



**HAL**  
open science

# Résultat d'unicité et de régularité pour certaines inéquations variationnelles fortement non-linéaires

Abdelaziz Feggous

► **To cite this version:**

Abdelaziz Feggous. Résultat d'unicité et de régularité pour certaines inéquations variationnelles fortement non-linéaires. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paul Verlaine - Metz, 1988. Français. NNT : 1988METZ007S . tel-01775750

**HAL Id: tel-01775750**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01775750>**

Submitted on 24 Apr 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

**Thèse présentée à l'Université de Metz**

pour obtenir le grade de

**docteur de l'Université de Metz**

en Mathématiques

mention : mathématiques appliquées-analyse non linéaire

par Monsieur Abdelaziz Feggous

Sujet de la thèse : Résultats d'unicité et de régularité pour certaines  
inéquations variationnelles fortement non-linéaires

Soutenue le 30 Juin 1988

devant le jury composé de :

Messieurs : D. ARNAL , Professeur à l'Université de Metz

M. CHIPOT , Professeur à l'Université de Metz

F. CONRAD , Professeur à l'Université de Nancy II ,  
Rapporteur

Mademoiselle: J. SAINT JEAN PAULIN , Chargée de recherche au CNRS ,  
Rapporteur

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE DE METZ



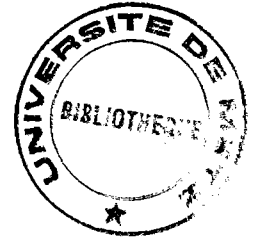
022 420287 5

**Thèse présentée à l'Université de Metz**

**pour obtenir le grade de**

**docteur de l'Université de Metz**

**en Mathématiques**



**mention : mathématiques appliquées-analyse non linéaire**

**par Monsieur Abdelaziz Feggous**

**Sujet de la thèse : Résultats d'unicité et de régularité pour certaines  
inéquations variationnelles fortement non-linéaires**

**Soutenue le 30 Juin 1988**

**devant le jury composé de :**

**Messieurs : D. ARNAL , Professeur à l'Université de Metz**

**M. CHIPOT , Professeur à l'Université de Metz**

**F. CONRAD , Professeur à l'Université de Nancy II ,  
Rapporteur**

**Mademoiselle: J. SAINT JEAN PAULIN , Chargée de recherche au CNRS ,  
Rapporteur**

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv.	1988 0145
Cote	51M3 88/7
Loc	Magasin

Je tiens à remercier tout d'abord Monsieur CHIPOT qui a dirigé ce travail. Ses remarques ont été pour moi opportunes, l'appui et l'encouragement ne m'ont jamais fait défaut.

Je remercie également Messieurs ARNAL, CONRAD, Mademoiselle JEAN SAINT PAULIN de me faire l'honneur de faire partie du jury, toutes les personnes de l'Université de Metz, Monsieur MICHAILLE, ainsi que mes amis.

## **Sommaire**

**0 .Introduction: p.1**

**1.Résultat d'existence: p.4**

**2.Propriété de monotonie: p.10**

**3.Régularités  $C^{0,\alpha}$  et  $C^{1,\alpha}$  locale pour le problème des N-membranes: p.21**

**4.Résultats de régularité  $W^{2,p}$ ,  $p \geq 2$ : p.28**

**5.Régularité  $W^{1,\infty}$ : p.31**

**Bibliographie: p.38**

## 0. Introduction et notations

Dans ce travail , nous étudions le problème suivant

$$\langle A(x,u,Du) , v - u \rangle \geq \langle f , v - u \rangle \quad \forall v \in K$$

$$u \in K$$

les notations seront précisées par la suite , mais indiquons déjà que  $K$  est un convexe fermé de  $(H^1(\Omega))^N$  où  $N \in \mathbb{N}$  et que cette inéquation variationnelle modélise dans certains cas particuliers le problème des  $N$ -membranes (cf [2] ).

Tout d'abord on présente dans la partie 1 un résultat d'existence. Nous nous intéressons ensuite au cas où le système est diagonal et fortement non-linéaire. Ainsi on donne dans la partie 2 une propriété de monotonie permettant de comparer les solutions de deux problèmes du type précédent lorsque les convexes correspondants sont en un certain sens comparables. Après un bon choix de fonctions test on généralise le résultat de monotonie de [6] obtenu dans le cas d'une inéquation variationnelle fortement non- linéaire.

Dans les chapitres suivants, on étudie plus particulièrement le problème des  $N$ -membranes et on donne différents résultats de régularité. Ainsi la partie 3 est consacrée à la régularité  $C^{0,\alpha}$  et  $C^{1,\alpha}$  dans le cas d'un système diagonal et linéaire . On utilise pour cela les techniques de M. Giaquinta [3] qui consistent à approcher la solution d'une inéquation variationnelle par la solution d'une équation à coefficients constants.

Partant du système pénalisé on présente, dans la partie 4, un résultat de régularité  $W^{2,p}$ .

Ceci généralise un résultat obtenu dans [2] dans le cas où les membranes sont identiques.

Enfin on présente un résultat partiel de régularité  $W^{1,\infty}$  pour le problème quasi-linéaire des  $N$ -membranes . Il s'agit d'une estimation a priori dans  $L^\infty$  du gradient de la solution au voisinage du bord dans des cas particuliers. Cette estimation est obtenue par construction d'une sur-solution et d'une sous-solution . On arrive à obtenir une estimation globale pour un problème à un obstacle dans le cas quasi-linéaire.

Indiquons maintenant le cadre fonctionnel dans lequel nous nous plaçons.

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ , de frontière  $\Gamma$  supposée lipschitzienne. Pour  $N \in \mathbb{N}^*$ , l'espace

$(L^2(\Omega))^N$  sera noté  $L^2$  et sa norme  $\sum_N \| \cdot \|_2$  où  $\| \cdot \|_2$  désigne la norme de  $L^2(\Omega)$ , sera notée  $\| \cdot \|_{L^2}$

Les espaces de Sobolev  $(H^1(\Omega))^N$  et  $(H_0^1(\Omega))^N$  seront notés respectivement  $H^1$  et  $H_0^1$  et leur norme

$\| \cdot \|_{H^1} (= \sum_N \| \cdot \|_{H^1(\Omega)})$ .  $V$  est le sous espace fermé de  $H^1$  engendré par  $K-K = \{k-k' \mid k, k' \in K\}$ , on suppose de plus que  $K$  est tel que l'inégalité de Poincaré est vérifiée dans  $V$  (ce qui est le cas par exemple si :

a)  $V = H_0^1$

b)  $V = \{v = (v^1, \dots, v^N) \in H^1 \mid v^i = 0 \text{ sur } \Gamma_0^i, i=1 \dots N\}$  où  $\Gamma_0^i$  est une partie de  $\Gamma$  de mesure non nulle.)

Nous utilisons également les notations suivantes:  $D_\alpha = \partial / \partial x_\alpha$ ,  $Du = (D_\alpha u^i)_{i=1, \dots, N}$  et

$\alpha = 1, \dots, n$ ,  $V^*$  désigne le dual de  $V$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est le crochet de dualité entre  $V^*$  et  $V$ ,  $\| \cdot \|_V$  la norme induite par  $H^1$  dans  $V$  et  $\| \cdot \|_{V^*}$  celle de  $V^*$ .

Précisons l'opérateur  $A$

$$\langle A(x, u, Du), v \rangle = \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} A_j^\beta(x, u, Du) D_\beta v^j + \int_{\Omega} a(x, u) \cdot v, \forall u \in H^1, \forall v \in H^1.$$

( $a(x, u) \cdot v$  désignant le produit scalaire de  $(a_j(x, u))_j$  et de  $(v^j)_j$  dans  $\mathbb{R}^N$ .)

où

$$A_j^\beta(x, u, \xi) \text{ sont de Carathéodory (i.e. mesurables en } x \text{ et } x\text{-p.p. continues en } (u, \xi) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{nN} \text{)} \quad (0.1)$$

$$a(x, u) : \Omega \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N \text{ est de Carathéodory et } (a(x, u) - a(x, v)) \cdot (u - v) \geq 0 \quad (0.2)$$

$x$ -p.p. et  $\forall u, v$  de  $\mathbb{R}^N$

Il existe deux constantes  $c, C$  et une fonction  $C'$  de  $L^2(\Omega)$  telles que :



$$|A_j^\beta(x, u, \xi)| \leq c|u| + C|\xi| + C'(x) \quad , \quad x-p.p. \quad , \quad \forall (u, \xi) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{nN} \quad (0.3)$$

$$|a(x, u)| \leq C|u| + C'(x) \quad x-p.p. \quad , \quad \forall u \in \mathbb{R}^N$$

(pour ne pas alourdir les notations, on notera de la même manière les normes dans  $\mathbb{R}^N$ ,  $\mathbb{R}^{nN}$  et  $\mathbb{R}^n$ .)

L'opérateur est supposé elliptique dans le sens suivant :

$$(A_j^\beta(x, u, \xi) - A_j^\beta(x, u, \xi')) (\xi_\beta^j - \xi_\beta'^j) \geq v |\xi - \xi'|^2 \quad x-p.p. \quad , \quad \forall u \in \mathbb{R}^N \quad \text{et pour tout } \xi \text{ et } \xi' \text{ de } \mathbb{R}^{nN} \quad (0.4)$$

$v$  étant une constante strictement positive.

### 1. Résultats d'existence

Nous allons donc étudier ici, avec les notations et les hypothèses de structure précisées en introduction, le problème :

$$\int_{\Omega} A_j^\beta(x, u, Du) D_\beta (v^j - u^j) + \int_{\Omega} a(x, u) \cdot (v - u) \geq \langle f, v - u \rangle \quad \forall v \in K \quad (1.1)$$

$u \in K$   
où  $f \in V^*$

#### Théorème 1.1:

Pour  $c$  ( de (0.3) ) suffisamment petit le problème (1.1) possède au moins une solution.

Démonstration: Cette démonstration s'inspire de celle de [6].

Dans la suite nous utiliserons la notation suivante:

$$\langle A(x, w, Du), v \rangle = \int_{\Omega} A_j^\beta(x, w, Du) D_\beta v^j + \int_{\Omega} a(x, u) \cdot v \quad \text{pour tout } u, v \text{ de } K \text{ et tout } w \text{ de } \bar{K} \text{ où } \bar{K}$$

désigne l'adhérence de  $K$  dans  $L^2$ .

On considère alors pour chaque  $w$  de  $\bar{K}$  le problème:  $\langle A(x, w, Du), v - u \rangle \geq \langle f, v - u \rangle \quad \forall v \in K$   
 $u \in K \quad (1.2)$

#### Première étape:

Nous démontrons ici le lemme suivant:

Lemme 1.1: Le problème (1.2) possède une unique solution.

Pour établir ce résultat nous utilisons un théorème classique de Lions-Stampachia [7]. En notant  $A_w(u) = A(x, w, Du)$  nous devons montrer que:

a)  $A_w$  est un opérateur monotone strictement coercif.

b)  $A_w$  est continu sur les sous espaces de dimension finie de  $V$ .

a) est vérifié grâce à (0.2), à (0.4) et à l'inégalité de Poincaré: plus précisément on a

$$\langle A_w(u) - A_w(v), u - v \rangle \geq \nu \|D(u - v)\|_{L^2}^2 + \int_{\Omega} (a(x, u) - a(x, v))(u - v) \geq \nu' \|u - v\|_V^2 \quad \Omega \quad (1.3)$$

où  $v$  est une constante strictement positive dépendante de  $v$  et de  $\Omega$  (voir la remarque (1.2) qui suit la démonstration pour plus de précision sur cette constante.).

Quant à b) cela provient de la continuité de  $u \rightarrow A_j^\beta(x, w, Du)$  de  $V$  dans  $V^*$  par la décomposition

suiivante:  $V \rightarrow L^2 \rightarrow V^*$   
 $u \rightarrow Du \rightarrow A_j^\beta(x, w, Du)$ , le deuxième opérateur étant un opérateur de Nemyckii [4].

### Deuxième étape:

Nous allons montrer que l'opérateur  $T$  défini grâce à l'étape précédente par :

$$T: \bar{K} \rightarrow \bar{K}$$

$w \rightarrow u = T(w)$  (où  $u$  est la solution du problème (1.2) )

possède au moins un point fixe en utilisant le théorème du point fixe de Schauder [5].

Dans cette étape nous allons montrer le lemme suivant:

Lemme 1.2: Pour  $c$  suffisamment petit, il existe  $R$  tel que  $T(B \cap \bar{K}) \subset B \cap \bar{K}$  où  $B$  est la boule fermée de centre 0 et de rayon  $R$  de  $L^2$ .

### Preuve du lemme:

Pour  $v_0$  dans  $K$  nous avons:

$$\langle A(x, w, Du), v_0 - u \rangle \geq \langle f, v_0 - u \rangle$$

$$\Leftrightarrow \langle A(x, w, Dv_0) - A(x, w, Du), v_0 - u \rangle \leq \langle A(x, w, Dv_0), v_0 - u \rangle - \langle f, v_0 - u \rangle$$

Par (1.3) on obtient alors:

$$v \left| v_0 - u \right|_V^2 \leq \left| \langle A(x, w, Dv_0), v_0 - u \rangle \right| + \left| f \right|_V \left| v_0 - u \right|_V \quad (1.4)$$

Estimons alors le premier terme du membre de droite de (1.4). En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a:

$$\begin{aligned}
| \langle A(x, w, Dv_0), v_0 - u \rangle | &= \left| \int_{\Omega} (A_j^\beta(x, w, Dv_0) D_\beta(v_0^j - u^j) + a(x, v_0) \cdot (v_0 - u)) \right| \\
&\leq |v_0 - u|_V ( \|A_j^\beta(x, w, Dv_0)\|_{L^2} + |a(x, v_0)|_{L^2} ) \\
\text{et grâce à (0.3)} & \\
&\leq |v_0 - u|_V (c|w|_{L^2} + C)
\end{aligned}$$

La norme dans  $(L^2(\Omega))^{nN}$  étant  $\sum_{k=1}^{nN} | \cdot |_{L^2}$ ,  $C$  étant une constante positive.

En revenant à (1.4) on obtient

$$v' |v_0 - u|_{L^2} \leq v' |v_0 - u|_V \leq c|w|_{L^2} + C$$

d'où  $|u|_{L^2} \leq \frac{c}{v'} |w|_{L^2} + C$  où  $C$  est une constante.

Si on suppose que  $\alpha = c/v' < 1$ , alors, pour  $R > C/(1 - \alpha)$  l'inégalité ci-dessus montre que  $T(B \cap \bar{K})$  est bien incluse dans  $B \cap K \subset B \cap \bar{K}$ .

Troisième étape: fin de la démonstration.

De l'étape précédente et de la compacité de l'injection de  $H^1$  dans  $L^2$ , il est clair que  $T(B \cap \bar{K})$  est relativement compact dans  $B \cap \bar{K}$ .

Il reste à prouver que  $T$  est continu. Soit alors  $w_k \in B \cap K$  tel que  $w_k \rightarrow w$  dans  $L^2$  et soit  $u_k = T(w_k)$ .

D'après la deuxième étape  $|u_k|_V$  est borné indépendamment de  $k$ . On peut donc extraire une sous suite encore notée  $u_k$  telle que:  $u_k \rightarrow u_\infty$  faiblement dans  $V$

$$u_k \rightarrow u_\infty \text{ dans } L^2$$

Par le lemme de Minty, (1.2) écrit pour  $u_k$  et  $w_k$  est équivalent à

$$\begin{aligned}
\langle A(x, w_k, Dv), v - u_k \rangle &\geq \langle f, v - u_k \rangle \\
u_k &\in K
\end{aligned} \tag{1.5}$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$\int_{\Omega} A_j^\beta(x, w_k, Dv) D_\beta (v^j - u_k^j) + \int_{\Omega} a(x, v) \cdot (v - u_k) \geq \langle f, v - u_k \rangle \quad \forall v \in K$$

en faisant  $k \rightarrow +\infty$  dans cette dernière inéquation et en remarquant que  $K$  est faiblement fermé dans  $V$ , nous obtenons :

$$\langle A(x, w, Dv), v - u_\infty \rangle \geq \langle f, v - u_\infty \rangle \quad \forall v \in K$$

$$u_\infty \in K$$

$$\text{pourvu que nous montrions que } A_j^\beta(x, w_k, Dv) \rightarrow A_j^\beta(x, w, Dv) \text{ dans } L^2(\Omega) \quad (1.6)$$

Mais, grâce à notre limitation (0.3) sur la croissance, les opérateurs:

$$w \rightarrow A_j^\beta(x, w, Dv)$$

sont des opérateurs de Nemyckii et (1.6) est bien réalisée. Appliquant de nouveau le lemme de Minty on obtient  $u = u_\infty$  et  $T$  est donc bien continu.

L'opérateur  $T$  possède alors au moins un point fixe qui est solution du problème (1.1).

### Remarque 1.1:

On peut expliciter une valeur de  $c$  pour que  $c/v' < 1$ . En effet  $v' = v \lambda$  avec

$$\lambda = \min_{|v|_{V=1}} \int_{\Omega} Du \cdot Dv$$

convient dans (1.3). On obtient donc  $c < v\lambda$ .

On peut, pour l'existence, omettre l'hypothèse (0.2) si on remplace la condition

$|a(x, u)| \leq C|u| + C'(x)$  par  $|a(x, u)| \leq c|u| + C'(x)$  (en effet la démonstration est semblable à la précédente après avoir posé:

$$\langle A(x, w, Du), v \rangle = \int_{\Omega} A_j^\beta(x, w, Du) D_\beta v^j + \int_{\Omega} a(x, w) \cdot v \text{ pour tout } v \text{ et tout } w \text{ de } L^2$$

et en considérant le problème (1.2 bis) correspondant au lieu de (1.2)).

Comme cas particulier important de type de problème (1.1) considérons le problème suivant:

$$\int_{\Omega} a_{i,j}^{\alpha,\beta}(x,u) D_{\alpha} u^i D_{\beta} (v^j - u^j) \geq \langle f, v - u \rangle \quad \forall v \in K \quad (1.7)$$

$u \in K$

où  $f$  et  $K$  vérifient les hypothèses faites précédemment et où :

$$a_{i,j}^{\alpha,\beta}(x,u) \text{ sont des fonctions de Carathéodory de } \Omega \times \mathbb{R}^N \text{ dans } \mathbb{R} \text{ c'est à dire continues}$$

en  $u$  pour presque tout  $x$  de  $\Omega$  et mesurables en  $x$  pour tout  $u$  de  $\mathbb{R}^N$ . (1.8)

$$a_{i,j}^{\alpha,\beta}(x,u) \text{ sont des fonctions bornées} \quad (1.9)$$

$$a_{i,j}^{\alpha,\beta}(x,u) \xi_{\alpha}^i \xi_{\beta}^j \geq \nu |\xi|^2 \text{ pour tout } \xi = (\xi_{\alpha}^i) \in \mathbb{R}^{nN} \text{ où } \nu > 0 \text{ et où } |\cdot| \text{ désigne la norme}$$

euclidienne dans  $\mathbb{R}^{nN}$ . (1.10)

Le théorème (1.1) conduit alors au résultat suivant:

### Corollaire 1.1:

Sous les hypothèses (1.8), (1.9) et (1.10), l'inéquation variationnelle (1.7) possède au moins une solution.

### Démonstration:

Il suffit de remarquer que  $A_j^{\beta}(x,u,\xi) = a_{i,j}^{\alpha,\beta}(x,u) \xi_{\alpha}^i$  vérifie les hypothèses du théorème 1.1.

Comme cas particulier de cette étude, prenons  $V = (H_0^1(\Omega))^N$ , considérons le convexe:

$$K = \{ v = (v^1, \dots, v^N) \in H^1 / v^i = \varphi^i \text{ sur } \Gamma \text{ et } v^1(x) \geq v^2(x) \geq \dots \geq v^N(x) \text{ p.p. dans } \Omega \}$$

où  $\varphi^i$  désigne par exemple la trace d'une fonction de  $H^1(\Omega)$  sur  $\Gamma$ .

et les  $a_{i,j}^{\alpha,\beta}$  définis par:

$$\begin{cases} a_{i,j}^{\alpha,\beta} = 0 \text{ si } i \neq j \\ a_{i,i}^{\alpha,\beta}(x,u) = a_{\alpha,\beta}^i(x, u^i) \end{cases}$$

On a alors:

**Corollaire 1.2**

Sous les hypothèses du théorème (1.2), le problème:

$$\int_{\Omega} a_{\alpha,\beta}^i(x, u^i) D_{\alpha} u^i D_{\beta} (v^j - u^j) \geq \langle f, v - u \rangle \quad \forall v \in K$$

$$u \in K$$

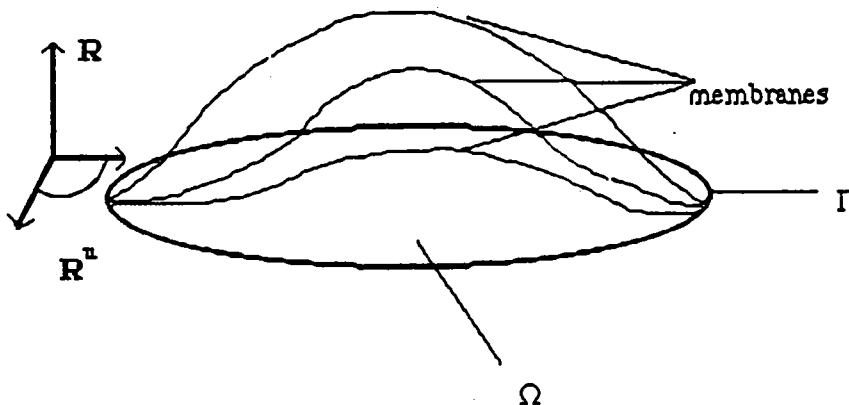
possède au moins une solution.

**Remarque 1.1:**

L'inéquation variationnelle du corollaire 1.2 modélise le problème dit des N-membranes (voir la figure ci-après) dont l'interprétation est la suivante: on considère N-membranes élastiques tendues sur différents supports au dessus de  $\Omega$  et l'on applique sur chacune d'elle une force d'intensité  $f^i$  avec  $f = (f^1, \dots, f^N)$ ,  $f^i \in L^2$ .  $u^i$  désigne alors le déplacement de la  $i^{\text{ème}}$  membrane.

Le convexe K traduit la contrainte suivante: les membranes ne peuvent pas s'interpénétrer et de plus leur position est fixée sur le bord  $\Gamma$  de  $\Omega$ .

Les  $(a_{\alpha,\beta}^i(x, u^i))_{\alpha,\beta}$  sont des matrices décrivant l'élasticité des différentes membranes. Leur dépendance en  $u^i$  traduit le fait que l'élasticité des matériaux est fonction du déplacement.



## 2. Propriété de monotonie.

On considère ici les problèmes généraux du type (1.1) sous les hypothèses (0.1),(0.3),(0.4) mais dans le cas où  $(A_j(x,u,\xi))_{j=1,\dots,N} = ((A_j^\beta(x,u,\xi))_\beta)_{j=1,\dots,N} + a(x,u)$  est diagonal, c'est à dire dire:

$A_j(x,u,\xi) = A_j(x,u^j,\xi^j)$  où  $\xi^j \in \mathbb{R}^n$ , désigne la  $j^{\text{eme}}$  ligne de la matrice de  $\xi$ ;  $a_j(x,u) = a_j(x,u^j)$ .

On fait l'hypothèse d'ellipticité suivante : pour presque tout  $x$  de  $\Omega$

$$(A_j^\beta(x,u,\xi) - A_j^\beta(x,u,\xi'))(\xi_\beta - \xi'_\beta) \geq \nu |\xi - \xi'|^2 \quad \forall j=1,\dots,N, \forall u \in \mathbb{R}, \forall \xi, \xi' \in \mathbb{R}^n$$

où  $|\cdot|$  désigne ici la norme euclidienne dans  $\mathbb{R}^n$ .

(2.1)

On suppose la propriété de continuité suivante : il existe une fonction  $\omega$  positive, croissante, continue, une constante  $C$  et une fonction  $g \in L^2(\Omega)$  telles que:

$$|A_j^\beta(x,u^j,\xi^j) - A_j^\beta(x,v^j,\xi^j)| \leq C\omega(|u^j - v^j|)(|\xi^j| + g(x))$$

$$\forall j=1,\dots,N, \forall \beta=1,\dots,n, \quad (2.2)$$

$$\forall \xi^j \in \mathbb{R}^n \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^N, \text{ x-p.p. dans } \Omega.$$

Par la suite  $\omega$  sera supposé vérifier l'une des propriétés suivantes:

$$\int_{0^+} \frac{ds}{\omega^2(s)} = +\infty \quad (2.3)$$

$$\int_{0^+} \frac{ds}{\omega(s)} = +\infty \quad (2.4)$$

Enfin on suppose pour l'instant que  $K$  est du type :

$$K = \{ v = (v^1, \dots, v^N) \in H^1 / v^i = \phi^i \text{ sur } \Gamma^i \text{ et } v^1(x) \geq v^2(x) \geq \dots \geq v^N(x) \text{ p.p. dans } \Omega \}$$

on remarquera qu'alors  $V = K - K = \{ v = (v^1, \dots, v^N) \in H^1 / v^i = 0 \text{ sur } \Gamma^i \}$



**Théorème 2.1.**

Pour  $i=1,2$  soit  $u_i$  une solution du problème:

$$\begin{aligned} \langle A(x, u_i, Du_i), v - u_i \rangle &\geq \langle f_i, v - u_i \rangle \quad \forall v \in K_i \\ u_i &\in K_i \end{aligned} \quad (2.5)$$

où  $K_i$  est un convexe du type précisé ci-dessus avec  $\varphi_i = (\varphi_i^j)_{j=1 \dots N}$  et où  $f_i \in V^* = V_1^* = V_2^*$ . Sous les hypothèses (0.1), (0.3), (2.1), (2.2), si  $\varphi_2 \leq \varphi_1$  et si  $f_2 \leq f_1$  dans les deux cas (i) et (ii) suivants on a  $u_2 \leq u_1$

(i)  $\forall j=1, \dots, N$   $s \rightarrow a_j(x, s)$  est strictement croissante p.p. dans  $\Omega$  et (2.3) est vérifié.

(ii)  $\forall j=1, \dots, N$   $s \rightarrow a_j(x, s)$  est croissante p.p. dans  $\Omega$  et (2.4) est vérifié.

(les notations  $\varphi_2 \leq \varphi_1$ ,  $u_2 \leq u_1$  et  $f_2 \leq f_1$  signifient respectivement  $\varphi_2^j(x) \leq \varphi_1^j(x)$  x-p.p. sur  $\Gamma$ ,

$u_2^j(x) \leq u_1^j(x)$  x-p.p. dans  $\Omega$  et  $\langle f_2, v \rangle \leq \langle f_1, v \rangle \quad \forall v \in V, v^j \geq 0 \quad \forall j=1, \dots, N$ .)

**Démonstration.**

Démontrons tout d'abord le lemme suivant:

**Lemme 2.1.** Les convexes  $K_i$  précédents vérifient la propriété suivante:

$u_1 \in K_1$  et  $u_2 \in K_2 \Rightarrow (u_1^j + F(u_2^j - u_1^j))_j \in K_1$  et  $(u_2^j - F(u_2^j - u_1^j))_j \in K_2$  pour toute fonction  $F$  croissante, Lipschitzienne de module de Lipschitz inférieur ou égal à 1 et telle que  $F \geq 0$  et  $F(x) = 0$  pour  $x \leq 0$ .

**Démonstration du lemme:**

Démontrons tout d'abord que  $u_1^j + F(u_2^j - u_1^j) = \varphi_1^j$  et  $u_2^j - F(u_2^j - u_1^j) = \varphi_2^j$  sur  $\Gamma^j$ . Cela est immédiat

si on remarque que  $u_1^j = \varphi_1^j \geq \varphi_2^j = u_2^j$  sur  $\Gamma^j$  et que  $F(x) = 0$  pour  $x \leq 0$ .

Il reste à prouver que  $u_1^j + F(u_2^j - u_1^j) \geq u_1^{j+1} + F(u_2^{j+1} - u_1^{j+1})$  et que

$$u_2^j - F(u_2^j - u_1^j) \geq u_2^{j+1} - F(u_2^{j+1} - u_1^{j+1}).$$

Pour cela il suffit de remarquer, grâce aux propriétés de  $F$ , que les applications suivantes :

$u \rightarrow u + F(c - u)$  et  $u \rightarrow u - F(u - c)$  sont croissantes. On a donc par exemple

$$u_1^j + F(u_2^j - u_1^j) \geq u_1^{j+1} + F(u_2^j - u_1^{j+1}) \geq u_1^{j+1} + F(u_2^{j+1} - u_1^{j+1})$$

l'autre inégalité se démontrant de la même manière.

Le fait que  $u_1^j + F(u_2^j - u_1^j)$  et  $u_2^j - F(u_2^j - u_1^j)$  sont dans  $H^1(\Omega)$  est classique. La démonstration du lemme est terminée.

Considérons la fonction  $F_\varepsilon$  définie par :

$$F_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq \varepsilon \\ \frac{1}{I(\varepsilon)} \int_\varepsilon^t \frac{ds}{\omega^2(s)} & \text{si } t \geq \varepsilon \end{cases}$$

$$\text{où } I(\varepsilon) = \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{ds}{\omega^2(s)} \quad (\text{on peut en effet choisir } \omega \text{ assez grand pour que } I(\varepsilon) < +\infty.)$$

Il est facile de voir que  $\delta F_\varepsilon$  vérifie toutes les propriétés de  $F$  introduite au lemme 2.1 pour  $\delta$  positif suffisamment petit. Nous en déduisons donc que si  $v_1^j = u_1^j + \delta F_\varepsilon(u_2^j - u_1^j)$  et

$v_2^j = u_2^j - \delta F_\varepsilon(u_2^j - u_1^j)$ , les fonctions  $v_1$  et  $v_2$  sont respectivement dans  $K_1$  et  $K_2$ .

En prenant successivement ces deux fonctions test dans (2.5) nous obtenons après avoir noté

$$\delta F_\varepsilon(u_2 - u_1) = (\delta F_\varepsilon(u_2^j - u_1^j))_{j=1, \dots, N} :$$

$$\langle A(x, u_1, Du_1), \delta F_\varepsilon(u_2 - u_1) \rangle \geq \langle f_1, \delta F_\varepsilon(u_2 - u_1) \rangle$$

$$\langle A(x, u_2, Du_2), -\delta F_\varepsilon(u_2 - u_1) \rangle \geq \langle f_2, -\delta F_\varepsilon(u_2 - u_1) \rangle$$

et après sommation, il vient :

$$\langle A(x, u_1, Du_1) - A(x, u_2, Du_2), \delta F_\varepsilon(u_2 - u_1) \rangle \geq \langle f_1, \delta F_\varepsilon(u_2 - u_1) \rangle - \langle f_2, \delta F_\varepsilon(u_2 - u_1) \rangle$$

Comme  $f_1 \geq f_2$  et  $\delta F_\varepsilon(u_2^j - u_1^j) \geq 0 \forall j$ , on en déduit que

$\langle A(x, u_1, Du_1) - A(x, u_2, Du_2), \delta F_\varepsilon(u_2 - u_1) \rangle \geq 0$  ce qui équivaut à

$\langle A(x, u_2, Du_2) - A(x, u_2, Du_1), F_\varepsilon(u_2 - u_1) \rangle \leq \langle A(x, u_1, Du_1) - A(x, u_2, Du_1), F_\varepsilon(u_2 - u_1) \rangle$  et, par

définition de l'opérateur  $A(x, u, \xi)$ :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (A_j^\beta(x, u_2^j, \nabla u_2^j) - A_j^\beta(x, u_2^j, \nabla u_1^j)) D_\beta F_\varepsilon(u_2^j - u_1^j) + \int_{\Omega} (a_j(x, u_2^j) - a_j(x, u_1^j)) F_\varepsilon(u_2^j - u_1^j) \\ & \leq \int_{\Omega} (A_j^\beta(x, u_1^j, \nabla u_1^j) - A_j^\beta(x, u_2^j, \nabla u_1^j)) D_\beta F_\varepsilon(u_2^j - u_1^j) \end{aligned} \quad (2.6)$$

En utilisant (2.1) et (2.2) et en notant  $F_\varepsilon'(u_2^j - u_1^j)$  par  $(F_\varepsilon')_j$ , (2.6) conduit à :

$$\begin{aligned} & \nu \int_{\Omega} |\nabla(u_2^j - u_1^j)|^2 (F_\varepsilon')_j + \int_{\Omega} (a_j(x, u_2^j) - a_j(x, u_1^j)) F_\varepsilon(u_2^j - u_1^j) \\ & \leq \int_{\Omega} |A_j^\beta(x, u_1^j, \nabla u_1^j) - A_j^\beta(x, u_2^j, \nabla u_1^j)| (F_\varepsilon')_j |\nabla(u_2^j - u_1^j)| \\ & \leq \int_{\Omega} C \omega(|u_2^j - u_1^j|) (|\nabla u_1^j| + g(x)) (F_\varepsilon')_j |\nabla(u_2^j - u_1^j)| \end{aligned} \quad (2.7)$$

En utilisant l'inégalité de Young  $ab \leq \frac{1}{2}(\frac{C}{\nu}a^2 + \frac{\nu}{C}b^2)$  le dernier terme de l'inégalité de (2.7) se majore par

$$\frac{\nu}{2} \int_{\Omega} |\nabla(u_2^j - u_1^j)|^2 (F_\varepsilon')_j + \frac{C^2}{2\nu} \int_{\Omega} \omega^2(|u_2^j - u_1^j|) (|\nabla u_1^j| + g(x))^2 (F_\varepsilon')_j$$

En utilisant la définition de  $F_\varepsilon$  et cette dernière estimation, (2.7) donne (cf la définition de  $F_\varepsilon$ ) :

$$\frac{\nu}{2} \int_{\Omega} |\nabla(u_2^j - u_1^j)|^2 (F_\varepsilon')_j + \int_{\Omega} (a_j(x, u_2^j) - a_j(x, u_1^j)) F_\varepsilon(u_2^j - u_1^j) \leq \frac{C}{I(\varepsilon)} \sum_{j=1}^N \int_{[u_2^j - u_1^j > \varepsilon]} (|\nabla u_1^j| + g(x))^2 \quad (2.8)$$

où  $C$  est une constante positive et  $[u_2^j - u_1^j > \varepsilon]$  désigne l'ensemble des  $x$  de  $\Omega$  où  $u_2^j(x) - u_1^j(x) > \varepsilon$ .

Considérons le cas (i).

Comme  $(F_\varepsilon)' \geq 0$  (2.8) conduit à :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (a_j(x, u_2^j) - a_j(x, u_1^j)) F_\varepsilon(u_2^j - u_1^j) &\leq \frac{C}{I(\varepsilon)} \sum_{j=1}^N \int_{[u_2^j - u_1^j > \varepsilon]} (|\nabla u_1^j| + g(x))^2 \\ &\leq \frac{C}{I(\varepsilon)} \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} (|\nabla u_1^j| + g(x))^2 \end{aligned} \quad (2.9)$$

en faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0,  $I(\varepsilon)$  tend vers  $+\infty$  et  $F_\varepsilon(u_2^j - u_1^j)$  tend presque partout vers la fonction caractéristique de  $[u_2^j - u_1^j > 0]$  et l'inégalité (2.9) conduit à :

$$\int_{[u_2^j - u_1^j > 0]} a_j(x, u_2^j) - a_j(x, u_1^j) \leq 0 \quad \forall j=1, \dots, N$$

ce qui donne, avec nos notations,  $u_2^j \leq u_1^j$  pour tout  $j=1, \dots, N$  et donc  $u_2 \leq u_1$ .

Traisons maintenant le cas (ii)

Puisque le second terme de (2.8) est positif, on obtient également pour tout  $j=1, \dots, N$

$$\int_{[u_2^j - u_1^j > \varepsilon]} \frac{|\nabla(u_2^j - u_1^j)|^2}{\omega^2(|u_2^j - u_1^j|)} \leq \frac{2C}{v} \sum_{j=1}^N \int_{[u_2^j - u_1^j > \varepsilon]} (|\nabla u_1^j| + g(x))^2 \leq \frac{2C}{v} \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} (|\nabla u_1^j| + g(x))^2 \leq C' \quad (2.10)$$

où  $C'$  est une constante indépendante de  $\varepsilon$ .

$$\int_{\varepsilon}^x \frac{ds}{\omega(s)} \quad \text{si } x > \varepsilon$$

Posons alors  $S_\varepsilon(x) =$

$$0 \quad \text{si } x \leq \varepsilon$$

$S_\varepsilon$  étant Lipschitzienne,  $S_\varepsilon(u_2^j - u_1^j) \in H^1(\Omega)$  et il est clair qu'alors (2.10) s'écrit

$$\int_{\Omega} |\nabla S_\varepsilon(u_2^j - u_1^j)|^2 \leq C' \quad \forall j=1, \dots, N.$$

Comme  $S_\varepsilon$  est nulle pour  $x \leq 0$ , il est facile de voir qu'au sens des traces  $S_\varepsilon(u_2^j - u_1^j) = 0$  sur  $\Gamma^j$  et par suite, grâce à l'inégalité de type Poincaré, l'inégalité ci-dessus conduit à :

$$\int_{\Omega} |S_{\varepsilon}(u_2^j - u_1^j)|^2 \leq C \quad \forall j = 1, \dots, N$$

et en faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0, on aboutit à une contradiction grâce à (2.4) sauf si  $u_2^j \leq u_1^j$ .

### **Remarque 2.1.**

Le théorème (2.1) entraîne comme corollaire l'unicité pour le problème

$$\begin{aligned} \langle A(x,u,Du), v - u \rangle &\geq \langle f, v - u \rangle \quad \forall v \in K \\ u &\in K \end{aligned}$$

où  $K$  est un convexe du type  $K_1$ . (il suffit en effet de prendre  $K_1 = K_2 = K$  et  $f_1 = f_2 = f$ ).

Nous allons, dans le cas où l'opérateur  $A_j^{\beta}(x,s,\xi)$  est égal à  $a_{\alpha,\beta}^j(x,s)\xi^{\alpha} + \gamma_{\beta}^j(x,s) \quad \forall j=1,\dots,N, \forall s$  dans  $\mathbb{R}$  et  $\forall \xi$  dans  $\mathbb{R}^n$ , affaiblir l'hypothèse (ii) en supposant toujours (2.4) mais seulement  $s \rightarrow a_j(x,s)$  croissante pour tout  $j=1,\dots,N$ . Pour cela nous sommes conduits à faire une hypothèse sur les  $\gamma_{\beta}^j$ .

Nous supposons que pour  $j=1,\dots,N$ ,  $a_{\alpha,\beta}^j(x,s)\xi^{\alpha}\xi^{\beta} \geq \nu |\xi|^2 \quad \forall \xi = (\xi^{\alpha})$  dans  $\mathbb{R}^n$  (2.1 bis)

il est clair que (2.1 bis) entraîne l'ellipticité (2.1).

Nous supposons  $|a_{\alpha,\beta}^j(x,s) - a_{\alpha,\beta}^j(x,s')| \leq C\omega(|s-s'|)$  (2.2bis)

$$|\gamma_{\beta}^j(x,s) - \gamma_{\beta}^j(x,s')| \leq C\omega(|s-s'|)(g(x))$$

$\forall s, s'$  dans  $\mathbb{R}$  et pour presque tout  $x$  de  $\Omega$ ,  $g$  étant une fonction de  $L^2(\Omega)$ .

### **Théorème 2.2**

Avec les notations précédentes, soient  $u_i \quad i=1,2$  des solutions de deux problèmes du type (2.5)

avec l'opérateur défini par  $A_j^{\beta}(x,u,\xi) = a_{\alpha,\beta}^j(x,u)\xi^{\alpha} + \gamma_{\beta}^j(x,u) \quad \forall j=1,\dots,N$ . On suppose que (0.1),

(0.2), (0.3), (2.1 bis), (2.2 bis) et (2.3) sont vérifiés et de plus que

(i)  $s \rightarrow a_j(x,s)$  est croissante pour tout  $j$

(ii) Il existe une constante  $C$  telle que pour tout  $s$  de  $\mathbb{R}$ ,  $|\partial a_{\alpha,\beta}^j(x,s)/\partial x_k| \leq C$

presque partout en  $x$  et  $\forall j, \alpha, \beta$  et  $k$ . (les  $a_{\alpha, \beta}^j$  sont supposés par exemple de classe  $C^1$ .)

(iii) Il existe des constantes  $c_\beta, \beta = 1, \dots, n$  non toutes nulles telles que pour tout  $j$  les

applications  $s \rightarrow \sum c_\beta \gamma_\beta^j(x, s)$  sont monotones

alors si  $\varphi_2 \leq \varphi_1$  et  $f_2 \leq f_1$  on a  $u_2 \leq u_1$ .

Démonstration.

Première étape:

On montre d'abord que

$$\sum_{\substack{j=1 \\ [u_2^j - u_1^j > 0]}}^N \int (A_j^\beta(x, u_2^j, \nabla u_2^j) - A_j^\beta(x, u_1^j, \nabla u_1^j)) D_\beta \xi = 0 \text{ pour tout } \xi \text{ de } C^1(\bar{\Omega}) \quad (2.11)$$

Considérons pour cela  $\xi$  dans  $C^1(\bar{\Omega}), \xi \geq 0$ , alors, en reprenant la démonstration du lemme 2.1 et en utilisant les notations du théorème précédent, il est facile de voir que pour  $\delta$  suffisamment petit, on a :

$u_1 + \xi \delta F_\varepsilon(u_2 - u_1) \in K_1$  et  $u_2 - \xi \delta F_\varepsilon(u_2 - u_1) \in K_2$ . En prenant ces deux fonctions test dans (2.5), on obtient après sommation:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ [u_2^j - u_1^j > 0]}}^N \int (A_j^\beta(x, u_2^j, \nabla u_2^j) - A_j^\beta(x, u_1^j, \nabla u_1^j)) D_\beta (\xi F_\varepsilon(u_2^j - u_1^j)) + \int_{\Omega} (a_j(x, u_2^j) - a_j(x, u_1^j)) \xi F_\varepsilon(u_2^j - u_1^j) \leq 0$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{j=1 \\ [u_2^j - u_1^j > 0]}}^N \int (A_j^\beta(x, u_2^j, \nabla u_2^j) - A_j^\beta(x, u_1^j, \nabla u_1^j)) D_\beta (F_\varepsilon(u_2^j - u_1^j)) + \int_{\Omega} (a_j(x, u_2^j) - a_j(x, u_1^j)) \xi F_\varepsilon(u_2^j - u_1^j) \\ & \leq - \sum_{\substack{j=1 \\ [u_2^j - u_1^j]}}^N \int (A_j^\beta(x, u_2^j, \nabla u_2^j) - A_j^\beta(x, u_1^j, \nabla u_1^j)) \xi D_\beta (F_\varepsilon(u_2^j - u_1^j)) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Estimons alors le second terme de (2.12) noté I

$$I = - \sum_{j=1}^N \int_{[u_2^j - u_1^j > 0]} (A_j^\beta(x, u_2^j, \nabla u_2^j) - A_j^\beta(x, u_1^j, \nabla u_1^j)) \xi D_\beta (F_\varepsilon(u_2^j - u_1^j)) \\ + \sum_{j=1}^N \int_{[u_2^j - u_1^j > 0]} (A_j^\beta(x, u_1^j, \nabla u_1^j) - A_j^\beta(x, u_2^j, \nabla u_2^j)) \xi D_\beta (F_\varepsilon(u_2^j - u_1^j))$$

et par (2.1 bis) et (2.2bis)

$$I \leq - \sum_{j=1}^N \left( \int_{\Omega} v |\nabla(u_2^j - u_1^j)|^2 \xi (F_\varepsilon)_j + \int_{\Omega} C \omega(|u_2^j - u_1^j|) \chi |\nabla u_1^j| + g(x) \xi (F_\varepsilon)_j |\nabla(u_2^j - u_1^j)| \right)$$

On utilise alors l'inégalité de Young dans le second terme et on obtient

$$I = - \sum_{j=1}^N \frac{v}{2} \int_{\Omega} |\nabla(u_2^j - u_1^j)|^2 \xi (F_\varepsilon)_j - \sum_{j=1}^N \frac{C}{I(\varepsilon)} \int_{\Omega} (|\nabla u_1^j| + g(x))^2 \xi \\ \leq \sum_{j=1}^N \frac{C}{I(\varepsilon)} \int_{\Omega} (|\nabla u_1^j| + g(x))^2 \xi \quad (2.13)$$

Grâce à (2.13), (2.12) devient

$$\sum_{j=1}^N \left( \int_{[u_2^j - u_1^j > 0]} (A_j^\beta(x, u_2^j, \nabla u_2^j) - A_j^\beta(x, u_1^j, \nabla u_1^j)) D_\beta \xi (F_\varepsilon(u_2^j - u_1^j)) + \int_{\Omega} (a_j(x, u_2^j) - a_j(x, u_1^j)) \xi F_\varepsilon(u_2^j - u_1^j) \right)$$

$$\leq \sum_{j=1}^N \frac{C}{I(\varepsilon)} \int_{\Omega} (|\nabla u_1^j| + g(x))^2 \xi \quad (2.14)$$

en faisant alors tendre  $\varepsilon$  vers 0 dans (2.14), comme  $F_\varepsilon(u_2^j - u_1^j)$  tend vers la fonction caractéristique de  $[u_2^j - u_1^j > 0]$  nous obtenons grâce à l'hypothèse (i)

$$\sum_{j=1}^N \int_{[u_2^j - u_1^j > 0]} (A_j^\beta(x, u_2^j, \nabla u_2^j) - A_j^\beta(x, u_1^j, \nabla u_1^j)) D_\beta \xi \leq 0 \quad \forall \xi \in C^1(\bar{\Omega}), \xi \geq 0 \quad (2.15)$$

ce qui donne (2.11) pour tout  $\xi \geq 0$  après échange de  $\xi$  en  $M - \xi$  dans (2.15), où  $M$  est une constante positive supérieure à  $\sup_{\Omega} |\xi|$ . Changeant à nouveau  $\xi$  en  $M - \xi$  on obtient (2.11) pour tout  $\xi$ .

Deuxième étape: Fin de la démonstration.

En reprenant la définition de notre opérateur , (2.11) s'écrit

$$\sum_{j=1}^N \left\{ \int_{[u_2^j - u_1^j > 0]} (a_{\alpha,\beta}^j(x, u_2^j) D_{\alpha} u_2^j - a_{\alpha,\beta}^j(x, u_1^j) D_{\alpha} u_1^j) D_{\beta} \xi + \int_{[u_2^j - u_1^j > 0]} (\gamma_{\beta}^j(x, u_2^j) - \gamma_{\beta}^j(x, u_1^j)) D_{\beta} \xi \right\} = 0 \quad (2.16)$$

pour tout  $\xi$  de  $C^1(\bar{\Omega})$ . En prenant alors  $\xi(x) = \exp(\mu(c \cdot x))$  où  $c \cdot x$  désigne le produit scalaire dans

$\mathbb{R}^n$ . ( $c \cdot x = \sum_{\beta} c_{\beta} x_{\beta}$ ) et  $\mu$  une constante positive si les  $s \rightarrow \sum_{\beta} c_{\beta} \gamma_{\beta}^j(x, s)$  sont décroissantes et

négative si elles sont croissantes (2.16) donne après avoir remarqué que pour un tel choix de  $\mu$

$$\forall j = 1, \dots, N \quad \int_{[u_2^j - u_1^j > 0]} (\gamma_{\beta}^j(x, u_2^j) - \gamma_{\beta}^j(x, u_1^j)) \mu c_{\beta} \exp(\mu(c \cdot x)) \leq 0$$

$$\sum_{j=1}^N \int_{[u_2^j - u_1^j > 0]} (a_{\alpha,\beta}^j(x, u_2^j) D_{\alpha} u_2^j - a_{\alpha,\beta}^j(x, u_1^j) D_{\alpha} u_1^j) \mu c_{\beta} \exp(\mu(c \cdot x)) \geq 0 \quad (2.17)$$

Définissons alors  $A_{\alpha,\beta}^j(x, s) = \int_0^s a_{\alpha,\beta}^j(x, t) dt$  pour tout  $j, \alpha, \beta$ .

Grâce à notre hypothèse (ii), on a pour  $k=1,2$   $A_{\alpha,\beta}^j(x, u_k^j) \in H^1(\Omega)$  pour tout  $j, \alpha, \beta$  et on a

$$D_{\alpha} A_{\alpha,\beta}^j(x, u_k^j) = a_{\alpha,\beta}^j(x, u_k^j) D_{\alpha} u_k^j + \int_0^{u_k^j} D_{\alpha} a_{\alpha,\beta}^j(x, t) dt \text{ et donc (2.17) devient}$$

$$\sum_{j=1}^N \int_{[u_2^j - u_1^j > 0]} \left\{ D_{\alpha} (A_{\alpha,\beta}^j(x, u_2^j) - A_{\alpha,\beta}^j(x, u_1^j)) - \int_{u_1^j}^{u_2^j} D_{\alpha} a_{\alpha,\beta}^j(x, t) dt \right\} \mu c_{\beta} \exp(\mu(c \cdot x)) \geq 0 \quad (2.18)$$



Soit  $w^j = (u_2^j - u_1^j)^+$  (on remarquera que les  $w^j$  sont dans  $H_0^1(\Omega)$ ), (2.18) s'écrit

$$\sum_{j=1}^N \int_{\Omega} \left\{ D_{\alpha} (A_{\alpha,\beta}^j(x, u_1^j + w^j) - A_{\alpha,\beta}^j(x, u_1^j)) - \int_{u_1^j}^{u_1^j + w^j} D_{\alpha} a_{\alpha,\beta}^j(x, t) dt \right\} \mu c_{\beta} \exp(\mu(c \cdot x)) \geq 0$$

Or, il est facile de voir que  $A_{\alpha,\beta}^j(x, u_1^j + w^j) - A_{\alpha,\beta}^j(x, u_1^j)$  est dans  $H_0^1(\Omega)$ .

Après une intégration par parties, et en revenant à la définition de  $A_{\alpha,\beta}^j$ , l'inégalité précédente donne:

$$\sum_{j=1}^N \int_{\Omega} \int_{u_1^j}^{u_1^j + w^j} \left\{ a_{\alpha,\beta}^j(x, t) \mu^2 c_{\beta} c_{\alpha} + D_{\alpha} a_{\alpha,\beta}^j(x, t) \mu c_{\beta} \right\} \exp(\mu(c \cdot x)) dt dx \leq 0$$

ce qui entraîne grâce à notre hypothèse d'ellipticité

$$\sum_{j=1}^N \int_{\Omega} \int_{u_1^j}^{u_1^j + w^j} \left\{ \nu \mu^2 |c|^2 + D_{\alpha} a_{\alpha,\beta}^j(x, t) \mu c_{\beta} \right\} \exp(\mu(c \cdot x)) dt dx \leq 0$$

(où  $|c|^2$  désigne la norme euclidienne de  $c$  dans  $\mathbb{R}^n$ )

En choisissant  $\mu$  assez grand (voir (ii)) pour que chaque intégrande de chaque intégrale de la somme ci dessus soit positive, on aboutit à une contradiction sauf si pour tout  $j$  on a  $w^j = 0$  ce qui termine la démonstration du théorème.

### **Remarque 2.2:**

Dans le cas du problème 2.5 avec comme nouveau convexe

$$K' = \left\{ v = (v^1, \dots, v^N) \in H^1 \mid v^j = \varphi^j \text{ sur } \Gamma^j \text{ et } l_1(v^1(x)) \geq l_2(v^2(x)) \geq \dots \geq l_N(v^N(x)) \text{ x-p.p dans } \Omega \right\}$$

où  $l_j: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est définie par  $l_j(x) = L_j x + \alpha_j$ ,  $L_j \neq 0$  et  $L_j, \alpha_j \in \mathbb{R}$ , l'unicité est encore vérifiée.

En effet  $u$  solution de (2.5) avec  $K_i = K'$  et  $f_i = f$  équivaut à

$$\bar{u} = (l_1(u^1), \dots, l_N(u^N)) \text{ solution du problème}$$

$$\langle \bar{A}(x, \bar{u}, D\bar{u}), v - \bar{u} \rangle \geq \langle \bar{f}, v - \bar{u} \rangle \quad \forall v \in \bar{K}$$

$$\bar{u} \in \bar{K}$$

où  $\bar{K} = \{ v \in H^1 / v^j = L_j \varphi_j + \alpha_j \text{ sur } \Gamma^j, v^1(x) \geq v^2(x) \geq \dots \geq v^N(x) \text{ x-p.p. dans } \Omega \}$

Si on pose  $b_j = \frac{1}{L_j}$  et  $c_j = -\frac{\alpha_j}{L_j}$ , on a :

$$\bar{A}_j^\beta(x, s, \xi) = A_j^\beta(x, b_j s + c_j, b_j \xi) b_j$$

$$\bar{a}_j(x, s) = a_j(x, b_j s + c_j) b_j$$

$$\langle \bar{f}, v \rangle = \langle f, (b_j v^j)_j \rangle$$

On obtient alors un problème avec un convexe du type K pour lequel on a donc l'unicité, le nouvel opérateur vérifiant en effet toutes les hypothèses du théorème 2.1 .

### 3. Régularités $C^{0,\alpha}$ et $C^{1,\alpha}$ locale pour le problème des N-membranes.

Dans ce chapitre nous montrons que la solution du problème des N-membranes (voir la partie 1) dans le cas linéaire est localement dans  $C^{1,\alpha}$ . (On suppose également que les opérateurs sont voisins en un sens que l'on précisera plus loin). Pour cela on utilise une technique due à M. Giaquinta qui consiste à "approcher" localement la solution par une fonction harmonique. Commençons tout d'abord par donner quelques définitions et propriétés (cf [3]).

On pose  $\Omega(x,\rho) = \Omega \cap B(x,\rho)$  où  $B(x,\rho)$  est la boule de  $\mathbb{R}^n$  de centre  $x$  et de rayon  $\rho$ . On notera  $D$  le diamètre de  $\Omega$ . Pour  $p \geq 1, \lambda \geq 0$   $L^{p,\lambda}(\Omega)$  désigne l'espace de Morrey défini par

$$L^{p,\lambda}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) / \sup_{\substack{x \in \Omega \\ 0 < \rho < D}} \rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x,\rho)} |u|^p < +\infty \right\}$$

on note  $u_{x,\rho} = \frac{1}{|\Omega(x,\rho)|} \int_{\Omega(x,\rho)} u(y) dy$  où  $|\Omega(x,\rho)|$  désigne la mesure de Lebesgue de  $\Omega(x,\rho)$

D'autre part  $L^{p,\lambda}(\Omega)$  désigne l'espace de Campanato défini par

$$L^{p,\lambda}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) / \sup_{\substack{x \in \Omega \\ 0 < \rho < D}} \rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x,\rho)} |u(y) - u_{x,\rho}|^p dy < +\infty \right\}$$

On munit l'espace  $L^{p,\lambda}$  de la norme suivante

$$\|u\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)} = \sup_{\substack{x \in \Omega \\ 0 < \rho < D}} \left( \rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x,\rho)} |u|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

et sur l'espace produit  $(L^{2,\lambda}(\Omega))^{nN}$  la somme de ces normes

Enfin  $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$  désigne l'espace des fonctions Hölderiennes d'exposant  $\alpha$  sur  $\bar{\Omega}$  et  $C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$  est l'espace des fonctions  $u$  de  $C^1(\bar{\Omega})$  dont le gradient est dans  $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ . L'espace  $C^{0,\alpha}$  est muni de la semi-norme

$$[u]_{0,\alpha,\Omega} = \sup_{x,y \in \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

On sera amené à utiliser le théorème suivant (cf [3])

**Théorème :** si  $\Omega$  est assez régulier (par exemple de frontière Lipschitzienne) et si  $n < \lambda \leq n + p$  alors  $L^{p,\lambda}(\Omega)$  est isomorphe à  $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$  avec  $\alpha = (\lambda - n)/p$ .

Considérons le problème suivant:

$$\langle -A_j(x)u^j, v^j - u^j \rangle \geq \langle -D_\gamma f_j^\gamma, v^j - u^j \rangle \quad \forall v \in K$$

$$u \in K \tag{3.1}$$

où  $K$  est ici un convexe fermé du type  $\{v \in H^1 / v^i = \varphi^i \text{ sur } \Gamma^i \text{ et } v(x) \in C \text{ x-p.p.}\}$ ,  $C$  étant un convexe fermé de  $\mathbb{R}^N$  et où

$$A_j(x)u = -D_\beta(a_{\alpha,\beta}^j(x)D_\alpha u) \text{ et } \langle D_\gamma f_j^\gamma, v^j - u^j \rangle = - \int_{\Omega} f_j^\gamma D_\gamma (v^j - u^j)$$

On notera que le convexe du problème des  $N$ -membranes est un convexe du type ci-dessus avec

$$C = \{x \in \mathbb{R}^N / x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_N\}$$

On supposera que

- i)  $a_{\alpha,\beta}^j \in L^\infty(\Omega) \quad \forall j=1, \dots, N; \alpha, \beta = 1, \dots, n$
- ii)  $a_{\alpha,\beta}^j(x) \xi_\alpha \xi_\beta \geq \nu |\xi|^2 \quad \forall j=1, \dots, N$

### Théorème 3.1

On suppose que les opérateurs  $A_j$  vérifient i), ii) avec les  $a_{\alpha,\beta}^j$  continues sur  $\Omega$  et il existe  $\varepsilon$  assez petit tel que :

$A_j = A + \varepsilon B_j$  où  $A$  est elliptique et  $B_j$  est à coefficients dans  $L^\infty(\Omega)$ . Si de plus  $f = (f_j^\gamma)_{j,\gamma}$  est dans  $(L^{2,\gamma}(\Omega))^{nN}$  pour  $0 < \lambda < n$  alors:

$Du \in (C_{loc}^{2,\lambda}(\Omega))^{nN}$  et pour tout  $\Omega_0 \subset\subset \Omega$  on a:

$$\|Du\|_{(C^{2,\lambda}(\Omega_0))^{nN}} \leq C(\Omega, \Omega_0) \left[ \|Du\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{(L^{2,\lambda}(\Omega))^{nN}} \right]$$

où  $C(\Omega, \Omega_0)$  est une constante ne dépendant que de  $\Omega, \Omega_0$  et du module de continuité des coefficients. En particulier  $u \in (C_{loc}^{0,\alpha}(\Omega))^{nN}$ .

Démonstration

Soit  $B_R(x_0)$  la boule de centre  $x_0$  et de rayon  $R$  telle que  $B_R(x_0) \subset\subset \Omega$  et soit  $U^j$  la solution du problème de Dirichlet :

$$\begin{aligned} -A(x_0)U^j &= 0 \text{ dans } B_R(x_0) \\ U^j &= u^j \text{ sur } \partial B_R(x_0) \text{ (le bord de } B_R(x_0)) \end{aligned} \quad (3.2)$$

On note alors par

$$\begin{aligned} U^j &\text{ dans } B_R(x_0) \\ U^j &= \\ u^j &\text{ dans } \Omega - B_R(x_0) \end{aligned}$$

Il est classique que  $C$  est l'intersection de demi-espaces  $C_i$  de  $\mathbb{R}^N$ , qui le contiennent.

Supposons que  $C_i = \{x / l_i(x) \geq 0\}$  où  $l_i$  est une forme affine de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ . Alors  $u \in C_i$  x-p-p dans  $\Omega$  entraîne que  $l_i(u) \geq 0$ . On a donc en faisant une combinaison linéaire de (3.2) ( $l_i(x) = \sum_{j=1}^N \beta_j^i x_j + \alpha^i$ )

$$\begin{aligned} -A(x_0)l_i(U) &= 0 \quad \text{dans } B_R(x_0) \\ l_i(U) &\geq 0 \quad \text{sur le bord de } B_R(x_0) \end{aligned}$$

Donc d'après le principe faible du maximum, on a  $l_i(U) \geq 0$  dans  $B_R(x_0)$ , ce qui montre que

$U \in C_i$  x-p-p pour tout  $i$ . D'où  $U \in K$

De plus si  $\rho < R$  on a

$$\int_{B_\rho(x_0)} |Du|^2 = \int_{B_\rho(x_0)} |DU + D(u-U)|^2 \leq 2 \int_{B_\rho(x_0)} |DU|^2 + 2 \int_{B_\rho(x_0)} |D(u-U)|^2 \quad (3.3)$$

et par (3.2) (cf[3]) on a

$$\int_{B_\rho(x_0)} |DU|^2 \leq C \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \int_{B_R(x_0)} |DU|^2 \quad \text{où } C \text{ est une constante indépendante de } \rho \text{ et de } R$$

et de plus, en écrivant  $U = u + (U - u)$  dans le second membre de l'inégalité ci-dessus, (3.3) devient

$$\int_{B_\rho(x_0)} |Du|^2 \leq C \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \int_{B_R(x_0)} |Du|^2 + C \int_{B_R(x_0)} |D(u-U)|^2 \quad (3.4)$$

Estimons alors cette dernière intégrale. En prenant  $U$  comme fonction test dans (3.1) (on a prouvé

en effet que  $U \in K$ ) il vient

$$\langle -A_j(x)u^j, U^j - u^j \rangle \geq \langle -f_j^\gamma, D_\gamma(U^j - u^j) \rangle$$

Comme  $-A(x_0)U^j=0$  dans  $B_R(x_0)$  on a

$$\langle -A(x_0)(U^j - u^j), U^j - u^j \rangle + \langle -(A(x_0) - A_j(x))u^j, U^j - u^j \rangle \leq \langle f_j^\gamma, D_\gamma(U^j - u^j) \rangle$$
 ce qui conduit à

$$v_A \int_{B_R(x_0)} |D(U-u)|^2 \leq \langle -(A_j(x) - A(x_0))u^j, U^j - u^j \rangle + \langle f_j^\gamma, D_\gamma(U^j - u^j) \rangle$$
 ( $v_A$  étant la constante d'ellipticité de  $A$ )

en utilisant le fait que  $A = A_j - \varepsilon B_j$

$$\leq \langle -(A_j(x) - A_j(x_0))u^j, U^j - u^j \rangle + \langle f_j^\gamma, D_\gamma(U^j - u^j) \rangle + \langle -\varepsilon B_j u^j, U^j - u^j \rangle \quad (3.5)$$

Dans cette inégalité on a  $U^j = u^j$  sur  $\Omega - B_R(x_0)$  et toutes les intégrales ci-dessus se prennent sur  $B_R(x_0)$ . On en déduit alors

$$\int_{B_R(x_0)} |D(u-U)|^2 \leq \sum_{j=1}^N C \int_{B_R(x_0)} |a_{\alpha,\beta}^j(x) - a_{\alpha,\beta}^j(x_0)| |Du| |D(u-U)| + \sum_{j,\gamma} C \int_{B_R(x_0)} |f_j^\gamma| |D(u-U)| + C\varepsilon \int_{B_R(x_0)} |Du| |D(u-U)| \quad (3.6)$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans (3.6) on obtient

$$\int_{B_R(x_0)} |D(u-U)|^2 \leq C \int_{B_R(x_0)} |a_{\alpha,\beta}^j(x) - a_{\alpha,\beta}^j(x_0)|^2 |Du|^2 + C \int_{B_R(x_0)} |f| + C\varepsilon \int_{B_R(x_0)} |Du|^2 \quad (3.7)$$

$$\text{où } |f|^2 = \sum_{j,\gamma} |f_j^\gamma|^2$$

En désignant par  $\omega(R)$  la quantité

$$\omega(R) = \max_{j=1 \dots N} \left\{ \sup_{B_R(x_0)} \left( \sum_{\alpha,\beta} |a_{\alpha,\beta}^j(x) - a_{\alpha,\beta}^j(x_0)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\}$$

et comme  $f_j^\gamma \in l^{2,\lambda}(\Omega)$ , (3.7) conduit à

$$\int_{B_R(x_0)} |D(u-U)|^2 \leq C(\omega^2(R) + \varepsilon) \int_{B_R(x_0)} |Du|^2 + CR^\lambda$$

En revenant à (3.4), il vient

$$\int_{B_\rho(x_0)} |Du|^2 \leq C \left( \left(\frac{\rho}{R}\right)^\alpha + \omega^2(R) + \varepsilon \right) \int_{B_R(x_0)} |Du|^2 + CR^\lambda \quad (3.8)$$

On utilise alors le lemme suivant (cf [3]) :

**Lemme:** Soit  $\Phi(t)$  une fonction positive croissante telle que :

$\Phi(\rho) \leq A \left( \left(\frac{\rho}{R}\right)^\alpha + \varepsilon \right) \Phi(R) + BR^\beta$  pour tout  $\rho \leq R \leq R_0$  avec  $A, \alpha$  et  $\beta$  des constantes positives

et  $\beta < \alpha$ , alors il existe une constante  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(A, \alpha, \beta)$  telle que si  $\varepsilon < \varepsilon_0$  on a pour tout  $\rho \leq R \leq R_0$  :

$\Phi(\rho) \leq C \left( \left(\frac{\rho}{R}\right)^\beta \Phi(R) + B\rho^\beta \right)$  où  $C$  est une constante qui ne dépend que de  $\alpha, \beta, A$ .

On applique ce lemme à  $\Phi(r) = \int_{B_r(x_0)} |Du|^2$  ce qui conduit à, pour  $R \leq R_1$  et  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$  :

$$\int_{B_\rho(x_0)} |Du|^2 \leq C \left( \left(\frac{\rho}{R}\right)^\lambda \int_{B_R(x_0)} |Du|^2 + \rho^\lambda \right)$$

ce qui termine la démonstration.

### Théorème 3.2

Si les opérateurs  $A_j$  vérifient (i) et (ii),  $A$  est elliptique et  $B_j$  est à coefficients dans  $L^\infty(\Omega)$  et si les

coefficients  $a_{\alpha,\beta}^j$  sont dans  $C^{0,\mu}(\Omega)$ ,  $0 < \mu < 1$ ,  $f = (f_j)_{j,\gamma} \in (C_{loc}^{0,\mu}(\Omega))^{nN}$  alors  $Du \in (C_{loc}^{0,\mu}(\Omega))^{nN}$  et

pour tout  $\Omega_0 \subset\subset \Omega$  on a :  $[Du]_{0,\mu,\Omega_0} \leq C(\Omega_0, \Omega) \left( \|Du\|_{L^{2+[f]}_{0,\mu,\Omega_0}} \right)$

(  $[ ]_{0,\mu,\Omega_0}$  désignant ici la semi-norme sur  $(C^{0,\mu}(\Omega_0))^{nN}$  )

### Démonstration

Pour tout  $B_R(x_0) \subset\subset \Omega$  et  $B_\rho(x_0) \subset B_R(x_0)$  on a l'estimation suivante par (3.2) (cf [3]) :

$$\int_{B_\rho(x_0)} |DU - (DU)_\rho|^2 \leq C \left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+2} \int_{B_R(x_0)} |DU - (DU)_R|^2 \quad (3.9)$$

où  $(DU)_r$  désigne  $((D_\alpha U^j)_{x_0, r^j})_{j,\alpha}$  avec les notations déjà indiquées.

On a alors 
$$\int_{B_\rho(x_0)} |Du - (Du)_\rho|^2 \leq 2 \int_{B_\rho(x_0)} |DU - (DU)_\rho|^2 + 2 \int_{B_\rho(x_0)} |D(u-U) - (D(u-U))_\rho|^2$$

et par (3.9)

$$\leq C \left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+2} \int_{B_R(x_0)} |DU - (DU)_R|^2 + C \int_{B_R(x_0)} |D(u-U) - (D(u-U))_R|^2 \quad (3.10)$$

En remplaçant alors  $u$  par  $U = u + (U - u)$  dans la première intégrale de (3.10) et en utilisant à nouveau

$$\int_A |Du - u_A|^2 = \min_{t \in \mathbb{R}^{nN}} \int_A |Du - t|^2$$

(3.10) devient

$$\int_{B_\rho(x_0)} |Du - (Du)_\rho|^2 \leq C \left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+2} \int_{B_R(x_0)} |Du - (Du)_R|^2 + C \int_{B_R(x_0)} |D(u-U)|^2 \quad (3.11)$$

En remarquant que  $\langle -D_\gamma f_j^\gamma, U^j - u^j \rangle = \langle -D_\gamma (f_j^\gamma - (f_j^\gamma)_R), U^j - u^j \rangle$  et que

$$\langle \varepsilon B_j(x_0) u^j, u^j - U^j \rangle = \langle \varepsilon B_j(x_0) (u^j - (u^j)_R), u^j - U^j \rangle$$

procédant comme en (3.7) on obtient

$$\begin{aligned} \int_{B_R(x_0)} |D(U-u)|^2 &\leq C \int_{B_R(x_0)} |a_{\alpha,\beta}^j(x) - a_{\alpha,\beta}^j(x_0)|^2 |Du|^2 + C \int_{B_R(x_0)} |f - (f_R)|^2 + C\varepsilon \int_{B_R(x_0)} |Du - (Du)_R|^2 \\ &\leq C (\max_{j,\alpha,\beta} [a_{\alpha,\beta}^j]_{0,\mu,\Omega}^2 R^{2\mu}) \int_{B_R(x_0)} |Du|^2 + C \int_{B_R(x_0)} |f - (f_R)|^2 + C\varepsilon \int_{B_R(x_0)} |Du - (Du)_R|^2 \end{aligned} \quad (3.12)$$

et d'après le théorème (3.1) on sait que  $Du \in (L^{2, n-\eta}(\Omega))^{nN} \forall \eta > 0$  ce qui entraîne d'après (3.12)

$$\int_{B_R(x_0)} |D(u-U)|^2 \leq C \max_{j,\alpha,\beta} [a_{\alpha,\beta}^j]_{0,\mu,\Omega}^2 R^{n+2\mu-\eta} + CR^{n+2\mu} + C\varepsilon \int_{B_R(x_0)} |Du - (Du)_R|^2 \quad \forall \eta > 0$$

En revenant à (3.11), l'inégalité ci-dessus conduit à :

$$\int_{B_\rho(x_0)} |Du - (Du)_\rho|^2 \leq C \left(\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+2} + \varepsilon\right) \int_{B_R(x_0)} |Du - (Du)_R|^2 + CR^{n+2\mu-\eta}$$

avec  $\Phi(r) = \int_{B_r(x_0)} |Du - (Du)_r|^2$  et on obtient  $Du \in (C_{loc}^{0,\beta}(\Omega))^{nN}$  pour tout  $\beta < \mu$ . On applique alors le lemme

En particulier  $Du$  est localement borné et donc par (3.11) et (3.12) on a



$$\int_{B_\rho(x_0)} |Du - (Du)_\rho|^2 \leq C \left( \left( \frac{\rho}{R} \right)^{n+2} + \varepsilon \right) \int_{B_R(x_0)} |Du - (Du)_R|^2 + CR^{n+2\mu}$$

En utilisant à nouveau le lemme , on aboutit au résultat pourvu que  $\varepsilon$  soit assez petit.

Remarquons qu' on a obtenu comme cas particulier la régularité Hôlderienne pour le problème des N-membranes.

#### 4. Résultat de régularité $W^{2,p}$ , $p \geq 2$ .

On considère le problème

$$\begin{aligned} \langle -A_j(x)u^j, v^j - u^j \rangle &\geq \langle f_j, v^j - u^j \rangle \quad \forall v \in K \\ u \in K \end{aligned} \quad (4.1)$$

où  $K$  est le convexe du problème des  $N$ -membranes avec de plus  $\varphi^1 \geq \varphi^2 \geq \dots \geq \varphi^N$  sur  $\Gamma$  et où  $A_j$  vérifie i) et ii) de la partie précédente.

On suppose que  $A_j = A + cB_j$  où  $A$  est un opérateur elliptique et  $B_j$  est à coefficients dans  $L^\infty(\Omega)$ .

On sait que si les  $A_j$ ,  $\Omega$  et  $\Phi^j$  sont assez réguliers alors pour tout  $g \in L^p(\Omega)$ , la solution du problème

$$-A_j(x)u = g \text{ dans } \Omega$$

$$u = \Phi^j \text{ sur } \Gamma$$

est dans  $W^{2,p}(\Omega)$ . De plus il existe une constante  $C = C(g, \Phi, \Omega, A_j)$  telle que  $\|u\|_{2,p} \leq C$  (cf [5]) .

( $\|u\|_{2,p}$  désignant la norme usuelle de  $u$  dans  $W^{2,p}(\Omega)$ )

#### Théorème 4.1.

Sous les hypothèses ci-dessus et si  $f_j \in L^p(\Omega)$  pour  $j = 1, \dots, N$ , alors, pour  $c$  assez petit, la solution  $u$  du problème (4.1) est dans  $(W^{2,p}(\Omega))^N$ .

(Ce théorème généralise un résultat obtenu dans le cas où les opérateurs  $A_j$  sont égaux par M. Chipot et G. Vergara - Caffarelli dans [2])

Avant de passer à la démonstration, précisons quelques points. Soit  $\beta$  une fonction Lipschitzienne continue, croissante, vérifiant  $\beta(t) = 0$  pour  $t \geq 0$  et  $\beta(t) < 0$  pour  $t < 0$  et considérons le problème pénalisé de (4.1) (cf [2])

$$\begin{aligned} -A_j(x)u_\varepsilon^j - \frac{\beta}{\varepsilon}(u_\varepsilon^{j-1} - u_\varepsilon^j) + \frac{\beta}{\varepsilon}(u_\varepsilon^j - u_\varepsilon^{j+1}) &= f_j \text{ dans } \Omega \text{ pour } j = 1, \dots, N \\ u_\varepsilon^j &= \Phi^j \text{ sur } \Gamma \end{aligned} \quad (4.2)$$

On sait (cf [2]) qu'il existe  $u_\varepsilon = (u_\varepsilon^1, \dots, u_\varepsilon^N)$  unique solution de (4.2) et que si  $\varepsilon$  tend vers 0 alors

$u_\varepsilon$  converge fortement dans  $(H^1(\Omega))^N$  vers  $u$ .

### Remarque 4.1

Dans le problème (4.2) on a fait la convention  $u_\varepsilon^0 = u_\varepsilon^1$  et  $u_\varepsilon^{N+1} = u_\varepsilon^N$ . Ainsi les expressions

$\frac{\beta}{\varepsilon}(u_\varepsilon^0 - u_\varepsilon^1)$  et  $\frac{\beta}{\varepsilon}(u_\varepsilon^N - u_\varepsilon^{N+1})$  sont nulles.

### Démonstration

Démontrons d'abord le lemme suivant:

Lemme: Si  $f_j \in L^p(\Omega)$  pour  $j=1, \dots, N$  et si  $u_\varepsilon$  désigne la solution de (4.2) alors il existe une

constante  $C$  indépendante de  $\varepsilon$  telle que :

$$|u_\varepsilon^j|_{2,p} \leq C \sum_{j=1}^N |f_j|_p \quad \text{pour } j=1, \dots, N \quad (\text{si } c \text{ est assez petit})$$

### Démonstration du lemme :

considérons le problème (4.2) et soustrayons la  $(j+1)$ <sup>ième</sup> équation de la  $j$ <sup>ième</sup> équation. Cela donne pour  $j = 1, \dots, N-1$  (en tenant compte de  $A_j = A + cB_j$ )

$$-A(u_\varepsilon^j - u_\varepsilon^{j+1}) + 2\frac{\beta}{\varepsilon}(u_\varepsilon^j - u_\varepsilon^{j+1}) = f_j - f_{j+1} + \frac{\beta}{\varepsilon}(u_\varepsilon^{j-1} - u_\varepsilon^j) + \frac{\beta}{\varepsilon}(u_\varepsilon^{j+1} - u_\varepsilon^{j+2}) + c(B_j u_\varepsilon^j - B_{j+1} u_\varepsilon^{j+1}) \quad (4.3)$$

Soit alors  $F_p : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  définie par  $F_p(t) = |t|^{p-2}t$ . Multiplions chaque terme de (4.3) par

$$F_p\left(\frac{\beta}{\varepsilon}(u_\varepsilon^j - u_\varepsilon^{j+1})\right)$$

(on peut en effet supposer que  $\frac{\beta}{\varepsilon}(u_\varepsilon^j - u_\varepsilon^{j+1})$  est borné, ainsi  $F_p\left(\frac{\beta}{\varepsilon}(u_\varepsilon^j - u_\varepsilon^{j+1})\right)$  est dans  $H_0^1(\Omega)$ . cf[ 1 ])

Grâce à la monotonie de  $F_p \circ \beta$  on a :

$$\langle -A(u_\varepsilon^j - u_\varepsilon^{j+1}), F_p\left(\frac{\beta}{\varepsilon}(u_\varepsilon^j - u_\varepsilon^{j+1})\right) \rangle \geq 0 \text{ et on obtient:}$$

$$2 \left| \frac{\beta}{\varepsilon}(u_\varepsilon^j - u_\varepsilon^{j+1}) \right|_p^p \leq \int_{\Omega} \left( f_j - f_{j+1} + \frac{\beta}{\varepsilon}(u_\varepsilon^{j-1} - u_\varepsilon^j) + \frac{\beta}{\varepsilon}(u_\varepsilon^{j+1} - u_\varepsilon^{j+2}) + c(B_j u_\varepsilon^j - B_{j+1} u_\varepsilon^{j+1}) \right) F_p\left(\frac{\beta}{\varepsilon}(u_\varepsilon^j - u_\varepsilon^{j+1})\right)$$

Après avoir remarqué que  $\left| F_p\left(\frac{\beta}{\varepsilon}(u_\varepsilon^j - u_\varepsilon^{j+1})\right) \right|_{p'} = \left| \frac{\beta}{\varepsilon}(u_\varepsilon^j - u_\varepsilon^{j+1}) \right|_p^{p-1}$  avec  $p' = \frac{p}{p-1}$ , et en utilisant

l'inégalité de Hölder, il vient :

$$2 \left| \frac{\beta}{\varepsilon}(u_\varepsilon^j - u_\varepsilon^{j+1}) \right|_p \leq |f_j - f_{j+1}|_p + \left| \frac{\beta}{\varepsilon}(u_\varepsilon^{j-1} - u_\varepsilon^j) \right|_p + \left| \frac{\beta}{\varepsilon}(u_\varepsilon^{j+1} - u_\varepsilon^{j+2}) \right|_p + M c (|u_\varepsilon^j|_{2,p} + |u_\varepsilon^{j+1}|_{2,p}) \text{ où } M \text{ est une}$$

constante indépendante de  $\varepsilon$ .

Additionnant ces inégalités, il vient:

$$2 \sum_{j=1}^{N-1} \left| \frac{\beta}{\varepsilon} (u_\varepsilon^j - u_\varepsilon^{j+1}) \right|_p \leq \sum_{j=1}^{N-1} |f_j - f_{j+1}|_p + \sum_{j=1}^{N-1} \left| \frac{\beta}{\varepsilon} (u_\varepsilon^{j-1} - u_\varepsilon^j) \right|_p + \sum_{j=1}^{N-1} \left| \frac{\beta}{\varepsilon} (u_\varepsilon^{j+1} - u_\varepsilon^{j+2}) \right|_p \\ + 2Mc \sum_{j=1}^{N-1} |u_\varepsilon^{j+1}|_{2,p}$$

et donc :

$$\left| \frac{\beta}{\varepsilon} (u_\varepsilon^1 - u_\varepsilon^2) \right|_p + \left| \frac{\beta}{\varepsilon} (u_\varepsilon^{N-1} - u_\varepsilon^N) \right|_p \leq \sum_{j=1}^{N-1} |f_j - f_{j+1}|_p + 2Mc \sum_{j=1}^N |u_\varepsilon^j|_{2,p} \\ \leq 2 \sum_{j=1}^N |f_j|_p + 2Mc \sum_{j=1}^N |u_\varepsilon^j|_{2,p}$$

On transpose alors  $\frac{\beta}{\varepsilon} (u_\varepsilon^1 - u_\varepsilon^2)$  et  $\frac{\beta}{\varepsilon} (u_\varepsilon^{N-1} - u_\varepsilon^N)$  au second membre de (4.2) on obtient N-2 équations et on reproduit le procédé ci-dessus , ce qui donne pour  $j=1, \dots, N-1$  :

$$\left| \frac{\beta}{\varepsilon} (u_\varepsilon^j - u_\varepsilon^{j+1}) \right|_p \leq C \sum_{j=1}^N (|f_j|_p + c |u_\varepsilon^j|_{2,p})$$

Par (4.2) et comme  $|-A_j u_\varepsilon^j|_p \geq C |u_\varepsilon^j|_{2,p}$ , cette dernière inégalité conduit à :

$$|u_\varepsilon^j|_{2,p} \leq C \sum_{j=1}^N |f_j|_p \text{ si } c \text{ est assez petit } (j=1, \dots, N) \text{ où } C \text{ est une constante indépendante de } \varepsilon.$$

Ceci termine la démonstration du lemme.

Le théorème (4.1) en découle immédiatement.

### 5. Régularité $W^{1,\infty}$ .

On considère le problème quasi-linéaire:

$$\begin{aligned} \langle -A_j(x, u^j)u^j, v^j - u^j \rangle &\geq \langle f_j, v^j - u^j \rangle \quad \forall v \in K \\ u \in K &= \{v \in H^1 / v^i = \varphi^i \text{ sur } \Gamma, v^1(x) \geq v^2(x) \geq \dots \geq v^N(x) \text{ x-pp dans } \Omega\} \\ &\text{où } A_j(x, u)v = D_\beta(a_{\alpha, \beta}^j(x, u))D_\alpha v \end{aligned} \quad (5.1)$$

On voudrait montrer que  $u \in (W^{1,\infty}(\Omega))^N$ , pour  $A_j$ ,  $f_j$  et  $\varphi^j$  réguliers. Nous n'avons malheureusement pas pu obtenir ceci et nous donnons dans cette partie quelques résultats partiels dans cette direction.

#### Lemme 5.1:

Soit  $u$  solution de  $\langle -A(x, u)u, v - u \rangle \geq \langle f, v - u \rangle \quad \forall v \in K$

$$u \in K = \{v \in H^1(\Omega) / v = \varphi \text{ sur } \Gamma \text{ et } v(x) \geq \Phi(x) \text{ x-p.p. dans } \Omega\} \quad (5.2)$$

où  $A(x, u)v = D_\beta(a_{\alpha, \beta}(x, u))D_\alpha v$ . On suppose d'autre part que  $\Phi \leq \varphi$  sur  $\Gamma$ .

$$\text{Si } a_{\alpha, \beta}(x, u) \in C^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}) \text{ avec } \left| \frac{\partial a_{\alpha, \beta}}{\partial u}(x, u) \right| \leq c \quad (5.3)$$

$f \in L^\infty(\Omega)$ ,  $\Phi \in W^{1,\infty}(\Omega)$ ,  $\varphi \in W^{2,\infty}(\Omega)$ ,  $\Omega$  régulier, alors, pour  $c$  assez petit, on a  $|\nabla u(x)| \leq C \quad \forall x \in \Gamma$

où  $C$  est une constante positive.

#### Démonstration du lemme:

Considérons le problème pénalisé correspondant à (5.2) ( $\beta$  étant défini dans la partie 4) :

$$-A(x, u_\varepsilon)u_\varepsilon + \frac{\beta}{\varepsilon}(u_\varepsilon - \Phi) = f \text{ dans } \Omega \quad (5.4)$$

$$u_\varepsilon = \varphi \text{ sur } \Gamma$$

Une telle solution  $u_\varepsilon$  existe, de plus par (5.3) on a  $\int_0^+ \frac{ds}{\omega^2(s)} = +\infty$  où  $\omega(t) = \sup_{x, |u-v| \leq t} |a_{\alpha, \beta}(x, u) - a_{\alpha, \beta}(x, v)|$ ,

le problème (5.2) possède donc une unique solution et  $u_\varepsilon$  converge fortement dans  $H^1(\Omega)$  vers  $u$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0.

Des estimations sur  $u_\varepsilon$  vont nous permettre d'en déduire le résultat sur  $u$ .

Posons  $w_\varepsilon = u_\varepsilon - \varphi$ ,  $B(x, u, v) = A(x, u + \varphi)(v + \varphi)$  et  $\psi = \Phi - \varphi$ , alors  $w_\varepsilon$  vérifie :

$$-B(x, w_\varepsilon, w_\varepsilon) + \frac{\beta}{\varepsilon}(w_\varepsilon - \psi) = f \text{ dans } \Omega \quad (5.4\text{bis})$$

$w_\varepsilon = 0$  sur  $\Gamma$ .

Il est facile de voir que  $B$  vérifie les mêmes propriétés que  $A$  et que le théorème de comparaison des solutions de [6] est vérifié.

On suppose que  $\Omega$  vérifie la propriété de la sphère extérieure. Alors pour tout point  $x_0$  de  $\Gamma$ , il existe une boule de  $\Omega$  de rayon  $R$  qui ne rencontre  $\bar{\Omega}$  qu'au point  $x_0$ . Si  $n=1$   $\Omega$  est un intervalle borné et cette hypothèse a lieu. Dans le cas  $n \geq 2$ , on vérifie que cette hypothèse a lieu pour  $\Omega$  de classe  $C^2$ . Soit  $x_0 \in \Gamma$ , en prenant alors pour origine des coordonnées le centre de la sphère ne rencontrant  $\bar{\Omega}$  qu'au seul point  $x_0$ , on construit deux fonctions  $\delta^+$  et  $\delta^-$  telle que:

$$\delta^-(x_0) = w_\varepsilon(x_0) = \delta^+(x_0) \quad (5.5)$$

$$\delta^-(x) \leq w_\varepsilon(x) \leq \delta^+(x) \quad \forall x \in \Gamma \quad (5.6)$$

$$-B(x, \delta^-, \delta^-) + \frac{\beta}{\varepsilon}(\delta^- - \psi) \leq f \leq -B(x, \delta^+, \delta^+) + \frac{\beta}{\varepsilon}(\delta^+ - \psi) \text{ pour presque tout } x \text{ de } \Omega. \quad (5.7)$$

Pour cela, on pose  $\delta^+(x) = k(R^\mu - |x|^\mu)$  où  $k, \mu$  sont des constantes positives qui seront

déterminées par la suite et  $\delta^-(x) = -\delta^+(x)$ .

Il est facile de voir que (5.5) et (5.6) sont vérifiées, de plus on a:

$$D_\alpha \delta^+(x) = k\mu x_\alpha |x|^{-(\mu+2)} \quad (5.8)$$

$$D_\beta (D_\alpha \delta^+)(x) = k\mu \delta_{\alpha\beta} |x|^{-(\mu+2)} - k\mu(\mu+2)x_\alpha x_\beta |x|^{-(\mu+4)} \quad (5.9)$$

Soit alors  $D$  un réel tel que  $\Omega$  soit inclu dans la boule de centre l'origine et de rayon  $D$ . On choisit

d'abord  $k$  et  $\mu$  tels que l'on ait

$$|\nabla \delta^+(x)| = k\mu |x|^{-(\mu+1)} \geq k\mu D^{-(\mu+1)} = C_1 > |\nabla \psi^+|_\infty \quad (5.10)$$

Pour  $x \in \Omega$ , soit  $y$  le premier point d'intersection du segment  $(x,0)$  avec  $\Gamma$ , on a alors par le fait

que  $\delta^+$  est radiale :

$$\delta^+(x) \geq \delta^+(x) - \delta^+(y) \geq |\nabla \psi^+|_{\infty} |x-y| \geq \psi^+(x) - \psi^+(y) = \psi^+(x)$$

Ainsi si (5.10) est vérifiée, on a :  $\delta^+(x) \geq \psi^+(x) \geq \psi(x)$  (5.11)

On a de plus pour  $x \in \Omega$  :

$$\begin{aligned} -B(x, \delta^+, \delta^+) = & -a_{\alpha\beta} D_{\alpha} D_{\beta} \delta^+ - \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial u} D_{\alpha} \delta^+ D_{\beta} \delta^+ - D_{\alpha} \delta^+ (D_{\beta} a_{\alpha\beta} + \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial u} D_{\beta} \varphi) - D_{\beta} \delta^+ \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial u} D_{\alpha} \varphi \\ & - (a_{\alpha\beta} D_{\alpha} D_{\beta} \varphi + \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial u} D_{\alpha} \varphi D_{\beta} \varphi + D_{\beta} a_{\alpha\beta} D_{\alpha} \varphi) \end{aligned} \quad (5.12)$$

On désigne par  $M_1, M_2$  des majorants dans les troisièmes et quatrièmes termes des facteurs de

$D_{\alpha} \delta^+$  et de  $D_{\beta} \delta^+$  respectivement et par  $M_3$  un majorant du dernier terme de l'expression (5.12)

Grâce à (5.8), (5.9), (5.10) ainsi qu'à (5.3) et l'hypothèse de régularité sur  $\varphi$ , on obtient :

$$\begin{aligned} -B(x, \delta^+, \delta^+) & \geq -a_{\alpha\beta} (k\mu \delta_{\alpha\beta} |x|^{-(\mu+2)} - k\mu(\mu+2) x_{\alpha} x_{\beta} |x|^{-(\mu+4)}) - c |\nabla \delta^+| - M_1 |\nabla \delta^+| - M_2 |\nabla \delta^+| - M_3 \\ & = k\mu |x|^{-(\mu+2)} \left( \frac{(\mu+2) a_{\alpha\beta} x_{\alpha} x_{\beta}}{|x|^2} - a_{\alpha\alpha} \right) - c (k\mu)^2 |x|^{-2(\mu+1)} - M_1 k\mu |x|^{-(\mu+1)} - M_2 k\mu |x|^{-(\mu+1)} - M_3 \\ & \geq k\mu |x|^{-(\mu+2)} \left( v(\mu+2) - \sum a_{\alpha\alpha} \right) - c (k\mu)^2 |x|^{-2(\mu+1)} - (M_1 + M_2) k\mu |x|^{-(\mu+1)} - M_3 \\ & \geq k\mu |x|^{-(\mu+2)} \left( v(\mu+2) - \sum a_{\alpha\alpha} - (M_1 + M_2) |x| - c k\mu |x|^{-\mu} \right) - M_3 \end{aligned}$$

On a choisi  $k\mu |x|^{-(\mu+1)} \geq k\mu D^{-(\mu+1)} = C_1 > |\nabla \psi^+|_{\infty}$

$$\geq \frac{C_1}{D} \left( v(\mu+2) - \sum a_{\alpha\alpha} - (M_1 + M_2) |x| - c C_1 \frac{D^{\mu+1}}{R^{\mu}} \right) - M_3$$

$$\geq \frac{C_1}{D} \left( v(\mu+2) - M_4 - c C_1 \frac{D^{\mu+1}}{R^{\mu}} \right) - M_3 \quad \text{où } M_4 \text{ est une constante majorant } \left| \sum a_{\alpha\alpha} - (M_1 + M_2) |x| \right|$$

On choisit  $c \leq \left(\frac{R}{D}\right)^\mu$

$$\geq \frac{C_1}{D} (v(\mu+2) - M_4 - C_1 D) - M_3 \geq \|f\|_\infty \text{ pourvu que } \mu \text{ soit assez grand.}$$

On obtient l'autre inégalité de (5.7) en effet :

$$\begin{aligned} -B(x, \delta^-, \delta^-) &\leq -a_{\alpha, \beta} (k\mu \delta_{\alpha, \beta} |x|^{-(\mu+2)} - k\mu(\mu+2) x_\alpha x_\beta |x|^{-(\mu+4)}) + c |\nabla \delta^-| + M_1 |\nabla \delta^-| + M_2 |\nabla \delta^-| + M_3 \\ &= k\mu |x|^{-(\mu+2)} \left( -\frac{(\mu+2) a_{\alpha, \beta} x_\alpha x_\beta}{|x|^2} + a_{\alpha, \alpha} \right) + c(k\mu)^2 |x|^{-2(\mu+1)} + M_1 k\mu |x|^{-(\mu+1)} + M_2 k\mu |x|^{-(\mu+1)} + M_3 \\ &\leq k\mu |x|^{-(\mu+2)} \left( -v(\mu+2) + \sum a_{\alpha, \alpha} \right) + c(k\mu)^2 |x|^{-2(\mu+1)} + (M_1 + M_2) |x|^{-(\mu+1)} + M_3 \\ &\leq k\mu |x|^{-(\mu+2)} \left( -v(\mu+2) + \sum a_{\alpha, \alpha} + (M_1 + M_2) |x| + c k\mu |x|^{-\mu} \right) + M_3 \end{aligned}$$

On a choisi  $k\mu |x|^{-(\mu+1)} \geq k\mu D^{-(\mu+1)} = C_1 > |\nabla \psi^+|_\infty$

$$\leq \frac{C_1}{D} \left( -v(\mu+2) + \sum a_{\alpha, \alpha} + (M_1 + M_2) |x| + c C_1 \frac{D^{\mu+1}}{R^\mu} \right) + M_3$$

$$\leq \frac{C_1}{D} \left( -v(\mu+2) + M_5 + c C_1 \frac{D^{\mu+1}}{R^\mu} \right) + M_3 \quad \text{où } M_5 \text{ est un majorant de } \sum a_{\alpha, \alpha} + (M_1 + M_2) |x|$$

On choisit  $c \leq \left(\frac{R}{D}\right)^\mu$

$$\leq \frac{C_1}{D} \left( -v(\mu+2) + M_5 + C_1 D \right) + M_3 \leq \|f\|_\infty \text{ pourvu que } \mu \text{ soit assez grand.}$$

Ce qui donne (5.7) grâce à (5.11) et les propriétés de  $\beta$ . On en déduit alors de (5.5), (5.6), (5.7) et de (5.3) (cf [6]) que :

$$\delta^-(x) \leq w_\varepsilon(x) \leq \delta^+(x) \text{ p.p. } x \in \Omega \text{ i.e. } \delta^- \leq u_\varepsilon - \varphi \leq \delta^+ \Rightarrow \delta^- \leq u - \varphi \leq \delta^+ \text{ (car } u_\varepsilon \text{ converge dans } H^1(\Omega) \text{ faible)}$$

ce qui conduit à  $|\nabla u_\varepsilon(x)| \leq k\mu R^{-(\mu+1)} + |\nabla \varphi|_\infty \quad \forall x \in \Gamma$ .

### **Remarque 5.1:**

La première inégalité ci-dessus assure que  $u_\varepsilon$  appartient à  $L^\infty(\Omega)$  et que  $|u_\varepsilon|_\infty \leq C$  où  $C$  est une constante indépendante de  $\varepsilon$ .

### **Extension du résultat précédent dans le cas d'un opérateur particulier**

Dans le cas où  $a_{\alpha, \beta}(x, u) = \delta_{\alpha, \beta} a(u)$ , on donne une estimation du gradient de la solution au voisinage du bord sous des hypothèses moins restrictives sur  $f$ ,  $\varphi$  et  $a$ , à savoir :



$$a(s) \in C^1(\mathbb{R}) \text{ avec } 0 < \nu \leq a(s) \leq M \text{ pour tout } s \text{ de } \mathbb{R} \quad (5.13)$$

$$f \in L^p(\Omega), \varphi \in W^{2,p}(\Omega) \text{ avec } p > n \text{ et } \Phi \in W^{1,\infty}(\Omega) \quad (5.14)$$

En effet si on pose :

$$A(t) = \int_0^t a(s) ds \text{ et } A(u) = \bar{u}. \quad (5.4) \text{ peut alors s'écrire :}$$

$$-\Delta \bar{u}_\varepsilon + \frac{\beta}{\varepsilon} (A^{-1}(\bar{u}_\varepsilon) - \Phi) = f \text{ dans } \Omega \quad (5.15)$$

$$\bar{u}_\varepsilon = \bar{\varphi} \text{ sur } \Gamma$$

$$\text{De plus, en introduisant } w \text{ solution du problème de Dirichlet } -\Delta w = f \text{ dans } \Omega \quad (5.16)$$

$$w = \bar{\varphi} \text{ sur } \Gamma$$

$$\text{on remarque que } w_\varepsilon = \bar{u}_\varepsilon - w \text{ est solution du problème : } -\Delta w_\varepsilon + \frac{\beta}{\varepsilon} (A^{-1}(w_\varepsilon + w) - \Phi) = 0 \text{ dans } \Omega \quad (5.17)$$

$$w_\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma$$

On considère les fonctions  $\delta^-$  et  $\delta^+$  définies précédemment, ainsi (5.5) et (5.6) sont vérifiés et au lieu de (5.7) on va montrer que

$$-\Delta \delta^- + \frac{\beta}{\varepsilon} (A^{-1}(\delta^- + w) - \Phi) \leq 0 \leq -\Delta \delta^+ + \frac{\beta}{\varepsilon} (A^{-1}(\delta^+ + w) - \Phi) \text{ dans } \Omega \quad (5.18)$$

Pour ceci on remarque tout d'abord que grâce à (5.14), (5.16) et au fait que  $A$  est Lipschitzienne, on a  $\Phi, w \in W^{1,\infty}(\Omega)$ . On choisit alors au lieu de (5.10)  $k$  et  $\mu$  tels que l'on ait :

$$|\nabla \delta^+(x)| \geq k\mu D^{-(\mu+1)} = |\nabla(\bar{\Phi} - w)^+|_\infty \quad (5.19)$$

de plus, comme  $A$  est croissante, on a sur  $\Gamma$ ,  $\bar{\Phi} - w = \bar{\Phi} - \bar{\varphi} \leq 0$

$$\text{Ainsi on montre par un raisonnement similaire au précédent que } \delta^+ \geq \bar{\Phi} - w \text{ ou } A^{-1}(\delta^+ + w) \geq \bar{\Phi} \quad (5.20)$$

$$\text{Enfin par (5.9) (5.19) on a } -\Delta \delta^+ \geq k\mu(\mu+2-n)D^{-(\mu+2)} = \frac{|\nabla(\bar{\Phi} - w)^+|_\infty}{D}(\mu+2-n) \geq 0 \text{ pour } \mu \text{ assez grand.}$$

Ceci conduit à (5.18) grâce à (5.20) et aux propriétés de  $\beta$ .

D'autre part comme  $A^{-1}$  est croissante, l'opérateur  $u \rightarrow -\Delta u + \frac{\beta}{\varepsilon} (A^{-1}(u+w) - \Phi)$  est monotone.

Ce qui montre, en vertu de (5.6) et (5.18) que :

$\delta^- \leq w_\varepsilon \leq \delta^+$  dans  $\Omega$  et donc

$$|\nabla \bar{u}_\varepsilon(x)|, |\nabla \bar{u}_\varepsilon(x)| \leq k\mu R^{-(\mu+1)} + |\nabla w|_\infty \quad \forall x \in \Gamma$$

(On remarquera que la première inégalité entraîne  $|\bar{u}_\varepsilon|_\infty \leq C$  où  $C$  est une constante indépendante de  $\varepsilon$ ). Dans le cas ci-dessus on peut encore faire mieux et montrer :

Lemme 5.2 :

Soit  $u$  solution de (5.2) avec  $a_{\alpha,\beta}(x,u) = \delta_{\alpha\beta} a(u)$ . Alors sous les hypothèses (5.13) et (5.14) on a  $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ .

Démonstration:

En dérivant (5.15) par rapport à  $x_k$  ( $k=1, \dots, n$ ) et en notant  $\bar{u}_{\varepsilon,k} = D_k \bar{u}_\varepsilon$ , il vient

$$-\Delta \bar{u}_{\varepsilon,k} + \frac{\beta'}{\varepsilon} (A^{-1}(\bar{u}_\varepsilon) - \Phi) ((A^{-1})'(\bar{u}_\varepsilon) \bar{u}_{\varepsilon,k} - D_k \Phi) = D_k f \quad (5.21)$$

Soit  $B$  une constante majorant strictement  $|\nabla \bar{u}_\varepsilon|_\infty$  sur  $\Gamma$ . On pose  $T = \max(B, M|\nabla \Phi|_\infty)$  (cf(5.13)) et on désigne par :

$\Omega_1 = \{x \in \Omega / \bar{u}_{\varepsilon,k}(x) > T\}$ ,  $\Omega_2 = \{x \in \Omega / \bar{u}_{\varepsilon,k}(x) < -T\}$  et par  $v_1 = \bar{u}_{\varepsilon,k} - T$ ,  $v_2 = \bar{u}_{\varepsilon,k} + T$ . On a  $v_1 \geq 0$  et  $v_2 \leq 0$

respectivement p.p sur  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ .

De plus comme  $\beta'$  est  $\geq 0$  et  $(A^{-1})'(\bar{u}_{\varepsilon,k}) \bar{u}_{\varepsilon,k} - D_k \Phi = \frac{1}{a(u_\varepsilon)} \bar{u}_{\varepsilon,k} - D_k \Phi \geq 0$  dans  $\Omega_1$  et  $\leq 0$  dans  $\Omega_2$

l'expression (5.23) conduit alors à :

$$-\Delta v_1 \leq D_k f \quad \text{dans } \Omega_1 \quad (5.22)$$

$$-\Delta v_2 \geq D_k f \quad \text{dans } \Omega_2 \quad (5.23)$$

On applique alors le lemme de Stampacchia à  $v_1$  et à  $-v_2$  dont nous rappelons la partie utile:

Lemme:

Soit  $\theta$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ ,  $A$  un opérateur linéaire elliptique à coefficients bornés et  $f_i \in L^p(\theta)$ ,

$p \geq 2$  et  $i=1, \dots, n$ . Soit  $u \in H_0^1(\theta)$  vérifiant :

$$-Au \leq \sum_{i=1}^r D_i f \text{ dans } \theta$$

$$u \geq 0$$

alors si  $p > n$ , on a  $u \in L^\infty(\theta)$  et  $|u|_\infty \leq C \sum_{i=1}^r |f_i|_p$ .

Comme  $f \in L^p(\Omega)$ ,  $p > n$ , on a donc  $v_i \in L^\infty(\Omega_i)$  et  $|v_i|_{\infty, \Omega_i} \leq C |f|_\infty$  d'où  $|D_k \bar{u}_\varepsilon| \leq C$  sur  $\Omega$ .

Comme  $A$  est Lipschitzienne on a également  $|D_k u_\varepsilon|_\infty \leq \frac{C}{\nu}$  ce qui termine la démonstration du lemme puisque  $u_\varepsilon$  converge vers  $u$  dans  $H^1(\Omega)$  faible.

Revenons au système (5.1), la fonction  $\beta$  étant définie précédemment, on suppose que :

$\varphi^1 \geq \varphi^2 \geq \dots \geq \varphi^N$  et on considère le problème pénalisé correspondant :

$$-A_j(x, u_\varepsilon^j) u_\varepsilon^j - \frac{\beta}{\varepsilon} (u_\varepsilon^{j-1} - u_\varepsilon^j) + \frac{\beta}{\varepsilon} (u_\varepsilon^j - u_\varepsilon^{j+1}) = f_j \text{ dans } \Omega, j=1, \dots, N \quad (5.24)$$

$$u_\varepsilon^j = \varphi^j \text{ sur } \Gamma$$

Il est facile de voir qu'en utilisant les techniques de la partie 1, une telle solution  $u_\varepsilon = (u_\varepsilon^1, \dots, u_\varepsilon^N)$  existe.

De plus si  $\omega$  désigne le module de continuité des  $A_j$ , le problème (5.1) possède une unique solution pourvu que  $\int_0^{+\infty} \frac{ds}{\omega^2(s)} = +\infty$  (ce qui est le cas si l'on suppose (5.3) ou (5.13)).

De plus  $u_\varepsilon$  converge fortement dans  $(H^1(\Omega))^N$  vers  $u$  lorsque  $\varepsilon$  tends vers 0 et comme

précédemment il suffit de raisonner sur  $u_\varepsilon$ . On sera amené à faire les hypothèses suivantes:

$$\text{Dans le cas particulier où } a_{\alpha, \beta}^j(x, u) = \delta_{\alpha \beta} a_j(u) \text{ (} j=1, \dots, N \text{) on suppose}$$

$$a_j(s) \in C^1(\mathbb{R}), 0 < \nu \leq a_j(s) \leq M, f_j \in L^\infty(\Omega), \varphi^j \in W^{2,p}(\Omega) \text{ } p > n \text{ et } j=1, \dots, N \quad (5.25)$$

Introduisons des fonctions barrières pour le problème (5.24). Plus précisément définissons deux  $N$ -uplets :

$(\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_N)$  et  $(\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_N)$

$w_j$  étant solution de  $-A_j(x, w_j)w_j = f_j$  dans  $\Omega$ ,  $j=1, \dots, N$  (5.26)

$$w_j = \varphi^j \text{ sur } \Gamma$$

On pose  $\underline{w}_1 = w_1$  et pour  $j=2, \dots, N$ ,  $\underline{w}_j$  est solution du problème :

$$\langle -A_j(x, \underline{w}_j)\underline{w}_j, v - \underline{w}_j \rangle \geq \langle f_j, v - \underline{w}_j \rangle \quad \forall v \in K_j \quad (5.27)$$

$$K_j = \{ v \in H^1(\Omega) / v = \varphi^j \text{ sur } \Gamma \text{ et } v(x) \leq \underline{w}_{j-1}(x) \text{ p.p. dans } \Omega \}$$

On pose ensuite  $\bar{w}_N = w_N$  et pour  $j=N-1, N-2, \dots, 1$   $\bar{w}_j$  est solution de :

$$\langle -A_j(x, \bar{w}_j)\bar{w}_j, v - \bar{w}_j \rangle \geq \langle f_j, v - \bar{w}_j \rangle \quad \forall v \in \bar{K}_j \quad (5.28)$$

$$\bar{K}_j = \{ v \in H^1(\Omega) / v = \varphi^j \text{ sur } \Gamma \text{ et } v(x) \geq \bar{w}_{j+1}(x) \text{ p.p. dans } \Omega \}$$

Notons que dans le cas où (5.25) est vérifié, on a  $\underline{w}_j, w_j, \bar{w}_j \in W^{1,\infty}(\Omega)$ ,  $j=1, \dots, N$ .

#### Proposition:

Sous l'hypothèse (5.25), on a  $\underline{w}_j(x) \leq u_\varepsilon^j(x) \leq \bar{w}_j(x)$  p.p. dans  $\Omega$ . (5.29)

En particulier, on a  $\underline{w}_1(x) \leq u^1(x) \leq \bar{w}_1(x)$  et d'après le lemme (5.2), le gradient de  $u^1$  est borné sur  $\Gamma$

#### Preuve

Par (5.26) et les propriétés de  $\beta$ , on a  $-A_1(x, u_\varepsilon^1)u_\varepsilon^1 \geq f_1 = -A_1(x, \underline{w}_1)\underline{w}_1$ . Comme  $u_\varepsilon^1 = \underline{w}_1$  sur  $\Gamma$ , on en déduit alors en vertu de (5.25) que  $u_\varepsilon^1 \geq \underline{w}_1$  p.p. dans  $\Omega$ .

Supposons que  $u_\varepsilon^{j-1}(x) \geq \underline{w}_{j-1}(x)$  ( $\geq \underline{w}_j(x)$ ) p.p. dans  $\Omega$  (5.30)

Par (5.27) on a  $f_j \geq -A_j(x, \underline{w}_j)\underline{w}_j$  au sens des distributions

On en déduit alors d'après (5.30) et des propriétés de  $\beta$ , que :

$$-A_j(x, u_\varepsilon^j)u_\varepsilon^j - \frac{\beta}{\varepsilon}(u_\varepsilon^{j-1} - u_\varepsilon^j) + \frac{\beta}{\varepsilon}(u_\varepsilon^j - u_\varepsilon^{j+1}) = f_j \geq -A_j(x, \underline{w}_j)\underline{w}_j - \frac{\beta}{\varepsilon}(u_\varepsilon^{j-1} - \underline{w}_j) + \frac{\beta}{\varepsilon}(\underline{w}_j - u_\varepsilon^{j+1})$$

Comme  $u_\varepsilon^j = \underline{w}_j$  sur  $\Gamma$ , on en déduit par le principe de monotonie (cf partie 2) que  $u_\varepsilon^j \geq \underline{w}_j$  p.p. dans  $\Omega$  ce qui donne (5.29).

**BIBLIOGRAPHIE**

- [1] CHIPOT M. Variational Inequalities and Flow in Porous Media.  
Applied Mathematical Sciences n°: 52, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, Tokyo.  
(1984).
- [2] CHIPOT M. and VERGARA-CAFFARELLI G. The N-membranes Problem.  
Applied Mathematics and Optimization 13,p.231-249 , (1985)
- [3] GIAQUINTA M. Multiple Integrals in the Calculus of Variations and Nonlinear Elliptic Systems.  
Princeton University Press - Princeton, New-Jersey (1983).
- [4] LIONS J.L. Quelques méthodes de résolutions des problèmes aux limites non linéaires.  
Dunod-Gauthier-Villars, Paris (1969)
- [5] GILBARG, TRUDINGER N.S. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order .  
Springer-Verlag, New-York (1985).
- [6] MICHAILLE G. Inéquations variationnelles fortement non linéaires, comparaison des solutions et applications.  
Thèse de Doctorat, Univ. Metz (1988).
- [7] KINDERLEHRER D., STAMPACCHIA G. An Introduction to Variational Inequalities and their Applications.  
Academic Press, New-York (1980).