



**HAL**  
open science

# Contrôlabilité des systèmes non linéaires en basse dimension : structure et classification

Jean-Claude Vivalda

► **To cite this version:**

Jean-Claude Vivalda. Contrôlabilité des systèmes non linéaires en basse dimension : structure et classification. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paul Verlaine - Metz, 1986. Français. NNT : 1986METZ027S . tel-01775714

**HAL Id: tel-01775714**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01775714v1>**

Submitted on 24 Apr 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

**UNIVERSITE DE METZ  
FACULTE DES SCIENCES**

**THESE**

**DE**

**troisième cycle**

mention: mathématiques appliquées

**Contrôlabilité des systèmes non linéaires  
en basse dimension  
structure et classification**

par Jean-Claude VIVALDA  
le 26 novembre 1986

**président :** Gauthier SALLET Université de METZ

**Membres :** Claude ROGER  
André ROUX  
Jean-Paul GAUTHIER

Université de METZ  
Université de METZ  
Laboratoire d'Automatique  
de GRENOBLE

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE DE METZ



022 420264 6

**T H E S E**

présentée à

l'UNIVERSITE de METZ

ISGMP - Laboratoire de Méthodes Mathématiques d'Analyse des Systèmes  
Unité Associée CNRS n° 399

pour obtenir le grade  
de Docteur en Mathématiques

par

Jean-Claude VIVALDA



**CONTROLABILITE DES SYSTEMES LINEAIRES EN BASSE DIMENSION**

Soutenue le 26 Novembre 1986 devant la Commission d'Examen

**JURY**

Messieurs

G. SALLET  
C. ROGER  
A. ROUX  
J.P. GAUTHIER  
G. BORNARD

Président  
Examinateur  
Examinateur  
Examinateur  
Examinateur

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv	19860545
Cote	S/M3 86/27
Loc	Magasin

## REMERCIEMENTS

Je remercie Monsieur G. Sallet d'avoir bien voulu accepter la présidence du jury de cette thèse ainsi que Messieurs C. Roger, A. Roux, J.P. Gauthier et G. Parnaud qui ont accepté de faire partie de ce jury.

Je suis heureux d'exprimer ma gratitude à mon directeur de recherches, Monsieur G. Sallet, pour l'attention qu'il a portée à mon travail. Ses critiques et suggestions ont permis d'améliorer grandement cette thèse.

Je remercie les membres de l'équipe technique de l'Institut de Metz pour l'aide apportée à la réalisation matérielle de ce travail.

**CONTROLABILITE DES SYSTEMES  
NON LINEAIRES EN FAIBLES DIMENSIONS**

**Structure et classification de ces systèmes**

## INTRODUCTION

Cette thèse concerne des problèmes de contrôlabilité de systèmes non linéaires ; elle se décompose en 3 parties indépendantes :

- 1) étude de la contrôlabilité sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$  d'une paire de champs de vecteurs linéaires où l'un des champs est nilpotent d'ordre 2
- 2) classification du point de vue de la contrôlabilité des systèmes affines dans le plan
- 3) classification des systèmes quadratiques dans  $\mathbb{R}^3$ .

Le cadre de l'étude de ces systèmes est le suivant :

On se place dans une variété différentielle  $M$  de classe  $C^\infty$ , connexe et maîtrisable ; une famille de champs de vecteurs sur  $M$  est un ensemble  $F$  de champs de vecteurs de classe  $C^\infty$ .

Nous ferons aussi référence à des systèmes de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

La fonction  $u : \mathbb{R}_+ \longrightarrow C$  est appelé contrôle, si  $\mathcal{U}$  est l'ensemble des contrôles admissibles contient les fonctions constantes par morceaux et est contenu dans l'ensemble des fonctions mesurables.

A un tel système on associe la famille  $F = \{ X^u / u \in C \}$

où  $X^u(x) = f(x, u)$

### Définitions et notations

\* Si  $X$  est un champ de vecteurs nous notons :

$(t, x) \longrightarrow X_t(x)$  le groupe local à un paramètre qu'il engendre

\* Si  $F$  est une famille de champs de vecteurs nous notons  $S(F)$ .

Le pseudo semi-groupe engendré par les difféomorphismes locaux  $X_t$  pour  $t > 0$ , et  $G(F)$  le pseudo-groupe engendré par  $S(F)$ .

- \* Si  $x$  est un élément de  $M$  nous notons  $S(F).x$  (resp.  $G(F).x$ ) l'orbite de  $x$  sous l'action de  $S(F)$  (resp. de  $G(F)$ ).
- \* Nous dirons que la famille  $F$  est complètement contrôlable sur  $M$  (ou transitive) si  $S(F).x = M$  pour tout  $x$  de  $M$ .

L'étude des systèmes non linéaires a déjà suscité une abondante littérature et les problèmes restants sont de plus en plus difficiles. Les systèmes dits linéaires, c'est-à-dire les systèmes du type :

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = A x(t) + B u, \text{ sont bien connus des ingénieurs} \\ x(t) \in \mathbb{R}^n \quad u \in \mathbb{R}^p \end{cases}$$

mais on s'est rendu compte de l'insuffisance de ces systèmes dans l'étude des problèmes concrets (par exemple le problème du satellite nécessite d'étudier des systèmes quadratiques).

Dans les années 1970 des mathématiciens tels que Lobry, Jurdjevic, Süssmann ont établi les premiers résultats de la théorie. En étudiant la contrôlabilité sur les groupes de Lie, Jurdjevic et Süssmann ont montré un critère de complète contrôlabilité concernant les systèmes bilinéaires :

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = X(x(t)) + \sum_{i=1}^p u_i Y_i(x(t)) \\ u_i \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Il est à noter que les résultats sont beaucoup plus difficiles à obtenir lorsque les contrôles  $u_i$  sont bornés ( $|u_i| < M$  pour  $i=1, \dots, p$ ) ; dans les mêmes années Lobry a établi un critère de contrôlabilité pour ces systèmes dans le cas où le champ de vecteurs  $X$  est Poisson-stable.

En 1976 Jurdjevic et Kupka ont démontré un résultat vraiment non trivial concernant les systèmes du type :

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = (A + uB) x(t) \\ u \in \mathbb{R} \quad x(t) \in SL(n, \mathbb{R}) \end{cases}$$

Dans les années suivantes Boothby a classifié les groupes  $G(F)$  transitifs sur  $\mathbb{R}^n - \{0\}$  où  $F$  est une famille de champs de vecteurs linéaires sur  $\mathbb{R}^n$ . Jurdje-



vic et Kupka ont défini l'équivalence de deux systèmes  $F$  et  $F'$  et ont mis au point des techniques permettant de remplacer un système  $F$  par un autre système  $F'$  plus grand qui lui est équivalent au point de vue de la contrôlabilité.

En ce qui concerne les familles de champs de vecteurs linéaires, on peut signaler le théorème de Gauthier-Bornard qui donne une condition nécessaire et suffisante de transitivité sur  $\mathbb{R}^n - \{0\}$  : c'est ce théorème qui sera utilisé dans la 1ère partie de notre thèse. Dans la 2ème partie, nous utiliserons un théorème dû à Jurdjevic-Sallet donnant un critère de complète contrôlabilité pour les systèmes affines sur  $\mathbb{R}^n$  lorsque le système linéaire associé est transitif sur  $\mathbb{R}^n - \{0\}$ .

La première partie de cette thèse est consacrée à l'étude sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$  des paires de champs de vecteurs linéaires  $\{A,B\}$ . Etant donné la complexité du problème, il est illusoire de vouloir obtenir une classification complète, du point de vue de la transitivité, de ces paires  $\{A,B\}$ . Nous nous sommes donc limités aux paires  $\{A,B\}$  où  $A$  est un champ de vecteurs linéaires quelconque et  $B$  un champ de vecteurs nilpotent d'ordre 2.

En utilisant le théorème de Gauthier-Bornard, nous avons établi des conditions nécessaires et suffisantes de complète contrôlabilité pour ce type de paires.

Les critères obtenus sont relativement simples et sont donnés sous forme invariante ; il nous semble que quelque chose de profond se passe au niveau des champs nilpotents sans que nous soyons en mesure de préciser quoi.

Dans la deuxième partie, nous établissons une classification des systèmes affines dans le plan c'est-à-dire des systèmes du type :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + u(Dx(t) + b) \\ x(t) \in \mathbb{R}^2 \quad u \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Un article est déjà paru sur le sujet dans la revue IEEE écrit par Narendra mais il comporte de nombreuses erreurs, c'est pourquoi nous avons repris le problème - en utilisant une méthode différente - et nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes (sous forme invariante) de complète contrôlabilité ; ces conditions sont purement algébriques.

Pour étudier de tels systèmes, nous avons à notre disposition le théorème de Jurdjevic-Sallet qui donne un critère de transitivité lorsque le système linéaire associé est transitif, nous avons examiné les autres cas et nous faisons apparaître

que le système affine est transitif essentiellement dans les cas où le système linéaire associé l'est aussi ainsi qu'il sera précisé plus loin. On peut conjecturer que ce résultat est encore vrai pour des dimensions supérieures.

Dans la 3ème partie, nous exposons une méthode de classification, du point de vue de la contrôlabilité, des systèmes quadratiques dans  $\mathbb{R}^3$  :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Q(x(t)) + ub & \text{où } Q \text{ est un champ de vecteurs} \\ u \in \mathbb{R} \end{cases}$$

dont toutes les composantes sont des polynômes homogènes d'ordre 2.

Ces systèmes sont très étudiés : ils apparaissent dans le contrôle de l'attitude du satellite mais ils ont aussi leur intérêt propre puisque la différentielle en 0 du champ de vecteur  $Q$  est nulle, la linéarisation n'apporte aucun renseignement : d'où la nécessité d'étudier de tels systèmes même si on se place d'un point de vue local.

Ici encore nous utilisons le théorème de Gauthier-Bornard qui peut s'adapter aux systèmes constitués de champs de vecteurs homogènes. Notre travail fournit une méthode qui permet de décider si un système quadratique est contrôlable ou non : cette méthode peut aisément aboutir sur un algorithme et être programmée sur ordinateur.

1<sup>ère</sup> PARTIE

CONTROLABILITE SUR  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$  D'UNE PAIRE DE CHAMPS  
DE VECTEURS LINEAIRES AVEC L'UN DES CHAMPS  
DE VECTEURS NILPOTENT D'ORDRE 2

## INTRODUCTION

Etant donnée une famille  $F$  de champs de vecteurs linéaires sur  $\mathbb{R}^n$ , le théorème de Gauthier-Bornard donne une condition nécessaire et suffisante de complète contrôlabilité pour  $F$  sur  $\mathbb{R}^n - \{0\}$ .

S'appuyant sur ce théorème, P. Adda a obtenu, dans sa thèse 3ème cycle, une classification, du point de vue de la contrôlabilité, des paires  $\{A,B\}$  de champs de vecteurs linéaires sur  $\mathbb{R}^2$ . Le problème en dimension 3 étant beaucoup plus compliqué, il est illusoire de vouloir obtenir une classification complète de telles paires, c'est pourquoi nous nous sommes bornés à étudier les paires  $\{A,B\}$  où  $B$  est un endomorphisme nilpotent d'ordre 2 et  $A$  est quelconque.

Nous exposons dans cette partie des conditions nécessaires et suffisantes de complète contrôlabilité pour de telles paires dans  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ ; ces conditions sont données sous forme invariante et sont, sauf dans un cas, particulièrement simples.

La méthode de démonstration consiste à examiner tous les cas possibles et fait grandement appel à l'importante notion de normale accessibilité.

## PLAN DE LA PARTIE I

Cette partie est divisée en 4 chapitres.

Chapitre 1 : . Après quelques généralités et le rappel de quelques notations nous introduisons la notion de contrôlabilité directionnelle pour les familles de champs de vecteurs linéaires. Les trajectoires d'une telle famille  $F$  étant homothétiques par rapport à l'origine nous voyons que cette notion est équivalente à la complète contrôlabilité de la famille  $F$  "projetée" de  $F$  sur  $S^{n-1}$ .

. Nous présentons ensuite un critère de complète contrôlabilité pour les familles de champs de vecteurs linéaires sur  $\mathbb{R}^n - \{0\}$  dû à Gauthier-Bornard puis une amélioration de ce critère due à G. Sallet.

. Dans le dernier paragraphe nous exposons l'importante notion de normale accessibilité pour un système contrôlé, ce qui nous permet de donner un critère de contrôlabilité simple pour les familles de champs de vecteurs en dimension 2 qui sera beaucoup utilisé par la suite.

Chapitre 2 : Dans ce chapitre nous exposons une condition nécessaire et suffisante de complète contrôlabilité pour une paire  $\{A,B\}$  de champs de vecteurs linéaires donnée sur  $\mathbb{R}^3$  avec  $A$  nilpotent d'ordre 2 et  $B$  tel que :  $\text{Spec } B \subset \mathbb{R}$ .

Une telle paire  $\{A,B\}$  est complètement contrôlable sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$  si et seulement si :

- i)  $\det (A+B-\lambda Id) \neq 0$  pour tout  $\lambda$  de  $\text{Spec } B$
- ii)  $\text{Tr } AB < 0$

Chapitre 3 : Nous exposons dans ce chapitre une condition nécessaire et suffisante de complète contrôlabilité pour une paire  $\{A,B\}$  de champs de vecteurs linéaires sur  $\mathbb{R}^3$  avec  $A$  nilpotent d'ordre 2,  $\text{Spec } B \not\subset \mathbb{R}$  et avec la valeur propre réelle de  $B$  égale à la partie réelle commune de ses valeurs propres non réelles.

Une telle paire  $\{A,B\}$  est complètement contrôlable sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$  si et seulement si :

- i)  $\det (A+B-\lambda Id) \neq 0$  pour  $\lambda \in \text{Spec } B \cap \mathbb{R}$
- ii)  $\text{Tr } AB \neq 0$

Chapitre 4 : Pour terminer notre étude, nous exposons dans ce chapitre une condition nécessaire et suffisante de complète contrôlabilité pour une famille de champs de vecteurs linéaires donnée sur  $\mathbb{R}^3$  avec  $A$  nilpotent d'ordre 2,  $\text{Spec } B \not\subset \mathbb{R}$  et avec la valeur propre réelle de  $B$  différente de la partie réelle commune de ses valeurs propres non réelles.

Une telle paire  $\{ A, B \}$  est complètement contrôlable sur  $\mathbb{R}^3 - \{ 0 \}$  si et seulement si :

i)  $(\lambda - \alpha) \det(A + B - \lambda \text{Id}) < 0$

ou ii)  $\det(A + B - \lambda \text{Id}) \neq 0$  et  $(\lambda - \alpha) \text{Tr } AB < 0$

ou iii)  $\det(A + B - \lambda \text{Id}) \neq 0$  et

$$\frac{T_1 + T_2}{\sqrt{(T_2 - T_1)^2 + \gamma^2 (T_1 + T_2)^2}} \exp \frac{1}{\gamma} (\text{Arctg} \gamma - \text{Arctg} \gamma \frac{T_1 + T_2}{T_2 - T_1} + \pi) < \frac{1}{-\sqrt{\gamma^2 + 1}}$$

où  $B$  s'écrit  $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$  dans une certaine base,  $\gamma = \frac{\beta}{\lambda - \alpha}$

$T_1 = \text{Tr } AB$  et  $T_2 = \text{Tr } {}^t AB$

# CHAPITRE 1

## GENERALITES - DEFINITIONS ET NOTATIONS

### 1.1. SYSTEMES LINEAIRES

Définition Soit  $F$  une famille de champs de vecteurs linéaires donnée sur  $\mathbb{R}^n$  ; nous noterons  $S(F)$  le semi-groupe de difféomorphismes engendré par  $F$ .  $S(F)$  est défini par :

$$S(F) = \left\{ e^{t_1 A_1} \circ e^{t_2 A_2} \circ \dots \circ e^{t_p A_p} / t_1, t_2, \dots, t_p > 0, A_1, \dots, A_p \in F \right\}$$

Nous noterons  $G(F)$  le groupe engendré par  $S(F)$  :

$$G(F) = \left\{ e^{t_1 A_1} \circ \dots \circ e^{t_p A_p} / t_1, t_2, \dots, t_p \in \mathbb{R}, A_1, \dots, A_p \in F \right\}$$

Accessibilité Nous dirons que le point  $y$  est accessible à partir du point  $x$  par le système linéaire  $F$  s'il existe  $\varphi$ , élément du semi-groupe  $S(F)$  tel que  $y = \varphi(x)$ .

Notation Nous noterons  $A(x, F)$  l'ensemble des points de  $\mathbb{R}^n$  accessibles à partir de  $x$  par le système  $F$ .

Définition Nous dirons que le système  $F$  est complètement contrôlable ou transitif sur  $\mathbb{R}^n - \{0\}$  si le semi-groupe  $S(F)$  opère transitivement sur  $\mathbb{R}^n - \{0\}$ .

Autrement dit :  $F$  est complètement contrôlable sur  $\mathbb{R}^n - \{0\}$  si et seulement si  $A(x, F) = \mathbb{R}^n - \{0\}$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}^n - \{0\}$ .

Remarque Il est évident que  $F$  est complètement contrôlable sur  $\mathbb{R}^n - \{0\}$  si et seulement si  $-F$  est complètement contrôlable sur  $\mathbb{R}^n - \{0\}$ .

Soit  $F$  une famille de champs de vecteurs linéaires, on note  $\text{Lie}(F)$  l'algèbre de Lie engendrée par  $F$ . Nous dirons que  $F$  vérifie la condition du rang en un point  $x$  si  $\dim \text{Lie}(F)(x) = n$ .

Un champ de vecteurs linéaires étant analytique, nous avons le résultat suivant :

Proposition Pour une famille de champs de vecteurs linéaires  $F$ , le groupe  $G(F)$  opère transitivement sur  $\mathbb{R}^n - \{0\}$  si et seulement si  $F$  vérifie la condition du rang en tout point.

## 1.2. CONTROLABILITE DIRECTIONNELLE POUR UNE FAMILLE DE CHAMPS DE VECTEURS LINEAIRES

Définition Une famille de champs de vecteurs linéaires  $F$  est dite contrôlable suivant les directions si de tout point de toute demi-droite issue de l'origine on peut atteindre un point de toute demi-droite issue de l'origine.

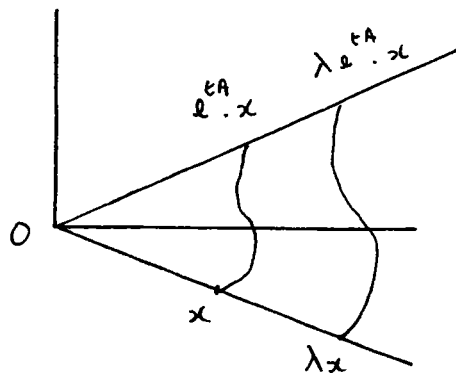
Autrement dit :  $F$  est contrôlable suivant les directions si :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n - \{0\} \times \mathbb{R}^n - \{0\}, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^* \text{ tel que } \alpha y \in A(x,F)$$

Remarquons qu'une condition nécessaire pour qu'un système linéaire  $F$  soit transitif sur  $\mathbb{R}^n - \{0\}$  est que  $F$  soit contrôlable suivant les directions.

### Projection sur $S^{n-1}$

Pour un champ de vecteurs linéaires  $A$  nous avons  $e^{tA}(\lambda x) = \lambda e^{tA}.x$  pour tout  $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ , ceci implique que les trajectoires de  $A$  sont homothétiques par rapport à l'origine.



La trajectoire issue de  $\lambda x$  est homothétique par rapport à l'origine à la trajectoire issue de  $x$ .



Ces considérations permettent de montrer la proposition suivante :

Proposition Les projections sur  $S^{n-1}$  des trajectoires d'un champ de vecteurs linéaire  $A$  sont les trajectoires d'un champ de vecteurs  $\tilde{A}$  (appelé le projeté de  $A$  sur  $S^{n-1}$ ) défini par :

$$\tilde{A}(x) = A(x) - \langle Ax, x \rangle x \text{ pour tout } x \text{ de } S^{n-1}.$$

Démonstration Posons  $\varphi_t(x) = \frac{e^{tA} \cdot x}{\|e^{tA} \cdot x\|}$  pour  $t \in \mathbb{R}$  et  $x \in S^{n-1}$

Montrons que la famille  $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  est un groupe à un paramètre de difféomorphismes de  $S^{n-1}$

- $\varphi_0(x) = x$
- $\varphi_t(x) \in S^{n-1}$  par définition de  $\varphi_t$

$$\begin{aligned} - \varphi_t \circ \varphi_s(x) &= \frac{e^{tA} \frac{e^{sA} \cdot x}{\|e^{sA} \cdot x\|}}{\left\| e^{tA} \frac{e^{sA} \cdot x}{\|e^{sA} \cdot x\|} \right\|} \\ &= \frac{\frac{e^{(t+s)A} \cdot x}{\|e^{sA} \cdot x\|}}{\left\| \frac{e^{(t+s)A} \cdot x}{\|e^{sA} \cdot x\|} \right\|} = \frac{e^{(t+s)A} \cdot x}{\|e^{(t+s)A} \cdot x\|} \end{aligned}$$

On peut alors définir un champ de vecteurs  $\tilde{A}$  sur  $S^{n-1}$  dont le groupe à un paramètre est  $\varphi_t$  en posant :

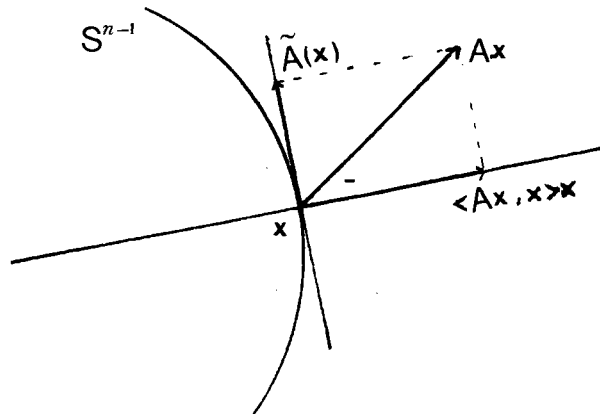
$$\tilde{A}(x) = \left. \frac{d}{dt} \varphi_t(x) \right|_{t=0}$$

puisque  $\frac{d}{dt} (e^{tA} \cdot x) = Ae^{tA} \cdot x$  et  $\frac{d}{dt} \|e^{tA} \cdot x\| = \frac{\langle e^{tA} \cdot x, Ae^{tA} \cdot x \rangle}{\|e^{tA} \cdot x\|}$

on obtient  $\frac{d}{dt} \varphi_t(x) = \frac{Ae^{tA} \cdot x}{\|e^{tA} \cdot x\|} - \frac{\langle e^{tA} \cdot x, Ae^{tA} \cdot x \rangle}{\|e^{tA} \cdot x\|^3} e^{tA} \cdot x$

d'où  $\tilde{A}(x) = \left. \frac{d}{dt} \varphi_t(x) \right|_{t=0} = Ax - \langle x, Ax \rangle x$

Remarque



Le terme  $\langle Ax, x \rangle$  est la composante radiale du vecteur  $Ax$  relativement à  $S^{n-1}$ ,  $\tilde{A}(x)$  est la "composante tangentielle" à  $S^{n-1}$  du même vecteur.

Remarquons aussi que cette propriété reste vraie pour un champ de vecteurs  $X$  donné sur  $\mathbb{R}^n$  dont toutes les composantes sont des polynômes homogènes de même degré (les trajectoires de tels champs de vecteurs sont également homothétiques par rapport à l'origine). Cette propriété n'est évidemment pas vérifiée par un champ de vecteurs en général.

Proposition

Soient  $A$  et  $B$  deux champs de vecteurs linéaires sur  $\mathbb{R}^n$ ,  $A$  et  $B$  ont même projection sur  $S^{n-1}$  si et seulement si il existe  $\alpha$  réel tel que  $B = A + \alpha \text{Id}$

Démonstration

\* Supposons  $B = A + \alpha \text{Id}$

$$\begin{aligned} (A + \alpha \text{Id})x &= Ax + \alpha x - \langle Ax + \alpha x, x \rangle x \text{ pour } x \in S^{n-1} \\ &= Ax + \alpha x - \langle Ax, x \rangle x - \alpha \langle x, x \rangle x \\ &= Ax - \langle Ax, x \rangle x + \alpha x(1 - \langle x, x \rangle) \\ &= Ax - \langle Ax, x \rangle x \text{ car } \|x\|^2 = 1 \\ &= \tilde{A}x \end{aligned}$$

\* Supposons que  $\tilde{A}x = \tilde{B}x$  pour tout  $x$  de  $S^{n-1}$

$$\tilde{A}x = \tilde{B}x \iff (A-B)x = (\langle Ax, x \rangle - \langle Bx, x \rangle)x$$

donc pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}^n$ , il existe  $\alpha(x)$  tel que :

$$(A-B)x = \alpha(x)x \text{ donc } A-B \text{ est une homothétie.}$$

On peut conclure de ce paragraphe que :

Une famille de champs de vecteurs linéaires  $F$  donnée sur  $\mathbb{R}^n$  est contrôlable suivant les directions si et seulement si la famille projetée  $F$  est contrôlable sur  $S^{n-1}$ .

### 1.3. LE THEOREME DE GAUTHIER-BORNARD

Ce théorème expose une condition nécessaire et suffisante de complète contrôlabilité pour une famille de champs de vecteurs linéaires.

Théorème      Soit  $F$  une famille de champs de vecteurs linéaires donnée sur  $\mathbb{R}^n - \{0\}$ ,  $F$  est complètement contrôlable sur  $\mathbb{R}^n - \{0\}$  si et seulement si :

    i)  $F$  vérifie la condition du rang en au moins un point

    ii)  $F$  est contrôlable suivant les directions (ce qui revient à dire :  $F$  contrôlable sur  $S^{n-1}$ )

    iii)  $F$  admet une direction rentrante et une direction sortante.

Précisons ce dernier point :

\*  $F$  admet une direction rentrante signifie :

$$\exists x \in \mathbb{R}^n - \{0\}, \exists \varphi \in S(F), \exists \lambda \in ]0, 1[ \text{ tels que } \varphi(x) = \lambda x$$

\*  $F$  admet une direction sortante signifie :

$$\exists y \in \mathbb{R}^n - \{0\}, \exists \psi \in S(F), \exists \mu \in ]1, +\infty[ \text{ tels que } \psi(y) = \mu y$$

Nous ne donnerons pas la démonstration de ce théorème qui se trouve dans

#### Remarques

- les points i) et ii) impliquent que  $F$  vérifie la condition du rang en tout point
- si  $F$  contient un élément avec une valeur propre de partie réelle  $< 0$  et si  $F$  contient un élément avec une valeur propre de partie réelle  $> 0$  alors le point iii) est évidemment vérifié.

Ce théorème a été amélioré de la façon suivante par G. Sallet :

Théorème

Soit  $F$  une famille de champs de vecteurs linéaires donnée sur  $\mathbb{R}^n$  avec  $n > 3$ ,  $F$  est complètement contrôlable sur  $\mathbb{R}^n - \{0\}$  si et seulement si :

- i)  $\tilde{F}$  est transitif sur  $S^{n-1}$
- ii)  $S(F)$  est non borné, c'est-à-dire :

$$\cdot \forall N \in \mathbb{R}_+^*, \exists x \in \mathbb{R}^n - \{0\}, \exists \varphi \in S(F) \text{ tels que } \frac{\|\varphi(x)\|}{\|x\|} > N$$

$$\cdot \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists y \in \mathbb{R}^n - \{0\}, \exists \psi \in S(F) \text{ tels que } \frac{\|\psi(x)\|}{\|x\|} < \varepsilon$$

Démonstration Nous allons montrer que les conditions i) et ii) de ce théorème entraînent les conditions i), ii) et iii) du théorème de Gauthier-Bornard.

\* Montrons tout d'abord que les conditions i) et ii) entraînent la condition iii) du théorème de Gauthier-Bornard. Pour cela, nous utilisons le lemme suivant :

Lemme

Si un système  $F$  est transitif sur un espace compact  $M$ , il existe un sous-système fini de  $F$ , transitif sur  $M$  en un temps borné.

Démonstration D'après un résultat de Süssmann,  $F$  est normalement transitif, c'est-à-dire :

$$\forall (x,y) \in M^2, \exists X^1, X^2, \dots, X^k \in F \text{ et } (t_1^0, \dots, t_k^0) \in \mathbb{R}_+^k \text{ tels que}$$

$$y = X_{t_1^0}^1 \circ \dots \circ X_{t_k^0}^k(x) \text{ et l'application :}$$

$$(t_1, \dots, t_k) \longrightarrow X_{t_1}^1 \circ \dots \circ X_{t_k}^k(x) \text{ est de rang}$$

$$n \text{ en } (t_1^0, \dots, t_k^0)$$

Par application du théorème des fonctions implicites, il existe donc un ouvert  $U_x$  contenant  $x$  et un ouvert  $V_y$  contenant  $y$  tels que tout point de  $V_y$  soit

On a donc :  $M \times M = \bigcup_{(x,y) \in M^2} U_x \times V_y$  et puisque  $M \times M$  est compact :

$$M \times M = \bigcup_{i=1}^p U_{x_i} \times V_{y_i} \text{ ce qui démontre le lemme.}$$

Appliquons ce lemme à  $M = S^{n-1}$  et  $F$  un système de champs de vecteurs linéaires sur  $\mathbb{R}^n$  : il existe  $F_0 = \{A_1, \dots, A_p\}$  sous-système fini de  $F$  tel que  $\tilde{F}_0$  soit transitif sur  $S^{n-1}$  en temps borné, par conséquent pour  $\varphi \in S(F_0)$   $\|\varphi\|$  est borné donc :

$$\exists (A, B) \in \mathbb{R}_+^{*2} \text{ tels que : } A \leq \frac{\|\varphi(x)\|}{\|x\|} \leq B \text{ pour tout } \varphi \text{ de } S(F_0)$$

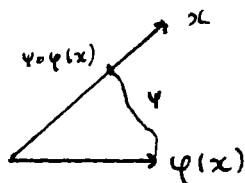
et tout  $x$  de  $\mathbb{R}^n - \{0\}$

$$\text{D'après le point ii) } \exists x \in \mathbb{R}^n - \{0\}, \exists \varphi \in S(F) \text{ tels que } \frac{\|\varphi(x)\|}{\|x\|} < \frac{1}{B}$$

il existe  $\psi \in S(F_0)$  tel que  $\psi(\varphi(x)) = \lambda x$

$$\text{et : } \frac{\|\psi(\varphi(x))\|}{\|x\|} = \frac{\|\psi(\varphi(x))\|}{\|\varphi(x)\|} \frac{\|\varphi(x)\|}{\|x\|} < B \times \frac{1}{B} = 1$$

donc  $\lambda \in ]0, 1[$



$$\text{De même : } \exists y \in \mathbb{R}^n - \{0\}, \exists \theta \in S(F) \text{ tels que } \frac{\|\theta(y)\|}{\|y\|} > \frac{1}{A}$$

il existe  $\varphi \in S(F_0)$  tel que  $\varphi(\theta(y)) = \mu y$

$$\text{et : } \frac{\|\varphi \circ \theta(y)\|}{\|y\|} = \frac{\|\varphi \circ \theta(y)\|}{\|\theta(y)\|} \frac{\|\theta(y)\|}{\|y\|} > A \times \frac{1}{A} = 1$$

donc  $\mu \in ]1, \infty [$



\* Il nous reste à montrer que les points i) et ii) du théorème entraînent la condition du rang. Pour cela nous utilisons le théorème suivant :

Théorème de Montgomery

Soit  $G$  un groupe de Lie connexe qui opère transitivement sur une variété compacte simplement connexe  $M$ . Il existe un sous-groupe maximal compact  $K$  de  $G$  qui opère transitivement sur  $M$ .

Posons  $M = S^{n-1}$ ,  $S^{n-1}$  est compacte simplement connexe ( $n \geq 3$ )  
soit  $G = G(F)$ ,  $\tilde{F}$  est transitif sur  $S^{n-1}$  par conséquent le groupe  $G$  opère transitivement sur  $S^{n-1}$  par l'opération :

$$G \times S^2 \longrightarrow S^2$$

$$(\varphi, x) \longrightarrow \frac{\varphi(x)}{\|\varphi(x)\|}$$

Il existe donc un sous-groupe  $K$  compact de  $G$  qui opère transitivement sur  $S^{n-1}$ . Soit  $dk$  une mesure de Haar définie sur  $K$  et qui soit de masse totale 1.

Pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  posons :  $\theta(x, y) = \int_K \langle kx, ky \rangle dk$

est un produit scalaire qui est laissé invariant par les éléments de  $K$  :

$\theta(k'x, k'y) = \int_K \langle kk'x, kk'y \rangle dk = \int_K \langle kx, ky \rangle dk$  du fait de l'invariance de la mesure de Haar par translation.

Appelons  $S'^{n-1}$  la sphère unité relative au produit scalaire  $\theta$ ,  $K$  opère transitivement sur  $S'^{n-1}$  par l'opération décrite plus haut, donc  $K$  opère transitivement sur les directions, donc  $K$  opère transitivement sur  $S'^{n-1}$  par l'opération :

$$K \times S'^{n-1} \longrightarrow S'^{n-1}$$

$$(\varphi, x) \longrightarrow \varphi(x)$$

(pour tout  $(\varphi, x)$  de  $K \times S'^{n-1}$ ,  $\varphi(x) \in S'^{n-1}$  puisque le produit scalaire  $\theta$  est laissé invariant par les éléments de  $K$ ).

\* On peut donc dire que pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^n - \{0\} \times \mathbb{R}^n - \{0\}$  tels que  $\|x\|_\theta = \|y\|_\theta$ , il existe une trajectoire  $\varphi$  de  $KCG(F)$  telle que  $\varphi(x) = y$ , la trajectoire

permettant de passer de  $x$  en  $y$  restant inscrite sur la sphère passant par  $x$  relative au produit scalaire  $\theta$ .

\* L'hypothèse ii) du théorème assure que de toute sphère relative au produit scalaire  $\theta$  on peut atteindre toute sphère relative au produit scalaire  $\theta$  grâce aux trajectoires de  $S(F) \subset G(F)$ .

Conclusion Les deux points qui précèdent permettent d'affirmer que  $G(F)$  est transitif sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$  et donc  $F$  vérifie la condition du rang en tout point de  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ .

Remarque Si la famille  $F$  contient un champ de vecteurs linéaire nilpotent, la condition ii) du théorème est vérifiée.

Démonstration Soit  $N \in F$  un nilpotent, dans une certaine base, on aura :

$$\text{Mat } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \\ \vdots & & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{les éléments de la sur-diagonale étant}$$

égaux à 0 ou 1.

Par conséquent la droite d'équation

$$\begin{cases} x_1 = tx_2^o + tx_1^o \\ x_2 = x_2^o \\ x_3 = 0 \\ \vdots \\ x_n = 0 \end{cases}$$

est une trajectoire de  $N$

$$\text{pour } x_2^o \neq 0 \text{ et } x_1^o = 0 \text{ on a : } \frac{\|e^{tN} - x\|}{\|x\|} = t + 1 \quad (t > 0)$$

cette quantité peut donc être rendue aussi grande que l'on veut

$$\text{pour } \begin{cases} x_1^o = -\lambda t \\ x_2^o = \lambda \end{cases} \quad (t > 0)$$

$$\text{on a : } \frac{\| e^{tN} - x \|}{\| x \|} = \frac{1}{t+1}$$

cette quantité peut être rendue aussi petite que l'on veut C.Q.F.D.

#### 1.4. NORMALE ACCESSIBILITE

##### Définition

Soit M une variété différentielle (de classe  $C^\infty$ , connexe) et F une famille de champs de vecteurs donnée sur M.

Nous dirons que le point y est normalement accessible à partir du point x si :

- il existe  $X^1 \dots X^p$  dans F
- il existe  $t_1^0 \dots t_p^0$  réels  $> 0$  tels que

$$y = X_{t_1^0}^1 \circ \dots \circ X_{t_1^0}^p (x) \text{ et si l'application :}$$

$$(t_1, \dots, t_p) \longrightarrow X_{t_1}^1 \circ \dots \circ X_{t_p}^p (x) \text{ est de rang la dimension de}$$

$$M \text{ en } (t_1^0, \dots, t_p^0)$$

##### Remarques

- 1) Si le point y est normalement accessible depuis le point x et si z est accessible depuis y, alors z est normalement accessible depuis x. Si le point y est normalement accessible depuis le point x et si x est accessible depuis z, alors y est normalement accessible depuis z.
- 2) Soit y un point normalement accessible depuis x, par application du théorème des fonctions implicites, on peut montrer l'existence d'un ouvert U x contenant x et d'un ouvert Vy contenant y tels que tout point de Vy soit normalement accessible à partir de tout point de Ux.
- 3) En particulier si le point x est normalement auto-accessible, il existe un ouvert U contenant x tel que tout point de U soit normalement accessible à partir de tout point de U par le système F aussi bien que par le système opposé - F. Ainsi, dans le cas d'un point normalement auto-accessible, il y a locale complète contrôlabilité au voisinage de x.



Dans la suite nous nous servirons abondamment du lemme suivant :

Lemme

Soit  $M$  une variété et  $F$  une famille de champs de vecteurs sur  $M$ . Soit  $x$  un point de  $M$  normalement auto-accessible par le système  $F$ . Supposons que de tout point de  $M$  on puisse atteindre un voisinage arbitraire de  $x$  par le système  $F$  ainsi que par le système opposé  $-F$ , alors  $F$  est transitif sur  $M$ .

Démonstration

$x$  étant normalement auto-accessible, il existe un ouvert  $U$  contenant  $x$  tel que tout point de  $U$  soit normalement accessible à partir de tout point de  $U$ . Soient  $y$  et  $z$  deux points de  $M$ ,

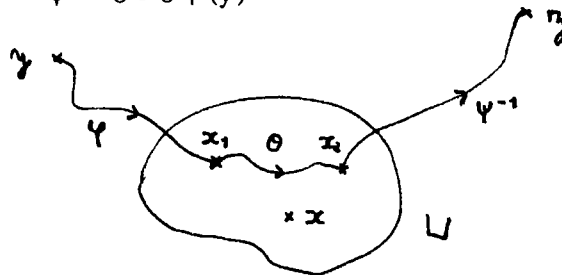
$$\exists \varphi \in S(F) \text{ tel que } \varphi(y) = x_1$$

$$\exists \psi \in S(-F) \text{ tel que } \psi(z) = x_2$$

or  $x_2$  est accessible à partir de  $x_1$  donc :

$$\exists \theta \in S(F) \text{ tel que } \theta(x_1) = x_2$$

$$\text{donc } z = \psi^{-1} \circ \theta \circ \varphi(y)$$



Remarque 1

Si le point  $x$  est attractif pour un champ  $X$  de  $F$  et pour un champ  $y$  de  $-F$ , alors le lemme est vérifié.

Remarque 2

Supposons que  $\dim M = 2$ , soit  $F$  une famille de champs de vecteur donné sur  $M$ . Supposons que le point  $y$  de  $M$  soit accessible à partir du point  $x$  :

$$\exists t_1, t_2, \dots, t_p \in \mathbb{R}_+, \exists X^1 \dots X^p \in F \text{ tels que :}$$

$y = X_{t_1}^1 \circ \dots \circ X_{t_p}^p(x)$ , si il existe  $i \in \{1, 2, \dots, p\}$  tel que les trajectoires de  $X_i$  et  $X_{i+1}$  soient transverses au point  $X_{t_{i+1}}^{i+1} \circ \dots \circ X_{t_p}^p(x)$ , alors le point  $y$  est normalement accessible à partir de  $x$ .

## CHAPITRE 2

Nous étudions ici la contrôlabilité sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$  d'une paire  $\{A,B\}$  de champs de vecteurs linéaires où  $A$  est un endomorphisme nilpotent d'ordre 2 ( $A \neq 0$  et  $A^2 = 0$ ) et  $B$  un endomorphisme dont toutes les valeurs propres sont réelles. Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante de transitivité sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$  pour une telle paire.

Théorème 1 Soit  $A$  un endomorphisme nilpotent d'ordre 2 de  $\mathbb{R}^3$ ,  $B$  un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  ayant toutes ses valeurs propres réelles. La paire  $\{A,B\}$  est complètement contrôlable sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$  si et seulement si :

- i)  $\det (A+B-\lambda Id) \neq 0$  pour tout  $\lambda$  de  $\text{Spec} (B)$
- ii)  $\text{Tr} AB < 0$

Remarques

- \* Puisque  $A$  est de trace nulle,  $\text{Kill} (A,B) = 6 \times \text{Tr} AB$ , la 2ème condition équivaut donc à :  $\text{Kill} (A,B) < 0$
- \* Lorsque  $\text{Tr} AB \neq 0$ ,  $\det (A+B-\lambda Id) \neq 0$  pour toute valeur propre  $\lambda$  de  $B$  exprime exactement la condition du rang, ce qui est équivalent à dire, dans ce cas, qu'il n'y a pas de droite ou de plan invariant par  $A$  et  $B$ .

Ce théorème pourrait donc s'exprimer de la façon suivante :

Théorème 1' La paire de champs de vecteurs linéaires  $\{A,B\}$  est complètement contrôlable sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$  si et seulement si :

- i) le système  $\{A,B\}$  vérifie la condition du rang sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$
- ii)  $\text{Kill} (A,B) < 0$

Rappelons enfin que, puisque  $A$  est nilpotent, établir la complète contrôlabilité de la paire  $\{A,B\}$  sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$  revient à établir la transitivité du système projeté  $\{\tilde{A},\tilde{B}\}$  sur  $S^2$ .

Nous allons démontrer le théorème précédent en étudiant tous les cas possibles pour B, auparavant nous allons préciser l'allure des trajectoires de A sur  $S^2$ .

Dans une certaine base (i, j, k) nous avons  $\text{Mat } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Dans  $\mathbb{R}^3$  les trajectoires de A sont :

- un plan de points singuliers : le plan  $\langle j, k \rangle$
- des droites de vecteur directeur k, parcourues dans le sens des z croissants si l'on est du côté du plan où les abscisses sont positives, dans le sens décroissant sinon.

Choisissons comme norme euclidienne la norme rendant la base (i,j,k) orthonormée et soit  $S^2$  la sphère unité associée.

Par projection des trajectoires de A sur  $S^2$  nous obtenons :

- un grand cercle de points singuliers : le grand cercle intersection de  $S^2$  et du plan  $\langle j, k \rangle$
- des méridiens : ces méridiens sont parcourus dans le sens ascendant si l'on est dans la demi-sphère des abscisses positives, dans le sens descendant sinon (voir figure 1).

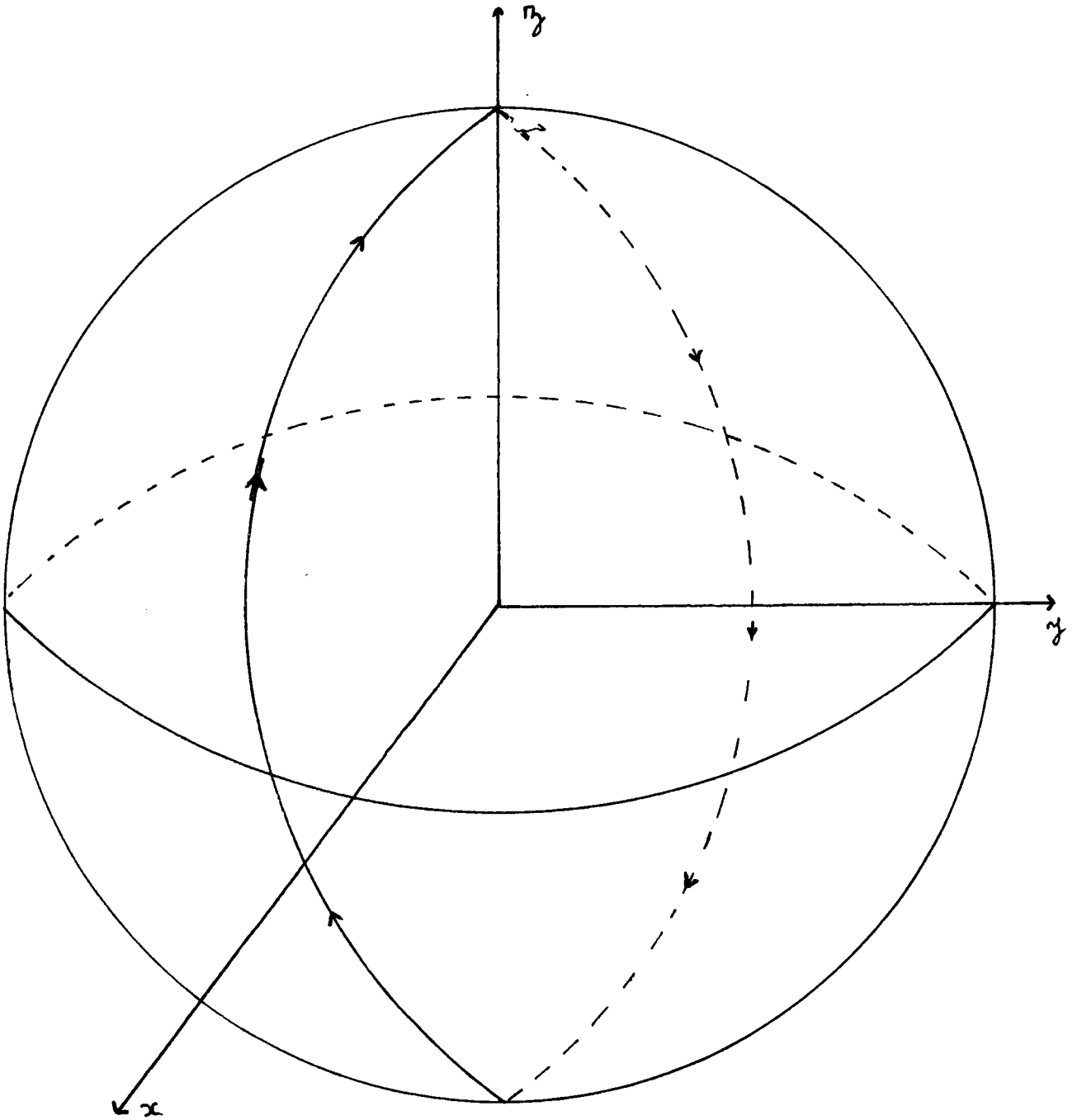


Figure 1 : Trajectoires du champ  $\tilde{A}$  sur  $S^2$ .

Dans le système d'axes  $(O_x, O_y, O_z)$  la matrice de A est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1er cas : B est une homothétie de rapport  $\lambda$ .

Il est clair que, dans ce cas, la paire  $\{A, B\}$  n'est pas complètement contrôlable sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ , car  $\{A, B\}$  ne vérifie pas la condition du rang.

Notons que  $\det(A+B-\lambda Id) = \det A = 0$ .

2e cas :

B ne possède qu'une seule valeur propre réelle, le sous-espace propre associé étant de dimension 2.

Dans une certaine base  $\text{Mat } B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Il n'y a pas, dans ce cas, complète contrôlabilité sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$  pour le système  $\{A, B\}$ .

En effet : B a même projection sur  $S^2$  que  $B-\lambda Id$ .  $\text{Mat } (B-\lambda Id) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

par conséquent le grand cercle intersection de  $S^2$  et du plan  $xOy$  est composé de points singuliers pour  $\tilde{B}$  et comme parmi les orbites de  $\tilde{A}$  il existe également un grand cercle de points singuliers  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$  ont au moins deux points singuliers en commun donc  $\{A, B\}$  n'est pas transitif sur  $S^2$ .

Notons que, dans ce cas,  $\det(A+B-\lambda Id) = 0$  (puisque  $\dim(\text{Ker } A \cap \text{Ker}(B-\lambda Id)) \geq 1$ )

3e cas :

B ne possède qu'une seule valeur propre  $\lambda$ , le sous-espace propre associé étant de dimension 1.

Dans une certaine base  $\text{Mat } B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

B ayant même projection sur  $S^2$  que  $B-\lambda Id$ , nous supposons dans la suite que  $\lambda = 0$ , donc que B est nilpotent d'ordre 3.

Nous cherchons tout d'abord à trouver une base où A et B s'écrivent sous la forme la plus simple possible.

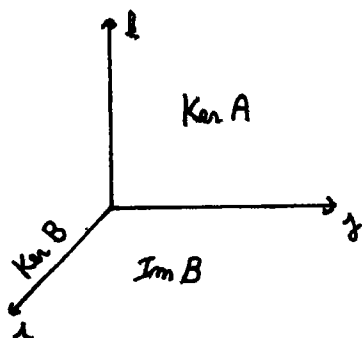
- A est nilpotent d'ordre 2 donc  $\dim \text{Ker } A = 2$  et  $\text{Im } A \subset \text{Ker } A$

- B est nilpotent d'ordre 3 donc  $\dim \text{Im } B = 2$  et  $\text{Ker } B \subset \text{Im } B$

\* Si on avait  $\text{Ker } B \subset \text{Ker } A$ , la droite  $\text{Ker } B$  serait stable par  $A$  et  $B$  et il n'y aurait pas transitivité de  $\{A, B\}$  sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ , et dans ce cas  $\det(A+B) = 0$ .

\* Nous supposons dans la suite que  $\text{Ker } B \not\subset \text{Ker } A$ .

Dans ce cas  $\text{Im } B \neq \text{Im } A$  et on peut trouver une base  $(i, j)$  de  $\text{Im } B$  telle que  $i$  soit un vecteur directeur de  $\text{Ker } B$  et  $j$  un vecteur directeur de  $\text{Im } B \cap \text{Ker } A$ .

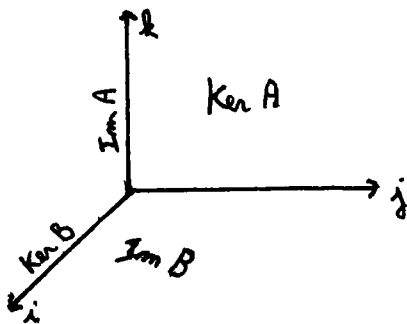


Dans le cas où  $\text{Im } A \subset \text{Im } B$  (i.e.  $j$  est vecteur directeur de  $\text{Im } A$ ) il est clair que le plan  $\text{Im } B$  est stable à la fois par  $A$  et  $B$ , et il n'y a pas complète contrôlabilité du système  $\{A, B\}$  sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ .

Dans ce cas  $\det(A+B) = 0$  puisque  $\text{Im}(A+B) \subset \text{Im } B$  et donc  $\dim \text{Im}(A+B) \leq 2$ .

\* Nous supposons dans la suite que  $\text{Im } A \not\subset \text{Im } B$ .

Dans ce cas, on peut trouver un vecteur  $k$  tel que  $(i, j, k)$  forme une base de  $\mathbb{R}^3$  et tel que  $k$  soit un vecteur directeur de  $\text{Im } A$ .



Dans la base  $(i, j, k)$  les matrices de  $A$  et  $B$  s'écrivent :

$$\text{Mat } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Mat } B = \begin{pmatrix} 0 & a' & b' \\ 0 & 0 & c' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec } a'c' \neq 0$$

La contrôlabilité du système  $\{A, B\}$  sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$  est équivalente à la contrôlabilité du système  $\{-A, -B\}$ , quitte à remplacer le système  $\{A, B\}$  par son opposé on peut supposer que  $a'c' > 0$ .

Dans ce cas posons :

$$\begin{cases} l_1 = i \\ l_2 = \frac{1}{a'} j \\ l_3 = \frac{1}{a'c'} k \end{cases}$$

Dans la base  $(l_1, l_2, l_3)$  nous avons :

$$\text{Mat A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et Mat B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec  $\alpha = a a' c' > 0$  et  $b = \frac{b'}{a'c'}$

Choisissons comme norme euclidienne la norme rendant la base  $(l_1, l_2, l_3)$  orthonormée et soit  $S^2$  la sphère unité associée.

Nous allons décrire les trajectoires de  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$  sur  $S^2$ .

\* Les trajectoires de  $\tilde{A}$  sur  $S^2$  ont été décrites plus haut

\* Les équations des trajectoires de B sont données par :

$$\begin{cases} x = z_0 \frac{t^2}{2} + (y_0 + b)t + x_0 \\ y = z_0 t + y_0 \\ z = z_0 \end{cases}$$

Les orbites de B sont :

- un axe constitué de points singuliers : l'axe Ox
- des droites situées dans le plan xOy strictement parallèles à Ox
- des paraboles situées dans des plans strictement parallèles à xOy

On en déduit pour  $\tilde{B}$  :

- les points  $(1, 0, 0)$  et  $(-1, 0, 0)$  sont singuliers
- l'équateur est stable par  $\tilde{B}$
- pour tout point x de l'hémisphère Nord :  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \tilde{B}_t(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{B}_t(x) = (1, 0, 0)$

1. Cas où  $\text{Tr } AB > 0$  (i.e.  $b \geq 0$ )

Vu les équations des trajectoires de B, il est clair, dans ce cas, que le quadrant  $\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x > 0, y > 0 \text{ et } z > 0 \}$  est stable par A et B ; il n'y a donc pas complète contrôlabilité pour le système  $\{A,B\}$ .

2. Cas où  $\text{Tr } AB < 0$  (i.e.  $b < 0$ )

Nous allons montrer la transitivité de  $\{\tilde{A}, \tilde{B}\}$  sur  $S^2$ .

[ Pour cela, nous démontrons tout d'abord que les pôles de  $S^2$  sont normalement auto-accessibles. ]

Pour les explications qui suivent, on pourra se reporter à la figure 3. Soit C l'orbite de  $\tilde{B}$  passant par le pôle Nord, cette orbite a pour équations :

$$\begin{cases} x = \frac{t^2/2 + bt}{\|\cdot\|} \\ y = \frac{t}{\|\cdot\|} \\ z = \frac{1}{\|\cdot\|} \end{cases} \quad \text{où } \|\cdot\|^2 = (t^2/2 + bt)^2 + t^2 + 1$$

\* Puisque  $b < 0$ , il est possible d'atteindre à partir du pôle Nord et à l'aide du champ  $\tilde{B}$  un point  $M_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$  tel que  $x_1 < 0, y_1 > 0, z_1 > 0$ .

\* La trajectoire de  $\tilde{A}$  passant par  $M_1$  étant le méridien de  $M_1$  parcouru dans le sens descendant, il est possible d'atteindre un point  $M_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$  avec  $x_2 < 0, y_2 > 0$

et  $z_2 < 0$ , la latitude  $\theta_2$  de  $M_2$  pouvant être choisie arbitrairement proche de 0.

\* Les équations de la trajectoire de  $\tilde{B}$  passant par le point  $M_2$  sont données par :

$$\begin{cases} x = \frac{z_2 t^2/2 + (y_2 + bz_2)t + x_2}{\|\cdot\|} \\ y = \frac{z_2 t + y_2}{\|\cdot\|} \\ z = \frac{z_2}{\|\cdot\|} \end{cases}$$

Cette trajectoire coupe le grand cercle  $v = 0$  pour  $t = t_0 = -y_2 / z_2$  ( $t_0 > 0$ )



$$\begin{aligned} \text{et } x(t_0) &= \frac{-y_2^2/2z_2 - b y_2 + x_2}{\|\cdot\|} \\ &= \frac{\cos \theta_2}{\|\cdot\|} \left( \frac{-\cos \theta_2 \sin^2 \varphi_2}{2 \sin \theta_2} - b \sin \varphi_2 + \cos \varphi_2 \right) \end{aligned}$$

où  $\theta_2$  désigne la latitude du point  $M_2$ ,  $\varphi_2$  sa longitude.

Si  $\theta_2$  est choisi suffisamment proche de 0 ( $\theta_2 < 0$ ) il est clair que  $x(t_0) > 0$ , par conséquent, à partir du point  $M_2$ , on peut atteindre grâce au champ  $\tilde{B}$  un point  $M_3$  situé dans l'hémisphère Sud et de longitude  $\varphi_3 < 0$  arbitrairement proche de 0.

\* Sur l'orbite  $C$  de  $\tilde{B}$  passant par le pôle Nord, on peut trouver un point  $M_4$  situé dans l'hémisphère Nord de longitude  $\varphi_4 < 0$  arbitrairement proche de 0 ; ce point  $M_4$  étant, de plus, situé avant le pôle Nord sur la trajectoire  $C$ . Choisissons  $\varphi_3 = \varphi_4$ , la trajectoire de  $\tilde{A}$  passant par  $M_3$  étant le méridien de  $M_3$  parcouru dans le sens ascendant,  $M_4$  est accessible à partir de  $M_3$  grâce au champ  $\tilde{A}$  ; le pôle Nord est accessible à partir de  $M_4$  grâce à  $\tilde{B}$ .

\* Nous avons donc montré que le pôle Nord est auto-accessible, les trajectoires de  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$  étant transverses en  $M_1$ , le pôle Nord est normalement auto-accessible. Par symétrie le pôle Sud est également normalement auto-accessible.

Il existe donc un ouvert  $U_1$  contenant le pôle Nord, un ouvert  $U_2$  contenant le pôle Sud tels que tout point de  $U_i$  ( $i = 1, 2$ ) soit normalement accessible à partir de tout point de  $U_i$  par le système  $\{\tilde{A}, \tilde{B}\}$  ainsi que par le système opposé.

Démontrons que, de tout point  $S^2$ , on peut atteindre un point de  $U_1$  grâce aux systèmes  $\{\tilde{A}, \tilde{B}\}$  et  $\{-\tilde{A}, -\tilde{B}\}$ .

Soit  $M_0$  un point de  $S^2$ , on peut toujours supposer que  $M_0$  n'est pas singulier pour  $\tilde{A}$  car il existe  $t > 0$  tel que  $\tilde{B}_t(M_0)$  n'est pas singulier pour  $\tilde{A}$ . A partir de  $M_0$ , il est clair que l'on peut atteindre un point de  $U_1$  ou de  $U_2$  grâce au champ  $\tilde{A}$ . Si on atteint un point  $M_1$  de  $U_2$ , le système  $\{\tilde{A}, \tilde{B}\}$  permet d'atteindre, à partir de  $M_1$ , un point de  $M_2$  de  $U_2$  d'abscisse positive, la trajectoire de  $\tilde{A}$  passant par  $M_2$  étant le méridien de  $M_2$  parcouru dans le sens ascendant, il est possible d'atteindre un point  $M_3$  de  $U_1$  à partir du point  $M_2$  et grâce au champ  $\tilde{A}$ .

Conclusion

Il existe un ouvert  $U_1$  du pôle Nord tel que tout point de  $S^2$  puisse être ramené en  $U_1$  grâce au système  $\{\tilde{A}, \tilde{B}\}$  ainsi qu'au système opposé, tout point de  $U_1$  est accessible à partir de tout point de  $U_1$  grâce au système  $\{\tilde{A}, \tilde{B}\}$ , le système  $\{\tilde{A}, \tilde{B}\}$  est donc transitif sur  $S^2$ .

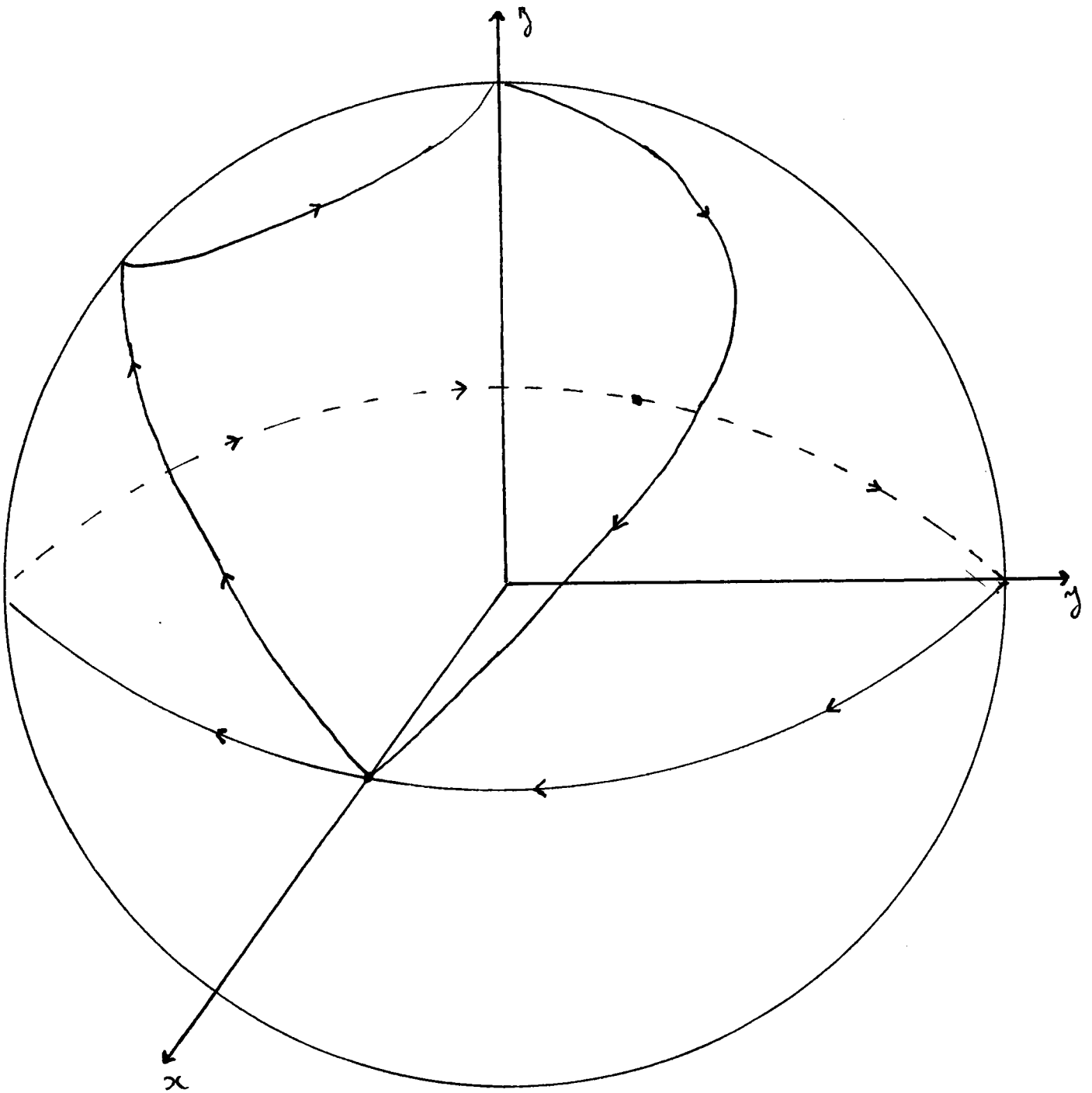


Figure 2 : Trajectoires de  $\tilde{B}$  sur  $S^2$ , dans le système d'axes  $(0x, 0y, 0z)$

$$\text{Mat } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } b > 0$$

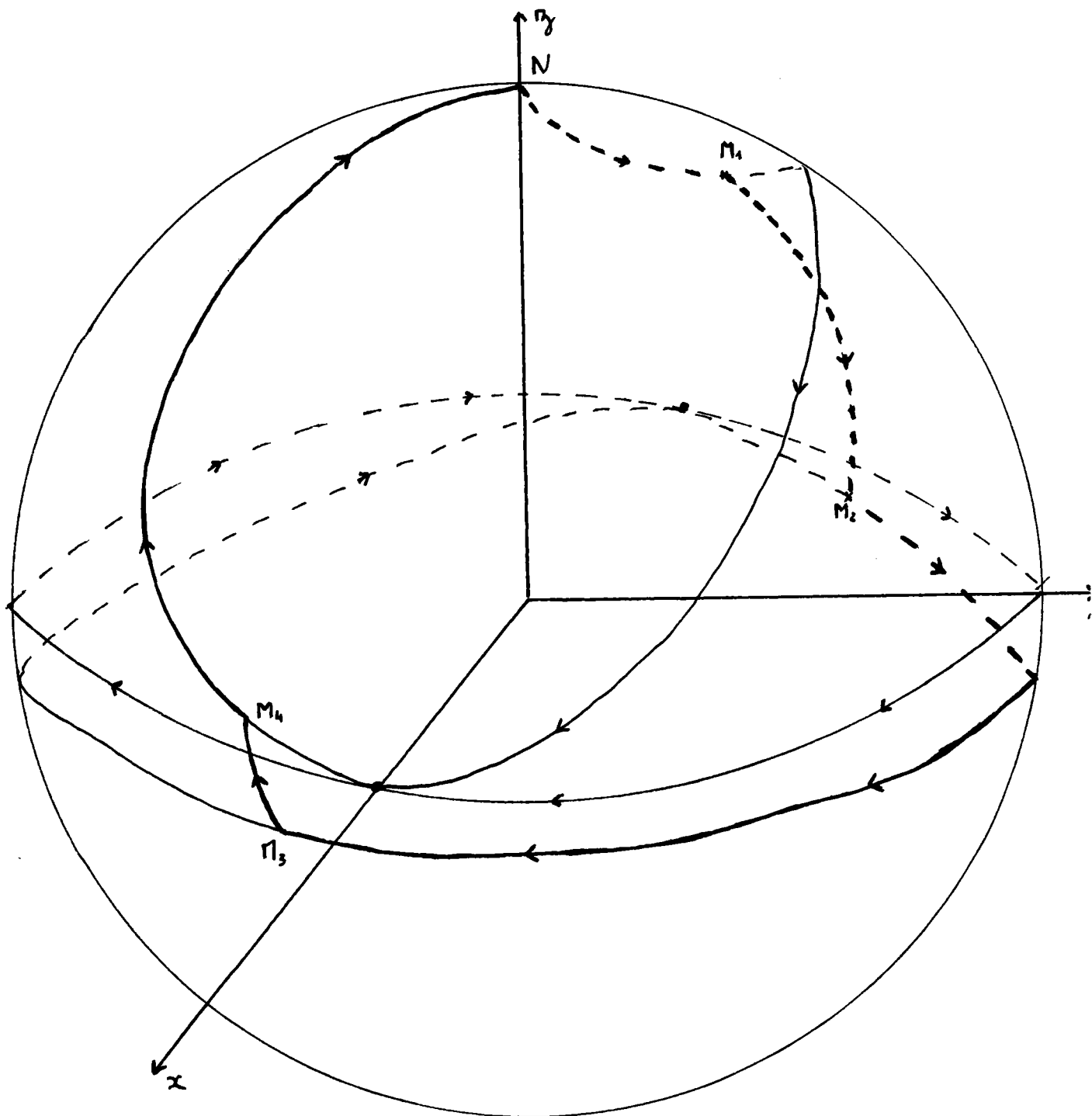


Figure 3 : Nous avons représenté les trajectoires de  $\tilde{B}$  sur  $S^2$  ainsi que la trajectoire d'auto-accessibilité du pôle Nord.

Dans le système d'axes  $(0x, 0y, 0z)$  la matrice de  $B$  s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4e cas : B possède deux valeurs propres réelles distinctes  $\alpha$  et  $\beta$ , la dimension du sous-espace propre associé à  $\alpha$  étant égale à 2.

Dans une certaine base  $\text{Mat } B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$

Dans ce cas le système  $\{A, B\}$  n'est pas transitif sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ . En effet, B a même projection sur  $S^2$  que  $B - \alpha \text{Id}$ , or le plan  $xOy$  est constitué de points singuliers pour  $B - \alpha \text{Id}$ , par projection sur  $S^2$ , on voit donc que le grand cercle intersection de  $S^2$  et du plan  $xOy$  est composé de points singuliers pour  $\tilde{B}$ . Par ailleurs nous avons vu que parmi les trajectoires de  $\tilde{A}$  sur  $S^2$  se trouve également un grand cercle de points singuliers, par conséquent  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$  ont au moins deux points singuliers communs sur  $S^2$ , le système  $\{\tilde{A}, \tilde{B}\}$  n'est donc pas transitif sur  $S^2$ . Notons que, dans ce cas,  $\det(A+B - \alpha \text{Id}) = 0$  car  $\dim(\text{Ker } A \cap (\text{Ker}(B - \alpha \text{Id}))) > 0$ .

5e cas : B possède deux valeurs propres réelles distinctes, la dimension des sous-espaces propres étant égale à 1.

Dans une certaine base  $\text{Mat } B = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$

B a même projection sur  $S^2$  que  $B - \alpha \text{Id}$ , par conséquent on peut toujours supposer que  $\alpha = 0$ ; de plus, quitte à étudier la contrôlabilité du système  $\{-A, -B\}$  au lieu de  $\{A, B\}$ , on peut toujours supposer que  $\beta > \alpha$ .

Enfin la complète contrôlabilité d'un système  $\{A, B\}$  sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$  est équivalente à la complète contrôlabilité d'un système  $\{A, \frac{1}{\lambda} B\}$  pour tout  $\lambda$  positif, on peut donc supposer que  $\beta - \alpha = 1$ .

On s'est donc ramené à l'étude d'un système  $\{A, B\}$  où A est nilpotent d'ordre 2 et où B a pour matrice dans une certaine base :

$$\text{Mat } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nous cherchons tout d'abord une base de  $\mathbb{R}^3$  dans laquelle A et B s'écrivent sous la forme la plus simple possible.

- A est nilpotent d'ordre 2 donc  $\dim \text{Ker } A = 2$  et  $\text{Im } A \subset \text{Ker } A$
- $\text{Ker } B \subset \text{Im } (B - \text{Id})$  et  $\dim \text{Im } (B - \text{Id}) = 2$

Soit P le plan  $P = \text{Im } (B - \text{Id})$

- \* Le plan P est stable par B, si on avait  $\text{Im } A \subset P$ , ce plan serait également stable par A et il n'y aurait pas complète contrôlabilité du système  $\{A, B\}$  sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ .

Dans ce cas on aurait  $\det (A+B - \text{Id}) = 0$  car  $\text{Im } (A+B - \text{Id}) = \text{Im } (B - \text{Id})$ .

On suppose dans la suite que  $\text{Im } A \not\subset P$

- \* Dans ce cas, on peut trouver une base  $(i, j, k)$  de  $\mathbb{R}^3$  telle que :

- i soit un vecteur directeur de  $\text{Ker } B$
- $(i, j)$  soit une base de P
- k soit un vecteur directeur de  $\text{Im } A$

- dans cette base : 
$$\text{Mat } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si on avait  $d = 0$ , alors le plan P engendré par i et k serait stable par B ainsi que par A car il contient l'image de A, il n'y aurait alors pas transitivité du système  $\{A, B\}$  sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ .

Dans ce cas on aurait :  $\det (A+B) = 0$  puisque  $\text{Im } (A+B) \subset P$ .

On suppose dans la suite que  $d \neq 0$

Posons alors :

$$\begin{cases} l_1 = i \\ l_2 = \left(\frac{c}{d} + 1\right)i + j \\ l_3 = \frac{1}{d} k \end{cases}$$

Dans la base  $(l_1, l_2, l_3)$  
$$\text{Mat } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \text{Mat } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 \end{pmatrix}$$

Eliminons encore deux cas particuliers :

- si  $a = 0$ , la droite de vecteur directeur  $i$  est stable par  $A$  et  $B$ , le système  $\{A,B\}$  n'est pas transitif sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ .  
Dans ce cas  $\det(A+B) = 0$
- si  $b = 0$ , la droite de vecteur directeur  $j + k$  est stable par  $A$  et  $B$ , le système  $\{A,B\}$  n'est donc pas transitif sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ .  
Dans ce cas  $\det(A+B-Id) = 0$

Nous supposons donc, dans la suite, que  $a \neq 0$  et  $b \neq 0$

Dans ce cas  $\det(A+B) = a \neq 0$  et  $\det(A+B-Id) = b \neq 0$

### Allure des trajectoires de $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ sur $S^2$

\* Les trajectoires de  $\tilde{A}$  sont :

- Un grand cercle grand  $C$  de points singuliers :  $C$  est le grand cercle intersection de  $S^2$  et du plan d'équation  $ax + by = 0$
- Des méridiens situés de part et d'autre du grand cercle  $C$ , ces méridiens sont parcourus dans des sens différents suivant que l'on est dans l'une ou l'autre demi-sphère définie par  $C$ .

Notons  $D_1$  la demi-sphère déterminée par le grand cercle  $C$  et contenant le point de coordonnées  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $D_2$  la demi-sphère symétrique de  $D_1$ .

- Si  $a > 0$  les trajectoires de  $\tilde{A}$  passant par les points de  $D_1$  (resp.  $D_2$ ) sont des méridiens parcourus dans le sens ascendant (resp. descendants).
- Si  $a < 0$  les trajectoires de  $\tilde{A}$  passant par les points de  $D_1$  (resp.  $D_2$ ) sont des méridiens parcourus dans le sens descendant (resp. ascendant).

Les trajectoires de  $\tilde{A}$  sont représentées figure 4.

\* Les équations des trajectoires de  $\tilde{B}$  sont données par :

$$\begin{cases} x(t) = (y_0 - z_0)t + x_0 \\ y(t) = z_0 e^t + y_0 - z_0 \\ z(t) = z_0 e^t \end{cases}$$

- . B possède deux vecteurs propres : les vecteurs  $e_1$  et  $e_2 + e_3$
- . les plans d'équations  $z = 0$  et  $y - z = 0$  sont stables par B.

On en déduit pour  $\tilde{B}$  :

- les points  $P(1,0,0)$ ,  $P'(-1,0,0)$  et  $Q(0, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ ,  $Q'(0, -\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$  sont des points singuliers pour  $\tilde{B}$ .
- l'équateur et le grand cercle intersection de  $S^2$  et du plan d'équation  $y - z = 0$  sont stables par  $\tilde{B}$ .
- le bassin d'attraction du point Q est l'hémisphère Nord  
le bassin d'attraction du point Q' est l'hémisphère Sud
- pour le champ opposé  $-\tilde{B}$  :  
le bassin d'attraction du point P (resp. P') est la demi-sphère définie par  $y - z < 0$  (resp.  $y - z > 0$ ).

Les trajectoires de  $\tilde{B}$  sont représentées figure 5.



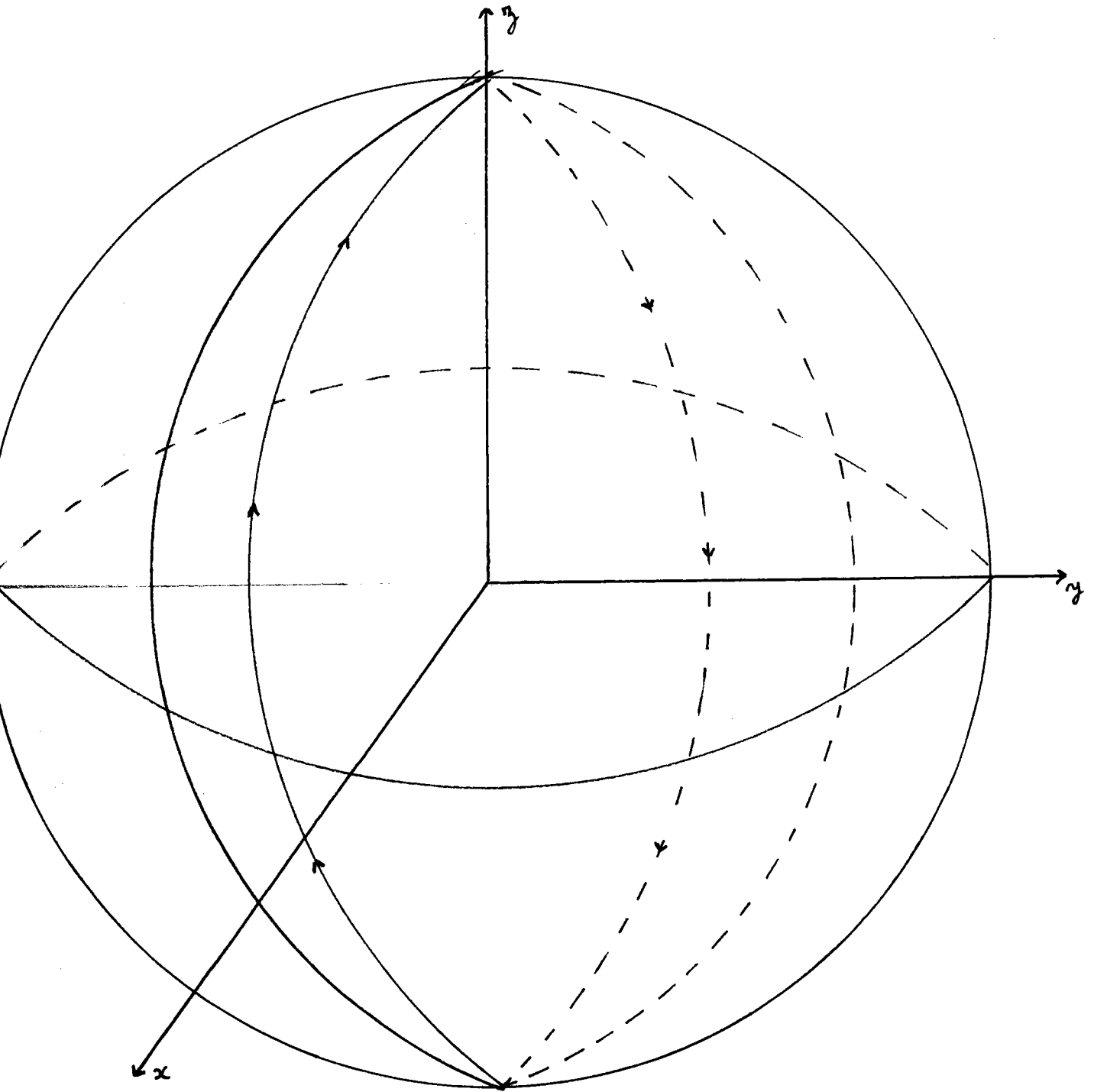


Figure 4 : Nous avons représenté les trajectoires de  $\tilde{A}$  sur  $S^2$ , dans le système d'axes  $Ox, Oy, Oz$ . Mat  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

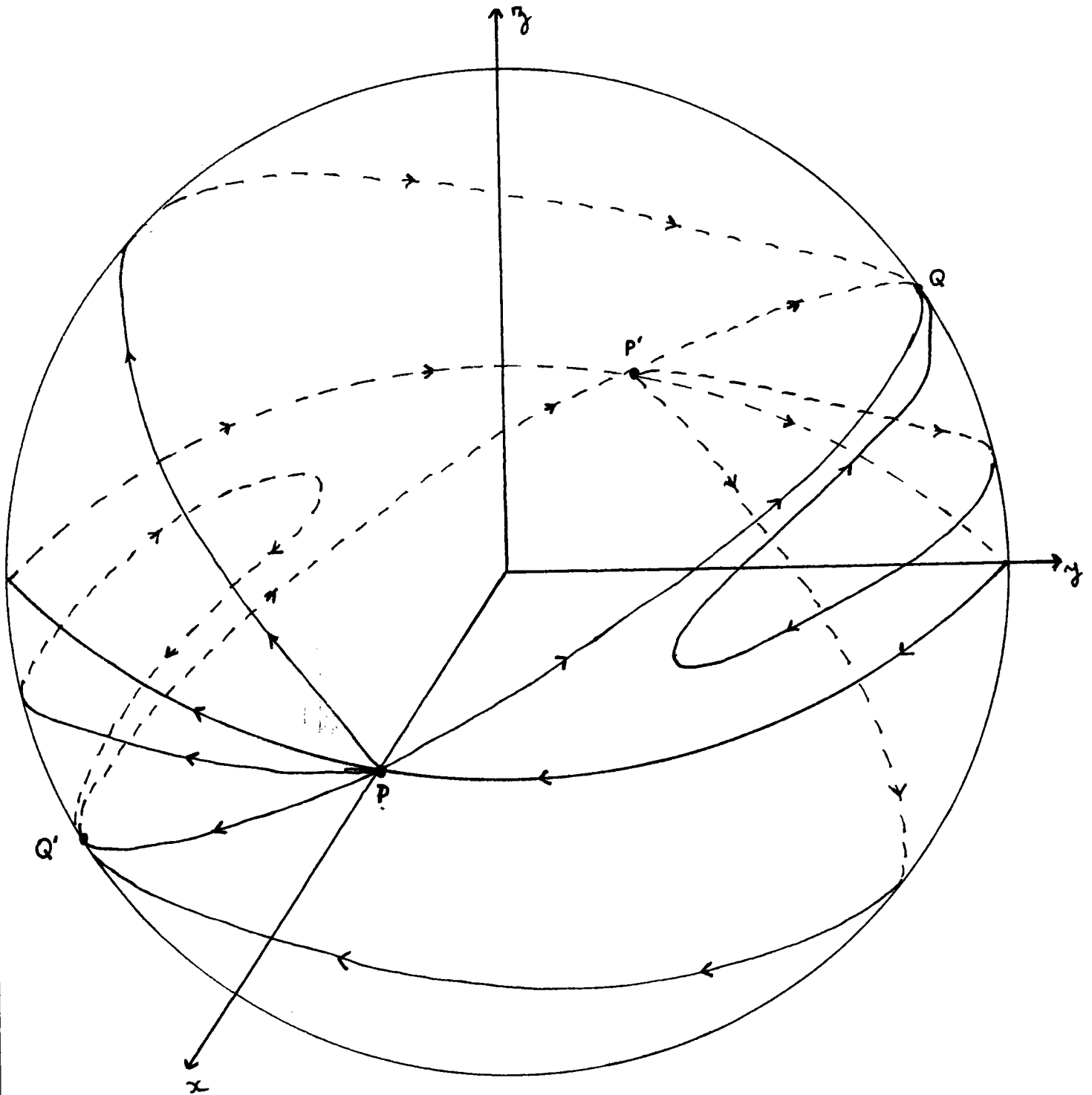


Figure 5 : Nous avons représenté les trajectoires du champ  $\tilde{B}$  sur  $S^2$ , dans le système d'axes  $Ox, Oy, Oz$ . Mat  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Montrons maintenant que le système  $\{A,B\}$  est transitif sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$  si et seulement si  $\text{Tr } AB < 0$ .

Nous montrons tout d'abord que le système  $\{\tilde{A}, \tilde{B}\}$  n'est pas transitif sur  $S^2$  dès que  $\text{Tr } AB \geq 0$ .

### 1. Cas où $\text{Tr } AB = -a + b > 0$

#### 1.1. Cas où $\text{Tr } AB \geq 0$ avec $a > 0$ et $b > 0$

Remarquons tout d'abord que, puisque  $a > 0$ , les trajectoires de  $\tilde{A}$  passant par les points de  $D_1$  sont des méridiens parcourus dans le sens ascendant.  $D_1$  est, ici, la demi-sphère définie par :

$$D_1 = \{ (x,y,z) \in S^2 / ax + by > 0 \}$$

D'autre part, puisque  $-a + b \geq 0$  et  $a > 0$  et  $b > 0$ ,  $\frac{b}{a} \geq 1$

Considérons alors la partie E de la sphère définie par :

$$E = \{ (x,y,z) \in S^2 / y > 0, z > 0 \text{ et } x + y > 0 \}$$

\* soit  $M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$  un point de E puisque  $\frac{b}{a} \geq 1$  on a :

$ax_0 + by_0 \geq a(x_0 + y_0) > 0$  donc le point  $M_0$  appartient à  $D_1$  : les trajectoires de  $\tilde{A}$  passant par les points de E sont donc des méridiens parcourus dans le sens ascendant, E est donc stable par  $\tilde{A}$ .

\* Montrons que la partie E est également stable par  $\tilde{B}$  :

soit  $M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$  un point de E, les équations de la trajectoire de  $\tilde{B}$  passant par  $M_0$  sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} ||.|| x(t) = (y_0 - z_0)t + x_0 \\ ||.|| y(t) = z_0 e^t + y_0 - z_0 \text{ où } ||.||^2 = ((y_0 - z_0)t + x_0)^2 + (z_0 e^t + y_0 - z_0)^2 + z_0^2 e^{2t} \\ ||.|| z(t) = z_0 e^t \end{array} \right.$$

$$i) \quad ||.|| y(t) = z_0 e^t + y_0 = \underbrace{z_0}_{>0} \underbrace{(e^t - 1)}_{>0} + \underbrace{y_0}_{>0} > 0$$

donc  $y(t) > 0$  pour tout  $t$  positif.

$$ii) \quad ||.|| z(t) = z_0 e^t > 0 \text{ pour tout } t \text{ positif.}$$

$$iii) \quad \text{Posons } f(t) = ||.|| (x(t) + y(t)) = (y_0 - z_0)t + x_0 + z_0 e^t + y_0 - z_0$$

$$f'(t) = y_0 - z_0 + z_0 e^t = \underbrace{z_0}_{>0} \underbrace{(e^t - 1)}_{>0} + \underbrace{y_0}_{>0} > 0$$

$f'(t)$  est positive pour tout  $t$  de  $\mathbb{R}_+$  donc la fonction  $f$  croît de  $x_0 + y_0 > 0$  à  $+\infty$  lorsque  $t$  croît de 0 à  $+\infty$ , donc  $f(t)$  est positive pour tout  $t$  de  $\mathbb{R}_+$ .

Conclusion Si  $M(t) \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$  désigne le point courant de la trajectoire de  $\tilde{B}$  passant par  $M_0$ , les points i), ii) et iii) ci-dessus montrent que  $M(t)$  appartient à  $E$  pour tout  $t$  positif.  $E$  est stable par  $\tilde{B}$ , comme  $E$  est également stable par  $\tilde{A}$ , le système  $\{\tilde{A}, \tilde{B}\}$  n'est pas transitif sur  $S^2$ .

### 1.2. Cas où $\text{Tr } AB \geq 0$ avec $a < 0$ et $b > 0$

Remarquons tout d'abord que les trajectoires de  $\tilde{A}$  passant par les points de  $D_1$  sont des méridiens parcourus dans le sens descendant.  $D_1$  est, ici, la demi-sphère définie par :

$$D_1 = \{(x, y, z) \in S^2 / ax + by < 0\}$$

Considérons la partie  $E$  de la sphère définie par :

$$E = \{(x, y, z) \in S^2 / x > 0, y < 0 \text{ et } z > 0\}$$

\* Si  $M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$  est un point de  $E$ ,  $ax_0 + by_0 < 0$ , le point  $M_0$  appartient donc à  $D_1$  : la trajectoire de  $\tilde{A}$  passant par  $M_0$  est donc le méridien de  $M_0$  parcouru dans le sens descendant. Ceci prouve que  $E$  est stable par le champ -  $\tilde{A}$ .

\* Nous allons montrer que E est également stable par le champ  $-\tilde{B}$  :

Soit  $M_o \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \end{pmatrix}$  un point de E et  $M(t) \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$  le point courant de la trajectoire de  $\tilde{B}$  passant par  $M_o$ .

Nous avons :

$$i) \quad ||.|| \quad x(t) = \underbrace{(y_o - z_o)}_{<0} t + \underbrace{x_o}_{<0} \text{ donc } x(t) < 0 \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}_-$$

$$ii) \quad ||.|| \quad y(t) = z_o e^t + y_o - z_o \\ = \underbrace{z_o(e^t - 1)}_{>0} + \underbrace{y_o}_{<0} \text{ donc } y(t) < 0 \text{ pour tout } t \text{ de } \mathbb{R}_-$$

$$iii) \quad ||.|| \quad z(t) = z_o e^t > 0 \text{ pour tout } t \text{ de } \mathbb{R}_-$$

Conclusion les points i), ii) et iii) ci-dessus montrent que  $M(t)$  appartient à E pour tout t négatif, E est donc stable par  $-\tilde{B}$  comme E est stable également par  $-\tilde{A}$ , on peut dire que la partie  $S^2 - E$  est stable par  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$ , le système  $\{\tilde{A}, \tilde{B}\}$  n'est donc pas transitif sur  $S^2$ .

### 1.3. Cas où $\text{Tr } AB > 0$ avec $a < 0$ et $b < 0$

Notons tout d'abord que les trajectoires de  $\tilde{A}$  passant par les points de  $D_1$  sont des méridiens parcourus dans le sens descendant.  $D_1$  est, ici, la demi-sphère définie par :  $D_1 = \{(x,y,z) \in S^2 / ax + by < 0\}$ .

D'autre part, puisque  $a + b > 0$  et  $a < 0$  et  $b < 0$ ,  $\frac{a}{b} > 1$ .

Considérons la partie E de la sphère définie par :

$$E = \{(x,y,z) \in S^2 / x > 0, z > 0, y - z < 0 \text{ et } x + y > 0\}$$

\* Soit  $M_o \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \end{pmatrix}$  un point de E puisque  $\frac{a}{b} > 1$  et  $b < 0$  nous avons :

$ax_o + by_o < b(x_o + y_o) < 0$ , le point  $M_o$  appartient donc à la demi-sphère  $D_1$ , la trajectoire de  $\tilde{A}$  passant par  $M_o$  est donc le méridien de  $M_o$  parcouru dans le sens descendant ce qui prouve que E est stable par le champ  $-\tilde{A}$ .

\* Nous allons montrer que E est également stable par  $-\tilde{B}$ .

Soit  $M(t) \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$  le point courant de la trajectoire de  $\tilde{B}$  passant par  $M_0$ , nous avons :

i)  $||.|| x(t) = \underbrace{(y_0 - z_0)}_{< 0} t + \underbrace{x_0}_{> 0}$  donc  $x(t) > 0$  pour tout  $t$  de  $\mathbb{R}_-$

ii)  $||.|| z(t) = z_0 e^t > 0$  pour tout  $t$  de  $\mathbb{R}_-$

iii)  $||.|| (y(t) - z(t)) = y_0 - z_0 < 0$  donc  $y(t) - z(t) < 0$  pour tout  $t$  de  $\mathbb{R}_-$

iv) Posons  $f(t) = ||.|| (x(t) + y(t)) = (y_0 - z_0)t + x_0 + z_0 e^t + y_0 - z_0$

$$f'(t) = y_0 + z_0(e^t - 1)$$

- si  $y_0 < 0$ ,  $f'(t)$  est négative pour tout  $t$  de  $\mathbb{R}_-$  donc la fonction  $f(t)$  décroît de  $+\infty$  à  $x_0 + y_0$  lorsque  $t$  croît de  $-\infty$  à 0,  $f(t)$  est donc positive pour tout  $t$  négatif.

- si  $y_0 > 0$   $f'(t)$  s'annule pour  $t = t_0 = \text{Log}(1 - \frac{y_0}{z_0}) < 0$  et on obtient le

tableau de variations suivant :

t	$-\infty$	$t_0$	0	
f'(t)	-	0	+	
f(t)	$+\infty$	f(t <sub>0</sub> )	$x_0 + y_0$	avec $f(t_0) = \underbrace{(y_0 - z_0)}_{< 0} \underbrace{t_0}_{< 0} + \underbrace{x_0}_{> 0} > 0$

donc  $f(t)$  est positive pour tout  $t$  négatif.

Conclusion



les points i), ii), iii) et iv) montrent que  $M(t)$  appartient à E pour tout  $t$  négatif : la partie E est stable par  $-\tilde{B}$ , comme elle est stable également par  $-\tilde{A}$  on peut conclure que la partie  $S^2 - E$  est stable par  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$ , le système  $\{\tilde{A}, \tilde{B}\}$  n'est donc pas transitif sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ .

**2. Cas où  $\text{Tr AB} = -a + b < 0$**

Nous allons montrer que le système  $\{\tilde{A}, \tilde{B}\}$  est transitif sur  $S^2$  ce qui entraînera la transitivité du système  $\{A, B\}$  sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ . La technique utilisée est la même que pour le 3e cas : il suffit, pour établir la transitivité de  $\{\tilde{A}, \tilde{B}\}$  sur  $S^2$ , de montrer que les pôles de  $S^2$  sont normalement auto-accessibles ce qui entraîne, vu que les pôles de  $S^2$  sont des points semi-attractifs pour  $\tilde{A}$ , l'existence d'un ouvert  $U$  contenant le pôle Nord tel que, de tout point de  $S^2$ , on puisse atteindre un point de  $U$  grâce aux systèmes  $\{\tilde{A}, \tilde{B}\}$  et  $\{-\tilde{A}, -\tilde{B}\}$ .

**2.1. Cas où  $\text{Tr AB} < 0$  avec  $a > 0$  et  $b > 0$**

Pour les explications qui suivent, on pourra se reporter à la figure 6.

Remarquons tout d'abord que les trajectoires de  $\tilde{A}$  passant par les points de  $D_1$  sont des méridiens parcourus dans le sens ascendant.  $D_1$  est, ici, la demi-sphère définie par :  $D_1 = \{(x, y, z) \in S^2 / ax + by > 0\}$ .

Les équations de la trajectoire de  $\tilde{B}$  passant par le pôle Nord sont :

$$\begin{cases} ||.|| x(t) = -t \\ ||.|| y(t) = e^t - 1 \\ ||.|| z(t) = e^t \end{cases} \quad \text{où } ||.||^2 = t^2 + (e^t - 1)^2 + e^{2t}$$

\* Soit  $f(t)$  la fonction définie par :

$$f(t) = ||.|| (ax(t) + by(t)) = -at + b(e^t - 1)$$

$$f'(t) = b \left( \frac{-a}{b} + e^t \right), \text{ puisque } -a + b < 0 \text{ avec } a > 0 \text{ et } b > 0, \frac{a}{b} > 1$$

on obtient donc le tableau de variations suivant pour  $f$  :

$t$	0	$\text{Log } \frac{a}{b}$	$+\infty$	
$f'(t)$	-	0	+	
$f(t)$	0		$+\infty$	$f\left(\text{Log } \frac{a}{b}\right) = a - b - a \text{Log } \frac{a}{b} < 0$

Ce tableau prouve que l'on peut atteindre à partir du pôle Nord un point  $M_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$  dont les coordonnées vérifient :  $x_1 < 0, y_1 > 0, z_1 > 0$  et  $ax_1 + by_1 < 0$ .

Le point  $M_1$  est donc situé dans la demi-sphère  $D_2$ , la trajectoire de  $\tilde{A}$  passant par  $M_1$  est donc le méridien de  $M_1$  parcouru dans le sens descendant.

- \* A partir de  $M_1$ , il est donc possible d'atteindre, grâce au champ  $\tilde{A}$ , un point  $M_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$  dont les coordonnées vérifient :  $x_2 < 0, y_2 > 0, z_2 < 0$ .

De plus, si  $\theta_2$  désigne la latitude de  $M_2$ , celle-ci peut être choisie arbitrairement proche de 0.

- \* Les équations de la trajectoire de  $\tilde{B}$  passant par  $M_2$  sont données par :

$$\begin{cases} ||.||x = (y_2 - z_2)t + x_2 \\ ||.||y = z_2 e^t + y_2 - z_2 \\ ||.||z = z_2 e^t \end{cases} \quad \text{où } ||.||^2 = (y_2 - z_2)t + x_2^2 + (z_2 e^t + y_2 - z_2)^2 + z_2^2 e^{2t}$$

$$y(t) \text{ s'annule pour } t = t_0 = \text{Log} \frac{z_2 - y_2}{z_2} > 0$$

et  $x(t_0) = (y_2 - z_2) \text{Log} \frac{z_2 - y_2}{z_2} + x_2$ , si on exprime  $x_2, y_2$  et  $z_2$  en coordonnées sphériques on obtient :

$$x(t_0) = \cos \theta_2 ((\sin \varphi_2 - \text{tg} \theta_2) \text{Log} (1 - \text{cotg} \theta_2 \sin \varphi_2) + \cos \varphi_2)$$

donc  $\lim x(t_0) = +\infty$ , si  $\theta_2$  est choisi assez proche de 0  $x(t_0) > 0$

$$\begin{matrix} \theta_2 \rightarrow 0 \\ \theta_2 < 0 \end{matrix}$$

Ce raisonnement prouve qu'il est possible d'atteindre, à partir du point  $M_2$  et grâce au champ  $\tilde{B}$ , un point  $M_3 \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$  tel que  $x_3 > 0, y_3 < 0, z_3 < 0$  et dont la longitude  $\varphi_3$  négative peut être choisie arbitrairement proche de 0.

- \* Sur la trajectoire de  $\tilde{B}$  passant par le pôle Nord, on peut trouver un point  $M_4$  situé avant le pôle Nord ( $M_4 = \tilde{B}_t(N)$  avec  $t < 0$ ) et arbitrairement proche de 0, les coordonnées de  $M_4$  vérifiant :  $x_4 > 0, y_4 < 0$  et  $z_4 > 0$ . Il est donc possible de choisir les points  $M_3$  et  $M_4$  de façon que leurs longitudes coïncident, la



ascendant, le point  $M_4$ , et donc aussi le pôle Nord, est accessible à partir du point  $M_3$ .

Conclusion On a montré que le pôle Nord est auto-accessible, comme les trajectoires de  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$  sont transverses en  $M_1$  le pôle Nord est normalement auto-accessible. Par symétrie, le pôle Sud est également normalement auto-accessible.

C.Q.F.D.

## 2.2. Cas où $\text{Tr } AB < 0$ avec $a > 0$ et $b < 0$

Remarquons tout d'abord que les trajectoires de  $\tilde{A}$  passant par les points de  $D_1$  sont des méridiens parcourus dans le sens ascendant.  $D_1$  est, ici, la demi-sphère définie par :  $D_1 = \{ (x,y,z) \mid S^2 / ax + by > 0 \}$ .

Les équations de la trajectoire de  $\tilde{B}$  passant par le pôle Nord sont données par :

$$\begin{cases} ||.|| x(t) = -t \\ ||.|| y(t) = e^t - 1 \\ ||.|| z(t) = e^t \end{cases} \quad \text{où } ||.||^2 = t^2 + (e^t - 1)^2 + e^{2t}$$

Soit  $f(t)$  la fonction :  $f(t) = ||.|| (ax(t) + by(t)) = -a + b(e^t - 1)$  puisque  $a > 0$  et  $b < 0$ ,  $f(t)$  est négative pour tout  $t$  de  $\mathbb{R}_+$ . Il est donc possible d'atteindre, à partir du pôle Nord, et grâce au champ  $\tilde{B}$ , un point  $M_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$  dont les coordonnées vérifient :  $x_1 < 0, y_1 > 0$ , et qui est situé dans la demi-sphère  $D_2$ . La trajectoire de  $\tilde{A}$  passant par  $M_1$  est donc un méridien parcouru dans le sens descendant.

La démonstration de normale auto-accessibilité du pôle Nord est ensuite la même que dans le cas précédent : cette démonstration est en effet basée sur la possibilité d'atteindre un point tel que  $M_1$  à partir du pôle Nord et sur le fait qu'en tout point de longitude suffisamment proche de 0 la trajectoire de  $\tilde{A}$  est un méridien parcouru dans le sens ascendant, ce qui est le cas ici.

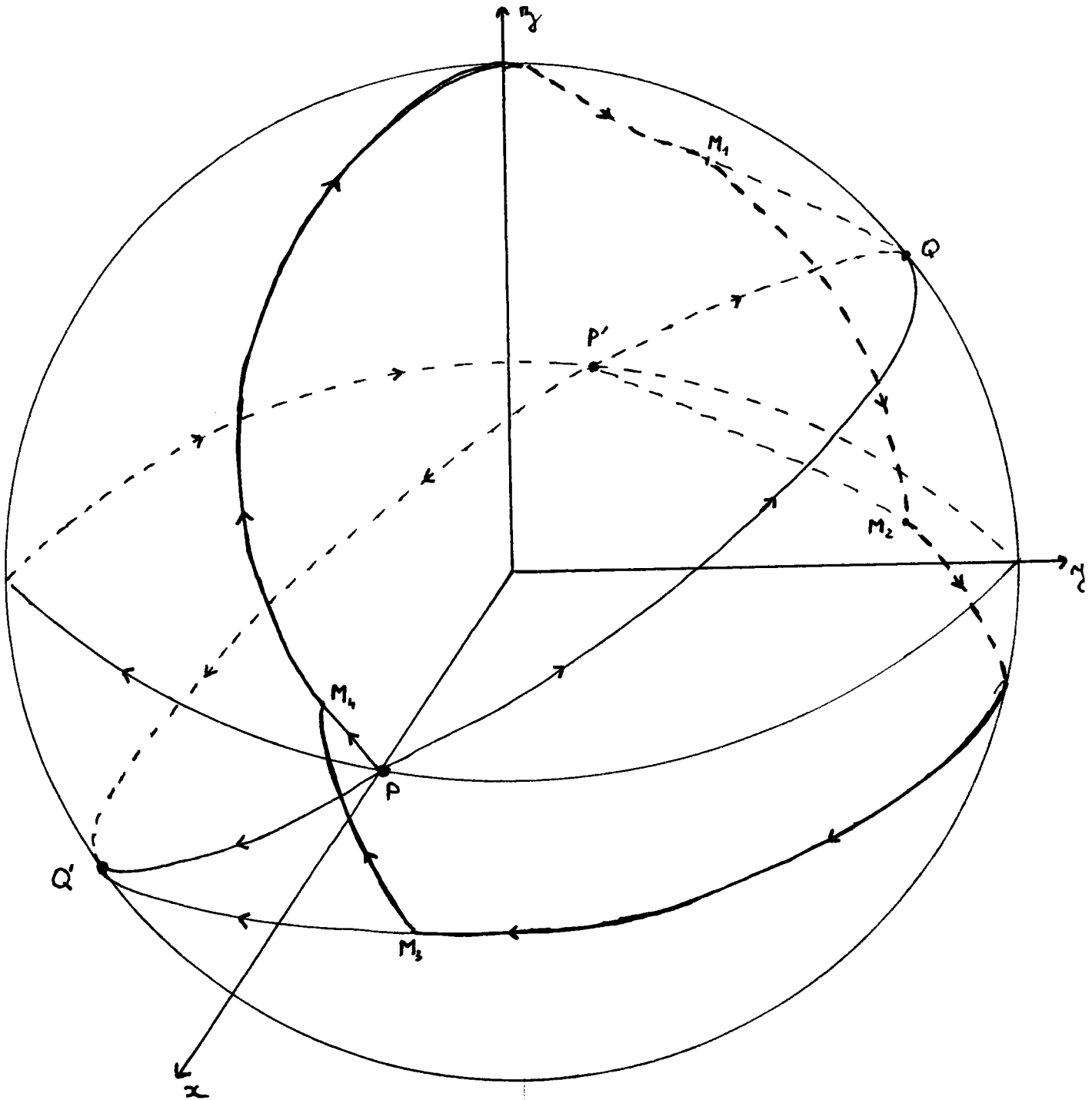


Figure 6 : Nous avons représenté la trajectoire de normale auto-accessibilité du pôle Nord dans le cas où, dans le système d'axes  $Ox, Oy, Oz$ ,  
 $(0 \ 0 \ 0)$

2.3. Cas où  $\text{Tr } AB < 0$  avec  $a < 0$  et  $b < 0$

Pour les explications qui suivent, on pourra se reporter à la figure 7.

Remarquons tout d'abord que les trajectoires de  $\tilde{A}$  passant par les points de  $D_1$  sont des méridiens parcourus dans le sens descendant.  $D_1$  est, ici, la demi-sphère définie par :  $D_1 = \{ (x,y,z) \in S^2 / ax + by < 0 \}$ .

Les équations de la trajectoire de  $\tilde{B}$  passant par le pôle Nord sont :

$$\begin{cases} ||.|| x(t) = -t \\ ||.|| y(t) = e^t - 1 \quad \text{où } ||.||^2 = t^2 + (e^t - 1)^2 + e^{2t} \\ ||.|| z(t) = e^t \end{cases}$$

- \* Considérons la fonction  $f(t) = ||.|| (ax(t) + by(t)) = -at + b(e^t - 1)$   
Puisque  $b < 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = -\infty$ , par conséquent il est possible d'atteindre, à partir du pôle Nord, et grâce au champ  $\tilde{B}$ , un point  $M_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$  situé dans la demi-sphère  $D_1$ . La trajectoire de  $\tilde{A}$  passant par  $M_1$  est alors le méridien de  $M_1$  parcouru dans le sens descendant.
- \* A partir de  $M_1$  il est donc possible d'atteindre, grâce au champ  $\tilde{A}$ , un point  $M_2$  dont les coordonnées vérifient :  $x_2 < 0$ ,  $y_2 > 0$  et  $z_2 < 0$ , la latitude  $\theta_2$  de  $M_2$  pouvant être choisie arbitrairement proche de 0.

- \* Les équations de la trajectoire de  $\tilde{B}$  passant par le point  $M_2$  sont données par :

$$\begin{cases} ||.|| x(t) = (y_2 - z_2)t + x_2 \\ ||.|| y(t) = z_2 e^t + y_2 - z_2 \\ ||.|| z(t) = z_2 e^t \end{cases}$$

Etudions les variations de la tangente de la longitude  $\varphi(t)$  du point courant de la trajectoire de  $\tilde{B}$  passant par  $M_2$ .

$$\text{tg}(\varphi(t)) = f(t) = \frac{z_2 e^t + y_2 - z_2}{(y_2 - z_2)t + x_2}$$

Pour cela, il importe de connaître le signe de l'expression :

$$z_2 \exp \frac{x_2}{z_2} + y_2 - z_2 = E$$

Si on passe en coordonnées sphériques :

$$E = \sin \theta_2 \left( \exp \frac{\cos \varphi_2}{\operatorname{tg} \theta_2 - \sin \varphi_2} + (\cotg \theta_2 \sin \varphi_2 - 1) \right)$$

$$\text{puisque } \lim_{\substack{\theta_2 \rightarrow 0 \\ \theta_2 < 0}} \left( \exp \frac{\cos \varphi_2}{\operatorname{tg} \theta_2 - \sin \varphi_2} + \cotg \theta_2 \sin \varphi_2 - 1 \right) = -\infty.$$

E est positive si  $\theta_2$  est choisi suffisamment proche de 0, on obtient alors le tableau de variations suivant pour f :

t	0	$t_1$	$t_2$	$+\infty$
f'(t)	-	-	-	-
f(t)	$\frac{y_2}{x_2}$	$-\infty$	0	$-\infty$
x(t)	-	0	+	+
y(t)	+	+	0	-

Ce tableau prouve que l'on peut atteindre un point  $M_3$  de longitude  $-\frac{\pi}{4} + \varepsilon$  avec  $\varepsilon$  un nombre positif pouvant être choisi arbitrairement proche de 0 et situé dans l'hémisphère Sud.

\* Etudions aussi les variations de la tangente de la longitude du point courant de la trajectoire de B passant par le pôle Nord. Cette tangente est donnée par :

$$g(t) = \frac{1 - e^t}{t}, \text{ on a le tableau suivant :}$$

t	$-\infty$	0
g'(t)	0	-
g(t)	0	-1
x(t)	+	-
y(t)	-	-

Ce tableau prouve qu'il existe un point  $M_4$  situé avant le pôle Nord sur la

positif pouvant être choisi arbitrairement proche de 0.

Par ailleurs, soit  $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  un point de  $S^2$  avec  $x > 0$  et  $y < 0$ , alors :

$M \in D_2 \Leftrightarrow ax + by > 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \varphi < \frac{-a}{b}$  où  $\varphi$  désigne la longitude du point M.

Or  $-a + b < 0$  avec  $a < 0$  et  $b < 0$  donc  $\frac{-a}{b} > -1$ , donc si  $\varepsilon$  est choisi assez petit on aura  $\operatorname{tg} \varphi_4 < \frac{-a}{b}$  ( $\varphi_4$  désigne la longitude de  $M_4$ ) et par conséquent  $M_4$  appartiendra à  $D_2$ .

### Conclusion

Il est possible de choisir  $M_3$  et  $M_4$  de telle sorte que ces deux points aient même longitude et qu'ils soient situés dans la demi-sphère  $D_2$ . La trajectoire de  $\tilde{A}$  passant par  $M_3$  est alors le méridien de  $M_3$  parcouru dans le sens ascendant, donc le point  $M_4$ , et aussi le pôle Nord, est accessible à partir de  $M_3$  : on a prouvé que le pôle Nord est auto-accessible, les trajectoires de  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$  étant transverses en  $M_1$ , le pôle Nord est normalement auto-accessible.

On prouverait de même la normale auto-accessibilité du pôle Sud.

C.Q.F.D.

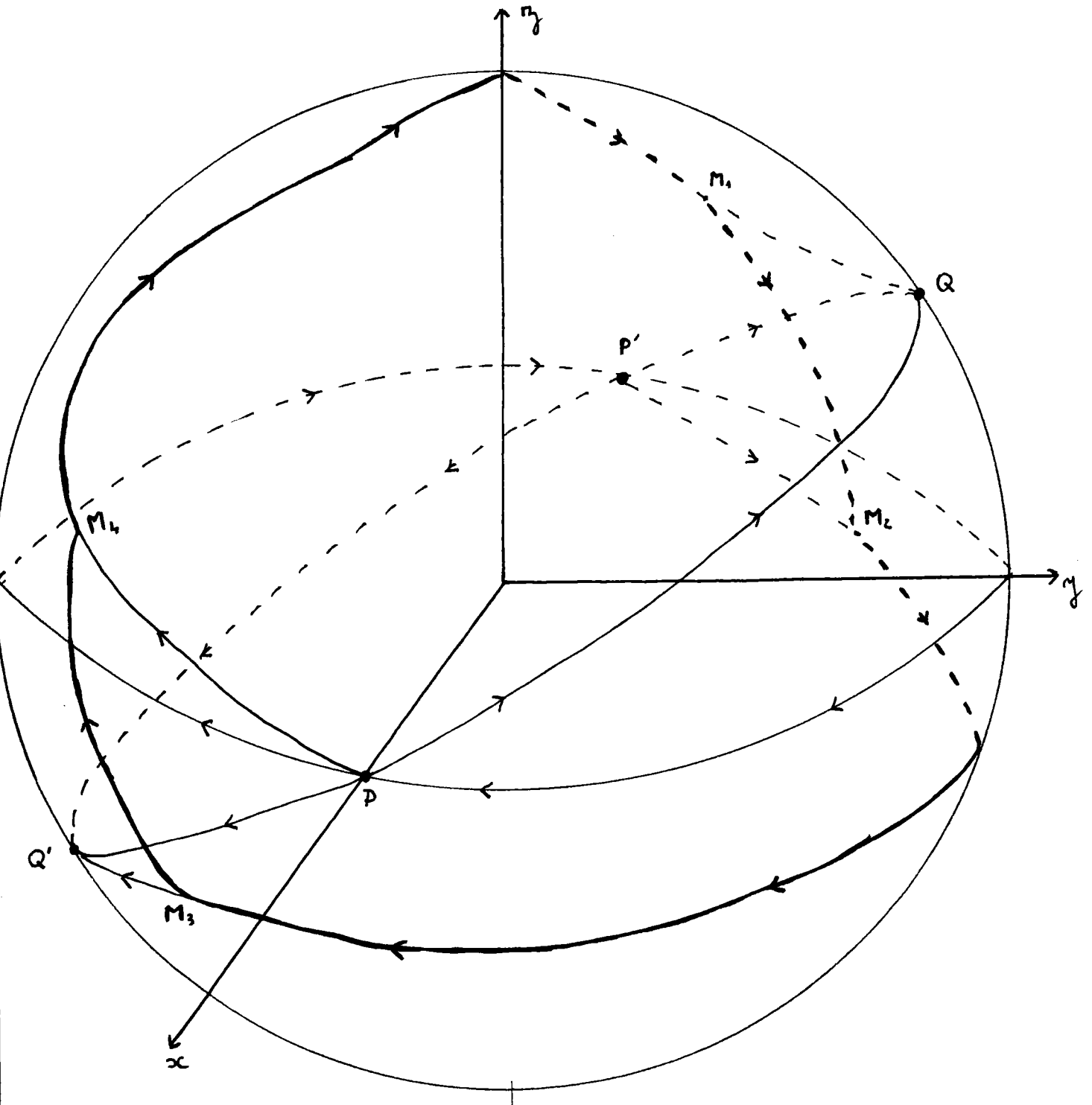


Figure 7 : Nous avons représenté la trajectoire de normale auto-accessibilité du pôle Nord dans le cas où, dans le système d'axes  $Ox, Oy, Oz$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**6e cas :** Cas où les valeurs propres de B sont réelles et distinctes deux à deux.

On appelle  $\alpha_1, \alpha_2$  et  $\alpha_3$  les trois valeurs propres de B, on suppose que  $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$ , soit  $i, j$  et  $k$  les vecteurs propres associés : dans la base  $(i,j,k)$

$$\text{Mat B} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}$$

Nous cherchons tout d'abord une base de  $\mathbb{R}^3$  dans laquelle A et B s'écrivent sous la forme la plus simple possible.

- A est nilpotent d'ordre 2 donc  $\dim \text{Im A} = 1$  et  $\text{Im A} \subset \text{Ker A}$
- les plans  $(i,j)$ ,  $(i,k)$  et  $(j,k)$  sont stables par B

\* Soit P le plan engendré par  $i$  et  $j$  si on avait  $\text{Im A} \subset P$ , le plan P serait stable par A et B et il n'y aurait pas contrôlabilité du système  $\{A,B\}$  sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ .

Dans ce cas on aurait  $\det (A+B-\alpha_3 \text{ Id}) = 0$  car  $\dim \text{Im} (A+B-\alpha_3 \text{ Id}) < 2$

Nous supposons dans la suite que  $\text{Im A} \not\subset (i,j)$

\* Soit alors  $e_3$  un vecteur directeur de  $\text{Im A}$ ,  $(i,j,e_3)$  forme une base de  $\mathbb{R}^3$  et dans cette base :

$$\text{Mat B} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & c \\ 0 & \alpha_2 & d \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix} \quad \text{Mat A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a' & b' & 0 \end{pmatrix}$$

- Si on avait  $c = 0$ , le plan  $(\vec{j}, e_3)$  serait stable par A et B, il n'y aurait donc pas complète contrôlabilité du système  $\{A,B\}$  sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$

Dans ce cas on aurait :  $\det (A+B-\alpha_1 \text{ Id}) = 0$

- Si on avait  $d = 0$ , le plan  $(i, e_3)$  serait stable par A et B, il n'y aurait donc pas complète contrôlabilité du système  $\{A,B\}$  sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ .

Dans ce cas on aurait :  $\det (A+B\alpha_2 \text{ Id}) = 0$

Dans la suite on suppose donc que  $c \neq 0$  et  $d \neq 0$

Dans la base  $(e_1, e_2, e_3)$  les matrices de A et B s'écrivent :

$$\text{Mat A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Mat B} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \beta_1 \\ 0 & \alpha_2 & -\beta_2 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}$$

Quitte à remplacer le système étudié  $\{A, B\}$  par le système opposé  $\{-A, -B\}$  on peut toujours supposer que  $b > 0$ .

En effet si on avait  $b < 0$  considérons la nouvelle base :

$$\begin{cases} e'_1 = -e_1 + e_2 + e_3 \\ e'_2 = e_2 \\ e'_3 = e_3 \end{cases}$$

Dans cette nouvelle base les endomorphismes  $-A$  et  $-B$  s'écrivent :

$$\text{Mat}(-B) = \begin{pmatrix} \alpha'_1 & 0 & \beta'_1 \\ 0 & \alpha'_2 & -\beta'_2 \\ 0 & 0 & \alpha'_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \text{Mat}(-A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a-b & -b & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{où} \begin{cases} \alpha'_1 = -\alpha_3 \\ \alpha'_2 = -\alpha_2 & \beta'_1 = \alpha'_1 - \alpha'_3 \\ \alpha'_3 = -\alpha_1 & \beta'_2 = \alpha'_2 - \alpha'_3 \end{cases}$$

on a :  $\alpha'_1 < \alpha'_2 < \alpha'_3$  et  $-b > 0$ .

\* Eliminons encore trois cas particuliers.

- Si  $a = 0$ , la droite de vecteur directeur  $e_1$  est stable par A et B et il n'y a pas transitivity du système  $\{A, B\}$ .

Dans ce cas :  $\det(A+B-\alpha_1 \text{Id}) = 0$

- Si  $b = 0$ , la droite de vecteur directeur  $e_2$  est stable par A et B ; il n'y a donc pas complète contrôlabilité pour le système  $\{A, B\}$ .

Dans ce cas :  $\det(A+B-\alpha_2 \text{Id}) = 0$

- Si  $a = b$ , la droite de vecteur directeur  $-e_1 + e_2 + e_3$  est stable par A et B et il n'y a pas complète contrôlabilité pour le système  $\{A, B\}$ .



Dans la suite on suppose donc que  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ ,  $a \neq b$  : dans ce cas

$$\det (A+B-\alpha_1 \text{ Id}) = a\beta_1(\alpha_1 - \alpha_2) \neq 0$$

$$\det (A+B-\alpha_2 \text{ Id}) = b\beta_2(\alpha_1 - \alpha_2) \neq 0$$

$$\det (A+B-\alpha_3 \text{ Id}) = (b - a)\beta_1\beta_2 \neq 0$$

Le champ de vecteurs B a même projection sur  $S^2$  que le champ de vecteurs  $B-\alpha_3 \text{ Id}$ , on peut donc supposer  $\alpha_3 = 0$ .

Conclusion On s'est ramené à l'étude d'un système  $\{A, B\}$  où les matrices A et B s'écrivent dans une base  $(e_1, e_2, e_3)$  :

$$\text{Mat A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec } b > 0, a \neq 0 \text{ et } a \neq b$$

$$\text{Mat B} = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & \beta_1 \\ 0 & \beta_2 & -\beta_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec } \beta_1 < \beta_2 < 0$$

Nous allons maintenant étudier l'allure des trajectoires de  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$  sur  $S^2$ .

### Allure des trajectoires de $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$

Les trajectoires de  $\tilde{A}$  ont déjà été décrites : se reporter à la figure 4.

Les équations des trajectoires de B sont données par :

$$\begin{cases} x(t) = (x_0 + z_0)e^{\beta_1 t} - z_0 \\ y(t) = (y_0 - z_0)e^{\beta_2 t} + z_0 \\ z(t) = z_0 \end{cases}$$

- B possède 3 vecteurs propres : les vecteurs  $e_1$ ,  $e_2$  et  $-e_1 + e_2 + e_3$
- les plans d'équations  $z = 0$ ,  $y - z = 0$  et  $x + z = 0$  sont stables par B

On en déduit pour  $\tilde{B}$  :

- \* les points  $P(1,0,0)$ ,  $P'(-1,0,0)$ ,  $Q(0,1,0)$ ,  $Q'(0,-1,0)$  et  $R(-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$ ,  $R'(\sqrt{3}/3, -\sqrt{3}/3, -\sqrt{3}/3)$  sont singuliers pour B

- \* l'équateur ainsi que les grands cercles intersection de  $S^2$  et du plan d'équation  $y - z = 0$  et intersection de  $S^2$  et du plan  $x + z = 0$  sont stables par  $\tilde{B}$
- \* le bassin d'attraction du point  $R$  (resp  $R'$ ) est la demi-sphère définie par  $z > 0$  (resp  $z < 0$ )
- \* le bassin d'attraction pour le champ de vecteurs  $-\tilde{B}$  du point  $P$  (resp  $P'$ ) est la demi-sphère définie par  $x + z > 0$  (resp  $x + z < 0$ ).

Les trajectoires de  $\tilde{B}$  sur  $S^2$  sont représentées figure 8.

Montrons maintenant que le système  $\{A, B\}$  est transitif sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$  si et seulement si  $\text{Tr } AB < 0$  : pour cela il suffit de montrer que le système  $\{\tilde{A}, \tilde{B}\}$  est transitif sur  $S^2$  si et seulement si  $\text{Tr } AB < 0$ .

Nous commençons par montrer que  $\{\tilde{A}, \tilde{B}\}$  n'est pas transitif sur  $S^2$  si  $\text{Tr } AB \geq 0$ .

Comme précédemment, nous notons  $D_1$  la demi-sphère déterminée par le grand cercle de points singuliers pour  $\tilde{A}$  et contenant le point  $P(1,0,0)$ , nous notons  $D_2$  l'autre demi-sphère.

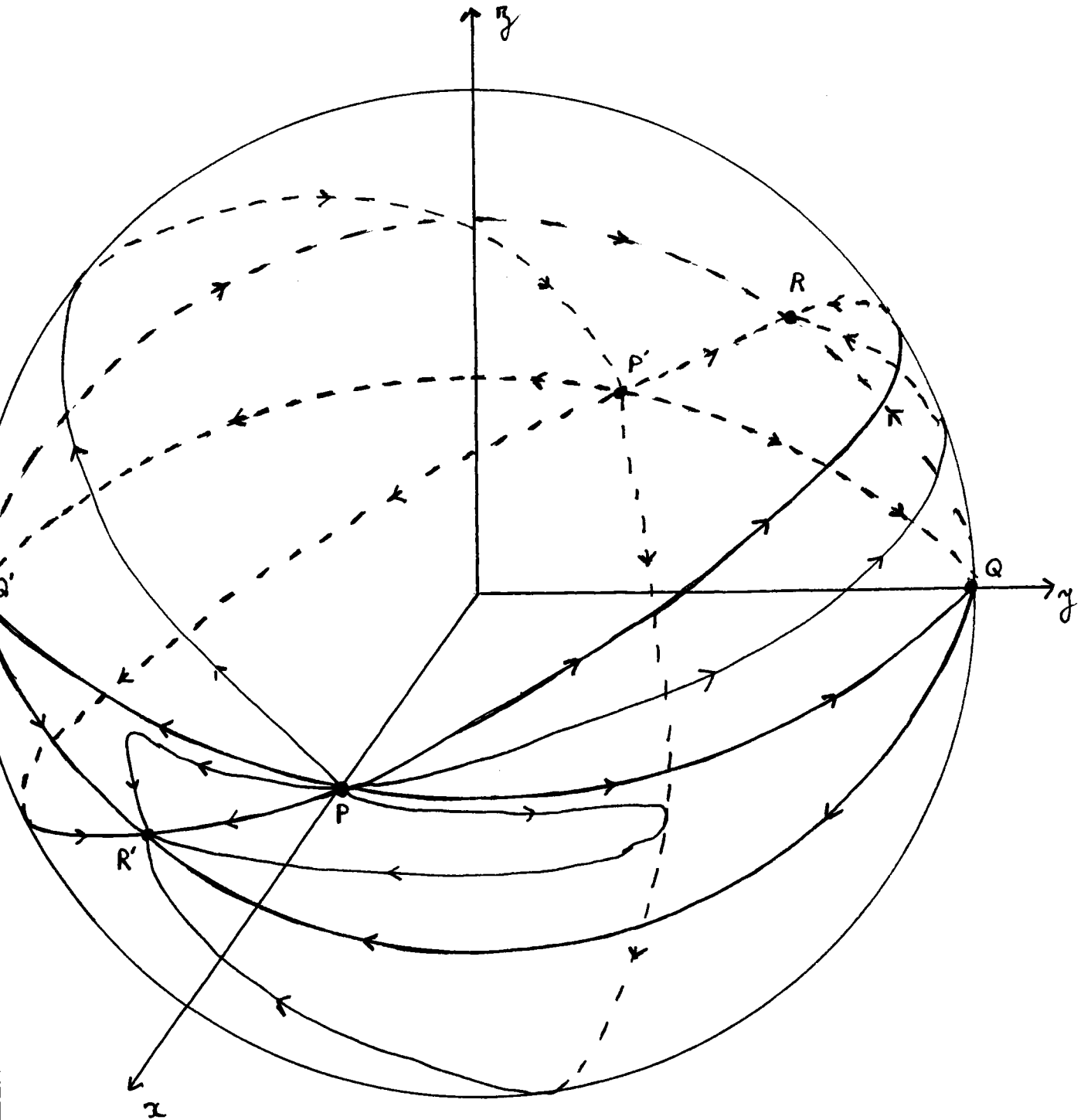


Figure 8 : Nous avons représenté les trajectoires de  $\tilde{B}$  sur  $S^2$ , dans le système d'axes  $Ox, Oy, Oz$ , Mat  $B = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & \beta_1 \\ 0 & \beta_2 & -\beta_2 \end{pmatrix}$

1. Cas où  $\text{Tr AB} = a\beta_1 - b\beta_2 \geq 0$

1.1. Cas où  $\text{Tr AB} \geq 0$  avec  $a < 0$  et  $b > 0$

Remarquons tout d'abord que les trajectoires de  $\tilde{A}$  passant par les points de  $D_1$  sont des méridiens parcourus dans le sens descendant.

$D_1$  est, ici, la demi-sphère définie par :  $D_1 = \{(x,y,z) \in S^2 / ax + by < 0\}$

Considérons la partie E de la sphère définie par :

$E = \{(x,y,z) \in S^2 / x < 0, y > 0 \text{ et } z > 0\}$

\* Soit  $M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$  un point de E alors  $ax_0 + by_0 > 0$  donc  $M_0$  est un point de la demi-sphère  $D_2$ , la trajectoire de  $\tilde{A}$  passant par  $M_0$  est donc le méridien de  $M_0$  parcouru dans le sens ascendant, cette trajectoire est donc contenue dans  $D_2$ . On peut conclure que la partie E de  $S^2$  est stable par  $\tilde{A}$ , montrons qu'elle est également stable par B.

\* Soit  $M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$  un point de E, les équations de la trajectoire de  $\tilde{B}$  passant par  $M_0$  sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} ||.|| x(t) = (x_0 + z_0)e^{\beta_1 t} - z_0 \\ ||.|| y(t) = (y_0 - z_0)e^{\beta_2 t} + z_0 \\ ||.|| z(t) = z_0 \end{array} \right. \quad \text{où } ||.||^2 = ((x_0 + z_0)e^{\beta_1 t} - z_0)^2 + ((y_0 - z_0)e^{\beta_2 t} + z_0)^2 + z_0^2$$

i)  $||.|| x(t) = (x_0 + z_0)e^{\beta_1 t} - z_0 = \underbrace{z_0(1 - e^{\beta_1 t})}_{>0} + \underbrace{x_0}_{<0}$  donc  $x(t)$  est négatif pour tout t positif

ii)  $||.|| y(t) = (y_0 - z_0)e^{\beta_2 t} - z_0 = \underbrace{z_0(1 - e^{\beta_2 t})}_{>0} + \underbrace{y_0}_{>0}$  donc  $y(t)$  est positif pour tout t positif

iii)  $||.|| z(t) = \underbrace{z_0}_{>0}$   $z(t)$  est positif pour tout t positif.

Conclusion

Les points i), ii) et iii) ci-dessus prouvent que le point courant

$M(t) \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$  de la trajectoire de  $\tilde{B}$  passant par  $M_0$  appartient à E pour tout t positif, E est donc stable par  $\tilde{B}$ . Par ailleurs, nous avons vu que E était stable par  $\tilde{A}$ , le système  $\{\tilde{A}, \tilde{B}\}$  n'est donc pas transitif sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ .

1.2. Cas où  $\text{Tr } AB > 0$  avec  $a > 0$  et  $b > 0$

Remarquons tout d'abord que les trajectoires de  $\tilde{A}$  passant par les points de la demi-sphère  $D_1$  sont des méridiens parcourus dans le sens ascendant.

$D_1$  est, ici, la demi-sphère définie par :  $D_1 = \{(x,y,z) \in S^2 / ax + by > 0\}$

Considérons la partie E de la sphère définie par :

$E = \{(x,y,z) \in S^2 / x < 0, y > 0, z > 0, x+z > 0, y-z < 0 \text{ et } \beta_2 x + \beta_1 y < 0\}$

E est l'ensemble des points de l'hémisphère Nord situés au-dessus des grands cercles intersection de  $S^2$  et du plan d'équation  $y-z = 0$  et intersection de  $S^2$  et du plan d'équation  $x+z = 0$  et dont la longitude est comprise entre  $\frac{\pi}{2}$  et  $\pi - \text{Arctg } \frac{\beta_2}{\beta_1}$

\* Soit  $M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$  un point de E puisque  $a\beta_1 - b\beta_2 \geq 0$  avec  $a > 0$  et  $b > 0$   
 $\frac{a}{b} \geq \frac{\beta_2}{\beta_1}$  et puisque  $x_0 < 0$  et  $y_0 > 0$  on peut conclure

$$ax_0 + by_0 \geq \underbrace{\frac{b}{\beta_1}}_{<0} \underbrace{(\beta_2 x_0 + \beta_1 y_0)}_{<0} > 0$$

Le point  $M_0$  appartient donc à la demi-sphère  $D_1$ .

Par conséquent la trajectoire de  $\tilde{A}$  passant par  $M_0$  est un méridien parcouru dans le sens ascendant : cette trajectoire est donc contenue dans la partie E. Nous pouvons donc conclure que la partie E est stable par le champ  $\tilde{A}$ .

\* Montrons que la partie E est également stable par  $\tilde{B}$ .

Soit  $M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$  un point de E et  $M(t) \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$  le point courant de la trajectoire de  $\tilde{B}$  passant par  $M_0$ , les coordonnées de  $M(t)$  sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} ||.|| | x(t) = (x_0 + z_0)e^{\beta_1 t} - z_0 \\ ||.|| | y(t) = (y_0 - z_0)e^{\beta_2 t} + z_0 \\ ||.|| | z(t) = z_0 \end{array} \right. \quad \text{où } ||.||^2 = ((x_0 + z_0)e^{\beta_1 t} - z_0)^2 + ((y_0 - z_0)e^{\beta_2 t} + z_0)^2 + z_0^2$$

$$\text{i) } ||.|| | x(t) = (x_0 + z_0)e^{\beta_1 t} - z_0 = \underbrace{z_0}_{>0} (e^{\beta_1 t} - 1) + \underbrace{x_0}_{<0} e^{\beta_1 t}$$

donc  $x(t)$  est négatif pour tout  $t$  positif

$$\text{ii) } ||.|| | y(t) = (y_0 - z_0)e^{\beta_2 t} + z_0 = \underbrace{z_0}_{>0} (1 - e^{\beta_2 t}) + \underbrace{y_0}_{>0} e^{\beta_2 t}$$

donc  $y(t)$  est positif pour tout  $t$  positif

$$\text{iii) } ||.|| | z(t) = z_0 > 0$$

$z(t)$  est donc positif pour tout  $t$  positif

$$\text{iv) } ||.|| | (x(t) + z(t)) = \underbrace{(x_0 + z_0)}_{>0} e^{\beta_1 t}$$

$x(t) + z(t)$  est donc positif pour tout  $t$  positif

$$\text{v) } ||.|| | (y(t) - z(t)) = \underbrace{(y_0 - z_0)}_{<0} e^{\beta_2 t}$$

$y(t) - z(t)$  est donc négatif pour tout  $t$  positif

$$\text{vi) } \text{Posons } f(t) = ||.|| | (\beta_2 x(t) + \beta_1 y(t))$$

$$= \beta_2 (x_0 + z_0) e^{\beta_1 t} + \beta_1 (y_0 - z_0) e^{\beta_2 t} - (\beta_2 - \beta_1) z_0$$

$$f'(t) = \beta_2 \beta_1 e^{\beta_1 t} (x_0 + z_0 + (y_0 - z_0)e^{(\beta_2 - \beta_1)t})$$

$$f'(t) \text{ s'annule pour } e^{(\beta_2 - \beta_1)t} = \frac{x_0 + z_0}{z_0 - y_0} > 0$$

Deux cas sont à distinguer :

α) cas où  $\frac{x_0 + z_0}{z_0 - y_0} \leq 1$ , on obtient le tableau de variations suivant :

$t$	0	$+\infty$
$f'(t)$		-
$f(t)$	$\beta_2 x_0 + \beta_1 y_0$	$-(\beta_2 - \beta_1)z_0$

$f(t)$  est donc négative pour tout  $t$  positif

β) cas où  $\frac{x_0 + z_0}{z_0 + y_0} > 1$ , on obtient le tableau suivant :

$t$	0	$t_0$	$+\infty$
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	$\beta_2 x_0 + \beta_1 y_0$		$-(\beta_2 - \beta_1)z_0$

où  $t_0 = \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} \text{Log} \frac{x_0 + z_0}{z_0 - y_0}$  et  $f(t_0) = (\beta_2 - \beta_1)(e^{\beta_1 t_0}(x_0 + z_0) - z_0)$

puisque  $e^{\beta_1 t_0} < 1$ ,  $f(t_0) < (\beta_2 - \beta_1)x_0 < 0$

$f(t)$  est donc négative pour tout  $t$  positif

Conclusion les points i), ii), iii), iv), v) et vi) ci-dessus permettent de conclure que le point courant de la trajectoire de  $\tilde{B}$  passant par  $M_0$  appartient

également stable par  $\tilde{A}$ , le système  $\{\tilde{A}, \tilde{B}\}$  n'est pas contrôlable sur  $S^2$ .

## 2. Cas où $\text{Tr } AB = a\beta_1 - b\beta_2 < 0$

Nous allons montrer que le système  $A, B$  est complètement contrôlable sur  $S^2$  ce qui entraînera la transitivité du système  $\{\tilde{A}, \tilde{B}\}$  sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ . Nous rappelons qu'il suffit de montrer que les pôles de  $S^2$  sont normalement auto-accessibles pour établir la transitivité de  $\{\tilde{A}, \tilde{B}\}$  sur  $S^2$ .

Pour les explications qui suivent, on pourra se reporter à la figure 9.

Remarquons tout d'abord que  $b > 0$  et  $a\beta_1 - b\beta_2 < 0$  entraîne  $a > 0$ . Les trajectoires de  $\tilde{A}$  passant par les points de la demi-sphère  $D_1$  sont donc des méridiens parcourus dans le sens ascendant.

$D_1$  est, ici, la demi-sphère définie par :  $D_1 = \{ (x, y, z) \in S^2 / ax + by > 0 \}$

Les équations de la trajectoire de  $\tilde{B}$  passant par le pôle Nord sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} ||.|| |x(t) = e^{\beta_1 t} - 1 \\ ||.|| |y(t) = 1 - e^{\beta_2 t} \quad \text{où } ||.||^2 = (e^{\beta_1 t} - 1)^2 + (1 - e^{\beta_2 t})^2 + 1 \\ ||.|| |z(t) = 1 \end{array} \right.$$

\* Considérons la fonction  $f(t)$  définie par :

$$f(t) = ||.|| |(ax(t) + by(t)) = a(e^{\beta_1 t} - 1) + b(1 - e^{\beta_2 t})$$

$$f'(t) = e^{\beta_1 t} (a\beta_1 - b\beta_2 e^{(\beta_2 - \beta_1)t})$$

$$f'(t) \text{ s'annule pour } e^{(\beta_2 - \beta_1)t} = \frac{a\beta_1}{b\beta_2} \quad (\text{puisque } a\beta_1 - b\beta_2 < 0 \quad \frac{a\beta_1}{b\beta_2} > 1)$$



On obtient le tableau de variations suivant pour f :

t	0	t <sub>0</sub>	+ ∞
f'(t)		0	
	-		+
f(t)	0		- a + b

$t_0 = \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} \text{Log} \frac{a\beta_1}{b\beta_2}$  et  $f(t_0) = \frac{a}{\beta_2} e^{\beta_1 t_0} (\beta_2 - \beta_1)$

Ce tableau prouve qu'il existe  $t_0 \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $f(t_0) < 0$  : par conséquent, à partir du pôle Nord, et grâce au champ  $\tilde{B}$ , on peut atteindre un point  $M_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$

situé dans la demi-sphère  $D_2$ . La trajectoire de  $\tilde{A}$  passant par  $M_1$  est donc un méridien parcouru dans le sens descendant. De plus on a :  $x_1 + y_1 > 0$ .

\* A partir de  $M_1$  il est donc possible d'atteindre un point  $M_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$  dont les coordonnées vérifient :  $x_2 < 0, y_2 > 0, z_2 < 0$  et  $x_2 + y_2 > 0$ .

\* Les équations de la trajectoire de  $\tilde{B}$  passant par  $M_2$  sont données par :

$$\begin{cases} ||.|| x(t) = (x_2 + z_2)e^{\beta_1 t} - z_2 \\ ||.|| y(t) = (y_2 - z_2)e^{\beta_2 t} + z_2 \text{ où } ||.||^2 = ((x_2 + z_2)e^{\beta_2 t} - z_2)^2 + ((y_2 - z_2)e^{\beta_2 t} + z_2)^2 + z_2^2 \\ ||.|| z(t) = z_2 \end{cases}$$

$y(t)$  s'annule pour  $t = t_0 = \frac{1}{\beta_2} \text{Log} \frac{z_2}{z_2 - y_2}$

( $0 < \frac{z_2}{z_2 - y_2} < 1$  et  $\beta_2 < 0$  donc  $t_0 > 0$ ) pour  $t = t_0$  nous avons :

$$x(t_0) = (x_2 + z_2) \left( \frac{z_2}{z_2 - y_2} \right)^{\beta_1 / \beta_2} - z_2$$

or  $\beta_1 < \beta_2 < 0$  donc  $\frac{\beta_1}{\beta_2} > 1$ ,  $0 < \frac{z_2}{z_2 - y_2} < 1$  et  $x_2 + z_2 < 0$

donc  $x(t_0) > (x_2 + z_2) \times \frac{z_2}{z_2 - y_2} - z_2 = \frac{z_2 (x_2 + y_2)}{z_2 - y_2} > 0$  puisque  $x_2 + y_2 > 0$

Ceci prouve que la trajectoire de  $\tilde{B}$  passant par  $M_2$  coupe le méridien de longitude 0 (en un point situé dans l'hémisphère Sud) : il est donc possible d'atteindre à partir de  $M_2$  et grâce au champ  $\tilde{B}$  un point  $M_3$  de l'hémisphère Sud de longitude négative arbitrairement proche de 0.

\* Par ailleurs, on peut trouver un point  $M_4$  de l'hémisphère Nord, situé avant le pôle Nord sur la trajectoire de  $\tilde{B}$  passant par le pôle Nord, de longitude négative arbitrairement proche de 0.

Il est donc possible de choisir  $M_3$  et  $M_4$  de façon que leurs longitudes coïncident, si cette longitude est choisie suffisamment proche de 0 la trajectoire de  $\tilde{A}$  passant par  $M_3$  est le méridien de  $M_3$  parcouru dans le sens ascendant : le point  $M_4$  (et donc le pôle Nord) est alors accessible à partir de  $M_3$ .

Conclusion

|| Nous avons montré que le pôle Nord était auto-accessible, comme  
|| les trajectoires de  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$  sont transverses en  $M_1$ , le pôle Nord est  
|| normalement auto-accessible. On montrerait de même que le pôle  
|| Sud est normalement auto-accessible.

C.Q.F.D.

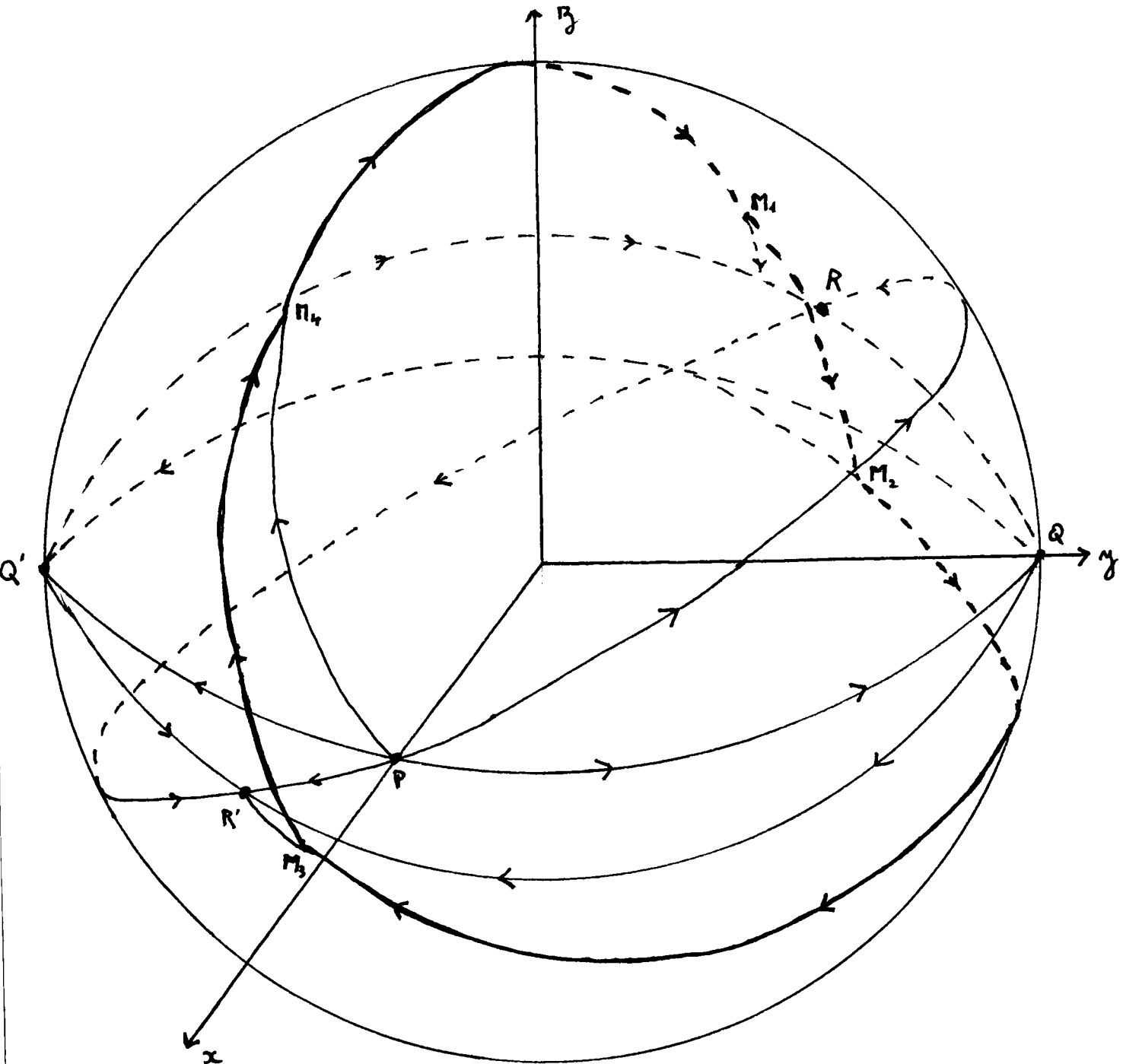


Figure 9 : Nous avons représenté la trajectoire de normale auto-accessibilité du pôle Nord. Dans le système d'axes  $Ox, Oy, Oz$

$$\text{Mat A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Mat B} = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & \beta_1 \\ 0 & \beta_2 - \beta_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec  $a \neq 0, b \neq 0, a > 0$  et  $b > 0$

### CHAPITRE 3

Nous étudions ici la contrôlabilité sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$  d'une paire  $\{A, B\}$  de champs de vecteurs linéaires où  $A$  est un endomorphisme nilpotent d'ordre 2 ( $A \neq 0$  et  $A^2 = 0$ ) et  $B$  un endomorphisme possédant une valeur propre réelle et deux valeurs complexes (non réelles) conjuguées dont la partie réelle commune est égale à la valeur propre réelle ; dans une base appropriée  $\text{Mat } B = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ . Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante de complète contrôlabilité sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$  pour une telle paire.

Théorème 2 Soit  $A$  un endomorphisme nilpotent d'ordre 2 de  $\mathbb{R}^3$  et  $B$  un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  possédant deux valeurs propres complexes (non réelles) conjuguées de partie réelle égale à la valeur propre réelle de  $B$ .

La paire de champs de vecteurs linéaires  $\{A, B\}$  est complètement contrôlable sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$  si et seulement si :

- i)  $\det(A+B - \alpha \text{Id}) \neq 0$  ( $\alpha$  est la valeur propre réelle de  $B$ )
- ii)  $\text{Tr } AB \neq 0$

Remarques

- \* Comme dans le chapitre 2  $\det(A+B - \alpha \text{Id}) \neq 0$  exprime exactement la condition du rang.
- \* Puisque  $A$  est de trace nulle  $\text{Kill}(A, B) = 6 \text{Tr } AB$ , la 2e condition est donc équivalente à  $\text{Kill}(A, B) \neq 0$ .

#### Démonstration du théorème 2

Dans une certaine base de  $\mathbb{R}^3$   $\text{Mat } B = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ ,  $B$  ayant même projection sur  $S^2$  que  $B - \alpha \text{Id}$ , la complète contrôlabilité sur  $S^2$  du système  $\{\tilde{A}, \tilde{B}\}$  est équivalente à la complète contrôlabilité du système  $\{\tilde{A}, B - \alpha \text{Id}\}$ , on peut donc supposer que  $\alpha = 0$ .

Nous nous sommes donc ramenés à l'étude de la contrôlabilité d'un système  $\{A,B\}$  où  $A$  est nilpotent d'ordre 2 et où la matrice de  $B$  dans une certaine

base est : 
$$\text{Mat } B = \begin{pmatrix} 0 & -\beta & 0 \\ \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

\* Nous cherchons tout d'abord une base de  $\mathbb{R}^3$  dans laquelle  $A$  et  $B$  s'écrivent sous la forme la plus simple possible :

. soit  $P$  l'unique plan invariant par  $B$  ( $P = \text{Im} B$ ), si on avait  $\text{Ker } A = P$  le plan  $P$  serait également stable par  $A$  et il n'y aurait pas complète contrôlabilité du système  $\{A,B\}$  sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$

Dans ce cas on aurait :  $\det(A+B) = 0$  car  $\text{Im}(A+B) \subset P$

. supposons que  $\dim(P \cap \text{Ker } A) = 1$ , dans ce cas on peut trouver une base  $(i,j,e_3)$  de  $\mathbb{R}^3$  telle que :

-  $i$  soit un vecteur directeur de  $P \cap \text{Im } A$

-  $e_3$  soit un vecteur directeur de  $\text{Ker } B$

- la matrice de  $B$  dans cette base  $(i,j,e_3)$  soit : 
$$\text{Mat } B = \begin{pmatrix} 0 & -\beta & 0 \\ \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut alors trouver un vecteur de  $\text{Ker } A$  qui s'écrive sous la forme :  $\lambda j + \mu e_3$ . On ne peut avoir  $\mu = 0$  car alors on aurait  $\text{Ker } A = P$ , cas qui a été exclu. D'autre part, si on avait  $\lambda = 0$  le vecteur  $e_3$  serait commun aux noyaux de  $A,B$  donc la droite  $\mathbb{R}e_3$  serait stable par  $A$  et  $B$  et le système  $\{A,B\}$  ne serait pas complètement contrôlable sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ .

Notons que, dans ce dernier cas,  $\det(A+B) = 0$  car  $\dim \text{Ker}(A+B) \geq 1$ . Dans la suite on suppose donc que  $\lambda \neq 0$ , posons  $k = \frac{\mu}{\lambda} e_3$  dans la base  $(i,j,k)$  la

matrice de  $B$  est inchangée et 
$$\text{Mat } A = \begin{pmatrix} 0 & -a & a \\ 0 & -b & b \\ 0 & -c & c \end{pmatrix}$$

avec, puisque  $A$  est de trace nulle,  $b = c$ .

En conclusion, dans le cas général, on peut trouver une base de  $\mathbb{R}^3$  dans

laquelle  $\text{Mat } A = \begin{pmatrix} 0 & -a & a \\ 0 & -b & b \\ 0 & -b & b \end{pmatrix}$  et  $\text{Mat } B = \begin{pmatrix} 0 & -\beta & 0 \\ \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

de plus  $\det(A+B) = \beta^2 b$ .

Allure des trajectoires de  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$  sur  $S^2$

Les trajectoires de A dans  $\mathbb{R}^3$  sont constituées de :

- un plan de points singuliers : le plan d'équation  $y = z$
- des droites de vecteur directeur le vecteur de coordonnées  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ b \end{pmatrix}$  et qui sont parcourues dans un sens ou dans l'autre suivant que l'on est d'un côté ou de l'autre du plan d'équation  $y = z$ .

On en déduit que les trajectoires de  $\tilde{A}$  sont constituées de :

- un grand cercle de points singuliers : le grand cercle intersection de  $S^2$  et du plan d'équation  $y = z$
- sur ce grand cercle deux points singuliers particuliers : les points P  $\begin{pmatrix} a/\sqrt{a^2+2b^2} \\ b/\sqrt{a^2+2b^2} \\ b/\sqrt{a^2+2b^2} \end{pmatrix}$

et Q symétrique de P par rapport à l'origine.

- les autres trajectoires de  $\tilde{A}$  sont les grands cercles passant par P et Q parcourus de P vers Q ou de Q vers P suivant que l'on se trouve dans l'une ou l'autre demi-sphère déterminée par le grand cercle de points singuliers de  $\tilde{A}$ .

Les trajectoires de B dans  $\mathbb{R}^3$  sont constituées de :

- une droite de points singuliers : la droite passant par l'origine et de vecteur directeur k
- des cercles situés dans les plans parallèles au plan  $xOy$

On en déduit que les trajectoires de  $\tilde{B}$  sont constituées de :

- 2 points singuliers : les pôles Nord et Sud

des cercles parallèles à l'équateur

On pourra se reporter aux figures 10 et 11 pour le dessin des trajectoires de  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$ .

Cas où  $\det(A+B) = \beta^2 b = 0$

Dans ce cas les points P et Q sont situés sur l'équateur, celui-ci est donc stable par le champ  $\tilde{A}$  et comme il est stable également par le champ  $\tilde{B}$  il n'y a pas complète contrôlabilité du système  $\{\tilde{A}, \tilde{B}\}$  sur  $S^2$ .

Cas où  $\det(A+B) = \beta^2 b \neq 0$  et où  $\text{Tr} AB = -a\beta = 0$

Considérons la calotte sphérique C constituée des points dont la cote z vérifie  $z > \sqrt{2}/2$ . Nous allons montrer que C est stable par  $\tilde{B}$  et  $\tilde{A}$ .

- La frontière de C est le cercle parallèle à l'équateur de latitude  $\theta_0 = \pi/4$ , comme les trajectoires de  $\tilde{B}$  passant par les points de C sont des cercles parallèles à C, il est clair que C est stable par  $\tilde{B}$ .
- Pour montrer que C est stable par le champ de vecteurs  $\tilde{A}$ , nous allons montrer qu'en chaque point M de la frontière de C, la troisième coordonnée du vecteur  $\tilde{A}(M)$  est positive ou nulle, ce qui prouvera que toutes les trajectoires de  $\tilde{A}$  sont rentrantes dans C.

Soit donc  $M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$  un point de la frontière de C,  $\theta_0$  sa latitude et  $\varphi_0$  sa longitude.

Le vecteur  $\tilde{A}(M)$  a pour coordonnées : 
$$\begin{pmatrix} -x_0 b(z_0 - y_0)(y_0 + z_0) \\ b(z_0 - y_0) - y_0 b(z_0 - y_0)(y_0 + z_0) \\ b(z_0 - y_0) - z_0 b(z_0 - y_0)(y_0 + z_0) \end{pmatrix}$$

Examinons la 3e coordonnée de ce vecteur, puisque

$$\begin{cases} x_0 = \cos \theta_0 \cos \varphi_0 \\ y_0 = \cos \theta_0 \sin \varphi_0 \text{ elle est égale à : } b(z_0 - y_0) \cos^2 \theta_0 (1 - \text{tg} \theta_0 \sin \varphi_0) \\ z_0 = \sin \theta_0 \end{cases}$$

Et si  $M_0$  est sur la frontière de C  $\text{tg} \theta_0 = 1$  et  $z_0 - y_0 > 0$  par conséquent

Cas où  $\det(A+B) = \beta^2 b \neq 0$  et  $\text{Tr } AB = -a\beta \neq 0$

On va montrer la complète contrôlabilité du système  $\{\tilde{A}, \tilde{B}\}$  sur  $S^2$  en montrant que de tout point de  $S^2$  on peut atteindre un point de l'équateur grâce au système  $\{\tilde{A}, \tilde{B}\}$  ainsi que grâce à son opposé. Comme tout point de l'équateur est accessible à partir de tout point de l'équateur grâce aux champs  $\tilde{B}$  ou  $-\tilde{B}$  nous aurons bien démontré la complète contrôlabilité du système  $\{\tilde{A}, \tilde{B}\}$ .

$$\text{Mat } A = \begin{pmatrix} 0 & -a & a \\ 0 & -b & b \\ 0 & -b & b \end{pmatrix} \quad ab \neq 0 \text{ et on suppose } b > 0$$

$$\text{Soient } P \begin{pmatrix} a/\sqrt{a^2+2b^2} \\ b/\sqrt{a^2+2b^2} \\ b/\sqrt{a^2+2b^2} \end{pmatrix} \text{ et } Q \begin{pmatrix} -a/\sqrt{a^2+2b^2} \\ -b/\sqrt{a^2+2b^2} \\ -b/\sqrt{a^2+2b^2} \end{pmatrix}$$

notons encore  $D_1$  (resp.  $D_2$ ) la demi-sphère déterminée par le grand cercle de points singuliers pour  $\tilde{A}$  et contenant le pôle Nord (resp. le pôle Sud).  $D_1$  (resp.  $D_2$ ) est l'ensemble des points  $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  de  $S^2$  dont les coordonnées vérifient  $z-y > 0$  (resp.  $z-y < 0$ ).

Le bassin d'attraction du point P (resp. Q) est la demi-sphère  $D_1$  (resp.  $D_2$ ).

Soit M un point de l'hémisphère Nord, si M est situé dans la demi-sphère  $D_2$  comme celle-ci est bassin d'attraction pour le point Q situé dans l'hémisphère Sud, la trajectoire de  $\tilde{A}$  passant par M coupe l'équateur.

Si M est situé dans la demi-sphère  $D_1$ , la trajectoire de  $\tilde{A}$  passant par M permet de s'approcher aussi près que l'on veut du point P. Or la trajectoire de  $\tilde{B}$  passant par P est un cercle parallèle à l'équateur, puisque  $a \neq 0$  une partie de ce cercle est situé dans la demi-sphère  $D_2$ . On peut donc atteindre à partir du point P et grâce au champ  $\tilde{B}$  un point de  $D_2$  et donc un point de l'équateur, comme on peut s'approcher aussi près que l'on veut du point P, on peut atteindre à partir de M un point de l'équateur.

On montrerait de même que de tout point de l'hémisphère Sud on peut atteindre un point de l'équateur ainsi que la même propriété pour le système opposé  $\{-\tilde{A}, -\tilde{B}\}$ .

Si  $b < 0$  la proposition reste vraie la démonstration est analogue à celle



Conclusion

On a montré que le système  $\{\tilde{A}, \tilde{B}\}$  est transitif sur  $S^2$ , ce qui équivaut à la transitivité de  $\{\tilde{A}, \tilde{B}\}$  sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$  puisque A est nilpotent.

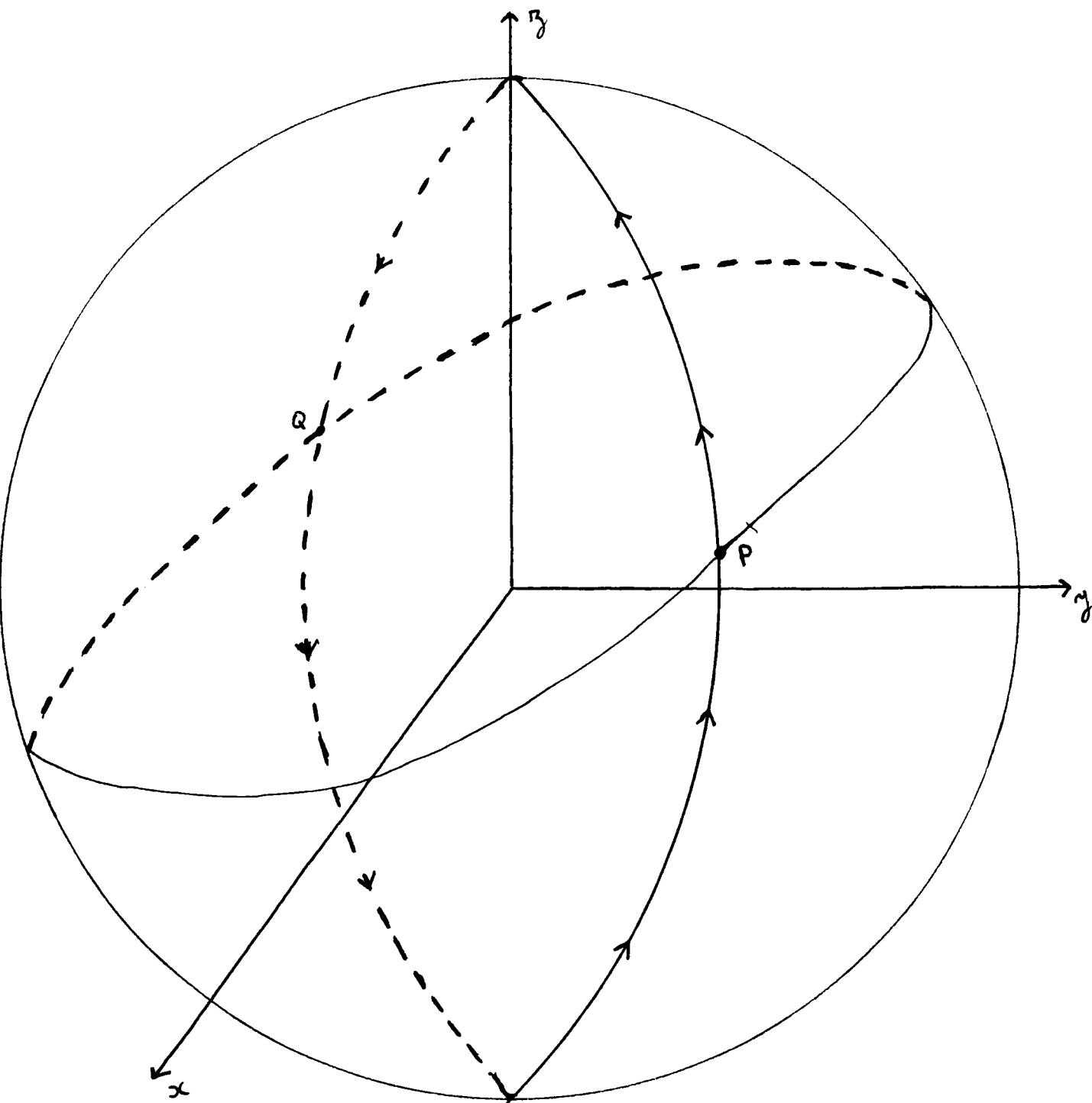


Figure 10 : Représentation des trajectoires de  $\tilde{A}$  sur  $S^2$ .  
Dans le système d'axes  $0x, 0y, 0z$   $A$  a pour matrice :

$$\text{Mat } A = \begin{pmatrix} 0 & -a & a \\ 0 & -b & b \end{pmatrix}$$

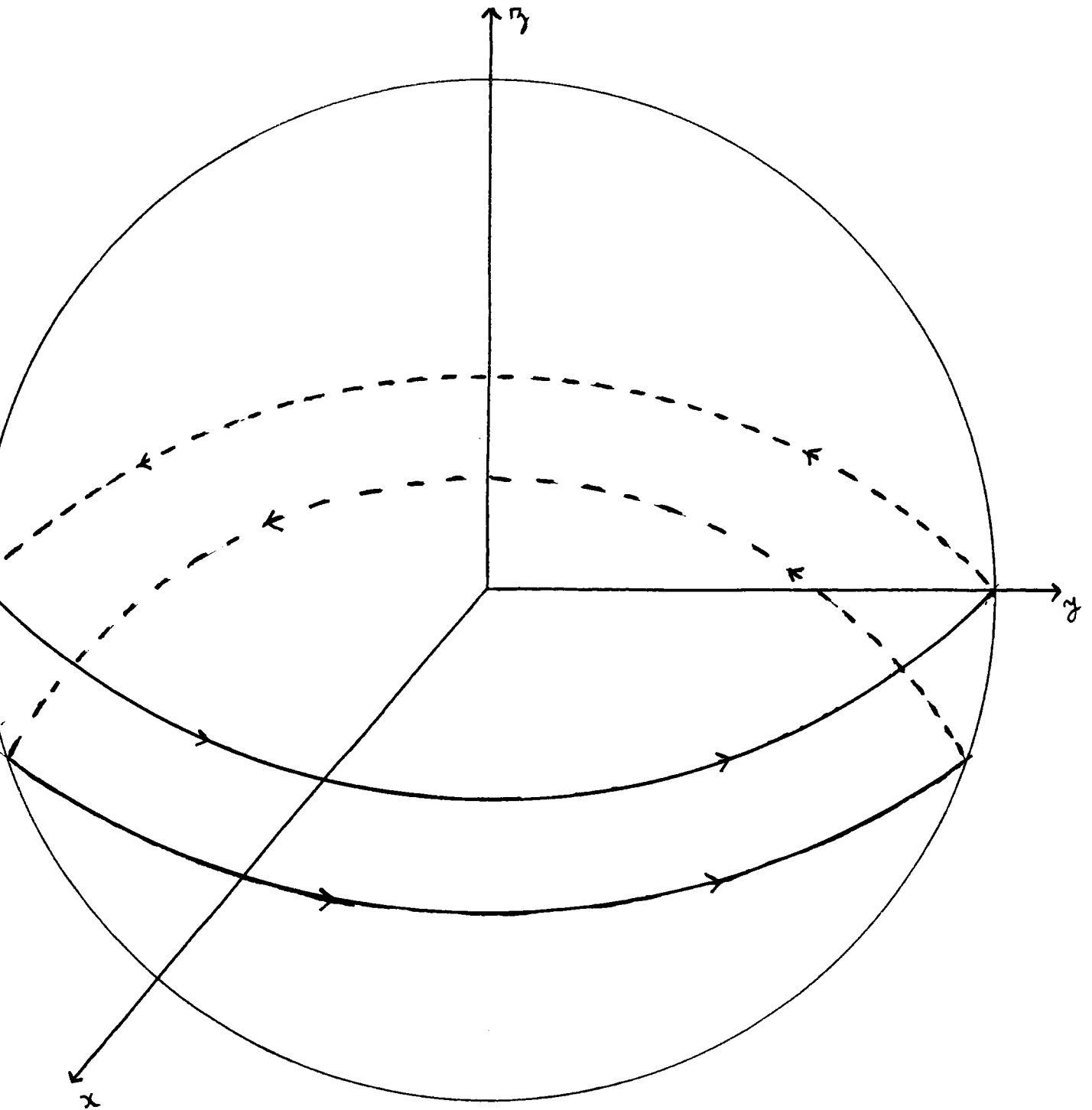


Figure 11 : Nous avons représenté les trajectoires de  $\tilde{B}$  sur  $S^2$ .  
Dans le système d'axes  $0x, 0y, 0z$  la matrice de  $B$  s'écrit :

$$\text{Mat } B = \begin{pmatrix} 0 & -\beta & 0 \\ \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec } \beta > 0$$

## CHAPITRE 4

Dans ce chapitre nous abordons l'étude du dernier cas de figure possible : nous considérons une paire  $\{A, B\}$  où  $A$  est un endomorphisme nilpotent d'ordre 2 de  $\mathbb{R}^3$  ( $A \neq 0$  et  $A^2 = 0$ ) et  $B$  un endomorphisme possédant deux valeurs propres complexes (non réelles) conjuguées dont la partie réelle est différente de la valeur propre réelle de  $B$ . Le théorème 3 ci-dessous donne une condition nécessaire et suffisante de transitivité sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$  pour la paire  $\{A, B\}$ .

### Quelques notations

Dans une base appropriée la matrice de  $B$  s'écrit :  $\text{Mat } B = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Nous noterons : -  $\gamma$  la quantité  $\alpha = \frac{\beta}{\lambda - \alpha}$

-  $T_1$  la quantité  $T_1 = \text{Tr } AB$

-  $T_2$  la quantité  $T_2 = \text{Tr}^t AB$

### Théorème 3

Soit  $A$  un endomorphisme nilpotent d'ordre 2 de  $\mathbb{R}^3$  et  $B$  un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  possédant deux valeurs propres complexes conjuguées de partie réelle différente de la valeur propre réelle de  $B$ . La paire de champs de vecteurs linéaires  $\{A, B\}$  est complètement contrôlable sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$  si et seulement si :

i)  $(\lambda - \alpha) \det (A+B - \lambda \text{Id}) < 0$

ou ii)  $\det (A+B - \lambda \text{Id}) \neq 0$  et  $(\lambda - \alpha) \text{Tr } AB < 0$

ou iii)  $\det (A+B - \lambda \text{Id}) \neq 0$  et

$$\frac{T_1 + T_2}{\sqrt{(T_2 - T_1)^2 + \gamma^2 (T_1 + T_2)^2}} \exp \frac{1}{\gamma} (\text{Arctg } \gamma - \text{Arctg} \gamma \left( \frac{T_1 + T_2}{T_2 - T_1} \right) + \pi) < \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 + 1}}$$

### Remarques :

a) Description des trajectoires de  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$   $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

que  $B - \alpha \text{Id}$ , or les trajectoires de  $B - \alpha \text{Id}$  dans  $\mathbb{R}^3$  sont :

- des cercles centrés en l'origine situés dans le plan  $(0, \vec{i}, \vec{j})$
- deux demi-droites de vecteur directeur  $\vec{k}$
- d'hélices tracées sur des cylindres d'axes  $(0, \vec{k})$

On en déduit que les trajectoires de  $\tilde{B}$  sont constituées de :

- un équateur invariant et sans point singulier
- deux points singuliers (les pôles Nord et Sud)
- de spirales situées dans chacun des hémisphères Nord et Sud.

Les pôles ou bien l'équateur sont attractifs suivant le signe de  $(\lambda - \alpha)$ . Les trajectoires de  $\tilde{B}$  sont représentées figure 12, les trajectoires de  $\tilde{A}$  ont déjà été décrites (voir figure 10).

b) Sur la condition i) du théorème 3

Le champ de vecteurs  $\tilde{B}$  se caractérise par: un équateur stable et deux pôles ; dynamiquement les pôles ou bien l'équateur sont attractifs.

Le champ  $\tilde{A}$  se caractérise par : un grand cercle de points singuliers avec, sur ce grand cercle, deux points singuliers semi-attractifs pour les autres trajectoires. Lorsque  $\lambda - \alpha$  est positif la condition i) signifie que chaque pôle de  $B$  se trouve dans le bassin d'attraction d'un point singulier de  $\tilde{A}$ , lui-même situé dans le bassin d'attraction de l'autre pôle de  $\tilde{B}$  (voir figure 13).

c) Sur la condition ii) du théorème 3

$\det (A+B - \lambda \text{Id}) \neq 0$  équivaut, comme précédemment, à la condition du rang.  $(\lambda - \alpha) \text{Tr AB} < 0$  équivaut à  $(\lambda - \alpha) \text{Kill}(A,B) < 0$ .

d) L'interprétation géométrique de la condition iii) sera vue dans le cours de la démonstration du théorème.

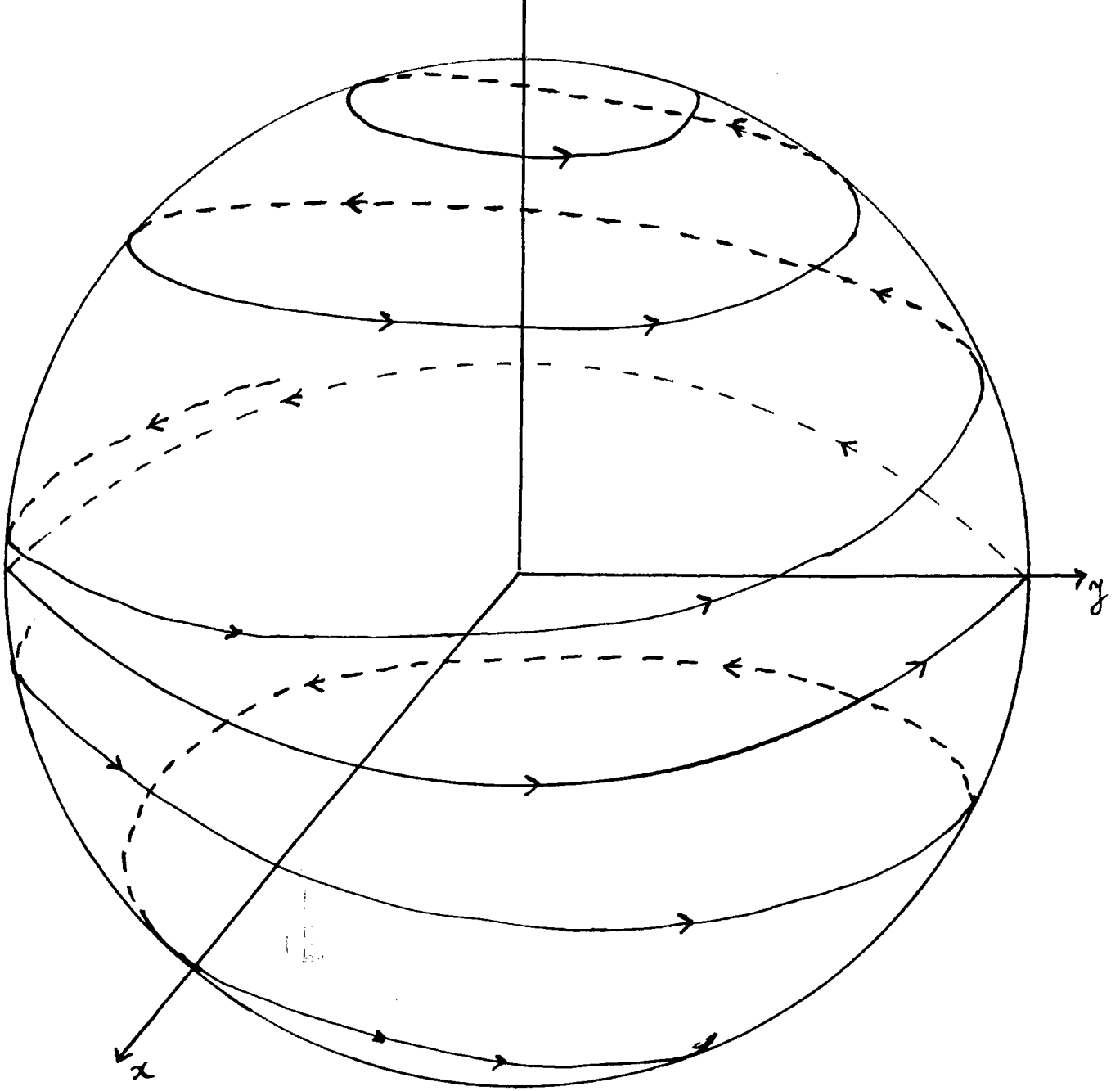


Figure 12 : Nous avons représenté les trajectoires de  $\tilde{B}$  sur  $S^2$ .  
 Dans le système d'axes  $0x, 0y, 0z$  la matrice de  $B$  s'écrit :

$$\text{Mat } B = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{avec } \beta > 0 \text{ et } \lambda > \alpha$$

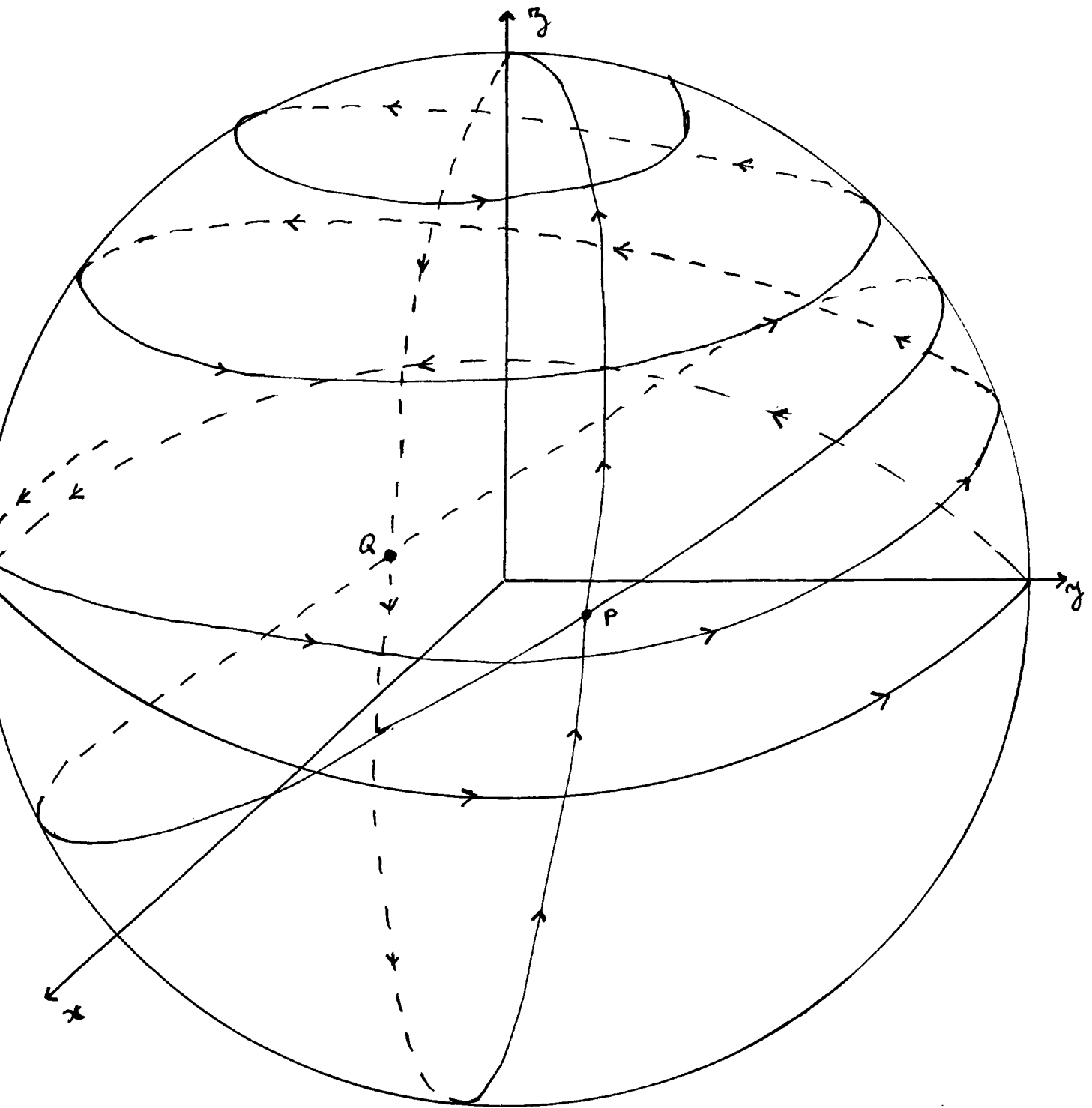


Figure 13 : Dans le système d'axes  $0x, 0y, 0z$  les matrices de  $A$  et  $B$  s'écri-

vent :  $\text{Mat } A = \begin{pmatrix} 0 & -a & a \\ 0 & -b & b \\ 0 & -b & b \end{pmatrix}$  et  $\text{Mat } B = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$  ( $\lambda > 0$  et  $\lambda > \alpha$ )

Nous avons représenté les trajectoires de  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$  sur  $S^2$  dans le cas où  $\det(A+B-\lambda \text{Id}) < 0$  : le pôle Nord se trouve dans le bassin d'attraction (pour  $\tilde{A}$ ) du point  $Q$  qui lui-même se trouve dans le bassin d'attraction (pour  $\tilde{B}$ ) du pôle Sud.

Démonstration du théorème 3

Dans une certaine base de  $\mathbb{R}^3$  Mat B =  $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$  avec  $\lambda \neq \alpha$  et  $\beta > 0$

La complète contrôlabilité du système  $\{\tilde{A}, \tilde{B}\}$  sur  $S^2$  est équivalente à la complète contrôlabilité du système  $\{\tilde{A}, \tilde{B} - \alpha \text{Id}\}$ , on peut donc toujours supposer que  $\alpha = 0$ . Quitte à étudier la contrôlabilité du système  $\{-A, -B\}$  au lieu du système  $\{A, B\}$ , on peut toujours supposer que  $\lambda - \alpha > 0$  dans ce cas la complète contrôlabilité du système  $A, B$  sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$  est équivalente à celle du système  $\{A, \frac{1}{\lambda - \alpha} B\}$ .

Nous nous sommes donc ramenés à l'étude de la contrôlabilité d'une paire  $\{A, B\}$  où A est nilpotent d'ordre 2 et où dans une certaine base de  $\mathbb{R}^3$  la matrice de B' s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 0 & -\gamma & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\gamma = \frac{\beta}{\lambda - \alpha} > 0)$$

Nous cherchons tout d'abord une base de  $\mathbb{R}^3$  dans laquelle A et B' s'écrivent sous la forme la plus simple possible.

Soit P l'unique plan invariant par B' ( $P = \text{Im}(B' - \text{Id})$ )

• Si  $P = \text{Ker } A$ , le système  $\{A, B\}$  n'est pas contrôlable sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$  car le plan P est stable par A et B.

Dans ce cas  $\text{Im}(B' - \text{Id}) = P \quad \text{Im} \frac{A}{\lambda - \alpha} \subset \text{Ker } A = P$

et donc  $\det \left( \frac{A}{\lambda - \alpha} + B' - \text{Id} \right) = \frac{1}{(\lambda - \alpha)^3} \det (A + B - \lambda \text{Id}) = 0$

donc  $\det (A + B - \lambda \text{Id}) = 0$

• Supposons  $\dim (P \cap \text{Ker } A) = 1$ , dans ce cas on peut trouver une base  $(i, j, e_3)$  de  $\mathbb{R}^3$  telle que i soit un vecteur directeur de  $P \cap \text{Ker } A$  et dans laquelle

Mat B =  $\begin{pmatrix} 0 & -\gamma & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On peut alors trouver un vecteur de Ker A sous la forme  $\lambda j + \mu e_3$ . Puisque  $\text{Ker } A \neq P$ ;  $\mu \neq 0$  et si  $\lambda = 0$  la droite dirigée par le vecteur  $e_3$  est stable par



A et B : le système  $\{A, B\}$  n'est pas complètement contrôlable sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$  dans ce cas.

Par ailleurs  $e_3 \in \text{Ker } A$  et  $e_3 \in \text{Ker}(B' - \text{Id})$  donc

$$\det \left( \frac{A}{\lambda - \alpha} + B' - \text{Id} \right) = \frac{1}{(\lambda - \alpha)^3} \det (A + B - \lambda \text{Id}) = 0$$

Dans la suite nous supposons que  $\lambda \neq 0$ , posant  $k = \frac{\mu}{\lambda} e_3$  la matrice de  $B'$  dans la nouvelle base  $(i, j, k)$  est inchangée et la matrice de  $\tilde{A}$  est égale à :

$$\text{Mat } A = \begin{pmatrix} 0 & -a & a \\ 0 & -b & b \\ 0 & -c & c \end{pmatrix}$$

avec  $b = c$  puisque  $\text{Tr } A = 0$ .

En conclusion, dans le cas général, on peut trouver une base de  $\mathbb{R}^3$  dans laquelle les matrices de  $A$  et  $B'$  s'écrivent :

$$\text{Mat } A = \begin{pmatrix} 0 & -a & a \\ 0 & -b & b \\ 0 & -b & b \end{pmatrix} \quad \text{Mat } B' = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les pôles Nord et Sud sont attractifs pour le champ de vecteurs  $\tilde{B}'$ , les points  $P \begin{pmatrix} a/\sqrt{a^2+2b^2} \\ b/\sqrt{a^2+2b^2} \\ b/\sqrt{a^2+2b^2} \end{pmatrix}$  et  $Q$  symétrique de  $P$  par rapport à l'origine sont semi-attractifs pour le champ de vecteurs  $\tilde{A}$ .

Le grand cercle de points singuliers pour  $\tilde{A}$  est le grand cercle intersection de  $S^2$  et du plan d'équation  $y = z$ .

Notons encore  $D_1$  (resp.  $D_2$ ) la demi-sphère déterminée par le grand cercle de points singuliers pour  $\tilde{A}$  et contenant le pôle Nord (resp. le pôle Sud).  $D_1$  (resp.  $D_2$ ) est l'ensemble des points  $M$  de  $S^2$  dont les coordonnées vérifient  $z - y > 0$  (resp.  $z - y < 0$ ).

**A - Cas où  $\det (A+B-\lambda Id) = (\lambda-\alpha)^2 b(\gamma^2 + 1) < 0$  (i.e  $b < 0$ )**

Dans ce cas le point P (resp. Q) est situé dans l'hémisphère Sud (resp. Nord) le bassin d'attraction du point P (resp. Q) est la demi-sphère  $D_1$  (resp.  $D_2$ ) (on peut se reporter à la figure 13).

Nous allons montrer la complète contrôlabilité du système  $\{\tilde{A}, \tilde{B}\}$  sur  $S^2$  en montrant que, de tout point de  $S^2$ , on peut atteindre l'équateur grâce au système  $\{\tilde{A}, \tilde{B}\}$  aussi bien que grâce au système opposé.

Comme tout point de l'équateur est accessible à partir de tout point de l'équateur grâce aux champs  $\tilde{B}$  ou  $-\tilde{B}$  le point i) du théorème aura été démontré.

\* Soit  $M_0$  un point de l'hémisphère Nord, on peut atteindre à partir de ce point et grâce au champ  $\tilde{B}$  un voisinage arbitrairement petit du pôle Nord, et donc un point  $M_1$  de la demi-sphère  $D_1$ . Comme  $D_1$  est le bassin d'attraction du point P situé dans l'hémisphère Sud, on peut atteindre en suivant la trajectoire de  $\tilde{A}$  passant par  $M_1$  un point de l'hémisphère Sud et donc un point de l'équateur. On montrerait de même que l'équateur est accessible de tout point de l'hémisphère Sud.

\* Montrons maintenant qu'à partir de  $M_0$  le système  $\{-\tilde{A}, -\tilde{B}\}$  permet d'atteindre un point de l'équateur.

La trajectoire de  $-\tilde{B}$  passant par le point  $M_0$  admet l'équateur comme cycle limite, par conséquent la trajectoire de  $-\tilde{B}$  passant par  $M_0$  passe par la demi-sphère  $D_2$ . Cette demi-sphère est le bassin d'attraction du point P pour le champ de vecteurs  $-\tilde{A}$  donc toute trajectoire de  $-\tilde{A}$  passant par un point de  $D_2$  coupe l'équateur. Ceci montre que, de tout point de l'hémisphère Nord, on peut atteindre un point de l'équateur ; de façon analogue on montrerait la même chose pour un point de l'hémisphère Nord. C.Q.F.D.

**B - Cas où  $\det (A+B-\lambda Id) = 0$  (i.e  $b = 0$ )**

Les points P et Q sont alors situés sur l'équateur : tout grand cercle passant par P et Q étant stable par  $\tilde{A}$ , l'équateur est stable par  $\tilde{A}$  et comme il est également stable par  $\tilde{B}$ , il n'y a pas complète contrôlabilité du système  $\{\tilde{A}, \tilde{B}\}$  sur  $S_2$ .

C - Cas où  $\det (A+B - \lambda \text{Id}) \neq 0$  et  $\text{Tr } AB < 0$

- .  $\det (A+B - \lambda \text{Id}) = (\lambda - \alpha)^2 b(\gamma^2 + 1)$ , le cas  $b < 0$  ayant déjà été étudié nous supposons donc  $b > 0$
- .  $\text{Tr } AB = (\lambda - \alpha)(b - a\gamma)$ , nous avons supposé  $\lambda > \alpha$  donc  $b - a\gamma < 0$   
Le bassin d'attraction de P est la demi-sphère  $D_1$ , le bassin d'attraction de Q est la demi-sphère  $D_2$ .

\* Soit C la trajectoire de  $\tilde{B}'$  passant par le point P, dans une première étape, nous allons montrer que cette trajectoire passe par la demi-sphère  $D_2$ .

Les équations de C sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} ||.|| x(t) = a \cos \gamma t - b \sin \gamma t \\ ||.|| y(t) = a \sin \gamma t + b \cos \gamma t \quad \text{où } ||.||^2 = a^2 + b^2 + b^2 e^{2t} \\ ||.|| z(t) = b e^t \end{array} \right.$$

Il s'agit de montrer que la quantité  $z(t) - y(t)$  est négative pour un certain  $t > 0$ .

$$||.|| (z(t) - y(t)) = f(t) = b e^t - a \sin \gamma t - b \cos \gamma t$$

Nous faisons un développement limité de  $f(t)$  au voisinage de 0 :

$f(t) = (b - a\gamma)t + a(t)$  : puisque  $b - a\gamma < 0$  cette quantité est négative pour  $t > 0$  assez petit. La trajectoire C passe donc par la demi-sphère  $D_2$  et on montrerait de façon analogue que la trajectoire de  $\tilde{B}'$  passant par le point Q passe par la demi-sphère  $D_1$ .

\* Dans cette deuxième étape nous montrons que, de tout point de  $S^2$ , on peut atteindre un point de l'équateur grâce au système  $\{\tilde{A}, \tilde{B}\}$ .

Soit  $M_0$  un point de l'hémisphère Nord si  $M_0$  est situé dans la demi-sphère  $D_2$ , bassin d'attraction du point Q situé dans l'hémisphère Sud, la trajectoire de  $\tilde{A}$  passant par  $M_0$  coupe l'équateur.

Si  $M_0$  est situé dans la demi-sphère  $D_1$ , bassin d'attraction du point P, la trajectoire de  $\tilde{A}$  passant par  $M_0$  permet d'atteindre un point  $M_1$  arbitrairement proche de P. Or la trajectoire de  $\tilde{B}'$  passant par le point P passe par la demi-sphère  $D_2$ , donc, si  $M_1$  est choisi suffisamment proche de P, la trajectoire de

$\tilde{B}'$  passant par  $M_1$  passe également par  $D_2$  d'où nous avons vu qu'il était possible d'atteindre l'équateur.

On montrerait de façon analogue que, de tout point de l'hémisphère Sud, on peut atteindre un point de l'équateur.

\* Nous avons vu dans le premier cas étudié, que de tout point de  $S^2$  on pouvait atteindre un point de l'équateur grâce au système  $\{-\tilde{A}, -\tilde{B}\}$ .

Conclusion Nous avons montré que, de tout point de  $S^2$ , on pouvait atteindre un point de l'équateur grâce aux systèmes  $\{\tilde{A}, \tilde{B}\}$  et  $\{-\tilde{A}, -\tilde{B}\}$  comme on peut se déplacer sur l'équateur grâce aux champs de vecteurs  $\tilde{B}'$  et  $-\tilde{B}'$ , le système  $\{\tilde{A}, \tilde{B}'\}$  est transitif sur  $S^2$  ce qui équivaut à la complète contrôlabilité de  $\{A, B\}$  sur  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ .

D - **Cas où  $T_1 = \text{Tr } AB > 0$  et  $T_2 = \text{Tr}^t AB > 0$**

.  $T_1 = (\lambda - \alpha) (-a\gamma + b)$  et  $T_2 = (\lambda - \alpha) (a\gamma + b)$ , comme on a supposé  $\lambda - \alpha > 0$ , nécessairement  $b > 0$

$$\cdot \frac{T_1 + T_2}{\sqrt{(T_2 - T_1)^2 + \gamma^2 (T_1 + T_2)^2}} \exp \frac{1}{\gamma} (\text{Arctg } \gamma - \text{Arctg } \gamma \frac{T_1 + T_2}{T_2 - T_1} + \pi) =$$

$$\frac{b}{\gamma \sqrt{a^2 + b^2}} \exp \frac{1}{\gamma} (\text{Arctg } \gamma - \text{Arctg } \frac{b}{a} + \pi)$$

et puisque  $-a\gamma + b > 0$  et  $a\gamma + b > 0$  on a toujours :  $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \geq \frac{\gamma}{\sqrt{1 + \gamma^2}}$

$$\text{donc : } \frac{T_1 + T_2}{\sqrt{(T_2 - T_1)^2 + \gamma^2 (T_1 + T_2)^2}} \exp \frac{1}{\gamma} (\text{Arctg } \gamma - \text{Arctg } \gamma \frac{T_1 + T_2}{T_2 - T_1} + \pi) \geq \frac{\gamma}{\sqrt{1 + \gamma^2}}$$

Nous allons démontrer la non-transitivité du système  $\{\tilde{A}, \tilde{B}'\}$  sur  $S^2$  en exhibant une partie  $E$  de  $S^2$  invariante par  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}'$  : soit  $E$  l'ensemble défini par :

$$E = \{ M(x, y, z) \in S^2 / z \geq \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ et } z - y \geq 0 \}$$

Soit  $C_1$  le cercle parallèle à l'équateur de latitude  $\text{Arctg} \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$  et  $C_2$  le grand cercle intersection de  $S^2$  et du plan d'équation  $y = z$ . La frontière de  $E$  est constituée de l'ensemble des points de  $C_1$  dont la longitude est comprise entre  $\pi - \text{Arctg} \left| \frac{b}{a} \right|$  et  $2\pi + \text{Arctg} \left| \frac{b}{a} \right|$  et de l'ensemble des points de  $C_2$  dont la latitude est comprise entre  $\text{Arctg} \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$  et  $\pi/4$  (voir figure 14).

Pour montrer l'invariance de la partie  $E$  par les champs de vecteurs  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$  nous allons montrer qu'aucune trajectoire de  $\tilde{A}$  ou  $\tilde{B}$  passant par un point de  $E$  ne traverse la frontière de cet ensemble.

Notons  $C'_1$  (resp.  $C'_2$ ) la partie de la frontière de  $E$  située sur le cercle  $C_1$  (resp.  $C_2$ ).

\* Il est clair que toute trajectoire de  $\tilde{A}$  passant par un point de  $E$  ne peut traverser la frontière de  $E$  par  $C'_2$  puisque  $C'_2$  est constitué de points singuliers pour  $\tilde{A}$ .

Soit  $M_o (x_o, y_o, z_o)$  un point de  $C'_1$  de latitude  $\theta_o$  et de longitude  $\varphi_o$ , le vecteur  $\tilde{A}(M_o)$  a pour composantes :

$$\begin{pmatrix} a(z_o - y_o) - x_o(z_o - y_o)(ax_o + by_o + bz_o) \\ b(z_o - y_o) - y_o(z_o - y_o)(ax_o + by_o + bz_o) \\ b(z_o - y_o) - z_o(z_o - y_o)(ax_o + by_o + bz_o) \end{pmatrix}$$

Montrons que la 3e composante est toujours positive, quel que soit le point  $M_o$  de  $C'_1$ . Considérant que

$$\begin{cases} x_o = \cos \theta_o \cos \varphi_o \\ y_o = \cos \theta_o \sin \varphi_o \\ z_o = \sin \theta_o \end{cases} \quad \text{et} \quad \text{tg} \theta_o = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Cette 3e composante est égale à :

$$(z - y)b \cos^2 \theta_o \left( 1 - \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos \varphi_o - \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin \varphi_o \right)$$

$$= (z - y)b \cos^2 \theta_o (1 - \cos(\varphi_o - \varphi_1)) \quad \text{où} \quad \cos \varphi_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \sin \varphi_1 = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Sur  $C'_1$  la quantité  $z - y$  reste toujours positive et la quantité  $1 - \cos(\varphi_0 - \varphi_1)$  est toujours positive quel que soit le point  $M_0$  de  $C'_1$ .

Le fait que la 3e composante du vecteur  $\tilde{A}(M_0)$  soit toujours positive sur  $C'_1$  prouve que les trajectoires de  $\tilde{A}$  passant par les points de  $E$  ne peuvent traverser la frontière de  $E$  en un point de  $C'_1$ .

Conclusion      Aucune trajectoire de  $\tilde{A}$  passant par un point de  $E$  ne traverse la  
 || frontière  $C$  de  $E$  par conséquent l'ensemble  $E$  est stable par le  
 || champ de vecteurs  $\tilde{A}$ .

\* Nous montrons maintenant le même résultat concernant le champ  $\tilde{B}'$ .

La trajectoire de  $\tilde{B}'$  passant par un point  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  de  $E$  a pour équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} ||.|| x(t) = x_0 \cos \gamma t - y_0 \sin \gamma t \\ ||.|| y(t) = x_0 \sin \gamma t + y_0 \cos \gamma t \quad (||.||^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 e^{2t}) \\ ||.|| z(t) = z_0 e^t \end{array} \right.$$

La tangente de la latitude du point courant  $M(t)$  de cette trajectoire est égale à :  $f(t) = \frac{z_0 e^t}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$  ;  $f$  étant une fonction croissante, il est clair que la trajectoire de  $\tilde{B}'$  passant par  $M_0$  ne peut traverser la frontière de  $E$  en un point de  $C'_1$ .

La trajectoire de  $\tilde{B}'$  passant par  $M_0$  ne peut traverser la frontière de  $E$  en un point de  $C'_1$ .

Soit maintenant  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  un point de  $C'_2$  ( $y_0 = z_0$ ) de latitude  $\theta_0$  et de longitude  $\varphi_0$  et soit  $X, Y$  et  $Z$  les composantes du vecteur  $\tilde{B}'(M_0)$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} X = -\gamma y_0 - x_0 z_0^2 \\ Y = \gamma x_0 - z_0^2 y_0 \\ Z = z_0 - z_0^3 \end{array} \right.$$

$$Z - Y = z_0 - z_0^3 - x_0 + z_0^2 y_0$$

$$= y_0 - \gamma x_0 \quad \text{puisque } y_0 = z_0$$

$$= \cos \theta_0 \cos \varphi_0 (\operatorname{tg} \varphi_0 - \gamma)$$

$$\text{Puisque } M_0 \in C'_2 \quad \operatorname{Arctg} \left| \frac{b}{a} \right| \leq \varphi_0 \leq \pi - \operatorname{Arctg} \left| \frac{b}{a} \right|$$

donc  $\operatorname{tg} \varphi_0 \geq \left| \frac{b}{a} \right|$  et puisque  $\left| \frac{b}{a} \right| - \gamma$  est positif la quantité  $Z - Y$  est positive pour tout point de  $C'_2$ .

Ceci prouve que le vecteur  $\tilde{B}'(M_0)$  est toujours situé dans le 1/2 espace déterminé par le grand cercle  $C_1$  et contenant le pôle Nord donc la trajectoire de  $\tilde{B}'$  passant par  $M_0$  ne peut traverser la frontière de  $E$  en un point de  $C'_2$ .

Conclusion

Aucune trajectoire de  $\tilde{B}'$  passant par un point de  $E$  ne traverse la frontière  $C$  de  $E$  par conséquent l'ensemble  $E$  est stable par  $\tilde{B}'$ , comme il est stable aussi par  $A$  le système  $\{\tilde{A}, \tilde{B}'\}$  n'est pas transitif sur  $S^2$ . C.Q.F.D.

E -	<p>Cas où <math>T_1 = \operatorname{Tr} AB &gt; 0</math>, <math>\det (A+B - \lambda \operatorname{Id}) \neq 0</math> et</p> $\frac{T_1 + T_2}{\sqrt{(T_2 - T_1)^2 + \gamma^2 (T_1 + T_2)^2}} \exp \frac{1}{\gamma} \left( \operatorname{Arctg} \gamma - \operatorname{Arctg} \gamma \frac{T_1 + T_2}{T_2 - T_1} + \pi \right) < \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 + 1}}$
-----	--

.  $T_1 = (\lambda - \alpha) (-a \gamma + b)$  comme on suppose  $\lambda > \alpha$ , nécessairement  $-a \gamma + b > 0$

. comme il a été vu au point précédent, la 3e inégalité implique que

$$T_2 = \operatorname{Tr} {}^t AB = (\lambda - \alpha)(a \gamma + b) < 0 \quad \text{donc } a \gamma + b < 0$$

. cette 3e inégalité est équivalente à l'inégalité suivante :

$$\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \exp \frac{1}{\gamma} \left( \operatorname{Arctg} \gamma - \operatorname{Arctg} \gamma \frac{T_1 + T_2}{T_2 - T_1} + \pi \right) < \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + 1}}$$

. Nous supposons  $b > 0$ , le cas  $b < 0$  ayant déjà été traité.

Pour montrer la transitivité du système  $\{\tilde{A}, \tilde{B}'\}$  sur  $S^2$  nous allons montrer que, de tout point de  $S^2$ , il est possible d'atteindre un point de l'équateur grâce aux systèmes  $\{\tilde{A}, \tilde{B}'\}$  et  $\{-\tilde{A}, -\tilde{B}'\}$ . Le deuxième point se démontre comme dans le cas C, il nous reste donc à montrer le 1er point : la démonstration est analogue à celle faite dans le cas C mais les calculs sont différents.

\* Soit C la trajectoire de  $\tilde{B}'$  passant par le point P, dans une première étape nous montrons que cette trajectoire passe par la demi-sphère  $D_2$  (ensemble des points de  $S^2$  dont les coordonnées vérifient :  $z - y < 0$ ).

Les équations de C sont données par :

$$\begin{cases} ||.|| x(t) = a \cos \gamma t - b \sin \gamma t \\ ||.|| y(t) = a \sin \gamma t + b \cos \gamma t \quad \text{où } ||.||^2 = a^2 + b^2 + b^2 e^{2t} \\ ||.|| z(t) = b e^t \end{cases}$$

Il s'agit de montrer que la quantité  $z(t) - y(t)$  devient négative pour certaines valeurs de t.

$$\begin{aligned} ||.|| (z(t) - y(t)) &= f(t) = b e^t - a \sin \gamma t - b \cos \gamma t \\ &= b e^t - \sqrt{a^2 + b^2} \sin (\gamma t + \varphi_0) \end{aligned}$$

$$\text{où } \cos \varphi_0 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \sin \varphi_0 = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$f(t) < 0 \Leftrightarrow g(t) = e^{-t} \sin (\gamma t + \varphi_0) > \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \varphi_0$$

L'étude des variations de la fonction g nous permet de dresser le tableau suivant :

t.	0	$\frac{1(\pi - \varphi_0)}{\gamma}$	$t_1$	$\frac{1(3\pi - \varphi_0)}{\gamma 2}$	$\frac{1(2\pi - \varphi_0)}{\gamma}$	$t_2$	$\frac{1(5\pi - \varphi_0)}{\gamma 2}$	$\frac{2\pi}{\gamma}$
g'(t)		-	0	+	+	0	-	
g(t)	$\sin \varphi_0$							

.  $a < 0$  et  $b > 0$  donc  $\frac{\pi}{2} < \varphi_0 < \pi$   $\varphi_0 = \text{Arctg } \frac{b}{a} + \pi$

.  $t_1 = \frac{1}{\gamma} (\text{Arctg } \gamma + \pi - \varphi_0)$

.  $t_2 = \frac{1}{\gamma} (\text{Arctg } \gamma + 2\pi - \varphi_0)$



$$\begin{aligned} \text{donc } g(t_2) &= \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2+1}} \exp - \frac{1}{\gamma} (\text{Arctg } \gamma + 2\pi - \varphi_0) \\ &= \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2+1}} \exp - \frac{1}{\gamma} (\text{Arctg } \gamma + \pi - \text{Arctg } \frac{b}{a}) \end{aligned}$$

et, puisque  $\frac{b}{a} = \gamma \frac{T_1+T_2}{T_2-T_1}$ , on a  $g(t_2) > \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$  d'après nos hypothèses

Conclusion Nous avons démontré que la trajectoire C passe par la demi-sphère  $D_2$ , la démonstration du fait que de tout point de  $S^2$  on puisse atteindre un point de l'équateur grâce au système  $\{\tilde{A}, \tilde{B}'\}$  se fait alors exactement comme dans le cas C.

F - Cas où  $T_1 = \text{Tr } AB > 0$ ,  $\det (A+B - \lambda \text{Id}) = 0$  et

$$\frac{T_1 + T_2}{\sqrt{(T_2 - T_1)^2 + \gamma^2 (T_1 + T_2)^2}} \exp \frac{1}{\gamma} (\text{Arctg } \gamma - \text{Arctg } \gamma \frac{T_1+T_2}{T_2-T_1} + \pi) \geq \frac{1}{\sqrt{\gamma^2+1}}$$

- $T_1 = (\lambda - \alpha)(-a\gamma + b)$ , comme on suppose  $\lambda > \alpha$ , nécessairement  $-a\gamma + b \geq 0$
- Si on avait  $T_2 = \text{Tr } {}^t AB \geq 0$ , il n'y aurait pas transitivité du système  $\{\tilde{A}, \tilde{B}'\}$  sur  $S^2$  comme il a été vu au point D. Nous supposons donc que :

$$T_2 = \text{Tr } {}^t AB = (\lambda - \alpha)(a\gamma + b) < 0 \text{ donc } a\gamma + b < 0$$

- La 3e inégalité est équivalente à :

$$\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \exp \frac{1}{\gamma} (\text{Arctg } \gamma - \text{Arctg } \frac{b}{a} + \pi) \geq \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2+1}}$$

Appelons  $C_0$  la trajectoire de  $\tilde{B}'$  passant par le point P

$C_1$  le cercle parallèle à l'équateur de latitude  $\text{Arctg } \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2+1}}$

$C_2$  le grand cercle intersection de  $S^2$  et du plan d'équation  $y = z$

Pour démontrer la non-transitivité du système  $\{\tilde{A}, \tilde{B}'\}$  sur  $S^2$  nous allons exhiber une partie  $E$  de  $S^2$  invariante par ces deux champs de vecteurs et dont la frontière est constituée d'une partie de  $C_0$ , d'une partie de  $C_1$  et d'une partie de  $C_2$ .

Pour préciser davantage la frontière de  $E$  certains calculs préliminaires sont nécessaires :

Soit  $M(t)$  le point courant sur la trajectoire  $C_0$  et posons  $u(t) = \overrightarrow{OM}(t)$ . Le vecteur tangent à  $C_0$  en  $M(t)$  est :  $v(t) = Bu(t) - \langle Bu(t), u(t) \rangle u(t)$ . Un vecteur orthogonal à  $v(t)$  et tangent à  $S^2$  en  $M_0$  est :  $u(t) \wedge v(t)$ ,  $(u(t) \wedge v(t)) = u(t) \wedge Bu(t)$ .

On s'intéresse à la position du vecteur  $w(t) = Au(t) - \langle Au(t), u(t) \rangle u(t)$  par rapport au vecteur  $v(t)$ , pour cela on calcule  $w(t) \cdot (u(t) \wedge v(t))$

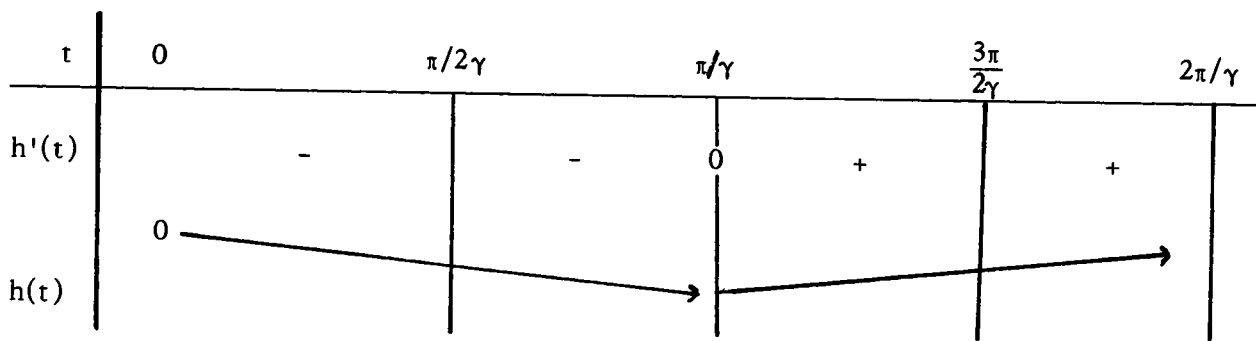
$$\begin{aligned} w(t) \cdot (u(t) \wedge v(t)) &= \det(w(t), u(t), v(t)) \\ &= \det(u(t), Bu(t), Au(t)). \end{aligned}$$

Nous nous intéressons donc au signe de  $\det(u(t), Bu(t), Au(t))$  cette quantité est égale à :  $b(a^2 + b^2) (e^t (\gamma \cos \gamma t - \sin \gamma t) - \gamma) (a \sin \gamma t + b \cos \gamma t - b e^t)$ .

L'étude du signe de la quantité  $a \sin \gamma t + b \cos \gamma t - b e^t$  a été faite dans le cas  $E$ , ici, puisque  $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \exp \frac{1}{\gamma} (\text{Arctg } \gamma - \text{Arctg } \frac{b}{a} + \pi) > \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2+1}}$

$a \sin \gamma t + b \cos \gamma t - b e^t$  est négatif pour tout  $t > 0$ .

Etudions alors le signe de  $h(t) = e^t (\gamma \cos \gamma t - \sin \gamma t) - \gamma$ , nous obtenons le tableau de variations suivant pour  $h(t)$  :



$$h\left(\frac{\pi}{\gamma}\right) = -\gamma(e^{\pi/\gamma} + 1) < 0 \text{ et } h\left(\frac{2\pi}{\gamma}\right) = (e^{2\pi/\gamma} - 1) > 0$$

Nous rappelons le tableau de variations de la fonction  $g(t) = e^{-t} \sin(\gamma t + \varphi_0)$  ( $\varphi_0 = \text{Arctg } \frac{b}{a} + \pi$ )

t	0	$\frac{1(\pi - \varphi_0)}{\gamma}$	$t_1$	$\frac{1(3\pi - \varphi_0)}{\gamma}$	$\frac{1(2\pi - \varphi_0)}{\gamma}$	$t_2$	$\frac{1(5\pi - \varphi_0)}{\gamma}$	$\frac{2\pi}{\gamma}$
$g'(t)$		-	0	+	+	0	-	-
$g(t)$	↘		↗			↘		

$$t_2 = \frac{1}{\gamma} (\text{Arctg } \gamma + 2\pi - \varphi_0)$$

La tangente de la latitude du point courant  $M(t)$  de la trajectoire  $C_0$  est égale à :  $\frac{b e^t}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  puisque  $T_1 \geq 0$  et  $T_2 < 0$   $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} < \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + 1}}$  et donc il existe

T strictement positif tel que  $\frac{b e^T}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + 1}}$

Nous allons montrer que  $T \in [0, \frac{2\pi}{\gamma}]$  et  $h(T) < 0$

Puisque  $g(t_2) \leq \sin \varphi_0$   $\frac{b e^{t_2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} \geq \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + 1}}$  donc  $T \leq t_2 \leq \frac{2\pi}{\gamma}$

Considérons la fonction  $f(t) = \gamma \cos \gamma t - \sin \gamma t$  son tableau de variations sur l'intervalle  $[\frac{\pi}{\gamma}, \frac{2\pi}{\gamma}]$  est le suivant :

t	$\frac{\pi}{\gamma}$	$\frac{3\pi}{2\gamma}$	$t_0$	$\frac{2\pi}{\gamma}$
$f'(t)$		+	0	-
$f(t)$	↗			↘

$$f(t_0) = \sqrt{\gamma^2 + 1} \quad t_0 = 2\pi - \operatorname{Arctg} \frac{1}{\gamma}$$

$$\varphi_0 = \operatorname{Arctg} \frac{b}{a} + \pi \text{ donc } \varphi_0 > \pi/2 \quad (b > 0 \text{ et } a < 0)$$

$$\text{on en déduit : } \operatorname{Arctg} \gamma + 2\pi - \varphi_0 = t_2 < 2\pi - \operatorname{Arctg} \frac{1}{\gamma} = t_0$$

Par conséquent : - Si  $T \in [0, \pi/\gamma]$   $h(T) < 0$

- Si  $T \in [\pi/\gamma, 2\pi/\gamma]$  puisque  $T < t_2 < t_0$  on peut écrire :

$$\gamma \cos \gamma T - \sin \gamma T \leq \gamma \cos \gamma t_2 - \sin \gamma t_2$$

$$\text{et donc : } h(T) \leq e^T (\gamma \cos \gamma t_2 - \sin \gamma t_2) - \gamma = 0 \quad \text{C.Q.F.D.}$$

### Conclusion

Nous avons montré l'existence d'un point  $M(T)$  ( $T > 0$ ) sur la trajectoire  $C_0$  de latitude  $\operatorname{Arctg} \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + 1}}$  tel que pour tout  $t$   $0 \leq t \leq T$  on ait  $\det(u(t), Bu(t), Au(t)) \geq 0$ .

Nous définissons maintenant la partie  $E$  de  $S^2$  invariante par  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}'$  (on peut se reporter à la figure 14) : la frontière de  $E$  est constituée de l'arc  $\widehat{PM(T)}$  de la trajectoire  $C_0$ , de l'arc de cercle de  $C_1$  joignant les points  $M_0(T)$  et le point  $M_1$  de  $C_2$  de longitude  $\operatorname{Arctg} \gamma$  et de l'arc de cercle de  $C_2$  joignant les points  $M_1$  et  $P$ . La partie  $E$  est l'ensemble des points de  $S^2$  situés au-dessus de ces 3 portions de courbe.

Comme dans le cas **D** pour montrer l'invariance de la partie  $E$  par les champs de vecteurs  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}'$  nous allons montrer qu'aucune trajectoire de  $\tilde{A}$  ou  $\tilde{B}'$  passant par un point de  $E$  ne traverse la frontière de  $E$ .

\* Il est clair que toute trajectoire de  $\tilde{A}$  passant par un point de  $E$  ne peut traverser la frontière de  $E$  en un point de l'arc de cercle  $\widehat{M_1P}$  puisque cet arc de cercle est constitué de points singuliers pour  $\tilde{A}$ .

Nous avons vu, dans le point **D**, que la 3e composante du vecteur  $\tilde{A}(M_0)$  était positive pour tout point  $M_0$  de l'arc  $\widehat{M_0(T)M_1}$  donc une trajectoire de  $\tilde{A}$  passant par un point de  $E$  ne peut traverser la frontière de  $E$  en un point de  $\widehat{M_0(T)M_1}$ .

Enfin nous avons établi que  $\det (\tilde{A}(OM(t)), OM(t), \tilde{B}(OM(t))) \geq 0$  pour tout  $t$  tel que  $0 \leq t \leq T$  ce qui signifie que les trajectoires de  $\tilde{A}$  passant par un point de l'arc  $PM(T)$  sont rentrantes dans  $E$  ; donc toute trajectoire de  $\tilde{A}$  passant par un point de  $E$  ne peut traverser la frontière de  $E$  en un point de  $PM(T)$ .

\* Nous montrons maintenant le même résultat concernant le champ  $\tilde{B}'$ .

Il est clair que toute trajectoire de  $\tilde{B}'$  passant par un point de  $E$  ne peut traverser la frontière de  $E$  en un point de  $\widehat{PM(T)}$  puisque cet arc est une partie de trajectoire de  $\tilde{B}'$ .

Au point  $D$  il est établi que la latitude du point courant  $M(t)$  d'une trajectoire de  $\tilde{B}'$  était une fonction croissante de  $t$  par conséquent les trajectoires de  $\tilde{B}'$  passant par un point de  $E$  ne sauraient traverser la frontière de  $E$  en un point de  $\widehat{M(T) M_1}$ .

Enfin, il a été également établi au point  $D$  que les composantes  $X, Y$  et  $Z$  du vecteur  $\tilde{B}'(M_0)$  (pour  $M_0$  point de  $C_2$ ) vérifiaient :

$Z - Y \geq 0$  dès lors que la latitude de  $M_0$  était supérieure à  $\text{Arctg} \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + 1}}$  ou

que l'abscisse de  $M_0$  était négative ; par conséquent toute trajectoire de  $\tilde{B}'$  passant par un point de  $E$  ne peut traverser la frontière de  $E$  en un point de  $\widehat{M_1 P}$ .

Conclusion      ||      Aucune trajectoire de  $\tilde{A}$  ou  $\tilde{B}'$  passant par un point de  $E$  ne traverse la frontière de  $E$  par conséquent l'ensemble  $E$  est stable par  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$  le système  $\{\tilde{A}, \tilde{B}'\}$  n'est donc pas transitif sur  $S^2$ .

C.Q.F.D.

\*

\*

\*

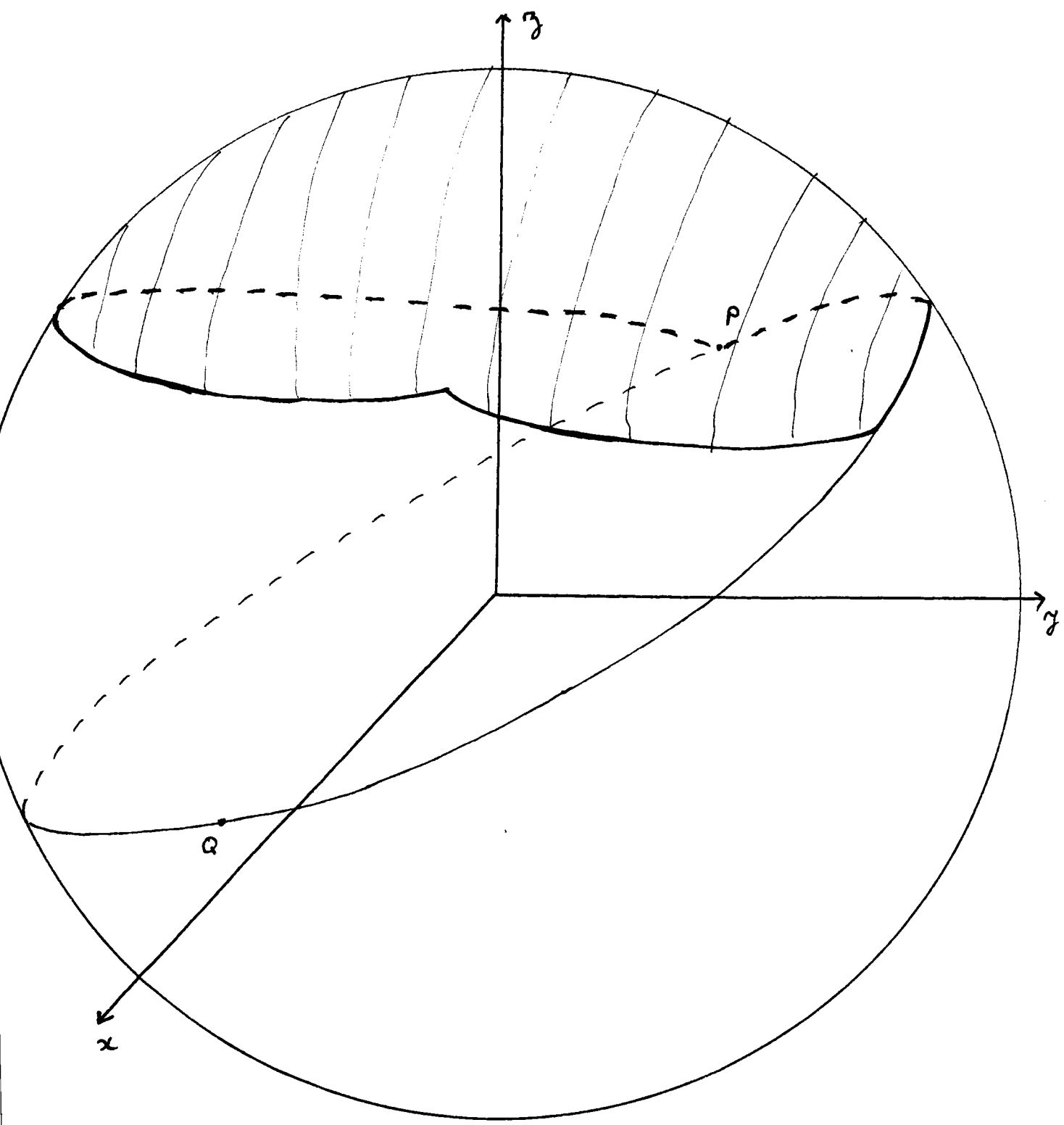


Figure 14 : Cas F :  $T_1 > 0$   $\det(A+B-\lambda Id) \neq 0$  et

$$\frac{T_1 + T_2}{\sqrt{(T_2 - T_1)^2 + \gamma^2} (T_1 + T_2)^2} \exp\left(\frac{\text{Arctg } \gamma - \text{Arctg } \gamma}{\gamma}\right) \frac{T_1 + T_2}{T_2 - T_1} + \pi \geq \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 + 1}}$$

Nous avons représenté la zone E invariante par  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}'$

**2 è m e   P A R T I E**

**CONTROLABILITE DES SYSTEMES AFFINES  
DANS LE PLAN**

## INTRODUCTION

Cette partie est consacrée à l'étude des systèmes du type :

$$(1) \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + u(Dx(t) + b) \text{ où :}$$

- $x(t)$  est élément de  $\mathbb{R}^2$
- $A$  et  $D$  sont deux matrices  $2 \times 2$  non nulles
- $b$  est un vecteur non nul de  $\mathbb{R}^2$
- le contrôle  $u$  est non borné ( $u \in \mathbb{R}$ )

Nous allons donner des conditions nécessaires et suffisantes de complète contrôlabilité pour les systèmes du type ci-dessus. Ces conditions sont purement algébriques : l'ensemble des couples  $(A, D + b)$  tels que le système (1) soit complètement contrôlable est un ensemble algébrique de  $\mathbb{R}^{10}$ , de plus elles seront données sous forme invariante : les calculs à faire pour décider de la contrôlabilité du système (1) ne dépendront donc pas de la forme des matrices  $A$  et  $D$ .

Par ailleurs, l'examen de ces conditions nécessaires et suffisantes qui seront exposées dans le chapitre 1 donne lieu à l'importante remarque suivante :

A un système du type (1) nous associons le système homogène :

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + u Dx(t) \\ u \in \mathbb{R} \quad x(t) \in \mathbb{R}^2 - \{0\} \end{cases}$$

On sait que l'ensemble des couples  $(A,D)$  qui rendent le système (2) complètement contrôlable est un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^8$  et que, si le système (2) est complètement contrôlable et si les champs de vecteurs  $A$  et  $D + b$  n'ont pas de point singulier commun, le système (1) est complètement contrôlable.

On peut se demander ce qui se passe dans le cas où le système (2) n'est pas complètement contrôlable. Les résultats que nous allons démontrer permettent d'établir que si  $A$ ,  $D$  et  $b$  sont choisis tels que :

- le système (2) n'est pas contrôlable
- le système (1) est complètement contrôlable

alors  $(A,D)$  appartient à la frontière de  $U$ . Autrement dit, la projection sur  $\mathbb{R}^8$  de l'ensemble des triplets  $(A,D,b)$  qui rendent le système (1) complètement contrôlable est incluse à l'adhérence de  $U$ .



## PLAN DE LA PARTIE II

Chapitre 1 : Dans ce chapitre nous énonçons notre résultat principal puis nous exposons brièvement des conditions nécessaires et suffisantes de complète contrôlabilité pour le système linéaire (2) : dans ce cas, le théorème de Jurdjevic-Sallet donne une condition nécessaire et suffisante de complète contrôlabilité pour le système (1).

Nous terminons le chapitre en mettant en parallèle les conditions nécessaires et suffisantes des systèmes (1) et (2) : nous faisons apparaître que le système (1) est complètement contrôlable essentiellement dans le cas où le système (2) l'est aussi.

Au passage nous rappelons des résultats concernant les techniques d'extension qui nous seront utiles pour la suite.

Chapitre 2 : En vue de la démonstration de notre théorème, nous introduisons dans ce chapitre des techniques propres à la dimension 2. Nous démontrons la proposition suivante : Une famille  $F = \{ X, \pm Y \}$  est complètement contrôlable sur  $\mathbb{R}^2$  si et seulement si le long de chaque trajectoire  $C$  de  $\pm Y$  le champ de vecteurs  $X$  est dirigé vers chacune des deux régions déterminées par  $C$ .

Chapitre 3 : Nous démontrons notre théorème dans le cas où  $D$  est semblable à 
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} (\lambda_1 \neq \lambda_2) (\Delta(D) > 0)$$

Chapitre 4 : Nous démontrons notre théorème dans le cas où  $D$  est semblable à 
$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (\Delta(D) = 0)$$

Chapitre 5 : Nous démontrons notre théorème dans le cas où  $D$  est semblable à 
$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \quad (\alpha \beta \neq 0) \quad (\Delta(D) < 0 \text{ et } \text{Tr } D \neq 0)$$

Chapitre 6 : Nous démontrons notre théorème dans le cas où  $D$  est semblable à

$$\begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \quad (\beta \neq 0) \quad (\Delta(D) < 0 \text{ et } \text{Tr } D = 0)$$

## CHAPITRE 1

### 1. RESULTAT PRINCIPAL

Nous noterons  $D + b$  le champ de vecteurs affine :  $x \longrightarrow Dx + b$ . Sur l'espace des champs de vecteurs linéaires, nous disposons d'une forme bilinéaire : la forme de Killing notée  $\chi$ .

En dimension 2 on a :  $\chi(A,B) = 4 \operatorname{Tr} AB - 2 \operatorname{Tr} A \operatorname{Tr} B$ . Nous noterons  $\Delta$  la forme quadratique associée ( $\Delta(A) = \chi(A,A)$ ).

#### Théorème

Considérons le système (1) 
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + u(Dx(t) + b) \\ x(t) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } u \in \mathbb{R} \end{cases}$$

où  $A$  et  $D$  sont deux matrices  $2 \times 2$  non nulles et  $b$  est un vecteur non nul de  $\mathbb{R}^2$ .

Le système (1) est complètement contrôlable sur  $\mathbb{R}^2$  si et seulement si :

\* Cas où  $D$  possède deux valeurs propres réelles distinctes ( $\Delta(D) > 0$ )

$\chi(A,D)^2 - \Delta(A) \Delta(D) > 0$  et les champs de vecteurs  $A$  et  $D + b$  n'ont pas de point singulier commun

ou  $\chi(A,D)^2 - \Delta(A) \Delta(D) = 0$  et  $\det D = 0$  et  $\det A \neq 0$  et  $A(\operatorname{Ker} D) \not\subset \operatorname{Ker} D$  et  $\exists u^* \in \mathbb{R}$  tel que :

i)  $\det(A + u^*D) > 0$

ii)  $D(D + b)(A + u^*D)^{-1}(-u^*b) = 0$

ou  $\chi(A,D)^2 - \Delta(A) \Delta(D) = 0$  et  $\det D = 0$  et  $A^2 = 0$  et  $A(\operatorname{Ker} D) \not\subset \operatorname{Ker} D$  et  $b \notin \operatorname{Im} D$

\* Cas où  $D$  possède une valeur propre réelle de multiplicité 2 ( $\Delta(D) = 0$ )

$\chi(A,D)^2 - \Delta(A) \Delta(D) > 0$  et les champs de vecteurs  $A$  et  $D + b$  n'ont pas de point singulier commun

ou  $\chi(A,D)^2 - \Delta(A) \Delta(D) = 0$  et  $\det D = 0$  et  $AD = 0$  et  $b \notin \operatorname{Im} A$  et  $b \notin \operatorname{Im} D$

ou  $\chi(A,D)^2 - \Delta(A) \Delta(D) = 0$  et  $\det D = 0$  et  $AD - 2DA = 0$   
 et  $Ab \neq \frac{\text{Tr } A \cdot b}{3}$  et  $b \notin \text{Im } D$

\* Cas où D ne possède pas de valeurs propres réelles ( $\Delta(D) < 0$ )

.  $\text{Tr } D \neq 0$  et les champs de vecteurs  $D + b$  et  $A$  n'ont pas de point singulier commun

ou .  $\text{Tr } D = 0$  et  $\Delta(AD) > 0$  et les champs de vecteurs  $D + b$  et  $A$  n'ont pas de point singulier commun.

## 2. TECHNIQUES D'EXTENSION

Soit  $M$  une variété différentiable et  $F$  une famille de champs de vecteurs sur  $M$ . On note  $S(F)$  le pseudo semi-groupe engendré par les difféomorphismes locaux  $X_t$  pour  $X \in F$  et  $t > 0$  ; on note  $G(F)$  le pseudo-groupe engendré par  $S(F)$ . Pour  $x \in M$ , nous noterons encore  $S(F).x$  (resp.  $G(F).x$ ) l'orbite de  $x$  dans l'action de  $S(F)$  (resp.  $G(F)$ ) sur  $M$ .

### Définition

On dira que les systèmes  $F$  et  $F'$  sont équivalents si :

- i)  $\forall x \in M \ G(F).x = G(F').x$
- ii)  $\forall x \in M \ S(F).x = S(F').x$  (l'adhérence est prise dans  $G(F).x$ )

### Remarque

Si  $F$  et  $F'$  sont deux systèmes équivalents, il est aisé de démontrer que la complète contrôlabilité de l'un entraîne la complète contrôlabilité de l'autre.

Dans la suite nous utiliserons le théorème suivant :

### Théorème

Soit  $F$  une famille de champs de vecteurs définie sur une variété  $M$ , l'enveloppe conique convexe fermée de  $F$  est équivalente à  $F$ .

### Conséquence

Une conséquence de ce théorème est que le système (1) qui peut être regardé comme l'ensemble  $F$  des champs de vecteurs :

$F = \{A + u (D+b) / u \in \mathbb{R}\}$  est équivalent au système défini par  
 $F' = \{A, \pm(D+b)\}$  car les familles  $F$  et  $F'$  ont même enveloppe convexe fermée.

De même, le système homogène (2) est équivalent au système  $F''$  défini par :  $F'' = \{A, \pm D\}$

### 3. ETUDE DU SYSTEME HOMOGENE ASSOCIE AU SYSTEME (1)

Il est intéressant d'étudier le système homogène (2) associé au système (1) car nous disposons du théorème suivant :

#### Théorème de Jurdjevic-Sallet

Soit  $F$  une famille de champs de vecteurs affines sur  $\mathbb{R}^n$  et  $\vec{F}$  la famille constituée par les parties linéaires des champs de vecteurs de  $F$ .  
 Si la famille  $\vec{F}$  est complètement contrôlable sur  $\mathbb{R}^n - \{0\}$  et si les champs de vecteurs de  $F$  n'ont pas de point singulier commun, alors  $F$  est complètement contrôlable sur  $\mathbb{R}^n$ .

L'étude du système linéaire (2)  $\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + u Dx(t) \\ x(t) \in \mathbb{R}^2 \quad u \in \mathbb{R} \end{cases}$

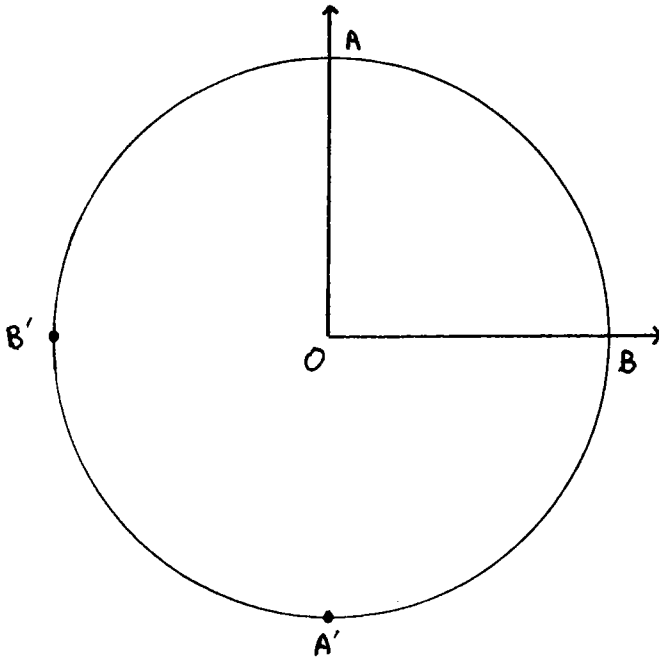
est contenue dans la thèse de P. Adda qui a donné des conditions nécessaires et suffisantes de complète contrôlabilité pour une paire de champs de vecteurs linéaires sur  $\mathbb{R}^2$  en utilisant le Théorème de Gauthier-Bornard que nous avons déjà exposé dans la première partie de ce travail.

Rappelons que le système (2) est équivalent à la donnée de  $F'' = \{A, \pm D\}$

1er cas : D est semblable à  $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$  avec  $\lambda_1 \neq \lambda_2, A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

Puisque  $F''$  contient  $D$  et  $-D$  il est clair que le point iii) du théorème de Gauthier-Bornard (existence d'une direction rentrante et d'une direction sortante) est vérifié.

Après projection sur  $S^1$  les trajectoires de  $D$  et  $-D$  ont l'allure suivante :



Si  $b \geq 0$  et  $c \geq 0$  (resp.  $b \leq 0$  et  $c \leq 0$ ) l'arc de cercle  $\widehat{AB}$  (resp.  $\widehat{AB'}$ ) est laissé stable par  $\tilde{A}$  et  $\pm \tilde{D}$  projetés sur  $S^1$  des champs de vecteurs  $A$  et  $\pm D$ .

Si  $bc < 0$  les champs de vecteurs  $\tilde{A}$  et  $\pm \tilde{D}$  permettent de faire un tour complet sur  $S^1$  le point ii) du théorème de Gauthier-Bornard est alors vérifié.

Puisque  $b \neq 0$ , le point i) du théorème de Gauthier-Bornard est également vérifié (condition du rang en un poin).

|| Dans ce 1er cas le système (2) est donc complètement contrôlable sur  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$  si et seulement si  $bc < 0$ .

Remarquons que, dans ce cas,  $\chi(A,D)^2 - \Delta(A)\Delta(D) = -16bc(\lambda_1 - \lambda_2)^2$

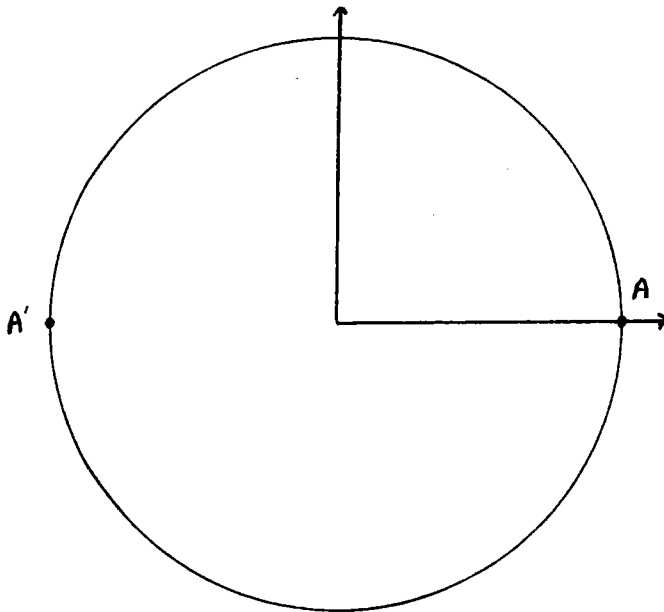
2e cas :  $D$  est semblable à  $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  et  $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

Dans ce cas  $\tilde{D} = 0$  et il est clair que le point ii) du théorème de Gauthier-Bornard n'est vérifié que si  $A$  n'a pas de valeurs propres réelles mais alors toute boule de centre 0 ou l'extérieur d'une telle boule est stable par  $A$  et  $\pm D$  : le point iii) du théorème de Gauthier-Bornard n'est pas vérifié.

|| Dans ce cas le système (2) n'est donc jamais contrôlable, remarquons que l'on a :  
 $\chi(A,D)^2 - \Delta(A) \Delta(D) = 0$

3e cas : D est semblable à :  $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  et  $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

Les trajectoires de  $\tilde{D}$ , projeté de D sur  $S^1$ , ont alors l'allure suivante :



Les 2 arcs de cercles délimités par les points singuliers A et A' peuvent être parcourus dans les 2 sens.

Si  $b = 0$ , A et A' sont des points singuliers pour  $\tilde{A}$  et l'arc de cercle  $\widehat{AA'}$  est stable par  $\tilde{A}$  et  $\pm \tilde{D}$  : le point ii) du théorème de Gauthier-Bornard n'est pas vérifié.

Si  $b \neq 0$ , il est clair que l'on peut effectuer un tour complet sur  $S^1$  grâce aux champs de vecteurs  $\tilde{A}$  et  $\pm \tilde{D}$  : le point ii) du théorème de Gauthier-Bornard est alors vérifié et le point i) également (condition du rang en  $(1, 0)$ ).

Si  $\lambda \neq 0$  l'existence d'une direction rentrante et d'une direction sortante est claire car D et -D appartiennent à la famille F".

Si  $\lambda = 0$ , D est nilpotent et ce dernier point est alors également vérifié.

|| Nous pouvons donc conclure que le système (2) est complètement contrôlable si et seulement si  $b \neq 0$  ; remarquons que  $\chi(A,D)^2 - \Delta(A) \Delta(D) = 16b^2$ .

3e cas : Cas où  $D$  est semblable à :  $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$  ( $\alpha \beta \neq 0$ ) et  $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

Dans ce cas  $\tilde{D}$ , le projeté de  $D$  sur  $S^1$ , n'a aucun point singulier le point ii) du théorème de Gauthier-Bornard est donc vérifié.

Puisque  $\alpha \neq 0$  et que  $\pm D \in F''$ , il est clair que le point ii) du théorème de Gauthier-Bornard est donc vérifié.

Le point i) de ce théorème est vérifié si  $D$  et  $A$  ne sont pas colinéaires.

On peut donc conclure que le système (2) est complètement contrôlable sur  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$  si et seulement si  $A$  et  $D$  ne sont pas colinéaires.

4e cas : Cas où  $D$  est semblable à :  $\begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$  ( $\beta \neq 0$ ) et  $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

Pour la même raison que dans le cas précédent, le point ii) du théorème de Gauthier-Bornard est vérifié.

Pour le point iii), il suffit d'étudier le signe du produit scalaire  $\langle Ax, x \rangle$  pour  $x \in S^1$ . Si  $\langle Ax_0, x_0 \rangle > 0$  on aura  $\|A_{t_0}(x_0)\| > 1$  pour  $t_0$  assez petit, d'où l'existence d'une trajectoire sortante car les trajectoires de  $D$  sont des cercles centrés en 0.

De même si  $\langle Ax_1, x_1 \rangle < 0$  pour  $x_1 \in S^1$ , il existe une trajectoire rentrante. Le produit scalaire  $\langle Ax, x \rangle$  vaut :  $\left( x = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \right)$

$$\langle Ax, x \rangle = a \left( \cos \theta + \frac{(b+c)}{2a} \sin \theta \right)^2 + \left( d - \frac{(b+c)^2}{4a} \right) \sin^2 \theta$$

Ce produit scalaire n'est pas de signe constant si et seulement si :

$$ad - \frac{(b+c)^2}{4} < 0$$

Lorsque cette dernière condition est réalisée, il est facile de voir que le point i) du théorème de Gauthier-Bornard l'est aussi (condition du rang en un point).

On peut donc conclure que le système ii) est complètement contrôlable sur  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$  si et seulement si :  $ad - \frac{(b+c)^2}{4} < 0$

Remarquons que  $\Delta(AD) = 2\beta^2((b+c)^2 - 4ad)$



## RESUME

Le système (2) est complètement contrôlable sur  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$  si et seulement si :

$$\Delta(D) \geq 0 \text{ et } \chi(A,D)^2 - \Delta(A) \Delta(D) > 0$$

ou bien  $\Delta(D) < 0$  et  $\text{Tr } D \neq 0$  et les champs de vecteurs A et D ne sont pas colinéaires

ou bien  $\Delta(D) < 0$  et  $\text{Tr } D = 0$  et  $\Delta(AD) > 0$

### 4. QUELQUES CONSIDERATIONS SUR CE QUI PRECEDE

Ce que nous venons d'exposer et le théorème de Jurdjevic-Sallet permettent de démontrer partiellement le théorème énoncé dans le paragraphe 1 de ce chapitre.

Par ailleurs, il est facile de démontrer à partir des conditions exposées ci-dessus que l'ensemble des couples (A,D) qui rendent le système (2) complètement contrôlable est un ouvert U de  $\mathbb{R}^8$  ; ce résultat est d'ailleurs encore vrai en dimensions supérieures.

Le fait remarquable est le suivant : en rapprochant notre résultat principal des conditions nécessaires et suffisantes de complète contrôlabilité du système (2), on constate que si le triplet (A,D,b) est choisi de façon à rendre le système (1) complètement contrôlable, alors le couple (A,D) appartient à l'adhérence de l'ouvert U.

## CHAPITRE 2

Dans ce chapitre nous exposons des techniques propres à la dimension 2 qui seront utilisées dans la démonstration de notre théorème ; en particulier nous utilisons de nouveau la notion de normale accessibilité (voir la 1ère partie, chapitre 1).

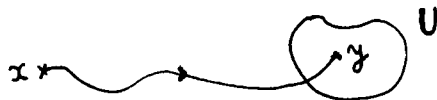
### 1. UNE CONDITION NECESSAIRE ET SUFFISANTE DE COMPLETE CONTROLABILITE DANS LE PLAN

Soit  $M$  une variété différentielle et  $F$  une famille de champs de vecteurs sur  $M$ , rappelons que si  $x$  de  $M$  est auto-normalement accessible il existe un ouvert  $U$  contenant  $x$  tel que tout point de  $U$  soit normalement accessible à partir de  $x$  grâce au système  $F$  ainsi qu'à son opposé.

Proposition 1 Si tout point de  $M$  est auto-normalement accessible, le système  $F$  est complètement contrôlable sur  $M$ .

Démonstration Pour  $x$  élément de  $M$  notons  $Sx$  l'orbite de  $x$  sous l'action du pseudo-semi-groupe  $S(F)$ , nous allons montrer que  $Sx$  est à la fois ouvert et fermé.

$Sx$  est ouvert : soit  $y \in Sx$ , il existe un ouvert  $U$  contenant  $y$  de points normalement accessibles à partir de  $y$  grâce au système  $F$ . Il est clair que tous les points de  $U$  sont également accessibles à partir de  $x$ , donc  $U \subset Sx$  ce qui prouve que  $Sx$  est voisinage de chacun de ses points.



$Sx$  est fermé : soit  $y \in Sx$ , il existe un ouvert  $U$  contenant  $y$  de points normalement accessibles depuis  $y$  grâce au système  $-F$ . Puisque  $y \in \overline{Sx}$ ,  $\exists z \in Sx \cap U$ .  $z$  est accessible depuis  $x$  grâce à  $F$  et

depuis  $y$  grâce à  $-F$  donc  $y$  est accessible depuis  $x$  grâce au système  $F : y \in Sx$  et  $Sx = \overline{Sx}$ .



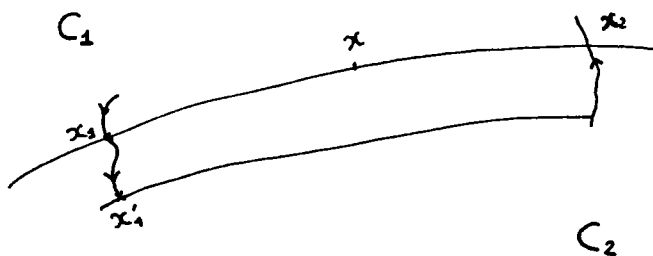
$Sx$  étant ouvert et fermé pour tout  $x$ , on a  $Sx = M$  pour tout  $x$  d'où la proposition.

Application  $M = \mathbb{R}^2$ ,  $F = \{X, \pm Y\}$ , on suppose que chaque trajectoire de  $\pm Y$  partage le plan en deux parties disjointes  $C_1$  et  $C_2$ .

Proposition 2 Le système  $F$  est complètement contrôlable sur  $\mathbb{R}^2$  si et seulement si pour toute trajectoire  $C$  de  $\pm Y$ , il existe deux points  $x_1$  et  $x_2$  de  $C$  en lesquels les trajectoires de  $X$  sont transverses à  $C$  et tels qu'en  $x_1$  (resp.  $x_2$ ) la trajectoire de  $X$  soit orientée de  $C_1$  vers  $C_2$  (resp. de  $C_2$  vers  $C_1$ ).

Démonstration La condition est évidemment nécessaire, montrons qu'elle est suffisante : soit  $x$  un point de  $\mathbb{R}^2$ , nous allons voir que  $x$  est auto-normalement accessible.

Appelons  $C$  la trajectoire de  $\pm Y$  passant par  $x$ ,  $x_1$  et  $x_2$  ; les deux points de  $C$  vérifiant les hypothèses de la proposition.



Le point  $x_1$  est accessible à partir de  $x$  grâce au champ de vecteurs  $Y$  (ou  $-Y$ ), à partir du point  $x_1$  on peut atteindre un point  $x'_1 = X_t(x_1)$  ( $t > 0$ ) de



$C_2$ . Si  $t$  est choisi assez petit, la trajectoire de  $Y$  (ou de  $-Y$ ) passant par  $x'_1$  coupe la trajectoire de  $X$  passant par  $x_2$  puisque cette dernière trajectoire est orientée de  $C_2$  vers  $C_1$  ; on peut donc atteindre le point  $x_2$  et par suite le point  $x$ .

Ceci montre que le point  $x$  est auto-accessible, de plus en  $x_1$ , les trajectoires de  $Y$  et de  $X$  sont transverses puisque  $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ , cela prouve que  $x$  est normalement auto-accessible.

Puisque tout point de  $\mathbb{R}^2$  est normalement accessible, la proposition 1 permet d'affirmer que le système  $F$  est complètement contrôlable sur  $\mathbb{R}^2$ .

## 2. APPLICATION A L'ETUDE DES SYSTEMES AFFINES DANS LE PLAN

Rappelons que l'étude du système (1) :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + u(Dx(t) + b) \\ x(t) \in \mathbb{R}^2 \quad u \in \mathbb{R} \end{cases}$$

est équivalente à celle de la famille  $F = \{ A, \pm (D + b) \}$

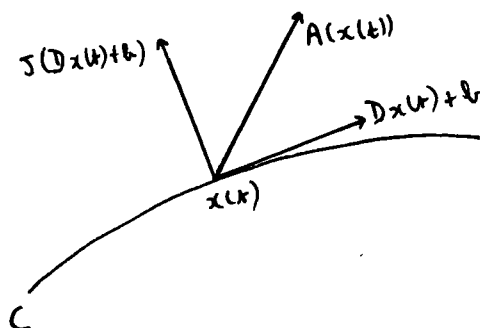
Soit  $C$  une trajectoire de  $\pm (D + b)$ , d'après ce qui précède le système (1) est contrôlable si et seulement si le champ de vecteurs  $A$  "pointe" dans chacune des deux régions déterminée par la courbe  $C$ .

Nous avons alors deux méthodes différentes :

\* Soit  $x(t)$  le point courant de la trajectoire  $C$ , le vecteur tangent en  $x(t)$  à  $C$  est :  $Dx(t) + b$ , un vecteur orthogonal à celui-ci est :  $J(Dx(t) + b)$

(où  $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ) , les conditions de la proposition 2 sont donc réalisées si et

seulement si l'expression  $\langle Ax(t), J(Dx(t) + b) \rangle$  change de signe lorsque  $t$  parcourt  $\mathbb{R}$ .



\* Une autre méthode consiste à étudier la courbe définie par :

$$\langle J(Dx + b), Ax \rangle = 0$$

Cette courbe est, en général, une conique qui sépare le plan en plusieurs régions où le signe de  $\langle J(Dx + b), Ax \rangle$  est différent.

Les conditions de la proposition 2 sont donc réalisées si et seulement si chaque trajectoire de  $\pm (D + b)$  coupe cette courbe.

La première méthode sera utilisée dans les chapitres 4 et 6, la 2ème dans le chapitre 3.

CHAPITRE 3

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + u(Dx(t) + b) \\ x(t) \in \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

Nous étudions ici le cas où D est semblable à  $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$  ( $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ) dans une certaine base  $(\vec{i}, \vec{j})$  de  $\mathbb{R}^2$ , D a la forme ci-dessus et

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad \text{et on pose } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

On a :  $\Delta(D) = 2(\lambda_1 - \lambda_2)^2 > 0$

$$\chi(A,D)^2 - \Delta(A) \Delta(D) = -16bc (\lambda_1 - \lambda_2)^2$$

1. Cas où  $\chi(A,D)^2 - \Delta(A) \Delta(D) > 0$

Nous sommes dans le cas où le système linéaire associé au système (1) est complètement contrôlable sur  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$  (voir chapitre 1), dans ce cas le théorème de Jurdjevic-Sallet donne une condition nécessaire et suffisante de complète contrôlabilité pour le système affine : celui-ci est transitif sur  $\mathbb{R}^2$  si et seulement si les champs de vecteurs A et D + b n'ont pas de point singulier commun.

2. Cas où  $\chi(A,D)^2 - \Delta(A) \Delta(D) < 0$  et D+b possède un point singulier

Dans ce cas  $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$  ou  $\lambda_2 = 0$  et  $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et on a aussi  $bc \geq 0$

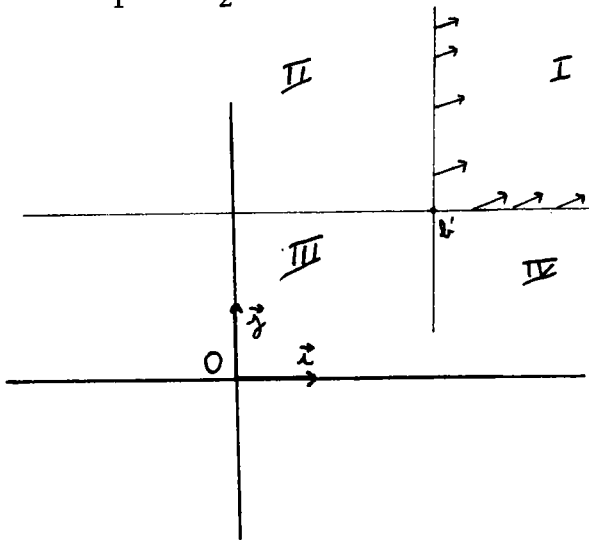
On note  $b' = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \end{pmatrix}$  le point singulier de D+b :  $b' = \begin{pmatrix} -b_1/\lambda_1 \\ -b_2/\lambda_2 \end{pmatrix}$

ou bien  $b' = \begin{pmatrix} -b_1/\lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix}$

On peut toujours supposer que  $b'_1 \geq 0$  et  $b'_2 \geq 0$  quitte à changer  $\vec{i}$  en  $\epsilon_1 \vec{i}$  et  $\vec{j}$  en  $\epsilon_2 \vec{j}$  où  $\epsilon_i \in \{-1, 1\}$  pour  $i = 1, 2$ .

Le système (1) est équivalent, du point de vue de la contrôlabilité, au système  $F = \{A, \pm(D + b)\}$ , la transitivité de ce dernier système étant équivalente à celle du système  $F' = \{-A, \pm(D + b)\}$  on peut toujours supposer que  $b \geq 0$  et  $c \geq 0$ .

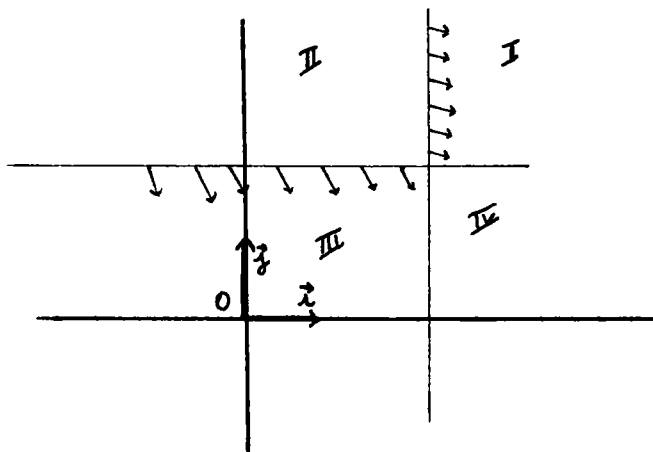
2.1. Cas où 
$$\begin{cases} ab'_1 + cb'_2 \geq 0 \\ bb'_1 + db'_2 \geq 0 \end{cases}$$



Dans ce cas pour  $x_1 > b'_1$  on a :  $bx_1 + db'_2 > 0$  et pour  $x_2 > b'_2$  on a :  $ab'_1 + cx_2 > 0$  ce qui prouve qu'aucune trajectoire de A passant par un point du quadrant I ne traverse la frontière de ce quadrant : celui-ci est donc stable par les champs A et  $\pm(D + b)$ .

Il n'y a donc pas complète contrôlabilité dans ce cas.

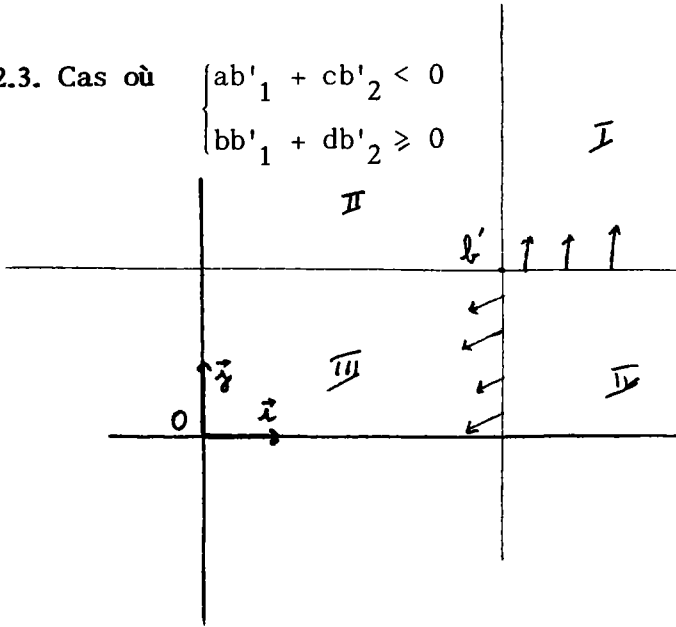
2.2. Cas où 
$$\begin{cases} ab'_1 + cb'_2 \geq 0 \\ bb'_1 + db'_2 < 0 \end{cases}$$



Dans ce cas pour  $x_1 \leq b'_1$  on a  $bx_1 + db'_2 < 0$  et pour  $x_2 \geq b'_2$  on a :  
 $ab'_1 + cx_2 \geq 0$ . Ceci prouve qu'aucune trajectoire de A passant par l'un des quadrants I, III ou IV ne traverse la frontière de la réunion de ces 3 quadrants : cette réunion est donc stable par les champs de vecteurs A et  $\pm (D + b)$ .  
 Le système (1) n'est donc pas transitif dans ce cas.

2.3. Cas où

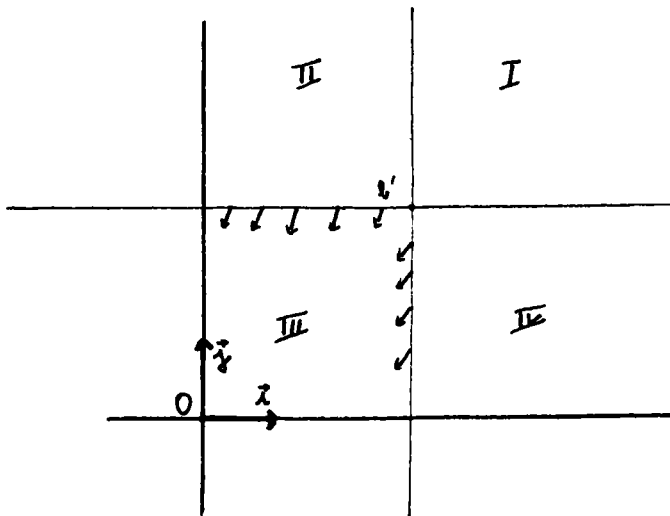
$$\begin{cases} ab'_1 + cb'_2 < 0 \\ bb'_1 + db'_2 \geq 0 \end{cases}$$



Dans ce cas pour  $x_1 \geq b'_1$  on a :  $bx_1 + db'_2 \geq 0$  et pour  $x_2 \leq b'_2$  on a :  
 $ab'_1 + cy < 0$ . Ceci prouve qu'aucune trajectoire de A passant par les quadrants I, II ou III ne traverse la frontière de la réunion de ces 3 quadrants : cette réunion est donc stable par les champs de vecteurs A et  $\pm (D + b)$ .  
 Le système (1) n'est donc pas transitif dans ce cas.

2.4. Cas où

$$\begin{cases} ab'_1 + cb'_2 < 0 \\ bb'_1 + db'_2 < 0 \end{cases}$$





Dans ce cas pour  $x_1 \leq b'_1$  on a  $bx_1 + db'_2 < 0$  et pour  $x_2 \leq b'_2$  on a :  $ab'_1 + cx_2 < 0$ . Ceci prouve qu'aucune trajectoire de A passant par un point du 3e quadrant ne traverse la frontière de celui-ci : le quadrant III est donc stable par les champs de vecteurs A et  $\pm(D + b)$ .

Le système (1) n'est donc pas transitif dans ce cas.

### 2.5. Résumé de la partie 2

Lorsque  $\chi(A,D)^2 - \Delta(A) \Delta(D) \leq 0$  et D+b admet un point singulier le système (1) n'est pas transitif. Notre théorème est donc démontré dans ce cas : en effet même si  $\chi(A,D)^2 - \Delta(A) \Delta(D) = 0$  et  $\det D = 0$

l'existence d'un réel  $u^*$  tel que :  $\det(A + u^*D) > 0$

$$D(D+b)(A + u^*D)^{-1}(-u^*b) = 0$$

n'est assurée que si  $\det A \neq 0$ , d'autre part l'existence d'un point singulier pour D + b implique que  $b \in \text{Im } D$ .

### 3. Cas où D+b est sans point singulier et $b = \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \end{pmatrix}$

Dans le but de simplifier les calculs nous supposons ici que  $b = \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \end{pmatrix}$

nous verrons dans le paragraphe 4 comment on peut toujours se ramener à ce cas.

Dans ce cas  $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  avec  $\lambda_1 \neq 0$

Le système (1) est équivalent du point de vue de la contrôlabilité au système  $F = \{A, (D+b), -(D+b)\}$ , puisque F contient le champ de vecteurs D+b et son opposé on peut supposer que  $\lambda_1 > 0$ .

D'autre part, quitte à changer  $\vec{j}$  en  $-\vec{j}$ , on peut toujours supposer  $b_2 > 0$ .

Nous nous plaçons dans l'hypothèse où le théorème de Jurdjevic-Sallet ne s'applique pas, c'est-à-dire que :  $\chi(A,D)^2 - \Delta(A) \Delta(D) \leq 0$  donc

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad \text{avec } bc \geq 0$$

Pour étudier la contrôlabilité du système (1) nous utiliserons la méthode (exposée dans le chapitre 2) consistant à étudier l'intersection des trajectoires de  $\pm (D+b)$  et de la courbe définie par :

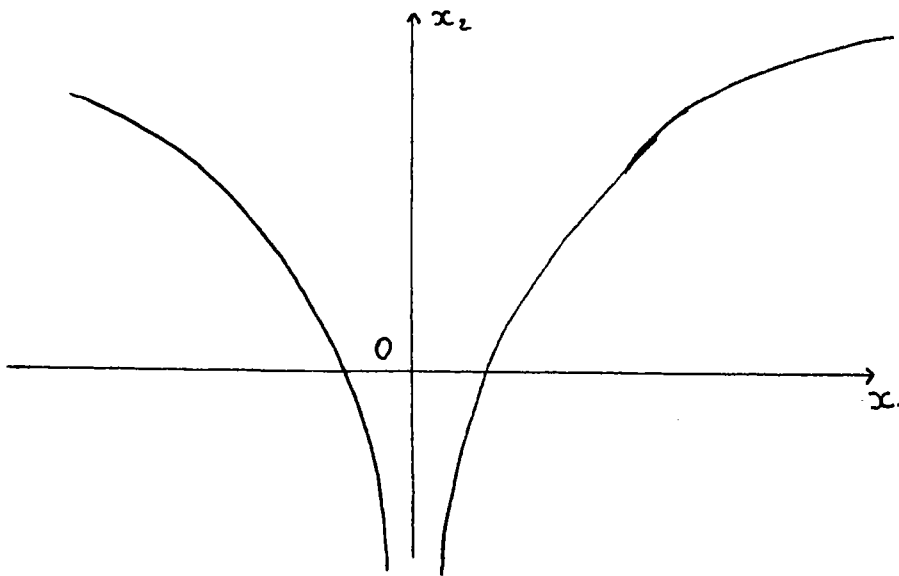
$$\langle J(Dx + b), Ax \rangle = 0$$

Nous avons :  $\langle J(Dx + b), Ax \rangle = \lambda_1 x_1 (bx_1 + dx_2) - b_2 (ax_1 + cx_2)$

Précisons encore l'allure des trajectoires de  $\pm(D + b)$

Elles ont pour équations :

$$\begin{cases} x_1 = x_1^0 e^{\lambda_1 t} \\ x_2 = b_2 t + x_2^0 \end{cases}$$



Les trajectoires de  $\pm (D + b)$  sont composées de :

- l'axe des ordonnées
- des courbes logarithme d'asymptote l'axe des ordonnées

### 3.1. Cas où $\chi(A,D)^2 - \Delta(A) \Delta(D) = 0$

Dans ce cas  $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$  avec  $bc = 0$

3.1.1. Cas où  $\det A > 0$  et  $A(\text{Ker } D) \subset \text{Ker } D$

$A(\text{Ker } D) \subset \text{Ker } D$  entraîne  $c = 0$  on a donc :

$$\langle J(Dx+b), Ax \rangle = x_1(\lambda_1 b x_1 + d x_2 - a b_1)$$

La courbe définie par  $\langle J(Dx+b), Ax \rangle = 0$  est donc la réunion de l'axe des ordonnées et de la droite d'équation  $\lambda_1 b x_1 + d x_2 - a b_1 = 0$ , puisque l'une des trajectoires de  $\pm (D+b)$  est entièrement contenue dans cette courbe, le système (1) n'est pas transitif (les demi-plans définis par  $x_1 < 0$  et  $x_1 > 0$  restent stables par  $A$  et  $\pm (D+b)$ ).

3.1.2. Cas où  $\det A > 0$  et  $A(\text{Ker } D) \not\subset \text{Ker } D$

$A(\text{Ker } D) \not\subset \text{Ker } D$  entraîne  $c \neq 0$  et puisque  $bc = 0$   $A$  est de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & d \end{pmatrix} \quad \text{quitte à changer } i \text{ en } -i, \text{ on peut toujours supposer } \frac{c}{a} < 0$$

$$\langle J(Dx+b), Ax \rangle = \lambda_1 d x_1 x_2 - b_2 (a x_1 + c x_2)$$

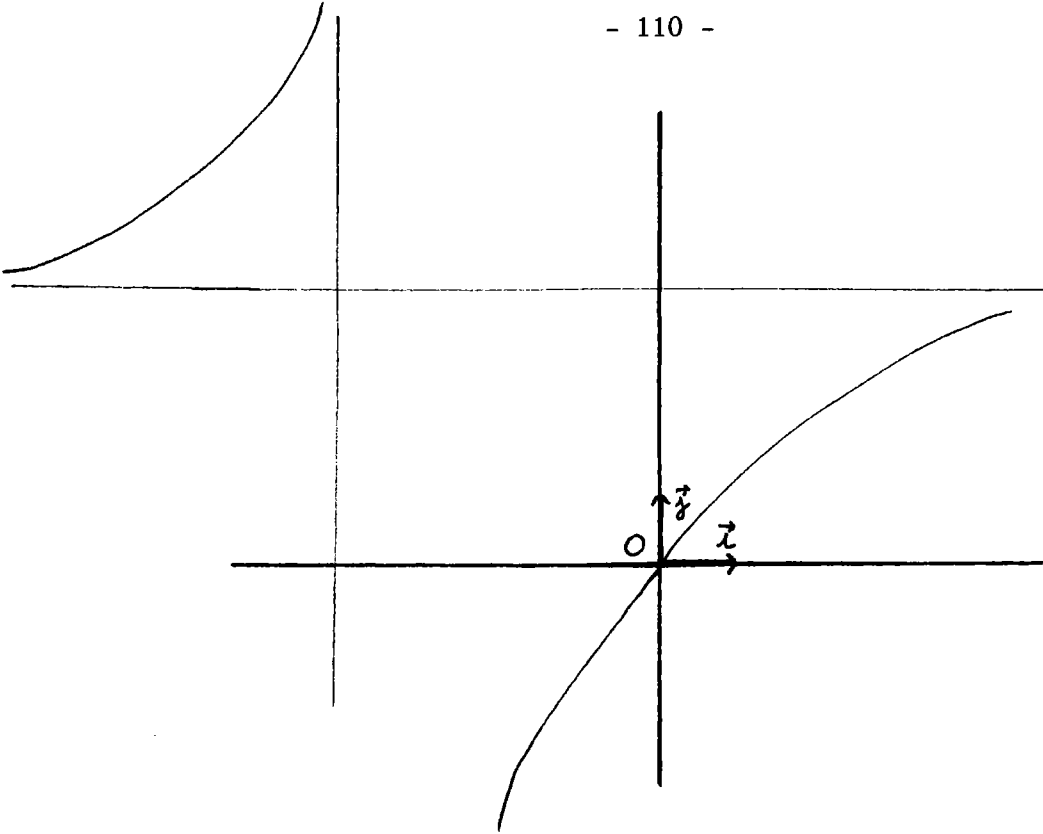
La courbe définie par  $\langle J(Dx+b), Ax \rangle = 0$  est donc une hyperbole d'équation :

$$x_2 = \frac{ab_2 x_1}{\lambda_1 d x_1 - b_2 c} \quad \text{ses asymptotes sont les droites d'équations respectives :}$$

$$x_1 = \frac{b_2 c}{\lambda_1 d}, \quad x_2 = \frac{ab_2}{\lambda_1 d}$$

Puisque  $\det A = ad > 0$   $\frac{b_2 c}{\lambda_1 d} < 0$  et  $\frac{ab_2}{\lambda_1 d} < 0$

On a donc le schéma suivant pour la courbe définie par  $\langle J(Dx+b), Ax \rangle = 0$ .



Il est évident que chaque trajectoire du champ de vecteurs  $\pm (D+b)$  intersecte cette courbe. Le système (1) est donc transitif dans ce cas.

3.1.3. Cas où  $\det A = 0$  et  $A(\text{Ker } D) \subset \text{Ker } D$

Le système (1) n'est pas transitif, la démonstration est la même que dans le paragraphe 3.1.1.

3.1.4. Cas où  $\det A = 0$  et  $A(\text{Ker } D) \not\subset \text{Ker } D$

$A(\text{Ker } D) \not\subset \text{Ker } D$  entraîne  $c \neq 0$ , donc  $b = 0$  puisque nous sommes dans le cas où  $\chi(A,D)^2 - \Delta(A) \Delta(D) = 0$ .

A s'écrit donc  $A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & d \end{pmatrix}$  avec  $c \neq 0$  et  $ad = 0$ .

**3.1.4.1. Cas où  $A^2 \neq 0$**

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & c(a+d) \\ 0 & d^2 \end{pmatrix}$$

Nous devons distinguer deux cas de figure suivant que  $a \neq 0$  et  $d = 0$  ou bien  $a = 0$  et  $d \neq 0$ .

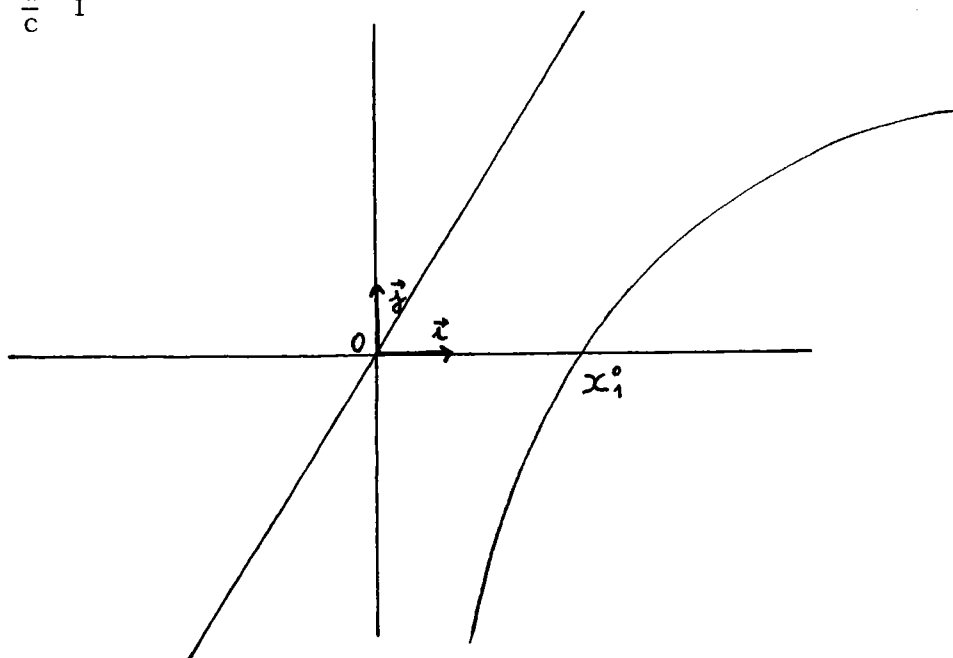
3.1.4.1.1. Cas où  $a \neq 0$  et  $d = 0$

Dans ce cas  $\langle J(Dx+b), Ax \rangle = -b_2 (ax_1 + cx_2)$

Pour la même raison qu'au paragraphe 3.1.2. on peut toujours supposer que  $\frac{c}{a} < 0$ .

La courbe définie par  $\langle J(Dx+b), Ax \rangle = 0$  est une droite d'équation

$$x_2 = -\frac{a}{c} x_1$$



Pour  $x_1^0 > \frac{-b_2 c}{\lambda_1 a e}$  ( $e$  : base des logarithmes népériens), la trajectoire de  $\pm (D+b)$  passant par  $\begin{pmatrix} x_1^0 \\ 0 \end{pmatrix}$  ne coupe pas la droite d'équation  $x_2 = -\frac{a}{c} x_1$ . Le système

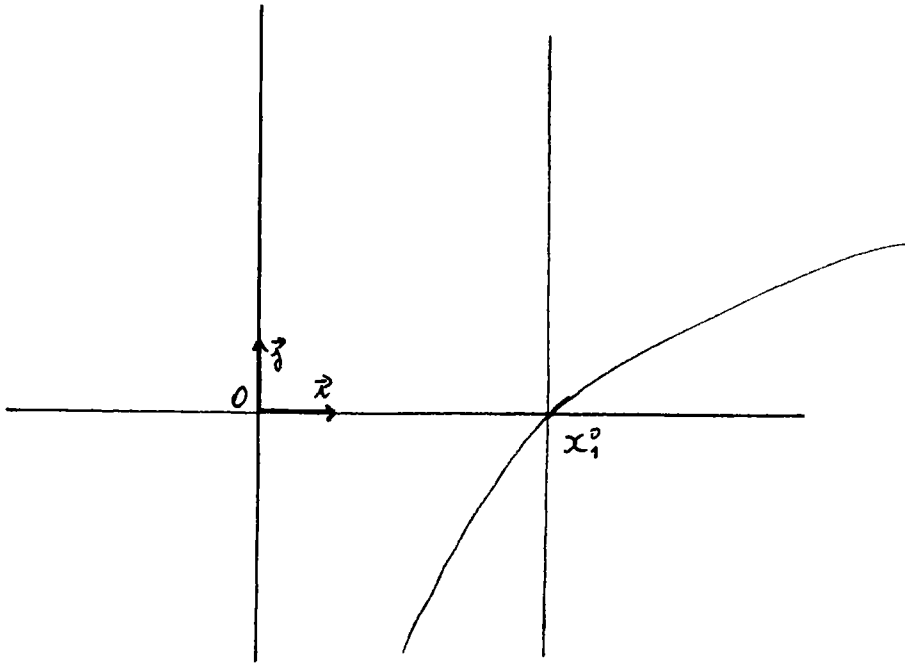
(1) n'est donc pas transitif dans ce cas.

3.1.4.1.2. Cas où  $a = 0$  et  $d \neq 0$

Dans ce cas  $\langle J(Dx+b), Ax \rangle = x_2 (\lambda_1 dx_1 - b_2 c)$

Pour la même raison qu'au paragraphe 3.1.2., on peut toujours supposer que  $\frac{c}{d} > 0$ .

La courbe définie par  $\langle J(Dx+b), Ax \rangle = 0$  est la réunion de l'axe des abscisses et de la droite d'équation  $x_1 = \frac{b_2 c}{\lambda_1 d}$ .



Soit  $x_1^0 = \frac{b_2 c}{\lambda_1 d}$ , la trajectoire de  $\pm (D+b)$  passant par le point  $x_1^0$  coupe la courbe définie par  $\langle J(Dx+b), Ax \rangle = 0$  uniquement en ce point mais elle est entièrement contenue dans une partie du plan où le signe de  $\langle J(Dx+b), Ax \rangle$  est constant ; le système (1) n'est donc pas transitif dans ce cas.

### 3.1.4.2. Cas où $A^2 \equiv 0$

Dans ce cas  $A$  s'écrit :  $A = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  avec  $c \neq 0$

On a :  $\langle J(Dx+b), Ax \rangle = -b_2 c x_2$ , la courbe définie par  $\langle J(Dx+b), Ax \rangle = 0$  est donc l'axe des abscisses.

Comme chaque trajectoire de  $\pm (D+b)$  coupe l'axe des abscisses, le système (1) est transitif dans ce cas.

### 3.1.5. Cas où $\det A < 0$

Dans ce cas  $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$  avec  $bc \neq 0$  (car  $\chi(A,D)^2 - \Delta(A) \Delta(D) = 0$ )

et  $ad < 0$ , si  $c = 0$  le système (1) n'est pas transitif : la démonstration

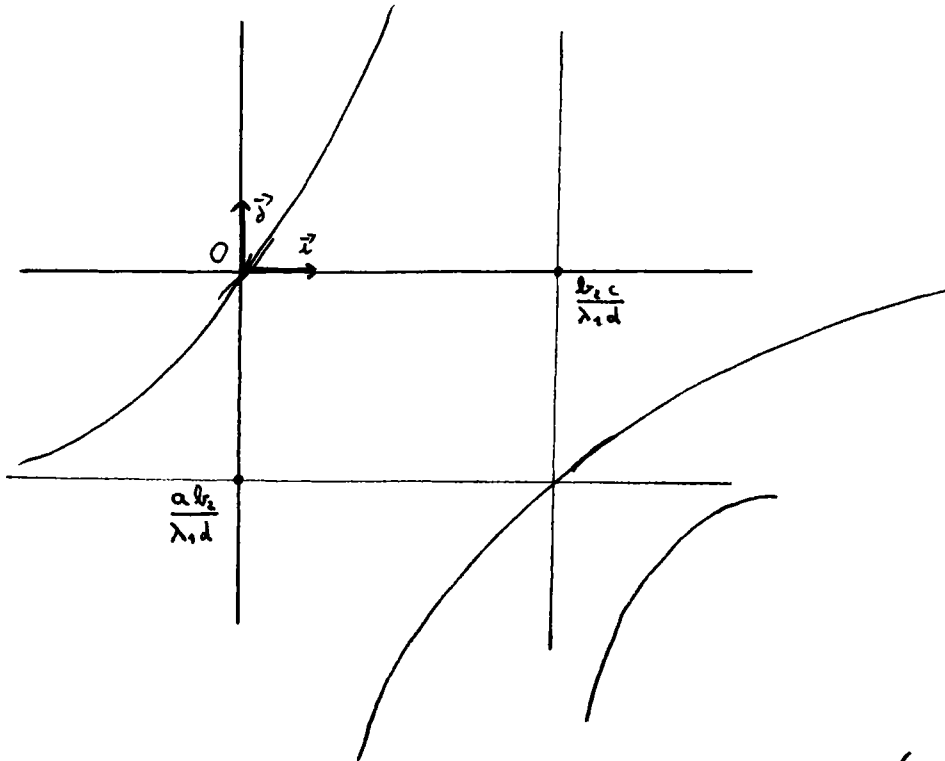
est la même qu'au paragraphe 3.1.1.

Nous supposons donc, dans la suite, que  $c \neq 0$ , par conséquent :  $b = 0$ .

Quitte à changer  $i$  en  $-i$ , on peut toujours supposer que :  $\frac{c}{d} > 0$

Dans ce cas  $\langle J(Dx+b), Ax \rangle = \lambda_1 dx_1 x_2 - b_2(ax_1 + cx_2)$ , la courbe définie par  $\langle J(Dx+b), Ax \rangle = 0$  est une hyperbole d'équation

$$x_2 = \frac{ab_2 x_1}{\lambda_1 dx_1 - b_2 c} \quad \text{d'asymptotes les droites d'équations : } x_1 = \frac{b_2 c}{d\lambda_1}, \quad x_2 = \frac{ab_2}{\lambda_1 d}$$



Il est clair que la trajectoire de  $\pm (D+b)$  passant par le point  $\begin{pmatrix} \frac{b_2 c}{\lambda_1 d} \\ \frac{ab_2}{\lambda_1 d} \end{pmatrix}$

ne coupe pas la courbe définie par  $\langle J(Dx+b), Ax \rangle = 0$ .

Le système (1) n'est donc pas transitif dans ce cas.

### 3.2. Cas où $\chi(A,D)^2 - \Delta(A) \Delta(D) < 0$

Dans ce cas  $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$  avec  $bc > 0$

et  $\langle J(Dx+b), Ax \rangle = \lambda_1 b x_1^2 + \lambda_1 d x_1 x_2 - a b_2 x_1 - b_2 c x_2$

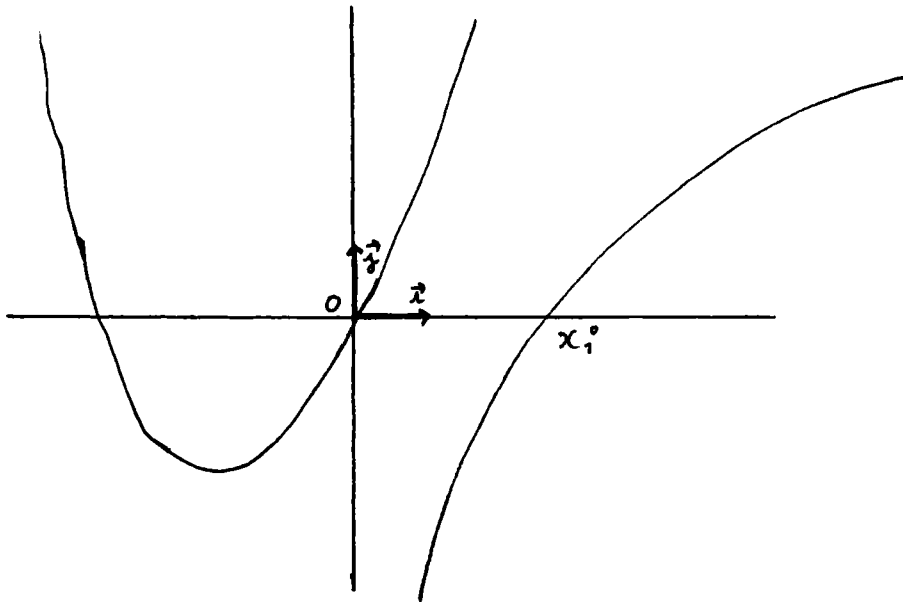
Plusieurs cas sont à distinguer pour l'étude de la courbe définie par  $\langle J(Dx+b), Ax \rangle = 0$

3.2.1. Cas où  $d = 0$

Dans ce cas  $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & 0 \end{pmatrix}$  et  $\langle J(Dx+b), Ax \rangle = \lambda_1 b x_1^2 - a b_2 x_1 - b_2 c x_2$

Quitte à changer  $\vec{i}$  en  $-\vec{i}$ , on peut toujours supposer que :  $\frac{a}{b} < 0$

La courbe définie par  $\langle J(Dx+b), Ax \rangle = 0$  est une parabole de sommet  $\begin{pmatrix} \frac{ab_2}{2\lambda_1 b} \\ \frac{-a^2 b_2}{4\lambda_1 bc} \end{pmatrix}$ , d'axe parallèle à l'axe des ordonnées et dont la concavité est tournée vers les ordonnées positives.



Soit  $\begin{pmatrix} x_1^o \\ 0 \end{pmatrix}$  un point de l'axe des abscisses, il est clair que si  $x_1^o$  est choisi assez grand, la trajectoire du champ de vecteurs  $\pm (D+b)$  passant par ce point ne coupera pas la courbe définie par  $\langle J(Dx+b), Ax \rangle = 0$ .

Le système (1) n'est donc pas transitif dans ce cas.



3.2.2. Cas où  $d \neq 0$  et  $\det A = 0$

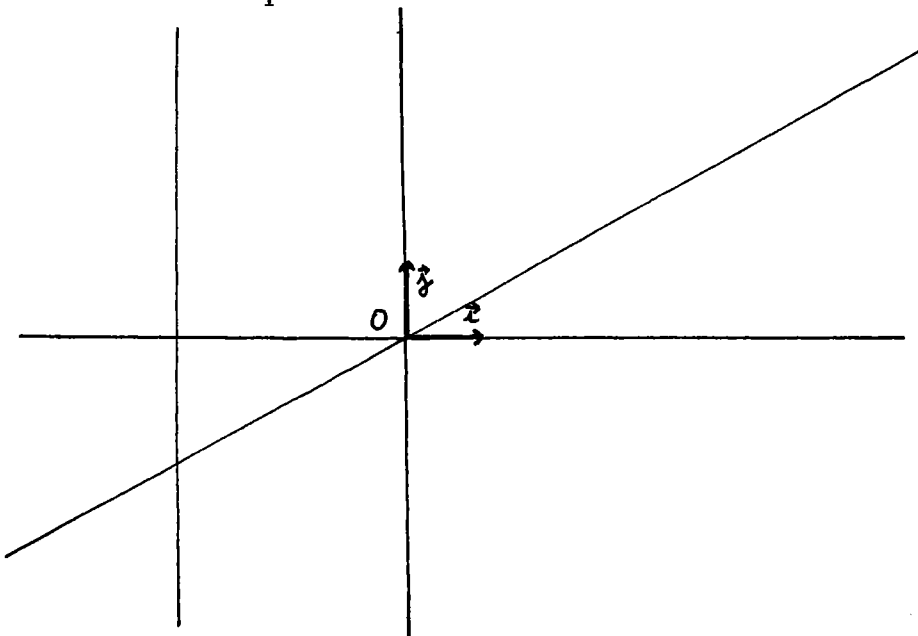
Dans ce cas  $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$  avec  $ad - bc = 0$ , on en déduit que :

$$\begin{aligned} \langle J(Dx+b), Ax \rangle &= \lambda_1 x_1 (bx_1 + dx_2) - b_2 (ax_1 + cx_2) \\ &= \left(x_1 - \frac{b_2 c}{\lambda_1 d}\right) \left(x_2 + \frac{b}{d} x_1\right) \end{aligned}$$

Quitte à changer  $\vec{i}$  en  $-\vec{i}$ , on peut toujours supposer que  $-\frac{b}{d} > 0$ .

La courbe définie par  $\langle J(Dx+b), Ax \rangle = 0$  est la réunion des deux droites d'équations respectives  $x_1 = \frac{b_2 c}{\lambda_1 d}$  et  $x_2 = -\frac{b}{d} x_1$

(On a  $-\frac{b}{d} > 0$  et  $\frac{b_2 c}{\lambda_1 d} < 0$  car  $bc > 0$ )



Soit  $\begin{pmatrix} x_1^0 \\ 0 \end{pmatrix}$  un point de l'axe des abscisses, il est clair que, si  $x_1^0$  est choisi assez grand, la trajectoire de  $\pm(D+b)$  passant par ce point ne coupera pas la courbe définie par  $\langle J(Dx+b), Ax \rangle = 0$ .

Le système (1) n'est donc pas contrôlable dans ce cas.

### 3.2.3. Cas où $d \neq 0$ et $\det A \neq 0$

Pour la même raison qu'au paragraphe ci-dessus, on peut supposer que :

$$-\frac{b}{d} > 0.$$

$$\text{On a : } \langle J(Dx+b), Ax \rangle = \lambda_1 x_1 (bx_1 + dx_2) - b_2 (ax_1 + cx_2)$$

$$\langle J(Dx+b), Ax \rangle = 0$$

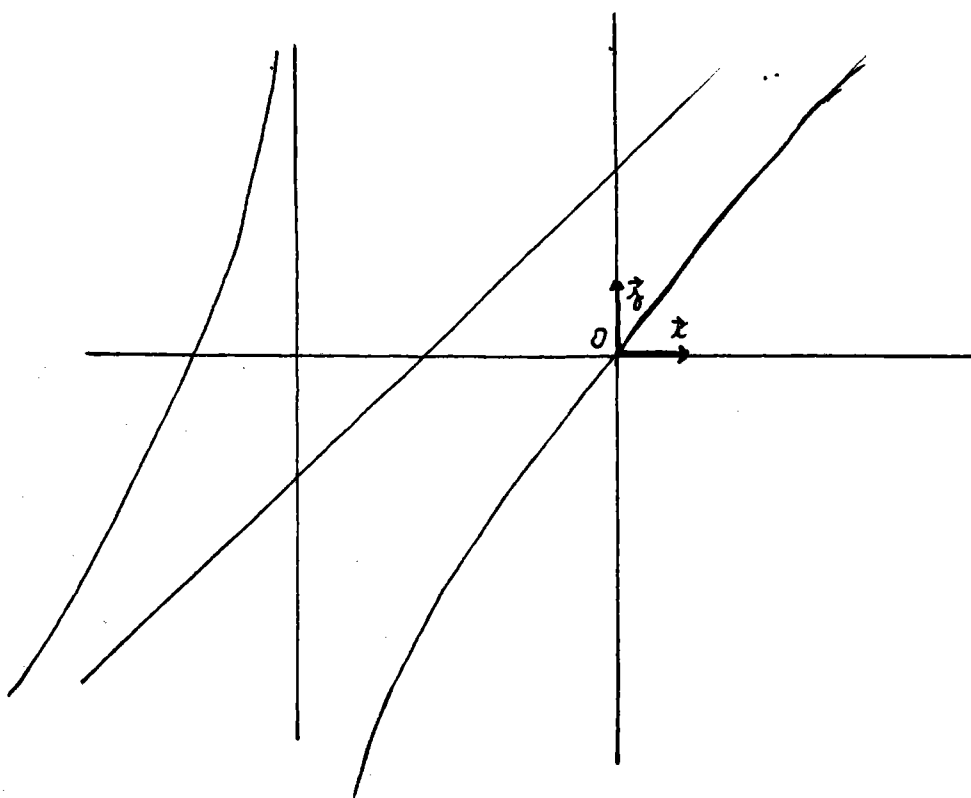
$$\Leftrightarrow b^2 \left[ x_1 + \frac{1}{2} \left( \frac{d}{b} x_2 - \frac{ab_2}{\lambda_1 b} \right) \right]^2 - \frac{d^2}{4} \left[ x_2 - \frac{b_2(ad - 2bc)}{\lambda_1 d^2} \right]^2 = \frac{bb_2^2 \det A}{\lambda_1^2 d^2}$$

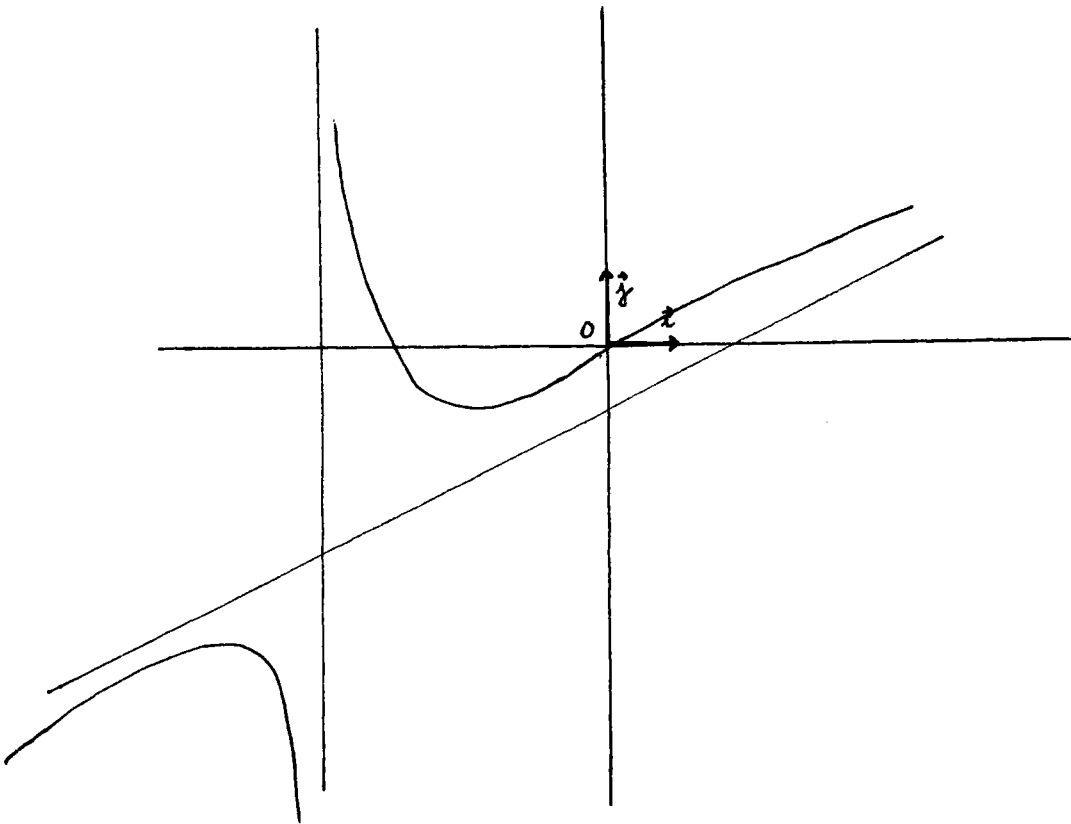
La courbe définie par  $\langle J(Dx+b), Ax \rangle = 0$  est donc une hyperbole passant par l'origine et d'asymptotes les droites d'équations respectives

$$x_1 = \frac{b_2 c}{2\lambda_1 d} \quad \text{et} \quad x_2 = -\frac{b}{d} x_1 + \frac{b_1 \det A}{\lambda_1 d^2}$$

(On a  $-\frac{b}{d} > 0$  et  $\frac{b_2 c}{2\lambda_1 d} < 0$  car  $bc > 0$ ).

Deux cas de figure sont possibles :





Dans les deux cas, il est clair que, si  $x_1^0$  est choisi assez grand, la trajectoire de  $\pm (D+b)$  passant par le point  $\begin{pmatrix} x_1^0 \\ 0 \end{pmatrix}$  ne coupe pas la courbe définie par :

$$\langle J(Dx+b), Ax \rangle = 0.$$

Le système (1) n'est donc pas complètement contrôlable dans ce cas.

### 3.3. Résumé de la partie 3

$$\text{Soit } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad \text{et } b = \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Dans le cas où le théorème de Jurdjevic-Sallet ne s'applique pas (c'est-à-dire  $\chi(A,D)^2 - \Delta(A) \Delta(D) < 0$ ) le système (1) est complètement contrôlable si et seulement si :

$$\bullet \quad \chi(A,D)^2 - \Delta(A) \Delta(D) = 0 \text{ et } \det A > 0 \text{ et } A(\text{Ker } D) \not\subset \text{Ker } D$$

$$\text{ou } \bullet \quad \chi(A,D)^2 - \Delta(A) \Delta(D) = 0 \text{ et } A^2 = 0 \text{ et } A(\text{Ker } D) \not\subset \text{Ker } D.$$

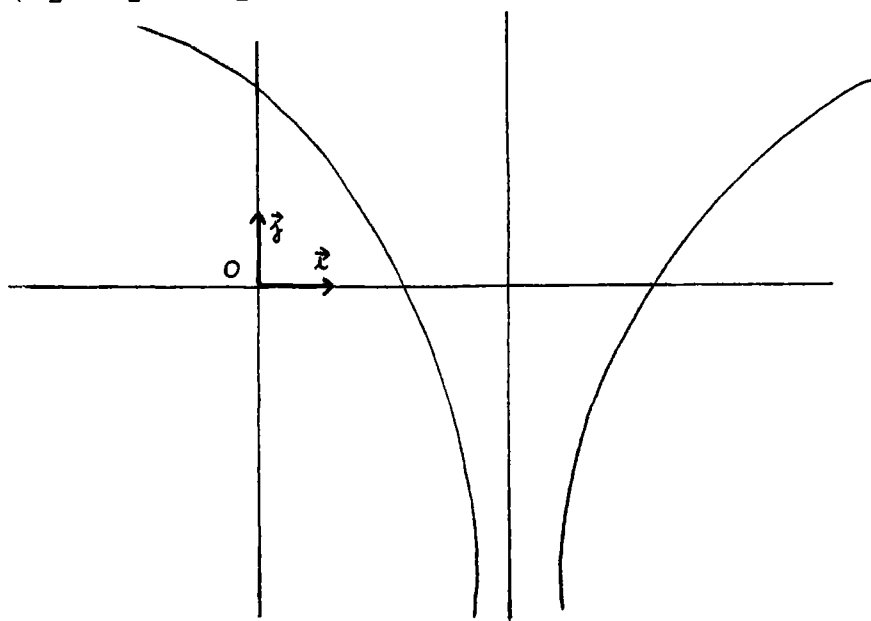
4. Cas où D+b est sans point singulier et  $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$  avec  $b_1 \neq 0$

Dans ce cas  $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , rappelons que l'on peut toujours supposer

que :  $\lambda_1 > 0$ ,  $b_1 < 0$  et  $b_2 > 0$  (voir paragraphe 2).

Les trajectoires de (D+b) ont pour équations :

$$\begin{cases} x_1 = (b_1 / \lambda_1 + x_1^0) e^{\lambda_1 t} - b_1 / \lambda_1 \\ x_2 = b_2 t + x_2^0 \end{cases}$$



Les trajectoires de  $\pm(D+b)$  sont composées de :

- la droite d'équation  $x_1 = -\frac{b_1}{\lambda_1}$
- des courbes logarithme d'asymptote cette droite.

4.1. Cas où  $A(\text{Ker } D) \quad \text{Ker } D$

Dans ce cas A s'écrit  $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & d \end{pmatrix}$

En étudiant le vecteur Ax le long de la droite d'équation  $x_1 = -\frac{b_1}{\lambda_1}$ , on voit que ce vecteur "pointe" toujours vers le demi-plan défini par  $x_1 > -\frac{b_1}{\lambda_1}$  lors-

que  $a \geq 0$  ou vers le demi-plan défini par  $x_1 - \frac{b_1}{\lambda_1}$  lorsque  $a < 0$ . On peut donc

dire que l'un ou l'autre de ces demi-plans est laissé stable par le champ de vecteurs  $A$  et comme chacun d'eux est stable par  $\pm (D+b)$  on peut conclure à la non-transitivité du système (1) dans ce cas.

#### 4.2. Cas où $A(\text{Ker } D) \not\subset \text{Ker } D$

Nous allons voir que l'on peut se ramener aux cas déjà étudiés dans le paragraphe 3.

Dans ce cas  $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$  avec  $c \neq 0$

Le système (1) s'écrit :

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x}_1(t) = ax_1(t) + cx_2(t) + u(\lambda_1 x_1(t) + b_1) \\ \dot{x}_2(t) = bx_1(t) + dx_2(t) + u b_2 \end{cases}$$

Faisons le changement de variables :

$$\begin{cases} X_1 = x_1 + \frac{b_1}{\lambda_1} \\ X_2 = x_2 - \frac{ab_1}{\lambda_1 c} \end{cases}$$

Le système (1) devient :

$$(1') \quad \begin{cases} \dot{X}_1(t) = a X_1(t) + c X_2(t) + u \lambda_1 X_1(t) \\ \dot{X}_2(t) = b X_1(t) + d X_2(t) + \frac{b_1}{\lambda_1 c} \det A + u b_2 \end{cases}$$

Posons  $u^* = - \frac{b_1 \det A}{\lambda_1 b_2 c}$

Le système (1') peut encore s'écrire :

$$(1'') \quad \begin{cases} \dot{X}_1(t) = (a + u^* \lambda_1) X_1(t) + c X_2(t) + (u - u^*) \lambda_1 X_1(t) \\ \dot{X}_2(t) = b X_1(t) + d X_2(t) + (u - u^*) b_2 \end{cases}$$

c'est-à-dire :  $X(t) = (A + u^* D) X(t) + (u - u^*)(D X(t) + b')$  où  $b' = \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \end{pmatrix}$

Le système (1) est donc équivalent du point de vue de la contrôlabilité au système  $F' = \{A + u^* D, \pm (D + b')\}$  où  $b' = \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \end{pmatrix}$

nous nous sommes donc ramenés aux cas étudiés dans le paragraphe 3, on peut donc dire que le système (1) est transitif si et seulement si :

$$\begin{aligned} & \cdot \chi(A',D)^2 - \Delta(A') \Delta(D) = 0 \text{ et } \det(A + u^* D) > 0 \\ \text{ou} & \cdot \chi(A',D)^2 - \Delta(A') \Delta(D) = 0 \text{ et } A'^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{mais } & \chi(A',D)^2 - \Delta(A') \Delta(D) = \chi(A,D)^2 - \Delta(A) \Delta(D) \\ \text{et } & A'^2 = 0 \text{ et } \chi(A,D)^2 - \Delta(A) \Delta(D) = 0 < > A^2 = 0 \text{ et } \chi(A,D)^2 - \Delta(A) \Delta(D) = 0 \end{aligned}$$

Le système (1) est donc complètement contrôlable si et seulement si :

$$\begin{aligned} & \cdot \chi(A,D)^2 - \Delta(A) \Delta(D) = 0 \text{ et } \det(A + u^* D) > 0 \\ \text{ou} & \cdot \chi(A,D)^2 - \Delta(A) \Delta(D) = 0 \text{ et } A^2 = 0 \end{aligned}$$

CHAPITRE 4

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + u(Dx(t) + b) \\ x(t) \in \mathbb{R}^2 \quad u \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Nous étudions le cas où D est semblable à  $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  ou bien à  $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  ; dans une certaine base  $(\vec{i}, \vec{j})$  D a l'une des deux formes ci-dessus et A s'écrit  $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

Si  $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$   $\chi(A,D)^2 - \Delta(A) \Delta(D) = 0$

Si  $D = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$   $\chi(A,D)^2 - \Delta(A) \Delta(D) = 16b^2$

1. Cas où  $\chi(A,D)^2 - \Delta(A) \Delta(D) > 0$

Nous sommes dans le cas où le système linéaire associé au système (1) est complètement contrôlable sur  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$  (voir chapitre 1), dans ce cas le théorème de Jurdjevic-Sallet donne une condition nécessaire et suffisante de transitivité pour le système affine : il faut et il suffit que les champs de vecteurs A et D+b n'aient pas de point singulier commun.

2. Cas où D+b admet un point singulier et  $\chi(A,D)^2 - \Delta(A) \Delta(D) = 0$

Dans ce cas  $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  ou  $D = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  avec  $\lambda \neq 0$

ou bien  $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  avec  $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Quitte à changer  $\vec{i}$  en  $-\vec{i}$  et  $\vec{j}$  en  $-\vec{j}$ , on peut toujours supposer que  $b_1 \leq 0$  et  $b_2 \leq 0$  et quitte à remplacer le système étudié  $F = \{ A, \pm (D+b) \}$  par le système (équivalent du point de vue de la contrôlabilité)  $F' = \{ -A, \pm (D+b) \}$  on peut toujours supposer que A s'écrit :  $A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & d \end{pmatrix}$  avec  $d \geq 0$  ( $b = 0$  car  $\chi(A,D)^2 - \Delta(A) \Delta(D) = 0$ ).

Le point singulier de  $D+b$  est le point de coordonnées  $\begin{pmatrix} -b_1/\lambda \\ -b_2/\lambda \end{pmatrix}$

dans le 1er cas,  $\begin{pmatrix} \frac{b_2}{\lambda} & \frac{b_1}{\lambda} \\ -\frac{b_2}{\lambda} & \end{pmatrix}$  dans le 2e cas ou  $\begin{pmatrix} 0 \\ -b_1 \end{pmatrix}$  dans le 3e cas.

La droite passant par le point singulier de  $D+b$  et parallèle à l'axe des abscisses est stable par  $D+b$  donc le demi-plan défini par  $x_2 > -\frac{b_2}{\lambda}$  (dans les 2 premiers cas) ou  $x_2 > -b_1$  (dans le 3e cas) est stable pour le champ de vecteurs  $D+b$ . Puisque  $d > 0$ , ce demi-plan est également stable pour le champ de vecteurs  $A$  : on peut donc dire que le système (1) n'est pas transitif dans ce cas.

Conclusion Si  $b \in \text{Im } D$  et  $\chi(A,D)^2 - \Delta(A)\Delta(D) = 0$ , le système (1) n'est pas transitif sur  $\mathbb{R}^2$ .

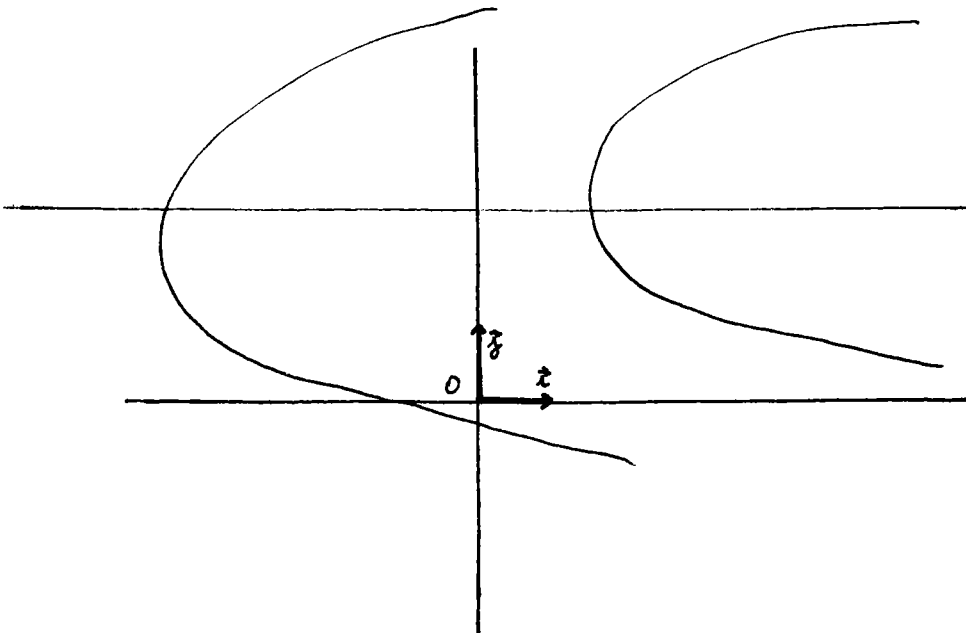
3. Cas où  $b \notin \text{Im } D$  et  $\chi(A,D)^2 - \Delta(A)\Delta(D) = 0$

Dans ce cas  $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$  avec  $b_2 \neq 0$ ,

$\chi(A,D)^2 - \Delta(A)\Delta(D) = 0$  entraîne que :  $A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & d \end{pmatrix}$

On peut toujours supposer que  $b_2 > 0$  quitte à changer  $\vec{j}$  en  $-\vec{j}$ .

Les trajectoires du champ de vecteurs  $D+b$  sont alors des paraboles d'axe commun la droite passant par le point  $\begin{pmatrix} 0 \\ -b_1 \end{pmatrix}$  et parallèle à l'axe des abscisses ; leur concavité est tournée vers les abscisses positives.





Toutes les trajectoires de  $\pm (D+b)$  coupent l'axe des abscisses, soit  $\begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$  un point de l'axe des abscisses et C la trajectoire de  $\pm (D+b)$  passant par ce point, les équations de C sont :

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{b_2}{2} t^2 + b_1 t + x_0 \\ x_2(t) = b_2 t \quad (t \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

Le vecteur tangent en  $x(t)$ , point courant de la trajectoire C, est :

$$Dx(t) + b \text{ et a pour coordonnées : } \begin{pmatrix} b_2 t + b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

un vecteur orthogonal à celui-ci est  $\vec{n}(t) = J(Dx(t) + b)$ , il a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} -b_2 \\ b_2 t + b_1 \end{pmatrix}$$

Le produit scalaire de  $\vec{n}(t)$  et du vecteur  $Ax(t)$  est égal à :

$$f(t) = t^2 \left( -\frac{ab_2^2}{2} + b_2^2 d \right) + t \left( -ab_2 b_1 - b_2^2 c + b_1 b_2 d \right) - a b_2 x_0$$

Le système (1) est transitif si et seulement si  $f(t)$  change de signe lorsque  $t$  varie de  $-\infty$  à  $+\infty$  (voir chapitre 2).

On peut donc dire que le système (1) est transitif sur  $\mathbb{R}^2$  si et seulement si :

$$. a = 0 \text{ et } b_1 d - b_2 c \neq 0$$

$$\text{ou } . a = 2d \text{ et } b_1 d + b_2 c \neq 0$$

Dans tous les autres cas, le discriminant de  $f(t)$  est :

$$\Delta = b_2^2 [(b_1(d-a) - b_2c)^2 + 4ab_2 x_0 (d - \frac{a}{2})]$$

et peut être rendu négatif par un bon choix de  $x_0$ , et dans ce cas  $f(t)$  ne changera pas de signe.

Conclusion

$$a = 0 \text{ et } b_1 d - b_2 c \neq 0 \text{ équivaut à } AD = 0 \text{ et } b \notin \text{Im } A$$

$$a = 2d \text{ et } b_1 d + b_2 c \neq 0 \text{ équivaut à } AD - 2DA = 0 \text{ et } Ab \neq \frac{\text{Tr}A}{3} b$$

Notre théorème est donc démontré dans le cas où  $\Delta(D) = 0$ .

CHAPITRE 5

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + u (Dx(t) + b) \\ x(t) \in \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Nous nous plaçons dans le cas où  $\Delta(D) < 0$  et  $\text{Tr } D \neq 0$  ; dans une base  $(\vec{i}, \vec{j})$   $D$  s'écrit :

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \alpha\beta \neq 0 \text{ et } A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

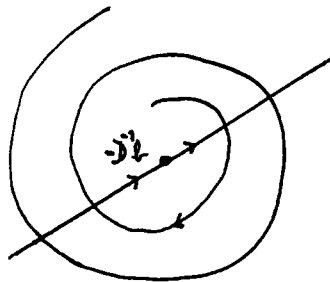
Nous nous plaçons dans le cas où le théorème de Jurdjevic-Sallet ne s'applique pas, c'est-à-dire dans le cas où les champs de vecteurs  $A$  et  $D$  sont colinéaires.

On a donc  $A = \lambda D$ , comme  $\lambda D = (-\lambda)(-D)$  et que le système étudié contient le champ de vecteurs  $D+b$  et son opposé, quitte à changer nos notations on peut supposer que  $\lambda > 0$ .

Les trajectoires de  $D+b$  sont des spirales, le point  $-D^{-1}b$  est attractif pour le champ de vecteurs  $D+b$  ou  $-(D+b)$ .

Le système (1) est équivalent au système  $F = \{ A, \pm(D+b) \}$  et  $F$  est équivalent, du point de vue de la contrôlabilité, à son enveloppe conique convexe fermée  $LS(F)$ .

Puisque  $\lambda > 0$ ,  $A - \lambda(D+b) = -\lambda b$  appartient à  $LS(F)$ , les trajectoires du champ de vecteurs constant  $-\lambda b$  sont des droites de direction  $\vec{b}$ .



Le point  $-D^{-1}b$  est normalement auto-accessible (voir figure ci-dessus et la 1ère partie de cette thèse pour plus de détails) et un voisinage arbitraire de ce point peut être atteint, à partir de n'importe quel point du plan, grâce au champ de vecteurs  $D+b$  ou  $-(D+b)$ , donc grâce au système  $F$  ainsi qu'à son opposé, on peut donc conclure à la transitivité du système (1).

## CHAPITRE 6

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + u (Dx(t) + b) \\ x(t) \in \mathbb{R}^2 \quad u \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Nous étudions le cas où :  $\Delta(D) < 0$  et  $\text{Tr } D = 0$ . Dans une certaine base  $(\vec{i}, \vec{j})$  D s'écrit :  $D = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$  et  $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

$$\Delta(AD) = 2\beta^2 ((b+c)^2 - 4ad)$$

Les trajectoires de D sont des cercles centrés en le point :  $-D^{-1}b$   
de coordonnées  $\begin{pmatrix} -b_2 / \beta \\ b_1 / \beta \end{pmatrix}$

### 1. Cas où $\Delta(AD) > 0$

Nous sommes dans le cas d'application du théorème de Jurdjevic-Sallet (voir chapitre 1), le système (1) est transitif sur  $\mathbb{R}^2$  si et seulement si les champs de vecteurs A et D+b n'ont pas de point singulier commun.

### 2. Cas où $\Delta(AD) < 0$

Les trajectoires de D sont des cercles qui peuvent être paramétrés de la façon suivante :

$$\begin{cases} x_1(t) = r \cos t - \frac{b_2}{\beta} \\ x_2(t) = r \sin t + \frac{b_1}{\beta} \end{cases} \quad (r \in \mathbb{R}_+)$$

Le produit scalaire de  $\vec{n}(t)$ , vecteur normal à une trajectoire de D et de  $Ax(t)$  est égal à :

$$f(t) = r^2(a \cos^2 t + (b+c) \cos t \sin t + d \sin^2 t) + r(b'_1 \cos t + b'_2 \sin t)$$

$$\text{où } b'_1 = \frac{b_1 c - a b_2}{\beta} \quad b'_2 = \frac{b_1 d - b b_2}{\beta}$$

Etudions le signe de l'expression  $g(t) = a \cos^2 t + (b+c) \cos t \sin t + d \sin^2 t$  ; si  $t$  est tel que  $\cos t = 0$   $g(t) = d$  ( $d \neq 0$  car  $\Delta(AD) < 0$ ), si  $t$  est tel que  $\cos t \neq 0$ ,  $g(t) = \cos^2 t (d \operatorname{tg}^2 t + (b+c) \operatorname{tg} t + a)$  et puisque  $\Delta(AD) = (b+c)^2 - 4ad$  est supposé négatif,  $g(t)$  est du signe de  $d$ .

$g(t)$  ne s'annule donc pour aucune valeur de  $t$  et admet donc un minimum strictement positif ou un maximum strictement négatif comme l'expression  $b'_1 \cos t + b'_2 \sin t$  reste bornée lorsque  $t$  varie  $f(t)$  reste toujours positif, ou toujours négatif si  $r$  est choisi suffisamment grand.

Ceci prouve qu'il existe une trajectoire de  $\pm(D+b)$  telle que le champ de vecteurs  $A$  est "pointé" vers l'intérieur (ou vers l'extérieur) de cette trajectoire, le système (1) n'est donc pas transitif dans ce cas.

### 3. Cas où $\Delta(AD) = 0$

Faisons le changement de base :

$$\begin{cases} \vec{I} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} \\ \vec{J} = \sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j} \end{cases} \quad \theta \in ] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$$

Dans la nouvelle base  $D$  s'écrit toujours  $D = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$

et  $A(\vec{I}) = \cos^2 \theta (d \operatorname{tg}^2 \theta + (b+c) \operatorname{tg} \theta + a) \vec{I} + b' \vec{J}$   
 puisque  $(b+c)^2 - 4ad = 0$ , il existe toujours  $\theta$  tel que  $\cos^2 \theta (d \operatorname{tg}^2 \theta + (b+c) \operatorname{tg} \theta + a) = 0$ , par conséquent, on peut toujours supposer que  $A$  s'écrit :  $A = \begin{pmatrix} 0 & c \\ b & d \end{pmatrix}$

$\Delta(AD) = 0$  implique alors :  $b+c = 0$ .

Le produit scalaire défini au paragraphe précédent s'écrit alors :

$$f(t) = r^2 d \sin^2 t \operatorname{tr}(b'_1 \cos t + b'_2 \sin t) \text{ où } b'_1 = \frac{b_1 c}{\beta} \quad b'_2 = \frac{b_1 d - b b_2}{\beta}$$

$\begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \end{pmatrix}$  représente les coordonnées de  $A(-D^{-1}b)$  si  $b'_1 = b'_2 = 0$ , les champs de vecteurs  $A$  et  $D+b$  ont un point singulier commun (le point  $-D^{-1}b$ ) et le système (1) n'est pas transitif.

Dans la suite, on suppose donc que  $b'_1 \neq 0$  ou  $b'_2 \neq 0$

$$f(0) = r b'_1 \quad \text{et} \quad f(\pi) = -r b'_1$$

- donc si  $b'_1 \neq 0$ , le produit scalaire  $f(t)$  change de signe le long de toute trajectoire de  $\pm(D+b)$ , le système (1) est donc transitif dans ce cas
- si  $b'_1 = 0$ ,  $f(t) = r \sin (dr \sin t + b'_2)$  et  $b'_2 \neq 0$   
si  $(t)$  est choisi assez petit  $r d \sin t + b'_2$  est du signe de  $b'_2$  tandis que  $r \sin t$  peut être négatif ou positif, le produit scalaire  $f(t)$  change de signe le long de chaque trajectoire de  $\pm(D+b)$  et le système (1) est donc transitif sur  $\mathbb{R}^2$ .

#### 4. Conclusion

Nous avons bien montré que : le système (1) est transitif si et seulement si  $\Delta(AD) > 0$  et si les champs de vecteurs  $A$  et  $D+b$  n'ont pas de point singulier commun.

\*

\*

\*

**3 è m e   P A R T I E**

**CONTROLABILITE DES SYSTEMES  
QUADRATIQUES DANS  $\mathbb{R}^3$**

## INTRODUCTION

Dans cette partie nous étudions les systèmes quadratiques dans  $\mathbb{R}^3$ , c'est-à-dire les systèmes du type :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Q(x(t)) + u b \\ x(t) \in \mathbb{R}^3, u \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

où  $Q$  est une application de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$  dont toutes les composantes sont des formes quadratiques.

Nous exposons une méthode permettant de décider de la complète contrôlabilité d'un tel système sur  $\mathbb{R}^3$  ; cette méthode peut, en outre, aboutir à un algorithme et être programmée sur ordinateur. Les systèmes quadratiques interviennent dans le problème du satellite et ont aussi leur intérêt propre du fait que la linéarisation d'un système quadratique n'apporte aucun renseignement sur les propriétés locales puisque la différentielle en 0 de l'application  $Q$  est nulle.

La classe des systèmes quadratiques est stable sous l'effet des transformations suivantes :

- i) Changement de base dans l'espace des états
- ii) Changement de base dans l'espace des entrées
- iii) Bouclage de la forme  $Q \rightarrow Q + Q'b$  où  $Q'$  est une forme quadratique sur  $\mathbb{R}^3$ .

Le groupe  $G$  engendré par ces transformations agit sur la classe des systèmes quadratiques. Une classification de ces systèmes en dimension 2 est effectuée dans la thèse d'état de B. Bonnard : pour cette dimension le groupe  $G$  induit 3 orbites et l'auteur donne un élément représentatif de chacune d'elles.

En dimension 3, le problème est un peu plus difficile car le nombre d'orbites est infini. Notre méthode s'appuie, comme dans la première partie, sur le théorème de Gauthier-Bornard qui reste valable pour les systèmes homogènes mais, alors que dans le cas des paires de champs de vecteurs linéaires les trajectoires sont parfaitement connues, nous n'avons que peu d'information sur les trajectoires de champs de vecteurs quadratiques. Un raisonnement simple mais astucieux qui utilise une fois encore la normale accessibilité, nous permet cependant de mener à bien notre classification.

### PLAN DE LA 3ème PARTIE

Cette partie est divisée en deux chapitres : dans le 1er chapitre nous considérons les systèmes quadratiques en général et nous exposons une condition nécessaire et suffisante pour laquelle un système quadratique vérifie la condition du rang.

Dans le 2ème chapitre nous exposons notre méthode permettant de décider si un système quadratique dans  $\mathbb{R}^3$  est complètement contrôlable ou non.



## CHAPITRE 1

Dans ce chapitre nous exposons quelques généralités sur les systèmes quadratiques en général.

On considère les systèmes de la forme :

$$(1) \dot{x}(t) = Q(x(t)) + B u$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^p$   $B$  est une matrice  $n \times p$  et  $Q$  est une application de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  dont toutes les composantes sont des formes quadratiques.

On note  $b_1, b_2, \dots, b_p$  les vecteurs colonnes de la matrice  $B$ .

### 1. CONDITION DU RANG

Rappelons que si  $F$  est une famille de champs de vecteurs analytiques sur une variété  $M$ , le groupe  $G(F)$  opère transitivement sur  $M$  si et seulement si  $F$  vérifie la condition du rang, c'est-à-dire si et seulement si  $\dim \text{Lie}(F)(x) = \dim M$  pour tout  $x$ . La condition du rang est donc une condition nécessaire de complète contrôlabilité pour  $F$ .

Ce qui suit est emprunté à la partie de la thèse d'état de B. Bonnard traitant des systèmes quadratiques, nous allons démontrer un critère très simple permettant de décider si un tel système vérifie la condition du rang.

Définition Au système (1) on associe une algèbre  $A$  (commutative mais pas forcément associative) définie par la table de multiplication suivante :

$$e_j \cdot e_k = \sum_{\tau=1}^n q_{jk}^{\tau} e_{\tau} \quad j, k = 1, 2, \dots, n$$

(Si  $Q = \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ \vdots \\ jk \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 < j < n \\ 1 < k < n \end{matrix}$  désigne la matrice associée à la forme quadratique  $Q_i$ ).

Lemme 1 Soient  $v_1$  et  $v_2$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  alors :

$$[A, v_1](v_2) = [ [Q, v_1], v_2 ] = 2v_1 \cdot v_2$$

- $[Q, v_1]$  désigne le crochet de Lie du champ de vecteurs défini par l'application  $Q$  et du champ de vecteurs constant ayant pour valeur  $v_1$
- $v_1 \cdot v_2$  désigne le produit des vecteurs  $v_1$  et  $v_2$  au sens de l'algèbre définie plus haut.

Démonstration Il suffit de démontrer ce lemme pour  $(v_1 \cdot v_2) = (e_j \cdot e_k)$   $j, k = 1, \dots$

Rappel

Puisque les contrôles  $u_i$  ne sont pas bornés le système (1) est équivalent, du point de vue de la contrôlabilité, à la donnée de

$$F = \{Q, \pm b_1, \dots, b_p\}$$

Lemme 2

On note :

- \*  $V^k(\mathbb{R}^n)$  l'ensemble des champs de vecteurs polynomiaux homogènes de degré  $k$
- \*  $\mathfrak{L}^0$  le plus petit sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  tel que :
  - i)  $b_i \in \mathfrak{L}^0$  pour  $i = 1, 2, \dots, p$
  - ii) si  $v_1, v_2 \in \mathfrak{L}^0$  alors  $[ [Q, v_1], v_2 ] \in \mathfrak{L}^0$
- \*  $\mathfrak{L}^1$  la plus petite sous-algèbre de Lie de  $V^1(\mathbb{R}^n)$  contenant les éléments de la forme  $[Q, v]$  avec  $v \in \mathfrak{L}^0$
- \*  $\mathfrak{L}^2$  la plus petite sous-algèbre de Lie de  $\bigoplus_{k=2}^{+\infty} V^k(\mathbb{R}^n)$  contenant  $Q$  et les éléments de la forme :  $\text{ad } L_1 \text{ ad } L_2 \dots \text{ad } L_q Q$  pour  $L_i \in \mathfrak{L}^1$  ( $\text{ad } L_i X = [L_i, X]$ )

L'algèbre de Lie engendrée par la famille de champs de vecteurs  $\{Q, b_1, \dots, b_p\}$  est égale à  $\mathfrak{L}^0 \oplus \mathfrak{L}^1 \oplus \mathfrak{L}^2$ .

Démonstration Dans un premier temps on montre que  $\tilde{\mathfrak{L}} = \mathfrak{L}^0 \oplus \mathfrak{L}^1 \oplus \mathfrak{L}^2$  est une algèbre de Lie.

- \* Soit  $v \in \mathfrak{L}^0$  et  $L \in \mathfrak{L}^1$  on va montrer que  $[L, v] \in \mathfrak{L}^0$  par récurrence sur le nombre maximum  $k$  d'occurrences d'éléments  $b_i$  dans les crochets définissant  $L$
- . Si  $k = 1$   $L$  est de la forme  $[Q, \sum_{i \in I} b_i]$  et donc  $[L, v] \in \mathfrak{L}^0$  par définition de  $\mathfrak{L}^0$ .

. Si  $k > 1$  et  $L$  est de la forme  $[Q, v']$ ,  $[L, v] = [[Q, v'], v]$  appartient à  $\mathfrak{L}^0$  par définition de  $\mathfrak{L}^0$ .

Si  $L$  n'est pas de la forme ci-dessus, alors il existe  $L_1$  et  $L_2$  de  $\mathfrak{L}^1$  tels que  $L = [L_1, L_2]$ , le nombre maximum de  $b_i$  dans  $L_1$  ou  $L_2$  est inférieur à  $k$  et on a :

$[[L_1, L_2], v] = - [[L_2, v], L_1] - [[v, L_1], L_2]$  qui appartient à  $\mathfrak{L}^0$  par application de l'hypothèse de récurrence.

\* Soit  $L \in \mathfrak{L}^1$  et  $X \in \mathfrak{L}^2$ , on va montrer que  $[L, X] \in \mathfrak{L}^2$  sur le nombre maximum  $k$  de générateurs de  $\mathfrak{L}^2$  présents dans les crochets définissant  $X$ .

. Si  $k = 1$   $X = Q$  ou  $X = \text{ad } L_1 \text{ ad } L_2 \dots \text{ad } L_q Q$  et  $[L, X]$  appartient à  $\mathfrak{L}^2$  par définition de  $\mathfrak{L}^2$ .

. Si  $k > 1$   $X = [X_1, X_2]$ , le nombre maximum de générateurs de  $\mathfrak{L}^2$  présents dans les crochets définissant  $X_1$  ou  $X_2$  est inférieur à  $k$  et on a :

$$[L, [X_1, X_2]] = [[X_2, L], X_1] + [[L, X_1], X_2]$$

qui appartient à  $\mathfrak{L}^2$  par application de l'hypothèse de récurrence.

\* Soit enfin  $v \in \mathfrak{L}^0$  et  $X \in \mathfrak{L}^2$ , montrons que  $[v, X] \in \mathfrak{L}^1 \oplus \mathfrak{L}^2$ .

. Si  $X$  est un générateur de  $\mathfrak{L}^2$ , alors :

. soit  $X = Q$  et  $[v, Q] \in \mathfrak{L}^1$  par définition de  $\mathfrak{L}^1$

. soit  $X = \text{ad } L_1 \dots \text{ad } L_q Q$  et nous montrons le résultat par récurrence sur  $q$ .

$$\text{. Si } q = 1 \text{ } [v, [L_1, Q]] = \underbrace{[[Q, v], L_1]}_{\in \mathfrak{L}^1} + \underbrace{[[v, L_1], Q]}_{\in \mathfrak{L}^0}$$

donc  $[v, X] \in \mathfrak{L}^1$

. Si  $q > 1$   $[v, X] = [[\text{ad } L_2 \dots \text{ad } L_q Q, v], L_1] + [[v, L_1], \text{ad } L_2 \dots L_q Q]$   $[\text{ad } L_2 \dots L_q Q, v] \in \mathfrak{L}^1$  par application de l'hypothèse de récurrence,  $[v, L_1] \in \mathfrak{L}^0$  par définition donc  $[v, X] \in \mathfrak{L}^2$ .

. Si X est quelconque dans  $\mathfrak{L}^2$ , la démonstration se fait comme plus haut par récurrence sur k, le nombre maximum de générateurs de  $\mathfrak{L}^2$  présents dans les crochets définissant X.

Conclusion  $\tilde{\mathfrak{L}} = \mathfrak{L}^0 \oplus \mathfrak{L}^1 \oplus \mathfrak{L}^2$  est une algèbre de Lie contenant Q,  $b_1, \dots, b_p$  donc  $\mathfrak{L} \subset \tilde{\mathfrak{L}}$  et comme il est clair par ailleurs que  $\tilde{\mathfrak{L}} \subset \mathfrak{L}$  on a l'égalité  $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}^0 + \mathfrak{L}^1 + \mathfrak{L}^2$ .

Proposition La famille  $F = \{ Q, b_1, \dots, b_p \}$  vérifie la condition du rang en tout point si et seulement si la condition du rang est vérifiée en 0 si et seulement si l'algèbre engendrée par les vecteurs  $b_1, \dots, b_p$  est égale à  $\mathbb{R}^n$ .

Démonstration  $\mathfrak{L}(0) = \mathfrak{L}^0$  et pour tout x de  $\mathbb{R}^n$   $\mathfrak{L}^0 \subset \mathfrak{L}(x)$  par conséquent si la condition du rang est réalisée en 0 on a  $\mathfrak{L}^0 = \mathbb{R}^n$  et  $\mathfrak{L}(x) = \mathbb{R}^n$  pour tout x de  $\mathbb{R}^n$ .

Par ailleurs, il résulte du lemme 1 que  $\mathfrak{L}^0$  est égale à l'algèbre .

## 2. GROUPE AGISSANT SUR LA CLASSE DES SYSTEMES QUADRATIQUES

La classe des systèmes quadratiques de  $\mathbb{R}^n$  :  $x(t) = Q(x) + B u$  est stable sous l'effet des transformations suivantes :

- i) Changement de base dans l'espace des états  $\mathbb{R}^n$  ; si la matrice de passage est P l'effet de cette transformation est :  
 $(Q, B) \longrightarrow (P^{-1} Q \circ P, P^{-1} B)$
- ii) Bouclage de la forme  $Q \longrightarrow Q + \sum_{i=1}^p \alpha_i b_i$  où  $\alpha_i$  est une forme quadratique de  $\mathbb{R}^n$ .
- iii) Changement de base dans l'espace des entrées  $\mathbb{R}^p$  de matrice de passage K ; l'effet en est :  $(Q, B) \longrightarrow (Q, BK)$ .

Le groupe G engendré par ces transformations agit sur les systèmes quadratiques, 2 systèmes appartenant à une même orbite sont équivalents du point de vue de la contrôlabilité. En dimension 3 lorsque  $u \in \mathbb{R}$ , le nombre de ces orbites est infini.

## CHAPITRE 2

On considère dans ce chapitre les systèmes du type :

$$(1) \quad \dot{x}(t) = Q(t) + u b$$

ou  $x(t) \in \mathbb{R}^3$ ,  $Q$  est une application de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$  dont toutes les composantes sont quadratiques,  $b$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^3$  fixé et  $u \in \mathbb{R}$ .

Rappelons qu'un tel système est équivalent, du point de vue de la contrôlabilité, à la donnée de  $F = \{Q, \pm b\}$  (car le contrôle  $u$  n'est pas borné, voir 2e partie, chapitre 1).

Nous allons exposer une méthode permettant de décider si un tel système est transitif sur  $\mathbb{R}^3$ .

### 1. EXPOSE GENERAL DE LA METHODE UTILISEE

Rappelons le théorème de Gauthier-Bornard (voir 1ère partie, chapitre 1 pour plus de détails).

<u>Théorème</u>	<p>Soit <math>F</math> une famille de champs de vecteurs linéaires donnée sur <math>\mathbb{R}^n</math>, <math>F</math> est complètement contrôlable sur <math>\mathbb{R}^n - \{0\}</math> si et seulement si :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>i) <math>F</math> vérifie la condition du rang en au moins un point</li> <li>ii) La famille "projetée" <math>\tilde{F}</math> est transitive sur <math>S^{n-1}</math></li> <li>iii) <math>F</math> admet une direction rentrante et une direction sortante.</li> </ul>
-----------------	---

Rappelons que si  $A$  est un champ de vecteurs linéaires, les projetés de ses trajectoires sur  $S^{n-1}$  sont les trajectoires d'un champ de vecteurs  $\tilde{A}$  "projeté" de  $A$  sur  $S^{n-1}$  ( $\tilde{A}(x) = Ax - \langle Ax, x \rangle x$  pour  $x \in S^{n-1}$ ). Ceci est vrai parce que les trajectoires de  $A$  sont homothétiques par rapport à l'origine or les trajectoires d'un système quadratique possèdent également cette propriété (car les composantes de  $Q$  sont homogènes de degré 2) par conséquent le théorème de Gauthier-Bornard est encore valable pour un système quadratique.

Soit donc  $F = \{ Q, \pm b \}$  un système quadratique défini dans  $\mathbb{R}^3$ . Le point iii) du théorème est évidemment vérifié à cause de la présence des champs de vecteurs constants  $\pm b$  dans  $F$ .

Le chapitre 1 nous fournit une méthode permettant de vérifier le point i). En ce qui concerne le point ii) le théorème suivant est facile à démontrer :

Proposition Soit  $F = \{ Q, \pm b \}$  un système quadratique donné dans  $\mathbb{R}^3$  ; on suppose que  $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\tilde{Q} = (\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2, \tilde{Q}_3)$

$F$  est transitif sur  $\mathbb{R}^3$  si et seulement si :

- i)  $\tilde{Q}(0,0,1) \neq 0$
- ii)  $\tilde{Q}_1(0, x_2, x_3)$  change de signe lorsque le point  $(0, x_2, x_3)$  varie sur la sphère  $S^2$ .
- iii)  $\tilde{Q}_2(x_1, x_2, x_3) - \alpha \tilde{Q}_1(x_1, x_2, x_3)$  change de signe lorsque le point  $(x_1, x_2, x_3)$  varie sur le grand cercle de la sphère défini par le plan d'équation  $x_2 - \alpha x_1 = 0$  et ceci pour tout  $\alpha$  réel.

Démonstration La projection des trajectoires des champs de vecteurs  $\pm b$  sur  $S^2$  donne :

- 2 points singuliers : les deux pôles
- des méridiens qui peuvent être parcourus dans les deux sens

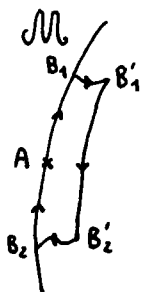
La condition i) signifie que les champs de vecteurs  $\tilde{Q}$  et  $\pm b$  n'ont pas de points singuliers communs.

La condition ii) signifie que sur le méridien de longitude 0 et sur le méridien de longitude  $\pi$  il existe deux points au moins en lesquels le champ de vecteurs  $\tilde{Q}$  "pointe" vers chacune des deux demi-sphères définies par le plan d'équation  $x_1 = 0$ .

La condition iii) signifie la même chose pour tous les autres méridiens.

Les conditions i) ii) et iii) sont évidemment nécessaires (si ii) ou iii) n'était pas réalisée, il existerait une demi-sphère stable par  $\tilde{Q}$  et  $\pm b$ ) montrons qu'elles sont suffisantes.

Soit  $A$  un point de  $S^2$  différent des pôles et  $\mathcal{M}$  le méridien passant par  $A$ . Sur  $\mathcal{M}$  il existe deux points  $B_1$  et  $B_2$  tels que définis plus haut



Du point  $A$  on peut atteindre, grâce au champ de vecteurs  $\tilde{b}$  ou  $-\tilde{b}$ , le point  $B_1$  à partir duquel on peut atteindre un point  $B'_1$  grâce au champ  $\tilde{Q}$ . Comme la trajectoire de  $\tilde{Q}$  passant par  $B_2$  est dirigé en sens inverse de celle passant par  $B_1$ , si  $B'_1$  est choisi suffisamment proche de  $B_1$ , on peut atteindre à partir de  $B'_1$  et grâce au champ de vecteurs  $\tilde{b}$  ou  $-\tilde{b}$  un point  $B'_2$  situé sur la trajectoire de  $\tilde{Q}$  passant par  $B_2$  et donc le point  $B_2$  lui-même puis le point  $A$ .

Le point  $A$  est donc auto-accessible et même normalement auto-accessible puisque les trajectoires de  $\tilde{b}$  et  $\tilde{Q}$  sont transverses en  $B_1$ .

Considérons alors la restriction du système  $\tilde{F} = \{ \tilde{Q}, \pm \tilde{b} \}$  à la sous-variété ouverte  $S^2 - \{N, S\}$  ( $\{N, S\}$  est l'ensemble des pôles Nord et Sud). Puisque chaque point de  $S^2 - \{N, S\}$  est normalement auto-accessible  $\tilde{F}$  est transitif sur  $S^2 - \{N, S\}$  (voir 2e partie chapitre 2) et, puisque  $\tilde{Q}$  et  $\pm \tilde{b}$  n'ont pas de point singulier commun, on peut conclure à la transitivité de  $\tilde{F}$  sur  $S^2$ .

## 2. TRANSITIVITE DE $\tilde{F} = \{ \tilde{Q}, \pm \tilde{b} \}$ sur $S^2$

Nous commençons par chercher une base de  $\mathbb{R}^3$  où le système  $F = \{ Q, \pm b \}$  s'écrive sous la forme la plus simple possible.

Tout d'abord, il existe une base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  dans laquelle les coordonnées de  $b$  sont :  $(0,0,1)$  ensuite si  $Q_1(0,0,1) = Q_2(0,0,1)$  : nous avons vu que  $\tilde{F}$  n'était pas transitif sur  $S^2$  nous supposons donc, dans la suite que  $Q_1(0,0,1) \neq 0$  ou  $Q_2(0,0,1) \neq 0$ . On peut toujours supposer, d'ailleurs, que  $Q_1(0,0,1) \neq 0$  quitte à permuter les vecteurs de base  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$ .

Si  $Q = (Q_1, Q_2, Q_3)$  nous noterons  $f_1$  la forme bilinéaire symétrique associée à  $Q_1$  et  $(q_{ij}^1)_{\substack{1 \leq i < j < 3 \\ 1 \leq j < 3}}$  sa matrice ; on suppose donc que :  $q_{33}^1 \neq 0$ .

Posons  $e_2^{\vec{1}} = e_2 + a e_3$ ,  $f_1(\vec{e}_2, \vec{e}_3) = q_{23}^1 + a q_{33}^1$ , donc, pour  $a = -\frac{q_{23}^1}{q_{33}^1}$

$$f_1(e_2^{\vec{1}}, e_3^{\vec{1}}) = 0$$

Choisissons  $a$  tel que ci-dessus et posons  $e_1^{\vec{1}} = e_1 + b e_2^{\vec{1}} + c e_3^{\vec{1}}$

$$f_1(e_1^{\vec{1}}, e_3^{\vec{1}}) = q_{13}^1 + c q_{33}^1 \text{ donc } f_1(e_1^{\vec{1}}, e_3^{\vec{1}}) = 0 \text{ pour } c = -\frac{q_{13}^1}{q_{33}^1}$$

$$f_1(e_1^{\vec{1}}, e_2^{\vec{1}}) = q_{12}^1 + a q_{13}^1 + b(q_{22}^1 + a q_{23}^1)$$

Si  $q_{22}^1 + a q_{23}^1 \neq 0$ , on peut trouver  $b$  tel que  $f_1(e_1^{\vec{1}}, e_2^{\vec{1}}) = 0$

sinon  $f_1(e_2^{\vec{1}}, e_3^{\vec{1}}) = 0$  et on pose  $f_1(e_1^{\vec{1}}, e_2^{\vec{1}}) = \beta$

La matrice de passage  $P$  de la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  à la base  $(e_1^{\vec{1}}, e_2^{\vec{1}}, e_3^{\vec{1}})$  est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ ab+c & a & 1 \end{pmatrix}, \text{ le système } F \text{ s'écrit donc dans cette nouvelle base :}$$

$$F' = \{Q', \pm b\}$$

$$\text{avec } b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } Q' = (Q'_1, Q'_2, Q'_3) \text{ où } Q'_1 = {}^t P Q_1 P$$

$$\text{La matrice de } Q'_1 \text{ est alors du type : } \begin{pmatrix} q'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & q'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & q_{33} \end{pmatrix}$$

$$\text{ou bien : } \begin{pmatrix} q'_{11} & 0 \\ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{33} \end{pmatrix} \text{ et quitte à faire un nouveau changement de base}$$

du type  $e_i^{\vec{1}} = \alpha_i e_i^{\vec{1}}$ , on peut toujours supposer que les coefficients  $q'_{11}$ ,  $q'_{22}$  et  $q_{33}$  sont égaux à 0, -1 ou 1 (avec  $q_{33} \neq 0$ ).

On peut donc toujours trouver une base dans laquelle le système  $F$  s'écrit :

$$F = \{Q, \pm b\} \text{ avec } b = (0,0,1) \quad Q = (Q_1, Q_2, Q_3) \text{ et où } Q_1 \text{ est de l'une des 16 formes suivantes :}$$



- |  |   |
|--|---|
| i) $x_1^2 + 2 \beta x_1 x_2 + x_3^2$   | i') $-x_1^2 + 2 \beta x_1 x_2 - x_3^2$  |
| ii) $-x_1^2 + 2 \beta x_1 x_2 + x_3^2$ | ii') $+x_1^2 + 2 \beta x_1 x_2 - x_3^2$ |
| iii) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$           | iii') $-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$          |
| iv) $-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$           | iv') $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$            |
| v) $x_2^2 + x_3^2$                     | v') $-x_2^2 - x_3^2$                    |
| vi) $x_1^2 - x_2^2 + x_3^2$            | vi') $-x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$           |
| vii) $-x_1^2 - x_2^2 + x_3^2$          | vii') $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$           |
| viii) $-x_2^2 + x_3^2$                 | viii') $x_2^2 - x_3^2$                  |

Du point de vue de la contrôlabilité le système  $F = \{ Q, \pm b \}$  est équivalent au système opposé  $F' = \{-Q, \pm b\}$ , quitte à nous reporter à ce dernier système nous n'étudierons donc pas les cas i') à viii').

Dans les cas i) à v) le système  $F$  n'est pas complètement contrôlable sur  $\mathbb{R}^3$ , en effet lorsque  $Q_1$  est sous l'une des formes i) à v) on a :

$Q_1(0, x_2, x_3) = x_3^2$  ou  $Q_1(0, x_2, x_3) = x_2^2 + x_3^2$ , expressions qui ne changent pas de signe lorsque le point  $(0, x_2, x_3)$  varie sur la sphère. Dans les cas i) à v), le point ii) de la proposition du paragraphe 1 n'est pas vérifié et le système "projeté"  $F$  n'est donc pas transitif sur  $S^2$ .

Il nous reste à examiner les cas vi), vii) et viii), lorsque  $Q_1$  est sous l'une de ces 3 formes on a :  $Q_1(0, x_2, x_3) = -x_2^2 + x_3^2$  expression qui change de signe lorsque le point  $(0, x_2, x_3)$  varie sur  $S^2$ .

Etudions alors le signe de  $Q_2(x_1, x_2, x_3) - \alpha Q_1(x_1, x_2, x_3)$  pour  $(x_1, x_2, x_3) \in S^2$  et  $x_2 - \alpha x_1 = 0$ .

A - Cas où  $Q_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2$

$(q_{ij})_{\substack{1 \leq i < j < 3 \\ 1 \leq j < 3}}$  désigne la matrice symétrique associée à  $Q_2$

On a :

$$Q_2(x_1, x_2, x_3) - \alpha Q_1(x_1, x_2, x_3) = (q_{11} - \alpha)x_1^2 + (q_{22} + \alpha)x_2^2 + (q_{33} - \alpha)x_3^2 + 2q_{12} x_1 x_2 + 2q_{13} x_1 x_3 + 2q_{23} x_2 x_3$$

Passons aux coordonnées sphériques :

$$\begin{cases} x_1 = \cos \theta \cos \varphi \\ x_2 = \cos \theta \sin \varphi \end{cases} \quad \text{avec } \operatorname{tg} \varphi = \alpha \text{ puisque } x_2 - \alpha x_1 = 0$$

$$Q_2(x_1, x_2, x_3) - \alpha Q_1(x_1, x_2, x_3) = \cos^2 \theta [(q_{33} - \alpha) \operatorname{tg}^2 \theta + 2(q_{13} \cos \varphi + q_{23} \sin \varphi) \operatorname{tg} \theta + (q_{11} - \alpha) \cos^2 \varphi + (q_{22} + \alpha) \sin^2 \varphi + 2 q_{12} \cos \varphi \sin \varphi]$$

Cette expression doit changer de signe lorsque le point  $(x_1, x_2, x_3)$  varie sur le grand cercle défini par  $x_2 - \alpha x_1 = 0$  privé des pôles et ceci pour tout  $\alpha$  réel.

En particulier, pour  $\alpha = q_{33}$

$$Q_2(x_1, x_2, x_3) - \alpha Q_1(x_1, x_2, x_3) = \cos^2 \theta [2(q_{13} \cos \varphi + q_{23} \sin \varphi) \operatorname{tg} \theta + (q_{11} - \alpha) \cos^2 \varphi + (q_{22} + \alpha) \sin^2 \varphi + 2 q_{12} \cos \varphi \sin \varphi]$$

$Q_2(x_1, x_2, x_3) - \alpha Q_1(x_1, x_2, x_3)$  change de signe si et seulement si

$$q_{13} \cos \varphi + q_{23} \sin \varphi \neq 0.$$

$$\text{or } \operatorname{tg} \varphi = \alpha = q_{33} \quad q_{13} \cos \varphi + q_{23} \sin \varphi = \cos \varphi / q_{13} + q_{23} \operatorname{tg} \varphi = \cos \varphi (q_{13} + q_{23} q_{33})$$

Donc  $Q_2(x_1, x_2, x_3) - \alpha Q_1(x_1, x_2, x_3)$  change de signe si  $q_{13} + q_{23} q_{33} \neq 0$

Si  $\alpha \neq q_{33}$

On peut considérer l'expression  $Q_2(x_1, x_2, x_3) - \alpha Q_1(x_1, x_2, x_3)$  comme un polynôme du 2ème degré en  $\operatorname{tg} \theta$  dont le discriminant (réduit) est

$$\Delta'(\alpha) = (q_{13} \cos \varphi + q_{23} \sin \varphi)^2 - (q_{33} - \alpha) [(q_{11} - \alpha) \cos^2 \varphi + (q_{22} + \alpha) \sin^2 \varphi + 2q_{12} \cos \varphi \sin \varphi]$$

$$= \cos^2 \varphi [(q_{13} + \alpha q_{23})^2 - (q_{33} - \alpha)((q_{11} - \alpha) + (q_{22} + \alpha)\alpha^2 + 2 q_{12} \alpha)]$$

$$(\operatorname{tg} \varphi = \alpha, \varphi \in ] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [)$$

L'expression  $Q_2(x_1, x_2, x_3) - \alpha Q_1(x_1, x_2, x_3)$  change de signe si et seulement si l'équation  $Q_2(x_1, x_2, x_3) - \alpha Q_1(x_1, x_2, x_3) = 0$  (d'inconnue  $\operatorname{tg} \theta$ ) admet deux racines distinctes, donc si et seulement si  $\Delta'(\alpha) > 0$  pour tout  $\alpha$ , donc si et seulement si le polynôme du 4ème degré :

$$P(X) = X^4 + X^3 (q_{22} - q_{33}) + X^2 (q_{23}^2 - q_{22} q_{33} + 2q_{12} - 1) + X (2q_{13} q_{23} + q_{33} + q_{11} - 2q_{12} q_{13}) + q_{13}^2 - q_{33} q_{11}$$

n'admet aucune racine réelle.

B - Cas où  $Q_1(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - x_2^2 + x_3^2$

Un raisonnement identique au précédent permet d'affirmer que le système  $\tilde{F} = \{\tilde{Q}, \pm \tilde{b}\}$  est transitif sur  $S^2$  si et seulement si :

$q_{13} + q_{23} q_{33} \neq 0$  et si le polynôme :

$$P(X) = X^4 + X^3 (q_{22} - q_{33}) + X^2 (q_{23}^2 - q_{22} q_{33} + 2q_{12} + 1) + X (2q_{13} q_{23} + q_{11} - q_{33} - 2q_{12} q_{13}) + q_{13}^2 - q_{11} q_{33}$$

n'admet aucune racine réelle.

C - Cas où  $Q_1(x_1, x_2, x_3) = -x_2^2 + x_3^2$

Un raisonnement identique à celui fait en A permet d'affirmer que le système  $\tilde{F} = \{\tilde{Q}, \pm \tilde{b}\}$  est transitif sur  $S^2$  si et seulement si :

$q_{13} + q_{23} q_{33} \neq 0$  et si le polynôme :

$$P(X) = X^4 + X^3 (q_{22} - q_{33}) + X^2 (q_{23}^2 - q_{22} q_{33} + 2q_{12}) + X (2q_{13} q_{23} + q_{11} - 2q_{12} q_{33}) + q_{13}^2 - q_{11} q_{33}$$

n'admet aucune racine réelle.

### 3. CONDITION DU RANG

Le système  $F = \{Q, \pm b\}$  vérifie la condition du rang en tout point si et seulement si l'algèbre engendrée par  $b$  est égale à  $\mathbb{R}^3$ . On suppose toujours que  $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{e}_3$  et que  $Q_1$  est sous l'une des 3 formes vi), vii) ou viii).

Dans les trois cas on a :

$$\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_1 + q_{33} \vec{e}_2 + q'_{33} \vec{e}_3$$

$$\vec{e}_3 \cdot (\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3) = q'_{33} \vec{e}_1 + \vec{e}_2 (q_{13} + q_{23} q_{33} + q_{33} q'_{33}) + \vec{e}_3 (q'_{13} + q_{33} q'_{23} + q'_{33}{}^2)$$

$(q'_{ij})_{\substack{1 < i < 3 \\ 1 < j < 3}}$  désigne la matrice symétrique associée à  $Q_3$

$$\text{On a : } \det(\vec{e}_3, \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3, \vec{e}_3 \cdot (\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3)) = q_{13} + q_{23} q_{33}$$

expression qui n'est pas nulle si l'on suppose que le système "projeté"  $\tilde{F}$  est transitif sur  $S^2$ . Par conséquent la transitivité de  $\tilde{F}$  sur  $S^2$  entraîne la condition du rang.

## BIBLIOGRAPHIE

1. P. ADDA                   Thèse 3<sup>ème</sup> cycle, Université de Metz
2. P. ADDA                   " Algorithmic determination of linear systems in the  
G. SALLET                   plane " à paraître
3. B. BONNARD               Thèse Université de Grenoble et INPG. (1983)
4. W.M. BOOTHBY             " A transitivity problem from control theory "  
J. Differential Equations Vol. 17 (2) 296-306 (1975)
5. W.M. BOOTHBY             " Determination of the transitivity of bilinear sys  
E.N. WILSON                 tems " SIAM J. Control Optim. 17 (2) 212-221 (1979)
6. R.W. BROCKETT           " Systems theory on group manifolds and coset spaces "  
SIAM J. Control 10 (1972) 265-284
7. R.W. BROCKETT           " Nonlinear systems and differential geometry "  
IEEE proceedings 64 (2) (1976) 61-72
8. R.W. BROCKETT           " Lie algebras and Lie groups in control theory " dans  
D.Q. Mayne and R.W. Brockett Eds Geometric methods in  
system theory (Reidel Dordrecht 1973) 43-82
9. C. BRUNI                   " Bilinear systems : an appealing class of 'nearly  
D. DIPILLO                   linear' systems in theory and applications "  
G. KOCH                     IEEE Trans. Automat. Control vol. AC 19 334-348
10. R. CHABOUR              Thèse USTBH Alger 1982
11. M.D. ESPANA             " Bilinear approximations of the distillation systems "  
I. LANDAU                   Ricerche di Automatica 6 (1) 1975
12. J.P. GAUTHIER           Thèse Université scientifique et médicale Grenoble -  
INPG 1982
13. J.P. GAUTHIER           " Structure des systèmes non linéaires "  
Ed. du CNRS 1984
14. J.P. GAUTHIER           " Controlabilité des systèmes bilinéaires "  
G. BORNARD                  SIAM J. Control Optim. 20 (1982) 377-384
15. J.P. GAUTHIER           " A theorem of controllability for bilinear systems  
and some consequences "  
INPG note interne LAG 81-14 (1981)
16. R. HERMANN             " On the accessibility problem in control theory "  
dans Intern. Symp. on Nonlin. Diff. Eq. and Nonlin.  
Mech. JP Lasalle and S. Lefschetz Ed. Academic Press  
N.Y. 1963 325-332
17. R. HERMANN             " Nonlinear controllability and observability "  
A.J. KRENER                 IEEE Trans. Automat. Control AC 22 (1977) 728-740
18. R.M. HIRSCHORN         " Controllability in nonlinear systems "  
J. Differential Equations 19 (1975) 46-61

9. R.M. HIRSCHORN " Global controllability of nonlinear systems "   
SIAM J. Control Optim. 14 (4) 1976 700-711
10. R.M. HIRSCHORN " Pseudo-linear semigroups, sets of generators and controllability "   
Duke Math. J. 40 (1978) 937-947
11. L.R. HUNT " Global controllability of general nonlinear systems "   
Math. System theory 12 (1979) 361-370
12. L.R. HUNT " Global controllability of nonlinear systems in two dimensions "   
Math. System theory 13 (1980) 361-376
13. L.R. HUNT " Controllability of nonlinear hypersurface systems "   
dans " Algebraic and geometric methods in linear systems theory "   
AMS lectures in applied mathematics C.I. Byrnes, C.F. Marin Ed. 209-224
14. L.R. HUNT " n-dimensional controllability with (n-1) controls "   
IEEE Trans. Autom. Control vol. 27 (1) (1982) 113-117
15. A. ISIDORI " A structural analysis of linear and bilinear systems " dans :   
P. D'ALLESSANDRO Theory and applications of variable structure systems   
A. RUBERTI R.R. Mohler, A. Ruberti Ed. Academic Press N.Y. 1972
16. V. JURDJEVIC " Controls systems subordinated to a group action :   
I. KUPKA Accessibility "   
J. Differential Equ. 392 (1980)
17. V. JURDJEVIC " Control systems on semi-simple Lie groups and their   
I. KUPKA homogeneous spaces "   
Annales Institut Fourier 31,4 (1981) 151-179
18. V. JURDJEVIC " Controllability of affine systems " dans :   
G. SALLET Differential geometric control theory R.W. Brockett,   
R.S. Millman, H.J. Sussmann Ed. Birkhäuser Progress in   
Math. (1983) 299-309
19. V. JURDJEVIC " Controllability properties of affine systems "   
G. SALLET SIAM J. Control Optim. 22,3 (1984)
20. V. JURDJEVIC " Control systems on Lie groups "   
H.J. SUSSSMANN J. Differential Equations 12 (1972) 313-329
21. D.E. KODITSCHKEK " The controllability of planar bilinear systems "   
K.S. NARENDRA IEEE Trans. Automat. Control vol. AC-30 (1) (1985)
22. I. KUPKA Thèse, Université de Dijon
23. I. KUPKA " Some problems in accessibility theory " dans :   
Analyse des systèmes. Astérisque 75-76 (1980) Soc.   
Math. France 167-176
24. I. KUPKA " A sufficient condition for the transitivity of   
G. SALLET pseudo-semigroups : application to system theory "   
J. Differential Equations 47,3 (1983) 462-470
25. G. SALLET " Sur la structure de l'ensemble d'accessibilité de   
certains systèmes "   
Math. Syst. Th. vol. 13 N°2 1985