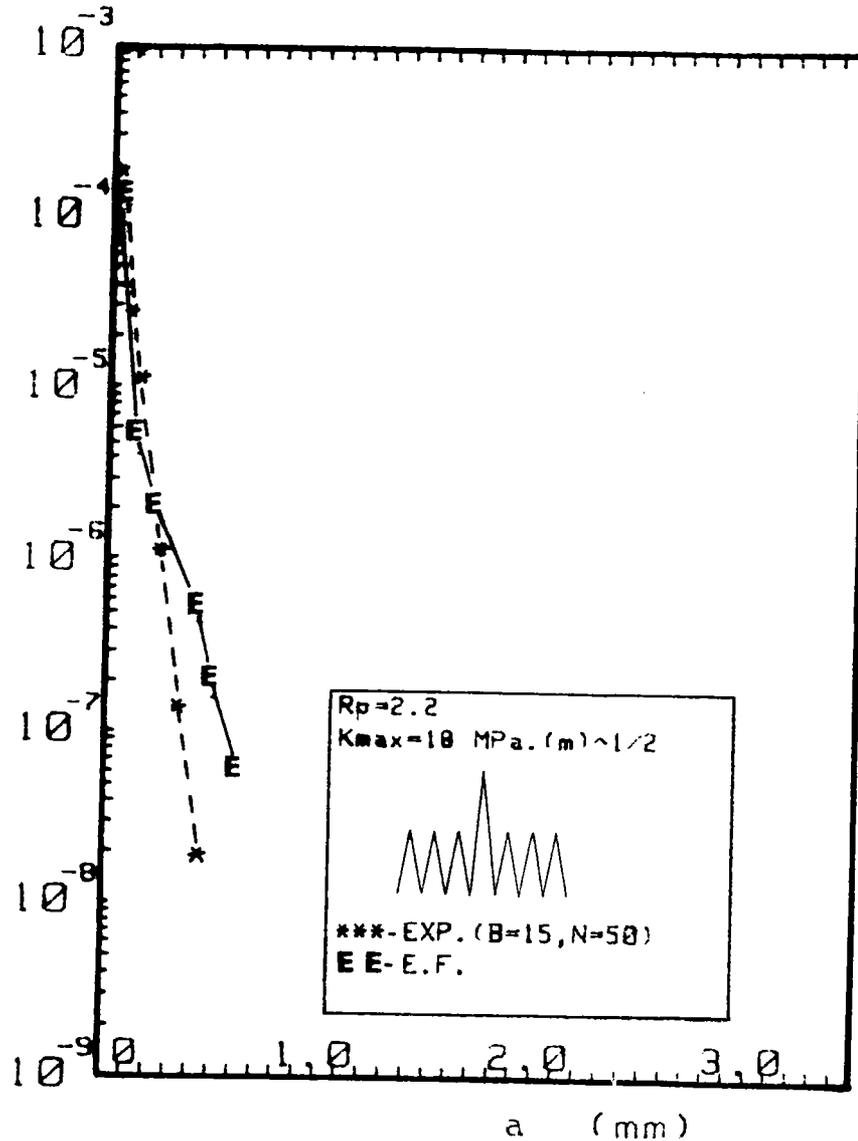


Figure 4.27

## 5 - MODELES BASES SUR LA THEORIE DES DISLOCATIONS

### 5.1. Introduction

Depuis les dernières années, plusieurs modèles théoriques ont été proposés pour expliquer la propagation d'une fissure à partir du mouvement des dislocations situées en pointe de celle-ci [ 2 ] et [ 44-49 ] .

L'origine de ces modèles est peut-être celui développé par Bilby, Cottrell et Swinden (BCS) [ 44 ] . Ce modèle imagine une fissure en déformation plane et constitué d'un empilement de dislocation dont on calcule le déplacement, sous l'effet des contraintes. Dans cette région, les dislocations subissent des forces qui tendent à les faire sortir de la zone plastique. Une force de friction, que Bilby et col [ 44 ] associent avec la limite d'élasticité du matériau, s'oppose à ce mouvement. Les auteurs [ 44 ] calculent l'équilibre qui s'établit et en déduisent le déplacement à la pointe de fissure.

### 5.2. Etude bibliographique

#### 5.2.1. Modèle de Mc Cartney

Mc Cartney [ 50 ] a utilisé le modèle développé par Bilby, Cottrell et Swinden (BCS) [ 44 ] pour prédire les effets de surcharge sur la déformation d'une extrémité d'une fissure de fatigue. Ce modèle est basé sur une méthode de superposition pour représenter l'effet de contraintes résiduelles dans les zones plastiques.

Ce modèle imagine une fissure en déformation plane et calcule le mouvement des dislocations en tête de la fissure, sous l'effet de la concentration de contrainte dans cette région, les dislocations subissent des forces qui tendent à les faire sortir de la zone plastique. Une force de friction, que Mc Cartney associe avec la limite d'élasticité du matériau, s'oppose à ce mouvement. Il calcule l'équilibre qui s'établit et en déduit le placement en tête de la fissure.

La composante normale du déplacement le long du plan de fissure est donnée par la relation suivante (Figure 5.1) :

$$v(x) = \int_x^{a_0} \rho(X) dX \quad (5.1)$$

où  $\rho(X)$  est la densité des dislocations

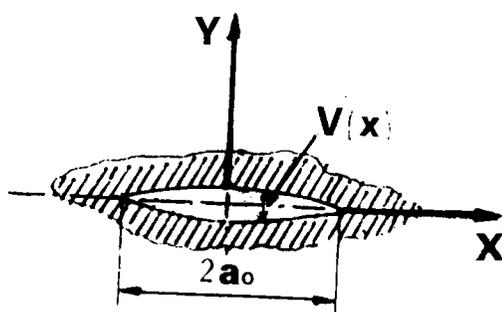


Figure 5.1.

Mc Cartney a utilisé le modèle de BCS pour calculer la taille de zone plastique, ce qui conduit à considérer que la plastification en fond de fissure se fait selon deux bandes étroites de longueur  $X_g$ , comme illustré sur la Figure 5.2.

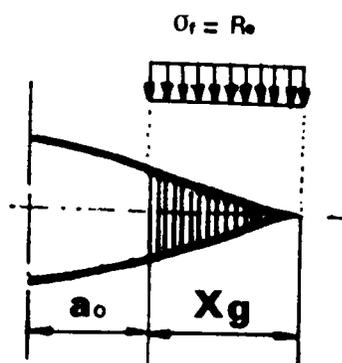


Figure 5.2.

D'un point de vue mathématique, cette situation peut s'analyser par superposition d'une fissure de longueur  $2(a_0 + X_g)$  (Figure 5.2) soumise d'une part au chargement réel, d'autre part à des contraintes de compression égales à la limite élastique  $R_e$  du matériau uniformément réparties sur les extrémités de la fissure et sur une longueur  $X_g$ .

La taille de la zone plastique donnée par le modèle de BCS est de la forme suivante :

$$\frac{X_g}{a_0} = \text{Sec} \left( \frac{\pi \sigma}{2 R_e} \right) \quad (5.2.)$$

où  $\sigma$  est la contrainte appliquée, et  $a_0$  est la longueur initiale de la fissure.

Mc Cartney a développé ce modèle dans le cas d'un chargement à amplitude variable (Figure 5.3) pour rendre compte de l'effet de fermeture de fissure.

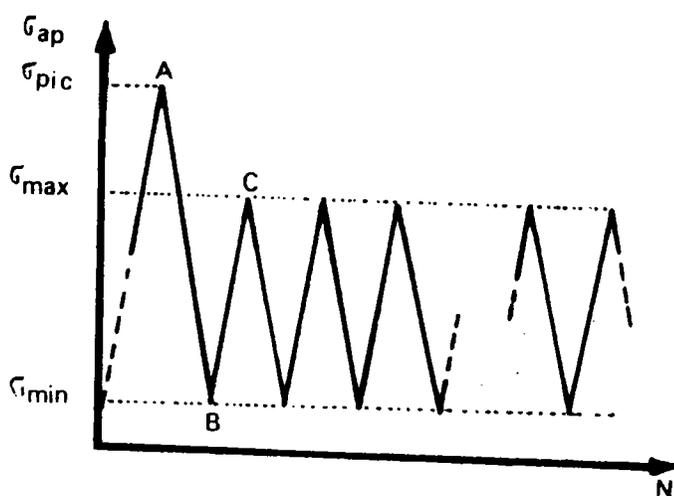


Figure 5.3. : Chargement utilisé par Mc Cartney [ 50 ]

Il a utilisé une éprouvette de longueur infinie à entaille centrale, soumise suffisamment loin de la fissure de longueur  $2a_0$  à un champ de contrainte uniforme  $\sigma_{yy} = \sigma_{yy}^\infty$ , sollicitant la fissure en mode I (Figure 4.3).

Dans les premiers temps, il calcule la distribution de la composante normale du déplacement le long du plan de fissure par les expressions suivantes :

- dans le cas où la contrainte appliquée correspond au point A (Figure 5.3), la taille de la zone plastique est donnée par la relation suivante :

$$\frac{X_{gI}}{a_0} = \text{Sec} \left( \frac{\pi \sigma_{pic}}{E R_e} \right) \quad (5.3.)$$

où  $\sigma_{pic}$  est la contrainte due à la surcharge

et la distribution du déplacement est donnée par la relation suivante pour une fissure dans une plaque infinie :

$$V_I(X) = V_0 \cdot H \left( \frac{X}{a_0}, \frac{X_{gI}}{a_0} \right) \quad (5.4.)$$

avec

$$V_0 = \frac{4 R_e a_0}{\pi E}$$

où la fonction  $H(u, v)$  est définie comme suit :

$$H(u, v) = \begin{cases} (u+1) \text{Cosh}^{-1} \left( \frac{v^2 + u}{v(u+1)} \right) - (u-1) \text{cosh}^{-1} \left( \frac{v^2 - u}{v(u-1)} \right) ; \text{ si } |u| < v \\ 0 & ; \text{ dans le cas contraire} \end{cases} \quad (5.5.)$$

- par l'intermédiaire d'une méthode de superposition, on trouve dans le cas de contrainte décroît jusqu'au point B ( $\Delta\sigma_{pic}$ ) (Figure 5.3), la taille de la zone plastique est de la forme :

$$\frac{X_{g2}}{a_0} = \text{Sec} \left( \frac{\pi \cdot \Delta\sigma_{pic}}{4 R_e} \right) \quad (5.6)$$

où

$$\Delta\sigma_{pic} = \sigma_{pic} - \sigma_{min}$$

et la distribution du déplacement le long du plan de fissure est de la forme suivante :

$$V_2(X) = V_1(X) - 2 V_0 \cdot H \left( \frac{X}{a_0}, \frac{X_{g2}}{a_0} \right) \quad (5.7)$$

- Dans le cas où la contrainte croit jusqu'au point C ( $\Delta\sigma$ ) (Figure 5.3), la taille de la zone plastique est donnée par l'expression :

$$\frac{H_{g3}}{a_0} = \text{Sec} \left( \frac{\pi \Delta\sigma}{4 R_e} \right) \quad (5.8)$$

où

$$\Delta\sigma = \sigma_{max} - \sigma_{min}$$

et la distribution de déplacement le long du plan de fissure est :

$$V_3(X) = V_2(X) + 2 V_0 \cdot H \left( \frac{X}{a_0}, \frac{X_{g3}}{a_0} \right) \quad (5.9)$$

Des relations (5.4), (5.7) et (5.9), Mc Cartney dérive des expressions des écartements de fissure  $\delta(X)$ , valable au cours de la propagation de l'extrémité de la fissure au travers de la zone de déformation plastique correspondant à la contrainte appliquée (Figure 5.4) :

$$\delta(X) = \int_X^{X_g} \rho(\xi) dX = V(X) - V(X_g) \quad (5.10)$$

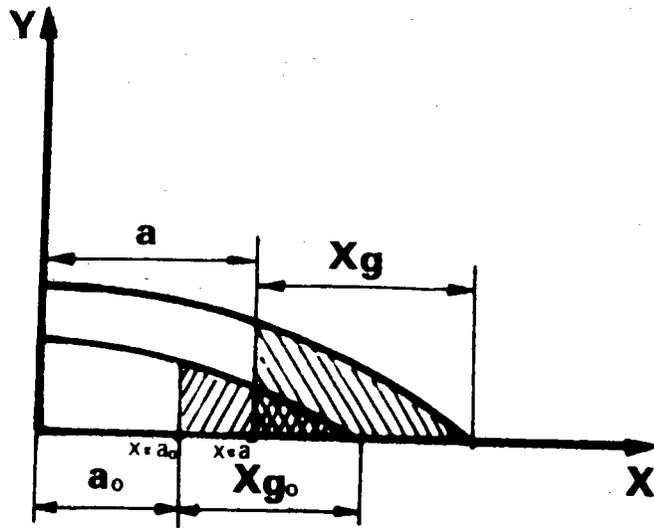


Figure 5.4

- Dans le cas où la contrainte appliquée correspond au point A (Figure 5.3) (à la surcharge), l'écartement de fissure est de la forme suivante :

pour  $(a_0 + X_{gI}) \leq X < \infty$

$$\delta(X) = V_0 \cdot \left(\frac{X}{a_0}\right) \cdot H\left(I, \frac{X_{gI}}{a_0}\right) \quad (5.11)$$

- Par l'intermédiaire d'une méthode de superposition, on trouve dans le cas de contrainte décrit jusqu'au point B ( $\Delta\sigma_{pic}$ ) (Figure 5.3), la nouvelle taille de la zone plastique est de la forme ::

pour  $(a_0 + X_{g2}) \leq X \leq (a_0 + X_{gI})$  :

$$X'_{g2} = \sqrt{\left(\frac{X}{a_0}\right)^2 - 2\left(\frac{X}{a_0}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi(\sigma_{pic} - \sigma_{max})}{2R_e}\right) + \frac{I}{\sin\left(\frac{\pi(\sigma_{pic} - \sigma_{max})}{2R_e}\right)}} \quad (5.12)$$

et l'écartement de fissure est donnée par la relation :

$$\delta(X) = V_I(X) - V_O \cdot \left\{ H \left( H'_{g2}, \frac{H_{g1}}{a_0} \right) + H \left( \frac{H}{a_0}, X'_{g2} \right) - \left( \frac{X}{a_0} \right) H \left( I, \left( \frac{a}{X} \right) \cdot X'_{g2} \right) \right\} \quad (5.13)$$

- Dans le cas où la contrainte croit jusqu'au point C ( $\Delta\sigma$ ) (Figure 5.3), la nouvelle taille de la zone plastique est donnée par la relation suivante :

$$\text{pour } (a_0 + X_{g3}) \leq X \leq (a_0 + X_{g2})$$

$$X'_{g3} = \sqrt{\left( \frac{X}{a_0} \right)^2 - 2 \left( \frac{X}{a_0} \right) \cdot \cos \left( \frac{\pi \Delta \sigma}{2 R_e} \right) + \frac{I}{\sin \left( \frac{\pi \Delta \sigma}{2 R_e} \right)}} \quad (5.14)$$

et l'écartement de fissure est donnée par l'expression :

$$\delta(X) = V_2(X) - V_O \cdot \left\{ H \left( X'_{g3}, \frac{X_{g1}}{a_0} \right) - 2H \left( X'_{g3}, \frac{X_{g2}}{a_0} \right) - \left( \frac{X}{a_0} \right) \cdot H \left( I, \left( \frac{X}{a_0} \right) \cdot X'_{g3} \right) - H \left( \frac{X}{a_0}, X_{g3} \right) \right\} \quad (5.15)$$

Pour tenir compte des effets de fermeture de fissure, Mc Cartney a calculé le rapport de charge pour lequel il y a ouverture de la fissure ( $R_{ouv}$ ) et le rapport de charge pour lequel il y a fermeture de la fissure ( $R_{fer}$ ) de la manière suivante :

\* Quand la contrainte croit de  $\sigma_{min}$  jusqu'au  $\sigma_{ouv}$  ( $\sigma_{ouv} < \sigma_{max}$ ), la taille de la zone plastique correspondant à l'ouverture de la fissure est de la forme :

$$\frac{X_{gouv}}{a_0} = \sec \left( \frac{\pi \Delta \sigma_{eff}}{4 R_e} \right) \quad (5.16)$$

avec

$$\Delta \sigma_{eff} = \sigma_{max} - \sigma_{ouv}$$

et l'écartement de fissure est donné par la relation :

$$\delta (X) = V_0 \cdot 4 \left( \frac{X}{a_0} \right) \cdot \text{Log} \left( \frac{X_{gouv}}{a_0} \right) \quad (5.17)$$

Il suppose que dans l'approximation de la zone plastique confinée (ZPC), pour une fissure dans une plaque infinie, avec  $\sigma_{pic} \ll R_e$ , la relation (5.17) est réécrite de la façon suivante :

$$\delta (X) = \frac{E R_e K^2}{2} \cdot (1 - R_{ouv})^2 \quad (5.18)$$

où  $R_{ouv}$  est le rapport de charge pour lequel il y a ouverture de la fissure.

\* Quand la contrainte décroît de  $\sigma_{max}$  jusqu'au  $\sigma_{fer}$  ( $\sigma_{fer} > \sigma_{min}$ ), la taille de la zone plastique correspondant à la fermeture de la fissure est comme suit :

$$\frac{X_{gfer}}{a_0} = \text{Sec} \left( \frac{\pi (\sigma_{fer} - \sigma_{min})}{4 R_e} \right) \quad (5.19)$$

et l'écartement de fissure est donné par l'expression :

$$\delta (X) = V_0 \cdot 4 \left( \frac{X}{a_0} \right) \cdot \left\{ \log \left( \frac{X_{g3}}{a_0} \right) - \log \left( \frac{X_{gfer}}{a_0} \right) \right\} \quad (5.20)$$

Il applique l'hypothèse de l'approximation de la zone plastique confinée (ZPC) pour une fissure dans une plaque infinie, avec  $\sigma_{pic} \ll R_e$ , la relation (5.20) est réécrite de la forme :

$$\delta (X) = \frac{E R_e \cdot K^2}{2} \cdot \left\{ (1 - R)^2 - (R_{fer} - R)^2 \right\} \quad (5.21)$$

où  $R$  est le rapport de charge,

et  $R_{fer}$  est le rapport de charge pour lequel il y a fermeture de la fissure.

Mc Cartney prédit les effets de surcharge sur les vitesses de propagation d'une fissure de fatigue de la façon suivante :

Il suppose que la vitesse de fissuration est régie par une loi de type Elber :

$$\frac{da}{dN} = C' \cdot \Delta K_{\text{eff}}^{m'} \quad (5.22)$$

où

$$\Delta K_{\text{eff}} = U \cdot \Delta K$$

avec

$$U = \sqrt{\frac{(1-p)(1-R_{\text{ouv}})^2 + p(1-R_{\text{fer}})^2}{(1-R)^2}} \quad (5.23)$$

où le coefficient  $p$ , d'après Mc Cartney est égal à :

$$p = \begin{cases} 1 & ; \text{s'il y a croissance de contrainte (ex : } \sigma_{\text{min}} \rightarrow \sigma_{\text{max}} \text{ )} \\ 0 & ; \text{dans le cas contraire} \end{cases}$$

Ce modèle présente quelques difficultés d'utilisation. En outre, l'auteur n'apporte aucune justification sur la valeur de  $p$  utilisée dans la relation (5.23).

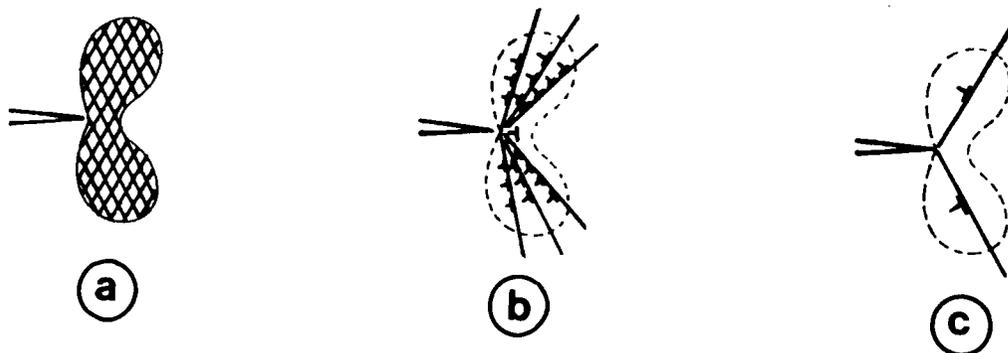
Mc Cartney n'a pas fait de comparaison entre les résultats obtenus par l'intermédiaire de son modèle et de résultats expérimentaux pour justifier sa validité.

### 5.2.2. Modèle de Kanninen

Kanninen [ 51 ] a proposé un modèle proche de celui de Mc Cartney, pour décrire la propagation d'une fissure de fatigue sous chargements cycliques,

variant de façon arbitraire. Il s'est basé sur une représentation de la plasticité à l'extrémité de la fissure (Figure 5.5a) consistant en quelques superdislocations associées à des écoulements plastiques en bandes suivant une certaine inclinaison d'angle  $\theta_0$ (Figure 5.5b).

Il a utilisé un modèle dans lequel l'ensemble des paires de superdislocations représentant la plasticité résiduelle sous amplitude de chargement variable, sont réunies en une seule paire (Figure 5.5c).



*Figure 5.5. : (a) - La déformation plastique en état de déformation plane à la pointe de fissure*

*(b) - Représentation des superdislocations à des écoulements plastique*

*(c) - Représentation des écoulements plastique par une seule paire de superdislocations.*

Kanninen prédit les effets de chargement variable sur les vitesses de propagation d'une fissure de fatigue de la façon suivante :

Il suppose que la superdislocation se déplace dans des plans situés à un angle  $\theta_0$  du plan de propagation.

La fissure avance alors selon le plan le plus contraint. Kanninen postule

que la vitesse de fissure est régie par une loi du type :

$$\frac{da}{dN} = 2 K b_I \text{Cos}(\theta_a) \quad (5.24)$$

où  $b_I$  est la résistance associée à la superdislocation, et  $K$  est une constante qui dépend du matériau et de l'environnement [ 56] .

Pour calculer le paramètre  $b_I$ , Kanninen a utilisé la méthode de Muskhelishvili qui est basée sur la résolution de la distribution des contraintes par la méthode de variable complexe :

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 4 \text{Reel} \{ \Phi'(Z) \} \quad (5.25)$$

$$\frac{1}{2} (\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) + i \sigma_{xy} = \bar{Z} \Phi''(Z) + \Phi'(Z) \quad (5.26)$$

où  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{xy}$  : des composantes de contrainte,  $\text{Reel}$  la partie réelle de la fonction des variables complexes, et,  $\Phi$ , une fonction complexe avec la variable  $Z = X + iY$  qui dépend de condition aux limites.

Par l'intermédiaire de l'équation d'équilibre, on trouve la solution de deux relations (5.25) et (5.26) de la façon suivante :

$$\tau = \epsilon_0 R_e \quad (5.27a)$$

ou

$$\tau = \sigma_{\max} [ h(l) + \text{Sin}(\theta_a) \text{Cos}(\theta_a) ] + \frac{E}{8\pi} [ b_I g(l) + B_I g(L, l) ] \quad (5.27b)$$

où  $\epsilon_0$  est une constante numérique,  $b_I$  est la résistance associée à la superdislocation avant la propagation,  $l$  sa position suivant le plan de glissement avant la propagation (Figure 5.6), et  $B_I$  est la résistance associée à la superdislocation après un incrément de propagation,  $L$  sa position suivant le plan de glissement après un incrément de propagation (Figure 5.6).

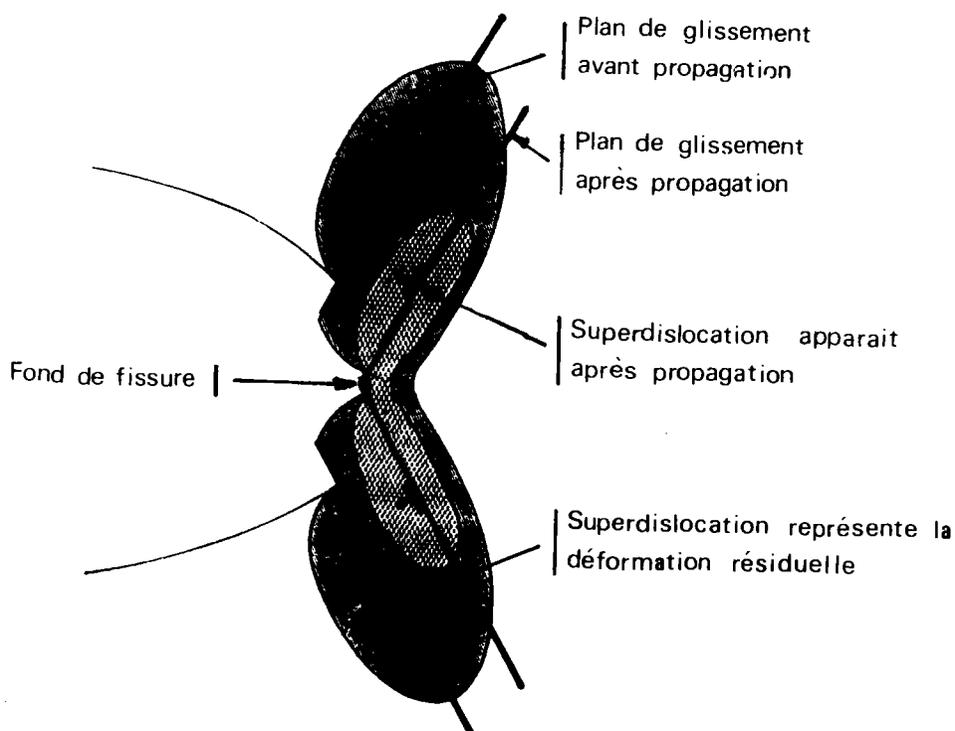
avec

$$h(l) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2a}{l}} \cdot \sin(\theta_0) \cdot \cos\left(\frac{\theta_d}{2}\right)$$

$$g(l) = -\frac{1}{l}$$

(5.28)

$$g(L, l) = -\frac{2}{L} (1 - \cos(4\theta_d)) - \frac{3}{\sqrt{lL}} \sin^2(\theta_d) \cdot \cos^2\left(\frac{\theta_d}{2}\right)$$



*Figure 5.6.: Représentation des superdislocations à des écoulements plastique à la pointe de fissure.*

L'équation de la singularité tiré de deux relations (5.25) et (5.26) pour une fissure dans une plaque infinie est donnée par l'expression suivante :

$$a \sigma_{\max} = \frac{E b_I}{8 \pi} [ b_I f(l) + B_I f(L) ] \quad (5.29)$$

avec

$$f(l) = 6 \sqrt{\frac{2a}{l}} \sin \theta_d \cos \left( \frac{\theta_d}{2} \right) \quad (5.30a)$$

et

$$f(L) = 6 \sqrt{\frac{2a}{L}} \sin \theta_d \cos \left( \frac{\theta_d}{2} \right) \quad (5.30b)$$

En résolvant les équations (5.27), (5.28), (5.29) et (5.30), on trouve :

$$b_I = \frac{I}{9E} \left[ 3 - \frac{I}{\sin^2(\theta_d) \cos^2\left(\frac{\theta_d}{2}\right)} \right] \left\{ \sigma_{\max} \sqrt{\pi a} - \sqrt{\frac{9}{8\pi}} \cdot \sin(\theta_d) \cos\left(\frac{\theta_d}{2}\right) \frac{E B_I}{\sqrt{L}} \right\}^2 \cdot \left\{ \tau - \sigma_{\max} \cdot \sin(\theta_d) \cos(\theta_d) + \frac{E}{4\pi L} \cdot \frac{I - \cos(4\theta_d) \cdot E \cdot B_I}{I} \right\}^{-I} \quad (5.31)$$

$$\text{et } L = \lambda_1 L_0 ; \text{ pour } \lambda_1 \geq 1 \quad (5.32)$$

$$B_I = \lambda_2 B_0 ; \text{ pour } \lambda_2 \leq 1 \quad (5.33)$$

où  $L_0$  est la position de la paire de dislocation correspondant au chargement d'amplitude constante, et  $B_0$ , la résistante associée à la superdislocation correspondant au chargement d'amplitude constante.

avec

$$B_0 = \frac{2 I}{32 \sqrt{2}} \cdot \frac{K_{\max}^2}{E R_e} \cdot \left( 1 - \frac{\sigma_{\max}}{R_e} \right)^{-I} \quad (5.34)$$

et

$$L_0 = \frac{147}{1024 \pi} \cdot \frac{K_{\max}^2}{R_e^2} \cdot \left( 1 - \frac{\sigma_{\max}}{R_e} \right)^{-2} \quad (5.35)$$

Pour tenir compte du phénomène de la fermeture, Kanninen calcule les distributions du déplacement normal le long du plan de fissuration par une relation similaire à la relation donnée par la Mécanique Linéaire de la Rupture (MLR) :

$$V_{\text{eff}}(X) = V_{\text{MLR}}(X) - V_{\text{ouv}}(X) \quad (5.36)$$

avec

$$V_{\text{MLR}} = \frac{4\sigma_{\text{ap}}}{E} \sqrt{2aX}$$

et

$$V_{\text{ouv}} = \frac{6}{\pi} B_I \cdot \sqrt{\frac{X}{L}} \cdot \sin(\theta_d) \cdot \cos\left(\frac{\theta_d}{2}\right)$$

où  $\sigma_{\text{ap}}$  est la contrainte appliquée, et  $X$  la distance entre la pointe de fissure et le point d'intersection de paire de la superdislocation avec le plan de propagation.

Au déplacement  $V_{\text{eff}}(X) = 0$  est associé le facteur d'intensité de contrainte correspondant à la fermeture :

$$K_{\text{fer}} = \sigma_c \sqrt{\pi a} = \sqrt{\frac{9}{8\pi}} \cdot \frac{E B_I}{\sqrt{L}} \cdot \sin(\theta_d) \cdot \cos\left(\frac{\theta_d}{2}\right) \quad (5.37)$$

où  $\sigma_c$  est la contrainte appliquée correspondant au point où il y a contact.

On remarque que ce modèle présente quelques difficultés d'utilisation notamment car, l'auteur n'apporte aucune justification sur la valeur de  $\epsilon_0$  utilisée dans la relation (5.27), sur les valeurs des paramètres  $B_0$  et  $L_0$  utilisé dans les relations (5.32) et (5.33) ou (5.34) et (5.35).

Kanninen n'a pas fait de comparaison entre les résultats obtenus par l'intermédiaire de son modèle et de résultats expérimentaux pour justifier sa validité.

5.2.3. Modèle de Ma Delin

Ma Delin [52] a utilisé aussi le modèle de BCS [44]. Il se base en outre sur le travail de Mc Cartney [50] pour calculer les vitesses de propagation d'une fissure de fatigue en tenant compte de l'effet de surcharge.

D'une façon similaire avec Mc Cartney, Ma Delin a utilisé une fonction logarithmique pour calculer la distribution de la composante normale du déplacement le long du plan de fissure au lieu d'une fonction cosinushyperbolique utilisée par Mac Cartney (relation (5.5) :

$$H(X, X_g) = a_0 \log \left| \frac{\sqrt{(X_g^2 - a_0^2)} + \sqrt{(X_g^2 - X^2)}}{\sqrt{(X_g^2 - a_0^2)} - \sqrt{(X_g^2 - X^2)}} \right| - X \log \left| \frac{X\sqrt{(X_g^2 - a_0^2)} + a_0\sqrt{(X_g^2 - X^2)}}{X\sqrt{(X_g^2 - a_0^2)} - a_0\sqrt{(X_g^2 - X^2)}} \right| \quad (3.38)$$

et la deuxième différence par rapport au modèle de Mc Cartney, se trouve dans le calcul du rapport de charge d'ouverture à la fissure (charge maxi) ( $R_{ouv}$ ) et le calcul de rapport de charge pour lequel il y a fermeture ( $R_{fer}$ ). Ma Delin a utilisé une autre formulation que celle donnée par Mc Cartney (5.17) et (5.20) :

Le calcul de  $R_{ouv}$  se fait en utilisant la relation :

$$\delta_{ouv}(X) = \frac{E R_e^2}{(1-\nu)^2 K^e} \cdot (1 - R_{ouv})^2 \quad (5.39)$$

et pour calculer  $R_{fer}$  :

$$\delta_{fer}(X) = \frac{E R_e^2}{(1-\nu)^2 K^e} \cdot \left\{ \frac{(1-R)^2}{2} \left[ (1 - F \left( \left( \frac{R_{fer} - R}{1-R} \right)^2 \right)) - \frac{(R_{ouv} - R)}{2} \right] \right\} \quad (5.40)$$

où la fonction  $F(x)$  est définie comme suit :

$$F(X) = \sqrt{1-X} - \left(\frac{X}{2}\right) \cdot \log \left| \frac{1 + \sqrt{(1-X)}}{1 - \sqrt{(1-X)}} \right| \quad (5.41)$$

Ma Delin prédit les effets de surcharge sur les vitesses de fissuration de la façon suivante :

Il suppose lui aussi que la vitesse de propagation de fissure est régie par une loi de type Elber :

$$\frac{da}{dN} = C' \cdot \Delta K_{\text{eff}}^{m'} \quad (5.42)$$

où

$$\Delta K_{\text{eff}} = U \cdot \Delta K$$

avec

$$U = \frac{(1 - R_{\text{fer}})}{(1 - R)} \quad (5.43)$$

Ce modèle présente également quelques difficultés d'utilisation. En outre, l'auteur n'apporte aucune justification sur les valeurs de  $\delta_{\text{ouv}}$  et  $\delta_{\text{fer}}$  utilisées dans les relations (5.39) et (5.40).

Ma Delin n'a pas fait de comparaison entre des résultats obtenus par son modèle et des résultats expérimentaux pour justifier sa validité.

### 5.3. Discussion

La majorité des modèles basés sur la théorie des dislocations utilisés pour décrire le ralentissement d'une fissure après surcharge dérivent du concept

de fermeture de fissure développé par Elber [ 3 ] .

Nous remarquons que la différence entre les modèles étudiés précédemment existe surtout dans la manière de calculer la vitesse de fissuration. Ces différences existent plus précisément entre les points suivants :

- \* Le calcul de la composante normale du déplacement le long du plan de fissure,
- \* La prise en compte des effets de fermeture de fissure.

i - Calcul de la composante normale du déplacement le long du plan de fissure

- \* Mc Cartney a utilisé une fonction cosinus hyperbolique (relation (5.5) ).
- \* Kanninen a utilisé une fonction polynômiale du type Mécanique Linéaire de Rupture (MLR) (relation (5.36) ).
- \* Ma Delin a utilisé une fonction logarithmique (relation (5.38) ).

ii - La prise en compte des effets de fermeture de fissure

- \* Mc Cartney a utilisé le rapport U par la relation suivante :

$$U = \sqrt{\frac{(1 - p) (1 - R_{ouv})^2 + p (1 - R_{fer})^2}{(1 - R)^2}}$$

- \* Kannine a calculé le facteur d'intensité de contrainte correspondant uniquement à la fermeture (relation (5.37)),
- \* Ma Delein a calculé le rapport U par l'expression :

$$U = \frac{(1 - R_{fer})}{(1 - R)}$$

De l'ensemble de ces modèles, on remarque que la marche à suivre pour calculer la vitesse de fissuration est similaire dans les trois modèles.

Leurs inconvénients sont les suivants :

- ils présentent quelques difficultés d'utilisation
- les auteurs n'apportent aucune justification sur quelques valeurs utilisées, par exemple :

\* la valeur de  $p$  utilisée dans la relation (5.23) (modèle de Mc Cartney)

\* les valeurs de  $\epsilon_0$ ,  $B_0$  et  $L_0$  (modèle de Kanninen)

et

\* les valeurs des écartements de fissure  $\delta_{ouv}$  et  $\delta_{fer}$  utilisées dans les relations (5.39) et (5.40) (modèle de Ma Delin).

Dans le prochain paragraphe (5.4), nous proposons un modèle basé sur la théorie des dislocations similaire aux modèles précédents mais dans laquelle un nouveau type de loi de propagation, ainsi qu'une nouvelle méthode de calcul de la composante normale de déplacement au plan de fissure sont utilisés.

#### 5.4. Modélisation :

##### Modèle de vitesse de fissuration basé sur la théorie des dislocations

###### 5.4.1. Principe du modèle

On propose dans ce qui suit un modèle qui tient compte du phénomène de ralentissement (ou blocage) de la fissure, et précisément basé sur un empilement des dislocations pour représenter la fissure. Ce modèle est construit sur quatre hypothèses :

i - le déplacement le long du plan de fissure est supposé donné par une méthode similaire au modèle de BCS.

ii - on suppose qu'en point très proche de la pointe de la fissure est localisée la totalité de la déformation plastique résiduelle provoqué par l'histoire de chargement (Figure 5.3). Cette déformation plastique est évaluée par le déplacement à l'intérieur de la zone plastique d'après le modèle de BCS.

iii - la vitesse de propagation de la fissure de fatigue est donnée par une relation de type :

$$\frac{da}{dN} = f (CTOD_d) \quad (5.44)$$

iv - les propriétés cycliques du matériau sont celles de l'état stabilisé.

#### 5.4.2. Calcul de la longueur de plans de glissements

On suppose que la déformation plastique en tête de la fissure est concentrée dans deux bandes de glissement situées à 45° de côté du plan de propagation (Figure 5.7). Lorsque la contrainte atteint le maximum du cycle ( $\sigma_{pic}$ ), il y a décohésion entre les deux bandes de glissement.

La longueur  $X_{gA}$  ( $X_{gA}$  représente la longueur où se trouve concentrée la déformation plastique à la pointe de fissure) des plans de glissements correspond au point A (Figure 5.3) est calculée à l'aide du modèle de BCS (Figure 5.7a) :

$$\frac{X_{gA}}{a_0} = \text{Sec} \left( \frac{\pi \sigma_{pic}}{2 R'_e} \right) \quad (5.45)$$

où  $R'_e$  est la limite d'élasticité cyclique.

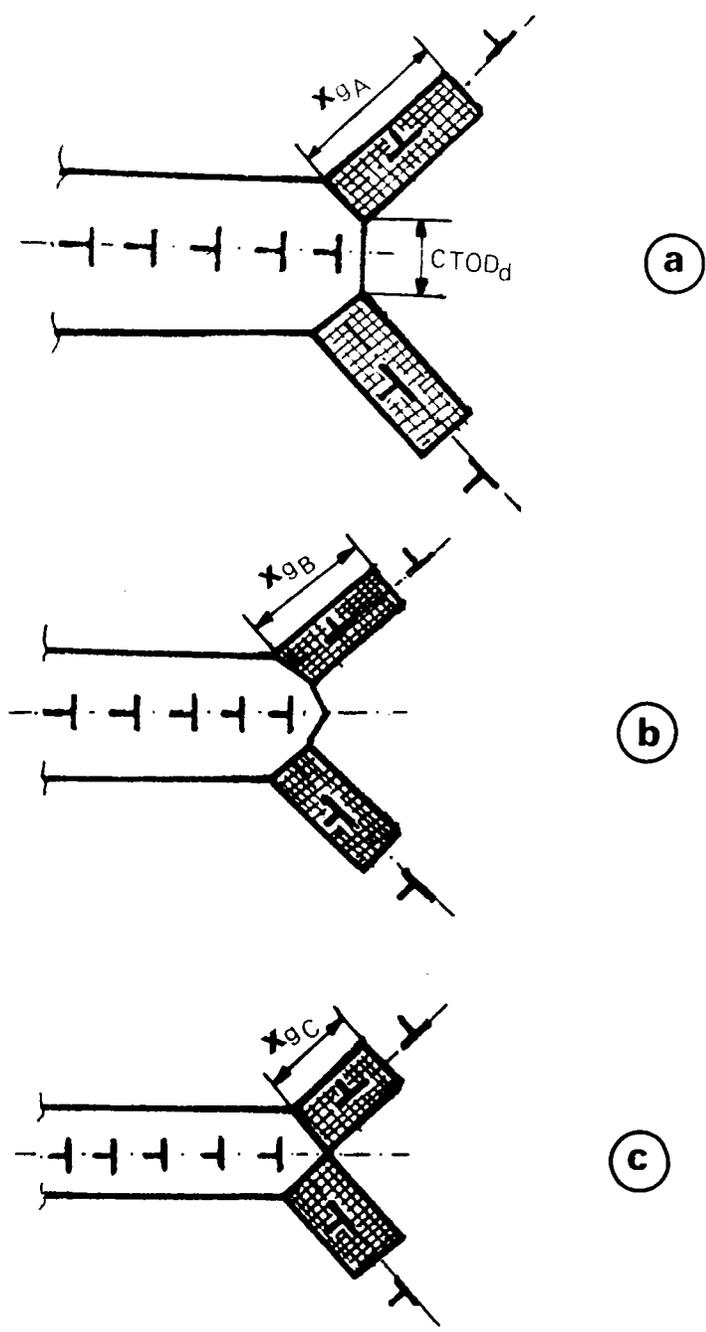


Figure 5.7 : Schéma illustrant la distribution des dislocations à la pointe de fissure,  
(a) pendant surcharge  
(b) après surcharge : pendant la charge minimum ( $\sigma_{min}$ )  
(c) pendant la charge maximum ( $\sigma_{max}$ )

Lorsque la contrainte atteint sa valeur minimale au cours du cycle ( $\sigma_{\min}$ ), la longueur  $X_{gB}$  du plan de glissement correspond au point B (Figure 5.3) est donnée par la relation (Figure 5.7b).

$$\frac{X_{gB}}{a_0} = \text{Sec} \left( \frac{\pi \Delta \sigma_{\text{pic}}}{4 R_e} \right) \quad (5.46)$$

avec

$$\Delta \sigma_{\text{pic}} = \sigma_{\text{pic}} - \sigma_{\min}$$

Quand la contrainte croit jusqu'à la valeur maximale de la contrainte ( $\sigma_{\max}$ ) correspondant au point C (Figure 5.3), la longueur  $X_{gC}$  du plan de glissement est donnée par l'expression (Figure 5.7c) :

$$\frac{X_{gC}}{a_0} = \text{Sec} \left( \frac{\pi \Delta \sigma}{4 R_e} \right) \quad (5.47)$$

avec

$$\Delta \sigma = \sigma_{\max} - \sigma_{\min}$$

#### 5.4.3. Calcul de l'écartement à la pointe de fissure

Une augmentation de la déformation globale élastique augmentera la taille de la zone plastique, tandis qu'une augmentation de la déformation plastique est accommodée par la création d'une nouvelle surface. La taille de la nouvelle surface créée sera alors donnée par l'écartement à la pointe de fissure (CTOD<sub>d</sub>). L'écartement à la pointe de fissure (CTOD<sub>d</sub>) (le saut du déplacement normal au point X) est considéré comme la somme des vecteurs de Burgers de toutes les dislocations passant à droite de ce point.

$$\text{CTOD}_d(X) = \int_X^{X_g} \rho(\xi) d\xi \quad (5.48)$$

D'une manière purement formelle, il est commode d'interpréter la fonction  $\rho(\xi)$  comme la densité de dislocations rectilignes (suivant l'axe de Z) continues distribuées suivant l'axe de X, et dont les vecteurs de Burgers sont parallèles à l'axe des Y.

Une telle représentation permet d'écrire d'emblée l'expression pour les contraintes normales  $\sigma_{yy}$  sur l'axe des X. Elles sont constituées par les contraintes  $\sigma_{yyy}^{\text{ext}}(X, 0)$  provenant des charges extérieures et par les contraintes  $\sigma_{yy}^{\text{fis}}(X)$  créées par la déformation provenant de la fissure. Considérant que ces dernières sont créées par les dislocations distribuées sur le segment  $(0, a_0)$  (Figure 5.4), on obtient l'équation intégrale :

$$\sigma_{yy}^{\text{fis}}(X) = -D_0 \int_0^{a_0} \frac{\rho(\xi)}{\xi - X} d\xi \quad (5.49)$$

avec  $D_0$  pour un milieu isotrope égale à  $(E' / 4\pi)$

où

$$E' = \begin{cases} E & ; \text{ dans l'état de contrainte plane} \\ E/(1 - \nu^2) & ; \text{ dans l'état de déformation plane} \end{cases}$$

#### 5.4.3.1. Conditions aux limites

La condition aux limites sur la surface libre de la fissure, rapportée au segment correspond à l'axe des X, exige l'annulation des contraintes normales :

$$\sigma_{yy} = \sigma_{yy}^{\text{ext}}(X, 0) + \sigma_{yy}^{\text{fis}}(X)$$

Mais cette condition demande à être précise étant donné le problème suivant :

A la pointe de la fissure, les deux lèvres de la fissure se referment

"tangentiellment" (Figure 5.8), de sorte que cette région les deux surfaces se sont rapprochées à des dislocations très petites. Dans ces conditions, il y a lieu de tenir compte des forces d'attraction moléculaire entre les surfaces, dont l'action s'étend, comme on sait, à des distances  $r_0$  grandes par rapport à celles entre atomes. Ces forces vont jouer un rôle majeur dans une bande étroite de la commissure où :  $CTOD_d \leq r_0$  (désignons l'ordre de grandeur de la longueur de cette région par  $d_0$  Figure 5.8).

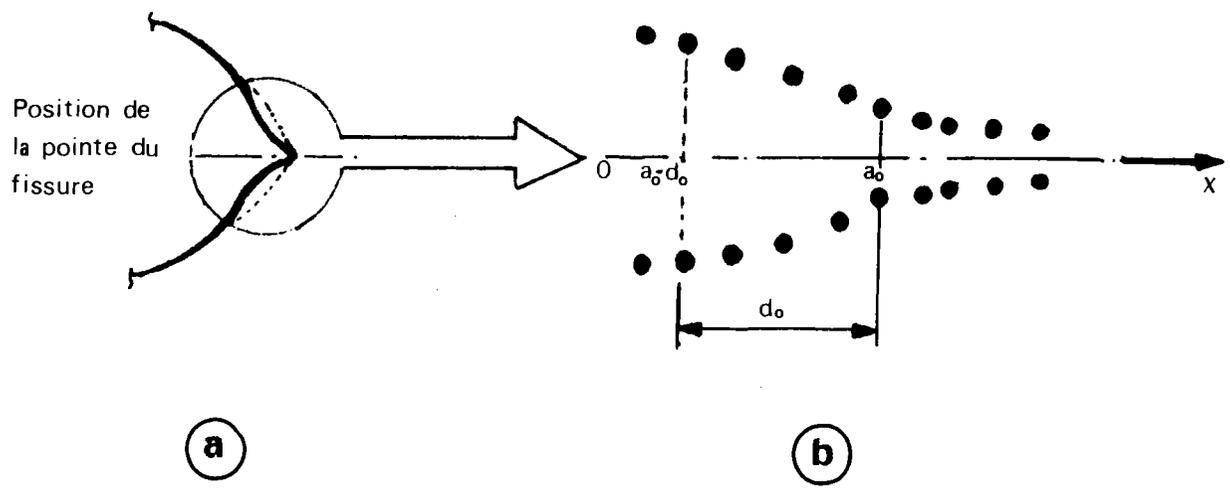


Figure 5.8 : (a) - la forme du frond de fissure  
 (b) - distribution des forces d'attraction moléculaire entre les surfaces :

- $x < a_0 - d_0$  : pas d'actions entre les lèvres
- $a_0 - d_0 < x < a_0$  : actions non linéaires
- $x > a_0$  : actions élastiques linéaires

Soit  $G$  la force de cohésion moléculaire rapportée à l'unité d'aire de la fissure ; elle dépend de la distance  $CTOD_d$  entre les surfaces. Compte tenu

de ces forces, la condition à la limite s'écrit sous la forme :

$$\sigma_{yy}^{ext}(X, 0) + \sigma_{yy}^{fis}(X) - G = 0 \quad (5.50)$$

où la quantité  $G$  est indépendante de  $\sigma_{yy}^{ext}(X, 0)$ .

Substituant dans (5.50) l'expression (5.49) de  $\sigma_{yy}^{fis}(X)$ , on obtient ainsi l'équation intégrale suivante pour  $\omega(X)$  :

$$\int_0^{a_0} \frac{\rho(\xi)}{\xi - X} d\xi = \frac{1}{D_0} \sigma_{yy}^{ext}(X, 0) - \frac{1}{D_0} G(X) \equiv \omega(X) \quad (5.51)$$

où  $\omega(X)$  est une contrainte

Les extrémités de la fissure étant supposées non maintenues, les contraintes doivent y être finies. Cela conduit en résolvant l'équation intégrale (5.51) par la méthode de Muskhelishvili à la forme suivante pour l'équation de la densité de dislocation (Annexe C.9.3.1.) :

$$\rho(X) = \frac{4}{\pi E' b} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_0^2 - X^2}} \int_0^{a_0} \frac{\sqrt{a_0^2 - \xi^2}}{X - \xi} \omega(\xi) d\xi \quad (5.52)$$

où  $b$  est le vecteur de Burgers.

Quand  $X$  tend vers l'infini ( $X \rightarrow \infty$ ), on trouve la condition :

$$\int_0^{a_0} \frac{\sigma_{yy}^{ext}(X, 0)}{\sqrt{a_0^2 - X^2}} dX - \int_0^{a_0} \frac{G(X)}{\sqrt{a_0^2 - X^2}} dX = 0 \quad (5.53)$$

Dans la région  $(a_0 - X) \neq d$ , les valeurs de  $G(X)$  tendent vers zéro, il se trouve que la seconde intégrale de l'expression (5.53) disparaît. La condition (5.53) se transcrit :

$$\int_0^{a_0} \frac{\sigma_{yy}^{ext}(X, 0)}{\sqrt{a_0^2 - X^2}} dX = 0 \quad (5.54)$$

Pour l'évaluation du saut  $CTOD_d(a_0, X, X_g)$  (l'écartement à la pointe de fissure) on introduit l'expression (5.52) dans (5.48) en tenant compte de la condition (5.54). Ceci conduit à la relation (Annexe C.9.3.2.) :

$$CTOD_d(a_0, X, X_g) = b \int_X^{X_g} \rho(X) dX \quad (5.55a)$$

ou

$$CTOD_d(a_0, X, X_g) = h(a_0, X) - h(a_0, X_g) \quad (5.55b)$$

i - Pour  $X_{gC} \leq X \leq X_{gB}$  (Figure 5.9) :

$$\begin{aligned} CTOD_d(a_0, X, X_g) = \frac{4 b R'_e}{\pi E'} \{ & a_0 [ A(a_0, X, X_{gA}) + A(a_0, X_g, X_{gA}) + 2A \\ & (a_0, X, X_{gB}) \\ & + 2 A(a_0, X_g, X_{gB}) + A(a_0, X, X_g) ] - X [ B(a_0, X, X_{gA}) \\ & + 2 B(a_0, X_g, X_{gB}) + B(a_0, X, X_g) + B(X, X, X_g) - A(X, X, X_g) ] \\ & - X_g [ B(a_0, X_g, X_{gA}) + 2B(a_0, X_g, X_{gB}) ] \} \end{aligned} \quad (5.56)$$

Les fonctions  $A (X_I , X_2 , X_3)$  et  $B (X_I , X_2 , X_3)$  sont définies comme suit :

$$A (X_I , X_2 , X_3) = \log \left| \frac{\sqrt{X_3^2 - X_I^2} + \sqrt{X_3^2 - X_2^2}}{\sqrt{X_3^2 - X_I^2} - \sqrt{X_3^2 - X_2^2}} \right| \quad (5.57a)$$

$$B (X_I , X_2 , X_3) = \log \left| \frac{X_2 \sqrt{X_3^2 - X_I^2} + X_I \sqrt{X_3^2 - X_2^2}}{X_2 \sqrt{X_3^2 - X_I^2} - X_I \sqrt{X_3^2 - X_2^2}} \right| \quad (5.57b)$$

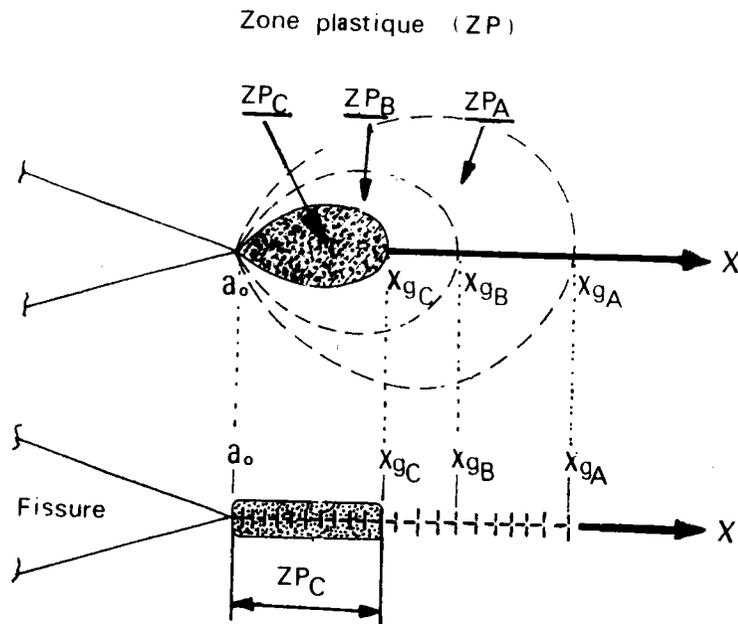


Figure 5.9 : Schéma représentant les zones plastiques données par les dislocations.

ii. - Pour  $X_{gB} \leq X \leq X_{gA}$  (Figure 5.9) :

$$CTOD_d (a_0 , X , X_g) = \frac{4 b R'_e}{\pi E'} \left\{ a_0 [A (a_0 , X , X_{gA}) + A (a_0 , X_g , X_{gA}) - A (a_0 , X , X_g)] \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & - X [ B (a_0, X, X_{gA}) - B (X, X, X_g) - A (X, X, X_g) ] \\
 & - X_g [ B (a_0, X_g, X_{gA}) ] \} \quad (5.58)
 \end{aligned}$$

iv - Pour  $X \geq X_{gA}$  (Figure 5.9) :

$$CTOD_d (a_0, X, X_g) = \frac{4 b R'_e}{\pi E} \{ X [ A (X, X, X_g) - B (X, X, X_g) ] \} \quad (5.59)$$

5.4.4. Calcul de la vitesse de fissuration en fatigue sous chargement à amplitude variable

La vitesse de la propagation de la fissure est supposée proportionnelle à la longueur des plans de glissements ( $X_g$ ) [ 60] . On peut donc exprimer la vitesse de fissuration en fonction de l'écartement à la pointe de fissure ( $CTOD_d$ ).

Le calcul de la vitesse de fissuration est fait en effectuant la démarche suivante :

i - Calcul de l'écartement à la pointe de fissure :

Dans l'approximation de la zone plastique confinée (ZPC), l'écartement à la pointe de fissure est donnée par la relation suivante :

$$CTOD_d (a_0, X, X_g) = CTOD_d (a_0, X, X_g, R, R_{pic}) = CTOD_d (X) \quad (5.60)$$

- Pour  $(X_{gC} - X_{gB}) \leq X < (X_{gA} - X_{gB})$  :

$$\begin{aligned}
 CTOD_d (X) : & A_{bI} \{ R_{pic} \sum_{i=3}^4 [ \sqrt{1 - M_i} - \left(\frac{M_i}{2}\right) \log \left| \frac{1 + \sqrt{1 - M_i}}{1 - \sqrt{1 - M_i}} \right| ] \\
 & - \left(\frac{R_{pic} - R}{2}\right)^2 \sum_{i=5}^6 [ \sqrt{1 - M_i} - \left(\frac{M_i}{2}\right) \log \left| \frac{1 + \sqrt{1 - M_i}}{1 - \sqrt{1 - M_i}} \right| ] \}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{M_2}{2} \right)^2 \left[ \sqrt{I - M_7} - \left( \frac{M_7}{2} \right) \log \left| \frac{I + \sqrt{I - M_7}}{I - \sqrt{I - M_7}} \right| \right] \\
& + \left( \frac{M_I}{2} \right)^2 \left. \right\} \quad (5.61)
\end{aligned}$$

avec

$$A_{BI} = \frac{8 \pi a_0 b \cdot \sigma_{\max}^2}{E' R'_e} \cdot \left( \frac{R_{pic} (I + R)}{R^2} \right) \cdot \left( \frac{I}{X} \right) \quad (5.62)$$

où la fonction  $M_i$  apparaît dans la relation (5.61) est définie dans l'annexe (C.9.3.3.)

- Pour  $(X_{gA} - X_{gB}) \leq X \leq X_{gA}$  :

$$\begin{aligned}
CTOD_d(X) = & Ab_2 \left\{ R_{pic} \sum_{i=3}^4 \left[ \sqrt{I - H_i} - \left( \frac{H_i}{2} \right) \log \left| \frac{I + \sqrt{I - H_i}}{I - \sqrt{I - H_i}} \right| \right] \right. \\
& - \left( \frac{H_2}{2} \right)^2 \cdot \left[ \sqrt{I - H_5} - \left( \frac{H_5}{2} \right) \log \left| \frac{I + \sqrt{I - H_5}}{I - \sqrt{I - H_5}} \right| \right] \\
& \left. + \left( \frac{H_I}{2} \right)^2 \right\}^{-I} \quad (5.63)
\end{aligned}$$

avec

$$A_{b2} = \frac{R'_e \cdot b \cdot E'}{8^2 \pi a_0 \sigma_{\max}^2} \cdot \left( \frac{R_{pic} (I + R)}{R^3 (I + R^2)} \right) \cdot (X) \quad (5.64)$$

où la fonction  $H_i$  apparaît dans la relation (5.63) est définie dans l'annexe (C.9.3.3.)

## ii - Calcul de la vitesse de fissuration

Connaissant les constantes du matériau de la loi de Paris et en se

plaçant dans des conditions où  $\Delta K_{\text{eff}}$  est connu, nous supposons que la vitesse de fissuration est régie par une loi de type (Annexe C.9.3.4) :

$$\frac{da}{dN} = A \cdot \text{CTOD}_d^B \quad (5.65)$$

avec

$$A = C \cdot \left( \frac{E R'_e}{0.73} \right)^2 \quad (5.66a)$$

et

$$B = 2 \text{ m} \quad (5.66b)$$

où C et m sont des constantes qui dépendent de la nature du matériau.

#### 5.4.5. Comparaison avec les résultats expérimentaux

##### 5.4.5.1. Vérification expérimentale

La vérification expérimentale de ce modèle a été faite à partir d'essais de fissuration réalisés sur un acier E 36.

Les essais ont été réalisés sur des éprouvettes compactes CT 40 (Figure 3.20).

L'évolution de la vitesse de fissuration après surcharge a été examinée dans les conditions expérimentales suivantes :

- |  |  |
|--|--|
| * rapport de charge                          | : R = 0.1  |
| * facteur d'intensité de contrainte maximale | : $K_{\text{max}} = 18 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ |
| * taux de surcharge variable                 | : $R_{\text{pic}} = 1.6, 1.9 \text{ et } 2.2.$     |

#### 5.4.5.2. Résultats et discussion

Les calculs donnés par le modèle basé sur la théorie des dislocations ont permis d'étudier plus particulièrement l'évolution de la vitesse de fissuration.

Les évolutions sont réparties dans les Figures (5.10), (5.11) et (5.12).

Les paramètres expérimentaux, vitesse de fissuration minimale après surcharge ( $da/dN/min$ ), longueur de fissure où apparaît la vitesse minimale ( $a_{Vmin}$ ), longueur de fissure affectée par la surcharge ( $a_d^*$ ), et leurs homologues calculés sont reportés dans le Tableau n° 5.1.

On remarque que le modèle proposé donne des valeurs proches des résultats de l'expérience et prévoit le blocage (ou le retard) dans la progression de la fissure, dans les conditions d'expérience où le blocage (retard) se produit réellement.

#### 5.5. Conclusion

Ce modèle permet de réaliser des prévisions de comportement de la progression d'une fissure d'une façon rapide à l'aide d'un petit calculateur, et est, dans cela, utile pour les concepteurs de structures.

Les caractéristiques essentielles de ce modèle résident dans une approche de type mécanique des cristaux (théorie des dislocations) au point de vue macroscopique.

Ce travail peut être considéré comme une étape de modélisation de la progression d'une fissure sous chargement variable.

Pour élargir le champ d'application de notre modèle, nous proposons de vérifier sa validité dans le cas de chargement complexe (ex. mode mixte : I + II, I + III etc...).

| Conditions d'essais   |                        | $\frac{da}{dN}/\text{min}$<br>(mm/cycle) | $a_{V\text{min}}$<br>(mm) | $a_d^*$<br>(mm) |
|---|------------------------|--|---------------------------|-----------------|
| $K_{\text{max}} = 18 \text{ MPa } \sqrt{\text{m}}$<br>$R = 0.1$<br>$N_p = 50$ |                        |  |                           |                 |
| $R_{\text{pic}} = 1.6$  | Mesures expérimentales | $1.8 \times 10^{-6}$                     | 0.1                       | 0.51            |
|   | Dislocations           | $1.9 \times 10^{-6}$                     | 0.2                       | 0.5             |
| $R_{\text{pic}} = 1.9$  | Mesures expérimentales | $3 \times 10^{-7}$                       | 0.28                      | 0.80            |
|   | Dislocations           | $3.45 \times 10^{-8}$                    | 0.35                      | 0.8             |
| $R_{\text{pic}} = 2.2$  | Mesures expérimentales | Fissure bloquée                          | 0.4                       | -               |
|   | Dislocation            | Fissure bloquée                          | 0.25                      | -               |

Tableau N° 5.1 : Comparaison entre les résultats expérimentaux et les calculs par le modèle basé sur la théorie des dislocations.

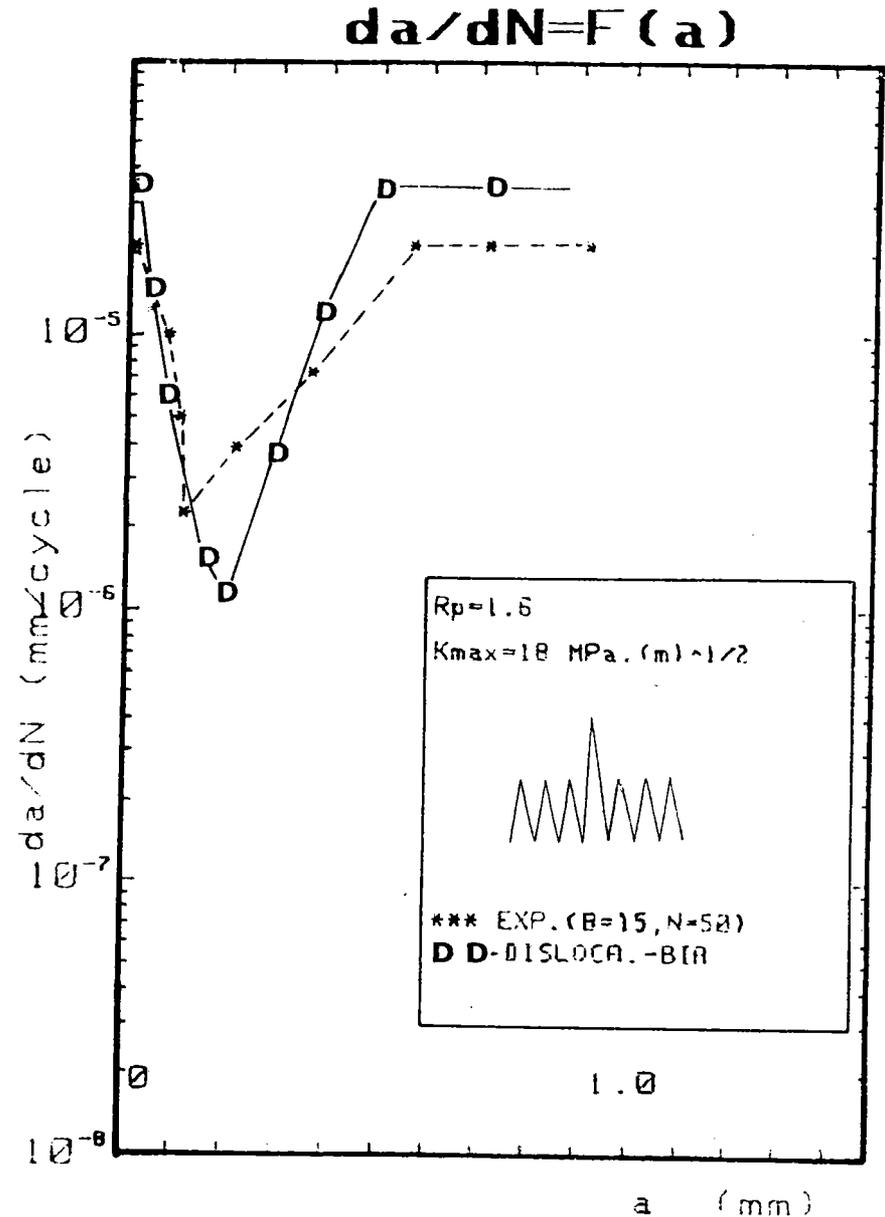


Figure 5.10

$$da/dN = F(a)$$

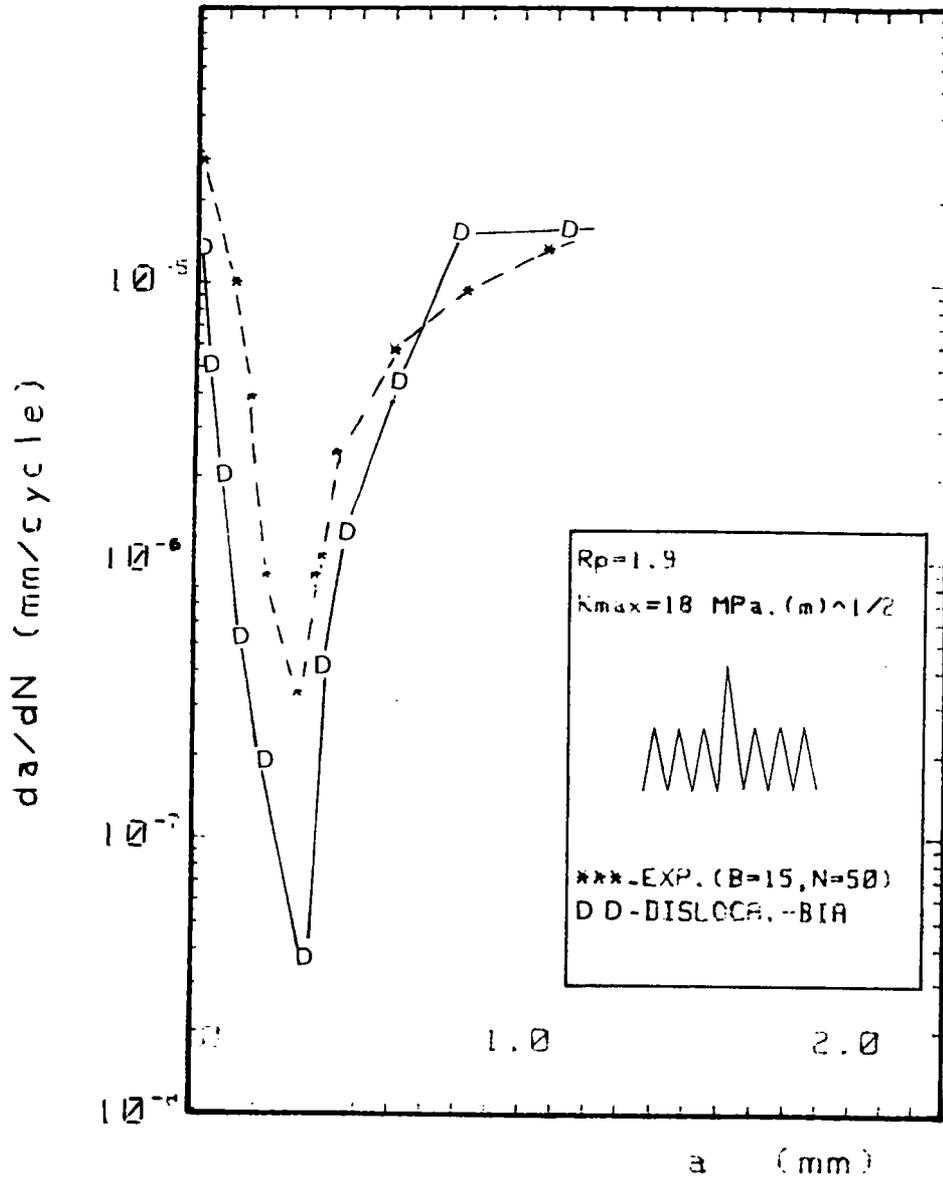


Figure 5.11

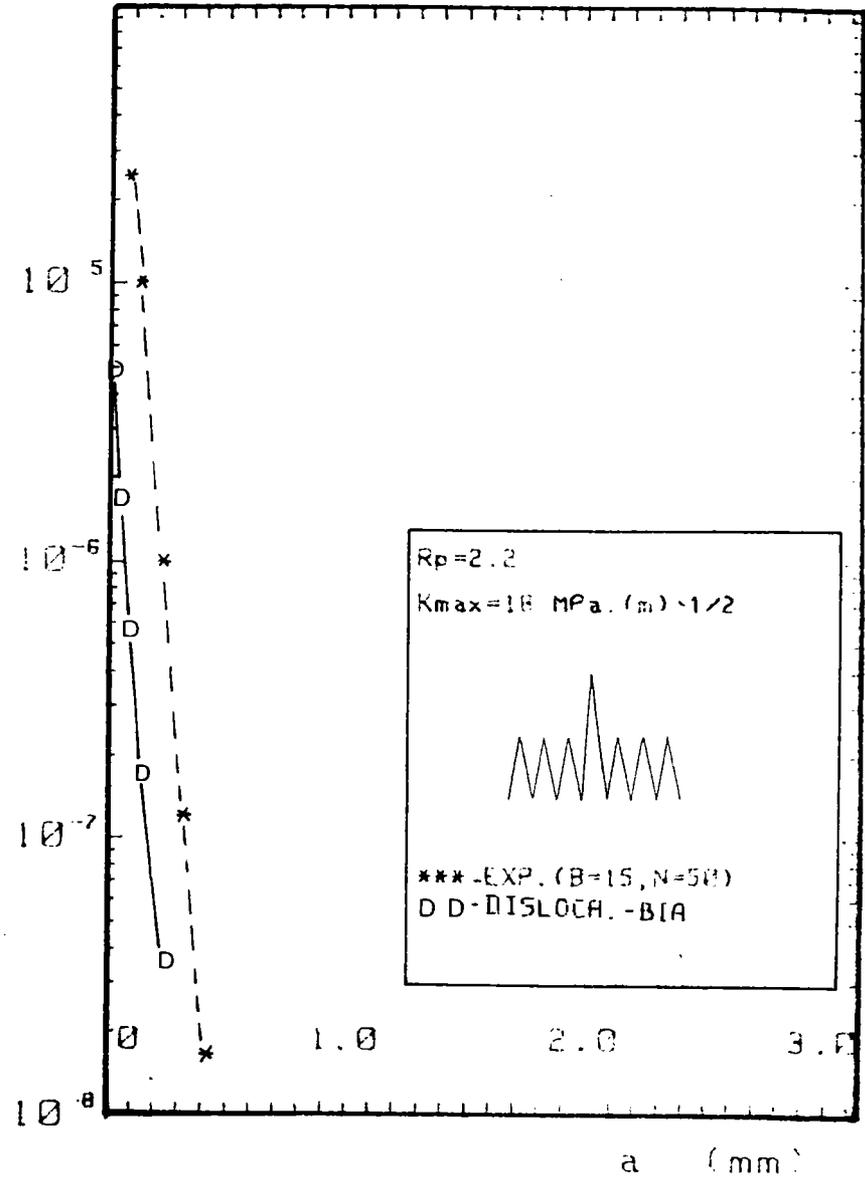


Figure 5.12

## 6 - RESULTATS ET DISCUSSION

Les calculs donnés par les quatre modèles : modèles analytiques en état de contrainte plane (CP) et en état de déformation (DP), simulation numérique basée sur la méthode aux éléments finis (EF) et le modèle basé sur la théorie des dislocations (DISLOC), ont permis d'étudier plus particulièrement l'évolution de la vitesse de fissuration après application de plusieurs pics de surcharges.

Les conditions expérimentales ont été fixées de la façon suivante :

- \* rapport de charge :  $R = 0.1$
- \* rapport de surcharge variable :  $R_{pic} = 1.6, 1.9$  et  $2.2.$
- \* facteur d'intensité de contrainte maximal :  $K_{max} = 18 \text{ MPa m}$
- \* nombre de cycles de surcharge :  $Np = 50$

Les évolutions de la vitesse de fissuration par le calcul et les résultats de l'expérience sont reportés dans les Figures (6.1), (6.2) et 6.3).

Les paramètres expérimentaux, vitesse de fissuration minimale après surcharge ( $da/dN/min$ ), longueur de fissure où apparaît la vitesse minimale ( $a_{Vmin}$ ), longueur de fissure affectée par la surcharge ( $a_d^*$ ) et leurs homologues calculés sont reportés dans le Tableau n° 6.1.

$$da/dN = F(a)$$

| Conditions d'essais<br>$K_{max} = 18 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$<br>$R = 0.1$<br>$N_p = 50, B_e = 15 \text{ mm}$ |                        | $\frac{da}{dN}/\text{min}$<br>(mm/cycle) | $a_{Vmin}$<br>(mm)     | $a_d^*$<br>(mm) |       |
|--|------------------------|--|------------------------|-----------------|-------|
| $R_{pic} = 1.6$  | Mesures expérimentales | $1.8 \times 10^{-6}$                     | 0.1                    | 0.51            |       |
|  | Calculs analytiques    | C.P.                                     | $1.2 \times 10^{-6}$   | 0.14            | 0.401 |
|  |                        | D.P.                                     | $1.02 \times 10^{-6}$  | 0.14            | 0.401 |
|  | Calculs aux E.F.       | $0.93 \times 10^{-6}$                    | 0.24                   | 0.56            |       |
|  | Dislocation            | $1.09 \times 10^{-7}$                    | 0.2                    | 0.5             |       |
| $R_{pic} = 1.9$  | Mesures expérimentales | $3 \times 10^{-7}$                       | 0.28                   | 0.80            |       |
|  | Calculs analytiques    | C.P.                                     | $2.69 \times 10^{-7}$  | 0.14            | 0.57  |
|  |                        | D.P.                                     | $5.039 \times 10^{-7}$ | 0.214           | 0.57  |
|  | Calculs aux E.F.       | $0.33 \times 10^{-7}$                    | 0.24                   | 0.72            |       |
|  | Dislocation            | $3.45 \times 10^{-8}$                    | 0.35                   | 0.80            |       |
| $R_{pic} = 2.2$  | Mesures expérimentales | Fissure bloquée                          | 0.4                    | -               |       |
|  | Calculs analytiques    | C.P.                                     | $3.7 \times 10^{-8}$   | 0.14            | 0.78  |
|  |                        | D.P.                                     | $2.0 \times 10^{-7}$   | 0.29            | 0.78  |
|  | Calculs aux E.F.       | Fissure bloquée                          | 0.42                   | -               |       |
|  | Dislocation            | Fissure bloquée                          | 0.25                   | -               |       |

Tableau n° 5.1 : comparaison entre les résultats expérimentaux et les calculs par le modèle analytique en C.P. et D.P., le modèle basé sur la méthode aux E.F. et le modèle basé sur la théorie des dislocations.

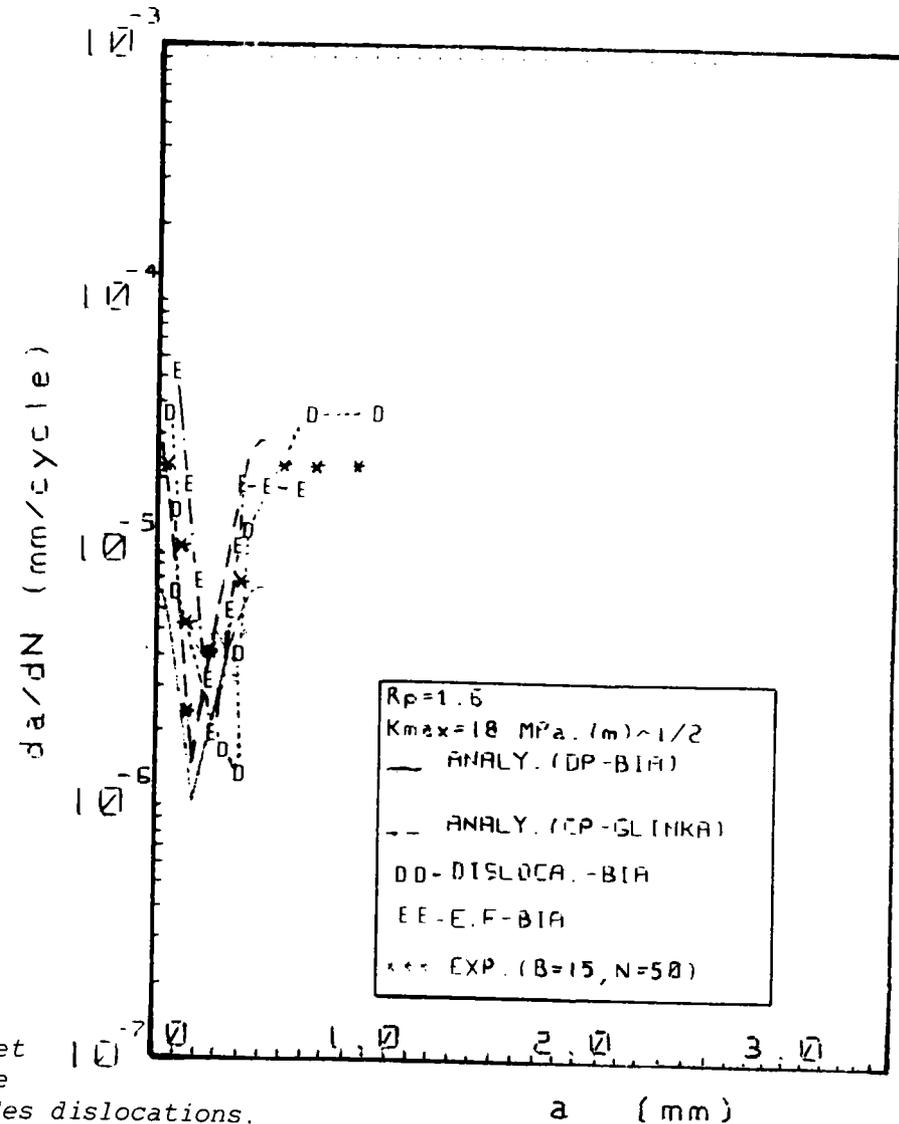


Figure 6.1

$$da/dN = F(a)$$

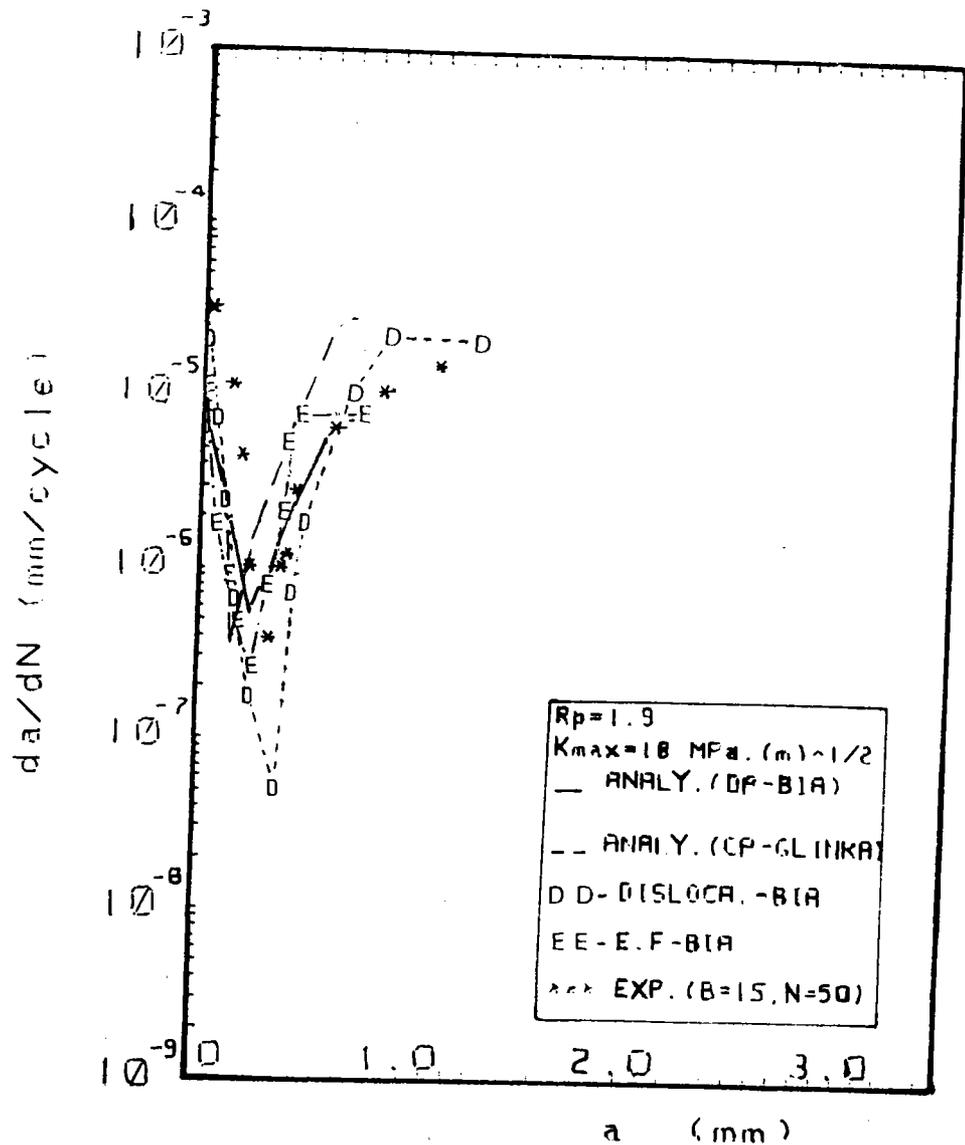


Figure 6.2

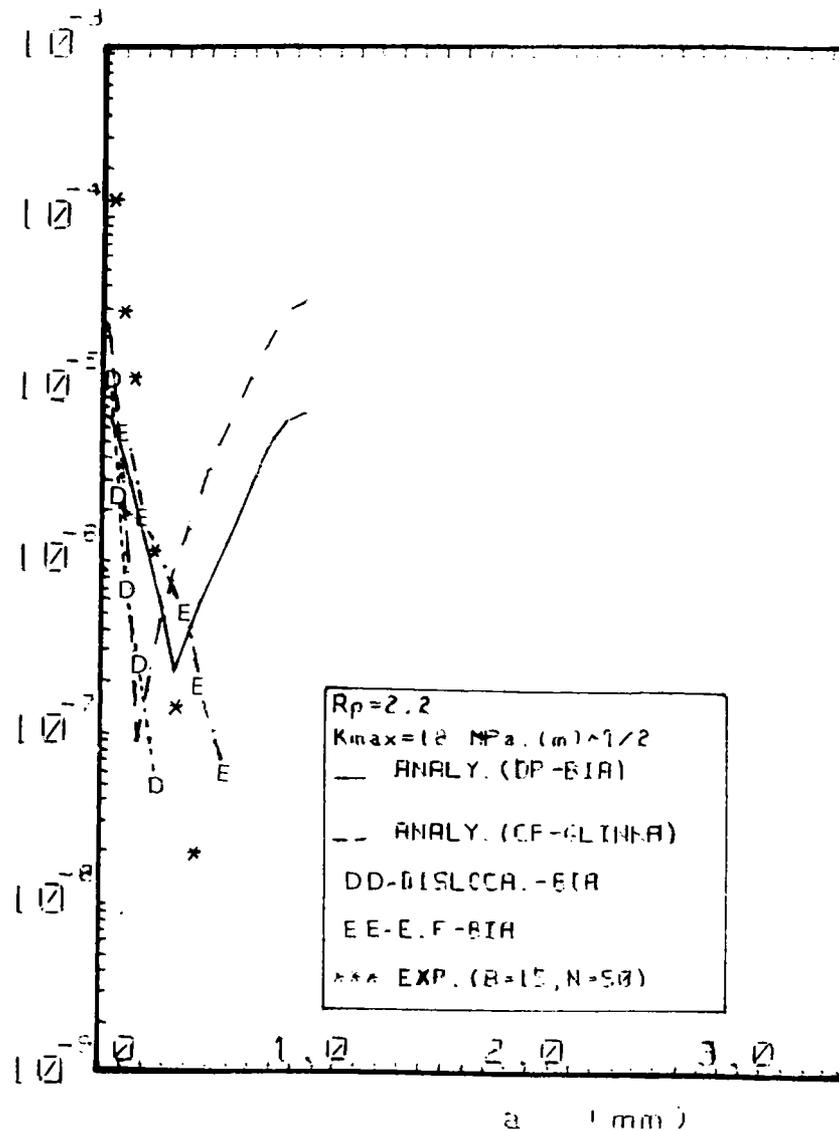


Figure 6.3

La comparaison avec les résultats expérimentaux nous permet de tirer trois points essentiels :

### 6.1. Performances des modèles

#### i - Le modèle analytique

Le modèle analytique basé sur l'analyse des contraintes et des déformations à la pointe de fissure en état de contrainte plane ou en état de déformation plane, nous donne une bonne prédiction de la vitesse de fissuration minimale ( $da/dN/min$ ) et de la longueur de fissure qui correspond à cette dernière ( $a_{Vmin}$ ) dans le cas d'un faible taux de surcharge ( $R_{pic} = 1.6$  et  $1.9$ ).

La comparaison entre les résultats expérimentaux et analytiques dans les états de contrainte plane et déformation plane laisser supposer un mode de comportement mixte : c'est le cas de nos expériences.

Pour une plus forte valeur du taux de surcharge ( $R_{pic} = 2.2$ ), expérimentalement il existe un nombre limite de cycles de surcharge (cycle stabilisé, dans notre cas  $N_p = 50$ ) à partir duquel la propagation est bloquée.

La modélisation par cette méthode ne prévoit pas ce phénomène de blocage pour les mêmes conditions de chargements.

Pour améliorer le champ d'application de cette modélisation, nous proposons de la modifier en tenant compte :

- \* du cumul de dommage
- \* de l'érousement
- \* du nombre de pics de surcharge, pour prévoir le blocage (le retard) dans la progression de la fissure, dans les conditions d'expérience où le blocage (retard) se produit réellement.

ii - Méthode numérique (EF) :

La simulation numérique basée sur la méthode aux éléments finis, nous donne de bons accords avec les résultats de l'expérience et prévoit le blocage dans les conditions d'expérience où il se produit réellement ( $R_{pic} = 2.2$  ;  $Np = 50$  et  $R'_e = 350$  MPa).

iv - Méthode basée sur la théorie des dislocations (DISLOC)

Le modèle basé sur la théorie des dislocations donne des valeurs proches des résultats de l'expérience et prévoit également le blocage dans la progression de la fissure, dans les conditions d'expérience où le blocage se produit réellement ( $R_{pic} = 2.2$ ,  $Np = 50$  et  $R'_e = 350$  MPa).

v - Comparaison de trois méthodes

Après comparaison entre les résultats expérimentaux et les modèles proposés, nous pouvons classer ces modèles au vu des performances ainsi définies dans l'ordre suivant (Tableau n° 6.2) :

- \* Simulation basée sur la méthode aux éléments finis (EF)
- \* Modèle basé sur la théorie des dislocations (DISLOC)
- \* Modèle analytique (ANALY)

Tableau n° 6.2

|                          | Conditions expérimentales           | classement par paramètre | classement final |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|------------------|
| Performances des modèles | Retard de la progression de fissure | ANALY.                   | E.F.             |
|                          |                                     | E.F.                     |                  |
|                          |                                     | DISLOC                   | DISLOC           |
|                          | blocage de la fissure               | E.F.                     |                  |
|                          |                                     | DISLOC                   |                  |
|                          |                                     | Non prévu                |                  |

## 6.2. Facilité d'utilisation et coût de calcul

### i - Le modèle analytique :

Le modèle analytique permet de réaliser des prévisions de comportement de la progression d'une fissure d'une façon rapide à l'aide d'un petit calculateur et est, dans cela, utile pour les concepteurs de structure.

Le coût modique des prévisions obtenues en fait un outil des plus intéressants.

La limitation de ce modèle analytique réside dans la précision des coefficients qu'il faut ajuster, à partir de l'expérience.

### ii - Méthode numérique (EF) :

La simulation numérique basée sur la méthode aux éléments finis est un outil précis elle demande du matériel informatique très puissant.

Le coût des calculs est toutefois un facteur limitant leur utilisation.

### iv - Méthode basée sur la théorie des dislocations :

Le modèle basé sur la théorie des dislocations permet de réaliser des prévisions de comportement de la progression d'une fissure d'une façon plus rapide qu'avec le modèle analytique à l'aide d'un micro-ordinateur.

Cette méthode est aussi moins coûteuse. Elle est donc l'outil le plus intéressant.

v - Comparaison de trois méthodes

Nous pouvons classer les modèles étudiés précédemment par préférence de point de vue facilité d'utilisation et de coût de calcul comme suit (Tableau n° 6.3) :

- \* Modèle basé sur la théorie des dislocations (DISLOC)
- \* Modèle analytique (ANALY)
- \* Simulation basée sur la méthode aux éléments finis (EF)

Tableau n° 6.3

|                        | classement par élément de choix | classement final |
|------------------------|---------------------------------|------------------|
| Facilité d'utilisation | DISLOC                          | DISLOC           |
|                        | ANALY                           |                  |
|                        | EF                              | ANALY            |
| Coût de calcul         | DISLOC                          | ANALY            |
|                        | ANALY                           |                  |
|                        | EF                              | EF               |

6.3. Hypothèses, données expérimentales et critères de propagation utilisés

i - Le modèle analytique

Dans le modèle analytique, pour évaluer la progression d'une fissure de fatigue nous avons utilisé la démarche suivante :

a) Hypothèses utilisées

- \* L'assimilation de fond de fissure sur une distance  $X^*$  à une mini-éprouvette se rompant en fatigue oligocyclique (absence de la triaxialité),
- \*  $X^*$  est un paramètre ajustable,
- \* La répartition de la déformation  $\Delta \epsilon^*$  sur la distance  $X^*$  est uniforme et l'on ne considère que la déformation perpendiculaire au plan de fissure
- \* Le calcul des déformations est basé sur trois solutions :
  - . Solution d'HRR
  - . Solution d'Irwin
  - . Solution analytique

b) Données expérimentales

- \* La loi de Paris, pour calculer la distance  $X^*$
- \* La loi de Manson-Coffin, pour calculer le nombre de cycles  $N^*$  correspondant à la rupture de la micro-éprouvette.

c) Critère de propagation

La vitesse de fissuration, supposée uniforme dans l'intervalle  $X^*$  est définie par le rapport :

$$\frac{da}{dN} = \frac{X^*}{N^*} \quad (6.1)$$

ii - Méthode numérique (EF)

La simulation de la progression des fissures de fatigue par la méthode

des éléments finis est obtenue en utilisant la procédure suivante :

a) Hypothèses utilisées

- \* Le découpage de l'éprouvette en éléments triangulaires isoparamétriques,
- \* La loi de comportement élastoplastique avec écrouissage cinématique.

d) Données expérimentales

- \* La loi de Paris, pour calculer :

. les constantes A et B (relations 4.31)

. la valeur seuil de l'écartement à fond de fissure (CTOD<sub>s</sub>)

c) Critère de propagation

Lorsque la charge atteint sa valeur maximale et que l'écartement à la pointe de fissure (CTOD<sub>ef</sub>) dépasse une valeur seuil, il y a libération du noeud situé à la pointe de fissure. La fissure avance alors par bonds successifs, chacun des bonds étant égal à la longueur d'un élément de maillage.

La vitesse de fissuration est calculée en faisant appel au concept d'écartement à la pointe de fissure :

$$\frac{da}{dN} : f (CTOD_{ef}) \quad (6.2)$$

iv-Méthode basée sur la théorie des dislocations

Dans le modèle basé sur la théorie des dislocations, nous avons utilisé la démarche suivante :

a) Hypothèses utilisées

- \* Le déplacement le long du plan de fissure est supposé donné par une méthode similaire au modèle de BCS.
- \* En point très proche de la pointe de la fissure est localisée la totalité de la déformation plastique résiduelle provoquée par l'histoire de chargement. Cette déformation plastique est évaluée par le déplacement à l'intérieur de la zone plastique d'après le modèle de BCS.

b) Données expérimentales

- \* La loi de Paris, pour calculer :
  - . les constantes A et B (relation 5.65)

c) Critère de propagation

La vitesse de propagation est basée sur la détermination de l'écartement à la pointe de fissure calculé par la méthode de dislocation (CTOD<sub>d</sub>). Elle est définie par la relation suivante :

$$\frac{da}{dN} = f (CTOD_d) \quad (6.3)$$

v - Comparaison de trois méthodes

On remarque que les modèles étudiés précédemment sont classés par élément de choix comme suit (Tableau n° 6.4) :

- \* Modèle basé sur la théorie des dislocations (DISLOC)

\* Simulation basée sur la méthode aux éléments finis (EF)

\*Modèle analytique (ANALY)

Tableau n° 6.4

|                        | Classement par élément de choix | Classement final |
|------------------------|---------------------------------|------------------|
| Hypothèses utilisées   | EF                              | DISLOC           |
|                        | DISLOC                          |                  |
|                        | ANALY                           |                  |
| Données expérimentales | DISLOC                          | EF               |
|                        | EF                              |                  |
|                        | ANALY                           |                  |
| Critère de propagation | DISLOC                          | ANALY            |
|                        | EF                              |                  |
|                        | ANALY                           |                  |

#### 6.4. Commentaires

Ces résultats nous amènent à faire un choix final sur la méthode de modélisation à utiliser dans la pratique (dans le bureau d'étude). Nous voyons clairement sur le Tableau n° 6.5 que pour les trois points comparés précédemment, le modèle basé sur la théorie des dislocations est plus adéquat que celui de la simulation numérique ou du modèle analytique.

Tableau n° 6.5

|                          |         | Classement par paramètre | Premier classement | Classement final |
|--------------------------|---------|--------------------------|--------------------|------------------|
| Performances des modèles | Retard  | ANALY                    | EF                 | DISLOC           |
|                          |         | EF                       |                    |                  |
|                          |         | DISLOC                   | DISLOC             |                  |
|                          | Blocage | EF                       | ANALY              |                  |
|                          |         | DISLOC                   |                    |                  |
|                          |         | Non prévu                |                    |                  |
| Facilité d'utilisation   |         | DISLOC                   | DISLOC             | EF               |
|                          |         | ANALY                    |                    |                  |
|                          |         | EF                       | ANALY              |                  |
| Coût de calcul           |         | DISLOC                   | EF                 |                  |
|                          |         | ANALY                    |                    |                  |
|                          |         | EF                       |                    |                  |
| Hypothèses utilisées     |         | EF                       | DISLOC             | ANALY            |
|                          |         | DISLOC                   |                    |                  |
|                          |         | ANALY                    |                    |                  |
| Données expérimentales   |         | DISLOC                   | EF                 |                  |
|                          |         | EF                       |                    |                  |
|                          |         | ANALY                    |                    |                  |
| Critère de propagation   |         | DISLOC                   | ANALY              |                  |
|                          |         | EF                       |                    |                  |
|                          |         | ANALY                    |                    |                  |

## 7 - CONCLUSION

A l'aide de trois méthodes utilisées nous avons obtenu des courbes très voisines des résultats expérimentaux.

Nous pouvons conclure que parmi les trois méthodes étudiées, celle des dislocations qui est la plus aisée d'utilisation, est plus adéquate que celles de la simulation numérique ou du modèle analytique.

Nous pensons que cette approche qui consiste à traiter le fond de fissure comme un empilement des dislocations doit être poursuivie. Cependant ce modèle doit être amélioré, et en particulier il serait intéressant de vérifier sa validité, dans les conditions du chargement complexe : l'influence des surcharges sur la propagation des fissures de fatigue en mode mixte (I + II, I + III etc...).

## 8 - BIBLIOGRAPHIE

- [ 1 ] J.C. RICE, 1967, ASTM-STP 415, 247-308
- [ 2 ] D.S. DUGDALE, 1960, J. Mech. and Phys. Solids, Vol. 8, 100-104
- [ 3 ] M. ELBER, 1971, ASTM-STP 486, 230-242
- [ 4 ] V.W. TREBULES, R. ROBERTS and R.W. HERTZBERG, 1973  
ASTM-STP 536, 115-146
- [ 5 ] J. SCHIJVE, 1979, Eng. Fract. Mech., Vol. 11, 167-221
- [ 6 ] O.E. WHEELER, 1972, J. Basic Eng. 181-186
- [ 7 ] M. LOUAH, 1980, Thèse de docteur 3<sup>e</sup> cycle, Université de Compiègne (FRANCE)
- [ 8 ] J. WILLENBORG, R.M. ENGLE and H.A. WOOD, 1971, Technical memorandum, AFFDL, TM-71-1-FBR
- [ 9 ] H. FUHRING and T. SEEGER, 1979, ASTM-STP 677, 144-167
- [ 10 ] A. CLERIVET, C. BATHIAS and D. ALLOG, 1981, Document n° 39, 842, F25-1, Aérospatiale Suresnes (FRANCE)
- [ 11 ] S. MATSUOKA and K. TANAKA, 1979, Eng. Fract. Mech., Vol 11, 703-15
- [ 12 ] C. CHEHIMI, 1984, Thèse de docteur 3<sup>e</sup> cycle, INPL Nancy (FRANCE)
- [ 13 ] S. TAIRA and TANAKA, 1979, Trans. ISIJ, Vol. 19, 411-418
- [ 14 ] R. SUNDER, 1979, Eng. Fract. Mech., Vol. 12, 155-165
- [ 15 ] G. GLINKA, 1982, Int. J. Fatigue, 59-67
- [ 16 ] G. GLINKA, C. ROBIN, G. PLUVINAGE and C. CHEHIMI, 1984,  
Int. J. Fatigue, Vol. 6, n° 1, 37-45
- [ 17 ] J.W. HUTCHINSON, 1968, J. Mech. Phys. of Solids, Vol. 16, n° 1  
13-31

- [ 18 ] G.R. IRWIN, 1958, Fracture Mechanics, Pergamon Press, New-York, 557-592
- [ 19 ] G. CHALANT and L. REMY, 1982, Eng. Fract. Mech., Vol. 16, n° 5, 707-720
- [ 20 ] C.F. SHIH and N.D. GERMAN, 1981, Int. J. Fract., Vol. 17, n° 21, 27-43
- [ 21 ] D.C. STOUFFER and J.F. WILLIAMS, 1979, Eng. Fract. Mech., Vol. 11, 525-536
- [ 22 ] S. MAJUMDAR and Jo DEAN MORROW, 1974, ASTM-STP 559, 159-182
- [ 23 ] D. BROEK, 1978, Elementary Engineering Fracture Mechanics, Sijthoff & Noordhoff The Netherlands, 105-107
- [ 24 ] D. BENOIT, H.P. LIEURADE, P. MILLE and G. PLUVINAGE, 1980, Rapport RE 700, IRSID, St-Germain en Laye (FRANCE)
- [ 25 ] P.V. MARCAL, 1965, Int. J. Mech. Sci., Vol. 7, 229-238
- [ 26 ] B. FRAIJIS de VENDEKE, 1965, Stress Analysis, John Wiley and Sons
- [ 27 ] O.C. ZIENKIEWICZ, 1971, The Finite Element Method in Engineering Science Mac Graw-Hill, London
- [ 28 ] S.K. CHAN, I.S. TUBA and W.K. WILSON, 1970, Eng. Fract. Mech., Vol. 2, n° 2, 2-17
- [ 29 ] P.C. PARIS and G.SIH, 1965, ASTM-STP 381, 30-83
- [ 30 ] W.K. WILSON and D.G. THOMPSON, 1971, Eng. Fract. Mech., Vol. 3, 97-102
- [ 31 ] F. ERDOGAN, 1968, Fracture, ed Hilicowitz, 2
- [ 32 ] A.S. KOBAYASHI, S.T. SIU and R. BEEWUKS, Eng. Fract. Mech., Vol. 5, n° 2, 293

- [ 33 ] H. ANDERSON, 1973, J. Mech. Phys. Solids, 21, 337-356
- [ 34 ] J.C. NEWMAN Jr., 1976, ASTM-STP 590, 281-301
- [ 35 ] J.C. NEWMAN Jr., 1977, ASTM-STP 637, 56-80
- [ 36 ] J.C. NEWMAN Jr., 1981, ASTM-STP, 748, 53-84
- [ 37 ] J.C. NEWMAN Jr., 1982, ASTM-STP, 761, 255-277
- [ 38 ] N. LEVY, P.V. MARCAL, W.J. OSTERGREN and J.RICE, 1971  
Int. J. Fract. Mech., Vol. 7, n° 2, 143-156
- [ 39 ] W.S. JOHNSON, 1981, ASTM-STP, 748, 85-102
- [ 40 ] K. OGURA and K. OHJI, 1977, Eng. Fract. Mech., Vol. 9, 471-480
- [ 41 ] S. WASTBERG, 1983, Fat. of Eng. Mat. and Struct., Vol. 6, n° 2,  
149-158
- [ 42 ] M.F. KANNINEN, 1973, Int. J. Fract., Vol. 9, n° 1, 83-92
- [ 43 ] S. KAISER and A.J. CARLSON, 1983, ASTM-STP, 803, Vol. 11,  
58-79
- [ 44 ] B.A. BILBY, A.H. COTTRELL and K.H. SWINDEN, 1963, Proc. Roy.  
Soc., A272, 304-314
- [ 45 ] J. WEERTMAN, 1969, Int. J. Fract. Mech., Vol. 5, 13
- [ 46 ] R.W. LARDNER, 1968, Phil. Mag. 17, 71-82
- [ 47 ] B. TOMKINS, J. WAREING and G. SUMMER, 1973, C.R.I.C.F., Teil  
IV, München, Vom 8 Bis 13, V-422
- [ 48 ] T. YOKOBARI, S. KONOSU and A.T. YOKOBARI Jr., 1977, ICF 4,  
Vol. 1, Waterloo, Canada, June 19-24, 665-682
- [ 49 ] M. SHIRATORI, T. MIYOSHI, H. MIYAMOTO and T. MORI, 1977,  
ICF 4, Vol. 2, Waterloo, Canada, June 19-24, 1091-1098

- [ 50 ] L.N. McCARTNEY, 1978, Int. J. Fract., Vol. 14, n° 2, 213-232
- [ 51 ] M.F. KANNINEN and C. ATKINSON, 1980, Int. J. Fract., Vol. 16, n° 1, 53-69
- [ 52 ] MA DELIN, 1984, ICF 6, New Delhi, India, December 4-10, 955-962
- [ 53 ] G. GLINKA and J. RADON, 1984, Fatigue 84, 2nd, Int. Conf. on Fat. and Fat. Thresholds, 3-7 sept, 529-541
- [ 54 ] B.A. BILBY and R.T. HEALD, 1968, Proc. of Roy. Soc. A305, 429
- [ 55 ] J.C. NEWMAN Jr., 1984, Int. J. Fract., Vol. 24, n° 3, R 59-R63
- [ 56 ] P. NEUMANN, H. VEHOFF and H. FUHLROTT, 1977, ICF 4, Vol. 2, Waterloo, Canada, June 19-24, 1313-1317
- [ 57 ] G. RYDHOLM, B. FREDRIKSSON and F. NILSSON, 1978, Proc. on Num. Mech., Swansea, England, 660-672
- [ 58 ] H. ANDERSSON, 1975, Computational Fract. Mech., End National Congress on Pressure Vessels and Piping, ASME, San Francisco
- [ 59 ] P.N.R. KEEGSTRA, J.L. HEAD and C.E. TURNER, 1977, ICF 4, Vol. 3, Waterloo, Canada, June 19-24, 515-522
- [ 60 ] S.D. ANTOLOVICH and A. SAXENA, 1975, Eng. Fract. Mech. Vol. 7 649-652
- [ 61 ] C. BATHIAS and M. VANCON, 1978, Eng. Fract. Mech., Vol. 10 409-424
- [ 62 ] P.C.M. GORTEMAYER, C. de PATER, and R.M.E.J. SPIERING, 1981, ICF 5, Cannes, France, 29 mars-3 avril, 151-160.
- [ 63 ] O.C. ZIENKIEWICZ, S. VALLIAPPAN and I.P. KING, 1969, Int. J. Num. Meth. Eng., vol. 1, 75-100
- [ 64 ] J.M. BOISSENOT, M. DUBOIS et LACHAT, 1972, Mémoires du CETIM N° 14.
- [ 65 ] C. CHEHIMI et al. 1984, Birmingham, 3-7 septembre, Fatigue 84, Vol. 2, 915-925.
- [ 66 ] A. BIA, 1985, Rapport interne, CETIM-Senlis.

## 9 - ANNEXES

### 9.1. Annexe A

#### 9.1.1. Relations de comportement du matériau élastoplastique

##### i - Elasticité isotrope

##### Relations de Hooke :

$$\sigma_{ij} = 2 \mu \varepsilon_{ij} + \lambda \text{trace}(\bar{\varepsilon}) \cdot \delta_{ij} \quad (\text{A.1})$$

le déviateur est :

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \text{trace}(\bar{\sigma}) \cdot \delta_{ij} \quad (\text{A.2})$$

où  $\mu, \lambda$  sont les coefficients de Lamé,

et  $\text{trace}(\bar{\varepsilon})$  ou  $\text{trace}(\bar{\sigma})$  est la variation volumique de déformation ou de contrainte (ex.  $\text{trace}(\bar{\varepsilon}) = (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})$ )

et inversement :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \text{trace}(\bar{\sigma}) \cdot \delta_{ij}$$

ou encore

$$\sigma_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \text{trace}(\bar{\sigma}) \delta_{ij} \quad (\text{A.3})$$

où  $E$  est le module d'Young,  $\nu$  le coefficient de Poisson, et  $\delta_{ij}$  le symbole de Kronecker (symbole diagonal),

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pour } i = j \\ 0 & \text{pour } i \neq j \end{cases}$$

ii - Elasticité non-linéaire

$$\epsilon_{ij} = E^{-1} \epsilon_{ij} = (1 + \nu) S_{ij} + \frac{1 - 2\nu}{3} \text{trace}(\bar{\sigma}) \delta_{ij} + \frac{3}{2} \alpha \sigma_e^{N-1} S_{ij} \quad (\text{A.4})$$

où  $\sigma_e$  est la contrainte équivalente au sens de VonMises ( $\sigma_e \geq R_e$ )

avec 
$$\sigma_e^2 \equiv \frac{3}{2} S_{ij} S_{ij}$$

et  $\alpha$  est un paramètre qui dépend du matériau.

9.1.2. Analyse des contraintes et des déformations au voisinage de l'extrémité d'une fissure

i - Elasticité plane en coordonnée polaire (Figure A.1)

La position du point sur le plan est déterminé par la distance  $r$  de l'origine de coordonnées  $o$  et par l'angle  $\theta$  entre cette direction.

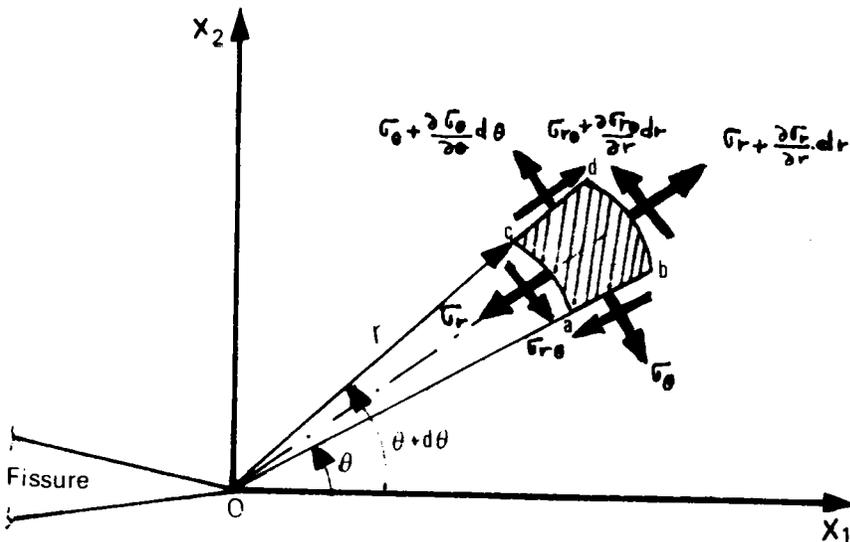


Figure A.1

$$\overline{Oa} = r$$

$$\overline{ab} = dr$$

$$\overline{ca} = rd\theta$$

et

$$r^2 = X_1^2 + X_2^2$$

$$\theta = \text{arctg} \left( \frac{X_2}{X_1} \right)$$

avec

$$X_1 = r \cos \theta$$

$$X_2 = r \sin \theta$$

et les composantes des déplacements :

$$U = U(X_1, X_2) = U(r, \theta)$$

$$V = V(X_1, X_2) = V(r, \theta)$$

(A.5)

En état de déformation plane :

$$\epsilon_r = \frac{\partial U}{\partial r}$$

$$\epsilon_\theta = \frac{U}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}$$

(A.6)

$$\gamma_{\theta r} = \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r}$$

Equations d'équilibre :

$$\sigma_{ij}, j = 0 \quad (i, j = 1, 2)$$

avec les forces volumiques  $f_i = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\sigma r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_r}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} &= 0 \end{aligned} \quad (A.7)$$

Les équations d'équilibres sont vérifiées en écrivant certaines relations entre les composantes du tenseur des contraintes et une fonction  $\mathbf{A}$  d'Airy ( $\mathbf{A}(r, \theta)$ ) :

$$\sigma_r = \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial r^2} \quad \text{et} \quad \sigma_{r\theta} = - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial r \partial \theta} \quad (A.8)$$

Equations de comptabilité en contrainte :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \epsilon_\theta) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \epsilon_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial r \theta}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (A.9)$$

On remplace (A.6) dans la loi de comportement (A.4), on trouve :

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_r &= \tilde{\sigma}_r - \nu \tilde{\sigma}_\theta + \alpha \tilde{\sigma} e^{N-1} \left( \tilde{\sigma}_r - \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_\theta \right) \\ \tilde{\epsilon}_\theta &= \tilde{\sigma}_\theta - \nu \tilde{\sigma}_r + \alpha \tilde{\sigma} e^{N-1} \left( \tilde{\sigma}_\theta - \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_r \right) \\ \tilde{\sigma}_{r\theta} &= 2(1 + \nu) \tilde{\sigma}_{r\theta} + 3\alpha \tilde{\sigma} e^{N-1} \tilde{\sigma}_{r\theta} \end{aligned} \quad (A.10)$$

$$\text{où } \tilde{\sigma}_e^2 = \frac{3}{4} (\tilde{\sigma}_r - \tilde{\sigma}_\theta)^2 + 3 \sigma_{r\theta}^2 \quad (\text{équation de Prandtl-Reuss})$$

On introduit (A.10) dans (A.9), on trouve la relation suivante :

$$\begin{aligned} \nabla^4 A + \frac{\alpha}{2} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} \left[ \sigma_e^{N-1} \left( 2r \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} - \frac{\partial A}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} \right) \right] \right. \\ + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left[ - \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} \right] \\ + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \sigma_e^{N-1} \left( - \frac{2}{r} \frac{\partial A}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} \right) \right] \\ \left. + \frac{6}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left( r \sigma_e^{N-1} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} \right) \right) \right\} \equiv 0 \quad (\text{A.11}) \end{aligned}$$

avec

$$\nabla^4 = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)$$

On peut résoudre la relation (A.11) par une méthode d'Euler-Lagrange :

$$y_1 \nabla^4 y_2 - y_3 = 0$$

donc, on trouve la solution de la relation (A.11) de la forme suivante :

$$A = K_\epsilon r^t \tilde{A}(\theta) \quad (\text{A.12})$$

avec

$$t \geq \frac{2N'}{N'+1}$$

Conditions aux limites :

$$\mathbb{A} = \frac{\partial \mathbb{A}}{\partial r} = 0$$

$$f \left( \mathbb{A}, \frac{\partial \mathbb{A}}{\partial r}, \frac{\partial^2 \mathbb{A}}{\partial r^2}, \frac{\partial \mathbb{A}}{\partial r^3} \right) = 0$$

La loi de comportement (A.4) est réécrite de la manière suivante :

$$\tilde{\varepsilon}_{ij}(\theta, r, N) = K_\varepsilon \tilde{\varepsilon}_{ij}^e(\theta) + K_\varepsilon^p \tilde{\varepsilon}_{ij}^p(\theta, N) \quad (\text{A.13})$$

avec

$$K_\varepsilon = \left( \frac{1-\nu^2}{\alpha} \right)^{1/(N'+1)} \cdot \left( \frac{\pi}{\mathbb{N}} \right)^{1/(N'+1)} \cdot (\sigma^\infty)^{2/(N'+1)} \quad (\text{A.14a})$$

et

$$\sigma^\infty = K^2 / (\pi X) \quad (\text{A.14b})$$

où  $\mathbb{N}$  est un paramètre sans dimension du modèle d'Hutchinson

où

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_r^e(\theta) &= (1+\nu) [ (1-\nu) \tilde{\sigma}_r - \nu \tilde{\sigma}_\theta ] \\ \tilde{\varepsilon}_\theta^e(\theta) &= (1+\nu) [ (1-\nu) \tilde{\sigma}_\theta - \nu \tilde{\sigma}_r ] \\ \tilde{\gamma}_{r\theta}^e(\theta) &= 2(1+\nu) \tilde{\sigma}_{r\theta} \end{aligned} \quad (\text{A.15a})$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_r^p(\theta, N) &= \frac{3}{4} \alpha \tilde{\sigma}_e^{N'-1} (\tilde{\sigma}_r - \tilde{\sigma}_\theta) \\ \tilde{\varepsilon}_\theta^p(\theta, N) &= \frac{3}{4} \alpha \tilde{\sigma}_e^{N'-1} (\tilde{\sigma}_\theta - \tilde{\sigma}_r) \\ \tilde{\gamma}_{r\theta}^p(\theta, N) &= 2 \alpha \sigma_e^{N'} (\tilde{\sigma}_{r\theta}) \end{aligned} \quad (\text{A.15b})$$

Dans le cas où  $\theta = 0$

$$\tilde{\varepsilon}_{\theta}(0, r, N') = \tilde{\varepsilon}_r(0, r, N) \quad (\text{A.16})$$

et

$$\tilde{\gamma}_r(0, r, N) = 0$$

On introduit (A.14) et (A.15) dans (A.13) en tenant compte de la condition (A.16). Ceci conduit à la relation suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon} = \varepsilon \cdot \frac{E}{R_e} = & \left( \frac{1 - v^2}{\alpha} \right)^{1/(N'+1)} \cdot \left( \frac{\pi}{N} \right)^{1/(N'+1)} \cdot \left( \frac{K^2}{\pi X} \right)^{1/(N'+1)} \cdot [(1 - v) \tilde{\sigma}_{\theta} - v \tilde{\sigma}_r] \\ & + \left( \frac{1 - v^2}{\alpha} \right)^{1/(N'+1)} \cdot \left( \frac{\pi}{N} \right)^{N/(N'+1)} \cdot \left( \frac{K}{\pi X} \right)^{N/(N'+1)} \cdot \left[ \frac{3}{4} \alpha \tilde{\sigma}_e^{(N'+1)} \cdot (\tilde{\sigma}_{\theta} - \tilde{\sigma}_r) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.17a})$$

ou

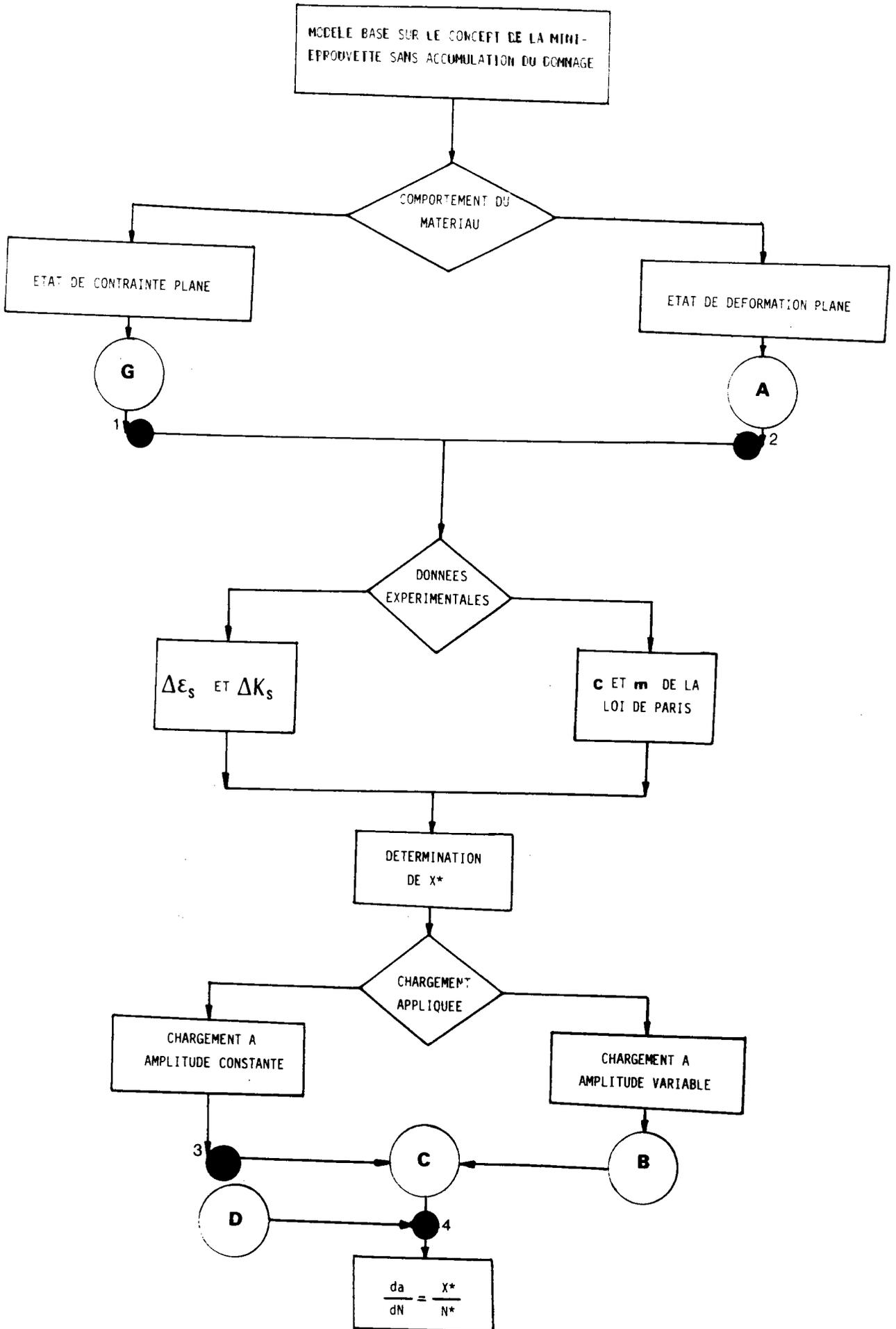
$$\varepsilon = C_{1_{DP}} \cdot \left( \frac{K^2}{X} \right)^{1/(N'+1)} + C_{2_{DP}} \cdot \left( \frac{K^2}{X} \right)^{N/(N'+1)} \quad (\text{A.17b})$$

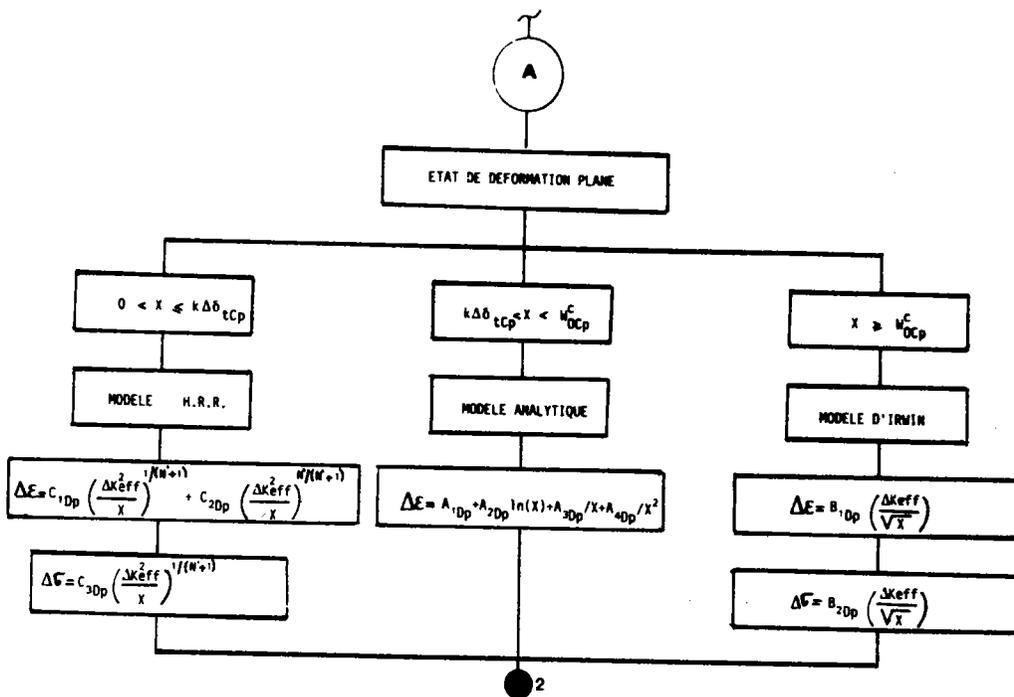
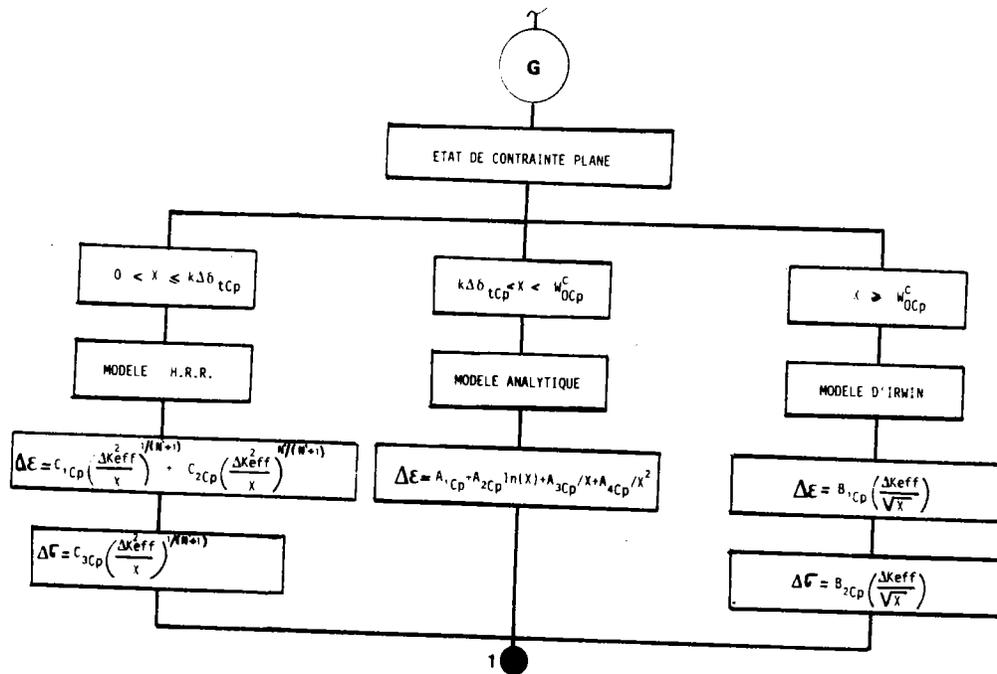
avec

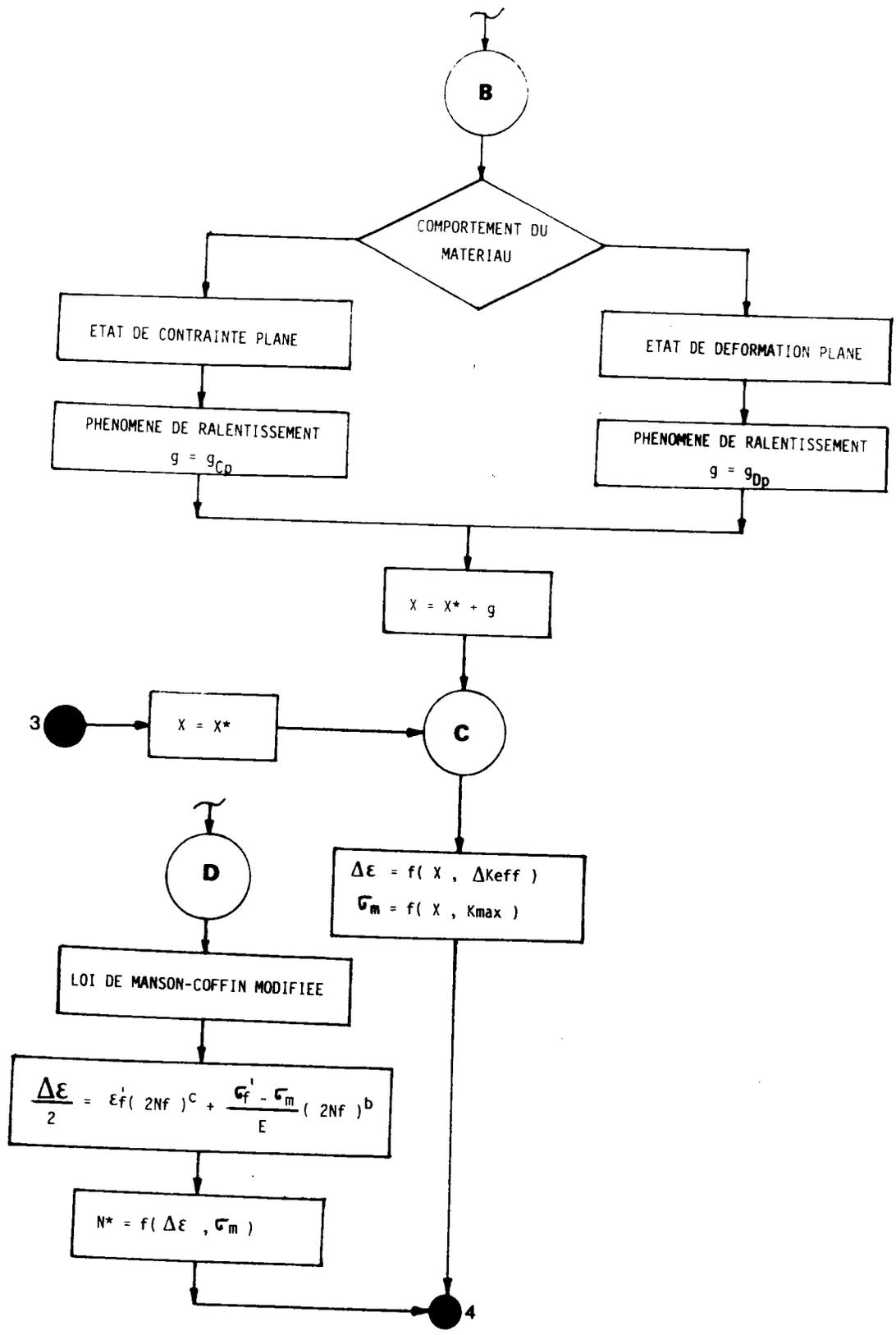
$$\begin{aligned} C_{1_{DP}} = & \frac{R_e}{E} [(1 - v) \tilde{\sigma}_{\theta} - v \tilde{\sigma}_r] \cdot \left( \frac{1 - v^2}{\alpha} \right)^{1/(N'+1)} \cdot \left( \frac{\pi}{N} \right)^{1/(N'+1)} \cdot \left( \frac{1}{R_e^2 \pi} \right)^{1/(N'+1)} \\ C_{2_{DP}} = & \frac{R_e}{E} \left[ \frac{3}{4} \tilde{\sigma}_e^{(N'+1)} \cdot (\tilde{\sigma}_{\theta} - \tilde{\sigma}_r) \cdot \alpha \right]^{1/(N'+1)} \cdot \left( \frac{\pi}{N} \right)^{1/(N'+1)} \cdot \left( \frac{1}{R_e^2 \pi} \right)^{1/(N'+1)} \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

9.3.1) Organigramme :

Modèle basé sur le concept de mini-éprouvette sans accumulation du dommage







9.1.4. Calcul de l'écartement de fissure (CTOD)

La loi de comportement donnée par Ramborg-Osgood dans le cas de chargement cyclique est de la forme suivante :

$$\Delta \epsilon = \Delta \sigma + \alpha' \Delta \sigma^{N'} \quad (\text{A.19})$$

avec

$$\Delta \epsilon^P = \alpha' \Delta \sigma^{N'} \quad (\text{A.20a})$$

ou

$$\Delta \sigma = \left( \frac{\Delta \epsilon^P}{\alpha'} \right)^{1/N'} \cdot (\Delta \epsilon)^{1/N'} \quad (\text{A.20b})$$

et, l'intégrale J de Rice peut être calculée sur un contour qui entoure juste la zone plastique :

$$J = \int_0^{\text{CTOD}} \Delta \sigma (\text{CTOD}) \cdot d(\text{CTOD}) \quad (\text{A.21a})$$

ou

$$J = B_e \int_0^{\text{CTOD}/B_e} \Delta \sigma (\Delta \epsilon) \cdot d(\Delta \epsilon) \quad (\text{A.21b})$$

avec  $B_e$  est l'épaisseur de l'éprouvette

On remplace (A. 20b) dans (A.21b), on trouve :

$$J = B_e \int_0^{\text{CTOD}/B_e} \left(\frac{I}{\alpha'}\right)^{I/N'} \cdot (\Delta \epsilon^P)^{I/N'} \cdot d(\Delta \epsilon) \quad (\text{A.22a})$$

et après intégration :

$$J = B_e \cdot \left(\frac{I}{\alpha'}\right)^{I/N'} \cdot \left(\frac{N'}{I + N'}\right) \cdot \left(\frac{\text{CTOD}}{B_e}\right)^{\frac{(N'+I)}{N'}} \quad (\text{A.22b})$$

Dans l'approximation de la zone plastique confinée (ZPC), et dans la condition de l'état de déformation plane l'expression de J est de la forme :

$$J = (1 - \nu^2) \frac{K^2}{E} = B_e \cdot \left(\frac{I}{\alpha'}\right)^{I/N'} \cdot \left(\frac{N'}{I + N'}\right) \cdot \left(\frac{\text{CTOD}}{B_e}\right)^{\frac{(N'+I)}{N'}} \quad (\text{A.23})$$

de la relation (A.23), on déduit l'expression de l'écartement de fissure (CTOD), comme suit :

$$\text{CTOD} = B_e \left[ \left(\frac{I + N'}{N'}\right) \cdot (\alpha')^{I/N'} \cdot \frac{(1 - \nu^2) \cdot K^2}{B_e E} \right]^{\frac{N'}{(N'+I)}} \quad (\text{A.24})$$

## 9.2. Annexe B

### 9.2.1. Exploitation des programmes

#### 9.2.1.1. La mise en données

Le calcul sur ordinateur nécessite une préparation importante et minutieuse. Les résultats en dépendent souvent de manière négligeable et il est recommandé de soigner cette étape.

##### i - Le maillage

A partir de la géométrie de la structure on définit un maillage affiné dans les régions où la plasticité risque de se développer en cours de chargement. La détermination de ce maillage constitue la partie la plus importante de la mise en données. Il faut en effet définir les connexions de chaque élément, la numérotation et les coordonnées de chaque noeud. Une vérification par tracé automatique est effectuée avant son utilisation définitive.

##### ii - Les caractéristiques mécaniques du matériau

En plus des constantes élastiques (module d'Young et coefficient de Poisson), il faut préciser, soit la limite d'élasticité dans le cas d'un matériau élastique parfaitement plastique, soit les courbes contraintes-déformations expérimentales ou courbes rationnelles dans le cas où il y a écrouissage.

##### iii - Les conditions aux limites sur les déplacements

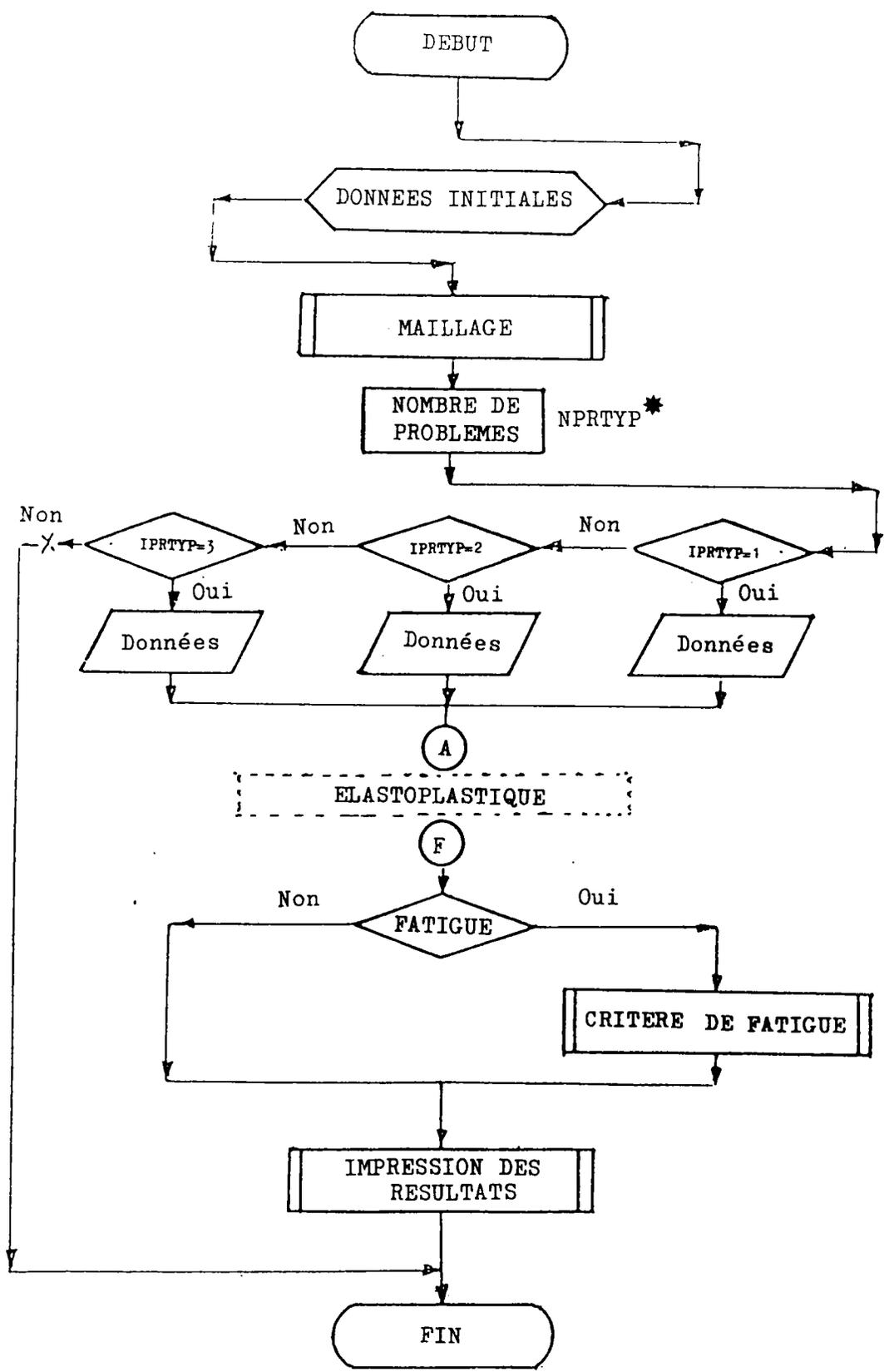
Il est possible d'imposer par exemple un déplacement nul dans une

direction donnée, ou encore de fixer totalement un point. Ces conditions se traduisent par une modification de la matrice de rigidité totale.

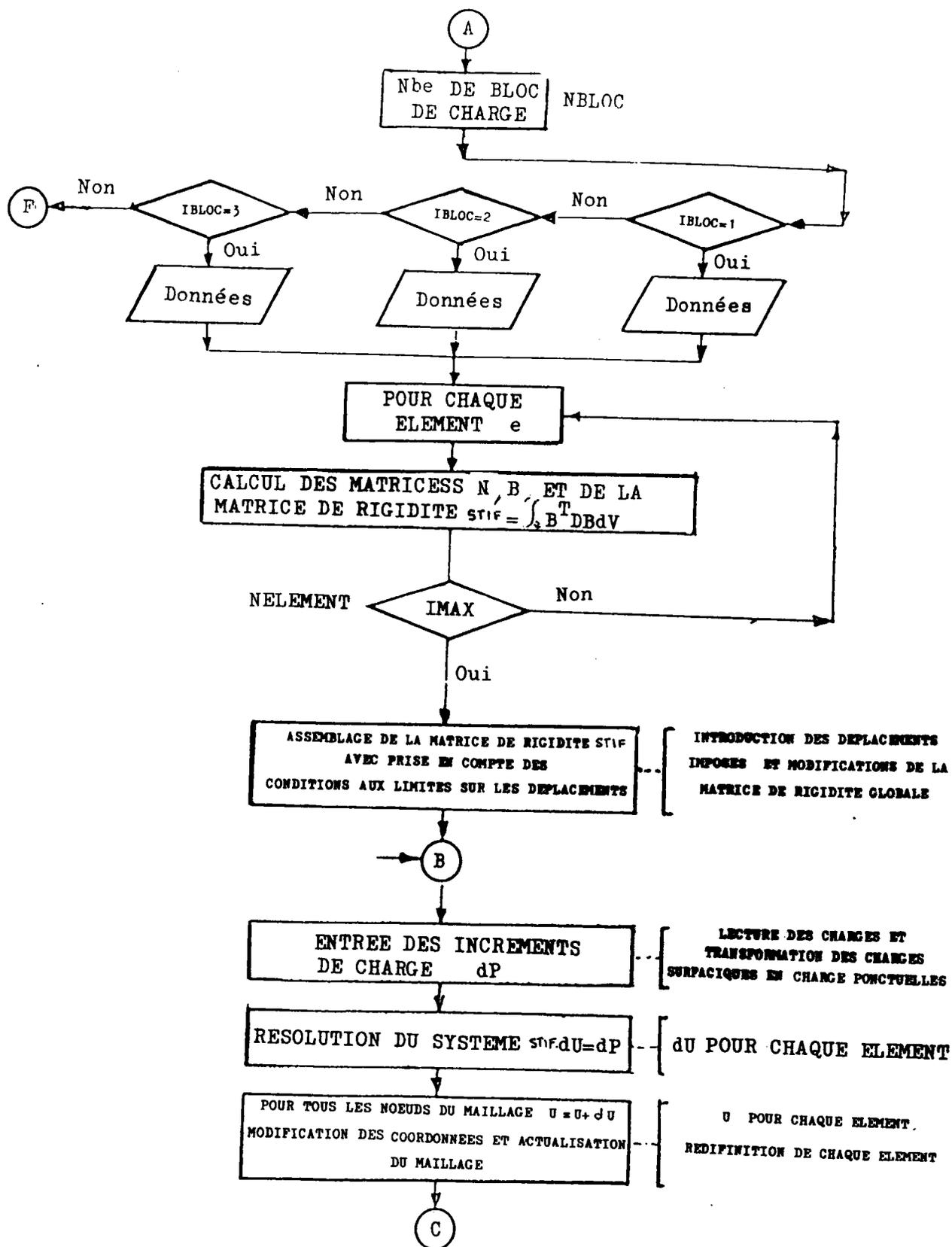
#### iv - Configuration du chargement

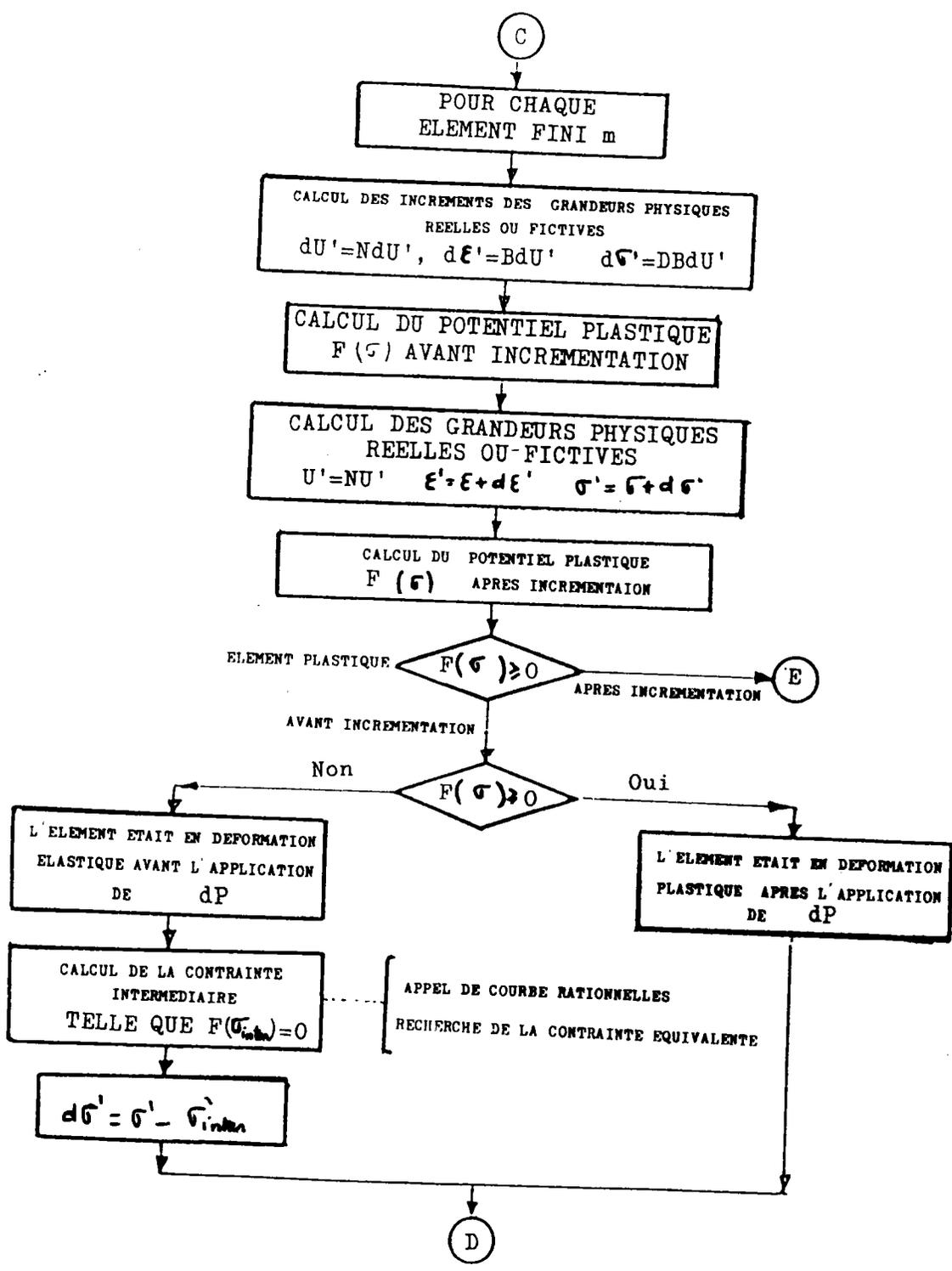
Il convient de définir tout d'abord la répartition des efforts : par exemple les noeuds pour les charges ponctuelles ou les côtés d'éléments pour les pressions ou pour les cisaillements. On précise ensuite l'intensité de ces efforts en vue d'atteindre la limite d'élasticité en au moins un élément de la structure pour le premier cas de charge ; on procède ensuite à un chargement incrémental jusqu'à la charge finale.

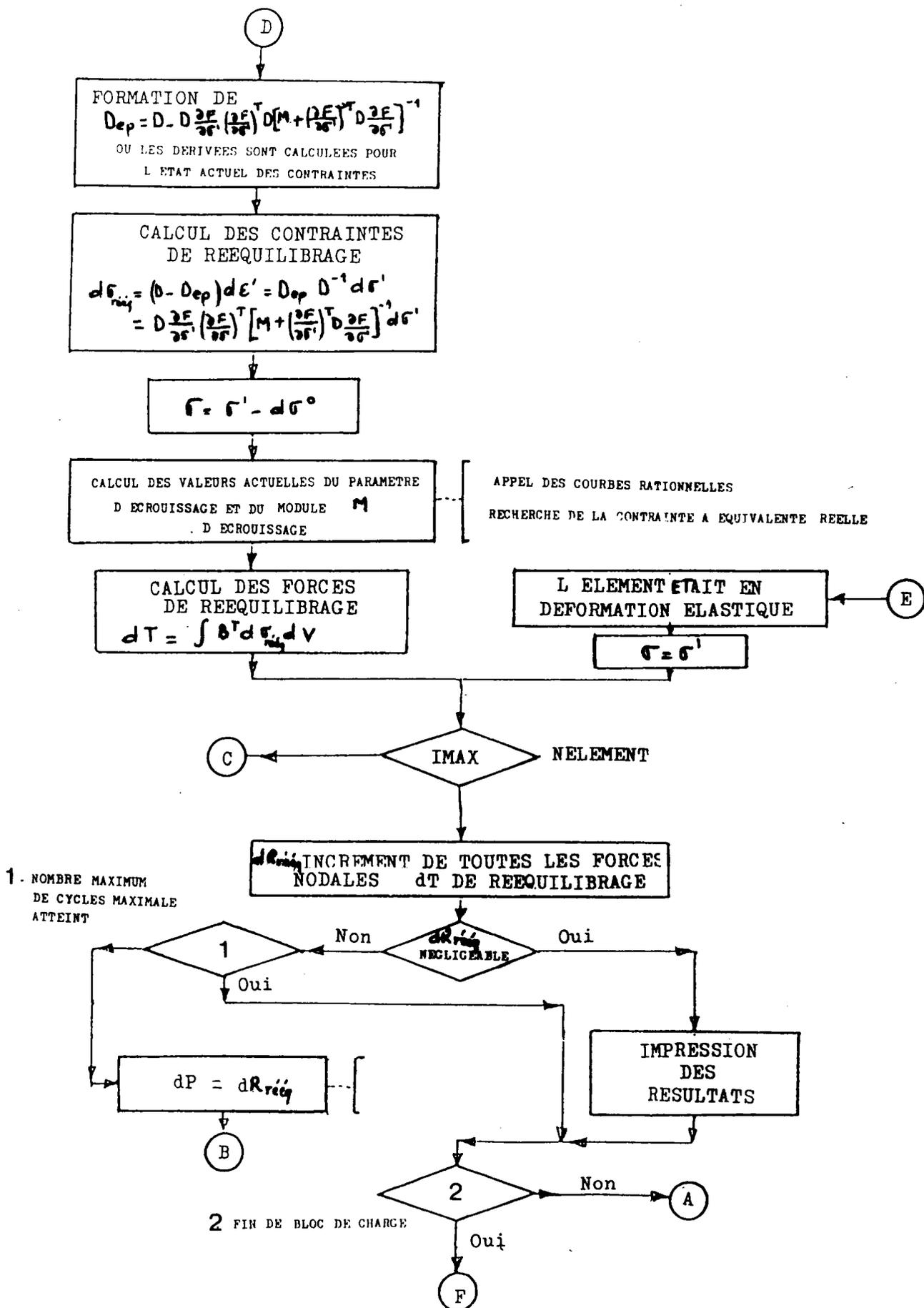
9.2.1.2. Organigramme global des programmes élastoplastiques



\* NPRTYP(IPRTYP): Nombre de problème à étudié, (ex. , surcharge, surcharge multiple , chargement haut-bas etc...)







9.2.1.3 Approche simplifiée des problèmes de plasticité cyclique bidimensionnelle

On sait que lors d'un essai de traction simple, la barre (oA) reste élastique (Figure B.1) tant que :

$$\bar{\sigma} < R_e \tag{B.1}$$

le critère s'écrit donc :

$$\bar{\sigma} - R_{e0} < 0 \tag{B.2}$$

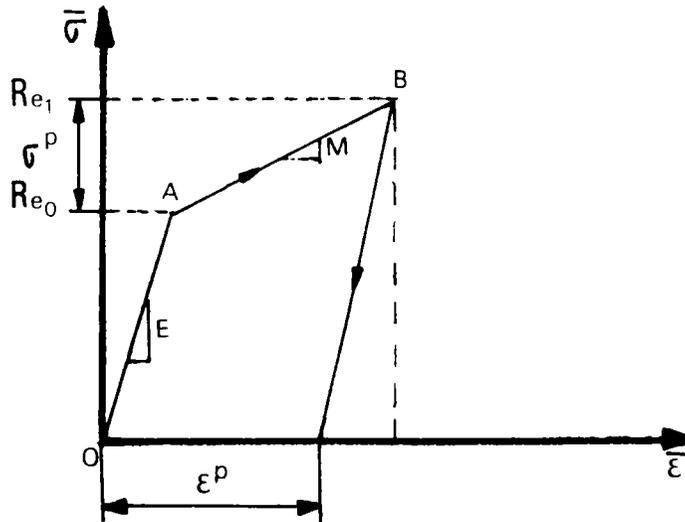


Figure B.1

Si la contrainte dépasse  $R_{e0}$  il se produit une déformation plastique. Soit la déformation plastique obtenue en B. Tout se passe comme si la limite d'élasticité était repoussée. Soit  $R_{e1}$  la nouvelle limite élastique. On a :

$$d \epsilon^P = d \lambda \quad (B.3)$$

où  $d \lambda$  est l'incrément d'un paramètre interne

donc dans ce cas :

$$\lambda = \epsilon^P \quad (B.4)$$

Le paramètre  $\lambda$  est la déformation plastique cumulée

D'après la Figure B.1,  $R_{eI}$  se calcule aisément à partir de  $\epsilon^P$  :

$$R_{eI} = R_{e0} + M \lambda = R_{e0} + M \epsilon^P \quad (B.5a)$$

ou

$$R_{eI} = R_{e0} + \varphi (\epsilon^P) \quad (B.5b)$$

Si la courbe de traction est linéaire,  $M$  représente sa pente.

Si elle n'est pas linéaire  $\varphi (\epsilon^P)$  est son équation.

i - Prise en compte de l'écrouissage :

De la façon la plus simple de prendre en compte de la plasticité dans le cas d'un chargement est de procéder de la façon suivante :

- on détermine la relation contrainte/déformation pour un chargement uniaxial de traction,
- on suppose que la relation :  $R_{eI} (\lambda)$  est celle qui lie  $\sigma$  à  $\epsilon^P$  pour l'essai précédent.

On pose  $R_{eI} = \sigma_e$  contrainte équivalente

et  $\lambda = \epsilon_e^P$  déformation équivalente

Cela signifie qu'à chaque déformation  $d\epsilon_e^P$ , le rayon du cylindre C (Figure B.2) augmente de deux façons :

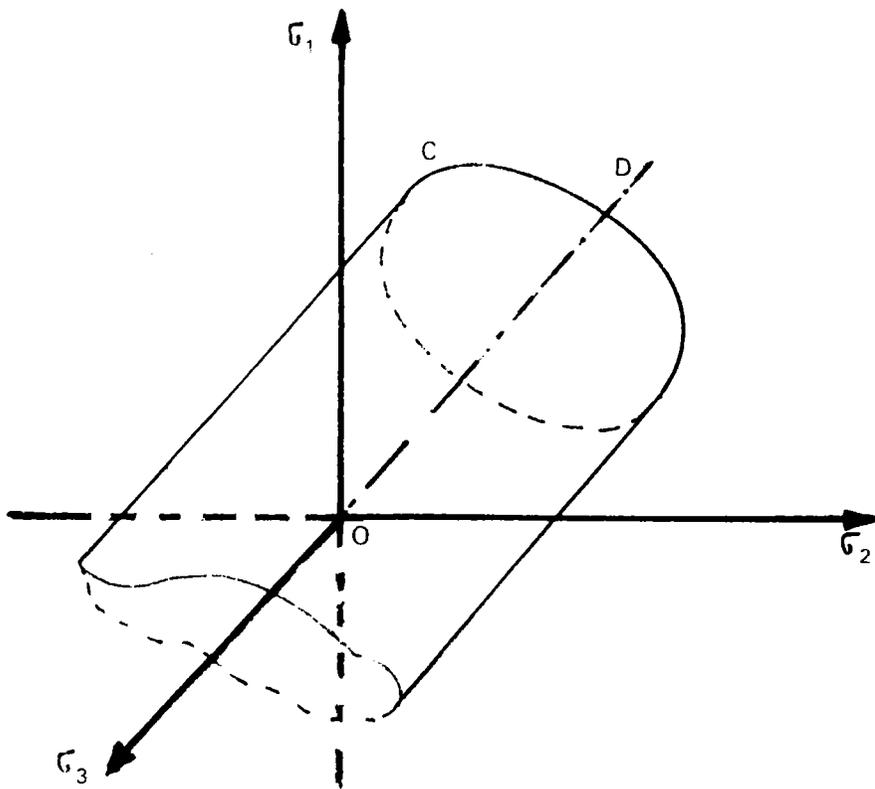


Figure B.2 : *Interprétation de critère de V. Mises*

- Soit en gardant le même axe D : ce comportement est appelé écoulement isotrope (Figure (B.3))

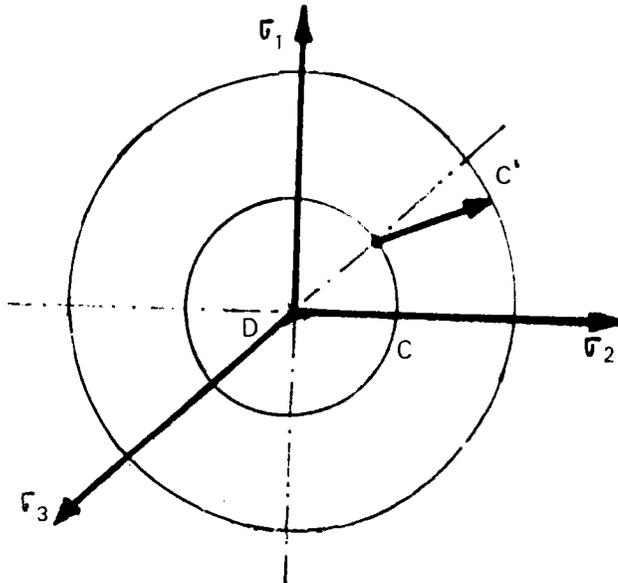


Figure B.3

Cette approximation est couramment utilisée pour des chargements monotones, autrement dit lorsque le point représentatif des contraintes en fin de chargement est voisin du point de première traversée de C. Elle n'est pas valable pour des chargements cycliques où l'on revient à l'état élastique pour replastifier à un autre point de C.

- Soit la surface seuil d'écoulement est alors déplacée par translation : ce comportement est appelé écoulement cinématique (Figure A.4).

Cette approximation est utilisée pour des chargements cycliques pour tenir compte de l'effet Bauschinger.

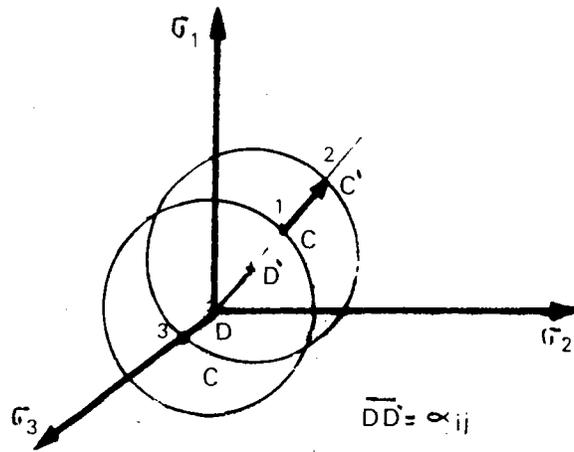


Figure B.4

ii - Formulation de l'approche d'écrouissage cinématique

Soit le seuil d'écoulement est représenté par une relation de la forme suivante :

$$F ( \sigma_{ij} - \alpha_{ij} ) = R_e^2 \tag{B.6}$$

le critère de plasticité est défini par :

$$F ( \sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^p ) = \chi \tag{B.7}$$

où  $\chi$  est le paramètre d'écrouissage

et la vitesse de charge  $\bar{\xi}$  est exprimé par la relation suivante :

$$\bar{\xi} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d \sigma_{ij} \tag{B.8}$$

Trois conditions sont dérivées :

- . Pendant le chargement :  $F = \chi$  et  $\bar{\xi} > 0$
- . Pendant le chargement neutre :  $F = \chi$  et  $\bar{\xi} = 0$
- . Pendant le déchargement :  $F < \chi$  et  $\bar{\xi} < 0$

La condition relative aux  $\epsilon_{ij}^P$  et  $\chi$  pour ces trois cas de charges est supposé avoir la forme suivante :

. Pendant le chargement :

$$d \epsilon_{ij}^P = \beta_{ij} \bar{\xi}, \text{ et } d \chi = \gamma \bar{\xi} \quad (\text{B.9})$$

. Pendant le chargement neutre et le déchargement :

$$d \epsilon_{ij}^P = d \chi = 0$$

Pour le cas de chargement, on peut écrire la relation suivante :

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \alpha_{ij}} d \sigma_{ij} + \frac{\partial F}{\partial \epsilon_{ij}^P} d \epsilon_{ij}^P = d \chi \quad (\text{B.11})$$

Cette relation doit satisfaire la condition suivante :

$$1 + \frac{\partial F}{\partial \epsilon_{ij}^P} \beta_{ij} = \gamma \quad (\text{B.12})$$

En se basant sur les travaux de Prager, on peut écrire :

$$F(\sigma_{ij}, \alpha_{ij}) = F(\sigma_{ij}, M \epsilon_{ij}^P) = \chi \quad (\text{B.13a})$$

avec

$$\alpha_{ij} = h \epsilon_{ij}^P \quad (\text{B.13b})$$

ou

$$F = \frac{1}{2} (S_{ij} - h \epsilon_{ij}^P) \cdot (S_{ij} - h \epsilon_{ij}^P) \quad (\text{B.14})$$

avec

$$d \epsilon_{ij}^P = 1.5 (S_{ij} - h \epsilon_{ij}^P) \cdot (S_{ke} - h \epsilon_{kl}^P) d S_{kl} / MR_e \quad (\text{B.15})$$

où

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}$$

Pour un essai de traction simple (Figure B.1) :

$$\frac{d \sigma}{d \epsilon} = E \quad ; \quad \text{si } \sigma \leq R_e \quad (\text{B.16})$$

et

$$\frac{d \sigma}{d \epsilon} = \frac{E}{1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{E}{h}} = M \quad ; \quad \text{si } \sigma > R_e$$

avec

$$h = \frac{2 M}{3 (1 - M/E)}$$

On peut écrire la relation entre  $\alpha_{ij}$  et  $M$  de la façon suivante :

$$\alpha_{ij} = \frac{2}{3} M \epsilon_{ij}^P \quad (\text{B.18})$$

9.3. Annexe C

9.3.1. Distribution des dislocations

Considérons une multitude de dislocations rectilignes identiques situées parallèlement les uns aux autres dans un même plan de glissement, et déduisons l'équation définissant leur distribution d'équilibre. Supposons l'axe de Z parallèle aux dislocations, et le plan X, Z confondu avec le plan de glissement.

Désignons par  $\rho(X)$  la densité linéaire des dislocations distribuées sur le segment  $(0, a_0)$  de l'axe des X ;  $\rho(X) dX$  est la somme des vecteurs de Burgers des dislocations passant par les points de l'intervalle  $dX$ . Alors, la contrainte totale créée au point X de l'axe des X par toutes les dislocations s'écrit sous forme d'intégrale :

$$\sigma(X) = - D_0 \int_0^{a_0} \frac{\rho(\xi) d\xi}{\xi - X} \quad (C.1)$$

où  $D_0$  est une constante de l'ordre de grandeur des modules élastiques du cristal.

Pour les points intérieurs au segment  $(0, a_0)$  lui-même (Figure C.1), cette intégrale (C.1) doit être identifiée à sa valeur principale afin d'éliminer l'action, physiquement dépourvue de sens, de la dislocation sur elle-même.

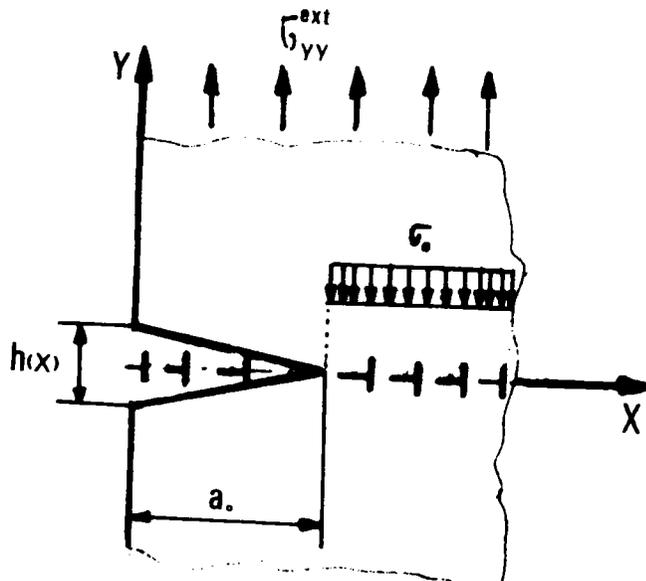


Figure C.1

Si l'on a aussi dans le cristal un champ de contraintes plan (dans le plan  $X, Y$ )  $\sigma_{yy}^{ext}(X, Y)$  créée par des charges extérieures données, chaque dislocation sera soumise à l'action de la force  $(b(\sigma_{yy}^{ext}(X, Y) + p(X)))$  ( $b$  est le vecteur de Burgers et  $p(X) = \sigma_{yy}^{ext}(X, 0)$ ). La condition d'équilibre consiste dans l'annulation de cette force :

$$\sigma_{yy}^{ext}(X, Y) + p(X) = 0$$

c'est-à-dire :

$$\oint_0^{a_0} \frac{\rho(\xi) d\xi}{\xi - X} = \frac{p(X)}{D_0} \equiv W(X) \quad (C.2)$$

où le signe  $\oint$  désigne la partie principale de l'intégrale. On a là une équation intégrale pour déterminer la distribution d'équilibre  $\rho(X)$ , qui appartient au type des équations intégrales singulières à noyau de Cauchy.

La résolution d'une telle équation se ramène à un problème de la théorie des fonctions d'une variable complexe, ainsi formulé.

Désignons par  $\Omega(Z)$  la fonction définie dans tout le plan de la variable complexe  $Z$  (coupé suivant le segment  $(0, a_0)$ ) par l'intégrale :

$$\Omega(Z) = \int_0^{a_0} \frac{\rho(\xi) d\xi}{\xi - Z} \quad (C.3)$$

Désignons par  $\Omega^+(X)$  et par  $\Omega^-(X)$  les valeurs limites de  $\Omega(Z)$  sur les lèvres supérieure et inférieure de la fissure. Elles sont égales à des intégrales de ce genre calculées sur le segment  $(0, a)$ , le point  $Z = X$  étant contourné respectivement par le bas (la lèvre inférieure) et le haut (la lèvre supérieure) sur une demi-circonférence de rayon infiniment petit, c'est-à-dire que :

$$\Omega^\pm(X) = \int_0^{a_0} \frac{\rho(\xi)}{\xi - X} d\xi \pm i\pi\rho(X) \quad (C.4)$$

Si  $\rho(\xi)$  vérifie l'équation (C.2), la valeur principale de l'intégrale est égale à  $\omega(X)$ , et l'on a :

$$\Omega^+(X) + \Omega^-(X) = 2\omega(X) \quad (C.5)$$

$$\Omega^+(X) - \Omega^-(X) = 2i\pi\rho(X) \quad (C.6)$$

Ainsi, résoudre l'équation (C.2) revient à chercher une fonction analytique  $\Omega(Z)$  donnée de la propriété (C.5), puis  $\rho(X)$  est donnée par (C.6). Les conditions physiques du problème considéré exigent en outre qu'on ait  $\Omega(\infty) = 0$  ; ceci résulte du fait que, loin de l'empilement des dislocations ( $X \rightarrow \pm \infty$ ), les contraintes  $\sigma_{yy}$  doivent s'annuler (d'après la définition (C.3)).

Envisageons le cas où les contraintes extérieures ne sont pas absentes  $\rho(X) = \sigma_{yy}^{\text{ext}}(X, 0) \neq 0$ . Désignons par  $\Omega_0(Z)$  une fonction de la forme :

$$\Omega_0(Z) = \frac{\rho(Z)}{\sqrt{Z(a_0 - Z)}} \quad (C.7)$$

et recopions l'égalité (C.5) (en la divisant par  $\Omega_0^+ = -\Omega_0^-$ ) sous la forme :

$$\frac{\Omega^+(X)}{\Omega_0^+(X)} - \frac{\Omega^-(X)}{\Omega_0^-(X)} = \frac{2 \omega(X)}{\Omega_0^+(X)} \quad (C.8)$$

comparant cette égalité avec (C.6), on déduit que :

$$\frac{\Omega(Z)}{\Omega_0(Z)} = \frac{1}{i \pi} \int_0^{a_0} \frac{\omega(\xi)}{\Omega_0^+(\xi)} \cdot \frac{d\xi}{\xi - Z} + i \pi p(Z) \quad (C.9)$$

Après quelques transformations de (C.9), on trouve :

$$\rho(X) = \frac{4}{\pi E' b} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_0^2 - X^2}} \int_0^{a_0} \frac{\sqrt{a_0^2 - \xi^2}}{X - \xi} \omega(\xi) d\xi \quad (C.10)$$

où

$$E' = \begin{cases} E & ; \text{ en état de contrainte plane} \\ E/(1 - \nu^2) & ; \text{ en état de déformation plane} \end{cases}$$

### 9.3.2. Equilibre d'une fissure

La forme et les dimensions d'une fissure dépendent essentiellement des contraintes extérieures agissantes. En conséquence, la spécification mathématique du problème d'équilibre d'une fissure se donne des conditions aux limites sur une surface a priori inconnue et qui sera déterminée par résolution du problème (la théorie quantitative des fissures de G. Barenblatt 1959).

Considérons dans un milieu isotrope une fissure se trouvant dans un champ de contraintes plan  $\sigma_{ij}(X, Y)$  (Figure C.2). Désignons sa longueur par  $a_0$  et sa largeur variable par  $h(X)$  (Figure C.1)

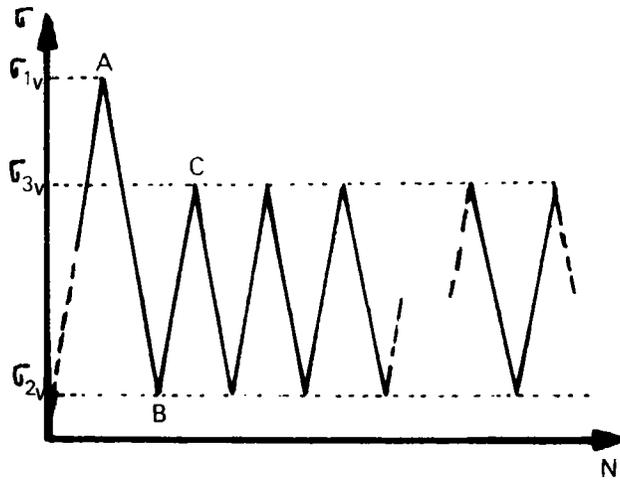


Figure C.2

Nous reporterons les conditions aux limites sur la surface de fissure au segment correspondant de l'axe des X. En d'autres termes, la fissure est assimilée à une ligne de discontinuité (dans le plan X, Y) sur laquelle la composante normale du déplacement présente un saut :

$$v(X) = \pm \frac{h(X)}{2}$$

Le saut  $h(X)$  du déplacement normal au point X est considéré comme la somme des vecteurs de toutes les dislocations passant à droite de ce point, c'est-à-dire que :

$$h(X) = b \int_X^{a_0} \rho(X) dX \quad ; \quad \rho(-X) = -\rho(X) \quad (C.II)$$

où  $\rho(X)$  est la densité des dislocations rectilignes trouvée précédemment par la relation (C.10). L'égalité  $\rho(-X) = -\rho(X)$ , signifie que les dislocations ont des signes différents de part et d'autre du point  $X = 0$ .

Une telle représentation permet d'écrire une autre forme d'expression qui sont en relation avec les contraintes normales  $\sigma_{Iv}$  sur l'axe des  $X$  (ce sont les contraintes provenant des charges extérieures :

i - Au point A (correspond au contrainte  $\sigma_I$ ) (Figure C.2)

$$\int_0^{X_{gA}} \frac{\rho_I(\xi)}{X - \xi} d\xi = \begin{cases} -\sigma_{Iv} & ; |\xi| < a_0 \\ \sigma_{OI} - \sigma_{Iv} & ; a_0 < |\xi| < X_{gA} \end{cases} \quad (C.12)$$

où  $X_{gA}$  est la taille de la zone plastique (Figure C.3),  $\rho_I(\xi)$  la densité des dislocations correspondant aux contraintes  $\sigma_{Iv}$ , et  $\sigma_{OI}$ , la contrainte de friction correspondant à  $\sigma_{Iv}$ .

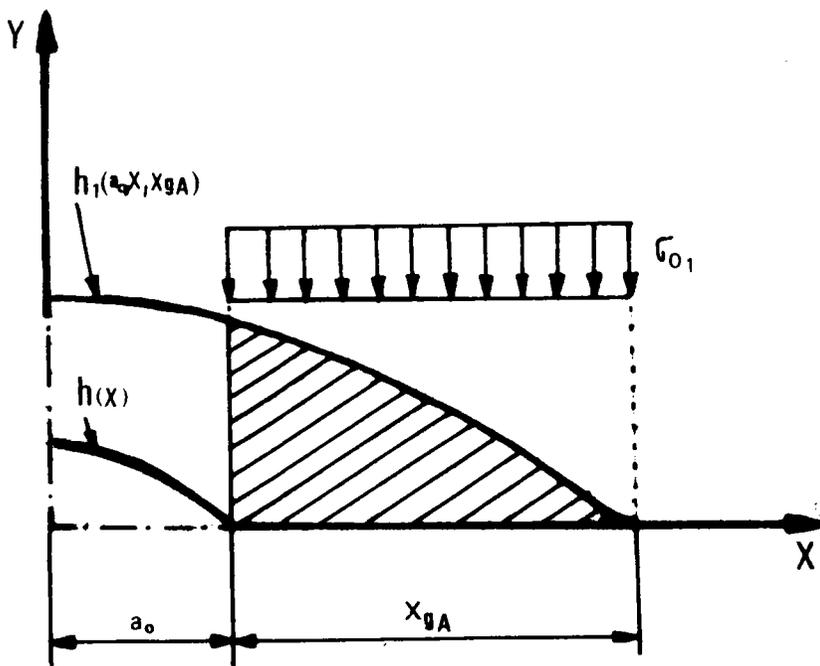


Figure C.3

ii - Au point B (correspond aux contraintes  $\sigma_{pic} = \sigma_{Iv} - \sigma_{2v}$ )

(Figure C.2) :

$$\int_0^{X_{gA}} \frac{\rho_2(\xi)}{X - \xi} d\xi = \begin{cases} -\sigma_{2v} & ; |\xi| < a_0 \\ -\sigma_{02} - \sigma_{2v} & ; a_0 < |\xi| < X_{gB} \end{cases} \quad (C.13)$$

où  $X_{gB}$  est la taille de la zone plastique correspondant à l'amplitude de contrainte due à la surcharge ( $\Delta\sigma_{pic} = \sigma_{Iv} - \sigma_{2v}$ ),  $\rho_2(\xi)$  la densité des dislocations correspondant à aux contraintes  $\sigma_{2v}$ , et  $\sigma_{02}$ , la contrainte de friction correspondant à  $\sigma_{2v}$ .

Bilby et Heald [54] ont montré que  $X_{gB}$  est inférieur à  $X_{gA}$  (Figure C.4), donc on peut réécrire (C.13) de la façon suivante :

$$\int_0^{X_{gA}} \frac{\rho_I(\xi)}{X - \xi} d\xi + \int_0^{X_{gA}} \frac{\rho_2(\xi) - \rho_I(\xi)}{X - \xi} d\xi = \begin{cases} -\sigma_{2v} & ; |\xi| < a_0 \\ -\sigma_{02} - \sigma_{2v} & ; a_0 < |\xi| < X_{gB} \end{cases} \quad (C.14)$$

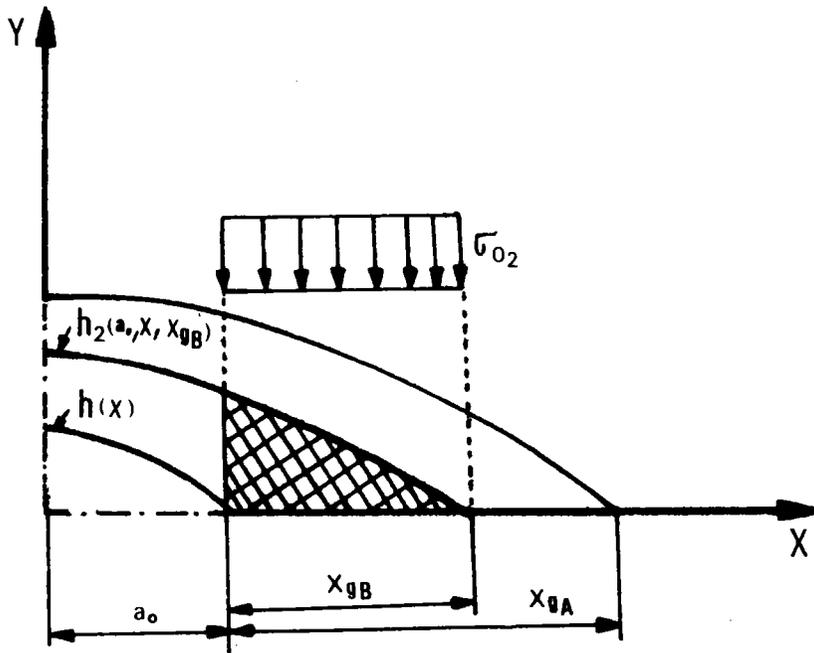


Figure C.4

On introduit l'expression (C.12) dans (C.14), on trouve la condition suivante :

$$\Delta \rho_{2I}(\xi) = \rho_2(\xi) - \rho_I(\xi) = 0 ; \text{ pour } |\xi| > X_{gB} \quad (C.15)$$

Nous obtenons :

$$\int_0^{X_{gB}} \frac{\Delta \rho_2(\xi)}{X - \xi} d\xi = \begin{cases} \sigma_{Iv} - \sigma_{2v} & ; |\xi| < a_0 \\ -\sigma_{OI} - \sigma_{O2} + \sigma_{Iv} - \sigma_{2v} & ; a_0 < |\xi| < X_{gB} \end{cases} \quad (C.16)$$

où  $\Delta \rho_{2I}(\xi)$  est la densité des dislocations correspondant à l'amplitude de contrainte  $\Delta \sigma_{pic}$  ( $\Delta \sigma_{pic} = \sigma_{Iv} - \sigma_{2v}$ ).

iii - Au point C (correspondant aux contraintes  $\Delta \sigma = \sigma_{3v} - \sigma_{2v}$ ) (Figure C.2) :

$$\int_0^{X_{gA}} \frac{\rho_3(\xi)}{X - \xi} d\xi = \begin{cases} -\sigma_{3v} & ; |\xi| < a_0 \\ \sigma_{O3} - \sigma_{3v} & ; a_0 < |\xi| < X_{gC} \end{cases} \quad (C.17)$$

où  $X_{gC}$  est la taille de la zone plastique correspondant à l'amplitude de contrainte  $\Delta \sigma$  ( $\Delta \sigma = \sigma_{3v} - \sigma_{2v}$ ),  $\rho_3(\xi)$  la densité des dislocations correspondant aux contraintes  $\sigma_{3v}$ , et  $\sigma_{O3}$  de la contrainte de friction correspondant à  $\sigma_{3v}$ .

Comme précédemment de la condition  $X_{gC} < X_{gB}$  (Figure C.5), on peut représenter (C.17) par l'expression suivante :

$$\int_0^{X_{gA}} \frac{\rho_2(\xi)}{X-\xi} d\xi + \int_0^{X_{gA}} \frac{\rho_3(\xi) - \rho_2(\xi)}{X-\xi} d\xi = \begin{cases} -\sigma_{3v} & ; \quad |\xi| < a_0 \\ \sigma_{03} - \sigma_{3v} & ; \quad a_0 < |\xi| < X_{gC} \end{cases} \quad (C.18)$$

En introduisant l'expression (C.13) dans (C.18), on trouve la condition suivante :

$$\Delta \rho_{32}(\xi) = \rho_3(\xi) - \rho_2(\xi) = 0 \text{ ; pour } X_{gC} < |\xi| < X_{gA} \quad (C.19)$$

où  $\Delta \rho_{32}(\xi)$  est la densité des dislocations correspondant à l'amplitude de contrainte  $\Delta \sigma (\Delta \sigma = \sigma_{3v} - \sigma_{2v})$

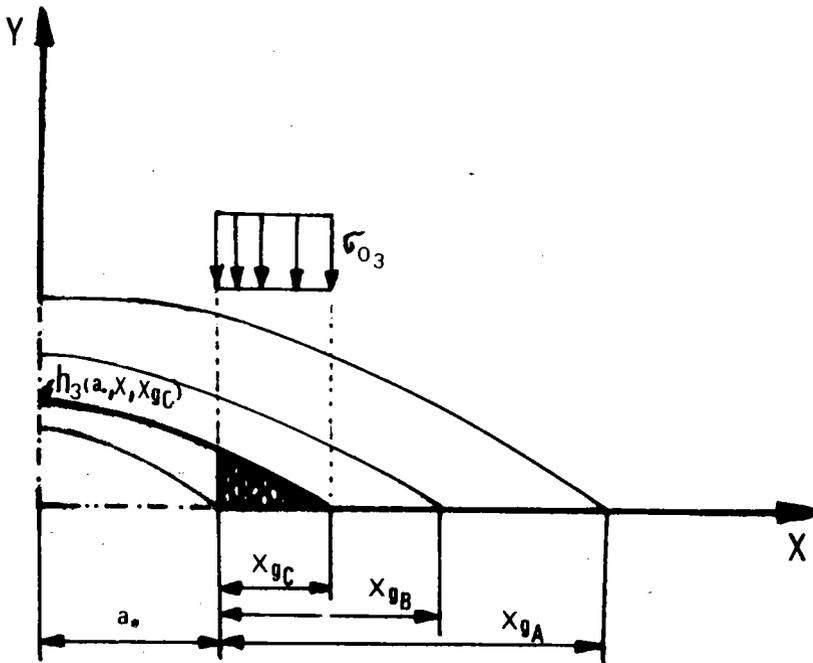


Figure C.5

Nous obtenons :

$$\int_0^{X_{gC}} \frac{\Delta \rho_{32}(\xi)}{X - \xi} d\xi = \begin{cases} \sigma_{2v} - \sigma_{3v} & ; |\xi| < a_0 \\ \sigma_{02} + \sigma_{03} + \sigma_{2v} - \sigma_{3v} & ; a_0 < |\xi| < X_{gC} \end{cases} \quad (C.20)$$

La distribution des dislocations à l'état final (A → B → C) est représentée comme la somme de trois relations précédentes (C.12), (C.15) et (C.20) :

$$\rho(\xi) = \rho_I(\xi) + \Delta\rho_{2I}(\xi) + \Delta\rho_{32}(\xi) \quad (C.21)$$

et la composante normale du déplacement  $h(X)$  est de la forme suivante :

$$h(X) = h_I(a_0, X, X_{gA}) - h_{2I}(a_0, X, X_{gB}) + h_{32}(a_0, X, X_{gC}) \quad (C.22)$$

avec

$$h(a_0, X, X_g) = \frac{4\sigma_0 b}{\pi E'} \left[ a_0 \log \left| \frac{\sqrt{X_g^2 - a_0^2} + \sqrt{X_g^2 - X^2}}{\sqrt{X_g^2 - a_0^2} - \sqrt{X_g^2 - X^2}} \right| - X \log \left| \frac{X \sqrt{X_g^2 - a_0^2} + a_0 \sqrt{X_g^2 - X^2}}{X \sqrt{X_g^2 - a_0^2} - a_0 \sqrt{X_g^2 - X^2}} \right| \right]$$

9.3.3. Définition des fonctions  $M_i$  et  $H_i$

Les fonctions  $M_i$  et  $H_i$  apparaissant dans les relations (5.61) et (5.63) sont définies de la manière suivante :

i - Les fonctions  $M_i$  :

pour  $i = 0$  à  $7$

|         |                           |
|---------|---------------------------|
| $M_0 =$ | $(X - X_{gA}) \cdot X$    |
| $M_1 =$ | $M_0 / (1 - R) - (1 - R)$ |
| $M_2 =$ | $M_0 / (1 - R) + (1 - R)$ |
| $M_3 =$ | $M_0 / R_{pic}$           |
| $M_4 =$ | $M_2^2 / (2 R_{pic})^2$   |
| $M_5 =$ | $4 M_0 / (R_{pic} - R)^2$ |
| $M_6 =$ | $M_2^2 / (R_{pic} - R)^2$ |
| $M_7 =$ | $4 M_0 / M_2^2$           |

i - Les fonctions  $H_i$

pour  $i : 1$  à  $5$

|         |                                       |
|---------|---------------------------------------|
| $H_1 =$ | $M_0 / (1 - R_{pic}) - (1 - R_{pic})$ |
| $H_2 =$ | $M_0 / (1 - R_{pic}) + (1 - R_{pic})$ |
| $H_3 =$ | $M_0 / R_{pic}$                       |
| $H_4 =$ | $(H_2 / (2 \cdot R_{pic}))^2$         |
| $H_5 =$ | $4 M_0 / H_2^2$                       |

9.3.4. Organigramme : Calcul de la vitesse de fissuration

