



**HAL**  
open science

# Transition laminaire: tourbillons de Taylor entre cylindres coaxiaux tournants en présence de particules sphériques rigides

Blaise Nsom Eyenga Ndille

► **To cite this version:**

Blaise Nsom Eyenga Ndille. Transition laminaire: tourbillons de Taylor entre cylindres coaxiaux tournants en présence de particules sphériques rigides. Matière Condensée [cond-mat]. Université Paul Verlaine - Metz, 1987. Français. NNT : 1987METZ011S . tel-01775725

**HAL Id: tel-01775725**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01775725>**

Submitted on 24 Apr 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

# THÈSE

de Doctorat de l'Université de Metz

Présentée

à l'Université de Metz

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR EN MECANIQUE

Mention : Mécanique des Fluides

Par

Blaise NSOM EYENGA NDILLA



TRANSITION LAMINAIRE — TOURBILLONS DE TAYLOR  
ENTRE CYLINDRES COAXIAUX TOURNANTS  
EN PRESENCE DE PARTICULES SPHERIQUES RIGIDES

Soutenue le 19 Sept 1987 devant le jury:

Président: G. COGNET

Examineurs: S. CANDAU

O. SCRIVENER

D. WEBER

J.E. WESFREID

R. HOCQUART

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE METZ	
N° inv	1987 0225
Cote	S/M3 87/11
Loc	Magasin

## REMERCIEMENTS .

Au cours de ce travail, nous avons bénéficié du secours, des conseils et des encouragements de Monsieur l'Abbé J. FOIRE de la Paroisse Saint-Martin de Metz .

Nous tenons à lui exprimer notre gratitude pour ses enseignements que nous espérons avoir compris

Nous remercions Monsieur le Professeur R. HOCQUART, de nous avoir autorisé à nous inscrire pour la préparation de la présente thèse et pour l'aide qu'il nous a apportée durant notre séjour dans son Laboratoire (L.P.P.) .

Et à travers lui, tous les personnels du L.P.P. : secrétaire, technicien et chercheurs pour leur collaboration .

Nous sommes très honoré de la participation à notre Commission d'Examen, de Messieurs les Professeurs : G. COGNET de l'INPL de Nancy, S. CANDAU et O. SCRIVENER de l'Université de Strasbourg, J.E. WESFREID de l'E.S.P.C.I. de Paris, D. WEBER et R. HOCQUART de l'Université de Metz .

Pour finir, nous exprimons une pensée profonde pour notre tuteur R. WANDJI , pour notre famille tout entière et pour nos amis .

A ma mère

Jacqueline EYENGA AKONO .

"WON YA ZAMBE O NE ATATA'A YA NYEMANE MAM" .

## PRINCIPALES NOTATIONS .

$R_1, \Omega_1$	Rayon et vitesse angulaire du cylindre intérieur
$R_2, \Omega_2$	Rayon et vitesse angulaire du cylindre extérieur
$\beta$	Rapport des rayons : $R_1/R_2$
$\mu'$	Rapport des vitesses angulaires : $\Omega_1/\Omega_2$
$\sigma$	Taux de croissance des tourbillons
$\rho$	Masse volumique du fluide
$\gamma$	Viscosité cinématique du fluide
Re	nombre de Reynolds
T	nombre de Taylor
k	longueur d'onde du mouvement secondaire
$\mu$	Viscosité dynamique du fluide : $\rho\gamma$
$\mu_s$	Viscosité de la suspension
$\mu_r$	Viscosité relative de la suspension : $\mu_s/\mu$
$\sigma_{ij}$	Tenseur des contraintes
$\epsilon_{ij}$	Tenseur des taux de déformation
$(x, y, z)$	Système de coordonnées cartésiennes
$(r', \theta, z)$	Système de coordonnées cylindriques
$(r, \theta, \vartheta)$	Système de coordonnées sphériques

Les concentrations sont exprimées en pour cent .

## TABLE DES MATIERES .

	pages
PRINCIPALES NOTATIONS .....	1
INTRODUCTION GENERALE .....	11
PREMIERE PARTIE : RAPPORT BIBLIOGRAPHIQUE .....	15
Introduction .....	16
Chap. 1.1 : Phénoménologie dans l'écoulement de Taylor-Couette .....	17
Chap. 1.2 : Principales méthodes d'investigation .....	30
Chap. 1.3 : Fluides non-newtoniens - Lien avec la rhéologie des suspensions .....	42
Chap. 1.4 : Ecoulement de Taylor-Couette des fluides non-newtoniens .....	63
DEUXIEME PARTIE : PREMIERE TRANSITION EN  FLUIDE NEWTONIEN PUR .....	70
Introduction .....	71



Chap. 2.1 : Equation du mouvement et méthode de résolution .....	72
Chap. 2.2 : Détermination de la transition .....	82
Chap. 2.3 : Stabilité et champ hydrodynamique .....	104
Chap. 2.4 : Application de la méthode à la deuxième transition .....	121

TROISIEME PARTIE : PREMIERE TRANSITION EN PRESENCE  
DE PARTICULES SPHERIQUES RIGIDES ... 127

Introduction .....	128
Chap. 3.1 : Champ hydrodynamique dans une suspension de particules sphériques en écoulement de Couette .....	129
Chap. 3.2 : Perturbation au mouvement secondaire dûe aux particules .....	138
Chap. 3.3 : Modèle de détermination de la viscosité des suspensions .....	150
Chap. 3.4 : Effet de la concentration sur la transition .....	160

Chap. 3.5 : Stabilité de l'écoulement en présence des particules .....	185
CONCLUSION .....	205
REFERENCES .....	210

## LISTE DES FIGURES .

Fig. 1.a	Coupe des tourbillons permanents de Taylor .....	20
Fig. 1.b	Vue de face des tourbillons permanents de Taylor .....	20
Fig. 1.c	Tourbillons ondulants de Taylor .....	20
Fig. 1.d	Repérage des lignes neutres d'un liquide biréfringent soumis à un gradient de cisaillement .....	40
Fig. 1.e	Rhéogramme d'un fluide (1) rhéo-fluidifiant (2) visco-épaississant (3) newtonien .....	48
Fig. 1.f	Rhéogramme et variation de la viscosité en fonction du gradient de vitesse pour une suspension dilatante .....	49
Fig. 1.g et 1.h	Rhéogramme et variation de la viscosité ... en fonction du gradient de vitesse pour des suspensions pseudo-plastiques .....	49 50
Fig. 1.i	Rhéogramme d'une suspension viscoplastique de type Bingham .....	50

Fig. 1.j	Rhéogramme d'une suspension viscoplastique de type Herschell-Bulkley .....	50
Fig. 1.k	Rhéogramme et variation de la viscosité en fonction du gradient de vitesse pour une suspension rhéopectique .....	51
Fig. 1.l	Rhéogramme et variation de la viscosité en fonction du gradient de vitesse pour une suspension thixotropique .....	51
Fig. 1.m	Variation du nombre de Taylor critique en fonction des nombres de Weissenberg ....	68
Fig. 1.n	Variation de la longueur d'onde critique en fonction des nombres de Weissenberg ....	68
Fig. 2.a	Ecoulement entre cylindres coaxiaux tournants .....	73
Fig. 2.b	Contours d'intégration dans le plan complexe de la variable $t$ .....	88
Fig. 2.c	Courbe de stabilité marginale pour $\mu' = 0$ .....	99
Fig. 2.d	Courbe de stabilité marginale pour $\mu' = -1$ .....	101

Fig. 2.e	Variation du nombre de Taylor critique en fonction de $\mu'$ .....	102
Fig. 2.f	Variation du nombre d'onde critique en fonction de $\mu'$ .....	103
Fig. 2.g	Illustration de la loi de Landau $\sigma = c(1 - T_c/T)$ .....	113
Fig. 2.h	Champ hydrodynamique normalisé à 2.1 du mouvement secondaire	
2.h	Vitesse tangentielle .....	116
2.i	Vitesse radiale .....	117
2.j	Vitesse axiale .....	118
2.k	Pression .....	119
2.l	Energie cinétique .....	120
Fig. 3.a	Particule sphérique en écoulement de cisaillement .....	132
Fig. 3.b	Variation de la viscosité relative de la suspension en fonction du gradient des vitesses .....	155
Fig. 3.c	Variation de la viscosité relative de la suspension, en fonction de sa concentration .....	155

Fig. 3.d	Courbes de stabilité marginale pour $\mu' = 0$ .....	196
Fig. 3.e	Variation du nombre de Taylor critique en fonction du nombre de Bingham .....	197
Fig. 3.f	Variation du nombre d'onde critique en fonction du nombre de Bingham .....	198

## TABLEAUX .

	pages
Tableau 2.α    Concordance de nos résultats avec ceux de CHANDRASEKAR pour le nombre de Taylor et la longueur d'onde critiques, pour diverses valeurs de $\mu'$ .....	100
Tableau 2.β    Valeur du taux de croissance des tourbillons pour divers nombres de Taylor .....	112
Tableau 2.Γ    Concordance de nos résultats avec ceux de Davey pour le champ des vitesses tangentielles normalisées du mouvement secondaire .....	115
Tableau 3.α    Disparité des développements de la viscosité en fonction de la concentration .....	153
Tableau 3.β    Longueur d'onde et nombre de Taylor critiques de quelques fluides de Bingham .....	195

Tableau 3.Γ	Coefficients de la combinaison linéaire définissant le champ des vitesses pour quelques valeurs du nombre de de Bingham .....	200
Tableau 3.Σ	Champ des vitesses normalisées du mouvement à 3.π secondaire pour divers nombres de Bingham	
3.Σ	Vitesses tangentielles .....	201
3.Ε	Vitesses radiales .....	202
3.π	Vitesses axiales .....	203
Tableau 3.μ	Déplacement du point de vitesse maximale vers le cylindre intérieur causé par les effets non-newtoniens .....	204



## INTRODUCTION GENERALE .

Une tentative intéressante d'explication de la naissance de la turbulence est faite par LANDAU [1,2] . L'auteur attribue ce phénomène à une succession de modes d'instabilités (régime transitoire), nés de l'amplification d'une petite perturbation au sein de l'écoulement .

Ce schéma peut être mis en évidence dans des mouvements

- convectifs (problème de Rayleigh-Bénard), générés dans une couche de fluide horizontale, d'épaisseur donnée, soumise à la pesanteur et à un gradient de température vertical, et orienté vers le bas [3]

- tournants, confinés entre diverses géométries concentriques, [4] : sphères [5,6], cônes [7], ellipsoïdes [8], ...

Dans le second cas, la géométrie cylindrique, connue sous le nom d'écoulement de Taylor-Couette, a suscité de nombreux travaux tant théoriques qu'expérimentaux, depuis bientôt un siècle .

Les auteurs s'attachent généralement à étudier qualitativement et quantitativement le processus d'apparition et de développement des instabilités et de la turbulence . Ils considèrent que les particules solides, éventuellement présentes à des fins de visualisation [9] ou techniques, (effet Doppler sur des particules sphériques en anémométrie laser, [10]), ne modifient pas la rhéologie du fluide en mouvement .

Or, il est difficile de négliger définitivement tant dans la nature, (météorologie, ...) que dans l'industrie (aéronautique, ...) qui y trouvent une application [11,12], les effets liés à la présence de particules solides .

Dans ce champ d'études, l'essentiel des travaux est consacré à la réduction du frottement, obtenue par l'introduction d'additifs appropriés à l'écoulement en régime turbulent [13] .

C'est là un phénomène certes important mais dont les résultats peuvent difficilement être généralisés, du fait qu'ils sont liés au couple "solvant-additif" utilisé .

Par ailleurs, la solution obtenue est généralement non-newtonienne [14] . Ceci complique davantage le traitement théorique et tend à justifier la rareté des publications .

Il semble donc que la maîtrise du problème de Taylor-Couette pour les suspensions passe par une préalable investigation de modèles de base, où la forme des particules présente une certaine symétrie.

Le cas des sphères rigides qui trouve une application en hémorhéologie, [15], est naturellement indiqué pour cette approche, du fait de leur isotropie .

Dans la pratique, le mouvement de la suspension est soumis aux équations usuelles de conservation de la masse et de la quantité de mouvement . Aussi, le problème se ramène à celui de la détermination des lois rhéologiques à utiliser dans ces équations.

A faibles concentrations ( $c < 0.25$ ), les suspensions considérées sont newtoniennes [16].

Cependant, la loi de variation de leur viscosité en fonction de la concentration n'est unanimement admise (formule d'Einstein, [17]), que pour  $c < 0.10$ , [16, 18, 19].

Lorsque  $c > 0.25$ , la suspension est non-newtonienne. Son comportement est celui d'un fluide de Bingham [16].

Or, là encore, l'étude publiée par GRAEBEL [20] demande à être complétée.

Le présent travail comporte trois parties.

Dans le rapport bibliographique, nous présentons l'état des recherches sur l'écoulement de Taylor-Couette en fluides newtonien et non-newtonien.

Les calculs sur la transition au premier mode d'instabilité (transition laminaire-tourbillons de Taylor) dans la suspension nécessitent la connaissance du champ d'écoulement dans le solvant.

Aussi, présentons-nous cette étude dans la seconde partie. Une théorie linéaire suffit pour cela car, seuls les paramètres critiques et le champ hydrodynamique interviennent.

Dans la troisième partie, qui traite de la transition en présence des particules, nous étudions l'effet de la concentration sur l'apparition de l'instabilité dans le modèle newtonien, puis nous

complétons l'étude de GRAEBEL, de la transition dans un fluide de Bingham .

PREMIERE PARTIE .

RAPPORT BIBLIOGRAPHIQUE .

## INTRODUCTION .

La plupart des travaux sur l'écoulement de Taylor-Couette ont pour but de déterminer les étapes par lesquelles l'écoulement devient turbulent, ainsi que les paramètres qui influencent les transitions éventuelles .

Nous présentons quelques éléments de réponse, dégagés de la bibliographie, ainsi que les principales méthodes théoriques et expérimentales qui y ont conduit .

La présence de particules dans un écoulement de fluide newtonien a pour effet d'en modifier le comportement, à partir d'une certaine concentration .

Après avoir rappelé des éléments essentiels de la rhéologie des suspensions, nous présentons les principaux résultats des travaux sur les tourbillons de Taylor en fluide non-newtonien .

## CHAPITRE 1.1.

## PHENOMENOLOGIE DANS L'ÉCOULEMENT DE TAYLOR-COUETTE .

## 1.1.1. Régimes d'écoulement .

Les premières études sur l'écoulement entre deux cylindres coaxiaux en rotation (écoulement de Taylor-Couette) et de rayons très voisins furent effectuées par COUETTE [21]. Son étude, qui avait pour but, de déterminer la signification physique de la viscosité révéla une discontinuité dans la courbe de variation du couple de frottement en fonction de la vitesse .

Il attribua cette discontinuité à un changement de régime qui n'était pas prévu par la théorie laminaire .

Le critère de stabilité de RAYLEIGH [22] relatif au fluide parfait dans cette géométrie ne peut naturellement s'appliquer qu'aux écoulements sans effets de parois (météorologie, etc ...)

C'est en 1923 que TAYLOR, [23], dans une étude devenue classique, améliora ce critère par la prise en compte de la viscosité .

En désignant par  $(\Omega_1, \Omega_2)$  et  $(R_1, R_2)$  les vitesses de rotation et les rayons des cylindres intérieur et extérieur, respectivement, le processus par lequel l'écoulement de Taylor-Couette cesse d'être laminaire peut avoir les deux formes suivantes, [9, 24] :

- Dans le cas où  $\Omega_1 < \Omega_2$ , la transition est brusque .

Pour un nombre de Reynolds  $Re$  donné, le champ se divise en deux régions distinctes : l'une laminaire, et l'autre turbulente, séparées par des surfaces susceptibles de se propager

- Et si  $\Omega_1 > \Omega_2$ , la transition s'effectue à la suite de bifurcations .

A partir de l'écoulement de Couette de base, faisons croître progressivement  $\Omega_1$  . Lorsque  $Re$  est légèrement supérieur à une valeur critique  $Re_{c,1}$ , il se produit une brisure de la symétrie de l'écoulement selon l'axe des cylindres .

L'écoulement qui reste laminaire, se produit dans des cellules toroïdales contrarotatives, limitées par des plans transversaux . Les lignes de courant dans chaque cellule sont semblables à celles d'un tourbillon, (fig. 1a, 1b). La traversée de  $Re_{c,1}$  par  $Re$  a donné naissance à des tourbillons permanents de Taylor dans l'écoulement de Couette, dont on dit qu'il a subi une bifurcation C'est le régime des tourbillons de Taylor (T.T.).

Faisons encore croître progressivement  $\Omega_1$  . A partir d'une deuxième valeur critique  $Re_{c,2}$ , les cellules horizontales précédentes prennent une forme ondulée, (fig. 1c).

Par ailleurs, l'écoulement, qui reste encore laminaire, est périodique dans le temps . Il a subi une brisure des symétries azimuthale (par rotation par rapport à  $Oz$ ), et temporelle . Cette deuxième bifurcation fait apparaître des tourbillons ondulants de Taylor (régime T.O.T.).



Il est certes possible de mettre en évidence quelques autres bifurcations, la troisième faisant apparaître des tourbillons ondulants modulés de Taylor (T.O.M.T.), mais très vite, l'écoulement devient pleinement turbulent.

Notre étude concerne le second cas de transition.

Sans restreindre la généralité des résultats, nous ne considérerons que le cas classique du cylindre extérieur immobile.

Les régimes T.T. et T.O.T. se caractérisent par les trois faits essentiels suivants :

- à l'écoulement principal, se superpose un mouvement perturbateur à trois composantes

- la structure du champ d'écoulement n'est plus entièrement déterminée par le seul nombre de Reynolds. Les facteurs géométriques (conditions aux extrémités et longueur  $L$  des cylindres), et les conditions initiales jouent en effet un rôle important.

- le nombre de cellules de Taylor ou anneaux toroïdaux est pair si les conditions imposées aux extrémités sont identiques (système symétrique). Il est impair dans le cas contraire (système dissymétrique).

Ce principe introduit systématiquement une incertitude  $\Delta n = 1$  sur le nombre de cellules, dans toute expérience. Et partant, une incertitude de  $\Delta k = L/n$ , sur la longueur d'onde de l'écoulement axial.

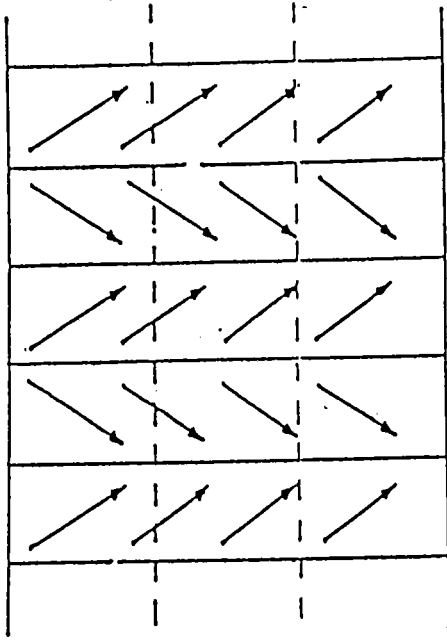


Figure 1.a : Coupe des tourbillons permanents de Taylor .

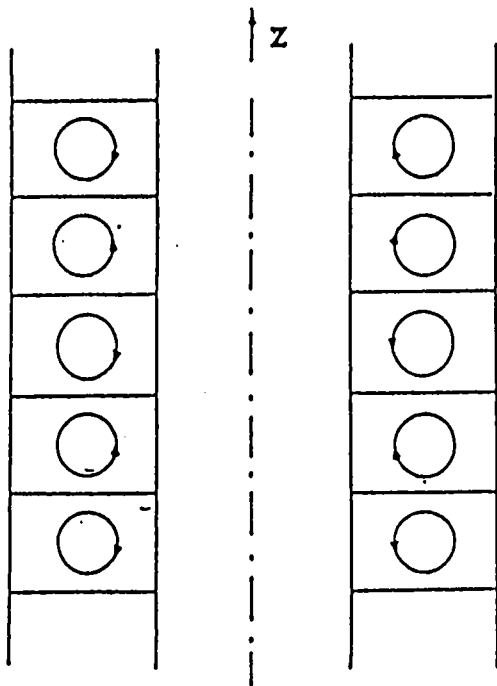


Figure 1.b : Vue de face des tourbillons permanents de Taylor .

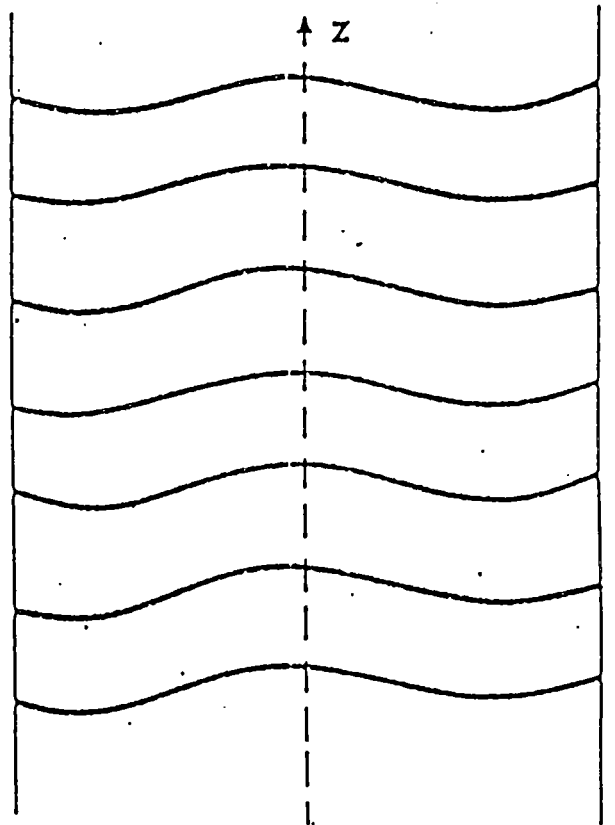


Figure 1.c : Tourbillons ondulants de Taylor .

### 1.1.2. Apparition et développement des T.T.

#### a). Apparition des T.T.

La représentation de l'écoulement par des cylindres infiniment longs donne des résultats en bon accord avec les expériences menées sur un appareillage de rapport d'aspect  $\Gamma$  (rapport entre la longueur et l'entrefer  $d$ ) supérieur à 6, [25], et de longueur suffisante, [25 à 28].

C'est ainsi que COLE [29] a obtenu dans de telles conditions d'expérience, un nombre de Taylor critique  $T_c$  (proportionnel au Reynolds critique), tel que  $T_c - T_{c_0} < 0.003 T_c$ .

Notons enfin que le paramètre longueur des cylindres n'a que très peu d'influence sur  $T_c$ .

Le décollement des T.T. ne se fait pas de manière simultanée sur l'ensemble des parois solides [30,31]. Ils apparaissent en premier aux extrémités. Ceci s'explique aisément par le fait que dans ces régions, préexiste une tendance à développer un mouvement non tangentiel, du fait des conditions aux frontières.

COLE [29] met en évidence ces premiers mouvements pour des valeurs du nombre de Taylor, voisines de  $0.7 T_c$ .

Ainsi, l'établissement du régime des T.T. n'est pas instantané.

PARK et Co. [32] observent pour  $R_1/R_2 = 0.678$  et  $0.88$ , dans un appareillage symétrique, une transition T.T. avec de l'hystérésis, à condition que l'accélération ne soit pas trop élevée.

b). Non-unicité des états d'écoulement .

La longueur d'onde axiale du mouvement perturbateur est fortement dépendante des conditions initiales .

Lorsque la mise en rotation du cylindre intérieur est progressive,  $k$  est constant pour des valeurs du rapport  $R_1/R_2$  (noté  $\beta$  ), comprises entre 0.1 et 1 . Entre ces deux valeurs, la longueur d'onde ne croît que de 7 pour cent, alors que  $T_c$  est multiplié par 10, [33] .

Il faudrait cependant noter l'exception relevée par BURKHALTER et KOSCHMIEDER [26], pour  $\beta = 0.525$  où ils retrouvent le cas de l'entrefer étroit ( $\beta = 0.727$ ) .

En fait, la longueur d'onde correspondant à une valeur supercritique  $T$  (supérieure à  $T_c$ ), du nombre de Taylor est parfaitement déterminée dans le cas de la mise en rotation progressive du cylindre intérieur .

Si le cylindre intérieur est mis en rotation soudaine, BURKHALTER et KOSCHMIEDER [26] obtiennent des longueurs d'onde inférieures à  $k_c$  .

Les écoulements obtenus sont stables pour de petites perturbations axisymétriques [34] et azimuthales [26], en phase avec le mouvement secondaire .

Ces écoulements peuvent être générés pour des valeurs de  $T$ , allant jusqu'à  $80 T_c$  .

Toutes les longueurs d'onde comprise entre  $k_c$  et celles obtenues dans la mise en rotation brusque, peuvent être mises en évidence, en jouant sur l'accélération donnée au rotor .

Ainsi, à une même valeur supercritique du nombre de Taylor, il correspond un grand nombre de longueurs d'onde représentant des états d'écoulement stables; et ce, contrairement aux écoulements convectifs, [35] .

### c). Développement des T.T.

WALTON [36] interprète le développement des T.T. comme la propagation d'un front tourbillonnaire .

En régime supercritique, ( $T = T_c + \epsilon$ ,  $\epsilon > 0$ ), les parois solides de l'appareillage sont le siège :

- d'une couche d'Ekman aux extrémités
- d'une couche limite sur les parois verticales .

La diffusion dans l'ensemble de la colonne fluide, des tourbillons générés dans ces couches, correspond dans certaines circonstances, à la propagation d'un front de T.T.

Par la résolution numérique (aux différences finies), des équations de Navier-Stokes, LÜCKE et Co. [37] obtiennent la vitesse de propagation de ce front, proportionnelle à  $\sqrt{\epsilon}$ , pour une gamme de nombres de Taylor tels que  $0.01 < \epsilon < 0.1$  dans les trois configurations  $\beta = 0.5$ ,  $0.75$  et  $0.9$  .

En fait, au cours de ce développement, l'écoulement n'occupera pas l'ensemble continu des états décrits en b .

Tout se passe comme si l'écoulement ne pouvait occuper que des états stables bien déterminés, et séparés par des barrières de potentiel qui ne peuvent être franchies que par l'apport de quantités finies d'énergie .

L'encadrement de la longueur d'onde de ces états d'écoulement est donné

- en théorie linéaire, par CHANDRASEKHAR [3] dans le cas de l'entrefer étroit .

Il propose que toutes les longueurs d'onde permises, appartiennent à une courbe (de stabilité marginale), d'équation :

$$\frac{T}{T_c} = (\pi^2 + a^2)^3 \times [C T_c a^2 (1 - \frac{16a^2 Ch^2 a/2}{(\pi^2 + a^2)^2 (a + sha)})]^{-1} \quad (1.1.1)$$

où  $a = 2\pi/k$  et C est une constante

- en théorie non-linéaire, par KOGELMAN et DIPRIMA [38], pour un entrefer quelconque . Ils obtiennent une gamme plus étroite que celle prévue en (1.1.1) :

$$k = \frac{k_c k_1 \sqrt{3}}{k_c + k_1 (\sqrt{3} - 1)} \quad (1.1.2)$$

où  $k_c$  est la longueur d'onde critique et  $k_1$ , celle obtenue en théorie linéaire .

Si le critère de sélection de la longueur d'onde (1.1.2) concorde avec les résultats expérimentaux de SNYDER et KARLSON [39], et de SNYDER [40], il ne permet malheureusement pas de déterminer les valeurs particulières que prendra la longueur d'onde au cours du développement des T.T.

### 1.1.3. Apparition et développement des T.O.T.

#### a). Apparition des T.O.T.

Lorsque  $T$  croît dans le régime supercritique, il se superpose aux cellules de Taylor précédentes, à partir d'une deuxième valeur critique  $T_{c,2}$ , un système d'ondes circumférentielles .

Le mouvement secondaire est périodique dans la direction axiale et dans la direction azimuthale .

\* NISSAN et Co. [41] observent que pour  $\beta = 0.85$  ,  $T_{c,2}$  se rapproche de  $T_{c,1}$ , à mesure que  $\mu'$  décroît .

COLES [9] confirme ce résultat pour  $\beta = 0.88$ , les deux valeurs devant coïncider pour  $\mu' = -3$  .

\* COGNET [42] note que le domaine de stabilité des ondes est beaucoup moins étendu que celui des cellules .

\* Signalons le comportement particulier relevé par JONES [43], dans un traitement numérique, et confirmé expérimentalement par PARK et Co. [44,45] pour  $\beta$  voisin de 0.78 .

Avec cette configuration, les ondes circumférentielles apparaissent dans une plage déterminée et reproductible, à l'intérieur du régime T.T.

\* KING et Co. [46] mesurent la vitesse de propagation des ondes circumférentielles en fonction de  $\Omega_1$ , pour  $0.63 \leq \beta \leq 0.95$  .

A  $\beta$  donné, lorsque  $\Omega_1$  augmente, elle décroît pour atteindre un plateau . La valeur prise sur le plateau croît de  $0.14 \Omega_1$  pour  $\beta = 0.63$  à  $0.45 \Omega_1$  pour  $\beta = 0.95$  .

Une variation comparable est obtenue par COGNET [42] .

b). Non-unicité des états d'écoulement .

Comme en T.T., l'écoulement, en régime T.O.T. présente une multiplicité d'états stables, pour une configuration donnée . Les nombres de cellules  $n$  et d'ondes azimuthales  $m$  qui décrivent la structure observée, dépendent, non seulement de la vitesse angulaire du rotor, mais aussi des conditions initiales. [9,42] .

Le régime T.O.T. se caractérise par le phénomène des mutations : lorsque  $T$  croît, la structure de l'écoulement se modifie, le couple  $(m,n)$  n'est pas préservé . La transition d'un état à un autre se fait par le changement de  $m$ , de  $n$  ou des deux . COGNET [42] montre que le changement de  $m$  seul peut s'effectuer soit de telle manière que dans une période, l'amplitude d'une oscillation croisse, et que celle-ci se subdivise en plusieurs autres, soit par fusion de deux ondes en une seule . Le changement de  $n$  se fait par apparition de deux nouvelles cellules aux extrémités de l'espace annulaire, auquel cas, la transition est brusque ; soit par une légère modification de la largeur des cellules, pour en laisser une se former à l'extrémité ouverte, dans un appareillage dissymétrique et dans ce cas, la mutation est lente [42] .

BENJAMIN [27] démontre que les mutations dans un appareillage de faible longueur, se font avec de l'hystérésis, dans une faible plage de nombres de Taylor . Ce résultat est confirmé par MULLIN [47] .



#### 1.1.4. Marche vers le chaos .

La mise en valeur des états d'écoulement non-turbulents au-delà du régime T.O.T. est très délicate .

En effet, la troisième transition, T.O.T. - T.O.M.T. est soumise à des conditions mises à jour par ROSS et HUSSAIN, [48] .

Les auteurs remarquent que le Taylor critique correspondant,  $T_{c3}$ , varie en sens inverse du rapport d'aspect . Il dépend également du nombre d'onde azimuthal .

Pour une valeur donnée de  $m$ , la troisième transition apparaît pour certaines combinaisons bien définies du couple "rapport d'aspect des cellules,  $\Gamma'$  ; vitesse de propagation des ondes,  $v'$  " .

Aussi est-il nécessaire de se placer dans un domaine adéquat du plan  $(\Gamma', v')$  pour observer le régime T.O.M.T.

La compréhension de l'apparition de la turbulence passe par la maîtrise de ces états dits pré-turbulents .

Dans ce régime, l'écoulement devient certes complexe, mais il préserve une structure "ordonnée".

GORMAN et Co., [49] calculent une période telle que, dans un repère lié aux ondes azimuthales, le champ à l'instant  $t + \Delta t$  ne diffère de celui observé à l'instant  $t$ , que d'une rotation qui soit un multiple de  $2\pi/m$  .

COGNET [50] montre qu'en écoulement turbulent, la cellule de Taylor persiste, bien après la disparition de l'onde .

### 1.1.5. Effet d'excentricité des cylindres sur la stabilité de l'écoulement .

Une application de l'écoulement de Taylor-Couette est fournie par le fonctionnement, en film mince ( $d/R_1 \ll 1$ ), d'un palier hydrodynamique non chargé .

Cependant, lorsque celui-ci transmet une charge, l'arbre et le coussinet ne sont plus coaxiaux, et l'étude précédente doit être modifiée . Il est alors nécessaire de considérer la stabilité de l'écoulement entre deux cylindres excentrés [51,52] .

Les études théoriques, qui donnent des résultats divers, peuvent être classées en deux catégories, associées à des travaux expérimentaux en accord .

- La théorie basée sur l'hypothèse de "stabilité locale", qui permet de négliger la composante radiale de la vitesse moyenne du fluide, montre que les tourbillons commencent à se développer dans la région de l'écoulement où le jeu est maximum, [53,54] .

Elle est vérifiée expérimentalement par YOUNES et Co. [55], puis par VERSTEEGEN et JANKOWSKI [56] . Ces auteurs obtiennent un nombre de Taylor critique (première transition) qui décroît d'abord, puis croît avec l'excentricité  $e$  (distance entre les centres de l'arbre et du coussinet) .

- La théorie basée sur l'hypothèse de "stabilité globale", développée par DIPRIMA et STUART [57,58] tient compte de la composante radiale du fluide . Elle situe la transition à  $90^\circ$  en deçà du point où le jeu est maximal .

Elle est vérifiée expérimentalement par COLE [59] puis par CASTLE et Co. [60]. Ceux-ci obtiennent une croissance continue de  $T_{c1}$ , avec l'excentricité relative,  $\epsilon = e/d$ .

## CHAPITRE 1.2.

## PRINCIPALES METHODES D'INVESTIGATION .

## 1.2.1. Les études théoriques .

Il existe 3 classes d'études théoriques : les linéaires, les non-linéaires et celles aux bifurcations, par ordre chronologique d'application au problème de Taylor-Couette .

## 1.2.1.1. Les théories linéaires .

Par celles-ci, l'écoulement de Couette est superposé à une petite perturbation, admettant une forme à variables séparées :  $f(r) \cdot e^{i(\omega t + m\theta + kz)}$  où  $t$  désigne le temps,  $\sigma$  une constante et  $r$  la coordonnée radiale dans un plan horizontal .

Les équations de Navier-Stokes et la condition d'adhérence aux parois des cylindres, imposées au champ résultant, en négligeant les termes quadratiques du mouvement secondaire, définissent un problème aux valeurs propres :

$$F(k, T, m, d) = 0 \quad (1.2.1)$$

La stabilité de l'écoulement est caractérisée par l'évanescence de la perturbation dans le temps . L'amplitude de celle-ci n'est pas accessible, du fait que la solution de (1.2.1) est déterminée à une constante multiplicative près .

La première résolution de (1.2.1) fut proposée par Taylor [23] dans le cas de l'entrefer étroit . Le champ est décomposé en une série de Fourier-Bessel .

Cette forme de la solution transforme le problème aux valeurs propres ci-dessus en un système infini d'équations homogènes, dont les inconnues sont les coefficients de la série .

La condition de nullité du déterminant de ce système détermine les paramètres critiques  $T_c$  et  $k_c$ , caractérisant la transition .

CHANDRASEKHAR [3] utilise la même méthode, avec les fonctions circulaires .

SYNGE [61] vainc le handicap de la taille du déterminant, inhérent à cette approche dite des fonctions d'essais, en faisant apparaître une fonction de courant dans (1.2.1).

Les méthodes de Galerkin [62], asymptotique [63] et aux variations [64] permettent également un traitement moins lourd que celui des fonctions d'essais .

LIN [65] présente une revue générale des théories linéaires utilisées dans notre problème .

Notons enfin l'étude numérique, réalisée par KRUEGER et Co. [66] .

Certes, les méthodes linéaires, du fait qu'elles négligent les effets d'interaction entre l'écoulement principal et le mouvement secondaire, ne sont pas aptes à prédire la séquence des états d'écoulement, mais elles déterminent de façon satisfaisante les transitions . Leur usage n'est pas abandonné, et elles continuent de servir [67].

### 1.2.1.2. Les théories non-linéaires .

Introduites par STUART [68] et WATSON [69] elles furent complétées par DAVEY [70,71] .

Au cours du temps, la forme exponentielle admise par les théories linéaires, pour la perturbation, rend non-négligeable, en régime supercritique, la présence dans les équations de Navier-Stokes, des termes quadratiques du mouvement secondaire .

Ces effets non-linéaires donnent naissance à une suite infinie d'harmoniques et à une distorsion du mouvement moyen . Ce dernier transfère de l'énergie, en permanence aux harmoniques; le mode fondamental, jouant le rôle de "catalyseur" .

En fait, ces effets non-linéaires se mesurent par une amplitude  $A_0$ , qui multiplie la forme admise par les théories linéaires pour la vitesse de la perturbation .

En écrivant qu'à l'équilibre, la dissipation visqueuse est compensée par le transfert d'énergie précédent, l'équation suivante est établie pour l'amplitude :

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} A_0^2 = \sigma A_0^2 - a_1 A_0^4 \quad (1.2.2)$$

Pour un état d'écoulement déterminé par un nombre de Taylor

$$T = T_c + \epsilon \quad , \quad \epsilon > 0 \quad (1.2.3)$$

DAVEY [69] donne la solution de (1.2.2), à l'ordre 1, sous la forme suivante :

$$A_0^2 = \sigma / a_1 \quad (1.2.4)$$

$a_1$  étant un réel positif .

SWINNEY et GOLLUB [72] montrent qu'alors, l'amplitude du mode fondamental est de l'ordre de  $\epsilon^{1/2}$  .

Celles du premier harmonique et du mouvement principal sont en  $\epsilon^{3/2}$ , ainsi de suite .

Les méthodes non-linéaires permettent également d'accéder au couple agissant sur le cylindre extérieur [73,74] .

Son expression générale, valable en T.T. et en T.O.T. est la suivante :

$$G = KR g_0 + g_1 + g_2 \quad (1.2.5)$$

avec

$$K = \pi L \epsilon \gamma^2 (1 + \beta) / 2(1 - \beta)^2$$

$$R = [(1 + \beta) / 2(1 - \beta)]^{1/2} T^{1/2}$$

$$g_0 = - \delta / (1 + \beta)^2 \quad (1.2.6)$$

$$g_1 = F'_1(R_1) (-a_0 / a_1)$$

$$g_2 = \{ F'_3(R_1) - (a_4 / a_1) F'_1(R_1) \} \beta^2$$

où  $F'_1(R_1)$ ,  $F'_3(R_1)$  et les constantes  $a_i$  sont données en [75].

L'approche numérique des méthodes non-linéaires est proposée par NEITZEL [76] , DIPRIMA et Co. [77] .

### 1.2.1.3. Les théories aux bifurcations .

Les théories non-linéaires décrites ci-dessus, étudient la stabilité d'une petite perturbation de forme imposée, et dont l'amplitude obéit à une équation préétablie, dans l'écoulement de Couette .

Les théories aux bifurcations recherchent les solutions engendrées par l'instabilité d'un état d'écoulement donné et partant, les séquences ultérieures du mouvement . Et ce, hors toute hypothèse sur l'évolution et la structure finale de l'écoulement.

Ainsi, l'établissement des équations qui déterminent les solutions bifurquées à la première transition s'effectue en utilisant une perturbation ayant la forme suivante :  $(\vec{u}(r,z), p(r,z))$  ; elle est supposée périodique en  $z$  (et pas nécessairement sinusoïdale), [78] .

L'écoulement résultant est soumis aux équations générales (non-linéaires) de Navier-Stokes et de continuité, et à la condition d'adhérence aux parois des cylindres .

VELTE [79] démontre l'existence des solutions de ce problème dans un appareillage infiniment long .

L'étude présentée par GUIRAUD et Co. [80] et par IOSS [81,82], établit pour l'amplitude de la perturbation, une équation identique à celle des théories non-linéaires .



L'étude en géométrie finie est présentée par BENJAMIN [83,84], qui met en évidence, outre les diverses bifurcations, le phénomène d'hystérésis dans certaines conditions.

En fait, des résultats plus complets sont obtenus dans les références [85 à 88] pour le problème de Rayleigh-Bénard .

Les équations de Navier-Stokes et de la chaleur sont écrites pour l'écoulement résultant, en négligeant les termes non-linéaires d'ordre supérieur à 2 . La fonction de courant et la température sont développées en série de Fourier selon les variables d'espace,  $x$  et  $z$  .

Les coefficients de ces séries ne dépendent que de  $X, Y$  et  $Z$ , fonctions uniquement du temps . Ces fonctions, qui sont liées à l'amplitude du mouvement convectif, définissent l'espace de phases du problème . Elles obéissent à un système d'équations différentielles ordinaires, non-linéaires, dans lesquelles le temps ne figure pas explicitement .

Dans ce modèle, les auteurs mettent en évidence :

- les régimes T.T. et T.O.T.
- un régime non périodique, analogue à la turbulence, admettant un attracteur étrange
- l'influence des conditions initiales sur l'évolution de l'écoulement .

Une étude générale de la stabilité de l'écoulement par les théories aux bifurcations peut être consultée en [89,90] .

### 1.2.2. Les études expérimentales .

Il existe trois classes d'études expérimentales : les méthodes optiques, de mesure du couple, et de mesures locales .

#### 1.2.2.1. Les méthodes optiques .

Les méthodes optiques donnent une description satisfaisante de la phénoménologie dans l'écoulement . Des efforts sont entrepris pour en tirer davantage de mesures quantitatives .

Elles consistent à visualiser l'écoulement, par introduction d'additifs appropriés, qui peuvent être soit liquides (colorants), [23], soit solides (paillettes d'aluminium,...) [9,91]

Notons que la visualisation reste un outil important de contrôle de l'écoulement auquel recourent d'autres méthodes . Ainsi, BRANDSTATER et SWINNEY [10] utilisent des particules synthétiques (Kalliroscope), dans leur technique de l'anémométrie laser .

#### 1.2.2.2. Les méthodes de mesure du couple .

La mesure du couple agissant sur le cylindre extérieur montre que cette grandeur dépend de la vitesse angulaire du rotor [92 à 94] .

La courbe correspondante présente une discontinuité à l'apparition des instabilités .

En régime laminaire de Couette, cette variation est donnée en [75] sous la forme :

$$G = \frac{4\pi \mu \Omega_1^2 R_1^2 R_2^2 L}{R_2^2 - R_1^2} \quad (1.2.7)$$

En régime T.T., DONNELLY et SIMON [94], à partir de mesures expérimentales, déduisent la relation empirique suivante :

$$G' = a \Omega_1^{-1} + b \Omega_1^{1.364} \quad (1.2.8)$$

Lorsque  $T \gg T_c$ , l'auteur obtient :

$$G'' = L \epsilon \Omega_1^2 R_1^4 \left( \frac{\gamma}{\Omega_1 R_1 d} \right)^{1/2} \left( \frac{d}{R_1} \right)^{1/4} \quad (1.2.9)$$

Les valeurs obtenues dans ces mesures, sont en bon accord avec les relations établies en théories non-linéaires .

Du fait qu'elles rendent une valeur moyenne, les méthodes de mesure du couple ne sont pas appropriées à une étude en profondeur de l'écoulement . Celle-ci nécessite en effet des mesures locales .

#### 1.2.2.3. Les méthodes de mesures locales .

La mise en oeuvre des méthodes de mesures locales est très délicate, du fait que les sondes généralement utilisées perturbent notablement l'écoulement .

DONNELLY et Co. [95,96] proposent la technique à ions ou méthode de la double couche : une électrode annulaire, située à la surface du cylindre extérieur recueille le courant traversant le champ d'écoulement, préalablement rempli d'un liquide faiblement conducteur . Le courant mesuré est sensible à la composante radiale de la vitesse .

Le principal inconvénient de la méthode est de fournir des mesures relatives, du fait qu'elle ne permet pas de mesures en régime laminaire stable .

SNYDER et LAMBERT [97,39] placent à la paroi du cylindre extérieur, une sonde à thermistance chauffée, qui diffuse de la chaleur au sein du liquide . Entre l'état de mouvement et celui de repos, la variation relative de l'écart de température entre le liquide et la thermistance est proportionnelle à la puissance  $1/3$  du gradient de vitesse, à sa surface .

L'anémométrie à film chaud, utilisée par FRENE [52] est basée sur le même principe .

L'inconvénient de cette méthode est la difficulté que présente l'isolement de l'élément chauffant, par rapport à la paroi .

Récemment, HOCQUART, et Co. [98] ont appliqué la biréfringence d'écoulement ou effet Maxwell au régime transitoire de l'écoulement de Taylor-Couette .

Cette technique, classique en Mécanique des Fluides, [99,100] utilise l'effet optique de solutions diluées de polymères, ayant

la forme d'ellipsoïdes ou de bâtonnets . Le T.M.V. (Tobacco Mosaic Virus) dans l'eau, est la plus utilisée .

Dans l'appareillage de Couette, la distribution des orientations des particules n'est pas uniforme, du fait qu'elles sont soumises à la compétition entre les mouvements hydrodynamique et brownien. HOCQUART, [101] présente une étude détaillée de ce phénomène .

La direction  $L_1$ , de densité d'orientation maximale des particules (fig. 1.d), et sa normale dans le plan de l'écoulement,  $L_2$ , définissent les lignes neutres .

Les solutions étudiées modifient la polarisation d'un faisceau de lumière polarisée .

Cependant, un faisceau polarisé selon  $L_1$  ou  $L_2$  conserve son état de polarisation .

Il s'agit alors de tracer la courbe de variation de l'angle  $\Psi_{n..x}$  entre  $L_1$  et la direction de l'écoulement, en fonction du rapport  $\alpha = A/B$ , où  $A$  est le gradient des vitesses, et  $B$ , le coefficient de diffusion brownienne, accessible à l'expérience .

Cette courbe présente une discontinuité à la transition laminaire-tourbillons de Taylor .

Les travaux actuels visent à observer les séquences ultérieures de l'écoulement, par cette méthode en développement .

Techniques de mesures locales ayant largement contribué à la compréhension des transitions supérieures, l'anémométrie laser et la polarographie, continuent d'apporter à l'écoulement de Taylor-Couette .

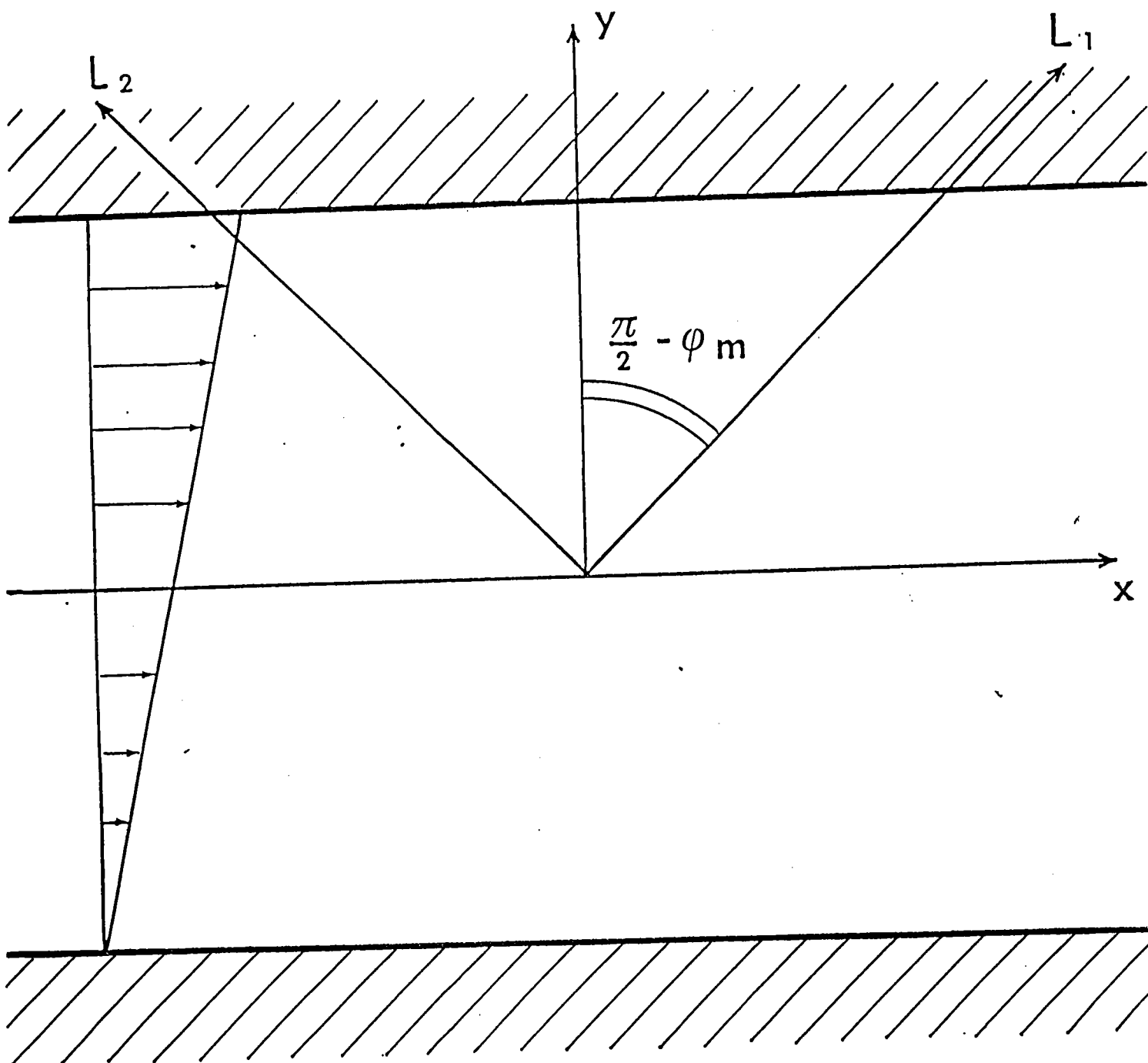


Figure 1.d : Repérage des lignes neutres d'un liquide biréfringent soumis à un gradient de cisaillement .

- Le principe de l'anémométrie laser est le suivant [102,103] : des particules sphériques solides sont placées dans l'écoulement. L'appareillage est soumis à un faisceau lumineux .

L'exploitation de l'effet Doppler résultant permet de mesurer la composante radiale de la vitesse .

Avec cette méthode, BRANDSTATER et Co. [10] ont pu mettre en évidence, un attracteur étrange pour l'écoulement de Taylor-Couette .

- L'application de la polarographie au problème de Taylor-Couette est due à COGNET, [32,41,104,105] .

Une électrode inattaquable est plongée dans un système oxydo-réducteur . Des précautions spécifiques permettent de restreindre l'origine du courant dû à un potentiel différent de celui d'équilibre de l'électrode, à :

- la diffusion des ions, provenant d'un gradient de concentration élevé au niveau de l'électrode

- leur transport, par écoulement de la solution .

La mesure du courant permet d'accéder au gradient de vitesse à la paroi .

Cette méthode conduit à une détermination satisfaisante des paramètres critiques, de l'amplitude de la perturbation, de la vitesse de propagation des ondes circonférentielles et du coefficient de frottement moyen .

Elle s'utilise bien dans les divers régimes d'écoulements [106,107] et dans l'étude de la réduction de frottement [49] .

## CHAPITRE 1.3

## FLUIDES NON-NEWTONIENS : LIEN AVEC LA RHEOLOGIE DES SUSPENSIONS

## 1.3.1. Généralités .

L'étude des propriétés rhéologiques d'un fluide est déterminée par une loi de comportement qui relie le tenseur des contraintes  $\sigma_{ij}$  à celui des taux de déformation  $E_{ij}$ , défini par :

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}) \quad (1.3.1)$$

en coordonnées cartésiennes  $x_i$ ,  $i = 1, 2, 3$

De manière générale, cette loi n'est pas accessible par l'expérience [108] .

Cependant, l'écoulement de cisaillement, qui constitue la base des mesures viscométriques [109, 110], permet de déterminer les grandeurs qui caractérisent le comportement du fluide .

Il s'agit de l'écoulement permanent de vitesse  $(0, Ax, 0)$  entre deux plans parallèles . Le coefficient de viscosité est défini par :

$$\mu = \frac{\sigma_{12}}{A} \quad (1.3.2)$$

Les trois quantités  $\mu$ ,  $\sigma_{11} - \sigma_{33}$  et  $\sigma_{22} - \sigma_{33}$  sont appelées les fonctions viscosimétriques . Dans la suite, nous désignerons  $\sigma_{12}$  par  $\sigma$  .



Hormis certains écoulements, tels les écoulements élongationnels (caractérisés par un gradient de vitesse longitudinal) [111 à 113] dont l'étude nécessite la détermination de deux grandeurs supplémentaires, les fonctions viscométriques suffisent à décrire la rhéologie de nombreux fluides usuels [108]. Elles permettent de les classer en deux catégories :

- les fluides newtoniens, pour lesquels  $\mu$  est indépendant de  $E$ , et

$$\sigma_{11} - \sigma_{33} = \sigma_{22} - \sigma_{33} = 0 \quad (1.3.3)$$

- les fluides non-newtoniens, pour lesquels les fonctions viscométriques varient avec  $E_{12}$ , noté  $E$ .

Les rhéogrammes, (courbes  $\sigma(E)$ ), permettent de distinguer les fluides rhéo-fluidifiants et les fluides visco-épaississants : fig.1.e, courbes (1) et (2), respectivement. Ces courbes montrent que, dans la limite où  $E$  tend vers 0, tous les fluides sont newtoniens.

Nous nous intéresserons au cas concret des suspensions homogènes, qui concerne notre étude. Elles sont constituées d'une phase solide (particules identiques), uniformément répartie dans une phase liquide (solvant).

De nombreux travaux théoriques et expérimentaux [16] font apparaître que les principaux paramètres influençant la rhéologie des suspensions à température donnée et à l'exclusion de toute transformation physico-chimique (cristallisation, magnétisation, réaction chimique, etc...) sont :

- la nature des matériaux en présence
- la concentration de la phase solide
- la forme et les dimensions des particules

Si le solvant est un liquide non-newtonien, la suspension a un comportement non-newtonien à faibles et à grandes concentrations

Lorsque le solvant est newtonien, (par exemple l'eau), la suspension a un comportement newtonien pour des concentrations inférieures à une valeur critique,  $c_c$ .

Au-delà de ce seuil, la suspension est non-newtonienne.

VAND [114] montre que le formalisme newtonien ne peut pas être appliqué lorsque la concentration excède 0.37.

Les résultats expérimentaux présentés par divers auteurs, ont été rassemblés par THOMAS [115]. Ils établissent que la viscosité croît lentement avec la concentration pour des suspensions diluées de particules sphériques rigides.

Lorsque  $c > c_c$ , cette croissance devient rapide du fait des interactions des particules solides (collisions, mouvement brownien, interactions hydrodynamiques, etc...)

Dans certains cas, le comportement non-newtonien dépend du temps.

Nous allons, d'une part, décrire les principaux types de comportements non-newtoniens, et d'autre part, présenter des lois de comportement usuelles. (Elles établissent une relation entre le tenseur des contraintes  $\sigma$  et celui des taux de déformation  $\dot{\epsilon}$ ).

1.3.2. Suspensions dont le comportement ne dépend pas du temps .

a). Comportement dilatant .

C'est un comportement visco-épaississant qui s'accompagne d'un accroissement du volume de la suspension avec la contrainte. Il se manifeste par exemple à grande concentration pour des suspensions de Silicate de Potassium dans l'eau .

Les figures (1.f, a et b) présentent respectivement le rhéogramme et la variation  $\mu(\dot{\epsilon})$  pour ces suspensions .

b). Comportement pseudo-plastique .

Dans ce cas, la viscosité diminue lorsque la contrainte croît. Il existe deux types de comportements pseudo-plastiques :

- les suspensions dont le rhéogramme est une fonction univoque (fig. 1.g, a et b) : oxyde de Zinc à grande concentration, par exemple .
- celles dont le rhéogramme est une fonction à valeurs multiples (fig. 1.h, a et b) : bentonite, par exemple .

c). Comportement viscoplastique .

Certaines suspensions ne se mettent en mouvement que quand la contrainte atteint une valeur limite  $\sigma_0$  .

Il existe deux types de comportements viscoplastiques :

- les suspensions viscoplastiques de type Bingham (suspensions de barite par exemple) . Leur rhéogramme est représenté en trait plein sur la figure 1.i . Dans la pratique, on utilise un

rhéogramme linéaire, c'est-à-dire qu'on prend  $\sigma_y^h = \sigma_y^b = \sigma_0$

- les suspensions viscoplastiques de type Herschell-Bulkley (dioxyde de Titanium à grande concentration, par exemple)

Elles peuvent être, soit pseudoplastiques (courbe a, fig.1.j), soit dilatantes (courbe b).

#### d). Comportement viscoélastique .

Il se caractérise par l'existence de contraintes normales . C'est le cas pour certaines solutions de polymères . Leur importance est évidente . Ce concept peut en effet couvrir la rhéologie des suspensions dans son ensemble .

#### e). Comportement viscoélastoplastique .

De telles suspensions présentent simultanément un comportement viscoélastique et viscoplastique . C'est le cas de certaines encres d'imprimerie .

### 1.3.3. Suspensions dont le comportement dépend du temps .

#### a). Comportement rhéopectique .

Pour de faibles valeurs du gradient de vitesse , le rhéogramme de certaines suspensions , kaolin à grande concentration par exemple, présente une boucle de type hystérisis (fig.1.k,a) : charge (courbe OAB), puis décharge (courbe BCA) et retour à l'état initial, après un certain temps de relaxation .

La figure (1.k,b) illustre la variation de la viscosité des suspensions rhéopectiques en fonction du temps .

b).Comportement thixotropique .

Le rhéogramme de ces suspensions (certaines peintures) présente également une boucle de type hystérisis (fig.1.1,a) .

Contrairement aux suspensions rhéopectiques,leur courbe de charge,OAB,se situe au-dessus de celle de décharge BCO .

Par ailleurs,leur viscosité décroît au cours du temps de relaxation (fig.1.1,b) .

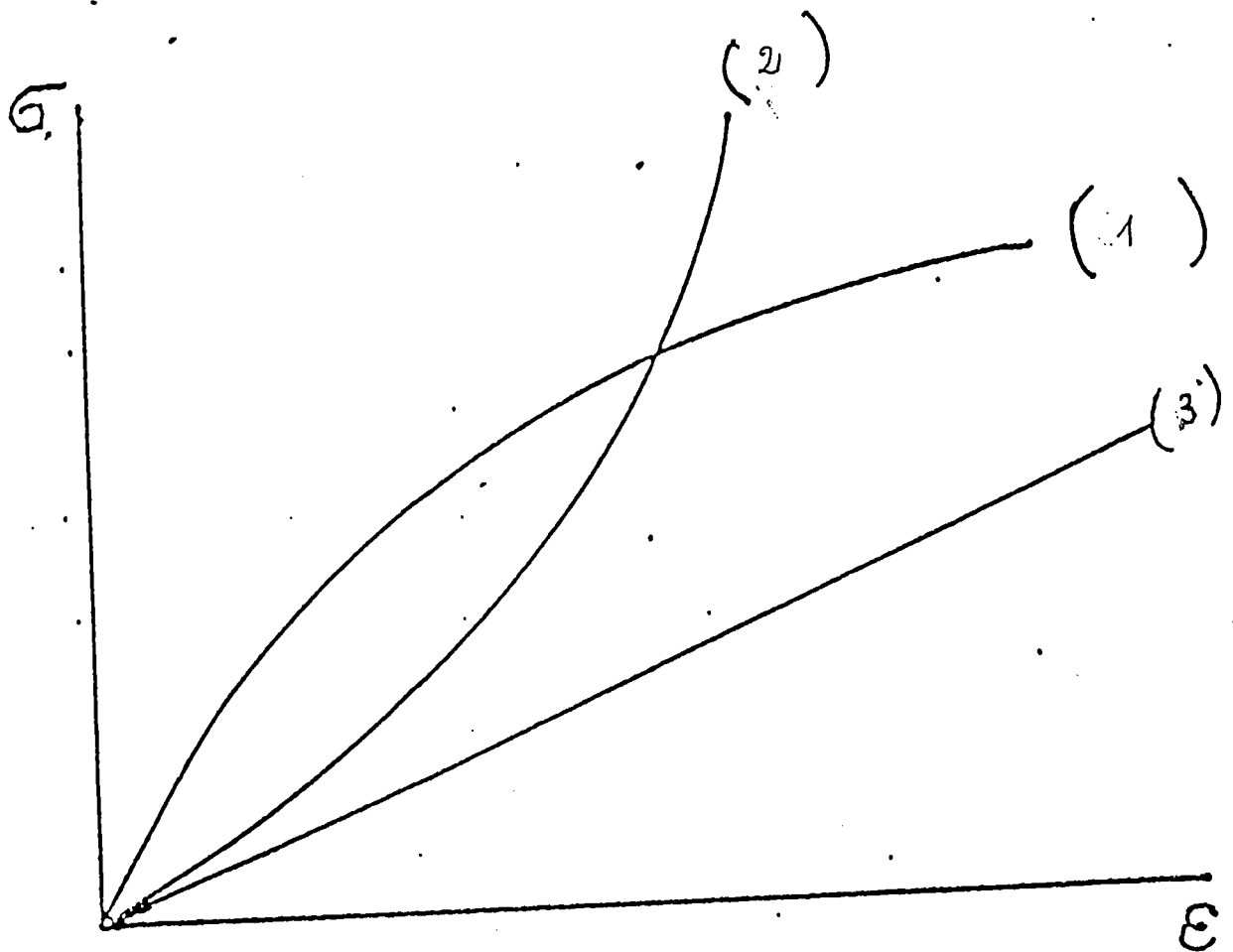


Figure 1.e : Rhéogramme d'un fluide

(1): rhéo fluidifiant, (2) visco épaisissant, (3) newtonien

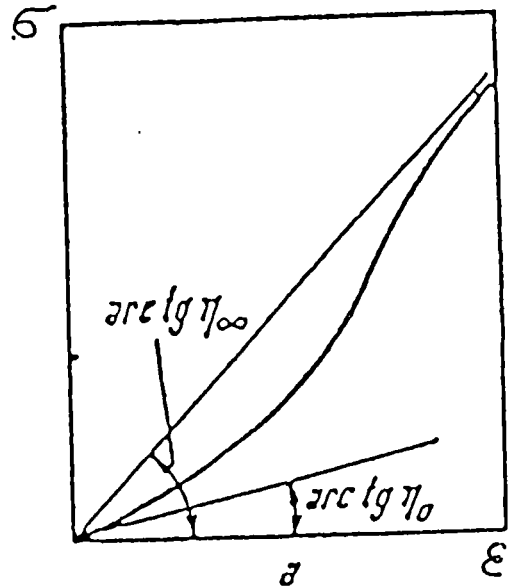
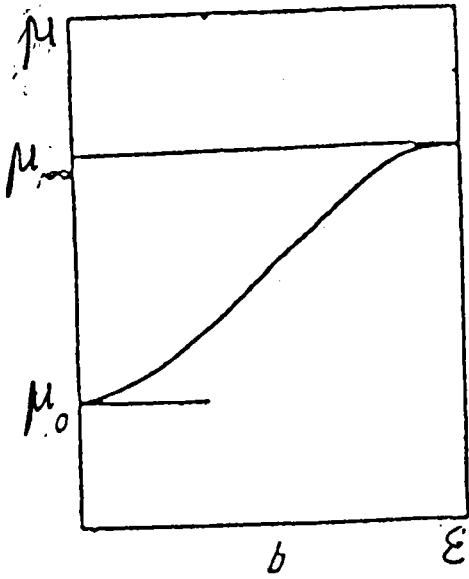


Figure 1.f :

b). Variation  $\mu(\epsilon)$  et a). Rhéogramme pour une suspension dilatante.

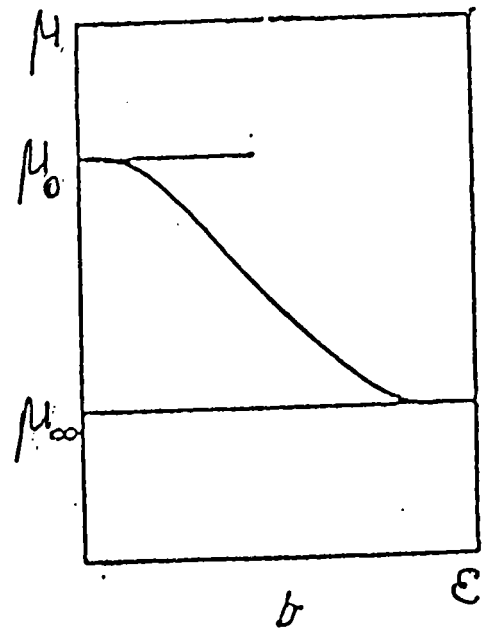
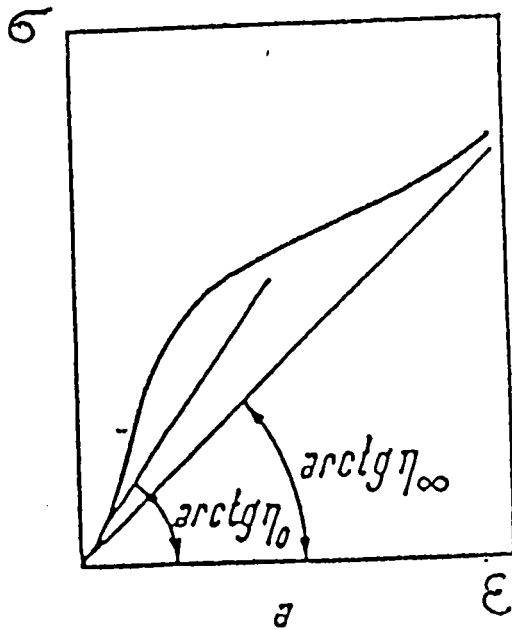


Figure 1.g :

a). Rhéogramme et b). Variation  $\mu(\epsilon)$  pour une suspension pseudo plastique.

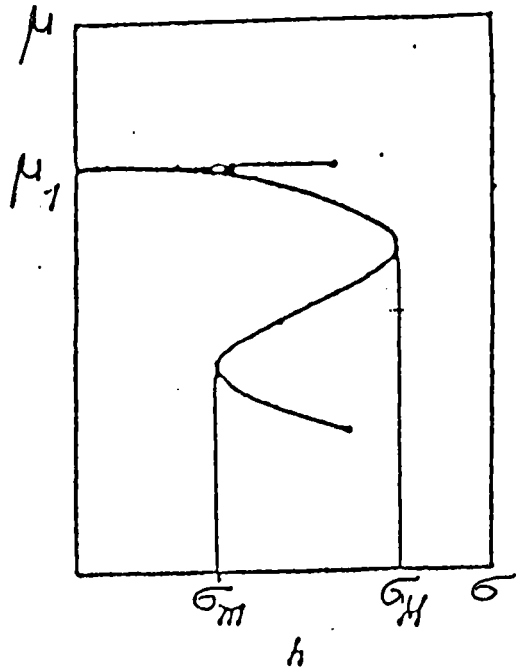
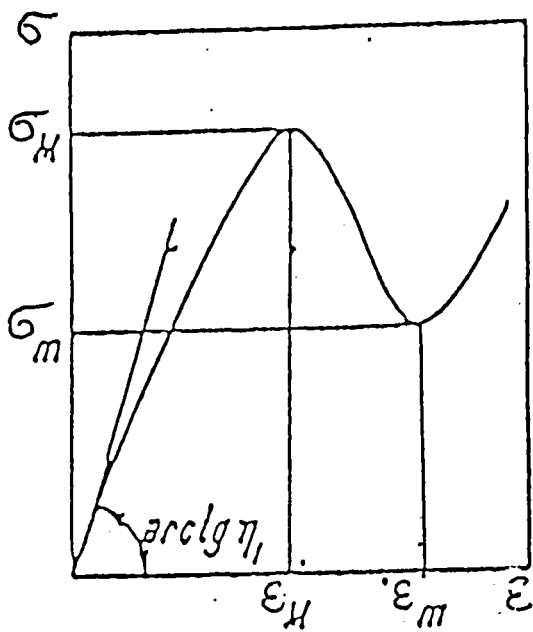


Figure 1.h :

a).Rhéogramme

et

b).Variation  $\mu(\sigma)$

pour des suspensions pseudo-plastiques à valeurs multiples .

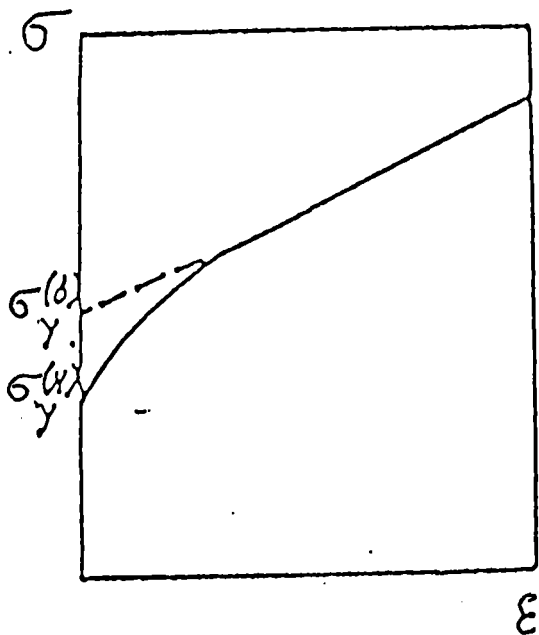


Figure 1.i : Rhéogramme d'une suspension viscoplastique de type Bingham .

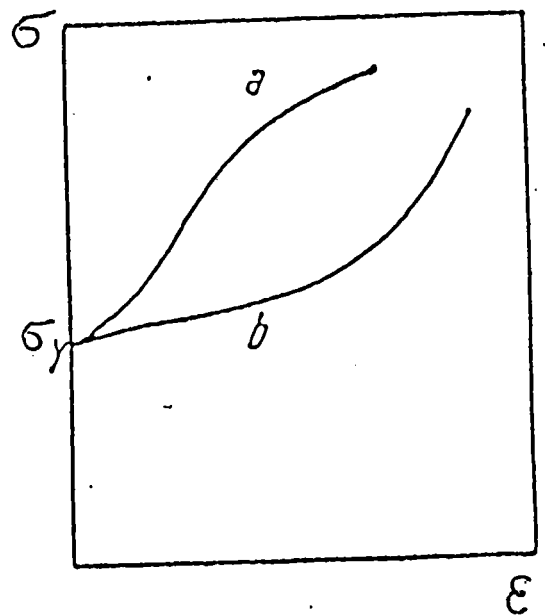


Figure 1.j : Rhéogramme d'une suspension viscoplastique de type Herschel-Bulkley .



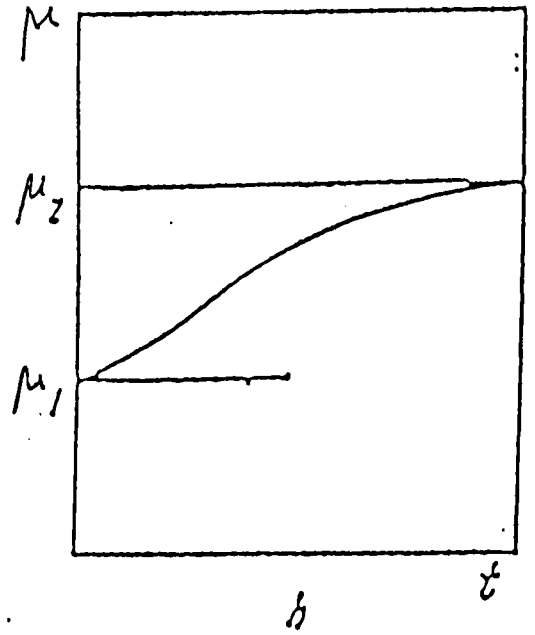
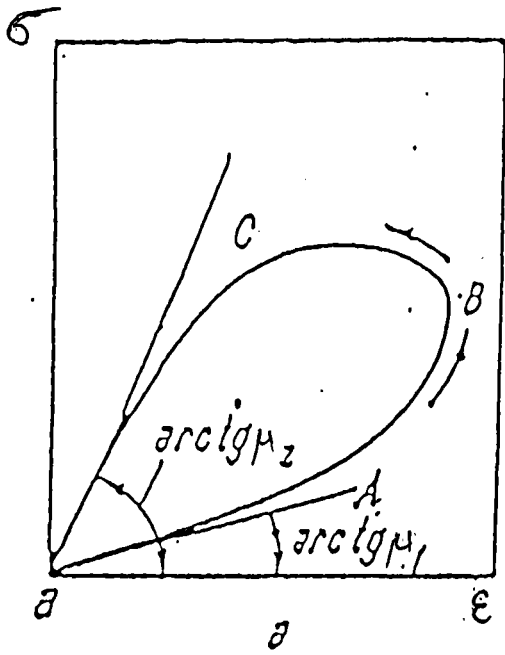


Figure 1.k :

a). Rhéogramme

et

b). Variation  $\mu(t)$

pour une suspension rhéopectique .

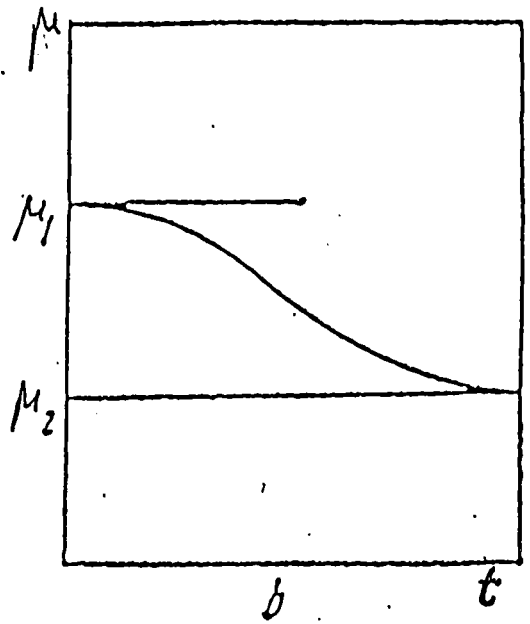
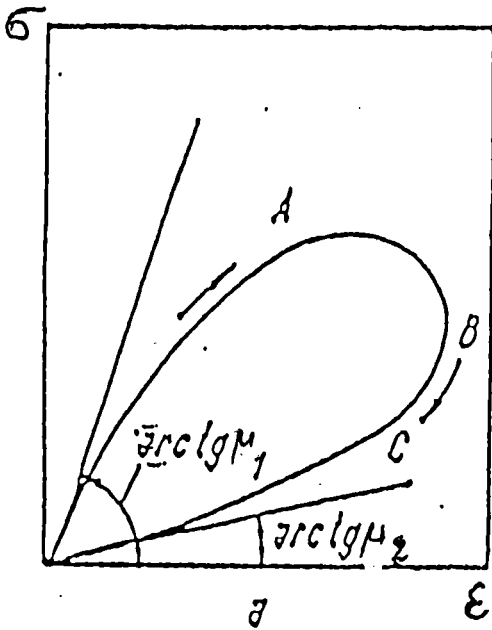


Figure 1.l :

a). Rhéogramme

et

b). Variation  $\mu(t)$

pour une suspension thixotropique .

#### 1.3.4. Lois de comportement : principes d'élaboration .

L'élaboration de lois de comportement obéit aux quatre principes suivants [116,117]

##### a). Dépendance du passé ou principe de causalité .

Le tenseur des contraintes  $\sigma(M,t)$  au point  $M$  et à l'instant  $t$  est parfaitement déterminé par le mouvement antérieur du fluide .

##### b). Principe de localisation spatiale .

Le mouvement des seules particules infiniment voisines de  $M$  influence le tenseur des contraintes  $\sigma(M,t)$  .

##### c). Principe de l'indifférence matérielle ou d'objectivité .

Les lois de comportement doivent être indépendantes du repère dans lequel elles sont écrites .

##### d). Principe de l'indétermination due aux liaisons internes .

Le tenseur des contraintes est déterminé à une pression hydrostatique près .

Une revue générale des modèles non-newtoniens peut être consultée en [118,119] .

Nous en présentons quelques-uns, représentatifs de la classification qui en est généralement faite .

Dans ces lois de comportement, toutes les grandeurs autres que  $\sigma$  et  $\dot{E}$  sont les paramètres du modèle .

### 1.3.5. Fluides newtoniens généralisés .

D'après la définition donnée au paragraphe (1.3.1), la loi de comportement des fluides newtoniens aura la forme suivante :

$$\dot{\sigma} = \mu \cdot \dot{\epsilon} \quad (1.3.4)$$

où  $\mu$  est une constante appelée viscosité newtonienne .

Les modèles newtoniens généralisés établissent une loi de comportement dont la forme est la suivante :

$$\dot{\sigma} = \mu(\dot{\epsilon}) \cdot \dot{\epsilon} \quad (1.3.5)$$

La relation  $\mu(\dot{\epsilon})$ , dont la détermination est empirique, distingue entre autres :

a). Le modèle d'OSTWALD DE WAELE .

$$\mu(\dot{\epsilon}) = m \dot{\epsilon}^{n-1} \quad (1.3.6)$$

où  $m$  et  $n$  peuvent dépendre de la concentration, de la pression et de la température .

Il décrit le fluide newtonien pour  $m = \mu$  et  $n = 1$

Il donne en conduites, des profils de vitesse et des coefficients de frottement satisfaisants . Par ailleurs, il fournit des rhéogrammes corrects de solutions concentrées [49] .

Mais il présente diverses lacunes, notamment la divergence de la viscosité pour des gradients de vitesse (en cisaillement) très faibles ou très grands, l'inadéquation à décrire des comportements dépendant du temps . (paragraphe 1.3.3) .

b). Le modèle de CARREAU .

Il comble les insuffisances précédentes par l'introduction des paramètres  $k$  , temps caractéristique du milieu ;  $\mu_0$  et  $\mu_\infty$  , viscosités pour les gradients de vitesses nul et infini . Il s'écrit :

$$\frac{\mu - \mu_0}{\mu_\infty - \mu_0} = [1 + (k \dot{\epsilon})^2]^{(n-1)/2} \quad (1.3.7)$$

Il a été utilisé avec succès dans la rhéologie des polymères, malgré la difficulté que présente la détermination de  $\mu_\infty$  . En effet, les gradients élevés provoquent un échauffement du fluide qui pourrait modifier les propriétés des polymères en solution . [120]

### 1.3.6. Modèles viscoélastiques linéaires .

Du fait que les modèles newtoniens généralisés préservent le concept de la viscosité newtonienne (liée aux configurations de cisaillement), ils ne peuvent décrire des phénomènes plus complexes tels que la viscoélasticité (paragraphe 1.3.2).

Ici, les lois de comportement font apparaître des dérivées temporelles de tous ordres de  $\dot{\epsilon}$  et  $\ddot{\epsilon}$  .

Elles peuvent indifféremment s'écrire sous forme

- différentielle :

$$H(t) \cdot \dot{\epsilon} = K(t) \cdot \dot{\epsilon} \quad (1.3.8)$$

où  $H(t)$  et  $K(t)$  sont des opérateurs différentiels linéaires par rapport au temps .

- ou intégrale :

$$\dot{\sigma} = \int_{-\infty}^t G(t - t') \cdot \dot{E}(t') dt' \quad (1.3.9)$$

$G(t - t')$  est le module de relaxation . Sa détermination empirique conduit à le développer en une combinaison linéaire d'exponentielles :

$$\sum_k (\mu_k / k_k) \exp[-(t - t') / k_k] \quad (1.3.10)$$

$\mu_k$  et  $k_k$  désignant des constantes .

Deux exemples de telles lois de comportement sont fournis par :

a). Le modèle de MAXWELL .

La loi de comportement sous forme différentielle est donnée par :

$$\dot{\sigma} + k_0 \frac{\partial}{\partial t} \dot{\sigma} = \mu_0 \dot{E} \quad (1.3.11)$$

et sous forme intégrale par :

$$\dot{\sigma} = \int_{-\infty}^t ((\mu_0 / k_0) \cdot \exp[-(t - t') / k_0]) \dot{E}(t') dt' \quad (1.3.12)$$

$\mu_0$  est la viscosité et  $k_0$ , le temps caractéristique .

En régime permanent, ce modèle décrit un fluide newtonien de viscosité  $\mu_0$ ; et pour des variations rapides de  $\dot{\epsilon}$  avec le temps, l'intégration de (1.3.11) donne la loi de Hooke .

b). Le modèle de JEFFREYS .

Il s'obtient en introduisant dans (1.3.11) ou dans (1.3.12), un troisième paramètre, caractéristique du temps .

$$\dot{\sigma} + k_1 \frac{\partial}{\partial t} \sigma = \mu_0 \left( \dot{\epsilon} + k_2 \frac{\partial}{\partial t} \dot{\epsilon} \right) \quad (1.3.13)$$

$$\begin{aligned} \sigma = \int_{-\infty}^t & \left\{ \left( \frac{\mu_0}{k_1} \right) \left[ \left( 1 - \frac{k_2}{k_1} \right) \exp\left[ - (t - t') / k_1 \right] + \dots \right. \right. \\ & \left. \left. + 2 \frac{k_2}{k_1} \delta(t - t') \right] \right\} \dot{\epsilon}(t') dt' \end{aligned} \quad (1.3.14)$$

Ici, la fonction de Dirac  $\delta(x)$  est définie par :

$$\int_{-a}^{+a} f(x) \delta(x) dx = 2 \int_0^a f(x) \delta(x) dx = f(0) \quad (1.3.15)$$

### 1.3.7. Modèles viscoélastiques quasi-linéaires .

Lorsque les déformations et les taux de déformations ne sont pas infinitésimaux, les lois de comportement linéaires cessent d'être valables .

La généralisation des lois de comportement linéaires a pour but d'assurer le principe d'objectivité (paragraphe 1.3.4), auquel ne sont pas soumises ces dernières .

Une méthode pour assurer l'objectivité des lois constitutives consiste à les écrire dans un repère se déplaçant avec le fluide, et subissant une rotation égale au tourbillon local.

Le mouvement des vecteurs unitaires  $\vec{e}_1^*$ ,  $\vec{e}_2^*$  et  $\vec{e}_3^*$  de ce repère à l'instant  $t$  est défini par les relations suivantes, dans lesquelles  $t' < t$

$$\frac{d}{dt'} \vec{e}_i^*(t') = -\frac{1}{2} [\vec{w}(t') \cdot \vec{e}_i^*(t')] \quad (1.3.16)$$

$$\begin{aligned} \vec{e}_i^*(t') &= [\vec{e}_i \cdot \dot{\Omega}(t, t')] \\ \dot{\Omega}(t, t') &= \dot{\xi} \end{aligned} \quad (1.3.17)$$

où  $\dot{\xi}$  est le tenseur rotation et  $\dot{w}$  est un tenseur qui caractérise le tourbillon local. Il est défini par :

$$\dot{w} = (\nabla \cdot \dot{v}) - (\nabla \cdot \dot{v})^{\wedge} \quad (1.3.18)$$

Le symbole  $\dot{T}^{\wedge}$  représente la transposée hermitienne du tenseur  $\dot{T}$ .

$d/dt'$  et  $\vec{e}_i$  désignent l'opération de dérivée particulière et les vecteurs unitaires d'un repère fixe, respectivement.

Il s'agit alors d'écrire une relation entre  $\dot{\sigma}^*$  et  $\dot{\epsilon}^*$ . La loi constitutive s'obtient en écrivant cette relation dans le repère fixe,  $(\dot{\sigma}(\dot{\epsilon}))$ .

Deux exemples de lois constitutives quasi-linéaires sont fournis par :

a). Le modèle de FROELICH et SACK .

Il généralise le modèle de JEFFREYS .

Si nous écrivons (1.3.13) et (1.3.14) dans le repère objectif et que nous transformions la relation  $\dot{\sigma}^*(\dot{E}^*)$  obtenue dans le repère fixe, il vient :

$$\dot{\sigma} + k_1 \frac{D}{Dt} \sigma = -\mu_0 \left( \dot{E} + k_2 \frac{D}{Dt} \dot{E} \right) \quad (1.3.19)$$

$$\dot{\sigma} = - \int_{-\infty}^t \{ (\mu_0 / k_1) [(1 - k_2 / k_1) \exp[-(t - t') / k_1] + \dots + 2 k_2 \delta(t - t')] \} \dot{\Gamma}(t, t') dt' \quad (1.3.20)$$

où  $D/Dt$ , dérivée de Jaumann ou dérivée objective est définie par :

$$\frac{D}{Dt} \dot{E} = \frac{d}{dt} \dot{E} + \frac{1}{2} (\dot{w} \cdot \dot{E} - \dot{E} \cdot \dot{w}) \quad (1.3.21)$$

$\dot{\Gamma}(t, t')$  est le tenseur objectif des taux de déformation

$$\dot{\Gamma}(t, t') = \{ \dot{\Omega}(t, t') \cdot \dot{E}(t') \cdot \dot{\Omega}^{\wedge}(t, t') \} \quad (1.3.22)$$

En fait, cette procédure permet de généraliser tout modèle linéaire (de la forme (1.3.9)) .

b). Le modèle d'OLDROYD .

La non-linéarité de (1.3.19) et (1.3.20) est due aux termes  $(\dot{w} \cdot \dot{\sigma})$  et  $(\dot{w} \cdot \dot{E})$ .



OLDROYD propose d'y introduire toutes les possibilités de termes non-linéaires en  $\dot{\sigma}$ ,  $\dot{\epsilon}$  et leurs dérivées.

Il obtient alors la loi constitutive suivante :

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} + k_1 \frac{D}{Dt} \dot{\sigma} + \frac{1}{2} \mu_0 (t_r \dot{\sigma}) \dot{\epsilon} - \frac{1}{2} [\dot{\sigma} \cdot \dot{\epsilon} + \dot{\epsilon} \cdot \dot{\sigma}] + \frac{1}{2} \gamma_1 (\dot{\sigma} : \dot{\epsilon}) \dot{\epsilon} &= \dots \\ = - \mu_0 [\dot{\epsilon} + k_2 \frac{D}{Dt} \dot{\epsilon} - \mu_2 (\dot{\epsilon} \cdot \dot{\epsilon}) + \frac{1}{2} \gamma_2 (\dot{\epsilon} : \dot{\epsilon}) \dot{\epsilon}] &\quad (1.3.23) \end{aligned}$$

où  $t_r(\dot{T})$  désigne la trace de  $\dot{T}$ .

Les lois constitutives quasi-linéaires obtenues par la méthode empirique décrite ci-dessus sont certes objectives, mais il est nécessaire de s'assurer à postériori qu'elles correspondent à un écoulement réel.

### 1.3.8. Modèles non-linéaires.

La méthode d'élaboration des modèles non-linéaires consiste à effectuer un développement intégral de la contrainte en fonction de  $\dot{\epsilon}$  et ses  $(n - 1)$  premières dérivées (fluide d'ordre  $n$ ).

Par cette méthode, nous supposons que le fluide viscoélastique est "rhéologiquement simple", c'est-à-dire que la contrainte dans un élément donné du fluide ne dépend (uniquement) que de l'histoire de cet élément.

La loi constitutive correspondante a la forme suivante :

$$\dot{\sigma} = - \int_{-\infty}^t G_1(t - t') \dot{\epsilon}' dt'$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t G_2(t-t', t-t'') [\dot{E}' \dot{E}'' + \dot{E}'' \dot{E}'] dt'' dt' \\
& - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t [2G_3(t-t', t-t'') (\dot{E}' \dot{E}'' \dot{E}''') + \dots \\
& + G_4(t-t', t-t'', t-t''') (\dot{E}' \dot{E}'' \dot{E}''' + \dot{E}''' \dot{E}'' \dot{E}') ] dt''' dt'' dt' \quad (1.3.24)
\end{aligned}$$

avec la notation suivante :

$$\dot{E}' = \dot{E}(t, t') \quad (1.3.25)$$

Le noyau  $G_1(t-t')$  est identique à  $G(t-t')$ , module de relaxation de la viscoélasticité linéaire (paragraphe 1.3.6).

La détermination rigoureuse de  $G_2, G_3$  et  $G_4$  n'est malheureusement pas établie dans le cas général.

Pour des écoulements lents et lentement variables cependant,  $\dot{E}(t, t')$  peut être développé en une série de Taylor autour de  $t' = t$  et (1.3.24) devient :

$$\begin{aligned}
\dot{\sigma} = & -\alpha_{10} \dot{E} + \alpha_{20} \frac{D}{Dt} \dot{E} - \alpha_{11} [\dot{E} \dot{E}] - \alpha_{30} \frac{D^2}{Dt^2} \dot{E} + \dots \\
& + \alpha_{12} [\dot{E} \frac{D}{Dt} \dot{E} + (\frac{D}{Dt} \dot{E}) \dot{E}] - \alpha_{111} (\dot{E} \dot{E}) \dot{E} + \dots \quad (1.3.26)
\end{aligned}$$

Les  $\alpha$  sont des constantes déterminées par  $G_1, G_{11}, G_{111}$  etc...

Si la série (1.3.26) est tronquée au :

- 1<sup>er</sup> terme, nous retrouvons le fluide newtonien

- terme en  $\frac{D^{n-1}}{Dt^{n-1}}$ , nous obtenons le fluide d'ordre  $n$ .

Deux exemples de lois constitutives non-linéaires sont fournis par :

a). Le modèle de CRIMINALE-ERICKSEN-FILBEY .

Il décrit les écoulements de cisaillement . La loi constitutive correspondante s'écrit :

$$\dot{\sigma} = - \mu \dot{\epsilon} - \left( \frac{1}{2} \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 \right) (\dot{\epsilon} \cdot \dot{\epsilon}) + \frac{1}{2} \bar{\alpha}_1 \frac{D}{Dt} \dot{\epsilon} \quad (1.3.27)$$

où  $\mu$  est la viscosité, dépendant du gradient de vitesse de cisaillement .

$\bar{\alpha}_1$  et  $\bar{\alpha}_2$  sont les coefficients de contrainte normale, primaire et secondaire, respectivement . Ils sont tels que :

- $\bar{\alpha}_1$  est une fonction positive et décroissante du gradient de vitesse de cisaillement
- $\bar{\alpha}_2$  est négatif . Sa valeur absolue est comprise entre 10 pour cent et 40 pour cent de  $\bar{\alpha}_1$  .

b). Le modèle de REINER-RIVLIN .

Il décrit les écoulements irrotationnels . La loi constitutive correspondante s'écrit :

$$\dot{\sigma} = - f_1 \dot{\epsilon} - f_2 [\dot{\epsilon} \cdot \dot{\epsilon}] \quad (1.3.28)$$

où  $f_1$  et  $f_2$  sont des fonctions du second et du troisième invariants de  $\dot{\epsilon}$ .

#### 1.3.9. Discussion .

Les deux remarques suivantes conclueront le présent chapitre:

- de l'étude précédente, il ressort que les modèles non-linéaires donnent la forme la plus générale des lois constitutives . La plupart des modèles précédemment décrits peuvent en effet se déduire de (1.3.24) .

- les suspensions de particules sphériques rigides qui nous intéressent sont newtoniennes à faible concentration (inférieure à 0.25), et viscoplastiques (modèle de Bingham), pour des concentrations supérieures [16] .

- à notre connaissance, il n'existe pas dans la littérature, de calcul de la viscosité des suspensions que nous étudions en régime de tourbillons de Taylor .

La détermination de cette grandeur serait intéressante pour la connaissance de la rhéologie .

## CHAPITRE 1.4

## ÉCOULEMENT DE TAYLOR-COUETTE DES FLUIDES NON-NEWTONIENS .

## 1.4.1. Généralités .

La motivation essentielle des travaux expérimentaux sur la stabilité des fluides non-newtoniens en écoulement de Taylor-Couette est la réduction de frottement (cf. introduction générale).

Le choix des couples solvant-additif n'est pas quelconque . Aussi serait-il délicat de tirer des conclusions générales des résultats publiés .

Les travaux théoriques sont peu nombreux .

Les études les plus complètes en modèle viscoélastique non-linéaire, lequel décrit la plupart des fluides non-newtoniens (paragraphe 1.3.8), ont été présentées par JOSEPH [89], dans une théorie aux bifurcations et par LOCKETT et Co. [121,122], dans une théorie non-linéaire .

Ces-derniers traitent la stabilité d'un fluide du second ordre, encore appelé fluide de RIVLIN-ERICKSEN dans un système de cylindres infinis à entrefer étroit, soumis à une perturbation axisymétrique .

Ils établissent une équation caractérisant l'apparition des T.T. Elle dépend de 9 paramètres .

COLEMAN et NOLL [123] montrent que pour un liquide incompressible viscoélastique à faible mémoire, (L.I.V.), la loi

constitutive (1.3.26) au second ordre peut être valablement représentée par l'approximation suivante :

$$\bar{\sigma} = -p \bar{\delta} + \alpha_1 \dot{\bar{E}} + \alpha_2 \dot{\bar{E}}^2 + \alpha_3 \frac{D}{Dt} \dot{\bar{E}} \quad (1.4.1)$$

Ceci réduit notablement le nombre de paramètres .

L'écoulement sera régi par les équations classiques de la Dynamique des fluides, à savoir, celles de conservation de la masse et de la quantité de mouvement .

Il sera également soumis à la condition physique d'adhérence aux frontières solides .

#### 1.4.2. Stabilité de l'écoulement de Taylor-Couette pour un L.I.V

##### a). L'écoulement de Couette .

Dans un système de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ , où  $z$  est pris le long de l'axe des cylindres, les équations du mouvement admettent, à bas Reynolds, une solution dont le champ des vitesses, purement tangentiel, s'écrit :

$$V_r = V_z = 0$$

$$V_\theta = Ar + \frac{B}{r} \quad (1.4.2)$$

avec

$$A = -\Omega_1 \frac{1 - \Omega_2 / \Omega_1 (R_2 / R_1)^2}{(R_2 / R_1)^2 - 1} \quad (1.4.3)$$

$$B = \Omega_1 \frac{(1 - \Omega_2/\Omega_1) R_2^2}{(R_2/R_1)^2 - 1}$$

b). Equations du mouvement pour les T.T.

A grands Reynolds, l'écoulement ci-dessus devient tridimensionnel .

Les auteurs abordent généralement le problème de la stabilité d'une petite perturbation axisymétrique qu'ils superposent au champ (1.4.2), dans le cas de l'entrefer étroit ( $R_1 \approx R_2$ ).

Ils donnent alors à la perturbation, la forme suivante :

$$p_1(r, z, t) = p(r) \cos\left(\frac{az}{R_2 - R_1}\right) e^{\sigma t} \quad (1.4.4)$$

$$\vec{v}_1 = u_1(r, z, t) \vec{e}_r + v_1(r, z, t) \vec{e}_\theta + w_1(r, z, t) \vec{e}_z$$

avec

$$u_1(r, z, t) = - \frac{\alpha_1 a}{\rho(R_2 - R_1)} \cdot u(x) \cdot \cos\left(\frac{az}{R_2 - R_1}\right) \cdot e^{\sigma t}$$

$$v_1(r, z, t) = - a \Omega_1 R_1 \alpha \cdot v(x) \cdot \cos\left(\frac{az}{R_2 - R_1}\right) \cdot e^{\sigma t} \quad (1.4.5)$$

$$w_1(r, z, t) = \frac{\alpha_1}{\rho(R_2 - R_1)} \frac{d u(x)}{d x} \cdot \sin\left(\frac{az}{R_2 - R_1}\right) \cdot e^{\sigma t}$$

où

$$x = \frac{r - R_1}{R_1}$$

(1.4.6)

$$\alpha = 1 - \frac{\Omega_2}{\Omega_1}$$

Les  $\alpha_i$  étant pris constants, la perturbation ci-dessus est superposée à l'écoulement de Couette dans les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement.

Après linéarisation, elles se réduisent au système suivant en régime permanent (stabilité marginale).

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - a^2\right)v = -u + (P_1 + 2P_2)\left(\frac{d^2}{dx^2} - a^2\right)u \quad (1.4.7)$$

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - a^2\right)^2 u = \text{Ta}^2 \left[ (1 - \alpha x)v - P_2 \alpha \frac{R_1}{R_2 - R_1} \left(\frac{d^2}{dx^2} - a^2\right)v + \dots \right]$$

$$+ 2(P_1 + P_2)\alpha \frac{dv}{dx} \quad (1.4.8)$$

La condition d'adhérence aux parois des cylindres s'écrit :

$$u = \frac{du}{dx} = v = 0 \quad \text{en } x = 0 \text{ et } 1 \quad (1.4.9)$$

$P_1$  et  $P_2$  sont les fonctions viscosimétriques réduites, ou nombres de Weissenberg. Ils sont définis par :

$$P_1 = -\alpha_3 / \varrho(R_2 - R_1)^2$$



$$P_2 = (\alpha_2 + 2\alpha_3) / 2 \zeta (R_2 - R_1)^2$$

et T le nombre de Taylor donné par

$$\text{et } T = \frac{2 \zeta^2 \Omega^2 d^3 R_1}{\alpha_1} \quad (1.4.11)$$

c). Etude de la stabilité de l'écoulement .

Les nombres de Weissenberg caractérisent le rapport des forces élastiques à celles d'inertie .

Ils déterminent la modification apportée par la viscoélasticité à l'apparition de l'instabilité dans le problème newtonien .

Le problème aux valeurs propres (1.4.7) à (1.4.9) qui contient deux paramètres  $a$  et  $T$ , pour des valeurs de  $P_1$  et  $P_2$ , est semblable au problème Newtonien (chap.1.2).

La détermination du nombre de Taylor critique et de la longueur d'onde correspondante s'opère de la même manière .

La méthode généralement utilisée est celle proposée par CHANDRASEKHAR dans le problème newtonien (chap.1.2).

Les courbes (1.m) et (1.n), obtenues par GINN et DENN [124], donnent respectivement la variation de  $a_c$  et de  $T_c$  en fonction de  $(P_2 R_1 / (R_2 - R_1))$ ,  $P_1$  étant pris comme paramètre .

Leurs résultats sont en bon accord avec ceux proposés par les auteurs cités aux références [125 à 127] .

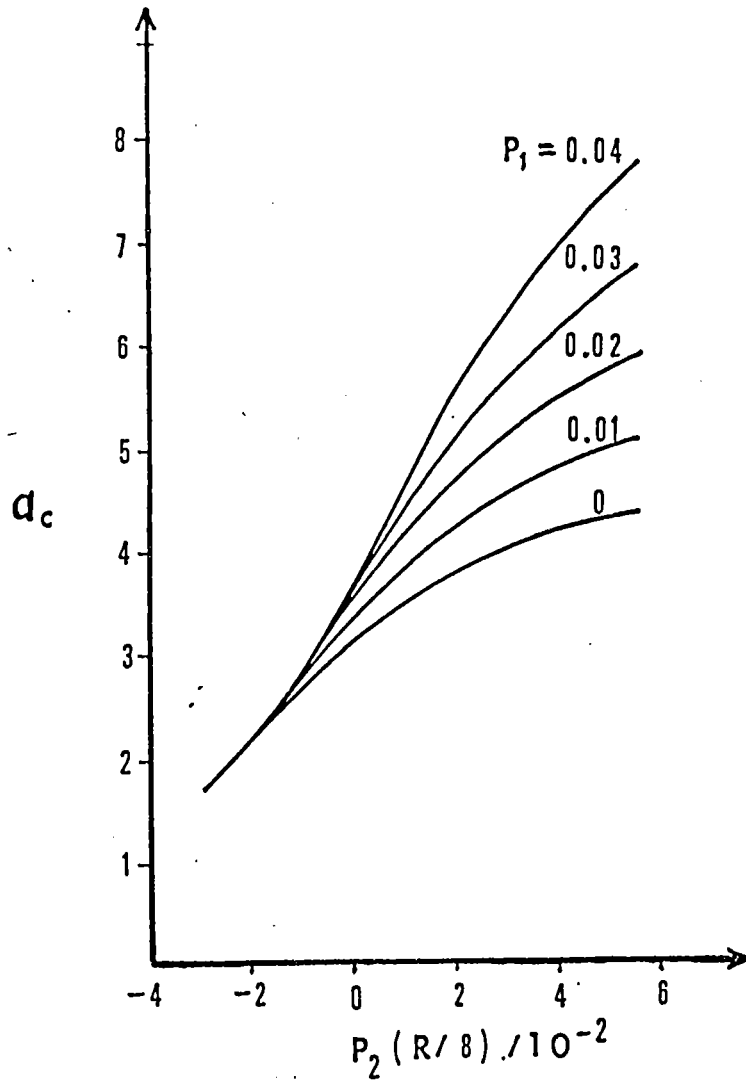


Figure 1.n : Variation de la longueur d'onde critique en fonction des nombres de Weissenberg .

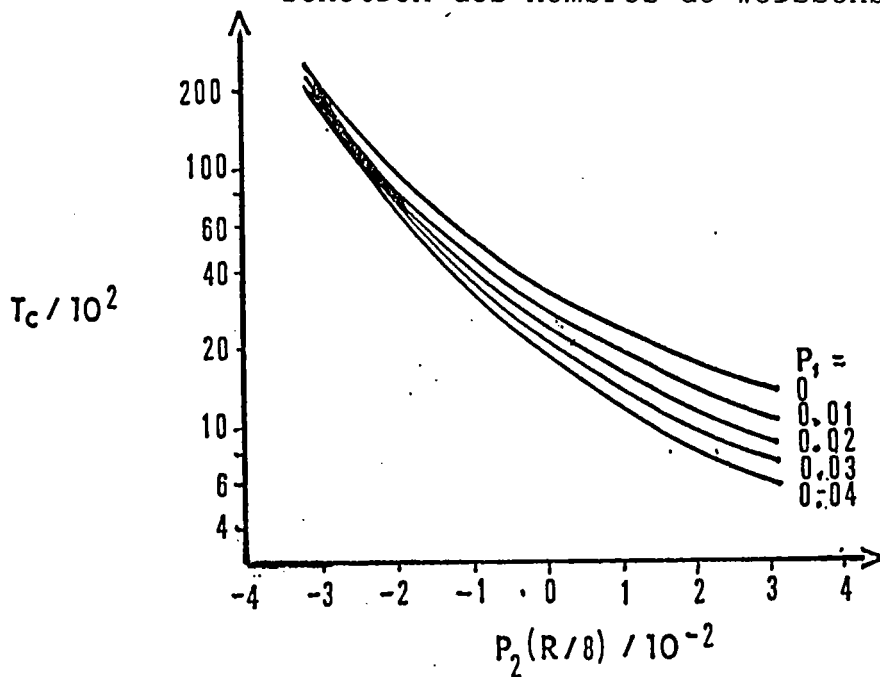


Figure 1.m : Variation du nombre de Taylor critique en fonction des nombres de Weissenberg .

Pour  $P_1 = 0$  et  $P_2 = 0$  (fluide newtonien), ils retrouvent les valeurs correctes pour les paramètres critiques :  $a_c = 3.12$  et  $T_c = 3400$

#### 1.4.3. Discussion .

Dans le cas du fluide de Bingham qui nous intéresse, seule une étude de la stabilité marginale a été publiée par GRAEBEL [20] . Elle nécessite d'être complétée .

DEUXIEME PARTIE .

PREMIERE TRANSITION EN FLUIDE NEWTONIEN PUR .

## INTRODUCTION .

L'écoulement de Taylor-Couette à la première transition est décrit par le système d'équations de Navier-Stokes et de conservation de la masse, appliquées à la superposition de l'écoulement de Couette, et d'une perturbation axisymétrique, astreinte à la condition de non-glissement sur les parois des cylindres .

La solution conduit à la détermination du nombre de Taylor critique, à l'établissement d'un critère de stabilité, et au calcul du champ hydrodynamique du mouvement secondaire .

## CHAPITRE 2.1.

## EQUATION DU MOUVEMENT ET METHODE DE RESOLUTION .

## 2.1.1. Ecoulement de Couette entre deux cylindres coaxiaux .

Avec les notations utilisées dans les chapitres précédents et résumés sur la figure (2.a), le champ des vitesses de l'écoulement permanent bidimensionnel a la forme suivante : [132], dans le système de coordonnées cylindriques usuel  $(r', \theta, z)$  .

$$U = 0$$

$$W = 0$$

$$V = \frac{1}{R_2^2 - R_1^2} [r' (\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2) - \frac{R_1^2 R_2^2}{r'} (\Omega_2 - \Omega_1)]$$

$$P_0 = P'_0 + \frac{\epsilon}{(R_2^2 - R_1^2)} [(\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2) \frac{(r'^2 - R_1^2)}{2} - 2R_1 R_2 (\Omega_2 - \Omega_1)]$$

(2.1.1)

$$(\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2) \text{Log} \frac{r'}{R_1} + R_1 R_2 (\Omega_2 - \Omega_1) \left[ \frac{1}{r'^2} - \frac{1}{R_1^2} \right]$$

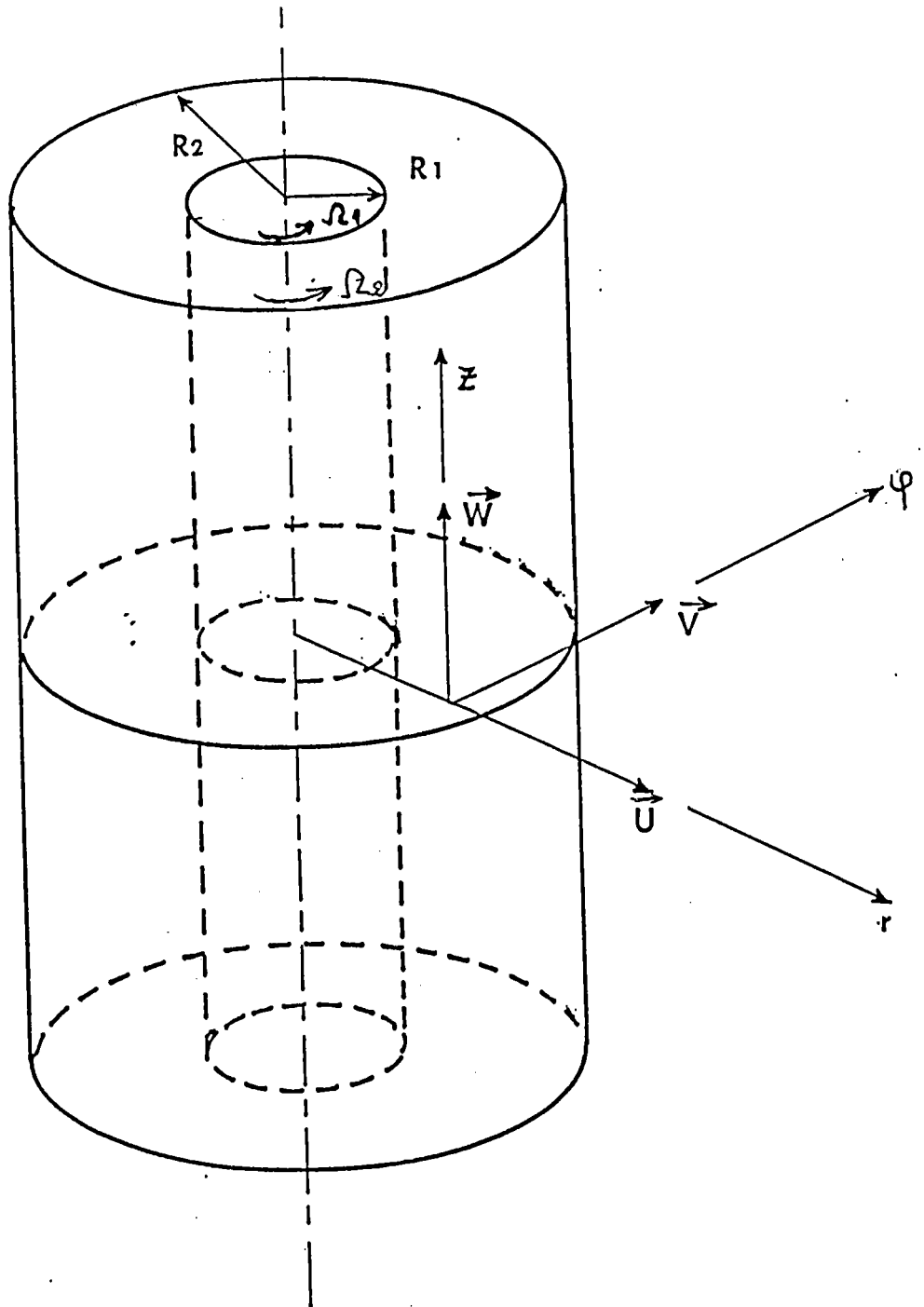


Figure 2.a : Ecoulement entre cylindres coaxiaux tournants .

En utilisant les paramètres  $\beta = R_1/R_2$  et  $\mu' = \Omega_2/\Omega_1$ ,  
le champ des vitesses tangentielles s'écrit :

$$V = Ar' + \frac{B}{r'}$$

$$A = -\Omega_1 \beta^2 \frac{1 - \mu'/\beta^2}{1 - \beta^2} \quad (2.1.2)$$

$$B = \Omega_1 \frac{R_1^2 (1 - \mu')}{1 - \beta^2}$$

### 2.1.2 Equation du mouvement de l'écoulement perturbé .

Superposons à l'écoulement de Couette précédent, une perturbation de la forme :

$$u''_1 = u(r') \cdot e^{\Sigma t'} \cdot \cos kz$$

$$v''_1 = v(r') \cdot e^{\Sigma t'} \cdot \cos kz$$

(2.1.3.a)

$$w''_1 = w(r') \cdot e^{\Sigma t'} \cdot \sin kz$$

$$p''_1 = p(r') \cdot e^{\Sigma t'} \cdot \cos kz$$

où  $k$  désigne le nombre d'onde de la perturbation, dans la direction axiale et  $\Sigma$  est une constante pouvant être complexe .

Par ailleurs, la perturbation est prise petite, c'est-à-dire :



$$u, v, w \ll V$$

(2.1.3.b)

$$P \ll P_0$$

Les équations de Navier-Stokes appliquées au champ résultant s'écrivent alors sous leur forme linéarisée :

$$\frac{\partial u_1}{\partial t'} - 2 \frac{V}{r'} v_1 = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial r'} + \gamma \left( \Delta u_1 - \frac{u_1}{r'^2} \right)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t'} + \left( \frac{dV}{dr} + \frac{V}{r} \right) u_1 = \gamma \left( \Delta v_1 - \frac{v_1}{r'^2} \right) \quad (2.1.4)$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial t'} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial z} + \gamma \Delta w_1$$

A ce système, il faut adjoindre l'équation de continuité :

$$\frac{\partial u_1}{\partial r'} + \frac{u_1}{r'} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0 \quad (2.1.5)$$

et la condition d'adhérence aux parois des cylindres :

$$u_1 = v_1 = w_1 = 0 \text{ en } r = R_1 \text{ et en } r = R_2 \quad (2.1.6)$$

En utilisant les expressions (2.1.3) pour la perturbation, les équations précédentes deviennent :

$$\gamma (DD^* - k^2 - \frac{\Sigma}{\gamma}) u + 2 \frac{V}{r} v = - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} \quad a.$$

$$\gamma(DD^* - k^2 - \frac{\Sigma}{\gamma})v - (D^*V)u = 0 \quad \text{b.} \quad (2.1.7)$$

$$\gamma(D^*D - k^2 - \frac{\Sigma}{\gamma})w = -\frac{k}{\epsilon}p \quad \text{c.}$$

$$D^*u = -kw \quad \text{d.}$$

avec :

$$D = \frac{d}{dr'} \quad (2.1.8)$$

$$D^* = \frac{d}{dr'} + \frac{1}{r'}$$

L'élimination de  $w$  entre les équations (2.1.7) c. et d. conduit à :

$$\frac{\gamma}{k^2} (D_*D - k^2 - \frac{\Sigma}{\gamma}) D_*u = \frac{p}{\epsilon} \quad (2.1.9)$$

Cette expression de  $\frac{p}{\epsilon}$  transforme l'équation (2.1.7) a. en :

$$\frac{\gamma}{k^2} (DD_* - k^2 - \frac{\Sigma}{\gamma}) (DD_* - k^2) u = 2 \frac{V}{r'} v \quad (2.1.10)$$

De sorte que l'écoulement est décrit par le système d'équations (2.1.7) b. et (2.1.8).

La forme adimensionnelle de la coordonnée  $r'$  s'obtient en la divisant par  $R_2$ .

Définissons ensuite les paramètres  $a$  et  $\sigma$  par :

$$a = k R_2 \quad (2.1.11)$$

$$\sigma = \frac{\Sigma R_2^2}{\gamma}$$

En opérant un changement d'échelle de  $u$  par sa division par

$\frac{2 A R_2^2}{\gamma}$ , nous mettons en évidence le nombre de Taylor  $T$ , défini

par :

$$T = \frac{4AB}{\gamma^2} R_2 = \frac{4\Omega_1 R_1^4 (1 - \mu')(1 - \mu'/\beta^2)}{\gamma^2 [(1 - \beta^2)]^2} \quad (2.1.12)$$

Les équations du mouvement s'écrivent alors :

$$(DD.D - a^2 - \sigma) (DD. - a^2) u = - Ta^2 \left( \frac{1}{r'^2} - s \right) v$$

$$(DD. - a^2 - \sigma) v = u \quad (2.1.13)$$

avec

$$s = - \frac{AR_2^2}{B} = \frac{1 - \mu'/\beta^2}{1 - \mu'} \quad (2.1.14)$$

Notre étude se limitant aux systèmes à entrefer étroit :

$$\beta \rightarrow 1 \quad (2.1.15)$$

nous pouvons admettre l'approximation

$$D^* \neq D \quad (2.1.16)$$

Effectuons alors le changement de variable

$$x = \frac{r' - R_1}{R_2 - R_1} \quad (2.1.17)$$

où  $r'$  est compté à partir du cylindre intérieur, et le changement d'échelle de  $u$  par sa division par :

$$\frac{2\Omega_1 (R_2 - R_1)^2 a^2}{\gamma}$$

les équations du mouvement adimensionnelles se réduisent à (cf. [23]) :

$$(D^2 - a^2 - \sigma)^2 (D^2 - a^2) u = -Ta^2 (1 + \alpha'x) v \quad (2.1.18)$$

$$\text{où } D = \frac{d}{dx}$$

$$(2.1.19)$$

et

$$\alpha' = -(1 - \mu)$$

Avec les transformations précédentes, le nombre de Taylor est à présent défini par :

$$T = - \frac{4A\Omega_1}{\gamma^2} (R_2 - R_1) \quad (2.1.20)$$

alors que les conditions aux limites s'écrivent :

$$v = (D^2 - a^2 - \sigma) v = D(D^2 - a^2 - \sigma) v = 0 \text{ en } x = 0 \text{ et } 1 \quad (2.1.21)$$

### 2.1.3 Méthode de résolution .

La technique que nous utiliserons pour résoudre (2.1.18) (équation différentielle linéaire du 6ème ordre avec un coefficient variable) est exposée en [63,133] .

Elle permet d'obtenir une représentation intégrale de la solution sans recourir à des fonctions d'essais ou à des développements en série .

Son principe est le suivant :

- soit à résoudre l'équation différentielle linéaire :

$$Lx [y(x)] = 0 \quad (2.1.22)$$

- recherchons une solution de la forme :

$$y = \int_{\beta}^{\Gamma} K(x,t) v(t) dt \quad (2.1.23)$$

avec  $K(x,t)$  donné et  $\beta, \Gamma$ , convenablement choisis .

Pour que (2.1.23) satisfasse à (2.1.22), il suffit que  $v(t)$  satisfasse à l'équation intégrale suivante :

$$\int_{\beta}^{\Gamma} L_x [K(x,t)] v(t) dt = 0 \quad (2.1.24)$$

Admettons qu'il existe un opérateur différentiel  $M_t$  tel que :

$$L_x [K(x,t)] = M_t [K(x,t)] \quad (2.1.25)$$

L'équation (2.1.24) s'écrit alors :

$$\int_{\beta}^{\Gamma} M_t [K(x,t)] v(t) dt = 0 \quad (2.1.26)$$

En utilisant  $M_t^*$ , l'opérateur adjoint de  $M_t$  et

$P(K(x,t), v(t))$ , la forme bilinéaire associée à  $K(x,t)$  et  $v(t)$ , (2.1.26) devient alors :

$$\int_{\beta}^{\Gamma} [K(x,t) M_t^* [v(t)] + \frac{\partial}{\partial t} P(K(x,t), v(t))] dt = 0 \quad (2.1.27)$$

Si  $v(t)$  peut être pris tel que

$$M_t [v(t)] = 0 \quad (2.1.28)$$

on pourra trouver une intégrale exacte de (2.1.27)

$$P(K(x,t), v(t)) \Big|_{\beta}^{\Gamma} = 0 \quad (2.1.29)$$

Nous prendrons  $\beta$  et  $\Gamma$  de façon à satisfaire (2.1.29)

## CHAPITRE 2.2.

## DETERMINATION DE LA TRANSITION .

## 2.2.1. Généralités .

L'étude de la stabilité de l'écoulement de Taylor-Couette consiste à déterminer le comportement d'une petite perturbation que nous superposons à l'écoulement initial .

L'écoulement est stable si toute perturbation de la forme (2.1.3) est évanescence . Il est instable s'il existe un mode de perturbation dont l'amplitude reste constante dans le temps ou croît . Dans ce dernier cas, le système s'écarte progressivement de son état initial de manière irréversible . [3,134] .

Si nous classons tous les états initiaux selon ce critère de stabilité, la courbe séparant ces 2 classes d'écoulement dans l'espace des paramètres  $(a, T, \mu')$  qui décrivent le système permanent, définit les états de stabilité marginale (ou neutre) du système .

L'étude de la stabilité de l'écoulement commence par le tracé de la courbe de stabilité marginale . Pour cela, nous devons imposer la condition d'adhérence (2.1.21) à la solution de l'équation du mouvement (2.1.18) dans le cas d'une perturbation stationnaire .

La détermination d'un critère de stabilité consiste alors à fixer les 3 paramètres  $a, T, \mu'$  et à faire varier  $\sigma$  , dans le problème instationnaire .



Nous pouvons passer alors de l'état stable à l'état instable lorsque  $\sigma$  prend une valeur critique .

Nous dirons que l'instabilité apparaît pour cette valeur de  $\sigma$  dans l'écoulement défini par les 3 paramètres précédemment fixés.

Il existe 2 types d'états de stabilité marginale, selon la manière dont l'amplitude d'une petite perturbation croît ou s'évanouit .

Dans le cas où la croissance (ou l'évanescence) est oscillatoire, la transition (de l'état stable à l'état instable), présente une fréquence caractéristique donnée .

Au contraire, si la croissance (ou l'évanescence) de l'amplitude de la perturbation est apériodique, la transition, qui fait apparaître des configurations d'écoulement stables, définit le principe d'échange de stabilité .

Ces 2 types de transitions coexistent dans l'écoulement de Taylor-Couette . [135, 136, 137]

2.2.2. Solution de l'équation du mouvement pour la stabilité marginale .

Ainsi que nous l'avons indiqué au paragraphe précédent, la stabilité marginale de l'écoulement est définie par la condition de stationnarité de la perturbation ( $\sigma = 0$ ).

L'équation du mouvement (2.1.18) s'écrit alors :

$$(D^2 - a^2)^3 v = -Ta^2 (1 + \alpha'x)v \quad (2.2.0)$$

Les conditions aux limites suivantes (dédites de (2.1.21)) :

$$v = D^2 v = D(D^2 - a^2)v = 0 \text{ en } x = 0 \text{ et } 1 \quad (2.2.1)$$

Il est utile de remarquer que  $\alpha'$  ne peut être que négatif ou nul [9]

En notant :

$$\alpha = -\alpha' \quad (2.2.2)$$

l'équation (2.2.1) peut être développée sous la forme :

$$[D^6 - 3a^2 D^4 + 3a^4 D^2 - (a^6 - Ta^2)]v = Ta^2 \alpha x v \quad (2.2.3)$$

Si nous cherchons une solution sous la forme :

$$v(x) = \int_{\beta}^{\Gamma} e^{xt} v(t) dt \quad (2.2.4)$$

(ce choix est suggéré par le noyau qui apparaît dans la transformation de Laplace).

La dérivée d'ordre  $i$  de  $v(x)$  s'écrira :

$$v^{(i)}(x) = \int_{\beta}^{\Gamma} t^i e^{xt} v(t) dt \quad (2.2.5)$$

L'équation (2.2.3) devient alors :

$$\int_{\beta}^{\gamma} [t^4 - 3a^2 t^4 + 3a^4 t^2 - (a^6 - Ta^2)] e^{\alpha t} v(t) dt \dots - Ta^2 \alpha \int_{\beta}^{\gamma} x e^{\alpha t} v(t) dt = 0 \quad (2.2.6)$$

c'est-à-dire :

$$\int_{\beta}^{\gamma} [t^4 - 3a^2 t^4 + 3a^4 t^2 - (a^6 - Ta^2)] e^{\alpha t} v(t) + \dots + Ta^2 \alpha e^{\alpha t} \frac{dv(t)}{dt} dt - Ta^2 \alpha \int_{\beta}^{\gamma} \frac{d}{dt} [e^{\alpha t} v(t)] dt = 0 \quad (2.2.7)$$

Cherchons la solution  $v(t)$  de telle sorte que :

$$[t^4 - 3a^2 t^4 + 3a^4 t^2 - (a^6 - Ta^2)] v(t) + Ta^2 \alpha \frac{dv(t)}{dt} = 0 \quad (2.2.8)$$

(2.2.8) est une équation différentielle linéaire du 1er ordre à coefficients constants dont la solution tabulaire, s'écrit :

$$v(t) = C \exp \left[ - \frac{t^7 - \frac{3a^2 t^5}{5} - a^4 t^3 + (a^6 - Ta^2) t}{Ta^2 \alpha} \right] \quad (2.2.9)$$

La solution  $v(x)$  de l'équation du mouvement est alors donnée par :

$$v(x) = \int_{\beta}^{\Gamma} e^{xt} \exp\left[-\frac{1}{Ta^2 \alpha} \left(\frac{t^7}{7} - \frac{3a^2 t^5}{5} + a^4 t^3 - (a^6 - Ta^2)t\right)\right] dt \quad (2.2.10)$$

Pourvu que :

$$Ta^2 \alpha \int_{\beta}^{\Gamma} \frac{d}{dt} [e^{xt} v(t)] dt = 0 \quad (2.2.11)$$

$\beta$  et  $\Gamma$  seront choisis de telle sorte que :

$$e^{xt} \exp\left[-\frac{1}{Ta^2 \alpha} \left(-\frac{t^7}{7} + \frac{3a^2 t^5}{5} - a^4 t^3 + (a^6 - Ta^2)t\right)\right] = 0 \quad (2.2.12)$$

Dans le plan complexe de la variable  $t$ , tout contour d'intégration, tel que :

$$\operatorname{Re} \left[-\frac{t^7}{7} + \frac{3a^2 t^5}{5} - a^4 t^3 + (a^6 - Ta^2)t\right] = -\infty \quad (2.2.13)$$

aux extrémités sera satisfaisant .

Comme à l'infini, le comportement du polynôme précédent est déterminé par le terme :

$$-\frac{t^7}{7}$$

le 1er contour d'intégration sera  $C_1$  (fig.2.b).

Le long de ce contour, avec la relation (2.2.10), nous pouvons écrire :

$$v^{[1]}(x) = \int_{(C_1)} e^{xt} \exp\left[-\frac{1}{Ta^2 \alpha} \left(-\frac{t^7}{7} + \frac{3a^2 t^5}{5} - a^4 t^3 + (a^6 - Ta^2)t\right)\right] dt \quad (2.2.14)$$

c'est-à-dire :

$$v^{[1]}(x) = v_0(x) - \int_0^{+\infty} \exp[xt] e^{i2\pi/7} M(t) \exp\left[-\frac{i2\pi}{7}\right] dt \quad (2.2.15)$$

avec :

$$v_0(x) = \int_0^{+\infty} e^{xt} \exp\left[-\frac{1}{Ta^2 \alpha} \left(-\frac{t^7}{7} + \frac{3a^2 t^5}{5} - a^4 t^3 + (a^6 - Ta^2)t\right)\right] dt \quad (2.2.16)$$

$$M(t) = \exp\left[-\frac{1}{Ta^2 \alpha} \left(-\frac{t^7}{7} + \frac{3a^2 t^5}{5} - a^4 t^3 + (a^6 - Ta^2)t\right)\right] e^{10i\pi/7} - a^4 t^3 e^{6i\pi/7} + (a^6 - Ta^2)te^{2i\pi/7} \quad (2.2.17)$$

Des transformations trigonométriques élémentaires conduisent à écrire les deux premières solutions sous la forme suivante :

$$v_1(x) = v_0(x) - \int_0^{+\infty} \cos(M_1(x,t)) \cdot N_1(x,t) dt$$

$$v_2(x) = - \int_0^{+\infty} \sin(M_1(x,t)) \cdot N_1(x,t) dt \quad (2.2.18)$$

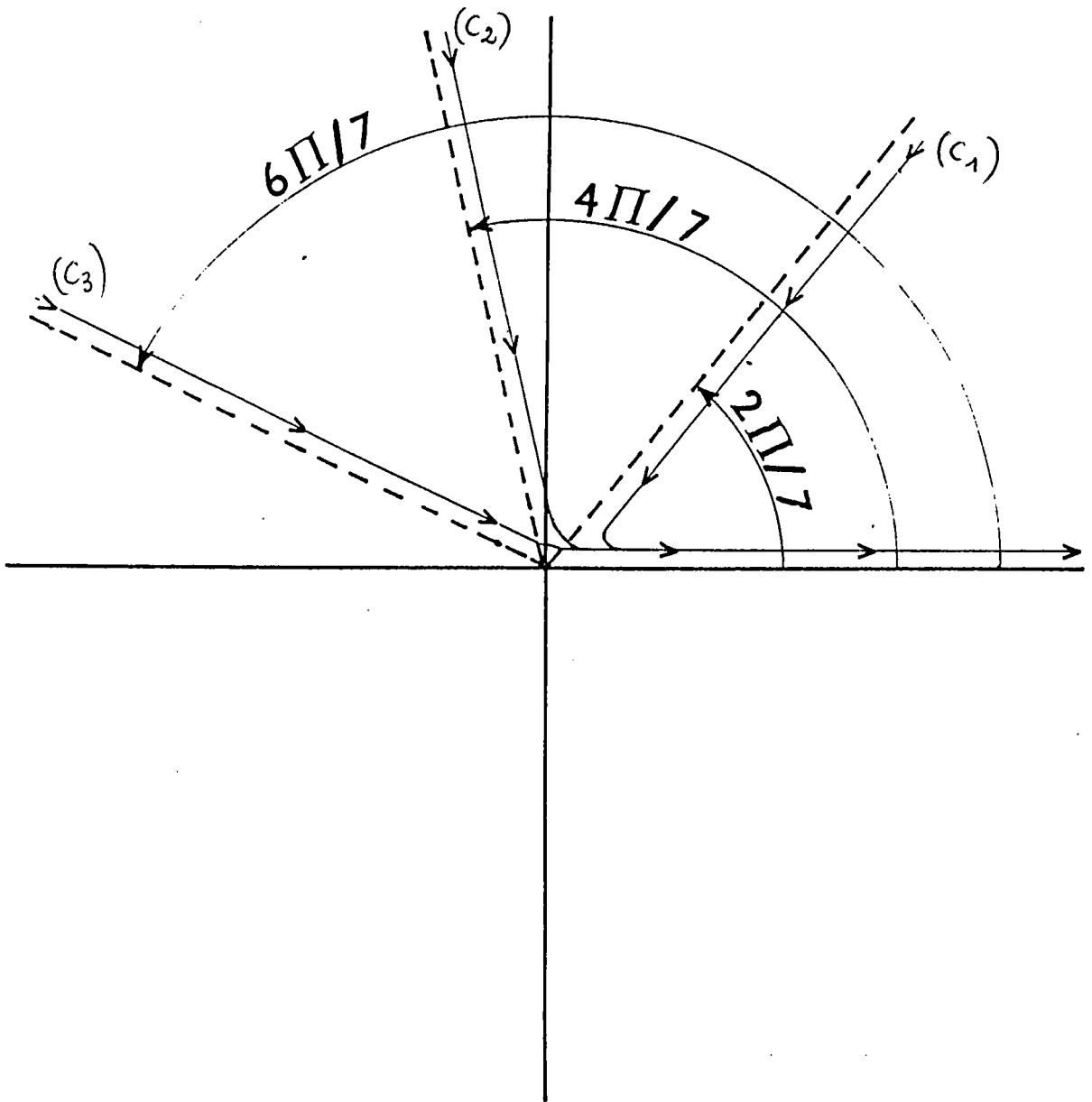


Figure 2.b : Contours d'intégration dans le plan complexe de la variable  $t$  .

avec

$$M_1(x,t) = \left[ x + \frac{(a^4 - Ta^2)}{Ta^2 \alpha} t \right] \sin \frac{2\pi}{7} - \frac{3a^2 t^5}{5Ta^2 \alpha} \sin \frac{3\pi}{7} - \frac{a^4 t^3}{Ta^2 \alpha} \sin \frac{\pi}{7} + \frac{2\pi}{7} \quad (2.2.19)$$

$$N_1(x,t) = \exp \left[ \left( x + \frac{(a^4 - Ta^2)}{Ta^2 \alpha} t \right) \cos \frac{2\pi}{7} - \frac{t^7}{7Ta^2 \alpha} - \frac{3a^2 t^5}{5Ta^2 \alpha} \cos \frac{3\pi}{7} + \frac{a^4 t^3}{Ta^2 \alpha} \cos \frac{\pi}{7} \right] \quad (2.2.20)$$

Le long du contour  $C_2$  (fig.2.b), nous obtenons :

$$v^{[2]}(x) = v_0(x) - \int_0^{+\infty} \exp[xt] e^{\frac{4i\pi}{7}t} P(t) \exp[-\frac{4i\pi}{7}t] dt \quad (2.2.21)$$

avec

$$P(t) = \exp \left[ -\frac{1}{Ta^2 \alpha} \left( -\frac{t^7}{7} + \frac{3a^2 t^5}{5} - \frac{20i\pi}{7} a^4 t^3 + (a^4 - Ta^2)t \right) \right] e^{\frac{4i\pi}{7}t} \quad (2.2.22)$$

Les deux solutions, déduites de (2.2.21), sont :

$$v_3(x) = v_0(x) - \int_0^{+\infty} \cos(M_2(x,t)) \cdot N_2(x,t) dt \quad (2.2.23)$$

$$v_4(x) = - \int_0^{+\infty} \sin(M_2(x,t)) \cdot N_2(x,t) dt \quad (2.2.24)$$

où

$$M_2(x,t) = \left[ x + \frac{a^6 + Ta^2}{Ta^2 \alpha} t \right] \sin \frac{4\pi}{7} + \frac{3a^2 t^5}{5Ta^2 \alpha} \sin \frac{\pi}{7} + \frac{a^4 t^3}{Ta^2} \sin \frac{2\pi}{7} + \frac{4\pi}{7} \quad (2.2.25)$$

et

$$N_2(x,t) = \exp\left\{ \left[ x + \frac{a^6 - Ta^2}{Ta^2 \alpha} t \right] \cos \frac{4\pi}{7} - \frac{t^7}{7Ta^2 \alpha} - \frac{3a^2 t^5}{5Ta^2 \alpha} \cos \frac{\pi}{7} - \frac{a^4 t^3}{Ta^2} \cos \frac{2\pi}{7} \right\} \quad (2.2.26)$$

Les deux dernières solutions s'obtiennent le long de  $C_3$  (fig.2.b)

où nous pouvons écrire :



$$[3] \quad v(x) = v_0 - \int_0^{+\infty} \exp[xt e^{6i\pi/7}] Q(t) \exp[6i\pi/7] dt \quad (2.2.27)$$

avec

$$Q(t) = \exp\left[-\frac{1}{Ta^2 \alpha} \left(-\frac{t^7}{7} + \frac{3a^2 t^5}{5} e^{30i\pi/7} - a^4 t^3 e^{18i\pi/7} + (a^6 - Ta^2)\right)\right] t \exp[6i\pi/7] \quad (2.2.28)$$

Elles ont pour expressions :

$$v_3(x) = v_0(x) - \int_0^{+\infty} \cos(M_3(x,t)) \cdot N_3(x,t) dt \quad (2.2.29)$$

$$v_4(x) = - \int_0^{+\infty} \sin(M_3(x,t)) \cdot N_3(x,t) dt \quad (2.2.30)$$

où

$$M_3(x,t) = \left[ x + \frac{a^6 - Ta^2}{Ta^2 \alpha} t \right] \sin \frac{6\pi}{7} + \frac{3a^2 t^5}{5Ta^2 \alpha} \sin \frac{5\pi}{7} - \frac{a^4 t^3}{Ta^2 \alpha} \sin \frac{4\pi}{7} + \dots + \frac{6\pi}{7} \quad (2.2.31)$$

$$N_3(x,t) = \exp\left\{ \left[ x + \frac{a^6 - Ta^2}{Ta^2 \alpha} t \right] \cos \frac{6\pi}{7} - \frac{t^7}{7Ta^2 \alpha} - \frac{3a^2 t^5}{5Ta^2 \alpha} \cos \frac{5\pi}{7} + \frac{a^4 t^3}{Ta^2 \alpha} \cos \frac{4\pi}{7} \right\} \quad (2.2.32)$$

La solution générale de l'équation du mouvement (2.2.3) est une combinaison linéaire de ces 6 solutions qui sont linéairement indépendantes (cf. para. 2.2.3).

Par ailleurs, tout autre contour d'intégration dans le plan complexe de la variable  $t$ , satisfaisant à la condition (2.2.13) est une combinaison linéaire de  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$ .

### 2.2.3. Calcul numérique de la solution .

Les conditions aux limites (2.2.1) définissent un problème aux valeurs propres .

Il s'agit donc d'écrire ce système de 6 équations algébriques homogènes, qui ne sera soluble que si son déterminant est nul .

Les 6 solutions précédemment déterminées se calculent numériquement .

Ce calcul peut sembler a priori laborieux, mais quelques remarques judicieuses rendent la tâche relativement aisée :

a). Les solutions ont une expression similaire .

En effet,  $v_3(x)$  et  $v_4(x)$  se déduisent de  $v_1(x)$  et  $v_2(x)$  à l'aide des substitutions suivantes :

$$\begin{array}{ccc}
 \frac{2\pi}{7} & \text{par} & \frac{4\pi}{7} \\
 \\
 \frac{3\pi}{7} & \text{par} & \frac{\pi}{7} \\
 \\
 \frac{\pi}{7} & \text{par} & \frac{2\pi}{7}
 \end{array} \quad (2.2.33)$$

De même,  $v_5(x)$  et  $v_6(x)$  se déduisent de  $v_1(x)$  et  $v_2(x)$ , à l'aide des substitutions suivantes :

$$\begin{array}{ccc}
 \frac{2\pi}{7} & \text{par} & \frac{6\pi}{7} \\
 \frac{3\pi}{7} & \text{par} & \frac{5\pi}{7} \\
 \frac{\pi}{7} & \text{par} & \frac{4\pi}{7}
 \end{array} \tag{2.2.34}$$

b). Il n'est pas nécessaire d'exprimer les diverses dérivées des solutions tant dans le calcul du déterminant que dans celui du wronskian .

En effet, si nous notons :

$$v_1(x) = \int_0^{+\infty} I \, dt - \int_0^{+\infty} A_1 \, dt \tag{2.2.35}$$

$$v_2(x) = - \int_0^{+\infty} B_1 \, dt$$

Nous pourrions écrire les dérivées d'ordre  $i$  de  $v_1(x)$  et  $v_2(x)$  de la manière suivante :

$$D^{(i)} v_1(x) = \int_0^{+\infty} I \, dt - \int_0^{+\infty} A_1 \, dt \tag{2.2.36}$$

$$D^{(i)} v_2(x) = - \int_0^{+\infty} D^{(i)} B_1 \, dt$$

où les  $D^{(i)} I$ ,  $D^{(i)} A_1$  et  $D^{(i)} B_1$  sont données par :

$$D^{(i)} I = t^i I \quad (2.2.37)$$

$$DA_1 = -t \sin \frac{2\pi}{7} \cdot B_1 + t \cos \frac{2\pi}{7} \cdot A_1 \quad (2.2.38)$$

$$DB_1 = t \sin \frac{2\pi}{7} \cdot A_1 + t \cos \frac{2\pi}{7} \cdot B_1$$

De même

$$D^2 A_1 = (\cos^2 \frac{2\pi}{7} - \sin^2 \frac{2\pi}{7}) t^2 A_1 - 2 \sin \frac{2\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} t^2 B_1 \quad (2.2.39)$$

$$D^2 B_1 = (\cos^2 \frac{2\pi}{7} - \sin^2 \frac{2\pi}{7}) t^2 B_1 + 2 \sin \frac{2\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} t^2 A_1$$

$$D^3 A_1 = (-3 \cos^2 \frac{2\pi}{7} \sin \frac{2\pi}{7} + \sin^3 \frac{2\pi}{7}) t^3 B_1 + (\cos^3 \frac{2\pi}{7} - 3 \sin^2 \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{2\pi}{7}) t^3 A_1 \quad (2.2.40)$$

$$D^3 B_1 = (3 \cos^2 \frac{2\pi}{7} \sin \frac{2\pi}{7} - \sin^3 \frac{2\pi}{7}) t^3 A_1 + (\cos^3 \frac{2\pi}{7} - 3 \sin^2 \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{2\pi}{7}) t^3 B_1$$

$$\begin{aligned}
 D^4 A_1 = & \left( \cos^4 \frac{2\pi}{7} - 6 \sin^2 \frac{2\pi}{7} \cos^2 \frac{2\pi}{7} + \sin^4 \frac{2\pi}{7} \right) t^4 A_1 + 4 \left( \sin^2 \frac{2\pi}{7} \right. \\
 & \left. \cdot \cos \frac{2\pi}{7} - \cos^3 \frac{2\pi}{7} \sin \frac{2\pi}{7} \right) t^4 B_1
 \end{aligned}
 \tag{2.2.41}$$

$$\begin{aligned}
 D^4 B_1 = & 4 \left( \cos^3 \frac{2\pi}{7} \sin \frac{2\pi}{7} - \sin^3 \frac{2\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \right) t^4 A_1 \\
 & + \left( \cos^4 \frac{2\pi}{7} + \sin^4 \frac{2\pi}{7} - 6 \sin^2 \frac{2\pi}{7} \cos^2 \frac{2\pi}{7} \right) t^4 B_1
 \end{aligned}$$

Et enfin

$$\begin{aligned}
 D^5 A_1 = & \left( \cos^5 \frac{2\pi}{7} - 10 \cos^3 \frac{2\pi}{7} \sin^2 \frac{2\pi}{7} + 5 \sin^4 \frac{2\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \right) t^5 A_1 + \dots \\
 & + \left( - \sin^5 \frac{2\pi}{7} + 10 \sin^3 \frac{2\pi}{7} \cos^2 \frac{2\pi}{7} - 5 \cos^4 \frac{2\pi}{7} \sin \frac{2\pi}{7} \right) t^5 B_1
 \end{aligned}
 \tag{2.2.42}$$

$$\begin{aligned}
 D^5 B_1 = & \left( \sin^5 \frac{2\pi}{7} - 10 \sin^3 \frac{2\pi}{7} \cos^2 \frac{2\pi}{7} + 5 \cos^4 \frac{2\pi}{7} \sin \frac{2\pi}{7} \right) t^5 A_1 + \dots \\
 & + \left( \cos^5 \frac{2\pi}{7} - 10 \cos^3 \frac{2\pi}{7} \sin^2 \frac{2\pi}{7} + 5 \sin^4 \frac{2\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \right) t^5 B_1
 \end{aligned}$$

Les 4 autres solutions et leurs dérivées s'expriment par des relations similaires à (2.2.35) et (2.2.36), en tenant compte des substitutions mentionnées en (2.2.33) et (2.2.34).

c). Les intégrales apparaissant dans les expressions des solutions convergent très rapidement, aussi toutes les méthodes classiques d'intégration numérique (trapèzes, Simpson, ...) peuvent être utilisées .

Il ne sera donc pas nécessaire de porter trop loin la borne supérieure des intégrales, ce qui réduit sensiblement le coût de l'opération .

La seule précaution à prendre est de placer cette borne au-delà de la plus grande racine réelle du polynôme suivant :

$$\frac{t^7}{7} - \frac{3a^2 t^5}{5} + a^4 t^3 - (a^4 - Ta^2)t = 0 \quad (2.2.43)$$

#### 2.2.4 Détermination du nombre de Taylor critique .

Le problème aux valeurs propres (2.2.2) exprime une relation de la forme :

$$F(a, T) = 0 \quad (2.2.44)$$

Les paramètres  $a$  et  $T$  étant des réels positifs .

L'ensemble des couples  $(a, T)$  satisfaisant à (2.2.44) détermine la courbe de stabilité marginale .

En général, il existe une infinité de couples  $(a, T)$  répondant à cette condition . Cependant, c'est le mode d'instabilité minimum qui est le plus important car c'est lui qui apparaît en premier .

Nous pouvons le déterminer à partir de la courbe de stabilité marginale, sur laquelle la valeur unique  $a_c$  correspond à la valeur minimale de  $T$ . Ce minimum définit le nombre de Taylor critique,  $T_c$ .

Les figures (2.c) et (2.d) représentent les courbes de stabilité marginale pour  $\mu' = 0$  et  $\mu' = -1$ , respectivement.

Il apparaît que nos résultats concordent avec ceux publiés à ce jour. Ainsi, DAVEY et Co. [70] donnent  $T_c = 3389.9$ , SCHLICHTING [138] : 3416 et KRUEGER et Co. [65] : 3390.1, pour  $\mu' = 0$

Nous avons déterminé le graphe de la courbe de stabilité marginale pour d'autres configurations d'écoulement.

Nous ne présentons que le tableau (2.α) qui donne les nombres de Taylor critiques et les valeurs correspondantes de la longueur d'onde, afin de ne pas alourdir le texte.

Une synthèse des résultats est présentée par DRAZIN et REID [139].

Nous avons également tracé les courbes (2.e) et (2.f) qui représentent la variation de  $\log(T_c)$  et de  $2\pi/a_c$  en fonction de  $\mu'$ , respectivement.

Elles montrent que, lorsque  $\mu'$  tend vers 1, (la vitesse angulaire du cylindre intérieur  $\Omega_1$  tend vers zéro, en restant supérieure à  $\Omega_2$ ),

- le nombre de Taylor critique décroît rapidement et  $\log(T_c)$  tend vers 3.23

- le nombre d'onde critique décroît également et tend vers 2.0

Ces résultats sont en bon accord avec ceux obtenus par CHANDRASEKHAR [3] .



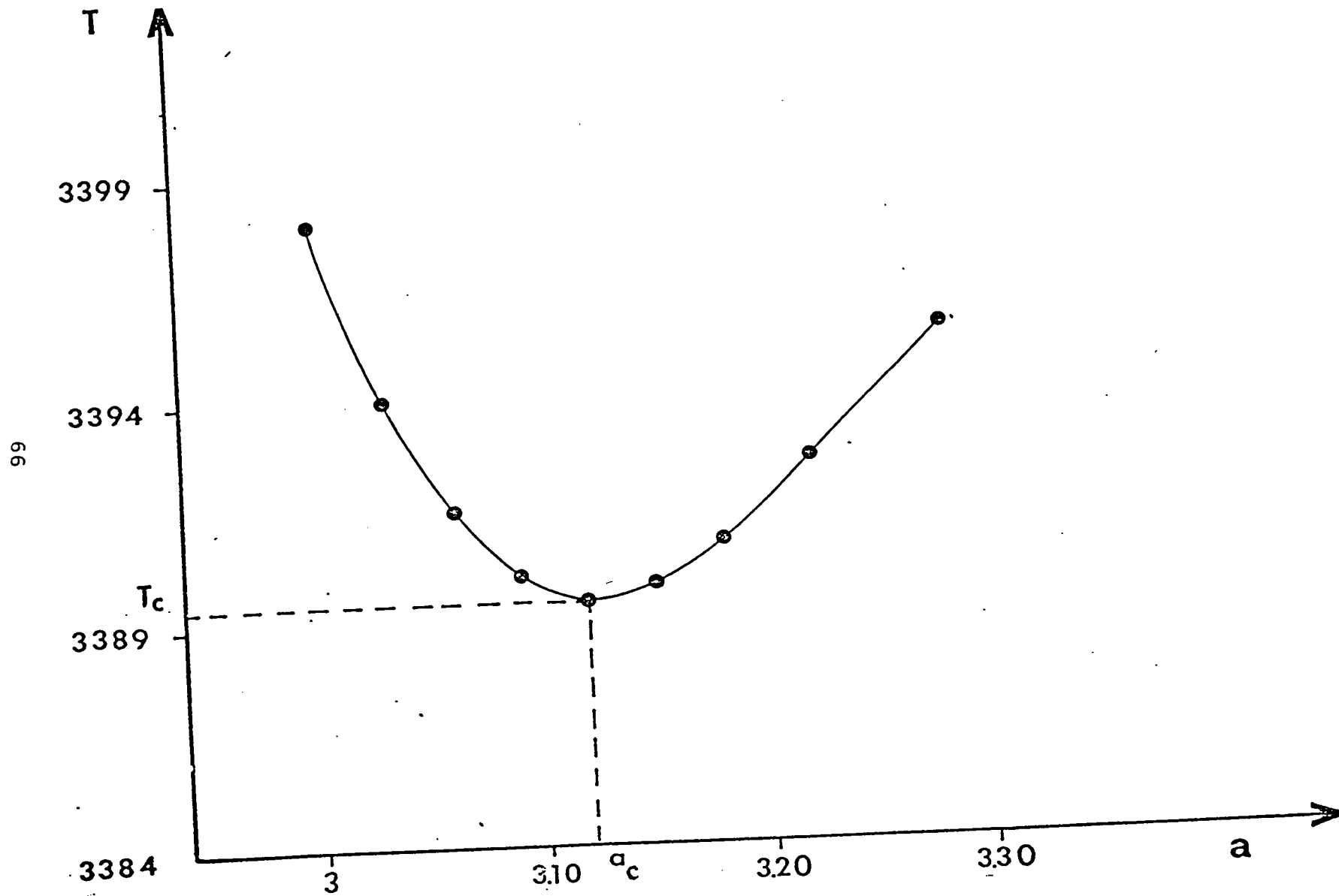


Figure 2.c : Courbe de stabilité marginale pour  $\mu' = 0$  .

$\mu'$	$a_{c1}$	$a_{c2}$	$T_{c1}$	$T_{c2}$
1.00	3.12	3.12	1708.0	1707.0
0.00	3.12	3.12	3390.3	3389.3
-0.25	3.13	3.14	4462.5	4460.1
-0.50	3.20	3.20	6414.8	6412.0
-0.75		3.38		10531.0

Tableau (2.α)

Concordance de nos résultats avec ceux de CHANDRASEKAR pour le nombre de Taylor et la longueur d'onde critiques, pour diverses valeurs de  $\mu'$ .

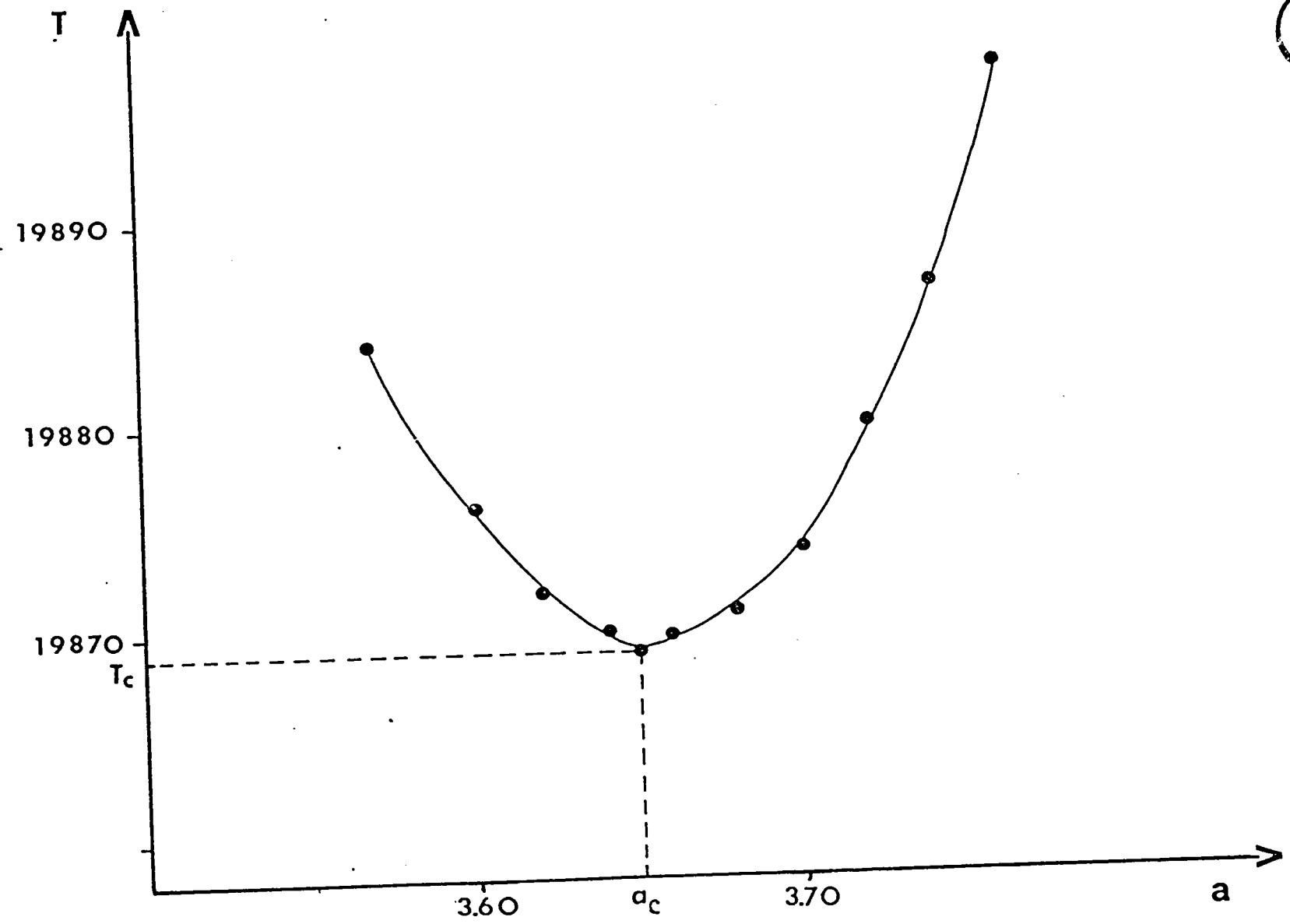


Figure 2.d : Courbe de stabilité marginale pour  $\mu' = -1$  .

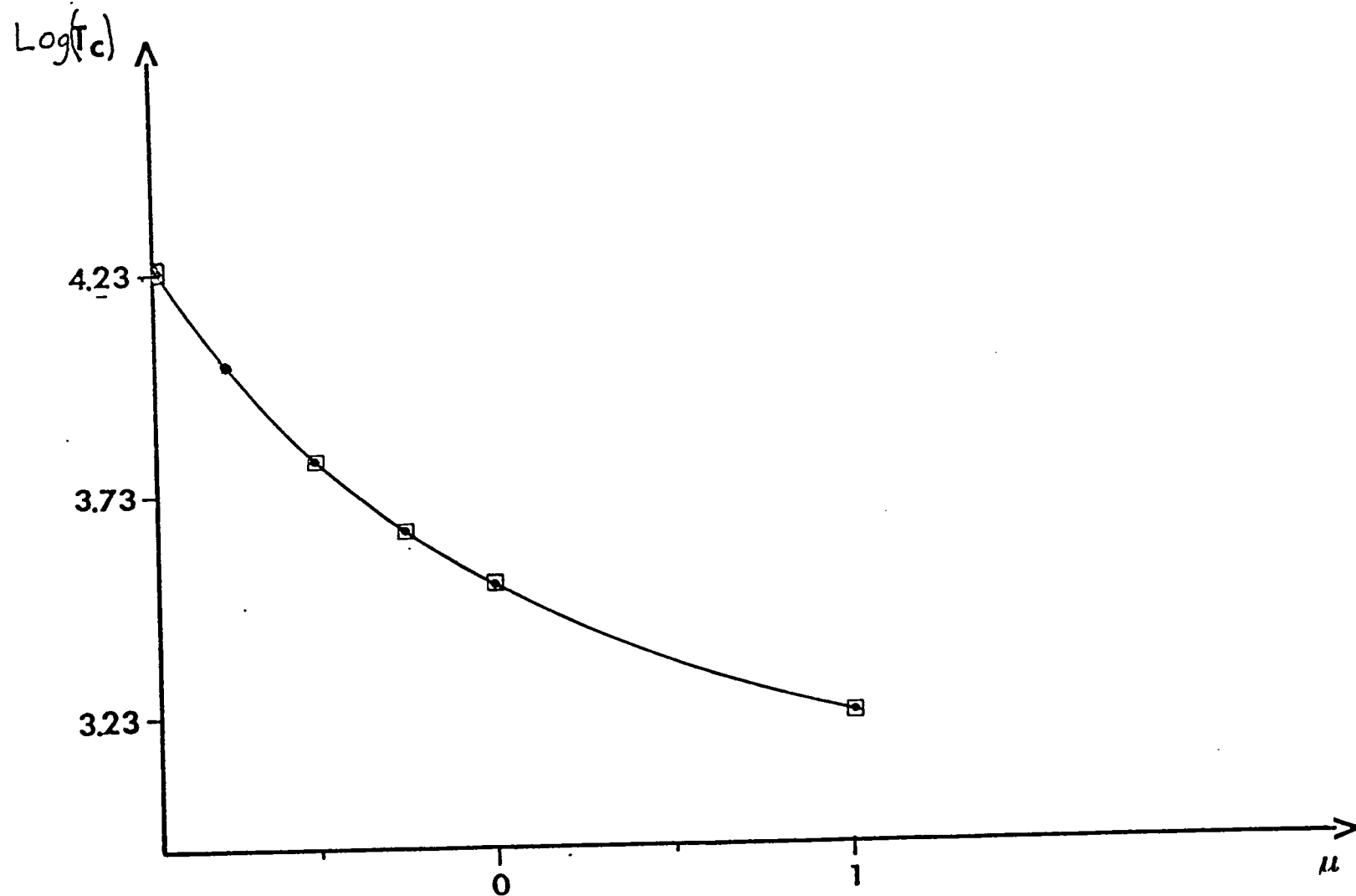


Figure 2.e: Variation du nombre de Taylor critique en fonction de  $\mu$ .

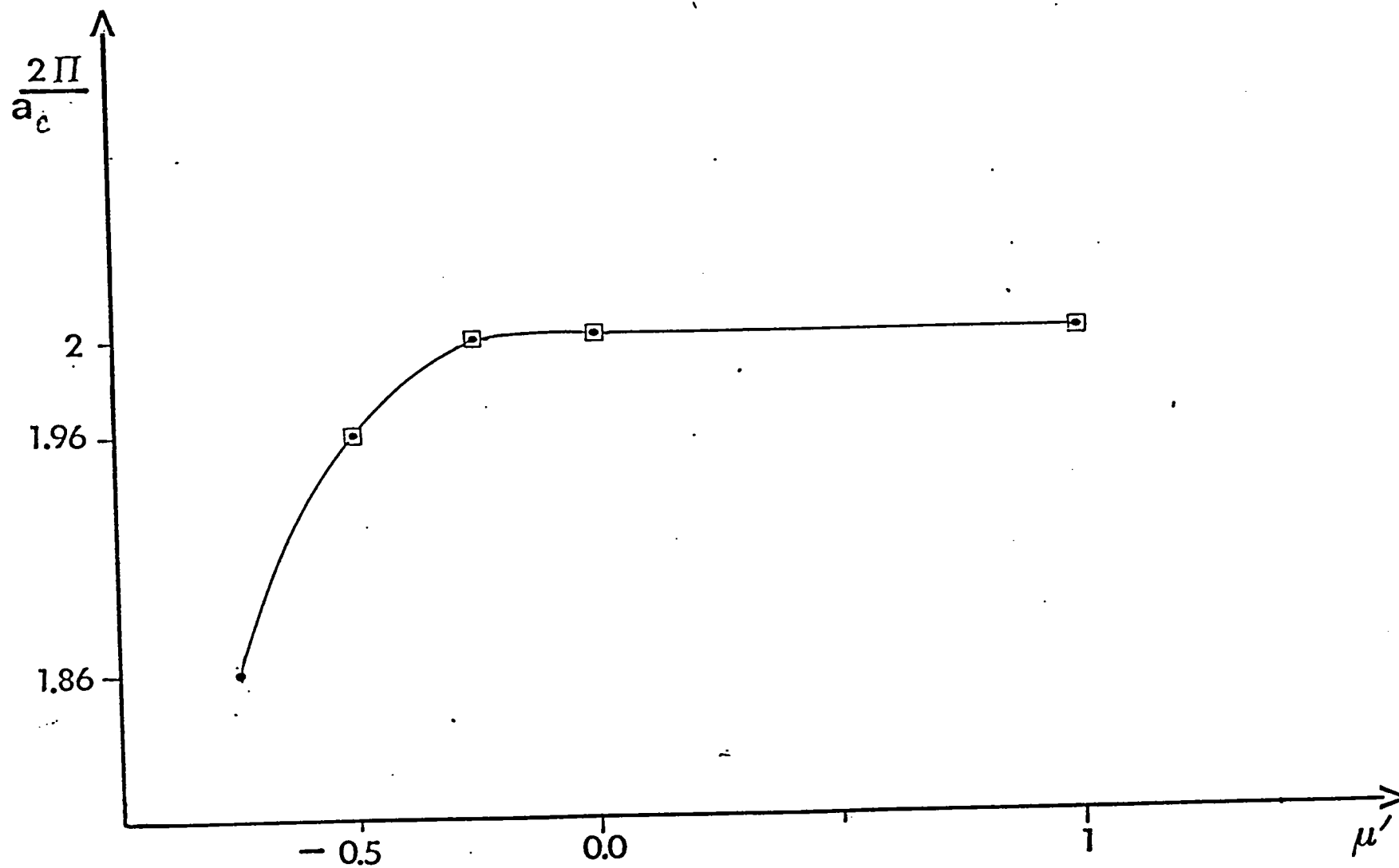


Figure 2.f : Variation du nombre d'onde-critique en fonction de  $\mu'$  .

## CHAPITRE 2.3

## STABILITE ET CHAMP HYDRODYNAMIQUE .

2.3.1. Solution de l'équation du mouvement en régime transitoire .

En régime transitoire ( $\sigma = 0$ ), il est intéressant d'opérer une translation de l'origine du système de coordonnées au centre de la cellule .

L'équation du mouvement (2.1.18) s'écrit alors sous la forme suivante : [3]

$$(D^4 - a^2)(D^2 - a^2 - \sigma)^2 v = -Ta^2(1 - \epsilon'x)v \quad (2.3.1)$$

et la condition de non-glissement (2.1.21) :

$$v = (D^2 - a^2 - \sigma) v = D(D^2 - a^2 - \sigma) v = 0 \text{ en } x = -1/2 \text{ et } 1/2 \quad (2.3.2)$$

où les paramètres  $\epsilon'$  et  $T$  sont définis par :

$$\epsilon' = 2 \frac{1 - \mu'}{1 + \mu'} \quad (2.3.3)$$

$$T = \frac{1}{2} (1 + \mu) \left[ \frac{-4A \Omega_1 (R_2 - R_1)^4}{\gamma^2} \right]$$

toutes choses restant égales par ailleurs .

En développant (2.3.2), nous obtenons :

$$\{ D^4 - (3a^2 + 2\sigma)D^3 + (3a^2 + \sigma)(a^2 + \sigma)D^2 - [a^2(a^2 + \sigma)^2 - Ta^2] - Ta^2 \epsilon' x \} v = 0 \quad (2.3.4)$$

L'équation (2.3.4) est similaire à celle du mouvement en régime permanent : (2.2.3).

Nous pouvons alors écrire sans calcul, des expressions analogues à celles obtenues au paragraphe (2.2.2), pour les 6 solutions de (2.3.4).

Ainsi, les 2 premières solutions s'exprimeront de la manière suivante :

$$V_1(x) = V_0(x) - \int_0^{+\infty} \cos(M_1(x,t)) \cdot N_1(x,t) dt \quad (2.3.5)$$

$$V_2(x) = - \int_0^{+\infty} \sin(M_1(x,t)) \cdot N_1(x,t) dt \quad (2.3.6)$$

avec :

$$V_0(x) = \int_0^{+\infty} e^{x t} \exp\left[-\frac{1}{Ta^2 \epsilon'} \cdot S(t)\right] dt \quad (2.3.7)$$

$$S(t) = -\frac{t^7}{7} + \frac{(3a^2 + 2\sigma)t^5}{5} - \frac{(3a^2 + \sigma)(a^2 + \sigma)t^3}{3} + [a^2(a^2 + \sigma)^2 - Ta^2] t \quad (2.3.8)$$

$$M_1(x,t) = K(x,t) \sin \frac{2\pi}{7} - \frac{(3a^2 + 2\sigma)}{5Ta^2 \epsilon'} t^5 \sin \frac{3\pi}{7} - E(t) \sin \frac{\pi}{7} + \frac{2\pi}{7} \quad (2.3.9)$$

$$N_1(x, t) = \exp\left[K(x, t) \cos \frac{2\pi}{7} + \frac{1}{Ta^2 \epsilon'} \left( -\frac{t^7}{7} - \frac{(3a^2 + 2\sigma)}{5} t^5 \right) \cdot \cos \frac{3\pi}{7} + E(t) \cos \frac{\pi}{7} \right] \quad (2.3.10)$$

$$K(x, t) = \left\{ x + \frac{[a^2(a^2 + \sigma)^2 - Ta^2]}{Ta^2 \epsilon'} \right\} \cdot t \quad (2.3.11)$$

$$E(t) = \frac{(3a^2 + \sigma)(a^2 + \sigma) t^3}{Ta^2 \epsilon'} \quad (2.3.12)$$

Les 2 solutions suivantes étant données par :

$$V_3(x) = V_0(x) - \int_0^{+\infty} \cos(M_2(x, t)) \cdot N_2(x, t) dt \quad (2.3.13)$$

$$V_4(x) = - \int_0^{+\infty} \sin(M_2(x, t)) \cdot N_2(x, t) dt \quad (2.3.14)$$

où  $M_2(x, t)$  et  $N_2(x, t)$  se déduisent de  $M_1(x, t)$  et  $N_1(x, t)$  par les substitutions (2.2.33)

Les 2 dernières solutions quant à elles, s'écrivent :

$$V_5(x) = V_0(x) - \int_0^{+\infty} \cos(M_3(x, t)) \cdot N_3(x, t) dt \quad (2.3.15)$$

$$V_6(x) = - \int_0^{+\infty} \sin(M_3(x, t)) \cdot N_3(x, t) dt \quad (2.3.16)$$



$M_3(x,t)$  et  $N_3(x,t)$  se déduisant de  $M_1(x,t)$  et  $N_1(x,t)$  par les substitutions (2.2.34).

### 2.3.2 Critère de stabilité de l'écoulement .

L'étude de la stabilité consiste à prédire d'une part la croissance ou l'évanescence de l'amplitude de la perturbation qui a été superposée à l'écoulement de Couette et d'autre part, la variation du taux de croissance des tourbillons,  $\sigma$ , en fonction des paramètres du problème  $(a,T)$ , pour une configuration d'écoulement donnée .

Compte tenu de la forme choisie pour la perturbation (2.1.3), le caractère stable ou instable de l'écoulement sera déterminé par le signe de la partie réelle de  $\sigma$  .

Par ailleurs, les perturbations étudiées sont supposées si petites qu'elles n'ont aucun effet sur l'écoulement sous-jacent, contrairement aux théories non-linéaires qui considèrent que l'amplitude de la perturbation, par suite de son amplification, peut devenir si importante qu'il s'établisse un transfert d'énergie, de l'écoulement sous-jacent vers la perturbation .

Ainsi, l'hypothèse formulée par la théorie linéaire n'est valable qu'au voisinage de la transition, [140, 141] .

Effectivement, les résultats expérimentaux de DONNELLY et SCHWARTZ [95] concordent si bien avec les calculs de ROBERTS [142], qu'ils concluent à la validité des théories linéaires .

Sans restreindre la généralité de l'étude, nous pouvons nous limiter au cas des systèmes dont le cylindre extérieur est maintenu fixe ( $\mu' = 0$ ).

Ainsi que nous l'avons indiqué au paragraphe (2.21), le principe de détermination d'un critère de stabilité est de faire apparaître les tourbillons de Taylor à l'extérieur de la courbe de stabilité marginale .

Pour un tel couple  $(a, T)$ , nous devons donc trouver le réel  $\sigma$ , solution du problème aux valeurs propres (2.3.2), c'est-à-dire celui qui annule le déterminant correspondant, pour les solutions déterminées au paragraphe précédent .

Le calcul numérique des intégrales qui interviennent dans l'expression de ces solutions est effectué en tenant compte des remarques formulées au paragraphe (2.2.3) .

Ce calcul a donné un signe unique à  $\sigma$ , pour les couples  $(a, T)$  situés du même côté de la courbe de stabilité marginale .

Ayant obtenu des valeurs positives pour  $\sigma$  dans le domaine supérieur, et des valeurs négatives dans le domaine inférieur, nous déduisons que l'écoulement est instable dans le premier cas ou que les perturbations correspondantes sont supercritiques, et stable dans le second cas (perturbations subcritiques), (fig. 2.g), en accord avec les résultats antérieurs .

### 2.3.3 Loi de variation du taux de croissance des tourbillons .

D'après la théorie de Landau [1,2], le champ de vitesses des perturbations à un écoulement plan pour des nombres de Reynolds  $R$ , peut s'écrire de la manière suivante :

$$v(r,t) = A(t) f(r) \quad (2.3.17)$$

où  $f(r)$  est une fonction des coordonnées .

La croissance de  $A$ , quant à elle, est décrite par une équation de la forme :

$$\frac{d A^2}{dt} = \sum_{m=1}^{\infty} b_m A^{2m} \quad (2.3.18)$$

Ayant développé  $\sigma$  en série de  $(R - R_c)$ , LANDAU déduit alors une relation de proportionnalité entre  $\sigma$  et  $(R - R_c)$ .

Dans le cas de l'écoulement de Taylor-Couette, les travaux théoriques de STUART [141], WATSON [68] et DAVEY [69] montrent que l'équation (2.3.17) peut être utilisée; et du fait de la proportionnalité des nombres de Taylor et de Reynolds (2.1.20), la relation proposée par LANDAU s'écrit alors :

$$\sigma = \text{constante} \times (T - T_c) \quad (2.3.19)$$

Outre la relation  $\sigma(T)$ , ROBERTS [142] montre que la loi  $a(T)$  est également linéaire .

La détermination de la constante apparaissant dans (2.3.19), pose le problème important de la direction le long de laquelle la longueur d'onde doit être choisie .

Les travaux de DONNELLY et SCHWARZ [95] et ceux de ROBERTS [142] montrent que la variation de  $a$  autour de la transition est négligeable; aussi, pouvons-nous maintenir  $a$  constant et égal à sa valeur critique, ( $a_c = 3.12$ ) dans la vérification de la loi de LANDAU .

Les résultats de nos calculs, (tableau 2.β) conduisent à écrire :

$$\sigma = 13.10 (1 - T_c/T) \quad (2.3.20)$$

Cette relation est à rapprocher de celle établie par DAVEY [69], qui a obtenu une constante égale à 13.01 dans une loi similaire .

La figure (2.g), qui illustre nos résultats, appelle les 2 remarques suivantes :

- dans la région supercritique, la loi (2.3.20) est respectée avec une précision de 0.8 pour cent pour des valeurs du nombre de Taylor inférieures à 3490 . Cette précision va en diminuant, du fait que les phénomènes non-linéaires ne peuvent plus être négligés [42] .

En outre, MEYER [143] montre que la variation de la longueur d'onde doit-être évaluée simultanément .

- dans la région subcritique, les valeurs de  $\sigma$  s'écartent périodiquement de la droite (2.3.20).

L'existence d'une partie imaginaire dans l'expression de  $\sigma$  pour des perturbations subcritiques, suggérée par DONNELLY et SCHWARZ [95], contrairement aux conclusions de YIH [135,136] fut démontrée par DI PRIMA et HALL [137] . Elle explique ce phénomène .

#### 2.3.4 Champ hydrodynamique .

A la première transition, SNYDER [97] montre que dans une approche non-linéaire, il est possible d'obtenir diverses longueurs d'ondes axiales à partir d'une même configuration d'écoulement . Dans le cas de cylindres infiniment longs, une infinité de longueurs d'ondes axiales peut être obtenue selon les processus d'amplification des instabilités [144] . SNYDER prouve alors que la longueur d'onde est uniquement déterminée par les conditions initiales (chap. 1.1) .

Du fait de l'hypothèse de linéarité de notre étude, le problème de la multiplicité des états d'écoulement stables ne se pose pas.

Compte tenu en outre de l'expression (2.1.3) donnée aux perturbations, la détermination du champ hydrodynamique dans la cellule (problème aux valeurs propres) est effectuée sur l'écoulement stationnaire .

A la transition, la solution générale de ce problème est une combinaison linéaire des 6 solutions obtenues au paragraphe (2.2.3) .

$$v(x) = F'_i v_i(x) \quad i = 1, 2, \dots, 6 \quad (2.3.21)$$

Le calcul algébrique conduit pour  $\mu' = 0$  aux valeurs suivantes pour les constantes :

$$F'_1 = 1$$

$$F'_2 = - 6.104$$

a	T	$\sigma$
3.12	3490.0	0.385
	3470.0	0.309
	3460.0	0.270
	3450.0	0.232
	3440.0	0.194
	3430.0	0.156
	3420.0	0.117
	3410.0	0.079
	3399.0	0.036
	3389.4	0.000
	3389.0	-0.002
	3385.0	-0.017
	3379.0	-0.041
	3375.0	-0.058
	3370.0	-0.075
	3365.0	-0.094
	3360.0	-0.114
	3355.0	-0.134
	3350.0	-0.153
	3345.0	-0.172
	3340.0	-0.192
	3335.0	-0.211
	3330.0	-0.250
	3320.0	-0.270
	3315.0	-0.289
	3310.0	-0.309

Tableau (2.8)

Valeur du taux de croissance des tourbillons pour divers nombres de Taylor .

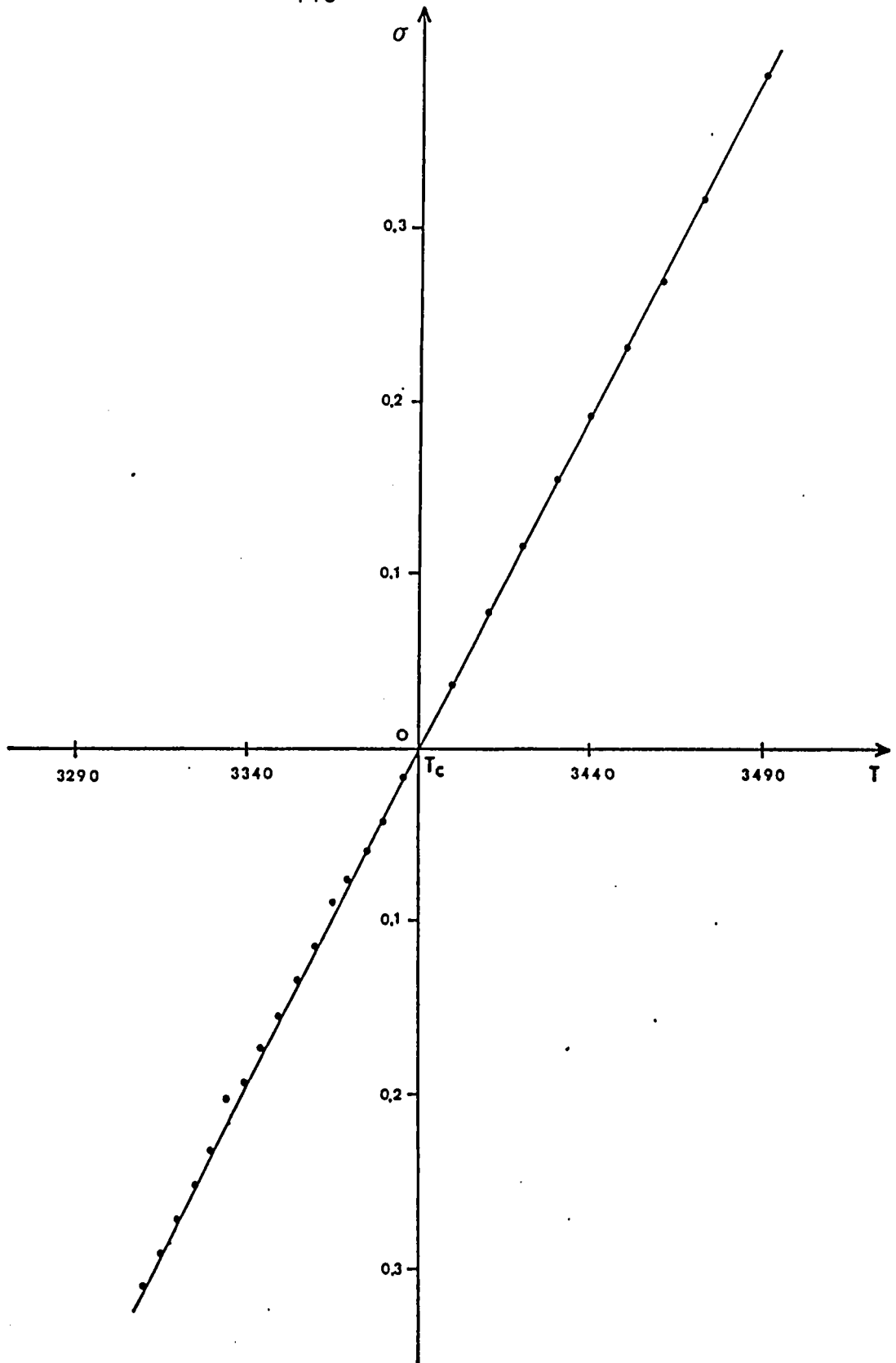


Figure 2.g : Illustration de la loi de Landau

$$\sigma = c(1 - T_c/T)$$

$$F'_3 = - 5.407 \quad (2.3.22)$$

$$F'_4 = - 4.964$$

$$F'_5 = 0.016$$

$$F'_6 = - 0.039$$

Le tableau (2.F) montre que nos résultats sont en bon accord avec ceux de DAVEY [69] .

Les champs de vitesses radiale et axiale et de pression sont calculés à partir de la solution précédente par les relations déduites des transformations des équations de Navier-Stokes qui conduisent à l'équation (2.1.18) [3] .

Ainsi :

$$u(x) = - \frac{(D^2 - a^2)}{2 T a^2} v(x)$$

$$w(x) = - \frac{Du(x)}{a} \quad (2.3.23.a)$$

Et

$$p(x) = \gamma \frac{(D^2 - a^2)}{a^2} Du(x) \quad (2.3.23.b)$$

Les courbes de variation de  $v, u, w, p$ , et  $E_c$  (énergie cinétique), après normalisation sont représentées sur les figures (2h, 2i, 2j, 2k, 2l) respectivement .



x	$v_D$	$v_N$
-0.50	0.000	0.000
-0.45	0.144	0.143
-0.40	0.288	0.288
-0.35	0.431	0.431
-0.30	0.569	0.568
-0.25	0.695	0.695
-0.20	0.806	0.808
-0.15	0.895	0.894
-0.10	0.958	0.957
-0.05	0.994	0.993
0.00	1.000	0.999
0.05	0.977	0.976
0.10	0.927	0.926
0.15	0.853	0.852
0.20	0.758	0.757
0.25	0.646	0.646
0.30	0.524	0.523
0.35	0.394	0.394
0.40	0.262	0.262
0.45	0.130	0.130
0.5	0.000	0.000

Tableau (2.Γ)

Concordance de nos résultats avec ceux de DAVEY [70] pour le champ des vitesses tangentielles normalisées du mouvement secondaire .

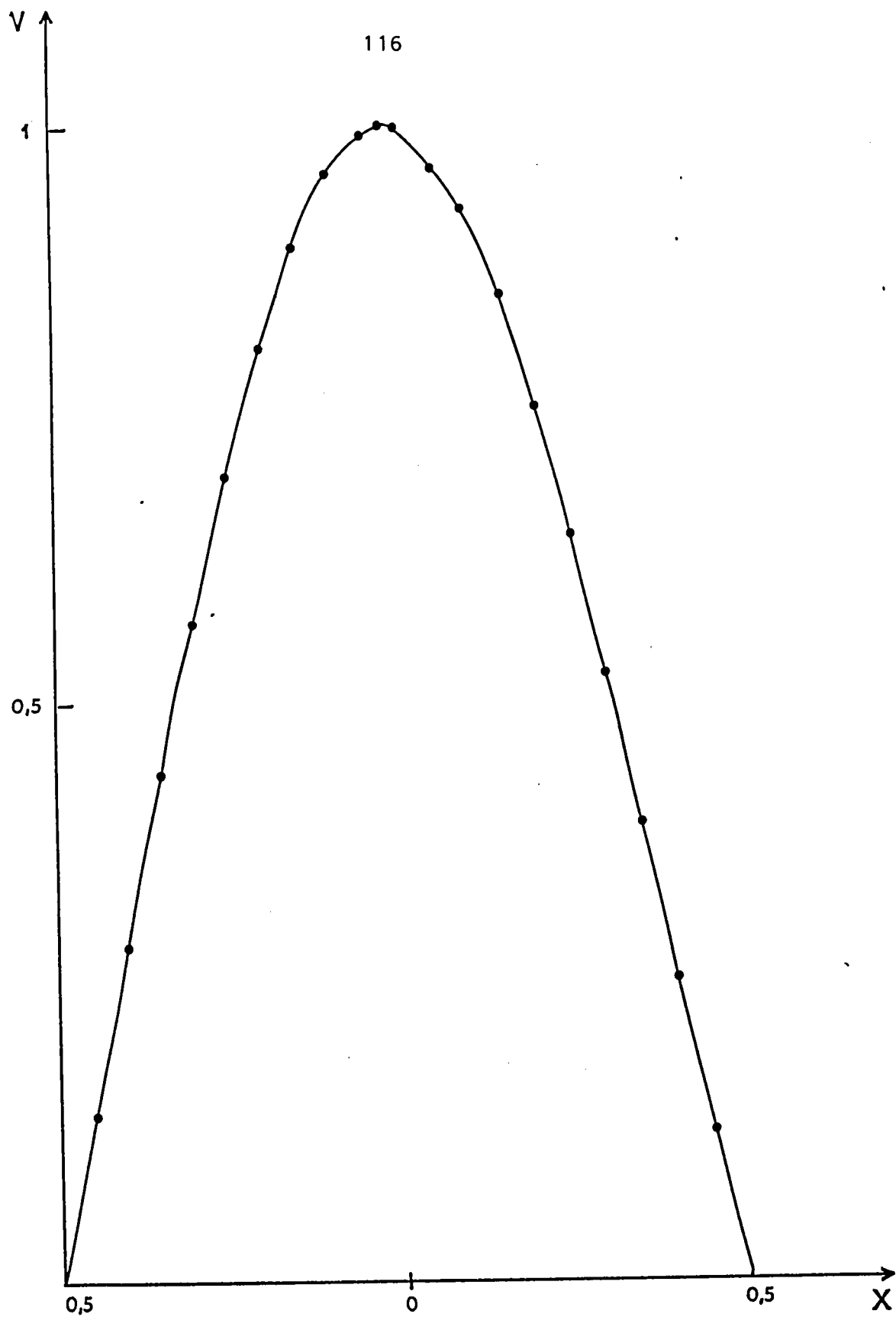


Figure 2.h : Champ des vitesses tangentiellees normalisees du mouvement secondaire .

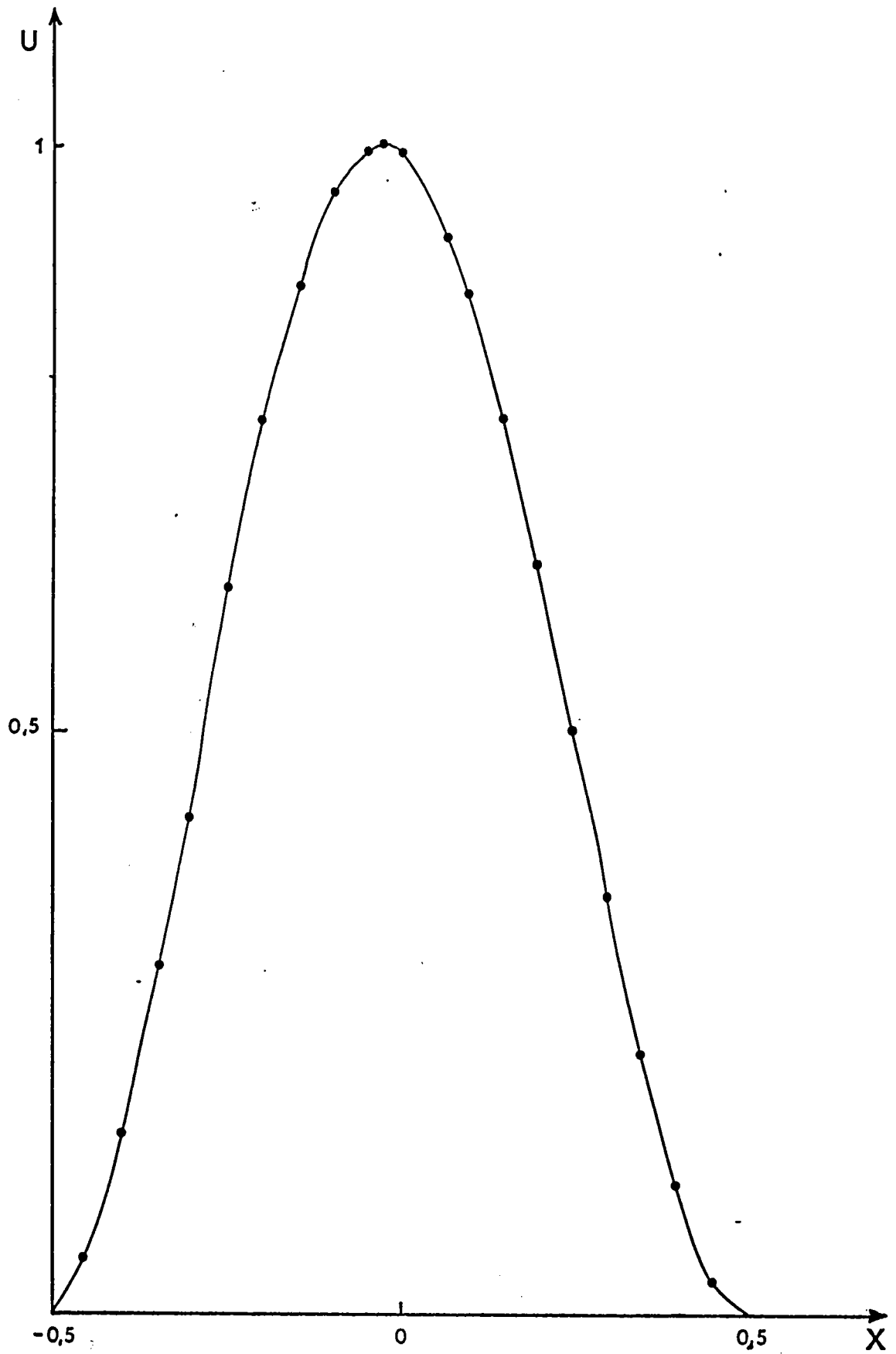


Figure 2.1 : Champ des vitesses radiales normalisées du mouvement secondaire.

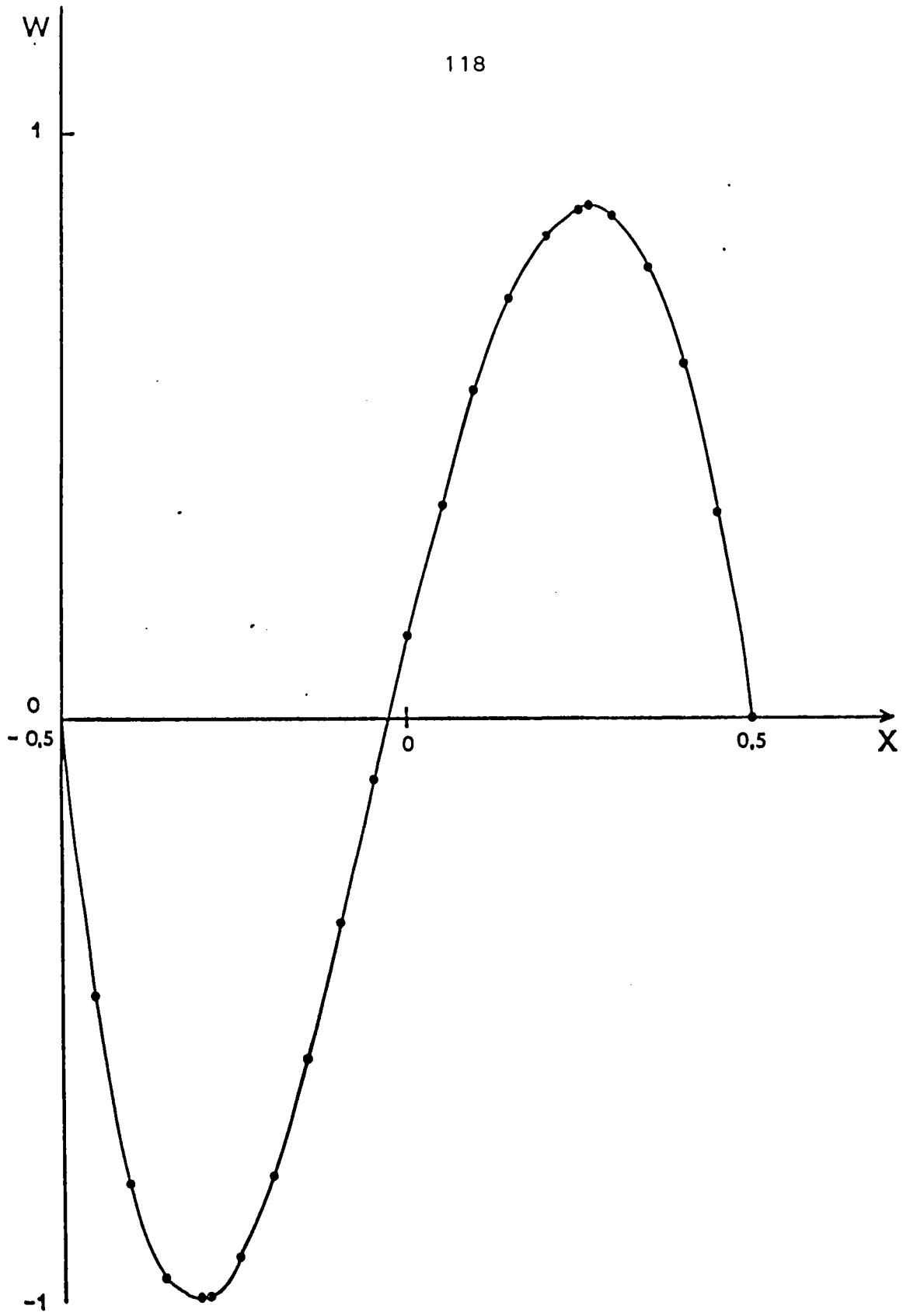


Figure 2.j : Champ des vitesses axiales normalisées du mouvement secondaire .

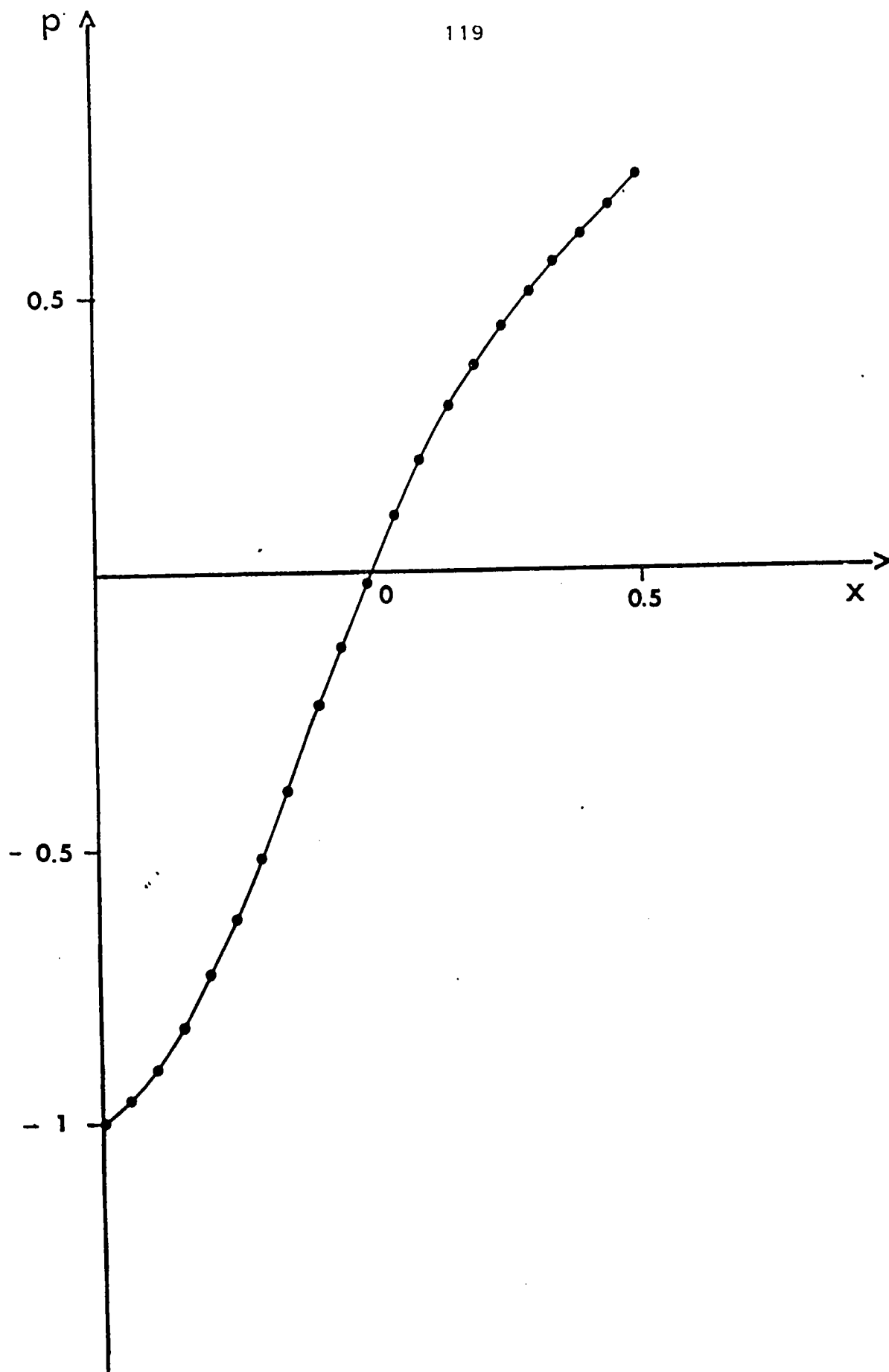


Figure 2.k : Champ des pressions normalisées du mouvement secondaire .

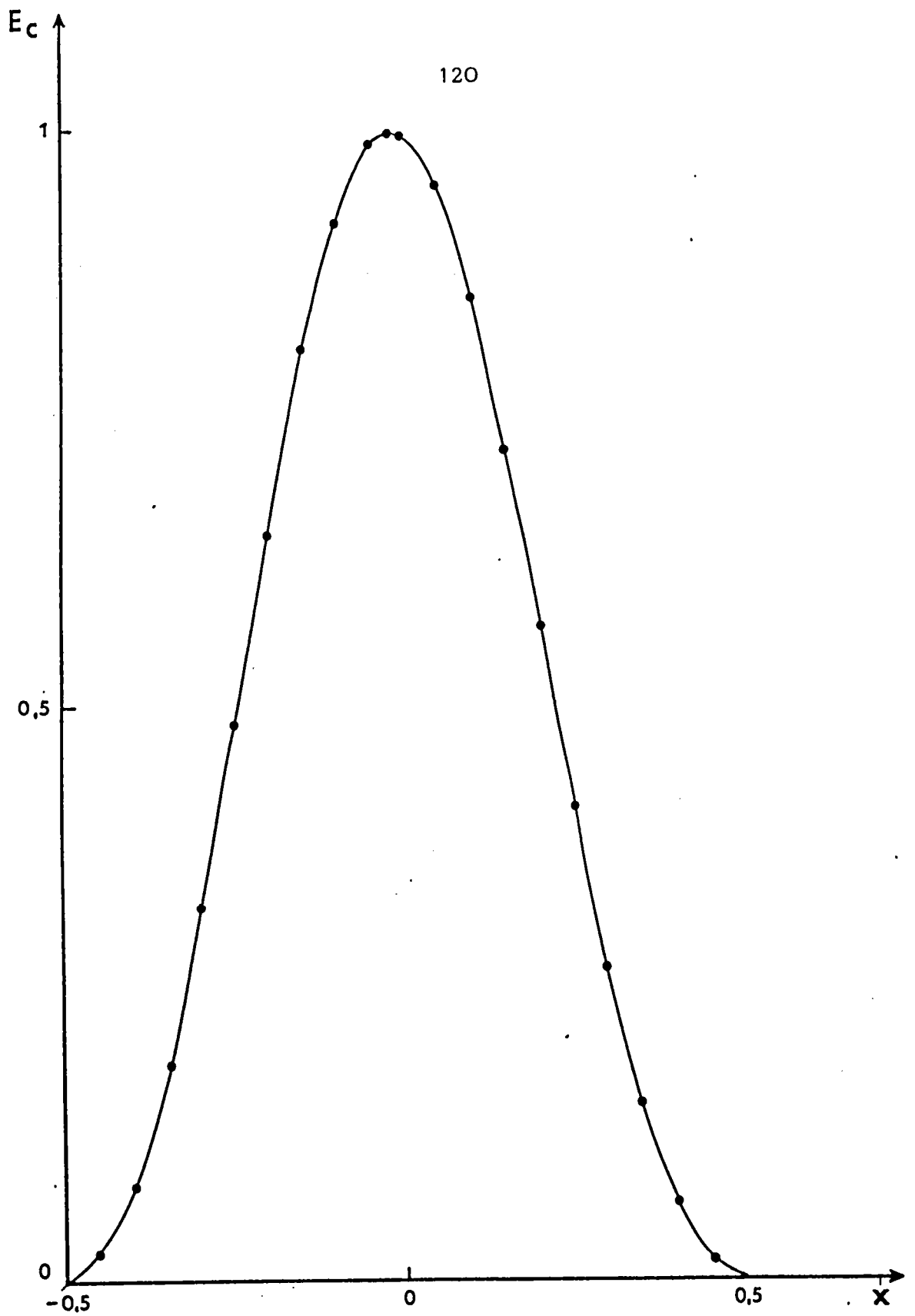


Figure 2.1 : Champ des énergies cinétiques normalisées du mouvement secondaire .

## CHAPITRE 2.4.

## APPLICATION DE LA METHODE A LA DEUXIEME TRANSITION .

## 2.4.1 Equations du mouvement .

Les résultats satisfaisants obtenus dans l'étude précédente, nous suggèrent d'appliquer notre méthode à la 2ème transition .

Le mouvement est décrit par un système d'équations établies de la même manière que pour la première transition .

Considérons une petite perturbation de la forme suivante, dans un système de coordonnées cylindriques définies comme au paragraphe (2.1.1) .

$$v_z = v'(r') \cdot e^{i(\omega t + m\theta + kz)} \quad (2.4.1)$$

avec des expressions similaires pour les autres composantes de la vitesse, et pour la pression .

En théorie linéaire, le système d'équations de Navier-Stokes et de continuité, appliqué au champ résultant de la superposition de l'écoulement de Couette (2.1.1) à la perturbation précédente, se réduit au système suivant, dans l'approximation de l'entrefer étroit :

$$L(D^2 - a^2) U'(x) = - a^2 T [1 - (1 - s)x] V'(x) \quad (2.4.2)$$

$$L V'(x) = U'(x)$$

muni des conditions de non-glissement sur les parois des cylindres :

$$U'(x) = V'(x) = \frac{d U'(x)}{dx} = 0 \quad \text{en } x = 0 \quad \text{et } x = 1 \quad (2.4.3)$$

où on a posé :

$$x = (r - R_1)/d$$

$$D = d/dx \quad (2.4.4)$$

$$L = D^2 - a^2 - i (\sigma + kT [1 - (1 - s)x])$$

Les grandeurs  $a, T, \sigma, k$  et  $s$  sont des constantes liées à l'écoulement et données en [65,72,145] .

Le système (2.4.2), associé aux conditions (2.4.3), définissent un problème aux valeurs propres de la forme :

$$F(\mu', a, k, \sigma, T) = 0 \quad (2.4.5)$$

La stabilité marginale, définie par la nullité de la partie imaginaire de  $\sigma$  se détermine de la manière suivante :

- pour une configuration d'écoulement donnée, ( $\mu'$  fixé), il s'agit de trouver la plus petite valeur réelle positive de  $T$ , pour tout réel  $a > 0$ , et pour tout réel  $k \geq 0$ , pour laquelle l'équation (2.4.5) admet une solution avec  $\text{Im}(\sigma) = 0$



Cette valeur de  $T, T_c(\mu')$  est la valeur critique du nombre de Taylor, pour la configuration choisie .

L'étude de la stabilité de l'écoulement peut être menée sans grande difficulté, [142] mais l'utilisation de changements de fonctions et de variables appropriés, dans l'application de notre méthode, met en évidence des propriétés nouvelles de l'écoulement de Taylor-Couette .

#### 2.4.2 Transformation des équations du mouvement .

Posons :

$$C = i k \sqrt{T} (s - 1)$$

$$X' = \frac{a^2 + i \{ \sigma + k T [1 - (1 - s)x] \}}{i k \sqrt{T} (s - 1)} \quad (2.4.6)$$

si nous cherchons une solution de la forme :

$$U'(x') = \int_{\alpha}^{\beta} U(t) e^{t x'} dt ; V'(x') = \int_{\alpha}^{\beta} V(t) e^{t x'} dt \quad (2.4.7)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes que nous devons déterminer, le système (2.4.2) devient :

$$\int_{\alpha}^{\beta} U(t) e^{t x'} dt + \int_{\alpha}^{\beta} \left( C \frac{d}{dt} [(a^2 - t^2) e^{t x'} U(t)] - \frac{i a^2}{k} C \sqrt{T} \frac{d}{dt} [e^{t x'} V(t)] \right) dt = 0 .$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} I_2(t) t^{ix} dt - C \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dt} [e^{ix} V(t)] dt = 0 \quad (2.4.8)$$

où :

$$I_1(t) = [C(t^2 - a^2) \frac{d}{dt} + t^4 - a^2 t^2 + 2C] U(t) + \frac{a^2 \sqrt{T}}{k} [ic \frac{d}{dt} + \dots - (\sigma - ia^2)] V(t) \quad (2.4.9)$$

et

$$I_2(t) = (C \frac{d}{dt} + t^2) V(t) - U(t)$$

Cherchons une solution telle que :

$$I_1(t) = 0 \quad ; \quad I_2(t) = 0 \quad (2.4.10)$$

Pour ce faire, effectuons le changement de fonctions suivant :

$$U(t) = \exp[-t^3/3C].f(t) \quad ; \quad V(t) = \exp[-t^3/3C].g(t) \quad (2.4.11)$$

(2.4.10) devient alors :

$$[\frac{kC}{a^2 \sqrt{T}} (t^2 - a^2) \frac{d}{dt} + \frac{2kCt}{a^2 \sqrt{T}}] f(t) = [-ic \frac{d}{dt} + \sigma + i(t^2 - a^2)] g(t)$$

$$f(t) = C \frac{d g(t)}{dt} \quad (2.4.12)$$

en posant :

$$\Gamma = \frac{k C^2}{a^2 \sqrt{T}} \quad (2.4.13)$$

et avec le changement de variable :

$$Y = \frac{t}{a} \quad (2.4.14)$$

suivi du changement de fonction :

$$g(y) = \exp\left[-\frac{1}{2} \int \frac{ic}{\Gamma a} / (y^2 - 1) dy\right] \cdot h(y) \quad (2.4.15)$$

le système (2.4.12) se réduit à l'équation suivante :

$$\begin{aligned} (1 - y^2) \frac{d^2 h(y)}{d y^2} - 2y \frac{d h(y)}{d y} + h(y) \left[ \frac{\sigma}{\Gamma} - \frac{ia^2}{\Gamma} (1 - y^2) + \dots \right. \\ \left. + \frac{c^2}{4\Gamma^2 a^2 (1 - y^2)} \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.4.16)$$

### 2.4.3 Interprétation .

L'équation (2.4.16) est une équation d'onde sphéroïdale .  
[146 à 148] .

Elle gouverne les projections de l'équation d'onde

$$\Delta h(y) + b^2 h(y) = 0 \quad (2.4.17)$$

sur les axes  $\varrho$  (direction radiale) et  $\vartheta$  (direction tangentielle)  
d'un système de coordonnées sphéroïdales .

La transformation d'un système d'équations décrivant l'écoulement d'un fluide incompressible en cette équation d'onde sphéroïdale qui traduit un phénomène de propagation dans un milieu élastique montre qu'il est possible de bâtir une similitude entre l'écoulement de Taylor-Couette et des écoulements compressibles . [149]

Le succès de l'élaboration de cette similitude aurait deux conséquences essentielles :

- elle permettrait de construire une nouvelle classe de solutions exactes du problème de Taylor-Couette : les solutions compressibles

- comme l'expérience de Taylor-Couette est plus aisée à produire, il serait possible de simuler certains phénomènes compressibles dans une cellule de Couette .

Ce résultat tend à confirmer ceux de GREENSPAN [150] qui avait établi une équation identique pour décrire la rotation d'un liquide incompressible d'une part, et le mouvement non-tournant d'un fluide stratifié, d'autre part .

TROISIEME PARTIE .

PREMIERE TRANSITION EN PRESENCE DE PARTICULES SPHERIQUES  
RIGIDES .

## INTRODUCTION .

La présence de particules sphériques dans l'écoulement a pour effet de modifier le champ hydrodynamique et le comportement rhéologique du fluide .

Dans les chapîtres qui suivent, nous menons dans l'hypothèse d'un écoulement rampant sur les particules,

- un calcul de la perturbation au mouvement secondaire due aux sphères

- un calcul de la loi de variation du nombre de Taylor critique en fonction de la concentration dans le modèle newtonien en régime des tourbillons de Taylor

- une étude de la première instabilité en fluide de Bingham; celui-ci décrit le comportement de la suspension à grande concentration .

Nous nous limiterons aux suspensions homogènes de particules rigides ayant un diamètre petit devant l'entrefer de la cellule .

## CHAPITRE 3.1.

## CHAMP HYDRODYNAMIQUE DANS UNE SUSPENSION DE PARTICULES SPHERIQUES EN ECOULEMENT DE COUETTE .

3.1.1 Champ hydrodynamique autour d'une particule placée au centre de la cellule .

Le champ hydrodynamique autour d'une petite sphère de rayon  $b$ , placée au centre d'une cellule de Couette se calcule en repoussant aux infinis, les cylindres, du fait des dimensions relatives de la particule .

Cette opération revient à assimiler les cylindres à des plans. L'écoulement de base est alors celui de Couette plan .

Dans cette opération, les axes de coordonnées  $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$  et  $\vec{e}_z$  (fig.3.a) s'identifient aux coordonnées cartésiennes  $\vec{e}_x, \vec{e}_y$  et  $\vec{e}_z$ , respectivement (fig. 3.a), et si nous faisons tendre  $r$  vers l'infini dans l'expression des relations (2.1.2), le champ des vitesses de l'écoulement de cisaillement en l'absence de la particule s'écrit :

$$\vec{V} = Ax' . \vec{e}_y \quad (3.1.1)$$

La perturbation à cet écoulement, due à la particule peut se calculer alors, entre autres méthodes [151 à 153], de la manière suivante :

- la vitesse est décomposée en 2 champs élémentaires,  $\vec{V}_1$  (symétrique) et  $\vec{V}_2$  (anti-symétrique), ci-dessous :

$$\vec{V}_1 = -\frac{A}{2} y' e_x + \frac{A}{2} x' e_y \quad (3.1.2)$$

$$\vec{V}_2 = -\frac{A}{2} y' e_x + \frac{A}{2} x' e_y \quad (3.1.3)$$

La perturbation à  $\vec{V}_1$  est donnée par LANDAU et LIFSCHITZ [2]. et celle à  $\vec{V}_2$ , par FORTIER [154] .

Par rapport à des axes liés à la particule, la superposition des deux perturbations précédentes conduit à la solution suivante :

$$\begin{aligned} \vec{v}' = & \left[ -\frac{5}{2} x^2 y \left( \frac{b^5}{r^7} - \frac{b^3}{r^5} \right) - \frac{y}{2} \left( \frac{b^5}{r^5} - \frac{b^3}{r^3} \right) \right] A e_x + \left[ -\frac{5}{2} xy^2 \left( \frac{b^5}{r^7} - \frac{b^3}{r^5} \right) + \dots \right. \\ & \left. - \frac{x}{2} \left( \frac{b^5}{r^5} - \frac{b^3}{r^3} \right) \right] A e_y + \frac{5}{2} xyz \left[ \frac{b^5}{r^7} - \frac{b^3}{r^5} \right] A e_z \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

avec :

$$r = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$$



La pression est donnée par l'équation de Stokes .

Il faut noter que la particule subit, en plus de cette translation, une rotation autour de  $\vec{e}_z$ , de module :

$$\Omega = \frac{A}{2} \quad (3.1.5)$$

De sorte que le champ des vitesses totales aura pour expression :

$$\vec{v}' = \left[ -\frac{5}{2} A \left( \frac{b^5}{r^7} - \frac{b^3}{r^5} \right) x^2 y - \frac{A b^5}{2 r^5} y l e_x + \left[ A x + \frac{5}{2} A \left( \frac{b^5}{r^7} + \dots \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \frac{b^3}{r^5} \right) y^2 x - \frac{A b^5}{2 r^5} x l e_y + \frac{5}{2} A \left( \frac{b^5}{r^7} - \frac{b^3}{r^5} \right) x y z \right] \vec{e}_z \quad (3.1.6)$$

Le tracé des lignes de courant correspondantes indique que l'écoulement est radial au loin, et que les tubes de courant sont des cônes de révolution . [153]

Pour une particule placée en un point M, de coordonnées  $(x_M, y_M, z_M)$ , différent du centre de la cellule, mais éloigné des parois, les expressions précédentes restent valables, à condition de remplacer  $x, y, z$  par  $(x - x_M), (y - y_M)$  et  $(z - z_M)$ , respectivement .

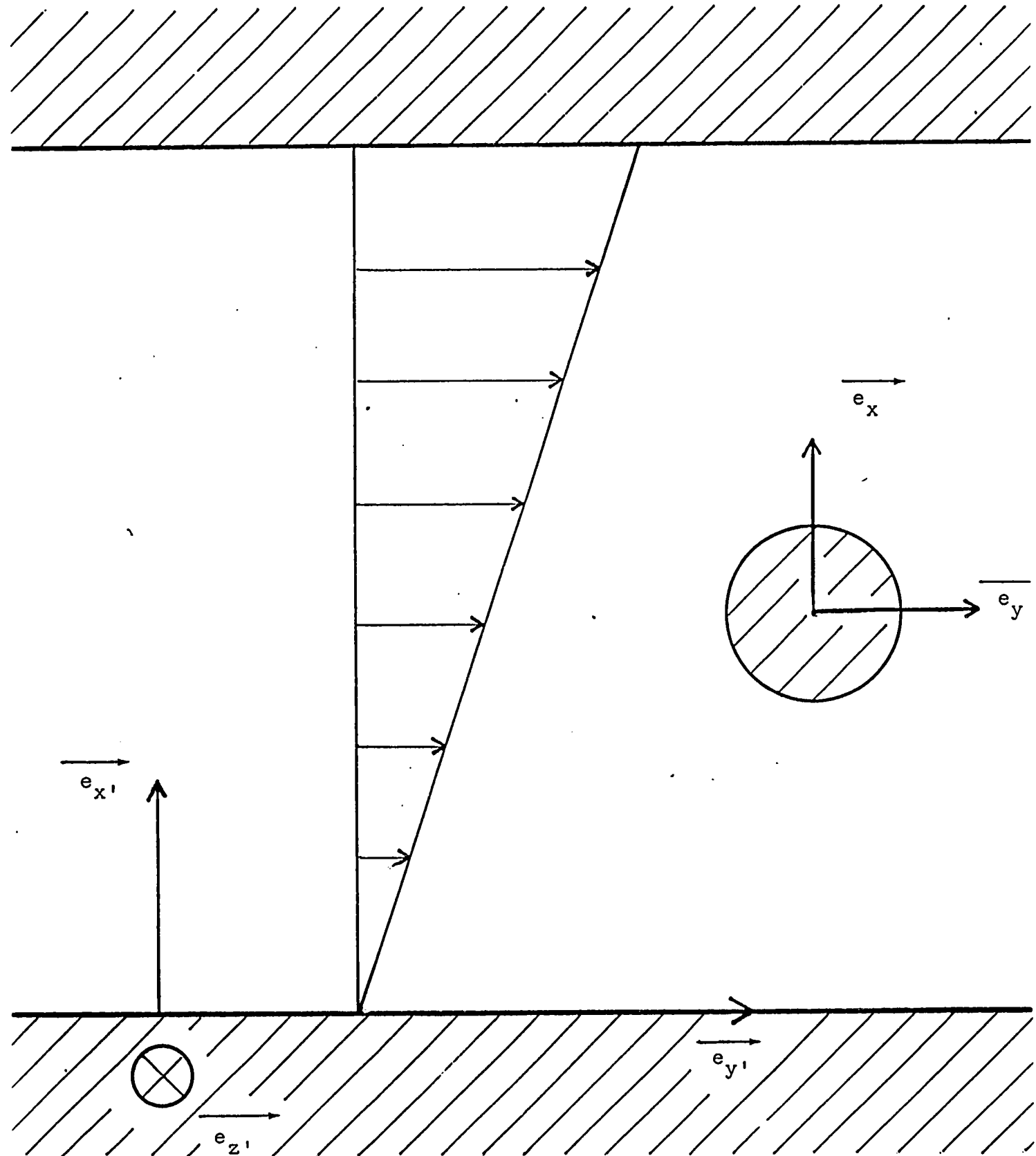


Figure 3.a : Particule sphérique en écoulement de cisaillement .

### 3.1.2 Effet de proximité des parois .

Lorsque la position de la particule dans la cellule est suffisamment proche de l'une des parois pour que l'effet de celle-ci ne puisse plus être négligé, la modification du champ peut être calculée par la méthode des images . [155]

Notant  $v'_x, v'_y$  et  $v'_z$  les composantes de  $\vec{v}'$ , (paragraphe 3.1.1), le champ  $\vec{v}''$ , calculé en tenant compte de la proximité de l'une des parois est donné par :

$$\begin{aligned}
 v''_x &= v'_x - 2x \frac{\partial v'_x}{\partial x} + \frac{x^2}{\mu} \frac{\partial p'}{\partial x} \\
 v''_y &= -v'_y - 2x \frac{\partial v'_x}{\partial y} + \frac{x^2}{\mu} \frac{\partial p'}{\partial y} \\
 v''_z &= -v'_z - 2x \frac{\partial v'_x}{\partial z} + \frac{x^2}{\mu} \frac{\partial p'}{\partial z} \\
 p'' &= p' + 2x \frac{\partial p'}{\partial x} - 4\mu \frac{\partial u'}{\partial x}
 \end{aligned}
 \tag{3.1.7}$$

Ce phénomène du second ordre sera négligé dans la suite de nos calculs .

### 3.1.3 Effet d'interaction hydrodynamique .

Dans le cas d'une suspension concentrée (distances réduites

entre les particules), les perturbations précédentes vont se superposer par linéarité [153,156,157] .

Considérons 2 sphères isolées dans l'écoulement .

Autour de chacune d'elles, se développe un champ de taux de déformations  $E'_{i,j}$ , superposé au champ initial  $E^0_{i,j}$ , de sorte que la seconde sphère sera soumise à  $E^0_{i,j} + E'_{i,j}$  .

Cependant, la première sphère, qui est elle-même soumise à un champ supplémentaire  $E'_{i,j}$ , dû à la deuxième sphère, développera une nouvelle perturbation  $E''_{i,j}$ , afin de satisfaire à l'équation de continuité .

De cette manière, nous obtiendrons une série de champs  $E'_{i,j}, E''_{i,j}, \dots$ , de plus en plus faibles, pour chaque paire de sphères , composant la suspension .

Le champ initial s'obtient par intégration sur toutes les positions possibles de la seconde sphère, pour une position donnée de la première .

VAND, [153], qui a effectué ce calcul pour l'écoulement de Couette plan, obtient les résultats suivants :

- les termes de rang impair dans la série précédente sont nuls

- au second ordre, le champ  $E''_{p,q}$ , après intégration dans un volume de suspension de concentration  $c$  donnée, a pour expression

$$E''_{p,q} = Qc E^0_{p,q} \quad (3.1.8)$$

avec

$$Q = \frac{39}{64} \quad (3.1.9)$$

- à l'ordre n, le champ est proportionnel à la concentration et au champ d'ordre (n - 2)

$$E^{(n)} = Qc E^{(n-2)} \quad (3.1.10)$$

La série obtenue converge alors vers :

$$E = E^0 \left( 1 + \frac{Qc}{1 - Qc} \right) \quad (3.1.11)$$

qui est l'expression du champ total .

#### 3.1.4 Effet de collision des particules .

Un autre phénomène important à prendre en compte dans une suspension est celui des collisions entre les particules .

Pour une suspension formée de sphères de même diamètre d, si nous supposons que 2 particules puissent se rapprocher le long d'une ligne de courant sans la perturber, et entrer en collision, le nombre f de collisions par particule et par unité de temps est donné par VAND [153], sous la forme :

$$f = \frac{8cA}{\pi} \quad (3.1.12)$$

où  $c$  est la concentration de la solution en particules .

Les 2 sphères forment alors un doublet qui tourne autour de l'axe  $Gz$ , avec une vitesse angulaire constante :

$$\Omega_0 = \frac{A}{2} \quad (3.1.13)$$

Les 2 sphères se séparent de nouveau lorsque le doublet atteint la position symétrique par rapport au plan  $(0,y,z)$  du point de contact initial .

Dans le cas où la suspension contient des sphères de diamètres  $d_1$  et  $d_2$ , et que les collisions ont lieu dans les mêmes conditions que ci-dessus, le nombre de collisions  $f_{1,2}$ , subies par une sphère de l'espèce (1) avec les sphères (2), est donnée par une relation analogue à (3.2.12) sous la forme :

$$f_{1,2} = \frac{(d_1 + d_2)^3}{\pi d_2^3} c_2 A \quad (3.1.14)$$

$c_2$ , désignant la concentration en sphères de l'espèce (2) .

La fréquence de collision,  $F$ , est le nombre de collisions subies par l'ensemble des sphères (1), c'est-à-dire  $f_{1,2} n_1$  . Elle s'écrit

$$F = \frac{24A}{\pi^2} \left[ \frac{c_1^2}{d_1^3} + \frac{c_2^2}{d_2^3} + \frac{(d_1 + d_2)^3}{4d_1^3 d_2^3} \right] c_1 c_2 \quad (3.1.15)$$

De (3.1.15) se déduit la concentration  $c'$  de la suspension en doublets .

$$c' = 8c_1^2 + 8c_2^2 + \left(1 + \frac{d_1}{d_2}\right)^3 + \left(1 + \frac{d_2}{d_1}\right)^3 \quad (3.1.16)$$

Les relations ci-dessus montrent d'une part, la forte dépendance de la viscosité au phénomène de collision des particules, même à faible concentration; et d'autre part que la concentration en doublets  $c'$ , est minimale pour  $d_1 = d_2$ , c'est-à-dire que la concentration en doublets est accrue par l'utilisation d'une suspension composée de sphères de diamètres différents .

## CHAPITRE 3.2.

## PERTURBATION AU MOUVEMENT SECONDAIRE DUE AUX PARTICULES .

## 3.2.1 Equations du mouvement .

Supposons le rayon  $b$  de la particule suffisamment petit pour que l'effet de courbure puisse être négligé et qu'ainsi, la particule ne puisse développer un sillage dans notre écoulement laminaire . Les termes non linéaires des équations de Navier-Stokes peuvent alors être négligés [158] .

La perturbation apportée à l'écoulement du tourbillon de Taylor par la particule obéira à l'équation de Stokes .

$$\vec{\nabla} p' = \mu \Delta \vec{v}' \quad (3.2.1)$$

Cette équation concorde d'ailleurs avec l'hypothèse de l'écoulement rampant, émise dans l'introduction de la troisième partie du mémoire .

Les équations de Stokes sont en effet les seules à décrire un mouvement composé d'une translation et d'une rotation [159]; la résolution des équations de Navier-Stokes, conduisant à des mouvements secondaires, centrifuges au voisinage de l'équateur et centripètes aux pôles [160, 161] .

Les équations de Stokes ci-dessus sont associées à l'équation de continuité, d'une part :



$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v}'_i = 0 \quad (3.2.2)$$

et à la condition de non-glissement du fluide sur les parois solides, d'autre part :

$$\vec{v}_i + \vec{v}'_i = \vec{0} \quad \text{sur } (S) \quad (3.2.3)$$

Ce problème possède une solution exacte qui s'exprime sous forme intégrale, au moyen du tenseur de Green [162,163] .

Le tenseur de Green, qui généralise pour notre problème la fonction de Green ordinaire de la théorie du potentiel, est plutôt malaisé à former, ce qui rend la construction de la solution difficile dans le cas général .

Lamb développe la solution au moyen des harmoniques sphériques [155,164] .

La technique, appliquée au problème de la translation d'une sphère en écoulement uniforme [164] ou à l'écoulement autour d'une sphère dans un champ de cisaillement [165] donne des résultats satisfaisants .

Les calculs de Lamb sont formels et peuvent être utilisés pour un champ quelconque à l'infini .

Cette méthode peut aussi s'appliquer au calcul de l'écoulement autour de particules autres que des sphères . [166] C'est elle que nous utiliserons pour résoudre notre problème .

## 3.2.2 Méthode de résolution .

Par cette méthode, la perturbation  $\vec{v}'$ , à l'écoulement  $\vec{v}$ , se calcule de la manière suivante, dans le système usuel de coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varnothing)$  dont l'origine est placée au centre de la sphère :

a). sur la particule, le champ des vitesses du tourbillon de Taylor non perturbé est développé en série d'harmoniques sphériques, sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{r}{r} \cdot \vec{v}_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} X_n \\ - r \nabla \cdot \vec{v}_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

$$r \cdot \nabla \vec{v}_1 = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n$$

b). nous formons ensuite les harmoniques sphériques  $p_n, \varnothing_n, \Pi_n$ , par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} p_{-(n+1)} &= \frac{\mu(2n-1)}{(n+1)} \cdot \frac{1}{b} \frac{b_{n+1}}{r} [(n+2) X_n + Y_n] \\ \varnothing_{-(n+1)} &= \frac{1}{2(n+1)} \frac{b_{n+1}}{r} b (-) (n X_n + Y_n) \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

$$\Pi_{-(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} \frac{b_{n+1}}{r} Z_n$$

avec : -

$$\mu = \epsilon \gamma \quad (3.2.6)$$

c). la perturbation cherchée est alors donnée par :

$$\vec{v}'_1 = \sum^{\infty} \left[ \text{rot}(\vec{r} \Pi_{-(n+1)}) + \vec{\nabla} \vartheta_{-(n+1)} - \frac{(n-2)}{\mu \cdot 2n(2n-1)} r^2 \times \dots \right. \\ \left. \times \vec{\nabla} p_{-(n+1)} + \frac{(n+1)}{\mu \cdot n(2n-1)} \vec{r} p_{-(n+1)} \right] \quad (3.2.7)$$

Une étude détaillée des harmoniques sphériques est présentée dans les ouvrages cités aux références [167,168] .

### 3.2.3. Harmoniques sphériques .

Formellement, une harmonique sphérique est définie par une expression de la forme : [169]

$$[A' \cos \mu_2 \vartheta + B' \sin \mu_0 \vartheta] \left[ C' P_{\mu_2}^{\mu_2}(\cos \vartheta) + D' Q_{\mu_2}^{\mu_2}(\cos \vartheta) \right] \quad (3.2.8)$$

où  $P_{\mu_2}^{\mu_2}(\cos \vartheta)$  désigne la fonction de Legendre associée de

première espèce .

Ici,  $\mu_0$  est nécessairement égal à un entier  $m$ , car toutes les grandeurs de l'écoulement reprennent la même valeur au bout d'un tour .

D'autre part,  $D' = 0$  et  $\gamma_2 = n$ , pour éliminer les fonctions qui deviennent infinies aux pôles de la sphère, de sorte que l'expression précédente se réduit à :

$$[A' \cos m \vartheta + B' \sin m \vartheta] P_n^m(\cos \vartheta) \quad (3.2.9)$$

Un théorème établit qu'il est toujours possible de décomposer une fonction en une série d'harmoniques sphériques [169].

En fait, dans des cas comme le nôtre, où les données (sur la sphère) à décomposer  $f(\vartheta, \vartheta')$  sont harmoniques, HOCHSTADT [170] donne la relation suivante pour la décomposition :

$$f(\vartheta, \vartheta') = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} f(\vartheta', \vartheta'') \sin \vartheta'' \cdot \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\cos \alpha) \right] d\vartheta'' d\vartheta' \quad (3.2.10)$$

$P_n(\cos \vartheta)$ , désignant le polynôme de Legendre d'ordre  $n$  avec :

$$\cos \alpha = \cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\vartheta - \vartheta') \quad (3.2.11)$$

Dans notre problème, la série ci-dessus partira de  $n = 1$  (cf. paragraphe 3.2.2).

### 3.2.4. Perturbation au 1er ordre .

#### a). Détermination de $X_1$ et $Z_1$ .

Avec les notations du chapitre précédent,  $X_1$ ,  $Y_1$  et  $Z_1$  sont les termes du premier ordre du développement en harmoniques sphériques de

$$v''_{1,r}, [-2v''_{1,r} - \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta \cdot v_{1,\theta})]$$

et  $r(\text{rot } v''_{1,r})$  en  $r = b$ , respectivement. (cf. (3.2.4)).

En utilisant (3.2.9), il vient :

$$X_1 = \frac{3}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} [u \sin\theta' \cdot \cos(kb \cos\theta') + w \cos\theta' \cdot \sin(kb \cos\theta')] \cdot \sin\theta' [\cos\theta \cdot \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' \cos(\varphi - \varphi')] d\theta' d\varphi' \quad (3.2.12)$$

L'intégration par rapport à  $\varphi'$  conduit à écrire :

$$X_1 = \frac{3 \cos\theta}{2} \left[ \int_0^{\pi} u \sin^2\theta' \cdot \cos(kb \cos\theta') \cdot \cos\theta' d\theta' + \dots \right. \\ \left. + \int_0^{\pi} w \cdot \cos^2\theta' \cdot \sin(kb \cos\theta') \cdot \sin\theta' d\theta' \right] \quad (3.2.13)$$

De même,

$$Y_1 = \frac{3}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \{-2[u \cos(kb \cos\theta') \cdot \sin\theta' + \dots$$

$$w \sin(kb \cos\theta') \cdot \cos\theta'] - \frac{1}{\sin\theta'} \frac{\partial}{\partial\theta'} [\sin\theta' \cdot u \cos(kb \cos\theta') \cos\theta' + \dots \\ - w \sin(kb \cos\theta') \sin^2\theta'] \cdot \sin\theta' [\cos\theta \cdot \cos\theta' + \sin\theta' \cdot \cos(\varphi + \dots \\ - \varphi')] d\theta' d\varphi' \quad (3.2.14)$$

En intégrant par rapport à  $\varphi'$ , il vient :

$$Y_1 = - 3 \cos \theta \int_0^\pi [u \sin^2 \theta' \cos(kb \cos \theta') \cos \theta' + \dots \\ + w \sin \theta' \cos^2 \theta' \sin(kb \cos \theta')] d\theta' - \frac{3 \cos \theta}{2} \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial \theta'} [\sin \theta' \cdot u \dots]$$

Une intégration par parties, dans le deuxième terme de cette expression, amène :

$$Y_1 = - 3 \cos \theta \int_0^\pi [u \sin^2 \theta' \cos(kb \cos \theta') \cos \theta' + \dots \\ + w \sin \theta' \cos^2 \theta' \sin(kb \cos \theta')] d\theta' \quad (3.2.16)$$

Et pour  $Z_1$ , nous avons :

$$Z_1 = \frac{3}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^\pi \frac{1}{b^2 \sin \theta'} \left[ \dots (b \cdot v \cdot \cos(kb \cos \theta') \cdot \sin \theta') \dots \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial \psi'} (b u \cos(kb \cos \theta') - b w \sin(kb \cos \theta')) \right] \sin \theta' \cdot \\ \times [\cos \theta \cdot \cos \theta' + \sin \theta \cdot \sin \theta' \cdot \cos(\psi - \psi')] d\theta' d\psi' \quad (3.2.17)$$

L'intégration par rapport à  $\psi'$  amène :

$$Z_1 = \frac{3 \cos \theta}{2} \int_0^{+\pi} \cos \theta' \cdot \frac{\partial}{\partial \theta'} [v \cdot \cos(kb \cos \theta') \cdot \sin \theta'] d\theta' \quad (3.2.18)$$

Une intégration par parties transforme cette expression en :

$$Z_1 = \frac{3 \cos \theta}{2} \int_0^{+\pi} \sin^2 \theta' \cdot v \cdot \cos(kb \cos \theta') d\theta' \quad (3.2.19)$$

Les intégrales ci-dessus peuvent être calculées à la suite d'un développement limité autour de  $b = 0$  (particule infiniment petite) .

Au premier ordre, nous pouvons écrire :

$$X_1 = \frac{3u \cos\theta}{2} \int_0^\pi \sin^2\theta' \cdot \cos\theta' \, d\theta' = 0 \quad (3.2.20)$$

$$Y_1 = -2X_1 = 0 \quad (3.2.21)$$

$$Z_1 = \frac{3v \cos\theta}{2} \int_0^\pi \sin^2\theta' \cdot d\theta' = \frac{3\pi v \cdot \cos\theta}{4} \quad (3.2.22)$$

## 3.2.5. Perturbation au second ordre .

a). Détermination de  $X_2, Y_2$  et  $Z_2$  .

Les relations (3.2.4) permettent d'écrire, au second ordre :

$$X_2 = \frac{5}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} [u \sin^2 \theta' \cdot \cos(kb \cos \theta') + w \cos \theta' \cdot \sin(kb \cos \theta')] x \dots$$

$$\frac{1}{2} [3[\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\theta - \theta')]^2 - 1] d\theta' d\theta' \quad (3.2.23)$$

L'intégration par rapport à  $\theta'$  conduit à écrire :

$$X_2 = \frac{15 \cos^2 \theta}{4} \int_0^{\pi} [u \sin^2 \theta' \cdot \cos^2 \theta' \cdot \cos(kb \cos \theta') + \dots \dots$$

$$+ w \sin \theta' \cos^3 \theta' \sin(kb \cos \theta')] d\theta' + \dots$$

$$+ \frac{15 \sin^2 \theta}{8} \int_0^{\pi} [u \sin^4 \theta' \cdot \cos(kb \cos \theta') + \dots \dots$$

$$+ w \cos \theta' \sin^3 \theta' \sin(kb \cos \theta')] d\theta' + \dots$$

$$- \frac{5}{4} \int_0^{\pi} [u \sin^2 \theta' \cos(kb \cos \theta') + \dots$$

$$+ w \sin \theta' \cos \theta' \sin(kb \cos \theta')] d\theta' \quad (3.2.24)$$

De même :



$$\begin{aligned}
Y_2 = & \frac{5}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \{ -2[u \cos(kb \cos\theta') \cdot \sin\theta' + \dots \\
& + w \sin(kb \cos\theta') \cdot \cos\theta'] - \frac{1}{\sin\theta'} \frac{\partial}{\partial\theta'} [ \sin\theta' \cdot u \cos(kb \cos\theta') \cdot \cos\theta' \\
& - w \sin(kb \cos\theta') \cdot \sin^2\theta' ] \} \cdot \sin\theta' - \frac{1}{2} [3[\cos\theta \cos\theta' \\
& + \sin\theta \sin\theta' \cos(\theta - \theta')]^2 - 1] \cdot d\theta' d\theta'
\end{aligned} \tag{3.2.25}$$

En intégrant par rapport à  $\theta'$ , il vient :

$$\begin{aligned}
Y_2 = & - \frac{15 \cos^2 \theta}{2} \int_0^{\pi} [u \sin^2 \theta' \cdot \cos^2 \theta' \cdot \cos(kb \cos\theta') \\
& + w \sin\theta' \cos^3 \theta' \cdot \sin(kb \cos\theta')] d\theta' \\
& - \frac{15 \sin^2 \theta}{2} \int_0^{\pi} [u \sin^4 \theta' \cdot \cos(kb \cos\theta') + \dots \\
& + w \sin^3 \theta' \cos\theta' \sin(kb \cos\theta')] d\theta' - \frac{15 \cos^2 \theta}{4} \int_0^{\pi} \cos^2 \theta' + \dots \\
& - \frac{\partial}{\partial\theta'} [ \sin\theta' \cdot u \cos(kb \cos\theta') \cos\theta' - w \sin(kb \cos\theta') \sin^2 \theta' ] d\theta' \\
& - \frac{15 \sin^2 \theta}{16} \int_0^{\pi} \sin^2 \theta' \frac{\partial}{\partial\theta'} [ \sin\theta' \cdot u \cos(kb \cos\theta') \cos\theta' + \dots \\
& - w \sin(kb \cos\theta') \sin^2 \theta' ] d\theta' + \frac{5}{2} \int_0^{\pi} \frac{\partial}{\partial\theta'} [ \sin\theta' \cdot u \cos(kb \cos\theta') \cdot \\
& \cos\theta' - w \sin(kb \cos\theta') \sin^2 \theta' ] d\theta' + \frac{5}{2} \int_0^{\pi} [u \sin^2 \theta' \cos(kb \cos\theta') + \dots \\
& + w \sin\theta' \cos\theta' \sin(kb \cos\theta')] d\theta'
\end{aligned} \tag{3.2.26}$$

$$\begin{aligned}
Y_2 = & - \frac{15 \cos^2 \theta}{2} \int_0^\pi [u \sin^2 \theta' \cdot \cos^2 \theta' \cdot \cos(kb \cos \theta')] + \dots \\
& + w \sin \theta' \cdot \cos^3 \theta' \cdot \sin(kb \cos \theta')] d\theta' - \frac{15 \sin^2 \theta}{2} \int_0^\pi [u \sin^4 \theta' \cdot \\
& \cos(kb \cos \theta')] + w \sin^3 \theta' \cdot \cos \theta' \sin(kb \cos \theta')] d\theta' + \dots \\
& - \frac{15 \cos^2 \theta}{2} \int_0^\pi [\sin^2 \theta' \cdot \cos^2 \theta' \cdot u \cos(kb \cos \theta') - \sin^3 \theta' \cdot \\
& \cos \theta' \cdot w \sin(kb \cos \theta')] d\theta' + \frac{15 \sin^2 \theta}{8} \int_0^\pi [\sin^2 \theta' \cdot \cos^2 \theta' \cdot \\
& u \cos(kb \cos \theta') - \sin^3 \theta' \cdot \cos \theta' \cdot w \sin(kb \cos \theta')] d\theta' + \dots \\
& + \frac{5}{2} \int_0^\pi [u \sin^2 \theta' \cdot \cos(kb \cos \theta') + w \sin \theta' \cdot \cos \theta' \cdot \sin(kb \cos \theta')] d\theta'
\end{aligned} \tag{3.2.27}$$

Et pour  $Z_2$ , nous avons :

$$\begin{aligned}
Z_2 = & \frac{5}{4\pi} \int_{-\pi}^\pi \int_0^\pi \frac{1}{b^2 \sin \theta'} \frac{\partial}{\partial \theta'} (b \cdot v \cdot \cos(kb \cos \theta') \cdot \sin \theta') + \dots \\
& - \frac{\partial}{\partial \varphi'} (b u \cos(kb \cos \theta') - b w \sin(kb \cos \theta')) \sin \theta' \cdot \frac{1}{2} [3[\cos \theta \cos \theta' + \dots \\
& + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi')]^2 - 1] d\theta' d\varphi'
\end{aligned} \tag{3.2.28}$$

L'intégration par rapport à  $\varphi'$  amène :

$$\begin{aligned}
Z_2 = & \frac{15 \cos^2 \theta}{4} \int_0^\pi \cos^2 \theta' \cdot \frac{\partial}{\partial \theta'} [v \cdot \sin \theta' \cdot \cos(kb \cos \theta')] d\theta' + \dots \\
& + \frac{15 \sin^2 \theta}{8} \int_0^\pi \sin^2 \theta' \cdot \frac{\partial}{\partial \theta'} [v \cdot \sin \theta' \cdot \cos(kb \cos \theta')] d\theta' + \dots \\
& - \frac{5}{4} \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial \theta'} [v \cdot \sin \theta' \cdot \cos(kb \cos \theta')] d\theta'
\end{aligned} \tag{3.2.29}$$

Une intégration par parties dans les deux premiers termes et une quadrature dans le dernier, permet de simplifier cette expression.

Avec les formules précédentes pour  $X_2, Y_2$  et  $Z_2$  et les relations de définition de  $p_3, \theta_3$  et  $X_3$ , nous obtenons l'expression suivante pour le champ de vitesse :

$$\vec{v}' = \frac{5\pi u}{128} \frac{b}{r} [(-)^4 (3\sin^2\theta + 44) + (-)^2 (3\sin^2\theta - 64)] \vec{e}_r + \dots$$

$$- \frac{5\pi u}{64} \frac{b}{r} (-)^4 \sin\theta \cos\theta \vec{e}_\theta + \frac{3\pi v}{8} \frac{b}{r} (-)^2 \cos\theta \vec{e}_\theta \quad (3.2.30)$$

Les expressions obtenues pour les ordres supérieurs sont décroissantes .

La solution (3.2.30) vérifie la condition d'adhérence sur les parois des cylindres, du fait qu'elle est proportionnelle au champ des vitesses du mouvement secondaire .

De plus, elle s'évanouit à l'infini .

Elle peut par conséquent représenter la perturbation cherchée .

Pour un ensemble de particules, le champ des vitesses induites s'obtient par application de la méthode des images (chap. 3.1) à l'expression (3.2.30) .

## CHAPITRE 3.3

## MODELE DE DETERMINATION DE LA VISCOSITE DES SUSPENSIONS .

La présence de particules dans un fluide newtonien de viscosité  $\mu$  a pour effet de porter celle-ci à une valeur  $\mu_s > \mu$  .  
Le rapport

$$\mu_r = \frac{\mu_s}{\mu} \quad (3.3.1)$$

est la viscosité relative de la suspension .

La quantité  $1/\mu_r$  désigne la fluidité de la suspension .

## 3.3.1. Viscosité relative d'une solution très diluée .

Il existe deux principales méthodes de calcul théorique de la viscosité d'une suspension de particules solides [171 à 173] :

- l'approche cinématique, à partir de la détermination du tenseur des contraintes .

$$\epsilon_{i,k} = - \mu \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i} \right) \quad i, k = 1, 2, 3 \quad (3.3.2)$$

en coordonnées cartésiennes .

- l'approche énergétique, à partir de la fonction de dissipation visqueuse .

$$\phi_0 = - \mu \left[ \frac{\partial V_i}{\partial x_k} \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i} \right) \right] \quad (3.3.3)$$

Dans le cas limite d'une solution très diluée, il s'agit alors d'étudier la viscosité, soit en considérant la perturbation apportée à l'écoulement par la présence d'un nombre décroissant de particules par unité de volume [174] soit en considérant l'interaction d'un nombre constant de particules de taille décroissante [18] .

La différence essentielle entre ces deux méthodes est que la seconde prend en compte l'interaction à longue distance entre les particules, alors que la première la néglige .

Les diverses théories concordent en ce qu'elles établissent une variation linéaire de la viscosité relative d'une suspension diluée en fonction de la concentration,  $c$  .

$$\mu_r = 1 + k_1 c \quad (3.3.4)$$

En développant la fluidité au premier ordre, sur la base de (3.3.4), il apparaît qu'elle obéit également à une loi linéaire .

Les premiers travaux de calcul de la viscosité relative d'une suspension diluée de particules sphériques rigides furent effectués par EINSTEIN [17] qui obtint  $k_1 = 2.5$  . Cette valeur de  $k_1$  est confirmée par l'expérience pour des concentrations inférieures à 0.10 [16,18,19] .

### 3.3.2. Viscosité relative d'une solution à concentration finie .

Les études sur les suspensions à concentration finie [153,175 à 180] doivent prendre en compte des phénomènes supplémentaires, tels que l'interaction hydrodynamique et la collision des particules, notamment . (chapitre 3.1)

La principale difficulté à résoudre, pour élaborer une théorie de la viscosité pour des suspensions non diluées,  $0.10 < c < 0.25$  (cf. [177,178]), vient du fait que la répartition des particules dans l'écoulement ne peut pas, dans le cas général, être représentée par un modèle simple .

La plupart des théories existantes et des études expérimentales à concentration finie, s'accordent à développer la viscosité relative en une série de puissances de  $c$  :

$$\mu_r = 1 + k_1 c + k_2 c^2 + k_3 c^3 + \dots \quad (3.3.5)$$

dans laquelle la valeur généralement attribuée à  $k_1$  est 2.5 (Einstein) .

Le tableau (3.α) donne quelques valeurs des coefficients  $k_1$ , proposées par divers auteurs . [153,115,179,180] .

La disparité qui apparaît dans ce tableau prouve que les phénomènes ne sont pas encore totalement maîtrisés . Aussi, des relations de la forme de Arrhenius [181], telle celle de MOONEY [182] .

$$\mu_r = \exp\left(\frac{2.5}{1 - kc}\right) \quad (3.3.6)$$

où  $k$  est déterminé expérimentalement, présentent un intérêt certain .

Auteurs	$\mu_r = 1 + 2.5 + k_1 c^1$
EILERS [179]	$k_1 c^1 = 4.94 c^2 + 8.78 c^3 + \dots$
HARBARD [180]	$6.25 c^2 + 15.7 c^3 + \dots$
VAND [153]	$7.349 c^2 + 16.2 c^3 + \dots$
THOMAS [115]	$10.05 c^2 + 0.00273 e^{16.6c}$

Tableau (3.α)

Disparité des développements de la viscosité en fonction de la concentration .

### 3.3.3. Comportement non-newtonien des suspensions concentrées .

De nombreuses suspensions présentent un comportement non-newtonien à grande concentration (cf. chapitre 1.3), surtout du fait des interactions hydrodynamiques [183 à 188] .

Dans le cas où les particules sont des sphères rigides, l'écoulement n'affectant pas l'orientation des particules, le mouvement brownien de translation n'a aucun effet sur leur vitesse angulaire qui reste égale à  $A/2$  . [99]

Ainsi, le comportement non-newtonien de ces suspensions, à grande concentration, qui a été observé par de nombreux auteurs [16, 187 à 188], a une origine purement hydrodynamique (interaction des particules, etc...).

La figure (3.b), tirée de [108] présente la variation de  $\mu_r(A)$  à  $c = 0.50$  .

Le problème important de la variation de la viscosité de la suspension avec la concentration a été traité par plusieurs auteurs [190, 191] .

A partir de résultats expérimentaux divers, THOMAS [115] a tracé une courbe qui illustre  $\mu_r(c)$  . Nous la présentons sur la figure (3.c) .

D'un point de vue théorique, le modèle proposé par ALLEN et KLINE [15, 191 à 194] pour l'étude de cette variation est intéressant pour deux raisons essentielles :

- il peut s'utiliser dans un écoulement quelconque
- il tient compte de l'état physique des matériaux en présence .



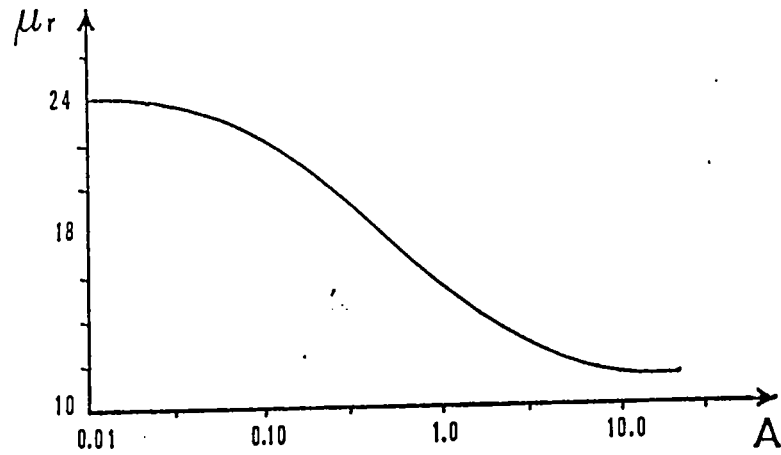


Figure 3.b : Variation de la viscosité relative de la suspension en fonction du gradient des vitesses .

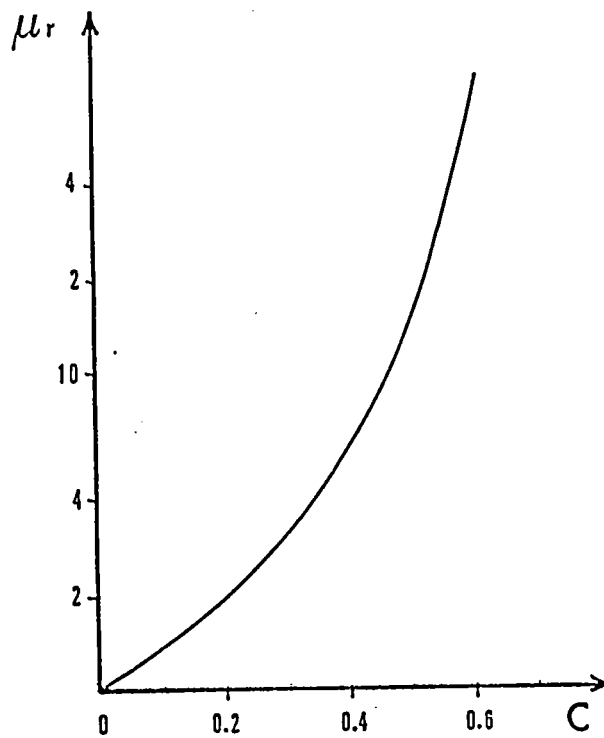


Figure 3.c : Variation de la viscosité relative de la suspension en fonction de sa concentration .

### 3.3.4. Le modèle d'ALLEN et KLINE .

Les auteurs représentent la suspension par un ensemble de particules; chacune étant repérée par un trièdre  $\vec{d}_a$  .

Désignons par  $\vec{d}^a$ , les vecteurs définis par la relation suivante :

$$\vec{d}_a \cdot \vec{d}^a = \delta_a^a \quad (3.3.7)$$

Les produits scalaires  $D_{a,b}$ , définis par :

$$D_{a,b} = \vec{d}_a \cdot \vec{d}_b = D_{b,a} = (g_k \cdot \vec{d}_a^k) \cdot (g_a \cdot \vec{d}_b^a) \quad (3.3.8)$$

où les  $g_k$  constituent la base d'un système de coordonnées curvilignes dans le champ d'écoulement, donnent les modules et les angles entre les  $\vec{d}_a$  .

Il est aisé de montrer que la dérivée particulaire de  $D_{a,b}$  a pour expression :

$$\frac{d}{dt} D_{a,b} = 2 W_{(a,b)} \vec{d}_a \cdot \vec{d}_b \quad (3.3.9)$$

où  $W_{(a,b)}$  désigne la partie symétrique du tenseur

$$W_{(a,b)} = \dot{\vec{d}}_a \cdot \vec{d}_b \quad (3.3.10)$$

La condition de rigidité des particules (trièdre  $\vec{d}_a$ , non-déformable), s'écrit :

$$\dot{D}_{a,b} = 0 \quad (3.3.11)$$

L'utilisation de (3.3.7) montre alors que  $W_{i,j}$  est tel que

$$W_{i,j} = 0 \quad (3.3.12)$$

Sa partie antisymétrique  $W_{i,j}$  représente la vitesse de rotation du trièdre  $\vec{d}_*$ . Elle permet de définir un tenseur  $\Omega$ , appelé spin ou moment angulaire.

Les équations du mouvement, en écoulement permanent et en l'absence de forces extérieures, sont celles de conservation

- de la masse

$$v_{i,i} = 0 \quad (3.3.13)$$

- de la quantité de mouvement

$$\sigma_{i,j} = \rho \frac{dv_i}{dt} \quad (3.3.14)$$

- du spin

$$\mu_{k,i,j,k} - \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \cdot \sigma_k = \rho \frac{dJ_i}{dt} \quad (3.3.15)$$

où  $J$  désigne le moment cinétique de la particule.

Les tenseurs  $\sigma$  et  $\mu$  étant définis par

$$\sigma_{(i,j)} = -P \delta_{ij} + 2\alpha_2 v_{(i,j)}$$

$$\sigma_{(i,j)} = 2\alpha_6 (v_{(i,j)} + W_{(i,j)})$$

$$\mu_{(i,j)} = \beta_1 \cdot \Omega_{k,k} \cdot \delta_{ij} + \beta_2 \cdot \Omega_{i,j} + \beta_3 \cdot \Omega_{j,i} \quad (3.3.16)$$

avec

$$\Omega_i = \frac{1}{2} \epsilon^{ijkl} \cdot W_{c,ijk} \quad (3.3.17)$$

$$W_{c,ijk} = \epsilon^{ijkl} \cdot \Omega_l \quad (3.3.18)$$

où

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = n_1$$

$$n_1 + n_2 + n_3 = \beta_3$$

$$\beta_1 + \beta_2 = - (n_2 + n_3) \quad (3.3.19)$$

Le deuxième principe de la Thermodynamique fournit les relations suivantes entre les paramètres  $\alpha_2, \alpha_4$  et  $n_1$ , qui dépendent de l'état physique des matériaux en présence : densité, température, diamètre des sphères, notamment .

$$\alpha_2 \geq 0$$

$$\alpha_4 \leq 0$$

$$n_1 \geq 0 \quad (3.3.20)$$

$$n_1 + n_2 + n_3 \geq 0$$

$$- n_1 \leq n_2 \leq n_1 / 2$$

Les conditions aux limites

- sur  $W_{c,ijk}$ , sont liées à la concentration .

Pour des suspensions diluées, le spin tend vers le tourbillon local .

A grande concentration, le spin doit s'évanouir .

Aux frontières solides, nous écrivons donc :

$$W_{(i,j)} = -s v_{(i,j)} \quad (3.3.21)$$

$$0 \leq s \leq 1$$

- aux frontières,  $\vec{v}$ , doit être égal à la vitesse de l'écoulement sous-jacent .

Dans ce modèle, ALLEN et KLINE ont retrouvé, en écoulement de Couette,

- . la relation d'Einstein pour des suspensions diluées
- . les résultats expérimentaux de VAND [156,157], à grande concentration .

Il nous a paru intéressant de l'appliquer aux tourbillons de Taylor, problème qui, à notre connaissance, n'a pas encore été abordé .

## CHAPITRE 3.4

## EFFET DE LA CONCENTRATION SUR LA TRANSITION .

## 3.4.1. Equations à résoudre .

Avec les notations du chapitre précédent, nous devons résoudre les équations de conservation :

a). de la masse

$$v_{1,1} = 0 \quad (3.4.1)$$

soit

$$v_{1,1} + v_{2,2} + v_{3,3} = 0 \quad (3.4.2)$$

b). du mouvement linéaire

$$\sigma_{k1..k} = \rho \frac{dv_1}{dt} \quad (3.4.3)$$

c'est-à-dire

$$\rho \frac{dv_1}{dt} = \sigma_{11,1} + \sigma_{21,2} + \sigma_{31,3}$$

$$\rho \frac{dv_2}{dt} = \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} + \sigma_{32,3} \quad (3.4.4)$$

$$\rho \frac{dv_3}{dt} = \sigma_{13,1} + \sigma_{23,2} + \sigma_{33,3}$$

c). du mouvement angulaire

$$\mu_{k1,k} - \frac{1}{2} \epsilon^{1jk} \sigma_{kj} = \rho \frac{dJ_1}{dt} \quad (3.4.5)$$

qui se projette en

$$\rho \frac{dJ_1}{dt} = \left( \frac{\sigma_{23} - \sigma_{32}}{2} \right) + \mu_{11,1} + \mu_{21,2} + \mu_{31,3}$$

$$\rho \frac{dJ_2}{dt} = \left( \frac{\sigma_{31} - \sigma_{13}}{2} \right) + \mu_{12,1} + \mu_{22,2} + \mu_{32,3} \quad (3.4.6)$$

$$\rho \frac{dJ_3}{dt} = \left( \frac{\sigma_{12} - \sigma_{21}}{2} \right) + \mu_{13,1} + \mu_{23,2} + \mu_{33,3}$$

Les lois constitutives étant données par

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\alpha_2 v_{(i,j)} + 2\alpha_6 [v_{(i,j)} + \epsilon_{ij}^k \Omega_k] \quad (3.4.7)$$

$$\mu_{ij} = \beta_1 \Omega_{k,k} \delta_{ij} + \beta_2 \Omega_{i,j} + \beta_3 \Omega_{j,i,i}$$

avec

$$\Omega_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} W_{(j,k)} \quad (3.4.8)$$

$$\text{et } W_{(j,k)} = \epsilon_{ijk} \Omega_i$$

En posant

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = n_1$$

$$\beta_3 = n_1 + n_2 + n_3$$

$$\beta_1 + \beta_2 = - (n_2 + n_3)$$

nous pouvons développer les systèmes (3.4.4) et (3.4.6) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \epsilon \frac{dv_1}{dt} &= - p_{,1} + 2\alpha_2 v_{(1,1),1} + 2\alpha_2 v_{(2,1),2} + 2\alpha_6 [v_{(2,1),2} + \dots \\ &- \Omega_{3,2}] + 2\alpha_2 v_{(3,1),3} + 2\alpha_6 [v_{(3,1),3} + \Omega_{2,3}] \\ &= - p_{,1} + 2\alpha_2 v_{1,11} + \alpha_2 [v_{2,12} + v_{1,22}] + \alpha_2 [v_{3,13} + v_{1,33}] \\ &+ \alpha_6 [v_{2,12} - v_{1,22} + v_{3,13} - v_{1,33}] + 2\alpha_6 [\Omega_{3,2} - \Omega_{2,3}] \\ &= - p_{,1} + \alpha_2 [v_{1,11} + v_{1,22} + v_{1,33}] + \alpha_6 [v_{2,12} - v_{1,22} + \dots \\ &+ v_{3,13} - v_{1,33}] + 2\alpha_6 [- \Omega_{3,2} + \Omega_{2,3}] \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

$$\begin{aligned} \epsilon \frac{dv_2}{dt} &= 2\alpha_2 v_{(1,2),1} + 2\alpha_6 [v_{(1,2),1} - \Omega_{3,1}] - p_{,2} + \dots \\ &2\alpha_2 v_{(2,2),2} + 2\alpha_2 v_{(3,2),3} + 2\alpha_6 [v_{(3,2),3} + \Omega_{1,3}] \\ &= - P_{,2} + \alpha_2 [V_{2,11} + V_{2,22} + V_{2,33}] + \alpha_6 [V_{1,21} - V_{2,11} + \dots \\ &+ v_{3,33} - v_{2,33}] + 2\alpha_6 [- \Omega_{1,3} + \Omega_{3,1}] \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

$$\begin{aligned} \epsilon \frac{dv_3}{dt} &= - p_{,3} + \alpha_2 [v_{3,11} + v_{3,22} + v_{3,33}] + \alpha_6 [v_{1,31} - v_{3,11} + \dots \\ &+ v_{2,32} - v_{3,22}] + 2\alpha_6 [- \Omega_{2,1} + \Omega_{1,2}] \end{aligned} \quad (3.4.11)$$



$$\rho \frac{\partial J_1}{\partial t} = 2\alpha_6 [v_{(2,3)} + \Omega_1] + (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)\Omega_{1,11} + \beta_1\Omega_{2,21} + \dots$$

$$+ \beta_1\Omega_{3,32} + \beta_2\Omega_{2,12} + \beta_3\Omega_{1,22} + \beta_2\Omega_{3,13} + \beta_3\Omega_{1,33} \quad (3.4.12)$$

$$\rho \frac{\partial J_2}{\partial t} = 2\alpha_6 [v_{(3,1)} + \Omega_2] + (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)\Omega_{2,22} + \beta_1\Omega_{1,12} + \dots$$

$$+ \beta_1\Omega_{3,32} + \beta_2\Omega_{1,21} + \beta_3\Omega_{2,11} + \beta_2\Omega_{3,23} + \beta_3\Omega_{2,33} \quad (3.4.13)$$

et

$$\rho \frac{\partial J_3}{\partial t} = 2\alpha_6 [v_{(1,2)} + \Omega_3] + (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)\Omega_{3,33} + \beta_1\Omega_{1,13} + \dots$$

$$+ \beta_1\Omega_{2,23} + \beta_2\Omega_{1,31} + \beta_3\Omega_{3,11} + \beta_2\Omega_{2,32} + \beta_3\Omega_{3,22} \quad (3.4.14)$$

### 3.4.2.Écoulement laminaire stable de Couette .

L'écoulement étant tangentiel, nous pouvons écrire :

$$v_1 = v_3 = 0 \quad (3.4.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} = 0$$

de sorte que les équations précédentes s'écrivent :

a).équation de continuité

$$v_{1,1} + v_{3,3} = 0 \quad (3.4.16)$$

b). équations de conservation du moment linéaire

$$0 = - p_{,1}$$

$$\epsilon \frac{dv_2}{dt} = \alpha_2 [v_{2,11}] - \alpha_6 [v_{2,11}] + 2\alpha_6 \Omega_{3,1} - p_{,2} \quad (3.4.17)$$

$$0 = 2\alpha_6 \Omega_{2,1}$$

c). équations de conservation du moment angulaire

$$\epsilon \frac{dJ_1}{dt} = 2\alpha_6 [v_{(2,3)} + \Omega_1] + (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \Omega_{1,11} + (\beta_1 + \dots + \beta_2) \Omega_{2,12} + (\beta_1 + \beta_2) \Omega_{3,13} + \beta_3 [\Omega_{1,22} + \Omega_{1,33}] \quad (3.4.18)$$

et

$$\epsilon \frac{dJ_2}{dt} = 2\alpha_6 [v_{(3,1)} + \Omega_2] + (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \Omega_{2,22} + (\beta_1 + \dots + \beta_2) \Omega_{1,12} + (\beta_1 + \beta_2) \Omega_{3,23} + \beta_3 [\Omega_{2,11} + \Omega_{2,33}] \quad (3.4.19)$$

$$\epsilon \frac{dJ_3}{dt} = 2\alpha_6 [v_{(2,2)} + \Omega_3] + (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \Omega_{3,33} + (\beta_1 + \dots + \beta_2) \Omega_{1,13} + (\beta_1 + \beta_2) \Omega_{2,23} + \beta_3 [\Omega_{3,11} + \Omega_{3,22}] \quad (3.4.20)$$

En faisant la correspondance

$$\Omega_1 = W_{(23)}, \quad \Omega_2 = W_{(31)}, \quad \text{et} \quad \Omega_3 = W_{(12)} \quad (3.4.21)$$

et en négligeant les termes quadratiques ainsi que l'inertie de la particule, le champ des vitesses à l'intérieur d'une couette à entrefer étroit et dont le cylindre intérieur tourne avec la vitesse angulaire  $\Omega$ , est :

$$V_2 = \frac{K}{\Delta} [d - x_1 + \frac{\alpha_6}{\alpha_2 - \alpha_6} \frac{s' e^{\Gamma(d-x_1)} - 1}{e^{\Gamma'} + 1} - \frac{e^{-\Gamma(d-x_1)} - 1}{e^{-\Gamma'} + 1}] \quad (3.4.22)$$

$$\Omega_3 = \frac{K/2}{\Delta} [s(\frac{e^{\Gamma(d-x_1)}}{e^{\Gamma'} + 1} + \frac{e^{-\Gamma(d-x_1)}}{e^{-\Gamma'} + 1}) - 1] \quad (3.4.23)$$

avec

$$\Delta = 1 + \frac{2\alpha_6}{\alpha_2 - \alpha_6} \frac{s' e^{\Gamma'} - 1}{\Gamma' (e^{\Gamma'} + 1)}$$

$$s' = \frac{1 - s}{1 + \frac{\alpha_6}{\alpha_2 - \alpha_6} s} \quad (3.4.24)$$

$$K = \frac{R_1 \Omega}{d}$$

$\Gamma$  et  $\Gamma'$  sont donnés en (3.4.48)

Par la suite on utilisera l'approximation du premier ordre :

$$V_2 = \frac{K}{\Delta} [1 + \frac{\alpha_6}{\alpha_2 - \alpha_6} s][d - x_1] \quad (3.4.25)$$

### 3.4.3. Ecoulement à la transition laminaire-tourbillons de Taylor.

a). Equations à résoudre .

- L'équation de continuité est identique à celle du régime laminaire stable .

- Dans le cas de l'entrefer étroit, nous pouvons faire les approximations suivantes :

$$r' \# R_1 + x_1 \quad (3.4.26)$$

$$r' d\theta \# dx_2$$

L'écoulement résultant est donné par

$$v_1, v_2 + v_2, v_3$$

où  $v_2$  est la solution déterminée en régime laminaire .

La configuration du champ d'écoulement permet de prendre pour les grandeurs de l'écoulement, les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} v_1 &= v'_1(x_1) \cos k x_3 \\ v_2 &= v'_2(x_1) \cos k x_3 \end{aligned} \quad (3.4.27)$$

$$v_3 = v'_3(x_1) \cos k x_3$$

$$P = P'(x_1) \cos k x_3$$

$$\Omega_1 = W_{[23]} = \Omega'_1 \sin k x_3$$

$$\Omega_2 = W_{[31]} = \Omega'_2 \sin k x_3 \quad (3.4.28)$$

$$\Omega_3 = W_{[12]} = \Omega'_3 \cos k x_3$$

En théorie linéaire, les équations de conservation du moment linéaire s'écrivent alors :

$$- 2V_2 v'_2 = - P'_{,1} + \alpha_2 [v'_{1,11} - v'_1 k^2] + \alpha_6 [v'_{3,1} k + v'_1 k^2] + \dots + 2\alpha_6 k \Omega'_2 \quad (3.4.29)$$

et

$$V_{2,1} v'_1 = \alpha_2 [v'_{2,11} - v'_2 k^2] + \alpha_6 [-v'_{2,11} + v'_2 k^2] + \dots + 2\alpha_6 [\Omega'_{3,1} - \Omega'_1 k] \quad (3.4.30)$$

$$0 = P k + \alpha_2 [v'_{3,11} - v'_3 k^2] - \alpha_6 [v'_{3,11} + v'_{1,1} k] - 2\alpha_6 \Omega'_{2,1} \quad (3.4.31)$$

Alors que celles de conservation du moment angulaire s'expriment de la manière suivante :

$$-\frac{1}{R_1} V_2 \Omega'_2 = \alpha_6 [-v'_2 k + 2\Omega'_1] + [\beta_1 + \beta_2 + \beta_3] \Omega'_{1,11} + \dots - (\beta_1 + \beta_2) k \Omega'_{3,1} - k^2 \beta_3 \Omega'_1 \quad (3.4.32)$$

$$0 = 2\alpha_6 \left[ -\frac{1}{k} v'_{1,11} + k v'_1 + \Omega'_2 \right] + \beta_3 [\Omega'_{2,11} - k^2 \Omega'_2] \quad (3.4.33)$$

$$\Omega'_{3,1} \cdot v_1 = 2\alpha_6 \left[ -\frac{1}{k} v'_{2,1} + \Omega'_3 \right] - k^2 (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \Omega'_3 + \dots + (\beta_1 + \beta_2) k \Omega'_{1,1} + \beta_3 \Omega'_{3,11} \quad (3.4.34)$$

b). Transformation des équations .

En reportant dans (3.4.29), l'expression de la pression, tirée de (3.4.31), il vient :

$$\begin{aligned}
 - \frac{2V_2 v'_2}{R_1} &= (\alpha_2 - \alpha_6) [v'_{1,111} - v'_1 k^2 - \frac{1}{k^2} (v'_{1,1111} - k^2 v'_{1,111})] \dots \\
 - \frac{2\alpha_6}{k} [\Omega'_{2,111} - k^2 \Omega'_2] & \qquad \qquad \qquad (3.4.35)
 \end{aligned}$$

Alors que (3.4.33) peut s'écrire sous la forme suivante

$$\Omega'_{2,111} - k^2 \Omega'_2 = \frac{2\alpha_6}{\beta_3 k} [v'_{1,111} - k^2 v'_1 - k \Omega'_2] \qquad (3.4.36)$$

Substituons dans (3.4.35), l'expression de  $(\Omega'_{2,111} - k^2 \Omega'_2)$ , donnée par (3.4.36)

$$\begin{aligned}
 - \frac{2V_2 v_2}{R_1} &= (v'_{1,111} - k^2 v'_1) [\alpha_2 - \alpha_6 - \frac{4\alpha_6}{\beta_3 k^2} - \frac{(\alpha_2 - \alpha_6)}{k^2}] - \frac{(\alpha_2 - \alpha_6)}{k^2} [v'_{1,1111} + \dots \\
 - k^2 v'_{1,111}] &+ \frac{4\alpha_6}{k\beta_3} \Omega'_2 \qquad \qquad \qquad (3.4.37)
 \end{aligned}$$

De sorte que  $v_1$  et  $\Omega'_2$  sont déterminés par le système suivant, composé de (3.4.33) et de l'équation précédente :

$$\begin{aligned}
 \Omega'_2 &= - \frac{2V_2 v'_2}{R_1} \frac{k\beta_3}{4\alpha_6} - \frac{4\alpha_6}{4\alpha_6} [\alpha_2 - \alpha_6 - \frac{4\alpha_6}{\beta_3 k^2}] (v'_{1,111} - k^2 v'_1) + \dots \\
 + \frac{(\alpha_2 - \alpha_6) k\beta_3}{k^2} \frac{1}{4\alpha_6} (v'_{1,1111} - k^2 v'_{1,111}) & \qquad \qquad \qquad (3.4.38)
 \end{aligned}$$

$$2\alpha_6 \Omega'_{2..} + \beta_3 [\Omega'_{2..11} - k^2 \Omega'_{2..}] = \frac{2\alpha_6}{k} [v'_{1..11} - k^2 v'_{1..}]$$

Le gradient de vitesses étant constant d'après les relations précédentes

$$\frac{\partial V_2}{\partial x_1} = A \quad (3.4.39)$$

Ainsi (3.4.30) devient

$$\Omega'_{1..} = -\frac{Av'_{1..}}{2\alpha_6 k} + \frac{(\alpha_2 - \alpha_6)}{2\alpha_6 k} [v'_{2..11} - k^2 v'_{2..}] + \frac{\Omega'_{3..1}}{k} \quad (3.4.40)$$

En reportant cette relation dans (3.4.34), nous obtenons :

$$(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \Omega'_{3..11} + [2\alpha_6 - k^2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)] \Omega'_{3..} = \alpha_6 v'_{2..1} + \dots \quad (3.4.41)$$

$$+ \frac{A(\beta_1 + \beta_2)}{2\alpha_6} v'_{1..1} - \frac{(\beta_1 + \beta_2)(\alpha_2 - \alpha_6)}{2\alpha_6} (v'_{2..111} - k^2 v'_{2..1})$$

La même substitution dans (3.4.34) amène l'équation suivante, dans laquelle, l'inertie de la particule a été négligée, du fait des dimensions de cette dernière

$$A \left[ 1 - \frac{k^2 \beta_3}{2\alpha_6} \right] v'_{1..} - \frac{A(\beta_1 + \beta_2)}{2\alpha_6} v'_{1..11} - \frac{\beta_3(\alpha_2 - \alpha_6)}{2\alpha_6} v'_{2..1111} + \dots$$

$$+ (\alpha_2 - \alpha_6) \left[ \frac{k^2 \beta_3}{2\alpha_6} - 1 \right] v'_{2..11} + \left[ \alpha_2 - \frac{(\alpha_2 - \alpha_6)}{2\alpha_6} k^2 \beta_3 \right] k^2 v'_{2..} = 0 \quad (3.4.42)$$

A cette équation, nous devons adjoindre celle que nous obtenons en substituant dans (3.4.33), l'expression de  $\Omega'_{2..}$ , donnée par (3.4.38). Elle s'écrit :

$$\begin{aligned}
 & (2\alpha_6 - k^2 \beta_3) \left[ - \frac{2V_2 v'_{2,111}}{R_1} - \frac{k\beta_3}{4\alpha_6} - \frac{k\beta_3}{4\alpha_6} \left( \alpha_2 - \alpha_6 - \frac{4\alpha_6^2}{\beta_3 k^2} \right) (v'_{1,111} + \dots \right. \\
 & - k^2 v'_{1,111}) + \frac{(\alpha_2 - \alpha_6) \beta_3}{k} \left. \left( v'_{1,11111} - k^2 v'_{1,111} \right) \right] + \beta_3 [ + \dots \\
 & - \frac{2k\beta_3}{R_1 4\alpha_6} (V_2 v'_{2,111}) - \frac{k\beta_3}{4\alpha_6} \left( \alpha_2 - \alpha_6 - \frac{4\alpha_6^2}{\beta_3 k^2} \right) (v'_{1,11111} - k^2 v'_{1,111}) + \dots \\
 & + \frac{(\alpha_2 - \alpha_6) \beta_3}{k} \left( v'_{1,111111} - k^2 v'_{1,11111} \right) ] = \frac{2\alpha_6}{k} (v'_{1,111} + \dots \\
 & - k^2 v'_{1,111}) \tag{3.4.43}
 \end{aligned}$$

Quelques transformations nous permettent de l'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 & - \frac{2k\beta_3 V_2}{4R_1 \alpha_6} v'_{2,111} - \frac{k\beta_3}{R_1 \alpha_6} A v'_{2,111} - \frac{(k\beta_3)}{2R_1 \alpha_6} (2\alpha_6 - k^2 \beta_3) V_2 v'_{2,111} = \\
 & = \frac{v'_{1,111} k^2 \beta_3}{\alpha_6} \left[ - \frac{\alpha_6 (\alpha_2 + \alpha_6)}{2} - \frac{k^2 \beta_3}{4} (\alpha_6 - \alpha_2) \right] + \dots \\
 & + v'_{1,111} \frac{k\beta_3}{\alpha_6} \left[ \alpha_6 (\alpha_2 + \alpha_6) + \frac{3k^2 \beta_3}{4} (\alpha_6 - \alpha_2) \right] + \dots \\
 & + v'_{1,11111} \frac{\beta_3}{k\alpha_6} \left[ - \frac{\alpha_6 (\alpha_2 + \alpha_6)}{2} - \frac{3k^2 \beta_3}{4} (\alpha_6 - \alpha_2) \right] + \dots \\
 & - v'_{1,111111} \frac{(\alpha_2 - \alpha_6) \beta_3}{4k\alpha_6} \tag{3.4.44}
 \end{aligned}$$





$$\begin{aligned}
 (D^2 - k^2) \left[ D^2 - k^2 - \frac{2\alpha_2 \alpha_6}{\beta_3 (\alpha_6 - \alpha_2)} \right] v'_2 &= - \frac{A (2\alpha_6 - k^2 \beta_3)}{\beta_3 (\alpha_6 - \alpha_2)} v'_1 + \dots \\
 + \frac{A (\beta_1 + \beta_2)}{\beta_3 (\alpha_6 - \alpha_2)} v'_{1,1,1} & \qquad \qquad \qquad (3.4.47)
 \end{aligned}$$

L'adimensionnalisation de ces équations s'effectue en posant

$$a = kd$$

$$y = \frac{x_1}{d}$$

$$\Gamma^2 = \frac{2\alpha_2 \alpha_6}{\beta_3 (\alpha_6 - \alpha_2)} \qquad \qquad \qquad (3.4.48)$$

$$T' = \Gamma d$$

avec  $d = R_2 - R_1$

Elles s'écrivent alors

$$\begin{aligned}
 (D^2 - a^2)^2 (D^2 - a^2 - T'^2) v'_1 &= - \frac{V_2 a^2 \beta_3}{\dots} T'^2 v'_{2,1,1} + \dots \\
 - \frac{1}{R_1} \frac{\partial V_2}{\partial y} \frac{2a^2 \beta_3 T'^2}{\alpha_2 \alpha_6} - \frac{V_{2,1}}{R_1} \frac{1}{2a^2 T^2 d^2} \left[ \frac{R_1 \alpha_2 \alpha_6}{\alpha_2} - \frac{a^2 \beta_3}{2d^2 \alpha_2 \alpha_6} \right] v'_2 \\
 (D^2 - a^2) (D^2 - a^2 - T'^2) v'_2 &= - \frac{dV_2}{dy} \frac{1}{\alpha_2} \frac{a^2 \beta_3}{2d^2 \alpha_2 \alpha_6} v'_1 + \dots \\
 + \frac{dV_2}{dy} \frac{(\beta_1 + \beta_2)}{d} \frac{T'^2}{2\alpha_2 \alpha_6} v'_{1,1,1} & \qquad \qquad \qquad (3.4.49)
 \end{aligned}$$

Le système (3.4.49) que nous avons établi ci-dessus a une forme analogue à celui qui régit l'apparition de la première instabilité dans l'écoulement, en l'absence de particules. Aussi, la méthode intégrale exposée au chapitre (2.1) peut-elle être utilisée pour sa résolution.

La solution conduirait à la détermination des  $v_i$  et des  $W_i$ , et partant, à celle du tenseur des contraintes.

La viscosité relative de la suspension est alors donnée par

$$\mu_r = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \quad (3.4.50)$$

où  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  désignent les tenseurs des contraintes sans et avec les particules, respectivement.

Ce calcul ne pose aucune difficulté mais il nous paraît plus intéressant de déterminer la variation du nombre de Taylor critique  $T_c$  en fonction de la concentration, du fait qu'elle est plus utile pour les expérimentateurs.

D'ailleurs, la viscosité absolue de la suspension pourra aisément être réduite d'une telle loi.

Nous utiliserons la méthode élaborée par CHANDRASEKHAR afin d'obtenir la modification apportée par la concentration au  $T_c$ .

c). Elaboration d'une loi approchée  $T_c(c)$ .

Donnons à  $v'_2$ , la forme suivante

$$v'_2 = \sum c_n \sin n\pi y \quad (3.4.51)$$

$V_2$ , ayant toujours pour expression

$$V_2 = B k[d - x_1] \quad (3.4.52)$$

$v'_1$  peut alors s'écrire

$$\begin{aligned} v'_1 = & \frac{wa^2 \beta_3 T'^2}{\alpha_2 \alpha_6} \Sigma \frac{C_n}{(m^2 \pi^2 + a^2)^2 (m^2 \pi^2 + a^2 + T'^2)} [A_1 \dot{c}h a y + B_1 \dot{s}h a y \\ & + C_1 \dot{c}h a' y + D_1 \dot{s}h a' y + A_2 y \dot{c}h a y + B_2 y \dot{s}h a y + (m^2 \pi^2 + \dots \\ & - d^2 \left( \frac{\alpha_6}{\beta_3} - \frac{a^2}{2d^2} \right)] [y \sin m \pi y - 2B m \pi \cos m \pi y + B(m^2 \pi^2 + \dots \\ & - d^2 \left( \frac{\alpha_6}{\beta_3} - \frac{a^2}{2a^2} \right)] [y \sin m \pi y + \frac{4m\pi}{m^2 \pi^2 + a^2} \cos m \pi y + \dots \\ & + \frac{2m\pi}{m^2 \pi^2 + a^2 + T'^2} \cos m \pi y] \quad (3.4.53) \end{aligned}$$

avec  $a' = \sqrt{a^2 + T'^2}$

Ecrivons les conditions aux limites sur cette dernière fonction (chap. 3.3), c'est-à-dire

$$\begin{aligned} v'_1 = 0 & \quad \text{pour } y = 0 \quad \text{et } y = 1 \\ \frac{dv'_1}{dy} = 0 & \quad \text{pour } y = 0 \quad \text{et } y = 1 \end{aligned} \quad (3.4.54)$$

Nous obtenons le système suivant

$$\begin{aligned}
 \overset{\bullet}{A}_1 + \overset{\bullet}{C}_1 - 2Bm\pi + B[m^2\pi^2 - d^2(\frac{\alpha_6}{\beta_3} - \frac{a^2}{2d^2})](\frac{4m\pi}{m^2\pi^2 + a^2} + \dots) \\
 + \frac{2m\pi}{m^2\pi^2 + a^2 + T'^2} = 0
 \end{aligned} \tag{3.4.55}$$

$$a\overset{\bullet}{B}_1 + a'\overset{\bullet}{D}_1 + \overset{\bullet}{A}_2 + m\pi[m^2\pi^2 - d^2(\frac{\alpha_6}{\beta_3} - \frac{a^2}{2d^2})] = 0 \tag{3.4.56}$$

$$\begin{aligned}
 \overset{\bullet}{A}_1 \text{cha} + \overset{\bullet}{B}_1 \text{sha} + \overset{\bullet}{C}_1 \text{cha}' + \overset{\bullet}{D}_1 \text{sha}' + \overset{\bullet}{A}_2 \text{cha} + \overset{\bullet}{B}_2 \text{sha} + \dots \\
 - 2Bm\pi \cos m\pi + B[m^2\pi^2 - d^2(\frac{\alpha_6}{\beta_3} - \frac{a^2}{2d^2})](\frac{4m\pi}{m^2\pi^2 + a^2} \cos m\pi + \dots) \\
 + \frac{2m\pi}{m^2\pi^2 + a^2 + T'^2} = 0
 \end{aligned} \tag{3.4.57}$$

$$\begin{aligned}
 \overset{\bullet}{A}_1 a \text{sha} + \overset{\bullet}{B}_1 a \text{cha} + \overset{\bullet}{C}_1 a' \text{sha}' + \overset{\bullet}{D}_1 a' \text{cha}' + \overset{\bullet}{A}_2 (\text{cha} + a + \text{sha}) \\
 + \overset{\bullet}{B}_2 [\text{sha} + a \text{cha}] + m\pi(m^2\pi^2 - a^2(\frac{\alpha_6}{\beta_3} - \frac{a^2}{2d^2})) \cos m\pi + \dots \\
 + B[m^2\pi^2 - d^2(\frac{\alpha_6}{\beta_3} - \frac{a^2}{2d^2})] \cos m\pi = 0
 \end{aligned} \tag{3.4.58}$$

De même, les conditions aux limites sur  $\Omega_2$  (chap. 3.3) se traduisent par

$$T'^2 \overset{\bullet}{C}_1 (\frac{s-1}{2a} + \frac{\alpha_2}{4a\alpha_6}) + (s-1)\overset{\bullet}{B}_2 + F = 0 \tag{3.4.59}$$

$$\begin{aligned}
 T'^2 [\overset{\bullet}{C}_1 \text{cha}' + \overset{\bullet}{D}_1 \text{sha}'] (\frac{s-1}{2a} + \frac{\alpha_2}{4a\alpha_6}) + (\overset{\bullet}{A}_2 \text{sha} + \overset{\bullet}{B}_2 \text{cha})(s-1) + \dots \\
 + F \cos m\pi = 0
 \end{aligned} \tag{3.4.60}$$

avec

$$F = \frac{2m\pi T'^2}{m^2\pi^2 + a^2 + T'^2} [2Bm\pi(m^2\pi^2 + a^2) - B(m^2\pi^2 - d^2(\frac{\alpha_6}{\beta_3} + \dots - \frac{a^2}{2d^2}))] [\frac{s-1}{2a} - \frac{\alpha_2}{4a\alpha_6} - \frac{m^2\pi^2\alpha_2}{4a\alpha_6 T'^2}] \quad (3.4.61)$$

ALLEN et KLINE montrent que lorsque les solutions sont peu concentrées  $T^2$  est grand en même temps que  $s$  voisin de l'unité. Plaçons-nous dans ces conditions. Alors, on peut trouver une forme approchée aux différents coefficients intervenant dans l'expression de  $v'_1$ .

On trouve :

$$C_1 = \frac{2m\pi}{m^2\pi^2 + a^2 + T'^2} [2Bm\pi(m^2\pi^2 + a^2) - B(m^2\pi^2 + \dots - d^2(\frac{\alpha_6}{\beta_3} - \frac{a^2}{2d^2}))]$$

et

$$D_1 = [\frac{\cos m\pi - \cosh a'}{\sinh a'}] C_1$$

$$A_1 = 2Bm\pi + B[m^2\pi^2 - d^2(\frac{\alpha_6}{\beta_3} - \frac{a^2}{2d^2})] [\frac{4m\pi}{m^2\pi^2 + a^2} + \dots + \frac{2m\pi}{m^2\pi^2 + a^2 + T'^2}] - C_1$$

$$B_1 = \frac{1}{a^2 - \text{sh}^2 a} [aX - (\text{sha} + \text{acha})Y + \text{sha}Z]$$

et

$$A_2 = \frac{1}{a^2 - \text{sh}^2 a} [-\text{sh}^2 ax + a(\text{sha} + \text{acha})Y - \text{asha}Z]$$

$$B_2 = \frac{1}{a^2 - \text{sh}^2 a} [(\text{shacha} - a)X - a^2 \text{sha}Y + (\text{acha} - \text{sha})Z]$$

avec

$$X = + Bm\pi [m^2 \pi^2 - d^2 \left( \frac{\alpha_6}{\beta_3} - \frac{a^2}{2d^2} \right)] - a'D_1$$

$$Y = A_1 \cos m\pi - \text{cha} A_1 - \text{cha}'C_1 - \text{sha}'D_1$$

$$Z = - \text{asha} A_1 - a'\text{sha}'C_1 - a'\text{cha}'D_1 \quad (3.4.62)$$

On substitue ensuite  $v'_1$  et  $v'_2$  par leurs expressions dans la seconde équation du système (3.4.49), puis on multiplie celle-ci par  $\sin m\pi y$  et enfin on intègre sur le domaine de la variable  $y$ . Le résultat de cette opération est que l'on aboutit à un système d'équations homogènes des constantes

$$R_n = C_n / (m^2 \pi^2 + a^2)(m^2 \pi^2 + a^2 + T'^2) \quad (3.4.63)$$

Le fait que les  $R_n$  ne sont pas toutes égales à zéro conduit à l'équation séculaire suivante :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \frac{R_1 a^2 d \beta_3 B}{\alpha_2 \alpha_6} [(1/\alpha_2 + \dots) \\
 & - \frac{a^2 (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)}{2d^2 \alpha_2 \alpha_6} G + (1/\alpha_2 - \frac{a^2 \beta_3 + a'^2 (\beta_1 + \beta_2)}{2d^2 \alpha_2 \alpha_6}) H + \dots \\
 & - \frac{a (\beta_1 + \beta_2)}{d^2 \alpha_2 \alpha_6} I + JK(1/2B \mathfrak{S}_{n,n} - BX_{n,n} + B(\frac{4m\pi}{m^2 \pi^2 + a^2} + \dots) \\
 & + \frac{2m\pi}{m^2 \pi^2 + a^2 + T'^2} Y_{n,n}) + m\pi B] \frac{\beta_1 + \beta_2}{2d^2 \alpha_2 \alpha_6} Y_{n,n} - 2B_n \pi K Y_{n,n} ] = 0 \quad (3.4.64)
 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
 G &= \frac{n\pi}{n^2 \pi^2 + a^2} [(1 + (-1)^{n+1} \text{cha}) A_1 + (-1)^{n+1} \text{sha} B_1 + \dots \\
 &+ (-1)^{n+1} (\text{cha} - \frac{2an\pi}{n^2 \pi^2 + a^2}) A_2 + (-1)^{n+1} (\text{sha} - \frac{2an\pi}{n^2 \pi^2 + a^2}) B_2
 \end{aligned}$$

$$H = \frac{n\pi}{n^2 \pi^2 + a^2} [(1 + (-1)^{n+1} \text{cha}') C_1 + (-1)^{n+1} \text{sha}' D_1]$$

(3.4.65)

$$I = \frac{n\pi}{n^2 \pi^2 + a^2} [(-1)^{n+1} \text{sha} D_1 + (1 + (-1)^{n+1} \text{cha}) B_2]$$

$$J = m^2 \pi^2 - d^2 \left( \frac{\alpha_6}{\beta_3} - \frac{a^2}{2d^2} \right)$$



0 si  $m+n$  est pair avec  $m \neq n$

$$X_{n,m} = 1/4 \quad \text{si } m=n$$

$$- \frac{4nm}{\pi^2 (n^2 - m^2)^2} \quad \text{si } m+n \text{ est impair}$$

$$K = \frac{1}{2} - \frac{a^2 \beta_3}{2d^2 \alpha_2 \alpha_6} + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2d^2 \alpha_2 \alpha_6}$$

0 si  $m+n$  est pair avec  $m \neq n$

$$Y_{n,m} = 0 \quad \text{si } m=n$$

$$\frac{2n}{\pi^2 (n^2 - m^2)} \quad \text{si } m+n \text{ est impair}$$

Une première approximation de l'équation précédente consiste à écrire que l'élément (1,1) de la matrice est nulle .

Il vient alors la relation :

$$\frac{1}{2} - \frac{(\pi^2 + a^2)^3 (\pi^2 + a^2 + T'^2)^2}{\dots} = \dots$$

$$\frac{2T'^4 \Omega^2 a^2 d \beta_3 R_1 B}{\alpha_2 \alpha_6} \left[ \frac{\pi}{\pi^2 + a^2} \left( \frac{a^2 (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)}{2d^2 \alpha_2 \alpha_6} - \frac{1}{\alpha_2} \right) (1 + \dots \right.$$

$$\left. + \text{cha} A_1 + \text{sha} B_1 + \text{cha} A_2 + \text{cha} A_2 + \text{sha} B_2 + \dots \right.$$

$$\left. - \frac{2a}{\pi^2 + a^2} \text{sha} A_2 - \frac{2a}{\pi^2 + a^2} (1 + \text{cha}) B_1 / 2 \right) + \dots$$

$$+ \frac{\pi}{\pi^2 + a^2} \left( \frac{a^2 \beta_3 + a'^2 (\beta_1 + \beta_2)}{2d^2 \alpha_2 \alpha_6} - \frac{1}{\alpha_2} \right) (\text{sha}' D_1 + (1 + \text{cha}') C_1) + \dots$$

$$+ \frac{\pi}{\pi^2 + a^2} \frac{a (\beta_1 + \beta_2)}{d^2 \alpha_2 \alpha_6} (\text{sha} A_2 + (1 + \text{cha}) B_2) + \dots$$

$$+ (\pi^2 - d^2 \left( \frac{\alpha_6}{\beta_3} - \frac{a^2}{d^2} \right)) \left[ \left( \frac{a^2 \beta_3}{2d^2 \alpha_2 \alpha_6} - \frac{1}{\alpha_2} \right) - \frac{\beta_1 + \beta_2 \pi^2}{2d^2 \alpha_2 \alpha_6} - \frac{1}{4} B \right] \quad (3.4.66)$$

En remplaçant dans cette expression les coefficients  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $D_1$  et  $C_1$  par leur valeur, on peut formellement déterminer

$$T = \frac{2\Omega^2 R_1 d^3}{\alpha_2^2}, \text{ le nombre de Taylor, en fonction de } a^2 \text{ et des}$$

caractéristiques du milieu. Mais les paramètres  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\beta_3$  et  $\alpha_6$  qui dépendent de la concentration du milieu ne sont pas, pour l'instant, suffisamment connus. Toutefois, on sait que  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  et  $\beta_3$  tendent vers 0 lorsque la solution est diluée.

En se référant, d'autre part aux travaux d'ALLEN et KLINE montrant  
 ie la

viscosité d'une solution est de la forme

$$\frac{\mu_s}{\mu} = 1 / \left[ 1 - \frac{\alpha_6 c}{\alpha_2 - \alpha_6 c_s} \right] \quad (3.4.67)$$

où  $\mu = \alpha_2$  et  $c, c_s$  désignent respectivement la concentration et

la concentration maximum ; on voit que  $\alpha_6 = \frac{5}{2} \mu c_s / [1 - \frac{5}{2} c_s]$

En solution diluée, la relation (3.4.66) se simplifie et devient :

$$\frac{1}{\pi^2 + a^2} = - \frac{a^2 T \beta_3 B}{d^2 \alpha_6 \alpha_2} \left[ \frac{\pi}{\pi^2 + a^2} ((1 + cha)A_1 + shaB_1 + \dots) \right]$$

$$+ chaA_2 + shaB_2 - \frac{2a}{\pi^2 + a^2} shaA_2 - \frac{2a}{\pi^2 + a^2} (1 + cha)B_2 + \dots$$

$$+ \frac{1}{4} \frac{\alpha_6 d^2 B}{\beta_3 d_2} \quad (3.4.68)$$

avec

$$A_1 = B \frac{d^2 \alpha_6}{\beta_3} \frac{4\pi}{\pi^2 + a^2}$$

$$B_1 = B \frac{d^2 \alpha_6}{\beta_3} \frac{1}{a^2 - sh^2 a} \left[ \frac{4\pi}{\pi^2 + a^2} (sha + a cha + sha cha + a) - a\pi \right]$$

et

$$A_2 = B \frac{d^2 \alpha_6}{\beta_3} \frac{1}{a^2 - \text{sh}^2 a} \left[ \frac{4\pi}{\pi^2 + a^2} (a \text{sha} + a^2) - \pi \text{sh}^2 a \right]$$

$$B_2 = B \frac{d^2 \alpha_6}{\beta_3} \frac{1}{a^2 - \text{sh}^2 a} \left[ \frac{4\pi}{\pi^2 + a^2} (a^2 \text{sha} + a \text{sh}^2 a) + a - \text{sha} \text{cha} \right] \quad (3.4.69)$$

Nous obtenons alors le nombre de Taylor, sous la forme :

$$T = \frac{2}{B^2} \frac{(\pi^2 + a^2)^3}{16a \pi^2 \text{ch}^2 1/2a} \frac{1 - \frac{1}{(\pi^2 + a^2)^2 (\text{sha} + a)}}{\quad} \quad (3.4.70)$$

avec

$$B = \frac{1 + \frac{\alpha_6}{\alpha_2 \alpha_6} s'}{\frac{2\alpha_6}{\alpha_2 - \alpha_6} \frac{s' e^{T'} - 1}{T' e^{T'} + 1}} = \frac{1 - 5/2 s' c_s}{1 + \frac{2\alpha_6}{\alpha_2 - \alpha_6} \frac{s' e^{T'} - 1}{T' e^{T'} + 1}} \quad (3.4.71)$$

Or le dénominateur de cette expression est précisément égal au rapport  $\mu/\mu_s$ .

Nous calculons alors la valeur de  $a$  qui rend  $M$  minimum, noté  $M_c$  et nous en déduisons la vitesse de rotation critique :

$$\Omega_c = \frac{1715}{R_1 d^3} \cdot \gamma^2 \frac{[1 - 5/2 c]^2}{[1 - 5/2 s' c_s]^2} \quad (3.4.72)$$

En posant

$$f = \frac{1 - e^{-T}}{T e^{-T} + 1} \quad (3.4.73)$$

nous voyons que

$$2fs' = \frac{c}{c_0} \quad (3.4.74)$$

$$\Omega_c = \frac{1715}{R_1 d^3} \cdot \gamma^2 \frac{[1 - 5/2 c]^2}{[1 - 5/4 c/f]^2} \quad (3.4.75)$$

Si nous supposons que la solution se comporte comme un liquide pur, alors

$$\Omega_c = \frac{1715}{R_1 d^3} \frac{\gamma^2}{[1 - 5/2 c]^2} \quad (3.4.76)$$

En comparant ces deux formules, nous pouvons faire les remarques suivantes :

- comme  $c/f$  est plus grand que  $c$ , l'apparition de la transition pour  $c$  donnée, a lieu pour une vitesse critique plus élevée que ne le laisse prévoir un liquide pur équivalent

- il est possible que la courbe  $\Omega_c$  en fonction de  $c$  passe par un maximum .

Ces remarques ont pu être vérifiées expérimentalement [50,195 à 197] .

Cette théorie, essentiellement basée sur une structure newtonienne de la suspension, donne une variation du nombre de Taylor critique en accord avec les expériences effectuées sur des solutions polymériques diluées .

## CHAPITRE 3.5

STABILITE DE L'ECOULEMENT DE TAYLOR-COQUETTE EN PRESENCE DES PARTICULES .

Ainsi que nous l'avons indiqué au chapitre 1.3, les suspensions de particules sphériques sont newtoniennes à faible concentration ( $c < 0.25$ ). L'étude de la stabilité de la suspension se ramène alors à celle qui a été conduite au chapitre 2.4.

Lorsque la concentration excède cette valeur critique, le comportement de la suspension est celui d'un fluide de Bingham (cf. chap. 1.3) .

Sa loi de comportement est la suivante : [20]

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + 2[\mu + \sigma^0 (2 \epsilon_{nn} \epsilon_{nn})^{-1/2}] \epsilon_{ij} \quad (3.5.1)$$

avec

$$(\sigma^0)^2 = 1/2 \sigma^0_{ij} \cdot \sigma^0_{ij} \quad (3.5.2)$$

## 3.5.1. Ecoulement de Couette .

Les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement pour cette loi de comportement s'écrivent de la manière suivante, dans un système de coordonnées cylindriques (fig. 2a).

$$\begin{aligned} \rho \left[ \frac{\partial U}{\partial t} + (v \cdot \nabla) U - \frac{V^2}{r'} \right] &= - \frac{\partial P}{\partial r'} + (\mu + \frac{\sigma^0}{E}) \left[ \Delta U - \frac{U}{r'^2} - \frac{2 \partial V}{r'^2 \partial \varphi} \right] + \dots \\ + \sigma^0 \left[ 2 \left( \frac{\partial U}{\partial r'} \cdot \frac{\partial E^{-2}}{\partial r'} \right) + \left( \frac{\partial V}{\partial r'} - \frac{V}{r'} + \frac{\partial U}{r' \partial \varphi} \right) \frac{\partial E^{-2}}{r' \partial \varphi} + \left( \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial r'} \right) \frac{\partial E^{-1}}{\partial z} \right] \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

$$\begin{aligned}
 \rho \left[ \frac{\partial V}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) V + \frac{UV}{r'} \right] &= - \frac{\partial P}{r' \partial \varphi} + \left( \mu + \frac{\sigma^0}{E} \right) \left[ \Delta V - \frac{V}{r'^2} + \frac{2\partial U}{r'^2 \partial \varphi} \right] + \dots \\
 + \sigma^0 \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial r'} - \frac{V}{r'} + \frac{\partial U}{r' \partial \varphi} \right) \left( \frac{\partial E^{-1}}{\partial r'} \right) + 2 \left( \frac{\partial V}{r' \partial \varphi} + \frac{U}{r'} \right) \left( \frac{\partial E^{-1}}{r' \partial \varphi} \right) + \left( \frac{\partial V}{\partial z} + \dots \right. \right. \\
 \left. \left. + \frac{\partial W}{r' \partial \varphi} \right) \left( \frac{\partial E^{-1}}{\partial z} \right) \right] & \tag{3.5.4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \rho \left[ \frac{\partial W}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) W \right] &= - \frac{\partial P}{\partial z} + \left( \mu + \frac{\sigma^0}{E} \right) \Delta W + \sigma^0 \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial r'} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial E^{-1}}{\partial r'} \right) + \dots \right. \\
 + \left. \left( \frac{\partial W}{r' \partial \varphi} + \frac{\partial V}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial E^{-1}}{r' \partial \varphi} \right) + 2 \left( \frac{\partial W}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial E^{-1}}{\partial z} \right) \right] & \tag{3.5.5}
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial U}{\partial r'} + \frac{U}{r'} + \frac{\partial V}{r' \partial \varphi} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \tag{3.5.6}$$

avec

$$E^2 = 2\epsilon_{i,j} \cdot \epsilon_{i,j} \tag{3.5.7}$$

Ces équations admettent, pour l'écoulement de Couette, la solution suivante :

$$U = W = 0 \tag{3.5.8}$$

$$\begin{aligned}
 V = \left[ \frac{R_1 \Omega_1}{(1 - \frac{R_1^2}{R_2^2})} \right] \left[ N \left[ \frac{r'}{R_1} - \frac{R_1}{r'} \right] \ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right) - N \left( 1 - \frac{R_1^2}{R_2^2} \right) \frac{r'}{R_1} \ln \left( \frac{r'}{R_1} \right) + \dots \right. \\
 \left. + \frac{r'}{R_1} \left[ \frac{\Omega_2}{\Omega_1} - \frac{R_1^2}{R_2^2} \right] - \frac{R_1}{r'} \left( \frac{\Omega_2}{\Omega_1} - 1 \right) \right] & \tag{3.5.9}
 \end{aligned}$$



où  $N$ , le nombre de Bingham (ou d'Oldroyd) a pour expression :

$$N = \frac{\sigma^0}{\mu \Omega_1} \quad (3.5.10)$$

### 3.5.2. Equations du mouvement en régime des tourbillons de Taylor.

En régime des tourbillons de Taylor, l'écoulement est représenté par la superposition de l'écoulement de Couette ci-dessus à une petite perturbation axisymétrique :

$$\vec{v}'$$

$(v', p')$

La forme linéarisée des équations du mouvement (3.5.3) à (3.5.6) précédentes est la suivante :

$$\rho \left( \frac{\partial u'}{\partial t} - \frac{2Vv'}{r'} \right) = - \frac{\partial p'}{\partial r'} + \left( \mu + \frac{\sigma^0}{E_1} \right) \left( \Delta u' - \frac{u'}{r'^2} \right) + 2\sigma^0 \frac{\partial u'}{\partial r'} \frac{dE_1}{dr'} \quad (3.5.11)$$

$$\rho \left[ \frac{\partial v'}{\partial t} + \left( \frac{dV}{dr'} + \frac{V}{r'} \right) u' \right] = \mu \left( \Delta v' - \frac{v'}{r'^2} \right) + \frac{\sigma^0}{E_1} \frac{\partial^2 v'}{\partial z^2} \quad (3.5.12)$$

$$\rho \frac{\partial w'}{\partial t} = - \frac{\partial p'}{\partial z} + \left( \mu + \frac{\sigma^0}{E_1} \right) \Delta w' + \sigma^0 \left( \frac{\partial w'}{\partial r'} + \frac{\partial u'}{\partial z} \right) \frac{dE_1}{dr'} \quad (3.5.13)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial r'} + \frac{u'}{r'} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \quad (3.5.14)$$

avec 
$$E_1 = \frac{dV}{dr'} - \frac{V}{r'} \tag{3.5.15}$$

Après élimination de  $w'$  et  $p'$ , puis adimensionnalisation de toutes les grandeurs, donnons à  $u'$  et  $v'$  la forme suivante :

$$u' = R_1 \Omega_1 u \sin\left(\frac{kz}{R_1}\right) \exp[\Sigma \Omega_1 t] \tag{3.5.16}$$

$$v' = R_1 \Omega_1 v \sin\left(\frac{kz}{R_1}\right) \exp[\Sigma \Omega_1 t] \tag{3.5.17}$$

Les équations du mouvement (3.5.11) à (3.5.14) ci-dessus se réduisent alors au système suivant :

$$\begin{aligned} & (L - k^2)(L - k^2 - \Sigma R)u + N J_1^{-1} [(L - k^2)^2 u + \dots] \\ & + \frac{d J_1^{-1}}{dr} \left[ 2 \frac{d(Lu)}{dr} - 2k^2 \frac{du}{dr} - \frac{1}{r} (L - k^2)u \right] + J_1^{-2} \left[ 2 \left(\frac{d J_1}{dr}\right)^2 + \dots \right. \\ & \left. - J_1 \frac{d^2 J_1}{dr^2} \right] (L + k^2)u = 2 k^2 R V' \frac{v}{r} \end{aligned} \tag{3.5.18}$$

$$x(L - k^2 - \Sigma R - \frac{Nk^2}{J_1})v = R \left( \frac{dV'}{dr} + \frac{V'}{r} \right) u$$

où

$$E_1 = \Omega_1 J_1, \quad J_1 = \frac{dV'}{dr} - \frac{V'}{r}$$

$$V' = R_1 \Omega_1 V, \quad r' = R_1 r \tag{3.5.19}$$

et

$$R = \frac{\epsilon R_1^2 \Omega_1}{\mu} \quad \beta' = \frac{R_2 - R_1}{R_1}$$

$$L = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \quad (3.5.20)$$

La condition de non-glissement aux parois des cylindres s'écrit :

$$u = v = \frac{du}{dr} = 0 \quad \text{en } r = 1 \quad \text{et } 1 + \beta' \quad (3.5.21)$$

Ces équations prennent une forme relativement simple dans le cas de l'entrefer étroit ( $\beta' \ll 1$ ).

En posant :

$$r = 1 + \beta' x \quad D = \frac{d}{dx}$$

$$a = \beta' k \quad R' = \beta'^2 R \quad (3.5.22)$$

$$\alpha' = \frac{\Omega_2}{\Omega_1} - 1 \quad T = \frac{2\alpha' R'^2}{\beta'}$$

$$P = \frac{N\beta'}{\alpha'} = \frac{\sigma^0 \beta'}{\mu(\Omega_2 - \Omega_1)}$$

Elles se réduisent à :

$$(D^2 - a^2)(D^2 - a^2 - \Sigma R')u + P(D^2 - a^2)^2 u = (1 + \alpha'x)v \quad (3.5.23)$$

$$(D^2 - a^2 - \Sigma R' - a^2 P)v = -T a^2 u$$

Ce système régit la stabilité linéaire de l'écoulement de Taylor-Couette d'un fluide de Bingham dans un appareillage infiniment long à entrefer étroit .

Il fut établi par GRAEBEL [20] . L'auteur utilise la méthode des fonctions d'essai de CHANDRASEKHAR (fonctions circulaires), pour la stabilité marginale .

Pour notre étude, nous remarquons que le système (3.5.23) est analogue à celui qui décrit le mouvement d'un fluide newtonien, dans la même configuration .

La différence entre les deux problèmes est qu'ici, la solution dépend de l'entrefer, certes petit, à travers le paramètre P . Afin d'appliquer la méthode décrite au chapitre (2.1), nous réduisons (3.5.23) à une équation unique .

Par substitution, il vient :

$$\begin{aligned} & \{D^4 (1 + P) - D^4 [3a^2 + 4a^2 + 2\Sigma R' + a^2 P^2 + \Sigma R' P] + D^2 [3a^4 + \dots \\ & + 5a^4 P + 2a^4 P^2 + 4a^2 \Sigma R' + \Sigma^2 R' + \Sigma^2 R'^2 + 3\Sigma R' a^2 P] - [(a^6 + \dots \\ & + 2a^4 \Sigma R' + 2a^4 P + 2\Sigma R' P a^4 + a^4 P^2 + a^2 \Sigma^2 R'^2) - T a^2]\} v \\ & = -T a^2 \alpha' x v \end{aligned} \quad (3.5.24)$$

Associée aux conditions aux limites (3.5.21), cette équation est un problème aux valeurs propres à 5 paramètres,

$$F(a, T, \Sigma, P, \beta') = 0 \quad (3.5.25)$$

puisque (3.5.22) permet d'écrire  $R'$  sous la forme :

$$R' = \sqrt{\left(-\frac{T\beta'}{2\alpha'}\right)}$$

Sans restreindre la généralité de l'étude, nous pouvons nous limiter au cas classique du cylindre extérieur immobile

$$\mu' = \frac{\Omega_2}{\Omega_1} = 0$$

Notons (3.5.24) de la manière suivante :

$$[A_6 D^6 - A_4 D^4 + A_2 D^2 - A_0]v = Ta^2 x v \quad (3.5.26)$$

### 3.5.3. Stabilité marginale .

En écoulement stationnaire, les coefficients  $A_i$  sont donnés par :

$$A_6 = 1 + P$$

$$A_4 = 3a^2 + 4a^2 P + a^2 P^2$$

(3.5.27)

$$A_2 = 3a^4 + 5a^4 P + 2a^4 P^2$$

$$A_0 = a^6 + 2a^6 P + a^6 P^2 - Ta^2$$

Par analogie, nous pouvons écrire sans calcul, la solution de (3.5.26), comme la combinaison linéaire des 6 solutions suivantes

$$v_1(x) = v_0(x) - \int_0^{+\infty} \cos[M'_1(x,t)] \cdot N'_1(x,t) dt \quad (3.5.28)$$

$$v_2(x) = - \int_0^{+\infty} \sin[M'_1(x,t)] \cdot N'_1(x,t) dt$$

$$v_3(x) = v_0(x) - \int_0^{+\infty} \cos[M'_2(x,t)] \cdot N'_2(x,t) dt \quad (3.5.29)$$

$$v_4(x) = - \int_0^{+\infty} \sin[M'_2(x,t)] \cdot N'_2(x,t) dt$$

$$v_5(x) = v_0(x) - \int_0^{+\infty} \cos[M'_3(x,t)] \cdot N'_3(x,t) dt \quad (3.5.30)$$

$$v_6(x) = - \int_0^{+\infty} \sin[M'_3(x,t)] \cdot N'_3(x,t) dt$$

avec

$$v_0(x) = \int_0^{+\infty} \exp[xt] \cdot \exp\left[\frac{1}{Ta^2} \left(-\frac{A_6 t^7}{7} + \frac{A_4 t^5}{5} - \frac{A_2 t^3}{3} + A_0 t\right)\right] dt \quad (3.5.31)$$

$$M'_1(x,t) = \left[x + \frac{A_0}{Ta^2}\right] t \sin \frac{2\pi}{7} - \frac{A_4 t^5}{5Ta^2} \sin \frac{3\pi}{7} - \frac{A_2 t^3}{3Ta^2} \sin \frac{\pi}{7} + \frac{2\pi}{7} \quad (3.5.32)$$

$$N'_1(x,t) = \exp\left[\left(x + \frac{A_0}{Ta^2}\right) t \cos \frac{2\pi}{7} - \frac{A_4 t^5}{7Ta^2} - \frac{A_2 t^3}{5Ta^2} \cos \frac{3\pi}{7} + \frac{A_2 t^3}{3Ta^2} \cos \frac{\pi}{7} - \frac{\pi}{7}\right]$$

$$M'_2(x, t) = \left[ x + \frac{A_0}{Ta^2} \right] t \sin \frac{4\pi}{7} + \frac{A_4 t^5}{5Ta^2} \sin \frac{\pi}{7} + \frac{A_2 t^3}{3Ta^2} \sin \frac{2\pi}{7} + \frac{4\pi}{7} \quad (3.5.33)$$

$$N'_2(x, t) = \exp\left\{ \left[ x + \frac{A_0}{Ta^2} \right] t \cos \frac{4\pi}{7} - \frac{A_4 t^7}{7Ta^2} - \frac{A_4 t^5}{5Ta^2} \cos \frac{\pi}{7} - \frac{A_2 t^3}{3Ta^2} \cos \frac{2\pi}{7} \right\}$$

$$M'_3(x, t) = \left[ x + \frac{A_0}{Ta^2} \right] t \sin \frac{6\pi}{7} + \frac{A_4 t^5}{5Ta^2} \sin \frac{5\pi}{7} - \frac{A_2 t^3}{3Ta^2} \sin \frac{4\pi}{7} + \frac{6\pi}{7} \quad (3.5.34)$$

et

$$N'_3(x, t) = \exp\left\{ \left[ x + \frac{A_0}{Ta^2} \right] t \cos \frac{6\pi}{7} - \frac{A_4 t^7}{7Ta^2} - \frac{A_4 t^5}{5Ta^2} \cos \frac{5\pi}{7} - \frac{A_2 t^3}{3Ta^2} \cos \frac{4\pi}{7} \right\}$$

et

$$L_0(t) = \exp\left\{ -\frac{1}{Ta^2 \alpha} \left[ \frac{A_4 t^7}{7} + A_4 \frac{t^5}{5} + \frac{A_2 t^3}{3} + (A_0 - Ta^2) t \right] \right\} \quad (3.5.35)$$

$$M'_1(x, t) = \left[ x + \frac{A_0 - Tk^2}{Ta^2 \alpha} \right] t \sin \frac{2\pi}{7} + \frac{A_4 t^5}{5Ta^2 \alpha} \sin \frac{3\pi}{7} - \frac{A_2 t^3}{3Ta^2 \alpha} \sin \frac{\pi}{7} + \frac{2\pi}{7} \quad (3.5.36)$$

$$N'_1(x, t) = \exp\left\{ \left[ x + \frac{A_0 - Ta^2}{Ta^2 \alpha} \right] t \cos \frac{2\pi}{7} - \frac{A_4 t^7}{7Ta^2 \alpha} + \frac{A_4 t^5}{5Ta^2 \alpha} \cos \frac{3\pi}{7} + \dots \right\}$$

$$+ \frac{A_2 t^3}{3Ta^2 \alpha} \cos \frac{\pi}{7} \quad (3.5.37)$$

$M'_2(x,t)$  et  $N'_2(x,t)$  d'une part,  $M'_3(x,t)$  et  $N'_3(x,t)$  d'autre part, se déduisent de  $M'_1(x,t)$  et  $N'_1(x,t)$  par les permutations (2.2.33) et (2.2.34), respectivement .

Le calcul numérique de la solution s'effectue de la même manière qu'au chapitre (2.3) .

A la différence du fluide newtonien, le seul paramètre  $\mu$  ne détermine plus la stabilité marginale, ainsi que nous l'avons noté plus haut .

La figure (3.d) représente une famille de courbes de stabilité marginale, correspondant à diverses valeurs de  $P$  (nombre de Bingham) . Elles montrent que les effets non-newtoniens (mesurés par  $P$ ), sont un facteur de stabilisateur, puisqu'ils retardent l'apparition des tourbillons de Taylor .

Par ailleurs, elles indiquent une diminution de la longueur d'onde critique, à mesure que  $P$  croît .

Nos courbes ont la même allure que celles proposées par GRAEBEL . Mais comme l'auteur ne fournit pas de valeurs numériques, nous ne disposons d'aucune base de comparaison pour :

- les résultats que nous présentons sur les figures (3.e) et (3.f) et sur le tableau (3.β), qui représentent les graphes des paramètres critiques en fonction de  $P$
- l'étude que nous menons dans le paragraphe suivant .



P	$a_c$	$T_c$
0	3.12	3 389
0.10	3.06	3 911
0.25	3.00	4 750
0.5	2.91	6 293
1.00	2.75	9 914
1.25	2.71	11 984
1.50	2.65	14 223

Tableau (3.β)

Longueur d'onde et Nombre de Taylor critiques de quelques fluides de Bingham .

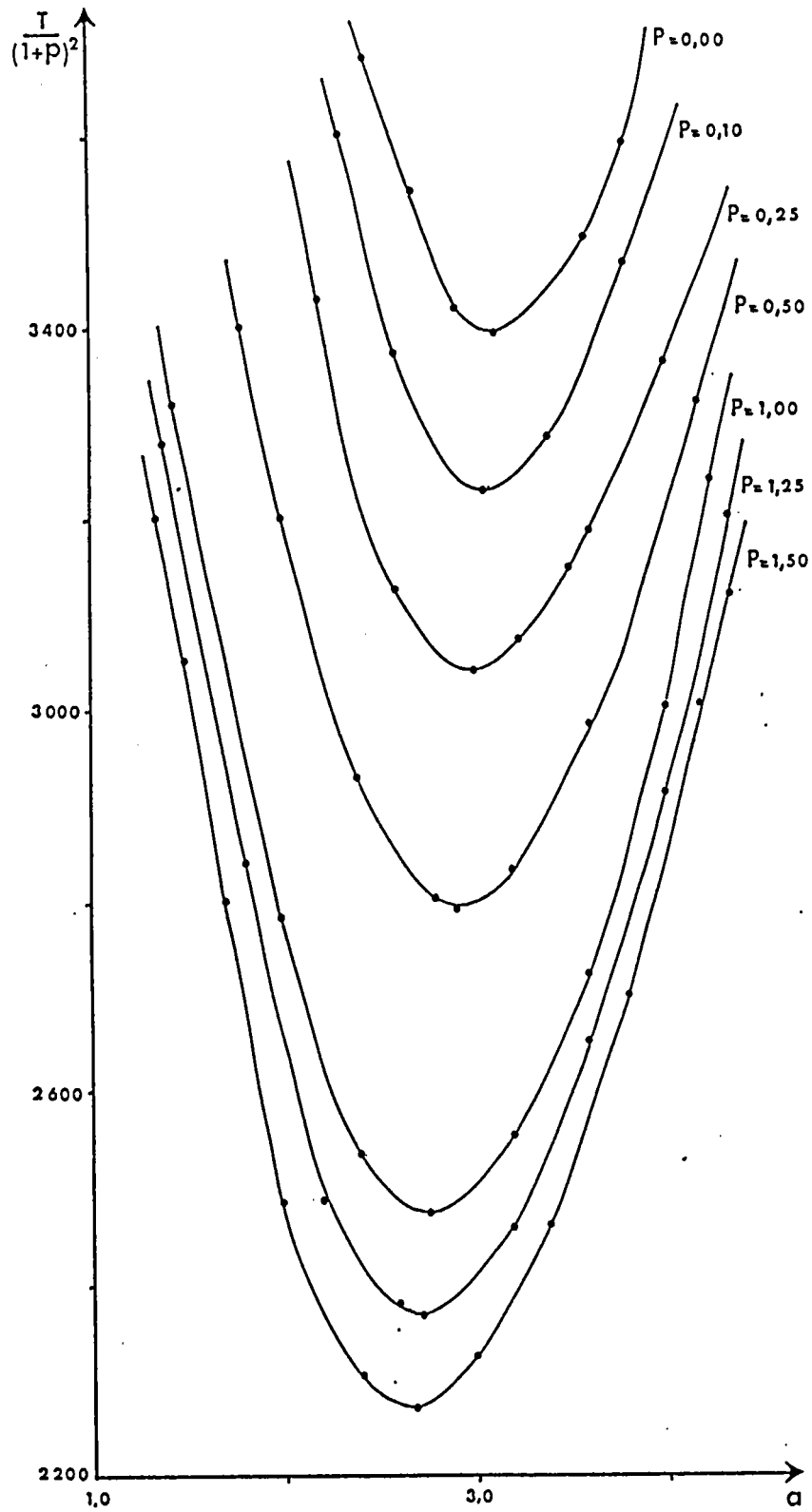


Figure 3.d : Courbes de stabilité marginale pour  $\mu' = 0$  .

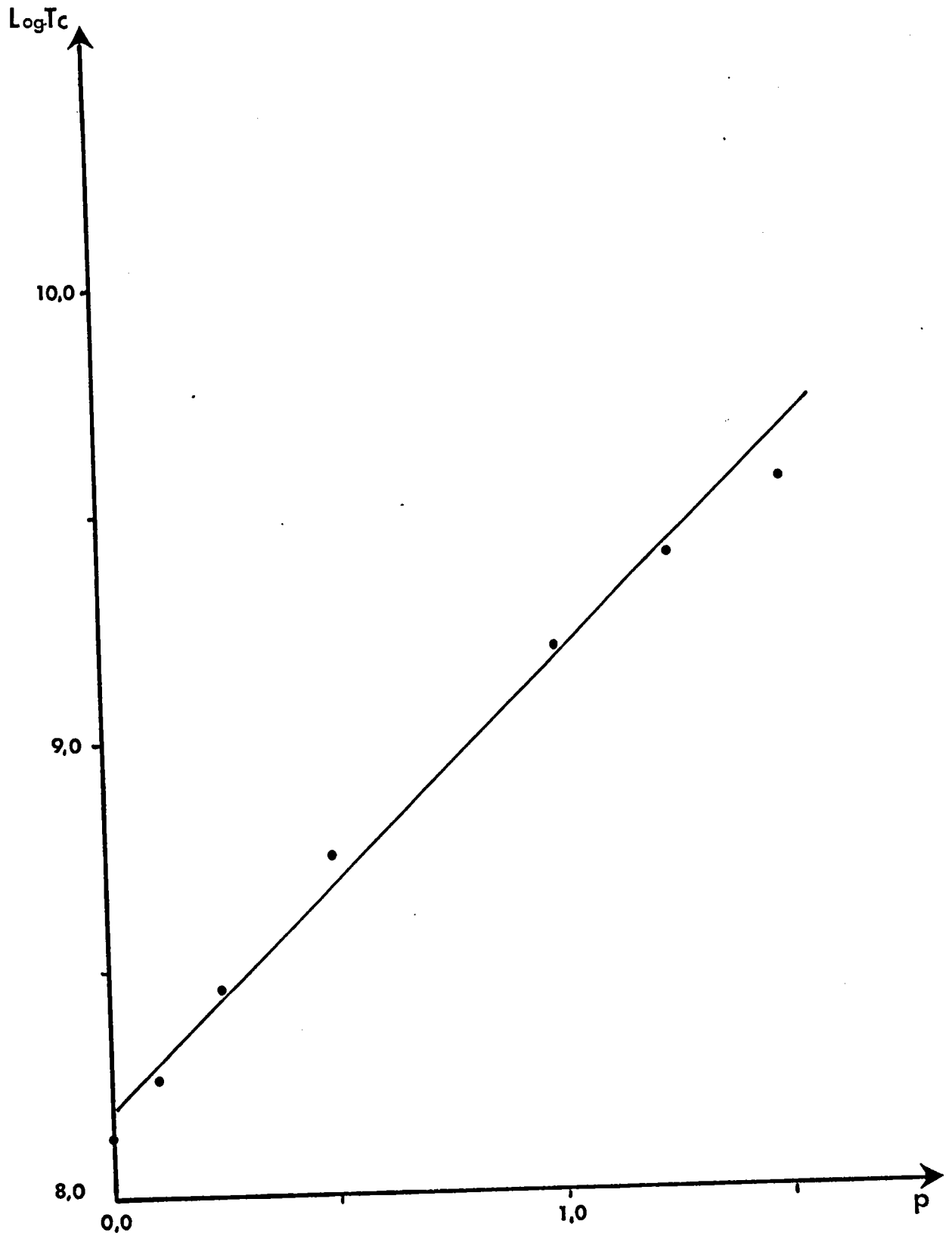


Figure 3.e : Variation du nombre de Taylor critique en fonction du nombre de Bingham .

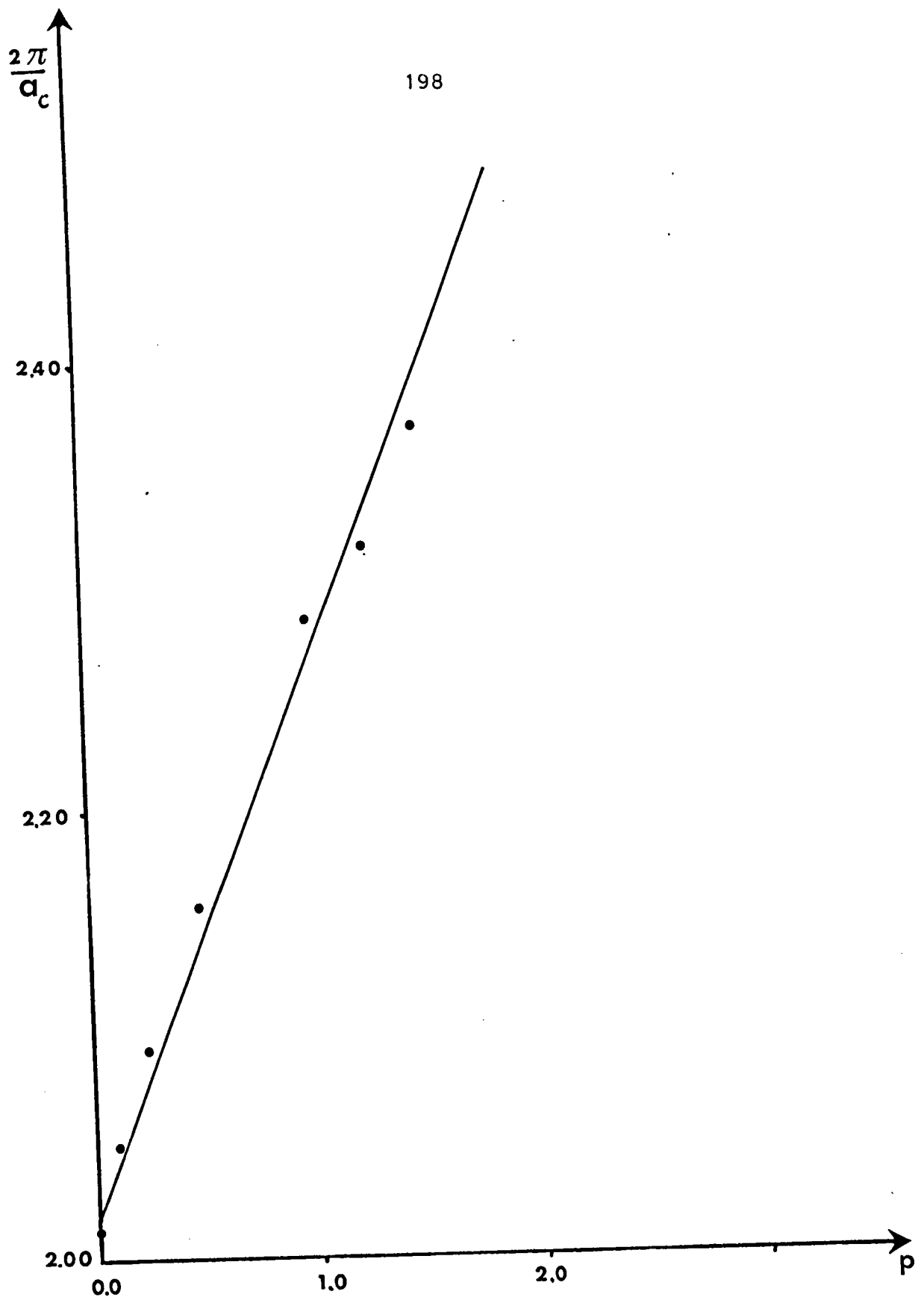


Figure 3.f : Variation du nombre d'onde critique en fonction du nombre de Bingham .

### 3.5.5. Champ des vitesses .

En procédant comme au paragraphe (2.3.4), le champ des vitesses est une combinaison linéaire des six solutions précédentes

$$v(x) = F'_i v_i(x) \quad i = 1, 2, 3, \dots, 6 \quad (3.5.39)$$

Les valeurs des  $F'_i$  sont données sur le tableau (3.Γ) .

- La composante radiale du champ des vitesses est donnée par  
(3.5.23)

$$u(x) = - \frac{1}{Ta^2} [D^2 - a^2(1 + P)]v(x) \quad (3.5.40)$$

- Et la composante axiale, par l'équation de continuité

$$w(x) = - \frac{1}{a} Du(x) \quad (3.5.41)$$

Les tableaux (3.δ, 3.ε, 3.π) représentent la variation du champ des vitesses normalisées dans l'espace annulaire .

Le tableau (3.μ) montre que les effets non-newtoniens ont tendance à déplacer vers le cylindre intérieur, le point de vitesse maximale .

P	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	F <sub>3</sub>	F <sub>4</sub>	F <sub>5</sub>	F <sub>6</sub>
0.00	1	-6.104	-5.407	-4.964	0.016	-0.039
0.10	1	-7.335	-6.219	-5.456	0.018	-0.044
0.25	1	-9.696	-7.752	-6.437	0.021	-0.052
0.5	1	-15.561	-11.511	-8.800	0.029	-0.071
1.00	1	-51.982	-34.423	-22.733	0.076	-0.186
1.25	1	-231.212	-145.892	-91.227	0.301	-0.728
1.50	1	178.871	108.749	64.102	-0.218	0.514

Tableau (3.Γ)

Coefficients de la combinaison linéaire définissant le champ des vitesses de quelques fluides de Bingham à la transition .

$$\vec{V}(x) = F_i \vec{V}_i(x)$$

201

v pour

P =	0.00	0.10	0.25	0.50	1.00	1.25	1.50
0.00	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.05	0.143	0.145	0.149	0.149	0.155	0.157	0.159
0.10	0.288	0.291	0.296	0.300	0.309	0.312	0.315
0.15	0.431	0.435	0.441	0.447	0.459	0.465	0.469
0.20	0.568	0.573	0.580	0.588	0.602	0.608	0.613
0.25	0.695	0.700	0.707	0.716	0.731	0.737	0.742
0.30	0.808	0.810	0.816	0.825	0.839	0.845	0.850
0.35	0.894	0.898	0.903	0.911	0.923	0.928	0.931
0.40	0.957	0.960	0.964	0.969	0.977	0.980	0.982
0.45	0.993	0.994	0.996	0.997	0.999	1.00	1.00
0.50	0.999	0.998	0.997	0.995	0.989	0.987	0.984
0.55	0.976	0.973	0.969	0.962	0.949	0.942	0.937
0.60	0.926	0.921	0.913	0.901	0.879	0.869	0.860
0.65	0.852	0.844	0.833	0.815	0.785	0.771	0.759
0.70	0.757	0.747	0.732	0.710	0.672	0.655	0.640
0.75	0.646	0.634	0.617	0.591	0.546	0.525	0.508
0.80	0.523	0.510	0.492	0.463	0.413	0.389	0.370
0.85	0.394	0.381	0.362	0.332	0.219	0.254	0.234
0.90	0.262	0.250	0.231	0.202	0.150	0.125	0.105
0.95	0.130	0.120	0.104	0.078	0.031	0.007	0.013
1.00	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Tableau (3.8)

Champ des vitesses tangentielles normalisées du mouvement secondaire pour divers nombres de Bingham .

u pour

P =	0.00	0.10	0.25	0.50	1.00	1.25	1.50
0.00	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.05	0.043	0.043	0.043	0.049	0.048	0.049	0.05
0.10	0.151	0.153	0.154	0.163	0.166	0.170	0.172
0.15	0.298	0.302	0.305	0.315	0.325	0.329	0.333
0.20	0.461	0.466	0.471	0.483	0.497	0.503	0.508
0.25	0.621	0.627	0.634	0.646	0.662	0.669	0.674
0.30	0.764	0.769	0.777	0.789	0.804	0.811	0.816
0.35	0.878	0.883	0.889	0.900	0.913	0.917	0.922
0.40	0.957	0.960	0.964	0.971	0.979	0.982	0.984
0.45	0.996	0.997	0.998	0.999	1.00	0.999	0.999
0.50	0.994	0.992	0.989	0.985	0.976	0.971	0.967
0.55	0.953	0.948	0.939	0.928	0.909	0.899	0.892
0.60	0.877	0.867	0.854	0.834	0.803	0.789	0.777
0.65	0.772	0.758	0.738	0.710	0.666	0.647	0.631
0.70	0.644	0.627	0.601	0.564	0.506	0.483	0.462
0.75	0.504	0.482	0.450	0.405	0.334	0.306	0.282
0.80	0.361	0.335	0.298	0.245	0.162	0.130	0.102
0.85	0.226	0.197	0.156	0.097	0.002		
0.90	0.111	0.081	0.386				
0.95	0.005	0.001					
1.00	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Tableau (3.E)

Champ des vitesses radiales normalisées du mouvement secondaire pour divers nombres de Bingham .



203  
w pour

P =	0.00	0.10	0.25	0.50	1.00	1.25	1.50
0.00	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.05	0.490	0.513	0.545	0.581	0.646	0.669	0.682
0.10	0.802	0.814	0.832	0.850	0.884	0.896	0.897
0.15	0.963	0.967	0.975	0.979	0.991	0.993	0.986
0.20	0.998	0.997	0.997	0.990	0.985	0.980	0.968
0.25	0.933	0.927	0.921	0.906	0.888	0.878	0.862
0.30	0.790	0.776	0.769	0.749	0.722	0.708	0.690
0.35	0.592	0.580	0.565	0.540	0.505	0.489	0.471
0.40	0.359	0.346	0.328	0.300	0.260	0.242	0.225
0.45	0.112	0.097	0.077	0.046	0.003	-0.016	-0.031
0.50	-0.133	-0.149	-0.171	-0.203	-0.249	-0.267	-0.280
0.55	-0.360	-0.378	-0.401	-0.434	-0.480	-0.498	-0.509
0.60	-0.442	-0.576	-0.600	-0.633	-0.680	-0.696	-0.704
0.65	-0.715	-0.733	-0.758	-0.790	-0.836	-0.851	-0.856
0.70	-0.822	-0.840	-0.864	-0.897	-0.941	-0.954	-0.957
0.75	-0.872	-0.889	-0.912	-0.944	-0.987	-0.998	-0.999
0.80	-0.857	-0.873	-0.895	-0.925	-0.966	-0.976	-0.976
0.85	-0.772	-0.785	-0.804	-0.832	-0.870	-0.880	-0.879
0.90	-0.608	-0.617	-0.631	-0.654	-0.689	-0.698	-0.698
0.95	-0.355	-0.357	-0.364	-0.380	-0.408	-0.417	-0.419
1.00	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Tableau (3.π)

Champ des vitesses axiales normalisées du mouvement secondaire pour divers nombres de Bingham .

	P = 0.00	0.10	0.25	0.50	1.00	1.25	1.50
$V_{max}$ pour							
x =	0.49	0.48	0.48	0.47	0.46	0.46	0.45
$u_{max}$ pour							
x =	0.47	0.47	0.46	0.46	0.45	0.44	0.44
$w_{max}$ pour							
x =	0.19	0.19	0.18	0.18	0.17	0.17	0.76

Tableau (3.μ) .

Déplacement du point de vitesse maximale vers le cylindre intérieur causé par les effets non-newtoniens .

CONCLUSION .

Nous avons effectué une étude théorique de la transition "Laminaire-Tourbillons de Taylor", entre cylindres coaxiaux tournants, en présence de particules sphériques rigides .

Pour ce faire, il a fallu d'abord considérer le cas du solvant pur .

La stabilité marginale est régie par une équation différentielle du sixième ordre, avec un coefficient non-constant .

Celle-ci a été résolue par une méthode d'intégration exacte, en ce sens qu'elle ne fait appel ni à une approximation, ni à l'usage de fonctions d'essais .

La solution comporte des intégrales infinies qui convergent très rapidement .

Elle a permis de déterminer des paramètres critiques et un champ hydrodynamique en bon accord avec ceux fournis par la bibliographie .

En régime transitoire, une loi linéaire de croissance des tourbillons, comparable à celle de DAVEY a été établie .

La méthode, qui peut être appliquée à la deuxième transition, a permis de mettre en évidence, une propriété nouvelle de l'écoulement, à savoir, une structure analogue à celle des fluides compressibles, en mouvement non-tournant .

L'introduction d'une particule sphérique rigide dans l'écoulement, modifie son profil . La perturbation au mouvement secondaire obéit aux équations de Stokes . Celles-ci ont été résolues par la technique des harmoniques sphériques . Le champ total induit par un ensemble de particules s'obtient à partir de cette solution, par la méthode des images .

L'étude de l'écoulement d'une suspension est celle d'un fluide pur, dont la rhéologie est différente de celle du solvant . A faibles concentrations, les suspensions de particules sphériques rigides étant newtoniennes, l'étude précédente reste valable. à condition de déterminer la viscosité du milieu .

Le modèle de microstructure proposé par ALLEN et KLINE pour ce calcul est intéressant pour deux raisons essentielles ; il permet de retrouver :

- la formule d'Einstein pour des suspensions très diluées
- les résultats expérimentaux de VAND .

L'ayant appliqué au régime des tourbillons de Taylor, nous avons déterminé la variation du nombre de Taylor critique en fonction de la concentration, dans ce régime d'écoulement . Cette relation conduit naturellement à la viscosité relative de la suspension .

Les suspensions concentrées sont viscoplastiques . Les équations du mouvement à la première transition, établies par GRAEBEL, dans le cas d'un faible espace annulaire, sont analogues à celles du fluide newtonien, à la différence qu'elles font intervenir un paramètre supplémentaire,  $P$ , nombre de Bingham .

Ainsi, pour un même rapport des vitesses angulaires des cylindres, on obtient une famille de courbes de stabilité marginale, dépendant de  $P$ .

La méthode intégrale utilisée en fluide newtonien a pu être adaptée.

Les courbes obtenues sont analogues à celles proposées par GRAEBEL.

Les valeurs numériques des paramètres critiques ont été précisées.

Leur variation a été établie, dans la gamme  $0.00 \leq P \leq 1.50$ .

La solution a permis de déterminer le champ des vitesses du mouvement secondaire pour toutes les valeurs étudiées de  $P$ .

Ce dernier calcul a indiqué que les effets non-newtoniens avaient tendance à déplacer vers le cylindre intérieur, le point de vitesse maximale.

L'ensemble de ces résultats souffre du manque d'une base de comparaison dans la littérature.

Il est donc souhaitable que des travaux tant expérimentaux que théoriques soient mis en oeuvre pour cette configuration fondamentale du problème de Taylor-Couette.

Une étude dans des suspensions de sphères déformables serait une suite intéressante à notre travail, du fait qu'elles présentent un comportement viscoélastique et que par là, elles se rapprochent davantage des modèles utilisés en réduction de frottement .

De plus, elles seraient une base intéressante pour l'étude des écoulements de polymères fondus .

## REFERENCES .

1. LANDAU, L.D. C.R. Acad. Sci. U.R.S.S.  
311 (1944)
2. LANDAU, L.D., LIFSHITZ, E.M. Fluid Mechanics  
Pergamon Press, London (1959)
3. CHANDRASEKHAR, S. "Hydrodynamic and Hydromagnetic  
Stability"  
Oxford at the Clarendon Press (1961)
4. WIMMER, M. Report of the 3<sup>rd</sup> Taylor-Vortex flow working-  
Party  
Nancy (1983)
5. BARTELS, F. , KRAUSE, E. "Laminar-turbulent transition"  
Ed. R. Eppler and H. FASEL  
Springer Verlag - Berlin (1979)
6. SCHRAUF, G. "Laminar-turbulent transition"  
Ed. V.V. KOZLOV  
Springer Verlag - Berlin (1984)
7. WIMMER, M. ZAMM  
63, 299 (1983)
8. WIMMER, M. Synopsis of the "5<sup>th</sup>" Taylor-Vortex Flow  
Working Party"  
Tempe - Arizona (1987)



9. COLES, D. Jour. Fluid Mech.  
21, 385 (1965)
10. BRÄNDSTATER, A., SWINNEY, H. L. Submitted to Phys. Rev.  
(1986)
11. BATCHELOR, G. K. Quart. J. Roy. Meteor. Soc.  
80, 339 (1954)
12. OSTRACH, S. Trans. Am. Soc. Mech. Eng.  
79, 299 (1957)
13. LUMLEY, J. L. Ann. Rev. Fluid Mech.  
367 (1969)
14. RUBIN, H., ELATA, C. Phys. Fluids  
10, 1929 (1966)
15. ALLEN, S. J., KLINE, K. A. Trans. Soc. Rheol.  
12:3, 457 (1968)
16. JINESCU, V. V. Int. Chem. Eng.  
Vol. 14, n°3, p. 397 (1974)
17. EINSTEIN, A. Ann. Phys.  
19, 289 (1906)
18. HAPPEL, J. Jour. Appl. Phys.  
28, 1288 (1957)

19. DE ORR, C., DALLA VALLE, J. M. Chem. Eng. Progr. Symp. Ser.  
50, p. 29 (1954)
20. GRÄEBEL, W. P. "Intern. Symp. on second-order effects in  
Elasticity, Plasticity and Fluid Dynamics - Haifa (1962)"  
Pergamon (1964)
21. COUETTE, M. Ann. Ch. Phys.  
6, 43 (1890)
22. LORD RAYLEIGH Proc. Roy. Soc.  
A 93, 148 (1916)
23. TAYLOR, G. I. Phil. Trans. Roy. Soc.  
A 223, 289 (1923)
24. GERMAIN, P. "Cours de Mécanique"  
Palaiseau - Ecole Polytechnique (1984)
25. KOSCHMIEDER, E. L. "Order and Fluctuations in Equilibrium  
and Nonequilibrium Statistical Mechanics"  
Ed. G. Nicolis, G. Dewel, G. W. Turner  
Wiley New-York (1981)
26. BURKHALTER, J. E., KOSCHMIEDER, E. L. Jour. Fluid Mech.  
58, 547 (1973)
27. BENJAMIN, T. B. Proc. Roy. Soc.  
A 359, 1 (1978)

28. BLENNERHASSETT, P. J., HALL, P. Proc. Roy. Soc.  
A 365, 191 (1979)
29. COLE, J. A. Jour. Fluid Mech.  
75, 1 (1976)
30. HALL, P. Proc. Roy. Soc.  
A 372, 317 (1980)
31. MULLIN, T. Jour. Fluid Mech.  
121, 207 (1982)
32. PARK, K., CRAWFORD, G. L., DONNELLY, R. J. Phys. Rev. Lett.  
47, 1448 (1981)
33. COGNET, G. Jour. Méca. Théor. Appl. N° spécial (1984)
34. CANNELL, D. S., DOMINGUEZ-LERMA, M. A., AHLERS, G. Phys. Rev.  
Lett.  
50, 1365 (1983)
35. KOSCHMIEDER, E. L. Adv. Chem. Phys.  
26, 177 (1974)
36. WALTON, I. C. Proc. Roy. Soc.  
A 372, 201 (1980)
37. LÜCKE, M., MIHELICIC, M., WINGERATH, K. Phys. Rev. Lett.  
52, 625 (1984)

38. KOGELMAN, S., DIPRIMA, R.C.      Phys. Fluids  
13, 1 (1970)
39. SNYDER, H.A., KARLSON, S.K.      Phys. Fluids  
7, 1696 (1964)
40. SNYDER, H.A.      Jour. Fluid Mech.  
35, 273 (1969)
41. NISSAN, A.H., NARDASSI, J.L., HO, C.Y.      A.I. Ch. E. Jour.  
9, 620 (1963)
42. COGNET, G.      Thèse d'Etat - Nancy (1968)
43. JONES, C.A.      Jour. Fluid Mech.  
102, 249 (1981)
44. PARK, K.      Phys. Rev.  
A 29, 3458 (1984)
45. PARK, K., JEONG, K.      Phys. Fluids  
27, 2201 (1984)
46. KING, G.P., LI, Y., LEE, W., SWINNEY, H.L., MARCUS, P.S.      Jour.  
Fluid Mech.  
141, 365 (1984)
47. MULLIN, T., PFISTER, G., LORENZEN, A.      Phys. Fluids  
25, 1134 (1982)

48. ROSS, M. P., HUSSAIN, A. K. M. F. "Synopsis of the 5<sup>th</sup> Taylor-Vortex Working Party"  
Phoenix (1987)
49. GORMAN, M., SWINNEY, H. L., RAND, D. A. Phys. Rev. Lett.  
46, 992 (1981)
50. DROUIN, D. Thèse 3<sup>ème</sup> cycle  
Nancy (1982)
51. DIPRIMA, R. C. A. S. L. E. Trans.  
6, 249 (1963)
52. FRENE, J. Thèse d'Etat  
Lyon (1974)
53. DIPRIMA, R. C. A. S. L. E. Trans.  
7, 333 (1964)
54. RITCHIE, G. S. Jour. Fluid Mech.  
32, 131 (1968)
55. YOUNES, M. A., MOBBS, F. R., CONEY, J. E. Instn. Mech. Eng.  
Tribology Convention  
c 76/72, 14 (1972)
56. VERSTEEGEN, P. L., JANKOWSKI, D. F. Phys. Fluids  
12, 1138 (1969)

66. KRUEGER, E. R., GROSS, A., DIPRIMA, R. C.      Jour. Fluid Mech.  
24, 521 (1966)
67. BLENNERHASSETT, P. J., HALL, P.      Proc. Roy. Soc.  
A 365, 191 (1979)
68. STUART, J. T.      Jour. Fluid Mech.  
9, 353 (1960)
69. WATSON, J.      Jour. Fluid Mech.  
9, 371 (1960)
70. DAVEY, A.      Jour. Fluid Mech.  
14, 336 (1962)
71. DAVEY, A., DIPRIMA, R. C., STUART, J. T.      Jour. Fluid Mech.  
31, 17 (1968)
72. SWINNEY, H. L., GOLLUB, J. P.      "Hydrodynamic instabilities and  
the transition to turbulence"  
Springer Verlag Berlin (1981)
73. EAGLES, P. M.      Jour. Fluid Mech.  
49, 529 (1971)
74. EAGLES, P. M.      Jour. Fluid Mech.  
62, 1 (1974)
75. BILGEN, E., BOULOS, R.      Trans. A.S.M.E.      Jour. Fluid Eng.  
95, 122 (1973)

76. NEITZEL, G.P.      Jour. Fluid Mech.  
141, 51 (1984)
77. DIPRIMA, R.C., ROGERS, E.H.      Phys. Fluids Supp.  
11, 155 (1969)
78. KIRCHGASSNER, K., SORGER, P.      Quart. Jour. Mech. and Appl.  
Math.  
22, 183 (1969)
79. VELTE, W.      Arch. Rat. Mech. Anal.  
22, 1 (1966)
80. GUIRAUD, J.P., IOSS, G.      C.R. Acad. Sci.  
266 A, 1283 (1968)
81. IOSS, G.      Jour. Méca.  
8, 477 (1969)
82. IOSS, G.      Arch. Rat. Anal.  
40, 166 (1971)
83. BENJAMIN, T.B.      Proc. Roy. Sci.  
A 359, part I, 1 (1978)
84. BENJAMIN, T.B.      Proc. Roy. Sci.  
A 359, part II, 27 (1978)
85. MARSDEN, J.      Turbulence Seminar  
Springer Verlag Berlin (1977)

86. Mc Laughlin et MARTIN,P.C.      Phys. Rev.  
A 12, 186 (1975)
87. LANDFORD,O.E.      Turbulence Seminar  
Springer Verlag Berlin (1977)
88. RUELLE,D.      Act. Phys. Aust.  
Springer Verlag (1976)
89. JOSEPH,D.D.      Stability of fluid Motions I  
Springer Tracts in Natural Philosophy - Vol.27  
Berlin (1976)
90. JOSEPH,D.D.      Stability of fluid Motions II  
Springer Tracts in Natural Philosophy - Vol.28  
Berlin (1976)
91. COLE,J.      Trans. A.S.M.E.      Jour. Fluids Eng.  
96, 69 (1974)
92. TAYLOR,G.I.      Proc. Roy. Soc.  
A 157, 546 (1936)
93. DONNELLY,R.J.      Proc. Roy. Soc.  
A 246, 312 (1958)
94. DONNELLY,R.J.,SIMON,N.J.      Jour. Fluid Mech.  
7, 401 (1959)



95. DONNELLY, R.J. Proc. Roy. Soc.  
A 283, 509 (1965)
96. DONNELLY, R.J., SCHWARZ, K.W. Proc. Roy. Soc.  
A 283, 83, 531 (1965)
97. SNYDER, H.A., LAMBERT, R.B. Jour. Fluid Mech.  
26, 545 (1966)
98. HOCQUART, R., DECRUPPE, J.P., NSOM EYENGA, B., CRESSELY, R.  
"Synopsis of the 5<sup>th</sup> Taylor Vortex Working Party"  
Phoenix, U.S.A. (1987)
99. HERMANS, J.J. "Flow Properties of Disperse Systems"  
Ed. T.B. DREW and J.W. HOOPEs, Academic Press  
London (1966)
100. HOCQUART, R., CRESSELY, R., DECRUPPE, J.P., NSOM EYENGA, B.  
Colloque de la R.C.P. "Rhéologie des solutions de  
polymères utilisés en récupération assistée du pétrole"  
Sainte Croix aux Mines, France (1985)
101. HOCQUART, R. Thèse d'Etat  
Metz (1982)
102. SHAW, R.S., ANDERECK, C.D., REITH, L.A., SWINNEY, H.L. Phys.  
Rev. Lett.  
48, 1172 (1981)

103. LORENZEN, A., PFISTER, G., MULLIN, T.      Phys. Fluids  
26, 10 (1983)
104. COGNET, G.      Jour. Meca.  
10, 65 (1971)
105. COGNET, G., BOUABDALLAH, A., AIDER, A.      "Stability in the  
Mechanics of continua"  
Ed. F.H. Schroeder , Springer Verlag , Berlin (1982)
106. BOUABDALLAH, A.      Thèse d'Etat  
Nancy (1980)
107. GUESBAOUI, H.      Thèse 3<sup>ème</sup> cycle  
Nancy (1978)
108. JEFFREY, D. J., ACRIVOS, A.      A. I. Ch. E. Jour.  
22, 417 (1976)
109. COLEMAN, B. D., MARKOVITZ, H., NOLL, W.      "Viscosimetric flows  
of non-newtonian fluids".  
Ed. Springer Verlag New-York (1966)
110. TRUESDELL, C.      Ann. Rev. Fluid Mech.  
6, 111 (1974)
111. COLEMAN, B. D., NOLL, W.      Phys. Fluids  
5, 840 (1962)

112. STEVENSON, J. F., CHUNG, S. C. K., JENKINS, J. T.      Trans . Soc.  
Rheol.  
19, 397 (1975)
113. CRESSELY, R.      Thèse d'Etat  
Metz (1982)
114. VAND, V.      Nature  
155, 364 (1945)
115. THOMAS, D. G.      Jour. Colloid Sci.  
20, 267 (1965)
116. GERMAIN      "Cours de Mécanique des milieux continus"  
Tome I, Masson et Cie Paris (1973)
117. NOLL, W.      Arch. Rat. Mech. An.  
2, 197 (1958)
118. BIRD, R. B.      Ann. Rev. Fluid Mech.  
8, 13 (1976)
119. TRUESDELL, C.      "Introduction à la Mécanique rationnelle  
des milieux continus"  
Masson (1974)
120. ABDELWAHED, L.      Thèse d'Etat  
Strasbourg (1983)

121. LOCKETT, F. J., RIVLIN, R. S.      Jour. Méca.  
7, 475 (1968)
122. SMITH, M. M., RIVLIN, R. S.      Jour. Méca.  
11, 69 (1972)
123. COLEMAN, B. D., NOLL, W.      Ann. N.Y. Acad. Sci.  
89, 672 (1961)
124. GINN, R. F., DENN, M. M.      A. I. Ch. Jour.  
15, 450 (1969)
125. THOMAS, R. H., WALTERS, K.      Jour. Fluid Mech.  
18, 33 (1964)
126. DATTA, S. D.      Phys. Fluids  
7, 1915 (1964)
127. RAO, P. B. B.      Appl. Sci. Res.  
A 14, 199 (1964)
128. MARON, S. H. MADOW, B. P., KRIEGER, I. M.      Jour. Colloid Sci.  
6, 584 (1951)
129. JORDAN, H., BRASS, P., ROE, C.      Ind. Eng. Chem.  
9, 182 (1937)
130. WINDING, C. C., KRANICH, W. L., BAUMANN, G. P.      Chem. Eng.  
Progr.  
43, 527 (1947)

131. KRIEGER, I.M., MARON, S.H.      Jour. Colloid Sci.  
6,528 (1951)
132. COMOLET, R.      Mécanique expérimentale des fluides Tome 2  
Masson (1976)
133. PEARSON, C.E.      "Handbook of applied Mathematics"  
Ed. Van Nostrand Reinhold Company, New York (1974)
134. APPEL, D.W. et al.      Advanced mechanics of fluids  
Ed. John Wiley and sons, New-York (1959)
135. YIH, C.S.      Archiv. Rat. Mech. Anal.  
47, 218 (1972)
136. YIH, C.S.      Archiv. Rat. Mech. Anal.  
47, 288 (1972)
137. DIPRIMA, R.C. ; HALL, P.      Third Taylor vortex flow working  
party  
5/7 April 1983 Nancy
138. SCHLICHTING, H.      Boundary Layer Theory  
Mc Graw Hill (1968)
139. DRAZIN, P.G. ; REID, W.H.      Hydrodynamic stability  
Cambridge University Press (1981)
140. STUART, J.T.      J. Aero. Sci.  
23, 86 (1956)

141. STUART, J.T.        J. Fluid Mech.  
4, 1 (1958)
142. RÖBERTS, P.H.       Proc. Roy. Soc. Appendix  
A 283, 83, 531 (1965)
143. MEYER, K.        Los Alamos Report LA - 3497  
Los Alamos , U.S.A. (1966)
144. ALZIARY DE ROQUEFORT, T. ; GRILLAUD, G.        Comp. and Fluids  
6, 259 (1978)
145. DIPRIMA, R.C.       Phys. Fluids  
4, 751 (1961)
146. ERDELYI, M. ; OBERHETTINGER, J.       Higher transcendental  
functions . Vol.1 (1953)
147. ERDELYI, M. ; OBERHETTINGER, J.       Higher transcendental  
functions . Vol.3 (1953)
148. ABRAMOVITZ, M., SEGUIN, I.A.       "Handbook of Mathematical  
functions"  
Dover Publications New-York (1968)
149. NSOM EYENGA, B. ; HOCQUART, R. ; CRESSELY, R. ; DECRUPPE, J.P. ;  
Synopsis of the 5th Taylor vortex flow working party  
25-27 March Phoenix - U.S.A. (1987)

150. GREENSPAN, H.P. "The theory of rotating fluids"  
Cambridge University Press (1969)
151. GREENSTEIN, T., HAPPEL, J. Jour. Fluid Mech.  
34, 705 (1968)
152. NSOM EYENGA, B. Thèse de 3ème cycle  
Toulouse (1981)
153. VAND, V. J. Phys. Colloid Chem.  
52, 277 (1948)
154. FORTIER A. "Mécanique des suspensions"  
Masson (1967)
155. HAPPEL, J., BRENNER, H. "Low Reynolds number hydrodynamics".  
Edition Prentice-Hall, Inc. (1965)
156. VAND, V. J. Phys. Colloid Chem.  
52, 300 (1948)
157. VAND, V. J. Phys Colloid Chem.  
52, 314 (1948)
158. MASLOV, V.P. "Théorie des perturbations et méthodes  
asymptotiques".  
Dunod, Gauthier-Villars (1972)

159. SAITO, N. J., J. Phys. Soc.  
5, 4 (1950)
160. BICKLEY, W. G. Phil. Mag.  
25, 746 (1938)
161. COLLINS, W. D. Mathematika  
2, 42 (1955)
162. FLUGGE, S., TRUESDELL, C. "Fluid Dynamics II"  
Springer Verlag (1963)
163. KANWALL, R. P. Linear integral equations . Theory and  
technique .  
Academic Press, New-York (1971)
164. LAMB, H. "Hydrodynamics"  
6<sup>th</sup> ed. Dover Publications, New-York (1932)
165. LIN, C. J., PEERY, J. H., SCHOWALTER, W. R. Jour. Fluid Mech.  
44, 1 (1970)
166. BRENNER, H. Chem. Eng. Sci.  
19, 519 (1964)
167. HOBSON, E. W. "The theory of spherical and ellipsoidal  
harmonics"  
Cambridge University Pr. (1931)



168. ROBIN, L. "Fonctions sphériques de Legendre et fonctions sphéroidales"  
Gauthier-Villars (1957)
169. ANGOT, A. Compléments de Mathématiques à l'usage des ingénieurs de l'électrotechnique et des télécommunications"  
Editions de la Revue d'Optique, Paris (1961)
170. HOCHSTADT, H. "Les fonctions de la Physique mathématique"  
Masson (1973)
171. FRISCH, H. L., SIMHA, R. "Rheology" Vol. 1  
Academic Press, New-York (1956)
172. RUTGERS, I. R. Rheol. Acta.  
2, 202 (1962)
173. BIRD, R. B., STEWART, W. E., LIGHTFOOT, E. N. "Transport phenomena"  
Ed. Wiley, New-York (1960)
174. BURGERS, J. M. "Second report on viscosity and plasticity"  
p. 128  
N. V. Noord-Holl. Uitg., Amsterdam (1938)
175. FRANKEL, N. A., ACRIVOS, A. Chem. Eng. Sci.  
22, 847 (1967)

176. CHONG, J. S., CHRISTIANSEN, E. B., BAER, A. D.      Jour. Appl. Pol.  
Sci.  
15; 2007 (1971)
177. MARON, S. H., LEVY-PASCAL, A. E.  
10, 494 (1955)
178. MARON, S. H., PIERCE, P. E.      Jour. Colloid Sci  
11, 80 (1956)
179. EILERS, H.      Kolloid Z.  
102, 154 (1943)
180. HARBARD, E. H.      Chem. Ind.  
22, 491 (1956)
181. ARRHENIUS, S.      Z. Phys. Chem.  
1, 285 (1887)
182. MOONEY, M.      Jour. Colloid Sci.  
6, 162 (1951)
183. KIRKWOOD, J. G., PLOCK, R. J.      Jour. Chem. Phys.  
24, 665 (1956)
184. BUECHE, F.      Jour. Chem. Phys.  
20, 1959 (1952)

185. BUECHE, F. Jour. Chem. Phys.  
22, 603 (1954)
186. BUECHE, F. Jour. Chem. Phys.  
22, 1570 (1954)
187. KRIEGER, I.M., DOUGHERTY, T.J. Trans. Soc. Rheol.  
III, 137 (1959)
188. METZNER, A.B., WHITLOCK, M. Trans. Soc. Rheol.  
11, 239 (1958)
189. BARTHES-BIESEL, D., ACRIVOS, A. Int. J. Multiphase Flow  
1, 1 (1973)
190. HOFFMAN, R.L. Trans. Soc. Rheol.  
16, 155 (1972)
191. ERICKSEN, J.L. Kolloid Z.  
173, 117 (1960)
192. ALLEN, S.J., DE SILVA, C.N., KLINE, K.A. Phys. Fluids  
10, 2551 (1967)
193. DAHLER, J.S., SCRIVEN, L.E. Proc. Roy. Soc.  
A 275, 504 (1963)
194. ALLEN, S.J., DE SILVA, C.N. Jour. Fluid Mech.  
24, 801 (1966)

195. CONDIFF, D.W., DAHLER, J.S.      Phys. Fluids  
7, 842 (1964)
196. HAYES, J.W., HUTTON, J.F.      Prog. Heat Transf.  
5, 195 (1970)
197. DENN, M.M., ROISMAN, J.J.      AICHE Jour.  
15, 454 (1969)