



HAL
open science

Hétérogénéité de déformation plastique induites et conséquences sur la formation des microbandes de cisaillement et des textures

Hassan Bouaouine

► **To cite this version:**

Hassan Bouaouine. Hétérogénéité de déformation plastique induites et conséquences sur la formation des microbandes de cisaillement et des textures. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université Paul Verlaine - Metz, 1988. Français. NNT : 1988METZ003S . tel-01775746

HAL Id: tel-01775746

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01775746>

Submitted on 24 Apr 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

THESE

DE DOCTORAT D'ETAT ES-SCIENCES

présentée

A L'UNIVERSITE DE METZ

INSTITUT SUPERIEUR DE GENIE MECANIQUE ET PRODUCTIQUE

par

Hassan BOUAQUINE

Ingenieur école des mines-Rabat

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR D'ETAT ES-SCIENCES PHYSIQUES

**HETEROGENEITES DE DEFORMATION PLASTIQUE INDUITES ET
CONSEQUENCES SUR LA FORMATION DES MICROBANDES DE
CISAILLEMENT ET DES TEXTURES .**

Soutenue le 27 Avril 1988 devant la commission d'examen :

| | | |
|---------------------|------------------------|--------------------------------|
| Président: | D. FRANCOIS | Ecole Centrale de Paris |
| Rapporteurs: | M. BERVEILLER | Universite de Metz |
| | J. DE FOUQUET | E. N. S. M. A Poitiers |
| | R. PENELLE | Universite Paris Sud |
| Examineurs: | J. R. KLEPACZKO | Universite de Metz |

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE DE METZ



022 420293 6

versite de Stuttgart

versite Paris Nord

658000
1988
022 420293 6

THESE

DE DOCTORAT D'ETAT ES-SCIENCES

présentée

A L'UNIVERSITE DE METZ

INSTITUT SUPERIEUR DE GENIE MECANIQUE ET PRODUCTIQUE

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE
METZ

par

Hassan BOUAQUINE
Ingenieur école des mines-Rabat

pour obtenir

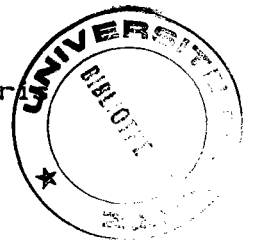
LE GRADE DE DOCTEUR D'ETAT ES-SCIENCES PHYSIQUES

| | |
|---------|-----------|
| N° inv. | 19880065 |
| Cote | S/M3 88/3 |
| Loc | Magasin |

HETEROGENEITES DE DEFORMATION PLASTIQUE INDUITES ET
CONSEQUENCES SUR LA FORMATION DES MICROBANDES DE
CISAILLEMENT ET DES TEXTURES .

Soutenu le 27 Avril 1988 devant la commission d'examen :

| | | |
|--------------|-----------------|-------------------------|
| Président: | D. FRANCOIS | Ecole Centrale de Paris |
| Rapporteurs: | M. BERVEILLER | Universite de Metz |
| | J. DE FOUQUET | E. N. S. M. A Poitiers |
| | R. PENELLE | Universite Paris Sud |
| Examineurs: | J. R. KLEPACZKO | Universite de Metz |
| | E. KRONER | Universite de Stuttgart |
| | A. ZAQUI | Universite Paris Nord |



Une réflexion:

" Ce qui est incompréhensible, c'est que le monde soit compréhensible... "

A. Einstein

A mes parents ,

A mes frères et soeures ,

avec reconnaissance et affection...

Ce travail a été effectué au Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux de la Faculté des Sciences de Metz, sous la direction du Professeur M. Berveiller, à qui j'exprime ma profonde gratitude et ma sincère reconnaissance pour l'aide et le soutien qu'il m'a apportés tout au long de ce travail.

Je tiens à remercier le Professeur E. Kröner qui s'est intéressé aux aspects de mon travail et a accepté d'en être un des rapporteurs.

Je remercie également le Professeur J. De Fouquet et R. Penelle (directeur de recherches C.N.R.S.) d'avoir accepté de juger ce travail en étant également ses rapporteurs.

Que le Professeur D. François veuille trouver ici mes chaleureux remerciements de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Les Professeurs A. Zaoui et J.R. Klepaczko (directeur de recherches C.N.R.S.) m'ont fait le grand honneur d'examiner ce travail. Je tiens à les remercier vivement.

Je remercie également tous ceux qui m'ont aidé, de près ou de loin, par leurs remarques et leurs conseils, et particulièrement : P. Lipinski, G.R. Canova, A. Eberhardt, F. Royer et mes amis S. Ahzi et A. Naddari.

Je n'oublierai pas de remercier Mademoiselle I. Léderlé d'avoir dactylographier cette thèse, ainsi que A. Billocq et Madame M. Marcelet pour la réalisation pratique de ce document.

TABLE DES MATIERES.

| | pages |
|---|-------|
| <u>RESUME.</u> | 1 |
| <u>Chapitre I. INTRODUCTION</u> | 3 |
| <u>Chapitre II. METHODES THEORIQUES EN MECANIQUE PHYSIQUE</u> | |
| II.1. Cinématique de la déformation | 10 |
| II.2. Conditions de compatibilité | 12 |
| II.3. Incompatibilités plastiques et tenseur $\underline{\alpha}$ | 14 |
| II.4. Tenseur d'incompatibilité $\underline{\eta}$ | 16 |
| II.5. Relation entre $\underline{\alpha}$ et $\underline{\eta}$ | 16 |
| II.6. Calcul des rotations élastiques à partir de $\underline{\alpha}$ | 19 |
| II.7. Incompatibilités plastiques et contraintes internes | 19 |
| II.7.1. Calcul des contraintes internes | |
| a°. Méthode du potentiel de contraintes | 20 |
| b°. Méthode du tenseur de Green | 22 |
| II.7.2. Solutions particulières | |
| a°. Cas de l'inclusion plastique homogène | 24 |
| b°. Cas d'une interface plane séparant deux milieux homogènes. | 27 |
| II-8. déformation plastique des métaux | 33 |
| <u>Chapitre III. HETEROGENEITES PLASTIQUES TOTALEMENT OU PARTIELLEMENT COMPATIBLES. CONSEQUENCES SUR LA FORMATION DES MICRO- BANDES DE CISAILLEMENT.</u> | |
| III.1. Introduction | 37 |
| III.2. Forme générale des hétérogénéités plastiques compatibles | 39 |

| | |
|--|----|
| III.3. Le problème de l'inclusion aplatie "penny-shape" | 46 |
| III.3.1. Introduction | |
| III.3.2. Tenseurs $\underline{\alpha}$ et $\underline{\eta}$ | |
| III.3.3. Contraintes $\underline{\sigma}^1$ et $\underline{\sigma}^2$ (à grande distance et locales) | |
| III.3.4. Conclusion | |
| III.4. Le problème du plan d'habitat "d'épaisseur finie" | 52 |
| III.4.1. Tenseurs densité de dislocations $\underline{\alpha}^1$ et $\underline{\alpha}^2$ | |
| III.4.2. Contraintes $\underline{\sigma}^1$ et $\underline{\sigma}^2$ | |
| III.4.3. Tenseurs $\underline{\eta}^1$ et $\underline{\eta}^2$ | |
| III.5. Discussion et conclusions | 60 |
| Chapitre IV. PLANS D'HABITAT DANS LES MONOCRISTAUX C.F.C. | |
| CELLULES DE DISLOCATIONS. | |
| IV.1. Revue bibliographique | 63 |
| IV.2. Conditions de compatibilité et orientation du plan d'habitat | 66 |
| IV.3. Densités de dislocations et rotations élastiques | 69 |
| IV.4. Application au cas des métaux C.F.C. | 71 |
| IV.4.1. Préliminaire | 71 |
| IV.4.2. Cas du glissement simple hétérogène | 72 |
| IV.4.3. Cas du glissement multiple hétérogène à trois systèmes de glissement. | 74 |
| IV.4.4. Cas d'une jonction triple à glissement hétérogène | 77 |
| IV.5. Situation d'incompatibilité partielle | 78 |
| IV.6. Confrontation avec l'expérience | 80 |
| IV.7. Discussion et conclusions | 85 |
| Chapitre V. HETEROGENEITES PLASTIQUES COMPATIBLES ET TEXTURES DES POLYCRISTAUX C.F.C. ET C.C. DEFORMES EN LAMINAGE. | |
| V.1. Introduction | 88 |

| | |
|--|-----|
| U.2. Théorie de la déformation plastique hétérogène compatible avec un glissement simple. | 93 |
| U.2.1. Hétérogénéités de déformation compatibles dans un polycristal. | |
| U.2.1.1. Cas général | 93 |
| U.2.1.2. Cas du glissement simple - glissement multiple homogène. | 95 |
| U.2.2. Rotation élastique dans la zone à glissement simple | 99 |
| U.2.3. Expression de la condition de compatibilité en fonction des paramètres de la déformation. | 105 |
| U.3. Applications | |
| U.3.1. Laminage des métaux C.F.C. | |
| U.3.1.1. Condition de compatibilité | 108 |
| U.3.1.2. Normales aux plans d'habitat | 110 |
| U.3.1.3. Champ de rotations des réseaux cristallins | 111 |
| U.3.2. Laminage des métaux C.C. | |
| U.3.2.1. Normales aux plans d'habitat | 114 |
| U.3.2.2. Champ de rotations des réseaux cristallins | 114 |
| U.4. Discussion et Conclusions. | 115 |
| Chapitre VI. CONCLUSION GENERALE | 118 |
| ANNEXES: | |
| Annexe A : Solutions satisfaisant le principe du travail plastique minimum. | 120 |
| Annexe B : Stabilité relative des plans d'habitat. | 122 |
| REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES | |

RESUME

La déformation plastique des polycristaux métalliques est essentiellement hétérogène aussi bien à l'échelle inter qu'intra-granulaire. Cette hétérogénéité a pour origine la désorientation relative entre les grains, les interactions entre les systèmes de glissement et les joints de grains, le champ de contraintes internes et les interactions entre les dislocations des systèmes de glissement.

A part quelques modèles récemment développés, tous les modèles polycristallins usuels reposent sur l'hypothèse d'une déformation plastique intragranulaire homogène. Cette hypothèse ne traduit pas les observations expérimentales et n'explique pas une partie des résultats des textures de déformation, et surtout la transition entre les textures type cuivre et type laiton.

Le travail présenté constitue une première approche des mécanismes de déformation plastique hétérogène dans les polycristaux métalliques et des conséquences des hétérogénéités induites sur la formation des textures, les contraintes internes de troisième ordre et les microbandes de cisaillement.

En utilisant la théorie de Kröner concernant les problèmes d'incompatibilité et de contraintes internes, et en les développant pour des déformations plastiques constantes par morceaux dans les cas des plans d'habitats et d'inclusions, nous déduisons certaines caractéristiques d'hétérogénéités couramment observées dans les mono et les polycristaux: cellules de dislocations, sous joints, microbandes.

La prise en compte de "l'épaisseur" physique des volumes des hétérogénéités plastiques permet de déduire deux termes pour chacune des

différentes grandeurs d'incompatibilité (tenseur densité de dislocation α , tenseur d'incompatibilité η , contraintes internes):

Un premier terme "à grande distance" associé à la nature de l'hétérogénéité plastique, et un terme "local" associé à la structure dipolaire des dislocations.

Les contraintes associées au premier terme sont annulées par la formation des plans d'habitat, par contre les contraintes liées au terme "local" ne s'annulent que si l'épaisseur du volume de l'hétérogénéité est nulle. La coalescence et le développement des microbandes de cisaillement pourront être expliqués par ce second terme.

D'autre part, nous avons introduit dans les métaux à fort écrouissage latent (laiton, solutions solides, basses températures de déformation, faible énergie de défaut d'empilement) le concept de déformation intragranulaire hétérogène en distinguant essentiellement le glissement multiple homogène et le glissement simple, indépendamment de tout autre mécanisme de déformation. L'idée générale est inspirée du schéma couramment utilisé pour modéliser les transformations de phase, et des schémas auto-cohérents.

L'analyse de la compatibilité du champ de déformation considéré et les résultats obtenus permettent de confirmer l'existence de relations de causes à effets entre la formation de telles hétérogénéités et:

- d'une part, l'existence de certaines composantes de textures caractéristiques de ces métaux (la transition de texture cuivre-laiton pourra, à notre avis, être liée au passage d'un mode de glissement multiple homogène à un mode hétérogène).

- et d'autre part, la formation et l'orientation non aléatoire des microbandes de cisaillement.

Chapitre I

INTRODUCTION

CHAPITRE I

INTRODUCTION

On assiste depuis de nombreuses années à un développement considérable des études portant sur la plasticité des métaux et alliages. Ce développement est justifié, à la fois par le caractère fondamental des travaux permettant la compréhension des mécanismes en jeu et par l'intérêt technologique et économique que représentent les procédés de mise en forme par déformation plastique.

La déformation plastique des polycristaux métalliques résulte de plusieurs mécanismes selon la température, les caractéristiques et la microstructure du matériau : glissement sur des plans et selon des directions cristallographiques, mâclage, glissement aux joints de grains, diffusion de défauts ponctuels et transformation de phases. A froid, le mécanisme dominant est le glissement cristallographique (en l'absence de mâclage), la déformation plastique étant le résultat de déplacement et de multiplication des dislocations (défauts linéaires dans les cristaux).

La déformation macroscopique du polycristal est la réponse des grains qui le constituent. Dans chaque grain la déformation est essentiellement hétérogène du fait de la désorientation relative entre les grains, des interactions entre les systèmes de glissement et les joints de grains, des contraintes internes et des interactions entre les dislocations des systèmes de glissement (écrouissage latent).

A l'hétérogénéité initiale, dictée par les procédés d'élaboration et les traitements thermomécaniques subis par le matériau, s'ajoute une hétérogénéité induite qui évolue avec la déformation. Ces hétérogénéités se traduisent par la formation dans les grains du polycristal de domaines à

modes de glissement différents (nombre et nature des systèmes de glissement actifs dans chaque domaine (fig.1-1)(1)). La microstructure initiale du matériau est alors affectée et on assiste à la formation de microstructures particulières de dislocations (réarrangement en cellules à parois plus ou moins définies) et de microbandes de déformation qui coalescent et réagissent avec les joints de grains pour former des bandes de cisaillement macroscopiques (2). La nature et l'orientation de ces hétérogénéités sont liées d'une manière ou d'une autre aux conditions de chargement (3)(4)(5).

Les travaux les plus courants dans ce domaine sont essentiellement concernés par les effets de la microstructure granulaire initiale sur le comportement global du polycristal :

- effets de la désorientation relative des grains
- effets des textures cristallographiques et morphologiques
- effets des contraintes internes.

Les modèles récents prennent également en compte une partie de la microstructure actuelle induite par la déformation (6)(7)(8)(9). Tous ces modèles partent de l'hypothèse forte d'une déformation plastique intragranulaire homogène par glissement multiple (on trouvera une revue détaillée de ces modèles par exemple dans les références (6)(10)(11)...))

Les modèles polycristallins qui cherchent à sortir de l'hypothèse d'uniformité de la déformation plastique intragranulaire sont peu nombreux. On peut citer particulièrement : le modèle d'Arminjon (7) qui considère des hétérogénéités ne dépendant pas des facteurs morphologiques ni de l'influence des corrélations d'orientations des grains, et celui de Wierzbanski et Berveiller (12) qui utilisent, en petites déformations, un modèle self-consistent à N-sites pour modéliser certains aspects de ces hétérogénéités.

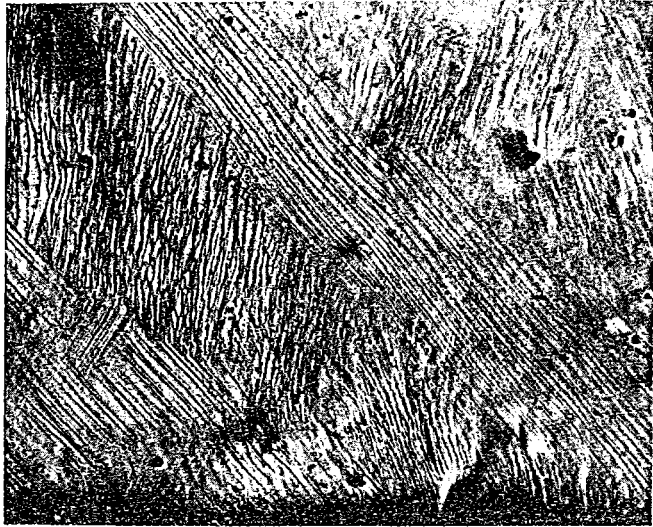


fig.I.1 Glissement multiple hétérogène dans un cristal de fer. $G = 150$ (1) .

Ces modèles ne règlent pas fondamentalement le problème des hétérogénéités de la déformation plastique car ils reposent sur un choix, à priori arbitraire, de certaines conditions sur les champs plastiques.

A une échelle fine et sans constituer un modèle de comportement global, de nombreux travaux (4)(13)(14) ont porté sur les observations et la modélisation microscopique de certains mécanismes de déformation hétérogène.

La démarche dont relève ce travail se veut être une synthèse entre les approches précédentes sans pour autant conduire directement à une prise en compte effective de la formation des hétérogénéités plastiques dans le comportement global du matériau.

L'analyse de la bibliographie, et les observations générales qu'on peut faire concernant les hétérogénéités plastiques indiquent que ce problème peut être abordé à partir des classifications suivantes :

* nature des hétérogénéités :

1. Le polycristal initialement hétérogène peut être considéré comme désordonné et une part des hétérogénéités plastiques induites contribue à conserver ou à augmenter ce désordre. Cette contribution est difficile à décrire et à prendre en compte dans le comportement global. Nous pensons que les modèles self-consistents constituent une approche satisfaisante de ces problèmes.

2. Une deuxième famille d'hétérogénéités plastiques, intervenant de préférence dans certaines "classes" de matériaux, contribue par contre à superposer au "désordre" précédent (initial et induit) une microstructure "orientée" ayant une portée à grande distance. Cette microstructure se manifeste par exemple par la formation des microbandes de cisaillement.

Ce travail est consacré à cette seconde famille d'hétérogénéités.

* Effet du comportement local :

Parmi les métaux C.F.C., on distingue habituellement deux classes de matériaux selon différents facteurs :

| | Métaux à faible écrouissage latent | Métaux à fort écrouissage latent. |
|--------------|---|---|
| origines | $\frac{\gamma}{\mu b}$ élevé métaux non alliés températures de déformation moyennes ou élevées | $\frac{\gamma}{\mu b}$ faible solutions solides basses températures |
| conséquences | stade I court formation de microbandes pour déform. importantes Textures type cuivre déf. avec glissement dévié et glissement multiple | stade I important facilité de formation des microb. à faibles déformations textures type laiton déform. avec nombre réduit de systèmes de glissement |

γ : énergie de faute d'empilement

μ : module de cisaillement

b : vecteur de Burgers

stade I : stade de glissement facile (courbes $\tau - \gamma$)

Afin d'expliquer certaines particularités des matériaux de la seconde classe et d'expliquer la transition entre les deux types de textures (Cuivre-laiton), certains auteurs (15)(16) ont pris en considération le mâclage qui est quelquefois observé dans ces matériaux. Mais ce mécanisme ne peut à lui seul interpréter l'ensemble des résultats (17).

Par ailleurs, les modèles du Type Sachs (18) qui considèrent un seul système de glissement ont été développés et les résultats obtenus tendent vers des textures proches de celle du laiton (17). Ces modèles sont cependant partiellement justifiés, car ils ne prennent pas en compte les problèmes de compatibilité des déformations.

Dans ce travail, nous nous attachons aux métaux de la seconde classe en proposant un mode de déformation hétérogène compatible et favorisant le glissement simple. Ce mode de déformation est inspiré des mécanismes qui ont été proposés pour les transformations de phase du type martensitiques (19) (20).

Ainsi dans le chapitre II nous présentons en détail les méthodes théoriques utilisées en mécanique physique pour exprimer les conditions de compatibilité de la déformation, et calculer les différentes grandeurs d'incompatibilité ainsi que les contraintes internes pour des déformations incompatibles. Nous traitons également dans ce chapitre les cas de l'inclusion homogène plastique et du bicristal à joint plan dont les solutions permettent de clarifier ces concepts et serviront dans les chapitres suivants.

Dans le chapitre III, à partir de la solution du problème de l'inclusion homogène plastifiée dans une matrice déformée, nous cherchons la forme générale d'hétérogénéités plastiques (conditions sur le tenseur d'Eshelby \underline{S} et sur le champ de déformation) n'introduisant pas de contraintes internes. Nous arrivons à des formes de très faible épaisseur. Comme à froid, du fait des fortes interactions entre les dislocations, l'épaisseur de ces formes n'est pas "physiquement" nulle nous traitons les problèmes de l'inclusion aplatie "penny-shape" et du plan d'habitat "d'épaisseur finie". Le calcul des tenseurs densité de dislocations et incompatibilité plastique montre que, pour les contraintes internes, deux termes sont à considérer : des contraintes $\underline{\sigma}^1$ à grande distance découlant d'un premier terme d'incompatibilité "à grande distance", et des contraintes locales dont l'origine est la structure dipolaire des dislocations dans le volume de l'hétérogénéité. Lorsqu'on exprime la condition de compatibilité usuelle pour une interface plane, seul le premier terme $\underline{\sigma}^1$ est annulé (l'interface est alors un plan d'habitat), le second terme pourra alors expliquer la coalescence des microbandes de cisaillement.

Dans le chapitre IV nous appliquons une partie des résultats du chapitre III aux situations générale de glissement hétérogène dans les monocristaux C.F.C.. En ne considérant que les termes d'incompatibilité associés aux contraintes à grande distance, nous arrivons à des relations simples permettant le calcul des conditions de compatibilité et des normales aux plans d'habitat qui sont alors les normales aux parois des cellules de dislocations.

L'application de ces calculs aux résultats expérimentaux de Caillard (21) dans le cas de l'aluminium montre un accord satisfaisant.

Dans le chapitre V, nous proposons un modèle pour prendre en compte certaines hétérogénéités plastiques intragranulaires, et nous en déduisons les conséquences de ces hétérogénéités sur la formation des textures et l'orientation des microbandes de cisaillement en laminage. Dans chaque grain du polycristal, nous considérons deux modes de déformations :

* Un mode de glissement multiple homogène, intervenant de préférence aux voisinages des joints de grains du fait de l'importance des contraintes internes qui sont justement relaxées par ce mode de déformation. Nous faisons en quelque sorte l'analogie avec les méthodes auto-cohérentes en prenant pour déformation associée à ce mode, la déformation macroscopique imposée ($\underline{\epsilon}^p$) (la déformation moyenne de chaque grain n'est pas égale à $\underline{\epsilon}^p$).

* Un mode de glissement simple à l'intérieur du grain et séparé du mode précédent par une interface qui constitue un plan d'habitat (champ de déformation constant par morceaux et compatible).

En exprimant la condition de compatibilité annulant les contraintes internes d'incompatibilité à grande distance ($\underline{\sigma}^i = 0$), nous calculons l'amplitude du glissement simple, les normales aux plans d'habitat et les

rotations des réseaux cristallins dans les zones d'hétérogénéités. Tenant compte des orientations initiales des grains, nous traçons les champs de rotations des réseaux cristallins, et nous en déduisons des composantes stables de textures (dont quelques unes sont mineures) et qui, habituellement, ne sont pas décrites par les modèles à déformation intragranulaire homogène. La projection stéréographique des pôles des plans d'habitat montre que les zones d'hétérogénéités ont des orientations rigoureusement identiques à celles des microbandes de cisaillement. Ces résultats, associés à l'analyse faite dans le chapitre III, permettent d'interpréter ces zones comme étant des microbandes dont la formation relaxe les contraintes d'incompatibilité à grande distance.

Chapitre II

METHODES THEORIQUES EN MECANIQUE PHYSIQUE.

CHAPITRE II.

Méthodes théoriques en mécanique physique.

Dans ce chapitre, nous présentons les bases de la mécanique des solides nécessaires pour l'étude mécanique et physique des hétérogénéités plastiques en rappelant la théorie de Kröner (22) concernant les incompatibilités plastiques et les contraintes qui en résultent. Nous rappelons également les éléments de plasticité cristalline dans le cas des métaux de structures C.F.C et C.C, et nous fixons les notations et les conventions utilisées par la suite.

II.1. Cinématique de la déformation.

Pour caractériser la déformation d'un milieu continu entre un état initial 1 et un état final 2, on introduit les grandeurs géométriques suivantes :

* le champ de déplacement \vec{u} : si au cours de la déformation, un point P_1 du milieu se déplace de P_1 à P_2 :

$$\vec{u}(P_1) = \overrightarrow{P_1 P_2}$$

On désigne par u_i ($i = 1, 2, 3$) les composantes de \vec{u} dans un repère orthonormé.

* Le gradient de déplacement $\underline{\beta}$: c'est le tenseur de second ordre défini par :

$$\beta_{ij} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = u_{j,i} \quad (\underline{\beta} = \text{grad } \vec{u}) \quad [II-1]$$

(on utilise la notation $f_{,i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$)

Dans le cas des petites déformations, auxquelles nous nous limitons dans ce travail, $\underline{\beta}$ se décompose en la somme d'un champ de déformation $\underline{\epsilon}$ et d'un champ de rotation $\underline{\omega}$ respectivement partie symétrique et antisymétrique de $\underline{\beta}$ ($\underline{\beta} = \underline{\epsilon} + \underline{\omega}$).

* Le champ de déformation $\underline{\epsilon}$: tenseur symétrique de second ordre défini par :

$$\epsilon_{i,j} = 1/2 (\beta_{i,j} + \beta_{j,i}) = 1/2 (u_{j,i} + u_{i,j}) \quad (\underline{\epsilon} = \text{def } \vec{u}) \quad [11-2]$$

* le champ de rotation $\underline{\omega}$: tenseur antisymétrique de second ordre défini par :

$$\omega_{i,j} = 1/2 (\beta_{i,j} - \beta_{j,i}) = 1/2 (u_{j,i} - u_{i,j}) \quad [11-3]$$

Au tenseur $\underline{\omega}$ on associe souvent un vecteur adjoint $\vec{\omega}$ (vecteur rotation), tel que :

$$\omega_i = 1/2 \epsilon_{i,j,k} u_{k,j} = 1/2 \epsilon_{i,j,k} \omega_{j,k} \quad [11-4]$$

$$\text{ou} \quad \omega_{i,j} = \epsilon_{i,j,k} \omega_k$$

(On utilise, sauf indication contraire, la convention d'Einstein de sommation sur les indices répétés).

$\underline{\epsilon}$ est le tenseur permutation de Ricci.

$$\epsilon_{i,j,k} = 0 \text{ si 2 indices sont égaux}$$

$$\epsilon_{i,j,k} = 1 \text{ si permutation paire (1,2,3)}$$

$$\epsilon_{i,j,k} = -1 \text{ si permutation impaire (1,3,2)}$$

Notons les propriétés importantes de ce tenseur :

$$* \epsilon_{i,j,k} \epsilon_{e,m,k} = \delta_{i,e} \delta_{j,m} - \delta_{i,m} \delta_{j,e}$$

$\delta_{i,j}$ étant le symbole de Kröneker

$$\delta_{i,j} = 1 \text{ si } i = j$$

$$\delta_{i,j} = 0 \text{ si } i \neq j$$

$$* \epsilon_{IJK} \epsilon_{2JK} = 2\delta_{I2}$$

$$* \epsilon_{IJK} \epsilon_{IJK} = 6$$

* le produit contracté de ϵ par un tenseur symétrique est nul:

$$(\text{si } T_{IJ} = T_{JI} \text{ alors } \epsilon_{IJK} T_{IJ} = 0)$$

II.2. Conditions de compatibilité :

Le champ des tenseurs $\underline{\beta}$ caractérisant une transformation géométrique donnée n'est pas toujours intégrable. En effet, si on découpe le milieu en volumes élémentaires, et si on leur applique le champ $\underline{\beta}$, la continuité du milieu est détruite, les divers éléments ne pouvant être juxtaposés sans vide ni recouvrement de matière. Pour conserver la continuité du milieu, il faut qu'il existe un champ de déplacement \vec{u} tel que $\underline{\beta}$ (somme de $\underline{\epsilon}$ et de $\underline{\omega}$) en soit le gradient. Autrement dit, la différentielle $du_i = \beta_{ji} dx_j$ doit être totale exacte.

En exprimant les conditions de Cauchy, cette condition s'écrit :

$$\beta_{jI,k} = \beta_{kI,j}$$

Le tenseur de troisième ordre β_{IJK} est donc symétrique par rapport à i et à k , ce qui donne :

$$\epsilon_{Ike} \beta_{eJ,k} = \text{Rot}(\underline{\beta}) = 0 \quad [11-5]$$

(L'opérateur $\epsilon_{Ike} \partial/\partial x_k$ est désigné par le symbole Rot).

Cette équation, portant sur $\underline{\beta}$, est une condition de compatibilité de premier ordre. Elle suppose les déformations et les rotations imposées séparément. Si seules les déformations $\underline{\epsilon}$ sont imposées, les équations de compatibilités [11.5] ne doivent porter que sur elles. Il faut donc éliminer les rotations (22)(23).

En décomposant dans [II-5] $\underline{\beta}$ en $\underline{\epsilon}$ et $\underline{\omega}$, on obtient :

$$\epsilon_{i k e} (\epsilon_{e j, k} + \omega_{e j, k}) = 0$$

et en remplaçant les rotations par le vecteur adjoint [II-4] on a :

$$\epsilon_{i k e} \epsilon_{e j, k} + \epsilon_{i k e} \epsilon_{e j m} \omega_{m, k} = 0$$

soit

$$\epsilon_{i k e} \epsilon_{e j, k} + \delta_{i j} \omega_{k, k} - \omega_{i, j} = 0 . \quad [II-6]$$

Pour $i = j$ et tenant compte de la symétrie de $\underline{\epsilon}$, cette équation donne :

$$\epsilon_{i k e} \epsilon_{e i, k} + 3\omega_{k, k} - \omega_{i, i} = 2\omega_{i, i} = 0$$

donc l'équation [II-6] devient :

$$\epsilon_{i k e} \epsilon_{e j, k} - \omega_{i, j} = 0 . \quad [II-7]$$

Pour éliminer les rotations, il suffit de dériver cette expression par rapport à m et de prendre la partie antisymétrique par rapport à j et m :

$$\epsilon_{j m n} (\epsilon_{i k e} \epsilon_{e j, k} - \omega_{i, j}), m = 0$$

ce qui donne

$$\epsilon_{i k e} \epsilon_{j m n} \epsilon_{e j, k m} = 0 .$$

Soit la forme usuelle des équations de compatibilité (éq. de Saint-Venant):

$$\epsilon_{i k e} \epsilon_{j m n} \epsilon_{e m, k n} = \text{Inc } (\underline{\epsilon}) = 0 \quad [II-8]$$

(L'opérateur $\epsilon_{i k e} \epsilon_{j m n} \partial^2 / \partial x_k \partial x_n$ est noté Inc).

Si les déformations $\underline{\epsilon}$ sont compatibles, on pourra trouver un champ de déplacement de gradient $\underline{\beta} = \underline{\epsilon} + \underline{\omega}$ et tel que les rotations associées vérifient [II-7].

Lorsque le champ de déplacement \vec{u} est connu, les déformations correspondantes définies par $\underline{\epsilon} = \text{def}(\vec{u})$ vérifient automatiquement les conditions de compatibilité. En effet, l'opérateur $\text{Inc}(\text{def})$ est identiquement nul.

Remarques : les équations de compatibilité [II-5, II-7 et II-8] portent sur les quantités totales. En plasticité, ces quantités peuvent être décomposées en parties élastique et plastique :

$$\underline{\beta} = \underline{\beta}^e + \underline{\beta}^p$$

$$\underline{\epsilon} = \underline{\epsilon}^e + \underline{\epsilon}^p$$

$$\underline{\omega} = \underline{\omega}^e + \underline{\omega}^p$$

et $\underline{\beta}^e = \underline{\epsilon}^e + \underline{\omega}^e$

$$\underline{\beta}^p = \underline{\epsilon}^p + \underline{\omega}^p$$

II.3. Incompatibilités plastiques et tenseur densité de dislocations :

Considérons une distribution donnée de déformation plastique $\underline{\epsilon}^p$ et de rotation $\underline{\omega}^p$ de résultante $\underline{\beta}^p$ incompatible. La relation $\text{Rot}(\underline{\beta}^p) = 0$ n'est donc pas vérifiée et on peut définir en tout point du milieu un tenseur de second ordre $\underline{\alpha}$ ne s'annulant que pour $\underline{\beta}^p$ compatible (22):

$$\alpha_{i,j} = -\text{Rot}(\underline{\beta}^p) = -\epsilon_{i,k\ell} \beta_{\ell,j,k}^p \quad [\text{II-9}]$$

D'après sa définition, ce tenseur satisfait nécessairement à la condition de divergence nulle :

$$\alpha_{i,j,i} = 0 \quad \text{ou} \quad (\text{div } \underline{\alpha} = 0).$$

Le tenseur $\underline{\alpha}$ peut être assimilé à une densité continue de dislocations (22). En effet, en considérant une surface (S) tracée dans le milieu et limitée par une courbe fermée (C), on a :

$$\iint_S \alpha_{ij} n_i dS = - \int_C du_j^p = b_j \text{ (composantes du vecteur de Burgers } \vec{b}\text{)}$$

$\underline{\alpha}$ peut donc être considéré comme une densité de dislocations telle que le vecteur de Burgers résultant db_j des dislocations perçant l'élément d'aire $n_i dS$ soit donné par :

$$db_j = \alpha_{ij} \cdot n_i dS \quad [11-10]$$

si $i = j$ la dislocation est vis (ligne parallèle à \vec{b})
 si $i \neq j$ la dislocation est coin (ligne perpendiculaire à \vec{b}).

La condition de divergence nulle signifie alors physiquement que les dislocations ne peuvent se terminer à l'intérieur du cristal.

Cette description peut être étendue au cas des dislocations discrètes que l'on peut décrire à l'aide des distributions de Dirac. Dans α_{ij} , l'indice i est relié au vecteur unitaire porté par la ligne de dislocation et l'indice j au vecteur de Burgers.

Pour une dislocation de ligne L et de vecteur \vec{b} , la densité est :

$$\alpha_{ij} = \delta_i(L) \cdot b_j \quad [11-11]$$

où $\delta_i(L)$ est la distribution de Dirac nulle sauf sur la ligne.

Par exemple pour une dislocation parallèle à Ox_3 , la formule [11.11] donne pour composantes non nulles :

$$\alpha_{3j} = b_j \delta(x_1) \delta(x_2) \quad [11-12]$$

II.4. Tenseur d'incompatibilité.

Lorsque la déformation plastique $\underline{\epsilon}^p$ n'est pas compatible, on peut également définir un tenseur d'incompatibilité du second ordre symétrique $\underline{\eta}$ par (22):

$$\eta_{ij} = -\text{Inc}(\underline{\epsilon}^p) = -\epsilon_{ikl}\epsilon_{jmn}\epsilon_{lm, kn}^p \quad [\text{II-13}]$$

Ce tenseur satisfait à la condition de divergence nulle :

$$\text{div } \underline{\eta} = 0 .$$

Le tenseur $\underline{\eta}$, nul dans le cas d'une déformation plastique compatible, mesure bien l'incompatibilité plastique du milieu. On définit alors une norme d'incompatibilité par le scalaire invariant :

$$||\bar{\eta}|| = (\eta_{ij}\eta_{ij})^{1/2} \quad [\text{II-14}]$$

II.5. Relation entre $\underline{\alpha}$ et $\underline{\eta}$:

A partir du champ des tenseurs de rotation $\underline{\omega}$, on définit (22) un champ de tenseurs de courbure \underline{K} par :

$$K_{ij} = \omega_{j,i} = 1/2 \epsilon_{jke}\omega_{ke,i} \quad [\text{II-15}]$$

La relation de compatibilité [II- 7] permet d'écrire :

$$K_{ie} = \epsilon_{ejk} \epsilon_{kl,j} \quad [\text{II-16}]$$

soit
$$\epsilon_{nim} \epsilon_{ejk} \epsilon_{kl,jm} = \epsilon_{nim} K_{ie,m} = -\epsilon_{nmi} K_{ie,m}$$

donc

$$\text{Inc}(\underline{\epsilon}) = -\text{Rot}(\underline{K}) \quad [\text{II-17}]$$

Lorsque la déformation plastique imposée n'est pas compatible, on pourra définir par analogie un tenseur de courbure élastique \underline{K}'^* par :

$$K'_{ij} = \epsilon_{Jek} \epsilon_{kI,e} \quad [11-18]$$

La déformation élastique n'étant pas compatible, \underline{K}'^* ne peut pas être mis sous la forme [11-15] d'un gradient de rotation élastique. La différence dans ce cas est défini par un tenseur \underline{K}''^* :

$$K''_{ij} = K'_{ij} - K''_{ij} = \omega_{j,i} - \epsilon_{Jek} \epsilon_{kI,e} \quad [11-19]$$

où \underline{K}^* est le tenseur de courbure défini à partir des rotations élastiques.

Notons que :

$$K''_{mm} = \omega_{m,m}$$

Le tenseur \underline{K}''^* ainsi défini peut être directement lié au tenseur $\underline{\alpha}$. En effet puisque la déformation totale est compatible :

$$\epsilon_{Ike} (\beta_{eJ,k} + \beta_{eJ,k}^*) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{donc} \quad \alpha_{IJ} &= \epsilon_{Ike} \beta_{eJ,k}^* \\ &= \epsilon_{Ike} (\beta_{eJ,k} + \omega_{eJ,k}^*) \\ &= \epsilon_{Ike} \beta_{eJ,k} + \epsilon_{Ike} \epsilon_{eJm} \omega_{m,k}^* \\ &= \epsilon_{Ike} \beta_{eJ,k} + \delta_{IJ} \omega_{k,k}^* - \omega_{IJ}^* \\ &= -K''_{JI} + K''_{kk} \delta_{IJ} \end{aligned}$$

en prenant $i = j$ on obtient :

$$\alpha_{II} = 2K''_{II} \quad [11-20]$$

soit donc :

$$K''_{ij} = -\alpha_{ji} + 1/2 \alpha_{kk} \delta_{ij} \quad [11-21]$$

La formule [II.21] montre que le tenseur \underline{K}''^* ne présente que la partie de courbure élastique qui est directement liée à la présence de dislocations. La partie complémentaire \underline{K}'^* dans [II-19] est attachée à la réponse élastique du milieu pour conserver sa compacité malgré la présence des dislocations.

De la définition de \underline{K}''^* , on voit que :

$$\underline{\eta} = \text{Rot}(\underline{K}''^*) \quad [\text{II-22}]$$

soit
$$\eta_{ij} = \epsilon_{inm} K_{mj,n}''^*$$

et en tenant compte de [II-21] :

$$\eta_{ij} = \epsilon_{imn} \alpha_{jm,n} + 1/2 \epsilon_{ijn} \alpha_{kk,n}$$

$\underline{\eta}$ étant symétrique, prenons la partie symétrique du second membre :

$$\begin{aligned} \eta_{ij} &= \frac{1}{2} \left\{ \epsilon_{imn} \alpha_{jm,n} + \epsilon_{jmn} \alpha_{im,n} + 1/2 \alpha_{kk,n} (\epsilon_{ijn} + \epsilon_{jni}) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \epsilon_{imn} \alpha_{jm,n} + \epsilon_{jmn} \alpha_{im,n} \right\} \end{aligned}$$

d'où l'expression :

$$\boxed{\eta_{ij} = (\epsilon_{imn} \alpha_{jm,n}) \{ij\}} \quad [\text{II-23}]$$

Le symbole $\{ij\}$ signifie qu'on symétrise l'expression entre parenthèses par rapport à i et à j.

La formule [II-23] montre que la nullité de $\underline{\alpha}$ entraîne celle de $\underline{\eta}$, la réciproque n'étant pas toujours vérifiée. Ceci peut s'expliquer par le fait qu'une déformation plastique étant incompatible, la compatibilité de la déformation totale est assurée par les déformations et rotations élastiques associées à la présence des dislocations.

II.6. Calcul des rotations élastiques à partir de $\underline{\alpha}$

Une déformation plastique $\underline{\epsilon}^p$ étant incompatible, les rotations élastiques (rotations du réseau cristallin) peuvent être déterminées à partir du tenseur densité de dislocations. En effet :

$$\begin{aligned}\alpha_{ij} &= \epsilon_{ik\ell} \beta_{\ell j, k}^* \\ &= \epsilon_{ik\ell} (\epsilon_{\ell j, k}^* + \omega_{\ell j, k}^*) \\ &= \epsilon_{ik\ell} \epsilon_{\ell j, k}^* + \epsilon_{ik\ell} \epsilon_{\ell jm} \cdot \omega_m^*, k \\ &= \epsilon_{ik\ell} \epsilon_{\ell j, k}^* + \delta_{ij} \omega_k^*, k - \omega_{f, j}\end{aligned}$$

avec, pour $i = j$:

$$\alpha_{ii} = 2\omega_{f, i} \quad [II-24]$$

donc :

$$\omega_{f, j} = \epsilon_{ik\ell} \epsilon_{\ell j, k}^* - \alpha_{ij} + 1/2 \alpha_{mm} \delta_{ij} \quad [II-25]$$

II-7 Incompatibilités plastiques et contraintes internes :

Les équations de compatibilité concernent la déformation totale, elles n'interdisent pas à une partie physiquement déterminée de la déformation d'être incompatible.

Si la déformation plastique $\underline{\epsilon}^p$ imposée au milieu n'est pas compatible, elle s'accompagne nécessairement d'une déformation additionnelle (conséquence de l'incompatibilité de $\underline{\epsilon}^p$) telle que la déformation totale soit compatible. A cette déformation additionnelle est associé un champ de contraintes internes. Dans le cas où la déformation additionnelle assurant la compatibilité est purement élastique ($\underline{\epsilon}^*$), le champ de contraintes lui est directement relié par les lois de l'élasticité linéaire :

$$\underline{\sigma} = \underline{C} \cdot \underline{\epsilon}^* \quad (\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \epsilon_{kl}^*) \quad [11-26]$$

ou

$$\underline{\epsilon}^* = \underline{S} \cdot \underline{\sigma} \quad (\epsilon_{ij}^* = S_{ijkl} \sigma_{kl}) \quad [11-27]$$

Ces contraintes doivent en outre, vérifier les conditions d'équilibre qui sont, en l'absence de forces de volume et d'inertie :

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (\text{div } \underline{\sigma} = 0)$$

La condition de compatibilité de la déformation totale devant être vérifiée:

$$\text{Inc } (\underline{\epsilon}^* + \underline{\epsilon}^p) = 0$$

II.7.1 Calcul des contraintes internes :

a. Méthode du potentiel des contraintes (Kröner) :

Soit un milieu infini isotrope à élasticité linéaire soumis à un champ $\underline{\beta}^p$ connu incompatible dont on déduit les tenseurs $\underline{\alpha}$ et $\underline{\eta}$ par :

$$\underline{\alpha} = -\text{Rot}(\underline{\beta}^p) \quad \text{et} \quad \underline{\eta} = -\text{Inc}(\underline{\epsilon}^p)$$

Les équations fondamentales à satisfaire sont :

* la compatibilité de la déformation totale :

$$\text{Inc}(\underline{\epsilon}^* + \underline{\epsilon}^p) = 0 \quad \text{ou} \quad \underline{\eta} = \text{Inc}(\underline{\epsilon}^*)$$

* l'équilibre des contraintes :

$$\text{div}(\underline{\sigma}) = 0$$

Les contraintes sont définies à partir des déformations par les relations [II-26] ou [II-27].

La méthode du potentiel des contraintes, consiste à prendre dans les équations fondamentales \underline{g} comme inconnue :

$$\text{div} (\underline{g}) = 0 \quad [\text{II-28}]$$

$$\text{Inc} (\underline{S} \cdot \underline{g}) = \underline{\eta} \quad [\text{II-29}]$$

Pour résoudre ce problème, Kröner introduit un tenseur auxiliaire \underline{X} , symétrique de second ordre (dit potentiel des contraintes) tel que :

$$\underline{g} = \text{Inc} (\underline{X}) \quad [\text{II-30}]$$

L'équation [II-28] est alors identiquement vérifiée puisque l'on a :

$$\text{div}(\text{Inc})=0$$

L'équation [II-29] devient :

$$\text{Inc} (\underline{S} \cdot \text{Inc} (\underline{X})) = \underline{\eta} \quad [\text{II-31}]$$

Un deuxième tenseur auxiliaire X' est introduit par :

$$X'_{ij} = 1/2\mu [X_{ij} - (\nu/1+2\nu)X_{kk} \cdot \delta_{ij}]$$

$$\text{ou} \quad X_{ij} = 2\mu [X'_{ij} + (\nu/1-\nu)X'_{kk} \cdot \delta_{ij}] \quad [\text{II-32}]$$

μ : module de cisaillement

ν : coefficient de Poisson

Les équations [II-31] s'écrivent alors simplement en fonction de X' :

$$X'_{ij, kkkk} = \eta_{ij} \quad (\Delta\Delta \underline{X}' = \underline{\eta}) \quad [\text{II-33}]$$

Pour un milieu infini, la solution de cette équation est :

$$\chi'_{ij}(\vec{r}) = - \frac{1}{8\pi} \iiint \eta_{ij}(\vec{r}') |\vec{r} - \vec{r}'|^{-3} dv' \quad [II-34]$$

Connaissant $\underline{\chi}'$ on en déduit $\underline{\chi}$ par [II-32] puis les contraintes $\underline{\sigma}$ par [II-30]

b. Méthode du tenseur de Green :

Cette méthode permet de résoudre le problème des contraintes internes en déplacement.

Soit un milieu soumis à un champ de déformation plastique $\underline{\epsilon}^p$ connu et incompatible. A l'incompatibilité de $\underline{\epsilon}^p$ est associée une déformation additionnelle assurant la compatibilité de la déformation totale. Si cette déformation est purement élastique, les contraintes sont (élasticité linéaire) :

$$\underline{\sigma} = \underline{C} \cdot \underline{\epsilon}^e$$

En introduisant la déformation totale $\underline{\epsilon}$ (inconnue) et $\underline{\epsilon}^p$, on a :

$$\underline{\sigma}^e = \underline{C}(\underline{\epsilon} - \underline{\epsilon}^p) = \underline{C} \underline{\epsilon} - \underline{C} \underline{\epsilon}^p = \underline{\sigma}^o - \underline{C} \underline{\epsilon}^p \quad [II-35]$$

avec

$$\underline{\sigma}^o = \underline{C} \cdot \underline{\epsilon} \quad [II-36]$$

$\underline{\sigma}^o$ étant un champ de contrainte auxiliaire permettant le calcul de $\underline{\sigma}$.

Les équations d'équilibre imposent :

$$\text{div}(\underline{\sigma}) = \text{div}(\underline{\sigma}^o) - \text{div}(\underline{C} \cdot \underline{\epsilon}^p) = 0 \quad [II-37]$$

Ces équations peuvent être considérées comme celles d'un problème purement élastique pour un milieu soumis à une distribution de forces de volume connue :

$$\vec{F} = - \operatorname{div} \vec{C} \cdot \epsilon^p \quad [11-38]$$

Si la réponse en déplacement du milieu est connue, les composantes du déplacement en tout point sont données par :

$$u_i(\vec{r}) = \iiint \Theta_{i,j}(\vec{r}, \vec{r}') F_j(\vec{r}') dV' \quad [11-39]$$

où $\Theta_{i,j}(\vec{r}, \vec{r}')$ est le tenseur de Green du milieu :

c'est le déplacement au point \vec{r} dans la direction i sous l'effet d'une force unité appliquée au point \vec{r}' dans la direction j .

Connaissant \vec{u} on en déduit $\underline{\epsilon}$ et donc $\underline{\sigma}^o$ par [11-36] puis $\underline{\sigma}$ par [11-35]. En élasticité linéaire et pour un milieu homogène, isotrope et infini, on a :

$$\Theta_{i,j}(\vec{r}, \vec{r}') = \Theta_{i,j}(|\vec{r} - \vec{r}'|) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)\rho} (\rho_{,i} \cdot \rho_{,j} + (3-4\nu)\delta_{i,j}) \quad [11-40]$$

avec $\rho = |\vec{r} - \vec{r}'|$

Dans ce cas [11-38] devient :

$$F_j = -2\mu e_{k,j,k}^p$$

et [11-39] :

$$u_i(\vec{r}) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)} \iiint \frac{e_{k,j,k}^p}{\rho} (\rho_{,i} \cdot \rho_{,j} + (3-4\nu)\delta_{i,j}) dV' \quad [11-41]$$

II.7.2. Solutions particulières :

Pour illustrer le calcul des tenseurs densité de dislocations et des contraintes internes, nous présentons les solutions de deux problèmes étudiés par d'autres auteurs et dont l'intérêt est capital pour l'étude de la plasticité des polycristaux et des phénomènes qui nous intéressent ici. Ces problèmes qui seront repris dans les chapitres suivants sont : le problème de l'inclusion plastique homogène et celui de l'interface plane séparant deux milieux déformés plastiquement de manière uniforme.

a. Cas de l'inclusion plastique homogène.

a-1. Contraintes internes:

Considérons une inclusion homogène isotrope de volume V plastifiée de façon uniforme et située dans une matrice élastique infinie non chargée. La méthode du tenseur de Green permet de ramener ce problème à celui de la réponse d'un milieu élastique infini à une distribution superficielle de forces réparties à l'interface entre matrice et inclusion. La déformation totale dans l'inclusion est donnée par Eshelby (24):

$$\epsilon_{IJ} = S_{IJK\epsilon} \epsilon_{K\epsilon}^p \quad [11-42]$$

où ϵ^p : déformation plastique dans l'inclusion.

S : Tenseur d'Eshelby dépendant des caractéristiques élastiques du milieu et de la forme de l'inclusion :

$$S_{IJK\epsilon} = 1/2 (t_{IJmn}^I + t_{JImn}^I) C_{mnk\epsilon}^0 \quad [11-43]$$

où :

$$t_{IJmn}^I(r) = - \frac{1}{V} \int_V \int_{V'} \theta_{nJ,mi}^I dV' \cdot dV \quad [11-44]$$

C^0 : constantes élastiques du milieu homogène.

Pour une inclusion sphérique ,et pour une déformation plastique de trace nulle:

$$\epsilon_{ij} = \beta \cdot \epsilon_{ij}^p \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{2}{15} \cdot \frac{4-5\nu}{1-\nu} \quad [11-45]$$

Dans ce cas les contraintes internes dans l'inclusion sont :

$$\sigma_{ij} = 2\mu \left(\epsilon_{ij}^p + \frac{\nu}{1-2\nu} \cdot \epsilon_{kk}^p \cdot \delta_{ij} \right)$$

avec

$$\epsilon_{ij}^p = \epsilon_{ij} - \epsilon_{ij}^p = -(1-\beta)\epsilon_{ij}^p$$

d'où :

$$\sigma_{ij} = -2\mu(1-\beta)\epsilon_{ij}^p \quad [11-46]$$

En partant de ce résultat, Kröner (25) considère le cas d'une matrice ayant subi la déformation plastique uniforme \underline{E}^p et soumise aux contraintes uniformes à l'infini Σ_{ij} . Les contraintes dans l'inclusion sont alors (accommodation supposée purement élastique) :

$$\sigma_{ij} = \Sigma_{ij} + 2\mu(1-\beta)(E_{ij}^p - \epsilon_{ij}^p) \quad [11-47]$$

Dans le cas où l'inclusion est de forme ellipsoïdale quelconque :

$$\sigma_{ij} = \Sigma_{ij} + C_{ijkl} (I_{kemn} - S_{kemn}) (E_{mn}^p - \epsilon_{mn}^p) \quad [11-48]$$

C_{ijkl} : constantes élastiques du milieu

I_{ijkl} : tenseur unité :

$$I_{ijkl} = (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})/2 \quad [11-49]$$

a-2. énergie de déformation élastique.

Soit une inclusion homogène de volume V^I soumise à la déformation $\underline{\epsilon}^I$ et située dans une matrice de volume V^M soumise à $\underline{\epsilon}^P$.

L'énergie de déformation élastique est :

$$W = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \cdot \epsilon_{ij} \cdot dV \quad [11-50]$$

avec

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij} &= e_{ij} - \epsilon_{ij}^P \\ \epsilon_{ij}^P &= E_{ij}^P + (\epsilon_{ij}^I - E_{ij}^P) \theta(r) \end{aligned} \quad [11-51]$$

$$\theta(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } r \in V^I \\ 0 & \text{si } r \notin V^I, r \in V^M \end{cases}$$

donc

$$W = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} (e_{ij} - \epsilon_{ij}^P) dV$$

et du fait de la symétrie de $\underline{\sigma}$:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} (u_{i,j} - \epsilon_{ij}^P) dV \\ &= \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} u_{i,j} dV - \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij}^P dV \\ &= \frac{1}{2} \int_S \sigma_{ij} u_i n_j dS - \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij,j} u_i dV - \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij}^P dV \end{aligned}$$

Tenant compte des équations d'équilibre ($\sigma_{ij,j} = 0$) et de l'absence des forces de surface à la frontière du solide ($\sigma_{ij} n_j = 0$ sur S) :

$$W = - \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \cdot \epsilon_{ij}^P \cdot dV \quad [11-52]$$

et tenant compte de [II-51], on a :

$$W = -\frac{1}{2} \int_{V^I} \sigma_{Ij} \epsilon_{Pj}^I dV - \frac{1}{2} \int_{V^M} \sigma_{Mj} \epsilon_{Pj}^M dV$$

et comme σ^I et ϵ^{PI} sont uniformes dans l'inclusion et E^P uniforme dans la matrice :

$$W = -\frac{1}{2} \sigma_{Ij} \cdot \epsilon_{Pj}^I V^I - \frac{1}{2} \bar{\sigma}_{Mj} E_{Pj}^M V^M$$

avec

$$\bar{\sigma}_{Mj} = \frac{1}{V^M} \int_{V^M} \sigma_{Mj} dV$$

Or la contrainte interne moyenne est nulle dans tout le solide :

$$\frac{1}{V} \int_V \sigma_{Ij} \cdot dV = \frac{1}{V} \int_{V^I} \sigma_{Ij} dV + \frac{1}{V} \int_{V^M} \sigma_{Mj} dV = 0$$

soit

$$\sigma_{Ij} V^I + \bar{\sigma}_{Mj} V^M = 0 \quad [II-53]$$

d'où

$$W = -\frac{1}{2} \sigma_{Ij} (\epsilon_{Pj}^I - E_{Pj}^M) V^I \quad [II-54]$$

b. Cas d'une interface plane séparant deux milieux homogènes.

Considérons une interface plane P de vecteur unitaire normal \vec{n} , séparant deux milieux infinis homogènes 1 et 2 déformés uniformément par β_1^P et β_2^P (fig.II-1). Les composantes de la normale dans le repère où sont exprimés les champs β_1^P , et β_2^P sont n_1 , n_2 et n_3 .

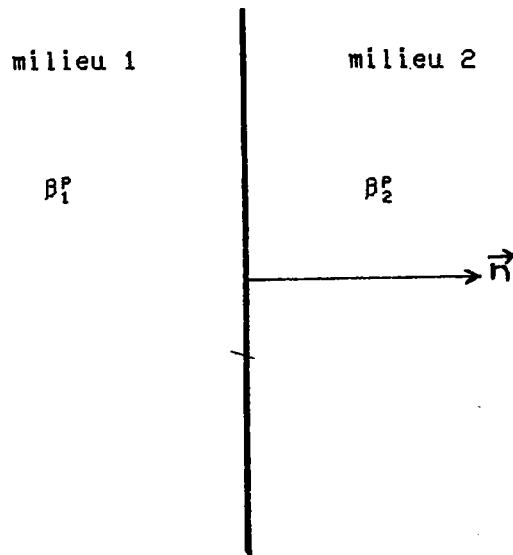


fig.11.1 Déformation constante par morceaux,
interface plane.

En chaque point du milieu, $\underline{\beta}^P$ peut s'écrire sous la forme :

$$\underline{\beta}^P = \underline{\beta}_1^P + \Delta\underline{\beta}^P \delta_v(r) \quad [11-55]$$

avec

$$\Delta\underline{\beta}^P = \underline{\beta}_2^P - \underline{\beta}_1^P$$

$$\delta_v(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } r \in \text{milieu 2} \\ 0 & \text{si } r \in \text{milieu 1} \end{cases}$$

$\underline{\beta}_1^P$ et $\underline{\beta}_2^P$ étant uniformes dans chaque milieu, l'incompatibilité plastique est purement superficielle et est localisée à l'interface.

b-1. Tenseur densité de dislocations :

$$\alpha_{ij} = -\epsilon_{ikl} \beta_{ljk}^P \quad [11-56]$$

tenant compte de [II-55], on a :

$$\alpha_{i,j} = - \epsilon_{ik\ell} \Delta\beta_{\ell j}^p n_k \delta(S) \quad [II-57]$$

δ est la distribution de Dirac nulle partout sauf sur l'interface.

L'expression [II-57] montre que la distribution des dislocations est purement superficielle. La densité superficielle est donc :

$$\bar{\alpha}_{i,j} = - \epsilon_{ik\ell} \Delta\beta_{\ell j}^p n_k \quad [II-58]$$

soit en développant ces expressions :

$$\bar{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \Delta\beta_{31}^p & \Delta\beta_{32}^p & \Delta\beta_{33}^p \\ -\Delta\beta_{21}^p & -\Delta\beta_{22}^p & -\Delta\beta_{23}^p \end{bmatrix} n_1 + \begin{bmatrix} -\Delta\beta_{31}^p & -\Delta\beta_{32}^p & -\Delta\beta_{33}^p \\ 0 & 0 & 0 \\ \Delta\beta_{11}^p & \Delta\beta_{12}^p & \Delta\beta_{13}^p \end{bmatrix} n_2 + \begin{bmatrix} \Delta\beta_{21}^p & \Delta\beta_{22}^p & \Delta\beta_{23}^p \\ -\Delta\beta_{11}^p & -\Delta\beta_{12}^p & -\Delta\beta_{13}^p \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} n_3 \quad [II-59]$$

b-2. tenseur d'incompatibilité plastique :

Connaissant $\alpha_{i,j}$ on peut calculer $\eta_{i,j}$ par la relation [II-23] :

$$\eta_{i,j} = (\epsilon_{imk} \alpha_{j,m,k}) \{ij\}$$

ou

$$\eta_{i,j} = 1/2 (\epsilon_{imk} \bar{\alpha}_{j,m} + \epsilon_{jmk} \bar{\alpha}_{i,m}) n_k \cdot \delta'(S) \quad [II-60]$$

δ' est la dérivée de la distribution de Dirac.

De la même manière, on définit le tenseur d'incompatibilité superficielle $\bar{\eta}$ par :

$$\bar{\eta}_{i,j} = 1/2 (\epsilon_{imk} \bar{\alpha}_{j,m} + \epsilon_{jmk} \bar{\alpha}_{i,m}) \cdot n_k \quad [II-61]$$

et en développant ces expressions :

$$\bar{\eta} = \begin{bmatrix} \Delta \epsilon_{22}^p & -\Delta \epsilon_{12}^p & 0 \\ & \Delta \epsilon_{11}^p & 0 \\ & & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\Delta \epsilon_{22}^p & \Delta \epsilon_{12}^p & 0 \\ & \Delta \epsilon_{33}^p - \Delta \epsilon_{11}^p & -\Delta \epsilon_{23}^p \\ & & \Delta \epsilon_{22}^p \end{bmatrix} n_1^2 + \begin{bmatrix} \Delta \epsilon_{33}^p - \Delta \epsilon_{22}^p & \Delta \epsilon_{12}^p & -\Delta \epsilon_{13}^p \\ & -\Delta \epsilon_{11}^p & 0 \\ & & \Delta \epsilon_{11}^p \end{bmatrix} n_2^2$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & -\Delta \epsilon_{33}^p & \Delta \epsilon_{23}^p \\ & 0 & \Delta \epsilon_{13}^p \\ & & -2\Delta \epsilon_{12}^p \end{bmatrix} n_1 n_2 + \begin{bmatrix} 0 & \Delta \epsilon_{23}^p & -\Delta \epsilon_{22}^p \\ & -2\Delta \epsilon_{13}^p & \Delta \epsilon_{12}^p \\ & & 0 \end{bmatrix} n_1 n_3 + \begin{bmatrix} -2\Delta \epsilon_{23}^p & \Delta \epsilon_{13}^p & \Delta \epsilon_{12}^p \\ & 0 & -\Delta \epsilon_{11}^p \\ & & 0 \end{bmatrix} n_2 n_3 \quad [11-62]$$

avec

$$\Delta \epsilon^p = \epsilon_2^p - \epsilon_1^p$$

b-3. contraintes internes :

Connaissant le tenseur $\bar{\eta}$, Berveiller (10) et Rey (13) ont calculé par la méthode du potentiel des contraintes, les contraintes internes d'incompatibilité dans un repère lié à l'interface ($\vec{n} = \vec{x}_2$). Cette méthode donne :

$$\sigma_{ij} = \mu \left\{ \epsilon_{12e} \epsilon_{jm2} \bar{\eta}_{em} - \frac{\nu}{1-\nu} \bar{\eta}_{kk} (\delta_{ij} - \delta_{i2} \delta_{j2}) \right\} \text{sgn}(x_2) \quad [11-63]$$

$$\text{sgn}(x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_2 > 0 \\ -1 & \text{si } x_2 < 0 \end{cases}$$

en développant (11-63), on obtient :

$$\underline{\sigma} = -\frac{\mu}{1-\nu} \begin{bmatrix} \Delta \epsilon_{11}^p + \nu \Delta \epsilon_{33}^p & 0 & (1-\nu) \Delta \epsilon_{13}^p \\ 0 & 0 & 0 \\ (1-\nu) \Delta \epsilon_{13}^p & 0 & \Delta \epsilon_{33}^p + \nu \Delta \epsilon_{11}^p \end{bmatrix} \text{sgn}(x_2) \quad [11-64]$$

Il est très utile dans les problèmes d'incompatibilités interfaciales, d'exprimer ces contraintes dans un repère où la normale à l'interface est quelconque: $(n_1 \ n_2 \ n_3)$

En transformant les expressions [II.64] et en introduisant l'équivalence des indices suivante :

$$\begin{array}{ll} 11 \rightarrow 1 & 23 \rightarrow 4 \\ 22 \rightarrow 2 & 13 \rightarrow 5 \\ 33 \rightarrow 3 & 12 \rightarrow 6 \end{array}$$

on obtient :

$$\sigma_i = - \frac{\mu}{1-\nu} C_{ij} \Delta e_j^i \quad [II-65]$$

avec : signe (+) pour les contraintes dans le milieu 2 et signe (-) dans le milieu 1

$[C_{ij}]$ est une matrice carrée 6×6 dont les éléments sont :

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= (1-n_1^2)^2 & C_{41} &= C_{14}/2 \\
 C_{12} &= n_1^2 n_2^2 + \nu n_3^2 & C_{42} &= C_{24}/2 \\
 C_{13} &= n_1^2 n_3^2 + \nu n_2^2 & C_{43} &= C_{34}/2 \\
 C_{14} &= 2n_2 n_3 (n_1^2 - \nu) & C_{44} &= 2n_2^2 n_3^2 + (1-\nu)n_1^2 \\
 C_{15} &= 2n_1 n_3 (n_2^2 - 1) & C_{45} &= 2n_1 n_2 (n_3^2 - (1-\nu)/2) \\
 C_{16} &= 2n_1 n_2 (n_3^2 - 1) & C_{46} &= 2n_1 n_3 (n_2^2 - (1-\nu)/2) \\
 C_{21} &= C_{12} & C_{51} &= C_{15}/2 \\
 C_{22} &= (1-n_2^2)^2 & C_{52} &= C_{25}/2 \\
 C_{23} &= n_2^2 n_3^2 + \nu n_1^2 & C_{53} &= C_{35}/2 \\
 C_{24} &= 2n_2 n_3 (n_2^2 - 1) & C_{54} &= C_{45} \\
 C_{25} &= 2n_1 n_3 (n_2^2 - \nu) & C_{55} &= 2n_1^2 n_3^2 + (1-\nu)n_2^2 \\
 C_{26} &= 2n_1 n_2 (n_3^2 - 1) & C_{56} &= 2n_2 n_3 (n_1^2 - (1-\nu)/2) \\
 C_{31} &= C_{13} & C_{61} &= C_{16}/2 \\
 C_{32} &= C_{23} & C_{62} &= C_{26}/2 \\
 C_{33} &= (1-n_3^2)^2 & C_{63} &= C_{36}/2 \\
 C_{34} &= 2n_2 n_3 (n_3^2 - 1) & C_{64} &= C_{46} \\
 C_{35} &= 2n_1 n_3 (n_3^2 - 1) & C_{65} &= C_{56} \\
 C_{36} &= 2n_1 n_2 (n_3^2 - \nu) & C_{66} &= 2n_1^2 n_2^2 + (1-\nu)n_3^2
 \end{aligned}
 \tag{II-66}$$

b-4. Energie de déformation élastique :

L'énergie de déformation élastique (par unité de volume) associée aux contraintes internes est :

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \cdot \epsilon_{ij} \tag{II-67}$$

ϵ_{ij} étant lié à σ_{ij} par les lois de l'élasticité linéaire.

$$\epsilon_{ij}^p = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad [11-68]$$

En utilisant les expressions des contraintes [11-64] et [11-65] on a :

* dans le repère lié à l'interface ($x_2 = n$)

$$W = \frac{\mu}{4(1-\nu)} \left[(\Delta \epsilon_{11}^p)^2 + (\Delta \epsilon_{33}^p)^2 + 2\nu \Delta \epsilon_{11}^p \Delta \epsilon_{33}^p + 2(1-\nu) (\Delta \epsilon_{13}^p)^2 \right] \quad [11-69]$$

* dans un repère quelconque :

$$W = \frac{1}{2E} \left[(1+\nu) \sigma_{ij} \cdot \sigma_{ij} - \nu \sigma_{kk}^2 \right] \quad [11-70]$$

où les contraintes $\underline{\sigma}$ sont liées à la normale \vec{n} et à $\Delta \epsilon^p$ par les relations [11-65] et [11-66].

11.8 : Déformation plastique des métaux.

A froid ($T < 0.5 T_F$), la déformation plastique des métaux se produit essentiellement par glissement sur des plans cristallographiques denses et suivant des directions denses (en excluant le mûclage et la transformation martensitique). Pour les métaux de structure C.F.C, les plans de glissement sont du type $\{111\}$ et les directions $\langle 110 \rangle$.

Pour des métaux de structure C.C les directions de glissement sont du type $\langle 111 \rangle$ et les plans $\{110\}$ (plans denses). Les plans $\{112\}$ et $\{123\}$ ont été souvent observés. Certains auteurs préfèrent parler de glissement non cristallographique en raison de l'aspect non rectiligne des lignes de glissement dans le cas des métaux C.C. Les différents systèmes de glissement pour les structures C.F.C et C.C (plans denses) sont résumés dans les tableaux 11-1 et 11-2.

Soient \vec{n}^k et \vec{m}^k respectivement la normale au plan de glissement et la direction de glissement du système actif k et soit γ^k l'amplitude du glissement sur ce système on a :

$$\beta_{ij}^p = u_{j,i}^p = \sum_k n_i^k m_j^k \gamma^k \quad [11-71]$$

(sommation sur tous les systèmes actifs k)

$$e_{ij}^p = \sum_k R_{ij}^k \gamma^k \quad [11-72]$$

avec $R_{ij}^k = 1/2 (n_i^k m_j^k + n_j^k m_i^k)$ (tenseur d'orientation du système k) [11-73]

$$w_{ij}^p = \sum_k S_{ij}^k \gamma^k \quad [11-74]$$

avec $S_{ij}^k = 1/2 (n_i^k m_j^k - n_j^k m_i^k)$ [11-75]

| Systèmes de glissement | | | Tenseur R_{ij} ($\cdot 1/2\sqrt{6}$) | | | Tenseur S_{ij} ($\cdot 1/2\sqrt{6}$) | | |
|------------------------|---------|-----------|---|----|----|---|----|----|
| | normale | direction | | | | | | |
| A2 | (111) | [011] | 0 | 1 | -1 | 0 | -1 | 1 |
| | | | | -2 | 0 | | 0 | -2 |
| | | | | | 2 | | 2 | 0 |
| A3 | (111) | [101] | -2 | 1 | 0 | 0 | 1 | 2 |
| | | | | 0 | 1 | | 0 | -1 |
| | | | | | 2 | | | 0 |
| A6 | (111) | [110] | -2 | 0 | 1 | 0 | 2 | 1 |
| | | | | 2 | 1 | | 0 | 1 |
| | | | | | 0 | | | 0 |
| B2 | (111) | [011] | 0 | -1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| | | | | -2 | 0 | | 0 | -2 |
| | | | | | 2 | | | 0 |
| B4 | (111) | [101] | -2 | -1 | 0 | 0 | -1 | -2 |
| | | | | 0 | 1 | | 0 | -1 |
| | | | | | 2 | | | 0 |
| B5 | (111) | [110] | 2 | 0 | 1 | 0 | 2 | 1 |
| | | | | -2 | -1 | | 0 | -1 |
| | | | | | 0 | | | 0 |
| C1 | (111) | [011] | 0 | 1 | 1 | 0 | -1 | -1 |
| | | | | 2 | 0 | | 0 | -2 |
| | | | | | -2 | | | 0 |
| C3 | (111) | [101] | 2 | 1 | 0 | 0 | 1 | -2 |
| | | | | 0 | 1 | | 0 | -1 |
| | | | | | -2 | | | 0 |
| C5 | (111) | [110] | 2 | 0 | -1 | 0 | 2 | -1 |
| | | | | -2 | 1 | | 0 | 1 |
| | | | | | 0 | | | 0 |
| D1 | (111) | [011] | 0 | 1 | 1 | 0 | -1 | -1 |
| | | | | -2 | 0 | | 0 | 2 |
| | | | | | 2 | | | 0 |
| D4 | (111) | [101] | -2 | 1 | 0 | 0 | 1 | -2 |
| | | | | 0 | -1 | | 0 | 1 |
| | | | | | 2 | | | 0 |
| D6 | (111) | [110] | 2 | 0 | 1 | 0 | -2 | 1 |
| | | | | -2 | 1 | | 0 | 1 |
| | | | | | 0 | | | 0 |

Tableau II-1 : Notation de Schmit et Boas et tenseurs R et S pour les douze systèmes de glissement des métaux C.F.C (lettres pour plans, chiffres pour directions).

| Systèmes de glissement | | | Tenseur R_{ij} (1/2, 6) | | | Tenseur S_{ij} (1/2, 6) | | |
|------------------------|------------------|--------------------|------------------------------|----------|--------------|------------------------------|---------|---------------|
| 3A | normale (101) | direction [111] | -2 | 1 0 | 0 1 2 | 0 | -1 0 | 2 -1 0 |
| 3C | (101) | [11T] | 2 | 1 0 | 0 1 -2 | 0 | 1 0 | -2 -1 0 |
| 4B | (T01) | [111] | -2 | -1 0 | 0 1 2 | 0 | -1 0 | -2 -1 0 |
| 4D | (T01) | [1T1] | -2 | 1 0 | 0 -1 2 | 0 | +1 0 | -2 1 0 |
| 6A | (110) | [T11] | -2 | 0 -2 | 1 1 0 | 0 | 2 0 | 1 1 0 |
| 6D | (110) | [1T1] | 2 | 0 -2 | 1 1 0 | 0 | -2 0 | 1 1 0 |
| 5B | (1T0) | [111] | 2 | 0 -2 | 1 1 0 | 0 | 2 0 | 1 -1 0 |
| 5C | (1T0) | [11T] | 2 | 0 -2 | -1 1 0 | 0 | 2 0 | -1 1 0 |
| 1D | (011) | [1T1] | 0 | 1 -2 | 1 0 2 | 0 | -1 0 | 1 2 0 |
| 1C | (011) | [11T] | 0 | 1 2 | 1 0 -2 | 0 | -1 0 | -1 -2 0 |
| 2B | (0T1) | [111] | 0 | -1 -2 | 1 0 +2 | 0 | 1 0 | -1 -2 0 |
| 2A | (0T1) | [T11] | 0 | 1 -2 | -1 0 2 | 0 | -1 0 | 1 -2 0 |

Tableau II-2 : Notation et tenseurs R et S pour les douze systèmes de glissement des métaux C.C. (Chiffres pour plans, lettres pour direction).

Chapitre III

**HETEROGENEITES PLASTIQUES TOTALEMENT OU PARTIELLEMENT COMPATIBLES.
APPLICATION A LA FORMATION DES MICROBANDES DE CICAILEMENT.**

CHAPITRE III.

Hétérogénéités plastiques totalement ou partiellement compatibles.

Application au mécanisme de formation des microbandes de cisaillement.

III-1. INTRODUCTION.

La formation des microbandes de cisaillement et leur coalescence en bandes macroscopiques constitue un mode de déformation particulièrement important aux basses températures ou (et) aux grandes déformations plastiques. L'apparition de ces bandes et leur développement doivent être compris et maîtrisés si l'on veut améliorer les capacités de mise en forme des métaux et alliages.

La plupart des théories (27)(28)(29) tant du point de vue microscopique que macroscopique supposent que la condition nécessaire de formation de telles bandes est que l'écroutissage soit nul ou négatif. D'un point de vue cristallographique, certains modèles (30)(31)(32) supposent que la formation des textures de déformation introduit un adoucissement géométrique lequel entraîne un adoucissement mécanique.

Expérimentalement, deux types de bandes sont observées (5) : les microbandes qui s'étendent sur quelques grains seulement et les bandes macroscopiques qui traversent toute l'éprouvette. Ces bandes ne coïncident pas avec des plans de glissement cristallographiques.

Les bandes de cisaillement sont préférentiellement observées dans des matériaux à faible énergie de faute d'empilement, dans les métaux contenant des éléments chimiques formant des solutions solides ou aux basses températures de déformation pour des déformations plastiques de

l'ordre de 50 % (5)(33). Pour les autres matériaux tels que le cuivre ou l'aluminium, ces bandes n'apparaissent que pour des déformations beaucoup plus importantes lorsqu'ils sont déformés à température ambiante.

A partir des essais de traction sur des monocristaux, les deux classes de matériaux précédents (cuivre, aluminium à température ambiante d'une part, solutions solides, basses températures, et faible énergie de défaut d'empilement d'autre part) se distinguent par l'existence d'un stade I de glissement simple beaucoup plus important pour la seconde classe (34)(35) (fig.III.1.a et b). Cette propriété traduit les effets d'un écrouissage latent notable, c'est-à-dire d'un écrouissage nettement plus important sur les systèmes secondaires que sur le système primaire en glissement. Cet écrouissage latent rend alors difficile le glissement multiple qui est attendu dans les grains d'un polycristal afin de relaxer les contraintes internes d'incompatibilité plastique associées au glissement primaire dans les grains.

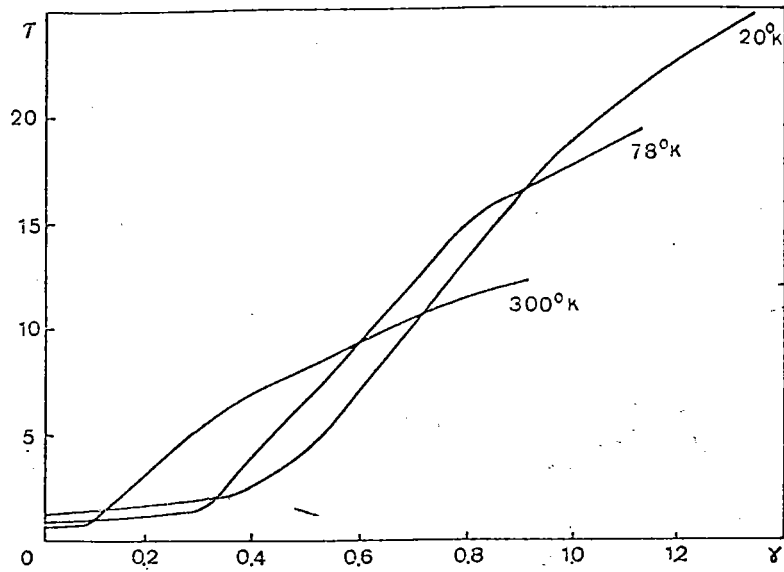
On est alors tenté d'attribuer la formation des hétérogénéités plastiques et en particulier les microbandes à une même cause unique qui est le développement préférentiel d'un mécanisme particulier de déformation pour chacune de ces deux classes de matériaux :

- * glissement multiple homogène pour les métaux de la première classe (Cu, Al, à température ambiante)

- * glissement simple hétérogène et glissement multiple homogène pour les métaux de la seconde classe (laiton, solutions solides, métaux à forte énergie de défaut d'empilement, basse température de déformation).

Pour les métaux de la seconde classe, nous avons développé un modèle (36) (modèle qui fera l'objet du chapitre V) décrivant des hétérogénéités plastiques intragranulaires dans lesquelles des modes de déformation à un système de glissement coexistent avec le glissement

a)



b)

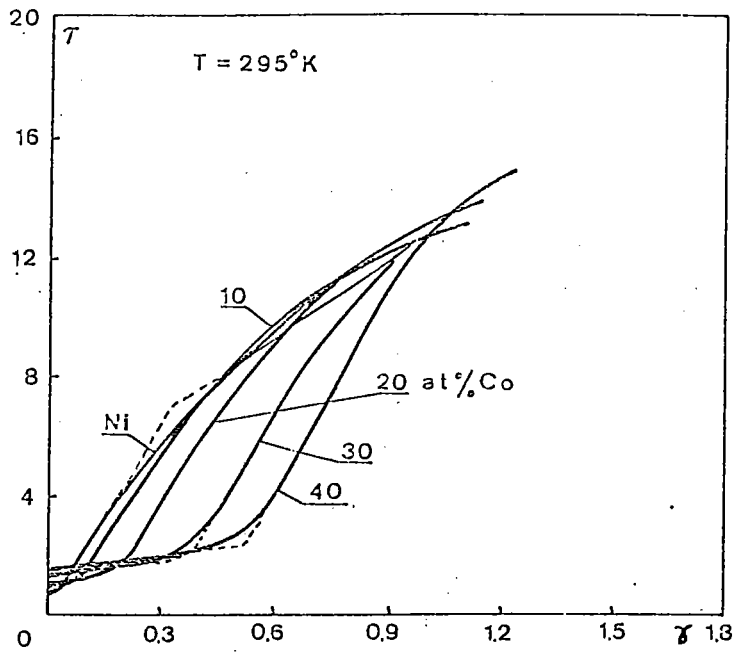


Fig. III.1 : Courbes $\tau - \gamma$ pour le Nickel (C.F.C.)

a) influence de la température de déformation (34).

b) influence d'un élément d'addition (Cobalt) (35).

multiple. L'interface séparant les deux domaines de déformation est un plan d'habitat c'est-à-dire n'entraînant pas de contraintes à grande distance.

Nous avons trouvé que l'orientation de ces plans d'habitat est parallèle à celle des microbandes de cisaillement et qu'elle est étroitement liée au mode de déformation imposé aussi bien en laminage qu'en (traction).

Dans le paragraphe suivant, à partir de la solution du problème d'inclusion plastique d'Eshelby (37) et Kröner (25), nous cherchons la forme générale et l'orientation d'éléments de volume (inclusions) pouvant se déformer d'une manière différente de la matrice sans introduire de contraintes internes. Autrement dit, nous cherchons les conditions de compatibilité portant sur les caractéristiques de l'inclusion tout en ayant un champ de déformation hétérogène.

III-2. FORME GENERALE DES HETEROGENEITES PLASTIQUES COMPATIBLES.

Nous discutons le mécanisme de formation des microbandes de cisaillement à l'échelle du grain en partant du mécanisme de formation de la structure cellulaire des dislocations.

La microstructure de dislocations créée dans les grains du polycristal par un chargement monotone ou cyclique résulte à la fois d'interactions locales et à distance entre les champs de contraintes associés à ces dislocations. Dans la plupart des situations, on observe la formation d'une structure cellulaire constituée de parois plus ou moins épaisses selon la température et la déformation, et de cellules dans lesquelles la densité de dislocations est beaucoup plus faible (fig. III-2b).

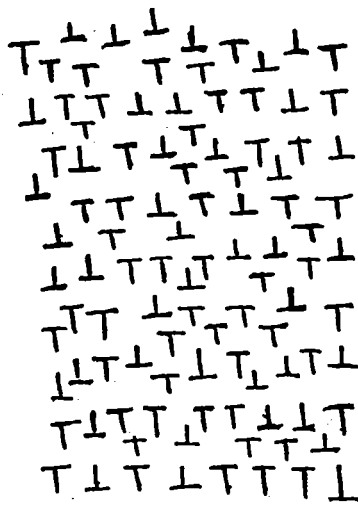
✕ Or, au départ, on peut admettre que la distribution des dislocations consiste en un réseau de Frank pour lequel le champ de contraintes à grande distance est nul et que seul existe des champs locaux à l'échelle de la distance moyenne entre les dislocations (fig.III- 2a) . La déformation plastique transformant le matériau de l'état (a) à l'état (b) est alors fortement hétérogène, importante à l'intérieur des cellules et beaucoup plus faible dans les parois. De plus, la forme des cellules et l'épaisseur des parois dépendent du mode de déformation, de son intensité et éventuellement de l'orientation cristallographique du grain (39)(40)(41).

L'analyse dynamique de la formation de cette microstructure a été faite par Aifantis (42), Kubin (43) et Kratochil (44) sans référence directe ni à la cristallographie, ni au problème des contraintes internes à grande distance.

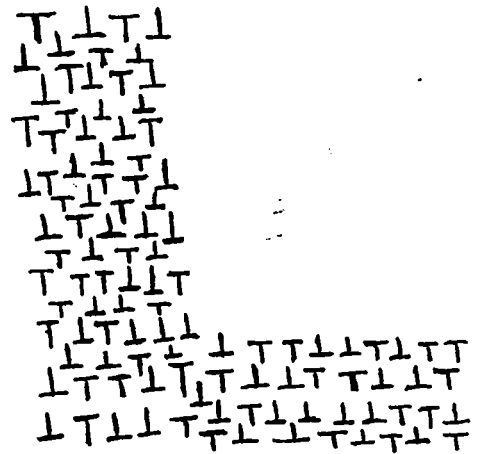
En principe, cette hétérogénéité plastique devrait entraîner des contraintes internes à grande distance sauf si, à la fois, le champ de déformation plastique et la microstructure particulière développée annulent les incompatibilités plastiques.

Rechercher les conditions de compatibilité d'un tel champ de déformation et d'une telle structure est un problème généralement complexe à analyser. Nous proposons d'utiliser la solution d'Eshelby et de Kröner du problème de l'inclusion plastique pour aborder la formation d'hétérogénéités plastiques dans le cas des déformations constantes par morceaux.

Nous supposons qu'une matrice subit une déformation plastique uniforme $\underline{\epsilon}^{p^0}$ et qu'un volume V (appelé inclusion et représentant une zone qui se déforme différemment de $\underline{\epsilon}^{p^0}$) subit une déformation uniforme $\underline{\epsilon}^{p^1}$ (fig.III-3).



(a)



(b)

Fig. III.2 : Représentation schématique de l'arrangement des dislocations

(a) avant déformation (réseau tridimensionnel de Frank)

(b) après déformation (formation de parois plus ou moins épaisses)

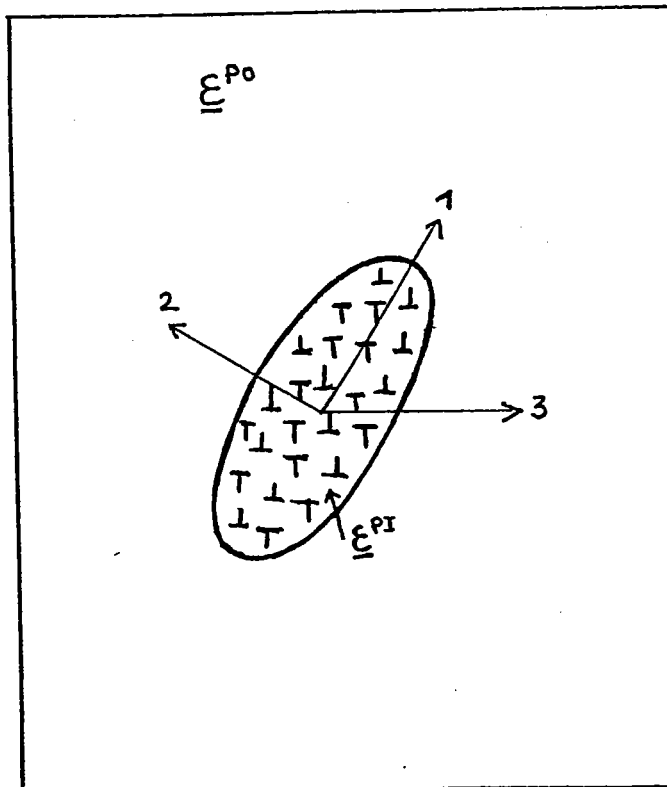


Fig. III.3 : Inclusion homogène déformée à $\underline{\underline{\epsilon}}^{PI}$ dans une matrice soumise à $\underline{\underline{\epsilon}}^{Po}$.

Par rapport à l'utilisation classique des solutions des problèmes d'inclusion en plasticité polycristalline, problèmes dans lesquels l'inclusion représente un domaine de forme et de volume connus, le problème présent est complexe. En effet, le volume V et sa forme sont inconnus. Néanmoins, les contraintes résiduelles σ_{ij} dans l'inclusion associées à ce problème sont données par :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(I_{kemn} - S_{kemn})(\epsilon_{mn}^{p0} - \epsilon_{mn}^{pi})$$

où

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu \delta_{ik} \delta_{jl} + \mu \delta_{il} \delta_{jk} \quad [III-1]$$

$$\lambda = 2\mu \frac{\nu}{1-2\nu} \quad (\text{coefficient de Lamé})$$

\underline{I} désigne le tenseur unité d'ordre 4,

et \underline{S} le tenseur d'Eshelby.

En développant ces expressions on a :

$$\sigma_{ij} = 2\mu \cdot [I_{ijkl} - S_{ijkl} - \frac{\nu}{1-2\nu} S_{ppkke} \delta_{ij}] [\epsilon_{ke}^{p0} - \epsilon_{ke}^{pi}] \quad [III-2]$$

en posant :

$$\Lambda_{ijkl} = I_{ijkl} - S_{ijkl} - \frac{\nu}{1-2\nu} S_{ppkke} \delta_{ij} \quad [III-3]$$

et $\Delta \epsilon_{ke}^{p'} = \epsilon_{ke}^{p0} - \epsilon_{ke}^{pi}$

on a :

$$\sigma_{ij} = 2\mu \cdot \Lambda_{ijkl} \cdot \Delta \epsilon_{ke}^{p'} \quad [III-4]$$

L'énergie de déformation élastique associée à ces contraintes est :

$$W = 1/2 \sigma_{ij} (\epsilon_{ij}^{p0} - \epsilon_{ij}^{pi}) V$$

soit :

$$W = \mu V \cdot \Lambda_{i j k e} \cdot \Delta \epsilon_{k e}^p \cdot \Delta \epsilon_{i j}^p$$

[III-5]

Afin de minimiser l'énergie interne du matériau, nous recherchons les conditions sur $\Delta \epsilon^p$ et sur la microstructure (forme, volume et orientation de l'inclusion) qui annulent \underline{g} donc W . D'après [III-5], il existe deux possibilités extrêmes :

$$* \text{ soit : } \Delta \epsilon_{i j}^p = 0 \quad \text{pour tout } i, j \quad \text{[III-6]}$$

Sans condition sur la microstructure, cette solution nécessite cinq systèmes de glissement actifs pour accommoder la déformation dans la matrice, et conduit au modèle de Taylor, c'est-à-dire à un glissement multiple homogène.

$$* \text{ soit : } \Lambda_{i j k e} \Delta \epsilon_{k e}^p = 0 \quad \text{pour tout } i, j \quad \text{[III-7]}$$

Cette condition nécessite en général moins de conditions sur $\Delta \epsilon^p$ que l'exige la condition précédente, à condition que \underline{S} possède des valeurs particulières, c'est-à-dire que la forme et l'orientation de l'inclusion soient bien définies par rapport au tenseur $\Delta \epsilon^p$.

Afin d'étudier la seconde possibilité de relaxation des contraintes internes, nous choisissons le repère formé par les trois axes principaux de l'inclusion (fig.III-3). Dans ce repère, l'équation [III-7] s'écrit :

$$\Delta \epsilon_{i j}^p - \left(S_{i j k e} + \frac{\nu}{1-2\nu} S_{p p k e} \delta_{i j} \right) \Delta \epsilon_{k e}^p = 0 \quad \text{[III-8]}$$

En utilisant les propriétés et les seuls termes non nuls du tenseur \underline{S} dans le repère indiqué, ces expressions s'écrivent :

$$(S_{1111} + A - 1)\Delta c_{11}^p + (S_{1122} + B)\Delta c_{22}^p + (S_{1133} + C)\Delta c_{33}^p = 0$$

$$(S_{2211} + A)\Delta c_{11}^p + (S_{2222} + B - 1)\Delta c_{22}^p + (S_{2233} + C)\Delta c_{33}^p = 0$$

$$(S_{3311} + A)\Delta c_{11}^p + (S_{3322} + B)\Delta c_{22}^p + (S_{3333} + C - 1)\Delta c_{33}^p = 0$$

$$(1 - 2S_{1212})\Delta c_{12}^p = 0$$

[III-9]

$$(1 - 2S_{1313})\Delta c_{13}^p = 0$$

$$(1 - 2S_{2323})\Delta c_{23}^p = 0$$

avec:

$$A = \frac{\nu}{1-2\nu} S_{pp11}$$

$$B = \frac{\nu}{1-2\nu} S_{pp22}$$

$$C = \frac{\nu}{1-2\nu} S_{pp33}$$

Pour alléger l'écriture, nous utilisons les notations suivantes :

$$S_{1111} = S_{11}$$

$$S_{1212} = S_{66}$$

$$S_{2222} = S_{22}$$

$$S_{1313} = S_{55}$$

$$S_{3333} = S_{33}$$

$$S_{2323} = S_{44}$$

$$S_{1122} = S_{12}$$

$$S_{2211} = S_{21}$$

[III-10]

$$S_{1133} = S_{13}$$

$$S_{3311} = S_{31}$$

$$S_{2233} = S_{23}$$

$$S_{3322} = S_{32}$$

et :

$$\Delta c_{11}^p = \Delta c_1^p$$

$$\Delta c_{23}^p = \Delta c_4^p$$

$$\Delta c_{22}^p = \Delta c_2^p$$

$$\Delta c_{13}^p = \Delta c_5^p$$

[III-11]

$$\Delta c_{33}^p = \Delta c_3^p$$

$$\Delta c_{12}^p = \Delta c_6^p$$

le système [III-9] s'écrit alors :

$$\begin{vmatrix} S_{11}+A-1 & S_{12}+B & S_{13}+C & 0 & 0 & 0 \\ S_{21}+A & S_{22}+B-1 & S_{23}+C & 0 & 0 & 0 \\ S_{31}+A & S_{32}+B & S_{33}+C-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2S_{66} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Delta c_1^p \\ \Delta c_2^p \\ \Delta c_3^p \\ \Delta c_4^p \\ \Delta c_5^p \\ \Delta c_6^p \end{vmatrix} = 0 \quad \text{[III-12]}$$

$$\text{Soit :} \quad A_{ij} \cdot \Delta \epsilon_j^p = 0 \quad [\text{III-13}]$$

La solution de Taylor ($\Delta \epsilon_j^p = 0$) élimine les contraintes internes indépendamment de A_{ij} , c'est-à-dire de la forme et de l'orientation de l'inclusion. D'autres solutions de [III-13] autorisant une hétérogénéité plastique (existence de composantes non nulles de $\Delta \epsilon^p$) peuvent être obtenues en annulant le déterminant D de la matrice A. Ce déterminant s'écrit :

$$D = (1-2S_{44})(1-2S_{55})(1-2S_{66})D'$$

avec :

$$D' = \begin{vmatrix} S_{11}+A-1 & S_{12}+B & S_{13}+C \\ S_{21}+A & S_{22}+B-1 & S_{23}+C \\ S_{31}+A & S_{32}+B & S_{33}+C-1 \end{vmatrix} \quad [\text{III-14}]$$

La relation $[D = 0]$ impose des conditions sur le tenseur \underline{S} et donc sur la forme et l'orientation du volume de l'hétérogénéité plastique. De multiples solutions particulières de cette relation peuvent exister en liaison avec les propriétés et la forme du tenseur $\Delta \epsilon^p$.

Nous ne nous intéressons ici qu'à des solutions ayant un caractère plus global en choisissant pour V la forme d'un ellipsoïde dont les caractéristiques sont, soit celles d'une sphère, d'un cylindre infini ou d'un ellipsoïde aplati. Le tableau III-1 indique les différentes composantes non nulles du tenseur \underline{S} pour ces formes particulières, ainsi que les conditions sur $\Delta \epsilon^p$ résiduelles pour que ce champ soit compatible. On constate que, pour une déformation plastique de trace nulle ($\Delta \epsilon_{kk}^p = 0$), seuls l'ellipsoïde de révolution d'épaisseur nulle ($a = b$ et $c = 0$) ou un plan ($a = 0$, $c \rightarrow \infty$, et b quelconque) autorisent une hétérogénéité plastique, c'est-à-dire des composantes de $\Delta \epsilon^p$ non nulles ($\Delta \epsilon_{13}^p$ et $\Delta \epsilon_{23}^p$ dans le premier cas, et $\Delta \epsilon_{12}^p, \Delta \epsilon_{13}^p$ dans le second cas), les autres

| tenseur \underline{S} | disque très aplati $a = b, c \rightarrow 0$ | penny-shape $a = b \gg c$ | sphère $a = b = c$ | plan $b = 0, c \rightarrow \infty$ |
|--|---|--|---|---|
| S_{1212} | 0 | $\frac{7-8\nu}{32(1-\nu)} \frac{\pi c}{a}$ | $\frac{4-5\nu}{15(1-\nu)}$ | $\frac{1}{2}$ |
| S_{1313} | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2} + \frac{\nu-2}{1-\nu} \frac{\pi c}{8a}$ | $\frac{4-5\nu}{15(1-\nu)}$ | $\frac{1}{2}$ |
| S_{2323} | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2} + \frac{\nu-2}{1-\nu} \frac{\pi c}{8a}$ | $\frac{4-5\nu}{15(1-\nu)}$ | 0 |
| S_{1111} | 0 | $\frac{13-8\nu}{32(1-\nu)} \frac{\pi c}{a}$ | $\frac{7-5\nu}{15(1-\nu)}$ | 1 |
| S_{2222} | 0 | $\frac{13-8\nu}{32(1-\nu)} \frac{\pi c}{a}$ | $\frac{7-5\nu}{15(1-\nu)}$ | 0 |
| S_{3333} | 1 | $1 - \frac{1-2\nu}{(1-\nu)} \frac{\pi c}{4a}$ | $\frac{7-5\nu}{15(1-\nu)}$ | 0 |
| S_{1122} | 0 | $\frac{8\nu-1}{32(1-\nu)} \frac{\pi c}{a}$ | $\frac{5\nu-1}{15(1-\nu)}$ | $\frac{\nu}{1-\nu}$ |
| S_{2211} | 0 | $\frac{8\nu-1}{32(1-\nu)} \frac{\pi c}{a}$ | $\frac{5\nu-1}{15(1-\nu)}$ | 0 |
| S_{1133} | 0 | $\frac{2\nu-1}{8(1-\nu)} \frac{\pi c}{a}$ | $\frac{5\nu-1}{15(1-\nu)}$ | $\frac{\nu}{1-\nu}$ |
| S_{3311} | $\frac{\nu}{1-\nu}$ | $\frac{\nu}{1-\nu} \left[1 - \frac{4\nu+1}{8\nu} \frac{\pi c}{a} \right]$ | $\frac{5\nu-1}{15(1-\nu)}$ | 0 |
| S_{2233} | 0 | $\frac{2\nu-1}{8(1-\nu)} \frac{\pi c}{a}$ | $\frac{5\nu-1}{15(1-\nu)}$ | 0 |
| S_{3322} | $\frac{\nu}{1-\nu}$ | $\frac{\nu}{1-\nu} \left[1 - \frac{4\nu+1}{8\nu} \frac{\pi c}{a} \right]$ | $\frac{5\nu-1}{15(1-\nu)}$ | 0 |
| termes nuls de D | $S_{1313} = 1/2$ $S_{2323} = 1/2$ $D = 0$ | aucun terme nul (dépend de c/a) | | $S_{1212} = 1/2$ $S_{1313} = 1/2$ $D = 0$ |
| formes de $\Delta \underline{c}^p = \underline{c}^{p0} - \underline{c}^{p1}$ | $\begin{vmatrix} 0 & 0 & X \\ & 0 & X \\ & & 0 \end{vmatrix}$ | $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{vmatrix}$ | $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{vmatrix}$ | $\begin{vmatrix} 0 & X & X \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{vmatrix}$ |
| observat ^s . | $D' = 0 \rightarrow \Delta c_{33}^p \neq 0$ puisque trace nulle: $\Delta c_{33}^p = 0$ | / | / | $D' = 0 \rightarrow \Delta c_{11}^p \neq 0$ puisque trace nulle: $\Delta c_{11}^p = 0$ |

Tableau III.1 : Conditions sur le tenseur \underline{S} pour annuler les contraintes internes [équat. III-9]

ν : coefficient de Poisson.

composantes devant être nulles. Une conclusion analogue a été obtenue par Katchaturion (45) dans un contexte néanmoins différent.

Les conditions de compatibilité d'une telle hétérogénéité plastique sont donc les mêmes que celles du problème d'une interface plane séparant deux milieux semi-infinis pour lesquels la déformation plastique est constante par morceaux. Nous avons démontré (voir chapitre IV) que pour une déformation plastique constante par morceaux la compatibilité est obtenue de part et d'autre d'une interface plane si :

$$\det(\underline{\Delta c}^p) = 0 \quad \text{[III-15]}$$

Les composantes de la normale à l'interface, qui est alors un plan d'habitat séparant les deux milieux, sont alors obtenues en annulant le tenseur d'incompatibilité $\underline{\eta}$ [II-62].

Si le rapport c/a du problème précédent tend vers zéro, les deux problèmes (de l'inclusion et de l'interface plane) sont équivalents. La distribution des dislocations dans les deux cas est alors purement superficielle, ce qui suppose que les interactions locales entre elles sont faibles.

Or, dans les métaux à faible énergie de faute d'empilement, la dissociation des dislocations parfaites peut être importante, et les mécanismes de glissement dévié difficiles. Le plan d'habitat ou l'ellipsoïde de révolution précédent ont alors une certaine "épaisseur", et la relaxation totale des contraintes internes est impossible. Nous analysons ce problème dans les paragraphes suivants.

III-3. LE PROBLEME DE L'INCLUSION APLATIE "PENNY-SHAPE".

Le problème de la formation d'hétérogénéités plastiques compatibles peut être traité, comme on vient de le montrer, à partir de la solution du problème de l'inclusion plastique. Partant de l'observation expérimentale que les microbandes ou les parois des cellules de dislocations sont allongées et ont une épaisseur faible mais finie, nous supposons d'emblée que l'inclusion possède la forme d'un ellipsoïde de révolution aplati de paramètres $a = b \gg c$ (fig. III.4.a). Il ne reste alors qu'à déterminer les conditions sur la différence de déformation $\Delta \underline{\epsilon}^P$ et l'orientation de l'ellipsoïde par rapport au tenseur $\Delta \underline{\epsilon}^P$ pour assurer l'absence de contraintes à grande distance.

Soit $\underline{\beta}^{P^0}$ et $\underline{\beta}^{P^I}$ la distorsion plastique respectivement dans la matrice et dans l'inclusion de volume V et de surface S . Les différentes grandeurs sont exprimées dans le repère x_1, x_2, x_3 associé à l'inclusion (c étant suivant x_3).

Le champ $\underline{\beta}^P(r)$ en un point du milieu s'écrit :

$$\rightarrow \beta_{ij}^P(r) = \beta_{ij}^{P^0} + \Delta \beta_{ij}^P \cdot \theta(r) \quad [III-16]$$

avec

$$\Delta \beta_{ij}^P = \beta_{ij}^{P^I} - \beta_{ij}^{P^0}$$

et

$$\theta(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } r \in V \\ 0 & \text{si } r \notin V \end{cases}$$

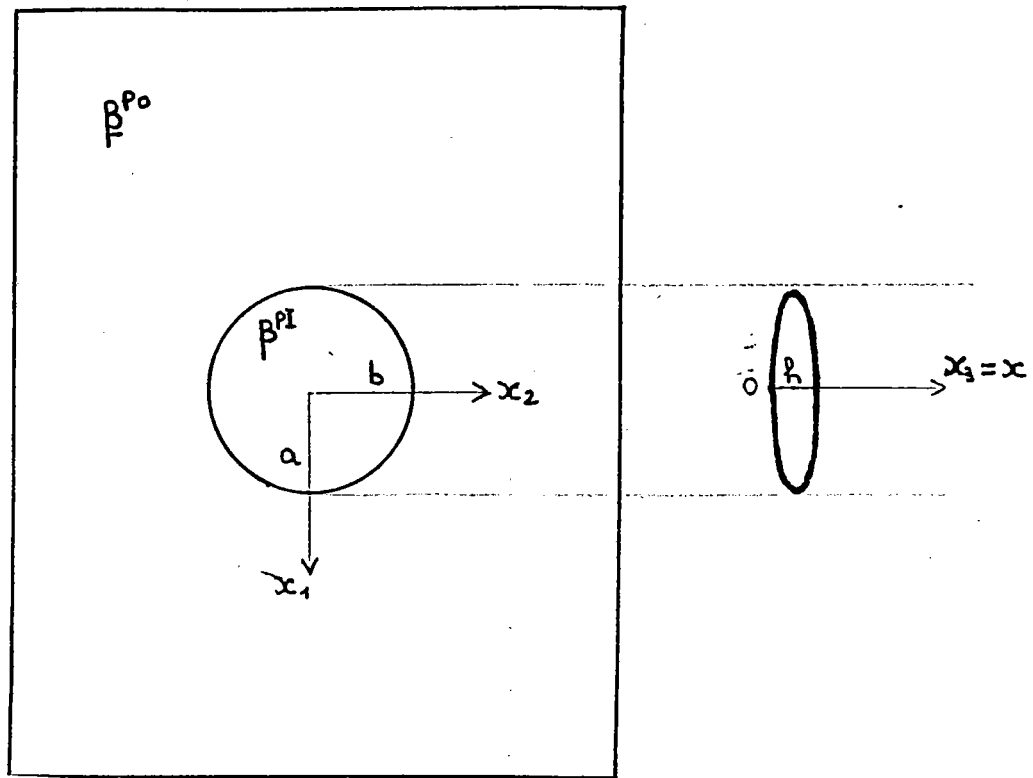
Le tenseur densité de dislocations s'écrit :

$$\alpha_{ij} = -\epsilon_{ijk} \beta_{\epsilon, k}^P \quad [III-17]$$

ici on a :

$$\beta_{\epsilon, k}^P = -\Delta \beta_{\epsilon, j}^P \cdot N_k \delta(S) \quad [III-18]$$

(a)



(b)

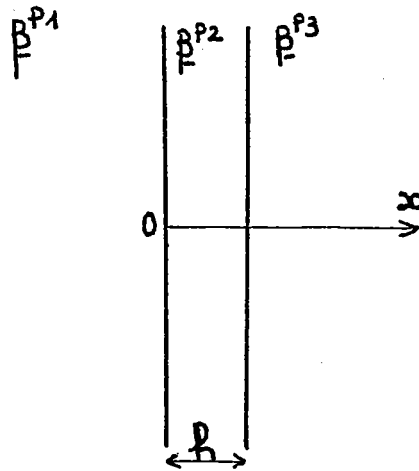


Fig. III.4 : Volume d'hétérogénéité de faible épaisseur
(a) Inclusion aplatie ($a = b \gg c$) "penny-shape".
(b) Plan d'habitat "d'épaisseur finie".

N_k est la normale unitaire extérieure à V , et $\delta(S)$ est la distribution de Dirac nulle partout sauf sur S .

Le tenseur $\underline{\alpha}$ s'écrit alors :

$$\alpha_{ij} = \epsilon_{ikl} \Delta\beta_{lj}^p \cdot N_k \cdot \delta(S) \quad [III-19]$$

En choisissant l'origine de l'axe x_3 sur l'une des faces de l'inclusion (voir fig.III.4.a), le tenseur densité superficielle de dislocations s'écrit :

$$\alpha_{ij} = \epsilon_{ikl} \Delta\beta_{lj}^p [\delta(x-h) - \delta(x)] \quad [III-20]$$

x étant la distance d'un point l'origine,

et h l'épaisseur de l'inclusion.

Soit en développant ces expressions :

$$\alpha_{ij} = \begin{bmatrix} -\Delta\beta_{21}^p & -\Delta\beta_{22}^p & -\Delta\beta_{23}^p \\ \Delta\beta_{11}^p & \Delta\beta_{12}^p & \Delta\beta_{13}^p \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot (\delta(x-h) - \delta(x)) \quad [III-21]$$

En fait, ces dislocations sont répartis dans tout le volume de l'inclusion puisque celle-ci s'est formée au cours de la déformation plastique. Puisque nous nous intéressons aux champs de contraintes à grande distance, la forme particulière de $\bar{\alpha}$ retenue décrit de manière satisfaisante la solution réelle.

Le tenseur d'incompatibilité est dans ce cas :

$$\eta_{ij} = (\epsilon_{lmn} \alpha_{j,m,n}) \{ij\}$$

soit

$$\eta_{ij} = \bar{\eta}_{ij} (\delta'(x-h) - \delta'(x))$$

$$\bar{\pi}_{ij} = \begin{bmatrix} -\Delta\epsilon_{22}^p & \Delta\epsilon_{12}^p & 0 \\ & -\Delta\epsilon_{11}^p & 0 \\ & & 0 \end{bmatrix} \quad [III-22]$$

avec $\Delta\epsilon_{ij}^p = 1/2(\Delta\beta_{ij}^p + \Delta\beta_{ji}^p) = \epsilon_{ij}^p - \epsilon_{ij}^0$

Cette densité de dislocations engendre des contraintes internes que nous calculons dans l'inclusion à partir de la méthode d'Eshelby (26). Nous obtenons dans le cas où $a = b \gg c$:

$$\frac{\sigma_{11}}{2\mu} = \frac{-\nu}{1-\nu} (\Delta\epsilon_{11}^p + \Delta\epsilon_{22}^p) - \Delta\epsilon_{11}^p + \frac{13}{32(1-\nu)} \Pi \frac{c}{a} \Delta\epsilon_{11}^p + \frac{16\nu-1}{32(1-\nu)} \Pi \frac{c}{a} \Delta\epsilon_{22}^p + \frac{2\nu+1}{8(\nu-1)} \Pi \frac{c}{a} \Delta\epsilon_{33}^p$$

$$\frac{\sigma_{22}}{2\mu} = \frac{-\nu}{1-\nu} (\Delta\epsilon_{11}^p + \Delta\epsilon_{22}^p) - \Delta\epsilon_{22}^p + \frac{16\nu-1}{32(1-\nu)} \Pi \frac{c}{a} \Delta\epsilon_{11}^p + \frac{13}{32(1-\nu)} \Pi \frac{c}{a} \Delta\epsilon_{22}^p + \frac{2\nu+1}{8(\nu-1)} \Pi \frac{c}{a} \Delta\epsilon_{33}^p$$

$$\frac{\sigma_{33}}{2\mu} = -\frac{2\nu+1}{8(1-\nu)} \Pi \frac{c}{a} \Delta\epsilon_{11}^p - \frac{2\nu+1}{8(1-\nu)} \Pi \frac{c}{a} \Delta\epsilon_{22}^p - \frac{1}{4(1-\nu)} \Pi \frac{c}{a} \Delta\epsilon_{33}^p$$

$$\frac{\sigma_{12}}{2\mu} = -\Delta\epsilon_{12}^p + \frac{7-8\nu}{16(1-\nu)} \Pi \frac{c}{a} \Delta\epsilon_{12}^p$$

$$\frac{\sigma_{13}}{2\mu} = \frac{\nu-2}{4(1-\nu)} \Pi \frac{c}{a} \Delta\epsilon_{13}^p$$

$$\frac{\sigma_{23}}{2\mu} = \frac{\nu-2}{4(1-\nu)} \Pi \frac{c}{a} \Delta\epsilon_{23}^p$$

μ et ν sont respectivement le module de cisaillement et le coefficient de Poisson.

On voit que $\underline{\sigma}$ est uniforme dans V ce qui résulte des hypothèses (déformation plastique constante par morceaux). Ce champ est composé de terme σ_{ij}^p , indépendants de la forme de l'inclusion (c/a) et de termes σ_{ij}^0 , directement proportionnels au facteur de forme c/a :

$$\frac{\sigma_{11}^1}{2\mu} = \frac{-1}{1-\nu} [\Delta\epsilon_{11}^p + \nu\Delta\epsilon_{22}^p]$$

$$\frac{\sigma_{22}^1}{2\mu} = \frac{-1}{1-\nu} [\nu\Delta\epsilon_{11}^p + \Delta\epsilon_{22}^p]$$

[III-24]

$$\frac{\sigma_{12}^1}{2\mu} = -\Delta\epsilon_{12}^p$$

$$\sigma_{13}^1 = \sigma_{23}^1 = \sigma_{33}^1 = 0$$

et

$$\frac{\sigma_{11}^2}{2\mu} = \frac{\Pi}{8(1-\nu)} \frac{c}{a} \left\{ \frac{13}{4} \Delta\epsilon_{11}^p + \frac{16\nu-1}{4} \Delta\epsilon_{22}^p - (2\nu+1)\Delta\epsilon_{33}^p \right\}$$

$$\frac{\sigma_{22}^2}{2\mu} = \frac{\Pi}{8(1-\nu)} \frac{c}{a} \left\{ \frac{16\nu-1}{4} \Delta\epsilon_{11}^p + \frac{13}{4} \Delta\epsilon_{22}^p - (2\nu+1)\Delta\epsilon_{33}^p \right\}$$

$$\frac{\sigma_{33}^2}{2\mu} = \frac{-\Pi}{4(1-\nu)} \frac{c}{a} \left\{ \frac{2\nu+1}{2} \Delta\epsilon_{11}^p + \frac{2\nu+1}{2} \Delta\epsilon_{22}^p - \Delta\epsilon_{33}^p \right\}$$

$$\frac{\sigma_{12}^2}{2\mu} = \frac{7-8\nu}{16(1-\nu)} \Pi \frac{c}{a} \Delta\epsilon_{12}^p$$

[III-25]

$$\frac{\sigma_{13}^2}{2\mu} = \frac{\nu-2}{4(1-\nu)} \Pi \frac{c}{a} \Delta\epsilon_{13}^p$$

$$\frac{\sigma_{23}^2}{2\mu} = \frac{\nu-2}{4(1-\nu)} \Pi \frac{c}{a} \Delta\epsilon_{23}^p$$

On voit que, au facteur deux près, les termes σ_{ij}^1 sont les mêmes que ceux obtenus pour le bicristal à joint plan étudié dans le chapitre II, la normale à l'interface étant ici x_3 [formule II-64] (le facteur deux vient du fait que l'interface est double dans ce problème).

Pour annuler le champ $\underline{\sigma}^1$, il suffit que la compatibilité du champ de déformation plastique soit assurée et que l'orientation de l'ellipsoïde

par rapport au tenseur $\Delta \underline{\epsilon}^P$ corresponde à la compatibilité. Dans ce cas le tenseur d'incompatibilité est nul si :

$$\Delta \epsilon_{11}^P = \Delta \epsilon_{22}^P = \Delta \epsilon_{12}^P = 0 \quad [111-26]$$

et puisque la trace est nulle : $\Delta \epsilon_{33}^P = 0$.

Lorsque ces conditions sont satisfaites, il subsiste alors la seconde partie $\underline{\sigma}^2$ du tenseur $\underline{\sigma}$ associée aux interactions locales entre dislocations et qui s'écrit :

$$\frac{\sigma_{13}^2}{2\mu} = - \frac{2-\nu}{4(1-\nu)} \Pi \frac{c}{a} \Delta \epsilon_{13}^P$$

$$\frac{\sigma_{23}^2}{2\mu} = - \frac{2-\nu}{4(1-\nu)} \Pi \frac{c}{a} \Delta \epsilon_{23}^P \quad [111-27]$$

$$\sigma_{11}^2 = \sigma_{22}^2 = \sigma_{12}^2 = \sigma_{33}^2 = 0$$

Ce champ représente donc des contraintes de cisaillement dans le plan de l'inclusion qui ne peuvent être relaxées facilement car ce plan n'est en général pas un plan de glissement, et la densité de dislocations dans l'inclusion est très forte.

Pour évaluer ces contraintes dans une situation particulière correspondant aux cellules de dislocations (la cellule représente la matrice et la paroi représente l'inclusion), nous admettons avec Mughrabi (46) que c est de l'ordre de $0.1 \mu\text{m}$ et que a représente la taille moyenne des cellules c'est-à-dire $a = 1 \mu\text{m}$.

En supposant que ϵ^{P1} est très faible par rapport à $\underline{\epsilon}^{P0}$ du fait des interactions de contact entre dislocations, on a pour $\nu = 1/3$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{13}^2 &= -\mu \frac{2-\nu}{2(1-\nu)} \Pi \frac{c}{a} (\epsilon_{13}^{p1} - \epsilon_{13}^{p0}) \\
 &= \mu \frac{2-\nu}{2(1-\nu)} \Pi \frac{c}{a} \epsilon_{13}^{p0} \quad [III-28] \\
 &= 0.39\mu \cdot \epsilon_{13}^{p0}
 \end{aligned}$$

Ces contraintes sont importantes et correspondent à celles qui ont pu être mesurées par Mughrabi à partir de l'analyse de la courbure des dislocations dans les cellules. Dans le cas du cuivre ($\mu = 75000$ MPa), pour une déformation plastique ϵ_{13}^{p0} de $2.5 \cdot 10^{-3}$, Mughrabi obtient une contrainte σ_{13} de l'ordre de 70 à 80 MPa. Le calcul de σ_{13}^2 à partir de [III-28] donne une valeur de 74 MPa. Des valeurs semblables ont été également mesurées par Morris et Martin (47).

Ainsi, la formation d'hétérogénéités plastiques constantes par morceaux, liée au libre parcours moyen limité des dislocations entraîne la formation d'une structure cellulaire de dislocations. Les parois de ces cellules sont orientées afin de minimiser les contraintes à grande distance ($\underline{\sigma}^1$). Ce même mécanisme peut aussi intervenir à l'échelle supérieure pour des zones à mécanisme de déformation plastique différent.

Du fait des interactions locales entre dislocations, l'épaisseur des parois est finie, ce qui entraîne la présence de fortes contraintes internes ($\underline{\sigma}^2$). A ce stade de la déformation, ces parois ne constituent que des microbandes de cisaillement potentielles pour lesquelles un cisaillement pourra intervenir lorsqu'une relaxation partielle ou totale des contraintes $\underline{\sigma}^2$ aura été possible par glissement à l'intérieur de la bande. Les microbandes potentielles se transforment alors en bandes de cisaillement macroscopiques. Même à ce stade, ce mécanisme de déformation

n'aurait pas de conséquences importantes sur le comportement global du matériau si l'orientation de ces microbandes potentielles était aléatoire. Or, on montrera dans le chapitre V (36), l'existence d'une corrélation très forte entre l'orientation de ces microbandes et la déformation macroscopique imposée. Cette corrélation permet aux microbandes de coalescer et de former des bandes de cisaillement macroscopiques.

III-4. LE PROBLEME DU PLAN D'HABITAT "D'ÉPAISSEUR" FINIE.

La solution du problème de l'inclusion aplatie développée dans le paragraphe III-3 ne décrit en fait qu'une forme particulière d'hétérogénéités de déformation plastiques quasi-compatibles. Dans l'approximation d'une hétérogénéité de déformation plastique compatible, constante par morceaux, sous la forme d'une matrice et d'une inclusion, la solution obtenue dans le paragraphe précédent conduit à un volume d'inclusion faible. Or, on peut s'attendre à ce que le volume des zones hétérogènes soit plus important en égard des composantes de textures et de leur intensités observées et qui sont liées essentiellement à ce mécanisme de déformation (comme on le montrera dans le chapitre V).

Nous développons ici le problème du plan d'habitat "d'épaisseur" finie qui présente de nombreuses similitudes avec le problème de l'inclusion aplatie compatible et qui permet des hétérogénéités plastiques plus importantes en volume.

III-4.1 Tenseur densité de dislocations et contraintes internes :

Nous supposons que le milieu infini est soumis à une distorsion plastique constante par morceaux telle que (voir fig. III-4.b)

$$\begin{aligned}
 \beta_{ij}^p(x) &= \beta_{ij}^1 \quad \text{si } x < 0 \\
 \beta_{ij}^p(x) &= \beta_{ij}^2 \quad \text{si } 0 < x < h \\
 \beta_{ij}^p(x) &= \beta_{ij}^3 \quad \text{si } x > h
 \end{aligned}
 \tag{III-29}$$

x désigne la distance au plan passant par l'origine, limitant les milieux 1 et 2 et de normale unitaire \vec{N}

Dans tout ce problème, le repère choisi est tel que l'axe x_3 est normal à ce plan (donc $\vec{N} = (0 \ 0 \ 1)$).

Le champ $\beta^p(r)$ ne dépend que de x et s'écrit :

$$\beta_{ij}^p(x) = \beta_{ij}^1 + \beta_{ij}^3 \cdot H(x-h) - \beta_{ij}^2 \cdot H(x) + \beta_{ij}^2 \cdot [H(x) - H(x-h)]
 \tag{III-30}$$

où $H(x)$ est la fonction d'Heaviside telle que :

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Le tenseur densité de dislocation est :

$$\alpha_{ij} = - \epsilon_{ijk} \beta_{ij,k}^p
 \tag{III-31}$$

Pour calculer α_{ij} , nous calculons d'abord le terme $\beta_{ij,k}^p$ qui s'écrit, tenant compte de la relation :

$$H_{,k}(x) = N_k \cdot \delta(x)
 \tag{III-32}$$

ici $k = 3$.

$$\begin{aligned}
 \beta_{ij,k}^p &= \left\{ \beta_{ij}^3 \cdot \delta(x-h) - \beta_{ij}^2 \cdot \delta(x) + \beta_{ij}^2 \cdot [\delta(x) - \delta(x-h)] \right\} N_k \\
 &= -N_k \left\{ (\beta_{ij}^1 - \beta_{ij}^2) \cdot \delta(x) - (\beta_{ij}^2 - \beta_{ij}^3) \cdot \delta(x-h) \right\}
 \end{aligned}
 \tag{III-33}$$

en posant : $S_{eJ} = 1/2 (\beta_{eJ}^{P1} + \beta_{eJ}^{P3} - 2\beta_{eJ}^{P2})$

et : $D_{eJ} = 1/2 (\beta_{eJ}^{P1} - \beta_{eJ}^{P3})$ [III-34]

on a : $\beta_{eJ,k}^{P2} = -N_k \left\{ (S_{eJ} + D_{eJ}) \delta(x) - (S_{eJ} - D_{eJ}) \delta(x-h) \right\}$ [III-35]

Soit : $\beta_{eJ,k}^{P2} = -N_k \left\{ S_{eJ} [\delta(x) - \delta(x-h)] + D_{eJ} [\delta(x) + \delta(x-h)] \right\}$ [III-36]

et finalement pour α_{1J} on obtient :

$$\alpha_{1J}(x) = \epsilon_{1k2} \cdot N_k \cdot \left\{ S_{eJ} [\delta(x) - \delta(x-h)] + D_{eJ} [\delta(x) + \delta(x-h)] \right\} \quad [III-37]$$

Cette relation plus générale, contient les cas limites du bicristal à joint plan et de l'inclusion aplatie.

* Dans le cas où $\underline{\beta}^{P1} = \underline{\beta}^{P3}$, il subsiste :

$$\alpha_{1J}(x) = \epsilon_{1k2} N_k (\beta_{eJ}^{P3} - \beta_{eJ}^{P1}) [\delta(x-h) - \delta(x)] \quad [III-38]$$

ce qui décrit le problème de l'inclusion aplatie [éq. III-20]

* Dans le cas où $h = 0$, il subsiste :

$$\alpha_{1J}(x) = -\epsilon_{1k2} N_k (\beta_{eJ}^{P3} - \beta_{eJ}^{P1}) \delta(x) \quad [III-39]$$

ce qui correspond bien au problème du bicristal à joint plan [éq. II-58].

Le tenseur $\underline{\alpha}$ peut être décomposé en 2 parties :

$$\alpha_{1J}(x) = \alpha_{1J}^1(x) + \alpha_{1J}^2(x) \quad [III-40]$$

avec :

$$\alpha_{1J}^1(x) = \epsilon_{1k2} N_k \cdot D_{eJ} [\delta(x) + \delta(x-h)] \quad [III-41]$$

$$\alpha_{1J}^2(x) = \epsilon_{1k2} N_k S_{eJ} [\delta(x) - \delta(x-h)] \quad [III-42]$$

Lorsqu'on s'intéresse aux effets à grande distance (h étant fini mais de faible valeur par rapport à ces effets) le terme $[\delta(x) + \delta(x-h)]$ ne diffère pas trop de $2\delta(x)$ et le terme $[\delta(x) - \delta(x-h)]$ est égal à $h\delta'(x)$ (par définition de la dérivée de δ). L'équation [III-40] traduit alors la présence :

d'une densité de dislocation α_J^1 :

$$\begin{aligned} \alpha_J^1(x) &= 2\epsilon_{ik\ell} N_k D_{\ell J} \delta(x) \\ \rightarrow \alpha_J^1(x) &= -\epsilon_{ik\ell} N_k (\beta_{\ell J}^3 - \beta_{\ell J}^1) \delta(x) & [III-43] \\ &= -\epsilon_{ik\ell} N_k \Delta\beta_{\ell J}^1 \delta(x) \end{aligned}$$

avec: $\Delta\beta_{\ell J}^1 = \beta_{\ell J}^3 - \beta_{\ell J}^1$,

et d'une densité de dipôles α_J^2 conjuguée au terme source α_J^3 tel que :

$$\alpha_J^3 = -\epsilon_{ik\ell} N_k S_{\ell J} \delta(x) \quad [III-44]$$

En effet le terme α_J^2 peut également s'écrire lorsque h est faible:

$$\alpha_J^2 = \epsilon_{ik\ell} N_k S_{\ell J} \cdot h\delta'(x) \quad [III-45]$$

et α^0 est défini à partir de α^3 par :

$$\rightarrow \alpha_J^0 = -X_k \alpha_{J,k}^3 \quad [III-46]$$

Ici la seule variable est $x_3 = x$, et $X_k = X_3 = h$, donc :

$$\rightarrow \alpha_J^0 = -h \frac{d}{dx} (-\epsilon_{ik\ell} N_k S_{\ell J} \delta(x))$$

$$\text{soit :} \quad \alpha_{p_j}^1 = h \epsilon_{1k\epsilon} N_k S_{e_j} \delta'(x)$$

$$\text{donc :} \quad \alpha_{p_j}^1 = \alpha_{f_j}^1 \quad [III-47]$$

Pour $\underline{\alpha}$, on a finalement dans ces conditions :

$$\alpha_{1j} = \alpha_{f_j}^1 + \alpha_{p_j}^1 = -\epsilon_{1k\epsilon} N_k (\beta_{e_j}^{p3} - \beta_{e_j}^{f1}) \delta(x) + h \epsilon_{1k\epsilon} N_k S_{e_j} \delta'(x). \quad [III-48]$$

III-4.2 Contraintes à grande distance et contraintes locales.

Le champ de contraintes internes associé à $\underline{\alpha}$ s'obtient à partir de la solution du problème du bicristal à joint plan :

Le champ de contrainte $\underline{\sigma}^1$ associé à $\underline{\alpha}^1$ découle directement de cette solution [II-64] :

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^1 &= -\mu/1-\nu (\Delta \epsilon_{11}^p + \nu \Delta \epsilon_{22}^p) \operatorname{sgn}(x) \\ \rightarrow \sigma_{22}^1 &= -\mu/1-\nu (\nu \Delta \epsilon_{11}^p + \Delta \epsilon_{22}^p) \operatorname{sgn}(x) \\ \sigma_{12}^1 &= -\mu \Delta \epsilon_{12}^p \operatorname{sgn}(x) \\ \sigma_{13}^1 &= \sigma_{23}^1 = \sigma_{33}^1 = 0 \end{aligned} \quad [III-49]$$

$\Delta \epsilon^p$ est la partie symétrique de $\Delta \beta^p$

$$\Delta \epsilon_{f_j}^p = \epsilon_{f_j}^{p3} - \epsilon_{f_j}^{p1} = 1/2 (\beta_{f_j}^{p3} - \beta_{f_j}^{p1} + \beta_{f_j}^{p2} - \beta_{f_j}^{p2}) \quad [III-50]$$

et
$$\operatorname{Sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad [III-51]$$

Ces mêmes solutions peuvent être utilisées pour déterminer le champ de contraintes associé à $\underline{\alpha}^2$. En effet, il est bien connu que si $\underline{\sigma}^s$ est le champ associé à une source $\underline{\alpha}^s$, le champ $\underline{\sigma}^0$ associé au dipôle $\underline{\alpha}^0$ conjugué de $\underline{\alpha}^s$ s'écrit :

$$\sigma_{p_j}^0 = -X_k \sigma_{f_j, k}^s \quad [III-52]$$

Dans le cas présent le terme source est [III-44] :

$$\alpha_{f_j}^s = -\epsilon_{1k\epsilon} N_k S_{e_j} \delta(x)$$

Le champ de contrainte $\underline{\sigma}^s$ a la même forme que [III-49] :

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^s &= -\mu/1-\nu (S_{11}^p + \nu S_{22}^p) \operatorname{sgn}(x) \\ \sigma_{22}^s &= -\mu/1-\nu (\nu S_{11}^p + S_{22}^p) \operatorname{sgn}(x) \\ \sigma_{12}^s &= -\mu S_{12}^p \operatorname{sgn}(x) \\ \sigma_{13}^s &= \sigma_{23}^s = \sigma_{33}^s = 0 \end{aligned} \quad \text{[III-53]}$$

$S_{e_j}^p$ est la partie symétrique de \underline{S} :

$$\left. \begin{aligned} S_{e_j}^p &= 1/2(S_{1j} + S_{j1}) \\ &= 1/2(\epsilon_{fj} + \epsilon_{j\bar{f}} - 2\epsilon_{f\bar{j}}) \end{aligned} \right\} \quad \text{[III-54]}$$

Les contraintes associées à $\underline{\alpha}^p$ (donc à α^2) sont :

$$\sigma_{f_j}^p = \sigma_{\bar{f}_j}^p = -h \partial/\partial x (\alpha_{f_j}^p) \quad \text{[III-55]}$$

comme :

$$\operatorname{sgn}(x) = H(x) - H(-x)$$

$$d/dx(\operatorname{sgn}(x)) = 2\delta(x)$$

on a finalement:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^p &= 2\mu/1-\nu (S_{11}^p + \nu S_{22}^p) h \delta(x) \\ \sigma_{22}^p &= 2\mu/1-\nu (\nu S_{11}^p + S_{22}^p) h \delta(x) \\ \sigma_{12}^p &= 2\mu h (S_{12}^p) h \delta(x) \\ \sigma_{13}^p &= \sigma_{23}^p = \sigma_{33}^p = 0 \end{aligned} \quad \text{[III-56]}$$

Toujours dans l'hypothèse où h est fini mais petit on a :

$$h\delta(x) = H(x) - H(x-h) \quad [III-57]$$

$h\delta(x)$ est donc nul sauf dans la bande; donc les contraintes non nulles dans la bande d'épaisseur h correspondent à :

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^2 &= 2\mu/1-\nu (Se_{11}^p + \nu Se_{22}^p) \\ \sigma_{22}^2 &= 2\mu/1-\nu (\nu Se_{11}^p + Se_{22}^p) \\ \sigma_{12}^2 &= 2\mu(Se_{12}^p) \end{aligned} \quad [III-58]$$

On constate donc que, pour ce problème deux champs de contraintes sont engendrés par l'hétérogénéité plastique à priori incompatible.

- Le premier champ $\underline{\sigma}^1$ [éq.III-49] est à grande distance (fonction $\text{sgn}(x)$) et peut être relaxé par une orientation convenable de la bande (formation du plan d'habitat).

- Le second champ $\underline{\sigma}^2$ limité à l'intérieur de la bande [éq.III-58] ne peut être relaxé que pour $h = 0$ (ce qui est difficile lorsque les interactions entre les dislocations sont fortes), ou pour $Se^p = 0$, ce qui nécessite en général une déformation sur plusieurs systèmes de glissement dans la bande afin que $\underline{\epsilon}^{p2}$ soit égale à $1/2 (\underline{\epsilon}^{p1} + \underline{\epsilon}^{p3})$.

III-4.3 Tenseur d'incompatibilité plastique :

Le double champ de contraintes calculé plus-haut peut être également obtenu plus directement à partir du tenseur d'incompatibilité associé à ce problème:

Ce tenseur d'incompatibilité, qui nous servira dans le chapitre V, est obtenu à partir du tenseur $\underline{\alpha}$ ou directement à partir de la relation [II-13] :

$$\eta_{ij} = -\epsilon_{ikm} \epsilon_{jen} \epsilon_{mn,ke}^p \quad [III-59]$$

Or pour ce problème le champ $\underline{\epsilon}^p$ est :

$$\epsilon_{mn}^p(x) = \epsilon_{mn}^{p1} + \epsilon_{mn}^{p3} \cdot H(x-h) - \epsilon_{mn}^{p1} \cdot H(x) + \epsilon_{mn}^{p2} \cdot [H(x) - H(x-h)] \quad [111-60]$$

sachant que : $H_{,k} = N_k \cdot \delta$

$$\text{et : } \delta_{,k} = N_e \cdot \delta'$$

on a :

$$\begin{aligned} \epsilon_{mn,ke}^p(x) &= \left\{ \epsilon_{mn}^{p3} \cdot \delta'(x-h) - \epsilon_{mn}^{p1} \cdot \delta'(x) + \epsilon_{mn}^{p2} [\delta'(x) - \delta'(x-h)] \right\} N_k N_e \\ &= -N_k N_e \left\{ (\epsilon_{mn}^{p1} - \epsilon_{mn}^{p2}) \cdot \delta'(x) - (\epsilon_{mn}^{p3} - \epsilon_{mn}^{p2}) \cdot \delta'(x-h) \right\} \end{aligned} \quad [111-61]$$

De la même manière, posons :

$$\begin{aligned} Se_{mn}^p &= 1/2 (\epsilon_{mn}^{p1} + \epsilon_{mn}^{p3} - 2\epsilon_{mn}^{p2}) \\ De_{mn}^p &= 1/2 (\epsilon_{mn}^{p1} - \epsilon_{mn}^{p3}) \end{aligned} \quad [111-62]$$

on a alors :

$$\begin{aligned} \epsilon_{mn,ke}^p &= -N_k N_e \left\{ (Se_{mn}^p + De_{mn}^p) \delta'(x) - (Se_{mn}^p - De_{mn}^p) \delta'(x-h) \right\} \\ \epsilon_{mn,ke}^p &= -N_k N_e \left\{ Se_{mn}^p [\delta'(x) - \delta'(x-h)] + De_{mn}^p [\delta'(x) + \delta'(x-h)] \right\} \end{aligned} \quad [111-63]$$

et pour η_{ij} :

$$\eta_{ij}(x) = \epsilon_{ikm} \epsilon_{jen} N_k N_e \left\{ De_{mn}^p [\delta'(x) + \delta'(x-h)] + Se_{mn}^p [\delta'(x) - \delta'(x-h)] \right\} \quad [111-64]$$

soit :

$$\eta_{ij} = \eta_{ij}^+ + \eta_{ij}^-$$

avec :

$$\eta_{ij}^+ = \epsilon_{ikm} \epsilon_{jen} N_k N_e De_{mn}^p [\delta'(x) + \delta'(x-h)] \quad [111-65]$$

$$\text{et : } \eta_{ij}^- = \epsilon_{ikm} \epsilon_{jen} N_k N_e Se_{mn}^p [\delta'(x) - \delta'(x-h)] \quad [111-66]$$

Le terme η^2 décrit les incompatibilités liées au champ de contrainte \underline{g}^2 (nul lorsque h est nul ou $S_{\underline{g}}^p$ nul).

Le terme η^1 correspond au champ à grande distance \underline{g}^1 qui peut être relaxé par la formation du plan d'habitat.

III-5. DISCUSSION ET CONCLUSIONS.

Dans ce chapitre, nous avons cherché la forme générale d'hétérogénéités plastiques totalement ou partiellement compatibles. Le calcul des contraintes internes associées à ces hétérogénéités montre que la compatibilité totale de déformations plastiques constantes par morceaux n'est assurée que pour une "épaisseur" (de l'inclusion ou du plan d'habitat) nulle. Dans le cas contraire, même si la forme et l'orientation de la zone hétérogène correspondent à celle du plan d'habitat (pas de contraintes à grande distance), il subsiste des contraintes associées à l'interaction locale entre les dislocations. C'est ce que nous appelons la "quasi-compatibilité".

A partir de ces résultats, Le mécanisme proposé pour expliquer la formation des microbandes de cisaillement fait appel à plusieurs étapes :

1. Formation d'hétérogénéités plastiques quasi-compatibles.

Le glissement plastique (simple ou multiple) est rarement uniforme à l'échelle d'un grain du polycristal et un arrangement particulier de dislocations en résulte (structure cellulaire avec parois ou zones à modes de déformation plastique différents) afin de minimiser l'énergie élastique associée aux incompatibilités de la déformation plastique. Dans ces conditions, une "microstructure orientée" influencée par la géométrie de la déformation imposée, le mode de glissement plastique et les interactions locales entre dislocations est imprégnée dans le matériau.

2. Dans le cas de déformation plastique constante par morceaux, seule une partie de l'énergie élastique associée aux incompatibilités plastiques peut être relaxé par la formation de plans d'habitat convenablement orientés. Une seconde partie, associée à la structure dipolaire des dislocations dans ces plans, subsiste. Il lui correspond des contraintes internes importantes fortement orientées par rapport aux plans d'habitat. Ces contraintes peuvent être difficilement relaxées du fait de la forte densité de dislocations dans les parois et du caractère non cristallographique de celles-ci.

Le résultat de ces deux étapes est alors la création à l'intérieur du polycristal de zones ayant la forme de plaquettes dont l'orientation est fortement liée à la déformation macroscopique (comme c'est montré dans le chapitre V) et dans lesquelles les contraintes internes sont importantes.

3. La formation des microbandes de cisaillement peut alors être considérée comme un processus autocatalytique dans lequel intervient d'abord la "germination" de microbandes potentielles (étapes 1 et 2) à orientation corrélée de grain à grain, puis le cisaillement localisé lorsque la relaxation des fortes contraintes internes intervient.

L'orientation de ces bandes (zones hétérogènes dans un grain) est traitée dans le chapitre V pour les métaux C.F.C et C.C déformés en laminage (et en traction) et correspond rigoureusement aux observations expérimentales décrites par certains auteurs.

Le mécanisme décrit ci-dessus est conforme à ce qui a été observé par Korbel et Martin (41) et ne fait pas intervenir un mécanisme d'adoucissement.

Avant d'appliquer les résultats de ce chapitre aux problèmes des hétérogénéités dans les polycristaux, nous utilisons d'abord les résultats obtenus pour analyser l'orientation des plans d'habitat dans le cas de la plasticité des monocristaux sans nous préoccuper des termes locaux ($\underline{\alpha}^2$, $\underline{\eta}^2$, \underline{g}^2). Le chapitre suivant est donc consacré à l'analyse des hétérogénéités plastiques dans le monocristal, et les résultats seront confrontés aux observations et mesures de Caillard concernant les sous-joints.

Dans le chapitre V par contre, nous développerons, en plus de l'aspect statique qui a été effectué ici, une analyse des rotations des réseaux cristallins qui accompagnent ce mécanisme. Un modèle concernant la formation des textures et l'orientation des microbandes sera développé afin de tester les hypothèses de ce chapitre.

Chapitre IV

PLANS D'HABITAT EN PLASTICITE DES MONOCRISTAUX.

CELLULES DE DISLOCATIONS.

CHAPITRE IV.

Plans d'habitat dans les monocristaux C.F.C.

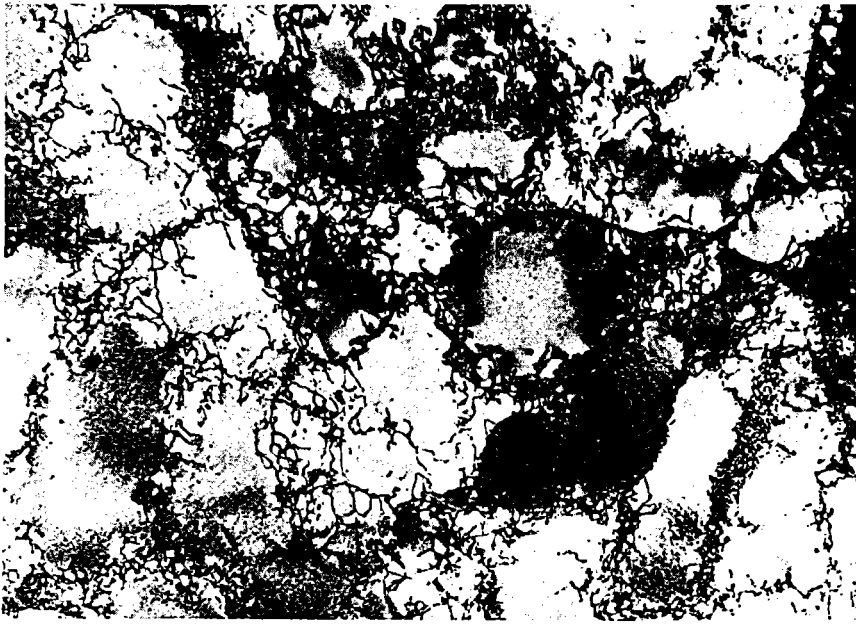
Cellules de dislocations.

IV-1. Revue bibliographique.

La déformation plastique à froid des matériaux métalliques fait intervenir essentiellement des mécanismes intragranulaires. La déformation de chaque grain s'effectue par création et déplacement des dislocations généralement sur des plans cristallographiques denses et dans des directions denses. Pour un mode de sollicitation donné, le ou les systèmes de glissement actifs sont ceux pour lesquels la cission réduite est maximale et atteint la cission critique. L'aptitude d'un grain à se déformer est donc fonction des possibilités de déplacement des dislocations.

La distribution des dislocations n'est généralement pas homogène. Pour de très faibles déformations, les configurations sont simples et correspondent à des schémas théoriques simples : dipôles, multipôles, crans, intersections et jonctions, boucles, etc... Il n'en est pas ainsi pour des déformations plus importantes.

Si l'énergie de faute d'empilement du matériau est faible, les dislocations s'accumulent dans leur plan de glissement et leur densité augmente continuellement avec la déformation. Par contre pour les matériaux de forte énergie, le glissement dévié est plus facile et les dislocations ont tendance à former des échevaux. Les échevaux forment des parois qui délimitent des cellules plus ou moins parfaites (figures IV-1). Au fur et à mesure que la déformation augmente, les parois se densifient et la taille des cellules diminue (3)(4)(49)(50)(fig.IV-1.b et c). La structure interne des cellules évolue avec la déformation vers celle d'un sous-joint dans le sens d'une minimisation de l'énergie interne, surtout quand la température



a) X 14 000



b) X 12 000



c) X 12 000

Fig. IV.1 : Microscopie électrique en transmission montrant des cellules de dislocations.

a) dans Al déformé en biaxial à 5 % X 5 % (48)

b) dans un acier peu allié déformé en traction à 10 % (3).

c) dans le même acier déformé en traction à 30 % (3).

augmente. Pour les métaux de très faible énergie de faute d'empilement (par exemple les aciers inoxydables austénitiques), on n'observe pratiquement jamais de cellules (49).

Des études sur les cellules de dislocations dans l'acier doux (3)(4), montrent clairement une dépendance des sous-structures avec l'orientation du grain et le mode de sollicitation. En traction uniaxiale, les parois des cellules sont planes, en déformation plane elles sont parallépipédiques et en expansion biaxiale les cellules sont plutôt équiaxes.

De plus, il a été observé que les parois des cellules qui apparaissent dans le grain sont étroitement liées aux systèmes actifs, le plan de la paroi étant presque parallèle au plan de glissement principal (4)(51)(52)(53)(54) : des parois planes correspondent à un glissement simple dans le grain, parallépipédiques à un glissement double et les cellules équiaxes correspondent à un glissement multiple.

Les structures de dislocations doivent donc dépendre dans chaque grain du polycristal de l'orientation du grain et de l'état local de contrainte ou de déformation autour du grain. Karashima et all.(50) ont montré que l'arrangement des dislocations évolue avec leur densité et donc avec les contraintes appliquées ou la vitesse de déformation. Ils ont montré qu'au dessous d'une valeur critique de la densité de dislocation, dépendant de la température et des contraintes, les dislocations sont arrangées de manière uniforme. Pour des densités supérieures à cette valeur, les cellules se forment et s'affinent lorsque la déformation augmente.

La formation et le développement de la microstructure de dislocations lors de l'écoulement plastique affectent dans une certaine mesure le comportement actuel du matériau, mais plus encore le comportement ultérieur lorsque la nature du chargement est modifiée. En d'autres termes, le comportement en chargements complexes (non radiaux, non monotones...) doit

être particulièrement influencé par la formation et la modification de la microstructure au cours du chargement. En effet, comme il a été observé (3) (4) , la microstructure développée lors d'un premier chargement est caractéristique de ce chargement. Lors d'un chargement ultérieur différent, cette première sous-structure tend à disparaître au profit d'une autre sous-structure caractéristique du second chargement.

La prise en compte directe de ces évolutions microstructurales dans les lois rhéologiques macroscopiques est fort complexe. Différentes tentatives qualitatives ont été faites (55)(56) en ne prenant en compte que certains aspects purement géométriques de la sous-structure. Or, cette microstructure de dislocations intervient, au delà de ses caractéristiques géométriques, par l'intermédiaire de paramètres mécaniques tels que contraintes internes, densité de dislocations, désorientation entre cellules, nombre et nature des systèmes de glissement actifs. Différentes études (57)(58)(59)(60) ont porté sur la description des parois des cellules en terme de dislocations discrètes, mais sans tenir compte du mode de déformation. Or, une des caractéristiques essentielles de cette sous-structure est qu'elle ne peut se développer que si l'énergie élastique associée à l'incompatibilité de la déformation plastique hétérogène reste limitée, voire nulle. En effet, on peut penser qu'un mode de déformation plastique uniforme compatible (ne créant pas de contraintes internes) serait, de préférence au mode hétérogène, choisi par le matériau pour accommoder la déformation macroscopique imposée.

Pour décrire les cellules de dislocations en tenant compte du mode de déformation, il serait donc nécessaire de rechercher toutes les configurations de déformation plastique hétérogène mais compatible, ce qui est complexe, fastidieux et difficile à introduire dans les lois rhéologiques macroscopiques. Ce problème peut être simplifié si on adopte

l'hypothèse que les parois des cellules sont fines (faible épaisseur) et planes (ce qui correspond aux observations expérimentales). La densité de dislocations à l'intérieur des cellules étant beaucoup plus faible que dans les parois (à peu près 5 fois plus faible)(4)(61), on pourra également supposer que la déformation plastique est uniforme de part et d'autre de l'interface représentant la paroi de la cellule. Le plan de l'interface, assurant la compatibilité de la déformation plastique est appelé plan d'habitat (ou plan d'accolement) dont le concept est courant dans le cas des transformations de phases .

Dans ce chapitre(62), nous analysons les conditions de compatibilité de la déformation plastique de part et d'autre d'une interface plane. Nous donnons les conditions générales d'existence du plan d'habitat, les composantes de sa normale, ainsi que les relations de désorientation entre les cellules adjacentes et la densité de dislocations dans l'interface. Nous étudions ces plans dans le cas des métaux C.F.C. Les résultats obtenus sont confrontés aux observations expérimentales de D. Caillard (21) dans le cas de l'aluminium déformé entre 20 et 200°C. Nous calculons également l'énergie élastique spécifique associée à une incompatibilité partielle servant ainsi d'indication sur la stabilité relative des interfaces.

IV-2. Conditions de compatibilité et orientation du plan d'habitat.

Soit un milieu infini homogène et à élasticité linéaire isotrope, et soit \vec{n} (de composantes n_i), la normale unitaire à l'interface plane P séparant le milieu en deux régions notées 1 et 2. La partie plastique du gradient de déplacement total est supposée uniforme dans chaque région et égale respectivement à β^{p1} et β^{p2} . En général, un tel champ de déformation est incompatible, et une déformation supplémentaire, élastique ou plastique, s'ajoute afin d'assurer la compatibilité de la déformation totale. Dans le

cas des métaux ou des matériaux à fort module élastique par rapport au seuil d'écoulement plastique, il est peu vraisemblable que cette déformation supplémentaire puisse être totalement élastique, ce qui entraînerait des contraintes internes importantes. Nous supposons donc nulle la déformation élastique, ce qui revient à trouver, si elle existe, une déformation plastique compatible (sans contraintes internes d'incompatibilité), constante par morceaux de part et d'autre de l'interface plane P. Le champ $\underline{\epsilon}^p$ peut s'écrire dans ce cas :

$$\epsilon_{ij}^p(r) = \epsilon_{ij}^p + \Delta\epsilon_{ij}^p \cdot \delta_v(r) \quad [IV-1]$$

avec :

$$\Delta\epsilon_{ij}^p = \epsilon_{ij}^p - \epsilon_{ij}^p$$

$$\delta_v(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \in 1 \\ 1 & \text{si } r \in 2. \end{cases}$$

Le tenseur d'incompatibilité associé à ce champ de déformation plastique est donné par [II-62] :

$$\eta_{ij} = \bar{\eta}_{ij} \cdot \delta'(S) \quad [IV-2]$$

δ' est la dérivée de δ .

Il correspond au tenseur $\underline{\eta}^1$ du chapitre III (tenseur correspondant aux contraintes d'incompatibilité à grande distance).

La compatibilité de la déformation est assurée si toutes les composantes du tenseur $\underline{\eta}$ sont nulles, ce qui donne un système homogène de six équations :

$$\begin{aligned}
n_2^2 \cdot \Delta c_{33}^p + n_3^2 \cdot \Delta c_{22}^p - 2n_2 n_3 \cdot \Delta c_{23}^p &= 0 \\
n_1^2 \cdot \Delta c_{33}^p + n_3^2 \cdot \Delta c_{11}^p - 2n_1 n_3 \cdot \Delta c_{13}^p &= 0 \\
n_1^2 \cdot \Delta c_{22}^p + n_2^2 \cdot \Delta c_{11}^p - 2n_1 n_2 \cdot \Delta c_{12}^p &= 0 \\
n_3^2 \cdot \Delta c_{12}^p + n_1 n_2 \cdot \Delta c_{33}^p - n_1 n_3 \Delta c_{23}^p - n_2 n_3 \cdot \Delta c_{13}^p &= 0 \quad [IV-3] \\
n_2^2 \cdot \Delta c_{13}^p + n_1 n_3 \cdot \Delta c_{22}^p - n_2 n_3 \Delta c_{12}^p - n_1 n_2 \cdot \Delta c_{23}^p &= 0 \\
n_1^2 \cdot \Delta c_{23}^p + n_2 n_3 \cdot \Delta c_{11}^p - n_1 n_3 \Delta c_{12}^p - n_1 n_2 \cdot \Delta c_{13}^p &= 0
\end{aligned}$$

De plus les composantes de la normale vérifient :

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \quad [IV-4]$$

Ecrit dans le repère principal de $\Delta \underline{c}^p$, ce système devient :

$$\begin{aligned}
N_2^2 \cdot \Delta c_{33}^p + N_3^2 \cdot \Delta c_{22}^p &= 0 \\
N_1^2 \cdot \Delta c_{33}^p + N_3^2 \cdot \Delta c_{11}^p &= 0 \\
N_1^2 \cdot \Delta c_{22}^p + N_2^2 \cdot \Delta c_{11}^p &= 0 \\
N_1 N_2 \cdot \Delta c_{33}^p &= 0 \quad [IV-5] \\
N_1 N_3 \cdot \Delta c_{22}^p &= 0 \\
N_2 N_3 \cdot \Delta c_{11}^p &= 0
\end{aligned}$$

On peut aisément vérifier que ce système n'a de solution non triviale (en N_i) que si au moins l'une des déformations principales est nulle (une seule est nulle si $\Delta c_{kk}^p = 0$). En vertu des propriétés du troisième invariant scalaire associé à un tenseur symétrique de second ordre, cette condition est équivalente à :

$$\det [\Delta \underline{c}^p] = 0 \quad [IV-6]$$

Cette condition annule les contraintes $\underline{\sigma}^1$ du chapitre précédent.

Si elle n'est pas vérifiée, le champ de déformation plastique tel qu'il est ne peut pas être compatible. Par contre, dans le cas où la condition est satisfaite, il est possible de trouver une interface dont les composantes vérifient [IV-3] et assurant la compatibilité de la déformation plastique. Il est à noter que le système donne deux solutions orthogonales \vec{N}_1 et \vec{N}_2 et dont les composantes dans le repère principal de $\Delta \underline{\epsilon}^p$ sont (pour $\Delta \epsilon_{22}^p = 0$) :

$$\vec{N}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 \ 0 \ 1) \text{ et } \vec{N}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 \ 0 \ -1).$$

Remarque:

Le choix de la déformation principale nulle du tenseur $\Delta \underline{\epsilon}^p$ n'influence pas sur les normales compatibles transformées dans le repère initial.

IV-3. Densité de dislocations et rotations élastiques :

La déformation plastique étant compatible et les normales au plan d'habitat déterminées, le tenseur densité de dislocations superficielles est donné par [II-59]. Les rotations élastiques peuvent alors être déterminées à partir de $\underline{\alpha}$ par [II-25] :

$$\omega_{i,j}^p = \epsilon_{ikl} \cdot \epsilon_{ijl}^p - \alpha_{ij} + 1/2 \alpha_{mm} \cdot \delta_{ij} \quad [IV-7]$$

Dans le problème présent on a :

$$\Delta \omega_{i,j}^p \cdot n_j = - \bar{\alpha}_{ij} + 1/2 \bar{\alpha}_{mm} \cdot \delta_{ij} \quad [IV-8]$$

$$\text{avec :} \quad \Delta \omega_1^p = \Delta \omega_{23}^p, \Delta \omega_2^p = \Delta \omega_{31}^p \text{ et } \Delta \omega_3^p = \Delta \omega_{12}^p \quad [IV-9]$$

et n_j : composantes de la normale au plan d'habitat.

Les relations [IV-8] forment un système linéaire en $\Delta\omega^*$:

$$\begin{aligned}
 \Delta\omega_{23}^* \cdot n_1 &= 1/2 (\bar{\alpha}_{22} + \bar{\alpha}_{33} - \bar{\alpha}_{11}) \\
 \Delta\omega_{31}^* \cdot n_1 &= -\bar{\alpha}_{21} \\
 \Delta\omega_{12}^* \cdot n_1 &= -\bar{\alpha}_{31} \\
 \Delta\omega_{23}^* \cdot n_2 &= -\bar{\alpha}_{12} \\
 \Delta\omega_{31}^* \cdot n_2 &= 1/2 (\bar{\alpha}_{11} + \bar{\alpha}_{33} - \bar{\alpha}_{22}) \\
 \Delta\omega_{12}^* \cdot n_2 &= -\bar{\alpha}_{32} \\
 \Delta\omega_{23}^* \cdot n_3 &= -\bar{\alpha}_{13} \\
 \Delta\omega_{31}^* \cdot n_3 &= -\bar{\alpha}_{23} \\
 \Delta\omega_{12}^* \cdot n_3 &= 1/2 (\bar{\alpha}_{11} + \bar{\alpha}_{22} - \bar{\alpha}_{33})
 \end{aligned}
 \tag{IV-10}$$

Une partie des résultats précédents (formules liant $\bar{\alpha}$ à $\Delta\beta^p$ et à $\Delta\omega^*$) est en fait connue sous la forme discrète des formules de Frank concernant l'équilibre des interfaces (63), mais ces formules géométriques ne relient pas, à notre connaissance, les mécanismes de déformation à la structure de l'interface.

Différents travaux concernant les aspects cristallographiques et géométriques des sous-joints ont été développés (64)(65) ; dans ce travail, l'interface "plan d'habitat" est plutôt considérée comme interface compatible (n'introduisant pas de contraintes internes à grande distance) séparant deux régions déformées plastiquement.

IV-4. Application au cas des métaux C.F.C. :

IV-4.1 Préliminaire:

Nous n'envisageons pas telle ou telle situation particulière de déformation plastique associée à un mode de chargement donné, mais plutôt la situation générale où interviennent les mécanismes de déformation plastique par glissement. A froid, dans les métaux de structure C.F.C., le glissement a lieu sur des plans $\{111\}$ dans les directions $\langle 110 \rangle$ (voir tableau II.1).

Différentes situations peuvent se présenter en fonction du nombre et de la nature des systèmes de glissement actifs. Ces situations sont résumées sur la figure IV.2. Bien sûr, à l'intérieur de chaque catégorie, les solutions seront différentes selon la nature des systèmes concernés.

Nous limitons cette étude au cas où au maximum trois systèmes de glissement différents sont actifs. Cette restriction peut se justifier par le fait que la formation des cellules de dislocations intervient justement pour limiter le glissement multiple homogène qui entraînerait un très fort écrouissage latent.

Pour une famille de systèmes de glissement actifs avec des amplitudes γ^k , on a les relations usuelles [II-71 à II-75]:

$$\beta_{ij}^p = n_i^p m_j^p \gamma^k$$

$$e_{ij}^p = R_{ij}^p \gamma^k$$

$$\omega_{ij}^p = S_{ij}^p \gamma^k$$

(somme sur k)

La méthode d'exploitation de la théorie est la suivante :

Pour un mode de déformation donné (glissement simple ou multiple, homogène ou hétérogène), on cherche la ou les conditions de compatibilité : on calcule le tenseur $\Delta \underline{\epsilon}^p$, et on cherche dans quelles conditions portant sur les amplitudes γ^k , l'équation [IV-6] est vérifiée.

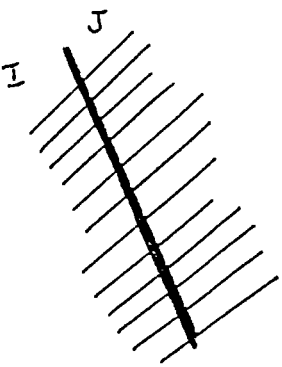
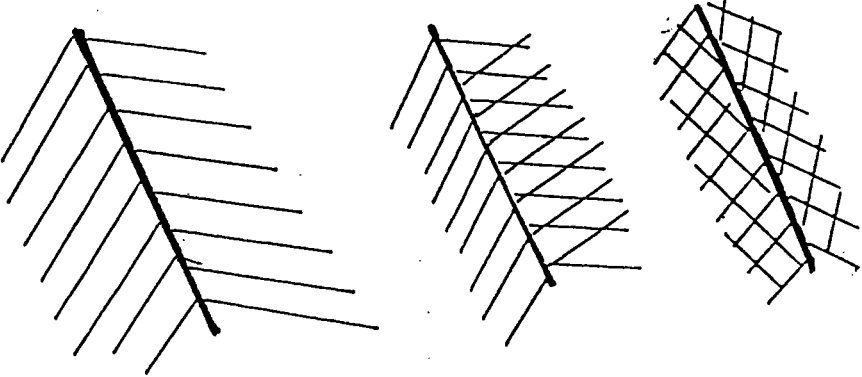
| | | |
|---|--|---------------------------------------|
|  |  | |
| <p>glissement simple unique homogène</p> | <p>glissement simple double hétérogène</p> | <p>glissement multiple hétérogène</p> |
| <p>1 système actif</p> | <p>2 systèmes actifs</p> | <p>3, 4, 5 ... systèmes actifs</p> |

Fig. IV.2 : Différentes situations pour la formation des plans d'habitat lorsque le mécanisme de déformation est le glissement.

En général plusieurs solutions sont possibles. Les équations [IV-3] fournissent alors les différentes normales à l'interface et à partir des équations [II-59] et [IV-10] on calcule la densité superficielle de dislocations et la désorientation relative des deux cellules. La seule partie fastidieuse concerne l'annulation du déterminant de $\Delta \underline{\epsilon}^P$ lorsque le nombre de systèmes de glissement est important. C'est pourquoi nous nous limitons au cas du glissement simple hétérogène et au cas du glissement multiple hétérogène à trois systèmes de glissement, ainsi qu'au cas d'une jonction triple à glissement hétérogène.

IV-4.2. Cas du glissement simple.

Dans ce cas, nous supposons, que de part et d'autre de l'interface (régions 1 et 2) un seul système de glissement est actif (déformation plastique constante par morceaux). Ces deux systèmes sont notés I et J.

La déformation plastique dans la région 1 est :

$$\epsilon_{ij}^1 = R_{ij}^1 \gamma^I \quad [IV-11]$$

et dans la région 2 :

$$\epsilon_{ij}^2 = R_{ij}^2 \gamma^J \quad [IV-12]$$

La condition de compatibilité est satisfaite si :

$$\det(R_{ij}^2 \gamma^J - R_{ij}^1 \gamma^I) = 0 \quad [IV-13]$$

En fonction de la nature des systèmes I et J, la solution de cette équation ne comporte que trois cas distincts :

- α_1) existence du plan d'habitat quelque soit γ^I et γ^J
- α_2) existence du plan d'habitat si $\gamma^I = \pm \gamma^J$
- α_3) existence du plan d'habitat si $\gamma^I = \pm 2/3 \gamma^J$.

Tous les couples de systèmes de glissement (I,J) admettent une interface compatible si l'une ou l'autre des conditions précédentes est vérifiée.

Ces conditions peuvent être reliées à la nature des interactions entre les dislocations des différents systèmes de glissement. Les coefficients $a_{i,j}$ d'interaction entre les dislocations qui interviennent dans l'écroutissage latent du monocristal sont divisés en quatre groupes (66)(67) :

a_0 : interaction des dislocations d'un même système.

a_1 : interaction entre les dislocations des systèmes coplanaires, colinéaire ou formant un verrou de Hirth (dislocations de vecteurs de Burgers orthogonaux).

a_2 : interaction entre les dislocations des systèmes formant des jonctions glissiles (la réaction des dislocations des deux systèmes forme une dislocation énergétiquement plus stable et dont le plan de glissement est un plan du type $\{111\}$ dans les C.F.C.).

a_3 : interaction entre les dislocations des systèmes formant un verrou de Lomer-Cottrel (jonctions énergétiquement stables et cessiles).

Le tableau IV.1 donne les solutions pour les différents cas particuliers, ainsi que les normales aux interfaces obtenues, et la nature des interactions entre les dislocations associées à chaque système.

On constate que :

* la première condition de compatibilité (α_1) correspond aux systèmes colinéaires ou coplanaires.

* La seconde condition (α_2) correspond aux systèmes dont les dislocations forment des verrous (verrou de Hirth, verrou de Lomer-Cottrel).

| systeme J systeme I | A2 | A3 | A6 | B2 | B4 | B5 | C1 | C3 | C5 | D1 | D4 | D6 |
|------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|----------------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| A2 | CP+CL SC (111)(011) | CP SC (111)(x1x-1) | CP SC (111)(x11+x) | CL SC (011) (x+1x-1x-1) | JG 2/3 (211)(131) | JG 2/3 (211)(113) | VH -1 (100)(010) | JG 3/2 (121)(311) | VLC 1 (111)(101) | VH 1 (100)(001) | VLC 1 (111)(110) | JG 3/2 (112)(311) |
| A3 | | CP+CL SC (111)(101) | CP SC (111)(1-x*x) | JG 3/2 (211)(131) | VH 1 (010)(100) | VLC -1 (111)(011) | JG -2/3 (121)(311) | CL SC (101) (x+1x-1x+1) | JG -2/3 (121)(113) | VLC 1 (111)(110) | VH 1 (001)(010) | JG -3/2 (112)(131) |
| A6 | | | CP+CL SC (111)(110) | JG 3/2 (211)(131) | VLC 1 (111)(011) | VH -1 (100)(001) | VLC 1 (111)(101) | JG -3/2 (121)(113) | VH -1 (001)(010) | JG -2/3 (112)(311) | JG 2/3 (112)(131) | CL SC (110) (1+x1+x1-x) |
| B2 | | | | CP+CL SC (111)(011) | CP SC (111)(x11-x) | CP SC (111)(x*x-11) | VH -1 (100)(001) | VLC -1 (111)(110) | JG 3/2 (112)(311) | VH 1 (010)(100) | JG 3/2 (121)(311) | VLC 1 (111)(101) |
| B4 | | | | | CP+CL SC (111)(101) | CP SC (111)(1+x*x) | VLC -1 (111)(110) | VH -1 (001)(010) | JG -3/2 (112)(131) | JG 2/3 (121)(311) | CL SC (101) (1-x1+x1-x) | JG -2/3 (121)(113) |
| B5 | | | | | | CP+CL SC (111)(110) | JG -2/3 (112)(311) | JG 2/3 (112)(131) | CL SC (110) (1-x1-x1+x) | VLC 1 (111)(101) | JG -3/2 (121)(113) | VH 1 (001)(010) |
| C1 | | | | | | | CP+CL SC (111)(011) | CP SC (111)(x11-x) | CP SC (111)(x1+x1) | CL SC (011) (1-x1+x1+x) | JG -2/3 (211)(131) | JG 2/3 (211)(113) |
| C3 | | | | | | | | CP+CL SC (111)(101) | CP SC (111)(1-x*x) | JG 3/2 (211)(131) | VH -1 (100)(010) | VLC 1 (111)(011) |
| C5 | | / | | | | | | CP+CL SC (111)(110) | JG 3/2 (211)(113) | VLC -1 (111)(011) | VH 1 (100)(010) | |
| D1 | | | | | | | | | CP+CL SC (111)(011) | CP SC (111)(x11-x) | CP SC (111)(x1-x1) | |
| D4 | | | | | | | | | | CP+CL SC (111)(101) | CP SC (111)(1+x*x) | |
| D6 | | | | | | | | | | | | CP+CL SC (111)(110) |

Tableau IV.4: - Nature des interactions entre les dislocations des systèmes de glissement dans les C.F.C.

C.P. : coplanaires ; C.L. : colinéaires ; J.G. : jonctions glissiles ; V.L. : Verrou de Lomel-Cott
V.H. : verrou de Hirth

- Conditions de compatibilité sur le rapport γ_J/γ_I . SC : sans condition
- Normales aux plans d'habitat ($x = \gamma_J/\gamma_I$)

* La troisième condition (α_3) correspond aux systèmes dont les dislocations forment des jonctions glissiles.

Les caractéristiques des jonctions entre les dislocations des différents systèmes (vecteur de Burgers, ligne et plan de glissement des dislocations résultantes), ainsi que les normales aux plans d'habitat correspondant sont représentées dans les tableaux IV.2 IV.3 et IV.4.

Remarques :

* les solutions obtenues contiennent également celles concernant le cas du glissement double hétérogène (les deux systèmes actifs dans 2, pas de glissement dans 1). Il suffit de remplacer dans les équations γ^i par $-\gamma^i$.

* Dans le cas d'un glissement unique hétérogène (le même système de part et d'autre de l'interface avec des amplitudes de glissement différentes), la compatibilité est toujours assurée ($\det R_{ij} = 0$). Les plans d'habitat sont le plan de glissement et le plan orthogonal. Cette situation a été expérimentalement observée par Higashida et all.(68) qui ont étudié les bandes de déformation dans le cuivre et le cuivre-germanium (à 1% atom.). Sur la figure IV.3, on voit clairement que le plan de la bande (plan d'habitat) est parallèle au plan de glissement ou perpendiculaire à ce plan.

IV-4.3. Cas du glissement multiple hétérogène à trois systèmes :

Pour traiter le cas général, il faudrait envisager un grand nombre de situations particulières. Nous nous limitons ici au cas où les systèmes actifs sont A_2 , B_4 , C_1 et au besoin (confrontation avec l'expérience) nous traiterons d'autres cas.

| systemes (i-j) | condition de compatibilité γ_j/γ_i | \vec{br} ($br=a$) | PGDR | plans d'habitat. |
|---------------------------------|--|--------------------------|-------|------------------|
| A ₂ - C ₁ | - 1 | [001] | (010) | (100) (010) |
| A ₂ - D ₁ | 1 | [001] | (1T0) | (100) (001) |
| A ₃ - B ₄ | 1 | [001] | (100) | (100) (010) |
| A ₃ - D ₄ | 1 | [001] | (T10) | (010) (001) |
| A ₆ - B ₅ | -1 | [100] | (011) | (100) (001) |
| A ₆ - C ₅ | -1 | [100] | (010) | (010) (001) |
| B ₂ - C ₁ | -1 | [001] | (110) | (100) (001) |
| B ₂ - D ₁ | 1 | [100] | (010) | (100) (010) |
| B ₄ - C ₃ | -1 | [001] | (110) | (010) (001) |
| B ₅ - D ₆ | 1 | [100] | (010) | (010) (001) |
| C ₃ - D ₄ | -1 | [001] | (100) | (100) (010) |
| C ₅ - D ₆ | 1 | [100] | (01T) | (100) (001) |

Tableau IV.2 : caractéristiques des dislocations et plans d'habitat
(pour les verrous de Hirth).

\vec{br} : vecteur de Burgers résultant.

PGDR : plan de glissement de la dislocation résultante.

| systemes (i-j) | condition de compatibilité γ_j/γ_i | \vec{br} ($br = \frac{a\sqrt{2}}{2}$) | PGDR | plans d'habitat. |
|---------------------------------|--|--|-------|------------------|
| A ₂ - C ₅ | 1 | [10T] | (010) | (1T1) (10T) |
| A ₂ - D ₄ | 1 | [T10] | (001) | (11T) (1T0) |
| A ₃ - B ₅ | -1 | [011] | (100) | (1T1) (011) |
| A ₃ - D ₁ | 1 | [1T0] | (001) | (111) (1T0) |
| A ₆ - B ₄ | 1 | [011] | (100) | (11T) (011) |
| A ₆ - C ₁ | 1 | [10T] | (010) | (111) (10T) |
| B ₂ - C ₃ | -1 | [110] | (001) | (1T1) (110) |
| B ₂ - D ₆ | 1 | [101] | (010) | (11T) (101) |
| B ₄ - C ₁ | -1 | [110] | (001) | (T11) (110) |
| B ₅ - D ₁ | 1 | [101] | (010) | (T11) (101) |
| C ₃ - D ₆ | 1 | [0T1] | (100) | (111) (01T) |
| C ₅ - D ₄ | -1 | [0T1] | (100) | (T11) (01T) |

Tableau IV.3 : caractéristiques des dislocations et plans d'habitat
(pour les verrous de Lomer-Gottrel).

| systèmes (i-j) | condition de compatibilité γ_j/γ_i | \vec{br} ($br = a\sqrt{2}/2$) | PDR | plans d'habitat. |
|---------------------------------|--|--------------------------------------|-------|------------------|
| A ₂ - B ₄ | 2/3 | [T10] | (111) | (211) (13T) |
| A ₂ - B ₅ | 2/3 | [10T] | (111) | (211) (1T3) |
| A ₂ - C ₃ | -3/2 | [110] | (T11) | (12T) (3T1) |
| A ₂ - D ₆ | 3/2 | [101] | (T11) | (1T2) (31T) |
| A ₃ - B ₂ | 3/2 | [110] | (T11) | (211) (13T) |
| A ₃ - C ₁ | -2/3 | [1T0] | (T11) | (T21) (311) |
| A ₃ - C ₅ | -2/3 | [011] | (11T) | (T21) (1T3) |
| A ₃ - D ₆ | -3/2 | [01T] | (T11) | (1T2) (131) |
| A ₆ - B ₂ | -3/2 | [101] | (T11) | (211) (113) |
| A ₆ - C ₃ | -3/2 | [01T] | (T11) | (12T) (113) |
| A ₆ - D ₁ | -2/3 | [10T] | (1T1) | (T12) (311) |
| A ₆ - D ₄ | 2/3 | [011] | (1T1) | (T12) (13T) |
| B ₂ - C ₅ | 3/2 | [10T] | (111) | (112) (3T1) |
| B ₂ - D ₄ | 3/2 | [T10] | (111) | (121) (31T) |
| B ₄ - C ₅ | -3/2 | [0T1] | (111) | (112) (T31) |
| B ₄ - D ₁ | 2/3 | [110] | (1T1) | (121) (311) |
| B ₄ - D ₆ | -2/3 | [011] | (1T1) | (121) (113) |
| B ₅ - C ₁ | -2/3 | [101] | (11T) | (112) (311) |
| B ₅ - C ₃ | 2/3 | [011] | (11T) | (112) (13T) |
| B ₅ - D ₄ | -3/2 | [0T1] | (111) | (121) (T13) |
| C ₁ - D ₄ | -2/3 | [110] | (1T1) | (21T) (T31) |
| C ₁ - D ₆ | -2/3 | [10T] | (1T1) | (21T) (113) |
| C ₃ - D ₁ | -3/2 | [1T0] | (11T) | (2T1) (131) |
| C ₅ - D ₁ | 3/2 | [101] | (11T) | (2T1) (T13) |

Tableau IV.4 : caractéristiques des dislocations et plans d'habitat
(pour les jonctions glissiles).

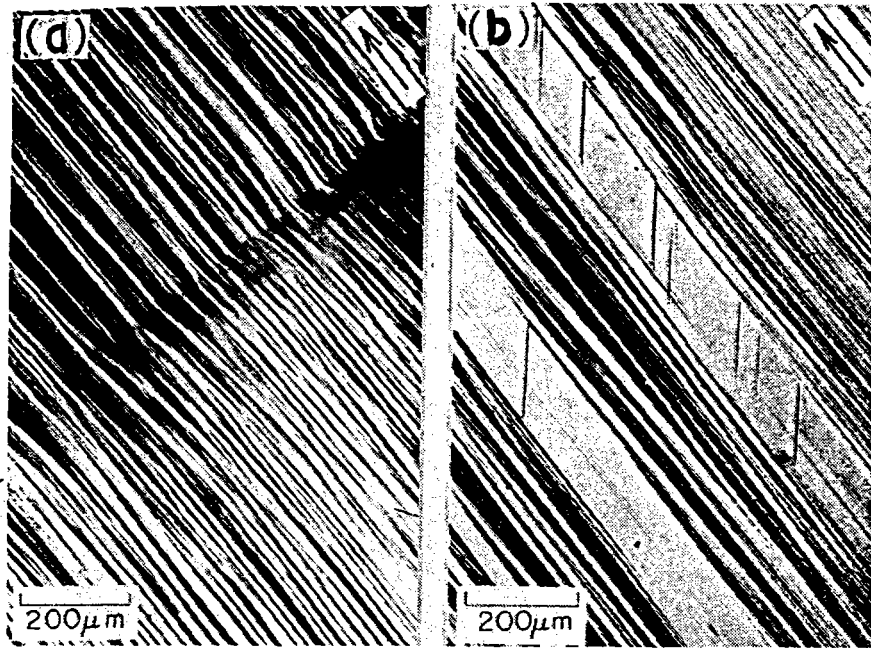


Fig. IV.3 : Bandes de déformation dans un monocristal de Cu-Ge (1 % atm) ($\gamma = 0.404$) d'après Higashida (68)

- a) Bande de pliage
- b) Bande de "glissement secondaire"

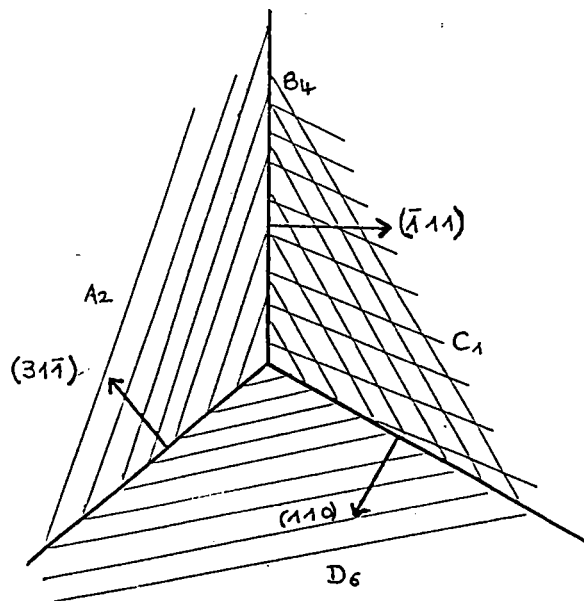


Fig. IV.4 : Cas d'une jonction triple à glissement hétérogène.

Ces systèmes de glissement sont tels que :

dans la zone 1 : système A_2 (T 1 1) [0 T 1] glissement γ_1

dans la zone 2: $\left\{ \begin{array}{l} \text{système } B_4 \text{ (1 1 T) [T 0 1] glissement } \gamma_2 \\ \text{système } C_1 \text{ (1 1 T) [0 1 1] glissement } \gamma_3 \end{array} \right.$

Dans le repère du cristal, on a les déformations suivantes :

$$e_{fj}(\gamma_1) = \gamma_1/2\sqrt{6} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$e_{fj}(\gamma_2) = \gamma_2/2\sqrt{6} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$e_{fj}(\gamma_3) = \gamma_3/2\sqrt{6} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

pour $\Delta e_{fj} = e_{fj}(\gamma_2) + e_{fj}(\gamma_3) - e_{fj}(\gamma_1)$

on a :

$$\Delta e_{fj} = 1/2\sqrt{6} \begin{bmatrix} -2\gamma_2 & \gamma_3 - \gamma_2 - \gamma_1 & \gamma_1 + \gamma_3 \\ \gamma_3 - \gamma_2 - \gamma_1 & 2(\gamma_3 + \gamma_1) & \gamma_2 \\ \gamma_1 + \gamma_3 & \gamma_2 & 2(\gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_1) \end{bmatrix} \quad [IV-14]$$

La condition de compatibilité est :

$$\det(\Delta e_{fj}) = K(2\gamma_1^2\gamma_2 - 3\gamma_1\gamma_2^2 - 2\gamma_1^2\gamma_3 + 5\gamma_1\gamma_2\gamma_3 - \gamma_3\gamma_2^2 - 2\gamma_1\gamma_3^2 + \gamma_2\gamma_3^2) = 0 \quad [V-15]$$

où K est une constante sans intérêt.

Cette condition est satisfaite dans plusieurs situations :

i) $\gamma_1 = 0$

La condition à satisfaire admet les solutions triviales suivantes :

* $\gamma_1 = 0$ $\gamma_2 = 0$ γ_3 quelconque : glissement simple hétérogène

* $\gamma_1 = 0$ $\gamma_3 = 0$ γ_2 quelconque : glissement simple hétérogène

* $\gamma_1 = 0$ $\gamma_2 = \gamma_3$: glissement double hétérogène.

Ces différents cas s'apparentent aux cas traités précédemment. Il en est de même des cas où γ_2 ou γ_3 sont nuls.

ii) $\gamma_1 \neq 0$

Dans ce cas nous introduisons les glissements relatifs x et y sur les systèmes B_4 et C_1 par rapport à celui du système A_2 , tels que :

$$x = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \text{ et } y = \frac{\gamma_3}{\gamma_1} \quad [\text{IV-16}]$$

La condition [IV-15] devient alors :

$$(3+y)x^2 - (2+y^2+5y)x + 2y(1+y) = 0$$

Elle admet les solutions suivantes :

$$* y = -3 \quad x = -3$$

$$* y \neq -3 \quad \left\{ \begin{array}{l} x = y \\ x = 2 \cdot \frac{1+y}{3+y} \end{array} \right. \quad [\text{IV-17}]$$

Le calcul des normales à l'interface se fait à partir des relations [IV-3]. Les différentes situations pour ce cas à trois systèmes sont résumées dans le tableau IV.5. D'autres situations correspondant au glissement hétérogène à trois systèmes sont traitées dans le paragraphe IV-6. Ils correspondent à des observations expérimentales faites par Caillard (21)

| Conditions sur les glissements | Plans d'habitat |
|--|--------------------------------|
| $\gamma_1 = 0$ $\gamma_2 = 0$ γ_3 qqe | (11T) (01T) |
| $\gamma_1 = 0$ $\gamma_2 \neq 0$ $\gamma_3 = 0$ | (111) (101) |
| $\gamma_1 = 0$ $\gamma_2 = \gamma_3$ | (T11) (110) |
| $\gamma_1 \neq 0$ $\gamma_2 = \gamma_3$ | (T11) (y 1+y T) |
| $\gamma_1 \neq 0$ $\gamma_2 = 2 \gamma_1 \frac{\gamma_1 + \gamma_3}{3\gamma_1 + \gamma_3}$ | (-2 1+y 1+y) (1+y 3+y -y-1) |

Tableau IV.5 : Conditions de compatibilité et normales aux plans d'habitat des systèmes B_4 , C_1 et A_2 .
y étant le rapport γ_3/γ_1 .

IV-4.4. Cas d'une jonction triple à glissement hétérogène.

L'hypothèse d'un plan d'habitat infini qui a été utilisée pour la formulation générale du paragraphe IV-2 simplifie les calculs mais n'altère pas la généralité de la solution puisque l'opérateur incompatibilité est local, et la condition de compatibilité doit être vérifiée en tout point. Néanmoins, les plans d'habitat peuvent être limités dans le cas, par exemple, où il se forme des jonctions (14).

Nous étudions le cas particulier d'une jonction triple à trois plans d'habitat en intersection selon une droite commune. Par application successive de la condition ($\det \Delta \epsilon_{ij} = 0$), on arrive à trouver la situation d'hétérogénéité plastique correspondante (voir fig.IV.4).

Lorsqu'un seul système est actif par zone, et lorsque les trois systèmes sont coplanaires, la solution est toujours possible sans condition sur les amplitudes de glissement. Si les systèmes ne sont pas coplanaires aucune solution n'est possible.

Nous avons traité le cas particulier correspondant à la figure IV.4 pour lequel deux systèmes (B_4 et C_1) sont actifs dans l'une des zones, et les deux autres zones présentent un glissement simple sur les systèmes A_2 et D_6 .

Cette situation est compatible lorsque les conditions suivantes sont vérifiées :

$$\frac{\gamma(D_6)}{\gamma(A_2)} = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad \gamma(B_4) = \gamma(C_1)$$

Dans ce cas, les normales aux interfaces sont (voir figure) :

$$(3 \ 1 \ T), (1 \ 1 \ 0) \text{ et } (T \ 1 \ 1)$$

IV-5. Situation d'incompatibilité partielle :

Entre les deux situations extrêmes : compatibilité totale (contraintes internes nulles) et incompatibilité totale dont l'énergie de déformation élastique associée est donnée par [II-70], l'existence de plans d'habitat partiellement compatibles peut être envisagée de deux manières distinctes.

~~La première~~ consiste à supposer que, pour un mode de déformation donné, la normale à l'interface est bien celle correspondant au plan d'habitat compatible, mais que la condition de compatibilité portant sur les déformations n'est qu'approximativement vérifiée (écart à la compatibilité). Cette situation d'incompatibilité partielle engendre bien sûr des contraintes internes et une énergie élastique, mais d'un ordre de grandeur acceptable.

L'autre situation correspond au cas où la normale à l'interface ne vérifie pas les conditions de compatibilité, mais où, par contre, la condition sur les déformations est vérifiée.

Ces situations peuvent ainsi se présenter expérimentalement avec des énergies d'incompatibilité relativement acceptables. Dans les deux cas les contraintes internes d'incompatibilité sont données par les relations [II-65] et l'énergie associée par [II-70].

A titre d'exemple de situation partiellement compatible, nous étudions le glissement simple hétérogène (à 2 systèmes de glissement) où l'interface est le plan d'habitat compatible, mais où la condition sur les γ n'est pas vérifiée. Nous traitons le cas où les systèmes B_4 et C_1 sont actifs de part et d'autre de l'interface, situation qui conduit à des verrous de Lomer-Cottrell.

La condition de compatibilité est :

$$\gamma(C_1) = -\gamma(B_4)$$

et nous posons pour décrire l'écart à cette relation :

$$\Delta\gamma = \gamma(C_1) + \gamma(B_4)$$

Dans le cas où la normale à l'interface est (111), le calcul de l'énergie élastique spécifique pour un rapport de Poisson $\nu = 1/3$ donne :

$$w_{T11} = \frac{\mu}{18} (\Delta\gamma)^2 = 0.056\mu(\Delta\gamma)^2$$

Dans le cas où la normale est (110) on a :

$$w_{110} = \frac{7\mu}{96} (\Delta\gamma)^2 = 0.073\mu(\Delta\gamma)^2$$

Pour un couple de systèmes formant une jonction glissile (par exemple B_4 et C_5) les énergies sont :

$$W_{112} = \frac{\mu}{72} (\Delta\gamma)^2 = 0.014\mu(\Delta\gamma)^2$$

$$W_{T31} = \frac{14\mu}{363} (\Delta\gamma)^2 = 0.038\mu(\Delta\gamma)^2$$

Quant aux couples de systèmes formant des verrous de Hirth, l'énergie est la même pour les deux normales et pour tous les systèmes et vaut :

$$W = \frac{\mu}{12} (\Delta\gamma)^2 = 0.083\mu(\Delta\gamma)^2$$

Cette analyse montre que la présence des parois de dislocations (et des sous-joints de grains) n'est pas forcément associée à la compatibilité totale de la déformation plastique, mais que ces mêmes parois peuvent exister également en présence de contraintes internes ; celles-ci doivent néanmoins rester limitées par l'accommodation plastique. La différence d'énergie calculée dans le cas d'incompatibilité partielle pour une paire de systèmes de glissement en considérant les deux normales aux plans d'habitat, indique que certaines situations peuvent être privilégiées. Cette propriété joue certainement sur la morphologie des cellules.

IV-6. Confrontation avec l'expérience :

Nous utilisons les résultats théoriques des paragraphes précédents pour interpréter les observations en microscopie électronique de Caillard (21), sur des éprouvettes d'aluminium déformées entre 20 et 200°C sous des contraintes de 10 à 80 MPa. Les essais sont poursuivis jusque dans le stade du fluage secondaire, et les éprouvettes sont refroidies sous charge. On peut penser que dans les conditions de ces essais, la formation des cellules

et des parois de dislocations se fait sans contraintes internes à grande distance par rapport au plan d'interface qui peut donc être considéré comme étant un plan d'habitat.

Les observations de Caillard portent à la fois sur les dislocations présentes à l'interface (vecteurs de Burgers, arrangement des dislocations, indication sur la densité de dislocation de chaque famille) et sur la normale à l'interface. L'étude porte sur différents cas; ici nous traitons quelques cas typiques de cette étude afin de montrer la validité des résultats précédents.

a- sous-joint de torsion composé de trois familles de dislocations vis à 120° (fig.IV.5.a).

les dislocations présentes ont respectivement les vecteurs de Burgers :

$$\vec{b}_1 = a/2 [1 \ 0 \ 1]$$

$$\vec{b}_2 = a/2 [0 \ 1 \ 1]$$

$$\vec{b}_3 = a/2 [1 \ 1 \ 0]$$

et ont des longueurs pratiquement égales.

a étant le paramètre de la maille.

Le joint observé expérimentalement est un joint de torsion de normale (111).

Le tenseur densité de dislocations superficielles $\bar{\alpha}_{ij}$ s'écrit dans ce cas :

$$\bar{\alpha}_{ij} = a_k t_i b_j^k \quad [IV-18]$$

(somme sur les familles k)

a_k , t_i , b_j^k étant respectivement la densité des dislocations de la famille k, le vecteur tangent à la dislocation et le vecteur de Burgers.

Compte tenu du caractère vis des dislocations on a :

$$\bar{\alpha}_{1J} = K \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

K étant une constante dépendant de a et de la densité des dislocations des familles (choisie la même à partir des observations).

On peut retrouver ces résultats à partir de la situation du glissement multiple hétérogène à 3 systèmes de glissement en envisageant pour la cellule I un système de direction 4, et pour la cellule J deux systèmes de directions 2 et 5; soit par exemple B_4 dans I, C_5 et A_2 dans J avec respectivement les glissements γ_1 , γ_2 et γ_3 .

La compatibilité de la déformation plastique est assurée lorsque l'une des conditions suivantes est vérifiée :

$$* \gamma_2 = \gamma_1 \quad \gamma_3 \text{ quelconque}$$

$$* \frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{-\gamma_3}{\gamma_1}$$

$$* \gamma_3 = -\gamma_1 \quad \gamma_2 \neq \gamma_1$$

La normale au plan d'habitat observée expérimentalement (111) est obtenue pour $\gamma_2 = \gamma_1 = -\gamma_3$ (valeur qu'on note γ).

Dans ces conditions, la densité de dislocations calculée d'après [II-59] se met sous la forme :

$$\bar{\alpha}_{1J} = -2\gamma \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

qui correspond bien aux observations expérimentales.

Le tenseur rotation élastique calculée d'après [IV-10] est :

$$\Delta\omega_{f_j} = 2\gamma \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ & 0 & -1 \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

et le vecteur rotation associé est :

$$\overrightarrow{\Delta\omega} = -2\gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ce qui correspond bien à un joint de torsion.

b- sous-joint de torsion composé de deux familles de dislocations de vecteurs de Burgers orthogonaux (fig.IV.5.b) :

les vecteurs de Burgers des dislocations sont :

$$\vec{b}_1 = a/2 [1 \ 0 \ 1]$$

$$\vec{b}_2 = a/2 [1 \ 0 \ 1]$$

La normale au joint observé est (010).

La densité de dislocations est :

$$\bar{\alpha}_{1,j} = K \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ces résultats peuvent être retrouvés à partir d'un glissement simple hétérogène (systèmes dont les dislocations forment un verrou de Hirth), en envisageant par exemple les systèmes B_4 dans une zone et A_3 dans l'autre zone. La condition de compatibilité se traduit par :

$$\gamma(B_4) = \gamma(A_3) = \gamma$$

dans ce cas :

les normales au plan d'habitat sont (100) et (010) et pour cette normale :

$$\bar{\alpha}_{1j} = 2\gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta\omega_{1j} = 2\gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \vec{\Delta\omega} = -2\gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

C'est un joint de torsion de normale (010)

c- sous-joint mixte (fig.IV.5.c):

Ce cas correspond à 3 familles de dislocations à 120° de vecteurs de Burgers :

$$\vec{b}_1 = a/2 [1 \ 0 \ 1] \text{ dislocation vis}$$

$$\vec{b}_2 = a/2 [0 \ 1 \ 1] \text{ plan de glissement (11)(système } A_2)$$

$$\vec{b}_3 = a/2 [1 \ 1 \ 0] \text{ plan de glissement (11)(système } C_5)$$

Remarque : le tenseur $\bar{\alpha}$ correspondant aux observations expérimentales ne peut pas être calculé car on ne connaît pas les vecteurs tangents aux dislocations coins.

Cette situation peut être analysée en traitant également le cas du glissement multiple hétérogène à 3 systèmes de glissement dont A_2 et C_5 , le troisième système devant avoir la direction 4 (soit B_4 par exemple). Le calcul donne :

Pour la condition $\gamma(B_4) = \gamma(A_2) = -\gamma(C_5)$, les normales au plan d'habitat sont (010) et (100) dont la première est observée expérimentalement.

Pour cette normale :

$$\bar{\alpha}_{1j} = 2\gamma \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

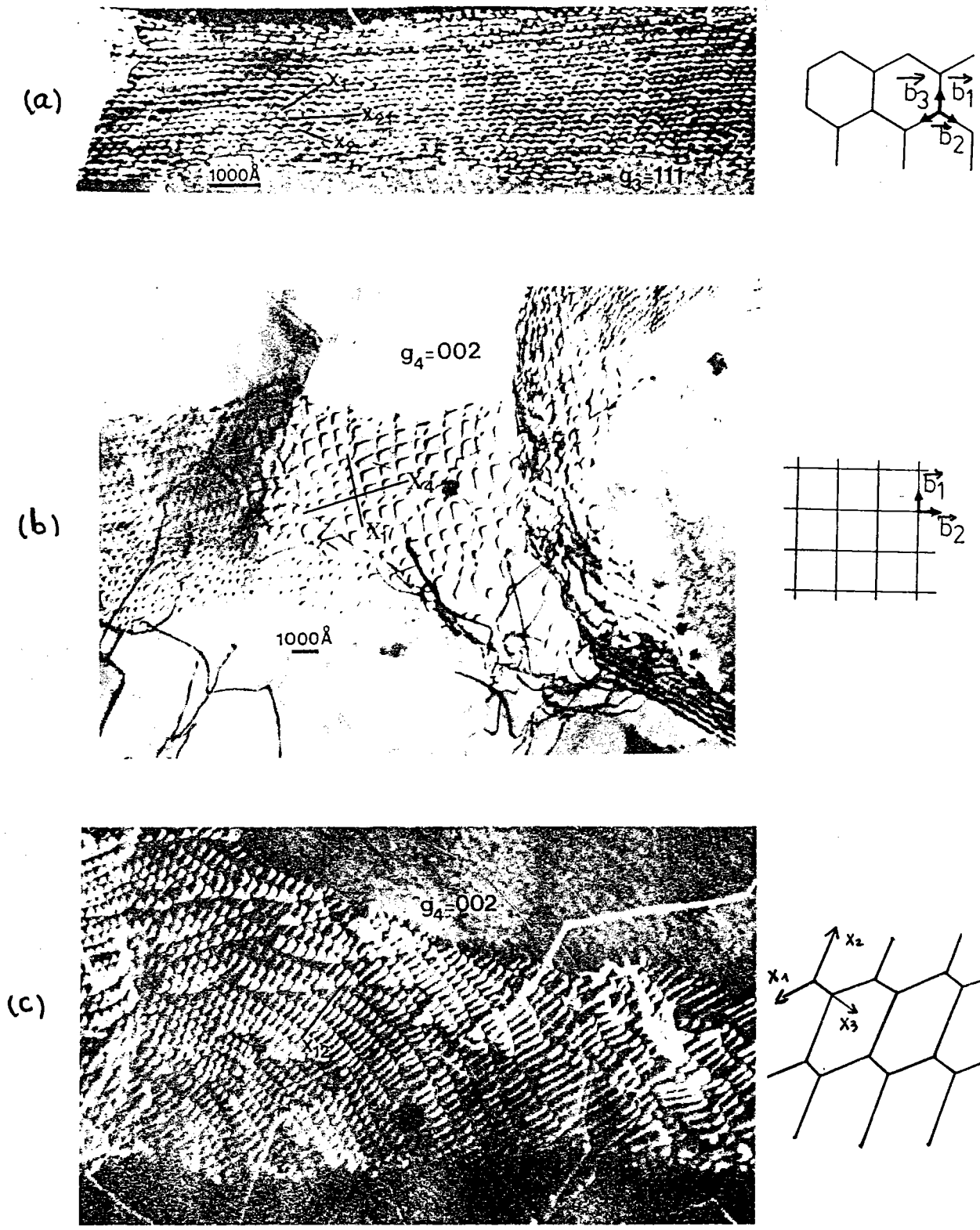


Fig. IV.5 : Sous-joints observés dans l'aluminium (Caillard (21))

- a) sous-joint de torsion à 3 familles de dislocations vis à 120°.
- b) sous-joint de torsion à 2 familles de dislocations orthogonales.
- c) sous joint mixte.

$$\vec{\Delta\omega} = 2\gamma \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et $\vec{\Delta\omega} = -2\gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Il s'agit donc bien d'un joint mixte.

IV-7. Discussion et conclusions:

L'analyse de ces résultats montre tout d'abord que les conditions sur les différentes amplitudes de glissement sont peu restrictives. Ceci explique la facilité avec laquelle la déformation plastique des cristaux procède d'un mode hétérogène de préférence au glissement multiple homogène.

En ce qui concerne les normales aux plans d'habitat, la multiplicité des solutions explique bien le fait qu'on observe souvent des cellules dont les parois sont plutôt polyédriques de préférence à des plans d'habitat infinis, chaque élément du polyèdre correspond à une portion de plan d'habitat.

La stabilité de ces plans d'habitat au cours de la déformation va dépendre de manière directe du mode de sollicitation et de la nature de chargement.

Pour un chargement radial, on peut penser lorsque les rotations des réseaux cristallins ne sont pas trop importantes, que les systèmes actifs ainsi que les glissements relatifs ne varient pas trop au cours de la déformation, conduisant ainsi à une interface stable. Par contre, dans les cas contraires (changement du mode de déformation dû soit à un changement du chargement, soit à une rotation cristalline trop importante), le plan d'habitat actuel doit évoluer. L'évolution de ce plan au cours de la déformation est nettement plus complexe à analyser et nécessite la prise en compte de la partie statique du problème des plans d'habitat qui a été partiellement négligée ici.

L'étude des interactions entre les dislocations des différents systèmes de glissement montre que celles-ci peuvent se classer en six groupes distincts correspondant par ailleurs aux six cas de la matrice d'écroutissage utilisée pour décrire l'écroutissage du monocristal. Les réactions entre ces dislocations sont de natures très différentes correspondant soit à des verrous (verrou de Lomer-Cottrel, verrou de Hirth...) soit à des jonctions plus ou moins stables. On peut donc s'attendre à ce que les plans d'habitat composés de verrous soient plus stables et plus faciles à former que les interfaces compatibles conduisant à des jonctions glissiles ou des interactions coplanaires ou colinéaires. Dans ce dernier cas, le glissement serait plutôt du type "glissement multiple homogène".

La désorientation qui apparaît d'une cellule à l'autre d'un même grain du polycristal, directement liée à la formation des cellules de dislocations (et d'autres hétérogénéités de déformation comme les microbandes de cisaillement), est responsable de la dispersion des textures de déformation qui sont observées expérimentalement autour d'orientations idéales. En même temps, il n'est pas impossible que certaines composantes de textures observées soient directement liées à la formation de telles hétérogénéités de déformation lorsque celles-ci sont importantes. C'est ce qui est développé dans le chapitre V.

On voit ainsi à quel point une déformation plastique donnée peut imprégner au matériau une microstructure particulière associée au mode de déformation envisagé et qui, d'une certaine manière détruit le "désordre parfait" d'un polycristal recuit. En effet, pour ce dernier, il existe également des "interfaces compatibles" correspondant aux joints de grains ou de phases, aux plans d'habitat des mâcles de recristallisation... mais les caractéristiques de celles-ci sont déterminées par les conditions

d'obtention du matériau et par les mécanismes qui contrôlent son élaboration (recristallisation, solidification,...). Il s'agit donc de mécanismes indépendants du mode de déformation, alors que dans le cas des plans d'habitat en plasticité, la formation de ceux-ci est intimement liée à l'écoulement plastique. Il s'agit là sans doute d'un mécanisme important permettant de limiter les contraintes internes d'incompatibilité intervenant dans l'écoulement plastique du polycristal en autorisant une certaine accommodation plastique.

On voit ainsi qu'il n'est pas nécessaire, comme l'a fait Taylor (69), de supposer que la déformation plastique est homogène ; il suffit qu'elle soit compatible (au moins partiellement). La formation de zones homogènes à l'intérieur d'un grain peut d'ailleurs être modélisée en utilisant un modèle d'inclusions à N-sites (12), ou à partir d'un modèle relativement plus simple basé sur la théorie des incompatibilités (36)(38) et qui fera l'objet du chapitre suivant.

Chapitre U

**HETEROGENEITES PLASTIQUES COMPATIBLES ET TEXTURES
DES POLYCRISTAUX C.F.C ET C.C DEFORMES EN LAMINAGE**

CHAPITRE U.

Hétérogénéités de déformation plastique compatibles et textures de déformation des polycristaux C.F.C et C.C déformés en laminage.

U-1 Introduction.

L'hétérogénéité de déformation plastique dans les polycristaux métalliques résulte d'un champ de "modes de déformation", c'est-à-dire d'une variation spatiale du nombre et de la nature des systèmes de glissement actifs.

Cette hétérogénéité a pour origine la désorientation relative entre les grains, les interactions entre les systèmes de glissement et les joints de grains, le champ de contraintes internes et les interactions entre les systèmes de glissement eux mêmes (écrouissage latent).

A l'échelle intergranulaire, à l'exception du modèle de Taylor (69) qui prend une déformation plastique totalement homogène, les modèles polycristallins usuels (Taylor relâché (6) (70) (72), self-consistents (10) (25) (73)) prennent en compte seulement l'hétérogénéité intergranulaire du mode de déformation, celui-ci étant supposé constant dans chaque grain. Or, les hétérogénéités de déformation observées en métallographie optique ou électronique sont encore plus marquées à l'intérieur d'un même grain qu'entre des grains voisins (74) (75).

A l'échelle intragranulaire, la complexité du mode multiple de déformation qui est couramment observé rend difficile une analyse des phénomènes en jeu. Une approche intéressante concernant les interactions entre les systèmes de glissement et les joints de grains a été proposée par Rey et Zaoui (76) pour le bicristal à joint plan et a été élargie au cas du

tricristal . L'extension au cas du polycristal de la méthode proposée semble néanmoins difficile.

A une échelle plus fine, tant lors de chargements monotones que cycliques, on observe la formation de cellules de dislocations qui constituent une autre forme d'hétérogénéité plastique associée au mode de déformation (46)(77)(78).

A une échelle à la fois microscopique et macroscopique, la formation de bandes de cisaillement, régions à cisaillement localisé très intense, est directement liée au mode de déformation macroscopique (2)(39)(79). Des résultats expérimentaux montrent que l'orientation des bandes est directement liée à la nature du chargement imposé. Pour des tôles laminées, elles sont inclinées d'environ 35° par rapport au plan de laminage (39). Dans le cas de la traction, l'angle observé entre les bandes et l'axe de traction est proche de 54° (41).

Le développement de ces hétérogénéités à ces échelles a un effet important tant sur l'écroutissage du polycristal et la formation des textures de déformation que sur les transformations de texture par recristallisation.

La complexité et la multiplicité des différents aspects à l'origine de la formation et du développement des hétérogénéités de déformation ne permettent pas une modélisation complète prenant en compte, à la fois, la géométrie de la déformation macroscopique imposée, les contraintes internes et le comportement du monocristal... On peut cependant aborder le problème en imposant, d'une part le mode de déformation local (nombre de systèmes de glissement actifs), et d'autre part en imposant certaines conditions sur le champ de déformation plastique. Cette démarche est déjà contenue dans le modèle de Taylor qui suppose que cinq systèmes de glissement sont actifs dans chaque grain et que la déformation plastique est uniforme dans tout le polycristal.

A l'inverse, dans les modèles statiques (11), ou le modèle de Sachs (18) et ceux qui en sont dérivés, on impose le mode de déformation local sans imposer de conditions sur le champ de déformation plastique autre que l'uniformité du mode de déformation dans chaque grain. Cette approche prend en compte d'une certaine manière l'écroissage latent mais conduit à des contraintes internes sans mesure avec la réalité à cause de l'incompatibilité de la déformation plastique adoptée.

Or, les différentes formes d'hétérogénéité de la déformation plastique discutées précédemment indiquent clairement qu'il s'agit, au moins en partie, d'un problème à frontière libre. Le mode de déformation est multiple et chaque mode est séparé du mode voisin par une interface dont la nature n'est pas fixée à priori mais dépend des différents modes de déformation.

D'un point de vue métallurgique, comme on l'a vu dans le chapitre III, la formation de ces hétérogénéités est favorisée par l'addition d'éléments chimiques en solutions solides, par des déformations à basse température ou lorsque l'énergie de faute d'empilement est faible. Or dans les deux premières situations, l'effet d'un abaissement de la température de déformation et celui d'une augmentation de la teneur en élément d'addition sur le comportement du monocristal est similaire : on observe une augmentation notable de l'amplitude du stade I (glissement facile), traduisant le développement d'un écroissage latent important (34)(35). Ce dernier augmente également lorsque l'énergie de faute d'empilement diminue.

Puisque les matériaux ayant ces caractéristiques ou déformés dans ces conditions présentent néanmoins une certaine ductilité, on doit s'attendre à ce que des mécanismes de déformation autres que le glissement multiple puissent intervenir. En effet, le mâclage mécanique est quelquefois observé dans ces matériaux, mais ce mécanisme ne peut, à lui seul,

interpréter les observations et les propriétés de cette classe de matériaux.

Par contre une observation plus commune à ces matériaux est que le glissement plastique intervient de préférence sur un nombre réduit de systèmes de glissement (en général un glissement unique dans certaines parties du grain) par opposition aux autres matériaux (cuivre, aluminium...) dans lesquels le glissement multiple homogène domine.

Cette différence de mécanisme de déformation a certainement des conséquences, à la fois sur les textures de déformations (80), et sur la formation et la morphologie des hétérogénéités de déformation et en particulier les microbandes de cisaillement :

* Pour les matériaux tels que le cuivre ou l'aluminium, les textures sont du type cuivre bien décrites par les modèles à glissement multiple (Taylor, self consistent) et la formation des bandes de cisaillement est relativement difficile pour des déformations modérées.

* Pour les matériaux de la seconde classe, les textures sont du type laiton, mal décrites (au moins partiellement) par les modèles à glissement multiple, et la formation des bandes de cisaillement est plus facile.

Différents mécanismes ont été proposés pour expliquer la transition de la formation de ces textures. Ces mécanismes font appel soit au glissement dévié (81), au glissement de dislocations partielles (82), ou à l'anisotropie des interactions entre les dislocations des systèmes de glissement (83). Une revue détaillée sur cette transition a été faite par B. Bacroix (84).

Wassermann (15)(16), a proposé d'expliquer cette transition par l'intermédiaire du développement de mâcles mécaniques, mais son modèle a été contesté (au moins partiellement) par Leffers (17). Ce dernier propose d'expliquer la transition de la texture à partir du modèle de Sachs en privilégiant, comme c'est le cas dans ce travail, l'intensité du glissement

primaire. P. Van Houtte a également pu tenir compte du mâclage en utilisant la théorie de Taylor pour prédire la texture du laiton (17).

Or, il est reconnu que les métaux purs (Al, Cu, ...) se déforment plutôt par glissement multiple homogène. Les textures de déformation de ces métaux sont par ailleurs bien décrites par les modèles polycristallins qui font intervenir le glissement multiple homogène. Dans le cas des métaux de faible énergie de faute d'empilement, des solutions solides ou des métaux déformés à basse température, on peut penser que la difficulté d'obtenir un glissement multiple homogène, à cause de l'écroutissage latent important, va favoriser le glissement hétérogène et contribuer à la formation de composantes de textures de type laiton, spécifiques à ces métaux.

Arminjon (7) a récemment proposé un modèle prenant en compte les hétérogénéités en grandes déformations élasto-plastiques. Il montre que les hétérogénéités sont régies par une recherche de dépense énergétique minimale à l'intérieur des tolérances fixées par le matériau polycristallin envisagé. Ces tolérances concernent l'écart entre les déformations locale et macroscopique et pourraient définir toute une classe de modèles dont les modèles de Taylor "pur" et "relâché" font partie. Ce modèle, appliqué à la déformation des aciers peu alliés a permis de simuler de façon satisfaisante les textures de déformation de ces aciers.

Dans ce travail, nous proposons un modèle pour décrire certains aspects de la microstructure et des textures de déformation associées à une forme particulière d'hétérogénéités plastiques. Nous supposons que le polycristal se déforme selon deux modes de déformation plastique :

- le premier mode consiste en un glissement multiple homogène, intervenant de préférence au voisinage de joints de grain, c'est-à-dire dans les régions où les contraintes internes ne peuvent être relaxées que par le glissement multiple.

- le second mode consiste en un glissement simple dans le grain. Ce mode est favorisé par l'écroutissage latent qui rend difficile le glissement multiple. Certaines caractéristiques de la zone où intervient le glissement simple peuvent être déterminées de façon à relaxer les contraintes internes sans faire intervenir le glissement multiple.

En d'autres termes, nous cherchons un champ de déformation plastique constant par morceaux et compatible, l'interface entre les deux zones étant un plan d'habitat n'introduisant pas de contraintes à grande distance (chap. III et IV). On aboutit ainsi à un champ de déformation plastique hétérogène mais compatible. L'orientation de l'interface ainsi que l'amplitude du glissement plastique dans la zone à glissement simple sont déterminées à partir des relations générales de compatibilité de Kröner introduites dans les chapitres précédents. Ce modèle est appliqué aux cas métaux C.F.C et C.C déformés en laminage (et en traction). On détermine les normales aux plans d'habitat ainsi que les rotations des réseaux cristallins dans les zones à glissement simple. Ces résultats sont comparés respectivement aux résultats des microbandes de cisaillement et des textures de déformation observées dans le cas des métaux et alliages à fort écroutissage latent.

U-2. Théorie de la déformation plastique hétérogène compatible avec un glissement simple.

U-2.1 Hétérogénéité de déformation compatible dans un polycristal.

U-2.1.1 Cas général.

Nous supposons que le polycristal macrohomogène de volume V est constitué de N familles de grains I de fraction volumique F_I (dans chaque famille les grains ont la même orientation).

Dans ce qui suit, tous les grains d'une famille I définie par une

orientation cristallographique donnée se comportent de la même manière. Pour ne pas alourdir les notations, nous allons confondre le grain avec la famille dont il fait partie. Autrement dit, c'est comme si le polycristal était formé de N grains.

Le problème est formulé en petites déformations (les mêmes formules sont valables en vitesses).

La déformation plastique $\underline{\epsilon}^p(r)$ est supposée variable d'un grain à l'autre et à l'intérieur des grains (fig.V.1).

L'élasticité du milieu étant supposée homogène, la déformation plastique macroscopique \underline{E}^p est reliée au champ $\underline{\epsilon}^p(r)$ par :

$$E_{ij}^p = \frac{1}{V} \int_V \epsilon_{ij}^p(r) dV \quad [V-1]$$

Soit, en sommant sur tous les grains :

$$E_{ij}^p = \sum_I F_I \bar{\epsilon}_{ij}^p \quad I = 1, \dots, N \quad [V-2]$$

où :

$$F_I = \frac{V^I}{V} \quad [V-3]$$

V^I est le volume du grain I et $\bar{\epsilon}^p$ désigne la déformation moyenne de ce grain.

La même démarche est utilisée à l'intérieur de chaque grain I en supposant que n_I modes de déformation sont présents avec chacun une fraction volumique f^{IK} telle que :

$$f^{IK} = \frac{V^{IK}}{V^I} \quad K = 1, \dots, n_I \quad [V-4]$$

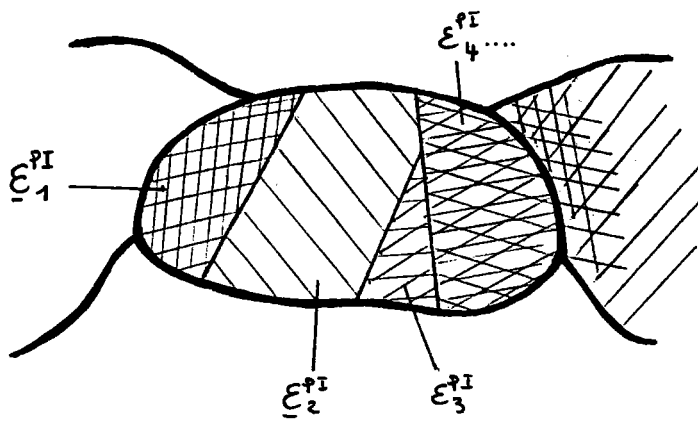


Fig. V.1 : Représentation schématique de la déformation hétérogène dans un grain du polycristal.

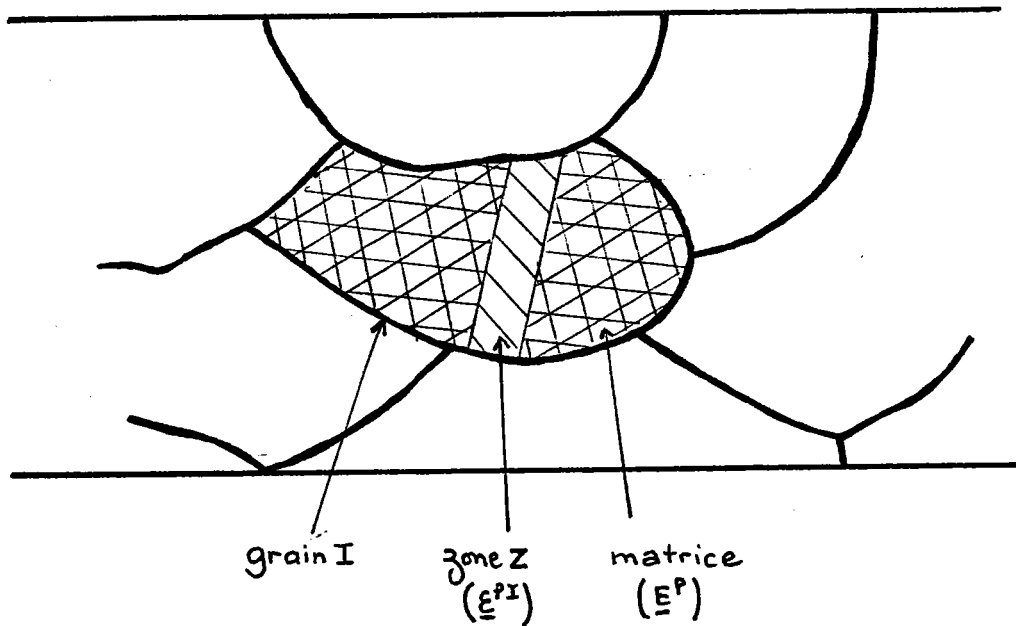


Fig. V.2 : Hétérogénéité de déformation considérée dans ce travail
 zone Z : glissement simple.
 matrice : glissement multiple homogène.

On a donc :

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \sum_k f^{iK} \cdot \epsilon_{ij}^{K} \quad [V-5]$$

de [V-2] et [V-5] on a :

$$E_{ij} = \sum_I F_I \sum_K f^{iK} \epsilon_{ij}^{K} \quad [V-6]$$

où ϵ^{iK} est lié au mode de déformation particulier K associé à l'activation de un ou plusieurs systèmes de glissement d'amplitude de glissement γ^{Kh} et de tenseur d'orientation R^{Kh} :

$$\epsilon_{ij}^{K} = \sum_h R_{ij}^{Kh} \cdot \gamma^{Kh} \quad [V-7]$$

h est le nombre de systèmes actifs pour le mode K :

On a donc d'après [V-6] et [V-7] :

$$E_{ij} = \sum_I F_I \sum_K f^{iK} \sum_h R_{ij}^{Kh} \cdot \gamma^{Kh} \quad [V-8]$$

V-2.1.2 Cas du glissement simple - glissement multiple homogène.

L'expression [V-8], contenant simultanément les hétérogénéités inter et intragrnulaires, est difficile à exploiter de manière générale en liaison avec l'état de contrainte local et les lois de la plasticité. C'est pourquoi nous nous limitons au cas des métaux à fort écrouissage latent (hypothèses discutées dans le paragraphe précédent) pour lesquels est généralement supposée l'activation d'un seul système de glissement dans une partie du grain (région désignée par 2) (fig.V.2). En effet dans ce cas, l'écrouissage latent durcit suffisamment les autres systèmes de glissement malgré la présence des contraintes internes associées au glissement primaire. Ces contraintes peuvent par ailleurs être partiellement (ou totalement) relaxées

par la formation du plan d'habitat.

De plus, nous supposons que la partie complémentaire du grain subit une déformation par glissement multiple homogène. Ce mode de déformation, nécessitant l'activation de plusieurs systèmes de glissement, intervient de préférence au voisinage des joints de grains, des noeuds triples entre joints et aux jonctions entre zones incompatibles. Dans ces régions, les contraintes internes sont importantes et ne peuvent être relaxées que par le glissement multiple malgré l'écrouissage latent.

La déformation dans la zone à glissement multiple est supposée égale à la déformation macroscopique imposée \underline{E}^p , et ceci indépendamment de l'orientation des grains. Ce schéma revient, par analogie aux méthodes self-consistantes, à prendre pour chaque grain un mode un mode de glissement simple situé dans un milieu homogène "équivalent" soumis à la déformation homogène \underline{E}^p .

En désignant par f la fraction volumique du polycristal qui subit la déformation \underline{E}^p par glissement multiple homogène :

$$f = \frac{V - \sum_I V^{I2}}{V} \quad [V-9]$$

(V^{I2} étant le volume de la zone à glissement simple dans le grain I)

et par f^I la fraction volumique (par rapport au polycristal) de la zone à glissement simple dans un grain I :

$$f^I = \frac{V^{I2}}{V} \quad , \quad [V-10]$$

l'expression [V-8] devient :

$$E_{ij}^p = f E_{ij}^p + \sum_I f^I R_{ij}^I \gamma^I \quad [V-11]$$

avec $f + \sum_I f^I = 1 \quad [V-12]$

On voit donc que dans un grain donné, la déformation moyenne est différente de la déformation macroscopique imposée. En effet

$$\bar{\epsilon}^{P^I} = \frac{1}{F^I} \left\{ f^I R_{f_J}^I \gamma^I + (F^I - f^I) E_{f_J}^I \right\} \quad [V-13]$$

$\bar{\epsilon}^{P^I}$ est différente de \underline{E}^P sauf si f^I est nulle.

Il est clair que nous considérons une déformation plastique non homogène à l'intérieur des grains, elle est égale à $R_{f_J}^I \gamma^I$ dans la zone à glissement simple et à $E_{f_J}^I$ dans le reste du grain.

En négligeant les interactions entre les différentes zones, le problème revient alors à chercher, si elle existe, une zone dont la déformation se fait par glissement simple ($R_{f_J}^I \gamma^I$) et située dans un milieu homogène dont la déformation est $E_{f_J}^I$.

La frontière de cette zone n'est pas définie a priori : sa forme et son orientation sont telles que la compatibilité du champ de déformation est assurée. La solution de ce problème développée dans le chapitre III (f23), montre qu'il est possible de trouver un tel champ de déformation plastique, constant par morceaux et compatible. La forme des zones est un ellipsoïde aplati orienté de manière à assurer la compatibilité. Il s'agit donc d'étudier les conditions de compatibilité à travers une interface plane séparant une zone à glissement simple et une matrice.

Dans la suite, nous ne nous intéresserons qu'à la zone à glissement simple, le domaine à glissement multiple homogène pouvant être traité par les modèles usuels. En utilisant les résultats des chapitres précédents, les relations de compatibilité s'écrivent dans ce cas :

$$\epsilon_{ikm} \epsilon_{Jen} (E_{mn}^P - c_{mn}^{P^I}) N_k N_e = 0 \quad [V-14]$$

En utilisant [V-7] cette relation s'écrit :

$$\epsilon_{ikm} \epsilon_{jen} (E_{mn}^p - R_{mn}^i \gamma^l) N_k N_e = 0 \quad [V-15]$$

Dans la suite nous posons :

$$\Delta e_{ij}^p = E_{ij}^p - R_{ij}^l \gamma^l \quad [V-16]$$

Pour l'instant nous ne précisons pas quel est parmi tous les systèmes de glissement possibles le système actif retenu. Les équations [V-15] conduisent à un système de 6 équations dont les solutions sont traitées dans le chapitre IV. La condition nécessaire pour la compatibilité de ce champ de déformation est (IV-6) :

$$\det (\Delta e_{ij}^p) = 0 \quad [V-17]$$

Pour une famille de grains I d'orientation donnée, lorsque cette condition est vérifiée, c'est-à-dire lorsque pour un système de glissement donné, la déformation dans la zone à glissement simple vérifie $\det(E_{ij}^p - R_{ij}^l \gamma^l) = 0$, les composantes de la normale à l'interface séparant les deux zones vérifient alors les expressions (IV-3).

$$\begin{aligned} N_1^2 \Delta e_{22}^p + N_2^2 \Delta e_{11}^p - 2N_1 N_2 \Delta e_{12}^p &= 0 \\ N_1^2 \Delta e_{33}^p + N_3^2 \Delta e_{11}^p - 2N_1 N_3 \Delta e_{13}^p &= 0 \\ N_2^2 \Delta e_{33}^p + N_3^2 \Delta e_{22}^p - 2N_2 N_3 \Delta e_{23}^p &= 0 \\ N_3^2 \Delta e_{12}^p - N_1 N_3 \Delta e_{23}^p - N_2 N_3 \Delta e_{13}^p + N_1 N_2 \Delta e_{33}^p &= 0 \quad [V-18] \\ N_2^2 \Delta e_{13}^p - N_2 N_3 \Delta e_{12}^p - N_1 N_2 \Delta e_{23}^p + N_1 N_3 \Delta e_{22}^p &= 0 \\ N_1^2 \Delta e_{23}^p - N_1 N_3 \Delta e_{12}^p - N_1 N_2 \Delta e_{13}^p + N_2 N_3 \Delta e_{11}^p &= 0 \end{aligned}$$

Généralement, la déformation plastique de la zone à glissement simple est accompagnée d'une rotation plastique $\underline{\omega}^P$ associée au glissement plastique. Cette rotation plastique induit une rotation élastique $\underline{\omega}^E$ du réseau cristallin.

U-2.2 Rotation élastique dans la zone à glissement simple.

Puisque la déformation élastique est prise nulle (pas de contraintes internes d'incompatibilité), il est judicieux pour calculer la rotation élastique dans la zone à glissement simple, de partir de la condition de compatibilité du premier ordre [II-5]):

$$\text{Rot}(\underline{\epsilon}^P(r) + \underline{\omega}^P(r) + \underline{\omega}^E(r)) = 0 \quad [\text{V-19}]$$

En désignant par $\underline{\omega}^T$ la rotation totale on a :

$$\text{Rot}(\underline{\omega}^T(r) + \underline{\epsilon}^P(r)) = 0 \quad [\text{V-20}]$$

soit :

$$\epsilon_{1k\ell} \omega_{\ell J, k}^T = -\epsilon_{1k\ell} \cdot \epsilon_{\ell J, k}^P \quad [\text{V-21}]$$

Comme l'interface de normale \vec{N}_k est plane, et les différentes grandeurs constantes par morceaux, on a :

$$\epsilon_{1k\ell} \Delta \omega_{\ell J}^T \cdot N_k = -\epsilon_{1k\ell} \Delta \epsilon_{\ell J}^P \cdot N_k \quad [\text{V-22}]$$

$\Delta \underline{\omega}^T$ est la différence des rotations totales entre la matrice et la zone à glissement simple :

$$\Delta \underline{\omega}^T = \underline{\Omega}^T - \underline{\omega}^T \quad [\text{V-23}]$$

Comme la rotation totale dans la matrice $\underline{\Omega}^T$ peut être supposée nulle pour les modes de déformation à symétrie axiale (traction, compression, extrusion) et pour le laminage, on a :

$$\underline{\Delta\omega}^T = -\underline{\omega}^T \quad [V-24]$$

La relation [V-22] devient :

$$\epsilon_{1k\ell} \cdot \omega_{\ell j}^{T i} \cdot N_k = \epsilon_{1k\ell} \Delta \epsilon_{\ell j}^{P i} \cdot N_k \quad [V-25]$$

Explicitement, ces relations forment un système linéaire de 9 équations (non indépendantes) en $\underline{\omega}^T$.

(pour alléger l'écriture, nous posons $\underline{\omega}^T = \underline{\omega}$):

$$\begin{aligned} -N_3 \omega_{12} + N_2 \omega_{13} &= N_3 \Delta \epsilon_{12}^{P i} - N_2 \Delta \epsilon_{13}^{P i} \\ N_2 \omega_{23} &= N_3 \Delta \epsilon_{22}^{P i} - N_2 \Delta \epsilon_{23}^{P i} \\ N_3 \omega_{23} &= N_3 \Delta \epsilon_{23}^{P i} - N_2 \Delta \epsilon_{33}^{P i} \\ N_1 \omega_{13} &= -N_1 \Delta \epsilon_{13}^{P i} + N_3 \Delta \epsilon_{11}^{P i} \\ -N_1 \omega_{23} - N_3 \omega_{12} &= N_1 \Delta \epsilon_{23}^{P i} - N_3 \Delta \epsilon_{12}^{P i} \\ N_3 \omega_{13} &= -N_1 \Delta \epsilon_{33}^{P i} + N_3 \Delta \epsilon_{13}^{P i} \\ N_1 \omega_{12} &= -N_1 \Delta \epsilon_{12}^{P i} + N_2 \Delta \epsilon_{11}^{P i} \\ N_2 \omega_{12} &= -N_1 \Delta \epsilon_{22}^{P i} + N_2 \Delta \epsilon_{12}^{P i} \\ N_1 \omega_{23} - N_2 \omega_{13} &= N_1 \Delta \epsilon_{23}^{P i} - N_2 \Delta \epsilon_{13}^{P i} \end{aligned} \quad [V-26]$$

tenant compte des 6 équations de comptabilité (V-18) ce système devient :

* si $N_1 \neq 0$

$$\begin{aligned}\omega_{12} &= N_2/N_1 \Delta \epsilon_{11}^{P I} - \Delta \epsilon_{12}^{P I} \\ \omega_{13} &= N_3/N_1 \Delta \epsilon_{11}^{P I} - \Delta \epsilon_{13}^{P I} \\ \omega_{23} &= 2N_3/N_1 \Delta \epsilon_{12}^{P I} - N_2 N_3/N_1^2 \Delta \epsilon_{11}^{P I} - \Delta \epsilon_{23}^{P I}\end{aligned}\quad [V-27]$$

* si $N_1 = 0$

$$\begin{aligned}\text{* si } N_2 = 0 \quad \omega_{12} &= \Delta \epsilon_{12}^{P I} \\ \omega_{13} &= \Delta \epsilon_{13}^{P I} \\ \omega_{23} &= \Delta \epsilon_{23}^{P I}\end{aligned}\quad [V-28]$$

$$\begin{aligned}\text{* si } N_2 \neq 0 \quad \omega_{12} &= \Delta \epsilon_{12}^{P I} \\ \omega_{13} &= \Delta \epsilon_{13}^{P I} \\ \omega_{23} &= -\Delta \epsilon_{23}^{P I} + N_3/N_2 \Delta \epsilon_{22}^{P I}\end{aligned}\quad [V-29]$$

Il est intéressant, pour le calcul numérique de transformer ces relations dans le repère principale de $\Delta \underline{\epsilon}^{P I}$. Dans ce repère, tenant compte de la compatibilité du champ de déformation, le tenseur $\Delta \underline{\epsilon}^{P I}$ s'écrit :

$$\Delta \underline{\epsilon}^{P I} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & & -\lambda \end{pmatrix}\quad [V-30]$$

où

$$\lambda = [(\Delta \epsilon_{12}^{P I})^2 + (\Delta \epsilon_{13}^{P I})^2 + (\Delta \epsilon_{23}^{P I})^2 - \Delta \epsilon_{14}^{P I} \Delta \epsilon_{22}^{P I} - \Delta \epsilon_{22}^{P I} \Delta \epsilon_{33}^{P I} - \Delta \epsilon_{11}^{P I} \Delta \epsilon_{33}^{P I}]^{1/2}$$

Rappel : Le choix de la déformation principale nulle du tenseur $\Delta \underline{\epsilon}^{P I}$ n'influence pas sur les normales compatibles transformées dans le repère initial.



Les cosinus directeurs des directions principales de ce tenseur sont notées:

$$\vec{d}_1 = (u_1 \ v_1 \ w_1), \quad \vec{d}_2 = (u_2 \ v_2 \ w_2), \quad \vec{d}_3 = (u_3 \ v_3 \ w_3)$$

Or, dans ce repère, les normales au plan d'habitat sont connues (chapitre IV § 2) :

$$\vec{N}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 \ 0 \ 1) \quad \text{et} \quad \vec{N}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 \ 0 \ -1)$$

Donc, exprimée dans le repère principal de $\Delta \underline{e}^{P1}$, la rotation totale dans la zone à glissement simple est :

$$\omega_{12} = 0$$

$$\omega_{23} = 0$$

$$\omega_{13} = \lambda \quad \text{pour} \quad \vec{N}_1 \quad \text{et} \quad \omega_{13} = -\lambda \quad \text{pour} \quad \vec{N}_2$$

Et dans le repère initial:

pour la normale $\vec{N}_1 = 1/\sqrt{2} (1 \ 0 \ 1)$:

$$\omega_{12} = -\lambda \cdot w_2$$

$$\omega_{13} = \lambda \cdot v_2$$

$$\omega_{23} = -\lambda \cdot u_2$$

[V-31]

pour la normale $\vec{N}_2 = 1/\sqrt{2} (1 \ 0 \ -1)$:

$$\omega_{12} = \lambda \cdot w_2$$

$$\omega_{13} = -\lambda \cdot v_2$$

$$\omega_{23} = \lambda \cdot u_2$$

[V-32]

où u_2, v_2, w_2 sont les composantes de la direction principale \vec{d}_2

Comme : $\underline{\omega} = \underline{\omega}^{*I} + \underline{\omega}^{PI}$

$\underline{\omega}^{*I}$: rotation élastique du réseau cristallin dans la zone à glissement simple.

$\underline{\omega}^{PI}$: rotation plastique dans la même zone ($\underline{\omega}_{ij}^{PI} = S_{ij} \gamma^I$)

on a, pour la normale \vec{N}_1 :

$$\begin{aligned}\omega_{12}^{*I} &= -\lambda.w_2 - \omega_{12}^{PI} \\ \omega_{13}^{*I} &= \lambda.v_2 - \omega_{13}^{PI} \\ \omega_{23}^{*I} &= -\lambda.u_2 - \omega_{23}^{PI}\end{aligned}\quad [V-33]$$

pour la normale \vec{N}_2 :

$$\begin{aligned}\omega_{12}^{*I} &= \lambda.w_2 - \omega_{12}^{PI} \\ \omega_{13}^{*I} &= -\lambda.v_2 - \omega_{13}^{PI} \\ \omega_{23}^{*I} &= \lambda.u_2 - \omega_{23}^{PI}\end{aligned}\quad [V-34]$$

Remarque : Les deux normales au plan d'habitat limitant la zone à glissement simple donnent deux rotations totales opposées dans cette zone:

$$\underline{\omega}^{PI}(\vec{N}_1) = -\underline{\omega}^{PI}(\vec{N}_2) \quad [V-35]$$

Donc, pour un grain donné I et pour un système de glissement actif défini par R_{ij} , $\Delta \underline{\epsilon}^{PI}$ est déterminée à partir de $\underline{\underline{E}}^P$ et de la condition de compatibilité. Connaissant $\underline{\omega}^{PI}$ du système et la normale \vec{N} à l'interface [à partir de V-17], il est alors possible de calculer les composantes de $\underline{\omega}^{*I}$ décrivant les rotations du réseau cristallin dans la zone à glissement

simple. Lorsque les orientations, cristallines des grains sont repérées par rapport à un repère macroscopique (lié à la géométrie globale de l'échantillon) par l'intermédiaire des angles d'Euler $\varphi_1, \Phi, \varphi_2$ introduits par Bunge (85) (voir fig.V.3), la matrice \underline{A} de passage du repère macroscopique au repère du cristal est :

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cos\Phi \\
 A_{12} &= \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \sin\varphi_2 \cos\Phi \\
 A_{13} &= \sin\varphi_2 \sin\Phi \\
 A_{21} &= -\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\Phi \\
 A_{22} &= -\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\Phi \\
 A_{23} &= \cos\varphi_2 \sin\Phi \\
 A_{31} &= \sin\varphi_1 \sin\Phi \\
 A_{32} &= -\cos\varphi_1 \sin\Phi \\
 A_{33} &= \cos\Phi
 \end{aligned}
 \tag{V-36}$$

Le champ des rotations du réseau cristallin par rapport au repère macroscopique est alors décrit par les incréments $d\varphi_1, d\Phi, d\varphi_2$ tels que :

$$\begin{aligned}
 d\varphi_1 &= -d\omega_{12}^* - \cos\Phi \cdot d\varphi_2 \\
 d\Phi &= \sin\varphi_1 \, d\omega_{13}^* - \cos\varphi_1 \, d\omega_{23}^* \\
 d\varphi_2 &= -d\omega_{13}^* \cos\varphi_1 / \sin\Phi - d\omega_{23}^* \sin\varphi_1 / \sin\Phi
 \end{aligned}
 \tag{V-37}$$

Les rotations élastiques sont exprimées dans le repère macroscopique. Si elles le sont dans le repère du cristal, les relations deviennent :

$$\begin{aligned}
 d\Phi &= -\cos\varphi_2 \, d\omega_{23}^* - \sin\varphi_2 \, d\omega_{13}^* \\
 d\varphi_2 &= -d\omega_{12}^* - \cos\Phi \, d\varphi_1 \\
 d\varphi_1 &= -d\omega_{23}^* \sin\varphi_2 / \sin\Phi + d\omega_{13}^* \cos\varphi_2 / \sin\Phi
 \end{aligned}
 \tag{V-38}$$

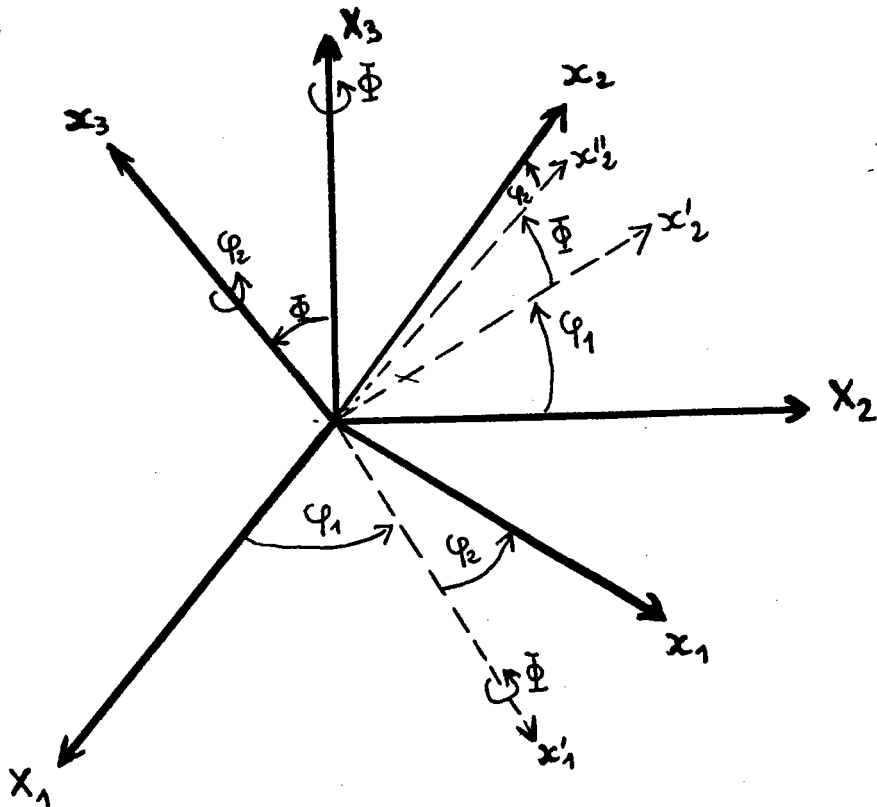


Fig. V.3 : Angles d'Euler : Orientation du repère du cristal (x_1, x_2, x_3) par rapport au repère macroscopique (X_1, X_2, X_3)

φ_1 : rotation autour de X_3 dans le plan (X_1, X_2)

$$(X_1, X_2, X_3) \longrightarrow (x'_1, x'_2, X_3)$$

Φ : rotation autour de x'_1 dans le plan (x'_2, X_3)

$$(x'_1, x'_2, X_3) \longrightarrow (x'_1, x''_2, X_3)$$

φ_2 : rotation autour de x_3 dans le plan (x'_1, x''_2)

$$(x'_1, x''_2, X_3) \longrightarrow (x_1, x_2, x_3)$$

V-2.3 : Expression de la condition de compatibilité en fonction des paramètres de la déformation.

Dans ce qui précède, la théorie s'applique en fait à toutes les situations pour lesquelles le champ de déformation plastique est constant par morceaux, y compris aux cas où il y a glissement multiple dans la zone α (il suffit de prendre $\epsilon_{ij}^p = \sum_h R_{ij}^h \gamma^h$ et $\omega_{ij}^p = \sum_h S_{ij}^h \gamma^h$). En fait la prise en compte de plusieurs systèmes actifs dans cette zone complique énormément le problème : choix du nombre et de la nature des systèmes actifs et surtout indétermination de la combinaison de ces systèmes qui vérifie un certain critère (plusieurs solutions s'avèrent valables). C'est donc pour prendre en compte l'écroutissage latent dans les métaux que nous considérons un seul système actif par zone (les paramètres de l'écroutissage n'apparaissent pas dans les équations mais justifient la prise en compte d'un seul système de glissement d'après les arguments énoncés dans le début du chapitre). Dans ce cas, si on désigne par \vec{n} et \vec{m} la normale au plan et la direction de glissement, et par γ l'amplitude de glissement sur le système actif considéré, les tenseurs $\underline{\epsilon}^p$ et $\underline{\omega}^p$ dans la zone Z sont :

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij}^p &= 1/2(n_i m_j + n_j m_i) \gamma = R_{ij} \gamma \\ \omega_{ij}^p &= 1/2(n_i m_j - n_j m_i) \gamma = S_{ij} \gamma \end{aligned} \quad [V-39]$$

Pour une déformation macroscopique $\underline{\epsilon}^p$ quelconque, la condition de compatibilité [V-17] prend la forme d'une équation de troisième degré en γ :

$$A\gamma^3 - B\gamma^2 + C\gamma - D = 0 \quad [V-40]$$

avec :

$$\begin{aligned}
 A &= R_{11}R_{22}R_{33} + 2R_{12}R_{23}R_{13} - R_{22}R_{13}^2R_{11}R_{23}^2 - R_{33}R_{12}^2 = \det(R_{1j}) \\
 B &= R_{11}R_{22}E_{33}^p + R_{11}R_{33}E_{22}^p + R_{22}R_{33}E_{11}^p + 2R_{12}R_{23}E_{13}^p + 2R_{12}R_{13}E_{23}^p \\
 &\quad + 2R_{13}R_{23}E_{12}^p - 2R_{13}R_{22}E_{13}^p - E_{22}^pR_{13}^2 - 2R_{11}R_{23}E_{23}^p - E_{11}^pR_{23}^2 \\
 &\quad - 2R_{33}R_{12}E_{12}^p - E_{33}^pR_{12}^2 \qquad \qquad \qquad [V-41] \\
 C &= R_{11}E_{22}^pE_{33}^p + R_{22}E_{11}^pE_{33}^p + R_{33}E_{11}^pE_{22}^p + 2R_{12}E_{13}^pE_{23}^p + 2R_{23}E_{12}^pE_{13}^p \\
 &\quad + 2R_{13}E_{12}^pE_{23}^p - R_{22}E_{13}^pE_{13}^p - 2R_{13}E_{13}^pE_{22}^p - R_{11}E_{23}^pE_{23}^p - 2R_{23}E_{11}^pE_{23}^p \\
 &\quad - R_{33}E_{12}^pE_{12}^p - 2R_{12}E_{12}^pE_{33}^p \\
 D &= E_{11}^pE_{22}^pE_{33}^p + 2E_{12}^pE_{23}^pE_{13}^p - E_{22}^pE_{13}^pE_{13}^p - E_{11}^pE_{23}^pE_{23}^p - E_{33}^pE_{12}^pE_{12}^p = \det(E_{ij}^p)
 \end{aligned}$$

Pour les métaux usuels, la normale au plan de glissement est orthogonale à la direction de glissement, donc : $A = 0$

L'équation [V-40] se ramène alors à une équation du second degré dont l'expression peut être simplifiée selon la forme du tenseur \underline{E}^p .

Pour le laminage, le coefficient D est nul, et pour d'autres modes de déformation tels que la traction, ce coefficient n'est pas nul, ce qui sans doute présente des conséquences physiques sur la nature et la morphologie des hétérogénéités associées à de tels modes de déformation.

Auparavant, pour compléter la théorie, il reste à résoudre un double problème d'indétermination qui est associé à la symétrie cristalline et à la forme des équations [V-18] :

* Dans le cas des métaux à symétrie cubique, douze systèmes de glissement sont équivalents du point de vue cristallographique. On peut donc satisfaire les conditions cinématiques [V-17 et 40] de douze manières différentes. Chaque solution conduit à des interfaces différentes et donc à des rotations de réseau différentes. Cette dégénérescence d'ordre cinématique peut être levée en utilisant un critère énergétique comme c'est

le cas dans les modèles de Taylor: Parmi tous les champs cinématiquement admissibles, le champ à retenir est celui qui minimise le travail plastique local. Cette analyse est développée, pour ce problème, dans l'annexe A.

* La seconde indétermination provient de la forme des équations [V-18]. Pour une valeur donnée de γ (donc de $\Delta \epsilon^{P'}$) correspondant à la compatibilité pour le système de glissement choisi d'après le critère plus haut, ces équations donnent deux normales \vec{N}_1 et \vec{N}_2 décrivant deux plans d'habitat distincts et orthogonaux (dans la configuration initiale). Dans ces conditions, le calcul des rotations du réseau cristallin dans la zone à glissement simple aboutit également à deux valeurs distinctes. Il s'agit donc d'une indétermination que nous proposons de lever par l'intermédiaire d'un critère de stabilité relative discuté dans l'annexe B. Ce critère basé sur l'énergie de déformation élastique associée aux situations partiellement compatibles permet de classer le champ de rotations en deux groupes. De manière équivalente, ce critère découle également du deuxième terme du tenseur d'incompatibilité (η_{ij}^2) pour un plan d'habitat d'épaisseur finie traité dans le chapitre III.

L'application du modèle est présentée dans les paragraphes suivants.

V.3. Applications

Nous appliquons dans ce qui suit les résultats précédents pour prédire certaines composantes de textures et les orientations des microbandes de cisaillement dans les polycristaux métalliques de structures C.F.C. et C.C. déformés par laminage (en petites déformations). Bien entendu, les matériaux concernés vérifient les hypothèses énoncées dans le début de ce chapitre (en particulier avec un écrouissage latent important).

Les résultats obtenus sont ensuite confrontés aux résultats expérimentaux tirés de la bibliographie. Il faut noter au passage que les

résultats expérimentaux portant sur les textures sont sensibles aux conditions expérimentales (86) (composition de l'alliage, température de déformation, traitements thermiques, et la méthode utilisée pour déterminer les textures). Néanmoins les orientations types (textures caractéristiques) sont relativement bien spécifiques et connues.

U.3.1 Application au laminage des métaux C.F.C.

Dans ce cas si on considère le repère macroscopique (DL, DT, DN), où:

DL : direction de laminage

DT : direction transverse

DN : direction normale

le tenseur de la déformation plastique macroscopique \underline{E}^P prend la forme :

$$E_{ij}^P = E^P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad [V-42]$$

U-3.1.1 Condition de compatibilité :

Dans les relations [V-41], le terme D est alors nul et l'équation [V-40] s'écrit simplement sous la forme :

$$\gamma \cdot [B \cdot \gamma - C] = 0 \quad [V-43]$$

-La solution $\gamma = 0$, correspond à une zone sans glissement dans le grain. Comme le tenseur de déformation macroscopique \underline{E}^P vérifie la condition de compatibilité ($D = 0$), les normales à l'interface, si cette situation peut physiquement se présenter (le grain concerné est alors un grain de Taylor), sont dans le repère macroscopique $1/\sqrt{2}$ (101) et $1/\sqrt{2}$ (10T). Elles sont

inclinées de 45° par rapport au plan de laminage.

-L'autre solution non triviale ($\gamma \neq 0$) de [V-43] s'écrit sous la forme explicite :

$$\gamma = \frac{C}{B} = E^p \cdot \frac{R_{22}}{(R_{11}R_{22} - R_{12}^2) - (R_{22}R_{33} - R_{23}^2)} \quad [V-44]$$

où les R_{ij} sont les composantes du tenseur d'orientation du système actif considéré (tableau II-1).

Les orientations des grains du polycristal sont repérées par rapport au repère (DL, DT, DN) par l'intermédiaire des angles d'Euler φ_1 , Φ et φ_2 .

Pour effectuer les différents calculs numériques pour chaque orientation cristalline (exploitation des différentes équations, utilisation des critères, représentation des textures et des projections stéréographiques des normales aux interfaces), nous avons mis au point un programme informatique. Pour les calculs, nous choisissons une valeur du scalaire E^p égale à 0.1 et les angles φ_1 , Φ et φ_2 varient de -20° à 110° par pas de 5° .

Les calculs sont effectués tout d'abord pour déterminer, pour chaque grain, l'amplitude du glissement qui vérifie [V-44] en considérant tous les systèmes de glissement, puis pour choisir le système actif d'après le critère du travail plastique minimal (annexe A). Pour ce système de glissement, on détermine ainsi les normales aux plans d'habitat dans la configuration actuelle, et les rotations du réseau cristallin. Le champ des rotations des réseaux cristallins est représenté, pour les différentes orientations des grains, par des coupes de l'espace des angles d'Euler à un angle constant (φ_2 pour les C.F.C.).

V-3.1.2 Normales aux plans d'habitat.

Les figures V.4.a , b , c et d représentent, sous forme de projections stéréographiques dans le plan (DL, DT), les pôles des plans d'habitat calculés d'après les relations [V-18] et transformés dans la configuration actuelle par les relations classiques de transformation:

$$\begin{aligned} N'_i &= N_i + \beta \Gamma_{ij} N_j \\ &= N_i + E \Gamma_{ij} N_j \end{aligned}$$

Sur ces figures, ne sont représentés que les pôles correspondants aux orientations cristallines :

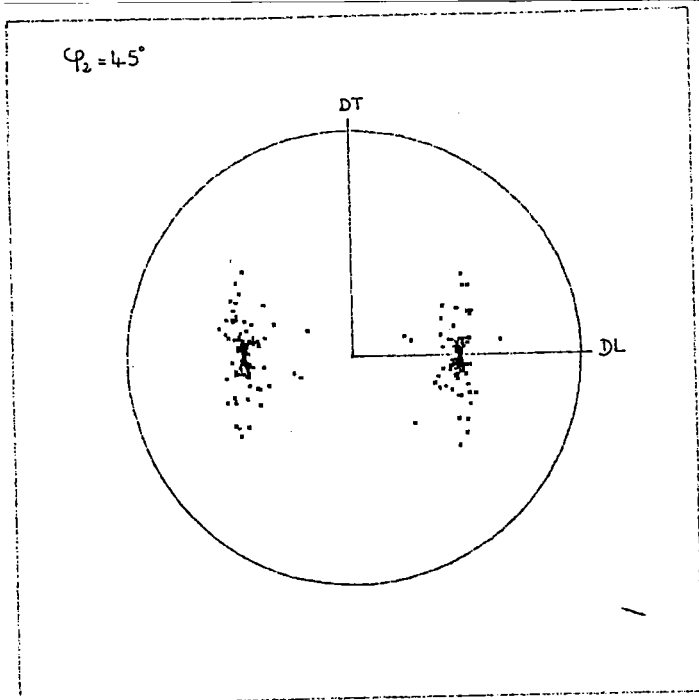
$$\begin{aligned} \varphi_2 &= 70^\circ \text{ ou } \varphi_2 = 45^\circ \\ -20^\circ &< \varphi_1 < 110^\circ \text{ (incrément de } 5^\circ) \\ -20^\circ &< \phi < 110^\circ \text{ (incrément de } 5^\circ) \end{aligned}$$

Pour d'autres valeurs de φ_2 les résultats sont analogues.

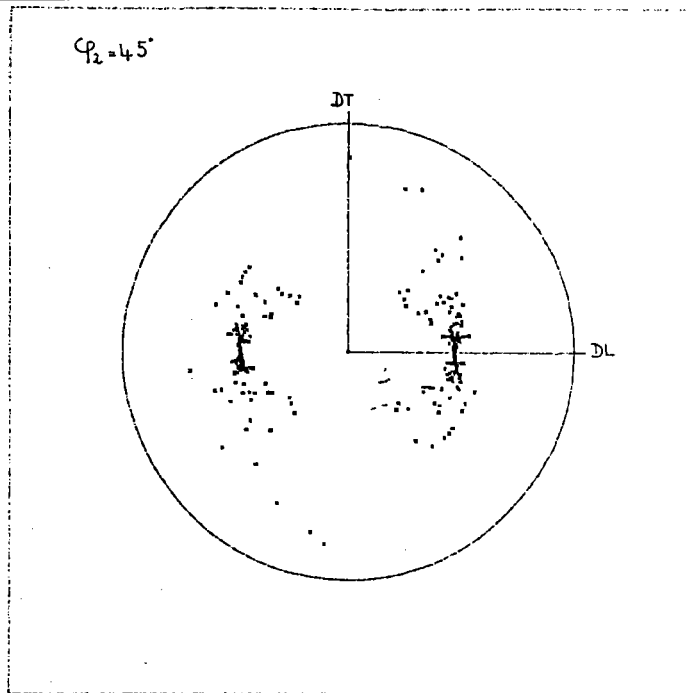
Les figures V.a et b correspondent aux plans d'habitats à "forte stabilité" (voir annexe B), alors que sur les figures V.4.c et d sont reportés les résultats concernant les plans d'habitat à "stabilité réduite".

A part une dispersion relativement plus grande dans le second cas, les résultats sont analogues. On observe que ces plans d'habitat sont (pour pratiquement toutes les orientations cristallines) essentiellement parallèles à la direction transverse (DT). Leur répartition n'est pas aléatoire mais correspond à deux composantes symétriques par rapport au plan (DN, DT) , et situées à environ 38° de la direction de laminage. Dans la configuration initiale cet angle est de 45° .

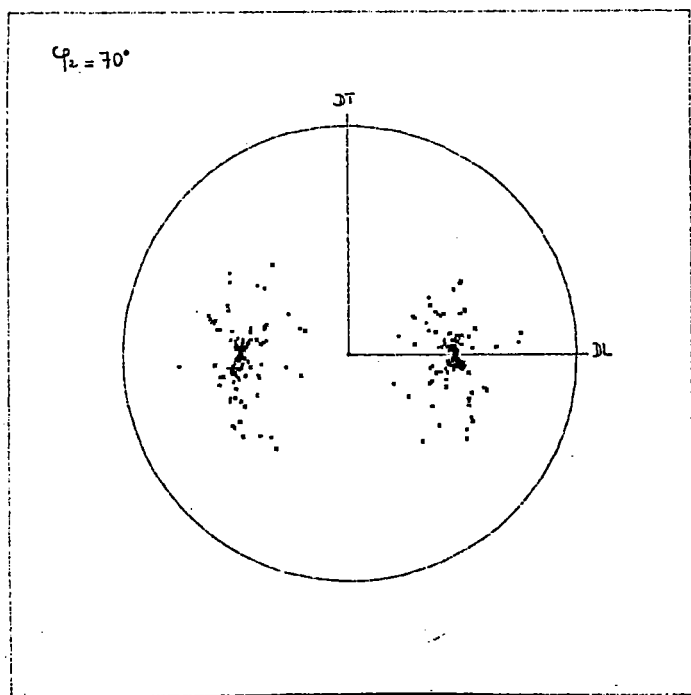
L'orientation de ces plans d'habitat est donc très proche de celle des microbandes de cisaillement qui sont couramment observées lors du



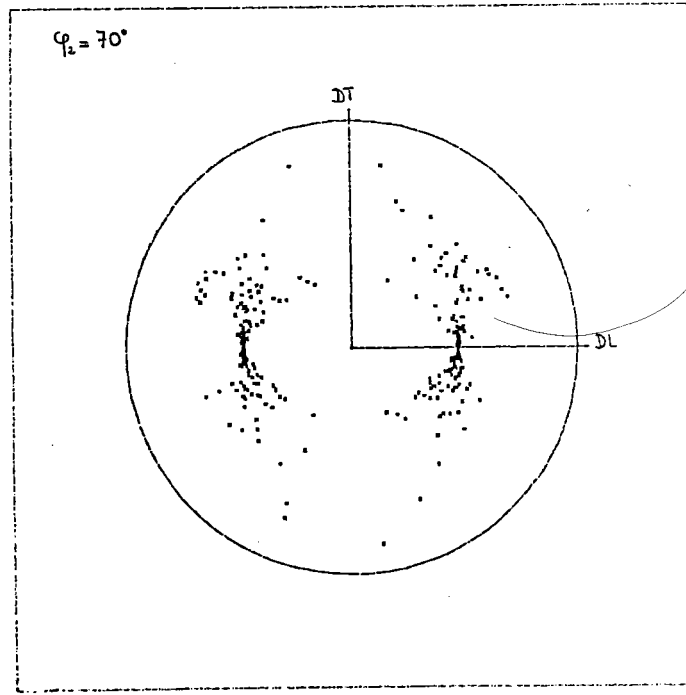
(a)



(b)



(c)



(d)

fig.V.4. Projéctions stéréographiques des normales aux plans d'habitat pour $\varphi_2 = 45^\circ$ et $\varphi_2 = 70^\circ$

(a) et (c) pour les normales du premier type

(b) et (d) pour les normales du second type

laminage des métaux C.F.C. (inclinaison de 35°), particulièrement dans le cas des déformations à basse température ou dans le cas des solutions solides, c'est-à-dire lorsque l'écroissage latent est important.

La différence entre le calcul et les observations expérimentales provient de l'hypothèse des transformations infinitésimales retenue pour développer les calculs. Une approche utilisant le formalisme des transformations finies conduit à une valeur plus proche de 35° (87). Tenant compte de l'analyse faite dans le chapitre III, il est donc légitime de penser qu'il existe une relation de cause à effet entre le mode de glissement hétérogène décrit dans ce travail et la formation des microbandes de cisaillement.

V-3.1.3 Champ de rotations des réseaux cristallins.

Le calcul des rotations des réseaux cristallins est effectué à partir des relations [V-26]. Pour une orientation $(\varphi_1, \Phi, \varphi_2)$ donnée, à la valeur retenue du glissement plastique solution de [V-44], correspondent deux normales aux plans d'habitat (orthogonales dans la configuration initiale), et donc deux solutions différentes pour les rotations. Dans une famille de grains ayant la même orientation, la formation de l'une ou de l'autre des deux types d'interfaces est donc possible.

On doit donc prendre en compte la double rotation des réseaux cristallins et ne pas effectuer la moyenne des rotations comme cela est souvent proposé pour le modèle de Taylor. Cette solution multiple pour le champ de rotation ne présente pas un caractère d'ambiguïté quelconque et correspond, si elles existent, à des orientations finales stables différentes. Pour que la représentation du champ de rotations soit claire, nous avons séparé la solution double en deux solutions simples à partir du critère de stabilité relative discuté dans le § V-2.3 et dans l'annexe B.

Le champ de rotations est représenté d'une manière discrète sous forme de fonction de répartition des rotations dans des sections de l'espace des angles d'Euler à φ_2 constant. Les variations angulaires $d\varphi_1$, $d\Phi$, $d\varphi_2$ [équations V-37] sont décrites par l'intermédiaire de flèches dans les plans à φ_2 constant, pour une valeur E^p égale à 0.1.

N.B : Pour que la lisibilité des figures soit meilleure, nous avons remplacé les flèches par des points.

Remarque : Il est évident que la solution complète du champ de rotations est composée de celle associée au glissement multiple homogène dans la partie du grain déformée par E^p (solution de Taylor), et de la solution associée au mode de glissement simple dans le même grain. Ici on présente la deuxième solution .

Les figures V.5, V.6, V.7 représentent différentes sections à φ_2 constant (0° , 45° et 54°). Dans ce champ de rotations, on observe des sources et des puits. Ces derniers correspondent à des orientations cristallographiques initiales pour lesquelles la rotation est pratiquement nulle, et des rotations d'orientations voisines convergentes vers les orientations stables que l'on doit observer parmi les composantes de textures .

Evidemment, ces orientations finales stables diffèrent en général de celles calculées à partir des modèles classiques de Taylor ou self-consistents puisqu'elles correspondent à des modes de déformation qui sont différents.

Sur ces mêmes figures sont représentées les différentes composantes de texture de laminage des métaux C.F.C. telles qu'elles ont été inventoriées par Van Houtte (88) et Hirsch et al.(89)[tableau V.1].

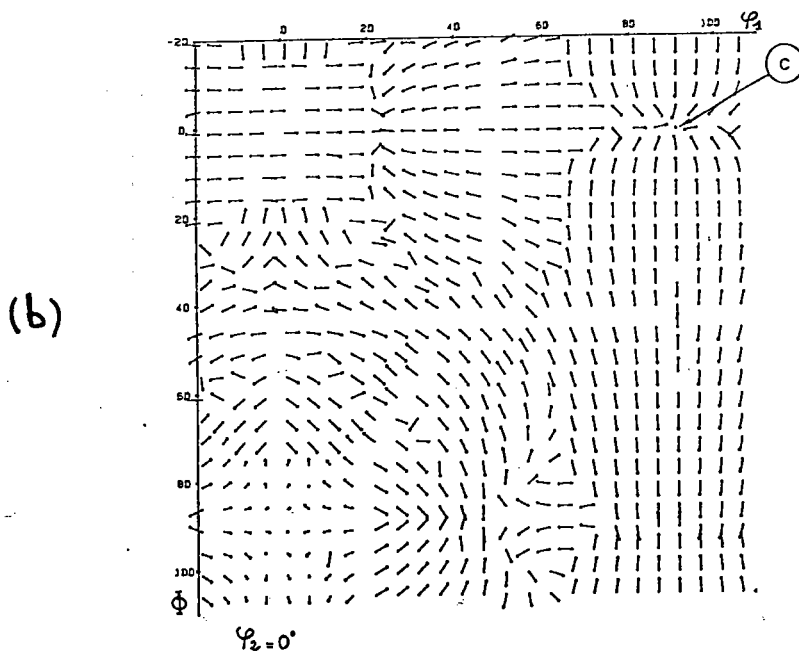
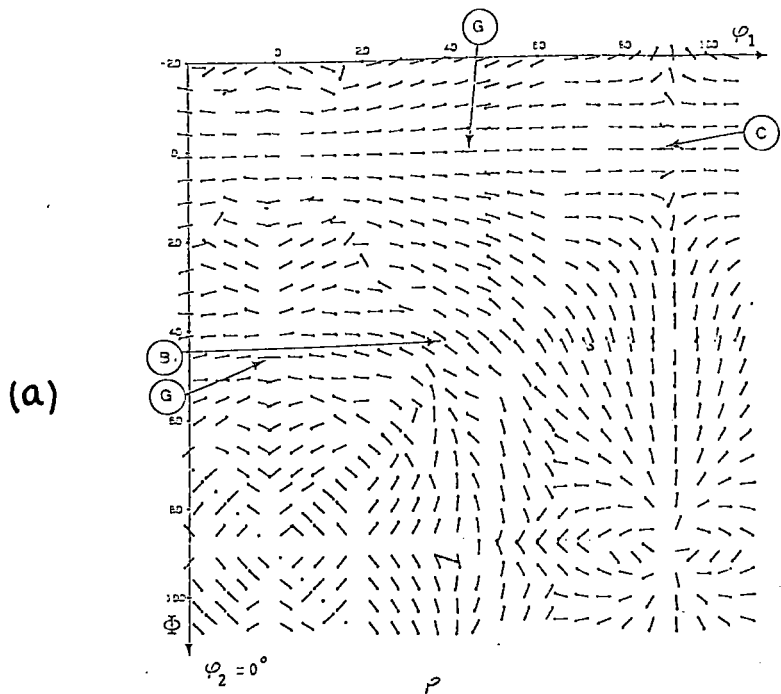
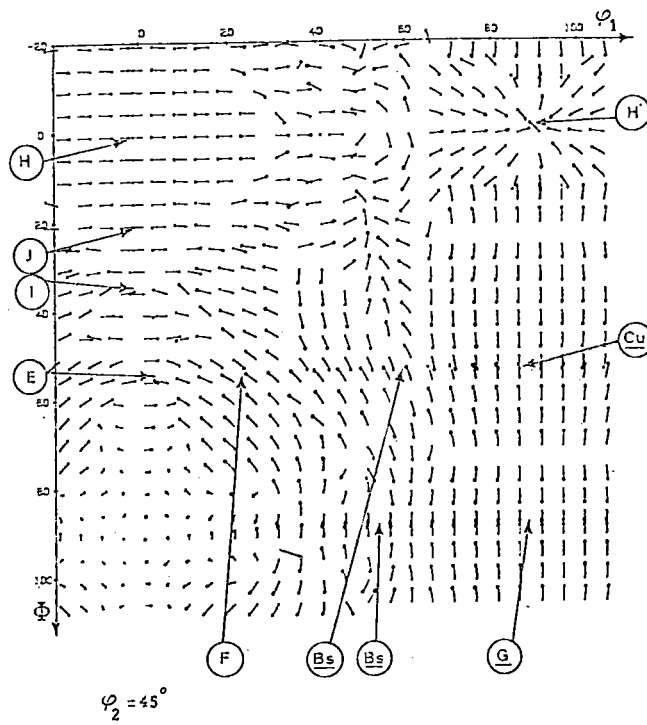


fig.V.5. Champ des rotations des réseaux cristallins pour les C.F.C dans le plan $\psi_2 = 0^\circ$ et composantes de textures décrites par Van Houtte (88)

- (a) pour les normales du premier type
- (b) pour les normales du second type

(a)



(b)

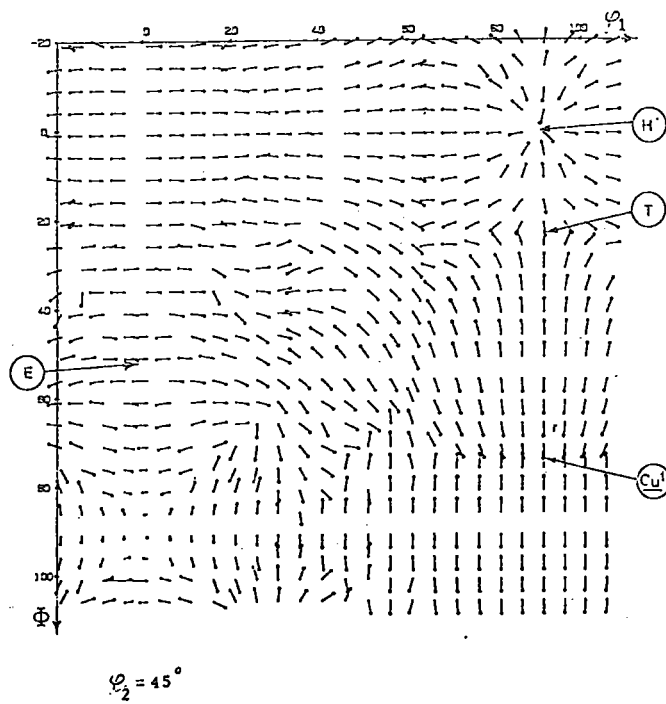


fig.V.6. Champ de rotations des réseaux cristallins pour les C.F.C dans le plan $\varphi_2=45^\circ$ et composantes de textures décrites par:

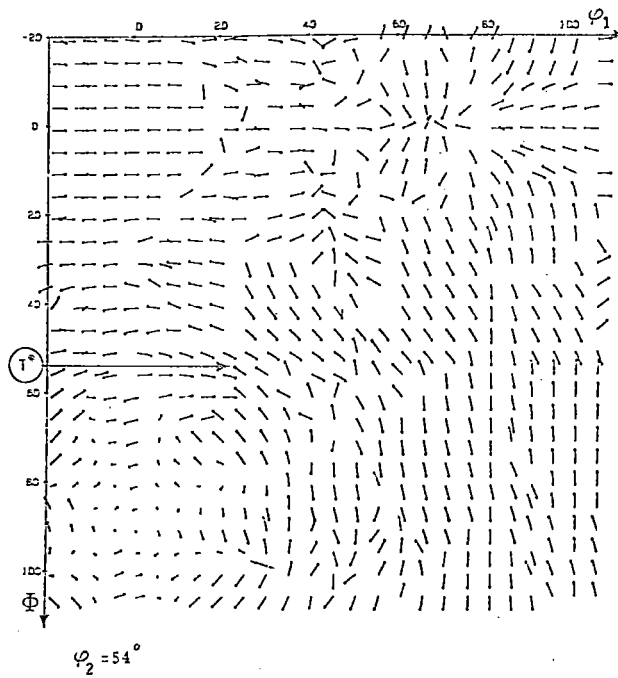
(A) Van Houtte (88)

(A) Hirsh et all. (89)

(a) pour les normales du premier type

(b) pour les normales du second type

(a)



(b)

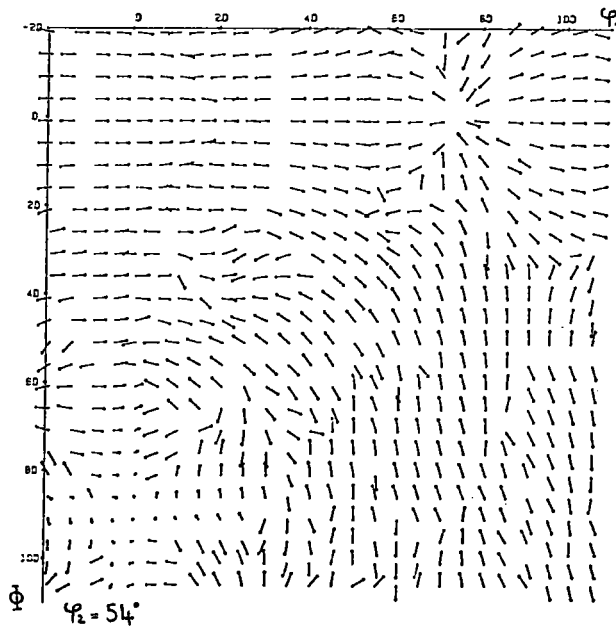
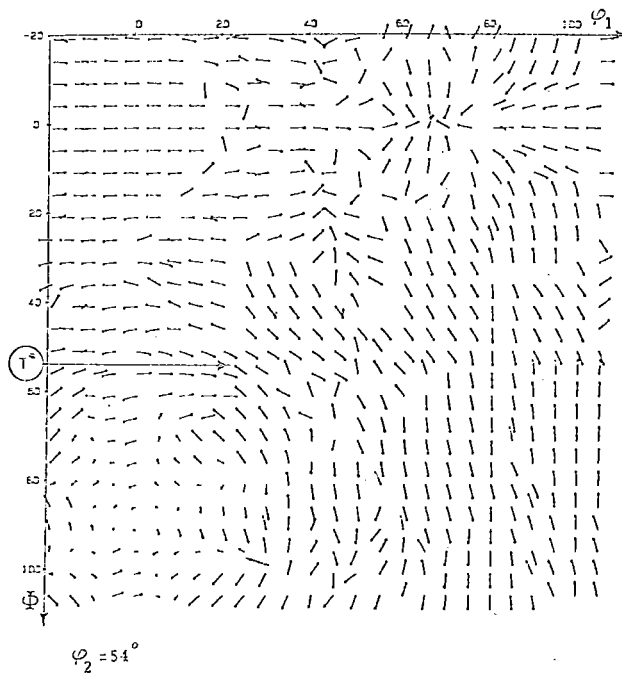


fig.V.7 . Champ des rotations des réseaux cristallins pour les C.F.C dans le plan $\phi_2 = 54^\circ$ et composantes de textures décrites par Van Houtte (88)

(a) pour les normales du premier type

(b) pour les normales du second type

(a)



(b)

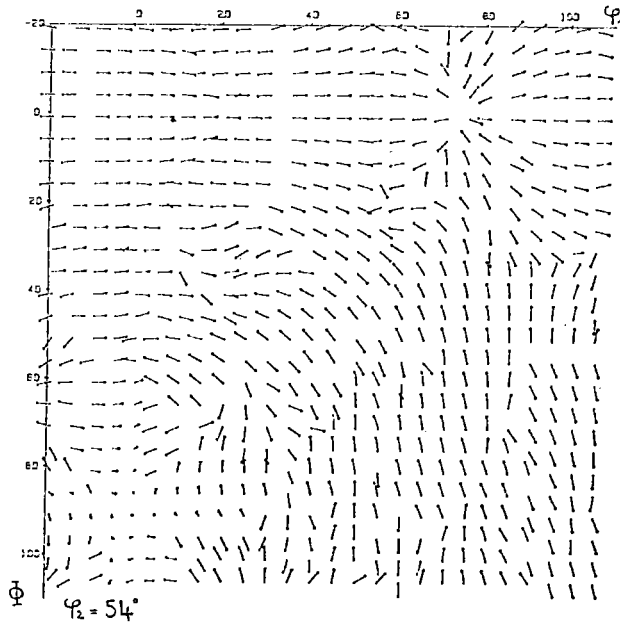


fig.V.7 . Champ des rotations des réseaux cristallins pour les C.F.C dans le plan $\phi_2 = 54^\circ$ et composantes de textures décrites par Van Houtte (88)

- (a) pour les normales du premier type
- (b) pour les normales du second type

| | | | | | |
|-----|-----------------|-----------------|---------------------------|---|------------------------|
| (a) | Cu | { 112 } < 111 > | } $\varphi_1 = 90^\circ,$ | $\phi = 35^\circ$ | $\varphi_2 = 45^\circ$ |
| | Cu | { 111 } < 112 > | | $\phi = 55^\circ$ | |
| | Cu | { 332 } < 113 > | | $\phi = 65^\circ$ | |
| | Cu ^T | { 552 } < 115 > | | $\phi = 75^\circ$ | |
| | G | { 110 } < 001 > | | $\phi = 90^\circ$ | |
| | BS | { 112 } < 110 > | | $\varphi_1 = 55^\circ, \phi = 90^\circ$ | |
| | BS | { 111 } < 110 > | | $\varphi_1 = 60^\circ, \phi = 55^\circ$ | |

| | $(\varphi_1, \phi, \varphi_2)$ | (h, k, l) | $[u, v, w]$ |
|------------------|---|---------------|-------------------------|
| C = | $(0^\circ, 0^\circ, 90^\circ)$ | $(0, 0, 1)$ | $[1, 0, 0]$ |
| C = | $(90^\circ, 0^\circ, 0^\circ)$ | $(0, 0, 1)$ | $[1, 0, 0]$ |
| T = | $(90^\circ, 27^\circ, 45^\circ)$ | $(4, 4, 11)$ | $[11, 11, \bar{8}]$ |
| Cu = | $(90^\circ, 35^\circ, 45^\circ)$ | $(1, 1, 2)$ | $[1, 1, \bar{1}]$ |
| S ₁ = | $(57^\circ, 29^\circ, 63^\circ)$ | $(1, 2, 4)$ | $[2, 1, \bar{1}]$ |
| S ₂ = | $(47^\circ, 37^\circ, 63^\circ)$ | $(1, 2, 3)$ | $[4, 1, \bar{2}]$ |
| S ₃ = | $(59^\circ, 37^\circ, 63^\circ)$ | $(1, 2, 3)$ | $[6, 3, \bar{4}]$ |
| B = | $(35^\circ, 45^\circ, 0^\circ)$ | $(0, 1, 1)$ | $[2, 1, \bar{1}]$ |
| G = | $(0^\circ, 45^\circ, 0^\circ)$ | $(0, 1, 1)$ | $[1, 0, 0]$ |
| T* = | $(25^\circ, 51^\circ, 54^\circ)$ | $(11, 8, 11)$ | $[4, \bar{11}, 4]$ |
| E = | $(0^\circ, 55^\circ, 45^\circ)$ | $(1, 1, 1)$ | $[1, \bar{1}, 0]$ |
| F = | $(30^\circ, 55^\circ, 45^\circ)$ | $(1, 1, 1)$ | $[1, \bar{2}, 1]$ |
| H = | $(90^\circ, 0^\circ, 45^\circ)$ $(0^\circ, 0^\circ, 45^\circ)$ | $(0, 0, 1)$ | $[1, \bar{1}, 0]$ |
| H' = | $(90^\circ, 0^\circ, 45^\circ)$ | $(0, 0, 1)$ | $[\bar{1}, \bar{1}, 0]$ |
| I = | $(0^\circ, 35^\circ, 45^\circ)$ | $(1, 1, 2)$ | $[1, \bar{1}, 0]$ |
| J = | $(0^\circ, 20^\circ, 45^\circ)$ | $(1, 1, 4)$ | $[1, \bar{1}, 0]$ |
| K = | $(0^\circ, 0^\circ, 34^\circ)$ | $(0, 0, 1)$ | $[3, \bar{2}, 0]$ |
| K' = | $(0^\circ, 0^\circ, 56^\circ)$ | $(0, 0, 1)$ | $[2, \bar{3}, 0]$ |

Tableau.V.1. Composantes de textures de laminage observées dans les métaux C.F.C.

(a) d'après J.Hirsh, K.H.Virnich, K.Lücke (89)

(b) d'après P.Van Houtte (88)

De nombreuses composantes majeures ($\{0, BS\}$) correspondant essentiellement à la texture du type laiton sont présentes dans les figures obtenues. Par contre, ce modèle ne conduit pas aux composantes $\{112\} \langle 111 \rangle$ (Cu) et $\{123\} \langle 634 \rangle$ (S) qu'on observe couramment dans le cas des métaux tels que le cuivre ou l'aluminium, c'est-à-dire ceux pour lesquels le glissement multiple homogène est favorable. Ces composantes sont justement attribuées au glissement multiple homogène et sont bien décrites par le modèle de Taylor et les modèles self-consistents. Il est alors évident que le modèle proposé ici ne les prédit pas mais prédit plutôt celles qui correspondent à l'autre classe de matériaux présentée dans le chapitre III et au début de ce chapitre, pour lesquels nous avons considéré une déformation hétérogène dans les grains.

Notons également que certaines composantes mineures, qui apparaissent pour différentes valeurs de φ_2 et pour particulièrement $\Phi = 0^\circ$ ou $\varphi_1 = 0^\circ$ (I, J, H, E, H', F, T, T*) sont également présentes sur les figures V.5, V.6 et V.7, ainsi que sur la figure expérimentale de Korbel (2) correspondant à un alliage Al-Mg déformé à 35%, en particulier pour un laminage à basse température (fig.V.8).

Remarque:

Les différentes coupes de l'espace des angles d'Euler sont faites à φ_2 constant, mais $d\varphi_2$ n'est évidemment pas nul. Pour vérifier la stabilité des composantes de textures, nous avons représenté le champ de rotations à trois coupes voisines ($\varphi_2=0^\circ$, $\varphi_2=3^\circ$, $\varphi_2=6^\circ$)[fig.V.9]. On voit sur ces figures que les composantes ne changent pratiquement pas de positions.

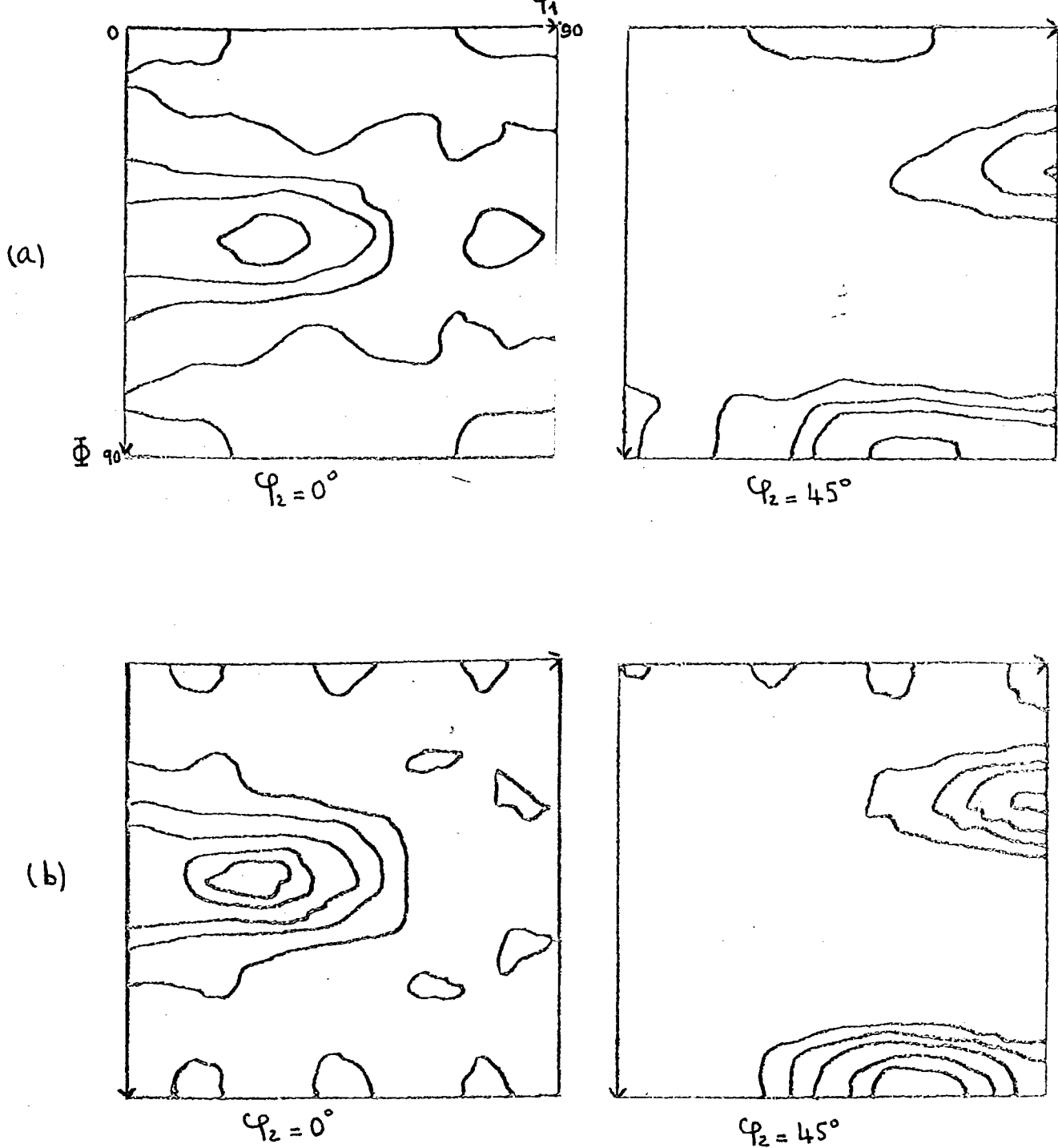
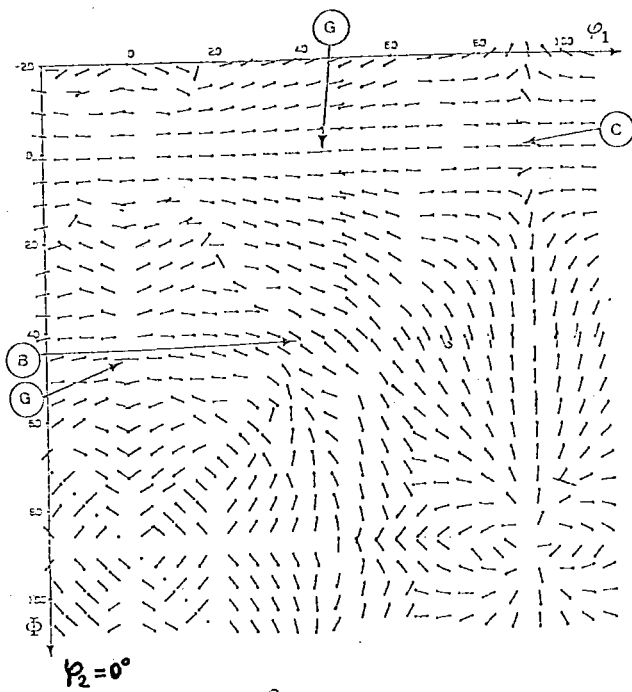


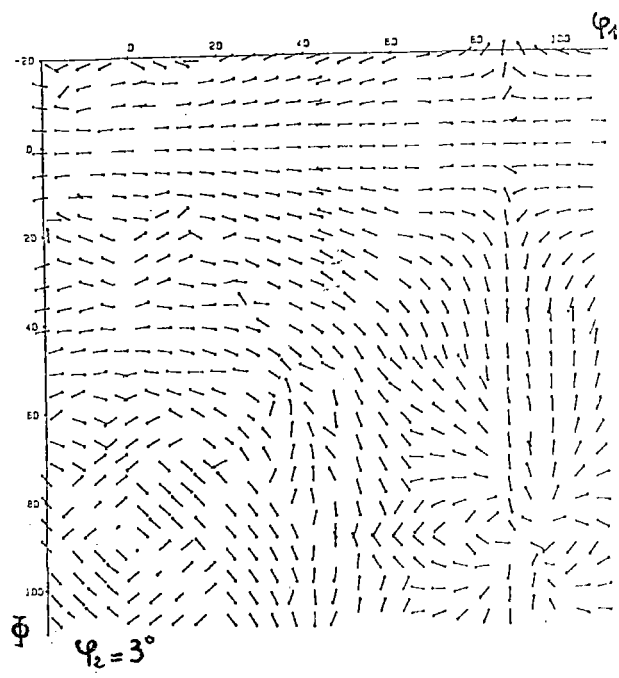
fig.V.8 Fonction de répartition des orientations cristallines d'un alliage Al-Mg laminé à 35% (d'après Korbel (2))

(a) à température ambiante

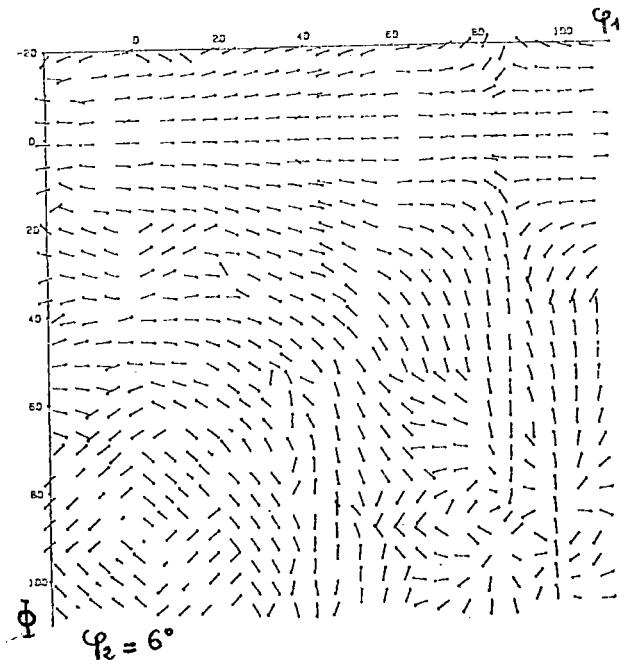
(b) à basse température (77°K)



(a)



(b)



(c)

fig.V.9 Influence de $\Delta\varphi_2$ sur la position des composantes de texture
 (a) champ de rotations pour les C.F.C à $\varphi_2=0^\circ$
 (b) " " " " $\varphi_2=3^\circ$
 (c) " " " " $\varphi_2=6^\circ$

U.3.2. Application au laminage des métaux C.C.

Comme pour les métaux C.F.C, le tenseur de déformation macroscopique imposée à la même forme que [V-42]. La procédure utilisée est la même qu'au paragraphe précédent. Nous avons considéré que ces métaux se déforment par glissement sur des plans et dans des directions denses. Les composantes des tenseurs \underline{R} et \underline{S} pour cette structure sont données dans le tableau II.2. Les résultats obtenus (pôles des plans d'habitat et champ de rotations) sont présentés de la même manière. Pour les métaux C.C. il est plus pratique, pour pouvoir comparer avec les résultats expérimentaux, de représenter la distribution des rotations cristallines dans des sections à φ_1 constant.

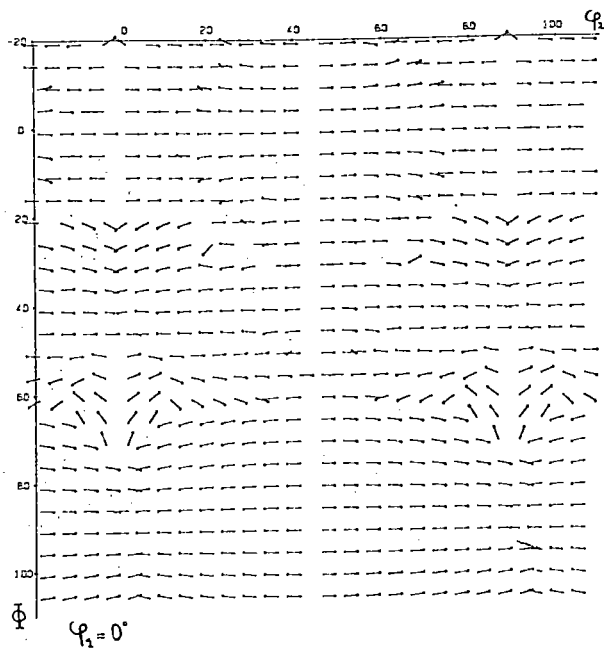
U-3.2.1 Normales aux plans d'habitat:

Les projections stéréographiques dans le plan (DL,DT) des normales aux plans d'habitat dans le cas des métaux C.C. est la même que pour les métaux C.C. Ceci résulte du fait que l'amplitude du glissement γ correspondant à la comptabilité [V-44] et les normales aux plans d'habitat dépendent du tenseur symétrique \underline{R} qui est le même dans les deux cas.

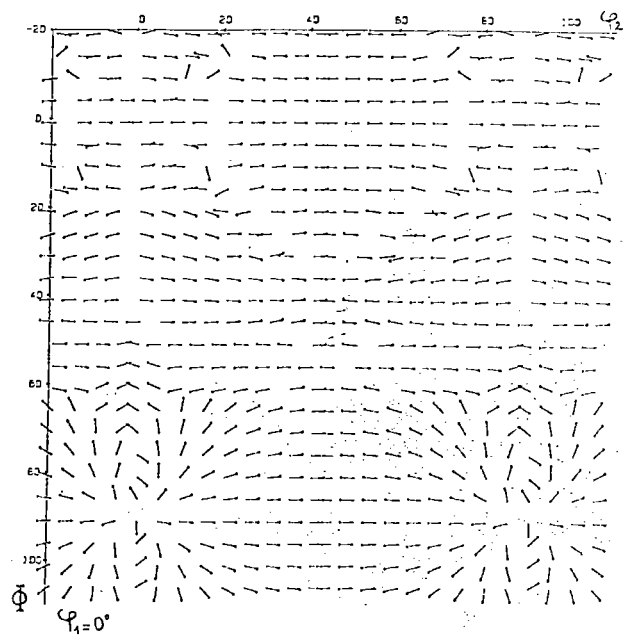
U-3.2.2 Champ de rotations des réseaux cristallins:

La distribution des rotations des réseaux cristallins est donc représentée par des sections à φ_1 constant dans l'espace des angles d'Euler. Les incréments $d\varphi_2$ et $d\Phi$ sont également décrits par des flèches pour une valeur de E^p égale à 0.1.

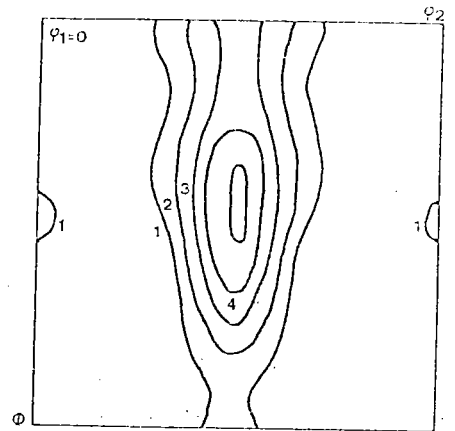
Sur les figures V.10, V.11 et V.12, on a représenté le champ de rotations pour les valeurs de φ_1 de 0° , 50° , 90° , ainsi que les résultats expérimentaux de Bunge (80) correspondant à des barres d'acier déformées en laminage à 70 %. Comme pour les métaux C.F.C., on voit sur ces figures que certaines composantes de textures expérimentales, qui ne sont pas décrites



(a)



(b)



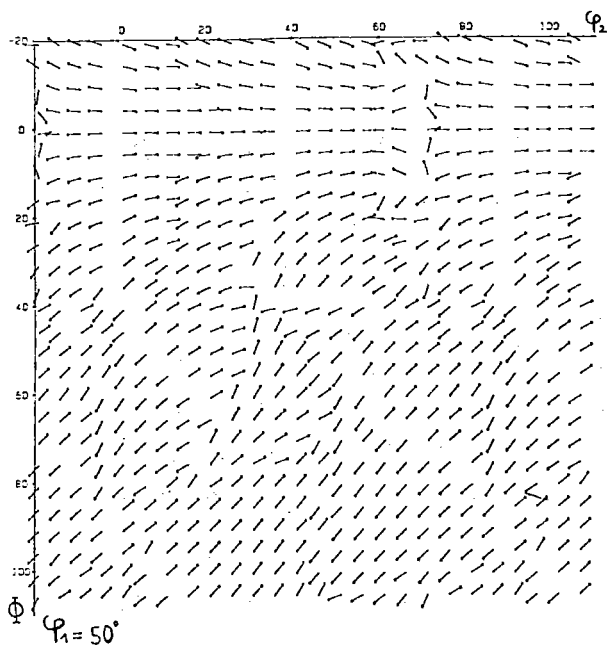
(c)

fig.V.10. Champ de rotations des réseaux cristallins C.C dans le plan $\varphi_1 = 0^\circ$

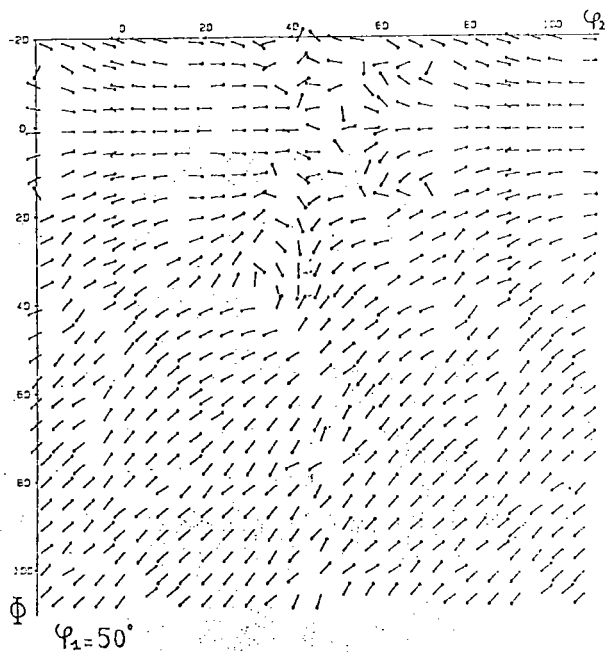
(a) pour les normales du premier type

(b) pour les normales du second type

(c) textures expérimentales mesurées par Bunge(85)



(a)



(b)

(c)

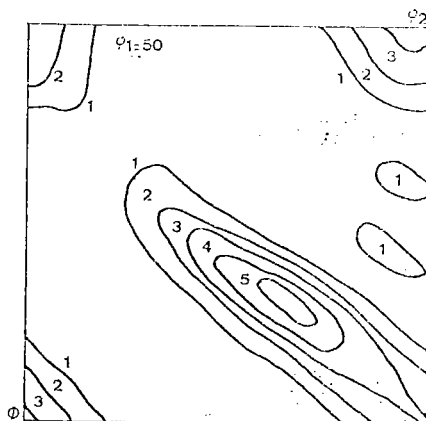
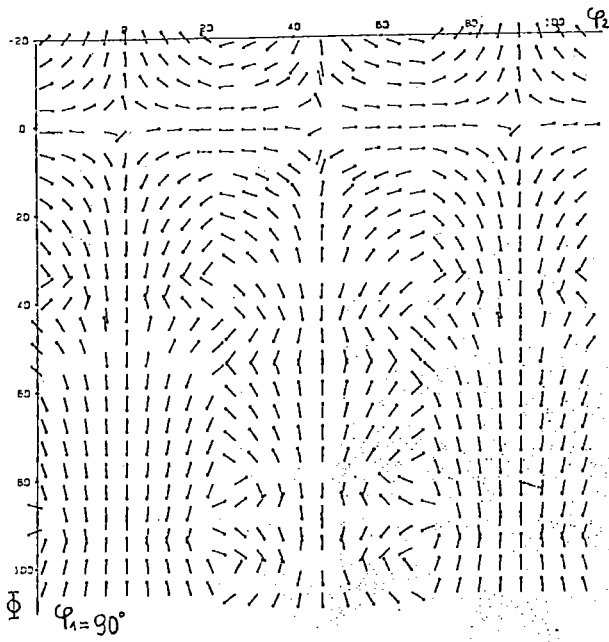


fig.V.11. Champ de rotations des réseaux cristallins C.C dans le plan $\varphi_1 = 50^\circ$

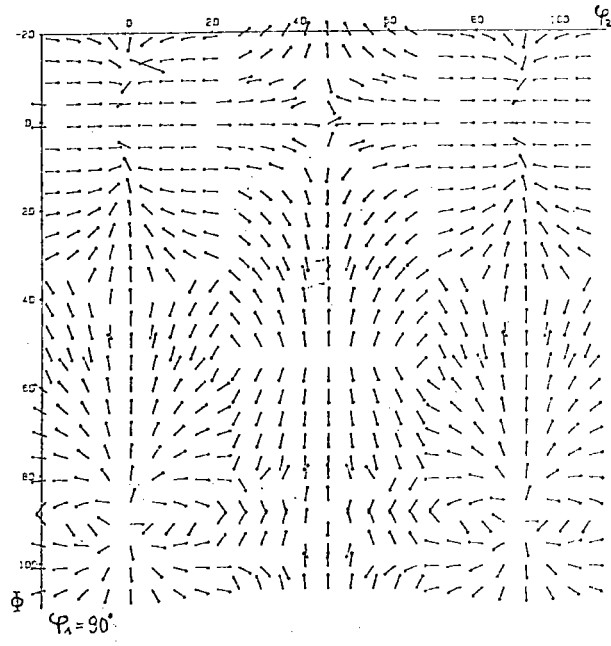
(a) pour les normales du premier type

(b) pour les normales du second type

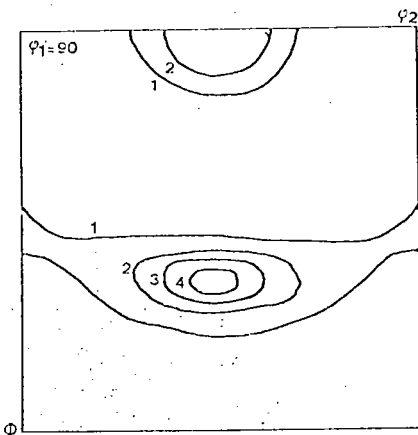
(c) textures expérimentales mesurées par Bunge (85)



(a)



(b)



(c)

fig.V. 12. Champ de rotations des réseaux cristallins C.C dans le plan $\varphi_1 = 90^\circ$

(a) pour les normales du premier type

(b) pour les normales du second type

(c) textures expérimentales mesurées par Bunge(85)

par les modèles classiques de plasticité polycristaux, sont bien prédites par l'approche adoptée dans ce travail.

Par conséquent, nous pouvons conclure que l'existence de ces composantes découle d'un mode de déformation plastique hétérogène à l'échelle des grains. Bien sûr il faut noter, comme pour les métaux C.F.C., que l'approche utilisée ici ne décrit pas les textures associées au mode de glissement multiple homogène.

V-4. Discussion et conclusions.

Nous avons introduit le concept de mode de déformation plastique hétérogène en distinguant essentiellement le glissement multiple homogène et le glissement simple, indépendamment de tout autre mécanisme de déformation (maçlage, glissement aux joints de grains...). La compétition entre le mode de déformation par glissement multiple homogène et le glissement hétérogène dépend essentiellement de l'écroissage latent, c'est-à-dire des interactions mécaniques entre les dislocations des systèmes de glissement.

En général, le glissement multiple homogène est favorisé par un écroissage latent faible. Mais, même si celui-ci est important, ce mode de déformation peut intervenir dans les zones à forte concentration de contraintes telles que les joints de grains ou les noeuds triples. En effet dans ces zones, le glissement primaire introduit des contraintes internes d'incompatibilité intergranulaire qui déclenchent d'autres systèmes de glissement aboutissant à un glissement multiple homogène.

En dehors des zones à forte concentration de contraintes, le glissement simple est prédominant si l'écroissage latent est important. Il se pose alors le problème de compatibilité entre les zones à glissement multiple et les zones à glissement simple. Ce problème est abordé dans ce travail, non pas pour une microstructure particulière dépendant de la forme

des grains, de leurs orientations et des caractéristiques des joints de grains..., mais en imposant la compatibilité d'une déformation plastique hétérogène constante par morceaux de part et d'autre d'une interface plane.

Les conséquences de cette partition de la déformation plastique dans les grains du polycristal en deux modes de déformation selon l'intensité de l'écroutissage latent sont nombreuses.

a. à chacun des modes de déformation est associée une texture particulière :

* la texture du type cuivre pour le glissement multiple homogène.

* la texture du type laiton pour le glissement simple.

La répartition des différentes composantes de textures dépend des fractions volumiques associées à chaque mode de déformation. Celles-ci sont liées à l'écroutissage latent (la fraction volumique de la zone à glissement simple doit certainement augmenter avec cet écroutissage), mais également à la taille des grains. Lorsque celle-ci est faible, la zone à glissement multiple homogène peut envahir l'ensemble des grains et favoriser ainsi la texture du type cuivre malgré l'importance de l'écroutissage latent. Une première indication dans ce sens a été fournie par Lin et Ahlers (90) qui ont observé qu'une taille de grain importante conduit à une augmentation de la texture du type laiton dans le cas d'une texture de transition.

b. Au delà des aspects liés à la texture, la formation non aléatoire des plans d'habitat, pendant l'écoulement plastique du polycristal, confère à celui-ci une microstructure particulière qui se superpose à la structure granulaire initiale.

Les résultats concernant les plans d'habitat montrent que la répartition de leurs orientations n'est pas aléatoire mais qu'elle est proche de l'orientation des microbandes de cisaillement des métaux déformés en laminage (ou en traction). On peut donc raisonnablement supposer qu'il existe

une relation de cause à effet entre la formation des plans d'habitat, le développement des microbandes de cisaillement et leur coalescence en bandes macroscopiques. L'étude faite dans le chapitre III à propos du plan d'habitat d'"épaisseur finie" ne peut que confirmer cette analyse.

La superposition à la structure granulaire initiale du matériau d'une microstructure à plans d'habitat orientés confère au polycristal une "ordre" à grande distance du fait des corrélations d'orientations entre ces plans d'habitat.

Enfin, la possibilité d'existence de tels modes de déformation hétérogène, et de tels microstructures complique notablement l'établissement des modèles polycristallins car il est primordial de prendre en compte les différents effets décrits précédemment. Dans ces conditions, les modèles usuels tels que Taylor ou self-consistents sont insuffisants, et il convient d'aborder le problème par d'autres méthodes et en particulier par des méthodes statistiques comme celles récemment développées pour l'élasto-plasticité par Lipinski et Berveiller (8).

Chapitre VI

CONCLUSION GENERALE

CHAPITRE VI

CONCLUSION GENERALE.

Ce travail constitue une première approche des mécanismes de déformation plastique hétérogène dans les polycristaux métalliques et des conséquences des hétérogénéités induites sur la formation des textures, les contraintes internes de troisième ordre et les microbandes de déformation.

En utilisant la théorie de Kröner concernant les problèmes d'incompatibilité et de contraintes internes, et en les développant pour les cas des plans d'habitat et d'inclusions, nous avons dégagé certaines caractéristiques d'hétérogénéités couramment observées dans les mono et les polycristaux: cellules de dislocations et microbandes de déformation. La prise en compte de l'épaisseur physique des volumes d'hétérogénéités permet de déduire deux termes pour les différentes grandeurs d'incompatibilité (tenseur densité de dislocations, tenseur d'incompatibilité plastique, et contraintes internes): Un premier terme à "grande distance" associé à la nature de l'hétérogénéité plastique, et un terme "local" associé à la structure dipolaire des dislocations. c'est à partir de ce second terme que nous avons proposé une explication du mécanisme de formation des microbandes de cisaillement, sans toutefois tenir compte des paramètres permettant de dire à partir de quel moment ces microbandes se forment.

D'autre part, nous avons introduit dans les métaux et alliages à fort écrouissage latent, le concept de déformation plastique intragranulaire hétérogène, en distinguant essentiellement le glissement multiple homogène et le glissement simple, indépendamment de tout autre mécanisme de déformation. L'analyse de la compatibilité de ce champ de déformation permet de confirmer l'existence de relations de cause à effet entre la formation

des hétérogénéités plastiques dans le polycristal et:

- d'une part, la formation de composantes de textures caractéristiques de ces métaux.
- d'autre part, la formation et l'orientation, non aléatoire, des microbandes de cisaillement.

Ce travail ne prétend pas avoir résolu de manière complète et définitive le problème difficile et complexe de la formation des hétérogénéités de déformation plastique. Il apporte une contribution basée à la fois sur des observations et sur la mise en oeuvre de mécanismes qui sont connus par ailleurs.

De nombreux problèmes restent encore à résoudre, parmi lesquels:

- La prise en compte quantitative de l'écrouissage latent dans le mécanisme de formation des hétérogénéités, permettant ainsi de savoir à partir de quelle valeur il y a bifurcation du mode de déformation homogène au mode hétérogène.
- D'un point de vue pratique, il est important de pouvoir déterminer pour quelle amplitude de déformation macroscopique imposée les microbandes coalescent en bandes macroscopiques.
- Tenir compte des interactions entre les zones hétérogènes qui se forment dans le même grain du polycristal au cours de la déformation. Pour ce problème, on pourra s'inspirer du problème de la paire d'inclusions (91).
- Appliquer ces concepts à d'autres modes de chargement (traction, compression, torsion...), et en grandes déformations plastiques (travail en cours au laboratoire).

Le but ultime des recherches dans ce domaine est finalement de prendre en compte ces mécanismes de déformation plastique hétérogène en liaison avec les modèles type self-consistent ou statistiques.

ANNEXE A

Solutions satisfaisant le principe du travail plastique minimum.

Les équations du chapitre V, § 2-3 définissent une classe de champs de déformation cinématiquement admissibles. Pour une déformation macroscopique \underline{E}^P donnée et pour chaque système de glissement choisi arbitrairement on peut déterminer l'amplitude du glissement et toutes les autres grandeurs correspondant à la compatibilité. Or pour les structures C.F.C. et C.C. douze systèmes de glissement (ou vingt quatre si on tient compte du sens du glissement) peuvent être considérés ; les déformations correspondantes sont cinématiquement admissibles puisqu'on cherche la compatibilité). Mais, pour un même champ de contraintes donné, parmi toutes ces solutions, la solution réelle est celle qui minimise le travail plastique :

$$W = \int_V \sigma_{ij}(r) \cdot \epsilon_{ij}^P(r) \cdot dV \quad [A-1]$$

(On somme sur tout le volume du polycristal)

En divisant par le volume total V et en sommant sur tous les grains on a :

$$w = \frac{W}{V} = \frac{1}{V} \sum_I \int_{V_I} \sigma_{ij}(r) \cdot \epsilon_{ij}^P(r) \cdot dV \quad [A-2]$$

soit

$$w = \sum_I \left\{ \frac{1}{V} \int_{V_I^M} \sigma_{ij}^M \cdot \epsilon_{ij}^P dV + \frac{1}{V} \int_{V_I^Z} \sigma_{ij}^Z \cdot \epsilon_{ij}^P \cdot dV \right\} \quad [A-3]$$

où V_I^M et $\underline{\sigma}^M$ sont respectivement le volume et la contrainte dans la zone à glissement multiple et V_I^Z et $\underline{\sigma}^Z$ les mêmes grandeurs dans la zone à glissement simple.

En supposant les contraintes constantes dans chaque zone on a :

$$w = \sum_I \frac{V^{M1}}{V} \sigma_{IJ}^M . E_{IJ} + \sum_I \frac{V^{I2}}{V} . \sigma_{IJ}^I . \epsilon_{IJ} \quad [A-4]$$

soit, en utilisant les fractions volumiques définies dans le chapitre V :

$$\begin{aligned} w &= f . \sigma_{IJ}^M . E_{IJ} + \sum_I f^I . \sigma_{IJ}^I . \epsilon_{IJ} \\ &= f . \sigma_{IJ}^M . E_{IJ} + \sum_I f^I . \sigma_{IJ}^I . R_{IJ}^k . \gamma^{Ik} \end{aligned} \quad [A-5]$$

k désigne le système de glissement considéré (pas de sommation sur k).

Le produit $\sigma_{IJ}^I R_{IJ}^k$ est la cission réduite τ^k sur le système k (égale à la cission critique τ_c^k pour le champ de déformation réel).

En supposant (comme dans le modèle de Taylor) que la cission critique initiale est la même pour tous les systèmes de glissement, on peut écrire :

$$w = f . \sigma_{IJ}^M . E_{IJ} + \tau_c \sum_I f^I |\gamma^{Ik}| \quad [A-6]$$

(on prend la valeur absolue pour que le produit $\tau_c \gamma^{Ik}$ soit toujours positif).

Donc, pour un champ de déformation macroscopique donné, w est minimal lorsque le deuxième terme de la somme est minimal. Par conséquent, dans un grain I , pour la même fraction volumique f^I de la zone à glissement simple, le minimum est obtenu pour $|\gamma^{Ik}|$ minimale. Autrement dit, parmi tous les systèmes de glissement, le système retenu est celui pour lequel la valeur absolue du glissement est minimale. Ce principe est analogue au principe établi par Taylor pour choisir les systèmes de glissement actifs et il est la base de tous les modèles du même type.

ANNEXE B

Stabilité relative des plans d'habitat.

Pour établir la théorie du chapitre V, nous avons considéré une déformation plastique constante par morceaux (\underline{E}^P et $\underline{R} \cdot \gamma$) de part et d'autre d'une interface plane. La compatibilité de ce champ de déformation donne deux normales à cette interface, qui est donc un plan d'habitat. Cette interface est alors le siège d'une densité superficielle de dislocations associée à la condition de compatibilité de premier ordre ($\eta_{ij} = 0$) qui annule les contraintes à grande distance. En réalité, l'interface formée possède une certaine "épaisseur" physique due aux interactions locales entre les dislocations comme cela est analysé dans le chapitre III, § 4. Ces interactions induisent un champ local de contraintes dû à la partie dipolaire du tenseur $\underline{\alpha}$ [éq. III-47]. Nous avons établi que le tenseur d'incompatibilité global pour un tel problème se met sous la forme [III-64]:

$$\eta_{ij} = \eta_{ij}^+ + \eta_{ij}^-$$

avec $\eta_{ij}^+ = \epsilon_{ikm} \epsilon_{jen} N_k N_e \cdot D \epsilon_{mn}^P \cdot [\delta'(u) + \delta'(u-h)]$ [B-1]

$$\eta_{ij}^- = \epsilon_{ikm} \epsilon_{jen} N_k N_e \cdot S \epsilon_{mn}^P \cdot [\delta'(u) - \delta'(u-h)]$$
 [B-2]

où ici :

$$D \epsilon_{mn}^P = - \frac{\Delta \epsilon_{mn}^P}{2} = \frac{1}{2} \left(R_{mn}^I \gamma^I - E_{mn}^P \right)$$

$$S \epsilon_{mn}^P = \frac{1}{2} \left(R_{mn}^I \gamma^I + E_{mn}^P \right)$$

\vec{N} : la normale unitaire à l'interface

h : "l'épaisseur" physique de l'interface.

et

u : la distance d'un point donné à l'interface

Dans l'hypothèse où h est de faible valeur:

Au tenseur d'incompatibilité de premier ordre $\underline{\eta}^1$ est associé un champ de contraintes à grande distance $\underline{\sigma}^1$ [III-49] :

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^1 &= -\frac{\mu}{1-\nu} \left[\Delta \epsilon_{11}^p + \nu \Delta \epsilon_{22}^p \right] \cdot \text{sgn}(u) \\ \sigma_{22}^1 &= -\frac{-\mu}{1-\nu} \left[\nu \Delta \epsilon_{11}^p + \Delta \epsilon_{22}^p \right] \cdot \text{sgn}(u) \\ \sigma_{12}^1 &= -\mu \cdot \Delta \epsilon_{12}^p \cdot \text{sgn}(u)\end{aligned}\quad [B-3]$$

$$\sigma_{13}^1 = \sigma_{23}^1 = \sigma_{33}^1 = 0$$

ici u est suivant l'axe 3 .

Au tenseur d'incompatibilité de second ordre $\underline{\eta}^2$ est associé un champ de contraintes local $\underline{\sigma}^2$ [III-56] :

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^2 &= \frac{2\mu}{1-\nu} \left[\text{Se} \epsilon_{11}^p + \nu \text{Se} \epsilon_{22}^p \right] \cdot h \cdot \delta(u) \\ \sigma_{22}^2 &= \frac{2\mu}{1-\nu} \left[\nu \text{Se} \epsilon_{11}^p + \text{Se} \epsilon_{22}^p \right] \cdot h \cdot \delta(u)\end{aligned}\quad [B-4]$$

$$\sigma_{12}^2 = 2\mu \cdot \text{Se} \epsilon_{12}^p \cdot h \cdot \delta(u)$$

$$\sigma_{13}^2 = \sigma_{23}^2 = \sigma_{33}^2 = 0$$

Donc, en exprimant la condition de compatibilité du premier ordre ($\eta_{ij}^1 = 0$), on annule $\underline{\sigma}^1$ mais $\underline{\sigma}^2$ ne peut s'annuler que pour $h = 0$ ce qui, physiquement, n'est pas réalisable pour des déformations à froid.

Par conséquent, aux deux normales aux plans d'habitats \vec{N}_1 et \vec{N}_2 calculées pour la même hétérogénéité de déformation, correspondent deux champs de contraintes locales résiduelles $\underline{\sigma}^2(\vec{N}_1)$ et $\underline{\sigma}^2(\vec{N}_2)$ correspondant aux

incompatibilités résiduelles $\underline{\eta}^2(N_1)$ et $\underline{\eta}^2(N_2)$.

Ces contraintes, exprimées dans un repère indépendant de l'interface ont la même forme que [II-65]. il suffit de remplacer $\Delta\underline{\epsilon}^P$ par $S\underline{\epsilon}^P$:

$$\sigma_i = - \frac{2\mu}{1-\nu} C_{ij} S\underline{\epsilon}_j^P \quad [B-5]$$

($S\underline{\epsilon}^P$ est vécotorisé de la même manière que $\Delta\underline{\epsilon}^P$)

Pour exprimer la stabilité relative de ces deux normales, on peut procéder de deux manières :

a- Calculer l'énergie de déformation "élastique" associée au deux champs de contraintes.

Cette énergie peut être calculée à partir de la relation [II-70] et des contraintes associées à $S\underline{\epsilon}^P$ [B-5]. La normale qu'on a appelé "à stabilité forte" est dans ce cas celle qui correspond à l'énergie la plus faible.

On peut également calculer le module du tenseur d'incompatibilité de second ordre $\underline{\eta}^2$ pour chacune des deux normales :

$$|\underline{\eta}^2(\vec{N}_1)|^2 = \eta_{ij}^2(\vec{N}_1) \cdot \eta_{ij}^2(\vec{N}_1) \quad [B-6]$$

$$|\underline{\eta}^2(\vec{N}_2)|^2 = \eta_{ij}^2(\vec{N}_2) \cdot \eta_{ij}^2(\vec{N}_2) \quad [B-7]$$

La normale à "stabilité forte" correspond dans ce cas au module de $\underline{\eta}^2$ le plus faible.

b- Exprimer pour chacune des deux normales l'énergie de déformation associée à une incompatibilité partielle (écart à la compatibilité avec une légère variation de l'orientation de l'interface ,ou de la valeur du glissement γ). L'énergie correspondant à chaque normale est calculée à partir de [II-70] et de la même manière nous appelons normale "stable" celle qui correspond à l'énergie faible.

Numériquement nous avons utilisé les deux méthodes et le résultat obtenu, du point de vue séparation des deux normales, est exactement le même.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.

- [1] B. JAOU, "Etude de la plasticité et application aux métaux",
Ed. Dunod, (1965)
- [2] A. KORBEL, J.D. EMBURY, M. HARTHERLY, P.L. MARTIN, H.W. EBSLOH,
Acta Metall., 34, n°10, p. 1999, (1986)
- [3] F. RONDE OUSTEAU, *thèse Doct. Ing., Université de Nancy I*, (1977).
- [4] J.H. SCHMITT, *thèse d'état I.N.P. de Grenoble*, (1986).
- [5] M. HARTHERLY, *Proc. ICOTOMS, G. Gottstein and K. Lücke ed. 1*, p.81,
(1978).
- [6] G.R. CANOVA, *thèse d'état, Université de Metz*, (1986).
- [7] M. ARMINJON, *Acta Metall.*, 35, p. 615, (1987).
- [8] P. LIPINSKI, M. BERVEILLER, (*à paraître dans J. of Plasticity*).
- [9] S.AHZI, *thèse , Université de Metz*, (1987).
- [10] M. BERVEILLER, *thèse d'état, Université de Paris Nord*, (1978).
- [11] A. ZAOU, *thèse d'état, Université Paris*, (1970).
- [12] K. WIERBANOWSKI, M. BERVEILLER, *Cryst. Res. Tech.*, 21, p. 11, (1980).
- [13] C. REY, *thèse d'état, Université de Paris Nord*, (1980).
- [14] P. MUSSOT, *thèse de 3eme cycle, Université de Paris VI*, (1983).
- [15] G. WASSERMANN, *Zeit Metallkunde*, 54, p. 61, (1963).
- [16] G. WASSERMANN, W. HEYE, *Zeit. Metallkunde*, 59, p. 693, (1978).
- [17] T. LEFFERS, *Zeit Metallkunde*, 60, p. 785, (1969).
- [18] G. SACHS, *Zeltschiff VDT*, 72, p. 734, (1928).
- [19] M.S. WECHSLER, D.S. LIEBERMANN, T.A. READ, *J. of Metals*, 5, p. 1503,
(1935).
- [20] C.M. WAYMAN, "*Int.to the crist.transf.*", *H.B. Fine and all.ed., New York*, (1964)
- [21] D. CAILLARD, *thèse d'état, Université de Toulouse*, (1984).

- [22] E. KRONER, "Dislocation field theory", *Summer school Hrazan1, Ed. Academia Prague*, (1966).
- [23] A. ZAQUI, "Dislocations et déformation plastique ", *École d'été Yrivals*, p. 307 (1979)
- [24] J.D. ESHELBY, *Proc. Roy. Soc*, A241, p. 376, (1957).
- [25] E. KRONER, *Acta Metall.*, 9, p. 155, (1961).
- [26] T. MURA, "Micromechanics of defects in solids", *Martinus Nijhoff pub.* (1982).
- [27] I.L. DILLAMORE, J.G. ROBERTS, A.C. BUSH, *Met. Sci.* 13, p. 73, (1979).
- [28] A.S. ARGON, *ASM Seminar, Ed. Reed-Hill*, p. 161, (1971).
- [29] J.G. SEVILLANO, P. VAN HOUTTE, E. AERNOUDT, *Prog. in Mat. Sci.*, 25, p. 69, (1981).
- [30] P. VAN HOUTTE, J.G. SEVILLANO, E. AERNOUDT, *Zelt. Metallkunde*, 70, p. 426, (1979).
- [31] W.Y. YOUNG, B.J. DUGGAN, *Scrip. Metall.* 21, p. 485, (1987).
- [32] I.L. DILLAMORE, H. KATOH, *Met. Sci.* 8, p. 21, (1974).
- [33] K. MORII, Y. NAKAYAMA, H. MECKING,
- [34] P. HAASEN, *Phil. Mag.*, 3, p. 384, (1958).
- [35] J. MEISSNER, *Z. Metallkunde*, 50, p. 207, (1959).
- [36] M. BERVEILLER, H. BOUAQUINE, N. FAKRI, P. LIPINSKI, *à paraitre dans Text and Micr.* (1987).
- [37] J.D. ESHELBY, *Prog. in sol. Mech.*, Ed. Sneddon-Hill, North Holland, Amsterdam, 2, (1961).
- [38] M. BERVEILLER, P. LIPINSKI, H. BOUAQUINE, *soumis à J. of Plasticity*, (1988).
- [39] A. KORBEL, P. MARTIN, *Acta Metall.* 34, n°10, p. 1905, (1986).
- [40] J.D. EMBURY, A. KORBEL, U.S. KAGHUNATHAN, *J. Rys. Acta Metall.*, 32, n°11, p. 1883, (1984).

- [41] A. KORBEL, P. MARTIN, "Microstructural avents of macroscopic strain localization in prestained tensile specimens", (*à paraitre*).
- [42] E.C. AIFANTIS, *Int. J. Plasticity*, 3, p. 211, (1987).
- [43] J. LEPINOUX, L.P. KUBIN, *Script. Metall.*, 21, p. 833, (1987).
- [44] J. KRATOCHIL, *Proc. Eur. Study on Mech. and Mechanics of plasticity Aussois France*, (1987).
- [45] A.G. KATCHATURIAN, "Theory of structural transf.in solids", p.213, *J.Wiley ed. New york*, (1983)
- [46] H. MUGHRABI, *Acta. Metall.*, 31, n°9, p. 1367, (1983).
- [47] M.A MORRIS, J. L. MARTIN, *Acta Metall.*, 10, 32, p.1609, (1984)
- [48] R.W. CAHN, P. HASEN, "*Physical Mettallurgy*", part II, North - Holland pub.(1983)
- [49] J. BENARD, A. MICKEL, J. PHILIBERT, J. TALBOT, "*Métallurgie générale*", Masson Ed. (1984).
- [50] S. KARASHIMA, K. MARUYAMA, N. ONO, *Acta. Metall.*, 15, p. 265, (1974).
- [51] A.S. KEH, *Phil. Mag.*, 12, p. 9, (1965).
- [52] S. IKEDA, *J. Phys. Soc., Japan*, 27, p. 1564, (1969).
- [53] T. TAKEUCHI, *Jap, App. Phys.*, 9, p. 391, (1970).
- [54] T. YAMASHIDA, Y. TANEDA, *Trans. Iron. Steel, Ins. Jap.* 10, p. 197, (1970).
- [55] U.F. KOCKS, T. HASEGAWA, R.D. SCATTEGOOD, *Script. Met.*, 14, p. 449, (1980).
- [56] J.H. SCHMITT, *Phil. Mag.* 48, p. 841, (1983).
- [57] P.J. JACKSON, D. KUHLMANN-WILSDORF, *Scrip. Met.*, 16, p. 105, (1982).
- [58] P.J. JACKSON, M. SIEDERSLABEN, *Scrip. Met.* 18, p. 749, (1984).
- [59] F. PRINZ, A.S. ARGON, *Phys. Stat. Sol.*, 57a, p. 741, (1980).
- [60] M.J. MARCINKOWSKI, *Phys. stat. Sol.*, 83a, p. 59 (1984).
- [61] D. GRIFFITH, J.N. RILEY, *Acta. Met.*, 14, p. 755, (1966).
- [62] M. BERVEILLER, H. BOUAQUINE, *Arch. of Metall.*, 32, p. 171, (1987).

- [63] F.C. FRANCK, *Sym. Plast. of Cryst. sol., carneg. Tech. Pittsburgh*, (1950).
- [64] W. BOLLMAN, *Cryst. Def. and Cryst. Interf. Springer Verlag, Berlin*, (1970).
- [65] G. SAADA, " *Interf. et Surf. en Metallurgie*", *Trans. Tech. Publ.* (1975).
- [66] P. FRANCIOSI, *thèse d'état, Université Paris Nord*, (1984).
- [67] P. FRANCIOSI, A. ZAOUÏ, *Acta. Metall.*, 30, p. 1627, (1982).
- [68] K. HIGASHIDA, J. TAKAMURA, N. NARITA, *Mat. of Sci. Eng.* 81, p. 239, (1986).
- [69] G.I. TAYLOR, *J. Inst. Metals*, 62, p. 307, (1938).
- [70] H. HONNEF, H. MECKING, *Proc. 5th Int. Conf. Texture of Materials*, Ed. C. Gottstein and K. Lücke, *Springer Verlag*, p. 265, (1978).
- [71] P. VAN HOUTTE, *Acta. Metall.*, 26, p.591, (1978)
- [72] U.F. KOCKS, H. CHANDRA, *Acta. Metall.*, 30, p. 695, (1982).
- [73] M. BERVEILLER, A. ZAOUÏ, *J. Mech. Phys. Solids*, 26, p. 325, (1979).
- [74] T.LEFFERS, " *Def. of polyc.*", *N.Hansen et all.ed., Roskilde, Danemark*, (1981)
- [75] W. TRUCZKOWSKI, J. KROL, *Mem. Sci. Rev. Met.* 65, p. 907, (1968).
- [76] C. REY, A. ZAOUÏ, *Acta. Metall.*, 30, 523, (1982).
- [77] A.T. WINSTER, *Phyl. Mag.* 30, p. 719, (1974).
- [78] K.U. RASMUSSEN, O.B. PEDERSEN, *Acta. Metall.*, 28, p. 1467, (1980).
- [79] B. FARGETTE, D. WHITWHAN, *Mem. Sci. Rev. Met.*, p. 198, (mars 1976).
- [80] H.J. BUNGE, *Phys. Stat. Sol.*, 26, p. 167, (1968).
- [81] R.E. SMALLMAN, P. GREEN, *Acta. Metall.*, 12, p. 145, (1964).
- [82] I.L. DILLAMORE, W.T. ROBERTS, *Acta. Metall.*, 12, p. 281, (1964).
- [83] P. FRANCIOSI, M. BERVEILLER, A. ZAOUÏ, *Acta. Metall.*, 28, p. 273, (1976).