

Contribution à l'analyse des contraintes dans les solides hétérogènes et inélastiques par le potentiel des contraintes

Jamal Echaabi

▶ **To cite this version:**

Jamal Echaabi. Contribution à l'analyse des contraintes dans les solides hétérogènes et inélastiques par le potentiel des contraintes. Physique [physics]. Université Paul Verlaine - Metz, 1986. Français. NNT : 1986METZ025S . tel-01775713

HAL Id: tel-01775713
https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01775713

Submitted on 24 Apr 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE
- METZ

N° inv.	19860495
Cote	S/Mz 86/25
Loc	

THESE

présentée

à l'université de METZ

Institut Supérieur de Génie Mécanique et Productique

pour obtenir le grade de

Docteur de III cycle en mécanique

par

ECHAABI Jamal

UNIVERSITE DE METZ
BIBLIOTHEQUE

"Contribution à l'analyse des contraintes dans les solides hétérogènes et inélastiques par le potentiel des contraintes".

soutenue le : 27 Juin 1986 devant le jury :

-M. D.GUITTARD	Professeur	E.N.S.E.M. I.N.P.L. NANCY
-M. O.FASSI-FEHRI	Professeur	Université Mohammed V RABAT, MAROC
-M. M.THENOZ	Professeur	E.N.T.P.E .Ingénieur chef des ponts et chaussées
-M. M.BERVEILLER	Professeur	Université de METZ
-M. J.D.WEBER	Professeur	Université de METZ

PLAN

REMERCIEMENTS

CHAPITRE I Introduction 1

CHAPITRE II 3

Rappels des équations de l'élastostatique et de la formulation en déplacement pour les matériaux hétérogènes avec déformations incompatibles.

2.1) Introduction. 4

2.2) Considérations générales et équations fondamentales. 4

2.2.1) Tenseur des déformations.

2.2.2) Tenseur des contraintes.

2.2.3) Elasticité linéaire.

2.2.4) Déformation inélastique et concept d'incompatibilité.

a) Inélasticité.

b) Incompatibilité et contrainte interne.

2.2.5) Position du problème.

2.3) Formulation en déplacement et applications. 11

2.3.1) Introduction.

2.3.2) Milieu homogène avec déformation incompatible.

2.3.3) Milieu hétérogène élastique.

2.3.4) Milieu hétérogène avec déformation incompatible.

2.3.5) Solutions de l'équation intégrale.

a) Approximation de Born.

b) Application de l'équation intégrale au problème d'inclusion.

1) Inclusion plastique.

2) Inclusion hétérogène et plastique.

2.4) Conclusion. 22

23

CHAPITRE III

Potentiel de contraintes pour les milieux hétérogènes, anisotropes avec déformations incompatibles.

3.1) Introduction. 24

3.2) Théorie de Krōner. 24

3.3) Equations générales. 27

3.4) Cas d'un milieu isotrope, hétérogène. 32

3.5) Cas d'un milieu homogène, anisotrope à symétrie cubique. 36

3.6) Problèmes plans. 39

3.6.1) Milieu homogène et isotrope.

3.6.2) Milieu hétérogène et isotrope.

3.6.3) Milieu homogène anisotrope à symétrie cubique.

3.7) Conclusions. 62

CHAPITRE IV

Equation intégrale pour le potentiel de contraintes dans les milieux hétérogènes et inélastiques

4.1) Introduction 64

4.2) Problème tridimensionnel 64

4.2.1) Définition et propriétés de la fonction de Green

4.2.2) Résolution de l'équation aux dérivées partielles

4.3) Problème bidimensionnel 71

4.4) Solutions pour un milieu infini - Solutions approchées - 76

4.5) Conclusion 77

CHAPITRE V

78

Application à l'analyse des contraintes dans le cas d'une poutre hétérogène en flexion pure

5.1) Introduction. 79

5.2) Formulation en contrainte plane. 79

5.3) Application à une poutre hétérogène. 82

5.4) Résultats et discussion. 87

Application de la formulation en déplacements à l'évaluation du retrait macroscopique et des contraintes internes dans le béton

6.1) Introduction 93

6.2) Propriétés et modélisation mécanique du béton "Bibliographie" 94

6.3) Application de la formulation en déplacement 96

6.3.1) Formulation générale

6.3.2) Milieu homogène

6.3.3) Milieu hétérogène dilué

6.4) Résultats et Discussion 106

CONCLUSION GENERALE 108

BIBLIOGRAPHIES 110

REMERCIMENTS

Cette étude a été effectuée au laboratoire de physique et mécanique des matériaux de l'université de METZ.

Je tiens à exprimer ma vive reconnaissance à Monsieur M. BERVEILLER qui m'a accueilli dans son laboratoire, m'a assuré un encadrement permanent et m'a fait bénéficier de ses compétences scientifiques. Je lui exprime aussi ma gratitude pour le temps qu'il ma consacré malgré ces nombreuses taches et pour le soutien qu'il m'a apporté dans la rédaction de ce mémoire.

Je tiens à remercier Monsieur Q.FASSI-FEHRI d'avoir accepté de participer au jury et pour son soutien et ses encouragements durant mon séjour en FRANCE.

Je remercie également Monsieur D. GUITTARD, Monsieur M. THENOZ et Monsieur J.D. WEBER pour l'interêt qu'ils ont montré pour cette étude en acceptant de la juger.

Je remercie M. A. HIHI pour son soutien et ses conseils. Je remercie aussi tout le personnel du Laboratoire pour leur soutien, en particulier Mademoiselle MARCELET pour le soin et l'aide précieuse qu'elle m'a apporté dans l'impression de cette thèse.

CHAPITRE I

Introduction :

Le développement actuel des matériaux manufacturés (matériaux composites, les lamellés collés en bois, béton armé avec des fibres amorphes,...) montre l'importance prise par ces matériaux hétérogènes dans les nouvelles techniques de construction. De plus, de nombreux matériaux sont naturellement hétérogènes (polycristaux, béton, bois ...). La description du comportement mécanique de ces matériaux demande la prise en compte de ces hétérogénéités.

Outre l'hétérogénéité, les matériaux réels sont le siège de divers phénomènes physiques (physico-chimiques, thermiques, métallurgiques, ...) qui sont à l'origine de déformations inélastiques dont il faut tenir compte car elles engendrent des contraintes qu'il s'agit de maitriser. Ces déformations inélastiques peuvent être recherchées (grenaillage des précontraintes) au bon emploi matériau.

Par ailleurs, pour ces matériaux hétérogènes et inélastiques, il faut formuler des théories qui tiennent compte des paramètres microscopiques mesurant l'hétérogénéité mais qui permettent aussi le calcul des grandeurs macroscopiques en vue du calcul des coefficients effectifs et de localisation et des contraintes internes.

Le problème du calcul des contraintes internes a été traité par Kröner [1] qui l'a formulé en contrainte [2]. Ensuite, il a été formulé en déplacement par R. De Witt [3] et Dederichs et Zeller [4]. Cette formulation a été reprise par Bérveiller et Zaoui [5] qui ont donné une équation générale pour les milieux hétérogènes anisotropes avec des déformations inélastiques. C'est de ces deux méthodes de calcul des contraintes internes que nous traitons dans ce travail.

Pour cela, cette étude s'articule sur six chapitre :

Dans le chapitre II, nous rappelons respectivement, les équations fondamentales de l'élastostatique à résoudre pour les deux formulations, le concept d'incompatibilité et contraintes internes introduit par Kröner [6] et nous discuterons de certaines origines physiques des déformations inélastiques. Dans la seconde partie de ce chapitre, nous rappelons la formulation en déplacement. Nous traitons alors successivement le cas du milieu homogène [3], celui du milieu hétérogène élastique [4] et le milieu hétérogène, anisotrope et inélastique [7]. Ensuite, nous appliquons cette formulation au problème de l'inclusion d'Eshelby [8].

Dans le chapitre III, nous rappelons la formulation en contrainte pour les milieux homogènes et inélastiques [9]. Ensuite, nous proposons d'élargir cette méthode au cas des milieux hétérogènes et inélastiques. Nous la particularisons alors aux milieux hétérogènes et isotropes et aux milieux homogènes mais anisotropes. Nous traitons ensuite les problèmes plans où nous détaillons les deux cas bien connus de l'élasticité linéaire à savoir, le cas des déformations planes et celui des contraintes planes.

Dans le chapitre IV, nous proposons une méthode de résolution des équations aux dérivées partielles établies dans le chapitre précédent. Cette méthode est basée sur l'utilisation de la fonction de Green [10] et tient compte des conditions aux limites. Nous traitons successivement le cas tridimensionnel et le cas bidimensionnel.

Dans le cinquième chapitre, nous illustrons la théorie générale présentée dans le chapitre III, en l'appliquant à une poutre hétérogène. Nous formulons le problème en contrainte plane et nous proposons une solution analytique dans le cas de la flexion pure.

Enfin, dans le dernier chapitre, nous appliquons la formulation en déplacement au calcul des déformations totales et des contraintes internes dues au retrait dans le béton. Nous utilisons alors le modèle auto-cohérent que nous appliquons dans les cas du milieu homogène et du milieu hétérogène dilué.

CHAPITRE II

Rappels des équations de l'élastostatique et de la formulation en déplacement pour les matériaux hétérogènes avec déformations incompatibles.

2.1) Introduction.

2.2) Considérations générales et équations fondamentales.

- 2.2.1) Tenseur des déformations.
- 2.2.2) Tenseur des contraintes.
- 2.2.3) Elasticité linéaire.
- 2.2.4) Déformation inélastique et concept d'incompatibilité.
  - a) inélasticité.
  - b) Incompatibilité et contrainte interne.
- 2.2.5) Position du problème.

2.3) Formulation en déplacement et applications.

- 2.3.1) Introduction.
- 2.3.2) Milieu homogène avec déformation incompatible.
- 2.3.3) Milieu hétérogène élastique.
- 2.3.4) Milieu hétérogène avec déformation incompatible.
- 2.3.5) Solutions de l'équation intégrale.
  - a) Approximation de Born.
  - b) Application de l'équation intégrale au problème d'inclusion.
    - 1) Inclusion plastique.
    - 2) Inclusion hétérogène et plastique.

2.4) Conclusion.

2.1) Introduction

Dans ce chapitre, nous rappelons les équations de base de la mécanique des milieux continus en petites déformations ainsi que le concept de déformation inélastique incompatible introduit par Kröner [6], ensuite, nous discuterons de certaines origines physique de l'inélasticité.

Dans la seconde partie, nous formulons le problème en déplacement sous la forme d'équations intégrales pour les milieux homogènes incompatibles [3], les milieux hétérogènes élastiques [4] et enfin pour les milieux hétérogènes, anisotropes et en présence de déformations incompatibles [5]. Nous rappelons également la solution du problème d'inclusion plastique et hétérogène obtenue par cette formulation, solution qui nous servira dans le chapitre VI.

2.2) Considérations générales et équations fondamentales

Pour préciser les notations utilisées par la suite, nous rappelons les définitions élémentaires concernant les déformations, les contraintes, le comportement élastique dans le cadre des petites déformations.

2.2.1) Tenseur des déformations

Nous considérons un milieu continu qui subit une transformation qui l'amène de l'état I à l'état II. Si au cours de la transformation un point P se déplace de la position P_I à la position P_{II}, alors le champ de déplacement est défini par :

$$\overrightarrow{u(P_I)} = \overrightarrow{P_I P_{II}}$$

le gradient du déplacement s'écrit :

$$\beta_{ij} = \partial u_i / \partial x_j = u_{i,j}$$

le champ de déformation ε est le tenseur du second ordre symétrique défini par :

$$ds_{II}^2 - ds_I^2 = 2\,\varepsilon_{ij}\,dx_i\,dx_j$$

$dS_{II} = P_{II} P'_{II}$ et $dS_I = P_I P'_I$ avec P'_{II} et P'_I sont deux points infiniment voisins de P_{II} et P_I avant la transformation.

En petite déformation, le tenseur des déformations s'écrit :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)$$

2.2.2) Tenseur des contraintes

Suivant la théorie de l'élasticité, un milieu soumis à un système de forces que nous notons dF_i réagit en créant des déformations ε_{kl}.

Soit n_j la normale orientée d'une surface dS autour d'un point x_m et soit σ_{ij} la quantité définie par :

$$dF_i = \sigma_{ij}\, n_j\, dS$$

alors, σ_{ij} est le tenseur des contraintes du milieu. Le tenseur des contraintes ainsi défini doit satisfaire aux équations d'équilibre et des moments. Celles ci s'écrivent respectivement dans l'approximation quasistatique et en l'absence de forces volumiques :

$$\sigma_{ij,j} = 0$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

Dans ces formules et dans tout ce qui va suivre, nous utilisons la convention d'Einstein sur les indices répétés (latin uniquement).

2.2.3) Elasticité linéaire

Dans l'élasticité linéaire les tenseurs des déformations élastiques et des contraintes sont reliés de façon unique par la loi de Hooke. Cette loi s'écrit pour un milieu anisotrope.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\, \varepsilon^e_{kl}$$

ou de façon duale :

$$\varepsilon^e_{ij} = S_{ijkl}\,\sigma_{kl}$$

C_{ijkl} sont les constantes d'élasticité, S_{ijkl} sont les compliances élastiques. Elles admettent les symétries suivantes :

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij}$$

et sont reliées par la propriété $CS = I$ (I tenseur unité)

Les constantes d'élasticité s'écrivent pour un milieu isotrope :

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij}\delta_{kl} + \mu\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{jk}\delta_{il}\right)$$

Dans le cas d'un milieu homogène, les constantes d'élasticité sont constantes. Quand le milieu est anisotrope, comme dans le cas des métaux, l'anisotropie est bien représentée par les constantes d'élasticité.

Il n'en est plus de même, quand le milieu est hétérogène. Le problème devient d'autant plus complexe qu'il existe plusieurs sortes d'hétérogénéités (grains dans le polycristal, inclusion, pores, fissures, précipités,...) qui induisent une anisotropie totale. Cette anisotropie totale dépend de la forme, de la répartition et de l'orientation des hétérogénéités. Du point de vue mécanique, l'ensemble de ces hétérogénéités se traduit par la variation des constantes d'élasticité en fonction de la position. De plus, la loi de comportement élastique ne peut être écrite que localement car contraintes et déformations vont aussi dépendre de la position. Il est alors nécessaire de pouvoir relier les grandeurs microscopiques aux grandeurs macroscopiques, afin d'en déduire le comportement global du matériau.

2.2.4) Déformation inélastique et concept d'incompatibilité

a) Inélasticité

La théorie de l'élasticité linéaire est suffisament précise pour des déformations d'origine élastique. Par ailleurs, des déformations inélastiques, non reliées directement aux contraintes, peuvent exister. Les mécanismes physiques à l'origine des déformations inélastiques peuvent avoir des causes diverses et variées. On peut citer

- les déformations plastiques (origine mécanique)
- les déformations associées à des changements de phase (origine thermomécanique)
- les déformations thermiques (origine thermique)
- les déformations de retrait lors de réaction physico-chimique (origine physico-chimique) (polymérisation, séchage,...).

En général, un solide présente toujours des déformations élastiques qui se superposent aux déformations inélastiques. Pour préserver la continuité du milieu, il est nécessaire que les déformations totales obéissent à certaines relations dites de compatibilité. C'est ce que nous explicitons dans le paragraphe suivant.

b) **Incompatibilité et contrainte interne** [11] [12]

Nous dirons qu'un champ de déformation est compatible, s'il vérifie les relations suivantes (relations de compatibilité) :

$$-\epsilon_{ikm}\,\epsilon_{jln}\,\varepsilon_{kl,mn} = 0$$

ou de manière symbolique :

$$\mathrm{Inc}\,\varepsilon = 0$$

ϵ est le tenseur permutation, tel que :

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si } i,j,k \text{ est une permutation paire de } 1,2,3 \\ -1 & \text{si } i,j,k \text{ " " " impaire de } 1,2,3 \\ 0 & \text{si deux indices sont égaux.} \end{cases}$$

le tenseur des déformations dérive alors d'un champ de déplacement et s'écrit :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)$$

l'existence d'un champ de déplacement unique et continu implique que le milieu reste compact après la transformation , c'est à dire qu'il n'y ait ni vide ni recouvrement de matière.

Si la compatibilité de ε_{kl} n'est pas nulle, nous posons :

$$\mathrm{Inc}\,\varepsilon = \eta$$

η est un tenseur du second ordre appelé tenseur d'incompatibilité. C'est une mesure quantitative de l'écart à la compatibilité. ε_{kl} ne dérive plus d'un champ de déplacement et pour que le milieu reste continu (sans vide ni recouvrement), il y a création de contraintes dans le milieu qui créent à leur tour des déformations additionnelles de façon à ce que la déformation totale résultante du milieu soit compatible, au moins avant l'apparition d'endommagement et la rupture.

Dans tous les cas, c'est la déformation totale qui est compatible, il n'en est plus de même pour une partie de la déformation qui aurait une signification physique propre (déformation plastique, thermique,...). Sauf cas particulier, la déformation imposée à un corps produit des contraintes dans le milieu. C'est l'incompatibilité de ces déformations qui est la source de ces contraintes que nous supposons élastiques et qui s'écrivent alors :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\,\varepsilon^{e}_{kl}$$

ces contraintes se superposent aux contraintes externes liées au chargement mécanique.

Si la déformation imposée est compatible, il n'est nul besoin de contrainte, par contre, si elle ne l'est pas, il y a création de contraintes qui produisent à leur tour des déformations additionnelles de façon à ce que la déformation totale qui s'écrit :

$$\varepsilon^{T}_{ij} = \varepsilon^{e}_{ij} + \varepsilon^{a}_{ij}$$

ε^{a}_{ij} est le tenseur des déformations inélastiques

soit compatible, c'est à dire :

$$\mathrm{Inc}\left(\varepsilon^e + \varepsilon^a\right) = 0$$

et que les contraintes vérifient les équations d'équilibre

$$\sigma_{ij,j} = 0$$

De plus, il faut vérifier les conditions aux limites. Dans ce qui suit, nous appelons contraintes internes les contraintes dues aux incompatibilité et contraintes externes celles dues aux forces extérieures (surfaciques et volumiques).

2.2.5) Position du problème

Les équations d'incompatibilité, les équations d'équilibre et la loi de comportement constituent le système d'équations d'où nous pouvons calculer toutes les grandeurs mécaniques du système. Le problème se résume donc à la résolution du système d'équations suivant :

$\sigma_{ij,j} = 0$ équation d'équilibre

$\mathrm{Inc}\left(\varepsilon^e + \varepsilon^a\right) = 0$ relations de compatibilité

$\sigma = C\,\varepsilon^e$ loi de comportement pour la partie élastique

A ce système d'équations, il faut ajouter les conditions initiales et les conditions aux limites, ainsi que la loi de comportement pour la partie inélastique de la déformation totale.

Pour résoudre ce système d'équations, il est commode de l'écrire soit en déplacement, soit en contrainte. Ces deux méthodes, bien que comparables, s'appliquent à des problèmes différents. Le choix de l'une des deux méthodes est lié étroitement à la nature du problème posé et aux facilités de résolution.

Ensuite, il faut spécifier la nature physique de la déformation incompatible, c'est-à-dire de la déformation inélastique. Expliciter la déformation inélastique passe par la compréhension des mécanismes physiques mis en jeu.

- Pour des déformations plastiques dues aux déplacements des dislocations, la déformation plastique est décrite en fonction des caractéristiques physiques des dislocations.

- Pour des déformations thermiques, il faut résoudre le problème thermique correspondant, c'est-à-dire résoudre l'équation de diffusion de la chaleur.

- Pour des problèmes de séchage, responsable du retrait du bois et du béton, il faut résoudre l'équation de diffusion de l'eau dans le matériau. Dans certain cas, il existe un couplage entre les paramètres physiques et les paramètres mécaniques, ce qui rend le problème encore plus difficile à résoudre.

Nous nous limitons ici au problème élastique, c'est-à-dire celui qui consiste à calculer les contraintes internes pour une déformation inélastique et un comportement élastique donné et connu.

Dans la suite de ce chapitre, nous rappelons la formulation en déplacement qui permet de résoudre le problème posé, c'est-à-dire permet le calcul des contraintes internes et des déformations correspondantes. Les chapitres III et IV sont consacrés à la formulation duale.

2.3) Formulation en déplacement et applications.

2.3.1) Introduction

Dans cette partie, nous rappelons la formulation en déplacement que nous explicitons. Nous allons traiter successivement le milieu homogène avec des déformations incompatibles et le milieu hétérogène élastique, ensuite, nous établissons l'équation générale pour les milieux hétérogènes anisotropes avec des déformations incompatibles sous la forme d'équation intégrale. Nous appliquons cette équation au problème de l'inclusion plastique et ensuite au cas de l'inclusion hétérogène et plastique, problèmes classiques dits d'Eshelby.

2.3.2) Milieu homogène avec déformation incompatible

Dans tout ce qui suit (sauf indication contraire), nous travaillons dans un repère orthonormé dans lequel un point est determiné par ses trois coordonées x_i (i=1,2,3) et nous faisons la convention d'Einstein sur l'indice répété (latin uniquement).

On considère un milieu homogène de constantes d'élasticité C_{ijkl} , subissant une déformation inélastique incompatible ε^a . Le problème est de vérifier les équations d'équilibre, de compatibilité et la loi de comportement. Nous cherchons la solution en déplacement [3].

Les équations d'équilibre s'écrivent dans le cas quasi-statique et en l'absence des forces volumiques :

$$\sigma_{ij,j} = 0 \qquad (2.3.1)$$

L'indice j aprés la virgule indique la différenciation : $\partial\sigma_{ij}/\partial x_j$ (i,j =1,2,3).

La loi de Hooke s'écrit :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\,\varepsilon^e_{kl} \qquad (2.3.2)$$

Nous prenons la déformation totale sous la forme :

$$\varepsilon^T_{ij} = \frac{1}{2}\left(\mu^T_{i,j} + \mu^T_{j,i}\right)$$

$$\varepsilon^T_{ij} = \mu^T_{(i,j)} \qquad (2.3.3)$$

ce qui permet de vérifier les relations de compatibilité.

Les parenthèses indiquent que l'on symétrise par rapport aux indices i et j.

La déformation totale est composée d'une partie élastique et d'une partie inélastique :

$$\varepsilon^{T}_{ij}(r) = \varepsilon^{e}_{ij}(r) + \varepsilon^{a}_{ij}(r) \qquad (2.3.4)$$

Les constantes d'élasticité étant constantes, les équations (2.3.1) et (2.3.2) donnent,

$$C_{ijkl}\,\varepsilon^{e}_{kl,j} = 0$$

En utilisant la relation (2.3.4), on a alors :

$$C_{ijkl}\,\varepsilon^{T}_{kl,j} - C_{ijkl}\,\varepsilon^{a}_{kl,j} = 0$$

En injectant la relation (2.3.3) dans cette dernière, on a :

$$C_{ijkl}\,\mu^{T}_{l,kj} = C_{ijkl}\,\varepsilon^{a}_{kl,j} \qquad (2.3.5)$$

C'est une équation aux dérivées partielles, dont l'inconnue est μ^{T}. . Les constantes d'élasticité C_{ijkl} et la déformation inélastique ε^{a} sont des paramètres connus. Cette équation généralise les équations de Navier au cas des déformations inélastiques.

Pour résoudre l'équation (2.3.5), il est avantageux d'utiliser la technique du tenseur de Green définit par [13]:

$$C_{ijkl}\,G_{km,lj}(r-r') + \delta_{im}\,\delta(r-r') = 0 \qquad (2.3.6)$$

δ_{im} est le symbole de Kronocker.
$\delta(r-r')$ est la fonction de Dirac définie par :

$$\int_{V'} f(r')\,\delta(r-r')\,dv = f(r)$$

$G_{km}(r-r')$ est le déplacement suivant l'axe k produit en un point r par une force unité $f_i = \delta_{im}\,\delta(r-r')$ appliquée au point r' suivant la direction m. Le tenseur de Green est symétrique en k , m et r, r' pour un milieu infini.

En identifiant le second membre de l'équation (2.3.5) à des forces volumiques fictives :

$$f_i = - C_{ijkl}\, \varepsilon^a_{kl,j}$$

L'équation devient :

$$C_{ijkl}\, u^T_{l,kj} + f_i = 0$$

La solution s'écrit alors :

$$u^T_m(r) = \int_{V'} G_{im}(r-r')\, f_i(r')\, dv'$$

Soit :

$$u^T_m(r) = - \int_{V'} G_{im}(r-r')\, C_{ijkl}\, \varepsilon^a_{kl,j}(r')\, dv' \qquad (2.3.7)$$

En intégrant par partie, on arrive à :

$$u^T_m(r) = - \int_{S'} G_{im}(r-r')\, C_{ijkl}\, \varepsilon^a_{kl}(r')\, n_j\, ds + \int_{V'} G_{im,j'}\, C_{ijkl}\, \varepsilon^a_{kl}(r')\, dv'$$

En prenant le tenseur de Green qui donne un déplacement nul à l'infini le terme en surface s'annule et le déplacement total s'écrit :

$$u^T_m(r) = \int_{V'} G_{im,j'}(r-r')\, C_{ijkl}\, \varepsilon^a_{kl}(r')\, dv'$$

En utilisant la propriété suivante du tenseur de Green :

$$G_{im,j'}(r-r') = \frac{\partial G_{im}(r-r')}{\partial x'_j} = - \frac{\partial G_{im}(r-r')}{\partial x_j} = - G_{im,j}(r-r') \qquad (2.3.8)$$

Le déplacement total s'écrit alors :

$$u^T_m(r) = - \int_{V'} G_{im,j}(r-r')\, C_{ijkl}\, \varepsilon^a_{kl}(r')\, dv'$$

Les déformations s'obtiennent en dérivant et en symétrisant par rapport à m et à n :

$$\varepsilon^{T}_{mn}(x) = \int_{V'} \Gamma_{mnij}(x-x')\, C_{ijkl}\, \varepsilon^{a}_{kl}(x')\, dv' \qquad (2.3.9)$$

Avec

$$\Gamma_{mnij}(x-x') = -\frac{1}{2}\left(G_{im,jn} + G_{in,jm}\right)$$

Les déformations élastiques s'obtiennent à partir de l'équation (2.3.4). Elles s'écrivent :

$$\varepsilon^{e}_{mn}(x) = \varepsilon^{T}_{mn}(x) - \varepsilon^{a}_{mn}(x)$$

Les contraintes s'obtiennent par la loi de Hooke :

$$\sigma_{ij}(x) = C_{ijmn}\, \varepsilon^{e}_{mn}(x)$$

Soit,

$$\sigma_{ij}(x) = C_{ijmn}\left(\varepsilon^{T}_{mn}(x) - \varepsilon^{a}_{mn}(x)\right)$$

La déformation inélastique peut être plastique, thermique ou due à des transformations physico-chimiques. Le formalisme serait le même, au moins avant le stade ou il faut l'expliciter. Nous verrons dans le chapitre VI que cette déformation inélastique peut représenter le phénomène de retrait du béton.

2.3.3) <u>Milieu hétérogène élastique</u> [4][14]

Dans ce paragraphe, on considère un milieu hétérogène dont les constantes d'élasticité $\mathcal{L}(x)$ varient avec la position, subissant une contrainte macroscopique à l'infini qui produit des contraintes $\sigma(x)$ et des déformations $\varepsilon^{e}(x)$ qui varient dans tout le milieu à cause de l'hétérogèneité. On cherche à vérifier les équations (2.3.1) à (2.3.4) et à obtenir la solution en déplacement.

La loi de Hooke s'écrit :

$$\sigma_{ij}(x) = C_{ijkl}(x)\, \varepsilon^{e}_{kl}(x) \qquad (2.3.10)$$

Avec

$$\varepsilon^{e}_{kl}(r) = \mu_{k,l}(r) \qquad (2.3.11)$$

En injectant l'équation (2.3.11) dans (2.3.10), on a :

$$\sigma_{ij}(r) = C_{ijkl}(r)\,\mu_{k,l}(r)$$

Les constantes d'élasticité peuvent se décomposer en une partie constante est une partie variable [4] :

$$C_{ijkl}(r) = C^{\circ}_{ijkl} + \delta C_{ijkl}(r)$$

Les contraintes s'écrivent alors :

$$\sigma_{ij}(r) = C^{\circ}_{ijkl}\,\mu_{k,l}(r) + \delta C_{ijkl}(r)\,\mu_{k,l}(r)$$

Les équations d'équilibre donnent :

$$\sigma_{ij,j} = 0$$

$$C^{\circ}_{ijkl}\,\mu_{k,lj}(r) + \left(\delta C_{ijkl}(r)\,\mu_{k,l}(r)\right)_{,j} = 0 \qquad (2.3.12)$$

De la même façon qu'avec l'équation (2.3.5), en identifiant le terme sous le signe de dérivée à des forces volumiques fictives et en utilisant la technique du tenseur de Green, la solution s'écrit :

$$\mu_m(r) = \int_{V'} G_{mi}(r-r')\,f_i(r')\,dv'$$

La solution avec un déplacement en frontière s'écrit :

$$\mu_m(r) = \mu^{\circ}_m(r) + \int_V G_{mi}(r-r')\left\{\delta C_{ijkl}(r')\,\mu_{k,l}(r')\right\}_{,j'}\,dv'$$

On intègre cette équation par partie, en supposant que le terme en surface est nul. On obtient alors :

$$\mu_m(r) = \mu^{\circ}_m(r) - \int_{V_I} G_{mi,j'}(r-r')\left(\delta C_{ijkl}(r')\,\mu_{k,l}(r')\right)dv'$$

Les déformations s'écrivent, en tenant compte de (2.3.8) :

$$\varepsilon_{mn}(r) = \varepsilon^{\circ}_{mn}(r) - \int_{V'} \Gamma^{(r-r')}_{mnij}\, \delta C_{ijkl}(r')\, \varepsilon_{kl}(r')\, dv' \qquad (2.3.13)$$

$$\Gamma_{mnij}(r-r') = -\frac{1}{2}\left(G_{mi,jn}(r-r') + G_{ni,jm}(r-r') \right)$$

Les contraintes s'obtiennent directement à partir des déformations.

Cette équation a été donnée initialement par Zeller et Dederichs [4]. La différence avec l'équation (2.3.9) et que celle-ci est une équation intégrale alors que l'équation (2.3.9) est une intégrale simple.Nous remarquons que la difficulté essentielle,c'est-à-dire l'équation intégrale, vient de l'hétérogèneité et non pas de la déformation inélastique.

2.3.4) <u>Milieu hétérogène avec déformation incompatible</u> [5] :

On traite maintenant le problème mixte. C'est-à-dire celui d'un milieu hétérogène, donc toutes les propriétés élastiques varient avec la position,celui-ci étant soumis à une déformation inélastique incompatible source de contraintes internes.

La déformation totale compatible est la somme d'une déformation élastique et d'une déformation inélastique.

$$\varepsilon^{T}_{ij}(r) = \varepsilon^{e}_{ij}(r) + \varepsilon^{a}_{ij}(r) = \mu^{T}_{(i,j)}(r) \qquad (2.3.14)$$

La partie élastique est liée aux contraintes par la loi de Hooke :

$$\sigma_{ij}(r) = C_{ijkl}(r)\, \varepsilon^{e}_{kl}(r) \qquad (2.3.15)$$

qui s'écrit encore à l'aide de l'équation (2.3.14)

$$\sigma_{ij}(r) = C_{ijkl}(r)\left(\varepsilon^{T}_{kl}(r) - \varepsilon^{a}_{kl}(r) \right)$$

De la même façon que dans le paragraphe précédent , nous décomposons les constantes élastiques en un terme constant et un terme variable :

$$C_{ijkl}(r) = C^{\circ}_{ijkl} + \delta C_{ijkl}(r)$$

A l'aide de la dernière équation, les contraintes deviennent alors :

$$\sigma_{ij}(r) = \left(C^{o}_{ijkl} + \delta C_{ijkl}(r)\right)\left(\varepsilon^{T}_{kl}(r) - \varepsilon^{a}_{kl}(r)\right) \qquad (2.3.16)$$

Les contraintes $\sigma_{ij}(r)$ doivent vérifier les équations d'équilibre qui s'écrivent :

$$\sigma_{ij,j} = 0$$

Le tenseur des déformations étant symétrique, on peut écrire l'équation (2.3.16) en déplacement :

$$\left\{\left(C^{o}_{ijkl} + \delta C_{ijkl}(r)\right)\left(\mu^{T}_{k,l}(r) - \varepsilon^{a}_{kl}(r)\right)\right\}_{,j} = 0$$

C^{o}_{ijkl} étant constante, l'équation devient alors :

$$C^{o}_{ijkl}\,\mu^{T}_{k,lj}(r) + \left(\delta C_{ijkl}(r)\,\mu^{T}_{k,l}(r) - C_{ijkl}(r)\,\varepsilon^{a}_{kl}(r)\right)_{,j} = 0 \qquad (2.3.17)$$

Cette équation aux dérivées partielles est résolue par l'intermédiaire de la technique du tenseur de Green, en considérant le second terme comme des forces volumiques fictives. Le déplacement que ces forces appliquées en un point r' provoquent en un point r est donné par :

$$\mu^{T}_{m}(r) = \int_{V'} G_{mi}(r-r')\,f_{i}(r')\,dv'$$

Soit

$$\mu^{T}_{m}(r) = \int_{V'} G_{mi}(r-r')\left(\delta C_{ijkl}(r')\,\mu^{T}_{k,l}(r') - C_{ijkl}(r')\,\varepsilon^{a}_{kl}(r')\right)_{,j'}\,dv'$$

De la même façon que dans les problèmes précédents et en rajoutant le déplacement μ^{o} en surface, le déplacement s'écrit :

$$\mu^{T}_{m}(r) = \mu^{o}_{m} + \int_{V'} G_{mi,j}(r-r')\left(\delta C_{ijkl}(r')\,\mu^{T}_{k,l}(r') - C_{ijkl}(r')\,\varepsilon^{a}_{kl}(r')\right)dv'$$

On obtient pour les déformations :

$$\varepsilon^{T}_{mn}(r) = \varepsilon^{o}_{mn} + \int_{V'} \Gamma_{mnij}(r-r')\left[C^{(r')}_{ijkl}\varepsilon^{a}_{kl}(r') - \delta C_{ijkl}(r')\,\varepsilon^{T}_{kl}(r')\right]dv' \qquad (2.3.18)$$

$$\Gamma_{mnij}(r-r') = -\frac{1}{2}\left(G_{mi,jn} + G_{ni,jm}\right)$$

La déformation totale donnée par cette équation est compatible. C'est une équation intégrale dont l'inconnue est ε^T , les données étant ε^a , C et δc ainsi que Γ_{mnij} . Cette équation a été donnée par Berveiller et Zaoui [7]. C'est une généralisation des équations (2.3.9) et (2.3.13). On peut aussi noter que les équations (2.3.5),(2.3.12) et (2.3.17) sont des généralisations de l'équation de Navier en élasticité homogène sans déformation inélastique.

2.3.5) Solution de l'équation intégrale

Pour les milieux microhétérogènes et macrohomogènes, on peut souvent supposer que la taille de l'hétérogèneité est petite devant celle de l'échantillon et que le milieu est faiblement hétérogène. L'écart entre la déformation totale du milieu hétérogène et celle du milieu homogène correspondant reste alors petit. L'approximation de Born permet dans ce cas d'obtenir un résultat approché mais satisfaisant.

*a) Approximation de Born

La solution de l'équation (2.3.18) dépend de l'hétérogèneité du milieu. Pour les milieux microhétérogènes, ou les propriétés mécaniques varient localement et sont macroscopiquement homogènes, l'approximation de Born [15] permet de calculer la déformation totale avec une précision suffisante. Cette approximation consiste à remplacer la déformation totale dans l'intégrale de volume de l'équation (2.3.18) par la déformation du milieu homogène correspondant. La solution de cette équation se réduit alors au calcul d'une intégrale simple.

L'équation (2.3.18) s'écrit :

$$\varepsilon^T_{mn}(x) = \varepsilon^0_{mn} + \int_{V'} \Gamma_{mnij}(x-x') \left[C_{ijkl}(x')\, \varepsilon^a_{kl}(x') - \delta C_{ijkl}(x')\, \varepsilon^T_{kl}(x') \right] dv'$$

En remplaçant ε^T par ε^0 , on a alors :

$$\varepsilon^T_{mn}(x) = \varepsilon^0_{mn} + \int_{V'} \Gamma_{mnij}(x-x') \left[C_{ijkl}(x')\, \varepsilon^a_{kl}(x') - \delta C_{ijkl}(x')\, \varepsilon^0_{kl} \right] dv'$$

soit de manière symbolique :

$$\varepsilon^T = \varepsilon^0 - \varepsilon^0 \int_{V'} \Gamma\, \delta C\, dv' + \int_{V'} \Gamma C\, \varepsilon^a\, dv'$$

On n'a alors que des integrales simples à calculer. Cette approximation est valable uniquement quand le milieu est faiblement hétérogène.

Très souvent, on a à faire à des milieux granulaires ou des milieux ayant une structure sous la forme d'une matrice en présence d'inclusions. Le problème de l'inclusion apparait alors comme le problème central à résoudre pour ces matériaux. Il a été traité par Eshelby [8] et c'est l'objet du sous paragraphe suivant.

*b) **Application de l'équation intégrale au problème de l'inclusion**

Le problème de l'inclusion a été traité par Eshelby. Il considère un milieu homogène infini contenant une inclusion de caractéristiques élastiques différentes de celles de la matrice et subissant une déformation inélastique homogène. Pour traiter le problème d'inclusion, Eshelby utilise differents artifices astucieux permettant d'obtenir la solution de l'inclusion hétérogène et plastique.

Un résultat remarquable trouvé par Eshelby est que la déformation totale dans une inclusion ellipsoïdale est uniforme. Ce résultat permet l'application directe de l'équation intégrale formulée en déplacement sans passer par l'approximation de Born.

Nous ferons cette application pour l'inclusion homogène et plastique. Ensuite, nous traitons l'inclusion hétérogène et plastique.

*1) **Inclusion plastique**

On considère une matrice infinie élastique, libre de contraintes extérieures et de constantes d'élasticité C°_{ijkl} constantes, contenant une inclusion de même constantes d'élasticité et qui subit une déformation inélastique homogène [8]. Reprenons l'équation (2.3.9) qui s'écrit :

$$\varepsilon^{T}_{mn}(r) = \int_{V'} \Gamma_{mnij}(r-r')\, C^{\circ}_{ijkl}\, \varepsilon^{a}_{kl}(r')\, dv'$$

Nous pouvons écrire ε^{a}_{kl} à l'aide de la fonction indicatrice $\theta(r)$ définie par :

$$\theta(r) = \begin{cases} 1 & \text{Si } r \in V_I \\ 0 & \text{Si } r \notin V_I \end{cases}$$

V_I est le volume de l'inclusion.

$$\varepsilon^{a}_{kl}(r) = \varepsilon^{a}_{kl}\, \theta(r)$$

L'équation s'écrit alors :

$$\varepsilon^{T}_{mn}(r) = \int_{V'} \Gamma_{mnij}(r-r')\, C^{\circ}_{ijkl}\, \varepsilon^{a}_{kl}\, \theta(r)\, dv'$$

C°_{ijkl} et ε^{a}_{kl} étant des constantes, on peut écrire :

$$\varepsilon^{T}_{mn}(r) = C^{\circ}_{ijkl}\, \varepsilon^{a}_{kl} \int_{V_I} \Gamma_{mnij}(r-r')\, dv'$$

En prenant la valeur moyenne de la déformation totale dans l'inclusion, on obtient :

$$\varepsilon^{T_I}_{mn}(x) = \frac{1}{V_I} C^{o}_{ijkl}\, \varepsilon^{a}_{kl} \int_{V_I}\int_{V_I} \Gamma_{mnij}(x-x')\, dv'dv'$$

on pose :

$$T^{II}_{mnij} = \int_{V_I}\int_{V_I} \Gamma_{mnij}(x-x')\, dv\, dv'$$

La déformation moyenne s'écrit alors :

$$\varepsilon^{T_I}_{mn} = \frac{1}{V_I}\, C^{o}_{ijkl}\, \varepsilon^{a}_{kl}\, T^{II}_{mnij}$$

Le tenseur T^{II}_{mnij} est relié au tenseur S d'Eshelby [14] par la relation :

$$S_{mnkl} = \frac{1}{V_I}\, T^{II}_{mnij}\, C^{o}_{ijkl}$$

Les déformations élastiques dans l'inclusion s'écrivent alors :

$$\varepsilon^{eI}_{mn} = \varepsilon^{T_I}_{mn} - \varepsilon^{a}_{mn}$$

En l'absence de contrainte extérieure, les contraintes dans l'inclusion s'écrivent :

$$\sigma^{I}_{ij} = C^{o}_{ijmn}\varepsilon^{e}_{mn}$$

ou bien à l'aide de la relation (2.3.14) :

$$\sigma^{I}_{ij} = C^{o}_{ijmn}\left(\varepsilon^{T_I}_{mn} - \varepsilon^{a}_{mn}\right)$$

En remplaçant ε^{T}_{mn} par sa valeur en fonction du tenseur d'Eshelby :

$$\sigma^{I}_{ij} = C^{o}_{ijmn}\left(S_{mnkl}\,\varepsilon^{a}_{kl} - \varepsilon^{a}_{mn}\right)$$

On peut ainsi calculer les déformations et les contraintes moyennes dans l'inclusion, on peut aussi calculer les déformations et les contraintes dans la matrice, ce que nous ferons dans le chapitre VI. Dans ce qui suit, nous traitons le problème de l'inclusion hétérogène et plastique.

*2) **Inclusion hétérogène et plastique** :

La matrice infinie élastique de constantes d'élasticité C°_{ijkl}, libre de contrainte extérieure, contient une inclusion hétérogène de constantes d'élasticité C^{I}_{ijkl} constantes et subissant une déformation inélastique homogène ε^{a}. Nous reprenons alors l'équation (2.3.18) qui s'écrit alors :

$$\varepsilon^{T}_{mn}(r) = \varepsilon^{\circ}_{mn} + \int_{V'} \Gamma_{mnij}(r-r') \left[C_{ijkl}(r')\, \varepsilon^{a}_{kl}(r') - \delta C_{ijkl}(r')\, \varepsilon^{T}_{kl}(r') \right] dv'$$

Avec :

$$\Gamma_{mnij}(r-r') = -\frac{1}{2}\left(G_{mi,jn} + G_{ni,jm} \right)$$

Les constantes d'élasticité et la déformation inélastique s'écrivent en fonction de la fonction indicatrice $\theta(r)$:

$$\varepsilon^{a}_{kl}(r) = \varepsilon^{a}_{kl}\ \theta(r)$$

$$C_{ijkl}(r) = C^{\circ}_{ijkl} + \left(C^{I}_{ijkl} - C^{\circ}_{ijkl} \right) \theta(r)$$

Elle devient aussi :

$$C(r) = C^{\circ} + \Delta C\ \theta(r)$$

que nous remplaçons dans l'équation de ε^{T} qui s'écrit donc :

$$\varepsilon^{T}_{mn}(r) = \varepsilon^{\circ}_{mn} + \int_{V'} \Gamma_{mnij}(r-r') \left[C^{I}_{ijkl}\, \varepsilon^{a}_{kl} - \Delta C_{ijkl}\, \varepsilon^{T}_{kl}(r) \right] \theta(r)\, dv'$$

ou encore :

$$\varepsilon^{T}_{mn}(r) = \varepsilon^{\circ}_{mn} + \int_{V_I} \Gamma_{mnij}(r-r') \left(C^{I}_{ijkl}\, \varepsilon^{a}_{kl} - \Delta C_{ijkl}\, \varepsilon^{T}_{kl}(r') \right) dv'$$

En passant aux déformations moyennes, on a donc :

$$\varepsilon^{T_I}_{mn} = \varepsilon^{\circ}_{mn} + \frac{1}{V_I} \int_{V_I} \int_{V_I} C^{I}_{ijkl}\, \varepsilon^{a}_{kl}\, \Gamma_{mnij}(r-r')\, dv\, dv'$$

$$- \frac{1}{V_I} \int_{V_I} \int_{V_I} \Gamma_{mnij}(r-r')\, \Delta C_{ijkl}\, \varepsilon^{T}_{kl}(r')\, dv\, dv'$$

La déformation totale dans l'inclusion étant uniforme, on peut prendre la déformation moyenne dans l'inclusion dans l'intégrale de volume, on a en fonction de T^{II} :

$$\varepsilon^{T_I}_{mn} = \varepsilon^{\circ}_{mn} + \frac{1}{V_I}\, C^{I}_{ijkl}\, \varepsilon^{a}_{kl}\, T^{II}_{mnij} - \frac{1}{V_I}\, \Delta C_{ijkl}\, T^{II}_{mnij}\, \varepsilon^{T_I}_{kl}$$

On peut aussi écrire de manière symbolique :

$$V_I \varepsilon^{T_I} + \frac{\Delta C}{V_I} T^{II} \varepsilon^{T_I} = \varepsilon^o + \frac{C^I \varepsilon^a}{V_I} T^{II}$$

La résolution de cette équation permettra le calcul de la déformation moyenne totale. Les déformations élastiques s'écrivent alors :

$$\varepsilon^{e_I}_{mn} = \varepsilon^{T_I}_{mn} - \varepsilon^a_{mn}$$

Les contraintes dans l'inclusion s'écrivent :

$$\sigma^I = C^I \varepsilon^{e_I}$$

ou bien :

$$\sigma^I = C^I \left(\varepsilon^{T_I} - \varepsilon^a \right)$$

En utilisant cette méthode, on peut obtenir les contraintes et les déformations dans une inclusion hétérogène et plastique. Le calcul est réduit à celui du tenseur T^{II} qui peut être calculé à partir du tenseur S d'Eshelby [14].

2.4) Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons rappelé les équations de base à résoudre pour un problème donné en vue du calcul des contraintes internes dues aux incompatibilités des déformations inélastiques.

Nous avons formulé le problème du calcul des contraintes internes en déplacement. La solution est obtenue sous forme d'équation intégrale donnée par Berveiller et Zaoui [5] et qui généralise les équations particulières de Dederichs et Zeller [4] et celle de R. De Wit [3]. Ensuite, nous avons appliqué cette équation au problème classique de l'inclusion d'Eshelby [8].

Dans le chapitre suivant, nous formulons le problème en contraintes, ce qui permet d'établir des équations analogues à celles formulées en déplacement mais qui peuvent s'appliquer à d'autres classes de problèmes de contraintes internes dans les milieux hétérogènes.

CHAPITRE III

Potentiel de contraintes pour les milieux hétérogènes, anisotropes avec déformations incompatibles.

3.1) Introduction.

3.2) Théorie de Kröner.

3.3) Equations générales.

3.4) Cas d'un milieu isotrope, hétérogène.

3.5) Cas d'un milieu homogène, anisotrope à symétrie cubique.

3.6) Problèmes plans.

- 3.6.1) Milieu homogène et isotrope.
- 3.6.2) Milieu hétérogène et isotrope.
- 3.6.3) Milieu homogène anisotrope à symétrie cubique.

3.7) Conclusions.

III) POTENTIEL DE CONTRAINTES POUR LES MILIEUX HETEROGENES, ANISOTROPES AVEC DEFORMATIONS INCOMPATIBLES :

3.1) Introduction

La formulation en déplacement du chapitre (II) part de la vérification des équations de compatibilité, c'est-à-dire impose que la déformation totale dérive d'un champ de déplacement. On peut aussi formuler le problème en contraintes et vérifier d'abord les équations d'équilibre, c'est la méthode du potentiel de contrainte.

La méthode du potentiel de contrainte, utilisée dans d'autres branches de la physique, permet de vérifier systématiquement les équations d'équilibre par l'intermédiaire d'un tenseur potentiel de contrainte duquel découlent les contraintes. On formule alors les équations d'incompatibilité en terme de potentiel de contrainte par l'intermédiaire de la loi de comportement et on aboutit à des équations aux dérivées partielles concernant le potentiel de contrainte. La résolution de ces équations permet le calcul des contraintes et des déformations.

Nous rappelons tout d'abord la théorie de Kröner [6] pour les milieux homogènes et isotropes avec déformations incompatibles. Ensuite, nous établissons une équation aux dérivées partielles générale pour les milieux hétérogènes, anisotropes et en présence de déformations incompatibles. Nous explicitons cette équation aux dérivées partielles dans des cas particuliers.

Nous traitons successivement le cas d'un milieu homogène mais anisotrope, celui d'un milieu hétérogène et isotrope. Enfin, nous établissons les équations aux dérivées partielles correspondantes aux cas classiques des problèmes plans.

3.2) Théorie de Kröner [9] :

Nous considérons un corps homogène soumis à des déformations inélastiques incompatibles, sources de contraintes internes. Les contraintes sont liées aux déformations élastiques par la loi de Hooke et la déformation totale est la somme des déformations élastiques ε^e et des déformations inélastiques ε^a :

$$\varepsilon^T_{ij}(x) = \varepsilon^e_{ij}(x) + \varepsilon^a_{ij}(x) \qquad (3.2.1)$$

Les équations d'incompatibilité s'écrivent :

$$-\epsilon_{ikm}\epsilon_{jln}\varepsilon^{T}_{mn,kl}(r)=0 \qquad (\mathrm{Inc}\,\varepsilon^{T}=0) \qquad (3.2.2)$$

où ϵ est le tenseur permutation.

A l'aide de la relation (3.2.1) on a:

$$\epsilon_{ikm}\epsilon_{jln}\varepsilon^{e}_{mn,kl}(r)+\epsilon_{ikm}\epsilon_{jln}\varepsilon^{a}_{mn,kl}(r)=0$$

on pose :

$$\eta_{ij}(r)=\epsilon_{ikm}\epsilon_{jln}\varepsilon^{a}_{mn,kl}(r) \qquad (\eta=-\mathrm{Inc}\,\varepsilon^{a}) \qquad (3.2.3)$$

on a alors :

$$-\epsilon_{ikm}\epsilon_{jln}\varepsilon^{e}_{mn,kl}(r)=\eta_{ij}(r) \qquad (\mathrm{Inc}\,\varepsilon^{e}=\eta) \qquad (3.2.4)$$

La loi de Hooke s'écrit pour un milieu isotrope de module de cisaillement μ et de rapport de Poisson ν :

$$\varepsilon^{e}_{mn}=\frac{1}{2\mu}\left(\sigma_{mn}-\frac{\nu}{1+\nu}\sigma_{kk}\delta_{mn}\right)$$

que nous injectons dans les équations d'incompatibilité (3.2.4) :

$$\sigma_{ij,kk}+\sigma_{kk,ij}-\left(\sigma_{jk,ki}+\sigma_{ki,jk}\right)+\left(\sigma_{kl,kl}-\sigma_{kk,ll}\right)\delta_{ij}$$

$$-\frac{\nu}{1+\nu}\left(\sigma_{kk,ij}-\sigma_{kk,ll}\delta_{ij}\right)=2\mu\eta_{ij} \qquad (3.2.5)$$

Les équations d'équilibre s'écrivent dans le cas quasistatique et en l'absence de forces volumiques :

$$\sigma_{ij,j}=0 \qquad (3.2.6)$$

Ce qui permet de réduire les équations (3.2.5) qui s'écrivent alors sous la forme habituelle des relations de Beltrami (dans le cas où $\eta = 0$):

$$\sigma_{ij,kk} + \frac{1}{1+\nu}\left(\sigma_{kk,ij} - \sigma_{kk,ll}\,\delta_{ij}\right) = 2\mu\,\eta_{ij} \qquad (3.2.7)$$

Les équations d'équilibre sont systématiquement vérifiées, en prenant les contraintes qui découlent du potentiel de contrainte par l'intermédiaire des relations suivantes :

$$\sigma_{ij} = -\,\epsilon_{ikm}\,\epsilon_{jln}\,\phi_{mn,kl} \qquad (\sigma = \mathrm{Inc}\,\phi) \qquad (3.2.8)$$

car on a:

$$\mathrm{Div}\,\mathrm{Inc} = 0$$

il est commode d'introduire un potentiel auxiliaire χ tel que :

$$\phi_{ij} = 2\mu\left(\chi_{ij} + \frac{\nu}{1-\nu}\,\chi_{kk}\,\delta_{ij}\right) \qquad (\phi = c\chi) \qquad (3.2.9)$$

les contraintes s'écrivent alors :

$$\sigma_{ij} = -2\mu\,\epsilon_{ikm}\,\epsilon_{jln}\left(\chi_{mn} + \frac{\nu}{1-\nu}\,\chi_{tt,kl}\,\delta_{mn}\right)$$

en développant ces équations, on arrive à :

$$\sigma_{ij} = 2\mu\Big[\chi_{ij,kk} + \chi_{kk,ij} - \left(\chi_{jk,ki} + \chi_{ki,jk}\right) + \left(\chi_{kl,kl} - \chi_{kk,ll}\right)\delta_{ij} + \frac{1}{1-\nu}\left(\chi_{kk,ij} - \chi_{kk,ll}\,\delta_{ij}\right)\Big]$$

la trace du tenseur des contraintes s'écrit alors :

$$\sigma_{kk} = 2\mu\left[\chi_{ml,ml} - \frac{1+\nu}{1-\nu}\,\chi_{mm,ll}\right]$$

En injectant ces relations dans l'équation (3.2.7) on a:

$$\chi_{ij,kkll} - \left(\chi_{jk,kill} + \chi_{ki,jkll}\right)$$

$$+\frac{1}{1+\nu}\chi_{kl,klij} + \frac{\nu}{1+\nu}\chi_{kl,klmm}\delta_{ij} = \eta_{ij} \qquad (3.2.10)$$

si on impose une condition auxiliaire sur χ telle que :

$$\chi_{ij,j} = 0 \qquad (3.2.11)$$

les équations (3.2.10) s'écrivent alors :

$$\chi_{ij,kkmm}^{(n)} = \eta_{ij}(n) \qquad (3.2.12)$$

$\eta(n)$ découle uniquement des déformations inélastiques.

L'équation (3.2.12) correspond à l'équation de Kröner. Nous justifierons la condition auxiliaire $\chi_{ij,j=0}$ dans le paragraphe suivant. Nous verrons alors que l'on peut toujours calculer un potentiel de contrainte qui satisfait à la fois aux équations (3.2.11) et (3.2.12).

3.3) <u>Equation générale</u>

Nous proposons d'élargir la méthode de Kröner aux cas des milieux hétérogènes et anisotropes. Pour un milieu hétérogène, les propriétés mécaniques, en particulier les constantes et les compliances élastiques, varient d'un point à un autre du milieu. Nous décomposons alors les compliances élastiques en un terme constant et un terme variable. De même nous décomposons la déformation totale locale compatible en une partie élastique et une partie inélastique.

La déformation totale s'écrit alors :

$$\varepsilon_{ij}^{T}(n) = \varepsilon_{ij}^{e}(n) + \varepsilon_{ij}^{a}(n) \qquad (3.3.1)$$

La déformation totale étant compatible, elle vérifie les équations d'incompatibilité :

$$-\epsilon_{ikm}\epsilon_{jln}\varepsilon_{mn,kl}^{T}(n) = 0 \qquad \left(\mathrm{Inc}\,\varepsilon^{T} = 0\right) \qquad (3.3.2)$$

En injectant la relation (3.3.1) dans (3.3.2) on a:

$$-\epsilon_{ikm}\epsilon_{jln}\left(\varepsilon^{e}_{mn}+\varepsilon^{a}_{mn}\right)_{,kl}=0$$

on pose :

$$\eta_{ij}=\epsilon_{ikm}\epsilon_{jln}\varepsilon^{a}_{mn,kl} \qquad \left(\eta=-\mathrm{Inc}\,\varepsilon^{a}\right) \qquad (3.3.4)$$

$$-\epsilon_{ikm}\epsilon_{jln}\varepsilon^{e}_{mn,kl}=\eta_{ij} \qquad \left(\mathrm{Inc}\,\varepsilon^{e}=\eta\right) \qquad (3.3.4)$$

Comme dans le paragraphe précédent, η_{ij} est le tenseur d'incompatibilité.C'est une mesure quantitative de l'écart à la compatibilité de la déformation inélastique.

Nous supposons que le comportement local du milieu est élastique, ce qui permet l'utilisation de la loi de Hooke qui s'écrit sous la forme :

$$\varepsilon^{e}_{ij}(r)=S_{ijkl}(r)\,\sigma_{kl}(r)$$

que l'on remplace dans l'équation (3.3.4) :

$$-\epsilon_{ikm}\epsilon_{jln}\left(S_{mnpq}(r)\,\sigma_{pq}(r)\right)_{,kl}=\eta_{ij}(r) \qquad (3.3.5)$$

Nous décomposons les compliances élastiques en une partie constante et une partie fluctuante :

$$S_{ijkl}(r)=S^{\circ}_{ijkl}+\delta S_{ijkl}(r) \qquad (3.3.6)$$

S°_{ijkl} représentent les compliances élastiques d'un milieu élastique homogène. A l'aide de l'équation (3.3.6), l'équation (3.3.5) devient alors :

$$-\epsilon_{ikm}\epsilon_{jln}S^{\circ}_{mnpq}\sigma_{pq,kl}-\epsilon_{ikm}\epsilon_{jln}\left(\delta S_{mnpq}(r)\,\sigma_{pq}(r)\right)_{,kl} \qquad (3.3.7)$$

$$=\eta_{ij}(r)$$

Il reste à vérifier les équations d'équilibre, qui s'écrivent en l'absence de forces volumiques et dans le cas statique :

$$\sigma_{ij,j} = 0$$

Les relations d'équilibre sont systématiquement vérifiées en prenant les contraintes qui découlent du potentiel de contrainte défini par la relation habituelle :

$$\sigma_{ij} = -\epsilon_{ikm}\epsilon_{jln}\phi_{mn,kl}$$

l'équation (3.3.7) s'écrit alors :

$$\epsilon_{ikm}\epsilon_{jln}S^{\circ}_{mnpq}\epsilon_{prt}\epsilon_{qsu}\phi_{tu,rskl}^{(r)} + \epsilon_{ikm}\epsilon_{jln}\left(\delta S_{mnpq}^{(r)}\epsilon_{prt}\epsilon_{qsu}\phi_{tu,rs}^{(r)}\right)_{,kl} = \eta_{ij}^{(r)} \qquad (3.3.8)$$

Pour simplifier ces relations, nous choisissons un milieu S° isotrope et comme l'a fait Kröner, nous introduisons le potentiel auxiliaire χ_{ij} défini par :

$$\phi_{ij} = 2\mu\left(\chi_{ij} + \frac{\nu}{1-\nu}\chi_{kk}\delta_{ij}\right) \qquad (\phi = C^{\circ}\chi) \qquad (3.3.9)$$

l'équation (3.3.8) se transforme alors en :

$$\mathrm{Inc}\, S^{\circ}\, \mathrm{Inc}\, C^{\circ}\chi + \mathrm{Inc}\,\delta S\, \mathrm{Inc}\, C^{\circ}\chi = \eta \qquad (3.3.10)$$

C° représente les coefficients d'élasticité d'un milieu homogène isotrope, tel que $C^{\circ}S^{\circ} = I$.

Le premier terme du premier membre de la relation (3.3.10) s'écrit alors

$$\chi_{ij,kkmm} - \left(\chi_{jk,ik} + \chi_{ik,jk}\right)_{,mm} + \frac{1}{1+\nu}\chi_{kl,ijkl} + \frac{\nu}{1+\nu}\chi_{kl,klmm}\delta_{ij} \qquad (3.3.11)$$

Pour simplifier l'expression (3.3.11) nous choisissons le potentiel de contrainte tel que sa divergence soit nulle, c'est-à-dire que :

$$\chi_{ij,j} = 0$$

dans ces conditions l'expression (3.3.11) se réduit à :

$$\chi_{ij,kkmm}$$

l'équation (3.3.10) s'écrit alors :

$$\chi_{ij,kkmm} + \epsilon_{ikm}\epsilon_{jln}\left\{SS^{(\lambda)}_{mnpq}\epsilon_{prt}\epsilon_{qsu}C^{\circ}_{tuab}\chi_{ab,rs}{}^{(\lambda)}\right\}_{,kl} = \eta^{(\lambda)}_{ij} \qquad (3.3.12)$$

à laquelle il faut associer la condition de divergence nulle de χ_{ij}. Cette condition peut toujours être satisfaite de la façon suivante :

Supposons que l'on puisse résoudre l'équation (3.3.12) et que le potentiel de contraintes trouvé ne soit pas à divergence nulle, donc :

$$\chi_{ij,j} \neq 0$$

le potentiel de contrainte défini par :

$$\chi'_{ij} = \chi_{ij} + \frac{1}{2}\left(\varphi_{i,j} + \varphi_{j,i}\right) \qquad (3.3.13)$$

où φ est un champ de vecteur est à déterminer de façon que le nouveau potentiel de contrainte soit à divergence nulle, donc :

$$\chi'_{ij,j} = 0$$

la relation (3.3.13) s'écrit alors :

$$\chi_{ij,j} + \frac{1}{2}\left(\varphi_{i,jj} + \varphi_{j,ji}\right) = 0$$

D'où nous déduisons :

$$\varphi_{i,jj} + \varphi_{j,ij} = -2\,\chi_{ij,j} \qquad (3.3.14)$$

Il suffit alors de résoudre les équations (3.3.14) pour trouver le champ de vecteurs φ à partir du potentiel χ . On peut alors calculer la fonction φ et par conséquent calculer le potentiel χ'_{ij} à divergence nulle. Les potentiels χ et χ' sont différents mais ils donnent les mêmes contraintes puisque :

$$\mathrm{Inc}\,\chi'_{ij} = \mathrm{Inc}\,\chi_{ij} + \mathrm{Inc}\,\frac{1}{2}\left(\varphi_{i,jj} + \varphi_{j,ij}\right)$$

l'incompatibilité d'un gradient étant nulle, on a alors pour les contraintes :

$$\sigma = \mathrm{Inc}\,\chi' = \mathrm{Inc}\,\chi$$

dans ces conditions, l'équation aux dérivées partielles à résoudre s'écrit :

$$\chi_{ij,kkmm} + \epsilon_{ikm}\epsilon_{jln}\left\{\delta S^{(\lambda)}_{mnpq}\,\epsilon_{prt}\epsilon_{qsu}\,C^{\circ}_{tuab}\,\chi_{ab,rs}\right\}_{,kl} = \eta_{ij} \qquad (3.3.15)$$

on pose :

$$\eta'_{ij} = -\epsilon_{ikm}\epsilon_{jln}\left\{\delta S^{(\lambda)}_{mnpq}\,\epsilon_{prt}\epsilon_{qsu}\,C^{\circ}_{tuab}\,\chi_{ab,rs}\right\}_{,kl}$$

l'équation devient alors :

$$\chi_{ij,kkmm} = \eta'_{ij} + \eta_{ij} \qquad (3.3.16)$$

η_{ij} mesure l'incompatibilité due à la déformation inélastique et η' à la même forme que l'incompatibilité η. C'est pourquoi nous l'appelons incompatibilité. Néanmoins, il est clair que η' dépend de la solution du problème par l'intermédiaire du tenseur χ. η' joue le rôle "d'incompatibilités fictives" analogues aux forces volumiques fictives de la formulation en déplacements.
Pour un milieu homogène $\delta S = 0$, nous retrouvons l'équation (3.2.12) de Kröner car $\eta' = 0$. Pour un milieu homogène élastique sans déformations inélastiques, nous pouvons retrouver les potentiels de contraintes classiques de la théorie de l'élasticité [16].

Avant de chercher des solutions de l'équation (3.3.16), nous allons la particulariser, dans le cas de certains problèmes pour lesquels nous spécifions l'hétérogénéité où l'anisotropie, ainsi que dans les problèmes plans.

3.4) <u>Cas d'un milieu isotrope hétérogène</u> :

Nous nous proposons de calculer l'incompatibilité due a des hétérogénéités dans le cas d'un milieu isotrope. Cette incompatibilité s'écrit dans le cas général :

$$\eta'_{ij} = -\epsilon_{ikm}\epsilon_{jln}\left[\delta S^{(n)}_{mnpq}\,\epsilon_{prt}\,\epsilon_{qsu}\,C^{\circ}_{tuab}\,\chi_{ab,rs}\right]_{,kl}$$

pour un corps isotrope, les constantes d'élasticité s'écrivent :

$$C^{\circ}_{ijkl} = \lambda_0\,\delta_{ij}\,\delta_{kl} + \mu_0\left(\delta_{ik}\,\delta_{jl} + \delta_{il}\,\delta_{jk}\right)$$

les compliances élastiques s'écrivent :

$$S^{\circ}_{ijkl} = -\frac{\nu_0}{E_0}\,\delta_{ij}\,\delta_{kl} + \frac{1+\nu_0}{2E_0}\left(\delta_{ik}\,\delta_{jl} + \delta_{il}\,\delta_{jk}\right)$$

$\lambda_0, \mu_0, \nu_0, E_0$ sont des constantes reliées par les relations usuelles :

$$E_0 = \frac{\mu_0(3\lambda_0 + 2\mu_0)}{\lambda_0 + \mu_0} \quad , \quad \nu_0 = \frac{\lambda_0}{2(\lambda_0 + \mu_0)}$$

Nous supposons que l'hétérogénéité est isotrope, δS s'écrit donc :

$$\delta S_{mnpq}^{(r)} = \delta\left(-\frac{\nu}{E}\right)\delta_{mn}\delta_{pq} + \delta\left(\frac{1+\nu}{E}\right)\left(\delta_{mp}\delta_{nq}+\delta_{mq}\delta_{nq}\right)$$

soit encore :

$$\delta S_{mnpq}^{(r)} = \delta A\,\delta_{mn}\delta_{pq} + \delta B\left(\delta_{mp}\delta_{nq}+\delta_{mq}\delta_{np}\right)$$

avec :

$$\delta A = \delta\left(-\frac{\nu}{E}\right) \qquad \text{et} \qquad \delta B = \delta\left(\frac{1+\nu}{E}\right)$$

$\nu, E, \delta A, \delta B$ dépendent de la position.

<u>Nous ferons le calcul par étapes successives</u>

Calcul de $\epsilon_{prt}\epsilon_{qsu}C^{\circ}_{tuab}\chi^{(r)}_{ab,rs}$

on remplace C° par sa valeur :

$$\epsilon_{prt}\epsilon_{qsu}\left(\lambda_0\delta_{tu}\delta_{ab}+\mu_0\left(\delta_{ta}\delta_{\mu b}+\delta_{tb}\delta_{\mu a}\right)\right)\chi_{ab,rs}$$

qui devient après développement

$$\lambda_0\epsilon_{pru}\epsilon_{qsu}\chi_{aa,rs}+\mu_0\epsilon_{pra}\epsilon_{qsb}\chi_{ab,rs}+\mu_0\epsilon_{prb}\epsilon_{qsa}\chi_{ab,rs}$$

que l'on multiplie par δS_{mnpq}, on a alors :

$$\Big[\lambda_0\delta A\,\epsilon_{pru}\epsilon_{qsu}\delta_{mn}\delta_{pq}\chi_{aa,rs}+\mu_0\delta A\,\epsilon_{pra}\epsilon_{qsb}\delta_{mn}\delta_{pq}\chi_{ab,rs}$$

$$+\mu_0\delta A\,\epsilon_{prb}\epsilon_{qsa}\delta_{mn}\delta_{pq}\chi_{ab,rs}+\lambda_0\epsilon_{pru}\epsilon_{qsu}\delta_{mp}\delta_{nq}\chi_{aa,rs}+\mu_0\delta B\,\epsilon_{pra}\epsilon_{qsb}\delta_{mp}\delta_{nq}\chi_{ab,rs}$$

$$+\mu_0\delta B\,\epsilon_{prb}\epsilon_{qsa}\delta_{mp}\delta_{nq}\chi_{ab,rs}+\lambda_0\delta B\,\epsilon_{pru}\epsilon_{qsu}\delta_{mp}\delta_{nq}\chi_{aa,rs}+\mu_0\delta B\,\epsilon_{pra}\epsilon_{qsb}\delta_{mq}\delta_{np}\chi_{ab,rs}$$

$$+\mu_0\delta B\,\epsilon_{prb}\epsilon_{qsa}\delta_{mq}\delta_{np}\chi_{ab,rs}\Big]_{,kl}$$

Soit :

$$\Big[\lambda_0\delta A\,\epsilon_{p\alpha u}\epsilon_{psu}\delta_{mm}\chi_{aa,\alpha\beta}+\mu_0\delta A\,\epsilon_{p\alpha a}\epsilon_{psb}\delta_{mm}\chi_{ab,\alpha\beta}+\mu_0\delta A\,\epsilon_{p\alpha b}\epsilon_{psa}\delta_{mm}\chi_{ab,\alpha\beta}$$

$$+\lambda_0\delta B\,\epsilon_{m\alpha u}\epsilon_{nsu}\chi_{aa,\alpha\beta}+\mu_0\delta B\,\epsilon_{m\alpha a}\epsilon_{nsb}\chi_{ab,\alpha\beta}+\mu_0\delta B\,\epsilon_{m\alpha b}\epsilon_{nsa}\chi_{ab,\alpha\beta}$$

$$+\lambda_0\delta B\,\epsilon_{n\alpha u}\epsilon_{msu}\chi_{aa,\alpha\beta}+\mu_0\delta B\,\epsilon_{n\alpha a}\epsilon_{msb}\chi_{ab,\alpha\beta}+\mu_0\delta B\,\epsilon_{n\alpha b}\epsilon_{msa}\chi_{ab,\alpha\beta}\Big]_{,kl}$$

Après un certain nombre de calculs et en utilisant le fait que $div\,\chi = 0$, on trouve :

$$\Big[(2\lambda_0\delta A+2\mu_0\delta A+2\lambda_0\delta B)\chi_{aa,\alpha\alpha}\delta_{mm}-2\lambda_0\delta B\,\chi_{aa,m\,m}$$

$$+\mu_0\delta B\left(\epsilon_{m\alpha a}\epsilon_{nsb}+\epsilon_{m\alpha b}\epsilon_{nsa}+\epsilon_{n\alpha a}\epsilon_{msb}+\epsilon_{n\alpha b}\epsilon_{msa}\right)\chi_{ab,\alpha\beta}\Big]_{,kl}$$

on pose :

$$C = 2\lambda_0\delta A + 2\mu_0\delta A + 2\lambda_0\delta B\,.$$

d'autre part, à cause de la symétrie de χ en a,b et α,β, on a :

$$\epsilon_{m\alpha a}\epsilon_{nsb}+\epsilon_{m\alpha b}\epsilon_{nsa}+\epsilon_{n\alpha a}\epsilon_{msb}+\epsilon_{n\alpha b}\epsilon_{msa}=4\,\epsilon_{m\alpha a}\epsilon_{nsb}$$

on a alors :

$$\Big[C\chi_{aa,\alpha\alpha}\delta_{mm}-2\lambda_0\delta B\,\chi_{aa,m\,m}+4\mu_0\delta B\,\epsilon_{m\alpha a}\epsilon_{nsb}\chi_{ab,\alpha\beta}\Big]_{,kl}$$

et l'expression de l'incompatibilité s'écrit alors :

$$\eta'_{ij}=\Big[C\,\epsilon_{ikm}\epsilon_{jlm}\chi_{aa,\alpha\alpha}\delta_{mm}-2\lambda_0\delta B\,\epsilon_{ikm}\epsilon_{jlm}\chi_{aa,m\,m}$$

$$+4\mu_0\delta B\,\epsilon_{ikm}\epsilon_{jlm}\epsilon_{m\alpha a}\epsilon_{nsb}\chi_{ab,\alpha\beta}\Big]_{,kl}$$

η'_{ij} s'écrit après calculs :

$$\eta'_{ij} = \left(C X_{aa,rr} \delta_{ij} \right)_{,kk} - \left(C X_{aa,rr} \right)_{,ij} - \left(2\lambda_0 \delta B \epsilon_{ikm} \epsilon_{jln} X_{aa,mn} \right)_{,kl}$$

$$+ \left[4\mu_0 \delta B \left(X_{kl,ij} - X_{jk,il} - X_{il,jk} + X_{ij,kl} \right) \right]_{,kl}$$

le coefficient C peut s'écrire en fonction de E et ν sachant que :

$$\delta A = \delta \left(- \frac{\nu(r)}{E(r)} \right) \qquad \text{et} \qquad \delta B = \delta \left(\frac{1+\nu(r)}{E(r)} \right)$$

et

$$C = 2\lambda_0 \left(\delta \left(\frac{-\nu(r)}{E(r)} \right) + \delta \left(\frac{1+\nu(r)}{E(r)} \right) \right) + 2\mu_0 \delta \left(- \frac{\nu(r)}{E(r)} \right)$$

la variation du module de Young est souvent plus importante que celle du coefficient de Poisson; une première approximation consiste à supposer que ν est une constante ce qui simplifie d'avantage l'expression de η'_{ij}. Dans ce dernier cas, on a :

$$\delta A = - \nu \delta \left(\frac{1}{E(r)} \right) \qquad \delta B = (1+\nu) \delta \left(\frac{1}{E(r)} \right)$$

et ν sera égale à ν_0 , l'expression de C s'écrit alors :

$$C = - 2\nu_0 \lambda_0 \delta \left(\frac{1}{E(r)} \right) + 2\lambda_0 (1+\nu_0) \delta \left(\frac{1}{E(r)} \right) - 2\nu_0 \mu_0 \delta \left(\frac{1}{E(r)} \right)$$

$$C = 2(\lambda_0 - \mu_0 \nu_0) \delta \left(\frac{1}{E(r)} \right)$$

l'incompatibilité s'écrit donc :

$$\eta'_{ij} = 2(\lambda_0 - \mu_0 \nu_0) \left[\left(\delta \left(\frac{1}{E(r)} \right) X_{aa,rr} \delta_{ij} \right)_{,kk} - \left(\delta \left(\frac{1}{E(r)} \right) X_{aa,rr} \right)_{,ij} \right]$$

$$- 2\lambda_0 (1+\nu_0) \left(\delta \left(\frac{1}{E(r)} \right) \epsilon_{ikm} \epsilon_{jlm} X_{aa,mm} \right)_{,kl} + 4\mu_0 (1+\nu_0) \left[\delta \left(\frac{1}{E(r)} \right) \right.$$

$$\left. \times \left(X_{kl,ij} - X_{jk,il} - X_{il,jk} + X_{ij,kl} \right) \right]_{,kl}$$

La donnée de $E(r)$ permettra d'avoir l'équation aux dérivées partielles explicite satisfaite par X. Dans ce cas, l'équation (3.3.16) s'écrit :

$$X_{ij,kkmm}(r) - \eta'_{ij}(r) = \eta_{ij}(r)$$

3.5) <u>Cas d'un milieu homogène anisotrope à symétrie cubique</u>

Comme dans le paragraphe précédent, nous allons calculer l'expression de l'incompatibilité due à l'anisotropie cubique. Pour cela, nous reprenons la relation (3.3.16) qui s'écrit :

$$X_{ij,kkmm}(r) = \eta'_{ij}(r) + \eta_{ij}(r)$$

l'expression η'_{ij} s'écrit :

$$\eta'_{ij}(r) = -\epsilon_{ikm}\epsilon_{jln}\left\{\delta S_{mnpq}(r)\,\epsilon_{prt}\epsilon_{qsu}\,C^{\circ}_{tuab}\,X_{ab,rs}\right\}_{,kl}$$

c'est cette expression que nous nous proposons de calculer dans le cas où S possède la symétrie cubique. Nous reprenons le problème depuis les contraintes :

$$\sigma_{ij} = -\epsilon_{ikm}\epsilon_{jln}\,\phi_{mn,kl}$$

$\phi_{mn,kl}$ s'écrit en fonction du potentiel auxiliaire X :

$$\phi_{mn,kl} = 2\mu_0\left(X_{mn,kl} + \frac{\nu_0}{1-\nu_0}\,X_{tt,kl}\,\delta_{mn}\right)$$

les contraintes s'écrivent en fonction de X :

$$\sigma_{ij} = -\epsilon_{ikm}\epsilon_{jln}\,2\mu_0\left(X_{mn,kl} + \frac{\nu_0}{1-\nu_0}\,X_{tt,kl}\,\delta_{mn}\right)$$

qui devient après calcul :

$$\sigma_{ij} = -\epsilon_{ikm}\epsilon_{jln}\,2\mu_0 X_{mn,kl} - \frac{2\mu_0\nu_0}{1-\nu_0}\left(X_{tt,kk}\,\delta_{ij} - X_{tt,ij}\right)$$

Comme S à la symétrie cubique, on peut écrire [17] :

$$S_{ijkl}(\lambda) = S_{12}(\lambda)\,\delta_{ij}\delta_{kl} + S_{44}(\lambda)\left(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}\right) + H'\sum_{p}\delta_{ip}\delta_{jp}\delta_{kp}\delta_{lp}$$

avec :

$$H' = 2S_{44} + S_{12} - S_{11}$$

soit encore :

$$S_{ijkl} = S^{\circ}_{ijkl} + \delta S_{ijkl}$$

$$= -\frac{\nu_0}{E_0}\,\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1+\nu_0}{E_0}\left(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}\right) + H'\sum_{p}\delta_{ip}\delta_{jp}\delta_{kp}\delta_{lp}$$

δS_{ijkl} s'écrit alors

$$\delta S_{ijkl} = H'\sum_{p}\delta_{ip}\delta_{jp}\delta_{kp}\delta_{lp}$$

elle caractérise alors l'anisotropie du milieu. On peut poser

$$\varepsilon'_{ij} = \delta S_{ijkl}\,\sigma_{kl}$$

on voit donc que seuls les termes diagonaux de ε' sont différents de zéro, on a donc pour les composantes non nulles de ε' :

$$\varepsilon'_{xx} = -2\mu_0 H'\left(\epsilon_{1rm}\epsilon_{1sn}X_{mnrs} - \frac{\nu_0}{1-\nu_0}\left(X_{tt,qq} - X_{tt,11}\right)\right)$$

$$\varepsilon'_{yy} = -2\mu_0 H'\left(\epsilon_{2rm}\epsilon_{2sn}X_{mnrs} - \frac{\nu_0}{1-\nu_0}\left(X_{tt,qq} - X_{tt,22}\right)\right)$$

$$\varepsilon'_{zz} = -2\mu_0 H'\left(\epsilon_{3rm}\epsilon_{3sn}X_{mnrs} - \frac{\nu_0}{1-\nu_0}\left(X_{tt,qq} - X_{tt,33}\right)\right)$$

Après développement on aura :

$$\varepsilon'_{xx} = -2\mu_0 H' \left(\chi_{33,y^2} - 2\chi_{y3,y3} + \chi_{yy,3^2} \right) - \frac{2\mu_0 \nu_0 H'}{1-\nu_0} \left(\chi_{tt,y^2} + \chi_{tt,3^2} \right)$$

$$\varepsilon'_{yy} = -2\mu_0 H' \left(\chi_{33,x^2} - 2\chi_{x3,x3} + \chi_{xx,3^2} \right) - \frac{2\mu_0 \nu_0 H'}{1-\nu_0} \left(\chi_{tt,x^2} + \chi_{tt,3^2} \right)$$

$$\varepsilon'_{33} = -2\mu_0 H' \left(\chi_{yy,x^2} - 2\chi_{xy,xy} + \chi_{xx,y^2} \right) - \frac{2\mu_0 \nu_0 H'}{1-\nu_0} \left(\chi_{tt,x^2} + \chi_{tt,y^2} \right)$$

l'incompatibilité due à l'anisotropie du système cubique s'écrit alors :

$$\eta'_{ij} = -\epsilon_{ikm}\,\epsilon_{jln}\,\varepsilon'_{mn,kl}$$

pour un tenseur ε' diagonal, les équations d'incompatibilité se réduisent à :

$$\eta'_{xx} = -\varepsilon'_{33,y^2} - \varepsilon'_{yy,3^2}$$

$$\eta'_{yy} = \varepsilon'_{33,xy}$$

$$\eta'_{xz} = \varepsilon'_{yy,xz}$$

$$\eta'_{yy} = -\varepsilon'_{33,x^2} - \varepsilon'_{xx,3^2}$$

$$\eta'_{33} = -\varepsilon'_{yy,x^2} - \varepsilon'_{xx,y^2}$$

$$\eta'_{yz} = \varepsilon'_{xx,yz}$$

finalement les η'_{ij} s'écrivent :

$$\eta'_{xx} = \frac{2\mu_0 \nu_0 H'}{1-\nu_0} \left[\frac{(1-\nu_0)}{\nu_0} \left(\chi_{yy,x^2y^2} - 2\chi_{xy,xy^3} + \chi_{xx,y^4} \right) + \left(\chi_{tt,x^2y^2} + \chi_{tt,y^4} \right) \right.$$
$$\left. + \frac{(1-\nu_0)}{\nu_0} \left(\chi_{33,x^2z^2} - 2\chi_{xz,xz^3} + \chi_{xx,z^4} \right) + \left(\chi_{tt,x^2z^2} + \chi_{tt,z^4} \right) \right]$$

$$\eta'_{yy} = \frac{2\mu_0 \nu_0 H'}{1-\nu_0} \left[\frac{(1-\nu_0)}{\nu_0} \left(\chi_{yy,x^4} - 2\chi_{xy,x^3y} + \chi_{xx,x^2y^2} \right) + \left(\chi_{tt,x^4} + \chi_{tt,x^2y^2} \right) \right.$$

$$+\frac{1-\nu_0}{\nu_0}\left(X_{zz,yyzz}-2X_{yz,yzz}+X_{yy,zz}\right)+\left(X_{tt,xx}+X_{tt,zzx^2}\right)\Big]$$

$$\eta'_{zz}=\frac{2\mu_0\nu_0}{1-\nu_0}\Big[\frac{1-\nu_0}{\nu_0}\left(X_{zz,xx}-2X_{xz,zx}+X_{xx,x^2z^2}\right)+\left(X_{tt,xx}+X_{tt,x^2y^2}\right)$$

$$+\frac{1-\nu_0}{\nu_0}\left(X_{zz,yy}-2X_{yz,zy}+X_{yy,y^2z^2}\right)+\left(X_{tt,yy}+X_{tt,y^2z^2}\right)\Big]$$

$$\eta'_{xy}=-\frac{2\mu_0\nu_0H'}{1-\nu_0}\Big[\frac{1-\nu_0}{\nu_0}\left(X_{yy,yx}-2X_{xy,x^2y^2}+X_{xx,xy}\right)+\left(X_{tt,yx}+X_{tt,xy}\right)\Big]$$

$$\eta'_{xz}=-\frac{2\mu_0\nu_0H'}{1-\nu_0}\Big[\frac{1-\nu_0}{\nu_0}\left(X_{zz,xz}-2X_{xz,x^2z^2}+X_{xx,xz}\right)+\left(X_{tt,zx}+X_{tt,xz}\right)\Big]$$

$$\eta'_{yz}=-\frac{2\mu_0\nu_0H'}{1-\nu_0}\Big[\frac{1-\nu_0}{\nu_0}\left(X_{zz,yz}-2X_{yz,y^2z^2}+X_{yy,zy}\right)+\left(X_{tt,yz}+X_{tt,yz}\right)\Big]$$

Cette méthode peut se généraliser à d'autres symétries matérielles.

3.6) Problèmes plans

De nombreux problèmes pratiques ne dépendent que de deux variables. Ce sont les problèmes plans. La solution de ces problèmes peut être obtenue à partir de la théorie générale. Cependant, il est plus instructif d'établir directement les équations dans ces cas particuliers. Ces équations sont alors plus simples que dans le cas général.

Nous supposons donc que toutes les grandeurs ne dépendent pas de la variable z. Nous traitons successivement le problème avec un milieu isotrope homogène et incompatible, ensuite avec un milieu hétérogène, isotrope et incompatible. Enfin, nous traitons le cas du milieu homogène, anisotrope à symétrie cubique. Dans chacun de ces cas, nous explicitons les deux cas classiques de déformation plane et de contrainte plane.

3.6.1) Milieu homogène et isotrope

Les relations d'incompatibilité s'écrivent dans ce cas :

$$
\begin{aligned}
&-\varepsilon^e_{xx,yz}-\varepsilon^e_{yy,xz}+2\varepsilon^e_{xy,xy}=\eta_{zz}\\
&-\varepsilon^e_{xz,xy}+\varepsilon^e_{yz,xz}=\eta_{yz}\\
&-\varepsilon^e_{zy,xy}+\varepsilon^e_{zx,yz}=\eta_{xz}\\
&\varepsilon^e_{zz,xz}=\eta_{yy}\\
&\varepsilon^e_{zz,yz}=\eta_{xx}\\
&\varepsilon^e_{zz,xy}=\eta_{xy}
\end{aligned}
\qquad (3.6.1)
$$

la loi de Hooke s'écrit pour un corps isotrope :

$$
\varepsilon^e_{ij}=\frac{1}{2\mu}\left(\sigma_{ij}-\frac{\nu}{1+\nu}\sigma_{kk}\delta_{ij}\right) \qquad (3.6.2)
$$

μ est le module de cisaillement et ν le rapport de Poisson.

nous injectons (3.6.2) dans (3.6.1), on a alors :

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\sigma_{xx}-\frac{\nu}{1+\nu}(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz})\right)-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sigma_{yy}-\frac{\nu}{1+\nu}(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz})\right)\\
&\qquad +\frac{2\partial^2}{\partial x\partial y}\sigma_{xy}=2\mu\eta_{zz}\\
&-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sigma_{zz}-\frac{\nu}{1+\nu}(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz})\right)=2\mu\eta_{yy}\\
&-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\sigma_{zz}-\frac{\nu}{1+\nu}(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz})\right)=2\mu\eta_{xx}\\
&-\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\sigma_{xz}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sigma_{yz}=2\mu\eta_{yz}\\
&-\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\sigma_{zy}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\sigma_{zx}=2\mu\eta_{xz}\\
&-\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\sigma_{zz}-\frac{\nu}{1+\nu}(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz})\right)=2\mu\eta_{xy}
\end{aligned}
\qquad (3.6.3)
$$

Les équations (2) et (3) du système (3.6.3) donnent respectivement :

$$\frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial x^2} = -2\mu(1+\nu)\eta_{yy} + \nu\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial y^2} = -2\mu(1+\nu)\eta_{xx} + \nu\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})$$

que l'on remplace dans la première équation, on a alors les quatre équations suivantes

$$-\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}) + \nu\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}) + 2\frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} = 2\mu\eta_{zz} + 2\mu\nu(\eta_{xx}+\eta_{yy})$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\sigma_{xz} - \frac{\partial}{\partial x}\sigma_{yz}\right) = -2\mu\eta_{yz}$$

(3.6.4)

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\sigma_{yz} - \frac{\partial}{\partial y}\sigma_{xz}\right) = -2\mu\eta_{xz}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\sigma_{zz} = -2\mu\eta_{xy}(1+\nu) + \nu\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})$$

les relations (3.2.8) donnant les contraintes en fonction du potentiel de contrainte se réduisent dans ce cas à :

$$\sigma_{xx} = -\partial^2\phi_{zz}/\partial y^2$$

$$\sigma_{yy} = -\partial^2\phi_{zz}/\partial x^2$$

(3.6.5)

$$\sigma_{xy} = \partial^2\phi_{zz}/\partial x \partial y$$

$$\sigma_{zz} = -\partial^2\phi_{yy}/\partial x^2 - \partial^2\phi_{xx}/\partial y^2 + 2\phi_{xy}/\partial x \partial y$$

$$\sigma_{yz} = \partial^2\phi_{yz}/\partial x^2 - \partial^2\phi_{xz}/\partial y^2$$

$$\sigma_{xz} = -\partial^2\phi_{yz}/\partial x \partial y + \partial^2\phi_{xz}/\partial y^2$$

Introduisons ces équations dans les équations (3.5.4). Celles-ci s'écrivent alors :

$$\phi_{zz,y^4} + \phi_{zz,x^4} + \nu\left(-\phi_{zz,y^4} - 2\phi_{zz,x^2y^2} - \phi_{zz,x^4}\right) + 2\phi_{zz,x^2y^2}$$

$$= 2\mu\eta_{zz} + 2\mu\nu(\eta_{xx} + \eta_{yy})$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\phi_{yz,xy^2} + \phi_{xz,y^3} - \phi_{yz,x^3} + \phi_{zx,x^2y}\right) = -2\mu\eta_{yz}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\phi_{yz,x^3} - \phi_{zx,x^2y} + \phi_{yz,xy^2} - \phi_{xz,y^3}\right) = -2\mu\eta_{xz}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\sigma_{zz} = -2\mu(1+\nu)\eta_{xy} + \nu\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

Ces équations deviennent après calcul :

$$(1-\nu)\left(\phi_{zz,x^4} + \phi_{zz,y^4} + 2\phi_{zz,x^2y^2}\right) = 2\mu\eta_{zz} + 2\mu\nu(\eta_{xx} + \eta_{yy})$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(-\phi_{yz,x} + \phi_{xz,y}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(-\phi_{yz,x} + \phi_{zx,y}\right)\right) = -2\mu\eta_{yz}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\phi_{yz,x} - \phi_{zx,y}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\phi_{yz,x} - \phi_{xz,y}\right)\right) = -2\mu\eta_{xz}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\sigma_{zz} = 2\mu(1+\nu)\eta_{xy} + \nu\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

On pose

$$\phi = \phi_{,zz} \qquad F = -\phi_{yz,x} + \phi_{xz,y}$$

Les quatre équations s'écrivent finalement :

$$(1-\nu)\,\Delta^2\phi = 2\mu\,\eta_{zz} + 2\mu\nu\,(\eta_{xx}+\eta_{yy})$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\Delta F) = -2\mu\,\eta_{yz}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\Delta F) = 2\mu\,\eta_{xz} \qquad (3.6.6)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\,\sigma_{zz} = -2\mu\,\eta_{xy}(1+\nu) + \nu\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\,(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})$$

η_{ij} représente l'incompatibilité de la déformation inélastique et quand le milieu est compatible $\eta = 0$, on retrouve alors les potentiels de contraintes classiques de la théorie de l'élasticité.

Il est à signaler que pour avoir un problème plan, le tenseur des incompatibilités doit prendre alors des valeurs particulières qui induisent bien des problèmes plans. Nous nous proposons dans ce qui suit de particulariser d'avantage les problèmes plans en explicitant les valeurs que doit prendre le tenseur des incompatibilités.

a) * <u>Cas des déformations planes</u>

Dans ce cas, le tenseur des déformations élastiques s'écrit :

$$\varepsilon^e_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon^e_{xx} & \varepsilon^e_{xy} & 0 \\ \varepsilon^e_{xy} & \varepsilon^e_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le tenseur des contraintes correspondant s'écrit alors (loi de Hooke)

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33}\,(\neq 0) \end{pmatrix}$$

Nous supposons que le tenseur des déformations inélastiques est plan, il s'écrit donc :

$$\varepsilon^a_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon^a_{xx} & \varepsilon^a_{xy} & 0 \\ \varepsilon^a_{xy} & \varepsilon^a_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dans ces conditions, seule la composante η_{zz} est différente de zéro. En remplacant ces expressions dans les équations (3.6.6), ces dernières se réduisent à :

$$\Delta^2 \Phi = \frac{2\mu}{1-\nu} \eta_{zz}$$

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \qquad (3.6.7)$$

Φ est la fonction d'Airy, la deuxième équation est connue dans la théorie des déformations planes de l'élasticité.

b) * <u>Cas des contraintes planes</u>

Dans le cas des contraintes planes, le tenseur des contraintes s'écrit:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De la même façon que dans le cas des déformations planes, nous supposons que le tenseur des déformations inélastiques est plan. η_{zz} est alors la seule composante non nulle du tenseur des incompatibilités.
Dans ce cas, il faut partir des relations (3.6.3) où on injecte la deuxième et la troisième relation dans la première. La quatrième et la cinquième relation sont indentiquement nulles, alors le système des équations (3.6.3) se réduit au système des deux équations suivantes :

$$\Delta^2 \phi = 2\mu \eta_{zz}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \Delta \phi = 0$$

L'approximation des contraintes planes consiste à négliger la deuxième relation qui est trop restrictives pour la réalité [18] puisqu'elle implique que $\Delta\phi$ doit être linéaire en x et y .

Pour les contraintes planes, on aura donc seulement la relation suivante

$$\Delta^2 \phi(x,y) = 2\mu \eta_{zz}(x,y) \qquad (3.6.8)$$

L'approximation des contraintes planes est valable pour des plaques de faible épaisseur chargées dans leur plan.

3.6.2) <u>Milieu hétérogène isotrope</u>

Pour un matériau hétérogène les compliances élastiques varient d'un point à un autre, la loi de Hooke s'écrit alors :

$$\varepsilon^e_{ij}(r) = S_{ijkl}(r)\, \sigma_{kl}(r)$$

La déformation totale s'écrit :

$$\varepsilon^T_{ij}(r) = S_{ijkl}(r)\, \sigma_{kl} + \varepsilon^a_{ij}(r)$$

Explicitement elle s'écrit pour un milieu isotrope et en notation matricielle pour les compliances [19] :

$$\varepsilon^T_{xx}(r) = S_{11}(r)\,\sigma_{xx} + S_{12}(r)\,\sigma_{yy} + S_{12}(r)\,\sigma_{zz} + \varepsilon^a_{xx}(r)$$

$$\varepsilon^T_{yy}(r) = S_{12}(r)\,\sigma_{xx} + S_{11}(r)\,\sigma_{yy} + S_{12}(r)\,\sigma_{zz} + \varepsilon^a_{yy}(r)$$

$$\varepsilon^T_{zz}(r) = S_{12}(r)\,\sigma_{xx} + S_{12}(r)\,\sigma_{yy} + S_{11}(r)\,\sigma_{zz} + \varepsilon^a_{zz}(r)$$

$$\varepsilon^T_{yz}(r) = \frac{1}{2} S_{44}(r)\,\sigma_{yz} + \varepsilon^a_{yz}(r)$$

$$\varepsilon^T_{xz}(r) = \frac{1}{2} S_{44}(r)\, \sigma_{xz} + \varepsilon^a_{xz}(r)$$

$$\varepsilon^T_{xy}(r) = \frac{1}{2} S_{44}(r)\, \sigma_{xy} + \varepsilon^a_{xy}(r)$$

Sachant que

$$S_{44}(r) = 2\left(S_{11}(r) - S_{12}(r)\right)$$

les relations précédentes s'écrivent :

$$\varepsilon^T_{xx}(r) = S_{11}(r)\,\sigma_{xx} + S_{12}(r)\,\sigma_{yy} + S_{12}(r)\,\sigma_{zz} + \varepsilon^a_{xx}(r)$$

$$\varepsilon^T_{yy}(r) = S_{12}(r)\,\sigma_{xx} + S_{11}(r)\,\sigma_{yy} + S_{12}(r)\,\sigma_{zz} + \varepsilon^a_{yy}(r)$$

$$\varepsilon^T_{zz}(r) = S_{12}(r)\,\sigma_{xx} + S_{12}(r)\,\sigma_{yy} + S_{11}(r)\,\sigma_{zz} + \varepsilon^a_{zz}(r)$$

$$\varepsilon^T_{yz}(r) = \left(S_{11}(r) - S_{12}(r)\right)\sigma_{yz} + \varepsilon^a_{xz}(r)$$

$$\varepsilon^T_{xz}(r) = \left(S_{11}(r) - S_{12}(r)\right)\sigma_{xz} + \varepsilon^a_{xz}(r)$$

$$\varepsilon^T_{xy}(r) = \left(S_{11}(r) - S_{12}(r)\right)\sigma_{xy} + \varepsilon^a_{xy}(r)$$

Avant d'appliquer les équations d'incompatibilité, il est commode de distinguer le cas des contraintes planes du cas où les déformations sont planes. Nous allons traiter successivement les deux cas.

a) **Cas des contraintes planes** :

Dans l'hypothèse des contraintes planes, le tenseur des contraintes s'écrit :

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les déformations totales s'écrivent alors :

$$\varepsilon^T_{xx}(\lambda) = S_{11}(\lambda)\,\sigma_{xx} + S_{12}(\lambda)\,\sigma_{yy} + \varepsilon^a_{xx}(\lambda)$$

$$\varepsilon^T_{yy}(\lambda) = S_{12}(\lambda)\,\sigma_{xx} + S_{11}(\lambda)\,\sigma_{yy} + \varepsilon^a_{yy}(\lambda)$$

$$\varepsilon^T_{zz}(\lambda) = S_{12}(\lambda)\,\sigma_{xx} + S_{12}(\lambda)\,\sigma_{yy} + \varepsilon^a_{zz}(\lambda)$$

$$\varepsilon^T_{yz}(\lambda) = \varepsilon^a_{yz}(\lambda)$$

$$\varepsilon^T_{xz}(\lambda) = \varepsilon^a_{xz}(\lambda)$$

$$\varepsilon^T_{xy}(\lambda) = \left(S_{11}(\lambda) - S_{12}(\lambda)\right)\sigma_{xy} + \varepsilon^a_{xy}$$

Les équations d'équilibre sont systématiquement vérifiées en prenant les contraintes qui découlent du potentiel de contraintes ϕ par :

$$\sigma_{xx} = -\phi_{,yy}$$

$$\sigma_{yy} = -\phi_{,xx}$$

$$\sigma_{xy} = +\phi_{,xy}$$

Les déformations totales deviennent alors en fonction du potentiel de contraintes :

$$\varepsilon^T_{xx}(\lambda) = -S_{11}(\lambda)\,\phi_{,yy} - S_{12}(\lambda)\,\phi_{,xx} + \varepsilon^a_{xx}(\lambda)$$

$$\varepsilon^T_{yy}(\lambda) = -S_{12}(\lambda)\,\phi_{,yy} - S_{11}(\lambda)\,\phi_{,xx} + \varepsilon^a_{yy}(\lambda)$$

$$\varepsilon^T_{zz}(\lambda) = -S_{12}(\lambda)\,\phi_{,yy} - S_{12}(\lambda)\,\phi_{,xx} + \varepsilon^a_{zz}(\lambda)$$

$$\varepsilon^T_{yz}(\lambda) = \varepsilon^a_{yz}(\lambda)$$

$$\varepsilon^T_{xz}(\lambda) = \varepsilon^a_{xz}(\lambda)$$

$$\varepsilon^T_{xy}(\lambda) = S_{11}(\lambda)\,\phi_{,xy} - S_{12}(\lambda)\,\phi_{,xy} + \varepsilon^a_{xy}(\lambda)$$

Nous supposons que la déformation inélastique est plane, c'est-à-dire que $\varepsilon^a_{xz} = \varepsilon^a_{yz} = \varepsilon^a_{zz} = 0$. Nous appliquons alors les équations d'incompatibilité aux déformations totales. Les équations d'incompatibilité se réduisent dans le cas des contraintes planes aux quatre équations suivantes :

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \varepsilon^T_{zz} = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \varepsilon^T_{zz} = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \varepsilon^T_{zz} = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \varepsilon^T_{xx} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varepsilon^T_{yy} - 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \varepsilon^T_{xy} = 0 .$$

En remplacant ε^T_{ij} par sa valeur, on a alors le système d'équation :

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(S_{12}(\lambda) \phi_{1yy} + S_{12}(\lambda) \phi_{1xx} \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(S_{12}(\lambda) \phi_{1yy} + S_{12}(\lambda) \phi_{1xx} \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(S_{12}(\lambda) \phi_{1yy} + S_{12}(\lambda) \phi_{1xx} \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(-S_{11}(\lambda) \phi_{1yy} - S_{12}(\lambda) \phi_{1xx} + \varepsilon^a_{xx} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(-S_{12}(\lambda) \phi_{1yy} - S_{11}(\lambda) \phi_{1xx} + \varepsilon^a_{yy} \right)$$
$$- 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(-S_{12}(\lambda) \phi_{1xy} + S_{11}(\lambda) \phi_{1xy} + \varepsilon^a_{xy} \right)$$

Les deux premières équations donnent respectivement :

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(S_{12}(\lambda) \phi_{1yy} \right) = - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(S_{12}(\lambda) \phi_{1xx} \right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(S_{12}(\lambda) \phi_{1yy} \right) = - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(S_{12}(\lambda) \phi_{1xx} \right)$$

que nous injectons dans la quatrième équation qui s'écrit alors :

$$-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(S_{11}(\lambda)\,\phi_{1yy}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(S_{12}(\lambda)\,\phi_{1yy}\right)-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(S_{11}(\lambda)\,\phi_{1xx}\right)$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(S_{12}(\lambda)\,\phi_{1xx}\right)-2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(S_{11}(\lambda)\,\phi_{1xy}\right)+2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(S_{12}(\lambda)\,\phi_{1xy}\right)$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\varepsilon^a_{yy}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\,\varepsilon^a_{xx}-2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\,\varepsilon^a_{xy}=0.$$

Nous aboutissons alors au système des deux équations suivantes :

$$-\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(S_{11}(\lambda)\,\phi_{1yy}-S_{12}(\lambda)\,\phi_{1yy}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(S_{11}(\lambda)\,\phi_{1xx}-S_{12}(\lambda)\,\phi_{1xx}\right)\right. \qquad (3.6.10)$$

$$\left.+2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(S_{11}(\lambda)\,\phi_{1xy}-S_{12}(\lambda)\,\phi_{1xy}\right)\right]+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\varepsilon^a_{yy}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\,\varepsilon^a_{xx}-2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\,\varepsilon^a_{xy}=0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(S_{12}(\lambda)\left(\phi_{1yy}+\phi_{1xx}\right)\right)=0$$

Dans ce système d'équations, nous n'avons pas explicité les compliances élastiques. Pour un matériau hétérogène, celles ci dépendent de la position traduisant ainsi le type d'hétérogénéité. Nous décomposons les compliances élastiques en une partie constante et une partie variable (mais toujours isotrope)

$$S_{ij}\ (\lambda)=S^{\circ}_{ij}+\delta S_{ij}$$

que l'on injecte dans la première équation de (3.6.10)

$$-\left[\left(S^{\circ}_{11}-S^{\circ}_{12}\right)\phi_{1y^4}+\left(S^{\circ}_{11}-S^{\circ}_{12}\right)\phi_{1x^4}+2\left(S^{\circ}_{11}-S^{\circ}_{12}\right)\phi_{1x^2y^2}\right]$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\delta S_{11}\,\phi_{1y^2}-\delta S_{12}\,\phi_{1y^2}\right)-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\delta S_{11}\,\phi_{1x^2}-\delta S_{12}\,\phi_{1x^2}\right) \qquad (3.6.11)$$

$$-2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\delta S_{11}\,\phi_{1xy}-\delta S_{12}\,\phi_{1xy}\right)+\varepsilon^a_{xx,y^2}+\varepsilon^a_{yy,x^2}-2\,\varepsilon^a_{xy,xy}=0.$$

On a donc :

$$\left(S^{\circ}_{12} - S^{\circ}_{11}\right) \Delta^2 \phi(r) + \eta(r) + \eta'(r) = 0 \qquad (3.6.12)$$

Avec :

$\eta = \left(\varepsilon^a_{xx,y^2} + \varepsilon^a_{yy,x^2} - 2\varepsilon^a_{xy,xy}\right)$ est l'incompatibilité due à la déformation inélastique.

$$\eta' = -\left(\delta S_{11}\phi_{,yy} - \delta S_{12}\phi_{,yy}\right)_{,yy} - \left(\delta S_{11}\phi_{,xx} - \delta S_{12}\phi_{,xx}\right)_{,xx}$$

$$- 2\left(\delta S_{11}\phi_{,xy} - \delta S_{12}\phi_{,xy}\right)_{,xy}$$ est "l'incompatibilité" due à l'hétérogénéité.

Quand le milieu est homogène, δS est égal à zéro et on retrouve l'équation (3.6.8) établie dans le paragraphe (3.6).
Quant à la seconde équation, c'est celle que l'on néglige habituellement dans l'approximation des contraintes planes.

b) <u>Cas des déformations planes</u> :

Le tenseur des déformations élastiques est plan, ce qui implique le tenseur des contraintes suivant :

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

Nous supposons aussi que la déformation inélastique est plane. Dans ces conditions les équations (3.6.9) deviennent :

$$\varepsilon^T_{xx}(r) = -S_{11}(r)\,\phi_{,yy} - S_{12}(r)\,\phi_{,xx} + S_{12}(r)\,\sigma_{zz} + \varepsilon^a_{xx}(r)$$

$$\varepsilon^T_{yy}(r) = -S_{12}(r)\,\phi_{,yy} - S_{11}(r)\,\phi_{,xx} + S_{12}(r)\,\sigma_{zz} + \varepsilon^a_{yy}(r)$$

$$0 = -S_{12}(\lambda)\,\phi_{1yy} - S_{12}(\lambda)\,\phi_{1xx} + S_{11}(\lambda)\,\sigma_{zz}$$

$$\varepsilon^T_{xy}(\lambda) = \left(S_{11}(\lambda) - S_{12}(\lambda)\right)\phi_{1xy} + \varepsilon^a_{xy}(\lambda)$$

La troisième relation implique :

$$S_{12}(\lambda)\,\sigma_{zz} = \frac{S^2_{12}(\lambda)}{S_{11}(\lambda)}\left(\phi_{1yy} + \phi_{1xx}\right)$$

que l'on remplace dans les deux premières équations :

$$\varepsilon^T_{xx}(\lambda) = \left(\frac{S^2_{12}(\lambda)}{S_{11}(\lambda)} - S_{11}(\lambda)\right)\phi_{1yy} + \left(\frac{S^2_{12}(\lambda)}{S_{11}(\lambda)} - S_{12}(\lambda)\right)\phi_{1xx} + \varepsilon^a_{xx}(\lambda)$$

$$\varepsilon^T_{yy}(\lambda) = \left(\frac{S^2_{12}(\lambda)}{S_{11}(\lambda)} - S_{12}(\lambda)\right)\phi_{1yy} + \left(\frac{S^2_{12}(\lambda)}{S_{11}(\lambda)} - S_{12}(\lambda)\right)\phi_{1xx} + \varepsilon^a_{yy}(\lambda)$$

$$\varepsilon^T_{xy}(\lambda) = \left(S_{11}(\lambda) - S_{12}(\lambda)\right)\phi_{1xy} + \varepsilon^a_{xy}(\lambda)$$

Les équations d'incompatibilité se réduisent dans ce cas à une seule équation qui s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon^T_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon^T_{yy}}{\partial x^2} - 2\,\frac{\partial^2 \varepsilon^T_{xy}}{\partial x\,\partial y} = 0$$

ce qui donne :

$$\left(\left(\frac{S^2_{12}(\lambda)}{S_{11}(\lambda)} - S_{11}(\lambda)\right)\phi_{1yy} + \left(\frac{S^2_{12}(\lambda)}{S_{11}(\lambda)} - S_{12}(\lambda)\right)\phi_{1xx} + \varepsilon^a_{xx}(\lambda)\right)_{,y^2}$$

$$+ \left(\left(\frac{S^2_{12}(\lambda)}{S_{11}(\lambda)} - S_{12}(\lambda)\right)\phi_{1yy} + \left(\frac{S^2_{12}(\lambda)}{S_{11}(\lambda)} - S_{11}(\lambda)\right)\phi_{1xx} + \varepsilon^a_{yy}(\lambda)\right)_{,x^2}$$

$$- 2\left(\left(S_{11}(\lambda) - S_{12}(\lambda)\right)\phi_{1xy} + \varepsilon^a_{xy}(\lambda)\right)_{,xy} = 0$$

Il reste à décomposer les compliances élastiques en une partie constante et une partie fluctuante. Il est plus commode de le faire par partie pour la simplicité des formules; on écrit alors :

$$\left(\left(\frac{S_{12}^2(r)}{S_{11}(r)} - S_{11}^0 - \delta S_{11}(r)\right)\phi_{1yy} + \left(\frac{S_{12}^2(r)}{S_{11}(r)} - S_{12}^0 - \delta S_{12}(r)\right)\phi_{1xx}\right)_{,y^2}$$

$$+ \left(\left(\frac{S_{12}^2(r)}{S_{11}(r)} - S_{12}^0 - \delta S_{12}(r)\right)\phi_{1yy} + \left(\frac{S_{12}^2(r)}{S_{11}(r)} - S_{11}^0 - \delta S_{11}(r)\right)\phi_{1xx}\right)_{,x^2}$$

$$- 2\left(\left(S_{11}^0 - S_{12}^0\right)\phi_{1xy} + \left(\delta S_{11}(r) - \delta S_{12}(r)\right)\phi_{1xy}\right)_{,xy}$$

$$+ \varepsilon^a_{xx,y^2}(r) + \varepsilon^a_{yy,x^2}(r) - 2\,\varepsilon^a_{xy,xy}(r) = 0$$

qui s'écrit encore :

$$-S_{11}^0\,\phi_{1y^4} - S_{12}^0\,\phi_{1x^2y^2} - S_{12}^0\,\phi_{1x^2y^2} - S_{11}^0\,\phi_{1x^4}$$

$$-2\left(S_{11}^0 - S_{12}^0\right)\phi_{1x^2y^2} = -\eta + \eta' \qquad (3.6.13)$$

enfin, elle s'écrit :

$$S^{\circ}_{11}\,\Delta\Delta\phi = \eta + \eta' \qquad (3.6.14)$$

Avec

$$\eta = \varepsilon^{a}_{xx,y^2} + \varepsilon^{a}_{yy,x^2} - 2\,\varepsilon^{a}_{xy,xy}$$

$$\eta' = \left\{ \left[\left(\frac{(S^{\circ}_{12} + \delta S_{12})^2}{(S^{\circ}_{11} + \delta S_{11})} - \delta S_{11}(\lambda) \right) \phi_{,yy} + \left(\frac{(S^{\circ}_{12} + \delta S_{12}(\lambda))^2}{(S^{\circ}_{11} + \delta S_{11}(\lambda))} - \delta S_{12}(\lambda) \right) \phi_{,xx} \right]_{,y^2} \right.$$

$$+ \left[\left(\frac{(S^{\circ}_{12} + \delta S_{12}(\lambda))^2}{S^{\circ}_{11} + \delta S_{11}(\lambda)} - \delta S_{12}(\lambda) \right) \phi_{,yy} + \left(\frac{(S^{\circ}_{12} + \delta S_{12}(\lambda))^2}{(S^{\circ}_{11} + \delta S_{11}(\lambda))} - \delta S_{11}(\lambda) \right) \phi_{,xx} \right]_{,x^2}$$

$$\left. - 2\left[\left(\delta S_{11}(\lambda) - \delta S_{12}(\lambda) \right) \phi_{,xy} \right]_{,xy} \right\}$$

Quand le milieu est homogène $\delta S_{ij} = 0$ et $\eta' = \frac{v^2}{E}\Delta\Delta\phi$, on retrouve alors l'équation (3.6.7) avec

$$\eta = \eta_{33}$$

et

$$2\mu = \frac{E}{1+\nu}$$

6.3.3) <u>Milieu homogène anisotrope à symétrie cubique</u> :

Nous nous proposons d'élargir les équations (3.6.6) de Kröner aux cas des milieux anisotropes. Le tenseur des incompatibilités doit inclure alors l'incompatibilité due à l'anisotropie. Nous formulons le problème dans le cas de l'anisotropie à symétrie cubique, le principe étant le même quelque soit l'anisotropie introduite. Pour ce problème, nous supposons que le repère de travail coïncide avec les trois axes de symétrie cubique du matériau.

Nous reprenons les équations (3.6.3) auxquelles nous ajoutons l'incompatibilité due à l'anisotropie cubique que nous notons η'_{ij}. Ces équations deviennent alors :

$$-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\sigma_{xx}-\frac{\nu}{1+\nu}\left(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz}\right)\right)$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sigma_{yy}-\frac{\nu}{1+\nu}\left(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz}\right)\right)$$

$$+2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\sigma_{xy}=2\mu\eta_{zz}+2\mu\eta'_{zz}.$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sigma_{zz}-\frac{\nu}{1+\nu}\left(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz}\right)\right)=2\mu\eta_{yy}+2\mu\eta'_{yy} \qquad (3.6.15)$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\sigma_{zz}-\frac{\nu}{1+\nu}\left(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz}\right)\right)=2\mu\eta_{xx}+2\mu\eta'_{xx}$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\sigma_{xz}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\sigma_{zy}=2\mu\eta_{yz}+2\mu\eta'_{yz}$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\sigma_{yz}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\sigma_{xz}=2\mu\eta_{xz}+2\mu\eta'_{xz}$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\sigma_{zz}-\frac{\nu}{1+\nu}\left(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz}\right)\right)=2\mu\eta_{xy}+2\mu\eta'_{xy}$$

En utilisant les relations (3.6.5) les équations (3.6.15) s'écrivent en fonction du potentiel de contrainte :

$$-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(-\phi_{zz,y^2}-\frac{\nu}{1+\nu}\left(-\phi_{zz,y^2}-\phi_{zz,x^2}-\phi_{yy,x^2}-\phi_{xx,y^2}+2\phi_{xy,xy}\right)\right)$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(-\phi_{zz,x^2}-\frac{\nu}{1+\nu}\left(-\phi_{zz,y^2}-\phi_{zz,x^2}-\phi_{yy,x^2}-\phi_{xx,y^2}+2\phi_{xy,xy}\right)\right)$$

$$+2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\phi_{zz,xy}=2\mu\eta_{zz}+2\mu\eta'_{zz}.$$

$$-\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(-\phi_{yy,x^2}-\phi_{xx,y^2}+2\phi_{xy,xy}\right)+\frac{\nu}{1+\nu}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(-\phi_{zz,y^2}-\phi_{zz,x^2}\right) \quad (3.6.16)$$

$$=2\mu\eta_{yy}+2\mu\eta'_{yy}$$

$$-\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(-\phi_{yy,x^2}-\phi_{xx,y^2}+2\phi_{xy,xy}\right)+\frac{\nu}{1+\nu}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(-\phi_{zz,y^2}-\phi_{zz,x^2}\right)$$

$$=2\mu\eta_{xx}+2\mu\eta'_{xx}$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\sigma_{xz}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sigma_{zy}=2\mu\eta_{yz}+2\mu\eta'_{yz}$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\sigma_{yz}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\sigma_{xz}=2\mu\eta_{xz}+2\mu\eta'_{xz}$$

$$\frac{-1}{1+\nu}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(-\phi_{yy,x^2}-\phi_{xx,y^2}+2\phi_{xy,xy}\right)+\frac{\nu}{1+\nu}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(-\phi_{zz,y^2}-\phi_{zz,x^2}\right)=2\mu\eta_{xy}+2\mu\eta'_{xy}$$

En développant la prèmière relation et en sommant la deuxième avec la troisième, le système d'équation devient :

$$\frac{1}{1+\nu}\Delta\Delta\phi_{zz}+\frac{\nu}{1+\nu}\Delta\left(-\phi_{yy,x^2}-\phi_{xx,y^2}+2\phi_{xy,xy}\right)=2\mu\eta_{zz}+2\mu\eta'_{zz}$$

$$-\frac{1}{1+\nu}\Delta\left(-\phi_{yy,x^2}-\phi_{xx,y^2}+2\phi_{xy,xy}\right)+\frac{\nu}{1+\nu}\Delta\left(-\phi_{zz,y^2}-\phi_{zz,x^2}\right)$$

$$=2\mu\left(\eta_{xx}+\eta_{yy}\right)+2\mu\left(\eta'_{xx}+\eta'_{yy}\right) \quad (3.6.17)$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\sigma_{xz} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\sigma_{yz} = 2\mu\eta_{yz} + 2\mu\eta'_{yz}$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\sigma_{yz} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\sigma_{xz} = 2\mu\eta_{xz} + 2\mu\eta'_{xz}$$

$$-\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(-\phi_{yy,1}x^2 - \phi_{xx,1}y^2 + 2\phi_{xy,1}xy\right) + \frac{\nu}{1+\nu}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(-\phi_{zz,1}y^2 - \phi_{zz,1}x^2\right)$$

$$= 2\mu\eta_{xy} + 2\mu\eta'_{xy}.$$

Avant d'aller plus loin, calculons les expressions de η'_{ij} dans le cas plan.

Calcul de η'_{ij}

$$\eta'_{ij} = -\epsilon_{ikm}\epsilon_{jlm}\left\{\delta S^{(\lambda')}_{mnpq}\,\epsilon_{prt}\epsilon_{qsu}\,\phi^{(\lambda)}_{tu,rs}\right\}_{,kl}$$

le calcul se fait de la même façon que dans le paragraphe (3.5)

On pose :

$$\varepsilon'_{ij} = \delta S_{ijkl}\,\sigma_{kl}$$

qui s'écrit en fonction du potentiel de contrainte :

$$\varepsilon'_{ij} = \delta S_{ijkl}\left(-\epsilon_{krm}\epsilon_{lsn}\,\phi_{mn,rs}\right)$$

Sachant que pour l'anisotropie cubique :

$$\delta S_{ijkl} = H' \sum_{p=1}^{3} \delta_{ip}\delta_{jp}\delta_{kp}\delta_{lp}$$

ε'_{ij} s'écrit alors :

$$\varepsilon'_{ij} = H'\,\delta_{ip}\delta_{jp}\delta_{kp}\delta_{lp}\left(-\epsilon_{krm}\epsilon_{lsn}\,\phi_{mn,rs}\right)$$

Après développement, on trouve :

$$\varepsilon'_{xx} = - H' \phi_{zz,y^2}$$

$$\varepsilon'_{yy} = - H' \phi_{zz,x^2}$$

$$\varepsilon'_{zz} = - H' \left(\phi_{yy,x^2} - 2 \phi_{xy,xy} + \phi_{xx,y^2} \right)$$

η'_{ij} s'écrit alors :

$$\eta'_{ij} = \epsilon_{ikm} \epsilon_{jln} \varepsilon^e_{mn,kl}$$

Après calcul, on trouve :

$$\eta'_{xx} = H' \left(\phi_{yy,x^2y^2} - 2 \phi_{xy,xy^3} + \phi_{xx,y^4} \right)$$

$$\eta'_{xy} = - H' \left(\phi_{yy,x^3y} - 2 \phi_{xy,x^2y^2} + \phi_{xx,xy^3} \right)$$

$$\eta'_{xz} = 0 \qquad (3.6.18)$$

$$\eta'_{yy} = H' \left(\phi_{yy,x^4} - 2 \phi_{xy,x^3y} + \phi_{xx,x^2y^2} \right)$$

$$\eta'_{zz} = H' \left(\phi_{zz,x^4} + \phi_{zz,y^4} \right)$$

$$\eta'_{yz} = 0$$

En remplacant η'_{xx} et η'_{yy} dans la deuxième relation des équations (3.6.17), celle-ci s'écrit alors :

$$- \frac{1}{1+\nu} \Delta \left(- \phi_{yy,x^2} - \phi_{xx,y^2} + 2 \phi_{xy,xy} \right) = \frac{-\nu}{1+\nu} \Delta \left(- \phi_{zz,y^2} - \phi_{zz,x^2} \right)$$

$$- 2\mu H' \Delta \left(- \phi_{yy,x^2} + 2 \phi_{xy,xy} - \phi_{xx,y^2} \right) + 2\mu \left(\eta_{xx} + \eta_{yy} \right)$$

Cette relation s'écrit encore :

$$\Delta\left(-\phi_{yy,xx}-\phi_{xx,yy}+2\phi_{xy,xy}\right)=\frac{\nu}{1-2\mu H'(1+\nu)}\Delta\left(-\phi_{zz,yy}-\phi_{zz,xx}\right)$$

$$+\frac{2\mu(1+\nu)}{2\mu H'(1+\nu)-1}\left(\eta_{xx}+\eta_{yy}\right)$$

que l'on injecte dans la première relation des équations (3.6.17), on a alors le système d'équations suivant :

$$\frac{1}{1+\nu}\Delta\Delta\phi_{zz}-\frac{\nu^2}{\left((1+\nu)(1-2\mu H'(1+\nu)\right)}\Delta\Delta\phi_{zz}=2\mu\eta_{zz}+2\mu\eta'_{zz}$$

$$-\frac{2\mu\nu}{2\mu H'(1+\nu)-1}\left(\eta_{xx}+\eta_{yy}\right)$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\sigma_{xz}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sigma_{yz}=2\mu\eta_{yz}$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\sigma_{yz}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sigma_{xz}=2\mu\eta_{xz}$$

$$-\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(-\phi_{yy,xx}-\phi_{xx,yy}+2\phi_{xy,xy}\right)+\frac{\nu}{1+\nu}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(-\phi_{zz,yy}-\phi_{zz,xx}\right)$$

$$=2\mu\eta_{xx}+2\mu H'\left(-\phi_{yy,xx}-\phi_{xx,yy}+2\phi_{xy,xy}\right)_{,xy}$$

Le système des équations s'écrit enfin :

$$A\Delta\Delta\phi_{zz}=2\mu\eta_{zz}+2\mu H'\left(\phi_{zz,xx}+\phi_{zz,yy}\right)-B\left(\eta_{xx}+\eta_{yy}\right)$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\sigma_{xz}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sigma_{yz}=2\mu\eta_{yz}$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\sigma_{yz}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sigma_{xz}=2\mu\eta_{xz}\qquad(3.6.18)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\sigma_{zz}=C\eta_{xx}+D\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}\right)$$

Avec

$$A = \frac{1}{1+\nu}\left(1 - \frac{\nu^2}{1-2\mu H'(1+\nu)}\right)$$

$$B = 2\mu\nu \Big/ 2\mu H'(1+\nu) - 1$$

$$C = -2\mu \Big/ \frac{1}{1+\nu} + 2\mu H'$$

$$D = \frac{\nu}{1+\nu} \Big/ \frac{1}{1+\nu} + 2\mu H'$$

La deuxième et la troisième relation des équations (3.6.18) sont les mêmes que pour un milieu homogène. L'anisotropie du système cubique n'intervient pas dans ces deux relations.

Pour un milieu isotrope, $H' = o$ on a alors :

$$A = (1-\nu)$$

$$B = -2\mu\nu$$

$$C = -2\mu(1+\nu)$$

$$D = \nu$$

Nous retrouvons donc les équations (3.6.6) du milieu homogène et isotrope. Retrouvons les formules dans ce cas d'anisotropie pour les déformations planes et pour les contraintes planes.

a) **<u>Cas des déformations planes</u>** :

Dans les mêmes conditions que celles du paragraphe (3.6.1) a). Le tenseur des incompatibilités inélastiques se réduit à la seule composante η_{33} et les contraintes σ_{x3}, σ_{y3} sont nulles. Le système des équations (3.6.18) se réduit alors aux deux équations suivantes :

$$A\,\Delta\Delta\,\phi_{33} = 2\mu\,\eta_{33} + 2\mu H'\left(\phi_{33,x^4} + \phi_{33,y^4}\right) \qquad (3.6.19)$$

$$\sigma_{33} = D\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}\right)$$

Ces deux équations redonnent les équations correspondantes du milieu homogène et isoptrope avec H' = o

b) **Cas des contraintes planes** :

Le tenseur des contraintes est plan, il s'écrit donc :

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De même pour le tenseur des déformations inélastiques, qui donne alors l'incompatibilité η_{zz}.

Dans ces conditions, les équations (3.6.15) deviennent :

$$-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\sigma_{xx} - \frac{\nu}{1+\nu}(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})\right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sigma_{yy} - \frac{\nu}{1+\nu}(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})\right) + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\sigma_{xy} = 2\mu\eta_{zz} + 2\mu\eta'_{zz}$$

$$\frac{\nu}{1+\nu}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}) = 2\mu\eta'_{yy}$$

$$\frac{\nu}{1+\nu}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}) = 2\mu\eta'_{xx}$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\sigma_{xz} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\sigma_{yz} = 2\mu\eta'_{yz}$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\sigma_{yz} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\sigma_{xz} = 2\mu\eta'_{xz} \qquad (3.6.20)$$

$$-\frac{\nu}{1+\nu}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}) = 2\mu\eta'_{xy}$$

A partir des relations (3.6.18), on a les valeurs de η'_{ij} qui sont en fonction de σ_{zz} (3.6.5) :

$$\eta'_{xx} = -H'\sigma_{zz,y^2} = 0$$

$$\eta'_{yy} = -H'\sigma_{zz,x^2} = 0$$

$$\eta'_{xy} = H'\sigma_{zz,xy} = 0$$

$$\eta'_{zz} = H'\left(\phi_{zz,x^4} + \phi_{zz,y^4}\right)$$

$$\eta'_{yz} = 0$$

$$\eta'_{xz} = 0$$

La première relation s'écrit :

$$-\frac{1}{1+\nu}\sigma_{xx,y^2} + \frac{\nu}{1+\nu}\sigma_{yy,y^2} + \frac{\nu}{1+\nu}\sigma_{xx,x^2} - \frac{1}{1+\nu}\sigma_{yy,x^2}$$

$$+ 2\sigma_{xy,xy} = 2\mu\eta_{zz} + 2\mu H'\left(\phi_{zz,x^4} + \phi_{zz,y^4}\right)$$

La deuxième et la troisième relation donnent successivement :

$$\sigma_{xx,x^2} = -\sigma_{yy,x^2}$$

$$\sigma_{xx,y^2} = -\sigma_{yy,y^2}$$

que nous remplaçons dans la première équation :

$$-\sigma_{xx,y^2} - \sigma_{yy,x^2} + 2\sigma_{xy,xy} = 2\mu\eta_{zz} + 2\mu H'\left(\phi_{zz,x^4} + \phi_{zz,y^4}\right)$$

En remplacant les contraintes par le potentiel de contrainte, on a alors :

$$\Delta\Delta\phi = 2\mu\eta_{33} + 2\mu H'\left(\phi_{,1x4} + \phi_{,1y4}\right) \qquad (3.6.21)$$

Dans le cas des contraintes planes, c'est la seule équation à résoudre avec $\phi = \phi_{33}$. En effet, la dernière relation des équations (3.6.20) est celle que l'on néglige dans l'hypothèse des contraintes planes.

3.8) **Conclusion** :

Dans ce chapitre, nous avons établi une équation aux dérivées partielles formulée en contraintes pour les milieux hétérogènes, anisotropes avec des déformations incompatibles. Cette équation aux dérivées partielles est semblable à l'équation (2.3.17) formulée en déplacement dans le chapitre II.

Nous avons particularisé cette équation aux dérivées partielles, au cas d'un milieu hétérogène, isotrope ou l'hétérogénéité est mesurée par la variation du module de Young et du coefficient de Poisson et au cas d'un milieu homogène anisotrope à symétrie cubique.

Pour le cas particulier des problèmes plans, nous avons traité successivement, le cas du milieu homogène et isotrope traité par Kröner, le cas du milieu hétérogène isotrope et celui du milieu homogène anisotrope à symétrie cubique. Ces équations sont alors plus simples, en particulier pour les deux cas de déformation plane et de contrainte plane, que nous avons explicité dans chacun des cas du problème plan.

Dans le chapitre suivant, nous traitons des méthodes de résolution de ces équations aux dérivées partielles par l'utilisation d'une équation intégrale. Nous présentons alors une méthode exacte avec des conditions aux limites non nulles et une méthode approchée pour le milieu infini. D'autres méthodes de résolution directes peuvent être utilisées. Nous présentons un exemple dans le chapitre V.

CHAPITRE IV

Equation intégrale pour le potentiel de contraintes dans les milieux hétérogènes et inélastiques

4.1) Introduction

4.2) Problème tridimensionnel

4.2.1) Définition et propriétés de la fonction de Green

4.2.2) Résolution de l'équation aux dérivées partielles

4.3) Problème bidimensionnel

4.4) Solutions pour un milieu infini - Solutions approchées -

4.5) Conclusion

IV) EQUATION INTEGRALE POUR LE POTENTIEL DE CONTRAINTES DANS LES MILIEUX HETEROGENES.

4.1) Introduction

Le problème essentiel d'une théorie mécanique est la résolution de l'équation aux dérivées partielles à laquelle aboutit la formulation d'un problème donné. En mécanique des solides, ces équations sont souvent résolues directement pour les milieux homogènes et isotropes. Pour les milieux hétérogènes en général et en particulier pour les milieux microhétérogènes pour lesquels on cherche les propriétés effectives macroscopiques et les concentrations de contraintes, on a souvent interêt à transformer l'équation aux dérivées partielles en une équation intégrale en introduisant un tenseur de Green. C'est ce qui a été fait pour la formulation en déplacement et c'est ce que nous proposons dans ce chapitre pour la formulation en potentiel de contraintes.

Nous allons transformer l'équation aux dérivées partielles (3.3.16) en une équation intégrale à l'aide de la fonction de Green. Nous traitons le cas tridimensionnel et le cas bidimensionnel successivement dans le cas d'un milieu hétérogène et anisotrope. Ensuite, nous donnons une solution sous la forme d'une équation intégrale dont nous indiquons une méthode de résolution approchée.

4.2) Position du problème

Les équations aux dérivées partielles à résoudre s'écrivent ici :

$$X_{ij,kkmm}(r) = \eta'_{ij}(r) + \eta_{ij}(r) \qquad (4.2.1)$$

η_{ij} incompatibilité due aux déformations inélastiques

η'_{ij} "incompatibilité" due à l'hétérogénéité et/ou l'anisotropie.

A cette équation il faut associer les conditions aux limites qui s'écrivent en fonction des contraintes :

$$T_i = \sigma_{ij} n_j \qquad (4.2.2)$$

4.2.1) Définition et propriété de la fonction de Green

Pour calculer l'effet d'une source d'incompatibilité située en un point r' sur un point r, nous cherchons d'abord l'effet d'une source d'incompatibilité unité. L'équation correspondante s'écrit :

$$\Delta\Delta U(r,r') = \delta(r-r')$$

$U(r,r')$ est appelée fonction de Green

$\delta(r-r')$ est la fonction de Dirac définie par :

$$\int_{V'} \delta(r-r')\,f(r')\,dv' = f(r)$$

- La fonction de Green est symétrique

- En utilisant cette fonction, on peut obtenir la solution de l'équation avec (η et $\eta' \neq 0$) et des conditions aux limites homogènes (nulles), la solution de l'équation avec (η et $\eta' = 0$) et des conditions aux limites non homogènes (différentes de zéro) et à cause de la linéarité des équations, par superposition, on obtient la solution de l'équation non homogène (η et $\eta' \neq 0$) avec des conditions aux limites non homogènes.

4.2.2) Résolution de l'équation aux dérivées partielles

Nous reprenons l'équation (4.2.1) qui s'écrit :

$$\Delta\Delta X_{ij} = \eta'_{ij} + \eta_{ij}$$

on pose :

$$\eta'_{ij} = \eta'_{ij} + \eta_{ij}$$

l'équation devient

$$\Delta\Delta X_{ij}(r) = \eta''_{ij}(r) \qquad (4.2.3)$$

A laquelle nous associons l'équation relative à la fonction de Green

$$\Delta\Delta\, U(r,r') = \delta(r-r') \qquad (4.2.4)$$

en multipliant l'équation (4.2.3) par $U(r,r')$ et l'équation (4.2.4) par X_{ij} et en faisant la différence, nous obtenons :

$$\delta(r-r')\, X_{ij}(r) - \eta''_{ij}(r)\, U(r,r') = X_{ij}(r)\, \Delta\Delta U(r,r') - U(r,r')\, \Delta\Delta X_{ij}(r)$$

en intégrant sur le volume du milieu et en changeant r' en r on a :

$$X_{ij}(r) = \int_{V'} \eta''_{ij}(r')\, U(r,r')\, dv' + \int_{V'} \left(X_{ij}(r')\, \Delta\Delta U(r,r') - U(r,r')\, \Delta\Delta X_{ij}(r') \right) dv'$$

Nous calculons d'abord la dernière intégrale du membre de droite :

$$\int_{V} \left(X_{ij}(r')\, \Delta\Delta U(r,r') - U(r,r')\, \Delta\Delta X_{ij}(r') \right) dv'$$

nous pouvons écrire par la formule de dérivation d'un produit :

$$X_{ij}(r')\, U(r,r')_{,kkmm} = \left(X_{ij}(r')\, U(r,r')_{,kkm} + X_{ij,mk}\, U(r,r')_{,k} \right)_{,m}$$

$$- \left(X_{ij,m}(r')\, U(r,r')_{,km} + X_{ij,mkm}(r')\, U(r,r') \right)_{,k}$$

$$+ X_{ij,mmkk}(r')\, U(r,r')$$

En passant à l'intégrale de surface, la solution s'écrit alors :

$$\chi_{ij}(r) = \int_{V'} n''_{ij}(r')\, U(r,r')\, dv' + \int_{S'} \left(\chi_{ij}(r')\, U(r,r')_{,kkm} + \chi_{ij,mk}(r')\, U(r,r')_{,k} \right) n_m\, ds'$$

$$- \int_{S'} \left(\chi_{ij,m}(r')\, U(r,r')_{,km} + \chi_{ij,mkm}\, U(r,r') \right) n_k\, ds' \qquad (4.2.5)$$

avant d'aller plus loin, explicitons davantage les conditions aux limites.

$$T_i = \sigma_{ij}\, n_j$$

$$= -\epsilon_{ikm}\, \epsilon_{jln}\, \phi_{mn,kl}\, n_j$$

$$\phi_{mn} = 2\mu_0 \left(\chi_{mn} + \frac{\nu_0}{1-\nu_0}\, \chi_{kk}\, \delta_{mn} \right)$$

$$\phi_{mn,kl} = 2\mu_0 \left(\chi_{mn,kl} + \frac{\nu_0}{1-\nu_0}\, \chi_{tt,kl}\, \delta_{mn} \right)$$

T_i s'écrit enfin

$$T_i = \left(-2\mu_0\, \epsilon_{ikm}\, \epsilon_{jln}\, \chi_{mn,kl} - \frac{2\mu_0 \nu_0}{1-\nu_0} \left(\chi_{tt,kk}\, \delta_{ij} - \chi_{tt,ij} \right) \right) n_j$$

Les conditions aux limites portent donc sur les dérivées secondes de χ_{ij}.

Puisque les contraintes dépendent uniquement des dérivées secondes de $\chi_{ij}(r)$, par conséquent, on peut imposer en plus les conditions suivantes sur χ_{ij}.

$$\chi_{ij} = 0 \quad \text{Sur } S$$

$$\chi_{ij,m} = 0 \quad \text{Sur } S$$

Ces conditions annulent les intégrales de surface de la relation (4.2.5) contenant X_{ij} et $X_{ij,m}$ la solution devient alors :

$$X_{ij}(r) = \int_{V'} \eta''_{ij}(r')\, U(r,r')\, dv' + \int_{S'} X_{ij,mk}(r')\, U(r,r')_{,k}\, n_m\, ds'$$

$$- \int_{S'} X_{ij,mkm}(r')\, U(r,r')\, n_k\, ds'$$

De plus, nous ajustons la fonction de Green afin qu'elle soit nulle en surface et la solution devient

$$X_{ij}(r) = \int_{V'} \eta''_{ij}(r')\, U(r,r')\, dv' + \int_{S'} X_{ij,mk}(r')\, U(r,r')_{,k}\, n_m\, ds' \qquad (4.2.6)$$

Dans le cas d'un milieu homogène $\eta''_{ij}(r')$ découle uniquement de la déformation inélastique et elle est donc independante de $X_{ij}(r)$. L'équation se réduit à une intégrale simple pour le premier terme.

Nous allons donner la solution de l'équation inhomogène avec des déformations inélastiques, la solution de l'équation inhomogène avec des incompatibilités dues à une hétérogénéité ou une anisotropie. Ces deux solutions sont construites avec des conditions aux limites homogènes.

Ensuite, nous cherchons la solution de l'équation homogène avec des conditions aux limites inhomogènes. La solution générale est la somme des trois solutions particulières.

La solution pour les déformations inélastiques s'écrit :

$$X_{ij}(r) = \int_{V'} \eta_{ij}(r')\, U(r,r')\, dv' \qquad (4.2.7)$$

$\eta_{ij}(r')$ dans cette relation découle uniquement des déformations inélastiques.

La solution pour des incompatibilités dues à une hétérogénéité et/ou une anisotropie s'écrit de façon générale :

$$X_{ij}(\lambda) = \int_{V'} \eta'_{ij}(\lambda') \, u(\lambda,\lambda') \, dv'$$

qui s'écrit de façon explicite :

$$X_{ij}(\lambda) = \int_{V'} -\epsilon_{ikm}\epsilon_{jln} \times \left\{ \delta S_{mnpq}^{(\lambda')} \epsilon_{prt}\epsilon_{qsu} C^{\circ}_{tuab} X^{(\lambda')}_{ab,\lambda s} \right\}_{,kl} u(\lambda,\lambda') \, dv'$$

on pose :

$$\beta_{ijkl} = -\epsilon_{ikm}\epsilon_{jln}\left\{ \delta S_{mnpq}^{(\lambda')} \epsilon_{prt}\epsilon_{qsu} C^{\circ}_{tuab} X_{ab,\lambda s}(\lambda') \right\}$$

$$X_{ij}(\lambda) = \int_{V'} \beta_{ijkl,kl} \, u(\lambda,\lambda') \, dv' = \int_{V'} \left(\beta_{ijkl} \, u\right)_{,l} dv' - \int_{V'} \beta_{ijkl,k} u_{,l} \, dv'$$

$$= \int_{S'} \beta_{ijkl,k} u(\lambda,\lambda') n_l \, ds' - \int_{S'} \beta_{ijkl} \, u_{,l} \, n_k \, ds' + \int_{V'} \beta_{ijkl} \, u_{,kl} \, dv'$$

le dernier terme s'écrit :

$$X_{ij}(\lambda) = \int_{V'} -\epsilon_{ikm}\epsilon_{jln} \delta S_{mnpq}^{(\lambda')} \epsilon_{prt}\epsilon_{qsu} C^{\circ}_{tuab} X'^{(\lambda')}_{ab,\lambda s} \, u(\lambda,\lambda')_{,kl} \, dv'$$

Par des intégrations par parties successives et en annulant X_{ab} et $X_{ab,\lambda}$ en surface la solution finale s'écrit :

$$X_{ij}(r) = \int_{V'} \left(-\epsilon_{ikm}\epsilon_{jln} SS^{(r')}_{mnpq} \epsilon_{prt}\epsilon_{qsu} C^{\circ}_{tuab} U(r,r')_{,kl} \right)_{,rs} X_{ab}(r')\,dv' \qquad (4.2.8)$$

$$+ \int_{S'} \epsilon_{ikm}\epsilon_{jln} \left\{ SS^{(r')}_{mnpq} \epsilon_{prt}\epsilon_{qsu} C^{\circ}_{tuab} X^{(r')}_{ab,rs} \right\} U(r,r')_{,l} n_k\,ds'$$

la solution pour les conditions aux limites s'écrit :

$$X_{ij}(r) = \int_{S'} X_{ij,mk}(r')\, U(r,r')_{,k}\, n_m\, ds' \qquad (4.2.9)$$

En ajoutant les solutions (4.1.7) (4.1.8) et (4.1.9) on obtient la solution générale. Si nous notons les termes en surface $X^{\circ}_{ij}(r)$, cette solution s'écrit :

$$X_{ij}(r) = X^{\circ}_{ij}(r) + \int_{V'} \eta_{ij}(r')\, U(r,r')\, dv' \qquad (4.2.10)$$

$$- \int_{V'} \left(\epsilon_{ikm}\epsilon_{jln} SS^{(r')}_{mnpq} \epsilon_{prt}\epsilon_{qsu} C^{\circ}_{tuab} U(r,r')_{,kl} \right)_{,rs} X_{ab}(r')\,dv'$$

avec

$$X^{\circ}_{ij}(r) = \int_{S'} X_{ij,mk}(r')\, U(r,r')_{,k}\, n_m\, ds'$$

$$+ \int_{S'} \epsilon_{ikm}\epsilon_{jln} \left\{ SS^{(r')}_{mnpq} \epsilon_{prt}\epsilon_{qsu} C^{\circ}_{tuab} X^{(r')}_{ab,rs} \right\} U(r,r')_{,l}\, n_k\, ds'$$

Cette équation intégrale pour le potentiel de contrainte χ est a rapprocher de l'équation intégrale de Berveiller et Zaoui [7] pour la formulation en déplacement.
Dans le cas ou $\delta S = 0$ (milieu homogène), elle contient la solution de Kröner [6] et dans le cas ou $\eta = 0$, elle correspond à la formulation duale de celle de Dederichs et Zeller [4].

Cette solution contient un terme surfacique et deux termes qui dépendent du volume. La fonction de Green de l'équation (4.2.10) doit être calculée par sa relation de définition et ajustée à être nulle en surface pour chaque type de problème.

Afin de simplifier ce formalisme, nous proposons de redémontrer ces relations dans un cas de contrainte plane dans un milieu hétérogène, isotrope. En effet, dans ce cas le tenseur potentiel de contrainte se réduit à une fonction scalaire (fonction d'Airy) qui vérifie une seule équation.

4.3) Problème bidimensionnel

Nous avons vu que lorsque toutes les grandeurs sont indépendantes de la variable z, les équations du problème se trouvent simplifiées. Nous résolvons l'équation aux dérivées partielles relative au problème des contraintes planes dans un milieu hétérogène et isotrope.

Nous reprenons donc l'équation (3.6.11) qui s'écrit :

$$\left(S^{\circ}_{xy} - S^{\circ}_{xx} \right) \Delta^2 \phi(x) = -\left(\eta(x) + \eta'(x) \right) \qquad (4.3.1)$$

avec :

$\eta(x) = \left(\varepsilon^{a}_{xx,y^2} + \varepsilon^{a}_{yy,x^2} - 2\varepsilon^{a}_{xy,xy} \right)$ est" l'incompatibilité" due à la déformation inélastique.

$$\eta'(x) = -\Big(\left(\delta S_{xx} \phi_{,yy} - \delta S_{xy} \phi_{,yy} \right)_{,yy} + \left(\delta S_{xx} \phi_{,xx} - \delta S_{xy} \phi_{,xx} \right)_{,xx}$$

$$+ 2\left(\delta S_{xx} \phi_{,xy} - \delta S_{xy} \phi_{,xy} \right)_{,xy} \Big)$$ est "l'incompatibilité" due à l'hétérogénéité.

C'est l'équation en contrainte plane d'un milieu hétérogène isotrope. A l'équation (4.3.1) il faut ajouter les conditions aux limites, qui s'écrivent :

$$T_i = \sigma_{ij} n_j$$

dans le cas des contraintes planes, elles deviennent :

$$T_x = \sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y$$

$$T_y = \sigma_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y$$

en fonction du potentiel de contrainte, cela s'écrit :

$$T_x = -\phi_{,yy} n_x + \phi_{,xy} n_y$$

$$T_y = \phi_{,xy} n_x - \phi_{,xx} n_y$$

n_x et n_y sont les cosinus directeurs de la surface où on applique le vecteur de contrainte T_i . Avec les deux équations de T_x et T_y on ne peut avoir que deux conditions sur ϕ à la fois, soit :

$$\phi_{,yy} \text{ et } \phi_{,xy} \quad \text{où} \quad \phi_{,xx} \text{ et } \phi_{,xy}$$

nous écrivons l'équation (4.3.1) sous la forme :

$$\Delta^2 \phi (r) = c\, \eta''$$

avec :

$$\eta'' = -(\eta + \eta')$$

$$c = \frac{1}{S^\circ_{xy} - S^\circ_{xx}}$$

les équations à résoudre sont donc :

$$\Delta^2 \phi = c\, \eta'' \qquad (4.3.2)$$

$$\Delta^2 U(r,r') = \delta(r-r') \qquad (4.3.3)$$

En multipliant (4.3.2) par $U(r,r')$ et l'équation (4.3.3) par $\phi(r)$ et en faisant la différence, on obtient :

$$\phi(r)\,\delta(r-r') - C\,\eta''(r)\,U(r,r') = \Delta^2 U(r,r')\,\phi(r) - \Delta^2\phi(r)\,U(r,r')$$

en intégrant, on a :

$$\phi(r) = \int_{v'} C\,\eta''_{33}(r')\,U(r,r')\,dv'$$

$$+\int_{v'}\left(\Delta^2 U(r,r')\,\phi(r') - \Delta^2\phi(r')\,U(r,r')\right)dv'$$

le calcul de la seconde intégrale de volume se fait de la même façon que dans le cas tridimensionnel, c'est-à-dire par intégration successive. La solution s'écrit alors :

$$\phi(r) = \int_{V'} C\,\eta''(r')\,U(r,r')\,dv'$$

$$+\int_{S'}\left(\phi_{,ikkm}(r')\,U(r,r') + \phi_{,ik}(r')\,U(r,r')_{,mk}\right)n_m\,ds'$$

$$+-\int_{S'}\left(U(r,r')_{,m}\,\phi(r')_{,km} + \phi(r')\,U(r,r')_{,mkm}\right)n_k\,ds'$$

la fonction de Green étant nulle en surface. De plus les contraintes ne dépendent que des dérivées secondes de ϕ. Nous pouvons donc imposer à ϕ et aux dérivées premières de ϕ d'être nulles en surface. De cette façon la solution se réduit à :

$$\phi(r) = \int_{V'} C\,\eta''(r')\,U(r,r')\,dv' + \int_{S'}\phi_{,ikm}(r')\,U(r,r')_{,m}\,n_k\,ds'$$

la solution s'écrit :

$$\phi(x) = \int_{V'} c\, \eta''(x')\, u(x,x')\, dv' + \phi'(x)$$

$\phi'(x)$ est la solution relative aux conditions aux limites. Reste à expliciter l'intégrale de volume qui s'écrit :

$$\int_{V'} c\, \eta''(x')\, u(x,x')\, dv'$$

en remplaçant $\eta''(x)$ par sa valeur, cette intégrale devient :

$$-\int_{V'} c\, \eta(x')\, u(x,x')\, dv' - \int_{V'} c\, \eta'(x')\, u(x,x')\, dv'$$

La première intégrale représente la solution relative aux déformations inélastiques. Quant à la seconde intégrale, nous remplaçons $\eta'(x)$ par sa valeur, ce qui s'écrit :

$$\int_{V'} c \Big[+ \left(\delta S_{xx}(x')\, \phi(x')_{,yy} - \delta S_{xy}(x')\, \phi_{,yy}(x') \right)_{,yy}$$

$$+ \left(\delta S_{xx}(x')\, \phi(x')_{,xx} - \delta S_{xy}(x')\, \phi(x')_{,xx} \right)_{,xx} + 2 \left(\delta S_{xx}(x')\, \phi(x')_{,xy} - \delta S_{xy}(x')\, \phi(x')_{,xy} \right)_{,xy} \Big] u(x,x')\, dv'$$

En intégrant deux fois par parties et en annulant les termes surfaciques qui contiennent $u(x,x')$, cette dernière intégrale s'écrit :

$$\int_{V'} c \Big[\left(\delta S_{xx}(x')\, \phi(x')_{,yy} - \delta S_{xy}(x')\, \phi_{,yy}(x') \right) u(x,x')_{,yy}$$

$$+ \left(\delta S_{xx}(x')\, \phi(x')_{,xx} - \delta S_{xy}(x')\, \phi(x')_{,xx} \right) u(x,x')_{,xx}$$

$$+ 2 \left(\delta S_{xx}(x')\, \phi(x')_{,xy} - \delta S_{xy}(x')\, \phi(x')_{,xy} \right) u(x,x')_{,xy} \Big]\, dv'$$

$$-\int_{S'} C\left[\left(\delta S_{xx}(\lambda)\,\phi(\lambda')_{,yy} - \delta S_{xy}(\lambda')\,\phi_{,yy}(\lambda')\right) U(\lambda,\lambda')_{,y}\right] n_y\, ds'$$

$$-\int_{S'} C\left[\left(\delta S_{xx}(\lambda')\,\phi(\lambda')_{,xx} - \delta S_{xy}(\lambda')\,\phi(\lambda')_{,xx}\right) U(\lambda,\lambda')_{,x}\right] n_x\, ds'$$

$$-\int_{S'} C\left[2\left(\delta S_{xx}(\lambda')\,\phi(\lambda')_{,xy} - \delta S_{xy}(\lambda')\,\phi(\lambda')_{,xy}\right) U(\lambda,\lambda')_{,x}\right] n_y\, ds'$$

Après deux intégrations successives par parties et en annulant les termes de surface contenant ϕ et les dérivées premières de ϕ, l'intégrale de volume dans cette dernière expression s'écrit :

$$\int_{V'} C\left[\left(\delta S_{xx}(\lambda') - \delta S_{xy}(\lambda')\right)_{,y^2} U(\lambda,\lambda')_{,y^4} + \left(\delta S_{xx}(\lambda') - \delta S_{xy}(\lambda')\right)_{,x^2} U(\lambda,\lambda')_{,x^4} + \left(\delta S_{xx}(\lambda') - \delta S_{xy}(\lambda')\right)_{,xy} U(\lambda,\lambda')_{,x^2y^2}\right] \phi(\lambda')\, dv'$$

la solution finale est la somme de ces différents termes, elle s'écrit :

$$\phi(\lambda) = -\int_{V'} C\,\eta(\lambda')\,U(\lambda,\lambda')\,dv' + \int_{V'} C\left[\left(\delta S_{xx}(\lambda') - \delta S_{xy}(\lambda')\right)_{,y^2} U(\lambda,\lambda')_{,y^4} + \left(\delta S_{xx}(\lambda') - \delta S_{xy}(\lambda')\right)_{,x^2} U(\lambda,\lambda')_{,x^4} + \left(\delta S_{xx}(\lambda') - \delta S_{xy}(\lambda')\right)_{,xy} U(\lambda,\lambda')_{,x^2y^2}\right] \phi(\lambda')\, dv'$$

$$-\int_{S'} C\left[\left(\delta S_{xx}(\lambda')\,\phi(\lambda')_{,yy} - \delta S_{xx}(\lambda')\,\phi_{,yy}(\lambda')\right) U(\lambda,\lambda')_{,y}\right] n_y\, ds'$$

$$-\int_{S'} C\left[\left(\delta S_{xx}(\lambda')\,\phi(\lambda')_{,xx} - \delta S_{xy}(\lambda')\,\phi(\lambda')_{,xx}\right) U(\lambda,\lambda')_{,x}\right] n_x\, ds'$$

$$-\int_{S'} C\left[2\left(\delta S_{xx}(\lambda')\,\phi(\lambda')_{,xy} - \delta S_{xy}(\lambda')\,\phi(\lambda')_{,xy}\right) U(\lambda,\lambda')_{,x}\right] n_y\, ds'$$

$$+\int_{S'} \phi(\lambda')_{,km}\, U(\lambda,\lambda')_{,m}\, n_k\, ds' .$$

elle s'écrit alors symboliquement sous la forme :

$$\phi(r) = \phi^{\circ}(r) - \int_{V'} c\,\eta(r')\,U(r,r')\,dv' + \int_{V'} g(r,r')\,\phi(r')\,dv'$$

c'est une équation intégrale analogue à celle obtenue en déplacement.

avec :

$$g(r,r') = \left[\left(\delta S_{xx}(r') - \delta S_{xy}(r')\right)_{,y^2} U(r,r')_{,y4} + \left(\delta S_{xx}(r') - \delta S_{xy}(r')\right)_{,x^2} U(r,r')_{,x4} + \left(\delta S_{xx}(r') - \delta S_{xy}(r')\right)_{,xy} U(r,r')_{,x^2y^2}\right]$$

$\phi^{\circ}(r)$ contient tout les termes de surface.

4.4) <u>Solutions pour un milieu infini -solutions approchées-</u>

Pour de nombreux problèmes, en particulier les matériaux microhétérogènes et macrohomogènes, il est raisonnable de supposer que le solide possède des dimensions caractéristiques très supérieures à celles des hétérogénéités. On peut alors assimiler le solide à un milieu infini. Pour une telle modélisation, la fonction de Green est déterminée uniquement par sa relation de définition.

Dans ce cas les fonctions de Green respectives sont connues [6] [10];

- pour un milieu infini tridimensionnel, on a :

$$U(r,r') = -8\pi\,\delta(r-r')$$

- pour un milieu infini bidimensionnel, on a :

$$U(r,r') = \frac{1}{4\pi}(r-r')^2 \ln(r-r')$$

A l'aide de ces deux fonctions on peut alors trouver l'équation intégrale vérifiée par le potentiel de contraintes.

De la même façon que dans la formulation en déplacement, on peut obtenir une solution par la méthode de Born. La solution s'obtient alors sous la forme d'une série. Ce moyen est particulièrement interessant pour construire la solution d'un problème hétérogène à partir de celle du problème du milieu homogène correspondant.

Cette méthode s'applique particulièrement pour les problèmes plans, où le potentiel de contraintes se réduit souvent à des fonctions classiques et où on connait un grand nombre de solutions pour les problèmes homogènes.

Lorsque la solution du problème homogène est obtenue sous la forme d'un polynôme, c'est le cas de la fonction d'Airy en élasticité par exemple, le calcul des intégrales succéssives est très simple. En revanche, quand la solution du problème homogène est une fonction plus complexe, le calcul des intégrales successives devient plus compliqué et on ne peut résoudre les équations que numériquement.

4.5) Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une transformation des équations aux dérivées partielles du chapitre précédent sous forme d'une équation intégrale du même type que celle donnée par Berveiller et Zaoui [7] et par Dederichs et Zeller [4]. Cette équation intégrale tient compte de l'hétérogénéité et/ou de l'anisotropie, des déformations inélastiques et des conditions aux limites. La solution de cette équation intégrale dépend de la fonction de Green du problème homogène considéré. Cette formulation peut être appliquée aux problèmes d'inclusions sphériques ou ellipsoïdales, elle peut aussi être simplifiée dans le cas d'un milieu infini.

Pour un milieu infini, la fonction de Green est connue, nous avons proposé une méthode approchée ittérative pour le traitement des équations aux dérivées partielles. Cette méthode est particulièrement pratique car elle utilise la solution du problème homogène, celle ci est souvent obtenue exactement.

Les deux solutions présentées ici, conduisent au calcul d'intégrales simples dans le cas d'un milieu homogène, isotrope et infini. Ceci correspond à la solution de Kröner [6] .

CHAPITRE V

Application à l'analyse des contraintes dans le cas d'une poutre hétérogène en flexion pure

5.1) Introduction.

5.2) Formulation en contrainte plane.

5.3) Application à une poutre hétérogène.

5.4) Résultats et discussion.

V) APPLICATION A L'ANALYSE DES CONTRAINTES DANS LE CAS D'UNE POUTRE HETEROGENE:

5.1) Introduction

Dans le chapitre(III), nous avons formulé le problème en potentiel de contraintes et nous avons particularisé cette théorie générale à un certain nombre de cas particuliers. Dans ce chapitre nous illustrons cette théorie générale, en l'appliquant à un cas particulier de milieu hétérogène.

Nous nous intéressons ici aux corps macrohétérogènes pour lesquels l'hétérogèneité varie de manière continue dans le matériau.
On peut aussi avoir des hétérogèneités discontinues comme dans le cas des matériaux composites. Ce type d'hétérogèneité est en général dû à la variation d'une grandeur physique dans le matériau, par exemple la température ou l'humidité, ce qui se traduit du point de vue mécanique, par la variation des constantes d'élasticité et en particulier la variation du module d'Young et du coefficient de Poisson dans le cas des matériaux isotropes.

Nous considérons ici une plaque isotrope de hauteur 2h et d'épaisseur b petite par rapport à la hauteur. Cette plaque est soumise à des sollicitations extérieures. Nous supposons que le module d'Young est variable et que la plaque est le siège de déformations inélastiques. Nous nous proposons de calculer le champ des contraintes et des déformations dans la plaque en fonction de la déformation inélastique et des paramètres mesurant l'hétérogèneité. La plaque étant mince, nous formulons le problème en contrainte plane.

5.2) Formulation en contrainte plane :

Nous reprenons l'équation (3.6.10) formulée en contrainte plane, cette équation s'écrit :

$$-\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(S_{11}-S_{12}\right)\phi_{1yy}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(S_{11}-S_{12}\right)\phi_{1xx}\right. \tag{5.2.1}$$

$$\left.+2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(S_{11}-S_{12}\right)\phi_{1xy}\right]+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varepsilon^a_{yy}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\varepsilon^a_{xx}-2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\varepsilon^a_{xy}=0$$

Nous considérons d'abord le cas d'un milieu homogène, ensuite nous traitons celui d'un milieu hétérogène.

*a) **Milieu homogène**

Pour un milieu homogène, les compliances élastiques sont constantes et s'écrivent:

$$S_{11} = \frac{1}{E} \quad , \quad S_{12} = -\frac{\nu}{E}$$

ν est le coefficient de poisson.

E est le module de Young.

L'équation (5.2.1) s'écrit alors :

$$-\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1+\nu}{E}\,\phi_{,yy}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1+\nu}{E}\,\phi_{,xx}\right)+2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\frac{1+\nu}{E}\,\phi_{,xy}\right)\right]$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\varepsilon^a_{yy}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\,\varepsilon^a_{xx}-2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\,\varepsilon^a_{xy}=0$$

ce qui s'écrit encore :

$$-\frac{1+\nu}{E}\left(\phi_{,x^4}+\phi_{,y^4}+2\phi_{,x^2y^2}\right)=-\left(\varepsilon^a_{xx,y^2}+\varepsilon^a_{yy,x^2}-2\varepsilon^a_{xy,xy}\right)$$

Enfin, on a :

$$\Delta\Delta\phi(x,y)=\frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon^a_{xx,y^2}+\varepsilon^a_{yy,x^2}-2\,\varepsilon^a_{xy,xy}\right) \qquad (5.2.2)$$

Cette relation permet d'évaluer l'effet de la déformation inélastique sur le potentiel de contraintes et par la suite sur les contraintes. Si on connait la déformation inélastique, on peut calculer la solution du problème soit par la fonction de Green, soit par l'utilisation de la transformation de Fourier.

* b) **Milieu hétérogène**

Pour un milieu hétérogène, les compliances élastiques varient avec la position, nous supposons que seul le module d'Young varie avec l'axe des y. En effet, la variation du module d'Young est souvent plus grande que celle du coefficient de Poisson. Enfin, nous ferons cette étude dans un milieu sans déformations inélastiques.

Nous reprenons l'équation (5.2.1) dans laquelle nous remplaçons les compliances élastiques en fonction du module d'Young et du coefficient de Poisson. Cette équation s'écrit alors sans les déformations inélastiques :

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1+\nu}{E(y)}\phi_{1yy}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1+\nu}{E(y)}\phi_{1xx}\right)+2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\frac{1+\nu}{E(y)}\phi_{1xy}\right)=0$$

Nous calculons les différents termes intervenant dans l'équation

$$(1+\nu)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{E(y)}\phi_{1yy}\right)=1+\nu\left[\left(\frac{2(E'(y))^2}{E(y)}\phi_{1y^2}-2\frac{E'(y)}{(E(y))^2}\phi_{1y^3}+\frac{1}{E(y)}\phi_{1y^4}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{E''(y)}{(E(y))^2}\phi_{1y^2}\right]$$

$$2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\frac{1+\nu}{E(y)}\phi_{1xy}\right)=2(1+\nu)\left(\frac{-E'(y)}{(E(y))^2}\phi_{1x^2y}+\frac{1}{E(y)}\phi_{1x^2y^2}\right)$$

L'équation s'écrit alors :

$$\frac{2(E'(y))^2}{(E(y))^3}\phi_{1y^2}-\frac{2E'(y)}{(E(y))^2}\phi_{1y^3}+\frac{1}{E(y)}\phi_{1y^4}-\frac{2E'(y)}{(E(y))^2}\phi_{1x^2y}$$

$$+\frac{2}{E(y)}\phi_{1x^2y^2}+\frac{1}{E(y)}\phi_{1x^4}-\frac{E''(y)}{(E(y))^2}\phi_{1y^2}=0$$

Soit

$$\Delta\Delta\phi=-\frac{2E'(y)}{E(y)}\left[\frac{E'(y)}{E(y)}\phi_{1y^2}-\phi_{1y^3}-\phi_{1x^2y}\right]+\frac{E''(y)}{E(y)}\phi_{1y^2} \qquad (5.2.3)$$

Le second membre de cette équation peut être interprêté comme des incompatibilités fictives. A ce stade, nous n'avons pas encore explicité la variation du module d'Young, celle-ci dépend de la nature de l'hétérogèneité. Nous supposons que le module d'Young varie linéairement avec l'axe des y, ce qui s'écrit :

$$E=E^0+ky$$

E^0 étant le module d'Young moyen et k une constante.

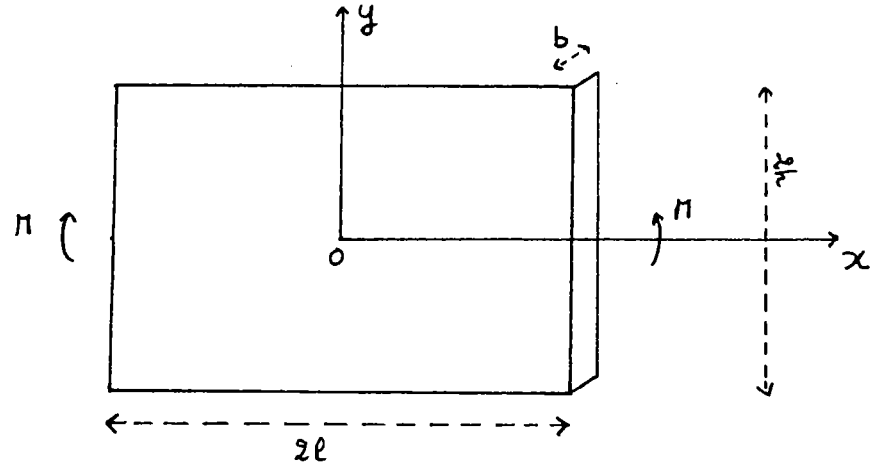
L'équation (5.2.3) devient alors :

$$\Delta\Delta\phi+\frac{2k}{E^0+ky}\left[\frac{k}{E^0+ky}\phi_{1yy}-\phi_{1y^3}-\phi_{1x^2y}\right]=0 \qquad (5.2.4)$$

Nous remarquons d'abord que pour $k=0$,nous retrouvons $\Delta\Delta\phi = 0$ relation classique vérifiée par la fonction d'Airy dans le cas de l'élasticité et que le coefficient de Poisson n'intervient pas dans l'équation.

5.3) Application à une poutre hétérogène

Pour un problème général, il faut résoudre (5.2.4). Nous simplifions le problème général en nous intéressant au cas de la flexion pure. Nous supposons donc que la poutre est soumise à un moment constant. Le potentiel de contraintes ne dépend que de la variable y.



Repérage de la poutre

L'équation du problème ainsi posé, s'écrit alors :

$$\frac{1}{E^\circ+ky}\phi_{1y4} + \frac{2k^2}{(E^\circ+ky)^3}\phi_{1y2} - \frac{2k}{(E^\circ+ky)^2}\phi_{1y3} = 0$$

Nous en proposons une résolution analytique. Nous multiplions l'équation par $(E^\circ+ky)$, on a alors :

$$(E^\circ+ky)^2\phi_{1y4} - 2k(E^\circ+ky)\phi_{1y3} + 2k^2\phi_{1y2} = 0$$

Sachant que :

$$\sigma_{xx} = -\phi_{1yy}$$

L'équation s'écrit alors :

$$-(E^\circ+ky)^2\sigma_{xx,yy} + 2k(E^\circ+ky)\sigma_{xx,y} - 2k^2\sigma_{xx} = 0$$

On fait le changement de variable suivant :

$$E^\circ+ky = e^t \Rightarrow t = \ln(E^\circ+ky)$$

D'où

$$E^\circ + ky > 0 \quad \Rightarrow \quad y > -\frac{E^\circ}{k}$$

calcul des différentes dérivées :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t}\,\frac{\partial t}{\partial y} = \sigma_t' \, k \, e^{-t}$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial y^2} = k^2 e^{-2t}\sigma_t'' - k^2 \sigma_t' e^{-2t}$$

L'équation devient alors :

$$k^2 \sigma_t'' - 3k^2 \sigma_t' + 2k^2 \sigma_t = 0$$

Pour $k \neq 0$, on a :

$$\sigma_t'' - 3\sigma_t' + 2\sigma_t = 0$$

Cette dernière est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants. La solution s'écrit :

$$\sigma_t = A e^t + B e^{2t}$$

ou en fonction de y

$$\sigma_{xx} = A\left(E^\circ + ky\right) + B\left(E^\circ + ky\right)^2$$

La dérivée seconde du potentiel de contrainte s'écrit :

$$\phi_{,yy} = -\left(A\left(E^\circ + ky\right) + B\left(E^\circ + ky\right)^2\right)$$

Le potentiel de contrainte s'obtient par intégration :

$$\phi = -\left(\frac{1}{2}\left(AE^\circ + BE^{\circ 2}\right)y^2 + \left(\frac{Ak}{6} + \frac{BE^\circ k}{3}\right)y^3 + \frac{Bk^2}{12}y^4 + Cxy + Dy + E\right)$$

A,B,C,D et E sont des constantes à déterminer par les conditions aux limites, on a:

$$\sigma_{xx} = -\phi_{,yy} = A\left(E^\circ + ky\right) + B\left(E^\circ + ky\right)^2$$

$$\sigma_{yy} = -\phi_{,xx} = 0$$

$$\sigma_{xy} = C$$

En prenant C = 0, les conditions aux limites relatives à σ_{xy} et σ_{yy} seront toutes vérifiées. Il reste donc à les vérifier pour σ_{xx} :

Pour x = 1 et x = -1, l'effort normal doit être nul, ce qui s'écrit :

$$N_3 = \int_{-h}^{+h} b\,\sigma_{xx}\,dy = 0$$

d'où

$$\int_{-h}^{+h} A(E^\circ + ky) + B(E^\circ + ky)^2\,dy$$

Enfin, on a :

$$AE^\circ + B\left(E^{\circ 2} + \frac{k^2h^2}{3}\right) = 0 \qquad (5.2.5)$$

D'autre part, le moment est constant ce qui se traduit par :

$$M = \int_{-h}^{+h} b\,\sigma_{xx}\,y\,dy$$

D'où

$$M = \int_{-h}^{+h} b\left(A(E^\circ + ky) + B(E^\circ + ky)^2\right) y\,dy \qquad (5.2.6)$$

Enfin, on a :

$$2bAk\frac{h^3}{3} + \frac{4}{3}bE^\circ kh^3 = M$$

des équations (5.2.5) et (5.2.6), nous pouvons calculer les valeurs de A et B.

La solution du système donne les valeurs de A et B qui s'écrivent :

$$A = -\left(E^{\circ 2} + k^2h^2/3\right) M \Big/ E^\circ\left(\frac{2}{3}kbE^\circ h^3 - 2k^3h^5b/9E^\circ\right)$$

$$B = M \Big/ \left(\frac{2}{3}kbE^\circ h^3 - 2k^3h^5b/E^\circ\right)$$

L'expression de σ_{xx} s'écrit alors :

$$\sigma_{xx} = M\left(-\left(E^\circ + k^2h^2/3E^\circ\right)\left(E^\circ + ky\right) + \left(E^\circ + ky\right)^2\right) \Big/ \left(\frac{2}{3}kbE^\circ h^3 - 2k^3h^5b/9E^\circ\right)$$

soit :

$$\sigma_{xx} = \frac{M E^{\circ 2}(1 + k y / E^{\circ})}{\left(\frac{2}{3} k b E^{\circ} h^3 - \frac{2 k^3 h^5 b}{E^{\circ}}\right)} \left(\frac{k}{E^{\circ}} y - \frac{k^2 h^2}{3 E^{\circ 2}}\right)$$

On pose :

$A = k/E^{\circ}$ est le facteur d'hétérogèneité du milieu.

$$I = 2bh^3/3 \Rightarrow h = \left(3I/2b\right)^{1/3}$$

I est le moment d'inertie de la plaque .

Avec ces notations, l'expression de σ_{xx} devient :

$$\sigma_{xx} = \frac{M(1 + Ay)\left(y - \frac{1}{3} A (3I/2b)^{2/3}\right)}{I\left(1 - \frac{1}{3} A^2 (3I/2b)^{2/3}\right)}$$

On pose

$$y = y'h \quad \text{et puisque} \quad -h < y < +h \Rightarrow -1 < y' < +1$$

$$B = Ah$$

L'expression de σ_{xx} s'écrit alors :

$$\sigma_{xx} = \frac{Mh}{I} \cdot \frac{(1 + By')\left(y' - \frac{1}{3} B\right)}{\left(1 - \frac{1}{3} B^2\right)} \qquad (5.2.7)$$

Pour un milieu homogène k = 0 donc A et B sont nuls. La contrainte du milieu homogène est :

$$\sigma_{xx}(\text{homogène}) = \frac{Mh}{I} y'$$

La contrainte maximale du milieu homogène est :

$$\sigma_{xx(max)}^{\text{homogène}} = \pm \frac{Mh}{I}$$

La contrainte du milieu homogène est linéaire. Alors que celle du milieu hétérogène ne l'est pas. La déformation du milieu hétérogène s'obtient par la loi de Hooke :

$$\varepsilon_{xx} = \sigma_{xx} / E(y)$$

$$\varepsilon_{xx} = \sigma_{xx} / E^{\circ}(1 + By')$$

Elle s'écrit donc :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{Mh}{E^{\circ}I}\left(y' - \frac{1}{3}B\right)\Big/\left(1 - \frac{1}{3}B^2\right) \qquad (5.2.8)$$

La déformation du milieu homogène s'écrit :

$$\varepsilon_{xx}(\text{homogène}) = \frac{Mh}{E^{\circ}I}y'$$

Elle est maximale pour $y' = \pm 1$:

$$\varepsilon_{xx(max)}^{\text{homogène}} = \pm\frac{Mh}{E^{\circ}I}$$

A la différence des contraintes, la déformation du milieu hétérogène et celle du milieu homogène varient liéairement. L'autre composante des déformations s'écrit :

$$\varepsilon_{yy} = -\nu\sigma_{xx}/E(y) \qquad (5.2.9)$$

$$= -\frac{\nu Mh}{E^{\circ}I}\left(y' - \frac{1}{3}B\right)\Big/\left(1 - \frac{1}{3}B^2\right)$$

Pour un milieu homogène, cela s'écrit :

$$\varepsilon_{yy}(\text{homogène}) = -\frac{\nu Mh}{E^{\circ}I}y'$$

Pour obtenir des quantités adimensionnelles et pour pouvoir faire des comparaisons, nous considérons le rapport des grandeurs mécaniques du milieu hétérogène aux grandeurs mécaniques maximales du milieu homogène correspondant . On a alors pour les contraintes :

$$\sigma^{\circ} = \sigma_{xx} / \sigma_{xx(max)}^{(homo)}$$

$$\sigma^{\circ} = (1 + By')\left(y' - \frac{1}{3}B\right)\Big/\left(1 - \frac{1}{3}B^2\right) \qquad (5.2.10)$$

Pour les déformations :

$$\varepsilon^{\circ} = \varepsilon_{xx} \,/\, \varepsilon_{xx(max)}^{(homo)}$$

(5.2.11)

$$\varepsilon^{\circ} = \left(y' - \frac{1}{3}B\right) \Big/ \left(1 - \frac{1}{3}B^2\right)$$

Enfin, pour l'autre composante des déformations, on a :

$$\varepsilon_{yy}^{\circ} = -\left(y' - \frac{1}{3}B\right) \Big/ \left(1 - \frac{1}{3}B^2\right)$$

REMARQUE : Le facteur d'hétérogèneité A et la hauteur h de la plaque ont le même effet sur les contraintes et sur les déformations.

5.4) Résultats et discussion :

A partir de la relation (5.2.7), nous avons tracé la variation de la contrainte hétérogène en fonction de l'axe des y (Fig(1)) pour plusieurs valeurs de A (facteur d'hétérogèneité) . Pour $A = 0$ (milieu homogène), la contrainte est linéaire, symétrique par rapport à l'origine et passe par celle-ci. Plus le facteur d'hétérogèneité augmente, plus la contrainte à l'origine augmente.

De même, nous avons tracé la déformation hétérogène en fonction de A (Fig(2)), celle-ci reste linéaire, passe par l'origine pour $A = 0$ et s'y écarte de plus en plus que A croît. Au signe près, l'évolution de la composante ε_{yy} de la déformation est semblable à la composante ε_{xx} (Fig(3)).

Les figures (4), (5), (6) donnent respectivement la contrainte et les déformations correspondantes pour un facteur d'hétérogèneité donné, ces grandeurs sont proportionnelles au moment appliqué.

Pour mesurer l'influence de l'hétérogèneité sur les contraintes et sur les déformations, nous avons tracé le rapport de la contrainte hétérogène à la contrainte maximale du milieu homogène (Fig(7)).

Quand le facteur d'hétérogèneité est nul (milieu homogène), ce rapport est compris entre -1 et +1, ce qui est normal, plus le facteur d'hétérogèneité augmente, plus ce rapport croît pour atteindre des valeurs comprises entre -2 et +2 soit le double quand A se rapproche de 2 sa valeur limite. La même dépendance est observée en ce qui concerne le rapport de la déformation du milieu hétérogène avec la déformation du milieu homogène (Fig(8)).

Pour que le module du matériau reste réel, le facteur d'hétérogèneité doit être inférieur à 2 en valeur absolue. Cette valeur limite dépend de la hauteur de la plaque, plus h croît, plus cette valeur décroît et vice-versa.

Dans ce chapitre, nous avons montré que ce formalisme permet de traiter un corps hétérogène. Nous avons obtenu les contraintes et les déformations de façon analytique et explicite en fonction des paramètres du matériau et du facteur d'hétérogénéité.

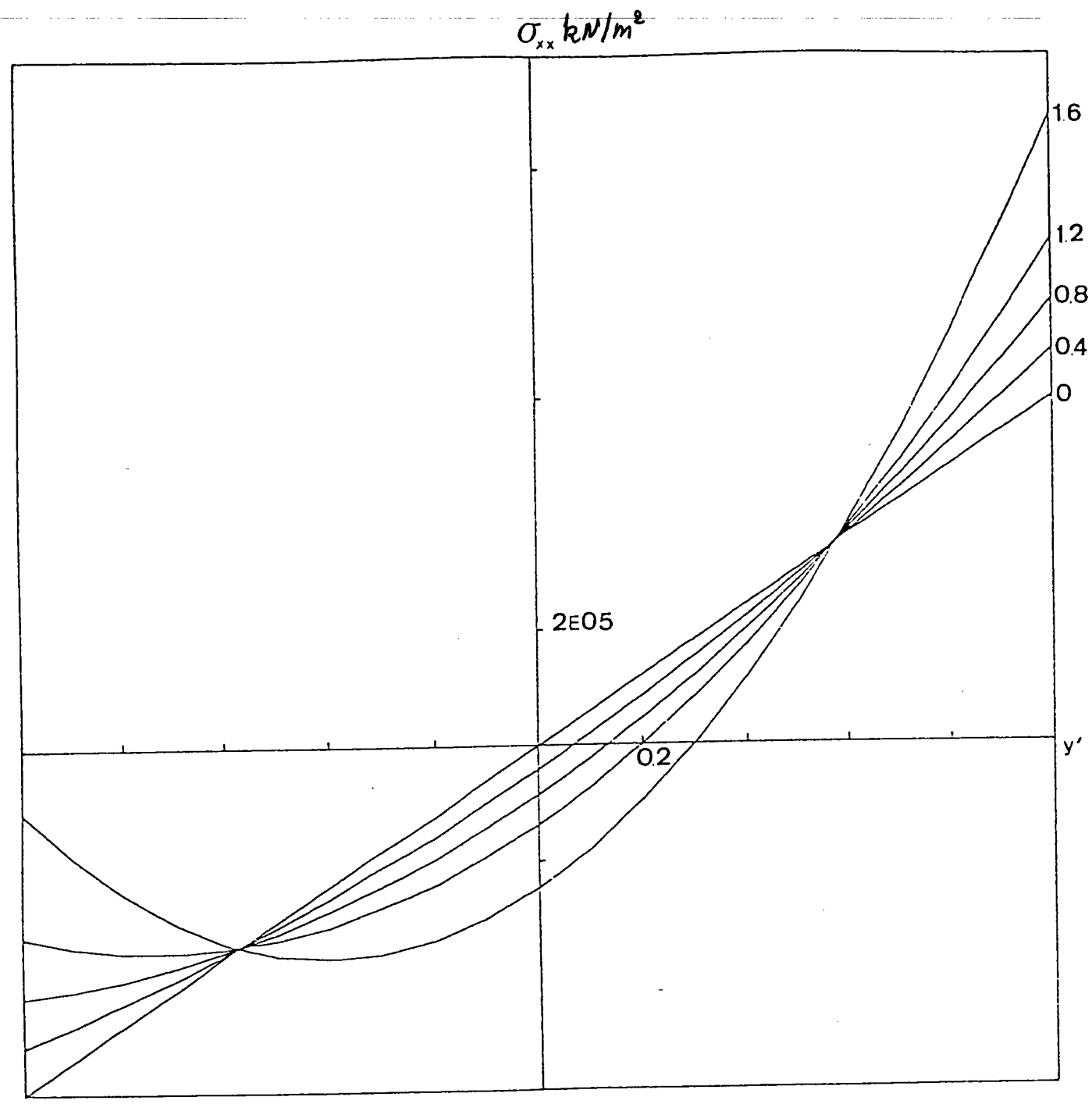
Nous n'avons pas tenu compte de la déformation inélastique. Si elle est compatible, c'est-à-dire $\eta = 0$, on la rajoute tout simplement aux déformations élastiques pour obtenir la déformation totale. Quand celle-ci est incompatible, l'équation du problème correspondant comporte un second membre qui dépendra de la solution du problème inélastique. Pour faire la liaison avec des cas réels où ce formalisme peut être appliqué, nous indiquons deux exemples de problèmes, l'un avec des déformations thermiques ou un corps thermo-élastique, l'autre exemple est le retrait observé dans le bois ou dans le béton par exemple.

Un premier exemple concerne les structures planes complexes "sandwiches" en multimatériaux utilisés dans les techniques d'isolation thermiques. Dans ce cas, on associe différentes couches de matériaux, les uns ayant de bonnes charactéristiques mécaniques, les autres de bonnes charactéristiques thermiques.

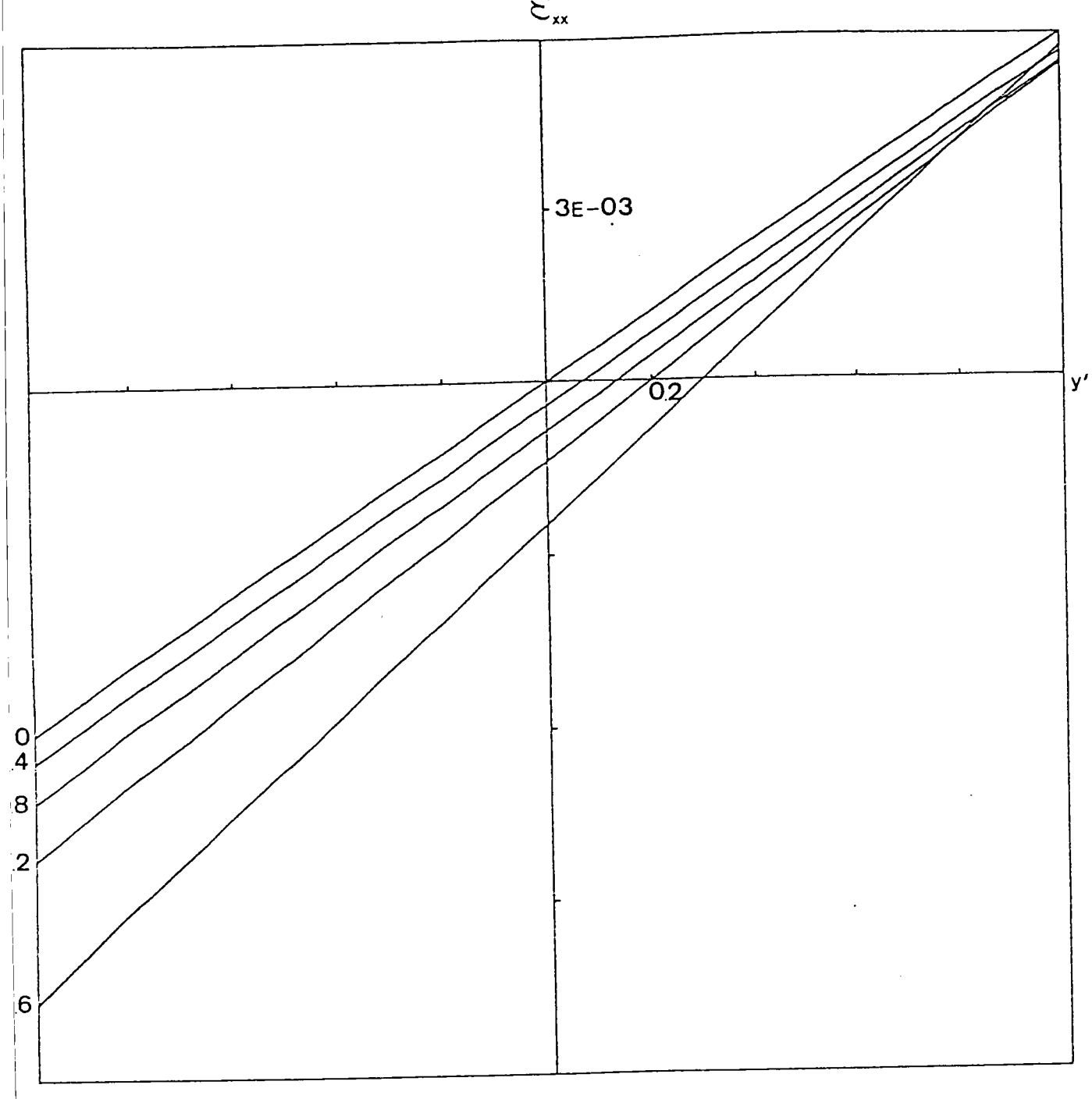
Un autre exemple concerne les problèmes de séchage du bois ou du béton pour lesquels on a à la fois, une déformation de retrait et une variation des constantes d'élasticité en fonction du taux d'humidité. Ce formalisme peut alors traiter le couplage entre variables mécaniques et variables physiques.

Les figures 1,2,3 sont tracées pour les valeurs suivantes des paramètres de la poutre :

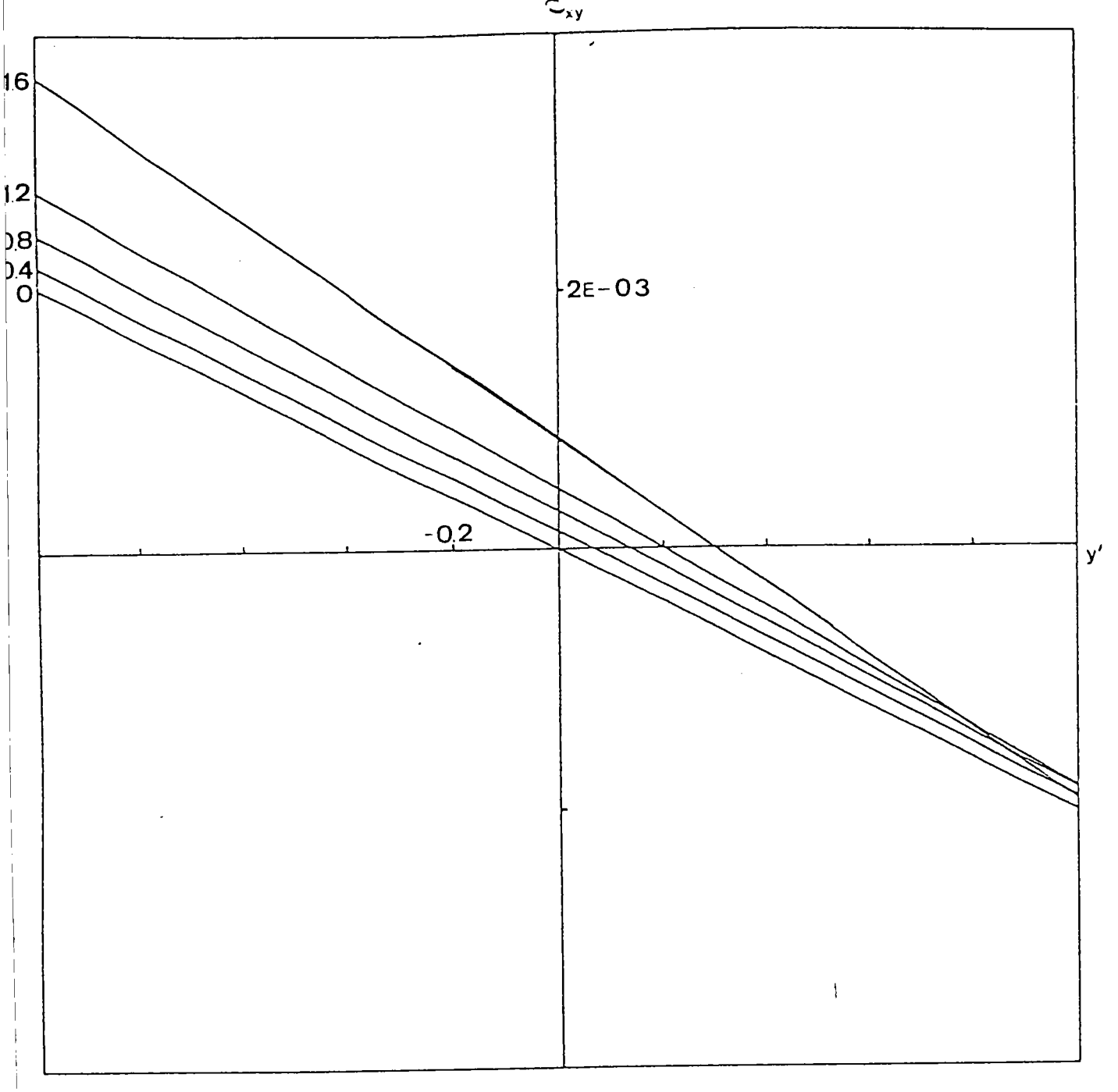
$b = 4.10^{-3}$ m
$M = 400 kN/m^2$
$h = 0.5$ m
$E = 10^7 kN/m^2$
A Variable
$\nu = 0.34$



FIG(1)
Contrainte hétérogène en fonction de y'
pour differents facteurs d'hétérogénéité.



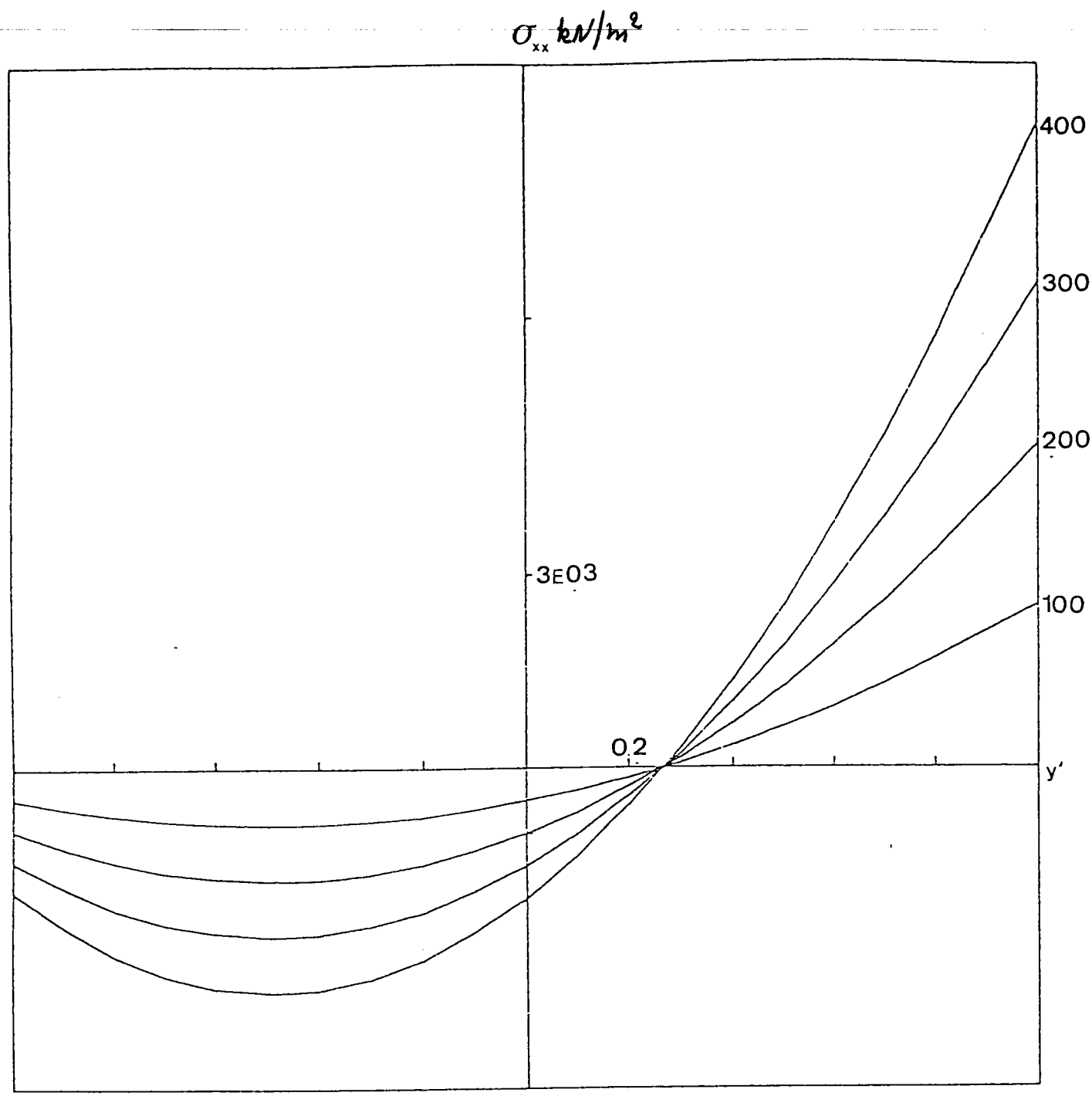
FIG(2)
Déformation hétérogène en fonction de y'
pour différents facteurs d'hétérogénéité.



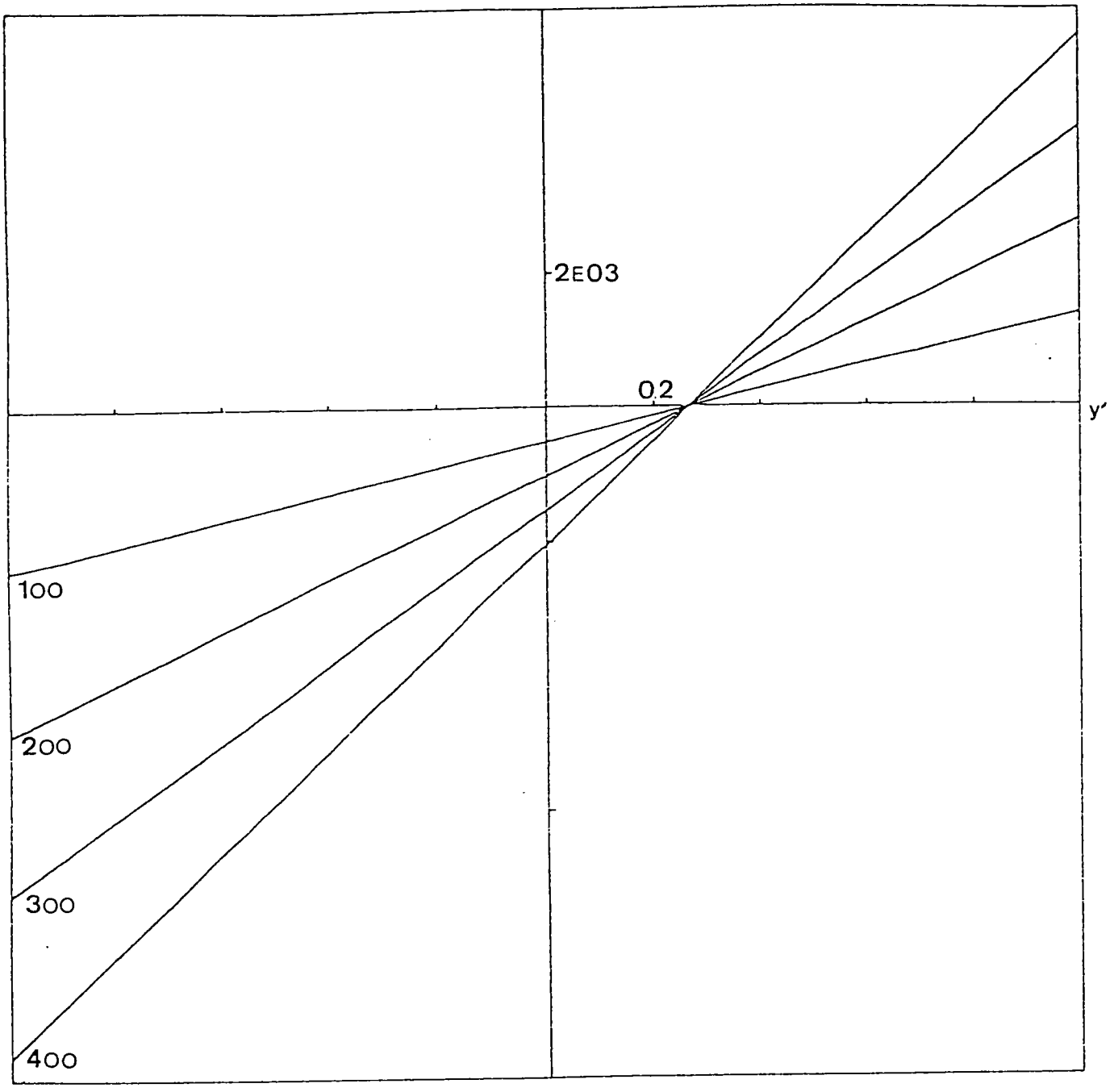
FIG(3)
ε_{yy} Hétérogène en fonction de y' pour
chaque valeur du facteur d'hétérogénéité.

Les figures 4,5,6 sont tracées pour les valeurs suivantes des paramètres de la poutre :

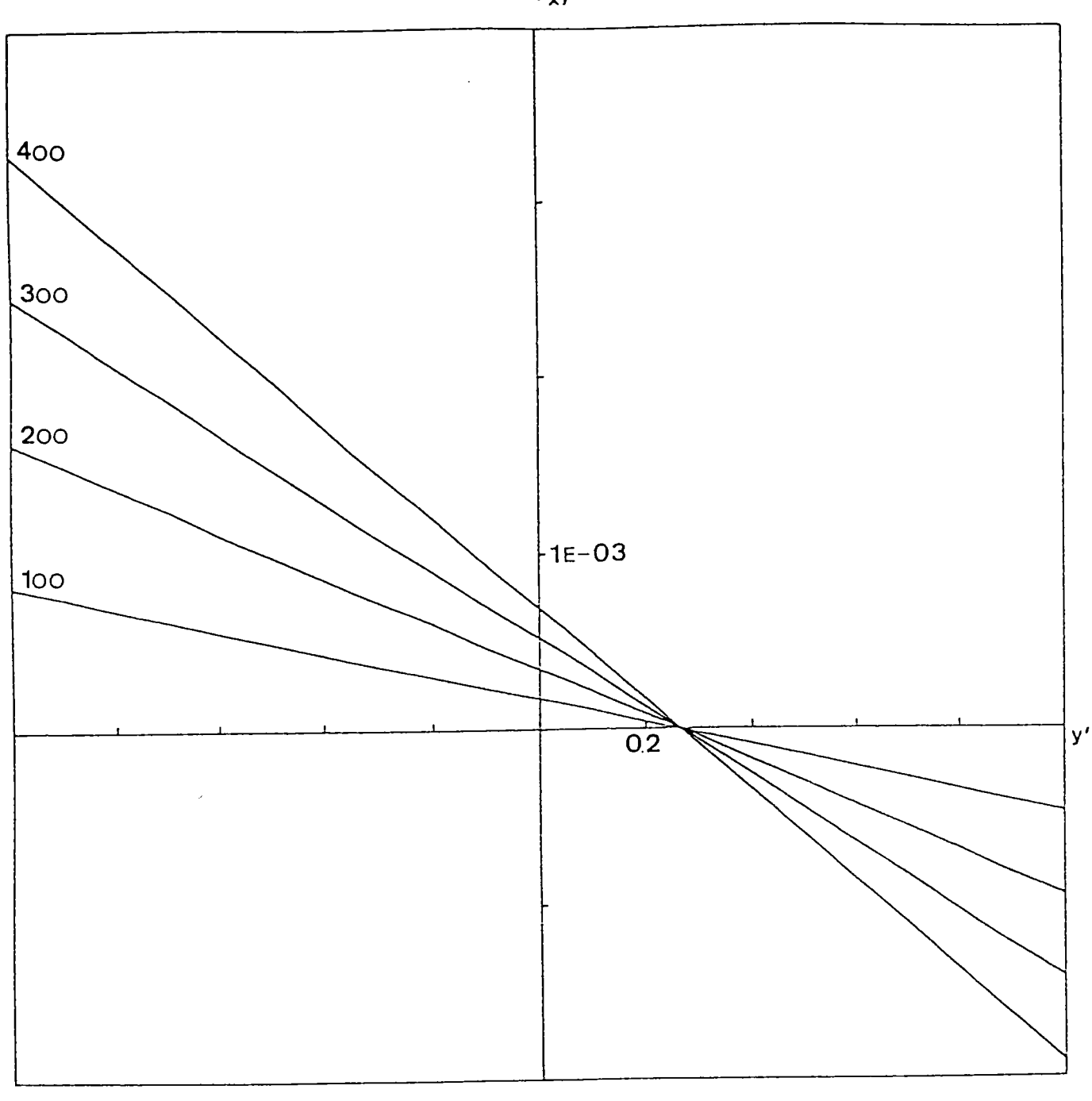
$b = 4\,10^{-3}\ m$
Π variable kN/m^2
$h = 0.5\ m$
$E = 10^7 kN/m^2$
$A = 1.6$
$\nu = 0.34$



FIG(4)
Variations de la contrainte hétérogène
en fonction du moment appliqué.



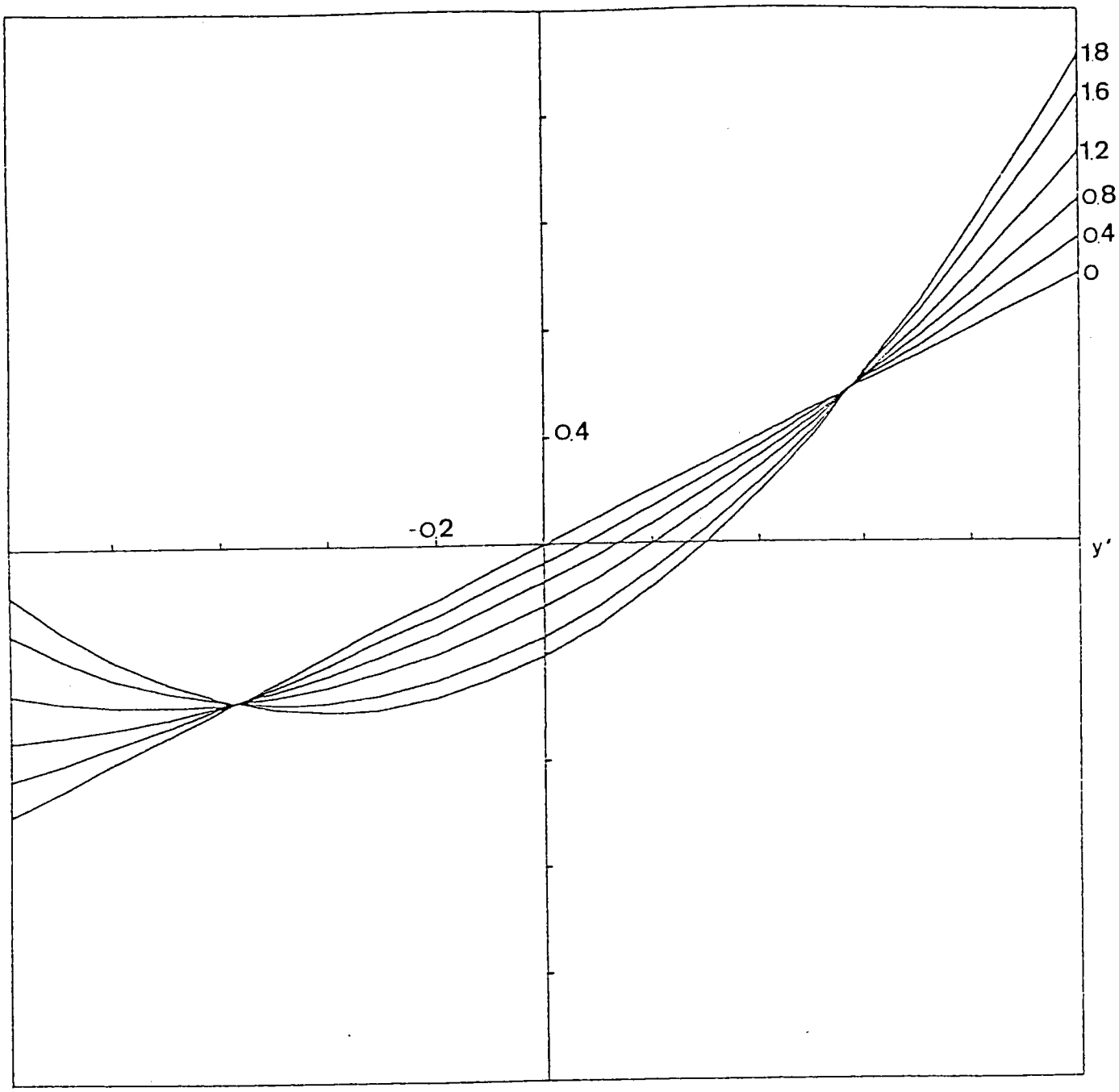
FIG(5)
Variations de la déformation hétérogène
en fonction du moment.



FIG(6)
Variations de la composante ε_{yy} des déformations
en fonction du moment.

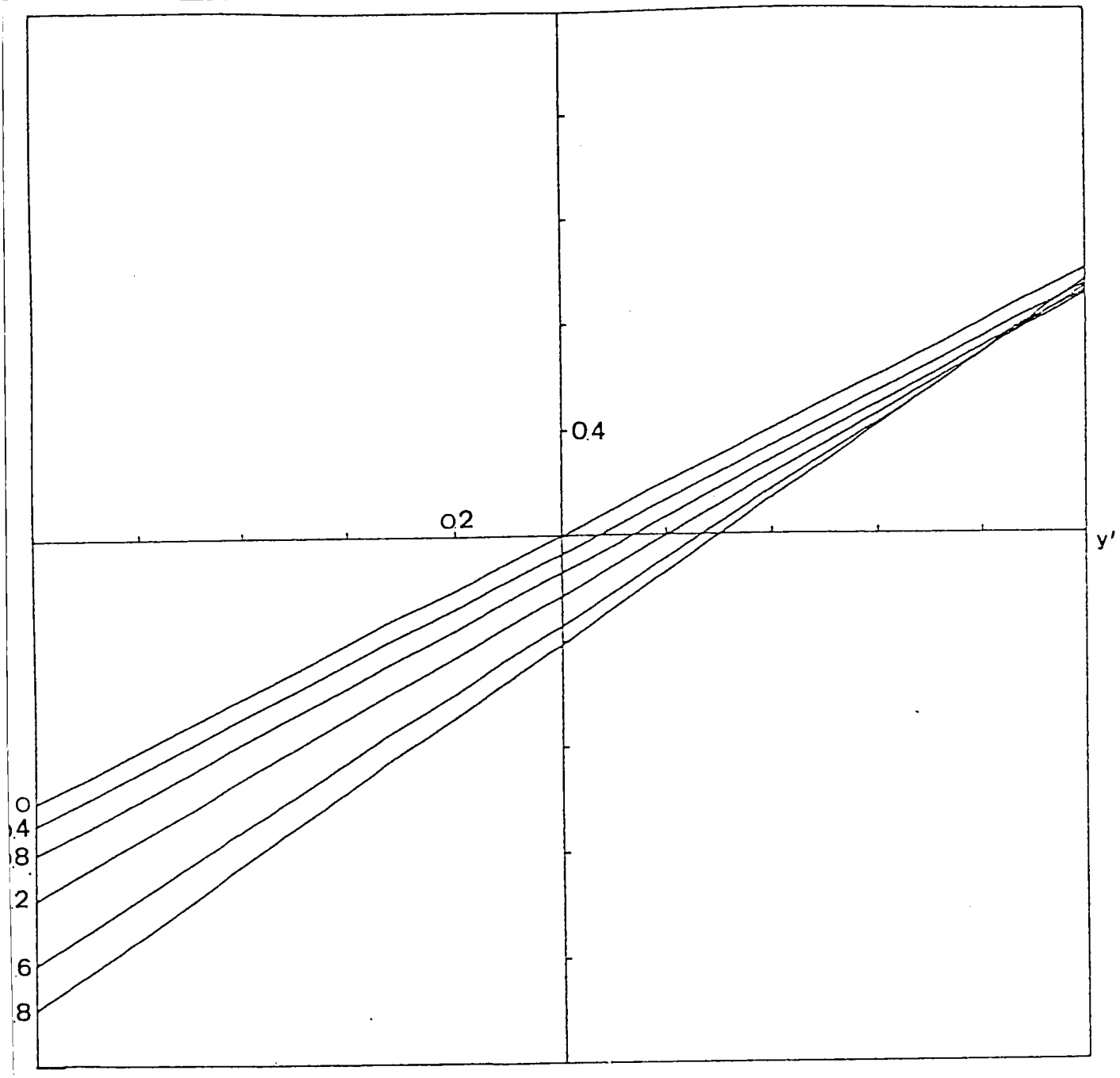
Les figures 7,8 sont tracées pour les valeurs suivantes des paramètres de la poutre :

$b = 4\ 10^{-3}\ m$
$\Pi = 400 kN/m^2$
$h = 0.5\ m$
$E = 10^7 kN/m^2$
A variable
$\nu = 0.34$



FIG(7)
Variations du rapport de la contrainte du milieu hétérogène avec la contrainte maximale du milieu homogène en fonction du facteur d'hétérogénéité.

ε_o



FIG(8)

Variations du rapport de la déformation du milieu hétérogène avec la déformation maximale du milieu homogène en fonction du facteur d'hétérogénéité.

Chapitre VI

Application de la formulation en déplacements à l'évaluation du retrait macroscopique et des contraintes internes dans le béton

6.1) Introduction

6.2) Propriétés et modélisation mécanique du béton "Bibliographie"

6.3) Application de la formulation en déplacement

6.3.1) Formulation générale

6.3.2) Milieu homogène

6.3.3) Milieu hétérogène dilué

6.4) Résultats et Discussion

VI) Application de la formulation en déplacement à l'évaluation du retrait macroscopique et des contraintes internes dans le béton

6.1) Introduction

Dans cette partie, nous appliquons la formulation en déplacements, de la théorie générale présentée dans le chapitre II, à l'étude du retrait du béton.

Nous nous limitons à calculer l'effet du retrait sur les déformations macroscopiques et sur les contraintes internes qui sont responsables du développement des fissures en l'absence de contraintes extérieures.

Nous considérons le béton comme un matériau biphasé, composé de liant et de gravier et nous appliquons la loi des mélanges pour obtenir le comportement global du matériau.

Le comportement mécanique du béton est très complexe, ce qui explique l'absence de théories physiques microscopiques et le développement de théories phénoménologiques macroscopiques. En l'absence de contrainte extérieure, le béton subit au cours de son existence une déformation inélastique appelée retrait.

En général, le retrait est une diminution volumique isotrope. Il est la cause des microfissures à l'échelle des grains du granulat et parfois de fissures précoces des ouvrages.

Sous une contrainte donnée, outre la déformation instantanée, il y a une déformation de retrait et une déformation de fluage. La déformation de retrait a des effets importants dans les grands ouvrages et dans le béton précontraint. On peut citer, le tassement des grands immeubles et le relâchement de la tension des fils d'acier dans le béton précontraint.

Nous nous proposons de donner un aperçu sur les théories utilisées pour modéliser le béton, ensuite nous calculerons, en fonction du retrait du liant, les équations d'évolution des déformations macroscopiques et les contraintes internes dans le matériau.

Nous supposons que le matériau est hétérogène, libre de contraintes extérieures et qu'il subit un retrait homogène et isotrope dans le liant.

6.2) Propriétés et modélisation mécanique du béton

Le béton est un matériau hétérogène, qui implique des intéractions entre des phénomènes non linéaires tel que la microdiffusion, le développement des fissures et l'écoulement plastique. La microstructure et les mécanismes en jeu dans le cas des bétons sont très complexes. Ainsi, il n'existe pas de théorie complète de mécanique physique pour décrire et prévoir son comportement et on a recours à des lois phénoménologiques.

Afin de mieux comprendre le comportement de ce matériau, nous commençons par donner quelques constatations expérimentales relatives au retrait du béton. Le lecteur peut consulter des listes exhaustives sur les propriétés du béton [20] :

- Le fluage du béton diminue si l'âge au chargement est plus grand. C'est le vieillissement du a lhydratation du ciment.

- A un taux d'humidité donné et une température donnée, le fluage du béton dépend linéairement des containtes pour des chargements allant jusqu'a 40 % de la contrainte à la rupture. Dans ces conditions, on peut appliquer le principe de superposition de Boltzman.

- Le vieillisement diminue avec une diminution d'humidité et augmente avec l'augmentation de température.

- Le retrait ne dépend pas des contraintes déviatoriques

- le béton résiste mieux après le séchage

- la vitesse du séchage augmente avec la température

Plusieurs modélisations mécaniques ont été avancées pour traiter le béton. Ces théories expliquent chacune quelques propriétés du béton et à nos jours, il n'existe pas de théories permettant l'introduction de tous les paramètres qui entrent en jeu. En particulier, l'influence des paramètres physiques tels que l'humidité, la température, la porosité, la fissuration, sur la loi de comportement demeure peu connue.

Ceci est dû essentiellement à la complexité des effets et au couplage entre les paramètres physiques et mécaniques du matériau. Nous rappelons les principales théories utilisées pour modéliser le béton.

Outre le phénomène de fluage, le béton est un matériau qui vieillit, l'ensemble des paramètres physico-mécaniques varient avec le temps. La modélisation du fluage du béton se fait de deux façons :

- soit par le calcul de fonctions explicites en fonction du temps à partir de courbes expérimentales [21]. Cette méthode n'a qu'un interêt pratique et ne permet pas d'apprécier l'influence des différents paramètres.

- Soit, en utilisant la théorie de la viscoélasticité avec vieillissement [22]. Dans cette théorie on néglige couramment l'effet direct de l'humidité et de la température sur le comportement du matériau.

Dans le cas linéaire, cette théorie permet d'expliquer le comportement en fluage du béton. On suppose que le retrait et le fluage sont indépendant. La déformation totale est la somme de la déformation de retrait et celle du fluage mesurées indépendamment et en supposant un découplage physico-mécanique total [23].

L'hypothèse de linéarité est valable uniquement pour des valeurs de contraintes ne dépassant pas 40 % de la contrainte à la rupture au même âge du matériau. Au delà, le comportement devient non linéaire. Cette théorie ne permet pas d'expliquer les phénomènes non linéaires.
Ces phénomènes sont surtout dus aux effets de la diffusion de l'eau dans le béton et du développement des fissures, en plus du caractère composite du matériau. Reste à signaler que la forme réelle du problème de fluage n'admet pas de solution analytique et qu'on utilise des méthodes numériques.

Le béton est un matériau fissuré, lorsqu'il est sollicité au delà de la phase élastique, il y a propagation de ces fissures.

Il existe plusieurs théories incluant la fissuration. Nous citons ici un travail récent dû à Mortiz [24] [25], qui outre l'utilisation de modèles incluant la propagation des fissures, considère le caractère composite du matériau. On considère le béton comme un matériau biphasé composé de liant et de gravier. On modélise séparément chaque phase du matériau et on applique la loi des mélanges pour prédire le comportement global du matériau.

Quoi que, ce modèle permet d'expliquer quelques propriétés non linéaires du béton, il ne tient compte ni du fluage, ni de l'humidité ou de la température. Enfin, citons que les méthodes incrémentales s'appliquent au béton [26] et permettent d'inclure l'effet d'humidité. Le problème formulé de cette façon aboutit à un système d'équation aux dérivées partielles que l'on résoud par la méthode des éléments finis.

L'introduction de l'effet du retrait sur le comportement mécanique du béton passe par la compréhension du phénomène de diffusion de l'eau dans le béton. Les études menées jusqu'ici ne lient pas de façon explicite le retrait en fonction de l'humidité [28] [29]. En pratique, on mesure le retrait en fonction du temps et on l' ajoute aux déformations mécaniques faisant l'hypothèse d'un découplage mécanique total.

En toute rigueur, c'est d'une façon générale, la diffusion dans les solides poreux qu'il faut considérer et ceci doit amener à inclure des paramètres physiques dans les équations mécaniques, c'est-à-dire un effet de couplage du genre thermoélasticité couplée. En effet, la solution du problème de fluage et du retrait dépend de celle de la diffusion de l'eau dans le béton. Le couplage en retour est négligeable. La formulation thermodynamique de ces problèmes a été donnée par Aifantis [30] [31] sans faire allusion au matériau béton.

A travers cette bibliographie succinte, on voit d'une part la variété du comportement du béton et d'autre part la difficulté d'inclure touts les paramètres physiques, en conservant des théories simples.

Dans ce qui suit, nous traitons un aspect particulier du problème général du comportement du béton : Il s'agit de décrire le retrait global et les contraintes internes dus au retrait du liant dans l'hypothèse d'élasticité linéaire mais hétérogène et en l'absence de fissures et de décohésions aux interfaces. Nous appliquons alors la formulation en déplacement de manière générale. Ensuite, nous traitons le problème dans le cas d'un milieu homogène et celui du milieu hétérogène dilué.

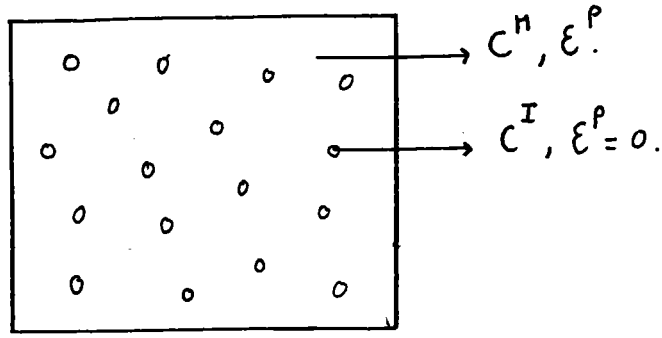
6.3) Application de la formulation en déplacement

6.3.1) Formulation générale

Nous considérons le béton comme un matériau biphasé constitué de gravier (inclusion) et de liant (matrice). Pour appliquer le modèle autocohérent au matériau, nous reprenons l'équation intégrale générale formulée en déplacement dans le chapitre II. Le retrait du liant que nous supposons uniforme entraine une déformation totale macroscopique du béton et des contraintes internes. Le couplage en retour est négligé [20]

Les constantes d'élasticité peuvent dépendre du temps par l'intermédiaire de l'humidité, nous supposons que l'interface gravier-liant est continue et qu'il n'y a pas de diffusion à ce niveau.

Avant d'appliquer la formulation en déplacement, calculons d'abord la déformation totale macroscopique en fonction des déformations du liant et celle du gravier. Nous supposons que le liant subit une déformation totale qui est la somme d'une déformation élastique et du retrait, alors que le gravier subit des déformations que nous supposons élastiques. La situation est résumée dans la figure ci-dessous :



C^M constantes d'élasticité du liant

C^I constantes d'élasticité du gravier

ε^P retrait uniforme dans le liant

Nous notons $\S$ la fraction volumique du gravier.

La déformation totale dans le milieu s'écrit de manière générale :

$$\varepsilon^T_{ij}(x) = \varepsilon^P_{ij}(x) + \varepsilon^e_{ij}(x) \qquad (6.3.1)$$

en intégrant sur tout le volume, nous obtenons la déformation totale macroscopique qui s'écrit alors :

$$E^T_{ij} = \frac{1}{V}\int_V \left(\varepsilon^P_{ij}(x) + \varepsilon^e_{ij}(x)\right) dw$$

elle s'écrit encore :

$$E^T_{ij} = \frac{V^M}{V}\,\varepsilon^P_{ij} + \frac{V^M}{V}\,\varepsilon^{e_M}_{ij} + \frac{V^I}{V}\,\varepsilon^{e_I}_{ij}$$

$\varepsilon^{e_M}_{ij}, \varepsilon^{e_I}_{ij}$ déformation élastique dans le liant et dans le gravier.

V^M, V^I volume repectif du liant et du gravier.

Cette déformation macroscopique s'écrit en fonction de la fraction volumique :

$$E^T_{ij} = (1-f)\,\varepsilon^p_{ij} + (1-f)\,\varepsilon^{e_m}_{ij} + f\,\varepsilon^{e_I}_{ij} \qquad (6.3.2)$$

en l'absence de contrainte extérieure, la contrainte macroscopique est nulle :

$$\Sigma_{ij} = \frac{1}{V}\int_V \sigma_{ij}\, dv = 0$$

ce qui implique :

$$f\,\sigma^I_{ij} + (1-f)\,\sigma^M_{ij} = 0 \qquad (6.3.3)$$

σ^M_{ij}, σ^I_{ij} contrainte dans le liant et dans le gravier. Elles s'écrivent à l'aide de la loi de Hooke :

$$\sigma^I_{ij} = C^I_{ijkl}\,\varepsilon^{e_I}_{kl}$$

$$\sigma^M_{ij} = C^m_{ijrs}\,\varepsilon^{e_m}_{rs} \qquad (6.3.4)$$

que nous remplaçons dans la relation (6.3.3) ce qui donne :

$$f\,C^I_{ijkl}\,\varepsilon^{e_I}_{kl} + (1-f)\,C^m_{ijrs}\,\varepsilon^{e_M}_{rs} = 0$$

d'où nous tirons :

$$(1-f)\,\varepsilon^{e_m}_{rs} = -\,S^M_{rsij}\,C^I_{ijkl}\,f\,\varepsilon^{e_I}_{kl} \qquad (6.3.5)$$

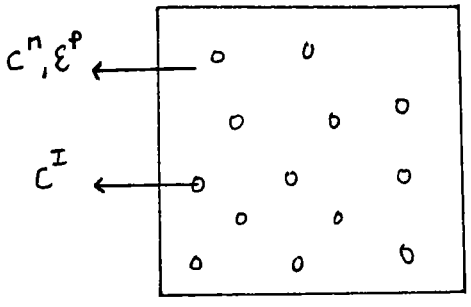
S^n est la compliance élastique du liant.

En injectant (6.3.4) dans la relation (6.3.2), on a alors :

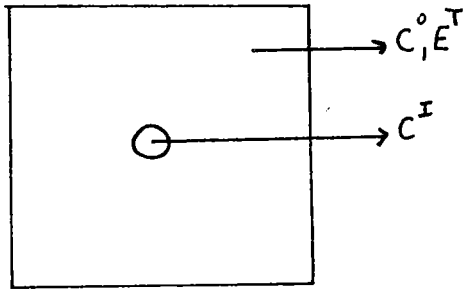
$$E^T_{ij} = (1-f)\,\varepsilon^p_{ij} + f\left(I_{ijrs} - f S^n_{ijkl}\, C^I_{klrs}\right)\varepsilon^e_{rs} \qquad (6.3.6)$$

Pour calculer la déformation totale macroscopique, il suffit alors de pouvoir calculer la déformation élastique dans les inclusions (cailloux) et disposer de l'expression explicite du retrait en fonction de l'humidité ou du temps.

Pour calculer ε^{eI} , nous allons appliquer le modèle auto-cohérent a un site au matériau béton biphasé. Pour cela, nous ramenons le problème réel à un problème d'interaction entre une inclusion et un milieu homogène équivalent au milieu réel, de constantes d'élasticité C^o inconnue et subissant la déformation macroscopique E^T du retrait dont la valeur reste à calculer. Soit schématiquement :



Problème réel



Problème équivalent

Pour calculer la déformation élastique dans l'inclusion, nous reprenons l'équation(2.3.18)de Berceiller et Zaoui formulée dans le chapitre II. Cette équation s'écrit :

$$\varepsilon^T_{mn}(r) = \varepsilon^o_{mn} + \int_{V'} \Gamma_{mnij}(r-r')\left(C_{ijkl}(r')\,\varepsilon^p_{kl}(r') - \delta C_{ijkl}(r')\varepsilon^T_{kl}(r')\right) dv'$$

Dans notre cas ε^0 est égale a E^T, E^T étant la déformation macroscopique du milieu homogène équivalent :

$$\varepsilon^T_{mn}(r) = E^T_{mn} + \int_{V'} \Gamma_{mnij}(r-r') \left(C_{ijkl}(r') \varepsilon^p_{kl}(r') - \delta C_{ijkl}(r') \varepsilon^T_{kl}(r') \right) dv'$$

à cette déformation, nous retranchons la déformation macroscopique uniforme E^T:

$$\varepsilon^T_{mn}(r) - E^T_{mn} = \int_{V'} \Gamma_{mnij}(r-r') \left(C_{ijkl}(r') \left(\varepsilon^p_{kl}(r') - E^T_{kl} \right) - \delta C_{ijkl}(r') \left(\varepsilon^T_{kl}(r') - E^T_{kl} \right) \right) dv'$$

Le retrait et les constantes élastiques s'écrivent à l'aide de la fonction indicatrice $\theta(r)$ définit par :

$$\theta(r) = \begin{cases} 1 \text{ si } r \in V_I \\ 0 \text{ si } r \notin V_I \end{cases}$$

V_I étant le volume de l'inclusion

$$\varepsilon^p_{kl}(r) = E^T_{kl} \left(1 - \theta(r) \right)$$

$$C_{ijkl}(r) = C^0_{ijkl} + \left(C^I_{ijkl} - C^0_{ijkl} \right) \theta(r).$$

dans l'inclusion cette équation devient :

$$\varepsilon^T_{mn}(r) - E^T_{mn} = - \int_{V_I} \Gamma_{mnij}(r-r') \, C^I_{ijkl} \, E^T_{kl} \, dv'$$

$$- \int_{V_I} \Gamma_{mnij}(r-r') \, \Delta C_{ijkl} \left(\varepsilon^T_{kl}(r') - E^T_{kl} \right) dv'$$

Avec :

$$\Delta C_{ijkl} = C^{I}_{ijkl} - C^{0}_{ijkl}$$

La déformation dans une inclusion ellipsoïdale étant uniforme [8], on a en notation symbolique :

$$\varepsilon^{T} - E^{T} = -\Gamma C^{0} E^{T} - \Gamma \left(C^{I} - C^{0} \right) \varepsilon^{T}$$

d'où nous tirons :

$$\varepsilon^{T} = \left(1 + \Gamma \Delta C \right)^{-1} \left(1 - \Gamma C^{0} \right) E^{T}$$

qui est aussi la déformation élastique dans l'inclusion puisque $\varepsilon^{p} = 0$ dans V_I :

$$\varepsilon^{e_I} = \left(1 + \Gamma \Delta C \right)^{-1} \left(1 - \Gamma C^{0} \right) E^{T}$$

que l'on remplace dans la relation (6.3.6) on a alors :

$$E^{T} = (1 - f)\, \varepsilon^{p} + f \left(I - S^{M} C^{I} \right) \left(1 + \Gamma \Delta C \right)^{-1} \left(1 - \Gamma C^{0} \right) E^{T} \qquad (6.3.7)$$

Cette relation donne la déformation totale macroscopique du milieu en fonction de ε^{p} . Les contraintes dans l'inclusion s'obtiennent par la relation (6.3.4) et les contraintes moyennes dans la matrice par la relation (6.3.3).

Dans cette relation, les constantes d'élasticité C^{0} du milieu homogène équivalent sont à calculer par des opérations de moyenne [32]. En effet, dans la relation (6.3.7) les coefficients de ε^{p} et E^{T} peuvent être interprétés comme des coefficients de localisation et sa moyenne sur tout le milieu doit donc être nulle.

Dans ce qui suit nous allons appliquer cette formulation au cas du milieu homogène et à celui du milieu hétérogène dilué, la résolution est alors plus simple que dans le cas du problème réel.

6.3.2) Milieu homogène

Quand le milieu est homogène, les constantes d'élasticité du liant et du gravier sont égales, on a alors :

$$S^m C^I = I$$

La relation (6.3.5) donne alors :

$$E^T = \left(1 - \frac{g}{8}\right) \varepsilon^p \qquad (6.3.8)$$

Cette déformation totale macroscopique est due uniquement au retrait.

Cette formule donne la déformation macroscopique en fonction de la déformation de retrait. La contrainte macroscopique est nulle. En revanche, les contraintes locales ne le sont pas.

Le milieu étant homogène, on a:

$$C^m = C^I = C^0$$

La loi de Hooke s'écrit alors :

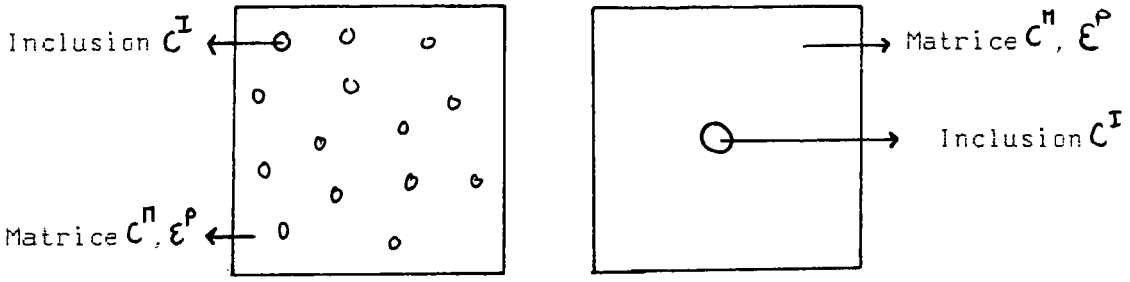
$$\sigma = C^0 \varepsilon^e$$

En utilisant la relation (6.3.1). Nous pouvons écrire :

$$\sigma = C^0 \left(\varepsilon^T - \varepsilon^p\right)$$

6.3.3) Milieu hétérogène dilué :

Quand le milieu est dilué, on peut négliger les interactions entre les graviers. Nous pouvons alors assimiler le problème à un problème d'interaction entre une inclusion de constantes d'élasticité C^I est une matrice de constantes d'élasticité C^M, subissant une déformation de retrait égale à ε^p. On a donc le schéma suivant :



Problème réel Problème équivalent

Reprenons l'équation (6.3.7) qui s'écrit :

$$E^T = (1-f)\,\varepsilon^p + f\left(I - S^M C^I\right)\left(1 + \Gamma^M \Delta C\right)^{-1}\left(1 - \Gamma^M C^0\right) E^T$$

La déformation macroscopique totale s'écrit alors :

$$E^T = \frac{(1-f)}{1 - f\left(I - S^M C^I\right)\left(1 + \Gamma^M \Delta C\right)^{-1}\left(1 - \Gamma^M C^0\right)}\,\varepsilon^p \qquad (6.3.9)$$

on pose :

$$X = \left(I - S^M C^I\right)\left(1 + \Gamma^M \Delta C\right)^{-1}\left(1 - \Gamma^M C^0\right)$$

Le milieu étant dilué, X prend des valeurs petites par rapport à 1. Un développement limité au premier ordre donne pour E^T :

$$E^T = (1-f)\left(1 + fX\right)\varepsilon^p$$

soit :

$$E^T = (1-f)\,\varepsilon^p + (1-f)\,f \times \varepsilon^p$$

En négligeant les termes contenant f^2, on a alors la relation finale :

$$E^T = (1-f)\varepsilon^p + f\left(I - S^m C^I\right)\left(1 + \Gamma \Delta C\right)^{-1}\left(1 - \Gamma C^0\right)\varepsilon^p \qquad (6.3.10)$$

ou en fonction du tenseur S d'Eshelby définit par :

$$S = \Gamma C^0 = \Gamma C^m.$$

$$E^T = (1-f)\varepsilon^p + f\left(I - S^m C^I\right)\left(1 + \frac{S\Delta C}{C^m}\right)^{-1}\left(I - S\right)\varepsilon^p \qquad (6.3.11)$$

qui est la solution de l'inclusion hétérogène d'Eshelby avec une déformation uniforme dans la matrice.
Les contraintes dans l'inclusion s'écrivent :

$$\sigma^I = C^I \varepsilon^{e_I}$$

qui s'écrit encore :

$$\sigma^I = C^m \left(C^m + \Delta C S\right)^{-1}\left(I - S\right) C^I \varepsilon^p \qquad (6.3.12)$$

La contrainte dans la matrice peut être calculée par la relation (6.3.3).
Le tenseur des déformations de retrait étant diagonal, explicitons les dernières formules dans un cas isotrope avec une inclusion sphérique.

Reprenons donc l'équation (6.3.11) :

$$E^T = (1-f)\varepsilon^p + f\left(I - S^m C^I\right)\left(1 + \frac{S\Delta C}{C^m}\right)^{-1}\left(I - S\right)\varepsilon^p$$

Pour une inclusion sphérique, le tenseur S d'Eshelby devient [7] :

$$S = \frac{1}{3}\,\frac{1+\nu^{\circ}}{1-\nu^{\circ}}$$

En prenant $\nu^{\circ} = 1/2$, valeur réaliste pour le béton, prend la valeur suivante :

$$S \simeq 1/2$$

En remplaçant S par sa valeur et les constantes d'élasticité par des coefficients de compressibilité, on a alors :

$$E^{T} = (1-f)\,\varepsilon^{p} + f\left(I - \frac{k^{I}}{k^{m}}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{k^{I}-k^{m}}{k^{m}}\right)^{-1}\frac{1}{2}\,\varepsilon^{p}$$

qui s'écrit alors :

$$E^{T} = (1-f)\,\varepsilon^{p} + f\left(\frac{k^{m}-k^{I}}{k^{m}}\right)\left(\frac{2k^{m}}{k^{I}-k^{m}}\right)\frac{1}{2}\,\varepsilon^{p}$$

on obtient finalement :

$$E^{T} = (1-f)\,\varepsilon^{p} + f\left(\frac{k^{m}-k^{I}}{k^{I}+k^{m}}\right)\frac{1}{2}\,\varepsilon^{p}$$

nous posons :

$$X = \frac{k^{I}-k^{M}}{k^{M}}$$

$$E^{T} = (1-f)\,\varepsilon^{p} - f\left(\frac{X}{X+2}\right)\varepsilon^{p} \qquad (6.3.13)$$

Les contraintes s'obtiennent alors directement de l'équation (6.3.12).

6.4) Résultats et Discussion

En utilisant les formules (6.3.8) (6.3.13) , nous avons tracé le rapport de la déformation totale du béton à la déformation de retrait du liant $(\varepsilon^T/\varepsilon^P)$ en fonction de la fraction volumique pour un rapport d'hétérogénéité χ constant. On constate que cette courbe est linéaire (Fig (1)).

De même, nous avons tracé $(\varepsilon^T/\varepsilon^P)$ en fonction de χ à des fractions volumiques constantes (Fig(2)); c'est une courbe de plus en plus décroissante avec la fraction volumique. Pour le béton, la fraction volumique du gravier varie en général autour de la valeur 0.5.

La figure (Fig(3)) représente le retrait du liant et celui du béton mesuré expérimentalement dans une atmosphère à 50 % d'humidité [33]. Nous nous proposons de calculer la courbe de retrait du béton à partir de celle du liant en utilisant ces résultats.

Nous ferons d'abord le calcul par la formule (6.3.8) c'est-à-dire dans le cas d'un milieu homogène. Ensuite, nous ferons le calcul par la formule (6.3.13) c'est-à-dire dans le cas d'un milieu hétérogène. Nous comparons les résultats obtenus par chacun de ces deux cas.

Sur la figure (4) nous avons représenté les points calculés théoriquement dans le cas du milieu homogène, nous avons fait le calcul pour les fractions volumiques 0.3 et 0.5, les points théoriques encadrent la courbe expérimentale, de plus un accord satisfaisant est observé pour f = 0.5 valeur réelle de f dans le béton.

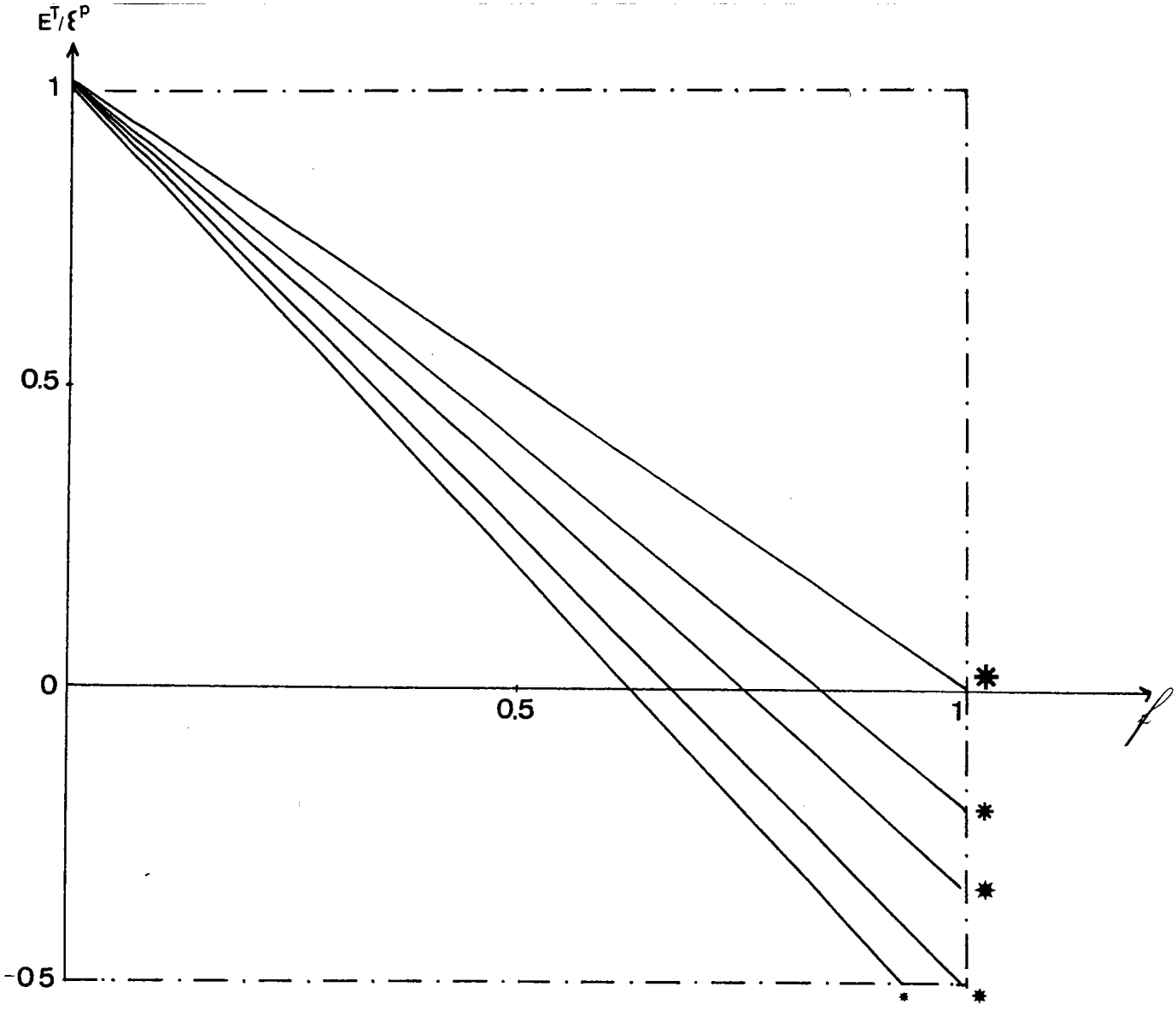
Dans les figures (5), nous avons fait le même calcul dans le cas du milieu hétérogène, un bon accord est observé au début du séchage, ce qui est normal car le milieu est fortement hétérogène au début, ensuite les points théoriques s'écartent des points expérimentaux ce qui est aussi normal le milieu tendant vers un milieu homogène. Il est clair que χ ne prend pas une valeur constante au cours du séchage mais décroit continuellement avec le temps du séchage, l'introduction de valeur réelle de χ peut alors améliorer les résultats obtenus.

La figure (6) permet de voir l'écart entre les valeurs calculées dans le cas du milieu homogène et celles calculées dans le cas du milieu hétérogène. la courbe réelle doit être composée des trois courbes suivant la décroissance de χ.

Dans le cas d'un milieu hétérogène non dilué, il faut appliquer la formulation générale, c'est-à-dire calculer les coefficients effectifs du matériau.

Le couplage entre la formulation en déplacements et le phénomène de diffusion peut aboutir à un comportement viscoélastique [30].

De plus, le caractère composite du matériau peut permettre d'expliquer l'hystérisis observée lors de l'application de contraintes cycliques [24].



Fig(1)

✱ X = 0 Variations de (E^T/ε^p) avec ℓ à X constant

✱ X = 0.5

✱ X = 1

✱ X = 2

* X = 3

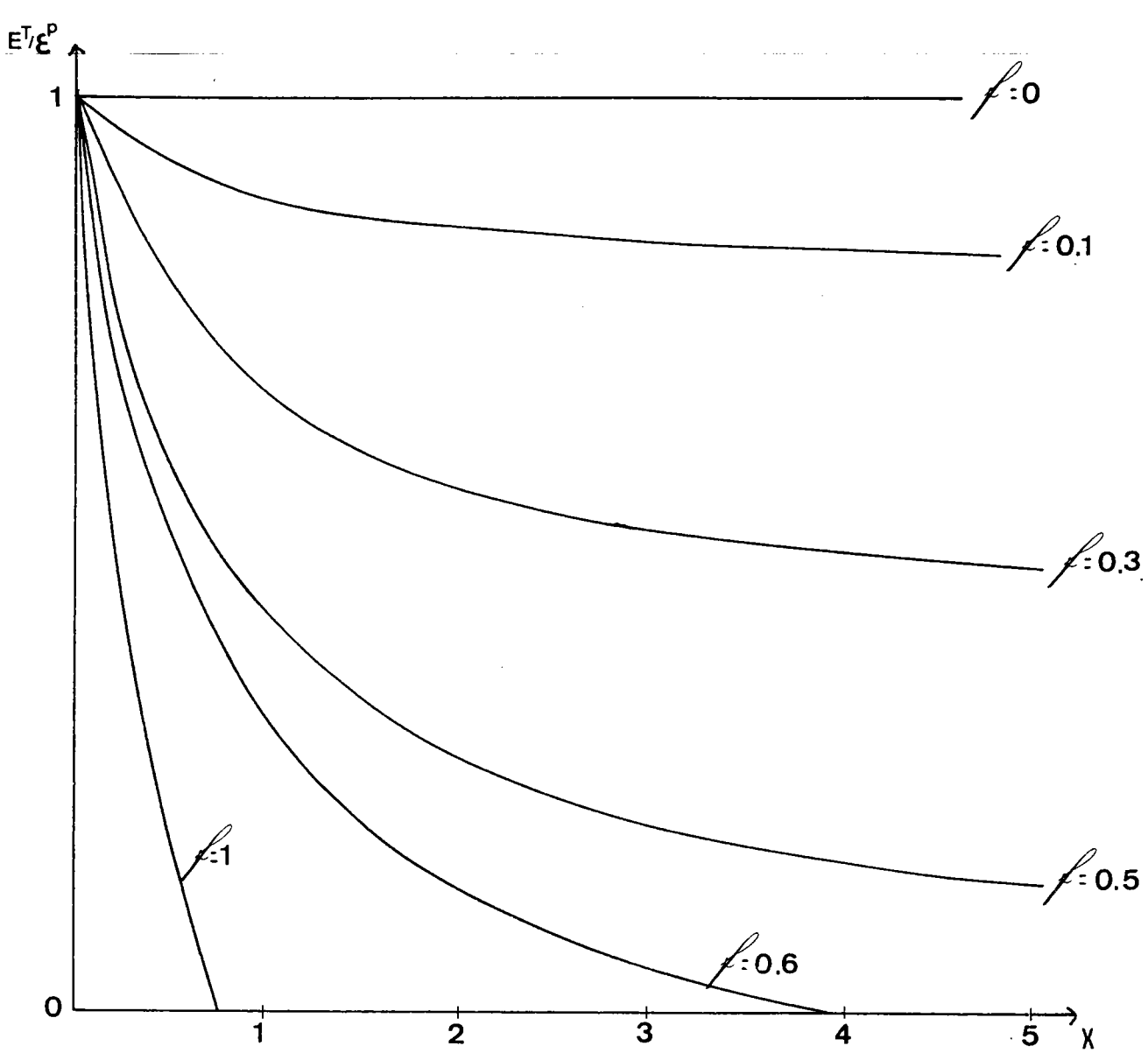
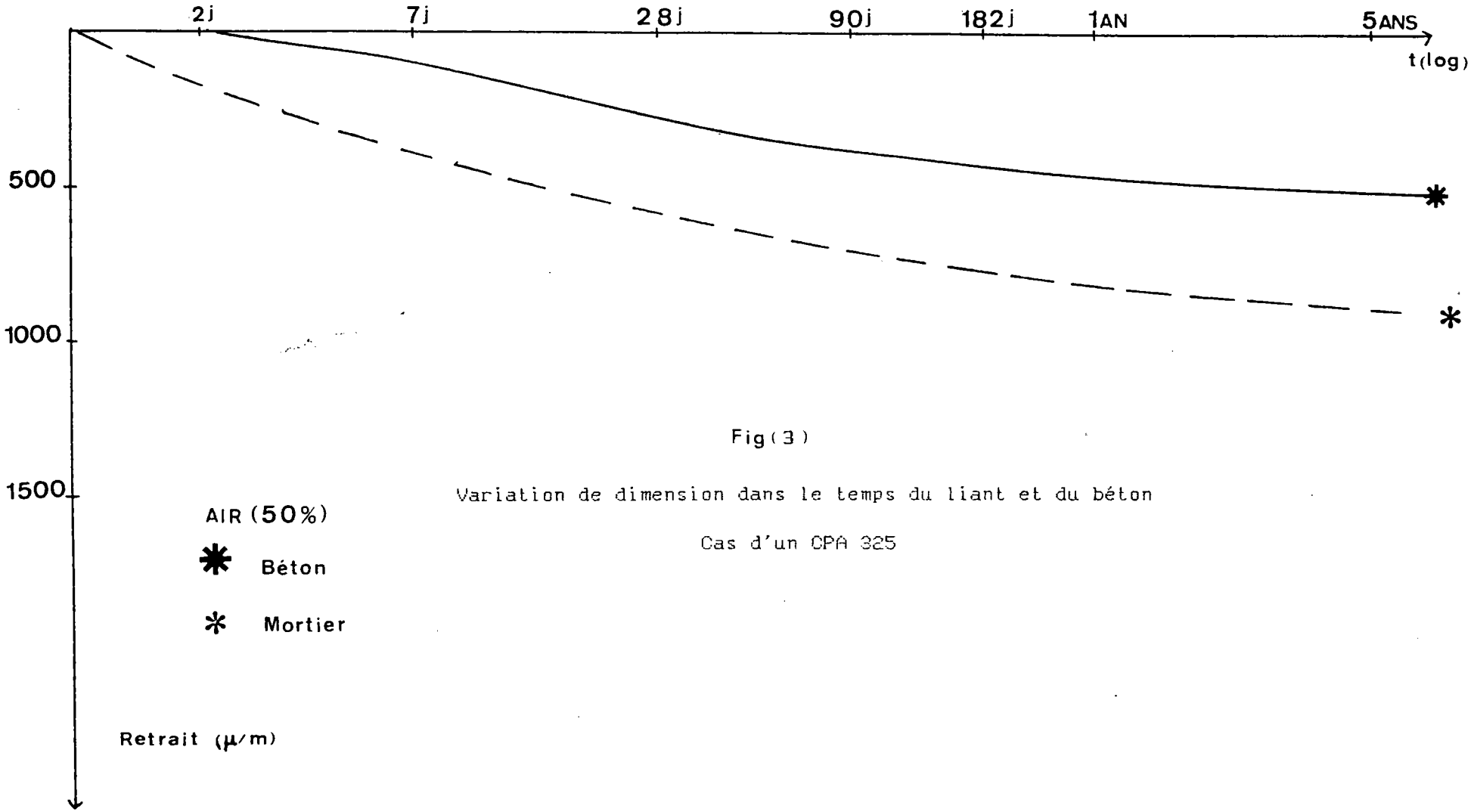


Fig (2)

Variations de $\left(E^T/\varepsilon^p\right)$ avec X à ℓ constante



Fig(3)

Variation de dimension dans le temps du liant et du béton

Cas d'un CPA 325

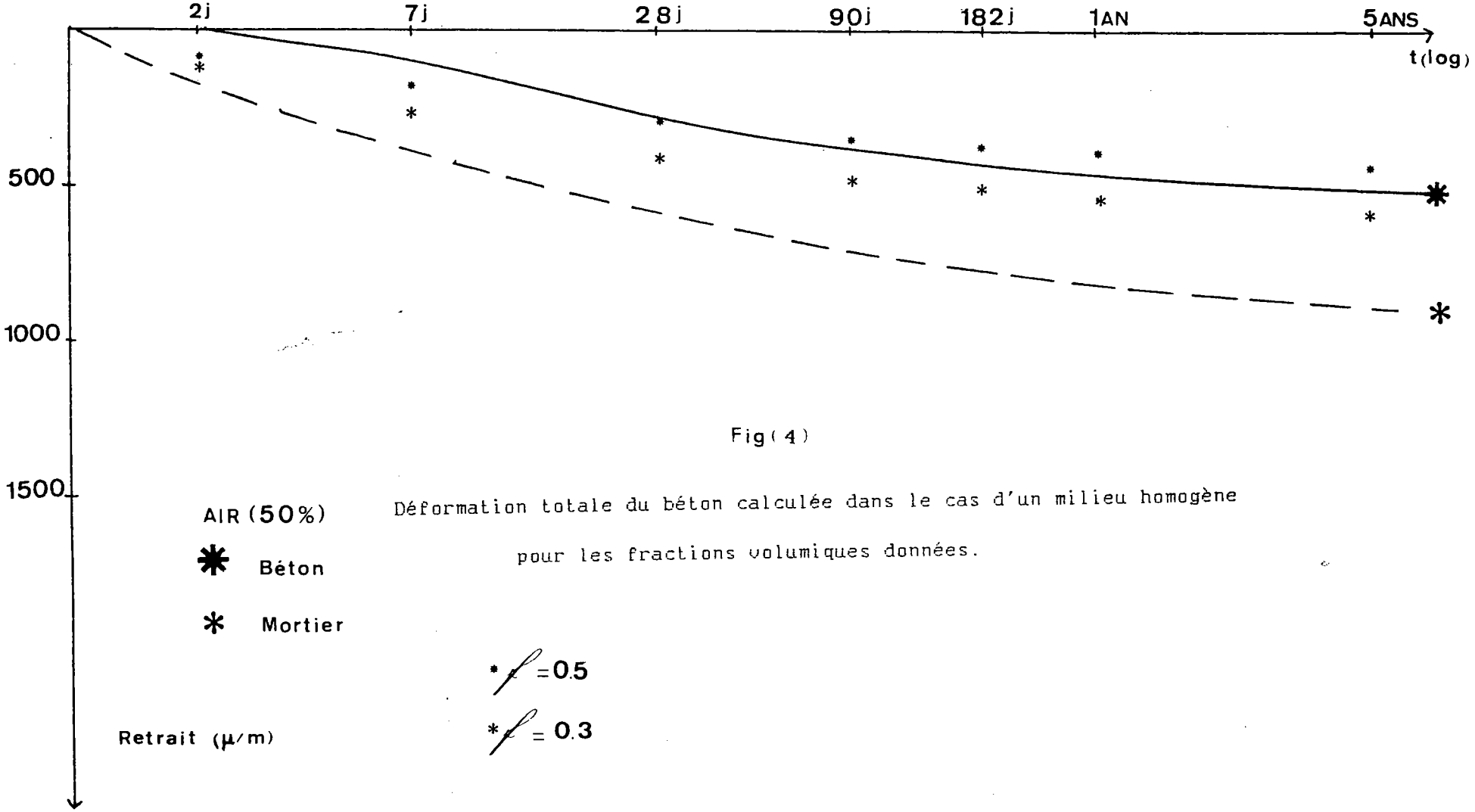
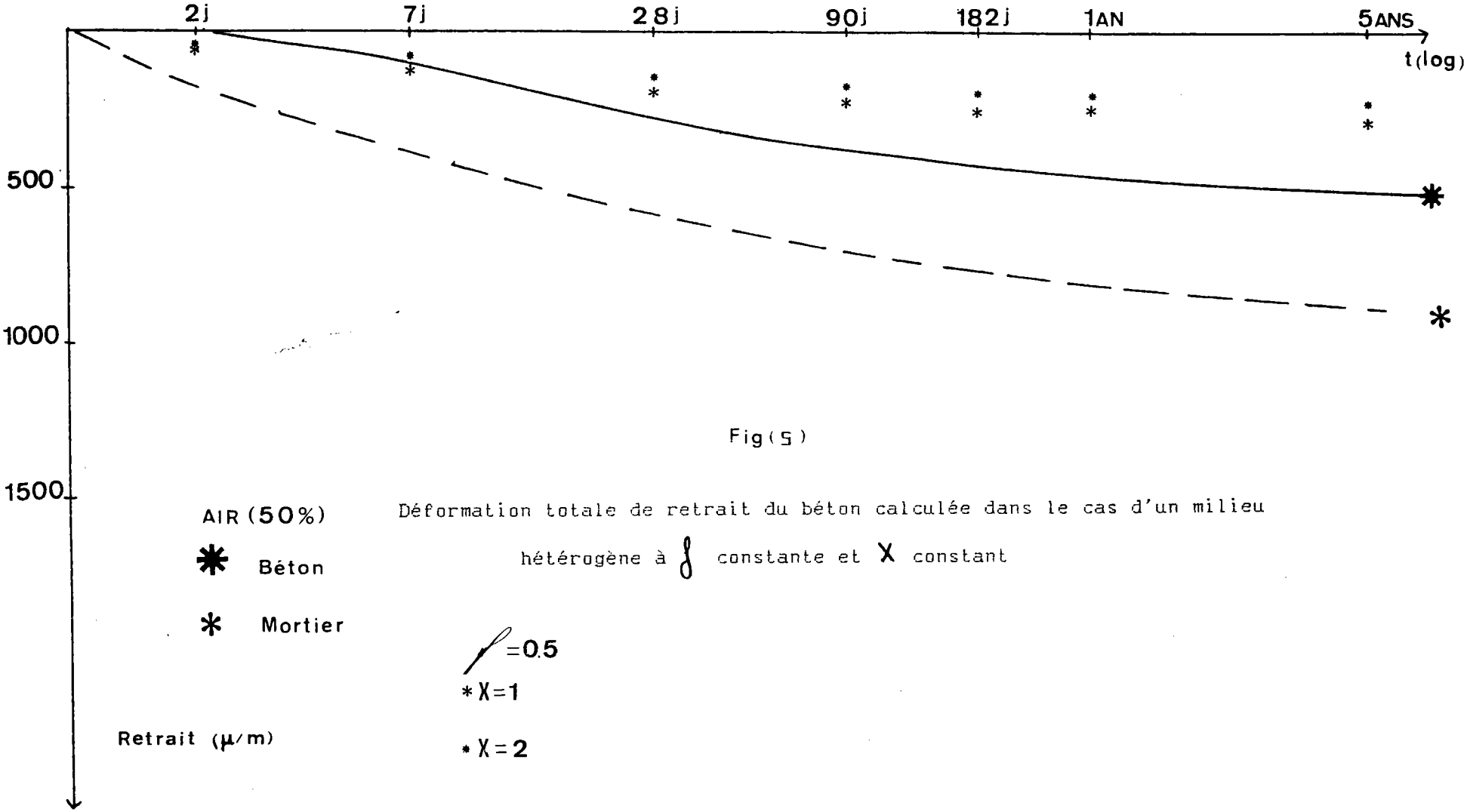


Fig (4)

Déformation totale du béton calculée dans le cas d'un milieu homogène pour les fractions volumiques données.



Fig(5)

Déformation totale de retrait du béton calculée dans le cas d'un milieu hétérogène à $\int$ constante et X constant

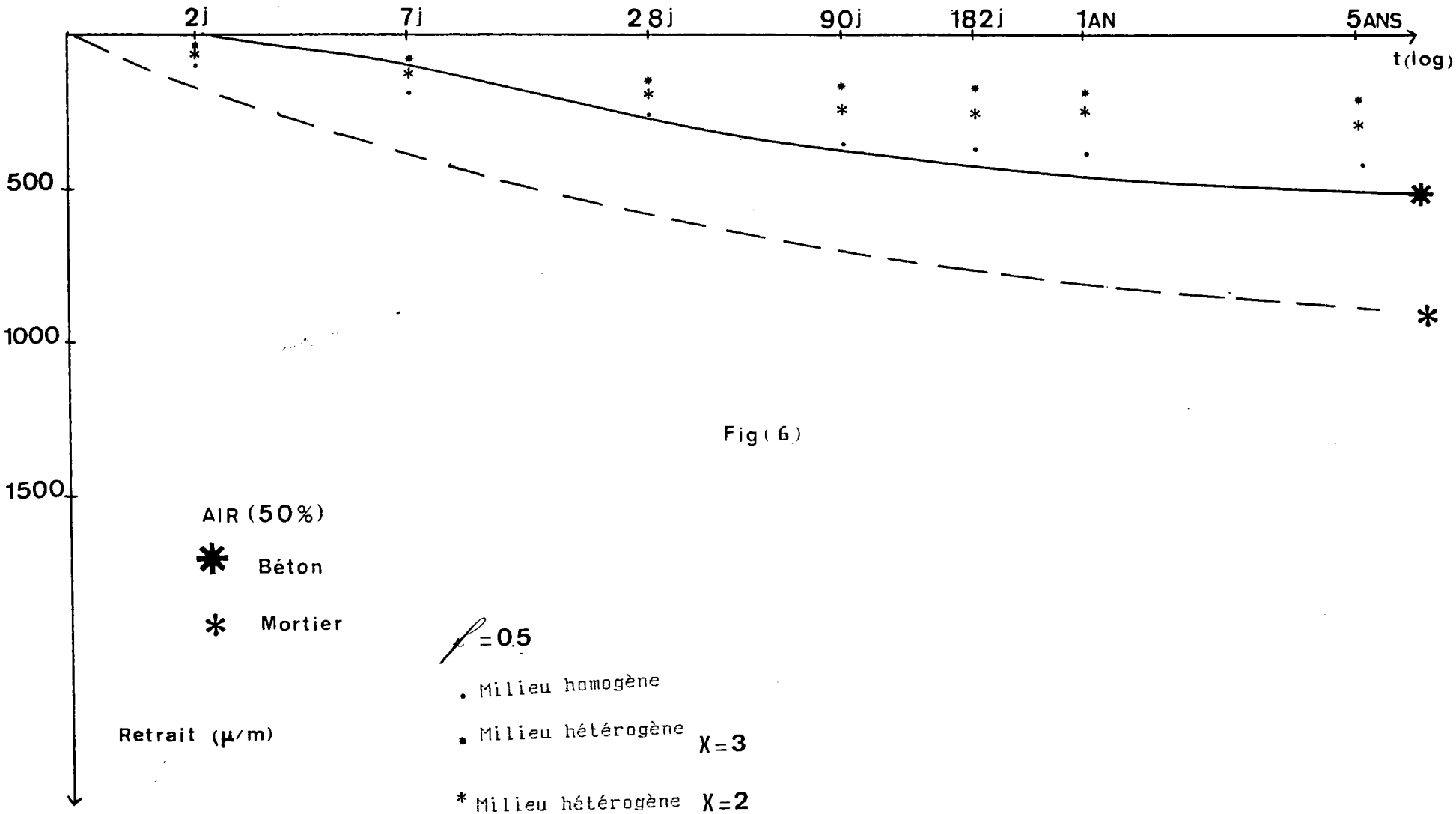

2j
7j
28j
90j
182j
1AN
5ANS
t(log)
500
1000
1500
AIR (50%)
Béton
Mortier
Retrait (μ/m)
=0.5
Milieu homogène
Milieu hétérogène X=3
Milieu hétérogène X=2

Fig (6)

Conclusion générale :

Dans ce travail, nous avons rappelé deux méthodes de calcul des contraintes internes. Ces deux méthodes sont la formulation en déplacement pour les milieux hétérogènes, anisotropes et en présence de déformations incompatibles [3] [4] [5] et la formulation en potentiel de contraintes pour les milieux homogènes avec des déformations incompatibles [9].

Nous avons élargi la formulation en contrainte, aux cas des milieux hétérogènes, anisotropes et en présence de déformations incompatibles. L'équation aux dérivées partielles obtenue généralise celle de Kröner. Cette équation est à rapprocher de celle donnée par Berveiller et Zaoui dans le cas de la formulation en déplacement. Elle généralise aussi les équations de Beltrami de l'élasticité linéaire homogène et isotrope.

Ensuite, nous avons particularisé cette équation au cas d'un milieu hétérogène isotrope, celui du milieu homogène anisotrope et des problèmes plans. Nous avons traité le cas du milieu homogène dû à Kröner et le cas du milieu hétérogène et ensuite le milieu anisotrope. Ces équations aux dérivées partielles généralisent les équations de Kröner. Dans chacun des cas plans, nous avons explicité le cas des déformations planes et celui des contraintes planes, les équations sont alors plus simples.

En ce qui concerne la résolution de ces équations aux dérivées partielles, nous avons présenté une transformation de ces équations en une équation intégrale en utilisant la technique du tenseur de Green. Cette solution tient compte des conditions aux limites, des hétérogénéités ainsi que des déformations inélastiques. Elle donne la solution de Kröner pour le cas du milieu homogène et elle est similaire à celle donnée par Berveiller et Zaoui. Cette équation se simplifie dans le cas d'un milieu infini, pour lequel le tenseur de Green est connu.

L'équation intégrale est particulièrement intéressante pour les milieux microhétérogènes et macrohomogènes et pour les milieux granulaires.

Nous avons appliqué la théorie générale au cas d'une poutre hétérogène où l'hétérogénéité est mesurée par la variation du module d' Young. Nous avons calculé les déformations et les contraintes de façon explicite en fonction de l'hétérogénéité et des paramètres de la poutre. Cette formulation peut être faite pour le cas des déformations planes et pour les milieux anisotropes et on peut toujours obtenir, à défaut d'une résolution analytique, une résolution numérique.

Enfin dans le chapitre VI, nous avons montré que le modèle auto-cohérent peut être appliqué au calcul des déformations totales et des contraintes internes dues au retrait du béton. Le formalisme est simple et permet de prendre en compte le phénomène du retrait d'une façon découplée. Le béton est considéré comme un matériau biphasé. Un bon accord est obtenu dans le calcul des déformations totale dues au retrait du béton.

La formulation en potentiel de contraintes présente plusieurs avantages sur la formulation en déplacement. Tout d'abord, dans le calcul des incompatibilités, on ne prend en compte que la partie incompatible des déformations inélastiques.

Par contre dans la formulation en déplacement, il faut d'emblée prendre en compte toute la déformation inélastique.

Dans le cas des problèmes plans, le potentiel de contraintes se réduit à une seule fonction scalaire (fonction d'Airy) alors que pour la formulation en déplacement, il faut calculer les trois composantes des déformations non nulles. Dans le cas où les variables du problème ne dépendent pas de la variable z, les inconnues se réduisent à une fonction scalaire.

Dans le cas ou on peut obtenir des solutions analytiques (c'est le cas que nous avons présenté dans le chapitre V), on peut alors ajuster sur la solution exacte des méthodes numériques. Ces méthodes numériques peuvent alors être utilisées pour obtenir la solution des problèmes plus généraux. On peut alors traiter des problèmes variés tels que des matériaux composites, des plaques ou des cylindres de béton ou du bois [23]. Dans ces deux derniers cas, le formalisme que nous avons présenté permet l'introduction des paramètres physiques. Cette étude doit alors être menée avec un programme expérimental bien adapté.

Enfin, il est à noter que ce formalisme s'applique à l'étude des dislocations dans les matériaux métalliques en élasticité isotrope et homogène [34] [35] et permet de calculer l'énergie des joints de grains dans le polycristal. Un prolongement de ce travail serait de calculer le champ des contraintes produit par des dislocations dans un milieu anisotrope . Ce travail a été abordé, mais n'a pu être mené à terme dans le cadre de cette thèse.

BIBLIOGRAPHIES

[1] E. Kröner

Die Spannungsfunktionen der dreidimensionalen isotropen elastizitasthéorie. Zeitschrift für physik, Bd. 1939, 5. 175-188 (1954)

[2] E. Kröner

physique des défauts

ed: Roger Balian, M. Kléman, J.P. Poirier
North-Holland publishing compagny 1981

[3] R. de Witt

Théory of disclinations II Continuous and discrete disclination in anisotropic elasticity.
Journal of research. A physics and chemistry vol. 77A N 1 1973

[4] Dederichs et Zeller

Elastic constants of polycristals
phys-stat. sol. (b) 53,831 (1973)

[5] M. Berveiller et A. Zaoui

Plasticité aniotrope des polycristaux métalliques
colloque international du CNRS n 319

[6] E. Kröner

dislocation field theory

[7] M. Berveiller et A. Zaoui

Methodes self-consistentes en mécanique des solides hétérogènes
Groupe français de rhéologie 1980

[8] J.D Eshelby
Elastic inclusions and inhomogeneities
Departement of physical metallurgy, University of Birmingham.
England.

[9] R. De Witt

The continum theory of stationary dislocations
University of Illinois, Urbana, Illinois.

[10] G. Arfken

Mathématical methods for physicists
Miami University, Oxford.

[11] A. Zaoui

Aspects fondamentaux de la plasticité des polycristaux métalliques
(chapître VII)
les éditions de physique -1979-

[12] G.Saada

Incompatibilité et contraintes internes (chapître I)
les éditions de physique -1979-

[13] R. De Witt

Theory of disclinations T.III
Journal of research. A physics and chemistry.

[14] O.F. Fehri

Thèse d'état, présenté à la faculté des sciences de METZ 1986.

[15] W.C. Jonhnson

Met. trans, 14 A (1983).

[16] S. Timoshenko

Théorie de l'élasticité 1961
librairie polytechnique CH. Beranger.

[17] M. Berveiller

Thèse de dortorat d'état.
Paris-Nord Villétaneuse 1978.

[18] Sidoroff

Cours de mécanique des solides.

[19] C.N. REID

Déformation Geometry for materials scientists.
Pergamon press 1973.

[20] Nemat-Nasser

Mechanics today vol 2.
Pergamon press inc.

[21] M. Mamillan

Evolution du fluage et des propriétés du béton.
Annales de l'institut technique du batiment et des travaux publics numero 154, Octobre 1960.

[22] C. Huet

E.N.P.C. cours de Matériaux de construction.
Propriétés mécaniques
des matériaux.

[23] C. Gaucher
these de docteur-ingénieur
Fluage du béton 1979 L.C.P.C.

[24] M. Ortiz

A constitutive théory for the inélastic behavior of concrete.
Mechanics of matérials 4 (1985) 67-93 North Holland.

[25] M. Ortiz

Mechanics today vol 10 (ed: S.Nemat-Nasser) à paraître.

[26] J.C. Robinet

loi rhéologique en écriture incrémentale.
Application aux sols et au béton.
Thèse : Université Scientifique et médicale de Grenoble 1980.

[27] J.M. Torrenti .

Loi de comportement du béton prenant en compte la teneur en eau
7 congrès français de Mécanique. Bordeaux. Septembre 1985.

[28] M. Suzuki

New analytical method for a nonlinear diffusion problem.
Int. J. Heat. Mass transfer. vol 16 pp 2155-2164 Pergamon Press 1973.

[29] R.G. L'Hermite

volume changes of concrete
Synopsis Washington 1960.

[30] Aifantis. E.C

On the problem of diffusion in solids.
Urbana, Illinois, Acta Mechanica 37, 265-296 (1980).

[31] R. Wilson and E.C Aifantis

The theory of stress-assisted diffusion I.
Acta Mechanica 45, 273-296 (1982).

[32] M. Buisson

Thèse de Docteur- ingénieur,
Université de METZ 1984.

[33] M. Vennat

La pratique des ciments et des bétons.
Editions du Moniteur des travaux publiques et du Bâtiment, 1976.

[34] C. Rey - Villain

Dortorat d'état:
Paris Nord- Villetaneuse 1980.

[35] G. Saada

Elastic field of dislocation networks an Grain bonndaries.
Acta Métallurgia Vol 27 pp 921 à 931.
Pergamon Press, Ltd 1979.