



HAL
open science

Etude de la structure topologique de l'ensemble des systèmes affines contrôlables en basse dimension

Abdelouahab Kadem

► **To cite this version:**

Abdelouahab Kadem. Etude de la structure topologique de l'ensemble des systèmes affines contrôlables en basse dimension. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paul Verlaine - Metz, 1988. Français. NNT : 1988METZ004S . tel-01775747

HAL Id: tel-01775747

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01775747v1>

Submitted on 24 Apr 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

3^{me} Cycle
d'Enseignement Supérieur
U.A. au C.N.R.S. 399

THÈSE

présentée

à l'Université de METZ

pour obtenir le titre de

Docteur en Mathématiques

Spécialité: Equations différentielles et Contrôle Optimal
Mention: Mathématiques

par

K A D E M Abdelouahab

ETUDE DE LA STRUCTURE TOPOLOGIQUE DE L'ENSEMBLE
DES SYSTEMES AFFINES CONTROLABLES EN BASSE DIMENSION

devant le Jury composé de :

Président : G. SALLET

Membres : A. ROUX

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE DE METZ



022 420292 9

Année Universitaire 1987-1988

3me Cycle
d'Enseignement Supérieur
U.A. au C.N.R.S. 399

THESE

présentée

à l'Université de METZ

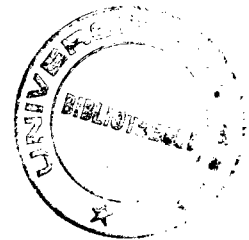
pour obtenir le titre de

Docteur en Mathématiques

Spécialité: Equations différentielles et Contrôle Optimal
Mention: Mathématiques

par

K A D E M Abdelouahab



ETUDE DE LA STRUCTURE TOPOLOGIQUE DE L'ENSEMBLE
DES SYSTEMES AFFINES CONTROLABLES EN BASSE DIMENSION

devant le Jury composé de :

Président : G. SALLET

Membres : A. ROUX

B. KLARES

P. ADDA

Année Universitaire 1987-1988

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv.	19880085
Cote	SM3 88/4
Loc	Magasin

Je remercie vivement Monsieur SALLET d'avoir bien voulu diriger ce travail et d'avoir également accepté de présider le Jury. Ses critiques et ses conseils me furent très utiles pour l'élaboration de cette thèse.

Je tiens à exprimer ma gratitude à Monsieur ADDA pour l'aide qu'il m'a apportée tout au long de ce travail.

Messieurs ROUX et KLARES ont accepté de faire partie de ce Jury, je les en remercie très sincèrement.

Enfin, je remercie le Département de Mathématiques de l'Université de Metz et tous ses membres, qui m'ont permis de préparer ce travail dans de bonnes conditions. —

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION	1
 <u>1 ère PARTIE</u>	
Etude de la frontière de l'ensemble des systèmes affines contrôlables Ca	3
I Introduction.....	3
II Préliminaires	10
1. Généralités	10
2. Notions d'équivalence	11
III ETUDE DE LA FRONTIERE DE L'ENSEMBLE DES SYSTEMES HOMOGENES CONTROLABLES Ch	15
1. Introduction	15
2. Etude de la frontière de Ch	18
2.1. Etude des cas (I)	20
2.2. Etude des cas (II)et (III).....	21
Conclusion.....	24
IV ETUDE DE LA FRONTIERE DE L'ENSEMBLE DES SYSTEMES AFFINES CONTROLABLES Ca.....	25
1. Introduction	25
2. Commentaires	29
3. Etude des cas frontières	29
3.1. Etude des cas (I.II et III).....	30
3.2. Conclusion	33

2 ème PARTIE

Connexité de l'ensemble des systèmes homogènes contrôlables Ch	35
1. Introduction	35
2. Préliminaires	36
3. Etude de la connexité des différentes parties de Ch	41
3.1. Etude de C_1	41
Conclusion	47
Conséquence	48
3.2. Etude de C_2	49
Conclusion	50
Conséquence	50
3.3. Etude de C_3	51
Conséquence	54
Conclusion	54
3.4. Etude de C_4	55
Conséquence	57
Conclusion	57
3.5. Etude de C_5	57
Commentaires	62

3 ème PARTIE

Etude de la connexité de l'ensemble des systèmes affines contrôlables C_a	72
I Introduction	72
II Resultat Principal	74
III Conclusion	82
<u>CONCLUSION GENERALE</u>	85

INTRODUCTION

Notre travail consiste à étudier du point de vue topologique la structure de l'ensemble des systèmes affines contrôlables sur R^2 , qui sont de la forme :

$$(1) \begin{cases} \dot{x} = Ax + u(Dx + \bar{b}) \\ x \in R^2 ; b \in R \end{cases}$$

où u désigne le contrôle non borné.

Puisque $u \in R$ et d'après les techniques d'extensions de Kupka, au lieu d'étudier (1), nous allons étudier les familles finies $(A, u(Dx + \bar{b}))$ qui est équivalente à (1) du point de vue de la contrôlabilité.

Il existe de nombreuses publications concernant les systèmes affines, la principale motivation de ce travail est essentiellement constituée par deux articles [J.S] ; [A.S.V]. On identifiera donc un système par le triplet (A, D, \bar{b}) élément de R^{10} , muni de sa topologie usuelle.

A tout système (1) on peut associer le système homogène

$$(2) \begin{cases} \dot{x} = (A + uD)x \\ x \in R^2 - \{0\} \quad u \in R \end{cases}$$

Il est établi dans [J.S] que si (2) est contrôlable sur $R^2 - \{0\}$ et (1) sans point fixe alors (1) est contrôlable.

Ces systèmes qu'on notera $\{J.S\}$ forment un ouvert dans R^{10} , c'est un sous ensemble ouvert de l'ensemble des systèmes affines contrôlables qu'on notera \mathcal{C}_a , rappelons que ce dernier n'est pas un ouvert [J.S] c'est à dire qu'en général les systèmes affines contrôlables ne le restent pas sous l'effet de perturbations arbitrairement petites.

D'après [A.S.V] qui ont donné une description complète de l'ensemble des systèmes contrôlables de type (1), il s'est avéré que dans certain cas (1) peut être contrôlable sans que (2) le soit. Notamment le cas où on a deux champs colinéaires (spirales liées) et certains cas où les champs D et A admettent un axe propre en commun (il s'agit du cas où D est à valeurs propres réelles).

Ces systèmes possédant cette propriété sont sur la frontière des systèmes {J.S} et cette frontière contient aussi des systèmes non contrôlables.

Notre but est d'étudier l'ensemble des systèmes affines contrôlables C_a du point de vue topologique.

La première partie sera consacrée à l'étude de la frontière de l'ensemble des systèmes affines contrôlables C_a .

En effet, à la lecture de [A.S.V] la frontière de C_a est uniquement constituée de systèmes affines ayant leur partie homogène à la frontière Ch (donc non contrôlable). Il n'apparaît dans la frontière de C_a que deux types de points frontières et de ce fait on aura comme conséquence que les systèmes {J.S} sont denses dans C_a .

Dans la deuxième partie, on s'intéressera à la structure de l'ensemble des systèmes homogènes contrôlables Ch , où moyennant le théorème de contrôlabilité sur $R^2 - \{o\}$, on partitionne Ch en un certain nombre de parties, caractérisée par des propriétés géométriques particulières, on exhibera pour chacune de celles-ci un système type.

On utilisera cette structure pour obtenir comme résultat annexe le fait que C_h est connexe.

Quant à la troisième partie, elle traitera la connexité de l'ensemble des systèmes affines contrôlables C_a , on verra que pour démontrer la connexité de celui-ci, on a besoin de montrer tout d'abord la connexité d'un ensemble dense dans l'ensemble des paires homogènes contrôlables sur $R^2 - \{o\}$.

I ère PARTIE

ETUDE DE LA FRONTIERE DE L'ENSEMBLE DES SYSTEMES AFFINES
CONTROLABLES C_a .

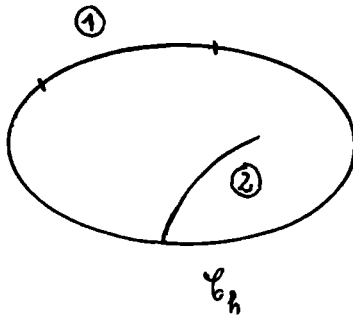
I INTRODUCTION :

L'objet de cette partie est l'étude de la frontière de l'ensemble des systèmes affines contrôlables C_a . Il s'avère, et nous le justifierons dans cette introduction que le point central de cette étude est celle de la frontière de C_h . Il est bien connu [] que la contrôlabilité des systèmes bilinéaires homogènes est ouverte i.e que C_h est ouvert .

En général dans un ouvert, les points frontières se répartissent en deux classes disjointes :

- ceux qui sont frontière avec l'extérieur (i.e l'intérieur du complémentaire .)
- ceux qui sont contenus dans l'intérieur de la fermeture.

Dans le cas de C_h ces deux classes sont bien présentes.



- 1) $Fr(C_h) = Fr(Ext(C_h))$
- 2) $\bar{C}_h \cap Fr(C_h)$

La frontière du type (2) est constituée des systèmes homogènes ayant leurs champs A et D colinéaires, et à valeurs propres complexes conjuguées tous les autres systèmes appartenant à $Fr(C_h)$ sont des points frontières de type (1).

Pour notre étude on dispose :

-d'une part du théorème de [A.S.V] où l'on a une description complète de Ca .

-d'autre part du théorème de JURDJEVIC-SALLET (qui en dimension 2 est contenu dans le théorème de [A.S.V]) qui affirme que si l'on a contrôlabilité du système homogène sur $R^2 \setminus \{0\}$ et pas de point fixe, alors (1) est contrôlable sur R^2 .

A la lecture de [A.S.V], on observe les relations suivantes entre la contrôlabilité des systèmes homogènes (2) et leurs systèmes affine associé (1).

- i) si (2) est contrôlable et (1) sans point fixe alors (1) est contrôlable (on retrouve J.S).
- ii) si (2) appartient à la frontière de C_h , les systèmes (1) associés peuvent être contrôlable où non (selon \bar{b}).
- iii) si (2) appartient à l'extérieur de C_h , les systèmes (1) sont non contrôlables quel que soit \bar{b} appartenant à R^2 .

Il n'existe donc que deux types de systèmes affines contrôlables les (J.S) et certains systèmes dont la partie homogène est à la frontière de C_h .

A titre de motivation, on va donner quelques exemples de systèmes affines contrôlables ou non contrôlables ayant leur partie homogène sur la frontière C_h .

Auparavant, donnons un résultat de contrôlabilité de système affine dans R^2 .

PROPOSITION :

Soit C une trajectoire de $\pm(D+\bar{b})$, (1) est contrôlable sur R si et seulement si le champ de vecteur A "pointe" dans chacune des deux régions déterminée par la courbe C .

1^{er} EXEMPLE :

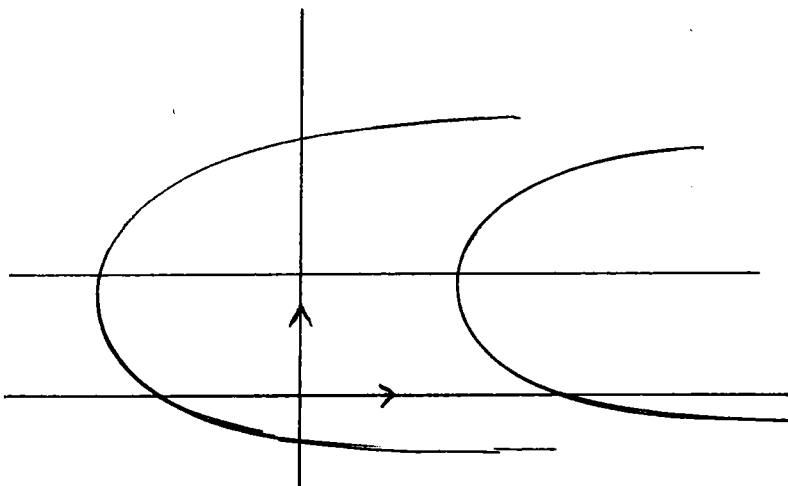
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad b_2 > 0$$

Soit $x(t)$ un point courant de la trajectoire C . Le vecteur tangent en $x(t)$ à C est : $D x(t) + \bar{b}$; un vecteur orthogonal à celui-ci est : $J(Dx + \bar{b})$ (où $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$)

(1) est contrôlable si et seulement si l'expression $\langle Ax(t), J(Dx(t) + \bar{b}) \rangle$ change de signe pour $t \in R$.

En effet, les trajectoires de $D + \bar{b}$ sont des paraboles.

D'axe commun la droite passant par le point $\begin{pmatrix} 0 \\ -b_1 \end{pmatrix}$ et parallèle à l'axe des abscisses, leur concavité est tournée vers les abscisses positives.



Toutes les trajectoires de $\underline{+}(D+\bar{b})$ coupent l'axe des abscisses soit $\begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ un point de l'axe des abscisses et C la trajectoire de $\underline{+}(D+\bar{b})$ passant par ce point les équations de C sont :

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{b_2^2}{2} t^2 + b_1 t + x_0 \\ x_2(t) = b_2 t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Le vecteur tangent en $x(t)$, point courant de la trajectoire de C est $Dx(t)+\bar{b}$ et a pour coordonnées $\begin{pmatrix} b_2 t + b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

Un vecteur orthogonal à celui-ci est $\vec{v}(t)=J(D+\bar{b})$ il a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -b_2 \\ b_2 t + b_1 \end{pmatrix}$

Le produit scalaire de $\vec{v}(t)$ et du vecteur $A x(t)$ est égal à :

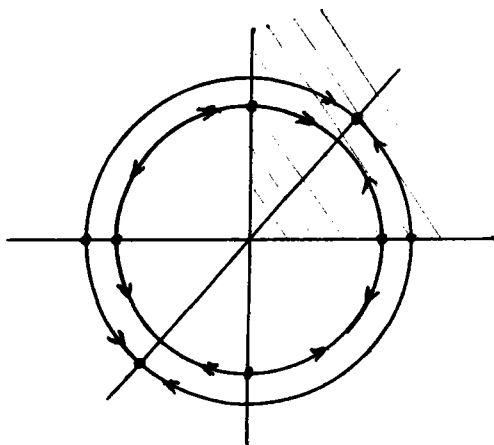
$$f(t) = -\frac{b_2^2}{2} t^2 - b_1 b_2 t - b_2 x_0$$

$$\Delta = b_2^2 (b_1^2 - 2b_2 x_0)$$

qui peut être rendu négatif par un bon choix de x_0 , $f(t)$ ne change pas de signe.

\Rightarrow (I) est non contrôlable.

Le système homogène n'est pas contrôlable. En effet, $b=0$ traduit que les champs A et D ont un axe propre en commun.



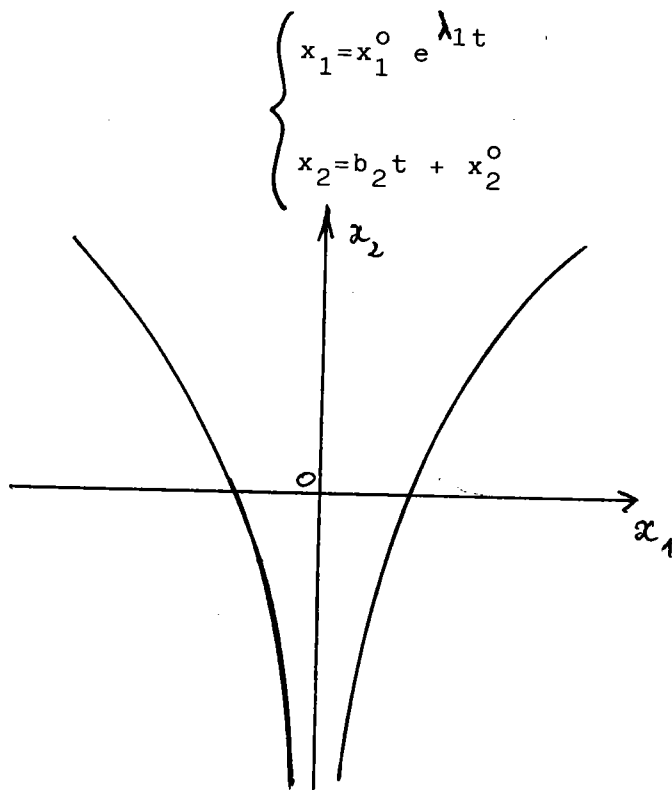
On a une zone invariante, (2) n'est donc pas contrôlable.

2 ème EXEMPLE :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad b_2 \neq 0$$

Pour étudier la contrôlabilité du système (1) on va étudier l'intersection des trajectoires de $\dot{x} = (D + \bar{b})x$ et de la courbe définie par $\langle J(D + \bar{b}), Ax \rangle = 0$.

En effet, les trajectoires de $\dot{x} = (D + \bar{b})x$ ont pour équation



Les trajectoires de $\dot{x} = (D + \bar{b})x$ sont composées de :

- l'axe des ordonnées.
- des courbes logarithmes d'asymptote l'axe des ordonnées.

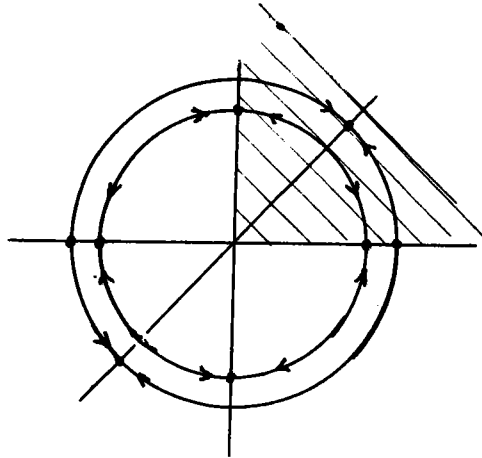
On a : $A^2 = 0$.

On a : $\langle J(D + \bar{b}), Ax \rangle = -b_2 x_2$

Comme chaque trajectoire de $+(D+\bar{b})$ coupe l'axe des abscisses (1) est donc contrôlable .

(2) est non contrôlable en effet :

$bc=0$ traduit que les champs A et D ont un axe propre en commun .



On voit sur le dessin qu'on a une région invariante .

Donc, on a donné deux exemples de systèmes homogènes non contrôlables donnant lieu soit à un système affine non contrôlable (1er EXEMPLE) soit à un système affine contrôlable (2ème EXEMPLE) .

Il existe certains systèmes homogènes non contrôlable qui donnent lieu selon le choix du vecteur \bar{b} soit à un système affine contrôlable soit à un système affine non contrôlable . (Cf.(ii)) .

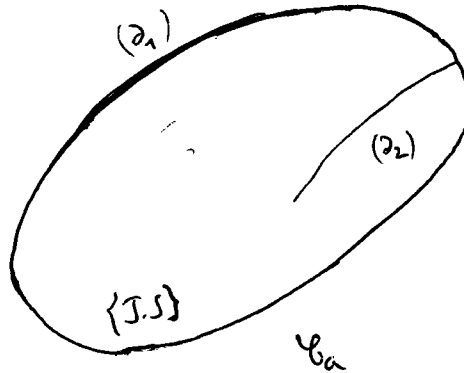
Il découle de [A.S.V] que l'étude de la frontière de C_a est une conséquence de celle de la frontière de C_h ; celle-ci (i.e la frontière de C_a), fait apparaître deux types de points frontières (à priori, comme on le verra plus loin, il y aurait pû avoir trois types de points frontières) ;

Les deux types de points frontières sont :

- $\partial_1 = \text{Fr } C_a = \text{Fr}(\text{Ext}(C_a))$ où on rencontre les systèmes affines contrôlables ou non contrôlables .

- $\partial_2 = \text{Fr } C_a \cap \overset{o}{C}_a$ contient les systèmes affines non contrôlables pour lesquels les trajectoires de D sont des cycles .

Notons que dans les deux cas, les systèmes homogènes correspondant sont de type (1) de C_h .



L'intérieur de C_a est constitué des systèmes $\{J.S\}$ et des systèmes affines contrôlables auxquels correspondent les systèmes homogènes non contrôlables caractérisés par les champs colinéaires (spirales liées, (i.e les systèmes frontières de types (2) de C_h)).

A l'extérieur de C_a on trouve les systèmes affines non contrôlables auxquels correspondent les parties homogènes appartenant à l'extérieur de C_h .

L'ensemble C_a est donc la réunion disjointe de $\{J.S\}$ de la frontière de C_a et de l'ensemble des affines contrôlables auxquels correspondent les systèmes homogènes non contrôlables caractérisés par les champs colinéaires (spirales liées), ces deux dernières parties étant d'intérieur vide, l'ensemble (ouvert) $\{J.S\}$ est donc dense dans C_a .

II PRELIMINAIRES :

Dans ce paragraphe on redéfinit rapidement les notions usuelles du contrôle géométrique .

1 . GENERALITES :

Soit M une variété connexe.

$Tx_0 M$ désigne l'espace tangent en x_0 à M .

F une famille de champ de vecteur sur M .
pour $X \in F$, $X_t(\cdot)$ désigne le groupe local à un paramètre engendré par X .

-Soient x et y deux points de M . On dira que y est accessible à partir de x s'il existe k champs de vecteurs $\in F$ $X^1 \dots X^k$ et K réels positifs $t_1 \dots t_k$ tel que :

$$y = X_{t_1}^1 \circ \dots \circ X_{t_k}^k (x).$$

-L'ensemble de tous les états accessibles à partir de x à l'aide du système F sera noté $S(F).x$.

-Le système F vérifie la propriété d'accessibilité si pour tout point $x_0 \in M$ l'intérieur de $S(F).x_0$ par rapport à la topologie de M est non vide.

- F est dit contrôlable sur M si pour tout point x_0 de M , $S(F).x_0 = M$.

On notera $[X^u, X^v]$ le crochet de lie des champs X^u , et X^v .

Rappelons que pour les champs linéaires on a :

$$[X^u, X^v] = X^u X^v - X^v X^u.$$

On désigne par lie (F) l'algèbre de lie engendrée par F .

-On dit que F vérifie la condition du rang en $x_0 \in M$ si et seulement si lie $(F) (X_0) = Tx_0 M$.

La condition du rang en tout point M est une condition nécessaire de contrôlabilité pour les f.c.v. C^∞ .
C'est une condition nécessaire et suffisante pour l'accessibilité si F est analytique [13]

2. NOTIONS D'EQUIVALENCE DE SYSTEME :

DEFINITION : On dira que deux familles de champs de vecteurs F et F' sont équivalentes

$$F \sim F' \Leftrightarrow \forall x \in M, \overline{S(F)}.x = \overline{S(F')}.x .$$

PROPRIETES :

1°) $\forall \lambda > 0, \lambda F \sim F .$

où $\lambda F = \{ \lambda X ; X \in F \} .$

2°) l'adhérence du cône convexe C engendré par F est équivalent à $F .$

3°) si $\underline{+} X \in F$ alors $\forall Y \in F$
 $\left\{ \begin{pmatrix} X \\ t \end{pmatrix}, Y \right\} \cup F \sim F .$

4°) si $\underline{+} X \in F$ et $\underline{+} Y \in F$ alors $[X, Y] \cup F \sim F .$

PROPOSITIONS :

Le système $F = \left\{ A + uD \right\}_{u \in \mathbb{R}}$ est équivalent au système $\{ A, \underline{+}D \}$

PREUVE :

Il suffit de montrer que $A, +D, -D$ sont dans l'adhérence du cône convexe C .

En effet pour $u=0$ $A \in \bar{C}$

$$\forall m \in \mathbb{N}, (A+mD) \in (2) \Rightarrow \frac{1}{m} (A+mD) \in C.$$

donc : $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} (A+mD) \in \bar{C}$.

PROPOSITION :

Deux systèmes analytiques (C^ω) équivalents sont simultanément contrôlables.

CONSEQUENCE :

Au lieu d'étudier $\{A+uD\}$ $u \in \mathbb{R}$ on peut faire l'étude du système fini $\{A, +D\}$ puisqu'ils sont équivalents et analytiques, et donc simultanément contrôlables ; d'après la proposition ci-dessus. Maintenant, on va donner le théorème sur lequel est basée la suite de notre travail ; ce théorème est un cas particulier de C.N.S. de contrôlabilité des F.C.V. linéaires obtenue par GAUTHIER-BORNARD.

THEOREME : [A]

Soit F une f.c.v. linéaire sur \mathbb{R}^2 .

F est contrôlable sur $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ si et seulement si

- i) F est accessible.
- ii) F est contrôlable sur les directions.
- iii) F admet une direction rentrante et une direction sortante.

Précisons le sens de la condition iii) et ii) :

" F admet une direction rentrante " signifie que :
 il existe $x \neq 0$, et il existe $g \in S(F)$ tel que $g(x_0) = \lambda x_0$ avec $0 < \lambda < 1$. De même on dira que " F admet une direction sortante " .

Si : il existe $x \neq 0$ et il existe $h \in S(F)$ tel que $h(x_1) = \mu x_1$ avec $\mu > 1$.

La contrôlabilité directionnelle signifie que l'on peut transporter par $S(F)$ tout rayon de vecteur sur tout autre.

On se propose d'étudier dans le paragraphe suivant la topologie de l'ensemble des homogènes contrôlables Ch.

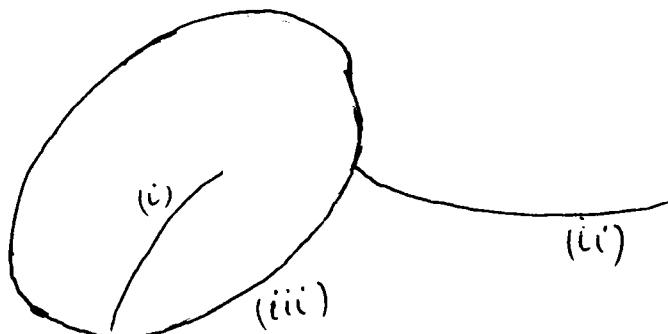
Donnons auparavant quelques rappels de topologie générale concernant la frontière d'un ensemble .

En général pour un ensemble qui a une frontière d'intérieur vide , on distingue trois types de points frontières

- i) -ceux qui sont dans l'intérieur de la fermeture.
- ii) -ceux qui sont dans l'intérieur de la fermeture du complémentaire .
- iii) -ceux qui sont à la fois frontière de l'intérieur et frontière de l'extérieur .

ces trois classes sont disjointes en d'autres termes on écrit :

$$Fr A = \underset{\text{disj}}{(Fr(A) \cap \overset{\circ}{A})} \cup \underset{\text{disj}}{(Fr(A) \cap \overset{\circ}{\bar{A}})} \cup (Fr(A) \cap Fr(\overset{\circ}{A}) \cap Fr(\overset{\circ}{\bar{A}})).$$



PREUVE :

On a :

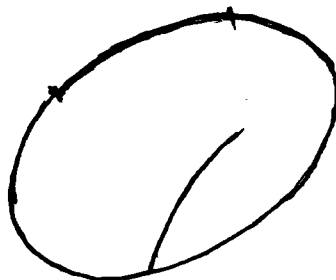
$$\overset{\circ}{\overline{A}} \cap \overset{\circ}{\overline{A}} = \overset{\circ}{\overline{A \cap \overline{A}}} = \overset{\circ}{\text{Fr}A} = \emptyset \text{ par hypothèse.}$$

Maintenant, soit $x \in \text{Fr}(A)$ qui n'est ni contenu dans $\overset{\circ}{\overline{A}}$, ni dans $\overset{\circ}{\overline{A}}$, alors tout ouvert contenant x , doit contenir un élément qui n'est pas dans \overline{A} et qui n'est pas dans \overline{A} , donc un élément dans l'intérieur et un élément dans l'extérieur, donc dans le complémentaire dans $\text{Fr}(A)$ de $\overset{\circ}{\overline{A}} \cup \overset{\circ}{\overline{A}}$ est bien $\text{Fr}(A) \cap \text{Fr}(\text{ext}(A))$.

COROLLAIRE :

Si A est ouvert

$$\text{Fr}A = \underbrace{(\overline{A} \setminus \overset{\circ}{\overline{A}})}_{\text{Fr}(\text{Ext}(A))} \cup (\overset{\circ}{\overline{A}} \setminus A)$$



III ETUDE DE LA FRONTIERE DE L'ENSEMBLE DES HOMOGENES
CONTROLABLES C_h .

1) INTRODUCTION :

On va dans un premier temps donner tous les cas possibles de points frontières qui peuvent se présenter et qu'on regroupera dans un tableau. On donnera un peu plus loin l'interprétation géométrique de chacun d'eux.

On considère le système :

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{x} = (A+uD)x \\ x \in \mathbb{R}^2 - \{0\}, u \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

On va dresser un tableau qui nous donnera une description complète de C_h , obtenue par application du théorème de contrôlabilité dans $\mathbb{R}^2 - \{0\}$.

La contrôlabilité directionnelle est exprimée à l'aide d'invariants de la paire $\{A, D\}$, plus exactement elle est exprimée à l'aide de $\text{tr } A$ (trace A) qui pour les champs spirales mesure le caractère expansif des trajectoires, de $\Delta(A)$ (discriminant du polynôme caractéristique de A qui détermine la nature des valeurs propres de A), de $\text{tr } D, \Delta(D)$.

Soit $A, D \in M_2(\mathbb{R})$; l'ensemble des matrices réelles 2×2 .

On définit la forme bilinéaire symétrique sur $M_2(\mathbb{R})$ appelée forme de Killing par :

$$\chi(A, D) = \text{tr}(\text{ad } A \text{ ad } D) = 4 \text{tr } AD - 2 \text{tr } A \cdot \text{tr } D .$$

et

$$\Delta(A) = \frac{1}{2} \chi(A, A) \text{ sa forme quadratique associée.}$$

Dans le cas où D admet deux valeurs propres réelles (i.e $\Delta(D) > 0$) alors $(A+uD)$ est contrôlable sur les directions si et seulement si il existe un contrôle $u_0 \in \mathbb{R}$ tel que :

$(A+u_0D)$ possède des valeurs propres conjuguées.

C'est à dire si et seulement si :

$(A+u_0D) < 0$ autrement dit

$$\chi(A+u_0D, A+u_0D) < 0 \cdot [G]$$

Après calcul ceci équivaut à $\chi(A, D)^2 - \Delta(A) \cdot \Delta(D) > 0$

La frontière de l'ensemble Ch est composé de cinq parties (Cf. tableau).

On va donner par le tableau suivant la description complète de Ch, obtenue par application du théorème [A, G]

forme unique de D	A	condition du rang $(A, +D)$	directions rentrante et sortante: $(A, +D)$	contrôlabilité directionnelle $(A, +D)$	$(A, +D)$ contrôlable sur $\mathbb{R}^2 - \{0\}$
$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ $\lambda_1 \neq \lambda_2$	$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$	$X(A, D)^2 - \Delta(A) \cdot \Delta(D) \neq 0$ $bc \neq 0$	+	$X(A, D)^2 - \Delta(A) \cdot \Delta(D) > 0$	$X(A, D)^2 - \Delta(A) \cdot \Delta(D) < 0$ $bc < 0$
$\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$	"	$X(A, D)^2 - \Delta(A) \cdot \Delta(D) \neq 0$ $bc \neq 0$	+	$\Delta(A) < 0$ $(a-d)^2 + 4bc < 0$	$\Delta(A) < 0$ $(a-d)^2 + 4bc < 0$
$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$	"	$X(A, D)^2 - \Delta(A) \cdot \Delta(D) \neq 0$ $b \neq 0$	+	$X(A, D)^2 - \Delta(A) \cdot \Delta(D) > 0$	$X(A, D)^2 - \Delta(A) \cdot \Delta(D) > 0$
$\begin{pmatrix} -B \\ \alpha \end{pmatrix}$ $\alpha \neq 0$	"	$A \neq \mu D$	+	+	$A \neq \mu D \cdot (\forall \mu \in \mathbb{R})$
$\alpha = 0$	"	$A \neq \mu D$	$\Delta(AD) > 0$ $(b+c)^2 - 4ad > 0$	+	$\Delta(AD) > 0$ $(b+c)^2 - 4ad > 0$

Donc on a les cinq parties qui composent $\text{Fr } C_h$.

$$\underline{\text{CAS}} \quad \underline{\text{I}} : \left\{ (A, \underline{+D}) / \Delta(D) > 0 ; \chi(A, D)^2 - \Delta(A) \cdot \Delta(D) = 0 \right\}$$

$$\underline{\text{CAS}} \quad \underline{\text{II}} : \left\{ (A, \underline{+D}) / (D) = \lambda I ; \chi(A, D)^2 - \Delta(A) \cdot \Delta(D) = 0 \right\}$$

$$\underline{\text{CAS}} \quad \underline{\text{III}} : \left\{ (A, \underline{+D}) / \Delta(D) = 0 ; D \neq I ; \chi(A, D)^2 - \Delta(A) \cdot \Delta(D) = 0 \right\}$$

$$\underline{\text{CAS}} \quad \underline{\text{IV}} : \left\{ (A, \underline{+D}) / \Delta(D) < 0 ; \text{tr} D \neq 0 \text{ et } A = \mu D \right\}$$

$$\underline{\text{CAS}} \quad \underline{\text{V}} : \left\{ (A, \underline{+D}) / \Delta(D) < 0 ; \text{tr} D = 0 \text{ et } \Delta(A \cdot D) = 0 \right\}$$

REMARQUE :

Pour le cas II la quantité :

$$\chi(A, D)^2 - \Delta(A) \cdot \Delta(D) = 0 \Leftrightarrow \Delta(A) = 0$$

2 ETUDE DE LA FRONTIERE DE L'ENSEMBLE DES HOMOGENES
CONTROLABLES C_h :

C_h est un ouvert de R^8 [;] dans le but d'étudier la frontière de l'ensemble des homogènes contrôlables C_h , et pour utiliser le résultat de topologie générale donné dans les préliminaires, on va d'abord, montrer que sa frontière est d'intérieur vide.

En effet : les trois parties suivantes :

- *) $\{(A, \pm D) / \Delta(D) > 0, X(A, D)^2 - \Delta(A) \cdot \Delta(D) = 0\}$
 - *) $\{(A, \pm D) / D = \lambda I, X(A, D)^2 - \Delta(A) \cdot \Delta(D) = 0\}$
 - *) $\{(A, \pm D) / \Delta(D) = 0; D \neq \lambda I, X(A, D)^2 - \Delta(A) \cdot \Delta(D) = 0\}$
- sont d'intérieur vide.

En effet : l'application : $R^8 \rightarrow R$

$$(A, D) \mapsto X(A, D)^2 - \Delta(A) \cdot \Delta(D) = 0 \text{ est } C^w.$$

car les fonctions X et Δ sont C^w .

Donc chacun de ces trois ensembles est inclus dans

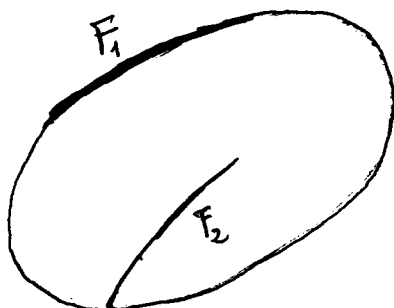
$\{(A, \pm D) / X(A, D)^2 - \Delta(A) \cdot \Delta(D) = 0\}$; cet ensemble étant constitué des zéros d'une fonction analytique, il est d'intérieur vide, d'où le résultat.

de même *) $\{(A, \pm D) / \Delta(D) < 0; \text{tr} D \neq 0 \text{ et } A = \mu D\}$ est d'intérieur vide inclus dans $\{(A, \pm D) / \text{tr} A = \mu \text{tr} D\}$ c'est un sous-espace vectoriel de dimension 5 dans R^8 .

enfin *) $\{(A, \pm D) / \Delta(D) < 0; \text{tr} D = 0 \text{ et } \Delta(A \cdot D) = 0\}$ est d'intérieur vide car il est inclus dans $\{(A, \pm D) / \text{tr} D = 0\}$ qui est un sous-espace vectoriel de dimension 7 dans R^8 .

donc leur réunion est d'intérieur vide.

Comme on l'a rappelé dans les préliminaires, puisque C_h est ouvert et sa frontière est d'intérieur vide, la frontière de l'ensemble des homogènes contrôlables C_h comporte deux types de points :



On peut exprimer ceci en termes de perturbations :

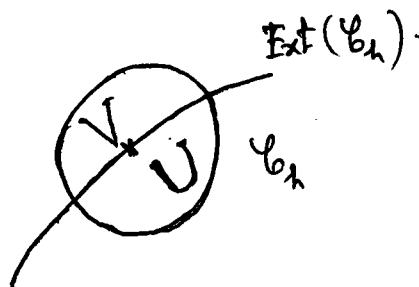
*) $x \in F_1$ traduit qu'il existe un ouvert de système contrôlable et il existe un ouvert de système non contrôlable contenant le point frontière dans leur adhérence.

En d'autres termes :

$$x \in F_1 \iff \exists U \text{ ouvert} \subset C_h.$$

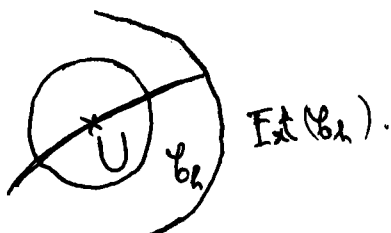
$$\text{et } \exists V \text{ ouvert} \subset \text{Ext}(C_h).$$

tel que $x \in \bar{U}$ et $x \in \bar{V}$.



*) $x \in F_2$ signifie que génériquement toute perturbation donne un système contrôlable :

$$\text{i.e. } x \in F_2 \iff \exists U \text{ ouvert} \subset C_h \text{ tel que } x \in \bar{U}.$$



Maintenant, on va faire une étude cas par cas, où l'on regroupera certains cas en un seul, la démonstration étant la même.

ETUDE DU CAS I :

LEMME 1 :

Si le système (2) est tel que D admette deux valeurs propres réelles distinctes et telle que $\chi_{(A,D)}^2 - \Delta(A) \cdot \Delta(D) = 0$

alors : $(A, \pm D) \in \text{Fr}(\text{Ext}(C_h))$.

PREUVE :

Le système $(A, \pm D)$ ne vérifie pas la contrôlabilité directionnelle $\chi_{(A,D)}^2 - \Delta(A) \cdot \Delta(D) = 0$ et $\Delta(D) > 0$.

alors "partant de" $\{(A, \pm D) / \Delta(D) > 0 \text{ et } \chi_{(A,D)}^2 - \Delta(A) \cdot \Delta(D) = 0\}$
on "arrive par perturbation générique" en :

$$\{(A', \pm D') / \Delta(D') > 0 \text{ et } \chi_{(A',D')}^2 - \Delta(A') \cdot \Delta(D') \neq 0\}.$$

Soit $U_1 = \{\Delta(D') > 0, \chi_{(A',D')}^2 - \Delta(A') \cdot \Delta(D') > 0\}$

Soit $V_1 = \{\Delta(D') > 0, \chi_{(A',D')}^2 - \Delta(A') \cdot \Delta(D') < 0\}$.

U_1 et V_1 sont des ouverts :

- U_1 inclus dans C_h (Cf. tableau) ouvert, car les fonctions χ et Δ étant continus.

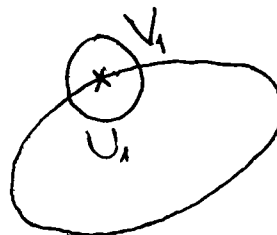
- $V_1 \subset C_h$ par définition, V_1 est un ouvert par le même argument, donc $V_1 \subset \overset{\circ}{C}_h = \text{Ext } C_h$.

et il est clair que $(A, \pm D) \in \bar{U}_1 \cap \bar{V}_1$ car

$$\bar{U}_1 = \{(A', \pm D') / \Delta(D') \geq 0 \text{ et } \chi_{(A',D')}^2 - \Delta(A') \cdot \Delta(D') \geq 0\}$$

$$V_1 = \{(A', \pm D') / \Delta(D') \geq 0 \text{ et } \chi_{(A',D')}^2 - \Delta(A') \cdot \Delta(D') \leq 0\}$$

Par suite : $(A, \underline{+}D) \in \text{Fr}(\text{Ext}(C_h))$.



ETUDE DES CAS II ET III :

LEMME 2

Si le système (2) est tel que D vérifie

$$\Delta(D)=0 \text{ et } X(A,D)^2 - \Delta(A) \cdot \Delta(D)=0$$

alors : $(A, \underline{+}D) \in \text{Fr}(\text{Ext}(C_h))$.

PREUVE :

"partant de"

$$\{(A, \underline{+}D) / \Delta(D)=0, D \neq \lambda I \text{ et } X(A,D)^2 - \Delta(A) \cdot \Delta(D)=0\}$$

ou

$$\{(A, \underline{+}D) / D = \lambda I \text{ et } X(A,D)^2 - \Delta(A) \cdot \Delta(D)=0\}$$

On "arrive par perturbation générique en"

$$\{(A', \underline{+}D') / \Delta(D') \neq 0 \text{ et } X(A',D')^2 - \Delta(A) \cdot \Delta(D') \neq 0\}$$

soit

$$U_2 = \{(A', \underline{+}D') / \Delta(D') > 0 \text{ et } X(A',D')^2 - \Delta(A') \cdot \Delta(D') > 0\}$$

U_2 est un ouvert inclus dans C_h (Cf. lemme 1)

$$V_2 = \{(A', \underline{+}D') / \Delta(D') > 0 \text{ et } X(A',D')^2 - \Delta(A) \cdot \Delta(D') < 0\}$$

V_2 est un ouvert inclus dans $\text{Ext}(C_h)$ (Cf. lemme 1).

et il est clair que :

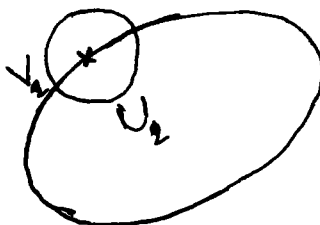
$$(A, \underline{+}D) \in \bar{U}_2 \cap \bar{V}_2$$

car :

$$\bar{U}_2 = \{(A', \underline{+}D') / \Delta(D') \gg 0 \text{ et } X(A',D')^2 - \Delta(A') \cdot \Delta(D') \gg 0\}$$

$$\bar{V}_2 = \{(A', \underline{+}D') / \Delta(D') \gg 0 \text{ et } X(A',D')^2 - \Delta(A') \cdot \Delta(D') \ll 0\}.$$

Par suite : $(A, \underline{+}D) \in \text{Fr}(\text{Ext}(C_h))$



LEMME 3

Si le système (2) est tel que :

- D admette des valeurs propres complexes conjuguées
- et A, D soient colinéaires .

Alors :

$$(A, \pm D) \in (\text{Fr } C_h - \overline{\text{Fr } C_h}) \quad (F_2)$$

PREUVE :

A et D colinéaires :

alors "partant de"

$$\begin{aligned} & \left\{ (A, \pm D) / \Delta(D) < 0 ; \text{tr } D \neq 0 \text{ et } A = \mu D \right\} \\ \text{ou} & \left\{ (A, \pm D) / \Delta(D) < 0 ; \text{tr } D = 0 \text{ et } \Delta(AD) = 0 \right\} \end{aligned}$$

On "arrive par perturbation générique" en :

$$U_3 = \left\{ (A', \pm D') / \Delta(D') < 0 \quad \text{tr } D' \neq 0 \text{ et } A' \neq \mu D' \quad \forall \mu \right\}$$

U_3 est un ouvert.

En effet :

$$\left\{ (A', D') \text{ libre} \right\} \text{ ouvert dans } R^8.$$

$$\det : M_2(R) \longrightarrow R \quad \text{continue}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \quad \text{libre} \iff \text{tous les det. } 2 \times 2 \neq 0 \text{ par continuité du det.}$$

on a bien un ouvert.

De même :

$$\left\{ (A', \pm D') / \Delta(D') < 0 \right\} \text{ est un ouvert par continuité de } \Delta$$

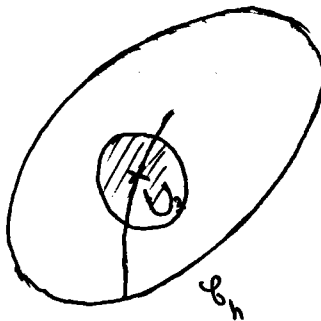
$$\left\{ (A', \pm D') / \text{tr } D' \neq 0 \right\} \text{ est un ouvert par continuité de la tr.}$$

donc leur intersection donne bien un ouvert .

Par ailleurs on a : $U_3 \subset C_h$ et il est clair que :

$$(A, \underline{+}D) \in \bar{U}_3 = \{(A', \underline{+}D') / \Delta(D') \leq 0\}$$

donc $(A, \underline{+}D)$ est un point frontière du type F_2 .



REMARQUE : Inutile de traiter séparément le cas $\text{tr } D = 0$,
la démonstration étant la même.

THEOREME :

Les résultats démontrés ci-dessus peuvent se résumer par le tableau suivant :

<u>CAS</u> I:	$S \in \partial(\text{Ext}(C_h))$
<u>CAS</u> II:	$S \in \partial(\text{Ext}(C_h))$
<u>CAS</u> III:	$S \in \partial(\text{Ext}(C_h))$
<u>CAS</u> IV:	$S \in \text{dans } \frac{o}{C_h}$
<u>CAS</u> V:	$S \in \text{dans } \frac{o}{C_h}$

REMARQUE :

Ainsi, l'étude de la frontière de l'ensemble des homogènes contrôlables C_h , fait apparaître deux types de points frontières ; à savoir la frontière de l'extérieur de C_h qui contient les cas (I U II U III), les autres cas (IV U V) sont dans l'intérieur de la fermeture .

Maintenant on va donner l'interprétation géométrique des perturbations effectuées dans l'étude des différents cas. On rassemble ces résultats sous forme de tableau.

Sur le dessin, le petit cercle muni de deux flèches figurera les champs $\pm D$ protégés sur S^1 , le grand cercle figurera le champ A projeté sur S^1 , cette représentation permet de déterminer facilement la contrôlabilité directionnelle.

système $(A, \pm D)$ caractérisé par le champ D sous sa forme canonique :	situation géométrique correspondant au point frontière avant perturbation (projeté sur S^1) :	Commentaire :	situation géométrique correspondant après perturbation (projeté sur S^1) :	Commentaire :
<p><u>CAS I</u> :</p> $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$		<p>A et D ont un axe propre en commun donc il n'y a ni condition du rang ni contrôlabilité directionnelle.</p>		<p>contrôlabilité directionnelle: on peut parcourir S^1 à l'aide des champs projetés. D à 1 valeur propre non nul, il existe direction sortante et rentrante \Rightarrow contrôlabilité de $(A, \pm D)$</p>
$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$	$X(A, D)^2 - \Delta(A) \cdot \Delta(D) = 0$ \updownarrow $bc = 0$			<p>non contrôlabilité directionnelle. En effet le cadran (I) est invariant \Rightarrow non contrôlabilité de $(A, \pm D)$.</p>
			$X(A, D)^2 - \Delta(A) \cdot \Delta(D) < 0 \Leftrightarrow bc > 0$	

Systeme (A,+D)
 caractérisé par le
 champ D sous sa
 forme canonique

Situation Géométrique
 correspondant au point
 frontière avant per-
 turbation
 (projeté sur S^1)

Commentaire

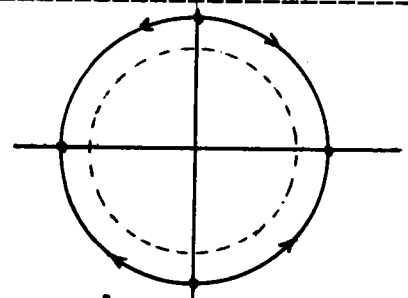
Situation Géométrique
 correspondante après
 perturbation
 (projeté sur S^1)

Commentaire

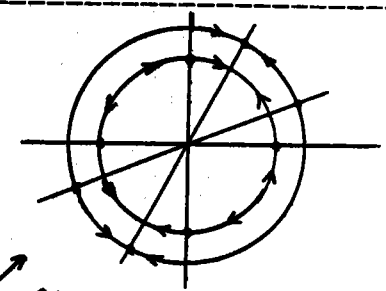
Cas II :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$\lambda \neq 0$



Il existe une direction
 rentrante et sortante
 mais on a pas la con-
 trôlabilité sur les
 directions (la projec-
 tion du champ D sur
 S^1 donne le champ
 nul).



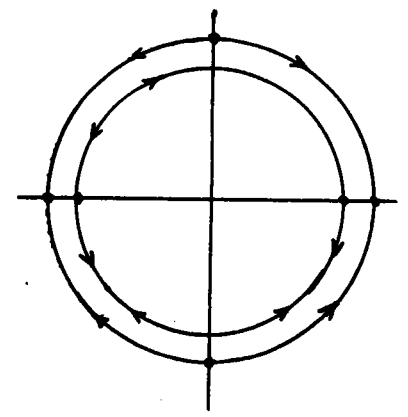
On a rendu différentes
 les 2 valeurs propres
 réelles de D et placé
 les axes propres de
 A et D de façon à
 obtenir contrôlabilité
 directionnelle.

ou

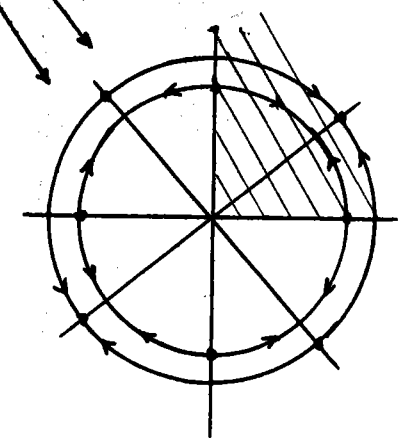
$$X(A,D) - \Delta(A) \cdot \Delta(D) = 0$$

CAS III :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

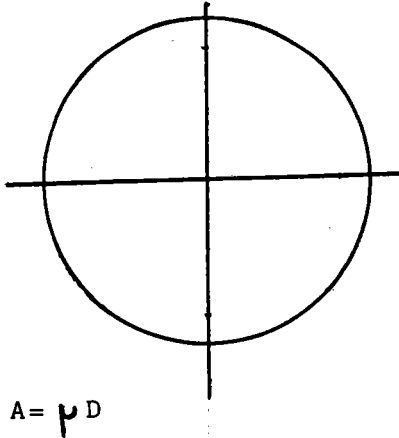
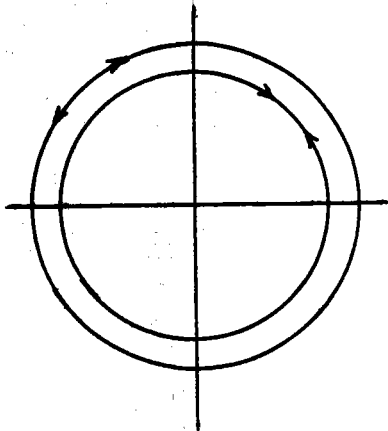
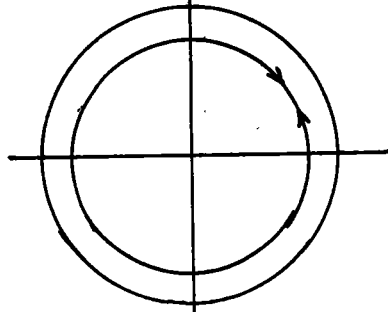


Il existe une direc-
 tion sortante et
 rentrante et on a
 "presque" la contrôla-
 bilité sur les
 directions
 (il existe un axe
 propre en commun).



On a rendu différentes
 les 2 valeurs propres
 réelles de D et
 placé les axes propres
 de A et D de façon
 à obtenir non contrôla-
 bilité directionnelle
 (il existe un quadrant
 invariant).

(non contrôlable)

Système (A,+D) caractérisé par le champ D sous sa forme canonique	:Situation Géométrique :correspondant au :point frontière :avant perturbation :(projeté sur S ¹)	Commentaire	:Situation Géométrique :correspondante après :perturbation :(projeté sur S ¹)	Commentaire
<p><u>CAS IV :</u></p> $D = \begin{pmatrix} \alpha - \beta \\ \rho \alpha \end{pmatrix}$ <p>$\alpha \neq 0$</p>	 <p>$A = \rho D$</p>	<p>Il existe une direction sortante et rentrante, il y a la contrôlabilité sur les directions. Le point frontière est caractérisé par la non condition du rang.</p>		<p>Après perturbation générique, on obtient deux champs spirales non liés A' et D' d'où contrôlabilité.</p>
<p><u>CAS V :</u></p> <p>$\alpha = 0$</p>	 <p>$\Delta(A.D) = 0$</p>	<p>On n'a pas la contrôlabilité radiale. $\Delta(A.D)=0$ signifie que les trajectoires de A pointent toujours à l'intérieur ou à l'extérieur des trajectoires de D qui sont des cycles.</p>	<p>$A' \neq \rho D'$</p>	

IV ETUDE DE LA FRONTIERE DE L'ENSEMBLE DES SYSTEMES
AFFINES CONTROLABLES C_a .

1) INTRODUCTION :

Ce deuxième chapitre est consacré à l'étude de la frontière de l'ensemble des systèmes affines contrôlables C_a . Rappelons que C_a n'est pas un ouvert : $\{J.S\}$

D'après [A.S.V], la frontière de C_a est uniquement constituée de systèmes affines ayant leur partie homogène à la frontière de C_h ; (donc non contrôlables). C'est pourquoi l'étude de la frontière de C_a découle de celle de C_h . Cette frontière (de C_a) contient aussi bien des systèmes contrôlables, que des systèmes non contrôlables (Cf. exemples introduction). On peut se demander à quel type de frontière, ces systèmes appartiennent connaissant le type de frontière sur lequel se trouvent leur partie homogène.

Contrairement à ce à quoi on s'attendait, trois types de frontière du fait que C_a n'est pas un ouvert (Cf. préliminaires), il n'apparaît dans la frontière de C_a que deux types de points frontières.



L'intérieur de C_a est constitué :

- D'une part, des systèmes $\{J.S\}$ (partie homogène contrôlable).

- D'autre part, des systèmes affines contrôlables dont la partie homogène est formées de deux spirales liées.

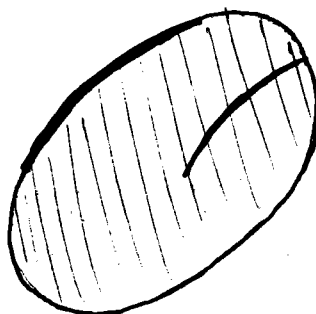
(partie homogène système frontière de type (2) de C_h).

(Voir figure.)

Aux systèmes homogènes, fortement non contrôlables (i.e appartenant à l'extérieur de C_1) , correspondent des systèmes affines appartenant à l'extérieur de C_a .

Finalement, l'ensemble des systèmes affines contrôlables C_a , se présente comme étant la réunion de :

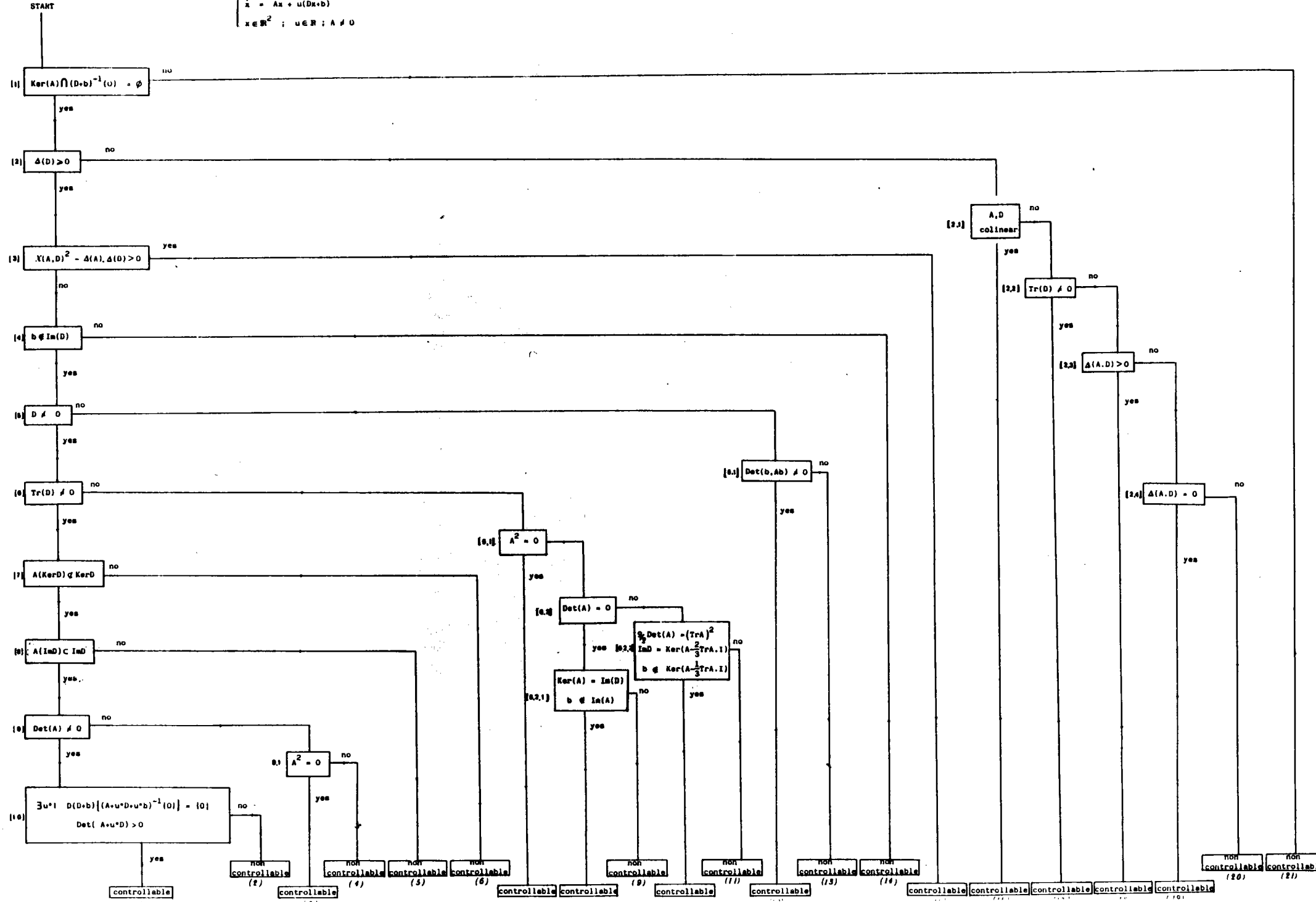
- $\{J.S\}$.
- de l'ensemble des systèmes contrôlables appartenant à la frontière de C_a .
- et de système dont la partie homogène est constituée de spirales liées . (Voir fig.) .



Ces deux dernières parties étant d'intérieur vide on en déduit que les systèmes $\{J.S\}$ sont denses dans C_a .

On va donner par le tableau suivant la description complète de C_a , obtenu par $[A.S.V]$.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + u(Dx+b) \\ x \in \mathbb{R}^2; u \in \mathbb{R}; A \neq 0 \end{cases}$$



Avant d'aborder l'étude topologique de la frontière Ca , on va dresser un tableau dans lequel on trouvera tous les différents cas de points frontières de C_h , auxquels correspondent différentes situations de systèmes affines associés dans Ca . On fait également référence au tableau [A.S.V].

Notations :
$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Dans tous les cas le système homogène n'est pas contrôlable.

forme canonique de D	Expression algébrique du point frontière de $(A, \underline{+}D)$	$(A, \underline{+}(D+\bar{b}))$ contrôlable sur \mathbb{R}^2	[A.S.V]
Cas I : $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ a) $\lambda_1 \neq \lambda_2$	$\chi(A, D)^2 - \Delta(A) \cdot \Delta(D) = 0$ \Downarrow $bc = 0$	$\forall \bar{b}, (A, \underline{+}(D+\bar{b}))$ non contrôlable $(\bar{b} \in \text{Im}(D))$	(14)
b) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$	$\chi(A, D)^2 - \Delta(A) \cdot \Delta(D) = 0$ \Downarrow $bc = 0$	$\exists \bar{b}$, tel que $(A, \underline{+}(D+\bar{b}))$ contrôlable	(1), (2), (3) (4), (6),
Cas II : $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$	$\chi(A, D)^2 - \Delta(A) \cdot \Delta(D) = 0$ \Downarrow $bc = 0$	$\forall \bar{b}, (A, \underline{+}(D+\bar{b}))$ non contrôlable $(\bar{b} \in \text{Im}(D))$	(14)
Cas III : $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ a) $\lambda \neq 0$	$\chi(A, D)^2 - \Delta(A) \cdot \Delta(D) = 0$ \Downarrow $b = 0$	$\forall \bar{b}, (A, \underline{+}(D+\bar{b}))$ non contrôlable $(\bar{b} \in \text{Im}(D))$	(14)
b) $\lambda = 0$	$\chi(A, D)^2 - \Delta(A) \cdot \Delta(D) = 0$ \Downarrow $b = 0$	$\exists \bar{b}$, tel que $(A, \underline{+}(D+\bar{b}))$ contrôlable	(7), (8), (9), (10), (11)
Cas IV : $\alpha \neq 0$ $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$	$A = \mu D$	$\forall \bar{b}, (A, \underline{+}(D+\bar{b}))$ contrôlable	(16)
Cas V : $\alpha = 0$	$\Delta(AD) = 0$ $(b+c)^2 - 4ad = 0$	$\forall \bar{b}, (A, \underline{+}(D+\bar{b}))$ contrôlable	(19)

COMMENTAIRES :

Parmi les systèmes homogènes appartenant à la frontière de l'ensemble des systèmes homogènes contrôlables C_h , on observe trois comportements possibles vis à vis du passage aux systèmes affines. Ces trois comportements correspondent à différentes propriétés du système homogène $(A, \underline{+}D)$ du départ.

Ces trois types de systèmes sont :

- $\forall b \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ Les systèmes "à contrôlabilité affine" i.e. *pour lesquels* $(A, \underline{+}(D+b))$ est contrôlable cas (V) et (IV), ces systèmes sont caractérisés par l'appartenance des points frontières de type (2) de C_h .
- Les systèmes "ordinaires" i.e. pour lesquels $\exists \bar{b} \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ (mais pas $\forall \bar{b}$) (cas (Ib), (IIIb)), ces systèmes sont caractérisés par l'appartenance à l'ensemble des points frontières de type (1) de C_h , et D singulière.
- Les systèmes "à non-contrôlabilité affine" i.e. $\forall b \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ $(A, \underline{+}(D+b))$ est non contrôlable (cas (Ia), (II), (IIIa)), ces systèmes sont caractérisés par l'appartenance à l'ensemble des points frontières de type (1) de C_h et D régulière.

3) ETUDE DES CAS FRONTIERES :

Maintenant on va aborder l'étude proprement dite, cette étude se fait cas par cas, comme on l'a fait pour l'ensemble C_h , on regroupe les cas pour lesquels la démonstration est la même.

3.1 ETUDE DES CAS : (I.II et III) :

LEMME 1 :

Soit un système $(A, +D) \in \text{Fr}(\text{Ext}(C_h))$.

Alors $\forall \bar{b} \in R^2 - \{0\}$, le système affine $(A, +_+(D+\bar{b}))$ appartient à $\text{Fr}(\text{Ext}(C_a))$.

PREUVE :

$(A, +D) \in \text{Fr}(\text{Ext}(C_h))$ analytiquement i.e $\begin{cases} \Delta(D) \geq 0 \\ \chi(A, D)^2 - \Delta(A) \cdot \Delta(D) = 0 \end{cases}$

alors $(A, +D) \in \bar{U}_1 \bar{V}_1$.

où $U_1 = \{(A', +D') / \Delta(D') > 0 ; \chi(A', D')^2 - \Delta(A') \cdot \Delta(D') > 0\}$
 $V_1 = \{(A', +D') / \Delta(D') > 0 ; \chi(A', D')^2 - \Delta(A') \cdot \Delta(D') < 0\}$.

U_1 ouvert $\subset C_h$

V_1 ouvert $\subset \text{Ext}(C_h)$

alors notons : $U'_1 = U_1 \cap \{(A', +D') \text{ inversible}\} \times R^2 - \{0\}$

U'_1 est un ouvert de systèmes contrôlables dans C_a .

En effet : $\{(A', D') \text{ inversible}\}$ est un ouvert (dense) son intersection avec U_1 est donc un ouvert.

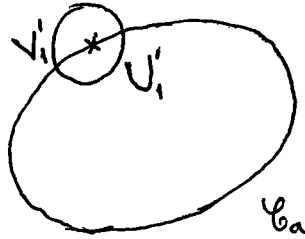
De plus, $U \subset C_a$ puisque tout système $\in U'_1$ a sa partie homogène contrôlable et n'a pas de point fixe $\{(A', D') \text{ inversible et } \bar{b} \neq 0\}$, par application de J.S.

De même, $V'_1 = V_1 \times R^2 - \{0\}$, forme un ouvert de système non contrôlable :

Enfin par construction : $\bar{U}'_1 = \bar{U}_1 \times R^2$ et $\bar{V}'_1 = \bar{V}_1 \times R^2$

donc : $(A, \underline{+}(D+\bar{b})) \subset \bar{U}'_1 \cap \bar{V}'_1$

i.e : $(A, \underline{+}(D+\bar{b})) \in \text{Fr}(\text{Ext}(C_a))$.



LEMME 2 :

Soit $(A, \underline{+}D)$ ($\text{Fr}(C_h) - \text{Fr}(\bar{C}_h)$) deux cas sont à distinguer :

i) si $\Delta(D) < 0$: $\text{tr}D=0$, $\Delta(A.D)=0$ alors :

$\forall \bar{b} \neq 0$, $(A, \underline{+}(D+\bar{b})) \in (\text{Fr } C_a - \text{Fr } \bar{C}_a)$.

ii) si $\Delta(D) < 0$, $\text{tr}D \neq 0$ et (A, D) liés alors :

$\forall \bar{b} \neq 0$, $(A, \underline{+}(D+\bar{b})) \in \hat{C}_a$

PREUVE :

$(A, \underline{+}D)$ ($\text{Fr}(C_h) - \text{Fr}(\bar{C}_h)$) i.e analytiquement :

$\Delta(D) < 0$ et $\begin{cases} A = PD, \text{tr}D \neq 0 \\ \text{ou} \\ \Delta(A.D) = 0, \text{tr}D = 0 \end{cases}$

i)

$(A, \underline{+}D)$ ($\text{Fr}(C_h) - \text{Fr}(\bar{C}_h)$) alors :

$(A, \underline{+}D) \in \bar{U}_2$ où $U_2 = \{(A', D') / \Delta(D') < 0, \text{tr}D' \neq 0, \text{ et } A' \neq PD'\}$

U_2 ouvert $\subset C_h$ (Cf. Chap.I)

alors notons $U'_2 = U_2 \cap \{(A, D) \text{ inversible}\} \times R^2 - \{0\}$.

U'_2 est un ouvert de systèmes contrôlables dans \hat{C}_a , d'après J.S comme précédemment.

et l'on a : $\bar{U}'_2 = \bar{U}_2 \times R^2$ d'où $(A, \pm(D+\bar{b})) \in \bar{U}'_2$.

donc : $(A, \pm(D+\bar{b})) \in (\text{Fr}(Ca) - \text{Fr}(\bar{Ca}))$.

ii)

Soit $(A, \pm(D+\bar{b}))$ tel que $\Delta(D) < 0$, $\text{tr}D \neq 0$ A, D liés
 $\bar{b} \neq 0$

$\exists \varepsilon > 0$ tel que $\forall (A', \pm D') \in \hat{B}((A, \pm D), \varepsilon)$ tel qu'on ait :
 $\Delta(D') < 0$, $\text{tr}(D') \neq 0$ et (A', D') liés ou non .

D'après [A.S.V] .

Si (A', D') libres , alors $(A', \pm(D'+\bar{b}))$ contrôlable $\forall \bar{b} \neq 0$.

Si (A', D') liés , alors $(A, \pm(D+\bar{b}))$ contrôlable $\forall \bar{b} \neq 0$.

Donc $\forall \bar{b} \neq 0$; $(A, \pm(D+\bar{b})) \in \hat{Ca}^\circ$.

CONCLUSION :

On va donner un tableau récapitulatif qui nous résume la situation .

<u>CAS I</u> :	$S \in \text{Fr}(\text{Ext}(\text{Ca})) .$
<u>CAS II</u> :	$S \in \text{Fr}(\text{Ext}(\text{Ca})) .$
<u>CAS III</u> :	$S \in \text{Fr}(\text{Ext}(\text{Ca})) .$
<u>CAS IV</u> :	$S \in \overset{o}{\text{Ca}} .$
<u>CAS V</u> :	$S \in (\text{Fr}(\text{Ca}) - \text{Fr}(\overline{\text{Ca}})) .$

On obtient comme conséquence, des deux lemmes précédents le théorème suivant qui est une description de l'ensemble des systèmes affines contrôlables Ca .

THEOREME :

L'ensemble des systèmes affines contrôlables Ca vérifie les trois propriétés suivantes :

- i) $\text{Ca} = \{J.S\} \cup K \cup K'$ (disjointe) .
- ii) $\text{Ca} = \{J.S\} \cup K'$
- iii) $\text{Fr}(\text{Ca}) = \text{Fr}(\text{Ext}(\text{Ca})) \cup_{\text{disj}} (\text{Fr}(\text{Ca}) - \text{Fr}(\overline{\text{Ca}})) .$

où K désigne l'ensemble des systèmes affines contrôlables et non contrôlables (auxquels correspondent les systèmes frontières de type (1) de C_h) .

Et K' , l'ensemble des systèmes affines contrôlables auxquels correspond le système homogène caractérisé par les spirales liées.

PREUVE :

$$\text{ii) } \overset{\circ}{Ca} = \{J.S\} UK'$$

$$\text{a) } \{J.S\} UK \subset \overset{\circ}{Ca}$$

$$\left. \begin{array}{l} \cdot \{J.S\} \subset \overset{\circ}{Ca} \text{ car } \{J.S\} \text{ ouvert} \\ K' \subset \overset{\circ}{Ca} \text{ (lemme 2)} \end{array} \right\} \Rightarrow \{J.S\} UK' \subset \overset{\circ}{Ca}$$

$$\text{b) } \overset{\circ}{Ca} \subset \{J.S\} UK'$$

$$\cdot Ca = \{J.S\} UK UK' \quad (\text{i})$$

$$\text{Soit } x \in \overset{\circ}{Ca} \Rightarrow x \in Ca$$

On sait que $K \subset \text{Fr}(Ca)$ donc x ne peut pas appartenir à K ; $K \not\subset \overset{\circ}{Ca}$.

$$\text{donc : } x \in \{J.S\} UK.$$

D'où le résultat .

2 ème Partie

CONNEXITE DE L'ENSEMBLE DES SYSTEMES HOMOGENES
CONTROLABLES C_h :

1. Introduction :

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la structure de l'ensemble des systèmes homogènes contrôlables C_h . Pour cela, moyennant le théorème de contrôlabilité sur $\mathbb{R}^2 - \{0\}$, cité dans la I ère partie, on partitionne C_h en un certain nombre de composantes connexes (Cf. tableau C_h I ère partie).

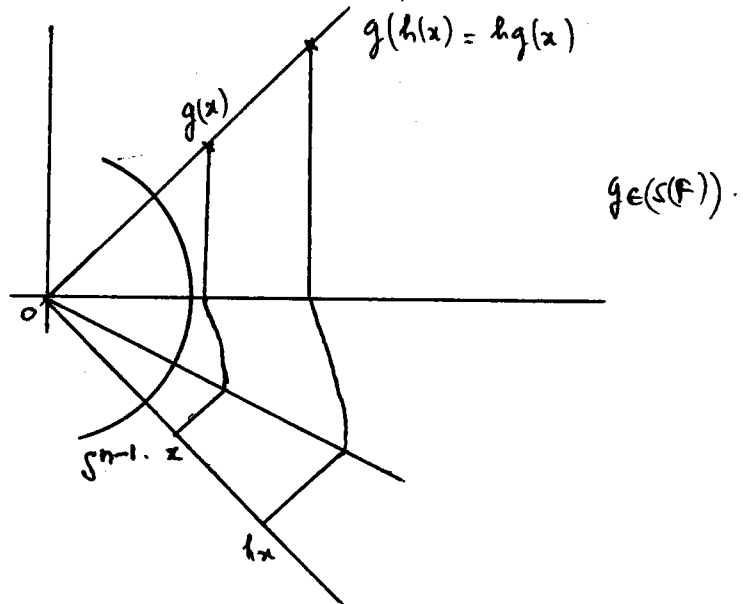
On va, dans un premier temps, expliciter et caractériser géométriquement ces différentes composantes connexes. On utilisera cette structure pour obtenir comme corollaire le fait que C_h est connexe.

2) PRELIMINAIRES :

On va dans un premier temps, donner quelques définitions et résultats connus concernant la contrôlabilité des familles de champs de vecteurs linéaires sur $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ qui nous seront utiles pour la suite de notre travail.

a) CONTROLABILITE DIRECTIONNELLE D'UNE FAMILLE DE CHAMP DE VECTEUR LINEAIRE SUR $\mathbb{R}^n - \{0\}$

Une CN évidente de contrôlabilité sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$ est le fait de contrôler sur les directions, c'est à dire passer d'un rayon de vecteur à un autre. Les champs linéaires de \mathbb{R}^n jouissent d'une propriété importante est qu'ils sont homothétiques par rapport à l'origine, donc les trajectoires homologues (i.e issues d'un même rayon-vecteur et correspondant aux mêmes commutations) le sont aussi:



donc par un difféomorphisme $g \in S(F)$ on peut transporter un rayon vecteur sur un rayon vecteur;

DEFINITION 1 :

Une f.c.v linéaire F est dite contrôlable suivant les directions si :

$$\forall (y, z) \in (\mathbb{R}^n - \{0\})^2, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \alpha z \in S(F).y$$

b) PROJECTION DES CHAMPS LINEAIRES DE \mathbb{R}^n SUR S^{n-1} .

Comme on vient de l'indiquer ci-dessus, parmi les propriétés dont jouissent les champs linéaires, et qu'ils sont homothétiques par rapport à l'origine, donc admettent une même projection sur S^{n-1} .

En effet, si X désigne un champ linéaire, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$.

$$-X(\lambda x) = \lambda X(x)$$

$$-e^{tx}(\lambda x) = \lambda(e^{tx}x) \quad \text{pour } t > 0$$

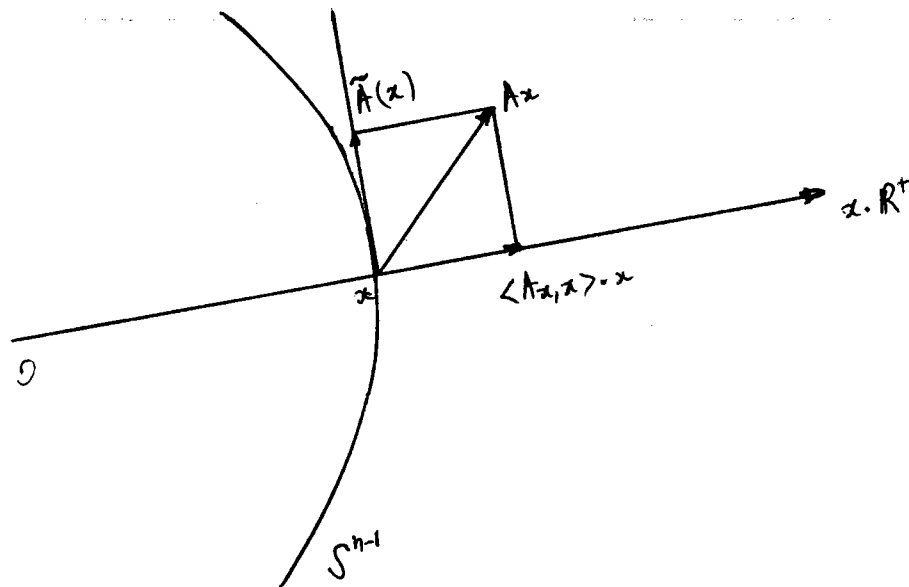
donc à toute famille de champs de vecteurs linéaires $F = \{A_i\}_{i \in I}$ sur \mathbb{R}^n .

On peut lui associer une famille de champs de vecteurs $\tilde{F} = \{\tilde{A}_i\}_{i \in I}$ sur S^{n-1} appelée projection de F sur S^{n-1} tel que :

Pour tout $A \in F$, pour tout $x \in S^{n-1}$.

$$\tilde{A}(x) = Ax - \langle Ax, x \rangle x$$

où le \langle, \rangle désigne le produit scalaire dans \mathbb{R}^n . $\langle Ax, x \rangle x$ désigne donc la projection orthogonale de Ax sur le rayon vecteur $x \in \mathbb{R}^+$.



Géométriquement, $\tilde{A}(x)$ désigne la composante tangentielle à S^{n-1} du vecteur Ax . Ce qui nous définit bien un champ de vecteurs sur S^{n-1} . Certaines propriétés de \tilde{F} se déduisent à partir de celle de F , telles que l'accessibilité, la conservation du crochet ... [A]

Il arrive aussi que 2 champs de vecteurs linéaires sur R^n , A, D , admettent la même projection sur S^{n-1} . Un tel cas se produit si et seulement si : $A = \alpha \text{Id} + D$.

On dira de 2 tels champs, qu'ils sont équivalents du point de vue directionnel.

Maintenant, on va donner un résultat sur lequel est basée la suite de notre travail, puis dégager l'idée de la démonstration de la connexité de C_h .

a) CONTROLABILITE SUR $R^2 - \{0\}$

Soit une famille de champ de vecteur sur $R^2 - \{0\}$.

F est contrôlable sur les directions si et seulement si : il existe dans le cône convexe fermé engendré par F , un champ spirale.

Rappelons qu'un champ spirale D est caractérisé par : $\Delta(D) < 0$, $\text{tr} D \neq 0$ (où Δ et $\text{tr} D$ désignent respectivement le discriminant du polynôme caractéristique de D , et trace D). (Cf. Chap. II).

b) CONTROLABILITE SUR $SL(2, R)$

On va donner d'abord une description de $\underline{sl}(2, R)$.

$\underline{sl}(2, R) = \{D \in M_2(R) / \text{tr} D = 0\}$ c'est un espace vectoriel de dimension 3. C'est aussi l'algèbre de Lie du groupe de Lie $SL(2, R)$ définie par $\{D \in M_2(R) / \det D = 1\}$

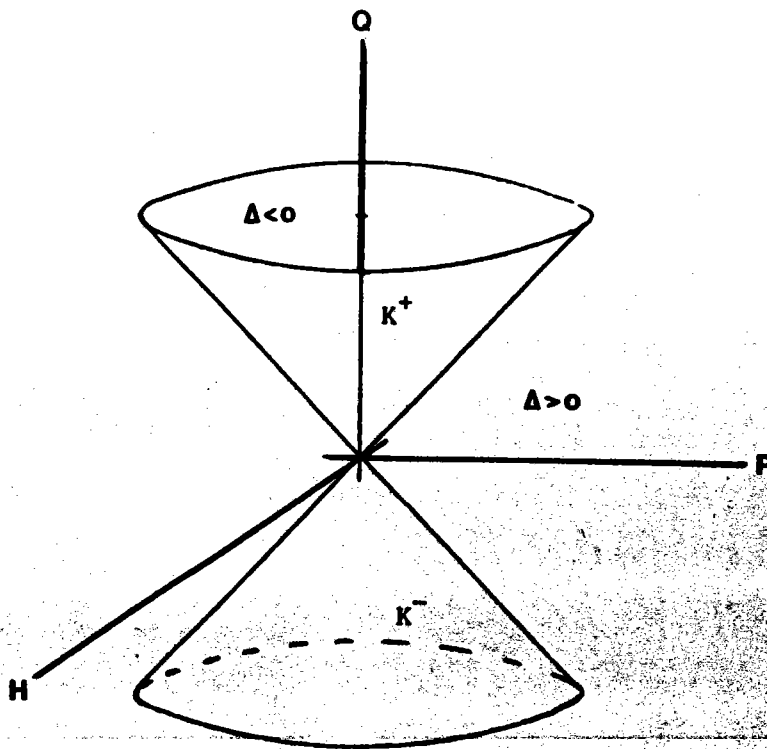
Notons par :

$\mathfrak{K} = \{D \in \underline{\mathfrak{sl}}(2, \mathbb{R}) / \Delta(D) < 0\}$ le cône des champs compacts
 $D \in \underline{\mathfrak{sl}}(2, \mathbb{R})$ est dit compact si $\chi(D, D) < 0$ (i.e admet des
valeurs propres imaginaires pures).

Soient $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(H, P, Q) forme une base de $\underline{\mathfrak{sl}}(2, \mathbb{R})$

Donnons une représentation graphique de \mathfrak{K} dans la base H, P, Q .



Posons $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; alors (X, Y, Q) constitue une
base de $\underline{\mathfrak{sl}}(2, \mathbb{R})$ qu'on utilisera par la suite.

PROPOSITION : [G]

Une famille de champ de vecteur $F \in \underline{sl}(2, R)$ est contrôlable sur les directions si et seulement si le cône convexe engendré par F contient un élément compact.

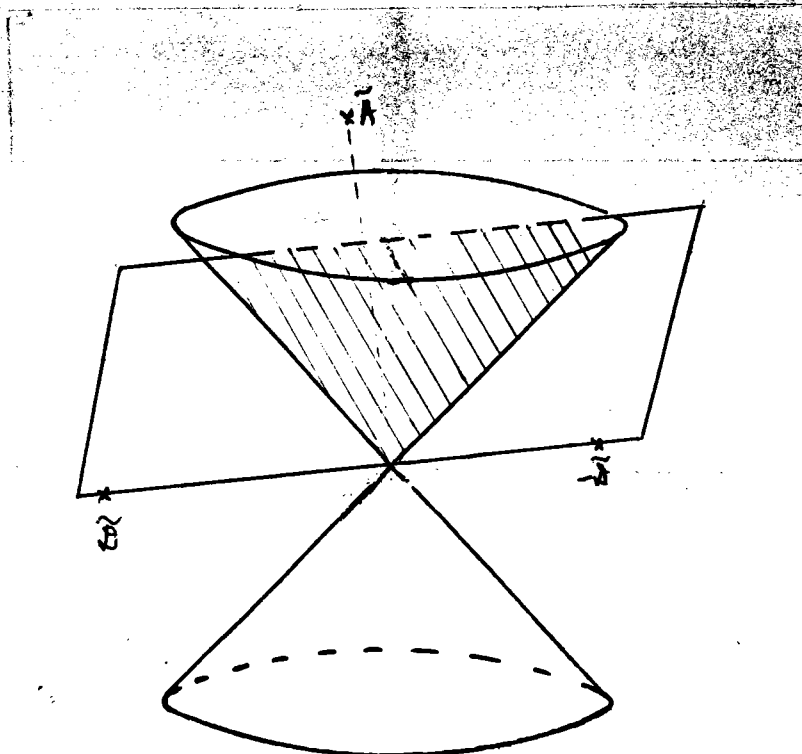
Nous allons maintenant utiliser les divers résultats ci-dessus à notre cas à savoir $F = (A, +D)$; le système $(A, +D)$ est équivalent du point de vue de la contrôlabilité radiale au système $(\tilde{A}, +\tilde{D})$.

\tilde{A} et \tilde{D} étant les champs projetés de A et D sur $\underline{sl}(2, R)$.

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= A - \frac{\text{tr}A}{2} \cdot \text{Id} \\ \text{i.e. } \tilde{D} &= D - \frac{\text{tr}D}{2} \cdot \text{Id} \end{aligned}$$

Compte tenu de la proposition [G] ci-dessus, $(\tilde{A}, +\tilde{D})$ et donc $(A, +D)$ est contrôlable sur les directions si et seulement si le cône convexe engendré dans $\underline{sl}(2, R)$ par $(\tilde{A}, +\tilde{D})$, (qui est un demi-plan) contient un champ compact i.e. intersecte H .

Maintenant, on va donc s'intéresser à l'intersection du demi-plan engendré par $(\tilde{A}, +\tilde{D})$ avec l'ensemble des champs compacts de \mathcal{K} dans $\underline{sl}(2, R)$. voir dessin.



On va donner une description complète de C en termes de composantes connexes ; cette description se fait en plusieurs étapes qu'on énoncera sous formes de lemmes.

3) Etude de la connexité des différentes parties de C_h

Nous allons étudier du point de vue de la connexité des différentes parties de C_h , obtenues par application du théorème de G.B. (Cf. I ère partie).

3.1) ETUDE DE C_1 :

Rappelons que $C_1 = \{(A, \underline{+D}) / \Delta(D) > 0 \text{ et } X(A, D)^2 - \Delta(A) \cdot \Delta(D) > 0\}$

LEMME 1 :

Soit $(A, \underline{+D})$ appartenant à C_1 .

Alors :

-Soit, il existe un chemin continu dans C_1 qui joint $(A, \underline{+D})$ à $(Q, \underline{+X})$

-Soit, un chemin continu dans C_1 qui joint $(A, \underline{+D})$ à $(-Q, \underline{+X})$

CONSEQUENCE :

C_1 a donc deux composantes connexes.

PREUVE :

Dans C_1 , la contrôlabilité \Leftrightarrow contrôlabilité sur les directions (et direction du rang).

$x(A, D)^2 - \Delta(A) \cdot \Delta(D) > 0$ traduit la contrôlabilité directionnelle.

On ramène D à une forme diagonale D' .

D a deux formes possibles $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$

On choisit celles des deux formes D telle que $D' = P^{-1}DP$.

avec $P = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ (où V_1 et V_2 étant les vecteurs propres

associés aux valeurs propres λ_1 et λ_2) appartenant à $GL^+(2, R)$

si on prend $P_1 = \begin{pmatrix} V_2 & V_1 \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ alors P_1 appartient à $GL^-(2, R)$

(i.e $\det P_1 = -\det P$)

1°) RAMENONS D A UNE FORME DIAGONALE :

$GL^+(2, R)$ étant connexe par arcs, il existe un chemin φ dans $GL^+(2, R)$ tel que :

$$\text{tel que } \begin{array}{c} [0, 1] \xrightarrow{\varphi} P \\ \varphi(0) = \text{Id}; \varphi(1) = P \end{array}$$

$$\{A, D\} \longrightarrow \left\{ \varphi(t) \cdot A \cdot \varphi^{-1}(t), \varphi(t) \cdot D \cdot \varphi^{-1}(t) \right\}$$

i.e on peut déformer continument P en l'identité dans C_1 .

$$\text{donc } (A, \pm D) \xrightarrow{\text{dans } C_1} \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}; \pm \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \right\}$$

finalement, il existe un chemin continu dans C_1 qui relie $(A, \pm D)$ à $(A, \pm D')$ avec D' diagonale.

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{l} \lambda_1 > \lambda_2 \\ \lambda_2 > \lambda_1 \end{array}$$

puisque $\Delta(D) = \Delta(D_t)$ et $X(A, D)^2 - \Delta(A) \cdot \Delta(D) = X(A_t, D_t)^2 - \Delta(D_t) \cdot \Delta(A_t)$

sont des invariants de base.

2°) ANNULER LA DIAGONALE DE A .

On va faire cette transformation dans C_1 , car comme on vient de l'indiquer : $X(A,D)^2 - \Delta(A) \cdot \Delta(D) > 0$ se traduit par $bc < 0$ du fait que D' est diagonale.

Il convient de distinguer deux cas :

$$bc < 0 \begin{cases} \nearrow b > 0 \text{ et } c < 0 \\ \searrow b < 0 \text{ et } c > 0 \end{cases}$$

On verra que ces deux cas, correspondent aux deux composantes connexes de C_1 .

On va tout d'abord annuler la diagonale de A' :

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} ; \pm \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} (1-t)a & c \\ b & (1-t)d \end{pmatrix} ; \pm \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \right\}_{t \in [0,1]}$$

Pour $t=1$ on aura :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & c \\ b & 0 \end{pmatrix} ; \pm \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \right\}$$

Notons que :

$$X(A_t, D)^2 - \Delta(A_t) \cdot \Delta(D) = bc < 0$$

$\forall t \in [0,1]$ puisque D' est diagonale ; cette déformation est donc bien dans C_1 .

3°) TRANSFORMER (b,c) en (1,-1) ou (-1,1).

*) CAS OU b > 0 ; et c < 0 .

En effet :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & c \\ b & 0 \end{pmatrix} ; \pm \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \right\} \xrightarrow{\text{dans } C_1} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & (1-t)c-t \\ (1-t)b+t & 0 \end{pmatrix} ; \pm \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \right\}$$

évidemment $b_t \cdot c_t < 0$ (somme de quantités négatives).

$$\begin{aligned} [(1-t)b+t] [(1-t)c-t] &= (1-t)^2 bc - t(1-t)b + t(1-t)c - t^2 < 0 \\ \forall t \in [0,1] \end{aligned}$$

Pour $t=1$ on aura $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \pm \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \right\}$

*) CAS OU b < 0 et c > 0 :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & c \\ b & 0 \end{pmatrix} ; \pm \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \right\} \xrightarrow{\text{dans } C_1} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & (1-t)c + t \\ (1-t)b-t & 0 \end{pmatrix} ; \pm \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \right\}_{t \in [0,1]}$$

Pour $t=1$ on aura : $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} ; \pm \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \right\}$

En résumé :

$$(A, \pm D) \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} ; \pm \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \\ \text{ou} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} ; \pm \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

4°) TRANSFORMER LE COUPLE (λ_1, λ_2) en $(1, -1)$.

Maintenant, on va faire une transformation sur le champ D. Puisque D apparaît avec le signe \pm donc on aura deux cas à étudier selon le signe de λ_1 et λ_2 (i.e où λ_1 et λ_2 sont tous deux de même signe ; où de signe opposé.)

On va commencer par étudier le cas où λ_1 et λ_2 sont de signe opposé.

*) SOIT $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 < 0$.

On va procéder à cette transformation.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \pm \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \right\} \xrightarrow{\text{dans } C_1} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \pm \begin{pmatrix} (1-t)\lambda_1+t & 0 \\ 0 & -(1-t)\lambda_2-t \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Delta(D_t) = [(1-t)(\lambda_1 + \lambda_2) + 2t]^2 > 0 \quad \forall t \in [0, 1]$$

Pour $t \in [0, 1]$ on aura :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \pm \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \right\} \xrightarrow{\text{dans } C_1} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

REMARQUE :

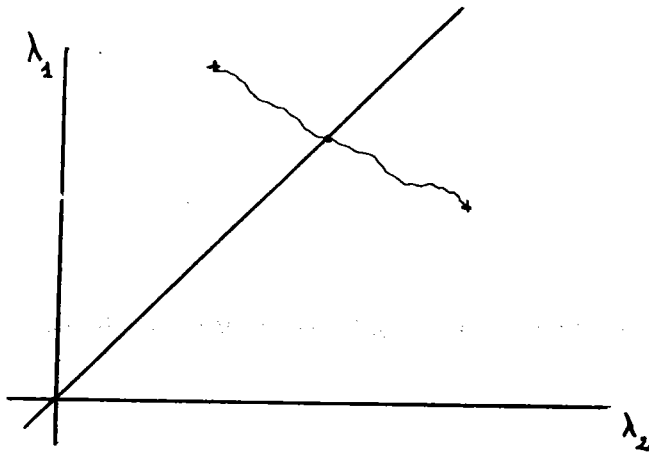
Aussi par le même procédé de transformation sur le champ D on aurait obtenu :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \pm \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 \end{pmatrix} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

*) CAS OU $\lambda_1 > 0$ ET $\lambda_2 > 0$.

On va se ramener au cas précédent (i.e transformer le couple (λ_1, λ_2) en $(\lambda_1, -\lambda_2)$ et par suite transformer (λ_1, λ_2) en $(1, -1)$).

Supposons : $\lambda_1 > \lambda_2$.



L'idée est de transformer $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ en $D_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 \end{pmatrix}$.

($\det D' > 0$) en ($\det D'_1 < 0$) dont on doit forcément passer $\det = 0$ toujours dans C_1 , par un chemin (car $\Delta(D_t) > 0$ et $X(A, D_t)^2 - \Delta(D_t) \cdot \Delta(A) > 0$).

Notons que la contrôlabilité ne sera pas affectée pour le cas $\det = 0$.

La transformation consiste à déformer λ_2 en $-\lambda_2$.

En effet :

$$\Delta(D_t) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\forall t \in [0, 1]]{\text{dans } C_1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & (1-2t)\lambda_2 \end{pmatrix} \quad t \in [0, 1]$$

$$\Delta(D_t) = (\lambda_1 - (1-2t)\lambda_2)^2 > 0$$

Pour la valeur de $t = \frac{1}{2}$ on aura :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{dans } C_1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour $t \in [0, 1]$ on aura :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \pm \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \right\} \xrightarrow{\text{dans } C_1} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \pm \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 \end{pmatrix} \right\}$$

évidemment, toutes ces transformations sont dans C_1 car

$$\Delta(D_t) > 0 \text{ et } X(A, D_t)^2 - \Delta(A) \cdot \Delta(D_t) > 0$$

Finalement, il existe un chemin continu qui joint $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ à $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 \end{pmatrix}$ (i.e qui on s'est ramené au cas ci-dessus).

donc de $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

CONCLUSION :

On a donc trouvé un chemin continu dans C_1 qui joint $(A, \pm D)$:

- Soit à : $\{Q, \pm X\}$

- Soit à : $\{-Q, \pm X\}$

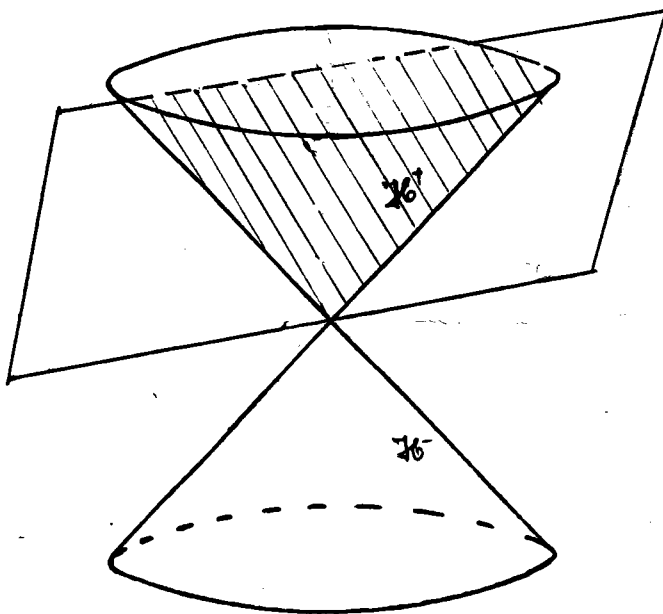
CONSEQUENCE.

C_1 a donc deux composantes connexes par arcs qu'on notera C_1^+ et C_1^- .

C_1^+ ensemble des systèmes de C_1 qu'on peut déformer continuellement dans C_1 en $\{Q, +X\}$

C_1^- ensemble des systèmes de C_1 qu'on peut déformer continuellement dans C_1 en $\{-Q, +X\}$

Ces deux composantes connexes correspondent aux deux cas rencontrés dans la démonstration.

INTERPRETATION GEOMETRIQUE :

L'intersection correspond à $C_1^+ = \frac{1}{2} \text{ plan} \cap \mathcal{X}^+$.

3.2°) ETUDE DE C_2 :

Rappelons que $C_2 = \left\{ (A, \underline{+D}) / D = \lambda I \text{ et } \Delta(A) < 0 \right\}$

LEMME 2 :

Soit $(A, \underline{+D})$ appartenant à C_2 .

alors :

-Soit il existe un chemin continu dans C_2 qui joint $(A, \underline{+D})$ à $(Q, \underline{+Id})$

-Soit un chemin continu dans C_2 qui joint $(A, \underline{+D})$ à $(-Q, \underline{+Id})$

CONSEQUENCE :

C_2 a donc deux composantes connexes.

PREUVE :

La démonstration étant la même que pour le cas ci-dessus (lemme 1).

Remarquons que dans ce cas la projection du champ D sur $\underline{sl}(2, R)$ donnerait le champ nul.

On va étudier l'intersection du cône convexe engendré dans $\underline{sl}(2, R)$ par (\tilde{A}, \tilde{D}) qui dans notre cas est une demi-droite avec l'ensemble des champs compacts de $\underline{sl}(2, R)$.

alors, par un changement de base, on ramène D à $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et par le même procédé (voir lemme 1) on transforme

$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans le cas où $b > 0$ et $c < 0$

ou $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ dans le cas où $b < 0$ et $c > 0$.

EN RESUME :

$$(A, \underline{+D}) \begin{cases} \rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \\ \text{où} \\ \rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} ; \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \end{cases}$$

CONCLUSION :

On a donc trouvé un chemin continu dans C_2 qui joint
 $(A, \underline{+D})$:

- soit à $(Q, \underline{+Id})$
- soit à $(-Q, \underline{+Id})$

3. 3°) ETUDE DE C₃.

Rappelons que $C_3 = \left\{ (A, \underline{+}D) \mid \begin{array}{l} \Delta(D) = 0 \\ D \neq \lambda I \end{array} \text{ et } X(A, D)^2 - \Delta(A) \cdot \Delta(D) > 0 \right\}$

LEMME 3 :

Soit $(A, \underline{+}D)$ appartenant à C_3 .

alors :

-Soit, il existe un chemin continu C_3 qui joint
 $(A, \underline{+}D)$ à $(H, \underline{+}P)$

-Soit, un chemin continu dans C_3 qui joint
 $(A, \underline{+}D)$ à $(-H, \underline{+}P)$

CONSEQUENCE :

C_3 a donc deux composantes connexes C_3^+ et C_3^- .

PREUVE :

Dans C_3 la contrôlabilité \iff contrôlabilité sur les directions et condition du rang

D a deux formes canoniques possibles .

$$D \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} ; \quad D \sim \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

1^{er} CAS :

$$\exists P_1 \in GL^+ / P_1 D P_1^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

En effet GL^+ étant connexe donc $P_1 \xrightarrow{\text{dans } GL^+} Id$
et par suite $P_1 D P_1^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

$$\text{et } P_1 A P_1^{-1} = A'$$

cette déformation se fait dans C_3 (car $\Delta(D)$ et $X(A, D)^2 - \Delta(A) \cdot \Delta(D)$ sont des invariants de base.)

2 ème CAS :

$$\exists P_2 \in GL^- / P_2 D P_2^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

en effet GL^- étant connexe par arcs donc $P_2 \xrightarrow{\text{dans } GL^-} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\text{et donc } D \longrightarrow P_2 \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} P_2^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

cette transformation se fait dans C_3 (car $\Delta(D)$ et $X(A,D)^2 - \Delta(A) \cdot \Delta(D)$ sont des invariants de base).

Finalement on peut toujours ramener D à $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

1 ère ETAPE DEFORMER $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

En effet :

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} ; \pm \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right\} \xrightarrow{\text{dans } C_3} \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} ; \pm \begin{pmatrix} (1-t)\lambda & 1 \\ 0 & (1-t)\lambda \end{pmatrix} \right\}_t \in [0, 1]$$

cette transformation est dans C_3 , car $b \neq 0$

$$X(A, D_t)^2 - \Delta(A) \cdot \Delta(D_t) = b^2 > 0 \quad \text{et} \quad \Delta(D_t) = 0$$

pour $t=1$ on a :

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} ; \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

2 ème ETAPE ANNULER LA DIAGONALE DE A.

On va faire cette transformation dans C_3 car $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

est constante donc $X(A, D)^2 - \Delta(A) \cdot \Delta(D) = b^2 > 0$.

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} ; \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \xrightarrow{\text{dans } C_3} \left\{ \begin{pmatrix} (1-t)a & c \\ b & (1-t)d \end{pmatrix} ; \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} t \in [0, 1]$$

$$X(A_t, D)^2 - \Delta(A_t) \cdot \Delta(D) = b^2 > 0$$

alors pour $t=1$ on a : $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & c \\ b & 0 \end{pmatrix} ; \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

3 ème ETAPE CONSISTE A TRANSFORMER LE COUPLE (b, c) en $(1, 0)$
si $b > 0$ et en $(-1, 0)$ si $b < 0$

en effet :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & (1-t)c \\ (1-t)b+t & 0 \end{pmatrix} ; \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} t \in [0, 1]$$

pour la quantité $X(A_t, D)^2 - \Delta(A_t) \cdot \Delta(D) = [(1-t)b+t]^2 > 0 \forall t \in [0, 1]$.

pour $t=1$ on a :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

REMARQUE :

de même si on suppose $b < 0$ on aura : $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} ; \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

CONCLUSION :

On a donc trouvé un chemin continu dans C_3 qui joint $(A, \underline{+D})$

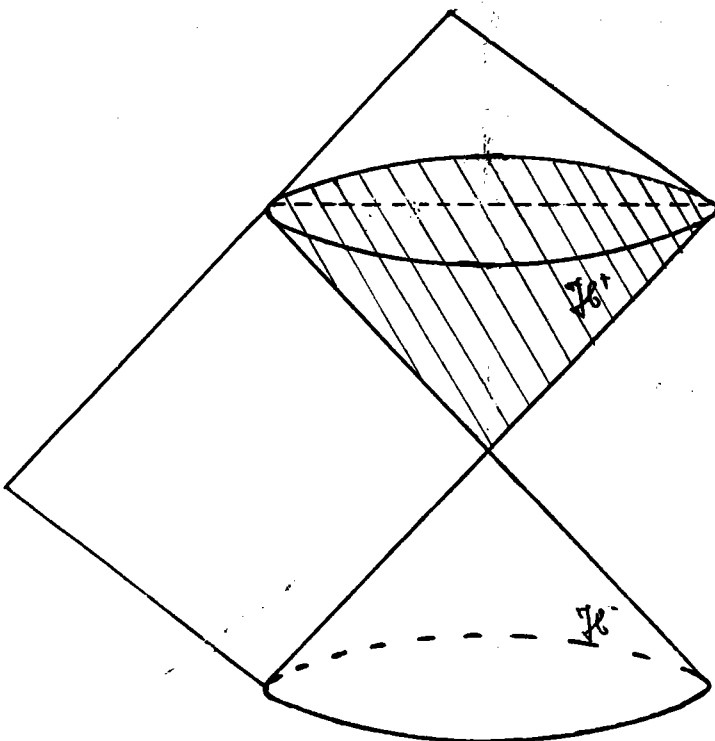
- soit à $(H, \underline{+P})$
- soit à $(-H, \underline{+P})$

CONSEQUENCE :

C_3 a donc deux composantes connexes par arcs qu'on notera C_3^+ et C_3^- .

C_3^+ ensemble des systèmes de C_3 qu'on peut déformer continument dans C_3 : en $(H, \underline{+P})$

C_3^- ensemble des systèmes de C_3 qu'on peut déformer continument dans C_3 : en $(-H, \underline{+P})$.



3. 4°) ETUDE DE C_4 :

Rappelons que $C_4 = \{(A, \pm D) / \Delta(D) < 0 ; \text{tr} D = 0 \text{ et } \Delta(A, D) > 0\}$

LEMME 4 :

Soit $(A, \pm D)$ appartenant à C_4 .

Alors il existe un chemin dans C_4 qui joint $(A, \pm D)$ à $(X, \pm Q)$

CONSEQUENCE :

C_4 est connexe.

PREUVE :

Dans C_4 la contrôlabilité \iff contrôlabilité radiale (et condition du rang).

$\Delta(D) < 0$, alors par un changement de base on déforme D dans C_4 car invariants de base en $D' = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$ avec $\varepsilon = \pm 1$

où on aura à distinguer deux cas selon que $\varepsilon = 1$ ou $\varepsilon = -1$

La contrôlabilité du système $(A', \pm D')$ est exprimée par

la quantité $\Delta(A', D') = (b+c)^2 - 4ad > 0$.

$$A' = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Le but est de transformer continument dans C_4 $(A, \pm D)$ en $(X, \pm Q)$

Avant de procéder à une transformation sur le champ A ; on peut supposer que $(b+c) > 0$.

En effet, si $b+c=0$; comme $\mathcal{O} = \{(a, b, c, d) / (b+c)^2 - 4ad > 0\}$ est un ouvert de \mathbb{R}^4 , $\exists \varepsilon > 0$ tel que $B([a, b, c, d], \varepsilon) \subset \mathcal{O}$ et $\exists (a', b', c', d') \in B$ tel que $b'+c' \neq 0$ et $(b'+c')^2 - 4a'd' > 0$.

$(B([a, b, c, d], \varepsilon))$ désigne la boule ouverte du centre $[a, b, c, d]$ et de rayon ε .

*) LA 1 ère ETAPE : ANNULER a et d .

En effet :

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} ; \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \xrightarrow{\text{dans } C_4} \left\{ \begin{pmatrix} (1-t)a & c \\ b & (1-t)d \end{pmatrix} ; \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} t \in [0, 1]$$

$$\Delta(A_t.D) = (b+c)^2 - 4(1-t)^2 ad > 0 \quad \forall t \in [0, 1] \quad (\text{car } |(1-t)^2 ad| \leq |ad|).$$

Pour $t=1$ on aura :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & c \\ b & 0 \end{pmatrix} ; \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

*) LA 2ème ETAPE : TRANSFORMER LE COUPLE (0,0) en (1,1).

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & c \\ b & 0 \end{pmatrix} ; \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \xrightarrow{\text{dans } C_4} \left\{ \begin{pmatrix} t & c \\ b & -t \end{pmatrix} ; \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} t \in [0, 1]$$

$$\Delta(A_t.D) = (b+c)^2 + 4t^2 > 0 \quad \forall t \in [0, 1] \Rightarrow \text{dans } C_4.$$

pour $t=1$ on aura :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & c \\ b & -1 \end{pmatrix} ; \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

*) LA 3 ème ETAPE : ANNULER betc.

En effet :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & (1-t)c \\ (1-t)b & -1 \end{pmatrix} ; \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad t \in [0, 1]$$

$$\Delta(A_t.D) = [(1-t)(b+c)]^2 + 4 > 0 \quad t \in [0, 1] \quad \text{dans } C_4.$$

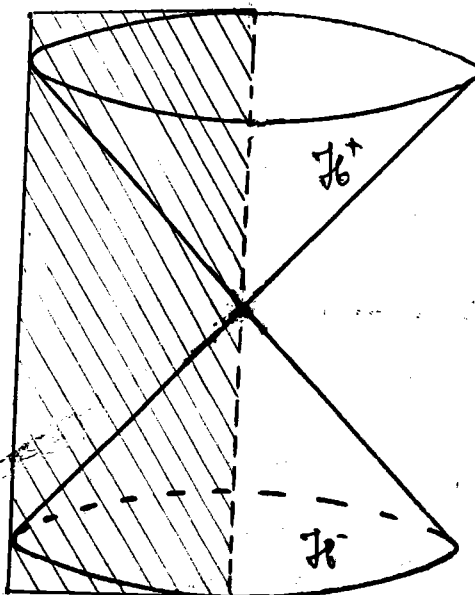
pour $t=1$ on aura :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ; \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

CONCLUSION :

Il existe un chemin continu dans C_4 qui joint $(A, \pm D)$ à

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ; \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

3. 5°) ETUDE DE C_5 :

Rappelons que $C_5 = \{(A, \pm D) / \Delta(D) < 0, \text{tr} D \neq 0 \text{ et } A \neq \mu D\}$

LEMME 5 :

C_5 a deux composantes connexes.

PREUVE :

On va dans un premier temps considérer l'ensemble :

$$\{A \in M_2(\mathbb{R}) / A \neq \mu D\}, \text{ D étant fixé.}$$

Cet ensemble n'est autre que : $\mathbb{R}^4 \setminus \mathbb{R}D$ qui est manifestement connexe par arcs.

Maintenant on va étudier l'ensemble

$$\mathcal{O} = \left\{ \begin{array}{l} +D \\ - \end{array} \right. / D \in M_2(\mathbb{R}) / \Delta(D) < 0 ; \text{tr} D \neq 0 \left. \right\}$$

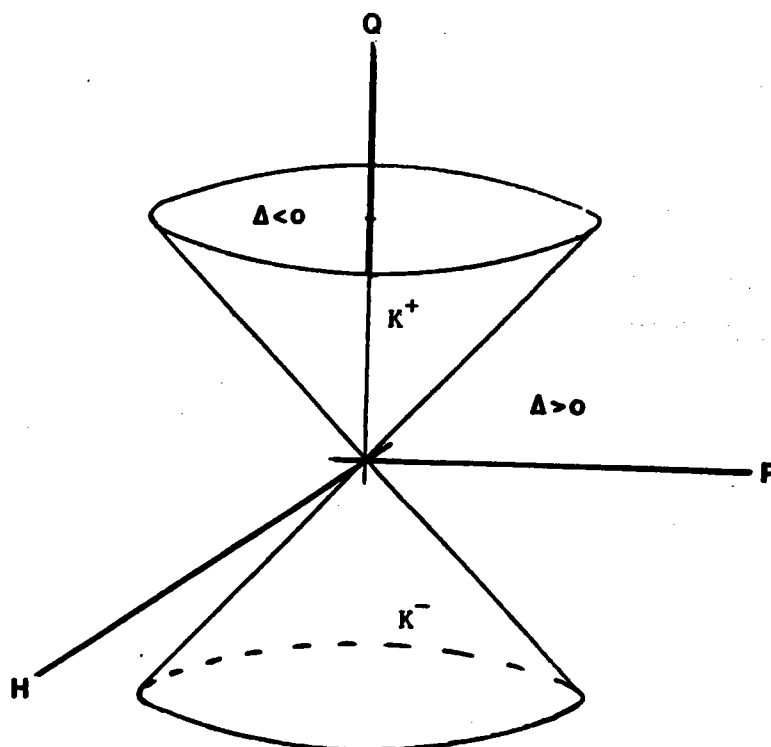
soit l'application $f: \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}^*$
 $D \longmapsto f(D) = \text{tr} D \cdot \rho(D)$

où $\rho(D) = X(Q, D)$.

* $\text{tr} D$ mesure le caractère expansif où contractile des trajectoires pour un champ spirale.

* $X(Q, D)$ mesure le sens de rotation de D , en effet:

D a même sens de rotation que sa projection sur $\underline{\mathfrak{sl}}(2, \mathbb{R})$
 $\tilde{D} = D - \frac{1}{2} \text{tr} D \cdot \text{Id}$.



$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

soit $T \in \underline{sl}(2, R)$

$T = \alpha H + \beta P + \gamma Q$ où H, P, Q est une base orthogonale relativement à la forme bilinéaire X .

si $\Delta(T) < 0$ alors T appartient au cône K

$T \in K^+ \iff \delta > 0 \iff X(T, Q) > 0$ (i.e que T admet une composante > 0 selon Q dans $\underline{sl}(2, R)$ relativement à la base H, P, Q).

$T \in K^- \iff \delta < 0 \iff X(T, Q) < 0$ (i.e que T admet une composante < 0 selon Q dans $\underline{sl}(2, R)$ relativement à la base H, P, Q).

En effet :

$$X(T, Q) = \alpha X(H, Q) + \beta X(P, Q) + \gamma X(Q, Q) = \delta$$

$$X(H, Q) = 0 ; X(P, Q) = 0 ; X(Q, Q) = 1$$

Remarquons que $f(D) = f(-D)$

En effet : $f(-D) = \text{tr}(-D) \cdot \rho(-D) = -\text{tr}D \cdot (-\rho(D)) = f(D)$

l'application f est manifestement continue et non nulle sur O .

donc O admet une partition en deux sous-ensembles ouverts qu'on notera par O^+ et O^- .

où $O^+ = \left\{ \frac{+D}{-} / D \in M_2(R) ; \Delta(D) < 0 ; \text{tr}D \neq 0 \text{ et } \rho(D) \cdot \text{tr}D > 0 \right\}$

$O^- = \left\{ \frac{+D}{-} / D \in M_2(R) ; \Delta(D) < 0 ; \text{tr}D \neq 0 \text{ et } \rho(D) \cdot \text{tr}D < 0 \right\}$

donc O n'est pas connexe.

Montrons que chacune de ces parties est connexes.

$\Delta(D) < 0$, alors par un changement de base on déforme D dans C_5 .

$$\begin{array}{c}
 \begin{matrix} \nearrow \\ \searrow \end{matrix} D \\
 \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = P^{-1} D P \\
 \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}
 \end{array}
 \qquad P \in GL$$

$\exists P \in GL^+$ tel que $P^{-1} D P = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = D'$ ou $\alpha \pm i\beta$ sont les valeurs propres complexes de D.

si $D \in O^+$, puisque $\rho(D)$ et $\text{tr} D$ sont des invariants de base :

on aura : $\rho(D') \cdot \text{tr} D' > 0$ i.e $\alpha\beta > 0$

alors il existe un chemin continu dans O^+ (donc dans C_5)

qui joint $\pm \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ à $\pm \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

En effet, la transformation suivante :

$$\pm \begin{pmatrix} (1-t)\alpha+t & -(1-t)\beta-t \\ (1-t)\beta+t & (1-t)\alpha+t \end{pmatrix} \quad t \in [0, 1] \quad \text{convient}$$

$\Delta(D_t) < 0$

pour $t=1$ on aura : $\pm \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

En résumé O^+ est connexe par arcs.

De même, si $D \in O^-$, puisque $\rho(D)$ et $\text{tr} D$ sont des invariants de base on aura : $\rho(D') \cdot \text{tr} D' < 0$ i.e $\alpha\beta < 0$

alors, il existe un chemin continu dans O^- (donc dans C_5).

qui joint $\pm \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ à $\pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

pour $t=1$ on aura : $\pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

O^- est donc connexe par arcs.

Maintenant on va faire la transformation continue suivante dans O^+ .

$$(A_1, \pm D) \in O^+ \xrightarrow[\text{dans } O^+]{\text{continument}} \left\{ \left(\text{Id}, \pm \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \right\}$$

$\left\{ \text{Id}, \pm \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ étant le prototype de O^+ .

En effet :

Soit D fixé $B = \{A_1 / A \neq \mu D\}$ étant connexe par arcs

donc $A_1 \xrightarrow{\text{dans } B} \text{Id}$

$(\text{Id}, \pm D)$ appartient toujours à O^+

L'étape suivante consiste à déformer continument $\pm D$ dans O^+ en $\pm \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\pm D \xrightarrow{\text{dans } O^+} \pm \begin{pmatrix} (1-t)\alpha+t & -(1-t)\beta-t \\ (1-t)\beta+t & (1-t)\alpha+t \end{pmatrix} \quad t \in [0, 1]$$

pour $t=1$ on aura : $\pm \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans O^+

$\Delta(D_t) \neq 0$ (valeurs propres complexes) $\forall t \in [0, 1]$

or $\Delta(\text{Id}) = 0$ donc D et Id sont libres $\forall t$.

COMMENTAIRE :

On a explicité et caractérisé géométriquement les différentes composantes connexes par arcs des sous-ensembles C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 en exhibant pour chacune de ces composantes connexes un système type. On va utiliser cette structure pour obtenir comme résultat annexe le fait que C_h est connexe.

REMARQUE :

$C_1^+, C_1^-, C_3^+, C_3^-, C_4$ sont connexes par arcs.

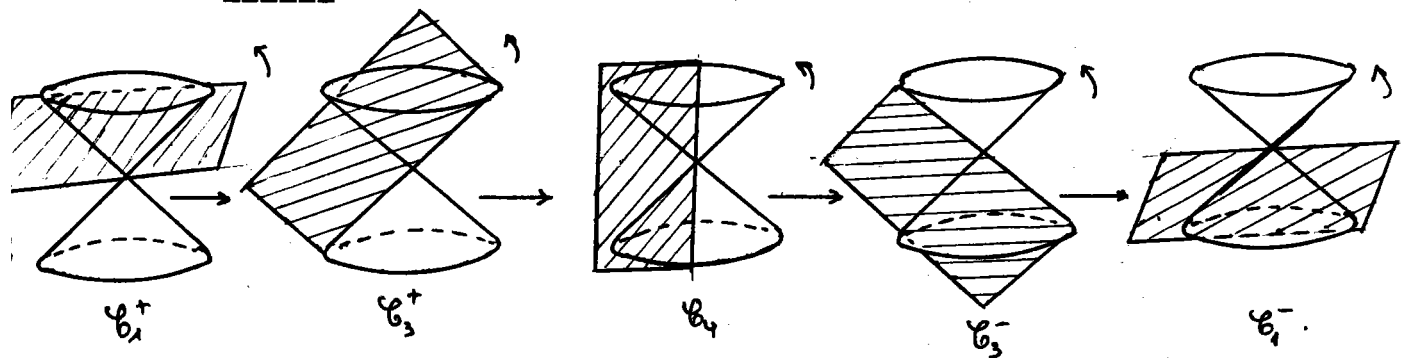
PROPOSITION :
$$C_1 \cup C_3 \cup C_4 \text{ est connexe.}$$
PREUVE :

On va tout d'abord donner une interprétation géométrique.

L'idée est de trouver un chemin continu joignant un système $(A, \pm D)$

appartenant à $C_1 \cup C_3 \cup C_4$ à un autre système $(A', \pm D')$

appartenant au même ensemble ; en restant dans cet ensemble tout le long du chemin.

RESUME :

L'idée est de montrer qu'il existe un chemin continu qui joint $\textcircled{1} \rightarrow \textcircled{2} \rightarrow \textcircled{3} \rightarrow \textcircled{4}$

On va commencer par prendre un système $(A, \pm D) \in C_1$ et

le déformer continument, en d'autres termes trouver un chemin continu qui puisse joindre $\textcircled{1} \rightarrow \textcircled{2} \rightarrow \textcircled{3} \rightarrow \textcircled{4}$

En effet :

Soit $\{ \begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix} X, Q \} \in C_1$

On va dans un premier temps, faire une première transformation de $\{+X, Q\}$, plus exactement cette transformation concerne le champ X .

Alors : \exists une matrice $P_t \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$ où $P_t = \begin{pmatrix} \cos t\theta & -\sin t\theta \\ \sin t\theta & \cos t\theta \end{pmatrix}$

avec $\theta = \pi/4$; et $t \in [0, 1]$

$$P_t X P_t^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_t Q P_t^{-1} = Q$$

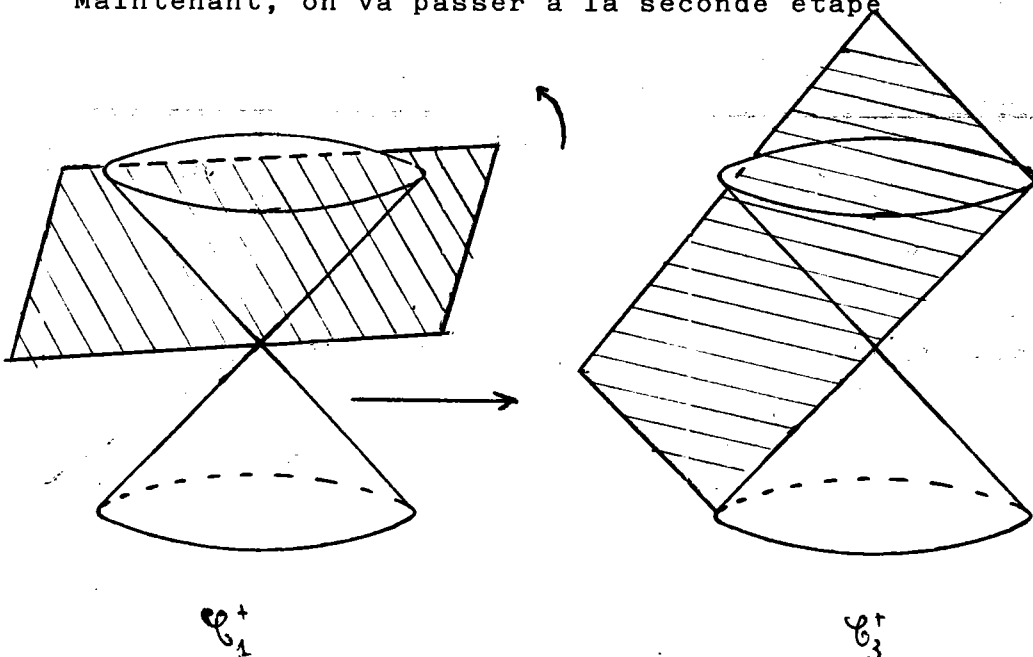
par le même argument (i.e $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ connexe par arcs).

On a donc finalement trouvé un chemin continu dans C_1

qui joint $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

donc par définition de C_1^+ $\left\{ \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \in C_1^+$.

Maintenant, on va passer à la seconde étape



qui consiste à déformer

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Il suffit de prendre la transformation suivante :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1+t \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-t & 0 \end{pmatrix} \right\}^t \in [0,1]$$

pour $t \in [0,1[$ on est dans C_1^+ .

en effet :

$$\Delta(D_t) = 4(1-t) > 0 \quad \forall t \in [0,1[$$

$X(A_t, D_t)^2 - \Delta(A_t) \cdot \Delta(D_t)$ est caractérisée par $b_t \cdot c_t < 0$
(car D_t est diagonale).

En effet : $b_t \cdot c_t = -(1-t) < 0 \quad \forall t \in [0,1[$

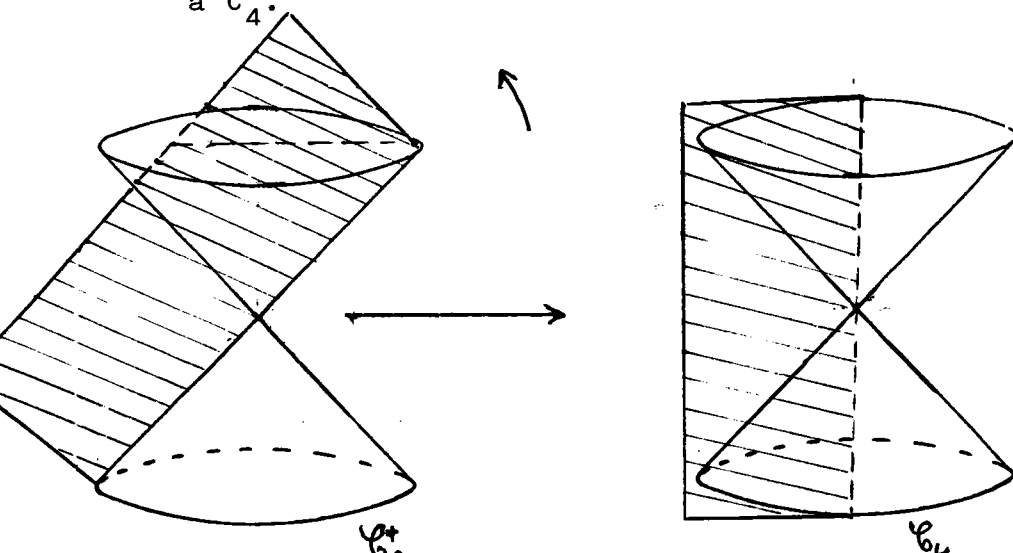
pour $t=1$ on aura : $(H, \pm P)$
 $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \in C_3^+$

En effet : $X(A, D)^2 - \Delta(A) \cdot \Delta(D) > 0$

CONCLUSION :

On a trouvé un chemin continu dans C_h qui joint un système $\in C_1^+$ en un autre $\in C_3^+$.

*) L'étape suivante consiste à déformer continument dans C_h un système appartenant à C_3^+ en un autre appartenant à C_4 .



En effet :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} t & 0 \\ 1-t & -t \end{pmatrix}; \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -t & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

pour $t=0$ on est dans C_3^+ .

pour $t \in]0,1[$ on est dans C_4 .

En effet : $\Delta(D_t) = -4t < 0 \quad \forall t \in]0,1[$

$$\text{et } \Delta(A_t \cdot D_t) = (1-t)^2 + 4t^2 > 0 \quad \forall t \in]0,1[$$

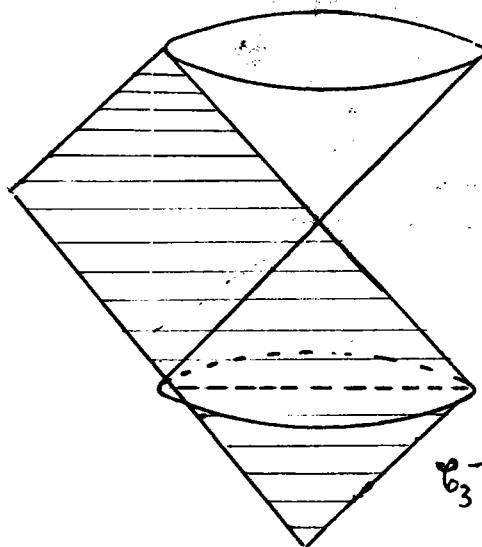
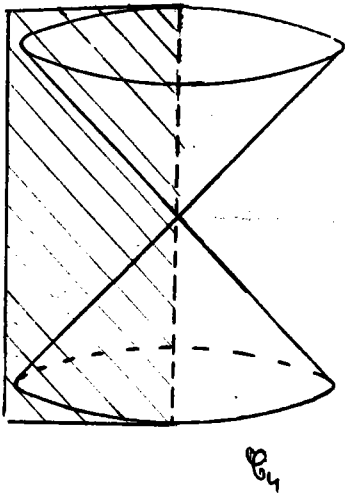
pour $t=1$ on aura :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \in C_4$$

CONCLUSION :

On a trouvé un chemin continu dans C_h qui joint un système $\in C_3^+$: en un autre appartenant à C_4 .

*) Maintenant on va passer à C_3^- .



En effet :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1-t & 0 \\ -t & -(1-t) \end{pmatrix}; \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1+t & 0 \end{pmatrix} \right\} t \in [0,1]$$

pour $t \in [0,1[$ on est dans C_4 .

En effet :

$$\Delta(D_t) = -4(1-t) < 0 \quad \forall t \in [0, 1[$$

$$\Delta(A_t \cdot D_t) = t^2 + 4(1-t)^2 > 0 \quad \forall t \in [0, 1[$$

Pour $t=1$ on est dans C_3^- .

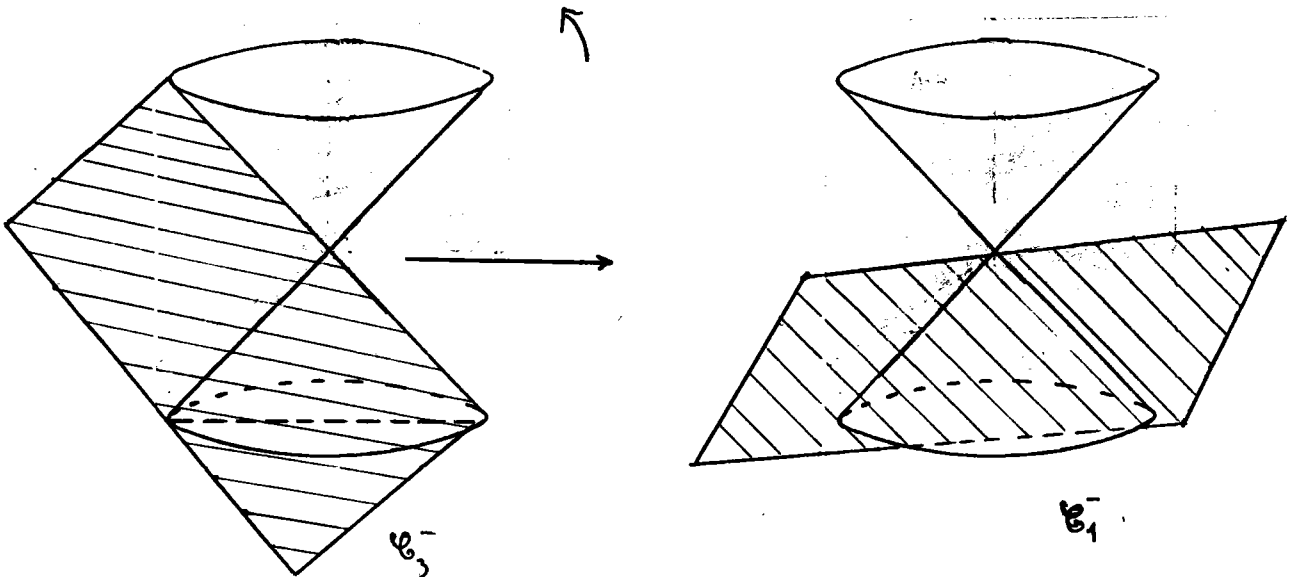
En effet :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} ; \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

CONCLUSION :

Il existe un chemin continu dans C_h qui joint un système $\in C_4$ en un autre appartenant à C_3^- .

*) La dernière étape consiste à passer continuellement dans C_h de C_3^- à C_1^- .



En effet :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} ; \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 0 & t \\ -1 & 0 \end{pmatrix} ; \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad t \in [0, 1]$$

pour $t=0$ on est dans C_3^-

pour $t \in]0, 1]$ on est dans C_1^-

En effet :

$$\Delta(D_t) = 4t > 0 \quad \text{pour } t \in]b, 1]$$

$\chi(A_t, D_t)^2 - \Delta(A_t) \cdot \Delta(D_t) > 0$ est caractérisée par $b_t \cdot c_t < 0$

$$b_t \cdot c_t = -t < 0 \quad \text{pour } t \in]0, 1]$$

$$\text{pour } t=1 \quad \text{on a : } \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} ; \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

CONCLUSION :

On a trouvé un chemin continu dans C_h , qui joint un système $\in \hat{a}C_3^-$ en un autre appartenant à C_1^- finalement (par le même argument $P_t \in SL(2, R)$)

$$\text{on aura } \left\{ \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \longrightarrow \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

CONCLUSION :

Il existe un chemin continu qui joint $C_1^+ \longrightarrow C_3^+ \longrightarrow C_4 \longrightarrow C_3^- \longrightarrow C_1^-$
chacun d'eux étant connexe par suite $C_1 \cup C_3 \cup C_4$ est connexe

LEMME 5 :

$C_4 \cup C_5$ est connexe.

PREUVE :

Rappelons que :

$$C_4 = \left\{ (A, \pm D) / \Delta(D) < 0 ; \text{tr} D = 0 \text{ et } \Delta(A, D) > 0 \right\}$$

Remarquons que :

$$C_4 \subset \text{Fr}(C_5)$$

En effet :

$$\left\{ Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \in C_4 \cap \text{Fr}(C_5)$$

effectivement :

$$\left\{ Q = \begin{pmatrix} \epsilon & -1 \\ 1 & \epsilon \end{pmatrix} ; X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \subset C_5 \text{ pour } \epsilon \text{ arbitrairement petit}$$

à présent montrons que $C_4 \cup C_5$ est connexe .

Soit $x \in C_4$

$$x \in \text{Fr } C_5^+$$

on a :

$$C_5^+ \subset C_5^+ \cup x \subset \overline{C_5^+}$$

C_5^+ étant connexe, donc $\overline{C_5^+}$, par suite $C_5^+ \cup x$ (d'après un résultat de topologie)

or $C_4 \cap (C_5^+ \cup x) \neq \emptyset$ où C_4 est connexe (voir Lemme 3).

par application d'un résultat de topologie générale, on peut conclure que $C_4 \cup C_5^+$ est connexe.

de même avec C_5^-

finalement, $C_4 \cup C_5$ est connexe.

LEMME 6 :

$C_1 \cup C_2$ est connexe.

PREUVE :

Rappelons que $C_2 = \{(A, \pm D) / D = \lambda I \text{ et } \Delta(A) < 0\}$

Remarquons que : $C_2 \subset \text{Fr} C_1$.

En effet :

$$\{0, \pm Id\} \in C_2 \text{Fr}(C_1^+)$$

effectivement :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \pm \begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ \epsilon & 1 \end{pmatrix} \right\} \in C_1^+$$

donc $C_2^+ \cup C_1^+$ est connexe (la réunion d'un ouvert connexe et d'un point ^{de} frontière est connexe).

de même si on prend $\{-Q, \pm Id\} \in C_2 \text{Fr}(C_1^-)$.

$C_2^- \cup C_1^-$ est connexe par le même argument.

finalement

$C_1 \cup C_2$ est connexe.

LEMME 7 :

$C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$ est connexe.

PREUVE : La démonstration est immédiate

En effet on a montré que $C_1 \cup C_3 \cup C_4$ était connexe.
(voir proposition).

et on vient de montrer que $C_1 \cup C_2$ est connexe (lemme 6),
d'après un résultat de topologie générale ;

L'intersection deux à deux de ces deux ensembles étant non vide donc $C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$ est connexe.

COROLLAIRE :

L'ensemble des systèmes homogènes contrôlables C_h est connexe.

PREUVE :

La démonstration étant la même que ci-dessus (lemme 7).

En effet :

$C_4 \cup C_5$ est connexe (lemme 5)

$C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$ est connexe (lemme 7)

Le fait que l'intersection deux à deux de ces deux ensembles est non vide, on peut conclure que $\bigcup_{i=1}^5 C_i = C_h$ est connexe.

3 ème PARTIE

ETUDE DE LA CONNEXITE DE L'ENSEMBLE DES SYSTEMES AFFINES
CONTROLABLES Ca.

I INTRODUCTION :

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la connexité de l'ensemble des systèmes affines contrôlables C_a . On sait maintenant (cf. 1ère partie) que les systèmes $\{J.S\}$ sont denses dans l'ensemble des systèmes affines contrôlables C_a , ce qui va nous permettre de contourner le problème et d'aborder plus facilement l'étude de la connexité de C_a . Celle ci s'appuie sur la connexité d'un ensemble dense dans $\{J.S\}$.

Pour ce faire, on a besoin de montrer auparavant la connexité d'un ensemble dense dans l'ensemble des paires homogènes contrôlables sur R_{-1}^n , C_h .

Pour cela, on va moyennant le théorème de contrôlabilité sur R_{-1}^n partitionner C_h en un certain nombre de parties (cf. tableau 1ère partie) où l'on imposera une condition supplémentaire sur A est que son déterminant soit non nul.

L'idée est donc de trouver un chemin qui puisse déformer toute paire $(A, +D)$ avec $\det A$ non nul en un système type $(A', +D')$ avec $\det A'$ non nul, le chemin restant dans l'ensemble des paires contrôlables pour lesquelles $\det A$ non nul, cet ensemble n'est manifestement pas connexe, on va recoller les différentes parties en ajoutant des points qui sont caractérisés par $\det A$ nul, par suite on peut conclure que cet ensemble est connexe;

Quant aux systèmes affines, au cours de la déformation dans l'ensemble des paires contrôlables sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, on n'a pas la présence du point fixe ($\det A$ étant non nul) cet ensemble n'étant pas connexe, on va utiliser le procédé de recollement en ajoutant des points qui sont caractérisés par $\det A$ nul, tout en évitant le point fixe avec un bon choix du vecteur \bar{b} .

Finalement, on peut affirmer que cet ensemble est dense et connexe dans $\{J.S\}$, par suite on peut conclure que l'ensemble des systèmes affines contrôlables \mathcal{C}_a est connexe.

II RESULTAT PRINCIPAL

On va énoncer le résultat principal de ce chapitre.

Théorème : L'ensemble des systèmes affines contrôlables \mathcal{C}_a est connexe.

La démonstration de ce théorème se fait en plusieurs étapes qu'on énoncera sous forme de lemmes, mais auparavant on va dresser un tableau où l'on fait apparaître le choix du vecteur \bar{b} pour lequel on n'a pas la présence du point fixe, ie $\text{Ker } A \cap D^{-1}\bar{b} = \emptyset$.

Rappelons qu'un point fixe d'un champ de vecteur X est un point x tel que $X(x) = 0$.

L'ensemble des points fixes d'un champ de vecteur affine $Dx + b$ est l'ensemble $-D^{-1}b$, cet ensemble peut être :

- Vide
- un singleton
- ou une droite de direction $\text{Ker } D$.

On aura à distinguer deux cas selon le déterminant de A .

1er Cas :

Si $\det A \neq 0$: (A bijectif)

$\text{Ker } A = \{0\}$; dans ce cas le choix de \bar{b} est $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ ($\bar{b} \neq 0$)
ie que l'ensemble des points singulier $-D^{-1}\bar{b}$ est un singleton

2ème Cas :

Si $\det A = 0$:

alors deux cas peuvent se présenter selon le déterminant de D .

* $\det D \neq 0$

alors $\bar{b} \notin D(\text{Ker } A)$

Par suite le choix du vecteur \bar{b} est $\mathbb{R}^2 - D(\text{Ker } A)$.

*det D=0

(*) si $\bar{b} \notin \text{Im} D$

alors l'ensemble des points singulier $-D^{-1}\bar{b}$ est vide.

*) si $\bar{b} \in \text{Im} D$.

alors $-D^{-1}\bar{b} = -x_0 + \text{Ker } D$ avec $Dx_0 = \bar{b}$.

L'ensemble des points singuliers $-D^{-1}\bar{b}$ est la droite de direction $\text{Ker } D$

$0 \notin -x_0 + \text{Ker} D$.

En effet si $0 \in -x_0 + \text{Ker} D$, alors $x_0 \in \text{Ker} D$ et $\bar{b} = 0$

Enfinement on vient d'envisager tous les cas possibles selon le déterminant de A et de D , le choix du vecteur \bar{b} où l'on a $\text{Ker } A \cap -D^{-1}\bar{b} = \emptyset$ cela nous permettra d'éviter le point fixe au cours de la déformation.

On vient de voir (cf. chapitre III) qu'il existe un chemin continu qui joint toute paire $(A, \underline{+}D)$ à son prototype $(A', \underline{+}D')$ où D' est mise sous sa forme canonique :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix} .$$

de plus si l'on impose la condition $\det A \neq 0$ celle-ci reste vraie tout au long de la déformation.

Notre but, dans un premier temps est de montrer, que toute paire contrôlable $(A, \underline{+}D)$ avec $\det A \neq 0$ peut être

déformée en un système type $(A', \underline{+}D')$; $D' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ avec

$\det A' \neq 0$ et $A' \notin \mathbb{R}D'$

tout en s'assurant que cette déformation reste dans l'ensemble des paires contrôlables pour lesquelles $\det A \neq 0$; ce qui nous permettra d'aborder facilement la connexité de cet ensemble, on remarquera que celui-ci est dense dans l'ensemble des paires contrôlables, d'où le résultat annexe qu'on obtiendra est que celles-ci sont connexes.

La démonstration se fait en plusieurs étapes qu'on énoncera sous formes de lemmes.

Lemme 1 :

Soit $(A, \underline{+}D)$ tel que $\Delta(D) < 0$; $\text{tr}D = 0$ et $\Delta(A.D) > 0$ et $\det A \neq 0$

donc il existe un chemin qui joint $(A, \underline{+}D)$ à $(A', \underline{+}D')$

avec $D' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $A' \notin \mathbb{R}D'$ et $\det A' \neq 0$

Preuve :

Rappelons que $(A, \pm D)$ est contrôlable sur $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ est donné par la quantité

$$\Delta(A, D) = (b+c)^2 - 4ad > 0$$

1ère Etape :

on ramène D à $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (cf. Chap. III)

ensuite par la transformation suivante :

$$D_t = \begin{pmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix} \quad t \in [0, 1] \quad \text{on se ramène à } \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{pour } t=1$$

si on prend $b \neq -c$ la quantité $\Delta(A, D) = (b+c)^2 - 4ad$ est toujours positive et $A \notin \mathbb{R}D'$ tout au long du chemin .

finalement il existe un chemin qui joint $(A, \pm D)$ à $(A', \pm D')$ avec $D' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $A' \in \mathbb{R}D'$ et $\det A' \neq 0$

Lemme 2 :

Soit $(A, \pm D)$ tel que $\Delta(D) < 0$; $\text{tr} D \neq 0$; $A \notin \mathbb{R}D$ et $\det A \neq 0$

alors il existe un chemin qui joint $(A, \pm D)$ à $(A', \pm D')$

avec $D' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $A' \in \mathbb{R}D'$ et $\det A' \neq 0$

Preuve :

On se ramène à $\left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} ; A \right\}$

On a deux cas à distinguer :

- si $\alpha\beta > 0$ alors $(\alpha, \beta) \longrightarrow (1, 1)$

et alors la déformation est évidente

- si $\alpha\beta < 0$; $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ on va essayer de se ramener au cas précédent (lemme 1)

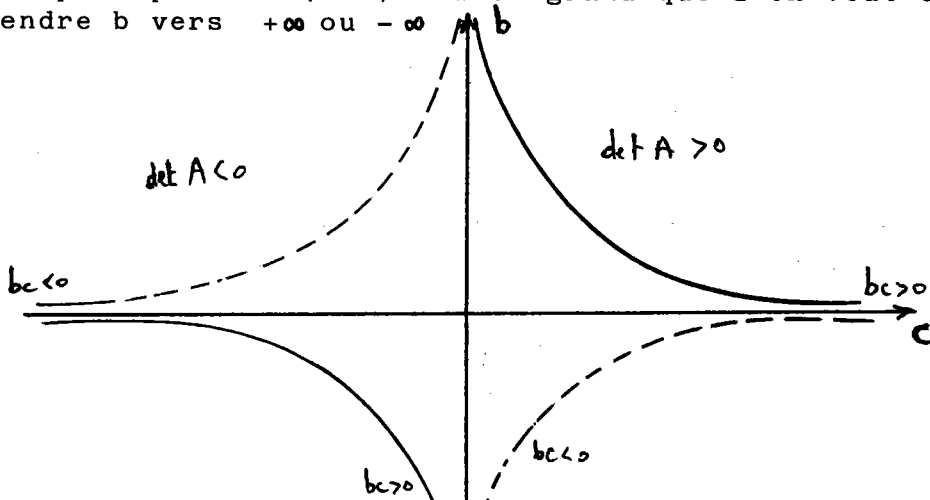
1ère Etape :

- En effet, on va déformer A de telle sorte que $b \neq -c$ (A n'est donc pas colinéaire à D).

- la seconde Etape transformer A de façon à avoir $\Delta(A, D) > 0$

En effet : on a $ad \neq bc$

on peut prendre $(b-c)^2$ aussi grand que l'on veut en faisant tendre b vers $+\infty$ ou $-\infty$



par suite on a rendu $(b-c)^2 - 4 \det A = (b+c)^2 - 4ad > 0$

finalement on a déformé A tel que $(b+c)^2 - 4ad > 0$ et $b \neq -c$

la dernière étape consiste à faire tendre $\alpha \longrightarrow 0$.

Conclusion :

Il existe un chemin qui joint continument $\left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} ; A \right\}$
 $\det A \neq 0$ où $\alpha\beta < 0$ à $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; A \right\}$ tq $\Delta(A, D) > 0$ et $\det A \neq 0$

c'est à dire qu'on s'est ramené au cas précédent.
 et donc on peut ramener aisément à $(\pm D', A')$

$$D' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} ; A' \notin RD' \text{ et } \det A' \neq 0$$

Lemme 3 :

Soit $(A, +D)$ tel que D est nilpotente et $\det A \neq 0$,
 alors il existe un chemin qui joint $(A, +D)$ à $(A', +D')$

$$D' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} ; A' \notin RD' , \det A' \neq 0$$

Preuve :

On se ramène à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Rappelons que la contrôlabilité de $(A, \pm D)$ est donné par
 la quantité $X(A, D)^2 - \Delta(A) \cdot \Delta(D) = b^2 > 0$.

on va prendre la transformation suivante

$$\left\{ \begin{pmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \right\}$$

on impose dès le départ $a \neq b'$ (ce qui assure que A' et
 D_t ne sont pas colinéaires) on choisira aussi cette défor-
 mation pour qu'on ait $ad - bc \neq 0$ qui est un ouvert dense

pour $t=1$ on aura :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \right\}$$

finalement, on a trouvé un chemin qui joint $(A, +D)$ $\det A \neq 0$
 à $(A', +D')$

$$D' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} ; A' \notin RD' \text{ et } \det A' \neq 0$$

Lemme 4 :

Soit $(A, \underline{+}D)$ tel que D est semblable à un bloc de Jordan.

$\det A \neq 0$

alors il existe un chemin continu qui joint $(A, \underline{+}D)$ à $(A', \underline{+}D')$

$$D' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad A' \notin \mathbb{R}D', \quad \det A' \neq 0$$

Preuve :

$\Delta(D) = 0$; $D \neq \lambda I$
on se ramène à $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

la démonstration est immédiate on fait tendre $\lambda \rightarrow 0$
et on est au cas précédent.

Lemme 5 :

Soit $(A, \underline{+}D)$ / $D = \lambda I$ et $\det A \neq 0$

alors il existe un chemin continu qui joint $(A, \underline{+}D)$ à $(A', \underline{+}D')$

$$D' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad A' \notin \mathbb{R}D'; \quad \det A' \neq 0$$

Preuve :

Rappelons que la contrôlabilité de $(A, \underline{+}D)$ est donné par la quantité

$$X(A, D)^2 - \Delta(A) \cdot \Delta(D) > 0 \iff \Delta(A) < 0$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, A \right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$\Delta(A) = (\text{tr}A)^2 - 4\det A < 0 \implies \det A > 0$$

On va dans un premier temps déformer A tout en respectant $\Delta(A) < 0$ et on essaiera au cours de cette déformation à avoir $b \neq 0$, puis on déforme D en $\begin{pmatrix} \lambda & t \\ b & \lambda \end{pmatrix}$ $t \in [0, 1]$

pour $t=1$ on se ramène au cas 4

par suite on se ramène à $(A', \underline{+}D')$ avec $D' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\det A' \neq 0$
et $A' \notin \mathbb{R}D'$

Lemme 6 :

Soit $(A, +D)$ tel que D admette deux valeurs propres réelles distinctes, alors il existe un chemin continu qui joint $(A, +D)$ $\det A \neq 0$ à $(A', +D')$; où $D' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $A' \notin RD'$; $\det A' \neq 0$

Preuve :

On se ramène à $\left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}; A \right\}$; $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}; ad - bc \neq 0$

rappelons que la contrôlabilité de $(A, +D)$ est donné par la quantité $X(A, D)^2 - \Delta(A) \cdot \Delta(D) > 0 \iff bc < 0$

On va essayer de se ramener au cas (lemme 4)

alors on déforme en $\left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & t\xi \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \right\}$ $t \in [0, 1]$

où $\xi = \pm 1$ tel que $\xi = \text{sg}(\lambda_1 - \lambda_2) (a-d)$

si $a=d$ on prend $\xi=1$

$(A', +D_t)$ reste contrôlable

en effet $X(A, D_t)^2 - \Delta(A') \cdot \Delta(D_t) = 16 [t^2 \xi^2 b^2 + t \xi b(a-d)(\lambda_1 - \lambda_2) - (\lambda_1 - \lambda_2)^2 b d]$

ensuite on va faire tendre λ_1 vers λ_2 .

la transformation suivante :

$\begin{pmatrix} \lambda_1 & t \\ 0 & (1-t)\lambda_2 + t\lambda_1 \end{pmatrix}$ convient $t \in [0, 1]$

$[\lambda_1 - (1-t)\lambda_2 - t\lambda_1] = (1-t)(\lambda_1 - \lambda_2)$ est du même signe que $(\lambda_1 - \lambda_2)$

finalement on obtient :

$\left\{ \begin{pmatrix} \lambda & \xi \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \right\}$ et par suite on s'est ramené au cas (4)

III Conclusion :

On vient de montrer qu'il existe des chemins entre les différents ensembles et que toute paire $(A, +D)$ avec $\det A \neq 0$ peut être déformée en le système type $(A', +D')$ avec $D' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $A' \notin \mathbb{R}D'$ et $\det A' \neq 0$

de plus tout au long de la déformation, on reste dans l'ensemble des paires contrôlables pour lesquelles $\det A \neq 0$

Notons par :

$$P = \left\{ (A, +D) / (A, +D) \text{ contrôlable, } \det A \neq 0 \right\}$$

Il est clair que cet ensemble a deux composantes connexes qu'on notera par :

$$P^+ = \left\{ (A, +D) / (A, +D) \text{ contrôlable, } \det A > 0 \right\}$$

$$P^- = \left\{ (A, +D) / (A, +D) \text{ contrôlable, } \det A < 0 \right\}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}; A \notin \mathbb{R}D; \det A \neq 0$$

On va recoller ces deux morceaux en rajoutant un "point" caractérisé par $\left\{ \pm D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} = U$

l'ensemble $P \cup \{U\}$ devient alors connexe

en effet : $\{U\} \in \text{Fr } P^+$
 $\{U\} \in \text{Fr } P^-$

l'intersection étant non vide, par un résultat de topologie on peut conclure que $P \cup \{U\}$ est connexe.

Corollaire 1 :

L'ensemble des systèmes homogènes contrôlables C_h est connexe

Preuve :

On vient de montrer que d'une part l'ensemble $P \cup \{U\}$ est connexe, d'autre part, cet ensemble est dense dans l'ensemble des paires contrôlable .

En effet $C_h = \{(A, \pm D) / (A, \pm D) \text{ contrôlable}\} \cup \{(A, \pm D) / D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; A \notin \mathbb{R}D\}$

$$\overline{C_h} = \{(A, \pm D) / (A, \pm D) \text{ contrôlable}\}$$

par cet argument on peut conclure que C_h est connexe.

Corollaire 2 :

Soit $P' = \{(A, \pm(D + \bar{b})) / (A, \pm D) \in P\}$

Si $\forall \bar{b} \neq 0$, P' est constitué de paires contrôlables sur $\mathbb{R}^2 - \{0\}$

$$\text{Soit } U' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \pm \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right\}$$

alors $P' \cup \{U'\}$ est connexe par arcs

Preuve :

La démonstration est immédiate

en effet, comme c'était le cas pour l'ensemble P
 P' a deux composantes connexes (car dans P $\det A \neq 0$)

$P \times \mathbb{R}^2 - \{0\}$ admet deux composantes connexes

qu'on notera

$$P'^+ = \{(A, \pm(D + \bar{b})) / (A, \pm D) \in P^+\}$$

$$P'^- = \{(A, \pm(D + \bar{b})) / (A, \pm D) \in P^-\}$$

alors par le même argument (corollaire 1)
en ajoutant le point :

$$U' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \pm \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right\}$$

$P' \cup \{U'\}$ devient connexe

Corollaire 3 :

L'ensemble $P' \cup \{U'\}$ est dense dans $\{J.S\}$

Preuve :

En effet :

$$\{J.S\} = \left\{ (A, +(D+\bar{b})) / (A, \underline{D}) \in P \cup \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \pm \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right\} \right\}$$

Corollaire 4 :

L'ensemble $\{J.S\}$ est connexe par arcs

Preuve :

La démonstration est immédiate d'après les corollaires 2 et 3

Maintenant on va donner la démonstration du théorème principal.

Théorème :

L'ensemble des systèmes affines contrôlables Ca est connexe.

Preuve :

On sait (corollaire 4) que l'ensemble $J.S$ est connexes par arcs de plus (cf. Chap. I) que les $J.S$ sont denses dans Ca .

D'où le résultat.

CONCLUSION GENERALE

Ainsi, par cette étude on a obtenu une description satisfaisante de l'ensemble des systèmes affines contrôlables C_a en dimension 2. Comme on pouvait le prévoir d'après les articles [J.S], [A.S.V], il est apparu des relations très fortes entre les structures topologiques de l'ensemble des systèmes affines contrôlables C_a et de C_h .

En particulier, les propriétés de $Fr(C_a)$ et la connexité de C_a découlent directement de propriétés analogues pour C_h .

Le résultat qu'on a obtenu est que d'une part C_a fait apparaître deux types de points frontières ou à priori il y aurait pû avoir trois types de points frontières, l'intérieur de sa fermeture contient les systèmes affines contrôlables pour lesquels les trajectoires sont des cycles, le restant des cas sont sur la frontière de son extérieur, d'autre part l'intérieur de C_a est constitué uniquement des {J.S} et des systèmes affines contrôlables auxquels correspondent les systèmes homogènes non contrôlables caractérisés par les champs colinéaires (spirales liées).

Du point de vue des applications, le résultat le plus important est le fait que {J.S} est un ouvert dense dans C_a . Donc, lors d'une modélisation d'un système guidable contrôlable par un système affine de type (1), on pourra se cantonner à un système J.S .

On peut supposer que comme dans R^2 , la contrôlabilité d'un système affine est presque équivalente à la contrôlabilité de sa partie homogène .

Le problème central est donc la contrôlabilité des systèmes bilinéaires sur $R^n - \{0\}$.

Il serait intéressant de savoir établir dans \mathbb{R}^n des résultats analogues à ceux obtenus en dimension 2 entre les ensembles C_a et C_h .

Bien qu'on ne sache pas décrire C_h , on peut néanmoins se poser ce problème. C'est vraisemblablement un problème de méthode qui se pose puisqu'il ne semble pas raisonnable de décrire de façon exhaustive C_h et à fortiori C_a .

Le choix d'outils mathématiques adéquats pour démontrer cette conjecture assez intuitive reste un problème ouvert.

BIBLIOGRAPHIE

1. J.P. GAUTHIER , G. BORNARD
"Contrôlabilité des systèmes bilinéaires"
SIAM. J. optimal control 20 (1982) 377-384
2. J.P. GAUTHIER , G. BORNARD
"A theorem of controllability for bilinear systems
and some consequence"

I.N.P.G. note interne LAG 81-04
3. V. JURDJEVIC , I. KUPKA
"Controls systems subordinated to a group action
Accessibility J. Differential Equations 39,2
1980 186-211
- 4; V. JURDJEVIC , G. SALLET
"Controllability of affine systems"

In Differential geometric control theory . R. W BROCKETT, R.S.
MILLEMAN, H.J. SUSSMANN, Eds Birkhauser progres in Math
(1983) 299-309
- 5 V. JURDJEVIC , G. SALLET [J-S]
"Controllability properties of affine systems"
Siam J. control optim 22,3 (1984)
6. G. SALLET "Sur la structure de l'ensemble d'accessibilité
de certains systèmes. Applications à l'équi-
valence des systèmes".
à paraître (Math - System . Théory)
7. D.E. KODITSCHKE and KUMPATIS NARENDRA
"The controllability of planar bilinear systems"

IEEE transactions on automatic control . Vol AC-30
N°1 January 1985
8. A Adda : "Thèse 3 ème cycle " Université de Metz 1984
- 9 [A.S.V]. Adda . Sallet. Vivalde.
"Contrôlabilité des systèmes affines"

10. LOBRY C . Bases mathématiques de la théorie du contrôle
cours de 3 ème cycle multigraphié .
Bordeau (1978)
11. G. SALLET Extension techniques. Encyclopoedia of
control. Pergamon Press. Madan. Singh.
12. M. G HRAIBA Thèse 3 ème cycle université de Metz
"1985"
13. H.J. SUSSMANN , V. JURDJEVIC
"Controllability of non linear systems"
J. Differential Equations 12 (1972)
95-116