



**HAL**  
open science

# Propriétés topologiques des ensembles accessibles en temps exact

Donatien Tondele

► **To cite this version:**

Donatien Tondele. Propriétés topologiques des ensembles accessibles en temps exact. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paul Verlaine - Metz, 1987. Français. NNT : 1987METZ012S . tel-01775726

**HAL Id: tel-01775726**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01775726v1>**

Submitted on 24 Apr 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

**T H È S E**

présentée à

**L'UNIVERSITÉ DE METZ**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR EN MATHÉMATIQUES**

mention : Mathématiques



par

**Donatien T O N D E L E**

-----

**PROPRIETES TOPOLOGIQUES DES ENSEMBLES  
ACCESSIBLES EN TEMPS EXACT.**

soutenue devant la commission d'Examen :

- . Gauthier SALLET
- . André ROUX
- . Didier ARNAL
- . PHILIPPE ADDA

1986-1987

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv.	19870245
Cote	S/M3 87/12
Loc	Magasin

A mes parents

A mon épouse H. N' DOUDI

A mes enfants

et à mes amis

"Combien tout ce qu'on dit est loin de ce qu'on pense  
Que la bouche et le coeur sont peu d'intelligence"

RACINE, Britannicus, Acte V, Scène I

"Les équations différentielles sont le pivot de la  
conception scientifique du Monde".

(V.I. ARNOLD)

. La théorie du contrôle géométrique introduite à METZ par Monsieur REEB, est une théorie qui a atteint le niveau de perfectionnement de l'Algèbre ou de la Topologie. Monsieur le Professeur G. SALLET m'a proposé de travailler dans ce domaine, il a dirigé et animé ce travail. Son enseignement a été de grande envergure, ses conseils et sa sympathie m'ont beaucoup aidé à l'élaboration de cette thèse. C'est à lui que je dois ma formation de mathématicien. Je l'en remercie très vivement.

. J'exprime toute ma gratitude à Monsieur le Professeur D. ARNAL ainsi qu'à Monsieur le Professeur A. ROUX qui m'ont fait l'honneur de participer à ce Jury.

. Je voudrais témoigner ma profonde reconnaissance à mon père qui, dans sa qualité d'instituteur à l'époque, avait travaillé mon cerveau, en m'imprégnant raisonnablement le calcul arithmétique du cours moyens. Que cette thèse soit sa plus grande récompense.

. Monsieur le Professeur SEKOU TRAORE, algébriste à l'UNIVERSITE MARIEN NGOUABI m'avait incité, pendant nos discussions, à poursuivre mes recherches en Mathématiques. Il m'avait offert son amour qu'il porte en Mathématique. C'est un grand plaisir pour moi de le remercier.

. C'est avec plaisir que je remercie le Département de Mathématique de METZ et à tous ses membres, qui m'ont permis de préparer ce travail dans d'excellentes conditions.

. Enfin je remercie Madame F.WUNSCH qui a dactylographié et mis en page ce texte avec compétence, Monsieur Jean-Luc COYARD du service reprographie qui a assuré le tirage.

TABLE DES MATIERES

	Page
<u>CHAPITRE 0</u> <u>Introduction</u>	1
<u>CHAPITRE I</u> <u>Préliminaire</u>	5
<u>CHAPITRE II</u> Familles de champs de Vecteurs Autoinvariantes et variétés de <u>controlabilité en temps exact</u>	11
II.1 Topologie $G_0$ -orbite d'une famille autoinvariante	14
II.2 Quand est-ce que une famille F est fort auto- invariante ?	23
III.3 Conditions pour que $A(x,T)$ soit d'intérieur non vide	
<u>CHAPITRE III</u> <u>Structure Topologique de l'ensemble</u> <u>d'Accessibilité <math>A(x,T)</math> de certaines</u> <u>familles</u>	33
III.1 Préliminaires	33
III.2 Structure Topologique de $A(x,T)$ des familles fort auto-invariantes : Application à l'équivalence forte des familles	37
<u>CONCLUSION</u>	55
<u>BIBLIOGRAPHIE</u>	56

0 - INTRODUCTION

Nous nous intéressons à certaines propriétés topologiques des ensembles d'accessibilité d'une famille de champs  $C^\infty$  de vecteurs, en abrégé F.C.V., sur une variété  $M$ ,  $C^\infty$  métrisable et connexe.

Soit  $X$  un champ de vecteurs et  $X_t$  le groupe local à un paramètre défini par  $X$ . On appelle trajectoire de  $X$  passant par le point  $x_0 \in M$ , la courbe intégrale  $t \longrightarrow X_t(x_0)$ .

On considère  $F = \{X^1, X^2, \dots, X^i, \dots\}$  une F.C.V.. Soient  $x$  et  $y$  deux points de  $M$ , on dit que  $y$  est accessible depuis  $x$  en un temps  $t > 0$  si l'on atteint  $y$  à partir de  $x$  en empruntant les trajectoires des champs de  $F$  dans le sens des temps positifs dont la somme est égale à  $t$ . L'ensemble des tels points est noté  $A(x,t)$  et l'ensemble  $A(x) = \cup A(x,t)$  est l'ensemble d'accessibilité depuis  $x$  (avec  $t \geq 0$ ).

Notre étude concerne les ensembles  $A(x,t)$ , plus précisément on s'intéresse à la propriété:

$$(1) \quad \text{Int } \overline{A(x,t)} = \text{Int } A(x,t)$$

où  $\text{Int}(A)$  désigne l'intérieur d'un ensemble  $A$ ,  $\overline{A}$  la fermeture de  $A$ .

Cette propriété est fautive en général. Considérons par exemple dans  $R^2$  la famille

$$\left\{ R^+ \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad R \psi(x_1) \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad R \sin x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right\}$$

où les champs sont exprimés en coordonnées locales  $x=(x_1, x_2)$  et  $\psi$  une fonction  $C^\infty$  s'annulant pour les valeurs négatives de la variable et strictement positif autrement. Alors il est bien connu (G. SALLET [257]) que

$A(0,t) = R^2 - \{ (x_1, k\pi) / x_1 < 0, k \in \mathbb{Z} \}$  et la propriété (1) est fautive. La famille considérée est  $C^\infty$ , l'algèbre de Lie engendrée par cette famille, évaluée en un point de  $R^2$ , a pour dimension 1 ou 2. Si  $x_1 \leq 0$  la dimension est 1, et 2 si  $x_1 > 0$ . L'ensemble des points accessibles par la famille, et de la famille opposée est  $R^2$  et l'espace tangent n'est pas toujours donné par l'algèbre de Lie de la famille.

Ce qui nous amène à considérer dans la suite, une importante classe de famille, notamment les familles auto-variantes [chapitre 1\_] comprenant entre autres les familles analytiques.

En fait ce travail montre qu'on a l'égalité (1) pour les familles  $F$  pour lesquelles la famille notée  $\hat{F} = \{(X,1)/(X,1) (x,t) = (X(x),1) \text{ et } X \in F\}$  définie sur la variété  $M \times \mathbb{R}$ , est auto-invariante (ce qui n'est pas le cas de l'exemple) et  $F$  est constituée des champs de vecteurs complets. On donnera un contre exemple si les champs ne sont pas complets.

Ces récentes années, une grande attention a été portée sur les ensembles  $A(x,t)$ , leur description a été développée dans plusieurs articles. Par exemple l'Accessibilité forte (c'est-à-dire  $\text{Int } A(x,t) \neq \emptyset$ ) est étudiée dans SUSSMANN-JURDJEVIC [16\_] et [10\_], la complète contrôlabilité (c'est-à-dire  $A(x,t)=M$ ) est étudiée dans [13\_] et [4\_].

Il est montré (G. SALLET [18\_]) que l'intérieur de la fermeture des ensembles  $A(x)$  est contenu dans cet ensemble, pour les familles auto-invariantes (non nécessairement complets). Ensuite certaines familles vérifient  $A(x,t)=A(x)$  comme exemple considérons le cas linéaire dans  $\mathbb{R}^n$  la famille

$$\{ X^u \mid X^u(x) = Ax + Bu \}$$

où  $A, B$  sont des matrices de dimensions  $n \times n$ ,  $n \times m$  respectivement et  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  les  $u_i$  sont des fonctions continues définies sur des intervalles de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans un sous ensemble  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^m$ . Si  $\Omega = \mathbb{R}^m$ ,  $A(o) = A(o) = A(o,T)$  pour tout  $T > 0$  (voir RHODES [27\_], BROCHETT [15\_], LEE-MARKUS [6\_]).

Il est donc naturel par analogie aux ensembles  $A(x)$  de faire notre Etude, malheureusement la démonstration des  $A(x)$  ne peut se recopier pour prouver l'égalité (1), celle-ci n'étant pas toujours vraie quand les champs de vecteurs ne sont pas supposés complets.

Suivant KUNITA [7\_], la fermeture de  $A(x,t)$  est le support de la probabilité de transition, partant de l'état  $x$  d'un processus de diffusion.

Le processus est régi par une équation différentielle stochastique dont la donnée est équivalente à la donnée de la famille qui engendre les  $A(x,t)$ . Enfin KUNITA énonce dans cet article que (1) est réalisée si la famille considérée est une famille auto-invariante, complète. Malheureusement sa démonstration est prétendue identique à celle des  $A(x)$ , ce qui n'est manifestement pas vraie.

Ainsi, l'objet de ce travail est l'exposé d'une démonstration de (1) qui est une propriété extrêmement importante dans l'étude qualitative des ensembles en temps exact.

Une autre motivation de notre Etude est de montrer que les techniques d'extension et la notion d'équivalence obtenue par G. SALLET [18] sont aussi adaptées aux ensembles  $A(x,t)$ . On dit que deux familles de champs de vecteurs sont fortement équivalentes si elles sont équivalentes au sens de V. JURDJEVIC et I. KUPKA (voir aussi [11]) et si pour tout point, les fermetures des ensembles d'accessibilité au même temps exact sont identiques. Ce travail permettra d'établir que la fermeture, la frontière et l'intérieur des ensembles d'accessibilité en temps exact sont les mêmes pour les familles fortement équivalentes, vérifiant (1).

Pour prouver (1), notre démarche est la suivante. Etant donné une F.C.V., nous construisons un groupe de difféomorphismes de  $M$ . Ce groupe induit une action naturelle sur  $M$ . Il est montré que les orbites de cette action, notées  $G_0(F).x, x \in M$ , sont en fait des sous variétés connexes de  $M$  et que  $A(x,t) \subset G_0(F).y$  pour tout point  $y \in A(x,t)$ , en particulier  $A(x,t) \subset G_0(F).X_t(x), X \in F$ . L'inclusion est minimale, dans ce sens que  $A(x,t)$  est d'intérieur non vide relativement à la topologie de  $G_0(F).y$ . Il y a deux cas :

i) quand il y a accessibilité forte, alors  $G_0(F).y = M$

ii) quand il n'y a pas accessibilité forte, alors

$G_0(F)$  induit un feuilletage de codimension 1.

Par suite on s'intéresse à la famille  $\hat{F}$  définie sur  $M \times \mathbb{R}$ . En fait  $\hat{F}$  est le prototype des familles caractérisées par la propriété  $x \notin G_0(F).X_t(x)$  pour tout réel  $t \neq 0, X \in F$ . L'intérêt de ces familles est que, d'une part les orbites  $G_0(F).x$  deviennent des feuilles fermées du feuilletage défini par les champs de vecteurs, d'autre part elles vérifient  $A(x) \cap G_0(F).y = A(x,T)$  pour tout  $y$  appartenant à la fermeture de  $A(x,T)$ .

C'est ainsi qu'en exploitant de façon très technique la topologie  $G_0$ -orbite associée à la famille  $\hat{F}$  et grâce à  $A(x,0), \hat{F}$  contient l'intérieur de sa fermeture, on prouve que l'intérieur de la fermeture de  $A(x,0), t, \hat{F}$  est contenu dans cet ensemble. Ce résultat passe immédiatement de  $\hat{F}$  à  $F$  et donne

$$\text{Int } A(x,T) = \text{Int } A(x,T)$$

relativement à la topologie de  $G_0(F)X_T(x)$ .

Le plan de ce travail est comme suit :

Le chapitre I donne des préliminaires, définitions et des rappels de quelques résultats généraux. Familles de champs de vecteurs et leurs orbites. Distributions et variétés intégrales.

Le chapitre II est consacré à l'étude des orbites  $G_0(F).x$  et leur structure différentiable. La structure de  $G_0(F).x$  permettra de situer la topologie avec laquelle nous déduirons astucieusement nos résultats. On essayera de décrire les familles qui vérifient (1), c'est-à-dire familles fort auto-invariantes.

Le chapitre III s'intitule "Structure topologique de  $A(x,t)$ ". Il démontre (1) et propose des applications : Equivalence forte des familles.

## CHAPITRE I

### PRELIMINAIRES

Ce chapitre comporte essentiellement les définitions et quelques résultats classiques qui nous seront utiles dans la suite de notre travail.

#### 1.1. PRESENTATIONS ET NOTATIONS

Le mot variété désignera toujours une variété différentiable de dimension finie, connexe, métrisable, de classe  $C^\infty$  ou analytique.

Si  $M$  est une variété alors le sous ensemble  $N$  de  $M$  est appelé sous variété de  $M$  si  $N$  est une variété et l'injection de  $N$  est une immersion  $C^\infty$ . En particulier tout son ensemble de  $M$  peut être muni d'une structure  $C^\infty$  de variété différentiable.

On désignera par  $V(M)$ , l'ensemble des champs de vecteurs  $C^\infty$  (respectivement analytique),  $C(M)$  les fonctions différentiables (respectivement analytiques) de  $M$  dans l'ensemble  $\mathbb{R}$  des réels.  $V(M)$  est une algèbre de Lie avec le crochet défini par la façon habituelle  $[X, Y] = XY - YX$ ,  $X, Y \in V(M)$ . Le fibré tangent sera noté  $TM$  et l'espace tangent au point  $x$  par  $T_x M$ .

Si  $X$  est un champ de vecteurs,  $X_t(x_0)$ ,  $x_0 \in M$  est par définition, la valeur à l'instant  $t$  de l'unique solution du problème de CAUCHY

$$\frac{dX_t(x_0)}{dt} \Big|_{t=Z} = X(X_Z(x_0)) \quad X_t(x_0) = x_0 \text{ pour } t=0$$

Le champ  $X$  est appelé complet, si l'intervalle maximal de définition de la courbe intégrale  $t \longrightarrow X_t(x_0)$  est  $\mathbb{R}$  tout entier, dans ce cas l'application  $x \longrightarrow X_t(x)$  est un difféomorphisme de  $M$  dans  $M$ . Dorénavant, on ne considérera que de tels champs.

Une famille de champs de vecteurs est appelée aussi système ou polysystème selon le contexte. Soit  $F$  une F.C.V. si  $X \in F$ , on note  $X(x)$  le vecteur tangent de  $T_x M$  et par  $F(x)$  l'ensemble des  $X(x)$  lorsque  $X$  parcourt  $F$ .

A toute F.C.V.  $F$ , on associe le groupe de difféomorphismes noté  $G(F)$  constitué des éléments de la forme

$$g = X_{t_1}^1 \circ \dots \circ X_{t_p}^p$$

avec  $X^1, X^2, \dots, X^p$  appartenant dans  $F$  et  $t_1, \dots, t_p$  dans  $\mathbb{R}$ . Le groupe  $G(F)$  opère sur  $M$  de façon naturelle  $g.x = X_{t_1}^1 \circ \dots \circ X_{t_p}^p(x)$ . L'orbite du point  $x$  est notée  $G(F).x$ . Il est bien connu (SUSSMANN [1]) que  $G(F).x$  est une variété différentiable connexe, séparée stricte (MOLINO [24]) de  $M$ . Le fait que la sous-variété soit stricte implique l'unicité de la structure différentiable qui fait de l'orbite une variété immergée.

Le semi-groupe engendré par les difféomorphismes  $\{X_t(.) \mid t \geq 0, X \in F\}$  sera noté  $S(F)$ . L'orbite de  $x$  par  $S(F)$  est l'ensemble d'accessibilité à partir de  $x$ . Donc on a

$$A(x) = S(F).x = \{X_{t_1}^1 \circ \dots \circ X_{t_p}^p(x), t_i \geq 0, X^i \in F\}$$

et l'orbite positive en un temps  $T > 0$  est l'ensemble  $A(x, T, F)$  on a

$$A(x, T, F) = \{X_{t_1}^1 \circ \dots \circ X_{t_p}^p(x), t_i \geq 0, \sum t_i = T, X^i \in F\}$$

on dit que  $F$  a la propriété d'accessibilité forte si  $A(x, T)$  est d'intérieur non vide.

Soit  $X \in V(M)$ ,  $\varphi$  un difféomorphisme de  $M$ . La différentielle  $\varphi_*$  est une application linéaire de  $T_x M$  dans  $T_{\varphi(x)} M$  telle que

$$(\varphi_* X)(\varphi(x)) = \varphi_{*, \varphi^{-1}(x)} X(\varphi^{-1}(x)) \text{ et } (\varphi_* X)_t(\varphi(x)) = \varphi_* X_t \circ \varphi^{-1}(x), x \in M$$

$X_t$  représente le groupe à un paramètre de  $X$ . On a

$$\frac{d \varphi_* X_t(x)}{dt} = \varphi_* X(\varphi_* X_t(x))$$

$$\frac{d(X_t)_* Y}{dt} = (X_t)_* [X, Y], Y \in V(M)$$

la dernière égalité montre l'interprétation géométrique du crochet de Lie.

A la famille  $F$ , on associe le  $C(M)$ -sous module engendré par  $F$ . On le notera  $M_F$ . Si  $g$  est un difféomorphisme de  $G(F)$ , dire que  $M_F$  est invariante par  $g$  si on a  $g_*(M_F(x)) = M_F(gx)$ . Dire que  $M_F$  est  $G(F)$ -invariant si il est invariant pour tout difféomorphisme  $g$  de  $G(F)$ .

En général une F.C.V.  $F$  n'est pas  $G(F)$ -invariante, c'est pourquoi nous introduirons le sous module noté  $\Delta_F$  engendré par

l'ensemble  $\{g_* X, g \in G(F), X \in F\}$

$\Delta_F$  est le plus petit sous module de  $V(M), G(\Delta_F)$ -invariant donc  $G(F)$ -invariant, qui contienne  $F$ . On sait d'après SUSSMANN [1] que l'espace tangent en un point  $y$  de la variété  $G(F)_x$  est  $\Delta_F(y)$ .

On appelle dimension de la famille  $F$  au point  $x$ , la dimension de l'espace vectoriel engendré dans  $T_x M$  par les valeurs en  $x$  des champs de  $\Delta_F$ . Cette dimension est la dimension de la variété orbite  $G(F)x$ . On la note  $\dim \Delta_F(x)$  ou  $\dim G(F)x$ .

On désigne par  $\text{Lie}(F)$ , l'algèbre de Lie engendré par  $F$ , c'est la plus petite sous algèbre stable par le crochet de Lie et contenant  $F$ . Pour tout  $x \in M$ ,  $\text{Lie}(F)(x) \subset T_x M$ . L'étude de  $\text{Lie}(F)$  a beaucoup d'importance pour l'étude de la F.C.V.  $F$ . On appelle rang de  $F$  au point  $x$  noté  $\text{rg}(F)x$  la dimension de l'espace vectoriel engendré par  $\text{Lie}(F)(x)$ . En général  $\text{rg}(F)x \leq \dim G(F)(x)$ . On dit que la famille  $F$  vérifie la condition du rang en  $x$  si  $\text{Lie}(F)(x) = T_x M$ .

Une famille de champs de vecteurs  $F$  est auto-invariante si le plan tangent en un point de l'orbite est donné par l'évaluation de  $\text{Lie}(F)$  en ce point. Une telle famille se caractérise par

$$\Delta_F = \text{Lie}(F), \text{ c'est-à-dire } \forall X, Y \in F, x \in M \text{ on a } (X_t)_* Y(x) \in \text{Lie}(F)(x)$$

Autrement dit pour les familles auto-invariantes, la condition du rang est vérifiée en tout point de l'orbite  $G(F)x$ . Cette propriété assure une symétrie de comportement entre la famille  $F$  et  $-F$

Il est bien connu [16-3] ou [8-12] qu'une famille  $F$  est auto-invariante si elle appartient à l'une des classes suivantes :

- $F$  est analytique
- $\text{Lie}(F)$  est de rang constant
- $\text{Lie}(F)$  a un nombre fini de générateurs

1.2. THEOREME (G. SALLET [18], CHOW [14,10])

Soit  $F$  une F.C.V. auto-invariante sur une variété  $M$  de dimension  $n$ .  $S(F).x$  est d'intérieur non vide dans  $G(F).x$ , donc en particulier dans la topologie de  $M$  si et seulement si  $\text{rg}(F).x$  est égale à  $n$ .

Une distribution sur une variété  $M$  est une application  $\Delta$  qui à tout point  $x$  de  $M$  associe un sous espace linéaire  $\Delta(x)$  de l'espace tangent  $T_x M$ . On dit que la distribution  $\Delta$  a la propriété de variété intégrale (respectivement maximale) si en tout point  $M$ , il passe une variété intégrale (respectivement maximale). Une variété intégrale de  $\Delta$  est une sous variété  $N$  de  $M$  telle que pour tout  $x \in N$  l'espace tangent  $T_x N$  est exactement  $\Delta(x)$ . En particulier  $N$  est une variété intégrale maximale si  $N$  est connexe et toute variété intégrale connexe d'intersection non vide avec  $N$ , est une sous variété ouverte de  $N$ . Les variétés intégrales maximales de  $\Delta$  forment une partition de  $M$ , appelée feuilletage de  $M$  défini par  $\Delta$ . Elles sont également appelées feuilles de ce feuilletage.

1.3. THEOREME (SUSSMANN [1], LOBRY [12])

Le sous module  $\Delta_F$  est une distribution, elle a la propriété de variété intégrale maximale et les variétés intégrales maximales sont les orbites  $G(F).x$ .

Ensuite si  $\Delta$  est une distribution engendrée par une famille  $F$ , alors  $\Delta$  a la propriété de variété intégrale maximale si et seulement si  $\Delta = \Delta_F$ .

1.4. THEOREME

Une famille  $F$  a la propriété de variété intégrale si et seulement si le sous module  $M_F$  est une algèbre de Lie  $G(F)$ -invariante.

On définit sur la variété  $M \times R$ , la famille  $\hat{F}$  qui est constituée des champs  $\hat{X}$  de la forme  $\hat{X} = (X, 1)$ , c'est-à-dire la valeur de  $(X, 1)$  dans l'espace tangent  $T_{(x,t)} M \times R \simeq T_x M \times R$  est  $(X, 1)(x, t) = (X(x), 1)$  pour tout  $(x, t) \in M \times R$ . Il est clair que le champs  $\hat{X}$  est complet si  $X$  l'est. L'ensemble d'accessibilité  $S(\hat{F}) \cdot (x, 0)$  du point  $(x, 0)$  est très clairement

$$S(\hat{F})(x, 0) = \{ (X_{t_1}^1 \dots X_{t_p}^p(x), t_1 + t_2 + \dots + t_p) ; X^i \in F, t_i \geq 0 \}$$

donc on a

$$A(x, T) \times \{T\} = S(\hat{F}) \cdot (x, 0) \cap M \times \{T\}$$

Si on considère la distribution  $\Delta_{\hat{F}}$  définie par  $\hat{F}$ , il est bien connu [KALOUPSIDIS] que l'ensemble  $\{(g_* X, 1) ; g \in G(F), X \in F\}$  engendre  $\Delta_{\hat{F}}$ .

---

CHAPITRE II

FAMILLES DE CHAMPS DE VECTEURS AUTO-INVARIANTES  
ET VARIETES DE CONTROLABILITE EN TEMPS EXACT.

Soit  $F$  une F.C.V., on s'intéresse à l'ensemble d'accessibilité  $A(x,T) = \{ X_{t_1}^1 \dots X_{t_p}^p(x), t_1 + \dots + t_p = T, t_i \geq 0, 0, X^i \in F \}$ , à son intérieur et sa fermeture.

L'astuce de base est d'introduire la famille  $\hat{F}$  définie sur  $M \times R$  et d'exploiter l'égalité

$$(*) \quad A(x,T) \times \{T\} = S(\hat{F})(x,0) \cap M \times \{T\}$$

pour déduire la structure topologique de  $A(x,T)$  à partir de celle de l'ensemble d'accessibilité  $S(\hat{F})(x,0)$  qui est connue [G. SALLET (18), LOBRY (3)].

Quand on étudie les ensembles  $A(x) = S(F).x$  pour une famille  $F$  quelconque, que les champs soient complets ou non, cela n'a pas d'importance. En effet si on écrit  $F = \{X_i\}_{i \in I}$  alors [GODBILLON :

géométrie différentielle] pour tout champ  $X^i$ , il existe une fonction  $f_i \in C^\infty$  strictement positive telle que le champ  $(f_i X^i)$  soit complet. Donc la famille  $F' = \{f_i X^i\}_{i \in I}$  est une famille de champs de vecteurs

complets et pour tout  $x \in M$

$$S(F).x = S(F').x$$

Mais pour l'Etude de  $A(x,T)$  on ne peut remplacer un champ  $X$  par  $f.X$ , d'où la difficulté. Nous sommes donc amenés à considérer, dans notre travail, des champs complets. Si les champs ne sont pas supposés complets, (1) peut être fausse (exemple 3.1.2. chapitre III).

La première étape consiste à trouver une variété contenant  $A(x,0)$ ,  $T, \hat{F}$  ) =  $A(x,T) \times \{T\}$ , puis une autre variété contenant  $A(x,T)$ . On regarde ensuite les distributions  $\Delta_{\hat{F}}$ , respectivement  $\Delta_F$  et leurs variétés intégrales  $G(\hat{F})(x,0)$ , respectivement,  $G(F).x$ .

KALOUPSODIS [9], introduit la distribution  $\Delta_F^0$  engendrée par l'ensemble  $\{g_*X-h_*Y ; g,h \in G(F), X, Y \in F\}$  c'est-à-dire pour tout point  $x$  de  $M$

$$\Delta_F^0(x) = \left\{ \sum \lambda_i Z^i(x) ; Z^i = g_*X^i, X^i \in F, \sum \lambda_i = 0 \right\}$$

Il est établi dans cet article que les orbites  $G_0(F).x$  (paragraphe 2.1) sont des variétés intégrales maximales de  $\Delta_F^0$  et que  $A(x,T) \subset G_0(F).y$  si  $y$  appartient à  $A(x,T)$ . Naturellement l'espace vectoriel  $\Delta_F^0(x)$  est de codimension 0 ou 1 dans  $\Delta_F(x)$ , ce qui se caractérise par  $\Delta_F(x) = R Z(x) + \Delta_F^0(x)$  quelque soit  $Z = g_*X$  en particulier si  $Z \in F$ .

Soit  $X \in F$ , nous voulons montrer les propriétés

$$\overline{\text{Int}A(x,T)} = \overline{A(x,T)}$$

$$\text{Int}A(x,T) = \text{Int} \overline{A(x,T)}$$

par rapport à la topologie de  $G_0(F)(X_T(x))$ , mais puisque nous avons besoin de la relation (\*), il est clair qu'il faut avant tout examiner l'ensemble d'accessibilité  $S(\hat{F})(x,0)$  de la famille  $\hat{F}$ . Par exemple, on sait d'après [G. SALLET (18) et KUNITA [7]] que l'intérieur de la fermeture de  $S(\hat{F})(x,0)$  est contenu dans cet ensemble si la famille  $\hat{F}$  est auto-invariante. Ceci nous laisse penser à considérer les familles de champs de vecteurs  $F$  telle que  $\hat{F}$  soit auto-invariante. En fait si ce n'était pas le cas on peut avoir

$$\text{Int} A(x,T) = \emptyset \text{ ou } \overline{\text{Int} A(x,T)} \neq \overline{A(x,T)} \text{ dans } G_0(F)(X_T(x)), X \in F$$

un exemple est donné (exemple 2.3.3).

A partir de ce qui suit, nous considérons, sauf mention du contraire, les familles  $F$  des champs des vecteurs complets pour lesquelles la famille  $\hat{F}$  est auto-invariante. Nous les appellerons familles fort auto invariantes en abrégé F.C.V.Â..

Dans ce chapitre, nous allons élucider raisonnablement la structure différentiable des orbites  $G_0(F).x$  (étudiée par KALOUPSIDIS [9] dans le cas des champs  $C^\infty$ ) et de la topologie associée des familles fort auto-invariantes.

Il sera montré qu'une famille fort auto-invariante est nécessairement auto-invariante. On rappelle qu'une famille  $F$  est auto-invariante si l'espace tangent en tout point de  $G(F).x$ ,  $x \in M$ , est donné par l'évaluation de  $\text{Lie}(F)$  en ce point. Autrement dit  $\text{Lie}(F)$  est l'Algèbre de Lie associée à la distribution . Maintenant nous pensons, par analogie aux orbites  $G(F).x$  à l'algèbre de Lie associée à la distribution  $\Delta_F^0$  dont l'évaluation en tout point  $x$  serait l'espace tangent à  $G_0(F).x$  en ce point. C'est pourquoi nous introduisons l'idéal noté  $J(F)$ , qui est l'algèbre de Lie engendrée par les différences des champs de  $F$  et par  $D^1 \text{Lie}(F)$ , l'algèbre dérivée de  $\text{Lie}(F)$ .

Nous verrons dans les paragraphes suivants que l'idéal  $J(F)$  détermine en grande partie le comportement des ensembles  $A(x,T)$ . Suivant SUSSMANN JURDJEVIC [16], KRENER [10], KALOUPSIDIS [9]  $A(x,T)$  est d'intérieur non vide dans  $G_0(F).X_t(x)$ ,  $X \in F$ , si la famille  $F$  est analytique. Notre problème est la classe des systèmes fort auto-invariants. Ainsi, nous montrerons par une méthode différente et assez originale que les familles fort auto-invariantes se comportent comme les analytiques.

2.1. TOPOLOGIE  $G_0$  - ORBITE D'UNE F.C.V.Â.

On considère  $F$  une F.C.V.Â. définie sur une variété  $M$ . Soit  $G_0(F)$  un sous ensemble de  $G(F)$  constitué des éléments de la forme

$$g = X_{t_1}^1 \circ \dots \circ X_{t_p}^p, \quad \sum t_i = 0, \quad t_i \in \mathbb{R}, \quad X_i \in F$$

Il est clair que  $G_0(F)$  est un groupe de difféomorphismes de  $M$ . Puisque les champs de  $F$  sont complets,  $G_0(F)$  est un sous groupe normal de  $G(F)$ .

Le sous groupe  $G_0(F)$  induit une relation d'équivalence sur  $M$ .

Nous notons  $G_0(F)x$ , l'orbite d'un point  $x \in M$ . Clairement  $G_0(F)x \subset G(F)x$ .

Soient  $X^1, \dots, X^p$   $p$  champs appartenant à  $F$ . Posons  $\epsilon = (X^1, \dots, X^p)$ .  
Considérons l'application

$$P_{\epsilon}(x) : \mathbb{R}^{p-1} \longrightarrow M \text{ telle que}$$

$$P_{\epsilon}(x)(t_1, \dots, t_{p-1}) = X_{-T}^p \circ X_{t_{p-1}}^{p-1} \circ \dots \circ X_{t_1}^1(x), \quad T = \sum_{i=1}^{p-1} t_i$$

définie sur un ouvert connexe de  $\mathbb{R}^{p-1}$ . On muni  $G_0(F)x$  de la topologie la plus forte rendant continues les applications  $P_{\epsilon}(x)$  pour tout

$p \in \mathbb{N}$  et  $\epsilon \in F^p$ . Alors  $G_0(F)x$  est connexe puisqu'elle peut s'écrire comme réunion d'ensemble connexes d'intersection non vide, et elle est séparée car la topologie de  $M$ , rend continue les applications  $P_{\epsilon}(x)$ , elle est donc plus fine que la topologie de  $M$  induite sur  $G_0(F)x$ , qui est séparée.

Nous pouvons aussi définir sur  $G_0(F)x$ , une topologie qui soit indépendante, du choix du point  $x$ . A ce propos nous montrons d'abord que l'idéal  $J(F)$  est égale à  $\Delta_F^0$ .

2.1.1. Lemme

L'idéal  $J(F)$  est de codimension 0 ou 1 dans  $\text{Lie}(F)$

Preuve On désigne par  $\langle \overrightarrow{F} \rangle$  l'espace vectoriel engendré par les différences de  $F$ , il est clair que  $J(F) = \langle \overrightarrow{F} \rangle + D^1 \text{Lie}(F)$ . On remarque que si  $S$  est un ensemble de champs vecteurs,  $\text{Lie}(S) = \{S\} + D^1 \text{Lie}(S)$  où  $\{S\}$  est l'espace vectoriel engendré par  $S$ . D'autre part  $RX + \langle \overrightarrow{S} \rangle =$   
e.v.

$\{S\}$  pour tout  $X \in S$ , d'où  $\text{Lie}(S) = RX + J(S)$ . Il est donc clair  
e.v.

que si  $X \in J(F)$  alors  $\text{Lie}(F) = J(F)$  c'est-à-dire  $J(F)$  est de codimension 0 dans  $\text{Lie}(F)$  et si  $X \notin J(F)$ ,  $\text{Lie}(F)$  est la somme directe  $RX \oplus J(F)$  ce qui exprime que  $J(F)$  est de codimension 1. Le lemme est complètement démontré.

Nous constatons que  $J(F)$  est de codimension 1 si  $J(F) \cap F = \emptyset$  et vice versa. Cette condition implique que la famille  $F$  vérifie nécessairement les propriétés suivantes :

.  $RF \cap F = F$ , c'est-à-dire  $\lambda F \cap F = \emptyset, \lambda \neq 1$

. Toute combinaison linéaire de champs de  $F$  dont la somme des coefficients est différente de 1 ne peut appartenir à  $F$

Il en découle que si  $X \in F, \alpha \neq 1$  alors  $J(F \cup \alpha X) = \text{Lie}(F)$ . Soit  $x \in M$ ,  $J(F)x$  est évidemment un sous espace vectoriel de  $\text{Lie}(F)x$  de codimension 0 ou 1. Si  $J(F)$  est de codimension 1, alors la famille  $F$  est telle que  $J(F)$  est de codimension 1 dans  $\text{Lie}(F)$ , mais la réciproque n'est pas vraie en général.

2.1.2. Proposition

Soit  $F$  une F.C.V.Â. Alors on a l'égalité :

$$\Delta^0_F = J(F)$$

Preuve : L'inclusion  $J(F) \subset \Delta^0_F$  (voir aussi KALOUPSIDIS [9]).

Il reste à montrer que  $\Delta^0_F(x) \subset J(F)x$  pour tout  $x \in M$ . Pour cela nous établirons que  $\dim \Delta^0_F(x) \leq \dim J(F)x$ .

Considérons la distribution  $\Delta_{\hat{F}}$  définie par la famille  $\hat{F}$  dans  $M \times \mathbb{R}$ . nous pouvons voir que l'ensemble

$$\{(g_*X, 1), g \in G(F), X \in F\}$$

engendre  $\Delta_{\hat{F}}$ . En effet si  $\hat{g} \in G(\hat{F})$ ,  $\hat{g}$  est de la forme

$$g = (X_{t_1}^1 \circ \dots \circ X_{t_p}^p, h_{t_1} \circ \dots \circ h_{t_p}) = (g, h)$$

où  $X^i \in F$ ,  $t_i \in \mathbb{R}$  et  $h_{t_i}$  sont des translations, c'est-à-dire  $h_{t_i}(x) = x + t_i$ . Par définition (Préliminaires chapitre 1), la distribution  $\Delta_{\hat{F}}$  est engendrée par l'ensemble  $\{\hat{g}_* \hat{X}, g \in G(\hat{F}), X \in F\}$  mais  $\hat{g}_* \hat{X} = (g_* X, 1)$  puisque :

$$\begin{aligned} g_* X(x, t) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{[(g, h) \circ (X, 1)_s \circ (g, h)^{-1}](x, t) - (x, t)}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{[(g, X \circ g^{-1}(x), t+s) - (x, t)]}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{[g \circ X_s \circ g^{-1}(x) - x, 1]}{s} \\ &= (g_* X(x), 1) = (g_* X, 1)(x, t). \end{aligned}$$

Il découle que  $\Delta_{\hat{F}}(x, 0) = \Delta_F(x) \times \{0\}$ . Donc  $\Delta_{\hat{F}}(x, 0) = R(X, 1)(x, 0) \oplus \Delta_F(x) \times \{0\}$ , on en déduit aisément

$$\dim \Delta_{\hat{F}}(x, 0) = \dim \Delta_F(x) + 1$$

Par hypothèse  $\hat{F}$  est auto-invariante, c'est-à-dire  $\Delta_{\hat{F}}(x, 0) = \text{Lie } \hat{F}(x, 0)$ , par suite

$R(X(x), 1) \oplus \Delta_F(x) \times \{0\} = R(X(x), 1) + J(\hat{F})(x, 0)$   
 mais  $J(\hat{F})(x, 0) = J(F) \times \{0\}$ , il apparaît que  $\dim \Delta_F(x) = \dim J(F) \times x$ .

La seule chose qui reste à vérifier est que  $J(\hat{F}) = J(F) \times \{0\}$ .  
Commençons par calculer les crochets, nous avons immédiatement

$$\llbracket (X,1), (Y,1) \rrbracket = (\llbracket X, Y \rrbracket, 0)$$

$$\llbracket (Y,1), (Y,1) \rrbracket = (\llbracket X, Y \rrbracket, 0)$$

$$\llbracket (X,0), (Y,0) \rrbracket = (\llbracket X, Y \rrbracket, 0)$$

Il est clair que  $D^1 \text{Lie}(\hat{F}) = D^1 \text{Lie}(F) \times \{0\}$ . Ensuite les différences  $(X,1) - (Y,1) = (X - Y, 0)$  appartiennent clairement à  $\llbracket \hat{F} \rrbracket \times \{0\}$ .  
D'où  $J(\hat{F}) = J(F) \times \{0\}$ . Ceci achève la démonstration de la proposition.

### 2.1.3. Corollaire

Soit  $F$  une F.C.V.  $\hat{A}$ . Alors la famille  $F$  est auto-invariante.

Preuve : Il faut montrer que  $\Delta_F(x) = \text{Lie}(F)(x)$  pour tout  $x \in M$ .

Cela est à peu près évident. En effet soit d'après  $\llbracket \text{KALOUPSIDIS} \rrbracket$  que l'espace vectoriel  $\Delta_F(x)$  s'écrit  $\Delta_F(x) = R X(x) + \Delta_F^0(x)$  pour tout  $x \in F$ , mais on vient de voir (proposition 2.1.2.)  $\Delta_F^0(x) = J(F)x$ , donc  $\Delta_F(x) = R X(x) + J(F)x = \text{Lie}(F)x$ . C.Q.F.D.

### 2.4.1. Corollaire

Soit  $F$  une F.C.V.  $\hat{A}$ . Alors :

a)  $J(F)$  est auto-invariante, c'est-à-dire  $J(F) = \Delta_{J(F)}$

b)  $G(J(F)) \cdot x = G_0(F)x, x \in M$

#### Preuve

a) l'idéal  $J(F)$  est  $G(F)$ -invariant puisque  $\Delta_F^0$  est  $G(F)$ -invariant (voir  $\llbracket \text{KALOUPSIDIS} \rrbracket$ ). Par hypothèse (grâce au corollaire précédent)  $\text{Lie}(F)$  est auto-invariante. Autrement dit  $\text{Lie}(F)$  est  $G(\text{Lie}(F))$ -invariant, d'où ( $\llbracket \text{NOGANO } 26 \rrbracket$ )  $G(\text{Lie}(F))x = G(F)x$  pour tout  $x \in M$ . Il en découle que  $J(F)$  est  $G(\text{Lie}(F))$ -invariant, en particulier  $J(F)$  est  $G(J(F))$ -invariant, ce qui n'exprime autre chose que l'idéal  $J(F)$  est auto-invariante.

b) Suivant KALOUPSIDIS [9]  $G_0(F)x$  est maximale pour la distribution  $\Delta^0_F$ . On peut donc écrire que  $G(\Delta^0_F)x = G_0(F)x$  (théorème 1.2. voir aussi SUSSMANN [1], LOBRY [12]). On en déduit que  $G(J(F))x = G_0(F)x$  puisque (proposition 2.1.2.)  $\Delta^0_F = J(F)$ .

Maintenant nous rappelons un procédé permettant de définir une structure différentielle sur un sous ensemble de  $E$  de  $\mathbb{R}^n$  ou plus généralement d'une variété différentielle  $M$ .

On appelle paramétrisation locale de  $E$  au point  $x$ , une application

$$\psi_x : \mathbb{R}^p \longrightarrow E$$

différentiable (de  $\mathbb{R}^p$  dans  $M$ ) définie sur un ouvert de  $\mathbb{R}^p$  contenant  $0$  envoyant l'origine sur le point  $x$ . De plus  $\psi_x$  doit être injective et de rang maximum  $p$ .

Pour tout couple  $(x,y)$ ,  $\psi_x^{-1}(J_m \psi_y)$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^p$ . Cette propriété assure la compatibilité des cartes locales.

On munit  $E$  de la topologie  $\mathcal{C}$  induite par la famille d'applications  $\psi_x$ , topologie a priori plus fine que celle induite sur  $E$  par la topologie de  $M$  et on vérifie que l'axiome de séparation est satisfait.

Il découle alors, du théorème du rang que  $p$  est constant sur les composantes connexes et que les applications  $\psi_x^{-1} \circ \psi_y$  sont différentiables.

Alors la famille  $\psi_x$  définit une structure de variété différentiable sur l'espace topologique  $(E, \mathcal{C})$ . Si  $M$  est connexe,  $(E, \mathcal{C})$  est aussi connexe.

### 2.1.5. Théorème

Soit  $F$  une F.C.V.Â. sur  $M$

i) L'orbite  $G_0(F).x$  du point  $x$  admet une unique structure de variété différentielle telle qu'elle soit une sous variété de  $M$  et une variété intégrale maximale de  $J(F)$ .

ii) Si  $G = G(F).x, G_0(F).x$  avec la structure différentielle de i) est une sous variété de  $G$ . Si  $\dim J(F).x = \dim \text{Lie}(F).x$  alors  $G_0(F).x = G$ .

Preuve Nous avons vu que l'idéal  $J(F)$  est de codimension 0 ou 1 dans  $\text{Lie}(F)$ , ainsi que  $J(F).x$  de codimension 1 ou 0. Nous supposons d'abord que  $\dim J(F).x \neq \dim \text{Lie}(F).x = k$ . Comme nous l'avons vu (lemme 2.1.1.),  $\text{Lie}(F).x$  peut s'écrire  $\text{Lie}(F).x = \mathbb{R}X(x) \oplus J(F).x, X \in F$ . Soient  $X^k(x), X^{k-1}(x), \dots, X^1(x)$  une base de  $\text{Lie}(F).x$ , avec  $X^k = X$  et  $X^{k-2}, X^{k-1}$  champs de vecteurs appartenant à  $J(F)$ . Cela étant il existe un voisinage ouvert  $V$  de l'origine de  $\mathbb{R}^{k-1}$  et un voisinage ouvert  $W$  de l'origine de  $\mathbb{R}$  telle que l'application  $\Psi : \mathbb{R}^{k-1} \times \mathbb{R} \rightarrow G(F).x$  définie comme

$$\Psi(t_1, \dots, t_k) = X_{t_k}^k \circ X_{t_{k-1}}^{k-1} \circ \dots \circ X_{t_2}^2 \circ X_{t_1}^1(x)$$

soit un difféomorphisme de  $V \times W$  dans  $\Psi(V \times W)$  un ouvert de  $G(F).x$ .

Clairement les couples  $(\Psi, V \times W)$  définissent une structure différentiable pour laquelle  $G(F).x$  est une variété intégrale maximale de  $\text{Lie}(F) = \Delta_F$ .

Maintenant on définit l'application  $\varphi : \mathbb{R}^{k-1} \rightarrow M$  comme étant la restriction de  $\Psi$  sur l'ensemble  $V \times \{0\}$ , composée avec l'injection de  $G(F).x$  dans  $M$ . L'application  $\varphi$  a les propriétés suivantes :

- 1)  $\varphi(t_1, \dots, t_{k-1}) = X_{t_{k-1}}^{k-1} \circ \dots \circ X_{t_1}^1(x)$  appartient à  $G_0(F).x$
- 2)  $\varphi(0, \dots, 0) = x$
- 3)  $\frac{\partial \varphi}{\partial t_i}(0, \dots, 0) = X^i(x), i=1, \dots, k-1$

L'application  $\varphi$  est de rang  $k-1$  sur  $V$ .

Ces propriétés impliquent que le couple  $(V, \varphi)$  définit une paramétrisation de rang  $k-1$  de  $G_0(F)_x$ , au point  $x$ .

Le lemme suivant permettra de montrer que la famille de paramétrisations locales est compatible.

2.1.6. Lemme

Soient  $N$  et  $N'$  deux variétés intégrales de l'algèbre  $J(F)$ , telles que  $N \cap N'$  soit non vide. Alors  $N \cap N'$  est ouvert relativement à  $N$  et relativement à  $N'$ , et les structures différentiables induites sur  $N \cap N'$  par celle de  $N$  et par celle de  $N'$  sont identiques. Enfin  $N \cup N'$  est une variété intégrale de  $J(F)$ .

Preuve. Soit  $z$  un point de  $N \cap N'$ . Puisque  $N$  et  $N'$  sont des variétés intégrales, alors  $T_z N = T_z N' = J(F)_z$ . Soit  $k-1 = \dim J(F)_z$ .

Il existe  $\gamma_1^1, \dots, \gamma^{k-1}$  appartenant à  $J(F)$  tels que les vecteurs  $\gamma^1(z), \dots, \gamma^{k-1}(z)$  soient indépendants.

Soit  $\varphi$  l'application

$$\varphi: (t_1, \dots, t_{k-1}) \longrightarrow \gamma_{t_{k-1}}^{k-1} \circ \gamma_{t_{k-2}}^{k-2} \circ \dots \circ \gamma_{t_1}^1(z)$$

définie sur un voisinage ouvert  $V$  de l'origine de  $\mathbb{R}^{k-1}$ , à valeurs dans  $M$ . En restreignant éventuellement  $V$ , on peut donc faire en sorte que l'image de l'application  $\varphi$  soit contenue dans  $N \cap N'$ . On notera  $\varphi^N : V \longrightarrow N$  et  $\varphi^{N'} : V \longrightarrow N'$  l'application  $\varphi$  lorsqu'on la considère prenant ses valeurs dans  $N$  (respectivement dans  $N'$ ). D'après le théorème de l'inversion locale on peut à nouveau restreindre le voisinage  $V$  de tel sorte que  $\varphi^N : V \longrightarrow N$  et  $\varphi^{N'} : V \longrightarrow N'$  soient des difféomorphismes. La composée  $\varphi^{N'} \circ (\varphi^N)^{-1}$  est l'application identique de  $\varphi(V)$  (muni de la structure différentielle induite par celle de  $N'$ ) sur  $\varphi(V)$  (muni de la structure différentiable induite par celle de  $N$ ). Ceci prouve que  $\varphi(V)$  est ouvert dans  $N$  et dans  $N'$  et que les structures différentiables induites sur cet ouvert  $\varphi(V)$  par celle de  $N$  et par celle de  $N'$  sont identiques. Par la suite toutes les affirmations de l'énoncé en découlent aisément.

Pour montrer la compatibilité des paramétrisations locales, il suffit évidemment de montrer que les sous-variétés  $\Sigma_y$  (image de l'application  $\varphi_y$ ) sont des variétés intégrales de  $J(F)$  et d'appliquer le lemme précédent à l'application

$$(t_1, \dots, t_{k-1}) \longrightarrow Y \begin{matrix} k-1 \\ t_{k-1} \end{matrix} \circ \dots \circ Y \begin{matrix} 1 \\ t_1 \end{matrix} (z), Y^i \in J(F)$$

qui définit une paramétrisation locale  $(\varphi_z, V)$  au point  $z$ . Le seul point que nous ayons à vérifier est donc que  $J(F)$  est tangente à  $\Sigma_y$ .

L'espace vectoriel tangent à  $\Sigma_y$  au point  $\varphi_y(t)$  est l'espace vectoriel, de dimension  $k-1$ , puisque  $\varphi$  est de rang  $k-1$  engendré par les vecteurs

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_i}(t) \quad i = 1, \dots, k-1$$

c'est-à-dire, ces vecteurs sont :  $(Y^i \in J(F))$

$$Y \begin{matrix} k-1 \\ \varphi_y(t) \end{matrix}; \quad (Y \begin{matrix} k-1 \\ k-1 \end{matrix})_* Y \begin{matrix} k-2 \\ \varphi_y(t) \end{matrix}; \dots (Y \begin{matrix} k-1 \\ t_{k-1} \end{matrix} \circ \dots \circ Y \begin{matrix} 2 \\ t_2 \end{matrix})_* Y' \begin{matrix} 1 \\ \varphi_y(t) \end{matrix}$$

et appartiennent tous à  $J(F) \varphi_y(t)$  puisque  $J(F)$  est auto-invariante. Comme  $J(F)$  est de rang constant sur  $G(F) \times X$ , la dimension de  $J(F) \varphi_y(t)$  est égale à  $k-1$ . Nous avons prouvé qu'au point  $\varphi_y(t)$  les valeurs prises par les champs de vecteurs de  $J(F)$  sont tangentes à la sous variété  $\Sigma_y$ , l'image de l'application  $\varphi_y$ .

Ainsi les paramétrisations locales définissent une structure de variétés différentiables sur  $G_0(F).x$ , telle que  $G_0(F).x$  devienne une sous variété de  $G = G(F).x$ , donc une sous variété de  $M$ . Pour voir que  $G_0(F).x$  est une sous variété de  $G$ , nous allons montrer que l'injection canonique de  $G_0(F).x$  dans  $G$  est une immersion. Pour cela, considérons le difféomorphisme  $\Psi: V \times W \longrightarrow G$  et la paramétrisation locale associée  $\varphi$ . Clairement  $\varphi$  est la composée de deux immersions  $f_1, f_2$  ou  $f_1: R^{k-1} \longrightarrow R^k$  est définie par

$$f_1(t_1, \dots, t_{k-1}) = (t_1, \dots, t_{k-1}, 0)$$

et  $f_2: R^k \longrightarrow M$  est définie par

$$f_2(t_1, t_2, \dots, t_{k-1}, 0) = X_0^k \circ X_{t_{k-1}}^{k-1} \circ \dots \circ X_{t_2}^2 \circ X_{t_1}^1(x).$$

Dans ces coordonnées, l'injection canonique

$$i: \varphi(t_1, \dots, t_{k-1}) \longrightarrow \Psi(t_1, \dots, t_{k-1}, 0)$$

est représentée localement par l'immersion  $f_1$ . Donc  $G_0(F).x$  est une variété immergée dans  $G$ .

Il reste à montrer que deux structures différentiables

$$= \{\varphi_y, y \in G_0(F).x\} \quad \text{et} \quad \varphi' = \{\varphi'_y; y \in G_0(F).x \text{ définies sur } G_0(F).x,$$

sont équivalentes. Naturellement on peut supposer que la structure  $\varphi$  est celle qui est définie par les paramétrisations locales. Ensuite  $(G_0(F).x, \varphi)$  et  $(G_0(F).x, \varphi')$  sont deux variétés intégrales de  $J(F)$  d'intersection non vide, automatiquement (lemme précédent) les structures différentiables induites sur  $G_0(F).x \cap G_0(F).x = G_0(F).x$  sont identiques.

Alors les deux structures sont identiques.

ii) Si  $\dim J(F)x = \dim \text{Lie}(F)(x)$ , alors  $\dim G_0(F)x = \dim G(F)x$ .

En tant que sous variété,  $G_0(F)x$  est alors ouverte dans  $G(F)x$ . Mais  $J(F)$  est de dimension constante sur  $G(F)x$ , c'est-à-dire  $\dim J(F)y = \dim G_0(F)y = \dim J(F)x$ . Par conséquent les orbites  $G_0(F)y$ ,  $y \in G(F)x$  sont toutes des variétés ouvertes et constituent une partition de  $G(F)x$ . Mais  $G(F)x$  est connexe, nécessairement  $G_0(F)y = G(F)x$ , en particulier  $G_0(F)x = G(F)x$ .

Ceci termine la démonstration du point ii)

### 2.1.7. Remarque

La topologie de la structure différentielle qui vient d'être définie coïncide avec la topologie induite par les applications  $P_{\xi(x)}$  pour tout  $p \in \mathbb{N}$  et  $\xi \in \mathbb{F}^p$ . Nous appellerons cette topologie, topologie  $G_0$ -orbite notée  $(G_0(F), \varphi)$ .

### 2.2. QUAND EST-CE QUE $\hat{F}$ EST AUTO-INVARIANTE ?

Nous avons vu que si une famille de champs de vecteurs  $F$  est fort auto-invariante,  $J(F)$  est  $G(F)$ -invariante, par suite  $F$  est auto-invariante. Que se passe-t-il inversement si on fait l'hypothèse que la famille  $F$  est auto-invariante ?

En général une famille auto-invariante n'est pas fort auto-invariante. Considérons par exemple dans  $\mathbb{R}^2$  la famille

$$F = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \varphi(x) \frac{\partial}{\partial y} \right\}$$

où  $\varphi$  est une fonction  $C^\infty$  définie de la façon suivante :

En effet  $(\hat{X}_t)_* \hat{Y}(x,t) = ((X_t)_* Y(x), 1) = (X(x), 1) + ((X_t)_* Y - X, 0)$ .  
 Mais  $X(x) = (X_t)_* X(x)$  d'où  $((X_t)_* Y(x), 1) = (X(x), 1) + (X_t)_* (Y - X), 0$ . Par  
 hypothèse  $(X_t)_* (Y - X)(x) \in J(F)_x$ , donc  $((X_t)_* (Y - X)(x), 0) \in J(F, 1)(x, t)$ .

Par suite il est facile de voir que  $(\hat{X}_t)_* \hat{Y}(x,t) \in \text{Lie}(\hat{F})(x,t)$ .  
 C.Q.F.D.

Dans la suite de ce paragraphe, nous allons déterminer les familles de champs de vecteurs fort-auto-invariantes, c'est-à-dire on va décrire les familles auto-invariantes telles que  $J(F)$  soit  $G(F)$ -invariant. On rappelle qu'une famille  $F$  est auto-invariante si elle appartient à l'une des classes suivantes :

- $F$  est analytique
- Le rang de  $F$  est constant
- $\text{Lie}(F)$  a un nombre fini de générateurs, c'est-à-dire qu'il existe  $X^1, X^2, X^q$   $q$  champs de  $\text{Lie}(F)$  tel que pour tout  $X \in \text{Lie}(F)$ ,

$$X = \sum_{i=1}^q \alpha_i X^i.$$

### 2.2.2. Proposition

Soit  $(F)$  une famille auto-invariante, telle que  $J(F)$  soit de codimension 0 dans  $\text{Lie}(F)$ . Alors  $\hat{F}$  est auto-invariante.

Preuve : Si  $J(F)$  est de codimension 0,  $J(F) = \text{Lie}(F)$ . Par hypothèse  $\text{Lie}(F)$  est  $G(F)$ -invariant, alors  $J(F)$  est  $G(F)$ -invariant.

Ceci termine la proposition.

### 2.2.3. Proposition

- . Toute famille analytique est fort-auto-invariante
- . Toute famille auto-invariante commutative (c'est-à-dire le crochet  $[X, Y] = 0$  pour tout  $X, Y \in F$ ) est fort auto-invariante.

Preuve : Si une famille  $F$  est analytique, il est facile de voir que la famille  $\hat{F}$  est aussi analytique, donc  $\hat{F}$  est auto-invariante. Soit  $F$  une famille commutative, on a  $(X_t)_* Y(x) = Y(x)$  puisque

$$\frac{d(X_t)_* Y(x)}{dt} = (X_t)_* [X, Y](x) = 0 \text{ et la courbe } t \longrightarrow (X_t)_* Y(x)$$

est alors constante. Il en découle évidemment que  $J(F)$  est  $G(F)$  invariant. La proposition est complètement démontrée.

Nous concluons ce paragraphe, en s'intéressant à un exemple particulier de famille fort auto-invariante, dont on se servira par la suite de notre travail (chapitre suivant).

Soit  $F$  une famille auto-invariante et  $X \in F$ . On note  $\hat{F}_X = \{\hat{F} \cup (X, 0)\}$  définie dans  $M \times \mathbb{R}$  ( $(X, 0)(x, t) = (X(x), 0)$ ). La famille  $\hat{F}_X$  est auto-invariante. Pour le voir il suffit de remarquer que les algèbres de Lie,  $\text{Lie}(\hat{F} \cup (X, 0))$  et  $\text{Lie}(\hat{F} \cup (0, 1))$  sont égales. Vérifions le.

En effet le champ  $(X, 0)$  peut s'écrire  $(X, 0) = (X, 1) - (0, 1)$ , d'où  $(X, 0)$  appartient à  $\text{Lie}(\hat{F} \cup (0, 1))$ , donc  $\hat{F} \cup (X, 0)$  est contenu dans  $\text{Lie}(\hat{F} \cup (0, 1))$  et immédiatement  $\text{Lie}(\hat{F} \cup (0, 1))$  contient  $\text{Lie}(\hat{F} \cup (X, 0))$ . Inversement le champ  $(0, 1)$  s'écrit  $(0, 1) = (X, 1) - (X, 0)$ , donc  $\hat{F} \cup (0, 1)$  est contenu dans  $\text{Lie}(\hat{F} \cup (X, 0))$  par conséquent  $\text{Lie}(\hat{F} \cup (0, 1))$  est contenu dans  $\text{Lie}(\hat{F} \cup (X, 0))$ . Ceci termine la vérification.

Par ailleurs  $\text{Lie}(\hat{F} \cup (0, 1))$  est auto-invariante, puisque on voit clairement  $\hat{F} \cup (0, 1) = \hat{F} \cup 0$  (le champ 0 est le champs nul dans  $M$ ) et la famille  $\hat{F} \cup 0$  est une famille auto-invariante du type " $J(F)$  est de codimension 0 dans  $\text{Lie}(F)$ ", donc elle est fort auto-invariante, c'est-à-dire  $\text{Lie}(\hat{F} \cup 0)$  est auto-invariante. Il apparaît évidemment que  $\text{Lie}(\hat{F} \cup (X, 0))$  est auto-invariante, ceci exprime que la famille  $\hat{F}_X = \hat{F} \cup (X, 0)$  est auto-invariante.

Il est facile de voir que la famille  $U F_x = \{ \hat{F} U(F, 0) \}$  est donc auto-invariante. On remarque, en notant  $\overline{\overline{F}} = \{ \hat{F} U(F, 0) \}$ , que  $J(\overline{\overline{F}}) = J(F) \times R$ . Ainsi nous voyons que pour tout point  $x$ ,  $J(\overline{\overline{F}})$  est de codimension 0 et si et seulement si  $J(F)$  est de codimension 0. Ceci dit, la structure topologique des ensembles  $A(x, t)$  de la famille  $F$  est manifestement équivalente à la structure des  $A(x, t)$  de la famille  $\overline{\overline{F}}$  dans  $M \times R$ . Nous exhiberons cet argument au chapitre prochain pour la preuve de certaines égalités.

Enfin la famille  $\overline{\overline{F}}U(0, 0)$  est clairement fort auto-invariante.

### 2.3. CONDITIONS POUR QUE A(x, T) SOIT D'INTERIEUR NON VIDE

#### 2.3.1. Définition et présentation

Soit  $F$  une F.C.V.Â.,  $x \in M$  et  $T > 0$ . L'unique variété intégrale de  $J(F)$  qui contient  $A(x, T)$  est notée  $G_T(F).x$  et est appelée sous variété de contrôlabilité en temps exact  $T$  au point  $x$ . On a

$$G_T(x) = \left\{ x_{t_1}^1 \circ \dots \circ x_{t_p}^p(x), x^i \in F, \sum t_i = T \right\}$$

Soit  $y \in G_T(x)$ , alors il est facile de voir que  $G_T(F).x$  est contenu dans  $G_0(F).y$ . En effet, soit  $z \in G_T(F).x$ , il existe des champs de vecteurs  $X^1, X^2, \dots, X^k$  dans  $F$  et  $t_1, \dots, t_k \in R$ , tels que  $z$  s'écrive  $z = x_{t_1}^1 \circ \dots \circ x_{t_k}^k(x)$  avec  $\sum_{i=1}^k t_i = T$ . En plus, puisque  $y \in G_T(F).x$ , nous pouvons trouver  $Y^1, \dots, Y^p$  dans  $F$  et  $s_1, \dots, s_n$  dans  $R$  tels que

$$y = x_{s_1}^1 \circ \dots \circ x_{s_p}^p(x), \sum s_i = T. \text{ Donc } z = x_{t_1}^1 \circ \dots \circ x_{t_k}^k(x) = x_{t_1}^1 \circ \dots \circ x_{t_k}^k \circ x_{-s_1}^1 \circ \dots \circ x_{-s_p}^p(y)$$

et  $\sum t_i - \sum s_i = T - T = 0$ .

Par conséquent  $z \in G_0(F)y$ . Ce qui prouve que  $G_T(F)x \subset G_0(y)$  si  $y \in G_T(F)x$  en particulier si  $y \in A(x,T)$ .

Soit  $X$  un champ quelconque de  $F$ . Puisque  $G_0(F)$  est normal dans  $G(F)$  alors on a

$$G_T(F)x = G_0(F)X_T(x) = X_T G_0(F)x$$

D'une manière générale

$$G_{T+h}(F)x = X_T G_h(F)x : h, T \in \mathbb{R}.$$

Pour tout nombre réel  $T$  on a la relation

$$(**) G_T(F)x \times \{T\} = G(\hat{F})(x,0) \cap M \times \{T\}$$

### 2.3.2. Théorème

Soit  $F$  une F.C.V.  $\hat{A}$ . et  $x \in M$ . Alors  $A(x,T)$  est d'intérieur non vide dans la topologie de  $G_T(F)x$ , plus précisément les points intérieurs de  $A(x,T)$  sont denses dans sa fermeture.

SUSSMANN-JURDJEVIC [16] (KRENER [10]) démontrent ce théorème dans le cas analytique. Notre but ici est de prouver ce résultat dans la classe des familles fort auto-invariantes. Nous donnerons une démonstration qui utilise astucieusement et de façon technique la topologie  $G_0$ -orbite.

#### Esquisse de la démonstration

L'ensemble d'accessibilité  $A(x,T)$  est l'ensemble des points  $z$  de  $G_T(F)x$  tels que  $(z,T)$  appartiennent à  $S(\hat{F})(x,0)$ , ce qui se traduit par

$$A(x,T) \times \{T\} = S(\hat{F})(x,0) \cap G_T(F)x \times \{T\}$$

Cette égalité est très avantageuse, elle est l'astuce de base à partir de laquelle nous déduirons les résultats concernant la structure topologique de  $A(x,T)$  à partir de celle de  $S(\hat{F})(x,0)$  (dans la topologie de  $G(\hat{F})(x,0)$ ). Ensuite on exploite l'égalité (\*\*).

Nous compléterons la démonstration au chapitre prochain.

Si on prend une famille de champs de vecteurs complets, auto-invariante (non nécessairement fort auto-invariante), le théorème ci-dessus est faux. Le contre exemple est donné par

### 2.3.3. Exemple

Considérons, comme au paragraphe précédent la famille

$F = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \psi(x) \frac{\partial}{\partial y} \right\}$ . Il est facile de voir que si nous prenons  $x$  l'origine de  $\mathbb{R}^2$  et  $T \leq 1 - \varepsilon$  alors  $A(x, T) = \{(x, y) \mid x + y = T, 0 < x \leq T, 0 < y \leq T\}$ . Ensuite  $\dim \Delta_F^\circ(x) = 2$ ,  $G_T(F)_x = \mathbb{R}^2$  et  $A(x, T)$  est d'intérieur vide dans  $\mathbb{R}^2$ . Donc la propriété demandée est fautive.

Si on prend maintenant  $T > 1 + \varepsilon$  et  $x$  toujours l'origine, cette fois-ci  $A(x, T)$  est d'intérieur non vide dans  $G_T(F)_x$ , mais les points intérieurs à  $A(x, T)$  ne sont pas denses dans sa fermeture (voir figure 2.1 ci-dessous).

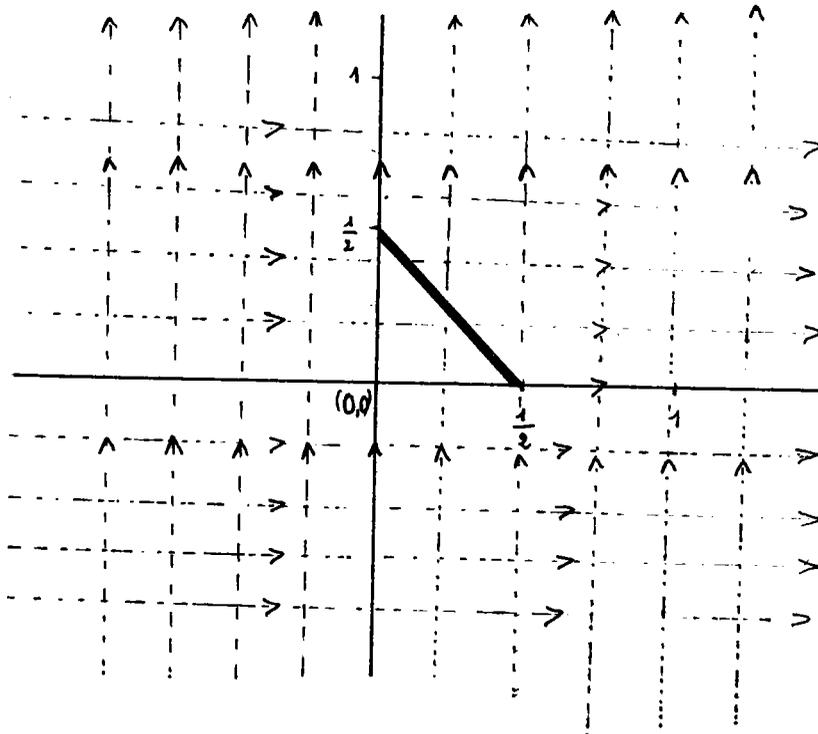
### 2.3.4. Lemme

Soit  $M$  une variété de dimension  $n$  et  $P$  une sous variété connexe de dimension  $k$ . Si  $k < n$ , alors  $P$  a un intérieur vide dans  $M$ .

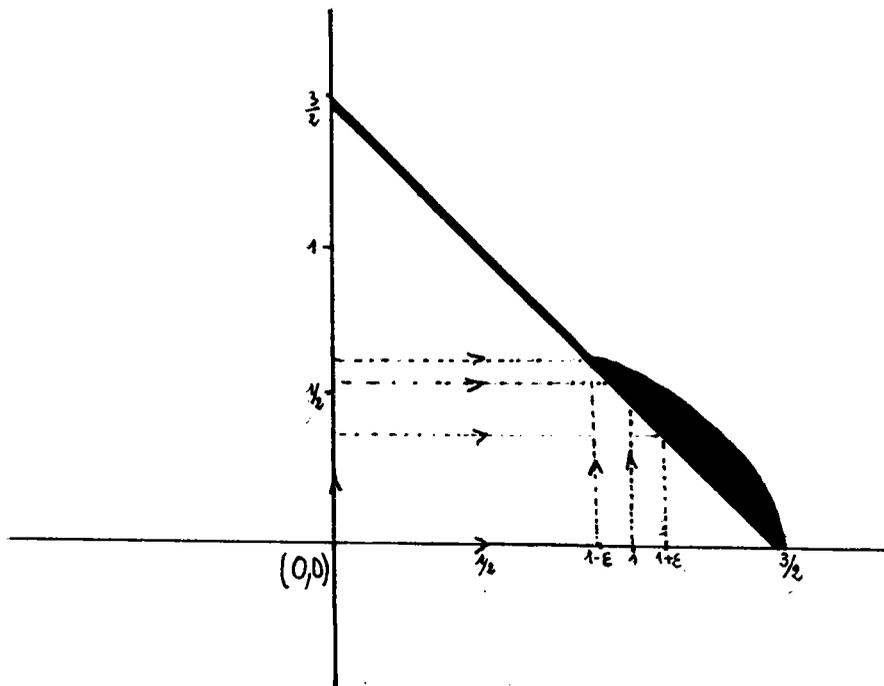
Preuve : Soit  $p$  appartenant à  $P$ . Il existe une carte locale  $U$  de  $p$  dans  $M$  telle que  $U \cap P$  soit une carte locale de  $p$  dans  $P$ . L'ouvert  $U$  est homéomorphe à  $\mathbb{R}^n$  et  $U \cap P$  est homéomorphe à  $\mathbb{R}^k$  or  $\mathbb{R}^k$  a un intérieur vide dans  $\mathbb{R}^n$ , donc  $U \cap P$  est d'intérieur vide dans  $M$ . Nous avons montré que tout ouvert de la structure différentielle de  $P$ , est un ouvert vide dans  $M$ , donc la variété  $P$  qui est recouverte par ces ouverts est par conséquent d'intérieur vide dans  $M$ . C.Q.F.D.



$$F = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \psi(x) \frac{\partial}{\partial y} \right\} \quad (\text{Fig. 2.1.})$$



Le cas où  $A(X,T)$  est d'intérieur vide dans  $G_T(F).x$  ( $T = \frac{1}{2}$ )  
(en pointillé sont les trajectoires correspondant à  $F$ )



cas où  $A(X,T)$ ,  $T = \frac{3}{2}$  est d'intérieur non vide, mas  $A(X,T) \not\subset \overline{\text{Int.}A(X,T)}$

### 2.3.5. Proposition

Soit  $x \in M$ ,  $F$  une famille fort auto-invariante. On suppose que  $\dim \text{Lie}(F)_x = k$ . Alors une condition nécessaire et suffisante pour que  $A(x, T)$  soit d'intérieur non vide dans  $G(F)_x$  est que  $\dim J(F)_x = k$ .

#### a) Condition suffisante

On vient de voir (théorème précédent) que  $A(x, T)$  est d'intérieur non vide dans  $G_T(F)_x$ , mais  $G_T(F)_x = G(F)_x$  si  $\dim J(F)_x = k$ , d'où  $A(x, T)$  est d'intérieur non vide dans  $G(F)_x$  quand  $\dim J(F)_x = k$ .

#### b) Condition nécessaire

Nous allons procéder par l'absurde. Supposons  $A(x, T)$  soit d'intérieur non vide et  $\dim J(F)_x = k-1$ . Dans ces conditions la dimension de la variété  $G_T(F)_x$  est égale à  $k-1$  puisque  $J(F)_y = T_y G_T(F)_x$  ;  $y \in G_T(F)_x$ . En d'autres termes  $\dim G_T(F)_x < \dim G(F)_x$ , donc (lemme précédent)  $G_T(F)_x$  est d'intérieur vide dans  $G(F)_x$ , ce qui implique que  $A(x, T)$  est d'intérieur vide, d'où la contradiction.

#### Remarque

. Si on remplace la variété  $G(F)_x$  par  $M$ , la proposition reste valable

. dans le cas général (champ  $C^\infty$ ), la condition nécessaire est vraie en remplaçant l'idéal  $J(F)$  par la distribution  $\Delta_F^0$

. dans le cas où la famille  $F$  est auto-invariante (pas forcément fort auto-invariante) la condition suffisante est vraie, ceci nous est donné par le théorème de CHOW -KRENER que nous énonçons pour conclure le paragraphe.

2.3.6. Théorème (SUSSMANN [1], KRENER [10], LOBRY [3])

Soit  $F$  une famille de champs de vecteurs sur  $M$  et  $\hat{F}$  définie sur  $M \times \mathbb{R}$ . On suppose que  $\dim M = n$ . Alors une condition suffisante pour que  $A(x,t)$  soit d'intérieur non vide dans  $M$  est que la dimension de l'algèbre de Lie engendrée par la famille  $\hat{F}$  au point  $(x,0)$  soit égale à  $n+1$ .

---

## CHAPITRE III

### STRUCTURE TOPOLOGIQUE DE L'ENSEMBLE D'ACCESSIBILITE $A(x,T)$ DE CERTAINES FAMILLES

Dans ce chapitre, nous démontrons la priorité (1) et d'autres résultats concernant la topologie de  $A(x,t)$ . On rappelle que les familles considérées sont des familles de champs de vecteurs complets fort auto-invariantes. En guise d'application nous en tirerons des conséquences concernant l'Etude des familles fortement équivalentes ou l'équivalence forte des familles. Une conséquence importante de (1) est que l'on montre finalement

$$(1') \quad \overline{\text{Int } A(x,T)} = \text{Int } A(x,T) \text{ dans } G_T(F).x$$

si la famille  $F$  est une famille auto-invariante complète et si l'idéal  $J(F)$  est de codimension 0 au point  $x$ .

#### 3.1. PRELIMINAIRES

Ici nous rappelons quelques notions de Topologie. En particulier nous redémontrons la propriété analogue à (1) en ce qui concerne les ensembles d'Accessibilité  $A(x)$ .

##### 3.1.1. Théorème (KRENER [10], G. SALLET [18])

Soit  $F$  une famille de champs de vecteurs définie sur  $M$ . L'ensemble des points accessibles  $S(F).x$  est contenu dans la fermeture de son intérieur pour la topologie de  $M$  si le rang de la famille  $F$  au point  $x$  est égale à la dimension de la variété  $M$ . En particulier si la famille  $F$  est auto-invariante  $S(F).x$  est contenu dans la fermeture de son intérieur pour la topologie de  $G(F).x$ .

De ce théorème nous avons la

3.1.2. Proposition (G. SALLET [18], KUNITA [7])

$$\overline{\text{Int } S(F).x} = \text{Int } S(F).x$$

Preuve Soit  $y \in \overline{\text{Int } S(F).x}$ . Considérons le système opposé  $-F$  et l'ensemble  $S(-F).y$  qui est l'ensemble des points  $z$  tels que  $y$  soit accessible à partir de  $z$ . Comme la famille  $-F$  est aussi auto-invariante, d'après le théorème précédent,  $S(-F).y$  est d'intérieur dense dans sa fermeture et contient le point  $y$ . Ainsi nous avons

$$\overline{\text{Int } S(-F).y} \cap \overline{\text{Int } S(F).x} \neq \emptyset$$

Par suite

$$\text{Int } S(-F).y \cap S(F).x \neq \emptyset$$

ou encore

$S(-F).y \cap S(F).x \neq \emptyset$  (puisque dans un espace topologique si  $\text{Int}(A) \cap \bar{B} \neq \emptyset \implies A \cap B \neq \emptyset$ ). Par concaténation des trajectoires, il est clair que  $y$  est dans  $S(F).x$ . En d'autres termes  $\overline{\text{Int } S(F).x} \subset S(F).x$ , par conséquent il est démontré  $\overline{\text{Int } (S(F).x)} = \text{Int } (S(F).x)$

3.1.3. Remarque

Que les champs soient complets ou pas les théorèmes 3.1.1. et 3.1.2. sont vrais. En effet, soit  $F$  une famille que l'on écrira

$$F = \left\{ X_i \right\}_{i \in I}. \text{ Alors on sait (GODBILLON [5]: géométrie différentielle).}$$

que pour tout champ  $X$ , il existe une fonction  $C^\infty$  strictement positive telle le champ  $f.X$  soit complet. Donc la famille  $F' = \left\{ f_i X_i \right\}_{i \in I}$  est

une famille de champs complets et pour tout  $x \in M$

$$S(F)x = S(F')x$$

on peut donc se contenter d'étudier  $F'$  pour ce qui est de la structure topologique de  $S(F).x$

Maintenant quand on étudie  $A(x,t)$ , il est clair qu'on ne peut remplacer  $X$  par  $f.X$

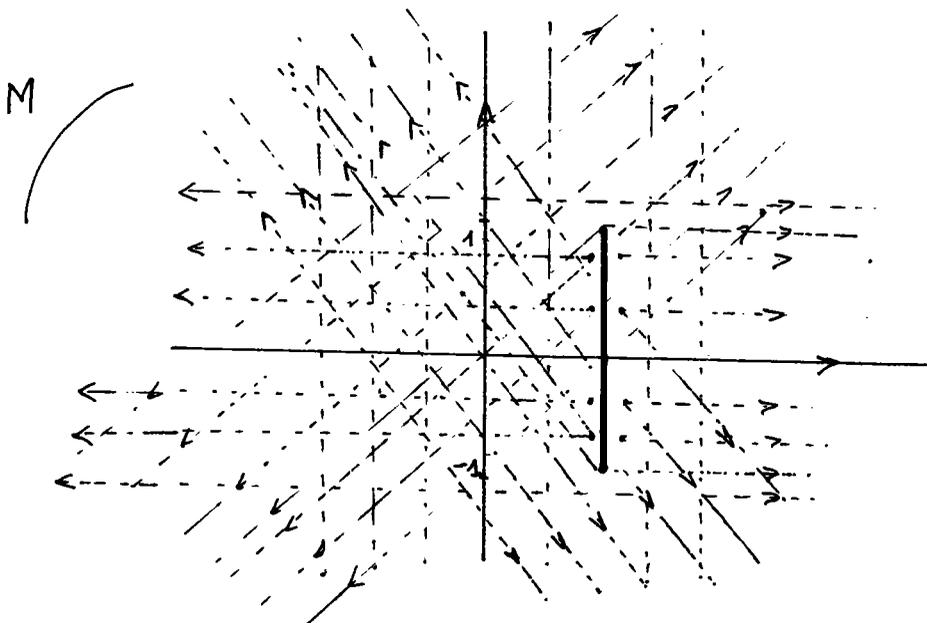
En particulier si les champs ne sont pas complets. Alors on peut avoir

$$\overline{\text{Int}(A(x,T))} \neq \text{Int}(A(x,t))$$

Comme exemple, prenons  $M = \mathbb{R}^2 - \left\{ \{1\} \times ]-2, 1[_ \right\}$  et la famille

$$F = \left\{ a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} : |a| \leq 1 ; |b| \leq 1 \right\} \text{ d'où la figure (3.1).}$$

Les trajectoires correspondant à la famille  $F$  sont :



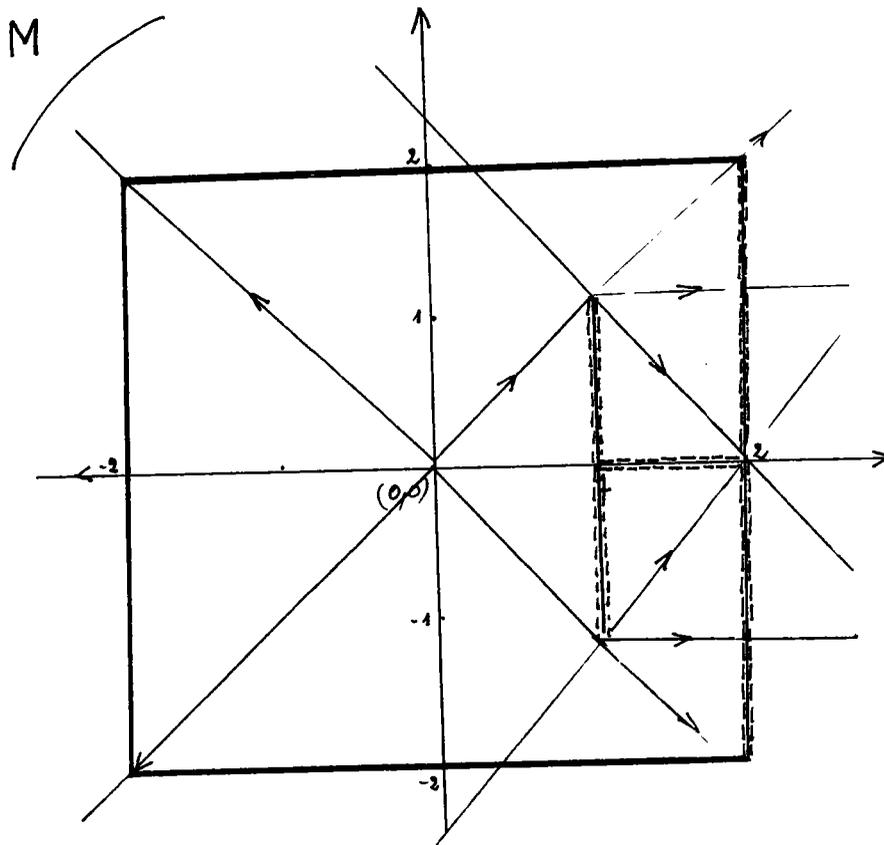


Fig. (3.1)

.  $A(0,2)$  est le carré  $[-2,2] \times [-2,2]$  pris avec son intérieur sauf les pointillés. Il est clair que  $\text{Int} A(0,2) \not\subseteq \text{Int} A(0,2)$ .

Ceci prouve que pour  $A(x,T)$ , le fait d'être complet est nécessaire. Alors que pour  $S(F).x$  cela ne joue pas. L'affirmation de KUNITA selon laquelle la démonstration des propriétés de  $A(x,T)$  serait automatique à partir de la démonstration des propriétés de  $S(F).x$  est manifestement fausse.

### 3.1.4. Quelques résultats de Topologie

i) Soit  $(X, \mathcal{O})$  un espace topologique,  $A, B \subset X$

Si  $A$  ouvert, alors  $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$

ii)  $f : X \longrightarrow Y$  une application continue, alors  $\forall A \subset X$

$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$  et  $\overset{\circ}{f(A)} \subset f(\overset{\circ}{A})$  si  $f$  injective

en plus si  $f$  est ouverte

$f^{-1}(\overset{\circ}{A}) = \overset{\circ}{f^{-1}(A)}$  et  $f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)}$

i et ii) sont des exercices élémentaires de topologie générale.

### 3.2 STRUCTURE TOPOLOGIQUE DES ENSEMBLES $A(x, T)$ DES FAMILLES FORT AUTO-INVARIANTES

On considère un ensemble  $A$ . En général, outre l'ensemble  $A$ , à l'aide des opérations de fermeture et d'ouverture (c'est-à-dire prendre l'intérieur d'un ensemble) on ne peut obtenir que 7 ensembles distincts [2].

Les Ensembles d'Accessibilité en temps exacts, dans la topologie de l'orbite  $G(F)x$  les contenant, sont beaucoup plus simples. Ce paragraphe montre que, pour une F.C.V.  $\hat{A}$ ,  $F$ , l'ensemble d'accessibilité en temps exact  $A(x, T)$  ne permet de définir à l'aide de la fermeture et de l'ouverture que l'intérieur de  $A(x, t)$  et son adhérence. En particulier les frontières de  $A(x, T)$ , de son intérieur, de son adhérence sont identiques.

3.2.1. Proposition

Soit F une F.C.V. auto-invariante possédant la propriété suivante : x n'appartient pas à  $G_T(F).x$  si  $T \neq 0$ . Alors dans la topologie de  $G_T(F).x$  on a :

$$\overline{\text{Int}(A(x,T))} = \text{Int}(A(x,T))$$

Cette proposition est destinée, étant donné une famille F fort auto-invariante, à la famille  $\hat{F}$  définie sur  $M \times R$ . En plus  $J(\hat{F})$  est de codimension 1 dans  $\text{Lie } \hat{F}$  en tout point  $(x,t)$ , donc la famille  $\hat{F}$  est fort auto-invariante. On pourra alors utiliser la topologie  $G_0$ -orbite de  $\hat{F}$ .

Nous démontrerons aussi, au passage, que  $A(x,0), T, \hat{F}$  est d'intérieur non vide, de ce fait nous déduirons le théorème 2.3.2. du chapitre précédent.

Cependant la démonstration de la proposition ci-dessus nécessite quelques lemmes et corollaires intermédiaires que nous allons exposer maintenant.

On considérera dans les énoncés suivants la même famille F et supposons  $\dim \text{Lie } F(x) = k$

3.2.2. lemme 1

$$G_{t_1}(x) \cap G_{t_2}(x) = \emptyset \quad \text{si } t_1 \neq t_2 : t_1, t_2 \in R$$

Preuve

Nous allons procéder par absurde. Supposons  $G_{t_1}(x) \cap G_{t_2}(x) \neq \emptyset$ , alors il existe un point z appartenant à  $G_{t_1}(x)$  et à  $G_{t_2}(x)$ , ce qui implique clairement que x appartient à  $G_{t_1-t_2}(x)$  où à

$G_{t_2-t_1}(x)$ ,  $t_1-t_2 \neq 0$ , d'où la contradiction. avec l'hypothèse.

### 3.2.3. Corollaire

$$A(x,t) = S(F).x \cap G_t(F).x$$

#### Preuve

Nous rappelons que  $S(F)x = \bigcup_{z \neq 0} UA(x,z)$ . Nous pouvons donc

écrire

$$\begin{aligned} S(F)x \cap G_t(x) &= \left( \bigcup_{z \neq 0} UA(x,z) \right) \cap G_t(x) = \bigcup_{z \neq 0} (A(x,z) \cap G_t(x)) \\ &= \left[ \bigcup_{z \neq t} (A(x,z) \cap G_t(x)) \right] \cup [A(x,t) \cap G_t(x)] \end{aligned}$$

Pour tous les réels  $z$  différents de  $t$ ,  $A(x,z) \cap G_t(x) \subset G_z(x) \cap G_t(x) = \emptyset$ .  
Il est donc clair que  $S(F).x \cap G_t(x) = A(x,t)$ .

### 3.2.4 lemme 2

$y \in G(F)x$ , alors  $y \notin G_t(y)$ ,  $t \neq 0$

#### Preuve

Nous procédons par absurde. Si  $y \in G_t(y)$ ,  $t \neq 0$ , il existe  $x^1, \dots, x^p$   $p$  champs de  $F$  tels que

$$y = x_{t_1}^1 \circ \dots \circ x_{t_p}^p (y), \quad t_i \in \mathbb{R}, \quad \sum t_i = t$$

mais  $y \in G(F).x$ , c'est-à-dire  $y = \Psi(x)$  avec  $\Psi \in G(F)$ . Finalement on a

$$\Psi(x) = x_{t_1}^1 \circ \dots \circ x_{t_p}^p \circ \Psi(x)$$

ou encore  $x = \psi^{-1} \circ \chi_{t_1}^1 \circ \dots \circ \chi_{t_p}^p \circ \psi(x)$  et appartient à  $G_t(x)$ . Ce qui est impossible.

### 3.2.5 lemme 3

- i)  $G(F)x$  ne possède aucun point singulier
- ii) La famille  $F$  ne possède aucun champ périodique

#### Preuve

i) on procède, comme les lemmes précédents, par absurde  
 Soit  $y \in G(F)x$ , un point singulier du champ  $X \in F$ . Autrement dit  $X_t(y) = y$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ . Ce qui exprime  $y \in G_t(y)$ ,  $t \neq 0$ , impossible

ii) si  $X$  est un champ périodique, il existe un réel  $Z$ , appelé période tel que  $X_Z(y) = y$  pour tout  $y \in G(F)x$ . Ce qui est impossible.

### 3.2.6. lemme 4

Les variétés  $G_T(F)x$ ,  $T \in \mathbb{R}$ , sont fermées dans  $G(F)x$

#### Preuve

Rappelons  $G(F)x$  est muni de la topologie rendant continues les applications  $\varphi_x^p(t_1, \dots, t_p) \longrightarrow \chi_{t_1}^1 \circ \dots \circ \chi_{t_p}^p(x)$ ;  $X^1, \dots, X^p \in F$ ;  $p \in \mathbb{N}$ .

Il faut montrer que l'image réciproque de  $G_T(F)x$  par ces applications est un ensemble fermé de  $\mathbb{R}^p$ ,  $p$  quelconque.

Soit  $(t_1, \dots, t_p) \in \varphi_x^{-1}(G_T(x))$ , c'est-à-dire  $\varphi_x(t_1, \dots, t_p) \in G_T(x)$ .

ou encore  $\chi_{t_1}^1 \circ \dots \circ \chi_{t_p}^p(x) \in G_T(x)$ , nécessairement  $t_1 + \dots + t_p = T$ .

Les champs  $X^i$  étant complets, alors  $\Psi_x^{-1}(G_T(x))$  est bien défini, et c'est l'ensemble de tous les points  $t_1, \dots, t_p \in \mathbb{R}^p$  tels que  $\sum t_i = T$ . Cet ensemble n'est autre chose que l'hyperplan  $R_T^p$  qui est un fermé de  $\mathbb{R}^p$ . Ceci achève la démonstration du lemme.

### 3.2.7. Corollaire

$$A(x, T) \subset \overline{UA(x, t)} \text{ dans } G(F).x \\ 0 < t < T$$

Preuve On pose  $S_T(x) = UA(x, t)$ . Soit  $y \in A(x, T)$ , y peut s'écrire  $0 < t < T$

$y = X_{t_1}^1 \circ \dots \circ X_{t_p}^p(x)$ ,  $X^i$ ,  $i=1, \dots, p$ , appartenant à  $F$ . Il est facile de voir

que l'ensemble  $\left\{ X_t^1(y) ; -t_1 \leq t < 0 \right\}$  est contenu dans  $S_T(x)$ . On

considère l'application  $t \longrightarrow X_t^1(y)$ . On sait que  $X_t^1(y) \neq y$  (lemme 3.2.5) et cette application est continue de  $\mathbb{R}$  dans  $G(F).x$ , on a de façon évidente

$]-t_1, 0[ \subset f^{-1}(S_T(x))$ . Par passage à la fermeture on a

$]-t_1, 0] \subset \overline{f^{-1}(S_T(x))} \subset f^{-1}(\overline{S_T(x)})$ . Donc  $y = f(0) \in S_T(x)$ . C.Q.F.D.

Maintenant nous démontrons le théorème 2.3.2. c'est-à-dire  $A(x, T) \subset \overline{\text{Int } A(x, T)}$  dans  $G_T(x)$ . On rappelle que la famille considérée est  $\hat{F}$ .

Soit  $y \in A(x, T)$  et  $\Sigma y$  un ouvert de  $y$  dans  $G_T(x)$ . On rappelle que  $\Sigma y$  est l'image  $\Sigma y = \Psi(V)$  de l'application paramétrisation locale de  $G_0(F)y$  au point  $y$ . Considérons le voisinage ouvert  $\Psi(V \times W)$  dans  $G(F).x$  associée à  $\Sigma y$  et posons  $W_*^- = W \cap ]-\infty, 0[$  et  $W^- = W \cap ]-\infty, 0]$   $W_*^-$  est un ouvert contenu dans  $W$ . Nous affirmons que :

$$\Psi(V \times W) \cap S_T(x) = \Psi(V \times W_\star^-) \cap S_T(x)$$

En effet soit  $z \in \Psi(V \times W) \cap S_T(x)$ ,  $z = \Psi(t_1, \dots, t_k)$  avec  $t_k \in W$  et  $(t_1, \dots, t_{k-1}) \in V$ . On a  $z = X_{t_k}^k \circ X_{t_{k-1}}^{k-1} \circ \dots \circ X_{t_1}^1(y)$  avec  $X_{t_k}^k \in F$  et  $X^{k-1}, \dots, X^1$  appartenant à  $J(F)$ . Autrement dit l'intersection  $X_{t_k}^k G_0(F).y \cap S_T(x)$  est non vide ou encore, puisque  $y \in G_T(x)$ ,

$$\bigcup_{0 < z < T} (G_{T+t_k}(x) \cap A(x, z)) \neq \emptyset$$

et  $G_{T+t_k}(x) \cap A(x, z) = \emptyset$  pour  $t_k \geq 0$  (lemme 3.2.2.), d'où l'intersection  $X_{t_k}^k G_0(y) \cap A(x, z)$  qui implique que  $t_k < 0$ , c'est-à-dire  $t_k \in W_\star^-$ .

Le point  $y$  est pris dans  $A(x, T)$  alors (lemme précédent  $y \in S_T(x)$ ) donc tout voisinage de  $y$  rencontre  $S_T(x)$ , en particulier l'ouvert  $\Psi(V \times W)$  rencontre  $S_T(x)$ . On a  $\Psi(V \times W) \cap S_T(x) = \Psi(V \times W_\star^-) \cap S_T(x) \neq \emptyset$  et comme  $S_T(x) \subset S(F)x$ , on obtient finalement

$$S(F)x \cap \Psi(V \times W_\star^-) \neq \emptyset$$

L'ensemble  $\Psi(V \times W_\star^-)$  est un ouvert de  $G(F).x$  et  $S(F).x \subset \text{Int}(S(F).x)$ , (théorème 3.1.1.), il découle

$$\text{Int}(S(F).x) \cap \Psi(V \times W_\star^-) \neq \emptyset$$

Il existe alors un point  $z = X_{t_k}^k \circ \dots \circ X_{t_1}^1(y)$  appartenant à  $\text{Int}(S(F)x)$  et le point  $X_{t_k}^k(z) = X_{t_{k-1}}^{k-1} \circ \dots \circ X_{t_1}^1(y)$  appartient à  $X_{t_k}^k(\text{Int}(S(F)x))$  donc à  $\text{Int}(X_{t_k}^k(S(F)x))$  puisque l'application  $x \longrightarrow X_{t_k}^k(x)$  est un difféomorphisme.

Mais  $t_k < 0$ , il s'ensuit que  $\text{Int} S(F)x \cap \Sigma y \neq \emptyset$ . En d'autres termes

$\Sigma y \cap (\text{Int}(S(F)x \cap G_T(F)x) \neq \emptyset$ , d'où (corollaire 3.2.3.)  $\Sigma y \cap \text{Int} A(x,T) \neq \emptyset$ . Nous avons donc démontré que  $A(x,T) \subset \text{Int} A(x,T)$  on en déduit

immédiatement  $\overline{A(x,T)} = \overline{\text{Int} A(x,T)}$ .

### 3.2.8. Démonstration de la proposition 3.2.1. :

$\overline{\text{Int} A(x,T)} = \text{Int} A(x,t)$

Il suffit de montrer  $\text{Int} A(x,T) \subset S(F)x$

Notons  $A=A(x,T)$  et  $S=S(F)x$ . On désigne par  $\overset{\circ}{U}$  (respectivement  $\bar{U}$ ) l'intérieur (resp. la fermeture) d'un ensemble  $U$  dans  $R^k$ .

Soit  $y \in \text{Int} \bar{A}$  dans  $G_T(x)$ , il existe un ouvert  $\Sigma y$  contenu dans  $\bar{A}$ , donc contenu dans  $\bar{S}$  car  $\bar{A} \subset \bar{S}$ . Or  $\Sigma y = \psi(V)$  d'où  $\psi(V) \subset \bar{S}$  ou encore  $V \subset \psi^{-1}(\bar{S})$ . En regardant soigneusement les applications  $V \longrightarrow \psi(V)$  et  $V \times W \longrightarrow \psi(V \times W)$ , il est clair que  $V \subset \psi^{-1}(\bar{S})$  on peut encore écrire  $V \subset \psi^{-1}(\bar{S}) \cap (V \times W^-)$  ;  $W^- = W \cap ]-\infty, 0]$ .

Considérons la projection  $p : R^{k-1} \times R \longrightarrow R^{k-1}$  telle que

$$p(t_1, t_2, \dots, t_{k-1}, t_k) = (t_1, \dots, t_{k-1})$$

on a  $V \subset p(\psi^{-1}(\bar{S}) \cap V \times W^-)$ . Nous savons (théorème 3.1.1.) que  $\overline{\text{Int} S} = \bar{S}$ , à partir de là, nous obtenons

$$V \subset \overline{\psi^{-1}(\text{Int} S) \cap V \times W^-}$$

On détermine l'ensemble  $p(\Psi^{-1}(\text{Int}(S) \cap V \times W^-))$ . On trouve

$p(\Psi^{-1}(\text{Int}(S) \cap V \times W^-)) \subset p\left(\left(\bigcup_{\varepsilon > 0} \Psi^{-1}(X_\varepsilon^k(\text{int}(S)) \cap V)\right) \times W^-\right)$ . L'application

$x \longmapsto X_\varepsilon^k(x)$  est un difféomorphisme (car le champ  $X^k$  est complet), il en découle

$$V \subset p(\Psi^{-1}(\text{Int}(S) \cap V \times W^-)) \subset \overline{\Psi^{-1}(\text{Int}(S) \cap V)}$$

Par suite il est facile de voir que (grâce à  $p(\overline{A}) \subset \overline{p(A)}$ ,  $A \subset \mathbb{R}^k$ )

$$\overline{V} = p\left(\overline{\Psi^{-1}(\text{Int}(S) \cap (V \times W^-))}\right)$$

on peut trouver un ensemble  $W_\varepsilon$  tel que  $\overline{V} \times W_\varepsilon \subset \overline{\Psi^{-1}(\text{int}(S) \cap V \times W^-)}$  avec  $W_\varepsilon \subset W^-$ . Naturellement il s'ensuit

$$V \subset p\left(\overline{V \times W^-}\right) \subset p\left(\overline{\Psi^{-1}(\text{int}(S) \cap (V \times W^-))}\right)$$

donc  $V \subset p(\Psi^{-1}(\text{int}(\overline{S}) \cap \overline{V} \times W^-))$

ou encore, puisque  $\text{int } \overline{S} = \text{Int}(S)$  (proposition 3.1.2.)

$$V \subset p(\Psi^{-1}(\text{int}(S) \cap \overline{V} \times W^-)) \subset \overline{\Psi^{-1}(\text{Int}(S) \cap V)}$$

il apparaît que l'ouvert  $\sum y = \Psi(V)$  est contenu dans  $\text{Int}(S)$ , en particulier  $y$  appartient à  $\text{int}(S)$ . Nous avons donc montré  $\text{Int } \overline{A(x, T)} \subset S(F) \cdot x \cap G_T(x)$ ,

mais  $\overline{G_T(F)x} = G_T(F)x$ , car  $G_T(F)$  est fermé. On en déduit  $\text{Int } \overline{A(x, T)} = \text{Int } A(x, T)$ .  
C.Q.F.D.

Remarque Une chose importante apparaît dans cette démonstration, c'est qu'il est montré que l'intérieur de  $\overline{A(x,T)}$ , par rapport à la topologie de  $G_T(F).x$ , est contenu dans l'intérieur de  $S(F).x$  par rapport à la topologie de  $G.(F).x$ . Les arguments de taille pour avoir ces inclusions sont, d'une part la completion des champs de vecteurs (ici on a utilisé les difféomorphismes  $x \longrightarrow X_t(x), X \in F$ ), d'autre part la topologie de la structure différentiable de la famille auto-invariante  $F$ .

Si  $F$  n'était pas auto-invariante, mais si un point  $x$  est tel que  $\Delta_F^\circ(x) = J(F).x$ , donc  $\text{Lie}(F)x = \Delta_F(x)$ , alors l'intérieur de  $A(x,T)$  serait toujours contenu dans l'intérieur de  $\overline{S(F)x}$ . On montrerait aussi facilement que l'intérieur de  $A(x,T)$  inclus dans l'intérieur de  $S(F).x$

### 3.2.10. Théorème

Soit  $F$  une F.C.V.  $\hat{A}$ . Alors pour tout point  $x$  de  $M$  et tout  $T > 0$  on a

$$(1) \quad \overline{\text{Int } A(x,T)} = \text{Int } A(x,T)$$

Preuve : D'après la proposition précédente  $\overline{\text{Int } A(x,0),T,\hat{F}} = \text{Int } A((x,0),T,\hat{F})$  par rapport à la topologie de  $G_T(\hat{F}).(x,0)$ . Des relations  $A(x,0),\hat{T},\hat{F} = A(x,T)x \{T\}$  et  $G_T(\hat{F}).(x,0) = G_T(F)x \times \{T\}$ , on tire aisément le résultat (1). Ceci termine la preuve.

Avec les mêmes hypothèses, nous avons aussi prouvé (corollaire 3.2.7.) que  $\overline{A(x,0),T,F} = \overline{\text{Int } A(x,0),T,F}$ . On en déduit aussi facilement le résultat (théorème 2.3.2.) c'est-à-dire  $\overline{A(x,T)} = \overline{\text{Int } A(x,T)}$  pour tout  $x$  de  $M$  et tout  $T > 0$ .

### 3.2.11 Corollaire

On note maintenant  $\overset{\circ}{A}$ ,  $\bar{A}$  l'intérieur, la fermeture de  $A(x,T)$ . Alors

$$\text{Fr}(A) = \text{Fr}(\overset{\circ}{A}) = \text{Fr}(\bar{A})$$

où  $\text{Fr}(A)$  désigne la frontière de  $A$ .

Démonstration Il vient d'être montré les égalités  $\overset{\circ}{\bar{A}} = \overset{\circ}{A}$  et  $\bar{\overset{\circ}{A}} = \bar{A}$  dans  $G_T(F).x$ . L'adhérence d'un ensemble est la réunion disjointe de son intérieur et de sa frontière, on en déduit immédiatement  $\text{Fr}(A) = \text{Fr}(\bar{A}) = \text{Fr}(\overset{\circ}{A})$

### 3.2.12 Définition

On dit que deux familles  $F$  et  $F'$  sont fortement équivalentes si pour tout point  $x$  de  $M$ , quelque soit  $t \in \mathbb{R}$ , les variétés  $G_t(F).x$  et  $G_t(F').x$  sont identiques. En plus les fermetures des ensembles d'accessibilité en temps exact sont égales c'est-à-dire pour tout réel  $T$  strictement positif on a

$$\overline{A(x, T, F')} = \overline{A(x, T, F)}$$

Cette équivalence est plus forte que celle introduite par JURDJEVIC-KUPKA [19, 20], SALLET [18]. Les familles équivalentes définissent la même structure  $G_0$ -orbite.

Voici un exemple assez trivial.

soit  $F$  une famille de champs de vecteurs. On note  $\mathcal{C}(F)$  l'enveloppe convexe de  $F$  et on a

$$\mathcal{C}(F) = \left\{ \alpha X + (1-\alpha) Y ; X, Y \in F ; 0 \leq \alpha \leq 1 \right\}$$

Alors  $F$  et  $\mathcal{C}(F)$  sont fortement équivalents. En effet, si  $X$  et  $Y$  sont deux champs de  $F$ , on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( X_{\frac{t}{h}} \circ Y_{\frac{t}{h}} \right)^h(x) = (X+Y)_t(x) ; t \in \mathbb{R}$$

A partir de là, il est clair que  $G_0(F).x = G_0(\mathcal{V}(F)).x$ , de la même manière  $G_t(F).x = G_t(\mathcal{V}(F)).x$  et  $\overline{A(x,t,F)} = \overline{A(x,t,\mathcal{V}(F))}$  pour tout  $t > 0$ . Il est donc facile de voir que si  $F$  est une famille fort auto-invariante, alors  $\text{Fr}(A(x,t,F))$ , respectivement  $\text{Int } A(x,t,F)$  et  $\text{Fr}(A(x,t,\mathcal{V}(F)))$ , respectivement  $\text{Int } A(x,t,\mathcal{V}(F))$ , sont identiques.

Remarque

L'intérieur, respectivement la frontière, des ensembles d'accessibilité au même temps exact, des systèmes fort auto-invariants, fortement équivalents sont identiques.

Nous avons établi l'égalité (1) dans la classe des systèmes fort auto-invariants. Le problème qui nous préoccupe en ce moment quand nous avons affaire à l'ensemble des familles auto-invariantes en général. La question que l'on se pose est la suivante : peut-on avoir

$$(1') \quad \overline{\text{Int } A(x,t)} = \text{Int } A(x,t) \text{ dans } G_t(F).x$$

si la famille  $F$  est auto-invariante (non fort auto-invariante) ?

Lorsqu'on considère la famille  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \psi(x) \frac{\partial}{\partial y} \right\}$  dans  $\mathbb{R}^2$

(exemple paragraphe 2.2.), on a vu que  $A(0,t)$  est d'intérieur vide si  $t < 1$  - donc nous affirmons que lorsque une famille de champs de vecteurs est auto-invariante, nous pouvons avoir  $\text{Int } A(x,t) = \emptyset$ , dans ce cas nous sommes en face d'une ambiguïté, ce cas se produit éventuellement quand l'idéal  $J(F)$  est de codimension 1 au point  $x$ . Mais si  $J(F)x$  est égale à  $\text{Lie}(F)x$  on a la

3.2.13 Proposition

Soit  $F$  une famille auto-invariante complète. Si  $J(F)$  est de codimension 0 au point  $x$  on a :

$$(1') \quad \overline{\text{Int } A(x,t)} = \text{Int } (A(x,t)) \text{ dans } G_t(F).x$$

Démonstration : Soit  $y$  appartenant à  $\text{int } A(x,T)$ ,  $J(F)$  est de codimension 0 ou 1 au point  $y$ . Nous allons distinguer les deux cas pour la suite de la démonstration et l'on suppose que  $\dim \text{Lie}(F)_x = k$

$$1) \dim J(F)y = k \text{ ou } J(F)y = \text{Lie}(F)y$$

Alors l'espace tangent à la variété  $G(\hat{F}).(y,0)$  coïncide avec  $\text{Lie } \hat{F}(y,0)$  c'est-à-dire  $\Delta_{\hat{F}}(y,0) = \text{Lie } \hat{F}(y,0)$  et par symétrie on a  $\Delta_{-\hat{F}}(y,0) = \text{Lie}(-\hat{F})(y,0)$ . Mais  $\text{Lie}(-\hat{F})(y,0) = \text{Lie}(-\hat{F})(y,t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , en particulier on a

$$\Delta_{-\hat{F}}(y,T) = \text{Lie}(-\hat{F})(y,T)$$

En d'autres termes, il y a condition du rang au point  $(y,T)$  pour la famille  $-F$ , ce qui nous donne d'après le théorème 3.1.1. que

$$\overline{\text{Int } S(-\hat{F})(y,T)} = \overline{S(-\hat{F})(y,T)}$$

par rapport à la topologie de  $G(-\hat{F}).(y,T) = G(\hat{F}).(x,0) = G(\hat{F}).x \times \mathbb{R}$

Puisque  $y$  est pris dans  $\text{Int } A(x,t)$ , donc, d'après la remarque faite sur le théorème 3.2.8.,  $(y,T)$  appartient à  $\overline{\text{Int } (S(\hat{F})(x,0))}$ . Il découle que :

$$\overline{\text{Int } S(-\hat{F})(y,T)} \cap \overline{\text{Int } (S(\hat{F})(x,0))} \neq \emptyset$$

par suite  $S(-\hat{F})(y,T) \cap S(\hat{F})(x,0) \neq \emptyset$ , donc  $(y,T)$  appartient à  $S(\hat{F})(x,0)$ , ce qui veut dire que  $y$  appartient à  $A(x,T)$ , ainsi nous avons montré que  $y$  appartient à  $\text{Int } A(x,T)$

$$2) \dim J(F)y = k-1 \text{ ou } J(F)y \neq \text{Lie } F(y)$$

on rappelle que  $\text{Lie } F(y) = \text{RX}(y) + J(F)y$  quelque soit  $X \in F$ . Alors dire que  $J(F)y$  est de codimension 1 dans  $\text{Lie } F(y)$ , c'est-à-dire que le point  $y$  ne peut être singulier pour la famille  $F$ , c'est-à-dire  $X(y) \neq 0$  pour tout  $X \in F$ .

Par hypothèse de la démonstration  $y \in \text{Int } A(x, T)$ . Soit  $X \in F$  et  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ , on peut écrire  $y = X_{-\varepsilon} X_{\varepsilon}(y)$ , il est clair que  $y$  appartient à  $A(X_{\varepsilon}(y), \varepsilon, -FUO)$  où  $0$  est le champ nul dans  $M$ . Puisque la famille  $-F$  est auto-invariante, alors la famille  $-F \cup 0$  est fort auto-invariante. On a donc, d'après le théorème 2.3.3.,  $A(X_{\varepsilon}(y), \varepsilon, -FUO)$  est contenu dans  $\text{Int } A(X_{\varepsilon}(y), \varepsilon, -FUO)$ , ce qui nous donne que l'intersection  $\text{Int}(A(x, T)) \cap \text{Int } A(X_{\varepsilon}(y), \varepsilon, -FUO)$  est différent de l'ensemble vide. Par suite on a :

$$\overline{A(x, T)} \cap \text{Int}(A(X_{\varepsilon}(y), \varepsilon, -FUO)) \neq \emptyset$$

mais  $A(x, T)$  est égale à  $\text{Int } A(x, T)$ . Il en découle que

$$\text{Int}(A(x, T)) \cap \text{Int } A(X_{\varepsilon}(y), \varepsilon, -FUO) \neq \emptyset$$

par conséquent  $X_{\varepsilon}(y) \in \text{Int } A(x, T + p)$ ,  $p \leq \varepsilon$ . On a cette dernière appartenance parce que les champs sont complets, plus précisément on a utilisé le fait que les applications  $x \longrightarrow X_t(x)$ ,  $X \in F$  sont des difféomorphismes.

Par suite on a clairement

$$(X, 1)_{\varepsilon}(y, T + p - \varepsilon) \in \text{Int } (S(\hat{F})(x, 0)), \quad 0 \leq p \leq \varepsilon$$

ou encore en posant  $\varepsilon - p = \alpha$

$$(X, 1)_{\varepsilon}(y, T - \alpha) \in \text{Int } (S(\hat{F})(x, 0)),$$

En d'autres termes on a

$$\forall X \in F, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha \in ]0, \varepsilon[ \text{ tel que } (X, 1)_{\varepsilon}(y, T - \alpha) \in \text{Int } S(\hat{F})(x, 0)$$

on prend  $\varepsilon$  assez petit et comme le champ  $(X, 1)$  est continue, on peut trouver  $\alpha \in ]0, \varepsilon[$  tel que  $(y, T - \alpha)$  appartienne à  $\text{Int}(S(\hat{F})(x, 0))$ , c'est-à-dire le point  $y$  appartient à  $\text{Int}(A(x, T - \alpha))$ . On peut aussi le voir de cette façon :

On rappelle que  $\overline{\text{Int } A(x,T) \times \{T\}} = (\overline{\text{Int } S(\hat{F})(x,o)} \cap (M \times \{T\}))$   
 (remarque théorème 3.2.8.). On sait que  $y \in \overline{\text{Int } A(x,T)}$ , donc le point  $(y,T)$   
 appartient à  $\overline{\text{Int } (S(\hat{F})(x,o))}$ , c'est-à-dire  $\overline{\text{Int } S(\hat{F})(x,o)}$  est un voisinage  
 ouvert de  $(y,T)$ . il existe alors un réel  $z > 0$  tel que pour tout  $|t| \leq z$  on  
 ait  $(X,1)_t(y,T) \in \overline{\text{Int } (S(\hat{F})(x,o))}$ , donc  $(X_t(y), T+t)$  appartient à  $\overline{\text{Int } S(\hat{F})(x,o)}$ .  
 En particulier pour  $-t$  négatif et  $t < T$  on a  $(X_{-t}(y), T-t)$  qui appartient à  
 $\overline{\text{Int } (S(\hat{F})(x,o))}$  d'où

$$X_{-t}(y) \in \overline{\text{Int } A(x,T-t)} \quad X \in F \text{ et } t \leq z.$$

mais le point  $X_{-t}(y)$  appartient à l'ensemble d'accessibilité  $A(y,t, -FUO)$   
 où  $-F$  est la famille opposée de  $F$  et  $0$  est le champ nul dans  $M$ . La  
 famille  $-FUO$  est fort auto-invariante, donc d'après le théorème 2.3.2.

$A(y,t, -FUO) \subset \overline{\text{Int } A(y,t, -FUO)}$ . De  $X_{-t}(y)$  qui appartient à

$\overline{\text{Int } A(x,T-t)}$  et à  $A(y,t, FUO)$ , il découle

$$\overline{\text{Int } A(x,T-t)} \cap \overline{\text{Int } A(y,t, FUO)} \neq \emptyset$$

ou encore

$$\overline{\text{Int } (A(x,T-t) \cap A(y,t, FUO))} \neq \emptyset$$

mais  $A(y,t, -FUO) = \bigcup_{0 \leq \alpha \leq t} UA(y,\alpha, -F)$ , alors il existe  $\alpha \in ]0, t[$  tel que

$\overline{\text{Int } A(x,T-t) \cap A(y,\alpha, -F)} \neq \emptyset$ . On en déduit que  $y \in \overline{\text{Int } A(x,T-(t-\alpha))}$ .

On choisi  $t$  assez petit, de deux choses l'une

. si  $\alpha = t$ ,  $y \in \overline{\text{Int } A(x,T)}$

. si  $0 \leq \alpha < t$ , alors  $\alpha \leq t < z$  et le réel  $t-\alpha$  est très petit.

Soit  $X \in F$ , puisque  $X(y) \neq 0$ , on peut trouver  $z_0$  tel que pour tout  $|j| \leq z_0$

$X_j(t) \in \overline{\text{Int } A(x,T-(t-\alpha))}$ . On peut choisir  $z_0 > z$  ou  $t < z_0 < z$  et comme  $t-\alpha < t$

alors  $X(y) \in \text{Int } A(x, T - (t - \alpha))$ , d'où  $y \in \text{Int } A(x, T)$ . Ceci exprime que  $\overline{\text{Int } A(x, T)} \subset \text{Int } A(x, T)$

On a donc montré  $\overline{\text{Int } A(x, T)} = \text{Int } A(x, T)$

Remarque : Trois facteurs essentiels ont joué dans la démonstration ci-dessus.

$$\begin{aligned} \cdot \overline{\text{Int } A(x, T) \times \{T\}} &= \overline{\text{Int } S(\hat{F})(x, 0) \cap M \times \{T\}} \text{ et} \\ \text{Int } A(x, T) \times \{T\} &\subset \text{Int } S(\hat{F})(x, 0) \end{aligned}$$

. La continuité des champs de vecteurs, c'est-à-dire si un point  $y$  appartient à un voisinage  $\mathcal{V}_y$ , on peut trouver, pour  $X$  tel que  $X(y) \neq \emptyset$ , un réel  $z$  assez petit et pour tout  $|t| < z$  on ait  $X_t(y) \in \mathcal{V}_y$ .

. Dans un espace topologique, si  $\text{Int}(A) \cap \bar{B} \neq \emptyset$  alors  $A \cap B \neq \emptyset$  (voir préliminaire topologique 3.1.4.).

Enfin, en suivant scrupuleusement la démarche de cette démonstration, on constate qu'il est prouvé

$$\overline{\text{Int } (S(\hat{F})(x, 0))} = \text{Int } (S(\hat{F})(x, 0))$$

Maintenant nous allons proposer une deuxième démonstration de cette proposition, en utilisant directement la propriété (1). En quelque sorte nous allons prouver le cheminement

$$(1) \implies (1')$$

Considérons la famille  $\{(F, 0) \cup (F, 1)\}$  définie sur  $M \times \mathbb{R}$  (chapitre précédent). On rappelle que cette famille est auto-invariante et il est clair que la famille  $\hat{F}_0 = \{(F, 0) \cup (F, 1) \cup (0, 0)\}$  (où  $(0, 0)$  est le champ nul sur  $M \times \mathbb{R}$ ) est fort auto-invariante, donc d'après (1)

$$\overline{\text{Int } A(x, 0), T, \hat{F}_0} = \text{Int } A(x, 0), T, \hat{F}_0$$

L'ensemble d'accessibilité  $A(x,0), \{T\}, (F,0) \cup (F,1)$  est exactement égal à  $A(x,T) \times ]0, T[$ , on a donc l'inclusion

$$A(x,T) \times ]0, T[ \subset A((x,0), T, \hat{F}_0)$$

Par passage aux intérieurs, et fermetures, il s'ensuit

$$\overline{\text{Int } A(x,T) \times ]0, T[} \subset \overline{\text{Int } A(x,0), T, \hat{F}_0)} = \text{Int}(A(x,0)T, \hat{F}_0)$$

$$\text{mais } A(x,0), T, \hat{F}_0 = \bigcup_{0 \leq t \leq T} (A(x,0), t, (F,0) \cup (F,1)) = \bigcup_{0 \leq t \leq T} (A(x,t) \times ]0, t])$$

Donc

$$\overline{\text{Int } A(x,T) \times ]0, T[} \subset \overline{\text{Int} \left( \bigcup_{0 \leq t \leq T} (A(x,t) \times ]0, t]) \right)}$$

si on prend  $t \in ]0, T[$  on obtient

$$\overline{\text{Int } A(x,T) \times \{t\}} \subset \overline{\text{Int} \left( \bigcup_{0 \leq t \leq T} (A(x,t) \times ]0, t]) \right)} \cap (M \times \{t\})$$

d'où

$$\overline{\text{Int } A(x,T) \times \{t\}} \subset \overline{\text{Int} ( \bigcup_{T-t \leq \alpha \leq T} A(x, \alpha) ) \times \{t\}}; \quad 0 < t < T$$

On en déduit l'inclusion

$$\overline{\text{Int } A(x,T)} \subset \overline{\text{Int} ( \bigcup_{T-t \leq \alpha} A(x, \alpha) )}; \quad 0 < t < T$$

que l'on peut encore écrire

$$\overline{\text{Int } A(x,T)} \subset \overline{\text{Int} ( \bigcup_{0 \leq \alpha \leq t} A(x, T-\alpha) )}; \quad 0 < t < T.$$

On pose  $A_t = \text{Int} (U(A(x, T-\alpha)))$ . On a clairement  
 $0 \leq \alpha \leq t$

$$\text{Int } \overline{A(x, T)} \subset \text{Int} \left( \bigcap_{0 < t < T} A_t \right) ;$$

La famille  $A_t$  est une famille croissante d'ouverts, donc leur intersection est égale à l'ensemble  $A_\varepsilon$  avec  $\varepsilon = \inf (t_i ; 0 < t_i < T)$  on a donc

$$\text{Int } \overline{A(x, T)} \subset \text{Int} (A_\varepsilon)$$

Si on prend un point  $y$  appartenant à  $\overline{\text{Int}(A(x, T))}$ , il est facile de voir que  $y$  appartient à  $\text{Int} A(x, T-\varepsilon)$ . Soit  $X \in F$  tel que  $X(y) \neq 0$ , puisque  $\text{Int} A(x, T-\varepsilon)$  est un voisinage de  $y$ , il existe un nombre réel  $\alpha > 0$  tel que pour tout  $|t| < \alpha$  on ait  $X_t(y) \in \text{Int} (A(x, T-\varepsilon))$ . Vraisemblablement  $\varepsilon \leq \alpha$ , on a donc  $X_{-\varepsilon}(y) \in \text{Int} A(x, T-\varepsilon)$ . Il apparaît évidemment que  $y$  appartient à  $\text{Int} A(x, T)$ . Ceci montre  $\overline{\text{Int} A(x, T)} = \text{Int} A(x, T)$ .

La seule chose à vérifier est

$$A(x, T) \times ]-\varepsilon, \varepsilon[ = A(x, 0), T, (F, 0) \cup (F, 1) \text{ pour tout } T > 0$$

Cela est à peu près évident. En effet l'inclusion  $A(x, 0), T, (F, 0) \cup (F, 1)$  est claire. Soit maintenant  $(z, t) \in A(x, T) \times ]-\varepsilon, \varepsilon[$ . Le point  $(z, t)$  s'écrit par définition de  $A(x, T)$

$$(z, t) = (X_{t_1}^1 \circ \dots \circ X_{t_p}^p (x), t) \text{ avec } X^i \in F \text{ et } t_i \geq 0, \sum t_i = T$$

qui peut encore s'écrire

$$(z, t) = (X, 1)_{t_1} \circ \dots \circ (X^p, 1)_{T-t_p} \circ (X^p, 0)_{t_p} (x, 0)$$

Il est clair que  $(z,t)$  appartient  $A(x,o), T, (F,1)U(F,0)$ .

La proposition 3.2.12 est complètement, moyennant  $(1) \implies (1')$ , démontrée.

Remarquons qu'on a les égalités

$$A(x,T) \times \{T\} = A(x,o), T, (F,0)U(F,1) \cap M \times \{T\} = A(x,o), T, (F,0)U(F,1)U(o,o) \\ M \times \{T\} .$$

A partir de là, la proposition 3.2.13 est prévisible, en tant que résultat.

Si on considère la famille  $\{(F,0)U(0,1)\}$  sur  $M \times R$  on a l'égalité  $A(x,T) \times \{0\} = A(x,o), T, (F,0)U(0,1) \cap M \times \{0\}$  et cette famille est fort auto-invariante. Donc on tire la propriété (1') à partir de celle de  $A(x,o), T, (F,0)U(0,1)$ . Mais nous omettons cette procédure.

CONCLUSION

Soit  $F$  une famille de champs de vecteurs, auto-invariante complète sur une variété  $M$  de dimension  $n$  de rang  $x$  au point  $x$  (si ce n'était pas le cas il suffirait de remplacer  $M$  par  $G(F).x$ ). L'idéal  $J(F)$  est de rang  $n$  ou  $n-1$  au point  $x$ . Si ce rang est  $n$ , alors  $\text{Int } A(x,t) = \text{Int } A(x,t)$  et  $\overline{A(x,t)} = \text{Int } A(x,t)$ . Si le rang de  $J(F)$  est  $n-1$  et si la famille  $\hat{F}$  est auto-invariante alors  $G(J(F).x) = G_0(F).x$  est une sous variété de codimension 1 on a  $\overline{\text{Int } A(x,t)} = \text{Int } A(x,t)$  et  $\overline{A(x,t)} = \text{Int } A(x,t)$  par rapport à la topologie de  $G_T(F).x$ . Mais si le rang de  $J(F)$  est  $n-1$  et  $\hat{F}$  non auto-invariante on peut avoir  $\overline{\text{Int } A(x,t)} \neq \overline{A(x,t)}$ .

Le cas où je n'ai pu rien dire si  $\text{Int } (A(x,t)) = \text{Int } A(x,t)$  quand  $J(F)$  est de codimension  $n-1$  au point  $x$  et  $F$  non auto-invariante. Il serait intéressant de voir cette propriété et de donner une conclusion du genre  $\overline{\text{Int } A(x,t)} \neq \text{Int } A(x,t)$ . Pour certains exemples on peut avoir  $\text{Int } A(x,t) = \emptyset = \text{Int } A(x,t)$  par rapport à la topologie de  $G_T(F).x$ .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] H.T. SUSSMANN, Orbits of families of vector fields and integrability of distribution, Trans. 00, 95-116 (1972).
- [2] DIEUDONNE, Foundations of Modern Analysis, Academic Press, NEW-YORK, 1969.
- [3] C. LOBRY, Bases Mathématiques de la théorie du contrôle, cours de troisième cycle. Multigraphié Bordeaux (1978).
- [4] HIRSCHORN, R.M. Controllability in non linear systems, J. Differential Equations 19 (1975) p. 46-61.
- [5] C. COBILLON : Géométrie différentielle et Mécanique analytique.
- [6] B. LEE and L. MARKUS. Foundations of Optimal control theory J. Wiley and Sons Inc. New-York (1967).
- [7] H. KUNITA. Supports of Diffusion Processes and Controllability Problems. Proc of Intern. Symp SDE Kyoto 1976, pp. 163-185.
- [8] J. JURJEVIC. Attainable sets controllability ; a geometric approach, in : Lectures Notes in Econom and Maths systems No.106 pp. 219-251.
- [9] E. KALOUPSIDIS. Accesssibility an stability of non linear systems Doctoral Dissertation sciences : University of Washington (1976).
- [10] KRENER, A.J. A generalization of Chow's theoreme and the bang-bang theoreme to non linear control problems, SIAM J. Control, 12 (1974), 43-52.
- [11] H. KUNITA, on the controllability of non-linear systems, Appl. Maths Optim 5,89-99 (1979).
- [12] C. LOBRY, controlabilité des systèmes non linéaires, SIAM J. Control, 8, 573-605 (1970).
- [14] R. HERMANN and A.J. KRENER, Non linear controllability and observability, IEEE Trans. Automat-Control, AC 22 n° 5 728-740 (1977).
- [15] R.W. BROCKETT : Non linear systems and differential geometry, Proc. IEEE, 64, n° 1, 61-72.
- [16] SUSSMANN, H.J. and JURDJEVIC, V, Controllability of non linear systems, J. Differential Equations 12 (1972), 95-116.
- [17] V. JURDJEVIC, H.J. SUSSMANN. Control systems on Lie groups SIAM CONTROL 12(2) (1972) p. 313-325.
- [18] G. SALLET : Sur la Structure de l'Ensemble d'Accessibilité de certains systèmes : Application à l'Equivalence des Systèmes Math. Systems Theory 18, 125-133 (1985).

- [<sup>-</sup>19\_] V. JURDJEVIC and I. KUPKA, Control Systems on semi-simple Lie groups and their homogeneous spaces, Ann-Inst.Fournier, 31, 4, 151-197 (1987).
- [<sup>-</sup>20\_] V. JURDJEVIC and I. KUPKA, Control systems Subordinated to a group action : Accessibility, J. Differential Equations, 39, n°2, 186-211 (1981).
- [<sup>-</sup>21\_] R. HIRSCHORN. Topological semi-groups and controllability in bilinear systems.  
Ph. D. Thesis  
Division of Engineering and Applied Physics.  
Harvard University (Sept. 1973)
- [<sup>-</sup>22\_] C. MARLES, P. LIEBERMANN : Geometrie symplectique, bases mathématiques de la mécanique.
- [<sup>-</sup>23\_] D. LEBORGUE : Calcul différentiel et géométrie. Presse Universitaire de France.
- [<sup>-</sup>24\_] P. MOLINO. Théories des structures, le problème de l'Equivalence. Lectures notes in Mathematics (SPRINGER) 1977.
- [<sup>-</sup>25\_] G. SALLET. Controlabilité des systèmes non linéaires. Thèse d'Etat Université de METZ (1984).
- [<sup>-</sup>26\_] T.NAGANO "linear differential systems with singularities and an application to transitive linear algebres"  
J. Math. Soc. Japan 18 (1966) 398-404.
- [<sup>-</sup>27\_] I.B. RHODES Organic systems, states and modern Control Theory.