



HAL
open science

Contribution à l'étude des interactions entre les variants de la martensite : application aux matériaux pseudoélastiques

Mohammed Ouadi Bensalah

► **To cite this version:**

Mohammed Ouadi Bensalah. Contribution à l'étude des interactions entre les variants de la martensite : application aux matériaux pseudoélastiques. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université Paul Verlaine - Metz, 1986. Français. NNT : 1986METZ015S . tel-01775705

HAL Id: tel-01775705

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01775705>

Submitted on 24 Apr 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

N° inv.	19860305
Cote	S/Mz 86/15
Loc	

THESE

présentée

à l'université de METZ

Institut Supérieur de Génie Mécanique et Productique

pour obtenir le grade de

Docteur de III cycle en mécanique

par

BENSALAH MOHAMMED OUADI

"Contribution à l'étude des interactions entre les variants
de la martensite. Application aux matériaux pseudoélastiques".

soutenue le : 25 Juin 1986 devant le jury :

- | | | |
|-------------------|-------------------------|---------------------------------------|
| -M. F.SIDOROFF | Professeur | Ecole centrale de LYON |
| -M. A.SIMON | Professeur | I.N.P.L NANCY |
| -M. H.RUPPERSBERG | Professeur | Université de
SARREBRUCK (R.F.A) |
| -M. A.HIHI | Professeur | Université Mohammed U
RABAT(MAROC) |
| -M. M.BERVEILLER | Professeur | Université de METZ |
| -M. A.EBERHARDT | Maitre de
conférence | Université de METZ |

REMERCIEMENTS

Ce travail a été réalisé au Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux de l'Université de METZ.

Monsieur le Professeur M. BERVEILLER, directeur du L.P.M.M., m'a initié à la recherche et a dirigé mon travail. Je tiens à lui exprimer ma plus sincère reconnaissance.

Je remercie également Monsieur A. EBERHARDT des conseils et encouragements qu'il m'a prodigués, et d'accepter d'être membre du jury de cette thèse.

C'est un grand honneur pour moi de présenter ce travail devant Messieurs les Professeurs F. SIDOROFF, de l'Ecole Centrale de LYON, A. SIMON, directeur de Recherche au C.N.R.S. (I.N.P.L.), et RUPPERSBERG, de l'Université de SARREBRÜCK, qui ont accepté de juger cette étude.

Messieurs les Professeurs A. HIHI et O. FASSI-FEHRI ont suivi ce travail de près, je les remercie de leur soutien scientifique et moral.

J'adresse mes sincères remerciements à mes camarades chercheurs, techniciens, ainsi qu'à Madame et Mademoiselle MARCELET.

INTRODUCTION GENERALE

I INTRODUCTION GENERALE

Le problème de la détermination du comportement des matériaux est abordé généralement par deux approches distinctes.

D'une part, l'approche du physicien ne s'intéressant qu'aux mécanismes élémentaires de déformation des matériaux (glissement, maclage, transformation de phase, ...) et d'autre part, l'approche du mécanicien purement macroscopique et phénoménologique. Il s'avère alors nécessaire de réunir ces deux approches en partant d'études physiques à une échelle où les théories continues sont encore applicables.

Dans ce contexte, les travaux de mécanique physiques jouent un rôle considérable.

Dans ce travail, nous allons utiliser les méthodes de la mécanique physique pour étudier le problème des interactions entre les variants dans la transformation martensitique. Ces interactions entre variants jouent un rôle important tant sur le comportement des matériaux que sur la microstructure de la transformation (1) (2) .

Ici, on s'intéresse uniquement aux matériaux thermoélastiques pour lesquels seule la déformation intrinsèque de la transformation est considérée ; les autres termes (déformation élastique dans l'austénite et la martensite) sont négligés. C'est ce qui est appelé : plasticité de transformation parfaite (3) .

Dans le chapitre II, on rappelle les caractéristiques essentielles de la transformation martensitique (cristallographie - thermodynamique - mécanique).

On étudie par la suite (chap III), la cinématique de la transformation martensitique, en mettant en évidence tous les mécanismes d'accommodation, qui peuvent intervenir pour relaxer les contraintes internes, dues à la déformation du réseau qui intervient lors de la transformation.

Nous proposons une approche simplifiée (limitée aux petites déformations) des théories phénoménologiques et nous l'appliquons à deux problèmes différents :

- à l'interface austénite - martensite : on déterminera toutes les caractéristiques géométriques de la transformation (plan d'habitat - amplitudes de glissement - amplitude de déplacement ...).
- aux interactions entre couples de variants de martensite pour lesquelles nous distinguerons deux familles :
 - . celle pour laquelle l'interface est compatible (variants autoaccommodants)
 - . celle pour laquelle l'interface est incompatible d'où la création de contraintes internes.

Dans le chapitre IV, nous calculerons les contraintes internes et l'énergie élastique associées aux interactions incompatibles entre les variants, en utilisant un potentiel de contrainte.

Dans le cinquième chapitre, nous utiliserons une approche thermodynamique par l'intermédiaire de la théorie de GIBBS pour décrire l'évolution de la transformation martensitique.

Nous étudierons l'influence de l'énergie d'interaction entre variants (décrite au chapitre précédent) sur l'écrouissage dans la transformation.

Nous utiliserons une analyse microstructurale et une géométrie d'interaction particulière (4) et simplifiée pour modéliser la surface de contact $S_{\pm\mp}$ entre variants.

Nous proposerons enfin, un modèle pour décrire ce phénomène d'écrouissage par l'intermédiaire d'une matrice d'interaction entre les variants.

Nous évaluerons les termes de cette matrice dans un cas particulier pour les alliages thermoélastiques Cu-Zn-Al.

Nous achèverons ce travail, en donnant quelques indications expérimentales permettant une perspective sur le travail effectué et les difficultés associées à une approche expérimentale du problème des interactions entre variants.

CHAPITRE II

TRANSFORMATION MARTENSITIQUE ET PLASTICITE DE TRANSFORMATION

II.1 INTRODUCTION

II.2 CARACTERISTIQUES METALLURGIQUES

II.2.1) Aspect cinétique

- a) . Températures de transformation
- b) . Morphologie

II.2.2) Aspect cristallographique

(relations d'orientation et plan d'habitat)

II.3 ASPECT CINEMATIQUE

II.3.1) Rappels de la M.M.C

II.3.2) Cinématique de la transformation

II.4 THERMODYNAMIQUE DE LA TRANSFORMATION

II.5 INFLUENCE DE LA TRANSFORMATION SUR LES VARIABLES MECANIQUES

II.5.1 Cinétique

II.5.2 Plasticité de transformation

II.6 CONCLUSION

II.1 INTRODUCTION

L'objectif de ce chapitre est de rappeler les divers aspects caractérisant les transformations martensitiques (5)(6)(7). En effet, la transformation martensitique est une transition de phase du 1er ordre qui implique la coexistence de la phase mère (austénite) et de la phase transformée (martensite), ainsi que la présence d'une interface austénite-martensite. Le passage de la structure cristalline initiale à la nouvelle phase s'effectue par un mécanisme cristallographique correspondant à un déplacement des atomes de type cisaillement. Ces déplacements sont inférieurs à une distance interatomique. La transformation s'opère donc sans diffusion.

L'exemple le plus important de ce type de transformation est celui de la transformation martensitique des aciers. La forme la plus stable à haute température des aciers ou des alliages est l'austénite.

La martensite est obtenue soit par un refroidissement rapide, soit par application de contraintes macroscopiques suffisantes.

Dans le deuxième paragraphe, nous rappellerons quelques propriétés métallurgiques essentielles de la transformation martensitique en insistant sur l'aspect cristallographique (8) (relation d'orientation et plan d'habitat).

Nous nous attacherons dans le paragraphe 3 à décrire la cinématique (9) de la transformation et les contraintes internes dues à la coexistences de plusieurs variants. Dans le quatrième et cinquième paragraphe, nous discuterons respectivement les aspects thermodynamiques et mécaniques de la transformation martensitique.

II.2 CARACTERISTIQUES METALLURGIQUES

II.2.1 Aspect cinétique

L'étude cinétique de la décomposition de l'austénite peut être schématisée dans des diagrammes T.T.T (température - temps - taux de transformation) ou T.R.C (transformation en refroidissement continu). Ces diagrammes permettent de mettre en évidence les divers modes de transformation de la phase à haute température appelée phase austénitique.

Suivant la vitesse de refroidissement, on obtient les quatre modes de transformation suivants : fig (II.2.1)

- transformation perlitique
- " entectoïde
- " bainitique
- " martensitique

Nous nous intéresserons à ce dernier mode de transformation pour lequel, nous présenterons les effets cinétiques sur la température de la transformation et la morphologie.

a) Températures de transformation

- Température M_s (Martensite start) : c'est la température de début de la transformation austénite-martensite.

La température M_s dépend de plusieurs facteurs comme :

- le type d'alliage
- la composition de l'alliage
- la taille des grains.

Elle dépend aussi de facteurs mécaniques comme la contrainte appliquée et la déformation plastique de l'austénite.

- Température M_f

M_f correspond à la température de fin de transformation pour laquelle, la fraction volumique f de martensite formée est égale à 1.

La transformation martensitique étant réversible, aux températures M_s et M_f correspondent les températures de réversion A_s et A_f telles que :

A_s correspond à une fraction volumique de l'austénite nulle

A_f correspond à une fraction volumique de l'austénite égale à 1.

M_s et M_f peuvent être déterminées par analyse thermique, dilatométrique, résistivimétrique, micrographique ou par émission acoustique etc...

Des relations empiriques reliant la température M_s à la composition de l'alliage ont été proposées par différents auteurs. Nous citerons par exemple :

- Relation de STEVENS et HAYNESS (10)

$$M_s (\text{°C}) = 561 - 474 C - 33 M - 17 C - 17 N - 21 M \quad (II.1)$$

- Relation d'Ahlers pour les alliages du Cu-Zn-Al (11)

$$M_s (\text{°C}) = 2485 - 66.9 (Zn + 1.355 Al) \quad (II.2)$$

Température M_d

L'application d'un champ de contrainte dans des conditions isothermes tend à favoriser la transformation martensitique. Plus la contrainte est élevée, plus nous observons une augmentation de la température M_s . Cependant si la température est trop élevée au dessus de M_s , il peut y avoir compétition entre le processus de la transformation martensitique et celui de la déformation plastique de la phase mère. Ainsi, nous définissons M_d comme la température au-dessus de laquelle, la transformation ne peut se produire même en présence de contraintes appliquées.

b) Morphologie

La deuxième caractéristique de la transformation martensitique se traduit par l'apparition de plaquettes individuelles de martensite qui se développent à une vitesse très grande (10^5 cm/s) (12).

On observe que la vitesse de croissance des plaquettes lenticulaires est beaucoup plus élevée dans la direction parallèle au grand axe que dans la direction perpendiculaire.

En général, la transformation progresse par formation de nouvelles plaquettes au voisinage des plaquettes déjà existantes, plutôt que par croissance ou épaissement de ces dernières fig (II.2.2).

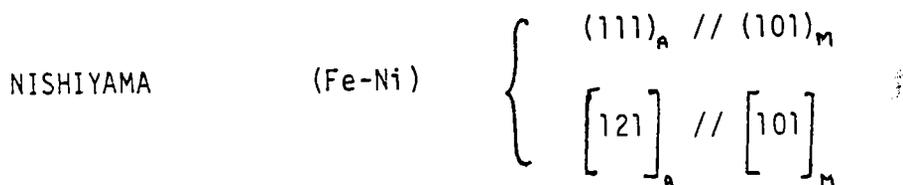
Les nouvelles plaquettes interagissent avec les anciennes et mettent en évidence une énergie d'interaction qui, peut être très importante pour des situations que nous envisagerons ultérieurement dans le chapitre IV.

II.2.2) Aspect cristallographique

Le mécanisme de cisaillement associé à la transformation martensitique produit certaines relations entre le réseau cristallin du produit martensitique et celui de la phase mère. Ces relations sont dites d'orientation. Elles constituent une donnée très importante pour la transformation. Elles peuvent être déterminée, soit expérimentalement avec une bonne précision (~ 1 degré) (par des techniques de diffraction des rayons x ou de diffraction électronique), soit en précisant un parallélisme entre certains plans et directions cristallographiques propres aux deux réseaux.

Nous citerons comme relations d'orientation celles de :

$$\text{KURDJUMOV et SACHS (Fe-C)} \quad \left\{ \begin{array}{l} (111)_a // (011)_m \\ [0\bar{1}1]_a // [1\bar{1}1]_m \end{array} \right. \quad (\text{II.3})$$



Ces relations d'orientation dépendent de plusieurs facteurs (alliage considéré, structures cristallographiques des deux phases, température de formation du produit martensitique, ...).

Les plaquettes de martensite sont séparées de la phase mère (austénite résiduelle) par une interface plane appelée : plan limite ou "plan d'habitat" fig (II.2.3).

Plusieurs théories ont été élaborées pour trouver des relations mathématiques reliant le réseau martensitique à celui de la phase mère. Ces relations permettent la détermination de la normale au plan d'habitat.

C'est BAIN qui fut le premier à proposer un modèle géométrique qui rend compte du passage de la phase austénitique (C.F.C) à la phase martensitique (q.c) ou (c.c) (13) .

Selon lui, la structure C.F.C peut être décrite en adoptant une maille (q.c) dont les axes ox' , oy' et oz' sont respectivement parallèles à des directions de type $\left[110 \right]$ et $\left[001 \right]$ fig (II.2.4).

Les paramètres de cette nouvelle maille sont alors :

$$\frac{a_0}{\sqrt{2}} : \text{selon } ox' \text{ et } oy'$$

$$a_0 : \text{selon } oz'$$

$$a_0 : \text{paramètre C.F.C}$$

Le passage de la maille (q.c) intermédiaire, à la maille (q.c) de la martensite de paramètre (a, c) peut être réalisé par une déformation pure correspondant à une compression $\frac{c}{a_0}$ selon oz' et une dilatation $\frac{a\sqrt{2}}{a_0}$ selon ox' et oy' .

Cette déformation rapportée aux axes principaux $ox' y' z'$ est représentée par la matrice diagonale :

$$\varepsilon_{ij}^{\text{Bain}} = \begin{pmatrix} \frac{a\sqrt{\varepsilon}}{a_0} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a\sqrt{\varepsilon}}{a_0} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c}{a_0} \end{pmatrix} \quad (\text{II.4})$$

Dans cette déformation, chaque atome conserve son entourage. Ce modèle correspond donc à une transformation sans diffusion mais il n'implique pas un mécanisme de cisaillement. En outre, il ne conduit pas aux relations cristallographiques d'orientation observées expérimentalement entre l'austénite et la martensite. On peut facilement montrer qu'un volume V transformé par $\varepsilon_{ij}^{\text{Bain}}$ engendre des contraintes internes importantes. Un mécanisme d'accomodation doit donc accompagner la déformation de Bain.

Ainsi, le modèle de Bain ne décrit pas totalement la transformation martensitique. Mais, il peut être retenu pour la représentation de la déformation pure à l'échelle du réseau. Par la suite, des théories phénoménologiques décrivant la transformation ont été proposées. Elles permettent la détermination de toutes les caractéristiques géométriques de la transformation. Nous y reviendrons en détail au chapitre III.

II.3 ASPECT CINEMATIQUE

Avant d'aborder la cinématique de la transformation martensitique, nous rappelons les équations fondamentales de la mécanique des milieux continus, afin d'analyser les conditions qui doivent être satisfaites à l'interface austénite-martensite.

II.3.1 Equations de la mécanique des milieux continus (14)(16)

Nous nous limiterons aux transformations infinitésimales, c'est-à-dire que nous envisagerons le formalisme des petites déformations et petites rotations, cela dans l'approximation quasi-statique, les forces d'inerties étant négligées.

L'hypothèse de continuité impose des conditions aux champs de déformation. Ces conditions se traduisent par les équations de compatibilité.

Le principe fondamentale de la dynamique, quant à lui, impose au champ de contraintes des restrictions qui se traduisent par les équations d'équilibre.

Pour caractériser la déformation d'un milieu continu entre l'état initial I et l'état final II, nous introduisons les grandeurs suivantes :

- Champ de déplacement $\vec{u}(P)$: au cours d'une déformation le point P se déplace de P_I à P_{II} , le champ de déplacement est défini par :

$$\vec{u}(P) = \vec{P}_{II} - \vec{P}_I = \vec{OP}_{II} - \vec{OP}_I \quad (II.5)$$

- Gradient de déplacement β_{ij} : en faisant un développement limité au premier ordre de $u_i(x_j)$ au voisinage de x_j nous obtenons :

$$u_i(x_j) = u_i^0 + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} x_j \quad (II.6)$$

Nous définissons le tenseur gradient de déplacement β_{ij} par :

$$\beta_{ij} = u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (II.7)$$

Nous noterons σ_{ij} les composantes du tenseur de contraintes σ , ϵ_{ij} celles du tenseur de déformation ϵ et ω_{ij} celles du tenseur rotation ω .

Nous utiliserons la convention d'EINSTEIN de sommation sur les indices répétés.

Equations de compatibilité

Un milieu continu ne peut pas être le siège d'une déformation et d'une rotation quelconques. Pour que le milieu ne perde pas sa compacité dans l'espace euclidien, il faut que le gradient de déplacement β_{ij} dérive d'un champ de déplacement :

$$\beta_{ij} = u_{i,j} \quad (II.8)$$

Ainsi du_i est une différentielle totale exacte. Elle vérifie les conditions d'intégrabilité de CAUCHY :

$$du_i = \beta_{ij} dx_j$$

$$\beta_{ji,k} = \beta_{ki,j} \quad (II.9)$$

En introduisant le symbole de permutation $\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{ijk directe} \\ 0 & \text{2 indices égaux} \\ -1 & \text{ijk indirecte} \end{cases}$

Nous aurons $\epsilon_{ijk} \beta_{ke,j} = 0$ ou $\text{Rot } \beta = 0$ (II.10)

La partie symétrique de β_{ij} donne le tenseur de déformation :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\beta_{ij} + \beta_{ji}) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (II.11.a)$$

et sa partie antisymétrique donne le tenseur rotation :

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} (\beta_{ij} - \beta_{ji}) = \frac{1}{2} (u_{i,j} - u_{j,i}) \quad (II.11.b)$$

A partir du $\text{Rot } \beta = 0$ on aboutit aux équations de compatibilité de KRÖNER qui sont aussi les conditions de SAINT-VENANT :

$$\epsilon_{ikl} \epsilon_{jmn} \epsilon_{lm, km}^{(n)} = 0 \quad (\text{II.12})$$

Ces équations de compatibilité locales sont écrites en volume et doivent être satisfaites en tous points. Comprises au sens de distribution, elles impliquent des conditions de passage à une interface plane séparant deux milieux différents.

Dans le cas d'une interface plane de normale \vec{n} , les équations de compatibilité s'écrivent : (15)

$$\epsilon_{ikl} \epsilon_{jmn} \Delta \epsilon_{lm} n_k n_m = 0 \quad (\text{II.13})$$

avec $\Delta \epsilon_{lm} = \epsilon_{lm}^{\text{II}} - \epsilon_{lm}^{\text{I}}$ (constante par morceau)

Equations d'équilibre

Un milieu déformable occupant le volume v limité par la frontière S est soumis à l'action des forces extérieures représentées par :

- \vec{T} : forces surfaciques définies sur S
- \vec{F} : forces massiques agissant sur chaque élément de v
(Les forces d'inerties sont négligées)

Dans le référentiel galiléen, la loi fondamentale de la dynamique implique que la résultante des forces et des moments appliqués sont nulles.

a) équilibres des forces : $\int_v \rho \vec{F} dv + \int_S \vec{T} dS = \vec{0}$

b) équilibres des moments : $\int_v \rho (\vec{F} \wedge \vec{x}) dv + \int_S (\vec{T} \wedge \vec{x}) dS = \vec{0}$ (II.14)

En utilisant le postulat de CAUCHY, nous supposons que la densité surfacique T en un point P de S dépend uniquement du point considéré et de la normale unitaire extérieure \vec{n}^s . Nous écrivons :

$$\vec{T}(P, \vec{n}^s) = \sigma^{(n)} \vec{n}^s \quad (II.15)$$

En notation indicielle :

$$T_i = \sigma_{ij}^s n_j^s$$

En substituant dans (II.14.a) l'expression de T et en utilisant le théorème de la divergence, nous déduisons la forme globale pour tout le volume V .

$$\int_V (\sigma_{ij}^{(n)}, j + \rho F_i^{(n)}) dv = 0 \quad (II.16)$$

D'où la forme locale des équations d'équilibre :

$$\sigma_{ij}^{(n)}, j + \rho F_i^{(n)} = 0 \quad (II.17)$$

De la même façon nous déduisons de (II.14.b) la symétrie du tenseur $\sigma^{(n)}$:

$$\sigma_{ij}^{(n)} = \sigma_{ji}^{(n)} \quad (II.18)$$

Au passage d'une interface de normale \vec{n} , la relation d'équilibre (II.17) se traduit par la condition :

$$\Delta \sigma_{ij}^s n_j^s = 0 \quad (II.17.Bis)$$

II.3.2 Cinématique de la transformation

On admet généralement que la déformation intrinsèque associée à la transformation martensitique est la résultante : fig (II.3.1)

- d'une déformation du réseau cristallographique (déformation de BAIN)
- d'une déformation à réseau invariant $\epsilon_{ij}^{R.I}$ responsable du cisaillement. Cette dernière déformation peut être un glissement ou du maclage. Son rôle est de diminuer l'énergie de déformation associée aux contraintes internes provoquées par la déformation incompatible de BAIN. La déformation intrinsèque s'écrit alors :

$$\epsilon_{ij}^{AM} = \epsilon_{ij}^B + \epsilon_{ij}^{R.I} \quad (II.19)$$

En chargement isotherme, par application de contraintes macroscopiques et au-delà d'un certain seuil, un volume V_M de martensite prend naissance dans la matrice de l'austénite. Une interface austénite - martensite se forme. Pour des raisons de compatibilité que nous verrons au chapitre III, celle-ci prend souvent la forme d'un plan appelé : plan d'habitat.

Soit \vec{n} la normale au plan d'habitat et \vec{m}' la direction de déplacement correspondant à un glissement et une dilatation fig (II.3.3). Un point M de coordonnées x_k dans un repère en coordonnées cartésiennes rectangulaires subit un déplacement de composante u_i tel que :

$$u_i = g x_k n_k m'_i \quad (II.20)$$

g : amplitude de déplacement unitaire

La déformation ϵ_{ij}^{AM} est donnée par :

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij}^{AM} &= \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) = \frac{g}{2} (m'_i n_j + m'_j n_i) \\ &= g R'_{ij} \end{aligned} \quad (II.21)$$

R'_{ij} : facteur d'orientation

\vec{m} est la projection de \vec{m}' dans le plan d'habitat et α l'angle (\vec{n}, \vec{m}')

Dans le repère orthonormé $(0, \vec{m}, \vec{n}, \vec{m} \wedge \vec{n})$, la déformation s'écrit :

$$\varepsilon_{ij}^{AM} = \frac{g}{2} \begin{pmatrix} 0 & \cos \alpha & 0 \\ \cos \alpha & 2 \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (II.22)$$

Une variation dV_m du volume de la martensite formée va induire une quantité de déformation $d\varepsilon_{ij}^{AM}$ que nous écrivons : fig (II.3.2)

$$d\varepsilon_{ij}^{AM} = g R'_{ij} \frac{dV_m}{V} = g R'_{ij} df \quad (II.23)$$

f est la fraction volumique de martensite formée et df son accroissement.

A partir de l'analyse purement cinématique, nous déduisons les caractéristiques suivantes accompagnant la transformation :

- une variation de volume $\frac{\Delta V}{V} \neq 0$ contrairement à la déformation plastique où $\frac{\Delta V}{V} = 0$

$$\frac{\Delta V}{V} = g \sin \alpha = \varepsilon_{ii}^{AM} \quad (II.24)$$

- La fraction volumique de martensite formée peut varier de 0 à 1. (II.25)

L'amplitude de la déformation de transformation est donc limitée et dépend des variants actifs.

$$0 \leq \varepsilon_{ij}^{AM} \leq g R'_{ij} \quad (II.26)$$

- La transformation pouvant être réversible, les quantités $d\mathcal{f}$ peuvent être négatives (\mathcal{f} toujours positive).

Du fait de la symétrie de la phase mère, plusieurs variants peuvent coexister pour un chargement donné. La contrainte apporte une énergie motrice supplémentaire pour la transformation. Elle conduira à choisir le premier variant de martensite formé. Ce variant aura une orientation telle que la déformation au sens de la contrainte appliquée soit maximale.

Désignons par h le variant particulier dont la fraction volumique croît de $d\mathcal{f}^h$ et par $R'_{ij}{}^h$ son facteur d'orientation. L'accroissement de la déformation moyenne du monocristal s'écrit donc :

$$d\varepsilon_{ij} = \sum_h g R'_{ij}{}^h d\mathcal{f}^h \quad (\text{II.27})$$

L'activation de plusieurs variants est une source d'hétérogénéité qui a des effets importants sur le comportement du matériau. Cette hétérogénéité entraîne la présence de contraintes internes et d'une énergie élastique associée. Ces contraintes internes peuvent modifier la morphologie de la structure ainsi que la réponse macroscopique.

Un effet important accompagnant l'activation de plusieurs variants et les interactions entre ces variants. Nous distinguons deux stades dans le développement des variants :

-) Le premier, correspond aux actions à distance entre ces variants. Elles interviennent, au début de la transformation martensitique. "Ces variants ont été assimilés à des inclusions ellipsoïdales dans des travaux antérieurs (17). L'énergie est assimilée à l'énergie d'interaction d'une paire d'inclusion."
-) Le second auquel nous nous intéressons dans la suite de ce travail; correspond aux actions de contact entre les variants. Ces actions sont responsables de l'écroutissage dans la transformation martensitique. Elles dépendent de la morphologie et de la nature des variants.

II.4 THERMODYNAMIQUE DE LA TRANSFORMATION

Selon GIBBS, un système thermodynamique évolue spontanément dans le sens d'une diminution de son énergie libre (enthalpie libre). Il en est ainsi des métaux et des alliages.

Si nous appelons G_i et G_f les enthalpies libres rapportées respectivement à l'unité de volume de la phase initiale et de la phase finale, l'énergie fournie par la transformation s'écrit :

$$(G_f - G_i) V_M \quad (II.28)$$

V_M : volume de martensite formée.

La transformation nécessite une certaine dépense d'énergie, notamment pour la formation de l'interface de séparation entre les deux phases (austénite - martensite) et pour vaincre l'énergie élastique associée aux contraintes internes.

Soit Γ l'énergie par unité de surface de cette interface. L'énergie de formation de l'interface s'écrit alors :

$$E_{\text{interface}} = \Gamma S \quad (II.29)$$

L'application d'une contrainte macroscopique Σ_{ij} induit une énergie mécanique d'interaction avec le champ de contraintes extérieures qui s'écrit :

$$E_{\text{int}} = - \int_V \Sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{AM} dV \quad (II.30)$$

Nous observons une énergie d'interaction du volume V_M de la martensite avec l'austénite résiduelle. Cette énergie est due aux incompatibilités de la déformation ε_{ij}^{AM} qui sont les sources de contraintes internes d'après KRÖNER. Nous la noterons :

$$E_{\text{incl}} = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}^{(n)} \varepsilon_{ij}^{(n)} dV \quad (II.31)$$

$\sigma_{ij}^{(a)}$ est le champ de contraintes internes locales dans la martensite.

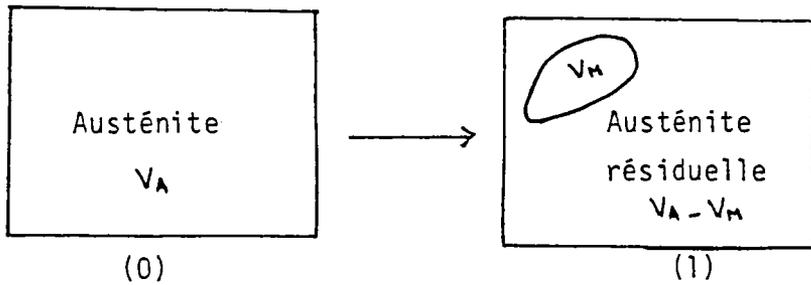
Par exemple, dans le cas d'une inclusion ellipsoïdale on a : (18)

$$\sigma_{ij}^{(a)} = C_{ijkl} \left(S_{klmn} \varepsilon_{mn}^{AM} - \varepsilon_{kl}^{AM} \right) \quad (II.32)$$

S : tenseur d'ESHELBY

C : constante élastique du milieu

Le bilan énergétique se traduit par :



(0) : correspond à la phase austénitique

(1) : correspond à la coexistence des deux phases austénitique et martensitique

L'énergie libre s'écrit :

$$(0) : G^A V_A \quad (II.33)$$

$$(1) : G^A (V_A - V_M) + G^M V_M + \Gamma S + E_{int} + E_{incl}$$

La variation de l'énergie libre de GIBBS est :

$$\Delta G = G(1) - G(0) = V_M (G^M - G^A) + \Gamma S + E_{int} + E_{incl} \quad (II.34)$$

$$\Delta G = V_M \Delta G^C + \Gamma S + \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^e dv - \int_V \Sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{AM} dv \quad (II.35)$$

La variation de l'énergie libre évolue en fonction du volume de martensite formée V_M fig (II.4.1).

si $\Delta G > 0$ alors $\tau > \tau_0$ (τ_0 : température d'équilibre) la transformation ne pourrait se produire.

Par contre, si $\Delta G \leq 0$, nous aurons :

$$V_M \Delta G^c + \Gamma S + E_{int} + E_{incl} \leq 0 \quad (\tau < \tau_0) \quad (II.36)$$

la transformation aurait lieu

La condition d'équilibre est satisfaite si nous avons :

$$\Delta G = 0 \quad (II.37)$$

II.5 INFLUENCE DE LA TRANSFORMATION SUR LES VARIABLES MECANIQUES

La transformation martensitique induite par l'application d'une contrainte ou d'une déformation plastique affecte considérablement les propriétés mécaniques de certains matériaux, notamment les aciers et les alliages.

De manière générale, on distingue deux ordres de problèmes relatifs à l'interaction transformation - variables mécaniques.

D'une part, l'action des variables mécaniques sur la transformation, en particulier, sur la nucléation de celle-ci.

D'autre part, l'influence de la transformation sur les variables mécaniques. Cette influence se résume à deux rôles essentiels :

- la martensite est une phase durcissante
- la transformation est un mode de déformation

La courbe $\sigma(\varepsilon)$ dans l'intervalle (M_s, M_d) traduit l'effet résultant de ces deux rôles.

1°) effet de Σ sur T

L'influence de la contrainte Σ sur la température M_s est représentée par la courbe (Σ, T) . Cette courbe présente deux stades différents : fig (II.5.1)

Stade 1 : La contrainte appliquée est inférieure à la limite élastique de l'austénite $0 < \Sigma < \Sigma_e$

Dans ce stade, la contrainte augmente linéairement avec la température M_s . La température limite du stade 1 est notée M_s^σ

Stade 2 : La contrainte appliquée est supérieure ou égale à la limite d'élasticité de la phase mère. Dans ce cas, la déformation plastique précède la transformation martensitique. La contrainte critique augmente rapidement en fonction de la température jusqu'au point M_d

Plusieurs auteurs ont observé ce type de comportement (19), (20), (21). Ils ont proposé des critères de variations de M_s avec la contrainte appliquée. L'un des critères les plus importants est celui développé par PATEL et COHEN. Selon eux, le travail ω peut être exprimé en fonction de la contrainte appliquée (Σ), de l'orientation du cristal par rapport à l'axe de traction (θ), de la variation volumique ($\frac{\Delta V}{V}$) et du cisaillement (γ).

$$\omega = \frac{1}{2} \Sigma \left[\gamma \sin 2\theta \pm \frac{\Delta V}{V} (1 + \cos 2\theta) \right] \quad (II.38)$$

Le travail maximum est obtenu en prenant $\frac{\partial \omega}{\partial \theta} = 0$ (II.39)

$$\Rightarrow \tan 2\theta = \pm \frac{\gamma V}{\Delta V} \Rightarrow \theta = \frac{1}{2} \text{Arc} \tan \left(\pm \frac{\gamma V}{\Delta V} \right) \quad (II.40)$$

La variation de M_s est exprimée par :

$$\frac{dM_s}{d\Sigma} = \frac{\partial w / \partial \Sigma}{-\Delta S} \quad \text{avec } \Delta S: \text{ variation d'entropie} \quad (\text{II.41})$$

$$\Delta S = - \frac{\partial(\Delta G)}{\partial T}$$

$$\frac{dM_s}{d\Sigma} = \frac{1}{2} \left[\gamma \sin 2\theta \pm \frac{\Delta V}{V} (1 + \cos 2\theta) \right] / \frac{\partial(\Delta G)}{\partial T} \quad (\text{II.42})$$

Malgré l'accord du critère avec les résultats expérimentaux, il ne permet pas de tenir compte de la nature de l'arrangement des défauts susceptibles de servir de germes de transformation. Or on sait que ces facteurs exercent une influence notable sur la nucléation de la transformation, que celle-ci soit provoquée par une simple trempe ou par application de contrainte macroscopique.

II.5.2) Plasticité de transformation

Ainsi que nous l'avions annoncé dans l'introduction de ce paragraphe, nous porterons notre attention au cours de cette partie, sur certaines conséquences mécaniques de la transformation martensitique.

De manière plus générale, le phénomène de plasticité de transformation se caractérise par la déconsolidation anormale d'un métal soumis à une contrainte lorsqu'une transformation martensitique s'y produit. Deux types de circonstances sont distingués :

- plasticité de transformation en régime statique

$\Sigma = \text{cste}$ la transformation martensitique est obtenue par variation de la température. La plasticité de transformation se traduit par une variation anormale et permanente des dimensions de l'échantillon, lorsque la transformation martensitique est provoquée par une trempe au-dessous de M_s .

- plasticité de transformation en régime dynamique

$T = \text{cste}$ la transformation martensitique est obtenue par variation de la contrainte appliquée Σ ($M_s < T < M_d$)

La transformation perturbe considérablement les propriétés de déformations plastiques du métal, ainsi que nous le verrons par la suite, elle est source de durcissement et de plasticité supplémentaire. Il est à noter, que les deux types de plasticité ont été étudiés dans les modèles de GREENWOOD et JOHNSON et le modèle de MAGEE.

- GREENWOOD - JOHNSON (11)

Ils supposent que la déformation plastique destinée à accommoder les contraintes internes résultant de la transformation ($\frac{\Delta V}{V} \neq 0$) est "orientée" par application d'une contrainte uniforme Σ . Ils adoptent des hypothèses simplificatrices et ils obtiennent :

$$\xi = \frac{5}{6} \frac{\Sigma}{\Sigma_e} \frac{\Delta V}{V} \quad (II.43)$$

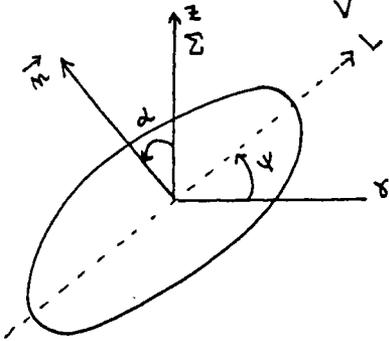
- Σ_e : contrainte d'écoulement d'austénite
- $\Delta V/V$: variation volumique de la transformation
- Σ : contrainte appliquée
- ξ : déformation totale

L'application de la théorie de G.J se heurte à une objection. En effet, la transformation martensitique est caractérisée non seulement par un changement relatif du volume mais aussi par un cisaillement qui entraîne des déformations plastiques de l'austénite (le cisaillement n'est pas tenu en pris par G.J).

Il est cependant certain que l'argument fondamental de G. J. à savoir la création d'une déformation plastique par les contraintes internes et l'orientation de cette déformation par une contrainte appliquée, demeurent valable quand on tiend compte de l'effet de cisaillement. Cet effet dépendant de la distribution des orientations des plaquettes fait l'objet de la théorie de Magee.

- MAGEE (23)

Il se base sur le mécanisme intrinsèque de la transformation martensitique, à savoir, un glissement sur le plan d'habitat et une dilatation perpendiculaire au même plan (la dilatation est égale à la variation volumique $\frac{\Delta V}{V}$)



Il considère une plaquette de martensite de volume V

α l'angle de la normale au plan avec l'axe de traction.

ψ l'angle de la direction de cisaillement avec la droite de plus grande pente du plan.

V : volume total de l'éprouvette

MAGEE fait l'hypothèse que $\psi = 0$ et il obtient :

$$\frac{\partial W}{\partial \Sigma} = \epsilon(\alpha) = \left[\frac{\gamma}{2} \sin 2\alpha + \frac{\Delta V}{V} (1 + \cos 2\alpha) \right] \frac{V}{V} \quad (II.44)$$

avec γ : cisaillement

Si $f(\alpha)$ est la fraction volumique de martensite constituée de plaquettes d'orientation α , la déformation macroscopique est donnée par :

$$\epsilon_m = \int \epsilon(\alpha) f(\alpha) d\alpha \quad (II.45)$$

Enfin, on peut dire que les deux théories sont complémentaires :

- la théorie de MAGEE implique l'existence d'une interaction contrainte - transformation allant dans le sens d'un excès de nombres des plaquettes "favorables" sur celui des plaquettes "défavorables".

- la théorie de G.J. tient compte de $\frac{\Delta V}{V}$ et oublie l'effet de cisaillement ou (orientation des plaquettes).

Les deux théories sont insuffisantes pour expliquer l'ensemble de la plasticité de transformation. Car, la notion de contraintes internes y est fort peu explicitée et aucun compte n'est tenu des interactions entre variants. En fait, les interactions entre variants devant tenir un rôle déterminant dans l'écoulement plastique lié aux cisaillements de transformation (1)(2). Une bonne partie de cette thèse est consacré à l'étude des interactions entre variants de martensite et leurs effets sur le comportement des matériaux.

II.6 CONCLUSION

Nous avons rappelé quelques aspects fondamentaux de la transformation martensitique. Ces aspects concernaient la cristallographie, la cinématique, la thermodynamique et la mécanique.

Sur le plan cristallographique, nous avons souligné l'importance des relations d'orientation et la normale au plan d'habitat. Ensuite, nous avons dégagé les principales caractéristiques cinématiques de la transformation, tout en mettant en évidence l'intérêt de l'étude des interactions entre les variants.

Nous avons étudié l'aspect thermodynamique de la transformation par l'intermédiaire de la théorie de GIBBS. Enfin, nous avons rappelé l'aspect mécanique de la transformation et l'influence des contraintes appliquées sur le développement de la transformation martensitique.

Les chapitres suivants sont consacrés à une description par les lois générales de la mécanique des milieux continus de la normale au plan d'habitat, des relations d'orientation et des interactions entre variants de martensite. Ces interactions qui jouent un rôle important sur le comportement au cours de la transformation.

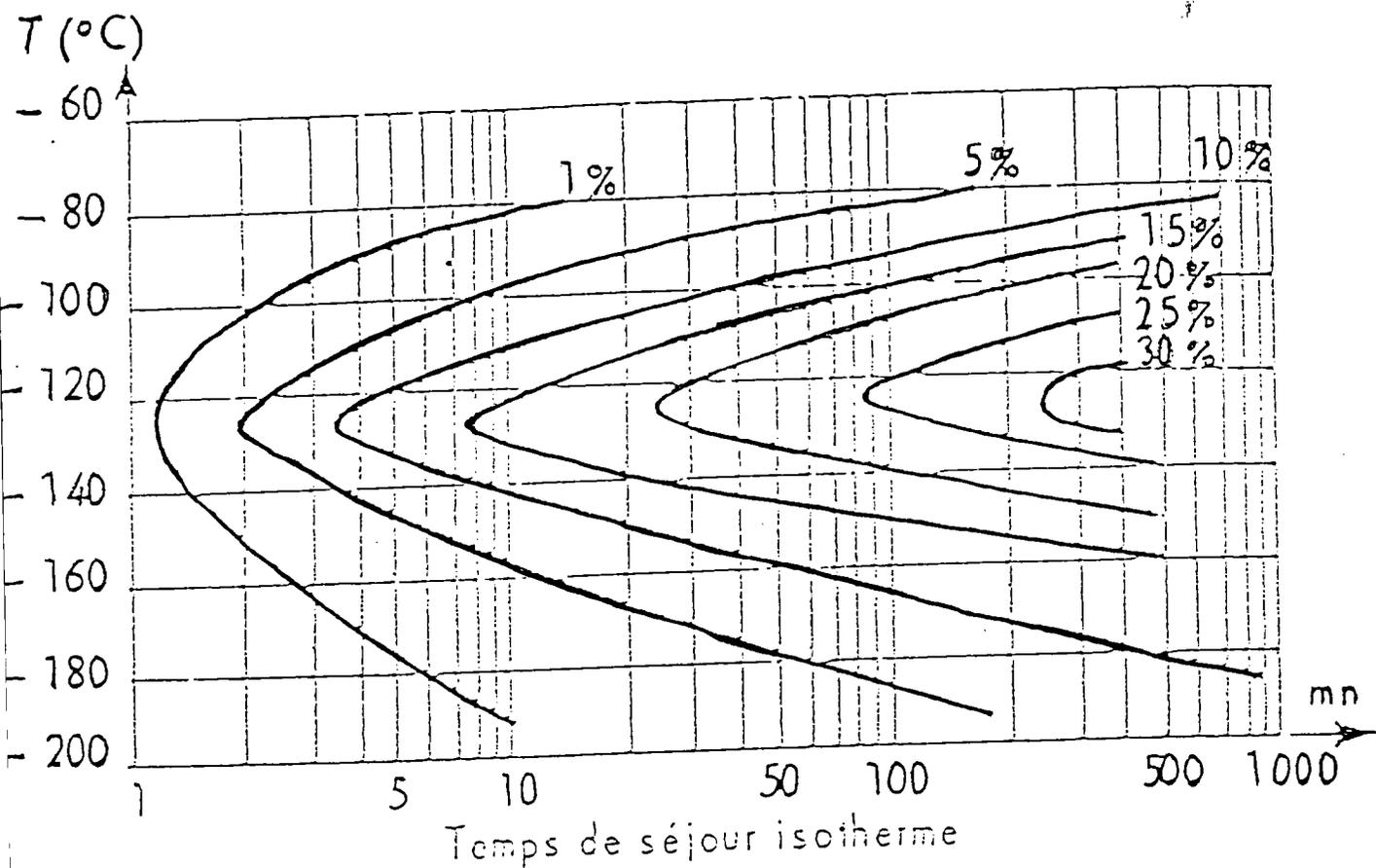


Fig. (II-2-I) : Courbes T.T.T. d'après CECH et HOLLMAN (Fe-Ni-Mn)

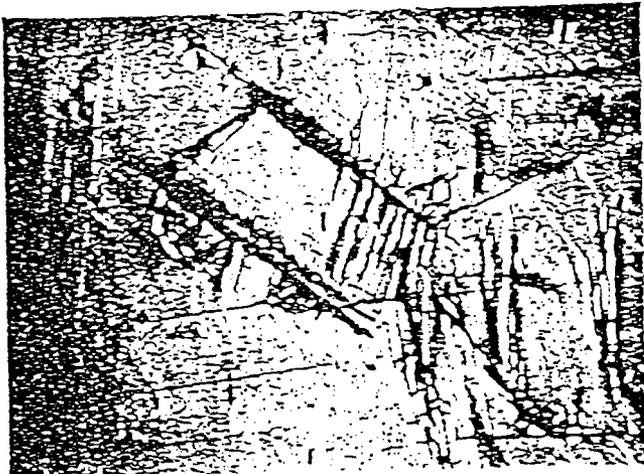
Après un refroidissement rapide à -180°C suivi d'un réchauffage entre -80 et -160°C , on constate qu'à une température donnée, la quantité de martensite formée augmente en fonction de la température.



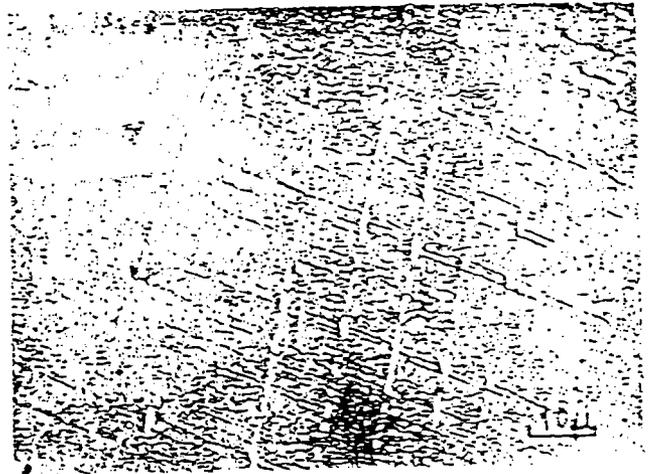
a



b



c



d

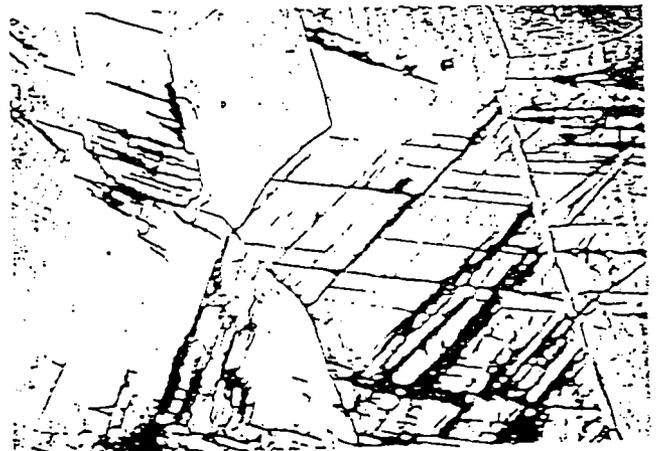
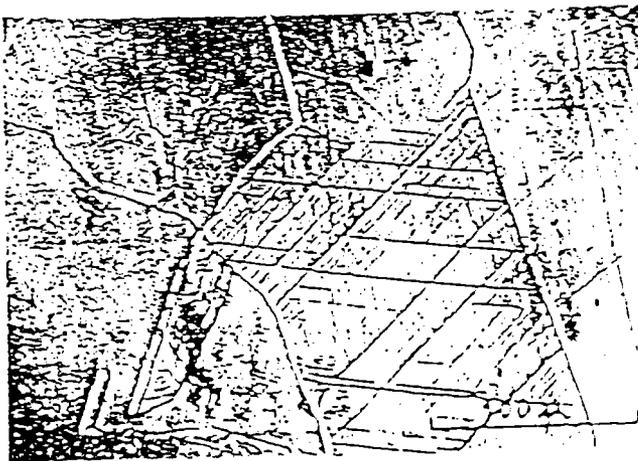


Fig. (11-2-2) : transformation $\gamma \rightarrow \alpha'$ par trempe

- a) Martensite formée en profondeur
- b) Martensite formée en surface (révélée par attaque chimique et effet de relief)
- c) Martensite formée aux intersections de bandes ξ
- d) Nucleation de α' à l'arrachement des bandes ξ préexistantes

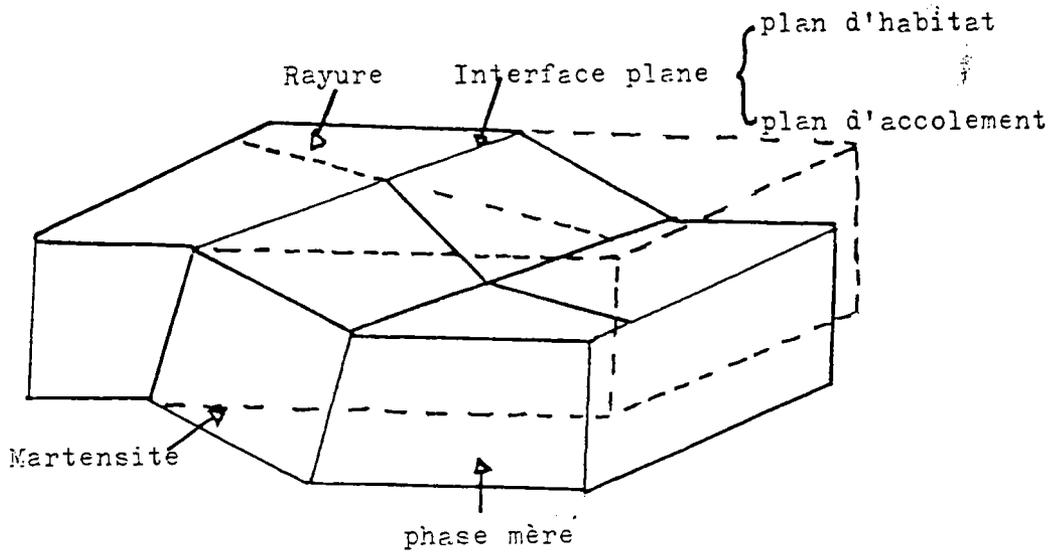


Figure (II-2-3) Schéma de formation d'une plaquette de martensite

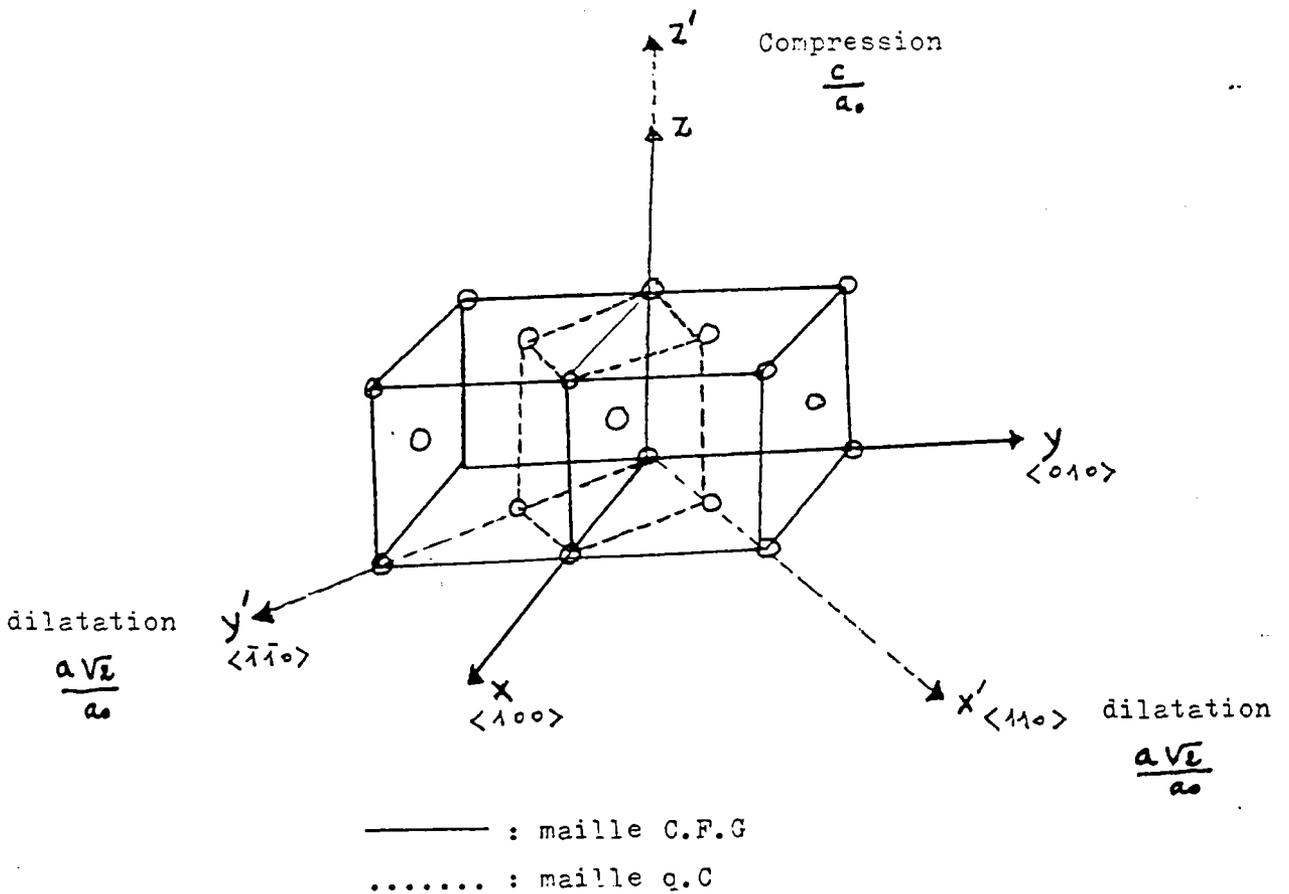
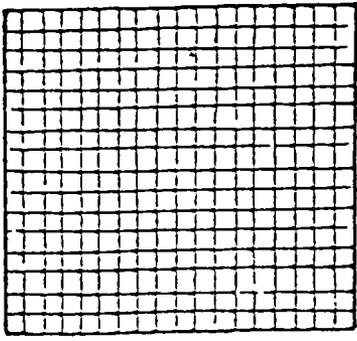
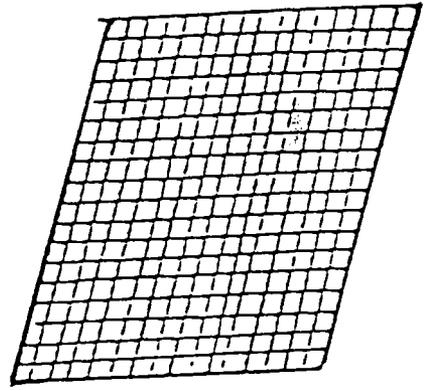


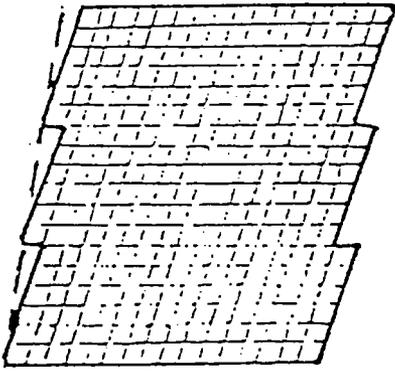
Figure (II-2-4) déformation homogène de BAIN



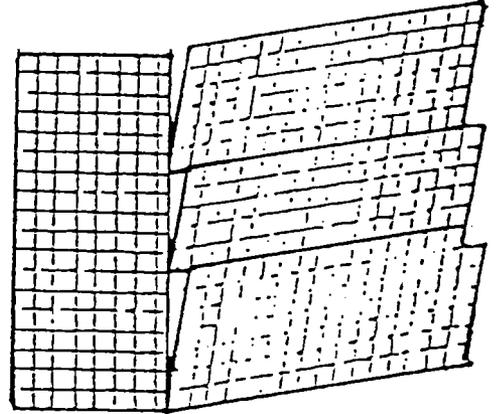
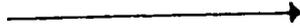
Réseau initial



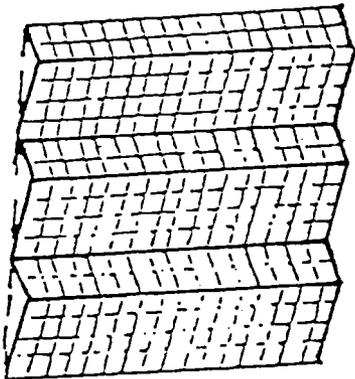
déformation homogène du réseau



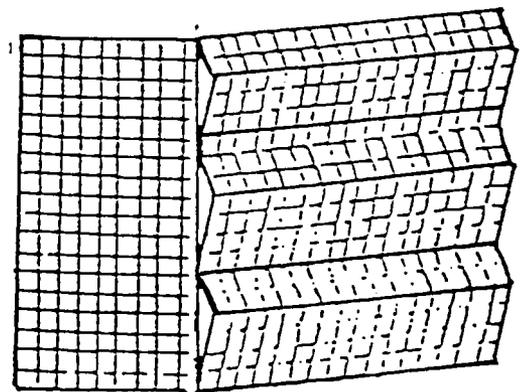
déformation à réseau invariant (glissement)



rotation (glissement)

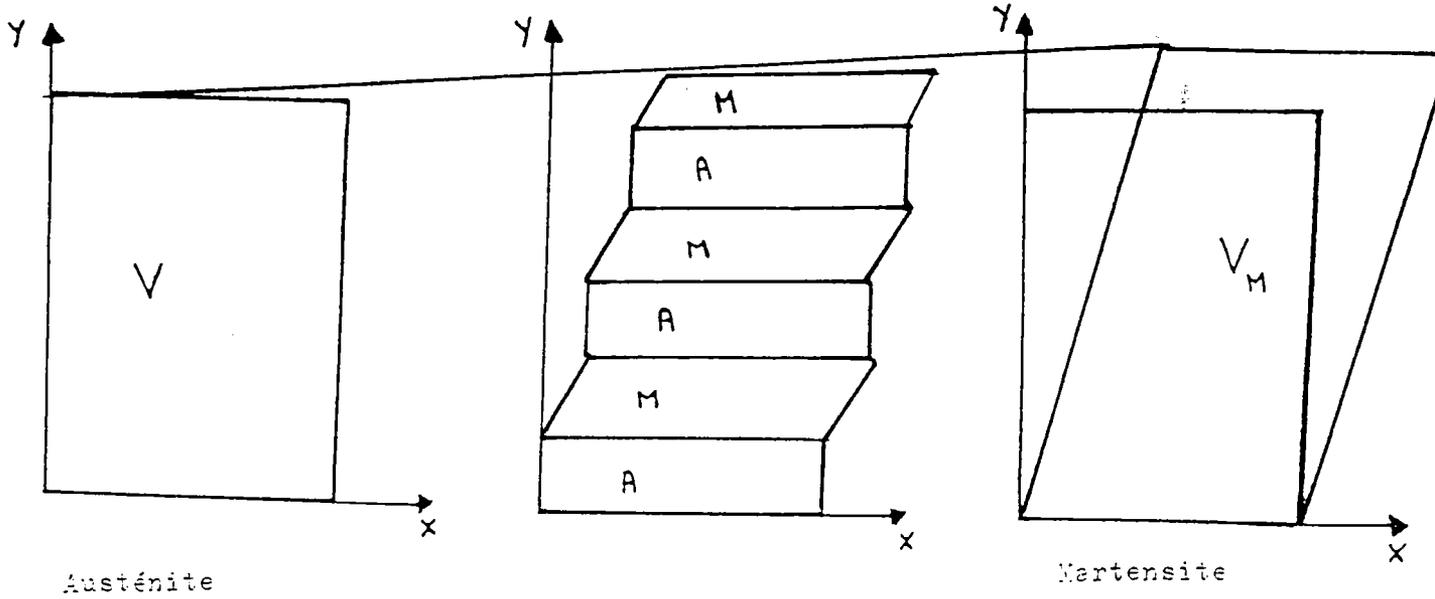


déformation à réseau invariant (maclage)



rotation (maclage)

Fig. (II-3-I) Mécanisme de déformation de la transformation martensitique.

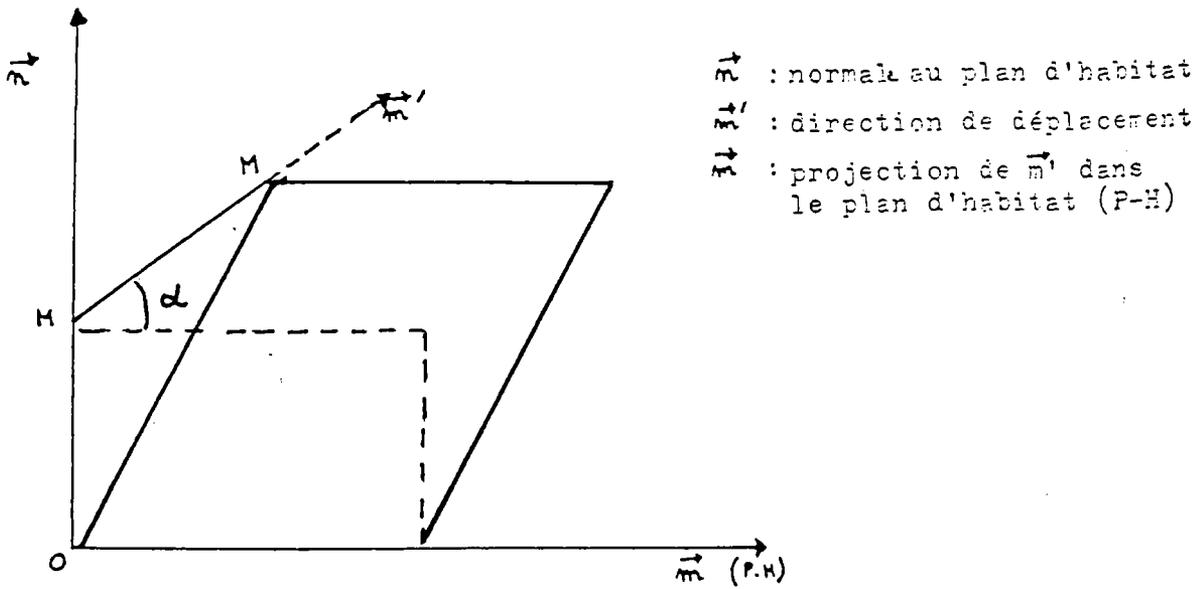


Austénite

Martensite

$$V_M = (1 + g \sin \alpha) V$$

Fig. (II-3-2) déformation par transformation partielle



- \vec{m} : normal au plan d'habitat
- \vec{z} : direction de déplacement
- \vec{m}' : projection de \vec{m} dans le plan d'habitat (P-H)

Fig. (II-3-3) déformation par transformation martensitique d'un élément de volume

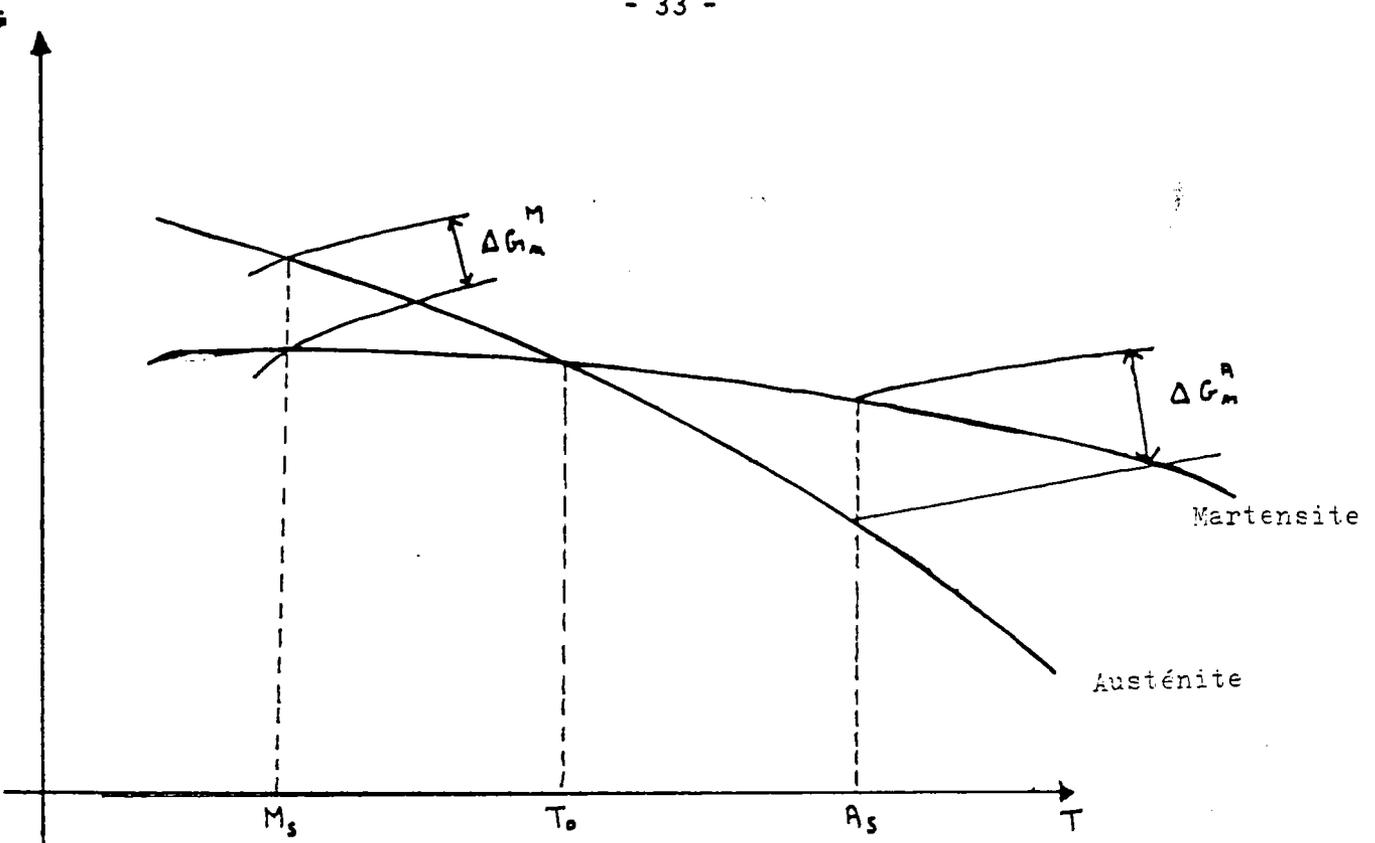


Fig. (II-4-I)

Représentation schématique de la variation de l'énergie libre de GIEBS des 2 phases en fonction de la température.

M_s la température du début de la transformation

T_0 représente la température d'équilibre thermochimique telle que :

pour $T > T_0$ l'austénite est stable

$T < T_0$ la martensite est stable

A_s température de réversion au-dessus de laquelle la martensite se transforme en austénite.

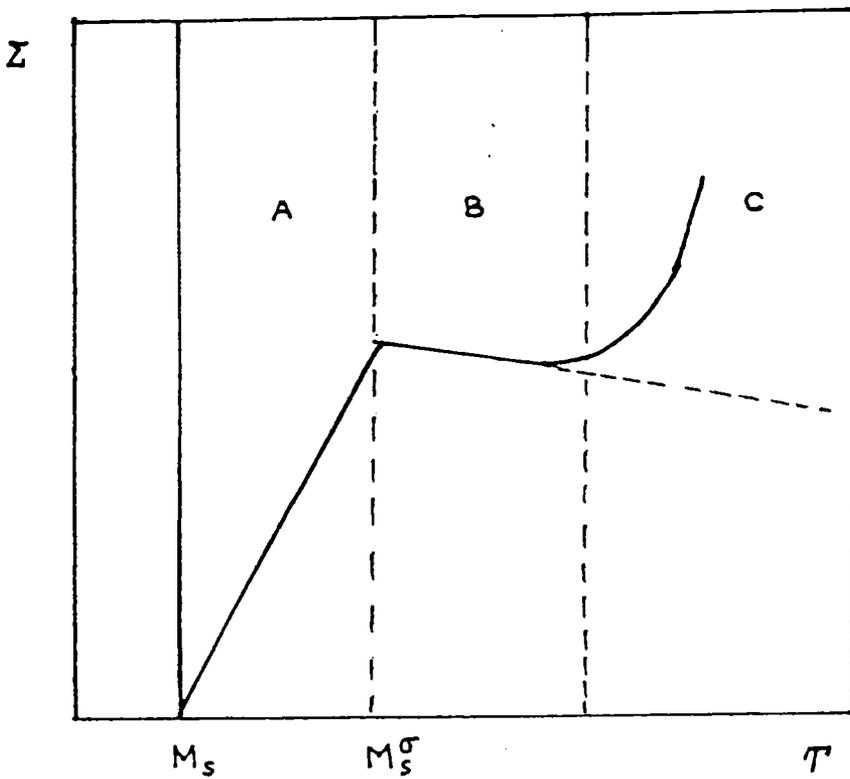


Fig. (II-5-I)

Représentation de la contrainte nécessaire pour induire la transformation martensitique en fonction de la température (alliages ferreux). (19)

Zone A : $\Sigma < \Sigma_e$ (la contrainte inférieure à la limite élastique de la matrice)

Σ augmente linéairement avec T

M_s^σ : température limite de cette zone

Zone B : $\Sigma = \Sigma_e$ (la contrainte nécessaire pour induire la transformation est égale à la limite élastique de la matrice).

Zone C : $\Sigma > \Sigma_e$ déformation plastique de la matrice. Augmentation très importante de la contrainte critique avec la température.

CHAPITRE III

NOUVELLE APPROCHE DES THEORIES PHENOMENOLOGIQUES

III.1 INTRODUCTION

III.2 THEORIE PHENOMENOLOGIQUE DE (W.L.R)

III.3 NOUVELLE FORMULATION PROPOSEE

III.3.1) Cinématique de la transformation

III.3.2) Compatibilité

III.3.3) Modélisation et nouvelle approche

III.4 SITUATIONS PARTICULIERES

III.4.1) Accommodation dans la martensite

III.4.2) Accommodation dans la martensite avec un système de glissement

III.4.3) Accommodation dans l'austénite

III.5 APPLICATION A L'INTERFACE AUSTENITE-MARTENSITE

Cas du Cu - 18.4 Zn - 7.3 Al

III.6 APPLICATIONS AUX INTERACTIONS ENTRE VARIANTS DE MARTENSITE (polyvariants)

III.7 CONCLUSION

III.1 INTRODUCTION

D'un point de vue structural, la transformation martensitique est caractérisée par l'interface entre l'austénite et la martensite (plan d'habitat), l'orientation cristallographique de la martensite par rapport à l'austénite et la déformation macroscopique associée à la transformation.

Les théories phénoménologiques développées par WESCHLER-LIBERMAN-READ (W.L.R) (24) et BOWLES-MACKENZIE (B.M)(25) permettent généralement de déterminer tous les éléments géométriques de la transformation. Elles reposent sur des hypothèses dont les principales sont :

- l'existence d'un plan invariant
- la présence d'une déformation supplémentaire (par rapport à la déformation de Bain) à réseau invariant

Cette dernière déformation est nécessaire à l'accommodation de la déformation de Bain.

Ces théories ne permettent pas de rendre compte de certaines observations (plan d'habitat (225)_{TL} au lieu de (259)_{exp.} dans le Fe-31 % Ni). Elles ont été complétées par CROKEN et BILBY (26) qui ont introduit la notion de double cisaillement. BOWLES et DUNNE (27) ont également modifié ces théories en introduisant une accommodation plastique dans l'austénite.

L'approche simplifiée que nous proposons est une formulation en petites déformations des théories phénoménologiques qui décrivent la transformation martensitique. La nouvelle approche est fondée sur la notion d'interface compatible. Elle permet par l'intermédiaire des équations de compatibilité de la mécanique des milieux continus de déterminer l'amplitude de cisaillement, la normale au plan d'habitat, la direction de déplacement, la rotation élastique et la déformation macroscopique.

Pour illustrer la nouvelle formulation, nous prendrons deux applications de nature différentes :

- interface austénite-martensite (plan d'habitat)
- interaction entre variants de martensite

Nous comparerons nos résultats à ceux de la théorie phénoménologique de (W.L.R) (24), (B.M) (25) et à ceux de DELAEY (28) sur les variants autoaccommodants dans le cas des alliages Cu-Zn-Al.

L'utilisation des équations de la mécanique des milieux continus en petites déformations se justifie car les déformations présentes sont de l'ordre de 10 %. Les calculs se simplifient considérablement (linéarisation) et conduisent à des résultats corrects dans les cas envisagés. De plus, les équations proposées généralisent les concepts habituels de la théorie phénoménologique car elles permettent la prise en compte :

- d'une rotation de Bain
- d'une transformation à réseau invariant à la fois dans l'austénite et la martensite.

De plus, elles ne nécessitent pas l'existence d'un plan invariant mais supposent uniquement l'existence d'un plan compatible associé à une déformation compatible, ce qui est beaucoup moins restrictif.

III.2 THEORIE PHENOMENOLOGIQUE DE W.L.R

La théorie cristallographique phénoménologique de W.L.R a été développée dans le cas des aciers (transformation C.F.C \rightarrow q.c ou c.c). Par la suite, elle a été étendue aux cas des alliages comme Cu-Zn (29) et Cu-Zn-Al (30).

La théorie mathématique de ces auteurs conduit à la détermination des caractéristiques structurales de la transformation, en se fondant sur les valeurs expérimentales des paramètres cristallographiques de ces deux phases et sur certaines hypothèses concernant les déformations à réseau invariant qui accompagnent la déformation du réseau. Leur calcul est fondé sur les deux axiomes suivants :

- Parmi toutes les déformations géométriques possibles permettant la transformation, celle qui se produira est celle qui entraînera le minimum de distorsion. Elle nécessitera ainsi une énergie minimale.
- L'interface séparant les deux phases, est supposée être un plan invariant, c'est-à-dire un plan de distorsion nulle dont la position reste fixe au cours de la transformation.

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, la déformation de Bain, seule, est insuffisante pour décrire la transformation martensitique. En effet, les observations expérimentales montrent que la transformation implique des déformations de type cisaillement. Le problème revient à déterminer la déformation pure ($\xi^0 + \xi^{R.I}$) et la rotation dont la combinaison constitue le gradient de déplacement total. D'une part, la déformation totale est choisie de telle sorte qu'elle vérifie le premier axiome (énergie de déformation minimale).

D'autre part, la rotation est prise comme celle d'un corps rigide pour maintenir fixe la position du plan d'habitat (plan invariant).

Pour ajuster la déformation totale, W.L.R proposent deux solutions pour la déformation supplémentaire $\xi^{R.I}$ dont va dépendre le cisaillement.

La première suppose que le produit martensitique est constitué d'un empilement de macles. L'épaisseur relative de ces macles est calculée de telle manière que, la déformation totale conduise à l'existence d'un plan invariant.

La seconde solution considère la déformation supplémentaire comme un glissement, dont l'amplitude est calculée de telle manière à ce que la déformation totale laisse un plan invariant. Le plan et la direction de glissement sont imposés a priori.

Ainsi, la transformation totale associée au plan invariant s'écrit :

$$K = R.S.T \quad (III.1)$$

- T : représente la transformation homogène (C.F.C \rightarrow q.c ou c.c $T = \text{Bain}$)
 S : représente le cisaillement (glissement ou maclage)
 R : rotation qui laisse invariant le plan d'habitat

La condition donnée par W.L.R pour l'existence d'un plan invariant est :

$$\text{Det} (K^T K - I) = \text{Det} ((TS)^T (TS) - I) = 0 \quad (III.2)$$

$$R^T R = I \quad I : \text{matrice identité}$$

L'intérêt de cette théorie réside dans le fait qu'il est possible à partir de la condition du plan invariant et la diagonalisation de TS , de calculer pour chaque transformation martensitique :

- la normale au plan d'habitat
- la direction de cisaillement
- l'amplitude de cisaillement
- l'orientation relative entre les deux phases

En revanche, il n'en demeure pas moins que ce type de théorie est purement phénoménologique. Il ne décrit pas les déplacements réels subis par les atomes au cours de la transformation.

Par ailleurs, la théorie de W.L.R possède un certains nombres de restrictions qui ne permettent pas toutes la généralité.

- plan d'habitat \equiv plan invariant (plan à distorsion nulle et dont la position reste fixe au cours de la transformation).

la notion du plan compatible est suffisante pour décrire le plan d'habitat.

- Les mécanismes d'accommodation de la déformation de Bain envisagés sont trop limités ($\xi^{r.I}$ seule pour accommoder ξ^B dans (W.L.R) et (B.M)). Par contre l'accommodation peut se faire aussi par des déformations élastiques et plastiques dans l'austénite et dans la martensite.

Nous proposons dans le paragraphe suivant une formulation générale et simplifiée en petites déformations des théories phénoménologiques. Elle permet de réduire les restrictions sur le plan d'habitat et tient compte de tous les mécanismes possibles d'accommodation de la déformation de Bain. Enfin, elle offre la possibilité d'étude des interactions entre les variants de la martensite.

III.3 NOUVELLE FORMULATION PROPOSEE

Dans ce paragraphe, nous proposons une démarche plus générale que celle de W.L.R. Cette démarche part des relations de compatibilité de la déformation associée à la transformation martensitique. Ces relations étant complexes pour les grandes déformations, nous utiliserons plutôt, dans ce cas, une description en petites déformations (ou en vitesse sur la configuration actuelle). Ce formalisme des petites déformations simplifiera beaucoup les calculs et sera suffisamment proche de la réalité, car, les déformations associées aux transformations martensitiques sont de l'ordre de 10 %.

On verra au chapitre IV qu'une déformation incompatible entraîne la présence de contraintes internes et d'une énergie élastique qui s'opposera au développement de la transformation. Cette énergie peut être relaxée par une géométrie particulière de la phase transformée ou (et) par des mécanismes d'accommodation supplémentaires.

III.3.1) Cinématique de la transformation

Situation générale

La déformation macroscopique associée à la transformation austénite-martensite peut se décomposer en :

a Une transformation de réseau appelée : transformation de Bain
 $\beta_{ij}^B = \epsilon_{ij}^B + \omega_{ij}^B$ (β_{ij}^B transforme le réseau de la structure austénitique en structure martensitique. Une rotation de Bain peut aussi affecter le réseau de la martensite).

b Une transformation à réseau invariant $\beta_{ij}^{R.I} = \epsilon_{ij}^{R.I} + \omega_{ij}^{R.I}$ dans la martensite, celle-ci peut être un glissement plastique ou du maclage.

a et b constituent la transformation intrinsèque associée à la formation de la martensite.

c Une transformation élastique $\beta_{ij}^{eM} = \epsilon_{ij}^{eM} + \omega_{ij}^{eM}$ de la martensite formée associée aux contraintes internes, engendrées par les incompatibilités (non relaxées pour le moment) et à la réorientation du réseau cristallin.

d Une transformation plastique $\beta_{ij}^{PM} = \epsilon_{ij}^{PM} + \omega_{ij}^{PM}$ de la martensite formée

e Une transformation élastique $\beta_{ij}^{eA} = \epsilon_{ij}^{eA} + \omega_{ij}^{eA}$ de l'austénite

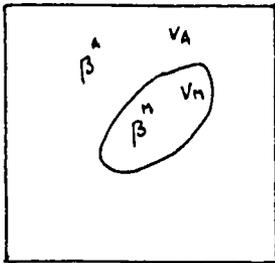
f Une transformation plastique $\beta_{ij}^{PA} = \epsilon_{ij}^{PA} + \omega_{ij}^{PA}$ de l'austénite (glissement, ...)

c, d (e,f) représentent les transformations mécaniques associées respectivement à la martensite (austénite).

Le rôle des déformations inélastiques est de relaxer, voire d'annuler, l'énergie élastique associée aux contraintes internes d'incompatibilité dues à la déformation de Bain.

Considérons un milieu austénitique infini homogène de constante élastique C_{ijkl} . Sous l'effet d'une trempe ou par application de contraintes macroscopiques suffisantes, une fraction f de martensite se forme. Le gradient de déplacement total associé à la transformation martensitique s'écrit :

$$\beta_{ij}^T(n) = \beta_{ij}^A + (\beta_{ij}^M - \beta_{ij}^A) \delta_{V_M}^o(n) \quad (III.3)$$



$$\delta_{V_M}^o(n) = \begin{cases} 1 & n \in V_M \\ 0 & n \notin V_M \end{cases}$$

V_A : volume de l'austénite résiduelle
 V_M : volume de la martensite formée

Nous avons aussi :

$$\beta_{ij}^M = (\beta_{ij}^B + \beta_{ij}^{R-I}) + (\beta_{ij}^{eM} + \beta_{ij}^{pM}) \quad (III.4)$$

$$\beta_{ij}^A = \beta_{ij}^{eA} + \beta_{ij}^{pA} \quad (III.5)$$

De la relation (III.3) nous déduisons que :

la déformation totale locale :

$$\epsilon_{ij}^T(n) = \epsilon_{ij}^A + (\epsilon_{ij}^M - \epsilon_{ij}^A) \delta_{V_M}^o(n) \quad (III.6)$$

la rotation totale locale :

$$\omega_{ij}^{T(n)} = \omega_{ij}^A + (\omega_{ij}^M - \omega_{ij}^A) \delta_{V_M}^{(n)} \quad (III.7)$$

ϵ_{ij}^A partie symétrique de β_{ij}^A telle que :

$$\epsilon_{ij}^A = \epsilon_{ij}^{eA} + \epsilon_{ij}^{pA} \quad (III.8)$$

ϵ_{ij}^M partie symétrique de β_{ij}^M telle que :

$$\epsilon_{ij}^M = \epsilon_{ij}^B + \epsilon_{ij}^{R-T} + \epsilon_{ij}^{eM} + \epsilon_{ij}^{pM} \quad (III.9)$$

A partir de l'analyse purement cinématique, nous avons représenté la situation générale d'accommodation de la déformation de Bain.

Nous savons par ailleurs que, la déformation totale associée à la transformation martensitique est la résultante d'une déformation élastique ϵ^e (ϵ^{eA} et ϵ^{eM}) et d'une déformation inélastique ϵ^{an} ($\epsilon^B, \epsilon^{R-T}, \epsilon^{pA}, \epsilon^{pM}$)

Ces déformations inélastiques peuvent être incompatibles et engendrer des contraintes internes très importantes. La relaxation de ces contraintes internes dépend de la rhéologie de l'austénite et de la martensite.

III.3.2) Compatibilité

La présence de déformations élastiques dans l'austénite et dans la martensite engendrent des contraintes internes et une énergie élastique associée.

Nous sommes amenés alors à considérer une géométrie particulière du volume V_M de martensite ou des mécanismes d'accommodation supplémentaires (par rapport à la transformation de Bain) dans l'austénite et dans la martensite, telles que toutes les déformations non élastiques soient compatibles. La déformation totale s'écrit d'après (III.6) :

$$\epsilon_{ij}^{T(n)} = \epsilon_{ij}^A + (\epsilon_{ij}^M - \epsilon_{ij}^A) \delta_{V_M}^{(n)}$$

Nous décomposons la déformation totale en une partie élastique ξ^e et une partie inélastique ξ^{an} telle que :

$$\xi_{ij}^T(n) = \xi_{ij}^e(n) + \xi_{ij}^{an}(n) \quad (III.10)$$

avec
$$\xi_{ij}^e(n) = \xi_{ij}^{eA} + (\xi_{ij}^{eM} - \xi_{ij}^{eA}) \delta_{VM}^o(n) \quad (III.11)$$

$$\xi_{ij}^{an}(n) = \xi_{ij}^{pA} + \left[(\xi_{ij}^B + \xi_{ij}^{R.I}) + \xi_{ij}^{pM} - \xi_{ij}^{pA} \right] \delta_{VM}^o(n) \quad (III.12)$$

La condition de compatibilité de la déformation inélastique se traduit par :

$$\text{Inc } \xi^{an}(n) = 0 \Rightarrow \epsilon_{iklm} \epsilon_{jlm} \xi_{mn,kl}^{an}(n) = 0 \quad (III.13)$$

Si cette condition est réalisée alors ξ^{eA} et ξ^{eM} sont nulles. il n'y a pas de contraintes internes.

Il est difficile de déterminer de telles conditions de compatibilité pour des interfaces de forme quelconque. Par contre pour des interfaces planes et infinies, le calcul explicite devient possible. Nous nous limiterons au cas des interfaces planes et nous nous intéresserons essentiellement aux incompatibilités de surface qui ont pour origine : (34)

- l'incompatibilité de déformation au passage de la phase austénitique à la phase martensitique.
- l'incompatibilité "élastique" dans le cas où les deux phases ont des constantes élastiques différentes (effet d'anisotropie et (ou) d'hétérogénéité)
- l'incompatibilité de couplage entre les deux précédentes.

Pour étudier de manière plus précise les effets des incompatibilités de surface associées à la transformation austénite-martensite, nous supposons que l'élasticité est homogène et isotrope ce qui a pour effet d'éliminer les incompatibilités de 2e et 3e type.

III.3.3) Modélisation et nouvelle approche

La morphologie et la structure de la transformation martensitique, sont déterminées à partir de la minimisation de l'énergie élastique associée aux contraintes internes résultant de la transformation. La recherche d'un minimum d'énergie est un problème variationnel complexe, en raison de la forme de l'inclusion martensitique de volume V_M (pas d'information a priori) et des conditions sur la déformation totale. Conditions, qui peuvent nous donner des inégalités associées aux problèmes de structure du matériau (anisotropie et hétérogénéité). En effet, nous distinguons deux stades extrêmes dans l'évolution de l'inclusion martensitique :

- germination de la martensite : l'inclusion martensitique est assimilée à une sphère de volume V_M . L'énergie élastique pour le milieu supposé homogène et isotrope est : (9)

$$E = \frac{\mu g^2 V_M}{4} (1 + \sin^2 \alpha) \quad (\text{III.14})$$

α : angle (\vec{m}, \vec{m}') $(\frac{\Delta V}{V} = g \sin \alpha)$

g : amplitude de déplacement

- croissance de la martensite : l'inclusion martensitique prend la forme d'une plaquette. Il a été montré que l'énergie de déformation est quasiment nulle pour un précipité ayant la forme d'une plaquette lorsque, la déformation est nulle dans le plan de cette plaquette.

$$E \sim 0 \quad (V_M : \text{plaquette de martensite}) \quad (\text{III.15}) \quad (18)$$

Compte tenu de ce deuxième stade, nous émettons les deux hypothèses suivantes pour la modélisation de la transformation martensitique :

H1 : il y a compatibilité des déformations inélastiques au passage de l'interface austénite-martensite. Cette condition entraîne que les contraintes internes sont nulles ainsi que l'énergie élastique associée.

$$\sigma = 0 \Rightarrow E = 0$$

H2 : l'interface limitant les deux phases austénite et martensite est plane de normale \vec{n} (plan d'habitat).

Ces deux hypothèses se justifient expérimentalement :

- par observation pour le cas de l'interface plane (H2) fig (III.3.2) (Cu-Zn-Al)
- Le variant de martensite prend la forme d'une plaquette. L'énergie élastique associée à la plaquette est quasiment nulle ce qui implique que $\sigma \sim 0$ (H1 de compatibilité de l'interface austénite-martensite).

Compte tenu de ces 2 hypothèses, le problème variationnel se simplifie.

Le volume V_M de martensite peut être assimilé à un milieu semi-infini limité par une interface plane. La normale à l'interface \vec{n} est telle que la déformation totale est compatible au sens de KRÖNER.

Cette condition de compatibilité (H1) implique que les contraintes internes sont nulles, ainsi que l'énergie associée. Elle se traduit par :

$$I_{mc} \Sigma^{am} = 0 \Rightarrow \sigma_{ij}^{(1)} = 0 \Rightarrow E = 0$$

E : énergie élastique associée aux contraintes internes

En tenant compte de la relation (II.12), nous aurons :

$$I_{mc} \Sigma_{(1)}^{am} = 0 \Rightarrow \epsilon_{ikm} \epsilon_{j\ell n} \Sigma_{mn, k\ell}^{am} = 0 \quad (III.16)$$

Si on suppose que les déformations sont constantes par morceaux, la condition de compatibilité de la déformation s'écrit dans le cas d'une interface plane de normale \vec{n} (H2) :

$$\epsilon_{ikm} \epsilon_{jln} \Delta \epsilon_{mn} n_k n_l = 0 \quad (III.17)$$

$\Delta \epsilon_{mn}$ est la différence des déformations inélastiques

$$\Delta \epsilon_{mn} = \sum_{mn}^{M^{(m)}} \epsilon_{mn}^{A^{(m)}} \left[\left(\epsilon_{mn}^B + \epsilon_{mn}^{R.I} \right) + \epsilon_{mn}^{PM} \right] - \epsilon_{mn}^{PA} \quad (III.18)$$

Le système (III.17) est non linéaire (présence du produit $n_i n_j$)

Si nous exprimons (III.17) dans le repère principal de $\Delta \epsilon (R_p)$, nous aurons :

$$\begin{cases} N_2^2 \Delta \epsilon_{III} + N_3^2 \Delta \epsilon_{II} = 0 \\ N_1^2 \Delta \epsilon_{III} + N_3^2 \Delta \epsilon_{I} = 0 \\ N_1^2 \Delta \epsilon_{II} + N_2^2 \Delta \epsilon_{I} = 0 \\ N_2 N_1 \Delta \epsilon_{III} = N_3 N_1 \Delta \epsilon_{II} = N_3 N_2 \Delta \epsilon_{I} = 0 \end{cases} \quad (III.19)$$

$\Delta \epsilon_I, \Delta \epsilon_{II}$ et $\Delta \epsilon_{III}$ sont les valeurs propres de $\Delta \epsilon_{ij}$

\vec{N} : normale à l'interface austénite-martensite dans le repère principal de $\Delta \epsilon (R_p)$

Le système (III.19) n'a de solution que si l'une des déformations principales est nulle, c'est-à-dire :

$$\text{Det } |\Delta \epsilon| = 0 \quad (III.20)$$

qui représente la condition d'existence d'une interface plane compatible.

Les équations (III.17) de compatibilité permettent la détermination de la normale au plan d'habitat.

On peut simplifier la forme des équations (III.17) exprimées dans le repère (R₁), en se plaçant dans le repère principal de $\Delta \varepsilon$ (R_p) (III.18).

La solution de (III.18), compte tenu de $N_1^2 + N_2^2 + N_3^2 = 1$, existe lorsque l'une des déformations principales est nulle.

Si on pose $\Delta \varepsilon_{III} = 0$, nous aurons :

$$N_3 = 0, \quad \begin{cases} N_1^2 \Delta \varepsilon_{II} + N_2^2 \Delta \varepsilon_I = 0 \\ N_1^2 + N_2^2 = 1 \end{cases}$$

\vec{N} : normale à l'interface compatible dans le repère principal (R_p) de $\Delta \varepsilon$, telle que :

$$N_1^2 = -\frac{\Delta \varepsilon_I}{\Delta \varepsilon_{II} - \Delta \varepsilon_I} \quad N_2^2 = \frac{\Delta \varepsilon_{II}}{\Delta \varepsilon_{II} - \Delta \varepsilon_I} \quad N_3^2 = 0 \quad (III.21)$$

La matrice de passage a (R₁ → R_p) constituée par les vecteurs propres de $\Delta \varepsilon_i$, nous permet de déterminer la normale au plan d'habitat dans le repère R₁.

$$m_i = a_{ij} N_j \quad (III.22)$$

Le tenseur $\Delta \varepsilon$ représente un glissement et une dilatation dont les cercles de MOHR associés sont donnés en fig (III.3.3). Le point I représente alors la normale à l'interface compatible (normale au plan d'habitat). La condition d'existence d'une interface compatible (III.20) est similaire à la condition de déformation à plan invariant (IPS invariant plan strain) des théories de W.L.R. et B.M. Mais elle est, moins restrictive car elle autorise une déformation de la phase mère ($\varepsilon^{\wedge} \neq 0$) et une déformation dans l'interface.

Le problème des rotations

En incluant d'emblée la rotation élastique dans les équations précédentes, il est possible, lorsque la partie inélastique du gradient de déplacement totale est connue, de calculer explicitement les rotations du réseau cristallin.

Le calcul de ces rotations peut être utilisé dans les prévisions des textures de déformations des monocristaux ou des polycristaux.

Nous établissons les expressions de ces rotations dans un milieu infini, homogène et élastique en présence d'un gradient de déplacement inélastique β^{an} . Nous avons :

$$\beta_{ij}^T^{(n)} = \beta_{ij}^e{}^{(n)} + \beta_{ij}^{an}{}^{(n)} \quad (\text{III.23})$$

La condition de compatibilité se traduit par :

$$\text{Rot } \beta^{(n)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \epsilon_{ikl} \beta_{lj,k}^T{}^{(n)} = 0 \quad (\text{III.24})$$

La partie antisymétrique de $\beta_{ij}^T{}^{(n)}$ nous donnera la rotation totale $\omega_{ij}^T{}^{(n)}$ (III.7), telle que :

$$\omega_{ij}^T{}^{(n)} = \omega_{ij}^A + (\omega_{ij}^M - \omega_{ij}^A) \delta_{VM}^{(n)}$$

avec

$$\omega_{ij}^A = \omega_{ij}^{eA} + \omega_{ij}^{pA} \quad (\text{III.25})$$

$$\omega_{ij}^M = \omega_{ij}^B + \omega_{ij}^{R-I} + \omega_{ij}^{eM} + \omega_{ij}^{pM} \quad (\text{III.26})$$

ω_{ij}^{eA} (ω_{ij}^{pA}) : rotation associée respectivement à la déformation élastique (plastique) de l'austénite.

ω_{ij}^{eA} (ω_{ij}^{pM}) : rotation associée respectivement à la déformation élastique (plastique) de la martensite formée.

ω_{ij}^B : rotation associée à la déformation du réseau (Bain)
 $\omega_{ij}^{R.I}$: rotation associée à la déformation à réseau invariant (glissement ou maclage)

Les rotations totales ω^T , élastique ω^e et inélastique ω^{an} sont liées par :

$$\omega_{ij}^{T(n)} = \omega_{ij}^{e(n)} + \omega_{ij}^{an(n)} \quad (III.27)$$

La rotation élastique du réseau cristallin de martensite sera donc donnée par :

$$\omega_{ij}^{e(n)} = \omega_{ij}^{T(n)} - \omega_{ij}^{an(n)}$$

ou bien, compte tenu de (III.12)

$$\omega_{ij}^{e(n)} = \omega_{ij}^{T(n)} - \left\{ \omega_{ij}^{PA} + \left[(\omega_{ij}^B + \omega_{ij}^{R.I}) + \omega_{ij}^{pM} - \omega_{ij}^{PA} \right] \delta_{V_n}^0 \right\} \quad (III.28)$$

Ces relations de rotation servent à la détermination des relations d'orientation entre l'austénite et la martensite (relation de KURDJUMOV-SACHS, NISHIYAMA, ...).

Déformation macroscopique (monovariant)

Si f désigne la fraction volumique de martensite formée, l'accroissement $d\varepsilon$ de la déformation macroscopique s'écrit : fig (III.3.4)

$$d\varepsilon_{ij} = (1-f) d\varepsilon_{ij}^a + f d\varepsilon_{ij}^m + \varepsilon_{ij}^{AM} df \quad (III.29)$$

où df : accroissement de la fraction volumique de martensite formée
 $d\varepsilon_{ij}^a$: désigne la déformation de l'austénite (élastique et (ou) plastique)

$$d\varepsilon_{ij}^a = d\varepsilon_{ij}^{eA} + d\varepsilon_{ij}^{pA} \quad (III.30)$$

$d\varepsilon_{ij}^m$: représente la déformation de la martensite formée.

Cette déformation peut être élastique et (ou) plastique ;

$$d\varepsilon_{ij}^m = d\varepsilon_{ij}^{em} + d\varepsilon_{ij}^{pm} \quad (III.31)$$

$\varepsilon_{ij}^{AM} = \varepsilon_{ij}^B + \varepsilon_{ij}^{R.I}$ est la déformation intrinsèque associée à la transformation martensitique d'un volume unité d'austénite.

Comme nous l'avons vu au chapitre II, la déformation intrinsèque ε^{AM} s'analyse par l'intermédiaire d'un glissement sur le plan d'habitat accompagné d'une dilatation normale au même plan. Dans le cas d'un seul variant actif, nous aurons :

$$\varepsilon_{ij}^{AM} = \frac{g}{2} (m_i m_j' + n_j m_i') = g R'_{ij} \quad (III.32)$$

où \vec{m} : normale au plan d'habitat

\vec{m}' : direction de déplacement (glissement + dilatation)

g : amplitude du déplacement

En tenant compte des relations (III.29) et (III.32), nous obtenons l'accroissement de la déformation macroscopique totale :

$$d\varepsilon_{ij} = (1-f) d\varepsilon_{ij}^a + f d\varepsilon_{ij}^m + g R'_{ij} df \quad (III.33)$$

En outre, la déformation totale associée à la transformation peut être accommodée élastiquement ($d\varepsilon_{ij}^{PA} = d\varepsilon_{ij}^{PM} = 0$) comme dans le cas de la martensite thermoélastique. La transformation est alors réversible. Ou bien, elle peut être accommodée plastiquement dans la phase mère $d\varepsilon_{ij}^{PA} \neq 0$ et éventuellement dans la martensite $d\varepsilon_{ij}^{PM} \neq 0$. La transformation perd alors son caractère de réversibilité.

III.4 SITUATIONS PARTICULIERES

Nous avons souligné, dans le paragraphe 3, tous les mécanismes possibles qui peuvent intervenir pour accommoder la déformation incompatible de Bain. La recherche de ces mécanismes d'accommodation est complexe en général, car on n'a pas d'information sur les déformations à réseau invariant dans l'austénite ou dans la martensite. La détermination de ces déformations à réseau invariant se heurte à de nombreuses difficultés (ϵ^{R-I} , plan, direction et amplitude de glissement inconnus a priori) et ce n'est qu'avec des hypothèses simplificatrices usuelles, que l'on arrive à déduire la déformation à réseau invariant.

III.4.1) Accommodation dans la martensite

C'est le cas des matériaux thermoélastiques (Cu-Zn-Al, Cu-Al, Cu-Zn, ...) pour lesquelles les déformations plastiques de l'austénite et de la martensite sont nulles ($d\epsilon_{ij}^{PA} = d\epsilon_{ij}^{PM} = 0$). La transformation est alors réversible.

Il reste :

$$d\epsilon_{ij} = (1-f) d\epsilon_{ij}^{eA} + f d\epsilon_{ij}^{eM} + \epsilon_{ij}^{AM} df \quad (III.34)$$

Dans ce cas la déformation intrinsèque est prépondérante par rapport aux déformations élastiques de l'austénite et de la martensite

$$d\epsilon_{ij} \sim \epsilon_{ij}^{AM} df = (\epsilon_{ij}^B + \epsilon_{ij}^{R-I}) df \quad (III.35)$$

Nous retrouvons alors la théorie phénoménologique de (W.L.R) et (B.M) (pas de déformation dans l'austénite résiduelle).

La condition d'existence d'une interface compatible est :

$$\text{Det} \left| \epsilon^{AM} \right| = 0 \quad (III.36)$$

Les équations de compatibilité nous permettent la détermination de la normale au plan d'habitat.

Dans la déformation de transformation austénite-martensite ϵ^{AM} , seule la déformation de Bain est connue. La déformation à réseau invariant qui accommode ϵ^B est inconnue.

III.4.2 Accommodation dans la martensite avec 1 système de glissement

Si nous supposons que l'accommodation se fait par glissement dans la martensite nous aurons :

$$\epsilon_{ij}^{R.I} = \frac{\gamma}{2} (\mu_i \nu_j + \mu_j \nu_i) \quad (III.37)$$

avec $\vec{\mu}$: normale au plan de glissement

$\vec{\nu}$: direction de glissement

γ : amplitude de glissement

$$\epsilon_{ij}^{AM} = \epsilon_{ij}^B + \frac{\gamma}{2} (\mu_i \nu_j + \mu_j \nu_i) \quad (III.38)$$

La condition (III.36) s'écrit alors :

$$\text{Det} \left| \epsilon_{ij}^B + \frac{\gamma}{2} (\mu_i \nu_j + \mu_j \nu_i) \right| = 0$$

et elle permet de trouver l'amplitude γ . Nous y reviendrons en détail dans l'application au Cu-Zn-Al.

. Rotation élastique

En tenant compte de la relation (III.28) et en prenant

$$\left(\omega_{ij}^{PA} = \omega_{ij}^{PM} = 0 \right), \text{ nous aurons :}$$

$$\omega_{ij}^{e(2)} = + \omega_{ij}^{T(2)} - (\omega_{ij}^B + \omega_{ij}^{R.I}) \delta_{VM}^0(2) \quad (III.39)$$

Si en plus, nous admettons que $\dot{\omega}^T = 0$, nous obtenons :

$$\omega_{ij}^e(n) = - \left(\omega_{ij}^B + \omega_{ij}^{R.I} \right) \delta v_n(n) \quad (III.40)$$

dans l'austénite résiduelle $\omega_{ij}^e = 0$

dans la martensite formée $\omega_{ij}^e = -\omega_{ij}^B - \omega_{ij}^{R.I} = -\omega_{ij}^B - \frac{\gamma}{2} (\mu_i v_j - \mu_j v_i)$

. déformation macroscopique totale (1 seul variant actif)

L'accroissement de la déformation macroscopique totale pour le cas d'un seul variant actif de fraction volumique f s'écrit, compte tenu des relations (III.32) et (III.35) :

$$d\varepsilon_{ij} \sim \varepsilon_{ij}^{AM} df = g R'_{ij} df$$

R'_{ij} : facteur d'orientation du variant = $\frac{1}{2} (m_i m'_j + m_j m'_i)$
 g : amplitude de déplacement

La normale \vec{n} et la direction \vec{v} associée au glissement dans la déformation à réseau invariant sont déterminées à partir d'observation expérimentale. La seule inconnue est l'amplitude de glissement γ qui est déterminée à partir de la condition de compatibilité. Les équations de compatibilité permettent alors la détermination de la normale au plan d'habitat. Les équations (III.35) et (III.39) permettent respectivement de déterminer la déformation macroscopique et les relations d'orientation (rotation élastique).

III.4.3) Accommodation dans l'austénité (déformation plastique ε^{PA})

Dans ce cas la transformation perd son caractère de réversibilité ($d\varepsilon_{ij}^{PA} \neq 0$).

Nous retrouvons alors la théorie de BOWLES et DUNNE (27) appliquée au Fe-Ni.

Si nous négligeons les déformations élastiques de l'austénite et de la martensite formée devant les autres déformations, nous obtenons l'accroissement de la déformation macroscopique $d\varepsilon_{ij}$:

$$d\varepsilon_{ij} \sim (1-f) d\varepsilon_{ij}^{PA} + \varepsilon_{ij}^{AM} df \quad (III.41)$$

$d\varepsilon_{ij}^{PA}$: déformation plastique de l'austénite résiduelle

La condition d'existence d'une interface compatible s'écrit dans ce cas :

$$\text{Det} \left| \varepsilon^{AM} - \varepsilon^{PA} \right| = 0 \quad (III.42)$$

. Rotation élastique

En prenant l'approximation $\omega^T = 0$ la rotation du réseau de martensite s'écrit :

$$\omega_{ij}^{e(2)} = -\omega_{ij}^{e(1)} = - \left\{ \omega_{ij}^{PA} + \left(\left[\omega_{ij}^B + \omega_{ij}^{R.I} \right] - \omega_{ij}^{PA} \right) \delta V_M^{(2)} \right\} \quad (III.43)$$

dans l'austénite résiduelle $\omega_{ij}^e = -\omega_{ij}^{PA}$

dans la martensite : $\omega_{ij}^e = - \left(\omega_{ij}^B + \omega_{ij}^{R.I} - \omega_{ij}^{PA} \right)$

. Déformation macroscopique (1 seul variant actif)

L'accroissement de la déformation macroscopique s'écrit :

$$d\varepsilon_{ij} \sim (1-f) d\varepsilon_{ij}^{PA} + \varepsilon_{ij}^{AM} df = (1-f) d\varepsilon_{ij}^{PA} + g R'_{ij} df \quad (III.44)$$

$R'_{ij} = \frac{1}{2} (m_i m'_j + m'_j m_i)$ facteur d'orientation du variant

g : amplitude de déplacement

f : fraction volumique de martensite formée.

Pour notre part, on s'intéresse essentiellement à l'accommodation dans la martensite des alliages thermoélastiques Cu-Zn-Al. Nous illustrons notre formulation dans deux applications différentes :

- interface austénite-martensite
- interaction entre les variants de martensite

III.5 APPLICATION A L'INTERFACE AUSTENITE-MARTENSITE (CU-ZN-AL)

Les alliages du Cu-Zn-Al présentent un comportement thermoélastique ($d\varepsilon_{ij}^{PA} = d\varepsilon_{ij}^{PM} = 0$), la transformation austénite-martensite est alors réversible. La déformation intrinsèque ε^{AM} associée à la transformation (A-M) est prépondérante par rapport aux déformations élastiques réversibles de l'austénite et de la martensite. Par ailleurs, pour les alliages du Cu-Zn-Al, la transformation s'accompagne d'un changement de réseau de la structure austénitique c.c à la structure martensitique 9 R. fig (III - 5 - 1)

La transformation est représentée dans un système d'axes orthogonaux R1 $[100]$, $[011]$ et $[0\bar{1}\bar{1}]$ par (32) :

$$\beta_{ij}^{AM} = \begin{pmatrix} \eta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_2 & \gamma \eta_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (III.45)$$

β_{ij}^{AM} : tenseur gradient de déplacement $(\beta_{ij}^B + \beta_{ij}^{R.I})$

η_i : transformation homogène de Bain telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_1 = \frac{a''}{a} \\ \eta_2 = \frac{b''}{a\sqrt{2}} \\ \eta_3 = \frac{c''\sqrt{2}}{9a} \end{array} \right. \quad (III.46)$$

avec a : paramètre du réseau c.c (phase β)
 a'' , b'' , c'' : paramètre du réseau 9 R (phase β')

Connaissant les paramètres a , a'' , b'' et c'' nous déterminons les η_i

La déformation intrinsèque associée à la transformation austénite-martensite s'écrit :

$$\varepsilon_{ij}^{AM} = \frac{1}{2} \left(\beta_{ij}^{AM} + \beta_{ji}^{AM} \right) \quad (\text{III.47})$$

ou encore en tenant compte de la relation (III.45)

$$\varepsilon_{ij}^{AM} = \begin{pmatrix} \eta_1 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_2 - 1 & \frac{\gamma}{2} \eta_3 \\ 0 & \frac{\gamma}{2} \eta_3 & \eta_3 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & \varepsilon_4 \\ 0 & \varepsilon_4 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \quad (\text{III.48})$$

avec $\varepsilon_i = \eta_i - 1$
 $\varepsilon_4 = \frac{\gamma}{2} \eta_3$

En utilisant la nouvelle formulation et la condition d'existence d'une interface compatible, on obtient :

$$\text{Det} | \varepsilon^{AM} | = 0 = (\eta_1 - 1) \left\{ (\eta_2 - 1)(\eta_3 - 1) - \frac{\gamma^2}{4} \eta_3^2 \right\}$$

d'où
$$\gamma = \pm \left(4 \frac{(\eta_2 - 1)(\eta_3 - 1)}{\eta_3^2} \right)^{1/2} \quad (\text{III.49})$$

η_i fonctions des paramètres a , a'' , b'' et c'' .

La normale à l'interface ne peut être obtenue directement à partir des équations de compatibilité (III.17) $\text{Inc } \varepsilon^{AM} = 0$ (présence de $n_i n_j$). Il est commode de passer au repère principal de $\varepsilon^{AM}(R_p)$ et déterminer la normale dans ce repère. La matrice de passage de $R_1 \longrightarrow R_p$ étant connue nous déduisons alors la normale à l'interface dans le repère R_1

$$\varepsilon_{ij}^{AM} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & \varepsilon_4 \\ 0 & \varepsilon_4 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \quad \varepsilon_1 : \text{valeur propre de } \varepsilon^{AM}$$

La matrice de passage de $R_1 \longrightarrow R_p$ s'écrit :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (\text{III.50})$$

Nous avons alors :

$$\varepsilon_{ij}^{AM}(R_p) = P_{ik} P_{jl} \varepsilon_{kl}^{AM}(R_1) \quad (\text{III.51})$$

$$n_i(R_1) = P_{ij} N_j(R_p) \quad (\text{III.52})$$

Le tenseur de déformation dans le repère principal s'écrit :

$$\varepsilon^{AM}(R_p) = P^T \cdot \varepsilon^{AM}(R_1) \cdot P = \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 \end{pmatrix} \quad (\text{III.53})$$

En identifiant les deux tenseurs, nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_1 = \varepsilon_1 \\ E_2 = \varepsilon_2 \cos^2 \theta + \varepsilon_3 \sin^2 \theta + 2 \varepsilon_4 \cos \theta \sin \theta \\ E_3 = \varepsilon_2 \sin^2 \theta + \varepsilon_3 \cos^2 \theta - 2 \varepsilon_4 \cos \theta \sin \theta \\ 0 = \varepsilon_4 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - \varepsilon_2 \cos \theta \sin \theta + \varepsilon_3 \cos \theta \sin \theta \end{array} \right. \quad (\text{III.54})$$

La dernière équation de (III.54) nous permet l'évaluation de l'angle θ

$$\theta = \frac{1}{2} \text{Arctg} \frac{2 \varepsilon_4}{\varepsilon_2 - \varepsilon_3} \quad (\text{III.55})$$

Application numérique (Cu - 18.4 Zn - 7.3 Al) (32)

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_1 = 0.906 \\ \eta_2 = 1.073 \\ \eta_3 = 1.028 \end{array} \right.$$

de (III.49) nous déduisons $:\delta = \pm 0.088$

de (III.55), nous déterminons $:\theta = 31.76^\circ$

$$(\text{III.54}), \quad \left\{ \begin{array}{l} E_1 = -0.094 \\ E_2 = 0.101 \\ E_3 = 0 \end{array} \right.$$

$$E_{kk} = \frac{\Delta V}{V} = 7.10^{-3} = 0.7 \%$$

En utilisant les équations de compatibilité dans le repère principal de ε^{AM} (R_p), nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_3 = 0 \\ N_1^2 E_2 + N_2^2 E_1 = 0 \\ N_1^2 + N_2^2 = 1 \end{array} \right. \quad (III.56)$$

La normale à l'interface dans R_p est :

$$\vec{N}_{R_p} = \begin{cases} N_1 = \pm \left(\frac{-E_1}{E_2 - E_1} \right)^{1/2} \\ N_2 = \pm \left(\frac{E_2}{E_2 - E_1} \right)^{1/2} \\ N_3 = 0 \end{cases} = \begin{cases} 0.694 \\ 0.719 \\ 0 \end{cases} \quad (III.57)$$

Ainsi, nous pouvons déterminer la normale à l'interface dans le repère R_1

$$n(R_1) = P^T N(R_p)$$

$$\vec{n}_{R_1} = \begin{cases} 0.694 \\ 0.613 \\ 0.380 \end{cases} \quad (III.58)$$

. La direction du déplacement ainsi que l'amplitude de déplacement sont déterminées à partir de :

$$\varepsilon_{ij}^{AM} = \frac{g}{2} (n_i m_j + n_j m_i)$$

. Rotation élastique est donnée par : ($\omega^T = 0$)

$$\omega_{ij}^e = -\omega_{ji}^e = -\frac{1}{2} (\beta_{ij}^{AM} - \beta_{ji}^{AM}) \quad (III.59)$$

$$\omega_{ij}^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\gamma}{2} \eta_3 \\ 0 & -\frac{\gamma}{2} \eta_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0467 \\ 0 & +0.0467 & 0 \end{pmatrix}$$

Le tableau suivant donne les résultats de la théorie W.L.R obtenus par DELAEY (32) nos résultats ainsi que certains résultats expérimentaux (33).

	W.L.R par DELAEY	Nos résultats	Expérience
glissement γ	0.088	0.091	
Plan d'habitat	$\left\{ \begin{array}{l} 0.672 \\ 0.619 \\ 0.407 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0.694 \\ 0.613 \\ 0.380 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0.670 \\ 0.603 \\ 0.430 \end{array} \right.$
Amplitude de déplacement g	0.23	0.215	

Le tableau ci-dessus montre que les résultats obtenus en petites déformations sont en accord avec les valeurs obtenus à partir de la théorie phénoménologique de WERCHER-LIBERMAN et READ et les résultats expérimentaux. fig (III.5.2)

La nouvelle formulation que nous avons proposé est une généralisation des théories phénoménologiques antérieures. Elle présente plusieurs avantages :

- La simplification des formules (linéarisation)
- Elle donne autant d'information que les théories phénoménologiques avec suffisamment de précision :
 - . amplitude de cisaillement
 - . normale au plan d'habitat
 - . direction de déplacement
 - . rotation élastique
 - . déformation macroscopique

- Elle tient compte des effets d'accommodation dans l'austénite et offre des possibilités d'études des interactions entre les variants de martensite, qui seront entrepris par la suite.

III.6 APPLICATION AUX INTERACTIONS ENTRE LES VARIANTS

Compte tenu des résultats du paragraphe (III.5), nous pouvons conclure que la transformation martensitique peut être décrite avec suffisamment de précision par un formalisme en petites déformations. Nous utiliserons donc ce formalisme dans une deuxième application afin, d'étudier la compatibilité entre variants.

Nous avons vu dans le chapitre (II.6.3) que la symétrie cristalline associée à la phase mère (phase austénitique) entraîne l'activation possible de plusieurs variants. L'étude des interactions entre ces variants fait l'objet de ce paragraphe.

Nous distinguons deux types d'interactions au cours de l'évolution des variants de martensite :

- les interactions à distance : nous les rencontrons au début de la transformation. Ces interactions ont été étudiées par l'intermédiaire du problème de la paire d'inclusion dans des travaux antérieurs
- les interactions de contact : nous les rencontrons quand la transformation est bien avancée. Nous étudions ici essentiellement ce type d'interaction.

En effet, les interactions mécaniques entre variants conduisent à une modification importante de la microstructure. Pour les interactions de contact, la morphologie de contact entre variant peut être diverse.

Nous distinguons 3 catégories de morphologie de contact entre variants que l'on schématise dans la fig (III.6.1) :

- interaction suivant une surface donnée (surface d'interaction S_{12})
- accommodation par réorientation de l'interface martensite-martensite
- interaction ponctuelle.

Dans ce paragraphe, seul est traité l'étude de la compatibilité surfacique entre variants. Dans les chapitres suivants, nous décrivons ces interactions par l'intermédiaire d'une matrice d'écrouissage.

Pour étudier de manière plus précise les effets de compatibilité de surface associée aux interactions de contact dans la transformation, nous supposons que l'élasticité est homogène et isotrope. Nous supposons aussi que les deux variants ont subi, chacun, une déformation, uniforme, mais différente. Chaque couple (\vec{n}, \vec{m}) caractérise un variant. Pour les alliages du Cu - Zn - Al que nous étudions ici, 24 variants possibles peuvent exister à partir de la symétrie cristalline de la phase mère (c.c).

La déformation du variant I ($I = 1, 24$) s'écrit :

$$\xi_{ij}^I = \frac{g}{2} \left(m_i^I m_j'^I + m_j^I m_i'^I \right) \quad (\text{III.60})$$

avec

- \vec{n}^I : normale au plan d'habitat du variant I
- \vec{m}'^I : direction de déplacement du variant I
- g : amplitude de déplacement

La nouvelle approche § (III.3) en petites déformations nous permet de déduire la condition d'existence d'une interface compatible qui se traduit par :

$$\text{Det} | \varepsilon_{ij}^J - \varepsilon_{ij}^I | = \text{Det} | \Delta \varepsilon_{ij}^{IJ} | = 0 \quad (\text{III.61})$$

En considérant la différence de déformation $(\varepsilon_{ij}^J - \varepsilon_{ij}^I)$ ($I, J = 1, 2, 4$), il est possible d'établir une classification entre paires de variants.

Nous avons ainsi deux familles de couples de variants :

- Ceux pour lesquelles la condition (III.61) est vérifiée. Ils ne créent pas de contraintes internes et seront appelés "variants autoaccommodants".

Il existe alors une interface compatible entre de tels variants et on peut calculer la normale à l'interface commune.

- Ceux incompatibles, pour lesquelles la condition (III.61) n'est pas vérifiée. Ces variants incompatibles sont les sources de contraintes internes.

Ces contraintes internes peuvent être éventuellement relaxées partiellement ou totalement par d'autres mécanismes de déformation. Si elles ne sont pas relaxées, elles jouent un rôle important dans le comportement des matériaux en plasticité de transformation.

Les équations de compatibilité nous permettent la détermination de la normale à l'interface entre variants pour les interactions compatibles.

Tous ces résultats sont rassemblés dans le tableau T1.

Ces deux types d'interaction sont mis en évidence expérimentalement dans l'alliage pseudoélastique Cu-Zn-Al fig (III-62).

La classification que nous avons mis est en accord avec les résultats obtenus par DELAHEY (28) sur les variants autoaccommodants et avec

les résultats de ZHU. WEI - JUANG (34) obtenue en utilisant la théorie des groupes (D_{2d} groupes autoaccommodants).

III.7 CONCLUSION

Nous avons présenté une étude mécanique de la transformation martensitique. Cette étude tient compte de tous les mécanismes d'accommodation possible de la déformation du réseau et généralise les théories phénoménologiques antérieures. La formulation en petites déformations obtenue à partir de cette étude, a été appliquée à la transformation martensitique dans un alliage pseudoélastique Cu-Zn-Al. Les éléments géométriques de la transformation (plan d'habitat, direction de déplacement, amplitude de déplacement, rotation élastique et déformation macroscopique) obtenus à partir de ce formalisme sont cohérents avec les résultats des théories phénoménologiques de W.L.R et B.M. Ensuite, nous avons appliqué la nouvelle formulation à l'étude des interactions entre couples de variants. Nous en avons distingué deux familles :

- Celle pour laquelle l'interface est compatible
(variants autoaccommodant)
- Celle pour laquelle l'interface est incompatible d'où la création de contraintes internes.

Nos résultats montrent que la formulation en petites déformations est un moyen important et rapide pour l'étude des transformations martensitiques.

L'utilisation des lois générales de la mécanique nous a permis une meilleure description de la transformation. Grâce à elles, le problème de la relaxation dans l'austénite résiduelle et des interactions entre les variants de la martensite peut être envisagé.

Les chapitres suivants sont consacrés à une description des interactions mécaniques entre variants non compatible et de leur effets sur le comportement du monocristal en plasticité de transformation.

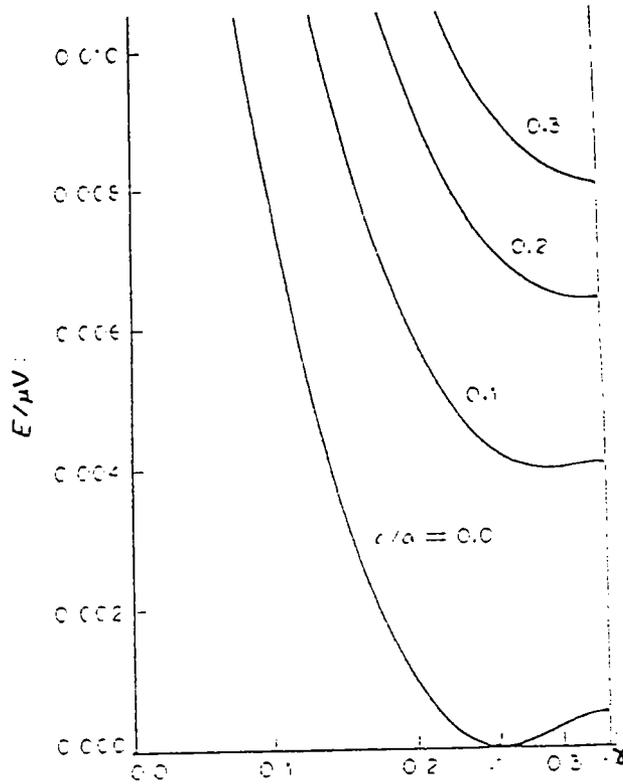


Fig. (III-3-1) "Energie élastique par unité de volume d'une inclusion ellipsoïdale en fonction de l'amplitude de glissement de la déformation à réseau invariant." selon M. HAYAKAWA et M. OKA (46)

$$c/a = 0 \Rightarrow E = 0 \Rightarrow \sigma_j = 0$$

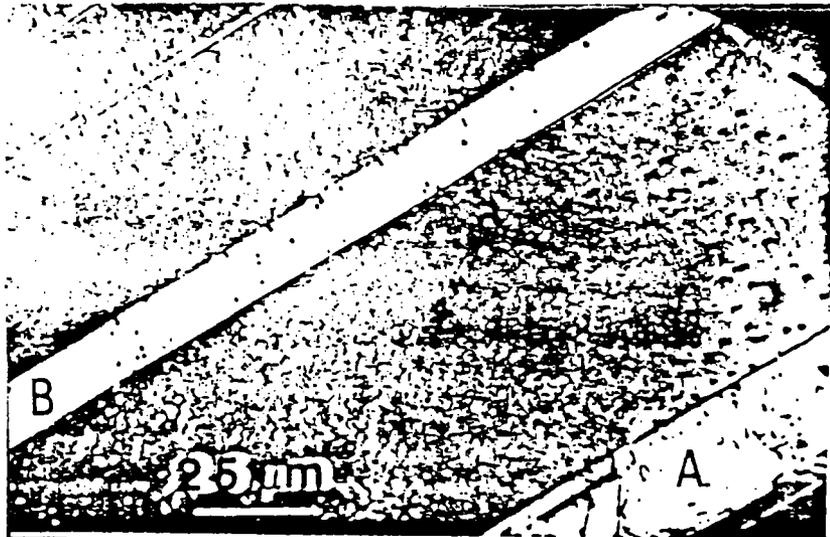


Fig. (III-3-2) "Bandes d'austénite et de martensite observées dans (Fe-12 % Mn-0.48 % C)"
Interface plane entre austénite / martensite

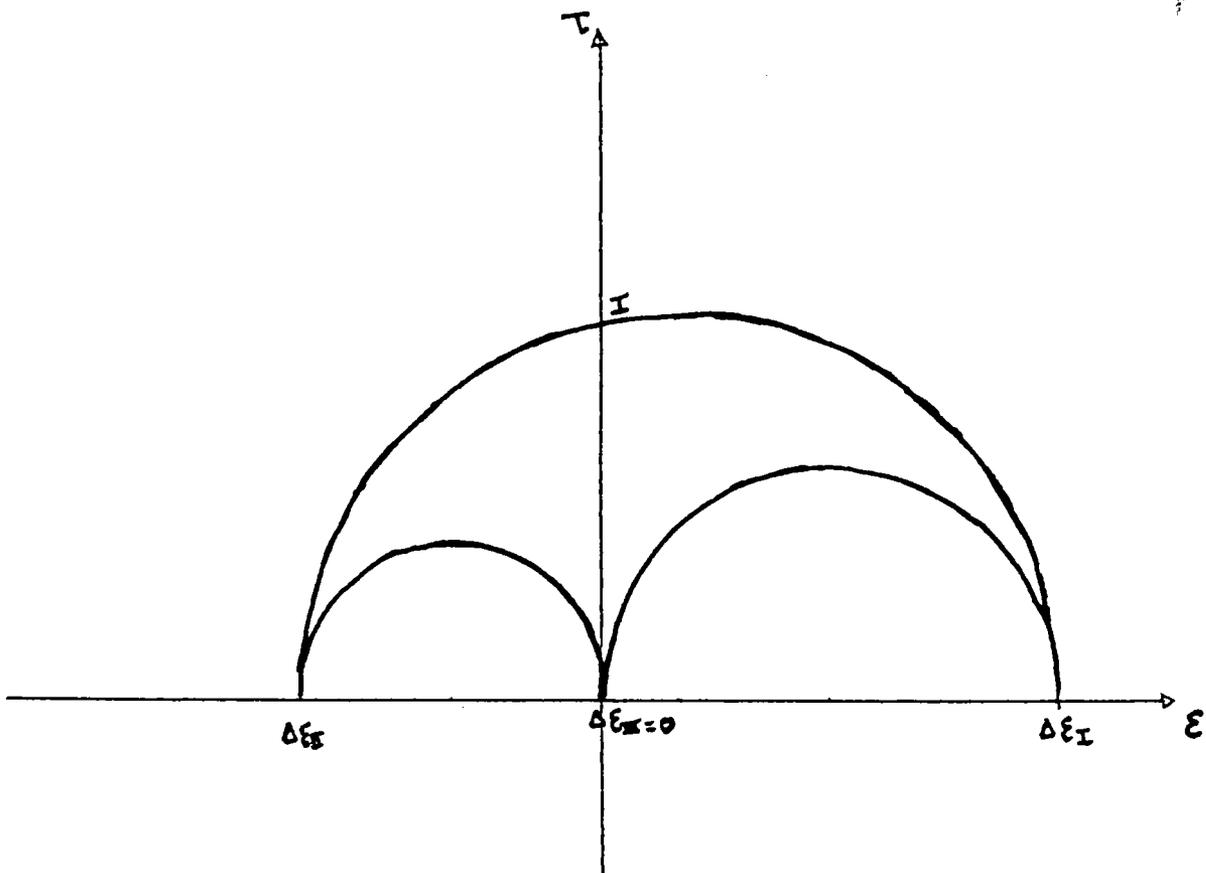


Fig. (III-3-3)

Cercles de MOHR représentant un déplacement (glissement + dilatation) et correspondant à la formation d'interface plane compatible entre austénite - martensite.

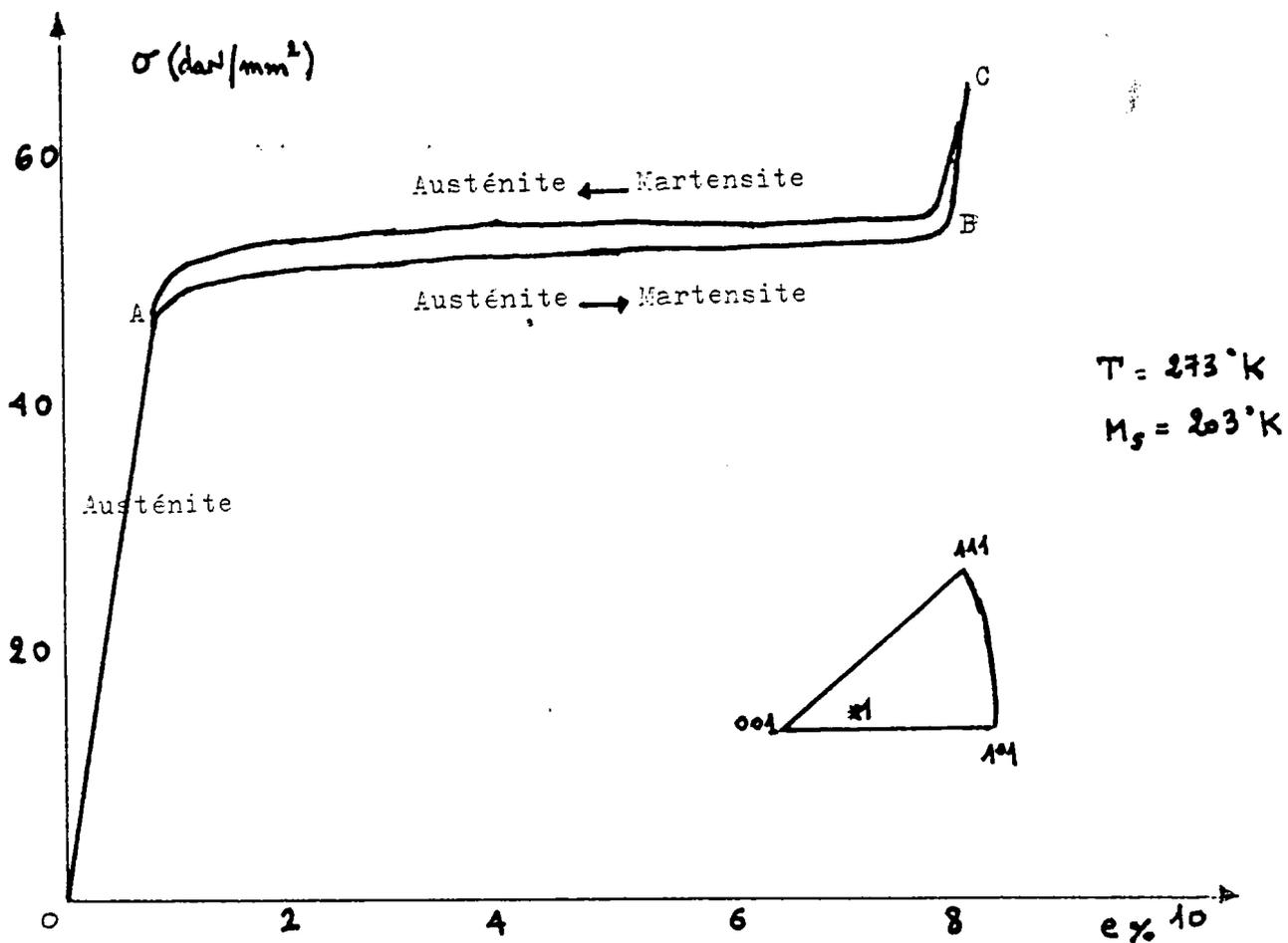


Fig. (III-3-4)

Courbe de traction typique d'un monocristal (Cu-Zu-Al)

OA : élasticité de l'austénite

A : formation de la première goutte de martensite

AB : transformation de l'austénite en martensite

BC : élasticité de la martensite.

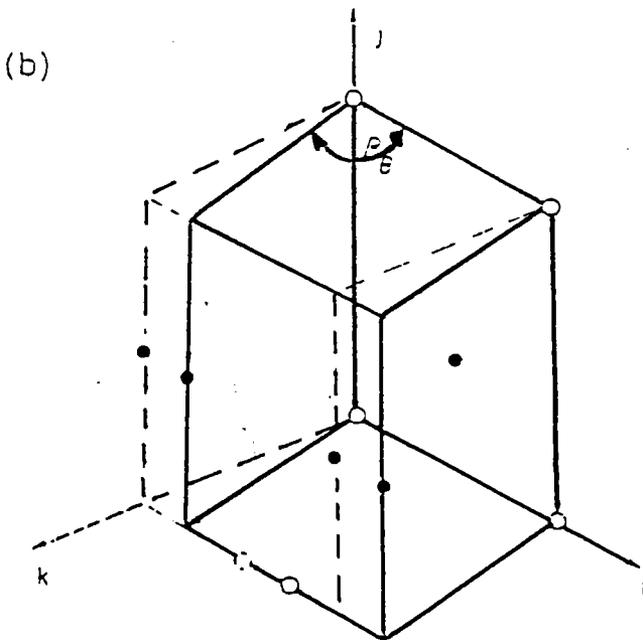
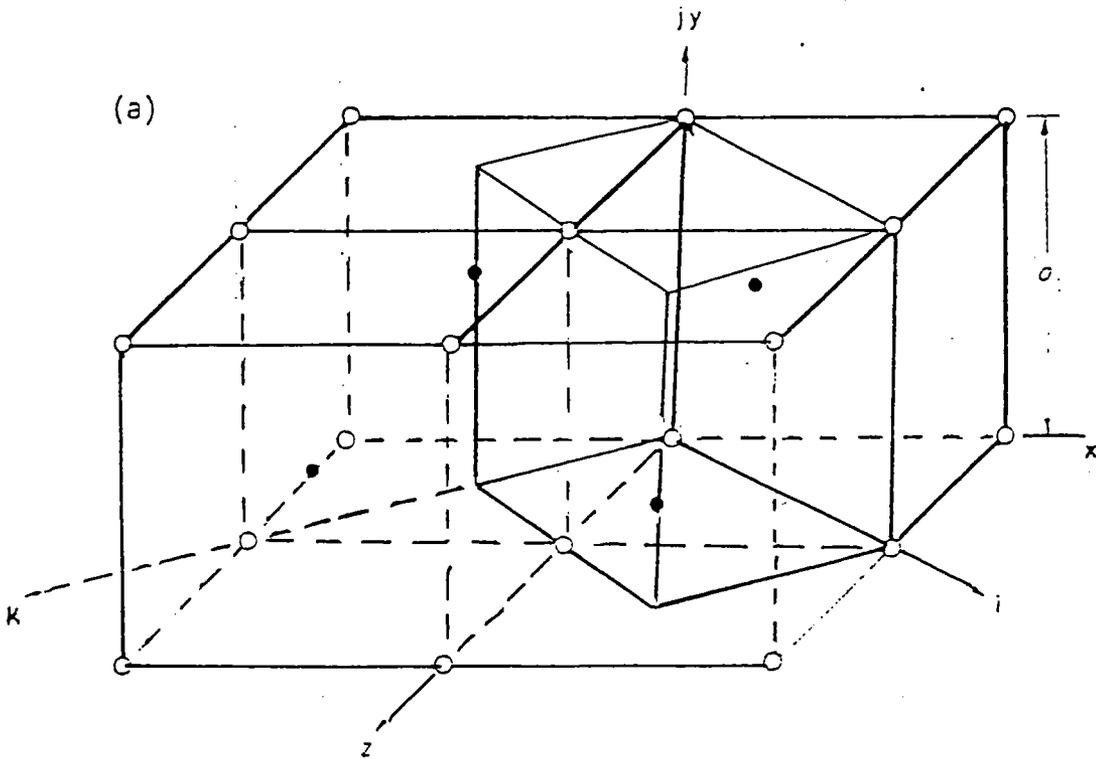


Fig. (III-5-I) transformation du réseau C.C \longrightarrow 9R (monoclinique)
selon ZHU. WEI - JUANG (34)

+ Plan d'habitat (P-H)

N.F : P-H nouvelle formulation en P.D

W.L.R : P-H théorie de WESCHELER - LIBERMAN - READ

Exp : P-H expérimental

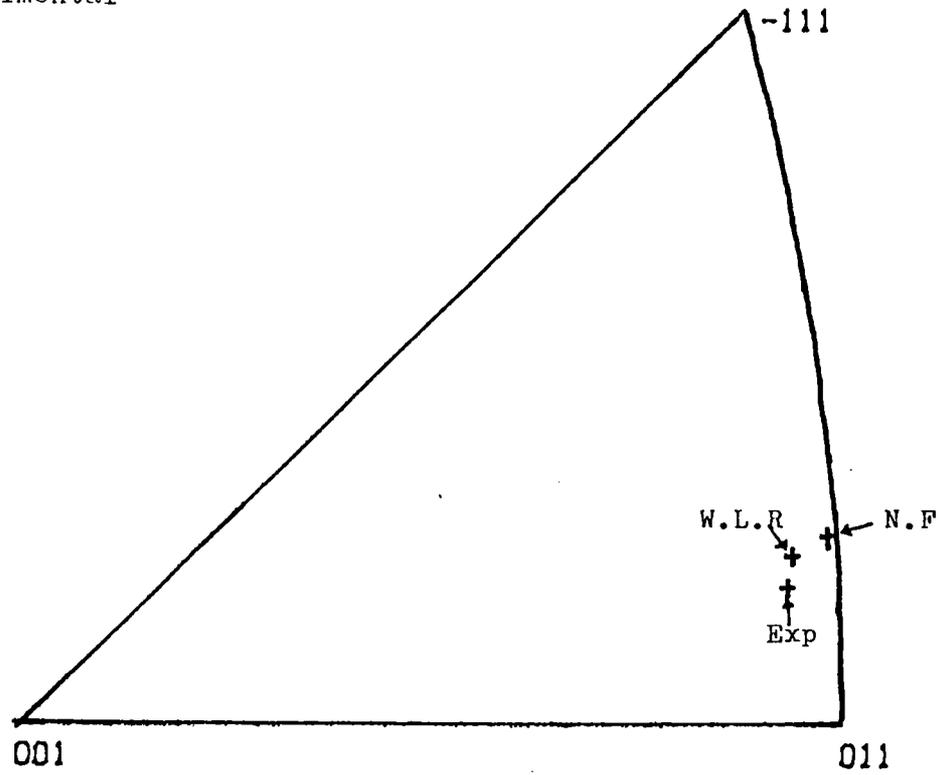
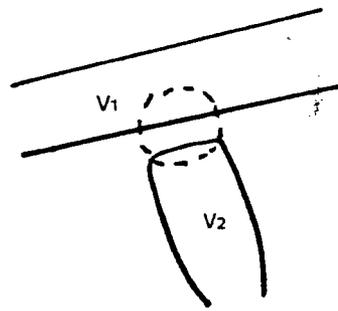
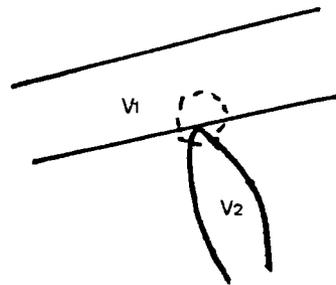
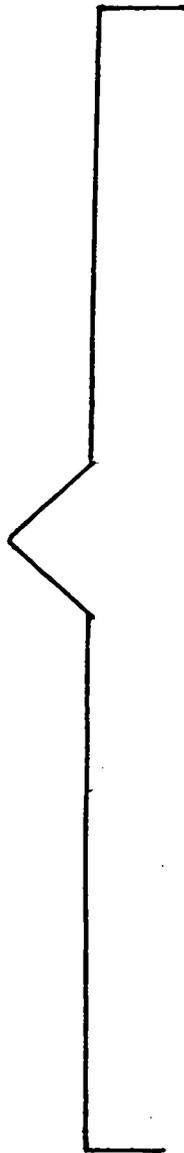


Fig. (III-5-2) Triangle de référence (Cu - Zn - Al)

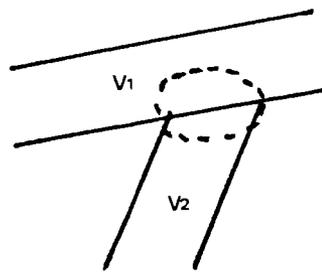
Interaction à distance
entre variants



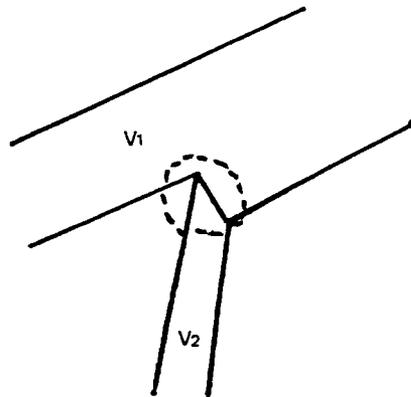
Interaction de contact
entre variants



- Interaction ponctuelle



- Interaction suivant une surface donnée



- Interaction par réorientation de l'interface
martensite - martensite

Fig. (III-6-I) Figure schématiques des divers interactions possible entre les variants de la martensite.

	E 1	E 2	E 3	E 4	E 5	E 6	E 7	E 8	E 9	E 10	E 11	E 12	E 13	E 14	E 15	E 16	E 17	E 18	E 19	E 20	E 21	E 22	E 23	E 24
E 1	X	C	C	C	NC	NC	C	NC	C	NC	C	NC	NC	C	NC	NC	NC	NC	NC	C	C	NC	NC	NC
E 2	C	X	C	C	NC	NC	NC	C	NC	C	NC	C	C	NC	NC	NC	NC	NC	C	NC	NC	NC	C	NC
E 3	C	C	X	C	C	NC	NC	NC	C	NC	C	NC	NC	NC	NC	C	NC	C	NC	NC	NC	NC	NC	C
E 4	C	C	C	X	NC	C	NC	NC	C	NC	NC	NC	NC	C	NC	C	C	NC	NC	NC	NC	C	NC	NC
E 5	NC	NC	C	NC	X	C	C	C	C	NC	C	NC	NC	C	NC	C	C	NC	NC	NC	C	NC	NC	NC
E 6	NC	NC	NC	C	C	X	C	C	NC	NC	C	NC	NC	C	NC	C	NC	NC	C	NC	NC	NC	NC	C
E 7	C	NC	NC	NC	C	C	X	C	NC	NC	C	NC	NC	C	NC	C	NC	NC	NC	C	NC	NC	C	NC
E 8	NC	C	NC	NC	C	C	C	X	NC	NC	NC	C	C	NC	C	NC	NC	NC	NC	C	C	NC	NC	NC
E 9	C	NC	C	NC	C	NC	NC	NC	X	C	C	C	NC	NC	C	NC	NC	NC	NC	C	C	NC	NC	NC
E 10	NC	C	NC	C	NC	C	NC	NC	C	X	C	C	NC	C	NC	NC	NC	C	NC	NC	NC	NC	C	NC
E 11	C	NC	C	NC	NC	NC	C	NC	C	C	X	C	C	NC	NC	NC	C	NC	NC	NC	NC	NC	NC	C
E 12	NC	C	NC	C	NC	NC	NC	C	C	C	C	X	C	NC	NC	NC	C	NC	C	NC	NC	C	NC	NC
E 13	NC	C	NC	NC	NC	C	NC	C	NC	NC	NC	C	X	C	C	C	NC	C	NC	NC	NC	C	NC	NC
E 14	C	NC	NC	NC	C	NC	C	NC	NC	NC	C	NC	C	X	C	C	C	NC	NC	NC	C	NC	C	NC
E 15	NC	NC	NC	C	NC	C	NC	C	NC	C	NC	NC	C	C	X	C	NC	NC	NC	C	NC	NC	NC	C
E 16	NC	NC	C	NC	C	NC	C	NC	C	NC	NC	NC	C	C	C	X	NC	NC	C	NC	NC	NC	NC	C
E 17	NC	NC	NC	C	C	NC	NC	NC	NC	NC	NC	C	NC	C	NC	NC	X	C	C	C	C	NC	C	NC
E 18	NC	NC	C	NC	NC	C	NC	NC	NC	NC	C	NC	C	NC	NC	NC	C	X	C	C	C	NC	C	C
E 19	NC	C	NC	NC	NC	NC	C	NC	NC	C	NC	NC	NC	NC	C	NC	C	C	C	X	C	NC	C	NC
E 20	C	NC	NC	NC	NC	NC	NC	C	C	NC	NC	NC	NC	C	NC	NC	NC	C	NC	C	X	C	C	C
E 21	C	NC	NC	NC	NC	C	NC	NC	C	NC	NC	NC	C	NC	NC	NC	C	NC	C	NC	C	X	C	C
E 22	NC	C	NC	NC	C	NC	NC	NC	NC	C	NC	NC	NC	C	NC	NC	NC	C	NC	C	C	C	C	C
E 23	NC	NC	C	NC	NC	NC	NC	C	NC	NC	C	NC	NC	NC	C	NC	NC	C	NC	C	C	C	C	C
E 24	NC	NC	NC	C	NC	NC	C	NC	NC	NC	NC	C	NC	NC	NC	C	C	NC	C	NC	C	C	C	X

TI

Matrice d'interaction entre les variants

dans les alliages du Cu-Zn-Al.

C : Interaction compatible
 NC : Interaction incompatible
 EI : Variant I (I = 1, 24)

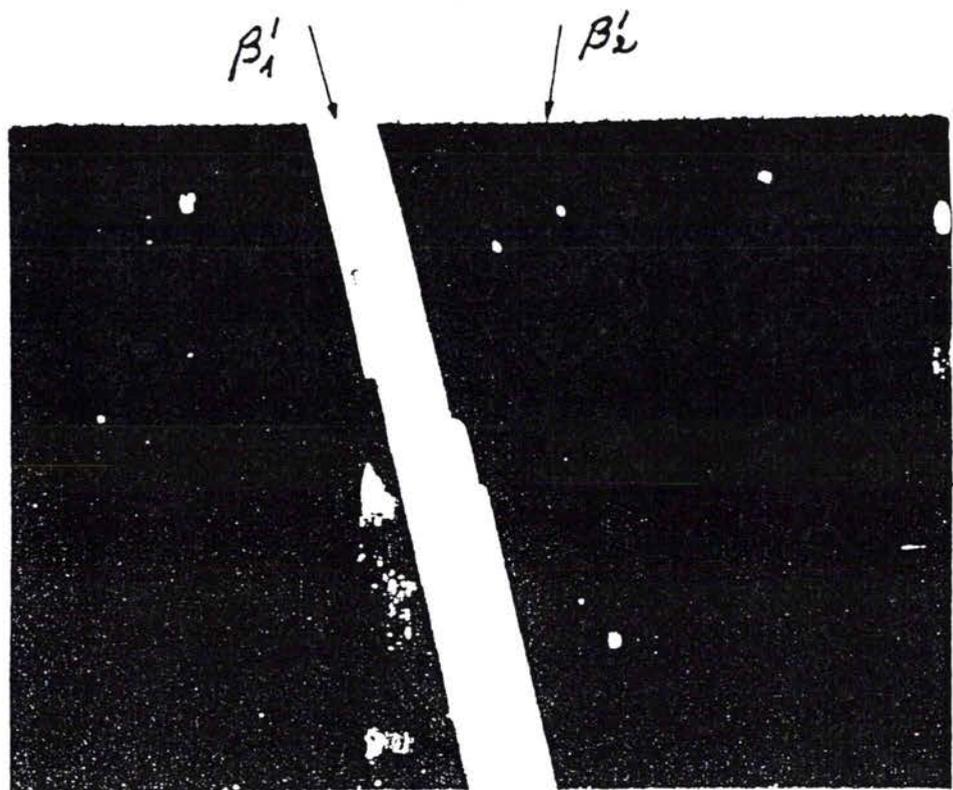


Fig. (III-6-2-a) interaction compatible entre les variants
(Cu-18.4Zn-7.3Al) (33)

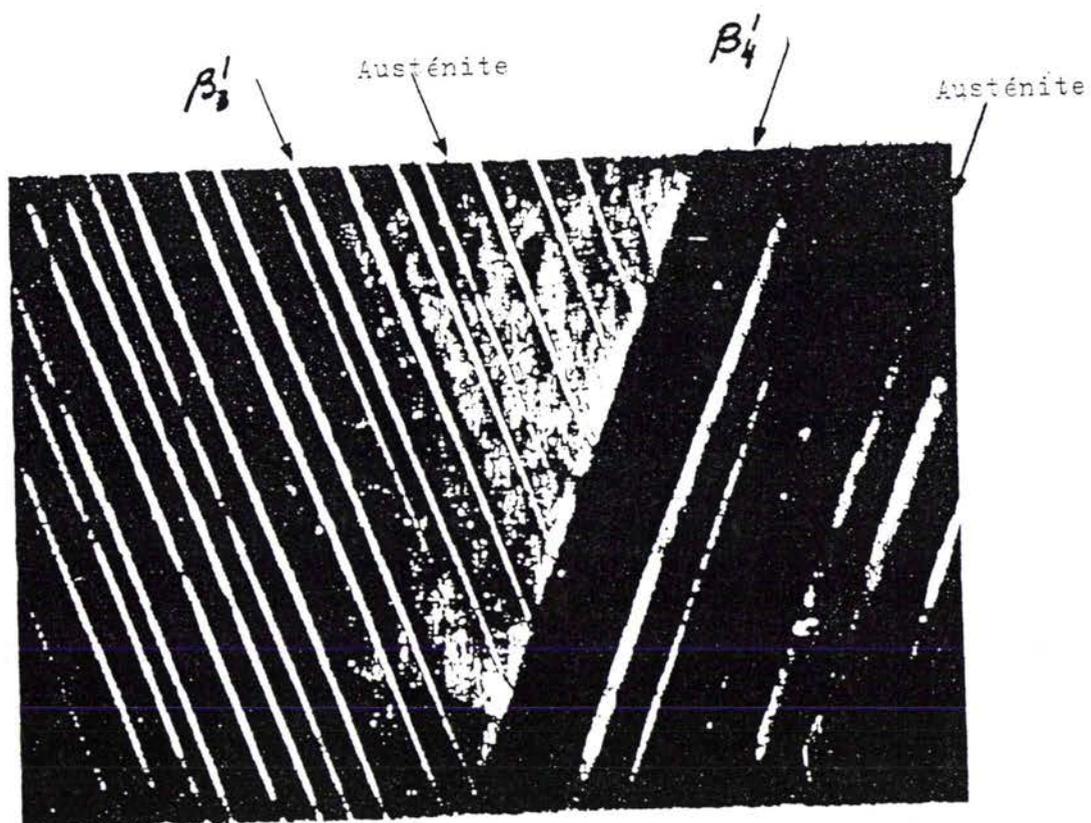


Fig. (6-2-b) interaction incompatible entre les variants
(Cu-18.4Zn-7.3Al) (33)

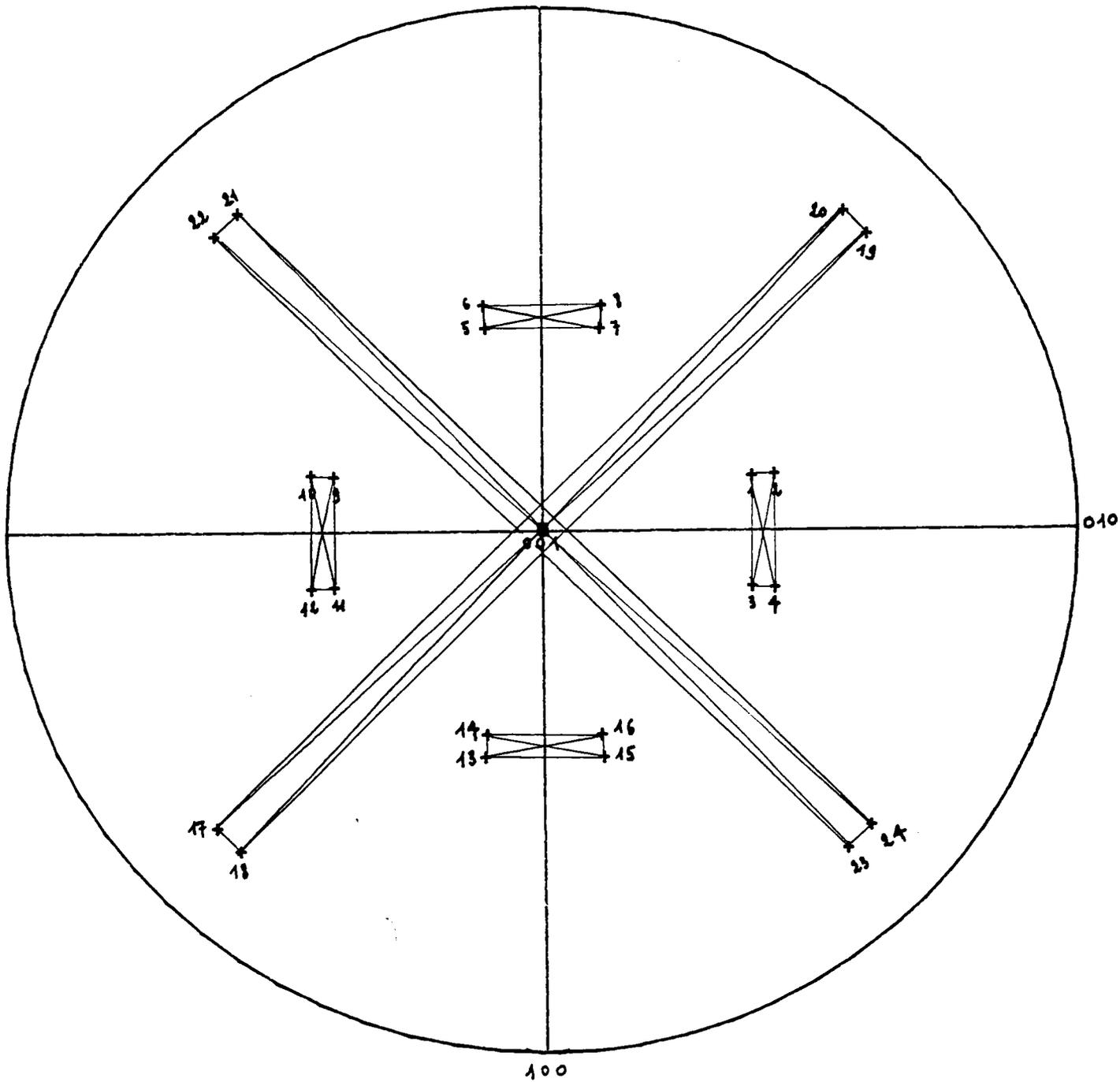


Fig. (III-6-3)

6 groupes de variants autoaccomodants (compatibles) par famille de 4 variants.

CHAPITRE IV

CONTRAINTES INTERNES ET ENERGIE ELASTIQUE ASSOCIEES

AUX INTERACTIONS ENTRE LES VARIANTS

IV.1 INTRODUCTION

IV.2 FORMULATION GENERALE

IV.2.1) Gradient de déplacement total et contraintes internes

IV.2.2) Energie élastique

a) Energie élastique d'interaction

b) Energie d'interaction avec le champ extérieur

IV.3 CONTRAINTES ET ENERGIE D'INTERACTION ENTRE VARIANTS

IV.3.1) Potentiel de contrainte

a) Contraintes internes

b) Energie élastique

IV.3.2) Energie d'interaction entre variants

IV.4 CAS DE L'INTERFACE PLANE

IV.5 ACCOMMODATION PAR REORIENTATION DE L'INTERFACE

IV.6 CONCLUSION

IV.1 INTRODUCTION

Dans le chapitre précédent, nous avons montré qu'il existe deux classes d'interactions de contact entre différents variants de martensite :

- Les interactions compatibles correspondant à une situation de compatibilité de la déformation de transformation associée à chaque variant. Dans cette situation, les contraintes internes sont nulles ainsi que l'énergie élastique associée. L'énergie interfaciale associée, qui est différente de celle correspondant à l'interface austénite-martensite est supposée faible et négligeable par rapport aux autres termes d'énergie d'origine mécanique.
- La seconde classe d'interaction entre variants correspondant à une situation d'incompatibilité entraînant la présence de contraintes internes et d'énergie élastique associée. Une microstructure particulière peut contribuer à relaxer, partiellement, ces contraintes internes par exemple par réorientation de l'interface entre les deux variants.

Le développement de ces contraintes internes va, en retour exercer une influence sur la progression des variants sous l'action des contraintes appliquées, conduisant ainsi à un effet d'écrouissage macroscopique associée aux contraintes internes. Pour décrire cet effet, il est tout d'abord nécessaire de calculer l'énergie élastique et les contraintes internes associées à de telles situations. C'est l'objet de ce chapitre.

Dans le paragraphe IV.2 nous rappellerons la formulation générale du problème (contraintes internes et énergie élastique). Nous calculerons ensuite, l'énergie élastique d'interaction entre les variants et les contraintes internes d'incompatibilité (§ IV.3). Nous appliquerons les résultats obtenus dans des problèmes particuliers d'interface d'interaction. Dans le paragraphe (IV.5) nous discuterons les effets d'accommodation et les effets de l'orientation de l'interface.

IV.2 FORMULATION GENERALE

IV.2.1) Gradient de déplacement total et contraintes internes

Considérons un milieu infini homogène de constantes élastiques C_{ijkl}^0 . Ce milieu contient 1, 2, ..., N inclusions de volume respectivement V_1, \dots, V_N . Nous supposons que chaque inclusion a subi une déformation inélastique (déformation sans contrainte au sens d'Eshelby) uniforme telle que :

$$\epsilon_{ij}^a(n) = \sum_{I=1}^N \epsilon_{ij}^{aI} \delta_{V_I}^0(n) \quad (IV.1)$$

$\delta_{V_I}^0(n)$ est une fonction indicatrice d'HEAVISIDE défini par :

$$\delta_{V_I}^0(n) = \begin{cases} 1 & n \in V_I \\ 0 & n \notin V_I \end{cases}$$

Si la déformation $\epsilon^a(n)$ est incompatible, il va s'ajouter une déformation supplémentaire supposée élastique $\epsilon^e(n)$ qui est source de contraintes internes, telle que la déformation totale $\epsilon^T(n)$ soit compatible.

$$\epsilon_{ij}^T(n) = \epsilon_{ij}^a(n) + \epsilon_{ij}^e(n) \quad (IV.2)$$

Le gradient du déplacement total $\beta^T(n)$ s'écrit alors :

$$\beta_{ij}^T(n) = u_{i,j}^T(n) = \beta_{ij}^e(n) + \beta_{ij}^a(n)$$

La déformation inélastique $\epsilon^a(n)$ peut être d'origine thermique, mécanique (plastique), chimique (retrait, séchage, vieillissement, ...) ou métallurgique (transformation de phase ou précipitation).

En tenant compte de l'équation d'équilibre (en absence de forces volumiques), nous avons :

$$\sigma_{ij,j}^{(2)} = 0 \quad (\text{div } \vec{\sigma} = 0) \quad (\text{IV.3})$$

et la loi de HOOKE

$$\sigma_{ij}^{(2)} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{(2)} \quad (\text{IV.4})$$

ou $\varepsilon_{(2)}^c$ est la partie symétrique de $\beta^{(2)}$

Par (IV.3) et (IV.4), nous obtenons :

$$C_{ijkl} \varepsilon_{kl,j}^{(2)} = 0 \quad (\text{IV.5})$$

Les constantes élastiques vérifient les symétries suivantes :

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij} \quad (\text{IV.6})$$

L'équation (IV.5) devient compte tenu de (IV.6)

$$C_{ijkl} \beta_{kl,j}^{(2)} = 0 \quad (\text{IV.7})$$

ou encore :

$$C_{ijkl} (\beta_{kl,j}^{T(2)} - \beta_{kl,j}^{a(2)}) = C_{ijkl} (\mu_{l,kj}^T + \beta_{kl,j}^a) = 0 \quad (\text{IV.8})$$

Le terme $C_{ijkl} \beta_{kl,j}^a$ peut être considéré comme une distribution fictive de forces volumiques que nous notons f_i telle que :

$$C_{ijkl} \mu_{l,kj}^T + f_i = 0 \quad (\text{IV.9})$$

La solution d'une telle équation peut être donnée par l'intermédiaire du tenseur de GREEN du milieu infini de constantes élastiques C_{ijkl} . (35)

$$u_m^T(r) = \int_{V'} G_{im}^{(r-r')} f_i^{(r')} dv' = - \int_{V'} G_{im}^{(r-r')} C_{ijkl} \beta_{kl,j}^a(r') dv' \quad (IV.10)$$

où

$u_m^T(r)$: déplacement total en un point (r)
 $G_{im}^{(r-r')}$: tenseur de Green d'un milieu infini de volume v qui vérifie l'équation d'équilibre $C_{ijkl} G_{km,lj}^{(r-r')} + \delta_{im} \delta(r-r') = 0$

avec δ_{im} le tenseur de KRONECKER et $\delta(r-r')$ la fonction de DIRAC.

Compte tenu de (IV.6), nous pouvons écrire (IV.10) comme :

$$u_m^T(r) = - \int_{V'} G_{im}^{(r-r')} C_{ijkl} \varepsilon_{kl,j}^a(r') dv' \quad (IV.10.Bis)$$

D'après les propriétés de la fonction d'HEAVISIDE $\delta_V^p(r)$, nous avons :

$$\delta_{V_I}^0(r), j = - \delta_j(S^I) = - \delta(S^I) n_j^I \quad (IV.11)$$

ou S^I est la frontière de l'inclusion I
 n_j^I : normale à la surface S^I (extérieure à V_I)

Le déplacement total devient alors en tenant compte de (IV.11) et (IV.1) :

$$u_m^T(r) = \sum_{I=1}^N \int_{V'} G_{im}^{(r-r')} C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{aI} \delta(S^I) n_j^I dv' \quad (IV.12)$$

En appliquant le théorème de STOCKES et une intégration par partie, nous aurons le déplacement total $u_m^T(r)$ qui s'écrit :

$$u_m^T(r) = \sum_{I=1}^N \int_{V_I} G_{im,j}^{(r-1')} C_{ijkl}^0 \varepsilon_{kl}^{aI} dv' \quad (IV.13)$$

Le gradient de déplacement total $\beta^T(r)$ est :

$$\beta_{mn}^T(r) = u_{m,n}^T(r) = - \sum_{I=1}^N \int_{V_I} G_{im,jn}^{(r-1')} C_{ijkl}^0 \varepsilon_{kl}^{aI} dv' \quad (IV.14)$$

La déformation élastique s'écrit :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{mn}^e(r) &= \varepsilon_{mn}^T(r) - \varepsilon_{mn}^a(r) \\ \varepsilon_{mn}^e(r) &= - \sum_{I=1}^N \left\{ \int_{V_I} \frac{1}{2} (G_{im,jn}^{(r-1')} + G_{in,jm}^{(r-1')}) C_{ijkl}^0 \varepsilon_{kl}^{aI} dv' - \varepsilon_{mn}^a \delta_{V_I}^0(r) \right\} \quad (IV.15) \end{aligned}$$

Contraintes internes

Les contraintes internes peuvent être déterminées par deux voies différentes :

*) Soit en utilisant le déplacement total par l'intermédiaire des équations de NAVIER. La déformation élastique est liée aux contraintes par la loi de HOOKE :

$$\sigma_{pq}^{(r)} = C_{pqmn}^0 \varepsilon_{mn}^e(r)$$

et compte tenu des résultats précédents ((IV.15) - (IV.1)), nous obtenons :

$$\sigma_{pq}^{(r)} = C_{pqmn}^0 \left\{ - \sum_{I=1}^N \left(\int_{V_I} G_{im,jn}^{(r-1')} C_{ijkl}^0 \varepsilon_{kl}^{aI} dv' - \varepsilon_{mn}^a \delta_{V_I}^0(r) \right) \right\} \quad (IV.16)$$

*) Soit en utilisant la méthode du potentiel de contrainte que nous développerons dans le paragraphe (IV.2). (36)(37)

IV.2.2) Energie élastique

IV.2.2 a) Energie élastique d'interaction avec la matrice

Pour un milieu infini de volume V, en absence de forces volumiques et de forces de surfaces, l'énergie élastique E s'écrit :

$$E = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}^{(n)} \varepsilon_{ij}^{(n)} dv \quad (IV.17)$$

en tenant compte de la symétrie de $\sigma_{ij}^{(n)}$ et de la relation (IV.2)

$$E = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}^{(n)} u_{i,j}^T dv - \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}^{(n)} \varepsilon_{ij}^{(n)} dv \quad (IV.17.Bis)$$

$$\text{or } \sigma_{ij} u_{i,j}^T = (\sigma_{ij} u_i^T)_{,j} - \sigma_{ij,j} u_i^T \quad (IV.18)$$

En remplaçant (IV.18) dans (IV.17.Bis) nous obtenons :

$$E = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij}^{(n)} u_i^T)_{,j} dv - \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij,j} u_i^T dv - \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}^{(n)} \varepsilon_{ij}^{(n)} dv$$

L'équation d'équilibre donne $\sigma_{ij,j}^{(n)} = 0$ et d'après le théorème de GAUSS, nous aurons :

$$E = \frac{1}{2} \int_S \sigma_{ij}^{(n)} u_i^T n_j ds - \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}^{(n)} \varepsilon_{ij}^{(n)} dv$$

L'équilibre en surface nous permet d'écrire :

$$\frac{1}{2} \int_S \sigma_{ij}^{(n)} u_i^T n_j ds = 0 \quad (IV.19)$$

Il reste finalement :

$$E = - \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}(z) \varepsilon_{ij}^a(z) dv \quad (IV.20)$$

qui représente l'énergie élastique due aux contraintes internes.

Compte tenu de la relation (IV.1), nous aurons :

$$E = - \frac{1}{2} \sum_{I=1}^N \overline{\sigma_{ij}}^I \varepsilon_{ij}^{aI} V_I \quad (IV.21)$$

ou $\overline{\sigma_{ij}}^I$ désigne la valeur moyenne des contraintes internes dans le volume V_I

$$\overline{\sigma_{ij}}^I = \frac{1}{V_I} \int_{V_I} \sigma_{ij}(z) dv \quad (IV.22)$$

IV.2.2.b) Energie d'interaction avec le champ extérieur

Considérons maintenant un milieu homogène infini de constantes élastiques C_{ijkl} de volume V . Ce milieu contient N inclusions dont chacune a subi une déformation inélastique ε^{aI} . Il est soumis à un champ de contrainte appliqué Σ dû à des forces surfaciques, telles que :

$$F_i = \Sigma_{ij} n_j \quad (IV.23)$$

En plus de contraintes internes σ , il faut tenir compte dans ce cas, du champ de contrainte appliqué Σ .

L'énergie élastique de déformation est alors :

$$E = \frac{1}{2} \int_V (\Sigma_{ij} + \sigma_{ij}) (\varepsilon_{ij}^i + \varepsilon_{ij}^e) dv \quad (IV.24)$$

ou ξ° est la déformation élastique associée à la contrainte Σ . Nous noterons \vec{u}° le déplacement associé à ξ° (ξ° vérifie les équations de compatibilité).

En développant (IV.24) et en tenant compte du fait que :

$$\begin{aligned} \Sigma_{ij} &= C_{ijkl} \xi_{kl}^{\circ} = C_{ijkl} u_{e,k}^{\circ} && \text{(loi de HOOKE)} \\ \Sigma_{ij,j} &= 0 && \text{(équilibre)} \end{aligned}$$

nous aurons :

$$\int_V \sigma_{ij} (\xi_{ij}^{\circ} + \xi_{ij}^T) dv = 0 \quad \text{(IV.25)}$$

de même nous avons :

$$\Sigma_{ij} (u_{i,j}^T - \xi_{ij}^a) = C_{ijkl} u_{e,k}^{\circ} (u_{i,j}^T - \xi_{ij}^a) = u_{e,k}^{\circ} \sigma_{kl} \quad \text{(IV.26)}$$

$$\text{et } \int_V \sigma_{ij} u_{i,j}^{\circ} dv = 0 \quad \text{d'après (IV.19)}$$

$$\text{ainsi que } \int_V \Sigma_{ij} (\xi_{ij}^T - \xi_{ij}^a) dv = 0 \quad \text{(IV.27)}$$

Il reste enfin en tenant compte de (IV.25) et (IV.27)

$$E = \frac{1}{2} \int_V \Sigma_{ij} \xi_{ij}^{\circ} dv - \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}^{(n)} \xi_{ij}^{a(n)} dv \quad \text{(IV.28)}$$

L'énergie d'interaction avec le champ de contrainte appliquée est définie par :

$$E_{int} = - \int_S F_i u_i^{T(n)} ds = - \int_S \Sigma_{ij} n_j u_i^{T(n)} ds \quad \text{(IV.29)}$$

d'après le théorème d'OSTROGRADZKY :

$$E_{int} = - \int_S \Sigma_{ij} n_j u_i^{T(n)} ds = - \int_V \Sigma_{ij} u_{i,j}^{T(n)} dv = - \int_V \Sigma_{ij} (u_{i,j}^T + \xi_{ij}^{a(n)} - \xi_{ij}^a) dv \quad \text{(IV.30)}$$

En subdivisant l'intégrale (IV.30), nous obtenons :

$$E_{int} = - \int_V \Sigma_{ij} (\mu_{ij}^{(n)} - \xi_{ij}^a) dv - \int_V \Sigma_{ij} \xi_{ij}^a dv$$

Compte tenu de (IV.27), nous avons :

$$E_{int} = - \int_V \Sigma_{ij} \xi_{ij}^a dv \quad (IV.31)$$

qui s'écrit aussi (IV.1) :

$$E_{int} = - \sum_{I=1}^N \Sigma_{ij} \xi_{ij}^{aI} V_I \quad (IV.32)$$

En conclusion nous pouvons écrire :

$$E = \frac{1}{2} \Sigma_{ij} \xi_{ij}^o V - \frac{1}{2} \sum_{I=1}^N \bar{\sigma}_{ij}^I \xi_{ij}^{aI} V_I$$

$$E_{int} = - \sum_{I=1}^N \Sigma_{ij} \xi_{ij}^{aI} V_I$$

L'énergie élastique associée à la formation des plaquettes de martensite sous une contrainte appliquée Σ comprend donc plusieurs termes :

- le terme $\Sigma \xi^o$
- les termes $\bar{\sigma}^I \xi^{aI}$ qui comportent à la fois les effets propres d'un variant sur lui même et les effets couplés dus aux contraintes internes associées à un variant I et à la déformation d'un variant J.
- des termes croisés provenant des interactions entre variants et contraintes appliquées.

Pour évaluer précisément tous ces termes, il reste à calculer les contraintes internes pour une situation donnée. On aurait pu partir des relations (IV.15). Nous préférons utiliser ici une autre méthode (36) qui part d'un potentiel de contrainte.

IV.3 CONTRAINTES ET ENERGIE D'INTERACTION ENTRE VARIANTS

Pour l'évaluation des contraintes internes d'incompatibilités et l'énergie élastique d'interaction entre variants, nous procédons par la deuxième voie des calculs de contraintes internes. Cette voie est la méthode du potentiel de contrainte développée par KRÖNER (36).

IV.3.1 Potentiel de contrainte

Le potentiel de contrainte est connu sous le nom de la fonction d'AIRY pour les problèmes plans homogènes et isotropes. Il a été généralisée par KRÖNER (36) dans les problèmes tridimensionnels homogènes et isotropes en présence de déformations incompatibles.

Pour un milieu isotrope homogène et en absence de forces volumiques KRÖNER définit le potentiel de contrainte ϕ par,

$$\sigma = \text{Inc } \phi \Rightarrow \sigma_{ij}^{(n)} = - \epsilon_{ikm} \epsilon_{jlm} \phi_{mn,kl}^{(n)} \quad (\text{IV.33})$$

$\sigma_{ij}^{(n)}$ est la contrainte locale au point n

$\phi_{ij}^{(n)}$ est le potentiel de contrainte vérifiant les équations d'équilibre :

volumiques $\sigma_{ij,j}^{(n)} = 0 \Rightarrow \text{div Inc } \phi = 0 \text{ (div Inc } = 0)$

moments $\phi_{ij}^{(n)} = \phi_{ji}^{(n)}$

Il introduit pour un milieu isotrope de constantes élastiques C_{ijkl}^0 un autre potentiel appelé : potentiel auxiliaire $X_{ij}^{(n)}$ défini par la relation

$$\phi = C^0 X \Rightarrow \phi_{ij}^{(n)} = C_{ijkl}^0 X_{kl}^{(n)} = 2\mu \left(X_{ij} + \frac{\nu}{1-\nu} X_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (\text{IV.34})$$

La dernière relation est valable dans le cas d'un milieu isotrope où λ, μ désignent les modules de LAME et ν le rapport de POISSON du milieu.

En outre, si le milieu subit une déformation inélastique incompatible $\xi^a(r)$, il se développe alors des déformations élastiques $\xi^e(r)$ (sources de contraintes internes), telle que la déformation totale $\xi^T(r)$ soit compatible.

$$\text{Inc } \xi^T = - \epsilon_{ikm} \epsilon_{jlm} \xi^T_{mm,kl} = 0 \quad (\text{IV.35})$$

Ce sont les conditions de SAINT-VENANT pour la déformation totale.

KRÖNER introduit alors une mesure quantitative de l'incompatibilité de la déformation inélastique $\xi^a(r)$, par l'intermédiaire du tenseur symétrique d'incompatibilité $\eta(r)$, tel que :

$$\eta_{ij}^{(r)} = \epsilon_{ikm} \epsilon_{jlm} \xi^a_{mm,kl} \quad (\text{IV.36})$$

Le milieu étant élastique, la déformation $\xi^e(r)$ est reliée à la contrainte σ par la loi locale de HOOKE :

$$\sigma_{ij}^{(r)} = C_{ijkl} \xi^e_{kl}(r) \quad \text{ou} \quad \xi^e_{ij}(r) = S_{ijkl} \sigma_{kl}^{(r)} \quad (\text{IV.37})$$

où S^o : désigne le tenseur compliance.

En tenant compte de (IV.35) - (IV.36) et (IV.1), nous aurons :

$$\text{Inc } \xi^T = \text{Inc } \xi^a + \text{Inc } \xi^e = 0$$

$$\text{Inc } \xi^a = - \text{Inc } \xi^e = - \eta \quad (\text{IV.38})$$

En utilisant les relations (IV.38) - (IV.37) - (IV.33) et (IV.34), nous obtenons :

$$\text{Inc } \xi^e = \text{Inc } S^o \sigma = \text{Inc } S^o \text{Inc } C^o \chi = \eta \quad (\text{IV.39})$$

Compte tenu de l'homogénéité du milieu de constante C^0 et de la propriété $C^0 S^0 = I$ nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \text{Inc Inc } \chi &= \chi_{ij,klm} - (\chi_{jkl,ik} + \chi_{ikl,jk}) + \\ &+ \frac{1}{1+\nu} \chi_{kl,ijkl} + \frac{\nu}{1-\nu} \chi_{kl,klmm} \delta_{ij} = \eta_{ij} \end{aligned} \quad (\text{IV.40})$$

soit

$$\begin{cases} \Delta \Delta \chi = \eta \\ \text{div } \chi = 0 \end{cases} \quad (\text{IV.41})$$

La solution d'une telle équation est donnée par KRÖNER pour un milieu infini sans force volumique, ni force de surface, pour lequel η_{ij} tend vers zéro à l'infini :

$$\chi_{ij}^{(2)} = -\frac{1}{8\pi} \int_{V'} \eta_{ij}^{(2)} |r-r'| dv' \quad (\text{IV.42})$$

Cette solution est construite à partir des relations classiques

$$\begin{cases} \Delta \Delta |r-r'| = -8\pi \delta(r-r') & r' \in V \\ \chi_{ij}^{(2)} = \int_{V'} \chi_{ij}^{(2)} \delta(r-r') dv' \end{cases}$$

La contrainte $\sigma(r)$ est obtenue en utilisant les relations (IV.42) - (IV.34) et (IV.33), soit :

$$\sigma = \text{Inc } \phi = \text{Inc } C^0 \chi$$

$$\sigma_{ij}^{(2)} = \frac{\mu}{4\pi} \left\{ \epsilon_{ikm} \epsilon_{jlm} \left(\int_{V'} \eta_{mm}^{(2)} |r-r'|_{,kl} dv' + \frac{\nu}{1-\nu} \int_{V'} \eta_{mm}^{(2)} |r-r'|_{,kl} dv' \delta_{mn} \right) \right\} \quad (\text{IV.43})$$

Energie élastique

Pour un milieu isotrope infini et élastique, l'énergie du champ élastique de déformation $\epsilon^{(n)}$ et de contrainte $\sigma^{(n)}$ est déterminée par la formule :

$$E = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ik}^{(n)} \epsilon_{ik}^{(n)} dv \quad (IV.44)$$

On a donc d'après (IV.20)
$$E = \frac{1}{2} \int_V \epsilon_{ilm} \epsilon_{lpq} \phi_{mq,lp}^{(n)} \epsilon_{ik}^{(n)} dv$$

En intégrant par partie et en éliminant les intégrales de surface, nous obtenons : (38)

$$E = \frac{1}{2} \int_V \eta_{ik} \phi_{ik} dv = \mu \int_V \left(\eta_{ik} X_{ik} + \frac{\nu}{1-\nu} \eta_{ii} X_{kk} \right) dv \quad (IV.45)$$

Compte tenu de (IV.42), nous aurons :

$$E = -\frac{\mu}{8\pi} \iint_{V V'} \eta_{ik}^{(n)} |r-r'| \eta_{ik}^{(n')} dv' dv - \frac{\mu\nu}{8\pi(1-\nu)} \iint_{V V'} \eta_{ii}^{(n)} |r-r'| \eta_{kk}^{(n')} dv' dv \quad (IV.46)$$

Ce qui correspond à l'énergie associée aux contraintes internes.

Nous précisons maintenant cette expression dans le cas des interactions de contact entre 2 variants.

IV.3.2 Energie d'interaction entre variants

Pour simplifier l'analyse, nous supposons qu'il n'y a que deux variants actifs. L'hétérogénéité de la déformation de transformation due à la présence de variants multiples, entraînera la présence de contraintes internes et d'une énergie élastique associée. Ces dernières modifieront profondément la morphologie de la structure ainsi que la réponse macroscopique.

On s'intéresse essentiellement aux interactions de contact entre les variants, les interactions à distance ont été étudiées par l'intermédiaire du problème de la paire d'inclusions dans des travaux antérieurs (17).

. Contrainte interne et énergie élastique.

Considérons un milieu austénitique infini homogène de constantes élastiques C_{ijkl}^0 . Supposons que dans des conditions isothermes ($T = \text{cte}$), sous l'effet d'une contrainte macroscopique appliquée Σ , deux variants (I) et (J) de volume V_I et V_J s'activent. Ces variants de martensite ont subi respectivement les déformations inélastiques uniformes ξ^{aI} et ξ^{aJ} , telles que :

$$\xi_{ij}^a(\mathbf{r}) = \xi_{ij}^{aI} \delta_{V_I}^0(\mathbf{r}) + \xi_{ij}^{aJ} \delta_{V_J}^0(\mathbf{r}) \quad (\text{IV.47})$$

ou $\delta_{V_I}^0(\mathbf{r})$ et $\delta_{V_J}^0(\mathbf{r})$ sont les fonctions indicatrices d'HEAVISIDE définies par :

$$\delta_{V_I}^0(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1 & \mathbf{r} \in V_I \\ 0 & \mathbf{r} \notin V_I \end{cases} \quad \delta_{V_J}^0(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1 & \mathbf{r} \in V_J \\ 0 & \mathbf{r} \notin V_J \end{cases}$$

ξ^{aI} et ξ^{aJ} caractérisent les déformations des variants (I) et (J). Ils sont respectivement fonctions de n^I (n^J) normale au plan d'habitat et m^I (m^J) direction de déplacement, telles que :

$$\begin{cases} \xi_{ij}^{aI} = \frac{g}{2} (m_i^I m_j^I + n_j^I m_i^I) = g R'_{ij}{}^I \\ \xi_{ij}^{aJ} = \frac{g}{2} (m_i^J m_j^J + n_j^J m_i^J) = g R'_{ij}{}^J \end{cases} \quad (\text{IV.48})$$

$R'_{ij}{}^I$ et $R'_{ij}{}^J$ sont les facteurs d'orientation des variants (I) et (J).

*) Contrainte interne

Les contraintes internes sont évaluées par l'intermédiaire du potentiel de contrainte :

$$\sigma = \text{Imc } \phi = - \epsilon_{ikm} \epsilon_{jln} \phi_{mn,kl}^{(2)}$$

Pour un milieu homogène et isotrope, un potentiel auxiliaire χ est introduit, tel que :

$$\chi_{ij}(r) = - \frac{1}{8\pi} \int_{V'} \eta_{ij}(r') |r-r'| dv' \quad (\text{IV.49})$$

$$\eta_{ij}(r) = \epsilon_{ikm} \epsilon_{jln} \xi_{mn,kl}^a(r) \quad (\text{IV.50})$$

En remplaçant (IV.50) dans (IV.49), nous obtenons :

$$\chi_{ij}(r) = - \frac{1}{8\pi} \int_{V'} \epsilon_{ikm} \epsilon_{jln} \xi_{mn,kl}^a(r') |r-r'| dv' \quad (\text{IV.51})$$

Compte tenu des propriétés de la fonction d'HEAVISIDE (IV.11), nous aurons :

$$\xi_{mn,kl}^a(r') = \left(\sum_{-m}^{+m} \delta_{V_I}^a(r') + \sum_{-m}^{+m} \delta_{V_J}^a(r') \right)_{,kl} = - \sum_{-m}^{+m} \delta_e(S^I) - \sum_{-m}^{+m} \delta_e(S^J) \quad (\text{IV.52})$$

$\delta_e(S^I)$ et $\delta_e(S^J)$ sont des distributions en surfaces (I) et (J).

On peut subdiviser les distributions $\delta_e(S^I)$ et $\delta_e(S^J)$ en :

$$\begin{cases} \delta_e(S^I) = \delta_e(S'^I) + \delta_e(S'^{IJ}) = m_e^I \delta(S'^I) + m_e^{I(IJ)} \delta(S'^{IJ}) \\ \delta_e(S^J) = \delta_e(S'^J) + \delta_e(S'^{JI}) = m_e^J \delta(S'^J) + m_e^{J(JI)} \delta(S'^{JI}) \end{cases} \quad (\text{IV.53})$$

ou S^{IJ} désigne l'interface commune aux deux variants (I) et (J).

n^I (n^J) sont les normales aux interfaces S^I (S^J) des variants I (J) avec l'austénite résiduelle.

N^{IJ} : normale à l'interface S^{IJ}

En tenant compte de (IV.53) et (IV.52) et en prenant \vec{N} positive suivant V_J , nous aurons donc :

$$\sum_{m,n,l}^a (\epsilon') = - \sum_{mn}^{aI} n_l^I \delta(S^I) - \sum_{mn}^{aJ} n_l^J \delta(S^J) - \Delta \sum_{mn}^{IJ} N_l \delta(S^{IJ}) \quad (IV.54)$$

avec
$$\Delta \sum_{mn}^{IJ} = \sum_{mn}^{aJ} - \sum_{mn}^{aI}$$

Le potentiel auxiliaire de contrainte s'écrit alors :

$$\chi_{ij}(r) = \frac{1}{8\pi} \int_{V'} \epsilon_{ikm} \epsilon_{jln} \left(\sum_{mn}^{aI} n_l^I \delta(S^I) + \sum_{mn}^{aJ} n_l^J \delta(S^J) \right) |r-r'|_{,k} dv' + \frac{1}{8\pi} \int_{V'} \epsilon_{ikm} \epsilon_{jln} \left(\Delta \sum_{mn}^{IJ} N_l \delta(S^{IJ}) \right) |r-r'|_{,k} dv'$$

En intégrant par partie et en annulant les intégrales en surface infinie, il reste :

$$\left\{ \begin{aligned} \chi_{ij}(r) &= - \frac{1}{8\pi} \int_{S^I} \epsilon_{ikm} \epsilon_{jln} \sum_{mn}^{aI} n_l^I |r-r'|_{,k} ds - \\ &- \frac{1}{8\pi} \int_{S^J} \epsilon_{ikm} \epsilon_{jln} \sum_{mn}^{aJ} n_l^J |r-r'|_{,k} ds - \frac{1}{8\pi} \int_{S^{IJ}} \epsilon_{ikm} \epsilon_{jln} \Delta \sum_{mn}^{IJ} N_l |r-r'|_{,k} ds \end{aligned} \right. \quad (IV.55)$$

Les contraintes internes sont calculées par l'intermédiaire du potentiel de contrainte ϕ et la relation (IV.33), telle que :

$$\sigma = \text{Inc } \phi = \text{Inc } C^0 \chi$$

C^0 : constantes élastiques du milieu

χ : potentiel auxiliaire local.

Le premier et le deuxième termes dans (IV.55) correspondent aux contraintes internes propres des variants (I) et (J). En effet, ces variants de martensite prennent la forme de plaquettes d'axes a, b, c telles que le rapport $\frac{c}{a}$ tend vers zéro. Il a été montré dans le § (3) que dans de telles situations, les contraintes internes sont nulles. Ceci provient du fait que l'interface austénite-martensite est compatible.

Le troisième terme représente les contraintes internes d'incompatibilité entre les deux variants (I) et (J) de la martensite.

$$\sigma_{pq}^{(2)} = - \epsilon_{pti} \epsilon_{qsj} \phi_{ij}^{(2)}, t_s$$

$$\phi_{ij}^{(2)} = 2\mu \left(\chi_{ij} + \frac{\nu}{1-\nu} \chi_{kk} \delta_{ij} \right)$$

$$\frac{1}{2\mu} \sigma_{pq}^{(2)} = \epsilon_{pti} \epsilon_{qsj} \left\{ \frac{1}{8\pi} \epsilon_{ikm} \epsilon_{jln} \Delta \epsilon_{mn}^{IS} + \frac{1}{8\pi} \frac{\nu}{1-\nu} \epsilon_{ikm} \epsilon_{jln} \Delta \epsilon_{mn}^{IS} \delta_{ij} \right\} \psi_{ikls}^{(2)} \quad (IV.56)$$

avec
$$\psi_{ikls}^{(2)} = \int_{S^{IS}} N_i' |r - r'|_{,k} t_s \, dS$$

$\sigma^{(2)}$ représente les contraintes internes d'incompatibilité entre les variants (I) et (J).

Energie élastique

L'énergie élastique en présence de contraintes macroscopiques est définie par (IV.28).

$$E = \frac{1}{2} \int_V \Sigma_{ij} \epsilon_{ij}^0 \, dV - \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}^{(2)} \epsilon_{ij}^a \, dV$$

En intégrant par partie et en éliminant les intégrales en surface infinie, nous obtenons

$$E = \frac{1}{2} \int_V \Sigma_{ij} \epsilon_{ij}^0 \, dV + \frac{1}{2} \int_V h_{ij}^{(2)} \phi_{ij}^{(2)} \, dV \quad (IV.57)$$

$h_{ij}^{(2)}$: tenseur d'incompatibilité
 $\phi_{ij}^{(2)}$: tenseur potentiel de contrainte

En tenant compte de la compatibilité entre l'austénite résiduelle et les variants de la martensite (contraintes internes nulles) et en utilisant des intégrations par parties, nous obtenons :

$$E = \frac{1}{2} \sum_{ij} \varepsilon_{ij}^{\circ} v + \frac{1}{2} \varepsilon_{ikm} \varepsilon_{jlm} \Delta \varepsilon_{mn}^{I\bar{J}} \int_{S^{I\bar{J}}} \phi_{ij,k} N_e dS \quad (IV.58)$$

En remplaçant dans (IV.58) ϕ par $C^{\circ} \chi$ et χ par (IV.55), nous aurons :

$$\phi_{ij}^{(2)} = C_{ijkl}^{(2)} \chi_{kl}^{(2)}$$

$$E = \frac{1}{2} \sum_{ij} \varepsilon_{ij}^{\circ} v - \frac{\mu}{8\pi} \varepsilon_{ikm} \varepsilon_{jlm} \Delta \varepsilon_{mn}^{I\bar{J}} \left(\varepsilon_{ip'q} \varepsilon_{jv's} \Delta \varepsilon_{qs}^{I\bar{J}} + \right. \\ \left. + \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon_{\alpha p'q} \varepsilon_{\alpha v's} \Delta \varepsilon_{qs}^{I\bar{J}} \delta_{ij} \right) \Psi_{v'p'ke}^{I\bar{J}}$$

$$\text{avec} \quad \Psi_{v'p'ke}^{I\bar{J}} = \int_{S'^{I\bar{J}}} \int_{S^{I\bar{J}}} (|z-z'|, v', N_{p'})_{,k} N_e dS' dS$$

$N_{p'}$ et N_e représentent la normale à la surface commune entre les deux variants (I) et (J). Le calcul explicite de l'énergie revient alors à calculer l'intégrale $\Psi^{I\bar{J}}$.

En conclusion, la contrainte σ et l'énergie E dépendent des facteurs d'orientation (incompatibilité) et de la morphologie géométrique de l'interface commune aux deux variants (I) et (J).

L'évaluation des contraintes internes et de l'énergie élastique d'interaction nécessite le calcul de $\psi_{l'k's}^{(2)}$ et $\Psi_{v'p'ke}^{I\bar{J}}$, c'est-à-dire la connaissance de la surface d'interaction $S^{I\bar{J}}$ et sa normale \vec{N} . Sans chercher une solution générale pour ce problème complexe, nous évaluons $\Psi^{I\bar{J}}$ et ψ pour une interface plane.

IV.4 CAS DE L'INTERFACE PLANE

Le calcul de l'énergie élastique dans un repère quelconque (R1) présente beaucoup de difficulté, car la normale \vec{N} à l'interface est inconnue et la fonction Ψ présente des difficultés dans sa résolution.

Pour résoudre ce problème, nous nous placerons donc dans un repère particulier (R2) où la normale \vec{N}_2 à l'interface entre variants est fixée.

Si nous prenons comme repère de référence (R2), celui qui donne une normale pour laquelle l'axe 2 est normale à l'interface. Nous aurons :

$$\vec{N}_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et le potentiel auxiliaire qui s'écrira :

$$X'_{ij}(\alpha) = \int_{S'_{12}} \epsilon_{i2q} \epsilon_{j2s} \Delta \epsilon'_{qs} |n - n'|_{,2} dS' \quad (IV.59)$$

$$\Delta \epsilon'_{qs} = a_{qi} a_{sj} \Delta \epsilon_{ij}$$

a (ξ_i) : matrice de passage de (R2 \rightarrow R1)

ξ_i : paramètre d'orientation (Angle d'EULER)

Le potentiel de contrainte ϕ' s'écrit :

$$\phi'_{ij}(\alpha) = \frac{-\mu}{4\pi} \left(\epsilon_{i2q} \epsilon_{j2s} \Delta \epsilon'_{qs} + \frac{\nu}{1-\nu} \epsilon_{i2q} \epsilon_{j2s} \Delta \epsilon'_{qs} \delta_{ij} \right) \int_{S'_{12}} |n - n'|_{,2} dS \quad (IV.60)$$

où μ et ν représentent respectivement les coefficients de cisaillement et de POISSON.

La contrainte dans le repère (R) s'écrira :

$$\sigma'_{ij}{}^{(2)} = a_{ik} a_{jl} \hat{\sigma}'_{kl}{}^{(2)} = \text{Imc } \phi' \quad (\text{IV.61})$$

$$\sigma'_{\epsilon\nu}{}^{I\text{S}}{}^{(2)} = \frac{\mu}{4\pi} \epsilon_{tki} \epsilon_{vlj} \left(\epsilon_{izq} \epsilon_{jzs} \Delta \xi'_{qs}{}^{I\text{S}} + \frac{\nu}{1-\nu} \epsilon_{xzq} \epsilon_{xzs} \Delta \xi'_{qs}{}^{I\text{S}} \delta_{ij} \right) \psi'_{z'ke}{}^{(2)}$$

avec

$$\psi'_{z'ke}{}^{(2)} = \int_{S'_{I\text{S}}} (|n-z'|, z')_{,ke} dS$$

L'énergie élastique associée aux contraintes internes s'écrit en tenant compte de l'expression (IV.58) :

$$E = \frac{1}{2} \epsilon_{izm} \epsilon_{jzn} \Delta \xi'_{mn}{}^{I\text{S}} \int_{S'_{I\text{S}}} \phi'_{ij,2} dS$$

Nous aurons en remplaçant $\phi'_{ij}{}^{(2)}$ par (IV.60) :

$$E = -\frac{\mu}{8\pi} \epsilon_{izm} \epsilon_{jzn} \Delta \xi'_{mn}{}^{I\text{S}} \left(\epsilon_{izq} \epsilon_{jzs} \Delta \xi'_{qs}{}^{I\text{S}} + \frac{\nu}{1-\nu} \epsilon_{xzq} \epsilon_{xzs} \Delta \xi'_{qs}{}^{I\text{S}} \delta_{ij} \right) \psi'^{I\text{S}}_{zz'z'z'} \quad (\text{IV.62})$$

avec

$$\psi'^{I\text{S}}_{zz'z'z'} = \int_{S'_{I\text{S}}} \int_{S'_{I\text{S}}} |n-z'|, z'z' dS' dS$$

Sous une forme plus réduite, nous écrivons l'énergie d'interaction entre variant :

$$E = \alpha(\Delta \xi'{}^{I\text{S}}, \nu) \cdot \mu \cdot \psi'^{I\text{S}} \quad (\text{IV.62.Bis})$$

Il reste donc à calculer uniquement le scalaire $\psi'^{I\text{S}}$ qui est donné en annexe pour une interface plane circulaire.

L'énergie d'interaction ne dépend ainsi que de l'orientation d'un variant I par rapport à un variant J et de la normale à l'interface commune entre les deux variants. Comme dans le cas de l'interface austénite-martensite, on peut faire l'hypothèse que la normale à l'interface entre les deux variants sera telle que l'énergie d'interaction soit minimum. C'est l'accommodation par orientation de l'interface.

IV.5 ACCOMMODATION PAR ORIENTATION DE L'INTERFACE ENTRE DEUX VARIANTS

Dans ce qui a précédé nous avons adopté l'hypothèse d'existence d'une interface incompatible entre les variants de martensite.

Ces interactions incompatibles sont les sources de contraintes internes. L'énergie associée à ces contraintes internes est différente selon l'orientation de la normale \vec{N} à l'interface commune entre les 2 variants.

D'après la relation (IV.62.Bis), nous avons :

$$E = \alpha(\Delta\varepsilon(\xi_i), \nu) \cdot \mu \cdot \varphi^{13}$$

ξ_i : caractérise l'orientation des variants de martensite
(Angle d'EULER)

φ^{13} : fonction scalaire dépendant de l'interface d'interaction entre les variants

Si la possibilité de réorientation de l'interface d'interaction entre variant existe, celle-ci prendra une orientation qui minimisera l'énergie d'interaction. Cette réorientation de l'interface entre variants de martensite est un mécanisme d'accommodation supplémentaire dans la transformation. Il joue un rôle important dans la microstructure de la transformation martensitique.

La condition de minimisation de l'énergie est prise par rapport aux paramètres d'orientation ξ_i , telle que :

$$\frac{\partial E}{\partial \xi_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left[\alpha(\Delta\varepsilon(\xi_i), \nu) \right] = 0 \quad (\text{IV.63})$$

Nous avons mis au point un programme permettant la détermination des ξ_i correspondant à un minimum d'énergie.

Dans le cas des alliages Cu-Zn-Al, nous avons calculé l'énergie d'interaction entre les différents variants et minimisé cette énergie par rapport à la normale. Pour certains couples de variants l'énergie minimum est faible et conduit à des interfaces pratiquement relaxées donc compatible. Pour d'autres couples de variants l'énergie d'interaction reste forte, y compris dans l'état partiellement relaxé. Ces résultats sont reproduits dans les courbes de la figure (IV.5.1).

Ces courbes montrent deux types d'interactions distinctes :

- interaction fortement incompatible fig (IV.5.1.a)
- interaction faiblement incompatible fig (IV.5.1.b)

Ces deux types d'interactions montrent que, même en autorisant une réorientation de l'interface entre variants, il y a des variants qui interagissent de manière forte. Leur interaction activera un troisième variant au niveau de leur interface d'interaction, qui lui est compatible avec les deux autres (variants autoaccommodants).

Le calcul de l'énergie d'interaction entre les variants servira à l'étude du phénomène de durcissement associée aux interactions entre les variants. Nous nous intéresserons essentiellement aux termes d'écrouissages croisés.

IV.6 CONCLUSIONS

Ce chapitre a été limité aux calculs des contraintes internes et de l'énergie élastique associée aux interactions incompatibles entre les variants.

Après avoir rappelé la formulation générale du problème (contraintes internes et énergie élastique), nous avons procédé aux calculs des contraintes internes et l'énergie élastique en utilisant la voie du potentiel de contrainte de KRONER.

Le calcul explicite des contraintes et de l'énergie étant complexe, nous nous sommes placés dans des situations particulières pour la surface de contact $S^{i,j}$.

La relaxation des contraintes internes est un problème variationnel complexe. En admettant l'hypothèse d'une possibilité de réorientation de l'interface d'interaction $S^{i,j}$, nous avons déterminé la normale à l'interface correspondant à la relaxation partielle ou totale des contraintes internes (ou) (énergie élastique).

Le calcul de l'énergie d'interaction entre les variants sera utilisé ultérieurement pour la description de "l'écrouissage croisé" dû aux contraintes internes d'incompatibilité de déformations inélastiques.

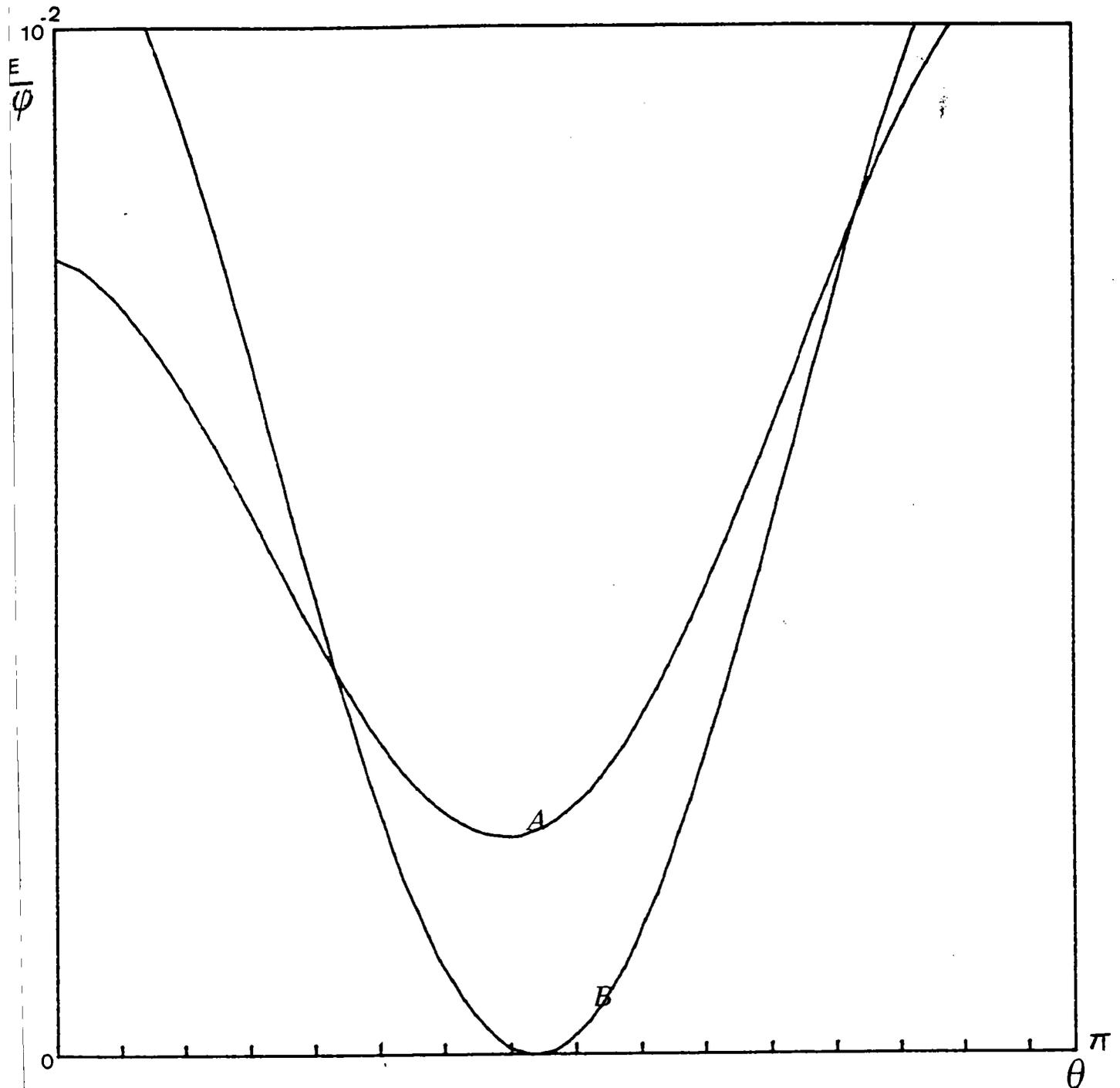


Fig. (IV-5-I) : Energie d'interaction entre variants de martensite en fonction de l'orientation (Cu-Zn-Al)

A: interaction fortement incompatible E1-E6

B: interaction faiblement incompatible E1-E10

CHAPITRE V : ECROUISSAGE LORS DE LA TRANSFORMATION MARTENSITIQUE

V.1 INTRODUCTION

V.2 THEORIE THERMODYNAMIQUE DE GIBBS

V.3 ETUDE DES VOISINAGES ENTRE VARIANTS AU MOYEN DES SURFACES DE CONTACT

V.4 MODELISATION DE L'ECROUISSAGE EN PLASTICITE DE TRANSFOR- MATION PARFAITE

V.4.1 Rappels sur la notion de "matrice
d'écrouissage" en plasticité classique

V.4.2 "Matrice d'écrouissage" en plasticité de
transformation

V.5 APPLICATION : CAS DES ALLIAGES Cu-Zn-Al

V.6 APPROCHE EXPERIMENTALE DU PROBLEME

V.7 CONCLUSION

V.1 INTRODUCTION

Le terme écrouissage en plasticité de transformation décrit l'augmentation des contraintes macroscopiques nécessaire pour faire progresser la transformation martensitique. Cette augmentation des contraintes macroscopiques est provoquée entre autres par les contraintes internes d'incompatibilité. L'origine de l'écrouissage est en fait multiple est associé à :

- la création de nouvelles plaquettes
- le déplacement des interfaces austénite - martensite ou martensite - martensite
- les interactions entre les variants dues aux incompatibilités de la déformation associée à la transformation martensitique
- l'écrouissage par création de dislocations (39).

Nous nous limiterons au troisième effet (interaction incompatible partiellement relaxée entre variant) qui a un aspect important, tout particulièrement dans le cas de sollicitations triaxiales non radiales. Le terme écrouissage ainsi défini, s'apparente donc plutôt au terme d'écrouissage cinématique de la plasticité classique car il est associé à la formation de contraintes internes.

Dans ce chapitre, nous utilisons une approche thermodynamique par l'intermédiaire de la théorie de GIBBS pour décrire l'évolution de la transformation martensitique. Nous étudions l'influence de l'énergie d'interaction entre variants (décrite dans les chapitres III et IV) sur l'écrouissage dans la transformation. Nous nous attachons ensuite à utiliser une analyse microstructurale, fondée sur les relations de proximité pour modéliser la surface de contact S_{12} entre variants.

Nous proposons enfin, un modèle pour décrire ce phénomène d'écrouissage par l'intermédiaire d'une matrice d'écrouissage analogue à celle de la plasticité classique, mais dont la signification physique est complètement différente. Pour illustrer la modélisation de l'écrouissage



associé à la plasticité de transformation, nous l'appliquons à l'étude des interactions entre les variants de la martensite dans les alliages Cu-Zn-Al.

A partir de la solution de l'énergie d'interaction obtenue au chapitre précédant, nous évaluons dans un cas particulier les termes d'interactions mutuelles entre les variants.

Nous donnerons enfin, quelques indications expérimentales concernant le problème étudié et les difficultés associées à une approche directe du problème.

V.2 THERMODYNAMIQUE DE GIBBS

On s'intéresse ici à la formation de la martensite dans des conditions isothermes. Expérimentalement, on observe que lorsqu'on augmente la contrainte appliquée, il existe un seuil au-delà duquel apparaît la martensite qui se développe jusqu'à envahir tout le volume de l'échantillon. Le développement de la martensite nécessite une augmentation de la contrainte dont l'origine a été signalée antérieurement. On se limite aux interactions entre variants qui ont un rôle déterminant dans le comportement des matériaux.

Pour analyser et étudier ce problème on adopte une approche thermodynamique par l'intermédiaire de la théorie de GIBBS.

La variation de l'énergie libre de GIBBS du système austénite-martensite en présence de sollicitations extérieures est définie par : (40)

$$\Delta G = \Delta G^c V_n + \Gamma S + E_{int} + E_{incl} \quad (V.1)$$

où ΔG^c représente la variation de l'énergie libre chimique, correspond à l'énergie d'interface entre austénite-martensite ; les termes d'énergie mécaniques E_{incl} et E_{int} représentent respectivement l'énergie élastique stockée dans le milieu et due aux incompatibilités de la transformation, et l'énergie d'interaction avec le champ de contraintes appliquées $\sum_{i,j}$. D'autre part, dans le cas de transformations martensitiques thermoélastiques l'énergie superficielle (ΓS) est en

général négligeable par rapport aux termes d'énergie mécaniques. On a en conséquence :

$$\Delta G \sim \Delta G^c V_H + E_{int} + E_{incl} \quad (V.2)$$

Compte tenu des résultats du chapitre IV, l'énergie d'interaction avec le champ extérieur et l'énergie élastique d'interaction avec la matrice austénitique s'écrivent dans le cas où N variants sont actifs :

$$E_{int} = - \int_V \Sigma_{ij} \epsilon_{ij}^{AM} dv \quad (V.3)$$

Σ_{ij} : contrainte appliquée
 ϵ_{ij}^{AM} : déformation de la martensite

$$\epsilon_{ij}^{AM} = \sum_{I=1}^N \epsilon_{ij}^{AI} \delta V_I^{(n)} \quad (V.4)$$

$$\epsilon_{ij}^{AI} = g R_{ij}^{I} = g \cdot \frac{1}{2} (m_i^I m_j^I + n_j^I m_i^I) \quad (V.5)$$

$$E_{int} = - \sum_{I=1}^N \Sigma_{ij} g R_{ij}^{I} V_I \quad (V.6)$$

$$E_{incl} = - \frac{1}{2} \sum_{I=1}^N \bar{\sigma}_{ij}^I g R_{ij}^{I} V_I \quad (V.7)$$

R_{ij}^{I} : facteur d'orientation du variant I

g : amplitude de déplacement

L'énergie élastique due aux contraintes internes s'écrit aussi :

$$E_{incl} = - \frac{\mu}{8\pi} \epsilon_{ikn} \epsilon_{jen} \Delta \epsilon_{mn}^{IJ} \left(\epsilon_{ipq} \epsilon_{jrs} \Delta \epsilon_{qs}^{IJ} + \right. \quad (V.8)$$

$$\left. + \frac{\nu}{1-\nu} \epsilon_{ipq} \epsilon_{rsn} \Delta \epsilon_{qs}^{IJ} \delta_{ij} \right) \int_{S_{I1}} \int_{S_{I2}} (n_i - n'_i)_{,k} N_{j,k} \mu ds' ds$$

(V.8) peut s'écrire aussi sous la forme réduite suivante :

$$E_{incl} = \sum_{I=1}^N \sum_{J \neq I}^N \alpha^{IJ} (\Delta \varepsilon^{IJ}, \nu) \cdot \mu \cdot \varphi^{IJ} \quad (V.9)$$

Le terme φ^{IJ} dépend de l'interface d'interaction entre les variants (I) et (J).

L'énergie élastique d'interaction E_{incl} devant être minimale (accommodation par réorientation de l'interface entre les variants (I) et (J)), cette minimisation dépendra donc des facteurs d'orientation R_{ij}^I et R_{ij}^J et de la morphologie de la surface d'interaction S_{IJ}

La variation de l'énergie libre de GIBBS en tenant compte des relations précédentes s'écrit :

$$\Delta G \sim \Delta G^c \sum_{I=1}^N v_I - \sum_{I=1}^N \sum_{ij} g R_{ij}^I v_I + \sum_{I=1}^N \sum_{J \neq I}^N \alpha^{IJ} \cdot \mu \cdot \varphi^{IJ} \quad (V.10)$$

En divisant par le volume total V et en se plaçant à l'état d'équilibre, nous aurons :

$$\frac{\Delta G}{V} = 0 = \Delta G^c \sum_{I=1}^N f_I - \sum_{I=1}^N \sum_{ij} g R_{ij}^I f_I + \sum_{I=1}^N \sum_{J \neq I}^N \alpha^{IJ} \cdot \mu \cdot \frac{\varphi^{IJ}}{V} \quad (V.11)$$

où f_I est la fraction volumique du variant I

$$\text{On a encore : } \sum_{I=1}^N \sum_{ij} g R_{ij}^I f_I = \Delta G^c \sum_{I=1}^N f_I + \sum_{I=1}^N \sum_{J \neq I}^N \alpha^{IJ} \cdot \mu \cdot \frac{\varphi^{IJ}}{V} \quad (V.11. Bis)$$

En prenant la dérivée par rapport à f_I des deux membres de l'équation (V.11.Bis) et en divisant les deux membres de (V.11.Bis) par g , nous obtenons :

$$\sum_{i,j} R'_{ij} = \mathcal{C}^I = \frac{\Delta G^c}{g} + \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial f_I} \left(\sum_{I=1}^n \sum_{J \neq I}^n \alpha^{IJ} \cdot \mu \cdot \frac{\psi^{IJ}}{v} \right) \quad (V.12)$$

Dans l'expression (V.12), le premier terme correspond à la contrainte critique pour former le premier variant, une telle contrainte critique dépend de la température, elle est la même pour tous les variants.

Le deuxième terme correspond aux contraintes internes associées à l'énergie d'interaction entre les variants (I) et (J). Pour les contraintes internes propres des variants, nous avons montré qu'elles s'annulent, puisque la forme de leur volume approche celle d'une plaquette d'axes a, b, c , telle que le rapport $\frac{c}{a}$ tende vers zéro (18)

Pour une interface plane circulaire, le scalaire ψ^{IJ} est donné en annexe.

Le scalaire se ramène à :

$$\psi^{IJ} = \beta \cdot S_{IJ}^{3/2} \quad (V.13)$$

où S_{IJ} désigne l'aire de l'interface entre les variants I et J.

L'expression (V.12) s'écrit compte tenu de (V.13) :

$$\sum_{i,j} R'_{ij} = \mathcal{C}^I = \frac{\Delta G^c}{g} + \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial f_I} \left(\sum_{I=1}^n \sum_{J \neq I}^n \alpha^{IJ} \cdot \mu \cdot \beta \cdot \frac{S_{IJ}^{3/2}}{v} \right) \quad (V.14)$$

Pour l'évaluation des termes d'interactions, il convient de rappeler que le calcul doit s'effectuer dans la situation partiellement relaxée. Cette situation correspondant à l'hypothèse que l'interface S_{IJ} entre les variants choisit une orientation particulière qui minimise l'énergie E_{incl} .

Pour pouvoir décrire de manière explicite la relation entre la surface d'interaction S_{IJ} et les fractions volumiques f_I et f_J des variants (I) et (J), il est nécessaire, soit d'introduire une étude statistique en fonction des sites de germination de la martensite et de la propagation des plaquettes (très délicate pratiquement) ; soit encore utiliser un modèle pour l'étude des voisinages entre les variants au moyen des surfaces de contact S_{IJ} .

Ce dernier modèle permet la détermination de la relation entre la surface de contact S_{IJ} et les fractions volumiques des variants en interaction mutuelle.

V.3 ETUDE DES VOISINAGES ENTRE VARIANTS AU MOYEN DES SURFACES DE CONTACT

Les structures multivariants rencontrées dans la transformation martensitique ont très souvent une organisation morphologique complexe. Il est important en effet de disposer de renseignements sur l'agencement mutuel des variants ou à défaut d'examiner cet agencement dans son ensemble.

Il est possible d'étudier ces relations de voisinage (proximité, contacts) pour chaque couple de variants au moyen de l'analyse morphologique par les fonctions de covariance (41) ou par l'intermédiaire des surfaces de contact entre les variants. Nous nous intéresserons essentiellement aux voisinages immédiats tels qu'ils puissent être décrits par leur surfaces de contact S_{IJ} . Nous décrivons ces relations de contact par l'intermédiaire d'un modèle très simplifié et particulier.

V.3.1 Voisinage entre variants aux moyens des surfaces de contact

Considérons deux variants de martensite (I) et (J) de volume respectivement V_I et V_J dans une matrice d'austénite. Chaque variant a subi la déformation ϵ_{ij}^{aI} et ϵ_{ij}^{aJ} , telle que :

$$\epsilon_{ij}^{aM} = \epsilon_{ij}^{aI} \delta_{V_I}^{(n)} + \epsilon_{ij}^{aJ} \delta_{V_J}^{(n)}$$

Les deux variants interagissent suivant une surface d'interaction S_{IJ}

Plusieurs voies peuvent être suivies pour caractériser les voisinages des variants dans un matériau au moyen des surfaces de contact :

- Les surfaces spécifiques de contact entre les variants : elles dépendent de l'arrangement spatial des variants, mais également de leur abondance.
- Les surfaces spécifiques rapportées aux proportions des variants actifs.

Nous nous intéresserons essentiellement à cette deuxième voie caractérisant les voisinages entre variants rapportées aux proportions des variants.

La morphologie macrohétérogène de la transformation martensitique étant complexe, on procède d'abord à une homogénéisation du milieu obtenant ainsi une uniformité, nous permettant de n'étudier qu'un élément de volume de la transformation.

Dans la suite de notre travail, nous allons tenir compte de la morphologie d'interaction entre variants telle qu'elle a été définie par DELAEY (4) ; nous obtenons ainsi une relation géométrique approximative liant la surface d'interaction S_{IJ} aux fractions volumiques f_I et f_J des variants (I) et (J). Ainsi d'après la figure (V.3.1) (4) , nous obtenons :

le volume total qui s'écrit :

$$V = (e_1 + h_2) h_1 x_1 \quad (V.15)$$

le volume du variant A, s'écrit :

$$V_1 = e_1 h_1 x_1 \quad (V.16)$$

le volume du variant B, s'écrit :

$$V_2 = e_2 h_2 x_2 \quad (V.17).$$

En se développant, les variants de martensite prennent la forme de plaquettes très fines ($\frac{e}{a} \rightarrow 0$), on peut dire que $e_1 \ll h_2$

le volume total devient alors :

$$V \sim h_2 h_1 x_1$$

En prenant le produit de (V.16) et (V.17), on obtient :

$$\frac{V_1 V_2}{V} \sim \frac{e_1 x_1 h_1 e_2 x_2 h_2}{h_2 h_1 x_1} = e_1 e_2 x_2 \quad (\text{V.18})$$

La surface d'interaction que nous envisageons ici est circulaire de rayon a .

Le volume $e_1 e_2 x_2$ engendrant la surface circulaire est une demi-sphère de rayon a :

$$e_1 e_2 x_2 = \frac{2}{3} \pi a^3 \quad a : \text{rayon du cercle (V.19)}$$

$$f_1 f_2 = \frac{V_1 V_2}{V^2} = \frac{2}{3} \pi \frac{a^3}{V} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\pi^{1/2}} \cdot \frac{S_{12}^{3/2}}{V} \quad (\text{V.20})$$

d'où on a :

$$\frac{S_{12}^{3/2}}{V} = \frac{3 \pi^{1/2}}{2} f_1 f_2 \quad (\text{V.21})$$

Nous avons obtenu une relation entre la surface d'interaction S_{12} et les fractions volumiques des variants I et J dans ce cas particulier.

Les associations souvent complexes des constituants d'un matériau multivariants, peuvent être caractérisées quantitativement au moyen des surfaces de contact entre les variants. Ces dernières permettent de calculer la proportion des contacts d'un variant avec les autres. Leur interprétation morphologique en termes de voisinages est très intéressante car elle résume bien la structure multivariant, et peut fournir des indications sur sa formation (croissance d'un variant au dépens d'un autre...). Pour l'interprétation des résultats, il est important de souligner que les caractéristiques obtenues dans ce chapitre sont propres au cas envisagé (S_{12} : surface d'interaction circulaire limitant un volume

sphérique). Il convient de tenir compte de la morphologie considérée et des hétérogénéités éventuelles de la microstructure. La modélisation que nous avons proposé, sera utilisée pour la détermination de "l'écrouissage croisé" entre les variants de la martensite dans les paragraphes suivants.

V.4 MODELISATION DE L'ECROUISSAGE EN PLASTICITE DE TRANSFORMATION PARFAITE

Avant d'aborder le paragraphe sur la modélisation de la "matrice d'écrouissage" en plasticité de transformation parfaite, il est intéressant de rappeler la notion de "matrice d'écrouissage" telle qu'elle a été introduite en plasticité classique.

V.4.1 Rappels sur la notion de "matrice d'écrouissage" en plasticité classique (42)(43)

Il est maintenant bien établi que la déformation plastique résulte d'un glissement cristallographique. On sait que dans les métaux le glissement résulte de mouvement de translations de défauts linéaires dénommés dislocations. Ces dislocations se multiplient sous l'effet des cisssions appliquées dans les plans où elles sont susceptibles de se déplacer. Les dislocations d'une part réalisent le glissement sur les systèmes actifs et d'autres part s'accumulent au sein du cristal en un réseau d'obstacles. Ce réseau est la cause essentielle de l'écrouissage qui traduit la variation du seuil critique τ_c . En d'autre terme, le phénomène d'écrouissage en plasticité classique est interprété par deux types d'interactions :

- interaction des dislocations avec le réseau cristallin
- interaction entre dislocations dues à leur multiplication et à l'activation de plusieurs systèmes de glissements.

Pour permettre une mesure quantitative, KROITER, MANDEL et HILL ont émis l'hypothèse d'un écrouissage croisé et introduisent ainsi une matrice d'écrouissage h reliant la cission critique sur les différents systèmes aux amplitudes de glissement des systèmes actifs selon la relation

$$\tau_c^g = \tau_c^0 + \sum_l h^{gl} \gamma^l \quad (V.22)$$

où τ_c^0 est la cission critique initiale (supposé identique pour tous les systèmes de glissement)

et h^{gl} : les modules de la matrice d'écrouissage.

Par la suite, plusieurs approches phénoménologiques de la plasticité s'appuyant sur le critère d'écoulement plastique $f(\sigma_{ij}, \gamma) = 0$ se sont succédées.

où $f(\sigma_{ij}, \gamma)$ est le potentiel plastique simple

γ : représente les paramètres phénoménologiques de l'écrouissage tel que le domaine élastique correspond à $f(\sigma_{ij}, \gamma) < 0$

Le paramètre γ peut être interprété de manière différente selon l'approche envisagée.

ZARKA (44) puis FRANCIOSI (45) considèrent la densité de dislocation ρ comme paramètre d'écrouissage et relient les termes de la matrice h aux différents densités de dislocations.

Il convient ici, comme dans le cas de la plasticité classique de décrire l'évolution de la plasticité de transformation par l'intermédiaire d'une matrice d'interaction. Celle-ci décrit essentiellement les interactions entre les variants de la martensite.

V.4.2 "Matrice d'écroissage" en plasticité de transformation parfaite

Nous utilisons les résultats des chapitres précédents pour analyser quelques aspects spécifiques de contraintes internes dans le cas de la plasticité de transformation parfaite. On sait que dans des conditions de chargement isotherme, des plaquettes de martensite, dont l'orientation dépend de l'état de contraintes, se forment ; mis à part quelques cas particuliers, les interactions entre les différents variants conditionnent l'aptitude à la déformation en pseudoélasticité. Nous savons par ailleurs que, en l'absence d'une accommodation non élastique notable, l'énergie élastique due à une incompatibilité d'une déformation inélastique peut être considérable. On doit donc s'attendre à ce que le comportement global en pseudoélasticité soit directement lié à la nature des interactions entre variants (1).

Si on prend le cas particulier d'une surface d'interaction circulaire et en tenant compte des relations (V.14) et (V.21), nous obtenons :

$$\frac{\Delta G}{V} = \Delta G^c \sum_{I=1}^N f_I - \sum_{I=1}^N \sum_{j=1}^N g R'_{ij}{}^I f_I + \sum_{I=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha^{IJ} \cdot \mu \cdot \beta' f_I f_J \quad (V.23)$$

avec
$$\beta' = \frac{3\pi^{1/2}}{2} \beta$$

Le terme $\sum_{j=1}^N g R'_{ij}{}^I$ représente une contrainte résolue sur le variant I, c'est la projection dans la direction \vec{m}^I de déplacement du variant I du vecteur contrainte associée à la normale au plan d'habitat \vec{n}^I . En général, cette contrainte résolue comporte une cisssion dans le plan d'habitat et une contrainte normale à ce plan.

L'équilibre entre la phase austénitique et la phase martensitique impose que $\Delta G = 0$. Cette condition se traduit par :

$$\sum_{I=1}^N \sum_{j=1}^N g R'_{ij}{}^I f_I = \Delta G^c \sum_{I=1}^N f_I + \sum_{I=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha^{IJ} \cdot \mu \cdot \beta' f_I f_J \quad (V.24)$$

En prenant la dérivée des deux membres de l'équation (V.24) par rapport à f_I , on obtient :

$$\sum_{ij} R'_{ij}{}^I = \frac{\Delta G^c}{g} + \sum_{J \neq I}^n \frac{\alpha^{IJ} \cdot \mu \cdot \beta'}{g} f_J \quad (V.25)$$

avec $\alpha^{IJ} = \alpha^{IJ}(\xi_i, \Delta \varepsilon^{IJ}, \nu)$

α^{IJ} désigne le facteur d'énergie minimisant l'orientation entre les variants (I) et (J)

ξ_i représente l'orientation du variant (I) par rapport au variant (J)

$\Delta \varepsilon^{IJ}$: différence de déformation = $\varepsilon^J - \varepsilon^I$

ν : coefficient de POISSON

β' : facteur de proportionnalité = $\frac{3\pi^{1/2}}{2} \beta$ (pour S_{IJ} circulaire)

L'équation (V.25) peut aussi s'écrire sous la forme suivante :

$$\tau^I = \tau^0 + \sum_{J \neq I}^n A^{IJ} f_J \quad (V.26)$$

Par identification (V.26) et (V.25), on obtient :

$$\tau^0 = \frac{\Delta G^c}{g} \quad (\text{contrainte résolue initiale})$$

$$A^{IJ} = A^{JI} = \frac{1}{g} \cdot \alpha^{IJ} \cdot \beta' \cdot \mu$$

Les termes croisés A^{IJ} rendent compte à la fois :

- des effets morphologiques associés à la forme de l'interface entre les variants (I) et (J) et de leurs positions relatives (terme β').
- des effets de désorientation des deux variants et de l'incompatibilité associée, qui sont pris en compte dans les termes $R'_{ij}{}^I$ et $R'_{ij}{}^J$ (termes α^{IJ}).

Ainsi, nous avons obtenu une matrice d'interaction entre les variants qui représente un écrouissage au sens de la plasticité de transformation. Cette matrice d'interaction est nécessaire pour l'étude de la fonction seuil et de la loi d'écoulement dans le cas de plusieurs variants.

Ces résultats complètent ainsi, les travaux antérieurs sur le comportement du monocristal polyvariant en plasticité de transformation [3]

Ils constituent en fait une approximation des contraintes internes dans le cas de déformation à plusieurs variants incompatibles.

Il est possible d'obtenir de meilleurs résultats en étudiant plus finement la morphologie de contact entre les variants, et les hétérogénéités liées à la microstructure. Il y a là toute une série d'études à entreprendre.

Pour notre part, nous illustrons les résultats obtenus dans ce cas particulier aux alliages thermoélastiques (Cu-Zn-Al).

V.5 APPLICATION

Cas des alliages Cu-Zn-Al

Considérons deux variants de martensite I et J, pour lesquelles les déformations sont respectivement $R_{ij}^I g$ et $R_{ij}^J g$. L'énergie élastique due aux incompatibilités E_{incl} va s'écrire.

$$E_{incl} = E^I + E^J + E^{IJ}$$

avec E^I (E^J) sont respectivement l'énergie propre du variant I (J)

E^{IJ} désigne l'énergie d'interaction entre les variants (I) et (J) telle que :

$$\begin{aligned} E^{IJ} &= 0 \text{ pour une interaction compatible} \\ E^{IJ} &\neq 0 \text{ pour une interaction incompatible} \end{aligned}$$

D'après la relation (IV.58) l'énergie d'interaction pour une incompatibilité s'écrit :

$$E^{IJ} = -\frac{\mu}{9\pi} \epsilon_{ikm} \epsilon_{jln} \Delta \epsilon_{mn}^{IJ} \left(\epsilon_{ipq} \epsilon_{jrs} \Delta \epsilon_{qs}^{IJ} + \frac{\nu}{1-\nu} \epsilon_{ipq} \epsilon_{krs} \Delta \epsilon_{qs} \delta_{ij} \right) \Psi_{r'p'k'}$$

avec $\Psi_{r'p'k'} = \int_{S_{IJ}} \int_{S'_{IJ}} \left(|r - r'|, \nu, N_{p'} \right)_{,k'} N_e ds' ds$

où \vec{N} normale à l'interface commune entre les deux variants.

Si on prend le cas particulier d'une surface circulaire et en tenant compte de la modélisation de contact entre les variants (I) et (J), on obtient :

$$E^{IJ} = \alpha^{IJ} (\Delta \epsilon^{IJ}, \nu, \xi_i) \cdot \mu \cdot \beta' f_I f_J$$

- β' dépend de la morphologie envisagée
- α^{IJ} dépend de l'orientation du variant (I) par rapport au variant (J)
- μ désigne le module de cisaillement

Ainsi, pour les plaquettes d'épaisseur trop faible ($\frac{c}{a} \ll 1$), les termes E^I et E^J d'énergie propre sont négligeables, on a alors :

$$E_{ind} \sim \alpha^{IJ} (\Delta \epsilon^{IJ}, \nu, \xi_i) \cdot \beta' \cdot \mu \cdot f_I f_J$$

d'où les contraintes résolues τ^I et τ^J (d'après (IV.26))

$$\begin{aligned} \tau^I &= \tau^0 + f_J A^{IJ} \\ \tau^J &= \tau^0 + f_I A^{JI} \end{aligned}$$

avec $A^{IJ} = A^{JI} = \frac{1}{4} \alpha^{IJ} \cdot \beta' \cdot \mu$

Nous allons nous intéresser au cas de l'alliage Cu-Zn-Al dans lequel peuvent coexister plusieurs variants (24 variants en général).

Chaque variant I est caractérisé par sa normale au plan \vec{m}^I d'habitat et sa direction de déplacement \vec{m}'^I , telle que :

$$\epsilon_{ij}^{aI} = \frac{g}{2} \left(m_i^I m_j'^I + m_j^I m_i'^I \right) = g R_{ij}^{I} \quad (I = 1, 24)$$

En prenant les caractéristiques du variant à partir de Delaey

(23)

$$\vec{n} \begin{matrix} \left\{ \begin{array}{l} - 0.182 \\ 0.669 \\ 0.721 \end{array} \right. \\ \mathbf{R} \end{matrix} \quad \vec{m} \begin{matrix} \left\{ \begin{array}{l} - 0.165 \\ - 0.737 \\ 0.655 \end{array} \right. \\ \mathbf{R} \end{matrix} \quad g = 0.230$$

\mathbf{R} étant le repère cristallographique

Les autres variants sont déterminés à partir des symétries de la phase mère (pour le Cu-Zn-Al cubique). On obtient les différents variants qu'on rassemble dans le tableau T.5.1

Les $\alpha^{ij}(\delta \epsilon^{ij}, \nu, \zeta_i)$ sont déterminés à partir de la minimisation par rapport aux variables d'orientation ζ_i . On aboutit enfin aux résultats que nous rassemblons au tableau T.5.2

Ces résultats associés aux divers interactions peuvent se résumer en 3 types d'interactions :

- interactions compatibles ($E^{ij} = 0$) = c
- interactions faiblement incompatible = $A_2 = \frac{\mu}{4} 10^{-3}$
- interactions fortement incompatible = $A_1 = \frac{\mu}{150}$

Les valeurs obtenues dans le cas que nous avons étudié, indiquent une très grande interaction entre quelques variants incompatibles. Ce qui explique la relative fragilité des matériaux polycristallins lorsque le mécanisme d'interaction entre variants intervient de manière unique. Ces caractéristiques sont directement liées aux contraintes internes, nées des incompatibilités intergranulaires dues à la transformation martensitique et à la difficulté de les relaxer par une transformation supplémentaire ou une déformation plastique classique.

Cette approche montre que dans le cas de la plasticité de transformation, toute au moins dans le cas de sollicitation axiale, le mode de déformation multiple sera difficile (sauf dans le cas de variants compatibles ou autoaccommodant). Il s'avère alors nécessaire de voir le problème en sollicitation triaxiale et non radiale. Ce travail n'a pas été entrepris dans cette thèse.

V.6 APPROCHE EXPERIMENTALE DU PROBLEME

Nos observations expérimentales ont porté sur les alliages du Cu-Zn-Al pour lesquels, la plasticité de transformation est le seul mécanisme de déformation.

Les essais ont été effectués à partir de deux alliages A₁ et A₂ dont la composition chimique et les caractéristiques sont données dans le tableau T.6.1.

Les monocristaux ont été réalisés par la méthode de BRIDGMANN, dans des ampoules de quartz scellés. Des éprouvettes d'orientation diverses (voir fig V.6.1) ont été découpées dans ces monocristaux par électroérosion.

Les essais mécaniques de traction simple ont été réalisés sur une machine de traction (Instron) sous une vitesse de déformation constante

L'allongement est donné par un capteur de déplacement (LVDT) dont la base de mesure est 25 mm. L'allongement de l'éprouvette et la force de traction sont enregistrés sur une table traçante.

L'identification du variant primaire (trace du plan d'habitat) a été faite par microscopie optique.

V.6.1 Monocristal monovariant

Des éprouvettes ont été découpées suivant différentes orientations du monocristal par rapport à l'axe de traction.

Les courbes (σ, ϵ) pour les différents monocristaux ont été transposés en (τ, θ) figures (V.6.2) et (V.6.3).

Les valeurs caractéristiques :

- Cission critique
- pente d'écrouissage
- glissement maximal

sont données dans les tableaux T.6.2 et T.6.3.

Les courbes des monocristaux monovariants présentent des pentes très faibles, ce qui justifie l'approximation de compatibilité au passage de l'interface austénite-martensite que nous avons pris dans le chapitre III. Cette approximation implique que les contraintes internes sont nulles.

V.6.2 Polyvariants

Nous nous intéressons ici au problème du polyvariant et à la détermination des coefficients de durcissement latent associés à l'activation de plusieurs variants.

Pour étudier le durcissement latent, il faudrait produire un premier type de variant dans un monocristal et le stabiliser, afin de pouvoir ensuite solliciter le cristal dans une autre direction pour activer un second variant. La pseudo-élasticité rend impossible ce type d'expérience.

Pour contourner cette difficulté nous considérons l'incompatibilité non pas au niveau de l'interface entre deux variants d'un même grain, mais au niveau d'un joint de grain.

Dans le grain I, le variant I est actif, dans le grain J le variant J est actif et les deux variants I et J sont incompatibles.

Des essais de ce type ont été réalisés au laboratoire. Les caractéristiques du matériau utilisé sont données sur la courbe fig (V.6.4).

La courbe (V.6.4) présente deux stades à écrouissage très faibles, séparés par une transition qui correspond à une pente d'écrouissage important. Cette transition est attribuée à l'interaction entre les deux variants (I) et (J) incompatibles à travers le joint de grain.

Des recherches sont actuellement en cours au laboratoire pour mieux étudier ce problème.

CONCLUSION

Nous avons développé une théorie pour décrire le phénomène d'écroûissage, dû aux contraintes internes d'incompatibilité des déformations inélastiques. La formulation proposée conduit à l'introduction d'une matrice d'écroûissage, qui rend compte des interactions entre les variants de la martensite.

Nous avons utilisé la théorie thermodynamique de GIBBS pour décrire la transformation et le calcul de l'énergie d'interaction entre les variants, pour évaluer les termes de cette matrice.

Les valeurs obtenues pour l'alliage Cu-Zn-Al, indiquent une très forte interaction entre variants incompatibles, ce qui explique la fragilité relative des matériaux polycristallins lorsque ce mécanisme intervient de manière unique.

Le modèle proposé donne des indications sur la possibilité d'augmenter la "ductibilité" de tels matériaux, en jouant sur la texture cristallographique (recherche d'incompatibilité faible au niveau du joint de grain).

Enfin, nous avons présenté quelques résultats expérimentaux monovariant et polyvariant, en mettant en évidence, les difficultés associées à la conduite des essais d'écroûissage latent en pseudoélasticité.

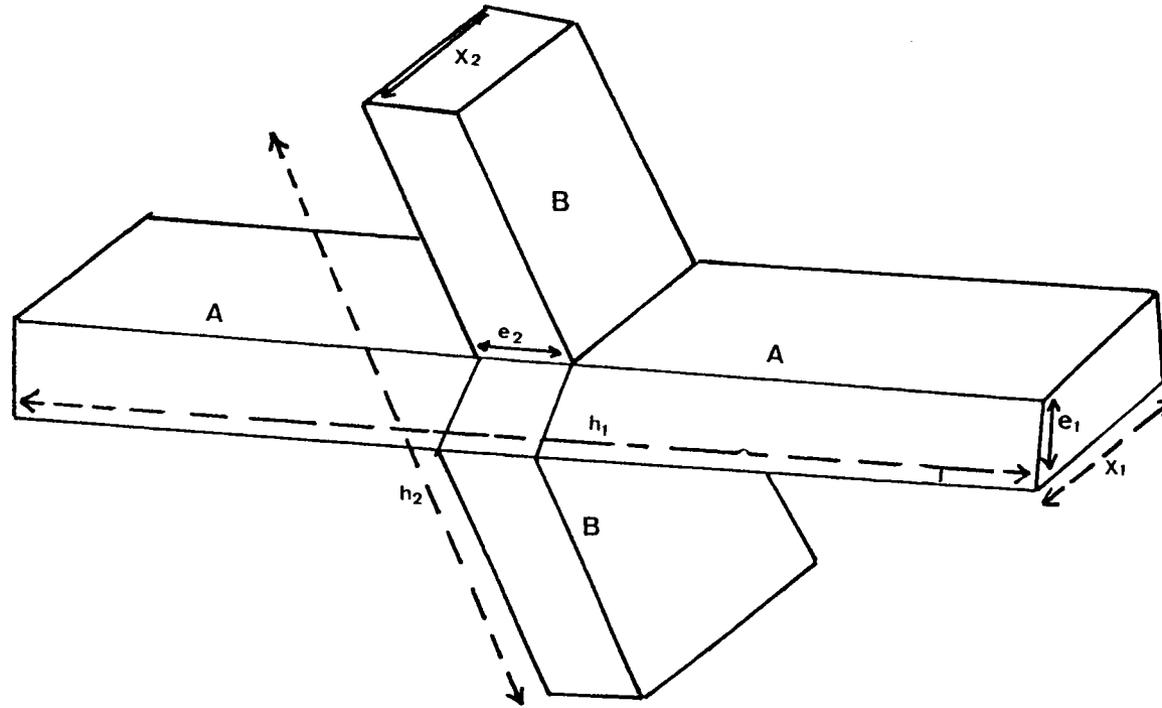


Fig.(V-3-I) Morphologie d'interaction de contact entre deux variants de martensite A-B
selon DELAÏEY (4)

$$G (\text{Amplitude de déplacement}) = 0.230$$

E1	↑	-0.182000, 0.669000, 0.721000 -0.185000, -0.737000, 0.655000
E2	↑	-0.182000, 0.721000, 0.669000 -0.185000, 0.655000, -0.737000
E3	↑	0.182000, 0.669000, 0.721000 0.185000, -0.737000, 0.655000
E4	↑	0.182000, 0.721000, 0.669000 0.185000, 0.655000, -0.737000
E5	↑	-0.669000, -0.182000, 0.721000 0.737000, -0.185000, 0.655000
E6	↑	-0.721000, -0.182000, 0.669000 -0.655000, -0.185000, -0.737000
E7	↑	-0.669000, 0.182000, 0.721000 0.737000, 0.185000, 0.655000
E8	↑	-0.721000, 0.182000, 0.669000 -0.655000, 0.185000, -0.737000
E9	↑	-0.182000, -0.669000, 0.721000 -0.185000, 0.737000, 0.655000
E10	↑	-0.182000, -0.721000, 0.669000 -0.185000, -0.655000, -0.737000
E11	↑	0.182000, -0.669000, 0.721000 0.185000, 0.737000, 0.655000
E12	↑	0.182000, -0.721000, 0.669000 0.185000, -0.655000, -0.737000
E13	↑	0.721000, -0.182000, 0.669000 0.655000, -0.185000, -0.737000
E14	↑	0.669000, -0.182000, 0.721000 -0.737000, -0.185000, 0.655000
E15	↑	0.721000, 0.182000, 0.669000 0.655000, 0.185000, -0.737000
E16	↑	0.669000, 0.182000, 0.721000 -0.737000, 0.185000, 0.655000
E17	↑	0.669000, -0.721000, 0.182000 -0.737000, -0.655000, 0.185000
E18	↑	0.721000, -0.669000, 0.182000 0.655000, 0.737000, 0.185000
E19	↑	-0.669000, 0.721000, 0.182000 0.737000, 0.655000, -0.185000
E20	↑	-0.721000, 0.669000, 0.182000 -0.655000, -0.737000, 0.185000
E21	↑	-0.721000, -0.669000, 0.182000 -0.655000, 0.737000, 0.185000
E22	↑	0.669000, -0.721000, 0.182000 0.737000, -0.655000, -0.185000
E23	↑	0.721000, 0.669000, 0.182000 0.655000, -0.737000, 0.185000
E24	↑	0.721000, 0.721000, 0.182000 -0.655000, 0.655000, -0.185000

T-5-I

Normales au plan d'habitat et direction de déplacement
des divers variants de martensite dans Cu-Zn-Al.

	E 1	E 2	E 3	E 4	E 5	E 6	E 7	E 8	E 9	E 10	E 11	E 12	E 13	E 14	E 15	E 16	E 17	E 18	E 19	E 20	E 21	E 22	E 23	E 24	
E 1	X	C	C	C	A1	A1	C	A1	C	A2	C	A2	A1	C	A1	A1	A1	A2	A1	C	C	A1	A2	A1	
E 2	C	X	C	C	A1	A2	A1	C	A2	C	A2	C	A1	A1	A1	C	A1	C	A1	A2	A2	A1	C	A1	
E 3	C	C	X	C	C	A1	A1	A1	C	A2	C	A2	A1	A1	C	A1	C	A1	A1	A1	A1	A1	A1	C	
E 4	C	C	C	X	A1	C	A1	A2	A2	C	A2	C	A2	A1	C	A2	C	C	A1	A2	A1	A1	C	A1	A2
E 5	A1	A1	C	A1	X	C	C	C	C	A1	A1	A1	A2	C	A2	C	C	A1	A2	A1	A1	C	A1	A1	A1
E 6	A1	A2	A1	C	C	X	C	C	A1	C	A1	A2	C	A2	C	A2	C	A2	A1	C	A1	A1	A2	A1	C
E 7	C	A1	A1	A1	C	C	X	C	A1	A1	C	A1	A2	C	A2	C	A2	A1	A1	A1	C	A1	A1	C	A1
E 8	A1	C	A1	A2	C	C	C	X	A1	A2	A1	C	C	A1	A1	A1	C	A1	A2	A1	C	C	A1	A2	A1
E 9	C	A2	C	A2	C	A1	A1	A1	X	C	C	C	A1	A1	A1	C	A1	A1	A1	C	A1	A1	C	A1	A1
E 10	A2	C	A2	C	A1	C	A1	A2	C	X	C	C	A2	A1	C	A1	A1	A1	C	A1	A2	A2	A1	C	A1
E 11	C	A2	C	A2	A1	A1	C	A1	C	C	X	C	A1	C	A1	A1	A1	C	A1	A1	A1	A1	A1	A1	C
E 12	A2	C	A2	C	A1	A2	A1	C	C	C	C	X	C	A1	A2	A1	C	A1	C	A1	A1	C	A1	A1	A1
E 13	A1	C	A1	A2	A2	C	A2	C	A1	A2	A1	C	X	C	C	C	A1	A1	A2	A1	A1	C	A1	A2	
E 14	C	A1	A1	A1	C	A2	C	A2	A1	A1	C	A1	C	X	C	C	C	A1	A1	A1	C	A1	A1	C	A1
E 15	A1	A2	A1	C	A2	C	A2	C	A1	C	A1	A2	C	C	X	C	A1	A1	A1	C	A1	A1	A2	A1	C
E 16	A1	A1	C	A1	C	A2	C	A2	C	A1	A1	A1	C	C	C	X	A2	A1	C	A1	A1	A2	A1	C	
E 17	A1	A1	A1	C	C	A1	A2	A1	A1	A1	A1	C	A1	C	A1	A2	X	C	C	C	A2	C	A2	C	
E 18	A2	A1	C	A1	A1	C	A1	A1	A2	A1	C	A1	C	A1	A1	A1	C	X	C	C	A2	C	A2	C	
E 19	A1	C	A1	A1	A2	A1	C	A1	A1	C	A1	A1	A1	A2	A1	C	C	C	C	X	C	A2	C	A2	
E 20	C	A1	A2	A1	A1	A1	A1	C	C	A1	A2	A1	A1	A1	C	A1	C	C	C	X	C	A2	C	C	
E 21	C	A1	A2	A1	A1	C	A1	A1	C	A1	A2	A1	C	A1	A1	A1	A2	C	A2	C	A2	C	X	C	C
E 22	A1	C	A1	A1	C	A1	A2	A1	A1	C	A1	A1	A1	C	A1	A2	C	A2	C	A2	C	C	C	X	C
E 23	A2	A1	C	A1	A1	A1	A1	C	A2	A1	C	A1	A1	A1	C	A1	A2	C	A2	C	A2	C	C	C	X
E 24	A1	A1	A1	C	A2	A1	C	A1	A1	A1	A1	A1	C	A1	A2	A1	C	C	A2	C	A2	C	C	C	X

T-5-2 Matrice d'interaction entre variants de martensite

(Cu-Zn-Al)

C : interaction compatible (E = 0)

A2 : interaction faiblement incompatible ($\frac{\mu}{4} 10^{-3}$)

A1 : interaction fortement incompatible ($\frac{\mu}{150}$)

	Composition (% massique)			Temp. Ms (° K)
	Cu	Zn	Al	
A ₁	74.3	18.4	7.3	213 °K
A ₂	73.7	19	7.3	203 °K

T-6-I : Caractéristiques des alliages A1 et A2

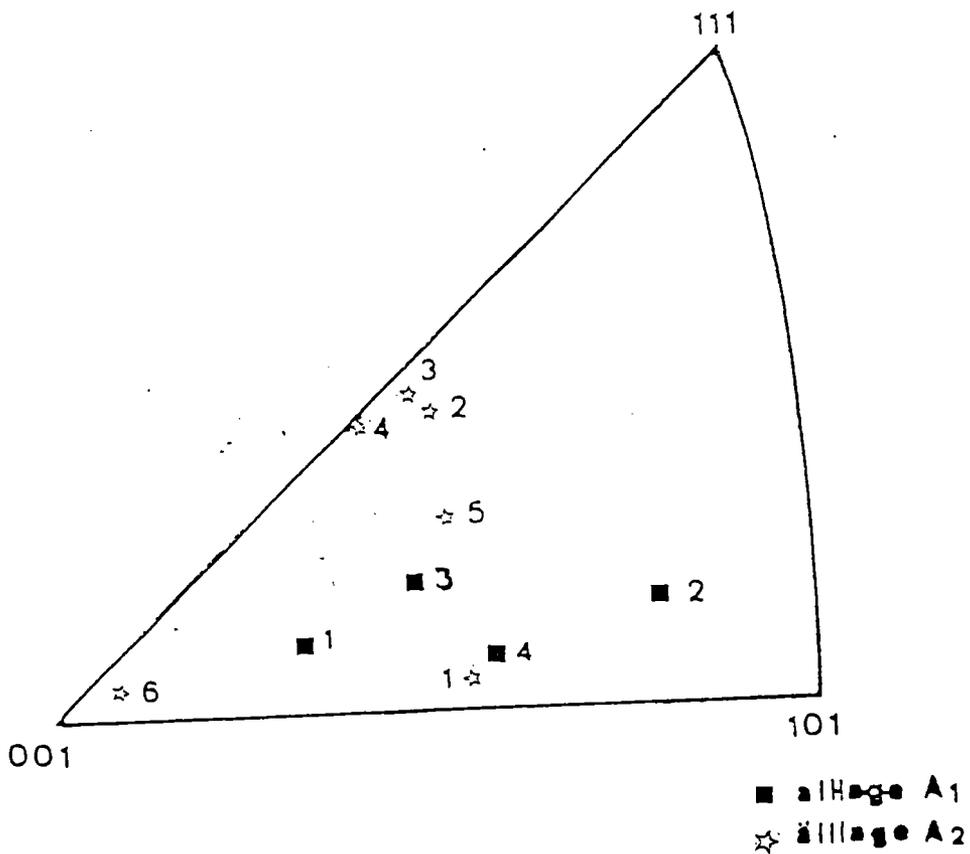


Fig. V-6-I : Orientation cristallographique des différents monocristaux des séries A1 et A2

N°	E	E _P	R' ₃₃	H	ξ°
1mA1	5300	96	0.480	19.1	18.48
2mA1	10600	155	0.366	20.86	16.32
3mA1	7800	114	0.415	19.63	17.43
4mA1	7700	162	0.383	15	15
Valeurs Moyennes				18.65	16.8

T-6-2 : Résultats concernant les essais mécaniques sur les monocristaux de la série A1

E : Module de YOUNG (dan/mm²)

E_P : Module pseudoélastique $\left(\frac{d\Sigma_{33}}{dE_{33}}\right)$ en dan/mm²

R'₃₃ : Facteur de SCHMID pour le variant principal

ξ° : Cission critique

H : "Ecroûissage" du monocristal lors de la transformation martensitique sur I variant.

N°	E	E _P	R ₃₃ '	H	γ°
1mA2	6770	59	0.403	9.5	21,14
2mA2	9370	64	0.335	7.2	18
3mA2	11080	62	0.376	8,7	21
4mA2	6930	28	0.38	4	18
5mA2	8120	50	0.4	8	20,16
6mA2 *	6940	60 2variants	0.490	14.4	20.8
Valeurs moyennes				7.48	19.65

T6-3 : Résultats concernant les essais mécaniques sur les monocristaux de la série A2

* Eprouvette où deux variants compatibles sont actifs.

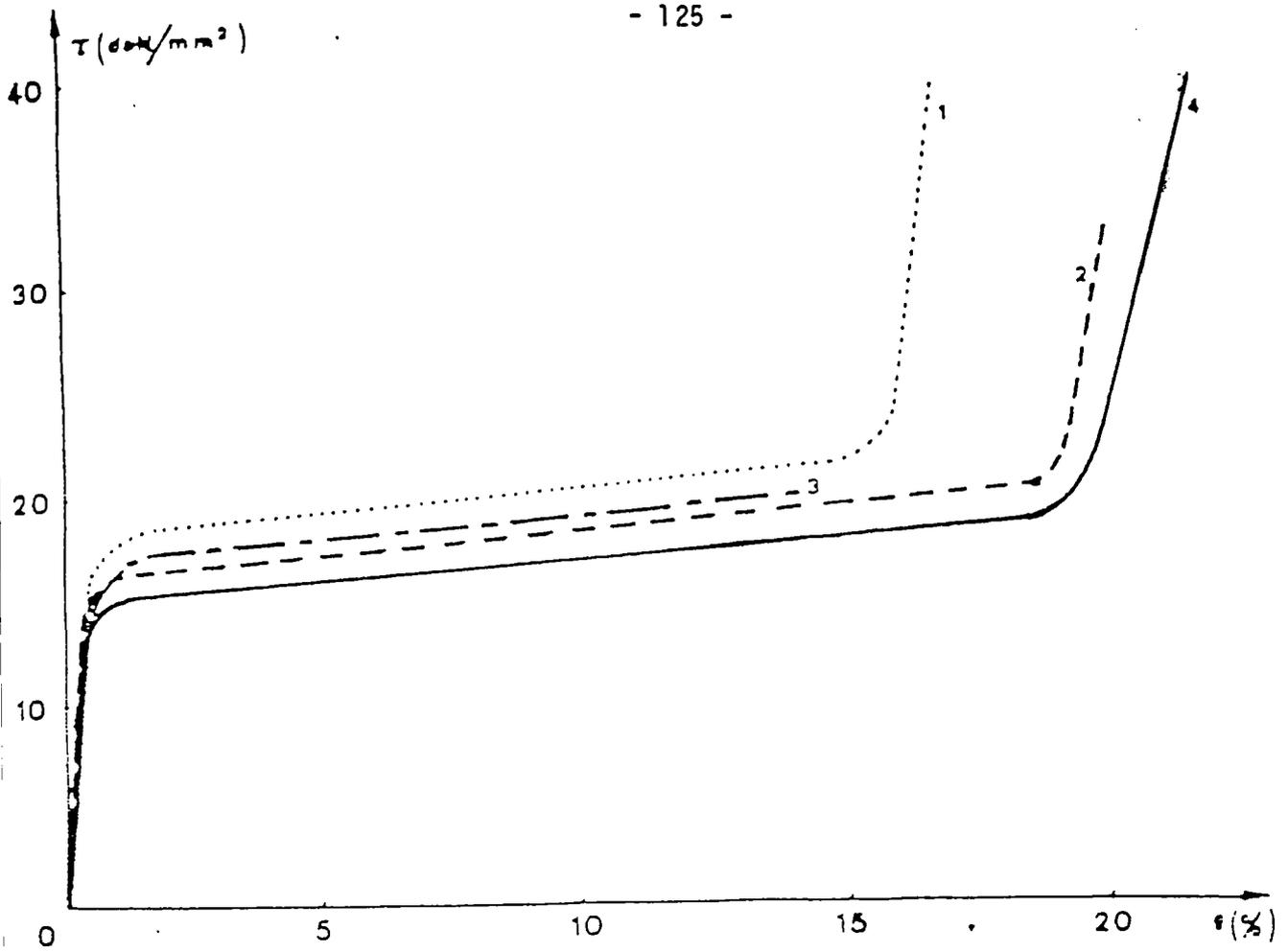


Fig. V-6-2 : Courbes de traction résolues pour la série A1

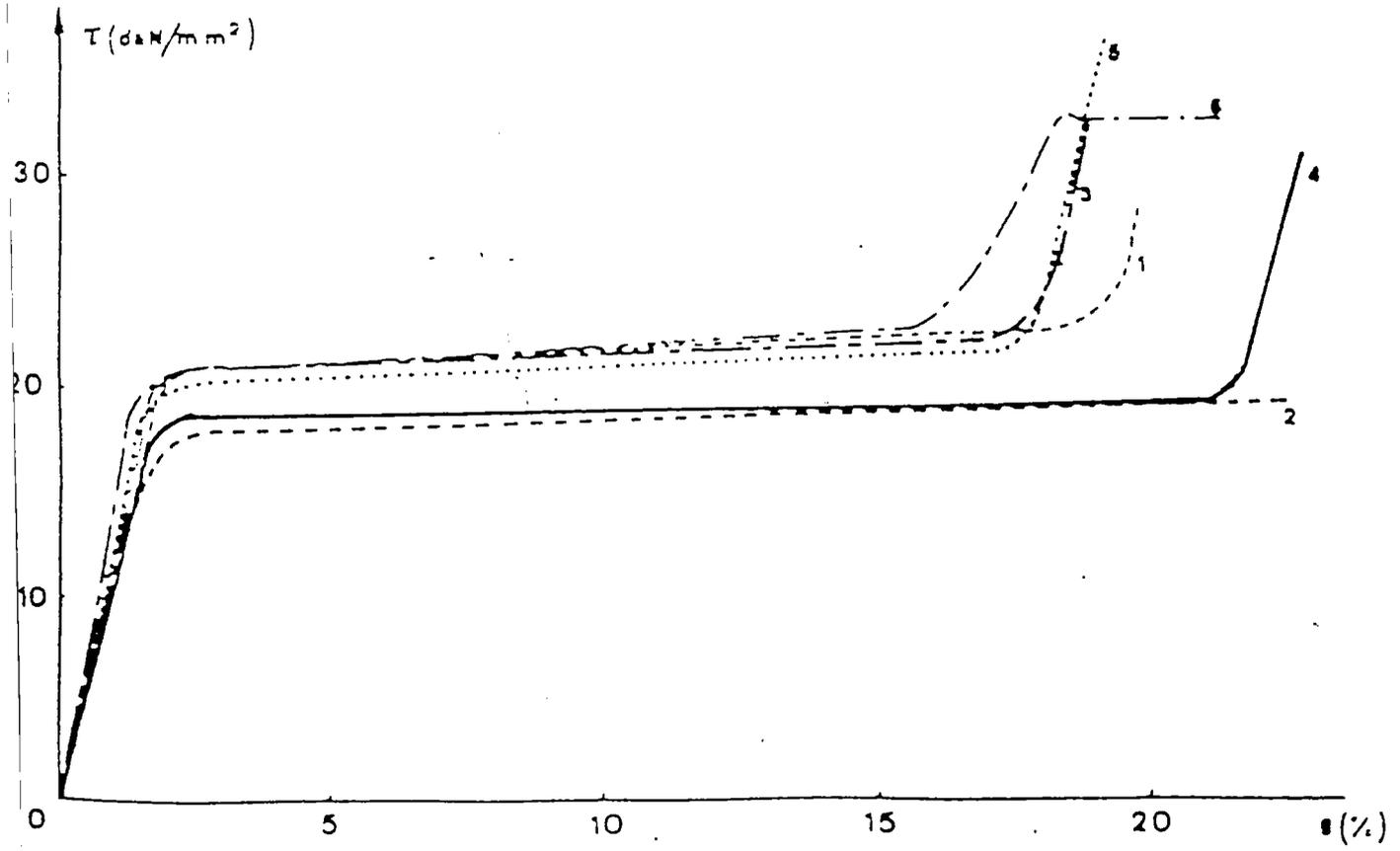


Fig. V-6-3 : Courbes de traction résolues pour la série A2

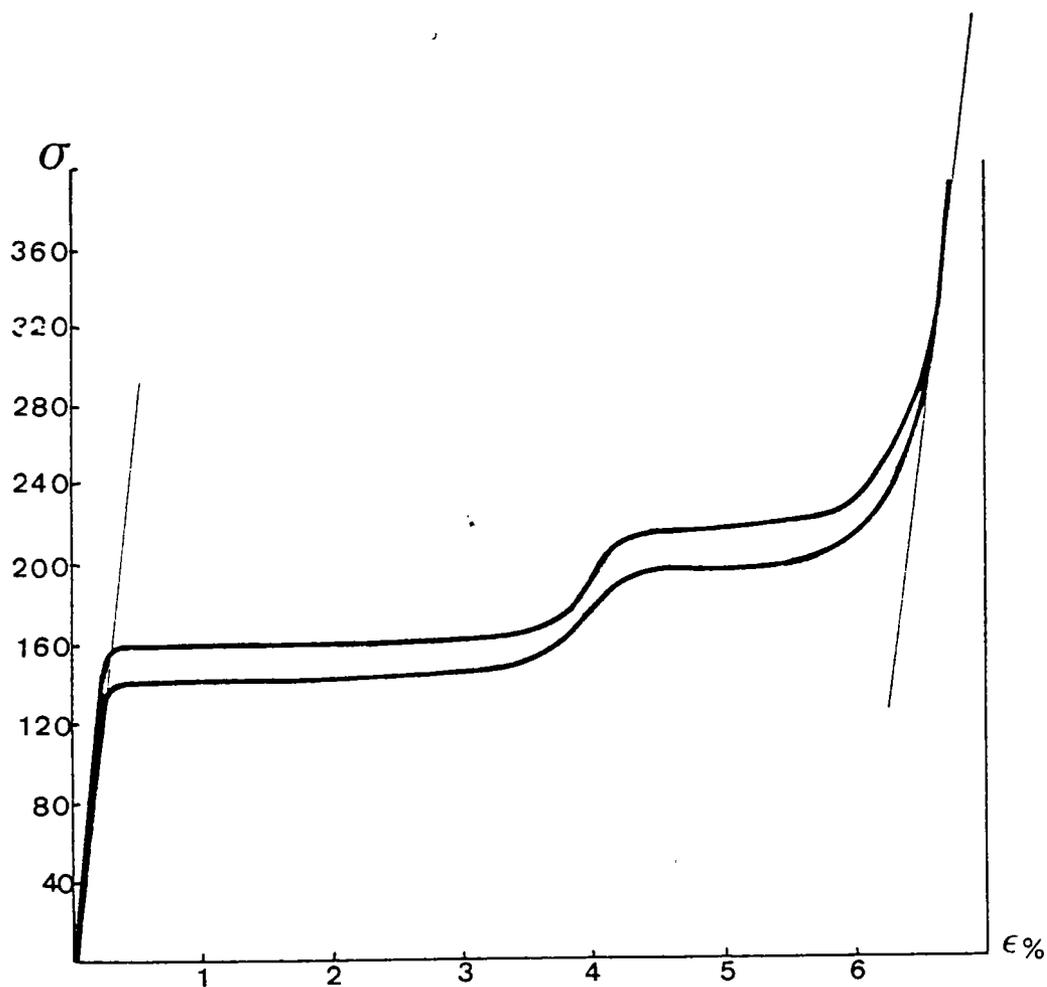
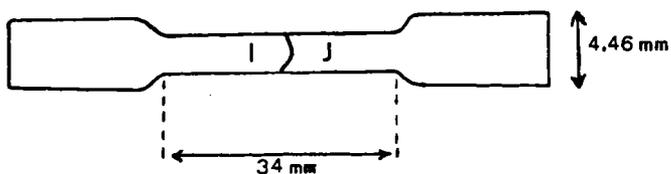


Fig (V-6-4) Courbe (σ, ϵ) représentant une interaction entre variants à travers un joint de grain.

Cu-18.45 % Zn-7.13 % Al ($M_s = -10^\circ\text{C}$)

La courbe présente deux stades à écrouissage faible séparé par une transition qui correspond à une pente d'écrouissage important.



$e = 0.9 \text{ mm}$

Bicristal (Cu-Zn-Al)

CONCLUSION GENERALE

VI CONCLUSION GENERALE

Le présent travail est une contribution à l'étude des interactions entre les variants de la martensite. Nous avons commencé par l'étude de la cinématique de la transformation martensitique en utilisant les équations générales de la mécanique des milieux continus. On a mis ainsi en évidence tous les mécanismes d'accommodation de la déformation du réseau. La formulation proposée à partir de ces équations généralise les théories phénoménologiques antérieures tout en les simplifiant ; deux applications différentes ont été choisies pour l'illustrer :

- l'interface austénite - martensite
- interactions entre les variants de martensite

Pour la première application, la formulation a permis de déterminer toutes les caractéristiques géométriques de la transformation (plan d'habitat - amplitude de glissement - amplitude de déplacement ...) avec une bonne précision.

Pour la deuxième, elle a permis de classer les interactions entre variants en deux familles :

- . interactions compatibles qui ne créent pas de contraintes internes (variants autoaccommodant selon Delaey)
- . interactions incompatibles qui sont sources de contraintes internes.

Pour les interactions incompatibles, nous avons calculé les contraintes internes et l'énergie élastique associée en utilisant un potentiel de contrainte. De même, on a utilisé une approche thermodynamique pour décrire la transformation martensitique et une approche microstructurale pour modéliser la surface de contact S_{\pm} . Nous avons pris en compte ces deux approches et la réorientation de l'interface entre variants, pour construire une matrice d'interaction. Cette matrice représente un écrouissage dû aux contraintes internes et complète ainsi les études antérieures (3) du mono et polycristal en plasticité de transformation.

Enfin, nous avons présenté quelques résultats expérimentaux des monocristaux monovariants, confirmant ainsi l'hypothèse de compatibilité du chapitre III et donné quelques indications sur le problème polyvariant.

Dans cette approche générale, nous avons supposé que les mécanismes internes à la transformation martensitique ($\epsilon_{ij}^B + \xi_{ij}^{R-I}$) ne sont pas modifiés par les contraintes internes et que le seul mécanisme d'accommodation entre les variants était la réorientation de l'interface. Cette hypothèse demande à être confirmée expérimentalement. (Les premiers résultats obtenus au Laboratoire dans le cas (moins favorable) des interactions entre les variants et un joint de grain semblent la confirmer). Il en est de même des observations expérimentales concernant les orientations des normales dans le cas d'interfaces compatibles. Malgré tout, même s'il s'avérait que les valeurs calculées de la matrice d'interaction entre les variants soient approchées la méthode proposée constitue une bonne approche du problème de la sélection des variants lors de la transformation martensitique, à la fois pour la pseudoélasticité par formation de martensite que pour la plasticité par réorientation.

B I B L I O G R A P H I E

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- (1) ABRASSART, Thèse d'état 1972 Nancy 1
- (2) J.C. BOKROS, E.R. PARKER Acta Met 11 (1963), 1291
- (3) E. PATOOR Thèse Docteur Ingénieur 1986 Metz
- (4) L. DELAEY, F. VAN de VOORDE and R.V. KRISHNAN
S.M.E in Alloys Perkins 1975 (Pergamon Press)
- (5) H. WARLIMONT, L. DELAY, R.V. KRISHNAN , H. TASS
J. Mat. Sciences, 9 (1974)
- (6) Z. NISHIYAMA, Martensitic transformation
Academic Press (1978)
- (7) M. COHEN Proceeding Icomat 1982
- (8) Metallurgie physique 1978 chapitre 31
Transformation par cisaillement
(La documentation française)
- (9) Rapport ATP (CNRS) Mat 4 Plasticité des matériaux solides
(1983 - 1985) L.P.M.M Metz
- (10) W. STEVENS, A.G. HAYNES, J. Iron and Steel Inst., 1956, 183, 349
- (11) M. Ahlers Scripta Met 8 (1974) 213
- (12) R.F. BUNSHAH, R.F. MEHL, Trans. AIME, 1953, 197, 1251
- (13) BAIN E.C Trans Aime, 70, 25
- (14) SIDOROFF Cours de mécanique de solides
Tome 1 (Mécanique des milieux continus)
- (15) A. ZAOUÏ "Aspects fondamentaux de la plasticité des polycristaux
métalliques" chap 7 - 1979 G.F.R
- (16) G. SAADA Incompatibilité et contraintes internes
chap 1 1979 G.F.R
- (17) O. FASSI-FEHRI Thèse d'état 1985 Metz.
- (18) J.D. ESHELBY Prog Solid Mech 2,1961,89
- (19) E. GAUTHIER Thèse d'état 1985 FNPL Nancy
- (20) M. PELLETIER, G. CIZERON, Mém. Sci. Rev. Met., 1977, 74, 601
- (21) PATEL et COHEN Acta meta, 1, 1953, 531

- (22) GREENWOOD-JHONSON Proc. Roy. Soc . Ser, A 283, 1965, 403
- (23) C.L. MAGEE Ph. D Theses, GARNEGIE Mellon
university 1966
- (24) WESCHLER-LIBERMANN et READ Trans Aim, 197, 1953, 1503
- (25) BOWLES et MACKENZIE Acta Met 2,1954, 138
- (26) CROKER-BILBY Acta Met A, 9, 1961, 678
- (27) BOWLES-DUNNE Acta Met 17, 1969, 677
- (28) J. DE VOS, L. Delaey, E. Aernoudt
"Theoretical analysis and physical transformation model for self
accommodating group of 9 R martensitic variant" (1978) Belgique.
- (29) R.D. GARWOOD, D. HULL, Acta Met., 6, 1958, 98
- (30) K. TAKEZAWA, T. SHINDO, and S. SATO, Scripta Met., 10, 1976, 13
- (31) M. BERVEILLER Thèse Paris XIII 1978
- (32) J. DEVOS, L. DELAEY, E. AERNOUDT
The cristallography of the martensitic transformation
BCC \rightarrow 9 R : a generalized mathematical model (1978)
- (33) M. BERVEILLER - EBERHARDT - DOMINIACK : colloque Grenoble 1985
- (34) ZHU. WEI JUANG, CHEN WEI YE, T. Y HSU
Acta Met 11, 1985, 2075
- (35) R. de WITT N.B.S, 77 A (1972)
- (36) E. KRONER, Acta Met 9, 1961, 155
- (37) E. KRONER 15 colloque du G.F.R (1981)
- (38) F.R.N NABARRO Theorie of crystal dislocation (1979)
- (39) F. LECROISEY, A. PINEAU Met trans, 3, 1972, 387
- (40) J.D. ESHELBY : Prog in Mech t2 (1961)
- (41) P. JULLIEN IRSID (Etude des voisinages entre phase d'un
solide multiphasé à laide des surfaces spécifiques de contact) 1978
- (42) B. JAOUJ, 1965 Etude de la plasticité et application aux métaux
- (43) J. LEMAITRE, J. L. CHABONNE (mécanique des matériaux solides 1985,
Plasticité CH. 5)
- (44) J. ZARKA, J. Mech. Phys. Solids, 20, 1972, 179
- (45) FRANCIOSI Thèse d'état 1984 Paris XIII

(46) M. HAYAKAWA et M. OKA Acta Met 32,9,1984

ANNEXE

Annexe : Calcul du chapitre II.

L'énergie élastique dans le repère $R_2 (\vec{N}(010))$ s'écrit :

$$E = -\frac{\mu}{8\pi} \epsilon_{i2m} \epsilon_{j2n} \Delta \epsilon'_{mn} \left(\epsilon_{i2q} \epsilon_{j2s} \Delta \epsilon'_{qs} + \frac{\nu}{1-\nu} \epsilon_{i2q} \epsilon_{i2s} \Delta \epsilon'_{qs} \right) \Psi'_{2'2'2'2'}$$

$$\text{avec } \Psi'_{2'2'2'2'} = \int_{S_{I2}} \int_{S'_{I2}} |\vec{r} - \vec{r}'|_{,2'2'} dS dS'$$

$\Delta \epsilon'_{mn} = \epsilon'_{mn} - \epsilon_{mn}$ La différence de déformation exprimée dans le repère R_2 .

Sous une forme réduite, on écrit :

$$E = \mu d(\nu, \Delta \epsilon'_{mn}) \cdot \Psi'_{2'2'2'2'}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'|_{,2'2'} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y'} |\vec{r} - \vec{r}'|$$

\vec{r} et \vec{r}' sont repérés par rapport à R_2 par $\begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases}$ et $\begin{cases} x' \\ y' \\ z' \end{cases}$

En effectuant les dérivées et en tenant compte de $\vec{N}(010)$, on obtient :

$$E = d(\Delta \epsilon', \nu) \cdot \mu \cdot \int_{S_{I2}} dS \int \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS'$$

Détermination de la quantité $\Psi'_{2'2'2'2'}$ pour S_{I2} circulaire

On fait le changement polaire : $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ z = r \sin \theta \end{cases} \quad \begin{cases} x' = r' \cos \theta' \\ y' = r' \sin \theta' \end{cases}$

$$0 \leq r, r' \leq a$$

$$0 \leq \theta, \theta' \leq 2\pi$$

$$\Psi = \int_{S_{I2}} dS \int_{S'_{I2}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS' = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r dr \left[\int_0^a r' dr' \int_0^{2\pi} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\theta' \right]$$

On note $\Psi(r, r', \theta) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta'}{[r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta' - \theta)]^{1/2}}$

on fait le changement de variable suivant :

$$\xi = \theta' - \theta \quad ; \quad r^2 + r'^2 = p > 0 \quad ; \quad 2rr' = q > 0$$

$$\Psi(r, r', \theta) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\xi}{[p - q \cos(\xi - \theta + \theta)]^{1/2}} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\xi}{[p + q \cos(\xi - \theta)]^{1/2}}$$

$$\Psi(r, r', \theta) = 2 \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d(\frac{\xi}{2} - \frac{\theta}{2})}{[p + q(1 - 2\sin^2(\frac{\xi - \theta}{2}))]^{1/2}}$$

On pose $\phi = \frac{\xi}{2} - \frac{\theta}{2}$

$$\Psi(r, r', \theta) = 2 \int_{-\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}}^{\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}} \frac{d\phi}{[p + q - 2q \sin^2 \phi]^{1/2}} = \frac{2}{(p + q)^{1/2}} \int_{-\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}}^{\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}} \frac{d\phi}{[1 - \frac{2q}{p + q} \sin^2 \phi]^{1/2}}$$

En posant $K^2 = \frac{2q}{p + q} = \frac{4rr'}{(r + r')^2} \leq 1$

$$\Psi(r, r', \theta) = \frac{2}{(p + q)^{1/2}} \int_{-\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}}^{\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}} \frac{d\phi}{(1 - K^2 \sin^2 \phi)^{1/2}}$$

On retrouve ainsi une intégrale elliptique du 1^{er} espèce.

L'intégrale elliptique du 1^{er} espèce s'écrit sous la forme :

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\phi}{[1 - K^2 \sin^2 \phi]^{1/2}} = F(\varphi, K)$$

En se référant au livre de mathématique (A Short table of integrals by B.O. Peirce and Ronald M. Foster 4th ed. Ginn & C. Boston 1957)

$$F(\varphi, K) = \frac{2\varphi}{\pi} k - \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{1}{2} A_2 K^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} A_4 K^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} A_6 K^6 + \dots \right)$$

avec $k = F(\frac{\pi}{2}, K) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{[1 - K^2 \sin^2 \phi]^{1/2}} = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1^2}{2^2} K^2 + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} K^4 + \dots \right)$
 $K^2 \leq 1$

$$A_2 = \frac{1}{2}$$

$$A_4 = \frac{3}{2 \cdot 4} + \frac{1}{4} \sin^2 \varphi$$

$$A_6 = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{5}{4 \cdot 6} \sin^2 \varphi + \frac{1}{6} \sin^4 \varphi \dots$$

Pour la valeur de $k = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$ on se limitera à l'ordre 1

$$k = \frac{\pi}{2}$$

Pour notre cas, nous avons :

$$\Psi(r, r', \theta) = \frac{2}{(p+q)^{1/2}} \left\{ F\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}, k\right) - F\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}, k\right) \right\}$$

$$F\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) = \frac{2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) \cos\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) \left\{ \frac{1}{2} A_2 k^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} A_4 k^4 + \dots \right\}$$

$\underbrace{\cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}}_{\text{ce terme} \rightarrow 0}$

intégré par la suite entre $[0, 2\pi]$

Il reste alors :

$$\Psi(r, r', \theta) = \frac{2}{(p+q)^{1/2}} \left\{ \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) - \left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) \right\} = \frac{2\pi}{(p+q)^{1/2}}$$

$$\varphi = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r dr \int \frac{2\pi r'}{r'+2} dr' = 4\pi^2 \int_0^a r dr \left\{ \int_0^a \left(\frac{r'+2}{r'+2} - \frac{r}{r'+2} \right) dr' \right\} =$$

$$\varphi = 4\pi^2 \frac{a^3}{2} - 4\pi^2 \left\{ \underbrace{\int_0^a r^2 \log(r+a) dr}_A - \underbrace{\int_0^a r^2 \log r dr}_B \right\}$$

$$\varphi = 2\pi^2 a^3 - 4\pi^2 (A - B)$$

En calculant les intégrales simples A et B, on obtient :

$$A = \frac{1}{3} a^3 \text{Log } 2a - \frac{5}{18} a^3 + \frac{1}{3} a^3 \text{Log } 2$$

$$B = \frac{1}{3} a^3 \text{Log } 2a - \frac{1}{9} a^3$$

$$\Psi = \frac{8}{3} \pi^2 (1 - \text{Log } 2) a^3 = \frac{8}{3} \pi^{1/2} (1 - \text{Log } 2) S_{IJ}^{3/2}$$

S_{IJ} : Aire de l'interface d'interaction entre les variants (I) et (J)

$$\Psi = \beta S_{IJ}^{3/2}$$

$$\beta = \frac{8}{3} \pi^{1/2} (1 - \text{Log } 2)$$

L'énergie d'interaction entre les variants s'écrit dans ce cas particulier (interface circulaire de rayon a) :

$$E = 2 (\Delta E', \nu) \cdot \mu \cdot \beta \cdot S_{IJ}^{3/2}$$

TABLE DE MATIERE

CHAPITRE I : Introduction générale	3
CHAPITRE II : Transformation martensitique et plasticité de transformation	6
II.1 Introduction	7
II.2 Caractéristiques métallurgiques	8
II.2.1 Aspect cinétique	
a) températures de transformation	
b) morphologie	
II.2.2 Aspect cristallographique	
(relations d'orientation et plan d'habitat)	
II.3 Aspect cinématique	12
II.3.1 Rappels de la mécanique des milieux continus	
II.3.2 Cinématique de la transformation	
II.4 Thermodynamique de la transformation	20
II.5 Influence de la transformation sur les variables mécaniques	22
II.5.1 Cinétique	
II.5.2 Plasticité de transformation	
II.6 Conclusion	27
CHAPITRE III : Nouvelle approche des théories phénoménologiques	35
III.1 Introduction	36
III.2 Théorie phénoménologique de (W.L.R)	37
III.3 Nouvelle formulation proposée	40
III.3.1 Cinématique de la transformation	
III.3.2 Compatibilité	
III.3.3 Modélisation et nouvelle approche	
III.4 Situations particulières	52
III.4.1 Accommodation dans la martensite	
III.4.2 Accommodation dans la martensite avec un système de glissement	
III.4.3 Accommodation dans l'austénite	

III.5 Application à l'interface austénite - martensite (Cu-Zn-Al)	56
III.6 Application aux interactions entre les variants de la martensite (polyvariants)	62
III.7 Conclusion	65
 CHAPITRE IV : Contraintes internes et énergie élastique associées aux interactions entre les variants.	 75
IV.1 Introduction	76
IV.2 Formulation générale	77
IV.2.1 Gradient de déplacement total et contraintes internes	
IV.2.2 Energie élastique	
. Energie élastique d'interaction	
. Energie d'interaction avec le champ extérieur	
IV.3 Contraintes et énergie d'interaction entre variants	85
IV.3.1 Potentiel de contrainte	
. Contraintes internes	
. Energie élastique	
IV.3.2 Energie d'interaction entre variants	
IV.4 Cas de l'interface plane	94
IV.5 Accommodation pour réorientation de l'interface	96
IV.6 Conclusion	97
 CHAPITRE V : Ecrouissage lors de la transformation martensitique	 100
V.1 Introduction	101
V.2 Théorie thermodynamique de GIBBS	102
V.3 Etude des voisinages entre variants au moyen des surfaces de contact	106
V.4 Matrice d'écrouissage	109
V.5 Application au cas Cu-Zn-Al	113
V.6 Approche expérimentale du problème	116
V.6.1. Résultats sur les monocristaux monovariants	
V.6.2. Polyvariants	
V.7 Conclusion	118

CHAPITRE VI : Conclusion générale	128
ANNEXE : A1-Calculs du Chapitre IV	130
BIBLIOGRAPHIE.	