



**HAL**  
open science

## Les espaces géographiques flous

Christiane Rolland-May

► **To cite this version:**

Christiane Rolland-May. Les espaces géographiques flous. Géographie. Université Paul Verlaine - Metz, 1984. Français. NNT : 1984METZ007L . tel-01775739

**HAL Id: tel-01775739**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01775739v1>**

Submitted on 24 Apr 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

UNIVERSITE DE METZ

U.E.R. LETTRES ET SCIENCES HUMAINES

# LES ESPACES GEOGRAPHIQUES FLOUS

Christiane ROLLAND-MAY

Directeur de recherches Monsieur le Professeur F. REITEL

Thèse pour l'obtention du titre de Docteur d'Etat ès Sciences Humaines

soutenue le 5 mars 1984

Jury de thèse

MM.

F. REITEL Président

P. CLAVAL

G. PAPAGEORGIOU

C. PONSARD

J. M. PROTH

J. P. RAMAN

Professeur, Université de Metz

Professeur, Paris-Sorbonne

Professeur, Mac Master University, Toronto

Professeur, Université de Dijon

Ingénieur, INRIA Paris

Professeur, Université de Metz

A la mémoire de mon père

CHARLES MAY

pour qui la dernière guerre  
dut être une suite tragique  
de jours incertains jusqu'au  
point final de son existence,  
dans un champ de Lettonie.

## AVANT-PROPOS

Aborder "les espaces géographiques flous", tenter de les définir, d'en proposer une axiomatique et des modèles d'analyse n'est pas chose aisée. Je suis d'autant plus reconnaissante à tous ceux et à toutes celles qui, tout au long de ce travail, et sous des formes diverses, m'ont apporté aide, conseils et soutien.

Mes remerciements vont tout d'abord à Monsieur le Professeur F. REITEL, Doyen de la Faculté des Lettres, Directeur du Département de Géographie qui a bien voulu accepter de diriger cette thèse. Je le remercie de la confiance qu'il m'a toujours accordée, de ses conseils où il a su doser avec sagesse ses encouragements à aller de l'avant et sa constante préoccupation de me faire faire un véritable travail de géographe.

Ma reconnaissance s'adresse également à Monsieur le Professeur C. PONSARD, Directeur de l'Institut de Mathématiques Economiques de la Faculté de Science Economique et de Gestion de Dijon. Il a accepté la lourde tâche de me faire acquérir une formation mathématique à laquelle je n'étais pas préparée, de reprendre, en alternant énergie et bienveillance, mes efforts, maladroits souvent, difficiles toujours, pour cerner, exprimer, expliquer cette idée qui lui est chère d'espaces flous.

Que Monsieur le Professeur P. CLAVAL veuille bien accepter mes remerciements pour son accueil chaleureux, ses critiques et ses conseils. Sa haute compétence et sa pédagogie m'ont été des plus précieuses pour exprimer avec clarté toutes les implications géographiques du flou. J'espère avoir répondu à son attente.

Mes remerciements vont également à Messieurs G. PAPAGEORGIOU, professeur à Mac Master University (Toronto), J.M. PROTH, directeur de recherches à l'Institut National de Recherche en Informatique Appliquée, J.P. RAMAN, professeur à l'Université de Metz, directeur de l'Institut Supérieur de Management de Metz, qui m'ont fait l'honneur de s'intéresser à ma recherche et d'accepter de participer à mon jury de thèse.

Lors de nombreuses discussions, Monsieur le Professeur G.N. FISCHER m'a permis d'entrevoir l'application de la notion d'espaces flous à l'espace industriel. Il a également ouvert de riches perspectives en associant cette notion à celle d'espaces-liberté. Je lui suis très reconnaissante de m'avoir aidé à élargir ainsi mon horizon géographique.

Enfin, je ne pourrai citer tous ceux qui, au fil de discussions, réflexions et critiques, m'ont fait diversifier mon thème, le nuancer, en entrevoir les possibilités d'application ; qu'ils trouvent ici une pensée reconnaissante.

Mettre au point matériellement un travail de thèse demande minutie, patience et sûrement autant d'efforts que la conception même du texte. Madame BIGOT a accepté la lourde charge de l'élaboration définitive du texte, Madame MEDDAHI de la confection des cartes et croquis, Madame HERREYE de la mise en page de ces dernières. Je les remercie bien vivement en soulignant le plaisir que j'ai eu de travailler avec elles.

Il me reste à me tourner vers les miens, vers ceux qui, jour après jour, semaine après semaine, ont supporté, encouragé, stimulé, aimé en un mot. Ils ont été le mur auquel je me suis appuyée, trop sans doute, puisant dans leur patience les ressources nécessaires pour finir ce travail.

C'est chose faite à présent.

Janvier 1984.

Penser, c'est jouir de la fluidité  
de l'esprit, épousant toutes les  
modalités du oui, du non, du peut-être.

Paul GUTH, 1984

## INTRODUCTION GENERALE

Proposons, en première approche, une définition concrète d'un espace géographique flou. Nous désignerons par cette expression un espace dont il est difficile, voire impossible, et ce pour des causes diverses, de réaliser une description précise, complète et certaine. Espace "brouillé" pour ainsi dire, difficilement lisible pour lequel la logique cartésienne d'appartenance ou de non-appartenance d'un élément à cet espace ne peut s'appliquer : le chercheur dira que tel lieu appartient à l'espace, "mais pas totalement", ou lui appartiendra "plus ou moins" ; dans certains cas également il ne sera pas "entièrement" sûr de l'appartenance de tel lieu à cet espace. Le terme *flou* est donc chargé pour nous tout d'abord, d'une signification géographique, avant même la signification mathématique que nous lui donnerons plus loin. Cette notion de flou spatial nous semble fondamentale : elle dépend aussi bien de critères objectifs (une zone d'influence d'une ville peut être considérée comme un espace géographique flou) que subjectifs (espaces perçus ou vécus), et concerne aussi bien la géographie physique, les différentes branches de la géographie humaine et toutes les sciences "spatiales".

Cependant, force nous est de constater qu'un espace géographique flou ne peut, de par sa structure indéfinie, être *mesuré* ; il échappe alors, a priori, au champ d'investigation scientifique qui concerne uniquement les espaces "non flous". De ce fait il est, soit soumis à une étude purement qualitative, soit "transformé" en espace non flou et soumis à des méthodes d'analyse spatiale non adéquates ce qui aboutit à trop simplifier, voire fausser la réalité géographique.

La thèse que nous soutenons dans ce travail est qu'un espace géographique flou, peut, et doit, être traité avec des méthodes quantitatives, donc peut et doit être considéré comme faisant partie du domaine scientifique. Il faut pour cela mettre au point, à la fois une réflexion épistémologique sur la notion d'espace flou, et une démarche

d'analyse spatiale adaptée. Nous le ferons en nous appuyant sur la théorie mathématique des sous-ensembles flous exprimée formellement par ZADEH (1965), reprise et développée en France par KAUFMANN (1973), et surtout appliquée à l'analyse spatiale économique par PONSARD (voir bibliographie) et son école (I.M.E. Dijon).

Notre démarche s'effectuera en deux étapes.

La première partie de notre travail consiste en une présentation à la fois géographique, formelle et théorique d'un espace géographique flou.

Nous y entreprenons tout d'abord de préciser, à partir d'une approche géographique, les axiomes fondamentaux qui sous-tendent la notion d'espace flou. Cette base axiomatique nous sera utile tout au long du travail car elle permettra constamment de formaliser les notions dégagées.

Nous étudions dans les chapitres suivants, les différents types d'espaces géographiques. Le chapitre II, consacré aux espaces géographiques non flous, montre que ce sont en fait des cas particuliers d'espaces flous. Leur formalisation correspond à une expression plus étroite, incluse dans la formalisation plus générale des espaces flous. Ainsi les méthodes utilisées par la "Nouvelle Géographie" ne sont que des expressions particulières de méthodes plus générales susceptibles de prendre en compte le flou spatial.

Les chapitres III et IV traitent successivement des espaces imprécis et incertains. Nous y proposons à chaque fois une définition géographique, formelle, puis l'exposé des bases théoriques et méthodologiques de ces notions. Le traitement de l'imprécision fait appel à la théorie des sous-ensembles flous, celui de l'incertitude se fonde soit sur la définition d'un sous-ensemble probabilisé, soit sur celle d'un sous-ensemble dont on évalue la possibilité.

La deuxième partie de notre travail concerne des modèles de traitement d'espaces géographiques flous.

Le chapitre V précise tout d'abord la démarche générale qui, de l'espace géographique représenté, autrement dit du document géographique, arrive à mettre en évidence l'organisation de l'espace géographique selon un thème, une structure pré-définie. Les modèles de traitement sont différents selon que l'espace représenté est objectif (chapitre VI) ou flou (chapitre VII). Leur but est cependant toujours éminemment géographique : dégager une *régionalisation floue de l'espace*.

Le chapitre VIII enfin, traite d'un exemple. Partant du modèle de valuation des espaces subjectifs, il s'attache à dégager la structure du Centre-Ville de Metz (France), à partir d'un ensemble de cartes mentales.

Dans tout cet exposé préliminaire, et dans tout le travail qui va suivre, nous donnons ainsi à "flou" une *signification fondamentalement géographique*. Est "flou", comme nous l'avons dit, un espace peu lisible, brouillé. Cette notion englobe alors, en géographie, les notions d'*espaces imprécis* c'est-à-dire mal délimités et d'*espaces incertains*, c'est-à-dire mal connus.

Nous posons donc ici qu'*un espace géographique flou est un espace imprécis et -ou- incertain*. Nous suivons en cela PRADE (1983) qui utilise, à propos de sa thèse sur le raisonnement artificiel, le terme de flou qui englobe, là-aussi, les notions d'imprécision et d'incertitude.

Si l'on s'en tient à la stricte théorie mathématique des sous-ensembles flous, un *sous-ensemble flou est un sous-ensemble imprécis*.

Dans cette théorie l'incertain est défini par une notation supplémentaire associée au terme "flou". Ainsi dans un *sous-ensemble flou probabilisé*, l'aléa (PONSARD, 1979) est exprimé en termes de probabilités. Un sous-ensemble flou auquel on a associé une valuation qui en exprime *la possibilité* est tel que l'incertitude est plus large et se définit formellement de façon différente.

Nous étudierons ces différentes notions au cours de ce travail

et respecterons leurs notations mathématiques mais nous estimons que, dans le domaine géographique où, loin d'une complexité épistémologique, nous en sommes encore au stade du "défrichage", nous nous en tiendrons à une terminologie très simple :

flou = { imprécis, incertain } ,

laissant aux géographes , partant peut-être de ce travail et le continuant, le soin d'affiner notre thèse.

PREMIERE PARTIE

APPROCHE LOGIQUE DE L'ETUDE DES  
ESPACES GEOGRAPHIQUES FLOUS

---

SIGNIFICATION GEOGRAPHIQUE  
ET STRUCTURE FORMELLE

## INTRODUCTION DE LA PREMIERE PARTIE

L'espace géographique que nous sommes amenés à étudier n'est pas toujours un espace précis, parfaitement connu dans toutes ses composantes, parfaitement mesurable aussi :

cela doit-il signifier l'abandon de toute étude autre que qualitative ?

Cette première partie de notre travail s'attache ainsi à l'étude de ce que nous appellerons l'*espace géographique flou* :

ce terme de flou doit être compris selon une double signification, à la fois d'*imprécision* et d'*incertitude*.

Il s'agit alors de proposer dans ce premier chapitre une réflexion sur la notion de flou appliquée à l'analyse spatiale, de montrer que cette notion est en fait inhérente à l'espace géographique lui-même. Elle sera en filigrane dans la définition de cet espace et dans la présentation de l'axiomatique qui sous-tendra toute étude ultérieure.

Dans les chapitres suivants nous présenterons les trois types d'espaces géographiques :

- Un espace géographique non flou (ou "ordinaire", ou "vulgaire", ou "espace géographique" tout court selon l'expression habituellement utilisée). C'est un espace précis, parfaitement connu, parfaitement mesurable, dont tous les termes sont définis avec certitude. La définition et la formulation des termes de l'axiomatique qui le concernent en font un simple cas particulier d'espace géographique. Les méthodes d'étude, qu'elle obéissent à une démarche inductive ou déductive s'appuient sur cette hypothèse fondamentale de précision dont nous développerons les différentes facettes avant de prendre un exemple caractéristique.

- Un espace géographique peut également être flou. Il faut noter, en remarque préliminaire, que nous donnons au terme "FLOU", soit "FUZZY" en anglais, une signification très large.

La définition de C. PONSARD pour qui l'expression "FUZZY economic spaces", 1980, représente les espaces économiques flous, c'est-à-dire imprécis, a été élargi par d'autres auteurs. Pour PRADE (1983), le terme "fuzzy" englobe également la notion d'incertitude.

C'est sur cette double signification que nous fonderons notre étude.

Un espace géographique imprécis est tel qu'un de ses éléments peut en faire "plus ou moins" partie. Cette notion d'"à peu près", d'"approximative appartenance" d'un élément à un ensemble suscite la méfiance : comment considérer comme mesurable et surtout comme scientifique de telles notions ? La géographie ne doit-elle pas essentiellement s'intéresser au non-ambigu ? Nous montrerons qu'une méthodologie précise de l'"imprécis" permet de considérer un espace géographique imprécis comme un objet scientifique. Ce sera l'objet de notre chapitre 3.

Enfin, nous nous attacherons à la définition, à l'expression formalisée et à l'exposé d'une méthode d'étude d'un espace incertain.

Cette notion est plus familière au géographe qui manipule souvent la notion de probabilité. La probabilité attachée à la connaissance d'un événement (ou à l'appartenance d'un élément à un ensemble) est alors égale au rapport du nombre de cas favorables au nombre de cas possibles. La détermination de ce dernier nombre est souvent irréalisable. Là encore l'évaluation de l'incertain est mathématiquement possible et un espace géographique incertain peut encore être l'objet d'étude et d'analyse. Le chapitre 4 sera consacré à de tels espaces, leur formalisation, leur manipulation mathématique et leur signification géographique.

Une conclusion résumera les points les plus importants mis en évidence dans cette partie.

Somme toute, nous proposons de montrer que tout espace géographique, quel qu'il soit, parfaitement connu, imprécis ou incertain, peut se prêter à l'analyse spatiale et ce à deux conditions :

- La première est d'être parfaitement défini au départ de toute

analyse spatiale, c'est-à-dire *identifié dans sa structure fondamentale*, de précision, d'imprécision ou d'incertitude. Cette identification est nécessaire ; elle est possible par une analyse rigoureuse des différents termes de l'axiomatique appliquée à cet espace.

- La seconde est alors l'utilisation d'un outil méthodologique parfaitement adapté à sa structure fondamentale. Ainsi les méthodes parfaitement connues et rodées pour l'étude d'un espace géographique précis, que sont par exemple les méthodes d'analyse des données, se prêtent mal à l'étude des espaces flous.

Pour ces derniers la théorie des sous-ensembles flous semble être l'outil le mieux adapté. Cette théorie offre des possibilités moins riches que d'autres théories mathématiques, mais elle a l'immense avantage de permettre la formalisation, la manipulation mathématiques de l'imprécision et de l'incertain.

Notre "thèse" est donc que tout espace géographique peut et doit être formulé de façon la plus générale possible comme un espace géographique flou.

Dans *le cas particulier* où chaque élément est parfaitement défini dans son appartenance ou sa non appartenance à l'espace, et où il n'y a aucune incertitude de quelque nature que ce soit, on peut parler d'espace géographique précis.

Dans les autres cas on a d'autres types d'espaces géographiques. Leur analyse relève d'autres raisonnements et d'autres méthodes mais elle n'est ni irréalisable, ni à négliger.

Démontrer cette thèse est l'objet de cette première partie.

CHAPITRE I

LA NOTION D'ESPACE GEOGRAPHIQUE FLOU

DE L'APPROCHE INTUITIVE

A

L'APPROCHE AXIOMATIQUE

A - SIGNIFICATION GEOGRAPHIQUE DE LA NOTION DE FLOU

B - AXIOMATIQUE DE L'ESPACE GEOGRAPHIQUE FLOU

A - SIGNIFICATION GEOGRAPHIQUE DE LA NOTION D'ESPACE GEOGRAPHIQUE FLOU

I - Approche des fondements géographiques de la notion de "flou"

1. Sémantique de l'"à peu près" en analyse spatiale intuitive

Dans ses rapports avec l'espace géographique, l'homme utilise avec abondance tout un ensemble de termes dont la sémantique traduit la notion de flou spatial ; autrement dit, la notion d'espace géographique flou est une notion "immédiate", au sens de "premier", non réfléchie, intuitive.

Ainsi sentons-nous de façon intuitive qu'un élément spatial fait "plus ou moins" partie d'un espace géographique donné : cette notion est fréquente en ce qui concerne des espaces périphériques à des ensembles spatiaux : pays de "marches" dont on ne sait avec précision s'ils font partie d'un ensemble ou d'un autre. Le "Pays de Bitche" entre Alsace et Lorraine fait "plus ou moins" partie de ces deux "Pays" ; un Breton du Finistère considérera que l'habitant de Rennes ou d'Ille et Vilaine ne fait que "plus tout à fait" partie de la "vraie" Bretagne.

Ces deux exemples illustrent cette notion très intuitive d'appartenance imprécise d'un ensemble à un ensemble plus large.

De la même façon limites et formes de l'espace géographique sont caractérisées par cette notion d'"à peu près", de "plus ou moins". G.N. FISCHER (1975) souligne dans sa thèse sur l'espace industriel que, si certaines limites semblent infranchissables à l'ouvrier nouveau-venu dans l'entreprise, celui-ci ne tardera pas à les considérer comme étant "poreuses", élastiques : des secteurs interdits peuvent être parcourus, "apprivoisés", utilisés comme espaces-refuges, "espaces-de-liberté" où l'on échappe à la surveillance ou aux contraintes. Ainsi, au delà d'une interdiction formelle, le vécu spatial saisit le flou de la notion de limite spatiale et s'en accommode fort bien.

La géographie intuitive de la relation entre lieux est également

riche en "à peu près" très significatifs. Il est trivial de parler de "distance-temps" entre deux sites ("j'habite à dix minutes d'une station du R.E.R.") mais comment définir autrement que par des termes de "distance floue" (sans en préciser encore la signification) les expressions :

"c'est juste à côté", c'est-à-dire la distance est négligeable,

"ce lieu se situe à proximité de ...",

"j'habite dans les environs de Metz", comme si je pouvais faire abstraction de la distance réelle qui sépare mon domicile à cette ville.

L'"à peu près" est enfin couramment utilisé pour définir, en une approche intuitive, les caractères d'un espace géographique :

telle région est "plus ou moins" agricole ou industrielle, tel plateau du centre du bassin parisien est "très", "peu", "moyennement" fertile, telle ligne aérienne est "plus ou moins" fréquentée selon les circonstances locales ou générales.

La géographie de l'"à peu près" utilise alors pour définir les caractères d'un espace, tout l'arsenal des adverbes, expressions adverbiales de quantité ou autres expressions qui seront porteuses d'une signification "plus ou moins".

Faut-il alors ne voir, dans cette expression spatiale intuitive, quotidienne, générale et non réservée aux seuls géographes, des informations fausses trop vagues, en un mot, inutilisables ?

Il nous semble que la réponse est négative.

Il y a certes, un certain refus, une certaine paresse de la part de l'homme pour définir avec plus de précision ses rapports avec l'espace, pour quantifier avec précision les données spatiales qu'il énonce (mais est-ce toujours nécessaire, et le "message spatial flou" n'est-il pas parfaitement reçu par l'interlocuteur ?) Nous nous demandons si cette sémantique de "flou" ne recouvre pas une notion fondamentale, à savoir que l'espace géographique est lui-même flou dans sa structure fondamentale. Il est alors perçu et exprimé comme tel par celui qui y est inséré.

## 2. Définitions de base de l'imprécision et de l'incertitude

Ce terme d'espace géographique *FLOU*, recouvre alors, selon nous, et dans tout ce travail, deux significations différentes qu'il nous apparaît indispensable de bien distinguer.

2.1. En premier lieu, un espace géographique flou peut être encore qualifié d'espace imprécis. Il s'agit alors d'un espace auquel les lieux (sites ou composantes spatiales comme nous les appellerons désormais) appartiennent "plus ou moins", respectant ainsi la notion intuitive évoquée plus haut. Il peut s'agir d'une imprécision inhérente à l'espace géographique lui-même, qui se traduit par des limites, une forme, une notion de distance totalement imprécises. Ainsi si l'on essaye de représenter cartographiquement la zone consacrée aux vergers de mirabelliers sur le front de la côte de Moselle, aux environs de Metz (ROLLAND-MAY, 1972) on ne peut qu'en traduire l'imprécision : aucune limite précise ne la sépare du secteur en friches et broussailles qui occupe la partie supérieure du versant. Les deux formations végétales s'interpénètrent, s'enchevêtrent tant du fait de la "conquête" du versant par les friches, qu'on ne peut que définir un espace arboricole imprécis dans son étendue, ses limites et sa forme.

Est imprécis également un espace défini par un prédicat imprécis, c'est-à-dire par un terme, une expression, un ensemble de caractères qui ne sont pas totalement définis.

L'imprécision n'est plus alors inhérente à l'espace mais liée à une formulation relative à cet espace. P. HAGGETT (1973) citant et reproduisant des cartes de SINNHUBER, montre ainsi l'imprécision de la définition de l'Europe centrale, que ce soit en tenant compte de caractères physiques ou de critères humains. Dans ce cas, l'imprécision est une notion globale et complexe, relative à la fois :

- à l'imprécision des limites donc au "flou" de la forme, de l'étendue, des distances de l'Europe centrale.

- à l'imprécision de l'appartenance des sous-espaces à l'ensemble en question. Il est bien évident, selon les cartes évoquées, que

des sous-régions ne vont pas appartenir à l'Europe centrale avec la même "force" : la Tchécoslovaquie fera "plus" partie de l'Europe centrale que la Yougoslavie ; la Pologne aura des caractères de type "Europe centrale" plus marqués que le Bassin Souabe-Franconien sur le plan des critères physiques par exemple.

- de cette imprécision de l'appartenance des composantes spatiales à un espace géographique découle une dernière notion : *la négation du principe du tiers exclu*. Effectivement telle région (par exemple Yougoslavie) appartiendra *à la fois* à l'Europe centrale et à l'Europe méditerranéenne en présentant des caractères qui l'apparentent au premier type *et* des caractères qui la lient au deuxième.

En d'autres termes, une composante spatiale peut appartenir, à des degrés divers, à deux (ou plus) espaces géographiques.

Pour prendre à présent un exemple proche évoquons l'organisation régionale française : décrite par MERLIN (1973), elle est significative de l'existence d'espaces régionaux imprécis au sens où nous l'entendons (croquis I<sub>1</sub>).

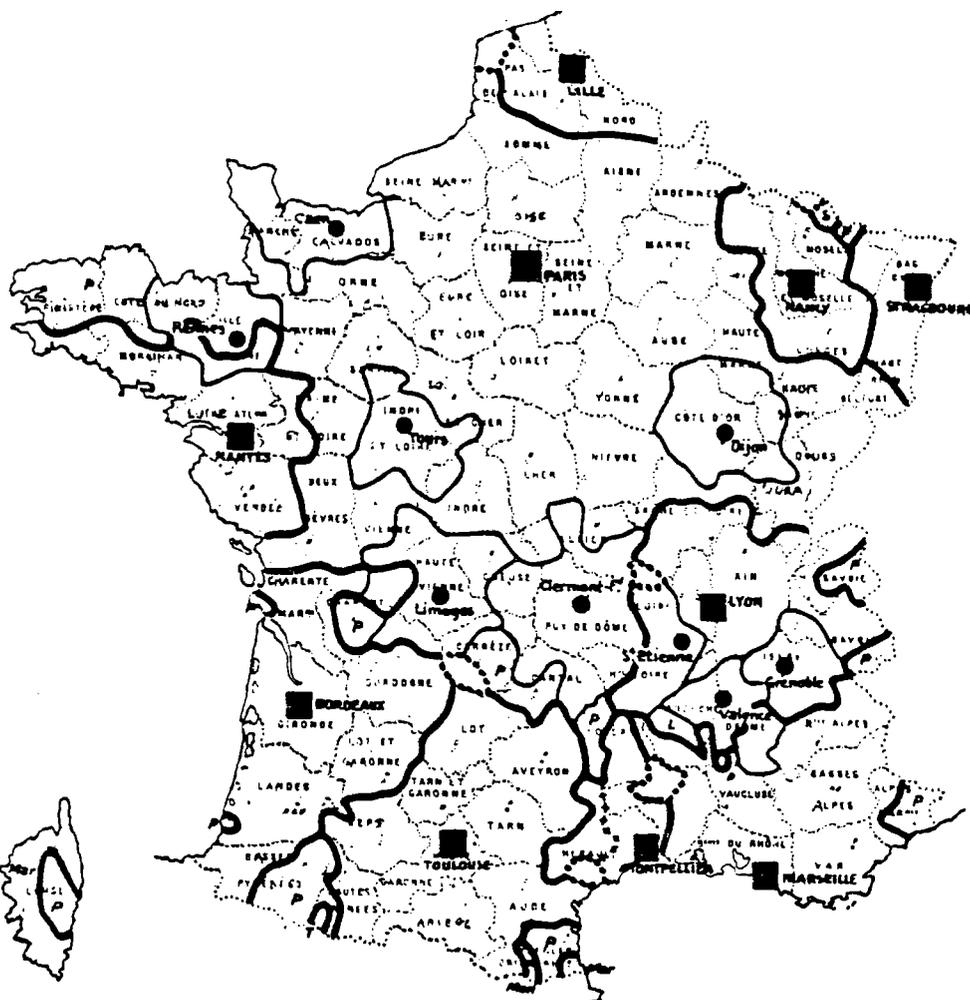
2.2. En second lieu, le terme de "FLOU" pris dans un sens géographique, est synonyme d'incertain.

Nous définissons *un espace géographique incertain*, comme un espace dont on est pas sûr de l'appartenance des éléments qui le composent.

La notion d'incertitude est donc relative à l'observateur et non à l'espace lui-même ; elle définit le degré de connaissance -ou à l'inverse le degré de non-connaissance- du sujet en ce qui concerne les composantes spatiales de l'espace géographique. Ainsi, dresser actuellement une carte des gisements pétroliers existants et potentiels, revient à énoncer qu'il est "possible" que telle région soit riche en pétrole alors que telle autre ne l'est pas. Si nous développons cet exemple, nous pouvons dégager deux nuances importantes dans cette notion d'incertitude. En premier lieu l'incertitude repose sur la méconnaissance ou la connaissance incomplète des conditions techniques et des facteurs économiques qui *dans le futur*, feront que telle région devienne un lieu

Carte I4. - Espaces régionaux imprécis

Ressorts d'influence des villes françaises d'après les communications téléphoniques. (d'après MERLIN 1973).



- — Villes attractives principales et limites de leurs ressorts d'influence
- — Villes attractives secondaires et limites de leurs ressorts d'influence.
- +++++ Limites respectives des attractions de Toulouse et de Marseille, abstraction faite de l'influence de Montpellier.
- P Dans les zones de résurgence de l'influence d'une ville attractive lointaine, celle-ci (le plus souvent Paris), est indiquée par son initiale.
- ⊖ Limites de groupements téléphoniques automatiques dont la dépendance est incertaine.

d'extraction pétrolière. Cette notion d'incertitude associée à un futur plus ou moins connu est celle des économistes et peut également être utilisée par les géographes.

Mais ces derniers peuvent considérer la notion d'incertitude spatiale indépendamment de la dimension temporelle. Ainsi l'affleurement des marnes toarciennes sur le front de côte de Moselle, déjà cité, est un espace incertain : masqué par des éboulis de pente, repéré grâce à des sondages ponctuels ou des tranchées occasionnelles, il est tel que l'on ne peut que dire : "il est possible (à un degré que l'on s'efforcera de préciser et de maximiser) que cet endroit fasse partie de cet affleurement". L'incertitude de cet espace est bien relative aux moyens techniques dont dispose l'observateur.

Cependant, que cette incertitude ait une signification spatio-temporelle ou simplement spatiale, il est évident qu'une connaissance parfaite, du fait de nouvelles conditions d'étude, d'observations et techniques, la fera disparaître.

### 2.3. Enfin, la notion d'espace géographique flou peut recouvrir une conjonction des deux notions exposées ci-dessus.

Un espace géographique peut être à la fois incertain *et* imprécis, associant ainsi l'idée de mauvaise connaissance d'un espace et d'appartenances variables des composantes spatiales à cet espace. Les exemples ne manquent pas dans la démarche géographique. Le cas suivant l'illustre pleinement : "Pont-à-Mousson appartient-il à la région messine et à quel degré ?"

Le premier terme de la question illustre notre méconnaissance de l'appartenance de cette petite ville à la région de Metz. Cette dernière est donc considérée comme un *espace incertain*, si, pour tout lieu autour de Metz dans un rayon choisi par l'observateur, on se pose cette question.

Le premier travail à réaliser est ainsi d'apprécier la possibilité que tout lieu envisagé (et Pont-à-Mousson, en particulier) appartienne à cette région.

Si notre connaissance de l'espace est parfaite, cette possibilité d'appartenance d'un lieu quelconque à la région devient *certitude*, soit d'appartenance (cas 1), soit de non-appartenance (cas 2) ("Pont-à-Mousson fait partie (ou ne fait pas partie) de la région messine").

Si par contre, la connaissance spatiale est incomplète, on ne peut que déterminer un *degré de possibilité* d'appartenance (cas 3).

La deuxième partie de la question concerne le degré d'appartenance de la ville de Pont-à-Mousson à la région évoquée, question posée si, et seulement si, il y a une possibilité non nulle, ou une certitude d'appartenance c'est-à-dire si le cas 1 ou le cas 3 sont réalisés. Il restera alors à définir quelle est l'importance de cette appartenance qui sera vraisemblablement moindre que celle d'une commune située dans la banlieue immédiate de Metz.

Ces notions d'incertitude et d'imprécision spatiale considérées séparément ou ensemble, si elles sont intuitives pour l'observateur non géographe, pour l'homme inséré dans un espace donné, sont révélatrices de rapports originaux entre le chercheur et l'espace qu'il veut analyser.

### 3. L'homme, l'espace et le flou

En fait ce trinôme homme-espace-notion de "flou" que nous avons posé en termes d'analyse spatiale intuitive et dont nous venons de définir le sens, est riche d'une signification intéressante en épistémologie de l'analyse spatiale. Effectivement il illustre deux notions qui nous semblent fondamentales.

3.1. La première est que l'analyse spatiale ne se prête que partiellement, et dans certains cas particuliers seulement, à une classification nette, binaire, tranchée sans ambiguïté possible entre l'appartenance ou la non-appartenance d'une composante spatiale à un espace.

Cette observation entraîne des conclusions qui s'opposent à une conception que nous qualifierons de "booléenne" de l'analyse spatiale : les limites des espaces sont le plus souvent "floues" (même les limites

administratives ne sont pas toujours rigoureuses et précises comme le montrent DORION et LACASSE (1974) pour les frontières du Québec), des sous-espaces peuvent être à la fois partie d'un espace et d'un autre, être à la fois élément d'une hiérarchie régionale et d'une autre.

3.2. La seconde notion qui est la conséquence immédiate des notations ci-dessus, est que l'espace géographique n'a que dans certains cas une organisation "cartésienne" permettant, par exemple, une mise en évidence de types régionaux disjoints.

Autrement dit on peut avancer l'idée de la *non-transparence de l'espace géographique réel*. Le chercheur y plaque le plus souvent une classification spatiale faite selon une méthodologie choisie selon *une structure cartésienne satisfaisant son exigence de clarté, de précision et d'ordre* (classification hiérarchique ascendante, nuées dynamiques ou toute autre méthode bien éprouvée). Mais, ce faisant, il *dégage une structure qui ne correspond pas forcément, ou dans certains cas seulement, à la structure spatiale proprement dite*.

Pourtant on peut opposer à cette argumentation que les méthodes d'analyses spatiales "non floues" réussissent parfaitement à mettre en évidence la notion d'imprécision spatiale et qu'une méthodologie spécifique pour le traitement d'un espace flou est inutile.

Nous exposerons au paragraphe suivant quelques unes de ces méthodes, non pas dans le but de les décrire entièrement ou d'en faire un exposé critique, mais essentiellement pour apprécier leur capacité de mise en évidence de l'imprécision spatiale.

## II - L'imprécision spatiale et la méthode géographique "non floue"

### 1. La démarche inductive classique

Cette démarche qu'elle soit qualitative et (ou) quantitative a pour préoccupation de partir de cas particuliers pour en préciser, par une réflexion inductive, l'originalité, c'est-à-dire les

caractères géographiques qui différencient ces espaces d'autres espaces géographiques (J.B. RACINE - H. REYMOND, 1973 ; H. ISNARD, 1978). Attardons-nous à ce sujet sur la méthodologie utilisée en géographie régionale et voyons de quelle façon elle est capable d'appréhender et de mettre en évidence la notion d'imprécision spatiale. Nous retiendrons deux thèmes, à savoir la notion de limites d'un espace régional et la notion d'appartenance imprécise de sous-espaces à l'espace régional.

1.1. Empruntons à P. GEORGES (1970) une réflexion sur la notion de limite d'espace régional et son imprécision :

"... rien n'est plus difficile que la délimitation objective d'une région. Délimiter, c'est d'abord choisir des critères suivant lesquels on entend faire reposer ou la personnalité de la région étudiée, ou la classification et la division régionale sur un territoire donné" et plus loin :

"la qualification sinon toujours la délimitation, est relativement simple quand il s'agit de régions rigoureusement marquées par un ou plusieurs caractères dominants qui les opposent aux régions voisines... mais, moins une région est fortement caractérisée, solidement cimentée par des caractères communs, plus il est difficile d'en déterminer les limites. Souvent c'est par un artifice subtil et par une manière d'exercice académique que les auteurs de travaux régionaux ont proposé des limites à travers des espaces indifférenciés. Le paradoxe apparaît particulièrement dans les études portant sur les "régions de transition" et enfin :

"... dans tous les cas, les limites sont artificielles".

Cette réflexion met en évidence la difficulté de la géographie inductive classique pour prendre en compte l'imprécision de la notion de limites spatiales. Par sa conception très "cartésienne" de limite linéaire, précise, unique et continue, elle s'oblige à des choix souvent artificiels, en tout cas, arbitraires. M. ROCHEFORT (1960), dans son travail de pionnier sur l'organisation urbaine de l'Alsace a proposé plusieurs critères pour définir les limites des régions alsaciennes : limites extrêmes de prestations de services divers par les villes, de collecte des flux financiers, de bassin de main d'œuvre, etc...

La "limite-résultante" est un compromis entre toutes ces limites, et rejette ainsi toute imprécision possible.

Conscient du caractère artificiel des choix ainsi opérés, E. JUILLARD pour les cartes réalisées dans l'Atlas de l'Est (1970-1973) puis R. SCHWAB (1968) choisissent un critère susceptible d'exprimer globalement l'influence d'une ville sur sa région : la comptabilisation des flux téléphoniques et en font la base du découpage régional de l'Est de la France.

Il n'en reste pas moins vrai que le problème de l'imprécision des limites spatiales est en quelque sorte "contourné" par une décision volontaire, "abstraite" qui, le plus souvent nie la réalité spatiale. Celle-ci, même dans les "régions rigoureusement marquées" nous semble être telle qu'il n'y a pas de limite-linéaire, mais bien un *espace-limite*, une *frange d'indétermination* plus ou moins large, plus ou moins continue ; la nier revient à nier une partie des faits géographiques.

1.2. En second lieu, le problème de l'appartenance "plus ou moins" complète de sous-espaces à un ensemble spatial plus vaste et selon certains critères, a suscité une réflexion géographique. Dans son ouvrage magistral sur l'Europe Rhénane, E. JUILLARD (1968) analyse tout d'abord le "Fait rhénan", y voit une combinaison complexe de données naturelles (Le "couloir" méridien du Rhin et de ses affluents), de facteurs historiques et humains (civilisation urbaine, brassage intense de peuples et d'idées), de faits économiques (importance de flux commerciaux) et politiques (ouverture des frontières, décroissement de l'espace). L'auteur dégage ensuite la notion d'axe rhénan, où ce "fait rhénan" est le plus net, le plus pur, et celle d'"espaces périphériques" où les caractères rhénans s'atténuent, s'abâtardissent en quelque sorte : l'espace mosellan participe de ce type. E. JUILLARD définit ainsi implicitement l'imprécision dans la composition de l'espace rhénan : les sous-espaces appartiennent "plus ou moins" à cet espace, en partagent les caractères, mais présentent également des caractères qui relèvent d'autres types spatiaux.

La démarche de cet auteur concernant l'espace rhénan, véritable

espace imprécis comme nous l'avons défini plus haut, n'est malheureusement pas générale ; rappelons simplement le sort fait à cet autre espace imprécis qu'est le Massif Central sur le plan de l'organisation régionale et que les ouvrages de géographie régionale ont littéralement fait "éclater" entre régions voisines.

L'imprécision spatiale est alors si forte d'une part, mais les nécessités de précision si contraignantes d'autre part, qu'un espace peut ainsi "disparaître" en tant qu'entité géographique. Là encore la géographie inductive classique, tout en reconnaissant l'imprécision spatiale, est amenée à la nier dans la réalité de l'analyse spatiale.

## 2. La démarche inductive quantitative

La démarche inductive quantitative procède à l'analyse des données spatiales en une suite d'étapes bien définies. Un travail de collecte de données mesurables sur un certain nombre d'unités spatiales lui permet de constituer la matrice d'information chrono-spatiale (J.B. RACINE et M. REYMOND, 1973). Elle en réalise la description à l'aide d'outils statistiques appropriés pour mettre en évidence des relations spatiales : elle s'efforce ainsi de proposer, en synthèse finale, une typologie d'espaces et une appréciation du rôle des variables et de leurs multiples interrelations dans l'organisation de l'espace géographique (P. HAGGETT 1973, H. ISNARD, J.B. RACINE; H. REYMOND 1981, H. BEGUIN 1979). Voyons comment cette démarche peut appréhender l'imprécision spatiale. Nous limiterons notre exposé à un type de méthode couramment utilisé : l'analyse factorielle.

Lors de discussions, on a pu opposer à notre recherche de méthodes spécifiques de traitement du "FLOU" spatial, l'argument suivant, qui est que l'analyse factorielle est parfaitement capable de mettre en évidence la notion d'imprécision. Effectivement, quelque soit la méthode utilisée, l'imprécision spatiale (au sens où nous l'avons définie plus haut) est révélée à l'examen des résultats obtenus, et ce, selon deux aspects fondamentaux.

2.1. En premier lieu, en ce qui concerne les variables, l'étude des "saturations", c'est-à-dire des "poids" de ces dernières sur les autres facteurs, peut être considérée comme une "mesure floue" (expression prise au sens large mais qui sera définie formellement plus loin) du rôle "plus ou moins" grand de ces variables pour la définition des axes factoriels. Cette notion peut et doit être nuancée, car, comme le remarque H. BEGUIN (1979) la prise en compte des communautés, c'est-à-dire pour chaque variable la somme des saturations sur chaque facteur) permet de mesurer également le poids de chaque variable dans l'ensemble du système géographique étudié. Reprenant une expression propre à la théorie des sous-ensembles flous, on pourrait remarquer ainsi qu'on dispose alors du degré d'appartenance de chaque variable à chaque facteur d'une part et au système géographique pris dans son ensemble d'autre part. Nous avons donc bien là une structure *imprécise* de ce système géographique.

2.2. On peut reprendre les mêmes remarques à propos de la représentation des lieux, ou unités spatiales, sur les axes factoriels. Ainsi une composante principale définit la position de chaque lieu sur un axe ; elle peut être interprétée également comme une mesure imprécise de l'appartenance de ce lieu à l'espace géographique déterminé par le facteur correspondant.

L'exemple suivant illustre les deux aspects évoqués. L'étude portant sur l'urbanisation du pays messin (C. ROLLAND-MAY, 1978) prend en compte un ensemble de 42 variables (Annexe I, Ia) dont on détermine à partir des 125 communes de l'espace-référence, les corrélations linéaires et par rangs (les premières étant retenues car fort peu différentes des secondes) et qui servent de base à une analyse en composantes principales. La projection des variables selon la valeur de leur saturation sur F1 et F2 est représentée en Annexe I, Ib. Chaque facteur peut donc être défini comme un ensemble auquel les variables appartiennent "plus ou moins" selon ces valeurs.

De même la représentation cartographique en I, Ic de la première composante principale permet de définir l'espace géographique déter-

miné par le premier facteur, espace auquel les lieux (communes) appartiennent "plus ou moins" (il oppose l'espace urbanisé à l'espace resté rural).

Dans cet exemple, comme dans la plus grande partie des analyses factorielles réalisées, cette formulation "imprécise" ne s'avère pas utile, du moins en apparence. Effectivement *la structure interne de l'espace est très nette*, et les axes se définissent aisément à partir des valeurs extrêmes des saturations des variables et de l'association de ces dernières. Le géographe peut ainsi aisément dégager et identifier cette structure, souvent d'ailleurs apparente déjà au vu du graphe des corrélations.

Dans le travail évoqué ci-dessus, par exemple, le graphe des corrélations (I,I,d) permettait déjà de définir les variables les plus discriminantes et de proposer un schéma d'organisation de l'espace péri-urbain confirmé ensuite par les résultats de l'analyse en composantes principales.

Dans ces cas, la démarche inductive quantitative dispose d'un outil susceptible de traduire l'imprécision spatiale, mais n'en utilise paradoxalement pas les possibilités car elle travaille le plus souvent sur des espaces à structure nette, aisément identifiable à partir de facteurs peu nombreux, définis eux-mêmes par des variables fortement discriminantes.

2.3. Il n'en est pas de même dans le cas où l'analyse spatiale porte sur des espaces à structure faible, indéfinie, des "espaces de transition" (P. GEORGES *op. cit.*), voire des espaces perçus ou vécus. La difficulté d'identification du graphe des corrélations et des axes devient réelle. A.S. BAILLY et R. WOESSNER (1979) le signalent. Les axes factoriels d'ailleurs n'expliquent plus que des proportions d'inertie totale faibles ; aussi faudrait-il en interpréter un nombre plus important que dans les cas cités plus haut et le faire avec des incertitudes d'interprétation considérables. Rares sont également les variables dont les saturations sont très fortes sur l'un ou l'autre des axes.

Dans ces cas d'analyse d'espaces "flous", la notion d'imprécision devient essentielle. Le géographe devra s'attacher non plus à l'analyse *des faits et formes spatiales dominants*, mais bien à la quête minutieuse des formes d'imprécision spatiale et la mise en évidence d'une structure beaucoup plus indécise.

Ainsi, en conclusion, nous pensons que l'analyse spatiale selon une démarche inductive quantitative n'est possible que dans les cas où l'espace géographique présente des caractères de *précision* qui sont selon nous des *présupposés implicites* ou *explicitement énoncés*. Précision des limites spatiales des observations, certitude de l'appartenance de ces observations à l'espace à étudier et certitude que ces observations appartiennent sans ambiguïté à cet espace, et à cet espace seulement, possibilité de mesure précise des variables pour chaque observation, enfin, existence d'une structure sous-jacente nette qui explique le système géographique.

Dans *le cas d'un espace imprécis, incertain*, d'un espace pour lequel il sera difficile, voire impossible de "mesurer" les variables, c'est-à-dire d'associer à chaque observation, et pour chaque variable une valeur prise dans l'ensemble des réels, enfin d'un espace faiblement structuré ou a-structuré, la démarche inductive quantitative sera inopérante. Le géographe devra donc adopter une démarche autre, spécifique à l'étude des espaces géographiques flous.

### 3. Les méthodes graphiques de traitement de l'information spatiale

#### 3.1. Présentation générale

Le traitement graphique de l'information spatiale semble parfaitement adapté au thème qui nous préoccupe dans notre travail, à savoir traduire de la façon la plus claire possible l'imprécision spatiale. Mise au point par J. BERTIN dans son ouvrage relatif à la "sémiologie graphique" (1967), appliquée par cet auteur et ses collaborateurs dans de nombreux travaux, reprise enfin par lui dans un ouvrage qui envisage toute la portée de la méthodologie gra-

phique (1977), la "graphique" permet un travail progressif à partir d'informations spatiales.

Pour J. BERTIN, il s'agit en premier lieu de traduire un tableau d'information spatiale numérique en une "matrice graphique" où l'information est représentée sous forme de signes graphiques plus ou moins denses et "noirs" selon les valeurs des variables.

Il faudra en second lieu diagonaliser cette matrice en y déplaçant lignes et (ou) colonnes de façon à obtenir des groupes denses de signes qui s'organiseront grossièrement le long d'une diagonale de la matrice. Cette *matrice graphique ordonnée* selon l'expression proposée par Bertin permet ainsi de définir des types d'espaces et de mettre en évidence les types de variables qui les conditionnent. Les exemples d'applications réalisés par J. Bertin et ses collaborateurs sont très nombreux. Citons celui de J.D. GRONOFF (1971) et reprenons dans l'annexe I, II a - II d les étapes de réalisation d'une matrice géographique ordonnée.

Cette méthodologie graphique, si elle comprend en début de travail une perte d'information (les valeurs numériques des variables relatives à chaque observation sont en effet remplacées par des signes graphiques plus ou moins denses), apporte une information supplémentaire, comme le souligne Bertin. En effet elle détermine des types spatiaux et aide à les identifier en procédant à des regroupements des variables significatives pour chaque groupe.

Elle répond également à notre préoccupation de mettre en évidence l'imprécision spatiale. Effectivement une matrice graphique ordonnée n'est jamais parfaitement diagonalisée. De part et d'autre des zones homogènes groupées le long d'une diagonale matricielle et formées de groupes spatiaux à fort degré de ressemblance de structure, se localisent des "franges" moins denses. Elles signifient que les unités spatiales qui en font partie appartiennent au groupe défini, mais à un degré moindre que celles qui forment le *cœur* du groupe.

### 3.2. Etude d'un exemple

F. ROSENBERGER et A. VIALLE (1976, *in* mémoire dactylographié réalisé sous la direction de C. ROLLAND-MAY - département de Géographie METZ) appliquent ainsi au centre-ville de Metz la méthodologie exposée plus haut. La matrice graphique ordonnable est en fait une matrice de corrélations des 110 unités spatiales du Centre-ville (ilôts INSEE) avec elles-mêmes, en fonction de 25 variables démographiques, socio-professionnelles, de types d'activités et de migrations journalières de travail, standardisées au préalable.

Ordonner ce tableau de corrélation revient à en permuter conjointement lignes et colonnes de façon à le diagonaliser.

La matrice graphique ordonnée est représentée en Annexe I, IIIa. La carte qui représente les types spatiaux dégagés figure en Annexe I, III b.

L'approche de l'imprécision de l'organisation spatiale peut être réalisée selon deux thèmes.

3.2.1. En premier lieu, les types spatiaux définis ne sont pas disjoints : ainsi leur cartographie montre que le type "mixte" est localisé en "tampon" entre le type "centre-ville" et le type "vieille ville". Les caractères sont tels qu'il participe des deux types à la fois. Vialle et Rosenberger l'ont défini comme le "front pionnier" selon lequel le processus "centre-ville" gagne sur l'espace de la vieille ville. L'imprécision spatiale qui s'exprime ici par des franges spatiales ourlant le centre-ville est significative d'une dynamique spatiale et ne doit donc pas être négligée .

3.2.2. En second lieu, l'appartenance de chaque unité spatiale au type défini est variable selon qu'elle appartienne au "cœur" ou à la périphérie du groupe défini. Ainsi chacun de ces groupes est lui-même différencié. On peut par exemple distinguer la vieille ville *profonde*, formée de secteurs très dégradés, isolés en quelque sorte dans le tissu urbain (ghetto), la vieille ville "ouverte" et des marges périphériques appartenant toujours au type "vieille ville",

mais à un degré moindre et avec des caractères moins nets. De la même façon le type "centre-ville" est hétérogène : à ce que l'on pourrait qualifier pompeusement de "city" et qui est éclaté en deux noyaux (quartier de la Gare et quartier de la rue Serpenoise), s'ajoute une bordure où le "centre-ville" comprend encore des immeubles de résidence, et une périphérie où la fonction de centre est très affaiblie. L'approche de l'imprécision spatiale peut ainsi être résumée de la façon suivante :



3.2.3. L'approche exposée ci-dessus se prête ainsi fort bien à une formalisation des espaces géographiques imprécis ; les unités spatiales du groupe 1, ainsi que celles du groupe 3 appartiennent bien "plus ou moins" à leur groupe respectif, selon un degré que la matrice graphique ordonnée permettrait de définir. Les unités spatiales du groupe 2 par contre, appartiennent à la fois aux groupes 1 et 3 (niant par là-même le principe du tiers exclu) et selon des degrés d'appartenance qui dépendent de leur proximité plus ou moins grande de l'un des deux types et de l'intensité du processus de conquête du fait "centre-ville".

La graphique semble donc proposer une méthodologie permettant une approche de l'imprécision spatiale. Elle le fait d'autant mieux qu'elle visualise cette imprécision : la matrice graphique ordonnée traduit ainsi la notion de flou spatial dans les limites et la composition des types dégagés. De la même façon et avec la même démarche que l'analyse multivariée, elle semble rendre inutile toute proposition méthodologique spécifique à l'analyse spatiale floue.

Cependant, que ce soit la géographie inductive "classique", ou la "nouvelle géographie", qui dans son souci d'interprétation théorique des phénomènes spatiaux, se propose d'utiliser les méthodes mathématiques et statistiques (P. CLAVAL 1977), on peut dire que la mise en évidence de l'imprécision spatiale vient en "bout de la chaîne méthodologique" et non au début du raisonnement.

En fait, l'approche épistémologique est différente. Nous nous attarderons sur cette idée dans le paragraphe suivant.

### III - Réflexions sur l'épistémologie de la géographie

Effectivement, nous ne proposons pas une démarche méthodologique supplémentaire pour traiter l'imprécision spatiale, mais nous pensons que la réflexion du géographe lorsqu'il pratique l'analyse spatiale, est différente selon qu'il envisage que cette analyse spatiale

peut éventuellement déboucher sur la mise en évidence de cette imprécision ou s'il considère que cette dernière est en quelque sorte une qualité première de l'espace géographique et qu'il doit en tenir compte dès le début de l'analyse.

Nous examinerons successivement ces deux positions.

### 1. L'imprécision et la démarche de la "Nouvelle Géographie"

Qu'elle soit inductive ou déductive, la "Nouvelle Géographie" s'appuie sur trois fondements essentiels, à la fois sur les plans épistémologiques et méthodologiques que nous présentons dans ce qui suit.

1.1. En premier lieu elle énonce explicitement ou s'appuie implicitement sur un présupposé de précision et de certitude dans la prise en compte de l'espace à analyser. Ce dernier est considéré comme *non flou* au départ de toute démarche géographique, c'est-à-dire, selon les termes définis plus haut :

- parfaitement connu quant à l'appartenance des unités spatiales qui le composent.

- parfaitement limité par rapport à son environnement en une "frontière" nette. En deçà de cette frontière les unités appartiennent à l'espace géographique à étudier, au-delà elles ne lui appartiennent pas. Ceci suppose des discontinuités spatiales nettes et brutales qui autorisent la délimitation du "terrain d'analyse".

Ainsi H. BEGUIN (1979) souligne : "il est particulièrement important d'accorder du soin au choix des variables et des lieux qui entreront dans l'analyse. Le problème est essentiellement de nature scientifique et n'a rien à voir avec la méthode d'analyse... Le choix judicieux des données exige que le géographe dispose d'une théorie qui le guide dans la sélection des variables et des lieux".

Le présupposé de non-flou est essentiel car il conditionne toute la démarche d'analyse ultérieure, permet ou impose des *méthodes spécifiques* de traitement des données et partant, conditionne la réflexion

du géographe sur l'organisation de l'espace. RACINE et LEMAY (1972) résumant fort bien cette réflexion et ces méthodes dans leur schéma sur la "démarche globale de la connaissance géographique informatique" (croquis I, 2).

1.2. En second lieu, on ajoutera que ce serait schématiser abusivement, voire fausser la démarche de la nouvelle géographie en niant sa faculté de prendre en compte et de traiter le "flou spatial".

Effectivement *l'imprécision est mise en évidence au niveau final de la démarche géographique*, par l'identification de types spatiaux" plus ou moins précis, plus ou moins disjoints. Ainsi MARCHAND et OZAN (1981) soulignent dans leur exposé sur les méthodes mathématiques de classification spatiale en géographie, la nécessité d'introduire l'imprécision pour traduire plus fidèlement la complexité du système géographique. Ces auteurs préconisent, d'une part de nuancer chaque groupe de sous-espaces en coupant l'arbre de classification à plusieurs niveaux pour montrer :

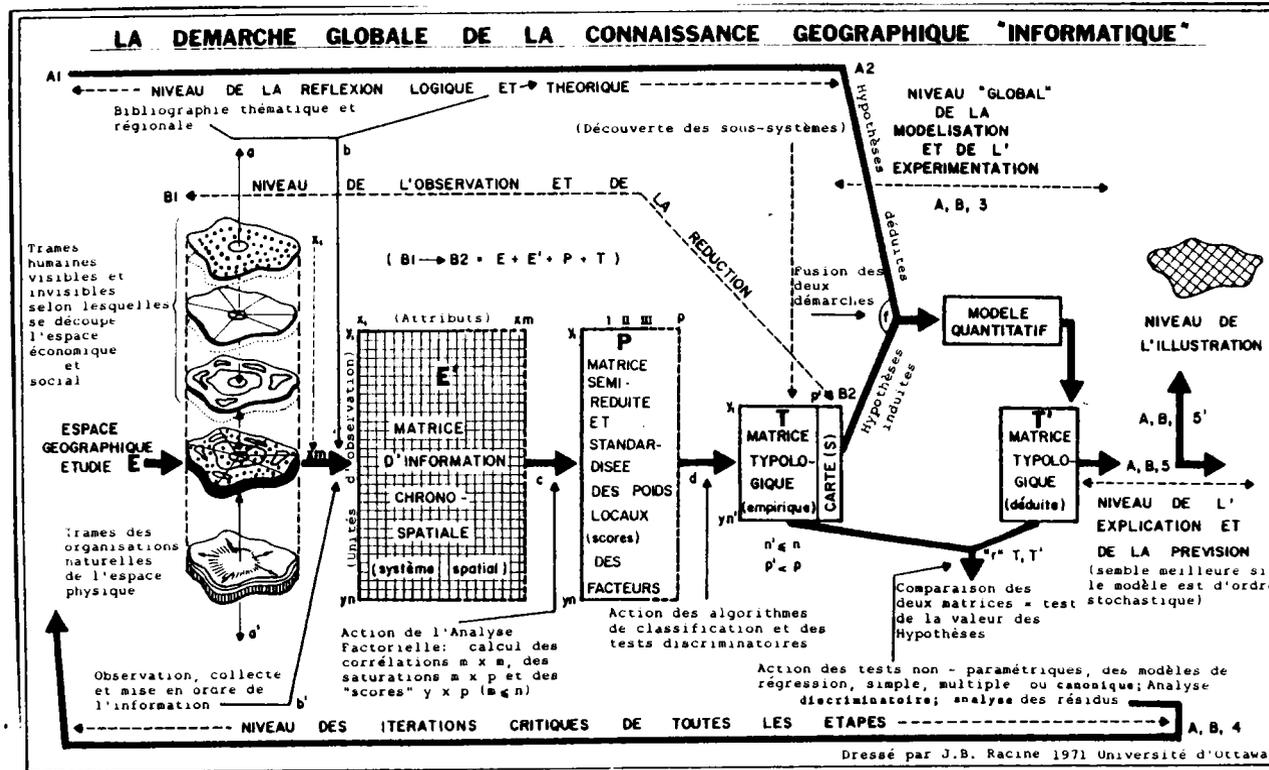
"comment les cellules initiales se regroupent peu à peu, et reconstituent une sorte de film de la structure régionale étudiée..."

Ils proposent également des méthodes de "classification par recouvrement", dont la classification par les sous-ensembles flous dont ils exposent les grands traits.

Nous sommes loin des exigences de rigueur absolue et du recours théorique aux sciences exactes qui selon CLAVAL (1977) caractérisait la démarche géographique des années 1960, et des méthodes de classification préconisées par JAMBU et LEBEAUX (1978) et LERMAN (1981). H. BEGUIN (*op. cit.*) souligne cependant la difficulté d'interprétation de groupes spatiaux issus de tels recouvrements ; ceux-ci peuvent cependant, selon cet auteur, être une solution dans le cas où "les hésitations et les difficultés à préciser des frontières régionales ou des limites entre types, conduisent parfois à ne pas trancher la question d'une manière rigide".

Autrement dit, la prise en compte de l'imprécision spatiale ne sera adoptée dans la démarche géographique que dans le cas où "hésita-

11 . La démarche géographique d'après RACINE (1971) : une hypothèse préalable de précision et de certitude de l'espace géographique.



tions et difficultés" empêchent le recours à une classification rigoureuse. *Choix négatif* en quelque sorte, *imposé par la structure des résultats, l'impossibilité d'appliquer une autre démarche.*

1.3. Enfin, il serait tout aussi faux d'affirmer que la Nouvelle Géographie récusé la notion d'incertitude. Elle l'utilise largement en effet dans la démarche déductive. D'une part elle fait appel à la théorie des probabilités qui lui permet de déterminer le degré de certitude qu'un modèle s'ajuste parfaitement à la réalité (ou le degré d'incertitude concernant cet ajustement). Elle permet également d'adopter ou de rejeter telle ou telle hypothèse concernant une structure spatiale selon les renseignements fournis par les tests paramétriques ou non paramétriques (Siegel, 1956). En bref, la notion de certitude (ou d'incertitude) est liée à la notion d'inférence statistique :

"in statistical inference, we are concerned with how to draw conclusions about a large number of events on the basis of observation of a portion of them".

Le géographe, partant d'un nombre donné d'observations spatiales est ainsi capable de proposer des conclusions relatives à un espace beaucoup plus étendu. Nous ajouterons cependant que cette notion s'appuie sur le présupposé de précision énoncé plus haut. En effet, l'échantillon spatial choisi au départ est *supposé connu, lui, avec certitude et précision*. Là encore, le "flou" spatial se trouve en milieu ou fin de démarche géographique et non à la base de cette dernière.

## 2. Réflexions sur "la géographie des espaces flous"

La démarche est identique dans ses préoccupations à la démarche précédente. En effet, elle se propose de mettre en évidence les régularités, les structures profondes d'un espace géographique, d'en démontrer l'organisation et de souligner le rôle que différents attributs jouent dans cette organisation spatiale.

Elle s'en distingue cependant en rejetant tout présupposé de "non flou" préalable à toute étude. Nous pensons donc qu'il est néces-

saire de s'interroger sur la nature de l'espace à étudier avant d'entreprendre une analyse spatiale. Cette interrogation porte sur deux points :

- *L'espace à étudier est-il certain ou incertain* ; autrement dit sommes-nous sûrs de l'appartenance de telle ou telle unité spatiale à cet espace ? Cette question étant posée -et résolue-, il faut poser l'interrogation suivante :

- *L'espace à étudier est-il précis ou imprécis* ; c'est-à-dire les différentes unités qui lui appartiennent, lui appartiennent-elles entièrement, ou à des degrés divers ?

Selon la réponse à ces deux questions, nous pensons que les méthodes d'investigation et d'analyse spatiales à utiliser seront différentes.

Il ne semble pas possible, par exemple, d'utiliser pour un espace imprécis des concepts et des méthodes supposant le "non-flou" spatial.

La nature fondamentale de l'espace étant ainsi définie, une troisième question peut et doit être posée :

- Les attributs relatifs aux observations spatiales sont-ils représentés par des *données précises ou floues* ?

Là encore, selon la réponse à la question posée, le traitement de données devra être fondamentalement différent.

*Nous partons donc volontairement d'un présupposé d'imprécision spatiale.* Dans cette optique, la démarche géographique que nous pratiquons habituellement n'est qu'une démarche particulière, parmi d'autres, destinées à analyser un type d'espace géographique particulier, parmi d'autres, qui est l'espace géographique précis, non flou. Notre proposition ne nie donc pas cette vision particulière, elle essaye de poser quelques bases d'une conception plus générale de l'espace géographique. *L'imprécision spatiale, loin d'apparaître comme le "pis-aller" adopté par le géographe en cas d'hésitation ou de difficulté à classer des éléments spatiaux, nous semble un concept géographique fondamental.*

Il n'en est pas moins nécessaire à présent de définir une axiomatique générale de l'espace géographique afin de poser les fondements essentiels des différents types d'espaces géographiques que nous allons étudier ultérieurement.

## B - PROPOSITION D'UNE AXIOMATIQUE DE L'ESPACE GEOGRAPHIQUE

Il devient nécessaire à présent de définir avec précision les axiomes sur lesquels nous allons fonder toute l'étude ultérieure, en particulier celle des différents types d'espaces géographiques. Nous suivons en cela les préoccupations de BEGUIN et THISSE (1979), de PONSARD (1979), en ce qui concerne les espaces économiques flous. Ces auteurs ont posés les fondements théoriques de l'analyse spatiale en l'appuyant sur quelques axiomes qu'ils ont défini et exprimés formellement. Nous nous appuyerons sur ces travaux, en nous efforçant d'en élargir encore la portée, afin que les axiomes définis s'appliquent à tous les types d'espaces géographiques que nous voulons étudier.

Cette approche se fera en plusieurs étapes. Après un énoncé préliminaire sur la notion d'ensemble mesurable et d'ensemble de mesure nécessaire aux parties suivantes, nous proposerons une axiomatique de ce que nous appelons l'espace-référentiel, puis nous énoncerons l'axiomatique qui concerne *les espaces géographiques*.

Nous achèverons notre exposé par un paragraphe qui définira la démarche géographique découlant de cette axiomatique.

### I - Notion d'ensemble mesurable

#### 1. Notion de $\sigma$ -algèbre

1.1. Remarque préliminaire : dans tout ce qui suit, nous adopterons la convention suivante qui est de *souligner les ensembles ou sous-ensembles non flous* pour les distinguer des ensembles ou sous-ensembles définis comme étant flous.

Ainsi  $\underline{E}$  est un ensemble non flou d'éléments  
et  $\underline{A}$  est un sous-ensemble flou de  $\underline{E}$

1.2. Soit  $\underline{E}$  un ensemble non flou d'éléments  
 $\underline{E} = \{x_i\} \quad i \in \underline{I}$  ensemble ordonné, fini ou non, d'indices.  
Soit  $\underline{P}(\underline{E})$ , l'ensemble des parties de  $\underline{E}$   
et  $\underline{A}$  une famille de sous-ensembles de  $\underline{E}$  avec  $\underline{A} \subset \underline{P}(\underline{E})$

$\underline{A}$  est une  $\sigma$ -algèbre si  $\underline{A}$  satisfait aux trois conditions suivantes :

- a.  $\underline{E} \in \underline{A}$
- b.  $\forall i \in \underline{I}, \forall \underline{A}_i \in \underline{A}$   
 $\underline{A}_i \in \underline{A} \implies \overline{\underline{A}_i} \in \underline{A}$

si un sous-ensemble  $\underline{A}_i$  est élément de  $\underline{A}$ , son complémentaire  $\overline{\underline{A}_i}$  dans  $\underline{E}$  est également élément de  $\underline{A}$

Une  $\sigma$ -algèbre possède donc la propriété de *complémentation*.

- c.  $(\forall i \in \underline{I}, \forall j, k \in \underline{I}$  avec  $j \neq k,$   
 $\underline{A}_j \cap \underline{A}_k = \emptyset) \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} \underline{A}_i \in \underline{A}$

ce qui signifie que, les sous-ensembles élément de  $\underline{A}$  étant disjoints, leur réunion est un sous-ensemble  $\in \underline{A}$

1.3. Dans le cas où  $\underline{A}$  satisfait aux conditions a, b, c, le couple :

$(\underline{E}, \underline{A})$  est appelé ensemble mesurable.

## 2. Notion de mesure positive

2.1. Une mesure positive sur un ensemble mesurable  $(\underline{E}, \underline{A})$  est une fonction  $m$  de  $\underline{E}$  vers  $\mathbb{R}^+$  telle que :

- a.  $m(\emptyset) = 0$
- b.  $m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \underline{A}_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(\underline{A}_i)$

Nous insistons ici sur le point b. qui introduit *le principe d'additivité* (principe qui ne sera plus respecté dans le cas de mesure floue).

2.2. Ainsi le triplet :

$(\underline{E}, \underline{A}, m)$  est appelé ensemble de mesure sur  $\underline{E}$

## II - Axiomatique de l'espace-référentiel

Géographiquement, nous définissons par *espace-référentiel* une portion de l'écorce terrestre, qui servira de support spatial à toute

analyse spatiale de quelque type qu'elle soit : analyse géographique, économique, sociologique ou autre.

Cette base de référence spatiale n'est cependant pas neutre, ni idéale ; aussi énonçons-nous une proposition fondamentale (proposition 1) *Cet espace-référentiel est un espace mesurable.*

et quatre axiomes que nous développons tour à tour en appliquant notre proposition :

l'espace-référentiel est un quadruplet :

$$\underline{E} = ( \underline{E}, \underline{S}, \underline{C}, \underline{R} ) \quad (1)$$

où  $\underline{E}$  = ensemble de lieux,

$\underline{S}$  = "structure-universelle",

$\underline{C}$  = "configuration-objective",

$\underline{R}$  = relation de distance entre tout couple de lieux,

représentent nos axiomes de base.

### 1. L'espace-référentiel est un ensemble $\underline{E}$ de lieux

Le terme de *lieu* est un terme que nous admettons intuitivement, sans le définir autrement que par "unité spatiale élémentaire" résultant de découpages successifs de l'espace jusqu'au niveau élémentaire.

$\underline{E}$ , ensemble de lieux, de cardinal  $> 1$ , est considéré comme :

- un ensemble discret fini si le cardinal de  $\underline{E}$  est fini.
- un ensemble discret infini si son cardinal est infini dénombrable.
- un ensemble continu si son cardinal est non dénombrable.

Dans les deux premiers cas, les lieux peuvent être *étendus* (nous le verrons plus bas), dans le troisième cas les lieux sont considérés comme a-dimensionnels, comme des points de l'espace référentiel.

Une recherche qui cherche à déterminer des aires ou zones (de marché, d'influence ou autres) part d'une hypothèse d'espace-référentiel continu, toute action de partition de l'espace en sous-espaces suppose un espace référentiel discret.

E est ainsi axiomatiquement défini comme un ensemble précis, non flou, donc bien délimité ; l'appartenance des lieux à E ne tolère aucune ambiguïté : un lieu appartient, ou n'appartient pas à E .

2. L'espace-référentiel est muni d'une "structure-universelle" S

Ce deuxième axiome que nous posons nous semble important, car nous pensons que l'espace-référentiel n'est pas un espace "idéal" (au sens où l'on définit la "plaine idéale" qui sert de support aux modèles spatiaux macroéconomique) mais un espace défini par un ensemble de caractères qui contribuent à l'individualiser par rapport à son environnement et à individualiser chacun des lieux qui le composent par rapport aux autres.

Formellement S est donc un ensemble dénombrable infini d'attributs.

D'autre part nous considérons que ces attributs qualitatifs ou quantitatifs, sont tous *mesurables* (au sens de la théorie de la mesure) même si ceci pose le problème du choix de l'unité de mesure ou du système de mesure et également même si se posent des problèmes techniques de mesure (unité et système de mesure étant choisis).

Cette notion de "structure-universelle" constitue une base fondamentale de notre approche axiomatique. Concrètement S représenterait l'inventaire exhaustif de tous les caractères qui définissent l'espace. Notion abstraite, certes, et totalement irréalisable car elle suppose une transparence parfaite de l'espace référentiel, des outils théoriques de mesure et des moyens techniques illimités ; cependant cette notion est nécessaire pour que l'on puisse en déduire ultérieurement la notion de structure spécifique (économique, géographique ou autre).

3. Un espace-référentiel est muni d'une "configuration objective", C

La notion de "configuration-objective" signifie, in-

dépendamment de tout point de vue relatif à un quelconque observateur, l'espace-référentiel est défini par *sa forme et son étendue*.

Nous distinguons, selon la démonstration de BEGUIN et THISSE (1979) les deux cas suivants :

### 3.1. L'espace-référentiel est continu

Les lieux sont de ce fait *des points* a-dimensionnels et sans forme. Dans notre hypothèse d'un espace-référentiel fini et mesurable, on peut cependant définir :

- *une forme F de cet espace*, définissable à partir de ses propriétés topologiques.

- *Une étendue E de cet espace*.

E est - *soit à une dimension* : il s'agit alors d'un espace linéaire (espace d'incision fluviale, espace de circulation axiale, tracé de côte...). On peut en mesurer la longueur L.

- *soit à deux dimensions* : "surfaces" géographiques (plaines alluviales...). On peut en mesurer l'aire S.

- *soit à trois dimensions* : "masse" océanique, "masse" glaciaire, "masse" d'une ville qui occupe tout l'espace cartésien. On peut alors en mesurer le volume V.

Dans les trois cas, L, S, V représentent des valeurs positives ; d'autre part la propriété d'additivité étant respectée dans chacun des cas, il s'agit bien de *mesures* de l'étendue.

Dans le cas où E est un espace continu, nous avons donc bien cardinal (E) infini non dénombrable. En effet, si cardinal (E) était fini, ceci supposerait que la mesure de l'étendue de chaque lieu soit positive, or ces lieux sont a-dimensionnels, définis par une mesure nulle de leur étendue (BEGUIN-THISSE).

En langage courant, nous précisons ainsi que l'*espace-référentiel continu a une étendue mesurable*, bien que les éléments qui le composent ne soient, eux, pas mesurables.

### 3.2. L'espace-référentiel est discret

Dans ce cas on peut parler de la forme et

de l'étendue de cet espace-référentiel, mais également des sous-espaces qui y sont inclus, et des unités spatiales élémentaires. On a alors cardinal ( $\underline{E}$ ) fini ou infini dénombrable ; d'autre part on peut déterminer selon l'étendue un espace, sous-espace ou lieu, linéaire, aréal, volumétrique. Les mesures calculées sont, comme plus haut, respectivement la longueur, l'aire, le volume.

L'espace discret, tout comme ses composantes, a ainsi une forme (à condition que les contraintes de mesure soient respectées) et une étendue mesurables.

4. L'espace-référentiel est défini par une relation  $\underline{R}$  entre tout couple de lieux

Cette relation induit les caractères d'un espace métrique.

Le quatrième fondement de notre définition de l'espace-référentiel est qu'il existe une relation  $\underline{R}$  entre deux quelconques des lieux de cet espace. Telle que

$$\forall x, y \in \underline{E}^2, x \underline{R} y \iff \exists \text{ une distance } d(x,y) \text{ entre } x \text{ et } y$$

telle que les conditions suivantes soient satisfaites :

a. Positivité

$$\forall x, y \in \underline{E}^2; d(x,y) > 0 \iff x \neq y$$

b. Régularité

$$\forall x, y \in \underline{E}^2 : d(x,y) = 0 \iff x = y$$

c. Symétrie

$$x, y \in \underline{E}^2; d(x,y) = d(y,x)$$

d. Inégalité triangulaire

$$\forall x, y, z \in \underline{E}^3; d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

Nous proposons donc l'idée que l'espace-référentiel est un espace métrique, c'est-à-dire qu'il sera toujours possible de définir entre tout couple de lieux distincts une (ou plusieurs) distances euclidienne, rectilinéaire ou autre. Cette distance induit des propriétés particulières de l'espace. Nous ne développerons pas ici cet aspect fondamental de l'ana-

lyse spatiale. Mais comme il intéresse les espaces géographiques précis qui possèdent également la propriété d'être des espaces métriques, nous insisterons sur ce point dans le chapitre II relatif aux espaces géographiques précis où nous exposerons les différents types de distances et les propriétés spatiales induites.

### III - Les bases formelles de l'axiomatique de l'espace géographique

L'axiomatique s'appuie sur deux concepts que nous allons développer successivement, à savoir celui de sous-ensemble flou et celui de mesure d'un sous-ensemble flou.

#### 1. Notion de sous-ensemble flou

Soit  $\underline{E}$  un référentiel, c'est-à-dire un ensemble fini, ou non, d'éléments.

On appelle sous-ensemble flou de  $\underline{E}$  un sous-ensemble dont les éléments sont munis d'une fonction d'appartenance  $\mu$  de  $\underline{E}$  vers  $\underline{M}$ , ensemble préordonné ou ordonné de cardinal  $\geq 2$

##### 1.1. Ainsi, en théorie des ensembles classiques, non flous, on écrira :

$\underline{E}$  référentiel

$\underline{A} \subset \underline{E}$  est défini comme un sous-ensemble non flou de  $\underline{E}$  tel que :

$$\forall x \in \underline{E}, \mu_{\underline{A}} : \underline{E} \longrightarrow \underline{M} = \{0,1\}$$

c'est-à-dire que :

$$\begin{aligned} \mu_{\underline{A}}(x) = 1 & \iff x \in \underline{A} \\ \mu_{\underline{A}}(x) = 0 & \iff x \notin \underline{A} \end{aligned}$$

Donc si  $\underline{M}$  est l'ensemble  $\{0,1\}$ , un élément appartient, ou n'appartient pas à  $\underline{A}$ . Le principe cartésien du tiers exclu est respecté ; la logique binaire est ainsi une logique propre à cette formalisation non floue.

1.2. En théorie des sous-ensembles flous, on

écrit :

$\underline{E}$  référentiel

A sous-ensemble flou de  $\underline{E}$

$$\mu_A : \underline{E} \longrightarrow \underline{M}$$

$$\forall x \in \underline{E}, x \longmapsto \mu_A(x) \in \underline{M}$$

On note alors :

$$A = \{ (x, \mu_A(x)), \mu_A(x) \in \underline{M} \}$$

Nous définirons plus bas  $\underline{M}$ , ensemble pré-ordonné ou ordonné. Nous lui donnons ici la signification définie par ZADEH (1965), à savoir :

$$\underline{M} = [0,1]$$

donc

$$\forall x \in \underline{E}, x \longmapsto \mu_A(x) \in [0,1]$$

autrement dit, un élément x peut appartenir "plus ou moins" à A.

a.  $\mu_A(x) = 0 \iff x \notin A$

b.  $\mu_A(x) = 1 \iff x \in A$  sans aucune imprécision possible

c.  $0 < \mu_A(x) < 1 \iff x \in A$  avec un degré compris entre 0 et 1

Remarquons que si seuls les cas a. et b. existent,  $\underline{M} = \{0,1\}$  nous retrouvons ainsi la théorie des ensembles ordinaires qui n'est ainsi qu'un cas particulier, généralisé dans la théorie des sous-ensembles flous.

2. Notion d'ensemble valable (fuzzifiable)

2.1. L'ensemble des parties floues d'un ensemble

$$\underline{P}(\underline{E})$$

Soit  $\underline{E}$ , un référentiel de cardinal n

$\underline{M}$ , un ensemble préordonné ou ordonné de cardinal m

on note  $\underline{P}(\underline{E})$  l'ensemble des parties floues de  $\underline{E}$

$$\text{card}(\underline{P}(\underline{E})) = m^n = \text{card}(\underline{M})^{\text{card}(\underline{E})}$$

Prenons un exemple :

$$\begin{aligned} \underline{E} &= \{x_1, x_2\} & \text{card}(\underline{E}) &= 2 \\ \underline{M} &= \{0, 0.5, 1\} & \text{card}(\underline{M}) &= 3 \end{aligned}$$

$$P(\underline{E}) = \left\{ \begin{aligned} &\{(x_1, 0), (x_2, 0)\}, \{(x_1, 0), (x_2, 0.5)\}, \{(x_1, 0), (x_2, 1)\} \\ &\{(x_1, 0.5), (x_2, 0)\}, \{(x_1, 0.5), (x_2, 0.5)\}, \{(x_1, 0.5), (x_2, 1)\} \\ &\{(x_1, 1), (x_2, 0)\}, \{(x_1, 1), (x_2, 0.5)\}, \{(x_1, 1), (x_2, 1)\} \end{aligned} \right\}$$

et  $\text{card}(P(\underline{E})) : \text{card}(\underline{M})^{\text{card}(\underline{E})} = 3^2 = 9$

ce qui n'est qu'une expression formalisée plus large que celle de la théorie des sous-ensembles ordinaires.

En effet,  $P(\underline{E})$ , l'ensemble des parties (non floues) d'un ensemble  $\underline{E}$  a pour cardinal  $2^{\text{card}(\underline{E})}$  or  $\text{card}(\underline{M}) = 2$  dans ce cas puisque  $\underline{M} = \{0, 1\}$

On notera enfin que :

$$\text{card}(P(\underline{E})) \text{ fini} \iff \text{card}(\underline{E}) \text{ et } \text{card}(\underline{M}) \text{ finis}$$

et que  $P(\underline{E})$  a pour structure un treillis vectoriel alors que  $\underline{P}(\underline{E})$  a pour structure un treillis de Boole.

Nous reportons à l'annexe II en fin de travail la définition de ces deux notions et les propriétés de ces treillis.

## 2.2. Ensemble valable (fuzzifiable) : notion de $\zeta$ -algèbre

Le terme de "fuzzifiable" est un dérivé francisé du terme anglais "fuzzy" (flou).

Nous nous proposons de définir ici l'équivalent, en théorie des sous-ensembles flous, de la notion d'ensemble mesurable en théorie des sous-ensembles ordinaires.

1a. Inclusion de deux sous-ensembles flous A, B. On dit que :  
 $A \subseteq B \iff \forall x_i \in \underline{E}_j \in \underline{I}$  ensemble d'indices,  $\mu_A(x_i) \leq \mu_B(x_i)$

1b. Suite monotone de sous-ensembles flous.

Soit une famille non finie  $\{A_i, 1 \leq i < \infty\}$ , ou finie  $A_i, 1 \leq i \leq p, i \in I$  ensemble fini d'indices de sous-ensembles flous.

$A_i$  forme une suite monotone infinie de sous-ensembles flous si :

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \dots \dots \dots A_i \subseteq$$

ou  $A_1 \supseteq A_2 \dots\dots\dots A_i \supseteq$   
 ou A forme une suite monotone finie de sous-ensembles flous si  
 $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots\dots\dots \subseteq A_p$   
 ou  $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots\dots\dots \supseteq A_p$

1c. On appelle une  $\zeta$ -algèbre sur  $\underline{E}$  toute famille  $\underline{F}$  de parties floues de  $\mathcal{P}(\underline{E})$  telle que :

$$1. \underline{E} \in \underline{F}$$

$$\emptyset \in \underline{F}$$

2. Si  $A_1 \in \underline{F}$  et si  $\{A_i\}$  est une suite monotone, alors  
 $\lim_{i \rightarrow \infty} A_i \in \underline{F}$

si  $A_i \subseteq A_{i+1}$ , la séquence est croissante, alors  
 $A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$ , et il suffira de prendre la limite.

si  $A_i \supseteq A_{i+1}$ , la suite est décroissante et il suffira de prendre la limite.

Nous notons, qu'une  $\zeta$ -algèbre n'a pas, contrairement à une  $\sigma$ -algèbre, la propriété de complémentation  $(B, I, 1)$ . Cette propriété en effet n'est pas compatible avec le fait que deux sous-ensembles flous ne sont pas nécessairement disjoints ; cependant nous avons posé  $\underline{E} \in \underline{F}$   
 De ce fait  $\emptyset \in \underline{F}$  est un axiome. Dans le cas où  $\underline{F}$  satisfait aux conditions énoncées ci-dessus, le couple

$(\underline{E}, \underline{F})$  est appelé ensemble valable ou fuzzifiable.

### 3. Ensemble valué ou fuzzifié

Une mesure floue d'un sous-ensemble flou est une fonction  $\mu$ , de l'ensemble  $\underline{F}$  vers  $\underline{M}$  (ensemble préordonné ou ordonné et limité) satisfaisant aux axiomes suivants :

$$3a \quad \begin{cases} - \mu(\emptyset) = 0 \\ - \mu(\underline{E}) = 1 \end{cases}$$

$$3b. \forall i \in \underline{I}, \forall A_i \in \underline{F} \quad \hat{\underline{M}} \leq \mu(A_i) \leq \check{\underline{M}}$$

où  $\hat{\underline{M}}$  et  $\check{\underline{M}}$  désignent respectivement les bornes inférieure et supérieure de  $\underline{M}$ .

$$3c. \quad \forall i \in \underline{I}, \forall A_i \in \underline{F}, \forall j, k \in \underline{I}, A_j \subseteq A_k \\ \mu(A_j) \leq \mu(A_k)$$

Cette propriété de monotonie dans l'inclusion, remplace la propriété d'additivité énoncée dans la définition d'une mesure floue. Elle est plus générale que cette dernière. Effectivement, la propriété d'additivité de mesure sur une  $\sigma$ -algèbre suppose celle de monotonie, l'inverse n'est pas vrai.

Ainsi une  $\zeta$ -algèbre est une expression plus générale, avec des propriétés plus larges, mais plus pauvres, qu'une  $\sigma$ -algèbre.

3d. Dans le cas où  $\underline{E}$  continu, et où  $\text{card}(\underline{E})$  infini non dénombrable l'axiome suivant est posé :

$$\text{si } A_i \in \underline{F} \text{ et si } \{A_i\} \text{ monotone} \\ \text{alors } \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i) = \mu(\lim_{i \rightarrow \infty} A_i)$$

Toute valuation  $\mu$  satisfaisant aux conditions énoncées permet ainsi de définir : l'ensemble fuzzifié ou valué, qui est le triplet :

$$(\underline{E}, \underline{F}, \mu)$$

#### IV - Les fondements de l'espace géographique

Un espace géographique est défini par les mêmes fondements que l'espace-référentiel qui en représente le support. Toutefois, les bases qui le déterminent sont à formuler de façon plus large que celles que nous avons énoncées ci-dessus. Il s'agit en effet d'introduire, dès ce niveau axiomatique, la notion de *flou*, c'est-à-dire d'imprécision et d'incertitude introduite au début de ce chapitre.

Nous définirons donc l'espace géographique  $E_G$  comme un quadruplet

$$E_G = (E, S, C, R)$$

en insistant sur le fait que chaque terme prend, dès sa notation, une signification de *flou*, que nous allons préciser. En effet :

$E$  = sous-ensemble flou de l'espace référentiel

$S$  = structure qui peut être floue (une structure non floue  $\underline{S}$  n'étant qu'un cas particulier)

C = configuration imprécise

R = relation entre tout couple de lieux qui n'est pas forcément une distance.

Nous nous contenterons ici d'explicitier chacun des termes de ce quadruplet en en présentant la signification générale. Nous réservons l'étude formalisée et la présentation de l'outil mathématique nécessaire à cette étude dans les chapitres relatifs aux différents types d'espaces géographiques et dans l'étude de l'exemple en deuxième partie.

1. L'espace géographique est un sous-ensemble flou de l'espace référentiel noté E.

Cet axiome est le fondement le plus important que nous proposons concernant l'analyse spatiale géographique. Il signifie qu'à chaque site de l'espace géographique nous associons une valeur susceptible de traduire deux notions géographiques :

- la notion d'appartenance "plus ou moins" forte du site à l'espace géographique en question

- la notion que nous ne sommes pas sûrs (du fait de notre connaissance) de l'appartenance de ce site à l'espace géographique en question

Ou d'associer ces deux notions en une expression globale, à savoir que nous ne sommes pas sûrs de l'appartenance d'un site à un espace et que cette appartenance est "plus ou moins" forte.

Les deux premières notions sont relatives, respectivement à un espace imprécis et à un espace incertain, la dernière à un espace qui serait à la fois incertain et imprécis.

Nous remarquons que, du fait de la définition de E, un espace géographique au sens où l'on entend généralement ce terme (c'est-à-dire un espace géographique non flou selon notre définition) n'est qu'un cas particulier, c'est-à-dire un espace auquel les sites appartiennent entièrement et sans incertitude de notre part concernant cette appartenance.

Formellement, E est donc défini comme un sous-ensemble flou de  $\underline{E}$ , c'est-à-dire un sous-ensemble de  $\underline{E}$  dont les éléments sont mu-

nis d'une fonction d'appartenance à  $E$ .

On peut donc écrire :

soit  $\underline{E}$  référentiel non flou

$E$  sous-ensemble flou de  $\underline{E}$

Nous aurons à définir une fonction  $\mu$  de  $E$  vers  $\underline{M}$ ,  $\underline{M}$  ensemble préordonné ou ordonné.

$$\begin{aligned} \mu : \underline{E} &\longrightarrow \underline{M} \\ \forall i \in \underline{I}, x_i &\longmapsto \mu_E(x_i) \in \underline{M} \end{aligned}$$

$\underline{I}$  ensemble fini ou non d'indices.

L'espace géographique est donc défini comme suit :

$$\forall i \in \underline{I} \quad E = \{x_i, \mu_E(x_i)\}, \quad \forall x_i \in E, \quad \mu_E(x_i) \in \underline{M}$$

Nous devons définir l'ensemble  $\underline{M}$  de façon plus précise.

Proposons dès à présent une définition selon ZADEH qui prend  $\underline{M}$  égal à l'intervalle  $[0,1]$ . Dans ce cas chaque site appartiendra à l'espace géographique selon un degré pris dans cet intervalle.

Rappelons que si  $\underline{M} = \{0,1\}$  le site  $x_i$  appartiendra ( $\mu_E(x_i) = 1$ ) ou n'appartiendra pas ( $\mu_E(x_i) = 0$ ) à l'espace géographique qui de ce fait pourra être défini comme un espace *précis*, non flou, cas particulier des espaces que nous définissons.

En conclusion, on peut noter que la notion de flou spatial est introduite dès notre approche axiomatique et n'apparaît donc plus comme une notion en fin d'analyse spatiale, analyse dont les présupposés seraient ceux d'un espace précis. Nous proposons de la même façon d'introduire la notion de flou dans le terme relatif à la structure de l'espace géographique.

## 2. L'espace géographique est muni d'une structure spécifique floue $S$

On appelle structure spécifique un sous-ensemble de la structure-universelle définie par l'espace-référentiel. On pourra ainsi parler de structure géographique, économique, sociologique... en évoquant l'ensemble des attributs relatifs respectivement aux caractères géographiques, économiques, sociologiques... de l'espace.

Définissons à présent le terme de flou qui qualifie S.

### 2.1. Notion de sous-structure précise de $\underline{E}_G$

Considérons, dans un souci de simplification, l'espace géographique comme un sous-ensemble non flou de  $\underline{E}$  noté  $\underline{E}_G$ .

Soient les attributs  $s_j, j=1, \dots, l$  tels que,  $\forall j, \underline{E}_G$  peut être considéré comme une  $\sigma$ -algèbre, c'est-à-dire une famille de sous-ensembles non flous (qui seraient les singletons  $e_i, i=1, \dots, n, e_i \in \underline{E}_G$ ), définie selon nos propositions en B,I,1.

Donc :

$\forall j, (\underline{E}, \underline{E}_{G_j})$  est un ensemble mesurable

et  $(\underline{E}, \underline{E}_{G_j}, m_j)$  est un ensemble de mesure sur  $\underline{E}$  selon l'attribut  $s_j$ .

Nous définissons l'attribut  $s_j$  comme un attribut précis mesurable de  $\underline{E}_G$ . Ainsi pour un espace géographique formé de n unités spatiales, la variable "Population" est un attribut précis mesurable.

Nous définissons par *sous-structure précise de S*, la famille  $\underline{S}_1$  d'attributs  $s_j, j=1, \dots, l$  tels que  $s_j$  induit un ensemble de mesure sur  $\underline{E}$ , soit

$(\underline{E}, \underline{E}_{G_j}, m_j)$

### 2.2. Notion de sous-structure floue de $\underline{E}_G$

De nombreux attributs ne semblent a priori, pas mesurables. PONSARD (1983) souligne cependant que la théorie de la mesure floue ou de la valuation est une réponse mathématique au problème de traitement de ces attributs.

Ainsi l'attribut "fertilité" d'un site spatial n'est, au départ, pas susceptible d'être mesuré en tant que telle, de même qu'un attribut relatif à la "dispersion" de l'habitat, relatif à l'intégration d'un lieu dans la zone d'influence d'une ville, etc...

La logique binaire consiste à exprimer la valeur de ces attributs pour chaque observation en code binaire : tel lieu est fertile ou

ne l'est pas, a un habitat groupé ou dispersé...

L'expression intuitive refuse, on l'a vu, une telle logique ; de même que toute étude géographique approfondie.

Soient les attributs  $s_k$ ,  $k = 1+1, \dots, p$ , du type décrit.  $\forall k$ , on définira  $\underline{E}_{G_k}$  comme une  $\zeta$ -algèbre, c'est-à-dire comme une famille  $\underline{E}$  de sous-ensembles flous (qui seraient les singletons  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $e_i \in \underline{E}_G$ ) définie selon nos propositions en B, III, 2.

Donc  $\forall k$ ,  $(\underline{E}, \underline{E}_{G_k})$  est un ensemble fuzzifiable

et  $(\underline{E}, \underline{E}_{G_k}, \mu_k)$  est un ensemble fuzzifié selon la valuation  $\mu$  induite par l'attribut  $s_k$  sur  $\underline{E}_{G_k}$

Ainsi, pour tout attribut non mesurable, le sous-ensemble  $E_{G_k}$  peut être écrit sous la forme suivante :

$$\forall i \in \underline{I} \quad E_{G_k} = \left\{ (x_i, \mu_{E_{G_k}}(x_i)) ; x_i \in \underline{E}, \mu_{E_{G_k}}(x_i) \in \underline{M} \right\}$$

où  $\underline{M}$  : ensemble préordonné ou ordonné

Si comme plus haut, nous prenons  $\underline{M} = [0, 1]$ , on associera ainsi à chaque élément de l'espace géographique sa mesure floue pour chaque attribut  $s_k$ .

Ainsi pour l'attribut "Fertilité" du sol, on définira  $\mu$  de telle façon que l'on pourra dire : "telle région est fertile à un degré de 0,1..., telle autre l'est à un degré de 0,8..."

Nous définissons un tel attribut comme un *attribut valable* de  $E_G$ .

Nous définissons alors par *sous-structure floue* de  $S$ , la famille  $\underline{S}_2$  d'attributs  $s_k$ ,  $k = 1+1, \dots, p$  tels que  $s_k$  induit un ensemble fuzzifié sur  $\underline{E}$

$$(\underline{E}, E_{G_k}, \mu)$$

### 2.3. Structure floue de l'espace géographique

En fait les propriétés d'une mesure floue incluent les propriétés d'une mesure. Il nous sera donc possible, pour rendre  $S$  homogène, d'énoncer  $S_1$  comme une sous-structure floue de  $S$ .

Nous posons en conclusion, comme deuxième axiome de notre étude, l'exis-

tence d'une structure floue de l'espace géographique. Cet axiome a le mérite de ne pas restreindre la structure à l'ensemble des attributs mesurables, mais bien de proposer une formulation plus large et plus générale incluant ces types d'attributs.

### 3. L'espace géographique a une configuration imprécise C.

La conséquence logique des deux premiers axiomes proposés est que l'espace géographique a une configuration (c'est-à-dire une forme et une étendue) impossible à appréhender par une mesure précise.

En effet, un espace dont les limites sont imprécises du fait de l'appartenance "plus ou moins forte" des sites qui le composent, ne peut être mesuré selon les définitions données ci-dessus.

L'étude de la forme d'un espace géographique ou d'un sous-espace géographique relève alors de la notion de topologie floue.

#### 3.1. Notion de morphologie floue

##### 3.1.1. Définition d'une topologie floue d'un référentiel $\underline{E}$

3.1.1.a Une topologie floue d'un référentiel  $\underline{E}$  est une famille  $\underline{T}(\underline{E})$  de sous-ensembles flous de  $\underline{E}$ ,  $\underline{T}(\underline{E}) \in \mathcal{P}(\underline{E})$  et telle que :

- a)        -  $\underline{E} \in \underline{T}(\underline{E})$   
          -  $\emptyset \in \underline{T}(\underline{E})$

- b)         $\forall i, j \in \underline{I}$ , ensemble fini d'indices  
           $A_i \in \underline{T}(\underline{E})$  et  $A_j \in \underline{T}(\underline{E}) \Rightarrow A_i \cap A_j \in \underline{T}(\underline{E})$

- c)         $\forall i \in \underline{I}, A_i \in \underline{T}(\underline{E}) \Rightarrow \bigcup_{i \in \underline{I}} A_i \in \underline{T}(\underline{E})$

le couple  $(\underline{E}, \underline{T})$  définit un espace géographique flou.

3.1.1.b Les éléments de  $\underline{T}(\underline{E})$  sont appelés sous-ensembles flous ouverts de  $\underline{E}$ .

3.1.1.c Définissons un pseudo-complémentaire de  $A$ , sous-ensemble flou de  $\underline{E}$ , puisque la notion de complémentarité ne peut être admise en théo-

rie des sous-ensembles flous.

Si  $\underline{M} = [0,1]$ , A sous-ensemble flou de  $\underline{E}$

$\bar{A}$ , pseudo-complémentaire de A dans  $\underline{E}$  est tel que

$$\forall x_i \in \underline{E}, i \in \underline{I}, A \subset \underline{E} : \mu_{\bar{A}}(x_i) = 1 - \mu_A(x_i)$$

Exemple :  $\underline{E} = \{x_1, x_2, x_3\}$

$$A \subset \underline{E}$$

$$A = \{(x_1, 0.3), (x_2, 0.1), (x_3, 0.8)\}$$

son pseudo-complémentaire :

$$\bar{A} = \{(x_1, 0.7), (x_2, 0.9), (x_3, 0.2)\}$$

Réalisons l'intersection  $A \cap \bar{A}$

$$A \cap \bar{A} = \{(x_1, 0.3), (x_2, 0.1), (x_3, 0.2)\} \quad (1)$$

et l'union  $A \cup \bar{A}$

$$A \cup \bar{A} = \{(x_1, 0.7), (x_2, 0.9), (x_3, 0.8)\} \quad (1)$$

Nous voyons que, contrairement aux sous-ensembles ordinaires

l'intersection  $A \cap \bar{A} \neq \emptyset$

l'union  $A \cup \bar{A} \neq \underline{E}$

Si A, sous-ensemble flou de  $\underline{E}$  est un *ouvert* de  $\underline{E}$

$\bar{A}$ , pseudo-complémentaire de A est appelé sous-ensemble flou *fermé* de  $\underline{E}$

### 3.1.2. Application à la morphologie floue d'un espace géographique

La morphologie floue d'un espace géographique sera donc définie à partir des notions d'ouverts et de fermés et de notions topologiques dérivées. Nous n'insisterons pas sur ces notions dans le cadre de l'axiomatique que nous développons actuellement. Les propriétés topologiques seront étudiées en détail au cours des chapitres suivants et du traitement de l'exemple dans la deuxième partie de notre travail.

Mais d'ores et déjà nous remarquons que la formulation d'un axiome relatif à une morphologie spatiale floue est suffisamment large pour exprimer de façon générale toute morphologie. La morphologie des espaces précis qu'elle soit exprimée de façon empirique ou théorique (hexagones de Christaller, cercles concentriques de Von Thünen) se prête

(1) Ces opérations seront définies dans le chapitre III.

parfaitement à la formalisation topologique floue.

### 3.2. Mesure de l'étendue floue d'un espace géographique imprécis

Toute mesure précise est impossible. Aussi proposons-nous le recours à des mesures floues, seules susceptibles d'être appliquées à notre sujet.

#### 3.2.1. La mesure d'une longueur floue,

se fera en choisissant une fonction  $m$ , telle que les conditions suivantes soient satisfaites :

$$\text{soit : } m : A \longmapsto \underline{M} = ]0,1] \\ \forall i \in \underline{I}, x_i \in A \longmapsto m(x_i) \in ]0,1]$$

- 1)  $m ]\underline{T}(\emptyset)] = 0$  la mesure floue de la longueur d'un espace vide est nulle

Afin d'avoir une référence relative à la borne supérieure de l'intervalle, considérons  $\underline{E}$  comme un sous-ensemble précis de  $\underline{E}$ .

$m ]\underline{T}(\underline{E})] = 1$  nous poserons ici  $l(\underline{E}) =$  longueur floue de l'axe d'allongement maximum de  $\underline{E}$ . Ceci suppose une détermination préalable, au moyen de calcul d'indices d'allongement non flous, de cet axe d'allongement maximum.

- 2)  $\forall i \in \underline{I}, \forall A_i \in \underline{F}, 0 \ll m ]\underline{T}(A_i)] \ll 1$   
 $\underline{F}$ ,  $\xi$ -algèbre définie plus haut :

- 3)  $\forall i \in \underline{I}, \forall A_i \in \underline{F}, \forall j, k \in \underline{I}$   
 $A_j \subseteq A_k \implies m ]\underline{T}(A_j)] \ll m ]\underline{T}(A_k)]$

#### 3.2.2. Mesure d'une aire floue d'un espace géographique

Nous ferons appel, pour mesurer une aire floue, à la notion d'intégrale floue, c'est-à-dire en étendant au domaine de l'imprécis le calcul d'une aire d'une surface à l'aide du calcul intégral flou.

DUBOIS-PRADE (1980) présentent une méthode de calcul, à partir des travaux de SUGENO. Ceci permettra de mesurer l'aire d'un espace géographique mal délimité, ou délimité de façon imprécise.

En conclusion, nous notons que la théorie des sous-ensembles flous apporte donc en fait *plus* qu'une approche systématique de l'imprécision, approche que d'autres procédés mathématiques seraient eux aussi à même de réaliser. En fait cette théorie, et plus exactement la théorie des mesures floues, offre la possibilité d'effectuer la mesure d'un espace imprécis et de son étendue. Sans son aide, toute mesure de ce genre serait impossible. Nous avons donc bien là un outil original et unique d'étude de l'imprécision spatiale. Grâce à lui l'espace géographique flou peut, au même titre que l'espace géographique précis, être l'objet d'étude et d'analyse.

4. L'espace géographique est défini par une relation floue "d'espacement" entre tout couple de lieux.

Dans le cas d'un espace géographique flou tel que nous l'avons défini, c'est-à-dire mal délimité, auquel les éléments appartiennent à des degrés divers, il n'est le plus souvent pas possible de définir entre tout couple de lieux une distance telle que nous l'avons définie à propos de l'espace référentiel. Autrement dit *l'espace géographique n'est métrique que dans le cas où il est précis* ; poser en axiome le fait qu'une propriété fondamentale de l'espace géographique est qu'il est métrique nous semble restreindre notre champ d'étude aux seuls espaces non flous, c'est-à-dire à un type d'espace géographique seulement.

La relation  $R$  entre tout couple de lieux est donc significative de *l'espacement* des lieux. Définir cette relation répond aux préoccupations de REYMOND (*in* ISNARD, RACINE, REYMOND, 1981) qui parle de chorologie ou science d'espacement des lieux. Il appartient donc au géographe de définir  $R$  pour mettre en évidence le fait que la notion d'espacement des lieux est une notion multivalente qu'il ne s'agit pas d'appauvrir.

#### 4.1. Relation de voisinage

Sans exposer les notions topologiques associées à ce terme, et qui seront développées plus loin, définissons concrètement le voisinage comme une proximité entre lieux, sans qu'il soit possible de distinguer l'environnement propre à chacun des lieux en question.

s'exprime simplement par :

"est dans le voisinage de ..."

Cette relation qui apporte une information très pauvre au sujet du couple de lieux étudiés, est cependant la seule dont on dispose quand l'espace est incertain, mal connu. C'est une relation couramment évoquée lors de processus d'exploration spatiale, de conquête d'espaces peu connus ou de découvertes spatiales. Elle se prête à des appréciations subjectives parfois exagérées, parfois fausses (rappelons que Christophe Colomb, en découvrant le continent américain croyait avoir atteint le monde indien, donc avait établi une "relation" qu'il croyait pertinente entre les côtes européennes qu'il avait quittées et les côtes asiatiques), mais il arrive que ce soit les seules dont on dispose en analyse spatiale et qu'on ne peut donc négliger.

De plus, un espace structuré par une relation de voisinage, possède des caractères topologiques extrêmement importants, même si a priori ils peuvent sembler, là encore, très limités et pauvres pour un géographe (ROUGET 1975, PONSARD 1980).

#### 4.2. Relation de position

Quand  $R$  est définie comme une relation entre tout couple de points selon la position de ces points les uns par rapport aux autres, elle induit l'organisation de l'espace géographique en réseaux.

La théorie des graphes (BERGE 1957, SACHE 1974), exposée dans une optique d'analyse spatiale par CHARLEY et HAGGETT (1969), CICERI, MARCHAND et RIMBERT (1977) s'applique parfaitement à l'étude des espaces géographiques précis.

PONSARD (1980) développe à propos des espaces économiques flous

les multiples possibilités qu'apporte l'étude du graphe flou représentant le réseau flou entre les lieux.

Cette relation  $R$  de position entre tout couple de points induit des propriétés particulières de l'espace imprécis : d'un espace *séparé* (au sens topologique), il devient espace *connexe par arcs*, c'est-à-dire un espace où il est toujours possible de joindre un lieu à un autre. Il s'agit donc bien d'un espace géographique, même s'il n'a pas les propriétés d'un espace métrique.

#### 4.3. $R$ distance floue entre tout couple de points de l'espace géographique

On définit une distance floue (ROUGET 1975, 1976) de la façon suivante :

$$\begin{array}{ccc} R = \underline{E} \times \underline{E} & \longmapsto & \underline{M} = ]\underline{0}, 1] \\ \forall x, y \in \underline{E} \times \underline{E} & \longmapsto & \mu R(x, y) \in ]\underline{0}, 1] \end{array}$$

-  $\mu R(x, y)$  définit l'appartenance du couple  $(x, y)$  à  $R$  et représente une distance floue entre  $x$  et  $y$ .

- une distance floue est une application qui possède les propriétés d'antiréflexité, de symétrie et d'inégalité triangulaire. Si l'une ou l'autre de ces propriétés est remplacée pour une propriété plus faible, on définit une métrique faible floue.

Nous développerons ces points dans les chapitres suivants.

Ainsi l'espace géographique imprécis ne se prête pas à la détermination d'une métrique précise (métrique euclidienne ou autre), on peut cependant lui attribuer les caractères induits par une métrique floue, offrant ainsi un cadre plus général à l'axiomatique proposée par BEGUIN-THISSE (1979). Cette généralisation sera particulièrement utile dans le cas où l'espace géographique est un espace défini par des critères subjectifs (espaces perçus, vécus...) dont, par nature même, l'imprécision est le caractère fondamental.

## CONCLUSION DU CHAPITRE I

L'approche intuitive, quasi naturelle, accepte facilement la notion d'imprécision spatiale. L'utilisateur, l'habitant, vivent dans un espace flou, le perçoivent comme tel, y agissent et sont conditionnés par lui.

L'approche scientifique a tendance à refuser cette notion, ou du moins, à partir d'un présupposé de précision dans l'analyse spatiale, quitte à mettre en évidence ensuite des structures imprécises. Celles-ci le sont, pourrait-on dire presque accessoirement, car la méthodologie géographique est le plus souvent tentée par la mesure précise, et les mesures de partition de l'ensemble spatial en sous-ensembles rigoureusement disjoints et bien délimités.

Par là-même, l'étude géographique se limite à celle des espaces précis, ou, s'ils ne le sont pas, à les considérer comme précis, quitte à en appauvrir la portée.

Il nous semble nécessaire de ce fait de proposer une axiomatique plus large, qui tout en ne niant pas les fondements essentiels des espaces précis, s'appuie sur une formalisation plus générale.

Nous définissons ainsi la notion de sous-ensemble flou de l'espace référentiel, de structure floue, de configuration-imprécise et de relation floue entre les lieux. Cette formulation induit des caractères de l'espace géographique, elle rend nécessaire le recours à la théorie des sous-ensembles flous.

Dans les chapitres suivants, nous passerons en revue les différents types d'espaces géographiques dont nous venons de poser les fondements. Nous dégagerons les structures formelles, les bases mathématiques de l'étude ainsi que les implications géographiques de ces notations.

## CHAPITRE II

### LES ESPACES GEOGRAPHIQUES NON FLOUS OU LA FORMALISATION D'UN ESPACE PRECIS ET CERTAIN

#### INTRODUCTION

A - LES BASES AXIOMATIQUES DE L'ESPACE GEOGRAPHIQUE NON FLOU

B - LA REPOSE THEORIQUE AU PROBLEME DE L'INCERTITUDE SPATIALE :  
ESPACE GEOGRAPHIQUE PRECIS ET PROBABILITE

C - LES FONDEMENTS THEORIQUES DE LA REGIONALISATION SPATIALE

## INTRODUCTION

Le but de ce chapitre n'est pas de fournir une présentation systématique et exhaustive des méthodes d'analyse spatiale de ce que nous qualifions d'espace géographique non flou et qui est couramment défini par l'expression simple d'"espace géographique".

Il s'agit plutôt pour nous d'orienter notre réflexion dans trois directions qui nous semblent importantes.

En premier lieu, la réflexion sur l'axiomatique qui sous-tend les analyses spatiales "classiques" nous permettra de montrer qu'elle n'est qu'une forme particulière de l'axiomatique générale que nous avons définie plus haut. De ce fait, le rapide exposé de quelques modèles spatiaux "non flous" nous permettra de conclure là encore que, faute d'outil méthodologique adéquat, les auteurs de ces modèles, tout en appréhendant l'imprécision spatiale, reviennent à une modélisation "non floue" de l'espace.

Il s'agit ensuite de montrer comment l'axiomatique "non floue" appréhende les deux préoccupations géographiques fondamentales, à savoir l'incertitude et l'imprécision.

Nous étudierons de ce fait la relation : "espace géographique et probabilité" et nous soulignerons la différence essentielle entre flou et probabilité.

Nous insisterons enfin sur la relation en apparence paradoxale "espace géographique non flou" et imprécision, en montrant comment la géographie des espaces précis, soucieuse de "régionaliser" l'espace, mais en même temps consciente du caractère artificiel des limites nettes, peut approcher la notion d'imprécision spatiale.

## A - LES BASES AXIOMATIQUES DE L'ESPACE GEOGRAPHIQUE NON FLOU

### I - Les fondements formels

#### 1. Définition formelle générale d'un espace géographique

Rappelons l'axiomatique évoquée plus haut et définissons formellement un espace géographique

$$E_G = (E, S, C, R) \quad (1)$$

$E_G$  est un espace géographique défini par les termes suivants :

- un sous-ensemble flou de  $\underline{E}$ , ensemble de lieux de l'espace-référentiel munis d'une fonction d'appartenance à cet ensemble, fonction qui prend ses valeurs dans un ensemble ordonné  $\underline{M}$ .

- une structure floue  $S$  définie par l'union de sous-structures  $S_1$  et  $S_2$

où :  $S_1$  sous-structure précise

$S_2$  sous-structure floue

avec  $S_1 = \{s_i, i = 1, \dots, l\}$  ensemble fini d'attributs quantitatifs précis.

$S_2 = \{s_k, k = l + 1, \dots, p\}$  ensemble fini d'attributs quantitatifs flous.

- une configuration floue, c'est-à-dire une forme et une étendue non "mesurables" du fait de la mauvaise délimitation de  $E$ .

- une relation  $R$  floue entre tout couple de lieux de  $E_G$ .

#### 2. Définition formelle d'un espace géographique non flou

$E_G$  étant ainsi défini, nous pouvons travailler sur un cas particulier : celui où tous les termes de l'axiomatique sont *précis*. Nous définissons ainsi un espace géographique  $\underline{E}_G$  tel que :

$$\underline{E}_G = (\underline{E}, \underline{S}, \underline{C}, \underline{R}) \quad (2)$$

Reprenons chacun des termes de ce quadruplet et montrons qu'il s'agit bien, à chaque fois, d'un cas particulier de (1).

##### 2.1. Soit $\underline{E}$ le sous-ensemble précis de $\underline{E}$

Autrement dit, on peut définir  $\underline{E}$  comme un sous-ensemble flou dont les fonctions d'appartenance prennent leur valeur, non dans l'ensemble  $\underline{M}$  ordonné avec  $\underline{M} = ]0,1]$ , mais dans  $\underline{M} = \{0,1\}$

Nous avons donc :

$$\underline{E} = \left\{ (e_i, \mu_{\underline{E}}(e_i), i \in \underline{I} \text{ ensemble d'indices, } \mu_{\underline{E}}(e_i) \in ]0,1] \right\} \text{ (cas flou)}$$

$$\underline{E} = \left\{ (e_i, \mu_{\underline{E}}(e_i), i \in \underline{I} \text{ ensemble d'indices, } \mu_{\underline{E}}(e_i) \in \{0,1\} \right\} \text{ (cas non flou)}$$

donc  $\forall i,$

$$\begin{aligned} \mu_{\underline{E}_i} = 1 & \iff e_i \in \underline{E} \\ \mu_{\underline{E}_i} = 0 & \iff e_i \notin \underline{E} \end{aligned}$$

Nous avons donc bien un cas particulier de la formulation générale.

## 2.2. Soit $\underline{S}$ structure précise de $\underline{E}_G$

ceci suppose que  $\underline{S}$  définie en (1) est telle que aucun attribut n'est imprécis.

2.3. Du fait de la définition de  $\underline{E}$  sous-ensemble non flou de  $\underline{E}$ , forme et étendue de  $\underline{E}_G$  peuvent être définies avec précision et mesurées. Deux cas doivent être énoncés :

2.3.1.  $\underline{E}$  est continu, on peut définir  $\underline{F}$ , famille finie ou non de sous-ensembles non flous de  $\underline{E}$  respectant les conditions d'une  $\sigma$ -algèbre définies en I,B,I,1

$$\underline{F} \in \underline{P}(\underline{E}) \quad \underline{F} = (\underline{E}_i, i \in \underline{I} \text{ ensemble fini ou non d'indices})$$

Dans ce cas :

$(\underline{E}, \underline{F})$  définit un ensemble mesurable et  $(\underline{E}, \underline{F}, m)$  définit un ensemble de mesure sur  $\underline{E}$ , avec  $m$ , application ayant pour ensemble de définition  $\underline{F}$  et pour ensemble de valeurs  $\mathbb{R}^+$ ;  $m$  est une mesure de la forme ou de l'étendue de  $\underline{E} \in \underline{F}$ .

Donc la notion de configuration précise est bien incluse dans la notion de configuration floue, puisqu'elle suppose les mêmes propriétés plus celle de la complémentation.

2.3.2. Si  $\underline{E}$  est discret,  $\underline{E}$  peut être partitionné en sous-ensembles dont les plus simples sont les singletons représentant les lieux. Dans ce cas le même raisonnement peut être mené à partir de  $\underline{F} \in \underline{P}(\underline{E})$ .

Il est donc possible de définir là encore :

$(\underline{E}, \underline{F}, m)$ , ensemble de mesure sur  $\underline{E}$ . Chaque lieu a donc une forme et une étendue mesurables.

On soulignera que cet ensemble de mesure n'est qu'un cas particulier d'un ensemble fuzzifié (valué).

#### 2.4. Notion de relation $\underline{R}$ entre tout couple de points de $\underline{E}$

Nous avons souligné que  $\underline{R}$  dans (1) est une relation floue qui peut exprimer, selon le degré d'information dont nous disposons, comme une relation de voisinage flou, de position relative dans un graphe flou, de distance floue entre tout couple de points de  $\underline{E}$ .

On peut définir une distance non floue sur un espace géographique précis, c'est-à-dire une fonction  $d$  de  $\underline{E}^2$  vers  $\mathbb{R}^+$  telle que :

$$1) \quad \forall x_1, x_2 \in \underline{E}^2 \quad d(x_1, x_2) > 0 \iff x_1 \neq x_2$$

$$2) \quad \forall x_1, x_2 \in \underline{E}^2 \quad d(x_1, x_2) = 0 \iff x_1 = x_2$$

$$3) \quad \forall x_1, x_2 \in \underline{E}^2 \quad d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1)$$

$$4) \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in \underline{E}^3 \quad d(x_1, x_3) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3)$$

, que nous pouvons considérer comme une distance floue particulière. En effet les conditions 1), 2), 3), sont également celles d'une distance floue. D'autre part 4) est remplacée par une formulation plus large dans le cas flou :

$$4') \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \quad d(x_1, x_3) \leq d(x_1, x_2) * d(x_2, x_3)$$

avec \* : produit, MAX ,  
par exemple.

D'autre part il est toujours possible de normaliser au cours d'une étude des distances non floues, en les divisant par la distance MAX trouvée dans cette étude. De ce fait :

$$\begin{aligned} d : \underline{E}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ \text{devient } d_n : \underline{E}^2 &\longrightarrow \underline{M} = ]0,1] \\ \forall (x_i, x_j) \in \underline{E}^2 &\longrightarrow d(x_i, x_j) \in ]0,1] \end{aligned}$$

Une distance "non floue" entre deux points peut donc être assimilée à une distance floue.

2.5. En conclusion nous pouvons donc avancer qu'un espace géographique précis, tel qu'il est couramment étudié par les géographes n'est qu'un cas particulier d'espace géographique.

La formalisation générale floue énoncée plus haut n'est donc en rien incompatible avec la formalisation "non floue" qui vient d'être présentée. Cette dernière reprend en effet les différents termes généraux en leur donnant une signification plus particulière et plus limitée.

Nous pensons donc que l'axiomatique de l'espace géographique précis est incluse dans une axiomatique plus générale, celle de l'espace géographique flou.

Il nous faut voir à présent que cette axiomatique "précise" a pu être interprétée différemment selon les chercheurs et les écoles et que l'analyse spatiale a pu être menée en donnant des significations particulières à tel ou tel terme.

## II - Modèles d'espaces géographiques non flous

Reprenant la phrase de VIDAL DE LA BLACHE citée par BEGUIN et THISSE :

"La Géographie est la science des lieux, non des hommes", voyons comment les modèles fondamentaux d'organisation spatiales conçoivent cette science des lieux et comment les termes axiomatiques définis se traduisent dans leur formulation.

Dès le départ il est remarquable de noter que l'imprécision spatiale n'est pas occultée, bien au contraire ; elle apparaît par exemple dans le schéma de VON THUNEN perturbé par l'introduction d'une voie de communication. Cependant la modélisation "classique" reste celle d'un espace géographique non flou, comme si, l'outil méthodologique de traitement de l'imprécision n'étant pas connu ou exploité, cette méconnaissance entraînait une *modélisation adaptée à l'outil dont le chercheur dispose et non l'inverse*.

Nous appuyerons cette réflexion sur l'analyse de modèles socio-économiques et, dans un second temps, de modèles plus spécifiquement géographiques.

## 1. Modèles socio-économiques

Ils sont abondamment décrits et explicités, y compris par les géographes (HAGGETT 1973, CLAVAL 1974 entre autres).

### 1.1. Le modèle de localisation agricole de VON THUNEN et la conception de l'espace

1.1.1. VON THUNEN considère l'espace comme une surface donc comme un ensemble dont on peut mesurer l'étendue. Cet espace s'organise autour d'un centre de consommation en cercles concentriques dont la production agricole, est celle qui donne les plus forts revenus, compte tenu des frais de transport au centre. Ainsi se succèdent, du centre à la périphérie, des anneaux consacrés aux légumes, au blé, à l'élevage.

Les "cercles de VON THUNEN induisent ainsi une organisation (configuration) géométrique de l'espace. Ils postulent que la rente foncière est une fonction de la distance à la ville.

Les caractères spatiaux géographiques qui en découlent sont donc les suivants :

- *homogénéité de l'espace* : ce terme étant pris à la fois au sens strict : une propriété valable en un point est valable pour tous les points de l'espace (fertilité du sol), et au sens d'*isotropie* : l'espace a les mêmes propriétés dans toutes les directions autour d'un point

(homogénéité des coûts de transports dans le modèle)

- *continuité de l'espace* à savoir que l'espace est continu, ("sans trous"), sans obstacles d'une part, et qu'il est parfaitement et également accessible en tous ses points. Cette continuité spatiale s'énonçant en terme de convexité :

2.1.2. VON THUNEN perturbe le schéma spatial en introduisant un axe de circulation qui, diminuant les coûts de transports provoquent un étirement des cercles en bandes parallèles à cet axe. L'espace perd son caractère d'isotropie ; d'autre part il perd son homogénéité stricte quand on prend en compte des secteurs d'inégale fertilité.

2.1.3. Ainsi le modèle de VON THUNEN qui suppose implicitement un *espace métrique euclidien* n'est valable que dans des conditions quasi idéales.

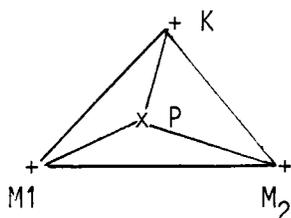
Mais, dans l'hypothèse d'acceptation des conditions d'homogénéité, d'isotropie et de continuité, il a été utilisé par BURGESS pour expliquer en partie la zonation urbaine et la compétition pour le centre-ville selon l'aptitude des utilisateurs à payer un loyer, laquelle dépend du type d'occupation du sol. Là encore, l'espace urbain "idéal" est considéré comme muni d'une métrique euclidienne. Les propriétés sont différentes dans le schéma radio-concentrique d'organisation urbaine où les anneaux (réservés à des activités de moins en moins rentables à mesure qu'on s'éloigne du centre) sont étirés en bandes le long des grands axes de circulation .

#### 1.2. Le modèle de localisation industrielle de WEBER

Le modèle de localisation industrielle de WEBER cherche à trouver le point P de transformation de matières premières M1 et M2 dont on connaît la localisation ainsi que celle du marché de consommation K.

P doit être tel qu'il minimise les frais de transport compte tenu que ces frais dépendent du coût de transport au kilomètre de l'é-

nergie, des matières premières et des produits fabriqués.



Dans l'hypothèse d'un espace homogène et isotrope en tout point, les tarifs de transport, P est le centre de gravité du triangle M1 K M2.

En fait P peut être en M1 ou M2 ce qui est le cas des bassins industriels localisés sur des gisements miniers (paysage industriel du XIXe siècle), en K (cas d'un port) ou en tout autre point du triangle selon l'hétérogénéité du milieu (tarifs des transports non uniformes).

W. ISARD généralise le système de WEBER et montre que plusieurs points peuvent satisfaire aux contraintes énoncées par ce dernier.

Dans les deux modèles, si l'homogénéité de l'espace n'est plus respectée, la continuité reste cependant un caractère spatial fondamental.

### 1.3. La théorie des lieux centraux de CHRISTALLER et LOSCH

Elle suppose une population équirépartie dans un espace homogène, isotrope et continu. Le facteur d'organisation spatiale est l'économie d'échelle qui pousse un centre à étendre sa production ; mais ce développement est freiné par l'augmentation du coût de transport qui majore le prix au marché et introduit une distance limite au-delà de laquelle, pour un consommateur donné, il n'est plus rentable de se rendre au centre donné pour acheter un produit.

L'espace prend alors une structure géométrique en cercles, mais dans ce cas des "zones vides" ne sont pas desservies ; la constitution d'un pavage hexagonal régulier représente donc la forme optimale de l'organisation spatiale.

Les hexagones s'emboîtent selon l'importance du centre qui les organise. Ainsi naissent des structures de type  $K = 3$ ,  $K = 4$ ,  $K = 7$ ,

selon que le centre considéré contrôle, en-dehors de lui-même, respectivement 2, 3, 6 centres de niveau inférieur.

Notre but n'est pas de souligner l'intérêt d'une telle modélisation, ni d'insister sur les adaptations dont elle a fait l'objet ultérieurement. Il est simplement de mettre en évidence que les présupposés sont ceux d'un espace métrique, euclidien, donc homogène, isotrope et continu, donc là encore, de n'envisager qu'une forme particulière d'espace.

#### 1.4. La "Science Régionale"

L'association de Science Régionale s'attache quant à elle, à souligner qu'au-delà de la structure géométrique de l'espace, des facteurs nombreux doivent être pris en compte dans tout effort de modélisation spatiale (ISARD, 1975). C'est ainsi que PONSARD et son équipe (Institut de Mathématique Economique, Dijon) insistent sur le fait que l'espace économique a une infinité de structures mathématiques, qui toutes induisent des caractères formels et économiques différents. L'analyse spatiale se doit donc de définir et de formaliser ces structures mathématiques avant de dégager les caractères économiques de l'espace et éventuellement d'en proposer une modélisation.

Bien plus, PONSARD (1983 et autres publications) insiste sur le rôle du *comportement* de l'homme dans l'organisation spatiale. A côté de l'analyse spatiale proprement dite, il suggère la nécessité de prendre en compte les facteurs humains : l'homme-habitant, l'homme-consommateur et producteur doivent opérer des choix qui optimisent les relations entre leurs besoins, et les contraintes diverses auxquelles ils sont soumis. Par là-même ils adoptent un comportement spatial, précis, rationnel ou le plus souvent flou, qui est lui-même un facteur de modifications de caractères spatiaux.

Analyser de ce fait l'espace économique est chose malaisée. Aussi l'équipe de l'I.M.E. a formulé, formalisé et développé la notion d'espace économique flou (PONSARD 1980) et de comportement flou du consommateur (même auteur 1983) remettant ainsi en cause les présupposés classiques de précision et de certitude de l'organisation spatiale. Leurs

travaux servent de base à notre réflexion sur les espaces géographiques flous.

## 2. Modèles spatiaux géographiques

Comment la recherche géographique conçoit-elle à son tour cette "science des lieux" dont nous venons d'exposer quelques aspects socio-économiques ? En d'autres termes, nous nous proposons à présent, non de développer les nombreux modèles spatiaux géographiques, mais à partir de quelques propositions, de dégager quelles sont les bases formelles, quelle est la structure mathématique profonde de l'espace géographique modélisé. Nous nous intéresserons plus particulièrement à deux types d'approches.

### 2.1. L'approche axiomatique

Cette approche est remarquablement illustrée par les travaux de BEGUIN (BEGUIN-THISSE 1979, BEGUIN-THISSE 1981, BEGUIN-BAILLY 1982).

Elle concerne essentiellement une proposition d'axiomatique de l'espace géographique défini comme

$$(S, d_l, \mu_A, (\mu_i ; i \in I))$$

- où  $S$  est un ensemble de lieux (le terme de lieu étant une notation intuitive d'unité spatiale élémentaire)
- $d_l$  une métrique-longueur définie sur  $S$  satisfaisant aux conditions d'une métrique
- $\mu_A$  une mesure d'aire définie sur la famille des sous-ensembles spatiaux ayant une étendue
- $(\mu_i ; i \in I)$  la mesure non négative, définie sur la famille des sous-ensembles de l'espace pourvus de caractéristiques géographiques, de l'attribut  $i$ .

Les auteurs distinguent les attributs simples des attributs composés, obtenus par combinaison d'attributs simples et de mesure de longueur ou de surface (densité au  $\text{km}^2$ , rendement à l'ha etc..)

Ces auteurs rappellent les propriétés mathématiques d'un espace géographique ainsi défini :

- *l'homogénéité* de l'espace selon un attribut de valeur constante pour tout l'espace. Cette homogénéité suppose la propriété d'*isotropie globale*

- la *continuité* de l'espace si l'espace, défini comme un espace métrique est connexe, c'est-à-dire si S ne peut être subdivisé en sous-espaces ouverts à intersection vide.

Cette axiomatique est fondamentale car elle représente une proposition cohérente, complète et approfondie de formalisation de l'espace géographique. Elle pose comme fondement essentiel l'idée que l'espace géographique *est* un espace mathématique et doit donc être étudié comme tel ; par son effort de formalisation le chercheur pourra ainsi accéder à une expression spatiale riche de par sa portée générale mais aussi par son exigence de clarté, d'expression nette des bases du raisonnement géographique. Ceci correspond bien à la préoccupation de la Nouvelle Géographie (HARVEY 1969, CLAVAL 1977 et autres auteurs).

Cette axiomatique reste cependant très "classique" et soucieuse de respecter les structures spatiales métriques. L'espace géographique formalisé est un espace précis, certain, mesurable selon la théorie de la mesure dont nous avons énoncé plus haut les conditions. C'est un espace métrique et même le plus souvent euclidien selon les notations des auteurs. Mais en fait et nous essayons dans ce travail de le montrer, cette axiomatique peut être élargie par la prise en compte et l'intégration des notions d'imprécision et d'incertitude relatives à l'espace géographique.

## 2.2. L'approche chorotaxique

REYMOND (1981) utilisant un large éventail de travaux de réflexion fondamentale sur la problématique de la géographie, propose, en un "plaidoyer pour une chorotaxie expérimentale" la formulation de deux notions essentielles. Il n'est pas dans notre propos de les développer, mais bien plutôt d'énoncer les concepts spatiaux formels qui sous-tendent cette double formulation.

Partant de la conception systémique, l'auteur insiste sur le rôle essentiel de la *notion de relation* en géographie : relation homme-

espace, déjà mise en valeur par les géographes "classiques" (ISNARD 1981), relations spatiales d'objets à objets (flux), relations systémiques externes et internes représentées par des effets d'input, output, par des boucles de rétroactions positives ou négatives par lesquelles un système maintient son équilibre dynamique ou se modifie.

L'auteur présente en premier lieu l'*espace*, défini par ses caractères formels d'homogénéité, d'isotropie, de continuité, d'"infini-tude", c'est-à-dire, formellement un espace métrique de cardinal infini.

La "contradiction chorotaxique" est que l'homme se meut dans l'"*étendue*", hétérogène, anisotrope, discontinu et fini et y localise des éléments en les situant les uns par rapport aux autres. Il respecte de ce fait, bon gré mal gré, les fondements de la *chorotaxie* ou science d'espacement des lieux :

- *une obligation d'espacement* que l'on peut exprimer formellement par une relation de distance entre tout couple d'objets spatiaux :

- distance nulle entre deux objets contigus
- distance infinie quand le deuxième objet vient remplacer le premier sur le même site
- distance comprise entre  $\emptyset$  et l'infini dans les autres cas.

Cette obligation d'espacement impose une obligation de liaison entre objets spatiaux

- *une liberté de disposition* des objets spatiaux, liberté qui cherche en fait à optimiser les liaisons inter-objets.

- *la "puissance de la surface"*, expression qui représente, pour l'auteur, la supériorité en terme de liaisons optimales entre centres d'un réseau par rapport à une organisation linéaire.

Cette "étendue géographique" soumise à l'action de l'homme en vue d'arranger les objets spatiaux, peut donc s'exprimer formellement par un *espace mathématique-réseau*, ou un *espace topologique*, mais n'est plus, (ou sans doute que dans certains cas particuliers d'organisation spatiale particulièrement planifiée) un espace métrique.

Certes, toute "étendue" est modifiée par les sociétés dont le but est de renforcer l'"ordre" spatial au sens où E. MORIN (1977, 1980)

définit ce terme. C'est ainsi que REYMOND note :

- la tendance à la continuité spatiale. L'homme cherchera à résorber, par la création de réseaux divers, les sous-espaces "non accessibles"

- la tendance à l'isotropie

- la tendance à l'homogénéisation spatiale. Uniformiser l'étendue semble en effet une préoccupation à la fois politique et sociale de toute société et de tout pouvoir.

Cependant cette tendance est loin d'être absolue ; REYMOND opposant, en une table de vérité, l'espace et l'étendue, axiomes contradictoires selon lui, définit un phénomène géographique comme étant A : actuel, P : potentiel, T : semi-actuel, semi-potentiel, selon le schéma suivant :

Etendue	Espace
A	P
P	A
T	T

N'applique-t-il pas indirectement la conception de l'imprécision que nous avons énoncée plus haut ?

2.3. Nous empruntons à RACINE, intervenant dans le même ouvrage de REYMOND (1981) la conclusion suivante :

"On peut en effet penser le monde en termes de points, de lignes, de surfaces et penser la géographie à partir de ces primitives dimensionnelles. Combinés avec les points, lignes et surfaces, les concepts de direction, de distance et de connectivité commandent toute l'analyse spatiale".

Cette préoccupation de formalisation de l'espace géographique que nous avons retrouvée à travers les modèles spatiaux exposés, nous semble fondamentale, et la recherche de la structure mathématique de l'espace absolument nécessaire avant toute analyse spatiale. Effectivement cette structure induit des caractères spatiaux formels et géographiques qui conditionnent toute l'organisation spatiale.

Faut-il soupçonner cette démarche de formalisation de "poser une problématique explicite mais de reposer sur une problématique implicite d'un autre type", comme se le reprochent respectivement géographes de tendance marxiste ou behavioriste et comme le rappelle RACINE ?

Nous n'irons pas aussi loin et nous bornerons à remarquer que la formalisation a le mérite d'énoncer clairement les fondements du raisonnement géographique, de faire remonter le plus "en amont" possible de la réflexion l'apport axiomatique et d'obliger le chercheur à un choix raisonné et justifié de son outil méthodologique d'analyse spatiale.

C'est ce que nous allons faire dans ce qui suit. Considérant que le géographe se doit de répondre à une double préoccupation : celle de traiter des espaces incertains (dont la connaissance n'est pas parfaite) et celle de régionaliser l'espace, nous montrerons quels sont les outils mathématiques utilisés pour traiter ces deux problèmes. Mais, ce faisant, nous nous efforcerons de démontrer que, si ces deux problèmes sont énoncés de *façon particulière, relative aux espaces précis*, les réponses méthodologiques sont, elles aussi, particulières : la théorie des graphes d'une part, la topologie d'autre part, peuvent être exprimées de façon beaucoup plus générale et servir à traiter *tous* les types d'espaces géographiques.

Nous nous occuperons ici d'énoncer les bases formelles particulières aux espaces précis, nous réservant cette généralisation pour les chapitres ultérieurs.

## B - LA REPONSE THEORIQUE AU PROBLEME DE L'INCERTITUDE SPATIALE : ESPACE GEOGRAPHIQUE PRECIS ET PROBABILITE

### I - Un espace précis incertain

#### 1. Approche formelle et géographique

Dans l'expression d'un espace géographique précis :

$$\underline{E} = (\underline{E}, \underline{S}, \underline{C}, \underline{R}) \quad (2)$$

il s'agit d'affecter à chaque lieu de  $\underline{E}$ , ensemble des lieux spatiaux, ou à chaque sous-ensemble de  $\underline{E}$  une "fonction d'incertitude" exprimant le degré de méconnaissance relatif à l'appartenance de ce lieu ou sous-ensemble à  $\underline{E}$ .

Cette méconnaissance peut être due au fait que nous essayons d'appréhender une situation future, dont tous les facteurs ne sont pas connus ou sont imparfaitement connus.

Elle peut également être le fait d'une méconnaissance actuelle concernant l'appartenance de tel ou tel sous-espace à  $\underline{E}$  ; méconnaissance liée à l'impossibilité technique (manque de moyens de mesure d'un attribut géographique) ou même impossibilité "fondamentale" de déterminer tous les attributs explicatifs d'un espace géographique. (Ne devrions-nous pas, dans *tous* les cas énoncer cette impossibilité d'appréhender tous les attributs et donc travailler dans tous les cas sur des espaces précis probabilisés ?) Evoquons à titre d'exemple les caractères géographiques tels que la notion de "préférence spatiale", de perception, de comportement spatial ou autres attributs relatifs au "vécu".

Toute la géographie prospective d'une part et celle des espaces vécus et perçus rencontrent de telles difficultés.

Deux remarques sont cependant à faire dès ce début d'exposé.

En premier lieu, *incertitude ne signifie pas imprécision*. En effet, on peut dire que si l'incertitude relative à l'appartenance à  $\underline{E}$  d'un sous-ensemble est levée, ce sous-espace appartient entièrement ou sans ambiguïté possible à  $\underline{E}$  ou ne lui appartient pas.

L'image triviale :

"Demain, il y a 70 % de chances qu'il pleuve"  
est exprimée de telle sorte que, le lendemain soir, ou la pluie est tombée (l'événement "il pleuvra" s'est réalisé) ou elle n'est pas tombée (l'événement opposé s'est réalisé). Mais l'expression est en aucun cas relative à une pluie *plus ou moins* fine, forte etc... (événement imprécis).

En second lieu, et découlant du premier, l'incertitude n'affecte

en rien les autres termes de (2). Ou le sous-espace appartient (avec une "chance" variable) à  $\underline{E}$ , et dans ce cas  $\underline{S}$ ,  $\underline{C}$ ,  $\underline{R}$  concernent ce sous-ensemble, ou il n'appartient pas à  $\underline{E}$ .  $\underline{S}$ ,  $\underline{C}$ ,  $\underline{R}$  ne lui sont de ce fait pas appliqués.

Cette incertitude spatiale s'exprime, pour les espaces précis, dans le cadre formel de la théorie des probabilités.

## 2. Probabilité d'appartenance d'un sous-espace à un espace géographique précis

S'agissant d'un espace défini par un prédicat géographique précis, on peut chercher à attacher à chaque sous-ensemble spatial une probabilité de rattachement de ce sous-ensemble à l'espace défini. Ainsi si l'on veut définir l'ensemble des pays d'Europe Occidentale dont la hausse moyenne annuelle des prix à la consommation sera, en 1985, supérieure à un seuil donné : par exemple 5 %, on cherchera à associer à chaque pays une probabilité de rattachement au groupe de pays défini par ce prédicat. Probabilité que nous essayerons de "chiffrer" en tenant compte de la situation présente de tous les pays d'Europe Occidentale : production, consommation, données relatives au commerce extérieur, taux de chômage etc, en tenant compte également des "tendances" de ces différents facteurs, de l'évolution de la situation internationale etc...

La probabilité d'un événement  $E_i$  (qui est ici : la "chance" du pays  $i$  d'appartenir au groupe des pays dont l'inflation sera supérieure à 5 % en 1985) est donc une mesure de notre méconnaissance d'une situation dans le futur.

Si nous estimons en effet que notre connaissance d'un pays est parfaite, et que ce pays appartiendra sans aucun doute au groupe défini, la probabilité devient certitude d'appartenance. Le pays  $i$  aura donc une probabilité maximum d'appartenir à ce groupe. Dans le cas contraire, si nous avons la certitude de non-appartenance, la probabilité d'appartenance au groupe sera nulle.

Si, au contraire, la connaissance est imparfaite, nous affir-

merons que ce pays appartiendra au groupe défini avec une probabilité égale par exemple à 0.7. Notre affirmation a ainsi, 70 % de chances de se réaliser.

Cette probabilité passe ainsi par l'examen de l'hypothèse  $H_0$  (appartenance au groupe) et de l'hypothèse  $H_1$  (non appartenance au groupe) s'excluant mutuellement. En ce sens elle se distingue de la notion générale d'incertitude développée plus haut où il est impossible d'énoncer deux (ou plus) hypothèses s'excluant mutuellement. Nous insisterons dans le chapitre 4 sur ce cas.

### 3. Formalisation de cet exemple

Soit  $G_1$  le groupe de pays d'Europe Occidentale répondant au critère posé

$G_2$  le groupe des pays ne répondant pas à ce critère.

on a  $S$  ensemble des pays d'Europe Occidentale

$$S = \{G_1, G_2\} \quad \text{avec } G_1 \cap G_2 = \emptyset$$

Définissons par  $E$  l'événement : "appartient à  $G_1$ "

et par  $E_i$  l'événement : "le pays  $i$  appartient à  $G_1$ "

et par  $\bar{E}_i$  l'événement : "le pays  $i$  n'appartient pas à  $G_1$ , donc appartient à  $G_2$ "

*Nous avons donc bien deux événements opposés.*

On définit :

$$\Pr (E_i) = \frac{m}{n}$$

où  $n$  : nombre de cas possibles :  $n = 2$

$m$  : nombre de cas favorables =  $0 \leq m \leq 2$

si  $\Pr (E_i) = 1$   $i \in G_1$

$\Pr (E_i) = 0$   $i \in G_1 \implies i \in G_2$

$0 < \Pr (E_i) < 1$   $i$  appartient à  $G_1$  avec une probabilité  $\Pr (E_i)$

Définissons à présent les bases formelles d'un espace précis probabilisé.

II - Les bases formelles d'un espace précis probabilisé

1. Notion de corps de BOREL

soit  $\underline{E}$  un ensemble précis, référentiel

$\underline{S}$  une famille de sous-ensembles précis de  $\underline{E}$

$$\underline{S} \subset \underline{P}(\underline{E})$$

1.1.  $\underline{S}$  est un corps de BOREL si :

1.1.a.  $\emptyset \in \underline{S}$  et  $\underline{E} \in \underline{S}$

1.1.b.  $(\underline{A} \in \underline{S} \text{ et } \underline{B} \in \underline{S}) \implies (\underline{A} \cap \underline{B}) \in \underline{S}$

1.1.c.  $((\underline{A}_1, \underline{A}_2, \dots, \underline{A}_j, \dots) \in \underline{S}) \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} \underline{A}_i \in \underline{S}$

1.1.d.  $\underline{A} \in \underline{S} \implies \bar{\underline{A}} \in \underline{S}$

alors :  $(\underline{E}, \underline{S})$  est appelé espace borélien.

Ex : soit  $E = \{a, b, c, d\}$

$$S = \{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b,c\}, \{a,d\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, E\}$$

$\underline{S}$  forme un corps de BOREL et

$(\underline{E}, \underline{S})$  est un espace borélien.

En effet les quatre conditions d'un corps de BOREL sont réunies et peuvent être vérifiées.

1.2. Vérifions qu'un corps de BOREL est une  $\sigma$ -algèbre

1.2.1. Rappel

$\underline{E}$  référentiel

$\underline{A}$  famille de sous-ensembles de  $\underline{E}$

$$\underline{A} \subset \underline{P}(\underline{E})$$

est une  $\sigma$ -algèbre si :

1.2.a.  $\underline{E} \in \underline{A}$

1.2.b.  $\forall i \in \underline{I}, \forall \underline{A}_i \in \underline{A}, \forall j, k \in \underline{I}, \underline{A}_j \cap \underline{A}_k = \emptyset$   
 $\implies \bigcup_{i=1}^{\infty} \underline{A}_i \in \underline{A}$

1.2.c.  $\forall i \in \underline{I}, \forall \underline{A}_i \in \underline{A} : \underline{A}_i \in \underline{A} \implies \bar{\underline{A}}_i \in \underline{A}$

1.2.2. - la condition 1.1.a. vérifie bien la condition 1.2.a. d'une  $\sigma$ -algèbre

- la condition 1.1.c. vérifie la condition 1.2.b.

- la condition 1.1.d. de complémentation correspond à la condition 1.2.c.

Un corps de BOREL est donc bien une  $\sigma$ -algèbre et l'espace borélien  $(\underline{E}, \underline{S})$  est donc bien un espace mesurable.

## 2. Mesure dans un corps de BOREL : espace probabilisé

### 2.1. Définissons une mesure positive ou nulle dans $\underline{S}$ telle que :

$$2.a. \quad m(\emptyset) = 0 \\ m(E) = 1$$

$$2.b. \quad \forall \underline{A} \in \underline{S}, \quad \forall \underline{B} \in \underline{S} : \underline{A} \cap \underline{B} = \emptyset \implies m(\underline{A} \cup \underline{B}) = m(\underline{A}) + m(\underline{B})$$

et en généralisant à un référentiel infini :

$$\forall i \in \underline{I}, \quad m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \underline{A}_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(\underline{A}_i)$$

$$2.c. \quad \underline{A} \subseteq \underline{B} \implies m(\underline{A}) \leq m(\underline{B})$$

L'espace borélien muni d'une telle mesure est donc :  $(\underline{E}, \underline{S}, m)$

### 2.2. $m$ peut donc être une mesure de probabilité

Un espace borélien  $(\underline{E}, \underline{S})$  est dit probabilisé si on a défini une fonction de  $\underline{S}$  vers  $[0,1]$  ayant les propriétés suivantes : (KAUFMANN 1973)

$$a. \quad \forall i \in \underline{I}, \quad \forall \underline{A}_i \in \underline{S} \implies \text{Pr}(\underline{A}_i) \geq 0$$

$$b. \quad \text{Pr}(\emptyset) = 0$$

$$c. \quad \forall \underline{A} \in \underline{S}, \quad \forall \underline{B} \in \underline{S}, \quad \underline{A} \cap \underline{B} = \emptyset \implies \\ \text{pr}(\underline{A} \cup \underline{B}) = \text{pr}(\underline{A}) + \text{pr}(\underline{B})$$

$$d. \quad \text{Pr}(\underline{E}) = 1$$

d'où on peut tirer

$$e. \quad \text{Pr}(\overline{\underline{A}}) = 1 - \text{Pr}(\underline{A})$$

$$f. \quad \text{Pr}(\underline{A}) + \text{Pr}(\underline{B}) = \text{Pr}(\underline{A} \cup \underline{B}) + \text{pr}(\underline{A} \cap \underline{B}) \\ \text{si } \underline{A} \cap \underline{B} \neq \emptyset$$

$$g. \quad \underline{A} \subseteq \underline{B} \implies \text{pr}(\underline{A}) \leq \text{pr}(\underline{B})$$

### 3. Application à l'espace géographique précis

Considérons  $\underline{E}$ , ensemble précis des lieux géographiques et  $\underline{S}$  famille des sous-espaces de  $\underline{E}$

$$\underline{S} \subset \underline{P}(\underline{E})$$

telle que  $\underline{S}$  soit un corps de BOREL selon les conditions définies en II,1, ( $\underline{E}, \underline{S}$ ) définit un espace borélien. Il est mesurable.

Définissons une fonction  $m$  de  $\underline{S}$  vers  $[\underline{0}, \underline{1}]$  telle qu'à chaque sous-espace de  $\underline{E}$  élément de  $\underline{S}$  est associée une mesure  $\in [\underline{0}, \underline{1}]$

$m$  peut être définie comme la probabilité d'appartenance de tout sous-espace à  $\underline{E}$ .

$(\underline{E}, \underline{S}, m)$  est donc un espace géographique précis probabilisé.

Ainsi la notion d'espace géographique précis probabilisé s'appuie sur des concepts rigoureux qui sont ceux :

- d'un corps de BOREL, donc de la définition d'un espace mesurable et qui inclut la notion de  $\sigma$ -algèbre .

- d'une mesure sur un corps de BOREL.

et qui sont tels que toute confusion entre probabilité et flou est totalement impossible.

## III - Espace précis probabilisé et sous-espace flou

### 1. Probabilité et flou : deux notions différentes

KAUFMANN (1973) souligne fort justement qu'il est tentant d'assimiler les notions de sous-ensemble flou et de sous-ensemble précis probabilisé. Effectivement, pour chacune d'elle on associe à chaque sous-ensemble d'un référentiel  $\underline{E}$  (non flou) une fonction qui prend ses valeurs dans l'intervalle  $[\underline{0}, \underline{1}]$ . Les différences sont cependant fondamentales. Nous les situons à la fois sur le plan de la signification et sur le plan de la formalisation.

#### 1.1. Les deux notions ont une signification très différente.

En effet, la probabilité attachée à un sous-ensemble précis traduit, nous

l'avons vu, une incertitude sur l'appartenance de ce sous-ensemble précis au référentiel. Incertitude plus ou moins grande certes, mais qui, quand elle est levée, ne se prête plus à aucune imprécision. Ainsi le prédicat :

"Il y a une probabilité de 0.01 que la Moselle connaisse une crue centenaire à Metz en 1984"  
deviendra certitude à la fin de cette année 1984 : ou la Moselle aura connu une crue centenaire, ou il n'y aura pas eu une telle crue, c'est-à-dire que 1984 appartiendra au groupe des années "à crue centenaire" ou 1984 appartiendra au groupe des "années normales", ces deux groupes étant disjoints.

1.2. Cette signification différente est traduite par des écritures formalisées différentes.

Soit  $\underline{E} = \{a, b, c, d\}$

1.2.1. définissons un sous-ensemble flou en affectant chaque élément d'une fonction d'appartenance prenant ses valeurs dans  $\underline{M} = ]0, 1]$

$$A = \{(a, 0.7), (b, 0), (c, 0.3), d(0.8)\}$$

A sous-ensemble flou de  $\underline{E}$ .

1.2.2. Déterminons des sous-ensembles précis de  $\underline{E}$  et la famille  $\underline{F}$  de ces sous-ensembles.

Si  $\underline{F}$  est une  $\sigma$ -algèbre,  $(\underline{E}, \underline{F})$  est un espace borélien probabilisable. On peut alors affecter chaque sous-ensemble de  $\underline{F}$  d'une probabilité respectant les conditions d'une mesure.

Ainsi

$$\text{si } \underline{F} = \{\{\emptyset\}, \{b\}, \{a, d\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c\}, \underline{E}\}$$

on peut vérifier que  $\underline{F}$  est une  $\sigma$ -algèbre.

Définissons alors l'espace probabilisé

$$(\underline{E}, \underline{F}, m)$$

où  $m$  est une mesure, soit la probabilité associée à chaque sous-ensemble de  $\underline{F}$

$$\text{pr } (\emptyset) = 0$$

$$\text{pr } (b) = 0.3$$

$pr(c) = 0.2$   
 $pr(a,d) = 0.5$   
 $pr(a,b,d) = 0.8$   
 $pr(a,c,d) = 0.7$   
 $pr(b,c) = 0.5$   
 $pr(E) = 1$

On peut vérifier que  $m$  est bien *une mesure* et qu'elle est fondamentalement différente d'une fonction d'appartenance d'un élément à un sous-ensemble flou. Terminons enfin cet exposé en soulignant que la théorie des sous-ensembles flous fait référence à la théorie des treillis vectoriels, celle des probabilités à la théorie des treillis de Boole, comme le souligne KAUFMANN (1973). L'annexe **I** reprend ces deux notions.

## 2. Probabilité et flou : deux notions juxtaposables en analyse spatiale

Les conclusions énoncées plus haut peuvent cependant être élargies. Nous pourrions effectivement associer à la notion de sous-ensemble flou celle de probabilité, aboutissant à l'idée de sous-ensemble flou probabilisable et probabilisé.

Ainsi la phrase :

"Il y a une probabilité de 0.7 qu'il y ait en décembre 1984 une crue importante de la Moselle à Metz"

associe une probabilité à un sous-ensemble flou. En effet si nous associons à l'adjectif "importante" une valeur dans  $[0,1]$  selon un ensemble ordonné de valeurs :

crue - inexistante	= 0
- faible	= 0.2
- moyenne	= 0.5
- forte	= 0.8
- importante	= 0.9
- exceptionnelle	= 1

nous pouvons écrire :

$Pr(\text{crue}(0.9)) = 0.7$

Le sous-ensemble imprécis : l'élément "crue", affecté d'une fonction d'appartenance = 0.9 qui est en fait ici l'appréciation d'un degré d'in-

tensité, est considéré ici comme un ensemble non flou auquel on a attaché une probabilité mesurant notre méconnaissance quant à la réalisation de la crue.

Nous avons ainsi défini un sous-ensemble flou probabilisable, notion que nous développerons dans le chapitre suivant.

#### IV - Conclusion : vers une généralisation de la théorie des probabilités

Nous avons bien défini plus haut la probabilité comme une mesure de l'incertitude de sous-espaces précis de l'espace géographique. Généralisons cette notion d'incertitude

- Soit  $\underline{S}$  une famille de sous-ensembles flous de  $\underline{E}$  telle que  $\underline{S} \subset P(\underline{E})$  soit une  $\zeta$ -algèbre définie chapitre I, B, III (c'est-à-dire une  $\sigma$ -algèbre n'ayant pas la propriété de complémentation).

- Soit  $v$  une valuation ou mesure floue.  $v$  est telle que la propriété d'additivité d'une mesure est remplacée par la propriété plus faible de monotonie.

Nous avons donc bien posé un cadre plus large et plus général, à la fois pour la définition de  $\underline{S}$  et pour celle de  $v$ .

- Définissons  $v$  comme une fonction de  $\underline{S}$  dans  $[\underline{0}, 1]$  associant à chaque sous-ensemble de  $\underline{S}$  une "mesure floue" du degré de méconnaissance ou d'incertitude quant à l'appartenance de ce sous-ensemble à  $\underline{E}$ . Nous avons ainsi défini une fonction d'incertitude d'expression plus large et plus générale que la probabilité.

En d'autres termes, la *théorie des probabilités* est la réponse méthodologique du traitement de l'incertain en ce qui concerne les espaces géographiques précis. Elle est donc bien une réponse particulière à un type particulier d'espace géographique. Généraliser la formulation de l'incertitude nous permettra donc de traiter tous les types d'espaces géographiques incertains. On fournit ainsi une base formelle satisfaisante, du moins nous le pensons, dans tous les cas où la méconnaissance, même partielle, de l'appartenance de sous-espaces à un espace géographique rend toute étude quantitative quasi impossible.

## C - LES FONDEMENTS THEORIQUES DE LA REGIONALISATION (1)

Il s'agit, dans ce dernier paragraphe, de préciser sur quels fondements théoriques s'appuie le géographe soucieux de régionaliser un espace précis. Nous exposerons successivement trois approches théoriques, qui supposent des propriétés chorotaxiques (REYMOND, ouvrage cité), c'est-à-dire d'espacement des lieux, de plus en plus précises et fortes. Il s'agit de l'approche topologique, de l'apport de la théorie des graphes et enfin, de la notion d'espace métrique.

Notre démarche ne répond donc pas à un souci d'exposer ces trois fondements théoriques de façon exhaustive ; il s'agit plutôt de mettre en évidence que cette "science des lieux" est sous-tendue par une réflexion formelle rigoureuse et que les fondements théoriques induisent des propriétés mathématiques et géographiques essentielles.

Enfin, ces fondements appliqués à un espace géographique précis, peuvent être étendus aux espaces imprécis. Les principaux points évoqués seront ainsi repris dans le chapitre suivant et généralisés en une formulation plus large.

Présenter les fondements théoriques de la régionalisation des espaces précis revient ainsi, à nouveau, à traiter un cas particulier d'une problématique bien plus vaste exposée dans le chapitre suivant : celle du traitement du flou spatial et de la classification floue.

### I - Espaces géographiques et espaces topologiques

"La topologie s'intéresse à l'étude des propriétés

---

(1) Nous remercions Mr le Professeur PONSARD de nous avoir autorisé à assister à son cours d'analyse spatiale destiné à ses étudiants-économistes et de nous avoir rendu sensible à la nécessité d'une approche formelle rigoureuse du fait spatial.

de l'espace qui restent invariantes avec des déformations élastiques du plan".

Cette définition, plaisamment résumée par FRECHET : "géométrie du caoutchouc", souligne tout l'intérêt que présente cette science dans l'analyse des espaces qui, bien qu'ayant une *configuration différente* (forme et étendue), sont *topologiquement équivalents*, c'est-à-dire ont même structure et sont définis par un même ensemble de relations entre tous leurs lieux.

Nulle référence cependant à la notion de *distance*, c'est-à-dire à une quelconque métrique dans la description d'espaces topologiques. Les différentes définitions que nous allons énumérer seront donc relatives à un *espacement des lieux* pris au sens le plus général : évoquons sans pour le moment le définir formellement la notion de *voisinage* qui, au sens trivial du terme veut dire simple proximité entre deux points.

Après ces définitions, nous évoquerons les sous-ensembles particuliers d'un espace topologique, puis nous insisterons sur les propriétés des espaces topologiques à la fois formelles, puis, par extension, géographiques.

## 1. Définition d'un espace topologique

### 1.1. Définition à partir de la notion d'ouverts

1.1.1. On appelle espace topologique ouvert  $(\underline{E}, \underline{I})$  tout couple formé par un ensemble  $\underline{E}$  et un ensemble  $\underline{I} \subset \underline{P}(\underline{E})$ .  $\underline{I}$  est formé de parties de  $\underline{E}$  appelées *ouverts*, satisfaisant :

- 1.1.1.a. toute réunion, finie ou non d'ouverts est un ouvert.
- 1.1.1.b. toute intersection, finie d'ouverts est un ouvert.
- 1.1.1.c.  $\underline{E}$  et  $\emptyset$  sont des ouverts.

$\underline{I}$  ensemble des ouverts de  $\underline{E}$  est appelé topologie de  $\underline{E}$ .

$\underline{I}$  définit une topologie sur  $\underline{E}$ .

1.1.2. On appelle fermé d'un espace topologique toute partie  $\underline{A} \subset \underline{E}$  dont le complémentaire est ouvert.

L'ensemble  $\underline{F}$  des fermés de l'espace topologique  $(\underline{E}, \underline{I})$  a les propriétés suivantes :

1.1.2.a. toute intersection de fermés est un fermé

1.1.2.b. toute union de fermés est un fermé

1.1.2.c.  $\emptyset$ ,  $\underline{E}$  sont des fermés.

## 1.2. Définition à partir d'un voisinage

1.2.1. si  $(\underline{E}, \underline{I})$  est un espace topologique et  $x$  un point de  $\underline{E}$ , on appelle voisinage de  $x$  toute partie  $V$  de  $\underline{E}$  contenant un ouvert  $o$  contenant  $x$

$$x \in o \subset V(x)$$

### 1.2.2. Propriétés des voisinages

1.2.2.a. tout voisinage de  $x$  contient  $x$ ,  $x$  a au moins un voisinage  $\underline{E}$

1.2.2.b. tout sous-ensemble contenant un voisinage de  $x$  est un voisinage de  $x$

1.2.2.c. l'intersection de deux voisinages de  $x$  est un voisinage de  $x$

1.2.2.d. si  $V$  est un voisinage de  $x$ , il existe un sous-voisinage  $W$  de  $x$  tel que  $W \subset V$  et que  $V$  soit un voisinage de chaque point de  $W$ . Cette propriété implique une quasi transitivité des voisinages.

## 1.3. Intérêt géographique de la notion de voisinage

La topologie définie à partir d'un voisinage introduit une formalisation rigoureuse de l'espace géographique sans référence à une quelconque distance. Ainsi, dans la définition de l'espace géographique énoncée :

$$\underline{E}_G = (\underline{E}, \underline{S}, \underline{C}, \underline{R})$$

$\underline{R}$  peut être définie alors comme une "relation de voisinage topologique" entre des lieux précis ; cette notation introduit une idée de relation très faible entre deux lieux, mais si l'on ne dispose pas d'informations plus précises sur la position relative des lieux ou leurs distances respectives, elle permet de définir les cadres d'une partition de l'espace, donc de répondre à une préoccupation géographique essentielle.

## 2. Sous-ensembles particuliers d'un espace topologique ou les fondements topologiques de la régionalisation

### 2.1. Principales définitions de base.

#### 2.1.1. Point d'adhérence

Soit un espace topologique  $(E, \mathcal{I})$

et  $A \subset E$

avec  $x \in E$

on dit que  $x$  est adhérent à  $A$ , si son voisinage de  $x$  contient un point de  $A$ . On note :  $\text{adh}(A)$  l'ensemble des points de  $E$  adhérents à  $A$

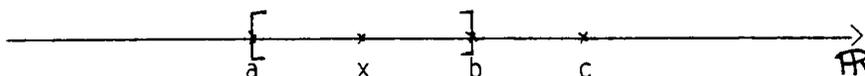
#### 2.1.2. Point d'accumulation

$x$  est un point d'accumulation de  $A$  si tout voisinage de  $x$  contient un point de  $A$  autre que  $x$  lui-même.

#### 2.1.3. Point isolé

$x$  est un point isolé de  $A$  si  $x \in A$  mais n'en est pas un point d'accumulation.

Prenons pour exemple l'ensemble  $\mathbb{R}$  des réels et un ensemble  $A \subset \mathbb{R}$



$$A = [a, b] \cup c$$

prenons  $x \in A$

- $\forall x \in [a, b]$ ,  $x$  est un point d'accumulation de  $A$  selon 2.1.2.
- $c \in A$  est un point isolé de  $A$  selon 2.1.3.

donc si  $x$  est adhérent à  $A$  ou :

- $x$  est un point d'accumulation
- $x$  est un point isolé.

### 2.2. Fermeture d'un ensemble A

2.2.1. On appelle fermeture de  $A$ , soit  $\bar{A}$  le plus petit ensemble fermé de  $E$  contenant  $A$

2.2.2. Pour tout ensemble  $A$ , l'adhérence et la fermeture de  $A$  sont des notions identiques

$$\text{adh}(A) = \bar{A}$$

### 2.3. Notion d'intérieur d'un ensemble $A$

2.3.1. On appelle intérieur d'un sous-ensemble  $A$  de  $E$  la réunion de tous les ouverts de  $E$  contenus dans  $A$ . C'est donc (du point de vue de l'inclusion) le plus grand des ouverts inclus dans  $A$  ; notons  $\overset{\circ}{A}$  l'intérieur de  $A$

2.3.2.  $\underline{A} = \overset{\circ}{A} \iff \underline{A}$  ouvert car  $\underline{A}$  est égal à son intérieur.

### 2.4. Extérieur de $A$

Soit  $\underline{A} \subset \underline{E}$

on appelle ext  $\underline{A}$  l'intérieur de son complémentaire dans  $\underline{E}$

$$\text{ext } \underline{A} = \text{int } \underline{C}_E \underline{A} = \overset{\circ}{C}_E \underline{A}$$

### 2.5. Notion de frontière

2.5.1. On appelle frontière de  $\underline{A}$  ou  $\overset{*}{A}$  l'ensemble des points  $x$  dont son voisinage  $V$  contient au moins un point de  $\underline{A}$  et un point de son complémentaire

$$\overset{*}{A} = \overline{\underline{A}} \cap \overline{C_E \underline{A}}$$

D'où on peut déduire :

2.5.2. La frontière de tout sous-ensemble est fermée car elle est l'intersection de deux fermés.

2.5.3. Deux ensembles complémentaires ont même frontière

2.5.4. Pour tout sous-ensemble  $\underline{A}$  de  $\underline{E}$  on a

$$\overset{*}{A} = \overline{\underline{A}} - \overset{\circ}{A} = \overline{\underline{A}} \cap \overset{\circ}{C}_E \underline{A}$$

La frontière de  $\underline{A}$  est égale, en langage d'ensemble, à l'intersection de la fermeture de  $\underline{A}$  et de l'intérieur de son complémentaire.

$\overset{*}{A}$  définit donc bien une *limite* de  $\underline{A}$  dans l'ensemble  $\underline{E}$ .

### 2.6. Intérêt de ces notions en analyse spatiale

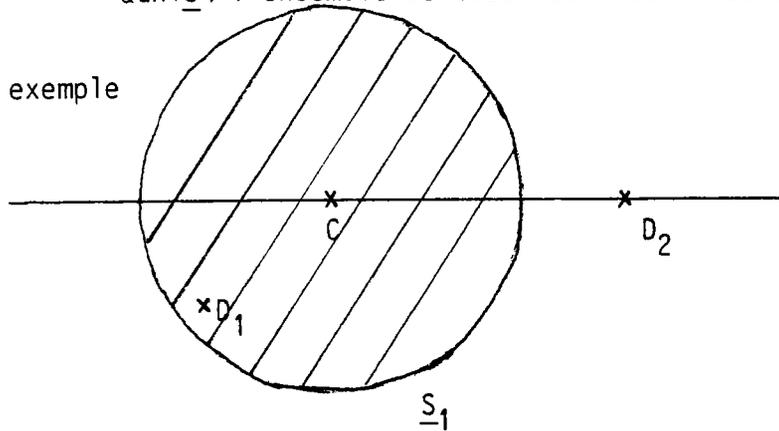
Les principales définitions de base exposées ci-dessus peuvent s'appliquer à tout sous-ensemble spatial d'un espace géographique précis  $\underline{E}_G$ . Indépendamment de toute notion de position relative des lieux, éléments de ce sous-espace, ou de leur distance, elles permettent de définir un schéma d'organisation spatiale et de partition de l'espace.

Prenons dans  $\underline{E}_G$  un sous-espace  $\underline{S}$  soumis par exemple à l'influence d'une ville-métropole C.

- On notera :

$\text{adh}(\underline{S})$  l'ensemble de tous les lieux soumis à l'influence de C.

Soit par exemple



$$\underline{S} = \underline{S}_1 \cup D_2$$

où  $D_2$  est un point soumis à C mais extérieur à  $S_1$  (par exemple une petite ville facilement accessible à partir de C du fait de la présence d'une gare).

On notera  $D_1$  point d'accumulation de  $\underline{S}$

$D_2$  point isolé de  $\underline{S}$

- La comparaison peut ainsi être poursuivie, notons simplement que :

$$\text{adh}(\underline{S}) = \overline{\underline{S}}$$

que :  $\overline{\underline{S}}$  ou la frontière de  $\underline{S}$  correspondait à la limite de la zone d'influence de C, cette limite étant supposée ici unique et "linéaire" (au sens trivial de *ligne*).

Nous avons donc bien ici les fondements théoriques de la notion d'organisation spatiale. Régionaliser un espace précis reviendra donc à définir, selon des critères géographiques ou autres, une topologie  $\underline{T}$ , c'est-à-dire une famille de parties de  $\underline{E}_G$  et à définir des *frontières topologiques* entre les sous-ensembles spatiaux étudiés.

Ces notions topologiques ne sont pas "gratuites" pourrait-on ajouter. En effet elles induisent des propriétés fondamentales des espaces topologiques qui, à leur tour, induisent des propriétés spatiales

géographiques. Nous évoquerons dans ce qui suit les propriétés de continuité, de compacité et de connexité en soulignant leur intérêt en analyse spatiale d'une part, et d'autre part le fait qu'elles induisent des propriétés géographiques de plus en plus fortes.

### 3. Les propriétés des espaces topologiques et leur intérêt géographique

#### 3.1. Propriété de continuité

##### 3.1.1. Espace séparé ou de HAUSDORFF

Un espace  $\underline{E}$  dit séparé ou de HAUSDORFF est tel que deux points distincts quelconques de  $\underline{E}$  possèdent deux voisinages disjoints.

$$\underline{E} \text{ séparé} \iff \forall x \in \underline{E}, \forall y \in \underline{E}, x \neq y, \\ \exists V(x) \in \mathcal{V}(x) \text{ et } V(y) \in \mathcal{V}(y) / V(x) \cap V(y) = \emptyset$$

avec  $V(x)$  voisinage de  $x$ , élément de  $\mathcal{V}(x)$  famille de voisinages de  $x$  et  $V(y)$  voisinage de  $y$ , élément de  $\mathcal{V}(y)$  famille de voisinages de  $y$ .

Cette notion est fondamentale en géographie car c'est la propriété "la plus pauvre" que l'on puisse conférer à un espace géographique tel que nous l'avons défini. Elle définit un *espace géographique séparé* c'est-à-dire un espace où les lieux sont distincts et non "noyés" dans un même environnement+. On peut donc dire que tout espace géographique tel que nous l'avons défini axiomatiquement a *au moins* une structure mathématique d'espace de HAUSDORFF.  $\underline{R}$ , relation entre tout couple de lieu s'énonce alors simplement "a un voisinage distinct de ..."

La propriété de séparation induit évidemment des propriétés spatiales pauvres, que le chercheur complètera, s'il le peut, avec les informations relatives à la position relative des lieux ou leur distance. Elle est cependant essentielle et on peut en déduire la :

#### 3.2. Notion d'homéomorphisme ou d'équivalence topologique

##### 3.2.1. Nous pouvons amorcer ce paragraphe par

une réflexion de DAUPHINE (1979) à propos de la région anisotrope :

"La fausse région anisotrope est un espace homogène ou polarisé qu'un axe déforme.",

cet auteur attribue ensuite à des origines "physiques" ou humaines cette "anomalie spatiale" : barrière montagneuse ou fluviale, effet de littoral ou introduction d'un axe de transport, suscitent la déformation axiale d'un espace. Région anisotrope ou région non déformée sont alors *topologiquement équivalentes ou homéomorphes*. Explicitons cette notion.

### 3.2.2. Notion de continuité d'une application

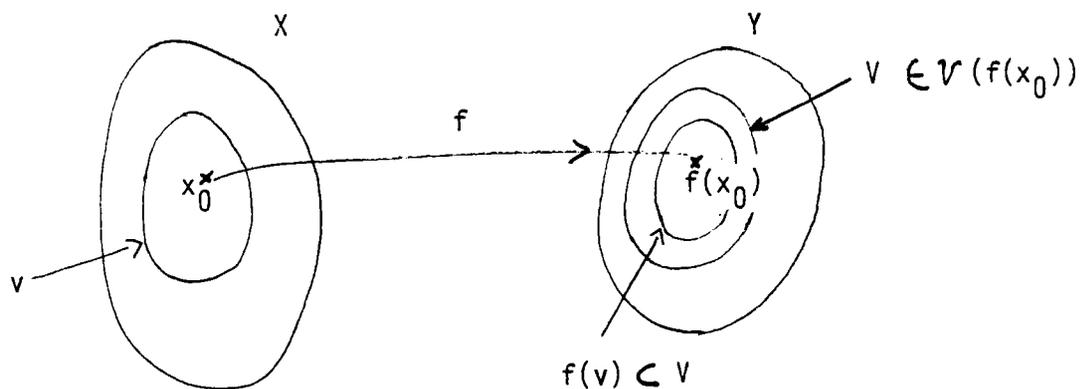
Soit une application  $f$  de  $X$  vers  $Y$

$$f : X \longrightarrow Y$$

$f$  est continue au point  $x_0 \in X$ , si, pour tout voisinage  $V$  des images de  $x_0$ , il existe un voisinage  $v$  de  $x_0$  dans  $X$  dont l'image par  $f$  dans  $V$  soit telle que

$$f(v) \subset V$$

Résumons cette définition par un schéma :



et par une expression formalisée :

$$f : X \longrightarrow Y$$

-  $f$  continue si et seulement si

$$\forall V, V \in \mathcal{V}(f(x_0)), \exists v, v \in \mathcal{V}(x_0) : f(v) \subset V$$

- ou  $f$  continue  $\iff \forall V, f^{-1}(V)$  est un voisinage de  $x_0$ .

En d'autres termes :

$f$  est continue en  $x_0$ , si, à un voisinage de  $x_0$  dans  $X$ , "correspond" par  $f$  un voisinage de l'image dans  $Y$ , de  $x_0$ , c'est-à-dire géogra-

phiquement :

si à un point d'un espace géographique  $\underline{E}$  ayant un certain environnement correspondent dans un autre espace géographique  $\underline{E}'$  un point équivalent et un environnement équivalent.

3.2.3. On dit que  $f$

$$f : X \longrightarrow X$$

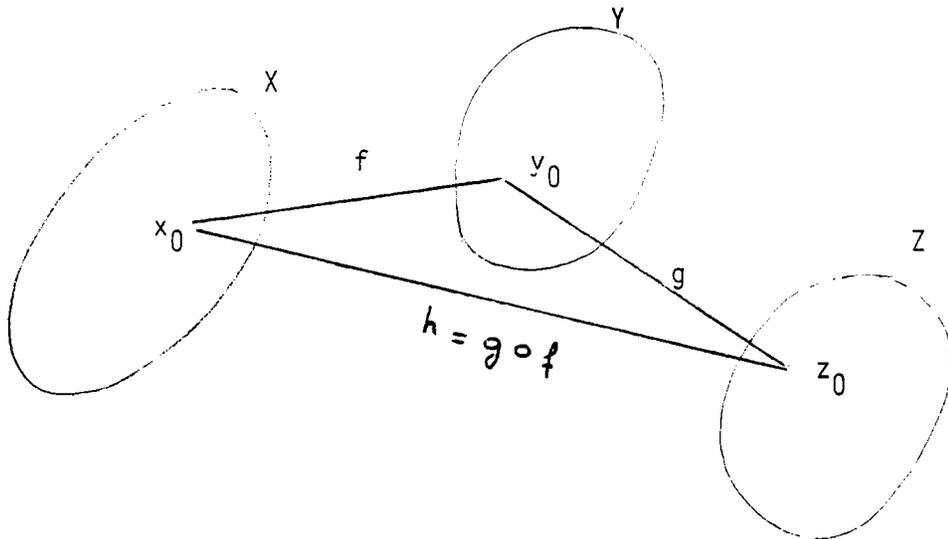
est continue sur  $X \iff$  elle est continue en tout point de  $X$ .

3.2.4. Soit trois ensembles  $X, Y, Z$

soit  $x_0 \in X$

$$y_0 = f(x_0)$$

$$z_0 = g(y_0) \implies g(f(x_0)) = h(x_0)$$



Nous admettons que :

si  $f$  est continue en  $x_0$  et  $g$  continue en  $y_0$ ,

alors  $h = g \circ f$  continue en  $x_0$

et que, si  $f$  est continue en  $X$ ,  $g$  continue en  $Y$ , alors  $h = g \circ f$  continue en  $X$ .

3.2.5. Définissons à présent un isomorphisme

tel que :

$X$  et  $Y$  étant deux espaces topologiques,

$f$  une bijection  $f$  de  $X$  sur  $Y$  qui "échange leurs ouverts"

c'est-à-dire telle que, pour tout ouvert  $A$  de  $X$ , son image  $f(A)$  soit

un ouvert et pour tout ouvert  $B$  de  $Y$ , son image  $f^{-1}(B)$  soit un ouvert.

Cet isomorphisme est appelé un *homéomorphisme*.

Et notons le théorème :

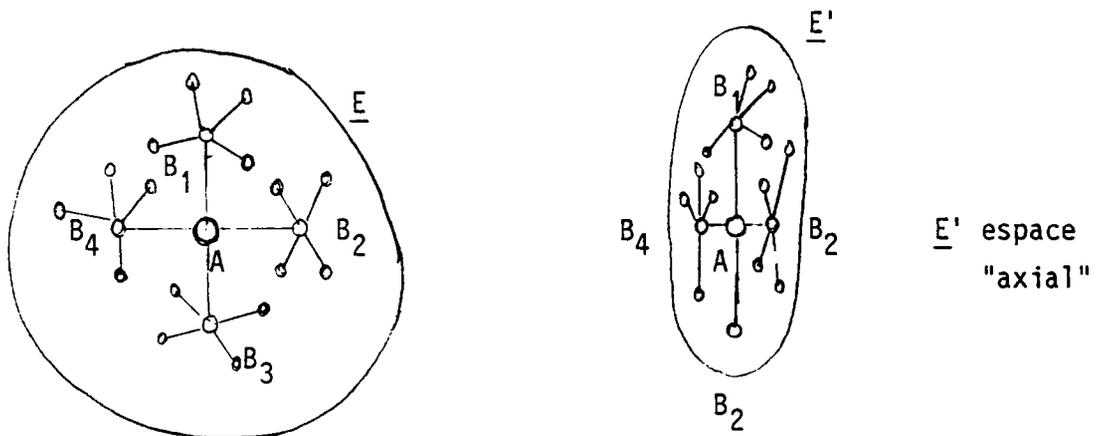
Pour qu'une bijection  $f : X \longrightarrow Y$  soit un homéomorphisme, il faut et il suffit que  $f$  soit bicontinue.

### 3.2.6. Intérêt de la notion d'homéomorphisme.

Cette notion définit une équivalence topologique entre deux espaces topologiques, c'est-à-dire d'un isomorphisme de structures topologiques.

Ces espaces homéomorphes peuvent être considérés, malgré leur configuration (forme et étendue), leur métrique différentes, comme représentant un même espace mathématique.

Nous pouvons ainsi définir en géographie un espace possédant des propriétés topologiques (s'énonçant en termes d'ouverts et de fermés). Si on retrouve ces mêmes propriétés pour un autre espace, on peut déduire que ces espaces sont homéomorphes.



$\underline{E}$  et  $\underline{E}'$  sont homéomorphes ;

les propriétés topologiques ne se modifient pas même s'il y a modifications des propriétés métriques.

La classification spatiale peut donc s'appuyer sur la notion d'homéomorphisme sans aucune référence à une distance quelconque entre les deux espaces ou leurs éléments. Ainsi, en région polarisée et ré-

gion anisotropique définies par DAUPHINE et de nombreux autres auteurs, il y aurait donc différences de configuration, mais équivalence topologique, les deux types d'espaces ayant même structure topologique.

### 3.3. Compacité d'un espace topologique

#### 3.3.1. Définition d'un recouvrement

On appelle recouvrement d'un espace  $\underline{E}$  toute famille d'ensembles dont  $\underline{E}$  est la réunion.

#### 3.3.2. Définition d'un espace compact

Un espace topologique  $(\underline{E}, \underline{T})$  est compact si et seulement si il est séparé et :

- de tout recouvrement ouvert de  $\underline{E}$  on peut extraire un sous-recouvrement ouvert fini
- ou si de toute famille de fermés de  $\underline{E}$  dont l'intersection est vide, on peut extraire une sous-famille finie de fermés.

En termes courants la compacité d'un espace géographique est réalisée si cet espace "n'a pas de lacunes", de "zones vides".

Cette notion est surtout importante dans le cas où l'espace géographique est celui de zones d'influences (villes par exemple). Un espace compact est donc un espace géographique entièrement "recouvert" par des zones d'influence dans lequel aucun secteur ne sera "isolé", en dehors de l'influence de l'un ou de l'autre des centres (espace structuré par des polygones de CHRISTALLER par exemple).

Il est bien connu, à l'inverse que l'espace français, étudié selon le *tracé précis* des "régions", n'est pas un espace compact, de nombreux sous-espaces échappant en effet à l'influence immédiate d'une métropole régionale.

### 3.4. Les espaces topologiques connexes

La notion intuitive de connexité est celle d'un espace "d'un seul tenant".

#### 3.4.1. Définition

- un espace topologique  $(\underline{E}, \underline{T})$  est *connexe* si et seulement si il n'existe aucune partition de  $\underline{E}$  en deux parties fermées non vides.

- on appelle *continu* tout espace topologique compact et connexe.

### 3.4.2. Intérêt géographique

Cet ensemble de définitions topologiques permet d'affiner l'étude de l'espace géographique : d'un espace géographique *séparé* dont nous pouvons dire simplement que deux lieux distincts ont des "environnements" distincts, nous arrivons à la propriété de *continuité* c'est-à-dire à la définition d'un espace "sans lacunes", où il est possible d'aller d'un quelconque des lieux à tout autre lieu, ou au moins, à la définition d'*espaces localement connexes*. La relation  $\underline{R}$  prend donc une signification plus riche et peut s'exprimer par :

$$x_i \underline{R} x_j$$

$x_i$  relié à  $x_j$  par un "chemin".

L'espace géographique acquiert alors les propriétés d'un espace-réseau. La théorie des graphes représente le support formel de son analyse.

## II - Espaces géographiques et théorie des graphes

### 1. Approche géographique de la notion de réseau

La propriété topologique de connexité d'un espace nous amène à définir la notion d'espace-réseau, c'est-à-dire d'espace géographique défini par un ensemble précis de lieux entre lesquels s'établissent des voies de communications organisées en *réseaux* plus ou moins denses, tissant entre les *nœuds* spatiaux que sont les agglomérations humaines de toutes tailles, un maillage spatial qui canalise des *flux* (HAGGETT et CHORLEY 1969, HAGGETT 1973).

La théorie des graphes offre le support formel nécessaire à l'étude d'un espace-réseau ; dans la définition d'un espace géographique précis déjà évoqué :

$$\underline{E}_G = (\underline{E}, \underline{S}, \underline{C}, \underline{R})$$

$\underline{R}$  définit ainsi une relation de position entre tout couple de lieux,  $\underline{C}$  nous informant sur la configuration (forme) du réseau,  $\underline{S}$  définit un ensemble de variables de flux entre tout couple de lieux de  $\underline{E}$ .

Nous ne développerons pas la théorie des graphes, par ailleurs présentée de façon formelle (BERGE 1957, PRICE 1974 et autres) ou dans l'optique géographique (ouvrages cités plus haut, mais aussi CICERI, MARCHAND, RIMBERT 1977). Nous nous contenterons, comme dans le paragraphe précédent, de présenter les principales définitions, de souligner les propriétés des graphes et leur intérêt dans l'analyse spatiale. Nous insistons à nouveau sur l'idée que les propriétés formelles induisent des propriétés géographiques.

## 2. Principales définitions de la théorie des graphes

### 2.1. Définition d'un graphe

2.1.1. Soient deux ensembles  $\underline{X}$  et  $\underline{Y}$  non nécessairement disjoints  
 et  $\underline{U} \subset \underline{P}(\underline{X} * \underline{Y})$   $\underline{P}(\underline{X} * \underline{Y})$  représente la totalité des relations de  $\underline{X}$  vers  $\underline{Y}$

$\underline{U}$  définit une relation binaire de  $\underline{X}$  vers  $\underline{Y}$ , c'est-à-dire :  
 si  $x_i \mathcal{R} x_j \iff (x_i, x_j) \in \underline{U}$

Définissons une application multivoque  $\Gamma$

$$\begin{aligned} \Gamma : \underline{X} &\longrightarrow \underline{Y} \\ x_i \in \underline{X} &\longrightarrow \Gamma(x_i) \in \underline{Y} \\ \Gamma(x_i) &= \text{ensemble des éléments de } \underline{Y} \text{ en correspondance avec } x_i. \end{aligned}$$

Ainsi  $x_i$  a 0, 1 ou plusieurs images dans  $\underline{Y}$ .

On définit le graphe  $\underline{G}$

$$\underline{G} = (\underline{X}, \Gamma)$$

où  $\underline{X}$  : ensemble de sommets du graphe

$\Gamma$  : application multivoque de  $\underline{X}$  dans  $\underline{Y}$ .

2.1.2. Plus couramment on définit  $\underline{G}$

$$\underline{G} = (\underline{X}, \underline{U})$$

où  $\underline{X}$  : ensemble de sommets

$\underline{U}$  : ensemble de lignes, chaque ligne étant définie

- soit par une paire de sommets  $(x_i, x_j)$  : le graphe est non orienté
- soit par un couple de sommets : le graphe est orienté.

donc  $\underline{G} = (\underline{X}, \underline{U})$

- $\left\{ \begin{array}{l} - \underline{u} : \text{ensemble d'arêtes, le graphe est non orienté} \\ - \underline{\underline{u}} : \text{ensemble d'arcs : le graphe est orienté.} \end{array} \right.$

2.2. Principales caractéristiques d'un graphe

2.2.1. Notion de chemin d'un graphe

2.2.1.1. Un chemin entre deux sommets  $x_i$  et  $x_j$  du graphe orienté est une séquence d'arcs orientés dans le même sens tels que le premier arc est incident à  $x_i$  vers l'extérieur, le dernier est incident à  $x_j$  vers l'intérieur et que l'extrémité finale de l'arc  $u_i$  corresponde à l'extrémité initiale de l'arc  $u_{i+1}$  pour  $i = 1, 2, \dots, p - 1$  ( $p =$  nombre total de sommets du chemin).

2.2.1.2. La longueur d'un chemin est le nombre d'arcs qui le composent.

2.2.2. Connexité d'un graphe orienté

2.2.2.1. Un graphe est connexe, si, de chaque sommet, il existe au moins un chemin vers tout autre sommet du graphe.

2.2.2.2. Un graphe est fortement connexe si, pour tout couple  $(x_i, x_j)$  de sommets, il existe au moins un chemin de  $x_i$  vers  $x_j$  et de  $x_j$  vers  $x_i$ .

2.2.2.3. Un graphe est quasi fortement connexe si, pour tout couple  $(x_i, x_j)$  de sommets, il existe soit un chemin allant de  $x_i$  à  $x_j$ , soit un chemin allant de  $x_j$  à  $x_i$ .

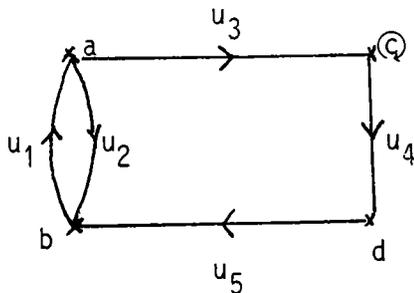
2.2.2.4. Composante connexe :

Soit  $\underline{G} = (\underline{X}, \underline{u})$

Soit un sous-graphe  $G_A$  (où l'ensemble  $u_A$  des arcs  $\subset u$ )

$$G_A = (\underline{X}, \underline{u}_A)$$

Une composante connexe de  $G$  est un sous-graphe  $\underline{G}_A$  tel que  $\forall x \in \underline{X} - \underline{A}$  ( $\underline{A}$  ensemble de sommets  $\subset X$ ), le sous-graphe  $\underline{G}_A \cup x$  n'est pas connexe.



Ainsi si  $\underline{X} = \{a, b, c, d, e, f\}$

$$\underline{U} = \{u_i, i = 1, \dots, 7\}$$

les composantes  $\underline{A}_1 = \{a, b, c, d\}$

$$\underline{A}_2 = \{e, f\}$$

induisent respectivement les sous-graphes :

$$\underline{G}_{A1} = (\underline{A}_1, \underline{U}_{A1})$$

$$\underline{G}_{A2} = (\underline{A}_2, \underline{U}_{A2})$$

composantes connexes de  $G$ .

Proposition : si  $\underline{G} = (\underline{X}, \underline{U})$  est un graphe, la relation binaire sur  $\underline{X}$  définie par " $x = y$ , ou il existe un chemin de  $x$  vers  $y$  quels que soient  $x$  et  $y$ " est une relation d'équivalence et de ce fait les composantes connexes définissent une partition de  $\underline{X}$ .

#### 2.2.2.5. Composante fortement connexe

C'est un sous-graphe  $\underline{G}_A$  de  $\underline{G}$  qui est fortement connexe et tel que pour tout  $x \in \underline{X} - \underline{A}$ ,

$\underline{G}_{A \cup x}$  n'est pas fortement connexe.

Proposition : si  $\underline{G} = (\underline{X}, \underline{U})$  est un graphe, la relation binaire sur  $\underline{X}$  définie par "il existe un chemin de  $x$  à  $y$  et un chemin de  $y$  à  $x$ " est une relation d'équivalence. De ce fait les composantes fortement connexes définissent une partition de  $\underline{X}$ .

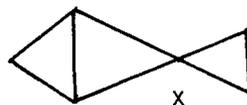
### 2.2.3. Articulation d'un graphe

2.2.3.1. Dans un graphe  $\underline{G}$  connexe, on appelle point d'articulation de  $\underline{G}$  un sommet du graphe tel que sa suppression a pour effet de partitionner le graphe en composantes connexes.

2.2.3.2. On appelle ensemble d'articulation d'un graphe  $\underline{G}$  connexe un ensemble de sommets qui a la même propriété.

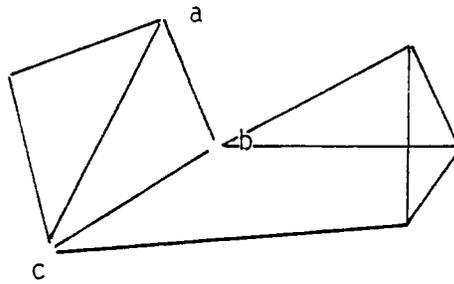
Ainsi dans

$$\underline{G}_1 = (\underline{X}, \underline{U})$$



$x$  est un point d'articulation du graphe non orienté  $\underline{G}_1$

et pour  $\underline{G}_2 = (\underline{X}_2, \underline{U}_2)$



l'ensemble  $\{a, b, c\}$  est un ensemble d'articulation du graphe non orienté  $\underline{G}_2$ .

### 3. Théorie des graphes et analyse spatiale

Nous soulignerons dans ce qui suit deux thèmes selon lesquels l'analyse spatiale prise dans la théorie des graphes est un support formel à l'étude des espaces géographiques précis, non métriques. Nous verrons d'abord par l'exposé des propriétés topologiques des graphes (nous nous limiterons aux graphes orientés) que l'étude du positionnement des points et de leur configuration permet de définir un réseau dont nous exposerons les termes ; nous dégagerons ensuite rapidement l'apport de cette théorie dans la régionalisation des espaces précis.

#### 3.1. Les propriétés topologiques des graphes orientés

Soit un graphe  $\underline{G}$

$$\underline{G} = (\underline{X}, \Gamma)$$

définissons des propriétés susceptibles de préciser la position relative des sommets du graphe.

3.1.1. L'écart entre deux sommets x et y du graphe est la longueur du plus court chemin allant de x à y,  $d(x,y)$

- si  $x = y$ ,  $d(x,x) = 0$

- si aucun chemin n'existe on pose :

$$d(x,y) = \infty$$

Théorème : 1)  $d(x,x) = 0$

2)  $d(x,y) + d(y,z) \leq d(x,z)$

3) si graphe est symétrique, alors

$$d(x,y) = d(y,x)$$

3.1.2. L'écartement d'un sommet x

est le MAX des écarts caractérisant ce sommet

$$e(x) = \underset{y \in X}{V} d(x,y)$$

3.1.3. Un centre d'un graphe,  $x_0$

est le point d'écartement minimum du graphe

$$e(x_0) = \underset{x \in X}{MIN} \left[ \underset{y \in X}{MAX} d(x,y) \right]$$

3.1.4. Un point périphérique  $x_p$

est un point d'écartement maximum du graphe

$$e(x_p) = \underset{x \in X}{MAX} \left[ \underset{y \in X}{MAX} d(x,y) \right]$$

un graphe peut avoir 0, un ou plusieurs centres et points périphériques.

3.1.5. Le rayon d'un graphe:  $\varphi$

- si G a un centre  $x_0$

alors  $\varphi = e(x_0)$

- si G n'a pas de centre

alors  $\varphi = \infty$

3.1.6. Le diamètre d'un graphe :  $\delta$

est la longueur du plus long chemin élémentaire du graphe

$$\begin{aligned} \delta &= \underset{(x,y)}{MAX} d(x,y) \\ &= \underset{x}{MAX} \left[ \underset{y}{MAX} d(x,y) \right] \end{aligned}$$

$\delta$  est ainsi l'écartement d'un point périphérique.

3.1.7. Le tableau suivant précise les notions équivalentes pour les graphes non orientés, les chemins étant remplacés par des chaînes.

Graphes orientés	Graphes non orientés
Ecart : $d(x,y)$	Distance $\bar{d}(x,y)$
Ecartement $e(x)$	Eloignement $\bar{e}(x)$

Graphes orientés	Graphes non orientés
Centre	Semi-centre
Point périphérique	Point semi-périphérique
Rayon	Semi-rayon
Diamètre	$\bar{d}_A(x) = \max_{y \in A} \bar{d}(x_0, y)$ éloignement d'un point par rapport à un sous-ensemble de $X$ .

Ainsi, en conclusion, les propriétés topologiques des graphes permettent au géographe de dégager l'organisation d'un espace géographique précis, même non métrique. Elles permettent de mettre en évidence *la configuration* d'un ensemble spatial  $\underline{E}_G$ . De ce fait si  $\underline{E}_G$  est défini par :

$\underline{E}$  ensemble de nœuds.

$\underline{S}$  structure : ensemble de variables de flux

$\underline{R}$  relation de position entre tout couple de lieux.

$\underline{C}$  peut être mis en évidence par l'application des propriétés topologiques des graphes énoncées ci-dessus.

Il nous reste à préciser le rôle de la théorie des graphes dans la régionalisation spatiale.

### 3.2. Graphes et régionalisation spatiale

La théorie des graphes offre un support formel à la régionalisation des espaces géographiques précis.

En effet, la notion de connexité et les notions dérivées évoquées ci-dessus recouvrent la notion *de continuité* spatiale d'un espace-réseau.

Un espace-réseau est défini par un ensemble de relations, soit matérielles (voies de communication), soit informelles (réseau d'information), entre les nœuds spatiaux. Il est dit *continu* si, entre tout couple de nœuds existe un chemin compatible avec le réseau donné.

Définir alors un espace localement continu, revient en fait à partitionner l'espace mathématique représentant le réseau en composantes connexes (ou fortement connexes). Il y a donc bien action de régionalisation spatiale du fait de la partition de l'espace géographique en sous-espaces continus.

Définir pour le graphe représentatif du réseau un point ou un ensemble d'articulation revient à déterminer dans le réseau le -ou les- points "névralgiques" du réseau. Le supprimer revient à faire perdre au réseau sa continuité géographique (et sa propriété de connectivité mathématique).

Nous avons donc bien là un outil méthodologique intéressant. Dans l'axiomatique que nous avons présentée,  $\underline{R}$ , relation de position des lieux induit donc la propriété géographique de continuité spatiale.

Il nous reste enfin, en définissant  $\underline{R}$  comme une relation métrique, à définir les propriétés spatiales dérivées qui sont celles d'un espace métrique.

### III - Espaces géographiques et espaces métriques

L'analyse spatiale géographique ou même économique part le plus souvent, nous l'avons vu, de l'hypothèse que l'espace est un *espace métrique*. Cela revient à postuler dès le départ un certain nombre de propriétés mathématiques qui induisent à leur tour des caractères géographiques bien déterminés.

Nous venons de voir en effet que l'espace peut avoir une simple structure topologique, qui induit les notions de voisinage, de séparation, de compacité et parfois de connexité de l'espace.

Un espace plus structuré peut être un espace-réseau, connexe

par arcs donc possédant la propriété géographique de continuité.

Voyons enfin, dans ce dernier cas comment la notion théorique d'espaces mathématiques métriques peut fournir une base formelle à l'analyse spatiale et à la régionalisation. Notre étude ne sera donc pas un exposé exhaustif de cette notion théorique, mais, à la suite de PONSARD (1979) et ROUGET (1976), une présentation de différentes notions formelles susceptibles de répondre aux besoins de l'analyse spatiale géographique. En effet, comme le souligne ROUGET :

"à un corps d'hypothèses donné est associée une formulation particulière de l'espace ; celui-ci possède, en dernier ressort, toutes les propriétés de la structure mathématique qui le représente".

Nous pouvons également inverser la proposition et l'énoncer comme suit :

"à un espace défini par des propriétés géographiques données, correspond, selon le problème à résoudre, un corps d'hypothèses mathématiques qu'il s'agit de mettre en évidence.

## 1. Les métriques générales.

### 1.1. Définition d'une métrique

Soit  $\underline{E}$  un espace géographique, c'est-à-dire un ensemble de lieux

Soit  $d : \underline{E}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^+$

telle que

les conditions d'une distance, définies plus haut, soient respectées.

L'application  $d$  est appelée distance et le couple  $(\underline{E}, d)$  est un espace métrique.

### 1.2. Les différents types d'espaces métriques et les propriétés induites

#### 1.2.1. Métrique euclidienne

1.2.1.1. Elle est définie dans  $\mathbb{R}^2$  par

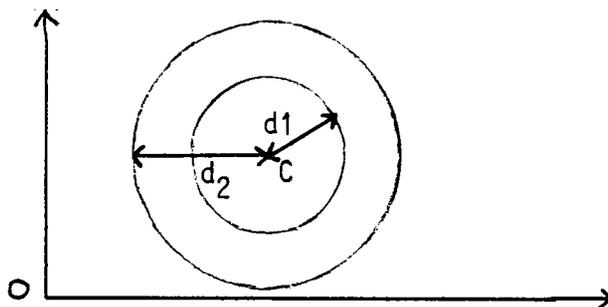
$$d_2(x, y) = \left[ (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 \right]^{1/2}$$

où  $(x_1, x_2)$  et  $(y_1, y_2)$  sont les coordonnées respectives de  $x$  et  $y \in \mathbb{R}^2$

$d_e(x,y)$  est indépendant du choix du système d'axes de références et de l'origine.

1.2.1.2. Un espace métrique euclidien possède les propriétés

- d'isotropie : une propriété donnée est la même dans toutes les directions autour d'un point de E. Ainsi, en économie, les isovecteurs sont les lieux des points pour lesquels les frais de transport sont égaux .



- d'homogénéité : une propriété donnée est valable pour tous les points de l'espace

- de continuité : tous les points de l'espace sont accessibles et peuvent être reliés par des "chemins en ligne droite". Cela suppose que le déplacement en ligne droite est toujours possible.

1.2.1.3. Ces propriétés couramment admises en géographie, ne sont souvent pas des propriétés réelles de l'espace géographique. Elles ne sont réalisées que, soit dans le cas d'espaces considérés à échelle très locale (une rue, par exemple) ou à échelle mondiale (voies aériennes en supposant qu'elles s'organisent toujours "à vol d'oiseau" entre deux points ce qui n'est pas toujours -et de loin- le cas).

Elles supposent en tout cas un espace "idéal" et il n'est pas étonnant que la plupart des modèles spatiaux décrits plus haut l'aient utilisés.

#### 1.2.2. La métrique rectilinéaire

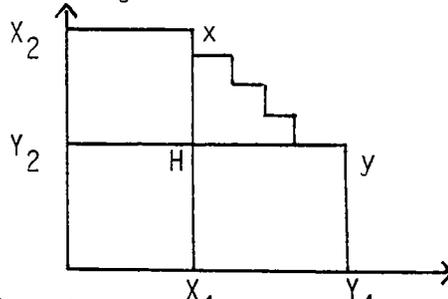
Elle est définie dans un système d'axes orthonormés par

$$m(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

avec  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2)$  coordonnées respectives de x et de y dans  $\mathbb{R}^2$ .

Cette métrique est particulièrement adaptée aux cas d'espaces

urbains présentant des plans orthogonaux : villes américaines d'où l'expression de "métrique de Manhattan", villes européennes à organisation orthogonales : villes héritées des plans des camps romains (centre-ville de Metz). La distance entre deux points suppose alors un déplacement par segments à angles droits :

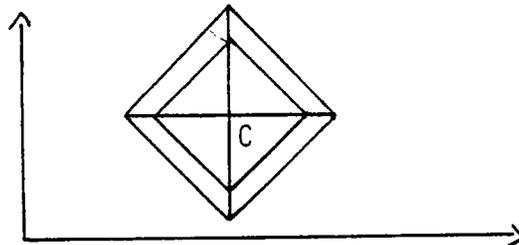


$$d(x,y) = |Hy| + |Hx|$$

en tout somme équivalente de segments entre x et y.

Cette distance n'est pas indépendante du système d'axes choisis. On peut donc adapter ce système d'axes orthonormés de façon à approximer correctement la distance réelle entre x et y. De plus, la distance rectilinéaire permet de "contourner" des obstacles entre x et y. L'hypothèse de continuité spatiale est donc assouplie.

Enfin, notons que les isovecteurs sont ici des carrés dont les diagonales sont parallèles aux axes.

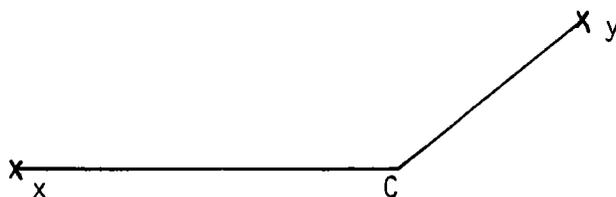


Tracé des isovecteurs dans le cas d'une distance rectilinéaire.

### 1.2.3. La métrique circumradiale

Elle s'adapte à un espace d'organisation circulaire : villes à configuration radioconcentrique où il est possible de passer soit par le centre pour se rendre d'un point à un autre de l'espace, soit par un périmérique. Il s'agit donc de l'association :

- de la métrique radiale :

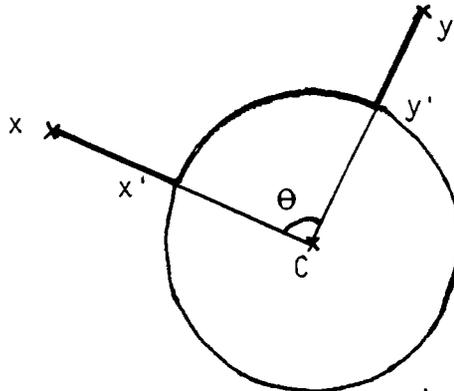


déplacement le long d'axes passant par le centre.

$$d_r(x,y) = d_e(x,c) + d_e(c,y)$$

- de la métrique périphérique

qui est celle du déplacement le long d'un arc entre deux points :



$$d_p(x,y) = d_e(x,x') + d_e(y,y') + R|\theta(x,y)|$$

$x'$  et  $y'$  sont les projections radiales respectives de  $x$  et  $y$  ( $x' = x$  et  $y' = y$  si  $x$  et  $y$  sont sur le cercle)

$R$  est le rayon du cercle de centre  $C$

$\theta(x,y)$  est l'angle au centre  $\widehat{xcy}$  exprimé en radians.

- la distance circumradiale est définie par

$$d_c(x,y) = \text{Min} [d_r(x,y), d_p(x,y)]$$

elle correspond en fait au chemin le plus court entre  $x$  et  $y$ , la longueur du chemin pouvant être exprimée en temps, en kilomètres, en coûts, ou en une appréciation subjective qui combine toutes ces notations.

Cette distance ne suppose donc plus l'isotropie ni la continuité spatiale : selon la "résistance" du milieu, l'existence d'obstacles au déplacement, le type de déplacement, elle est susceptible de présenter des variations de la distance entre deux points. On approche déjà ici d'une possibilité d'approximation subjective des distances.

D'autres types de métrique peuvent être précisés. Comme le souligne ROUGET dans le travail cité, il est possible de réaliser une combinaison linéaire de plusieurs métriques, laquelle combinaison est encore une métrique. Cette possibilité permet ainsi de proposer une traduction en termes de distances d'un ensemble spatial hétérogène, où plusieurs trames se juxtaposent ou interfèrent. Ainsi une ville européenne où, à côté d'un centre ville radioconcentrique limité par un boulevard circulaire tracé à l'emplacement d'anciens remparts, se jux-

taposent une ville "classique" d'urbanisme dirigé des XVIIe et XVIIIe siècles, puis un quartier dont le plan rayonne à partir de la gare, enfin des quartiers périphériques le long des anciennes voies d'accès, se structure de façon complexe. La métrique utilisée devra donc combiner une métrique rectilinéaire, circumradiale, euclidienne pour traduire le plus fidèlement possible les distances entre les différents sites urbains. Ceci pourrait être le cas pour la ville de Metz dont le plan "polygénique" est présenté dans la troisième partie de cette thèse.

Dans de nombreux cas cependant, il n'est pas possible de définir une métrique respectant les quatre axiomes définis, mais seulement quelques uns d'entre eux, les autres étant non vérifiés ou remplacés par des axiomes plus faibles. Le géographe, comme l'économiste peut avoir recours alors à des métriques particulières dont nous présentons à présent quelques types.

## 2. Les métriques particulières

### 2.1. Notion de quasi-métrique. Un exemple, la métrique-réseau

2.1.1. La notion de quasi-métrique reprend les trois premiers axiomes définis plus haut. En ce qui concerne l'inégalité triangulaire qui peut s'écrire en toute généralité

$$4) \quad \forall x, y, z \in \underline{E}^3 : d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

où  $+$  est l'addition pour les métriques habituelles, elle devient, dans le cas de l'ultra-métrique

$$4') \quad \forall x, y, z \in \underline{E}^3 : d(x,z) \leq \text{MAX} [d(x,y), d(y,z)]$$

4') est une notion plus forte que 4), l'ultra-métrique est une métrique plus puissante que les métriques générales présentées plus haut. Si on définit par  $d_u(x,y)$  la distance ultra-métrique entre deux points  $x, y$ ,

$(\underline{E}, d_u)$  définit un *espace non archimédien*.

2.1.2. L'intérêt en analyse spatiale géographique et économique est important. En effet, la distance ultra-métrique entre deux points quelconques d'un espace  $\underline{E}$  exprime une neutralisation d'une portion de l'espace géographique et économique. Ainsi du déplacement entre deux points

seule sera prise en compte la portion de trajet la plus longue ; les autres portions seront considérées comme étant négligeables.

D'une façon concrète, en géographie des espaces vécus par exemple, le déplacement d'une personne de son domicile à son lieu de travail sera considéré comme étant le déplacement en métro, autobus, train ou autres, les trajets du domicile au "lieu d'embarquement" et de l'arrivée au lieu de travail étant souvent non pris en compte.

Cette métrique permet ainsi une certaine indétermination de l'espace et une certaine souplesse de localisation spatiale. Effectivement, si on considère un arrêt autobus ou métro comme "point de débarquement" de la personne active, la localisation du lieu de travail peut varier à l'intérieur d'un certain périmètre d'indétermination, périmètre tel que le trajet métro-travail soit négligé.

## 2.2. Les métriques faibles

On appellera métrique faible toute métrique pour laquelle au moins un des axiomes d'une métrique n'est pas vérifié.

Rappelons :

$$2. \quad \forall (x,y) \in \underline{E}^2, d(x,y) = 0 \iff x = y$$

$$3. \quad \forall (x,y) \in E^2, d(x,y) = d(y,x)$$

Nous noterons :

$$2' \quad \forall (x,y) \in E^2, x=y \implies d(x,y)=0$$

$$3' \quad \forall (x,y) \in E^2, d(x,y) = d(y,x) = 0 \implies x = y$$

### 2.1.1. L'écart (ou pseudo-métrique)

Cette métrique vérifie les axiomes :

1) *noté plus haut*

$$2') : e(x,y) = 0 \text{ d'où } \forall x \in \underline{E} \quad a) \quad x = y \implies e(x,y) = 0$$

$$b) \quad e(x,y) = 0 \not\implies x = y$$

en d'autres termes si l'écart entre deux points est nul, les deux points peuvent être non confondus.

3) et 4)

On peut ainsi mesurer la "distance-temps" entre deux points reliés par un moyen de téléinformation (télex par exemple ou tout autre moyen té-

lématique) comme un écart. Deux points distincts ont donc une distance nulle.

### 2.1.2. La quasi-métrie

Les axiomes suivants sont vérifiés

$$1) d(x,y) > 0 \iff x \neq y$$

$$2) d(x,y) = 0 \iff x = y$$

$$3') d(x,y) = d(y,x) = 0 \implies x = y$$

donc à l'inverse si  $x = y$  on n'a pas forcément  $d(x,y) = 0$

4) inégalité triangulaire.

En géographie, l'axiome 3' implique que deux points confondus n'ont pas une distance nulle. Ainsi, concrètement, deux points ayant les mêmes coordonnées spatiales (différents étages d'une "tour" ont une "distance" correspondant à une valeur non nulle).

D'une façon plus générale encore, l'on peut considérer que deux observations définies par les valeurs de  $n$  variables et telles que l'on peut calculer, en vue de la classification une "distance" nulle, ne sont pas forcément confondues. On peut soutenir le même raisonnement en ce qui concerne l'analyse des proximités de points-observations sur un plan factoriel lors d'une analyse des données : deux points très "proches" ne sont pas forcément confondus, loin de là.

### 2.1.3. La métrique pauvre

Les axiomes suivants sont vérifiés :

$$1) d(x,y) > 0 \iff x \neq y$$

$$2') d(x,x) = 0 \text{ c'est-à-dire } x = y \implies d(x,y) = 0$$

$$d(x,y) = 0 \not\Rightarrow x = y$$

$$4) d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

Cette métrique rejette l'axiome de symétrie 3) et appauvrit l'axiome 2) en 2').

Elle peut sembler adéquate dans le cas d'un espace de circulation à sens unique où la symétrie des distances n'est pas respectée et (ou) d'un espace perçu ou vécu où l'axiome 2 de régularité n'est pas perçu. En effet, comme pour une mesure de l'écart, dire :

"J'habite juste à côté de..." sous-entend une distance estimée nulle entre deux points alors que ces points ne sont pas confondus.

### 3. La métrique-réseau (THISSE, 1975)

Elle correspond à une application d'une quasi-métrique à un espace-réseau. Il s'agit en effet de munir un tel espace d'une métrique susceptible de préciser l'information relative à un réseau représenté par un graphe et intégrer la configuration de ce graphe.

#### 3.1. Arc de JORDAN rectifiable

Un arc de JORDAN rectifiable est défini dans un graphe si et seulement si il existe un homéomorphisme (bijection bicontinue) entre  $\Gamma \in \underline{E}^2$  et un intervalle fermé de  $\mathbb{R}$ . Un arc de JORDAN est *rectifiable* dans  $\underline{E}^2$  si et seulement si cet arc admet une longueur finie pour la distance euclidienne.

Si l'on prend :

$\underline{J}(\underline{E})$  l'ensemble des arcs de JORDAN rectifiables dans  $\underline{E}^2$  dont les sommets appartiennent à  $\underline{E}$ .

Soit  $\underline{A} \subset \underline{J}(\underline{E})$

Les éléments de  $\underline{A}$  sont les arcs de  $\underline{J}(\underline{E})$  tels qu'ils représentent les cheminements réalisables entre tout couple de points fixes de  $\underline{E}$ .

Un espace géographique-réseau est donc formé d'un ensemble fini de lieux  $X$  et d'un ensemble  $\underline{A}_n$  fini de  $n$  arcs de JORDAN rectifiables admettant ces points comme extrémité.

Valuons chaque arc  $\Gamma$  par sa longueur  $l(\Gamma)$

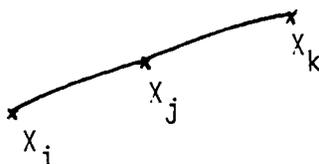
Soit  $X_i$  et  $X_j$  deux points de  $\underline{E}$

1) si  $X_i$  et  $X_j \in \underline{X}$ , alors

$$d_n(X_i, X_j) = \sum_c l(\Gamma_c)$$

ou  $\sum_c l(\Gamma_c) =$  longueur du chemin le plus court entre  $X_i$  et  $X_j =$  somme des longueurs des  $c$  arcs qui composent ce chemin.

2) si  $X_j \notin \underline{X}$  mais est situé sur un arc élément de  $\underline{A}_n$  et d'extrémités  $X_i$  et  $X_k$



la distance est celle définie précédemment, à la différence près que l'arc  $\Gamma_{X_j}$  est remplacé par les deux arcs  $X_i X_j$  et  $X_j X_k$  valués par

leurs longueurs.

3) si  $X_j \notin \underline{X}$  n'est pas sur un arc de  $\underline{A}_n$ , on définit un nouveau réseau englobant  $X_j$  et on y "branche"  $X_j$  à l'aide d'un arc de JORDAN rectifiable. Le calcul de la distance-réseau entre  $X_i$  et  $X_j$  se fera comme précédemment.

4) Les mêmes remarques seront faites pour  $X_i$  au cas où  $X_i$  n'appartient pas à  $\underline{A}_n$ .

#### IV - Conclusion

L'analyse spatiale, telle qu'elle s'exerce sur un espace géographique précis, a ainsi à sa disposition tout un ensemble théorique qui apporte au travail du géographe un support formel à la fois adapté et complet.

*Adapté* en premier lieu, au type d'espace étudié : depuis un espace faiblement structuré pour lequel les notions très "faibles" de voisinage et d'ouverts ou de fermés sont les seules utilisables, jusqu'à un espace bien structuré où l'on peut définir une ou plusieurs métriques.

*Complet* d'autre part car il sera toujours possible de choisir une base formelle parfaitement adaptée au sujet traité.

On peut ajouter deux remarques complémentaires.

- Il est trivial de préciser que plus un support théorique est puissant, plus il permettra de mettre en valeur des structures spatiales complexes et fines ; à l'inverse des structures faibles ou grossières qui n'exigeront pas le recours à une formalisation puissante : il sera vain -et même peu cohérent- d'appliquer à un espace perçu ou vécu par exemple les notions d'espace métrique et encore moins d'espace euclidien. La relation entre le support théorique de l'analyse spatiale et les structures spatiales à mettre en évidence est une relation à double sens entre la formalisation et l'organisation spatiale réelle ou théorique.

- On remarquera ensuite que les fondements théoriques de la régionalisation spatiale que sont la topologie, la théorie des graphes et l'apport de la notion de métrique ont été appliqués ici à l'étude des espaces géographiques précis. *Leur formulation plus large permettra d'appréhender l'analyse spatiale des espaces imprécis* que nous allons entreprendre dans le chapitre suivant.

## CONCLUSION DU CHAPITRE II

Dans tout ce chapitre nous avons essayé de montrer que l'espace géographique tel que le conçoivent habituellement les géographes est un espace géographique *précis*, c'est-à-dire dont chaque site ou élément est parfaitement défini quant à son appartenance à cet espace ; cet espace géographique précis n'est, par l'axiomatique que nous avons présentée, qu'un des types d'espaces que nous pouvons étudier.

Les supports théoriques de l'analyse spatiale tels que les modèles spatiaux, partent de ce présupposé de précision spatiale, implicitement appliqué ou explicitement énoncé.

De même, l'utilisation de la théorie des probabilités pour traiter du problème de l'incertitude en analyse spatiale ne peut se faire que parce qu'il est possible de définir une  $\sigma$ -algèbre c'est-à-dire une famille de sous-espaces eux-aussi précis et disjoints. Définir une probabilité d'un sous-espace revient alors à définir une *mesure* de ce sous-espace en respectant toutes les conditions théoriques d'une mesure. Enfin, le recours à la topologie, à la théorie des graphes et à celle des espaces métriques est lui aussi subordonné à ce présupposé de précision spatiale : c'est en respectant cette donnée que le géographe pourra utiliser la topologie, les graphes ou les métriques pour régionaliser un espace.

Il devient à présent nécessaire de dépasser le cas particulier d'un espace précis ; le chapitre suivant s'attachera à montrer que loin de contredire tout l'acquis présenté ci-dessus, l'analyse des espaces imprécis en élargira les bases, en proposera une formulation plus générale et englobant le cas traité.

En d'autres termes la géographie des espaces flous répond à la fois au souci de tout chercheur d'*élargir les bases théoriques* de son travail et partant, de faire la démarche scientifique la plus globale possible, et à sa préoccupation constante d'*appréhender au mieux la réalité géographique* qui n'est pas toujours celle d'un espace précis, loin de là.

## CHAPITRE III

### LES FONDEMENTS THEORIQUES DE L'ANALYSE DES ESPACES IMPRECIS

A - SIGNIFICATION GEOGRAPHIQUE DE L'IMPRECISION SPATIALE

B - LA THEORIE DES SOUS-ENSEMBLES FLOUS - LES FONDEMENTS ESSENTIELS  
DE L'ANALYSE GEOGRAPHIQUE DES ESPACES IMPRECIS

## A - LA SIGNIFICATION GEOGRAPHIQUE DE L'IMPRECISION SPATIALE

Dans le chapitre I de cette première partie, nous avons déjà présenté la notion d'imprécision spatiale. Nous avons souligné que cette notion est inhérente à l'espace géographique "réel" ; au contraire la notion d'espace précis nous apparaît comme un "construit" de l'homme, imposé par la nécessité politique, juridique, administrative ou économique de délimiter soigneusement l'espace, imposé également par le besoin "cartésien" de régionaliser l'espace en sous-espaces homogènes ou polarisés selon des modèles spatiaux bien définis.

Nous allons ici développer de façon plus systématique le concept d'espace imprécis et dégager différents types d'espaces imprécis.

### I - Définitions de base et caractères fondamentaux d'un espace géographique imprécis

#### 1. Définitions

1.1. Nous appellerons *espace géographique imprécis* un espace géographique auquel les lieux, ou sites spatiaux élémentaires, appartiennent plus ou moins ; à chaque lieu est de ce fait associée sa valeur d'appartenance à l'espace géographique imprécis.

#### 1.2. Définitions de structures

1.2.1. Nous appellerons "*structure d'identification*" d'un espace géographique, l'ensemble des attributs géographiques ou autres (économiques, sociaux etc.) qui définissent cet espace et l'individualisent par rapport à son environnement c'est-à-dire à un espace-référentiel dans lequel il est inclus.

1.2.2. Nous appellerons "*profil d'identification*" :

1.2.2.1. Si les attributs sont mesurables : un ensemble associant à chaque attribut une valeur susceptible de représenter et d'identifier le mieux possible l'espace géographique.

Ainsi, pour définir l'"*espace de climat méditerranéen*" on définira par

sa *structure d'identification* l'ensemble des attributs suivants :

- précipitations : importance, répartition annuelle
- températures

et par son *profil d'identification* un ensemble de valeurs associées à chaque variable à savoir :

- précipitations - < 800 mm par an
  - à maxima de printemps et d'automne
  - < 100 jours par an
- températures vraies - de janvier > 5°
  - de juillet > 20°
- période aride estivale selon l'indice de GAUSSEN  
(  $P < 2 T$  )

1.2.2.2. Si les attributs ne sont pas mesurables, un ensemble associant à chaque attribut une valuation qualitative susceptible de représenter et d'identifier le mieux possible l'espace géographique étudié.

Reprenant l'expression de "*frange océanique*" utilisée par de nombreux géographes, nous définirons sa structure d'identification comme l'ensemble des attributs mesurables ou non qui sont :

- les attributs mesurables de climatologie : précipitation et température
- les attributs non mesurables au sens propre du terme
  - type et répartition de l'habitat
  - type de paysage agraire
  - types d'attributs psycho-sociologiques etc.

Le *profil d'identification* serait pour ces attributs plus difficilement mesurables ou non mesurables :

- habitat très dispersé
- paysage de bocage
- individualisme
- racines celtiques etc.

A l'aide de ces définitions préliminaires de structures, nous pouvons à présent préciser la notion d'appartenance "plus ou moins" grande d'un élément à un espace géographique imprécis.

### 1.3. Appartenance d'un lieu à un espace géographique imprécis

1.3.1. *Un lieu appartiendra entièrement à un espace géographique imprécis, compte tenu d'une structure d'identification donnée, si les valeurs des attributs ou les appréciations qualitatives des attributs non mesurables sont, pour le lieu donné, les mêmes que celles du profil d'identification.*

Autrement dit le lieu donné a la même "personnalité" que l'ensemble spatial auquel il appartient.

Ainsi Nice ou Cannes appartiennent sans aucune ambiguïté à la zone méditerranéenne.

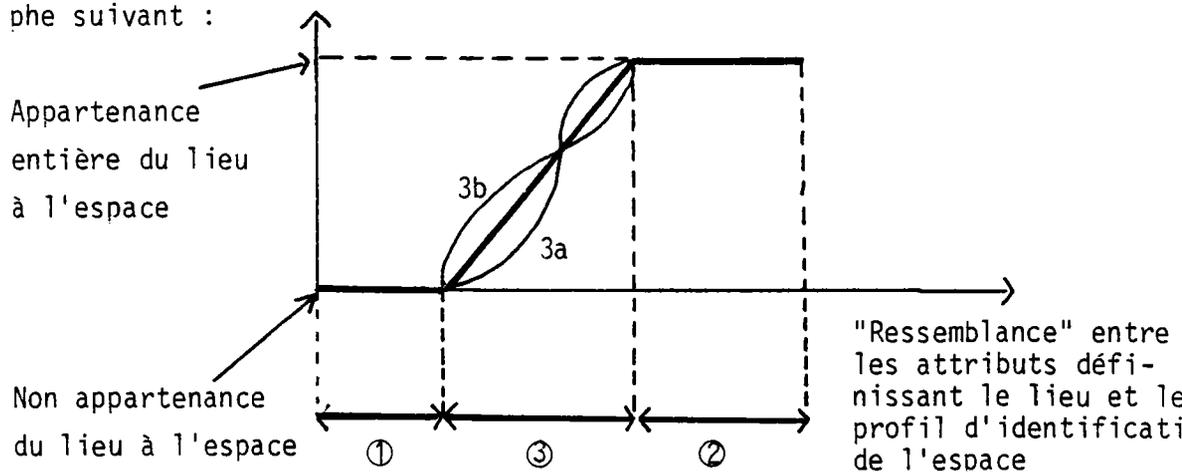
1.3.2. *Un lieu donné n'appartient pas à l'espace imprécis si, compte tenu du profil d'identification de cet espace, les valeurs ou qualificatifs des attributs qui définissent ce lieu sont totalement différents de ceux du profil d'identification de l'espace.*

1.3.3. *Un lieu donné appartient plus ou moins à un espace imprécis si les attributs qui le définissent :*

- soit sont ceux de la structure d'identification, mais leurs valeurs ou qualificatifs se rapprochent "plus ou moins" du profil d'identification.

- soit ne sont que partiellement ceux de la structure d'identification et n'en respectent que partiellement le profil.

1.3.4. PRADE (1982) suggère, dans un domaine autre que la géographie, une fonction linéaire associant la valeur d'appartenance et la ressemblance (ce terme étant pris au sens trivial et courant) entre un élément et l'espace imprécis. Nous pourrions en effet suggérer ici le graphe suivant :



- 1) aucune ressemblance
- 2) ressemblance parfaite  $\Rightarrow$  le lieu "s'identifie" au profil d'identification de l'espace
- 3) accroissement de la ressemblance  $\Rightarrow$  accroissement proportionnel de la fonction d'appartenance du lieu à l'espace géographique imprécis.

1.3.5. Dans la pratique le secteur 3) ne se définit pas forcément par une proportionnalité stricte entre ressemblance et fonction d'appartenance. Il se définira simplement par une fonction strictement croissante (types 3a, 3b ou autres).

De cet ensemble de définitions, nous pouvons dès à présent dégager :

## 2. Les propriétés immédiates d'un espace géographique imprécis

2.1. Un espace géographique imprécis est *mal délimité* par rapport à son "environnement" c'est-à-dire par rapport à l'espace référentiel dont il représente une partie. Aucune limite précise ne peut être discernée, mais bien plutôt une frange, plus ou moins large et continue de sous-ensembles spatiaux appartenant "plus ou moins" à cet espace.

2.2. On peut définir dans cet espace :

- un *cœur* ou *noyau* composé des sous-espaces lui appartenant entièrement
- des *marges* ou *support* composés de sous-espaces lui appartenant plus ou moins. Il ne s'agira pas pour nous d'allouer ces marges à un cœur, comme le préconise, en analyse des espaces précis DUMOLARD (1975), ce qui revient à perdre l'information concernant cette "marginalité spatiale". Bien au contraire, nous pensons qu'il est fondamental de garder cette notion d'appartenance plus ou moins forte de ces marges à l'espace géographique et d'appartenance d'un même lieu à plusieurs espaces géographiques imprécis.

2.3. Un espace géographique imprécis n'a du fait

de sa mauvaise délimitation ni forme, ni étendue, ni métrique précises ; il s'agira alors de trouver des outils méthodologiques adéquats pour en étudier forme, étendue et organisation.

2.4. Enfin un espace géographique imprécis ne possède pas, dans la plupart des cas, les propriétés d'homogénéité, de continuité et d'isotropie que l'on reconnaît habituellement aux espaces géographiques précis (et euclidiens). Nous abordons donc ici un domaine de l'analyse spatiale particulièrement complexe et difficile à appréhender mais qui constitue cependant une partie essentielle de la géographie.

### 3. Les caractères spatiaux induits par la notion d'imprécision

Au-delà des propriétés spatiales mises en évidence ci-dessus, notre approche de l'imprécision spatiale peut être énoncée sur le plan épistémologique comme un effort pour conceptualiser et formaliser cette notion essentielle à notre avis en recherche géographique, qu'elle soit théorique ou réalisée en vue d'une application.

L'introduction de la notion d'appartenance induit deux caractères fondamentaux de l'espace géographique :

3.1. La négation, ou en tous cas le non-respect du principe du tiers-exclu selon lequel un élément appartient ou n'appartient pas à un ensemble. Selon notre définition d'un espace géographique, la "troisième voie", celle d'une appartenance "plus ou moins" forte d'un lieu à un espace géographique devient un principe fondamental du raisonnement géographique.

3.2. En conséquence l'appartenance d'un lieu à plusieurs sous-espaces est une autre base que nous posons ici. Il en découle que toute partition de l'espace en sous-ensembles disjoints, toute classification spatiale en classes disjointes devient, soit impossible, soit possible *seulement dans le cas d'espaces géographiques précis*. Cette notion a deux implications majeures :

3.2.1. Elle remet en cause le caractère général des méthodes de classi-

fication couramment pratiquées par les géographes. Il nous appartiendra de présenter des méthodes de classifications floues respectant l'imprécision c'est-à-dire créant des classes non nécessairement disjointes (deuxième partie).

3.2.2. Enfin, elle remet en cause, dans le traitement de l'incertitude, le recours à la théorie des probabilités. Nous avons vu dans le chapitre II qu'une mesure de probabilité ne peut se faire que sur des sous-ensembles disjoints possédant certaines propriétés (mesure sur un corps de BOREL). Il nous faudra proposer une approche plus large et moins exigeante sur le plan formel de la notion d'incertitude relative aux espaces géographiques imprécis.

Voyons à présent quels peuvent être les différents types d'espaces géographiques imprécis.

## II - Les grands types d'espaces géographiques imprécis

En nous plaçant ici sur le plan purement géographique, nous dégagons trois grands types d'espaces géographiques imprécis.

### 1. Les espaces géographiques bien définis, mais à limite imprécise

La contradiction n'est qu'apparente entre la précision de la définition d'un espace géographique et l'imprécision de ses limites. Deux cas peuvent se présenter.

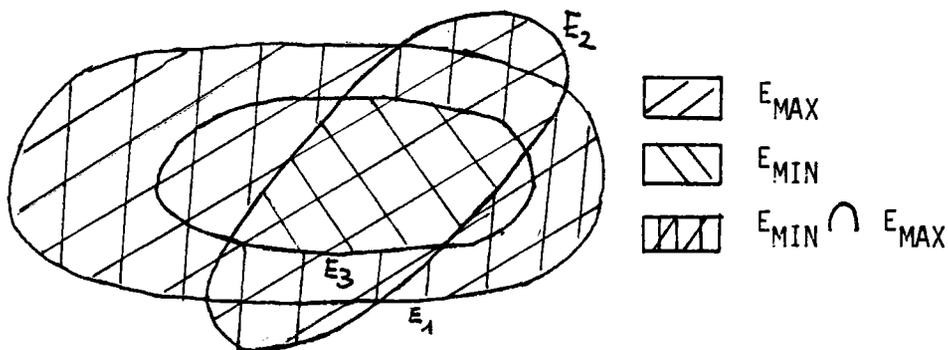
1.1. Un espace géographique est bien défini si sa structure correspond à un ensemble d'attributs parfaitement mesurables, c'est-à-dire si à chaque lieu on peut associer les valeurs qui correspondent à chaque attribut.

Chaque lieu est ainsi défini par un ensemble de  $p$  valeurs (structure à  $p$  variables) connues et précises.

La délimitation précise d'un tel espace est cependant impossible,

chaque attribut définissant une délimitation spatiale particulière.

Comment, par exemple, définir les limites de l'espace méditerranéen français : isohyète 800 mm, limite des 100 jours de précipitations annuelles, limite liée aux températures moyennes annuelles ? Trouver un attribut susceptible d'exprimer la synthèse de ces données est difficile (limite N. de la culture de l'olivier par exemple). Le plus souvent le géographe résout ce problème par la *superposition des limites* et le choix, plus ou moins arbitraire d'une limite unique.



Soit  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  les espaces respectivement définis par les variables  $V_1$ ,  $V_2$  et  $V_3$ .

L'espace  $E$  défini par la structure  $S$  :

$$S = \{ V_1, V_2, V_3 \}$$

est un espace que l'on peut "limiter" de façon arbitraire :

par exemple :  $E_{MAX} = E_1 \cup E_2 \cup E_3$

ou :  $E_{MIN} = E_1 \cap E_2 \cap E_3$

A la suite de DUMOLARD (1975) définissons par : le "Cœur" de l'espace géographique :  $E_{MIN}$  et par l'expression de "marges" de l'espace géographique :  $E_{MAX} \cap E_{MIN}$ . En fait ces marges représentent la *frange d'imprécision* de l'espace  $E$  défini par la structure  $S$ , frange plus ou moins large, plus ou moins continue, mais significative en tout cas de l'imprécision spatiale. Il s'agira donc pour nous, non de la rattacher au "cœur" comme le proposait DUMOLARD mais de la conserver dans son imprécision qui est à notre avis, une donnée fondamentale de l'analyse spatiale. Il faudra également exprimer formellement cette imprécision et les caractères mathématiques et géographiques induits par elle.

1.2. En second lieu un espace peut, tout en ayant

une structure bien définie, être délimité de façon imprécise "sur le terrain", du fait de l'étroite interpénétration de formes différentes d'occupation du sol.

L'observation d'une photo aérienne relative au front de côte de Moselle illustre ce thème : friches, vergers, héritages de l'ancien vignoble mosellan interfèrent de façon si étroite qu'il est totalement impossible de délimiter soigneusement les différentes formations végétales.

Le même fait peut être noté entre une urbanisation progressant le long d'axes de communication ou "colonisant" des terroirs agricoles et les secteurs encore cultivés. Banlieue lointaine et espaces ruraux sont si étroitement imbriqués qu'on ne peut tracer une limite précise entre ces deux types d'occupation de l'espace.

Nous nous proposons de noter "*frange d'indétermination*" la portion d'espace, continue ou non, dans laquelle il est impossible, à moins de trahir la réalité géographique, de tracer une séparation linéaire entre types différents d'occupation du sol. Là encore, nous nous réservons d'exprimer mathématiquement cette indétermination géographique.

Ce premier type d'espace géographique imprécis traduit bien la contradiction évoquée par REYMOND (ouvrage cité) entre étendue et espace. A l'*étendue*, aux propriétés géométriques définies, partitionnable en sous-espaces disjoints, s'oppose l'*espace* imprécis par nature, impossible à partitionner en sous-ensembles disjoints, résultat d'une interaction entre homme et étendue si étroite que l'organisation spatiale n'obéit plus aux règles de la "géométrie spatiale".

## 2. Espaces à limites "élastiques".

Nous appellerons espace à limites élastiques (donc imprécises) un espace homogène défini par un attribut qualitatif ou quantitatif à "contraintes souples" c'est-à-dire qui s'applique "plus ou moins" à l'espace déterminé.

Cette notion concerne essentiellement des attributs relatifs à l'espace vécu et a son expression essentielle dans les notions de

"domination" administrative, juridique ou autres, d'interdictions de tous types, de "permissions" de tous types également.

Le Moyen-Age occidental apporte des exemples riches en enseignements sur ce thème : imprécision dans l'étendue exacte des juridictions féodales, dans les limites administratives ou autres : tel seigneur pouvait étendre son droit de justice jusqu'à telle limite spatiale, mais s'acharnait à rendre cette limite "élastique" et à empiéter sur l'espace soumis à un seigneur voisin ; la progression du royaume de France lui-même s'est faite en partie par la "conquête" (du fait de l'élasticité des limites territoriales) du pouvoir royal sur le pouvoir féodal.

Des exemples contemporains d'espaces imprécis à limites élastiques sont très nombreux. G.N. FISCHER (thèse citée) montre ainsi que pour un nouveau venu, l'espace de l'entreprise est fait d'espace "permis" et d'espaces "interdits" (réservés à certains groupes, ou dangereux, ou trop éloignés et échappant de ce fait à tout contrôle). En fait les limites de l'espace permis ne tarderont pas à s'avérer "élastiques" : l'ouvrier "ancien" saura qu'il existe ainsi des secteurs praticables bien qu'interdits et y aménagera des "coins" personnalisés, créant ce que l'auteur appelle des espaces-libertés.

Citons pour finir les multiples limites élastiques rencontrées dans le vécu quotidien et "enfoncées" ou étirées par les hommes : extension "abusive" d'aires de stationnement automobile, "colonisation" progressive d'immeubles vides par des squatters, sans même évoquer dans un cadre planétaire les zones d'influences politiques plus ou moins officieuses.

Nous appellerons "*franges d'élasticité*" les secteurs où une limite spatiale, en principe bien définie, est progressivement repoussée, quitte à être brusquement rétablie (accords de partages territoriaux, "murs" séparant deux secteurs politiques différents, sévérité brusque pour réprimer les excès etc.)

### 3. Espaces définis par des prédicats imprécis

Enfin, un espace géographique peut être qualifié d'imprécis dans la mesure où il est défini par un prédicat imprécis,

c'est-à-dire par une structure elle-même imprécise.

Ainsi définir "la région lyonnaise", l'"espace rhéan" etc, revient à spatialiser un ensemble d'attributs implicites mais non exactement précisés. Il est bien évident dans ce cas que certains sous-espaces appartiendront, sans aucun doute possible à l'espace ainsi défini : l'axe rhéan que représente la vallée même de ce fleuve fera incontestablement partie de l'ensemble, mais tout géographe sent intuitivement et cherchera à montrer que des "espaces périphériques" appartiendront "plus ou moins" à l'espace ainsi défini, qu'il existe, ainsi que l'a montré BRUNET, un gradient selon lequel le fait rhéan s'affaiblit à mesure que l'on s'éloigne de l'axe proprement dit.

Dans ce troisième type d'espace géographique, l'imprécision est liée à l'expression même de la structure de l'espace. Nous appellerons "*franges de périphérie ou de gradient*" les sous-espaces imprécis où s'affaiblit une structure géographique donnée.

En résumé un espace imprécis peut avoir ce caractère d'imprécision pour des raisons très différentes. Quelles que soient ces raisons, il présentera en général toujours une même organisation à savoir un "cœur" ou partie centrale, où il n'y a aucune ambiguïté quant à l'appartenance des lieux qui le composent et des *franges*, qu'elles soient d'imprécision, d'indétermination, d'élasticité ou de gradient, et telles que l'appartenance des lieux sera "plus ou moins" forte. Dans ces franges, d'une façon générale, la structure géographique s'affaiblit et les caractères géographiques originaux s'estompent pendant qu'apparaissent d'autres caractères géographiques.

Cherchons à présent à formuler cette notion fondamentale d'imprécision à l'aide de la théorie des sous-ensembles flous.

B - LA THEORIE DES SOUS-ENSEMBLES FLOUS - LES FONDEMENTS ESSENTIELS DE  
L'ANALYSE GEOGRAPHIQUE DES ESPACES IMPRECIS

I - Le concept de sous-ensemble flou

1. Exemple et notation

1.1. Soit un sous-ensemble A d'un ensemble  $\underline{E}$

$$A \subset \underline{E}$$

défini de telle sorte que les éléments de  $\underline{E}$  appartiennent "plus ou moins" à A.

Cela veut dire que ces éléments :

- soit n'appartiennent pas à A
- soit lui appartiennent entièrement
- soit lui appartiennent "plus ou moins".

Formellement on peut donc associer à chaque élément de  $\underline{E}$  une fonction d'appartenance à A dont la valeur dépend de la force de l'appartenance de l'élément à A. Si cette fonction d'appartenance prend par exemple ses valeurs dans l'intervalle  $[\underline{0}, \underline{1}]$ , le sous-ensemble A sera noté :

$$A = \{(x_1, 0.3), (x_2, 1), (x_3, 0.8), (x_4, 0.5)\}$$

et sera appelé sous-ensemble flou de  $\underline{E}$ . Ainsi :

$$A = \{x_i, \mu_A(x_i) : \forall x_i \in \underline{E}, \mu_A(x_i) \in [0, 1]\}$$

1.2. Les notations traduiront la différence entre un ensemble ordinaire et un ensemble flou dans la mesure où, nous le rappelons, nous soulignerons d'une barre l'ensemble ou le sous-ensemble ordinaire.

Ainsi nous notons :

$$A \subset \underline{E}$$

Nous étendons cette notation à tous les ensembles rencontrés :

ainsi :  $\underline{P}(\underline{E})$  = l'ensemble des parties non floues de  $\underline{E}$

et :  $P(\underline{E})$  = l'ensemble des parties floues de  $\underline{E}$ .

2. Définition formelle (KAUFMANN 1973)

2.1. Soit  $\underline{E}$  un ensemble dénombrable ou non et

x un élément de  $\underline{E}$  :

un sous-ensemble flou de  $A \subset \underline{E}$  est l'ensemble des couples

$$A = \left\{ (x, \mu_A(x)) \right\}, x \in \underline{E}$$

où  $\mu_A(x)$  est le degré d'appartenance de x à A,  $\mu_A(x)$  prend ses valeurs dans  $\underline{M}$  ensemble d'appartenance.  $\mu_A$  est donc définie comme une fonction d'appartenance de x dans  $\underline{M}$

$$\begin{array}{ccc} \mu_A : \underline{E} & \longrightarrow & \underline{M} \\ \forall x \in \underline{E} & \longrightarrow & \mu_A(x) \in \underline{M} \end{array}$$

2.2. Dans le cas où  $\underline{M}$  est l'intervalle  $]/\underline{0}, \underline{1}[$  selon ZADEH (1965) selon l'usage qu'en font de nombreux chercheurs (PONSARD, PRADE...), la définition proposée est une simple généralisation d'un sous-ensemble vulgaire. Effectivement, si  $\underline{M} = \{0,1\}$ , on peut définir un sous-ensemble non flou  $\underline{A}$  tel que :

$$\begin{array}{l} \underline{A} \subset \underline{E} \\ \underline{A} = \left\{ (x, \mu_{\underline{A}}(x)) \mid x \in \underline{E} \right. \\ \quad \text{avec } \mu_{\underline{A}}(x) = 0 \\ \quad \text{ou } \mu_{\underline{A}}(x) = 1 \end{array}$$

La fonction  $\mu_{\underline{A}}(x)$  est alors une simple fonction binaire booléenne et représente bien un cas particulier et plus restrictif de la fonction  $\mu_A(x)$ .

### 3. Application spatiale

Soit  $\underline{E}$  un espace-référentiel, dénombrable ou non, et  $E$  un sous-espace de  $\underline{E}$  tel qu'à chaque élément ou sous-ensemble de  $\underline{E}$  on associe une fonction d'appartenance à  $E$  prenant ses valeurs de  $\underline{M}$ , ensemble d'appartenance préordonné ou ordonné, défini ici comme étant  $]/\underline{0}, \underline{1}[$ , alors :

$$E = \left\{ e_i, \mu_E(e_i) \right\}$$

- avec  $e_i \in \underline{E}$
- avec  $i \in \underline{I}$  ensemble d'indices
- et  $\mu_E(e_i) \in ]\underline{0}, \underline{1}[$

est un sous-ensemble flou de  $\underline{E}$ .

Nous le définissons dans le contexte géographique comme étant un sous-espace géographique imprécis de l'espace-référentiel  $\underline{E}$ .

4. Ensemble des parties floues d'un ensemble

4.1. Exemple :

Soit  $\underline{E} = \{x_1, x_2\}$        $\underline{M} = \{0, 0.5, 1\}$

Nous définirons l'ensemble des parties floues de  $\underline{E}$ , noté  $\underline{P}(\underline{E})$ , l'ensemble suivant :

$$\underline{P}(\underline{E}) = \left\{ \begin{aligned} &\{(x_1, 0), (x_2, 0)\}, \{(x_1, 0), (x_2, 0.5)\}, \{(x_1, 0), (x_2, 1)\}, \\ &\{(x_1, 0.5), (x_2, 0)\}, \{(x_1, 0.5), (x_2, 0.5)\}, \{(x_1, 0.5), (x_2, 1)\}, \\ &\{(x_1, 1), (x_2, 0)\}, \{(x_1, 1), (x_2, 0.5)\}, \{(x_1, 1), (x_2, 1)\} \end{aligned} \right\}$$

alors que  $\underline{P}(\underline{E})$ , ensemble des parties non floues de  $\underline{E}$  serait :

$$\underline{P}(\underline{E}) = \left\{ \begin{aligned} &\{(x_1, 0), (x_2, 0)\}, \{(x_1, 0), (x_2, 1)\}, \{(x_1, 1), (x_2, 0)\}, \\ &\{(x_1, 1), (x_2, 1)\} \end{aligned} \right\}$$

On notera ainsi que :

Card  $\underline{P}(\underline{E}) = 4$

Card  $\underline{P}(\underline{E}) = 9$

et, en toute généralité

$$\text{Card } \underline{P}(\underline{E}) = 2^{\text{Card } \underline{E}} = \text{Card } (\underline{M})^{\text{Card } \underline{E}}$$

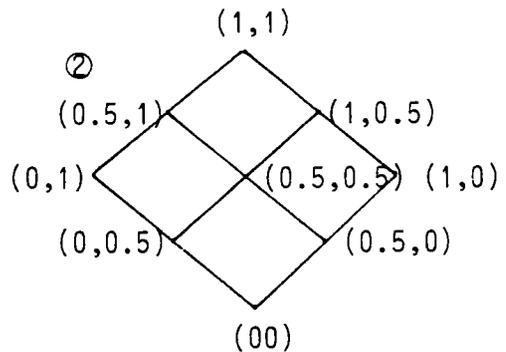
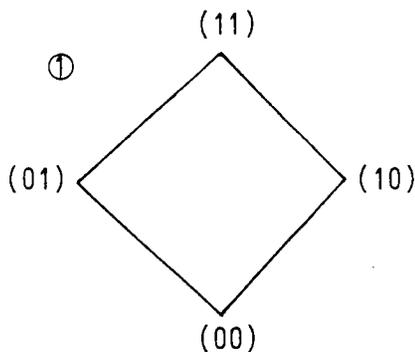
avec  $\underline{M} = \{0, 1\}$

écriture qui est celle de :

$$\text{Card } \underline{P}(\underline{E}) = \text{Card } (\underline{M})^{\text{Card } \underline{E}} \quad \text{avec } \underline{M} = \{0, 1\}$$

Donc  $\text{Card } \underline{P}(\underline{E}) \subset \text{Card } \underline{P}(\underline{E})$ .

Représentons cet exemple par une figure où ne seront portées que les valeurs d'appartenance des éléments  $x_1$  et  $x_2$  à  $\underline{P}(\underline{E})$  et  $\underline{P}(\underline{E})$  (respectivement croquis 1 et 2)



4.3. Nous pouvons en déduire une notation générale

qui est la suivante :

4.3.1.  $\underline{P}(\underline{E})$  a une structure de treillis de BOOLE, c'est-à-dire de treillis distributif et complémenté

4.3.2.  $\underline{P}(\underline{E})$  a une structure de treillis vectoriel (voir Annexe II)

## II - Les opérations sur les sous-ensembles flous

Il est possible d'effectuer sur les sous-ensembles flous des opérations du même type que celles réalisées sur les sous-ensembles ordinaires, permettant ainsi, en ce qui concerne notre thème qui est l'analyse spatiale, une géographie d'ensembles flous du même type que celle préconisée par HAGGETT (ouvrage cité) sur les sous-ensembles ordinaires. Enumérons ces opérations.

### 1. Inclusion

Soit A et B deux sous-ensembles flous de  $\underline{E}$  et  $\underline{M}$  l'ensemble d'appartenance associé. Choisissons  $\underline{M} = \underline{[0,1]}$   
Nous notons

$$A \subseteq B \iff \forall x \in \underline{E}, \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$$

donc

$$\forall x \in A \quad \mu_A(x) = 1 \implies \mu_B(x) = 1$$

### 2. Egalité et complémentation

$$\begin{array}{l} 2.1. A = B \iff \forall x \in \underline{E}, \mu_A(x) = \mu_B(x) \iff \\ \left[ \begin{array}{l} \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \text{ et } \mu_B(x) \leq \mu_A(x) \\ \longrightarrow A \subseteq B \text{ et } B \subseteq A \end{array} \right] \end{array}$$

2.2. En théorie des sous-ensembles flous, il n'y a pas de complémentarité puisqu'un élément x de  $\underline{E}$  peut appartenir à la fois à A et à B.

Toutefois ZADEH (1965) définit une *pseudo-complémentation* :

Soit  $\underline{M} = \underline{[0,1]}$

deux cas sont à noter :

$$2.2.1. B + \bar{A} \iff \forall x \in \underline{E},$$

$$\mu_B(x) = 1 - \mu_A(x)$$

$\bar{A}$  est le complémentaire de A relativement à  $\underline{E}$

2.2.2. Soit  $\underline{B}$  sous-ensemble flou de  $\underline{E}$ .

On note  $\bar{B}$  le sous-ensemble flou tel que

$$\mu_{\bar{B}}(x) = 1 - \mu_B(x)$$

Donc B a un pseudo-complémentaire  $\bar{B}$  relativement à  $\underline{E}$ .

### 3. Intersection et réunion de deux sous-ensembles flous.

3.1. Remarque : dans un treillis, pour toute paire d'éléments on peut définir un maximum et un minimum.

$$\begin{aligned} \text{Posons : } \quad \bigvee \left\{ \mu_A(x), \mu_B(x) \right\} &= \mu_A(x) \vee \mu_B(x) \\ \bigwedge \left\{ \mu_A(x), \mu_B(x) \right\} &= \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) \end{aligned}$$

3.2. Le sous-ensemble flou  $A \cap B$  (A inter B)

est :

$$A \cap B = \left\{ (x, \mu_{A \cap B}(x)) / \forall x \in E, \mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) \right\}$$

3.3. Le sous-ensemble flou  $A \cup B$  (A union B) est :

$$A \cup B = \left\{ (x, \mu_{A \cup B}(x)) / \forall x \in E, \mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) \right\}$$

3.4. L'intersection est donc associée en logique floue à la fonction logique ET.

L'union est associée à la fonction logique OU.

3.5. Exemple :

$$\begin{aligned} A &= \left\{ (x_1, 0.3), (x_2, 0.5), (x_3, 0), (x_4, 1), (x_5, 0.6) \right\} \\ B &= \left\{ (x_1, 0), (x_2, 1), (x_3, 0.2), (x_4, 0.5), (x_5, 0.6) \right\} \\ A \cap B &= \left\{ (x_1, 0), (x_2, 0.5), (x_3, 0), (x_4, 0.5), (x_5, 0.6) \right\} \\ A \cup B &= \left\{ (x_1, 0.3), (x_2, 1), (x_3, 0.2), (x_4, 1), (x_5, 0.6) \right\} \end{aligned}$$

### 4. Somme disjonctive de deux sous-ensembles flous

On note :

$$A \oplus B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$$

c'est-à-dire

$$\forall x \in \underline{E}, x \in A, x \in B, \mu_{A \oplus B}(x) = \left[ \mu_A(x) \wedge \mu_{\bar{B}}(x) \right] \vee \left[ \mu_{\bar{A}}(x) \wedge \mu_B(x) \right]$$

Reprenons l'exemple 3.5., on aura :

$$\mu_{A \oplus B}(x_1) = \left[ (0.3 \wedge 1) \vee (0.7 \wedge 0) \right] = 0.3 \vee 0 = 0.3$$

$$\mu_{A \oplus B}(x_2) = \left[ (0.5 \wedge 0) \vee (0.5 \wedge 1) \right] = 0.5$$

$$\mu_{A \oplus B}(x_3) = \left[ (0 \wedge 0.8) \vee (1 \wedge 0.2) \right] = 0.2$$

$$\mu_{A \oplus B}(x_4) = \left[ (1 \wedge 0.5) \vee (0 \wedge 0.5) \right] = 0.5$$

$$\mu_{A \oplus B}(x_5) = \left[ (0.6 \wedge 0.4) \vee (0.4 \wedge 0.6) \right] = 0.4$$

D'où :

$$A \oplus B = \left\{ (x_1, 0.3), (x_2, 0.5), (x_3, 0.2), (x_4, 0.5), (x_5, 0.4) \right\}$$

### 5. Différence et différence absolue de deux sous-ensembles flous

5.1.  $A - B = A \cap \bar{B}$

$$\forall x \in \underline{E}, x \in A, x \in B, \mu_{A - B}(x) = \left[ \mu_A(x) \wedge \mu_{\bar{B}}(x) \right]$$

5.2.  $|A - B| = \left\{ x, \mu_{|A - B|}(x), \mu_{|A - B|}(x) = |\mu_A(x) - \mu_B(x)|, \forall x \in \underline{E} \right\}$

### 6. Produit algébrique et somme algébrique de deux sous-ensembles flous

6.1.  $A \cdot B = \left\{ (x, \mu_{A \cdot B}(x)), \mu_{A \cdot B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x), \forall x \in \underline{E} \right\}$

On peut démontrer que

$$A \cdot B \subseteq A \cap B$$

et noter que le produit algébrique de deux sous-ensembles flous est d'autant plus faible que les valeurs d'appartenance des éléments aux sous-ensembles flous A et B sont faibles.

6.2. On notera la somme algébrique :

$$A \hat{+} B = \left\{ x, \mu_{A \hat{+} B}(x), \mu_{A \hat{+} B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_{A \cdot B}(x), \forall x \in \underline{E} \right\}$$

6.3. Notons l'équivalence entre la notion "non floue" ET, l'intersection

et le produit algébrique.

En effet si  $\underline{M} = \{0,1\}$ , les tables de vérité sont d'une part :

MIN	0	1
0	0	0
1	0	1

.	0	1
0	0	0
1	0	1

donc  $A \wedge B = A . B$

D'autre part :

MAX	0	1
0	0	1
1	1	1

$\hat{+}$	0	1
0	0	1
1	1	1

donc  $A \vee B = A \hat{+} B$

Mais ces équivalences ne sont plus respectées si  $\underline{M} \neq \{0,1\}$

### 7. Somme arithmétique de deux sous-ensembles flous

$$A + B = \left\{ (x, \mu_{A+B}(x), \mu_{A+B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x), \forall x \in \underline{E}, \text{ avec } \mu_A(x) + \mu_B(x) \leq 1) \right\}$$

### 8. Autres opérations possibles sur les sous-ensembles flous

De nombreux auteurs soulignent la possibilité de créer d'autres opérateurs susceptibles de traduire de façon satisfaisante la notion de "plus ou moins" qui caractérise la théorie des sous-ensembles flous. Nous ne noterons que ceux qui sont susceptibles de trouver une application en analyse spatiale. Séparons-les, comme le fait PRADE (1982) en opérations unitaires et binaires.

#### 8.1. Les opérateurs "unitaires"

Ils sont utilisés pour moduler la forme de la fonction d'appartenance :

8.1.1. par élévation à une puissance  $> 1$  de cette fonction. On notera cette action "*concentration du flou*", puisqu'elle aura pour effet de concentrer les valeurs d'appartenance.

En effet si A est un sous-ensemble flou on notera :

$A^p$  le sous-ensemble flou :

$$A^p = \left\{ (x, \mu_{A^p}(x)), \mu_{A^p}(x) = (\mu_A(x))^p, \forall p > 1, \forall x \in \underline{E} \right\}$$

il est évident que

$$A^p \subset A$$

et que  $\lim_{p \rightarrow \infty} A^p = \left\{ (x, \mu_{A^p}(x)), \mu_{A^p}(x) = 1 \right\}$

8.1.2. Par élévation à une puissance  $p < 1$ , on obtient un effet de "dilution" :

$$\forall p, 0 < p < 1 \quad \mu_{A^p} \geq \mu_A \quad \forall x \in \underline{E}$$

donc  $A^p \supseteq A$  ;

et la limite, pour  $p \rightarrow \infty$ , de  $\mu_{A^p} > 0$

PRADE, à la suite de ZADEH, suggère l'utilisation de  $p = 2$  pour traduire la notion de "très" et de  $p = 1/2$  pour traduire celle de "plus ou moins". Il est bien évident cependant que le choix de  $p$  dépend de chaque étude.

Ainsi, prenant un exemple, nous pourrions "renforcer" la notion d'appartenance des éléments à  $A$  :

$$A = \left\{ (x_1, 0.7), (x_2, 0.5), (x_3, 0.8), (x_4, 0.2), (x_5, 0.1) \right\}$$

pour le choix de  $p = 2$

$$A^2 = \left\{ (x_1, 0.49), (x_2, 0.25), (x_3, 0.64), (x_4, 0.04), (x_5, 0.01) \right\}$$

qui a pour effet de renforcer l'appartenance de  $x_3$  et  $x_1$  à  $A^2$  et d'atténuer relativement à ces deux éléments, l'appartenance de  $x_2$ ,  $x_4$  et  $x_5$ .

A l'inverse :

$A^{1/2} = \left\{ (x_1, 0.84), (x_2, 0.71), (x_3, 0.89), (x_4, 0.45), (x_5, 0.32) \right\}$ , dilue le flou dans l'intervalle  $[\underline{0}, \underline{1}]$  en atténuant les disparités d'appartenance des éléments de  $\underline{E}$  au sous-ensemble flou  $A$ .

### 8.1.3. Normalisation d'un sous-ensemble flou

Elle fait intervenir le degré d'appartenance le plus élevé du sous-ensemble flou  $A$ .

$$A_{\text{norm}} = \left\{ (x, \mu_{A_{\text{norm}}}(x)), \mu_{A_{\text{norm}}}(x) = \frac{\mu_A(x)}{\sup_{x \in \underline{E}} \mu_A(x)} \right\}$$

nous définissons ainsi un degré d'appartenance *relatif* à  $A$ , opération

intéressante en analyse spatiale car elle consistera à considérer A comme une sorte de référentiel et non plus par rapport à un référentiel externe.

## 8.2. Les opérateurs binaires

Ils concernent deux sous-ensembles flous et peuvent être en quelque sorte "créés" par l'utilisateur à condition que celui-ci en précise les propriétés.

Retenons simplement la notion d'*opérateurs de compromis* définis par DUBOIS et PRADE (1980) par les quatre axiomes :

- 1)  $m(0,0) = 0$  ;  $m(1,1) = 1$
- 2)  $m$  symétrique
- 3)  $m$  monotone
- 4)  $\forall (a,b) \in [0,1]^2$ ,  $\min(a,b) < m(a,b) < \max(a,b)$   
mais  $m \neq \min(a,b)$   
 $m \neq \max(a,b)$

Parmi ces opérateurs, prenons par exemple la moyenne arithmétique qui définit un sous-ensemble flou "moyen" de A et B dont les éléments ont une valeur d'appartenance égale à la moyenne de leurs valeurs d'appartenance à A et B.

En résumé, à côté de quelques opérateurs courants comme l'union, l'intersection, la complémentation de deux sous-ensembles flous, de nombreux opérateurs permettent d'associer deux sous-ensembles flous. Au géographe de choisir (ou de créer) l'opérateur qui lui semblera le plus cohérent avec l'organisation spatiale et la logique de son analyse spatiale.

## III - Comparaison de deux sous-ensembles flous

Nous nous proposons de définir ici un outil mathématique susceptible de permettre la comparaison de deux ou plusieurs sous-ensembles flous et, en notion dérivée, de dégager des indicateurs de flou d'un sous-ensemble. En troisième paragraphe nous préciserons la notion d' $\alpha$ -coupure et la décomposition d'un sous-ensemble flou.

On remarquera que, dans cet exposé, nous prenons volontairement comme ensemble d'appartenance l'ensemble  $\underline{M} = ]\underline{0}, \underline{1}[$ , nous réservant un paragraphe spécial pour définir d'autres types d'ensemble d'appartenance.

### 1. Distance de deux sous-ensembles flous

1.1. Rappelons qu'on définit par *distance* entre deux éléments d'un ensemble ordinaire  $\underline{E}$ , une fonction  $d$

$$\begin{aligned} d : \underline{E}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ \forall x, y \in \underline{E} &\longrightarrow d(x, y) \in \end{aligned}$$

$d$  a été définie plus haut.

Etendons cette notion à la distance de deux sous-ensembles vulgaires.

#### 1.1.1. Distance de HAMMING généralisée

Soit  $\underline{A} \subset \underline{E}$

$\underline{B} \subset \underline{E}$

$\underline{E}$  fini

$$\begin{array}{c} \text{avec } \underline{A} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \\ \underline{B} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

on a donc par exemple :

$$\mu_{\underline{A}}(x_1) = 0$$

on a donc par exemple :

$$\mu_{\underline{B}}(x_1) = 1$$

On notera la distance de HAMMING entre  $\underline{A}$  et  $\underline{B}$

$$d_H(\underline{A}, \underline{B}) = \sum_{i=1}^n \left| \mu_{\underline{A}}(x_i) - \mu_{\underline{B}}(x_i) \right|$$

d'où :

$$d_H(\underline{A}, \underline{B}) = 1 + 1 + 0 + 1 + 1$$

$$d_H(\underline{A}, \underline{B}) = 4$$

#### 1.1.2. Distance de HAMMING relative

On notera :

$$\delta_H(\underline{A}, \underline{B}) = \frac{1}{n} d_H(\underline{A}, \underline{B}) \quad \text{avec } n = \text{Card}(\underline{E})$$

ici :

$$\delta_H(\underline{A}, \underline{B}) = \frac{4}{5} = 0.8$$

Il est évident que  $\forall \underline{A}, \forall \underline{B}, 0 \leq \delta_H(\underline{A}, \underline{B}) \leq 1$

1.2. Etendons notre exposé au cas de deux sous-ensembles flous

1.2.1. Distance de HAMMING généralisée :

$$d_H(\underline{A}, \underline{B}) = \sum_{i=1}^n |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| \quad \forall x_i \in \underline{E}$$

$i \in \underline{I}$  ensemble d'indices

avec  $\mu_A(x_i) \in ]0, 1[$

et  $\mu_B(x_i) \in ]0, 1[$

on a :  $0 \leq d_H(\underline{A}, \underline{B}) \leq n$

cette expression est une forme généralisée de celle présentée en 1.1.1.

1.2.2. Distance de HAMMING relative

Elle généralise 1.1.2.

$$\delta_H(\underline{A}, \underline{B}) = \frac{1}{n} d_H(\underline{A}, \underline{B}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|$$

1.2.3. Exemple :

$A \subset \underline{E}$        $A = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline 0.2 & 0 & 0.5 & 1 \\ \hline \end{array}$       on a donc par exemple :  $\mu_A(x_1) = 0.2$

$B \subset \underline{E}$        $B = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0.5 & 0.2 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$

$$d_H(\underline{A}, \underline{B}) = 0.3 + 0.2 + 0.5 + 1 = 2$$

$$\delta_H(\underline{A}, \underline{B}) = \frac{2}{4} = 0.5$$

1.2.4. Distance euclidienne ou distance quadratique

Elle est définie par

$$d_e(\underline{A}, \underline{B}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^2} \quad i \in \underline{I}$$

on a :  $0 \leq d_e(\underline{A}, \underline{B}) \leq \sqrt{n}$        $n = \text{Card } \underline{E}$

1.2.5. Distance euclidienne relative

$$\delta_e(\underline{A}, \underline{B}) = \frac{1}{n} d_e(\underline{A}, \underline{B})$$

il est évident que :

$$0 \leq \delta_e(\underline{A}, \underline{B}) \leq 1$$

1.2.6. Calculons ces distances à partir de l'exemple 1.2.3.

$$d_e(A,B) = 0.09 + 0.04 + 0.25 + 1 = 1.38$$

$$\delta_e(A,B) = 0.34$$

1.2.7. On pourrait de la même façon pour les sous-ensembles ordinaires définir une *distance euclidienne* généralisée et relative entre deux sous-ensembles flous

$$d_r = \sqrt[r]{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^r}$$

et  $\delta_r = \frac{1}{n} d_r$

dont les distances euclidienne et euclidienne relative sont une expression particulière.

### 1.2.8. Remarques

1.2.8.1. KAUFMANN (ouvrage cité) insiste sur le fait que ces distances sont définissables si  $\underline{E}$  non fini. Nous ne reprendrons pas ses démonstrations sachant que, dans la plupart des cas nous travaillerons en analyse spatiale sur des espaces finis.

1.2.8.2. Nous disposons donc d'un outil mathématique qui nous permet de définir entre deux sous-ensembles flous une "distance", respectant effectivement les propriétés d'une distance. Il nous sera donc possible en analyse spatiale, de définir une "distance" entre deux sous-espaces flous d'un même référentiel géographique. Supposons, à titre d'exemple, que nous nous proposons d'étudier la zone d'influence d'une ville C.

Soit A le sous-espace flou organisé autour de C et dont les éléments (communes par exemple) appartiennent "plus ou moins" à A selon le critère de l'importance des flux téléphoniques venant de C. Nous valuerons :

$$\forall x_i \in \underline{E} \quad \text{posons} \quad \mu_A(x_i) = \begin{array}{l} 1 \text{ si } 100 \% \text{ des flux téléphoniques enre-} \\ \text{gistrés en } x_i \text{ viennent de C.} \\ = 0,75 \text{ si } 75 \% \quad " \quad " \\ = 0,5 \text{ si } 50 \% \quad " \quad " \\ = 0 \quad \text{si } 0 \% \quad " \quad " \end{array}$$

On a ainsi :

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
A =	0.75	0.25	0.20	0.70	0.50

Soit B le sous-espace flou déterminé par le critère de distribution d'un quotidien édité en C.

$\forall x_i \in \underline{E}$  posons  $\mu_B(x_i) = 1$  si 100 % des journaux distribués en  $x_i$  sont des exemplaires du quotidien en question  
 = 0 si 0 % " " "

On a ainsi :

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
B =	0.30	0.50	0.20	0.95	0.60

il est évident que calculer une distance reviendra à apprécier le degré de cohérence de l'influence de C sur sa région.

Une distance relative proche de 0 indiquera que les deux zones d'influence A et B sont "très proches" et de ce fait que l'influence de C sur sa région est cohérente.

Une distance relative proche de 1 sera révélatrice d'une "disharmonie" de l'influence de C sur sa région. Selon les critères observés, cette influence est très différente et s'exerce sur des espaces différents.

Nous pouvons utiliser cette notion de distance pour préciser le degré de flou d'un sous-ensemble.

## 2. Les indicateurs de flou

### 2.1. Sous-ensemble ordinaire "le plus proche" d'un sous-ensemble flou

Nous définissons ainsi le sous-ensemble ordinaire dont la distance euclidienne au sous-ensemble flou est la plus petite.

Soit A le sous-ensemble flou

A le sous-ensemble cherché

Nous définirons :

$$\forall x_i \in \underline{A} \text{ avec } \mu_A(x_i) \in ]0,1[,$$

$$\mu_{\underline{A}}(x_i) = 0 \text{ si } \mu_A(x_i) < 0.5$$

$$\mu_{\underline{A}}(x_i) = 1 \text{ si } \mu_A(x_i) > 0.5$$

et posons :  $\mu_{\underline{A}}(x_i) = 0$  si  $\mu_A(x_i) = 0.5$  par convention

soit

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
$A =$	0.75	0.32	0.5	1

$\underline{A} =$	1	0	0	1
-------------------	---	---	---	---

### 2.2. Indice de flou d'un sous-ensemble flou

Il "résume" la distance entre A et le sous-ensemble flou le plus proche  $\underline{A}$

2.2.1. Indice linéaire de flou :

$$v(A) = \frac{2}{n} d_H(A, \underline{A})$$

2.2.2. Indice quadratique de flou :

$$\eta(A) = \frac{2}{\sqrt{n}} d_e(A, \underline{A})$$

calculons à partir de l'exemple pris en 2.1. :

$$\begin{aligned} v(A) &= \frac{2}{n} (0.25 + 0.68 + 0.5 + 0) \\ &= \frac{2}{n} (1.43) \\ v(A) &= \frac{1.43}{2} = 0.71 \end{aligned}$$

## 3. Notion d' $\alpha$ -coupure

### 3.1. Définition

Soit un sous-ensemble flou  $A \subset \underline{E}$ , on définit le sous-ensemble non flou de niveau  $\alpha$  associé au sous-ensemble flou A :

$$\underline{A}_\alpha = \{ x ; x \in \underline{E}, \mu_A(x) \geq \alpha \}$$

### 3.2. Exemple :

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
$A =$	0.2	0.6	0.5	0.9	0.1

$$\underline{A}_{0.5} = \{ x_2, x_3, x_4 \}$$

$$\underline{A}_{0.8} = \{ x_4 \}$$

3.3. Il faut noter que :

$$\text{si } \alpha_1 < \alpha_2 \implies \underline{A}_{\alpha_1} \supseteq \underline{A}_{\alpha_2}$$

dans notre exemple :

$$\underline{A}_{0.5} \supset \underline{A}_{0.8}$$

nous avons ainsi des sous-ensembles non flous emboîtés en fonction des valeurs de  $\alpha$ . Nous utiliserons cette notion fondamentale dans l'étude des espaces subjectifs entreprise dans la dernière partie de notre travail.

### 3.4. Théorème de décomposition

3.4.1. Tout sous-ensemble flou A peut être décomposé sous la forme suivante où apparaissent les produits des sous-ensembles non flous par des coefficients  $\alpha_i$ .

$$A = \text{MAX}_{\alpha_i} \left[ \alpha_1 \cdot A_{\alpha_1}, \alpha_2 \cdot A_{\alpha_2}, \alpha_3 \cdot A_{\alpha_3}, \dots, \alpha_n \cdot A_{\alpha_n} \right]$$

$$\forall \alpha_i \in \underline{M}$$

$$i = 1, \dots, n$$

3.4.2. Prenons un exemple :

$$A = \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \hline 0.2 & 0.4 & 0.3 & 0 & 1 \end{array}$$

en appliquant le théorème de décomposition on a :

$$A = \text{MAX} \left[ \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ (0.2) \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}, & (0.3) \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}, \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ (0.4) \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}, & (1) \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \end{array} \right]$$

$$A = \text{MAX} \left[ \begin{array}{ccccc} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0 & 0.2 \\ \hline \end{array}, & \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 0.3 & 0.3 & 0 & 0.3 \\ \hline \end{array}, \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0.4 \\ \hline \end{array}, & \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \end{array} \right]$$

en effectuant, nous retrouvons bien :

$$A = \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \hline 0.2 & 0.4 & 0.3 & 0 & 1 \end{array}$$

Il est donc toujours possible de ramener un sous-ensemble flou à une

série de sous-ensembles non flous.

En analyse spatiale il est donc possible de *décomposer* un sous-espace flou en une série de sous-espaces précis associés aux coefficients  $\alpha_i$ ,  $0 < \alpha_i \leq 1$ .

3.4.3. A l'inverse, le théorème de décomposition sera un outil intéressant en vue d'une synthèse de l'organisation spatiale. Prenons une suite de sous-espaces ordinaires tels que :

$$\underline{A}_1 \subset \underline{A}_2 \subset \underline{A}_3 \subset \dots \subset \underline{A}_n$$

et affectons chaque sous-espace d'un coefficient  $\alpha_i$ ,  $0 < i \leq n$

soit  $\alpha_1$  à  $\underline{A}_1$

$\alpha_2$  à  $\underline{A}_2$

$\alpha_n$  à  $\underline{A}_n$

et tels que  $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \dots < \alpha_n$

dépendant d'un attribut géographique : par exemple mesure ou estimation de l'intensité de l'érosion pluviale dans les sous-espaces  $\underline{A}_1, \underline{A}_2, \dots, \underline{A}_n$

donnés, alors on pourra définir un sous-espace géographique flou A tel que :

$$A = \text{MAX}_{\alpha_i} \left[ \alpha_i \cdot \underline{A} \alpha_i \right]$$

c'est-à-dire dont chaque élément sera pourvu d'une valeur d'appartenance prise dans  $[\underline{0}, \underline{1}]$  au sous-espace flou. L'exemple peut naturellement être généralisé aux sous-ensembles autres que les sous-ensembles géographiques.

Nous cherchons à présent à voir les différentes propriétés de l'ensemble des parties floues d'un référentiel  $\underline{E}$  pour les opérateurs les plus couramment utilisés.

#### IV - Les algèbres floues

1. Le tableau suivant précise les propriétés des sous-ensembles ordinaires et flous pour les opérations (Tableau III, 1)

$\cup$	Union
$\cap$	Intersection
$-$	Complémentation

TABLEAU III 1 - ALGÈBRE FLOUE POUR LES OPÉRATEURS  $\cup, \cap, -$ .

Propriétés	Sous ensembles non flous	Sous-ensembles flous	
	Soit $\underline{A} \subseteq \underline{E}, \underline{B} \subseteq \underline{E}, \underline{C} \subseteq \underline{E}$	Soit $\underline{A} \subseteq \underline{E}, \underline{B} \subseteq \underline{E}, \underline{C} \subseteq \underline{E}$	
<u>Commutativité</u>	$\underline{A} \cap \underline{B} = \underline{B} \cap \underline{A}$ $\underline{A} \cup \underline{B} = \underline{B} \cup \underline{A}$	$A \cap B = B \cap A$ $A \cup B = B \cup A$	<p>oui car : <math>\mu_{A \cap B} = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)</math>  <math>\mu_{B \cap A} = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)</math></p> <p>oui car : <math>\mu_{A \cup B} = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)</math>  <math>\mu_{B \cup A} = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)</math></p>
<u>Associativité</u>	$(\underline{A} \cap \underline{B}) \cap \underline{C} = \underline{A} \cap (\underline{B} \cap \underline{C})$ $(\underline{A} \cup \underline{B}) \cup \underline{C} = \underline{A} \cup (\underline{B} \cup \underline{C})$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	<p>oui car : <math>[\mu_A(x) \wedge \mu_B(x)] \wedge \mu_C(x)</math>  <math>= \mu_A(x) \wedge [\mu_B(x) \wedge \mu_C(x)]</math></p> <p>oui car : même raisonnement</p>
<u>Idempotence</u>	$\underline{A} \cap \underline{A} = \underline{A}$ $\underline{A} \cup \underline{A} = \underline{A}$	$A \cap A = A$ $A \cup A = A$	<p>oui car : <math>\mu_A(x) \wedge \mu_A(x) = \mu_A(x)</math></p> <p>oui car : même raisonnement</p>
<u>Distributivité</u>	$\underline{A} \cap (\underline{B} \cup \underline{C}) = (\underline{A} \cap \underline{B}) \cup (\underline{A} \cap \underline{C})$ $\underline{A} \cup (\underline{B} \cap \underline{C}) = (\underline{A} \cup \underline{B}) \cap (\underline{A} \cup \underline{C})$	<p>Théorème des inégalités de distribution</p> $A \cap (B \cup C) \supseteq (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (1)$ $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$	<p>Démontrons (1)  car <math>A \cap B \subseteq A</math> et <math>A \cap C \subseteq A \Rightarrow</math>  <math>(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A</math></p> <p>D'autre part  <math>A \cap B \subseteq B \subseteq B \cup C</math>  et <math>A \cap C \subseteq C \subseteq B \cup C</math>  <math>\Rightarrow (A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)</math></p>

<u>Complémentarité</u>	$\underline{A} \cap \overline{\underline{A}} = \emptyset$ $\underline{A} \cup \overline{\underline{A}} = \underline{E}$	Non (pas de complémentation) Non (pas de complémentation)	Pseudo-complémentation $\mu_A(x) \wedge (1 - \mu_A(x)) \neq 0$ sauf si $\mu_A(x) = 0$ ou $1$ de même $\mu_A(x) \vee (1 - \mu_A(x)) \neq 1$ sauf si $\mu_A(x) = 0$ ou $1$
<u>Rôle de <math>\emptyset</math></u>	$\underline{A} \cap \emptyset = \emptyset$ (absorption) $\underline{A} \cup \emptyset = \underline{A}$ (neutralité)	$A \cap \emptyset = A$ oui car : $A \cup \emptyset = A$ oui car :	$\mu_A(x) \wedge 0 = 0$ $\mu_A(x) \vee 0 = \mu_A(x)$
<u>Rôle du référen- tiel <math>E</math></u>	$\underline{A} \cap \underline{E} = \underline{A}$ (neutralité) $\underline{A} \cup \underline{E} = \underline{E}$ (absorption)	$A \cap \underline{E} = A$ oui car : $A \cup \underline{E} = \underline{E}$ oui car :	on utilise l'opérateur MIN on utilise l'opérateur MAX
<u>Involution</u>	$\overline{\overline{\underline{A}}} = \underline{A}$	Non (pas de complémentation)	sauf si $M = [0,1]$ : pseudo-complémentation alors : $\mu_{\overline{\underline{A}}}(x) = 1 - (1 - \mu_A(x)) = \mu_A(x)$
<u>Théorème de DE MORGAN</u>	$\overline{\underline{A} \cap \underline{B}} = \overline{\underline{A}} \cup \overline{\underline{B}}$	Non (pas de complémentation)	sauf si $M = [0,1]$ : pseudo-complémentation

$$\overline{A \cup B} = \underline{A} \cap \underline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad (1)$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad (2)$$

(1) et (2) dans le cas où  $\underline{M} = [0,1]$   
et où pseudo-complémentation

Démontrons (1)

soit :  $0 \leq \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \leq 1$

on a :

$$\vee \left[ (1 - \mu_A(x)), (1 - \mu_B(x)) \right] \\ = 1 - \mu_A(x)$$

et aussi :

$$1 - [\mu_A(x) \wedge \mu_B(x)] = 1 - \mu_A(x)$$

Donc :

$$1 - [\mu_A(x) \wedge \mu_B(x)] = \vee \left[ (1 - \mu_A(x)), (1 - \mu_B(x)) \right]$$

Ainsi nous voyons que toutes les propriétés des parties non floues d'un ensemble, pour les opérateurs union, intersection et complémentation se retrouvent pour les parties floues sauf les propriétés qui supposent l'existence d'un complémentaire d'un sous-ensemble. Nous n'avons donc plus qu'une algèbre faible. La structure est celle d'un treillis vectoriel, c'est-à-dire d'un treillis distributif, mais non complémenté.

## 2. Propriétés des sous-ensembles flous pour les opérations (.) et ( $\hat{+}$ ) (produit et somme algébriques)

Elles induisent une structure encore plus faible puisque seules les propriétés suivantes sont respectées :

2.1. Commutativité  $A.B = B.A$   
 $A\hat{+}B = B\hat{+}A$

2.2. Associativité  $(A.B).C = A.(B.C)$   
 $(A\hat{+}B)\hat{+}C = A\hat{+}(B\hat{+}C)$

2.3. Absorption et neutralité (de  $\emptyset$ )  
 $A.\emptyset = \emptyset$   
 $A\hat{+}\emptyset = A$

2.4. Absorption et neutralité (de  $\underline{E}$ )  
 $A.\underline{E} = A$   
 $A\hat{+}\underline{E} = \underline{E}$

2.5. Involution  $\overline{\overline{A}} = A$

2.6. Théorèmes de DE MORGAN  
 $\overline{A.B} = \overline{A}\hat{+}\overline{B}$   
 $\overline{A\hat{+}B} = \overline{A}.B$

3. En conclusion on peut remarquer que la théorie des sous-ensembles flous permet le traitement des sous-ensembles à l'aide de nombreux opérateurs, ceux-ci induisent cependant une structure mathématique plus pauvre que la structure réduite sur les sous-ensembles ordinaires. La possibilité de traiter l'imprécision est donc réelle, mais elle se fait en "appauvrissant" la structure mathématique des ensembles étudiés. Ceci explique certainement la "méfiance" de nombreux

chercheurs vis-à-vis de cette théorie et leur réticence à l'employer.

Il faut cependant souligner que, malgré ces structures mathématiques nouvelles, la théorie des sous-ensembles flous nous semble fondamentale : elle permet en effet de traiter des informations (spatiales ou autres) qui n'auraient pas pu être traitées d'une autre manière. Le paragraphe suivant illustrera ce point de vue.

## V - Caractérisation de l'ensemble d'appartenance $\underline{M}$

Nous avons jusqu'à présent défini l'ensemble d'appartenance  $\underline{M}$  comme l'entend ZADEH et comme l'utilisent de nombreux travaux théoriques ou d'application (travaux de PONSARD). D'autres possibilités existent cependant, dont l'intérêt en sciences humaines et en particulier en géographie pourrait être fondamental dans la mesure où elles permettent le traitement mathématique de données qualitatives. Nous définissons dans ce qui suit les différents types d'ensembles d'appartenance utilisables, leurs caractères mathématiques et les possibilités qu'elles offrent en analyse spatiale géographique.

### 1. Ensemble d'appartenance au sens de ZADEH (1965)

1.1. Rappelons que ZADEH définit l'ensemble d'appartenance comme un ensemble :

$$\underline{M} = \underline{[0,1]} \subset \mathbb{R}$$

c'est-à-dire comme un ensemble totalement ordonné, borné et fermé.  $\underline{M}$  a une structure de treillis vectoriel, distributif.

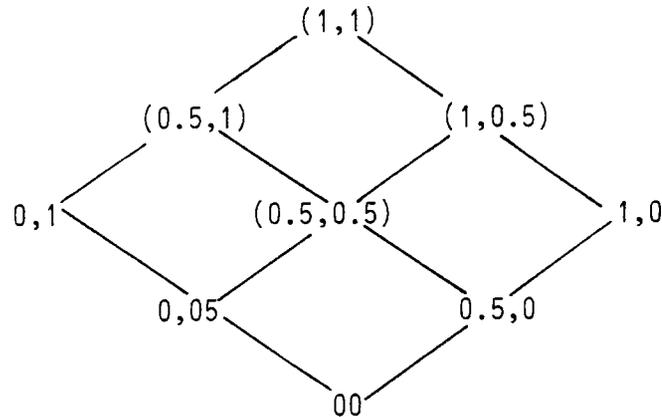
1.2.  $\underline{M}$  a les propriétés d'un treillis c'est-à-dire : (Annexe II)

- l'associativité
- la commutativité
- l'idempotence
- l'absorption

De plus,  $\underline{M}$  a la propriété de distributivité par rapport à  $\Delta$  et par rapport à  $\nabla$  des treillis distributifs.

1.3. Soit  $\underline{E}$  le référentiel, on souligne que  $\underline{M}^{\underline{E}}$  c'est-à-dire l'ensemble des applications de  $\underline{E}$  dans  $\underline{M}$  et  $\mathcal{P}(\underline{E})$ , possèdent les mêmes propriétés.  $\underline{M}^{\underline{E}}$  est également un treillis vectoriel.

Prenons  $\underline{M} = ]0, 0.5, 1]$  et  $\underline{E} = \{a, b\}$

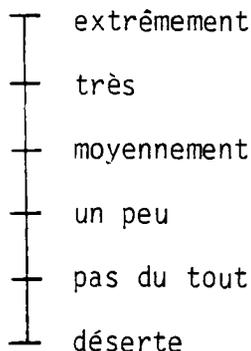


1.4. L'intérêt en sciences humaines et en particulier en géographie est considérable. Dans tous les domaines où l'imprécision est un fait à mettre en évidence, il nous faudra définir un modèle qui nous permette d'associer à chaque élément d'un espace géographique référentiel sa fonction d'appartenance à un sous-espace géographique imprécis. Nous partirons de cette réflexion pour proposer dans la dernière partie de ce travail une valuation de l'appartenance de composantes spatiales à un espace perçu.

## 2. Ensemble d'appartenance généralisé se ramenant à $]0,1]$

2.1. L'appréciation d'un attribut qualitatif géographique peut dans certains cas, être choisie dans un treillis vectoriel qui se réduit à un ordre total et que nous définirons, à la suite de KAUFMANN comme un treillis vectoriel lexicographique.

2.2. Exemple, pour l'attribut "animation d'une rue", le treillis lexicographique  $\underline{L}$  peut être :



Nous pourrions reprendre sous cette forme nos notations "intuitives" de l'imprécis présentées dans le premier chapitre.

### 3. $\underline{L}$ - Sous-ensemble flou au sens de GOGUEN

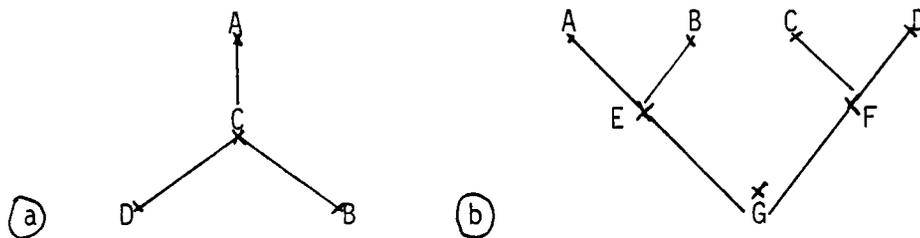
Dans un  $\underline{L}$  - sous-ensemble flou au sens de GOGUEN,  $\underline{M} = \underline{L}$ , c'est-à-dire un treillis partiellement ou totalement ordonné, donc d'expression plus générale que le treillis vectoriel de ZADEH.

Il sera donc possible de définir  $\underline{L}$  selon les besoins propres à chaque type d'investigation : treillis distributif, modulaire, booléen ou autres (voir Annexe II). Ces treillis induisent sur  $\underline{L}^E$  et sur l'ensemble des parties floues de  $\underline{E}$  une structure équivalente de treillis respectivement distributif, modulaire ou autre.

### 4. $\underline{L}$ ensemble partiellement ordonné ne formant pas un treillis.

#### 4.1. Sup-demi-treillis et inf-demi-treillis

4.1.1. Quand, dans un ensemble partiellement ordonné  $\underline{L}$ , pour toute partie non floue  $\{X_i, X_j\}$  de  $\underline{L}$ , la borne supérieure appartient à  $\underline{L}$  on a un sup-demi-treillis @



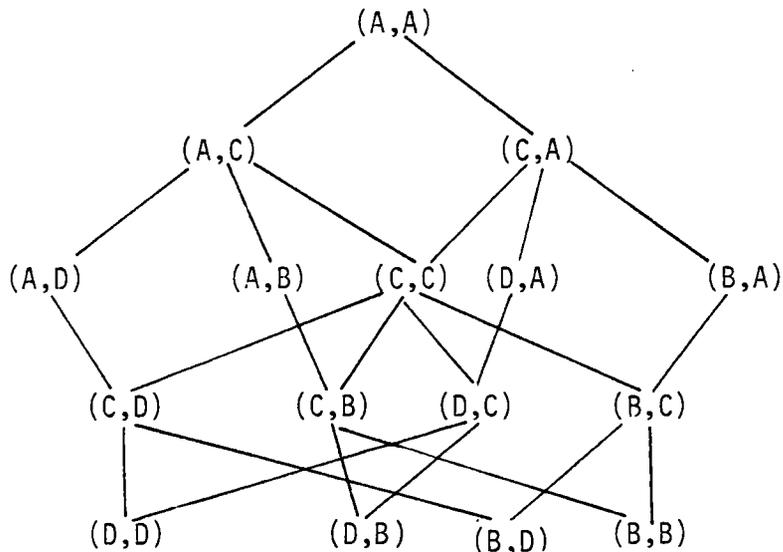
4.1.2. Quand, dans un ensemble partiellement ordonné  $\underline{L}$  pour toute partie  $\{x_i, x_j\}$  de  $\underline{L}$ , la borne inférieure appartient à  $\underline{L}$  on a un inf-demi-treillis ⑥

Prenons l'exemple ① d'un sup-demi-treillis. Nous y définissons seulement l'opération  $\nabla$  dont les résultats figurent dans le tableau suivant :

$\nabla$	A	B	C	D
A	A	A	A	A
B	A	B	C	C
C	A	C	C	C
D	A	C	C	D

4.2.2. L'ensemble des parties floues de  $\underline{E}; P(\underline{E})$  équipotent à  $\underline{L}^{\underline{E}}$  déterminé selon le sup-demi-treillis a une configuration d'un sup-demi-treillis.

Effectivement si  $\underline{E} = \{x_1, x_2\}$ , notons  $P(\underline{E})$  en ne gardant que les fonctions d'appartenance aux parties dans le schéma suivant, qui est bien celui d'un sup-demi-treillis.

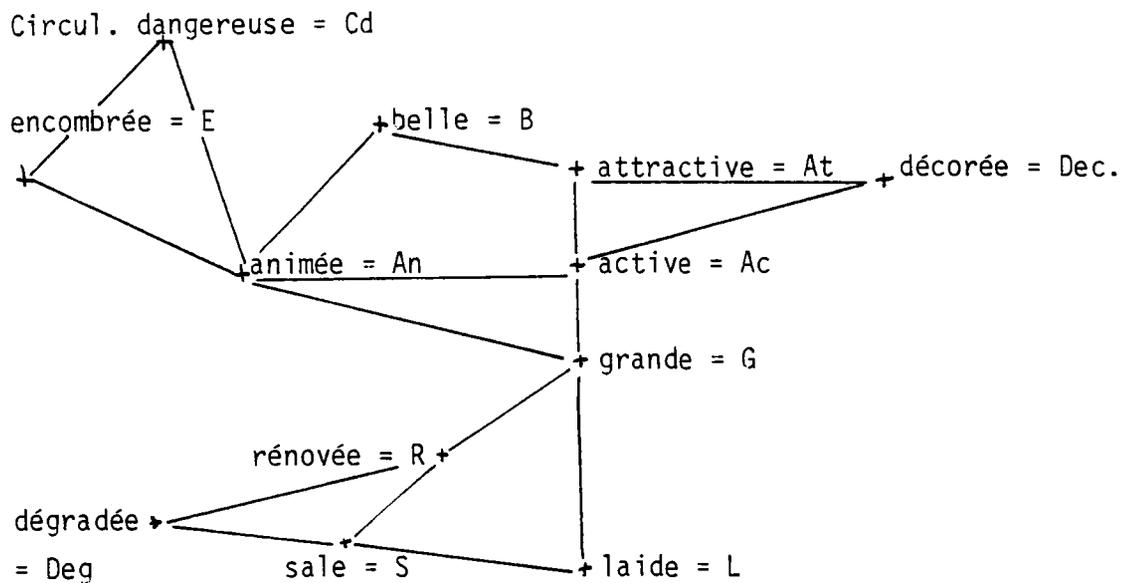


4.2. L n'est plus un treillis, mais simplement un graphe orienté ou non orienté

4.2.1. On peut en effet définir L comme un simple graphe orienté ou non orienté.

Imaginons par exemple, que, dans l'étude d'espaces perçus, on donne à un certain nombre de sujets un éventail de termes qui peut leur servir à définir un espace donné : ville, quartier, paysage ou site etc. L'ensemble des termes, volontairement très ouvert, pourrait être le suivant, en ce qui concerne une ville : active - belle - laide - grande - animée - attractive - encombrée - sale - dégradée - rénovée - sûre - décorée - à circulation dangereuse...

Il s'agira pour nous de définir le graphe non orienté (car impossible de définir une relation d'ordre dans la liste des termes) susceptible de représenter L et de permettre la définition des sous-espaces imprécis relatifs à l'espace perçu de chaque sujet. On pourrait proposer le graphe suivant, étant bien entendu que nous reconnaissons bien volontiers le caractère subjectif du choix des termes et que ce choix devrait faire l'objet d'études préalables : géographes, sociologues, économistes et autres chercheurs intéressés collaborant étroitement pour cette proposition de termes.



4.2.2. A la question : "choisissez le terme qui vous semble convenir le plus au site  $x_i$ " ( $i = 1, \dots, n$ , avec  $n$  égal au nombre de sites évoqués), chaque sujet associe à chaque site un qualificatif pris dans  $\underline{L}$  ainsi défini. Son "espace mental" sera donc bien un sous-ensemble flou de l'espace géographique.

Malgré le caractère qualitatif de  $\underline{L}$ , rendant a priori toute étude comparative impossible, il est possible et intéressant de comparer les uns aux autres les sous-espaces flous ainsi définis.

#### 5. Distance entre deux sous-ensembles flous dans le cas où $\underline{L}$ est un simple graphe.

Nous avons défini en B, III de ce chapitre la notion de comparaison de deux sous-ensembles flous dans le cas où  $\underline{M} = \underline{[0,1]}$  et déterminé quelques types de distance entre deux sous-ensembles flous.

Il est possible de la même façon de déterminer une distance entre deux sous-ensembles flous quand  $\underline{L}$  est un simple graphe, orienté ou non. Nous prendrons le cas de la distance de HAMMING généralisée, mais tout autre distance peut être définie de la même façon (KAUFMANN 1973).

#### 5.1. Notion préliminaire de distance entre deux sommets quelconques d'un graphe non orienté connexe

5.1.1. Soit le graphe défini en 4.2.2., on appellera distance entre tout couple de sommets du graphe, la longueur du plus court chemin entre ces sommets. Déterminons pour le graphe la matrice des distances (chaque sommet sera représenté par la ou les premières lettres du qualificatif qui le définit)

Tableau III 2 : matrice des distances entre sommets du graphe 4.2.2.

D (X,Y)	L	S	Deg	R	G	Ac	An	At	B	E	Cd	Dec	MAX
L	0	1	2	2	1	2	2	3	4	3	4	3	4
S	1	0	1	2	2	3	3	4	4	4	4	4	4
Deg	2	1	0	1	2	3	3	4	4	4	4	4	4
R	2	1	1	0	1	2	2	3	3	3	3	3	3
G	1	2	2	1	0	1	1	2	2	2	2	2	2
Ac	2	3	3	2	1	0	1	1	2	2	2	1	3
An	2	3	3	2	1	1	0	2	1	1	1	1	3
At	3	4	4	3	2	1	2	0	1	3	3	1	4
B	4	4	4	3	2	2	1	1	0	2	2	2	4
E	3	4	4	3	2	2	1	3	2	0	1	3	4
Cd	4	4	4	3	2	2	1	3	2	1	0	3	4
Dec	3	4	4	3	2	1	1	1	2	3	3	0	4

5.2.2. Définissons, en bordure des lignes, la valeur MAX de chaque ligne de la matrice c'est-à-dire la longueur MAX du chemin le plus court de chaque ligne.

D'après les définitions données dans le chapitre précédent (C II 2

le diamètre du graphe étudié est égal à 4.

### 5.2. Distance entre deux sous-ensembles flous

5.2.1. Soit  $\underline{E}$  un espace-référentiel géographique

$E_1$  et  $E_2$  deux sous-espaces flous de  $\underline{E}$

$\underline{E}$  est un ensemble de lieux que nous noterons :

$$\underline{E} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$$

$E_1$ , sous\_ensemble flou s'écrit :

$$\forall x_i \in E_1 \quad E_1 = \left\{ (x_i, \mu_{E_1}(x_i)), \mu_{E_1}(x_i) \in \underline{L}, i=1, \dots, 5 \right\}$$

Nous travaillons sur  $\underline{L}$ -graphe défini en 4.2.2. et dont nous venons de déterminer la matrice des distances entre les sommets.

De la même façon :

$$\forall x_i \in E_2 \quad E_2 = \left\{ (x_i, \mu_{E_2}(x_i)), \mu_{E_2}(x_i) \in \underline{L}, i=1, \dots, 5 \right\}$$

Posons, à titre d'exemple :

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
$E_1 =$	L	G	Dec	S	E
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
$E_2 =$	G	Dec	S	An	E

5.2.2. Déterminons, à l'aide de la matrice des

distances, la distance entre  $E_1$  et  $E_2$  pour tout site spatial :

$$D_{E_1, E_2}(x_1) = 1 \quad (= \text{distance entre "L" et "G" dans la matrice des distances})$$

$$D_{E_1, E_2}(x_2) = 2$$

$$D_{E_1, E_2}(x_3) = 4$$

$$D_{E_1, E_2}(x_4) = 3$$

$$D_{E_1, E_2}(x_5) = 0$$

5.2.3. Divisons chacune de ces distances par

le diamètre du graphe pour ramener les distances dans l'intervalle  $[\underline{0}, \underline{1}]$

$$D(x_1) = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$D(x_2) = \frac{2}{4} = 0.5$$

$$D(x_3) = 1 = 1$$

$$D(x_4) = \frac{3}{4} = 0.75$$

$$D(x_5) = 0$$

5.2.4. Nous définirons la distance de Hamming généralisée entre les sous-ensembles flous  $E_1$  et  $E_2$  comme :

$$d_H(A,B) = 0.25 + 0.5 + 1 + 0 = 1.75$$

et  $\delta_H(A,B) = \frac{1.75}{5} = 0.35$  qui est la distance de HAMMING généralisée relative entre les deux sous-ensembles flous  $E_1$  et  $E_2$ .

Ainsi, à partir de données qualitatives on est amené à définir une distance entre deux (ou plusieurs) sous-ensembles flous. Nous avons pris pour exemple la distance de HAMMING, mais toute autre distance pourrait être définie de la même façon.

Elargissons ce thème au cas où chaque élément du référentiel est défini par un attribut faisant appel à des appréciations différentes.

## 6. Distance entre sous-ensembles flous "multicritères"

### 6.1. Partons d'un exemple géographique

Soit  $E$  espace-référentiel. Les éléments ou lieux sont définis chacun par un critère particulier.

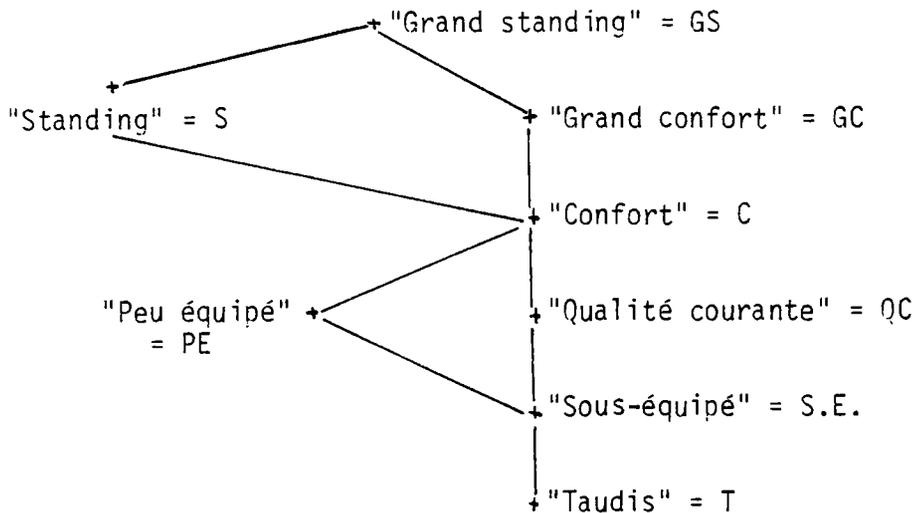
$$E = \{x_1, x_2, x_3\}$$

6.1.1.  $x_1$  est défini par un attribut  $A_1$  dont le graphe pourrait être le graphe exposé en 4.2.2.

6.1.2.  $x_2$  est défini par exemple selon un critère  $A_2$  d'accessibilité représenté par un treillis vectoriel lexicographique (accessibilité d'un parking)

┌	très
├	bien
├	moyennement
├	peu
└	inaccessible

6.1.3.  $x_3$  est défini par un critère  $A_3$  tel que l'appréciation de la qualité de la résidence :



Soit  $E_1$  et  $E_2$  deux sous-espaces imprécis de  $\underline{E}$  défini, pour chacun de leurs trois éléments, par les attributs ci-dessus. Peut-on calculer une distance entre  $E_1$  et  $E_2$  ?

6.2. Détermination de la matrice des distances et du diamètre de chaque graphe

6.2.1. Attribut  $A_1$ . Diamètre = 4 (cf ci-dessus)

6.2.2. Attribut  $A_2$ .

Matrice des distances

D	très	bien	moyen	peu	inacc.	MAX
très	0	1	2	3	4	4
bien	1	0	1	2	3	3
moyen	2	1	0	1	2	2
peu	3	2	1	0	1	3
inacc.	4	3	2	1	0	4

Diamètre = 4

6.2.3. Attribut  $A_3$  (les appréciations sont remplacées par la ou les premières lettres)

D	T	SE	PE	QC	C	S	GC	GS	MAX
T	0	1	2	2	3	4	4	5	5
SE	1	0	1	1	2	3	3	4	4
PE	2	1	0	2	1	2	2	3	3
QC	2	1	2	0	1	2	2	3	3
C	3	2	1	1	0	1	1	2	3
S	4	3	2	2	1	0	2	1	4
GC	4	3	2	2	1	2	0	1	4
GS	5	4	3	3	2	1	1	0	5

Diamètre = 5

6.3. Calcul de la distance de HAMMING entre

$E_1$  et  $E_2$

$x_1$	$x_2$	$x_3$	
$E_1 =$	At(tractif)	bien	c(onfort)
	$x_1$	$x_2$	$x_3$

$E_2 =$	R(énovée)	peu	Q(ual) C(our)
---------	-----------	-----	---------------

Définissons, pour chaque sommet, la distance entre  $E_1$  et  $E_2$  selon les matrices des distances propres à chaque attribut :

$d_{E_1, E_2}(x_1) = 3$  (distance entre "Attractif" et "Rénovée")

$d_{E_1, E_2}(x_2) = 2$  (distance entre "bien" et "peu")

$d_{E_1, E_2}(x_3) = 1$

"Normalisons" ces distances en les divisant par les diamètres respectifs des graphes considérés.

$$d(x_1) = \frac{3}{4} = 0.75$$

$$d(x_2) = \frac{2}{4} = 0.5$$

$$d(x_3) = \frac{1}{5} = 0.20$$

D'où nous tirons les distances de HAMMING généralisée et relative

$$d_H(E_1, E_2) = 1.45$$

et  $\delta_H(E_1, E_2) = 0.48$

Il est évident que, plus  $\delta_H$  se rapproche de 1, plus  $E_1$  et  $E_2$  ont un "profil multicritère" différent, plus  $\delta_H$  se rapproche de 0, plus  $E_1$  et  $E_2$  ont un profil semblable en ce qui concerne l'ensemble des critères retenus.

L'intérêt de cette démarche nous semble considérable. Elle rend possible une comparaison de deux sous-ensembles flous (ici deux sous-espaces géographiques imprécis) définis au départ par des attributs qualitatifs et qui ne semblent se prêter a priori à aucune manipulation autre que purement qualitative. Elle nous semble donc rendre possible l'étude quantitative la plus rigoureuse possible de données *imprécises, qualitatives et a priori non scientifiques*. La théorie des sous-ensembles flous nous apporte donc bien plus qu'un simple raffinement méthodologique. Elle rend possible des études rigoureuses sur des thèmes jusqu'ici difficiles à appréhender.

## 7. Les sous-ensembles $\Phi$ -flous

Définis par SAMBUC (1975) dans une thèse relative à une application médicale, les sous-ensembles  $\Phi$ -flous ont été utilisés par PONSARD (1977) pour la détermination de la hiérarchie des places centrales par la définition et l'utilisation des graphes  $\Phi$ -flous.

### 7.1. Définitions

7.1.1. Un sous-ensemble  $\Phi$ -flou est un sous-ensemble d'un référentiel  $\underline{E}$  tel qu'à chaque élément de ce référentiel

est associée une fonction d'appartenance égale à un intervalle et dont les bornes sont prises dans  $\llbracket 0,1 \rrbracket$

$A \subset E$

$$\forall x_i, A = \left\{ (x_i, \mu_A(x_i) = \llbracket a_1, a_2 \rrbracket), a_1 \in \llbracket 0,1 \rrbracket, a_2 \in \llbracket 0,1 \rrbracket, \right. \\ \left. i \in \underline{P} \text{ ensemble ordonné d'indices} \right\}$$

7.1.2. L'intervalle  $\llbracket a_1, a_2 \rrbracket$  est appelé intervalle

le  $\Phi$ -flou au sens de SAMBUC.

## 7.2. Intérêt de la théorie des sous-ensembles $\Phi$ -flous

Il est souligné par PONSARD (1977) qui à propos de son étude sur la hiérarchie des places centrales développe la notion de graphe flou, mais il peut s'avérer très important pour toute étude géographique.

Il s'agit d'introduire l'imprécision dans la prise en considération de la valeur de la fonction d'appartenance elle-même.

En effet :

7.2.1. : si  $\mu_A(x) \in \llbracket 0,1 \rrbracket$ , la fonction d'appartenance de  $x \in E$  est *complètement déterminée*.

7.2.2. : si  $\mu_A(x) = \llbracket a_1, a_2 \rrbracket \subseteq \llbracket 0,1 \rrbracket$ , la fonction d'appartenance de  $x$  est *relativement indéterminée*.

7.2.3. : si  $\mu_A(x) = \llbracket 0,1 \rrbracket$  on ne connaît rien de la valeur de cette fonction, sinon qu'elle est <sup>égale à</sup> l'intervalle  $\llbracket 0,1 \rrbracket$ . Elle est dite *complètement indéterminée*.

La théorie des sous-ensembles  $\Phi$ -flous représente donc une formulation plus générale de l'imprécision que la théorie des sous-ensembles flous que nous étudions dans ce travail. Cette dernière n'est en fait qu'un cas particulier de la théorie des sous-ensembles  $\Phi$ -flous.

Son application, essentielle dans l'analyse des problèmes de relations d'influence réciproques entre centres, sera exposée au chapitre suivant.

7.3. Opérations sur les sous-ensembles  $\Phi$ -flous et propriétés algébriques

Soit  $\underline{I}$  l'ensemble des intervalles  $\Phi$ -flous.

Soit :

$$I_1 = \llbracket a_1, a_2 \rrbracket \quad I_2 = \llbracket b_1, b_2 \rrbracket$$

$$I_1 \in \underline{I} \text{ et } I_2 \in \underline{I}$$

on peut définir sur  $\underline{I}$  les opérations suivantes.

7.3.1. Egalité

$$I_1 = I_2 \text{ si } \Leftrightarrow a_1 = b_1 \text{ et } a_2 = b_2$$

7.3.2. Inclusion

$$I_1 \subseteq I_2 \Leftrightarrow a_2 \leq b_2, (a_1, b_1) \in \llbracket 0, 1 \rrbracket \cdot \llbracket 0, 1 \rrbracket$$

$$\text{ou } a_1 \leq b_1 \text{ et } a_2 = b_2$$

ou  $I_1 \subseteq I_2 \Leftrightarrow a_1 < b_1, (a_2, b_2) \in \llbracket 0, 1 \rrbracket \cdot \llbracket 0, 1 \rrbracket$

$$\text{ou } a_2 \leq b_2 \text{ et } a_1 = b_1$$

7.3.3. Réunion

$$I_1 \cup I_2 \Leftrightarrow \llbracket a_1, a_2 \rrbracket \vee \llbracket b_1, b_2 \rrbracket$$

$$= \llbracket a_1, a_2 \rrbracket \Leftrightarrow \llbracket a_1, a_2 \rrbracket \succcurlyeq \llbracket b_1, b_2 \rrbracket$$

$$= \llbracket b_1, b_2 \rrbracket \Leftrightarrow \llbracket b_1, b_2 \rrbracket \succcurlyeq \llbracket a_1, a_2 \rrbracket$$

7.3.4. Intersection

$$I_1 \cap I_2 \quad \llbracket a_1, a_2 \rrbracket \wedge \llbracket b_1, b_2 \rrbracket$$

$$= \llbracket a_1, a_2 \rrbracket \Leftrightarrow \llbracket a_1, a_2 \rrbracket \leq \llbracket b_1, b_2 \rrbracket$$

$$= \llbracket b_1, b_2 \rrbracket \Leftrightarrow \llbracket b_1, b_2 \rrbracket \leq \llbracket a_1, a_2 \rrbracket$$

7.4. Propriétés de  $\underline{I}$  et d'un sous-ensemble  $\Phi$ -flou au sens de SAMBUC

$\underline{I}$  est défini comme un ensemble ordonné,

vérifiant pour les intervalles

- la réflexivité
- l'antisymétrie
- la transitivité.

SAMBUC définit deux opérations :

$$A \cup B = \llbracket a_1 \vee b_1, a_2 \vee b_2 \rrbracket$$

$$A \cap B = \llbracket a_1 \wedge b_1, a_2 \wedge b_2 \rrbracket$$

l'ensemble  $\underline{I}$  est un treillis, partiellement ordonné.

PONSARD définit différemment les deux opérations :

$$A \cap B = \wedge (A, B)$$

$$A \cup B = \vee (A, B)$$

l'ensemble  $\underline{I}$  est un treillis, totalement ordonné.

Dans les deux cas  $\underline{P}(\underline{I})$  possède les propriétés suivantes, que nous notons sans les démontrer

- Associativité :  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

- Commutativité :  $A \cap B = B \cap A$

$$A \cup B = B \cup A$$

- Distributivité de  $\cap$  par rapport à  $\cup$  :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

de  $\cup$  par rapport à  $\cap$  :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

- Absorption :  $A \cap (A \cup B) = A$

$$A \cup (A \cap B) = A$$

- Idempotence :  $A \cap A = A$

$$A \cup A = A$$

-  $A \cap B = A \cup B \iff A = B$

-  $A \cap B = B \iff A \cup B = A$

7.5. Il est ainsi possible de formaliser, pour un sous-ensemble flou d'un référentiel, une fonction d'appartenance elle-même imprécise, puisqu'elle est représentée par un intervalle  $\subseteq \llbracket 0, 1 \rrbracket$ . Cette formalisation peut se prêter à une utilisation très riche en sciences humaines. PONSARD souligne fort justement qu'elle se prête à une analyse spatiale multicritère, dans le cas où le chercheur connaît certains critères relatifs à un espace, mais en ignore d'autres

(critères dont les valeurs ne sont pas disponibles, critères subjectifs ou autres). Définir dans ce cas une fonction d'appartenance parfaitement déterminée revient à négliger ces critères difficiles à appréhender. La démarche qui consiste alors à définir cette fonction d'appartenance par un intervalle dont on précise les bornes supérieure et inférieure selon des critères connus et qui suppose que la valeur des critères "inconnus" se situerait dans cet intervalle est donc parfaitement cohérente et semble bien adaptée aux problèmes et contraintes posées en sciences humaines et en analyse spatiale en particulier.

### CONCLUSION DU CHAPITRE III

Il existe ainsi une base théorique et un outil mathématique parfaitement adaptés à l'analyse spatiale des espaces imprécis. Quel que soit le type d'espace imprécis étudié : espace bien délimité mais à frontière "élastique", espace à limite imprécise, espace mal défini, la théorie des sous-ensembles flous permet de considérer ces espaces comme des êtres mathématiques aux propriétés bien définies, comme nous avons cherché à le montrer.

Cette théorie ne sert pas uniquement à fournir un cadre global, cohérent et élégant pourrait-on dire à l'analyse spatiale de l'imprécision, laquelle, de toute façon, resterait possible sans le recours au flou. Cet argument des "sceptiques" est certes valable, mais il ne prend en compte qu'une partie des possibilités offerte par le "flou". La théorie dont nous venons de présenter les bases essentielles permet de traiter des problèmes qui, sans elle, ne pourraient être traités : comparaison de sous-ensembles imprécis définis selon plusieurs critères, calcul des "distances" entre ces sous-ensembles, prise en compte de l'imprécision même des fonctions d'appartenance par l'utilisation des sous-ensembles  $\Phi$ -flous, autant de domaines où les méthodes d'investigation "classiques" trouvent leurs limites.

Certes les structures mathématiques sont plus pauvres que les algèbres que nous connaissons ; de ce fait les propriétés de l'ensemble des parties floues d'un référentiel sont plus réduites que celles de l'ensemble des parties ordinaires de ce référentiel, mais par contre, le chercheur peut à présent traiter de façon scientifique des données estimées "non mesurables" : comme le souligne PONSARD (1983) :

"But the field of the science is no more to be blended with the measured data domain. The scientific analysis of fuzziness enlarges on new and boundless perspectives".

## CHAPITRE IV

LES ESPACES GEOGRAPHIQUES INCERTAINS

FONDEMENTS GEOGRAPHIQUES ET MATHEMATIQUES

DE L'ETUDE DES ESPACES MAL CONNUS

OU INCOMPLETEMENT CONNUS

A - DEFINITIONS ET CONCEPTS GEOGRAPHIQUES DE BASE DE LA NOTION D'INCERTITUDE

B - LES CONCEPTS MATHEMATIQUES DE BASE DE LA NOTION D'INCERTITUDE

C - NOTIONS D'INCERTITUDE APPLIQUEES AUX SOUS-ENSEMBLES FLOUS

A - DEFINITIONS ET CONCEPTS GEOGRAPHIQUES DE BASE DE LA NOTION D'INCERTITUDE

I - Approche géographique : notion d'espace incertain

1. Définition

1.1. Nous appellerons espace géographique incertain un espace géographique auquel les éléments, ou lieux, n'appartiennent pas avec certitude, relativement à un observateur donné.

Deux remarques importantes doivent d'ores et déjà être énoncées.

1.2. L'incertitude spatiale est une notion *relative* à des conditions "extérieures" en quelque sorte à l'espace géographique lui-même. Elle est liée à une mauvaise connaissance, ou à une connaissance incomplète de l'espace par un "observateur", laquelle méconnaissance peut être due à des causes extrêmement variées.

L'incertitude spatiale introduit donc une notion de relation espace-observateur, relation qui, pour des raisons diverses, se fait mal ou incomplètement.

1.3. L'incertitude spatiale est une notion dynamique et varie naturellement selon un processus temporel de connaissance croissante (ou éventuellement décroissante) d'un espace. Il nous semble donc évident qu'un espace incertain peut l'être pour un observateur (ou un groupe d'observateurs) donné et est au contraire "certain" pour d'autres observateurs ; d'autre part un espace peut être incertain au temps  $t_0$ , et l'être beaucoup moins en  $t_1$  à mesure que progresse la connaissance spatiale.

1.4. Un espace incertain prend donc cette qualité par rapport à des conditions temporelles ou non, externes à cet espace. Celles-ci induisent pour chaque élément, un degré de certitude relatif à l'appartenance de cet élément à l'espace géographique incertain.

## 2. Incertitude et imprécision spatiales

L'imprécision spatiale fait appel à la théorie des sous-ensembles flous telle que nous l'avons présentée. L'incertitude fait appel, soit aux probabilités, soit, dans un cadre plus large à la théorie des possibilités que certains chercheurs (ZADEH, PRADE) rattachent à la théorie précédente.

### 2.1. Un espace incertain n'est pas forcément un espace imprécis.

Une fois levée l'incertitude sur l'appartenance de tel lieu à l'espace géographique, ce lieu appartient ou non *entièrement* à cet espace, c'est-à-dire que sa fonction d'appartenance, définie plus haut est égale à la borne supérieure de l'ensemble d'appartenance (= 1 si cet ensemble est  $M = ]0,1[$ ). Nous avons donc là un espace incertain précis ; si notre incertitude devient nulle, nous retrouvons un espace géographique précis "classique" tel que nous l'avons défini et étudié au chapitre II de ce travail.

### 2.2. Un espace imprécis n'est pas forcément incertain

On peut, comme on l'a fait au chapitre III, définir pour chaque lieu sa fonction d'appartenance à l'espace, traduire ainsi que ce lieu appartient "plus ou moins" à l'espace, mais être certain de cette appartenance. Ainsi le prédicat :

"Annecy appartient à la région lyonnaise avec un degré de 0.7" veut dire :

- Nous avons quantifié, par l'étude d'attributs divers, le degré d'appartenance d'Annecy à la région lyonnaise. Ce degré montre qu'Annecy appartient à cette région, mais pas entièrement. (Annecy appartient également à des régions voisines)

- Nous sommes *sûrs* qu'Annecy appartient à cette région avec le degré de 0.7 (incertitude nulle ou certitude absolue)

### 2.3. Un espace géographique peut être à la fois incertain et imprécis

2.3.1. Explicitons d'abord cette notion avec un

exemple non géographique :

"Je suis presque sûre que l'hiver sera très froid",

②

①

expression qui combine les deux notions précédentes.

- imprécision de l'appartenance du terme "froid" à "hiver" :  
*très* est un élément d'un ensemble d'appartenance  $\underline{L}$  au sens de GOGUEN,  
qui serait par exemple : "pas froid, un peu, moyennement, très, rigoureux,  
sibérien"

- incertitude quant à cette appartenance :

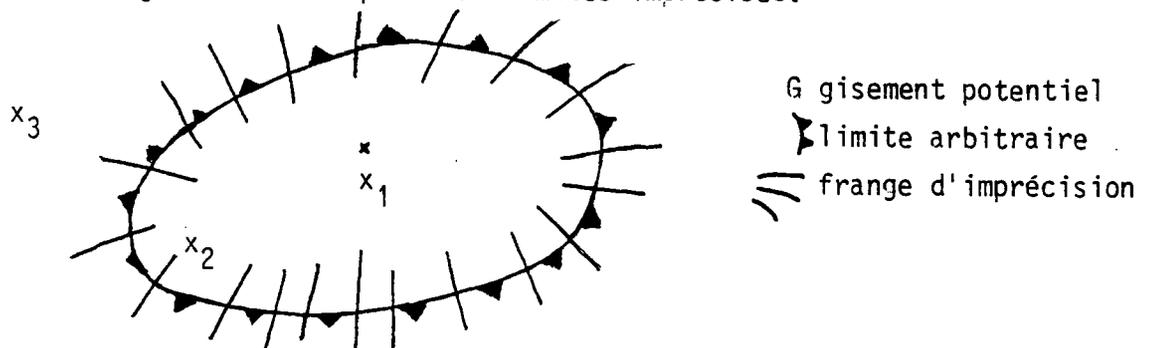
"*presque* sûre"

traduit un degré d'incertitude que nous sentons intuitivement être dif-  
férent de "sûre", "peu sûre"...

2.3.2. Les exemples géographiques ne manquent pas et seront formalisés dans la suite de ce chapitre.

Prenons celui d'un gisement pétrolier potentiel : des "indices" (pétrographie - tectonique - stratigraphie) peuvent être concordants et laisser supposer l'existence d'un gisement pétrolier.

Ce gisement représente donc un espace géographique incertain : le degré d'incertitude dépend de la plus ou moins grande concordance des indices rassemblés. Dans ce gisement incertain  $G$  on peut définir des degrés d'appartenance variables des différents sites à  $G$  :  $G$  est en effet également un espace aux limites imprécises.



où l'on peut définir trois types d'éléments :

- type  $x_1$  comme appartenant entièrement à cet espace incertain.  
En effet, si  $G$  existe, alors  $x_1$  est un site idéal de forage (accessibilité, importantes réserves, qualité

du gisement).  $X_1$  fait partie des réserves certaines.

- type  $x_2$  : appartient "plus ou moins" à G du fait de sa position marginale dans le gisement.  $x_2$  fait partie des réserves "possibles".
- type  $x_3$  : n'appartient pas à G.

Plus qu'une limite nette telle que nous l'avons représentée, on représentera donc G comme un espace à limite imprécise.

Dans le cas évoqué, nous avons donc bien un espace incertain et imprécis. L'incertitude peut être levée, mais l'imprécision spatiale reste rattachée à la nature même de l'espace géographique.

### 3. Définitions dérivées de ces notations

3.1. Un espace géographique flou est un espace à la fois imprécis et incertain selon la définition *géographique* posée en introduction.

3.2. L'imprécision est une notion inhérente à la structure même de l'espace géographique.

3.3. L'incertitude est une notion relative au contexte de l'analyse spatiale.

3.3.1. Si l'incertitude est relative à un observateur ou à un groupe d'observateurs et traduit une mé-connaissance de l'espace géographique, nous qualifierons ce dernier d'*espace géographique à incertitude relative*.

3.3.2. Si cette notion est relative à un espace mal connu ou imparfaitement connu car il fait intervenir l'espace "dans le futur", nous parlerons d'*espace géographique aléatoire*.

Etudions ces différents types d'espaces incertains.

## II - Les types d'espaces géographiques incertains

### 1. Les espaces à incertitude relative "objective"

1.1. Cette expression peut désigner en premier

lieu un espace dont la structure est, en principe, parfaitement définie, mais qui est mal connu ou imparfaitement connu du fait de l'impossibilité d'étudier totalement cette structure. Cette impossibilité peut correspondre à une *impossibilité technologique* de connaître parfaitement tous les éléments de la structure et de ce fait, d'affirmer avec certitude l'appartenance ou la non-appartenance d'un lieu à cet espace.

Ainsi la dorsale médiane de la fosse atlantique reste un espace incertain. Notre connaissance en reste imparfaite malgré le constant progrès des méthodes d'investigations (anomalie magnétiques, phénomènes de volcanisme, forages, explorations sous-marines qui restent malgré tout ponctuelles). Il n'en reste pas moins qu'il est impossible de définir actuellement, du fait de limites purement technologiques, le tracé, l'extension, la configuration exacts de ce rift et ses relations exactes avec les plaques qui le jouxtent. Cet espace incertain est vraisemblablement également un espace imprécis comportant une zone axiale très active et des bordures qui le sont beaucoup moins.

1.2. Cette incertitude liée à des limites technologiques peut également être liée en ce qui concerne les espaces humains à des *limites psycho-sociologiques* qui rendent difficile toute mesure d'un attribut selon lequel se structure un espace. Ainsi, définir un centre-ville en fonction du chiffre d'affaires ou du nombre journalier de clients traités par une entreprise commerciale ou de service revient à définir là encore un espace à la fois incertain et imprécis. Enfin, pour prendre un exemple où l'incertitude est liée à un "*blocage psychologique*" de l'investigation géographique, essayons de définir les sous-espaces français déterminés par l'application de la loi WEIL sur l'IVG, espace incertain s'il en est, organisé *sans doute* (incertitude relativement faible) autour des grandes villes. Mais il est impossible de définir avec certitude l'appartenance de tel ou tel lieu à cet espace.

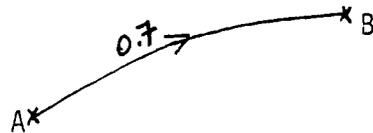
1.3. L'incertitude relative objective peut enfin être provoquée par *l'ignorance* dans laquelle nous sommes en ce qui concerne certains attributs déterminants dans la définition de l'espace,

Dans la plupart des analyses spatiales, nous ne pouvons en effet les répertorier tous.

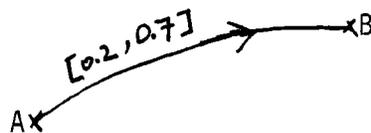
PONSARD (1977) souligne le problème dans son étude sur la hiérarchie des places centrales. Il insiste sur le fait que, pour définir la dominance d'un centre sur un autre centre, le chercheur dispose d'un certain nombre d'attributs : trafic de personnes, de marchandises, flux téléphoniques, flux d'argent ou d'information etc.

En fait, il est impossible d'appréhender la totalité des attributs qui conditionnent la position relative de deux centres, l'un étant dominé par l'autre.

L'espace de relation est donc, selon la définition que nous avons posée, un espace incertain, c'est-à-dire imparfaitement connu par le chercheur. Ce dernier ne devrait en fait affirmer : "A dépend de B" et l'arc AB a pour valeur 0.7", qu'en assortissant son affirmation d'un



degré d'incertitude (ou à l'inverse de certitude) dont il lui revient de définir la valeur. Pour mieux cerner cette incertitude, l'auteur cité propose de définir entre A et B un arc dont la valeur est un intervalle pris dans  $[\underline{0}, \underline{1}]$ , réalisant ainsi un graphe  $\Phi$ -flou. Dans le cas ci-dessous



la borne inférieure (0.2) représente la valeur de l'attribut qui définit la relation la plus faible de A vers B et la borne inférieure (0.7) celle de l'attribut qui définit la relation la plus forte de A vers B.

L'auteur en définissant ainsi la valeur de l'arc AB par l'intervalle  $[\underline{0.2}, \underline{0.7}]$  suppose ainsi que les attributs non appréhendés se situent dans cet intervalle. Il "encadre" en quelque sorte l'imprécision de la relation de A vers B entre une valeur minimum et une valeur maximum.

Peut-être pourrait-on nuancer encore davantage en associant à

l'espace géographique défini ici par le graphe  $\Phi$ -flou  $G$  l'incertitude relative à notre méconnaissance de la valeur réelle de l'arc AB, donc de la valeur réelle de la liaison entre le site A et le site B.

## 2. Les espaces à incertitude relative "subjective"

Nous appellerons espace à incertitude relative subjective un espace incertain dont la structure n'est plus parfaitement définie du fait d'une perception inégale, incomplète ou en tous cas variable selon chaque observateur. Ainsi ne peut-on déterminer qu'avec un degré de certitude très variable et souvent très faible, l'appartenance de tel ou tel lieu à un espace perçu ou vécu. Nous reviendrons par l'étude d'un exemple très détaillé sur ces notions importantes dans la géographie des espaces vécus ou perçus et la géographie du comportement.

Dans ce dernier type, l'incertitude est, on ne peut plus *relative* ; elle varie considérablement d'un individu à l'autre, elle varie pour un même individu au cours des différentes périodes de son existence, elle varie d'un groupe sociologique, d'âge ou d'activités à un autre ; il s'agit bien également d'une incertitude totalement subjective, car elle est propre à chaque individu ou à chaque groupe étudiés.

## 3. Les espaces géographiques aléatoires

Dans ce dernier cas, l'incertitude est liée à la définition d'un espace qui sera réalisé et structuré, dans le futur.

3.1. Ainsi, l'espace des villes françaises qui auront plus de 500.000 habitants en 1990, est un *espace géographique aléatoire précis* : cet ensemble, déterminé aujourd'hui à partir de critères actuels ou à la lumière de l'évolution récente de la population des villes françaises, l'est avec un certain degré de certitude. Il est évident que le prédicat énoncé en 1990 définira à ce moment un espace géographique précis.

Le degré de certitude est ici habituellement exprimé par la probabilité  $P$  qu'une ville appartienne ou non à cet ensemble avec  $0 \leq P \leq 1$ .

3.2. Un espace aléatoire imprécis serait l'espace défini par le prédicat suivant :

"L'espace des villes françaises où il sera possible de se rendre à partir de Paris en environ 3 h en 1990".

L'incertitude porte, dans ce prédicat, sur la "chance" des villes d'être reliées à Paris par un axe permettant de respecter cette durée ; l'imprécision porte sur la définition même de cette durée et sur le fait que le terme "environ" peut vouloir dire "plus ou moins 10 minutes", "plus ou moins une demi-heure" etc.

Dans cet exemple, comme dans 2.3.2., chaque lieu est identifié :

- par son degré de certitude concernant son appartenance à l'ensemble des villes françaises situées à environ 3 heures de trajet de Paris

- par son degré d'appartenance définissant l'importance du temps de transport par rapport au critère des 3 heures.

Ainsi on pourra dire :

"Une ville V appartiendra à cet ensemble E de villes avec un degré de 0.5, selon un degré de certitude de 0.8" ce qui voudra dire, selon la correspondance suivante :

$\mu_E(V)$ : temps	—————>	$\underline{M} = \underline{0,17}$
3 h	—————>	$\mu_E(V) = 1$
3h $\pm$ 15'	—————>	$\mu_E(V) = 0.75$
3h $\pm$ 30'	—————>	$\mu_E(V) = 0.5$
3h $\pm$ 45'	—————>	$\mu_E(V) = 0.25$
3h $\pm$ 1h	—————>	$\mu_E(V) = 0$

"Il y a une "certitude" de 0.8 que la ville V appartienne à E avec un degré de 0.5, c'est-à-dire puisse être reliée en 1990 à Paris en un temps compris entre 2 h 30 et 3 h 30".

Nous avons donc bien associé un degré de certitude qui traduit notre connaissance possible du sujet et un degré d'appartenance de V à un espace imprécis qui est l'espace pouvant être relié à Paris en un temps compris entre plus de 2 heures et moins de 4 heures.

Il est à présent nécessaire de définir les concepts mathématiques de base de la notion d'incertitude.

## B - LES CONCEPTS MATHÉMATIQUES DE BASE DE LA NOTION D'INCERTITUDE

Définir l'incertitude relative à un sous-ensemble d'un référentiel, revient à proposer en fait une "*mesure*" de notre degré de connaissance de ce sous-ensemble. Avant de proposer des types de mesures de cette incertitude, il s'agit donc

- en premier lieu de préciser la structure mathématique à laquelle appartient ce sous-ensemble et d'en présenter les propriétés.

- en second lieu et tenant compte de cette structure mathématique, de définir le type de mesure que l'on peut utiliser et ses caractères mathématiques.

Cette démarche est, à notre avis, fondamentale car elle évitera toute confusion entre les différents types de mesure d'incertitude proposée et permettra de bien séparer des notions qui a priori sont équivalentes, comme celles de probabilité et de possibilité par exemple.

Nous avons déjà défini plus haut (chapitre I) les principales notions, mais nous pensons qu'il est bon de les présenter en un tableau récapitulatif pour bien les différencier.

### I - Remarques sur l'ensemble des parties d'un référentiel non flou E et sur la notion de mesure

#### 1. Notions d'ensemble mesurable ou valable. Tableau IV.1

#### 2. Signification de ce tableau

2.1. Nous rappelons que la notion de  $\sigma$ -algèbre se différencie de la notion de  $\xi$ -algèbre dans la mesure où la seconde ne possède pas la propriété de complémentation.

TABEAU IV I - NOTION D'ENSEMBLE MESURABLE-VALUABLE

$\underline{E}$  = référentiel non flou

Card  $\underline{E}$  = n

	<p><math>\underline{P}(\underline{E})</math> Ensemble des parties non floues de <math>\underline{E}</math></p> <p>Card <math>\underline{P}(\underline{E}) = 2^n = 2 \text{ Card } \underline{E}</math></p>	<p><math>\underline{P}(\underline{E})</math> Ensemble des parties floues de <math>\underline{E}</math> Soit <math>\underline{M}</math> l'ensemble d'appartenance (Card <math>\underline{M} \geq 2</math>) Card <math>\underline{P}(\underline{E}) = \text{Card } \underline{M} \cdot \text{Card } \underline{E}</math></p>
<p>Soit <math>\underline{F}</math> une famille de sous-ensembles de <math>\underline{E}</math></p>	<p><math>\underline{F} \subset \underline{P}(\underline{E})</math> (<math>\underline{F}</math> famille de sous-ensembles non flous de <math>\underline{E}</math>) <math>\underline{F}</math> est une <math>\sigma</math>-algèbre s. si :</p> <p>1a) <math>\underline{E} \in \underline{F}</math> 2a) (<math>\forall i \in \underline{I}</math>, ens. d'indices, <math>\forall \underline{A}_j \in \underline{F}</math> : <math>\underline{A}_j \in \underline{F} \Rightarrow \overline{\underline{A}_j} \in \underline{F}</math> (complémentation) 3a) (<math>\forall i \in \underline{I}</math>, <math>\forall \underline{A}_j \in \underline{F}</math>, <math>\forall j, k \in \underline{I}</math>, <math>\underline{A}_j \cap \underline{A}_k = \emptyset \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} \underline{A}_i \in \underline{F}</math></p> <p><math>(\underline{E}, \underline{F})</math> : ensemble mesurable</p>	<p><math>\underline{F} \subset \underline{P}(\underline{E})</math> (<math>\underline{F}</math> famille de sous-ensembles flous de <math>\underline{E}</math>) <math>\underline{F}</math> est une <math>\xi</math>-algèbre s. si :</p> <p>1a) <math>\underline{E} \in \underline{F}</math>     <math>\emptyset \in \underline{F}</math> (axiome) 2a) (<math>\forall i \in \underline{I}</math>, ens. d'indices, si <math>\underline{A}_i \in \underline{F}</math> et si <math>\{\underline{A}_i\}</math> monotone) <math>\Rightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} \underline{A}_i \in \underline{F}</math> (pas de complémentation) 3a) si <math>\underline{A}_i \subseteq \underline{A}_{i+1}</math> : séquence croissante ; <math>\underline{A}_n = \bigcup_{i=1}^n \underline{A}_i</math> si <math>\underline{A}_i \supseteq \underline{A}_{i+1}</math> : séquence décroissante ; <math>\underline{A}_n = \bigcap_{i=1}^n \underline{A}_i</math></p> <p><math>\underline{E}, \underline{F}</math>, ensemble valable</p>

$\underline{F}$  est un corps de BOREL s. si :

1b)  $\emptyset \in \underline{F}$  ,  $\underline{E} \in \underline{F}$

2b)  $(\underline{A} \in \underline{F} \text{ et } \underline{B} \in \underline{F}) \Rightarrow (\underline{A} \cap \underline{B}) \in \underline{F}$

3b)  $(\underline{A}_1, \underline{A}_2, \dots, \underline{A}_i \in \underline{F}) \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} \underline{A}_i \in \underline{F}$

4b)  $\underline{A} \in \underline{F} \Rightarrow \overline{\underline{A}} \in \underline{F}$

$\underline{E}, \underline{F}$  : espace borélien

$\underline{F}$  est un semi-corps de BOREL s. si :

1b)  $\emptyset \in \underline{F}$  ,  $\underline{E} \in \underline{F}$

2b)  $(\underline{A} \in \underline{F} \text{ et } \underline{B} \in \underline{F}) \Rightarrow (\underline{A} \cap \underline{B}) \in \underline{F}$

3b)  $(\underline{A}_1, \underline{A}_2, \dots, \underline{A}_i \in \underline{F}) \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} \underline{A}_i \in \underline{F}$

$\underline{E}, \underline{F}$  espace semi-borélien

TABLEAU IV 2 - NOTIONS DE MESURE ET DE VALUATION

Mesure dans un corps de BOREL	Mesure floue ou valuation dans un semi-corps de BOREL (au sens de SUGENO)
<p><math>\underline{F}</math> : une <math>\sigma</math>-algèbre <math>\underline{F} \subset \underline{P}(\underline{E})</math></p> <p><math>m : \underline{F} \longrightarrow \mathbb{R}^+</math></p> <p>1a) <math>m(\emptyset) = 0</math></p> <p>1b) <math>m \bigcup_{i=1}^{\infty} \underline{A}_i = \sum_{i=1}^{\infty} m(\underline{A}_i)</math></p> <p>(propriété d'additivité)</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin-top: 10px;"> <math>\underline{E}, \underline{F}, m</math> : espace borélien de mesure <math>m</math> </div>	<p>soit <math>\underline{F}</math> : une <math>\zeta</math>-algèbre <math>\underline{F} \subset \underline{P}(\underline{E})</math></p> <p><math>v : \underline{F} \longrightarrow [0, 1]</math></p> <p>1a) <math>v(\emptyset) = 0</math> (axiome) <math>v(\underline{E}) = 1</math></p> <p>1b) <math>\forall i \in \underline{I}, \forall \underline{A}_i \in \underline{F} : \underset{\underline{M}}{\Delta} \leq v(\underline{A}_i) \leq \underset{\underline{M}}{\nabla}</math></p> <p>1c) <math>\forall \underline{A} \in \underline{F}, \forall \underline{B} \in \underline{F}</math> si <math>\underline{A} \subseteq \underline{B} \implies v(\underline{A}) \leq v(\underline{B})</math> (propriété de monotonie dans l'inclusion)</p> <p>1d) dans le cas où <math>\underline{E}</math> est infini : si <math>\underline{A}_i \in \underline{F}</math> et <math>\{\underline{A}_i\}</math> monotone, alors</p> <p><math>\lim_{i \rightarrow \infty} v(\underline{A}_i) = v(\lim_{i \rightarrow \infty} \underline{A}_i)</math></p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin-top: 10px;"> <math>\underline{E}, \underline{F}, v</math> : espace semi-borélien de valuation <math>v</math> </div>

2.2. Un corps de BOREL est une  $\sigma$ -algèbre particulière. En effet - 1b) correspond à 1a) et à la conséquence de 2a) si  $\underline{E} \in \underline{F}$  alors  $\overline{E} = \emptyset \in \underline{F}$

- 4b) correspond à 2a)

- 3b) correspond à 3a)

La condition 2b) fait d'un corps de BOREL une  $\sigma$ -algèbre particulière.

2.3. Un semi-corps de BOREL est une  $\zeta$ -algèbre particulière. En effet 1b) correspond à 1a)

3b) correspond à 2a)

La condition 2b relative à l'intersection de deux sous-ensembles flous fait d'un semi-corps de BOREL une  $\zeta$ -algèbre particulière.

### 3. Notions de mesure et de valuation. Tableau IV 2

#### 4. Signification de ce tableau

Nous notons que la propriété d'additivité des mesures dans un corps de BOREL devient propriété de monotonie dans l'inclusion dans un semi-corps de BOREL. Une valuation est donc une mesure floue qui a des propriétés plus faibles qu'une mesure.

Les propositions de mesure du degré d'incertitude d'un sous-espace d'un référentiel vont s'appuyer sur les données présentées dans les tableaux IV 1 et IV 2.

## II - Types de mesures d'incertain : présentation générale

Notre préoccupation consistera donc à traiter des espaces imprécis et incertains c'est-à-dire des espaces géographiques flous selon notre définition.

A chaque élément d'un sous-ensemble flou on va donc associer une fonction d'appartenance prenant ses valeurs dans  $]/0,1[$  et une fonction d'incertitude prenant également ses valeurs dans  $]/0,1[$ . Dans ce qui suit, nous proposons les notions de norme et de conorme triangulaires qui per-

mettent de définir une association de ces deux fonctions en définissant une application de  $\underline{[0,1]} \times \underline{[0,1]}$  dans  $\mathbb{R}$  selon certaines conditions.

PRADE (1982) propose des mesures d'incertain fondées sur :

- la notion de norme triangulaire
- la notion de conorme triangulaire.

### 1. Norme triangulaire

1.1. Une norme triangulaire  $T$  est une application à valeur réelle, définie sur  $\underline{[0,1]} \times \underline{[0,1]}$  qui satisfait les conditions suivantes :

1.1.1.  $T(0,0) = 0$  ,  $T(a,1) = T(1,a) = a$

1.1.2.  $T(a,b) \leq T(c,d)$  si  $a \leq c$  et  $b \leq d$  (propriété de monotonie)

1.1.3.  $T(a,b) = T(b,a)$  (propriété de symétrie)

1.1.4.  $T(a, T(b,c)) = T(T(a,b), c)$  (propriété d'associativité).

1.2. PRADE propose quatre normes triangulaires particulièrement intéressantes :

1.2.1. Le Min :  $\min(a,b) = \begin{cases} a & \text{si } a \leq b \\ b & \text{sinon} \end{cases}$

1.2.2. Le produit :  $\text{prod}(a,b) = a.b$

1.2.3. L'opération définie comme suit :

$$T_m : T_m(a,b) = \begin{cases} \max(0, a + b - 1) \\ a + b - 1 & \text{si } a + b \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1.2.4. L'opération définie comme suit :

$$T_w : T_w(a,b) = \begin{cases} a & \text{si } b = 1 \\ b & \text{si } a = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Il note qu'entre ces fonctions existe la relation

$$T_w(a,b) \leq T_m(a,b) \leq \text{prod}(a,b) \leq \min(a,b)$$

## 2. Conorme triangulaire

2.1. Une conorme triangulaire est une application à valeur réelle  $S$  de  $\underline{[0,1]} \times \underline{[0,1]}$  qui satisfait les conditions suivantes

2.1.1.  $S(1,1) = 1$  ,  $S(0,a) = S(a,0) = a$

plus les conditions 1.1.2.

1.1.3.

1.1.4.

des normes triangulaires.

On note que l'on peut passer d'un norme triangulaire à une conorme triangulaire :

$$S(a,b) = 1 - T(1 - a, 1 - b)$$

$S$  et  $T$  sont des opérations duales.

2.2. PRADE propose quatre conormes intéressantes

2.2.1. Le Max :  $\max(a,b) = \begin{cases} a & \text{si } a \geq b \\ b & \text{sinon} \end{cases}$

2.2.2. La "somme probabiliste" :

$$sp(a,b) = a + b - a.b$$

2.2.3. La "somme bornée" :

$$sb(a,b) = \min(1, a + b)$$

2.2.4. L'opération

$$T_w^* : T_w^*(a,b) = \begin{cases} a & \text{si } b = 0 \\ b & \text{si } a = 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a

$$\max(a,b) \leq a + b - a.b \leq \min(1, a + b) \leq T_w^*(a,b)$$

## 3. Traitement d'un exemple

Soit  $\underline{E}$  le référentiel

$$\underline{E} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$$

Définissons  $A$  sous-ensemble flou de  $\underline{E}$  tel que la fonction d'appartenance  $\mu$ , est :

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
A =	0.2	0.7	0	1	0.3

Supposons que nous ayons défini une "fonction de certitude"  $f$ , telle qu'elle associe à chaque élément notre degré de connaissance relative à chaque élément quant à son appartenance à A

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
A =	0.6	0	0.8	0.3	1

Ainsi chaque élément est défini par sa fonction d'appartenance  $\mu_A$  à A et sa fonction de certitude  $f$  (qui n'est pas ici une fonction de probabilité)

$x_1$ :	$\mu_A(x_1) = 0.2$	$f(x_1) = 0.6$
$x_2$ :	$\mu_A(x_2) = 0.7$	$f(x_2) = 0$
$x_3$ :	$\mu_A(x_3) = 0$	$f(x_3) = 0.8$
$x_4$ :	$\mu_A(x_4) = 1$	$f(x_4) = 0.5$
$x_5$ :	$\mu_A(x_5) = 0.3$	$f(x_5) = 1$

Calculons pour cet exemple les normes et conormes triangulaires

TABLEAU IV 3 a

	Normes triangulaires				Conormes triangulaires			
	Min	Prod	$T_m$	$T_w$	Max	Sp	Sb	$T_w^*$
$x_1$	0.2	0.12	0	0	0.6	0.68	0.8	1
$x_2$	0	0	0	0	0.7	0.7	0.7	0.7
$x_3$	0	0	0	0	0.8	0.8	0.8	0.8
$x_4$	0.5	0.05	0.5	0.5	1	1	1	1
$x_5$	0.3	0.03	0.3	0.3	1	1	1	1

Vérifions la relation énoncée en 2.1.1. :

$$S(a,b) = 1 - T(1-a, 1-b)$$

pour deux des quatre conormes triangulaires

TABLEAU IV 3 b

	Max	1-a	1-b	Min(1-a,1-b)	1-Min(1-a,1-b)
$x_1$	0.6	0.8	0.4	0.4	0.6
$x_2$	0.7	0.3	1	0.3	0.7
$x_3$	0.8	1	0.2	0.2	0.8
$x_4$	1	0	0.7	0	1
$x_5$	1	0.7	0	0	1

TABLEAU IV 3 c

	$T_w^*$	1-a	1-B	$T_w(1-a,1-b)$	$1-T_w(1-a,1-b)$
$x_1$	1	0.8	0.4	0	1
$x_2$	0.7	0.3	1	0.3	0.7
$x_3$	0.8	1	0.2	0.2	0.8
$x_4$	1	0	0.7	0	1
$x_5$	1	0.7	0	0	1

ou en abrégé :

TABLEAU IV 3 d

	$S_p$	$\text{Prod}(1-a,1-b)$	$1-\text{Prod}(1-a,1-b)$
$x_1$	0.68	0.32	0.68
$x_2$	0.7	0.3	0.7
$x_3$	0.8	0.2	0.8
$x_4$	1	0	1
$x_5$	1	0	1

TABLEAU IV 3 e

	$S_b$	$T_m(1-a,1-b)$	$1-T_m(1-a,1-b)$
$x_1$	0.8	0.2	0.8
$x_2$	0.7	0.3	0.7
$x_3$	0.8	0.2	0.8
$x_4$	1	0	1
$x_5$	1	0	1

Ainsi, l'étude des normes et des conormes triangulaires nous permettent d'associer, en une même expression numérique l'imprécision et l'incertitude géographiques relatives à chaque élément d'un sous-espace géographique d'un espace-référentiel.

Etendons ces notations en proposant des types de mesures d'incertain de sous-ensembles flous d'un référentiel non flou  $E$ .

C - NOTIONS D'IMPRECISION ET INCERTITUDE APPLIQUEES AUX SOUS-ENSEMBLES FLOUS

I - Théorie des sous-ensembles flous probabilisés

1. Approche géographique

- Soit un sous-espace géographique flou  $E$  de l'espace-référentiel  $\underline{E}$  c'est-à-dire un sous-espace dont les lieux sont munis :
- d'une fonction de probabilité  $f$  qui traduit la probabilité pour chaque lieu d'appartenir à  $E$
  - d'une fonction d'appartenance  $\mu$  qui traduit le degré d'appartenance de ce lieu à  $E$  si cette appartenance est réalisée.

Nous chercherons à associer la notion d'incertitude sur l'appartenance des éléments et la notion d'imprécision. L'incertitude est exprimée ici en termes de probabilités.

2. Les concepts mathématiques

$\underline{E}$  : référentiel

$\underline{F}$  un semi-corps de BOREL

Nous définissons :

$(\underline{E}, \underline{F}, v)$  un espace semi borélien

$\forall A \in \underline{F}, \forall x \in \underline{E}$

où  $v$  est la valuation proposée ci-dessous :

$$v(A) = \sum_{i=1}^n \mu_A(x_i) \cdot f(x_i) \quad (1)$$

où  $\sum_{i=1}^n f(x_i) = 1$

2.1. On vérifie que (1) est bien une valuation selon les conditions posées dans le tableau IV 2.

2.2. On vérifie également que (1) respecte bien les conditions d'une probabilité.

Cependant cette probabilité étant définie sur un sous-ensemble flou, les

conditions d'une probabilité (chapitre II) à savoir :

a)  $\forall i \in I, \forall A_i \in F \implies \text{Pr}(A_i) \geq 0$

b)  $\text{Pr}(\emptyset) = 0$

c)  $\forall A \in F, \forall B \in F, A \cap B = \emptyset \implies \text{pr}(A \cup B) = \text{pr}(A) + \text{pr}(B)$

d)  $\text{Pr}(E) = 1$

e)  $\text{Pr}(\bar{A}) = 1 - \text{Pr}(A)$

f)  $\text{Pr}(A) + \text{Pr}(B) = \text{Pr}(A \cup B) + \text{Pr}(A \cap B)$  si  $A \cap B \neq \emptyset$

g)  $A \subseteq B \implies \text{pr}(A) \leq \text{pr}(B)$

ne sont pas respectées car :

- la propriété de complémentation n'existe pas en théorie des sous-ensembles flous.

- les sous-ensembles flous ne sont pas nécessairement disjoints.

2.3. L'axiomatique relative à la notion de probabilité des sous-ensembles flous est donc différente de celle des sous-ensembles ordinaires :

2.3.1. Une mesure de probabilité concerne un semi-corps de BOREL

2.3.2. Elle représente une valuation ou mesure floue sur ce semi-corps de BOREL

2.3.3. Elle satisfait à la condition suivante :

$$\forall A \in \underline{F}, \forall B \in \underline{F}$$

$$v(A \cup B) + v(A \cap B) = v(A) + v(B)$$

donc si  $A \cap B = \emptyset$   $v(A \cup B) = v(A) + v(B)$

et nous retrouvons les conditions relatives à une valuation de sous-ensembles disjoints.

2.3.4. Dans le cas d'une pseudo-complémentation on a :

$$\forall x \in \underline{E}, \bar{A} \text{ pseudo-complémentaire de } A$$

$$\bar{A} \subset \underline{E}, v(\bar{A}) = 1 - v(A)$$

Ainsi, il est possible, en affaiblissant les conditions d'une probabilité et en les adaptant aux propriétés d'un semi-corps de BOREL, de probabiliser un sous-ensemble flou.

L'expression :

$$v(A) = \sum_{i=1}^n \mu_A(x_i) \cdot f(x_i) \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^n f(x_i) = 1$$

est l'équivalent de l'espérance mathématique de la loi de probabilité  $f$  pour le sous-ensemble flou  $A$  de  $\underline{E}$ .

### 3. Extension de la notion de probabilité

Sans les développer, notons que nous pouvons définir, comme pour des sous-ensembles ordinaires, les notions suivantes :

#### 3.1. Notion de probabilité conditionnelle

$$\forall A \in \underline{F} \quad \underline{F} \text{ semi-corps de BOREL}$$

$$\forall B \in \underline{F}$$

$$\Pr(A/B) = \frac{\Pr(A \cdot B)}{\Pr(B)} \quad \text{avec} \quad \Pr(B) > 0$$

qui peut se définir également par :

$$\Pr(A/B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} \quad \text{avec} \quad \Pr(B) > 0$$

#### 3.2. Notion de probabilité de BAYES

3.2.1. On réalise sur  $\underline{E}$  une partition floue, c'est-à-dire un sous-ensemble de sous-ensembles flous de  $\underline{E}$  (non nécessairement disjoints) tel que :

$$E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n = \underline{E}$$

Soit  $\underline{F}$  un semi-corps de BOREL et  $A \in \underline{F}$

On peut définir :

$$\Pr(E_i/A) = \frac{\Pr(A/E_i) \cdot \Pr(E_i)}{\Pr(A)}$$

Il est donc possible, en travaillant sur des sous-ensembles flous de définir une probabilité de BAYES comme on le fait en théorie des sous-ensembles ordinaires, c'est-à-dire de définir la probabilité d'un événement flou connaissant la probabilité conditionnelle d'un critère servant de référence.

Nous pouvons également nous affranchir des contraintes relatives à une fonction de probabilité et proposer des notions d'incertitude plus

larges à savoir la possibilité et la nécessité d'un sous-ensemble flou.

## II - Possibilité et nécessité de sous-ensembles flous

Ces deux notions dérivent respectivement de la norme triangulaire MAX et de la norme triangulaire MIN présentées plus haut. Elles nous permettent de définir successivement la mesure scalaire d'incertitude d'un sous-ensemble non flou puis flou, puis de définir la possibilité ou la nécessité de deux sous-ensembles et d'en dégager les implications géographiques.

### 1. Définitions préliminaires : incertitude sur un ensemble non flou

Soit un ensemble  $\underline{E}$  fini ou non.

Associons à chaque élément de  $\underline{E}$  une valeur, prise dans  $]/0,1[$  qui traduit l'incertitude dans laquelle nous sommes quant à l'appartenance de cet élément à l'ensemble  $\underline{E}$ .

1.1. On appellera variable de contingence, ou d'incertitude,  $X$ , une fonction  $\varphi$  telle que :

$$\begin{array}{l} \varphi : X \longrightarrow ]0,1[ \\ \forall x_i \in \underline{E} \longrightarrow \varphi(x_i) \in ]0,1[ \end{array}$$

1.2.  $X$  est une variable de contingence discrète si  $\underline{E}$  est fini. Dans ce cas  $\varphi$  est appelée contingence de la variable  $X$ .

1.3.  $X$  est une variable de contingence continue si  $\underline{E}$  continu. Dans ce cas  $\varphi$  est appelée densité de contingence de la variable  $X$ .

1.4. Définissons par :

$$\Phi(x) = \bigvee_{u=-\infty}^x \varphi(u)$$

la fonction supériorisée ou fonction de majoration de  $X$ .  $\Phi(x)$  est l'équivalent de la fonction de répartition dans le cas d'une fonction de probabilité.

### 1.5. Remarque

Aucune contrainte n'est posée dans la définition de cette fonction d'incertitude. En particulier, nous n'avons pas l'obligation de respecter, comme pour les probabilités, la condition :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

ce qui nous permet ici de définir, sur chaque élément, un degré d'incertitude indépendant de celui des autres éléments de E. Nous avons donc défini ci-dessus une expression de l'incertitude plus large que celle habituellement utilisée en théorie des probabilités.

## 2. Incertaine sur un sous-ensemble flou

2.1. De la même façon nous pouvons définir sur un sous-ensemble flou E une variable d'incertitude qui associe à chaque élément de E le degré d'incertitude relatif à l'appartenance de cet élément à E, laquelle appartenance est définie par la fonction d'appartenance.

2.2. La variable d'incertitude ainsi définie est moins contraignante que la fonction de probabilité définie sur un sous-ensemble flou dans le paragraphe C I ci-dessus où la contrainte

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) = 1 \text{ devait être respectée}$$

2.3. La variable d'incertitude ainsi définie a une base formelle différente de celle qui est définie sur un ensemble ordinaire (par. 1 ci-dessus).

2.4. Les différences fondamentales sont présentées dans le tableau suivant :

TABLEAU IV 5

TABLEAU RECAPITULATIF

Type de sous-ensemble	Sous-ensemble non flou	Sous-ensemble flou
<u>Structure formelle</u>	Corps de BOREL	Semi-corps de BOREL
<u>Probabilité</u>	oui $\sum_{i=1}^n f(x_i)=1$ si $\underline{E}$ discret $\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)du=1$ si $\underline{E}$ continu <u>Espace probabilisé</u>	oui, mais cond. plus faibles id id <u>Sous-espace flou probabilisé</u>
<u>Incertitude</u>	oui <u>Espace précis incertain</u>	oui <u>Sous-espace flou incertain</u>

3. Association de la fonction d'appartenance et de la fonction d'incertitude d'un sous-ensemble flou

3.1. Dans un sous-espace flou (à la fois imprécis et incertain) chaque élément est défini, à la fois par sa fonction d'appartenance  $\mu$  et sa fonction d'incertitude  $f$  qui représente l'incertitude sur l'existence même de cette fonction d'appartenance.

KAUFMANN (1973) propose deux types d'opérateurs associant ces deux fonctions : la fonction MIN et la fonction PROD. Nous les exposons dans l'exemple suivant.

3.2. Exemple :

Soit les "quartiers flous" de la ville de

Metz, c'est-à-dire des ensembles définis plus ou moins subjectivement, se recouvrant partiellement, tels que le "vécu" quotidien les conçoit et les pratique. Nous définirons la notion d'appartenance de ces quartiers au centre-ville.

- La fonction  $f$  traduira pour chaque quartier notre connaissance imparfaite de cette appartenance

- La fonction  $\mu$  traduira l'appartenance "plus ou moins" forte de ce quartier au centre-ville, espace imprécis.

- Les deux fonctions sont successivement associées par les opérateurs MIN et PROD.

TABLEAU IV 6 OPERATEURS PROD et MIN - Applications

N°	Quartiers flous	$f(x)$	$\mu(a)$	PROD	MIN
1	Gare	0.4	0.5	0.2	0.4
2	Ville allemande	0.7	0.2	0.14	0.2
3	Ville française	0.7	0.3	0.21	0.3
4	Quartier Serpenoise	1	0.8	0.8	0.8
5	Quartier Cathédrale	0.7	0.3	0.21	0.3
6	Quartier Avenue Foch	0.9	0.3	0.27	0.3
7	Outre Seille	0.3	0.1	0.3	0.1
8	St Louis - St Jacques	0.9	0.8	0.72	0.8
9	Ste Croix	1	0.1	0.1	0.1
10	Place Comédie	1	0.1	0.1	0.1
11	Quartier St Vincent	1	0	0	0

3.2.1.  $f(x)$  traduisant le degré de connaissance concernant l'appartenance des quartiers au centre-ville, la valeur 1 signifie que nous estimons connaître parfaitement cette appartenance, qu'elle soit très forte (quartier 4) ou au contraire très faible ou nulle (quartiers 9, 10, 11).

3.2.2. Les fonctions PROD et MIN permettent ainsi

d'associer  $f(x)$  et  $\mu(x)$ ; PROD affaiblit la notion d'appartenance. Comme le souligne KAUFMANN, d'autres opérateurs peuvent être utilisés selon le choix et les besoins du chercheur.

#### 4. Mesures d'incertain des sous-ensembles flous : mesure de possibilité

Partant des paragraphes ci-dessus et de la définition d'une valuation ou mesure floue sur un semi-corps de BOREL, nous allons proposer à présent deux types de mesure d'incertain de sous-ensembles flous.

PRADE (1982) note que intuitivement une mesure d'incertain doit être telle que :

"le degré de confiance en la réunion de deux événements disjoints dépend seulement des degrés de confiance en chacun des événements". De ce fait

Soit  $\underline{F}$  un semi-corps de BOREL

$$\forall A \in \underline{F}, \forall B \in \underline{F} ; \text{ si } A \cap B = \emptyset \text{ alors}$$
$$g(A \cup B) = g(A) * g(B)$$

où  $g$  mesure floue définie sur l'espace semi-borélien

\* une opération interne définie sur  $[\underline{0}, \underline{1}]$

Parmi les normes et conormes triangulaires respectant cette condition, nous allons nous attacher au cas où

\* = MAX : possibilité d'un sous-espace flou

\* = MIN : nécessité d'un sous-espace flou.

#### 4.1. Possibilité et probabilité

4.1.1.  $\forall A \in \underline{F}, \forall B \in \underline{F}$ , si  $A \cap B = \emptyset$

$$\text{alors } g(A \cup B) = \text{MAX} (g(A), g(B))$$

PRADE démontre que la condition d'avoir des sous-ensembles disjoints n'est pas nécessaire, donc

$$\forall A \in \underline{F}, \forall B \in \underline{F}, \quad \boxed{g(A \cup B) = \text{MAX} (g(A), g(B))}$$

qui définit l'axiome fondamental des *mesures de possibilité*. On appellera  $g(A)$  la *possibilité de l'événement flou A*.

#### 4.2. Notions dérivées

4.1.2.1. Nous pouvons écrire :

$$\forall A \in \underline{F} \quad g(A \cup \bar{A}) = \text{MAX} (g(A), g(\bar{A})) = 1$$

qui introduit une notion totalement différente des notions classiques de probabilité où on a :

$$\text{pr}(A \cup \bar{A}) = \text{pr}(A) + \text{pr}(\bar{A}) = 1$$

Dans notre cas on peut avoir :

- soit  $g(A)$  (ou possibilité de  $A$ ) = 1 et  $g(\bar{A}) = 1$

$A$  et  $\bar{A}$  sont également possibles. On ne peut savoir où est la vérité sur l'appartenance de  $A$  ou  $\bar{A}$  au référentiel

- soit  $g(A) = 1$  et  $g(\bar{A}) < 1$  ou l'inverse. (1 au moins des événements doit être possible).

- mais on ne peut avoir

$$g(A) = g(\bar{A}) = 0$$

en fait  $g(A)$  est indépendant de  $g(\bar{A})$  et l'inverse, alors que ce n'est pas le cas en probabilité.

4.1.2.2. Nous pouvons tirer, pour que la relation :

$$\forall A \in \underline{F} \quad \text{MAX} (g(A), g(\bar{A})) = 1$$

soit toujours valable :

$$\forall x_i \in \underline{E} \quad \text{MAX}_{i=1, n} g(x_i) = 1$$

$$\text{avec } A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

#### 4.3. Définitions dérivées : contingence mathématique MAX

Soit le sous-ensemble flou  $E$  tel que nous l'avons défini géographiquement dans le tableau IV 6. Nous appellerons distribution de possibilité la variable  $f(x)$  précisant l'incertitude relative à l'appartenance de chaque quartier au centre-ville.

Nous définirons par :

Contingence mathématique MAX :

$$C(E) = \bigvee_{i=1}^n (\mu_E(x_i) \wedge f(x_i))$$

$C(E) = 0.8$  dans notre exemple.

$C(E)$  représente donc une valuation de  $E$  par la loi de possibilité  $f(x)$

En effet

$$1) C(\emptyset) = 0 \text{ car } \forall x \in \underline{E}, \mu_{\emptyset}(x_i) = 0$$

2)  $C(E) = 1$  : cette condition demande à être vérifiée, elle suppose que si  $\underline{F}$  est le semi-corps de BOREL sur lequel on travaille, un au moins des sous-ensembles flous élément de  $\underline{F}$  doit avoir une contingence mathématique = 1 c'est-à-dire doit être entièrement possible :

$$\forall_X C(X) = 1$$

3) si  $A \in \underline{F}$  et  $B \in \underline{F}$  et  $A \subseteq B$  est-ce que :

$$C(A) \leq C(B) ?$$

$$\text{si } A \subseteq B \Rightarrow \forall x \in \underline{E}, \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$$

$$\Rightarrow \forall f(x), \quad \forall \left( \mu_A(x) \wedge f(x) \right) \leq \forall \left( \mu_B(x) \wedge f(x) \right)$$

$$\Rightarrow C(A) \leq C(B)$$

Remarque : la contingence mathématique utilise les opérations sup-min- On peut également associer "sup-prod" (admissibilité au sens de KAUFMANN ou toute autre norme triangulaire distributive par rapport à MAX). Il appartiendra à chaque chercheur de définir les opérateurs qu'il juge utile.

4.1.4. Il nous est ainsi possible de proposer une mesure floue de la possibilité d'un sous-espace flou d'un référentiel.

Cette notation sera essentielle en géographie : étudiant des espaces géographiques incertains, qu'ils soient relatifs ou aléatoires, nous pouvons proposer une appréciation quantitative de la possibilité de réalisation de ces espaces géographiques et partant, de comparer voire de classer entre eux des espaces pourvus de cette mesure de possibilité. Cette mesure est équivalente en signification même si les fondements formels en sont très différents, à la notion d'espérance mathématique en probabilité.

Il faut souligner, que l'utilisation de la conorme triangulaire MAX induit une notion de "chance maximum de réalisation". La sémantique

du terme "possible" autorise d'ailleurs cette notation maximale : il est "possible que cet espace soit un espace riche en pétrole" implique ainsi une appréciation optimiste des "chances".

La notion de nécessité implique au contraire une vision "MIN" des chances de réalisation.

## 5. Mesures de nécessité

### 5.1. Définitions

Prenons comme norme triangulaire la fonction MIN et définissons une valuation d'un sous-ensemble flou telle que :

$$g(\emptyset) = 0$$

$$g(\underline{E}) = 1$$

$$\forall A \in \underline{F}, \forall B \in \underline{F}, g(A \cap B) = \text{MIN} (g(A), g(B))$$

$g$  représente une mesure de nécessité du sous-ensemble flou.

Définissons les rapports entre cette mesure et sa duale  $\hat{g}(A)$

$$\forall A \in \underline{F}, \hat{g}(A) = 1 - g(\bar{A})$$

$$\forall B \in \underline{F}, \hat{g}(B) = 1 - g(\bar{B})$$

$$\longrightarrow \hat{g}(A \cup B) = \text{MAX} (g(A), g(B))$$

$\hat{g}$  est donc bien une mesure de possibilité.

### 5.2. Mesure de nécessité d'un sous-ensemble flou

$$\text{Si } \text{MIN} (g(A), g(B)) = g(A \cap B)$$

on peut écrire

$$\forall A \in \underline{F} \quad \text{MIN} (g(A), g(\bar{A})) = 0$$

on voit que :

- de  $A$  et  $\bar{A}$ , un seul des sous-ensembles peut avoir une mesure de nécessité = 1

- si, de  $A$  et  $\bar{A}$ , un des sous-ensembles a une nécessité non nulle, dans ce cas l'autre a une nécessité nulle. De ce fait le premier a une possibilité de 1.

-  $A$  et  $\bar{A}$  peuvent avoir tous deux une nécessité nulle.

### 5.3. Généralisation

5.3.1. Les relations entre possibilité et nécessité sont ainsi les suivantes :



## 6. Choix différents d'opérateurs d'incertitude

### 6.1. Opérateurs associés à SUP

Soit un sous-ensemble flou A défini par sa fonction d'incertitude f et par sa fonction d'appartenance  $\mu$ . L'opérateur SUP, défini en théorie des possibilités, peut être associé à toute norme triangulaire i de façon que

$$\Pi(A) = \sup_{j=1,n} i(\mu_A(x_j), f(x_j))$$

où  $\Pi(A)$  est la mesure floue d'incertitude du sous-ensemble A. Voyons les deux mesures les plus importantes.

6.1.1. Nous venons de voir plus haut que :

$$C(A) = \sup_{j=1,n} (\mu_A(x_j) \wedge f(x_j))$$

définit la *contingence mathématique MAX* de A (équivalente de l'espérance mathématique en probabilité).

$$6.1.2. \quad Ad(A) = \sup_{j=1,n} (\mu_A(x_j) \cdot f(x_j))$$

définit selon KAUFMANN l'*admissibilité* de A ou la contingence "sup-prod".

### 6.2. Opérateurs de nécessité.

De la même façon on peut associer à l'opérateur INF des opérateurs divers.

Par dualité, on peut tirer de la notion de possibilité :

$$\forall A \in \mathcal{P}(E) \quad Nec(A) = 1 - \Pi(\bar{A}) \quad \text{où } \Pi = \text{contingence mathématique de } \bar{A}$$

si nous posons :

$$\forall x_j \in E \quad f_{\bar{A}}(x_j) = 1 - f_A(x)$$

alors :

$$Nec(A) = \inf_{j=1,n} (\mu_A(x_j) \vee 1 - f_A(x))$$

qui définit la nécessité du sous-ensemble flou A en fonction de sa répartition de possibilité.

6.5. Appliquons ces notions à un exemple

Reprenons l'exemple cité dans le tableau IV 6

N°	Quartiers flous	f(x)	$\mu(x)$	Prod	Min	1-f(x)	MAX $\mu(x), 1-f(x)$
1	Gare	0.4	0.5	0.2	0.4	0.6	0.6
2	Ville allemande	0.7	0.2	0.14	0.2	0.3	0.3
3	Ville française	0.7	0.3	0.21	0.3	0.3	0.3
4	Quartier Serpenoise	1	0.8	0.8	0.8	0	0.8
5	Quartier Cathédrale	0.7	0.3	0.21	0.3	0.3	0.3
6	Quartier Av. Foch	0.9	0.3	0.27	0.3	0.1	0.3
7	Outre Seille	0.3	0.1	0.3	0.1	0.7	0.7
8	St Louis-St Jacques	0.9	0.8	0.72	0.8	0.1	0.8
9	Ste Croix	1	0.1	0.1	0.1	0	0.1
10	Place Comédie	1	0.1	0.1	0.1	0	0.1
11	Quartier St Vincent	1	0	0	0	0	0

Soit A l'événement flou : extension du centre-ville de Metz concernant les onze quartiers cités.

6.3.1. Contingence

$$C(A) = \bigvee_{i=1}^{11} \left( \mu_A(x_i) \wedge f(x_i) \right) = 0.8$$

6.3.2. Admissibilité de l'événement A

$$Ad(A) = \bigvee_{i=1}^{11} \left( \mu_A(x_i) \cdot f(x_i) \right) = 0.8$$

6.3.3. Nécessité de l'événement A

$$Nec(A) = \bigwedge_{i=1}^{11} \left( \mu_A(x_i) \vee 1-f_A(x_i) \right) = 0$$

6.4. Conclusion

Nous avons donc à notre disposition un ensemble de mesures floues de sous-ensembles à la fois imprécis et incertains.

6.4.1. La *possibilité* donne les chances maximales de réalisation de l'événement flou A (ici  $\text{Pos}(A) = \text{Ad}(A)$  car la fonction de possibilité = 1 pour le quartier 4 pour lequel nous sommes sûrs de l'appartenance au centre-ville).

6.4.2. La *nécessité* donne la valeur minimale de la chance de réalisation de l'événement A. Ici  $\text{Nec}(A) = 0$  du fait de l'intégration du quartier 11 qui n'appartient pas au centre-ville.

6.4.3. Ces mesures sont d'un grand intérêt : réalisées toutes les trois sur un sous-ensemble flou elles permettent de définir en quelque sorte un créneau, un intervalle borné supérieurement par la possibilité, borné inférieurement par la nécessité de l'événement flou A.

Nous pouvons en conclure que la réalisation de l'événement flou A (ici la détermination du centre-ville) a pour valeur l'intervalle  $[\underline{\text{POS}}(A), \underline{\text{Nec}}(A)] \subseteq [0, 1]$ , retombant ainsi sur la théorie des sous-ensembles  $\Phi$ -flous définis au chapitre III.

6.4.4. Grâce à ces mesures d'autre part, il devient possible de comparer deux sous-ensembles à la fois imprécis et incertains ce qui, sans ces mesures, serait tout à fait impossible. Nous aborderons ce point dans le paragraphe suivant.

### III - Notions d'indépendance de sous-ensembles flous et notion dérivée de non-corrélation spatiale

Notre souci est de fournir un outil mathématique de traitement des sous-espaces à la fois imprécis et incertain. La détermination des mesures floues de possibilité, de nécessité, d'admissibilité répond en partie à cette préoccupation.

Définir à présent la notion d'indépendance entre deux sous-ensembles flous revient à mettre en évidence, pour les sous-espaces flous, la notion de "corrélation spatiale" entre ces espaces. Nous ne développerons pas ce point, nous contentant de citer les principales formulations de cette indépendance spatiale.

D'une façon générale soit

$\underline{F}$  un semi-corps de BOREL  
A et B sous-ensembles flous  
 $A \in \underline{F}$   
 $B \in \underline{F}$

### 1. Indépendance de type MIN

A et B sont MIN indépendant pour une valuation v si  
 $v(A \cap B) = v(A) \wedge v(B)$

Cette notion, introduite par KAUFMANN suppose donc la détermination pour A, B,  $A \cap B$  d'une valuation v et la mise en évidence de la relation ci-dessus. Si elle est vérifiée A et B sont MIN indépendants c'est-à-dire, selon nous, que l'autocorrélation spatiale entre les sous-espaces flous A et B est nulle.

### 2. Indépendance de type PROD

Deux sous-ensembles flous sont PROD. indépendants pour une valuation v si :

$$v(A.B) = v(A) . v(B)$$

### 3. Applications aux mesures floues d'incertitude présentées ci-dessus.

#### 3.1. Indépendance si v est une possibilité

Soit v mesure floue de la possibilité de A et B c'est-à-dire contingence mathématique max. de ces sous-ensembles et de leur intersection.

A et B sont indépendants ou non interactifs selon leur contingence mathématique si

$$c(A \cap B) = c(A) \wedge c(B)$$

#### 3.2. Indépendance ou non-interactivité MAX-Prod.

Si v est une mesure d'admissibilité, il y a non-interactivité mathématique MAX-Prod. entre A et B si

$$Ad(A.B) = Ad(A).Ad(B)$$

Ainsi, selon les mesures floues d'incertitude appliquées aux sous-espaces géographiques flous (c'est-à-dire imprécis et incertains) nous pouvons définir l'existence ou la non-existence d'une autocorrélation spatiale, répondant ainsi à une des préoccupations essentielles du géographe s'occupant d'analyse spatiale et de régionalisation.

#### CONCLUSION DU CHAPITRE IV

La théorie des sous-ensembles flous offre ainsi un ensemble méthodologique propre à traiter les espaces géographiques imprécis, de quelque nature qu'ils soient. Elle s'appuie sur un ensemble de concepts de base très précis qui établissent une distinction formelle très nette entre mesures de probabilité, applicables seulement à des espaces géographiques précis, ou (mais avec des propriétés plus faibles) à des espaces flous. Les théories des possibilités et celle des nécessités répondent, elles, parfaitement à nos préoccupations d'analyse des espaces flous.

Nous pouvons ainsi dire :

"Il est possible que l'aire de recrutement de la clientèle s'étende jusqu'à telle limite avec un degré de 0.7 par exemple"

Le terme *possible* revêt ainsi en mathématique les mêmes significations que dans le langage courant, à savoir :

1. "possible" = concevable pour l'esprit.

D'où : "il semble parfaitement concevable que l'aire de recrutement aille jusqu'à tel endroit"

2. "possible" = réalisable" concrètement.

D'où : "en faisant des efforts (prix, publicité...) l'aire de recrutement des clients pourra s'étendre jusqu'à telle limite.

Dans les deux cas, ce terme indique, en mathématique comme dans le langage courant, une sorte de limite MAX à atteindre pour la réalisation d'un projet ou l'organisation d'un espace incertain.

La notion de mesure de nécessité est, en mathématique du flou comme dans la vie courante, la notion duale de celle de possibilité. Elle implique un degré Min de certitude quant à un espace géographique flou, une "base" (même nulle, nous l'avons vu dans notre exemple) sur laquelle fonder une affirmation relative à une organisation spatiale. Représenter l'espace dominé par un centre urbain et affirmer :

"La nécessité de l'étendue de cet espace régional est de 0.3" revient à définir la certitude MIN que nous avons d'affirmer l'existence

d'un tel espace, à la fois imprécis et incertain.

Selon nous, et en conclusion, il importe alors de définir le sous-ensemble ainsi étudié comme un sous-ensemble  $\Phi$ -flou parfaitement défini par l'intervalle  $[\underline{\text{Pos}}(A), \underline{\text{Nec}}(A)]$ . Nous définirons alors la mesure d'incertitude de ce sous-espace A par cet intervalle, sachant bien qu'en mathématique comme dans le langage courant :

"In medio stat veritas".

## CONCLUSION DE LA PREMIERE PARTIE

Dans la démarche géographique "classique", la notion d'imprécision, loin d'être méconnue ou niée, est une préoccupation majeure et une difficulté réelle dans toute analyse spatiale soucieuse de régionaliser l'espace géographique.

Cette préoccupation est le plus souvent occultée, soit par les nécessités liées à l'utilisation de méthodes d'investigation ne se prêtant que mal au traitement de l'imprécision, soit, pensons-nous, par les structures-même du raisonnement géographique, imprégné de cartésianisme, soucieux de classifications binaires et sans ambiguïté, désireux d'appliquer à l'espace son exigence de clarté et de rigueur.

Nous avons cherché, dans cette première partie, à proposer une autre logique de l'approche géographique, à considérer l'imprécision et l'incertitude comme des propriétés inhérentes à l'espace géographique lui-même. Les nier ou les occulter revient selon nous à trahir ou, en tous cas, à appauvrir considérablement l'information spatiale.

Dès lors, notre démarche devenait logique, sinon aisée : proposer au départ une axiomatique de l'espace géographique englobant ces notions d'imprécision et d'incertitude dans les fondements mêmes de l'espace géographique, puis proposer, en un ensemble de trois chapitres successifs une étude axiomatique, mathématique et géographique des différents types d'espaces : espace précis, espace imprécis, espace incertain, qui tous sont des cas particuliers d'espaces géographiques.

Cette autre logique proposée ici s'appuie sur d'autres, et de nouvelles méthodes et techniques d'investigation que représentent la théorie des sous-ensembles flous et des possibilités. Grâce à elle nous avons pu formaliser l'imprécision et l'incertitude spatiales d'une part, mais aussi et surtout déduire de cette formalisation des éléments pour une analyse spatiale de l'imprécis et de l'incertain qui, sans cet apport, n'aurait pas pu être réalisée.

Il s'agit donc selon nous, bien plus que d'un raffinement de la méthode géographique classique d'analyse spatiale, de notations nouvelles qui permettent d'appréhender l'espace géographique dans toute

sa complexité. Nous en tirons une appréhension et une utilisation des connaissances géographiques à la fois plus complètes, plus nuancées, plus riches tout en étant fondamentalement scientifiques.

DEUXIEME PARTIE

MODELES DE TRAITEMENT DES ESPACES GEOGRAPHIQUES FLOUS

ANALYSE FORMELLE ET EXEMPLES D'APPLICATION GEOGRAPHIQUE

## INTRODUCTION A LA DEUXIEME PARTIE

Dans la première partie de ce travail, nous avons essayé de présenter une nouvelle approche logique de la notion d'espace géographique, en proposant la notion d'espace géographique flou.

Cette notion s'appuie sur une axiomatique à la fois précise et suffisamment générale pour englober la notion d'espace géographique précis et celle d'espace géographique imprécis et (ou) incertain. La théorie des sous-ensembles flous et celle des possibilités nous en a permis une formalisation rigoureuse, élargissant de ce fait le domaine d'investigation de tout chercheur soucieux d'analyse spatiale aux espaces qui, d'emblée, ne semblaient pas pouvoir être formalisés rigoureusement.

Nous cherchons à présent à élaborer des modèles de traitement mathématique des espaces géographiques flous. Cette démarche nous semble fondamentale car les modèles "classiques", les démarches méthodologiques habituelles sont, nous l'avons vu, parfaitement adaptés aux espaces géographiques précis, mais inapplicables dans l'analyse des espaces flous : les utiliser revient à dénaturer l'espace géographique, à lui faire perdre ses propriétés fondamentales d'imprécision et (ou) d'incertitude.

Il nous semble donc indispensable de réfléchir à la mise au point de modèles spécifiques de traitement des espaces géographiques flous. Loin de contredire ou de nier les modèles classiques, ils permettront à notre avis un élargissement considérable de notre champ d'investigation.

Pour ce faire, nous procéderons en quatre étapes.

En premier lieu, dans le chapitre V, nous réfléchirons sur la notion d'*espace géographiquement représenté*. Cette expression signifie pour nous simplement que tout géographe travaille, non sur l'espace géographique lui-même, mais sur *les représentations de cet espace* et cherche à élaborer lui-même de telles représentations pour transmettre

à autrui l'information spatiale qu'il a pu collecter (BERTIN 1977). Ces documents sont nombreux et se diversifient de plus en plus : cartes, photographies aériennes ou autres, données statistiques, graphiques ou iconographiques. Ils sont tels qu'à l'imprécision et (ou) l'incertitude propres à l'espace géographique s'ajoute l'imprécision et parfois l'incertitude propre au document lui-même : une photographie aérienne présente des déformations sur les bords de la photographie, là où la prise de vue n'est plus verticale, une carte mentale est déformée par rapport à la réalité, une série statistique est perturbée du fait de choix de limites de classes plus ou moins pertinentes.

Toutes ces "perturbations" ajoutent une imprécision supplémentaire à l'imprécision spatiale elle-même ; le chapitre V s'efforcera de formaliser ces notions à l'aide des éléments tirés de la théorie de transmission de l'information et de traitement du signal et dégagera leurs implications géographiques.

Le chapitre VI sera consacré à l'étude de ce que nous appellerons *les espaces représentés objectifs* c'est-à-dire pour lesquels nous pouvons dire que le document reflète "objectivement" l'espace géographique : l'information géographique y est codée (formes de végétation, types d'habitat, types de voies de communication) et simplifiée, dans un autre ordre d'idée une photographie aérienne est une représentation fidèle des informations spatiales non triées, une série statistique obtenue à partir de données mesurables peut elle aussi être qualifiée d'"objective".

Cette objectivité est naturellement toute relative : déformations photographiques, distorsions statistiques, simplifications de représentations ne sont pas toujours gratuites, ni innocentes, il n'en est pas moins vrai que le chercheur peut reconstituer sans trop de difficulté l'espace géographique, comme le souligne avec humour MARCHAND (1972) pour les données statistiques : "La méthode statistique permet de déduire une valeur exacte de chiffres tous faux" !

Reste cependant à prendre en compte l'incertitude et l'imprécision spatiales : ce sera la préoccupation que nous aurons en proposant des modèles de traitement d'espaces représentés objectifs ; ce fut également la préoccupation de PONSARD et TRANQUI dont nous citerons les

travaux et qui ont apporté une réponse au problème de régionaliser l'espace imprécis par la mise au point d'un modèle de classification floue.

Que dire des *espaces représentés subjectifs* présentés dans le chapitre suivant ? Le document de travail est ici livré sans "clé" pourrions-nous dire, sans codage ni information sur le filtre spatial. Les cartes mentales, les descriptions d'espaces vécus, les relations de voyageurs sont bien des espaces représentés, mais le passage à l'espace géographique est difficile ; l'espace représenté s'apparente alors à l'image d'un homme renvoyée par un miroir déformant, mais aux déformations irrégulières, anarchiques selon les endroits.

Là encore, alors que toute analyse spatiale rigoureuse, toute méthode de quantification semblent impossibles, la théorie des sous-ensembles flous permet de proposer des modèles de valuation rigoureuse et d'étudier structure et configuration de l'espace géographique au-delà de la subjectivité de l'espace représenté.

Dès lors, le traitement des espaces perçus et vécus peut se faire avec une méthodologie parfaitement appropriée et qui permet une analyse spatiale rigoureuse et *précise* d'un espace représenté fondamentalement imprécis et incertain. Il s'agit donc bien là d'une extension du champ d'investigation de la science régionale.

A la limite, on pourrait encore imaginer un traitement des espaces représentés subjectifs que sont les "espaces légendaires", terres de contes et de légendes, de récits où réel et imaginaire se mêlent et interfèrent. A ces confins du domaine scientifique, il semble encore possible d'exprimer une formalisation, faible certes, mais réelle, des structures spatiales. Nous arrivons bien aux limites où la science et l'art sont liés en une frontière imprécise où la certitude se dilue au profit du rêve et de l'imaginaire, où le possible le dispute au certain. Là s'arrêtera notre investigation des recherches de la structure formelle d'un espace à travers un espace représenté subjectif.

Nous illustrerons notre propos par *l'étude d'un exemple qui occupera le chapitre VIII*. Nous y définirons à la lumière des chapitres précédents, un modèle de valuation d'un espace subjectif qui est celui

du centre-ville de Metz ou à travers un ensemble de cartes mentales. De la mise au point du modèle et son application aux cartes mentales, nous poursuivrons notre quête et chercherons à dégager la configuration de l'espace messin tel qu'il est vécu et à en dégager les traits originaux. Cet exemple très limité certes, nous semble important car révélateur de toute notre démarche d'analyse spatiale : partant d'un pré-supposé d'imprécision et d'incertitude, il s'agissait bien pour nous de définir un espace géographique en nous appuyant sur ce pré-supposé et en adaptant notre méthode de travail et de recherche. Les résultats semblent confirmer la validité de cette démarche.

Cette démarche ne risque-t-elle pas cependant de paraître dangereuse, de sembler privilégier, comme on nous l'a fait remarquer, le "flou" dans tout ce que ce terme a de péjoratif aux dépens de la clarté, de la transparence de l'espace ? Existe-t-il un risque dans l'étude des espaces représentés subjectifs, de privilégier la microgéographie aux dépens de La Géographie, de pratiquer un réductionnisme s'attachant au fugace, au personnel, à l'accidentel aux dépens des structures permanentes, profondes, fondamentales et globales ? Ne risquons-nous pas de tomber dans une "psychogéographie" de pacotille ? Rejeter en bloc ce genre de craintes serait non scientifique. Elles doivent plutôt nous stimuler pour ne pas perdre de vue la préoccupation essentielle de tout analyste spatial.

Cette dernière est formulée ici par C. PONSARD :

"ses modèles (de la science) transfigurent la réalité dans le même temps où ils en énoncent les lois cachées".

Dans cette optique, notre quête de l'imprécis n'est ainsi qu'une étape vers la découverte des "lois cachées" et rejoint ainsi l'objet fondamental de la recherche géographique.

## CHAPITRE V

LES ESPACES GEOGRAPHIQUES REPRESENTES :

REFLEXIONS SUR LA COMMUNICATION DE  
L'INFORMATION SPATIALE GEOGRAPHIQUE

A - L'ESPACE GEOGRAPHIQUE REPRESENTE, SUPPORT DE L'ANALYSE SPATIALE

B - DE L'ESPACE GEOGRAPHIQUE A L'ESPACE GEOGRAPHIQUE REPRESENTE : OU  
NOTIONS SUR LA TRANSMISSION DE L'INFORMATION GEOGRAPHIQUE

## A - L'ESPACE GEOGRAPHIQUE REPRESENTÉ, SUPPORT DE L'ANALYSE SPATIALE

### I - Notion d'espace géographique représenté

#### 1. Approche et définition

L'analyse spatiale, qu'elle soit économique géographique ou qu'elle réponde à d'autres préoccupations, est réalisée à partir de documents de types divers qui prétendent représenter l'espace géographique.

En d'autres termes nous n'étudions pas l'espace géographique proprement dit, mais bien une représentation de cet espace, une traduction en un "langage" codé de l'information spatiale.

Cette notion est très couramment admise et de nombreux travaux (HAGGETT 1973, UNWIN 1981 entre autres, mais aussi CICERI, MARCHAND, RIMBERT 1977) sont consacrés à l'analyse spatiale à partir de documents statistiques, cartographiques ou autres, insistant sur la démarche d'analyse et la méthodologie à appliquer.

Nous formalisons cette notion en définissant *un espace géographique représenté* comme une *traduction* de l'information spatiale, réalisée selon un "langage" donné (graphique, cartographique, digital numérique ou autre), qui aboutit, par une *formulation* cohérente, compréhensible et ordonnée de cet espace géographique à l'élaboration d'un *document géographique*.

#### 2. Les types d'espaces géographiques représentés

La typologie peut s'appuyer en l'élargissant, sur la distinction précisée par RIMBERT (1973) à propos des cartes géographiques.

2.1. Un espace géographique représenté de type documentaire est tel que la traduction géographique aboutit à la création d'un document de première main. Ainsi pourrions-nous parler :

- d'un espace cartographié (carte topographique, géologique, géomorphologique ou autre)
- d'un espace photographié (photo aérienne verticale ou oblique, document de télédétection)
- d'un espace statistique dans le cas où l'espace représenté l'est par des séries statistiques relatives à la structure géographique (Matrice d'information spatiale définie par BERRY, RACINE, REYMOND).

2.2. Un espace géographique représenté de type conceptuel. La traduction spatiale s'attache ici à mettre en évidence un ou plusieurs thèmes :

- espace cartographié thématique (RIMBERT 1968)
- espace photographié avec des techniques visant à trier l'information spatiale : photographies aériennes à l'infra-rouge, reconstitution sélective de données digitalisées enregistrées par des satellites (Landsat, par exemple) pour mettre en évidence tel ou tel fait géographique (habitat, formations végétales, ressources en eau).
- espace statistique multivarié tel qu'il est mis en évidence dans les plans factoriels lors d'une analyse de données (CAILLIEZ-PAGES 1976 et autres ouvrages d'analyse de données).

2.3. Un espace représenté de type esthétique, où le document est une œuvre d'art : elle peut être description littéraire, romancée, poétique ou autre de la réalité géographique. A.S. BAILLY (1977) montre ainsi que le roman contemporain restitue les images traditionnelles de la ville ; la littérature romanesque du XIXe siècle est en fait source de renseignements sur les villes et les campagnes de cette époque. Elle peut également être une évocation picturale ou graphique de l'espace géographique : la "traduction" est plus ici une *transposition* de l'espace géographique qu'un effort de reconstitution fidèle de cet espace ; mais le "message spatial" est encore présent et peut être décrypté. Evoquons à titre d'exemple la "peinture" publicitaire des "pays du soleil" destinée à attirer rêves et besoins de nos contemporains. MOLES (1982) propose à ce sujet une analyse psychologique d'un type d'espace qui est l'"île", en dégage un archétype représentatif de la société de consommation des

loisirs. Au-delà de cette évocation, l'espace de l'île tropicale est évoqué et décrit.

2.4. Nous ajouterons à ce type la notion d'espace représenté subjectif tel que nous l'étudierons dans le dernier chapitre de cet ouvrage. Il s'agit d'espace perçu ou vécu représenté par une carte mentale. La traduction spatiale est totalement subjective et rend a priori toute reconstitution de l'espace géographique difficile, voire impossible.

Il est évident que dans les deux derniers cas évoqués, nous sommes à la "limite floue" de la notion d'espace géographique, dans cette zone d'incertitude où la frontière entre espace géographique et espace imaginaire est difficile à cerner. Il n'empêche cependant que ces types présentent tous les caractères géographiques et formels des espaces géographiques représentés. Nous allons à présent énumérer ces derniers.

### 3. Les caractères géographiques de l'espace géographique représenté

De la définition posée dans le paragraphe 1, nous pouvons énoncer deux caractères en apparence contradictoire des espaces géographiques représentés.

D'une part la "formulation cohérente et ordonnée" de l'espace géographique impose si nécessaire une simplification de l'information spatiale ou en tous cas un choix nécessaire de l'information à retenir.

D'autre part la nécessaire "traduction" de l'information spatiale entraîne des imprécisions ou des incertitudes dans la restitution du fait spatial.

Développons ces deux notions.

#### 3.1. C'est une représentation simplifiée de l'espace géographique

##### 3.1.1. Un espace géographique est représenté

en général dans un espace planaire qui en facilite l'étude et l'analyse. Cartes et photographies aériennes ramènent l'espace géographique à  $\mathbb{R}^2$  selon des méthodes de projection de types divers (projections polaire, équatoriale, conique ou autres).

Cette tendance est également celle de l'analyse des données qui permet de passer des espaces mathématiques difficilement concevables que sont l'espace des observations  $\mathbb{R}^n$  et l'espace des variables  $\mathbb{R}^p$  selon les notations classiques, à  $\mathbb{R}^2$ , espace des plans factoriels dans lequel on projette observations et variables (cas de l'analyse en composantes principales). L'analyse spatiale multivariée est donc ramenée à une analyse dans un espace aisément perceptible.

3.1.2. La représentation simplifiée de l'espace géographique est également due à l'abandon progressif d'éléments de la structure géographique ou du moins à un choix raisonné d'éléments à représenter en fonction du choix de l'échelle. Comme le note DOLLFUS (1970) :

"à chaque échelle correspond un mode de représentation qu'il n'est pas toujours possible de transcrire à d'autres échelles...

... L'analyse et la compréhension des phénomènes localisés dans l'espace géographique passe nécessairement par l'utilisation de documents cartographiques où sont sélectionnés et figurés des éléments de nature différente en fonction des échelles employées".

Cet auteur résume en un tableau dont nous reprenons les grands traits cette simplification progressive de l'espace géographique en fonction de l'échelle ; il y distingue des ensembles spatiaux en liaison avec leurs ordres de grandeur et l'échelle de l'étude (ensembles dis-joints mais où notre réflexion sur les limites imprécises pourrait fort bien s'appliquer, le passage d'une classe à une autre étant progressif et non brutal).

TABEAU V I

Simplification de l'espace représenté  
selon l'échelle d'étude (d'après DOLLFUS)

Classe	Dénomination	Exemple	Ordres de grandeur	Echelle
1.	Zone	Zone tropicale	$10^7$ km <sup>2</sup>	$1/10^7$
2.	Domaine	Espace rhénan	$10^6$ km <sup>2</sup>	$1/10^6$
3.	Province	La France méditerranéenne	$10^5$ km <sup>2</sup>	1/500.000
4.	Région	Champagne	$10^4$ km <sup>2</sup>	1/200.000 1/100.000
5.	Pays	Vignoble Champenois	500 à 1 000 km <sup>2</sup>	1/50.000 1/20.000
6.	Quartier	Quartier urbain	5 à 50 km <sup>2</sup>	1/20.000 1/5.000
7.	Ilot	Ilot urbain	1 ha à 1 km <sup>2</sup>	1/2.000 1/1.000
8.	Parcelle	Immeuble Parcelle rurale	1 a à 1 ha	1/500 1/100

3.1.3. Cette simplification revêt enfin la forme d'une généralisation du fait géographique à représenter.

L'information géographique peut ainsi être codée (grands types de formations végétales sur les cartes topographiques au 1/50.000e par exemple) ou regroupée en classes (classification des éléments d'un espace selon un attribut géographique et représentation des classes). Ces procédés représentent deux formes particulièrement usitées de simplification de l'espace géographique représenté.

En conclusion on notera que toute simplification s'accompagne évidemment d'une perte d'information par rapport à l'espace géographique. Cette dernière mesure ainsi le degré d'adéquation de l'espace géographique représenté à l'espace géographique. Il faut donc noter que travailler sur un espace géographique représenté revient donc à travailler sur une représentation spatiale simplifiée sinon appauvrie de la réalité géogra-

phique.

3.2. C'est une représentation souvent imprécise, parfois incertaine, de l'espace géographique.

Effectivement à l'imprécision et (ou) l'incertitude qui caractérise l'espace géographique (comme on l'a vu dans la première partie) s'ajoutent l'imprécision du procédé de représentation spatiale et parfois l'incertitude quant à la reconnaissance des formes géographiques représentées.

Toute représentation spatiale passe forcément par un mode de représentation qui peut perturber, déformer, brouiller l'information donnée par l'espace géographique. RIMBERT (1973) parle du "bruit" qui brouille les cartes ; on peut généraliser cette notation en estimant que toute information géographique est ainsi perturbée par des "bruits" de types divers.

3.2.1. *Ces bruits peuvent être dus à une mauvaise "saisie" ou à des mesures trop grossières du fait géographique.* Ainsi WILMET (1981) note que les satellites américains Landsat d'étude des ressources terrestres captent l'information d'unités élémentaires d'information que sont les pixels dont les dimensions au sol sont de 79 x 57 m. L'information géographique digitalisée à raison d'un octet par pixel est entachée d'un certain nombre d'imperfections qui perturbent l'information initiale :

- "erreurs techniques" dues au système lui-même (défaillances momentanées de l'enregistrement ou du captage au sol).

- bruits liés à la transmission de l'information (perturbations liées au passage dans l'atmosphère, au système d'enregistrement etc.).

- capteurs de radiance terrestre trop peu sensibles.

- "grossièreté" (toute relative) de la méthode de télédétection liée au contraste des réflectances des pixels plus qu'aux réflectances absolues de ces unités spatiales.

- limites "sensorielles" des capteurs qui vont du vert à l'infrarouge, mais sont "insensibles" au bleu et au violet et seront donc moins discriminants pour les surfaces sombres et zones à l'ombre.

- enfin perte d'information liée au traitement éventuel de l'information sous forme d'images par le passage au support photographique (CANNON, HUNT 1981).

Cet exemple est caractéristique de l'introduction de l'imprécision, voire de l'incertitude dans l'espace géographique représenté, et ce, du simple fait de la transmission de l'information.

Poursuivant ce raisonnement il s'agira donc de proposer des modèles de traitement de l'espace représenté tenant compte de ce facteur d'imprécision. Ainsi JEANSOULIN (1982) a mis au point une méthode de reconnaissance automatique de parcellaire à partir de documents de télédétection, en s'appuyant sur la théorie des sous-ensembles flous.

3.2.2. Ces "bruits" peuvent également être liés à des distorsions, déformations, amplifications ou occultations de l'information géographique du fait d'une perception ou d'un vécu spatiaux propres à chaque individu. Nous abordons là le domaine de la perception spatiale où chaque individu appréhende l'espace selon sa personnalité, son expérience, l'"ambiance culturelle" dans laquelle il est inséré etc. La "qualité" de l'espace représenté n'est plus liée à des conditions technologiques mais à des facteurs humains beaucoup plus difficiles à mesurer. D'objectif, l'espace représenté devient subjectif ; là encore il nous appartiendra de proposer des modèles de traitement susceptibles de prendre en compte leur imprécision et leur incertitude.

### 3.3. Conclusion

Ces deux caractères quasi opposés soulignent à notre avis l'ambiguïté de la démarche géographique "classique". Celle-ci s'appuie essentiellement sur des espaces géographiques représentés "précis", résultant d'un choix raisonné de l'information spatiale, d'une "mise en ordre" de la réalité géographique, d'une expression cohérente de cette réalité par des cartes, des séries statistiques constituant une matrice d'information spatiale. Elle s'avère impuissante à appréhender entièrement l'imprécision et l'incertitude de documents géographiques tels que les cartes mentales ou autres représentations "perturbées" de l'espace géographique. Il s'agit donc, lors d'une analyse

spatiale de tenir compte, si nécessaire, du "flou" résultant de la définition de l'espace géographique à étudier.

Formalisons les notions présentées ci-dessus.

#### 4. Formalisation de la notion d'espace géographique représenté

Soit  $E_{GR}$  l'espace géographique représenté

et  $E_G$  l'espace géographique

Rappelons :

$$E_G = (E, S, C, R,)$$

où E : sous-ensemble flou de  $\underline{E}$  espace-référentiel

S : structure floue de l'espace géographique

C : configuration floue

R : relation floue entre tout couple de sites de l'espace géographique.

Nous définirons l'espace géographique représenté par :

$$E_{GR} = (E_R, S_R, C_R, R_R)$$

4.1. L'espace géographique représenté est un ensemble  $E_R$  fini, de composantes spatiales. Dans le cas où  $E_{GR}$  est une représentation, sans imprécision ni incertitude, de l'espace géographique :

$$\underline{E}_R = \{c_i, i \in \underline{I} \text{ ensemble fini d'indices}\}$$

Nous appelons *composante spatiale* c l'unité élémentaire d'information spatiale de l'espace géographique.

4.1.1. Une composante spatiale peut être un lieu ou site tels qu'ils ont été définis plus haut. Dans ce cas :

soit  $\text{Card } \underline{E}_R = \text{Card } E$  si l'espace représenté est une traduction exhaustive et non triée de l'espace géographique

soit  $\text{Card } \underline{E}_R < \text{Card } E$  si on a procédé à un choix de sites, pratiquant ainsi ce que UNWING (1981) appelle :

"a scale change, a selection of materials and some generalization"

4.1.2. Une composante spatiale peut également représenter une réunion d'unités spatiales élémentaires résultant de

contraintes techniques ou d'une volonté délibérée de généralisation. JEANSOULIN (1982) regroupe ainsi sur les documents issus de télédétection les pixels en *entités* définies comme des ensembles contigus de pixels ayant même réflectance, et propose un traitement de ces entités considérées comme des unités spatiales.

HAGGETT (1973) procède de la même façon en proposant l'utilisation de grilles de découpage spatial ; il crée ainsi volontairement des unités spatiales normalisées dont l'analyse et l'étude comparatives se trouvent facilitées.

4.2. L'espace géographique représenté est un ensemble  $E_R$  de composantes spatiales imprécises ou incertaines, ou les deux à la fois.

4.2.1. Fonction d'appartenance d'une composante à  $E_R$ .

Supposons que pour un espace géographique donné nous disposions d'un document représentant cet espace sans distorsion, ni lacunes, ni "bruits", ni simplification généralisatrice. Nous serons en présence d'un document (idéal), "représentation" exacte, à une échelle donnée, de l'espace géographique.

Soit  $\underline{E}_{GR}$  un tel document.  $\underline{E}_{GR}$  représente ainsi un "référentiel-documentaire". On peut alors définir :

$E_R$  comme un sous-ensemble flou de  $\underline{E}_{GR}$

tel qu'à chaque composante spatiale de  $\underline{E}_{GR}$  est associée sa fonction d'appartenance à  $E_R$ . La valeur d'appartenance dépend évidemment de l'importance plus ou moins grande du "bruit" qui perturbe la transmission de l'information géographique. Alors :

$$\forall c_i \in E_R = \left\{ \left( c_i, \mu_{E_R}(c_i) \right), i=1, \dots, n \right\}$$

$$\mu_{E_R} : \underline{E}_{GR} \longrightarrow \underline{M} = [0, 1]$$

$$c_i \in \underline{E}_{GR} \longrightarrow \mu_{E_R}(c_i) \in [0, 1]$$

#### 4.2.2. Notion de fonction d'incertitude

La transmission de l'information peut aussi être perturbée au point que l'observateur n'est plus sûr de l'appartenance d'une composante spatiale à  $E_R$ . En effet une information "parasite" peut produire une représentation erronée de l'espace géographique.

Nous sommes ainsi amenés à associer à chaque composante spatiale une fonction d'incertitude qui représente notre degré de méconnaissance de l'appartenance de cette composante à l'espace géographique représenté.

#### 4.3. Conclusion

En conclusion, à chaque composante spatiale  $c_i$  d'un espace géographique représenté : photographie, carte, description littéraire, picturale, carte mentale ou autre document, on associera éventuellement :

4.3.1. *une fonction d'appartenance  $\mu$  à l'espace géographique représenté*, dont la valeur représente une appréciation quantitative du "bruit" qui perturbe la transmission de l'information spatiale, telle que :

- si  $\mu_{E_R}(c_i) = 1$  : le "bruit" est nul, l'information spatiale est entièrement reproduite dans l'espace géographique représenté
- si  $\mu_{E_R}(c_i) = 0$  : le "bruit" a totalement occulté la transmission de l'information (espace non perçu dans les cartes mentales, composantes spatiales "oubliées" par la saisie de l'information)
- si  $0 < \mu_{E_R} < 1$  : le "bruit" a filtré l'information spatiale qui n'est que partiellement reproduite dans l'espace géographique représenté.

4.3.2. *Une fonction d'incertitude  $f$  relative à l'appartenance d'une composante à cet espace*. La valeur représente l'estimation par l'observateur de son degré de méconnaissance de cette appartenance. Nous proposons pour  $f(c_i)$  les significations suivantes :

- si  $f(c_i) = 0$  l'observateur estime être sûr que la composante spatiale observée fait partie de  $E_R$ . Dans ce cas la composante est *totale-ment identifiée*.

- si  $f(c_i) = 1$  la composante  $c_i$  n'est pas identifiée. L'incertitude de l'observateur quant à cette composante est entière

-  $0 < f(c_i) < 1$  représente une identification "plus ou moins" sûre et précise de la composante spatiale.

Remarque : ces notions d'imprécision et d'incertitude sont relatives à l'espace représenté ; elles viennent éventuellement interférer et s'ajouter à l'imprécision et à l'incertitude relatives à la structure même de l'espace géographique.

Ainsi l'étude de l'agglomération parisienne d'après des photographies aériennes verra s'associer tous ces éléments de "flou" spatial :

- incertitude et imprécision liées à *la représentation de l'espace* et à la perturbation de l'information spatiale et entraînant des problèmes de photo-interprétation.

- incertitude et imprécision relatives à la nature même de l'espace géographique. C'est ici un espace défini par un prédicat imprécis, donc nous ne sommes pas certains de l'appartenance de tel ou tel lieu à cet espace.

## 5. Les caractères formels induits

5.1. Un espace représenté est défini par une *structure*  $S_R$ , sous-ensemble de la structure spécifique de l'espace, résultat d'un choix délibéré ou imposé du fait des contraintes techniques, des attributs géographiques à retenir et à représenter.

5.2. Il est défini par une *configuration*  $C_R$  souvent floue du fait de l'imprécision et (ou) de l'incertitude de la représentation des composantes spatiales et du fait du :

5.3. choix d'une *relation*  $R_R$  entre tout couple de composantes spatiales. Si  $R$  n'est pas une relation métrique, l'espace représenté prend une configuration déformée par rapport à l'espace géographique traduisant une information originale. Ainsi, dans une étude

sur la "distance-temps", MULLER (1979) obtient des espaces représentés non-euclidiens qui traduisent une autre vision spatiale d'Edmonton, topologiquement équivalente à un plan de la ville, fortement étirée vers le Sud mais de façon inégale, "disloquant" selon l'expression de l'auteur la représentation du tissu spatial.

Le choix d'une relation  $R_R$  apporte ainsi une information originale sur la configuration de l'espace et son organisation.

Les notions d'imprécision et d'incertitude relatives à un espace géographique représenté nous semblent fondamentales dans toute démarche d'analyse spatiale. Effectivement il s'agit d'analyser et de traiter un espace géographique éventuellement flou à travers un document lui-même éventuellement imprécis ou incertain.

La démarche habituelle d'analyse spatiale, même si elle se préoccupe de l'étude d'espaces flous s'attache à l'analyse de documents précis et certains, limitant ainsi singulièrement le champ d'investigation.

Il s'agit selon nous, de proposer des modèles de traitement d'espaces géographiques flous qui, en rejetant ce présupposé de précision et de certitude du document géographique, auront une portée générale du fait qu'ils pourront s'appliquer à tous les types d'espaces géographiques. Le paragraphe II illustrera les différents aspects de cette démarche.

## II - Problématique de l'analyse spatiale à partir d'un espace géographique représenté

### 1. Énoncé général

#### 1.1. Définition

L'analyse spatiale s'exerce sur un espace géographique représenté, flou ou non. Elle cherche à en déduire les caractères d'un espace géographique, flou ou non, selon une structure pré-définie.

## 2. Enoncé d'exemples

1.2.1. "A partir d'une carte topographique au ①  
1/50.000, étudier la Côte de Moselle". ②

Ce schéma d'analyse spatiale peut se résumer en une suite d'étapes :

① Soit un espace géographique représenté non flou

Soit un espace géographique non flou identifié par ② une structure prédéfinie (Cuesta)

③ Dédurre cet espace géographique et ses caractères à savoir :

- sa composition : c'est-à-dire l'ensemble des éléments spatiaux qui le composent.
- sa configuration : forme-étendue-altitude absolues et relatives.
- sa métrique ou en tous cas la notion de "distance" qui structure cet espace.
- sa structure spécifique c'est-à-dire les données physiques (relief, hydrographie, climatologie, végétation), rurales (habitat, occupation du sol), urbaines ou périurbaines et de transport.

1.2.2. "A partir de photos aériennes prises ①  
par Landsat, mettre en évidence les ressources en eau du Far-West amé- ③ ②  
ricain".

Les étapes seront ici plus complexes et nombreuses :

① Soit un espace géographique représenté flou : il s'agit en premier lieu de définir fonctions d'appartenance et d'incertitude (d'identification) de chaque composante spatiale à cet espace représenté

② Soit un espace géographique imprécis (espace bien défini mais aux limites imprécises, voir chap. 3, II, 1) : il s'agit donc de définir la fonction d'appartenance des lieux identifiés à cet espace géographique .

③ Cet espace est défini par une structure imprécise : les ressources en eau peuvent être "plus ou moins" importantes, temporaires ou "plus ou moins" permanentes, "plus ou moins" accessibles etc.

④ Il faudra dégager l'organisation de l'espace, c'est-à-dire préciser :

- sa composition floue
- sa configuration floue
- sa structure spécifique : qualités de sols, végétation

Il faut donc souligner en conclusion de cette approche de la notion d'espace géographique représenté, que cette notion est bivalente

- d'une part un espace géographique représenté peut être non flou, c'est-à-dire qu'aucune imprécision ou incertitude ne vient "perturber" la représentation spatiale, qu'elle soit statistique, cartographique ou autre. Nous parlerons d'*espace représenté objectif* et proposerons dans le chapitre VI des modèles spécifiques de traitement

- d'autre part un tel espace représenté est souvent imprécis et (ou) incertain du fait de limites techniques de communication de l'information spatiale ou de conditions particulières à l'observateur. Nous parlerons d'*espace représenté flou*. Le chapitre VII sera consacré à la présentation de modèles spécifiques de traitement de ces espaces représentés.

Ces modèles s'appuieront tous sur une formalisation dont les termes sont empruntés à la théorie de la transmission des données et de traitement du signal. Les principaux aspects de cette théorie et leurs implications géographiques vont à présent être soulignés.

B - DE L'ESPACE GEOGRAPHIQUE A L'ESPACE GEOGRAPHIQUE REPRESENTÉ :  
QUELQUES NOTIONS SUR LA TRANSMISSION DE L'INFORMATION SPATIALE

I - Présentation générale de la théorie des communications

Nous nous appuyerons, pour cette présentation sur ARQUES (1979), CLAVIER, COFFINET, NIQUIL et BEHR (1979) qui présentent dans leurs ouvrages un exposé exhaustif de cette théorie ; nous n'en retiendrons que les aspects essentiels susceptibles d'aider à la compréhension de la transmission de l'information spatiale géographique.

1. Les concepts de base d'un système de communication de l'information

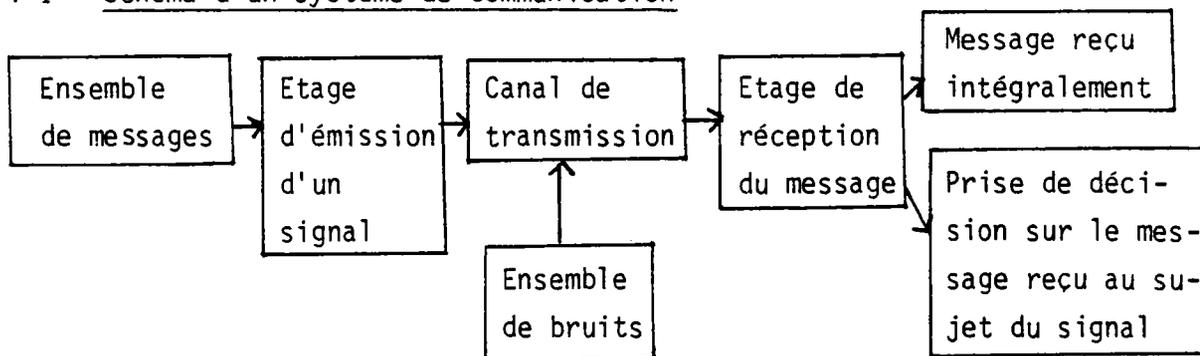
1.1. La théorie des communications s'attache à l'étude de la *transmission* à un observateur, d'un *signal* émis par un *émetteur*. Ce signal peut être perturbé avant sa réception par l'observateur. Ce dernier reçoit donc un *message* :

- analogue au signal émis ou pouvant aisément permettre la déduction du signal émis à partir de ce message si aucune perturbation du signal n'a eu lieu

- perturbé par rapport au signal émis. Dans ce cas l'observateur est tenu à une prise de décision sur le message reçu concernant le signal émis.

1.2. Ces notions sont résumées par :

V I - Schéma d'un système de communication



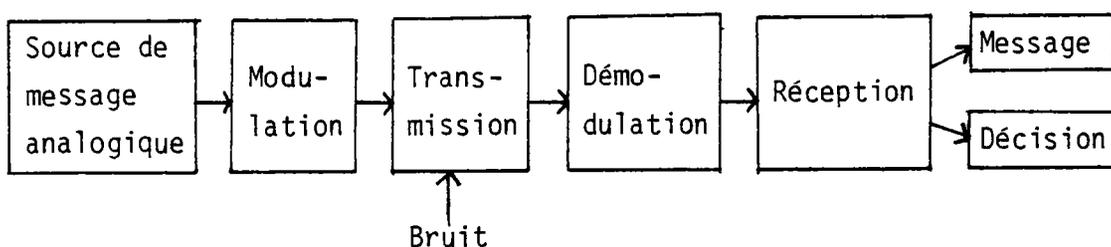
## 2. Notion d'émetteur

Un émetteur peut délivrer plusieurs types de messages :

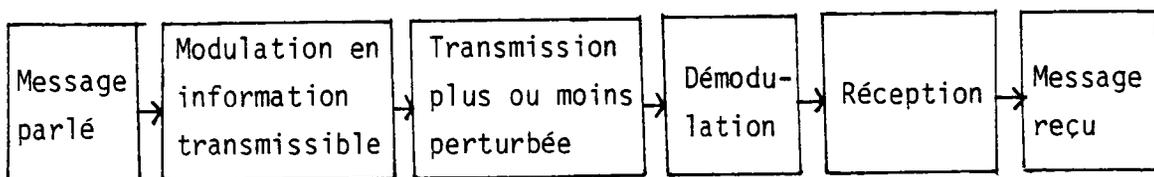
2.1. Messages numériques à valeurs prises dans un ensemble fini et dénombrable : les messages peuvent être binaires comme les informations digitales "émises" par la mémoire centrale d'un ordinateur sur sollicitation de l'unité de commande et de contrôle ; ils peuvent également être numériques (capteurs de température, de radioactivité de roches etc.)

2.2. Messages analogiques : nous pouvons évoquer ici l'information spatiale "perçue" par l'observateur qui l'est sous une forme évidemment non numérique et, d'une façon plus générale, dans la théorie des communications, les messages non numériques (paroles, messages écrits etc.)

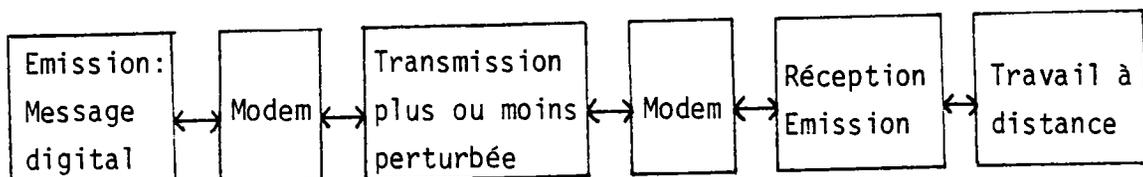
Le système de communication se schématise alors de la sorte :



Ainsi, un système téléphonique répond au schéma correspondant au cas 2.2.



Un système télématique répond au schéma correspondant au cas 2.1.



### 3. Notion de bruit parasite

Nous avons défini plus haut, à propos des photographies aériennes, la notion de bruit parasite (A I 3). Généralisons en notant que le bruit peut être :

- lié au milieu d'émission lui-même et perturber ainsi l'émission même du message ; ARQUES parle de "bruit d'élément" : l'image la plus triviale serait celle d'un message téléphonique mal articulé, bégayé ou bredouillé. Le "message spatial" peut lui aussi être brouillé du fait de l'imprécision même de l'espace géographique : des limites imprécises entre éléments spatiaux parasitent l'émission d'information spatiale.

- lié à la transmission de l'information, et représenter ainsi un "bruit de système", type-même du bruit parasite (impuretés atmosphériques perturbant le captage photographique de l'information spatiale, perturbations atmosphériques brouillant les transmissions de données téléphoniques ou télévisuelles etc).

ARQUES résume ainsi cette notion de bruit :

"On dispose d'un ensemble S de structures et d'un ensemble F d'éléments physiques. On cherche à reconnaître à quelle structure de S appartient un élément physique donné de F. Chaque élément possible est représenté par la quantité reçue par l'observateur, mélange de signal engendré par le représentant de la structure à reconnaître et de bruit parasite. Ce bruit peut être engendré par l'élément physique lui-même, dans le cas où c'est un représentant "imparfait" de la structure, ou engendré par l'ensemble du système de reconnaissance".

Cet auteur introduit ainsi la notion indispensable de prise de décision en traitement du signal.

### 4. Notion de prise de décision en traitement du signal

4.1. "Elle représente la nécessité d'effectuer un choix concernant une ou plusieurs propriétés d'un phénomène utile, à partir d'une réalisation d'un phénomène lié au phénomène utile". (ARQUES 1979)

S'agissant de notre thème, il faudra effectuer, à partir d'un

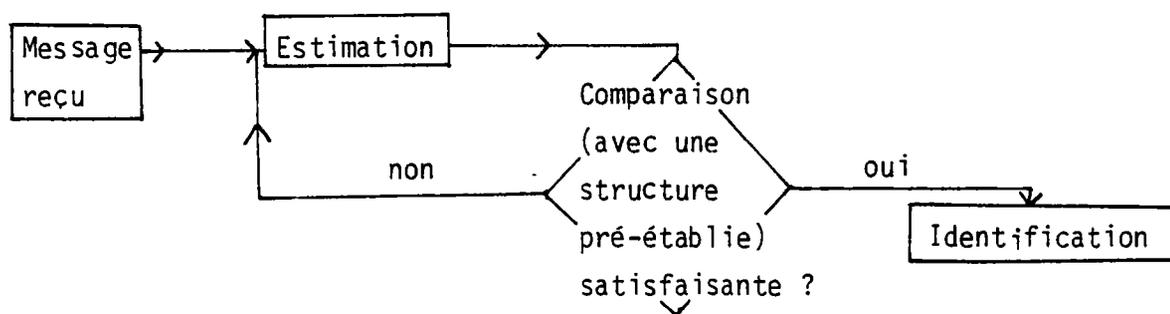
espace géographique représenté, un choix concernant un espace géographique défini par une structure déterminée.

4.2. Si l'espace géographique représenté est *objectif* (non flou), ce choix ne s'avère pas nécessaire. La prise de décision devient simple "inventaire" des éléments de l'espace géographique défini par la structure. La "possibilité" de choix devient "certitude" du bon (et unique) choix.

C'est le cas du travail sur carte topographique, géologique, biogéographique ou autre, c'est le cas également du traitement de séries statistiques non floues.

4.3. Si l'espace géographique représenté est *flou*, ce choix a pour but d'*identifier* l'espace par comparaison avec des structures pré-établies ou des modèles pré-définis. "Reconnaître" et définir un centre-ville revient ainsi par exemple à comparer l'information reçue de l'espace représenté (photographie aérienne, carte mentale) avec une "structure idéale de centre-ville" prédéfinie par le chercheur.

Le déroulement du raisonnement est alors le suivant :



L'analyse spatiale respecte ainsi, plus ou moins implicitement, un modèle général dont nous présentons dans ce qui suit, les principaux termes et les caractères induits.

## II - Modèle général de la démarche d'analyse spatiale

### 1. Présentation du modèle

#### 1.1. Notations préliminaires

- Soit un espace-référentiel  $\underline{E}$  qui sert de "base" à la démarche d'analyse spatiale. Il est défini par  $\underline{E}$  (chapitre I) ensemble que nous supposons fini, de lieux géographiques.

Ainsi  $\underline{E}$  peut être une "portion" de la bordure Est du Bassin Parisien, l'ensemble lorrain par exemple.

- Définissons un attribut  $t$  sur  $\underline{E}$ ,  $t$  représente un caractère géographique de  $\underline{E}$ .

$t$  peut ainsi être un attribut quantitatif ou qualitatif.

- Soit un espace géographique représenté  $E_{GR}$ , carte, photo, ensemble statistique ou autre.  $E_R$ , ensemble fini de composantes spatiales.

Ainsi le tableau portant en ligne des "observations spatiales" et en colonnes des attributs mesurables relatifs à l'ensemble des observations, appelé par REYMOND "matrice d'information spatiale", peut être défini comme un espace géographique représenté statistique.

Dans cet espace, nous définissons, pour l'élément  $x$  de  $\underline{E}$ , et pour l'attribut  $t$ ,

par  $t(x)$  toute notre connaissance de la valeur de l'attribut  $t$  dans l'espace géographique représenté.

Si  $T$  est l'ensemble des valeurs possibles de l'attribut  $t$ ,  $t(x) \in T$ .

#### 1.2. Estimation de la connaissance de l'attribut $t$

Trois cas peuvent se présenter :

##### 1.2.1. Cas d'un espace représenté "objectif"

$$\begin{array}{l} t : \underline{E} \longrightarrow T \\ \forall x_i \in \underline{E} \longrightarrow t(x_i) \quad i \in \underline{I} \text{ ensemble d'indices} \end{array}$$

$t(x_i)$  est une valeur précise de l'attribut  $t$  pour l'élément  $x$ .  $t(x_i)$  est donc un singleton.

Par exemple, on peut associer à chaque élément d'un espace géographique-référentiel, son altitude relevée sur une carte topographique soit par lecture des points cotés, soit par interpolation à partir d'isolignes de niveau.

Ce cas est le plus simple ; il suppose qu'il n'y a aucune perte d'information entre la "réalité géographique" et sa représentation. Nous soulignons que les analyses spatiales géographiques partent le plus souvent de ce présupposé que nous pourrions définir trivialement de présupposé de fidélité absolue de la "reproduction" par rapport à "l'original".

### 1.2.2. Cas d'un espace représenté "flou"

Il n'y a plus fidélité absolue de l'espace représenté par rapport à l'espace-référentiel.

1.2.2.1. Dans le cas où les "bruits parasites" perturbent l'information spatiale au point de la rendre imprécise, on devra associer à chaque élément un ensemble de valeurs de  $T$  et non plus une seule, qui toutes traduiront cette imprécision de la représentation spatiale.

Prenant une photographie aérienne la faible discrimination de l'espace dans les zones d'ombre par exemple, fera que l'on pourra difficilement appréhender la surface d'un sous-espace photographié.

Ainsi l'attribut  $t$  (surface) aura, pour chaque sous-espace  $x$  un ensemble de valeurs selon qu'on inclut dans ce sous-espace des zones imprécises sur la photo ou non.

$$t(x) = \{3, 3.5, 4\}$$

$t$  est donc défini ici comme une fonction multivoque :

$$\begin{array}{l} t : \underline{E} \longrightarrow T \\ \forall x_i \in \underline{E} \longrightarrow P(x_i) \end{array}$$

où  $P(x_i)$  est défini comme l'ensemble des éléments de  $T$  en correspondance avec  $x_i$ .

Ainsi  $x_i$  aura 0,1 ou plusieurs images dans  $T$ .

Ainsi  $P(x_i)$  traduit bien notre connaissance imprécise de la valeur de l'attribut  $t$  pour l'élément  $x_i$ .

1.2.2.2. Si cette connaissance est non seulement imprécise, mais encore incertaine, nous attacherons à chacune des valeurs ainsi trouvées un degré de certitude.

Nous définirons par exemple notre connaissance de la surface d'un sous-espace représenté par un sous-ensemble flou

$$\text{surf}(x_i) = \{(3,0.5), (3.5,0.2), (4,0.2)\}$$

qui veut dire que la surface de  $x_i$  est de :

3	avec un degré de certitude de	0.5
3.5	"	0.2
4	"	0.2

sans que le terme de "certitude" revête ici, pour le moment, une signification précise.

Si on parle en terme de probabilité, alors :

$$\text{surf}(x_i) = \{(3,0.5), (3.5,0.25), (4,0.25)\}$$

$t(x)$  est donc définie ici comme une fonction floue de  $\underline{E}$  dans  $T$  et traduit une connaissance à la fois imprécise et incertaine de la valeur de l'attribut  $t$  pour l'élément  $x_i$ .

1.3. Représentons à présent par A, une "structure géographique pré-définie" par des valeurs données de l'attribut  $t$ . Ainsi, si nous voulons étudier le bocage normand, nous allons représenter par A la "structure géographique-type du bocage". Nous avons parlé plus haut de la structure et du profil d'identification; en application : pour définir ici la structure A, nous définirons le profil d'identification de la notion de bocage.

Supposons, pour simplifier, que ce profil soit univarié, c'est-à-dire que A dépend d'un seul attribut  $t$ . Nous définirons donc la ou les valeurs de  $t$  correspondant à ce profil d'identification.

1.4. La prise de décision sera, selon ARQUES

(ouvrage cité) "la nécessité d'effectuer un choix, concernant une ou plusieurs propriétés d'un phénomène utile, à partir de la réalisation d'un phénomène aléatoire lié au phénomène utile".

En d'autres termes, il s'agit pour nous de décider, au vu des valeurs de  $t(x_i)$ ,  $x_i \in E_R$ , si la composante géographique qu'il représente, relève ou non de la structure A.

## 2. Les termes du modèle

En formalisant ces notations, nous mettons en évidence trois types d'ensembles dont le chercheur doit tenir compte en analyse spatiale.

2.1. Un ensemble-référentiel : qui est l'espace-géographique référentiel  $\underline{E}$

2.2. Des ensembles décisionnels c'est-à-dire un ensemble de quatre ensembles sur lequel il s'appuie pour sa prise de décision soit :

-  $E_R$  : l'ensemble des éléments de l'espace géographique représenté, définis par un attribut  $t$ .  $E_R$  est non flou (espace représenté objectif,  $t$  est une fonction univoque) ou flou ( $t$  est une fonction multivoque ou une fonction floue)

- A : structure géographique pré-définie, déterminée par une ou plusieurs valeurs de  $t$ .

- A est un sous-ensemble de  $T$ , ensemble de toutes les valeurs possibles de  $t$ .

2.3. Un ensemble de fonctions de décisions

2.3.1. f, "fonction-filtre" ou "fonction de transmission"

$$\begin{array}{l} f : \underline{E} \longrightarrow E_R \\ \forall x_i \in \underline{E} \longrightarrow f(x_i) \in E_R \end{array}$$

Cette fonction traduit la perturbation plus ou moins grande que subit

l'information géographique émise, avant sa "réception" dans l'espace géographique représenté.

Si  $f(x_i) \in \{0,1\}$ ,  $E_R$  est non flou et on écrira  $\underline{E}_R$

Si  $f(x_i) \in [0,1]$ ,  $E_R$  est flou et traduira la perte d'information plus ou moins grande du fait de la transmission

Si  $\forall x_i \in \underline{E}$ ,  $f(x_i) = 0$  la perte d'information est totale. On parlera d'*opacité* du milieu géographique

Si  $\forall x_i \in \underline{E}$ ,  $f(x_i) = 1$  la perte d'information est nulle. On parlera de *transparence* du milieu géographique.

### 2.3.2. t, "fonction-attribut"

$$\begin{array}{ccc} t : E_R & \longrightarrow & T \\ \forall y_i \in E_R & \longrightarrow & t(y_i) \in T \end{array}$$

avec  $y_i : f(x_i)$

avec  $t$  : fonction univoque, multivoque ou floue.

Si  $\text{Card}(E_R) = n$ , pour  $i = 1, \dots, n$ ,  $\{t(y_i)\}$  représente la structure de  $E_R$  selon  $t$ .

## 3. Signification géographique du modèle

Il s'agit, lors de l'analyse géographique, de partir d'un espace représenté et de définir  $f^{-1}(E_A)$ , ensemble des éléments de  $\underline{E}$  espace géographique relevant d'une structure  $A$  pré-définie.

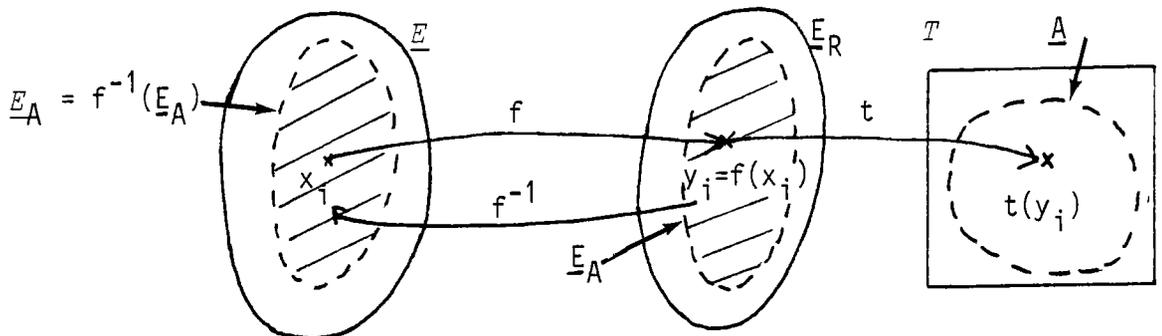
Nous présenterons ces étapes en nous appuyant sur un exemple, celui de la détermination géographique d'un secteur de viticulture pratiqué en monoculture, à partir d'une carte topographique. Nous généraliserons ensuite ce cas forcément particulier.

### 3.1. Les données de base de la démarche géographique

3.1.1. Soit  $\underline{E}$  l'espace-géographique à étudier.

3.1.2. Soit  $\underline{E}_R$  l'espace géographique représenté par une carte topographique au 1/50.000. Il s'agit donc d'un espace représenté objectif et  $f$  est fonction filtre.

soit  $t$  l'attribut mesurable qui est le pourcentage pour chaque commune de l'occupation du sol en vignoble.



la fonction  $t$  permet d'associer à chaque élément de  $\underline{E}_R$  sa valeur dans  $T$ , ensemble des valeurs possibles de  $t$ .

3.2. A est une structure pré-définie selon des valeurs de  $T$ .

3.2.1. Définissons A comme une structure de monoculture de la vigne c'est-à-dire où la superficie en vigne est supérieure ou égale à 80 % de l'occupation du sol.

3.2.2. Selon A, on peut déterminer si les éléments de  $\underline{E}_R$  appartiennent ou non à cette structure. Soit  $\underline{E}_A$  le sous-ensemble de  $\underline{E}_R$ :

$$\begin{aligned} \forall i \in \underline{I}, y_i \in \underline{E}_A &\iff t(y_i) \in \underline{A} \\ y_i \in \underline{E}_A &\iff t(y_i) \notin \underline{A}. \end{aligned}$$

3.3. Le but de l'analyse spatiale est de définir alors :  $\underline{E}_A$  c'est-à-dire le sous-ensemble de  $\underline{E}$  tel que ses éléments appartiennent (ou sont susceptibles d'appartenir) à la structure A. Autrement dit, de définir le sous-ensemble  $f^{-1}(\underline{E}_A)$  induit sur  $\underline{E}$  par  $\underline{E}_A$ .

Dans notre exemple, il s'agit de définir le sous-espace géographique consacré à la monoculture de la vigne.

La démarche géographique d'analyse spatiale telle que nous l'avons illustrée par notre exemple, est une démarche éminemment "classique" et pratiquée dans toute analyse spatiale. En fait, l'exemple choisi correspond au cas le plus simple, celui où il n'y a aucune imprécision, ni dans la représentation de l'espace, ni dans la définition de la structure  $A$  ; ce n'est en fait qu'un cas particulier d'une problématique bien plus vaste, celle où le modèle de démarche prend également en compte les phénomènes d'imprécision et d'incertitude. Nous rejoignons donc bien là la préoccupation essentielle de notre thèse, qui est de formaliser et d'analyser les espaces imprécis et incertains. Nous pensons ainsi que la démarche d'analyse spatiale ne doit pas occulter le "flou", qu'il soit lié à l'espace représenté ou à la structure définie, mais bien prendre en compte ce flou et proposer une méthodologie susceptible de l'appréhender. Ce sera notre préoccupation dans le dernier paragraphe de ce chapitre.

### III - La démarche d'analyse spatiale à partir d'un espace représenté flou et (ou) d'une structure floue

Nous distinguerons, en reprenant nos notations de II 1.2. et 1.3. de ce chapitre, le cas où :

$t$  : fonction-attribut est une fonction ordinaire,

$t$  : fonction multivoque,

$t$  : fonction floue,

de  $E_R$  vers  $T$ , ensemble des valeurs possibles de l'attribut et, dans chacun des cas, nous distinguerons le cas où la structure prédéfinie  $A$  est non floue et le cas où  $A$  est une structure floue (PRADE, 1982).

#### 1. $t$ , fonction-attribut, est une fonction univoque

c'est-à-dire  $\forall y_i \in E_R, t(y_i) = 0$  ou  $t(y_i)$  est un singleton de  $T$ .

$E_R$  est un espace représenté objectif pour l'attribut  $t$  ( $E_R$  non flou).

##### 1.1. La structure pré-définie $A$ est non floue

Ceci correspond à l'exemple exposé plus

haut. Nous travaillons dans le cas "classique" où le document géographique est précis et où la structure  $\underline{A}$  est non floue (structure définie par un prédicat précis comme ce fut le cas de notre exemple).

Dans ce cas  $\underline{E}_A \subseteq \underline{E}_R$  est non flou et induit sur  $\underline{E}$  le sous-ensemble  $\underline{E}_A = f^{-1}(\underline{E}_A)$  des éléments de  $\underline{E}$  dont la valeur de l'attribut  $t$  appartient à  $A$ .

$$\underline{E}_A = f^{-1}(\underline{E}_A) = \left\{ x \in \underline{E}, t(x) \neq 0 \text{ et } t(x) \subseteq A \right\} \quad (1.1)$$

### 1.2. Cas où $A$ est floue.

Si  $A$  est défini par un prédicat vague, la structure  $A$  est floue.

Un exemple de structure imprécise est :

"structure de pays bocager"

(Dans ce cas aucune appréciation précise de la notion de bocage n'est donnée : structure d'identification et profil d'identification sont des notions floues).

1.2.1. Dans ce cas le chercheur définira, pour chaque élément  $y_i$  de  $\underline{E}_R$  la fonction d'appartenance  $\mu$  à la structure  $A$  avec

$$\forall y_i \in \underline{E}_R \quad \mu_A(y_i) \in [0,1] \quad i \in \underline{I}$$

signifiant que chaque élément de  $\underline{E}_R$  appartiendra "plus ou moins" à la structure  $A$ .

$E_A$  est donc un sous-ensemble flou de  $\underline{E}_R$ .  $E_A = \left\{ (y_i, \mu_{E_A}(y_i)) ; \mu_{E_A}(y_i) = \mu_A(y_i) > 0 \right\}$

1.2.2. Nous noterons alors que  $E_A$  induit sur  $\underline{E}$  le sous-ensemble flou  $E_A = f^{-1}(E_A)$  des éléments de  $\underline{E}$  dont la valeur de l'attribut  $t$  appartient "plus ou moins" à  $A$ .

$$E_A = f^{-1}(E_A) = \left\{ \left( (x_i, \mu_{E_A}(x_i)) \right), x_i \in \underline{E}, i \in \underline{I}, \right. \\ \left. \mu_{E_A}(x_i) = \mu_{E_A}(y_i) \right\} \quad (1.2.)$$

Autrement dit, la valeur de l'appartenance d'un élément  $x_i$  d'un espace géographique à une structure floue  $A$  est égale à la valeur de l'appartenance à cette structure floue de l'image par  $f$  de cet élément dans l'espace représenté.

En langage courant, si nous définissons par la valeur 0.7 l'appartenance d'une commune d'une carte topographique à la structure bocagère, nous dirons que la commune "géographique" (et non plus représentée), appartient à cette structure avec le degré de 0.7.

2. t, fonction-attribut est une fonction multivoque

c'est-à-dire, comme nous l'avons défini plus haut,  $E_R$  est un espace représenté flou pour l'attribut t.

En somme, à chaque élément  $y_i$  de  $E_R$  on associe un ensemble de valeurs de t traduisant l'imprécision de l'information représentée.

2.1. A est une structure non floue

- on peut définir l'ensemble des éléments de  $\underline{E}$  dont la valeur de t appartient *possiblement* à  $\underline{A}$ . (PRADE, 1982)

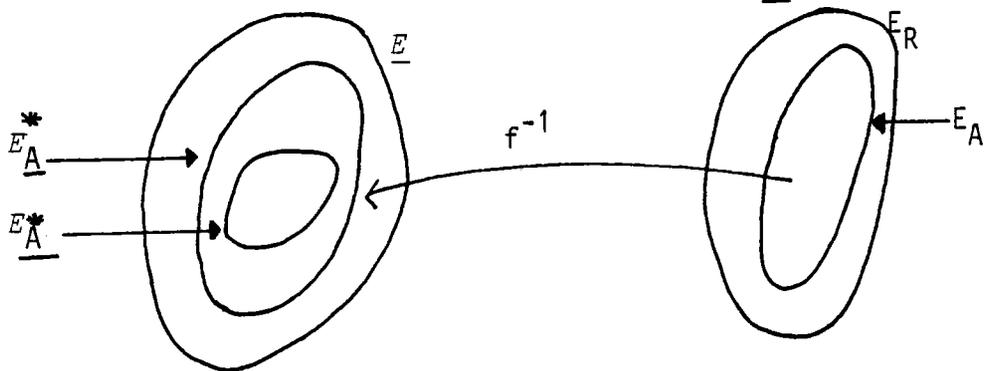
$$E_A^* = \{x \in \underline{E}, t(x) \cap \underline{A} \neq \emptyset\} \quad (2.1.)$$

(ex : si  $\underline{A} = 0.7$ , si  $t(x) = \{0.3, 0.6, 0.7, 0.9\}$ , alors  $x \in E_A^*$ )

- et l'ensemble des éléments de  $\underline{E}$  dont la valeur de t appartient *nécessairement* à  $\underline{A}$ .

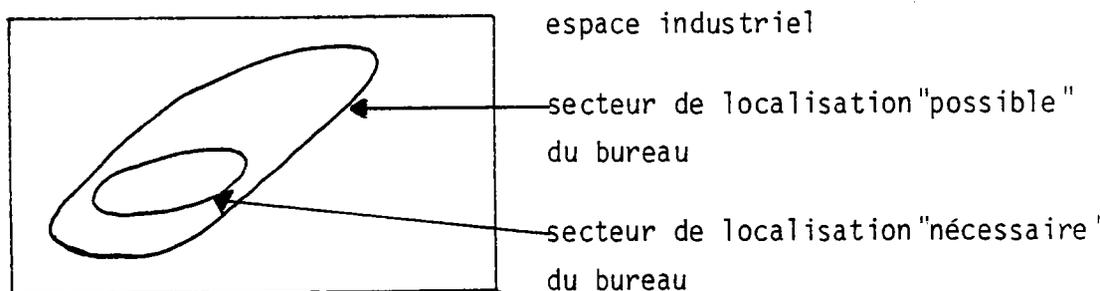
$$E_A^{**} = \{x \in \underline{E}, t(x) \neq \emptyset, t(x) \subseteq \underline{A}\} \quad (2.2.)$$

(ex : si  $\underline{A} = 0.7$ , si  $t(x) = \{0.3, 0.2\}$ , alors  $x \notin E_A^{**}$ )



Ce cas généralise 1. où  $t(x)$  est un singleton. En effet, dans ce cas les formules (2.1.) et (2.2.) se réduisent à la formule (1.1.)

- Ainsi si  $E_R$  est une "carte mentale" d'un espace industriel réalisée par un groupe d'ouvriers de l'usine et si  $\underline{A}$  est "localisation du bureau du directeur", on pourra définir, pour ces ouvriers :



## 2.2. A est une structure floue

2.1. Dans ce cas nous faisons intervenir les mesures de possibilité et de nécessité sur un sous-ensemble flou.

Déterminons, pour chaque élément  $y_i$  de  $E_R$  sa distribution de possibilité sur la structure floue A c'est-à-dire associons à chaque valeur de la fonction multivoque  $t(x)$  un degré d'appartenance à la structure floue A.

### 2.2. Exemple d'application

2.2.1. Définissons par A, structure imprécise, la structure "centre-ville". A est donc définie de façon purement qualitative.

2.2.2. Faisons définir lors d'une enquête, pour n points de la ville, l'appartenance estimée de chaque point au centre-ville et ce par p personnes interrogées.

Chaque point est donc défini par p valeurs estimées de l'appartenance au centre-ville.

Ainsi prenons en exemple trois sites et trois réponses ( $n = 3, p = 3$ )

le site 1 (= S1) est défini par les valeurs (0.8, 0.7, 0.2)

le site 2 (= S2) " " (0.3, 0.5, 0.1)

le site 3 (= S3) " " (0.9, 1, 0.8)

Ainsi pour S1, on peut définir  $\mu_A(t_1) = 0.8, \mu_A(t_2) = 0.7, \mu_A(t_3) = 0.2$  soit l'appartenance de ce site au centre-ville selon les différentes estimations.

2.2.3. La distribution de possibilité de S1, S2, S3 est l'ensemble des valeurs estimées pour S1, S2, S3 :

$$S1 = (0.8, 0.7, 0.2)$$

$$S2 = (0.3, 0.5, 0.1)$$

$$S3 = (0.9, 1, 0.8)$$

2.2.4. Définissons par "appartenance forte" d'un site au centre-ville

$$A_F(s1) = \sup_{t \in t(x)} \mu_A(t) = 0.8$$

$$A_F(S2) = 0.5$$

$$A_F(S3) = 1$$

2.2.5. De même "appartenance faible" d'un site au centre-ville

$$A_f(S1) = \inf_{t \in t(x)} \mu_A(t) = 0.2$$

$$A_f(S2) = 0.1$$

$$A_f(S3) = 0.8$$

2.2.6. Attribuons à chaque élément de l'espace géographique les mesures d'appartenance ainsi définies sur les éléments de l'espace représenté.

$$\forall x_i \in \underline{E}, A_F(x_i) = A_F(t(x_i)) = \sup_{t \in t(x_i)} (\mu_A(t))$$

$i \in \underline{I}$  ensemble d'indices

$$\forall x_i \in \underline{E}, A_f(x_i) = A_f(t(x_i)) = \inf_{t \in t(x_i)} (\mu_A(t))$$

2.2.7. Réalisons sur  $\underline{E}$ , à partir des mesures de  $A_F$ , une  $\alpha$ -coupure,  $\alpha$  étant choisi, on peut définir l'espace  $\underline{E}_A^*$  : structure forte "centre-ville" de niveau  $\alpha$

$$\underline{E}_A^* = \{x, x \in \underline{E}, A_F(x) \geq \alpha\}$$

2.2.8. Réalisons sur  $\underline{E}$ , à partir des mesures de  $A_f$ , une  $\alpha$ -coupure,  $\alpha$  étant choisi, on peut définir l'espace  $\underline{E}_A^*$  : structure faible "centre-ville" de niveau  $\alpha$

$$\underline{E}_A^* = \{x, x \in \underline{E}, A_f(x) \geq \alpha\}$$

2.2.7. et 2.2.8. permettent de discriminer l'espace géographique en fonction des mesures de possibilité et de nécessité élaborées à partir d'une structure floue et d'un espace représenté flou.

Le chapitre VIII applique et développe ces notions.

3. t, fonction attribut, est une fonction floue.

3.1. Nous envisageons le cas le plus général où  $t(x)$  est un sous-ensemble flou de  $T$  et où  $A$  est une structure floue pré-définie.

Ce cas représente l'appréhension du flou dès la base même de l'analyse spatiale et à toutes les étapes de la démarche géographique, généralisant ainsi toutes les notations ci-dessus.

Chaque élément de  $E_R$  (flou) est tel que nous pouvons définir :

- une fonction d'appartenance qui représente la "crédibilité" des valeurs de l'attribut  $t$  pour cet élément :

$$\mu_{t(x)}(t)$$

il y a donc prise en charge de l'incertitude de notre connaissance de  $t$ .

- une fonction d'appartenance des valeurs de l'attribut  $t$  à la structure floue  $A$

$$\mu_A(t)$$

3.2. Etendons nos notations à un exemple spatial. Soit une carte mentale d'un sujet où chaque élément  $x_i$  est représenté de façon "floue" d'une part, et d'autre part "situé" dans son appartenance à une structure floue  $A$  qui est la structure "centre-ville".

Ainsi le site  $S1$  est défini par :

$$\mu_{E_R}(S1) = 0.5$$

ce qui veut dire que  $S1$  appartient à l'espace perçu d'un sujet avec un degré de 0.5

$$\mu_A(S1) = 0.8$$

si le sujet a estimé que l'appartenance de  $S1$  au centre-ville est de 0.8. Etendons cette enquête à  $n$  sujets.

Dans ce cas on définira :

$$\forall x_i \in \underline{E}, \text{Pos}(x_i) = \bigvee_{j=1}^n \left( \mu_{E_R}(x_i) \wedge \mu_A(x_i) \right) \quad i \in \underline{I}$$

qui représente la possibilité que  $x_i$  (représentant un site) fasse partie

du centre-ville.

De même et en utilisant la forme duale pour la nécessité :

$$\forall x_i \in \underline{E}, \text{Nec}(x_i) = \bigwedge_{j=1}^n (\mu_A(x_i), 1 - \mu_{E_R}(x_i)) \quad i \in \underline{I}$$

Comme en 2.2.7. et 2.2.8. on peut définir les sous-espaces :

$$\underline{E}_A^*_{\alpha} \quad \text{et} \quad \underline{E}_{A^*}_{\alpha} \quad \text{respectivement} \quad \text{possiblement} \quad \text{et} \quad \text{nécessairement}$$

"centre-ville" de niveau  $\alpha$ ,  $\alpha$  donné.

3.3. Cette formulation peut s'exprimer en toute généralité si l'on considère une fonction  $t$  floue telle qu'on l'a définie en 3.1.

$$\text{Pos} (t(x)) = \bigvee_{t \in T} (\mu_A(t) \wedge \mu_{t(x)}(t))$$

qui représente la possibilité que l'élément  $x$  de  $\underline{E}$  ayant pour valeurs floues  $t(x)$ , appartienne à la structure floue  $A$ .

La même réflexion est faite pour la nécessité :

$$\text{Nec} (t(x)) = \bigwedge_{t \in T} (\mu_A(t), 1 - \mu_{t(x)}(t))$$

et pour la discrimination spatiale réalisée à partir de ces mesures.

Nous présenterons au chapitre VII des applications de ces notations.

## CONCLUSION DU CHAPITRE V

Ainsi nous pensons que l'analyse spatiale doit s'intéresser à un énorme champ d'investigation. En effet, au-delà des espaces représentés objectifs, la masse des espaces représentés flous devient objet d'étude, à condition de ne pas nier l'imprécision et (ou) l'incertitude qui les sous-tendent. Nous pensons en particulier à l'étude des espaces perçus et vécus à travers leurs représentations diverses, étude difficile à entreprendre avec des moyens d'investigation classiques car il s'agit de ne pas occulter le caractère "flou" de ces notations.

Ce flou est lié fondamentalement à la représentation spatiale : l'information spatiale, comme toute information, est déformée, perturbée par la transmission et souvent mal, imparfaitement ou incomplètement restituée.

A ce "flou" spatial s'ajoute le caractère imprécis ou incertain de la structure pré-définie selon laquelle le géographe cherche à mettre en évidence l'organisation spatiale.

Il y a donc bien conjonction, combinaison, voire interférence de deux formes différentes d'imprécision et d'incertitude. La géographie classique est habile à manier les probabilités, même "subjectives" (théorème de BAYES) ; elle est beaucoup plus réticente ou discrète sur la formalisation et la manipulation d'informations non probabilisables et qui sont pourtant très nombreuses, comme nous venons d'essayer de le montrer.

Il nous semble donc utile de développer des modèles de traitement d'informations floues et d'évoquer quelques modèles mis au point par les économistes et d'en dégager de possibles applications géographiques. C'est ce que nous ferons dans les deux chapitres suivants.

## CHAPITRE VI

MODELES DE TRAITEMENT DES ESPACES  
GEOGRAPHIQUES REPRESENTES OBJECTIFS

PRESENTATION ET APPLICATIONS GEOGRAPHIQUES

INTRODUCTION

A - MODELES DE TRAITEMENT D'UN ESPACE DEFINI PAR UNE STRUCTURE SPATIALE  
IMPRECISE

B - MODELE DE TRAITEMENT D'UN ESPACE DEFINI PAR UNE STRUCTURE SPATIALE  
INCERTAINE

C - MODELE DE REGIONALISATION DANS UN CONTEXTE IMPRECIS :  
METHODE DE CLASSIFICATION SPATIALE FLOUE

## INTRODUCTION : PROBLEMATIQUE GENERALE

Ce chapitre est consacré à la présentation et l'explication de modèles de traitement d'espaces géographiques représentés objectifs.

Rappelons les définitions proposées au chapitre précédent, à savoir qu'un espace géographique représenté objectif est une représentation non floue de l'espace géographique, c'est-à-dire une représentation supposée fidèle sans imprécision ni incertitude, des éléments de l'espace géographique.

Nous estimons que l'information spatiale n'est affectée par aucun bruit parasite entre son "émission" par l'espace géographique et sa "réception" et représentation dans un document géographique.

S'agissant d'une représentation statistique, cela suppose la notion de mesure ou de valuation des attributs géographiques, au sens où nous l'avons définie par la première partie de ce travail. Un espace géographique représenté statistique est donc une matrice d'information spatiale, univariée, si un seul attribut  $t$  est pris en compte, multivariée si  $T = \{t_i, i=1, \dots, p\}$  c'est-à-dire si l'espace est défini par  $p$  attributs géographiques.

Un espace représenté objectif cartographique est tel qu'il est possible au chercheur de définir :

- d'une part des composantes spatiales correspondant soit à des éléments géographiques, soit à des composantes résultant d'agrégation d'éléments (grilles de découpage spatial ou découpages administratifs etc.)

- d'autre part des attributs géographiques mesurables sur le document cartographique.

Ainsi, il est possible de définir, à partir d'un espace représenté objectif cartographique, une matrice d'information spatiale qui sert de base à l'analyse spatiale.

Les modèles de traitement ont pour but de définir à partir d'une structure spatiale  $A$  donnée et d'un espace représenté objectif, l'organisation de l'espace géographique.

Nous ne traiterons pas du cas où la structure A est une structure précise ; il s'agit en effet alors des méthodes couramment utilisées par la démarche géographique (GEORGE, 1970 ; CLAVAL, 1977).

Nous nous intéresserons aux cas où A, structure pré-définie est une structure imprécise ou incertaine. Nous distinguerons de ce fait trois grands types de modèles et de traitement d'espaces géographiques : à partir d'une structure imprécise, à partir d'une structure incertaine et enfin nous exposerons une méthode de régionalisation floue à partir d'une classification spatiale floue.

## A - MODELES DE TRAITEMENT D'UN ESPACE DEFINI PAR UNE STRUCTURE SPATIALE IMPRECISE

Selon le schéma exposé en III 1 du chapitre précédent, les modèles proposés sont destinés à dégager un espace géographique imprécis à partir d'une structure pré-définie, elle aussi imprécise. Nous proposerons en premier lieu un modèle simple qui a pour but la mise en évidence de l'imprécision spatiale, puis, en second lieu un modèle élaboré par FUSTIER (1978, 1980) pour définir l'attraction imprécise d'un centre donné sur son environnement. Les deux modèles proposés ont donc bien pour but de "spatialiser" l'imprécision selon l'expression de DELACHE (1975).

### I - Modèle de traitement de l'imprécision fondé sur la notion de distance entre sous-ensembles

#### 1. Expression générale du modèle

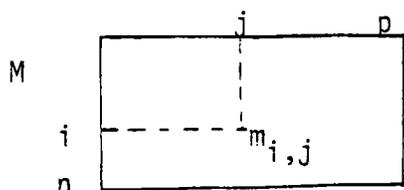
1.1. Soit un ensemble  $\underline{E}$  d'éléments spatiaux ou de composantes spatiales de l'espace représenté statistique

$$\text{Card } \underline{E} = n$$

$\underline{E}$  est défini par un ensemble I d'attributs géographiques

$$\text{Card } I = p$$

L'information spatiale est "représentée" dans la matrice :



M est telle que  $\forall m_i, j \in M, m_{i,j}$  est égale à la valeur de l'attribut j sur l'élément i.

1.2. On dispose d'une structure pré-définie A. Cette structure A représente le *profil d'identification* de l'élément spatial qui sert de référence à l'étude de l'organisation spatiale. Cet élément spatial est un élément fictif défini par les p valeurs des p attributs considérées par le chercheur comme des valeurs-références, des sortes de critères idéaux définissant parfaitement la structure A.

1.3. Le principe du modèle est d'exprimer l'"appartenance" plus ou moins grande des éléments de  $\underline{E}$  à la structure A par la mesure d'une "distance" entre ces éléments et la structure A.

Cette "distance" plus ou moins grande traduira ainsi que  $\forall_i, e_i \in \underline{E}$  a "plus ou moins le profil d'identification de A.

## 2. Formalisation préliminaire de la notion de relation binaire floue

Soit deux éléments  $x, y \in \underline{E}^2$

### 2.1. Définition

On peut établir entre ces éléments une relation R binaire floue dans  $\underline{E} \times \underline{E}$  si et seulement si il lui est associée une fonction  $\mu$

$$\forall (x,y) \in \underline{E}^2, \mu_R (x,y) \in [0,1]$$

### 2.2. Les principales propriétés d'une relation binaire floue

- Réflexivité :

$$\forall x \in \underline{E}$$

$$\mu_R (x,x) = 1$$

- Symétrie :

$$\forall (x,y) \in \underline{E}^2 \quad \mu_R (x,y) = \mu_R (y,x)$$

- Transitivité MAX-MIN :

$$\forall (x,y,z) \in \underline{E}^3 \quad \mu_R (x,z) \geq \bigvee_y \left( \bigwedge (\mu_R (x,y), \mu_R (y,z)) \right)$$

- Antisymétrie :

$$\forall (x,y) \in \underline{E}^2 \quad \mu_R (x,y) \neq \mu_R (y,x)$$

ou  $\mu_R (x,y) = \mu_R (y,x) \iff x=y$

- Antiréflexivité :

$$\forall x \in \underline{E} \quad \mu_R (x,x) = 0$$

2.3. Principales applications : définition de relations binaires floues particulières .

Elles sont résumées dans le tableau suivant.

Tableau VI 1. Principales propriétés des relations binaires floues.

Propriétés Relations	Réflexivité	Transitivité MAX-MIN	Symétrie	Anti- symétrie	Anti-ré- flexivité
Préordre	X	X			
Ressemblance	X		X		
Similitude	X	X	X		
Ordre	X	X		X	
Dissemblance			X		X
Dissimilitude		X	X		X

Nous voyons d'après ce tableau qu'une distance floue, comme nous l'avons définie chapitre 3 V, est une relation de dissemblance, c'est une relation de dissimilitude si elle respecte la propriété de

transivité MAX-MIN (TRANQUI, 1978).

2.3. Dans notre travail nous définirons donc des relations de dissemblance entre chaque élément et la structure A pré-définie.

### 3. Notion de structure pré-définie floue A

3.1. A, structure pré-définie, est déterminée par des attributs flous ; nous allons donc définir un sous-ensemble flou représentant la structure-référence.

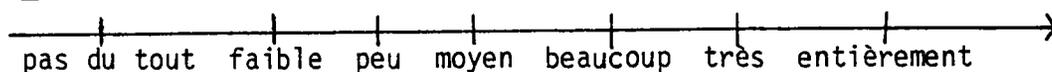
Supposons que A soit la structure "Bassin industriel". Nous définirons cette structure par les attributs suivants :

- ① beaucoup d'industries extractives (fer, ou charbon) : IE
- ② réseau de voies ferroviaires intérieures au bassin très dense : VF
- ③ très grande importance des cités ouvrières : CO
- ④ faible importance des emplois féminins : EF
- ⑤ faible importance des activités de service : AS
- ⑥ faible importance des activités industrielles de transformation légères : IL

A peut être défini comme un sous-ensemble flou, auquel les attributs évoqués appartiennent plus ou moins.

Créons une échelle lexicographique. Elle est générale dans notre cas à l'ensemble des attributs, mais elle pourrait être particulière à chacun d'eux comme nous l'avons vu dans le chapitre III dans l'étude de la distance multicritère.

Ainsi l'échelle lexicographique représentant l'ensemble d'appartenance  $\underline{M}$  qui est ici un treillis vectoriel :



peut être précisée par une bijection de  $\underline{M}$  dans  $[0,1]$  :

- pas du tout : 0
- faible : 0.2

peu : 0.3  
moyen : 0.5  
beaucoup : 0.7  
très : 0.9  
entièrement : 1

Ainsi A est défini comme suit :

$$A = \{(IE,0.7), (VF,0.9), (CO,0.9), (EF,0.2), (AS,0.2), (IL,0.2)\}$$

Ce sous-ensemble flou permet donc réellement d'appréhender un prédicat flou relatif à une structure géographique. Cette formulation nous semble donc particulièrement utile en géographie où il est souvent difficile et arbitraire d'associer à une structure pré-définie une valeur précise.

3.2. A structure pré-définie, pourrait être définie comme un sous-ensemble  $\Phi$ -flou, permettant de ce fait de respecter une imprécision encore plus grande.

Ainsi chaque attribut serait défini par un intervalle et non plus par une mesure floue simple.

De ce fait :

$$\forall t_j \in \underline{I} \quad A = \{t_j, \Phi_A(t_j) : \Phi_A(t_j) = [a_1, a_2] \subseteq [0,1], j = 1, \dots, p\}$$

Par exemple :

$$A = \{(IE, [0.5, 0.7]), (VF, [0.7, 0.9]), (CO, [0.7, 0.9]), (EF, [0, 0.2]), (AS, [0, 0.2]), (IL, [0, 0.2])\}$$

Notre propos n'est pas de développer ce cas car nous avons volontairement limité notre sujet au traitement des sous-ensembles flous où  $\underline{M}$  est un ensemble de réels compris dans  $[0,1]$  et non un ensemble d'intervalles.

Nous pensons cependant que cette formulation sera utile dans le cas où l'imprécision statistique est telle qu'il n'est possible que de définir un intervalle d'imprécision et non plus une fonction d'appartenance représentant un degré d'imprécision prise dans l'intervalle  $[0,1]$ .

#### 4. Calcul des distances entre la structure pré-définie et les éléments spatiaux

##### 4.1. La démarche méthodologique

$M_0$  est dans ce cas une matrice numérique. Ainsi dans l'exemple cité plus haut, à chaque élément  $e_j$  de  $\underline{E}$  on associe les valeurs des attributs suivants :

IE : % des actifs occupés dans l'industrie extractive

VF : longueur des voies de communications ferroviaires intérieures à l'espace étudié

CO : % de la surface des communes occupées par les cités ouvrières

EF : taux d'activité féminine

AS : % des actifs dans les services

IL : % des actifs dans les industries de transformation légères.

Considérons chaque élément  $e_j$  comme un sous-ensemble flou auquel les attributs appartiennent plus ou moins. Pour cela divisons chaque terme de la matrice par la valeur MAX. du terme dans la colonne considérée. Nous normalisons ainsi les sous-ensembles flous  $e_j$ . Nous obtenons des valeurs comprises entre 0 et 1 reproduites dans  $M_1$ .

##### 4.2. Exemple

Attributs Eléments	IE	VF	CO	EF	AS	IL
	$M_0$ $e_1$	65	20	31	15	25
$e_2$	58	8	15	8	20	20
$e_3$	70	34	8	10	25	5
$e_4$	30	5	5	20	35	25
$e_5$	0	5	0	20	25	25

qui, après normalisation, donne :

Attributs Eléments		Attributs					
		IE	VF	CO	EF	AS	IL
M <sub>1</sub>	e <sub>1</sub>	0.93	0.59	1	0.75	0.71	0.08
	e <sub>2</sub>	0.83	0.23	0.48	0.4	0.57	0.8
	e <sub>3</sub>	1	1	0.26	0.5	0.71	0.2
	e <sub>4</sub>	0.43	0.15	0.16	1	1	1
	e <sub>5</sub>	0	0.15	0	1	0.71	1

#### 4.3. Choix d'une distance entre les éléments spatiaux et la structure de référence A

Le chercheur peut choisir la distance qui lui semble le mieux convenir au traitement de ses données et définir ainsi la distance de chaque sous-ensemble flou à la structure pré-définie A.

On définit ainsi un indice de dissemblance :

$$d(e_i, A) \in [0,1] \quad i = 1, \dots, n$$

Choisissons dans notre exemple la distance de HAMMING généralisée relative telle que nous l'avons définie entre chaque élément et A

$$d(e_1, A) = 0.33$$

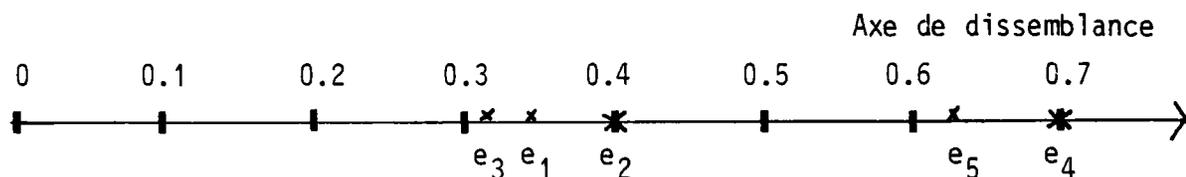
$$d(e_2, A) = 0.4$$

$$d(e_3, A) = 0.31$$

$$d(e_4, A) = 0.70$$

$$d(e_5, A) = 0.63$$

les éléments peuvent donc être définis "par rapport" à la structure A. cette distance "multicritère" permet d'esquisser une classification de ces éléments en fonction de leur dissemblance croissante avec A soit :



### 5. Conclusion : intérêt géographique de cette démarche

Nous nous référons au schéma général de traitement d'espaces représentés exposé au chapitre V, B II 3.1. et à son application au cas où A est une structure floue B III 1.2., pour énoncer les résultats du traitement de notre exemple.

5.1. Nous considérons, dans  $\underline{E}$ , espace-référentiel les éléments  $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$ .

Nous avons associé à chaque élément son indice de dissemblance par rapport à la structure A.

Nous avons ainsi défini le sous-ensemble flou  $E_A \subseteq \underline{E}$  tel que :

$$\forall e_i \in \underline{E} : E_A = \left\{ (e_i, \mu_{E_A}(e_i)) \right\}, \mu_{E_A}(e_i) = d(e_i, A) \in [0, 1], i=1, n$$

5.2. Définissons à présent  $E'_A$

$$E'_A = \left\{ (e_i, \mu_{E'_A}(e_i)) \right\}, 0 < \mu_{E'_A}(e_i) \leq 1$$

$E'_A$  représente ainsi le sous-ensemble flou de  $\underline{E}$ , induit sur  $\underline{E}$  par la structure pré-définie imprécise A.

5.3. Ce sous-ensemble flou  $E'_A$  peut être représenté dans le quadruplet qui définit un sous-espace géographique flou

$$E'_{GA} = \left\{ E'_A, S, C, R \right\}$$

où

- $E'_A$  est le sous-ensemble flou défini plus haut
- S est la structure de  $E'_{GA}$  induite par la structure A
- C est la configuration spatiale floue de  $E'_A$ .

Nous pourrions donc bien "spatialiser" l'imprécision, étudier forme et étendue de l'espace imprécis induit par la structure A.

- R pourra également être définie. Ce sera une relation floue, métrique ou non qu'il appartiendra au chercheur de préciser.

5.4. Une structure spatiale pré-définie, *même imprécise*, permet ainsi de définir et d'étudier l'espace géographique induit par cette structure. Là encore, le traitement de l'imprécision est donc un outil indispensable à l'investigation géographique quand

celle-ci sort du domaine des espaces non flous.

Une démarche différente a été mise au point par FUSTIER pour traiter l'attraction imprécise d'un centre donné sur son environnement. Exposons-en les grandes étapes et soulignons-en l'intérêt.

## II - Modèle de traitement de l'attraction imprécise d'un centre (FUSTIER, 1978, 1980, PONSARD 1983)

### 1. Les bases logiques du modèle

Le modèle proposé par FUSTIER a pour but d'expliquer l'orientation des déplacements d'éléments vers des centres économiques.

Il part du principe qu'un élément  $i$  d'un ensemble  $I$  fixera son choix de centre économique  $k$  élément d'un ensemble  $K$  de centre, en maximisant l'utilité, c'est-à-dire en langage courant, l'"intérêt" qui le pousse à choisir tel centre plutôt que tel autre.

Le modèle partira de cette fonction d'utilité ; il refuse cependant la solution classique qui est de constater que  $i$  est attiré par le centre  $k$  et par lui seul.

En fait, et c'est tout l'intérêt du modèle, on essaie de déboucher sur la notion d'attraction imprécise d'un centre  $k$ , en faisant, là encore, appel à la théorie des sous-ensembles flous.

### 2. Les données du modèle

2.1. Soit  $J = \{1, \dots, j \dots j^*\}$  l'ensemble des facteurs susceptibles d'expliquer le choix du centre  $k$  par l'élément  $i$  (prix, attrait du centre, qualité du service, accessibilité etc)

- FUSTIER définit par  $m_k(j)$  la "masse partielle" du centre  $k$  selon le facteur  $j$ .

- Soit  $\gamma_j(i)$  le poids du facteur  $j$  pour le consommateur  $i$

2.2. FUSTIER propose en outre une "fonction d'utilité" accordée par l'élément  $i$  au centre  $k$

$${}_i U_k = f\left(\left\{m_k(j), \gamma_j(i) ; j \in J\right\}, D_{ik}\right)$$

où  $D_{ik}$  est la distance (réelle ou subjective) séparant  $i$  de  $k$ .

On admettra, dans ce traitement classique d'un tel problème, que  $i$  se déplacera vers le centre  $k$  qui aura une fonction d'utilité maximale.

### 3. Expression du modèle dans un contexte imprécis

3.1. On suppose que les éléments  $i$  n'ont pas une connaissance précise de leur fonction d'utilité, si bien qu'il est préférable de définir cette fonction par un ensemble de couple associant pour chaque produit d'un centre  $k$ , le potentiel partiel de ce produit sur le consommateur et le poids du facteur  $j$  pour le consommateur  $i$

$${}_i \mu_k = \left\{ \left( \begin{array}{c} {}_i V_k(j), \gamma_j(i) \\ m_k(j) \end{array} \right), j \in \underline{J} \right\}$$

avec  ${}_i V_k(j) = \frac{m_k(j)}{D_{ik}}$  qui représente le potentiel global produit sur  $i$  par le produit  $j$

3.2. De ce fait, la mesure exercée par tous les centres  $k$  sur un élément  $i$  pour une motivation  $j$  :

$${}_i V_j = \sum_{k=1}^{k^*} {}_i V_k(j)$$

et l'attraction relative exercée par le centre  $k$  sur  $i$  en fonction de la motivation  $j$  :

$${}_i V_k(j) = \frac{{}_i V_k(j)}{{}_i V_j}$$

à laquelle on associe  $\gamma_j(i)$  traduisant l'importance de  $j$  pour  $i$ .

3.3. Soit  $\underline{X} = [0,100]$  un ensemble (en %) de taux d'attraction  $x \in \underline{X}$  représente la valeur de  ${}_i V_k(j)$  c'est-à-dire l'attraction relative exercée par  $k$  sur  $i$  en fonction de  $j$ .



4.2. La zone imprécise d'attraction d'un centre  $k$  est constituée par l'ensemble de ses sous-zones d'attraction non disjointes et imprécises du fait de l'attraction imprécise du centre sur ces zones.

## 5. Conclusion

La démarche ainsi décrite correspond donc bien à notre préoccupation et peut être étendue du domaine économique au domaine géographique. Son objectif est bien de définir un sous-espace géographique imprécis à partir d'une structure imprécise (inégale attraction des points de vente selon les produits et selon les éléments  $i$  "plus ou moins" motivés pour se déplacer vers tel centre ou tel autre).

C'est donc bien, au même titre que le modèle fondé sur le calcul des distances entre sous-ensembles flous, une méthode multicritère d'appréhension de l'imprécision spatiale. Là aussi, comme dans la méthode précédente, il s'agit pour le chercheur de déterminer configuration et structure métrique ou non métrique de l'espace imprécis ainsi défini. Le modèle de FUSTIER, conçu dans un but de mise en évidence d'un espace économique, s'avère ainsi également très utile dans la démarche géographique d'analyse spatiale.

## B - MODELE DE TRAITEMENT D'UN ESPACE DEFINI PAR UNE STRUCTURE INCERTAINE

### I - La modélisation spatiale à partir d'une structure pré-définie incertaine

#### 1. Les bases du modèle : principales définitions

1.1. Rappelons qu'une structure d'identification est, dans le présent chapitre, un ensemble d'attributs, choisis par le chercheur en fonction du problème traité. Ces attributs peuvent être mesurables ou non.

1.2. Nous appellerons structure incertaine pré-définie  $A$ , une structure à laquelle est attachée une certaine méconnaissance, ou une connaissance incomplète. Nous entendons par là que le chercheur n'est pas certain de l'appartenance de tel ou tel attribut à la structure  $A$ .

1.3. Dans la pratique, cela revient à associer à chaque attribut  $t$  de la structure  $A$  un degré d'incertitude qui traduit la méconnaissance du chercheur relative à l'appartenance de  $t$  à  $A$ .

Nous remarquons donc que la notion de structure incertaine est *relative* au chercheur. Dans le cas d'une connaissance parfaite, cette structure devient certaine. Elle est alors :

- soit *précise* si chaque attribut de  $A$  est défini par une valeur précise dans cette structure. Nous rejoignons alors le cas "classique" de structure précise mesurable.

- soit *imprécise* si chaque attribut de  $A$  est défini de manière imprécise. Nous renvoyons alors au cas traité dans le paragraphe A de ce chapitre.

## 2. Formalisation d'une structure incertaine précise

Soit  $\underline{T} = \{t_j, j = 1, \dots, p\}$  l'ensemble supposé des attributs de la structure  $A$

On peut alors associer à chaque attribut de  $\underline{T}$  une fonction d'incertitude  $f$ .

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow [0,1] \\ \forall t_j \in A &\longrightarrow f(t_j) \in [0,1] \end{aligned}$$

La formalisation passe par la définition de :

2.1.  $\underline{A}$  structure précise servant de référentiel :  $\underline{A} = \{t_1, t_2, \dots, t_p\}$

2.2.  $\underline{F} \subset \mathcal{P}(\underline{A})$  famille d'attributs flous de  $\underline{A}$

2.3.  $f$  fonction d'incertitude telle que :

$$f(\emptyset) = 0$$

$$f(\underline{A}) = 1$$

$$0 \leq f(t_j) \leq 1$$

si  $t_i \in \underline{F}$  et  $t_j \in \underline{F}$  et si  $t_i$  "est moins certain que  $t_j$ ", alors  
 $f(t_i) < f(t_j)$

Dans ce cas  $(\underline{A}, \underline{F}, f)$  est défini comme un espace semi-borélien de valuation  $f$ ,  $f$  représentant la valuation de l'incertitude relative à chaque attribut.

### 3. Formalisation d'une structure incertaine imprécise

Dans ce cas, on a, pour chaque attribut  $t \in A$ , structure floue

- une fonction  $f(t)$  d'incertitude sur l'existence de l'appartenance de  $t$  à  $A$
- une fonction  $\mu_A(t)$  d'appartenance de  $t$  à  $A$ .

Dans ce cas, le chercheur choisit un opérateur combinant les deux fonctions (KAUFMANN 1973).

#### 3.1. L'opérateur PROD.

$\forall t_j \in A$ , on lui associera  $f(t_j) \cdot \mu_A(t_j)$

#### 3.2. L'opérateur MIN

$\forall t_j \in A$ , on lui associera  $f(t_j) \wedge \mu_A(t_j)$

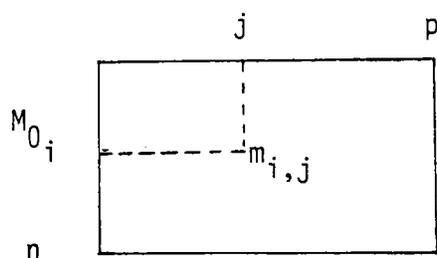
Nous avons présenté cette possibilité dans le chapitre IV, C II 1.

La structure floue  $A$  est donc telle qu'elle associe alors à chaque attribut  $t$  retenu par le chercheur, une fonction  $\mu$  résultant de la synthèse de l'imprécision et de l'appartenance c'est-à-dire d'un degré de méconnaissance relative à l'appartenance et d'un degré d'appartenance de l'attribut à la structure.

$$A = \{t_j, \mu_A(t_j) ; \mu_A(t_j) \in [0,1]\} \quad (1)$$

### 4. Traitement de la matrice de données

4.1. Comme nous l'avons indiqué plus haut, dans l'information spatiale est représentée la matrice des données :



$M_0$  est telle que  $m_{i,j}$  représente la valeur de l'attribut  $j$  sur l'élément ou la composante spatiale  $i$ .

Rendons cette matrice compatible avec la structure  $A$ . Pour cela divisons chaque élément de  $M_0$  par la valeur MAX de la colonne dans laquelle cet élément se trouve. Nous obtenons ainsi des valeurs prises dans  $[0,1]$  formant la matrice  $M_1$ . De ce fait chaque élément  $i$ ,  $i=1, \dots, n$  peut être considéré comme un sous-ensemble flou  $M_{1i}$

$$\forall i, \quad M_{1i} = \left\{ \left( t_j, \mu_{M_{1i}}(t_j) \right), \mu_{M_{1i}}(t_j) \in [0,1], j=1, \dots, p \right\} \quad (2)$$

4.2. La deuxième étape de la démarche consiste à définir chaque sous-ensemble flou  $M_{1i}$  par rapport à la structure incertaine  $A$ .

Nous proposons la formulation suivante à partir de (1) et de (2)

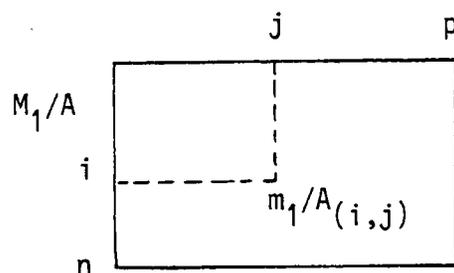
$$M_{1i} / A = \left\{ \left( t_j, \mu_{M_{1i}/A}(t_j) \right); \mu_{M_{1i}/A} = \mu_{M_{1i}}(t_j) \wedge \mu_A(t_j), \right. \\ \left. j = 1, \dots, p \right\} \quad (3)$$

En d'autres termes nous proposons pour chaque élément  $i$  de l'espace représenté  $M$ , compte tenu de la structure pré-définie  $A$  incertaine, et pour chaque attribut  $t_j$ , une fonction d'appartenance égale au MIN des fonctions d'appartenance de  $t_j$  à  $i$  et à la structure  $A$ . Il s'agit en quelque sorte d'une "base" d'appartenance minimale de l'attribut  $t_j$  à l'élément  $i$ , selon la structure  $A$ .

Chaque élément  $i$  est donc bien un sous-ensemble flou  $M_{1i}$  défini par  $A$ .

5. Expression spatiale du modèle. Espace possiblement et nécessairement organisé selon la structure A

5.1. Notre point de départ de la spatialisation de l'incertitude est la matrice  $M_1/A$ , c'est-à-dire celle qui définit la fonction d'appartenance de chaque attribut à chaque élément, compte tenu de la structure A.



où  $m_1/A(i,j)$  est l'appartenance de l'attribut  $j$  à l'élément  $i$ .

On peut de ce fait faire correspondre à l'élément  $i$  un sous-ensemble flou :

$$\forall i \in \underline{E} \quad (M_1/A)_i = \left\{ \left( t_j, \mu_{(M_1/A)_i}(t_j) \right) ; \mu_{(M_1/A)_i}(t_j) = \mu_i(t_j), j=1, \dots, p \right\}$$

5.2. Calcul de la contingence mathématique MAX du sous-ensemble flou  $(M_1/A)_i$

Nous affectons à chaque sous-ensemble  $(M_1/A)_i$ ,  $i=1, \dots, n$ , sa contingence mathématique MAX définie formellement dans le chapitre IV, c'est-à-dire une valuation de ce sous-ensemble par la fonction d'incertitude relative à la structure A.

De ce fait :

$$\forall i \in \underline{E}, \quad C(i) = \bigwedge_{j=1}^p \mu_{(M_1/A)_i}(t_j)$$

et selon (3)

$$C(i) = \bigwedge_{j=1}^p \left( \mu_{M_1 i}(t_j) \wedge \mu_A(t_j) \right) \quad (4)$$

Ainsi, à chaque élément spatial ou composante spatiale correspond la mesure floue de la possibilité d'appartenance de  $i$  à l'espace  $E_A$  organisé par la structure A.

On proposera donc de définir *un espace possiblement organisé selon la structure A* soit  $E_A^*$ , sous-espace flou de  $\underline{E}$ , dont les éléments ont une fonction d'appartenance égale à leur contingence mathématique.

$$E_A^* = \left\{ \left( i, \mu_{E_A^*}(i) \right) ; \mu_{E_A^*}(i) = C(i), i=1, \dots, n \right\}$$

Réalisons sur  $E_A^*$  des  $\alpha$ -coupures,  $\alpha$  correspondant à des valeurs choisies :

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_d$$

nous définissons des sous-ensembles ordinaires :

$$E_A^* \alpha_1 \supset E_A^* \alpha_2 \supset \dots \supset E_A^* \alpha_d$$

qui traduisent une organisation spatiale en sous-ensembles de plus en plus réduits en étendue, mais dont la "*possibilité*" d'organisation selon la structure A est de plus en plus forte.

### 5.3. Calcul de la nécessité du sous-ensemble flou $(M_1/A)_i$

Nous avons défini dans le chapitre IV C II 6 la notion de nécessité d'un sous-ensemble flou.

Rappelons :

$\forall j$  -  $\mu_A(t_j)$  est la fonction d'incertitude de l'appartenance de l'attribut  $j$  à la structure A.

Nous définissons :

$$- \mu_{\bar{A}}(t_j) = 1 - \mu_A(t_j)$$

La nécessité du sous-ensemble flou  $M_{(1/A)_i}$  représentant l'élément  $i$  de  $\underline{E}$  est alors :

$$\text{Nec} \left( M_{(1/A)_i} \right) = \bigwedge_{j=1}^p \left( \mu_{M_1 i}(t_j) \vee \mu_A(t_j) \right)$$

que nous écrivons, pour rendre compatible avec (4)

$$\text{Nec} (i) = \bigwedge_{j=1}^p \left( \mu_{M_1 i}(t_j) \vee \mu_{\bar{A}}(t_j) \right) \quad (5)$$

Nous proposons de définir *un espace nécessairement organisé selon la structure A* soit  $E_A^*$ , sous-espace flou de  $\underline{E}$ , dont les éléments ont une fonction d'appartenance égale à leur nécessité mathématique.

$$E_A^* = \left\{ \left( i, \mu_{E_A^*}(i) \right) ; \mu_{E_A^*}(i) = \text{Nec}(i), i=1, \dots, n \right\}$$

Réalisons sur  $E_A^*$  des  $\alpha$ -coupures,  $\alpha$  correspondant à des valeurs choisies :

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_r$$

nous définissons ainsi des sous-ensembles ordinaires :

$$E_{A\alpha_1}^* \supset E_{A\alpha_2}^* \supset \dots \supset E_{A\alpha_r}^*$$

qui traduisent une organisation spatiale en sous-ensembles de plus en plus réduits en étendue, mais dont la "nécessité" d'organisation selon la structure A est de plus en plus forte.

## 6. Conclusion

6.1. Le modèle d'organisation spatiale à partir d'une structure pré-définie incertaine A permet ainsi de définir et de nuancer  $E_A$ , l'espace géographique induit par cette structure : on distinguera ainsi un espace possiblement organisé et un espace nécessairement organisé selon respectivement la contingence mathématique MAX et la nécessité déterminées pour chaque élément de  $\underline{E}$ .

Chacun de ces éléments  $i, i=1, \dots, n$  pourrait être défini par l'intervalle  $[\text{Nec}(i), C(i)]$  et nous proposons de dire alors que  $E_A$  est structuré selon A d'après les notations.

$E_A$  peut alors être considéré comme un sous-ensemble  $\Phi$ -flou de  $E$  :

$$E_A = \left\{ \left( i, [\text{Nec}(i), C(i)] \right) \right\}, i=1, \dots, n \text{ et } [\text{Nec}(i), C(i)] \subseteq [0,1]$$

L'appartenance de chaque élément  $i$  à  $E_A$  est l'intervalle  $[\text{Nec}(i), C(i)]$  ; cette notation aurait l'avantage de combiner les deux notions essentielles de nécessité et de possibilité et de permettre d'approfondir l'analyse spatiale.

6.2. La conclusion peut être élargie à des considérations plus générales : en effet le mérite de ce modèle est de s'adapter à l'expression d'un structure pré-définie incertaine. Le cas se rencontre très souvent en géographie, humaine en particulier, où le

chercheur dispose d'attributs géographiques, mais n'est pas totalement certain que ces attributs sont bien ceux qui définissent la structure qu'il désire mettre en évidence.

Dans la généralité des cas, le problème est occulté : les *variables disponibles sont considérées comme certaines* dans leur appartenance à la structure donnée et traitées comme telle. Ainsi, en analyse des données, ce n'est qu'à l'étude de l'étude des saturations des variables sur les facteurs que l'on peut se rendre compte que telle ou telle variable ne contribue que fort peu à la définition des axes. Ces variables sont en général éliminées, d'autres sont rajoutées et le chercheur "reteste" son choix en effectuant une nouvelle analyse des données ; de cette démarche aux multiples itérations se dégage en fin de travail une structure "plus ou moins" certaine, attestée par la part de variance expliquée par chaque axe factoriel.

Il nous semble, une fois de plus, qu'au lieu d'"éliminer" les variables incertaines, et de se ramener de ce fait à un cas de structure non floue, il est essentiel de les garder, quitte à définir la part d'incertitude qui s'attache à chacune d'elle, en fonction d'études antérieures, voire même d'une modélisation. Il est bien évident que dans ce cas la méthodologie habituelle n'est plus praticable, aussi est-on alors tenu de recourir à la théorie du flou et ici en particulier, aux notations de possibilité et de nécessité.

Le chercheur perd de ce fait en précision et en certitude quant à l'énoncé des résultats obtenus : mais cette précision et cette certitude des résultats habituels sont-elles bien *réelles*, ne vaut-il pas mieux y renoncer au profit de résultats plus "flous", mais plus pertinents ?

## II - Traitement d'un exemple : Espace européen organisé selon la structure rhénane

### 1. Les données géographiques

Le modèle exposé ci-dessus est appliqué à des données

statistiques tirées de l'Annuaire de Statistiques régionales édité par EUROSTAT en 1981, mais dont les renseignements datent pour la plupart des années 1977-1978. Aucun annuaire plus récent n'existe au moment de la rédaction de ce travail : les données sont cependant significatives d'une Europe entrée dans la crise et sont de ce fait très intéressantes.

### 1.1. Le choix des attributs définissant la structure rhénane

Nous nous proposons de partir d'une structure pré-définie A représentant selon nous, la "structure rhénane". Il s'agit d'un ensemble de treize indicateurs régionaux dont la liste figure ci-après (tableau VI 2). Nous choisissons les attributs nommés, d'une part parce que nous estimons qu'ils ont un "poids" dans l'explication de la structure rhénane, d'autre part parce que notre choix est également conditionné par la liste même des attributs proposés dans l'annuaire.

En fait, notre choix est un choix à la fois raisonné et conditionné par l'existence même de données statistiques à notre disposition. Définir une structure revient alors, dans ce cas, comme dans la plupart des études géographiques, à choisir un ensemble d'attributs dont *on n'est pas sûr de l'appartenance à la structure donnée.*

Il est donc indispensable d'associer à chaque attribut une fonction d'incertitude, à valeur dans l'intervalle  $[0,1]$  qui est une évaluation de notre méconnaissance de cette appartenance. Choix qui s'efforce d'atténuer le caractère subjectif des décisions prises.

Ainsi les nombreux travaux sur l'espace rhéan (REITEL 1969, 1982, JUILLARD 1962, 1982) des articles plus limités (ROLLAND-MAY, 1973) mettent en évidence l'importance du rôle du taux d'activité, de l'industrie, mais surtout des services dans cet espace.

Cet espace est défini également par un espace fortement peuplé. JUILLARD (1977, 1982) en particulier insiste sur cet axe de forte densité bordant à l'est le "désert" français. REITEL (1969) met l'accent sur la forte valeur ajoutée que l'industrie et le secteur tertiaire apportent à la production. Nous nous appuyons sur toutes ces réflexions pour pro-

poser les attributs suivants et leur fonction d'incertitude.

TABLEAU VI 2      Structure pré-définie rhénane et fonction d'incertitude

N°	Variables retenues	Valeur proposée de la fonction d'incertitude
1	Surface (en ‰ de Eur. 9)	0.3
2	Densité au km <sup>2</sup>	0.6
3	Natalité (‰)	0.7
4	Taux d'activité 1979 (% pop. totale)	0.9
5	Taux d'activité féminine 1979	0.9
6	Taux de chômage 1979	0.5
7	Taux de chômage 14-24 en 1979	0.3
8	Taux de chômage féminin 1979	0.2
9	Actifs dans l'agriculture 1979 (%)	0.2
10	Actifs dans l'industrie 1979 (%)	0.7
11	Actifs dans les services 1979 (%)	0.8
12	Valeur ajoutée brute 1979 (% de Eur. 9)	0.8
13	Valeur ajoutée brute 1979 par habitant	0.8

Comme le soulignent PONSARD et TRANQUI dans une étude sur l'économie européenne (1982) et comme nous le verrons dans la suite de notre travail, le choix des indicateurs n'est pas indifférent aux résultats que nous obtiendrons. On devrait effectivement choisir le nombre le plus grand possible d'indicateurs susceptibles d'intervenir dans la structure rhénane. Dans le choix opéré, limité et peut-être discutable, nous avons cependant veillé à intégrer des indicateurs démographiques, socio-économiques et économiques si bien que nos résultats seront, dans l'ensemble, acceptables et cohérents.

### 1.2. Le choix des unités spatiales

Nous avons la possibilité de choisir deux types d'unités spatiales.

- d'une part les RCE, régions communautaires européennes. L'Europe des 9 en comptait 51

- d'autre part les UAB, unités administratives de base, au nombre de 108 permettant une étude spatiale plus fine.

Nous avons de ce fait retenu 36 UAB formant une très large "bande" de part et d'autre de l'axe rhénan et comprenant :

- des UAB françaises
- des UAB allemandes
- des UAB belges
- le Luxembourg
- des UAB néerlandaises.

La carte VI 1 et le tableau VI 3 résument cette information. Le tableau VI 4 représente les données initiales (matrice d'information spatiale).



TABLEAU VI 3

Les unités spatiales

N°	RCE	UAB
1	R.F.A.	Düsseldorf
2		Köln
3		Münster
4		Detmold
5		Arnsberg
6	Hessen	Darmstadt
7		Kassel
8	Rheinland-Pfalz	Koblenz
9		Trier
10		Rheinessen-Pfalz
11	Baden-Württemberg	Stuttgart
12		Karlsruhe
13		Freiburg
14		Tübingen
15	Saarland	Saarland
16	France	Est
17		Lorraine
18		Alsace
19	Pays-Bas	Franche-Comté
20		Overijssel
21		Gelderland
22		Utrecht
23		Noord-Holland
24		Zuid-Holland
25		Zeeland
26		Noord-Brabant
27	Belgique	Limburg
28		Anvers
29		Brabant
30		Hainaut
31		Liège
32		Limbourg
33		Luxembourg
34		Namur
35		Flandre Orientale
36	Luxembourg	Flandre Occidentale
		Luxembourg

MATRICE DES DONNEES INITIALES - TABLEAU VI 4 -

1	3.50	986.00	8.80	40.80	26.30	3.10	4.70	4.30	1.70	50.20	48.10	3.20	156.00
2	4.80	528.00	9.20	41.30	26.80	2.50	4.50	3.60	1.90	44.90	53.10	2.10	138.00
3	4.50	348.00	10.40	37.80	23.40	2.60	3.10	3.50	6.20	46.80	47.00	1.20	122.00
4	4.30	277.00	9.60	40.30	27.50	1.90	2.40	2.90	3.90	51.60	44.50	.90	130.00
5	5.20	461.00	9.50	39.70	24.70	2.90	5.40	4.00	2.00	52.20	45.80	1.80	123.00
6	7.60	358.00	9.30	44.40	32.20	2.00	2.50	3.10	2.30	45.90	51.90	2.50	157.00
7	6.30	149.00	9.30	39.40	26.00	1.90	2.50	2.10	6.30	46.50	47.20	.60	112.00
8	5.30	168.00	9.50	41.50	26.90	2.00	2.40	3.50	4.40	41.00	54.50	.60	113.00
9	3.20	96.00	10.40	40.60	27.90	2.50	2.90	3.50	10.60	38.90	50.60	.20	105.00
10	4.50	264.00	9.40	43.80	30.00	2.70	3.40	3.60	5.70	44.90	49.40	1.00	138.00
11	6.90	327.00	10.40	45.10	33.80	1.40	2.30	2.10	3.80	54.00	42.20	2.10	158.00
12	4.50	343.00	9.30	42.90	31.50	1.70	2.60	3.00	2.60	47.80	49.60	1.40	151.00
13	6.10	198.00	9.80	44.70	34.10	1.80	3.00	2.60	7.00	49.60	43.50	.90	129.00
14	5.90	167.00	10.90	45.80	35.70	1.80	3.80	2.00	10.90	52.10	37.00	.80	133.00
15	1.70	416.00	9.20	37.90	21.80	4.90	9.00	7.40	1.60	48.30	50.10	.50	122.00
16	15.50	98.00	14.70	41.40	29.10	4.50	12.40	6.80	5.60	43.90	50.50	.90	105.00
17	5.40	188.00	14.00	43.70	32.00	2.80	6.30	4.70	6.90	41.60	51.50	.60	111.00
18	10.60	67.00	15.20	45.10	35.90	4.80	11.30	8.10	13.20	50.20	36.60	.50	115.00
19	2.60	358.00	13.90	35.50	16.10	2.90	5.50	3.80	8.40	41.50	50.20	.40	101.00
20	4.10	279.00	13.00	33.90	16.80	2.90	6.60	4.80	6.80	37.10	56.10	.60	98.00
21	.90	638.00	12.60	36.60	21.10	2.00	6.00	2.60	4.00	29.00	67.00	.40	116.00
22	1.90	785.00	11.50	38.00	23.40	2.80	5.40	3.50	3.10	28.20	68.60	1.10	128.00
23	2.20	920.00	12.30	35.70	19.10	3.20	6.50	3.00	4.20	28.50	67.30	1.50	131.00
24	2.00	115.00	12.40	35.10	17.40	3.30	6.00	3.50	9.80	33.00	57.10	.20	123.00
25	3.40	400.00	13.00	36.40	19.90	3.80	5.60	4.10	5.10	42.50	52.40	.80	107.00
26	1.40	483.00	11.50	35.20	19.20	5.60	12.30	7.80	5.30	41.30	53.40	.40	100.00
27	1.90	548.00	12.60	39.80	25.20	5.80	9.20	13.00	2.60	42.80	54.60	.90	153.00
28	2.20	661.00	12.10	41.30	29.60	6.30	14.00	8.90	2.10	28.50	69.40	1.20	144.00
29	2.50	346.00	11.90	36.60	24.90	9.70	18.60	17.60	3.30	41.30	55.40	.50	94.00
30	2.50	261.00	11.60	39.80	28.20	9.90	17.40	18.70	2.50	39.00	58.40	.50	119.00
31	1.60	292.00	15.60	39.90	27.40	8.40	10.80	19.30	3.90	45.50	50.60	.30	111.00
32	2.90	50.00	13.60	35.80	22.10	5.00	12.80	8.70	12.20	25.70	62.20	.10	95.00
33	2.40	110.00	12.80	37.20	23.60	5.20	11.20	10.20	5.80	28.80	65.50	.20	101.00
34	2.00	446.00	12.70	39.90	24.70	6.00	10.70	10.60	3.50	42.70	53.90	.60	112.00
35	2.10	344.00	12.80	40.70	27.80	5.90	10.40	11.20	5.90	41.10	53.00	.50	122.00
36	1.70	140.00	11.20	39.00	22.90	1.50	4.20	2.20	5.10	37.20	57.70	.20	131.00

DONNEES NORMALISEES - TABLEAU VI 5 -

1	.22	1.00	.56	.89	.73	.31	.25	.22	.12	.92	.69	1.00	.98
2	.30	.53	.58	.90	.74	.25	.24	.18	.14	.83	.76	.65	.87
3	.29	.35	.66	.82	.65	.26	.16	.18	.46	.86	.67	.37	.77
4	.27	.28	.61	.87	.76	.19	.12	.15	.29	.95	.64	.28	.82
5	.33	.46	.60	.86	.68	.29	.29	.20	.15	.96	.65	.56	.77
6	.49	.36	.59	.96	.89	.20	.13	.16	.17	.85	.74	.78	.99
7	.40	.15	.59	.86	.72	.19	.13	.10	.47	.86	.68	.18	.70
8	.34	.17	.60	.90	.74	.20	.12	.18	.33	.75	.78	.18	.71
9	.20	.09	.66	.88	.77	.25	.15	.18	.80	.72	.72	.06	.66
10	.29	.26	.60	.95	.83	.27	.18	.17	.43	.83	.71	.31	.87
11	.44	.33	.66	.98	.94	.14	.12	.10	.28	1.00	.60	.65	1.00
12	.29	.34	.59	.93	.87	.17	.13	.15	.19	.88	.71	.43	.95
13	.39	.20	.62	.97	.94	.18	.16	.13	.53	.91	.62	.28	.81
14	.38	.16	.69	1.00	.99	.18	.20	.10	.82	.96	.53	.25	.84
15	.10	.42	.58	.82	.60	.49	.48	.38	.12	.89	.72	.15	.77
16	1.00	.09	.94	.90	.81	.45	.66	.35	.42	.81	.72	.28	.66
17	.34	.19	.89	.95	.89	.28	.33	.24	.52	.77	.74	.18	.70
18	.68	.06	.97	.98	1.00	.48	.60	.41	1.00	.92	.52	.15	.72
19	.16	.36	.89	.77	.44	.29	.29	.19	.63	.76	.72	.12	.63
20	.26	.28	.83	.74	.46	.29	.35	.24	.51	.68	.80	.18	.62
21	.05	.64	.80	.79	.58	.20	.32	.13	.30	.53	.96	.12	.73
22	.12	.79	.73	.82	.65	.28	.29	.18	.23	.52	.98	.34	.81
23	.14	.93	.78	.77	.53	.32	.34	.15	.31	.52	.96	.46	.82
24	.12	.11	.79	.76	.48	.33	.32	.18	.74	.61	.82	.06	.77
25	.21	.40	.83	.79	.55	.38	.30	.21	.38	.78	.75	.25	.67
26	.09	.48	.73	.76	.53	.56	.66	.40	.40	.76	.76	.12	.63
27	.12	.55	.80	.86	.70	.58	.49	.67	.19	.79	.78	.28	.96
28	.14	.67	.77	.90	.82	.63	.75	.46	.15	.52	1.00	.37	.91
29	.16	.35	.76	.79	.69	.97	1.00	.91	.25	.76	.79	.15	.59
30	.16	.26	.74	.86	.78	1.00	.93	.96	.18	.72	.84	.15	.75
31	.10	.29	1.00	.87	.76	.84	.58	1.00	.29	.84	.72	.09	.70
32	.18	.05	.87	.78	.61	.50	.68	.45	.92	.47	.89	.03	.60
33	.15	.11	.82	.81	.65	.52	.60	.52	.43	.53	.94	.06	.63
34	.12	.45	.81	.87	.74	.60	.57	.54	.26	.79	.77	.18	.70
35	.13	.34	.82	.88	.77	.59	.55	.58	.44	.76	.76	.15	.77
36	.10	.14	.71	.85	.63	.15	.22	.11	.38	.68	.83	.06	.82

MATRICE DES DONNEES SELON LA STRUCTURE PREDEFINIE A - TABLEAU VI 6 -

1	.22	.60	.56	.89	.73	.31	.25	.20	.12	.70	.69	.80	.80
2	.30	.53	.58	.90	.74	.25	.24	.18	.14	.70	.74	.65	.80
3	.29	.35	.66	.82	.65	.26	.16	.18	.20	.70	.67	.37	.77
4	.27	.28	.61	.87	.76	.19	.12	.15	.20	.70	.64	.28	.80
5	.30	.46	.60	.86	.68	.29	.29	.20	.15	.70	.65	.56	.77
6	.30	.36	.59	.90	.89	.20	.13	.16	.17	.70	.74	.78	.80
7	.30	.15	.59	.86	.72	.19	.13	.10	.20	.70	.68	.18	.70
8	.30	.17	.60	.90	.74	.20	.12	.18	.20	.70	.78	.18	.71
9	.20	.09	.66	.88	.77	.25	.15	.18	.20	.70	.72	.06	.66
10	.29	.26	.60	.90	.83	.27	.18	.18	.20	.70	.71	.31	.80
11	.30	.33	.66	.90	.90	.14	.12	.10	.20	.70	.60	.65	.80
12	.29	.34	.59	.90	.87	.17	.13	.15	.19	.70	.71	.43	.80
13	.30	.20	.62	.90	.90	.18	.16	.13	.20	.70	.62	.28	.80
14	.30	.16	.69	.90	.90	.18	.20	.10	.20	.70	.53	.25	.80
15	.10	.42	.58	.82	.60	.49	.30	.20	.12	.70	.72	.15	.77
16	.30	.09	.70	.90	.81	.45	.30	.20	.20	.70	.72	.28	.66
17	.30	.19	.70	.90	.89	.28	.30	.20	.20	.70	.74	.18	.70
18	.30	.06	.70	.90	.90	.48	.30	.20	.20	.70	.52	.15	.72
19	.16	.36	.70	.77	.44	.29	.29	.19	.20	.70	.72	.12	.63
20	.26	.28	.70	.74	.46	.29	.30	.20	.20	.68	.80	.18	.62
21	.05	.60	.70	.79	.58	.20	.30	.13	.20	.53	.80	.12	.73
22	.12	.60	.70	.82	.65	.28	.29	.18	.20	.52	.80	.34	.80
23	.14	.60	.70	.77	.53	.32	.30	.15	.20	.52	.80	.46	.80
24	.12	.11	.70	.76	.48	.33	.30	.18	.20	.61	.80	.06	.77
25	.21	.40	.70	.79	.55	.38	.30	.20	.20	.70	.75	.25	.67
26	.09	.48	.70	.76	.53	.50	.30	.20	.20	.70	.76	.12	.63
27	.12	.55	.70	.86	.70	.50	.30	.20	.19	.70	.78	.28	.80
28	.14	.60	.70	.90	.82	.50	.30	.20	.15	.52	.80	.37	.80
29	.16	.35	.70	.79	.69	.50	.30	.20	.20	.70	.79	.15	.59
30	.16	.26	.70	.86	.78	.50	.30	.20	.18	.70	.80	.15	.75
31	.10	.29	.70	.87	.76	.50	.30	.20	.20	.70	.72	.09	.70
32	.18	.05	.70	.78	.61	.50	.30	.20	.20	.47	.80	.03	.69
33	.15	.11	.70	.81	.65	.50	.30	.20	.20	.53	.80	.06	.63
34	.12	.45	.70	.87	.74	.50	.30	.20	.20	.70	.77	.18	.70
35	.13	.34	.70	.88	.77	.50	.30	.20	.20	.70	.76	.15	.77
36	.10	.14	.70	.85	.63	.15	.22	.11	.20	.68	.80	.06	.80

## 2. Les étapes du traitement de la matrice de données

Le traitement de la matrice de données se fait en trois étapes.

### 2.1. Normalisation de cette matrice (Tableau VI 5)

par division de chaque colonne par la valeur MAX. de la colonne. Nous obtenons ainsi une matrice M1 de données comprises dans l'intervalle  $[0,1]$  et qui se prête donc à un traitement appliquant la théorie des sous-ensembles flous.

Cette normalisation dépend ainsi du choix des éléments spatiaux : il est évident que plus la valeur MAX d'une colonne est élevée, plus les autres valeurs seront faibles. Nous rencontrons ici les mêmes difficultés que celles que nous rencontrons en statistique descriptive dans la détermination d'indicateurs de valeur centrale comme la moyenne arithmétique ou le calcul de la standardisation d'une variable.

### 2.2. Détermination du tableau de données selon la structure incertaine (Tableau VI 6)

Il s'agit de la matrice définie plus haut sous le nom de  $M_{1/A}$  qui associe, pour chaque élément  $i$  une fonction d'appartenance égale au MIN de sa fonction d'appartenance à l'élément  $i$  et de la fonction d'incertitude.

2.3. Enfin, détermination de la contingence mathématique MAX et de la Nécessité de chaque élément considéré comme un sous-ensemble flou selon la structure pré-définie A. Les résultats sont consignés dans le tableau VI 7.

TABLEAU VI 7 : Contingence mathématique MAX et Nécessité d'un élément selon la structure pré-définie (val. x 10<sup>2</sup>)

	Unités spatiales	$C(e_i)$	$Nec(e_i)$
1	Düsseldorf	89	50
2	Köln	90	50
3	Münster	82	37
4	Detmold	87	28
5	Arnsberg	86	46
6	Darmstadt	90	40
7	Kassel	86	20
8	Koblenz	90	20
9	Trier	88	20
10	Rheinessen-Pfalz	90	31
11	Stuttgart	90	40
12	Karlsruhe	90	40
13	Freiburg	90	28
14	Tübingen	90	25
15	Saarland	82	20
16	Lorraine	90	28
17	Alsace	90	20
18	Franche-Comté	90	20
19	Overijssel	77	20
20	Gelderland	80	20
21	Utrecht	80	20
22	Noord-Holland	80	34
23	Zuid-Holland	80	46
24	Zeeland	80	20
25	Noord-Brabant	79	25
26	Limburg	76	20
27	Anvers	80	28
28	Brabant	90	37
29	Hainaut	79	20
30	Liège	86	20
31	Limbourg	87	20
32	Luxembourg	78	20
33	Namur	81	20
34	Flandre Orientale	87	20
35	Flandre Occidentale	88	20
36	Luxembourg	85	20

### 3. Expression spatiale des résultats et commentaire géographique

Reprenant le tableau VI 7, nous pouvons définir :

#### 3.1. L'espace $E_A^*$ possiblement organisé selon la structure rhénane

C'est le sous-espace flou dont les éléments spatiaux ont une fonction d'appartenance égale à leur contingence mathématique MAX.

3.1.1. La cartographie (carte VI 2) révèle une structure peu différenciée ce qui semble logique puisqu'il s'agit d'espaces *possiblement* organisés selon la structure rhénane, donc d'espaces qui sont susceptibles éventuellement d'appartenir à l'espace rhéna.

Il faut cependant remarquer que :

$E_{A0.90}^*$  représente en fait l'espace drainé par le Rhin et ses affluents : Neckar (Tübingen, Stuttgart), Main (Darmstadt), Moselle (Lorraine, Koblenz) ; nous retrouvons là la notion de "grand espace" défini par JUIL-LARD qui semble bien se vérifier ici.

S'intègrent à ce secteur la région très urbanisée et industrielle du Brabant et, plus paradoxalement la Franche-Comté raccordée à l'ensemble par l'importance du fait industriel. Il s'amorce ici un prolongement de l'espace rhéna en un axe méridien Méditerranée-Mer du Nord.

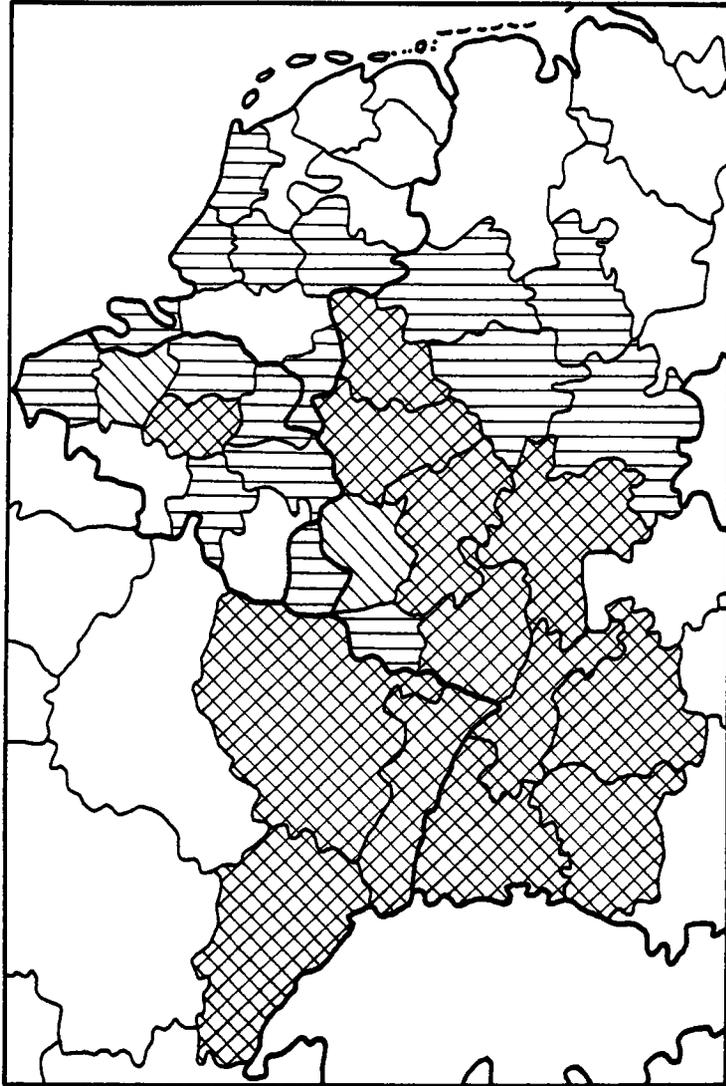
3.2. Ce noyau rhéna est bordé par une "frange" où le seuil  $\alpha$  doit être fixé à 0.80 pour que nous y voyions clair. Il est remarquable qu'à  $E_{A0.80}^*$  appartiennent :

- des espaces périphériques moins touchés par le fait rhéna car plus éloignés (Detmold par exemple)

- les espaces côtiers de la Mer du Nord : le caractère proprement rhéna, du moins tel que nous l'avons appréhendé, s'estompe au profit du "caractère océanique" qu'il faudrait préciser en intégrant en particulier un ou plusieurs indicateurs de commerce et d'échanges.

CARTE VI 2.

ESPACE POSSIBLEMENT ORGANISE SELON LA  
STRUCTURE RHENANE ET SELON UN SEUIL  $\alpha$  DONNE



Réalisation d' $\alpha$ -coupures

$\alpha$	$\mathcal{E}^*$ $A\alpha$		
0.80	Horizontal lines	Diagonal lines	Cross-hatch
0.88	Diagonal lines	Cross-hatch	Unshaded
0.90	Cross-hatch	Unshaded	Unshaded

### 3.2. L'espace $E_A^*$ nécessairement organisé selon la structure rhénane

3.1.1. Cet espace est plus différencié et révèle une structure rhénane *nécessaire* selon un seuil  $\alpha$  choisi (carte VI 3). Il se dégage plusieurs sous-ensembles où l'on peut distinguer :

- le "cœur" de l'espace rhénan selon la structure que nous nous sommes fixée. Il correspond en fait au grand carrefour européen Rhin-Ruhr, et, plus largement au carrefour de l'axe méridien avec le très ancien axe Est-Ouest du Hellweg et de la limite des Börde.

- les espaces périphériques correspondant aux axes fluviaux secondaires déjà notés plus haut

- la notation de la côte néerlandaise associant cette fois-ci un débouché océanique à l'espace.

3.1.2. Il faut surtout noter, et cela n'est pas fait pour étonner un géographe, le "vide" relatif de l'espace français et belge, véritables secteurs faibles dans cet ensemble rhénan.

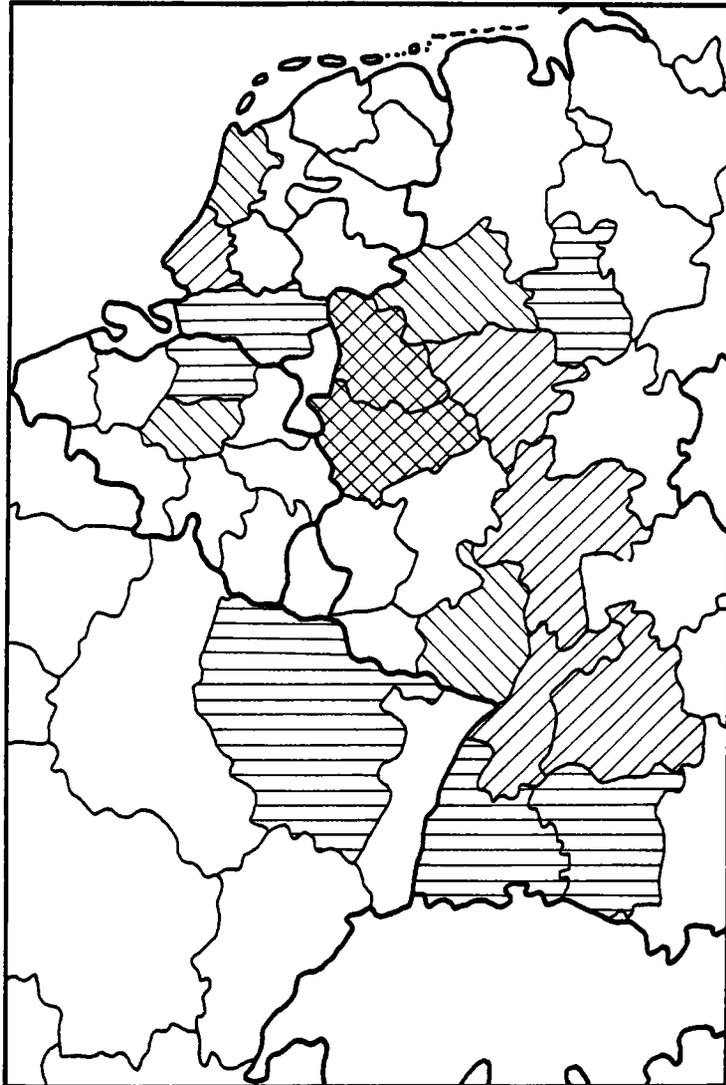
## 4. Conclusion

Il est bien évident que les conclusions quant à la structure et l'organisation de l'espace rhénan ainsi énoncées, doivent l'être avec la plus grande prudence : le choix limité des indicateurs limite forcément la portée des notations ci-dessus. Il n'empêche que le modèle permet la mise en évidence d'une organisation *possible* et *nécessaire* de l'espace selon une structure pré-définie incertaine. Nous pouvons donc bien intégrer l'incertitude *dans* une étude géographique et bâtir une méthodologie cohérente à partir de données incertaines.

Le même souci de tenir compte d'une structure imprécise caractérise le modèle de classification floue que nous allons présenter dans le dernier grand paragraphe de ce chapitre.

CARTE VI 3.

ESPACE NECESSAIREMENT ORGANISE SELON LA  
STRUCTURE RHENANE ET SELON UN SEUIL  $\alpha$ -DONNE



Réalisation d' $\alpha$ -coupures

$\alpha$	$\mathcal{E}^*$ $A\alpha$			
0.25	Horizontal lines	Diagonal lines (top-left to bottom-right)	Diagonal lines (top-right to bottom-left)	Cross-hatch
0.30	Diagonal lines (top-left to bottom-right)	Diagonal lines (top-right to bottom-left)	Cross-hatch	Horizontal lines
0.40	Diagonal lines (top-left to bottom-right)	Cross-hatch	Horizontal lines	Diagonal lines (top-right to bottom-left)
0.50	Cross-hatch	Horizontal lines	Diagonal lines (top-right to bottom-left)	Diagonal lines (top-left to bottom-right)

C - MODELE DE REGIONALISATION DANS UN CONTEXTE IMPRECIS : METHODE DE CLASSIFICATION SPATIALE FLOUE

Régionaliser l'espace dans un contexte imprécis est une préoccupation fondamentale de l'analyste spatial. Faut-il pour cela adopter des méthodes de classifications aboutissant à des groupes spatiaux disjoints, faut-il au contraire renoncer à cette précision somme toute illusoire et accepter la constitution de régions floues, c'est-à-dire non nécessairement disjointes ? Les géographes ont, le plus souvent, adopté la première voie, tout en sentant et notant, nous l'avons déjà vu, le caractère souvent artificiel d'une telle démarche.

Les "fuzzystes" (analystes spatiaux utilisant la théorie des sous-ensembles flous) ont proposé une réflexion à la fois théorique, informatique et concrète sur ce problème. Parmi eux, les chercheurs de l'I.M.E. de Dijon se sont particulièrement attachés à ce problème. Les travaux de PONSARD (1977), PREVOT (1977) formalisant l'approche de DELOCHE (1975), sont appliqués dans l'étude de cas précis dont celle de TRANQUI (1978) sur la régionalisation française et PONSARD et TRANQUI (1982) sur la régionalisation européenne. Nous envisagerons successivement les bases formelles et l'exposé de l'algorithme de régionalisation dans un premier paragraphe puis nous commenterons les grandes lignes des résultats obtenus sur la régionalisation européenne.

I - Les bases mathématiques de la classification spatiale floue

1. Rappel de notions mathématiques nécessaires à la méthode de classification floue.

Nous avons évoqué au début de ce chapitre (A I 2) la notion de relation binaire floue.

1.1. Composition de deux relations binaires floues

soit  $R_1 \subset \underline{X} \times \underline{Y}$  et  $R_2 \subset \underline{Y} \times \underline{Z}$

$\underline{X}, \underline{Y}, \underline{Z}$  sous-ensembles d'un référentiel  $\underline{E}$

soit  $x \in \underline{X}$ ,  $y \in \underline{Y}$ ,  $z \in \underline{Z}$

1.1.1. Composition max-min de  $R_1$  et  $R_2$  : elle est définie par :

$$\mu_{R_2 \circ R_1}(x, z) = \bigvee_y \left[ \mu_{R_1}(x, y) \wedge \mu_{R_2}(y, z) \right]$$

où  $\bigvee_y$  est le maximum de  $\left[ \mu_{R_1}(x, y) \wedge \mu_{R_2}(y, z) \right]$

quand  $y$  parcourt  $Y$ .

1.1.2. Composition min-max de  $R_1$  et  $R_2$  : elle est définie par :

$$\mu_{R_2 * R_1}(x, z) = \bigwedge_y \left[ \mu_{R_1}(x, y) \vee \mu_{R_2}(y, z) \right]$$

1.1.3. Composition min-addition ordinaire : elle est définie par :

$$\mu_{R_2 + R_1} = \bigwedge_y \left[ \mu_{R_1}(x, y) + \mu_{R_2}(y, z) \right]$$

1.2. Rappelons quelques propriétés des relations binaires floues, (tableau VI 1) qui nous seront nécessaires dans la suite du travail.

1.2.1. Transitivité Max-min

$$x, y, z \in \underline{E^3}$$

$$\mu_R(x, z) \geq \bigvee_y \left[ \mu_R(x, y) \wedge \mu_R(y, z) \right]$$

1.2.2. Transitivité Min-max

$$x, y, z \in \underline{E^3}$$

$$\mu_{\bar{R}}(x, z) \leq \bigwedge_y \left[ \mu_{\bar{R}}(x, y) \vee \mu_{\bar{R}}(y, z) \right]$$

où  $\mu_{\bar{R}}(x, y) = 1 - \mu_R(x, y)$

1.2.3. Transitivité Min-addition ordinaire

$$x, y, z \in \underline{E^3}$$

$$\mu_R(x, z) \leq \bigwedge_y \left[ \mu_R(x, y) + \mu_R(y, z) \right]$$

1.3. Notion de sous-relation maximale de similitude

1.3.1. Une relation de *pré-ordre* est une relation réflexive et transi-

tive max-min.

1.3.2. Une relation de *similitude* est une relation réflexive, transitive max-min et symétrique.

1.3.3. Soit un préordre  $R \subset \underline{E} \times \underline{E}$

S'il existe un sous-ensemble ordinaire  $\underline{E}_1 \subset E$  tel que :

$$\forall x, y \in \underline{E}_1^2 : \mu_R(x, y) = \mu_R(y, x)$$

les éléments de  $\underline{E}_1$  forment entre eux une relation de similitude qu'on définit comme une

"sous-relation de similitude"

1.3.4. Une sous-relation de similitude est maximale si elle n'est une sous-relation d'aucune de même nature dans la relation considérée (KAUFMANN 1973, TRANQUI 1978).

Les auteurs sus-nommés insistent sur le fait que ces sous-relations maximales de similitude peuvent être disjointes ou non disjointes. Elles permettent donc de respecter le caractère imprécis d'une classification de sous-espaces en types régionaux.

L'exemple suivant, tiré de KAUFMANN (1973) illustre le cas de sous-relations maximales de similitude non-disjointes.

$R \curvearrowright$	A	B	C	D
A	1	0.2	0.2	0.5
B	0.2	1	0.2	0.2
C	0.5	0.2	1	0.5
D	0.2	0.2	0.2	1

Nous pouvons définir en effet :

$$R_1 = \{A, B\}$$

$$R_2 = \{B, C\}$$

$$R_3 = \{B, D\}$$

1.4. Fermeture transitive d'une relation binaire floue

Soit  $R$  une relation dans  $\underline{E} \times \underline{E}$ .

1.4.1. La fermeture transitive max-min de  $R$

est la relation :

$$\widehat{R} = R \cup R^2 \cup R^3 \dots\dots$$

où  $R^2 = R \circ R$  c'est-à-dire la composition max-min de  $R$  avec elle-même

$R^3 = R^2 \circ R^1$  c'est-à-dire la composition max-min de  $R$  et  $R^2$ .

1.4.2. La fermeture transitive min-max de  $R$

est la relation :

$$\bigvee R = R \cap R^2 \cap R^3 \cap R^4 \dots\dots$$

où  $R^2$  est la composition min-max de  $R$  avec elle-même :  $R^2 = R \star R$

$R^3$  est la composition min-max de  $R$  avec  $R^2$  :  $R^3 = R^2 \star R$

1.4.3. La fermeture transitive min-addition ordinaire de

est la relation :

$$R^+ = R \cap R^2 \cap R^3 \dots\dots$$

où  $R^2$  est la composition min-addition ordinaire de  $R$  avec elle-même :

$$R^2 = R + R$$

$R^3$  est la composition min-addition ordinaire de  $R$  avec  $R^2$  :

$$R^3 = R + R^2$$

2. Théorèmes

nécessaires à l'algorithme de classification automatique.

2.1. Théorème de décomposition d'une relation de dissimilitude (KAUFMANN 1973)

Soit  $\bar{R}$  une relation de dissimilitude dans  $\underline{E} \times \underline{E}$ .

( $\bar{R}$  symétrique, transitive min-max, antiréflexive)

$\bar{R}$  peut être décomposée sous la forme :

$$\bar{R} = \bigwedge_{\alpha} \alpha R_{\alpha}, \quad 0 \leq \alpha < 1$$

avec  $\mu_{R_{\alpha}}(x,y) = 1$  si  $\mu_{\bar{R}}(x,y) \leq \alpha$

$$\mu_{R_\alpha}(x,y) = 0 \text{ si } \mu_{\bar{R}}(x,y) > \alpha$$

Cela correspond à la décomposition d'une relation de dissimilitude par *niveaux* relatifs aux valeurs contenues dans cette relation ; en effet  $R_\alpha$  est un sous-ensemble ordinaire de niveau  $\alpha$ , c'est-à-dire une relation d'équivalence au sens de la théorie des sous-ensembles ordinaires.

Appliquons ce théorème à un exemple (PONSARD, TRANQUI 1982)

$\bar{R}$ ↗	a	b	c	d
a	0	0.5	0.62	0.31
b	0.5	0	0.55	0.33
c	0.62	0.55	0	0.62
d	0.31	0.33	0.62	0

Décomposons  $\bar{R}$  selon les niveaux relatifs aux valeurs contenues dans  $\bar{R}$  et appliquons le théorème 2.1.

$\alpha = 0$

$R_0$	a	b	c	d
a	1	0	0	0
b	0	1	0	0
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1

$\alpha \leq 0.31$

$R_{0.31}$	a	b	c	d
a	1	0	0	1
b	0	1	0	0
c	0	0	1	0
d	1	0	0	1

$\alpha \ll 0.33$	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>R_{0.33}</math></td> <td style="padding: 5px;">a</td> <td style="padding: 5px;">b</td> <td style="padding: 5px;">c</td> <td style="padding: 5px;">d</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">a</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">1</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">b</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">1</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">c</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">0</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">d</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">1</td> </tr> </table>	$R_{0.33}$	a	b	c	d	a	1	0	0	1	b	0	1	0	1	c	0	0	1	0	d	1	1	0	1
$R_{0.33}$	a	b	c	d																						
a	1	0	0	1																						
b	0	1	0	1																						
c	0	0	1	0																						
d	1	1	0	1																						

$\alpha \ll 0.5$	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>R_{0.5}</math></td> <td style="padding: 5px;">a</td> <td style="padding: 5px;">b</td> <td style="padding: 5px;">c</td> <td style="padding: 5px;">d</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">a</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">1</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">b</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">1</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">c</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">0</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">d</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">1</td> </tr> </table>	$R_{0.5}$	a	b	c	d	a	1	1	0	1	b	1	1	1	1	c	0	1	1	0	d	1	1	0	1
$R_{0.5}$	a	b	c	d																						
a	1	1	0	1																						
b	1	1	1	1																						
c	0	1	1	0																						
d	1	1	0	1																						

$\alpha \ll 0.55$	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>R_{0.55}</math></td> <td style="padding: 5px;">a</td> <td style="padding: 5px;">b</td> <td style="padding: 5px;">c</td> <td style="padding: 5px;">d</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">a</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">1</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">b</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">1</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">c</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">0</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">d</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">1</td> </tr> </table>	$R_{0.55}$	a	b	c	d	a	1	1	0	1	b	1	1	1	1	c	0	1	1	0	d	1	1	0	1
$R_{0.55}$	a	b	c	d																						
a	1	1	0	1																						
b	1	1	1	1																						
c	0	1	1	0																						
d	1	1	0	1																						

$\alpha \ll 0.62$	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>R_{0.62}</math></td> <td style="padding: 5px;">a</td> <td style="padding: 5px;">b</td> <td style="padding: 5px;">c</td> <td style="padding: 5px;">d</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">a</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">1</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">b</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">1</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">c</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">1</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">d</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">1</td> </tr> </table>	$R_{0.62}$	a	b	c	d	a	1	1	1	1	b	1	1	1	1	c	1	1	1	1	d	1	1	1	1
$R_{0.62}$	a	b	c	d																						
a	1	1	1	1																						
b	1	1	1	1																						
c	1	1	1	1																						
d	1	1	1	1																						

2.2. Théorème : la fermeture transitive d'une relation binaire floue quelconque est une relation binaire floue (KAUFMANN 1973).

2.3. Théorème : toute relation de dissemblance obtenue à partir de la distance de HAMMING généralisée relative, ou la distance euclidienne relative, est une relation qui est sa propre fermeture transitive min-addition ordinaire.

Ces deux derniers théorèmes permettent de faire la remarque suivante :

#### 2.4. Remarque

Une distance de HAMMING généralisée relative, ou une distance euclidienne relative est anti-réflexive, symétrique et transitive min-addition ordinaire. Elle peut donc être définie comme une relation de dissimilitude min-addition ordinaire. On peut donc lui appliquer le théorème 2.1. et la décomposer selon les niveaux relatifs aux valeurs contenues dans cette relation.

Toutefois cette décomposition ne donne plus des classes d'équivalence, mais des sous-relations maximales de similitude, non forcément disjointes.

PONSARD et TRANQUI utilisent l'algorithme de PICHAT pour obtenir la décomposition d'une relation de similitude en sous-relations maximales.

Il consiste à obtenir les sous-graphes ordinaires pleins maximaux du graphe ordinaire associé.

Remarque : un sous-graphe ordinaire plein est un sous-graphe dont les éléments représentatifs dans la matrice associée sont tous égaux à 1.

Un sous-graphe plein maximal est un sous-graphe plein qui n'est contenu dans aucun autre sous-graphe plein.

### II - L'algorithme de PICHAT de décomposition d'une relation floue en sous-relations maximales

#### 1. Les bases de l'algorithme

##### 1.1. Définitions préliminaires

Soit deux éléments binaires  $x, y$

On définit la somme booléenne ( $+$ ) et le produit booléen ( $\cdot$ ) selon les données des tableaux suivants :

		x	y
		0	1
x	0	0	1
y	1	1	1

		x	y
		0	1
x	0	0	0
y	1	0	1

On en tire les règles de simplification suivantes :

$$x \overset{\bullet}{+} x = x \quad (1)$$

$$x \overset{\bullet}{+} 0 = x \quad (2)$$

$$x \bullet x = x \quad (3)$$

$$x \bullet y = 0 \quad (4)$$

$$x \overset{\bullet}{+} x \cdot y = x \overset{\bullet}{+} 0 = x \quad (5)$$

### 1.2. La procédure utilisée

Soit une matrice carrée symétrique. On en prend la demi-matrice au-dessus de la diagonale principale.

1.2.1. Prendre chaque ligne, on repère les zéros.

On associe l'indice de ligne par la somme booléenne au produit booléen des indices de colonne où se trouvent les zéros.

La somme booléenne vaut 1 si aucun zéro ne se trouve dans la ligne étudiée.

1.2.2. Calculer S produit booléen de toutes les sommes ainsi calculées selon les lignes.

1.2.3. Déterminer S' complémentaire de S qui donne les sous-ensembles qui sont sous-relations maximales de similitude.

### 1.3. Exemple 1

	a	b	c	d
a	/	0	1	0
b		/	0	1
c			/	0
d				/

1.3.1. ligne a :  $a \dot{+} b \cdot d$   
ligne b :  $b \dot{+} c$   
ligne c :  $c \dot{+} d$   
ligne d : 1

1.3.2. Formons S :

$$S = (a \dot{+} b \cdot d) \cdot (b \dot{+} c) \cdot (c \dot{+} d) \cdot 1$$
$$S = (a \cdot b \dot{+} b \cdot b \cdot d \dot{+} a \cdot c \dot{+} b \cdot c \cdot d) \cdot (c \dot{+} d)$$

Simplifions selon les règles de simplification énoncées (1)

$$S = (a \cdot b \dot{+} b \cdot d \dot{+} a \cdot c \dot{+} b \cdot c \cdot d) \cdot (c \dot{+} d)$$
$$S = a \cdot b \cdot c \dot{+} a \cdot b \cdot d \dot{+} b \cdot d \cdot c \dot{+} b \cdot d \cdot d \dot{+} a \cdot c \cdot c \dot{+} a \cdot c \cdot d \dot{+} b \cdot c \cdot d \cdot c$$
$$\quad \quad \quad \dot{+} b \cdot c \cdot d \cdot d$$
$$S = a \cdot b \cdot c \dot{+} a \cdot b \cdot d \dot{+} b \cdot d \cdot c \dot{+} b \cdot d \dot{+} a \cdot c \dot{+} a \cdot c \cdot d \dot{+} b \cdot c \cdot d \dot{+} b \cdot c \cdot d$$

Appliquons la simplification de type (5)

$$a \cdot c \dot{+} a \cdot c \cdot d = a \cdot c$$
$$b \cdot d \dot{+} b \cdot d \cdot c = b \cdot d$$

Nous obtenons :

$$S = a \cdot b \cdot c \dot{+} a \cdot b \cdot d \dot{+} b \cdot d \cdot c \dot{+} a \cdot c \dot{+} b \cdot d \dot{+} b \cdot c \cdot d$$

or

$$a \cdot c \dot{+} a \cdot c \cdot b = a \cdot c$$
$$b \cdot d \dot{+} b \cdot d \cdot c = b \cdot d$$

Nous obtenons :

$$S = a \cdot b \cdot d \dot{+} b \cdot d \cdot c \dot{+} a \cdot c \dot{+} b \cdot d$$

or

$$b \cdot d \dot{+} b \cdot d \cdot a = b \cdot d$$

$$S = b \cdot d \cdot c \dot{+} a \cdot c \dot{+} b \cdot d$$

ce qui donne :

$$\boxed{S = a \cdot c \dot{+} b \cdot d}$$

D'où :

1.3.3. S' complémentaire de S :

$$S' = b \cdot d \dot{+} a \cdot c$$

Ce qui donne deux sous-ensembles qui sont les sous-relations maximales de similitude cherchées

$$\left\{ b, d \right\} \quad \left\{ a, c \right\}$$

ici ces deux sous-ensembles sont disjoints ; l'exemple traité par TRANQUI (1978) donne, lui, des sous-ensembles non-disjoints. Evoquons rapidement cet exemple.

1.4. Exemple 2 (correspondant à  $\alpha < 0.33$  de 2.1.)

	a	b	c	d
a		0	0	1
b			0	1
c				0
d				

- 1.4.1. ligne a :  $a \dot{+} b.c$   
 ligne b :  $b \dot{+} c$   
 ligne c :  $c \dot{+} d$   
 ligne d : 1

1.4.2.

$$S = (a \dot{+} b.c) \cdot (b \dot{+} c) \cdot (c \dot{+} d) \cdot 1$$

$$S = (a.b \dot{+} a.c \dot{+} b.c.b \dot{+} b.c.c) \cdot (c \dot{+} d)$$

$$S = (a.b \dot{+} a.c \dot{+} b.c) \cdot (c \dot{+} d)$$

$$S = a.b.c \dot{+} a.b.d \dot{+} a.c.c \dot{+} a.c.d \dot{+} b.c.c \dot{+} b.c.d$$

$$S = a.b.c \dot{+} a.b.d \dot{+} a.c \dot{+} a.c.d \dot{+} b.c \dot{+} b.c.d$$

Simplifions :

$$a.c \dot{+} a.c.d = a.c$$

$$b.c \dot{+} b.c.d = b.c$$

$$S = a.b.c \dot{+} a.b.d \dot{+} a.c \dot{+} b.c$$

$$S = b.c \dot{+} a.b.d \dot{+} a.c$$

1.4.3. On tire  $S' = a.d \dot{+} c \dot{+} b.d$

Donc les sous-relations maximales de similitude sont les trois sous-ensemble non disjoints :

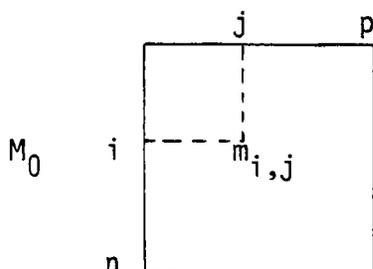
$$\{c\}, \{a,d\}, \{b,d\}$$

## 2. Les étapes de l'algorithme de PICHAT

Cinq étapes caractérisent la recherche de sous-relations maximales de similitude en sous-ensembles disjoints ou non. Appliquons ces étapes à une procédure de régionalisation.

### 2.1. Saisie des données. Formation d'une matrice d'information spatiale

Soit la matrice  $M_0$  contenant en ligne les éléments spatiaux ou composantes spatiales et en colonnes les variables (la structure supposée est une structure certaine et précise)



où  $m_{i,j}$  est la valeur de la variable n° j pour l'élément i.

### 2.2. Normalisation des données

Selon la procédure utilisée dans le modèle précédent (B II). Nous obtenons une matrice  $M_1$  dont les valeurs sont comprises entre  $[0,1]$ .

2.3. Calcul de la matrice des distances entre tous les éléments de  $M_1$ . PONSARD et TRANQUI adoptent le choix de la distance de HAMMING généralisée relative. On obtient une matrice carrée symétrique, de dimensions  $(p,p)$ , qui est une matrice de dissimilitude min-addition ordinaire selon les théorèmes exposés plus haut puisqu'elle établit entre les éléments en ligne et en colonne une relation  $\bar{R}$  symétrique, min-addition ordinaire et antiréflexive.

### 2.4. Décomposition de $\bar{R}$ en sous-relations maximales de dissimilitude

A chaque niveau  $\alpha$  de la demi-matrice située au-dessus de la diagonale principale, on associe un graphe plein maximal

correspondant au niveau donné.

L'exemple traité en 2.1. correspond à cette étape.

### 2.5. Processus de recherches de sous-relations maximales de similitude

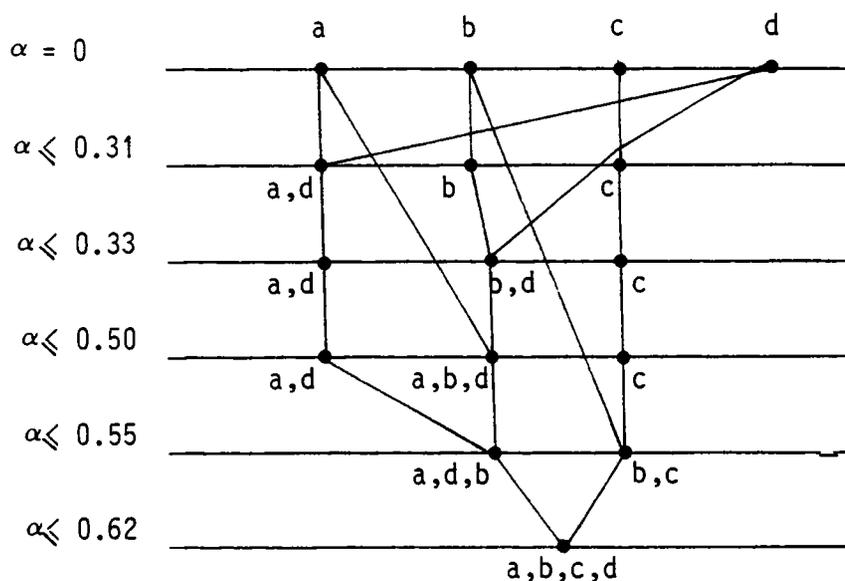
Associions à chaque graphe plein maximal le calcul de  $S'$  représentant les sous-relations maximales de similitude.

Nous obtenons pour chaque graphe d'un niveau donné les sous-relations maximales de similitude.

Ainsi (PONSARD, TRANQUI 1982) l'exemple suivant illustre la fin du processus de classification : soit  $\underline{E} = \{a, b, c, d\}$

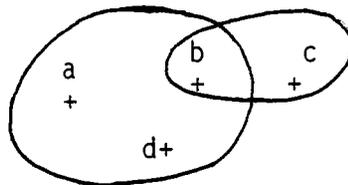
Graphes de niveaux	Sous-relations de similitude
$\alpha = 0$	$\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}$
$\alpha \leq 0.31$	$\{c\}, \{b\}, \{a,d\}$
$\alpha \leq 0.33$	$\{c\}, \{a,d\}, \{b;d\}$
$\alpha \leq 0.50$	$\{c\}, \{a,d\}, \{a,b,d\}$
$\alpha \leq 0.55$	$\{b,c\}, \{a,b,d\}$
$\alpha \leq 0.62$	$\{a,b,c,d\}$

La configuration qui en résulte est celle d'un ordre partiel. Elle représente les "classes" formées selon le niveau



## 2.6. Conclusion

2.6.1. Le processus aboutit ainsi, pour un niveau donné, à des classes non disjointes. Sur le plan de l'analyse spatiale cela correspond au fait que la régionalisation aboutit à la formation d'espaces régionaux non disjoints. Ainsi, au niveau  $\alpha < 0.55$  on a :



b appartient à la fois à deux groupes régionaux. Le même cas se produit pour  $\alpha < 0.33$  pour l'élément d.

2.6.2. Des éléments peuvent "rentrer" dans des classes différentes à deux niveaux différents. Ainsi l'élément b s'agrège à d au niveau  $\alpha < 0.33$ , et à c au niveau  $\alpha < 0.55$ .

Le processus met bien en évidence le caractère imprécis d'une classification selon le niveau donné. A ce titre il s'avère particulièrement intéressant dans le domaine géographique où nous avons déjà noté le caractère parfois artificiel du rattachement d'un élément à une classe plus qu'à une autre.

## 3. Proposition d'extension de l'algorithme au cas d'une structure floue pré-définie

Nous avons noté que la matrice de données  $M_0$  suppose implicitement une structure pré-définie A non floue. Le chercheur est sûr de l'appartenance des indicateurs à cette structure et attribue à chaque élément un "poids" égal.

Il serait possible de supposer que la structure prédéfinie A est imprécise ou incertaine. Dans ce cas, il serait encore possible d'appliquer l'algorithme de PICHAT. L'étape 2 de normalisation des données serait suivie d'une étape 2bis d'élaboration d'une matrice  $M_{1/A}$  c'est-à-dire d'une matrice tenant compte de la structure A comme nous l'avons

fait dans le modèle proposé en B I et appliqué en B II. Les étapes suivantes seraient les mêmes.

Ainsi pourrait-on déterminer une classification spatiale floue tenant compte d'une structure pré-définie floue et non plus d'une structure précise et certaine.

### III - Application de l'algorithme de PICHAT. La régionalisation européenne d'après PONSARD et TRANQUI (1982)

#### 1. Le choix des données

Ces auteurs ont adopté les divisions régionales européennes correspondant aux RCE (régions communautaires européennes) et de quarante indicateurs démographiques, socio-économiques pour 1977. Le tableau de données est donc particulièrement important :  $M_0(52,40)$ .

Les résultats semblent particulièrement importants pour l'étude économique et surtout géographique de la Communauté Européenne.

#### 2. Les conclusions dégagées lors de la classification floue

Nous les présentons brièvement en insistant sur leur intérêt géographique.

##### 2.1. L'absence significative de régions transnationales

Les auteurs remarquent que des "régions frontalières" selon les notations de REITEL (1969), ne se forment qu'à des niveaux très peu significatifs. Le Nord-Est de la France en particulier ne se rattache que très faiblement aux espaces contigus de l'autre côté de la frontière.

Cette notation nous semble essentielle : elle démontre que l'organisation européenne ne tenant pas compte des frontières est très loin d'être réalisée, contrairement aux préoccupations fort légitimes des

géographes et aménageurs. A notre avis, cela aggrave surtout le cas du Nord-Est français, véritable zone déprimée dans l'espace européen et ne participant que fort peu au dynamisme rhénan.

## 2.2. La persistance de l'"Europe des Nations"

Sans rentrer dans le détail de toutes les conclusions, on peut souligner :

- la disparité régionale des pays européens. Cela est vérifié par le fait que les régions, urbaines, et en général dynamiques d'un pays, s'agrègent fort tard (seuil  $\propto$  élevé) aux autres régions. Ainsi pourrait-on dégager l'idée d'une structure "urbaine" ou "*de développement intensif*" qui concernait les grands espaces urbanisés européens en les "*isolant*" du reste de leur espace national, rejoignant les notations de JUILLARD (1982). Cependant cette notation doit être nuancée par la conclusion de TRANQUI et PONSARD concernant l'hétérogénéité de ces grandes métropoles que sont Rome, Bruxelles, Paris et Londres qui ne s'agrègent qu'à des rangs peu significatifs.

2.3. En conclusion les auteurs estiment que la formation de la Communauté Européenne n'a pas abouti à un véritable espace économique européen. Conclusion pessimiste qui s'explique sans doute également par la crise économique, laquelle ne contribue pas, loin s'en faut, à l'effacement des frontières et à la formation de régions européennes.

## CONCLUSION DU CHAPITRE VI

Partant d'un espace représenté objectif, il a été possible de proposer des modèles d'analyse spatiale tenant compte d'une structure pré-définie imprécise et incertaine. Ces modèles se proposent, d'une part de "spatialiser" l'imprécision, d'autre part de régionaliser l'espace en tenant compte de l'imprécision spatiale.

D'autres méthodes peuvent être mises au point et proposées pour l'analyse d'espaces non flous définis par une structure floue. Nous sommes en effet conscients que notre exposé n'est pas exhaustif. Cependant, tel qu'il est, il a surtout pour but de démontrer que le *traitement de l'imprécision et de l'incertitude spatiales est possible*. Le géographe qui rencontre le "flou" au cours de son investigation, se doit donc d'en tenir compte tout au long de sa démarche et non le déplorer. Bien plus, le fait de ne pas occulter cette notion lui permettra d'appréhender l'organisation de l'espace de façon plus fine et plus concrète.

En d'autres termes, traiter un espace géographique organisé par une structure *floue* permet, paradoxalement, une vision plus *précise* de la complexité de la réalité géographique. Cette démarche ne correspond-elle pas à la préoccupation fondamentale du géographe ?

## CHAPITRE VII

### LES ESPACES REPRESENTES FLOUS

#### PROBLEMATIQUE GENERALE ET MODELE DE VALUATION DES ESPACES SUBJECTIFS

A - APPROCHE DE LA NOTION D'ESPACE REPRESENTE FLOU

B - TRAITEMENT DES ESPACES REPRESENTES FLOUS : LES ETAPES DE L'ANALYSE  
SPATIALE

C - MODELE DE VALUATION D'UN ESPACE REPRESENTE SUBJECTIF

## A - APPROCHE DE LA NOTION D'ESPACE GEOGRAPHIQUE REPRESENTE FLOU

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté les espaces représentés objectifs, c'est-à-dire des représentations de l'espace géographique qui sont telles que le passage de ce dernier au document géographique se fait directement par un processus de réduction d'échelle, de choix d'attributs géographiques précis ou de signes codés dont on connaît parfaitement le sens.

A ce titre une carte, topographique, géologique ou autre, une matrice d'information spatiale peuvent être définies comme des espaces représentés objectifs.

Cela n'est plus le cas des *espaces représentés flous*. Nous commencerons notre étude par celle d'un type particulier qui est relatif aux espaces perçus, nous généraliserons ensuite nos notations en les élargissant à d'autres types et en en dégageant les caractères originaux.

### I - Un type particulier d'espace représenté : l'espace perçu des cartes mentales

#### 1. Elaboration d'une carte mentale

1.1. Réaliser une carte mentale revient à représenter spontanément, sans l'aide de quelque document que ce soit, une représentation cartographique d'un espace géographique. Le sujet interrogé est donc amené à dessiner le plan d'un espace urbain, plus généralement à représenter ce qu'il a perçu et retenu d'un espace de type quelconque, à noter, soit par leur nom, soit par un graphisme significatif (petit dessin représentatif ou code graphique choisi par lui) des éléments spatiaux qui lui *viennent à l'esprit* dans l'évocation de l'espace considéré. Nous soulignons cette expression car il s'agit bien de la restitution graphique et (ou) cartographique, de l'espace tel qu'il "existe" pour le sujet, et non tel que le géographe le voit, lui.

Le document qui en résulte est souvent surprenant : espace déformé, lacunaire, erroné dans certains de ses points, hétérogène dans ses proportions et ses types de représentations spatiales, véritable *projection* sur le papier d'une vision personnelle de l'espace géographique.

L'annexe III comprend cinq cartes mentales choisies parmi un ensemble de cartes réalisées par un groupe d'étudiants du département de Géographie de l'Université de Metz. La question était la suivante :

"représentez le centre-ville de Metz"

et a été posée dans le but de définir l'"image collective de ce centre-ville" à travers le groupe considéré.

1.2. Les problèmes que l'on peut évoquer devant de tels documents sont avant tout ceux de la mise au point d'une méthodologie adéquate d'étude de telles représentations spatiales : il est bien évident que les méthodes de traitement des espaces représentés objectifs ne sont pas utilisables. Faut-il alors abandonner l'idée de tout traitement scientifique de tels documents, les considérer comme de simples "anecdotes" personnelles, des projections fantaisistes d'imagineries fécondes, quitte à déplorer que les notations spatiales trouvées ne puissent être utilisées et exploitées scientifiquement ?

Les géographes, à la quasi-unanimité, répondent par la négative à cette question. L'espace perçu est en fait pour l'individu, son véritable espace : il y vit, y agit, le modifie selon sa propre vision spatiale, s'y comporte selon ses propres rapports à l'espace. En d'autres termes, la carte mentale révèle la relation homme-espace de même que la carte "géographique" (topographique ou autre), révèle la relation société-espace. Il est impératif de prendre en considération les deux niveaux de relations, micro- et macrogéographiques.

Il serait cependant imprudent d'appliquer à de tels documents les méthodes d'analyse spatiale "classiques" qui, nous l'avons vu, sont des méthodes d'analyse d'espaces précis, certains et "scientifiquement analysables", du moins de la façon dont on l'entend habituellement.

Ainsi, à mesure que se développe cette géographie du "compor-

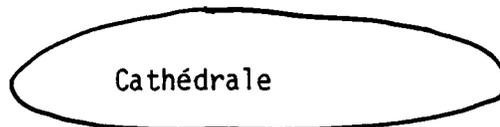
tement", nous pensons qu'il est nécessaire de proposer une méthode spécifique d'analyse de ce type de documents.

1.3. En fait deux caractères essentiels se dégagent de l'observation de cartes mentales, quelles qu'elles soient, et la méthodologie se devra de les mettre en évidence.

1.3.1. En premier lieu, ce sont des documents imprécis : du document 7 au document 11 de l'annexe III, on voit que l'imprécision est quasi générale : rues trop longues ou trop courtes, formes "fantaisistes" des places, orientations erronées, même si le parallélisme des rues principales du centre-ville de Metz est parfois bien restitué. Ce caractère d'imprécision se retrouve dans la liaison des composantes entre elles : parfois des éléments sont cités sans aucun lien spatial avec les autres, véritables "îles" qui semblent émerger d'un "océan" d'inconnu !

1.3.2. En second lieu, il faut souligner l'incertain dans la notation spatiale. De vastes secteurs non notés (non perçus ou oubliés ?, non connus ou non pratiqués ?, répulsifs au point qu'on préfère, volontairement ou non, ne pas les noter ?). Une carte mentale est donc un ensemble *lacunaire* où, en certains endroits, la méconnaissance spatiale semble être totale, en d'autres plus ou moins importante.

Il s'agit également d'une incertitude relative : on a recommandé aux étudiants interrogés, en cas d'hésitations sur la localisation des composantes spatiales, de déterminer la zone d'indétermination où cette composante est supposée se trouver. Ainsi nous observons des secteurs incertains où telle ou telle composante est supposée se trouver :



Par exemple, dans le schéma ci-dessus, la Cathédrale est sensée se trouver "quelque part" dans la zone délimitée. Il y a bien incertitude quant à la localisation de cette composante, incertitude d'autant plus grande que la zone limitée est plus vaste.

Le modèle de valuation que nous avons mis au point se propose de tenir compte de ces deux caractères fondamentaux dans l'analyse des espaces perçus car ils traduisent selon nous le processus même d'élaboration d'une carte mentale et se reflètent dans les composantes d'une telle carte. Nous envisagerons successivement ces deux points.

## 2. Le processus d'élaboration d'un espace perçu et de représentation spatiale

Percevoir un espace et le représenter par une carte mentale relève d'un double processus de *filtrage* de l'information spatiale et de *reconstruction* spatiale.

2.1. Le filtrage dépend de nombreux facteurs. Il s'agit d'un filtrage "physique", lié aux limites de nos capacités sensorielles : perception visuelle et auditives limitées, sensibilité plus ou moins grande à certaines sollicitations ou "agressions" sensorielles : bruits familiers ou estimés excessifs, odeurs, coloris ou teintes des constructions ou des paysages, autant de sollicitations sensorielles appréciées différemment par les individus qui les perçoivent ou les subissent.

En second lieu, le filtrage par la perception spatiale dépend de facteurs individuels : sexe, caractère, schémas logiques particuliers à chacun, selon ses coordonnées individuelles et son appartenance à un groupe social ou professionnel donné. Ainsi chaque usager filtre l'espace géographique selon des facteurs individuels ou collectifs.

Ce filtrage comme le soulignent BAILLY et BEGUIN, dépend également de l'environnement spatio-temporel, de données économiques, sociales, culturelles du moment, voire de données relatives aux faits de civilisation. Prenons par exemple la perception d'un paysage rural à travers la littérature française ; la campagne bucolique décrite par Jean-Jacques Rousseau, qui illustre pour ce dernier le thème d'une nature bonne et généreuse, celle de Bernardin de Saint-Pierre dans "Paul et Virginie", est perçue de façon totalement différente par les Romantiques qui la décrivent comme tourmentée, violente, voire hostile à l'homme ;

la perception du monde rural de certains romanciers du XIXe siècle insiste, elle, sur son aspect réaliste voire misérabiliste : souvenons-nous de la description de la visite de Madame Bovary à ses enfants placés en nourrice à la campagne.

Il y a donc bien "filtrage" de l'espace géographique, c'est-à-dire perception sélective et complexe du réel, selon des facteurs multiples : prétendre percevoir l'espace géographique "tel qu'il est" est illusoire, de même que devient difficile toute tentative de comparaison des espaces subjectifs individuels.

2.2. Cette tentative de comparaison est d'autant plus difficile que l'espace subjectif est, d'autre part, le résultat d'un processus de "construction", un espace construit par chaque individu à partir de sa perception spatiale, de ses structures mentales ou des schémas logiques qui lui sont particuliers. PIAGET a aussi mis en évidence la progression de l'image spatiale chez l'enfant : de très localisée et discontinue chez le jeune enfant, l'image devient plus large, plus continue et plus structurée à mesure que se développent en lui des structures mentales et des schémas logiques plus complexes.

Ce processus de construction est d'autant plus poussé d'autre part, que l'espace géographique a une structure plus cohérente et plus lisible pour l'utilisateur ou que sa valeur d'usage est plus élevée : ainsi un centre-ville est mieux perçu car sa structure est plus nette et mieux connue qu'un quartier périphérique neuf par exemple, où l'uniformité des constructions, la régularité des voies de circulation sont telles que l'utilisateur a beaucoup de difficultés à percevoir l'organisation générale.

Enfin l'espace perçu est construit par l'utilisation du moyen d'expression choisi et fonction de l'habileté plus ou moins grande à manier cet outil d'expression : richesse de vocabulaire dans le cas d'espaces subjectifs décrits ou évoqués, adresse plus ou moins grande dans l'élaboration d'une carte mentale. Ainsi, même si la perception spatiale est bonne, l'expression peut en être maladroite, incomplète, voire fautive en apparence. Ceci appelle une grande prudence dans l'ex-

exploitation des données relatives aux espaces subjectifs et rend de toute façon illusoire une trop grande précision lors de la recherche de quantification des espaces subjectifs.

### 2.3. Intérêt géographique de l'étude des espaces perçus

Proposer un modèle de traitement des espaces perçus offre un intérêt essentiel pour tout chercheur soucieux d'analyse spatiale ou pour tout décideur ou aménageur de l'espace. Il permet en effet de dégager un *fond commun de perception* spatiale, un espace "que tout le monde connaît", et d'étudier l'organisation de ces "*invariants spatiaux*" et ses rapports avec l'espace géographique. Il consiste également à étudier l'évolution de ce fond commun de perception spatiale, d'intégrer au processus de perception la dimension temporelle. On peut évoquer à titre d'exemple l'"image" souvent négative de la Lorraine par bon nombre de nos concitoyens (SPACK, 1974). Cet invariant spatio-temporel s'explique autant par la rigueur climatique que par une histoire troublée, une vocation ancienne militaire, plus récente d'industrie lourde, voire, si l'on veut chercher au-delà, un rattachement relativement tardif -ne parle-t-on pas de l'"Intérieur" en évoquant le reste de la France- à la communauté française. Connaître cet invariant spatio-temporel est indispensable à toute action de développement économique de notre région : il s'agit avant tout de changer cette perception défavorable par une action réfléchie et durable d'information.

La carte mentale est donc bien un document spatial à étudier de façon scientifique et non à considérer simplement comme une expression fantaisiste de la réalité. Les composantes qui y sont représentées relèvent, en effet, d'une organisation qui obéit à une logique interne que psychologues, sociologues et géographes ont tenté de découvrir.

### 3. Les composantes d'une carte mentale et leur interprétation

Elles peuvent être présentées selon plusieurs optiques, complémentaires plutôt qu'opposées, car elles seront classées par

les chercheurs selon leurs propres préoccupations. Ainsi l'approche psychosociologique offre une énumération des types de composantes qui insiste sur l'intensité des relations homme-espace ; le géographe, lui, veillera à présenter ces composantes selon leur rôle dans l'organisation spatiale. Nous présenterons ces deux optiques avant de proposer une autre typologie.

### 3.1. Approche psychologique

A. MOLES et E. ROHMER (1978) présentent une classification de composantes qui s'organisent, selon eux, en ensembles de plus en plus larges sur le plan spatial et de moins en moins familiers sur le plan individuel. Les composantes spatiales forment ainsi des "coquilles emboîtées" qui offrent à l'individu des protections de plus en plus lâches, mais multiplient par contre les possibilités de rencontres, de contacts et d'échanges avec autrui. MOLES et ROHMER évoquent, au-delà du corps propre, l'espace du "geste immédiat", véritable sphère familière où l'action est quasi-automatique, puis l'espace-"forteresse" de l'appartement dernier niveau de l'espace privé où l'homme se sent "chez lui".

Au-delà, commencent les espaces des rencontres, des contacts sociaux, véritables espaces géographiques : le quartier, familier par excellence, dont toutes les composantes sont connues, la "ville centrée", espace d'usage, symbole paradoxal de contraintes et de liberté. Plus large encore est l'espace-région, défini comme l'espace accessible en une journée de déplacement et perçu essentiellement comme un espace-réseau. Ses dimensions s'élargissent au rythme des progrès des communications ; elles en font une "zone d'accès sans aventures", que E. JUILLARD a qualifiée de "grand espace" dans ses études sur l'espace rhénan (1968). A ce niveau *la perception devient différentielle*, on pourrait à la suite de cet auteur, parler alors d'espace central et de zones périphériques, perçues de façon plus lâche.

Enfin, le "vaste monde", dernière coquille, zone d'exploration et d'aventures, mal perçue ou perçue de façon lâche ou discontinue, mais synonyme de "partance" et de rupture avec les attaches tra-

ditionnelles. La perception devient attention au fait nouveau, participation active et volontaire aux sollicitations de l'environnement.

### 3.2. Approche géographique

Elle souligne avant tout le rôle essentiel de l'échelle de perception (BAILLY, 1974). Selon cette dernière, la perception spatiale revêt des caractères différents et s'attarde à des composantes spatiales différentes. Ainsi, si on se place à l'échelle d'une ville, on peut, comme le fait R. BRUNET (1974) considérer que celles-ci s'organisent en cinq types :

- une perception fine et détaillée du quartier de résidence dont la pratique quotidienne favorise un espace subjectif très élaboré, mais aussi le plus chargé de significations symboliques, surtout si la pratique de l'espace est ancienne.

- les repères spatiaux : monuments, fontaines, bâtiments très étendus ou élevés, perçant parfois la "skyline" et offrant au voyageur venu de loin le profil urbain familier. D'autres repères possèdent une valeur symbolique et sont perçus en tant que tels : la gare, symbole de "partance" et d'évasion, d'arrachement également (exode des Lorrains "expulsés" de chez eux par l'occupant allemand pendant la dernière guerre), est un exemple complexe qui appelle en chacun un ou des souvenirs précis.

- les composantes spatiales qui sont des limites géographiques arrêtant l'œil et canalisant le déplacement : boulevards périphériques, lignes ferroviaires, anciens remparts, fleuves et rivières représentent dans l'espace urbain des repères linéaires nets et aisément perçus, car ils sont pour l'usager une contrainte et un obstacle plus ou moins important au déplacement.

- les nœuds de circulation : carrefours, croisement ou confluent de voies de communication. Secteurs très localisés de contacts, éventuellement de danger, ils sont de plus souvent marqués par des repères spatiaux : magasins, monuments etc. Leur perception est précise car ces composantes spatiales obligent l'usager à un effort d'attention qui les rend sensibles à leur organisation.

- enfin la perception des cheminements a été dégagée par de nombreux géographes. Il s'agit de la "route" familière à l'utilisateur que ce soit de son lieu de domicile à son lieu de travail, ou d'un trajet effectué souvent pour des raisons diverses : achats, loisirs etc. Un cheminement est qualifié d'espace d'usage bien perçu, soit de façon volontaire, soit même instinctivement. Cette perception est cependant différente selon le mode de déplacement : un piéton perçoit l'espace à faible hauteur et de façon détaillée ; il est sensible aux détails de couleurs, de volumes, aux caractères du mobilier urbain. Sa perception, au rythme de sa marche, s'accroche aux composantes spatiales de faible taille (MOLES, 1970) ; un automobiliste au contraire, aura une vision plus rapide de l'espace traversé. La perception retiendra les volumes importants, les repères bien contrastés par rapport à l'environnement et non les nuances et détails du paysage urbain ou rural traversé.

Partant de ces notations, nous pensons qu'un espace subjectif s'*organise* selon les relations perçues entre composantes spatiales. Notre typologie se fera ainsi selon la complexité plus ou moins grande de ces relations.

#### 4. Proposition de typologie de composantes spatiales d'un espace perçu

Nous retiendrons :

4.1. Les composantes spatiales insulaires de l'espace perçu. On définit de la sorte des composantes spatiales perçues et représentées sur une carte mentale de façon quasi isolée, sans relation nette avec d'autres composantes voisines. La carte mentale est discontinue, imprécise, certains repères, par exemple sont perçus, mais le sujet interrogé n'est pas en mesure de définir, et une localisation précise de ces composantes, et une insertion de cette dernière dans un environnement cohérent. La carte mentale 7 donne de tels exemples ; elle est significative d'un étudiant non résident à Metz et en première année d'études à l'Université de Metz. On observe les composantes insulaires de types divers : cathédrale : repère visuel et symbolique,

composantes à valeur d'usage comme le centre commercial St Jacques et "NG" (grand magasin), ou la place de la République occupée par un parking, enfin composante du Pontiffroy, quartier en cours d'aménagement. Il faut noter que les composantes insulaires sont le plus souvent localisées de façon très imprécise ; ni surface, ni formes ne sont précisées, encore que, dans l'exemple cité la disposition relative des composantes soit très grossièrement respectée.

4.2. A un degré plus élevé, on note que l'espace subjectif contient des composantes spatiales dont la localisation relative est respectée et pour lesquelles l'auteur de la carte mentale a mis en évidence les relations. On appellera composantes tramées celles qui fournissent l'esquisse ou la représentation au moins partielle de la trame urbaine : les repères spatiaux sont reliés par des axes qui se croisent en nœuds. L'ensemble traduit des cheminements plus ou moins nombreux et l'esquisse du plan urbain. La carte mentale 8 représente de telles composantes : elle mentionne les mêmes composantes que la carte 7, mais reliées par une trame, encore très sommaire, de rues du centre-ville. On ne note ni respect des distances ou de l'orientation, ni précision dans la localisation exacte des composantes, mais le schéma général du plan urbain est respecté.

4.3. Au-delà, les composantes spatiales organisées sont perçues et transcrites à la fois selon leur forme, même grossière, leurs dimensions, même approximatives et selon leur importance relative : dessin plus appuyé et plus précis, ou évocation des noms des composantes jugées plus importantes. De même les nœuds de l'espace géographique : places où la circulation est intense, ponts qui représentent un passage obligé sont évoqués. Les cartes mentales 9 et 10 représentent ainsi des ensembles de composantes organisées ; cette organisation interne de l'espace subjectif coïncide avec la structure même du centre-ville : dans les deux cas les rues Serpenoise et des Clercs sont notées, mais elle correspond également à des facteurs propres à chaque auteur de carte. Ainsi, la carte 9 correspond à une exploration limitée de l'espace de part et d'autre d'un cheminement allant de la gare au Campus

universitaire ; la carte 10 traduit une perception plus détaillée des composantes de cette même zone d'exploration en même temps qu'une perception des "sorties" possibles du centre-ville : accès autoroute, gare routière, sortie vers le Nord : ancienneté plus grande (deux ans de résidence et d'études à Metz alors que l'auteur de la carte 9 a deux ans d'études à Metz mais n'y réside pas), sensibilité plus grande à l'environnement ? Nous percevons toute la difficulté de mettre en évidence les facteurs qui conditionnent l'élaboration des espaces subjectifs.

4.4. Enfin l'espace subjectif révèle une structure à la fois différenciée et correctement orientée par rapport à l'espace géographique. On peut parler de composantes spatiales subgéographiques dans la mesure où elles figurent une structure spatiale très proche de la structure géographique. Elles sont significatives d'un "comportement géographique", d'une "perception active" où la connaissance réfléchie et rationnelle du milieu complète le vécu spatial. Cette forme trouve son achèvement quand la perception appréhende la dynamique spatiale : perception et représentation des pénétrantes urbaines, des zones où le milieu se transforme : secteurs de grandes constructions, de rénovation urbaine, aménagement d'axes routiers etc. La carte mentale 11 est caractéristique de ce type. Elle est révélatrice d'une connaissance à la fois "immédiate" et raisonnée de l'espace urbain, d'une perception à la fois passive et active, où vécu, intuition et connaissance géographique du milieu interfèrent étroitement pour faire de l'espace subjectif une reproduction sinon exacte, du moins très précise de l'espace géographique.

Ainsi une carte mentale est une véritable élaboration logique et organisée, d'éléments "empruntés" par l'individu à l'espace géographique. Les caractères essentiels qui sont l'imprécision et l'incertitude en font un espace représenté particulier, que nous définirons sous le terme d'espace subjectif. Elargissons cette notion à d'autres types d'espaces représentés flous.

## 5. Généralisation : notion d'espace subjectif

### 5.1. Définition

Un espace subjectif est une *représentation* de l'espace géographique, résultat d'un *double processus de perception différenciée* de l'espace géographique et de *construction* à partir de schémas logiques individuels ou collectifs. Les éléments ou *composantes spatiales* sont *représentées en relations* plus ou moins fortes les unes avec les autres et en définissent ainsi une *organisation spatiale* plus ou moins complexe.

On appellera :

- espace subjectif évoqué : l'espace tel qu'il est perçu par un sujet et traduit par lui dans une description orale ou des réponses orales à un questionnaire.

- espace subjectif transcrit : l'espace perçu et décrit dans un document écrit : description littéraire, espace décrit à travers des réponses écrites à un questionnaire.

- espace subjectif cartographié : la traduction se fait par une carte mentale. L'étude ultérieure s'attachera essentiellement à ce type.

Nous nous en tiendrons à ces trois types en soulignant que chacun d'eux peut être un *espace subjectif libre* : évocation, description, carte mentale sont faites "librement" par le sujet, qui peut faire intervenir sans contraintes ses souvenirs, ses sensations, son imagination, ou un *espace subjectif "imposé"* pour lequel on impose certaines contraintes à la personne interrogée : questions orales ou écrites "fermées", localisation d'office de "points spatiaux" sur la grille pré-définie pour le dessin des cartes mentales. Nous avons adopté cette dernière méthode pour "imposer" à toutes les cartes collectées une échelle commune et faciliter ainsi notre dépouillement ultérieur.

### 5.2. Conclusion

Ainsi l'information spatiale passe par un "filtre" personnel qui la perturbe, la déforme, l'amplifie ou l'oc-

culte selon des facteurs propres à chaque individu. L'espace représenté subjectif reste, malgré cela, un document géographique qui malgré l'imprécision, voire l'incertitude dans la représentation spatiale, peut être objet d'une analyse géographique.

A ce titre il est du même type que d'autres documents géographiques dont nous présentons dans ce qui suit quelques types et les caractères essentiels.

## II - Généralisation : notion d'espace représenté flou

### 1. Exemples d'espaces représentés flous

1.1. Elargissons la définition donnée ci-dessus :  
Un espace représenté flou est une représentation de l'espace géographique par un document de type divers : document cartographique, photographique, graphique, iconographique ou autre. Cette représentation est caractérisée :

- par son imprécision relative à l'espace géographique. Cette imprécision affecte la représentation des éléments géographiques
- par l'existence de "plages d'incertitude" qui ne permettent pas une identification certaine des éléments géographiques représentés.

### 1.2. Exemples

Il est paradoxal de noter que des exemples d'espaces représentés flous peuvent être choisis parmi des documents qui peuvent être choisis dans un créneau temporel qui recouvre une période de plus de 25 siècles. Tous présentent les mêmes caractères d'imprécision et d'incertitude, sous des formes et dans des expressions aussi diverses que celles des documents figurant dans l'annexe III de ce travail.

1.2.1. Les cartes anciennes (documents 6 à 10), expression de la vision du monde depuis l'époque d'Homère jusqu'à la "Mapa Mundi" d'Hereford de la fin du XIIIe siècle, sont des types illustrant parfaitement notre propos.

- espaces imprécis dans le tracé des contours méditerranéens, dans la représentation des étendues, des distances. Du monde réel subsiste, dans les *parties connues* par les contemporains, une vision simplement topologique de l'espace, analogue à celle d'un individu dans la phase "exploratoire" de son espace.

- espaces incertains également, pour les zones inconnues ou très mal connues : les contours des continents inexplorés deviennent fantaisistes (Afrique, Asie, monde atlantique au temps d'Homère), le "monde selon Strabon" ouvre la mer Caspienne vers un océan septentrional, Ptolémée note les "Terra Incognita" au nord du pays des Scythes, créant ainsi un vaste sous-espace à incertitude absolue, tandis que le document d'Hereford cerne littéralement l'espace connu (et homéomorphe au monde méditerranéen) d'une "ceinture incertaine" de pays et d'océans imaginaires.

Les exemples pourraient être multipliés à l'infini, qu'ils soient "cartographiques" ou "évoqués". Soulignons en conclusion qu'*imprécision et incertitude peuvent et doivent être bien dissociés* : ainsi Christophe Colomb a-t-il eu une vision extrêmement précise du rivage sur lequel il a débarqué mais la *certitude* de l'identification de ce rivage était nulle puisqu'il pensait avoir atteint le continent asiatique après sa traversée de l'Atlantique !

1.2.2. Paradoxalement, imprécision et incertitude se retrouvent sur des documents aussi sophistiqués que les photographies aériennes prises à haute altitude par les satellites artificiels (reproduction n° 11, annexe III). Imprécision dans la délimitation exacte des unités spatiales, incertitude quant à l'identification de ces unités dans les "zones d'ombres" mal discriminées par les capteurs.

Ainsi, le géographe tenu de travailler sur des documents aussi divers que ceux que nous avons évoqués, se doit d'appréhender l'imprécision et l'incertitude dans la représentation spatiale. Analysons ces deux termes et présentons leurs implications géographiques.

## 2. Les fondements de l'imprécision dans la représentation spatiale

Trois causes essentielles de l'imprécision dans la représentation spatiale peuvent être évoquées.

### 2.1. La structure même de l'espace géographique.

Cette observation est triviale dans le cas des photos aériennes ; elle l'est également dans le cas des espaces subjectifs. Notons dès à présent sans pour le moment la développer, l'idée que plus un espace géographique dispose d'une structure bien organisée, plus la perception en est claire. Le sujet "lit" plus facilement un espace dont il perçoit une organisation claire qu'un espace difficile à décrypter ou qui lui est étranger : ainsi pour un européen la structure d'une ville européenne sera facile à percevoir, celle d'une ville américaine ou asiatique le sera beaucoup moins.

### 2.2. Les conditions techniques de transmission et de réception du message spatial.

L'imprécision est alors liée à la perte d'information liée à la transmission de l'information spatiale (sensibilité des capteurs de réflectance des objets terrestres, des organes de mesure de cette réflectance) et aux moyens d'expression de cette information spatiale.

Ainsi, à chaque étape de la communication du message spatial, des bruits viennent perturber, déformer, diminuer l'information spatiale. L'espace représenté qui en résulte est défini de ce fait par son imprécision à la mesure de l'ampleur de la perturbation subie.

### 2.3. Les facteurs subjectifs de l'imprécision spatiale

Dans ce cas, le filtrage de l'information spatiale est le fait de l'individu, du groupe ou de la société qui est chargé de transmettre le message spatial.

Ce filtrage peut être individuel, involontaire et inconscient : c'est le cas de l'élaboration des cartes mentales déjà évoquées.

Il peut également être volontaire, un individu, un groupe ou une collectivité introduisant sciemment un *biais spatial* dans l'intention délibérée de fausser le message spatial.

Nous appellerons cela publicité (MOLES, 1982), propagande ou exagération selon l'intention du, ou des, auteurs de cette déformation du message spatial : messages publicitaires pour des "îles paradisiaques" où l'Européen blasé ou fatigué pourra trouver les "3 S" !, propagande dont nous citons volontairement un exemple fort ancien dans l'annexe III, texte 12. Il s'agit d'un extrait du Livre des Merveilles où Marco Polo raconte l'organisation de la poste impériale dans les états du Grand Khan. Les contemporains de cette fin du XIIIe siècle auront sans doute été frappés comme nous de l'exagération de la description et en fait, de l'imprécision fondamentale du texte, sous un luxe de détails. Le "biais spatial" est introduit ici dans un but apologétique.

### 3. Les éléments spatiaux non -ou mal identifiés : l'incertitude dans la représentation géographique

#### 3.1. Définition

Nous définirons un tel espace représenté comme un document sur lequel l'ensemble  $E_R$  des éléments n'est plus totalement identifiable avec certitude.

Autrement dit un espace représenté incertain (ou un sous-espace de ce type) comporte des zones où il est, soit impossible (incertitude totale), soit difficile (incertitude "plus ou moins" grande) d'individualiser les éléments par rapport aux éléments contigus.

Nous appellerons "*espaces ou sous-espaces de voisinage*" de telles zones d'incertitude.

3.2. Les exemples sont nombreux et variés : "terres inconnues" des cartes anciennes ou des documents relatifs à des espaces non-explorés ou mal connus, zones d'indétermination des cartes mentales, zones sombres peu discriminantes des photos aériennes etc. L'incertitude est donc bien une impossibilité plus ou moins com-

plète d'identifier des éléments ou des sous-espaces du document géographique.

#### 4. Conclusion

Un espace géographique représenté peut être :

- a) précis et certain. Nous l'avons défini plus haut par le terme "objectif"
- b) imprécis ou incertain
- c) à la fois imprécis et incertain. Dans ce cas il présente des sous-espaces imprécis et des zones d'incertitude quant à l'identification des composantes spatiales
- d) enfin -et ceci concerne surtout les cartes mentales- une composante géographique de cet espace peut être à la fois incertaine et imprécise.

Illustrons cette dernière notation par un exemple. Demandons à une personne de représenter par une carte mentale le centre-ville de Metz (chapitre VIII). Cette personne procédera de la façon suivante :

Etape 1 : selon le sujet interrogé, la rue R appartient-elle au centre-ville ? Trois réponses sont possibles :

1a. Selon lui, R n'appartient pas au centre-ville ; le sujet ne la représentera pas sur sa carte.

1b. Selon lui, R appartient sans aucun doute au centre-ville ; le sujet la représentera sur sa carte.

1c. Le sujet hésite ; il n'est pas certain de l'appartenance de R au centre-ville. Il y a donc estimation implicite du degré de certitude personnelle quant à cette appartenance. Le sujet peut choisir de représenter R *même s'il n'est pas tout à fait sûr de l'appartenance de R à l'espace pré-défini*. Cette représentation contient donc la part d'incertitude que le sujet attache à ce choix.

Etape 2 : dans les cas 1b. et 1c., la représentation de R sera "plus ou moins" précise : la rue R représentée sera plus longue, ou plus

courte ou mal orientée par rapport à la réalité géographique. La représentation est de ce fait imprécise par rapport à cette réalité.

A la limite la rue ne sera plus tracée, mais localisée dans une zone d'indétermination dans laquelle elle est censée se trouver.

Il y a donc bien, dans la représentation de R connue de toute autre composante spatiale de l'espace vécu du sujet, association de l'incertitude et de l'imprécision.

Il nous appartient à présent de formaliser ces notations et d'énoncer une problématique qui en tienne compte. Ce sera l'objet de la deuxième partie de ce chapitre.

## B - TRAITEMENT DES ESPACES REPRESENTES FLOUS : LES ETAPES DE L'ANALYSE SPATIALE

On peut distinguer deux étapes essentielles, que nous exposons successivement.

### I - Passage du document géographique à l'écriture formalisée de l'espace représenté flou

Ce passage se fait grâce à un modèle qui servira à apprécier l'imprécision de toute composante spatiale représentée sur le document et, éventuellement son incertitude. Il servira de ce fait à mesurer l'importance de la perte d'information spatiale depuis son "émission" jusqu'à sa réception et sa traduction sur le document géographique.

#### 1. Les bases de la modélisation

Un modèle est proposé et développé dans la partie C de ce chapitre. Soulignons simplement ici qu'il prend en compte :

1.1. L'éventuelle incertitude de la représentation spatiale, en proposant une fonction d'incertitude associée à chaque composante spatiale  $c_j$  du document géographique.

$$f : E_R \longrightarrow \underline{M} = [0,1]$$

$$\forall c_i \in E_R \longrightarrow f(c_i) \in [0,1] \quad i=1, \dots, k$$

avec k nombre de composantes spatiales

avec :  $\forall i, f(c_i) = 0$  : l'incertitude est complète quant à l'identification et la localisation de la composante spatiale.

$f(c_i) = 1$  : la certitude est entière :  $c_i$  est bien identifiée et localisée de façon précise et non dans une zone d'indétermination.

$0 < f(c_i) < 1$  : on est "plus ou moins" certain de l'identification et de la localisation de  $c_i$  sur le document.

### 1.2. L'imprécision de la représentation spatiale,

en proposant une fonction d'imprécision :

$$m : E_R \longrightarrow \underline{M} = [0,1]$$

$$\forall c_i \in E_R \longrightarrow m(c_i) \in [0,1] \quad i=1, \dots, k$$

avec  $\forall i, m(c_i) = 1$  : la composante est parfaitement représentée, sans aucune distorsion ni perte d'information

$m(c_i) = 0$  : la composante est non représentée. Il est trivial de souligner que dans ce cas  $f(c_i) = 0$

$0 < m(c_i) < 1$  : la composante est "plus ou moins" bien représentée : déformation, imprécision des limites etc.

### 1.3. Les deux fonctions sont associées par un

opérateur choisi par le chercheur.

Pour notre part, nous proposerons l'opérateur PROD associant, pour tout  $c_i \in E_R$ ,  $f(c_i)$  et  $m(c_i)$

## 2. Définition de $E_R$ sous-espace flou du référentiel $E$

Nous définirons ainsi, à partir du document géographique :

$$\forall c_i \quad E_R = \left\{ \left( c_i, \mu_{E_R}(c_i) \right), \mu_{E_R}(c_i) = f(c_i) \cdot m(c_i), \mu_{E_R}(c_i) \in [0,1], \right. \\ \left. i \in \underline{I} \text{ ensemble fini d'indices} \right\}$$

$E_R$  sous-ensemble flou, est tel qu'à chaque composante spatiale  $c_i$  est

associée sa fonction d'appartenance  $\mu$ , qui contient l'information relative à l'incertitude et à l'imprécision spatiales concernant cette composante.

Au terme de cette première étape nous sommes donc en présence d'un document géographique quantifié, autrement dit nous avons exprimé sous une forme utilisable scientifiquement une information spatiale qui a priori, et surtout en ce qui concerne les cartes mentales, ne l'était pas.

Il s'agit maintenant, à partir de ces données spatiales floues, de dégager l'organisation de l'espace géographique, selon le modèle de raisonnement présenté au chapitre V.

En d'autres mots, partant de  $E_R$ , espace représenté flou exprimé sous la forme d'un sous-ensemble flou, et d'une structure pré-définie  $A$ , nous cherchons à définir  $E_A$  c'est-à-dire l'espace géographique organisé selon une structure  $A$  pré-définie (chapitre V B II)

## II - Organisation de l'espace géographique selon une structure pré-définie A.

### 1. Problématique générale

Cette deuxième étape de la démarche géographique est différente selon la structure pré-définie  $A$ . En reprenant nos notations du chapitre V, nous distinguerons le cas où  $A$  est une structure pré-définie non floue et où  $A$  est une structure floue.

Dans chacun de ces deux cas nous distinguerons deux problèmes différents à savoir :

1.1. A partir d'une structure pré-définie  $A$  nous cherchons à définir  $E_A$ , espace géographique organisé par cette structure ; cherchant en quelque sorte à mettre en évidence une "parenté" entre chaque élément de  $E$  et la structure  $A$ . Nous appellerons celle-ci *structure-référence*. Par exemple, partant d'une photo aérienne, nous chercherons à définir l'espace occupé par une hêtraie ; partant d'une

carte mentale, nous chercherons à définir l'espace périurbain etc.

1.2. Partant de l'espace représenté  $E_p$ , nous chercherons à l'*identifier* en le comparant à différents types de structures susceptibles de l'expliquer. La démarche consiste alors à refaire l'étape 1.1. ci-dessus, pour des comparaisons successives avec des structures  $A_1, A_2 \dots A_n$  différentes, puis à choisir *la structure d'identification* qui semble le mieux convenir.

## 2. Notion préliminaire : valuation d'un treillis lexicographique

Contrairement à l'exposé général du chapitre V, les attributs sur lesquels nous sommes amenés à travailler sont essentiellement des attributs qualitatifs dans l'étude des espaces représentés flous : attributs de forme, de densité d'un fait géographique, de couleur (photo aérienne) etc. La référence sera donc un ensemble d'appartenance  $\underline{L}$  qui peut être par exemple le treillis lexicographique suivant : (chapitre III B V).

$$\underline{L} = \left\{ \text{non, peu, moyennement, moyennement +, très, entièrement} \right\}$$

que nous faisons correspondre, par une fonction  $f$  :

$$f : \underline{L} \longrightarrow \underline{M} = [0,1]$$

telle que	non	→	0
	peu	→	0.2
	moyennement	→	0.4
	moyennement +	→	0.6
	très	→	0.8
	entièrement	→	1

(les valeurs "intermédiaires" étant possibles)

Ainsi, sur l'échelle des "Gris", la notation de couleur "gris sombre" aura une valeur 0.8, "gris" une valeur 0.4 etc... ; sur l'échelle des densités de formations végétales, la notation "dispersé" vaudra 0 et à l'inverse "compact" vaudra 1 et ainsi de suite.

Ainsi, la structure A, pré-définie selon plusieurs attributs, sera référenciée, pour chacun de ces attributs, par rapport à l'échelle lexicographique ci-dessus.

3. Modèle de traitement dans le cas où la structure pré-définie est non-floue (chapitre V B III 2.1.)

3.1. Représentation des données

3.1.1. A chaque attribut de la structure A correspond une notation précise, prise sur notre échelle lexicographique. Par exemple nous tirons du tableau VII 1 (BARION, 1981) les critères d'identification d'une hêtraie en vue d'en faire une structure-référence dans l'analyse d'une photo aérienne en émulsion panchromatique.

Attributs \ Notations	1. Forme de la couronne	2. Teinte	3. Structure	4. Ombre d'un peuplement	5. Ombre arbre isolé
Notation qualitative	Compacte	Grise	Dense	Forte	Compacte
Quantification proposée	1	0.4	0.8	1	1

3.1.2.  $E_R$ , espace représenté flou sera repris de telle façon qu'à chaque composante spatiale soit associée une valeur ou plusieurs valeurs concernant chaque attribut.

Effectivement, pour une composante  $c_i$ , la teinte peut être "plus ou moins" grise et non uniforme. Ainsi l'attribut 2 sera défini par les valeurs 0.2, 0.4, 0.6 par exemple. Nous définissons ainsi la matrice d'information spatiale  $M_0$ , de dimensions  $n, p$  ( $n$  composantes,  $p$  attributs) telle que  $m_{0,i,j}$  représente l'attribut  $j$  pour la composante  $c_i$ . Nous notons que  $m_{0,i,j}$  peut être, soit un singleton (dans ce cas

Tableau VII 1. Types de structures pré-définies relatives aux formations végétales. Critères d'identification sur photographies aériennes (selon BARION 1980).

Essence	Forme de la couronne (Texture)	Teinte (panchromatique)	Structure	Autres caractéristiques
SAPIN	Impression de points troubles au sommet à cause du faible diamètre de la cible mal enregistrée par le film. Texture granuleuse et fine	sombre en général	variable en fonction de l'intervention humaine	ombre très compacte à contours convexes 
PIN - ÉPICÉA	forme globuleuse	plus claire souvent que le sapin		
MÉLÈZE	grain très fin	souvent claire et brillante		ombre plus effilée que le sapin avec contour concave (épicéa)
HÊTRE	Texture fine, floue couronne compacte	grise	souvent dense	Isolé : toit arrondi homogène sans rugosité - ombre compacte circulaire En massif : toit à aspect spongieux dû à la transparence du feuillage - donc à l'absence d'ombre entre arbres rapprochés - et à la compacité d'ensemble du feuillage Ombre d'un peuplement :  lisière ondulante avec fortes ombres aux interruptions du toit.
CHÊNE	Texture grossière - couronne éclatée - souvent de grosses boules - parfois cependant texture assez fine, bien que les arbres soient assez élevés	grise, parfois aspect très clair presque blanc des chênes isolés	souvent très lâche	La plupart du temps il est confondu avec le Hêtre sur les photographies, car ses caractéristiques sont identiques ou voisines
CHATAIGNIER	toit pommelé	claire		Isolé : toit arrondi dans l'ensemble, anguleux dans le détail avec rugosité apparente En massif : arbres souvent individualisés Ombre d'un arbre 
PEUPLIER	Texture assez fine, avec des points plus ou moins gros en fonction de l'âge du peuplement Forme arrondie	variable	arbre souvent en plantation assez régulière - quadrillage	Peuplement des zones humides (critère d'environnement)

l'attribut est bien défini pour  $c_i$ ), soit un ensemble de valeurs (dans ce cas l'attribut est "plus ou moins" bien défini pour  $c_i$ ).

Par exemple la ligne  $i$  de  $M_0$ , relative à la composante  $c_i$  sera définie comme suit :

	Attribut 1	Attribut 2	Attribut 3	Attribut 4	Attribut 5
$c_i$	{0.4,0.5,0.6}	{0.4,0.5,0.6}	{0.7,0.8,0.9}	{0.9,1}	{0.7,0.8,0.9,1}
$c_k$	{1}	{0.4}	{0.8}	{1}	{1}

### 3.2. Espace possiblement organisé selon la structure A

3.2.1. Nous dirons que  $c_i$  appartient possiblement à la structure A  $\Leftrightarrow \forall j, t_j \neq 0, t_j(c_i) \cap t_j(A) \neq 0 \quad j=1, \dots, l$

Dans notre exemple :

$c_i$  n'appartient pas possiblement à la structure A car :

$$t_1(c_i) = \{0.4,0.5,0.6\} \quad \text{donc } t_1(c_i) \cap t_1(A) = 0$$

bien que  $t_2(c_i) \cap t_2(A) \neq 0$

de même que  $t_3, t_4$  et  $t_5$ .

3.2.2. Nous appellerons espace possiblement organisé selon la structure A

$$E_A^* \subset E$$

$$E_A^* = \left\{ c_i \in E, i \in I \text{ et } c_i \text{ appartenant possiblement à A} \right\}$$

### 3.3 Espace nécessairement organisé selon la structure A

3.3.1. Nous dirons que  $c_i$  appartient nécessairement à la structure A  $\Leftrightarrow \forall j, t_j(c_i) \neq 0 \text{ et } t_j(c_i) \subseteq A$

Dans notre tableau,  $c_k$  appartiendrait nécessairement (et possiblement) à A.

3.3.2. Nous appellerons espace nécessairement organisé selon la structure A :

$$E_A^* = \{c_i \in \underline{E}, i \in \underline{I} \text{ et } c_i \text{ appartenant nécessairement à } A\}$$

Ainsi, dans l'exemple que nous avons amorcé, nous pourrions définir l'espace qui est *possiblement* une hêtraie et qui inclut naturellement l'espace qui est *nécessairement* cette formation végétale. Notre appréciation de l'appartenance de cet espace à la formation végétale n'est plus simplement qualitative, mais bien fondée sur une estimation quantitative de cette appartenance.

### 3.4. Cas où A est une structure d'identification

Dans le cas où le chercheur veut identifier des espaces possiblement et nécessairement organisés selon ses structures successives  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , on obtient une partition de  $\underline{E}$  en sous-espaces :

$$E_{A_1}^*, E_{A_2}^*, \dots, E_{A_n}^*$$

non forcément disjoints. En effet un sous-espace peut appartenir "possiblement" à des structures différentes et ce avec des degrés de possibilité différents.

L'intérêt de cette notation nous semble considérable, du moins en géographie. Elle permet d'estimer quantitativement l'identification d'un espace représenté flou à une, ou plusieurs structures pré-définies, de voir qu'un sous-espace peut relever à la fois, à des degrés différents, de telle ou telle structure.

Ainsi, un sous-espace d'une carte mentale peut appartenir *possiblement* à la structure "banlieue" (et on définira pour chaque composante la valeur de la possibilité d'appartenance à cette structure), il peut également appartenir *possiblement* à la structure "centre-ville" etc.

Nous disposons donc bien là d'un outil d'expression spatiale de l'appartenance floue d'un sous-espace à plusieurs structures pré-définies non floues.

4. Modèle de traitement dans le cas où la structure pré-définie est floue

Dans les cas qui nous intéressent, il est beaucoup plus fréquent que la structure A soit elle-même floue.

Dans ce cas, chaque attribut de A est défini par un ensemble de valeurs et non plus par une seule valeur. Le tableau VII 1 des clés d'identification des formations végétales sur une photographie aérienne précise de nombreuses notations plus ou moins floues concernant les caractéristiques de ces formations.

Nous abordons ici le cas décrit dans le chapitre V (B III 2.2.)

4.1. Exemple

Proposons une structure A définissant un processus de "métamorphisme péri-urbain" (RACINE, 1967)

4.1.1. Structure A : métamorphisme périurbain

Attributs	1.Densité liaisons routières avec la ville	2.Représentation d'habitats de type périurbain	3.Représentation d'espaces de loisirs	4.Espaces restés agricoles
Notations				
Notations qualitatives	forte	plus ou moins nombreuses	existant	nombreux
Quantification	{0.8,0.9}	{0.5,0.6,0.7}	{0.2}	{0.7,0,8,0.9}

4.1.2. Détermination de la matrice d'informatique spatiale floue  $M_0$

Elle est définie comme dans le cas 3 par une ou plusieurs valeurs correspondant, pour chaque composante  $c_j$ , à l'attribut  $t_j$ .

Posons, à titre d'exemple, pour la composante  $c_i$  les valeurs floues des attributs 1 à 4.

	Attribut 1	Attribut 2	Attribut 3	Attribut 4
$c_i$	{0.2,0.3}	{0.5,0.6}	{0.2,0.3,0.4}	{0.8}

4.1.3. Possibilité d'appartenance de  $c_i$  à  $\underline{E}$  selon la structure A

On peut définir, à la suite de PRADE (1982), la possibilité d'une composante  $c_i \in \underline{E}$  d'appartenir à  $E_A$  selon l'attribut flou  $t_j$ .

$$\text{Pos}(c_i)_{t_j} = \text{Sup} \left[ t_{j_k}(c_i) \wedge t_{j_1}(A), k=1, \dots, m \right]$$

sachant que  $t_j$  a m valeurs pour  $c_i$  et  $l=1, \dots, n$

sachant que  $t_j$  a n valeurs pour A

Ainsi dans l'exemple exposé en 4.1.1., 4.1.2., on a pour l'attribut 1 et pour la composante  $c_i$  :

$$\text{Min } 0.8, 0.2 = 0.2$$

$$\text{Min } 0.8, 0.3 = 0.3$$

$$\text{Min } 0.9, 0.2 = 0.2$$

$$\text{Min } 0.9, 0.3 = 0.3$$

d'où :

$$\text{Pos}(c_{i_1}) = \text{Sup} [0.2, 0.3, 0.2, 0.3] = 0.3$$

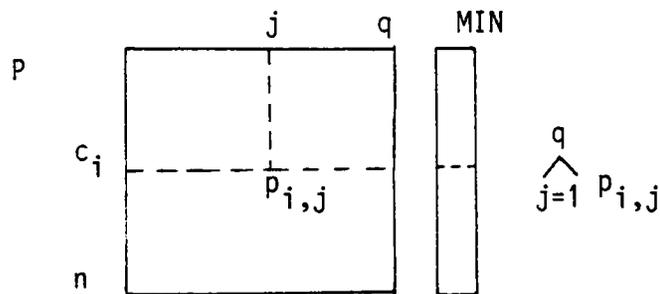
En d'autres termes, selon l'attribut "densité des liaisons routières avec la ville", la composante  $c_i$  (par exemple une commune donnée) a une "possibilité d'appartenance" à la structure d'espace de métamorphisme péri-urbain, égale à 0.3.

On redéterminera ce degré de possibilité pour  $c_i$  concernant tous les attributs retenus. Dans notre cas nous aurons ainsi :

$$\text{Pos}(c_{i_1}), \text{Pos}(c_{i_2}), \text{Pos}(c_{i_3}), \text{Pos}(c_{i_4})$$

4.1.4. Déterminons ces possibilités pour toutes les composantes spatiales de l'espace représenté. Nous déterminons ainsi, pour chaque composante, un ensemble de q mesures de possibilités relatives aux q attributs flous retenus. Nous pouvons ainsi définir la :

4.2. Matrice des possibilités d'appartenance des composantes spatiales à  $E_A$ , espace géographique déterminé par la structure A. Nous définirons cette matrice par :



où  $p_{i,j}$  est la possibilité d'appartenance de la composante  $c_i$  à  $E_A$  selon l'attribut  $t_j$ .

Ainsi, à chaque composante sont associées q valeurs prises dans  $[0,1]$ . A chaque composante peut être associée alors la valeur min des diverses possibilités qui la concernent =  $\bigwedge_{j=1}^q p_{i,j}$

Nous proposons, en conséquence, de définir deux notions qui géographiquement, peuvent s'avérer très intéressantes.

4.3. Mesure globale de la possibilité de l'espace géographique d'appartenir à la structure A

Nous l'appellerons :

$$\text{Pos}(E_A) = \bigvee_{i=1}^n \left( \bigwedge_{j=1}^q p_{i,j} \right)$$

Il s'agit donc bien d'une appréciation quantitative de l'appartenance floue d'un espace flou à une structure floue, quantification impossible à réaliser avec la méthodologie classique.

D'autre part, réalisons sur  $E_A$  des  $\alpha$ -coupures selon les valeurs des possibilités obtenues dans la colonne MIN et nous obtiendrons une "spatialisation" de l'imprécision selon la structure A.

#### 4.4. Proposition d'extension. Choix d'une structure d'identification d'un espace géographique flou

Dans le cas où le chercheur hésite entre plusieurs structures floues  $A_1, A_2 \dots A_k$  susceptibles à son avis d'expliquer l'espace  $E$ , la démarche décrite permettra de déterminer :

Pos ( $E_{A_1}$ )

Pos<sub>1</sub> ( $E_{A_2}$ )

⋮

Pos( $E_{A_k}$ )

et de choisir la structure à laquelle correspond la possibilité la plus forte.

### 5. Conclusion

Les modèles proposés permettent selon nous une analyse spatiale quantitative d'espaces représentés flous et la mise en évidence de l'appartenance de ces espaces à des types de structures elles aussi floues.

Il s'agit donc bien de la "possibilité" d'étudier scientifiquement des données qui ne se prêtent pas, de prime abord, à une étude quantitative.

Cette étude multicritère aboutit à la détermination de la possibilité (et de la nécessité, non développée dans le paragraphe ci-dessus) d'appartenance d'un espace à une structure pré-définie. Elle est, selon nous, équivalente à la démarche entreprise en analyse des données pour des espaces précis et des structures précises mais se prête à un champ d'investigation beaucoup plus large que cette dernière démarche.

Il nous reste, dans la dernière partie de ce chapitre, à pro-

poser un modèle de valuation d'espaces subjectifs et une méthodologie pour nous permettre de mettre en évidence la structure implicite de ces espaces.

## C - MODELE DE VALUATION D'UN ESPACE REPRESENTE SUBJECTIF

### I - Approche géographique de la modélisation

#### 1. Originalité de la représentation spatiale sur une carte mentale

1.1. Dans la pratique, un espace subjectif représenté par une carte mentale est un document où figurent des composantes spatiales : nous en distinguons trois types : type ponctuel : carrefours, monuments, points intéressants divers, grands magasins, cinémas etc..., type aréal : places, parkings, bâtiments de grande étendue, type axial : rues, avenues, axes ferroviaires, "barrières" fluviales, autoroutières, axes de pénétration urbaine etc.

Sur la carte, chaque composante peut être localisée et représentée *de façon précise* (même si localisation, formes et aires ne correspondent pas à la "réalité" géographique) ; elle peut également simplement figurer dans *une zone* plus ou moins étendue dans laquelle elle est supposée se trouver. Nous avons alors une localisation imprécise, floue et l'information apportée par ce type de localisation est évidemment moindre que celle liée à une localisation précise.

Des composantes spatiales, d'autre part, peuvent être absentes de l'espace subjectif étudié ou, à l'inverse y figurer alors qu'en réalité, elles n'appartiennent pas au secteur décrit : ainsi, sur une carte mentale du centre-ville peuvent apparaître un bâtiment, une place, une artère qui sont de toute évidence en-dehors du centre-ville en question. Erreur ? Non certes, mais simplement discordance entre l'espace subjectif et l'espace géographique sur laquelle on peut réfléchir et qu'on peut chercher à expliquer.

Le tableau VII 2 résume les types de composantes spatiales sus-

TABLEAU VII 2

Composantes de l'espace subjectif urbain. Proposition d'organisation

COMPOSANTES	SIGNIFICATION GEOGRAPHIQUE	FORMALISATION GEOMETRIQUE	EXEMPLES
Composantes spatiales statiques	Elémentaire	Point	Repères ponctuels : bâtiment - Cathédrale
		Axe	barrière - écran ligne SNCF, rivière
Surface		place, parcs, parkings	
	Trame	Graphe	
Composantes spatiales de flux	Structure	Axe	flux de circulation, rues + importantes, sens uniques
		Point	noeud de communications ou d'échanges : carrefours, marchés, forum
Composante de dynamique spatiale	Processus	Axe	liaisons avec extérieur "sorties" des villes
		Surface	zones dégradées, rénovation urbaine, urbanisation...

ceptibles d'être représentées.

1.2. Ainsi se dégagent les caractères qualitatifs d'un tel espace.

1.2.1. C'est un espace discontinu, "lacunaire", qui juxtapose à des sous-espaces bien connus, même s'ils sont plus ou moins bien localisés, des "terres inconnues", à l'image de ces cartes anciennes dessinées par les explorateurs de terres lointaines.

1.2.2. C'est un espace déformé, étiré ou rétréci par rapport à une carte géographique ou un plan, en ce qui concerne la configuration des composantes spatiales. En effet, que ce soient leur forme, leur aire, les distances qui les séparent les unes des autres, tous ces éléments subissent des distorsions plus ou moins importantes.

1.2.3. La localisation des composantes spatiales peut, elle aussi, sembler fantaisiste ; pourtant un examen minutieux des cartes mentales montre qu'elle obéit à une logique "subjective" comme le suggère ROUGET (1975) qu'il appartient de mettre en évidence.

1.2.4. Enfin, les limites d'un espace représenté par une carte mentale sont plus des franges d'indétermination que des lignes nettes, c'est-à-dire des ceintures plus ou moins larges, plus ou moins continues, où le processus de perception se dilue progressivement et où coexistent secteurs connus et non connus.

En conclusion, rien ne semble plus "subjectif" effectivement, qu'une carte mentale, et plus difficile à étudier. En réalité rien n'est plus enrichissant, pour la connaissance du milieu géographique d'une part, et des rapports de l'homme avec ce milieu d'autre part, que ce type de document. La théorie des sous-ensembles flous en permet une approche quantitative et, de ce fait, une étude objective et systématique.

## 2. Aspects pratiques de la représentation spatiale

L'outil graphique qui rend possible la détermination

de la fonction d'appartenance des composantes spatiales à l'espace subjectif est une grille superposée à la carte géographique qui détermine en fait des repères orthonormés, la valeur de l'unité de mesure étant choisie par le chercheur selon l'échelle de l'étude et le degré de finesse souhaité pour les résultats.

Ce même système appliqué à la carte subjective permet ensuite de comparer les deux cartes. Il est cependant important de souligner que l'échelle géographique des deux cartes doit être la même : graphiquement on résoud la difficulté en localisant d'office et de façon précise sur la carte subjective, deux composantes spatiales bien définies : dans l'exemple traité on a ainsi "imposé" sur les cartes à remplir, les repères orthonormés et deux localisations : à savoir la gare de Metz et la Faculté des Lettres, lieux supposés connus par tous les étudiants !

On dispose ainsi d'un ensemble de cartes mentales relatives au groupe de sujets, cartes extrêmement différentes les unes des autres. (Annexe III, cartes 1 à 5), superposables cependant du fait du choix de l'échelle et du maillage choisi de la grille de repérage.

### 3. Problématique de valuation d'un espace subjectif cartographié

Il s'agit de partir de chaque carte mentale et de définir d'après un modèle donné, le sous-ensemble flou  $E_{S_i}$  de  $\underline{E}$  représentant l'espace subjectif du sujet  $i$ .

Pour cela il faut déterminer, la fonction d'appartenance de chaque composante à cet espace subjectif  $E_{S_i}$ .

$E_{S_i}$  sera donc défini comme :

$$\forall i, \quad E_{S_i} = \left\{ \left( c_j, \mu_{E_{S_i}}(c_j) \right), \mu_{E_{S_i}}(c_j) \in [0,1], j=1, \dots, p \right\}$$

Pour définir cette fonction d'appartenance, nous proposons une valuation de la composante en question, c'est-à-dire la mesure floue de l'"écart" (ce terme étant pris au sens général pour le moment) entre cette composante sur la carte mentale et la carte "objective". Cette valuation devra respecter les conditions suivantes :

3.1. A toute composante spatiale représentée graphiquement sur la carte mentale de *façon précise et certaine*, sans recours à une représentation floue, ni "erreur" de localisation, ni déformation de quelque nature qu'elle soit (surface, orientation...) on associe la valeur 1.

Dans ce cas :

$$\mu_{E_{S_i}}(c_j) = 1$$

3.2. A toute composante spatiale non représentée sur la carte mentale, nous associerons une fonction d'appartenance nulle.

$$\mu_{E_{S_i}}(c_j) = 0 \iff c_j \notin E_R$$

3.3. A toute composante spatiale incertaine, imprécise ou présentant les deux caractères à la fois, le modèle devra permettre d'associer la fonction d'appartenance :

$$0 < \mu_{E_{S_i}}(c_j) < 1$$

3.4. Nous chercherons donc bien à résoudre le problème posé par MOLES (1980)

"... Un problème constant est de réconcilier l'essentielle subjectivité des termes attachés à des comportements, avec l'objectivité de la mesure. Tout type comportemental humain, l'ouvrier, la ménagère, l'enfant, construit ainsi un certain perspectivisme ; ceux-ci se superposent ou entrent en conflit et notre problème est de tirer quelques lois relatives à ce conflit".

#### 4. Formalisation d'un espace subjectif cartographié

4.1. Rappelons les notations relatives à un espace représenté flou précisées dans le chapitre V, A I 5.

$$E_{GR} = (E_R, S_R, C_R, R_R)$$

où  $E_{GR}$ , espace représenté, est défini par :

$E_R$  : sous-ensemble flou de  $\underline{E}$

$S_R$  : structure floue, c'est-à-dire ensemble d'attributs flous

caractérisant  $E_R$

$C_R$  : configuration floue, c'est-à-dire forme et étendue floues des composantes

$R_R$  : relations floues entre les composantes

4.2. Un espace subjectif cartographié doit être formalisé de façon plus restrictive. Il est défini selon nous par un sous-ensemble flou de composantes spatiales définies par une configuration floue et par des relations floues associant chaque couple de composantes. Dans la mesure où nous travaillons sur des cartes mentales, la structure n'est pas définie puisqu'on demande une simple représentation spatiale et non une caractérisation des composantes. De ce fait :

$$E_{GR_{cart.}} = (E_R, C_R, R_R)$$

4.3. De ce fait, chaque composante spatiale sera définie par sa fonction d'appartenance, prise dans l'intervalle  $[0,1]$ , à l'espace subjectif.

Nous posons que le degré d'appartenance de chaque composante spatiale à l'espace subjectif est fonction des deux termes suivants :

4.3.1. Incertitude quant à l'appartenance : *représentation* "plus ou moins" certaine de la composante spatiale dans l'espace subjectif.

4.3.2. Imprécision de la représentation : *morphologie* de la composante "subjective" par rapport à la composante géographique : une composante sera "plus ou moins" déformée par rapport à l'espace géographique, *localisation* de la composante subjective par rapport à la composante géographique : une composante subjective, tout en étant correctement représentée peut être "très éloignée ou très proche" de la localisation géographique réelle. Il s'agira donc de proposer une mesure de la "distance" pour chaque composante, entre espace géographique et espace subjectif. Ainsi, en conclusion :

$$\mu_{E_{S_i}}(c_j) = f(R_{C_j}, C_{C_j}, L_{C_j})$$

- où
- $R_{c_j}$  : représentation de la composante subjective c'est-à-dire prise en compte de la certitude d'appartenance de la composante à l'espace subjectif
  - $C_{c_j}$  : morphologie de la composante subjective
  - $L_{c_j}$  : localisation relative de la composante subjective.

Le modèle de valuation, proposé dans le paragraphe suivant, représente un essai de définition de cette fonction d'appartenance selon les trois termes ainsi définis.

## II - Modèle de valuation des composantes spatiales d'un espace subjectif

### 1. Présentation générale du modèle

Le modèle associe trois termes :

#### 1.1: $L_f$ : indice de localisation floue

Cet indice value l'incertitude quant à l'appartenance de  $c_j$  à l'espace subjectif et quant à la localisation de cette composante.

#### 1.2: $C_f$ : indice de configuration floue

Cet indice concerne la configuration de  $c_j$ . Il associe :

- $D_f$  : indice de distorsion floue qui value la déformation de l'étendue (aires ou longueurs) de la composante  $c_j$

- $O_r$  : indice d'orientation : c'est la mesure de l'angle de rotation qu'a subi une composante spatiale représentée par rapport à la composante géographique.

Il représente une approche de la modification de forme subie par la composante du fait de sa représentation.

#### 1.3. $D$ : distance entre composante subjective et géographique :

- composante ponctuelle : distance de point géographique au

"point subjectif"

- composante aréale : on considère les centres de gravité des figures et on en détermine la distance
- composante axiale : on considère les milieux des axes et on en détermine les distances.

En cas de localisation floue, le centre de gravité de la zone floue de localisation est pris comme point de repère pour la détermination de la distance.

D définit ainsi une comparaison entre l'espace géographique et l'espace représenté quant à la localisation des composantes.

## 2. Ecriture du modèle

### 2.1. Ecriture générale

$$\forall c_j \in \underline{E}, \text{ on définit :}$$
$$\mu_{E_{S_i}}(c_j) = L_f \cdot \frac{D_f \cdot O_r}{D}$$

### 2.2. Ecriture développée

$$\forall c_j \in \underline{E}$$
$$\mu_{E_{S_i}}(c_j) = \left(1 - \frac{H_L}{H_G}\right) \left[ \frac{\left(1 - \frac{|m_d - m_r|}{m_d}\right) (|\cos \alpha|)}{D} \right]$$

## 3. Explication des termes du modèle

### 3.1. Indice de localisation floue

$$L_f = 1 - \frac{H_L}{H_G}$$

cet indice est un indice mesurant le degré de certitude que l'on a au sujet de la composante  $c_j$ .

Soit  $n$  le nombre total de cases de la grille de repérage.

3.1.1. Si la composante  $c_j$  est absente de la carte mentale, il y a incertitude absolue.

On peut dire que sa localisation est équiprobable pour toutes les cases de la grille.

Dans ce cas, il y a manque total d'information sur  $c_j$ .

L'entropie du système qu'est l'espace subjectif pour  $c_j$  est maximale. Nous l'appellons *entropie générale* et sa valeur est :

$$H_G = \log n$$

3.1.2. Si la composante spatiale est certaine (même si elle est imprécise) on peut dire que sa localisation concerne *une* seule case soit :

- si  $c_j$  est une composante ponctuelle, ce point est parfaitement localisé

- si  $c_j$  est une composante aréale ou linéaire, son centre de gravité est parfaitement localisé

alors, on définit l'*entropie locale* et sa valeur est :

$$H_L = \log 1 = 0$$

3.1.3. Si la composante est incertaine c'est-à-dire si elle est localisée, non pas avec précision, mais dans une zone d'indétermination, chacune des  $m$  cases de cette zone a une chance égale de contenir le point représentatif de cette composante.

Dans ce cas :

$$H_L = \log m$$

3.1.4. Le tableau suivant résume les valeurs de  $L_f$

	$H_L = \log m$	$H_G$	$L_f$
Composante certaine	$m = 1$ $H_L = 0$	$\log n$	1

	$H_L = \log m$	$H_G$	$L_f$
Composante incertaine	$1 < m < n$ $\log m$	$\log n$	$0 < L_f < 1$
Composante inexistante	$\log n$	$\log n$	0

### 3.2. Indice de configuration floue

Il associe l'indice de distorsion floue et l'indice d'orientation.

#### 3.2.1. Indice de distorsion floue

Cet indice mesure les distorsions de l'étendue de  $c_j$  représentée par rapport à la composante géographique

$$D_f = 1 - \frac{|m_d - m_r|}{m_d} \quad \text{si } m_d \geq m_r$$

ou 
$$D_f = 1 - \frac{|m_r - m_d|}{m_r} \quad \text{si } m_r > m_d$$

avec  $m_d$  = aire "subjective" ou longueur "subjective"

et  $m_r$  = aire réelle ou longueur réelle

des composantes spatiales respectivement aréale ou axiale. Cet indice s'applique uniquement aux composantes non ponctuelles. Effectivement pour les composantes ponctuelles  $D_f = 1$ , deux cas sont à distinguer :

3.2.1.1. Si  $c_j$  est représentée de façon certaine,  $m_d$  est aisément déterminable par planimétrie de la surface de  $c_j$  ou par mesure directe de sa longueur, si  $c_j$  est une composante axiale.

3.2.1.2. Si  $c_j$  est représentée de façon incertaine, nous proposons de "pénaliser" cette représentation en affectant à  $m_d$  l'aire de la zone d'indétermination, ou la longueur de son axe d'allongement maximum, si  $c_j$  est une composante axiale. Cette "pénalisation" peut sembler excessive,

elle est justifiée selon nous par le fait qu'elle diminue d'autant plus la fonction d'appartenance de  $c_j$  à l'espace subjectif que la zone d'indétermination est plus vaste.

Les valeurs de  $D_f$  sont résumées dans le tableau suivant :

		$m_d$	$m_r$	$D_f$
Composante aréale	certaine	$m_d = \text{aire de la composante subjective}$	aire réelle	1 si $m_d = m_r$ $0 < D_f < 1$ si $m_d \neq m_r$
	incertaine	$m_d = \text{aire de la zone floue de représentation}$	aire réelle	$0 < D_f < 1$
	inexistante	0		impossible
Composante linéaire	certaine	$m_d = \text{longueur de l'axe subjectif}$	longueur réelle de l'axe	1 si $m_d = m_r$ $0 < D_f < 1$ si $m_d \neq m_r$
	incertaine	$m_d = \text{longueur max. de zone floue}$	longueur réelle	$0 < D_f < 1$
	inexistante	0		impossible

### 3.2.2. Indice d'orientation

$$O_r = |\cos \alpha|$$

$O_r$  traduit la modification de l'orientation des composantes spatiales subjectives par rapport à la carte géographique

$\alpha$  est l'angle traduisant cette modification.

En cas de représentation floue, l'axe d'allongement maximum de

la zone floue est supposé être celui de la composante spatiale.

Dans tous les cas :

-  $O_r$  est maximum quand  $\alpha = 0$  ou  $180^\circ$ , c'est-à-dire quand la déformation est nulle. Alors  $O_r = 1$

-  $O_r$  est minimum quand  $\alpha = 90^\circ$ . Pour éviter un terme nul, on pose par convention :

si  $\alpha = 90^\circ$ ,  $O_r = 0.01$ , valeur arbitraire certes, mais qui "sanctionne" une déformation maximale de l'orientation.

### 3.3. Distance entre $c_j$ représenté et $c_j$ géographique

Cette distance a été choisie, dans le cas qui nous intéresse, comme la *distance rectilinéaire* entre position géographique et position subjective d'une composante. Ce choix est motivé par le plan même du centre-ville de Metz, héritier d'un oppidum gallo-romain, qui se caractérise par une structure en damier significative des fondations de ce type.

Nous mesurerons cette distance entre composantes représentées et composantes géographiques en nous référant

- aux composantes elles-mêmes si celles-ci sont ponctuelles
- à leurs centres de gravité si elles sont aréales ou axiales
- enfin, si elles sont incertaines, le point de référence sur la grille de repérage sera le centre de gravité de la zone d'indétermination.

### 4. Tableau récapitulatif des valeurs des fonctions d'appartenance (tableau VII 3)

Type de composante	$L_f$	$D_f$	$O_r$	$\mu_{E_S}(c_j)$
POINT	0	1	1	0 point inexistant
	1 composante certaine	1	1	1/D loc. certaine 1 loc. certaine et précise
	$0 < L < 1$ composante incertaine	1	1	$0 < \mu < 1$ loc. incertaine
SURFACE	Prise en compte du centre de gravité 1 composante certaine	$0 < D_f \leq 1$ (rapport des masses)	$0 < O_r \leq 1$	$0 < \mu < 1$ loc. certaine 1 loc. certaine et précise
	0			0 surface inexistante
	$0 < L_f < 1$ composante incertaine	$0 < D_f < 1$ surface floue $m_d = \frac{\text{aire "floue"}}{\text{aire "floue"}}$	$0 < O_r < 1$ orient. selon axe du plus grand allongement de zone floue	$0 < \mu < 1$ loc. incertaine
AXE	0			0 axe inexistant
	1 composante certaine	$0 < D_f \leq 1$ (rapport des longueurs)	$0 < O_r \leq 1$	$0 < \mu < 1$ loc. certaine 1 loc. certaine et précise
	$0 < L_f < 1$ composante incertaine	$0 < D_f < 1$ axe flou ( <u>longueur floue</u> ) = longueur max. axe flou)	$0 < O_r < 1$ axe d'allongement de zone floue	$0 < \mu < 1$ loc. incertaine

III - Les notations dérivées du modèle de valuation. Mise en évidence d'une structure implicite de l'espace représenté

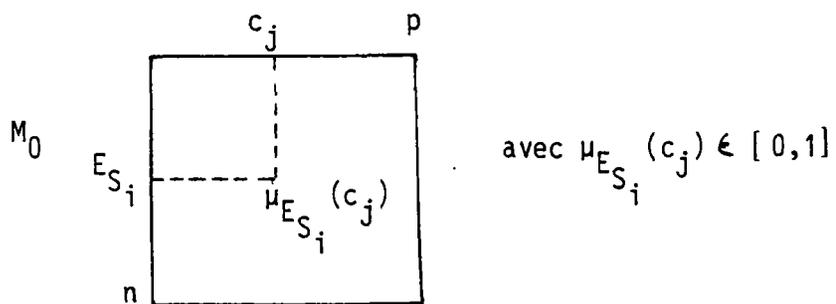
Notre but est de mettre en évidence la structure implicite d'un espace subjectif collectif, c'est-à-dire de dégager les grandes constantes, véritables invariants spatiaux communs à un groupe étudié, à une collectivité bien définie.

L'intérêt est considérable ; outre le fait que de telles structures implicites peuvent être comparées avec les résultats obtenus avec d'autres groupes ou pour d'autres espaces, alimentant ainsi des études comparatives fécondes entre groupes, pour un même groupe pris à des moments différents, entre espaces différents, on peut également "situer" un individu par rapport à son groupe, étudier l'"écart" entre sa vision spatiale et celle de son groupe, testant ainsi quantitativement à la fois les rapports individu ↔ espace



source d'intéressantes études géographiques, sociologiques, psychosociologiques dérivées de ces notations.

La base de départ en est la matrice d'information spatiale  $M_0$ , associant aux  $n$  individus dont les  $n$  espaces subjectifs  $E_{S_i}$ ,  $i=1, \dots, n$ , placés en lignes, les fonctions d'appartenance aux  $p$  composantes spatiales



Ce paragraphe s'attachera ainsi à définir les axes de recherche

- Mise en évidence de la structure implicite de l'espace subjectif collectif

- Notion de "situation" de l'individu  $i$  par rapport à cette structure.

## 1. Structure implicite de l'espace subjectif collectif

### 1.1. Structures simples de l'espace subjectif global

Elles prennent en compte les composantes spatiales munies de leurs fonctions d'appartenance à l'espace subjectif global.

α) On appellera espace subjectif faible, ou structure spatiale MIN, le sous-ensemble flou tel, qu'à chaque composante spatiale est associée la valeur d'appartenance MIN de la colonne considérée de la matrice d'information spatiale floue.

Ainsi :

$$E_f = \left\{ \left( c_j, \mu_{E_f}(c_j) \right) / \mu_{E_f}(c_j) = \bigwedge_{i=1}^n \mu_{E_i}(c_j) \right\}$$

avec  $j = 1, \dots, p$

Il s'agit ici de l'espace subjectif minimum connu par le groupe, "la ville que tout le monde connaît", avec la précision importante que chaque composante spatiale est connue à un degré égal *ou différent* de celui des autres composantes spatiales de l'espace subjectif.

β) A l'inverse, on définit l'espace subjectif fort, ou structure spatiale MAX, le sous-ensemble flou tel qu'à chaque composante spatiale est associée la valeur d'appartenance MAX de la colonne considérée de la matrice d'information spatiale floue.

Ainsi :

$$E_F = \left\{ \left( c_j, \mu_{E_F}(c_j) \right) / \mu_{E_F}(c_j) = \bigvee_{i=1}^n \mu_{E_i}(c_j) \right\}$$

avec  $j = 1, \dots, p$

Il s'agit ici de l'espace subjectif maximum connu par le groupe. Cette notion est intéressante dans la mesure où, si le groupe est homogène, elle traduit la connaissance maximale que le groupe peut avoir de l'es-

pace dans lequel il vit. Définie et calculée à intervalles réguliers, elle permet la mise en évidence des progrès de cette connaissance maximale et, éventuellement, de seuils relatifs à cette connaissance, concernant chaque composante spatiale.

### 1.1.2. Notion de composante spatiale majeure et mineure

Structures spatiales MIN et MAX révèlent *un espace subjectif non pas homogène mais différencié* selon le degré de perception des composantes spatiales.

α) On définit la composante spatiale majeure de l'espace subjectif fort la composante  $c_k$  telle que

$$\mu_{EF}(c_k) = \bigvee_{j=1}^p \mu_{EF}(c_j)$$

c'est-à-dire celle dont la valeur d'appartenance à la structure spatiale forte est la plus élevée.

β) A l'inverse, la composante spatiale mineure de l'espace subjectif fort, la composante  $c_n$  telle que

$$\mu_{EF}(c_n) = \bigwedge_{j=1}^p \mu_{EF}(c_j)$$

γ) Enfin on définit par l'amplitude spatiale  $A_{SF}$  de la structure forte le scalaire  $A_{SF}$

$$A_{SF} = \mu_{EF}(c_k) - \mu_{EF}(c_n)$$

Il est évident que  $0 \leq A_{SF} \leq 1$

δ) Conclusion. Les mêmes définitions sont posées pour la structure spatiale MIN, l'ensemble des définitions étant résumé dans le tableau suivant :

	Espace subjectif fort	Espace subjectif faible
Définition	$E_F = \left\{ \left( c_j, \mu_{EF}(c_j) \right) / \mu_{EF}(c_j) \right.$ $= \left. \bigvee_{i=1}^n \mu_{E_i}(c_j) \right\}$	$E_f = \left\{ \left( c_j, \mu_{EF}(c_j) \right) / \mu_{EF}(c_j) \right.$ $= \left. \bigwedge_{i=1}^n \mu_{E_i}(c_j) \right\}$
Composante spatiale majeure	<p>...de l'espace subjectif fort</p> $c_k / \mu_{EF}(c_k) = \bigvee_{j=1}^p \mu_{EF}(c_j)$	<p>...de l'espace subjectif faible</p> $c_n / \mu_{E_f}(c_n) = \bigvee_{j=1}^p \mu_{E_f}(c_j)$
Composante spatiale mineure	<p>...de l'espace subjectif fort</p> $c_k / \mu_{EF}(c_k) = \bigwedge_{j=1}^p \mu_{EF}(c_j)$	<p>...de l'espace subjectif faible</p> $c_{n'} / \mu_{E_f}(c_{n'}) = \bigwedge_{j=1}^p \mu_{E_f}(c_j)$
Amplitude spatiale $\underline{A}_S$	<p>...de l'espace subjectif fort</p> $\underline{A}_{SF} = \mu_{EF}(c_k) - \mu_{EF}(c_{k'})$	<p>...de l'espace subjectif faible</p> $\underline{A}_{Sf} = \mu_{E_f}(c_h) - \mu_{E_f}(c_{h'})$

### 1.1.3. Frangé d'intégration spatiale

#### \*) Structure spatiale forte de niveau $\alpha$

Réalisons sur  $E_F$ , une  $\alpha$ -coupure,  $\alpha$  étant défini par le chercheur.

Nous déterminons ainsi un sous-ensemble non flou  $\underline{E}_{F\alpha}$  dont les éléments sont définis comme suit :

$$\underline{E}_{F\alpha} = \left\{ c_j / c_j \in \underline{E}_G \text{ et } \mu_{EF}(c_j) \geq \alpha \right\}$$

Ainsi si  $\alpha = 0.5$ , la structure spatiale forte de niveau 0.5 est le sous-ensemble non flou tel que ses éléments ont une fonction d'appartenance au sous-ensemble flou égale ou supérieure à 0.5.

Concrètement la structure spatiale forte de niveau 0.5 est un espace géographique inclus dans l'espace subjectif fort. Les composantes spatiales sont celles dont l'appartenance à cet espace subjectif fort est  $\geq 0.5$ .

Il est évident que  $\alpha'$  étant choisi, avec  $\alpha' < \alpha$ ,

$$E_{F\alpha} \subseteq E_{F\alpha'}$$

A partir de  $E_{F\alpha}$  on peut définir son complémentaire  $\overline{E_{F\alpha}}$  par rapport à  $E_F$  qui est le sous-ensemble ordinaire dérivé de l'espace subjectif fort dont les composantes sont celles dont la fonction d'appartenance à  $E_F$  est  $< \alpha$

#### $\beta$ ) Structure spatiale faible de niveau $\beta$

De la même façon, nous intéressant à  $E_f$  et retenant un seuil  $\beta$  ( $\beta < \alpha$ ), nous définissons l'espace "que tout le monde connaît" au-delà d'un seuil  $\beta$  ou au seuil  $\beta$ .

Il est défini ainsi :

$$E_{f\beta} = \left\{ c_j / c_j \in E_G \text{ et } \mu_{E_f}(c_j) \geq \beta \right\}$$

Notons que si  $\beta$  est choisi très faible, on peut dégager l'espace géographique quasi "inconnu" pour le groupe interrogé.

Ainsi par exemple :

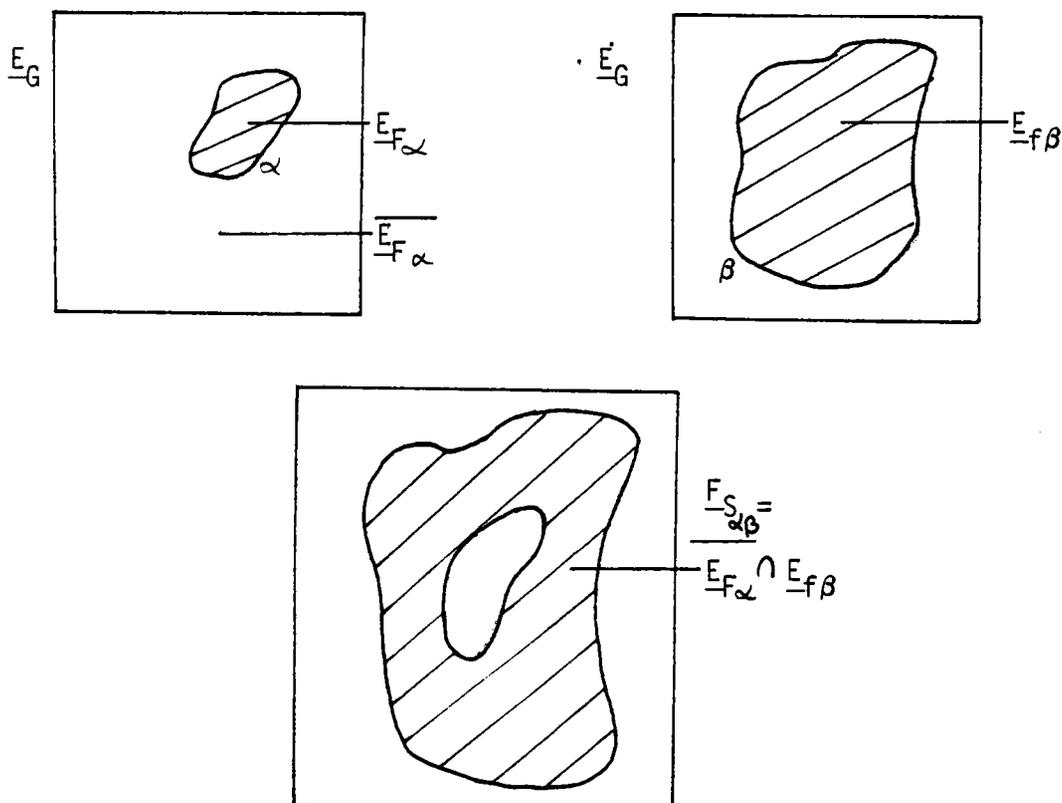
$\overline{E_{f0.05}}$  est l'espace dont les composantes ont une fonction d'appartenance  $< 0.05$ . Sur le plan géographique et économique, tout effort d'aménagement de cet espace (rénovation, construction, installation de commerce ou de services divers etc.) devra être précédé d'une vigoureuse et rigoureuse action d'information destinée à améliorer la perception de cet espace, ou même d'une réflexion sur l'intérêt géographique ou économique d'un tel effort.

#### $\gamma$ ) Frange d'intégration spatiale de niveau $\alpha\beta$

$\alpha$  et  $\beta$  étant choisis, on définit un sous-ensemble non flou  $F_{S\alpha\beta}$  tel que :

$$(1) \quad \underline{F}_{S_{\alpha\beta}} = \left\{ c_j / \mu_{E_F}(c_j) < \alpha \text{ et } \mu_{E_f}(c_j) > \beta \right\}$$

donc  $c_j \in \underline{F}_S \iff c_j \in \overline{E_{F\alpha}}$  et  $c_j \in E_{f\beta}$   
 $\implies c_j \in \overline{E_{F\alpha}} \cap E_{f\beta}$



On met en évidence, une frange, continue ou non, plus ou moins large, qu'on appelle *frange d'intégration spatiale*. Selon nous elle revient à définir un espace où le processus de perception, partant d'une valeur faible  $\beta$ , commune à tout le groupe, atteint pour certains sujets une valeur  $\alpha$  élevée. Il s'agit d'un espace "en cours d'intégration" par le groupe étudié. La configuration : localisation des composantes, forme, aire et distances doit en être soigneusement étudiée ; de même l'évolution de cette configuration représente un véritable traceur du processus d'intégration évoqué.

Cette frange d'intégration spatiale peut aussi être considérée comme un sous-ensemble flou :

$$(2) \quad F_{S\alpha\beta} = \left\{ \left( c_j, \mu_{F_{S\alpha\beta}}(c_j) \right) / c_j \in \overline{E_{F\alpha}} \cap E_{F\beta}, \right. \\ \left. \text{et } \mu_{F_{S\alpha\beta}}(c_j) = \mu_{E_{F\alpha}}(c_j) \cdot \mu_{E_{F\beta}}(c_j) \right\}$$

L'intérêt de cette définition, plus générale que (1) est de remplacer la *structure homogène* de cette frange par une *structure différenciée*. On définit alors le degré d'appartenance des composantes spatiales à un espace lui-même en cours d'intégration ; on met ainsi en évidence la dynamique même du processus d'intégration.

## 1.2. Structure-réseau de l'espace subjectif

L'espace subjectif est en fait un ensemble de composantes spatiales *en interaction* et non isolées les unes des autres. Pour mettre en évidence sa *structure-réseau*, c'est-à-dire celle qui traduit les liaisons réciproques entre composantes spatiales, on utilise la théorie des graphes flous (PONSARD, 1980).

### 1.2.1. Définitions préliminaires

#### α) Sous-espaces de l'espace géographique

- Soit  $E_G$  l'espace géographique défini plus haut ;

$$E_G = \{ C_1, C_2, \dots, C_p \}$$

avec  $C_i, (i = 1, \dots, p, p \in \underline{P})$ , composante spatiale de l'espace géographique.

- Soit  $E'_G \subset E_G$

$$\text{avec } E'_G = \{ C_1, C_2, \dots, C_K \} \quad K < p$$

le sous-ensemble dont les éléments sont les *composantes spatiales ponctuelles et ariales* de l'espace géographique.

- Soit  $E''_G \subset E_G$

$$\text{avec } E''_G = \{ C_{K+1}, \dots, C_p \}$$

le sous-ensemble dont les éléments sont les *composantes spatiales axiales* de l'espace géographique.

$$\text{- On a : } E_G = E'_G \cup E''_G$$

β) Graphe flou de l'espace subjectif

On cherche à associer à chaque paire de composantes spatiales ponctuelles ou aréales une mesure floue qui est celle de l'axe qui en assure la liaison.

Soit le graphe flou :

$$(1) \quad G = (\underline{E}'_G, \Gamma)$$

où  $\underline{E}'_G$  est le sous-espace géographique défini plus haut,  
 $\Gamma$  est une correspondance de  $\underline{E}'_G$  dans lui-même,

et tel que :

$$\forall c_i \in \underline{E}'_G, \forall c_j \in \Gamma(c_i); i, j \in \underline{P} \text{ et } i \neq j :$$

$$\mu_{\underline{E}'_G}(c_i, c_j) \in \underline{M}$$

$$\text{où } \underline{M} = [0, 1]$$

On définit :

$$\mu_{\underline{E}'_G}(c_i, c_j) = \mu_{E_S}(c_{ij})$$

où  $c_{ij} \in \underline{E}'_G$ , composante spatiale axiale reliant les composantes  $c_i$  et  $c_j$

et  $\mu_{E_S}(c_{ij})$  fonction d'appartenance de  $c_{ij}$  à l'espace subjectif.

γ) Graphe flou inversé de l'espace subjectif

On considère à présent

$$G' = (\underline{E}''_{G'}, \Gamma)$$

et tel que :

$$\forall c_K \in \underline{E}''_{G'}, \forall c_L \in \Gamma(c_K); K, L \in \underline{P} \text{ et } K \neq L :$$

$$\mu_{\underline{E}''_{G'}}(c_K, c_L) \in \underline{M}$$

$$= \mu_{E_S}(c_{KL})$$

où  $c_{KL} \in \underline{E}''_{G'}$  composante spatiale ponctuelle ou aréale faisant la jonction entre deux axes  $c_K$  et  $c_L$  et  $\mu_{E_S}(c_{KL})$  fonction d'appartenance de  $c_{KL}$  à l'espace subjectif.

Les sommets du graphe sont ici les composantes spatiales *axiales* et les arêtes représentent les points ou places. Cette formulation permet de considérer les rues ou artères urbaines, non plus comme de simples voies de passage, mais comme des pôles d'attraction et de forte perception.

Graphe flou et graphe flou inversé de l'espace subjectif apportent ainsi des informations complémentaires sur la structure réseau de ce dernier.

### 1.2.2. Organisation du réseau

Dans ce qui suit on travaillera uniquement sur le graphe flou, mais les définitions proposées s'appliqueront également au graphe flou inversé.

#### ∞) Un itinéraire flou

Entre deux points quelconques de l'espace subjectif est un chemin entre les sommets correspondants du graphe G, c'est-à-dire un r-uplet ordonné, *sans répétition*, tel que :

$$I(c_{p1}, c_{pr}) = (c_{p1}, c_{p2}, \dots, c_{pr})$$

avec  $c_{pk} \in \underline{E}_G, k = 1, \dots, r$

et  $\mu_{\underline{E}_G}(c_{pk}, c_{pk+1}) > 0 \quad k = 1, \dots, r-1$

A chaque itinéraire on associe sa *valeur*, qui est la valeur du chemin du graphe flou, à savoir le MIN de la fonction d'appartenance des différents axes reliant les sommets de l'itinéraire

$$v(I) = v(c) = \mu_{E_S}(c_{p1p2}) \wedge \mu_{E_S}(c_{p2p3}) \wedge \dots \wedge \mu_{E_S}(c_{pr-1pr})$$

où  $c_{pkpk+1}$  est l'axe reliant le sommet  $c_{pk}$  au sommet  $c_{pk+1}, k=1, \dots, r-1$

La signification de cette valuation des itinéraires flous dans la direction de recherche menée ici est la suivante : un itinéraire, même si certains axes qui le composent sont bien perçus, ne l'est globalement qu'au degré correspondant au plus faible de ses axes. Ainsi

est traduite l'idée qu'un itinéraire peut être jugé "peu attractif", voire "répulsif" si un des axes est perçu comme peu attrayant, peu sûr, de circulation difficile, etc.

Dans le cas d'un graphe flou inversé, ce sont les composantes spatiales ponctuelles : carrefours difficiles ou dangereux, ou aréales : places trop encombrées, trop grandes, peu ombragées ou venteuses, trop peu attrayantes, trop peu sûres... etc qui "pénaliseront" un itinéraire allant d'une rue attractive à une autre.

β) L'itinéraire le plus fort

Entre deux points quelconques de l'espace subjectif est le chemin le plus fort entre les sommets correspondants du graphe, c'est-à-dire de l'ensemble de tous les chemins existants entre ces sommets, celui dont la valeur est la plus forte.

Il se prête à une cartographie intéressante de la perception de l'espace urbain.

γ) On appelle coefficient de liaison spatiale entre deux points quelconques de l'espace subjectif, la valeur de l'itinéraire le plus fort entre les sommets correspondants du graphe.

On définit ainsi la matrice des coefficients de liaison spatiale ou MCL entre tous les sommets du graphe G. Calculée par exemple à partir des informations relatives à l'espace subjectif fort, défini dans la première partie, elle représente pour tout couple de sommets une sorte de *valeur-limite MAX de la perception* d'un itinéraire par le groupe interrogé.

Calculée à partir de l'espace subjectif faible, elle représente la *valeur-limite MIN de la perception* d'un itinéraire.

Remarque : Nous proposons alors l'idée d'un *réseau phi-flou de l'espace subjectif*. On définit alors, pour tout itinéraire le plus fort reliant tout couple de sommets, un intervalle qui exprime la valeur du coefficient de liaison spatiale (PONSARD, 1977).

Ce coefficient de liaison a pour valeurs limites la borne su-

périeure de l'intervalle qui est la valeur limite MAX de la perception spatiale et la borne inférieure qui est la valeur limite MIN de la perception spatiale.

### 1.2.3. Réseau de niveau $\alpha$

#### $\alpha$ ) Définition

Un réseau de niveau  $\alpha$  donné est défini par un graphe flou  $G_\alpha$ , tel que tous les chemins reliant tout couple de sommets ont une valeur  $\geq \alpha$ . Il est évident que le nombre de chemins entre tout couple de sommets du graphe sera d'autant plus élevé que le niveau  $\alpha$  choisi sera faible.

#### $\beta$ ) Intérêt géographique

Une cartographie du réseau de niveau  $\alpha$  de l'espace subjectif permet de mettre en évidence les caractères spatiaux de ce réseau : réseau élémentaire, hiérarchisé, centralisé, arborescent... etc. On obtient ainsi des cartes de réseaux de niveaux  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  véritables révélateurs de l'organisation de l'espace subjectif individuel ou collectif.

### 1.2.4. Caractères formels de l'espace subjectif-réseau

Le report, sur une carte unique, de l'extension progressive du réseau en fonction de la décroissance de  $\alpha$  permet de déterminer  $g$ , *gradient de perception spatiale*, c'est-à-dire valeur de la décroissance de  $\alpha$  rapportée à l'unité de distance (euclidienne, rectilinéaire ou autre, retenue par le chercheur).

On peut définir alors :

$\alpha$ ) l'homogénéité de l'espace subjectif :  $g = 0$  : perception égale de tous les itinéraires ou la non-homogénéité :  $g \neq 0$ , perception différenciée.

$\beta$ ) L'isotropie locale ou générale de l'espace subjectif :  $g$  constant localement ou généralement, ou l'anisotropie :  $g$  variable selon certaines directions.

$\gamma)$  La continuité de l'espace subjectif, c'est-à-dire  $\forall c_i$  et  $c_j \in \underline{E}_{G,2}$ , l'existence d'un chemin entre les deux sommets, peut être étudiée de la façon suivante :

- A tout niveau  $\alpha$  choisi, on détermine l'indice de connexité du graphe flou :  $w_\alpha(G)$

Soit :

$w_\alpha(c_i, c_j)$  le nombre maximum de chemins disjoints entre les sommets  $c_i$  et  $c_j$  et ayant une valeur  $\geq \alpha$ .

Alors :

$$\forall c_i, c_j \in \underline{E}_{G,2} \quad w_\alpha(G) = \bigwedge_{(c_i, c_j)} w_\alpha(c_i, c_j)$$

c'est-à-dire le MIN du nombre MAX de chemins de valeur  $\geq \alpha$  entre tout couple de sommets.

Si, à un niveau  $\alpha$  :

- $w_\alpha(G) = 0$  le graphe n'est pas connexe au niveau  $\alpha$
- $w_\alpha(G) : s - 1$ ,  $s =$  nombre de sommets du graphe, le graphe est fortement connexe au niveau  $\alpha$

En effet tout couple de sommets du graphe est joint par  $s-1$  chemins distincts.

- $w_\alpha(G) = 1$ , la suppression d'un seul chemin déterminé du graphe supprime la connexité du graphe.

Ainsi à tout niveau  $\alpha$  on associe l'indice de connexité du graphe flou  $G$ ,  $w_\alpha(G)$ .

- Si on peut déterminer le niveau :

$$\alpha_K / w_{\alpha_K}(G) = 1 ; \forall \alpha_j > \alpha_K, w_{\alpha_j} = 0$$

$$; \forall \alpha_j < \alpha_K, w_{\alpha_j} > 1$$

c'est-à-dire la valeur de  $\alpha_K$  telle que le *graphe est connexe*, alors qu'il ne l'est plus à tout niveau supérieur et qu'il l'est à tout niveau inférieur à  $\alpha_K$ ,

on appelle  $\alpha_K$  seuil de continuité de l'espace subjectif.

Ainsi, dire qu'un espace subjectif est continu au seuil 0.25 veut dire qu'il existe au moins un itinéraire de valeur  $\geq 0.25$  entre tout couple de sommets.

Il est évident qu'il sera continu pour toute valeur  $< 0.25$   
( $w(G) > 1$ ) et discontinu pour toute valeur  $> 0.25$  ( $w(G) = 0$ )

### 1.3. Proposition de métrique subjective

La distance subjective entre deux composantes spatiales d'un espace subjectif dépend de nombreux facteurs propres au sujet. Elle est essentiellement fonction de facteurs suivants :

#### 1.3.1. Les facteurs de détermination d'une métrique subjective

α) la "masse subjective" de chaque composante, ou du moins la valeur perçue de cette masse. En effet, deux composantes bien perçues seront considérées comme "moins éloignées" que deux composantes dont l'une, ou les deux, sont mal perçues. Nous avons vu plus haut que la perception des composantes est exprimée par leur fonction d'appartenance à l'espace subjectif. On peut poser que cette valeur est une "mesure" de la masse "subjective" de chaque composante.

Une composante  $c_i$  parfaitement perçue aura ainsi une masse subjective  $m$

$$m_{c_i} = \mu_{E_S}(c_i) = 1$$

Une composante  $c_j$  non perçue aura une masse subjective nulle.

Une composante  $c_k$  "floue" a une masse subjective dont la valeur est égale à

$$0 < m_{c_k} = \mu_{E_S}(c_k) < 1$$

β) la "masse subjective de l'espace" entre les deux composantes  $c_i$  et  $c_j$  soit  $n_c$

- si les deux composantes  $c_i$  et  $c_j$  ne sont pas reliées dans l'espace subjectif, alors :

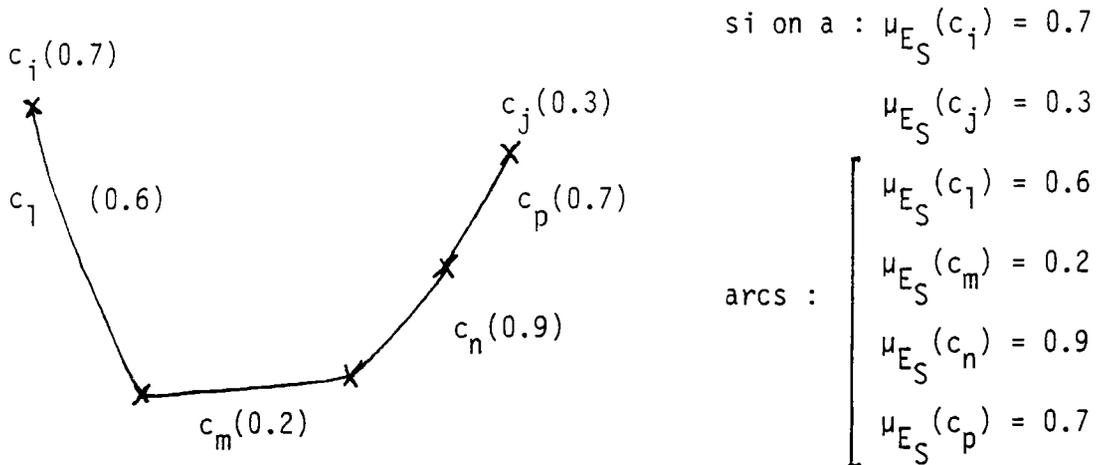
$$n_c = 0$$

autrement dit, l'espace est discontinu entre  $c_i$  et  $c_j$ .

- si  $c_i$  et  $c_j$  sont reliés par un chemin, c'est-à-dire par une succession d'axes représentant un itinéraire,  $n_c$  est égale à la fonction

d'appartenance la plus faible des différents arcs du chemin.

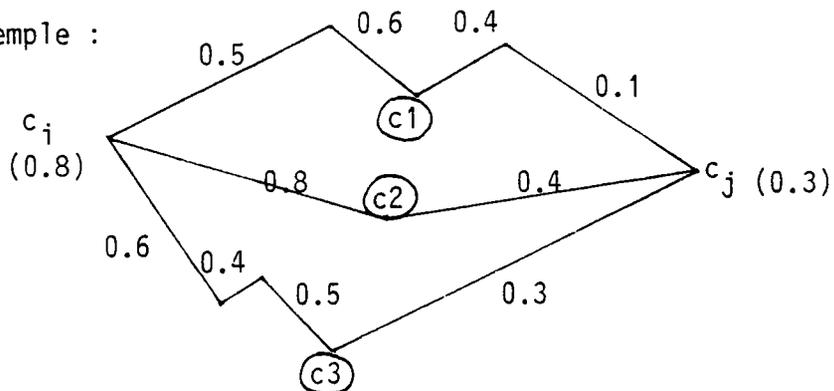
Par exemple :



alors  $n_c = 0.2$

- si plusieurs chemins relient  $c_i$  et  $c_j$ , alors nous posons que  $n_c$  est égale au MAX des masses subjectives des différents chemins. Il s'agit de définir l'itinéraire le plus fort et sa valeur.

Par exemple :



-  $c_i$  et  $c_j$  sont les composantes spatiales dont on va évaluer la distance subjective

-  $c_1, c_2, c_3$  sont les chemins 1, 2, 3

$n_{c_1}$  : masse subjective de C1 = 0.1

$n_{c_2}$  : masse subjective de C2 = 0.4

$n_{c_3}$  : masse subjective de C3 = 0.3

D'où on tire  $n_c$ , masse subjective du chemin le plus fort :

$$n_c = n_{c_1} \vee n_{c_2} \vee n_{c_3} = 0.4$$

### 1.3.2. Définition de la distance entre deux composantes

La distance subjective entre deux composantes  $c_i$  et  $c_j$  est alors définie comme :

$$\begin{array}{ccc} E^2 & \xrightarrow{S} & \underline{M} = [0,1] \\ \forall (c_i, c_j) \in E^2 & \xrightarrow{S} & \mu_D(c_i, c_j) \in \underline{M} \end{array}$$

et

$$\mu_D(c_i, c_j) = 1 - \left[ n_c \wedge (m_{c_i} \vee m_{c_j}) \right]$$

Cette distance subjective entre  $c_i$  et  $c_j$  associe ainsi :

$(m_{c_i} \vee m_{c_j})$  : valeur de la masse subjective la plus élevée des deux composantes

$n_c$  : valeur de la masse subjective de l'espace entre les deux composantes, soit valeur de l'itinéraire le plus fort.

$\left[ n_c \wedge (m_{c_i} \vee m_{c_j}) \right]$  : valeur du terme le plus faible.

Dans l'exemple cité plus haut :

$$d_{S(c_i, c_j)} = 1 - \left[ 0.4 \wedge (0.8 \vee 0.3) \right]$$

$$d_{S(c_i, c_j)} = 1 - \left[ 0.4 \wedge 0.8 \right] = 1 - 0.4$$

$$d_{S(c_i, c_j)} = 1 - 0.4 = 0.6$$

On définit ainsi sur un espace subjectif une *métrique faible floue* qui induit les caractères de *symétrie* et de *non régularité* de l'espace. En effet, deux composantes non confondues peuvent avoir une "distance subjective" nulle à condition d'être parfaitement perçue l'une et l'autre et d'être reliées par un "chemin" parfaitement perçu lui aussi.

A l'inverse, deux composantes parfaitement perçues mais non reliées, sont séparées par une distance de valeur maximale = 1.

### 1.3.3. Conclusion

Si l'espace subjectif est flou, la définition de métriques floues subjectives, ou de métriques pauvres floues permet encore, malgré l'imprécision de l'information apportée par cet espace, de définir des distances entre deux composantes. Cette distance sera comprise entre 0 et 1. La quasi-métrique floue que nous proposons s'appuie sur l'idée que la distance floue entre deux composantes dépend du degré d'appartenance à l'espace subjectif de ces composantes et de l'espace qui les répare.

## 2. Notions dérivées du modèle : "situation" de chaque espace subjectif individuel par rapport à la structure collective

Deux notions proposées permettent de "situer" un sujet  $i$  défini par "son" espace subjectif  $E_{S_i}$  par rapport à une structure collective (ROLLAND-MAY, 1983).

### 2.1. Notion de coefficient d'intégration spatiale d'un sujet $i$

#### 2.1.1. Définition préliminaire

Nous appelons *espace subjectif "banal"* un sous-ensemble de référence dont le chercheur fixe pour chaque composante la fonction d'appartenance selon ses préoccupations et qui représente la perception "de base" définie par ce chercheur.

Ainsi on définit une fonction  $f$  (fonction d'appartenance *banale*) telle que :

$$f_{E_{S_B}} : E_G \longrightarrow \underline{M} \quad \text{avec } \underline{M} = [0,1]$$
$$\forall c_j \in E_G \longrightarrow f_{E_{S_B}}(c_j) \in [0,1]$$

2.1.2. Le coefficient d'intégration spatiale représente ainsi une valuation de l'espace subjectif d'un individu par rapport à l'espace subjectif banal et tel que :

$$c_i = \bigvee_{j=1}^p \left( \mu_{E_S}(c_j) \wedge f_{E_{S_B}}(c_j) \right)$$

$c_i$  traduit la valuation de l'espace subjectif individuel par rapport à une perception de base définie au préalable.

Cette notation offre la possibilité - d'études comparatives d'espaces subjectifs individuels,

- d'études de l'évolution de la perception spatiale individuelle au fil du temps. A mesure qu'un individu "intègre" son environnement, son coefficient spatial d'intégration traduit ce progrès.

## 2.2. Indices de position MAX et MIN pour un sujet i

Ces indices représentent les distances, choisies ici comme celle de HAMMING généralisée relative, entre l'espace subjectif individuel et :

2.1.1. L'espace subjectif fort tel qu'il a été défini plus haut.

Nous appelons :

Indice de position MAX du sujet i par rapport au groupe

$$I_{P_{MAX}}(i) = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p \left| \mu_{E_{S_F}}(c_j) - \mu_{E_{S_i}}(c_j) \right|$$

2.1.2. L'espace subjectif faible. Nous appelons :

Indice de position MIN du sujet i par rapport au groupe :

$$I_{P_{MIN}}(i) = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p \left| \mu_{E_{S_f}}(c_j) - \mu_{E_{S_i}}(c_j) \right|$$

les indices précisent ainsi la "position" du sujet i par rapport à la

connaissance maximale et à la base minimale de connaissance que l'ensemble du groupe a de son espace.

### 3. Conclusion

Le modèle proposé permet ainsi de définir et de quantifier les rapports complexes de l'individu avec "son" espace, avec le groupe auquel il appartient, et d'étudier l'évolution de ces rapports. Nous disposons ainsi d'un véritable instrument de mesure de l'intégration spatiale d'un individu ou d'une collectivité.

## CONCLUSION DU CHAPITRE VII

La notion d'espace représenté flou, bien que très utilisée en géographie, révèle l'inaptitude des méthodes traditionnelles d'analyse spatiale telles que nous les pratiquons couramment. Imprécision et (ou) incertitude de la représentation spatiale demandent d'abord à être formalisées, puis à être étudiées avec des moyens spécifiques de traitement de l'imprécis et de l'incertain. Les modèles de traitement sont donc des modèles spécifiques : celui que nous proposons est certes relatif uniquement au traitement des cartes mentales. Il nous semble cependant intéressant car il permet de quantifier ce qui a priori semble totalement subjectif, non scientifiquement mesurable. Sa simplicité même nous semble parfaitement adaptée au type de données qu'il traite : une sophistication poussée ne serait pas cohérente avec le "flou" de l'information spatiale de départ.

Son intérêt réside, nous l'avons vu, dans la quantification des rapports tissés entre l'homme et son espace perçu. Il réside également dans la mise en évidence des structures implicites de l'espace subjectif collectif. Le chapitre suivant, en appliquant ce modèle à un ensemble de cartes mentales, est une illustration de ce propos.

## CHAPITRE VIII

### L'ORGANISATION SPATIALE D'APRES LES ESPACES SUBJECTIFS CARTOGRAPHIES

DONNEES GENERALES ET APPLICATION DU MODELE DE VALUATION :  
L'ORGANISATION SPATIALE DU CENTRE-VILLE DE  
METZ (FRANCE)

#### INTRODUCTION

- A - LES DONNEES GENERALES DE L'ORGANISATION DU CENTRE-VILLE DE METZ
- B - L'ORGANISATION SPATIALE DU CENTRE-VILLE DE METZ D'APRES LE MODELE DE VALUATION. EXPOSE GEOGRAPHIQUE
- C - RAPPORTS ENTRE ESPACE GEOGRAPHIQUE ET ESPACE SUBJECTIF COLLECTIF

## INTRODUCTION AU CHAPITRE

Citons, en introduction ce texte de P. PINCHEMEL dans un ensemble d'observations intitulé "Comment peut-on être géographe" (E.G. 1979).

"L'humanisation de la surface terrestre s'inscrit visiblement par des lignes, des points, des surfaces qui relèvent des divers ordres de l'intervention humaine, naissent d'actions aux finalités et aux causalités diverses.

Mais, par la nature des choses, ces inscriptions se font sur le plan unique de la surface terrestre ; toutes les structures géographiques (spatiales) sont donc imbriquées, solidaires, profondément interdépendantes. C'est le propre de l'espace géographique que d'être la page, le plan unique sur lequel les multiples écritures géographiques des hommes s'ordonnent, spontanément ou autoritairement, les uns par rapport aux autres, sous peine d'aboutir à un gribouillis illisible, source de dysfonctionnement. Les relations entre ces différentes structures géographiques et les fonctions, les problèmes de dynamique ou d'inertie de ces formes par rapport aux fonctions sont parmi les thèmes majeurs de l'analyse géographique".

Décrypter ces relations complexes, ce "gribouillis illisible", devient encore plus difficile si, au lieu de partir d'un espace représenté précis, nous partons d'un espace représenté flou, comme l'est une carte mentale.

Nous avons cependant essayé d'entreprendre cette tâche à partir d'un "échantillon" de cartes mentales relatives au centre-ville de Metz.

Cet échantillon de cinquante cartes n'est certes, ni assez important, ni assez varié pour que nous puissions en tirer des conclusions générales relatives au centre-ville de Metz tel qu'il est perçu. Cela ne correspond d'ailleurs pas à notre préoccupation, du moins pour le moment.

Pour nous il s'agit de montrer que la théorie des sous-ensembles flous représente l'outil indispensable pour l'étude de tels documents. Grâce à elle l'imprécision et l'incertitude spatiale, loin d'être des obstacles à l'analyse spatiale, permettent au contraire d'affiner cette dernière, d'appréhender toutes les nuances de l'organisation spatiale et en même temps de dégager les "lois cachées" qui sous-tendent cette organisation.

Ce chapitre doit donc être considéré comme une démonstration de l'intérêt des méthodes utilisées plutôt que comme une analyse spatiale complète d'un espace géographique.

Nous verrons en premier lieu les grands traits de l'organisation spatiale du centre-ville de Metz d'après un ensemble de cartes mentales, puis nous appliquerons le modèle de valuation présenté plus haut et dégagerons les structures spatiales induites par le modèle (carte VIII 3).

## A - LES DONNÉES GÉNÉRALES DE L'ORGANISATION DU CENTRE-VILLE DE METZ (ROLLAND-MAY, 1981)

### I - Notations générales

#### 1. Rappel de définitions de base

1.1. Un espace géographique représenté flou est défini par :

$$E_{GR} = (E_R, C_R, S_R, R_R) \quad (\text{chapitre VII})$$

1.2. Un espace représenté subjectif cartographié est une carte mentale définie par :

$$E_{GR_{\text{cart.}}} = (E_R, C_R, R_R)$$

c'est-à-dire par

- (1)  $E_R$ , sous-ensemble flou
- (2)  $C_R$ , configuration floue des composantes spatiales

(3)  $R_R$ , relations floues entre les composantes.

L'observation des cartes mentales que nous avons collectées permet d'énoncer sans même recourir pour le moment au modèle de valuation, un certain nombre de caractères relatifs à  $E_R$  et à  $C_R$ . Nous définirons donc par :

2. Composition floue d'un espace représenté subjectif, la "composition", au sens trivial du terme, de cet espace, c'est-à-dire les remarques concernant l'appartenance des composantes spatiales à  $E_R$ .

3. Configuration d'un espace représenté subjectif, les données relatives à la morphologie et à la localisation relative des composantes spatiales.

## II - Notion de composition floue d'un espace subjectif cartographié

Lors de l'exécution d'une carte mentale, chaque sujet interrogé s'efforce de représenter les composantes spatiales de façon plus ou moins précise. Il peut également n'avoir qu'une idée très approximative de la localisation de ces dernières, ou bien encore, il peut savoir qu'une composante existe, mais être incapable de la situer autrement que dans une "zone" dont l'étendue est fonction de son indécision. Enfin, des composantes spatiales seront totalement "inconnues", et, de ce fait, non représentées. Nous posons donc l'expression de *composition floue* de l'espace subjectif et nous en donnons dans ce qui suit la traduction géographique, puis formelle.

### 1. Les "Terres Inconnues"

Tout d'abord certaines composantes sont totalement ignorées et ne figurent pas sur la carte mentale, délimitant des espaces "inconnus", totalement incertains ou en tous cas très mal perçus par l'auteur de la carte mentale.

Il peut s'agir d'espaces peu attractifs, même dans le centre-ville : rues à simple fonction de résidence, à commerces ou services



rares ou très spécialisés, rues estimées "désertes", peu animées, où commerces et services prospèrent difficilement.

Le cas concerne également les espaces à anciennes fonctions de commerces mais délaissées actuellement du fait de leur position "excentrique" par rapport au noyau du centre-ville. Quel Messin de fraîche date situe aujourd'hui la rue des Jardins, active jusqu'au début du XXe siècle et aujourd'hui déserte du fait du déplacement du centre de gravité de la ville vers le Sud (place de la République) ?

Il peut s'agir enfin d'espaces bien équipés, mais soit "périphériques" au centre-ville, soit équipés trop récemment pour être intégrés à l'espace subjectif : ainsi à Metz le quartier historique des Tanneurs est en pleine reconstruction, pourtant très peu d'étudiants perçoivent cet élément de dynamique spatiale alors qu'il traduit de toute évidence un retour de la fonction de résidence vers le centre-ville. Un autre exemple messin est l'existence de "promenades" le long de la Moselle qui limitent agréablement le centre-ville vers l'Ouest : il est significatif qu'aucun des espaces subjectifs appréhendés ne mentionne cette composante spatiale, alors qu'elle fait apparemment partie de l'image de marque de la ville, qui se flatte d'une réputation de "ville-verte".

Ainsi les "terres inconnues" d'un espace géographique peuvent être de types divers, mais il s'agit dans l'ensemble d'espaces mal perçus soit du fait de leur localisation "périphérique", soit du fait de leur faible équipement, ce qui les exclut de l'espace d'usage couramment pratiqué.

Nous insistons sur le fait que cette mauvaise perception n'est pas, le plus souvent, fonction de la distance (réelle) au cœur de la ville. Nous pressentons ici (et l'application de notre "distance subjective" le vérifiera), qu'il y a intervention de facteurs subjectifs, souvent inconscients, propres à chaque individu ou relatifs à toute la communauté, qui expliquent l'existence de ces composantes inconnues.

## 2. Les composantes perçues et leur représentation, précise ou imprécise

En second lieu et à l'opposé, certaines composantes

spatiales sont perçues et représentées dans l'espace subjectif, soit isolément, soit associées en trames ou hiérarchisées selon l'importance de leur fonction d'usage ou du rôle structurant qu'elles jouent dans l'espace géographique. La totalité des cartes mentales reproduit ainsi le noyau du centre-ville : "trame" qui consiste en l'association de la rue Serpenoise, des places et rues contiguës. De cet ensemble part en général un "cheminement" vers la gare d'une part, et vers le campus universitaire d'autre part.

La signification géographique de ces composantes est ainsi évidente : il s'agit d'éléments qui associent à la fois l'idée *d'espace d'usage et celle de structure de l'espace géographique* (carte mentale n° 8, annexe III).

Cependant, la signification symbolique mérite également d'être évoquée : ce sont souvent des repères symbolisant "La" ville : Cathédrale, cœur traditionnel de la ville, "portes" urbaines, même si elles ne sont plus fonctionnelles, qui matérialisent le passage de la ville "intra-muros" aux quartiers plus périphériques, places ou quartiers historiques. On va au-delà de la simple information sur l'espace géographique, pour mettre en évidence, grâce à des schémas de perception collectifs, les invariants spatiaux qui plongent leurs racines dans les fondements mêmes de l'histoire locale ou, plus largement, dans une forme de sensibilité à l'espace relative à un ensemble culturel ou de civilisation. Nous avons déjà souligné qu'un Européen percevra plus rapidement l'organisation d'une ville de la vieille Europe que celle d'une ville dont la structure générale lui est inconnue : ce que nous appelons ainsi *dépaysement* correspond à la perception d'informations spatiales pour lesquelles l'individu ne possède pas encore en lui de schéma préprogrammé, élaboré consciemment ou non par sa culture, ses expériences, ses souvenirs etc.

Ainsi, une composante représentée avec certitude, sinon toujours avec précision, est une composante *reconnue, familière* à l'utilisateur, cette reconnaissance et cette familiarité n'étant pas forcément dues à une pratique spatiale réelle.

### 3. Les composantes incertaines

Enfin, loisir a été donné aux auteurs des cartes mentales, de représenter des composantes de manière floue, c'est-à-dire dans des *zones* plus ou moins étendues dans lesquelles elles sont censées se trouver. Tel repère ne peut être situé avec précision, mais se trouve "quelque part dans cette zone", telle rue est connue, mais son tracé n'est qu'esquissé et "se perd" ou se dilue dans les "zones inconnues" de l'espace subjectif. Les cartes mentales n° 7 et 8, annexe III contiennent de telles références.

Ce sont souvent des espaces peu pratiqués, périphériques à l'espace d'usage, d'espaces peu organisés mais qui côtoient les espaces bien perçus. Ce sont également des espaces d'aménagement récent ou en cours, mais qui ne sont pas totalement intégrés à l'espace familier. A Metz le quartier du Pontiffroy est représenté de manière floue sur les cartes mentales, victime de sa situation périphérique au centre-ville, de sa structure : entièrement rasé il a fait l'objet d'une reconstruction sans nuances. Il a une vocation unique de résidence, et services et commerces suivent difficilement les constructions de grands ensembles. Espace connu certes, mais mal perçu et de ce fait mal représenté sur les cartes mentales.

Ces localisations incertaines, loin d'être négligées, doivent donc être prise en compte dans notre étude.

### 4. Conclusion

Ainsi tout espace représenté subjectif est hétérogène dans sa composition. Sous-espaces inconnus, bien perçus et représentés de façon plus ou moins précise, ou incertains, coexistent sur une carte mentale et sont chargés d'une signification à la fois géographique et symbolique. Le modèle de valuation prendra en compte ces différents types d'information spatiale.

### III - Notion de configuration de l'espace subjectif cartographié

La signification géographique de cette notion est considérable. Indépendamment de la quantification possible grâce à notre modèle, nous pouvons en esquisser une approche intéressante en soulignant d'une part les aspects géographiques, en esquissant les termes d'une approche topologique, enfin en appliquant ces notions au centre-ville de Metz.

#### 1. Les termes géographiques de la configuration de l'espace subjectif

##### 1.1. Morphologie de l'espace subjectif

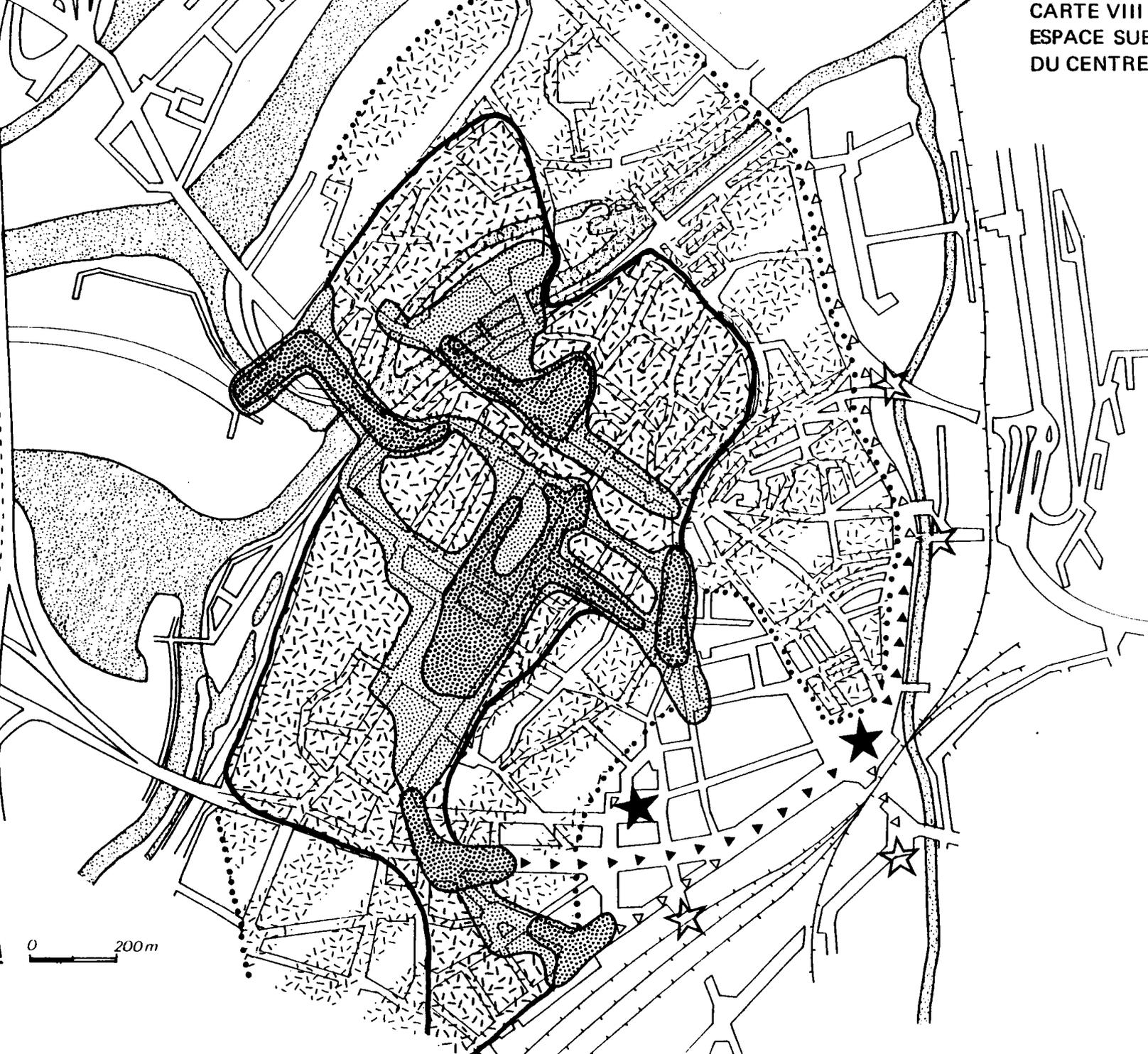
L'espace subjectif est caractérisé par une morphologie "floue" qui rend a priori toute étude comparative impossible. Il présente en effet des *déformations* par rapport à l'espace géographique : espace "étiré" ou, au contraire, "rétréci" selon le type et l'intensité de la perception de la zone représentée. Par exemple le tableau 1 montre que la longueur de la rue Serpenoise, rue la plus active de la ville, a été sous-estimée par la plupart des étudiants interrogés, alors que Chaplerue, pourtant de même longueur et rue piétonne comme la première, a été surévaluée. Ce dernier axe présente des commerces ou des services plus spécialisés (boutiques de confection, fleuriste, agents immobiliers) que le premier, qui offre à la clientèle de passage ses vitrines de grands magasins ou de magasins de confection courante ; mais surtout, et l'examen de la plupart des cartes mentales le prouve, le fait que la rue Serpenoise débouche sur le carrefour le plus animé de la ville alors que Chaplerue se termine dans un angle peu attractif et souvent très encombré par la circulation automobile, semble être la cause profonde de cette perception différente des longueurs de ces deux rues du centre-ville de Metz.

Ainsi, selon le rythme du déplacement individuel, selon l'attractivité de l'espace traversé, selon la lisibilité même de cet espace, les composantes spatiales seront perçues de façon différente par les usagers et "reconstruites" de façon différente dans les espaces subjek-

tifs. Ces derniers présentent donc un *caractère d'hétérogénéité* de leur configuration.

Ce caractère apparaît également à l'étude des *limites* de l'espace subjectif cartographié. Il s'agit en fait bien plus d'une *frange* plus ou moins large, plus ou moins continue, dans laquelle le processus de perception et de représentation spatiale, soit s'affaiblit et s'estompe progressivement, soit au contraire, juxtapose brutalement composantes bien connues et secteurs peu connus voire non représentés. Nous la définissons par l'expression de *frange d'indétermination spatiale*. La carte VIII 2 fournit un essai de représentation de cette frange d'indétermination qui borde le centre-ville de Metz. Elle a été obtenue après une simple étude "qualitative" des cartes mentales faites par le groupe interrogé. Sans prétendre lui donner une signification excessive, nous notons que le "centre-ville" perçu, vécu et de ce fait connu, subit, par rapport à l'espace géographique un "étirement" Nord-Sud, grossièrement selon l'axe de la rue Serpenoise. La frange d'indétermination spatiale est très étroite à l'Est et à l'Ouest de ce centre-ville : on passe sans transition de secteurs bien perçus à de vastes secteurs "vides" (promenade de la Moselle à l'Ouest, axes routiers et barrière ferroviaire à l'Est, au-delà du boulevard périphérique : avenue Foch, Jean XXIII, boulevard Paixhans).

Au contraire, au Nord et au Sud du centre-ville, la limite de ce dernier n'est pas nettement perçue : des zones de localisation floue traduisent l'hésitation quant à intégrer ou à rejeter telle composante spatiale (quartier du Pontiffroy au Nord, intégration "floue" de l'hôpital Bon Secours et de l'Eglise Sainte Thérèse pourtant bien extérieurs au centre-ville). En fait on note ici la concordance significative entre la structure géographique du centre-ville de Metz (ROLLAND-MAY, 1978), organisée et orientée le long de l'antique axe romain et grossièrement parallèle à la Moselle ce qui en fait sinon une ville rhénane, du moins une ville d'un espace périphérique rhénan (JUILLARD, 1968), et la structure des espaces subjectifs. Ceux-ci traduisent bien un invariant spatial de la cité étudiée.



TYPE DE STRUCTURE	FORMES FORTES	FORMES FAIBLES
VOISINAGES	Différenciation	
FRANGE D'INDETERMINATION	Extension	
	Limites	
COMPOSANTES INSULAIRES OU PEU TRAMEES	Ponctuelles ou aréales	
	Axiales	
«TERRES INCONNUES»		

0 200m

## 1.2. Localisation relative des composantes spatiales : signification géographique

Son espace permet d'établir une *progression* dans la perception et sa restitution de l'espace géographique.

1.2.1. Une première étape est la localisation d'éléments isolés sans aucune référence aux composantes voisines. Elle est révélatrice d'une perception ponctuelle et très élémentaire de l'espace, souvent liée à l'utilisation de moyens de transports collectifs (carte mentale n° 7) et à la seule prise en compte des lieux de départ et d'arrivée de la ligne utilisée.

1.2.2. En second lieu la carte se construit "de proche en proche", la localisation d'une composante entraîne la localisation de la composante voisine et ainsi de suite. La carte traduit ainsi d'une part un cheminement familier, d'autre part également une "construction" du voisinage d'un point bien connu auquel on rattache progressivement des composantes moins bien perçues ou perçues de manière de plus en plus floue. La carte traduit ainsi des *voisinages* sans qu'à l'intérieur de ceux-ci la localisation relative des composantes spatiales soit parfaitement conforme à la localisation géographique.

La carte VIII 2 révèle ainsi quelques "voisinages" fondamentaux : rue Serpenoise et rues adjacentes représentent le "cœur" de la ville, espace fonctionnel et animé, la Cathédrale forme avec le quartier "de la Comédie" un voisinage malgré la coupure du bras de la Moselle, un voisinage de type axial associe la Gare et le cheminement vers le centre-ville. A l'inverse, il est étonnant qu'une place aussi attractive qu'est la place Saint Louis, riche de ses arcades fort belles, de ses commerces et de son animation, ne bénéficie que d'un voisinage fort réduit, lié peut-être à l'aménagement très récent d'un plan de circulation dont l'usager a du mal à percevoir l'unité.

1.2.3. Un degré supérieur de perception se manifeste dans la localisation ordonnée des composantes spatiales. Places et nœuds sont reliés par des axes en un réseau cohérent sinon respectueux de l'orientation et

des distances. L'espace subjectif, de lacunaire devient continu : au moins dans la plupart des secteurs, il est possible de suivre un chemin entre deux points quelconques de la carte mentale.

1.2.4. Il est bien évident que la présentation successive des étapes correspond à une schématisation abusive. Sur de nombreuses cartes mentales coexistent en effet des zones perçues de façon ponctuelle, véritables "îles" de perception dans des secteurs non représentés, voisines et enfin zones ou composantes spatiales bien perçues et parfaitement représentées. La carte mentale traduit alors, par sa complexité, la complexité du processus de perception. Il appartient au chercheur intéressé par une étude micro- ou macrogéographique de la décrypter pour en dégager les différents types de perception.

## 2. Notions de topologie floue et les propriétés spatiales dérivées

Nous avons présenté dans la première partie, chapitre II C, les notions topologiques utiles à l'analyse des espaces géographiques précis. La topologie floue permet une étude rigoureuse de la configuration de sous-espaces flous. Présentons en ci-dessous les notations les plus intéressantes pour l'étude de la morphologie floue des composantes spatiales et de leurs relations réciproques (PONSARD, 1980).

### 2.1. Définition d'un espace topologique flou

#### 2.1.1. Définition formelle

Soit un ensemble  $\underline{E}$  et une famille  $\underline{F}$  de sous-ensembles flous de  $E$ .  $\underline{F}$  est appelée *topologie floue* de  $\underline{E}$  si :

$$(1) \quad \underline{E} \in \underline{F}$$

$$(2) \quad \emptyset \in \underline{F}$$

(3) si  $A_i$  est une famille quelconque d'éléments de  $\underline{E}$  on a :

$$\bigcup_{i \in I} A_i \in \underline{F} \quad \text{I ensemble d'indices}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i \in \underline{F}$$

c'est-à-dire si l'union <sup>finie ou non</sup> et l'intersection finie de sous-ensembles flous de  $\underline{E}$ , c'est-à-dire d'éléments de  $\underline{F}$ , sont des sous-ensembles flous de  $\underline{E}$ . Le couple  $(\underline{E}, \underline{F})$  est défini comme un *espace topologique flou*. Les sous-ensembles flous de  $\underline{E}$  appartenant à  $\underline{F}$  sont appelés les *sous-ensembles flous ouverts*.

### 2.1.2. Application aux espaces subjectifs

On définit l'espace topologique suivant :

$$(\underline{E}_G, \underline{F}_S)$$

où  $\underline{E}_G$  est l'espace géographique

$\underline{F}_S$  une famille d'espaces subjectifs flous

telle que :

$$\emptyset \text{ est élément de } \underline{F}_S$$

$$\underline{E}_G \text{ est élément de } \underline{F}_S$$

On pourrait en effet concevoir des espaces subjectifs "vides", où aucune composante n'est connue, et des espaces subjectifs connus avec une telle précision que le sous-ensemble flou qu'ils forment est égal à  $\underline{E}_G$  et telle que, ce qui est trivial :

$$\bigcup_{i \in I} A_i \in \underline{F}_S$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i \in \underline{F}_S$$

c'est-à-dire l'union d'espaces subjectifs, et leur intersection est un sous-ensemble flou appartenant à  $\underline{F}_S$ .

Dans ce cas,  $\underline{F}_S$ , ensemble des espaces subjectifs étudiés définit une *topologie floue de l'espace géographique*.

En application, considérons  $E_S$ , un espace subjectif, élément de  $\underline{F}_S$ . Il peut être défini topologiquement, comme l'union de sous-ensembles flous appelés *ouverts* qui peuvent être :

- soit des sous-ensembles flous à un élément : ils sont relatifs alors à des composantes subjectives que nous avons qualifiées d'*insulaires*
- soit des sous-ensembles flous à plusieurs éléments : il s'agit alors de sous-ensembles relatifs à ces composantes tra-

mées ou organisées, considérées non plus isolément, mais globalement.

Ainsi nous pouvons considérer qu'un espace subjectif est élément d'une topologie floue de l'espace géographique. Les propriétés topologiques que nous allons maintenant définir peuvent lui être appliquées et nous aider dans notre formalisation des espaces subjectifs.

## 2.2. Les notions topologiques dérivées : essai de formalisation des espaces subjectifs

Des définitions posées peuvent être tirées de nombreuses notions dérivées. Nous n'évoquerons que celles qui nous permettent de formaliser la notion d'espace subjectif.

2.2.1. Soit une famille  $A_i$  de  $F_S$ , on appelle intérieur de  $A_i$  noté  $\overset{\circ}{A}_i$  l'union de tous les ouverts contenus dans  $A_i$ . Ainsi si nous prenons  $A_S$ , famille de tous les sous-ensembles flous de  $E_S$  dont les composantes ont une fonction d'appartenance non nulle, l'intérieur de  $A_S$  est *l'espace géographique effectivement perçu et représenté dans l'espace subjectif*, quelle que soit la valeur des fonctions d'appartenance des composantes spatiales considérées. Toute composante spatiale, floue ou non, représentée sur la carte mentale, fait partie, formellement, de l'intérieur de  $A_S$ .

- A l'inverse on appelle  $\bar{A}_i$  ou sous-ensemble flou fermé de  $E$ , le complémentaire de  $\overset{\circ}{A}_i$  relativement à  $E$ .  $\bar{A}_i$  est de ce fait l'intérieur du complémentaire de  $\overset{\circ}{A}_i$  : on le définit comme *l'extérieur de  $A_i$* .

Si nous reprenons le cas d'un espace subjectif, *l'extérieur de  $A_S$  est le sous-ensemble flou dont les composantes ont une fonction d'appartenance nulle*. Nous définissons ainsi formellement les "terres inconnues" d'un espace subjectif évoquées plus haut.

- On appelle frontière floue d'une famille  $A_i$  de  $F_S$  ou  $\overset{*}{A}_i$ , le sous-ensemble flou tel que :

$$\overset{*}{A}_i = \overset{\circ}{A}_i \cup \bar{\overset{\circ}{A}_i}$$

Cette notion recouvre bien la notion de frange d'indétermination spa-

tiale définie. On peut remarquer que si :

$\overset{*}{A}_i = \emptyset$  la frontière de  $A_S$  sera, géographiquement, une limite linéaire entre espaces perçus et non perçus. Dans le cas contraire, il s'agira bien d'une "frange" spatiale entre les deux types d'espaces :

- On appelle voisinage flou  $A_r$  d'un sous-ensemble flou  $A_t$  de  $E$  un sous-ensemble flou contenant un ouvert  $A_q$  contenant  $A_t$  tel que

$$A_t \subset A_q \subset A_r$$

Ainsi, sur une carte mentale relative au centre-ville de Metz, la place Saint Louis est "voisine" de la place de la République si elle est représentée dans une zone incluant une zone plus petite incluant la place de la République.

Nous noterons que la notion de voisinage :

- est une notion "très large" au point de vue de l'espace qu'elle représente : en d'autres termes, plus un sous-ensemble flou est vaste, plus il lui sera facile d'être le "voisinage flou" d'un point, contrairement à la notion intuitive de voisinage qui implique une notion de proximité, même si elle n'est pas métrique.

- est cependant une notion très "pauvre" : l'information qu'elle nous apporte est très sommaire : aucune référence à la disposition relative des deux places citées ci-dessus et encore moins à la distance qui les sépare. Elle est cependant, dans la plupart des cas, la seule utilisable dans un espace très peu structuré comme celui sur lequel nous travaillons.

### 2.3. Les propriétés topologiques de l'espace subjectif

La topologie permet de définir les propriétés formelles d'un espace. Nous les appliquerons aux espaces perçus en insistant sur le fait qu'elles traduisent une structure spatiale de plus en plus complexe.

2.3.1. D'un espace subjectif très peu organisé, nous ne pouvons déduire que la présence de *voisinages* de composantes spatiales ainsi que celle de la *frontière* entre composantes perçues et espaces non perçus. Les

notions topologiques formelles caractérisent un espace subjectif très élémentaire, résultat d'une perception faible et d'une représentation peu élaborée. A ce type d'*espaces-voisinages*, appartiennent également, dans un tout autre domaine, les cartes faites par des explorateurs de régions inconnues, ou des ébauches de cartes dessinées par les navigateurs ou les voyageurs du début des temps modernes.

Nous proposons donc d'associer à la notion *topologique* de voisinage, la notion *psychologique* ou *géographique* de processus d'exploration spatiale et la notion mathématique de fonction d'incertitude.

### 2.3.2. Notion d'espace séparé

Topologiquement, un espace est séparé s'il est toujours possible de définir, par deux points distincts quelconques de cet espace, deux voisinages distincts. Cette notion suppose, sur le plan géographique, que le sujet distingue parfaitement deux composantes spatiales et en individualise l'environnement ; il identifie ainsi deux points voisins au lieu de les "noyer" dans une même zone floue.

Nous définirons donc un *espace subjectif séparé* comme un espace subjectif où *aucune composante n'est floue*, où n'existe aucune zone floue de localisation c'est-à-dire la notion d'espace représenté certain. Certes, ce type d'espace n'est encore ni très précis dans la représentation des formes ou dans les dimensions des composantes, ni dans la localisation relative de ces dernières, mais cette notion topologique traduit un *processus de perception différentielle* de l'espace géographique et un degré de connaissance spatiale plus poussée que dans le cas évoqué plus haut.

### 2.3.3. Notion d'espace compact

Posons les définitions topologiques suivantes :

Un recouvrement de E est une famille A de sous-ensembles flous  $A_i$  de E dont l'union contient E et telle que :

$$R = \{A_i/A_i \in A\}$$

et  $\cup A_i \supseteq E$

Un sous-recouvrement de E est une sous-famille de U qui est également un recouvrement de E.

Nous en tirons :

Un espace topologique est compact si et seulement si :

- il est séparé
- de tout recouvrement on peut extraire un sous-recouvrement fini.

L'application de ce caractère topologique à l'espace subjectif est intéressante. Ce dernier est *compact* s'il est séparé, c'est-à-dire si toutes les composantes spatiales sont localisées séparément les unes des autres et si les zones de voisinage représentées recouvrent entièrement l'espace géographique. Cette notion est exprimée plus simplement par l'idée que l'espace géographique représente *la totalité du tissu urbain*. Il n'y a donc plus aucune zone d'incertitude dans un espace représenté compact.

Nous parlerons donc d'*espace subjectif compact* comme d'un espace séparé et d'où aucune composante spatiale est absente, c'est-à-dire n'a une fonction d'appartenance nulle. Le processus de perception et de reconstruction spatiales est global car il s'exerce sur toutes les composantes de l'espace géographique ; il s'agit bien ici d'un *processus de reconnaissance et d'identification des éléments spatiaux*, représentatif d'une perception active au sens où l'entend BAILLY (1974).

#### 2.3.4. Notion de connexité de l'espace

Un espace topologique est connexe, si et seulement si, il n'existe pas de partition de cet espace en deux parties ouvertes non vides.

Il s'agit ici, concrètement, de définir un *espace "d'un seul tenant"*, sans discontinuités, ni lacunes.

Plus particulièrement, un *espace connexe par arcs* est un espace où tout couple de points peut être joint par un chemin.

Dans ce sens, un espace subjectif est connexe par arcs s'il représente des cheminements entre tout couple de composantes spatiales, c'est-à-dire si de tout point de la carte mentale on peut rejoindre

tout autre point par un trajet représenté sur la carte.

Ceci suppose une *perception des relations spatiales et des positions relatives des composantes* : l'espace géographique devient "transparent" pour l'utilisateur qui en domine parfaitement l'organisation. Il s'agit ici d'une *perception active contrôlée* où, au-delà des stimuli extérieurs, l'utilisateur s'investit par la réflexion, le raisonnement, l'appel à des expériences spatiales antérieures etc., et corrige éventuellement distorsions ou déformations liées à la perception par l'appel à des schémas logiques individuels ou collectifs. La carte mentale n°11 de l'annexe III représente un espace connexe par arcs.

#### 2.3.5. Conclusion

Les différents caractères d'un espace topologique que nous venons de définir offrent ainsi un cadre formel à l'étude des espaces subjectifs : d'un espace subjectif très pauvre où l'on peut simplement définir quelques voisinages à un espace connexe par arcs, nous avons dans la topologie l'outil méthodologique adapté à une typologie formelle et géographique des espaces subjectifs cartographiques.

Cependant, les cartes mentales sont loin d'être homogènes dans la représentation de l'espace géographique. Tout espace subjectif comprend en général des sous-espaces de types et de caractères différents : sous-espaces-voisinages, sous-espaces séparés ou compacts, ou connexes par arcs. La carte VIII2 illustre cette notion d'hétérogénéité topologique de l'espace subjectif du centre-ville de Metz : si le sous-espace axé sur la rue Serpenoise est connexe par arcs, d'autres sous-espaces présentent des caractères topologiques plus faibles.

### 2.4. Equivalence topologique : homéomorphisme de deux sous-ensembles flous

2.4.1. Nous avons défini au chapitre II, C I 3, la notion d'équivalence topologique ou d'homéomorphisme de deux sous-ensembles ordinaires.

De la même façon nous pouvons élargir cette notion aux sous-ensembles flous et définir deux sous-espaces géographiques topologique-

ment équivalents, malgré leurs différences de configuration, bien qu'ils soient munis de distances définies différemment.

Cette notion est fondamentale car elle nous permettra de définir *des espaces subjectifs homéomorphes*, c'est-à-dire topologiquement équivalents et ce malgré l'impossibilité d'utiliser des méthodes de taxinomie "non floue", normalement utilisées pour toute classification. Ainsi, définir un homéomorphisme d'une carte mentale vers une autre, revient à dire que, même si les formes, les distances, la configuration générale des deux cartes sont différentes, ces deux cartes sont topologiquement équivalentes. Elles ont alors une même structure topologique, car toutes les propriétés topologiques de l'une sont propriétés de l'autre (propriété de séparation, de compacité, de connexité etc...)

Ainsi une *étude comparative* d'espaces subjectifs peut s'appuyer sur cette notion formelle d'homéomorphisme. Elle permet de définir deux notions dérivées.

#### 2.4.2. Sous-espaces topologiques homéomorphes

Il est rare de pouvoir définir sur un espace topologique une fonction  $f$  bicontinue en tous les points de l'espace. Dans la pratique, deux cartes mentales seront topologiquement équivalentes pour certaines zones et ne le seront pas pour d'autres.

Nous proposons donc de définir des *sous-espaces topologiques* pour lesquels  $f$  est un homéomorphisme.

#### 2.4.3. Notion d'invariants des espaces subjectifs

La notion d'homéomorphisme permet de mettre en évidence, par comparaison d'espaces subjectifs de sujets différents, ou d'espaces subjectifs d'un même sujet, mais à des moments différents de son existence, ou de sujets à des époques différentes, des *invariants spatiaux*, ou *spatio-temporels*, c'est-à-dire des sous-espaces topologiques présentant les mêmes caractères topologiques : repères géographiques, sous-espaces chargés d'histoire ou de signification symbolique. Nous mettons ainsi en évidence ce "fond commun" de perception spatiale évoqué dans le premier chapitre de ce travail, qui se retrouvera sur toutes les

cartes mentales même si localisation, configuration et distances sont différentes d'une carte à l'autre.

Ces notions permettent de définir en application la structure topologique du centre-ville de Metz.

#### IV - Application géographique : structure topologique du centre-ville de Metz d'après l'étude des espaces subjectifs

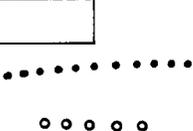
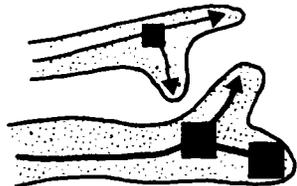
Une étude qualitative des cartes mentales relatives au centre-ville permet ainsi de mettre en évidence, non une structure globale, mais des *sous-structures topologiques* (carte VIII 3). Le centre-ville tel qu'il est représenté par les cartes mentales n'est globalement ni séparé, ni compact, ni connexe par arcs ; les sous-structures mises en évidence par la cartographie traduisent en fait l'hétérogénéité de cet espace au niveau de la perception et de la représentation cartographique dont les explications seraient à chercher à la fois dans le tissu urbain lui-même et dans les caractères d'âges, d'activités, de niveau culturel ou social du groupe interrogé.

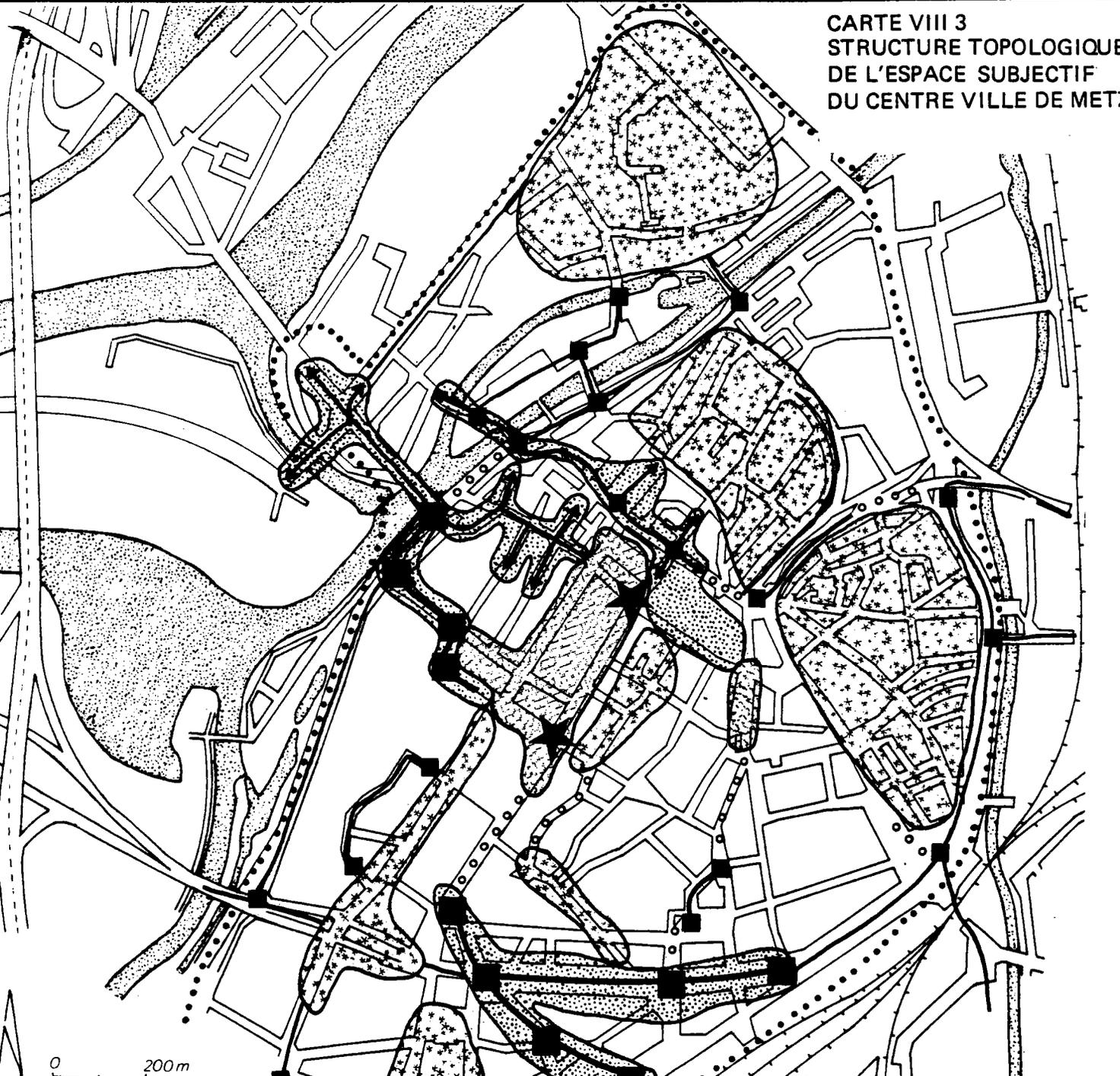
##### 1. Les invariants spatiaux

Ils sont de types variés et représentent :

1.1. Des invariants "symboliques" ou historiques : dans ce cas ils sont représentés par des *composantes isolées*, "sorties" en quelque sorte de leur environnement : cathédrale, porte Serpenoise sont toujours évoqués, sinon représentés avec précision. Il faut noter le nombre très faible de ces invariants comme si tout un acquis historique ou symbolique échappait au groupe d'étudiants interrogés. Parmi ces "absents", citons la Moselle à laquelle pourtant Metz doit son existence et qui ne figure que fort peu sur les cartes.

1.2. Des invariants géographiques qui traduisent la fonction urbaine de Metz. Les *composantes* sont alors *associées* en

STRUCTURE	CARACTERES TOPOLOGIQUES			CARACTERES GEOGRAPHIQUES	DEFINITION MORPHOPERCEPTIVE
	SEPARATION	COMPACTITE	CONNEXITE		
<b>ESPACE A-STRUCTURÉ</b>  aréal	non	non	non	espaces non perçus et non représentés	terres inconnues
 linéaire	non	non	non	limite de perception	barrière de discontinuité
 <b>ESPACE A STRUCTURE FAIBLE</b>	non	non	non	espace globalement perçu	espace-voisinage
<b>ESPACE DE TRANSIT</b> 	locale	très locale	locale par arcs	espace linéaire élémentaire de circulation ■ nœud ou relais ou rupture de transit	espace axial de circulation
<b>ESPACE DE PASSAGE ET D'USAGE</b> multiple part 	locale	locale	locale par arcs	espace linéaire complexe processus d'exploration spatiale ■ carrefour de l'espace axial ■ carrefour majeur de l'espace axial	espace de conquête
<b>ESPACE CENTRE-VILLE</b> 	oui	oui	oui générale	espace aréal complexe à organisation et structure hiérarchisée des nœuds ★ nœuds majeurs de l'espace	espace dominé



sous-ensembles en général très bien représentés. L'espace d'usage de la rue Serpenoise en est l'exemple le plus net.

1.3. Des invariants spécifiques au groupe étudié. Si ce groupe est cohérent, ils représentent l'espace de déplacement vers le lieu de travail, de résidence... Il est bien évident que ces invariants n'ont qu'une signification très relative : ils varient avec le groupe et, pour chaque sujet avec son activité, son âge, ses habitudes.

## 2. Les sous-structures topologiques du centre-ville de Metz

Par ordre de complexité croissante on les définit comme suit :

2.1. Sous-espaces a-structurés : il s'agit des secteurs "inconnus" sur les cartes mentales. Ces sous-espaces "vides" n'ont aucune propriété topologique. Ce sont, littéralement, des sous-espaces "non existants" dans la perception individuelle et collective.

2.2. Sous-structure d'espaces "de transit" (ex : de la gare vers le centre-ville). L'espace y est localement compact, mais la coupure du tissu urbain au niveau de la Porte Serpenoise se traduit par une rupture de la compacité et de la connexité par arcs. Seuls les nœuds ou les repères et leurs voisinages sont alors bien perçus. Cette sous-structure ne peut s'exprimer et s'étudier qu'en termes de voisinages topologiques.

2.3. Sous-structure d'espaces de "passage et d'usage" (ex : du centre-ville vers le Campus universitaire). Elle se traduit cartographiquement par une organisation linéaire d'un espace compact et connexe par arcs. La sous-structure reste cependant peu complexe : réseau à chemins simples et élémentaires, compacité *très locale* : dès que l'on s'éloigne de l'itinéraire quasi-linéaire la sous-structure s'affaiblit et seule une structure de simple voisinage apparaît.

#### 2.4. Sous-structure complexe de "centre-ville".

Elle traduit un espace compact, connexe c'est-à-dire d'un seul tenant, connexe par arcs. Elle correspond, pour notre étude, au seul "espace Serpenoise" annexant à la rue la plus active de Metz, les rues perpendiculaires et quelques rues parallèles. Cependant l'organisation d'ensembles est orienté nettement Sud-Nord traduisant au-delà de la schématisation du plan du centre-ville, la permanence fondamentale de l'orientation méridienne de la ville. Structure perçue et structure géographique concordent étroitement.

### 3. Conclusion

La topologie nous apporte un outil méthodologique susceptible de formaliser la notion d'espace subjectif. Celui-ci est défini comme un espace topologique dont on peut définir les propriétés. Celles-ci sont plus faibles que celles d'un espace géographique sans en être fondamentalement différentes.

La notion d'homéomorphisme fournit une base formelle à toute étude comparative d'espaces subjectifs et à la mise en évidence d'invariants spatiaux. Ceux-ci représentent les grandes constantes spatiales présentées dans des espaces subjectifs différents.

Ces bases étant posées, la typologie de sous-structures topologiques permet alors de définir, à propos du centre-ville de Metz, une *hiérarchie de structures spatiales*. De l'espace a-structuré ou l'espace-voisinage à l'espace connexe par arcs, tous les types coexistent, se juxtaposent ou s'opposent sur les cartes mentales.

Partant de cet ensemble complexe il s'agit à présent d'en "énoncer les lois cachées" (PONSARD), d'en démonter l'organisation pour aboutir à des notations susceptibles d'être généralisées ou de se prêter à des études comparatives.

Le modèle de valuation proposé dans le chapitre précédent nous permettra de répondre à cette préoccupation. La deuxième partie de ce chapitre est une application de ce modèle au centre-ville de Metz tel qu'il est représenté par des cartes mentales. Nous montrerons que, par-

tant d'une quantification d'espaces subjectifs, nous pouvons mettre en évidence quelques unes des "lois cachées" qui ordonnent la réalité géographique.

## B - L'ORGANISATION SPATIALE DU CENTRE-VILLE DE METZ D'APRES LE MODELE DE VALUATION. EXPOSE GEOGRAPHIQUE

Nous reprenons dans ce qui suit les possibilités ouvertes par l'application du modèle de valuation en dégagant successivement la structure simple, la structure-réseau et la structure relationnelle de l'espace subjectif collectif tel qu'il apparaît à travers l'étude des cartes mentales (ROLLAND-MAY, 1981).

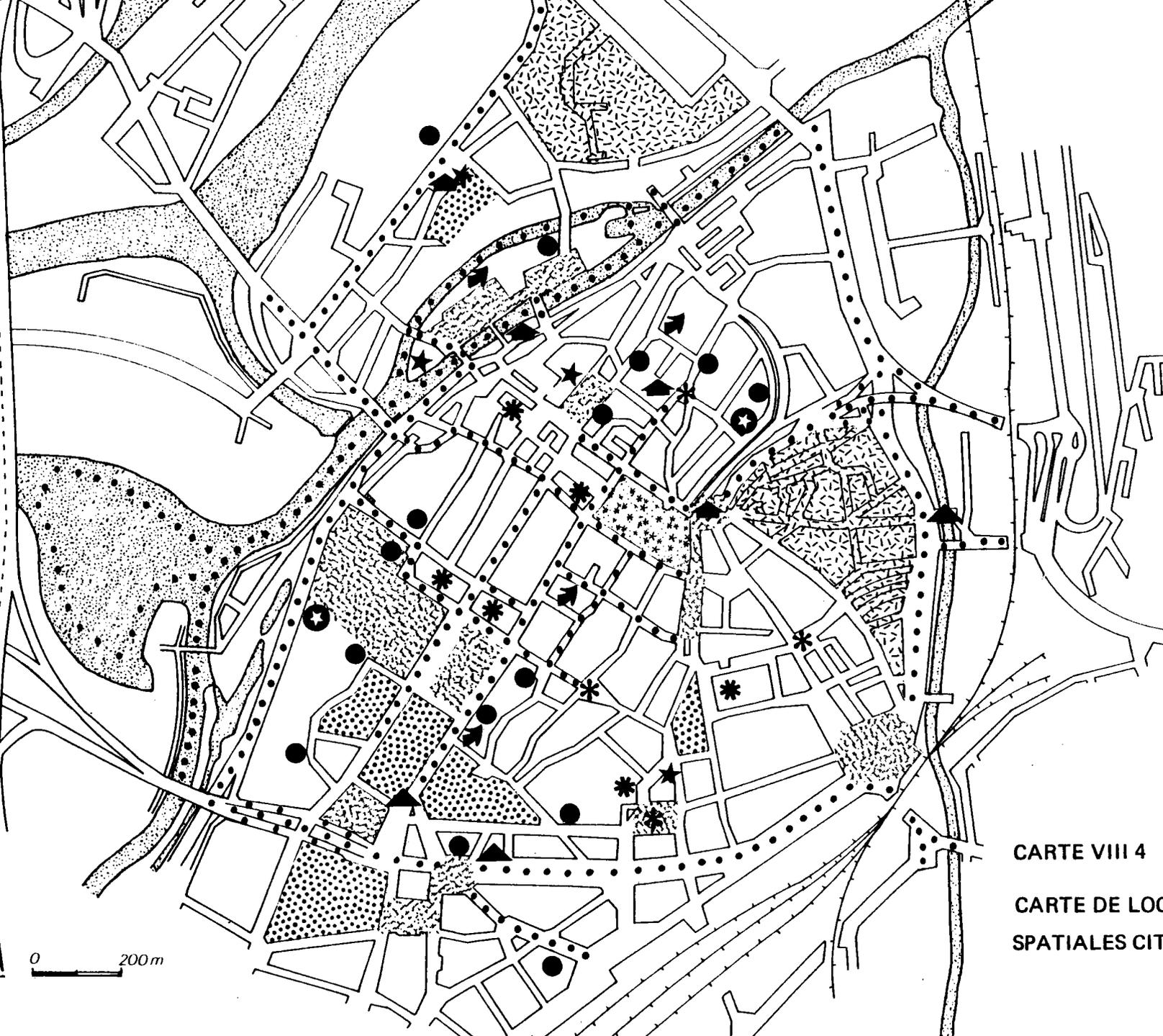
### I - Structure simple de l'espace subjectif collectif

Les cartes VIII 4 et VIII 5 renseignent respectivement sur les composantes spatiales citées et sur la fréquence de ces citations. Quelques observations préliminaires peuvent être faites :

#### 1. Une perception discontinue de l'espace géographique

Cette perception "collective" de l'espace centre-ville révèle trois grandes constantes géographiques :

1.1. La perception d'un espace de circulation :  
boulevard circulaire, voie rapide le long de la Moselle, passage de la Moselle au Moyen-Pont et continuation de la "boucle" au Nord-Ouest, sur l'île de Fort-Moselle. Cependant seule la moitié Sud de cet anneau est évoquée par plus de 50 % des effectifs, liée sans doute à l'entrée de l'autoroute Metz-Thionville, Metz-Nancy, à l'aspect particulièrement soigné d'une part et à l'accès facile. Au contraire, l'accès difficile et complexe de l'autoroute à partir de Metz-Nord n'est sans doute pas étranger au "vide" observé au Nord de cet espace de circulation.

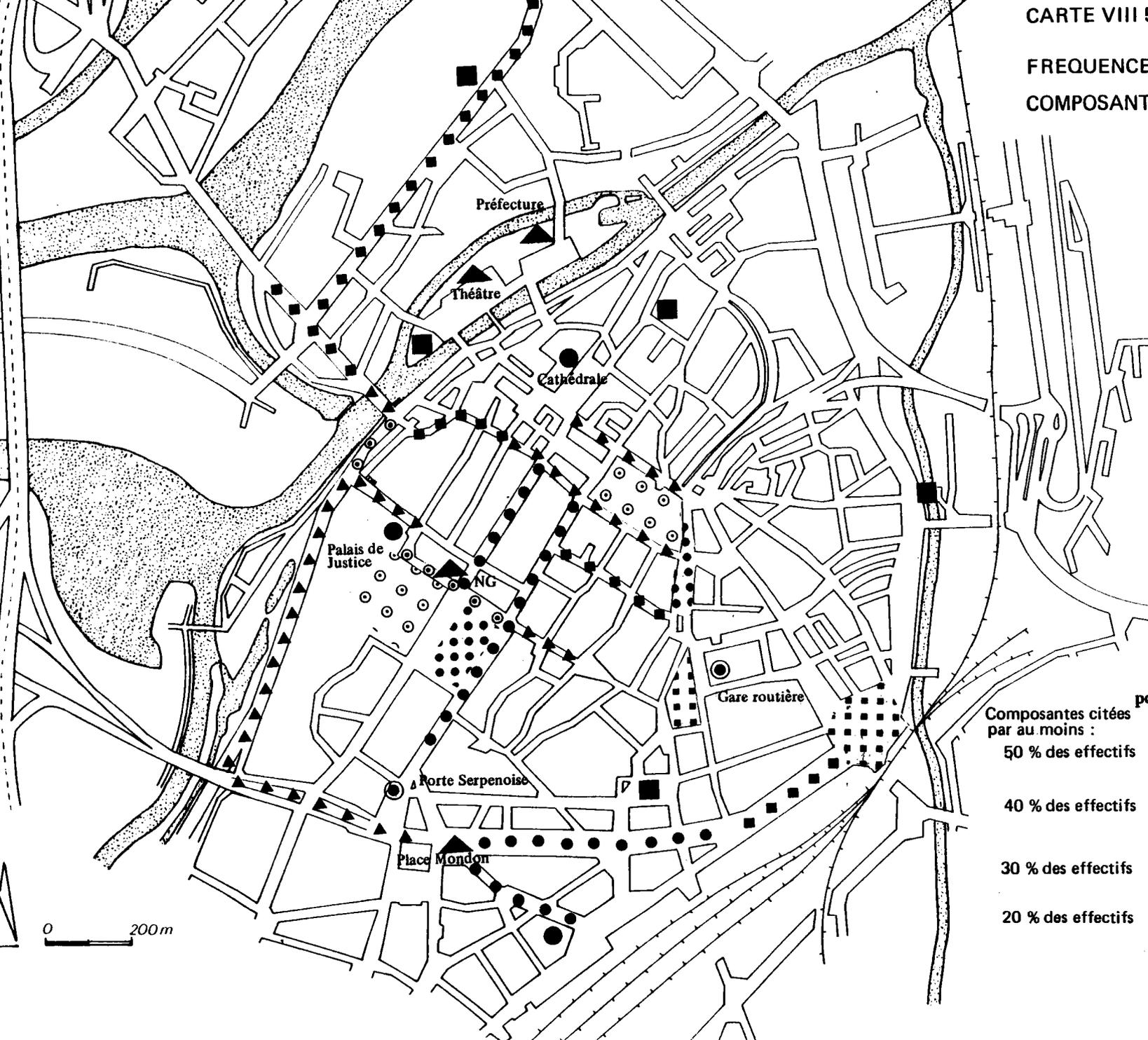


- Composantes ponctuelles**
- ★ Eglise
  - ▲ Edifice à intérêt historique
  - (with star) Bâtiment monumental
  - \* Service commercial
  - (solid) Service financier et administratif, de santé ou école
  - Loisir
  - \* (small) Petite place, carrefour
  - ▲ (house) Rénovation ponctuelle ou peu étendue
- Composantes aérales**
- ▨ (diagonal lines) Place
  - ▨ (dots) ensemble monumental (administratif, économique, santé)
  - ▨ (stars) Centre commercial (St Jacques)
  - ▨ (cross-hatch) Quartier indéterminé dans son ensemble
- Composantes axiales**
- ▬ (dotted) Voie d'eau
  - ▬ (dashed) Rue, avenue, axe autoroutier

**CARTE VIII 4**  
**CARTE DE LOCALISATION DES COMPOSANTES SPATIALES CITEES PAR TYPES**

0 200m

FREQUENCE DE NOTATION DES  
COMPOSANTES SPATIALES



0 200m

		Composantes		
		ponctuelles	axiales	aréales
Composantes citées par au moins :				
50 % des effectifs	●	▬●	▬●●	▬●●●
40 % des effectifs	⊙	▬⊙	▬⊙⊙	▬⊙⊙⊙
30 % des effectifs	▲	▬▲	▬▲▲	▬▲▲▲
20 % des effectifs	■	▬■	▬■■	▬■■■

1.2. La perception d'un espace d'usage, mais singulièrement étriqué puisque une très faible partie seulement de ce qu'on a coutume de définir comme étant le centre-ville est perçue par plus de 40 % des effectifs (carte<sup>VIII</sup> 5): Rue Serpenoise et rue des Clercs ainsi que les axes qui leur sont perpendiculaires ; les parkings du centre-ville et le centre commercial Saint Jacques limitent de part et d'autre cet espace d'usage. Il est également à remarquer que les voies piétonnes perpendiculaires à l'"axe Serpenoise" ne sont perçues que par une faible minorité ou sont totalement "inconnues". En fait le processus de perception enregistre la *dominante méridienne* du centre-ville et s'affaiblit très vite dès que l'on s'en éloigne de part et d'autre.

1.3. La perception de "repères spatiaux" dispersés à travers tout le centre-ville et évoqués, avec des fréquences faibles cependant. Au-delà de leur signification symbolique : spirituelle (Cathédrale), historique (Tour Camoufle, Saint Pierre-aux-Nonnains, la plus ancienne basilique de France), ce sont le plus souvent des *ensembles monumentaux* qui accrochent le regard et l'attention. Il n'est pas étonnant de ce fait que les composantes ponctuelles citées (carte<sup>VIII</sup> 4) soient les héritières des périodes d'urbanisme planifié et de prestige politique : bâtiments classiques élevés à Metz par la royauté française soucieuse de montrer sa grandeur après le rattachement de Metz au Royaume de France (Place d'Armes, Place de la Comédie, Palais de Justice), bâtiments né-gothiques de la "ville allemande" élevés au moment du rattachement de Metz à l'empire allemand comme la Poste, la Chambre de Commerce.

En conclusion plutôt que de parler d'espaces subjectifs, il faudrait évoquer des *fragments d'espaces perçus*. L'étude précise de la structure de l'espace subjectif à partir de la matrice d'information spatiale floue confirme cette première approche.

## 2. Une perception différentielle de l'espace géographique

En effet, toutes les composantes perçues ne le sont

pas au même degré. La détermination de la fonction d'appartenance d'une composante spatiale à un espace subjectif permet de distinguer des structures telles que nous les avons définies au chapitre précédent.

## 2.1. Espace subjectif fort ou structure spatiale forte (carte VIII 6)

Il est défini par les composantes spatiales auxquelles on a associé une fonction d'appartenance égale à la valeur maximale rencontrée dans les cinquante espaces subjectifs. Il s'agit d'un espace différencié, dont la cartographie révèle :

### 2.1.1. Une organisation en sous-espaces subjectifs forts de niveau 500 isolés les uns des autres. En effet trois types se dégagent :

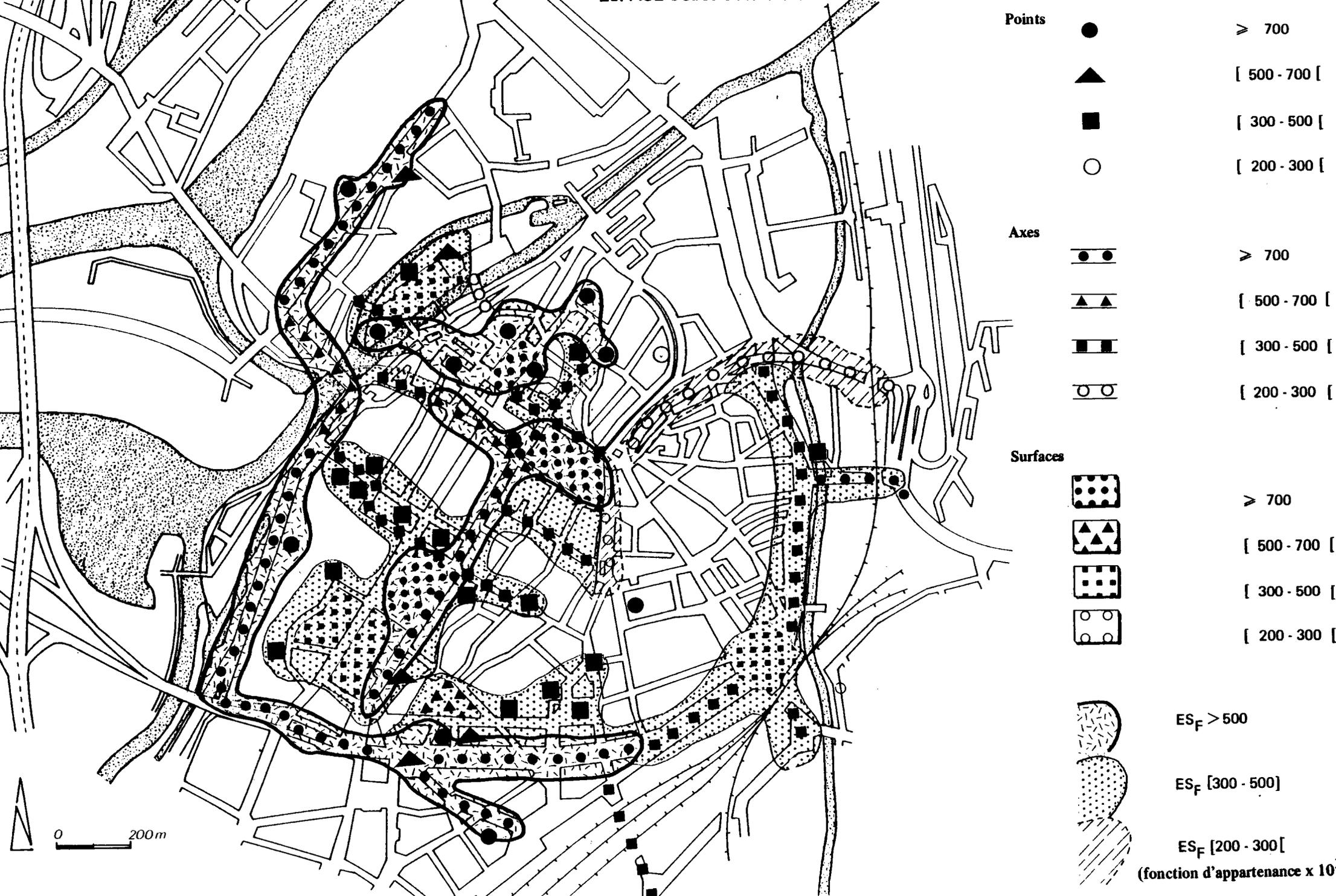
- *l'espace-circulation*, linéaire, fortement canalisé par les axes routiers périphériques et interrompu dans la moitié Nord de la carte

- *l'espace d'usage* correspondant à la ville-marchande et obéissant à l'organisation méridienne qui a toujours caractérisé la ville de Metz

- *l'espace historique et symbolique* du quartier "culturel" qui de la Cathédrale s'étend à la place de la Comédie par-dessus le bras de la Moselle.

### 2.1.2. Une organisation en structures emboîtées, de niveaux décroissants à mesure que l'on s'éloigne des secteurs les plus fortement perçus. Ainsi l'espace d'usage de la ville-marchande est défini comme un ensemble de structures fortes de niveaux 700, 500, 300 qui s'élargissent progressivement de la Rue Serpenoise aux places et axes voisins.

Nous considérons que l'espace subjectif fort, tel qu'il a été défini et cartographié, représente le niveau supérieur de la perception spatiale que le groupe de sujets étudiés est susceptible d'atteindre. Il est ainsi significatif, non d'une perception complète et parfaite du milieu urbain, mais bien d'une perception optimale à laquelle le groupe, du fait de sa composition, de son acquis socio-culturel, de ses struc-



tures mentales collectives, peut prétendre. La détermination à intervalles réguliers et pour ce même groupe, de l'espace subjectif fort, ou sa détermination pour des groupes de composition différente, permettra d'intéressantes études comparatives et la mise en évidence de progrès de la perception spatiale. Nous disposons ainsi d'un outil mathématique et cartographique de mesure de ce progrès.

## 2.2. Espace subjectif faible ou structure spatiale faible (carte VIII 7)

Il associe, selon les définitions posées plus haut, à chaque composante spatiale une fonction d'appartenance égale au minimum rencontré pour les cinquante espaces subjectifs. Il définit ainsi le "Metz que tout le monde connaît".

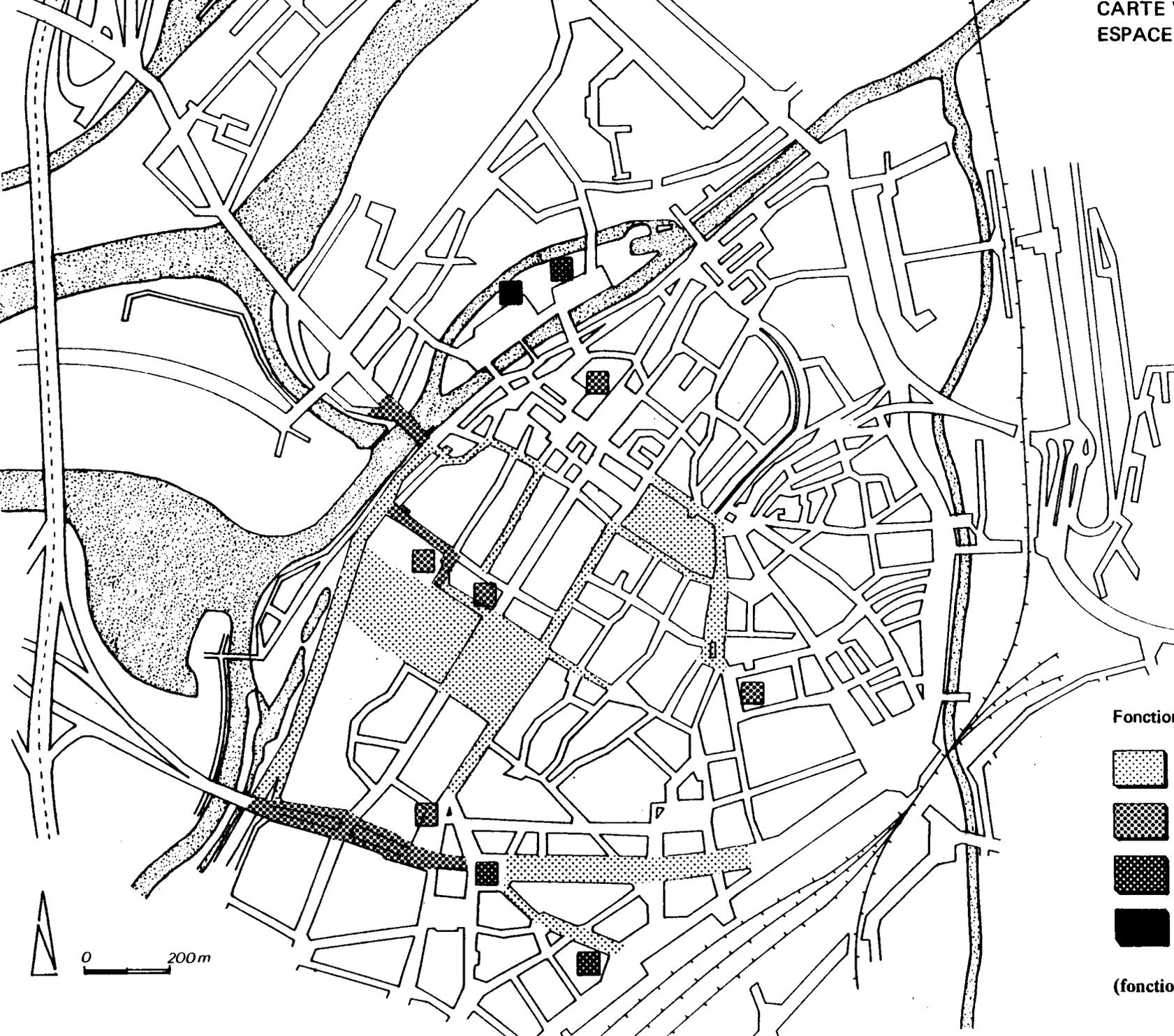
Dans notre exemple, la ville "que tout le monde connaît" serait une ville vide, car, quelle que soit la composante, il existe au moins un sujet interrogé pour lequel cette composante est inconnue !

Nous avons donc restreint la notion d'espace subjectif faible en ne retenant que les composantes connues par au moins 1/3 des répondants (fréquence de notation  $\geq 30\%$ ) et la valeur MIN de leur fonction d'appartenance (carte VIII 5).

Le résultat en est un *espace subjectif faible axial soutenu par des points* à vocation essentielle de carrefour (Place Mondon), de rupture de direction (Porte Serpenoise) ou de trafic (gare routière), de parking (République, Centre Saint Jacques) ou de passage obligé (Moyen-Pont). Seules la Cathédrale, le théâtre et la Préfecture représentent, dans cette ville singulièrement étriquée et réduite presque uniquement à sa fonction de circulation, le passé historique et le rôle culturel et administratif de Metz.

Cette notion s'affirme encore quand on note la valeur des fonctions d'appartenance : ainsi l'espace subjectif faible de niveau 100 ne consiste plus qu'en de rares composantes isolées dans le tissu urbain.

La définition de l'espace subjectif faible ouvre, elle aussi, la perspective d'intéressantes études comparatives. Celles-ci permet-



«Le Metz qu'au moins 1/3  
des effectifs de l'échantillon  
connait»

Fonction d'appartenance

-  < 50
-  [50 - 100 [
-  [100 - 150 [
-  [150 - 200 [

(fonction d'appartenance x 10<sup>3</sup>)



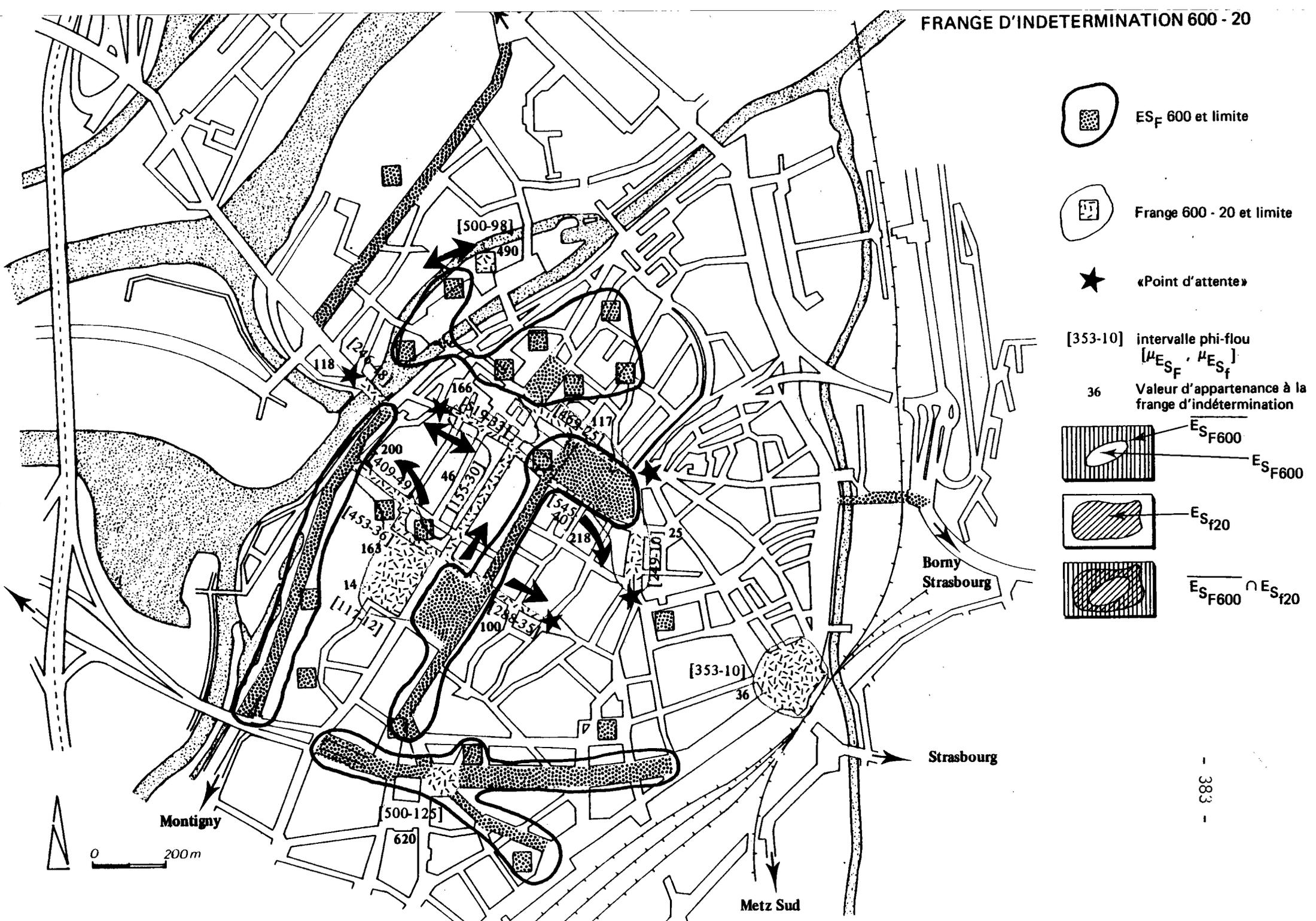
traient de mesurer le progrès de la perception spatiale d'un groupe bien défini au cours du temps et de tester ainsi son adaptation (ou non-adaptation) progressive au milieu urbain, bref, de considérer le processus de perception comme un processus de conquête spatiale dont on peut mesurer la progression.

Le caractère étriqué de cette ville que "tout le monde connaît" appelle une autre réflexion, à savoir l'énorme perte d'information spatiale qui se produit au niveau de la perception des paysages. Ceci doit, à notre avis, encourager à la prudence tout enseignement relatif à l'espace, l'enseignement de la géographie en particulier. Il n'y a en effet, plus qu'un rapport très lointain entre la vision géographique que définit l'enseignant et la "réception" du message spatial par l'enseigné. Ce problème est général à toute communication du message spatial : il doit inciter à une grande prudence au niveau de la communication de ce message, chaque "partenaire" devant s'assurer que sa vision spatiale n'est pas trop éloignée de celle de son interlocuteur. Bon nombre de malentendus ou d'incompréhension entre usagers et aménageurs de l'espace, entre usagers et "décideurs" seraient ainsi évités !

### 2.3. Frange d'indétermination spatiale (de niveau 600-20) (carte VIII 8)

Cette notion, définie plus haut ainsi que dans la légende commune aux cartes, associe en quelque sorte les espaces subjectifs fort et faible. Elle détermine un espace intermédiaire sur lequel s'exerce, selon nous, le processus d'adaptation spatiale du groupe étudié ; espace peu déterminé, *espace de "conquête spatiale"* dont l'organisation revêt trois aspects :

2.3.1. Une conquête des points-carrefours de l'espace de circulation : le cas de la place Mazelle en est l'exemple caractéristique. Cette place très vaste représente un nœud important où se croisent plusieurs axes importants de circulation. Cette complexité, facteur d'hésitation de la part de l'utilisateur, justifie que la place ne soit pas parfaitement perçue et appartienne de ce fait à la frange d'indétermination.



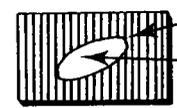
  $ES_F$  600 et limite

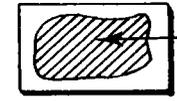
 Frange 600 - 20 et limite

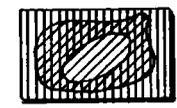
★ «Point d'attente»

[353-10] intervalle phi-flou  
 $[\mu_{ES_F}, \mu_{ES_f}]$

36 Valeur d'appartenance à la frange d'indetermination

  $ES_{F600}$

  $ES_{f20}$

  $ES_{F600} \cap ES_{f20}$

0 200m

Montigny

Borny Strasbourg

Strasbourg

Metz Sud

2.3.2. Une extension spatiale à partir de l'espace subjectif fort de la "ville d'usage". En fait les "digitations" qui partent des points forts de la "ville d'usage" en les prolongeant le long des axes adjacents représentent des sous-espaces en voie d'intégration par le groupe que nous avons étudié. Une étude géographique très fine montrerait qu'elle correspond à des axes où, actuellement, s'opèrent de très nombreuses transformations : installations de commerces ou services nouveaux, transformations de commerces ou services anciens en prestations plus conformes aux goûts et besoins actuels, rénovation d'anciens bâtiments etc... On peut noter ici la corrélation très étroite entre une structure géographique en pleine mutation et une perception collective "active" (BAILLY, ouvrage cité) qui cherche à appréhender cette structure géographique.

Il s'agit donc bien de définir cette frange d'indétermination comme un espace à *structure dynamique*, appelé à évoluer plus ou moins rapidement dans la perception collective, selon l'intensité du "métaphorisme intra-urbain" en cours.

Dans cette optique, nous définissons comme "*points d'attente*" les limites spatiales (au moment de l'étude) par la frange d'indétermination. On constate effectivement que le processus de perception se bloque souvent sur un point de rupture du tissu urbain, qui correspond le plus souvent à un point d'arrêt (momentané) de la dynamique urbaine : place (place Saint Martin au bas de la rue du Coëtlosquet gagnée, elle, par cette dynamique), carrefour ou virage difficiles (Rue du Palais), "cul de sac" comme le "fond" de la Place Saint Louis où vient buter tout un courant de circulation avant de s'engouffrer dans une rue étroite et encombrée. L'héritage de la vieille ville médiévale impose sa trame au processus de développement spatial du centre-ville et impose ainsi sa marque à l'espace subjectif collectif.

Il sera intéressant de s'attarder sur l'étude géographique de l'environnement des points d'attente ainsi évoqués : selon nous, c'est au-delà de ces points, mais dans la même direction que celle de la frange d'indétermination que jouera dans un proche avenir (et joue déjà dans le secret des cabinets immobiliers et des bureaux d'étude) le processus de dynamique du centre-ville ; si la *perception collective* n'ap-

préhende pas encore ces portions d'espaces, la *perception individuelle* des décideurs est déjà en éveil : leur intuition et leur décision d'action gagneront à s'appuyer sur des données objectives mathématiques, donc telles que celles que nous exposons.

En d'autres termes, la détermination de la frange d'indétermination est celle de l'espace urbain en mutation au moment de l'élaboration des cartes mentales. Nous pouvons noter cette zone comme une zone de *métamorphisme intra-urbain*, de transformation de structures données en structures plus conformes aux nécessités nouvelles de l'organisme urbain.

#### 2.4. Conclusion

Ainsi le modèle de valuation permet de dégager les structures simples implicites de l'espace subjectif collectif. Il est bien évident qu'elle seraient différentes selon le groupe étudié. Le modèle en permettra une étude comparative en même temps que dynamique. Ces mêmes notations s'appliquent à l'étude de l'espace-réseau c'est-à-dire de l'espace subjectif conçu comme un réseau de voies de communications, associant entre elles différentes composantes spatiales.

### II - Structure-réseau de l'espace subjectif collectif

Un espace géographique n'est pas seulement perçu comme un ensemble de composantes spatiales juxtaposées, sans aucune interrelation, mais bien comme *un espace de relation*. La notion de structure-réseau prend en compte cette considération.

#### 1. Valuation de la structure-réseau

Pour définir la structure-réseau, nous avons retenu, parmi les composantes spatiales ponctuelles, 14 composantes citées par au moins 20 % des effectifs interrogés et faisant partie de l'espace subjectif fort de niveau 500 (exception faite de la Porte des Allemands dont l'appartenance à cet espace subjectif fort n'est que de 300). Nous

avons cherché, pour tout couple de composantes ainsi retenues l'itinéraire flou le plus fort (voir chapitre VII), sa valeur *forte* (calculée à partir de l'espace subjectif fort) et sa valeur *faible* (calculée à partir de l'espace subjectif faible).

Cela revient en fait à définir un graphe flou dont les sommets sont les composantes ponctuelles retenues, et dont les arêtes sont les itinéraires flous les plus forts entre ces sommets pris 2 à 2.

La représentation de ce graphe est complexe et ce dernier devient très vite illisible ; aussi le tableau VIII 1 précise-t-il, dans la *matrice des coefficients de liaison spatiale*, pour tout couple de sommets, la valeur limite max. de la perception, c'est-à-dire la valeur de l'itinéraire le plus fort joignant ces sommets (calculée à partir de l'espace subjectif fort) et la valeur limite min. de la perception, c'est-à-dire la valeur de l'itinéraire le plus fort (calculée à partir de l'espace subjectif faible).

Nous estimons que le coefficient de liaison entre tout couple de sommets a pour valeurs limites celles de l'intervalle ainsi défini.

Si l'on prend en exemple le couple Cathédrale-Palais de Justice, l'itinéraire le plus fort de l'espace subjectif fort a pour valeur .469 ; l'itinéraire le plus fort de l'espace subjectif faible a pour valeur .025 . On pose que le coefficient de liaison a pour valeur l'intervalle  $[\text{.469}, \text{.025}]$  selon la théorie des graphes phi-flous. Nous ne développerons pas cette possibilité d'étude dans le présent travail.

L'observation de la matrice des coefficients de liaison spatiale permet de dégager trois types d'itinéraires forts :

- itinéraire dont la valeur = 1 : perception parfaite de l'itinéraire entre 2 sommets.

- itinéraire dont la valeur = 0 : non-perception de l'itinéraire. Le cas de la composante "Place Saint Thiébault" est significatif : aucun itinéraire ne la relie à un quelconque des autres sommets ; il s'agit bien d'une composante insulaire, bien perçue, mais paradoxalement aucun itinéraire qui y arrive ne l'est.

- itinéraire à valeur strictement comprise entre 0 et 1 : per-

TABLEAU VIII 1 : Matrice des coefficients de liaison spatiale

Coefficients définis :-à partir de l'espace subjectif fort : coefficient dans la partie supérieure de chaque case

-à partir de l'espace subjectif faible : coefficient dans la partie inférieure de chaque case

Les composantes retenues sont celles de l'espace subjectif fort dont la fréquence de citation est égale ou supérieure à 20 %

(Les valeurs des coefficients de liaison ont été multipliées par 10<sup>3</sup>)

Composantes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1 Cathédrale	///	469 25	469 22	409 24	1000 96	83 21	240 10	1000 86	182 10	1000 66	469 24	83 2	703 11	0 0	409 27
2 Palais de Justice		///	453 36	753 34	663 91	453 46	249 10	463 91	182 146	663 25	453 36	83 10	453 24	0 0	502 27
3 Porte Serpenoise			///	83 21	469 22	183 11	83 21	453 22	182 10	453 22	453 36	83 24	453 11	0 0	502 22
4 Place Mondon				///	83 21	1000 1000	83 10	83 10	83 10	83 10	409 34	336 34	83 10	0 0	246 34
5 Temple protestant					///	83 21	246 10	1000 1000	182 11	1000 1000	469 25	83 11	703 11	0 0	469 95
6 Poste						///	249 10	724 26	83 21	724 26	409 26	83 21	83 21	0 0	246 34
7 Gare routière							///	249 10	182 10	249 10	249 10	83 10	249 10	0 0	246 10
8 Théâtre								///	182 11	1000 1000	453 25	83 11	703 11	0 0	452 25
9 Musée									///	182 10	182 11	83 25	182 10	0 0	182 27
10 Préfecture										///	469 25	83 25	703 11	0 0	469 24
11 N.G.											///	336 22	469 11	0 0	453 27
12 Porte des Allemands												///	83 10	0 0	246 22
13 Mairie													///	0 0	409 11
14 Place St Thiébault														///	0 0
15 Hopital Belle Isle															///

ception plus ou moins fine et exacte de cet itinéraire.

## 2. Réseaux flous de niveau donné. L'organisation spatiale du centre-ville de Metz selon une structure-réseau

La carte VIII 9 représente ce que nous appelons la surface de perception floue

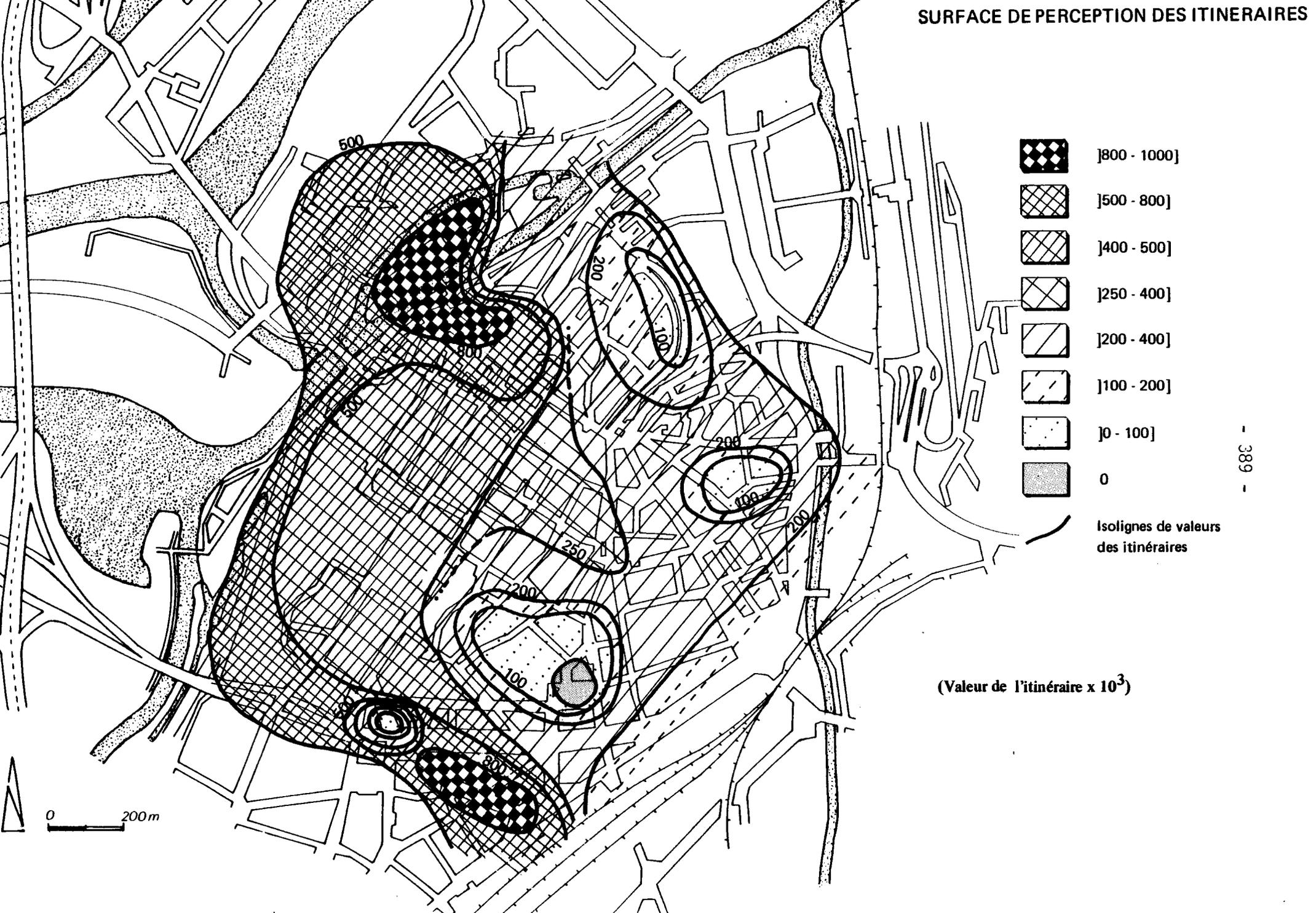
- en premier lieu, elle permet de définir, pour tout couple de points, la valeur de l'itinéraire flou le plus fort. Celle-ci correspond à la valeur la plus basse rencontrée en traçant une ligne droite d'un point à un autre. Cette carte représente ainsi un *modèle spécifique à la ville de Metz* et une aide à la décision en matière d'aménagement spatial.

- en second lieu, *cette carte est révélatrice de la structure de l'espace perçu messin*. Celle-ci est hétérogène et traduit une partition de l'espace en trois sous-structures qui se juxtaposent.

2.1. Une "arête de forte perception des itinéraires" qui, de l'espace "historique" défini plus haut, à l'espace "gare-poste-place Mondon" suit l'axe de circulation longeant la Moselle au S.W. du centre-ville. Cet axe de forte perception n'est lui-même pas homogène : aux crêtes très fortement perçues aux extrémités s'oppose le "creux" très faiblement perçu lié à la Porte Serpenoise et à la rupture du tissu urbain à ce niveau. Dans ce premier ensemble, le phénomène de perception traduit l'interrelation de faits géographiques (circulation fortement canalisée le long d'une voie rapide), de l'acquit historique et culturel, de l'impact des actions d'urbanisme passées et présentes qui ont imprimé leur marque dans le tissu urbain.

Mais, en résumé, il s'agit bien de la "ville de circulation", vue par un automobiliste qui perçoit fortement l'axe routier rapide qu'il emprunte couramment.

Cette forte perception est cependant très limitée : il s'agit bien d'une arête étroite au-delà de laquelle le degré de perception décroît très vite. L'automobiliste est en quelque sorte sur "des rails"



(Valeur de l'itinéraire x 10<sup>3</sup>)

qui limitent étroitement sa perception latérale et concentrent sur l'axe lui-même l'attention de l'utilisateur.

2.2. Un secteur vaste et uniforme de perception moyenne des itinéraires (.250 à .500) qui correspond à l'espace d'usage déjà décrit plus haut. Dans ce secteur, où se concentrent toutes les activités tertiaires du centre-ville, il semble que la perception des itinéraires ne soit pas le fait majeur à observer : en effet, le sujet a tendance à percevoir plus les "points" qui leur proposent tel ou tel service (il va d'un magasin à l'autre) que les itinéraires suivis pour s'y rendre et qui lui paraissent négligeables ou peu intéressants.

Ainsi, dans un centre-ville, espace d'usage, les itinéraires sont en quelque sorte neutralisés au profit des points qui eux, sont fortement perçus. En extrapolant on expose l'idée que, dans les espaces bien connus, le déplacement est réalisé de point en point alors que les voies d'accès sont peu perçues.

Le contre-exemple pourrait être celui de la rue Serpenoise, très fortement perçue par la quasi-totalité des personnes. Nous avançons l'idée que cette rue n'est en fait pas considérée comme un axe de circulation (d'ailleurs sa longueur a été nettement sous-évaluée, dans l'ensemble des travaux), mais comme ce qu'on appellera de façon paradoxale "un point allongé" ou, plus simplement une "place étirée" à l'intérieur desquels on évolue sans se soucier des distances réellement parcourues.

2.3. Une périphérie étendue, à vastes "creux" de faible perception des itinéraires. Cette ceinture Est du centre-ville comprend des secteurs localisés très déprimés (perception des itinéraires entre 0 et .200) centrés :

- sur la vieille ville Nord, comprise entre la colline Sainte Croix, la Moselle et le Boulevard Paixhans : ici interfèrent la confusion d'un tissu urbain hérité de l'époque médiévale et moderne, l'absence totale de services divers, l'éloignement relatif du centre-ville actif. Compacité, isolement, médiocrité et confusion de la trame urbaine expliquent la faible perception des itinéraires dans ce secteur.

- *la vieille ville Est* centrée sur le cœur du quartier Outre-Seille, ceinturé au Nord par la "pénétrante des Tanneurs", au Sud par la "rue des Allemands", celles-ci bien perçues. Là encore, faible perception s'accorde avec la notion de confusion du tissu urbain, de circulation difficile, incertaine (sens uniques, impasses...) et de médiocrité des services tertiaires d'un certain niveau.

- *enfin le quartier du "Rempart Saint Thiébault"*, au Sud-Est, cerné par deux artères à forte circulation que sont les avenues Foch et Schuman. Ici la lisibilité de la trame urbaine n'est pas à mettre en cause, mais bien plutôt la monotonie de ses rues hautes et sombres, bordées d'anciennes maisons bourgeoises aujourd'hui vieilles, et peu renouvelées. Ce quartier est un îlot du XIXe siècle à deux pas du centre actif : professions libérales ou bourgeoisie discrète dans les étages inférieurs, classes sociales de plus en plus modestes à mesure que l'on gravit les étages des immeubles, peu ou pas de magasins et de bureaux aux rez-de-chaussée, occupés souvent par des entrepôts des magasins du centre tout proche ou de très petits ateliers entassés dans les arrières-cours aveugles.

### 3. Structure-réseau de l'espace subjectif collectif

En conclusion il faut ainsi souligner l'*hétérogénéité de l'espace subjectif* du centre-ville de Metz. Points, places et itinéraires sont plus ou moins bien perçus ; la perception spatiale enregistre, de façon globale et complexe, sans qu'on soit toujours en mesure d'en isoler les différents facteurs, les héritages entremêlés des différents âges d'urbanisation, la sensibilité propre à l'époque actuelle et propre au groupe étudié, pour telle ou telle forme de structure, de vie et d'activité urbaines, les habitudes de déplacement, de travail, de loisirs de ce groupe. Hétérogénéité qui permet cependant de dépasser le particulier relatif à ce dernier pour induire la structure générale de l'organisme urbain.

Il faut souligner également l'*anisotropie de l'espace subjectif étudié*. Le gradient de perception, très fort au Nord et au Sud du centre-ville, est beaucoup plus faible dans la partie centrale.

Tout au plus peut-on définir des sous-espaces isotropes et localement homogènes ; en fait, ils correspondent aux espaces subjectifs forts déjà définis et décrits.

Ces derniers sont également *connexes par arcs*, alors que l'ensemble de l'espace subjectif ne l'est pas. (Place Saint Thiébault, composante "insulaire").

Ainsi, l'espace subjectif a une structure beaucoup plus lâche et moins rigoureuse que l'espace géographique dont il dérive, comme si le filtrage exercé, la perception sensorielle, la réflexion, l'ensemble des schémas logiques individuels et collectifs, les contraintes de la représentation graphique *affaiblissaient* et *modifiaient* les caractères géographiques de l'espace.

Il en sera de même pour la notion de distance.

### III - La notion de distance subjective et ses implications géographiques

#### 1. Définition et caractères de la distance subjective.

Selon les termes posés dans le travail précédent, la distance subjective entre deux points de l'espace subjectif dépend à la fois du degré de perception de ces points et du degré de perception de l'itinéraire le plus fort qui les relie. La distance subjective ainsi définie induit une métrique faible floue qui respecte les caractères :

- de non-négativité
- de non-régularité : deux points distincts peuvent avoir une distance subjective nulle.

A l'inverse, la distance d'un point subjectif à lui-même n'est pas forcément nulle : si ce point a une fonction d'appartenance inférieure à 1, la distance de ce point à lui-même est égale à cette valeur.

- de symétrie.

La matrice des distances reproduite dans le tableau VIII 2 est donc une matrice triangulaire dont la diagonale principale ne contient

**TABLEAU VIII 2 : Matrice des distances subjectives dans l'espace subjectif fort**

(Les valeurs des distances ont été multipliées par 10<sup>3</sup>)

Composantes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1 Cathédrale	0	531	531	591	0	917	740	0	818	0	531	917	297	1000	591
2 Palais de Justice		116	547	275	337	546	751	337	818	337	547	917	547	1000	498
3 Porte Serpenoise			0	917	531	817	917	547	818	547	547	917	547	1000	498
4 Place Mondon				500	917	0	917	917	917	917	671	664	917	1000	754
5 Temple protestant					0	917	754	0	818	0	531	917	297	1000	531
6 Poste						0	751	276	917	276	591	917	917	1000	754
7 Gare routière							0	751	818	751	751	917	751	1000	754
8 Théâtre								0	818	0	547	917	297	1000	548
9 Musée									0	818	818	917	818	1000	818
10 Préfecture										500	531	917	500	1000	531
11 N.G.											0	664	531	1000	547
12 Porte des Allemands												666	917	1000	591
13 Mairie													0	1000	591
14 Place St Thiébault														232	1000
15 Hopital Belle Isle															0

pas forcément la valeur 0, mais qui, par contre, peut contenir la valeur 0 dans d'autres cases. Elle ne contient que la valeur 1 dans les lignes et colonnes relatives à une composante "insulaire". C'est le cas de la "Place Saint Thiébault", qui n'est reliée à aucun autre point de l'espace subjectif et qu'une distance maximale sépare donc de toutes les autres composantes.

Les cartes VIII 10 et VIII 15 représentent pour chaque point significatif de l'espace subjectif, les déformations de l'espace subjectif du fait du déplacement des composantes spatiales selon la distance subjective qui les sépare de la composante-repère. Sans commenter ces cartes dans le détail, dégageons la structure de l'espace subjectif du centre-ville de Metz induite par cette notion de distance subjective.

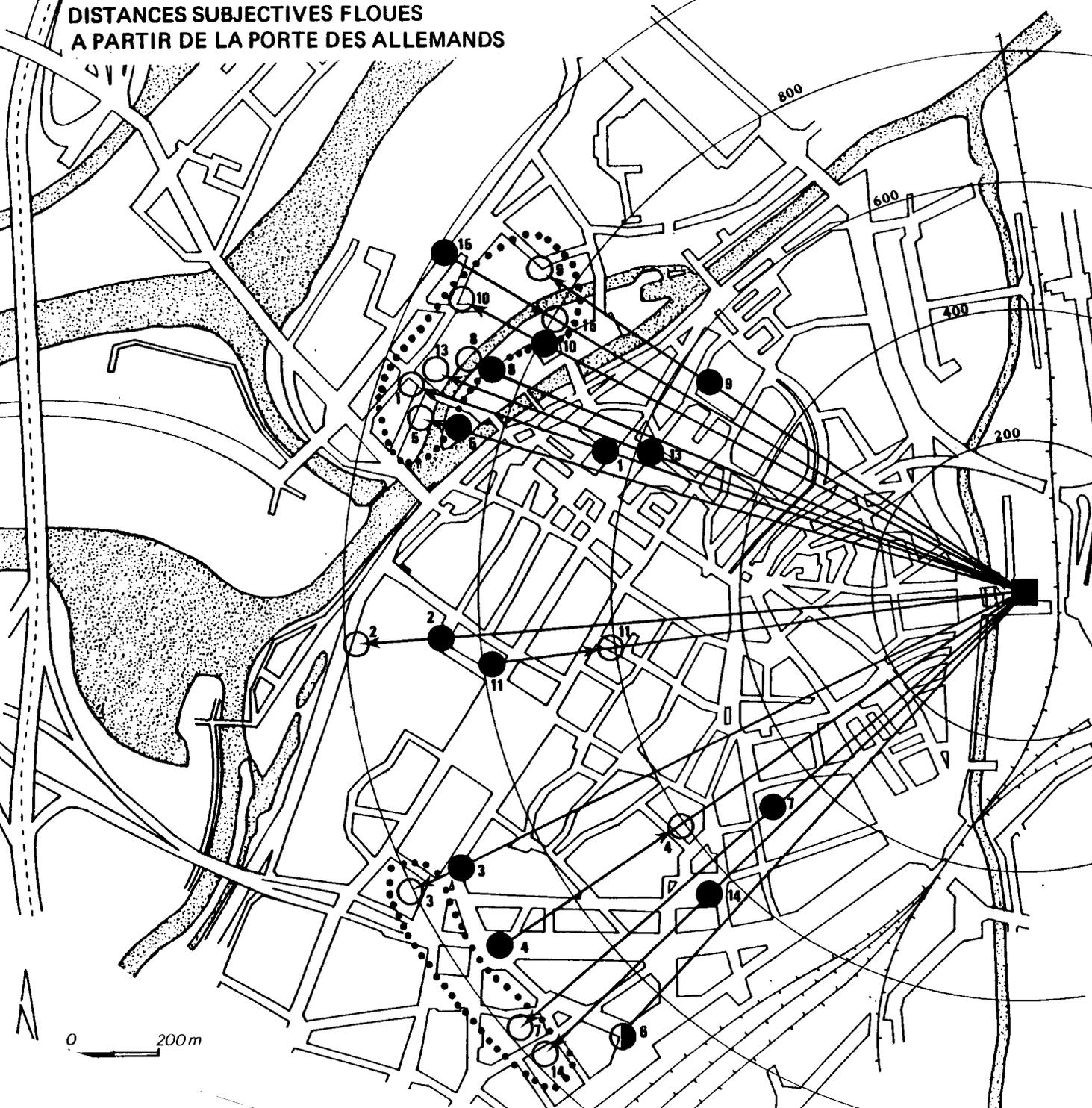
## 2. Structure induite de l'espace subjectif du centre-ville par la notation des distances subjectives

En fait, les cartes citées représentent des espaces subjectifs homéomorphes, c'est-à-dire topologiquement équivalents malgré les déformations qu'ils subissent du fait de l'application de la notion de distance subjective, de même que ces espaces sont topologiquement équivalents à l'espace géographique. Au-delà de l'apparente anarchie de ces déformations se dégagent des constantes qui révèlent la structure de l'espace subjectif :

2.1. Une "dilatation" de l'espace dans la moitié Est et, plus nettement encore dans le quart Sud-Est du centre-ville. Les distances subjectives, quelle que soit la composante origine, sont toujours surévaluées par rapport aux distances géographiques, même dans le cas de composantes relativement proches l'une de l'autre. En fait la mauvaise perception des itinéraires augmente les distances, contribuant à éloigner les composantes rejetées souvent vers les marges de l'espace subjectif.

2.2. Une "contraction" de l'espace dans le quart N.W. du centre-ville, rapprochant les unes des autres les compo-

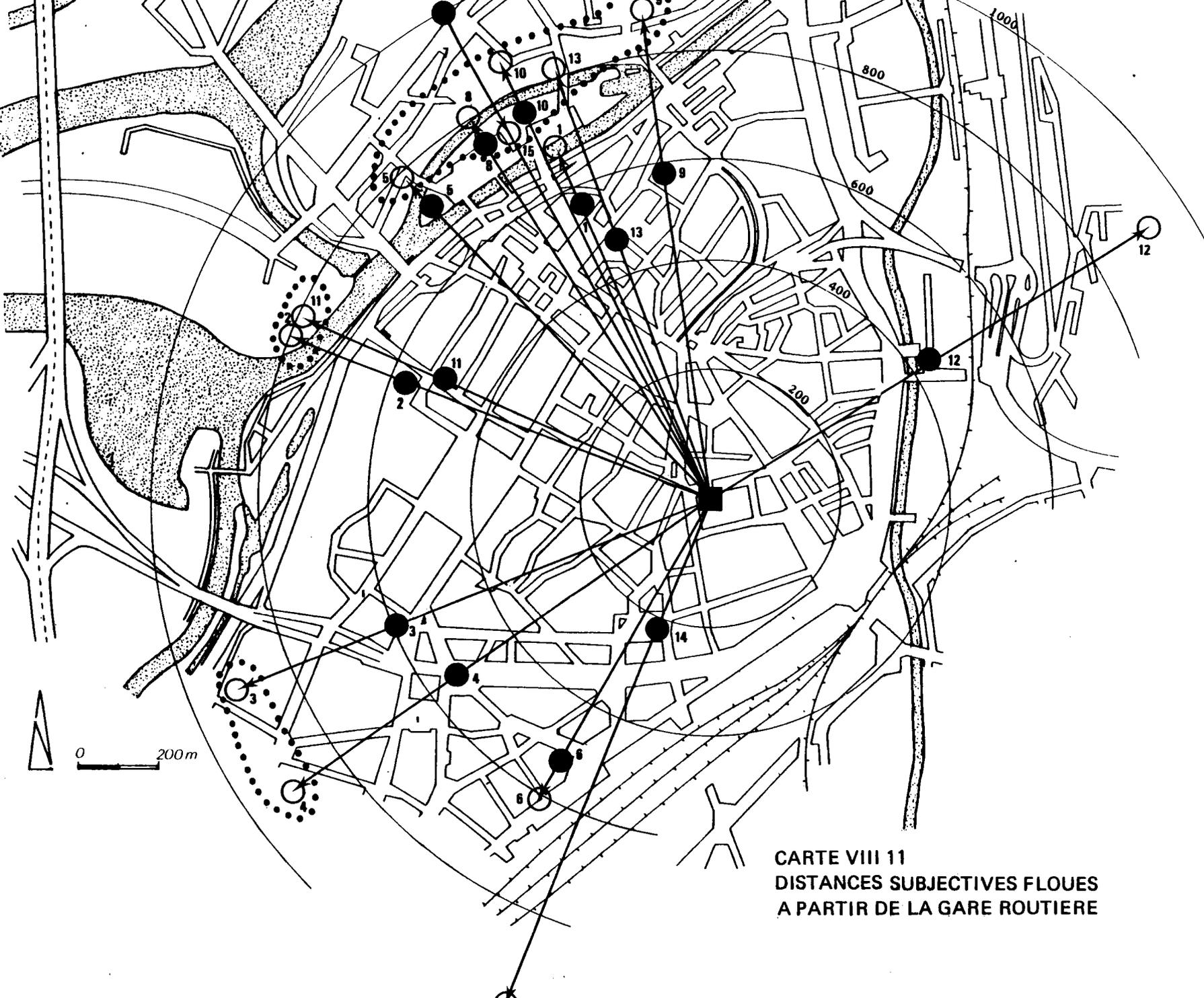
**DISTANCES SUBJECTIVES FLOUES  
A PARTIR DE LA PORTE DES ALLEMANDS**



- équidistance des cercles centrés sur le point origine = 200
- Composante-origine du calcul des distances
- Localisation «géographique» des composantes
- Localisation «subjective» des composantes
- ◐ Concordance des 2 deux localisations
- «Déplacement subjectif» des composantes par rapport à la composante-origine
- ○ ○ effet de «voisinage proche»
- ● ● effet de «voisinage éloigné»

Liste des composantes ponctuelles évoquées

- 1 Cathédrale
- 2 Palais de Justice
- 3 Porte Serpenoise
- 4 Place Mondon
- 5 Temple Protestant
- 6 Poste Principale
- 7 Gare Routière
- 8 Théâtre
- 9 Musée
- 10 Préfecture
- 11 Grand Magasin Nouvelles Galeries
- 12 Porte des Allemands
- 13 Mairie
- 14 Place St Thiebault
- 15 Hôpital Belle Isle



CARTE VIII 11  
DISTANCES SUBJECTIVES FLOUES  
A PARTIR DE LA GARE ROUTIERE

santes de l'espace-historique. Même une composante beaucoup plus lointaine comme l'Hopital Belle-Isle se "rapproche" et a une distance sous-évaluée par rapport à la distance géographique, et ce, quelle que soit la composante-origine.

2.3. Entre ces deux secteurs, un espace "de friction", de type axial, correspondant en gros à l'axe majeur SW-NE du centre-ville. Le long de cet axe et de part et d'autre de celui-ci, les déformations de l'espace subjectif semblent désordonnées sans que l'on note de relation directe ou inverse nette entre distance géographique et distance subjective.

Dans cette "géométrie de la feuille de caoutchouc" une bande d'interférence se localise entre les deux tendances notées ci-dessus.

De cette structure complexe, spécifique sans doute à chaque centre urbain on ne peut tirer aucune relation générale entre distance géographique et distance subjective ; un caractère topologique général peut cependant être déduit, ainsi qu'une remarque sur le processus de perception spatiale.

### 3. La notion d'"effet de voisinage"

Nous proposons de définir par "effet de voisinage à partir d'un point-origine" de l'espace subjectif, l'uniformisation des distances subjectives de ce point à d'autres composantes spatiales, même si celles-ci sont à des distances géographiques variables de ce point-origine.

En d'autres termes, "vues" d'un point-origine, les composantes sont en quelque sorte projetées sur un plan unique. Certaines d'entre elles de ce fait sont rapprochées, d'autres subissent au contraire un effet d'éloignement. L'ensemble des composantes est ainsi "noyé" dans *un voisinage*, aux sens topologique et géographique du terme.

Cette notion présente une double réalité :

3.1. L'effet de voisinage lointain. Cette pro-

jection sur un plan unique affecte les composantes spatiales éloignées du point-origine ou séparées de celui-ci par un itinéraire mal perçu. Dans ce cas la distance subjective est le plus souvent proche du maximum, c'est-à-dire de 1 et la distance géographique entre les composantes ainsi projetées n'est plus prise en compte. Tout se passe comme si l'éloignement émoussait la perception de la distance, "fondant" l'ensemble des composantes en un voisinage rejeté à la périphérie de l'espace subjectif (carte 10; coin N.W.).

Ici, la formalisation devient très simple :

si  $O$  point-origine ( $O \in E_S$ ),  $\forall x, y, z \in E_{S^3}$  :  $d_{S_{\vec{x},y}} = d_{S_{y,z}} = d_{S_{x,z}} = 0$

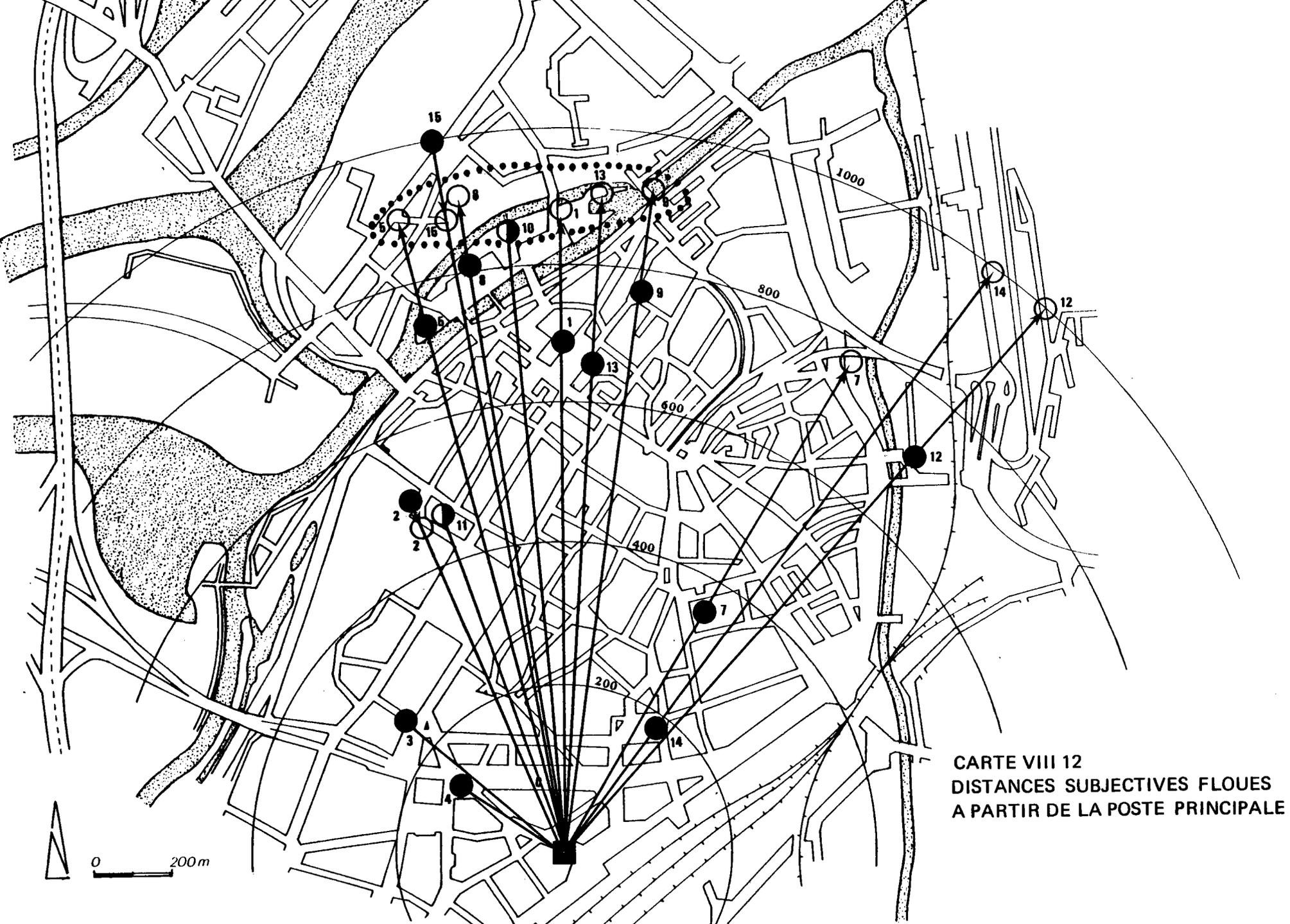
$$\text{et} \quad d_{S_{0,x}} = d_{S_{0,y}} = d_{S_{0,z}} \simeq 1$$

Ces notations rejoignent l'expérience triviale de l'observation d'un paysage : dans un premier temps, une perception spontanée distingue un *ensemble* d'éléments spatiaux, ce n'est qu'ensuite que la perception active, analyse le paysage et recrée ainsi la "profondeur" du paysage.

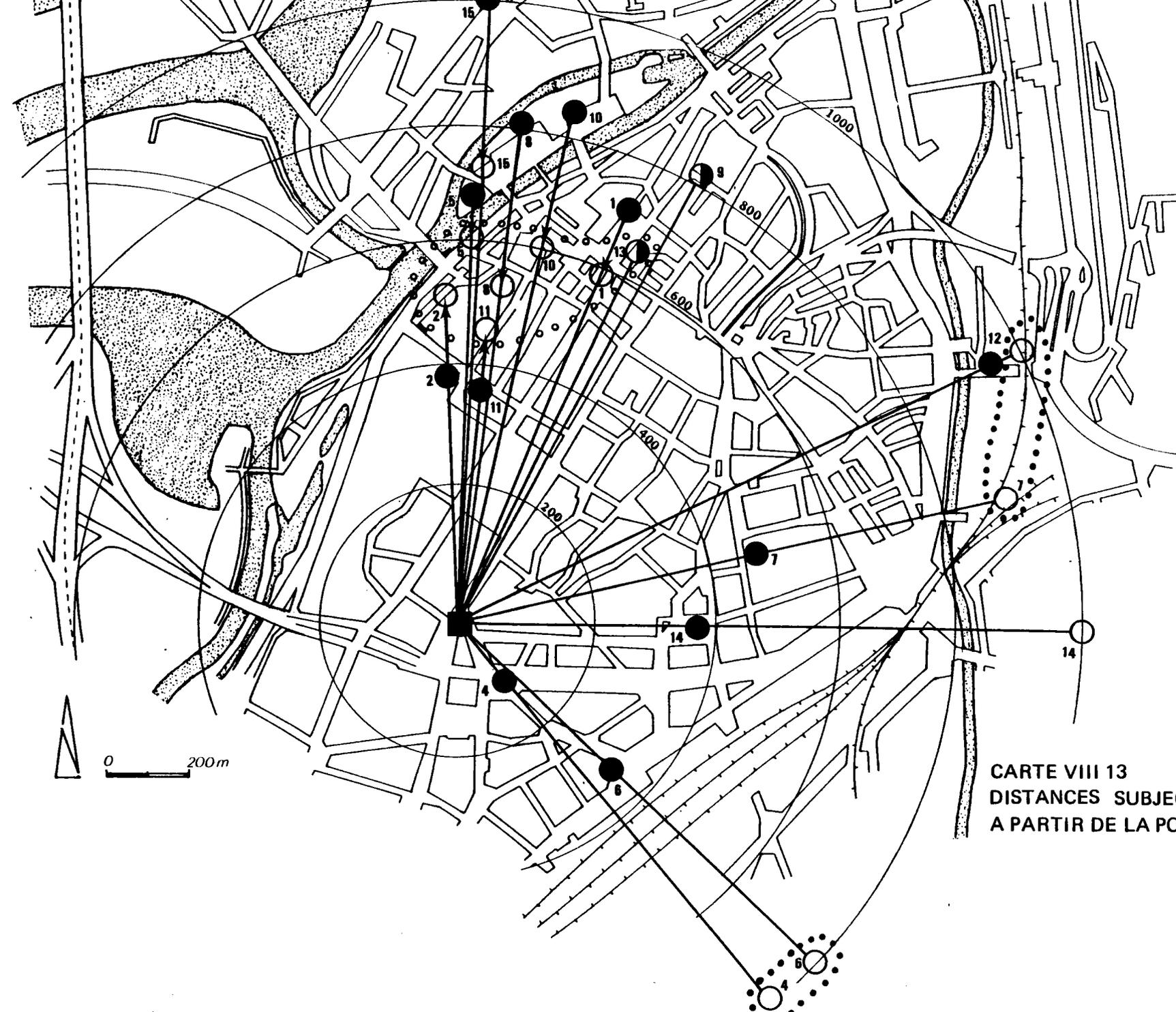
L'utilisateur ne perçoit plus les espaces qui séparent les uns des autres les éléments très éloignés ; il les confond en quelque sorte en un ensemble indifférencié. Ainsi, pour le Messin arrivé à la "Porte des Allemands", la Cathédrale, la Préfecture, le Théâtre semblent être également "loin" sans que ce dernier prenne en compte les distances qui séparent ces éléments entre eux.

3.2. L'effet de voisinage proche (carte 15, quart S.W. ; carte 9, moitié N.). Quand les composantes sont relativement proches du point-origine, ou que celui-ci est plus central, la perception des distances tend, là encore, à s'uniformiser. Il s'agit alors d'un voisinage proche, dont la distance subjective au point-origine est variable selon les cas, mais respecte souvent la distance géographique de la composante la mieux perçue de l'ensemble. Tout se passe comme si la perception cristallisait autour de ce "noyau" toute l'information contenue dans un environnement plus ou moins large.

Formalisons cette notation.



CARTE VIII 12  
DISTANCES SUBJECTIVES FLOUES  
A PARTIR DE LA POSTE PRINCIPALE



CARTE VIII 13  
DISTANCES SUBJECTIVES FLOUES  
A PARTIR DE LA PORTE SERPENOISE

Dans ce cas, avec  $E_S$  espace subjectif

$d_S$  distance subjective entre deux points

$\mu_{E_S}(x)$  fonction d'appartenance de la composante  $x$  à l'espace subjectif

si  $0$  point-origine ( $0 \in E_S$ )

$$\forall x, y, z \in E_S^3$$

avec

$$\mu_{E_S}(x) > \mu_{E_S}(y)$$

et

$$\mu_{E_S}(x) > \mu_{E_S}(z)$$

alors

$$d_{S_{x,y}} = d_{S_{y,z}} = d_{S_{x,z}} = 0$$

et

$$d_{S_{0,x}} = d_{S_{0,y}} = d_{S_{0,z}} = 1 - \left[ n_c \wedge (\mu_{E_S}(0) \vee \mu_{E_S}(x)) \right]$$

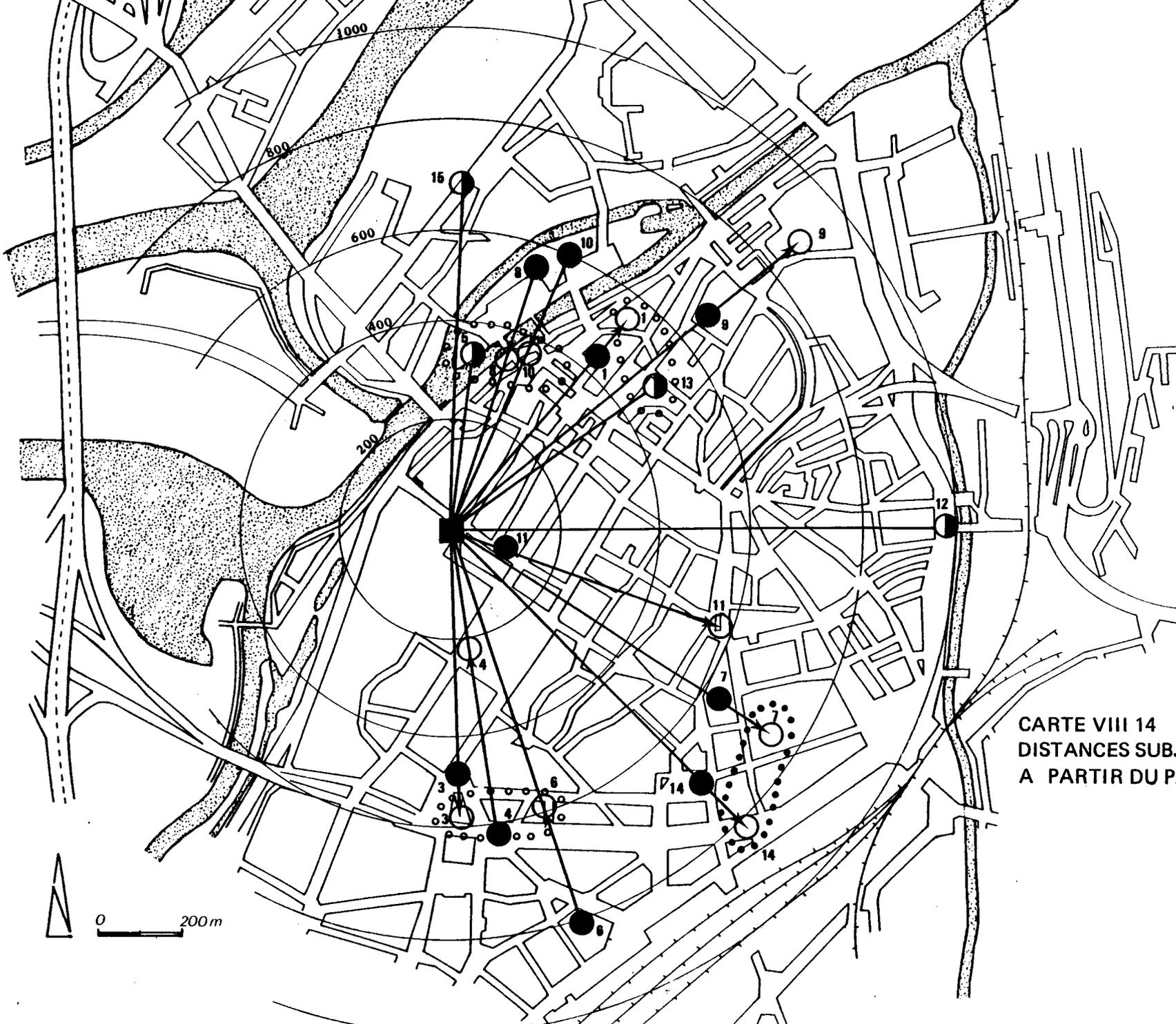
avec  $n_c$  : valeur de l'itinéraire le plus fort entre le point-origine et la composante  $x$ .

En d'autres termes, l'effet de voisinage proche a pour conséquence de "confondre" en un même sous-ensemble spatial perçu un certain nombre de composantes.

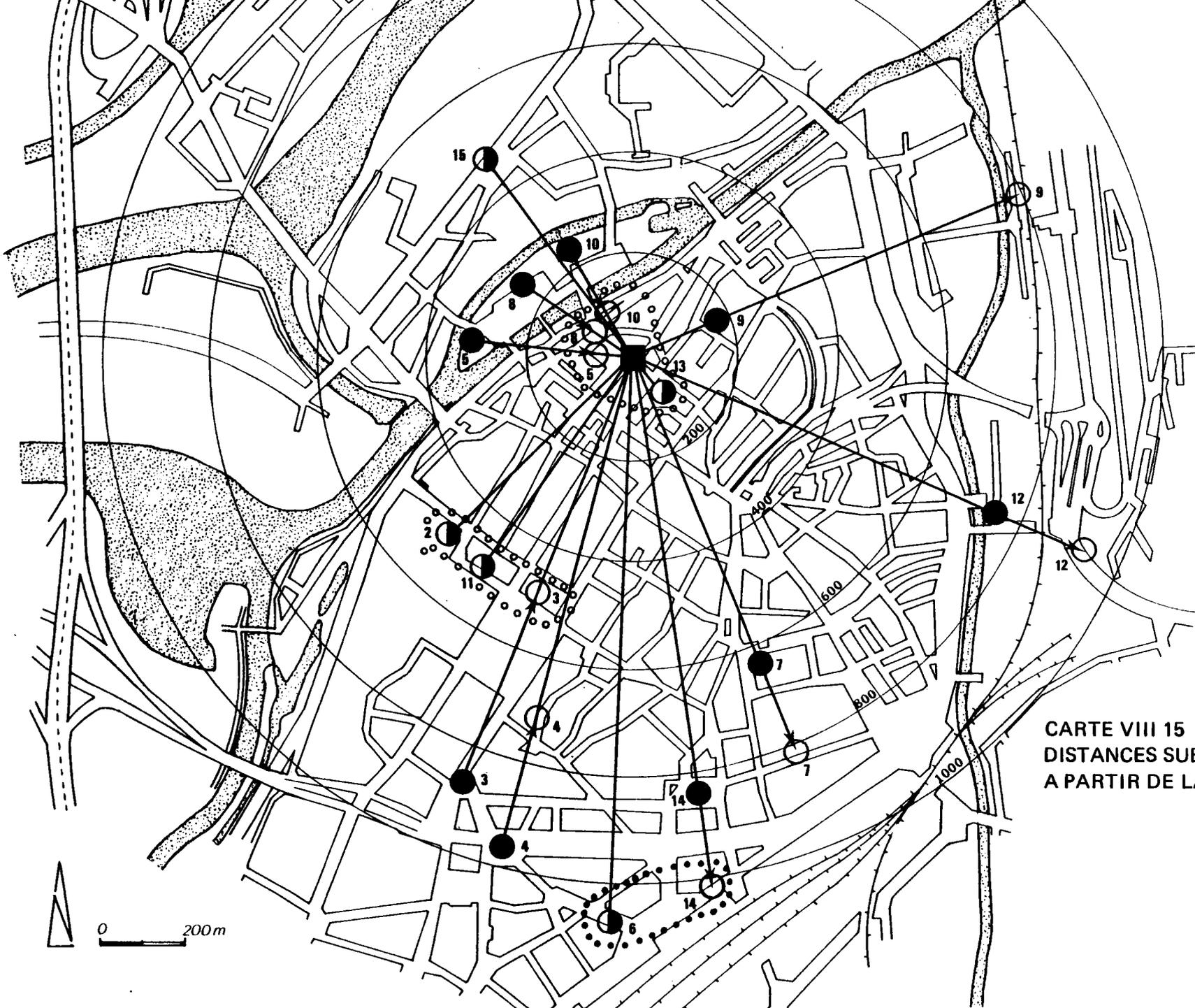
Ce sous-ensemble est à une distance subjective du point-origine (point d'observation) égale à la distance subjective entre le point origine et la composante spatiale la mieux perçue du sous-ensemble de voisinage proche.

3.3. Ainsi on peut qualifier le processus de perception spatiale comme un processus simplificateur de l'espace urbain. Ce n'est que dans une phase d'analyse et de réflexion que la perception devient un processus discriminant de l'espace géographique. Cette perception active devient celle du sujet "acteur" et non plus simple usager de l'espace.

Il y a donc bien d'abord phase de "filtrage" de l'information spatiale, aboutissant à ce processus de simplification entrepris incons-



CARTE VIII 14  
DISTANCES SUBJECTIVES FLOUES  
A PARTIR DU PALAIS DE JUSTICE



CARTE VIII 15  
DISTANCES SUBJECTIVES FLOUES  
A PARTIR DE LA CATHEDRALE

ciemment par chaque sujet selon des schémas mentaux qui lui sont propres, puis phase de "construction spatiale" où la participation active du sujet revient à discriminer, organiser, reconstituer l'information spatiale dans sa cohérence et sa logique géographique.

Nous chercherons à dégager dans le paragraphe suivant quelles sont les relations entre l'espace géographique et l'espace subjectif qui découlent de cette perception active du milieu géographique.

### C - RAPPORTS ENTRE ESPACE GEOGRAPHIQUE ET ESPACE SUBJECTIF COLLECTIF

Les études théoriques précédentes et l'étude de l'exemple montrent que l'espace géographique conditionne très largement l'élaboration de l'espace subjectif.

A l'inverse, ce dernier oriente le comportement des individus et des groupes, et partant, leur action sur leur espace vécu et perçu. Il existe donc des relations réciproques entre les deux termes de ce binôme. Dans ce qui suit nous essayons d'en présenter des expressions générales susceptibles de s'appliquer à d'autres exemples que le nôtre et de fournir une base de réflexion à tout travail cherchant à modifier ou aménager l'espace géographique urbain.

#### I - Les facteurs géographiques de l'espace subjectif collectif

Nous avons évoqué dans le premier travail la perception "sélective" des repères, des cheminements, du quartier de résidence ou de travail, de l'espace d'usage, quel que soit cet "usage". Tous ces éléments ont pour particularité d'attirer le regard et l'attention, en *marquant l'espace* en en individualisant des portions plus ou moins étendues.

Les données peuvent être généralisées en dégageant trois facteurs géographiques de l'espace subjectif :

##### 1. La lisibilité de l'espace géographique

Que ce soit une composante isolée ou un ensemble de

composantes, ce terme implique une structure claire, visible et nette (églises, cathédrale, monuments, places...) perceptible sans hésitation ni ambiguïté soit du fait d'une longue pratique de l'espace vécu (quartier), soit du fait de sa cohérence interne (plan de quartier cohérent, où l'on "s'y retrouve" sans problème). Il y a dans ce cas concordance entre la lisibilité du paysage urbain et les schémas logiques propres à chaque groupe ou à chaque collectivité.

Il s'agit donc bien *d'une lisibilité relative* :

- au niveau individuel : chacun "lira" son quartier, qui paraîtra incohérent ou impénétrable à d'autres que lui

- au niveau collectif : chaque groupe ou collectivité "lira" sa ville, qui paraîtra incohérente ou impénétrable à d'autres groupes (exemple pour un Européen des médinas des villes arabes (LCWY, 1975).

A l'inverse, un espace confus, *relativement* à un individu ou à un groupe sera non perçu ou imparfaitement perçu.

## 2. La variété de l'espace géographique

Effectivement, un espace lisible, mais uniforme est mal perçu ; les exemples des ZUP périphériques aux grandes villes, ou des lotissements pavillonnaires prouvent que de tels espaces sont à la fois mal perçus et mal vécus. A l'inverse un espace de centre-ville où s'alternent commerces divers, services, équipements de loisirs, sera perçu dans toute sa diversité.

D'un façon générale la variété de l'espace géographique, en juxtaposant des types de composantes diverses, en proposant des fonctions diverses, suscite une attention et une perception toujours en éveil, du moins pendant la période de "perception active". Au-delà de cette période, l'attrait même de la variété s'émousse et apparaît l'"effet de voisinage proche" évoqué plus haut. L'utilisateur devient "habitué" et ne perçoit plus l'espace dans lequel il vit. Il s'agira alors, pour voir renaître la perception active, de procéder à des actions concertées ; animations de quartier, semaines commerciales, visites guidées et commentées sont les réponses "collectives" à cette usure de la perception ;

renouvellement des vitrines, réaménagement de magasins et bureaux en sont des réponses individuelles ; modification de plans de circulation ou sur-signalisation routières contribuent à cette action en modifiant le réseau de communication.

### 3. L'organisation de l'espace géographique

Un espace lisible et varié dans ses composantes peut n'être pas bien perçu s'il n'est pas organisé, c'est-à-dire structuré en un ensemble hiérarchisé, de rues ou d'axes de circulation, de nœuds et carrefours, de flux de circulation ou, sur le plan psychosociologique de secteurs à signification symbolique plus ou moins forte (notion de coquilles emboîtées de MOLES et ROHMER (1978)). Ainsi s'explique le cas déjà évoqué de la composante "insulaire" de la Place Saint Thiébault. Cette place, très belle et bien aménagée est intégrée dans un système de circulation complexe où l'automobiliste circule alternativement dans de petites rues étroites, des portions de grands axes, contourne une placette exigüe et encombrée, traverse le boulevard circulaire etc... Système en apparence incohérent et peu compréhensible. Manque de lisibilité et inorganisation contribuent à isoler complètement la place des itinéraires qui y mènent.

Ces trois facteurs géographiques conditionnent ainsi l'espace subjectif individuel et collectif. A l'inverse l'espace subjectif est un élément fondamental du comportement spatial individuel et collectif. Ce thème est l'objet du paragraphe suivant.

#### II - L'impact de la perception spatiale sur l'organisation de l'espace : signification géographique et sociologique

L'espace subjectif, structuré en formes fortes et faibles, en itinéraires bien ou mal perçus induit une structure géographique et sociologique de l'espace dans lequel nous vivons. A ce propos nous pouvons étendre à cet espace les conclusions énoncées par G.N. FISCHER à propos de l'espace industriel (1977).

## 1. Les espaces subjectifs faibles : des "espaces-refuges"

Ces espaces peu ou mal perçus du fait du manque de lisibilité, de variété ou d'organisation de l'espace géographique urbain sont à envisager sur les plans géographiques et sociologiques.

### 1.1. Ce sont des espaces répulsifs sur le plan géographique

La faible ou mauvaise perception spatiale, entraînant un allongement des distances subjectives, est telle que les grands courants de circulation ont tendance à les contourner ou, le cas échéant, à les traverser, en les considérant comme de simples espaces de passage et de transit.

Les activités et services de type urbain hésitent à s'y installer, de crainte de n'être pas repérés par la clientèle potentielle. Sur le plan économique ces quartiers présentent ainsi une *structure binaire* opposant quelques rares activités ou services très spécialisés pour lesquels les clients acceptent des déplacements plus longs et un effort de recherche de l'établissement dans un secteur inconnu, et les services courants (commerces d'alimentation, station-service...) destinés à la clientèle du quartier.

Cette structure géographique a tendance à se renforcer, amplifiant progressivement le processus de répulsion, accentuant de ce fait la mauvaise perception de l'ensemble, et renforçant la dépendance géographique de ces quartiers par rapport aux quartiers voisins, mieux structurés.

Au type ainsi décrit appartient toute la ceinture Est du centre-ville de Metz (quartier Outre-Seille, quartier du Rempart Saint Thiébauld). Cet espace périphérique au véritable centre-ville, associe cependant à la "pauvreté fonctionnelle" une variété sociologique remarquable.

### 1.2. Ce sont des espaces sociologiques originaux

G.N. FISCHER qualifiait les espaces mal perçus d'un établissement industriel d'*espaces poreux* : dans ces sec-

teurs peu structurés et peu exposés à l'attention s'épanouissait toute une vie anonyme mais intense, en marge de la vie officielle de l'usine et des activités qui y étaient faites.

Cette même constatation peut être faite dans le domaine de la géographie urbaine. Les quartiers urbains peu ou mal perçus ont en effet une fonction sociologique importante :

- de "refuge" d'une population anonyme un peu à l'écart de la vie urbaine "officielle". Il peut s'agir d'une population fuyant le centre-ville trop animé et bruyant pour chercher le calme de ces quartiers proches et pourtant isolés : population âgée, mais aussi certaines professions libérales, activités de service et bureau d'étude etc... Le quartier du Rempart Saint Thiébault est l'exemple le plus net de ce type.

Il peut s'agir également de groupes socio-ethniques trouvant refuge dans ces quartiers d'immigrés colonisant progressivement le quartier et renforçant le fait de "ghetto" bien connu dans les grandes villes.

- d'épanouissement d'activités de relation originales encore que peu officielles, qui mettent à profit la mauvaise perception spatiale pour créer des structures sociologiques variées et souvent une "vie de quartier" qui surprend et ravit le visiteur de passage.

Il est donc nécessaire, lors de la rénovation de ces espaces, de tenir compte de cette réalité sociologique et de ne pas s'attarder uniquement sur le vide fonctionnel de ces espaces.

## 2. Les espaces subjectifs forts : des "espaces-vitrines"

Ces secteurs fortement perçus sont des secteurs attractifs, véritables "vitrines" de l'organisme urbain, où tendent à s'exposer les activités, les personnes, les groupes socio-économiques qui, pour des raisons ou d'autres ont littéralement besoin de cette façade urbaine. L'espace subjectif fort de centre-ville se caractérise ainsi par une accumulation, sur une faible surface, d'activités très variées qui profitent ainsi de l'effet de voisinage proche décrit plus haut.

Cette structure forte tend, elle aussi à se renforcer, car à

mesure que s'accroît cette accumulation de fonctions diverses, se renforce la perception spatiale qui contribue à son tour à renforcer le phénomène de centre-ville.

Ainsi les structures de l'espace subjectif et de l'espace géographique interfèrent étroitement. L'évolution prévisible est une accentuation des différences entre espaces forts et faibles et l'apparition d'un gradient de plus en plus fort du premier au second. La connaissance de l'espace subjectif est donc un outil indispensable pour tirer partie de ces structures ou les modifier.

Nous abordons là le rôle de l'espace subjectif dans la géographie applicable et l'aménagement.

## CONCLUSION DU CHAPITRE VIII

De l'application du modèle de valuation aux cartes mentales relatives au centre-ville de Metz, une conclusion essentielle s'impose, à savoir la grande "distance" entre l'"espace géographique", celui des cartes, des plans, des études géographiques "classiques", et l'espace subjectif, individuel et collectif.

Cette notation est fondamentale : elle nous rend sensible que les analyses macrogéographiques peuvent, et doivent, être complétées par des études microgéographiques du type de celle que nous avons esquissée.

Il ne s'agit pas, loin de là, de se complaire dans un réductionnisme ou une analyse du fait géographique anecdotique ou accidentel, mais bien d'enrichir les deux niveaux d'étude par la mise en évidence des structures profondes qui en réalisent l'unité.

Cette préoccupation n'est pas seulement d'intérêt scientifique. Elle sert aussi à un vaste champ d'applications très diverses. Citons trois thèmes parmi beaucoup d'autres possibles :

### 1. Espace subjectif et prix du sol urbain

De l'espace subjectif fort, où le prix du sol est très élevé car la concurrence est effrénée pour la localisation d'entreprises commerciales ou de services soucieuses de bénéficier de l'effet de voisinage proche, à l'espace subjectif faible, on peut noter une relation directe entre la fonction d'appartenance des composantes spatiales et les prix du sol. Cette relation devra être définie en un modèle dont les termes seront à préciser.

Bien plus, une observation attentive de la cartographie des espaces subjectifs fort et faible, et surtout de la frange d'indétermination permet de définir les secteurs urbains où, au-delà des "points d'attente", la mobilité foncière aura tendance à s'accroître, en même temps que la montée du prix du sol. Nous disposons ainsi d'un outil quantitatif et cartographique susceptible de renseigner, de prévoir ou

d'anticiper sur les mouvements de prix du sol et, éventuellement de le contrôler.

## 2. Espace subjectif et localisation d'entreprises urbaines

Dans cet espace relativement restreint et encombré qu'est un centre-ville, les lois économiques de localisation d'entreprises, liées en particulier au coût du transport doivent être complétées par l'étude de l'espace subjectif. Il semble évident qu'une entreprise commerciale s'installant à un emplacement mal perçu par un groupe ou une collectivité susceptible de fournir les clients potentiels, devra investir en actions publicitaires diverses des sommes bien supérieures à une entreprise concurrente située dans un espace subjectif fort. Une bonne connaissance préalable, et des caractères socio-économiques de la population-cible et du degré de perception de l'espace est indispensable sous peine, comme on le constate souvent, de voir l'entreprise périr rapidement.

## 3. Espace subjectif et aménagement

Cette même réflexion est valable pour l'aménagement qui risque de voir échouer une entreprise mal intégrée dans un espace mal perçu et condamnée de ce fait à l'échec.

Mais, en second lieu, l'espace subjectif doit aussi servir de base de réflexion à une action planifiée d'aménagement urbain : action de freinage ou d'atténuation des processus cumulatifs qui renforcent les structures fortes et creusent encore plus les structures faibles, conservation des fragiles équilibres sociologiques des structures faibles tout en planifiant une action de réhabilitation de ces espaces, contrôle des processus spontanés de conquête spatiale aux dépens de ces derniers.

Le champ d'action est vaste pour l'aménageur, mais il doit, pour réussir, c'est-à-dire pour modifier le système urbain tout en gardant ses structures, s'appuyer sur une étude approfondie des espaces subjectifs qui apportent une information aussi fondamentale que les

données démographiques et socio-économiques relatives au milieu sur lequel il veut agir.

Dans cette perspective d'applications concrètes à l'aménagement de l'espace géographique, l'intérêt du modèle peut enfin se résumer en deux caractères fondamentaux. D'une part il permet *une vision spatiale dynamique* en ce sens que les structures mises en évidence évoluent selon la familiarité plus ou moins grande, voire l'"intimité" qui existent entre un sujet ou un groupe et l'espace dans lequel ils vivent. Son étude ouvre donc la voie à des appréciations quantitatives de l'évolution des rapports homme-espace, à la mise en évidence des phénomènes d'intégration ou de rejet spatiaux et à des travaux comparatifs intéressants.

D'autre part il offre une *expression globale* du milieu géographique, un indicateur synthétique qui exprime à la fois les facteurs externes du milieu et les facteurs humains très difficiles à appréhender par ailleurs. A la fois individuels et collectifs, liés à un moment précis, mais surtout reflétant tout un acquis socio-culturel parfois inconscient, de la collectivité étudiée, ces facteurs sont "résumés" en ensembles subjectifs où "les multiples écritures géographiques des hommes" s'ordonnent et s'organisent sur un plan unique : celui de la carte mentale.

## CONCLUSION DE LA DEUXIEME PARTIE

L'analyse spatiale nous amène à travailler sur des *documents géographiques* relatifs à l'espace, cadre de notre étude. Nous définissons ces documents par l'expression d'espaces géographiques représentés.

Ces derniers seront dits objectifs si le passage entre l'information spatiale et sa représentation se fait sans imprécision ni ambiguïté. Par le choix d'une échelle appropriée, de codes précisés au moment de l'élaboration du document, il sera toujours possible au chercheur de passer sans trop de difficulté de l'espace représenté à l'espace géographique.

La question est plus complexe si nous sommes en présence de ce que nous appelons des espaces représentés flous, où l'information géographique est imprécise, lacunaire, déformée, sans que le chercheur dispose toujours d'une "clé" d'interprétation. Le cas est surtout posé dans l'étude des espaces subjectifs, de quelque nature qu'ils soient (cartes mentales, évocations littéraires ou orales d'un paysage etc.).

Dans les deux cas évoqués, la tâche du géographe est la suivante : comment, à partir d'un espace géographique représenté, déduire l'organisation spatiale, dégager les caractères de l'espace géographique ?

En d'autres termes, comment, à partir d'un document flou, c'est-à-dire imprécis et -ou- incertain, dégager les caractères originaux d'un espace géographique qui n'est lui-même pas forcément précis et certain. Cette question est loin d'être uniquement théorique : elle se pose dans la photo-interprétation, elle doit surtout être posée au moment de l'étude des espaces subjectifs : comment un citadin voit-il sa ville, un ouvrier son atelier ou son usine, comment un Européen voit-il son continent, les autres pays, quelle est sa "vision" de la planète ? Analyser avec des moyens adéquats de telles représentations spatiales expliquerait peut-être bien des comportements, des attitudes, des sensibilités ou des indifférences qui pourraient sembler incohérentes ou du moins curieuses.

Nous voulons ainsi souligner que l'utilisation de méthodes d'analyse spatiale "classiques" quantitatives ou non, ne s'appliquent qu'*aux cas très particuliers d'espaces représentés objectifs dont on cherche à déduire une structure précise et certaine de l'espace géographique.*

Il nous semble donc utile de proposer quelques modèles de traitement des espaces représentés. Ils font largement appel à la théorie des sous-ensembles flous et plus particulièrement à la théorie des possibilités. Ils présentent l'intérêt de proposer quelques solutions au problème que nous posons. Ils doivent être envisagés comme des éléments de réponse à la préoccupation du géographe, qui est d'expliquer la structure géographique pour mieux comprendre et expliquer le comportement de l'homme.

## CONCLUSION GENERALE

Dans notre travail nous avons proposé l'expression d'espace géographique flou et mené une approche, à la fois géographique, formelle et méthodologique de cette notion. Nous l'avons complétée par l'idée d'espace représenté, objectif ou flou, et défini la démarche d'analyse qui part du document géographique pour dégager l'organisation floue de l'espace.

L'utilisation de la théorie des sous-ensembles flous a permis de formaliser, puis de traiter tous les problèmes relatifs à l'imprécision et à l'incertitude spatiales, en d'autres termes d'offrir un support théorique à la fois précis, rigoureux et suffisamment général pour que les espaces géographiques non flous n'apparaissent plus que comme des types particuliers d'espaces définis de façon plus large.

L'intérêt d'une telle démarche, dont le présent travail ne représente en fait qu'une première approche, nous semble très prometteur, et ce à plusieurs points de vue.

En premier lieu, elle élargit le domaine scientifique géographique en y incluant tous les espaces qui, jusqu'à présent, étaient considérés comme trop vagues, flous, confus pour faire l'objet d'une analyse quantitative. Nous pouvons *valuer* un sous-ensemble flou, ce qui veut dire, dans le domaine qui nous concerne, qu'à un espace flou on peut désormais associer une mesure floue de son imprécision, de son incertitude, voire même d'associer les deux notions. Le domaine scientifique ne se limite donc pas au mesurable, mais peut, bel et bien, intégrer le qualitatif, le subjectif, tout ce qui fait la richesse et la complexité d'un document géographique.

Il s'ensuit que cette démarche se prête à de multiples applications : la géographie appliquée, l'aménagement, toute activité concernant l'organisation spatiale, sont soucieuses de définir à la fois formellement et concrètement l'espace, support de l'action de l'homme. Cet espace n'est le plus souvent ni précis, ni même parfaitement connu.

Il l'est d'autant moins si c'est un espace subjectif vu à travers le "filtre" propre à chaque individu ou à chaque collectivité. Le définir, l'étudier comme un espace géographique flou, prévoir selon le degré d'imprécision l'action à entreprendre est chose, sinon aisée, du moins parfaitement réalisable, nous l'avons vu. Notre démarche devrait donc intéresser autant le géographe théoricien que le décideur, car elle nous semble avoir le mérite de permettre une expression à la fois simple, formalisée et concrète de l'espace qui les intéresse tous deux.

La tâche est cependant loin d'être terminée : nous pouvons multiplier, affiner les modèles de traitement et la démarche d'analyse spatiale, chercher à appliquer nos modèles à d'autres types d'espaces que ceux que nous avons traités.

Il reste surtout à élargir notre sujet : dans cet espace flou, quel est le comportement de l'homme ? Agit-il toujours rationnellement, pesant soigneusement le pour et le contre d'une décision, prise de façon objective, prévisible, modélisable ? N'a-t-il pas, dans ce cadre de vie flou, un *comportement flou* ?

La question est d'importance ; le géographe encore plus que l'économiste, conscient de la relativité spatio-temporelle de l'action de l'homme sur l'espace, se doit d'y réfléchir, abordant ainsi un très vaste domaine où le flou ne concerne plus seulement l'espace, mais l'homme qui y vit, y agit, le subit et lui imprime sa marque tout à la fois.

Porte ouverte vers de vastes perspectives de recherche : en fait, comme le note KAUFMANN (1983), le flou...

"procédure commode pour aborder ce qui se situe dans l'imprécis, dans l'incertain, dans la pensée naturelle, dans le subjectif ; c'est là que se situe l'aventure humaine".

Cette aventure, nous l'avons à peine abordée, nous espérons la continuer, nous espérons surtout que d'autres géographes, mieux que nous, plus loin que nous, la mèneront.

ANNEXE I : Approche de l'imprécision spatiale  
par des méthodes géographiques "non floues".

A. Approche par une méthode d'analyse de données.

- I a : Liste des variables utilisées dans l'analyse de données.
- I b : Graphe de corrélation des variables.
- I c : Représentation du premier plan factoriel.
- I d : Cartographie de la première composante principale.
- I e : L'urbanisation du Pays Messin : l'approche du flou par un modèle spécifique.

B. Méthodes graphiques d'approche de l'imprécision spatiale.

- II a-d : Les étapes d'ordonnancement de la matrice graphique.
  
- III : Etude d'un exemple (VIALLE-ROSENBERGER 1976).
- III a : Structure de la matrice graphique ordonnée.
- III b : Typologie spatiale.

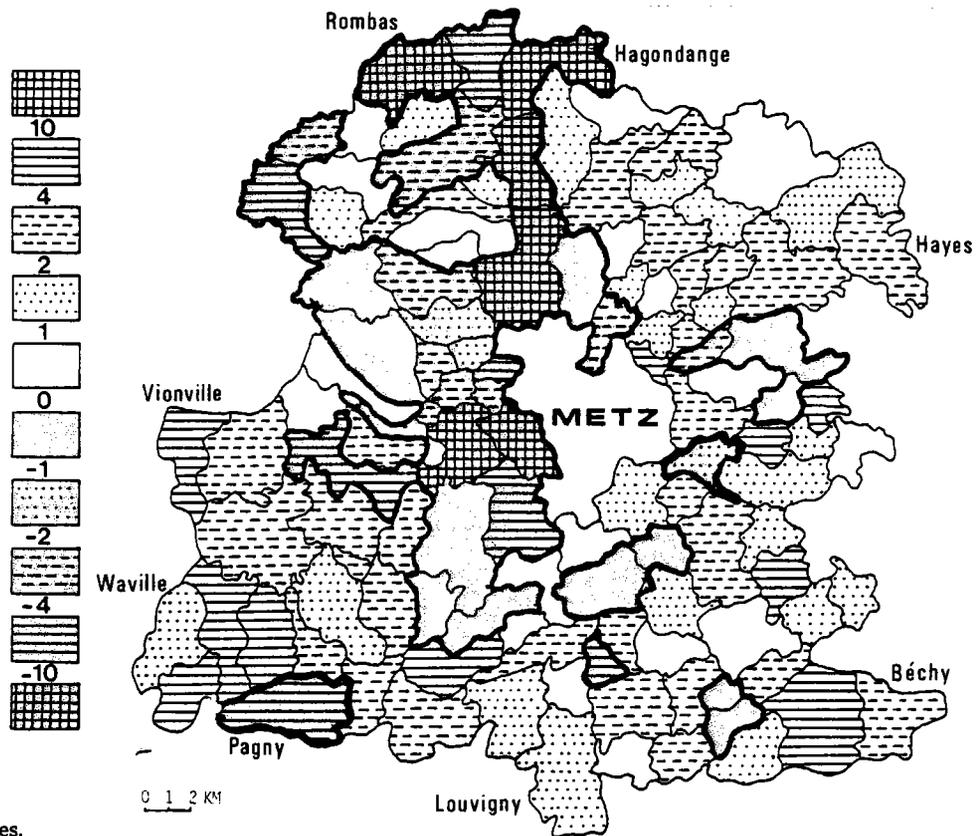
Documents I - L'analyse des données et la mise en évidence de l'im-  
précision spatiale. (d'après ROLLAND-MAY, L'urbanisation  
du Pays Messin, 1978).

I a. Liste des variables utilisées dans l'analyse des données.

numéro	nom, unité, périodé
<i>groupe 1 variables de position</i>	
1	superficie (km <sup>2</sup> )
2	altitude (m)
3	distance à Metz (km)
<i>groupe 2 variables démographiques</i>	
4	évolution de la population (%) 1954-1962
5	solde migratoire (%) 1954-1962
6	excédent naturel (%) 1954-1962
7	densité (hab./km <sup>2</sup> ) 1962
8	évolution de la population (%) 1962-1968
9	densité (hab./km <sup>2</sup> ) 1968
10	population totale (hab.) 1968
11	natalité (‰) 1962-1968
12	mortalité (‰) 1962-1968
13	excédent naturel (‰) 1962-1968
14	solde migratoire (% pop. tot.) 1962-1968
15	moins de 20 ans (% pop. tot.) 1968
16	20-65 ans (% pop. tot.) 1968
17	plus de 65 ans (% pop. tot.) 1968
18	enfants de moins de 16 ans (par ménage) 1968
<i>groupe 3 structure socio-professionnelle</i>	
19	population active : taux d'activité (% pop. tot.) 1968
20	population active féminine (% pop. act.) 1968
21	agriculteurs (% pop. act.) 1968
22	ouvriers (% pop. act.) 1968
23	cadres moyens (% pop. act.) 1968
24	employés (% pop. act.) 1968
25	profes. libérales, cadres sup. (% pop. act.) 1968
26	patrons de l'industrie et du commerce (% pop. act.) 1968
<i>groupe 4 variables de niveau de vie</i>	
27	étudiants de plus de 16 ans (par ménage) 1968
28	logements avec bain ou douche (%) 1968
29	logements construits après 1962 (%) 1968
30	variation du nombre de résidences (%) 1962- 1968
31	nombre d'occupants par logement (%) 1968
32	variation de ce nombre (%) 1962-1968
33	nombre de voitures (par hab.) 1968
34	nombre de téléphones (par hab.) 1968
<i>groupe 5 variables d'activités</i>	
35	exploitations agricoles de moins de 5 ha (% total) 1968
36	idem, spécialisées (% total) 1968
37	établissements de travail des métaux (nombre) 1968
38	bâtiment et travaux publics (nombre) 1968
39	industries de transformation (nombre) 1968
40	établissements financiers (nombre) 1968
41	établissements de transports (nombre) 1968
42	établissements de commerce de gros (nombre) 1968

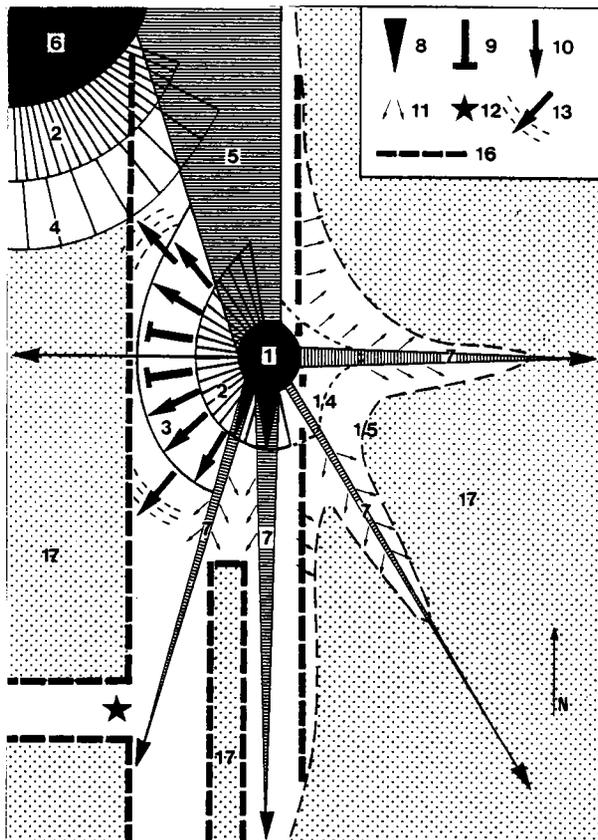


I d. Cartographie de la première composante principale : un espace urbanisé flou et discontinu (poids locaux standardisés)



Poids locaux en écarts-types.

I e. L'urbanisation du Pays Messin : l'approche du flou par un modèle spécifique.



*Type d'occupation du sol :* 1. Centre-ville et sa périphérie immédiate. -2. Urbanisation dense. -3. Urbanisation lâche de type résidentiel. -4. Zone dortoir. -5. Espace mixte d'urbanisation, industrialisation et échange. -6. Bassin sidérurgique.

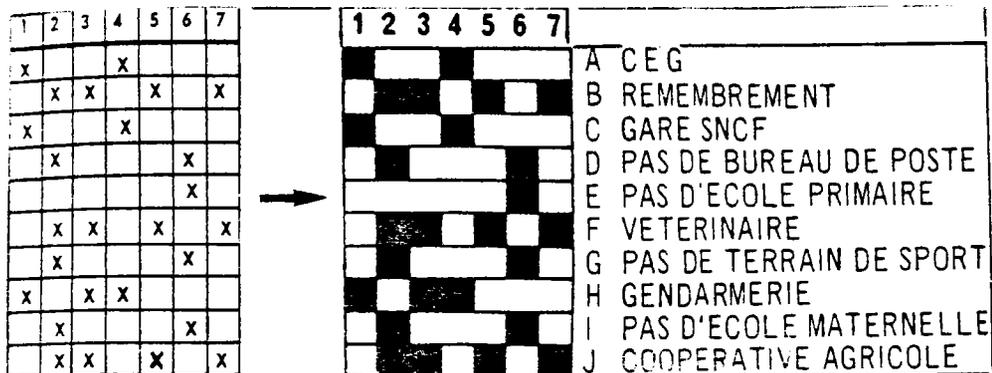
*Processus de diffusion :* a. axial. 7. Axe d'urbanisation général. -8. Progression du centre-ville. b. aréolaire. 9. Expansion en cours de type résidentiel bloquée. -10. Id., en cours. -11. Diffusion latérale à partir des axes. c. ponctuelle. 12.

*Fronts :* 13. Front local de métamorphisme péri-urbain. -14. Front urbain (à l'intérieur de la commune de Metz). -15. Front général de métamorphisme péri-urbain.

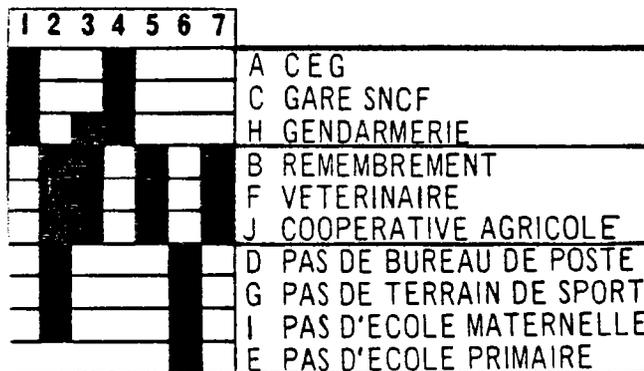
*Résistances :* 16. Linéaire (barrière naturelle ou foncière). -17. Espace rural.

II . Les étapes de constitution d'une matrice graphique ordonnée d'après GRONOFF (1971).

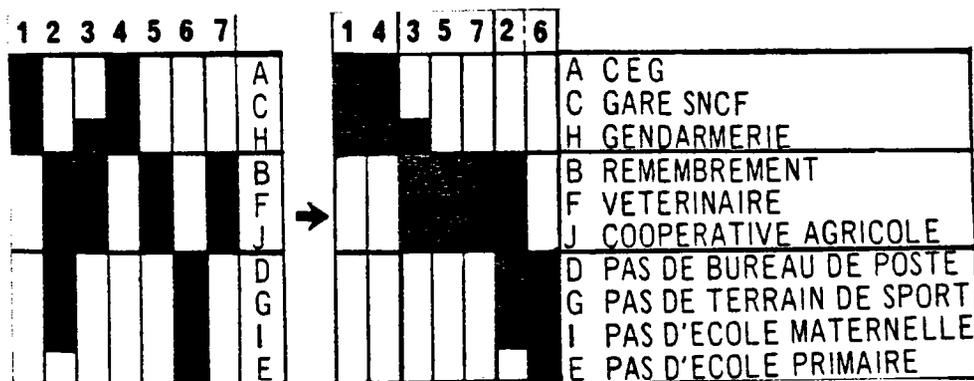
II a.



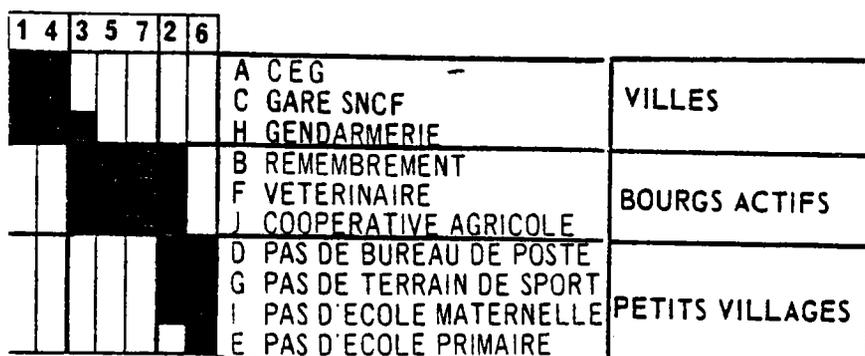
II b.



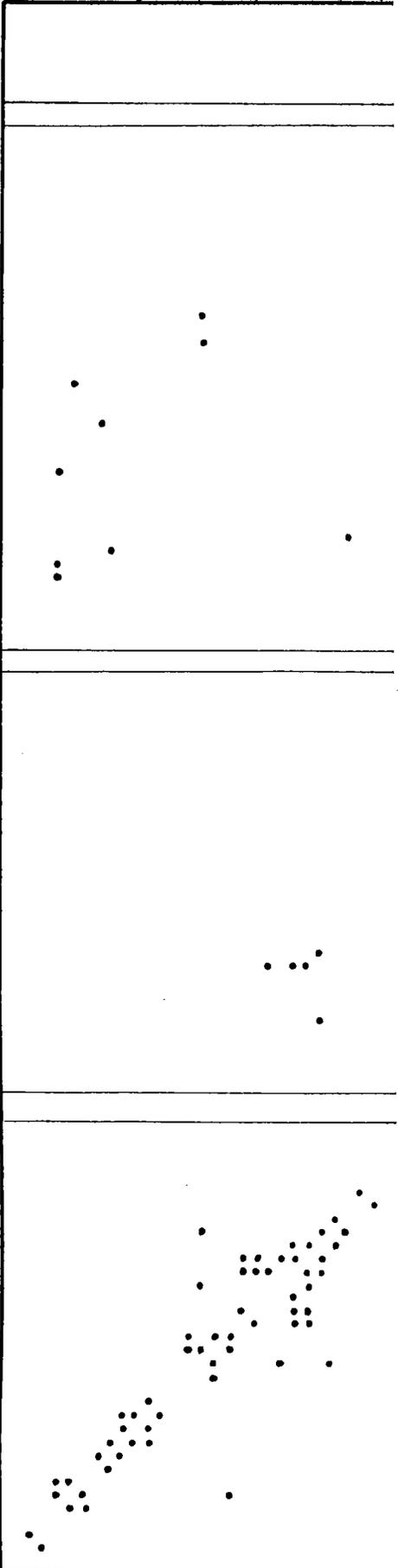
II c.



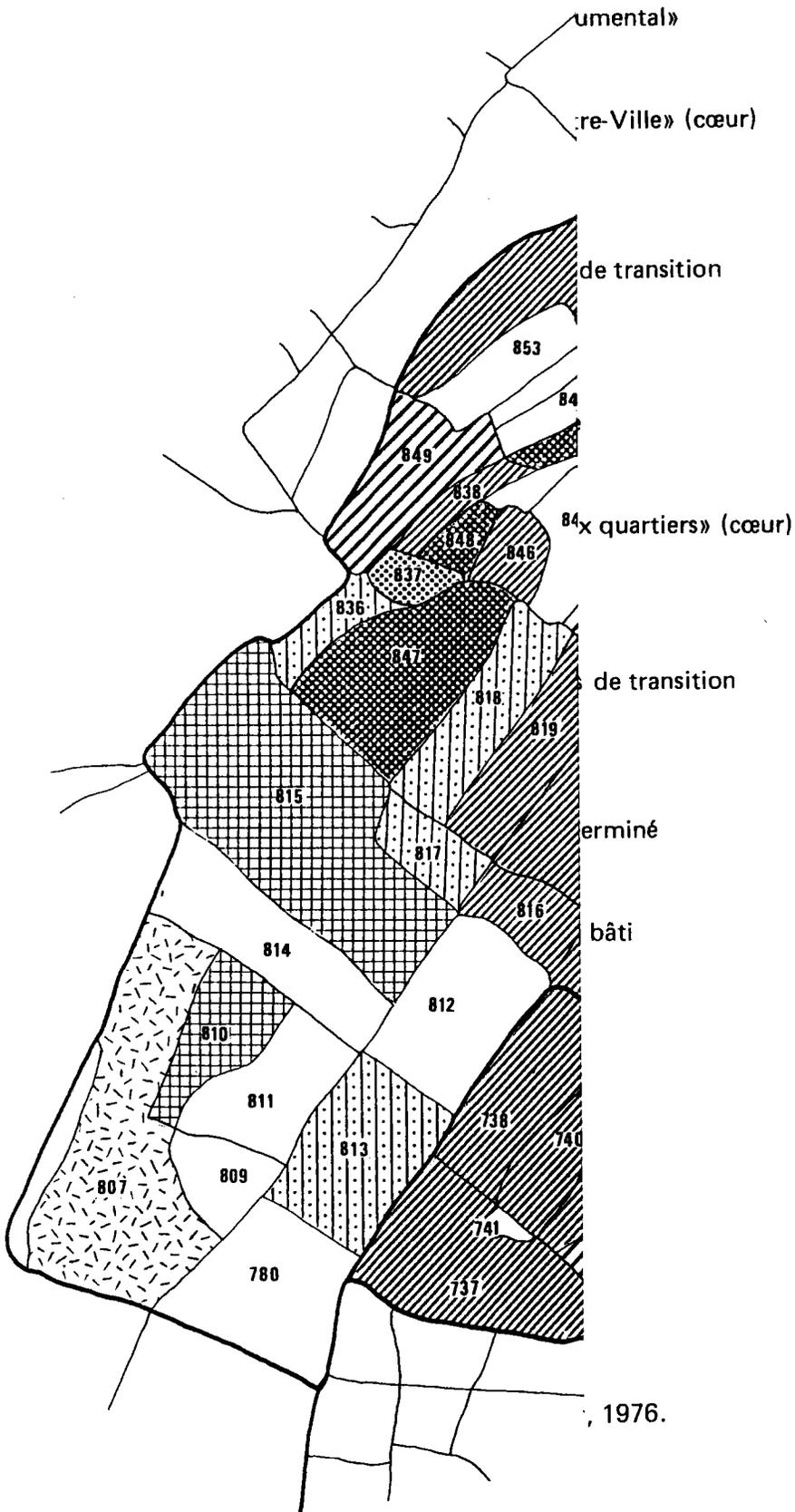
II d.



Handwritten text at the top of the page, possibly a header or title, oriented vertically.



PATIALE D'APRES LA METHODE GRAPHIQUE.  
= VILLE DE METZ



ANNEXE II - Les treillis : définitions et types de treillis.

(KAUFMANN, 1973)

A. Définition

Soit un ensemble ordonné  $\underline{M}$ .

$\underline{M}$  est un treillis si

$$\forall x_i \in \underline{M}, \forall x_j \in \underline{M}$$

$$\exists! x_k = x_i \Delta x_j$$

$$x_l = x_i \nabla x_j$$

où  $\Delta$  représente la borne inférieure de  $\{x_i, x_j\}$

$\nabla$  représente la borne supérieure de  $\{x_i, x_j\}$

On démontre que, dans un treillis on a les propriétés (A, B, C,  $\in \underline{M}$ )

- de commutativité :

$$A \Delta B = B \Delta A$$

$$A \nabla B = B \nabla A$$

- d'associativité :

$$A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$$

$$A \nabla (B \nabla C) = (A \nabla C) \nabla C$$

- d'idempotence :

$$A \Delta A = A$$

$$A \nabla A = A$$

- d'absorption :

$$A \Delta (A \nabla B) = A$$

$$A \nabla (A \Delta B) = A$$

B. Différents types de treillis

1. Treillis modulaire

$\underline{M}$  est un treillis modulaire pour trois éléments quelconques

$x_1, x_2, x_3 \in \underline{M}$  si :

$$(x_1 \leq x_3) \implies \left( \begin{array}{l} x_1 \nabla (x_2 \Delta x_3) \\ = (x_1 \nabla x_2) \Delta x_3 \end{array} \right)$$

( $\leq$  symbole représentant la relation d'ordre du treillis)

## 2. Treillis distributif

Le treillis  $\underline{M}$  est distributif si les conditions suivantes sont satisfaites :

$$\forall x_i, x_j, x_k \in L$$

$$x_i \nabla (x_j \Delta x_k) = (x_i \nabla x_j) \Delta (x_i \nabla x_k)$$

$$x_i \Delta (x_j \nabla x_k) = (x_i \Delta x_j) \nabla (x_i \Delta x_k)$$

## 3. Treillis complémenté

3.1. Soit  $\underline{M}$  un treillis possédant un élément noté 0, borne inférieure du treillis, U borne supérieure du treillis.

$x_j$  est "complément" de  $x_i$ , ou  $\overline{x_i}$  si :

$$x_i \Delta x_j = 0$$

$$x_i \nabla x_j = U$$

3.2.  $\underline{M}$  est un treillis complémenté lorsque :

3.2.1. Il possède un élément unique  $0 = \text{INF}(\underline{M})$  et un élément unique  $U = \text{SUP}(\underline{M})$

3.2.2.  $\forall x_i \in \underline{M}$ ,  $\exists$  au moins un complément  $\overline{x_i}$  de  $x_i$ .

## 4. Treillis de BOOLE

4.1.  $\underline{M}$  est un treillis de BOOLE s'il est à la fois distributif et complémenté.

4.2. Propriétés d'un treillis de BOOLE :

4.2.1. Chaque élément a un complément et un seul

$$4.2.2. \overline{(\overline{x_i})} = x_i$$

4.2.3. Théorèmes de DE MORGAN :

$$\overline{x_i \Delta x_j} = \overline{x_i} \nabla \overline{x_j}$$

$$\overline{x_i \nabla x_j} = \overline{x_i} \Delta \overline{x_j}$$

## 5. Treillis vectoriel

5.1. Soit n ensembles A, B, ..., S, chacun totalement

ordonné par une relation d'inclusion.

Alors :

$\{A \times B \times \dots \times S\}$  est ordonné et la relation d'ordre est la relation de domination.

5.2. Tout treillis vectoriel est distributif, mais n'est pas complémenté.

5.3. Un treillis de BOOLE est un treillis vectoriel complémenté.

Annexe III. Types d'espaces géographiques représentés flous.

A. Espaces représentés flous à imprécision ou incertitude liées à des conditions techniques.

Document 1. Photographie aérienne par satellite de l'Europe Occidentale (1977).

Documents 2 à 6. Cartes du monde connu à différentes époques.

B. Espaces représentés subjectifs

Documents 7 à 11. Cartes mentales du Centre-Ville de Metz.

Document 12. Un espace subjectif décrit :

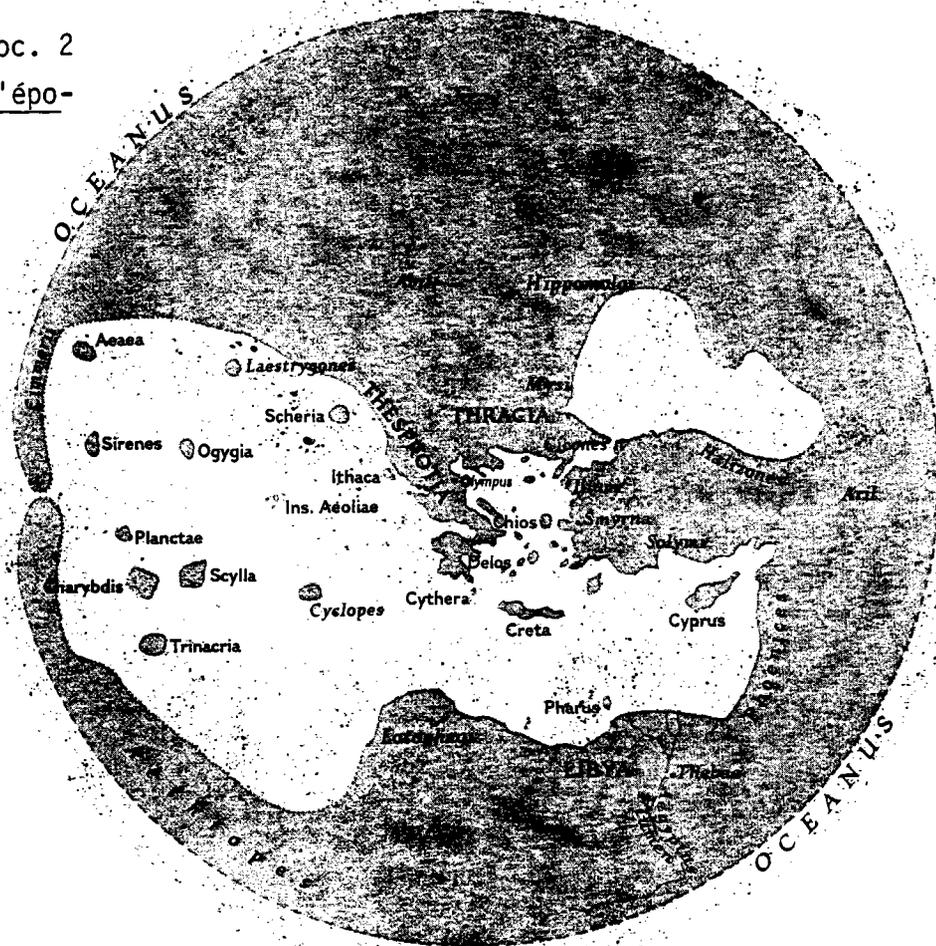
L'organisation de l'espace de circulation dans l'Empire Mongol d'après Marco Polo (fin XIIIe s.)

Annexe III. Document 1.

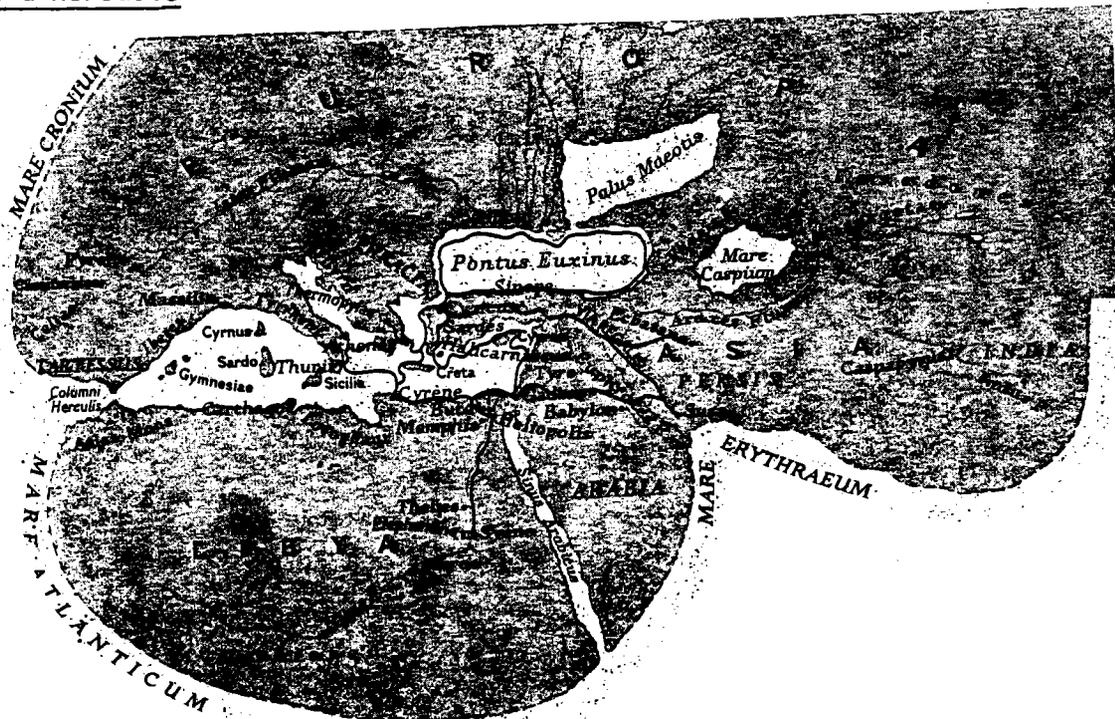
Photographie aérienne par satellite de l'Europe Occidentale.



Annexe III. Doc. 2  
Le Monde à l'épo-  
que d'Homère

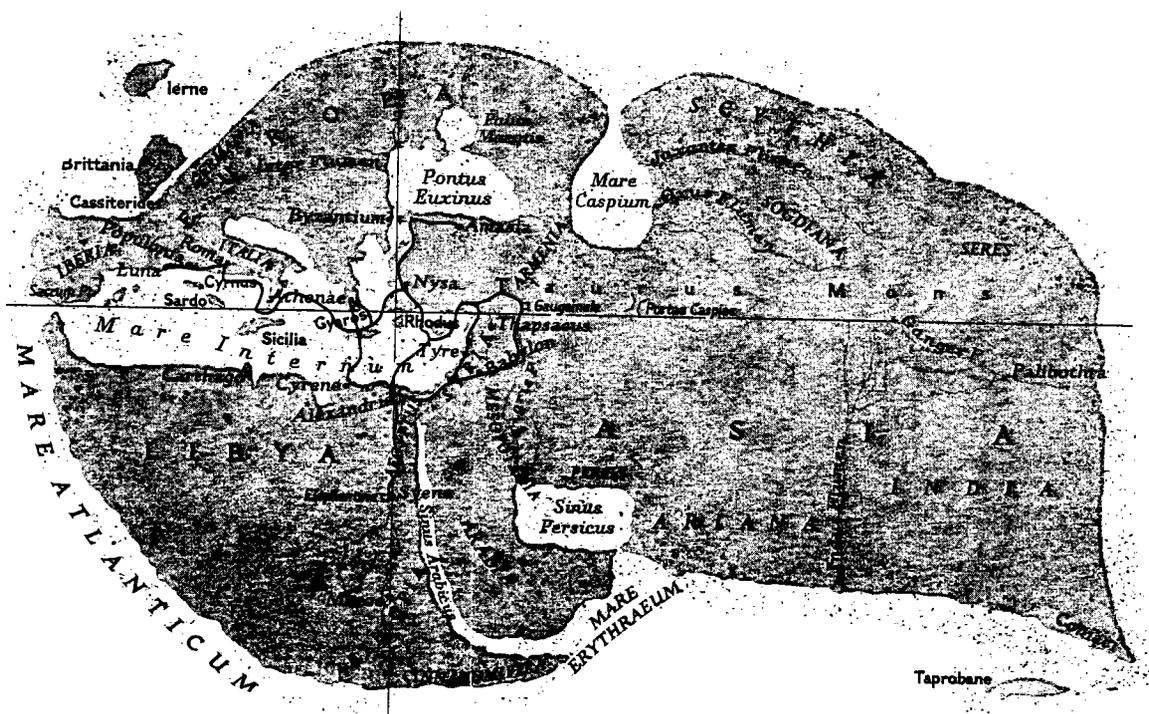


Annexe III. Doc. 3  
Le Monde à l'épo-  
que d'Hérodote



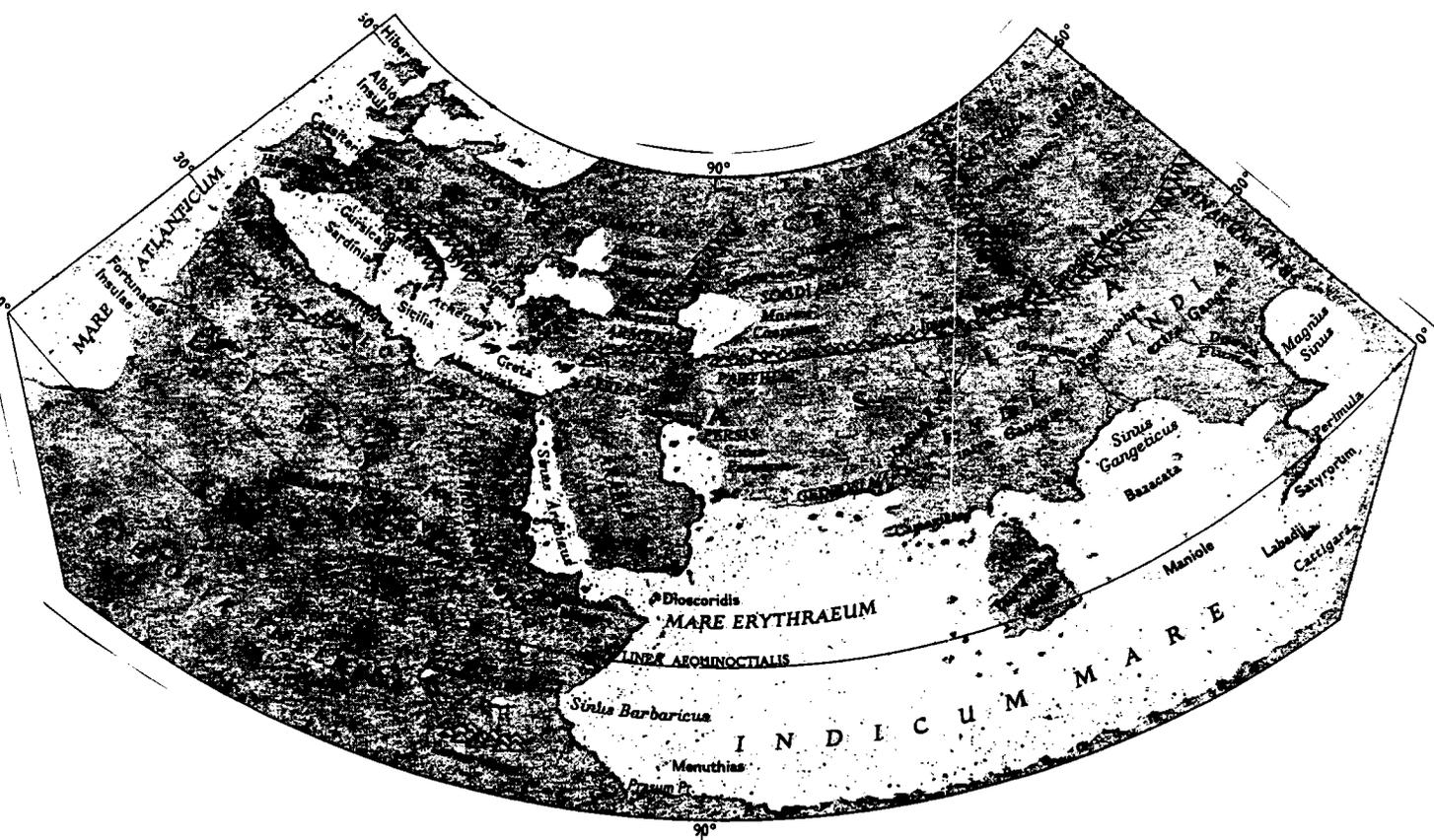
Annexe III. Doc. 4

Le monde connu à l'époque de Strabon.

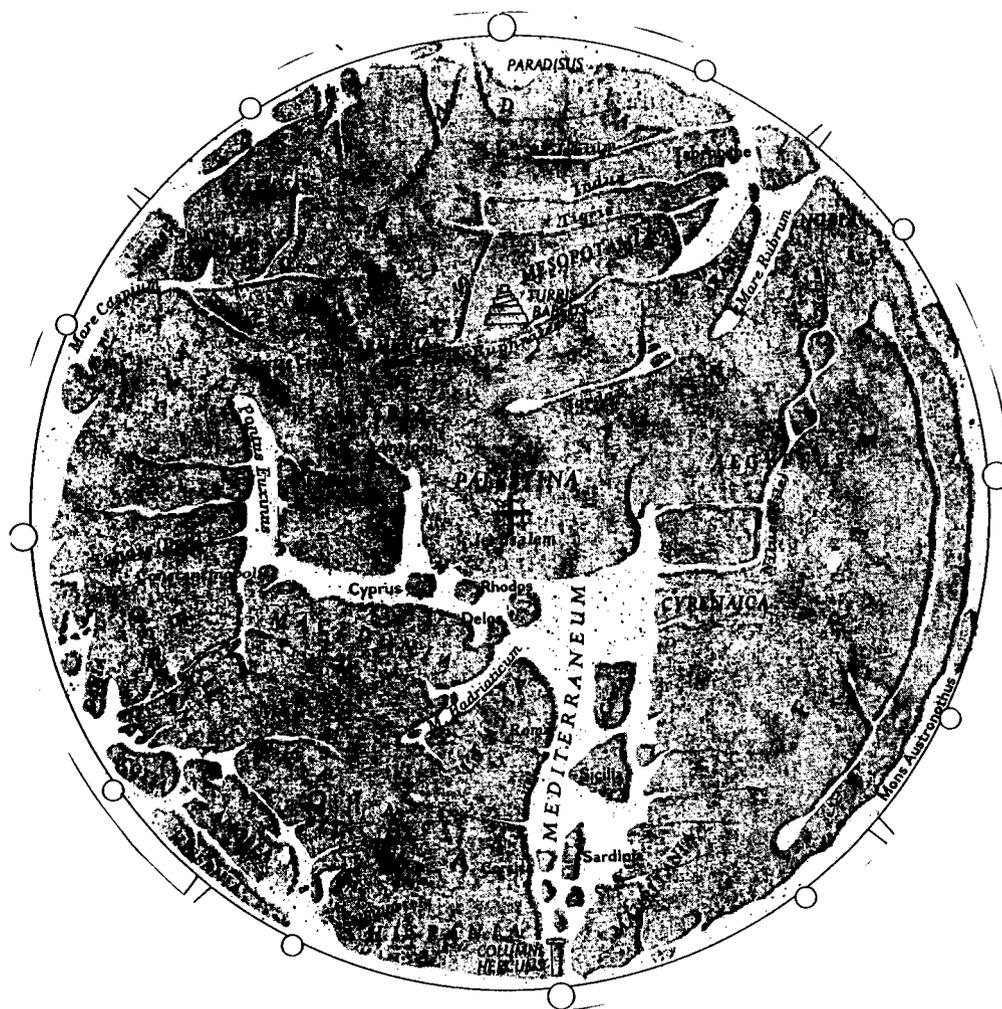


Annexe III. Doc. 5

La vision du monde de Ptolémée.



Annexe III. Doc. 6 - La "Mapa Mundi" d'Hereford. Un espace géographique à la fois imprécis et incertain et cependant homéomorphe à l'espace géographique.



Annexe III, 7

ARTE MENTALE. COMPOSANTES INSULAIRES

Pontiffroy

AULCY

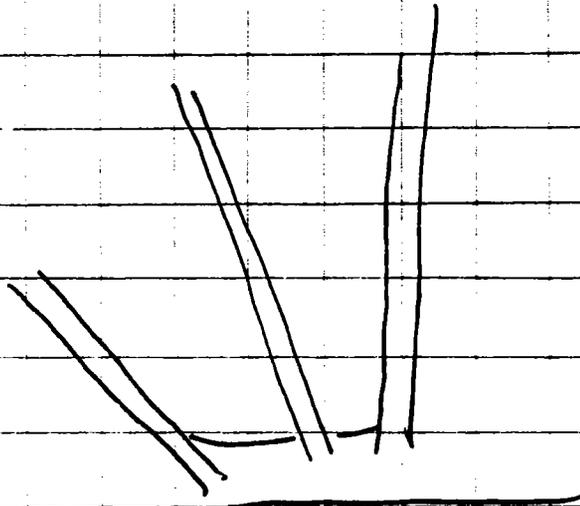
X

Cathédrale

Palais  
de justice NG

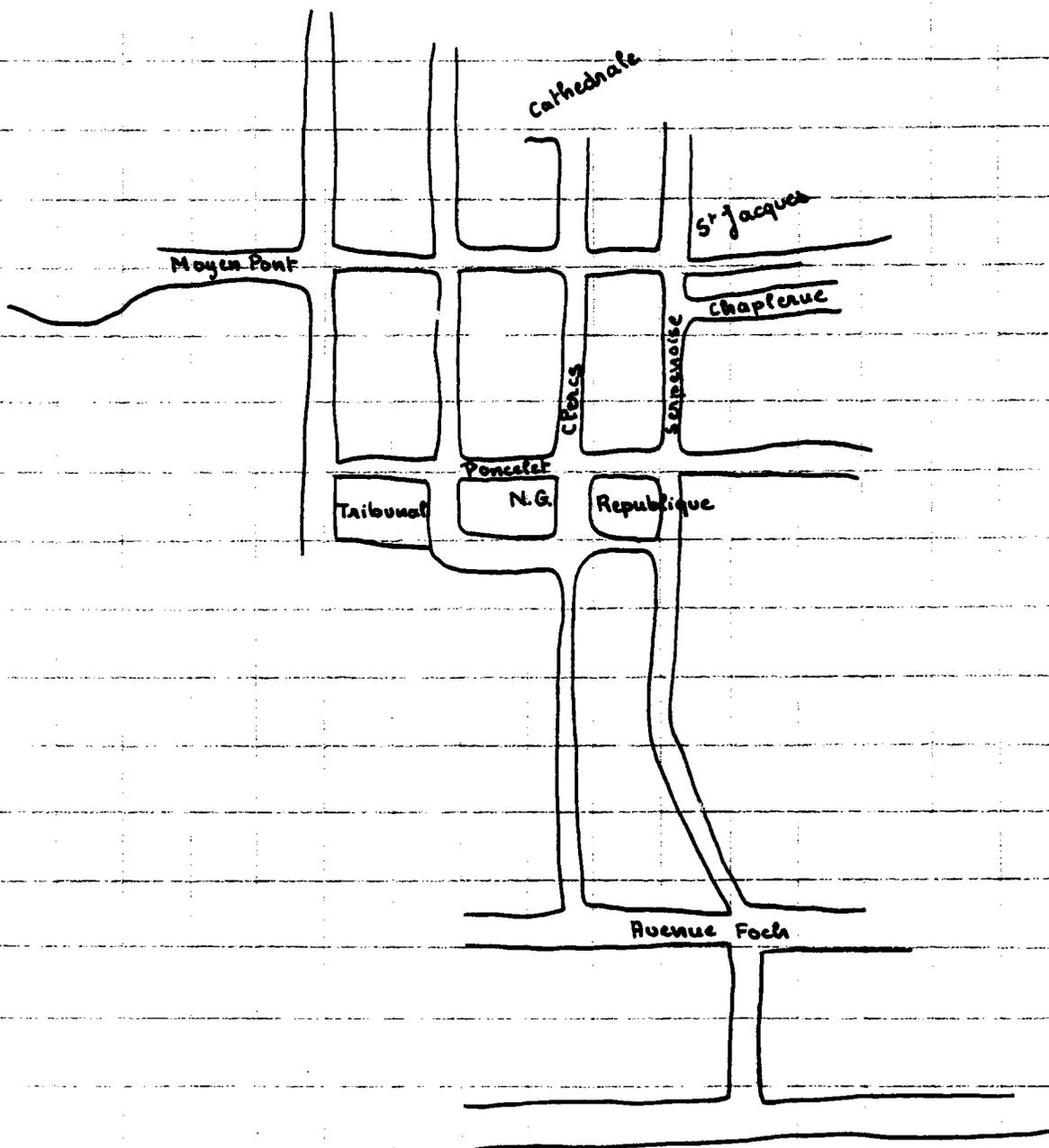
Centre S<sup>t</sup>-Jacques

Place de  
la République



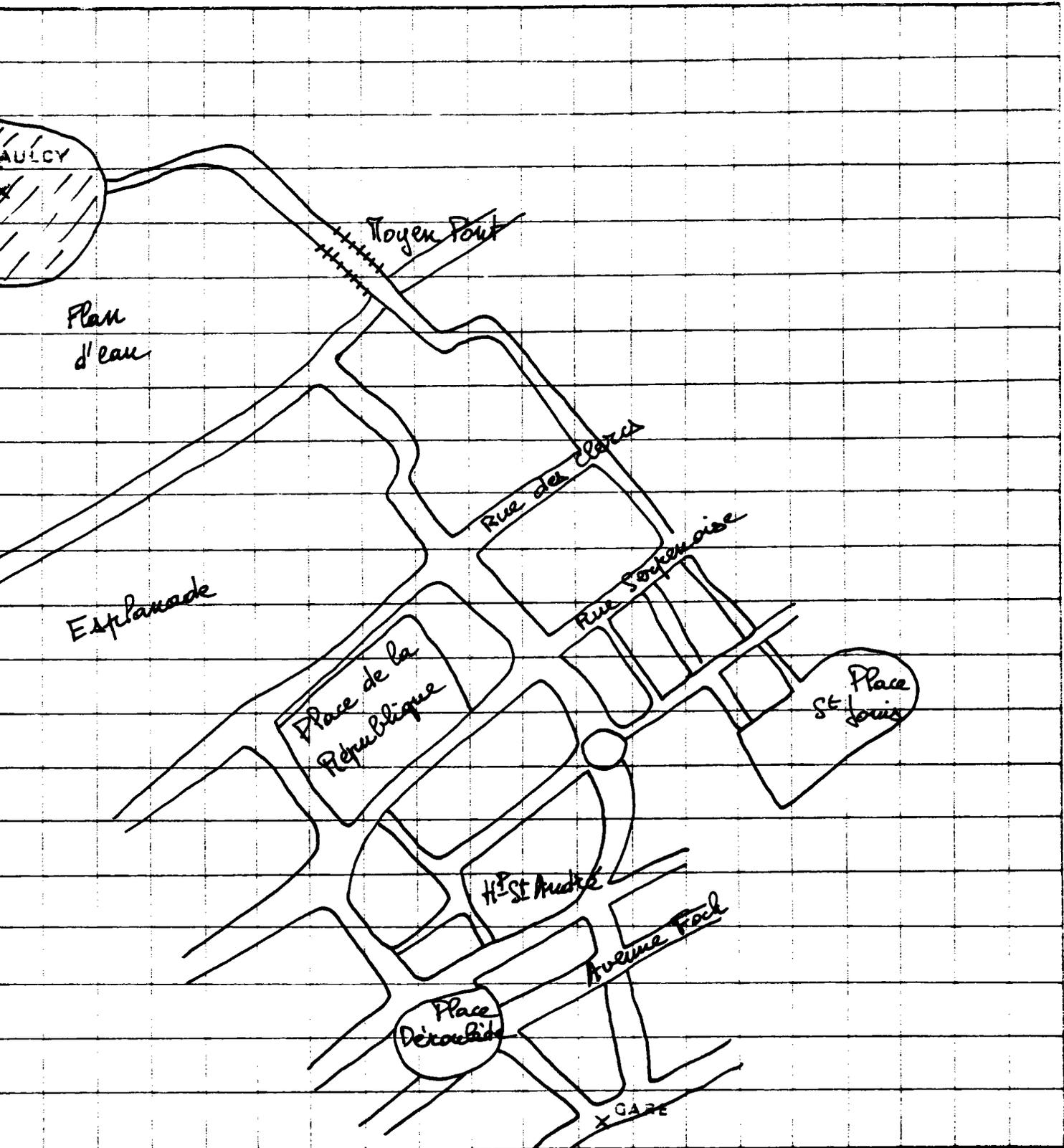
X GARE

ARTE MENTALE. COMPOSANTES TRAMEES

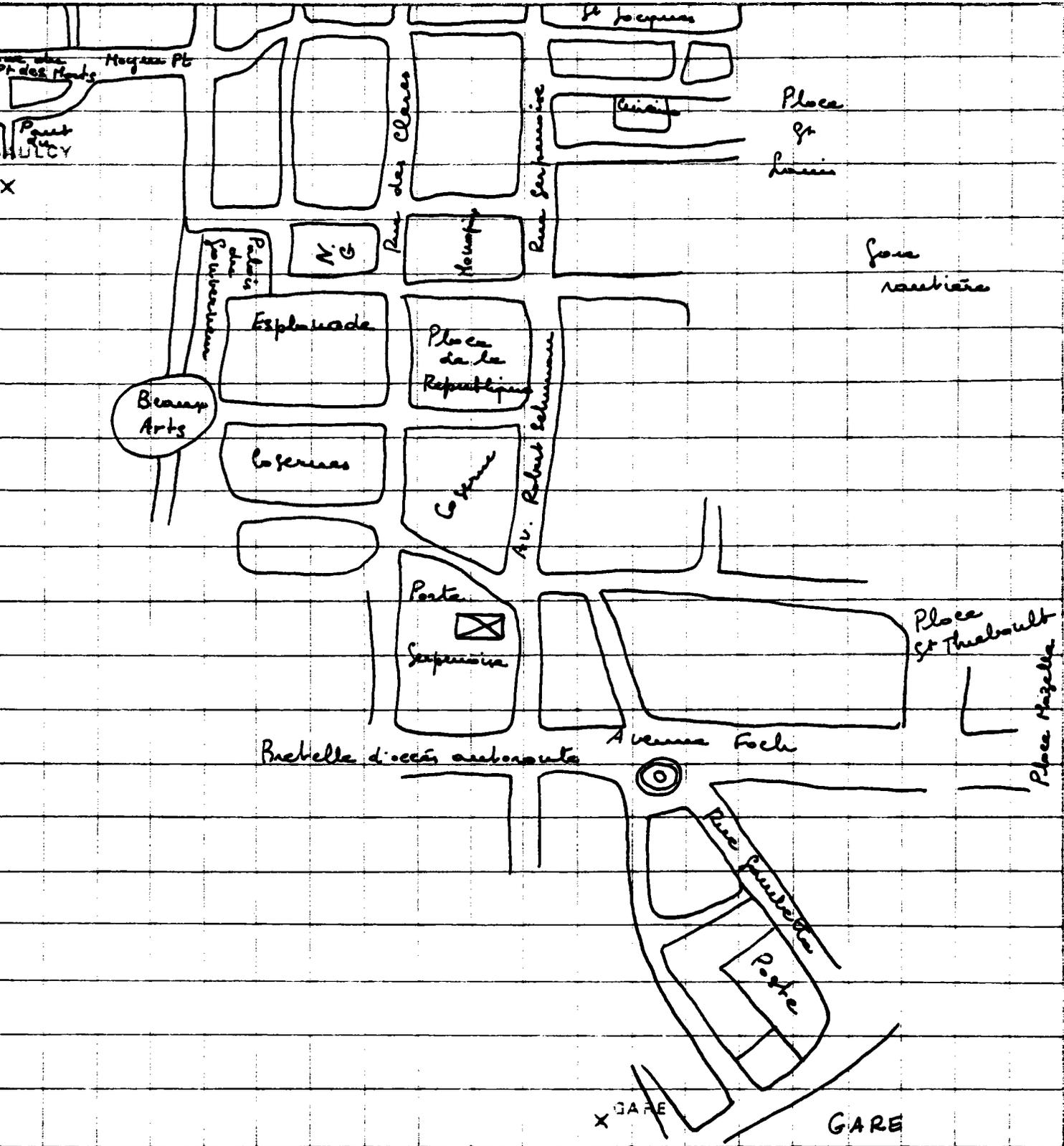


X GARE

ARTE MENTALE. COMPOSANTES ORGANISEES



ARTE MENTALE. COMPOSANTES ORGANISEES





Annexe III. Doc. 12

Un espace subjectif décrit : L'organisation de l'espace de circulation dans l'Empire Mongol d'après Marco Polo (fin XIIe s.) (LE GOFF, 1962).

« Or sachez pour verite que maintes routes quittent cette ville de Cambaluc (1) qui vont par maintes provinces séparément, c'est-à-dire que l'une va vers telle province, et l'autre vers telle autre. Et toutes les routes se distinguent par le nom de la province la ou elles vont, et c'est la chose très sage. Et sachez que, quand l'on part de Cambaluc par l'une quelconque de ces routes — je vous parle des principales et essentielles — et qu'on est allé vingt-cinq milles, les messagers du Grand Sire qui sont ates ces vingt-cinq milles trouvent un poste appelé iamb en leur langage, ce qui veut dire en notre langue un relais de chevaux. A chaque poste, les messagers trouvent un très grand palais, beau et riche, où ils peuvent loger, car ces auberges ont très riches lits garnis de riches tissus de soie, et ont tout ce qui convient à des messagers supérieurs; et si un grand roi y venait, il s'y trouverait encore très bien logé. Et encore vous dis que à ces postes les messagers du Grand Sire changent de cheval, car ils en trouvent bien quatre cents que le Grand Sire a attribués à chaque poste pour qu'ils y demeurent toujours à la disposition de ses messagers et ambassadeurs quand il les envoie en toute direction pour ses affaires, afin qu'ils puissent quitter et laisser là l'animal fatigué et en prendre un frais; en certains points, ils ne sont que trois cents, car il en faut plus en certains lieux qu'en d'autres. Et lorsque le Seigneur désire des chevaux, il envoie son messenger à tel poste, et on lui en envoie autant qu'il en demande...

Et quand les messagers vont en lieux éloignés des routes, étranges, sauvages et montagneux, où l'on ne trouve ni maison ni auberge, où point n'est de village, d'où les villes sont très loin, le Grand Sire y a fait faire des postes et des palais, et toutes les choses qu'ont les autres postes, ni plus ni moins, et des chevaux et des harnois, lesquels sont entretenus aux frais du Grand Can (2). Mais ce sont plus grandes journées, car elles sont de trente-cinq milles, et quelquefois plus de quarante. Il y mande gens qui vivent là travaillent la terre et desservent le poste, et se forment de grands villages.

Et en cette manière que vous avez ouïe vont les messagers du Grand Sire dans toutes les directions avec une grande facilité, et trouvent logement et chevaux tout prêts à chaque étape, pour qu'ils aient confort en tout lieu. C'est vraiment le plus noble sujet de fierté et la plus noble grandeur qu'Empereur puisse jamais avoir, ni nul roi, ni nul autre homme sur la terre. Car sachez très véritablement que plus de deux cent mille chevaux se trouvent dans ces postes, réservés à ses messagers. Et encore vous dis que ces palais sont plus de dix mille, qui sont aussi fournis aussi richement comme je vous ai conté; et c'est chose si merveilleuse et de tant de valeur, qu'on peut à peine le dire ou écrire en vérité. »

(1) Nom mongol de Pékin.

(2) Orthographe phonétique employée par Marco Polo.

BIBLIOGRAPHIE

La bibliographie cite les références par ordre alphabétique de nom d'auteur.

Chaque référence est précédée d'un code relatif à la matière abordée dans l'ouvrage cité.

CODE DES MATIERES I

Types	Codes	Matières
Ouvrages généraux 0 LL	001 002 003	Axiomatique Géographie générale Systèmes - Modèles Approche historique
ESPACES "NON FLOUS" 1 LL	GEOGRAPHIE GENERALE 110 111 112 113	Espace : approche générale Villes : approche générale Régions - Grands espaces Territoires
	ANALYSE SPATIALE METH. GENER. 121 122 123 124	Photographie aérienne et photo-interprétation Méthodes cartographiques et graphiques Mathématiques-Statistiques Méthodes de classification
	ANALYSE SPATIALE APPLIQUEE 131 132 133 134 135 136	Mathématiques appliquées Espaces perçus Espaces vécus - Géographie comportementale Espaces psycho-sociologiques Espaces-frontières Villes

CODE DES MATIERES II

Types	Codes	Matières
ESPACES FLOUS 2 1 1	ANALYSE SPATIALE D'ESPACES FLOUS GENERALITES 210 211 212 213 214 215  216 217 218	Généralités Axiomatique des espaces flous Espaces économiques flous Raisonnement flou Espaces urbains Photographies aériennes Télé-détection Espaces perçus Régions floues Réflexions géographiques sur les espaces flous
	METHODES MATH. FLOUES D'ANALYSE SPATIALE 221 222  223 224	Généralités Mathématiques : théorie des sous-ensembles flous Graphes flous Classification floue

- 214 ALCANTARA B., (1981),  
*La formalisation floue. Applications aux espaces urbains.* CRES-CEREVE.
- 123 ARQUES P.Y., (1979),  
*Décisions en traitement du signal.* Masson. Coll. Techn. et scient. des Télécom.
- 112 ATLAS DE L'EST, (1970-1973),  
Ed. Berger-Levrault, Strasbourg.
- 132 BAILLY A.S., (1982),  
*Images de l'espace et pratiques commerciales : l'apport de la géographie de la perception.* ASDRLF - Dijon, Table Ronde.
- 132 BAILLY A.S., (1982),  
*L'évolution de la géographie de la perception.* ASDRLF - Dijon, Table Ronde. 1981.
- 132 BAILLY A.S., (1982),  
*Géographie de la perception et analyses quantitatives.* in "Percevoir l'espace. Vers une géographie de l'espace vécu. Actes de la Table Ronde 1981", pp. 69-101, Genève.
- 132 BAILLY A.S., (1980),  
*La perception de l'espace urbain.* Université de Lille III, Thèse.
- 132 BAILLY A.S., (1974),  
*Perception de la ville et déplacement. L'impact de la mobilité sur le comportement.* Cah. de Géo. de Québec, vol. 18, n° 45, pp. 525-541.
- 132 BAILLY A.S., (1974),  
*La perception des paysages urbains. Essai méthodologique.* EG, n° 3, T. III, n° 3, pp. 211-217.
- 111 BAILLY A.S., (1975),  
*L'organisation urbaine. Théories et modèles.* C.R.U. Paris.

- x 133 BAILLY A.S., (1981),  
*Géographie du bien-être*. P.U.F. Paris.
- x 132 BAILLY A.S., (1979),  
*La perception des transports en commun par l'utilisateur*.  
TEC, n° 32, pp. 23-29.
- 132 BAILLY A.S., (1974),  
*La perception des paysages urbains. Essai méthodologique*.  
EG, T. III, n° 3, pp. 211-217.
- 111 BAILLY A.S., (1973),  
*Les théories de l'organisation de l'espace urbain*.  
EG, T. II, n° 2, pp. 81-94.
- 111 BAILLY A.S., BEAUDRY M., (1976),  
*Analyse typologique en milieu urbain. Les aires homogènes d'Edmonton (Canada)*. EG, n° 4, pp. 267-275.
- 110 BAILLY A.S., BEGUIN H., (1982),  
*Introduction à la géographie humaine*. Masson, Coll. Géographie.
- 123 BARBUT M., (1970),  
*Mathématiques des Sciences Humaines*  
1. *Combinatoire et algèbre*.  
2. *Nombres et mesures*.  
Coll. SUP. Le Psychologue, P.U.F.
- 123 BARBUT M., D'ADHEMAR C., LECLERC B., JULLIEN P., (1973),  
*Mathématiques élémentaires - application à la statistique et aux sciences sociales*. Thémis. P.U.F.
- 121 BARIOU R., (1981),  
*Manuel de télédétection*. Ed. Sodipe, Paris.
- 111 BARRERE P., CASSOU-MOUNAT M., (1980),  
*Les villes françaises*. Masson, Coll. Géographie.
- 111 BEAUJEU-GARNIER J., (1980),  
*Géographie urbaine*. A. Colin. U.

- ✓ 002 BEAUJEU-GARNIER J., (1971),  
*La géographie : méthodes et perspectives.* Masson - Coll.  
de Géographie appliquée.
- 111 BEAUJEU-GARNIER J., ANDAN O., (1975),  
*L'accessibilité des grandes villes françaises.* Geoforum,  
vol. 6, pp. 137-150.
- ✓ 123 BEGUIN H., (1979),  
*Méthodes d'analyse géographique quantitative.* LITEC,  
Droit, Paris.
- 001 BEGUIN H., THISSE J.F., (1979),  
*An Axiomatic Approach to Geographical Space.* Geographi-  
cal analysis, vol. 11, n° 4, pp. 325-341.
- 001 BEGUIN H., THISSE J., (1981),  
*Space and Time in geography : an axiomatic approach.*  
*In* Griffith D., Mackinnon R. *Dynamic Spatial Models.*
- 123 BENZECRI J.P., (1973),  
*L'analyse des données.*  
T.1 *La Taxinomie.*  
T.2 *L'analyse des correspondances.*  
Dunod. Paris.
- ✓ 132 BERDOULAY V., (1974),  
*Remarques sur la géographie de la perception.* EG, T. III,  
n° 3, pp. 187-188.
- 123 BERDOULAY V., (1973),  
*Perspectives bayésiennes en géographie.* EG, T. II,  
n° 4, pp. 303-312.
- 123 BERGE C., (1957),  
*La théorie des graphes.* Dunod, Paris.
- 002 BERRY B.J.L., (1971),  
*Géographie des marchés et du commerce de détail.* A. Co-  
lin, U 2, Paris.
- 122 BERTIN J., (1967),  
*Sémiologie graphique.* Gauthier-Villars.

- 122 BERTIN J., (1977),  
*La graphique et le traitement graphique de l'information*. Flammarion, Nouvelle Bibliothèque scientifique.
- 002 BERTRAND G., (1972),  
*Ecologie d'un espace géographique : les géosystèmes du Valle de Prioro (Espagne du Nord-Ouest)*. EG, T. I, n° 2.
- 111 BERTRAND M.J., (1978),  
*Pratique de la ville*. Masson. Coll. Géographie.
- 113 BETEILLE R., (1981),  
*Une nouvelle approche géographique des faits migratoires : champs, relations, espaces relationnels*. EG, T. X, n° 3, pp. 187-197.
- 132 BIANCHI E., (1982),  
*La géographie de la perception en Italie : problèmes et perspectives*. In "Percevoir l'espace - Vers une géographie de l'espace vécu". Actes de la Table Ronde 1981, Genève.
- 223 BONNEMAISON J., (1979),  
*Les voyages et l'enracinement : formes de fixation et de mobilité dans les sociétés traditionnelles des Nouvelles-Hébrides*. EG, n° 4, pp. 303-318.
- 113 BONNEMAISON J., (1981),  
*Voyage autour du territoire*. EG, n° 4, pp. 249-262.
- 110 BOUDEVILLE J.R., (1970),  
*Les espaces économiques*. Que sais-je. P.U.F.
- 111 BOUR R., (1979),  
*Histoire de Metz*. Ed. Serpenoise. Metz.
- 123 BOUROCHE J.M., SAPORTA G., (1980),  
*L'analyse des données*. Que sais-je. P.U.F.
- 134 BOUSNINA M., MIOSSEC J.M., PICHERAL H., (1981),  
*Réflexions rapides sur quelques rapports entre culture et espace géographique*. EG, n° 4, pp. 275-280.

- 135 BRUNET R., (1981),  
*Géographie du Goulag*. EG, T. X, n° 3, pp. 215-232.
- ✓ 002 BRUNET R., (1980),  
*La composition des modèles dans l'analyse spatiale*. EG,  
T. IX, n° 4, pp. 253-264.
- 002 BRUNET R., (1979),  
*Spatial Systems and Structures. A Model and a Case Study*.  
Geoforum, Vol. 6, pp. 95-103.
- x 132 BRUNET R., (1974),  
*Espace, perception et comportement*. EG, T. III, n° 3,  
pp. 189-203.
- ✓ 002 BRUNET R., (1973),  
*Structure et dynamisme de l'espace français. Schéma  
d'un système*. EG, n° 4, pp. 249-254.
- x 112 BRUNET R., (1972),  
*Pour une théorie de la géographie régionale*. TIGR, vol.  
11, Reims.
- 002 BRUNET R., (1972),  
*Organisation de l'espace et cartographie de modèles :  
les villes du Massif Central*. EG, n° 1, pp. 43-48.
- 131 BRUNET R., VANDUICK R., (1975),  
*Les comportements électoraux en Champagne*. EG, T. IV,  
n° 3, pp. 208-212.
- 002 BUNGE W., (1966),  
*Appendix to theoretical Geography*. Lund Studies in Geo-  
graphy, n° 6.
- 002 BUNGE W., (1962),  
*Theoretical Geography*. Lund Studies in Geography, n° 1.
- 111 BURNETT P., (1978),  
*Markovian Models of Movement within Urban Spatial Struc-  
tures*. Geogr. Analysis, X, n° 2, pp. 142-153.
- 123 CAILLIEZ F., PAGES J.P., (1976),  
*Introduction à l'analyse des données*. SMASH, ASU, BURO.

- 135 CABOURET M., (1975),  
*Aperçus nouveaux sur l'agriculture du Nord-Est : les répercussions de la division linguistique du département de la Moselle.* Mosella, T. V, n° 4, pp. 1-58.
- 121 CANBY T.Y., (Sept. 1981),  
*Satellites that serve US.* National geography, n° 3, vol. 164, pp. 281-300.
- 121 CANNON T.M., HUNT B.R., (1981),  
*Image processing by Computer.* Scientific American, vol. 245, n° 4, pp. 136-145.
- 132 CAPEL H., (1975),  
*L'image de la ville et le comportement spatial des citadins.* EG, T. IV, n° 1, pp. 73-79.
- 123 CASANOVA G., (1972),  
*L'algèbre de Boole.* Que sais-je. P.U.F.
- 123 CHADULE (Groupe), (1974),  
*Initiation aux méthodes statistiques en Géographie.* Masson.
- 124 CHANDON J.L., PINSON S., (1981),  
*Analyse typologique.* Masson.
- χ 133 CHEVALIER J., (1974),  
*Espace de vie ou espace vécu. L'ambiguïté et les fondements du concept d'espace vécu. Position de recherche.* EG, T. III, n° 1, p. 68.
- γ 132 CHIFFELLE F., (1982),  
*De la géographie du paysage à la géographie de la perception. Pertinence de ces approches pour l'aménagement du territoire. In "Percevoir l'espace. Vers une géographie de l'espace vécu", pp. 117-128. Actes de la Table Ronde 1981, Genève.*
- 110 CICERI M.F., MARCHAND B. et RIMBERT S., (1977),  
*Introduction à l'analyse de l'espace.* Masson.

- 111 CLAVAL P., (1981),  
*La logique des villes*. Librairies Techniques. Paris.
- 134 CLAVAL P., (1981),  
*Les géographes et les réalités culturelles*. EG, n° 4,  
pp. 242-248.
- ✓ 110 CLAVAL P., (1977),  
*La Nouvelle Géographie*. Que sais-je, n° 1693, P.U.F.
- 135 CLAVAL P., (1974),  
*L'étude des frontières et la géographie politique*. Cah.  
Géo. Québec. Vol. 18, n° 43, pp. 7-22.
- 110 CLAVAL P., (1974),  
*Géographie et sémiologie*. EG, n° 2, pp. 113-119.
- 110 CLAVAL P., (1974),  
*Éléments de géographie humaine*. Ed. M. Th. Génin.
- 132 CLAVAL P., (1974),  
*La géographie et la perception de l'espace*. EG, T. III,  
n° 3, pp. 179-186.
- 002 CLAVAL P., (1973),  
*Le système urbain et les réseaux d'information*. Revue  
géographique de Montréal. Vol. XXVII, n° 1, pp. 5-15.
- 110 CLAVAL P., (1972),  
*La pensée géographique*. SEDES, Paris.
- 002 CLAVAL P., (1972),  
*La réflexion théorique en géographie et les méthodes  
d'analyse*. EG, T. I, n° 1, 1972.
- 112 CLAVAL P., (1968),  
*Régions, nations, grands espaces*. Géographie générale  
des ensembles territoriaux. Génin, Paris.
- 123 CLAVIER J., COFFINET G., NIQUIL M., BEHR F., (1979),  
*Théorie et technique de la transmission des données*.  
T. 1 Notions fondamentales. Masson, Ecole Nat. Sup.  
de Techniques Avancées.

- 002 Collectif, (1980),  
*L'espace et les non-géographes*. EG, T. IX, n° 4.
- 124 COLLET Cl., (1981),  
*Comparaison de méthodes de classification appliquées à des données de télédétection*. EG, T. X, n° 1, pp. 25-32.
- 002 Comité National Français de Géographie, (1980),  
*Recherches géographiques en France*. (Tokyo 1980). Comité National français de Géographie.
- 121 COSTE M., RONCAYOLO M., (1980),  
*La photo-interprétation des formes urbaines*. EG, n° 1, pp. 57-69.
- 135 COURTILLOT V., VINK G., (Sept. 1983),  
*Comment se fracturent les continents*. Pour la Science, n° 71, pp. 100-124.
- 002 CUNHA A. et COLLECTIF, (1981),  
*Terrains vagues et terres promises. Les concepts de l'éco-développement et la pratique des géographes*. Cah. de l'Institut Universit. d'études du développement. P.U.F.
- 002 DAUPHINE A., (1979),  
*Espace, région et système*. Economica-Geographia - 1 -
- 123 DELACHET A., (1973),  
*Calcul différentiel et intégral*. Que sais-je. P.U.F.
- 123 DELACHET A., (1978),  
*La topologie*. Que sais-je. P.U.F.
- 224 DELOCHE R., (1975),  
*Théorie des sous-ensembles flous et classification en analyse économique spatiale*. Doc. de travail n° 11, I.M.E. Dijon.
- 217 DE MESNARD L., (1978),  
*La dominance régionale et son imprécision. Traitement dans le type général de structure*. Doc. de travail n° 52, I.M.E. Dijon.

- 002 DE ROSNAY J., (1975),  
*Le microscope. Vers une vision globale.* Points. Ed. du Seuil.
- 123 DIDAY E., LEBART L., (1974),  
*L'analyse des données.* La Recherche, n° 74.
- 221 DIXANS I.A., (1979),  
*Leçons de mathématiques économiques.* Collection de l'I.M.E., n° 22, Librairie de l'Université. Dijon.
- X 110 DOLLFUS O., (1970),  
*L'espace géographique.* Que sais-je. P.U.F.
- 002 DOLLFUS O., DURAND-DASTES F., (1975),  
*Some Remarks on the Notions of "Structure" and "System" in Geography.* Geoforum, vol. 6, pp. 83-94.
- 135 DORION H., LACASSE J.P., (1974),  
*La notion d'intégrité territoriale et les problèmes de régions frontalières du Québec.* Cahiers de Géographie de Québec. Vol. 18, n° 43, pp. 137-158.
- 211 DUBOIS D., (1980),  
*Un aperçu de la théorie des sous-ensembles flous et quelques applications.*  
I Busefal, Eté 80, pp. 63-69  
II Busefal, Automne 80, pp. 64-70  
III Busefal, Hiver 80-81, pp. 69-75.
- 221 DUBOIS D., PRADE H., (1980),  
*Fuzzy Sets and Systems : Theory and Applications.* Academic Press. London, 1980.
- 112 DUBOSCQ P., (1972),  
*La mobilité rurale en Aquitaine. Essai d'analyse logique.* EG, T. I, n° 1, pp. 7-22.
- 002 DUMOLARD P., (1975),  
*Région et régionalisation. Une approche systémique.* EG, T. IV, n° 2, pp. 93-111.

- 218 DUPONT (Groupe), (1975),  
*La distance à la ville : essais d'analyses factorielles appliquées aux cas de Grenoble et Montpellier.* EG, T. IV, n° 4, pp. 225-239.
- 002 DURAND D., (1979),  
*La systémique.* Que sais-je. P.U.F.
- 121 ELACHI C., (1982),  
*Radar Images of the Earth from space.* Scientific American vol. 247, n° 6, pp. 46-53.
- 224 FADINI A., LETTIERI A., LIGUORI F., (1980-1981),  
*Classifications of some fuzzy preference relations.*  
I Busefal, automne 1980, pp. 50-59.  
II Busefal, hiver 1980-1981, pp. 30-36.
- 133 FAUTEUX M., (1977),  
*Représentation de la ville.* Cahiers de Géographie de Québec, vol. 21, n° 52, pp. 83-104.
- 136 FELDMANN N., (1982),  
*Essen, de la cité médiévale à la métropole régionale.*  
Mémoire de maîtrise, Département de Géographie, Université de Metz.
- 123 FENELON J.P., (1981),  
*Qu'est-ce que l'analyse des données.* Ed. Lefonen, Paris.
- 134 FISCHER G.N., (1981),  
*Psychosociologie de l'espace.* Que sais-je. P.U.F.
- 134 FISCHER G.N., (1977),  
*Psychologie de l'espace industriel. Le concept de Budget Spatial.* Thèse de Doctorat, Strasbourg I.
- 132 FOUET R., (1980),  
*Sur l'analyse de l'espace.* In "Eventail de la spatologie". Documents et travaux. N° spécial offert à J.E. Hermitte. Centre d'analyse de l'espace. Nice.

- 133 FREMONT A., (1978),  
*Espace et cadre de vie. L'espace vécu des Caennais.*  
Université de Caen, CERA Centre d'études régionales et  
d'aménagement.
- 133 FREMONT A., (1976),  
*La région, espace vécu.* P.U.F., le Géographe, Paris.
- 132 FREMONT A., (1974),  
*Recherches sur l'espace vécu.* EG, T. III, n° 3, pp. 231-  
237.
- 133 FREMONT A., (1982),  
*L'espace vécu.* In "Percevoir l'espace. Vers une géogra-  
phie de l'espace vécu", pp. 7-22. Actes de la Table  
Ronde, 1981, Genève.
- 217 FUSTIER B., (1980),  
*Contribution à l'analyse spatiale de l'attraction im-  
précise.* Sistemi Urbani, n° 2-3, anno II, pp. 271-282.
- 222 FUSTIER B., (Eté 1980),  
*Introduction à l'étude de séries statistiques floues.*  
Busefal, pp. 59-69.
- 212 FUSTIER B., (1979),  
*Les interactions spatiales en économie.* Coll. de l'IME,  
SIREY, Paris.
- 132 GADE D.W., (1977),  
*L'image du Vermont : Mythologie américaine et réalité  
géographique.* Cahiers de géographie de Québec. Vol. 21,  
n° 53-54, pp. 221-242.
- 002 GALE S., (1973),  
*Comments on geographic theories : descriptive, expla-  
natory and prescriptive.* EG, T. II, n° 4, pp. 299-302.
- 112 GEHRING J.M., (1977),  
*Le Luxembourg, un espace ouvert de l'Europe rhénane.*  
Mosella, T. VII, n° 1.

- 132 GEIPEL R., (1978),  
*La géographie de la perception en Allemagne Fédérale.*  
EG, n° 3, pp. 195-198.
- 001 GEOPOINT, (1980),  
*Axiomes ou principes en Géographie.* Avignon. Groupe Dupont.
- 110 GEORGE P., (1970),  
*Les méthodes de la géographie.* Que sais-je. P.U.F.
- 123 GNEDENKO B.V., KHINTCHINE A., (1971),  
*Introduction à la théorie des probabilités.* Dunod.
- 110 GORE R., (1982),  
*The Mediterranean-sea of Mans'fate.* National Geographic,  
vol. 162, n° 6, pp. 694-738.
- 132 GOULD P., WHITE P., (1968),  
*The Mental Maps of British school leavers.* Regional  
Studies, vol. 2, pp. 161-182.
- 122 GRONOFF J.D., (1971),  
*La zone herbagère des Ardennes. Analyse typologique  
par matrice ordonnable.* Etudes rurales, n° 43.44,  
pp. 170-214.
- 110 HAGGETT P., (1973),  
*L'analyse spatiale en géographie humaine.* A. Colin.  
Coll. U.
- 110 HAGGETT P., CHORLEY R.J., (1969),  
*Network analysis in Geography.* E. Arnold.
- 001 HARVEY D., (1976),  
*Explanation in Geography.* Edward Arnold. London.
- 222 HENG-LING H., (1983),  
*Method of fuzzy statistics and applications.* Busefal,  
Hiver 1983, pp. 90-107.
- 002 HOLZ J.M., (1977),  
*Voyage dans l'espace.* Mosella, T. VII, n° 4, pp. 291-301.

- 111 HOLZ J.M., (1971),  
*Etude d'un paysage urbain : Les quartiers périphériques de l'Est de Metz.* Mosella, T. I, n° 2, pp. 43-54.
- 212 HURIOT J.M., (1977),  
*La formation du paysage économique. Essai sur l'affectation de l'espace.* Collection de l'IME, n° 15. Librairie de l'Université. Dijon.
- 110 ISNARD H., (1978),  
*L'espace géographique.* P.U.F. Le Géographe.
- 110 ISNARD H., RACINE J.B., REYMOND H., (1981),  
*Problématique de la géographie.* P.U.F. Le Géographe.
- 124 JAMBU M., LEBEAUX M.O., (1978),  
*Classification automatique pour l'analyse des données.*  
T. 1 Méthodes et algorithmes  
T. 2 Logiciels.  
Dunod, Paris.
- 215 JEANSOULIN R., (Eté 1982),  
*Reconnaissance automatique du parcellaire : Comment faire de la géométrie avec SPOT.* Busefal.
- 112 JUILLARD E., (1982),  
*Le rééquilibrage interrégional en Europe Occidentale.* Hérodote, n° 25, pp. 76-104.
- 112 JUILLARD E., (1977),  
*Atlas et géographie de la France moderne. L'Alsace et la Lorraine.* Flammarion.
- 112 JUILLARD E., (1974),  
*La région : contributions à une géographie générale des espaces régionaux.* Ophrys. Paris.
- 112 JUILLARD E., (1968),  
*L'Europe rhénane.* Masson.

- 211 KAUFMANN A., (1983),  
*Le traitement mathématique de l'imprécis par la théorie des sous-ensembles flous. In "Fuzzy Information, Knowledge representation and decision analysis". IFAC, July 1983, Pergamon Press.*
- 211 KAUFMANN A., (1983),  
*L'épistémologie de l'incertain. In "Fuzzy Information, Knowledge representation and decision analysis". IFAC, July 1983, Pergamon Press.*
- 221 KAUMANN A., (1973-1977),  
*Introduction à la théorie des sous-ensembles flous. T. 1 à T. 4. Masson.*
- 133 KLAINÉ R., (1976),  
*Qualité de la vie et centre-ville. A. Colin.*
- 222 KRUSE R., (1983),  
*Fuzzy integrals and conditional fuzzy measures. Fuzzy sets and systems, vol. 10, n° 3, pp. 309-314.*
- 112 LABASSE J., (1975),  
*The Geographical Space of Big Companies. Geoforum, vol. 6, pp. 113-124.*
- 002 LABASSE J., (1974),  
*L'espace financier. A. Colin. U.*
- 218 LAI-FU L., (1983),  
*Application of fuzzy set theory to the study of pollution situation of a river ecosystem. Buséfal, Hiver 83, pp. 90-107.*
- 002 LAURINI R., (1979),  
*La ville est-elle un système ? Communication, Colloque "Structures Economiques et Econométrie". 9 p. Lyon.*
- 123 LECARPENTIER M., (1974),  
*Analyse numérique de la topographie et des mesures de pentes. Cahiers de Géographie de Québec. Vol. 18, n° 45, pp. 483-495.*

- 133 LEDRUT R., (1968),  
*L'espace social de la ville. Problèmes de sociologie appliqués à l'aménagement urbain.* Anthropos. Paris.
- 003 LE GOFF J., (1962),  
*Le Moyen-Age.* Bordas, Collection d'Histoire.
- 124 LERMAN I.C., (1981),  
*Classification et analyse ordinale des données.* Dunod.
- 135 LEROY A., (1980),  
*Sarrebrück, l'exemple d'une métropole frontalière.* Mosella, T. X, n° 3-4.
- 111 LOEW G., (1971),  
*Le centre de Metz : évolution du paysage urbain.* Mosella, T. I, n° 4.
- 121 LONG M.E., (1981),  
*SpaceLab 1.* National Geographic, vol. 164, n° 3, pp. 301-335.
- 123 LOUDER D., BISSON M., LA ROCHELLE P., (1974),  
*Analyse centrographique de la population de Québec de 51 à 71.* Cahiers de Géographie de Québec, vol. 18, n° 45, pp. 421-445.
- 111 LOWY P., (1975),  
*Les villes fermées d'Afrique du Nord : méthodes de recherche.* EG, T. VI, n° 1, pp. 31-43.
- 132 LYNCH K., (1969),  
*L'image de la cité.* Dunod. Paris.
- 123 MARCHAND B., (1972),  
*L'usage des statistiques en Géographie.* EG; T. I, n° 2, pp. 73-78.
- 124 MARCHAND B., OZAN A., (1981),  
*Méthodes mathématiques de classifications en géographie.* EG, T. X, n° 1, pp. 1-14.

- 112 MASSONIE J.Ph., (1971),  
*Hiérarchie des villes et des régions. Cah. Géogr. de Besançon, n° 9.*
- 132 MATTHEWS M.H., (1980),  
*Children represent their Environment : Mental Maps of Coventry City Center. Geoforum, vol. 11, pp. 385-397.*
- 111 MERLIN P., (1973),  
*Méthodes quantitatives et espace urbain. Masson.*
- 132 METTON A., (1974),  
*L'espace perçu : diversité des approches. EG, T. III, n° 3, p. 228-229.*
- 131 MORIN D., GAUTHIER P., BERNATCHEZ M., (1976),  
*La théorie des graphes : le cas du réseau routier de l'université Laval. Cahiers de Géographie de Québec, vol. 20, n° 51.*
- 132 MERENNE-SCHOUMAKER B., (1982),  
*Perceptions spatiales et localisations. In "Percevoir l'espace. Vers une géographie de l'espace vécu", pp. 103-116. Actes de la Table Ronde 1981, Genève.*
- 132 METTON A., (1982),  
*Recherches sur l'espace vécu et aménagement en banlieue. In "Percevoir l'espace. Vers une géographie de l'espace vécu", pp. 165-170. Actes de la Table Ronde 1981, Genève.*
- 132 METTON A., (1982),  
*L'espace vécu du citoyen face à l'évolution récente de l'espace commercial. ASRDLF, Table Ronde, Dijon.*
- 132 METTON A., BERTRAND M.J., (1972),  
*La perception de l'espace urbain : de l'enfant à l'homme. EG, T.I, n° 4, pp. 283-284.*
- 133 MOLES A.A., (1982),  
*Nissologie ou science des tles. EG, n° 4, pp. 281-289.*
- 133 MOLES A.A., (1970),  
*L'affiche dans la société urbaine. Dunod. Paris.*

- 134 MOLES A.A., ROHMER E., (1978),  
*Psychologie de l'espace*. Casterman.
- 002 MONOD J., (1970),  
*Le hasard et la nécessité*. Seuil. Paris.
- 002 MORIN E., (1982),  
*Science avec conscience*. Fayard.
- 002 MORIN E., (1980),  
*La Méthode. I - La Nature de la Nature*. Seuil, 1977.  
*II - La vie de la vie*. Seuil, 1980.
- 122 MULLER J.C., (1979),  
*La cartographie d'une métrique non-euclidienne : les distances-temps*. EG, n° 3, pp. 215-227.
- 112 NONN H., (1975),  
*Concerning the Notion of "Sub-Region" : the French Case*.  
Geoforum, vol. 6, pp. 125-136.
- 216 NOWAKOWSKA M., (1983),  
*Perceptual Illusions. New explanatory Models*. Proceedings of the 2nd World Conference on Mathematics at the Service of Man. Las Palmas, 1982.
- 216 NOWAKOWSKA M., (1983),  
*Knowledge and induced subjective temporal Systems*. Proceedings of the 2nd World Conference on Mathematics at the Service of Man. Las Palmas, 1982.
- 112 OBADIA G.N., (1977),  
*La théorie de noyaux régionaux agricoles*. EG, pp. 25-40.
- 110 OBADIA G.N., (1978),  
*Le héros de l'espace. Essai sur l'axiomatisation de la théorie géographique*. Thèse E.
- 112 Office Statistique des Communautés Européennes, (1981),  
*Annuaire des Statistiques Régionales*. Eurostat, Luxembourg.
- 124 OPENSHAW S., (1981),  
*Le problème de l'agrégation spatiale en géographie*. EG, T. X, n° 1, pp. 15-23.

- 001 PAELINCK J.H.P., (1982),  
*Analyse spatiale opérationnelle*. ASRDLF "The Regions and the Enlargement of the European Economic Community". Athens Meeting - september 1981. Ed. by Chiotis, Tsoukalas and Louri Athens School of Economics and Business Science.
- 132 OSTERRIETH A., (1982),  
*L'espace vécu, une approche phénoméno-structurale*. ASRDLF, Table Ronde, Dijon.
- 111 PAMPALOU R., (1975),  
*L'analyse de la dynamique spatiale à Charlesbourg, un exemple de la spécialisation de l'espace intra-urbain*. Cahiers de Géographie de Québec, vol. 19, n° 46.
- 002 PELT J.M., (1977),  
*L'homme renaturé*. Equilibres. Seuil.
- 132 PIVETEAU J.L., (1974),  
*La perception des disparités économiques régionales en Suisse, depuis la fin du XVIIIe siècle*. EG, T. III, n° 3, pp. 219-227.
- 133 PIVETEAU J.L., (1982),  
*Une double lecture temporelle de notre perception de l'espace*. In "Percevoir l'espace. Vers une géographie de l'espace vécu". Actes de la Table Ronde 1981, Genève.
- 002 PONSARD C., (1983),  
*History of spatial Economic Theory*. Springer Verlag. Berlin - Heidelberg.
- 212 PONSARD C., (1983),  
*Spatial fuzzy consumer's behavior. A multidimensional analysis*. Doc. de travail, n° 63, IME Dijon.
- 221 PONSARD C., (1983),  
*Fuzzy data analysis in a spatial context*. Doc. de travail, IME Dijon.

- 212 PONSARD C., (1981),  
*An application of fuzzy subsets theory to the analysis of the consumer's spatial preferences.* Fuzzy sets and systems 5, pp. 235-244.
- 211 PONSARD C., (1980),  
*On the Axiomatization of fuzzy Subsets theory.* Buséfal, Automne-Hiver 79-80.
- 212 PONSARD C., (1980),  
*Fuzzy economic spaces.* Document de travail de l'IME, n° 43.
- 214 PONSARD C., (Avril 1979),  
*Economie Urbaine et espaces métriques.* Sistemi Urbani, anno 1, n° 1, pp. 123-135.
- 221 PONSARD C., (1979),  
*Aléa et flou.* In I. Aimé Dixans, Lectures de mathématiques économiques. Sirey, n° 22.
- 001 PONSARD C., (1979),  
*Le Temps, l'espace et leurs structures formelles.* (en Polon. Ruch Filozoficzny, Ekonomiczny i Sociologiczny, XLII - 4 - 1981 - pp 57-74)
- 210 PONSARD C., (1977),  
*La région en analyse spatiale.* Publication de l'IME. Document de travail n° 21. Dijon.
- 214 PONSARD C., (1977),  
*Hiérarchie des places centrales et graphes phi-flous.* Environment and Planning. Vol. 9, pp. 1233-1252.
- 217 PONSARD C., TRANQUI P., (1982),  
*La régionalisation de l'économie européenne.* Document de travail n° 57, IME Dijon.
- 213 PRADE H., (1983),  
*Approximate and plausible reasoning : the State of the Art.* In "Fuzzy Information, Knowledge Representation and Decision Analysis". IFAC, July 1983, Pergamon Press.

- 213 PRADE H., (1982),  
*Modèles mathématiques de l'imprécis et de l'incertain en vue d'applications au raisonnement naturel.* Thèse de Doctorat d'Etat. Université Paul Sabatier. Toulouse.
- 222 PRADE H., (1980),  
*Unions et intersections d'ensembles flous.* Buséfal, Eté 80.
- 221 PREVOT M., (1977),  
*Sous-ensembles flous. Une approche théorique.* Sirey. Coll. de l'IME, n° 14.
- 212 PREVOT M., (1975),  
*Espaces topologiques et métriques en analyse économique spatiale.* Thèse Doctorat. Inst. Math Géo. Dijon.
- 123 PRICE W.L., (1974),  
*Introduction aux graphes et aux réseaux.* Masson. Paris.
- 111 PUMAIN D., (1982),  
*La dynamique des villes.* Economica, Paris.
- 132 RACINE J.B., (1982),  
*De l'espace vécu à l'espace construit : pour une critique positive de la géographie de la cognition.* In "Percevoir l'espace. Pour une géographie de l'espace vécu", pp. 205-225. Actes de la Table Ronde 1981, Genève.
- 111 RACINE J.B., (1973),  
*Géographie factorielle de la banlieue montréalaise au Sud du Saint-Laurent. 1. La différenciation factorielle des structures suburbaines.* Revue Géo. Montréal, vol. XXVII, n° 3, pp. 229-261.
- 111 RACINE J.B., (1967),  
*Exurbanisation et métamorphisme péri-urbain.* R.G. de Montréal, XXI, 2.
- 123 RACINE J.B., LEMAY G., (1972),  
*L'analyse discriminante des correspondances typologiques dans l'espace géographique.* EG, T. I, n° 3, pp. 145-166.

- 4 110 RACINE J.B., REYMOND H., (1973),  
*L'analyse quantitative en Géographie*. P.U.F. Le Géographe
- 002 RAFFESTIN C., (1980),  
*Pour une géographie du pouvoir*. LITEC. Paris.
- 135 RAFFESTIN C., (1977),  
*Paysage et territorialité*. Cahiers de Géographie de  
Québec. N° 53-54, vol 21, pp. 123-134.
- 135 RAFFESTIN C., (1974),  
*Espace, temps et frontière*. Cahiers de Géographie de  
Québec, vol. 18, n° 43, pp. 23-33.
- 112 REITEL F., (1982),  
*La Lorraine*. Que sais-je. P.U.F.
- 111 REITEL F., (1976),  
*Etude géographique d'une ville moyenne évoluant dans le  
voisinage d'une puissante métropole nationale : Esslin-  
gen sur Neckar (Bade-Wurtemberg)*. Mosella, T. IV, n° 3.
- 112 REITEL F., (1973),  
*Mers et fleuves : variations sur le thème de l'eau*. Di-  
dier. Monde Germanique.
- 135 REITEL F., (1971),  
*Economie, frontière, région*. Mosella, t. I, n° 3, pp. 1-2
- 112 REITEL F., (1969),  
*Les Allemagnes*. Colin.
- 122 REY V., (1973),  
*Les structures de l'espace roumain. Typologie par ma-  
trice graphique ordonnable*. EG, T. II, n° 1, pp. 37-49.
- 002 RICHARD J.F., (1975),  
*Paysages, écosystèmes, environnement, une approche géo-  
graphique*. EG, T. IV, n° 2, pp. 81-92.
- 133 RIMBERT S., VOGT T., (1975),  
*Innovations et aires de comportement : la contraception  
en Alsace*. EG, T. IV, n° 4, pp. 271-277.

- 122 RIMBERT S., (1973),  
*Des "bruits" qui brouillent les cartes : les insuffisances de la lecture visuelle des cartes thématiques.* EG, T. II, n° 4, pp. 313-316.
- 111 RIMBERT S., (1973),  
*Les paysages urbains.* Collection U. Prisme. A. Colin.
- 122 RIMBERT S., (1968),  
*Leçons de cartographie thématique.* Paris, SEDES.
- 111 ROCHEFORT M., (1960),  
*L'organisation urbaine de l'Alsace.* Publ. de l'Université de Strasbourg, 1960.
- 132 ROCHEFORT R., (1974),  
*La perception des paysages.* EG, T. III, n° 3, pp. 205-208.
- 221 ROLLAND-MAY C., (1983),  
*A valuation model of subjective spaces.* In "Fuzzy Information, Knowledge representation and decision analysis", pp. 367-372. IFAC, July 1983, Pergamon Press.
- 216 ROLLAND-MAY C., (1981),  
*Analyse géographique d'un espace subjectif valué.* Mosella, XI, n° 1-2, pp. 91-125.
- 216 ROLLAND-MAY C., (1981),  
*Espace subjectif et théorie des sous-ensembles flous.* Mosella, XI, n° 1-2, pp. 51-90.
- 216 ROLLAND-MAY C., (1981),  
*Notes sur l'étude des espaces subjectifs. Caractères géographiques et structure formelle.* Mosella, XI, n° 1-2, pp. 1-50.
- 111 ROLLAND-MAY C., (1978),  
*L'urbanisation du Pays Messin.* EG, n° 1, pp. 43-51.
- 111 ROLLAND-MAY C., (1978),  
*Quelques traits de l'organisation de l'espace urbain de Metz.* RGE III, pp. 169-185.

- 111 ROLLAND-MAY C., (1973),  
*Fonctions urbaines et hiérarchie urbaine. Utilisation de modèles graphiques. Application à l'étude des huit plus grandes villes de Rhénanie-Westphalie.* Mosella, III, 3, pp. 27-54.
- 111 ROLLAND-MAY C., (1972),  
*Les franges urbaines de Metz. Contribution à l'étude de l'évolution du paysage péri-urbain.* Mosella, II, 4, pp. 68-100.
- 122 ROSENBERGER F., VIALLE A., (1976),  
*Le centre-ville de Metz. Etude d'après le recensement de 1975.* Mémoire. Document dactylographié. Département de Géographie. Metz.
- 214 ROUGET B., (Septembre 1976),  
*Représentations topologiques de l'espace urbain.* Recherches Economiques de Louvain, n° 3, vol. 42, pp. 241-254.
- 002 ROUGERIE G., (1969),  
*Géographie des paysages.* Que sais-je. P.U.F.
- 214 ROUGET B., (1975),  
*L'analyse spatiale en économie urbaine. Essai méthodologique.* Dijon. Thèse Doctorat d'Etat en Sciences Economiques. IME Dijon.
- 123 SACHE A., (1974),  
*La théorie des graphes.* Que sais-je. P.U.F.
- 123 SAINT JULIEN TH., (1981),  
*Initiation aux statistiques.* EG, T. X, n° 1.
- 112 SANGUIN A.L., (1978),  
*Une capitale pour l'Europe ? Essai prospectif en géographie politique.* EG, n° 4, pp. 281-290.
- 133 SARRE P., (1982),  
*La géographie de la perception. Le cheminement d'un chercheur britannique. In -Percevoir l'espace. Vers une géographie de l'espace vécu". Actes de la Table Ronde 1981, Genève.*

- 132 SCHIFFELLE F., (1982),  
*Images et pratiques d'un espace de loisirs : perception et utilisation des rives du Lac de Neufchâtel*. ASRDLF. Table Ronde. Dijon.
- 112 SCHWAB R., (1980),  
*De la cellule rurale à la région. L'Alsace 1825-1960*. Ed. Ophrys. Paris.
- 135 SCHWAB R., (1968),  
*Méthodes d'analyse de l'armature urbaine régionale. I. Le réseau urbain de l'Alsace d'après les statistiques téléphoniques*. R.G.E., T. VIII, n° 1-2.
- 131 SHYE S. Editor,  
*Theory construction and data analysis in the behavioral sciences*. A volume in Honor of Louis Guttman. San Francisco, 1978.
- 123 SIEGEL S., (1956),  
*Nonparametric Statistics for the behavioral Sciences*. Mc. Graw. Hill Book Company.
- 131 SOOT S., (1975),  
*National Airline Network : a graph Theoretic Analysis*. Cahier de Géographie de Québec. V. 19, n° 48.
- 111 SPACK A., (1974),  
*Aspects et problèmes touristiques en milieux urbains et périurbains. L'exemple de la ville de Metz et du Pays Messin*. Mosella, n° 1-2.
- 123 THISSE J., (1975),  
*Contribution à la théorie micro-économique spatiale*. Thèse de Doctorat. Liège.
- 217 TRANQUI P. (1978),  
*Les régions économiques floues. Application au cas de la France*. Collection de l'IME n° 16. Librairie de l'Université. Dijon.

- 217 TRANQUI P., (1978),  
*La régionalisation de l'économie française par une méthode de taxinomie numérique floue*. Doc. de travail n° 31, IME Dijon.
- 110 UNWIN D., (1981),  
*Introductory spatial analysis*. Methuen. London and New-York.
- 132 VANDERSCHRAEGE , CHARLIER D.,  
*Consumer Perception and shopping streets specialisation : the case of Liege (Belgium)*. SPUR Working Paper 7910.
- 123 VILLENEUVE P., RAY M., (1975),  
*Croissance allométrique et dynamique spatiale*. Cahiers de Géographie de Québec, vol. 19, n° 46.
- 112 VINING D.R., (1982),  
*Migration between the core and the periphery*. Scientific American, vol. 247, n° 6, pp. 37-45.
- 002 WALLISER B., (1977),  
*Systemes et modèles*. Seuil.
- 132 WILLIAM S., COLIN H., (1977),  
*Ethnic perceptions of Acadia*. Cahiers de Géographie de Québec, vol. 21, n° 53-54.
- 121 WILMET J., (1981),  
*Téledétection par satellite et espaces régionaux*. EG, n° 2, pp. 89-98.
- 122 YAMORI K., TAK AHASHI T., (1980),  
*L'espace dans la cartographie japonaise ancienne*. EG, n° 2, pp. 95-104.
- 211 ZADEH L.H., (1965),  
*Fuzzy Sets*. Inform. and Control, 8, pp. 338-355.
- 211 ZIMMERMANN H.J., (1983),  
*Decision Algorithms in Fuzzy Situations*. In "Fuzzy Information, Knowledge representation and decision analysis". IFAC, July 1983, Pergamon Press.

TABLE DES MATIERES

<u>INTRODUCTION GENERALE.....</u>	1
<u>1ère PARTIE : APPROCHE LOGIQUE DE L'ETUDE DES ESPACES GEOGRAPHIQUES FLOUS - SIGNIFICATION GEOGRAPHIQUE ET STRUCTURE FORMELLE.....</u>	5
<u>CHAPITRE I : LA NOTION D'ESPACE GEOGRAPHIQUE FLOU. DE L'APPROCHE INTUITIVE A L'APPROCHE AXIOMATIQUE.....</u>	9
A. <u>Signification géographique de la notion d'espace géographique flou.....</u>	10
I - <u>Approche des fondements géographiques de la notion de flou.....</u>	10
1. Sémantique de l'"à peu près" en analyse spatiale intuitive.....	10
2. Définitions de base de l'imprécision et de l'incertitude.....	12
3. L'homme, l'espace et le flou.....	16
II - <u>L'imprécision spatiale et la méthode géographique "non floue".....</u>	17
1. La démarche inductive classique.....	17
2. La démarche inductive quantitative.....	20
3. Les méthodes graphiques de traitement de l'information spatiale.....	23
III - <u>Réflexions sur l'épistémologie de la géographie...</u>	28
1. L'imprécision et la démarche de la "Nouvelle Géographie".....	29
2. Réflexions sur la "géographie des espaces flous".....	32
B. <u>Proposition d'une axiomatique de l'espace géographique.....</u>	34
I - <u>Notion d'ensemble mesurable.....</u>	34
1. Notion de $\sigma$ -algèbre.....	34

2. Notion de mesure positive.....	35
II - <u>Axiomatique de l'espace-référentiel</u> .....	35
1. L'espace-référentiel est un ensemble $\underline{E}$ de lieux.....	36
2. L'espace-référentiel est muni d'une "structure universelle" $\underline{S}$ .....	37
3. L'espace-référentiel est muni d'une "configuration objective" $\underline{C}$ .....	37
4. L'espace-référentiel est défini par une relation $\underline{R}$ : c'est un espace métrique.....	39
III - <u>Les bases formelles de l'axiomatique de l'espace géographique</u> .....	40
1. Notion de sous-ensemble flou.....	40
2. Notion d'ensemble valable : notion de $\xi$ -algèbre.....	41
3. Ensemble valué.....	43
IV - <u>Les fondements de l'espace géographique</u> .....	44
1. L'espace géographique est un sous-ensemble flou de l'espace-référentiel.....	45
2. L'espace géographique est muni d'une structure spécifique floue.....	46
3. L'espace géographique a une configuration imprécise.....	49
4. L'espace géographique est défini par une relation $R$ d'espacement entre tout couple de lieux.....	52
<u>CONCLUSION DU CHAPITRE I</u> .....	55

<u>CHAPITRE II : LES ESPACES GEOGRAPHIQUES NON FLOUS OU LA FORM-</u> <u>LISATION D'UN ESPACE PRECIS ET CERTAIN.....</u>	56
<u>INTRODUCTION.....</u>	57
A. <u>Les bases axiomatiques de l'espace géographique non flou...</u>	58
I - <u>Les fondements formels.....</u>	58
1. Définition formelle générale d'un espace géographique.....	58
2. Définition formelle d'un espace géographique non flou.....	58
II - <u>Modèles d'espaces géographiques non flous.....</u>	61
1. Modèles socio-économiques.....	62
2. Modèles spatiaux géographiques.....	66
B. <u>La réponse théorique au problème de l'incertitude spatiale: espace géographique précis et probabilité.....</u>	70
I - <u>Un espace précis incertain.....</u>	70
1. Approche formelle et géographique.....	70
2. Probabilité d'appartenance d'un sous-espace à un espace géographique précis.....	72
3. Formalisation.....	73
II - <u>Les bases formelles d'un espace précis probabilisé.....</u>	74
1. Notion de corps de BOREL.....	74
2. Mesure dans un corps de BOREL : espace probabilisé.....	75
3. Application à l'espace géographique précis	76
III - <u>Espace probabilisé et sous-espace flou.....</u>	76
1. Probabilité et flou : deux notions différentes.....	76

2. Probabilité et flou : deux notions juxtaposables en analyse spatiale.....	78
IV - <u>Conclusion : vers une généralisation de la théorie des probabilités</u> .....	79
C. <u>Les fondements théoriques de la régionalisation</u> .....	80
I - <u>Espaces géographiques et espaces topologiques</u> ....	80
1. Définition d'un espace topologique.....	81
2. Sous-ensemble particulier d'un espace topologique ou les fondements topologiques de la régionalisation.....	83
3. Les propriétés des espaces topologiques et leur intérêt géographique.....	86
II - <u>Espaces géographiques et théorie des graphes</u> .....	91
1. Approche géographique de la notion de réseau.....	91
2. Principales définitions de la théorie des graphes.....	92
3. Théorie des graphes et analyse spatiale...	95
III - <u>Espaces géographiques et espaces métriques</u> .....	98
1. Les métriques générales.....	99
2. Les métriques particulières.....	103
3. La métrique-réseau.....	106
IV - <u>Conclusion</u> .....	107
<u>CONCLUSION DU CHAPITRE II</u> .....	109

CHAPITRE III : LES FONDEMENTS THEORIQUES DE L'ANALYSE DES ESPACES IMPRECIS.....	110
A. <u>La signification géographique de l'imprécision spatiale....</u>	111
I - <u>Définitions de base et caractères fondamentaux     d'un espace géographique imprécis.....</u>	111
1. Définitions.....	111
2. Les propriétés immédiates d'un espace géo- graphique imprécis.....	114
3. Les caractères spatiaux induits par la no- tion d'imprécision.....	115
II - <u>Les grands types d'espaces géographiques imprécis</u>	116
1. Les espaces géographiques bien définis, mais à limite imprécise.....	116
2. Espaces géographiques à limites "élasti- ques".....	118
3. Espaces définis par des prédicats imprécis.	119
B. <u>La théorie des sous-ensembles flous : les fondements essen- tiels de l'analyse géographique des espaces imprécis.....</u>	121
I - <u>Le concept de sous-ensemble flou.....</u>	121
1. Exemple et notation.....	121
2. Définition formelle.....	121
3. Application spatiale.....	122
4. Ensemble des parties floues d'un ensemble..	123
II - <u>Les opérations sur les sous-ensembles flous.....</u>	124
1. Inclusion.....	124
2. Egalité et complémentation.....	124
3. Intersection et réunion.....	125
4. Somme disjonctive de deux sous-ensembles flous.....	125

5. Différence et différence absolue.....	126
6. Produit algébrique et somme algébrique.....	126
7. Somme arithmétique.....	127
8. Autres opérateurs possibles sur les sous-ensembles flous.....	127
III - <u>Comparaison de deux sous-ensembles flous</u> .....	129
1. Distance de deux sous-ensembles flous.....	130
2. Les indicateurs de flou.....	133
3. Notion d' $\alpha$ -coupure.....	134
IV - <u>Les algèbres floues</u> .....	137
1. Pour les opérations $\cup, \cap, -$ : union, intersection, complémentation.....	138
2. Pour les opérations $(\bullet), (\hat{\wedge})$ : produit et somme algébriques.....	141
3. Conclusion : intérêt géographique.....	141
V - <u>Caractérisation de l'ensemble d'appartenance <math>M</math></u> ....	142
1. Ensemble d'appartenance au sens de ZADEH...	142
2. Ensemble d'appartenance se ramenant à $[0,1]$	143
3. $\underline{L}$ -sous-ensemble flou au sens de GOGUEN.....	144
4. $\underline{L}$ -ensemble partiellement ordonné ne formant pas un treillis.....	144
5. Distance entre deux sous-ensembles flous dans le cas où $\underline{L}$ est un simple graphe.....	147
6. Distance entre deux sous-ensembles flous multicritères.....	150
7. Les sous-ensembles $\Phi$ -flous.....	153
<u>CONCLUSION DU CHAPITRE III</u> .....	158

<u>CHAPITRE IV</u> : LES ESPACES GEOGRAPHIQUES INCERTAINS. FONDE- MENTS GEOGRAPHIQUES ET MATHEMATIQUES DE L'ETU- DE DES ESPACES MAL CONNUS OU INCOMPLETEMENT CONNUS.....	159
<u>A. Définitions et concepts géographiques de base de la notion d'incertitude.....</u>	160
I - <u>Approche géographique : notion d'espace incertain.</u>	160
1. Définition.....	160
2. Incertitude et imprécision spatiales.....	161
3. Définitions dérivées de ces notations.....	163
II - <u>Les types d'espaces géographiques incertains.....</u>	163
1. Les espaces à incertitude relative "objec- tive".....	163
2. Les espaces à incertitude relative "subjec- tive".....	166
3. Les espaces géographiques aléatoires.....	166
<u>B. Les concepts mathématiques de base de la notion d'incertitude</u>	168
I - <u>Remarques sur l'ensemble des parties d'un référen-             ciel et sur la notion de mesure.....</u>	168
1. Notions d'ensemble mesurable ou valable Tableau IV 1.....	169
2. Signification de ce tableau.....	168
3. Notions de mesure ou de valuation. Tableau IV 2.....	171
4. Signification de ce tableau.....	172
II - <u>Types de mesures d'incertain : présentation géné-             rale.....</u>	172
1. Norme triangulaire.....	173
2. Conorme triangulaire.....	174
3. Traitement d'un exemple.....	174

C. <u>Notions d'imprécision et d'incertitude appliquées aux sous-ensembles flous</u> .....	178
I - <u>Théorie des sous-ensembles flous probabilisés</u> .....	178
1. Approche géographique.....	178
2. Les concepts mathématiques.....	178
3. Extension de la notion de probabilité.....	180
II - <u>Possibilité et nécessité de sous-ensembles flous</u> ...	181
1. Définitions préliminaires : incertitude sur un sous-ensemble non flou.....	181
2. Incertitude sur un sous-ensemble flou.....	182
3. Association de la fonction d'appartenance et de la fonction d'incertitude d'un sous-ensemble flou.....	183
4. Mesures d'incertitude des sous-ensembles flous : mesure de possibilité.....	185
5. Mesures de nécessité.....	188
6. Choix différents d'opérateurs d'incertitude.	190
III - <u>Notion d'indépendance de sous-ensembles flous et notion dérivée de non corrélation spatiale</u> .....	192
1. Indépendance de type MIN.....	193
2. Indépendance de type PROD.....	193
3. Applications aux mesures d'incertitude présentées ci-dessus.....	193
 <u>CONCLUSION DU CHAPITRE IV</u> .....	 195
 <u>CONCLUSION DE LA PREMIERE PARTIE</u> .....	 197

<u>2ème PARTIE</u> : MODELES DE TRAITEMENT DES ESPACES GEOGRAPHIQUES FLOUS - ANALYSE FORMELLE ET EXEMPLES D'APPLICA- TION GEOGRAPHIQUE.....	199
<u>CHAPITRE V</u> : LES ESPACES GEOGRAPHIQUES REPRESENTES : REFLE- XIONS SUR LA COMMUNICATION DE L'INFORMATION SPATIALE GEOGRAPHIQUE.....	204
A. <u>L'espace géographique représenté, support de l'analyse spatiale.....</u>	205
I - <u>Notion d'espace géographique représenté.....</u>	205
1. Approche et définition.....	205
2. Les types d'espaces géographiques repré- sentés.....	205
3. Les caractères géographiques de l'espace géographique représenté.....	207
4. Formalisation de la notion d'espace géo- graphique représenté.....	212
5. Les caractères formels induits.....	215
II - <u>Problématique de l'analyse spatiale à partir d'un             espace géographique représenté.....</u>	216
1. Enoncé général.....	216
2. Enoncé d'exemples.....	217
B. <u>De l'espace géographique à l'espace géographique représenté ou notions sur la transmission de l'information spatiale...</u>	219
I - <u>Présentation générale de la théorie des communi-             cations.....</u>	219
1. Les concepts de base d'un système de com- munication de l'information.....	219
2. Notion d'émetteur.....	220
3. Notion de bruit parasite.....	221
4. Notion de prise de décision en traitement du signal.....	221

II - <u>Modèle général de la démarche d'analyse spatiale</u> .....	223
1. Présentation du modèle.....	223
2. Les termes du modèle.....	226
3. Signification géographique du modèle.....	227
III - <u>La démarche d'analyse spatiale à partir d'un espace représenté flou et (ou) d'une structure floue</u> .....	229
1. t., fonction-attribut, est une fonction univoque.....	229
2. t., fonction-attribut, est une fonction multivoque.....	231
3. t., fonction-attribut, est une fonction floue.....	234
 <u>CONCLUSION DU CHAPITRE V</u> .....	 236
  <u>CHAPITRE VI : MODELES DE TRAITEMENT DES ESPACES GEOGRAPHIQUES IMPRECIS. PRESENTATION ET APPLICATIONS GEOGRAPHIQUES</u> .....	  237
 <u>INTRODUCTION : PROBLEMATIQUE GENERALE</u> .....	 238
 A. <u>Modèles de traitement d'un espace défini par une structure spatiale imprécise</u> .....	 239
I - <u>Modèle de traitement de l'imprécision fondée sur la notion de distance entre sous-ensembles</u> .....	239
1. Expression générale du modèle.....	239
2. Formalisation préliminaire de la notion de relation binaire floue.....	240
3. Notion de structure pré-définie floue A...	242

4. Calcul des distances.....	244
5. Conclusion : intérêt géographique de cette démarche.....	246
II - <u>Modèle de traitement de l'attraction imprécise d'un centre.....</u>	247
1. Les bases logiques du modèle de FUSTIER...	247
2. Les données du modèle.....	247
3. Expression du modèle dans un contexte im- précis.....	248
4. Spatialisation de l'attraction imprécise..	249
5. Conclusion.....	250
B. <u>Modèle de traitement d'un espace défini par une structure incertaine.....</u>	250
I - <u>La modélisation spatiale à partir d'une structure pré-définie incertaine.....</u>	250
1. Les bases du modèle : principales défini- tions.....	250
2. Formalisation d'une structure précise in- certaine.....	251
3. Formalisation d'une structure imprécise incertaine.....	252
4. Traitement de la matrice de données.....	252
5. Expression spatiale du modèle : espace pos- siblement et nécessairement organisé se- lon la structure A.....	254
6. Conclusion.....	256
II - <u>Traitement d'un exemple : espace européen orga-         nisé selon la structure rhénane.....</u>	257
1. Les données géographiques.....	257
2. Les étapes du traitement de la matrice de données.....	266
3. Expression spatiale des résultats et com- mentaire géographique.....	268

4. Conclusion.....	270
C. <u>Modèle de régionalisation dans un contexte imprécis : méthode de classification spatiale floue.....</u>	272
I - <u>Les bases mathématiques de la classification spatiale floue.....</u>	272
1. Rappel de notions mathématiques.....	272
2. Théorèmes.....	275
II - <u>L'algorithme de PICHAT de décomposition d'une relation floue en sous-relations maximales.....</u>	278
1. Les bases de l'algorithme.....	278
2. Les étapes de l'algorithme.....	282
3. Proposition d'extension de l'algorithme au cas d'une structure floue pré-définie.....	284
III - <u>Application de l'algorithme de PICHAT. La régionalisation européenne d'après PONSARD et TRANQUI.</u>	285
1. Le choix des données.....	285
2. Les conclusions dégagées lors de la classification floue.....	285
<u>CONCLUSION DU CHAPITRE VI.....</u>	287
<u>CHAPITRE VII : LES ESPACES REPRESENTES FLOUS. PROBLEMATIQUE GENERALE ET MODELE DE VALUATION DES ESPACES SUBJECTIFS.....</u>	288
A. <u>Approche de la notion d'espace géographique représenté flou</u>	289
I - <u>Un type particulier d'espace représenté : l'espace perçu des cartes mentales.....</u>	289
1. Elaboration d'une carte mentale.....	289

2. Le processus d'élaboration d'un espace perçu et de représentation spatiale.....	292
3. Les composants d'une carte mentale et leur interprétation.....	294
4. Proposition de typologie des composantes spatiales d'un espace perçu.....	297
5. Généralisation : notion d'espace subjectif	300
II - <u>Généralisation : notion d'espace représenté flou</u>	301
1. Exemples d'espaces représentés flous.....	301
2. Les fondements de l'imprécision dans la représentation spatiale.....	303
3. Les éléments non- ou mal identifiés : l'in- certitude dans la représentation spatiale.	304
4. Conclusion.....	305
 B. <u>Traitement des espaces représentés flous : les étapes de l'analyse spatiale.....</u>	 306
I - <u>Passage du document géographique à l'écriture         formalisée de l'espace représenté flou.....</u>	306
1. Les bases de la modélisation.....	306
2. Définition de $E_R$ sous-espace flou du ré- férentiel $E$ .....	307
II - <u>Organisation de l'espace géographique selon une         structure pré-définie A.....</u>	308
1. Problématique générale.....	308
2. Notion préliminaire : valuation d'un treil- lis lexicographique.....	309
3. Modèle de traitement dans le cas où la structure pré-définie est non-floue.....	310
4. Modèle de traitement dans le cas où la structure pré-définie est floue.....	314
5. Conclusion.....	317

C. <u>Modèle de valuation d'un espace représenté subjectif.....</u>	318
I - <u>Approche géographique de la modélisation.....</u>	318
1. Originalité de la représentation spatiale sur une carte mentale.....	318
2. Aspects pratiques de la représentation spatiale.....	320
3. Problématique de valuation d'un espace représenté subjectif cartographié.....	321
4. Formalisation d'un espace subjectif cartographié.....	322
II - <u>Modèle de valuation des composantes spatiales d'un espace subjectif.....</u>	324
1. Présentation générale du modèle.....	324
2. Ecriture du modèle.....	325
3. Explication des termes du modèle.....	325
4. Tableau récapitulatif des valeurs des fonctions d'appartenance.....	330
III - <u>Les notations dérivées du modèle de valuation. Mise en évidence d'une structure implicite de l'espace représenté.....</u>	331
1. Structure implicite de l'espace subjectif collectif.....	332
2. Notions dérivées du modèle : "situation" de chaque espace subjectif individuel par rapport à la structure collective.....	346
3. Conclusion.....	348
<u>CONCLUSION DU CHAPITRE VII.....</u>	349

<u>CHAPITRE VIII</u> - L'ORGANISATION SPATIALE D'APRES LES ESPACES SUBJECTIFS CARTOGRAPHIES. DONNEES GENERALES ET APPLICATION DU MODELE DE VALUATION : L'ORGANISATION SPATIALE DU CENTRE-VILLE DE METZ (FRANCE).....	350
<u>INTRODUCTION</u> .....	351
A. <u>Les données générales de l'organisation du centre-ville de Metz</u> .....	352
I - <u>Notations générales</u> .....	352
1. Rappel de définitions de base.....	352
2. Composition floue d'un espace représenté subjectif.....	353
3. Configuration floue d'un espace représenté subjectif.....	353
II - <u>Notion de composition floue d'un espace subjectif cartographié</u> .....	353
1. Les "Terres Inconnues".....	353
2. Les composantes perçues et leur représentation, précise ou imprécise.....	355
3. Les composantes incertaines.....	357
4. Conclusion.....	357
III - <u>Notion de configuration de l'espace subjectif cartographié</u> .....	358
1. Les termes géographiques de la configuration de l'espace subjectif.....	358
2. Notions de topologie floue et les propriétés spatiales dérivées.....	362
IV - <u>Application géographique : structure topologique du centre-ville de Metz d'après l'étude des espaces subjectifs</u> .....	370
1. Les invariants spatiaux.....	370

2. Les sous-structures topologiques du centre ville de Metz.....	372
3. Conclusion.....	373
B. <u>L'organisation spatiale du centre-ville de Metz d'après le modèle de valuation. Exposé géographique.....</u>	374
I - <u>Structure simple de l'espace subjectif collectif</u>	374
1. Une perception discontinue de l'espace géographique.....	374
2. Une perception différentielle de l'espace géographique.....	377
II - <u>Structure-réseau de l'espace subjectif collectif</u>	385
1. Valuation de la structure-réseau.....	385
2. Réseaux flous de niveau donné.....	388
3. Structure-réseau de l'espace subjectif collectif.....	391
III - <u>La notion de distance subjective et ses implica-     tions géographiques.....</u>	392
1. Définition et caractères de la distance subjective.....	392
2. Structure induite de l'espace subjectif du centre-ville par la notation des distances subjectives.....	394
3. La notion d'"effet de voisinage".....	397
C. <u>Rapports entre espace géographique et espace subjectif col- lectif.....</u>	404
I - <u>Les facteurs géographiques de l'espace subjectif     collectif.....</u>	404
1. La lisibilité de l'espace géographique....	404
2. La variété de l'espace géographique.....	405

3. L'organisation de l'espace géographique...	406
II - <u>L'impact de la perception spatiale sur l'organisation de l'espace : signification géographique et sociologique</u> .....	406
1. Les espaces subjectifs faibles : des "espaces-refuges".....	407
2. Les espaces subjectifs forts : des "espaces-vitrines".....	408
 <u>CONCLUSION DU CHAPITRE VIII</u> .....	410
 <u>CONCLUSION DE LA DEUXIEME PARTIE</u> .....	413
 <u>CONCLUSION GENERALE</u> .....	415
 <u>ANNEXES</u> : I .....	417
II .....	424
III .....	427
 <u>BIBLIOGRAPHIE</u> .....	438
 <u>TABLE DES MATIERES</u>	