



Inéquations variationnelles fortement non linéaires et applications : [comparaisons des solutions et applications]

Gérard Michaille

► To cite this version:

Gérard Michaille. Inéquations variationnelles fortement non linéaires et applications : [comparaisons des solutions et applications]. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paul Verlaine - Metz, 1988. Français. NNT : 1988METZ002S . tel-01775745

HAL Id: tel-01775745

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01775745>

Submitted on 24 Apr 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

ISGMP

Unité associée au CNRS n°399

Méthodes Mathématiques pour l'Analyse des Systèmes.

Thèse présentée à l'Université de Metz

pour obtenir le grade de

docteur de l'Université de Metz

en mathématiques

mention : mathématiques appliquées-analyse non linéaire

par Monsieur Gérard Michaille

**Sujet de la thèse : Inéquations variationnelles fortement non
linéaires et applications.**

Soutenue le 22 Mars 1988

devant le jury composé de

Messieurs : M.CHIPOT.Professeur à l'Université de Metz

F.MURAT.Professeur à l'Université de Paris VI

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE DE METZ



022 420294 3

Université de Nancy I - Rapporteur

Université de Metz

Professeur à l'Université de Metz - Rapporteur.

ISGMP

Unité associée au CNRS n°399

Méthodes Mathématiques pour l'Analyse des Systèmes.

Thèse présentée à l'Université de Metz

pour obtenir le grade de

docteur de l'Université de Metz

en mathématiques



mention : mathématiques appliquées-analyse non linéaire

par Monsieur Gérard Michaille

Sujet de la thèse : **Inéquations variationnelles fortement non**

linéaires et applications.

Soutenue le 22 Mars 1988

devant le jury composé de

Messieurs : M.CHIPOT.Professeur à l'Université de Metz

F.MURAT.Professeur à l'Université de Paris VI

M.PIERRE.Professeur à l'Université de Nancy I - Rapporteur

C.ROGER. Professeur à l'Université de Metz

A.ROUX. Professeur à l'Université de Metz - Rapporteur.

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv.	19880045
Cote	S/M ₃ 88/2
Loc	Magasin

Je voudrais tout d'abord remercier Monsieur CHIPOT qui a dirigé et encouragé mon travail. Les idées échangées, le travail à son contact furent pour moi une expérience fructueuse et déterminante.

Je remercie également :

Messieurs MURAT, PIERRE, ROGER et ROUX de me faire l'honneur de participer au jury,

toutes les personnes qui de près ou de loin m'ont soutenu au cours de cette thèse, en particulier les personnes de l'université de Metz, Monsieur FEGGOUS, sans oublier ma famille ainsi que mes amis.

Sommaire

0.Introduction p. 1

1.Notations et position du problème p.3

2.Une propriété générale de monotonie p.6

3.Quelques applications p.13

4.Un contre-exemple p.21

5.Quelques extensions p.24

6.Un résultat d'existence p.37

7.Existence d'une frontière libre p.43

8.Etude numérique d'un problème comportant un terme de transport p.50

Bibliographie p.67

0.Introduction

Le résultat principal de cette thèse est une propriété de monotonie, et donc d'unicité, pour une classe importante d'inéquations variationnelles à opérateurs A fortement non linéaires du type:

$$u \in K$$

$$\langle A(x,u,\nabla u), v-u \rangle \geq \langle f, v-u \rangle \quad \forall v \in K.$$

(Les notations seront précisées plus loin .)

La technique utilisée nécessite un choix précis de "fonctions test " .Ceci nous conduit à une caractérisation abstraite (mais assez souple) des convexes adaptés à notre méthode. Pour les problèmes correspondants, nous obtenons ainsi, dans la partie 2 un résultat de monotonie permettant de comparer les solutions de deux problèmes dont les convexes sont, en un certain sens comparables. Précisons en outre, qu'aucune hypothèse de différentiabilité (sauf dans la partie 7) ne portera sur l'opérateur du problème. Ces résultats généralisent et unifient ceux obtenus par M. Artola [2] , L. Boccardo [3] , H. Brezis [6] , H. Brezis - D. Kinderlehrer - G. Stampacchia [8], J. Carrillo - M. Chipot [9] , J.I.Diaz-M.Pierre [13] , J. Douglas Jr. - T. Dupont - J. Serrin [14] , G. Gagneux [15] , N.S. Trudinger [17] , [27].

Dans un deuxième temps, nous donnons dans la partie 3, des exemples concrets de différents problèmes où la monotonie est vérifiée. Pour cela nous "jouons" aussi bien sur l'opérateur que sur le convexe .

La partie 4 est consacrée à l'étude d'un contre-exemple à l'unicité montrant qu'une propriété supplémentaire du terme de transport de l'opérateur considéré est nécessaire pour pallier certains cas de défaut d'unicité. Cette dernière remarque nous conduit dans la partie 5 à étendre alors dans ces cas le théorème 2.1.

La partie 6 est consacrée à une démonstration élémentaire de l'existence d'une solution pour les problèmes envisagés ci-dessus . Quelques hypothèses supplémentaires sont nécessaires.

Notre résultat de monotonie nous permet, dans la partie 7, de démontrer l'existence d'une frontière libre pour certaines inéquations variationnelles lorsque l'opérateur présente , en un certain sens, une singularité en 0.

Enfin, dans la partie 8, nous traitons l'analyse numérique d'un problème élémentaire où la non linéarité provient d'un terme de transport. Pour la mise en œuvre d'un algorithme de résolution nous utilisons certains résultats des parties 2 et 6.

Avant d'aborder la partie 2, donnons dans une première partie quelques notations et précisons le cadre fonctionnel dans lequel nous nous plaçons.

1. Notations et position du problème.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière Γ Lipschitzienne. Pour $p > 1$ on notera $W^{1,p}(\Omega)$ l'espace de Sobolev des fonctions de $L^p(\Omega)$ (à valeurs dans $\mathbb{R}$) dont les dérivées au sens des distributions sont dans $L^p(\Omega)$; $L^p(\Omega)$ étant l'espace des fonctions de puissance p ième intégrables. Nous noterons $\|\cdot\|_p$ la norme usuelle de L^p . On pourra se référer à [1] ou [17] pour plus de détails sur les espaces de Sobolev.

Pour K convexe fermé de $W^{1,p}(\Omega)$, V désignera le sous espace fermé de $W^{1,p}(\Omega)$ engendré par

$$K - K = \{ k - k' \mid k, k' \in K \}. \quad (1.1)$$

V^* désignera le dual de V pour la topologie induite par $W^{1,p}(\Omega)$. Pour $f \in V^*$ nous allons étudier des inéquations variationnelles du type

$$u \in K \quad (1.2)$$

$$\langle A(x, u, \nabla u), v - u \rangle \geq \langle f, v - u \rangle \quad \forall v \in K.$$

où A est un opérateur non linéaire de K dans V^* et où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le crochet de dualité entre V^* et V .

Précisons notre opérateur A . Nous supposons que A est donné (avec la convention des indices répétés) par:

$$\langle A(x, u, \nabla u), v \rangle = \int_{\Omega} A_i(x, u, \nabla u) \cdot \partial v / \partial x_i + a(x, u) \cdot v \, dx + \int_{\Gamma} \gamma(x, u) \cdot v \, d\sigma \quad \forall v \in V. \quad (1.3)$$

(i.e. $A_i(x, u, \nabla u) \cdot \partial v / \partial x_i$ signifie $\sum_i A_i(x, u, \nabla u) \cdot \partial v / \partial x_i$ où la sommation en i est prise de 1 à n . Cette convention sera utilisée dans toute la suite. Dans la dernière intégrale $d\sigma$ désigne la mesure superficielle sur Γ et u et v désigne (avec la même notation) leur trace respective sur Γ (voir [1], [18], [23])).

Dans le but de donner un sens à (1.3) nous supposons que pour $i = 1, \dots, n$

$$A_i(x, u, \nabla u) \quad , \quad a(x, u) \in L^{p'}(\Omega) \quad , \quad \gamma(x, u) \in L^{p'}(\Gamma) \quad \forall u \in K \quad (1.4)$$

($p' = p/(p-1)$) est l'exposant conjugué de p . On notera que (1.4) nous assure que l'opérateur A défini par (1.3) est dans V^* .

Une condition simple pour que (1.4) soit vérifié, est par exemple, de supposer que

$$A_i(x, u, \xi) \quad , \quad a(x, u) \quad , \quad \gamma(x, u) \text{ sont des fonctions de Caratheodory .} \quad (1.5)$$

(i.e. mesurables en x et, pour presque tout x , continues en les autres variables), et que

$\exists$ une constante C , et des fonctions $C' \in L^{p'}(\Omega)$, $C'' \in L^{p'}(\Gamma)$, $C, C', C'' \geq 0$ telles que

$$|A_i(x, u, \xi)| \leq C(|u|^{p-1} + |\xi|^{p-1}) + C'(x) \quad , \quad |a(x, u)| \leq C|u|^{p-1} + C'(x) \quad (1.6)$$

$\forall u \in \mathbb{R}, \forall \xi \in \mathbb{R}^n$, x -p.p. dans Ω , $|\gamma(x, u)| \leq C|u|^{p-1} + C''(x)$, $\forall u \in \mathbb{R}$, x -p.p. sur Γ
où x -p.p. signifie "pour presque tout x ..."

(On notera que grâce au théorème d'injection de Sobolev ainsi qu'au théorème de trace, (voir [1], [23]), l'exposant de $|u|$ dans les inégalités ci-dessus pourrait être pris supérieur à $p-1$).

Nous supposons que

$$u \rightarrow a(x, u) \text{ est croissante } x\text{-p.p. dans } \Omega .$$

(1.7)

$$u \rightarrow \gamma(x, u) \text{ est croissante } x\text{-p.p. sur } \Gamma .$$

Nous ferons enfin les deux hypothèses fondamentales suivantes sur A .

Tout d'abord nous supposons que cet opérateur est elliptique c'est à dire qu'il existe une constante ν strictement positive telle que:

$$(A_i(x, u, \xi) - A_i(x, u, \zeta)) \cdot (\xi_i - \zeta_i) \geq \nu |\xi - \zeta|^p \quad (1.8)$$

$$\forall \xi, \zeta \in \mathbb{R}^n, \forall u \in \mathbb{R}, x\text{-p.p. dans } \Omega .$$

($\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$, $|\xi - \zeta|$ désigne la norme Euclidienne de $\xi - \zeta$, $(\cdot)$ le produit scalaire usuel).

De plus , nous supposerons qu'il existe une fonction ω positive , croissante , continue , une constante C et une fonction $g \in L^{p'}(\Omega)$ telle que:

$$|A(x,u,\xi) - A(x,v,\xi)| \leq C \omega(|v-u|)(|\xi|^{p-1} + g(x)) \quad (1.9)$$

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \forall u, v \in \mathbb{R}, x\text{-p.p.dans } \Omega.$$

(Cette hypothèse n'intervient pas dans la partie 6. Ici, A désigne le vecteur de composantes A_i et $|\cdot|$ sa norme Euclidienne.)

Pour ω nous serons amenés, sauf dans la partie 6, à considérer les deux hypothèses

$$\int_{0+} 1/\omega^{1/p-1}(s)ds = +\infty \quad (1.10)$$

et

$$\int_{0+} 1/\omega^{p'}(s)ds = +\infty. \quad (1.11)$$

Remarque 1.1: Il est clair que (1.10) implique (1.11) puisque $p' = p/p-1 > 1/p-1$. De plus lorsque $p \leq 2$, en tenant compte de (1.9), (1.10) est vérifié pour des A_i Hölderiennes en u d'exposant supérieur ou égal à $p-1$ (la constante de Hölder dépendant de ξ - se reporter à la partie 3 pour des applications convaincantes), et de même (1.11) est vérifié pour des A_i Hölderiennes en u d'exposant supérieur ou égal à $1/p'$, ω étant le module de continuité en u de A_i . Pour $p > 2$ l'hypothèse (1.10) n'est vérifiée que lorsque les A_i ne dépendent pas de u .

On notera (sauf dans la partie 7) qu'aucune hypothèse de différentiabilité ne portera sur les A_i et que seules les hypothèses de structure (1.8), (1.9) interviendront (comme dans [17], [27] pour le cas Lipschitzien).

2. Une propriété générale de monotonie:

Soient K_1, K_2 deux convexes fermés de $W^1 \cdot P(\Omega)$. Nous dirons que K_1, K_2 possèdent la propriété (H) si et seulement si:

$$u_1 + F(u_2 - u_1) \in K_1, \quad u_2 - F(u_2 - u_1) \in K_2 \quad \forall u_1 \in K_1, \forall u_2 \in K_2 \quad (H)$$

pour toute fonction Lipschitzienne F ayant un module de Lipschitz inférieur à 1 et telle que $F(x)=0$ pour $x \leq 0$ et positive.

Remarque 2.1: cette propriété implique en particulier:

$$u_1 + (u_2 - u_1)^+ = \text{Max}(u_1, u_2) \in K_1, \quad u_2 - (u_2 - u_1)^+ = \text{Min}(u_1, u_2) \in K_2$$

pour chaque $u_1 \in K_1, u_2 \in K_2$. (voir la partie 3 où on utilisera cette remarque). Une telle propriété semble caractéristique de convexes définis par des contraintes ponctuelles.

Pour $i = 1, 2$ notons V_i l'espace engendré par $K_i - K_i$ (voir (1.1)) et par V_i^* sont dual. Notre principal résultat est alors le suivant:

Théorème 2.1: Soient K_i ($i = 1, 2$) deux convexes fermés de $W^1 \cdot P(\Omega)$ vérifiant (H). Soient $f_i \in V_i^*$ telles que

$$\langle f_1, v \rangle \geq \langle f_2, v \rangle \quad \forall v \in V_1 \cap V_2, \quad v \geq 0. \quad (2.1)$$

Supposons (1.3), (1.4), (1.7), (1.8), (1.9) vérifiées pour K_1 et K_2 et soient u_i ($i = 1, 2$) une solution de

$$u_i \in K_i$$

$$\langle A(x, u_i, \nabla u_i), v - u_i \rangle \geq \langle f_i, v - u_i \rangle \quad \forall v \in K_i. \quad (2.2)$$

Alors si

(i) : (1.11) est vérifié et si

$$u \rightarrow a(x,u) \text{ est strictement croissante x-p.p sur } \Omega. \quad (2.3)$$

ou

(ii) : (1.10) est vérifié et si

$$u \rightarrow a(x,u) \text{ est strictement croissante sur une partie de mesure non nulle de } \Omega \quad (2.4)$$

ou

$$u \rightarrow \gamma(x,u) \text{ est strictement croissante sur une partie de } \Gamma \quad (2.5)$$

ou

$$\text{Il existe une constante } C \text{ telle que } \|v\|_p \leq C \|\nabla v\|_p \quad \forall v \in V_1 \cap V_2 \quad (2.6)$$

alors:

$$u_2(x) \leq u_1(x) \quad \text{p.p dans } \Omega. \quad (2.7)$$

Remarque 2.2 : On notera que le cas (i) est simple et général (voir plus loin le théorème 3.1). Le cas (ii) est plus compliqué mais nous verrons que ce résultat est d'une certaine manière optimal en ce qui concerne l'hypothèse sur ω .

Démonstration : Posons

$$I(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{1}{\omega^{p'}(s)} ds \quad (2.8)$$

(En prenant ω suffisamment grand dans (1.9), on peut supposer :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\omega^{p'}(s)} ds < +\infty \quad).$$

Considérons F^ϵ définie par

$$F^\epsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{I(\epsilon)} \int_{\epsilon}^x \frac{1}{\omega^{p'(s)}} ds & \text{pour } x > \epsilon \\ 0 & \text{pour } x \leq \epsilon \end{cases} \quad (2.9)$$

Il est clair que F^ϵ est une fonction Lipschitzienne qui s'annule pour $x \leq 0$. Grâce à (H), pour δ suffisamment petit, nous avons :

$$u_1 + \delta F^\epsilon(u_2 - u_1) \in K_1, \quad u_2 - \delta F^\epsilon(u_2 - u_1) \in K_2.$$

En substituant ces deux fonctions dans (2.2) nous obtenons :

$$\langle A(x, u_1, \nabla u_1), \delta F^\epsilon(u_2 - u_1) \rangle \geq \langle f_1, \delta F^\epsilon(u_2 - u_1) \rangle$$

$$\langle A(x, u_2, \nabla u_2), -\delta F^\epsilon(u_2 - u_1) \rangle \geq \langle f_2, -\delta F^\epsilon(u_2 - u_1) \rangle.$$

Et en additionnant

$$\langle A(x, u_1, \nabla u_1) - A(x, u_2, \nabla u_2), \delta F^\epsilon(u_2 - u_1) \rangle \geq \langle f_1, \delta F^\epsilon(u_2 - u_1) \rangle - \langle f_2, \delta F^\epsilon(u_2 - u_1) \rangle.$$

Grâce à (2.1) on a :

$$\langle A(x, u_1, \nabla u_1) - A(x, u_2, \nabla u_2), F^\epsilon(u_2 - u_1) \rangle \geq 0$$

(On remarquera que par la propriété (H), $F^\epsilon(u_2 - u_1) \in V_1 \cap V_2$),

ou encore

$$\langle A(x, u_1, \nabla u_1) - A(x, u_2, \nabla u_1), F^\epsilon(u_2 - u_1) \rangle \geq \langle A(x, u_2, \nabla u_2) - A(x, u_2, \nabla u_1), F^\epsilon(u_2 - u_1) \rangle.$$

En tenant compte de (1.3) nous en déduisons (pour alléger les notations nous omettrons les mesures d'intégration)

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (A_i(x, u_2, \nabla u_2) - A_i(x, u_2, \nabla u_1)) \partial F^\varepsilon(u_2 - u_1) / \partial x_i \\
& + \int_{\Omega} (a(x, u_2) - a(x, u_1)) F^\varepsilon(u_2 - u_1) + \int_{\Gamma} (\gamma(x, u_2) - \gamma(x, u_1)) F^\varepsilon(u_2 - u_1) \\
& \leq \int_{\Omega} (A_i(x, u_1, \nabla u_1) - A_i(x, u_2, \nabla u_1)) \partial F^\varepsilon(u_2 - u_1) / \partial x_i . \quad (2.10)
\end{aligned}$$

En remarquant que

$$\partial F^\varepsilon(u_2 - u_1) / \partial x_i = (F^\varepsilon)'(u_2 - u_1) \cdot \partial(u_2 - u_1) / \partial x_i$$

et en utilisant (1.8), (1.9) nous obtenons après avoir allégé l'écriture de $(F^\varepsilon)'(u_2 - u_1)$ par $(F^\varepsilon)'$:

$$\begin{aligned}
& v \int_{\Omega} |\nabla(u_2 - u_1)|^p (F^\varepsilon)' + \int_{\Omega} (a(x, u_2) - a(x, u_1)) F^\varepsilon(u_2 - u_1) + \int_{\Gamma} (\gamma(x, u_2) - \gamma(x, u_1)) F^\varepsilon(u_2 - u_1) \\
& \leq \int_{\Omega} |A(x, u_1, \nabla u_1) - A(x, u_2, \nabla u_1)| (F^\varepsilon)' |\nabla(u_2 - u_1)| \\
& \leq \int_{\Omega} C \omega(|u_2 - u_1|) (|\nabla u_1|^{p-1} + g(x)) (F^\varepsilon)' |\nabla(u_2 - u_1)| . \quad (2.11)
\end{aligned}$$

Utilisant l'inégalité de Young

$$ab \leq \varepsilon^p a^p / p + (\varepsilon')^{-p'} b^{p'} / p'$$

avec $\varepsilon' = (\nu p / 2)^{1/p}$ nous obtenons :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} C \omega(|u_2 - u_1|) (|\nabla u_1|^{p-1} + g(x)) (F^\varepsilon)' |\nabla(u_2 - u_1)| \\
& \leq \nu / 2 \int_{\Omega} |\nabla(u_2 - u_1)|^p (F^\varepsilon)' + (C/\varepsilon')^{p'/p} \int_{\Omega} \omega^{p'}(|u_2 - u_1|) (|\nabla u_1|^{p-1} + g(x))^{p'} (F^\varepsilon)'.
\end{aligned}$$

De (2.9) et (2.11) nous déduisons :

$$\begin{aligned}
& \nu / 2 \int_{\Omega} |\nabla(u_2 - u_1)|^p (F^\varepsilon)' + \int_{\Omega} (a(x, u_2) - a(x, u_1)) F^\varepsilon(u_2 - u_1) + \int_{\Gamma} (\gamma(x, u_2) - \gamma(x, u_1)) F^\varepsilon(u_2 - u_1) \\
& \leq \frac{C}{I(\varepsilon)} \int_{[u_2 - u_1 > \varepsilon]} (|\nabla u_1|^{p-1} + g(x))^{p'} \quad (2.12)
\end{aligned}$$

C est une constante positive et $[u_2 - u_1 > \varepsilon]$ désigne l'ensemble des x de Ω où $u_2 - u_1$ est strictement plus grand que ε .

Considérons d'abord le cas (i).

Par (2.12) et puisque $(F^\varepsilon)'$ est positive et $u \rightarrow \gamma(x, u)$ est croissante nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (a(x, u_2) - a(x, u_1)) F^\varepsilon(u_2 - u_1) \\ \leq \frac{C}{I(\varepsilon)} \int_{[u_2 - u_1 > \varepsilon]} (|\nabla u_1|^{p-1} + g(x))^{p'} \\ \leq \frac{C}{I(\varepsilon)} \int_{\Omega} (|\nabla u_1|^{p-1} + g(x))^{p'}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

(Noter que pour utiliser la monotonie de γ nous devons prouver que si $\tau: W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\Gamma)$ désigne l'opérateur trace alors $\tau(F^\varepsilon(u_2 - u_1)) = F^\varepsilon(\tau(u_2) - \tau(u_1))$. Il est facile d'établir cette propriété en utilisant une approximation par des fonctions C^1 . Nous utiliserons encore cette remarque dans la suite.)

Si $\varepsilon \rightarrow 0$, alors $I(\varepsilon) \rightarrow +\infty$, $F^\varepsilon(x) \rightarrow 0$ si $x \leq 0$ et 1 si $x > 0$. Donc par (2.13) nous obtenons en faisant tendre ε vers 0:

$$\int_{[u_2 - u_1 > 0]} (a(x, u_2) - a(x, u_1)) \leq 0$$

ce qui par (2.3) donne (2.7).

On se place maintenant dans le cas (ii).

En revenant à (2.12) nous obtenons en faisant tendre ε vers 0 (rappelons que (1.10) entraîne (1.11) et donc que $I(\varepsilon) \rightarrow +\infty$):

$$\int_{[u_2 - u_1 > 0]} (a(x, u_2) - a(x, u_1)) \, dx + \int_{[u_2 - u_1 > 0]} (\gamma(x, u_2) - \gamma(x, u_1)) \, d\sigma \leq 0$$

et dans les deux premiers cas de (ii), $u_2 - u_1$ est donc négative sur une partie de mesure non nulle de Ω ou de Γ .

D'autre part grâce à (2.12) et à (1.7) nous avons après simplification par $I(\varepsilon)$:

$$\int_{[u_2-u_1 > \varepsilon]} \frac{|\nabla(u_2-u_1)|^p}{\omega^{p'}(u_2-u_1)} \leq \frac{2C}{v} \int_{[u_2-u_1 > \varepsilon]} (|\nabla u_1|^{p-1} + g(x))^{p'} \leq C'$$

où C' est indépendant de ε . (On remarquera que $|\nabla u_1|^{p-1} + g(x) \in L^{p'}(\Omega)$). Si nous posons

$$S^\varepsilon(x) = \begin{cases} \int_{\varepsilon}^x \frac{1}{\omega^{1/p-1}(s)} ds & \text{pour } x > \varepsilon \\ 0 & \text{pour } x \leq \varepsilon \end{cases} \quad (2.14)$$

nous obtenons :

$$\int_{[u_2-u_1 > \varepsilon]} \frac{|\nabla(u_2-u_1)|^p}{\omega^{p'}(u_2-u_1)} = \int_{\Omega} |VS^\varepsilon(u_2-u_1)|^p \leq C'.$$

Mais puisque S^ε est Lipschitzienne et s'annule pour $x \leq 0$, $S^\varepsilon(u_2-u_1) \in V_1 \cap V_2$ (voir la propriété (H)) et l'inégalité de Poincaré est vérifiée. Dans les cas (2.4), (2.5) cela résulte du fait que $S^\varepsilon(u_2-u_1)$ est nulle sur une partie de mesure non nulle de Ω ou de Γ , dans le cas (2.6) cela provient de l'hypothèse. Nous obtenons donc:

$$\int_{\Omega} |S^\varepsilon(u_2-u_1)|^p \leq C''$$

et (2.7) est obtenue grâce à (1.10) après avoir fait tendre ε vers 0.

Ceci termine la démonstration.

Remarque 2.3 : On remarquera que (2.1) a lieu par exemple lorsque $f_1 \in L^{p'}(\Omega)$ et $f_1 \geq f_2$ p.p. dans Ω .

Sous l'hypothèse (1.11) on sait qu'il ne suffit pas en général de supposer $u \rightarrow a(x,u)$ seulement croissante (voir [9] exemple 2.2.1 et la section 4 qui suit); cependant, avec quelques hypothèses supplémentaires et pour certains opérateurs la monotonie sera maintenue dans ce cas (voir pour cela la partie 5).

Nous ne savons pas, dans ce cadre général, lorsqu'on suppose (i) et seulement $\omega(t)$ tendant vers 0 avec t au lieu de (1.11), si la monotonie est encore vérifiée. Des résultats partiels ont cependant été obtenus (voir [10],[11]).

Nous aurions pu prendre deux opérateurs différents pour des convexes K_1 et K_2 . Si A^i désigne l'opérateur correspondant à K_i , nous obtenons le même résultat de monotonie pourvu que :

$$\langle A^2(x,u,\nabla u) - A^1(x,u,\nabla u), v \rangle \geq 0 \quad \forall u \in K_1, \forall v \in V_1 \cap V_2, v \geq 0$$

avec les hypothèses sur A transférées à A^1 et A^2 . Il est facile de voir par exemple que l'inégalité ci-dessus a lieu pour $a_2 \geq a_1, \gamma_2 \geq \gamma_1$, où a_i, γ_i sont les fonctions a, γ correspondant à $A^i, i=1,2$.

3. Quelques applications

Nous voudrions montrer que le théorème 2.1 conduit en particulier à l'unicité d'une solution pour certaines équations et plus généralement pour certaines inéquations variationnelles associées à des convexes définis par des contraintes ponctuelles lorsque l'opérateur est par exemple quasi linéaire. Introduisons donc quelques convexes fermés .

Pour $i = 1, 2$ considérons les fonctions

$$\varphi_i : \Gamma \rightarrow \bar{\mathbf{R}} \quad , \quad \psi_i : \Gamma \rightarrow \bar{\mathbf{R}} \quad (3.1)$$

$$\Phi_i : \Omega \rightarrow \bar{\mathbf{R}} \quad , \quad \Psi_i : \Omega \rightarrow \bar{\mathbf{R}}. \quad (3.2)$$

Soit

$$K_i = \{v \in W^{1,p}(\Omega) \mid \varphi_i(x) \leq v(x) \leq \psi_i(x) \text{ p.p. sur } \Gamma ,$$

$$\Phi_i(x) \leq v(x) \leq \Psi_i(x) , \forall v(x) \in C(x) \text{ p.p. dans } \Omega \} \quad (3.3)$$

où pour presque tout x , $C(x)$ est un convexe fermé de $\mathbf{R}^n$ et où la restriction de v à Γ est prise au sens des traces. (Il est facile de voir que K_i , $i = 1, 2$ sont des convexes fermés de $W^{1,p}(\Omega)$).

On a alors:

Proposition 3.1 . Supposons que $(\varphi_2, \psi_2, \Phi_2, \Psi_2) \leq (\varphi_1, \psi_1, \Phi_1, \Psi_1)$ alors K_1, K_2 vérifient (H).

$((\varphi_2, \psi_2, \Phi_2, \Psi_2) \leq (\varphi_1, \psi_1, \Phi_1, \Psi_1))$ signifie que chaque composante du premier vecteur est inférieure à chaque composante du second et ceci presque partout sur Γ ou dans Ω).

Démonstration : Soit F est une fonction Lipschitzienne positive, de constante de Lipschitz inférieure à 1 , et telle que $F(x) = 0$ pour $x \leq 0$. Soient $u_1 \in K_1$, $u_2 \in K_2$ alors (voir [17]) :

$$u_1 + F(u_2 - u_1) , \quad u_2 - F(u_2 - u_1) \in W^{1,p}(\Omega) \quad (3.4)$$

et

$$\varphi_1, \Phi_1 \leq u_1 \leq u_1 + F(u_2 - u_1) \leq u_1 + (u_2 - u_1)^+ = \text{Max}(u_1, u_2) \leq \psi_1, \Psi_1 \quad (3.5)$$

$$\varphi_2, \Phi_2 \leq \text{Min}(u_1, u_2) = u_2 - (u_2 - u_1)^+ \leq u_2 - F(u_2 - u_1) \leq u_2 \leq \psi_2, \Psi_2$$

p.p. dans Γ et p.p. dans Ω respectivement.

De plus,

$$\begin{aligned} \nabla[u_1 + F(u_2 - u_1)] &= \nabla u_1 + (F')\nabla(u_2 - u_1) \in C(x) \text{ p.p. dans } \Omega \\ \nabla[u_2 - F(u_2 - u_1)] &= \nabla u_2 - (F')\nabla(u_2 - u_1) \in C(x) \text{ p.p. dans } \Omega \end{aligned} \quad (3.6)$$

puisque $F' \in [0,1]$ et $C(x)$ est convexe pour presque tout x dans Ω . Ceci démontre (H).

Comme conséquence immédiate du théorème 2.1 nous avons alors:

Theorème 3.1: Soit u_i ($i = 1,2$) une solution de

$$\begin{aligned} u_i &\in K_i \\ \langle A(x, u_i, \nabla u_i), v - u_i \rangle &\geq \langle f_i, v - u_i \rangle \quad \forall v \in K_i. \end{aligned} \quad (3.7)$$

où K_i est donné par (3.3) et $f_i \in V_i^*$. Supposons que (1.3), (1.4), (1.7), (1.8), (1.9) soient vérifiées pour K_1 et K_2 et que

(i) : (1.11) est vérifiée avec

$$u \rightarrow a(x, u) \text{ strictement croissante x-p.p. dans } \Omega. \quad (3.8)$$

ou

(ii) : (1.10) est vérifiée avec:

$$u \rightarrow a(x, u) \text{ est strictement croissante sur une partie de mesure non nulle de } \Omega \quad (3.9)$$

ou

$$u \rightarrow \gamma(x,u) \text{ est strictement croissante sur une partie de mesure non nulle de } \Gamma \quad (3.10)$$

ou

$$\text{il existe une constante } C \text{ telle que } \|v\|_p \leq C \|\nabla v\|_p \quad \forall v \in V_1 \cap V_2 \quad (3.11)$$

Alors si $(f_2, \varphi_2, \psi_2, \Phi_2, \Psi_2) \leq (f_1, \varphi_1, \psi_1, \Phi_1, \Psi_1)$ on a

$$u_2(x) \leq u_1(x) \text{ p.p. dans } \Omega. \quad (3.12)$$

Remarque 3.1. $f_2 \leq f_1$ est prise au sens de (2.1). On remarquera que le résultat ci-dessus est très naturel. En oubliant pour l'instant les contraintes sur le gradient et en interprétant u comme le déplacement vertical d'une membrane élastique sous l'action d'une force verticale d'intensité f , $\varphi, \psi, \Phi, \Psi$ étant des contraintes sur ce déplacement, il est clair que moins la force est grande et plus les obstacles sont bas, moins la membrane se déplace vers le haut.

Corollaire 3.1: Soit

$$K = \{v \in W^{1,p}(\Omega) \mid \varphi(x) \leq v(x) \leq \psi(x) \text{ p.p. sur } \Gamma, \\ \Phi(x) \leq v(x) \leq \Psi(x), \nabla v(x) \in C(x) \text{ p.p. dans } \Omega\} \quad (3.13)$$

où

$$\varphi : \Gamma \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad \psi : \Gamma \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \quad (3.14)$$

$$\Phi : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad \Psi : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \quad (3.15)$$

sont des fonctions de Γ et Ω dans $\overline{\mathbb{R}}$, et $C(x)$ est un convexe fermé de $\mathbb{R}^n$. Supposons que (1.3).(1.4).(1.7).(1.8).(1.9) aient lieu et que :

(i) : (1.11) est vérifiée avec

$$u \rightarrow a(x,u) \text{ est strictement croissante p.p. dans } \Omega.$$

ou

(ii) : (1.10) est vérifiée avec :

$u \rightarrow a(x,u)$ est strictement croissante sur une partie de mesure non nulle de Ω

ou

$u \rightarrow \gamma(x,u)$ est strictement croissante sur une partie de mesure non nulle de Γ

ou

il existe une constante C tel que $\|v\|_p \leq C \|\nabla v\|_p \quad \forall v \in V$

Alors si $f \in V$ (voir (1.1)) il existe au plus une solution de:

$$u \in K$$

$$\langle A(x,u, \nabla u), v-u \rangle \geq \langle f, v-u \rangle \quad \forall v \in K.$$

(3.16)

Démonstration : Il suffit d'appliquer le théorème 3.1 avec $K_1 = K_2 = K$, $f_1 = f_2 = f$.

Les résultats ci-dessus donnent l'unicité ou plus généralement une propriété de monotonie pour de nombreux problèmes. Donnons quelques exemples.

1) Problèmes aux limites, elliptiques non linéaires.

En effet, on choisit ici $\Phi \equiv -\infty$, $\Psi \equiv +\infty$, $C(x) = \mathbb{R}^n \quad \forall x \in \Omega$. En prenant ϕ dans $W^{1,p}(\Omega)$ et en choisissant $\varphi = \psi = \phi$ sur une partie Γ_0 de Γ , $\varphi = -\infty$, $\psi \equiv +\infty$ ailleurs, on a $K = \phi + V$ où V est défini comme étant le sous espace :

$$V = \{ v \in W^{1,p}(\Omega) \mid v = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \}$$

Et donc, pour $f \in V^*$ défini par

$$\langle f, v \rangle = \int_{\Omega} f^1 \cdot v + \int_{\Gamma} f^2 \cdot v$$

(3.16) est équivalent à :

$$u \in K$$

$$\langle A(x,u,\nabla u), v \rangle = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V \quad (3.17)$$

et u est la solution du problème

$$-\partial A_i(x,u,\nabla u)/\partial x_i + a(x,u) = f^1 \quad \text{dans } \Omega$$

$$u = \phi \quad \text{sur } \Gamma_0$$

$$A_i(x,u,\nabla u).n_i + \gamma(x,u) = f^2 \quad \text{sur } \Gamma/\Gamma_0.$$

Ainsi, dans les cas (i) ou (ii) et si l'existence d'une solution est prouvée, cette solution est unique et sa dépendance en les données ϕ, f^1, f^2 est monotone. Dans le cas (ii), lorsque (3.9), (3.10) ne sont pas vérifiées nous devons supposer (3.11). Si Γ_0 a une mesure non nulle il est bien connu que l'inégalité de Poincaré est vérifiée et nous obtenons donc l'unicité et la monotonie en fonction des données. Dans le cas particulier où $\Gamma_0 = \Gamma$ nous avons un problème de Dirichlet non linéaire.

Dans le cas où $\Gamma_0 = \emptyset$ le problème est un problème de type Neumann pour lequel nous avons l'unicité dans les cas (i), (ii) mais dans ce dernier cas lorsque (3.9), (3.10), (3.11) ne sont pas vérifiées l'unicité peut tomber en défaut comme c'est le cas pour les problèmes linéaires. En effet, la solution du problème de Neumann linéaire (ici $a \equiv 0$) est définie à une constante additive près:

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega \quad (3.18)$$

$$\partial u / \partial n = 0 \quad \text{on } \Gamma$$

2) Problèmes d'obstacles:

Comme ci-dessus, prenons ici $\phi = \psi = \phi$ sur Γ_0 où Γ_0 est une partie de Γ , $\phi \equiv -\infty$, $\psi \equiv +\infty$ ailleurs, $C(x) = \mathbb{R}^n \quad \forall x \in \Omega$.

De plus si E, F sont deux parties mesurables de Ω posons

$$\Phi = \Phi \quad \text{dans } E, \quad \Phi = -\infty \quad \text{dans } \Omega/E$$

$$\Psi = \Psi \quad \text{dans } F, \quad \Psi = +\infty \quad \text{dans } \Omega/F.$$

Alors K devient

$$K = \{v \in W^{1,p}(\Omega) \mid v(x) = \phi \text{ sur } \Gamma_0, \Phi(x) \leq v(x) \text{ p.p. dans } E, v(x) \leq \Psi(x) \text{ p.p. dans } F\}$$

et pour un tel convexe on obtient l'unicité pour le problème (3.16) ainsi que la monotonie par rapport aux données f, ϕ, Φ, Ψ . On remarquera que lorsque $E = \Omega, F = \emptyset$ nous obtenons un problème classique à un obstacle et que lorsque $E=F=\Omega$ nous obtenons un problème à double obstacle.

3) Problèmes de Signorini ou problèmes à obstacles minces

En prenant $\Phi \equiv -\infty, \Psi \equiv +\infty, C(x) = \mathbb{R}^n \quad \forall x \in \Omega$ et E, F deux parties mesurables de Γ avec

$$\phi = \phi \text{ sur } E, \quad \phi = -\infty \text{ sur } \Gamma/E$$

$$\psi = \psi \text{ sur } F, \quad \psi = +\infty \text{ sur } \Gamma/F$$

alors K devient

$$K = \{v \in W^{1,p}(\Omega) \mid \phi(x) \leq v(x) \text{ p.p. dans } E, v(x) \leq \psi(x) \text{ p.p. dans } F\}$$

Pour un tel convexe, pourvu que nous soyons dans les cas (i) ou (ii), nous obtenons alors l'unicité ainsi que la monotonie par rapport à f, ϕ, ψ pour le problème (3.16).

Remarquons que nous avons choisi les obstacles sur Γ mais que nous aurions pu les prendre sur $\overline{\Omega}$.

4) Problèmes avec contraintes sur le gradient :

Prenons par exemple $\phi = \psi = \phi$ sur $\Gamma, \Phi \equiv -\infty, \Psi \equiv +\infty$ alors K devient

$$K = \{v \in W^{1,p}(\Omega) \mid v = \phi \text{ sur } \Gamma, \nabla v(x) \in C(x) \text{ p.p. dans } \Omega\}.$$

Dans le cas $p=2, \phi \equiv 0, C(x) = B_1$ où B_1 est la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ nous obtenons le convexe d'un problème de type torsion élasto-plastique :

$$K = \{v \in W^{1,2}(\Omega) \mid v = 0 \text{ sur } \Gamma, \mid \nabla v(x) \mid \leq 1 \text{ p.p. dans } \Omega \}.$$

Plus généralement si $A(x)$ est une matrice définie sur Ω , nous obtenons l'unicité pour les convexes du type

$$K = \{v \in W^{1,p}(\Omega) \mid v = \phi \text{ sur } \Gamma, A(x)\nabla v(x) \in C(x) \text{ p.p. dans } \Omega \}.$$

($A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$ étant linéaire et C convexe fermé de $\mathbb{R}^q$, $A^{-1}C = \{ \xi \mid A\xi \in C \}$ est en effet un convexe fermé de $\mathbb{R}^n$).

En prenant par exemple $A(x) = (a_{ij}(x))$, $i = 1, \dots, q$, $j = 1, \dots, n$ et $C(x) = \Pi_1 [c_{1,i}(x), c_{2,i}(x)]$ où $c_{1,i}, c_{2,i}$ sont des fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$, K devient

$$K = \{v \in W^{1,p}(\Omega) \mid v = \phi \text{ sur } \Gamma, c_{1,i}(x) \leq \sum_j a_{ij}(x) \partial v / \partial x_j \leq c_{2,i}(x) \text{ p.p. dans } \Omega, i = 1, \dots, q\}.$$

Pour ces convexes dans les cas (i) et (ii) nous avons l'unicité et la monotonie par rapport aux données.

Examinons maintenant quelles sortes d'opérateurs satisfont aux hypothèses (1.4), (1.8), (1.9). Pour simplifier et illustrer ce qui suit, nous nous restreignons au cas le plus important i.e: $p=2$.

Notons $a_{ij}(x,u)$, $\beta_i(x,u)$ des fonctions de Caratheodory pour lesquelles il existe une constante C positive et une fonction $C' \in L^2(\Omega)$ telles que :

$$\mid a_{ij}(x,u) \mid \leq C, \mid \beta_i(x,u) \mid \leq C \mid u \mid + C'(x) \quad \forall u \in \mathbb{R}^n, x\text{-p.p. dans } \Omega, \quad \forall i,j = 1, \dots, n. \quad (3.19)$$

On suppose qu'il existe une constante positive v telle que

$$a_{ij}(x,u) \xi_i \xi_j \geq v \mid \xi \mid^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (3.20)$$

Alors si l'on pose

$$A_i(x,u, \xi) = a_{ij}(x,u) \xi_j + \beta_i(x,u) \quad (3.21)$$

et si les hypothèses (1.5), (1.6) sur $a(x,u)$, $\gamma(x,u)$ sont vérifiées, l'opérateur quasilineaire A

$$\langle A(x,u,\nabla u), v \rangle = \int_{\Omega} a_{ij}(x,u) \partial u / \partial x_j \cdot \partial v / \partial x_i + \beta_i(x,u) \cdot \partial v / \partial x_i + a(x,u) \cdot v \, dx + \int_{\Gamma} \gamma(x,u) \cdot v \, d\sigma$$

est bien défini pour $v \in V$ et pour A_i vérifiant (1.8). De plus, s'il existe une fonction positive strictement croissante continue ω , telle que :

$$|a_{ij}(x,u) - a_{ij}(x,v)| \leq C \omega(|v-u|) \quad \forall u \in \mathbb{R}^n, \text{ x-p.p. dans } \Omega \quad (3.22)$$

$$|\beta_i(x,u) - \beta_i(x,v)| \leq C \omega(|v-u|) (g(x)) \quad \forall u \in \mathbb{R}^n, \text{ x-p.p. dans } \Omega$$

pour une fonction g de $L^2(\Omega)$, nous avons (1.9). Un tel opérateur satisfait donc toutes les hypothèses de la partie précédente, et le théorème (3.1) ainsi que son corollaire (3.1) s'appliquent.

Dans le cas $p=2$, (1.10) et (1.11) s'écrivent

$$\int_{0+} 1/\omega(s) ds = +\infty \quad (3.23)$$

et

$$\int_{0+} 1/\omega^2(s) ds = +\infty. \quad (3.24)$$

Ainsi, en particulier si les $A_i(x,u, \xi)$ sont Lipschitziennes en u (avec une constante de Lipschitz dépendante de ξ) (1.10) est vérifiée. (Ce cas, sans terme de transport, a été étudié par Artola [2], dans le cas particulier du problème à un obstacle, et avec d'autres fonctions test que celles utilisées ici.)

Si les $A_i(x,u, \xi)$ sont Höldériennes d'exposant supérieur ou égal à $1/2$, (1.11) est vérifiée. Sous l'hypothèse (3.22), (3.23) et (3.24) correspondent aux cas où les a_{ij}, β_i sont respectivement Lipschitziennes en u et Höldériennes en u d'exposant supérieur ou égal à $1/2$. Comme nous l'avons déjà mentionné, lorsque (3.23) n'est pas vérifiée, l'unicité peut être en défaut même si (3.9), (3.10), (3.11) sont vérifiées. Nous donnons un exemple illustrant cette dernière remarque dans la partie qui suit.

4. Un contre-exemple

Considérons une fonction $\beta = \beta(r)$ qui satisfait pour $0 < \alpha < 1$ à :

$$\beta(r) = 0 \quad \text{si } r \leq 0 \text{ ou } r \geq 1, \quad \beta(r) > 0 \quad \text{si } 0 < r < 1$$

$$\beta(r) \sim r^\alpha \quad \text{pour } r > 0, r \rightarrow 0, \quad \beta(r) \sim (1-r)^\alpha \quad \text{pour } r < 1, r \rightarrow 1$$

et définissons $U(r)$ par

$$U(r) = 0 \quad \text{si } r \leq 0$$

$$U(r) = \int_0^r \frac{ds}{\beta(s)} \quad \text{si } 0 \leq r \leq 1 \quad (4.1)$$

$$U(r) = 1 \quad \text{si } r \geq 1.$$

Soit Ω la boule ouverte de centre 0 et de rayon 2 de $\mathbb{R}^2$ et notons (r, θ) les coordonnées polaires d'un point $x = (x_1, x_2)$ de $\Omega \setminus \{0, 0\}$, ($r = |x|$).

Soit λ une fonction positive appartenant à $C^\infty(\Omega)$ et qui vérifie:

$$\lambda(x) = \lambda(r) = 1 \quad \text{si } r \leq 1/4, \quad \lambda(x) = \lambda(r) = 0 \quad \text{si } r \geq 1/2.$$

Soient

$$\beta_1(x, u) = -\cos \theta \cdot \beta(u), \quad \beta_2(x, u) = -\sin \theta \cdot \beta(u), \quad a(x, u) = \lambda(x) \cdot u, \quad \gamma(x, u) = u$$

(Si l'on souhaite que β_i soit régulier, on peut remplacer $\cos \theta$ et $\sin \theta$ par des fonctions régulières égales à $\cos \theta$ et $\sin \theta$ pour $r \geq 1/2$). Pour $1/2 \leq r_0 \leq 1$ posons

$$u(x) = U(r - r_0), \quad (r = |x|).$$

Il est alors facile de voir que u vérifie:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \{ \partial u / \partial x_i + \beta_i(x,u) \} . \partial v / \partial x_i + a(x,u) . v \, dx + \int_{\Gamma} \gamma(x,u) . v \, d\sigma \\ = \int_{\Gamma} 1 . v \, d\sigma \quad \forall v \in W^{1,2}(\Omega) \end{aligned} \quad (4.2)$$

(En effet $a(x,u) \equiv 0$ dans Ω , $\gamma(x,u) \equiv 1$ sur Γ et par (4.1))

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \{ \partial u / \partial x_i + \beta_i(x,u) \} . \partial v / \partial x_i &= \int_{\Omega} \nabla u . \nabla v - \cos \theta . \beta(u) . \partial v / \partial x_1 - \sin \theta . \beta(u) . \partial v / \partial x_2 \\ &= \int_{\Gamma} \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial r} . \frac{\partial v}{\partial r} - \beta(u) . \frac{\partial v}{\partial r} = 0 \, . \end{aligned}$$

Ainsi, puisque r_0 peut prendre toute valeur entre $1/2$ et 1 le problème (4.2) a une infinité de solutions même si

$u \rightarrow a(x,u)$ est strictement croissante sur une partie de mesure non nulle de Ω

$u \rightarrow \gamma(x,u)$ est strictement croissante sur une partie de mesure non nulle de Γ .

De plus si l'on considère

$$K = \{ v \in W^{1,2}(\Omega) \mid v = 1 \text{ sur } \Gamma \}$$

$$V = K - K = W_0^{1,2}(\Omega)$$

alors,

il existe une constante C telle que $\|v\|_2 \leq C \|\nabla v\|_2 \quad \forall v \in V$

et u est un élément de K vérifiant (4.2) pour tout v de V !

On remarquera également que u est solution du problème non linéaire de type Neumann

$$-\partial/\partial x_i \{ \partial u / \partial x_i + \beta_i(x, u) \} = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

$$\partial u / \partial n = 0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

et ceci montre que, dans le cas non linéaire, deux solutions ne diffèrent pas nécessairement par une constante.

Nous allons montrer dans la partie qui suit que le "défaut" d'unicité est dû à la présence du terme de transport (i.e. aux β_i).

5. Quelques extensions

Dans cette partie nous nous restreignons au cas $p=2$ et aux opérateurs A où A_i est donné par

$$A_i(x,u, \xi) = a_{ij}(x,u) \xi_j + \beta_i(x,u) \quad (5.1)$$

Comme nous l'avons vu dans la partie précédente, lorsque $a(x,u)$ n'est pas strictement croissante p.p. dans Ω l'unicité est en défaut même si (1.11),(3.9),(3.10),(3.11) ont lieu.

Nous allons montrer que, dans le cas des problèmes à obstacles, et donc également dans le cas d'équations, lorsque $a(x,u)$ est seulement supposée croissante, l'unicité et la monotonie par rapport aux données peuvent être préservées, ceci toujours dans le cas (i) i.e. quand (1.11) a lieu. On ajoutera pour cela certaines conditions sur les $\beta_i(x,u)$.

Plus précisément, s'il existe des constantes $a_i, i = 1, \dots, n$ non toutes nulles telles que

$$u \rightarrow \sum_{i=1}^n a_i \beta_i(x,u) \quad (5.2)$$

est monotone alors on a l'unicité de (1.2) sous une hypothèse plus faible que (1.10). (i.e. $A_i(x,u,\xi) = a_{ij}(x,u) \xi_j + \beta_i(x,u)$ satisfait à (1.9) avec ω vérifiant (1.11)).

On remarquera que pour que (5.2) ait lieu il suffit que l'un des β_i ne dépende pas de u ou soit monotone en u (en effet si $\beta_1(x,u)$ est monotone en u , alors pour $a_1 = 1, a_i = 0 \forall i \neq 1$, (5.2) est monotone en u).

Pour $i = 1, 2$, soient $\phi_i \in W^{1,2}(\Omega)$, et $\phi_i, \psi_i, \Phi_i, \Psi_i$ des fonctions vérifiant (3.1), (3.2).

Pour $i = 1, 2$ soit

$$K_i = \{v \in W^{1,2}(\Omega) \mid v = \phi_i \text{ sur } \Gamma_0, \phi_i(x) \leq v(x) \leq \psi_i(x) \text{ p.p. sur } \Gamma,$$

$$\Phi_i(x) \leq v(x) \leq \Psi_i(x) \text{ p.p. dans } \Omega \} \quad (5.3)$$

où Γ_0 est une partie de Γ .

Alors on a:

Theorème 5.1: Soit u_i ($i = 1, 2$) une solution de

$$\begin{aligned} u_i &\in K_i \\ \langle A(x, u_i, \nabla u_i), v - u_i \rangle &\geq \langle f_i, v - u_i \rangle \quad \forall v \in K_i. \end{aligned} \quad (5.4)$$

où K_i est donné par (5.3) et $f_i \in V_i^*$. On suppose de plus que :

A est donné par (1.3) (5.1), et (1.4), (1.7), (1.8), (1.9) sont vérifiées avec $p = 2$ pour K_1 et K_2 .

Il existe des constantes a_i , $i = 1, \dots, n$, non toutes nulles, telles que :

$$u \rightarrow \sum_{i=1}^n a_i \beta_i(x, u)$$

est monotone.

Pour tout u dans $\mathbf{R}$, $a_{ij}(x, u)$ appartient à $W^{1, \infty}(\Omega)$ et il existe une constante C telle que

$$|\partial a_{ij}(x, u) / \partial x_k| \leq C \quad \text{x-p.p. dans } \Omega, \quad \forall u \in \mathbf{R}, \quad \forall i, j, k = 1, \dots, n. \quad (5.5)$$

$$u \rightarrow \gamma(x, u) \text{ est strictement croissante sur } \Gamma / \Gamma_0. \quad (5.6)$$

Alors si (1.11) est vérifié et si $(f_2, \phi_2, \psi_2, \Phi_2, \Psi_2) \leq (f_1, \phi_1, \psi_1, \Phi_1, \Psi_1)$ on a

$$u_2(x) \leq u_1(x) \quad \text{a.e. } x \in \Omega. \quad (5.7)$$

($\phi_2 \leq \phi_1$ signifie ici $\phi_2 \leq \phi_1$ sur Γ_0).

Corollaire 5.1: Sous les hypothèses du théorème 5.1 il existe au plus une solution de

$$u \in K \quad (5.8)$$

$$\langle A(x, u, \nabla u), v - u \rangle \geq \langle f, v - u \rangle \quad \forall v \in K$$

où K est un convexe du type K_i .

Nous prouvons directement le Theorème 5.1 , ce corollaire en étant une conséquence immédiate .

Démonstration du Theorème 5.1: On utilise une technique de [9].

Première étape: Nous démontrons ici

$$\int_{[u_2 - u_1 > 0]} A_i(x, u_2, \nabla u_2) - A_i(x, u_1, \nabla u_1) \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x_i} dx = 0 \quad \forall \xi \in C^1(\bar{\Omega}) \quad (5.9)$$

Considérons $\xi \in C^1(\bar{\Omega})$, $\xi \geq 0$. Soit $F = F^\xi$ définie par (2.9). Pour δ suffisamment petit on a :

$$u_1 + \delta \xi F^\xi(u_2 - u_1) \in K_1, \quad u_2 - \delta \xi F^\xi(u_2 - u_1) \in K_2$$

(δ est choisi de sorte que $\delta \xi \leq 1$ et la démonstration est identique à celle de (3.5)). En substituant ces deux fonctions dans (5.4) nous obtenons (voir la démonstration du théorème 2.1):

$$\langle A(x, u_1, \nabla u_1) - A(x, u_2, \nabla u_2), \xi F^\xi(u_2 - u_1) \rangle \geq 0$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (A_i(x, u_2, \nabla u_2) - A_i(x, u_1, \nabla u_1)) \partial \xi F^\xi(u_2 - u_1) / \partial x_i \\ & + \int_{\Omega} (a(x, u_2) - a(x, u_1)) \xi F^\xi(u_2 - u_1) + \int_{\Gamma} (\gamma(x, u_2) - \gamma(x, u_1)) \xi F^\xi(u_2 - u_1) \leq 0. \end{aligned} \quad (5.10)$$

En conséquence ,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (A_i(x, u_2, \nabla u_2) - A_i(x, u_1, \nabla u_1)) \partial \xi / \partial x_i F^\xi(u_2 - u_1) \\ & + \int_{\Omega} (a(x, u_2) - a(x, u_1)) \xi F^\xi(u_2 - u_1) + \int_{\Gamma} (\gamma(x, u_2) - \gamma(x, u_1)) \xi F^\xi(u_2 - u_1) \\ & \leq - \int_{\Omega} (A_i(x, u_2, \nabla u_2) - A_i(x, u_1, \nabla u_1)) \xi \partial F^\xi(u_2 - u_1) / \partial x_i . \end{aligned} \quad (5.11)$$

Estimons le membre de droite, noté RH, de (5.11). On a :

$$\int_{[u_2 - u_1 > 0]} A_i(x, u_2, \nabla u_2) - A_i(x, u_1, \nabla u_1) \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x_i} \leq 0 \quad \forall \xi \in C^1(\bar{\Omega}), \xi \geq 0.$$

En échangeant ξ en $M - \xi$ où M est une constante supérieure à ξ dans l'inégalité ci-dessus, on aboutit bien à (5.9).

deuxième étape: Nous démontrons que $(u_2 - u_1)^+ \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Grâce à (5.9) et (1.7), (5.13) devient

$$\int_{[u_2 - u_1 > 0]} \gamma(x, u_2) - \gamma(x, u_1) \cdot \xi \leq 0 \quad \forall \xi \in C^1(\bar{\Omega}), \xi \geq 0$$

Avec (5.6) nous en déduisons que $(u_2 - u_1)^+ = 0$ sur Γ / Γ_0 . D'autre part sur Γ_0 on a $(u_2 - u_1)^+ = (\phi_2 - \phi_1)^+ = 0$. Ceci montre que $(u_2 - u_1)^+ \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Troisième étape: Fin de la démonstration.

En tenant compte de (5.1), (5.9) s'écrit

$$\begin{aligned} \int_{[u_2 - u_1 > 0]} \{ a_{ij}(x, u_2) \frac{\partial u_2}{\partial x_j} - a_{ij}(x, u_1) \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x_i} \\ + \int_{[u_2 - u_1 > 0]} \beta_i(x, u_2) - \beta_i(x, u_1) \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x_i} = 0 \quad \forall \xi \in C^1(\bar{\Omega}). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Nous choisissons $\xi = e^{\alpha(a \cdot x)}$ dans (5.14), où $(a \cdot x)$ est le produit scalaire usuel entre les deux vecteurs $a = (a_1, \dots, a_n)$ et $x = (x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, et où α est une constante positive si (5.2) est décroissante, négative si (5.2) est croissante. On obtient alors:

$$\int_{[u_2 - u_1 > 0]} \{ a_{ij}(x, u_2) \frac{\partial u_2}{\partial x_j} - a_{ij}(x, u_1) \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \} \cdot \alpha a_i e^{\alpha(a \cdot x)} \geq 0. \quad (5.15)$$

Posons

$$A_{ij}(x, u) = \int_0^u a_{ij}(x, s) ds. \quad (5.16)$$

Alors, pour $k = 1, 2$, $A_{ij}(x, u_k) \in W^{1,2}(\Omega)$ et

$$\frac{\partial A_{ij}(x, u_k)}{\partial x_j} = a_{ij}(x, u_k) \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \int_0^{u_k} \frac{\partial a_{ij}(x, s)}{\partial x_j} ds.$$

Ainsi (5.15) devient

$$\int_{[u_2 - u_1 > 0]} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \{A_{ij}(x, u_2) - A_{ij}(x, u_1)\} - \int_{u_1}^{u_2} \frac{\partial a_{ij}(x, s)}{\partial x_j} ds \right\} \cdot \alpha a_i e^{\alpha(a \cdot x)} \geq 0. \quad (5.17)$$

En posant $w = (u_2 - u_1)^+$ il vient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \{A_{ij}(x, u_1 + w) - A_{ij}(x, u_1)\} \cdot \alpha a_i e^{\alpha(a \cdot x)} \\ - \int_{\Omega} \int_{u_1}^{u_1 + w} \frac{\partial a_{ij}(x, s)}{\partial x_j} ds \cdot \alpha a_i e^{\alpha(a \cdot x)} \geq 0. \end{aligned}$$

Or $A_{ij}(x, u_1 + w) - A_{ij}(x, u_1) \in W_0^{1,2}(\Omega)$; en intégrant par parties et en tenant compte de (5.16), (1.8) nous obtenons donc

$$\int_{\Omega} \int_{u_1}^{u_1 + w} \left[-\alpha^2 v |a|^2 + \alpha a_i \frac{\partial a_{ij}(x, s)}{\partial x_j} \right] ds e^{\alpha(a \cdot x)} \geq$$

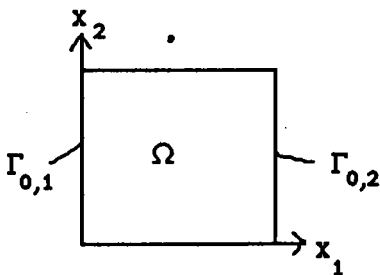
$$\int_{\Omega} \int_{u_1}^{u_1 + w} \left[-\alpha^2 a_{ij}(x, s) a_i a_j + \alpha a_i \frac{\partial a_{ij}(x, s)}{\partial x_j} \right] ds e^{\alpha(a \cdot x)} \geq 0.$$

Avec α suffisamment grand (voir (5.5)) cette inégalité conduit à une contradiction sauf dans le cas où $w \equiv 0$. Ceci termine la démonstration.

Remarque 5.2 : la condition $u \rightarrow \gamma(x,u)$ strictement croissante sur $\Gamma - \Gamma_0$ est nécessaire. En effet considérons dans $\mathbb{R}$ le problème:

$$-u'' + (\beta(u))' = 0 \quad \text{dans } (0, 2), \quad u(0)=0, u(2)=1$$

où β est choisi comme dans le contre-exemple de la partie 4 (voir aussi [9]). (On sait que ce problème possède une infinité de solutions). Soit $\Omega = (0,2) \times (0,2)$ et $\Gamma_0 = \Gamma_{0,1} \cup \Gamma_{0,2}$ (voir la figure ci - dessous)



Pour $(x_1, x_2) \in \Omega$ posons $u(x_1, x_2) = u(x_1)$ où u est une des solutions précédentes. Il est clair que u vérifie:

$$-\Delta u + \partial \beta(u) / \partial x_1 = 0 \quad \text{sur } \Omega$$

$$u = \Phi \quad \text{sur } \Gamma_0$$

$$\partial u / \partial x_i \cdot n_i = 0 \quad \text{sur } \Gamma - \Gamma_0 \quad (n_i) \text{ désignant le vecteur normal extérieur à } \Gamma$$

où $\Phi = 0$ sur $\Gamma_{0,1}$ et 1 sur $\Gamma_{0,2}$.

Si $V = \{v \in W^{1,2}(\Omega) / v = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}$ et $K = \Phi + V$, le problème équivaut alors à:

$u \in K$ et

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\Omega} \beta(u) \frac{\partial v}{\partial x_1} = 0 \quad \forall v \text{ dans } V$$

Les hypothèses (1.11),(1.7),(1.8),(1.9),(5.5) sont vérifiées ainsi que la relation (5.2) avec $a_1=0$;

$\beta_1=\beta$; $a_2=1$ et $\beta_2=0$ alors que $\gamma(x,u)=0$.

Donnons une légère amélioration du théorème précédent en affaiblissant l'hypothèse (5.5).

Soit $(a,b)=\{a_1x_1 / x=(x_i)\in\Omega\}$ où $a_1x_1=\sum_i a_ix_i$ avec la convention des indices répétés. Dans le cas où $n>2$, on définit 2^* par $1/2^*=1/2 - 1/n$ et on note $(2^*)'$ son conjugué (on a alors $(2^*)'=2n/(n+2) < 2$). On considère l'hypothèse suivante:

Dans le cas $n>2$:

Il existe $f \in L^{(2^*)'}(a,b)$ telle que:

$$|a_i \partial a_{1,j}(x,u) / \partial x_k| \leq f(a_1x_1) \quad \forall k=1\dots n; , \forall j=1\dots n, \forall u \in \mathbb{R}$$

Dans le cas $n=2$:

Il existe $q \in]1, +\infty[$ et $f \in L^q(\Omega)$ telle que l'inégalité ci-dessus soit encore vérifiée (5.5 bis)

(Par exemple si $u \rightarrow \beta_1(x,u)$ est monotone, (5.5 bis) devient: $|\partial a_{1,j}(x,u) / \partial x_k| \leq f(x_1)$)

Théorème 5.2: Sous les hypothèses du théorème 5.1, en substituant l'hypothèse (5.5 bis) à l'hypothèse (5.5), on a la même conclusion.

Démonstration :

Comme dans la démonstration du théorème 5.1 on a

$$\int_{[u_2-u_1>0]} \left(a_{1,j}(x,u_2) \frac{\partial u_2}{\partial x_j} - a_{1,j}(x,u_1) \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x_i} + \int_{[u_2-u_1>0]} (\beta_1(x,u_2) - \beta_1(x,u_1)) \frac{\partial \xi}{\partial x_i} = 0$$

pour tout $\xi \in C^2(\overline{\Omega})$

Soit alors $\xi = \xi(s)$ dans $C^2(\mathbb{R})$. Considérant $\xi = \xi(a_1x_1)$, on obtient :

$$\int_{[u_2 - u_1 > 0]} \left\{ a_{ij}(x, u_2) \frac{\partial u_2}{\partial x_j} - a_{ij}(x, u_1) \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \right\} a_i \xi'(a_i x_i) \geq 0$$

pour tout ξ vérifiant $\xi \geq 0$ si (5.3) est décroissant et $\xi \leq 0$ si (5.3) est croissant

Avec les notations du théorème 5.1 on obtient alors:

$$\int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} (A_{ij}(x, u_1 + w) - A_{ij}(x, u_1)) - \int_{u_1}^{u_1 + w} \frac{\partial a_{ij}(x, s)}{\partial x_j} ds \right\} a_i \xi'(a_i x_i) \geq 0 \quad (5.18)$$

Complétons (a_i) en une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ ((a_i) est supposé de norme 1). On notera H

l'isomorphisme orthogonal associé:

$H: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$X \rightarrow x$ avec $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ où $X_k = \alpha_{k,i} x_i$ pour $k=1 \dots n$, et $\alpha_{n,i} = a_i$ pour $i=1 \dots n$

Soit $Q = (-r, r)^n$ où r est assez grand pour que $\Omega \subset Q$. On remarquera que dans la nouvelle base

$(-r, r)^{n-1} \times (a, b) \subset H^{-1}(Q) = (-r, r)^n$. Démontrons alors le lemme suivant:

Lemme: Avec l'hypothèse (5.5 bis) nous avons:

$$(A_{ij}(x, u_1 + w) - A_{ij}(x, u_1)) a_i \in W_0^{1,1}(\Omega)$$

Preuve du lemme: Par une remarque faite dans la section 2, il est facile de voir que cette fonction

s'annule sur Γ au sens des traces dans $W^{1,1}(\Omega)$. D'autre part nous avons:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (A_{ij}(x, u_1 + w) - A_{ij}(x, u_1)) = a_{ij}(x, u_2) \frac{\partial u_2}{\partial x_k} - a_{ij}(x, u_1) \frac{\partial u_1}{\partial x_k} + \int_{u_1}^{u_1 + w} \frac{\partial a_{ij}(x, s)}{\partial x_k} ds$$

et il suffit de prouver que :

$$\int_{u_1}^{u_1 + w} \frac{\partial a_{ij}(x, s)}{\partial x_k} a_i ds \text{ est dans } L^1(\Omega)$$

Pour cela on a :

$$\int_{\Omega} \left| \int_{u_1}^{u_1+w} \frac{\partial a_{i,j}(x,s)}{\partial x_k} a_i ds \right| \leq \int_{\Omega} f(a_i x_i) w \quad \text{et, avec le changement de variable } H, \text{ après avoir prolongé } w \text{ ainsi que } f \text{ par } 0, \text{ on obtient :}$$

$$\int_{\Omega} \left| \int_{u_1}^{u_1+w} \frac{\partial a_{i,j}(x,s)}{\partial x_k} a_i ds \right| \leq \int_{H^{-1}(Q)} f(X_n) W |JacH| dX = \int_{(-r,r)^n} f(X_n) W |JacH| dX' dX_n$$

où $X=(X', X_n) \in (-r,r)^{n-1} \times (-r,r)$, $W=w \circ H$ et où $|JacH|=1$, H étant orthogonale.

Considérons tout d'abord le cas où $n > 2$. En utilisant l'inégalité de Hölder le deuxième membre se majore par :

$$\left(\int_{(-r,r)^n} (f(X_n))^{(2^*)'} dX' dX_n \right)^{\frac{1}{(2^*)'}} \left(\int_{(-r,r)^n} W^{2^*} \right)^{\frac{1}{2^*}}$$

Le premier facteur est égal à $C \left(\int_{(-r,r)} f(X_n)^{(2^*)'} \right)^{\frac{1}{(2^*)'}} < +\infty$ d'après (5.5 bis)

D'autre part $w \in W_0^{1,2}(\Omega) \Rightarrow W \in W^{1,2}_{(-r,r)^n}$ et par injection de Sobolev $W^{1,2}_{(-r,r)^n} \subset L^{2^*}_{(-r,r)^n}$

Le deuxième facteur est donc fini ce qui termine la démonstration du lemme dans ce cas .

Dans le cas $n = 2$, il suffit d'utiliser l'inégalité de Hölder comme ci-dessus avec q substitué à $(2^*)'$

et de remarquer que $W^{1,2}_{(-r,r)^n} \subset L^{q'}_{(-r,r)^n}$ q' désignant le conjugué de q .

Revenons à (5.18).

$(A_{i,j}(x, u_1+w) - A_{i,j}(x, u_1))a_i$ prolongé par 0 ainsi que $\frac{\partial}{\partial x_i}(A_{i,j}(x, u_1+w) - A_{i,j}(x, u_1))a_i$

(ceci grâce au lemme précédent) et w ainsi que $\xi'(a_i x_i)$ sur $Q - \Omega$ donne :

$$\int_Q \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} (A_{i,j}(x, u_1+w) - A_{i,j}(x, u_1)) - \int_{u_1}^{u_1+w} \frac{\partial a_{i,j}(x, s)}{\partial x_j} ds \right\} a_i \xi'(a_i x_i) \geq 0 \quad (5.19)$$

(où on a gardé les mêmes notations.).

D'autre part en utilisant les notations

$$\dot{A}_{i,j}(X, s) = A_{i,j}(H(X), s), \quad \dot{a}_{i,j}(X, s) = a_{i,j}(H(X), s) \quad \text{et} \quad U_1(X) = u_1(H(X))$$

$$W(X) = w(H(X))$$

et après changement de variable, l'inégalité (5.19) conduit à:

$$\int_{H^{-1}(Q)} \left\{ \frac{\partial}{\partial X_k} (\dot{A}_{i,j}(X, U_1+W) - \dot{A}_{i,j}(X, U_1)) \alpha_{k,j} - \int_{U_1}^{U_1+W} \frac{\partial \dot{a}_{i,j}(X, s)}{\partial X_k} \alpha_{k,j} ds \right\} a_i \xi'(X_n) \geq 0 \quad (5.20)$$

(On omettra la mesure dX).

Par Fubini (5.20) devient:

$$\int_{(-r,r)} \left\{ \int_{(-r,r)^{n-1}} \frac{\partial}{\partial X_k} (\dot{A}_{i,j}(X, U_1+W) - \dot{A}_{i,j}(X, U_1)) \alpha_{k,j} a_i dX' - \int_{(-r,r)^{n-1}} \int_{U_1}^{U_1+W} \frac{\partial \dot{a}_{i,j}(X, s)}{\partial X_k} \alpha_{k,j} a_i ds dX' \right\} \xi'(X_n) dX_n \geq 0 \quad (5.21)$$

Or pour presque tout X_n , $X' \rightarrow (\dot{A}_{i,j}(X, U_1+W) - \dot{A}_{i,j}(X, U_1))a_i$ est dans $W_0^{1,1}((-r,r)^{n-1})$. Nous obtenons donc:

$$\int_{(-r,r)^{n-1}} \frac{\partial}{\partial X_k} (\dot{A}_{i,j}(X, U_1+W) - \dot{A}_{i,j}(X, U_1)) \alpha_{k,j} a_i dX' = 0 \text{ pour } k=1 \dots n-1$$

(5.21) devient alors:

$$\int_{(-r,r)} \left\{ \int_{(-r,r)^{n-1}} \frac{\partial}{\partial X_n} (\dot{A}_{i,j}(X, U_1+W) - \dot{A}_{i,j}(X, U_1)) a_j a_i dX' - \int_{(-r,r)^{n-1}} \int_{U_1}^{U_1+W} \frac{\partial \dot{A}_{i,j}(X,s)}{\partial X_k} \alpha_{k,j} a_i ds dX' \right\} \xi'(X_n) dX_n \geq 0 \quad (5.22)$$

$$\text{Posons } U(X_n) = \int_{(-r,r)^{n-1}} (\dot{A}_{i,j}(X, U_1+W) - \dot{A}_{i,j}(X, U_1)) a_j a_i dX'$$

(On remarquera, en revenant à l'expression de $\dot{A}_{i,j}$, que (1.8) entraîne $U(X_n) \geq 0$)

D'après (5.5 bis):

$$\left| \frac{\partial \dot{A}_{i,j}(X,s)}{\partial X_k} \alpha_{k,j} a_i \right| = \left| \frac{\partial a_{i,j}(x,s)}{\partial x_j} a_i \right| \leq f(X_n) \text{ pour } j=1 \dots n$$

En remarquant alors que $f(X_n) \leq (f(X_n)/v) \dot{A}_{i,j}(X,s) a_j a_i$ et en revenant à l'expression de U ,

(5.22) conduit à:

$$\int_{(-r,r)} \left(U'(X_n) + \sigma \frac{f(X_n)}{v} U(X_n) \right) \xi'(X_n) dX_n \geq 0 \quad \text{où } \sigma = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi' \geq 0 \\ -1 & \text{si } \xi' \leq 0 \end{cases}$$

c'est à dire

$$\int_{(-r,r)} \frac{d}{dX_n} (U(X_n) K(X_n)) K(X_n)^{-1} \xi'(X_n) dX_n \geq 0 \quad (5.23)$$

$$\text{où } K(X_n) = \exp\left(\frac{\sigma}{v} \int_a^{X_n} f(t) dt\right)$$

Choisissons $\xi'(X_n) = \alpha K(X_n) e^{\alpha X_n}$ où le signe de α est adapté à la monotonie de (5.2)

(5.23) conduit à:

$$\int_{(-r,r)} \frac{d}{dX_n} (U(X_n) K(X_n)) \alpha e^{\alpha X_n} dX_n \geq 0 \quad (5.24)$$

Il est facile de voir que $U(X_n) K(X_n) \in W_0^{1,1}((-r,r))$. Une intégration par parties dans (5.24) donne alors:

$$\int_{(-r,r)} U(X_n) K(X_n) \alpha^2 e^{\alpha X_n} dX_n \leq 0$$

ce qui conduit à une contradiction sauf si $w=0$.

6. Un résultat d'existence

Nous allons donner, dans cette partie, une démonstration élémentaire de l'existence d'une solution pour les problèmes considérés précédemment. Pour d'autres résultats avec d'autres hypothèses on pourra se référer à [4] , [7] , [16] , [19] , [24] , [25].

Soit K un convexe fermé de $W^{1,p}(\Omega)$ et $A(x,u,\nabla u)$ un opérateur de K dans V^* défini par (1.3). (V est un sous espace fermé de $W^{1,p}(\Omega)$ engendré par $K-K$).

On suppose que

$$A_i(x,u,\xi) , a(x,u) , \gamma(x,u) \text{ sont des fonctions de Carathéodory} \quad (6.1)$$

et qu'il existe des constantes C_1 et C_2 , des fonctions $C_3 \in L^{p'}(\Omega)$, $C_4 \in L^{p'}(\Gamma)$, $C_1 \geq 0$, telles que

$$|A(x,u, \xi)| \leq C_1 |u|^{p-1} + C_2 |\xi|^{p-1} + C_3(x) , \quad \forall u \in \mathbb{R} , \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

pour presque tout x de Ω (6.2)

$$|a(x,u)| \leq C_2 |u|^{p-1} + C_3(x) \quad \forall u \in \mathbb{R} , \text{ pour presque tout } x \text{ de } \Omega \quad (6.3)$$

$$|\gamma(x,u)| \leq C_2 |u|^{p-1} + C_4(x) , \quad \forall u \in \mathbb{R} , \text{ pour presque tout } x \text{ de } \Gamma . \quad (6.4)$$

(A désigne le vecteur $(A_1, \dots, A_n)$, $| \cdot |$ sa norme Euclidienne).

On suppose de plus que

$$u \rightarrow a(x,u) \text{ est croissante pour presque tout } x \text{ de } \Omega. \quad (6.5)$$

$$u \rightarrow \gamma(x,u) \text{ est croissante pour presque tout } x \text{ de } \Gamma .$$

Pour $u \in K, w \in \overline{K}$ on définit l'opérateur $A(x,w,\nabla u)$ par

$$\langle A(x,w,\nabla u), v \rangle = \int_{\Omega} A_i(x,w,\nabla u) \cdot \partial v / \partial x_i + a(x,u) \cdot v \, dx + \int_{\Gamma} \gamma(x,u) \cdot v \, d\sigma \quad \forall v \in V \quad (6.6)$$

et on fait l'hypothèse

$$\langle A(x, w, \nabla v) - A(x, w, \nabla u), v - u \rangle \geq v \|v - u\|_{1,p}^p \quad \forall u, v \in K, w \in \bar{K}. \quad (6.7)$$

($\bar{K}$ désigne l'adhérence de K dans $L^p(\Omega)$)

où v est une constante strictement positive et $\|\cdot\|_{1,p} = \|\cdot\|_p + \|\nabla \cdot\|_p$ désigne la norme usuelle de $W^{1,p}(\Omega)$.

Nous avons alors :

Theorème 6.1: Soient K un convexe fermé de $W^{1,p}(\Omega)$ et $A(x, u, \nabla u)$ un opérateur de K dans V^* vérifiant (6.1)-(6.7). si de plus:

$$(i) \text{ } K \text{ est borné dans } L^p(\Omega) \quad (6.8)$$

ou

$$(ii) \text{ } C_1 \leq v \quad (6.9)$$

alors pour $f \in V^*$ il existe une solution de

$$\begin{aligned} u &\in K \\ \langle A(x, u, \nabla u), v - u \rangle &\geq \langle f, v - u \rangle \quad \forall v \in K. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Remarque 6.1: On remarquera tout d'abord que s'il existe des constantes C_1' , C_2 , et une fonction C_3 telles que pour $\varepsilon > 0$ et pour presque tout x de Ω

$$|A(x, u, \xi)| \leq C_1' |u|^{p-1-\varepsilon} + C_2 |\xi|^{p-1} + C_3(x), \quad \forall u \in \mathbb{R}, \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad (6.11)$$

alors (6.9) est automatiquement vérifiée pour C_1 aussi petit que l'on veut. L'existence est donc réalisée dans ce cas . .

Pour l'hypothèse (6.7), on notera que si (1.8) est vérifiée, on a:

$$\begin{aligned} \langle A(x, w, \nabla v) - A(x, w, \nabla u), v - u \rangle &\geq v (\|\nabla(v - u)\|_p)^p \\ &+ \int_{\Omega} (a(x, v) - a(x, u)) \cdot (v - u) \, dx + \int_{\Gamma} (\gamma(x, v) - \gamma(x, u)) (v - u) \, d\sigma \quad \forall u, v \in K, w \in \bar{K} \end{aligned}$$

et (6.7) est vérifiée par exemple (voir (6.5)) s'il existe une constante c telle que

$(a(x,v) - a(x,u))(v - u) > c |v - u|^p$ p.p.dans une partie de Ω de mesure non nulle
 ou
 $(\gamma(x,v) - \gamma(x,u))(v - u) > c |v - u|^p$ p.p.sur une partie de Γ de mesure non nulle
 ou
 il existe une constante C telle que $\|v\|_p \leq C \|\nabla v\|_p \quad \forall v \in V$

Démonstration du théorème 6.1:

Première étape: Soit $w \in \overline{K} \cap B(0,R)$ où $B(0,R)$ est la boule fermée de centre 0 et de rayon R de $L^p(\Omega)$. On considère $u = T(w)$ la solution de :

$$\begin{aligned}
 u &\in K \\
 \langle A(x,w,\nabla u), v-u \rangle &\geq \langle f, v-u \rangle \quad \forall v \in K.
 \end{aligned}
 \tag{6.12}$$

Une telle solution existe et est unique. En effet, grâce aux hypothèses de croissance (6.2), (6.3) et (6.4)

$$\nabla u \rightarrow A_i(x,w,\nabla u), \quad u \rightarrow a(x,u), \quad u \rightarrow \gamma(x,u)$$

sont des opérateurs de Nemyckii et donc continus de $L^p(\Omega)$ dans $L^{p'}(\Omega)$ (voir [20] p. 184 ou [23] p. 37). $u \rightarrow A(x,w,\nabla u)$ est donc continu de K dans V^* ; on peut alors résoudre (6.12) dans l'intersection de K avec tout sous espace de dimension finie de V (voir 18). En utilisant (6.7) ainsi que le lemme de Minty il est alors facile de conclure à l'existence de u (on pourra se référer à [18], [20] pour les détails techniques).

deuxième étape: T envoie le convexe $\overline{K} \cap B(0,R)$ dans lui même pour R suffisamment grand.

Dans le cas (i) il n'y a rien à prouver si R est suffisamment grand.

Dans le cas (ii) en prenant $v_0 \in K$ de (6.12) nous obtenons

$$\langle A(x,w,\nabla u), v_0 - u \rangle \geq \langle f, v_0 - u \rangle$$

$$\Leftrightarrow \langle A(x,w,\nabla v_0) - A(x,w,\nabla u), v_0 - u \rangle \leq \langle A(x,w,\nabla v_0), v_0 - u \rangle - \langle f, v_0 - u \rangle.$$

$$v (|v_0 - u|_{1,p})^p \leq |<A(x,w,\nabla v_0), v_0 - u>| + |f|_{V^*} \cdot |v_0 - u|_{1,p}. \quad (6.13)$$

Estimons le premier terme du membre de droite de (6.13).

$$\begin{aligned} |<A(x,w,\nabla v_0), v_0 - u>| &= \\ &| \int_{\Omega} \{ A_i(x,w,\nabla v_0) \cdot \partial v_0 - u / \partial x_i + a(x,v_0) \cdot v_0 - u \} dx + \int_{\Gamma} \gamma(x,v_0) \cdot v_0 - u d\sigma | \\ &\leq |v_0 - u|_{1,p} \{ |A(x,w,\nabla v_0)|_{p'} + |a(x,v_0)|_{p'} + |\gamma(x,v_0)|_{p'} \} \\ &\leq |v_0 - u|_{1,p} \{ C_1 (|w|_p)^{p-1} + C \} \end{aligned}$$

où C est une constante positive .

(cela résulte facilement de (6.2) puisque

$$\begin{aligned} |A(x,w,\nabla v_0)|_{p'} &\leq |C_1|w|^{p-1} + C_2|\nabla v_0|^{p-1} + C_3(x)|_{p'} \\ &\leq C_1||w|^{p-1}|_{p'} + C_2||\nabla v_0|^{p-1}|_{p'} + |C_3(x)|_{p'}. \end{aligned}$$

En revenant à (6.13) nous obtenons

$$v \{ |v_0 - u|_p \}^{p-1} \leq v (|v_0 - u|_{1,p})^{p-1} \leq C_1 (|w|_p)^{p-1} + C. \quad (6.14)$$

Ce qui implique

$$|v_0 - u|_p \leq \left(\frac{C_1}{v} |w|_p^{p-1} + \frac{C}{v} \right)^{\frac{1}{p-1}} \leq \left(\frac{C_1}{v} \right)^{\frac{1}{p-1}} |w|_p + \left(\frac{C}{v} \right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Et donc

$$|u|_p \leq (C_1/v)^{1/p-1} |w|_p + C'.$$

Si on suppose $\alpha = (C_1/v)^{1/p-1} < 1$ alors pour $R > C'/(1-\alpha)$, l'inégalité ci-dessus montre que T envoie $\overline{K} \cap B(0,R)$ dans lui même. Ceci termine la démonstration de cette étape.

Troisième étape: Fin de la démonstration.

De (6.14) et de la compacité de l'injection de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$ il est clair que $T(\overline{K} \cap B(0,R))$ est relativement compact dans $\overline{K} \cap B(0,R)$.

Nous allons utiliser le théorème du point fixe de Schauder (voir [17]). Pour terminer la démonstration il reste alors à montrer la continuité de T .

Soit $w_k \in \overline{K} \cap B(0,R)$ telle que $w_k \rightarrow w$ dans $L^p(\Omega)$, et $u_k = T(w_k)$ une solution de (6.12) correspondant à $w = w_k$.

Nous déduisons de (6.14) que $\|u_k\|_{1,p}$ est bornée indépendamment de k et nous pouvons extraire une sous suite (encore notée u_k) telle que u_k converge faiblement dans $W^{1,p}(\Omega)$ et fortement dans $L^p(\Omega)$ vers u_∞ quand $k \rightarrow +\infty$.

Mais par le lemme de Minty

$$u_k \in K$$

$$\langle A(x, w_k, \nabla u_k), v - u_k \rangle \geq \langle f, v - u_k \rangle \quad \forall v \in K.$$

est équivalent à

$$u_k \in K$$

(6.15)

$$\langle A(x, w_k, \nabla v), v - u_k \rangle \geq \langle f, v - u_k \rangle \quad \forall v \in K.$$

L'inéquation de (6.15) peut s'écrire :

$$\int_{\Omega} A_i(x, w_k, \nabla v) \frac{\partial(v - u_k)}{\partial x_i} + a(x, v)(v - u_k) + \int_{\Gamma} \gamma(x, v)(v - u_k) \geq \langle f, v - u_k \rangle$$

et en faisant $k \rightarrow +\infty$ nous voyons que u_∞ satisfait à

$$u_\infty \in K$$

(6.16)

$$\langle A(x, w, \nabla v), v - u_\infty \rangle \geq \langle f, v - u_\infty \rangle \quad \forall v \in K.$$

pourvu que nous prouvions que

$$A_i(x, w_k, \nabla v) \rightarrow A_i(x, w, \nabla v) \quad \text{dans } L^{p'}(\Omega). \quad (6.17)$$

Mais grâce aux hypothèses de croissance (6.2) $w \rightarrow A_i(x, w, \nabla v)$ est un opérateur de Nemyckii (6.17) est donc bien vérifiée.

En appliquant de nouveau le lemme de Minty nous obtenons

$$u_\infty \in K$$

$$\langle A(x, w, \nabla u_\infty), v - u_\infty \rangle \geq \langle f, v - u_\infty \rangle \quad \forall v \in K.$$

7-Existence d'une frontière libre

Considérons le problème suivant:

$$\langle A(x,u,\nabla u), v-u \rangle \geq 0 \quad \forall v \in K_{\Phi,\Psi} \quad (7.1)$$

$$u \in K_{\Phi,\Psi}$$

$$\text{où } A(x,u,\nabla u) = - \frac{\partial}{\partial x_i} A_i(x,u,\nabla u) + a(x,u)$$

$$\text{et } K_{\Phi,\Psi} = \left\{ v \in \Phi + H_0^1(\Omega) / 0 \leq v(x) \leq \Psi(x) \text{ p.p. dans } \Omega \text{ et } |\nabla v(x)| \leq R \text{ p.p. dans } \Omega \right\}$$

$$R > 0 ; \Psi \geq 0 \text{ p.p. dans } \Omega \text{ et } \Phi \geq 0 \text{ p.p. sur } \Gamma .$$

$$\text{Nous supposons également : } \underline{a(x,0)=0 \text{ et } A_i(x,0,0)=0} \quad (7.2)$$

Pour Φ non identiquement nulle sur une partie de Γ , nous montrons que si l'un des $A_i(x,u,0)$ n'est pas régulier au voisinage de 0 l'ensemble $N(u) = \{ x \in \Omega / u(x)=0 \}$ est de mesure non nulle pourvu que Φ soit assez petit .

Nous utiliserons les résultats de monotonie des sections 2 et 5, c'est pourquoi dans tout ce qui suit on se placera dans les conditions d'application des théorèmes (2.1), (5.1) et (5.2).

Nous faisons les hypothèses supplémentaires suivantes:

Hypothèses sur les $A_i(x,u,0)$

On notera pour toute la suite $\beta_i(x,u) = A_i(x,u,0)$ et on suppose que :

$\exists i_0 \in [1 \dots n]$ tel que $\beta_{i_0}(x,u) = \beta(u)$ où $\beta : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ satisfait à :

$$\beta \in C([0,\eta], \mathbb{R}) \cap C^1(]0,\eta], \mathbb{R})$$

$$\beta(0)=0 ; \beta \geq 0 ; \beta \text{ croissant sur }]0, \eta] \text{ et } \int_{0^+} \frac{ds}{\beta(s)} < +\infty \quad (7.3)$$

(Remarquons que nos hypothèses sur β sont locales en 0^+ et qu'un exemple d'une telle fonction est fourni par : $\beta(t)=t^\alpha$ où $\alpha \in [1/2, 1[$. On supposera par la suite que $i_0=1$).

$$\text{On suppose enfin } \frac{\partial \beta_i}{\partial x_i}(x,u) \leq 0 \quad \forall i = 2 \dots n, \quad \forall u \in \mathbb{R} \quad (7.4)$$

hypothèses de structures: (7.5)

$$\text{Il existe } C > 0 \text{ tel que: } \left| \frac{\partial}{\partial \xi_j} A_i(x,u,\xi) \right| \leq C \quad \forall j = 1 \dots n \quad \forall i = 1 \dots n$$

$$\text{et en posant } a_{i,j}(x,u,\xi) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \xi_j} A_i(x,u,t\xi) dt$$

$$\begin{aligned} \text{On notera qu'alors } A_i(x,u,\xi) &= a_{i,j}(x,u,\xi)\xi_j + A_i(x,u,0) \\ &= a_{i,j}(x,u,\xi)\xi_j + \beta_i(x,u) \end{aligned}$$

et on remarquera que

$$\forall |\xi|^2 \leq a_{i,j}(x,u,\xi)\xi_i\xi_j \leq C|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

On suppose de plus que $a_{i,j}(x,u,\xi) \in C^1(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ avec:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial a_{i,j}}{\partial x_i}(x,u,\xi) \right| &\leq C; \quad \left| \frac{\partial a_{i,j}}{\partial u}(x,u,\xi) \right| \leq C \\ \left| \frac{\partial a_{i,j}}{\partial \xi_k}(x,u,\xi) \right| &\leq C' \end{aligned}$$

Avec nos notations ainsi qu'avec (7.3) et (7.4) il est facile de montrer que :

$$A(x,u,\nabla u) = - \frac{\partial}{\partial x_i} A_i(x,u,\nabla u) + a(x,u) = - \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x,u,\nabla u) \frac{\partial u}{\partial x_j}) - \frac{\partial}{\partial x_i} (\beta(u)) - \sum_{i=2}^{i=n} \frac{\partial}{\partial x_i} (\beta_i(x,u)) + a(x,u) \quad (7.6)$$

et nous utiliserons cette expression par la suite, qu'on notera $A(u)$.

Notations et hypothèses sur Φ et sur Ω :

Nous noterons $\Gamma^0 = \{x \in \Gamma / \Phi(x) = 0\}$ et $\Gamma^+ = \{x \in \Gamma / \Phi(x) > 0\}$

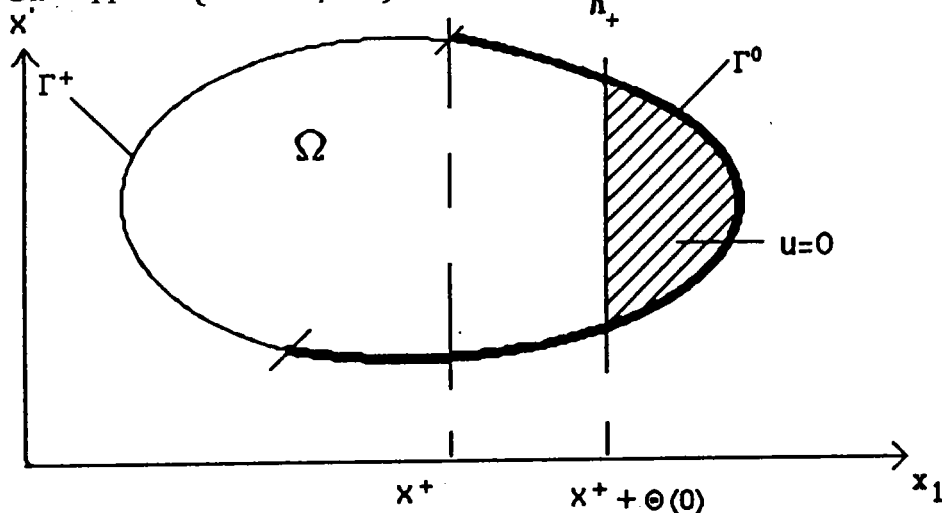
Définissons $\Phi_s = \sup \{\Phi(x), x \in \Omega\}$ et on supposera que $0 < \Phi_s \leq \eta$ (7.7)

On pose également:

$$x^+ = \sup \{x_1 / x = (x_1, x') \in \Gamma^+\}$$

$h_+ = \sup \{x^+ - x_1 / x \in \Omega\}$; $h_- = \sup \{x_1 - x^+ / x \in \Omega\}$ et $D = h_+ + h_-$ (voir la figure ci-après).

On supposera $\{x \in \Omega / x_1 > x^+\} \neq \emptyset$. On pose $\frac{r}{h_+} = +\infty$ si $h_+ = 0$.



Théorème 7.1: Sous les hypothèses (7.2)-(7.6) et pour Φ_s assez petit vérifiant :

$\langle A(w), v \rangle \geq 0 \forall v \in H_0^1(\Omega), v \geq 0$ p.p sur Ω .

D'après l'expression de w on a : $\frac{\partial w}{\partial x_i} = -\mu\beta(w)\delta_{i,1}$; $\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} = \mu^2 \delta_{i,1} \delta_{j,1} \beta(w)\beta'(w)$ où $\delta_{k,1} = \begin{cases} 1 & \text{si } k=1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{D'autre part } \frac{\partial}{\partial x_i}(\beta_i(x,w)) &= \frac{\partial \beta_i}{\partial x_i}(x,w) - \mu\beta(w)\delta_{i,1} \frac{\partial \beta_i}{\partial u}(x,w) \\ &= \begin{cases} \frac{\partial \beta}{\partial x_i}(x,w) & \text{pour } i = 2 \dots n \\ -\mu\beta(w)\beta'(w) & \text{pour } i = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

D'après l'expression (7.6) on obtient alors:

$$\begin{aligned} A(w) &= \left(-a_{ij} \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_1}(\beta(w)) \right) - \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_j} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial u} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_j} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial \xi_k} \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial w}{\partial x_j} \\ &\quad - \sum_{i=2}^{i=n} \frac{\partial \beta_i}{\partial x_i}(x,w) + a(x,w) \end{aligned}$$

(On a omis la variable $(x,w,\nabla w)$ pour ne pas alourdir l'expression)

et grâce à (7.2), (7.4), la croissance de $u \rightarrow a(x,u)$ et à ce qui précède :

$$A(w) \geq \mu\beta(w)\beta'(w)(1 - \mu a_{1,1}) - \mu\beta(w) \left(\frac{\partial a_{i,1}}{\partial x_i} + \mu\beta(w) \frac{\partial a_{1,1}}{\partial u} - \mu^2 \beta(w)\beta'(w) \frac{\partial a_{1,1}}{\partial \xi_1} \right) \quad (7.7)$$

Donnons une minoration du deuxième terme de (7.7):

$$\underline{\text{Lemme}} : -\mu\beta(w) \left(-\frac{\partial a_{i,1}}{\partial x_i} + \mu\beta(w) \frac{\partial a_{1,1}}{\partial u} - \mu^2 \beta(w)\beta'(w) \frac{\partial a_{1,1}}{\partial \xi_1} \right) \geq -\mu^2 \beta(w)\beta'(w) DC(\mu)$$

$$\text{où } C(\mu) = C + \mu\beta(\eta)C + \mu^2\beta(\eta)\beta'(\eta)C'$$

Preuve du lemme :

$$-\mu\beta(w)\left(-\frac{\partial a_{1,1}}{\partial x_1} + \mu\beta(w)\frac{\partial a_{1,1}}{\partial u} - \mu^2\beta(w)\beta'(w)\frac{\partial a_{1,1}}{\partial \xi_1}\right) \geq -\mu\beta(w)(C + \mu\beta(\eta)C + \mu^2\beta(\eta)\beta'(\eta)C')$$

Or $x_1 \rightarrow \beta(w)$ est convexe:

en effet - sur $\{x \in \Omega / x_1 \geq x^+ + \Theta(0)\}$ on a $w=0=\beta(w)$

- sur $\{x \in \Omega / x_1 < x^+ + \Theta(0)\}$ on a $0 < w < \eta$ et $d(\beta(w))/dx_1 = -\mu\beta(w)\beta'(w)$ qui est

croissante de la variable x_1 (croissance de $\beta\beta'$ et décroissance de w).

On a donc :

$$\beta(w(x^+ + \Theta(0))) - \beta(w(x_1)) = -\beta(w(x_1))$$

$$\geq (x^+ + \Theta(0) - x_1) d(\beta(w(x_1)))/dx_1 \geq -\mu\beta(w)\beta'(w)D$$

ce qui termine la preuve du lemme.

Revenons à la démonstration du théorème: en revenant à (7.7) et grâce au lemme précédent on obtient:

$$A(w) \geq \mu\beta(w)\beta'(w)\left(1 - \mu(a_{1,1} + C(\mu)D)\right) \quad \text{et, avec l'expression de } C(\mu):$$

$$A(w) \geq \mu\beta(w)\beta'(w)\left(1 - \mu C(D+1) - CD\beta(\eta)\mu^2 - D\beta(\eta)\beta'(\eta)C'\mu^3\right) \geq 0 \quad \text{pour } \mu \in]a, b[$$

Deuxième étape:

Grâce à (7.2) 0 est solution du problème:

$$\langle A(0), v-0 \rangle \geq 0 \quad \forall v \in K_{0,\Psi}$$

Comme d'autre part u est solution du problème :

$$\langle A(u), v-u \rangle \geq 0 \quad \forall v \in K_{\Phi,\Psi}, u \in K$$

le théorème 1.1 assure que $0 \leq u$ p.p sur Ω .

D'après la première étape $\langle A(w), v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), v \geq 0$.

Nous remarquons de plus :

$$\min(u, w) \geq 0 \quad \text{p.p dans } \Omega; \quad |\nabla w| \leq R \quad \text{p.p dans } \Omega \quad \text{pour } \mu \in]a, b[\quad (\text{en effet } \mu < R/\beta(\eta)) \quad (7.8).$$

Sur Γ^0 , $w \geq u = 0$ et sur $\Gamma^+, x_1 < x^+$ d'où $w(x_1) \geq w(x^+) = \Phi_s \geq \Phi$ et donc $w \geq u$ p.p sur Γ (7.9).

Une extension facile du théorème 1.1 donne alors $u \leq w$ p.p sur Ω :

En effet avec les notations des sections précédentes il suffit de prendre $v = u - F_\varepsilon(u-w)$ comme fonction test dans le problème $\langle A(u), v-u \rangle \geq 0 \quad \forall v \in K_{\Phi,\Psi}, u \in K_{\Phi,\Psi}$ ce qui est loisible grâce à (7.8) et (7.9) et de prendre $v = F_\varepsilon(u-w)$ dans $\langle A(w), v \rangle \geq 0$.

On a donc $0 \leq u \leq w$ p.p sur Ω , ce qui entraîne que u s'annule sur $\{x \in \Omega / x_1 > x^+ + \Theta(0)\}$. Cet ensemble n'est pas vide pour $\mu > a$, ce qui termine la démonstration.

8 Etude numérique d'un problème comportant un terme de transport

Dans cette partie nous allons traiter numériquement le problème non linéaire simple suivant :

$$-\Delta u - \frac{\partial}{\partial x_1}(\beta(u)) = f \text{ sur } \Omega = (0,1) \times (0,1)$$

$$u \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

où β est continue dans $\mathbb{R}$, vérifie les conditions de monotonie des parties 2 et 5 et $\beta(u) \in L^2(\Omega)$,

$f \in L^2(\Omega)$. On notera (x_1, x_2) les points de Ω .

Cette équation est non linéaire et de plus ne correspond pas à la recherche du minimum d'une fonctionnelle. Mise sous forme variationnelle, elle équivaut à :

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx_1 dx_2 + \int_{\Omega} \beta(u) \frac{\partial v}{\partial x_1} \, dx_1 dx_2 = \int_{\Omega} f v \, dx_1 dx_2 \quad \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

$$u \in W_0^{1,2}(\Omega) . \tag{8.1}$$

(On omettra par la suite les mesures dx_1 et dx_2).

On montre (on se reportera à la fin de cette section pour plus de détails) que u est dans $L^\infty(\Omega)$ et

que $|u|_\infty \leq C |f|_2$ où C ne dépend pas de β et de f ce qui permet, après troncature de supposer β bornée. (voir [9]).

L'idée de base pour obtenir un algorithme de résolution de (8.1) est liée aux techniques utilisées dans les démonstrations d'existence et qui sont fondées sur la recherche d'un point fixe pour l'opérateur T défini par:

$$T : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow W_0^{1,2}(\Omega)$$

$\forall w \in W_0^{1,2}(\Omega) \quad \bar{u} = T(w)$ est solution dans $W_0^{1,2}(\Omega)$ de :

$$\int_{\Omega} \nabla \bar{u} \cdot \nabla v + \int_{\Omega} \beta(w) \frac{\partial v}{\partial x_1} = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega) .$$

On notera que T est bien défini, continu de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ et compact (on se reportera à la partie 6 et à [9] pour plus de détails). Nous verrons d'autre part que l'unicité de la solution du problème (8.1) (voir la partie 2) joue un rôle essentiel dans la convergence de l'algorithme qui suit.

Algorithme de base.

A la lumière de ce qui précède, nous considérons alors l'algorithme suivant:

u_0 est donné arbitrairement dans $W_0^{1,2}(\Omega)$,

pour $n \geq 0$, u_n étant connu, on détermine u_{n+1} solution de:

$$\int_{\Omega} \nabla u_{n+1} \cdot \nabla v + \int_{\Omega} \beta(u_n) \frac{\partial v}{\partial x_1} = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega) \quad (8.1)_n$$

On remarquera que la suite $(u_n)_n$ vérifie $u_{n+1} = T(u_n)$. On a alors le théorème de convergence suivant :

Théorème 8.1. Soit $(u_n)_n$ la suite définie par l'algorithme ci-dessus, alors :

u_n converge vers la solution u de (8.1) dans $W^{1,2}(\Omega)$ (fort) .

Démonstration.

première étape . On démontre que u_n converge vers u dans $L^2(\Omega)$ fort . Il est facile de montrer que $\|u_n\|_{1,2} \leq C$ où C est une constante indépendante de n (voir [9]). Il existe alors une sous suite de u_n encore notée u_n qui converge vers u_{∞} dans $W^{1,2}(\Omega)$ -faible. On en déduit que u_{∞} est dans $W_0^{1,2}(\Omega)$.

D'autre part par compacité de l'injection $i: W^{1,2}(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$, pour une sous suite (toujours notée u_n), u_n converge vers u_{∞} dans $L^2(\Omega)$ fort et par la continuité de $T: L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ (cf partie 6), $u_{\infty} = T(u_{\infty})$. ceci prouve que u_{∞} est une solution de (8.1) et, par unicité que $u_{\infty} = u$.

On a donc, pour une sous suite $u_n \rightarrow u$ dans $L^2(\Omega)$. Cette sous suite étant dans un relativement compact de $L^2(\Omega)$, il suffit de montrer que u est sa seule valeur d'adhérence ce qui est clair en

reproduisant le raisonnement ci-dessus pour une sous suite.

Deuxième étape. Il suffit de prouver que $|\nabla u_n|_2 \rightarrow |\nabla u|_2$.

En prenant $v = u_{n+1}$ dans (8.1)_n, on obtient

$$\int_{\Omega} |\nabla u_{n+1}|^2 + \int_{\Omega} \beta(u_n) \frac{\partial u_{n+1}}{\partial x_1} = \int_{\Omega} f u_{n+1} \quad \text{c'est à dire}$$

$$\int_{\Omega} |\nabla u_{n+1}|^2 + \int_{\Omega} (\beta(u_n) - \beta(u_{n+1})) \frac{\partial u_{n+1}}{\partial x_1} + \int_{\Omega} \beta(u_{n+1}) \frac{\partial u_{n+1}}{\partial x_1} = \int_{\Omega} f u_{n+1} \quad (8.2)_n$$

Pour le second terme de (8.2)_n on a, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et une remarque de la première étape :

$$\left| \int_{\Omega} (\beta(u_n) - \beta(u_{n+1})) \frac{\partial u_{n+1}}{\partial x_1} \right| \leq C \left(\int_{\Omega} |\beta(u_n) - \beta(u_{n+1})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{où } C \text{ ne dépend pas de } n.$$

Mais $v \rightarrow \beta(v)$ est un opérateur continu de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ (voir la partie 6) de sorte qu'en utilisant la première étape, ce second terme tend vers 0.

Il est clair d'autre part que $\int_{\Omega} f u_{n+1}$ tend vers $\int_{\Omega} f u$.

Il suffit donc de prouver que $\int_{\Omega} \beta(u_{n+1}) \frac{\partial u_{n+1}}{\partial x_1}$ tend vers $\int_{\Omega} \beta(u) \frac{\partial u}{\partial x_1}$ pour avoir, en passant à la limite dans (8.2)_n le résultat cherché.

Pour cela posons $B(s) = \int_0^s \beta(t) dt$.

Nous devons alors prouver que $\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_1} (B(u_{n+1}))$ tend vers $\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_1} (B(u))$.

Déjà $\left| \frac{\partial}{\partial x_1} (B(u_{n+1})) \right|_2 \leq C |\nabla u_{n+1}|_2 \leq C$ (C désigne différentes constantes indépendantes de n,

on rappelle que β est supposé borné.)

$\frac{\partial}{\partial x_1}(B(u_{n+1}))$ a alors une valeur d'adhérence dans $L^2(\Omega)$ -faible et il reste donc à prouver qu'elle est égale à $\frac{\partial}{\partial x_1}(B(u))$ (elle sera alors unique). B étant Lipschitzienne on a $\|B(u_{n+1}) - B(u)\|_2 \leq C \|u_{n+1} - u\|_2$ ce qui prouve, grâce à la première étape que $B(u_{n+1}) \rightarrow B(u)$ dans $L^2(\Omega)$ -fort, donc dans $D'(\Omega)$ et par conséquent que $\frac{\partial}{\partial x_1}(B(u_{n+1})) \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_1}(B(u))$ dans $D'(\Omega)$ ce qui termine la démonstration.

Remarque 8.1.

1) Il est facile de montrer que lorsque $\beta \in C^1(-|u|_\infty, |u|_\infty)$ la solution u_{n+1} de $(8.1)_n$ est dans $W^{2,2}(\Omega)$. En effet on a $\beta(u_n) \in W^{1,2}(\Omega)$ et $(8.1)_n$ équivaut à

$$\int_{\Omega} \nabla u_{n+1} \cdot \nabla v = \int_{\Omega} g v \quad \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega) \text{ où } g = \frac{\partial(\beta(u_n))}{\partial x_1} + f \text{ appartient à } L^2(\Omega).$$

Il est alors classique (voir [5]) que u_{n+1} est dans $W^{2,2}(\Omega)$ et que $\|\partial^2 u_{n+1} / \partial x_i \partial x_j\|_2 \leq C \|g\|_2$.

(C désignera différentes constantes indépendantes de n). Grâce à la première étape de la

démonstration du théorème 8.1, il est facile de voir que $\|\nabla u_{n+1}\|_2 \leq C$ et donc que $\|u_{n+1}\|_{2,2} \leq C$.

En utilisant une méthode semblable à celle de la première étape du théorème 8.1 (la compacité de l'injection $J: W^{2,2}(\Omega) \rightarrow W^{1,2}(\Omega)$ étant ici le principal argument) on montre d'une autre manière le théorème précédent.

2) Lorsque $|\beta'(t)| \leq M$ où la constante M est assez petite, il est possible de donner une estimation de la vitesse de convergence de cet algorithme. En posant en effet $v = u_{n+1} - u$ dans (8.1) et $(8.1)_n$, on obtient après différence et utilisation de l'inégalité de Cauchy-schwarz:

$$\|\nabla(u_{n+1} - u)\|_2^2 \leq M \|u_n - u\|_2 \|\nabla(u_n - u)\|_2.$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré $\sqrt{\alpha} \|v\|_2 \leq \|\nabla v\|_2$ pour tout v de $W_0^{1,2}(\Omega)$ où $\alpha = 2\pi^2$ est la plus petite valeur propre de $-\Delta$ dans le carré Ω (voir [21]) on en déduit facilement:

$$\begin{aligned} \sqrt{\alpha} (|u_{n+1} - u|_2 + |\nabla(u_{n+1} - u)|_2) &\leq (1 + \sqrt{\alpha}) |\nabla(u_{n+1} - u)|_2 \\ &\leq \left(\frac{M}{\sqrt{\alpha}}\right)^{\frac{1}{2}} (1 + \sqrt{\alpha}) |\nabla(u_n - u)|_2 \end{aligned}$$

et donc $|u_{n+1} - u|_{1,2} \leq K |u_n - u|_{1,2}$ où $K = \left(\frac{M}{\sqrt{\alpha}}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1 + \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}}$ et où $\sqrt{\alpha} = \pi\sqrt{2}$.

Pour $M < \frac{\alpha\sqrt{\alpha}}{(1 + \sqrt{\alpha})^2}$, K est alors inférieur à 1, T est contractant dans $W_0^{1,2}(\Omega)$ et on a l'estimation de

la vitesse de convergence: $|u_n - u|_{1,2} \leq K^n |u_0 - u|_{1,2}$ pourvu que l'on connaisse une estimation a priori de $|u|_{1,2}$.

Le résultat du théorème précédent nous conduit à résoudre à chaque itération n un problème linéaire $(8.1)_n$. La stratégie que l'on adoptera est alors la suivante: pour tout n de N

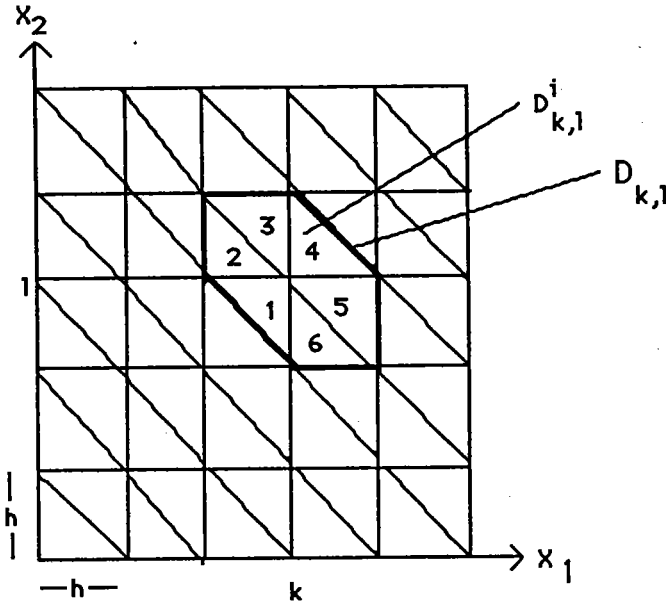
a) On discrétise avec intégration numérique le problème $(8.1)_n$ en un problème linéaire en dimension finie $(8.1)_{n,h}$ où h sera le pas de la discrétisation. Ce pas sera constant en n .

b) Nous résolvons le système ainsi obtenu par une méthode directe (une méthode itérative introduirait des itérations "emboîtées"). On utilisera la méthode de Choleski.

c) On passe ensuite au calcul d'une valeur approchée de u_{n+2} du problème $(8.1)_{n+1,h}$ dans lequel on a reporté une valeur approchée $u_{n+1,h}$ de u_{n+1} calculée dans l'étape b)

Discrétisation de $(8.1)_n$.

On décompose Ω en triangles isométriques comme sur la figure ci-dessous



On a $h=1/N+1$, le nombre de points intérieurs à Ω est alors N^2 . On notera T_h l'ensemble des triangles décomposant Ω et T l'un quelconque de ceux-ci. On désignera par $p_{k,l}$ le point intérieur à Ω de coordonnées (kh, lh) où $k=1 \dots N$, $l=1 \dots N$.

De manière classique on définit les fonctions $\phi_{k,l}$ pour $k=1 \dots N$, $l=1 \dots N$ par:

$$\phi_{k,l}(p_{k,l}) = 1$$

$$\phi_{k,l}(p_{i,j}) = 0 \text{ si } (i,j) \neq (k,l)$$

$\phi_{k,l}$ est continue sur Ω et coïncide avec un polynôme de degré 1 sur chaque triangle de T_h .

On notera $D_{k,l}$ la réunion des six triangles de sommet commun $p_{k,l}$, $D_{k,l}^i$, $i=1 \dots 6$ désignera chacun de ces triangles. On remarquera qu'alors $\phi_{k,l}$ est et de support $D_{k,l}$.

On désignera par $W_0^{1,2,h}$ le sous espace de $W_0^{1,2}(\Omega)$ engendré par les $\phi_{k,l}$. Il est clair qu'alors $\dim(W_0^{1,2,h}) = N^2$.

Pour discrétiser totalement $(8.1)_{n,h}$ on utilisera la formule d'intégration approchée d'ordre 1

suivante (voir [26]):

$$\int_T v(x) dx \cong \frac{1}{3} \text{mes}(T) \sum_{i=1}^3 v(p_i^T) \text{ pour tout triangle } T, \text{ où } p_i^T, i=1 \dots 3 \text{ sont les sommets de } T$$

On sera amené à utiliser, pour l'estimation de l'erreur dans $W_0^{1,2}(\Omega)$ due à la discrétisation, le résultat suivant :

Lemme 8.1: Soit $g \in W^{1,\infty}(T)$ et $P \in P_1(T)$ où $P_1(T)$ désigne l'ensemble des restrictions à T des polynômes du premier degré. On a alors:

$$\left| \int_T gP - \frac{1}{3} \text{mes}(T) \sum_{i=1}^3 g(p_i^T) P(p_i^T) \right| \leq C |h|^2 |g|_{1,\infty,T} |P|_{1,2,T} \text{ où } C \text{ est une constante qui ne dépend pas de}$$

h, T, g, P et où $| \cdot |_{1,\infty,T}, | \cdot |_{1,2,T}$ désignent les normes de $W^{1,\infty}(T)$ et $W^{1,2}(T)$ respectivement.

Démonstration. Dans ce qui suit C désignera différentes constantes indépendantes de h, T, g et P .

Pour toute fonction v , notons $\bar{v} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 v(p_i^T)$. Avec cette notation nous avons:

$$\left| \int_T gP - \int_T g\bar{P} \right| \leq \int_T |gP - g\bar{P}| + \int_T |g\bar{P} - \bar{g}\bar{P}|$$

Estimons le premier terme du membre de droite de cette dernière inégalité, on a:

$$\begin{aligned} \int_T |gP - g\bar{P}| &\leq |g|_{\infty,T} \int_T |P - \bar{P}| \text{ et, en utilisant le théorème de la moyenne} \\ &\leq C |g|_{\infty,T} h^2 (h |\nabla P|_{\infty,T}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{or, } \nabla P \text{ étant constant, } h |\nabla P|_{\infty,T} &= h |\nabla P| = \frac{C}{h} \int_T |\nabla P| \text{ et par l'inégalité de Cauchy - Schwarz,} \\ &\leq C |P|_{1,2,T}. \end{aligned}$$

et nous obtenons donc

$$\int_T |gP - g\bar{P}| \leq Ch^2 |g|_{1,\infty,T} |P|_{1,2,T}.$$

Estimons enfin le second terme, on a :

$$\int_T |g\bar{P} - \bar{g}P| \leq |P|_{\infty,T} \int_T |g - \bar{g}| \text{ et, en utilisant encore le théorème de la moyenne,} \\ \leq C |P|_{\infty,T} h^2 (h |g|_{1,\infty,T})$$

Mais, pour tout P de $P_1(T)$ il est classique qu'il existe C indépendante de h et P telle que:

$$|P|_{\infty,T} \leq \frac{C}{h} |P|_{2,T} \text{ ce qui permet donc la majoration suivante du second terme :}$$

$$\int_T |g\bar{P} - \bar{g}P| \leq Ch^2 |g|_{1,\infty,T} |P|_{1,2,T} \text{ et le lemme 8.1 et donc démontré.}$$

Le problème discrétisé avec intégration numérique (8.1)_{n,h} s'écrit :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u_{n+1,h}}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_{i,j}}{\partial x_k} + \sum_{T \in T_h} \frac{1}{3} \text{mes}(T) \sum_{l=1}^3 \beta(u_{n,h}(p_l^T)) \frac{\partial \varphi_{i,j}(p_l^T)}{\partial x_1} = \sum_{T \in T_h} \frac{1}{3} \text{mes}(T) \sum_{l=1}^3 f(p_l^T) \varphi_{i,j}(p_l^T)$$

pour tout $\varphi_{i,j}$ de $W_0^{1,2,h}$; avec $u_{n+1,h}$ dans $W_0^{1,2,h}$ et où $u_{n,h}$ est la solution du problème discrétisé (8.1)_{n-1,h}, et où $u_{0,h} = u_0 = 0$.

(Il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}$, (8.1)_{n,h} possède une unique solution. Pour davantage de précisions on pourra se reporter aux propriétés de la matrice A de ce système, explicitée ci-dessous.)

En posant $u_{n+1,h} = \sum_{k,l=1 \dots N} X_{k,l}^{n+1} \varphi_{k,l}$ pour tout n ,

en adoptant la numérotation suivante: pour tout réel $Y_{k,l}$ indicé par (k,l) , on pose $Y_{k,l} = Y_{N(k-1)+l}$ (pour k fixé de 1 à N , l varie de 1 à N); en explicitant les fonctions de base ainsi que leurs dérivées partielles (de module $1/h$), le problème (8.1)_{n,h} s'écrit :

$$AX + \frac{1}{h} \left[\sum_{T=D_{ij}^1, D_{ij}^2} \frac{1}{3} \text{mes}(T) \sum_{l=1}^3 \beta(u_{n,h}(p_l^T)) - \sum_{T=D_{ij}^4, D_{ij}^5} \frac{1}{3} \text{mes}(T) \sum_{l=1}^3 \beta(u_{n,h}(p_l^T)) \right] = F$$

(la notation [] désignant un vecteur colonne de lignes indicées par $N(i-1)+j$)

où $X = (X_{N(k-1)+l}^{n+1})_{k=1 \dots N, l=1 \dots N}$, $F = (F_{N(k-1)+l})_{k=1 \dots N, l=1 \dots N}$ avec $F_{N(k-1)+l} = h^2 f(p_{k,l})$ qu'on notera

$h^2 f_{k,l}$ et où la matrice A est définie de la manière suivante:

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ A_{2,1} & & A_{i,i} & \\ & & & A_{N-1,N} \\ 0 & & A_{N,N-1} & A_{N,N} \end{bmatrix}$$

avec les matrices $N \times N$ suivantes:

$$A_{i,i} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ -1 & & -1 & \\ & & & -1 & 4 \\ & 0 & & & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad A_{k,k+1} = A_{k+1,k} = \begin{bmatrix} -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{bmatrix}$$

$$i = 1 \dots N$$

$$k = 1 \dots N-1$$

Il est classique (voir [21]) que A est définie positive (de plus petite valeur propre $8 \sin^2(\pi h/2)$).

Une analyse précise du deuxième terme du premier membre de ce système donne enfin:

$$\sum_{T \in D_{ij}^1, D_{ij}^2} \frac{1}{3} \text{mes}(T) \sum_{l=1}^3 \beta(u_{n,h}(p_l^T)) = \frac{h^2}{6} (2\beta_{i-1,j} + \beta_{i-1,j+1} + \beta_{i,j-1} + 2\beta_{i,j})$$

$$\sum_{T \in D_{ij}^4, D_{ij}^5} \frac{1}{3} \text{mes}(T) \sum_{l=1}^3 \beta(u_{n,h}(p_l^T)) = \frac{h^2}{6} (2\beta_{i,j} + \beta_{i,j+1} + \beta_{i+1,j-1} + 2\beta_{i+1,j})$$

$$\beta_{i,j} = \beta(X_{N(i-1)+j}^n) \text{ si } (i,j) \in \{1, \dots, N\}^2 \text{ et } \beta_{i,j} = \beta(0) \text{ sinon.}$$

ce qui donne:

$$B=(B_{N(k-1)+l})_{k=1\dots N, l=1\dots N} \text{ où } B_{N(k-1)+l} = h/6 (2\beta_{k-1,l} + \beta_{k-1,l+1} + \beta_{k,l-1} - \beta_{k,l+1} - \beta_{k+1,l-1} - 2\beta_{k+1,l})$$

Résumons:

Le problème $(8.1)_{n,h}$ consiste à résoudre à chaque itération n , le système linéaire suivant:

$$AX = F - B \text{ avec } X = (X_{N(k-1)+l}^{n+1})_{k,l} \quad k,l = 1\dots N$$

$$\beta_{k,l} = \beta(X_{N(k-1)+l}^n) \text{ si } (k,l) \in \{1, \dots, N\}^2; \beta_{k,l} = \beta(0) \text{ sinon}$$

$$F_{N(k-1)+l} = h^2 f_{k,l} \text{ et } B_{N(k-1)+l} = h/6 (2\beta_{k-1,l} + \beta_{k-1,l+1} + \beta_{k,l-1} - \beta_{k,l+1} - \beta_{k+1,l-1} - 2\beta_{k+1,l}).$$

$$\text{La solution sera alors } u_{n+1,h} = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N X_{N(k-1)+l}^{n+1} \phi_{k,l} \text{ et } u_{0,h} = 0.$$

Le théorème suivant précise l'ordre de l'erreur due à la discrétisation. Nous utiliserons, pour ce théorème, l'abus de notation suivant : $|v|_{1,2} = |\nabla v|_2$ (ces deux normes sont en fait équivalentes.).

Théorème 8.2. On suppose que $\beta \in C^1(-|u|_\infty, |u|_\infty)$ avec $|\beta'(t)| \leq M$ et que $f \in W^{1,\infty}(\Omega)$. On a alors l'estimation suivante:

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n,h} - u_n|_{1,2} \leq C|h| \text{ où } C \text{ est une constante indépendante de } h \text{ (dépendant éventuellement de } n \text{)}.$$

Démonstration. Dans tout ce qui suit C désignera différentes constantes indépendantes de h .

Notons $u_{n+1,h}^*$ la solution du problème discrétisé sans intégration numérique $(8.2)_{n,h}$ défini par

$$u_{0,h}^* = u_{0,h} (= u_0) \text{ et par } \forall n \in \mathbb{N} :$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u_{n+1,h}^*}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_k} + \int_{\Omega} \beta(u_{n,h}^*) \frac{\partial v}{\partial x_1} = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in W_0^{1,2,h} \quad (8.2)_{n,h}$$

$$u_{n+1,h}^* \in W_0^{1,2,h}$$

Première étape.

On estime l'erreur entre $u_{n,h}^*$ et u_n dans $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Lemme 8.2 : Pour tout n de N on a $|u_{n,h}^* - u_n|_{1,2} \leq C|h|$

(C étant une constante indépendante de h)

Démonstration du lemme 8.2:

elle se fait par récurrence sur n . Par le choix des fonctions initiales, l'inégalité ci-dessus est bien vérifiée à l'ordre 0. Considérons alors le problème "intermédiaire" $(8.3)_{n,h}$ suivant:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u_{n+1,h}^{**}}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_k} + \int_{\Omega} \beta(u_n) \frac{\partial v}{\partial x_1} = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in W_0^{1,2,h} \quad (8.3)_{n,h}$$

$u_{n+1,h}^{**} \in W_0^{1,2,h}$

En prenant $v = u_{n+1,h}^{**} - u_{n+1,h}^*$ dans $(8.2)_{n,h}$ et $(8.3)_{n,h}$, après différence et en utilisant l'inégalité de

Cauchy-Schwarz on obtient:

$$|u_{n+1,h}^{**} - u_{n+1,h}^*|_{1,2} \leq |\beta(u_n) - \beta(u_{n,h}^*)|_2$$

Par l'inégalité de Poincaré jointe à l'hypothèse de récurrence, on obtient alors:

$$|u_{n+1,h}^{**} - u_{n+1,h}^*|_{1,2} \leq MC|h|. \quad (8.2)$$

Il est d'autre part facile de voir que :

$$|u_{n+1,h}^{**} - u_{n+1}|_{1,2} \leq \inf_{v \in W_0^{1,2,h}} |v - u_{n+1}|_{1,2} \quad (8.3)$$

(voir par exemple le théorème 3.12 de [26] avec $a(u,v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v$ et $L(v) = - \int_{\Omega} \beta(u_n) \frac{\partial v}{\partial x_1} + \int_{\Omega} f v$ et où $V = W_0^{1,2}(\Omega)$).

Si Πu_{n+1} désigne l'interpolé de Lagrange de u_{n+1} dans $W_0^{1,2,h}$, nous avons (car $u_{n+1} \in W^{2,2}(\Omega)$ d'après la remarque 8.1) :

$$|u_{n+1} - \Pi u_{n+1}|_{1,2} \leq C|h| |u_{n+1}|_{2,2} \quad (\text{se reporter également à [26] démonstration du th.5.1-4 pages 109-110}).$$

L'inégalité (8.3) conduit alors à:

$$|u_{n+1,h}^{**} - u_{n+1}|_{1,2} \leq C|h| |u_{n+1}|_{2,2}$$

Or, d'après la remarque 8.1 on a $|u_{n+1}|_{2,2} \leq C$ où C ne dépend pas de n . On obtient donc

$$|u_{n+1,h}^{**} - u_{n+1}|_{1,2} \leq C|h| \quad (8.4)$$

Les estimations (8.2) et (8.4) donnent alors :

$$|u_{n+1,h}^* - u_{n+1}|_{1,2} \leq C|h| \quad \text{où } C \text{ est une constante indépendante de } h$$

ce qui termine la démonstration du lemme.

Deuxième étape

On estime l'erreur entre $u_{n,h}^*$ et $u_{n,h}$ dans $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Lemme 8.3.

Sous les hypothèses du théorème 8.2, il existe une constante C indépendante de h telle que :

$$|u_{n,h}^* - u_{n,h}|_{1,2} \leq C|h| \quad \text{pour tout } n \text{ de } N.$$

Démonstration du lemme 8.3:

On raisonne par récurrence sur n . L'inégalité énoncée est bien vérifiée pour $n=0$ par notre choix des fonctions initiales. Pour $n \geq 1$, de $(8.2)_{n,h}$ et de $(8.1)_{n,h}$ on déduit par différence:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\partial(u_{n+1,h}^* - u_{n+1,h})}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_k} + \int_{\Omega} (\beta(u_{n,h}^*) - \beta(u_{n,h})) \frac{\partial v}{\partial x_k} \\ & + \left(\int_{\Omega} (\beta(u_{n,h}) \frac{\partial v}{\partial x_1} - \sum_{T \in T_h} \frac{1}{3} \text{mes}(T) \sum_{l=1}^3 \beta(u_{n,h}(p_l^T)) \frac{\partial v}{\partial x_l}(p_l^T)) \right) \\ & = \left(\int_{\Omega} f v - \sum_{T \in T_h} \frac{1}{3} \text{mes}(T) \sum_{l=1}^3 f(p_l^T) v(p_l^T) \right) \quad \text{pour tout } v \text{ de } W_0^{1,2,h}. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Pour le deuxième terme, la propriété de β jointe aux inégalités de Cauchy-Schwarz et de Poincaré conduit à:

$$\left| \int_{\Omega} (\beta(u_{n,h}^*) - \beta(u_{n,h})) \frac{\partial v}{\partial x_1} \right| \leq M |u_{n,h}^* - u_{n,h}|_{1,2} |v|_{1,2}$$

et donc par hypothèse de récurrence:

$$\left| \int_{\Omega} (\beta(u_{n,h}^*) - \beta(u_{n,h})) \frac{\partial v}{\partial x_1} \right| \leq C|h| |v|_{1,2} \quad (8.6)$$

Estimons le troisième terme et le second membre qu'on notera respectivement I et J de (8.5). Pour cela nous utilisons le lemme 8.1 rappelé ci-dessus. De ce lemme on déduit que pour tout T de T_h :

$$I_T = \left| \int_T \beta(u_{n,h}) - \frac{1}{3} \text{mes}(T) \sum_{l=1}^3 \beta(u_{n,h}(p_l^T)) \right| \left| \frac{\partial v}{\partial x_1} \right|_T \leq C|h|^3 |\beta(u_{n,h})|_{1,\infty,T} \left| \frac{\partial v}{\partial x_1} \right|_T$$

(on remarquera que la restriction à T notée $\frac{\partial v}{\partial x_1} \Big|_T$ est constante et égale à $\frac{\partial v}{\partial x_1}(p_1^T)$ pour $l=1 \dots 3$; on a

d'autre part utilisé le lemme 8.1 avec $P=1$).

D'après les hypothèses faites sur β et avec la remarque ci-dessus, on a :

$$|\beta(u_{n,h})|_{1,\infty,T} \leq C \left(1 + \left| \frac{\partial u_{n,h}}{\partial x_1} \right|_T \right).$$

En revenant à I_T on obtient donc :

$$\begin{aligned} I_T &= C|h| |h|^2 \left(1 + \left| \frac{\partial u_{n,h}}{\partial x_1} \right|_T \right) \left| \frac{\partial v}{\partial x_1} \right|_T \\ &\leq C|h| \int_T \left(1 + \left| \frac{\partial u_{n,h}}{\partial x_1} \right| \right) \left| \frac{\partial v}{\partial x_1} \right|. \text{ Par Cauchy-Schwarz} \\ &\leq C|h| \left(1 + \|u_{n,h}\|_{1,2,T} \right) |v|_{1,2,T} \quad (\text{où } \|\cdot\|_{1,2,T} \text{ désigne la norme de } W^{1,2}(T)). \end{aligned} \quad (8.7)$$

Après sommation en T de T_h l'estimation (8.7) donne $|I| \leq C|h| (1 + \|u_{n,h}\|_{1,2}) |v|_{1,2}$.

Mais, par hypothèse de récurrence, en utilisant le lemme 8.2, et en remarquant que $\|u_n\|_{1,2} \leq C$ où C est indépendante de n (se reporter à la démonstration du théorème 8.1) nous obtenons :

$$\begin{aligned} \|u_{n,h}\|_{1,2} &\leq \|u_{n,h} - u_{n,h}^*\|_{1,2} + \|u_{n,h}^* - u_n\|_{1,2} + \|u_n\|_{1,2} \\ &\leq C|h| + C. \end{aligned}$$

L'estimation de I ci-dessus donne alors $|I| \leq C|h| |v|_{1,2}$ où C ne dépend pas de h. (8.8)

Estimons enfin J. Le lemme 8.1 donne :

$$\left| \int_T f v - \frac{1}{3} \text{mes}(T) \sum_{l=1}^3 f(p_l^T) v(p_l^T) \right| \leq C |h|^2 |f|_{1,\infty,T} |v|_{1,2,T}$$

et après sommation en T

$$|J| \leq C |h| |f|_{1,\infty} |v|_{1,2}. \quad (8.9)$$

En reportant (8.5), (8.8), et (8.9) dans l'inégalité (8.4) avec $v = u_{n+1,h}^* - u_{n+1,h}$ on obtient alors

$$|u_{n+1,h}^* - u_{n+1,h}|_{1,2} \leq C |h| \text{ où } C \text{ ne dépend pas de } h \text{ ce qui termine la démonstration du lemme 8.3.}$$

Dernière étape. Estimation de l'erreur entre u_{n+1} et $u_{n+1,h}$.

Il suffit de regrouper les résultats des lemmes 8.2 et 8.3 pour obtenir:

$$|u_{n+1} - u_{n+1,h}|_{1,2} \leq |u_{n+1} - u_{n+1,h}^*|_{1,2} + |u_{n+1,h}^* - u_{n+1,h}|_{1,2}$$

$$\leq C |h| \text{ où } C \text{ ne dépend pas de } h. \text{ Fin de la démonstration.}$$

Avant de passer à la résolution effective du système (8.1)_{n,h} sur un exemple, donnons l'estimation

de $|u|_{\infty}$ annoncée au début en explicitant les constantes intervenant dans les différentes majorations.

Théorème 8.3. la solution du problème 8.1 est dans $L^{\infty}(\Omega)$ avec $|u|_{\infty} \leq 1/2\pi |f|_2$.

(cette estimation est optimale au sens précisé dans [22]).

Démonstration. Nous allons utiliser une technique due à J.Mossino; J.M.Rakotoson et R.Temam, utilisant la notion de réarrangement décroissant et l'inégalité isopérimétrique de De Giorgi (c.f.[22]; [24]; [25]).

Estimons d'abord $\text{supess}(u)$. Pour t dans $]0, \text{supess}(u)[$ prenons $v = (u-t)^+$ dans (8.1). (si $\text{supess}(u)$ est négatif, on n'a rien à prouver.) On a:

$$\int_{[u>t]} |\nabla u|^2 + \int_{\Omega} \beta(u) \frac{\partial}{\partial x_1} ((u-t)^+) = \int_{[u>t]} f(u-t)$$

Comme dans [9] posons : $B(s) = \int_0^s \beta(\sigma+t) d\sigma$

$$\text{On obtient alors } \int_{[u>t]} |\nabla u|^2 + \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_1} B((u-t)^+) = \int_{[u>t]} f(u-t)$$

Mais il est facile de voir en utilisant le théorème de la divergence et le fait que $B((u-t)^+) = 0$ sur Γ que

$$\int_{[u>t]} \frac{\partial}{\partial x_1} B((u-t)^+) = 0 \text{ (c.f. [9])}$$

On obtient alors $\int_{[u>t]} |\nabla u|^2 = \int_{[u>t]} f(u-t)$ et tout revient à rechercher une estimation de $\sup_{[u>t]}(u)$ pour le problème linéaire $\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v$ dans $W_0^{1,2}(\Omega)$ avec $v = (u-t)^+$.

En reprenant la démonstration de [22] p.24 (avec $c=0$; $N=2$; $\alpha_N=\pi$) on aboutit à :

$$1 \leq \frac{1}{4\pi} \left(\int_{[u>t]} f \right) \mu(t)^{-1} \mu'(t) \text{ où } \mu(t) = \text{mes}([u>t]). \quad (8.10)$$

Mais, en utilisant l'inégalité de Hölder :

$$\int_{[u>t]} f \leq \mu(t)^{\frac{1}{2}} \|f\|_2$$

et en reportant cette dernière inégalité dans (8.10) on obtient alors :



$1 \leq -\frac{1}{4\pi} \|f\|_2 \mu(t)^{-\frac{1}{2}} \mu'(t)$ ce qui conduit, en intégrant entre 0 et $\text{supess}(u)$ dans $\bar{\mathbb{R}}$ à :

$$\text{supess}(u) \leq -\frac{1}{4\pi} \|f\|_2 \int_0^{\text{supess}(u)} \mu(t)^{-\frac{1}{2}} \mu'(t) dt.$$

Enfin, grâce au lemme A.1.2. de [21]

$$\text{supess}(u) \leq \frac{1}{4\pi} \|f\|_2 \int_{\mu(\text{supess}(u))}^{\mu(0)} \sigma^{-\frac{1}{2}} d\sigma \leq \frac{1}{2\pi} \|f\|_2 \text{mes}(\Omega)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\pi} \|f\|_2.$$

Pour estimer $\text{infess}(u)$, il suffit de remarquer que $-u$ est solution d'un problème identique avec

$$\beta^*(t) = -\beta(-t)$$

On obtient alors la même estimation pour $\text{supess}(-u)$ ce qui correspond bien au résultat énoncé.

Nous allons tester l'algorithme ci-dessus sur l'exemple suivant:

$$\beta(t) = t^2, f(x_1, x_2) = -2(x_1 - x_1^2) - 2(x_2 - x_2^2) - 2(x_1 - x_1^2)(x_2 - x_2^2)^2(1 - 2x_1) \text{ et de solution } x_1(1 - x_1)x_2(1 - x_2).$$

Le programme de calcul utilise le résultat classique suivant : dans la méthode de Choleski la matrice triangulaire supérieure S telle que $S^t S = A$ et la matrice A ont même profil. Ceci implique que S est une matrice bande supérieure de largeur $n+1$ et nous permettra de gagner un peu de temps de calcul dans la résolution de chaque système.

Nous donnons ci-dessous les résultats obtenus sur Goupil G4.

Valeurs exactes à 10⁻⁴[illegible]

valeurs obtenues après 5 iterations

[illegible]

valeurs obtenues après 5 iterations

66 bis

0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.01187	0.02026	0.02526	0.02693	0.02527	0.02027	0.01188	0.00000
0.00000	0.02025	0.03448	0.04292	0.04572	0.04294	0.03451	0.02028	0.00000
0.00000	0.02525	0.04291	0.05336	0.05684	0.05340	0.04296	0.02529	0.00000
0.00000	0.02690	0.04570	0.05683	0.06052	0.05686	0.04576	0.02696	0.00000
0.00000	0.02525	0.04291	0.05337	0.05685	0.05340	0.04296	0.02527	0.00000
0.00000	0.02025	0.03448	0.04293	0.04574	0.04295	0.03451	0.02028	0.00000
0.00000	0.01187	0.02026	0.02527	0.02694	0.02528	0.02028	0.01188	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

Valeurs exactes à 10⁻⁵

0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.01189	0.02030	0.02531	0.02698	0.02531	0.02030	0.01189	0.00000
0.00000	0.02030	0.03455	0.04301	0.04581	0.04301	0.03455	0.02030	0.00000
0.00000	0.02531	0.04301	0.05348	0.05694	0.05348	0.04301	0.02531	0.00000
0.00000	0.02698	0.04581	0.05694	0.06062	0.05694	0.04581	0.02698	0.00000
0.00000	0.02531	0.04301	0.05348	0.05694	0.05348	0.04301	0.02531	0.00000
0.00000	0.02030	0.03455	0.04301	0.04581	0.04301	0.03455	0.02030	0.00000
0.00000	0.01189	0.02030	0.02531	0.02698	0.02531	0.02030	0.01189	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

généraliser

$$\beta(t) = t^2$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{1+\sigma} \left[2x_1(1-x_1) + 2x_2(1-x_2) + \frac{1}{1+\sigma} \left((1-2x_1)x_2(1-x_2) \right)^2 + \frac{1}{1+\sigma} \left((1-2x_2)x_1(1-x_1) \right)^2 \right]$$

$$u(x_1, x_2) = \ln \left(1 + x_1(1-x_1)x_2(1-x_2) \right)$$

Bibliographie

- [1] R. A. Adams : Sobolev Spaces.
Academic Press , New York , (1975).
- [2] M. Artola : Sur une classe de problèmes paraboliques quasilinéaires.
Bolletino U.M.I. (6), 5-B , (1986) p. 51-70.
- [3] L. Boccardo : An L^S -Estimate for the Gradient of Solutions of Some Nonlinear Unilateral Problems.
Anali Mat. Pura ed Appl. , 141 , (1985) , p. 277-287.
- [4] L. Boccardo - F. Murat - J.P. Puel : Existence of bounded solutions for nonlinear elliptic unilateral problems.
Preprint , Université Pierre et Marie Curie , (1987).
- [5] H. Brezis :Analyse fonctionnelle et applications.
Ed.Masson .
- [6] H. Brezis : Problèmes unilatéraux .
J. Math. Pures et Appl., 51, (1972) p. 1-168.
- [7] H. Brezis - F. E. Browder : Strongly nonlinear boundary value problems.
Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.(4) 5 , (1978) , p. 587-603.
- [8] H. Brezis - D. Kinderlehrer - G. Stampacchia : Sur une nouvelle formulation du problème de l'écoulement à travers une digue.
C. R. Acad. Sc. Paris , Série A , t.287 , (1978) , p.711-714.
- [9] J. Carrillo - M. Chipot : On nonlinear elliptic equations involving derivative of the nonlinearity.
Proceedings of the Royal society of Edinburgh , 100 A , (1985), p.281-294.
- [10] J. Carrillo : Unicité des solutions du type Kruskov pour des problèmes elliptiques avec des termes de transport non linéaires.
C. R. Acad. Sc. Paris, t.303, Série I , (1986), p.189-192.

- [11] J. Carrillo : On the uniqueness of the solution of a class of elliptic equations with nonlinear convection .
Preprint , Universidad complutense , Madrid (1987).
- [12] M. Chipot - G. Michaille : Communication to the Irsee Meeting (1987) .
- [13] J.I.Diaz-M.Pierre dans J.I.Diaz: Nonlinear partial differential equations and free boundaries.Vol .1.
Research notes in mathematics.Pitman.
- [14] J. Douglas Jr. - T. Dupont - J. Serrin : Uniqueness and Comparison Theorems for Nonlinear elliptic Equations in Divergence Form.
Archives for Rat. Mech. and Analysis (42) , (1971), p.157-168.
- [15] G. Gagneux : Approximations Lipschitziennes de la fonction signe et schémas semi-discrétisés implicites de problèmes quasi-linéaires dégénérés.
Preprint. Université de Besançon.
- [16] F. Gastaldi - F. Tomarrelli :Some Remarks on Nonlinear and Noncoercive Variational Inequalities.
Bolletino U.M.I. (7) , 1B , (1987) , p. 143-165.
- [17] D. Gilbarg - N.S. Trudinger : Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.
Springer-Verlag , New-York , (1985).
- [18] D. Kinderlehrer - G. Stampacchia : An Introduction to Variational Inequalities.
Academic Press, (1980).
- [19] J. Leray - J.L. Lions : quelques resultats de Visik sur les problèmes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty - Browder.
Bull. Soc. math. France , 93 , (1965) , p.97-107.
- [20] J.L. Lions : Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires .
Dunod-Gauthier-Villars , (1969).

- [21] G. Marchouk: Méthodes de calcul numérique.
Ed. Mir.
- [22] J. Mossino: Inégalités isopérimétriques et applications en physique.
Herman. Collection Travaux en cours.
- [23] J. Necas : Introduction to the Theory of Nonlinear Elliptic Equations.
John Wiley Interscience , New York , (1986).
- [24] J. M. Rakotoson - R. Temam : Une nouvelle méthode d'estimations L^∞ . Application aux inéquations variationnelles.
C. R. Acad. Sc. Paris, t.304, Série I , (1987), p.527-530.
- [25] J. M. Rakotoson - R. Temam : Relative Rearrangement in Quasilinear Variational Inequalities.
Preprint , Université de Paris Sud , (1987).
- [26] P.A. Raviart - J.M. Thomas: Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles.
Ed. Masson.
- [27] N.S. Trudinger : On the Comparison Principle for Quasilinear Divergence Structure Equations.
Archives for Rat. Mech. and Analysis (57), 1974 , p.128-133.