



HAL
open science

Recherches en déformation plastique des polycristaux à réseau cubique

François Royer

► **To cite this version:**

François Royer. Recherches en déformation plastique des polycristaux à réseau cubique. Matière Condensée [cond-mat]. Université Paul Verlaine - Metz, 1986. Français. NNT : 1986METZ023S . tel-01775712

HAL Id: tel-01775712

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01775712>

Submitted on 24 Apr 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

THESE DE DOCTORAT D'ETAT

RECHERCHES SUR LA DEFORMATION PLASTIQUE DE POLYCRISTAUX A

RESEAUX CUBIQUES

par François ROYER

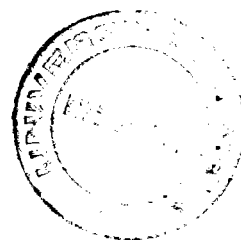
BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE
-METZ

N° inv	19860465
Cote	51M3 86/23
Loc	Magasin

Maître de Conférences à l'Université de METZ

Soutenu le 25 AVRIL 1986 à l'U.E.R. Sciences Exactes et Naturelles
de l'Université de Metz

en vue de l'obtention du grade de DOCTEUR ES SCIENCES PHYSIQUES



JURY

- Mr. H.J. BUNGE Professeur à l'Institut für Metallkunde und Metall-Physik, Technische Universität CLAUSTHAL, (RFA).
PRESIDENT DU JURY
- Mr. P. LACOMBE Professeur émérite, Membre de l'Institut.
- Mr. M. BERVEILLER Professeur à l'Université de Metz, rapporteur.
- Mr. R. HOCQUART Professeur à l'Université de Metz.
- Mr. R. PENELLE Directeur de Recherches à l'Université de Paris-Sud, rapporteur.
- Mr. C. TAVARD Professeur à l'Université de Metz, **Directeur de Thèse**, rapporteur.

UNIVERSITE DE MBZ

Président : M. DAVID Jean

U.E.R. "SCIENCES EXACTES ET NATURELLES "

Directeur : M. BONN Michel

PROFESSEURS :

Mathématiques

M. CHIPOT Michel
M. DAX Jean-Michel
M. RHIN Georges
M. ROGER Claude
M. ROUX André
M. SCHMITT Bruno

Informatique

M. COUSOT Patrick
M. GARDAN Yvon
M. GOVAERT Gérard (IUT)

Mécanique

M. BERVEILLER Marcel
M. MOLINARI Alain
M. PLOVINAGE Guy
M. POTIER-FERRY Michel
M. WEBER Jean-Daniel

Physique-Electronique

M. BARO Raymond (IUT)
M. CARABATOS Constantin (IUT)
M. CERTIER Michel (IUT)
M. CHARLIER Alphonse
M. DURAND Dominique
M. HEIZMANN Jean-Julien (IUT)
M. HOCQUART Roger
M. KLEIM Roland (IUT)
M. LEPLEY Bernard
M. LONCHAMP Jean-Pierre

Physique-Electronique (suite)

M. MUTEL Bernard (IUT)
M. TAVARD Claude
M. STEBE Bernard
M. UZAN Edmond

Chimie

Mme CAGNIANT Denise
M. FALLER Pierre
M. MULLER Jean-François
M. PAQUER Daniel
M. WENDLING Edgar

Ecologie

M. NOURISSON Michel
M. PIHAN Jean-Claude

Les travaux exposés dans ce mémoire ont été réalisés au Laboratoire de Physique Moléculaire et des Collisions de l'Université de Metz sous la direction de Monsieur le Professeur C. TAVARD. Qu'il me soit ici permis de lui témoigner ma profonde reconnaissance pour ses encouragements, sa confiance et sa disponibilité de tous les instants.

Monsieur H.J. BUNGE, Professeur à l'Institut Technologique de Clausthal (République Fédérale Allemande), Docteur Honoris Causa de notre Université et spécialiste incontesté dans le domaine des textures cristallographiques a accepté de présider le jury de cette thèse. Je tiens à lui exprimer ici ma profonde gratitude pour l'honneur qu'il m'a fait.

Monsieur P. LACOMBE, Professeur et Membre de l'Institut a bien voulu apporter le point de vue du Métallurgiste dans des discussions parfois très théoriques. Je tiens tout spécialement à le remercier pour les conseils et les encouragements qu'il a su naguère prodiguer à un jeune chercheur confronté à d'inextricables problèmes administratifs.

J'exprime encore toute ma reconnaissance à Monsieur M. BERVEILLER, Professeur et responsable du Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux de Metz ainsi qu'à Monsieur R. PENELLE, Directeur de Recherches au C.N.R.S. et attaché au Laboratoire de Métallurgie Structurale d'Orsay, qui ont consacré une partie importante de leur temps à un examen détaillé du manuscrit. Qu'ils soient particulièrement remerciés pour la pertinence de leurs remarques ainsi que pour la bienveillance qu'ils m'ont toujours témoignée.

Que Monsieur R. HOCQUART, Professeur à l'Université de Metz trouve ici plus que l'expression d'une gratitude ou reconnaissance si profonde soit-elle pour l'opiniâtreté et la tenacité dans ses encouragements qui ont conduit à une rédaction de ce manuscrit dans les meilleurs délais.

J'adresse finalement mes remerciements à Messieurs P. SENOT et J.F. STOCKEMER pour leur assistance technique et leur disponibilité de tous les instants dans la réalisation de ce manuscrit, ainsi qu'à Mademoiselle S. Musio pour la mise au point finale.

LEGENDES DES FIGURES

FIGURE 1 : Définitions du repère échantillon $R^S(OXYZ)$ et du repère cristallographique $R^C(O'x_1^c, x_2^c, x_3^c)$.

FIGURE 2 : Angles d'Euler dans la convention du repère mobile :
 $g = (\psi, \phi, \varphi_2)$ (notation de BUNGE [4]).

FIGURE 3 : Angles d'Euler $g = (\psi, \theta, \phi)$, notation de ROE [3].

FIGURE 4 : Angles d'Euler $g = (\alpha, \beta, \gamma)$ dans la convention du repère fixe [40].

FIGURE 5 : Repérage d'une direction

(a) dans le repère échantillon R^S ;

(b) dans le repère cristallographique R^C .

FIGURE 6 : Repère cristallographique $R^C([100],[010],[001])$ et repère de glissement associé au système de glissement $(111)[\bar{1}10]$.

FIGURE 7 : Illustration de la décomposition d'une déformation arbitraire par glissement en une déformation pure suivie d'une rotation.

FIGURE 8a: Représentation symbolique des relations d'interdépendance (84) entre les systèmes de glissement $\{111\}\langle 110 \rangle$ du tableau 3.

FIGURE 8b: Tétrarêskaidécaèdre - représentation géométrique des relations d'interdépendance entre les systèmes de glissement $\{111\}\langle 110 \rangle$.

FIGURE 9 : Octaèdre représentatif de la surface critère de plasticité dans le sous-espace (A,G,H).

FIGURE 10 : Position de la direction de traction (OZ) dans le triangle élémentaire de référence. Projection stéréographique sur le plan (001).

FIGURE 11 : Projections stéréographiques des courbes d'équations $M_J = 0$.
[relations (106), (107), (108)].

FIGURE 12 : Projections stéréographiques

(a-f) signes des fonctions M_J . Les zones hachurées correspondent à $M_J > 0$.

(g) synthèse des frontières précédentes.

FIGURE 13 : Comportement du facteur de TAYLOR $M(g;1/2)$. (les caractéristiques des domaines et des points singuliers sont rassemblées dans les tableaux 10 et 11).

FIGURE 14 : Projections stéréographiques des frontières

$$- M_1 + M_5 = 0 \quad (- \text{-----}) ;$$

$$- M_1 + M_3 + M_5 = 0 \quad (\text{---}) ;$$

$$- M_1 + M_4 + M_5 = 0 \quad (\text{---.---.---.---}) .$$

FIGURE 15 : Evolution des états de contrainte pour divers taux de déformation ($\alpha=0$). (les tableaux 10 et 12 regroupent les caractéristiques des domaines concernés).

FIGURE 16 : Lissages des coefficients M_{00}^{2l} ($\omega = 1-2q$).

FIGURE 17 : Lissages des coefficients M_{20}^{2l} ($\omega = 1-2q$).

FIGURE 18 : Lissages des coefficients M_{40}^{2l} ($\omega = 1-2q$).

FIGURE 19 : Lissages des coefficients M_{60}^{2l} ($\omega = 1-2q$).

FIGURE 20 : Lissages des coefficients M_{80}^{2l} et M_{100}^{2l} ($\omega = 1-2q$).

FIGURE 21 : Détermination des quantités de glissement $\vec{\rho}_i$ dans le cas du glissement sur 4 systèmes.

FIGURE 22 : Recherche d'une origine des $C_i(K)$.

FIGURE 23 : Comportement du facteur de TAYLOR $M(g,1/2)$ dans le triangle standard. Frontières des domaines où interviennent 3 ou 4 systèmes.

- FIGURE 24 : Lissages des coefficients M_{00}^{ω} ($\omega = 1-2q$).
- FIGURE 25 : Lissages des coefficients M_{20}^{ω} ($\omega = 1-2q$).
- FIGURE 26 : Lissages des coefficients M_{40}^{ω} ($\omega = 1-2q$).
- FIGURE 27 : Lissages des coefficients M_{60}^{ω} ($\omega = 1-2q$).
- FIGURE 28 : Lissages des coefficients M_{80}^{ω} et M_{100}^{ω} ($\omega = 1-2q$).
- FIGURE 29 : Repérage des systèmes de glissement primaire dans les différents triangles stéréographiques d'une projection sur le plan (001).
- FIGURE 30 : Modèle S'2 - sélection du système secondaire par minimisation de la dispersion des inhomogénéités de déformation.
- FIGURE 31 : Modèle S2 - sélection des systèmes associés aux deux plus grandes cissions résolues (système primaire + système primaire du triangle adjacent).
- FIGURE 32 : Orientation d'une éprouvette dans le plan de la tôle.
- FIGURE 33 : Figures de pôles de l'échantillon Al 1100A.
- FIGURE 34 : Echantillon Al 1100A - coupes à γ constant.
- FIGURE 35 : Echantillon Al 1100A - coupes à α constant.
- FIGURE 36 : Figures de pôles d'un acier extra doux calmé à l'aluminium A2.
- FIGURE 37 : Echantillon A2 - diagramme $f(\alpha, \beta, \gamma = \text{Constante}) = \text{constante}$.
- FIGURE 38 : Comparaison expérience-théorie des valeurs de $r(\alpha_0)$
- modèle de TAYLOR (déformation totalement imposée)
 - · — · — modèle de TAYLOR relaxé (T2) (deux composantes imposées du tenseur de déformation)
 - ✕ modèle auto-cohérent [30,51]
 - ✕ modèle auto-cohérent [30,61]
 - valeurs expérimentales.

FIGURE 39 : Comparaison expérience-théorie des valeurs de $r(\alpha_0)$

- modèle de SACHS (glissement sur le système primaire)
- - —— modèle de SACHS étendu 52
- - - - - modèle de SACHS étendu 52
- x modèle auto-cohérent [30,50]
- * modèle auto-cohérent [30,61]
- valeurs expérimentales.

FIGURE 40 : Comparaison du coefficient d'anisotropie $r(\alpha_0)$ d'une tôle d'acier extra doux calmé à l'aluminium A2 avec les valeurs calculées pour divers ordres de troncature 4, 6 et 8 de la fonction de texture.

FIGURE 41 : Tôle mince d'acier extra-doux calmé à l'aluminium A2.

Comparaison des valeurs de $r(\alpha_0)$ mesurées et des valeurs calculées avec l'approximation de HILL (H) et l'approximation proposée (A : relation 234).

FIGURE 42 : Champ de rotation sur les frontières des domaines relatifs au cas $q=1/2$. (déformation de 8,5% : modèle de TAYLOR).

FIGURE 43 : Représentation d'une situation typique de variation des paramètres indéterminés.

FIGURE 44 : Champ de rotation des grains pour une déformation de quelques % en fonction de la quantité $\alpha\mu/H$.

$$\alpha\mu/h = 160 ;$$

$$\alpha\mu/H = 80 ;$$

$$\alpha\mu/H = 0 .$$

FIGURE 45 : Champ de rotation des grains relatifs aux modèles intermédiaires (S = SACHS ; S2 ; T2) pour une déformation de 7,5%.

FIGURE 46 : Champ de rotation des grains calculé avec le modèle T2.

FIGURE 47 : Champ de rotation des grains calculé avec le modèle de Sachs (glissement sur le système primaire).

FIGURE 48 : Champ de rotation des grains calculé avec le modèle de Sachs étendu S2 (glissement sur deux systèmes).

- TABEAU 1 : Relations de dépendance entre f_{mn}^l pour la symétrie cubique du réseau des grains [44,45].
- TABEAU 2 : Relations entre coefficients des développements sur les bases symétrisées (C_{mn}^l) et non-symétrisées (e_{mn}^l et f_{mn}^l).
- TABEAU 3 : Repérage des 12 systèmes de glissement $\{111\}\langle 110\rangle$.
- TABEAU 4 : Matrice de changement de repère (passage du repère échantillon R^s à un repère d'orientation $g = (\alpha, \beta, \gamma)$).
- TABEAU 5 : Tenseur de cisaillement unitaire e^{γ} rapporté dans le repère cristallographique $R^c([100],[010],[001])$ pour les 12 systèmes de glissement du tableau 3.
- TABEAU 6 : Tenseur de déformation pure e^{γ} rapporté dans le repère cristallographique $R^c([100],[010],[001])$ pour les 12 systèmes de glissement $\{111\}\langle 110\rangle$.
- TABEAU 7 : Tenseur de rotation \tilde{e}^{γ} rapporté dans le repère cristallographique $R^c([100],[010],[001])$ pour les 12 systèmes de glissement $\{111\}\langle 110\rangle$ dans les cubiques faces centrées.
- TABEAU 8 : Configurations déduites du module à 12 éléments de la figure 8a et vérifiant une loi d'écoulement du type $\tau = \tau_0$ (86).
- TABEAU 9 : Représentation des 28 états contraintes de BISHOP [65] et des combinaisons de systèmes actifs associées.
- TABEAU 10 : Caractéristiques des domaines de la figure 13.
- TABEAU 11 : Caractéristiques des points singuliers de la figure 13.
- TABEAU 12 : Caractéristiques des domaines de la figure 15(a-e).

- TABLEAU 13 : Coefficients $M_{2m 0}^{2l}(q)$ pour un glissement cristallographique $\{111\}\langle 110 \rangle$ - réseau cubique faces centrées - modèle de TAYLOR (déformation totalement imposée) - $\omega = 1-2q$.
- TABLEAU 14 : Lissages des coefficients $M_{2m 0}^{2l}$ en fonction du paramètre $\omega = 1-2q$ (méthode des moindres carrés).
- TABLEAU 15 : Comparaison de la valeur moyenne du facteur de TAYLOR pour une déformation axisymétrique (glissement cristallographique - cubique faces centrées).
- TABLEAU 16 : Composantes du tenseur de déformation associé aux quatre directions $\langle 111 \rangle$ (glissement non-cristallographique).
- TABLEAU 17 : Composantes des tenseurs antisymétriques de rotation - glissement non-cristallographique.
- TABLEAU 18 : Base de décomposition de la contrainte sur un grain (cubiques centrés).
- TABLEAU 19 : Coefficients $M_{2m 0}^{2l}(q)$ pour un glissement non-cristallographique d'axe de zone $\langle 111 \rangle$ - cubiques centrés - modèle de TAYLOR - $\omega = 1 - 2q$.
- TABLEAU 20 : Lissages des coefficients $M_{2m 0}^{2l}$ en fonction du paramètre $\omega = 1-2q$ (méthode des moindres carrés).
- TABLEAU 21 : Valeur moyenne du facteur de TAYLOR $\bar{M}(1/2)$ (glissement non-cristallographique - cubique centré).
- TABLEAU 22 : Relations entre composantes librement ajustables du tenseur de déformation microscopique pour diverses symétries ; limitation subséquente du domaine de variation de $g(\alpha, \beta, \sigma)$.
- TABLEAU 23 : Composantes du tenseur métrique g_{ij} x12.
 $(g_{ij} = g_{ji} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j)$.

TABLEAU 24 : Coefficients $M_{2m 0}^{\omega}$ (q) - modèle de TAYLOR relaxé (T2) -
glissement cristallographique $\{111\}\langle 110\rangle$ - cubiques faces
centrées - $\omega = 1-2q$.

TABLEAU 25 : Comparaison des coefficients $M_{0 0}^{\omega}$ pour les divers modèles
étudiés (q = 1/2 ou $\omega = 0$).

TABLEAU 26 : Coefficients $\omega_{2m 0}^{\omega}$ pour les modèles de SACHS et SACHS
étendus.

TABLEAU 27 : Relations de passage $R^t \rightarrow R^s$ à l'ordre 6.

TABLEAU 28 : Relations de passage $R^t \rightarrow R^s$ à l'ordre 8.

TABLEAU 29 : Relations de passage $R^t \rightarrow R^s$ à l'ordre 10.

TABLEAU 30 : Relations de passage $R^t \rightarrow R^s$ à l'ordre 10 (suite).

TABLEAU 31 : Comparaison des champs de rotation des grains.(I)

TABLEAU 32 : Comparaison des champs de rotation des grains.(II)

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION ----- 17

CHAPITRE 1 : DESCRIPTION QUANTITATIVE DE LA TEXTURE DES MATERIAUX
POLYCRISTALLINS ----- 22

1) Définition de la fonction de texture 23

 a) Repérage d'un grain : angles d'Euler

 b) Distribution des orientations

 c) Intensité diffractée et fonction de texture

2) Comparaison des formalismes en bases non-symétrisées 36

 a) Formalisme de ROE

 b) Formalisme de BUNGE

 c) Relations entre coefficients des deux développements non
 symétrisés

3) Harmoniques sphériques généralisées symétrisées 40

4) Relations entre coefficients des développements sur les
 bases symétrisées et non-symétrisées 44

5) Conclusion 46

<u>CHAPITRE 2</u> : ANALYSE DES MODELES DE COMPORTEMENT PLASTIQUE DES MATERIAUX POLYCRISTALLINS -----	49
1) Généralités	50
2) Hypothèses fondamentales pour le grain isolé ou monocristal	51
3) Loi d'interaction entre cristallites	52
a) Modèles auto-cohérents	
b) Modèles élémentaires	
b1) Modèle de SACHS	
b2) Modèle "statique"	
b3) Modèle de TAYLOR, BISHOP-HILL	
c) Modèles intermédiaires	
 <u>CHAPITRE 3</u> : FORMALISME GENERAL POUR L'ETUDE DU PROCESSUS DE DEFORMATION PLASTIQUE DANS LES POLYCRISTAUX A RESEAU CUBIQUE -----	63
1) Hypothèses de glissement dans les matériaux cubiques	65
a) Réseau cubique faces centrées	
b) Réseau cubique centré	

2) Définitions des systèmes d'axes et relations fondamentales	66
a) Grandeurs macroscopiques	
b) Grandeurs microscopiques	
c) Relations fondamentales	
d) Facteur de TAYLOR	

CHAPITRE 4 : RECHERCHE DES SYSTEMES DE GLISSEMENT POUR UNE DEFORMATION

TOTALEMENT IMPOSEE :

CAS DU GLISSEMENT CRISTALLOGRAPHIQUE $\{111\} \langle 110 \rangle$	78
1) Introduction	79
2) Relations d'interdépendance entre systèmes de glissement ...	83
3) Base de décomposition des contraintes	87
4) Calcul du facteur de TAYLOR et sélection des systèmes de glissement actifs	89
5) Comparaison avec le modèle de BISHOP-HILL. Surface critère de plasticité	91
6) Détermination des quantités de glissement	96
7) Comportement du facteur de TAYLOR	97

a) Aspect géométrique du glissement	
b) Déformation transversale isotrope ($q=1/2$)	
c) Cas non-isotrope ($q \neq 1/2$)	
d) Conclusion	
8) Facteur de TAYLOR : symétries - valeur moyenne - décomposition sur une base d'harmoniques sphériques	107
a) Symétries	
b) Décomposition sur une base d'harmoniques sphériques	
c) Valeur moyenne	
9) Conclusion	122

CHAPITRE 5 : RECHERCHE DES SYSTEMES DE GLISSEMENT DANS LE CAS DU GLISSEMENT NON-CRISTALLOGRAPHIQUE D'AXE DE ZONE $\langle 111 \rangle$ DANS LES POLYCRISTAUX A RESEAU CUBIQUE CENTRE (PENCIL-GLIDE) ----- 123

1) Introduction	124
a) Glissement cristallographique	
b) Glissement non-cristallographique (pencil-glide)	
2) Relations fondamentales	127
3) Glissement sur quatre systèmes	135
4) Glissement sur trois systèmes	144

5) Facteur de TAYLOR	150
a) Sélection de $M(g;q)$	
b) Décomposition sur la base des harmoniques sphériques ...	
6) Conclusion	155

CHAPITRE 6 : GLISSEMENT CRISTALLOGRAPHIQUE EN MODELES DE SACHS-TAYLOR

INTERMEDIAIRES -----	162
1) Introduction	163
2) Etude algébrique des modèles	164
3) Rôle des symétries de l'échantillon	168
4) Spécificités des modèles étudiés	170
a) Modèles de TAYLOR relaxés	
b) Modèles de SACHS étendus	
5) Résultats et conclusion	179

CHAPITRE 7 : APPLICATION DES MODELES DE DEFORMATION ETUDIES :

* CORRELATIONS TEXTURE-PROPRIETES MECANIQUES	
* CHAMP DE ROTATION DES GRAINS -----	184

1) Corrélations texture-propriétés mécaniques	185
a) Introduction	
b) Relations entre texture et anisotropie plastique	
b1) Cas des modèles de type SACHS	
b2) Cas des modèles de type TAYLOR	
c) Coefficient d'anisotropie	
d) Mesures expérimentales et caractéristiques des échantil- lons étudiés	
e) Comparaison expérience-théorie et conclusion	
2) Champ de rotation des grains	214
a) Indéterminations du modèle classique de TAYLOR	
b) Modèles intermédiaires	
CONCLUSION -----	288b
APPENDICES -----	233
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES -----	269

INTRODUCTION

La plupart des matériaux industriels sont des agrégats polycristallins qui de par leur processus de fabrication (laminage, filage, recuit de recristallisation , ...) présentent une anisotropie d'orientation des grains ou texture qui est à l'origine de l'anisotropie de nombreuses propriétés mécaniques, magnétiques et électriques. La recherche de matériaux possédant des orientations préférentielles ou de processus de fabrication destinés à réaliser des polycristaux de texture déterminée apparaît donc d'un intérêt technologique certain.

D'un autre côté, la texture initiale d'une tôle peut varier de manière plus ou moins marquée sous l'effet de contraintes appliquées et il est alors essentiel de pouvoir prédire l'apparition de composantes néfastes. Certaines informations sur le comportement détaillé ou global des grains d'un échantillon texturé sont difficilement accessibles au cours de l'essai et il est intéressant de connaître et de modéliser ce comportement à partir de la texture initiale. C'est notamment le cas du facteur de LANKFORD [1] dans l'essai de traction.

Rechercher les corrélations entre l'anisotropie cristallographique et les propriétés mécaniques de manière quantitative implique de disposer d'un formalisme intégrant une connaissance quantitative de la texture et d'un modèle de déformation plastique du polycristal [2].

En ce qui concerne l'anisotropie cristallographique, une des-

cription possible de la fonction de distribution des orientations ou fonction de texture est donnée en principe par les coefficients du développement de cette fonction sur l'ensemble complet des harmoniques sphériques généralisées possédant les symétries du réseau cristallin (spécifiquement limitées dans cette étude aux réseaux cubiques) et sur lequel on vérifie généralement la symétrie orthorhombique de l'échantillon [3,4,5]. La détermination de ces coefficients est difficilement réalisable par des essais non destructifs. La diffraction de rayons X ou de neutrons fournit une information partielle sur la texture et ces coefficients dont la détermination a fait l'objet de nombreux travaux [5 à 19]. Il est suffisant de savoir que les coefficients de plus bas ordre du développement de la fonction de texture sont généralement déduits d'un nombre restreint de figures de pôles voire de figures incomplètes [20,21]. Ainsi, la méthodologie développée [22] fait intervenir les expressions analytiques des harmoniques sphériques généralisées établies jusqu'à un rang adéquat pour cette étude.

Le polycristal est considéré comme une juxtaposition de grains monocristallins (on parle dans ce cas de cristallites). Décrire le comportement du polycristal passe donc nécessairement par une modélisation du comportement du monocristal dont on retiendra que parmi les divers modes de déformation plastique (glissement, maclage, changement de phase, diffusion de défauts ponctuels,...) le mode prédominant est le glissement aux températures ordinaires ($T \leq 0,5T_f$) dans le cas des matériaux cubiques. Une telle description se heurte toutefois à de nombreuses difficultés quant à la définition d'un modèle d'interactions entre

cristallites. L'existence des joints de grains, qui s'opposent aux mouvements de dislocations, nécessite une relaxation qui rend la réponse du grain dans l'agrégat sensiblement différente de celle du monocristal isolé. L'environnement du cristallite crée notamment un champ de contraintes internes qui se superpose aux contraintes appliquées. La prise en compte globale des mécanismes gouvernant la déformation plastique du polycristal (rôle des joints de grains, taille et forme des grains, durcissement, ...) s'avère être en général un problème très difficile à résoudre. De ce fait, différents auteurs ont tenté de développer des modèles variés, en introduisant diverses hypothèses simplificatrices, et dont l'originalité essentielle réside dans la loi d'interaction entre grains de l'agrégat. Ainsi, dans le cas de modèles élémentaires (SACHS [23], modèle statique [24], TAYLOR [25]) et sur la base de comportements extrêmes, tels que contraintes ou déformations homogènes, le polycristal s'exprime comme un monocristal moyen. L'insuffisance de ces hypothèses a conduit au développement d'une méthode autocohérente de traitement qui permet une accommodation élasto-plastique des hétérogénéités de déformation. Elle nécessite cependant des calculs complexes et ses résultats restent difficilement transposables au comportement d'éprouvettes différentes [26 à 30]. Des tentatives de construction de modèles intermédiaires (extension du modèle de SACHS [31,32] ou relaxation de certaines composantes de déformation ou de contrainte [32 à 36]), de mise en oeuvre plus simple et plus globale que celles des modèles auto-équilibrés, ont aussi été réalisées et seront discutées dans les chapitres suivants.

Par rapport aux travaux antérieurs ou similaires, et dans un premier temps, les hypothèses équivalentes de TAYLOR et BISHOP-HILL [25, 37] ont été utilisées pour traiter algébriquement le cas du glissement cristallographique sur les systèmes de glissement $\{111\}\langle 110\rangle$. L'originalité de l'approche développée dans cette étude, basée sur l'utilisation des relations d'interdépendance entre systèmes de glissement, réduit l'ensemble des possibilités susceptibles d'accommoder une déformation totalement imposée à la comparaison d'un très petit nombre de situations différentes. Elle offre de plus l'avantage d'une généralisation rapide au cas du glissement sur d'autres systèmes et plus particulièrement au glissement non-cristallographique d'axe de zone $\langle 111\rangle$ pour les matériaux à réseau cubique centré [38]. Cette analyse permet d'autre part, dans une seconde partie de ce travail, d'envisager l'ensemble des modèles intermédiaires, entre celui de SACHS (glissement sur le système le plus chargé) et de TAYLOR (déformation homogène), découlant d'hypothèses sur la structure du tenseur de déformation et l'homogénéité de certaines de ses composantes.

Pour chacun des modèles étudiés sera défini, après levée d'éventuelles indéterminations, un facteur caractéristique associé au travail microscopique de glissement d'un grain d'orientation donnée et que par analogie nous identifierons comme le facteur de TAYLOR du modèle proposé. La connaissance de ce facteur permet de tabuler dans chaque cas un ensemble de coefficients universels par développement sur la base des harmoni-

ques sphériques généralisées et symétrisées utilisées pour la description de la texture [32,39]. Ces coefficients conduisent à l'étude de l'anisotropie plastique par le biais de paramètres tels que le facteur de LANKFORD ou de courbes limite d'écoulement plastique.

En outre, l'évolution de la texture initiale au cours de la déformation est obtenue à partir du champ de rotation des grains lié aux quantités de glissement sur les systèmes activés. De tels champs de rotations seront discutés pour quelques modèles caractéristiques précédemment développés .

L'ensemble des résultats sera finalement comparé aux mesures expérimentales existantes afin de dégager l'intérêt de ces modèles.

CHAPITRE 1 : DESCRIPTION QUANTITATIVE DE LA TEXTURE DES MATERIAUX
POLYCRISTALLINS .

1) Définition de la fonction de texture .

- a) Repérage d'un grain : angles d'Euler .
- b) Distribution des orientations .
- c) Intensité diffractée et fonction de texture .

2) Comparaison des formalismes en bases non-symétrisées .

- a) Formalisme de ROE .
- b) Formalisme de BUNGE .
- c) Relations entre les coefficients des deux développements non-symétrisés .

3) Harmoniques sphériques généralisées symétrisées .

4) Relations entre coefficients des développements sur les bases symétrisées et non-symétrisées .

5) Conclusion .

1) DEFINITION DE LA FONCTION DE TEXTURE .

a) Repérage d'un grain : angles d'Euler .

La répartition des orientations des cristallites ou texture d'un polycristal est décrite par rapport à un référentiel lié à l'échantillon macroscopique. A cet échantillon est associé un repère cartésien $R^S(OXYZ)$ dont on pourra, par exemple, prendre pour axes la longueur, la largeur et l'épaisseur du solide. Une autre situation particulière consiste à utiliser pour une éprouvette découpée dans une tôle laminée la direction de laminage (DL), la direction transverse (DN) et la normale au plan de laminage (DN) (figure 1).

Un second repère cartésien $R^C(O'x^Cx^Cy^C)$ sera affecté à chacun des cristallites. Si le réseau cristallin possède une maille orthorhombique, les axes de ce repère pourront notamment coïncider avec les rangées cristallographiques $[100]$, $[010]$ et $[001]$.

Ainsi qu'il est d'usage en mécanique du solide, la position d'un cristallite dans l'échantillon sera définie par :

- la position de l'origine O' de R^C dans R^S ;
- l'orientation du repère R^C par rapport à R^S , caractérisée par la rotation g qui amène le repère échantillon en coïncidence avec le repère cristallographique équipollent à R^C en O .

La description de la texture consiste à repérer la distribution des orientations indépendamment de la taille, forme et position de ces derniers. Aussi dans la suite de cette étude ne retiendra-t-on pour caractériser un cristallite que les paramètres d'orientation définis ci-

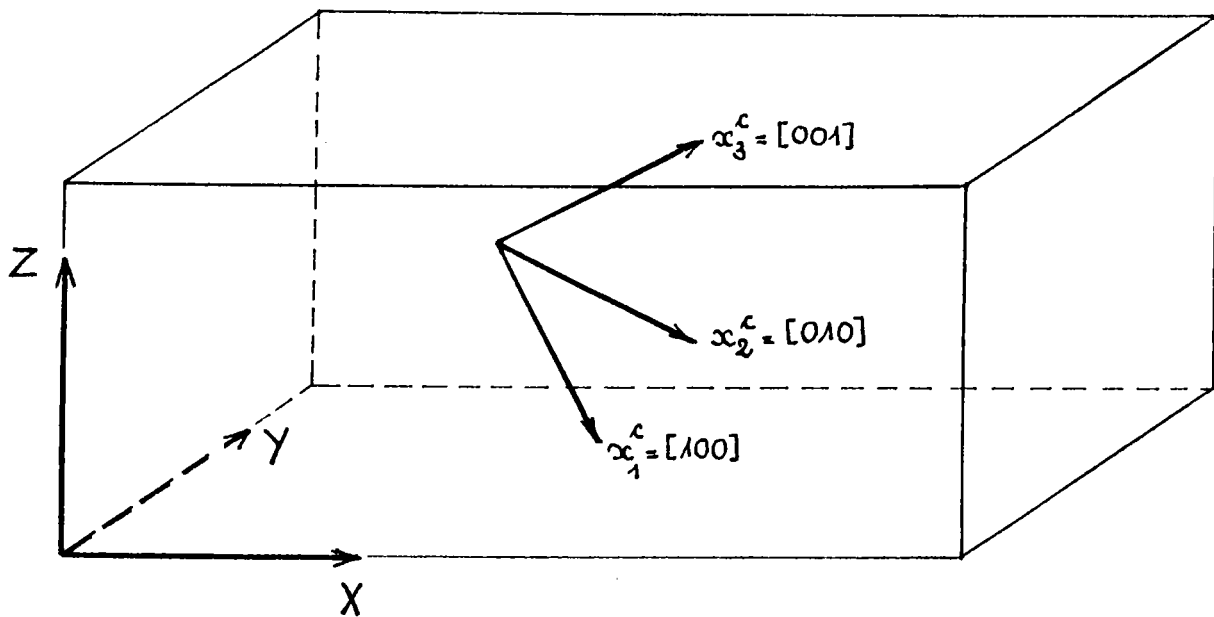


FIGURE 1 : DEFINITION DU REPERE ECHANTILLON R^S (OXYZ) ET DU REPERE CRISTALLOGRAPHIQUE R^C ($O^C x_1^C x_2^C x_3^C$).

après.

La rotation g se décompose en un produit de trois rotations indépendantes (figure 2)[4] :

- une rotation d'angle φ_1 ($0 \leq \varphi_1 \leq 2\pi$) autour de l'axe OZ ;
- une rotation d'angle ϕ ($0 \leq \phi \leq \pi$) autour du nouvel axe OX

soit OX_1) qui amène OZ sur OZ_2 ;

- une rotation d'angle φ_2 ($0 \leq \varphi_2 \leq 2\pi$) autour de l'axe OZ_2 .

Les trois angles d'Euler $\varphi_1, \phi, \varphi_2$ définissent ainsi l'orientation g d'un grain déterminé :

$$g \equiv (\varphi_1, \phi, \varphi_2).$$

Il convient de plus de souligner qu'un choix s'est avéré nécessaire entre les deux définitions les plus couramment rencontrées pour les angles d'Euler. La convention retenue ici est celle de l'angle de nutation θ du groupe des rotations [40]. Une rotation $g = (\psi, \theta, \phi)$ résultera donc des trois rotations successives (figure 3) :

- ψ ($0 \leq \psi \leq 2\pi$) autour de l'axe OZ ;
- θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) autour du nouvel axe OY (soit OY_1) qui

amène OZ sur OZ_2 ;

- ϕ ($0 \leq \phi \leq 2\pi$) autour de l'axe OZ_2 .

On trouvera en annexe les formules permettant de passer de l'une à l'autre de ces conventions. Y figurent également les relations permettant de calculer les indices de Miller caractérisant une orientation dans une tôle laminée [41], c'est-à-dire le plan cristallographique $\{hkl\}$ et la direction cristallographique $\langle uvw \rangle$ respectivement parallèles au plan et à la direction de laminage.

L'orientation d'un cristallite dans le repère échantillon

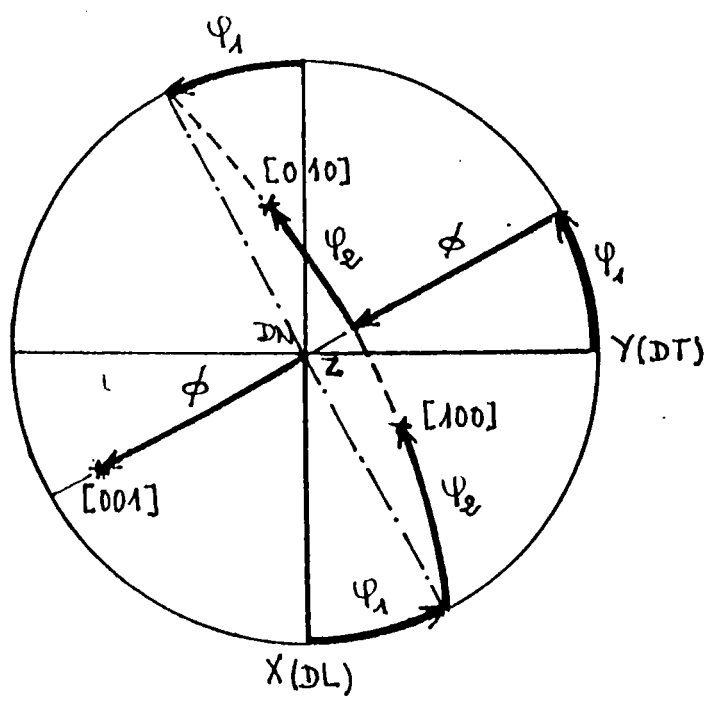
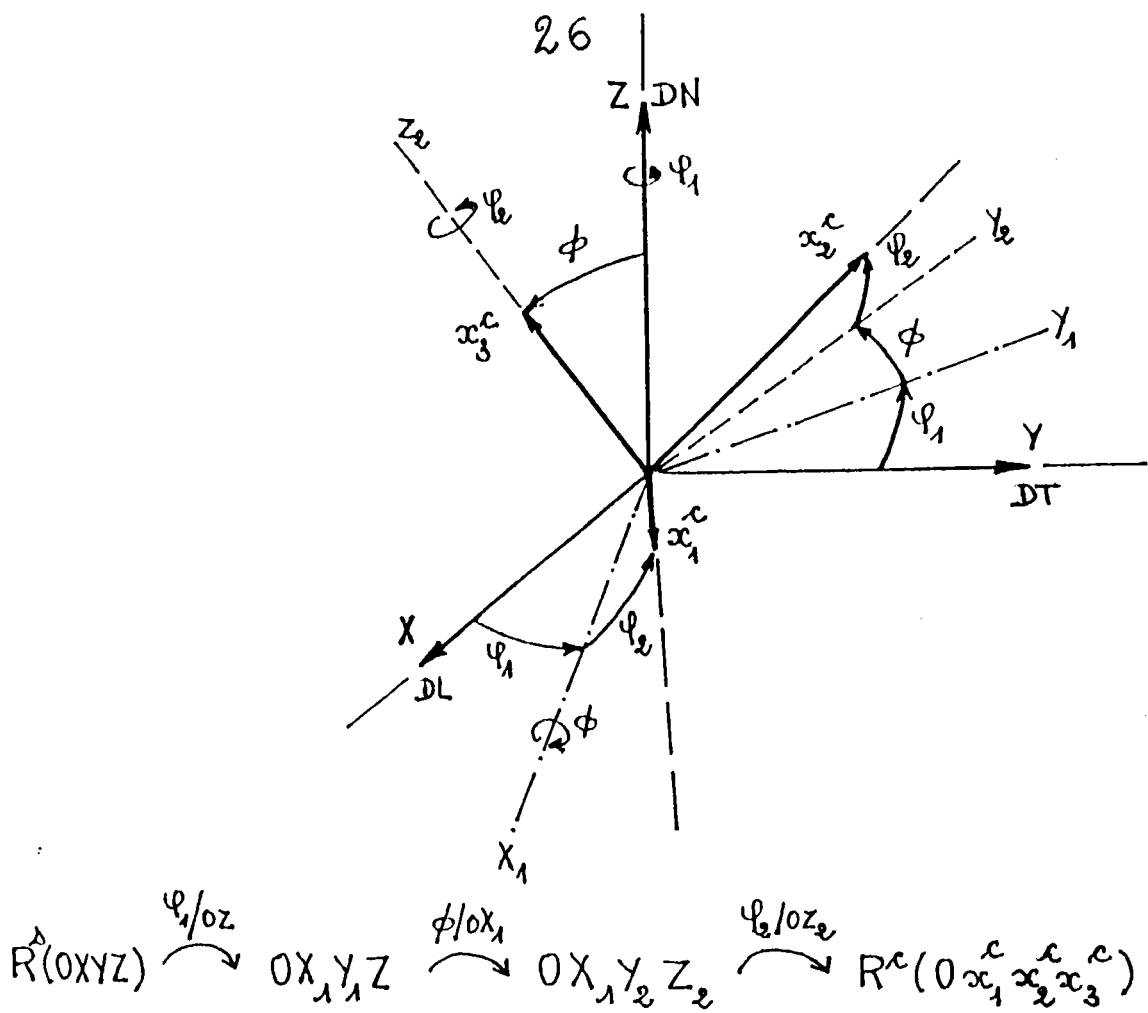
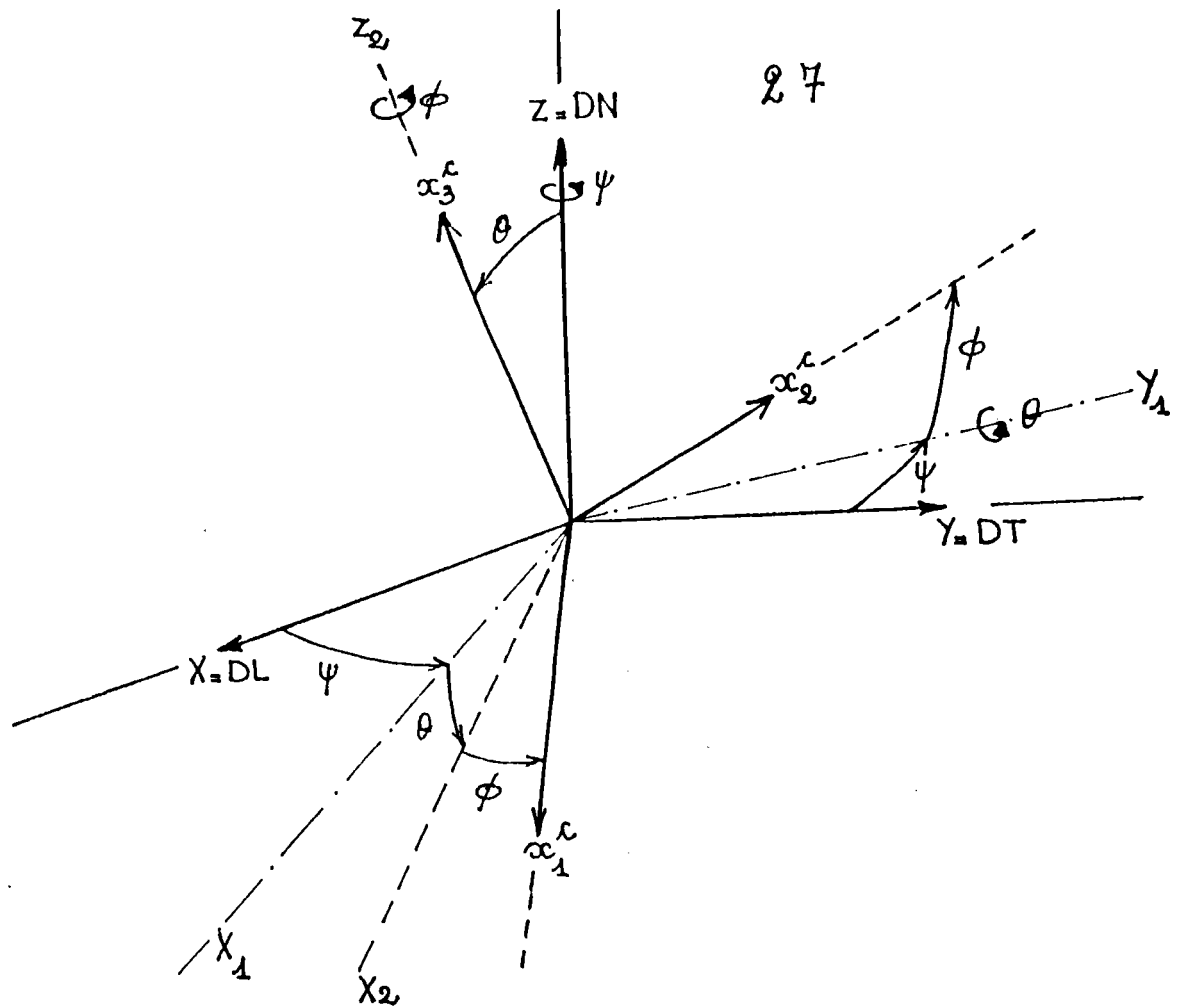


FIGURE 2: ANGLES D'EULER DANS LA CONVENTION DU REPERE MOBILE :

$g(\varphi_1, \phi, \varphi_2)$ (notation de BUNGE[4])



$$R^D(OXYZ) \xrightarrow{\psi/OZ} OX_1 Y_1 Z \xrightarrow{\theta/OY_1} OX_2 Y_1 Z_2 \xrightarrow{\phi/OZ_2} R^f(Ox_1^c x_2^c x_3^c)$$

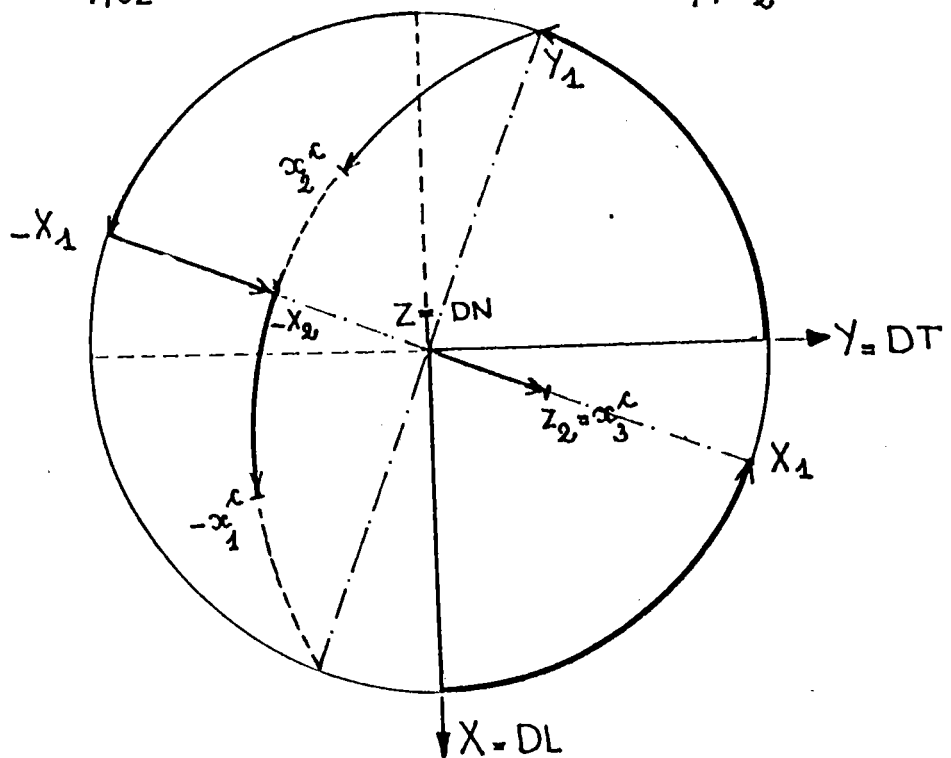


FIGURE 3 : ANGLES D'EULER $g = (\psi, \theta, \phi)$ (notation de ROE [3]).

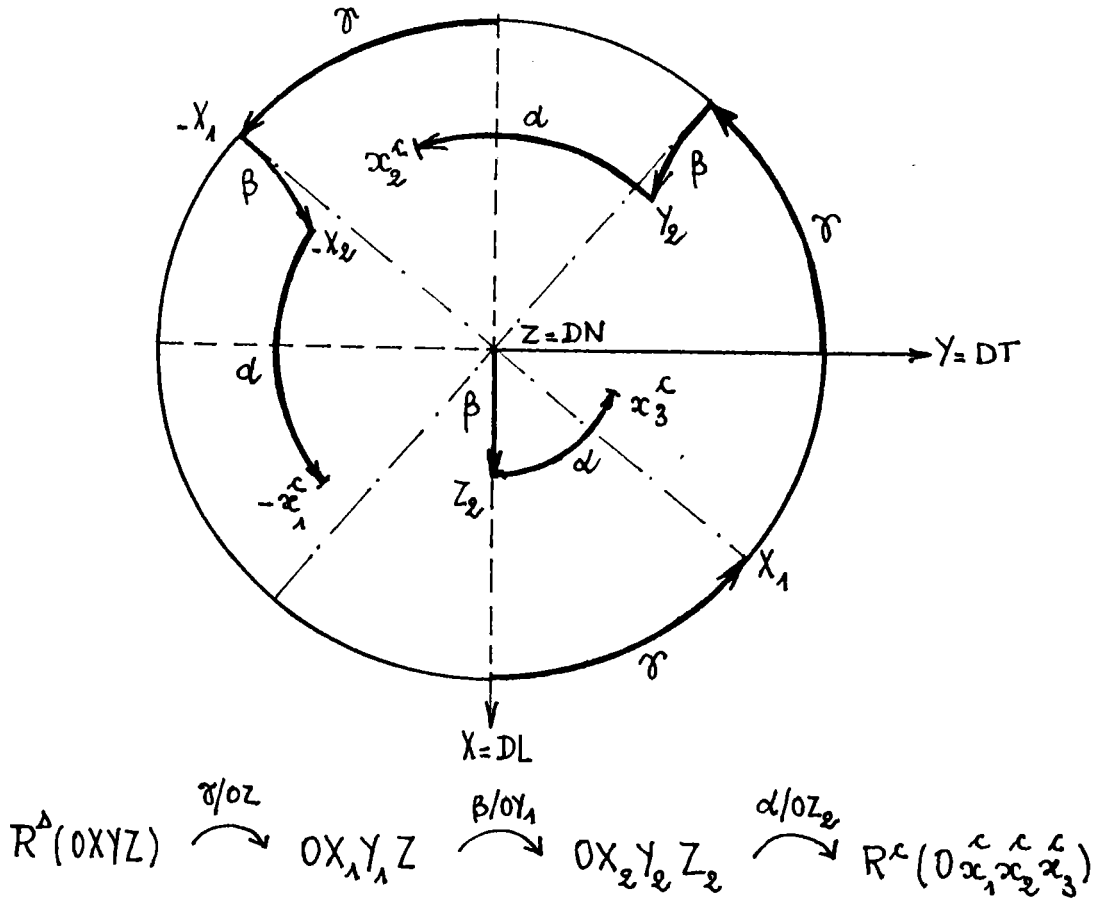


FIGURE 4 : ANGLES D'EULER $g = (\alpha, \beta, \gamma)$ DANS LA CONVENTION DU REPERE FIXE [40].

sera donc indifféremment spécifiée par les trois angles d'Euler ou par l'ensemble des indices de Miller $\{hkl\}\langle uvw \rangle$.

Enfin une alternative équivalente revient à effectuer successivement les rotations d'angle γ , β et α (les intervalles de variation ci-dessus restant inchangés) respectivement autour des axes OZ, OY et OZ du repère initial R^0 (figure 4), ce qui conduit directement à la représentation irréductible du groupe des rotations [41] (harmoniques sphériques généralisées).

b) Distribution des orientations.

Dans un matériau polycristallin, la fraction volumique de cristallites dont l'orientation est comprise entre g et $(g+dg)$ est donnée par :

$$\frac{dV}{V} = k \cdot f(g) dg = k \cdot f(\alpha, \beta, \gamma) \sin\beta d\alpha d\beta d\gamma \quad (1)$$

où k est un coefficient numérique dépendant de conditions de normalisation de la fonction $f(g)$ appelée fonction de distribution des cristallites ou fonction de texture. Cette fonction densité est toujours positive

$$f(g) \geq 0, \quad (2)$$

et normée

$$\int f(g) dg = N. \quad (3)$$

Cette norme, qu'il est commode d'égaliser à l'unité (et dans ce cas $k=1/8\pi^2$) possède des valeurs différentes dans les travaux ultérieurement analysés.

L'espace des fonctions des angles d'Euler peut être muni d'une base orthonormée et complète : la base des harmoniques sphériques généralisées $D_{mn}^l(g)$, représentation irréductible du groupe des rotations [41] et sur laquelle on peut décomposer la fonction de texture :

$$f(g) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sum_{n=-l}^l f_{mn}^l \cdot D_{mn}^l(g) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sum_{n=-l}^l f_{mn}^l \langle 1m | D(g) | 1n \rangle \quad (4)$$

où $D(g)$ est l'opérateur représentant la succession des rotations finies α, β et γ définissant l'orientation du réseau des grains dans R^3 .

La fonction de texture n'est généralement pas directement mesurable, sinon par des procédés destructifs, et la détermination des coefficients f_{mn}^l de ce développement pose de nombreux problèmes lorsqu'on tente de les obtenir par gonimétrie de texture. ROE [3a-b] et BUNGE [4] ont séparément proposé de résoudre des systèmes d'équations associant les coefficients f_{mn}^l à des mesures expérimentales et par là même un formalisme permettant une description quantitative de la texture .

c) Intensité diffractée et fonction de texture .

La gonimétrie de texture aux rayons X ou neutrons donne une certaine image de l'anisotropie de texture du matériau. L'intensité diffractée sous un angle donné intègre les contributions de tous les cristallites possédant une normale commune $\vec{n}_{h,k,l} = \vec{n}_h$ aux plans de diffraction $\{hkl\}$ et en position $\Omega = (\phi, \theta)$ par rapport au repère R_g ou $\omega_h = (\eta, \chi)$ dans R^c (figure 5). Cette intensité est définie par :

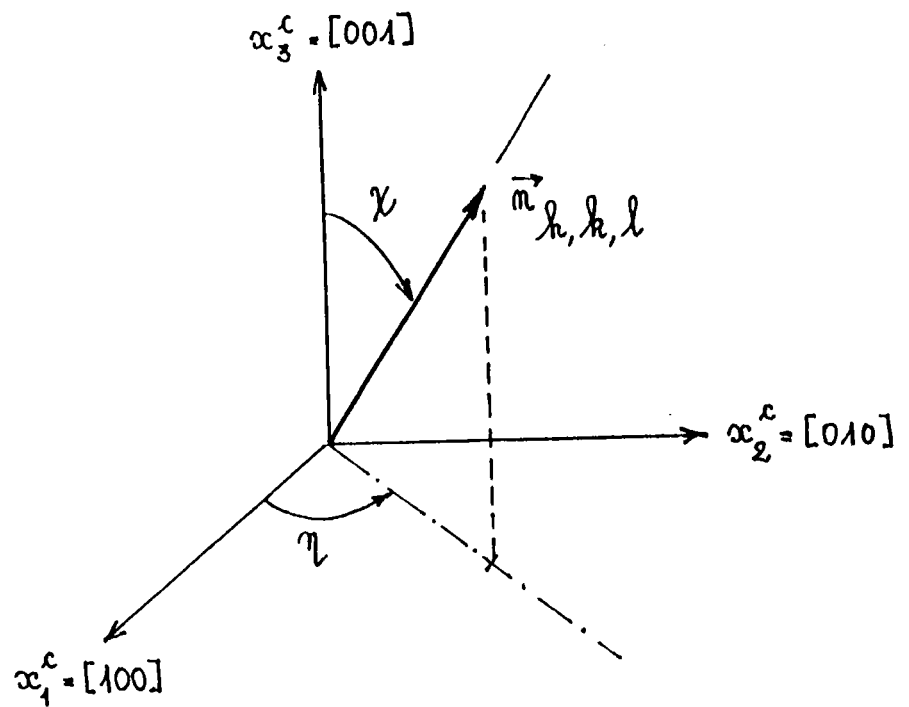
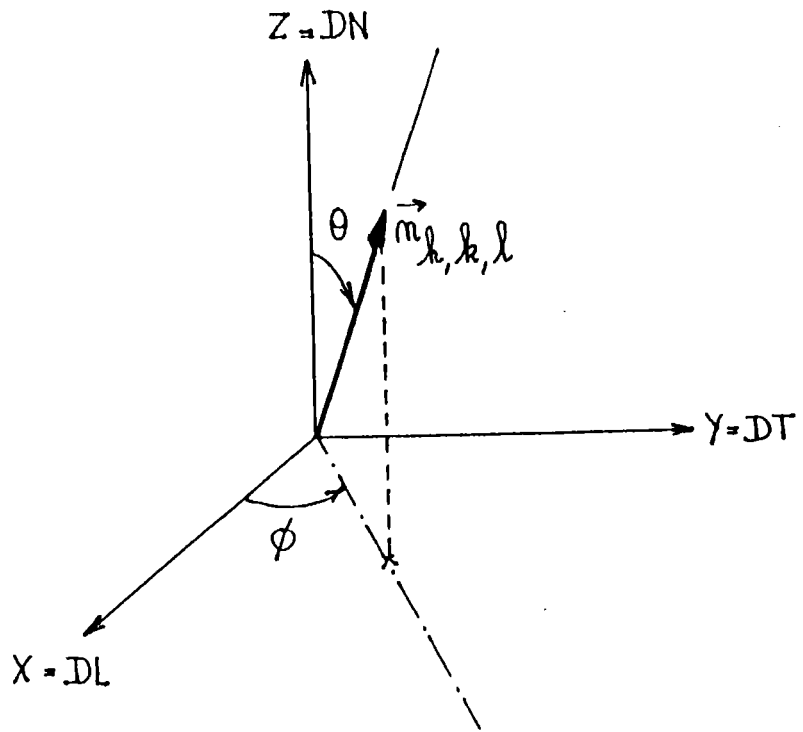


FIGURE 5 : REPERAGE D'UNE DIRECTION

(a) dans le repère échantillon R^S ;

(b) dans le repère cristallographique R^C .

$$I_{h,k,l}(\Omega) = I_h(\Omega) = k \int_0^{2\pi} f(\phi, \theta, \psi) d\psi, \quad (5)$$

l'angle ψ réalisant l'intégration autour de \vec{n}_h . La projection stéréographique correspondante est appelée figure de pôles.

Plus généralement, si g définit l'orientation d'un repère associé au type de plans visés, et donc de \vec{n}_h , par rapport au repère cristallographique de référence, l'orientation g d'un grain déterminé est encore telle que :

$$g' = g'(\phi, \theta, \psi) = g_h \cdot g(\alpha, \beta, \tau), \quad (6)$$

ou

$$g = g(\alpha, \beta, \tau) = g_h^{-1} \cdot g'(\phi, \theta, \psi). \quad (7)$$

L'anisotropie d'une figure de pôles peut être caractérisée par les coefficients $q_{l,m}^h$ du développement de l'intensité diffractée sur la base des harmoniques sphériques simples:

$$Y_{l,m}(\phi, \theta) = D_{m0}^{l*}(\phi, \theta, \psi) = D_{m0}^{l*}(\Omega) = \langle lm | D(\Omega) | 10 \rangle^* \quad (8)$$

(l'astérisque définissant l'expression conjuguée), de sorte que :

$$\begin{aligned} I_h(\Omega) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l q_{l,m}^h Y_{l,m}^*(\Omega) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l q_{l,m}^h D_{m0}^l(\Omega) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l q_{l,m}^h \langle lm | D(\Omega) | 10 \rangle. \end{aligned} \quad (9)$$

Les coefficients de ce développement s'obtiennent à partir de figures de pôles complètes et des intensités correspondantes $I_h(\Omega)$ par le calcul des intégrales

$$q_{1,m}^h = \frac{2l+1}{4\pi} \int I_h(\Omega) Y_{1,m}(\Omega) d\Omega, \quad (10)$$

expression qui résulte des relations d'orthogonalité des $Y_{1,m}$.

D'un autre coté, les propriétés d'addition des harmoniques sphériques généralisées

$$D_{mn}^1(g \cdot g) = \sum_{p=l}^l D_{mp}^1(g) D_{pn}^1(g) \quad (11)$$

conduisent à un ensemble de relations entre les coefficients $q_{l,m}^h$ et f_{mn}^l déduites de (4), (5) et (11):

$$\begin{aligned} I_h(\Omega) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sum_{m=-l}^l f_{mn}^1 \int_0^{2\pi} D_{mn}^1(g) d\psi \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sum_{m=-l}^l \sum_{p=-l}^l f_{mn}^1 D_{pn}^{-1}(g) \int_0^{2\pi} D_{mp}^1(g') d\psi \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sum_{m=-l}^l f_{mn}^1 D_{m0}^1(\Omega) D_{n0}^{1*}(\omega), \end{aligned} \quad (12)$$

en notant que

$$D_{0n}^{-1}(g) = D_{n0}^{1*}(g) = D_{n0}^{1*}(\omega) = D_{0n}^1(\omega) \quad (13)$$

ne dépend que de l'orientation de la normale \vec{n} . En identifiant les expressions (9) et (12) on obtient le système d'équations de ROE :

$$\begin{aligned}
 q_{l,m}^h &= \sum_{m=-l}^l f_{mn}^l \frac{1}{D(\omega)} \frac{1}{n_0} \frac{1}{h} = \sum_{m=-l}^l f_{mn}^l \frac{1}{h} \langle 1n | D(\omega) | 10 \rangle^* \\
 &= \sum_{m=-l}^l f_{mn}^l \frac{1}{Y_{1,n}(\omega)} \quad (14)
 \end{aligned}$$

dont la résolution fournit les coefficients f_{mn}^l si l'on dispose d'un nombre suffisant de figures de pôles .

L'utilisation des propriétés de symétrie [4] traduisant l'invariance de $f(g)$ dans toute rotation du groupe de symétrie cristallographique transforme le système de ROE en celui de BUNGE

$$q_{l,m}^h = \sum_{m=-l}^l C_{mn}^l \frac{1}{h} \langle 1n | PD(\omega) | 10 \rangle^* \quad (15)$$

où P est le projecteur sur le sous-espace des kets $|1n\rangle$ de symétrie convenable [42] et les C_{mn}^l sont les coefficients d'un développement sur une base d'harmoniques sphériques généralisées et symétrisées résultant de l'application du projecteur P . Pour une figure de pôles donnée ce système possède, comme on pourra le constater formellement, une infinité de solutions possibles. En effet, l'expression suivante [20]

$$C_{mn}^l = q_{1,n}^h \frac{\langle 10 | RP | 1n \rangle^*}{\langle 10 | RPD(\omega) | 10 \rangle^*} \quad (16)$$

satisfait le système (15) pour toute rotation arbitraire R , compte-tenu

de la relation de fermeture

$$\sum_{p=-l}^l |lp\rangle\langle lp| = 1. \quad (17)$$

Cette indétermination apparente n'est vraie en fait que pour les rangs d'indice l élevés. Aux faibles l , l'expression (16) devient indépendante de R en raison des symétries microscopiques. La centrosymétrie des figures de pôles ne permet pas d'accéder aux éventuels coefficients C_{mn}^l de rang l impair d'une texture non-centrosymétrique. D'un autre côté, on peut montrer que les termes de rang impair n'interviendraient pas dans la description de situation de déformation à caractère centro-symétrique.

L'utilisation d'un nombre adéquat de figures de pôles ainsi que la prise en compte de la condition de positivité de la fonction de texture peut achever partiellement la résolution du système (15). Les symétries macroscopiques restreignent enfin le nombre des coefficients $q_{l,m}^h$. Ainsi par exemple pour les solides de symétrie quadratique à réseau cubique et jusqu'au rang $l < 12$, les coefficients C_{mn}^l se réduisent à

$$C_{2m, 4n}^{2l} = C_{-2m, 4n}^{2l} = Q_{2l, 2m}^h \frac{\langle 2l \ 0 \mid P \mid 2l \ 4n \rangle^*}{2 \langle 2l \ 0 \mid PD(\omega_h) \mid 2l \ 0 \rangle^*} \quad (18)$$

(les $Q_{l,m}^h$ sont dans cette expression les coefficients du développement de l'intensité diffractée sur la base symétrisée).

Bien que les deux analyses quantitatives de ROE et BUNGE soient fondamentalement identiques, il semble intéressant de comparer

certaines particularités (normalisation de la fonction de texture, propriétés des harmoniques utilisées, symétries) afin d'établir les relations utiles aux transformations entre ces deux formalismes [113].

2) COMPARAISON DES FORMALISMES DE ROE ET BUNGE .

(Les notations sont celles communément utilisées dans les travaux antérieurs;)

a) Formalisme de ROE .

$$f(g) = \sum_{l} \sum_{m} \sum_{n} f_{mn}^l \cdot \mathcal{Z}_{mn}^l(g) \quad (19)$$

les fonctions $\mathcal{Z}_{mn}^l(\alpha, \beta, \sigma)$ sont des harmoniques sphériques définies par :

$$\mathcal{Z}_{mn}^l(\alpha, \beta, \sigma) = e^{-im\alpha} \cdot y_{mn}^l(\beta) \cdot e^{-in\sigma} \quad (20)$$

avec $y_{mn}^l(\beta)$ représentant les polynômes de Legendre associés généralisés [43]. La relation d'orthogonalité entre les harmoniques $\mathcal{Z}_{mn}^l(g)$ s'écrit

$$\int \mathcal{Z}_{mn}^l(g) \cdot \mathcal{Z}_{m'n'}^{l'*}(g) dg = 4\pi \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta_{nn'} \quad (21)$$

et la fonction de texture est normée à l'unité

$$\int f(g) dg = 1 . \quad (22)$$

b) Formalisme de BUNGE.

Avant d'aborder les problèmes liés à la construction d'une base symétrisée, on conviendra dans un souci de clarté de l'exposé de faire intervenir une description intermédiaire non-symétrisée telle que

$$f(g) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sum_{n=-l}^l \mathcal{C}_{mn}^{l1} D_{mn}^l(g) \quad (23)$$

avec

$$D_{mn}^l(g) = e^{-im\alpha} \cdot d_{mn}^l(\beta) \cdot e^{-in\sigma} \quad (24)$$

Les fonctions $d_{mn}^l(\beta)$ sont des fonctions associées aux polynômes de Jacobi définies par

$$d_{mn}^l(\beta) = \sum_t (-1)^t \frac{[(1+m)!(1-m)!(1+n)!(1-n)]^{1/2}}{(1+m-t)!(1-n-t)!t!(t+n-m)!} \\ \times [\cos\beta/2]^{2l+m-n-2t} [\sin\beta/2]^{2t+n-m}, \quad (25)$$

la sommation étant étendue aux valeurs entières de t pour lesquelles les factorielles sont toutes positives. Les principales propriétés de ces fonctions ainsi que les expressions analytiques d'un certain nombre d'entre elles sont rapportées en appendice. De la relation de proportion-

nalité entre les fonctions $d_{mn}^l(\beta)$ et $y_{mn}^l(\beta)$

$$d_{mn}^l(\beta) = \sqrt{\frac{2}{2l+1}} y_{mn}^l(\beta) \quad (26)$$

il découle donc que

$$\int_D d_{mn}^l(g) d_{m'n'}^{l*}(g) dg = \frac{8\pi^2}{2l+1} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta_{nn'} \quad (27)$$

La condition de normalisation est dans ce cas

$$\int f(g) dg = 8\pi^2 \quad . \quad (28)$$

c) Relations entre les coefficients des deux développements non-symétrisés .

Les propriétés fondamentales des deux base non-symétrisés permettent de déduire la relation suivante entre les deux séries de coefficients :

$$d_{mn}^l = 8\pi^2 \sqrt{\frac{2l+1}{2}} f_{mn}^l \quad . \quad (29)$$

Pour une valeur de l donnée, la résolution du système (14) montre que les coefficients f_{mn}^l d'indices m et n différents ne sont pas nécessairement indépendants les uns des autres lorsque l'échantillon possède des symé-

l	coefficients linéairement indépendants	relations de linéarité
$l = 0$	$f_{00} = \frac{0}{8t^2}$	
$l = 2$	f_{m0}^2	$f_{m0}^2 = 0$
$l = 4$	f_{m0}^4	$f_{m4}^4 = 0,59761430 f_{m0}^4$
$l = 6$	f_{m0}^6	$f_{m4}^6 = -1,87082870 f_{m0}^6$
$l = 8$	f_{m0}^8	$f_{m4}^8 = 0,37605072 f_{m0}^8$
		$f_{m8}^8 = 0,57295971 f_{m0}^8$
$l = 10$	f_{m0}^{10}	$f_{m4}^{10} = -1,00766295 f_{m0}^{10}$
		$f_{m8}^{10} = -1,19935880 f_{m0}^{10}$

TABLEAU 1 : RELATIONS DE DÉPENDANCE ENTRE LES COEFFICIENTS f_{mn}^1
pour la symétrie cubique du réseau des grains [44,45].

tries particulières. Dans le cas particulièrement intéressant de symétries orthorhombique de l'échantillon et cubique du réseau cristallin, les relations de dépendance linéaire entre f_{mn}^l [44,45] sont données dans le tableau 1 jusqu'au rang $l = 10$. La détermination de ces coefficients ne nécessite par ailleurs que l'enregistrement d'une seule figure de pôles. En vertu de (19) un tableau similaire peut être obtenu pour les coefficients c_{mn}^l .

3) HARMONIQUES SPHERIQUES GENERALISEES SYMETRISEES .

Une alternative intéressante pour la prise en compte des symétries cristallographiques consiste à utiliser la méthode développée par TAVARD et ESLING [42] qui établit les représentations symétrisées $T(g)$ à partir des représentations irréductibles $D(g)$ par application d'un projecteur convenable.

Dans ces conditions, la fonction de texture s'écrit

$$\begin{aligned}
 f(g) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{n=0}^l c_{mn}^l \langle l_m | T(g) | l_n \rangle \\
 &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{n=0}^l c_{mn}^l T_{mn}^l(g) .
 \end{aligned} \tag{30}$$

Pour les matériaux à réseau cubique et une symétrie quadratique de l'échantillon, les représentations symétrisées se réduisent à

$$T_{2m,0}^{2l}(g) = \sum_{4p=-2l}^{2l} P_{4p,0}^{2l} D_{2m,4p}^{2l}(g). \quad (31)$$

Les éléments de matrice du projecteur de symétrie sont alors définis par

$$P_{4p,0}^{2l} = \frac{\delta_{4p,0} + \delta_{-4p,0} + 4D_{4p,0}^{2l}(0, \pi/2, 0)}{6}, \quad (32)$$

ou de manière équivalente d'après (24)

$$P_{4p,0}^{2l} = \frac{\delta_{4p,0} + \delta_{-4p,0} + 4d_{4p,0}^{2l}(\pi/2)}{6}. \quad (33)$$

Les harmoniques sphériques généralisées et symétrisées vérifient la relation d'orthogonalité

$$\langle T_{2m,0}^{2l}(g) | T_{2m',0}^{2l'}(g) \rangle = \frac{8\pi^2}{2l+1} \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \quad (34)$$

et pourront être normées par la relation

$$\langle T_{2m,0}^{2l}(g) | T_{2m,0}^{2l}(g) \rangle = P_{0,0}^{2l} \quad (35)$$

sachant que le projecteur est défini par (33).

Les expressions analytiques des harmoniques sphériques généralisées et symétrisées utiles aux développements ultérieurs s'écrivent alors :

$$T_{00}^{(g)} = T_{00}^{(\alpha, \beta, \gamma)} = 1. \quad (36)$$

$$T_{00}^{(g)} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{12}} d_{00}^{(4)}(\beta) + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \cos 4\gamma d_{04}^{(4)}(\beta). \quad (37)$$

$$T_{2m 0}^{(g)} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{6}} \cos 2m\alpha d_{2m 0}^{(4)}(\beta) + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{12}} \left\{ \cos 2m\alpha \cos 4\gamma [d_{2m -4}^{(4)}(\beta) + d_{2m 4}^{(4)}(\beta)] \right. \\ \left. + \sin 2m\alpha \sin 4\gamma [d_{2m -4}^{(4)}(\beta) - d_{2m 4}^{(4)}(\beta)] \right\} \quad (38)$$

(avec $m = 1, 2$).

$$T_{00}^{(g)} = \sqrt{\frac{1}{8}} d_{00}^{(6)}(\beta) - \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{4}} \cos 4\gamma d_{04}^{(6)}(\beta). \quad (39)$$

$$T_{2m 0}^{(g)} = \frac{1}{2} \cos 2m\alpha d_{2m 0}^{(6)}(\beta) - \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}} \left\{ \cos 2m\alpha \cos 4\gamma [d_{2m -4}^{(6)}(\beta) + d_{2m 4}^{(6)}(\beta)] \right. \\ \left. + \sin 2m\alpha \sin 4\gamma [d_{2m -4}^{(6)}(\beta) - d_{2m 4}^{(6)}(\beta)] \right\} \quad (40)$$

(avec $m = 1, 2, 3$).

$$T_{00}^{(g)} = \frac{\sqrt{33}}{8} \cdot d_{00}^{(g)}(\beta) + \frac{\sqrt{14}}{4\sqrt{3}} \cdot \cos 4\sigma \cdot d_{04}^{(g)}(\beta) + \frac{\sqrt{130}}{8\sqrt{3}} \cdot \cos 8\sigma \cdot d_{08}^{(g)}(\beta). \quad (41)$$

$$T_{2m0}^{(g)} = \frac{\sqrt{66}}{8} \cdot \cos 2m\alpha \cdot d_{2m0}^{(g)}(\beta) + \frac{\sqrt{7}}{4\sqrt{3}} \left\{ \cos 2m\alpha \cos 4\sigma [d_{2m-4}^{(g)}(\beta) + d_{2m4}^{(g)}(\beta)] \right. \\ \left. + \sin 2m\alpha \sin 4\sigma [d_{2m-4}^{(g)}(\beta) - d_{2m4}^{(g)}(\beta)] \right\} \\ + \frac{\sqrt{65}}{8\sqrt{3}} \left\{ \cos 2m\alpha \cos 8\sigma [d_{2m-8}^{(g)}(\beta) + d_{2m8}^{(g)}(\beta)] \right. \\ \left. + \sin 2m\alpha \sin 8\sigma [d_{2m-8}^{(g)}(\beta) - d_{2m8}^{(g)}(\beta)] \right\} \quad (42)$$

(avec $m = 1, 2, 3, 4$).

$$T_{00}^{(g)} = \frac{\sqrt{65}}{8\sqrt{6}} \cdot d_{00}^{(g)}(\beta) - \frac{\sqrt{11}}{4} \cdot \cos 4\sigma \cdot d_{04}^{(g)}(\beta) - \frac{\sqrt{187}}{8\sqrt{3}} \cdot \cos 8\sigma \cdot d_{08}^{(g)}(\beta) \quad (43)$$

$$T_{00}^{10}(g) = \frac{\sqrt{65}}{8\sqrt{3}} \cos 2m\alpha \cdot d_{2m0}^{10}(\beta)$$

$$- \frac{\sqrt{11}}{4\sqrt{2}} \left\{ \cos 2m\alpha \cos 4\delta \left[d_{2m-4}^{10}(\beta) + d_{2m4}^{10}(\beta) \right] \right.$$

$$\left. + \sin 2m\alpha \sin 4\delta \left[d_{2m-8}^{10}(\beta) - d_{2m8}^{10}(\beta) \right] \right\}$$

$$- \frac{\sqrt{187}}{8\sqrt{6}} \left\{ \cos 2m\alpha \cos 8\delta \left[d_{2m-8}^{10}(\beta) + d_{2m8}^{10}(\beta) \right] \right.$$

$$\left. + \sin 2m\alpha \sin 8\delta \left[d_{2m-8}^{10}(\beta) - d_{2m8}^{10}(\beta) \right] \right\} \quad (44)$$

(avec $m = 1, 2, 3, 4, 5$).

Les éléments nécessaires à la démonstration de ces expressions sont regroupés en appendice.

4) RELATIONS ENTRE COEFFICIENTS DES DEVELOPPEMENTS SUR LES BASES SYMETRISEES ET NON-SYMETRISEES .

Compte-tenu des remarques antérieures, la fonction de distribution des orientations des cristallites $f(g)$ peut être représentée par

ORDRE 0 :

$$C_{00}^0 = \mathcal{C}_{00}^0 = 1$$

$$f_{00}^0 = \frac{\sqrt{2}}{8\pi^2}$$

ORDRE 4 :

$$C_{00}^4 = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{7}} \mathcal{C}_{00}^4 = 24\pi^2 \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}} f_{00}^4 \quad C_{2m0}^4 = \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{7}} \mathcal{C}_{2m0}^4 = 24\pi^2 \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{7}} f_{2m0}^4$$

ORDRE 6 :

$$C_{00}^6 = \sqrt{8} \mathcal{C}_{00}^6 = 16\pi^2 \sqrt{13} f_{00}^6 \quad C_{2m0}^6 = 4 \mathcal{C}_{2m0}^6 = 32\pi^2 \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}} f_{2m0}^6$$

ORDRE 8 :

$$C_{00}^8 = \frac{8}{\sqrt{33}} \mathcal{C}_{00}^8 = 64\pi^2 \frac{2\sqrt{17}}{\sqrt{66}} f_{00}^8 \quad C_{2m0}^8 = 8 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{33}} \mathcal{C}_{2m0}^8 = 64\pi^2 \frac{2\sqrt{17}}{\sqrt{33}} f_{2m0}^8$$

ORDRE 10 :

$$C_{00}^{10} = 8 \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{65}} \mathcal{C}_{00}^{10} = 64\pi^2 \frac{2\sqrt{63}}{\sqrt{65}} f_{00}^{10} \quad C_{2m0}^{10} = 16 \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{65}} \mathcal{C}_{2m0}^{10} = 128\pi^2 \frac{2\sqrt{63}}{\sqrt{130}} f_{2m0}^{10}$$

TABLEAU 2 : RELATIONS ENTRE COEFFICIENTS des développements sur les basessymétrisées (C_{mn}^l) et non-symétrisées (\mathcal{C}_{mn}^l et f_{mn}^l).

l'un ou l'autre des développements suivants

$$f(g) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sum_{n=-l}^l \mathcal{C}_{mn}^l \cdot D_{mn}^l(g) \quad (45)$$

} non-symétrisées

$$f(g) = 8\pi^2 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sum_{n=-l}^l f_{mn}^l \cdot \mathcal{Z}_{mn}^l(g) \quad (46)$$

$$f(g) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{n=0}^l C_{mn}^l \cdot T_{mn}^l(g) \quad (47)$$

} symétrisée (47)

Les fonctions $T_{mn}^l(g)$ étant des combinaisons linéaires de $D_{mn}^l(g)$ il est alors possible d'établir le jeu de relations entre les trois ensembles de coefficients \mathcal{C}_{mn}^l , f_{mn}^l et C_{mn}^l en utilisant par ailleurs (29). Ces relations nécessaires pour la suite de cet exposé sont détaillées dans le tableau 2.

5) CONCLUSION.

La fonction de texture $f(g)$ déterminée à partir de données expérimentales va servir à déduire certaines propriétés physiques du matériau polycristallin. En particulier, si $E(g)$ est une grandeur physique, mesurable dans le cas du monocristal, et dont on peut admettre qu'elle ne dépend

que de l'orientation des cristallites par rapport à un repère donné. Sa mesure effectuée sur l'échantillon polycristallin sera donnée par :

$$\bar{E} = \frac{1}{8\pi^2} \int E(g) f(g) dg. \quad (48)$$

Un exemple caractéristique concerne le calcul de l'énergie d'aimantation d'un polycristal. Cette dernière formule recouvre tous les cas compris entre les deux situations extrêmes :

$$* \text{ échantillon isotrope : } f(g) = 1 \longrightarrow \bar{E} = \frac{1}{8\pi^2} \int E(g) dg ;$$

$$* \text{ cristal parfait : } f(g) = \delta(g-g_0) \longrightarrow \bar{E} = E(g_0).$$

La définition d'une moyenne ne pose alors aucune difficulté formelle. On peut en effet écrire formellement pour $E(g)$ un développement sur la base des $T_{mn}^l(g)$, soit :

$$E(g) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{M(l)} \sum_{n=0}^{N(l)} E_{mn}^l \cdot T_{mn}^l(g). \quad (49)$$

La valeur moyenne sur le polycristal est alors, d'après (47), (48) et (49)

$$\bar{E} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{M(l)} \sum_{n=0}^{N(l)} \frac{E_{mn}^l C_{mn}^l}{2l+1} \quad (50)$$

compte-tenu des propriétés d'orthogonalité des $T_{mn}^l(g)$. Ainsi, à partir de la relation (50) est-il possible de calculer E pour un échantillon poly-

crystallin connaissant les deux ensembles de coefficients E_{mn}^l et C_{mn}^l .

Les cas extrêmes précédents correspondent ici à :

$$* C_{00}^0 = 1 ; C_{mn}^l = 0 \text{ (pour } l \neq 0 \text{) pour un matériau isotrope ;}$$

$$* C_{mn}^l = (2l+1)D_{mn}^{l*} (g_0) \text{ pour le cristal parfait.}$$

(l'astérisque désigne la quantité conjuguée).

L'incertitude liée à la détermination de certains coefficients C_{mn}^l pose le problème de l'utilisation de la relation (50) dans la mesure où par exemple, les propriétés de centrosymétrie de la diffraction ne permettent plus de retrouver notamment les C_{mn}^l d'ordre impair.

Cette dernière expression (50) est tout particulièrement intéressante lorsque la grandeur physique étudiée n'admet qu'un développement de rang peu élevé sur les $T_{mn}^l(g)$, ce qui parallèlement ne suppose qu'une connaissance de la texture réduite au même rang (quelle que soit la convergence du développement (47) avec l), donc aussi un nombre réduit de figures de pôles déduites de mesures de goniométrie aux rayons X. De plus, le caractère souvent centrosymétrique de $E(g)$ conduit à des coefficients E_{mn}^l d'ordre impair nuls. Les problèmes liés aux indéterminations éventuelles reconnues sur les C_{mn}^l de rang l impair ne se posent donc plus au niveau du calcul de \bar{E} .

CHAPITRE 2 : ANALYSE DES MODELES DE COMPORTEMENT PLASTIQUE DES MATERIAUX
POLYCRISTALLINS .

1) GENERALITES.

2) HYPOTHESES FONDAMENTALES POUR LE GRAIN ISOLE OU MONOCRISTAL.

3) LOI D'INTERACTION ENTRE CRISTALLITES.

a) Modèles auto-cohérents.

b) Modèles élémentaires.

b1) Modèle de SACHS.

b2) Modèle "statique".

b3) Modèle de TAYLOR, BISHOP-HILL.

4) MODELES INTERMEDIAIRES.

1) GENERALITES.

L'étude du comportement d'un matériau polycristallin soumis à divers types de sollicitations (traction, torsion, compression, emboutissage...) peut être envisagée à des échelles d'observation macroscopiques ou microscopiques.

Une description phénoménologique globale se limitant à relier des grandeurs macroscopiques caractéristiques (contraintes appliquées, vitesse de déformation, limite élastique, allongement, résistance à la rupture, ...) mesurées au cours d'essais mécaniques standards si elle présente un intérêt industriel certain néglige une propriété essentielle du polycristal qui est sa structure granulaire. La formation et l'évolution des textures induites par les rotations du réseau ne sont pas abordées dans le cadre de la seule approche macroscopique.

Une seconde approche plus ponctuelle consiste à ne considérer que l'élément fondamental du polycristal, le monocristal. Une telle étude permet de prendre en compte la nature physique des mécanismes microscopiques de la déformation plastique à l'échelle du grain et des défauts du réseau cristallin. L'existence même de cette structure granulaire des matériaux condamne à priori toute approche directe du comportement intracristallin associé à des opérations de moyennes trop simples, notamment en raison de l'existence de contraintes internes intergranulaires.

Le double aspect, macroscopique et microscopique, du problème polycristallin peut aussi être abordé à partir d'une modélisation du comportement du monocristal en introduisant un certain nombre d'hypothèses complémentaires sur l'accommodation des hétérogénéités de déformation.

Le traitement de l'ensemble des mécanismes intervenant dans la déformation plastique du polycristal s'avère ainsi extrêmement complexe. Il est donc apparu intéressant d'envisager le développement de modèles simplifiés dont l'expérience justifiera la plus ou moins grande validité. Ces modèles devront intégrer un certain nombre d'hypothèses fondamentales assurant notamment la cohésion du matériau au cours de la déformation. Parmi ces hypothèses seront nécessairement retenues :

- une loi de comportement du grain isolé;
- une loi d'interaction entre les grains (ou entre un grain et le reste de l'agrégat assimilé à un milieu unique), c'est-à-dire une loi d'évaluation des contraintes internes qui permet donc de relier les grandeurs macroscopiques et microscopiques;

- une description statistique de la structure cristallographique du matériau (fonction de distribution des orientations des cristallites définie dans le chapitre précédent).

2) HYPOTHESES FONDAMENTALES POUR LE GRAIN ISOLE OU MONOCRISTAL.

De la modélisation du comportement du monocristal [47,50] on retiendra les propriétés suivantes :

- il est toujours possible de séparer les déformations élastiques (réversibles, instantanées et faibles) des déformations plastiques (liées aux imperfections du réseau cristallin, irréversibles et importantes) ;
- parmi les divers modes de déformation plastique des métaux (glissement, maclage, changement de phase, diffusion de défauts ponctuels, ...)

le mode prédominant aux températures ordinaires ($T \leq 0,5T_f$) est le glissement (réseau cubique). Pour les métaux, les plans et directions de glissement sont ceux de plus grandes densités atomiques. Les mécanismes préférentiellement mis en oeuvre sont alors conditionnés par la structure cristalline des matériaux ;

- un critère de plasticité qui permet de savoir pour une contrainte appliquée donnée, si le comportement est encore élastique ou si le domaine plastique est atteint. Dans le cas des métaux, le critère retenu est une extrapolation de la description classique du frottement sec (ou solide) :

loi de SCHMID [51] : un système de glissement est activé si la contrainte de cisaillement dans le plan de glissement et suivant la direction de glissement atteint une valeur limite appelée contrainte critique de cisaillement (ou seuil de glissement) τ_c .

Pour un métal donné, cette contrainte τ_c est indépendante de l'orientation de l'axe de traction. Ce critère implique de plus des considérations énergétiques qui seront développées dans les paragraphes suivants ;

- des lois d'évolution qui permettront notamment de prendre en compte les phénomènes d'écroutissage au cours de la déformation.

3) LOI D'INTERACTION ENTRE CRISTALLITES.

Le polycristal est considéré comme un agrégat de monocristaux. L'étude du comportement plastique d'un tel agrégat, à partir d'une modé-

lisation du comportement du monocristal, implique donc dans une étape suivante de définir les interactions entre les grains ainsi que les propriétés globales du polycristal par rapport à un grain isolé. La forme de la loi d'interaction qui fait intervenir l'environnement du grain par une prise en compte de propriétés géométriques (taille et forme des grains, ...) ou cristallographiques (anisotropie de texture, distribution des joints des grains, ...) ainsi que des hypothèses sur la nature des champs de contraintes et de déformation permet de distinguer deux classes de modèles :

a) Modèles auto-cohérents.

Le problème élémentaire du schéma auto-cohérent consiste à traiter le cas d'un grain (ou inclusion) plastifié de façon homogène dans une matrice infinie et homogène représentant l'ensemble des autres grains.

KRONER [52] a utilisé pour décrire le comportement du polycristal les résultats établis par ESHELBY [53] pour une inclusion à élasticité isotrope se déformant de manière plastique homogène dans une matrice infinie, isotrope et élastique. Les diverses hypothèses retenues par KRONER sont :

- chaque cristallite est considéré comme une inclusion sphérique dans une matrice homogène ;

- le grain et la matrice ont le même comportement élastique, linéaire et isotrope ;

- la contrainte σ_{ij} et les déformations ϵ_{ij} (totale), ϵ_{ij}^e (élastique), ϵ_{ij}^p (plastique) de l'inclusion sont homogènes ;

- la contrainte Σ_{ij} et les déformations macroscopiques E_{ij} , E_{ij}^p et E_{ij}^e sont les moyennes des grandeurs microscopiques et sont considérées comme homogènes.

Ainsi

$$\Sigma_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} \cdot dV \quad \text{et} \quad E_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \epsilon_{ij} \cdot dV, \quad (51)$$

et on obtient pour expression des contraintes internes

$$\sigma_{ij} - \Sigma_{ij} = 2\mu(1-\beta)(E_{ij}^p - \epsilon_{ij}^p) \quad (52)$$

où μ est le module élastique de cisaillement et $\beta = (4-5\nu)/15(1-\nu)$ une constante ne dépendant que du coefficient de Poisson ν ($\beta=1/2$). Ce module suppose implicitement que la matrice subit une déformation plastique homogène (BERVEILLER [54]) ce qui implique une accommodation purement élastique des incompatibilités plastiques entre les grains du polycristal. Ces incompatibilités sont dans ces conditions de nature purement superficielle et localisées dans les joints de grains. BUDIANSKY et WU [27] ont repris le modèle de KRONER en incluant un durcissement intracristallin. D'un autre côté, HUTCHINSON [55], à partir du même formalisme, a calculé les courbes contrainte-déformation en traction simple avec un durcissement isotrope des grains et mis en évidence l'effet Bauschinger dans le cas de matériaux à réseau cubique.

Bien que l'analyse de KRONER introduise déjà une approche plus fine que les modèles élémentaires étudiés dans le paragraphe suivant, certaines de ses hypothèses sont assez restrictives. De ce fait, diverses

modifications du modèle auto-équilibré ont été proposées concernant l'anisotropie élastique et la forme non sphérique des grains [56,57] ou le caractère non purement élastique des interactions matrice-inclusion [58 à 60]. Parmi ces modifications on retiendra plus particulièrement :

- l'introduction d'une accommodation élasto-plastique entre inclusion et matrice proposée par BERVEILLER et ZAOUÏ [60,61] sous la forme d'une fonction scalaire

$$\sigma_{ij} - \sum_{ij} = 2\mu\alpha(1-\beta)(\epsilon_{ij}^I - \epsilon_{ij}^M) \quad (53)$$

qui a pour but de réduire les contraintes internes calculées dans le cas purement élastique par KRONER. Le module μ est alors remplacé par un module réduit de cisaillement $\mu\alpha$ traduisant l'écoulement élasto-plastique de la matrice. Le paramètre α est déduit de l'essai de traction simple par

$$\alpha = \frac{1}{1 + \frac{3\mu E^M}{2\Sigma}} \quad (54)$$

- la modélisation du comportement du polycristal par ENGEL [62] à partir de la description du monocristal de ZARKA [50] associée à la loi d'interaction de KRONER. Cette étude a été ultérieurement complétée par MACHETTO [30] en introduisant l'accommodation plastique intergranulaire de BERVEILLER et ZAOUÏ, et appliquée au cas du chargement cyclique [63].

Si les modèles auto-équilibrés donnent une bonne approche du problème de l'agrégat polycristallin, les calculs correspondants ont

l'inconvénient d'être souvent longs mais permettent par contre d'introduire certaines spécificités de l'échantillon étudié. Ces réserves justifient l'intérêt encore certain de modèles proposant une approche globale simplifiée du processus de déformation plastique (l'écroutissage étant souvent faible) faciles à mettre en oeuvre à partir de la seule connaissance des coefficients C_{mn}^l de la texture.

b) Modèles élémentaires.

bl) Modèle de SACHS.

SACHS [23] suppose que la cission sur le système de glissement principal est la même dans tous les grains, et égale à la cission critique τ_c . Le tenseur de contrainte σ_{ij} dans chaque grain est alors homothétique du tenseur de contrainte macroscopique Σ_{ij} appliqué au polycristal. En termes de la loi de SCHMID, la cission résolue sur le système de glissement, noté k , s'écrit :

$$\tau_k = m_{ij}^k \cdot \sigma_{ij} \quad (55)$$

m_{ij}^k étant un facteur géométrique caractéristique de l'orientation du grain. Ce modèle suppose donc que les grains individuels se déforment indépendamment les uns des autres et n'assure pas, en général, la cohésion du matériau déformé.

b2) Modèle statique.

A titre de comparaison, ZAOUI [24] a introduit un modèle statiquement admissible, au contraire du modèle de SACHS, qui suppose l'homogénéité du champ des contraintes

$$\sigma_{ij} = \sum_{ij} \quad (56)$$

et corrélativement l'absence de contraintes internes.

b3) Modèle de TAYLOR [25], BISHOP et HILL [64].

L'hypothèse de base avancée par TAYLOR pour satisfaire la condition d'écoulement plastique est que la déformation plastique locale ϵ_{ij}^p est uniforme et égale dans tous les grains à la déformation plastique macroscopique ϵ_{ij}^p (les déformations élastiques sont négligées)

$$\epsilon_{ij}^p = \epsilon_{ij}^p \quad (57)$$

Cette hypothèse assure la continuité de la déformation à travers les joints de grains (considérés comme des surfaces d'épaisseur nulle), mais la continuité du tenseur de contrainte n'est pas satisfaite. TAYLOR suppose de plus que la déformation se fait uniquement par glissement et que les grains ont un comportement de type rigide parfaitement plastique. L'invariance du volume de l'échantillon au cours de la déformation plas-

tique implique que l'accommodation des cinq composantes indépendantes d'une déformation arbitraire nécessite de faire intervenir au moins cinq systèmes de glissement indépendants vérifiant le critère de plasticité dans chaque cristallite [88].

La recherche des combinaisons actives repose finalement sur une minimisation de l'énergie de déformation et conduit à définir le facteur de TAYLOR du grain d'orientation g soumis à une déformation macroscopique donnée. Ce facteur est la quantité fondamentale qui permet de rattacher la déformation du grain à celle du polycristal. Dans le cas des polycristaux à réseau cubique, le glissement cristallographique entraîne généralement l'exploration de $C_{5}^{12} = 792$ combinaisons possibles.

BISHOP et HILL [64] ont montré que le critère de sélection, choisi intuitivement par TAYLOR, était équivalent à un critère de contrainte limite d'écoulement plastique. Ces auteurs, en raisonnant sur les états de contrainte physiquement compatibles avec la surface de charge du grain isolé, ont énoncé un principe de travail de déformation maximum qui permet une recherche des systèmes actifs (le critère de plasticité étant respecté sur les systèmes non actifs) et le calcul du facteur de TAYLOR en examinant un nombre d'états de contrainte petit devant le nombre de combinaisons géométriquement possibles. BISHOP [65] a donné une interprétation géométrique de ce principe et tabulé les 28 états de contrainte possibles pour un matériau à réseau cubique faces centrées.

La solution obtenue est la même dans les approches de TAYLOR et BISHOP-HILL, dont l'équivalence a été démontrée par CHIN et MAMMEL [66] (les deux analyses apparaissent en effet comme éléments duaux d'un problème de programmation linéaire).

Pour ce type de modèle où la déformation est totalement imposée, un algorithme de recherche extrêmement performant de la combinaison active a été développé, dont on pourra trouver le détail dans une série d'articles [38,67,80]. L'utilisation de ces théories peut conduire pour les combinaisons de systèmes actifs à des solutions dégénérées, donc à des ambiguïtés au niveau du champ de rotation des grains. Une telle indétermination devra être levée par des hypothèses supplémentaires (critère viscoplastique [69,134], minimisation de l'énergie plastique de second ordre [70], ...) afin de pouvoir prédire les modifications de la texture au cours de la déformation.

En conclusion, les modèles de TAYLOR-BISHOP-HILL (déformation plastique homogène), de LIN [71] (généralisation du modèle de TAYLOR supposant que la déformation totale est uniforme) et le modèle "statique" (contrainte homogène) ne font aucune référence à la structure granulaire du polycristal, sauf pour le calcul du champ de rotation des grains. Cette structure sera toutefois prise en compte dans la détermination des propriétés mécaniques par le biais des coefficients C_{mn}^l de la fonction de texture.

Dans le modèle de TAYLOR, la matrice impose sa propre déformation à l'inclusion et ne permet aucun relâchement des contraintes internes autour de l'inclusion. Cette hypothèse conduit donc à surestimer les contraintes internes (borne supérieure) alors que le modèle "statique" les néglige totalement (borne inférieure).

Il est encore à noter, comme l'ont démontré BERVEILLER et ZAOUI [24,54] que les modèles de KRONER et de LIN sont équivalents au modèle de TAYLOR

pour les grandes déformations.

c) Modèles intermédiaires.

La simplicité peu réaliste physiquement du modèle "statique" ou du modèle de SACHS, les ambiguïtés dans la sélection des systèmes de glissement actifs résultant aussi bien des hypothèses de KRONER et de TAYLOR, l'observation d'écarts systématiques entre textures calculées et mesurées aux grandes déformations [72] (attribués notamment à des changements de forme des grains) ont conduit à l'étude de modèles intermédiaires entre les deux situations extrêmes que sont les modèles de SACHS et TAYLOR.

L'homogénéité supposée du tenseur de déformation plastique (modèle de TAYLOR) est ici limitée à certaines de ses composantes. En effet, compte tenu de la forme des grains (grains plats et non-équiaxes dans le cas du laminage par exemple) et par analyse des conditions de continuité des tenseurs de contrainte et/ou de déformation aux joints de grains, certains cisaillements sont supposés librement ajustables [72,73,74]. Ce type de traitement initialement suggéré par LEFFERS [75,76] (les contraintes internes dues à l'empilement de dislocations aux joints de grains sont partiellement relâchées par un glissement multiple local) puis par HONNEFF et MECKING [77] (forme des grains), permet de n'envisager l'activation que d'un nombre restreint (moins de cinq) de systèmes de glissement. La sollicitation du seul système primaire laisse donc finalement apparaître le modèle de SACHS comme la forme la plus "relaxée" du modèle de TAYLOR.

Ces modèles intermédiaires sont de deux types :

* modèles de SACHS généralisés :

au système de glissement principal (cission résolue la plus élevée) vient s'ajouter l'action d'un système supplémentaire (système secondaire) pour assurer une meilleure accommodation des contraintes internes. WIERZBANOWSKI [78,79] a appliqué le modèle de LEFFERS [76] à l'étude de l'évolution des textures de matériaux cubiques soumis à diverses sollicitations et propose la formulation suivante pour les contraintes internes :

$$\sigma_{ij} - \sum_{ij} = C_{ij} (E_{ij}^p - \mathcal{E}_{ij}^p). \quad (58)$$

Sous cette forme, il est possible de développer, suivant les valeurs des coefficients de proportionnalité C_{ij} , des modèles intermédiaires entre ceux de SACHS ($C_{ij} = 0$) et de TAYLOR. WIERZBANOWSKI a par ailleurs montré numériquement que dans ce dernier cas, la meilleure valeur possible pour les coefficients est $C_{ij} = 20$, ce qui correspond à un changement de forme (grains initialement cubiques) de l'ordre de 1% et assure statistiquement la continuité du matériau.

Dans ce travail, nous envisagerons deux alternatives différentes [80] pour introduire le système secondaire :

*le second système est choisi parmi les voisins cristallographiques directs du système principal (modèle S2) ;

* le système secondaire est obtenu par minimisation d'une fonction de dispersion des hétérogénéités de déformation plastique (modèle S'2) :

$$\Delta^2 = (E_{ij}^p - \varepsilon_{ij}^p)^2 \quad (59)$$

* modèles de TAYLOR et BISHOP-HILL relaxés :

pour simuler de façon plus satisfaisante la texture de laminage de polycristaux cubiques, HONNEFF et MECKING [72] ont repris le formalisme de KRONER avec une inclusion parallélépipédique plate (géométrie déduite de considérations expérimentales). Cette forme des grains permet de supposer que certaines composantes du tenseur de déformation sont localement accommodées tout en respectant la continuité du matériau. Les composantes non relaxées restent alors imposées et homogènes.

KOCKS et CANOVA [73,81] ont généralisé les arguments des auteurs précédents à d'autres types de contraintes appliquées (compression-traction uniaxiale, torsion) dans le cadre du formalisme de BISHOP-HILL. Les conditions de continuité des tenseurs contrainte et/ou déformation sont vérifiées dans ce cas à travers les petites surfaces de grains non-équiaxes.

VAN HOUTTE [82] a généralisé la démonstration de CHIN et MAMMEL [66] au cas des modèles relaxés. Cette équivalence avait déjà été établie par RENOARD et WINTENBERGER [83] pour tout modèle intermédiaire.

Le formalisme général (chapitre suivant) développé dans le cas d'une déformation totalement imposée (déformation homogène) se généralisera aisément à toute hypothèse de relaxation d'une ou plusieurs composantes de la déformation.

CHAPITRE 3 : FORMALISME GENERAL POUR L'ETUDE DU PROCESSUS DE DEFORMATION
PLASTIQUE DANS LES POLYCRISTAUX A RESEAU CUBIQUE.

1) HYPOTHESES DE GLISSEMENT DANS LES MATERIAUX CUBIQUES.

a) Réseau cubique faces centrées.

b) Réseau cubique centré.

2) DEFINITIONS DES SYSTEMES D'AXES ET RELATIONS FONDAMENTALES.

a) Grandeurs macroscopiques.

b) Grandeurs microscopiques.

c) Relations fondamentales.

d) Facteur de TAYLOR.

SYSTEMES DE GLISSEMENT		NOTATION
PLAN	DIRECTION	
(111)	$[\bar{1}10]$	1
	$[10\bar{1}]$	2
	$[0\bar{1}1]$	3
$(\bar{1}\bar{1}1)$	$[1\bar{1}0]$	4
	$[\bar{1}0\bar{1}]$	5
	$[011]$	6
$(\bar{1}1\bar{1})$	$[110]$	7
	$[\bar{1}01]$	8
	$[0\bar{1}\bar{1}]$	9
$(1\bar{1}\bar{1})$	$[\bar{1}\bar{1}0]$	10
	$[101]$	11
	$[01\bar{1}]$	12

TABLEAU 3 : REPERAGE DES 12 SYSTEMES DE
GLISSEMENT $\{111\}\langle 110\rangle$.

1) HYPOTHESES DE GLISSEMENT DANS LES MATERIAUX CUBIQUES.

a) Réseau cubique faces centrées.

La déformation se produit essentiellement sur les plans $\{111\}$ suivant les directions $\langle 110 \rangle$. Une convention de repérage des douze systèmes de glissement $\{111\}\langle 110 \rangle$ est donnée dans le tableau 3. On trouvera en annexe un tableau comparatif des notations utilisées par divers auteurs ayant étudié le glissement cristallographique $\{111\}\langle 110 \rangle$.

b) Réseau cubique centré.

Si la direction de glissement est bien définie comme étant une direction $\langle 111 \rangle$, plusieurs types de plans contenant cette direction ont été observés comme plans de glissement [84]. Ces plans, d'axe de zone $\langle 111 \rangle$, peuvent se classer en deux groupes :

- * des plans cristallographiques $\{110\}$, $\{112\}$ ou $\{123\}$;
- * des plans non-cristallographiques quelconques.

L'observation des lignes de glissement montre que pour les aciers doux notamment, l'hypothèse la plus réaliste est celle d'un glissement non-cristallographique (pencil glide)[85]. L'orientation moyenne des lignes de glissement se confond alors avec la direction du plan de cisssion réduite maximale [86]. A basse température, le caractère sinueux des lignes de glissement est moins marqué et l'on se rapproche d'un glissement cristallographique sur les plans $\{110\}$.

2) DEFINITIONS DES SYSTEMES D'AXES ET RELATIONS FONDAMENTALES.

a) Grandeurs macroscopiques.

Un solide polycristallin est généralement décrit dans un repère constitué à partir d'éléments de symétrie de ce solide. Ainsi, pour les produits laminés on convient de retenir les directions de laminage (DL), transverse (DT) et normale (DN)(figure 1). Les figures de pôles et la fonction de distribution des orientations des cristallites sont également définies dans ce repère échantillon $R^S(DL,DT,DN)$.

Si l'on admet que les axes principaux de déformation coïncident avec le repère échantillon

$$R^S(DL,DT,DN) \equiv R^S(x_1, x_2, x_3),$$

les tenseurs macroscopiques de contrainte Σ et vitesse de déformation \dot{E}^T s'écrivent :

$$\Sigma_{ij} = \sigma_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (60)$$

et

$$\dot{E}_{ij}^P = \dot{E}_3 \begin{pmatrix} \dot{E}_1/\dot{E}_3 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{E}_2/\dot{E}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (61)$$

avec $\dot{E}_1 + \dot{E}_2 + \dot{E}_3 = 0$ (\dot{E}_{ij}^T étant un déviateur), dans le cas d'une traction uniaxiale suivant l'axe x_3 .

Afin de se limiter à un seul paramètre dans les raison-

nements ultérieurs, il est commode d'introduire soit le rapport des déformations rationnelles dans le plan perpendiculaire à l'axe de traction

$$R = \frac{\dot{E}_1}{\dot{E}_2} \quad (62)$$

proposé par LANKFORD [1], soit le facteur de contraction de l'éprouvette

$$q = -\frac{\dot{E}_1}{\dot{E}_3} \quad (63)$$

préconisé par BUNGE [87]. Ces deux paramètres sont par ailleurs tels que :

$$q = \frac{R}{R+1} \quad \text{ou} \quad R = \frac{q}{q-1}, \quad (64)$$

q variant de 0 à 1 et corrélativement R de 0 à l'infini.

Dans ces conditions, le tenseur vitesse de déformation macroscopique (61) se réécrit :

$$\dot{E}_{ij}^p = \dot{E}_3 \begin{pmatrix} -R/(R+1) & 0 & 0 \\ 0 & -1/(R+1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \dot{E}_3 \begin{pmatrix} -q & 0 & 0 \\ 0 & q-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (65)$$

Ce formalisme permet en outre d'étudier d'autres types de déformation tels que :

- déformation plane : $q = 0$; $\dot{E}_1 = 0$ et $\dot{E}_2 = -\dot{E}_3$.
- expansion biaxiale symétrique : $q = -1$; $\dot{E}_1 = \dot{E}_3$ et $\dot{E}_2 = -2\dot{E}_3$.

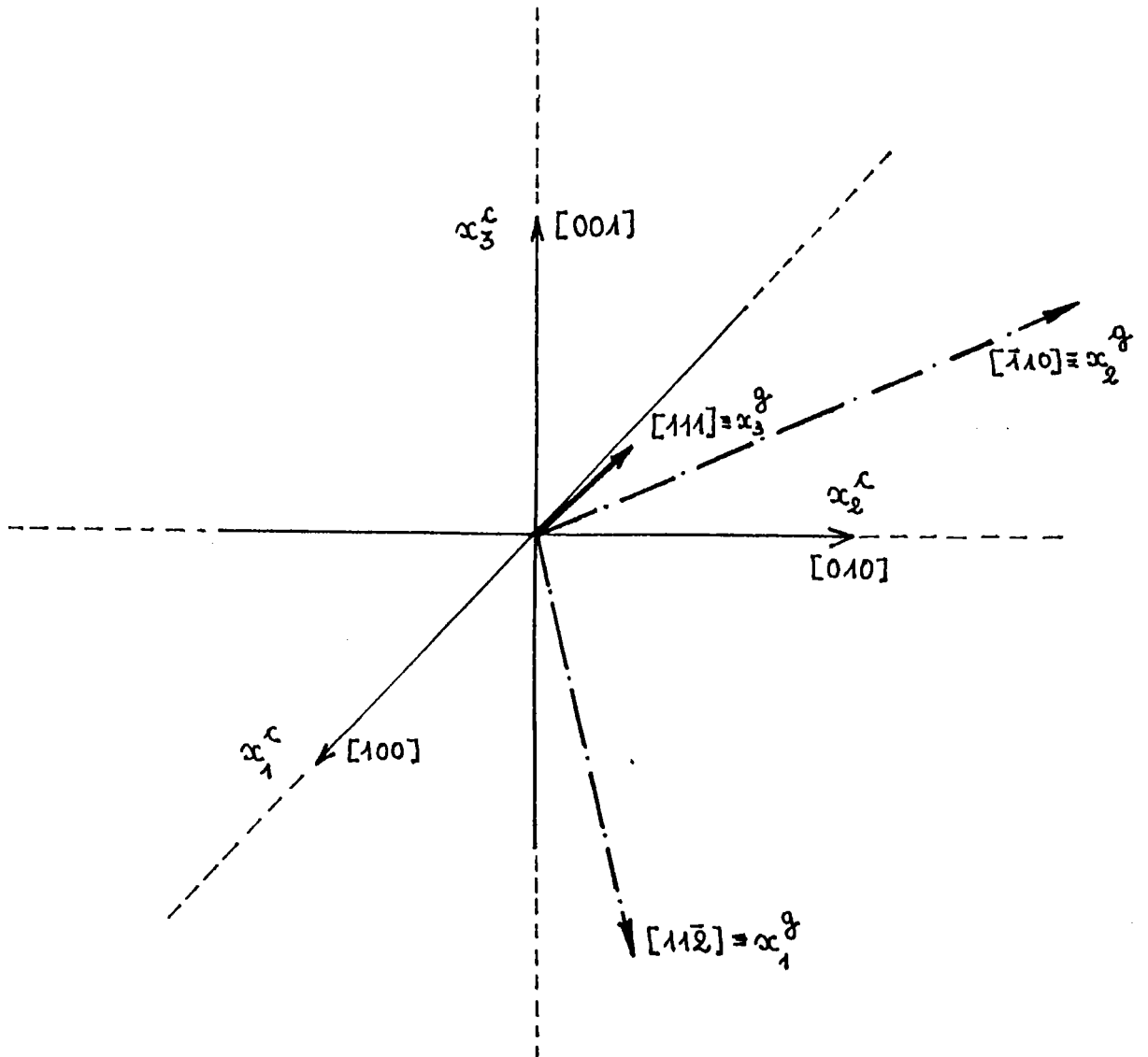


FIGURE 6 : REPERE CRISTALLOGRAPHIQUE $R^c([100],[010],[001])$ et REPERE DE GLISSEMENT associé au système de glissement $(111)[\bar{1}10]$.

$$[S] = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

rotation γ
autour de x_3^{Δ} .

rotation β
autour de x_2^{Δ} .

rotation α
autour de x_1^{Δ} .

$$[S] = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \sin\alpha\sin\gamma & \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin\gamma & -\sin\beta\cos\gamma \\ -\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma - \sin\alpha\cos\gamma & -\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma & \sin\beta\sin\gamma \\ \cos\alpha\sin\beta & \sin\alpha\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

TABLEAU 4 : MATRICE DE CHANGEMENT DE REPERE (passage du repère
échantillon R^s à un repère d'orientation $g = (\alpha, \beta, \gamma)$).

$$\mu_{ij}^g \text{ (c.c.)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (69)$$

pour les cubiques centrés. Ces tenseurs se décomposent en une partie symétrique e_{ij}^g , caractérisant une déformation pure, et une partie antisymétrique \tilde{e}_{ij}^g relative à une rotation des axes principaux d'inertie de l'élément de volume (figure 7) :

$$\mu_{ij}^g = e_{ij}^g + \tilde{e}_{ij}^g \begin{cases} \text{(c.f.c.)} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \\ \text{(c.c.)} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (70)$$

On déduit de cette décomposition les relations suivantes

$$e_{ij}^g \text{ (c.f.c.)} = e_{ij}^g \text{ (c.c.)}, \quad (71)$$

$$\tilde{e}_{ij}^g \text{ (c.f.c.)} = -\tilde{e}_{ij}^g \text{ (c.c.)}. \quad (72)$$

L'étude du champ des déformations, qui conduira notamment à la détermination des quantités de glissement sur les systèmes actifs, sera donc commune aux hypothèses de glissement cristallographique $\{111\}\langle 110\rangle$ dans les cubiques faces centrées ou $\{110\}\langle 111\rangle$ dans les cubiques centrés.

Pour une vitesse de glissement unitaire, les tenseurs

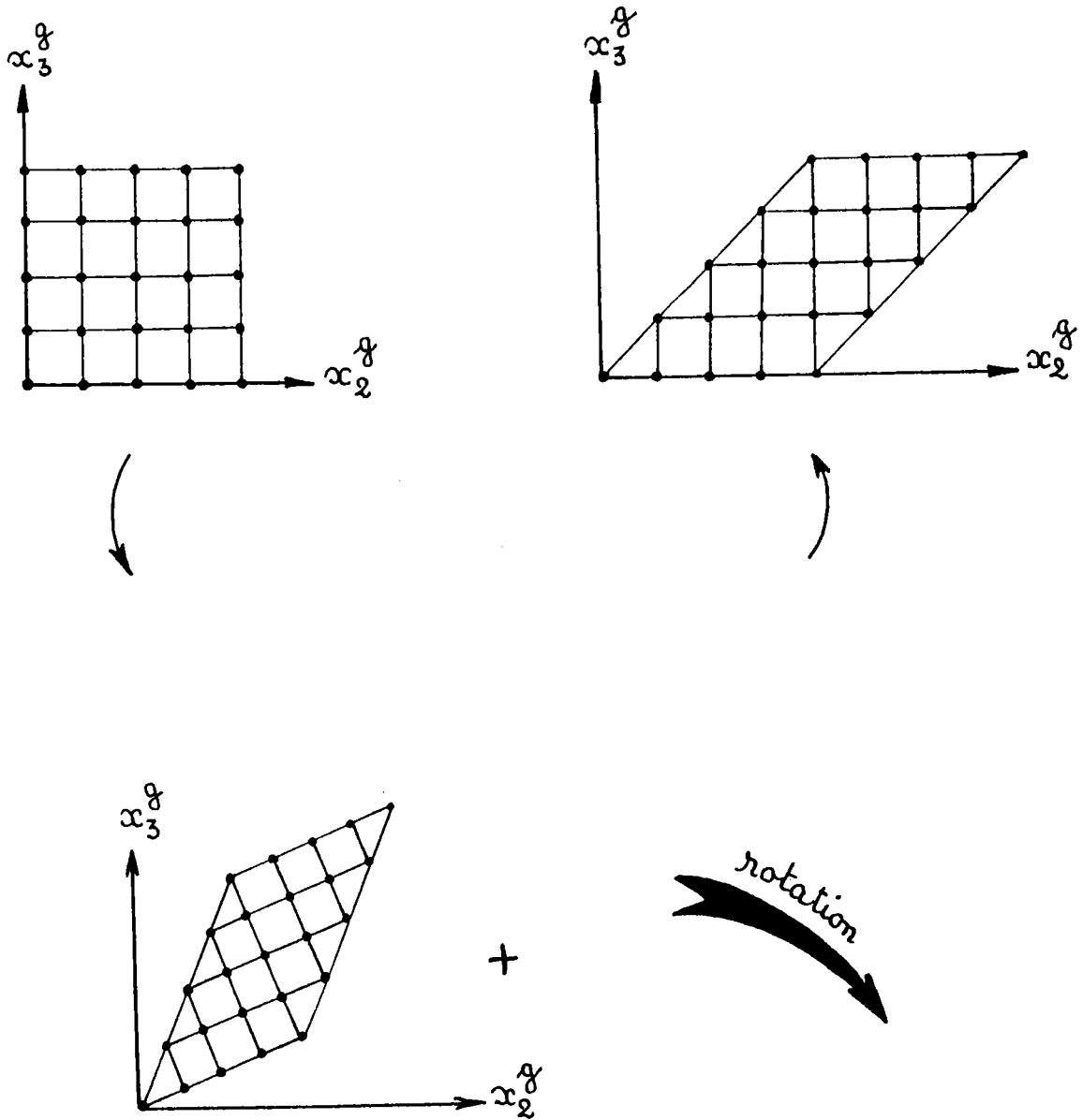


FIGURE 7 : ILLUSTRATION DE LA DECOMPOSITION D'UNE DEFORMATION ARBITRAIRE
PAR GLISSEMENT EN UNE DEFORMATION PURE SUIVIE D'UNE ROTATION.

vitesse de déformation pure et vitesse de rotation des grains, ont pour expressions dans le repère cristallographique R^c :

$$\dot{\epsilon}_{ij}^c = \dot{E}_3 \sum_{\substack{k \\ \text{actifs}}} \dot{\gamma}^k \cdot e_{ij,k}^c, \quad (73)$$

$$\dot{\tilde{\epsilon}}_{ij}^c = \dot{E}_3 \sum_{\substack{k \\ \text{actifs}}} \dot{\gamma}^k \cdot \tilde{e}_{ij,k}^c, \quad (74)$$

où les quantités de glissement $\dot{\gamma}^k$ dépendent de l'orientation du grain et la sommation étendue à une combinaison de systèmes de glissement actifs. Cette combinaison rendra compte non seulement des hypothèses de glissement retenues mais aussi des caractéristiques du modèle de déformation utilisé pour décrire le comportement du polycristal.

c) Relations fondamentales.

Une forme générale du tenseur vitesse de déformation dans le repère échantillon R^s permettant d'introduire des possibilités de relaxation de certaines composantes est la suivante :

$$\dot{\epsilon}_{ij}^s = \dot{E}_3 \begin{pmatrix} (\omega - a)/2 & b & c \\ b & -(\omega + a)/2 & d \\ c & d & a \end{pmatrix}, \quad (75)$$

où les paramètres a , b , c , d et ω ont des expressions entièrement déterminées par l'orientation du grain à partir de :

$$\dot{\epsilon}_{ij}^s = \dot{\epsilon} \sum_{\substack{k \\ \text{actifs}}} l^k \cdot e_{ij,k}^s \quad (76)$$

Les composantes des tenseurs de déformation pure $e_{ij,k}^s$, notées

$$e_{ij,k}^s = \begin{pmatrix} (\omega_k - \alpha_k)/2 & \beta_k & \gamma_k \\ \beta_k & -(\omega_k + \alpha_k)/2 & \delta_k \\ \gamma_k & \delta_k & \alpha_k \end{pmatrix} \quad (77)$$

se calculent aisément (tout comme les $e_{ij,k}^c$) à l'aide de la matrice de changement de repère [S] (tableau 4) associée à la rotation définissant l'orientation du grain dans le repère échantillon.

Les composantes du tenseur $\dot{\epsilon}_{ij}^s$ doivent, d'après (75, 76, 77) vérifier le système général d'équations :

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{k(\text{actifs})} l^k \cdot d_k = a, & (78a) \\ & \sum_{k(\text{actifs})} l^k \cdot \omega_k = \omega, & (78b) \\ & \sum_{k(\text{actifs})} l^k \cdot \beta_k = b, & (78) \quad (78c) \\ & \sum_{k(\text{actifs})} l^k \cdot \delta_k = c, & (78d) \\ & \sum_{k(\text{actifs})} l^k \cdot \gamma_k = d. & (78e) \end{aligned} \right\}$$

L'identification d'une partie (modèles relaxés) ou de la totalité (déformation homogène) des composantes de la déformation du grain $\dot{\epsilon}_{ij}^{\Delta}$ à celles de l'éprouvette $\dot{\epsilon}_{ij}^{\Delta}$ va donc consister à imposer une partie seulement ou la totalité des paramètres a , b , c , d et ω . Dans la situation particulière d'une traction uniaxiale suivant l'axe x_3^{Δ} , l'hypothèse la plus simple revient alors à imposer au moins $a = 1$. Satisfaire l'équation (78a)

implique alors l'intervention d'au moins un système de glissement. Fixer chacun des paramètres suivants équivaut également à imposer au moins un système supplémentaire par paramètre.

On dispose donc ainsi d'un formalisme général pour l'étude de l'ensemble des modèles de déformation intermédiaires entre les modèles de SACHS ($a = 1$) et de TAYLOR ($a = 1$; $b = c = d = 0$; $\omega = 1 - 2q$), les hypothèses de glissement étant introduites par les tenseurs $e_{ij,k}^a$.

d) Facteur de TAYLOR.

L'hypothèse d'une puissance minimale pour la déformation de l'éprouvette (en traction) conduit à rechercher le minimum de la fonction

$$\dot{W} = \sum_0 \dot{\mathbf{E}}^P = \sigma_0 \dot{\mathbf{E}}_3 \quad (79)$$

ou encore le minimum de $\sigma_0 / \dot{\mathbf{E}}_3$. Pour une déformation plastique donnée du grain, il lui correspond un incrément

$$\begin{aligned} \dot{w}_{\text{plastique}} &= \sigma^c \dot{\mathbf{E}}^c = \dot{\mathbf{E}}_3 \sum_{k(\text{actifs})} \rho^k (\sigma^c \mathbf{e}_k^c) \\ &= \dot{\mathbf{E}}_3 \tau_0 \sum_{k(\text{actifs})} |\rho^k|. \end{aligned} \quad (80)$$

Rechercher le minimum de \dot{W} revient alors à rechercher pour chaque grain le minimum de w donc celui du facteur de TAYLOR

$$M(g) = \sum_{k(\text{actifs})} |\mathcal{L}^k| \quad (81)$$

en déterminant la combinaison appropriée de systèmes de glissement pour laquelle les quantités de glissement \mathcal{L}^k vérifient une partie seulement (modèles relaxés) ou l'ensemble (modèle de TAYLOR) du système d'équations (78).

CHAPITRE 4 : RECHERCHE DES SYSTEMES DE GLISSEMENT POUR UNE DEFORMATION
TOTALEMENT IMPOSEE : CAS DU GLISSEMENT CRISTALLOGRAPHIQUE.

- 1) INTRODUCTION.
- 2) RELATIONS D'INTERDEPENDANCE ENTRE SYSTEMES DE GLISSEMENT.
- 3) BASE DE DECOMPOSITION DES CONTRAINTES.
- 4) CALCUL DU FACTEUR DE TAYLOR ET SELECTION DES SYSTEMES DE
GLISSEMENT ACTIFS.
- 5) COMPARAISON AVEC LE MODELE DE BISHOP-HILL. SURFACE CRITERE
DE PLASTICITE.
- 6) DETERMINATION DES QUANTITES DE GLISSEMENT.
- 7) COMPORTEMENT DU FACTEUR DE TAYLOR.
 - a) Aspect géométrique du glissement.
 - b) Déformation transversale isotrope ($q = 1/2$).
 - c) Cas non-isotrope ($q \neq 1/2$).
 - d) Conclusion.
- 8) FACTEUR DE TAYLOR : SYMETRIES - DECOMPOSITION SUR UNE BASE
D'HARMONIQUES SPHERIQUES - VALEUR MOYENNE.
 - a) Symétries.
 - b) Décomposition sur une base d'harmoniques sphériques.
 - c) Valeur moyenne.
- 9) CONCLUSION.

1) INTRODUCTION.

Pour une déformation totalement imposée, l'hypothèse fondamentale d'une déformation homogène assurant la cohésion du matériau formulée par TAYLOR [25] implique d'après (76)

$$\dot{E}_{ij}^p = \dot{E} \sum_{k(\text{actifs})} \frac{1}{3} \rho^k e_{ij,k}^s \quad (82)$$

et se traduit donc par le système d'équations :

$$\sum_{k(\text{actifs})} \rho^k \alpha_k = 1 \quad (83a)$$

$$\sum_{k(\text{actifs})} \rho^k \omega_k = 1 - 2q = \omega \quad (83b)$$

$$\sum_{k(\text{actifs})} \rho^k \beta_k = 0 \quad (83)(83c)$$

$$\sum_{k(\text{actifs})} \rho^k \delta_k = 0 \quad (83d)$$

$$\sum_{k(\text{actifs})} \rho^k \gamma_k = 0 \quad (83e)$$

$$\mathcal{E}_1^c = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{E}_2^c = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{E}_3^c = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{E}_4^c = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{E}_5^c = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{E}_6^c = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{E}_7^c = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{E}_8^c = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{E}_9^c = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{E}_{10}^c = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{E}_{11}^c = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{E}_{12}^c = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

TABLEAU 5 : TENSEUR DE CISAILLEMENT UNITAIRE \mathcal{E}_g^c rapporté dans le repère cristallographique $R^c(\{100\},\{010\},\{001\})$ pour les 12 systèmes de glissement $\{111\}\langle 110 \rangle$ du tableau 3.

$$e_{\lambda}^{\rho} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ & 2 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

$$e_{\lambda}^{\rho} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ & 0 & -1 \\ & & -2 \end{bmatrix}$$

$$e_{\lambda}^{\rho} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ & -2 & 0 \\ & & 2 \end{bmatrix}$$

$$e_{\lambda}^{\rho} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ & 2 & -1 \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

$$e_{\lambda}^{\rho} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ & & -2 \end{bmatrix}$$

$$e_{\lambda}^{\rho} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ & -2 & 0 \\ & & 2 \end{bmatrix}$$

$$e_{\lambda}^{\rho} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ & 2 & -1 \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

$$e_{\lambda}^{\rho} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ & & -2 \end{bmatrix}$$

$$e_{\lambda}^{\rho} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ & -2 & 0 \\ & & 2 \end{bmatrix}$$

$$e_{\lambda}^{\rho} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ & 2 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

$$e_{\lambda}^{\rho} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ & 0 & -1 \\ & & -2 \end{bmatrix}$$

$$e_{\lambda}^{\rho} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ & -2 & 0 \\ & & 2 \end{bmatrix}$$

TABLEAU 6 : TENSEUR DE DEFORMATION PURE $e^{\rho\sigma}$ rapporté dans le repère cristallographique R^c ($[100], [010], [001]$) pour les 12 systèmes de glissement $\{111\}\langle 110\rangle$.

$$\tilde{e}_1^c = \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{e}_2^c = \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{e}_3^c = \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{e}_4^c = \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{e}_5^c = \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{e}_6^c = \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{e}_7^c = \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{e}_8^c = \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{e}_9^c = \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{e}_{10}^c = \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{e}_{11}^c = \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{e}_{12}^c = \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

TABLEAU 7 : TENSEUR DE ROTATION $\tilde{e}^{c\alpha}$ rapporté dans le repère cristallographique $R^c([100],[010],[001])$ pour les 12 systèmes de glissement $\{111\}\langle 110 \rangle$ dans les cubiques faces centrées.

pour une traction uniaxiale suivant l'axe x_3^A . La résolution d'un tel système nécessite donc l'activation d'au moins cinq systèmes de glissement indépendants pour accommoder une déformation donnée [88].

Dans le cas des métaux cubiques faces centrées la recherche de la combinaison active parmi les douze systèmes $\{111\}\langle 110\rangle$ répertoriés dans le tableau 3 s'effectue sur la base d'un critère énergétique (optimisation de la puissance macroscopique mise en oeuvre au cours de la déformation) soit en explorant de manière systématique les $C_{12}^5 = 792$ combinaisons possibles, soit en tenant compte des relations d'interdépendance entre les systèmes de glissement. Cette dernière alternative va permettre de développer un algorithme de sélection n'impliquant la comparaison que d'un nombre très restreint de possibilités distinctes.

2) RELATIONS D'INTERDEPENDANCE ENTRE SYSTEMES DE GLISSEMENT.

Pour les douze systèmes $\{111\}\langle 110\rangle$, les composantes des tenseurs ε^g , e^g et \tilde{e}^g (définis par (70) et (68)), relativement au repère cristallographique R^c , sont obtenues à partir de la relation de changement de repère (66) et figurent respectivement dans les tableaux 5, 6 et 7.

La détermination des systèmes actifs, puis le calcul des quantités de glissement et du facteur de TAYLOR, ne font intervenir que la partie symétrique de ε^g . Les relations d'interdépendance entre les tenseurs déformation pure e_{λ}^i ($i = 1, 12$) peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned}
e_1^c + e_2^c + e_3^c &= 0 & ; & & e_1^c + e_9^c + e_{11}^c &= 0 & ; \\
e_4^c + e_5^c + e_6^c &= 0 & ; & & e_2^c + e_6^c + e_{10}^c &= 0 & ; \\
e_7^c + e_8^c + e_9^c &= 0 & ; & & e_3^c + e_5^c + e_7^c &= 0 & ; \\
e_{10}^c + e_{11}^c + e_{12}^c &= 0 & ; & & e_4^c + e_8^c + e_{12}^c &= 0 & ; \quad (84)
\end{aligned}$$

$$e_1^c + e_4^c - e_7^c - e_{12}^c = 0 ;$$

$$e_2^c - e_5^c + e_8^c - e_{11}^c = 0 ;$$

$$e_3^c - e_6^c - e_9^c + e_{12}^c = 0 ;$$

dont on notera que quatre d'entre elles (par exemple les quatre dernières) sont surabondantes. Ces relations se résument sous une forme symbolique (figure 8a) constituant un module à 12 éléments dont les propriétés algébriques permettent de définir une base de décomposition de la contrainte. Une autre représentation possible de ces relations est un polyèdre composé

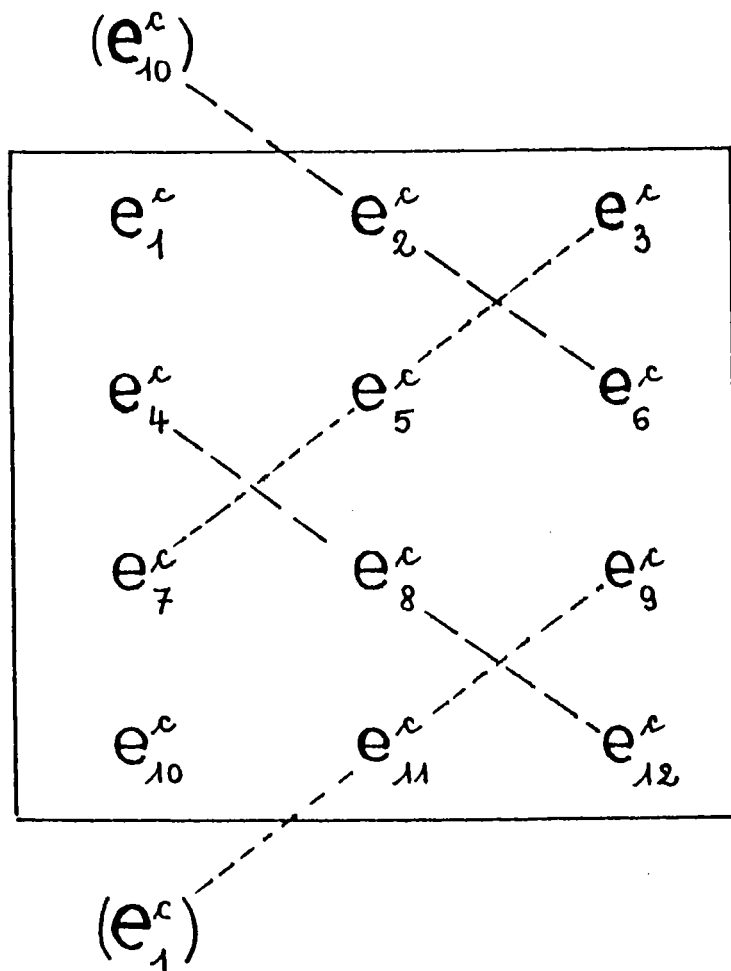


FIGURE 8a : REPRESENTATION SYMBOLIQUE DES RELATIONS D'INTERDEPENDANCE (84) entre les systèmes de glissement $\{111\}\langle 110\rangle$ du tableau 3.

de 6 faces carrées et de 8 faces triangulaires et que l'on désigne comme un tétrarêskaidécahèdre [136](figure 8b).

3) BASE DE DECOMPOSITION DE LA CONTRAINTE.

Si l'on suppose un comportement rigide parfaitement plastique du matériau, il est alors possible de mettre en évidence un ensemble de configurations (tableau 8) telles que la cission critique soit atteinte sur le plus petit nombre de systèmes lorsqu'elle est atteinte sur l'un d'eux. A partir du module décrit par la figure 8a, on obtient les six possibilités (tableau 8) formant une base pour l'algèbre du module.

A ces configurations correspondent, à un tenseur hydrostatique près, les six tenseurs σ_j^c dont les expressions cartésiennes sont dans R^c :

$$\begin{aligned} \sigma_1^c &= \frac{\tau_0 \sqrt{6}}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} & ; & \quad \sigma_4^c = \frac{\tau_0 \sqrt{6}}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} , \\ \sigma_2^c &= \frac{\tau_0 \sqrt{6}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} & ; & \quad \sigma_5^c = \frac{\tau_0 \sqrt{6}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} , \quad (87) \\ \sigma_3^c &= \frac{\tau_0 \sqrt{6}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & ; & \quad \sigma_6^c = \frac{\tau_0 \sqrt{6}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

$\frac{\sigma_1^c \cdot \dot{e}_1^c}{\mathcal{G}_0}$	$\frac{\sigma_2^c \cdot \dot{e}_1^c}{\mathcal{G}_0}$	$\frac{\sigma_3^c \cdot \dot{e}_1^c}{\mathcal{G}_0}$
$\begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$
$\frac{\sigma_4^c \cdot \dot{e}_1^c}{\mathcal{G}_0}$	$\frac{\sigma_5^c \cdot \dot{e}_1^c}{\mathcal{G}_0}$	$\frac{\sigma_6^c \cdot \dot{e}_1^c}{\mathcal{G}_0}$
$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{matrix}$
<p>TABLEAU 8 : CONFIGURATIONS déduites du module à 12 éléments de la figure 8a et vérifiant une loi d'écoulement du type $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0(86)$.</p>		

Les déviateurs de ces tenseurs satisfont alors à la relation

$$\hat{\sigma}_1^c + \hat{\sigma}_2^c + \hat{\sigma}_3^c + \hat{\sigma}_4^c + \hat{\sigma}_5^c + \hat{\sigma}_6^c = 0, \quad (88)$$

et la contrainte effective sur un grain pourra toujours s'exprimer par une combinaison linéaire des tenseurs de base :

$$\hat{\sigma} = \sum_{J=1}^5 A_J \hat{\sigma}_J^c. \quad (89)$$

L'examen des configurations du tableau 8 montre que $\hat{\sigma}$ sera intérieur à la surface critère de plasticité:

- si les coefficients A_J satisfont la condition: $0 \leq A_J \leq 1$;
- pour l'une des combinaisons particulières $A_1 \hat{\sigma}_1^c - A_4 \hat{\sigma}_4^c$, $A_2 \hat{\sigma}_2^c - A_5 \hat{\sigma}_5^c$ et $A_3 \hat{\sigma}_3^c - A_6 \hat{\sigma}_6^c$, la condition $0 \leq A_J \leq 1$ restant vérifiée.

4) CALCUL DU FACTEUR DE TAYLOR ET SELECTION DES SYSTEMES DE GLISSEMENT

ACTIFS.

Le critère de puissance de déformation minimale revient à rechercher, dans R^c , le minimum de la fonction

$$\dot{\psi}^c = \hat{\sigma}^c \cdot \dot{\hat{\epsilon}}^c = \sum_{J=1}^5 A_J \cdot (\hat{\sigma}_J^c \cdot \dot{\hat{\epsilon}}_J^c), \quad (90)$$

qui fait apparaître les produits

$$\dot{\epsilon}^L \cdot \sigma^L = \underset{0 \ 3 \ J}{\mathcal{C.E.M.}} \quad (91)$$

Les facteurs partiels M_J (fonctions de l'orientation du grain et du facteur de contraction de l'éprouvette) ont, d'après (67) et (87), pour

expressions

$$M_1^4 = \frac{\sqrt{6}}{2} \left[\frac{3}{2} (s_{21} + s_{31})^2 - 1 \right] + \frac{\sqrt{6}}{2} \left(\frac{1-2q}{2} \right) \left[(s_{22} + s_{32})^2 - (s_{23} + s_{33})^2 \right];$$

$$M_2^5 = \frac{\sqrt{6}}{2} \left[\frac{3}{2} (s_{11} + s_{31})^2 - 1 \right] + \frac{\sqrt{6}}{2} \left(\frac{1-2q}{2} \right) \left[(s_{12} + s_{32})^2 - (s_{13} + s_{33})^2 \right];$$

$$M_3^6 = \frac{\sqrt{6}}{2} \left[\frac{3}{2} (s_{11} + s_{31})^2 - 1 \right] + \frac{\sqrt{6}}{2} \left(\frac{1-2q}{2} \right) \left[(s_{12} + s_{22})^2 - (s_{13} + s_{23})^2 \right];$$

et vérifient de plus

$$\sum_{J=1}^6 M_J = 0. \quad (93)$$

De ce fait, pour une orientation $g \equiv (\alpha, \beta, \gamma)$ d'un grain soumis à une déformation caractérisée par le paramètre q , il y aura déformation plastique sur la combinaison de systèmes de glissement rendant le facteur de TAYLOR

$$M(g, q) = \sum_{J=1}^5 A_J M_J \quad (94)$$

maximal. Une telle situation s'obtient :

- soit en affectant les facteurs M_J positifs des coefficients A_J les plus grands possibles et les M_J négatifs des A_J les plus petits possibles, c'est-à-dire :

$$A_J = 1 \text{ pour } M_J > 0 \text{ et } A_J = 0 \text{ pour } M_J \leq 0 ;$$

- soit en retenant l'une des valeurs absolues des cas particuliers $|M_1 - M_4|$, $|M_2 - M_5|$ et $|M_3 - M_6|$ qui pourront intervenir si les termes correspondants sont de signes opposés.

La conséquence de ce critère de sélection est donc la connaissance des coefficients A_j de la relation (94) dont on déduit simultanément la contrainte effective sur le grain considéré (d'après (89)) et la liste des systèmes de glissement actifs en combinant les configurations du tableau 8. A titre d'exemple et pour illustrer l'algorithme de recherche mis au point, une application numérique est détaillée en appendice.

5) COMPARAISON AVEC LE MODELE DE BISHOP-HILL. SURFACE CRITERE DE PLASTICITE

Dans le repère cristallographique R^c , le tenseur de contrainte de BISHOP et HILL [64] s'écrit :

$$\sigma = \sigma_0 \sqrt{6} \begin{bmatrix} C/3 - B/3 & H & G \\ H & A/3 - C/3 & F \\ G & F & B/3 - A/3 \end{bmatrix} \quad (95)$$

où : $A = \sigma_{22} - \sigma_{11}$, $B = \sigma_{33} - \sigma_{11}$ et $C = \sigma_{11} - \sigma_{22}$.

Compte-tenu du comportement rigide parfaitement plastique du polycristal retenu comme hypothèse dans les modèles de TAYLOR et BISHOP-HILL, les projections du tenseur de contrainte σ sur les douze systèmes de glissement vérifient un ensemble de 24 équations qui se résument de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 A \pm G \pm H &= \pm 1, \\
 B \pm F \pm H &= \pm 1, \\
 C \pm F \pm G &= \pm 1.
 \end{aligned}
 \tag{96}$$

Ces équations définissent, dans l'espace à six dimensions (A, B, C, F, G, H), 24 plans délimitant une surface, appelée surface critère de plasticité, à l'intérieur de laquelle et sur laquelle la contrainte ne dépasse pas la cission critique σ_0 sur l'ensemble des systèmes activés. Seuls les sommets de ce polyèdre font intervenir au moins cinq systèmes de glissement indépendants. Pour plus de commodité, l'hyper-espace initial peut se ramener aux trois repères cartésiens d'axes (A, G, H), (B, F, H) et (C, F, G) dans lesquels la surface critère de plasticité apparaît comme un octaèdre (figure 9). La recherche des états de contrainte et des systèmes de glissement actifs associés se fait alors par une analyse géométrique de trois octaèdres (BISHOP [65]). Parmi tous les états géométriquement possibles, l'application du principe du travail maximum conduit à ne retenir que les 28 états du tableau 9.

Par rapport au traitement de BISHOP, notre approche consiste à écrire la contrainte effective sur le grain comme une combinaison linéaire des tenseurs σ_J (87). La surface critère de plasticité sera alors atteinte en réalisant $A_J = 1$ pour n des six états de contrainte σ_J , et en imposant l'intervention d'au moins cinq systèmes de glissement actifs. Les diverses possibilités sont les suivantes :

* n = 1 : ce cas est à rejeter car les configurations du tableau 8 font clairement apparaître l'impossibilité de glisser sur plus de quatre systèmes.

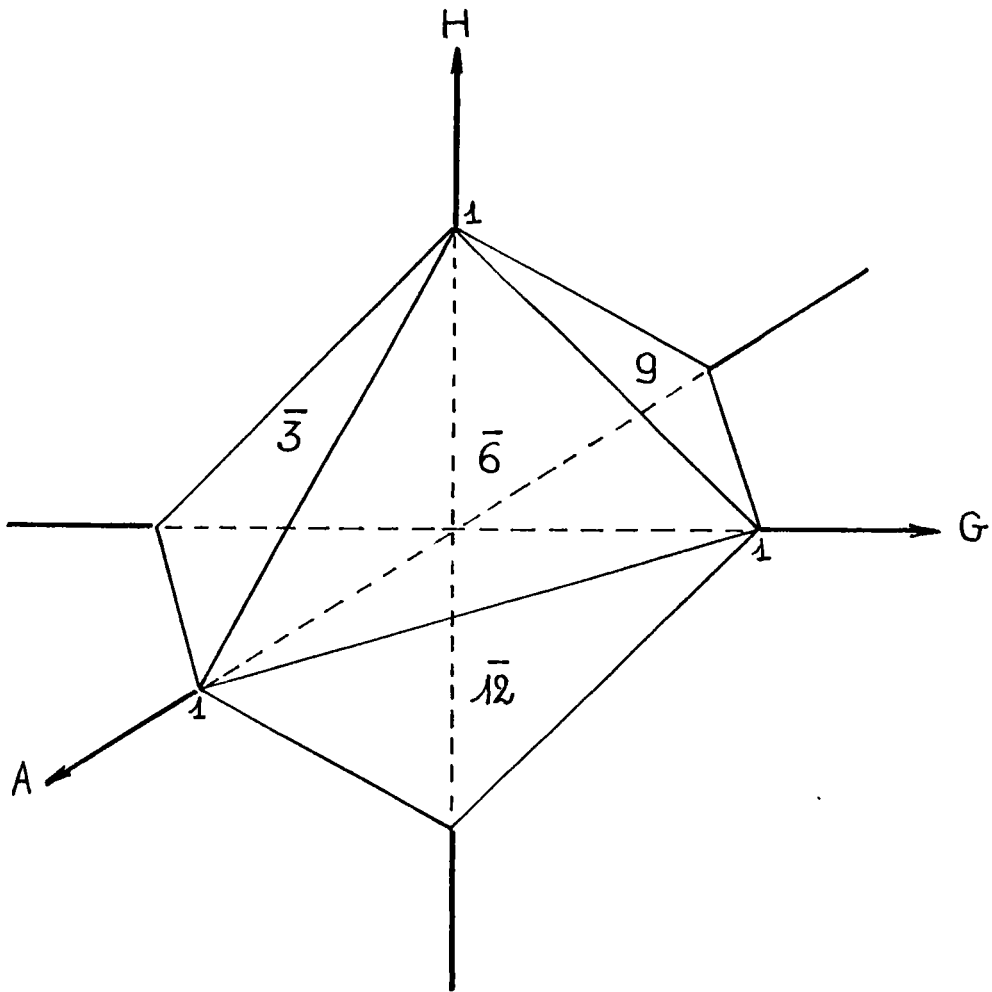


FIGURE 9 : OCTAEDRE REPRESENTATIF DE LA SURFACE CRITERE DE PLASTICITE
DANS LE SOUS-ESPACE (A,G,H).

* n = 2 : $C_6^2 = 15$ états de contrainte, tels que par exemple

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2.$$

* n = 3 : $C_6^3 = 20$ états équivalents deux à deux d'après

(88), soit par exemple

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = -\sigma_4 - \sigma_5 - \sigma_6.$$

Il ne reste donc que dix états de contrainte différents associés à $n = 3$.

* n = 4 et n = 5 : ces deux cas sont déjà répertoriés d'après la relation (88).

Tous les cas possibles, au nombre de 25, sont alors représentés par

$$\sigma^c = \sum_J^{n=2,3} \sigma_J^c \quad (97)$$

à l'exclusion des 3 combinaisons particulières restantes

$$\sigma^c = \sigma_1^c - \sigma_4^c,$$

$$\sigma^c = \sigma_2^c - \sigma_5^c, \quad (98)$$

$$\sigma^c = \sigma_3^c - \sigma_6^c.$$

On retrouve ainsi les 28 états de contrainte de BISHOP regroupés dans le tableau 9 avec le détail des formalismes considérés.

	états de contrainte							combinaisons des σ_J	systèmes de glissement actifs
	A	B	C	F	G	H			
1	1	-1	0	0	0	0	3 + 6	2, -3, 5, -6, 8, -9, 11, -12	
2	0	1	-1	0	0	0	1 + 4	1, -2, 4, -5, 7, -8, 10, -11	
3	-1	0	1	0	0	0	2 + 5	-1, 3, -4, 6, -7, 9, -10, 12	
4	0	0	0	1	0	0	1 - 4	1, -2, -4, 5, -7, 8, 10, -11	
5	0	0	0	0	1	0	2 - 5	-1, 3, 4, -6, -7, 9, 10, -12	
6	0	0	0	0	0	1	3 - 6	2, -3, 5, -6, -8, 9, -11, 12	
7	1/2	-1	1/2	0	1/2	0	2 + 3 + 6	-1, 2, 5, -6, -7, 8, 11, -12	
8	1/2	-1	1/2	0	-1/2	0	3 + 5 + 6	2, -3, -4, 5, 8, -9, -10, 11	
9	-1	1/2	1/2	1/2	0	0	1 + 2 + 5	-2, 3, -4, 6, -7, 9, -11, 12	
10	-1	1/2	1/2	-1/2	0	0	2 + 4 + 5	-1, 3, -5, 6, -8, 9, -10, 12	
11	1/2	1/2	-1	0	0	1/2	1 + 3 + 4	1, -3, 4, -6, 7, -8, 10, -11	
12	1/2	1/2	-1	0	0	-1/2	1 + 4 + 6	1, -2, 4, -5, 7, -9, 10, -12	
13	1/2	0	-1/2	1/2	0	1/2	1 + 3	1, -3, 5, -6, 10, -11	
14	1/2	0	-1/2	-1/2	0	1/2	3 + 4	2, -3, 4, -6, 7, -8	
15	1/2	0	-1/2	1/2	0	-1/2	1 + 6	1, -2, 8, -9, 10, -12	
16	1/2	0	-1/2	-1/2	0	-1/2	4 + 6	4, -5, 7, -9, 11, -12	
17	0	-1/2	1/2	0	1/2	1/2	2 + 3	1, -2, 5, -6, -7, 9	
18	0	-1/2	1/2	0	-1/2	1/2	3 + 5	2, -3, -4, 5, -10, 12	
19	0	-1/2	1/2	0	1/2	-1/2	2 + 6	-1, 3, -7, 8, 11, -12	
20	0	-1/2	1/2	0	-1/2	-1/2	5 + 6	-4, 6, 8, -9, -10, 11	
21	-1/2	1/2	0	1/2	1/2	0	1 + 2	-2, 3, -7, 9, 10, -11	
22	-1/2	1/2	0	-1/2	1/2	0	2 + 4	-1, 3, -5, 7, -8, 9	
23	-1/2	1/2	0	1/2	-1/2	0	1 + 5	1, -2, -4, 6, -11, 12	
24	-1/2	1/2	0	-1/2	-1/2	0	4 + 5	-5, 3, 7, -8, -10, 12	
25	0	0	0	1/2	1/2	-1/2	1 + 2 + 6	-2, 3, -7, 8, 10, -12	
26	0	0	0	1/2	-1/2	1/2	1 + 3 + 5	1, -3, -4, 5, -11, 12	
27	0	0	0	-1/2	1/2	1/2	2 + 3 + 4	-1, 2, 4, -6, -8, 9	
28	0	0	0	1/2	1/2	1/2	1 + 2 + 3	5, -6, -7, 9, 10, -11	

TABLEAU 9 : REPRESENTATION DES 28 ETATS DE CONTRAINTE DE BISHOP [65]
et des combinaisons de systèmes actifs associées.

6) DETERMINATION DES QUANTITES DE GLISSEMENT.

En combinant l'expression du tenseur vitesse de déformation

$$\dot{\epsilon}^c = \underset{3}{\overset{\cdot}{E}} \sum_{k(\text{actifs})} l^k \cdot e_k^c \quad (99)$$

et la relation (91) de définition des facteurs partiels M_j , on montre que les quantités de glissement l^k sont les solutions du système

$$\left\{ \begin{array}{l} M_1 = l^1 - l^2 + l^{10} - l^{11} \\ M_2 = -l^1 + l^3 - l^7 + l^9 \\ M_3 = l^2 - l^3 + l^5 - l^6 \\ M_4 = l^4 - l^5 + l^7 - l^8 \\ M_5 = -l^4 + l^6 - l^{10} + l^{12} \\ M_6 = l^8 - l^9 + l^{11} - l^{12} \end{array} \right. \quad (100)$$

déduit des configurations du tableau 8 et dont une équation est surabondante d'après (93).

La déformation n'ayant que cinq degrés de liberté, le glissement ne produisant pas de variation de volume, l'analyse des résultats contenus dans le tableau 9 met en évidence une dégénérescence possible de la solution du système précédent, tous les états de contrainte répertoriés con-

duisant à des combinaisons de 6 ou 8 systèmes de glissement actifs. De ce fait, les hypothèses utilisées engendrent différentes possibilités de rotation du grain, qui n'étant pas équiprobables dans les cubiques faces centrées (énergie de faute d'empilement [89,90]), entraînent une indétermination dans la prévision des textures de déformation. La levée de ce type d'indétermination ne peut se faire que par l'introduction d'hypothèses supplémentaires (durcissement non-isotrope, déformation partiellement imposée, ...) qui seront analysées dans les chapitres ultérieurs.

7) COMPORTEMENT DU FACTEUR DE TAYLOR.

a) Aspect géométrique du glissement.

Dans un monocristal, la loi de SCHMID stipule que le glissement s'amorce sur un système lorsque la composante de la contrainte de traction s'exerçant parallèlement à la direction de glissement dans le plan de glissement, encore appelée cission réduite, atteint une valeur critique

$$\tau_0 = \sigma_0 \cos\chi \cos\lambda \quad (101)$$

où χ et λ sont respectivement les angles que fait la direction de traction avec la normale au plan de glissement et la direction de glissement. Le facteur d'orientation

$$m = \cos\chi \cos\lambda \quad (102)$$

ou facteur de SCHMID, relatif au système le plus favorisé varie de 0.28 à

0.50 (de 3.57 à 2.00 pour son inverse) dans les métaux cubiques faces centrées.

Le facteur de TAYLOR $M(\alpha, \beta, \gamma; q)$, qui représente par ailleurs la résistance d'un cristallite d'orientation $g \equiv (\alpha, \beta, \gamma)$ donnée vis-à-vis d'une certaine déformation, et donc une anisotropie d'orientation, apparaît comme une généralisation de l'inverse du facteur de SCHMID. Pour une valeur donnée de α , les limites des domaines où interviennent un ensemble particulier de systèmes de glissement peuvent être tracées sur une projection stéréographique dans le plan (001). On se limitera au triangle élémentaire tel que :

$$0 \leq -\gamma \leq 45$$

$$\text{et } 0 \leq -\beta \leq \text{Arctg}(1/\cos\gamma)$$

dont chaque point figure l'orientation de la direction de traction dans le repère cristallographique (figure 10).

Dans le système cubique faces centrées, certains systèmes de glissement ont reçu des noms particuliers. Pour un cristal dont l'axe de traction est situé à l'intérieur du triangle standard $[001]$, $[101]$, $[111]$ de la projection stéréographique, on distingue :

- le système de glissement primaire ou principal $(\bar{1}\bar{1}\bar{1})[0\bar{1}\bar{1}]$, référencé **9** : c'est le système le plus favorisé sur lequel la déformation commence ;
- le système de glissement secondaire ou conjugué $(\bar{1}\bar{1}\bar{1})[101]$, référencé **(11)** ;
- le système de glissement dévié $(111)[0\bar{1}\bar{1}]$, référencé **[3]** ;
- le système de glissement critique $(\bar{1}\bar{1}\bar{1})[011]$, référencé **△6** .

Quand la déformation plastique commence dans le cristal soumis à une

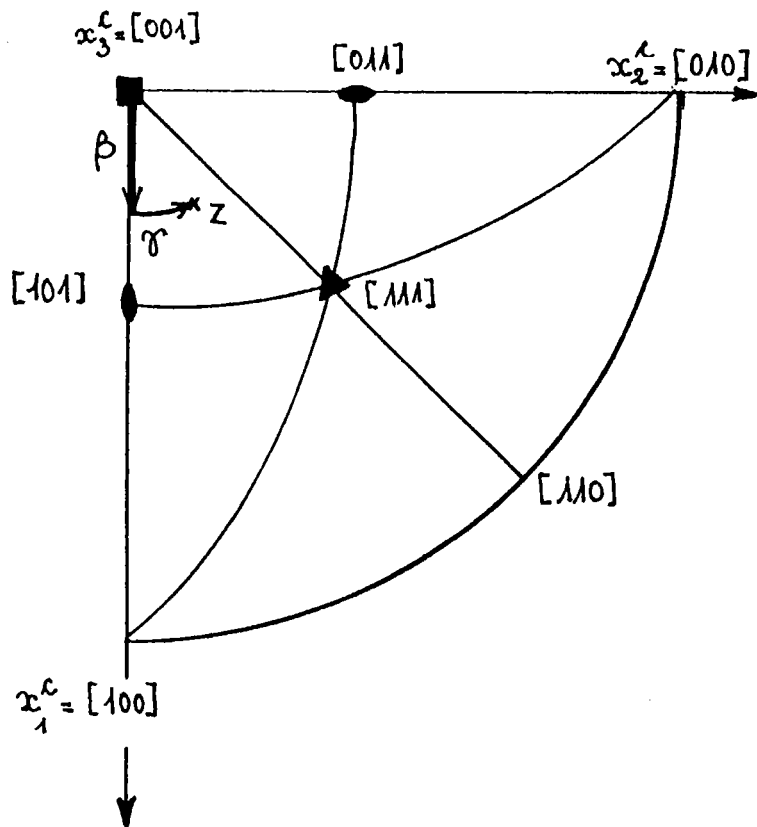


FIGURE 10 : POSITION DE LA DIRECTION DE TRACTION (Oz) dans le triangle élémentaire de référence. Projection stéréographique sur le plan (001) .

contrainte en traction, le glissement débute sur le système de glissement primaire. Ceci implique que les configurations (tableau 8), pour lesquelles la cission critique est atteinte sur ce système principal, contribuent de manière importante au facteur de TAYLOR. On pourra notamment s'assurer dans le triangle standard considéré (figure 10) que les facteurs partiels M_2 et M_6 , qui présentent numériquement les plus grandes valeurs absolues sur toute l'étendue du triangle, correspondent aux seules configurations qui réalisent la cission critique sur le système principal 9.

b) Déformation transversale isotrope ($q = 1/2$).

Les facteurs partiels M_J sont dans ce cas indépendants de l'angle α et se réduisent à :

$$M_1^4 = \frac{\sqrt{6}}{2} \left[\frac{3}{2} (\cos\beta - \sin\beta \sin\delta) - 1 \right], \quad (103)$$

$$M_2^5 = \frac{\sqrt{6}}{2} \left[\frac{3}{2} (\cos\beta + \sin\beta \cos\delta) - 1 \right], \quad (104)$$

$$M_3^6 = \frac{\sqrt{6}}{2} \left[\frac{3}{2} (\sin\beta \cos\delta + \sin\beta \sin\delta) - 1 \right]. \quad (105)$$

Sur la sphère de rayon unité, les courbes $M_J = 0$ sont des cercles d'équations

$$(z \mp y)^2 = 2/3 \quad \text{pour } M_1^4, \quad (106)$$

$$(z \pm x)^2 = 2/3 \quad \text{pour } M_2^5, \quad (107)$$

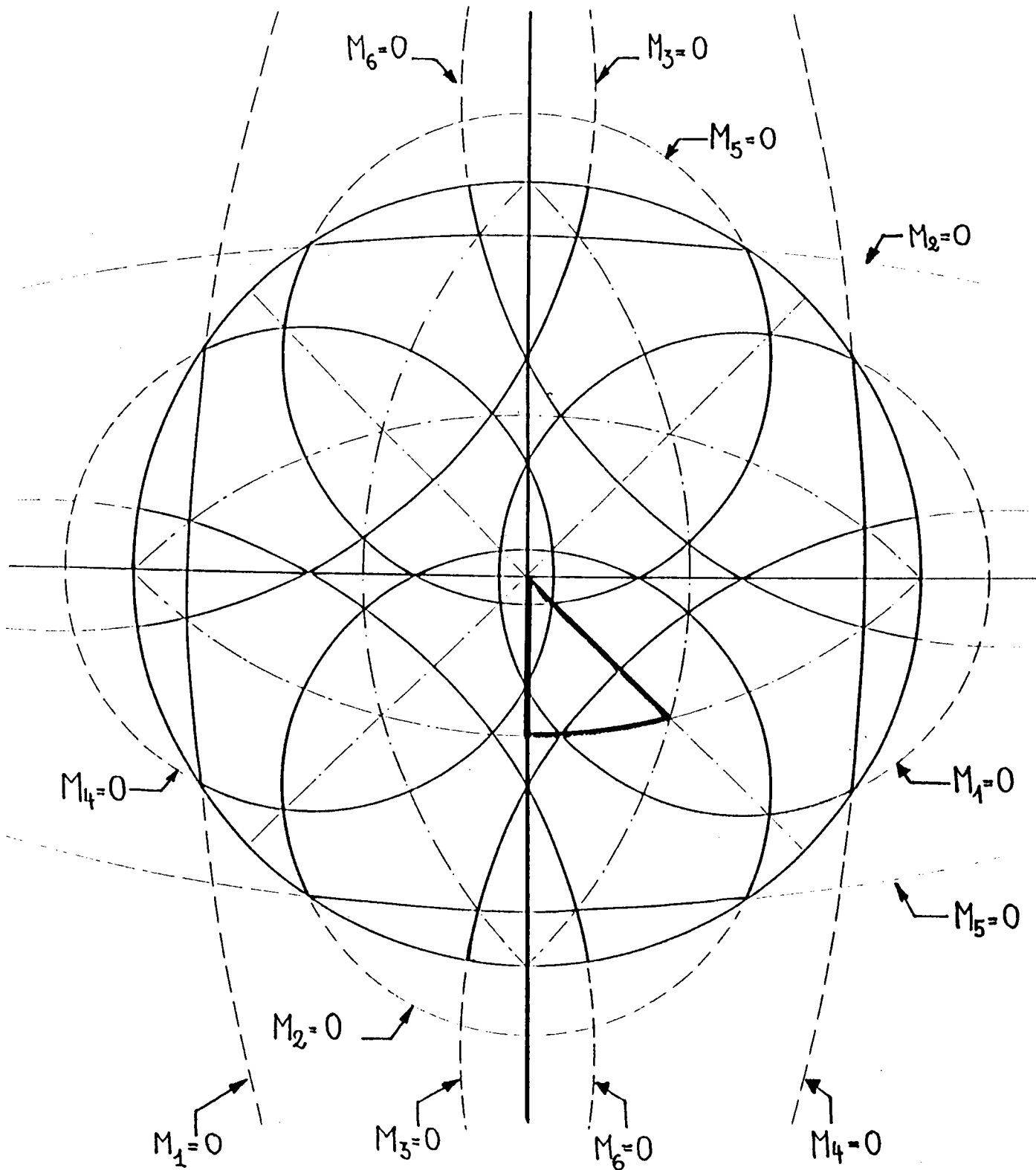


FIGURE 11 : PROJECTIONS STEREOGRAPHIQUES DES COURBES D'EQUATIONS $M_j = 0$.

[relations (106), (107), (108)]



$$(x \pm y)^2 = 2/3 \quad \text{pour } M_3^6, \quad (108)$$

en posant $x = \sin\beta \cos\delta$, $y = \sin\beta \sin\delta$ et $z = \cos\beta$. Les projections stéréographiques sont représentées sur les figures 11 et 12(a-f) dont l'examen montre que le facteur M_2 , qui conserve les valeurs positives les plus élevées sur l'ensemble du triangle de référence, et qui est associé à une configuration faisant intervenir le système primaire **9**, devra être présent dans toutes les combinaisons actives de M_J . Cette remarque est vérifiée par les résultats de la figure 13 qui illustre le comportement du facteur de TAYLOR $M(g;1/2)$; les combinaisons des M_J , les états de contrainte, les systèmes de glissement d'une part, les caractéristiques des points singuliers repérés sur le triangle d'autre part sont respectivement contenus dans les tableaux 10 et 11.

Dans l'élaboration de la figure 13 il reste alors à introduire, en plus des frontières du type $M_J = 0$, celles qui correspondent au comportement de combinaisons d'un nombre déterminé de configurations. Une étude systématique de telles situations pourrait être faite en analogie au cas de la figure 12(a-f).

En fait, pour le triangle considéré, il ne sera ici nécessaire que de faire intervenir les frontières d'équations respectives :

$$(z + y)^2 + (x - y)^2 + (z + x)^2 = 2 \quad \text{pour } M_1 + M_3 + M_5 = 0 ; \quad (109)$$

$$(z + y)^2 + (z - y)^2 + (z + x)^2 = 2 \quad \text{pour } M_1 + M_4 + M_5 = 0 ; \quad (110)$$

$$(z + y)^2 + (z + x)^2 = 4/3 \quad \text{pour } M_1 + M_5 = 0 ; \quad (111)$$

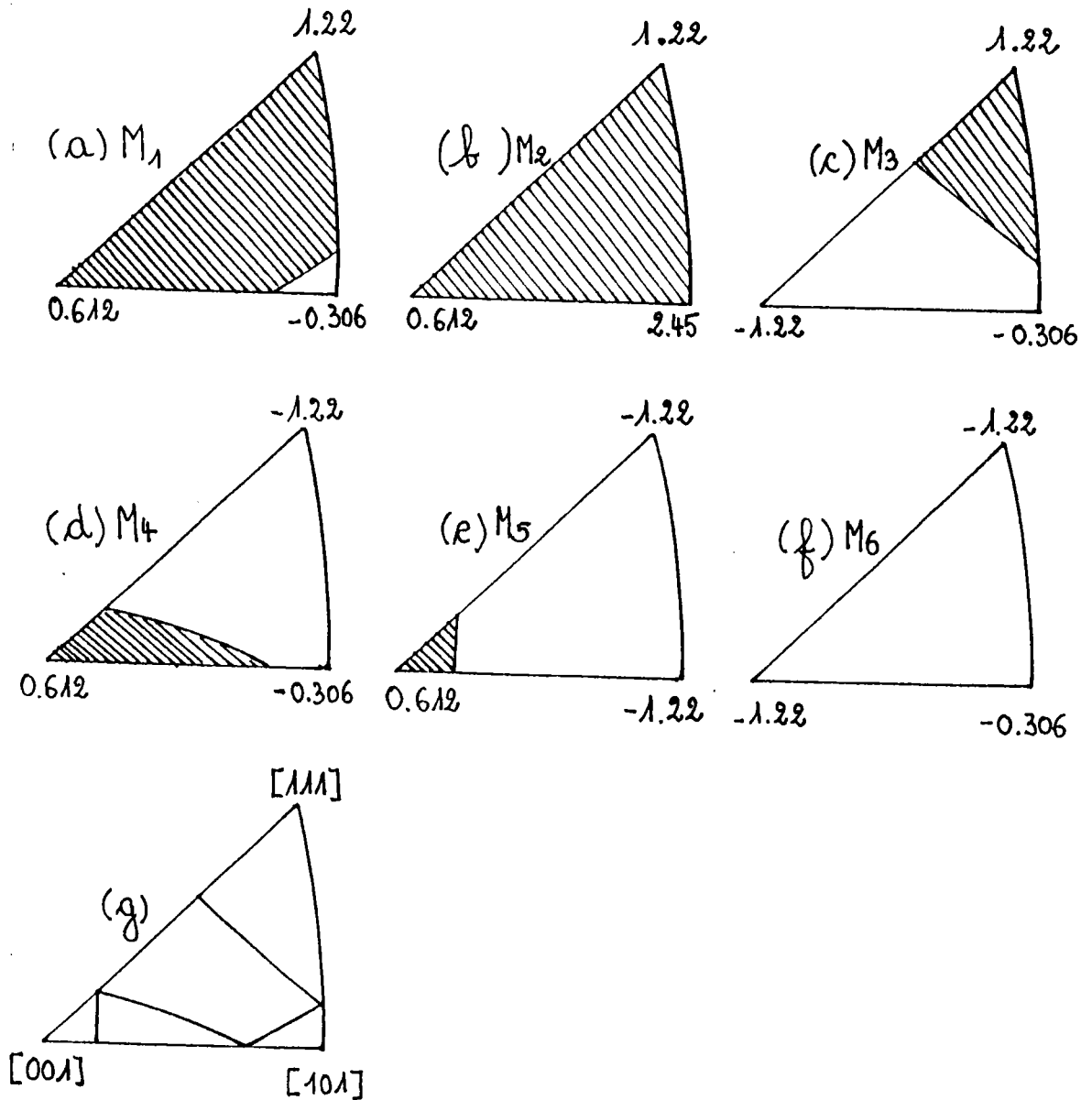


FIGURE 12 : PROJECTIONS STEREOGRAPHIQUES

(a-f) signes des fonctions M_j . Les zones hachurées correspondent à $M_j > 0$;

(g) synthèse de frontières précédentes.

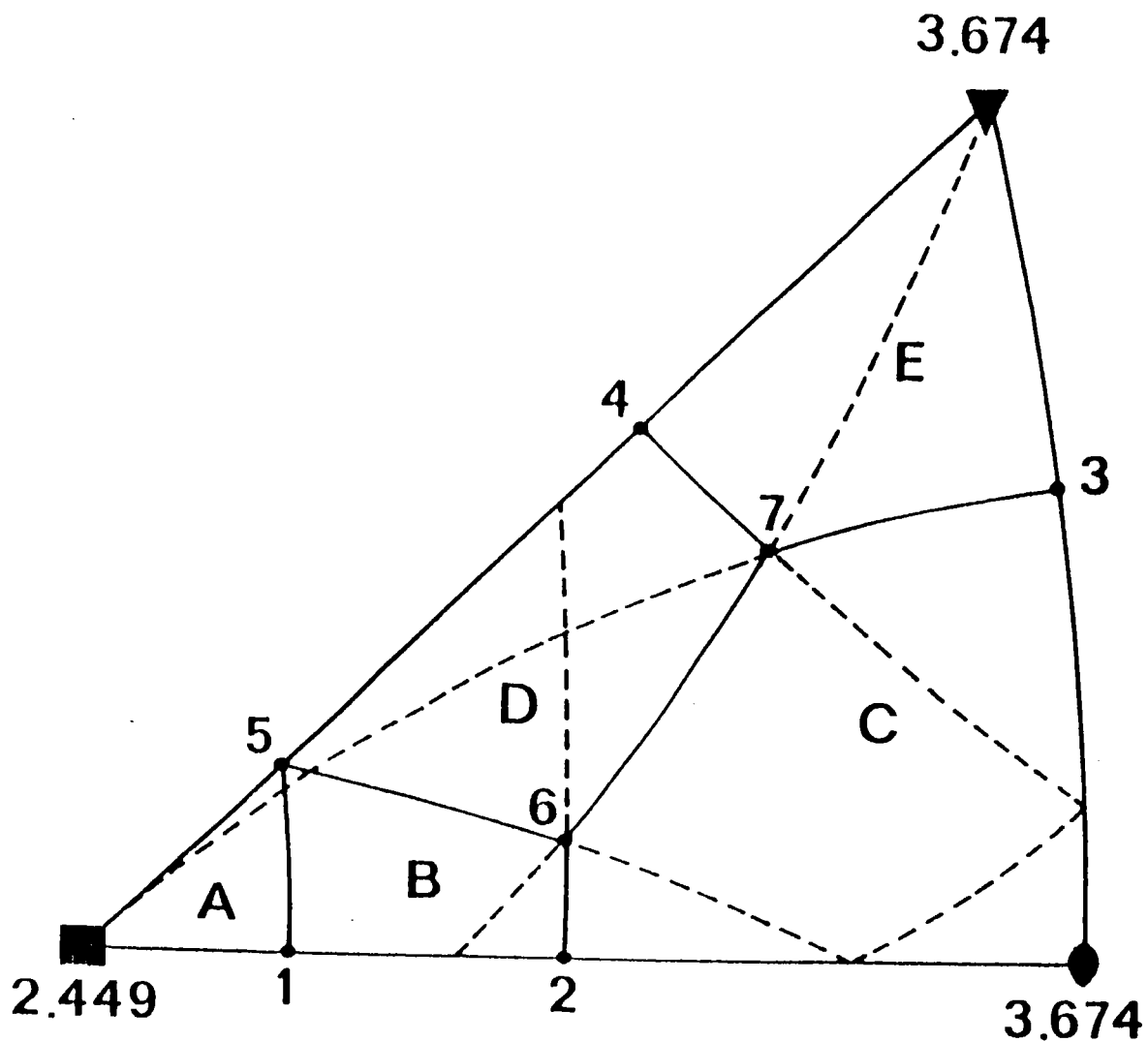


FIGURE 13 : COMPORTEMENT DU FACTEUR DE TAYLOR $M(g; 1/2)$.

(Les caractéristiques des domaines et des points singuliers sont rassemblées dans les tableaux 10 et 11).

régions	combinaisons des M j	états de contrainte		systèmes de glissement actifs
		(1)	(2)	
A	M + M + M + M 1 2 4 5	$\bar{1}$	$-\sigma_3 - \sigma_6$	$\bar{2}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{11}, 12$
B	M + M + M 1 2 4	$\bar{8}$	$-\sigma_3 - \sigma_5 - \sigma_6$	$\bar{2}, \bar{3}, 4, 5, \bar{8}, \bar{9}, 10, \bar{11}$
C	M - M 2 5	5	$\sigma_2 - \sigma_5$	$\bar{1}, \bar{3}, 4, \bar{6}, \bar{7}, \bar{9}, 10, \bar{12}$
D	M + M 1 2	21	$\sigma_1 + \sigma_2$	$\bar{2}, \bar{3}, \bar{7}, \bar{9}, 10, \bar{11}$
E	M + M + M 1 2 5	28	$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$	$5, \bar{6}, \bar{7}, \bar{9}, 10, \bar{11}$

références : (1) J.F.W. BISHOP, Phil. Mag., (1953), 44, 51.

(2) F. ROYER, J.M. MOHR et C. TAVARD, J. Appl. Cryst., (1978), 11, 35.

TABEAU 10 : CARACTERISTIQUES DES DOMAINES DE LA FIGURE 13.

POINTS SINGULIERS	$\beta(^{\circ})$	$\gamma(^{\circ})$	$M(\alpha, \beta, \gamma; 1/2)$
1	- 9,736	0,0	2,344
2	- 22,600	0,0	2,598
3	- 48,190	- 26,565	3,266
4	- 35,264	- 45,000	3,062
5	- 12,925	- 45,000	2,266
6	- 23,218	- 15,072	2,571
7	- 36,415	- 31,551	2,991

TABLEAU 11 : CARACTERISTIQUES DES POINTS SINGULIERS DE LA FIGURE 13.

dont les projections stéréographiques sont décrites par la figure 14. On notera que les équations (109) et (110) correspondent elles aussi à des cercles sur la sphère de rayon unité.

c) Cas non-isotrope ($q = 1/2$).

Des raisonnements et calculs similaires permettent de réaliser aisément des études détaillées analogues dans le cas de déformations quelconques. A titre d'exemple, et en se limitant au cas $\nu = 0$, les figures 15(a-e) complétées par les tableaux 10 et 12 illustrent l'évolution des états de contrainte pour divers taux de déformation (q).

c) Conclusion.

Il paraît remarquable d'obtenir, à partir de l'approche algébrique développée, une expression analytique simple des frontières des domaines obtenus numériquement par BISHOP [65], HOSFORD et BACKOFEN [91], CHIN et MAMMEL [66] dans le cas d'une déformation isotrope. Ces frontières sont dans la quasi totalité des cas les projections stéréographiques de cercles inscrits sur la sphère de rayon unité.

8) FACTEUR DE TAYLOR : SYMETRIES - DECOMPOSITION SUR UNE BASE

D'HARMONIQUES SPHERIQUES - VALEUR MOYENNE.

a) Symétries.

Dans la perspective d'une intégration numérique, il est essentiel de pouvoir réduire les intervalles de variation des trois angles d'Euler $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, $0 \leq \beta \leq \pi$ et $0 \leq \gamma \leq 2\pi$.

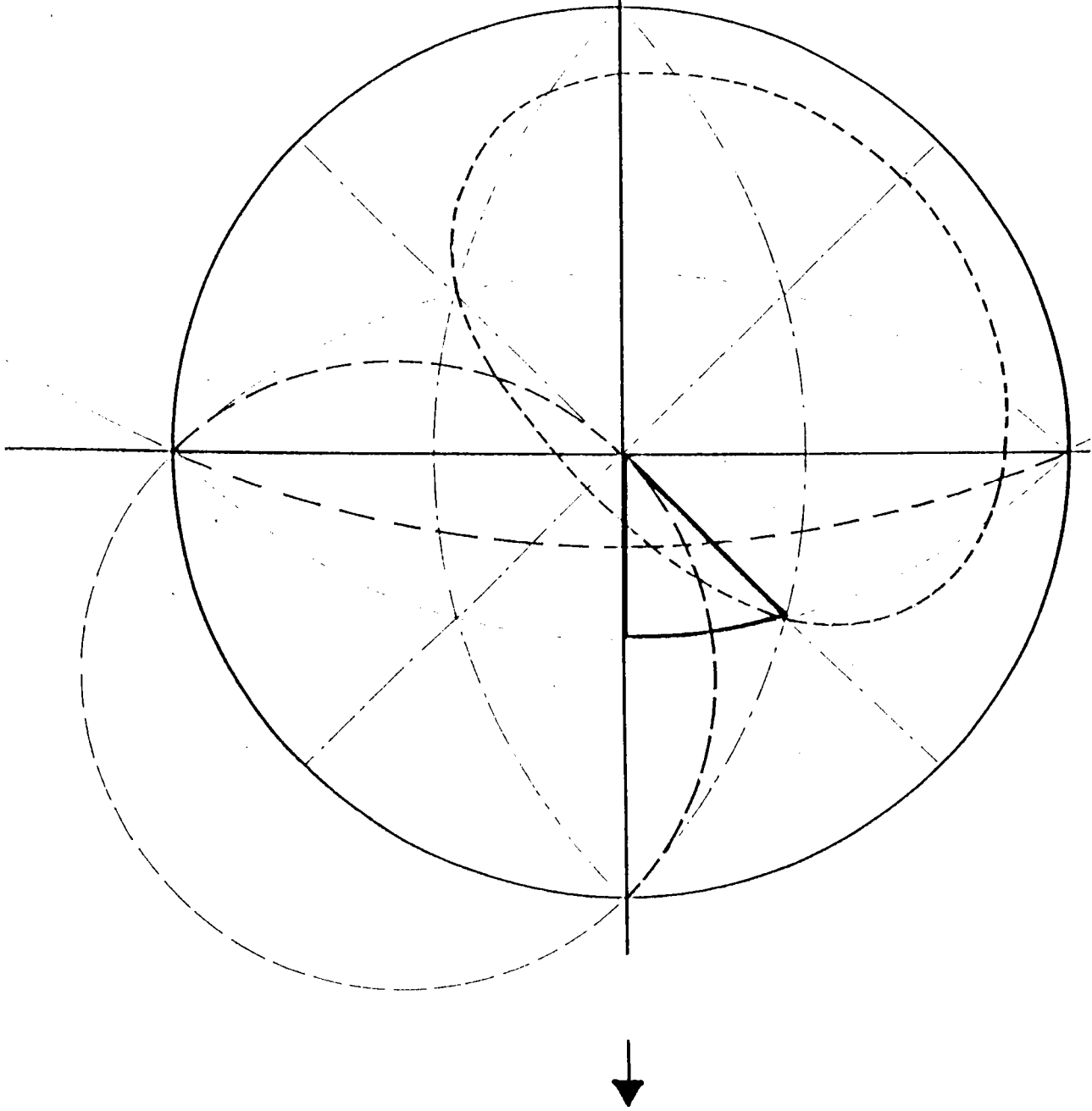


FIGURE 14 : PROJECTIONS STEREOGRAPHIQUES DES FRONTIERES

$$M_1 + M_5 = 0 \quad (-----)$$

$$M_1 + M_3 + M_5 = 0 \quad (-----)$$

$$M_1 + M_4 + M_5 = 0 \quad (-\cdot-\cdot-\cdot-\cdot-)$$

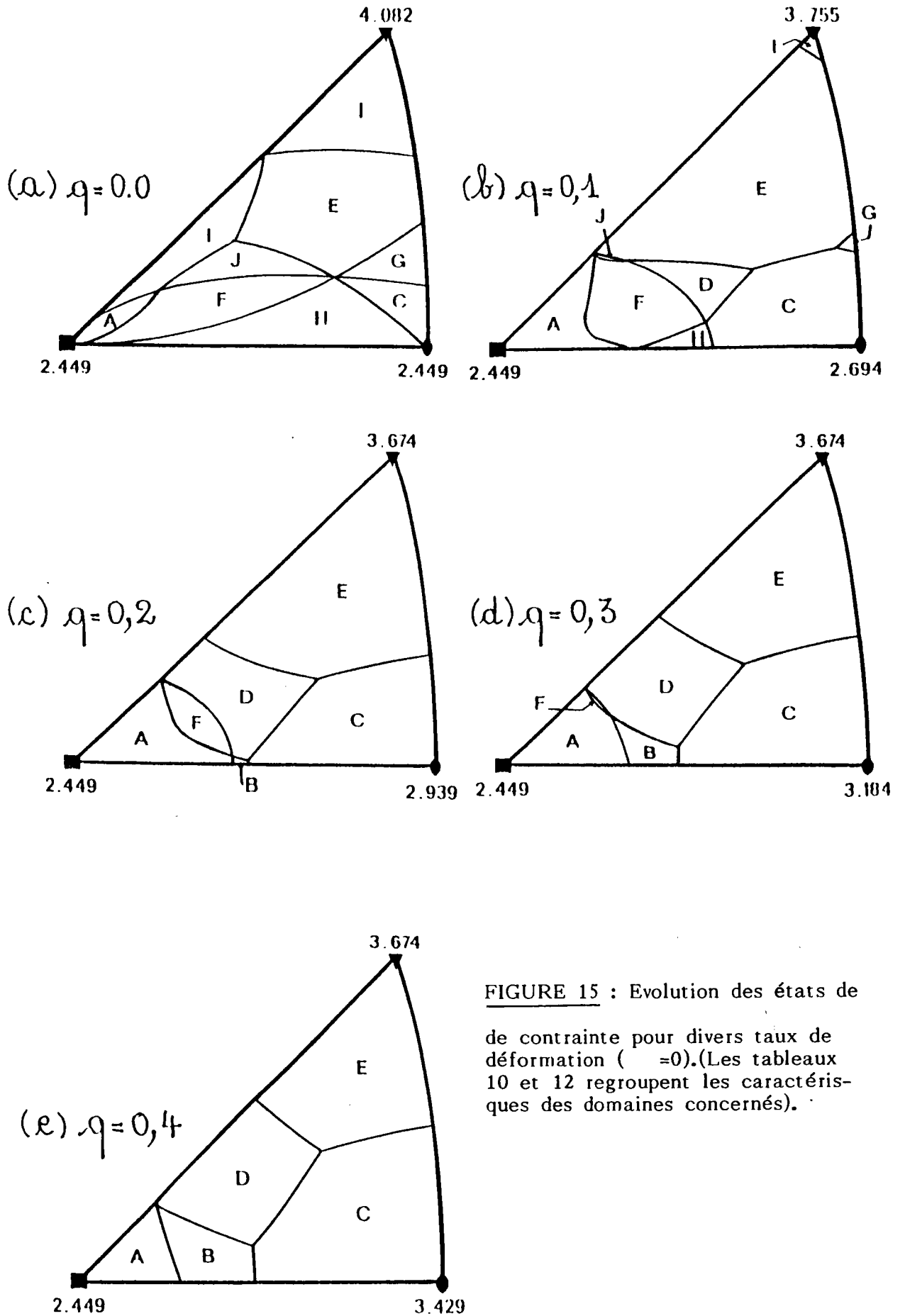


FIGURE 15 : Evolution des états de

de contrainte pour divers taux de déformation ($\dot{\epsilon} = 0$). (Les tableaux 10 et 12 regroupent les caractéristiques des domaines concernés).

Régions	Combinaisons des M J	états de contrainte		systèmes de glissement actifs
		(1)	(2)	
F	M + M + M 1 2 3	9	$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$	$\bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{9}, \bar{11}, 12$
G	M + M 2 3	17	$\sigma_2 + \sigma_3$	$\bar{1}, 2, 5, \bar{6}, \bar{7}, 9$
H	M + M 2 5	3	$\sigma_2 + \sigma_5$	$\bar{1}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{7}, 9, \bar{10}, 12$
I	M - M 3 6	6	$\sigma_3 - \sigma_6$	$2, \bar{3}, 5, \bar{6}, \bar{8}, 9, \bar{11}, 12$
J	M + M + M + M 1 2 3 5	$\bar{16}$	$-\sigma_4 - \sigma_6$	$\bar{4}, 5, \bar{7}, 9, \bar{11}, 12$

références : (1) J.F.W.BISHOP, Phil. Mag.,(1953),44,51.

(2) F.ROYER, J.M.MOHR et C.TAVARD, J.Appl.Cryst.,(1978),11,35.

TABLEAU 12 : CARACTERISTIQUES DES DOMAINES DE LA FIGURE 15(a-e).

Les relations de symétrie suivantes :

$$M(\alpha, \beta, \gamma; q) = M(\alpha, \beta, \gamma + \pi/2; q), \quad (112)$$

$$= M(\alpha + \pi, \beta, \gamma; q), \quad (113)$$

$$= M(\pi - \alpha, \pi - \beta, \gamma; q), \quad (114)$$

$$= M(\pi - \alpha, \beta, \pi/2 - \gamma; q), \quad (115)$$

$$= M(\alpha, \pi - \beta, \pi/2 - \gamma; q), \quad (116)$$

$$= M(\alpha + \pi, \pi - \beta, \pi - \gamma; q), \quad (117)$$

et

$$M(\alpha, \beta, \pi/2 - \gamma; q) = M(\pi - \alpha, \beta, \gamma; q), \quad (118)$$

$$= M(\alpha, \pi - \beta, \gamma; q), \quad (119)$$

$$= M(\pi - \alpha, \beta, \gamma; q), \quad (120)$$

permettent de se ramener à un même domaine d'intégration pour les trois angles $0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq \pi/2$. Cet ensemble de relations sera encore complété par les expressions

$$M(\alpha, \beta, \gamma; q) = M(\alpha + \pi/2, \beta, \gamma; 1-q), \quad (121)$$

$$= M(\pi/2 - \alpha, \beta, \pi/2 - \gamma; 1-q), \quad (122)$$

faisant intervenir le facteur de contraction de l'éprouvette.

b) Décomposition sur une base d'harmoniques sphériques.

Il a été montré dans le premier chapitre de ce travail qu'une description possible de la fonction de distribution des orientations des cristallites était son développement sur une base d'harmoniques sphériques généralisées et symétrisées. En procédant de manière identique avec le facteur de TAYLOR

$$M(g; q) = \sum_{2l=0}^{10} \sum_{2m=0}^{2l} M_{2m 0}^{2l}(q) \cdot T_{2m 0}^{2l}(g), \quad (123)$$

il est alors possible d'obtenir un ensemble de coefficients universels

$$M_{2m 0}^{2l}(q) = \frac{2l + 1}{8\pi^2} \int M(g; q) \cdot T_{2m 0}^{2l*}(g) \quad (124)$$

(l'astérisque indique la grandeur conjuguée) caractéristiques du modèle de déformation étudié et du type de glissement retenu [22,92].

Le calcul des coefficients $M_{2m 0}^{2l}(q)$ s'effectue à partir d'un réseau à pas régulier (π/N) en α et γ alors que l'intégration en β est réalisée par la méthode de Gauss à N points [93]. Dans un premier temps l'intégration numérique a été basée sur un réseau de 1100 points ($N = 20$) [22] puis reprise en assurant :

- une intégration gaussienne à 32 points en β ;
- une intégration trigonométrique à 32 points en α et 33 points en γ (ce dernier cas décompose la contribution relative à $\gamma = \pi/4$ en deux contributions symétriques très proches de la frontière)

		$\Omega=0,0$	$\Omega=0,1$	$\Omega=0,2$	$\Omega=0,3$	$\Omega=0,4$	$\Omega=0,5$	$\Omega=0,6$	$\Omega=0,7$	$\Omega=0,8$	$\Omega=0,9$	$\Omega=1,0$
0	0	3,0658	3,0679	3,0739	3,0842	3,0988	3,1182	3,1426	3,1730	3,2106	3,2579	3,3233
4	0	-1,1049	-1,1033	-1,0998	-1,0939	-1,0862	-1,0772	-1,0673	-1,0579	-1,0503	-1,0457	-1,0457
6	0	-0,3394	-0,3371	-0,3298	-0,3176	-0,2997	-0,2763	-0,2461	-0,2089	-0,1641	-0,1112	-0,0558
8	0	0,3711	0,3692	0,3652	0,3573	0,3451	0,3272	0,3018	0,2668	0,2199	0,1604	0,0797
10	0	-0,1263	-0,1219	-0,1093	-0,0892	-0,0626	-0,0320	0,0003	0,0298	0,0544	0,0668	0,0680
4	2	0,0000	-0,1507	-0,3007	-0,4497	-0,5970	-0,7414	-0,8819	-1,0161	-1,1407	-1,2501	-1,3292
6	2	0,0000	0,0046	0,0092	0,0135	0,0175	0,0209	0,0240	0,0274	0,0335	0,0456	0,0653
8	2	0,0000	-0,0367	-0,0721	-0,1023	-0,1259	-0,1404	-0,1427	-0,1308	-0,1030	-0,0591	-0,0069
10	2	0,0000	-0,0144	-0,0286	-0,0427	-0,0563	-0,0681	-0,0762	-0,0775	-0,0686	-0,0468	-0,0105
4	4	0,0000	0,0023	0,0094	0,0210	0,0373	0,0582	0,0834	0,1124	0,1437	0,1743	0,1858
6	4	0,0000	-0,0012	-0,0037	-0,0089	-0,0156	-0,0237	-0,0334	-0,0435	-0,0532	-0,0597	-0,0539
8	4	0,0000	0,0003	0,0005	0,0010	0,0007	-0,0010	-0,0046	-0,0111	-0,0212	-0,0337	-0,0442
10	4	0,0000	0,0000	0,0012	0,0020	0,0039	0,0061	0,0084	0,0096	0,0067	-0,0032	-0,0233
6	6	0,0000	-0,0001	0,0008	0,0027	0,0064	0,0125	0,0220	0,0350	0,0521	0,0726	0,0968
8	6	0,0000	0,0000	0,0010	0,0034	0,0083	0,0166	0,0293	0,0484	0,0763	0,1140	0,1556
10	6	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0009	0,0039	-0,0027	-0,0046	-0,0071	-0,0112	-0,0166	-0,0149
8	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0002	-0,0004	-0,0006	-0,0008	-0,0002	0,0042	0,0329
10	8	0,0000	0,0000	-0,0001	-0,0002	-0,0003	-0,0004	-0,0009	-0,0021	-0,0058	-0,0139	-0,0252
10	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0001	-0,0002	-0,0005	-0,0008	-0,0010	-0,0030	-0,0188

113

TABLEAU 13 : Coefficients M_2^2 (q) pour un glissement cristallographique 111 110 réseau cubique faces centrées - modèle de Taylor (déformation totalement imposée) - $\nu = 1 - 2q$.

$2l$ M $2m \ 0$		$2l$ Lissages de M - cubiques faces centrées $2m \ 0$
2l	2m	
0	0	$3,0658 + 0,1994\omega^2 + 0,0390\omega^4$
4	0	$-1,1048 + 0,1309\omega^2 + 0,0807\omega^4$
4	2	$-1,5062\omega + 0,0708\omega^3 + 0,0848\omega^5$
4	4	$0,2300\omega^2 + 0,0405\omega^4 - 0,0811\omega^6$
6	0	$-0,3394 + 0,2398\omega^2 + 0,0538\omega^4$
6	2	$0,0495\omega - 0,0536\omega^3 + 0,0686\omega^5$
6	4	$-0,0900\omega^2 - 0,0334\omega^4 + 0,0687\omega^6$
6	6	$0,0987\omega^3 + 0,0157\omega^5 - 0,0176\omega^7$
8	0	$0,3710 - 0,1388\omega^2 - 0,1502\omega^4$
8	2	$-0,3768\omega + 0,3894\omega^3 + 0,0055\omega^5$
8	4	$0,0204\omega^2 - 0,1057\omega^4 + 0,0358\omega^6$
8	6	$0,1219\omega^3 + 0,0482\omega^5 - 0,0124\omega^7$
8	8	$0,0021\omega^4 - 0,0373\omega^6 + 0,0525\omega^8$
10	0	$-0,1266 + 0,4419\omega^2 - 0,2503\omega^4$
10	2	$-0,1420\omega - 0,0198\omega^3 + 0,1704\omega^5$
10	4	$0,0210\omega^2 + 0,0344\omega^4 - 0,0791\omega^6$
10	6	$-0,0216\omega^3 - 0,0019\omega^5 + 0,0076\omega^7$
10	8	$-0,0076\omega^4 + 0,0178\omega^6 - 0,0428\omega^8$
10	10	$-0,0192\omega^5 + 0,0630\omega^7 - 0,0609\omega^9$

TABLEAU 14 : LISSAGES DES COEFFICIENTS $M_{2m \ 0}^{2l}$ en
fonction du paramètre $\omega = 1-2q$.
(méthode des moindres carrés)

ceci afin de rester cohérent avec les développements ultérieurs (notamment dans le cas des modèles intermédiaires). Les résultats obtenus, jusqu'au rang $2l=10$ pour 11 valeurs de q régulièrement réparties sur l'intervalle $[0, 1/2]$, sont rassemblés dans le tableau 13 et seront complétés sur l'intervalle $[1/2, 1]$ par la relation

$$M_{2m, 0}^{2l}(1-q) = (-1)^m M_{2m, 0}^{2l}(q). \quad (125)$$

Les valeurs affectées d'un astérisque dans le tableau sont vérifiées nulles à la précision du calcul pour $q=1/2$.

Ces coefficients ont ensuite été lissés par une méthode de moindres carrés (tableau 14) en vue d'applications numériques telles que le calcul du coefficient d'anisotropie. Les figures 16 à 20 comparent ces lissages aux valeurs du tableau 13 et permettent de mettre en évidence l'influence relative entre les coefficients $M_{2m, 0}^{2l}(q)$.

c) Valeur moyenne.

Pour un échantillon isotrope (sans texture), la valeur moyenne du facteur de TAYLOR

$$\bar{M}(q) = \frac{1}{8\pi^2} \int M(g; q) dg. \quad (126)$$

sur l'espace des angles d'Euler a été calculée par différents auteurs.

Les valeurs et éventuelles précisions sur le réseau d'intégration utilisé sont regroupées dans le tableau 15 pour une déformation axisymétrique ($q=1/2$).

$\bar{M}(1/2)$	références		nombre de points
3,06	G.I. Taylor, J.F.W. Bishop et R. Hill	[25], [37]	44
3,067	G.Y. Chin et W.L. Mammel	[94]	
3,072	J.W. Hutchinson	[95]	
3,067	P. Parnière et L. Roesch	[96]	216
3,056	P. van Houtte et E. Aernoudt	[97]	11
3,067 \mp 0,001	W.F. Hosford	[98]	828
3,0766 \mp 0,0037	H.J. Bunge	[87]	729
3,0674	F. Royer, J.M. Mohr et C. Tavard	[39]	1100
3,0658	C. Tavard et F. Royer	[32]	33792

TABLEAU 15 : COMPARAISON DE LA VALEUR MOYENNE DU FACTEUR DE TAYLOR pour une déformation axisymétrique. (glissement cristallographique - cubiques faces centrées).

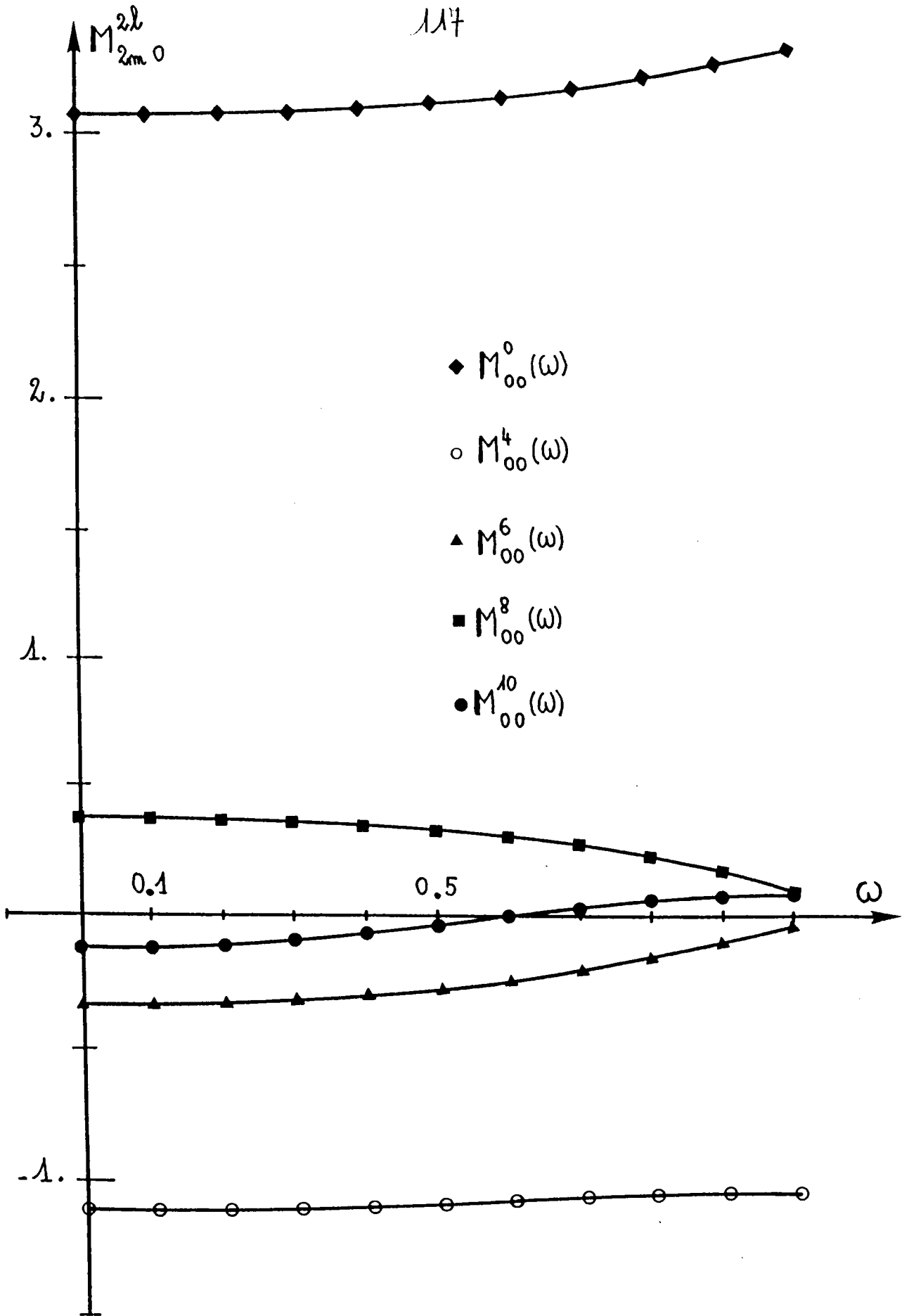


FIGURE 16 : LISSAGE DES COEFFICIENTS $M_{00}^{2l}(\omega)$ ($\omega = 1-2q$)

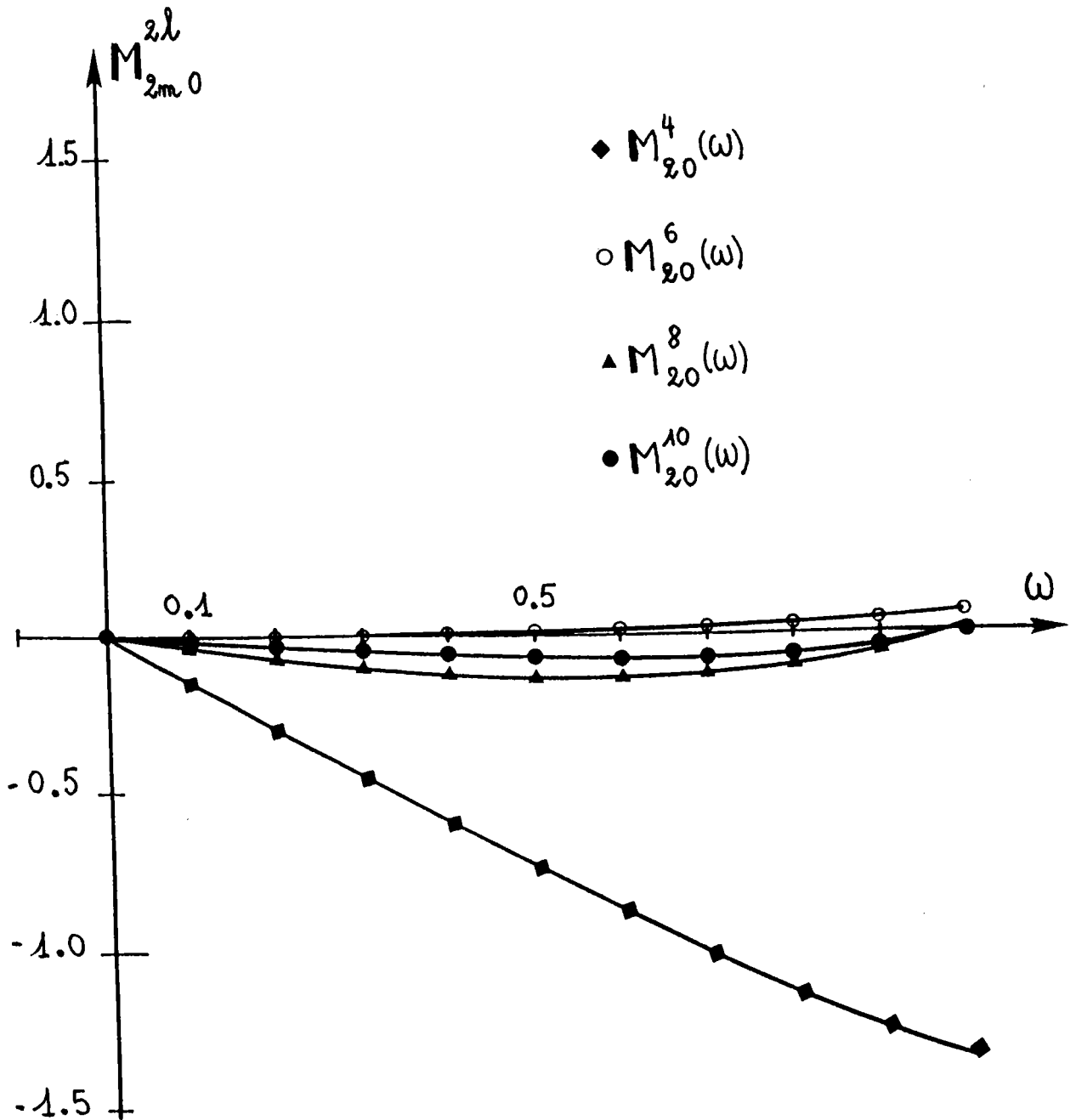


FIGURE 17 : LISSAGES DES COEFFICIENTS M_{20}^{2l} ($\omega = 1-2q$).

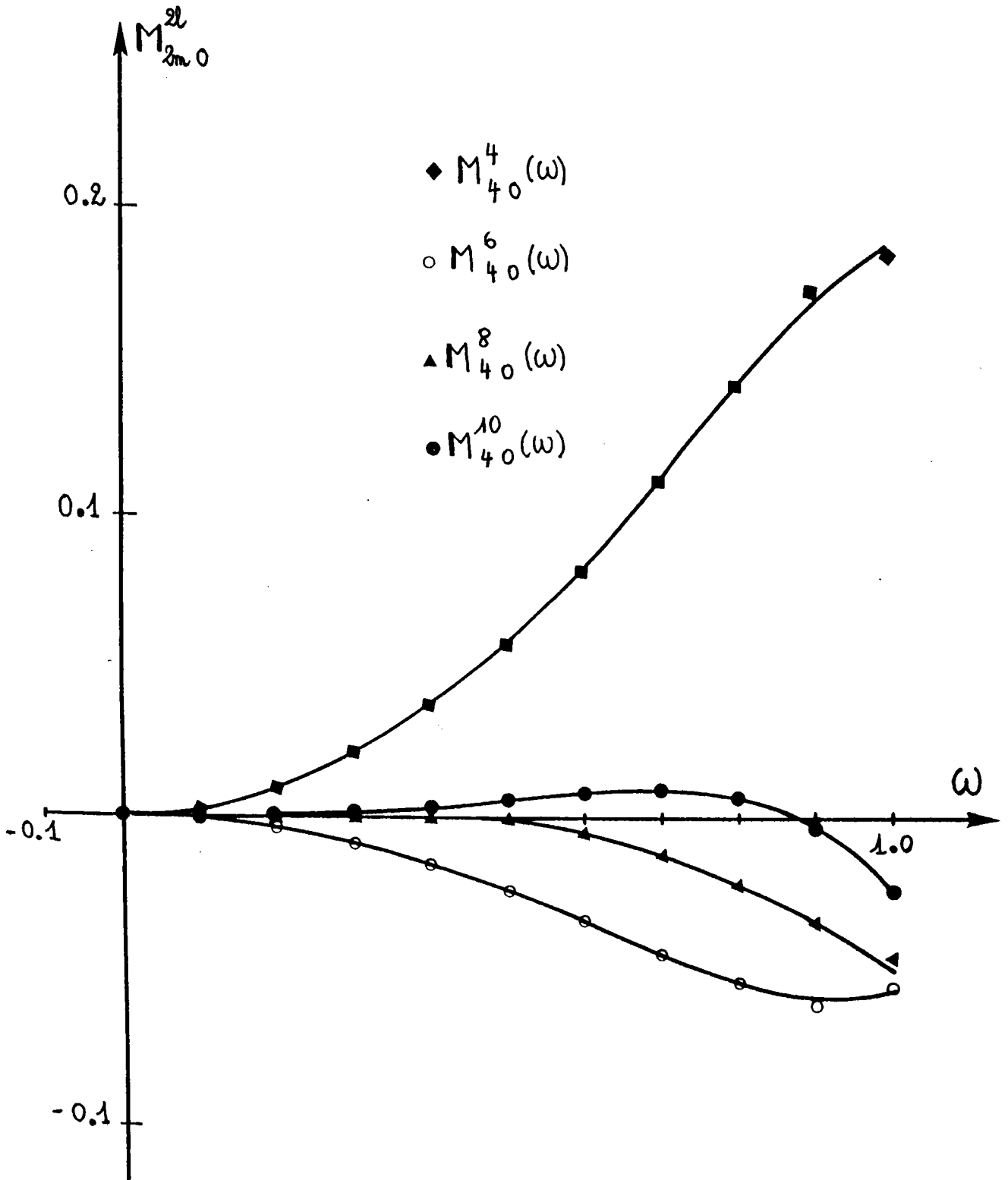


FIGURE 18 : LISSAGES DES COEFFICIENTS $M_{40}^{2l}(\omega = 1-2q)$.

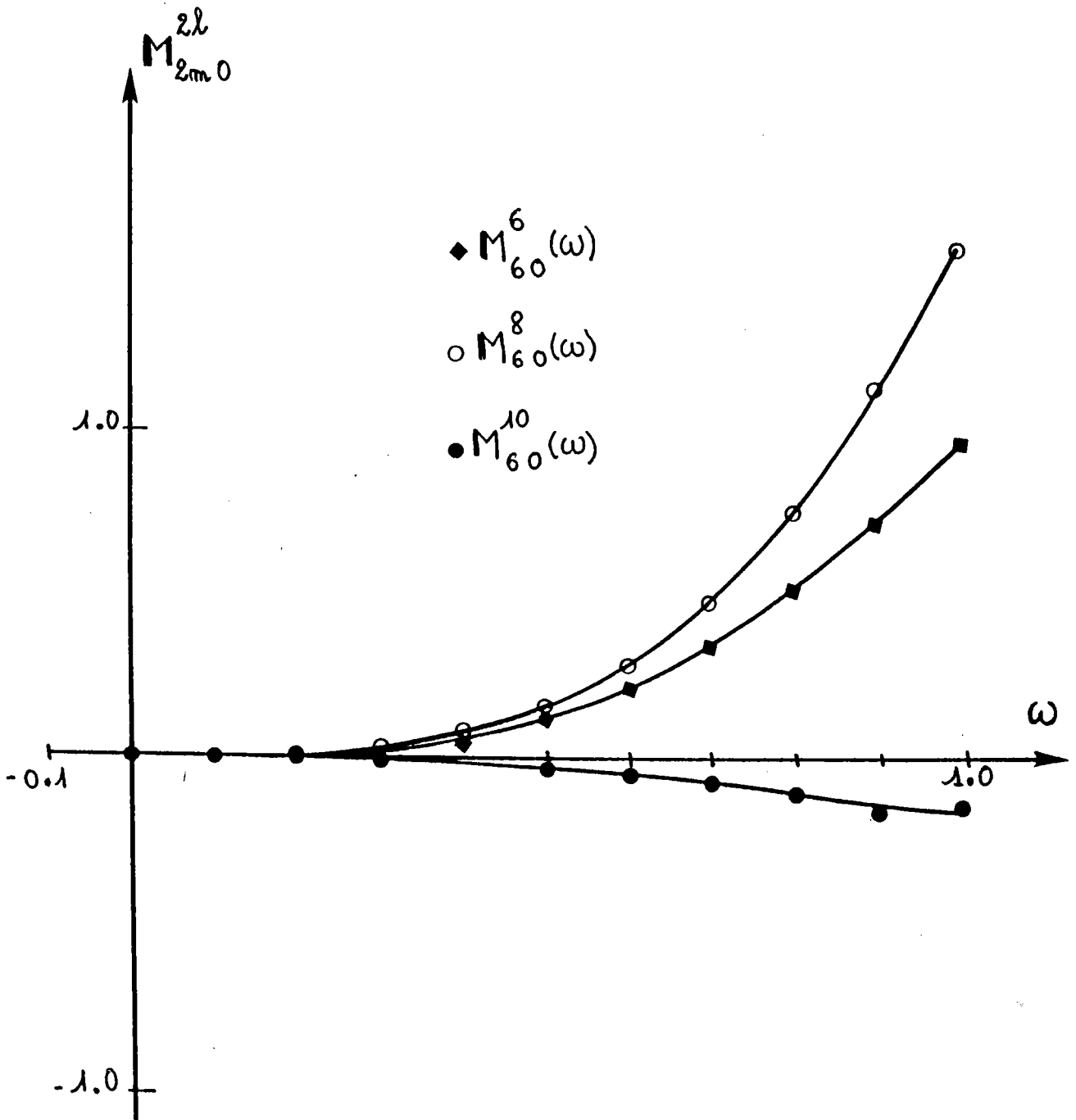


FIGURE 19 : LISSAGES DES COEFFICIENTS M_{60}^{2l} ($\omega = 1-2q$).

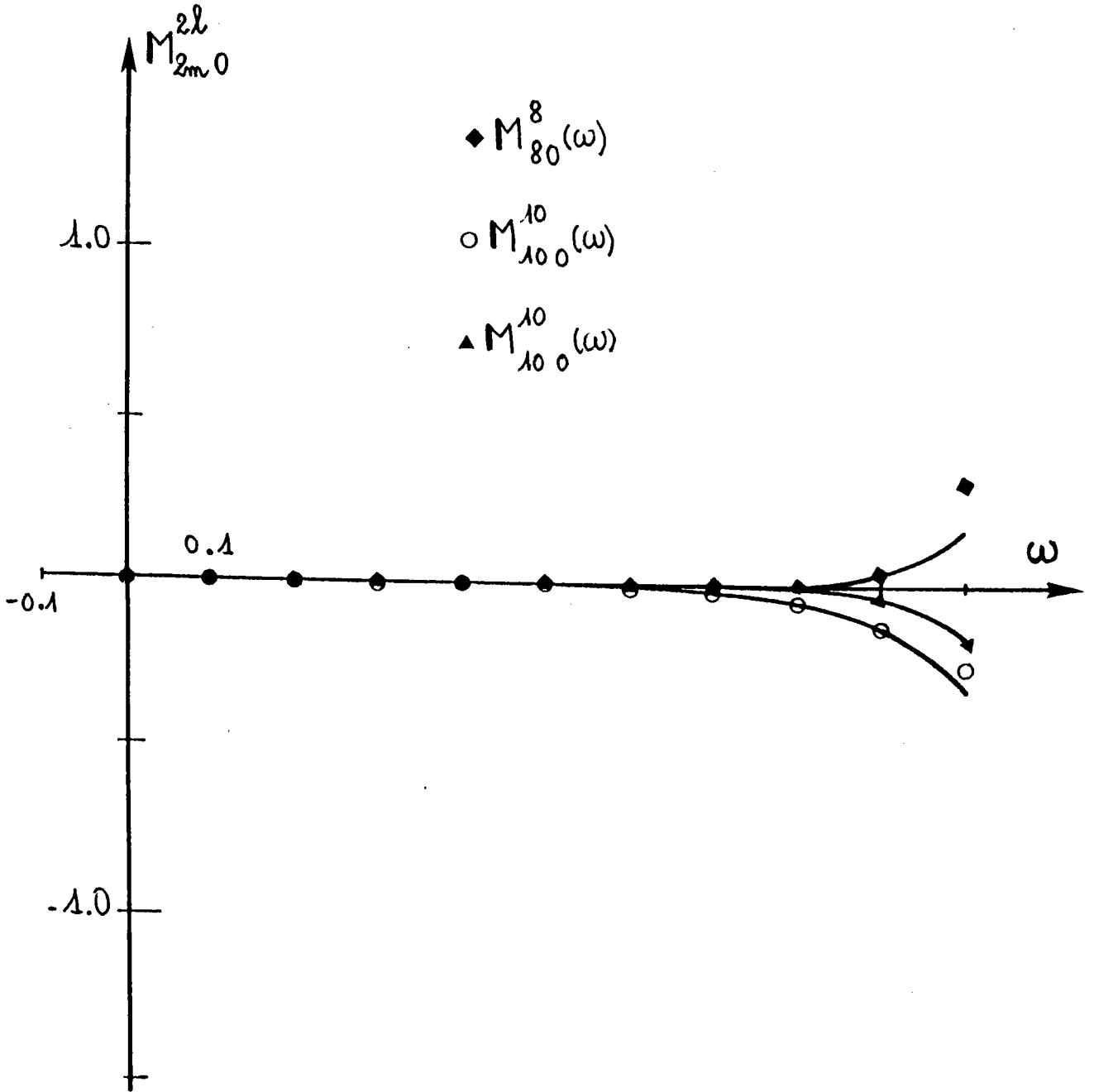


FIGURE 20 : LISSAGES DES COEFFICIENTS M_{80}^{2l} et M_{100}^{2l} ($\omega = 1-2q$).

9) CONCLUSION.

Cette nouvelle approche du problème de la déformation plastique du polycristal ramène donc la recherche de la voie énergétique la plus favorable à la seule comparaison de 4 possibilités parmi les 28 processus énergétiquement possibles de BISHOP [65].

Elle offre de plus l'avantage d'une généralisation rapide au cas du glissement sur d'autres systèmes ou du glissement non-cristallographique, généralisation qui sera étudiée dans le chapitre suivant.

De plus, cette approche analytique conduit à des gains importants dans les procédures numériques. Il est raisonnable de considérer cette amélioration d'une amplitude de facteur 1000 par rapport aux analyses basées sur les techniques de programmation linéaire [97].

CHAPITRE 5 : RECHERCHE DES SYSTEMES DE GLISSEMENT DANS LE CAS DU GLISSE-
MENT NON-CRISTALLOGRAPHIQUE D'AXE DE ZONE $\langle 111 \rangle$ DANS LES
POLYCRISTAUX A RESEAU CUBIQUE CENTRE (PENCIL GLIDE).

1) INTRODUCTION.

a) Glissement cristallographique.

b) Glissement non-cristallographique (pencil glide).

2) RELATIONS FONDAMENTALES.

3) GLISSEMENT SUR QUATRE SYSTEMES.

4) GLISSEMENT SUR TROIS SYSTEMES.

5) FACTEUR DE TAYLOR.

a) Sélection de $M(g, q)$.

b) Décomposition sur la base des harmoniques sphériques.

6) CONCLUSION.

1) INTRODUCTION.

Dans le cas d'un cristal cubique centré, si la direction de glissement est toujours parfaitement définie comme l'une des quatre directions $\langle 111 \rangle$, il subsiste toutefois une certaine incertitude quant aux plans de glissements. Des plans cristallographiques $\{110\}$, $\{112\}$, $\{123\}$ ainsi que des plans de nature non-cristallographique ont été observés [84, 99]. Il existe donc dans une procédure de modélisation du comportement des matériaux cubiques centrés plusieurs hypothèses de glissement :

a) Glissement cristallographique.

Dans le cadre du formalisme équivalent de TAYLOR et de BISHOP-HILL, différents auteurs (CHIN et al. [94, 100], SIEMES [101], PARNIERE et al. [102, 103, 104], BUNGE et al. [92]) ont étudié le glissement :

- soit sur les systèmes de la famille $\{110\}\langle 111 \rangle$: pour lesquels on retrouve les mêmes résultats, pour le champ des déformations, que dans le cas du glissement $\{111\}\langle 110 \rangle$ des cubiques faces centrées ; le champ de rotation des grains étant l'opposé d'après les relations (70) et (72).

- soit sur les systèmes des familles $\{110\}\langle 111 \rangle$, $\{112\}\langle 111 \rangle$ et $\{123\}\langle 111 \rangle$ prises séparément, ou sur des combinaisons de ces trois possibilités.

b) Glissement non-cristallographique (pencil glide).

C'est encore à TAYLOR [105] que l'on doit l'idée originale, mais sans applications, du glissement non-cristallographique que l'on peut formuler de la manière suivante :

aux quatre directions de glissement $\langle 111 \rangle$ on associe une infinité de plans de glissement contenant ces directions. Les plans de glissement seront définis par un paramètre fixant leur orientation. Pour une direction de glissement donnée, le plan de glissement actif est celui sur lequel la cission résolue est maximale.

Cette hypothèse extrême dans le choix du ou des systèmes de glissement parmi une infinité de systèmes susceptibles d'être activés laisse supposer une diminution de l'anisotropie plastique propre au modèle de déformation d'un agrégat polycristallin texturé. De plus, le fait de paramétrer l'orientation des plans de glissement introduit dans le raisonnement une forme de relaxation analogue à celles des modèles qui seront analysés dans le chapitre suivant.

Pour décrire un changement de forme arbitraire d'un grain, cinq variables de glissement indépendantes sont nécessaires. Ainsi dans le cas du glissement cristallographique, ces variables sont les quantités de glissement sur cinq systèmes de glissement indépendants. Dans le cas du glissement non-cristallographique deux variables sont associées à chaque système de glissement, l'orientation du plan de glissement et la quantité de glissement, de sorte qu'au moins trois systèmes de glissement actifs sont nécessaires.

PIEHLER et BACKOFEN [106] ont les premiers étudié ce

type de glissement dans le cadre d'un formalisme analogue à celui de BISHOP-HILL. Ces auteurs ont tenté d'établir les expressions analytiques des états susceptibles d'accueillir une déformation arbitraire par activation de quatre ou de trois systèmes de glissement contenant des directions $\langle 111 \rangle$. Cet objectif a été atteint dans le cas du glissement sur quatre systèmes où les expressions explicites des états de contrainte ont été trouvées en fonction des composantes du tenseur de déformation.

Lorsque seulement trois systèmes sont opérationnels, une résolution numérique maximisant le travail de déformation a été proposée. ROSENBERG et PIEHLER [107] ont appliqué cette analyse au calcul du facteur de TAYLOR dans le cas particulier d'une déformation axisymétrique ($q = 1/2$), par ailleurs aussi traité par DILLAMORE et KATOH [108] dans le formalisme de TAYLOR. CHIN [109] a ultérieurement démontré que si une solution, sur trois ou quatre systèmes, existait cette dernière était unique. MORRIS et SEMIATIN [110, 111] ont complété les travaux de PIEHLER et BACKOFEN par un certain nombre de relations qui assurent un traitement rigoureux du glissement sur trois systèmes de glissement.

Le but de ce chapitre est d'étendre au cas du glissement non-cristallographique de zone $\langle 111 \rangle$ [38] les résultats que nous venons d'obtenir dans le cas du glissement cristallographique $\{110\}\langle 111 \rangle$ [67] afin notamment de déterminer les caractéristiques des plans de glissement mis en jeu, les quantités de glissement, le facteur de TAYLOR et les coefficients de son développement sur une base d'harmoniques sphériques [39]. Analogies et différences avec les publications antérieures, et plus particulièrement les résultats de PENNING [112], seront soulignées en

appendice. Comme dans les chapitres précédents, cette extension suppose une contrainte appliquée uniaxiale, mais les raisonnements restent rigoureusement valables dans un cas plus général.

2) RELATIONS FONDAMENTALES.

Relativement au repère cristallographique R^C ($[100]$, $[010]$, $[001]$), on définit quatre repères de glissement R^G ($i = 1, 4$) caractérisés chacun par leur direction de glissement l_{ii} et l'angle de rotation propre γ_i autour de la i -ème direction l_{ii} , compté à partir de la direction l_{10} associée. Les composantes des tenseurs de déformation pure et de rotation s'obtiennent aisément, dans le repère R^C , à partir des relations (66), (69), (70) et de la matrice de passage entre l'un quelconque des R^G et R^C de la forme

$$S_i = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\cos \gamma_i}{\sqrt{3}} - \sin \gamma_i \right) & -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sin \gamma_i}{\sqrt{3}} + \cos \gamma_i \right) & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\cos \gamma_i}{\sqrt{3}} + \sin \gamma_i \right) & -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sin \gamma_i}{\sqrt{3}} - \cos \gamma_i \right) & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cos \gamma_i & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sin \gamma_i & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \quad (127)$$

A chacune des quatre directions $\langle l_{ii} \rangle$ seront donc associés les tenseurs

$$e'_1([111]) = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2\sin(\gamma_1 - 2\pi/3) & -\sin \gamma_1 & -\sin(\gamma_1 + 2\pi/3) \\ & 2\sin(\gamma_1 + 2\pi/3) & -\sin(\gamma_1 - 2\pi/3) \\ & & 2\sin \gamma_1 \end{pmatrix}$$

$$e'_2([\bar{1}\bar{1}1]) = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2\sin(\gamma_2 - 2\pi/3) & -\sin \gamma_2 & \sin(\gamma_2 + 2\pi/3) \\ & 2\sin(\gamma_2 + 2\pi/3) & -\sin(\gamma_2 - 2\pi/3) \\ & & 2\sin \gamma_2 \end{pmatrix}$$

$$e'_3([\bar{1}1\bar{1}]) = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2\sin(\gamma_3 - 2\pi/3) & \sin \gamma_3 & -\sin(\gamma_3 + 2\pi/3) \\ & 2\sin(\gamma_3 + 2\pi/3) & \sin(\gamma_3 - 2\pi/3) \\ & & 2\sin \gamma_3 \end{pmatrix}$$

$$e'_4([1\bar{1}\bar{1}]) = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2\sin(\gamma_4 - 2\pi/3) & \sin \gamma_4 & \sin(\gamma_4 + 2\pi/3) \\ & 2\sin(\gamma_4 + 2\pi/3) & \sin(\gamma_4 - 2\pi/3) \\ & & 2\sin \gamma_4 \end{pmatrix}$$

TABLEAU 16 : COMPOSANTES DU TENSEUR DE DEFORMATION ASSOCIE AUX QUATRE DIRECTIONS $\langle 111 \rangle$ (glissement non-cristallographique).

$$e_1^2(\{111\}) = \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 & 2\cos\sigma_1 & \sqrt{3}\sin\sigma_1 + \cos\sigma_1 \\ -2\cos\sigma_1 & 0 & \sqrt{3}\sin\sigma_1 - \cos\sigma_1 \\ -\sqrt{3}\sin\sigma_1 - \cos\sigma_1 & -\sqrt{3}\sin\sigma_1 + \cos\sigma_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e_2^2(\{\bar{1}\bar{1}1\}) = \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 & 2\cos\sigma_2 & -\sqrt{3}\sin\sigma_2 - \cos\sigma_2 \\ -2\cos\sigma_2 & 0 & -\sqrt{3}\sin\sigma_2 + \cos\sigma_2 \\ \sqrt{3}\sin\sigma_2 + \cos\sigma_2 & \sqrt{3}\sin\sigma_2 - \cos\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e_3^2(\{\bar{1}1\bar{1}\}) = \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 & -2\cos\sigma_3 & \sqrt{3}\sin\sigma_3 + \cos\sigma_3 \\ 2\cos\sigma_3 & 0 & -\sqrt{3}\sin\sigma_3 + \cos\sigma_3 \\ -\sqrt{3}\sin\sigma_3 - \cos\sigma_3 & \sqrt{3}\sin\sigma_3 - \cos\sigma_3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e_4^2(\{1\bar{1}\bar{1}\}) = \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 & -2\cos\sigma_4 & -\sqrt{3}\sin\sigma_4 - \cos\sigma_4 \\ 2\cos\sigma_4 & 0 & \sqrt{3}\sin\sigma_4 - \cos\sigma_4 \\ \sqrt{3}\sin\sigma_4 + \cos\sigma_4 & -\sqrt{3}\sin\sigma_4 + \cos\sigma_4 & 0 \end{pmatrix}$$

TABEAU 17 : COMPOSANTES DES TENSEURS ANTI-SYMETRIQUES DE ROTATION
(glissement non-cristallographique).

e_i' (déformation pure) et \tilde{e}_i' (rotation) dont les composantes sont reportées dans les tableaux 16 et 17.

La méthodologie utilisée dans le cas du glissement cristallographique peut être adaptée au cas du glissement non-cristallographique en procédant de la manière suivante :

a) la contrainte effective sur un grain σ peut toujours se mettre sous la forme :

$$\sigma = \sum_{J=1}^6 A_J \sigma_J \quad ; \quad (128)$$

les tenseurs σ_J (tableau 18), toujours définis à un tenseur hydrostatique près, constituent une base dans R^C et leurs déviateurs sont tels que

$$\sum_{J=1}^6 \sigma_J = 0 \quad . \quad (129)$$

b) Loi de comportement.

Le modèle de Taylor [25] suggère que la cission critique τ_0 est la même sur tous les systèmes de glissement. La contrainte effective sur un grain doit donc vérifier, pour $i = 1$ à 4, les conditions

$$-1 \leq \frac{\sigma \cdot e_i^{iC}}{\tau_0} \leq 1 \quad , \quad (130)$$

$$\sigma_1 = \frac{3\sigma_0}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_4 = \frac{3\sigma_0}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 = \frac{3\sigma_0}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_5 = \frac{3\sigma_0}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3 = \frac{3\sigma_0}{8} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_6 = \frac{3\sigma_0}{8} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

TABLEAU 18 : BASE DE DECOMPOSITION DE LA CONTRAINTE SUR UN GRAIN

(cubiques centrés).

l'égalité n'étant réalisée que pour les systèmes actifs. Les relations (129) et (130), complétées par les tableaux 16 et 17, conduisent alors aux quatre inéquations impliquant les coefficients A_j :

$$-1 \leq \left(\frac{A_1 + A_2}{2} - A_3 \right) \sin \vartheta_1 + \frac{3}{2} (A_1 - A_2) \cos \vartheta_1 \leq 1 \quad (131)$$

$$-1 \leq \left(\frac{A_4 + A_5}{2} - A_3 \right) \sin \vartheta_2 + \frac{3}{2} (A_4 - A_5) \cos \vartheta_2 \leq 1 \quad (132)$$

$$-1 \leq \left(\frac{A_2 + A_4}{2} - A_6 \right) \sin \vartheta_3 + \frac{3}{2} (A_2 - A_4) \cos \vartheta_3 \leq 1 \quad (133)$$

$$-1 \leq \left(\frac{A_1 + A_5}{2} - A_6 \right) \sin \vartheta_4 + \frac{3}{2} (A_1 - A_5) \cos \vartheta_3 \leq 1 \quad (134)$$

Glisser effectivement sur le i -ème système implique de rechercher l'extrémum d'une fonction

$$f(\vartheta_i) = A_i \sin \vartheta_i + B_i \cos \vartheta_i \quad (135)$$

qui est atteint pour une valeur particulière ϑ_0 telle que $A \cos \vartheta_0 = B \sin \vartheta_0$,
soit encore

$$\sin \vartheta_0 = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad \text{et} \quad \cos \vartheta_0 = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} .$$

Ceci entraîne que

$$|A \sin \vartheta_1 + B \cos \vartheta_1| \leq |A \sin \vartheta_0 + B \cos \vartheta_0| = \sqrt{A^2 + B^2} , \quad (136)$$

de sorte que les inégalités initiales peuvent alternativement être écrites

$$\left[\frac{A_1 + A_2}{2} - A_3 \right]^2 + 3 \left[\frac{A_1 - A_2}{2} \right]^2 \leq 1 , \quad (137)$$

$$\left[\frac{A_4 + A_5}{2} - A_3 \right]^2 + 3 \left[\frac{A_4 - A_5}{2} \right]^2 \leq 1 , \quad (138)$$

$$\left[\frac{A_2 + A_4}{2} - A_6 \right]^2 + 3 \left[\frac{A_4 - A_2}{2} \right]^2 \leq 1 , \quad (139)$$

$$\left[\frac{A_1 + A_5}{2} - A_6 \right]^2 + 3 \left[\frac{A_1 - A_5}{2} \right]^2 \leq 1 , \quad (140)$$

et se réduisent à des égalités lorsque le système de glissement correspondant est sollicité, système dont la normale au plan de glissement est alors déterminée de manière univoque par l'angle σ_0 .

c) Facteur de Taylor $M(\alpha, \beta, \gamma; q)$.

Pour une contrainte appliquée uniaxiale, le facteur de TAYLOR est défini par

$$M(\alpha, \beta, \gamma; q) = \frac{\sigma_c \dot{\epsilon}_c}{\sigma_0} = \sum_{J=1}^6 \frac{\sigma_J \dot{\epsilon}_J}{\sigma_0} = \sum_{J=1}^6 M_{J J}(\text{c.c.}) \quad (141)$$

($\dot{\epsilon}^c$ est le tenseur vitesse de déformation dans R^c (66)).

Les facteurs partiels $M_J(\text{c.c.})$ sont liés aux facteurs $M_J(\text{c.f.c.})$ par

$$M_{J J}(\text{c.c.}) = \frac{\sqrt{3}}{2} M_J(\text{c.f.c.}) \quad (142)$$

et corrélativement satisfont

$$\sum_{J=1}^6 M_{J J}(\text{c.c.}) = 0. \quad (143)$$

d) Conséquences.

- dans le cas d'une contrainte quelconque, les uniques modifications à envisager dans nos raisonnements concerneront le calcul des facteurs partiels M_J ;

- indépendamment des inégalités (137) à (140), cette der-

nière propriété (relation 143) permet de définir les coefficients A_J à une constante arbitraire C près :

- la mise en oeuvre du principe du travail maximum va conduire à déterminer les coefficients A_J permettant de réaliser $M(\alpha, \beta, \gamma; q)$ maximum.

3) GLISSEMENT SUR QUATRE SYSTEMES.

Les quatre inégalités (137) à (140) se réduisent à quatre égalités qui peuvent se réécrire :

$$A_{11}^2 + A_{12}^2 + A_{13}^2 - A_{12}A_{13} - A_{11}(A_{12} + A_{13}) = 1, \quad (144)$$

$$A_{33}^2 + A_{34}^2 + A_{35}^2 - A_{34}A_{35} - A_{33}(A_{34} + A_{35}) = 1, \quad (145)$$

$$A_{22}^2 + A_{24}^2 + A_{26}^2 - A_{24}A_{26} - A_{22}(A_{24} + A_{26}) = 1, \quad (146)$$

$$A_{11}^2 + A_{15}^2 + A_{16}^2 - A_{15}A_{16} - A_{11}(A_{15} + A_{16}) = 1, \quad (147)$$

Par recombinaisons, on obtient :

$$(144)+(145) \longrightarrow 2A_3^2 + (A_1^2 + A_2^2 + A_4^2 + A_5^2)$$

$$- A_1 A_2 - A_4 A_5 - A_3 (A_1 + A_2 + A_4 + A_5) = 2, \quad (148)$$

$$(146)+(147) \longrightarrow 2A_6^2 + (A_1^2 + A_2^2 + A_4^2 + A_5^2)$$

$$- A_2 A_4 - A_1 A_5 - A_3 (A_1 + A_2 + A_4 + A_5) = 2, \quad (149)$$

et finalement

$$(148)+(149) \longrightarrow (A_3 - A_6)(2A_3 + 2A_6 - A_2 - A_5 - A_3 - A_6) =$$

$$(A_1 - A_4)(A_2 - A_5) \quad (150)$$

En posant : $u = A_1 - A_4$, $v = A_2 - A_5$ et $w = A_3 - A_6$ et par permutations, le système initial se réduit aux trois équations

$$u (2A_1 + 2A_4 - A_2 - A_3 - A_5 - A_6) = vw, \quad (151)$$

$$v (2A_2 + 2A_5 - A_1 - A_3 - A_4 - A_6) = uw, \quad (152)$$

$$w (2A_3 + 2A_6 - A_1 - A_2 - A_4 - A_5) = uv, \quad (153)$$

qui se condensent en une équation unique

$$u^2 v^2 + v^2 w^2 + w^2 u^2 = 0 \quad (154)$$

satisfaite que si au moins deux des paramètres u , v ou w sont nuls.

En examinant par exemple le cas $u = v = 0$, soit encore $A_1 = A_4$ et

et $A_2 = A_5$, il vient :

$$(153) \longrightarrow (A_3 - A_6)(A_3 + A_6 - A_1 - A_2) = 0. \quad (155)$$

Les coefficients A_j étant définis à une constante C près, on choisira cette dernière en prenant par exemple

$$A_1 + A_2 = 0, \quad (156)$$

d'où

$$(A_3 - A_6)(A_3 + A_6) = 0 \quad (157)$$

ce qui entraîne :

$$A_3 = \pm A_6. \quad (158)$$

On aboutit alors à l'équation

$$A_3^2 + 3A_1^2 = 1. \quad (159)$$

Compte-tenu des diverses relations entre les A_j , et pour le cas étudié

$u = v = 0$, le facteur de TAYLOR $M(g;q)$ ne dépend plus que d'un seul paramètre

$$M(g; q) = \sum_{J=1}^6 \frac{A_J M_J}{J} \text{ (c.c.)} \quad (160)$$

$$= \frac{(M_1 + M_4 - M_2 - M_5) \Lambda \pm (M_3 + M_6) \sqrt{1 - 3\Lambda^2}}{1} \cdot$$

L'extrémum de ce facteur correspond à

$$\frac{d}{d\Lambda_1} M(g; q) = 0 ; \quad (161)$$

d'où il résulte

$$\Lambda_1 = \frac{\pm (M_1 + M_4 - M_2 - M_5)}{[3(M_1 + M_4 - M_2 - M_5)^2 + 9(M_3 \pm M_6)]^{1/2}} \quad (162)$$

et

$$M_{\pm I} = \left[\frac{(M_1 + M_4 - M_2 - M_5)^2}{3} + (M_3 \pm M_6)^2 \right]^{1/2} \quad (163)$$

dont le maximum est :

$$M_I = \left[\frac{(M_1 + M_4 - M_2 - M_5)^2}{3} + \left(\frac{M_3}{3} + \frac{M_6}{6} \right)^2 \right]^{1/2}$$

Les deux autres possibilités $u = w = 0$ (II) et $v = w = 0$ (III) fournissent des termes analogues M_{II} et M_{III} qui se déduisent de M_I à l'aide des permutations d'indices suivantes :

I	1 2 3 4 5 6 ,
II	3 1 2 6 4 5 ,
III	2 3 1 5 6 4 .

La plus grande de ces trois valeurs sera notée $M_0(g;q)$ et conservée comme grandeur caractéristique du glissement sur quatre systèmes.

Le nombre de possibilités différentes rencontré dans les travaux antérieurs (PIEHLER et BACKOFEN [106] ; PENNING [112]) résulte essentiellement du calcul du facteur de TAYLOR $M(g;q)$ à partir des quantités de glissement. Notre analyse à partir de la recherche des états de contraintes admissibles par le biais des coefficients A_j ne retient et compare finalement que trois cas différents se déduisant simplement l'un de l'autre par une permutation d'indices particulièrement commode dans les applications numériques ultérieures. Il est à noter que la connaissance de l'équation (141) aurait permis le calcul de $M(g;q)$ dans les travaux de PIEHLER et BACKOFEN. L'utilisation des résultats de ces auteurs dans notre formalisme permet de retrouver ceux de Penning. De ce fait, une comparaison entre ces diverses approches est détaillée en appendice.

Pour le cas particulier précédemment discuté, c'est-à-dire $u = v = 0$, les relations entre A_J introduites dans les équations (131) à (134) montrent que

$$\gamma_1 = \gamma_2 \pmod{\pi}, \quad (165)$$

$$\gamma_3 = \gamma_4 \pmod{\pi}, \quad (166)$$

$$\gamma_1 = \gamma_3 \pmod{\pi}, \quad (167)$$

dans le cas du glissement sur quatre systèmes. Il apparaît donc indispensable de fixer univoquement les orientations des normales aux plans de glissement à partir de la décomposition suivante du tenseur de déformation pure

$$\epsilon^c = E \sum_{k=1}^4 l^k e^c. \quad (168)$$

Les quantités de glissement l^k et les angles γ_k se déduiront du calcul des facteurs partiels $M_J(\text{c.c.})$ par la relation générale

$$M_J(\text{c.c.}) = \frac{\left(\sum_{i=1}^4 l^i e^c \right)_J \sigma}{\tau_0} \quad \text{pour } J = 1, 6 \quad (169)$$

qui conduit au système d'équations

$$\left\{ \begin{array}{l}
 M_1 = l^1 \sin(2\pi/3 - \sigma) + l^4 \sin(2\pi/3 - \sigma) \\
 M_2 = -l^1 \sin(2\pi/3 + \sigma) - l^3 \sin(2\pi/3 + \sigma) \\
 M_3 = -l^1 \sin \sigma - l^2 \sin \sigma \\
 M_4 = l^2 \sin(2\pi/3 - \sigma) + l^3 \sin(2\pi/3 - \sigma) \\
 M_5 = -l^2 \sin(2\pi/3 + \sigma) - l^4 \sin(2\pi/3 + \sigma) \\
 M_6 = -l^3 \sin \sigma - l^4 \sin \sigma
 \end{array} \right.$$

La résolution de ce système peut être commodément achevée dans une représentation vectorielle, d'axes rectangulaires de vecteurs unitaires \vec{i} et \vec{j} dans laquelle les inconnues l^i et σ_i sont les coordonnées polaires des vecteurs \vec{l}^i qui vérifient les relations

$$(\vec{l}^1 + \vec{l}^2) \cdot \vec{j} = \vec{a} \cdot \vec{j} = -M_3, \quad (171)$$

$$(\vec{l}^3 + \vec{l}^4) \cdot \vec{j} = \vec{b} \cdot \vec{j} = -M_6, \quad (172)$$

$$(\vec{l}^1 + \vec{l}^2 + \vec{l}^3 + \vec{l}^4) \cdot \vec{i} = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{i} = \Delta = \frac{M_1 + M_4 - M_2 - M_5}{\sqrt{3}}. \quad (173)$$

Compte-tenu de l'indétermination sur les angles φ_i décrite par les relations (165 à 167) et représentée sur les figures 21, on trouve aisément que

$$\vec{a} = \Delta \frac{|M_3|}{|M_3| + |M_6|} \vec{i} - M_3 \vec{j}, \quad (174)$$

$$\vec{b} = \Delta \frac{|M_6|}{|M_3| + |M_6|} \vec{i} - M_6 \vec{j}, \quad (175)$$

On achèvera cette résolution en introduisant les vecteurs

$$\vec{a}' = \vec{l}^1 - \vec{l}^2 = \lambda \vec{a}, \quad (176)$$

$$\vec{b}' = \vec{l}^3 - \vec{l}^4 = \mu \vec{b}, \quad (177)$$

satisfaisant par ailleurs

$$\frac{M_1}{1} - \frac{M_2}{2} - \frac{M_4}{4} + \frac{M_5}{5} = \sqrt{3} \vec{a}' \cdot \vec{i} - \vec{b}' \cdot \vec{j} = \lambda \sqrt{3} \Delta \frac{|M_3|}{|M_3| + |M_6|} + \mu M_6, \quad (178)$$

$$-\frac{M_1}{1} - \frac{M_2}{2} + \frac{M_4}{4} + \frac{M_5}{5} = \sqrt{3} \vec{b}' \cdot \vec{i} - \vec{a}' \cdot \vec{j} = \mu \sqrt{3} \Delta \frac{|M_6|}{|M_3| + |M_6|} + \lambda M_3, \quad (179)$$

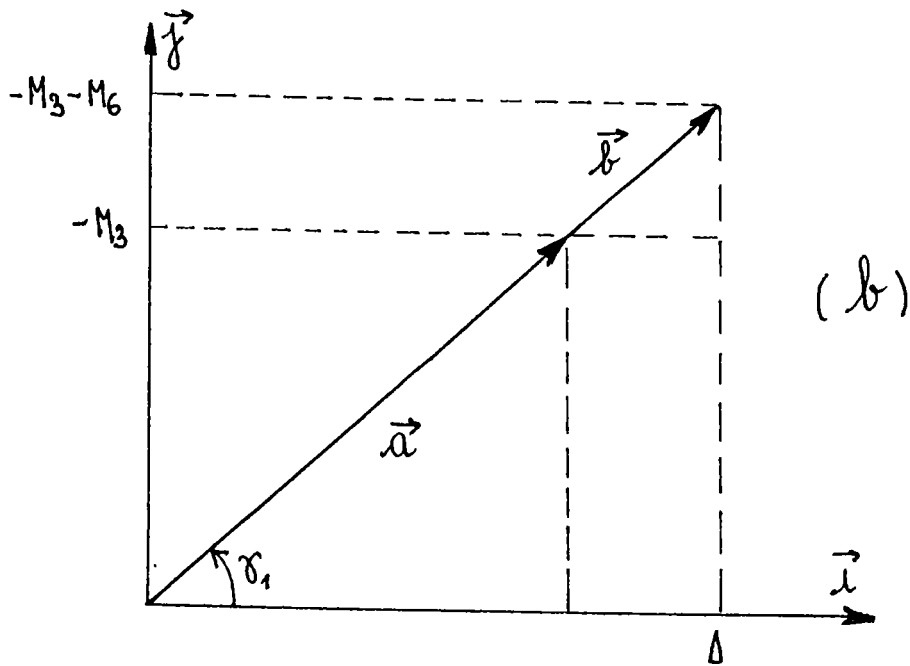
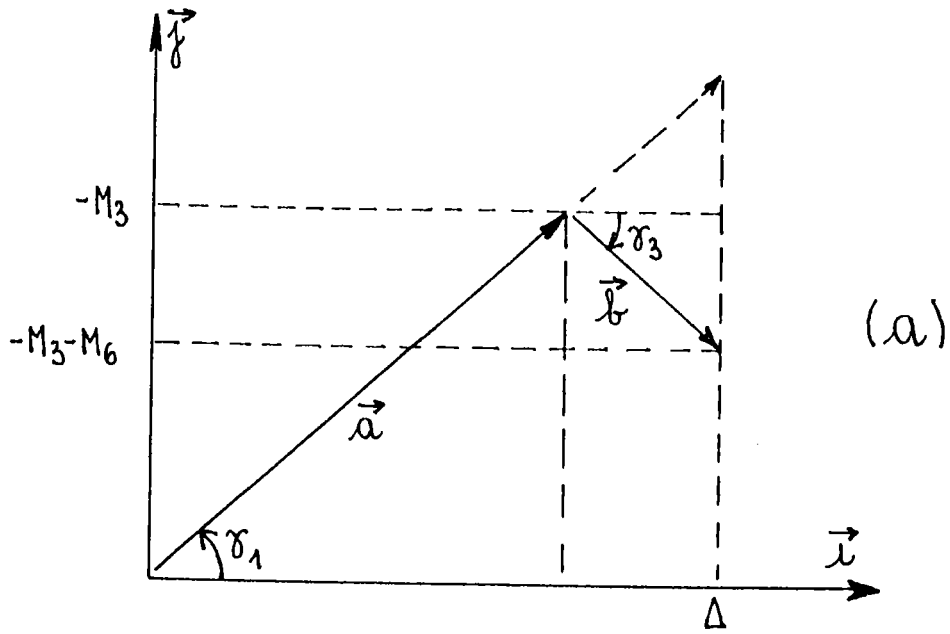


FIGURE 21 : DETERMINATION DES QUANTITES DE GLISSEMENT \vec{f}^i dans le cas du glissement sur 4 systèmes.

Il est alors commode d'introduire de nouveaux paramètres

d_1, d_2, d_3 tels que :

$$\begin{aligned} \cos d_1 &= A_3 - \frac{A_4 + A_5}{2} ; & \sin d_1 &= \frac{\sqrt{3}}{2} (A_4 - A_5) ; \\ \cos d_2 &= A_2 - \frac{A_4 + A_6}{2} ; & \sin d_2 &= \frac{\sqrt{3}}{2} (A_4 - A_6) ; \\ \cos d_3 &= A_1 - \frac{A_5 + A_6}{2} ; & \sin d_3 &= \frac{\sqrt{3}}{2} (A_5 - A_6) ; \end{aligned} \quad (182)$$

et assujettis à la condition supplémentaire

$$\sin d_1 + \sin d_2 + \sin d_3 = 0 . \quad (183)$$

Le facteur de Taylor s'écrit encore de manières équivalentes

$$M(g; q) = \sum_{J=1}^6 A_J M_J(\text{c.c.}) = \sum_{i=1}^3 (B_i \cos d_i + C_i \sin d_i) , \quad (184)$$

ce qui entraîne par identification

$$B_1 = M_3 ; \quad C_1 = \frac{2}{3\sqrt{3}} (M_4 - M_5 + \frac{M_2 - M_1}{2}) + K ;$$

$$B_2 = M_2 ; \quad C_2 = \frac{2}{3\sqrt{3}} (M_6 - M_4 + \frac{M_1 - M_3}{2}) + K ;$$

$$B_3 = M_1 \quad ; \quad C_3 = \frac{2}{3\sqrt{3}} (M_5 - M_6 + \frac{M_3 - M_2}{2}) + K \quad ;$$

où K est une constante ajustable qui déterminera une origine des coefficients C_i .

Il ressort de cette analyse que les B_i et C_i représentent les projections sur deux axes rectangulaires des vecteurs l^i (dans ce cas l^2, l^3 et l^4) non nuls, de modules $[B_i^2 + C_i^2(K)]^{1/2}$. La constante ajustable K est alors déterminée en recherchant l'extrémum (avec $l^1 = 0$) du facteur de TAYLOR

$$M(g; q) = \sum_{i=1}^4 |l^i| = \sum_{i=1}^3 [B_i^2 + C_i^2(K)]^{1/2} \quad (186)$$

et en respectant

$$\sum_{i=1}^3 C_i(K) = 3K \quad (187)$$

La recherche numérique de cette constante K se fait par un procédé de type NEWTON-RAPHSON comportant les étapes suivantes :

* étape 1 : sélection d'une origine des $C_i(K)$.

on choisira par exemple $K_0 = -C_2(0)$ si

$C_1(0) = C_2(0) = C_3(0)$ (figure 22)

* étape 2 : calcul de l'incrément ΔK_n (pour l'itération de rang n).

Une variation ΔK_n doit rendre extrêmu

le facteur de TAYLOR

$$\begin{aligned}
 N(K_n + \Delta K_n) = & \sum_{i=1}^3 \frac{B_i^2 + C_i^2(K_n)}{[B_i^2 + C_i^2(K_n)]^{1/2}} \\
 & + \Delta K_n \sum_{i=1}^3 \frac{C_i(K_n)}{[B_i^2 + C_i^2(K_n)]^{1/2}} \\
 & + \frac{\Delta K_n}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{B_i^2}{[B_i^2 + C_i^2(K_n)]^{1/2}} + \dots
 \end{aligned} \tag{188}$$

d'où

$$\begin{aligned}
 K_n = & \frac{\sum_{i=1}^3 \frac{C_i(K_n)}{[B_i^2 + C_i^2(K_n)]^{1/2}}}{\sum_{i=1}^3 \frac{B_i^2}{[B_i^2 + C_i^2(K_n)]^{1/2}}} = \frac{N(K_n)}{D(K_n)} \tag{189}
 \end{aligned}$$

* étape 3 : calcul du facteur de TAYLOR

$$N(K_n + \Delta K_n) = N(K_n) - \frac{N^2(K_n)}{2D(K_n)},$$

et comparaison avec la valeur $M(K_{n-1} + \Delta K_{n-1})$ en pratiquant les corrections successives

$$K_n = K_0 + \Delta K_0 + \dots + \Delta K_n$$

avec $K_0 = -C_2(0)$ et en vérifiant $C_3(0) \leq K_n + C_2(0) \leq C_1(0)$.

Quelques itérations seulement suffisent dans la procédure numérique retenue pour déterminer K_n et le facteur de TAYLOR associé que l'on notera $M_I'(g;q) [l^1=0]$. Il reste ensuite à vérifier, que dans le cas particulier envisagé ($l^1=0$), la solution trouvée est acceptable, c'est-à-dire satisfait l'inéquation (180) qui se formule encore de la manière suivante

$$\left[\cos d_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \sin d_2 - 2\pi/3 \right\} - \sin d_3 + 2\pi/3 \right]^2 + \left[\sin d_2 + 2\pi/3 + \sin d_3 - 2\pi/3 \right]^2 < 1 \quad (192)$$

en posant (à π près) :

$$\cos d_i = B_i / l^i \quad \text{et} \quad \sin d_i = C_i / l^i \quad (i = 2, 3, 4) \cdot$$

Il restera ensuite à comparer ce résultat aux possibilités restantes $M_{II}' [l^2=0]$, $M_{III}' [l^3=0]$ et $M_{IV}' [l^4=0]$ en retenant comme facteur de TAYLOR associé au glissement non-cristallographique sur trois systèmes la plus grande de ces quatre valeurs, sous réserve que dans tous les cas l'inéquation de type (192) soit satisfaite (un calcul détaillé est présenté en annexe).

Le raisonnement précédent donne les quantités de glissement

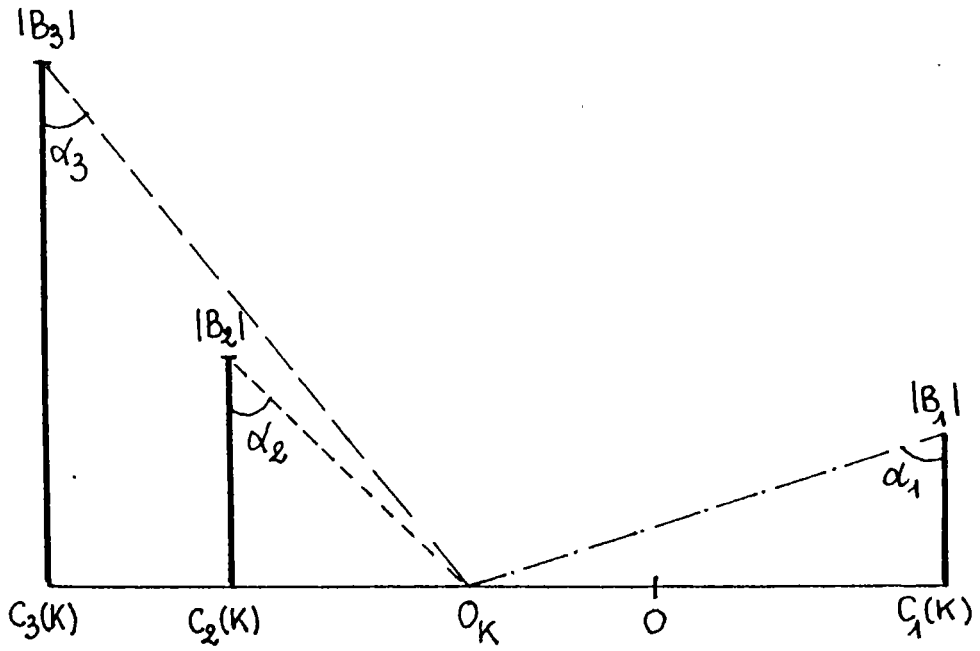
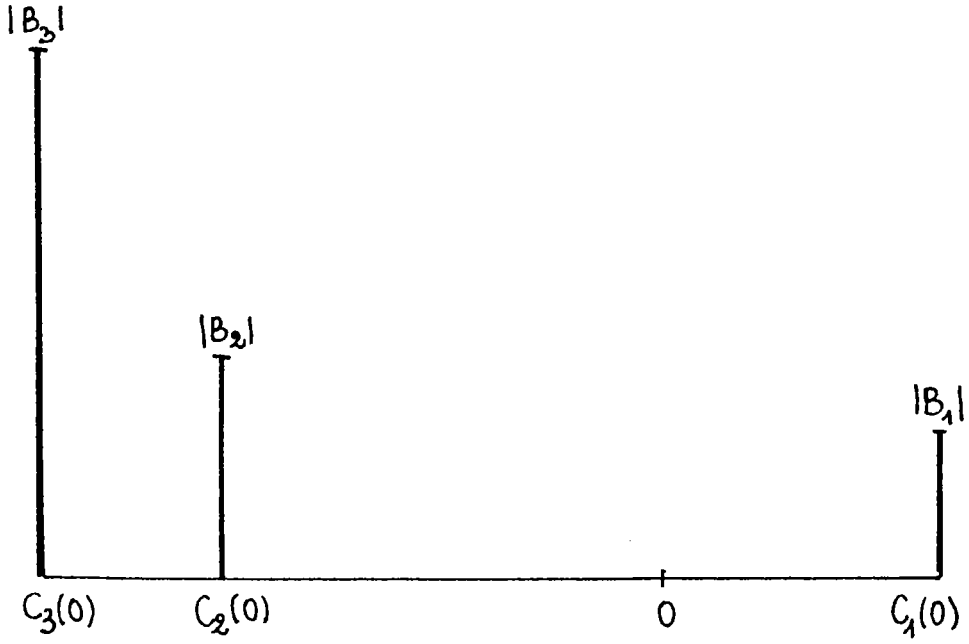


FIGURE 22 : RECHERCHE D'UNE ORIGINE DES $C_1(K)$.

$$l^i = \left[\frac{B_i^2}{i} + C_i (K_n) \right]^{1/2} \quad (i = 2, 3, 4) \quad (194)$$

et corrélativement, par résolution du système (170), les angles γ_i .

Ainsi, pour $l^1=0$, ce système se réduit à :

$$\sin \gamma_2 = -\frac{M_3}{l^2}$$

$$\sin(\gamma_3 - 2\pi/3) = \frac{M_2}{l^3} \quad (195)$$

$$\sin(\gamma_4 + 2\pi/3) = \frac{M_1}{l^4}$$

L'analyse de PENNING [112] du glissement effectif sur 3 systèmes entraîne l'introduction d'une équation transcendante dont l'inconnue x_i correspond à la constante K et se trouve fixée univoquement en respectant le critère du travail de déformation plastique minimum de TAYLOR.

5) FACTEUR DE TAYLOR.

a) Sélection du facteur $M(g; q)$.

L'approche analytique de la recherche des systèmes de glissement actifs proposée dans le cas du glissement non-cristallographique d'axe de zone $\langle 111 \rangle$ implique donc la comparaison de sept solutions énergétiquement différentes dans le cas général. La comparaison de ces possibilités conduit au facteur de TAYLOR $M(g;q)$ finalement associé à la plus grande de ces valeurs.

La figure 23 illustre plus particulièrement le comportement de $M(g;1/2)$ dans le triangle stéréographique standard, en indiquant les différents domaines et le nombre de systèmes de glissement mis en jeu pour rendre ce facteur extrêmu. Ces résultats confirment le découpage précédemment obtenu par DILLAMORE et KATOH [113] et corrigent ceux de ROSENBERG et PIEHLER [107], correction ultérieurement aussi apportée par LOGAN et HOSFORD [114].

b) Décomposition sur une base d'harmoniques sphériques - valeur moyenne.

Les relations de symétrie (112) à (120) restant vraies, le calcul des coefficients $M_{2m0}^{2l}(q)$, à partir de (124), a été effectué à partir d'un réseau à pas régulier en α et δ , et une intégration gaussienne à $N = 20$ points en β . Les résultats obtenus, avec ce réseau à 1100 points, sont rassemblés dans le tableau 19.

Afin de simplifier certaines applications numériques, un lissage par une méthode des moindres carrés, des M_{2m0}^{2l} (c.c.) est proposé dans le tableau que l'on complète par les figures 24 à 28 décrivant le comportement de ces lissages par rapport aux valeurs tabulées.

Le tableau fournit de plus un récapitulatif des valeurs moyennes $M(1/2)$ obtenues par différents auteurs ainsi que les éventuelles précisions sur la nature des systèmes de glissement retenus.

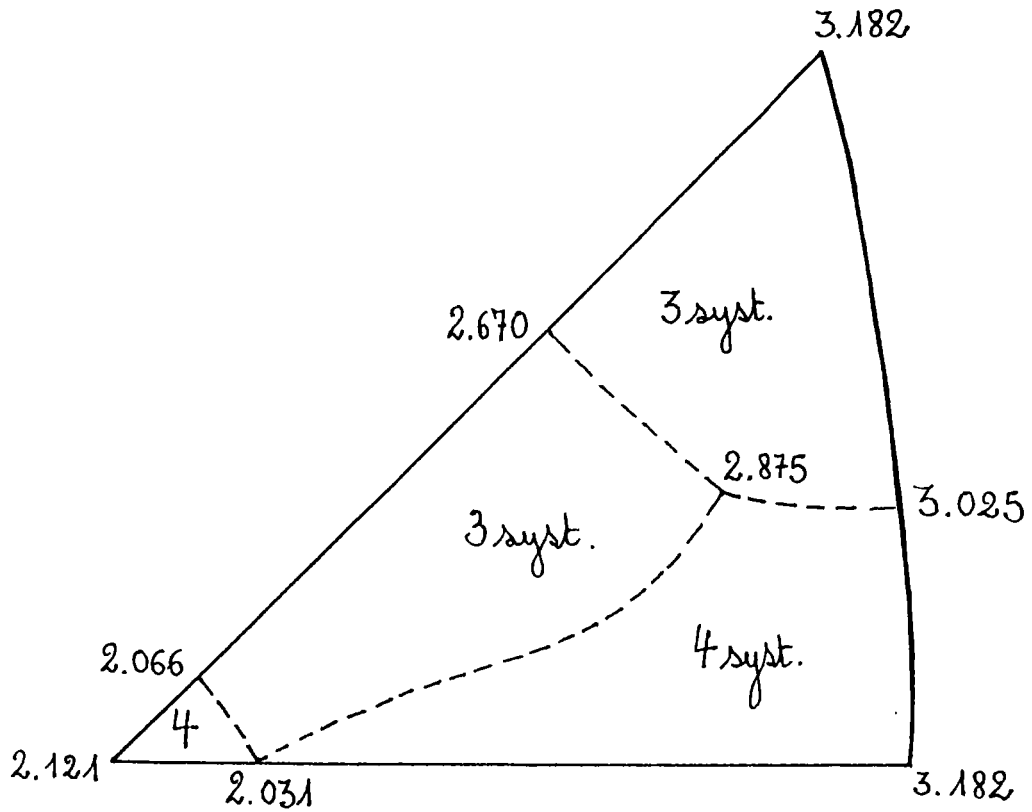


FIGURE 23 : COMPORTEMENT DU FACTEUR DE TAYLOR $M(g, 1/2)$ dans le triangle standard. Frontières des domaines où interviennent 3 ou 4 systèmes.

		$\Omega=0,0$	$\Omega=0,1$	$\Omega=0,2$	$\Omega=0,3$	$\Omega=0,4$	$\Omega=0,5$	$\Omega=0,6$	$\Omega=0,7$	$\Omega=0,8$	$\Omega=0,9$	$\Omega=1,0$
0	0	2,7402	2,7427	2,7508	2,7644	2,7842	2,8107	2,8448	2,8866	2,9369	2,9961	3,0660
4	0	- 0,8968	- 0,8979	- 0,9022	- 0,9079	- 0,9158	- 0,9270	- 0,9423	- 0,9614	- 0,9829	- 1,0059	- 1,0254
6	0	- 0,3448	- 0,3391	- 0,3218	- 0,2930	- 0,2554	- 0,2112	- 0,1632	- 0,1144	- 0,0685	- 0,0288	- 0,0160
8	0	0,1709	0,1687	0,1598	0,1446	0,1270	0,1067	0,0828	0,0551	0,0196	- 0,0229	- 0,0671
10	0	- 0,2518	- 0,2491	- 0,2370	- 0,2183	- 0,1931	- 0,1618	- 0,1241	- 0,0839	- 0,4575	- 0,0150	0,0040
4	2	0,0000	- 0,1567	- 0,3103	- 0,4610	- 0,6057	- 0,7433	- 0,8707	- 0,9861	- 1,0858	- 1,1673	- 1,2249
6	2	0,0000	0,0042	0,0117	0,0216	0,0293	0,0342	0,0380	0,0409	0,0470	0,0554	0,0670
8	2	0,0000	- 0,0341	- 0,0689	- 0,1016	- 0,1323	- 0,1595	- 0,1814	- 0,1977	- 0,2033	- 0,1974	- 0,1787
10	2	0,0000	- 0,0150	- 0,0310	- 0,0475	- 0,0598	- 0,0657	- 0,0656	- 0,0590	- 0,0444	- 0,0228	- 0,0084
4	4	0,0000	0,0019	0,0067	0,0146	0,0259	0,0377	0,0490	0,0588	0,0653	0,0678	0,0610
6	4	0,0000	- 0,0015	- 0,0063	- 0,0162	- 0,0317	- 0,0537	- 0,0830	- 0,1167	- 0,1517	- 0,1846	- 0,2014
8	4	0,0000	- 0,0012	- 0,0031	- 0,0063	- 0,0117	- 0,0183	- 0,0253	- 0,0338	- 0,0418	- 0,0488	- 0,0513
10	4	0,0000	- 0,0012	- 0,0048	- 0,0117	- 0,0190	- 0,0259	- 0,0297	- 0,0299	- 0,0250	- 0,0145	- 0,0012
6	6	0,0000	0,0003	0,0012	0,0042	0,0085	0,0157	0,0265	0,0411	0,0591	0,0795	0,0995
8	6	0,0000	0,0003	0,0011	0,0031	0,0048	0,0056	0,0055	0,0058	0,0091	0,0157	0,0269
10	6	0,0000	0,0000	0,0003	- 0,0013	0,0035	- 0,0074	- 0,0147	- 0,0241	- 0,0376	- 0,0518	- 0,0589
8	8	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0015	0,0035	0,0071	0,0122	0,0225	0,0378	0,0649
10	8	0,0000	0,0003	- 0,0001	0,0006	0,0005	0,0031	0,0080	0,0154	0,0257	0,0375	0,0460
10	10	0,0000	0,0000	- 0,0001	- 0,0003	- 0,0004	- 0,0001	- 0,0009	- 0,0013	- 0,0027	- 0,0035	- 0,0062

153

TABLEAU 19 : Coefficients $M_{2m0}^{2l}(q)$ pour un glissement non cristallographique d'axe de zone $\langle 111 \rangle$ - cubiques centrés - modèle de Taylor - $\omega = 1-2q$.

$2l$ M 2m 0		$2l$ Lissages de M - cubiques centres 2m 0
$2l$	2m	
0	0	$2,7397 + 0,2729 \omega^2 + 0,0537 \omega^4$
4	0	$-0,8958 - 0,1345 \omega^2 + 0,0025 \omega^4$
4	2	$-1,5656 \omega + 0,3041 \omega^3 + 0,0355 \omega^5$
4	4	$0,1823 \omega^2 - 0,1355 \omega^4 + 0,0152 \omega^6$
6	0	$-0,3457 + 0,6110 \omega^2 - 0,2785 \omega^4$
6	2	$0,5975 \omega + 0,0186 \omega^3 - 0,0155 \omega^5$
6	4	$-0,1507 \omega^2 - 0,3102 \omega^4 + 0,2624 \omega^6$
6	6	$0,1354 \omega^3 - 0,0289 \omega^5 - 0,0061 \omega^7$
8	0	$0,1688 - 0,2399 \omega^2 + 0,0049 \omega^4$
8	2	$-0,3463 \omega + 0,0943 \omega^3 + 0,0748 \omega^5$
8	4	$-0,0744 \omega^2 + 0,0013 \omega^4 + 0,0211 \omega^6$
8	6	$0,0785 \omega^3 - 0,1846 \omega^5 + 0,1352 \omega^7$
8	8	$0,0650 \omega^4 - 0,0476 \omega^6 + 0,0475 \omega^8$
10	0	$-0,2545 + 0,4268 \omega^2 - 0,1655 \omega^4$
10	2	$-0,1628 \omega + 0,1321 \omega^3 + 0,0430 \omega^5$
10	4	$-0,1506 \omega^2 + 0,2129 \omega^4 - 0,0624 \omega^6$
10	6	$0,0874 \omega^3 - 0,1074 \omega^5 - 0,0398 \omega^7$
10	8	$-0,0026 \omega^4 + 0,2244 \omega^6 - 0,1794 \omega^8$
10	10	$-0,0433 \omega^5 + 0,1124 \omega^7 - 0,0781 \omega^9$

TABLEAU 20 : LISSAGES DES COEFFICIENTS $M_{2m 0}^{2l}$ en

fonction du paramètre $\omega = 1 - 2q$.

(méthode des moindres carrés)

6) CONCLUSION.

L'extension au cas du glissement non-cristallographique d'axe de zone 111 du formalisme élaboré dans l'hypothèse du glissement cristallo-graphique 111 110 permet donc de traiter le cas du glissement sur qua-tre et trois systèmes et de déterminer pour chacune des possibilités le facteur de TAYLOR. Finalement, les quantités de glissement et la position de la normale au plan de glissement, repérée par l'angle de rotation ϕ , sont déterminées de manière univoque, ce qui entraîne que le champ de ro-tation des grains sera lui aussi obtenu sans ambiguïtés.

références.	hypothèses de glissement	$\bar{M}(1/2)$	nombre de plans par direc. $\langle 111 \rangle$
J.W. Hutchinson [95]	$\{hk1\}\langle 111 \rangle$	2,748	20
G.Y. Chin, W.L. Mammel et M.T. Dolan [100]	$\{110\}$ $\{112\}\langle 111 \rangle$ $\{113\}$	2,754	12
J.M. Rosenberg et H.R. Piehler [107]		2,733	
P. Parnière et L. Roesch [85] (réseau de 500 points)	glissement non cristallo- graphique	2,736	∞
F. Royer, J.M. Mohr et C. Tavard [22] (1100 pts)		2,7402	
R.W. Logan et W.F. Hosford [114] (750 points)		2,7398 ± 0,016	

Tableau 21: valeur moyenne du facteur de Taylor $\bar{M}(1/2)$.

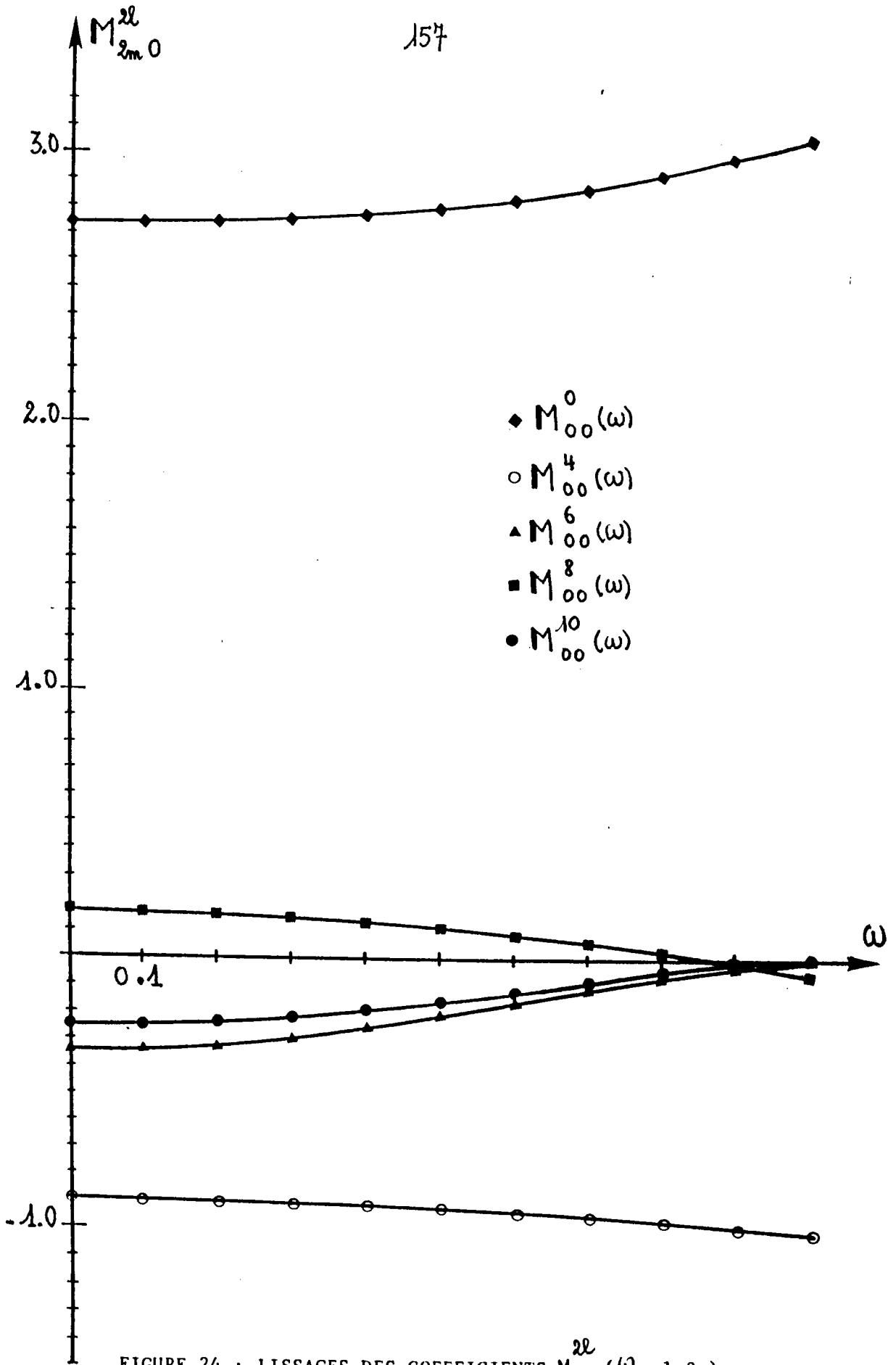


FIGURE 24 : LISSAGES DES COEFFICIENTS $M_{00}^{2l}(\omega = 1-2q)$.

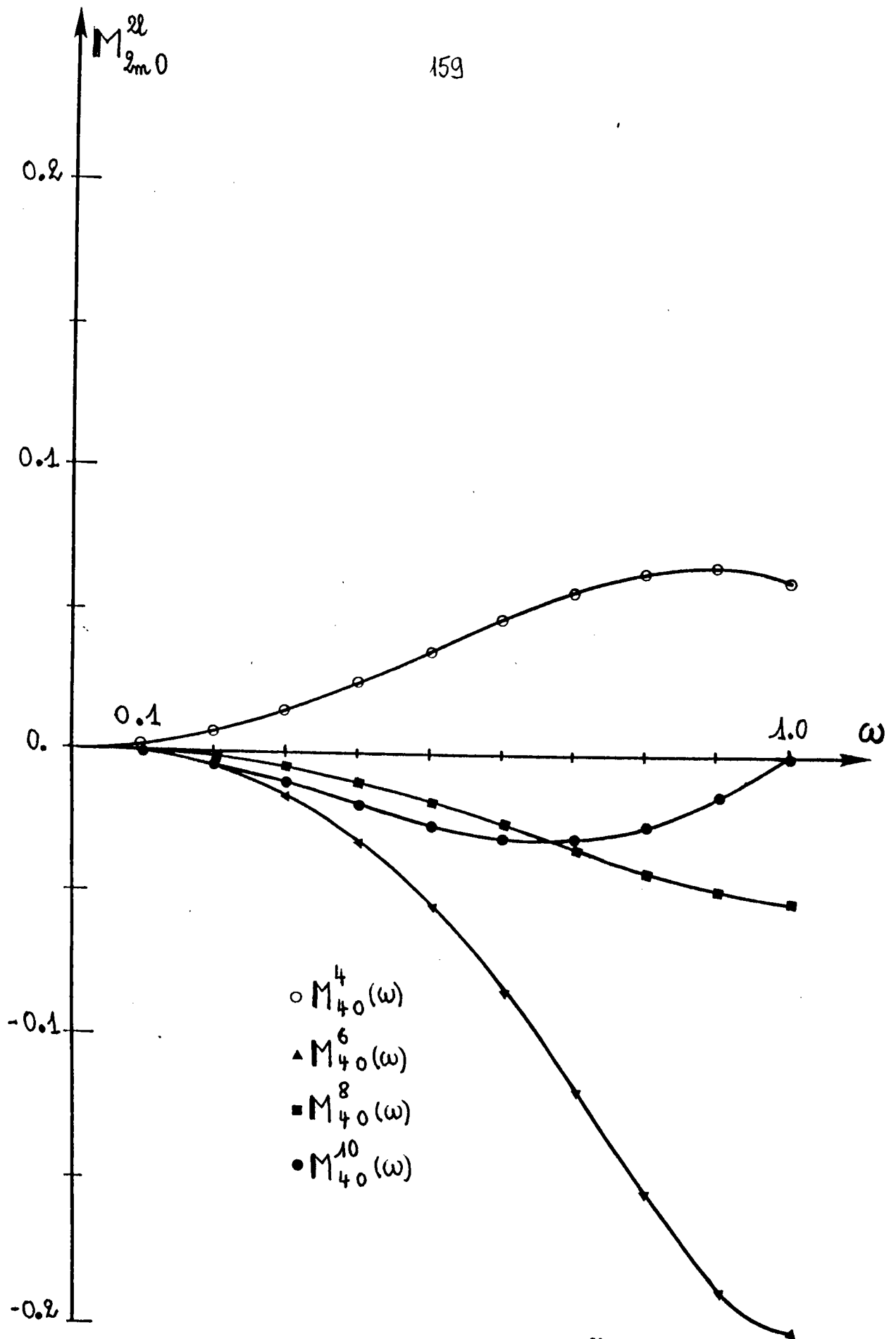


FIGURE 26 : LISSAGES DES COEFFICIENTS $M_{40}^{2l}(\omega = 1-2q)$.

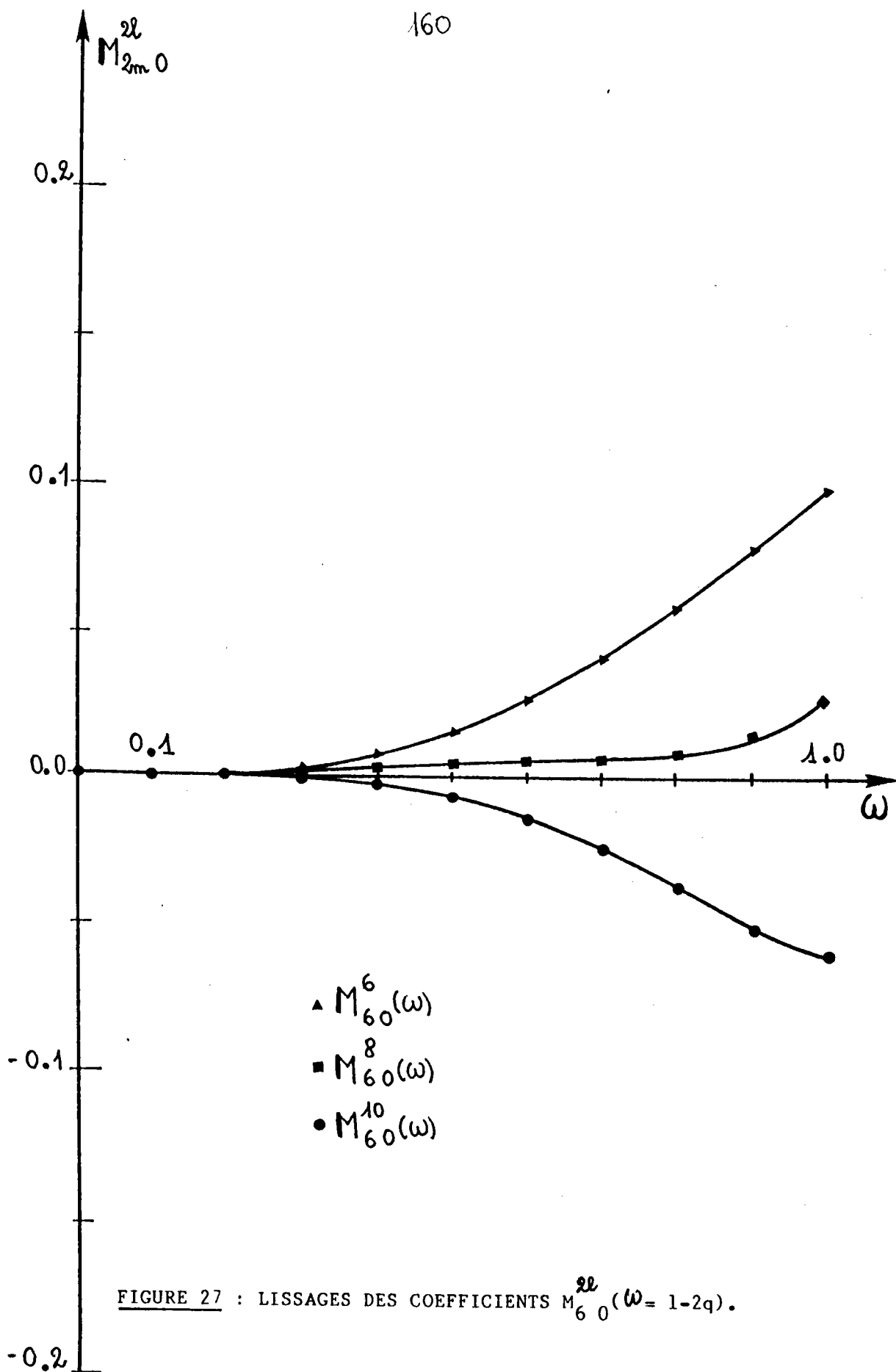


FIGURE 27 : LISSAGES DES COEFFICIENTS $M_{60}^{2l}(\omega = 1-2q)$.

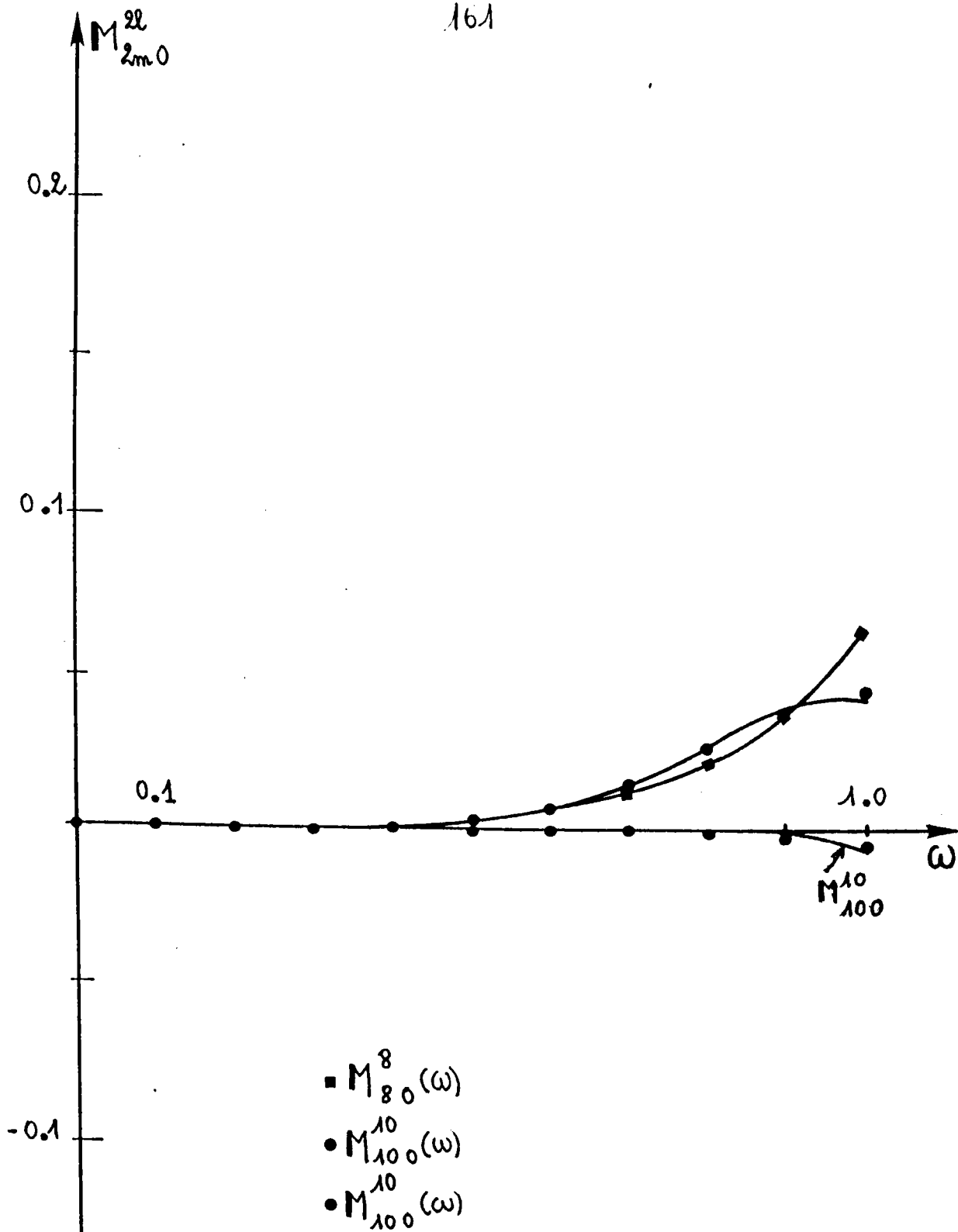


FIGURE 28 : Lissages des coefficients M_{00}^8 et M_{00}^{10}
 ($\omega = 1 - 2q$).

CHAPITRE 6 : GLISSEMENT CRISTALLOGRAPHIQUE EN MODELES DE SACHS-TAYLOR
INTERMEDIAIRES.

- 1) INTRODUCTION.
- 2) ETUDE ALGEBRIQUE DES MODELES.
- 3) ROLE DES SYMETRIES DE L'ECHANTILLON.
- 4) SPECIFICITES DES MODELES ETUDIES.
- 5) RESULTATS ET CONCLUSION.

1) INTRODUCTION.

Les symétries des polycristaux à réseau cubique permettent toujours de constituer une combinaison d'un nombre suffisant de systèmes de glissement actifs susceptibles d'accommoder l'ensemble des composantes d'un tenseur de déformation (modèle de TAYLOR) ou seulement certaines d'entre elles (modèles relaxés). L'homogénéité supposée du tenseur de déformation plastique est dans ce dernier cas limitée à certaines de ses composantes. Compte-tenu de la forme des grains (grains plats non-équiaxes pour le laminage) et par analyse des conditions de continuité des contraintes et/ou des déformations aux joints de grains certains cisaillements sont librement ajustables [33,34,35,81]. Ce type de traitement, initialement développé par LEFFERS [31,115] puis HONNEFF et NECKING [33], permet de n'envisager l'activation que d'un nombre restreint (moins de cinq) de systèmes de glissement. La sollicitation du seul système principal laisse finalement apparaître le modèle de SACHS comme la forme la plus relaxée du modèle de TAYLOR.

Une démarche similaire [80,137] conduit aussi à adjoindre au système de glissement principal un ou plusieurs systèmes par l'introduction d'hypothèses supplémentaires (symétrie cristallographique, minimisation de la dispersion des hétérogénéités de déformation, conservation de la forme des grains, ,...).

2) ETUDE ALGEBRIQUE DES MODELES.

Le relation générale (chapitre 3)

$$\dot{\epsilon}_{ij}^s = \dot{E} \sum_{\substack{k \\ \text{actifs}}} l^k \cdot e_{ij,k}^s \quad (196)$$

permet donc, pour les composantes que l'on cherchera à identifier strictement à celles du tenseur de déformation macroscopique dans le système

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k(\text{actifs})} l^k d_k = a \quad (a) \\ \sum_{k(\text{actifs})} l^k \omega_k = \omega \quad (b) \\ \sum_{k(\text{actifs})} l^k \beta_k = b \quad (c) (197) \\ \sum_{k(\text{actifs})} l^k \sigma_k = c \quad (d) \\ \sum_{k(\text{actifs})} l^k \gamma_k = d \quad (e) \end{array} \right.$$

de déterminer par un critère énergétique les incréments de glissement relatif aux systèmes de glissement actifs mis en jeu.

La combinaison de systèmes de glissement actifs conduit à déterminer pour chaque grain le minimum de

$$M(g) = \sum_{k(\text{actifs})} |\rho^k|, \quad (198)$$

en fonction des hypothèses de glissement et de déformation (nature des cisaillements relaxés notamment).

Le modèle le plus relaxé consiste à satisfaire uniquement l'équation (197a) avec $a=1$ dans le cas de la traction et donc à réaliser, à l'aide d'un seul système de glissement

$$M_S(g) = |\rho^k| = 1/|d_k|, \quad (199)$$

la cisssion résolue relative à chaque système étant donnée par

$$\sigma d_{0k} = \sigma_k = \sum_k e_k. \quad (200)$$

Trouver le minimum de $M_S(g)$ équivaut donc bien à déterminer la plus grande des cisssions résolues d_p , donc à rechercher le système principal ou primaire. Cette conclusion est identique à celles des modèles "statique" et de SACHS. En fait, le facteur de TAYLOR est dans ce cas

$$M_S(g) = 1/|d_p|. \quad (201)$$

A l'opposé du modèle de SACHS, le modèle de TAYLOR vérifie identiquement l'ensemble des équations (197) avec $\omega = 1-2q$; $a = 1$; $b = c = d = 0$ soit $\dot{\epsilon}^A = \dot{\epsilon}^T$ (champ de déformation homogène traité dans le chapitre 4). On no-

tera $M_T(g)$ le facteur de TAYLOR dans ce cas ; le détail de son calcul n'est pas repris ici.

On peut alors formuler la proposition suivante :

* le facteur de TAYLOR $M(g)$ de tout modèle de SACHS-TAYLOR intermédiaire doit satisfaire, pour toute orientation g , les inégalités

$$M_S(g) \leq M(g) = \sum_{k(\text{actifs})} |l^k(g)| \leq M_T(g) \quad (202)$$

La première partie de cette proposition résulte de

$$a = 1 = \sum_k l^k_k \leq \sum_k |l^k| \cdot |d| \leq |d| \cdot \sum_k |l^k| = \frac{M(g)}{M_S(g)} \quad (203)$$

Cette condition est automatiquement satisfaite dans les développements du traitement numérique.

La seconde partie consiste à vérifier que les états de contrainte admissibles en modèles relaxés, qui peuvent s'écrire d'une manière générale

$$\sigma^c = \sum_{J=1}^6 a_{JJ} \sigma^c_{JJ} \quad (204)$$

avec $|a_J| = 1$ afin de respecter

$$\sigma^c_J = \sigma^c_k \cdot e^c_k = a_{J0} \tau_{J0} \quad (205)$$

sont bornés par la solution physiquement admissible des états de contrainte de BISHOP [65]. Il en résulte que la puissance minimale pour la déformation plastique s'écrit encore

$$\dot{W} = \sigma^c \dot{\epsilon}^c = \frac{1}{3} E \sum_k \dot{\epsilon}_k^c \sigma_k^c = \frac{1}{3} E \sum_k \dot{\epsilon}_k^c \sigma_k^c \leq \frac{1}{3} E \sum_k \dot{\epsilon}_k^c |\tau_T^k| \quad (206)$$

$$= \sigma_T \dot{\epsilon}_T,$$

soit encore

$$M(g) = \sum_k \sigma_k^c \dot{\epsilon}_k^c = \sum_k |\tau_T^k| \dot{\epsilon}_T = M_T(g) \quad (207)$$

Cette seconde proposition joue un rôle important dans l'analyse numérique en éliminant les solutions physiquement non-compatibles (travail négatif sur certains systèmes de glissement par exemple).

Pour certaines orientations, ces modèles intermédiaires peuvent éventuellement ne pas fournir de solution compatible avec les inégalités (202). Le modèle de TAYLOR (déformation totalement imposée) fournit alors une solution de substitution pour $M(g)$.

Dans la situation particulière où $q=1/2$ et pour un axe de traction coïncidant avec les rangées $[100]$ et $[111]$ on vérifiera l'égalité des facteurs M_S et M_T . Pour des orientations de grains proches de ces deux situations particulières, il y a lieu de prévoir des difficultés dans la modélisation du champ des déformations et par suite du champ de rotation des grains.

3) ROLE DES SYMETRIES DE L'ECHANTILLON.

Les textures de tôles laminées possèdent généralement une symétrie de type orthorhombique dans le repère échantillon R (DL,DT,DN) [figure 1]. Toute éprouvette découpée dans la tôle et possédant un axe longitudinal en orientation quelconque dans le plan de laminage ne possède plus qu'un axe de symétrie binaire (DN). Cette symétrie macroscopique établit une correspondance entre les grains d'orientation $g(\alpha, \beta, \gamma)$ et $g(\alpha+\pi, \beta, \gamma)$ par l'intermédiaire des composantes du tenseur (75)

$$\begin{cases} a' = a, \\ \omega' = \omega, \\ b' = b, \\ c' = -c, \\ d' = -d. \end{cases} \quad (208)$$

Une telle symétrie, qui permet de réduire l'étude du comportement en α à l'intervalle $[0, \pi]$, peut être utilisée pour évaluer la moyenne des composantes de $\dot{\epsilon}^s$ sur l'ensemble des orientations des grains caractérisé par la fonction de texture $f(g)$.

On peut alors vérifier rigoureusement

$$\overset{\cdot p}{\mathbf{E}}_{ij} = \langle \dot{\epsilon}_{ij}^s \rangle = \frac{\int \dot{\epsilon}_{ij}^s(g) f(g) dg}{\int f(g) dg}, \quad (209)$$

ce qui correspond à supposer implicitement que chaque grain se trouve dans des conditions favorables de déformation.

L'invariance de la fonction de texture $f(g)$ dans la transforma-

$g(\alpha, \beta, \gamma)$	a'	b'	c'	d'	ω'	$[g]$
$\alpha + \pi, \beta, \gamma$	a	b	$-c$	$-d$	ω	$\alpha \epsilon$ $[0, 2\pi/2]$
$\alpha, \beta, \gamma + \pi/2$	a	b	c	d	ω	$\gamma \epsilon$ $[0, \pi/2]$
$\pi - \alpha, \beta, \pi/2 - \gamma$	a	$-b$	$-c$	d	ω	$\alpha \epsilon$ $[0, \pi/2]$
$\alpha, \pi - \beta, \pi/2 - \gamma$	a	b	$-c$	$-d$	ω	$\beta \epsilon$ $[0, \pi/2]$

TABLEAU 22 : RELATIONS ENTRE COMPOSANTES LIBREMENT AJUSTABLES du tenseur de déformation microscopique pour diverses symétries ;
limitation subséquente du domaine de variation de $g(\alpha, \beta, \gamma)$.

tion $d \rightarrow (d + \pi)$ revient ici à vérifier $\langle c \rangle = \langle d \rangle = 0$. Le tableau 23 présente de façon condensée l'ensemble des propriétés de $f(g)$ résultant des symétries macroscopiques. Les symétries microscopiques du réseau cristallin peuvent être utilisées de manière analogue.

L'existence d'un axe ternaire réduit encore le domaine de variation de g , mais une telle alternative n'est généralement pas utilisée en pratique car difficile à mettre en oeuvre dans les calculs numériques. Les variations des angles d'Euler α, β, γ décrivant l'orientation du grain dans le repère échantillon R^A se limitent ainsi à l'intervalle $[0, \pi/2]$. L'invariance de $M(g)$ et $f(g)$ dans les rotations qui correspondent aux situations du tableau 23 implique pour les valeurs moyennes des composantes du tenseur

$$\langle b \rangle = \langle c \rangle = \langle d \rangle = 0 ; \quad \langle \omega \rangle = 1 - 2q. \quad (210)$$

Enfin, une discussion similaire peut être développée pour les composantes des tenseurs contrainte microscopique σ et macroscopique Σ .

4) SPECIFICITES DES MODELES ETUDIES.

a) Modèles de TAYLOR relaxés.

L'ensemble des situations relaxées s'obtient en fixant certaines composantes de $\dot{\epsilon}^A$, identifiées à celles de $\dot{\epsilon}^T$ dans le système d'équations (197). Par exemple, il existe un modèle qui suppose l'homogénéité des composantes diagonales du tenseur vitesse de déformation [32], c'est-à-dire impose simultanément (197a) et (197b) avec $\langle \omega \rangle = 1 - 2q$ fixé,

mais relaxe toujours avec $b = c = d \neq 0$ les composantes non-diagonales. Ce modèle est conventionnellement référencé (T2) dans les paragraphes suivants, dans la mesure où il implique seulement l'activation de deux systèmes de glissement. Une recherche systématique de la combinaison active peut alors s'opérer en fonction de propriétés algébriques de l'ensemble des systèmes de glissement ([67], chapitre 4).

b) Modèles de SACHS étendus.

Faire correspondre $\langle \dot{\epsilon}^a \rangle$ au tenseur vitesse de déformation macroscopique $\dot{\epsilon}^a$ n'implique donc que la stricte vérification de (197a). La sollicitation d'un seul système de glissement est ainsi suffisante lorsque l'accommodation entre grains suppose satisfaite (209). Le critère de la puissance macroscopique minimale assure alors l'intervention du système primaire de sorte que le modèle de SACHS apparaît bien ainsi représenter la forme la plus relaxée des hypothèses de TAYLOR.

Le facteur de contraction de l'éprouvette q s'ajuste alors librement en fonction de la distribution des orientations des grains et vaut

$$q = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{8\pi^2} \int \omega(g) f(g) dg \right]. \quad (211)$$

Des extensions possibles du modèle de SACHS consistent à ajouter à l'équation (197a) diverses conditions supplémentaires de type variationnel. On pourra par exemple minimiser la dispersion des inhomogénéités de déformation, ce qui conduit à minimiser, sous l'une quelconque de ses expressions la quantité

$$\Delta^2 = \frac{(\dot{\mathbf{e}}^S - \dot{\mathbf{e}}^P)^2}{\dot{\mathbf{E}}^2} = 2[b^2 + c^2 + d^2 + (\Omega - \omega)^2/4]$$

$$= \left(\sum_k l^k \mathbf{e}_k^c \right)^2 - 3/2 - \Omega^2/2 \quad (212)$$

$$= \sum_j \sum_k l^j l^k g_{jk} - 3/2 - \Omega^2/2,$$

où $\Omega = 1 - 2q$ et interviennent notamment les composantes $g_{jk} = \mathbf{e}_j^c \cdot \mathbf{e}_k^c$ (tableau 2B) du tenseur métrique qui représentent l'ordonnement des systèmes de glissement \mathbf{e}_k^c .

Pour un ensemble de deux systèmes (notés \mathbf{e}_P^c et \mathbf{e}_S^c) devant satisfaire (197a), c'est-à-dire

$$l_P^P + l_S^S = 1, \quad (213)$$

Δ^2 sera minimum pour

$$l^P = \frac{g_{SS} d_P - g_{SP} d_S}{D} \quad \text{et} \quad l^S = \frac{g_{PP} d_P - g_{SP} d_S}{D} \quad (214)$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	6	-3	-3	2	-1	-1	4	-1	-3	4	-3	-1
2		6	-3	-1	4	-3	-1	2	-1	-3	4	-1
3			6	-1	-3	4	-3	-1	4	-1	-1	2
4				6	-3	-3	4	-3	-1	4	-1	-3
5					6	-3	-3	4	-1	-1	2	-1
6						6	-1	-1	2	-3	-1	4
7							6	-3	-3	2	-1	-1
8								6	-3	-1	4	-3
9									6	-1	-3	4
10										6	-3	-3
11											6	-3
12												6

TABLEAU 23 : COMPOSANTES DU TENSEUR METRIQUE $g_{ij} \times 12$.

$$(g_{ij} = g_{ji} = \mathbf{e}_i^c \cdot \mathbf{e}_j^c).$$

avec

$$D = g_{PP} d_P^2 + g_{SS} d_S^2 - 2g_{SP} d_P d_S. \quad (215)$$

La compatibilité des travaux de glissement impose à l^P, d_P puis à l^S, d_S de posséder le même signe. Cette condition est immédiatement vérifiée pour l^P si $|d_P| \geq |d_S|$; elle n'est réalisée pour l^S que lorsque

$$d_S \geq g_{SP} d_P / g_{PP} : \quad (216)$$

l'égalité correspondant à une situation de glissement réduite au seul système e_P^c .

L'étude systématique des situations de glissement sur deux systèmes aboutit à établir, par des inégalités que l'on vérifiera aisément, que les conditions énergétiquement les plus favorables

$$|H^P| + |H^S| = M(g) \text{ minimum}, \quad (217)$$

sont réalisées pour des systèmes tels que

$$g_{SP} d_P d_S \geq 0. \quad (218)$$

Dans les deux modèles étudiés (S2) et (S'2), la recherche des systèmes actifs s'opère à partir des propriétés de l'ensemble des systèmes de glissement (chapitre 4). La figure 29 rapporte d'ailleurs en projection stéréographique l'ensemble des triangles élémentaires et des systèmes primaires associés.

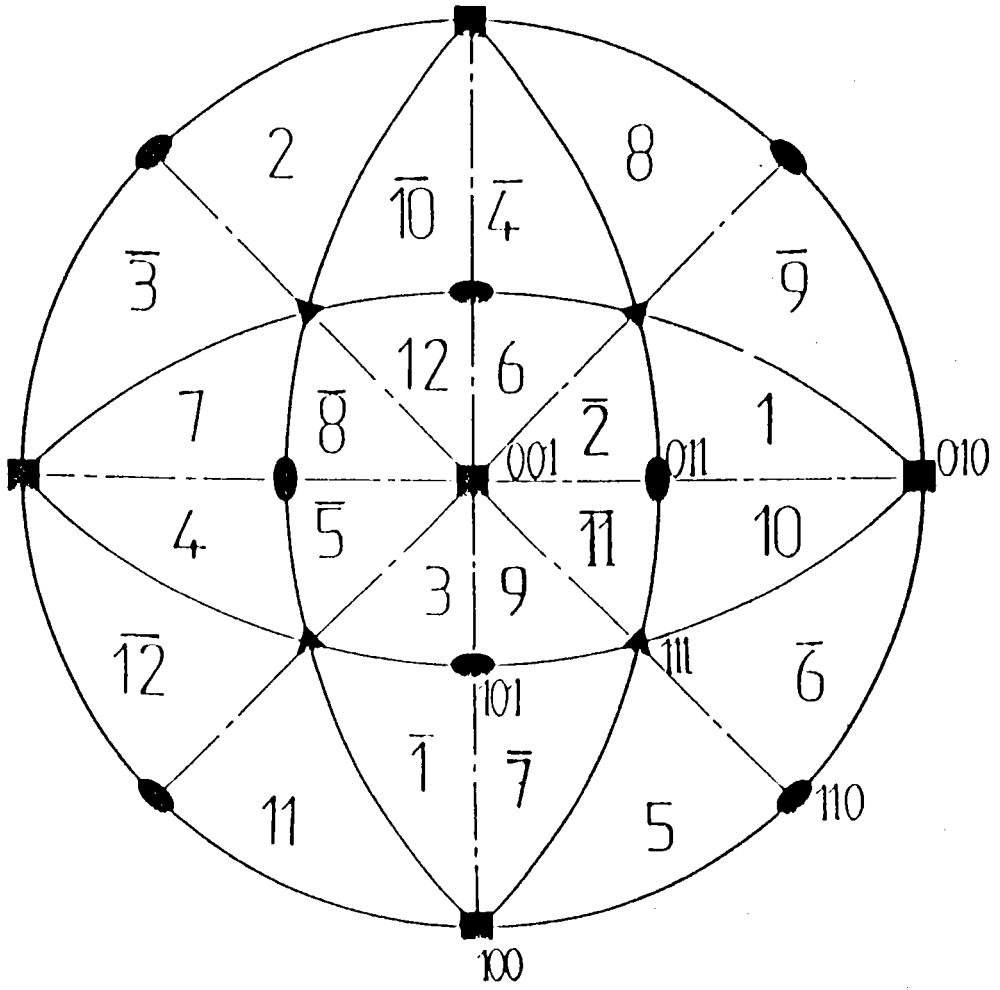


FIGURE 29 : REPERAGE DES SYSTEMES DE GLISSEMENT PRIMAIRES dans les différents triangles stéréographiques d'une projection sur le plan (001).

* modèle S'2 :

la sélection des deux systèmes est faite à partir des équations (213) et (214) en assurant $M(g)$ minimum. Le découpage du triangle standard (figure 30) délimite les régions où intervient une paire particulière de systèmes actifs. Ce type d'analyse n'assure toutefois pas nécessairement la continuité du facteur de TAYLOR sur les contours des triangles élémentaires que permet de définir la symétrie cubique des grains (figure 30).

* modèle S2 :

les systèmes actifs sont les systèmes possédant les deux plus grandes cissions résolues. Le découpage du triangle élémentaire (figure 31) reste sensiblement identique au précédent et permet de constater que les frontières mises en évidence délimitent des domaines dans lesquels le deux systèmes activés correspondent à l'association du système principal du triangle et du système primaire du triangle adjacent. Ce type de procédure de relaxation est analogue à celui proposé par LEFFERS [31].

Pour ces différents modèles (SACHS, S'2 et S2) les quantités de glissement l apparaissent indépendantes du premier angle d'Euler α (angle de précession). Le champ de rotation des grains qui en résulte est donc aussi indépendant de α . De tels modèles sont ainsi susceptibles d'expliquer directement l'apparition de textures de fibres [116] observées en goniométrie aux rayons X pour les polycristaux à réseau cubique faces centrées.

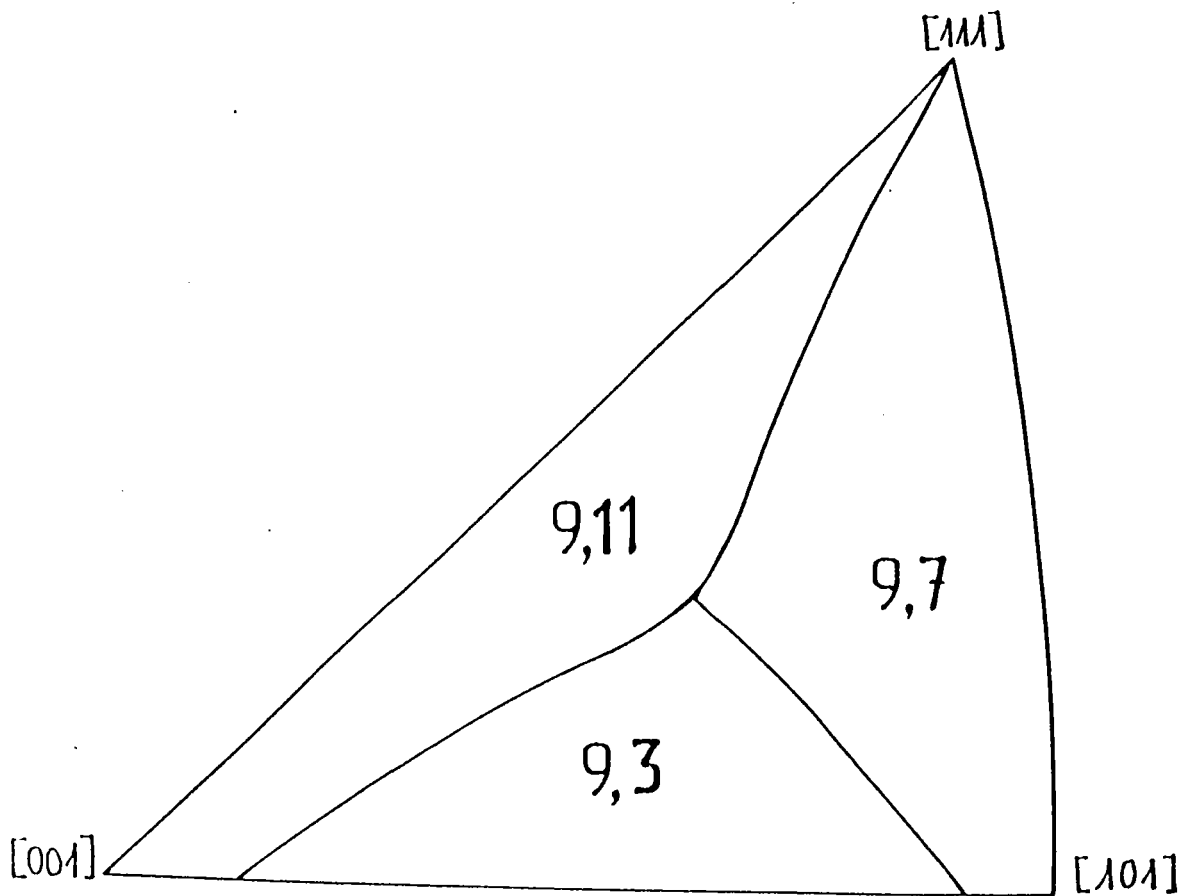


FIGURE 30 : MODELE S'2 - SELECTION DU SYSTEME SECONDAIRE PAR MINIMISATION de la dispersion des inhomogénéités de déformation.

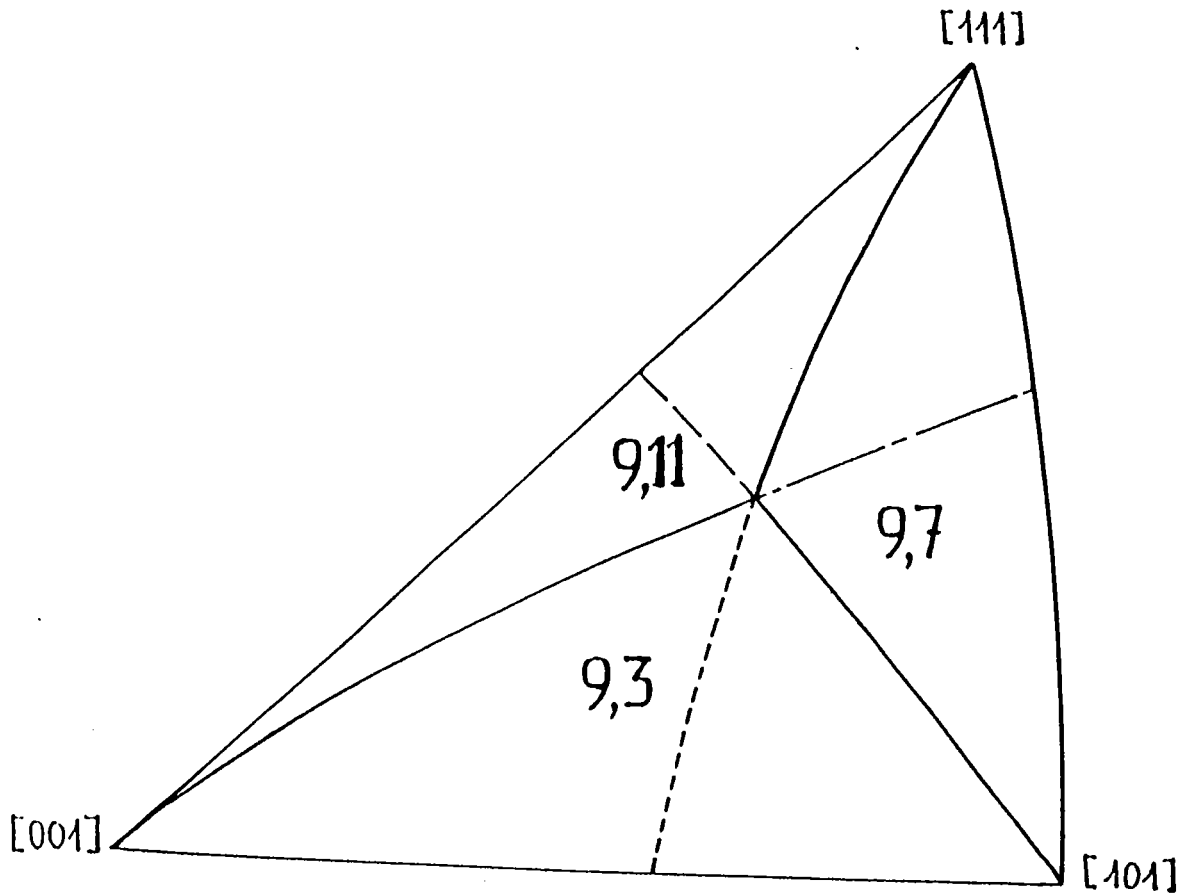


FIGURE 31 : MODELE S2 - SELECTION DES SYSTEMES ASSOCIES AUX DEUX PLUS
GRANDES CISSIONS RESOLUES (système primaire + système primaire
du triangle adjacent)

5) RESULTATS ET CONCLUSION.

Comme dans les modèles précédents (glissement cristallographique $\{111\} \langle 110 \rangle$ [67] et non-cristallographique de zone $\langle 111 \rangle$ [38]) le facteur de TAYLOR du modèle (T2) est développé sur une base d'harmoniques sphériques généralisées et symétrisées (d'après (124)).

Rappelons que l'intégration numérique en g se limite à l'intervalle $[0, \pi/2]$ pour les domaines angulaires par utilisation des symétries du tableau 23. L'intégration en β se fait par une méthode de Gauss avec $N=32$. L'intégration trigonométrique en α et γ se fait avec un pas régulier de $\pi/64$, le cas $\gamma = \pi/4$ étant toutefois décomposé en deux contributions symétriques très proches de cette frontière (32 points en α et 33 points en γ).

Les coefficients $M_{2m,0}^{2l}$ du modèle (T2) sont rassemblés dans le tableau 25 alors que le comportement relatif des premiers coefficients $M_{2m,0}^{2l}$ pour les différents modèles étudiés fait l'objet du tableau 26 et permet une comparaison synthétique rapide de ces coefficients.

La précision des calculs a été testée par des essais préliminaires sur différents réseaux d'intégration. L'utilisation du domaine complet des variations de g a par ailleurs permis de vérifier

$$\begin{matrix} 21 \\ b \\ 2m,0 \end{matrix} = \begin{matrix} 21 \\ c \\ 2m,0 \end{matrix} = \begin{matrix} 21 \\ d \\ 2m,0 \end{matrix} = 0 \quad (219)$$

pour les composantes du tenseur vitesse de déformation $\dot{\epsilon}^{\Delta}$, donc d'assurer l'utilisation d'un réseau correct, compte-tenu des discontinuités de premier et second ordre dans les comportements respectifs de $M(g)$ et $\dot{\epsilon}^{\Delta}(g)$.

		$\Omega=0,0$	$\Omega=0,1$	$\Omega=0,2$	$\Omega=0,3$	$\Omega=0,4$	$\Omega=0,5$	$\Omega=0,6$	$\Omega=0,7$	$\Omega=0,8$	$\Omega=0,9$	$\Omega=1,0$
0	0	2,4925	2,5018	2,5300	2,5776	2,6485	2,7576	2,9106	3,0397	3,1421	3,2202	3,2976
4	0	-0,6952	-0,7007	-0,7154	-0,7360	-0,7560	-0,7498	-0,7176	-0,7792	-0,8677	-0,9292	-0,9634
6	0	0,2727	0,2586	0,2155	0,1455	0,0491	-0,0779	-0,2329	-0,3304	-0,3337	-0,2534	-0,1636
8	0	0,3583	0,3566	0,3497	0,3338	0,2300	0,2292	0,1366	0,1578	0,1797	0,1480	0,0879
10	0	-0,0204	-0,0212	-0,0247	-0,0345	-0,0554	-0,1002	-0,1313	-0,0270	0,0543	0,0888	0,0651
4	2	0,0000	-0,3073	-0,6007	-0,8632	-1,0752	-1,1928	-1,1797	-1,1557	-1,1765	-1,2406	-1,3019
6	2	0,0000	-0,0216	-0,0459	-0,0726	-0,0966	-0,1030	-0,1057	-0,0690	0,0021	0,0613	0,0968
8	2	0,0000	0,0025	0,0049	0,0104	0,0309	0,1015	0,1923	0,1043	-0,0037	-0,0478	-0,0344
10	2	0,0000	0,0267	0,0494	0,0620	0,0573	0,0388	0,0348	0,1327	0,1403	0,0862	0,0199
4	4	0,2994	0,2949	0,2820	0,2626	0,2399	0,2131	0,1583	0,1443	0,1373	0,1512	0,1609
6	4	0,3117	0,3033	0,2791	0,2408	0,1902	0,1220	0,0615	0,0121	-0,0519	-0,0857	-0,0838
8	4	0,4977	0,4778	0,4186	0,3195	0,1852	0,0461	-0,0165	-0,0032	-0,0101	-0,0044	-0,0011
10	4	0,2501	0,2490	0,2440	0,2228	0,1743	0,0850	-0,0195	-0,0089	-0,0064	-0,0103	-0,0385
6	6	0,0003	0,0277	0,0292	-0,0120	-0,1017	-0,2073	-0,2081	-0,1952	-0,1355	-0,0711	-0,0176
8	6	0,0000	0,0046	0,0187	0,0459	0,0795	0,0734	-0,0546	-0,1166	-0,1166	-0,0538	0,0120
10	6	0,0000	0,0411	0,0664	0,0621	0,0222	-0,0122	0,0774	0,0417	0,0418	-0,0727	-0,0640
8	8	0,0789	0,0384	-0,0564	-0,1289	-0,0885	0,0869	0,0936	0,0645	0,0271	0,0131	0,0333
10	8	-0,0734	0,0640	-0,0346	0,0180	0,0815	0,0864	0,0243	0,0046	0,0066	0,0126	0,0062
10	10	0,0000	-0,1400	-0,1811	-0,0942	0,0309	0,0421	-0,0149	-0,0577	-0,0501	-0,0433	-0,0509

18Y

TABLEAU 24 : Coefficients $M_{2m0}^{2l}(q)$ - modèle de Taylor relaxé T2 - glissement cristallographique
 $\{111\} \langle 110 \rangle$ - cubique faces centrées - ($\omega = 1 - 2q$).

Le tableau 27 contient quant à lui les coefficients ω_{2n0}^{2l} des modèles S'2, S2 et SACHS.

Les modèles de SACHS-TAYLOR intermédiaires, qui n'impliquent qu'un petit nombre de systèmes, peuvent aussi être appliqués à l'étude du comportement plastique de polycristaux à faible degré de symétrie dont la texture peut comporter des termes de rang l impair [117]. Leur contribution ne semble pas devoir se manifester dans les calculs des moyennes

$M(q)$, mais pourrait intervenir dans l'évaluation de $\Omega = 1 - 2q = \langle \omega \rangle$ en modèles de type SACHS, donc dans l'anisotropie de déformation plastique de l'éprouvette.

	SACHS	S'2	S2	T2	TAYLOR
0 M 0 0	2,2328	2,2170	2,2044	2,4925	3,0658
4 M 0 0	- 0,4218	- 0,4739	- 0,4921	- 0,6952	- 1,1059
6 M 0 0	0,5520	0,5526	0,5608	0,2727	- 0,3394
8 M 0 0	0,3169	0,2667	0,2573	0,3583	0,3711
10 M 0 0	- 0,1867	- 0,8742	- 0,1106	- 0,0204	- 0,1263

TABLEAU 25 : COMPARAISON DES COEFFICIENTS M_{00}^{Ω} pour les divers modèles étudiés ($q = 1/2$ ou $\Omega = 0$).

	SACHS	S'2	S2
ω_{20}^4	0,7979	0,7557	0,7392
ω_{20}^6	0,6204	0,3792	0,3044
ω_{20}^8	0,0913	- 0,0098	- 0,0045
ω_{20}^{10}	0,0300	0,1764	0,0674

TABLEAU 26 : COEFFICIENTS ω_{20}^{2l} pour
les modèles de type
Sachs et Sachs étendus

CHAPITRE 7 : APPLICATIONS DES MODELES DE DEFORMATION ETUDIES :

* CORRELATIONS TEXTURE-PROPRIETES MECANIQUES.

* CHAMP DE ROTATION DES GRAINS.

1) CORRELATIONS TEXTURE-PROPRIETES MECANIQUES.

a) Introduction.

b) Relations entre texture et anisotropie plastique

b1) Cas des modèles de type SACHS.

b2) Cas des modèles de type TAYLOR.

c) Coefficient d'anisotropie.

d) Mesures expérimentales et caractéristiques des échantillons étudiés.

e) Comparaison expérience-théorie et conclusion.

2) CHAMP DE ROTATION DES GRAINS.

1) CORRELATIONS TEXTURE-PROPRIETES MECANQUES.

a) Introduction.

La présence d'orientations préférentielles des grains dans les tôles entraîne une anisotropie de leur comportement plastique [118]. L'un des paramètres susceptibles de caractériser partiellement cette anisotropie est le coefficient d'anisotropie ou facteur de LANKFORD r [1]. Différentes approches [119 à 122] ont permis d'établir des relations entre ce coefficient et l'emboutissabilité ou certaines propriétés magnétiques. La variation du facteur de LANKFORD dans le plan de la tôle est notamment liée à la formation des cornes d'emboutissage [122, 123].

La théorie de la plasticité des milieux anisotropes due à HILL [124] permet de calculer les variations de r en fonction de l'angle entre la direction de laminage et la direction de traction (figure 31) connaissant les trois valeurs particulières $r(0^\circ)$, $r(45^\circ)$ et $r(90^\circ)$:

$$r(d_0) = \frac{r(0^\circ)r(90^\circ)\cos 2d_0 + \frac{r(0^\circ) + r(90^\circ)}{2} r(45^\circ)\sin 2d_0}{r(0^\circ)\sin^2 d_0 + r(90^\circ)\cos^2 d_0} . \quad (220)$$

Les paramètres $r(0^\circ)$, $r(45^\circ)$ et $r(90^\circ)$ sont caractéristiques de l'anisotropie cristalline de la tôle mais n'apparaissent cependant pas explicitement liés à certains coefficients de texture.

De nombreux auteurs ont établi des relations statistiques semi-quantitatives entre la texture et le coefficient d'anisotropie moyen \bar{r} [125] :

$$\bar{r} = (1/2\pi) \int_0^{2\pi} r(\alpha_0) d\alpha_0 . \quad (221)$$

De telles relations donnent souvent des écarts importants entre les valeurs calculées et les valeurs mesurées.

BUNGE et ROBERTS [126] ont les premiers associé la description tridimensionnelle de la distribution des orientations des grains à l'aide de la fonction de texture et les hypothèses de déformation du modèle cinématiquement admissible de TAYLOR. Toutefois, les hypothèses restrictives de ce modèle conduisent en général à des écarts importants entre théorie et expérience [127 à 132].

Le but de ce paragraphe est donc de comparer les résultats théoriques, obtenus pour des matériaux à réseau cubique à partir des différents modèles étudiés, aux valeurs expérimentales et d'établir éventuellement des relations simplifiées ne faisant intervenir qu'un nombre limité de coefficients du développement en série de la fonction de distribution des orientations.

b) Relations entre texture et anisotropie plastique.

Dans le cas où le repère de texture R^t (DL = direction de laminage ; DT = direction transverse ; DN = direction normale au plan de laminage) coïncide avec le repère de déformation $R(x_1^{\Delta}, x_2^{\Delta}, x_3^{\Delta})$, la

généralisation de l'hypothèse d'HOSFORD et BACKOFEN [91] (travail de déformation du polycristal minimum) à l'ensemble des modèles étudiés conduit alors à écrire pour toute grandeur moyenne.

$$\langle x \rangle = \frac{1}{8\pi^2} \int x(g) f(g) dg ; \quad (222)$$

expression qui pourra être utilisée de deux façons différentes respectivement applicables aux modèles de type SACHS ou de type TAYLOR.

b1) Cas des modèles de type SACHS.

Dans toutes les situations où le facteur de contraction de chaque grain est supposé librement ajustable, il est possible de calculer la moyenne du paramètre $x(g) = \omega(g)$ intervenant dans les composantes de $\dot{\epsilon}^A$ (197), soit

$$\langle \omega \rangle = 1-2q = \frac{1}{8\pi^2} \int \omega(g) f(g) dg \quad (223)$$

L'utilisation d'une base commune $T_{mn}^l(g)$, pour $f(g)$ et $\omega(g)$, possible lorsque texture et déformation sont exprimées dans le même référentiel, permet d'écrire, compte-tenu des propriétés d'orthogonalité entre $T_{mn}^l(g)$

$$\langle \omega \rangle = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{M(l)} \sum_{n=0}^{N(l)} \frac{\omega_{mn}^l \cdot C_{mn}^l}{2l+1} \quad (224)$$

Ce résultat fait bien apparaître les corrélations existant entre l'anisotropie cristallographique, que définissent les coefficients C , et les caractéristiques d'une déformation de l'échantillon associées aux variations de .

b2) Cas des modèles de TAYLOR.

De tels modèles de déformation imposent un facteur de contraction q , identique pour chaque grain, et dont la valeur définit celle de l'éprouvette cristalline. On pourra donc pour toute valeur de $0 \leq q \leq 1$, calculer pour chaque grain le facteur de Taylor $M(g;q)$ dont la valeur moyenne vaut simplement pour chacun des modèles de type TAYLOR

$$\langle M(q) \rangle = \frac{1}{8\pi^2} \int M(g;q) f(g) dg . \quad (225)$$

Pour une éprouvette déterminée et de texture connue, il restera à étudier les variations du facteur de Taylor moyen

$$M(q) = \sum_{l=0}^{M(1)} \sum_{m=0}^{N(1)} \sum_{n=0}^{l} \frac{M_{mn}(q) \cdot C_{mn}}{2l+1} . \quad (226)$$

avec q , et à en rechercher le minimum. La valeur de q correspondant à ce minimum est alors le facteur de contraction de l'éprouvette.

Pour les différents modèles (Sachs, S2, S'2) d'une part, TAYLOR cristallographique, (T2) d'autre part pour les cubiques faces centrées et de Taylor non-cristallographique dans le cas des cubiques cen-

trés), les approches fondamentalement différentes d'évaluation du facteur de contraction et donc du coefficient d'anisotropie vont être systématiquement comparées dans l'étude de matériaux texturés d'intérêt industriel.

c) Coefficient d'anisotropie.

La valeur théorique du coefficient d'anisotropie ou facteur de LANKFORD est définie par la relation

$$r = \frac{q_{\min}}{1 - q_{\min}} \quad (227)$$

et se calcule, selon les alternatives, soit à partir du minimum de $\langle M(q) \rangle$, soit de la valeur $q_{\min} = (1 - \langle \omega \rangle) / 2$.

Les variations de ce coefficient dans le plan de la tôle peuvent s'étudier en fonction de l'angle α_0 entre direction de laminage et direction de traction (figure 32). Il apparait toutefois que les expressions (224) et (226) ne peuvent être utilisées sous cette forme car elles supposent $f(g)$, (g) et $M(g; q)$ développés sur des bases identiques.

La texture est en effet définie dans le référentiel R^t de la tôle dans laquelle sont découpées des éprouvettes d'orientations variées, dépendant de α_0 . Il s'avère alors commode d'établir une nouvelle expression de $f(g)$ dans le référentiel R^s d'une éprouvette en termes d'un développement sur la base des nouvelles fonctions $T_{mn}^l(g')$, où g' définit l'orientation du grain étudié de telle sorte que

$$g = g' \cdot g_0 \quad , \quad (228)$$

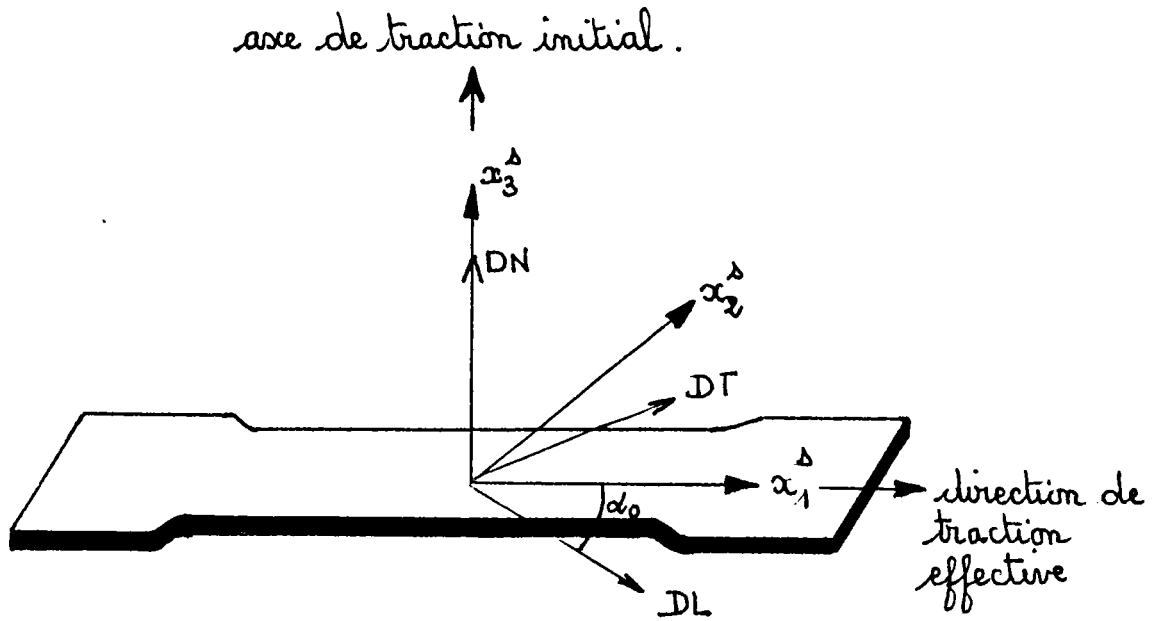


FIGURE 32 : ORIENTATION D'UNE EPROUVETTE DANS LE PLAN DE LA TOLE

où $g_0 = (\alpha_0, \pi/2, \pi/2)$ représente la rotation qui amène Rt sur R^S .

Les propriétés des harmoniques sphériques conduisent aisément à l'expression des nouveaux $C_{m'n'}^l$, en fonction des anciens C_{mn}^l , à partir de

$$f(g) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{M(l)} \sum_{n=0}^{N(l)} C_{mn}^l \cdot T_{mn}^l(g) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{M(l')} \sum_{n=0}^{N(l')} C_{mn}^{l'} \cdot T_{mn}^{l'}(g') \quad (229)$$

Finalement, pour les modèles de type SACHS et après réarrangement mettant en évidence les rôles respectifs des coefficients ω_{mn}^l , C_{mn}^l et de l'orientation α_0 de découpe de l'éprouvette, on obtient :

$$\begin{aligned} \langle \omega(\alpha) \rangle_0 = & \omega_{20}^4 \left[\frac{\sqrt{5}}{4} \frac{C_{00}^4}{9} - \frac{1}{2} \frac{C_{20}^4}{9} \cdot \cos 2\alpha - \frac{\sqrt{7}}{4} \frac{C_{40}^4}{9} \cdot \cos 4\alpha \right] \\ & + \omega_{20}^6 \left[-\frac{\sqrt{105}}{16\sqrt{2}} \frac{C_{00}^6}{13} + \frac{17}{32} \frac{C_{20}^6}{13} \cdot \cos 2\alpha - \frac{\sqrt{30}}{32} \frac{C_{40}^6}{13} \cdot \cos 4\alpha \right. \\ & \left. - \frac{3\sqrt{55}}{32} \frac{C_{60}^6}{13} \cdot \cos 6\alpha \right] \quad (230) \\ & + \omega_{20}^8 \left[\frac{3\sqrt{35}}{32\sqrt{2}} \frac{C_{00}^8}{17} + \frac{1}{2} \frac{C_{20}^8}{17} \cdot \cos 2\alpha - \frac{\sqrt{110}}{32} \frac{C_{40}^8}{17} \cdot \cos 4\alpha \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\sqrt{2002}}{64} \cdot \frac{C_{80}^8}{13} \cdot \cos 8d] \\
& + \omega \frac{10}{20} \left[- \frac{7\sqrt{165}}{256} \cdot \frac{C_{00}^{10}}{21} + \frac{119}{256} \cdot \frac{C_{20}^{10}}{21} \cdot \cos 2d - \frac{13\sqrt{13}}{128} \cdot \frac{C_{40}^{10}}{21} \cdot \cos 4d \right. \\
& \left. + \frac{19\sqrt{26}}{512} \cdot \frac{C_{60}^{10}}{21} \cdot \cos 6d + \frac{\sqrt{663}}{256} \cdot \frac{C_{80}^{10}}{21} \cdot \cos 8d - \frac{\sqrt{62985}}{256} \cdot \frac{C_{100}^{10}}{21} \cdot \cos 10d \right] \cdot
\end{aligned}$$

Pour les modèles de type TAYLOR, le calcul de $\langle M(q) \rangle$ s'effectuerait par l'expression (226). La recherche du minimum de $\langle M(q) \rangle$ peut alors être basée par exemple sur une méthode d'interpolation à trois points [93]. Cette recherche s'effectue facilement à partir des tableaux des coefficients $M_{2m, 0}^{2l}(q)$ (tableaux 13, 19 et 25) ou des lissages par une méthode de moindres carrés (tableaux 14 et 20). En se limitant, par exemple aux termes de rang $2l = 4$, il vient :

$$\langle M(q, d_0) \rangle = M_{00}^0(q)$$

$$+ M_{00}^4(q) \left[\frac{3}{8} \cdot \frac{C_{00}^4}{9} - \frac{\sqrt{5}}{4} \cdot \frac{C_{20}^4}{9} \cos 2d + \frac{\sqrt{35}}{8} \cdot \frac{C_{40}^4}{9} \cos 4d \right]$$

$$\langle M(q, d_0) \rangle = \sum_{l=0}^{\infty} C_l \cdot \omega^l$$

$$\begin{aligned}
 & + M_{20}^4(q) \left[\frac{\sqrt{5}}{4} \cdot \frac{C_{00}^4}{9} - \frac{1}{2} \cdot \frac{C_{20}^4}{9} \cdot \cos 2d_0 - \frac{\sqrt{7}}{4} \cdot \frac{C_{40}^4}{9} \cdot \cos 4d_0 \right] \\
 & + M_{40}^4(q) \left[\frac{\sqrt{35}}{8} \cdot \frac{C_{00}^4}{9} + \frac{\sqrt{7}}{4} \cdot \frac{C_{20}^4}{9} \cdot \cos 2d_0 + \frac{1}{8} \cdot \frac{C_{40}^4}{9} \cdot \cos 4d_0 \right] \quad (231)
 \end{aligned}$$

Les termes relatifs aux ordres supérieurs de la texture ($l=10$) sont regroupés dans les tableaux 27, 28 et 29.

A partir de l'expression précédente, et en appliquant le principe du travail macroscopique minimum, la résolution de l'équation

$$\frac{\partial}{\partial q} \langle M(q, d_0) \rangle = 0 \quad (232)$$

fait apparaître les rôles prépondérants des termes $M_{00}^0(q)$ et $M_{20}^4(q)$, et conduit après un lissage non linéaire aux expressions

$$\frac{q}{\min} \text{ (c.f.c.)} = \frac{1 - 0,6681 \cdot \text{Arctg} 6,8491x}{2}, \quad (233)$$

et

$$\frac{q}{\min} \text{ (c.c.)} = \frac{1 - 0,6522 \cdot \text{Arctg} 4,3006x}{2}, \quad (234)$$

avec

$$x = 13,6213f \begin{matrix} 4 \\ 00 \end{matrix} - 17,2298f \begin{matrix} 4 \\ 20 \\ 0 \end{matrix} \cos 2d - 22,7929f \begin{matrix} 4 \\ 40 \\ 0 \end{matrix} \cos 4d, \quad (235)$$

ou encore

$$x = 0,0621C \begin{matrix} 4 \\ 00 \end{matrix} - 0,0556C \begin{matrix} 4 \\ 20 \\ 0 \end{matrix} \cos 2d - 0,0735C \begin{matrix} 4 \\ 40 \\ 0 \end{matrix} \cos 4d. \quad (236)$$

L'importance relative des coefficients de texture de rang $l = 4$ avait déjà été soulignée qualitativement par DAVIES et al. [123].

Afin de compléter la présente analyse des modèles de déformation de matériaux polycristallins, à réseau cubique faces centrées plus particulièrement, nous ferons apparaître sur les courbes de $r(\alpha_0)$ concernant l'échantillon Al 1100A les résultats d'un calcul autocohérent [30] effectué sur les hypothèses d'un comportement du monocristal proposé par ZARKA [50] puis modifié en introduisant le facteur d'accommodation élastoplastique de BERVEILLER et ZAOUÏ [61].

d) Mesures expérimentales et caractéristiques des échantillons étudiés.

Les différentes données expérimentales (composition chimique, figures de pôles, coefficient d'anisotropie, ...) utilisées dans cette étude nous ont été fournies par Michel PERNOT et Richard PENELLE (Laboratoire de Métallurgie Structurale, Orsay) d'une part et Paul PARNIERE (Institut de Recherches de la Sidérurgie, Saint-Germain-en-Laye).

$$M_{00}^6 \left[-\frac{5}{16} \cdot \frac{C_{00}^6}{13} + \frac{\sqrt{105}}{16\sqrt{2}} \cdot \frac{C_{20}^6}{13} \cdot \cos 2d_0 - \frac{3\sqrt{7}}{16} \cdot \frac{C_{40}^6}{13} \cdot \cos 4d_0 + \frac{\sqrt{462}}{32} \cdot \frac{C_{60}^6}{13} \cdot \cos 6d_0 \right]$$

$$M_{20}^6 \left[-\frac{\sqrt{105}}{16\sqrt{2}} \cdot \frac{C_{00}^6}{13} + \frac{17}{32} \cdot \frac{C_{20}^6}{13} \cdot \cos 2d - \frac{\sqrt{30}}{32} \cdot \frac{C_{40}^6}{13} \cdot \cos 4d - \frac{3\sqrt{55}}{32} \cdot \frac{C_{60}^6}{13} \cdot \cos 6d \right]$$

$$M_{40}^6 \left[-\frac{3\sqrt{7}}{16} \cdot \frac{C_{00}^6}{13} + \frac{\sqrt{30}}{32} \cdot \frac{C_{20}^6}{13} \cdot \cos 2d + \frac{13}{16} \cdot \frac{C_{40}^6}{13} \cdot \cos 4d + \frac{\sqrt{66}}{32} \cdot \frac{C_{60}^6}{13} \cdot \cos 6d \right]$$

$$M_{60}^6 \left[-\frac{\sqrt{462}}{32} \cdot \frac{C_{00}^6}{13} - \frac{3\sqrt{55}}{32} \cdot \frac{C_{20}^6}{13} \cdot \cos 2d - \frac{\sqrt{66}}{32} \cdot \frac{C_{40}^6}{13} \cdot \cos 4d - \frac{1}{32} \cdot \frac{C_{60}^6}{13} \cdot \cos 6d \right]$$

TABLEAU 27 : RELATIONS DE PASSAGE à 1'ordre 6.

$$M_{00}^8 \left[\frac{35}{128} \cdot \frac{C_{00}^8}{17} - \frac{3\sqrt{35}}{32\sqrt{2}} \cdot \frac{C_{20}^8}{17} \cdot \cos 2\alpha + \frac{3\sqrt{77}}{64} \cdot \frac{C_{40}^8}{17} \cdot \cos 4\alpha \right]$$

$$- \frac{\sqrt{429}}{32\sqrt{2}} \cdot \frac{C_{60}^8}{17} \cdot \cos 6\alpha + \frac{3\sqrt{715}}{128} \cdot \frac{C_{80}^8}{17} \cdot \cos 8\alpha]$$

$$M_{20}^8 \left[\frac{3\sqrt{35}}{32\sqrt{2}} \cdot \frac{C_{00}^8}{17} - \frac{1}{2} \cdot \frac{C_{20}^8}{17} \cdot \cos 2\alpha + \frac{\sqrt{110}}{32} \cdot \frac{C_{40}^8}{17} \cdot \cos 4\alpha \right]$$

$$- \frac{\sqrt{2002}}{64} \cdot \frac{C_{80}^8}{17} \cdot \cos 8\alpha]$$

$$M_{40}^8 \left[\frac{3\sqrt{77}}{64} \cdot \frac{C_{00}^8}{17} - \frac{\sqrt{110}}{32} \cdot \frac{C_{20}^8}{17} \cdot \cos 2\alpha - \frac{9}{32} \cdot \frac{C_{40}^8}{17} \cdot \cos 4\alpha \right]$$

$$+ \frac{\sqrt{546}}{32} \cdot \frac{C_{60}^8}{17} \cdot \cos 6\alpha + \frac{\sqrt{455}}{64} \cdot \frac{C_{80}^8}{17} \cdot \cos 8\alpha]$$

$$M_{60}^8 \left[\frac{\sqrt{429}}{32\sqrt{2}} \cdot \frac{C_{00}^8}{17} - \frac{\sqrt{546}}{32} \cdot \frac{C_{40}^8}{17} \cdot \cos 4d \right]$$

$$- \frac{1}{2} \cdot \frac{C_{60}^8}{17} \cdot \cos 6d - \frac{\sqrt{30}}{64} \cdot \frac{C_{80}^8}{17} \cdot \cos 8d \Big]$$

$$M_{80}^8 \left[\frac{3\sqrt{715}}{128} \cdot \frac{C_{00}^8}{17} + \frac{\sqrt{2002}}{64} \cdot \frac{C_{20}^8}{17} \cdot \cos 2d + \frac{\sqrt{455}}{64} \cdot \frac{C_{40}^8}{17} \cdot \cos 4d \right]$$

$$+ \frac{\sqrt{30}}{32} \cdot \frac{C_{60}^8}{17} \cdot \cos 6d + \frac{1}{128} \cdot \frac{C_{80}^8}{17} \cdot \cos 8d \Big]$$

TABLEAU 28 : RELATIONS DE PASSAGE à l'ordre 8.

$$M_{00}^{10} \left[-\frac{63}{256} \cdot \frac{C_{00}^{10}}{21} + \frac{7\sqrt{165}}{256} \cdot \frac{C_{20}^{10}}{21} \cdot \cos 2d - \frac{\sqrt{2145}}{128} \cdot \frac{C_{40}^{10}}{21} \cdot \cos 4d \right.$$

$$\left. + \frac{3\sqrt{2145}}{256\sqrt{2}} \cdot \frac{C_{60}^{10}}{21} \cdot \cos 6d - \frac{\sqrt{12153}}{256} \cdot \frac{C_{80}^{10}}{21} \cdot \cos 8d + \frac{\sqrt{46189}}{256\sqrt{2}} \cdot \frac{C_{100}^{10}}{21} \cdot \cos 10d \right]$$

$$M_{20}^{10} \left[-\frac{7\sqrt{165}}{256} \cdot \frac{C_{00}^{10}}{21} + \frac{119}{256} \cdot \frac{C_{20}^{10}}{21} \cdot \cos 2d - \frac{13\sqrt{13}}{64} \cdot \frac{C_{40}^{10}}{21} \cdot \cos 4d \right.$$

$$\left. + \frac{19\sqrt{26}}{512} \cdot \frac{C_{60}^{10}}{21} \cdot \cos 6d + \frac{\sqrt{663}}{256} \cdot \frac{C_{80}^{10}}{21} \cdot \cos 8d - \frac{\sqrt{62985}}{256} \cdot \frac{C_{100}^{10}}{21} \cdot \cos 10d \right]$$

$$M_{40}^{10} \left[-\frac{\sqrt{2145}}{128} \cdot \frac{C_{00}^{10}}{21} + \frac{13\sqrt{13}}{128} \cdot \frac{C_{20}^{10}}{21} \cdot \cos 2d + \frac{1}{64} \cdot \frac{C_{40}^{10}}{21} \cdot \cos 4d \right.$$

$$\left. - \frac{83\sqrt{2}}{256} \cdot \frac{C_{60}^{10}}{21} \cdot \cos 6d + \frac{11\sqrt{51}}{128} \cdot \frac{C_{80}^{10}}{21} \cdot \cos 8d - \frac{\sqrt{9690}}{256} \cdot \frac{C_{100}^{10}}{21} \cdot \cos 10d \right]$$

$$M_{60}^{10} \left[- \frac{3\sqrt{2145}}{256\sqrt{2}} \cdot \frac{C_{00}^{10}}{21} + \frac{19\sqrt{26}}{512} \cdot \frac{C_{20}^{10}}{21} \cdot \cos 2d_0 + \frac{83\sqrt{2}}{256} \cdot \frac{C_{40}^{10}}{21} \cdot \cos 4d_0 \right.$$

$$\left. - \frac{237}{512} \cdot \frac{C_{60}^{10}}{21} \cdot \cos 6d_0 - \frac{31\sqrt{102}}{512} \cdot \frac{C_{80}^{10}}{21} \cdot \cos 8d_0 - \frac{\sqrt{4845}}{512} \cdot \frac{C_{100}^{10}}{21} \cdot \cos 10d_0 \right]$$

$$M_{80}^{10} \left[- \frac{\sqrt{12155}}{256} \cdot \frac{C_{00}^{10}}{21} - \frac{\sqrt{663}}{256} \cdot \frac{C_{20}^{10}}{21} \cdot \cos 2d_0 + \frac{11\sqrt{51}}{128} \cdot \frac{C_{40}^{10}}{21} \cdot \cos 4d_0 \right.$$

$$\left. + \frac{31\sqrt{102}}{512} \cdot \frac{C_{60}^{10}}{21} \cdot \cos 6d_0 + \frac{59}{256} \cdot \frac{C_{80}^{10}}{21} \cdot \cos 8d_0 + \frac{\sqrt{190}}{512} \cdot \frac{C_{100}^{10}}{21} \cdot \cos 10d_0 \right]$$

$$M_{100}^{10} \left[- \frac{\sqrt{46189}}{256\sqrt{2}} \cdot \frac{C_{00}^{10}}{21} - \frac{\sqrt{62985}}{256} \cdot \frac{C_{20}^{10}}{21} \cdot \cos 2d_0 - \frac{\sqrt{9690}}{256} \cdot \frac{C_{40}^{10}}{21} \cdot \cos 4d_0 \right.$$

$$\left. - \frac{\sqrt{4845}}{512} \cdot \frac{C_{60}^{10}}{21} \cdot \cos 6d_0 - \frac{\sqrt{190}}{512} \cdot \frac{C_{80}^{10}}{21} \cdot \cos 8d_0 - \frac{1}{512} \cdot \frac{C_{100}^{10}}{21} \cdot \cos 10d_0 \right]$$

TABLEAU 29 : RELATIONS DE PASSAGE à l'ordre 10.

Nous nous limiterons toutefois aux deux échantillons suivants :

* cubique faces centrées : AL 1100A

La tôle d'aluminium, de 1 mm d'épaisseur, a été recuite pendant 10 minutes au bain de sel à 400°C ; la taille de grains est comprise entre 20 et 30 μm . La composition chimique en poids est

Fe : 55% ; Si : 15% ; Cu : 10% ; Ti : 1,4% .

Les figures 33 représentent les figures de pôles $\{111\}$, $\{200\}$ et $\{220\}$ obtenues par la méthode de réflexion-transmission. Les coefficients f_{mn}^l de la fonction de texture, calculés à partir des trois figures de pôles précédentes, nécessaires aux développements théoriques sont :

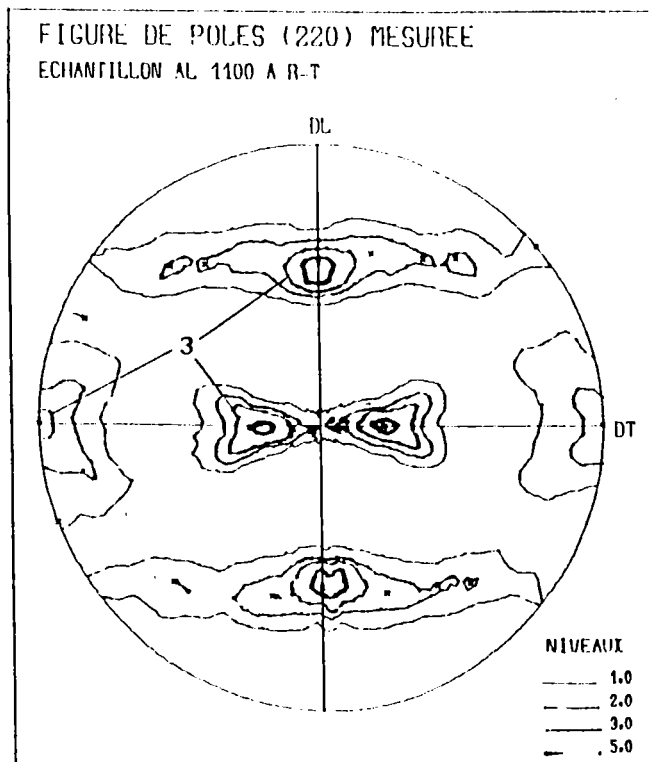
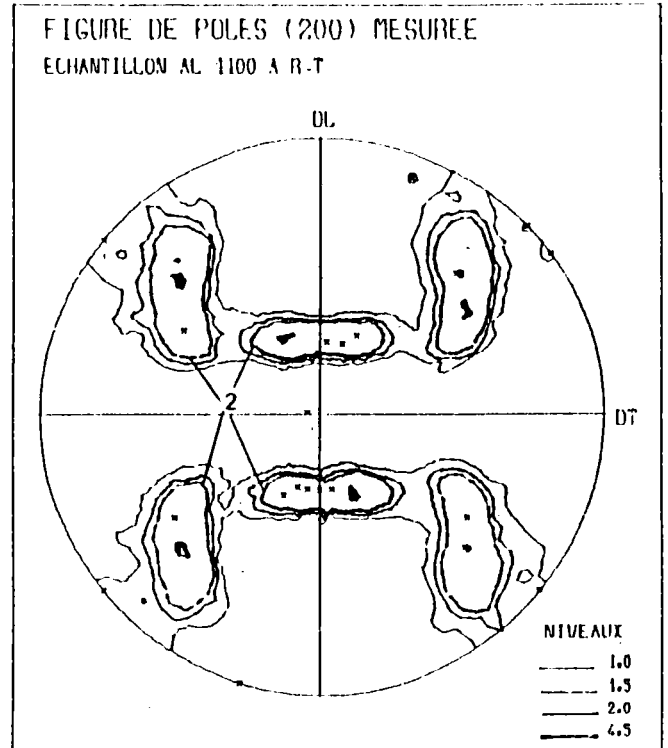
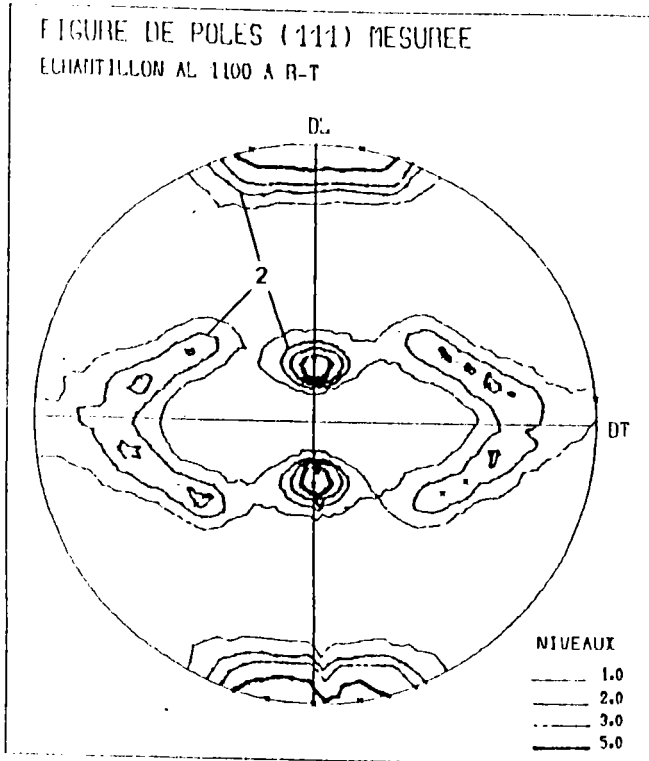


FIGURE 33 : FIGURES DE POLES DE L'ECHANTILLON AL 1100.

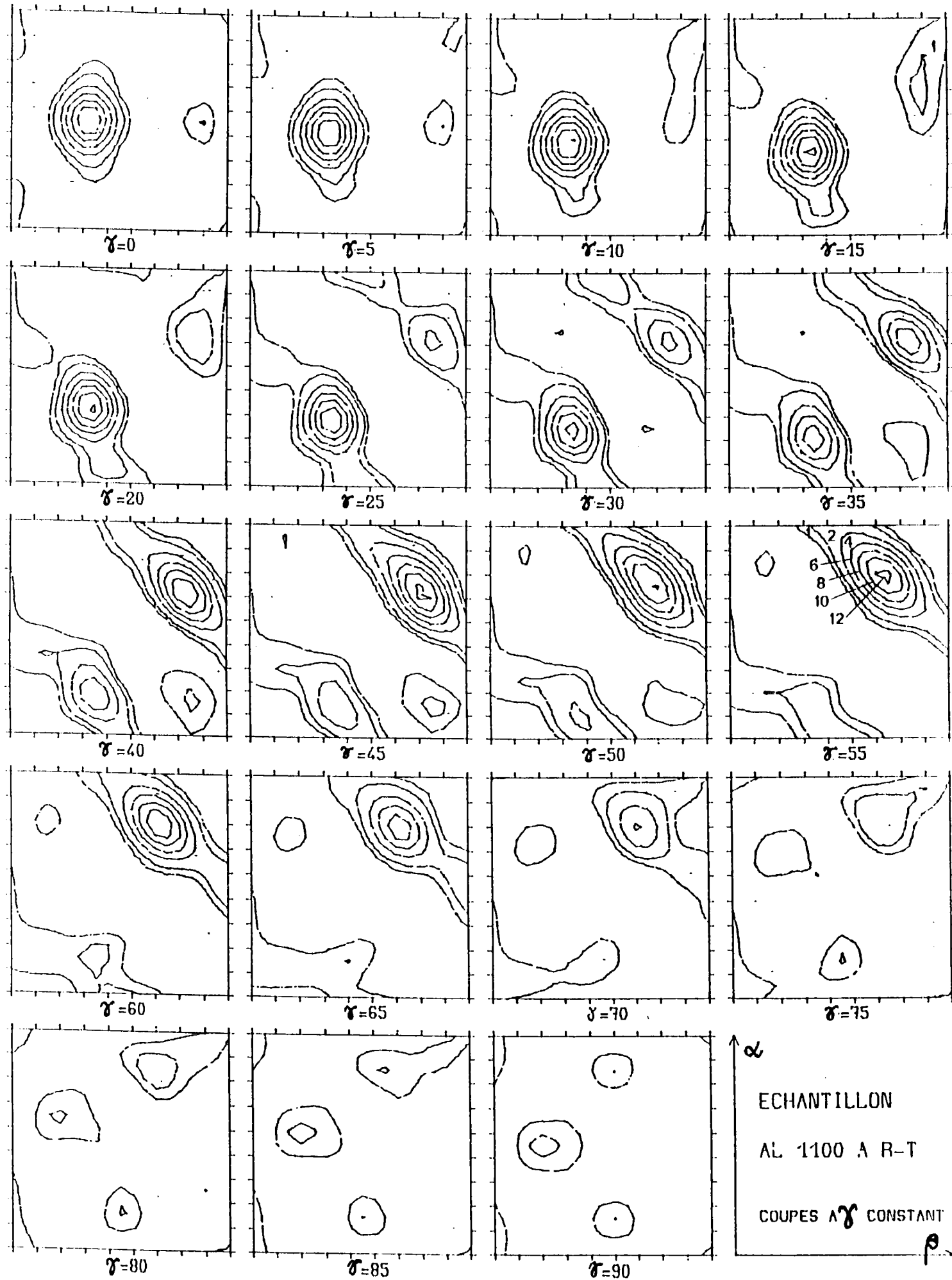


FIGURE 34 : ECHANTILLON AL1100 - coupes à γ constant.

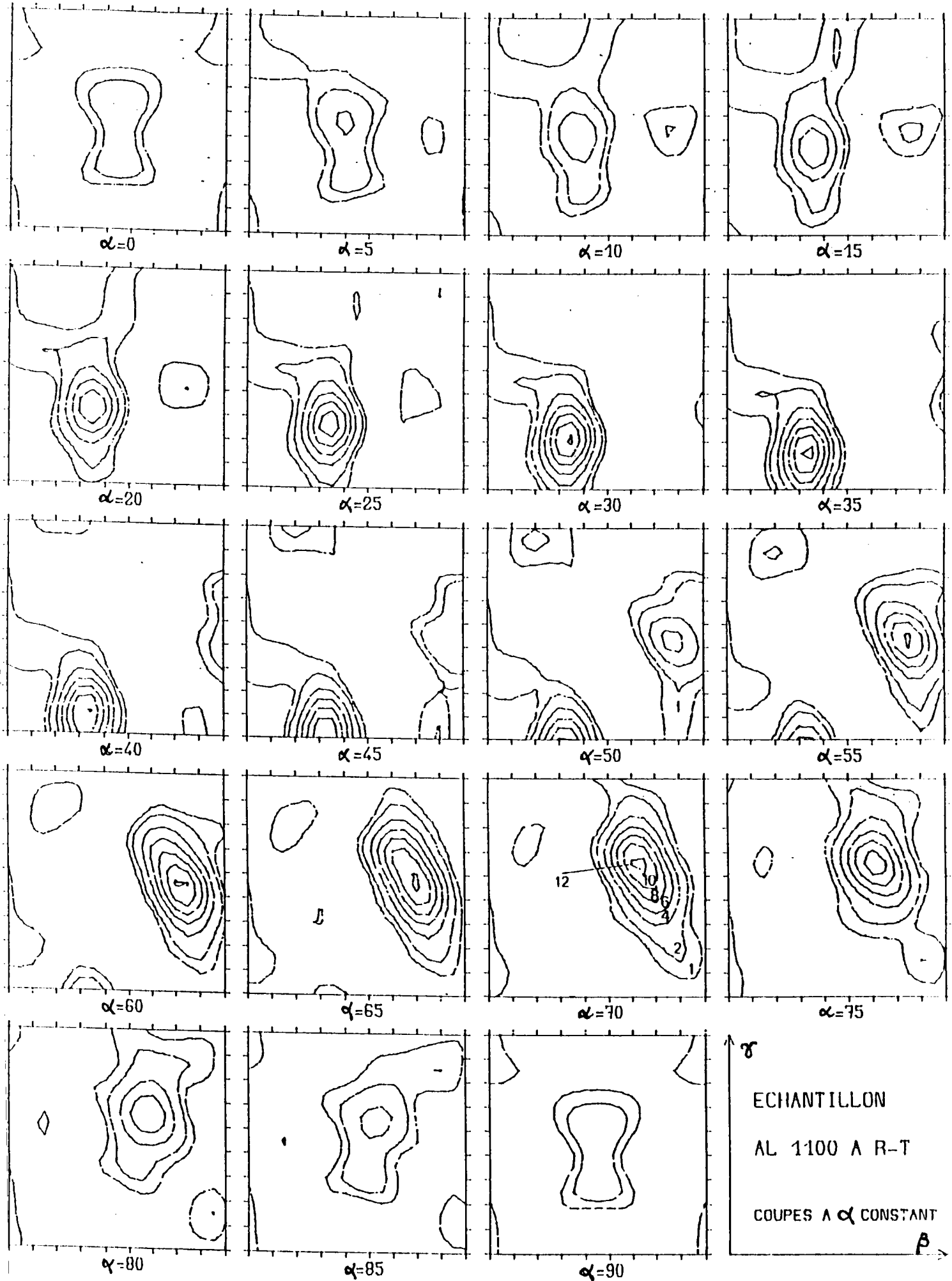


FIGURE 35: ECHANTILLON AL1100 - coupes à α constant.

$$f_{00}^{(4)} = -2,39185 \cdot 10^{-3} ; f_{00}^{(8)} = -3,75425 \cdot 10^{-3} ; f_{00}^{(10)} = 3,17758 \cdot 10^{-3} ;$$

$$f_{20}^{(4)} = 1,79708 \cdot 10^{-3} ; f_{20}^{(8)} = 3,2357 \cdot 10^{-4} ; f_{20}^{(10)} = -2,11919 \cdot 10^{-3} ;$$

$$f_{40}^{(4)} = -7,24336 \cdot 10^{-3} ; f_{40}^{(8)} = 2,54583 \cdot 10^{-3} ; f_{40}^{(10)} = -1,2347 \cdot 10^{-3} ;$$

$$f_{60}^{(6)} = -1,72625 \cdot 10^{-3} ; f_{60}^{(8)} = 2,32600 \cdot 10^{-3} ; f_{60}^{(10)} = -1,54546 \cdot 10^{-3} ;$$

$$f_{20}^{(6)} = 5,63746 \cdot 10^{-3} ; f_{80}^{(8)} = 2,06711 \cdot 10^{-3} ; f_{80}^{(10)} = 6,7516 \cdot 10^{-4} ;$$

$$f_{40}^{(6)} = -2,38852 \cdot 10^{-3} ; f_{100}^{(10)} = 2,3928 \cdot 10^{-4} ;$$

$$f_{60}^{(6)} = 6,8398 \cdot 10^{-4} .$$

Les tracés de la fonction de distribution des orientations des cristallites $f(\Psi, \theta, \varphi)$ en coupes à φ et/ou à Ψ constants sont montrés sur les figures 34 et 35.

La tôle initiale d'aluminium est caractérisée par une texture très accusée (maximum de $f(g) = 18,3$) comprise entre $\{123\} \langle 111 \rangle$ et $\{112\} \langle 111 \rangle$ avec une dispersion autour de la direction de laminage $\langle 111 \rangle$ de 10° environ.

* cubique centré : A2 acier doux calmé à l'aluminium

La fonction de distribution des orientations $f(\Psi, \theta, \varphi)$ de cette tôle mince d'acier extra doux calmé à l'aluminium, laminée à froid puis recuite, de composition chimique:

C = 4,6% ; Mn = 28% ; Si 2% ; P = 1,2% ; S = 2,6% ; Al = 2,5% ; N = 0,7%

a été calculée à partir de l'enregistrement et du traitement des figures de pôles 110, 200 et 112 (figures 36). Les coefficients f_{mn}^l utiles au calcul du coefficient d'anisotropie se limitent à :

$$f_{00}^0 = 1,79 \cdot 10^{-2} ; f_{00}^6 = 5,703 \cdot 10^{-3} ; f_{00}^8 = 1,84 \cdot 10^{-4} ;$$

$$f_{00}^4 = -9,131 \cdot 10^{-3} ; f_{20}^6 = -1,87 \cdot 10^{-3} ; f_{20}^8 = 7,55 \cdot 10^{-4} ;$$

$$f_{20}^4 = 9,39 \cdot 10^{-4} ; f_{40}^6 = -7,02 \cdot 10^{-4} ; f_{40}^8 = -6,16 \cdot 10^{-3} ;$$

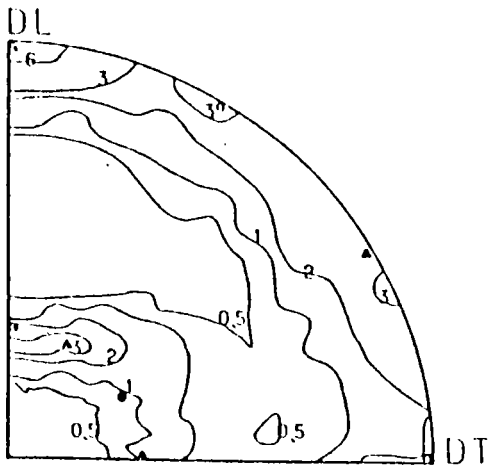
$$f_{40}^4 = 8,76 \cdot 10^{-4} ; f_{60}^6 = -6,96 \cdot 10^{-4} ; f_{60}^8 = -1,57 \cdot 10^{-3} ;$$

$$f_{80}^8 = -5,63 \cdot 10^{-3} ,$$

les autres termes apparaissant négligeables. La figure 37 représente quant à elle les coupes à $\varphi = \text{Cste}$. La texture de cette tôle est une texture $\{111\}$ très nettement marquée, avec comme composante principale $\{111\}\langle 011\rangle$, les composantes $\{100\}$ et $\{110\}$ sont pratiquement inexistantes.

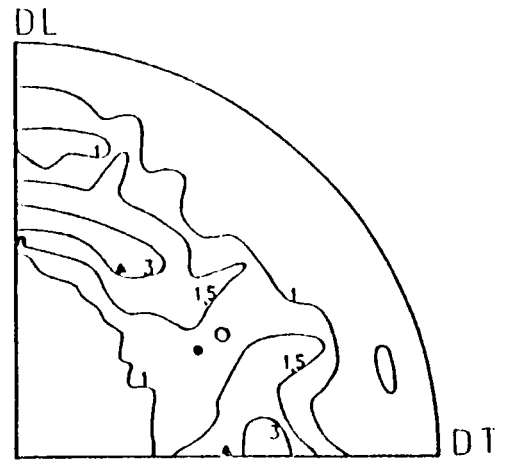
Les mesures du coefficient d'anisotropie ont été faites sur des éprouvettes de type ISO 50. Pour chaque valeur de α_0 , on dispose de trois éprouvettes. Les résultats expérimentaux sont montrés plus loin, comparés aux calculs théoriques.

A2 FIGURE DE PÔLES (110)



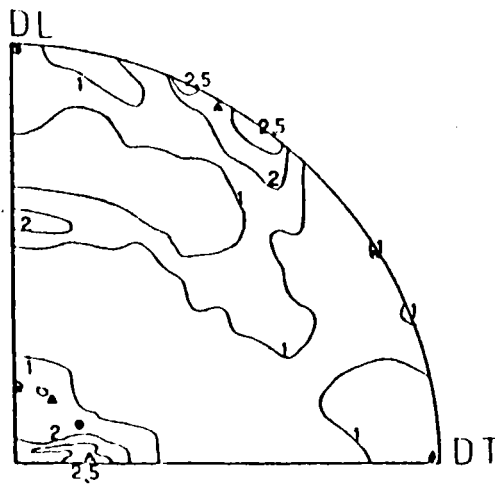
- ▲ (111) <110>
- (111) <112>

A2 FIGURE DE PÔLES (200)



- ▲ (111) <110>
- (111) <112>

A2 FIGURE DE PÔLES (112)



- ▲ (111) <110>
- (111) <112>

FIGURE 36 : FIGURES DE POLES d'un acier extra doux calmé à l'aluminium A2.

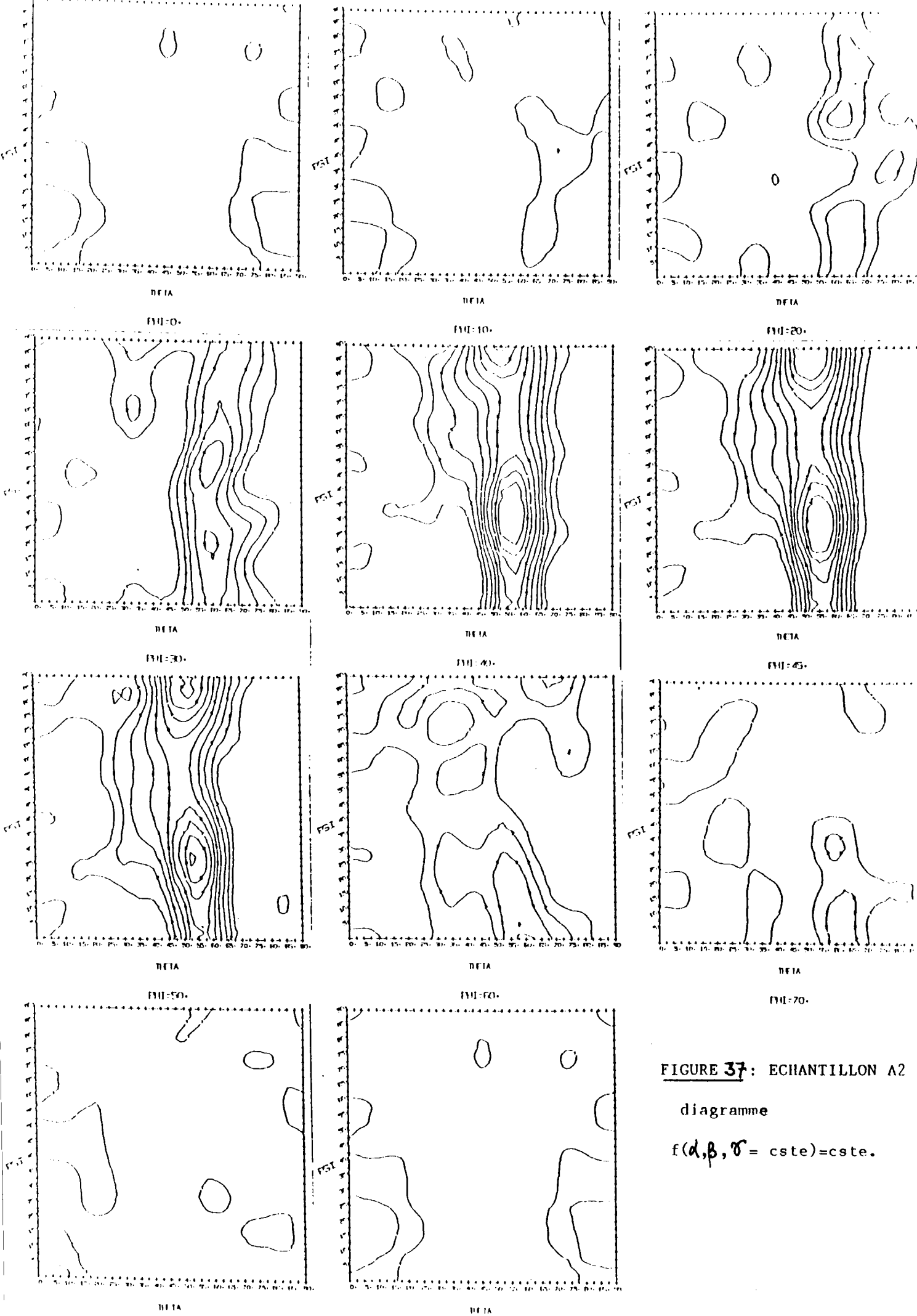


FIGURE 37: ECHANTILLON A2

diagramme

$$f(\alpha, \beta, \sigma = \text{cste}) = \text{cste}.$$

e) Comparaison expérience-théorie et conclusion.

Les mesures d'allongement sont faites à l'aide d'une règle à coïncidence associée à un comparateur dont la précision est de $10\ \mu\text{m}$.

La confrontation théorie-expérience sur les valeurs de $r(d_0)$ suppose que l'on puisse comparer la valeur calculée avec celle mesurée sur une éprouvette ayant subi une déformation infiniment petite au-dessus de la limite de charge. Cette mesure étant impossible avec les dispositifs expérimentaux disponibles, les valeurs expérimentales portées sur les différentes courbes correspondent à une extrapolation à déformation uniaxiale nulle. Les éventuelles évolutions de texture au cours de la déformation ne sont donc pas prises en compte au niveau des calculs.

On peut admettre cependant que l'incertitude résultant de ces conditions est prise en compte dans les barres d'erreurs expérimentales.

L'analyse des courbes 38 à 41 conduit à conclure que la théorie classique de TAYLOR entraîne des écarts d'autant plus importants entre valeurs théoriques et mesurées que la texture du matériau est plus prononcée et s'avère inadaptée à la description des propriétés mécaniques. Cette situation inhérente au modèle semble notamment due au fait que certains grains peuvent subir des changements de forme différents de ceux du polycristal. Des conclusions similaires valent généralement pour divers échantillons de tôles polycristallines (c.f.c. et c.c.) étudiés dans des conditions analogues.

L'intervention d'un nombre plus restreint de systèmes de glissement (inférieur à 5) amène un accord nettement meilleur entre expérience et théorie. Cet accord s'avère correspondre pour l'échantillon A1 1100A à celui du modèle auto-équilibré [30] dont la mise en oeuvre est toutefois sans commune mesure avec celle des modèles SACHS-TAYLOR intermé-

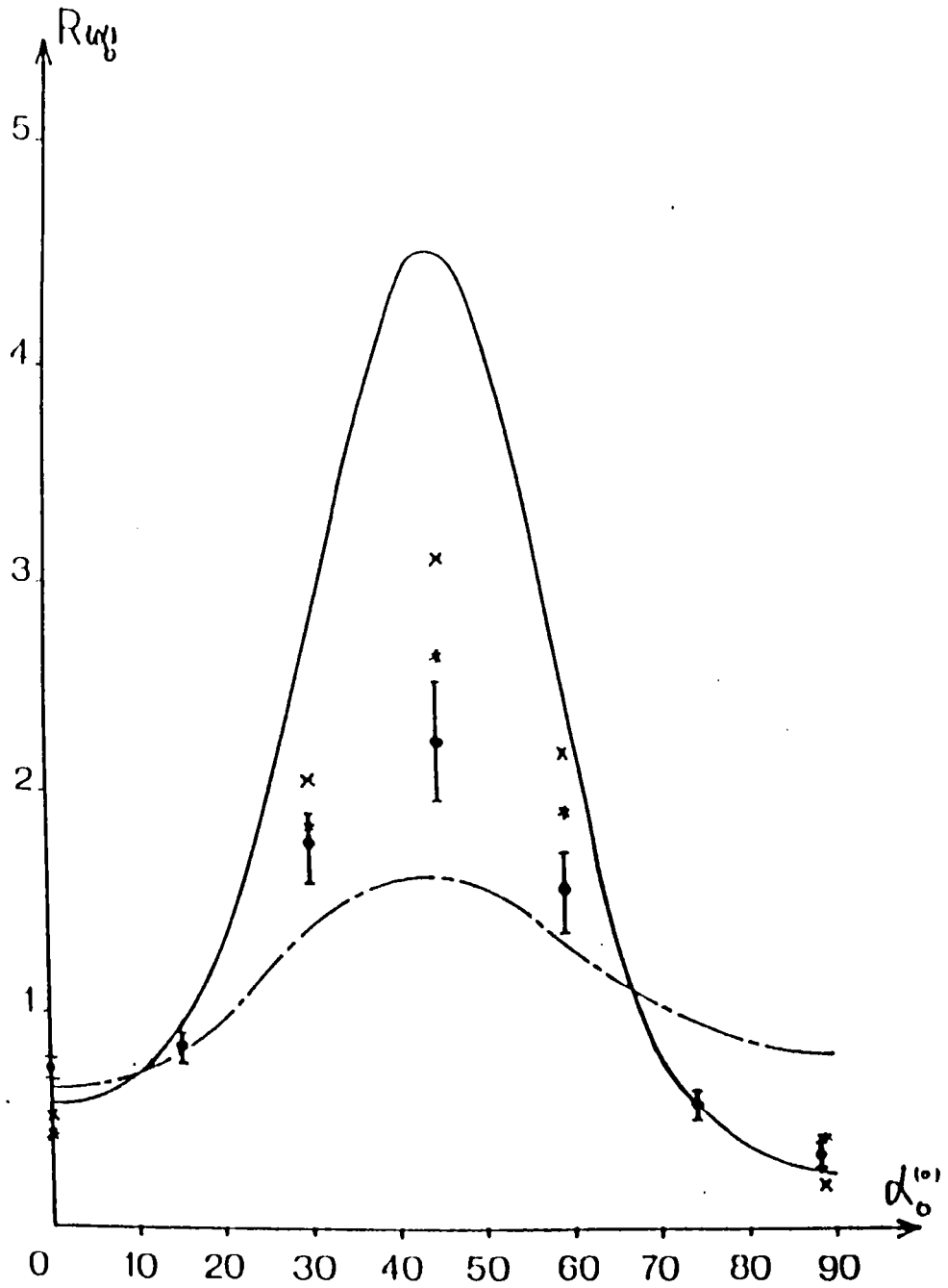


FIGURE 38: COMPARAISON EXPERIENCE-THEORIE des valeurs de $r(\alpha)$:
 ——— modèle de Taylor (déformation totalement imposée);
 - - - - modèle de Taylor relaxé (T2) (deux composantes imposées du tenseur de déformation);
 x modèle auto-cohérent [30,51];
 * modèle auto-cohérent [30,61];
 • valeurs expérimentales.

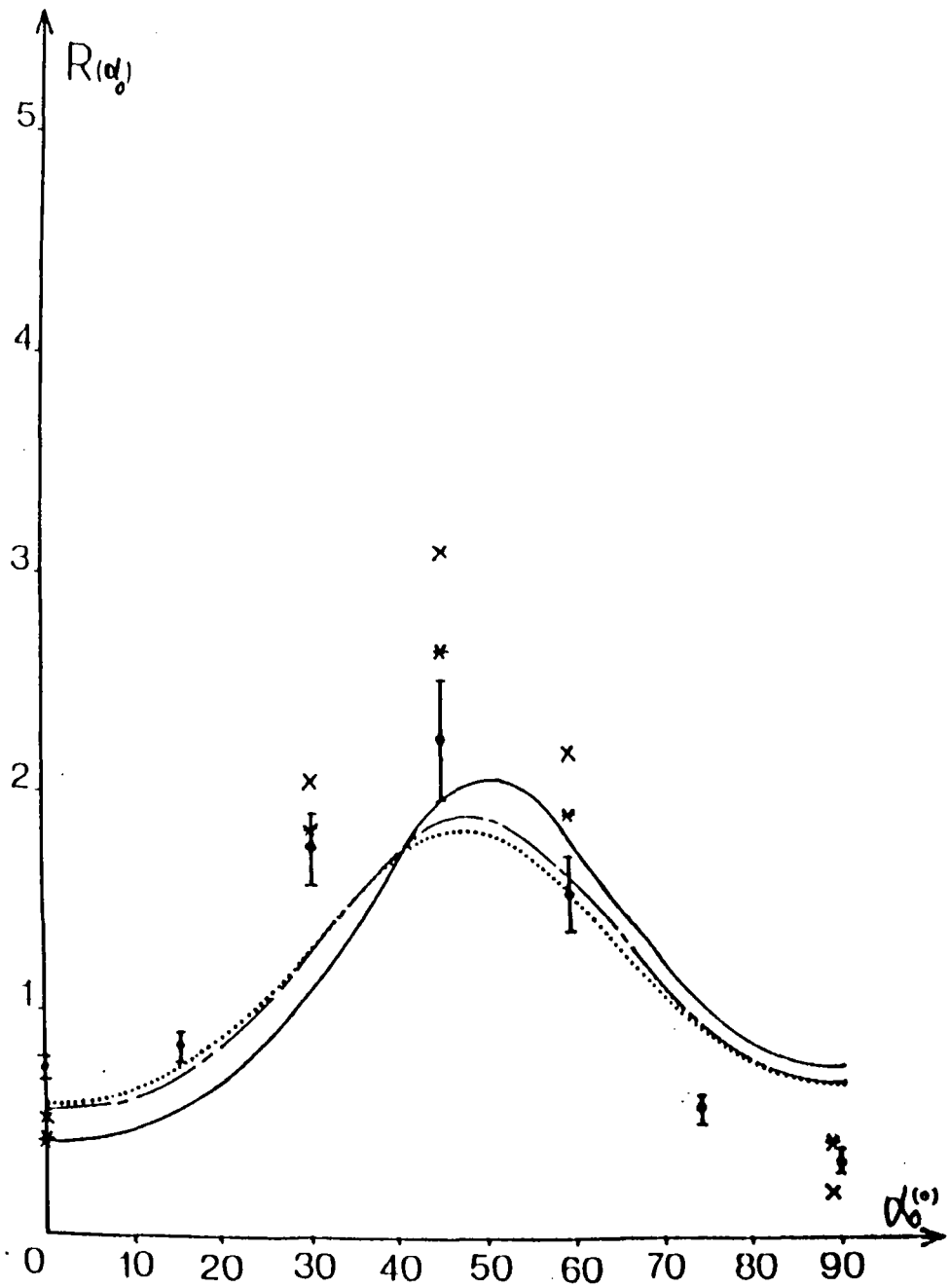


FIGURE 39: COMPARAISON EXPERIENCE - THEORIE des valeurs de $r(\alpha)$:

- modèle de Sachs (glissement sur le système primaire);
- modèle de Sachs étendu S 2;
- .- modèle de Sachs étendu S2';
- x modèle auto-cohérent [30,50];
- * modèle auto-cohérent [30,61];
- valeurs expérimentales.

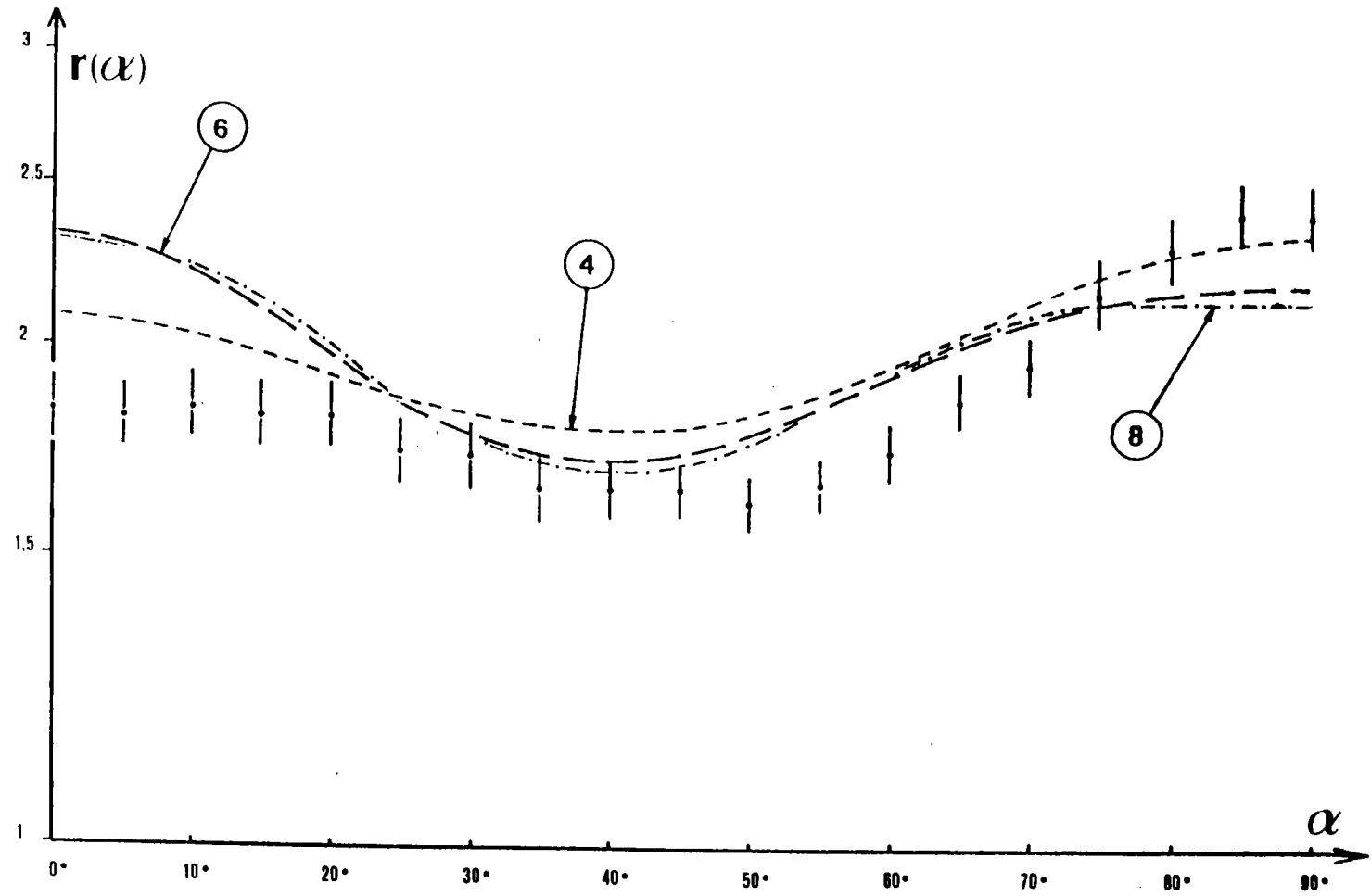


FIGURE 40: COMPARAISON DU COEFFICIENT D'ANISOTROPIE $r(\alpha)$ d'une tôle d'acier extra-doux calmé à l'aluminium (A2) avec les valeurs calculées pour divers ordres de troncature 4, 6 et 8 de la fonction de texture.

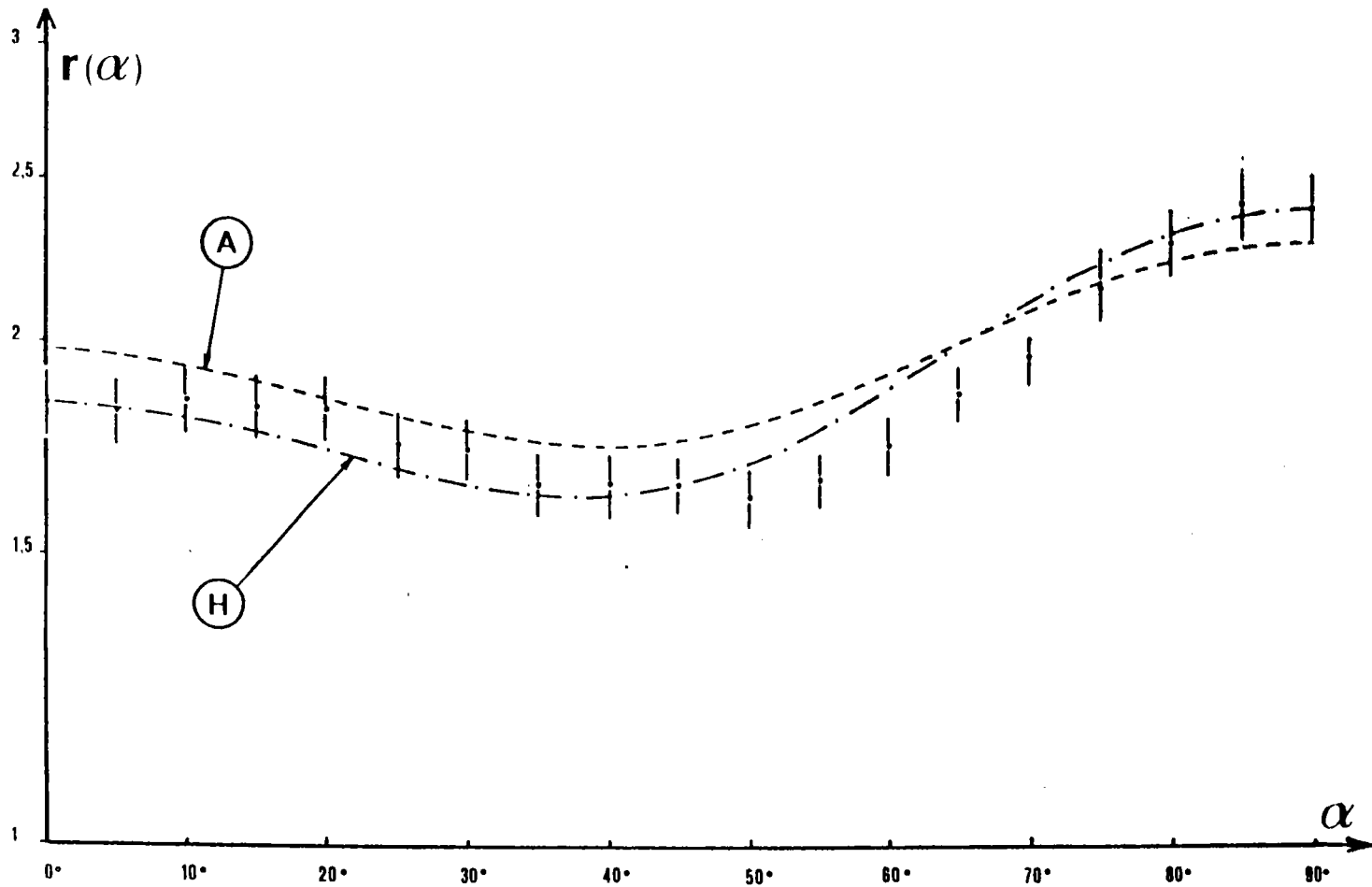


FIGURE 4A : Tôle mince d'acier extra-doux calmé à l'aluminium A2?

Comparaison des valeurs de $r(\alpha)$ mesurées et des valeurs calculées avec l'approximation de HILL (H) et l'approximation proposée (A: relation 234).

diaires. Parallèlement, l'hypothèse du glissement non-cristallographique dans les cubiques centrés permet d'obtenir des prévisions théoriques plus proches de l'expérience.

Les formules approchées (233) et (234), qui possèdent un comportement voisin de l'expression proposée par HILL (220), renforcent l'interprétation structurale des trois paramètres cette approximation.

En conclusion, il suffira pour avoir une estimation assez précise des variations de $r(\alpha_0)$ d'une tôle donnée, de comparer systématiquement l'ensemble des modèles étudiés pour le réseau cubique concerné. L'examen des différentes figures laisse cependant subsister dans tous les cas un désaccord pour l'orientation particulière $\alpha^0 = 90^\circ$ sans qu'une explication simple ait pu être proposée à ces constatations.

2) CHAMP DE ROTATION DES GRAINS.

Dans le repère cristallographique R^c , le tenseur vitesse de rotation

$$\overset{\sim}{\epsilon}_{ij}^c = \frac{1}{3} \sum_{k(\text{actifs})} \overset{h}{l} \tilde{e}_{ij}^k \quad (237)$$

se définit encore à partir des composantes de la vitesse de rotation des grains résultant de la rotation infinitésimale $\Delta g = (\Delta\alpha, \Delta\beta, \Delta\gamma)$

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & P & -Q \\ & 0 & R \\ & & 0 \end{pmatrix}. \quad (238)$$

Ces composantes s'expriment aussi par :

$$P = \dot{\beta} \sin \vartheta_0 - \dot{\alpha} \sin \beta_0 \cos \vartheta_0, \quad (239)$$

$$Q = \dot{\beta} \cos \vartheta_0 + \dot{\alpha} \sin \beta_0 \sin \vartheta_0, \quad (240)$$

$$R = \dot{\gamma} + \dot{\alpha} \cos \beta_0, \quad (241)$$

et corrélativement les incréments de rotation sont donnés par :

$$\dot{\alpha} = (-P \cos \vartheta_0 + Q \sin \vartheta_0) / \sin \beta_0, \quad (242)$$

$$\dot{\beta} = R \sin \vartheta_0 + Q \cos \vartheta_0, \quad (243)$$

$$\dot{\gamma} = R - \cotg \beta_0 (-P \cos \vartheta_0 + Q \sin \vartheta_0), \quad (244)$$

($g_0 = (\alpha_0, \beta_0, \vartheta_0)$ est l'orientation initiale du grain soumis à une vitesse de déformation macroscopique \dot{E}_3).

Dans la suite de ce travail, nous n'aborderons pas l'étude du champ de rotation résultant du glissement non-cristallographique dans les cubiques centrés, le formalisme proposé dans cette thèse ayant été appliqué avec succès à la prévision des textures de déformation par ARMINJON [133].

a) Indétermination du modèle classique de TAYLOR.

Une difficulté inhérente au modèle de TAYLOR réside dans l'indétermination des quantités de glissement à l'intérieur des sous-domaines du triangle élémentaire (cf. chapitre 4), et pour lesquels la théorie prédit l'intervention de 6 ou 8 systèmes actifs. En considérant le

découpage particulier relatif au cas $q=1/2$ (figure 13), on remarque que l'indétermination ne peut être levée directement que sur certaines frontières (figure 41). En dehors de ces situations particulières, où n'interviennent que 4 systèmes de glissement, la détermination du champ de rotation des grains ne peut être achevée que sous des hypothèses physiques complémentaires que l'on peut mettre en évidence à partir de l'exemple suivant :

$q = 1/2$: domaine correspondant à $\hat{\sigma} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_4 + \sigma_5$:

$$\begin{array}{l} \text{configuration active} \\ \text{(8 systèmes)} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -\tau_0 & \tau_0 \\ 0 & -\tau_0 & \tau_0 \\ 0 & -\tau_0 & \tau_0 \\ 0 & -\tau_0 & \tau_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}^c = \frac{1}{E} & \left[l_{32}^2 \cdot e_{23}^c + l_{33}^3 \cdot e_{33}^c + l_{35}^5 \cdot e_{53}^c + l_{36}^6 \cdot e_{63}^c + l_{38}^8 \cdot e_{83}^c + l_{39}^9 \cdot e_{93}^c + l_{311}^{11} \cdot e_{113}^c \right. \\ & \left. + l_{312}^{12} \cdot e_{123}^c \right] \end{aligned}$$

rappelant que les quantités de glissement l^k sont liés aux facteurs partiels M_j (système 100), on trouve

$$\left\{ \begin{array}{l} M_1 = -l^2 - l^{11} \\ M_2 = l^5 + l^9 \\ M_3 = l^2 - l^3 + l^5 - l^6 \\ M_4 = -l^5 - l^8 \\ M_5 = l^6 + l^{12} \\ M_6 = l^8 - l^9 + l^{11} - l^{12} \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} l^6 = l^2 - l^3 + l^5 - M_3 \\ l^8 = -l^5 \quad - M_4 \\ l^9 = -l^3 \quad + M_2 \\ l^{11} = -l^2 \quad - M_1 \\ l^{12} = -l^2 + l^3 - l^5 + M_3 + M_5 \end{array} \right.$$

Le travail de déformation devant être positif sur les systèmes actifs, il y a lieu de vérifier les inégalités :

$$-M_1 \leq l^2 \leq 0 ,$$

$$0 \leq l^3 \leq M_2 ,$$

$$-M_4 \leq l^5 \leq 0 ,$$

$$M_3 \leq l^2 - l^3 + l^5 \leq M_3 + M_5 .$$

On constate ainsi qu'il subsiste trois paramètres indéterminés, par exemple l^2 , l^3 et l^5 , pouvant varier dans une plage représentée par la figure 42 dans une situation typique.

Le champ de rotation des grains est alors tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} R = 4l^2 + 4l^5 + M_1 - M_2 - 2M_3 + M_4 + M_5 , \\ -Q = 4l^2 - 4l^5 + 2M_1 - M_2 - 2M_4 + M_5 , \\ P = 4l^2 + 4l^5 - 8l^3 - M_1 + 2M_2 - 4M_3 + M_4 - 2M_5 . \end{array} \right.$$

La rotation reste donc généralement indéterminée, compte-tenu du domaine de variation des paramètres accessoires l^2 , l^3 et l^5 . Cette indétermination doit donc être levée par des hypothèses supplémentaires qui pourraient être :

- 1) on adopte, pour définir les l^k indéterminés, les coordonnées du barycentre relatif au domaine de variation de ces para-

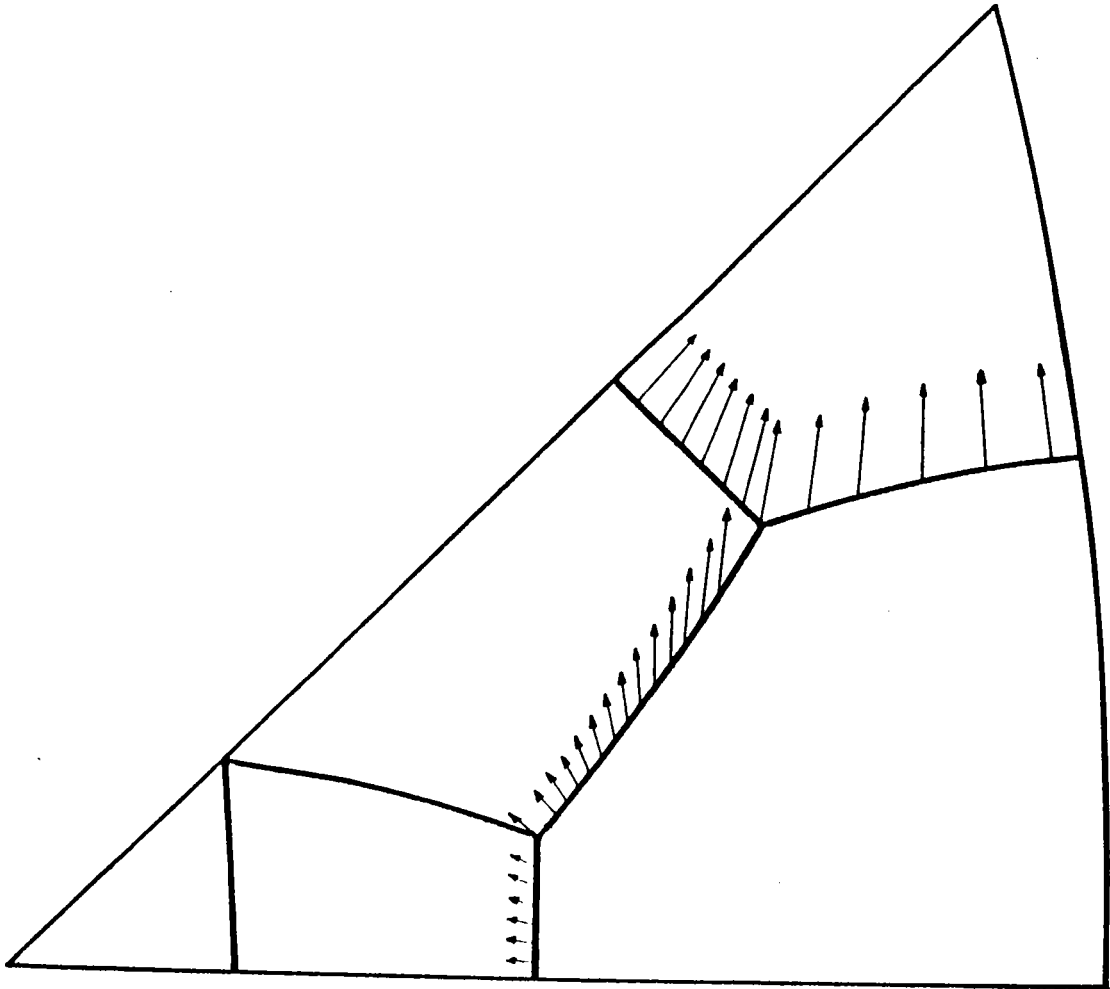


FIGURE 49 : Champ de rotation sur les frontières des domaines relatifs
au cas $q=1/2$ (déformation de 8,5% : modèle de Taylor).

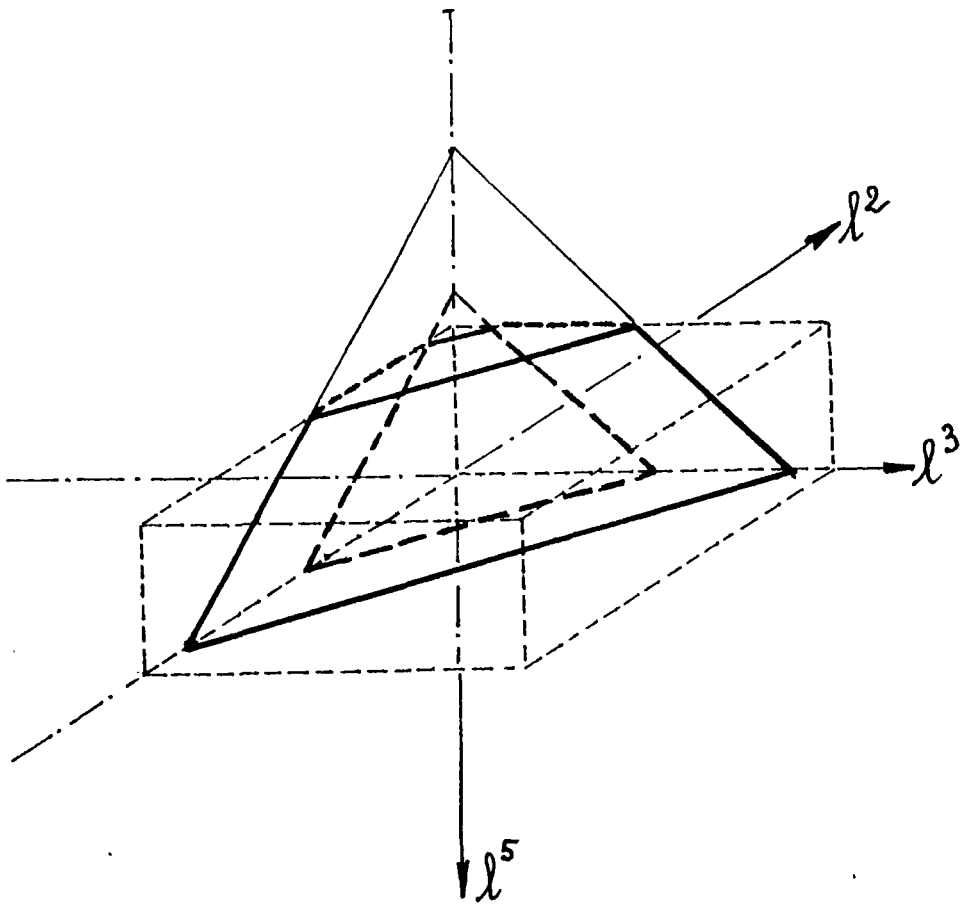


FIGURE 43 : Représentation d'une situation typique de variation des paramètres indéterminés.

Orientation initiale : $\alpha=0$; $\beta=-23,2179$; $\gamma=-15,0724$

déformation : 12,5 %

<p style="text-align: center;"><u>Sachs</u></p> <p>(1 système)</p> $\alpha = 16,9506$ $\beta = -22,7425$ $\gamma = -33,6564$	<p style="text-align: center;"><u>S1 et S'1</u></p> <p>(2 systèmes)</p> $\alpha = 4,9186$ $\beta = -20,6280$ $\gamma = -20,1357$
<p style="text-align: center;"><u>Taylor :</u></p> <p>(3 systèmes)</p> $\alpha = 5,6765$ $\beta = -22,0248$ $\gamma = -18,6861$	<p style="text-align: center;"><u>T2</u></p> <p>(2 systèmes)</p> $\alpha = 7,9173$ $\beta = -18,4017$ $\gamma = -25,9781$
<p style="text-align: center;"><u>viscoplastique [134]</u></p> <p>(5 systèmes)</p> $\alpha = 5,0526$ $\beta = -22,2396$ $\gamma = -18,0379$	<p style="text-align: center;"><u>relaxation de $\dot{\epsilon}_{12}$ [81]</u></p> <p>(4 systèmes)</p> $\alpha = 5,3350$ $\beta = -22,2416$ $\gamma = -18,3733$

Tableau 31: comparaison des champs de rotation des grains.

Orientation initiale : $\alpha=0$; $\beta=-36,415$; $\gamma=-31,551$

déformation : 12,5 %

<p style="text-align: center;"><u>Sachs</u></p> <p>(1 système)</p> <p>$\alpha = 16,9506$</p> <p>$\beta = -22,7425$</p> <p>$\gamma = -33,6564$</p>	<p style="text-align: center;"><u>S₂ et S'₂</u></p> <p>(2 systèmes)</p> <p>$\alpha = 4,9186$</p> <p>$\beta = -20,6280$</p> <p>$\gamma = -20,1357$</p>
<p style="text-align: center;"><u>Taylor :</u></p> <p>(3 systèmes)</p> <p>$\alpha = 12,2947$</p> <p>$\beta = -37,8786$</p> <p>$\gamma = -44,6061$</p>	<p style="text-align: center;"><u>T₂</u></p> <p>(2 systèmes)</p> <p>$\alpha = 7,7813$</p> <p>$\beta = -39,2571$</p> <p>$\gamma = -39,8752$</p>
<p style="text-align: center;"><u>viscoplastique [134]</u></p> <p>(5 systèmes)</p> <p>$\alpha = 7,8226$</p> <p>$\beta = -40,4366$</p> <p>$\gamma = -38,7020$</p>	<p style="text-align: center;"><u>relaxation de $\dot{\epsilon}_{12}$ [81]</u></p> <p>(4 systèmes)</p> <p>$\alpha = -4,4096$</p> <p>$\beta = -29,8785$</p> <p>$\gamma = -25,1769$</p>

Tableau 38: comparaison des champs de rotation des grains.

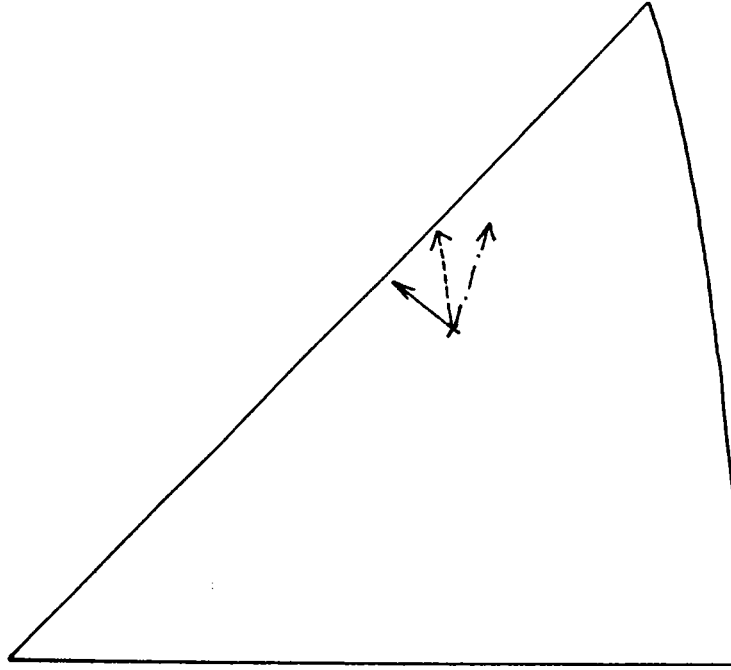


FIGURE 44: Champ de rotation des grains pour une déformation de quelques % en fonction de la quantité $d\mu/H$:

$$d\mu/H \begin{cases} = 160; & \text{---} \\ = 80; & \text{- - - -} \\ = 0. & \text{_____} \end{cases}$$

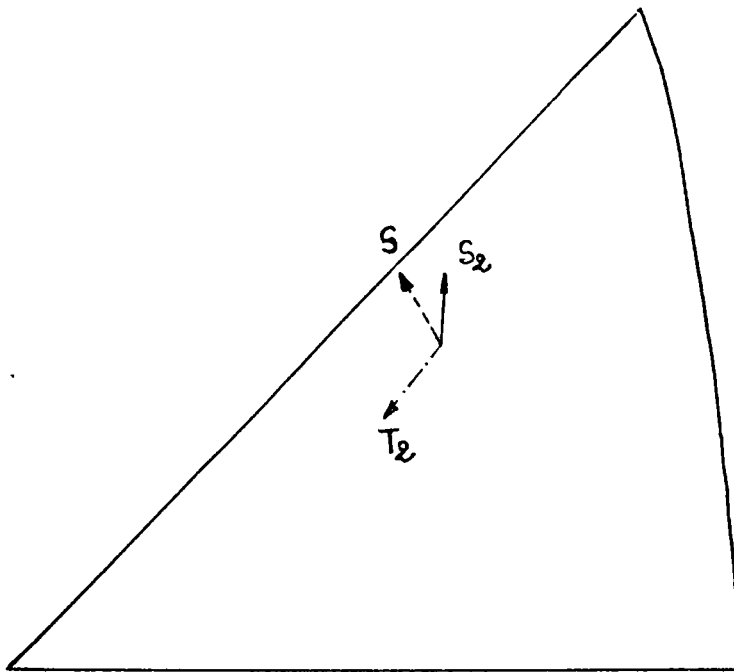


FIGURE 45: Champ de rotation des grains relatifs aux modèles intermédiaires (S=Sachs, S2, T2) pour une déformation de 7,5%.

mètres. Pour une telle hypothèse, il n'y a pas de discontinuité du champ de rotation qui comme dans le modèle de TAYLOR est surestimé; tous les grains convergent vers les orientations stables finales sans possibilité de dispersion. En traction, les lignes de champ convergent vers les directions $\langle 001 \rangle$ et $\langle 111 \rangle$ de part et d'autre d'une ligne moyenne (figure 41) coïncidant pratiquement avec le cercle passant par les trois sommets $[011]$, $[110]$ et $[101]$.

2) la déformation est réalisée sur les systèmes donnant, pour un grain déterminé, une rotation la plus voisine possible de son environnement (donc de la rotation macroscopique). Compte-tenu des bornes de variation des paramètres ajustables, les zones hachurées de la figure 41 sont celles où cette condition est réalisable. Cette hypothèse reproduit bien la stabilité de la zone voisine de $\langle 001 \rangle$ mais ne rend pas compte de la dispersion du sommet $\langle 111 \rangle$. La région voisine de $\langle 101 \rangle$, correspond quant à elle à une situation instable, de laquelle les grains auront tendance à s'échapper sous l'influence de fluctuations dues au comportement de l'environnement

3) une autre alternative consisterait à envisager une loi d'écoulement visco-plastique [2,134] ou un principe de minimisation de l'énergie de déformation du second ordre proposée par RENOARD et WINTENBERGER [70].

b) Modèles intermédiaires.

L'indétermination sur les combinaisons actives de systèmes de glissement est levée pour ces modèles ne faisant plus intervenir qu'un nombre restreint (inférieur à 5) de systèmes de glissement. Les comparai-

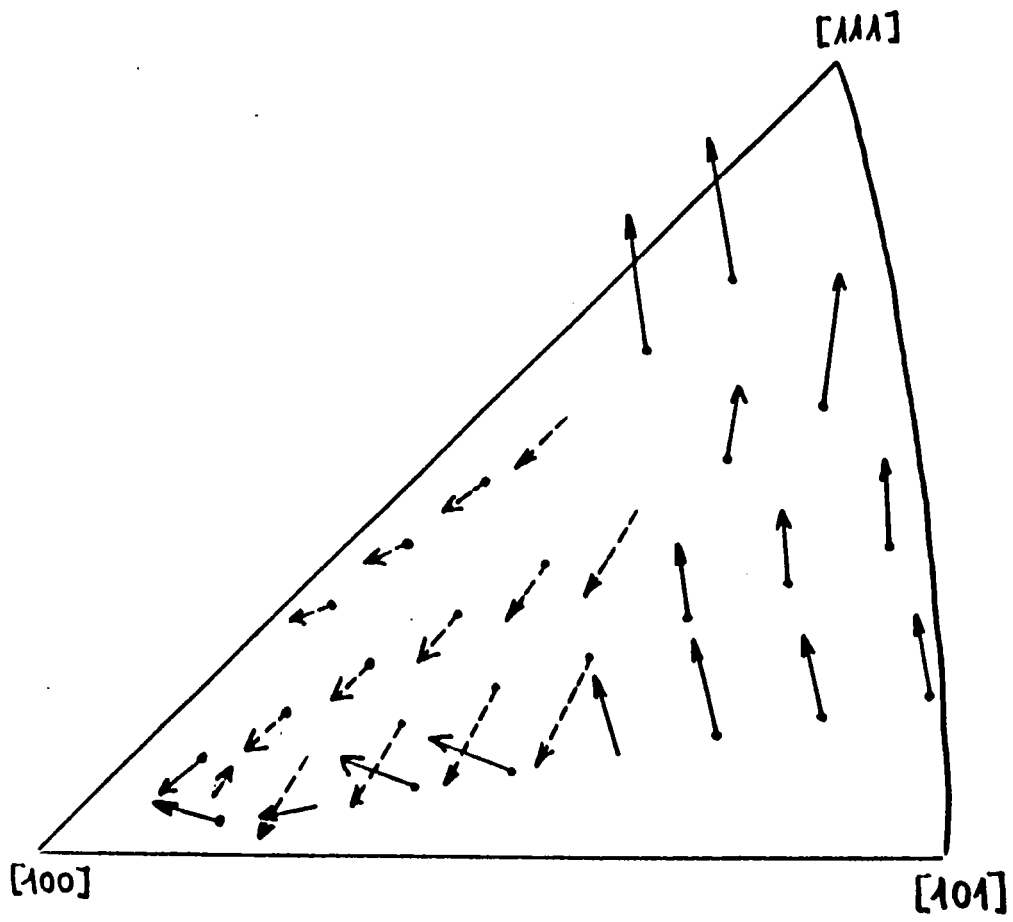


FIGURE 46: CHAMP DE ROTATION DES GRAINS calculé avec le modèle T2.

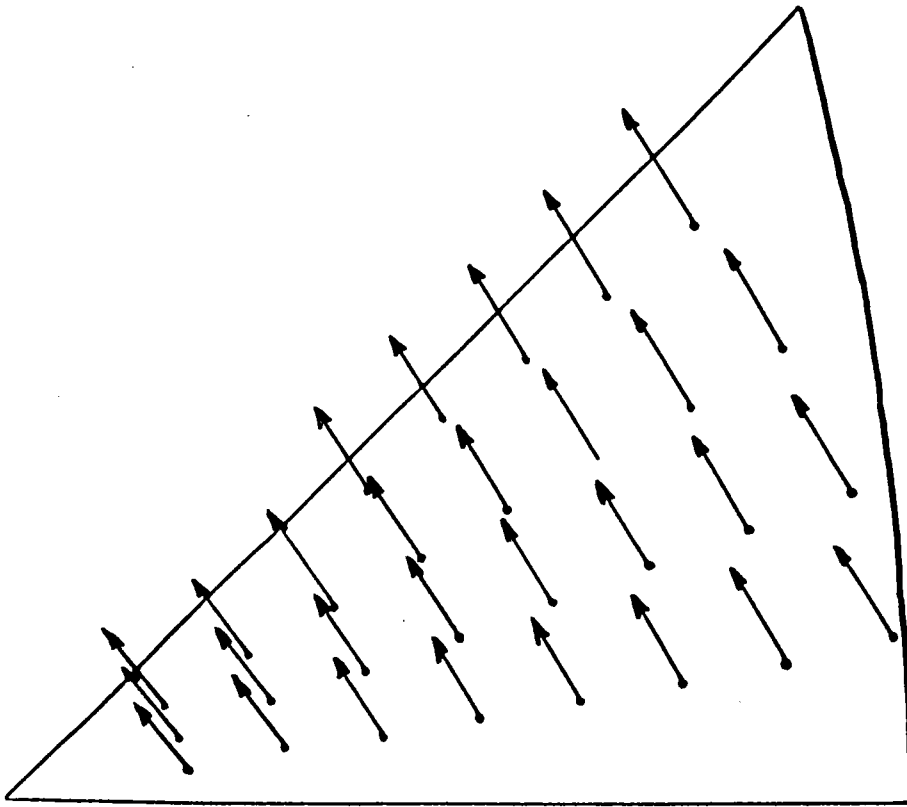


FIGURE 47: CHAMP DE ROTATION DES GRAINS calculé avec le modèle de Sachs (glissement sur le système primaire).

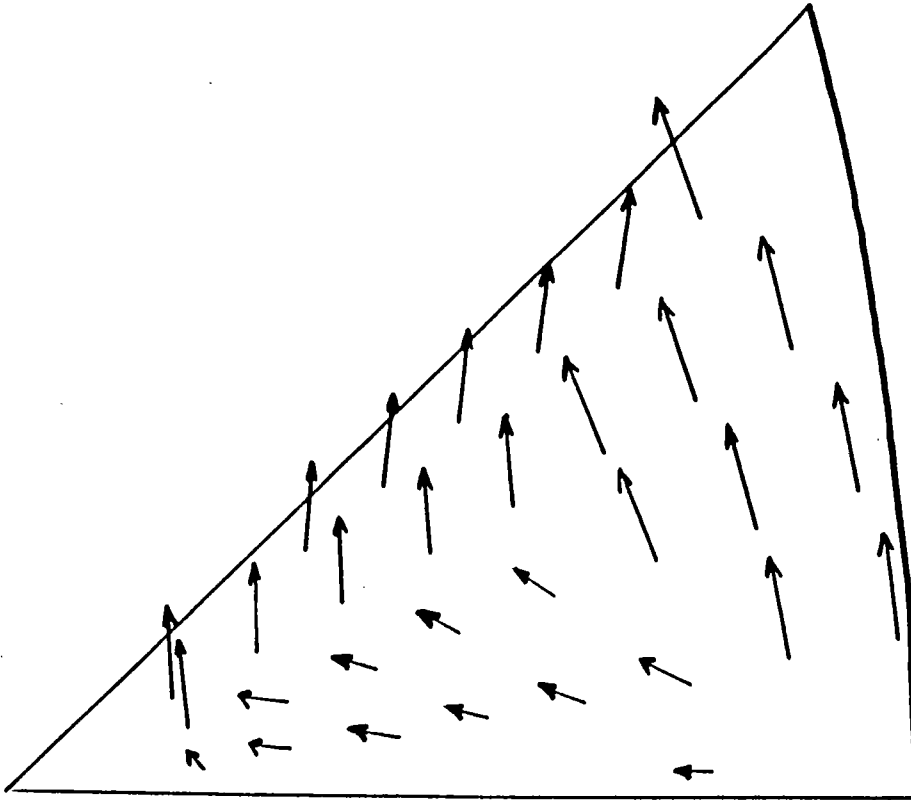


FIGURE 48: CHAMP DE ROTATION DES GRAINS calculé avec le modèle de Sachs étendu (glissement sur deux systèmes).

sons entre les orientations finales atteintes pour deux orientations particulières et un taux de déformation de 12,5% sont présentées dans les tableaux 31 et 32, pour un ensemble de modèles de déformation.

Afin de compléter cette analyse du champ de rotation des grains, les figures 43 - 48 comparent les changements d'orientation obtenus pour divers modèles étudiés avec des résultats décrits par BERVEILLER en fonction de la quantité $d\mu/H$ ([54]). Cet auteur indique que pour des valeurs de $d\mu/H$ supérieure à 50, l'intensité relative des glissements est pratiquement constante ; dès que $d\mu/H$ est de l'ordre de 80, cinq systèmes de glissement sont activés. Par contre, pour $d\mu/H$ inférieur à 50, l'amplitude des glissements varie très rapidement, le glissement primaire devient prédominant ; le nombre de systèmes actifs décroît très rapidement et pour $d\mu/H$ proche de 0, seul un système reste actif. Ces remarques confirment les résultats des modèles de SACHS et étendus alors que les discontinuités du modèle (T2) sont aussi illustrées.

c) Conclusion.

Pour l'ensemble des modèles étudiés qui n'intègrent ni le facteur forme des grains [135], ni les phénomènes de durcissement, les champs de rotation des grains sont sensiblement identiques et donnent un comportement similaire au modèle de TAYLOR classique quant à l'écoulement des grains vers des orientations stables.

CONCLUSION

L'objectif de ce travail était d'établir un certain nombre de corrélations entre les propriétés mécaniques d'un matériau et sa fonction de distribution des orientations cristallographiques.

Cette fonction de distribution est caractérisée par son développement sur une base d'harmoniques sphériques généralisées intégrant les symétries du réseau cristallin (cubique dans notre cas) ainsi que celle de l'échantillon (supposé orthorhombique).

Pour décrire le comportement du matériau au cours d'une déformation, plastique, nous avons dans un premier temps appliquées les hypothèses fondamentales du modèle de Taylor-Bishop-Hill au cas du glissement sur les systèmes 111 110 . Les relations d'interdépendance qui existe entre ces systèmes conduisent à développer une approche analytique reposant sur les propriétés de l'algèbre d'un module à douze éléments. Ce module permet de ramener une recherche systématique de la solution énergétiquement la plus favorable parmi 792 combinaisons (modèle initial) possibles à la seule comparaison de 4 processus énergétiquement acceptables. On obtient de même très rapidement les 28 états de contrainte de Bishop.

Cette analyse entraîne une efficacité optimale dans la recherche des systèmes de glissements actifs et par la même occasion un gain de temps très substantiel par rapport aux approches de même type.

Si dans cette thèse nous nous sommes spécifiquement limités au cas de la traction uniaxiale, ce mode de raisonnement se généralise aisément à tout type de déformation; seules les propriétés du module seront alors à

redéfinir. De même une extension à d'autres systèmes de glissement ne pose aucun problème à priori.

Une fois bien établis les raisonnements dans le cas d'un glissement cristallographique, cette approche à été étendue au cas du glissement non cristallographique d'axe de zone lll . Pour cette situation, les quantités du glissement et les positions angulaires des normales aux plans de glissement sont calculées pour la combinaison active et ce sans ambiguïtés.

D'autre part, l'originalité de ce formalisme permet d'envisager l'ensemble des modèles de Taylor relaxés n'impliquant plus que l'intervention d'un nombre restreint (inférieur à cinq) de systèmes de glissement. Le modèle de Sachs apparaît ainsi comme la forme la plus relaxée du modèle classique de Taylor.

Parallèlement, nous avons envisagé l'introduction d'un système de glissement supplémentaire par rapport au système primaire (modèle de Sachs) en faisant intervenir une hypothèse complémentaire sur la continuité cristallographique ou la minimisation des hétérogénéités de déformation (modèles de Sachs étendus).

Pour l'ensemble des modèles étudiés, un facteur caractéristique, appelé par extension facteur de Taylor, égal à la somme des quantités de glissement a été calculé puis développé sur la même base d'harmoniques sphériques généralisées et symétrisées que la fonction de texture. La moyenne de ce facteur sur la texture permet alors de relier les deux ensembles de coefficients et conduit au calcul du facteur de Lankford.

Compte-tenu des symétries cubiques des réseaux des grains, le nombre de ces coefficients se réduit au nombre de dix-neuf ($l = 10$). De plus, des relations simples, bien vérifiées expérimentalement dans le cas d'acier doux, mettent en évidence l'influence des coefficients de rang quatre, dans le calcul du coefficient d'anisotropie.

L'intervention d'un nombre plus raisonnable de systèmes de glissement entraîne un accord sensiblement meilleur entre valeurs calculées et expérimentales, bien qu'il subsiste un écart important pour une direction de traction perpendiculaire à la direction de laminage ; écart pour lequel aucune explication simple n'a pu être trouvée.

L'étude des différentes courbes décrivant le comportement de $r(\alpha)$ met en évidence que la situation de glissement qui semble la plus réaliste devrait faire intervenir deux ou trois systèmes de glissement; ce que confirme par ailleurs l'expérience.

D'un autre côté, dans cette étude nous n'avons pas tenu compte de l'influence de la texture morphologique (les grains sont supposés équiaxe). H.J. Bunge et al. [138] ont introduit un facteur de forme dans le formalisme classique de Taylor à l'aide de la relation d'Hall-Petch; ce

qui conduit à un facteur de Taylor inférieur à celui du modèle original donc à priori à un meilleur accord expérience - théorie en ce qui concerne le coefficient d'anisotropie.

Un autre paramètre qu'il serait nécessaire de prendre en compte est la non-coïncidence des axes principaux de déformation et des axes du repère échantillon comme l'ont démontré A. Hihi et al. [139] dans le cadre d'un modèle auto-cohérent.

Une amélioration supplémentaire de nos modèles pourrait être l'intégration dans les raisonnements des symétries non-conventionnelles (groupes de symétrie colorés) proposées par H.J. Bunge et C. Esling [140].

Toutefois, si les divers modèles étudiés présentent des "défaillances" certaines, ils sont susceptibles d'être améliorés à partir de nouvelles hypothèses faisant appel à des considérations expérimentales rigoureuses. Il reste donc encore de l'ouvrage pour les "modélisateurs" mais aussi pour les expérimentateurs car le monocristal n'a pas encore dévoilé tous ses secrets. Un des principes fondamentaux de nos modèles est une déformation homogène dans le grain ; jusqu'à quelle taille, forme de grains est-elle vérifiée ? comment vérifier expérimentalement cette hypothèse ? Ce sont ces questions auxquelles il faudra répondre avant d'envisager des extensions des modèles classiques de Taylor et de Sachs plus calculatoires que physiques.

APPENDICES

APPENDICE 1 : Propriétés des $d_{mn}^l(\beta)$, $D_{mn}^l(\alpha, \beta, \gamma)$ et $T_{mn}^l(\alpha, \beta, \gamma)$ dans l'hypothèse d'une symétrie cristallographique de type cubique et d'une symétrie orthorhombique de l'échantillon.

Fonctions associées aux polynômes de Jacobi : $d_{mn}^l(\beta)$.

- définition :

$$d_{mn}^l(\beta) = (-1)^t \frac{[(1+m)!(1-m)!(1+n)!(1-n)!]^{1/2}}{(1+m-t)!(1-n-t)!t!(t+n-m)!} \\ \times [\cos /2]^{2m+m-n-2t} [\sin /2]^{2t+n-m}$$

- propriétés de symétries :

$$d_{mn}^l(\beta) = (-1)^{m-n} d_{nm}^l(\beta) = d_{-n-m}^l(\beta) = d_{nm}^l(\beta) \\ = (-1)^{l-m} d_{m-n}^l(\pi-\beta) = (-1)^{l-n} d_{-mn}^l(\pi-\beta) = (-1)^{l+n} d_{m-n}^l(\pi+\beta).$$

$$d_{00}^l(\beta) = 1.$$

- les expressions analytiques des $d_{mn}^l(\beta)$ nécessaires à la détermination des harmoniques sphériques généralisées et symétrisées sont indiquées ci-après en fonction de $x = \cos \beta$.

ORDRE 4

$$d_{00}^4 = \frac{1}{8} (3 - 30x^2 + 35x^4)$$

$$d_{2-2}^4 = \frac{1}{4} (1 - x)^2 (1 + 7x + 7x^2) = d_{-22}^4$$

$$d_{20}^4 = \frac{\sqrt{10}}{8} (1 - x)^2 (7x^2 - 1) = d_{02}^4 = d_{0-2}^4 = d_{-20}^4$$

$$d_{22}^4 = \frac{1}{4} (1 + x)^2 (1 - 7x + 7x^2) = d_{-2-2}^4$$

$$d_{4-4}^4 = \frac{1}{16} (1 - x)^4 = d_{-44}^4$$

$$d_{4-2}^4 = \frac{\sqrt{7}}{8} (1 - x)^2 (1 - x^2) = d_{-24}^4 = d_{2-4}^4 = d_{-42}^4$$

$$d_{40}^4 = \frac{\sqrt{70}}{16} (1 - x)^2 = d_{04}^4 = d_{0-4}^4 = d_{-40}^4$$

$$d_{42}^4 = \frac{\sqrt{7}}{8} (1 + x)^2 (1 - x^2) = d_{24}^4 = d_{-2-4}^4 = d_{-4-2}^4$$

$$d_{44}^4 = \frac{1}{16} (1 + x)^4 = d_{-4-4}^4$$

ORDRE 6

$$d_{00}^6 = \frac{1}{2^4} (-5 + 105x^2 - 315x^4 + 231x^6)$$

$$d_{2-2}^6 = \frac{1}{2^6} (1 - x^2) (-17 - 108x^2 + 90x^4 + 660x^3 + 495x^4) = d_{-22}^6$$

$$d_{20}^6 = \frac{\sqrt{105}}{2^5} (1 - x^2)(1 - 18x^2 + 33x^4) = d_{02}^6 = d_{-20}^6 = d_{0-2}^6$$

$$d_{22}^6 = \frac{1}{2^6} (1 + x^2) (-17 + 108x^2 + 90x^4 - 660x^3 + 495x^4) = d_{-2-2}^6$$

$$d_{4-4}^6 = \frac{1}{2^5} (1 - x^4)(13 + 44x^2 + 33x^4) = d_{-44}^6$$

$$d_{4-2}^6 = \frac{\sqrt{30}}{2^6} (1 - x^2)(1 - x^2)(1 + 22x^2 + 33x^4) = d_{-24}^6 = d_{2-4}^6 = d_{-42}^6$$

$$d_{40}^6 = \frac{3\sqrt{14}}{2^5} (1 - x^2)(11x^2 - 1) = d_{04}^6 = d_{0-4}^6 = d_{-40}^6$$

$$d_{42}^6 = \frac{\sqrt{30}}{2^6} (1 + x^2)(1 - x^2)(1 - 22x^2 + 33x^4) = d_{24}^6 = d_{-2-4}^6 = d_{-4-2}^6$$

$$d_{44}^6 = \frac{1}{2^5} (1+x)^4 (13 - 44x + 33x^2) = d_{-4-4}^6$$

$$d_{6-6}^6 = \frac{1}{2^6} (1-x)^6 = d_{-6-6}^6$$

$$d_{6-4}^6 = \frac{\sqrt{66}}{2^6} (1-x)^4 (1-x^2) = d_{-4-6}^6 = d_{4-6}^6 = d_{-6-4}^6$$

$$d_{6-2}^6 = \frac{3\sqrt{55}}{2^6} (1-x)^2 (1-x^2)^2 = d_{-2-6}^6 = d_{2-6}^6 = d_{-6-2}^6$$

$$d_{60}^6 = \frac{\sqrt{231}}{2^5} (1-x)^2 = d_{0-6}^6 = d_{0-6}^6 = d_{-6-0}^6$$

$$d_{62}^6 = \frac{3\sqrt{55}}{2^6} (1+x)^2 (1-x^2)^2 = d_{2-6}^6 = d_{-2-6}^6 = d_{-6-2}^6$$

$$d_{64}^6 = \frac{\sqrt{66}}{2^6} (1+x)^4 (1-x^2) = d_{4-6}^6 = d_{-4-6}^6 = d_{-6-4}^6$$

$$d_{66}^6 = \frac{1}{2^6} (1+x)^6 = d_{-6-6}^6$$

ORDRE 8

$$d_{00}^8 = \frac{1}{2^7} (35 - 1260x^2 + 6930x^4 - 12012x^6 + 6435x^8)$$

$$d_{2-2}^8 = \frac{1}{2^6} (1-x)^2 (16 + 99x^2 - 330x^4 - 1420x^3 + 3003x^5 + 2002x^6)$$

$$= d_{-22}^8$$

$$d_{20}^8 = \frac{3\sqrt{55}}{2^6} (1-x)^2 (-1 + 33x^2 - 143x^4 + 143x^6)$$

$$= d_{02}^8 = d_{0-2}^8 = d_{-20}^8$$

$$d_{22}^8 = \frac{1}{2^6} (1+x)^2 (16 - 99x^2 - 330x^4 + 1420x^3 - 3003x^5 + 2002x^6)$$

$$= d_{-2-2}^8$$

$$d_{4-4}^8 = \frac{1}{2^6} (1-x)^4 (-9 + 78x^2 + 546x^3 + 910x^4 + 455x^4)$$

$$= d_{-44}^8$$

$$d_{4-2}^8 = \frac{\sqrt{110}}{2^6} (1 - x^2)(-1 - 11x^2 + 25x^2 + 78x^3 - 91x^4 - 91x^5 + 91x^6)$$

$$= d_{-2\ 4}^8 = d_{2-4}^8 = d_{-4\ 2}^8$$

$$d_{4\ 0}^8 = \frac{3\sqrt{154}}{2^7} (1 - x^2)(1 - 26x^2 + 65x^4) = d_{0\ 4}^8 = d_{0-4}^8 = d_{-4\ 0}^8$$

$$d_{4\ 2}^8 = \frac{\sqrt{110}}{2^6} (1 - x^2)(-1 + 11x^2 + 25x^2 - 78x^3 - 91x^4 + 91x^5 + 91x^6)$$

$$= d_{2\ 4}^8 = d_{-2-4}^8 = d_{-4-2}^8$$

$$d_{4\ 4}^8 = \frac{1}{2^6} (1 + x^4)(-9 - 78x^2 + 546x^2 - 910x^3 + 455x^4) = d_{-4-4}^8$$

$$d_{6-6}^8 = \frac{1}{2^6} (1 - x^6)(16 + 45x^2 + 30x^2) = d_{-6\ 6}^8$$

$$d_{6-4}^8 = \frac{\sqrt{546}}{2^6} (1 - x^4)(1 - x^2)(1 + 5x^2 + 5x^2) = d_{-4\ 6}^8 = d_{4-6}^8 = d_{-6\ 4}^8$$

$$d_{6-2}^8 = \frac{\sqrt{15015}}{2^6} (1 - x^2)(1 - x^2)(x^2 + 2x^2) = d_{-2\ 6}^8 = d_{2-6}^8 = d_{-6\ 2}^8$$

$$d_{60}^8 = \frac{\sqrt{429}}{2^6} (1-x)^2 (15x^2-1) = d_{06}^8 = d_{0-6}^8 = d_{-60}^8$$

$$d_{62}^8 = \frac{\sqrt{15015}}{2^6} (1+x)^2 (1-x)^2 (-x+2x) = d_{-26}^8 = d_{2-6}^8 = d_{-62}^8$$

$$d_{64}^8 = \frac{\sqrt{546}}{2^6} (1+x)^4 (1-x)^2 (1-5x+5x^2) = d_{46}^8 = d_{-4-6}^8 = d_{-6-4}^8$$

$$d_{66}^8 = \frac{1}{2^6} (1+x)^6 (16-45x+30x^2) = d_{-6-6}^8$$

$$d_{8-8}^8 = \frac{1}{2^8} (1-x)^8 = d_{-88}^8$$

$$d_{8-6}^8 = \frac{\sqrt{30}}{2^7} (1-x)(1-x^2) = d_{-68}^8 = d_{6-8}^8 = d_{-86}^8$$

$$d_{8-4}^8 = \frac{\sqrt{455}}{2^7} (1-x)^4 (1-x^2) = d_{-48}^8 = d_{4-8}^8 = d_{-84}^8$$

$$d_{8-2}^8 = \frac{\sqrt{2002}}{2^7} (1-x)^2 (1-x^3) = d_{-28}^8 = d_{2-8}^8 = d_{-82}^8$$

$$d_{80}^8 = \frac{\sqrt{1430}}{2^8} (1-x)^4 = d_{08}^8 = d_{0-8}^8 = d_{-80}^8$$

$$d_{8 \ 2}^8 = \frac{\sqrt{2002}}{2^7} (1+x)^2 (1-x)^2$$

$$= d_{2 \ 8}^8 = d_{-2-8}^8 = d_{-8-2}^8$$

$$d_{8 \ 4}^8 = \frac{\sqrt{455}}{2^7} (1+x)^4 (1-x)^2$$

$$= d_{4 \ 8}^8 = d_{-4-8}^8 = d_{-8-4}^8$$

$$d_{8 \ 6}^8 = \frac{\sqrt{30}}{2^7} (1+x)^4 (1-x)^2$$

$$= d_{6 \ 8}^8 = d_{-6-8}^8 = d_{-8-6}^8$$

$$d_{8 \ 8}^8 = \frac{1}{2^8} (1+x)^8$$

$$= d_{-8-8}^8$$

ORDRE 10

$$d_{00}^{10} = \frac{1}{2^8} (-63 + 3465x^2 - 30030x^4 + 90090x^6 - 109395x^8 + 46189x^{10})$$

$$d_{-2}^{10} = \frac{1}{2^9} (1 - x)^2 (-119 - 728x + 4732x^2 + 18200x^3 - 17470x^4 - 86632x^5$$

$$- 18564x^6 + 100776x^7 + 62985x^8) = d_{-2}^{10}$$

$$d_{20}^{10} = \frac{\sqrt{330}}{2^9} (1 - x)^2 (7 - 364x^2 + 2730x^4 - 6188x^6 + 4199x^8)$$

$$= d_{02}^{10} = d_{0-2}^{10} = d_{-20}^{10}$$

$$d_{22}^{10} = \frac{1}{2^9} (1 + x)^2 (-119 + 728x + 4732x^2 - 18200x^3 - 17470x^4 + 86632x^5$$

$$- 18564x^6 - 100776x^7 + 62985x^8) = d_{-2-2}^{10}$$

$$d_{-4-4}^{10} = \frac{1}{2^7} (1 - x)^4 (1 - 300x + 1245x^2 + 680x^3 + 8415x^4 + 11628x^5 + 4845x^6)$$

$$= d_{-44}^{10}$$

$$d_{4-2}^{10} = \frac{\sqrt{13}}{2^8} (1-x)^2 (1-x)^2 (13 + 150x^2 - 285x^3 + 2380x^4 - 765x^5 + 5815x^6)$$

$$= d_{-2\ 4}^{10} = d_{2-4}^{10} = d_{-4\ 2}^{10}$$

$$d_{4\ 0}^{10} = \frac{\sqrt{4290}}{2^8} (1-x)^2 (-1 + 45x^2 - 255x^4 + 323x^6)$$

$$= d_{0\ 4}^{10} = d_{0-4}^{10} = d_{-4\ 0}^{10}$$

$$d_{4\ 2}^{10} = \frac{\sqrt{13}}{2^8} (1+x)^2 (1-x)^2 (13 - 150x^2 - 285x^3 - 2380x^4 - 765x^5 - 5815x^6)$$

$$= d_{2\ 4}^{10} = d_{-2-4}^{10} = d_{-4-2}^{10}$$

$$d_{4\ 4}^{10} = \frac{1}{2^7} (1+x)^4 (1 + 300x^2 - 1245x^3 + 8415x^4 - 11628x^5 + 4845x^6)$$

$$= d_{-4-4}^{10}$$

$$d_{6-6}^{10} = \frac{1}{2^{10}} (1-x)^6 (237 + 2924x^2 + 9486x^3 + 11628x^4 + 4845x^5) = d_{-6\ 6}^{10}$$

$$d_{6-4}^{10} = \frac{\sqrt{2}}{2^9} (1-x)^4 (1-x)^2 (-83 + 136x^2 + 336x^3 + 7752x^4 + 4845x^4)$$

$$= d_{-4\ 6}^{10} = d_{4-6}^{10} = d_{-6\ 4}^{10}$$

$$d_{6-2}^{10} = \frac{\sqrt{26}}{2^{10}} (1-x)^2 (1-x)^2 (-19 - 476x^2 + 206x^3 + 3876x^4 + 4845x^4)$$

$$= d_{-2\ 6}^{10} = d_{2-6}^{10} = d_{-6\ 2}^{10}$$

$$d_{6\ 0}^{10} = \frac{\sqrt{2145}}{2^9} (1-x)^3 (3 - 102x^2 + 323x^4) = d_{0\ 6}^{10} = d_{0-6}^{10} = d_{-6\ 0}^{10}$$

$$d_{6\ 2}^{10} = \frac{\sqrt{26}}{2^{10}} (1+x)^2 (1-x)^2 (-19 + 476x^2 + 206x^3 - 3876x^4 + 4845x^4)$$

$$= d_{2\ 6}^{10} = d_{-2-6}^{10} = d_{-6-2}^{10}$$

$$d_{6\ 4}^{10} = \frac{\sqrt{2}}{2^9} (1+x)^4 (1-x)^2 (-83 - 136x^2 + 336x^3 - 7752x^4 + 4845x^4)$$

$$= d_{4\ 6}^{10} = d_{-4\ -6}^{10} = d_{-6\ -4}^{10}$$

$$d_{6\ 6}^{10} = \frac{1}{2^{10}} (1 + x)^6 (237 - 2924x + 9486x^2 - 11628x^3 + 4845x^4)$$

$$= d_{-6\ -6}^{10}$$

$$d_{8\ -8}^{10} = \frac{1}{2^9} (1 - x)^8 (59 + 152x + 95x^2) = d_{-8\ 8}^{10}$$

$$d_{8\ -6}^{10} = \frac{\sqrt{102}}{2^{10}} (1 - x)^6 (1 - x)^2 (31 + 114x + 95x^2) = d_{-6\ 8}^{10} = d_{6\ -8}^{10} = d_{-8}^{10}$$

$$d_{8\ -4}^{10} = \frac{\sqrt{51}}{2^{10}} (1 - x)^4 (1 - x)^2 (11 + 76x + 95x^2) = d_{-4\ 8}^{10} = d_{4\ -8}^{10} = d_{-8}^{10}$$

$$d_{8\ -2}^{10} = \frac{\sqrt{663}}{2^9} (1 - x)^2 (1 - x)^3 (-1 + 38x + 95x^2) = d_{-2\ 8}^{10} = d_{2\ -8}^{10} = d_{-8}^{10}$$

$$d_{8\ 0}^{10} = \frac{\sqrt{24310}}{2^6} (1 - x)^2 (-1 + 19x) = d_{0\ 8}^{10} = d_{0\ -8}^{10} = d_{-8}^{10}$$

$$d_{8\ 2}^{10} = \frac{\sqrt{663}}{2^9} (1 + x)^2 (1 - x)^3 (-1 - 38x + 95x^2) = d_{2\ 8}^{10} = d_{-2\ -8}^{10} = d_{-8}^{10}$$

$$d_{8\ 4}^{10} = \frac{\sqrt{51}}{2^{10}} (1+x)^4 (1-x)^2 (11-76x+95x^2) = d_{4\ 8}^{10} = d_{-4\ -8}^{10} = d_{-8\ -}^{10}$$

$$d_{8\ 6}^{10} = \frac{\sqrt{102}}{2^{10}} (1+x)^6 (1-x)^2 (31-114x+95x^2) = d_{6\ 8}^{10} = d_{-6\ -8}^{10} = d_{-8\ -}^{10}$$

$$d_{8\ 8}^{10} = \frac{1}{2^9} (1+x)^8 (59-152x+95x^2) = d_{-8\ -8}^{10}$$

$$d_{10\ -10}^{10} = \frac{1}{2^{10}} (1-x)^{10} = d_{-10\ 10}^{10}$$

$$d_{10\ -8}^{10} = \frac{\sqrt{190}}{2^{10}} (1-x)^8 (1-x)^2 = d_{-8\ 10}^{10} = d_{8\ -10}^{10} = d_{-10\ 8}^{10}$$

$$d_{10\ -6}^{10} = \frac{\sqrt{4845}}{2^{10}} (1-x)^6 (1-x)^2 = d_{-6\ 10}^{10} = d_{6\ -10}^{10} = d_{-10\ 6}^{10}$$

$$d_{10\ -4}^{10} = \frac{\sqrt{9690}}{2^9} (1-x)^4 (1-x)^3 = d_{-4\ 10}^{10} = d_{4\ -10}^{10} = d_{-10\ 4}^{10}$$

$$d_{10\ -2}^{10} = \frac{\sqrt{62985}}{2^9} (1-x)^2 (1-x)^4 = d_{-2\ 10}^{10} = d_{2\ -10}^{10} = d_{-10\ 2}^{10}$$

$$d_{10\ 0}^{10} = \frac{\sqrt{46189}}{2^9} (1-x)^2 = d_{0\ 10}^{10} = d_{0\ -10}^{10} = d_{-10\ 0}^{10}$$

$$d_{10}^{10} = \frac{\sqrt{62985}}{2^9} (1+x)^2 (1-x)^2 = d_{2,10}^{10} = d_{-2,-10}^{10} = d_{-10,-2}^{10}$$

$$d_{10}^{10} = \frac{\sqrt{9690}}{2^9} (1+x)^4 (1-x)^2 = d_{4,10}^{10} = d_{-4,-10}^{10} = d_{-10,-4}^{10}$$

$$d_{10}^{10} = \frac{\sqrt{4845}}{2^{10}} (1+x)^6 (1-x)^2 = d_{6,10}^{10} = d_{-6,-10}^{10} = d_{-10,-6}^{10}$$

$$d_{10}^{10} = \frac{\sqrt{190}}{2^{10}} (1+x)^8 (1-x)^2 = d_{8,10}^{10} = d_{-8,-10}^{10} = d_{-10,-8}^{10}$$

$$d_{10}^{10} = \frac{1}{2^{10}} (1+x)^{10} = d_{-10,-10}^{10}$$

Projecteurs de symétrie :

- définition :
$$P_{4p, 4n}^{2l} = \frac{\delta_{4p, 4n}^{2l} + \delta_{-4p, 4n}^{2l} + 4d_{4p, 4n}^{2l}(\pi/2)}{6}$$

- symétries :
$$P_{4p, 4n}^{2l} = P_{4n, 4p}^{2l} = P_{-4p, 4n}^{2l} = P_{4p, -4n}^{2l} = P_{-4n, -4p}^{2l} = P_{-4p, -4n}^{2l}$$

- propriétés :
$$P_{4p, 4n}^{2l} \cdot P_{4p, 4n}^{2l} = P_{4p, 4n}^{2l}$$

$$P_{4p, 4n}^{2l} = \sum_{4q=-2l}^{2l} d_{4p, 4q}^{2l}(\pi/2) \cdot P_{4q, 4n}^{2l}$$

- valeurs :
$$P_{00}^4 = \frac{7}{12} \quad P_{04}^4 = P_{40}^4 = P_{-40}^4 = P_{0-4}^4 = \frac{\sqrt{70}}{24}$$

$$P_{44}^4 = P_{-4-4}^4 = P_{4-4}^4 = P_{-44}^4 = \frac{5}{24}$$

$$P_{00}^6 = \frac{1}{8} \quad P_{04}^6 = P_{40}^6 = P_{-40}^6 = P_{0-4}^6 = -\frac{\sqrt{14}}{16}$$

$$P_{44}^6 = P_{-4-4}^6 = P_{4-4}^6 = P_{-44}^6 = \frac{7}{16}$$

$$P = \frac{8}{00} = \frac{33}{88}$$

$$P = \frac{8}{04} = P = \frac{8}{40} = P = \frac{8}{-40} = P = \frac{8}{0-4} = \frac{\sqrt{154}}{64}$$

$$P = \frac{8}{44} = P = \frac{8}{-4-4} = P = \frac{8}{4-4} = P = \frac{8}{-44} = \frac{7}{96}$$

$$P = \frac{8}{08} = P = \frac{8}{80} = P = \frac{8}{-80} = P = \frac{8}{0-8} = \frac{\sqrt{1430}}{128}$$

$$P = \frac{8}{88} = P = \frac{8}{-8-8} = P = \frac{8}{8-8} = P = \frac{8}{-88} = \frac{63}{384}$$

$$P = \frac{8}{84} = P = \frac{8}{48} = P = \frac{8}{8-4} = P = \frac{8}{-48} = P = \frac{8}{-84} = P = \frac{8}{4-8} = P = \frac{8}{-4-8} = P = \frac{8}{-8-4} = \frac{\sqrt{455}}{192}$$

$$P = \frac{10}{00} = \frac{65}{384}$$

$$P = \frac{10}{04} = P = \frac{10}{40} = P = \frac{10}{-40} = P = \frac{10}{0-4} = \frac{\sqrt{4290}}{384}$$

$$P = \frac{10}{44} = P = \frac{10}{-4-4} = P = \frac{10}{4-4} = P = \frac{10}{-44} = \frac{33}{384}$$

$$P = \frac{10}{08} = P = \frac{10}{80} = P = \frac{10}{-80} = P = \frac{10}{0-8} = \frac{\sqrt{24130}}{768}$$

$$P = \frac{10}{88} = P = \frac{10}{-8-8} = P = \frac{10}{8-8} = P = \frac{10}{-88} = \frac{187}{768}$$

$$P_{84}^{10} = P_{48}^{10} = P_{8-4}^{10} = P_{-48}^{10} = P_{-84}^{10} = P_{4-8}^{10} = P_{-4-8}^{10} = P_{-8-4}^{10} = \frac{11\sqrt{51}}{384}$$

Les propriétés de symétrie des projecteurs se déduisent de celles des polynômes de Jacobi pour $\beta = 1/2$.

Expressions des fonctions symétrisées $T_{mn}^l(g)$ comme combinaisons linéaires de $D_{mn}^l(g)$: principe de calcul des expressions (36-44).

- définition :

$$T_{2m\ 0}^{2l}(g) = \sum_{4p=-2l}^{2l} P_{4p\ 0}^{2l} \cdot D_{2m\ 4p}^{2l}(g).$$

- construction :

par exemple : $T_{2m\ 0}^4(g) = P_{-4\ 0}^4 D_{0\ -4}^4(g) + P_{0\ 0}^4 D_{0\ 0}^4(g) + P_{4\ 0}^4 D_{0\ 4}^4(g)$

avec $P_{-4\ 0}^4 = P_{4\ 0}^4 = \frac{\sqrt{70}}{24}$ et $P_{0\ 0}^4 = \frac{7}{12}$

L'expression de cette harmonique généralisée symétrisée non-normalisée est alors

$$T_{0\ 0}^4(g) = \frac{7}{12} D_{0\ 0}^4(g) + \frac{\sqrt{70}}{24} [D_{0\ -4}^4(g) + D_{0\ 4}^4(g)]$$

- normalisation :

$$\|T_{0\ 0}^4(g)\|^2 = P_{0\ 0}^4 = \frac{7}{12} .$$

$$T_{00}^4(g) = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{12}} D_{00}^4(g) + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{24}} [D_{0-4}^4(g) + D_{04}^4(g)]$$

(expression normée à l'unité)

l
-définitions des $D_{mn}^4(g)$:

$$D_{mn}^4(g) = e^{-im\alpha} d_{mn}^4(\beta) e^{-in\sigma}$$

$$D_{0-4}^4(g) = d_{0-4}^4(\beta) e^{+i4\sigma} = d_{0-4}^4(\beta) [\cos 4\sigma + i \sin 4\sigma]$$

$$D_{04}^4(g) = d_{04}^4(\beta) e^{-i4\sigma} = d_{04}^4(\beta) [\cos 4\sigma - i \sin 4\sigma]$$

Comme $d_{0-4}^4(\beta) = d_{04}^4(\beta)$ et que les parties imaginaires précédentes s'annulent, il vient finalement :

$$T_{00}^4(g) = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{12}} d_{00}^4(\beta) + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \cos 4\sigma \cdot d_{04}^4(\beta)$$

En procédant de manière identique, on établit les relations (36-44) des harmoniques cubiques généralisées.

APPENDICE 2 : Relations entre les divers triplets d'angles d'Euler et correspondances avec le indices de Miller.

$$(\Psi_1, \phi, \Psi_2)$$

$$(\phi, \theta, \omega)$$

$$(\Psi, \theta, \Psi)$$

$$(\alpha, \beta, \sigma)$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} \text{s} \\ \text{R} (\text{O X Y } \underline{\text{Z}}) \end{array} \\ \downarrow \\ \begin{array}{c} (\text{O } \underline{\text{X}} \text{ Y Z}) \\ 1 \ 1 \end{array} \\ \downarrow \\ \begin{array}{c} (\text{O X Y } \underline{\text{Z}}) \\ 1 \ 2 \ 2 \end{array} \\ \downarrow \\ \begin{array}{c} \text{c} \quad \text{c c c} \\ \text{R} (\text{O x x x}) \\ 1 \ 2 \ 3 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} \text{s} \\ \text{R} (\text{O X Y } \underline{\text{Z}}) \end{array} \\ \downarrow \\ \begin{array}{c} \text{s} \\ \text{R} (\text{O } \underline{\text{X}} \text{ Y Z}) \\ 1 \ 1 \end{array} \\ \downarrow \\ \begin{array}{c} \text{s} \\ \text{R} (\text{O X Y } \underline{\text{Z}}) \\ 1 \ 2 \ 2 \end{array} \\ \downarrow \\ \begin{array}{c} \text{c} \quad \text{c c c} \\ \text{R} (\text{O x x x}) \\ 1 \ 2 \ 3 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} \text{s} \\ \text{R} (\text{O X Y } \underline{\text{Z}}) \end{array} \\ \downarrow \\ \begin{array}{c} \text{s} \\ \text{R} (\text{O X } \underline{\text{Y}} \text{ Z}) \\ 1 \ 1 \end{array} \\ \downarrow \\ \begin{array}{c} \text{s} \\ \text{R} (\text{O X Y } \underline{\text{Z}}) \\ 2 \ 1 \ 2 \end{array} \\ \downarrow \\ \begin{array}{c} \text{c} \quad \text{c c c} \\ \text{R} (\text{O x x x}) \\ 1 \ 2 \ 3 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} \text{s} \\ \text{R} (\text{O X Y } \underline{\text{Z}}) \end{array} \\ \downarrow \\ \begin{array}{c} \text{s} \\ \text{R} (\text{O X } \underline{\text{Y}} \text{ Z}) \\ 1 \ 1 \end{array} \\ \downarrow \\ \begin{array}{c} \text{s} \\ \text{R} (\text{O X Y } \underline{\text{Z}}) \\ 2 \ 1 \ 2 \end{array} \\ \downarrow \\ \begin{array}{c} \text{c} \quad \text{c c c} \\ \text{R} (\text{O x x x}) \\ 1 \ 2 \ 3 \end{array} \end{array}$$

BUNGE [18]

CANOVA [46]

ROE [3]

présent travail

$$\Psi_1 = -\omega = \Psi + \pi/2 = \alpha + \pi/2$$

$$\phi = -\theta = \theta = \beta$$

$$\Psi_2 = -\phi = \phi - \pi/2 = \sigma - \pi/2$$

remarque : les correspondances avec d'autres notations sont contenues dans l'article de H.J.BUNGE, "The calculations of three-dimensionnal orientation distribution from experimental data", Proc.Int.Seminar on Quantitative Analysis of Textures, Cracovie, (1971), 19.

Une orientation préférentielle (hkl)[uvw] peut être déterminée par :

$$h = -\sin\beta\cos\sigma;$$

$$k = \sin\beta\sin\sigma;$$

$$l = \cos\beta;$$

$$u = \cos\alpha\cos\beta\cos\sigma - \sin\alpha\sin\beta;$$

$$v = -\cos\alpha\cos\beta\sin\sigma - \sin\alpha\cos\beta;$$

$$w = \cos\alpha\sin\beta;$$

et réciproquement

$$\cos\alpha = \frac{w}{(u^2 + v^2 + w^2)^{1/2}} \frac{(h^2 + k^2 + l^2)^{1/2}}{(h^2 + k^2)^{1/2}} \quad (\text{avec } h, k \neq 0)$$

$$\cos\beta = \frac{l}{(h^2 + k^2 + l^2)^{1/2}}$$

$$\cos\sigma = \frac{-h}{(h^2 + k^2)^{1/2}} \quad (\text{avec } h, k \neq 0)$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{u}{(u^2 + v^2 + w^2)^{1/2}} \quad (\text{si } h = k = 0).$$

APPENDICE 3 : Comparaison des repérages des systèmes de glissement

$$\{111\}\langle 110 \rangle.$$

systemes de glissement

plan	direction	[67]	[64]	[66]	[81]	[51]
(111)	$[\bar{1}10]$	1	- a ₃	- s ₃	24($\bar{1}2$)	- B ₅
	$[10\bar{1}]$	2	- a ₂	- s ₂	11	- B ₄
	$[0\bar{1}1]$	3	- a ₁	- s ₁	22($\bar{1}0$)	B ₂
$(\bar{1}\bar{1}1)$	$[1\bar{1}0]$	4	- b ₃	- s ₆	15($\bar{3}$)	- C ₅
	$[\bar{1}0\bar{1}]$	5	- b ₂	- s ₅	2	C ₃
	$[01\bar{1}]$	6	- b ₁	- s ₄	13($\bar{1}$)	- C ₁
$(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$	$[110]$	7	- d ₃	- s ₁₂	21($\bar{9}$)	D ₆
	$[\bar{1}0\bar{1}]$	8	- d ₂	- s ₁₁	8	- D ₄
	$[0\bar{1}\bar{1}]$	9	- d ₁	- s ₁₀	7	D ₂
$(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$	$[\bar{1}\bar{1}0]$	10	- c ₃	- s ₉	18($\bar{6}$)	- A ₅
	$[10\bar{1}]$	11	- c ₂	- s ₈	5	A ₃
	$[01\bar{1}]$	12	- c ₁	- s ₇	4	- A ₂

APPENDICE 4 : Illustration de la procédure de calcul du facteur de Taylor
dans le cas du glissement cristallographique $\{111\}\langle 110\rangle$.

-orientation de la direction de traction dans le repère cristallographique

$$\alpha = 0^\circ; \beta = -24^\circ; \gamma = -15^\circ.$$

- facteur de contraction : $q = 0.5$.

- facteurs de Taylor partiels :

$$M_1 = 0,682159 \quad ; \quad M_4 = -0,024542$$

$$M_2 = 1,910737 \quad ; \quad M_5 = -0,726710$$

$$M_3 = -0,768860 \quad ; \quad M_6 = -1,072782.$$

- critère de sélection : calcul du facteur de Taylor

$$\text{somme des termes positifs} \quad M_1 + M_2 = 2,592896$$

$$\text{combinaisons particulières} \quad |M_1 - M_4| = 0,706702$$

$$|M_2 - M_5| = 2,637447$$

$$|M_3 - M_6| = 0,303922$$

- facteur de Taylor : $M(0^\circ, -24^\circ, -15^\circ; 1/2) = M_2 - M_5 = 2,637447$

- configuration active :

configuration 2 ($\times \tau_0$)		
- 1	0	1
0	0	0
- 1	0	1
0	0	0

configuration 5 ($\times \tau_0$)		
0	0	0
- 1	0	1
0	0	0
- 1	0	1

configuration résultante		
- τ_0	0	τ_0
τ_0	0	- τ_0
- τ_0	0	τ_0
τ_0	0	- τ_0

- systèmes de glissement actifs : $\bar{1}$, 3, 4, $\bar{6}$, $\bar{7}$, 9, 10, $\bar{12}$.

- quantités de glissement :

$$l^9 = 1,072782 \quad ; \quad l^3 = 0,768860 \quad ; \quad l^{10} = 0,726710 \quad ; \quad l^1 = -0,044551$$

$$l^7 = -0,024542.$$

$$l^9 = 1,072782 \quad ; \quad l^3 = 0,768860 \quad ; \quad l^{10} = 0,682159 \quad ; \quad l^6 = -0,069095$$

$$l^4 = 0,044551.$$

$$l^9 = 1,072782 ; l^3 = 0,813411 ; l^{10} = 0,682159 ; l^6 = - 0,044551$$

$$l^7 = - 0,024542.$$

$$l^9 = 1,117333 ; l^3 = 0,768860 ; l^{10} = 0,682159 ; l^6 = - 0,044551$$

$$l^7 = - 0,024542$$

APPENDICE 5 : Illustration du calcul du facteur de Taylor dans le cas du glissement non-cristallographique d'axe de zone $\langle 111 \rangle$.

- orientation de l'axe de traction dans le repère cristallographique

$$\alpha = 0^\circ; \beta = -45^\circ; \gamma = 0^\circ.$$

- facteur de contraction de l'éprouvette : $q = 0,5$.

- facteurs partiels (glissement cristallographique) :

$$\begin{aligned} M_1 &= -\sqrt{6}/8 & ; & & M_2 &= \sqrt{6} & ; & & M_3 &= -\sqrt{6}/8 \\ M_4 &= -\sqrt{6}/8 & ; & & M_5 &= -\sqrt{6}/2 & ; & & M_6 &= -\sqrt{6}/8. \end{aligned}$$

- facteurs partiels pour le glissement non-cristallographique :

$$\begin{aligned} M_J(\text{c.c.}) &= (\sqrt{3}/2) M_J(\text{c.f.c.}) \\ M_1 &= -m & ; & & M_2 &= 8m & ; & & M_3 &= -m \\ M_4 &= -m & ; & & M_5 &= -4m & ; & & M_6 &= -m \\ & & & & & & & & & (\text{avec } m = 3\sqrt{2}/16 = 0,265165) \end{aligned}$$

- glissement sur 4 systèmes :

$$\begin{aligned} M_1^+ &= \left[\frac{(M_1 + M_4 - M_2 - M_5)^2}{3} + (M_3 + M_6)^2 \right]^{1/2} = 4m = 1,060660 \\ M_1^- &= \left[\frac{(M_1 + M_4 - M_2 - M_5)^2}{3} + (M_3 - M_6)^2 \right]^{1/2} = 2\sqrt{3} m = 0,918559 \end{aligned}$$

$$M_2^+ = \left[\frac{(M_3 + M_6 - M_1 - M_4)^2}{3} + (M_2 + M_5)^2 \right]^{1/2} = 4m = 1,060660$$

$$M_2^- = \left[\frac{(M_3 + M_6 - M_1 - M_4)^2}{3} + (M_2 - M_5)^2 \right]^{1/2} = 12m = 3,181981$$

$$M_3^+ = \left[\frac{(M_2 + M_5 - M_3 - M_6)^2}{3} + (M_1 + M_4)^2 \right]^{1/2} = 4m = 1,060660$$

$$M_3^- = \left[\frac{(M_2 + M_5 - M_3 - M_6)^2}{3} + (M_1 - M_4)^2 \right]^{1/2} = 2\sqrt{3} m = 1,060660$$

valeur retenue pour le facteur de Taylor sur 4 systèmes : $M'_0 = 3,181981$

- glissement sur 3 systèmes :

$$\boxed{l^1 = 0 :}$$

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{2}{3\sqrt{3}} \left[M_4 - M_5 + \frac{M_2 - M_1}{2} \right] + K = \frac{5m}{\sqrt{3}} + K \\ C_2 &= \frac{2}{3\sqrt{3}} \left[M_6 - M_4 + \frac{M_1 - M_3}{2} \right] + K = 0 + K \\ C_3 &= \frac{2}{3\sqrt{3}} \left[M_5 - M_6 + \frac{M_3 - M_2}{2} \right] + K = -\frac{5m}{\sqrt{3}} + K \end{aligned} \right\} \text{origine } K=0$$

- quantités de glissement : $l^i = \sum_{i=1}^3 [B_i^2 + C_i^2(K)]^{1/2}$

$$\left. \begin{aligned} B_1 = M_3 = -m & ; C_1 = 5m/\sqrt{3} & ; l^2 = 0,810093 \\ B_2 = M_2 = 8m & ; C_2 = 0 & ; l^3 = 2,121320 \\ B_3 = M_1 = -m & ; C_3 = -5m/\sqrt{3} & ; l^4 = 0,810093 \end{aligned} \right\} M_1' = 3,741506$$

- repérage des normales aux plans de glissement :

$$\gamma^2 = 19,107^\circ ; \gamma^3 = -210^\circ ; \gamma^4 = 280,894^\circ$$

- test de compatibilité : non satisfait , solution rejetée .

$$\boxed{l^2 = 0 :}$$

$$C_1 = \frac{2}{3\sqrt{3}} \left[M_2 - M_1 + \frac{M_4 - M_5}{2} \right] + K = \frac{7m}{\sqrt{3}} + K$$

$$C_2 = \frac{2}{3\sqrt{3}} \left[M_6 - M_2 + \frac{M_5 - M_3}{2} \right] + K = -\frac{7m}{\sqrt{3}} + K$$

$$C_3 = \frac{2}{3\sqrt{3}} \left[M_1 - M_6 + \frac{M_3 - M_4}{2} \right] + K = 0 + K$$

origine K=0

- quantités de glissement : $l^i = \sum_{i=1}^3 [B_i + C_i(K)]^{1/2}$

$$B_1 = M_3 = -m \quad ; \quad C_1 = 7m/\sqrt{3} \quad ; \quad l^1 = 1,103970$$

$$B_2 = M_4 = -m \quad ; \quad C_2 = -7m/\sqrt{3} \quad ; \quad l^3 = 1,103970$$

$$B_3 = M_5 = -4m \quad ; \quad C_3 = 0 \quad ; \quad l^4 = 1,060660$$

$M'_2 = 3,268600$

- repérage des normales aux plans de glissement :

$$\gamma^1 = 166,102^\circ \quad ; \quad \gamma^3 = 133,898^\circ \quad ; \quad \gamma^4 = -30^\circ$$

- test de compatibilité : non satisfait , solution rejetée .

$$\mathcal{L}^3 = 0 :$$

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{2}{3\sqrt{3}} \left[M_3 - M_2 + \frac{M_5 - M_6}{2} \right] + K = -\frac{7m}{\sqrt{3}} + K \\ C_2 &= \frac{2}{3\sqrt{3}} \left[M_4 - M_3 + \frac{M_6 - M_1}{2} \right] + K = 0 + K \\ C_3 &= \frac{2}{3\sqrt{3}} \left[M_2 - M_4 + \frac{M_1 - M_5}{2} \right] + K = \frac{7m}{\sqrt{3}} + K \end{aligned} \right\} \text{origine } K=0$$

- quantités de glissement : $\mathcal{L}^i = \sum_{i=1}^3 [B_i^2 + C_i^2]^{1/2}$

$$\left. \begin{aligned} B_1 = M_3 = -m & ; & C_1 = -7m/\sqrt{3} & ; & \mathcal{L}^1 = 2,121320 \\ B_2 = M_4 = -m & ; & C_2 = 0 & ; & \mathcal{L}^2 = 0,810093 \\ B_3 = M_5 = -4m & ; & C_3 = 7m/\sqrt{3} & ; & \mathcal{L}^4 = 0,810093 \end{aligned} \right\} M_3' = 3,741506$$

- repérage des normales aux plans de glissement :

$$\sigma^1 = -210^\circ ; \quad \sigma^2 = 280,894^\circ ; \quad \sigma^4 = 19,107^\circ$$

- test de compatibilité : non satisfait , solution rejetée .

$$\boxed{l^4 = 0 :}$$

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{2}{3\sqrt{3}} \left[M_3 - M_2 + \frac{M_5 - M_6}{2} \right] + K = \frac{7m}{\sqrt{3}} + K \\ C_2 &= \frac{2}{3\sqrt{3}} \left[M_4 - M_3 + \frac{M_6 - M_1}{2} \right] + K = 0 + K \\ C_3 &= \frac{2}{3\sqrt{3}} \left[M_2 - M_4 + \frac{M_1 - M_5}{2} \right] + K = \frac{7m}{\sqrt{3}} + K \end{aligned} \right\} \text{origine } K=0$$

- quantités de glissement : $l^i = \sum_{i=1}^3 [B_i^2 + C_i^2]^{1/2}$

$$\left. \begin{aligned} B_1 = M_1 = -m \quad ; \quad C_1 = -7m/\sqrt{3} \quad ; \quad l^1 = 1,103970 \\ B_2 = M_5 = -4m \quad ; \quad C_2 = 0 \quad ; \quad l^2 = 1,060660 \\ B_3 = M_6 = -m \quad ; \quad C_3 = 7m/\sqrt{3} \quad ; \quad l^3 = 1,103970 \end{aligned} \right\} M_4' = 3,268600$$

- repérage des normales aux plans de glissement :

$$\gamma^1 = 133,898^\circ \quad ; \quad \gamma^2 = -30^\circ \quad ; \quad \gamma^3 = 166,1027^\circ$$

- test de compatibilité : non satisfait , solution rejetée .

- conclusion de l'analyse :

$$(4 \text{ systèmes}) M'_0 = 3,181981$$

$$(3 \text{ systèmes}) M'_1 = 3,741506 \text{ rejetée}$$

$$M'_2 = 3,268600 \text{ rejetée}$$

$$M'_3 = 3,741506 \text{ rejetée}$$

$$M'_4 = 3,268600 \text{ rejetée}$$

solution retenue

$$M(0^\circ, -45^\circ, 0; 0,5) = 3,181981$$

- quantités de glissement :

$$l^1 = 1,060660 \quad ; \quad l^2 = 0,530331$$

$$l^3 = 1,060660 \quad ; \quad l^4 = 0,530331$$

- repérage des normales aux plans de glissement :

$$\gamma^1 = 150^\circ \quad ; \quad \gamma^2 = -30^\circ$$

$$\gamma^3 = 150^\circ \quad ; \quad \gamma^4 = -30^\circ$$

APPENDICE 6 : Comparaison du formalisme développé dans le cas du glissement non-cristallographique avec ceux de PENNING, et PIEHLER et BACKOFEN.

1) Dans le repère cristallographique $R^C([100],[010],[001])$ lié à la maille cubique, les facteurs de Taylor partiels M_J peuvent encore s'exprimer par :

$$M_1 = \frac{3}{\sqrt{8}} \left(-\epsilon_{11} + 2\epsilon_{23} \right) ; \quad M_4 = \frac{3}{\sqrt{8}} \left(-\epsilon_{11} - 2\epsilon_{23} \right) ;$$

$$M_2 = \frac{3}{\sqrt{8}} \left(-\epsilon_{22} + 2\epsilon_{13} \right) ; \quad M_5 = \frac{3}{\sqrt{8}} \left(-\epsilon_{22} - 2\epsilon_{13} \right) ;$$

$$M_3 = \frac{3}{\sqrt{8}} \left(-\epsilon_{33} + 2\epsilon_{12} \right) ; \quad M_6 = \frac{3}{\sqrt{8}} \left(-\epsilon_{33} - 2\epsilon_{12} \right) .$$

On déduit alors de ces expressions :

$$M_1^+ = M_2^+ = M_3^+ = \sqrt{3(\epsilon_{11}^2 + \epsilon_{22}^2 + \epsilon_{33}^2)}$$

$$M_1^- = \sqrt{\frac{3}{2} [(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})^2 + 12\epsilon_{12}^2]}$$

$$M_2^- = \sqrt{\frac{3}{2} [(\epsilon_{33} - \epsilon_{11})^2 + 12\epsilon_{13}^2]}$$

$$M_3^- = \sqrt{\frac{3}{2} [(\epsilon_{22} - \epsilon_{33})^2 + 12\epsilon_{23}^2]}$$

2) Dans le cas où 4 systèmes de glissement peuvent être mis en jeu, on pourra vérifier la correspondance des états de Piehler et Backofen [106] et des solutions relatives à l'équation (154)

$$\mu^2 \nu^2 + \nu^2 \omega^2 + \omega^2 \mu^2 = 0$$

à l'aide des relations suivantes:

$$A = b \left(\frac{\Lambda}{2} - \frac{\Lambda}{3} + \frac{\Lambda}{5} - \frac{\Lambda}{6} \right) = \sigma_{22} - \sigma_{33},$$

$$B = b \left(\frac{\Lambda}{1} - \frac{\Lambda}{3} + \frac{\Lambda}{4} - \frac{\Lambda}{6} \right) = \sigma_{33} - \sigma_{11},$$

$$C = b \left(-\frac{\Lambda}{1} + \frac{\Lambda}{2} - \frac{\Lambda}{4} + \frac{\Lambda}{5} \right) = \sigma_{11} - \sigma_{22},$$

$$F = b \left(\frac{\Lambda}{1} - \frac{\Lambda}{4} \right) = bu = \sigma_{23},$$

$$G = b \left(\frac{\Lambda}{2} - \frac{\Lambda}{5} \right) = bv = \sigma_{13},$$

$$H = b \left(\frac{\Lambda}{3} - \frac{\Lambda}{6} \right) = bw = \sigma_{12}.$$

Les équations

$$\frac{\Lambda^2}{1} + \frac{\Lambda^2}{2} + \frac{\Lambda^2}{3} - \frac{\Lambda}{1} \frac{\Lambda}{2} - \frac{\Lambda}{3} (\frac{\Lambda}{1} + \frac{\Lambda}{2}) = 1,$$

$$\frac{\Lambda^2}{3} + \frac{\Lambda^2}{4} + \frac{\Lambda^2}{5} - \frac{\Lambda}{4} \frac{\Lambda}{5} - \frac{\Lambda}{3} (\frac{\Lambda}{4} + \frac{\Lambda}{5}) = 1,$$

$$\frac{\Lambda^2}{2} + \frac{\Lambda^2}{4} + \frac{\Lambda^2}{6} - \frac{\Lambda}{2} \frac{\Lambda}{4} - \frac{\Lambda}{6} (\frac{\Lambda}{2} + \frac{\Lambda}{4}) = 1,$$

$$\frac{A_1^2}{1} + \frac{A_5^2}{5} + \frac{A_6^2}{6} - \frac{A_1 A_5}{15} - \frac{A_1 (A_5 + A_6)}{60} = 1 ,$$

équivalent aussi, avec les notations du tenseur de contrainte de BISHOP et HILL [64], à :

$$(C - F + G)^2 + (A - G + H)^2 + (B - H + F)^2 = 9\epsilon_0 ,$$

$$(C + F - G)^2 + (A + G + H)^2 + (B - H - F)^2 = 9\epsilon_0 ,$$

$$(C + F + G)^2 + (A - G - H)^2 + (B + H - F)^2 = 9\epsilon_0 ,$$

$$(C - F - G)^2 + (A + G - H)^2 + (B + H + F)^2 = 9\epsilon_0 .$$

Par référence au cas précédemment étudié : $u = v = 0 \implies A_3 = \pm A_6$,

on associera à $\underline{A_3 = A_6}$: la solution I de PIEHLER et BACKOFEN [106]

$$F = G = H = 0 ,$$

ou la solution I de PENNING, avec

$$M = \frac{M_1}{1} = \frac{M_2}{2} = \frac{M_3}{3} = \sqrt{3 \left(\frac{\epsilon_{11}^2}{11} + \frac{\epsilon_{22}^2}{22} + \frac{\epsilon_{33}^2}{33} \right)}$$

$$\frac{1}{3} \left[\frac{M_1^2}{1} + \frac{M_2^2}{2} + \frac{M_3^2}{3} \right]$$

et à $\underline{A_3 = -A_6}$: la solution III_c de PIEHLER et BACKOFEN [106]

$$F = G = 0 , H = 2bA_3 ,$$

$$A = B = -C/2 = 2bA_1 ;$$

ou la solution IV de PENNING, avec

$$M = \frac{M_1}{1} = \sqrt{\frac{3}{2} \left[(\epsilon_{12} - \epsilon_{22})^2 + 12\epsilon_{12} \right]}$$

Les autres solutions s'obtiennent de manière similaire.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] W. J. LANKFORD, S. C. SNYDER et T. A. BAUSCHER, Trans. A.S.M., (1950), 42 1197.
- [2] C. TAVARD et F. ROYER, rapport d'activité du contrat 15(99)05 de l'Action Thématique Programmée "Plasticité 1972/74 : corrélation entre texture et déformation plastique de matériaux polycristallins" décembre 1974.
- [3a] R. J. ROE, J. Appl. Phys. , (1965), 36, 2024.
- [3b] H. J. BUNGE, Z. Metallkde, (1965), 56, 872.
- [4] H. J. BUNGE, "Mathematische Methoden der textur Analyse", Akademie Verlag, Berlin, (1969).
- [5] P. COULOMB, "Les textures dans les métaux de réseau cubique", Dunod, Paris, (1972).
- [6] P. PARNIERE, Mem. Sci. Rev. Metall. , (1973), 70, 637.
- [7] C. MASSON, P. PARNIERE, R. PENELLE et M. PERNOT, Mem. Sci. Rev. Metall. , (1973), 70, 721.
- [8] D. RUER et R. BARO, Adv. X-Ray Analysis, (1977), 70, 187.
- [9] D. RUER, Thèse de doctorat d'Etat, "Méthode vectorielle d'analyse de la texture", Metz, (1977).
- [10] J. HANSEN, J. POSPIECH et K. LUCKE, "Tables for texture analysis of cubic crystals", Springer Verlag, Berlin, (1978).
- [11] D. RUER, A. VADON et R. BARO, Adv. X-Ray Analysis, (1979), 23, 349.
- [12] C. GASPARD, P. MESSIEN et J. MIGNON, Texture of Crystalline Solids, (1979), 3, 127.
- [13] P. DEVIN, M. PERNOT et R. PENELLE, J. Appl. Cryst., (1980), 13, 494.
- [14] S. MATTHIES, Phys. Status Solidi, (1979), (b)92, k135.

- [15] A. VADON, thèse de doctorat d'Etat, "Généralisation et optimisation de la méthode vectorielle d'analyse de la texture", Metz, (1981).
- [16] C. ESLING, thèse de doctorat d'Etat, "Effets des symétries des cristaux, des échantillons et de la diffraction sur la définition de la fonction de texture", Metz, (1981).
- [17] H.J. BUNGE et C. ESLING, "Quantitative texture analysis", Deutsche Gesellschaft für Metallkunde, Oberüsel, (1982).
- [18] H.J. BUNGE, "Texture analysis in material science. Mathematical methods", Butterworth, Londres, (1983).
- [19] S. MATHIES, Proc. 7th Int. Conf. on Textures of Materials, eds. C.M. Brackman, P. Jongenburger et E.J. Mittemeijer, Netherlands Society of Materials Science, Noordwijkerhout, (1984), p.737.
- [20] F. ROYER et C. TAVARD, C.R. Acad. Sci. Paris, série B, (1974), 278, 173.
- [21] J. POSPIECH et J.JURA, Z. Metallkde., (1974), 65, 324.
- [22] F. ROYER, J. M. MOHR et C. TAVARD, C.R. Acad. Sci. Paris, (1975), série B, 281, 555.
- [23] G. SACHS, Z. DER VEREIN. Deutsch. Ing., (1928), 72, 734.
- [24] A. ZAOUÏ, thèse de doctorat d'Etat, "Etude de l'influence propre de la désorientation des grains sur le comportement viscoplastique de métaux polycristallins (système c.f.c.)", Paris, n A05675, (1970).
- [25] G. I. TAYLOR, J. Inst. Metals, (1938), 62, 307.
- [26] E. KRONER, Acta. Met., (1961), 9, 155.
- [27] B. BUDIANSKY et T. K. WU, Proc. 4th U.S. Nat. Cong. Appl. Mech., (1962), 1172.

- [28] M. BERWEILLER et A ZAOUÏ, Comptes rendus du 15ème colloque du groupe français de rhéologie "Comportements rhéologiques et structures des matériaux", Paris, (1980), p.175.
- [29] M. BERWEILLER, A. HIHI et A. ZAOUÏ, Proc. 2nd Risö Int. Symp. on Metallurgy and Materials Science, "Deformation of Polycrystals - Mechanisms and Microstructures", eds. N. Hansen et al., Risö, Roskilde, Denmark, (1981), p.145.
- [30] P. MACHETTO, thèse de Docteur-Ingénieur, "Prévision du comportement plastique et des textures de déformation sous chargement uniaxiale de métaux de structure cubique à faces centrées à l'aide d'un modèle auto-équilibré", Paris-Sud-Orsay, (1982).
- [31] T. LEFFERS, Risö report n 302, Danish Atomic Energy Commission, Risö, Denmark, (1975).
- [32] C. TAVARD et F. ROYER, Proc. 7th Int. Conf. on Textures of Materials eds. C.M. Brackman, P. Jongenburger et E.J. Mittemeijer, Netherlands Society of Materials Science, Noordwijkerhout, (1984), p.145.
- [33] H. HONNEFF et H. MECKING, Proc. 5th Int. Conf. on Textures of Materials, eds. G. Gottstein et K. Lücke, Springer Verlag Berlin, (1978), 1, 265.
- [34] P. van HOUTTE, Proc. 6th Int. Conf. on Textures of Materials, eds. S. Nagashima, The Iron and Steel Institute of Japan, Tokio, (1981), 33.
- [35] U. F. HOCKS et G. R. CANOVA, Proc. 2nd Risö Int. Symp. on Metallurgy and Materials Science, "Deformation of Polycrystals-Mechanisms and Microstructures", eds. N. Hansen et al. , Risö, Roskilde, Denmark, (1981), p. 35.

- [36] M. RENOARD et M. WINTENBERGER, Mem. Sci. Rev. Metall. , (1983),
9, 490.
- [37] J. F. W. BISHOP et R. HILL, Philos. Mag. , (1951), 42, 414 et 1298.
- [38] F. ROYER, C.TAVARD et P. PENNING, J. Appl. Cryst. , (1979),12, 436.
- [39] F. ROYER, J.M. MOHR et C. TAVARD, C. R. Acad. Sci; Paris, (1975),
281, série B, 555.
- [40] D. M. BRINK et G. R. SATCHLER, "Angular Momentum", Clarendon Press,
Oxford, (1968)
- [41] G. J. DAVIES, D. J. GOODWILL et J. S. KALLEND, J. Appl. Cryst.
(1971), 4, 67.
- [42] C. ESLING et C. TAVARD, C. R. Acad. Sci. Paris, 274, série B, 125.
- [43] A. ERDELYI, W. MAGNUS, F. OBERHETTINGER et F. G. TRICOMI, "Higher
Transcendental Functions", Mc. graw Hill C , New-York, (1953).
- [44] R. J. Roe, J. Appl. Cryst , (1966), 37, 2069.
- [45] P. DERVIN, thèse de Docteur-Ingénieur, "Analyse quantitative des
textures cristallographiques de matériaux de système cubique ou
hexagonal. Applications à l'aluminium et au titane. Relation avec
l'anisotropie de déformation plastique dans le cas de tôles minces
de titane.", Paris-Sud-Orsay, (1978).
- [46] G. R. CANOVA, "Texture Development in Polycrystalline Copper during
Torsional Deformation", Graduate Thesis, Université de McGill,
Montréal, Canada (1982).
- [47] J. MANDEL, Int. J. Solids Struct. , (1965), 1, 273.
- [48] J. R. RICE, J. Appl. Mech. , (1970), 37, 728.
- [49] U. F. Kocks, Met. Trans. , (1970), 1, 1121.

- [50] J. ZARKA, J. de Mécanique, (1973), 12(2), 275.
- [51] E. SCHMID, Proc. Int. Cong. Appl. Mech. , Delft, (1924), p. 24.
- [52] E. Kröner, Acta Met. , (1961), 9, 155.
- [53] J. D. Eshelby, Proc. Roy. Soc. , (1957), A241, 376.
- [54] M. BERVEILLER, thèse de doctorat d'Etat, "Contribution à l'étude du comportement plastique et des textures de déformation des polycristaux métalliques", Paris-Nord-Villetanaise, (1978).
- [55] J.F. W. HUTCHINSON, J. Mech.Phys. Sol. (1964), 12, 11.
- [56] H. D. BUI, thèse de doctorat d'Etat, "Evolution de la frontière du domaine élastique des métaux avec écrouissage plastique et comportement élasto-plastique d'un agrégat de cristaux cubiques", Paris, (1969)
- [57] H. D. BUI, A. ZAOUÏ et J. ZARKA, "Foundations of Plasticity", ed. A. Sawezuk, (1974).
- [58] R. HILL, J. Mech. Phys. Solids, (1965), 13, 89.
- [59] J. W. HUTCHINSON, Proc. Roy. Soc. , (1970), A319, 247.
- [60] M. BERVEILLER et A. ZAOUÏ, Proc. 4th. Int. Conf. on the Strength of Metals and Alloys, Nancy, (1976), 136.
- [61] M. BERVEILLER et A. ZAOUÏ, Proc. 5th. Int. Conf. on Textures of Materials, Aachen, (1978), 1, 319.
- [62] J. J. Engel, thèse Docteur-Ingénieur, "Modélisation du comportement des métaux en plasticité et viscoplasticité", Ecole Nationale des Mines de Paris, (1978).
- [63] C. DONADILLE et R. PENELLE, 2nd. Risö Int. Symp. on Metallurgy and Material Science, (1981), 425.

- [64] J. F. W. BISHOP et R. HILL, *Phil. Mag.* , (1951), 42, 414 et 1298.
- [65] J. F. W. BISHOP, *Phil. Mag.*, (1953), 44, 51.
- [66] G. Y. CHIN et W. L. MAMMEL, *Trans. Metall. Soc. AIME*, (1969), 245, 383.
- [67] F. ROYER, J. M. MOHR et C. TAVARD, *J. Appl. Cryst.*, (1978), 11, 35.
- [68] F. ROYER et C. TAVARD, *J. Appl. Cryst.*, (1980), 13, 597.
- [69] C. TAVARD et F. ROYER, rapport d'activité de l'Action Thématique Programmée "Plasticité : corrélation entre la texture des matériaux polycristallins et leur déformation plastique", (1974).
(contrat n 15(99)05).
- [70] M. RENOARD et M. WINTENBERGER, *C. R. Acad. Sci.* , (1981), 292 série II, 385.
- [71] T. H. LIN, *J. Mech. Phys. Solids*, (1957), 5, 143.
- [72] H. HONNEFF et H. MECKING, *Proc. 5th Int. Conf. on Textures of Materials*, Aachen, eds. G. Gottstein et K. Lücke, Springer Verlag Berlin, (1978), 1, 265.
- [73] U. F. KOCKS et G. R. CANOVA, "Deformation of Polycrystals", eds. N. Hansen et al. , Risø National Laboratory, Denmark, (1981), 35.
- [74] P. VAN HOUTTE, *Proc. 6th Int. Conf. on Textures of Materials*, ed. S. Nagashima, The Iron and Steel Institute of Japan, (1981), 1, 428.
- [75] T. LEFFERS, *Scripta Met.* , (1968), 9, 261.
- [76] T. LEFFERS, *Risø Report n 302*, Danish Atomic Energy Commission, Risø 302, (1975).
- [77] H. HONNEFF et H. MECKING, *Proc. 6th Int. Conf. on Textures of Materials*, ed. S. Nagashima, The Iron and Steel Institute of Japan, (1981), 1, 347.

- [78] K. WIERZBANOWSKI, *Archiwum Hutnictwa*, (1978), 23, 355.
- [79] K. WIERZBANOWSKI, *Archiwum Hutnictwa*, (1982), 27, 189.
- [80] C. TAVARD et F. ROYER, *Proc. 7th Int. Conf. on Textures of Materials*, eds. C. M. Brakman, P. Jongenburger et E. J. Mittemeijer, Netherlands Society for Materials Science, (1984), 145.
- [81] G. R. CANOVA, U. F. KOCKS et J. J. JONAS, *Acta Met.* , (1984), 32, 211.
- [82] P. VAN HOUTTE, *Mater. Sci. Engng.* , (1982), 55, 69.
- [83] M. RENOARD et M. WINTENBERGER, *Mem. Sci. Rev. METal.* , (1983), 9, 490.
- [84] F. KROUPA, "Déformation Plastique des Métaux et Alliages", eds. G. Champier et G. Saada, Masson et Cie, Paris, (1968), 29.
- ✓ [85] P. PARNIERE et L. ROESCH, *Mém. Sci. Rev. Métal.* ,(1975), 72, 221.
- [86] P. PARNIERE et L. ROESCH, *Comptes Rendus du 3ème Colloque Européen sur les textures de déformation et de recristallisation des métaux et leurs applications industrielles*, Pont-à-Mousson, (1973).
(rapport IRSID P223, (1973)).
- [87] H. J. BUNGE, *Krist. u. Tech.* , (1970), 5, 145.
- [88] R. VON MISES, *Z. Angew; Math. Mec.* , (1928), 8, 161.
- [89] I. L. DILLAMORE, *Met. Trans.* , (1971), 1, 2463.
- [90] P. VAN HOUTTE, *Acta Met.* , (1978), 26, 591.
- [91] W. F. HOSFORD et W. A. BACKOFEN, "Fundamentals of Deformation Processings", *Proceedings of the Sagamore Conference*, chap. 10, New-York, Syracuse Univ. Press, (1964), 259.
- [92] H. J. BUNGE, M. SCHULZE et D. GRZESIK, *Peine + Salzgitter, Berichte, Sonderheft*, (1980).

- [93] M. ABRAMOWITZ et I. A. STEGUN, Handbook of Mathematical Functions, Dover Publications, New-York, (1965).
- [94] G. Y. CHIN et W. L. MAMMEL, Trans. Metall. Soc. AIME, (1967), 239, 1400.
- [95] J. F. W. HUTCHINSON, J. Mech. Phys. Solids, (1964), 12, 25.
- [96] P. PARNIERE et L. ROESCH, rapport IRSID RE 150, Saint-Germain-en-Laye, Décembre 1972.
- [97] P. VAN HOUTTE et E. AERNOUDT, Z. Metallkde. , (1975), 66, 202 et 303.
- [98] W. F. HOSFORD, Met. Trans. , (1973), 4, 1416.
- [99] B. JAOLU, J. Mech. Phys. Solids, (1961), 9, 69.
- [100] G. Y. CHIN, W. L. MAMMEL et M. T. DOLAN, Trans. Metall. Soc. AIME, (1967), 239, 1111 et 1859.
- [101] H. SIEMES, Z. Metallkde. , (1967), 58, 228.
- [102] P. PARNIERE et L. ROESCH, rapport IRSID P216, Août 1973, Saint-Germain-en-Laye.
- [103] P. PARNIERE, rapport IRSID MP 1601-PP/IB (cte 95 31 01 56), Juillet 1976, Saint-Germain-en-Laye.
- [104] P. PARNIERE, rapport IRSID MP 1849-PP/CC (cte 95 93 56 30), Novembre 1977, Saint-Germain-en-Laye.
- [105] G. I. TAYLOR, Proc. Colloq. Deformation and Flow of Solids, Madrid 1955, Springer Verlag Berlin, (1956), pp. 3/12
- [106] H. R. PIEHLER et W. A. BACKOFEN, Met. Trans. , (1971), 2, 249.
- [107] J. M. ROSENBERG et H. R. PIEHLER, Met. Trans. , (1971), 2, 257.
- [108] I. L. DILLAMORE et H. KATOH, BISRA Open Rep. n MG/39/71, (1971).

- [109] G. Y. CHIN, *Philos. Mag.* , (1973), 28, 679.
- [110] S. L. SEMIATIN et P. R. MORRIS, *Textures Cryst. Sol.* , (1979), 3, 113.
- [111] S. L. SEMIATIN, P. R. MORRIS et H. R. PIEHLER, *Texture Cryst. Sol.* , (1979), 3, 191.
- [112] P. PENNING, *Met. Trans.* , (1976), 7A, 1021.
- [113] I. L. DILLAMORE et H. KATOH, *Proc. Int. Seminar on Quantitative Analysis of Textures*, Cracovie, (1971), 315.
- ✓ [114] R. W. LOGAN et W. F. HOSFORD, *Int. J. Mech. Sci.*, (1980), 22, 419.
- [115] T. LEFFERS, *Proc. 5th Int. Conf. on Textures of Materials*, eds. G. Gottstein et K. Lücke, Springer Verlag Berlin, (1978), 1, 277.
- [116] J. GREWEN et G. WASSERMANN, "Texturen in Forschung und Praxis", Springer Verlag Berlin, (1969).
- [117] S. MATTHIES, *Phys. Stat. Sol. (b)*, (1979), 92, K 135.
- [118] R. L. WHITELEY, *Trans. A. S. M.* , (1960), 50, 154
- [119] M. GRUMBACH et G. POMEY, *Mem. Sci. Rev. Métallurgie*, (1962), 62(5), 343.
- [120] G. POMEY et M. GRUMBACH, *Rev. Métallurgie*, (1964), 61(10), 885.
- [121] M. PERNOT, thèse de doctorat d'Etat, "Détermination quantitative des textures cristallographiques de tôles minces : relations avec l'anisotropie magnétocristalline d'aciers extra-doux et l'anisotropie de comportement plastique de divers métaux et alliages de réseau cubique", Paris-Sud-Orsay, (1977).
- [122] A. POCHETTINO, thèse de Docteur-Ingénieur, "Calcul du profil des cornes d'emboutissage en rétreint d'alliages d'aluminium", Paris-Sud-Orsay, (1981).

- [123] P. PARNIERE et G. POMEY, *Mécanique-Matériaux-Electricité*, (1974), 1.
- [124] R. HILL, "The Mathematical Theory of Plasticity", Oxford University Press, (1950)
- [125] P. PARNIERE et G. POMEY, conférence plénière du 3ème colloque européen sur les textures de déformation et de recristallisation des métaux et leurs applications industrielles", Pont-à-Mousson, (1973).
C.I.T du C.D.S. , (1974), 423.
- [126] H. J. BUNGE et W. T. ROBERTS, *J. Appl. Cryst.* , (1969), 2, 117.
- [127] M. GRUMBACH, P. PARNIERE, L. ROESCH et C. SAUZAY, *Mem. Sci. Rev. Metall.* , (1975), 72, 241.
- [128] H. J. BUNGE, *Proc. Int. Seminar On Quantitative Analysis of Textures*, Cracovie, (1971), 279.
- [129] G. J. DAVIES, D. J. GOODWILL, J. S. KALLEND et T. RUBERG, *J. Inst. Met.* , (1973), 101, 270.
- [130] G. J. DAVIES, J. S. KALLEND et T. RUBERG, *Met. Sci.* , (1975), 9, 421
- [131] J. P. MOUSSY, thèse de doctorat 3ème cycle, "Relations entre le coefficient d'anisotropie plastique de Lankford et la fonction de distribution tridimensionnelle des orientations des cristaux d'un aluminium 1100 et d'un alliage AU2G.", Paris-Sud-Orsay, (1977).
- [132] F. ROYER et C. TAVARD, *Proc. 7th Int. Conf. on Textures of Materials*, eds. C. M. Brackman, P. Jongenburger et E. J. Mittemeijer, Netherlands Society for Materials Science, (1984), 129.
- [133] M. ARMINJON, Contrat "G.I.S. -Mise en forme", rapport IRSID RE 1186 (Mai 1985), "Textures de déformation et écrouissage anisotrope de tôles d'acier".

- [134] G. R. CANOVA, C. FRESSENGEAS, A. MOLINARI, U. F. KOCKS, J. Mech. Phys. Sol., (1986) soumis à publication.
- [135] S. TIEM, M. BERVEILLER et G. R. CANOVA, Acta Met. , accepté.
- [136] C. ESLING, F. BECHLER-FERRY et H.J. BUNGE, Textures et Microstructures, (1982), 95, 5.
- [137] C. TAVARD, F. ROYER et P. TWARDOWSKI, Acta Cryst., A41, 353-355.
- [138] H. J. BUNGE, F. WAGNER, P. I. WELCH et P. Van HOUTTE, J. Phys. Lett., (1985), 46, L1109-L1113.
- [139] A. HIHI, M. BERVEILLER et A. ZAOUÏ, J. de Mécanique Théorique et Appliquée, (1985), 4, 201-221.
- [140] H.J. BUNGE et C. ESLING, Acta Cryst. (1985), A41, 59-67.