



**HAL**  
open science

# Simulation de la mise en forme à chaud par la méthode asymptotique numérique

Juliette Brunelot

► **To cite this version:**

Juliette Brunelot. Simulation de la mise en forme à chaud par la méthode asymptotique numérique. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université Paul Verlaine - Metz, 1999. Français. NNT : 1999METZ036S . tel-01775785

**HAL Id: tel-01775785**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01775785v1>**

Submitted on 24 Apr 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

b156399

S/172 99/36

**ISGMP****INSTITUT SUPERIEUR DE GENIE MECANIQUE  
ET PRODUCTIQUE****THESE**

Présentée à



UNIVERSITE DE METZ

PAR

**Juliette BRUNELOT****Pour l'obtention du grade de :  
DOCTEUR de L'UNIVERSITÉ de METZ****SPECIALITE : Sciences de l'ingénieur  
OPTION : Mécanique****Simulation de la mise en forme à chaud par la  
Méthode Asymptotique Numérique****Thèse dirigée par le professeur M. POTIER-FERRY et monsieur Hua Lei CAO,  
soutenue le 22 janvier 1999 devant le jury composé de messieurs :**

<b>J. L. CHENOT</b>	<i>Examineur</i>	Professeur à l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris - CEMEF
<b>B. COCHELIN</b>	<i>Rapporteur</i>	Professeur à l'Université de la Méditerranée - Ecole Supérieure de Mécanique de Marseille
<b>E. DI PASQUALE</b>	<i>Examineur</i>	Directeur de la société SIMTECH (SIMulation et TECHnologie)
<b>G. DUVAUT</b>	<i>Président</i>	Professeur, Membre de l'Académie des Sciences, Laboratoire de Mécanique, Modélisation et Calcul
<b>P. GRATACOS</b>	<i>Examineur</i>	Responsable à l'I.R.S.I.D. (Centre de recherche du Groupe USINOR)
<b>M. POTIER-FERRY</b>	<i>Directeur</i>	Professeur à l'Université de Metz, Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux - I.S.G.M.P.
<b>C. TEODOSIU</b>	<i>Rapporteur</i>	Directeur de Recherche C.N.R.S., Institut Galilée - Université de Paris XIII

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE DE METZ



Laboratoire de Physique et

ilcy, 57045 METZ Cédex 01

022 304543 5

S/Re 99/36

**ISGMP****INSTITUT SUPERIEUR DE GENIE MECANIQUE  
ET PRODUCTIQUE****THESE**

Présentée à



UNIVERSITE DE METZ

PAR

**Juliette BRUNELLOT****Pour l'obtention du grade de :  
DOCTEUR de L'UNIVERSITÉ de METZ****SPECIALITE : Sciences de l'ingénieur  
OPTION : Mécanique**

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv.	19990985
Cote	S/M3 99/36
Loc	Magasin

**Simulation de la mise en forme à chaud par la  
Méthode Asymptotique Numérique**Thèse dirigée par le professeur M. POTIER-FERRY et monsieur Hua Lei CAO,  
soutenue le 22 janvier 1999 devant le jury composé de messieurs :

<b>J. L. CHENOT</b>	<i>Examineur</i>	Professeur à l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris - CEMEF
<b>B. COCHELIN</b>	<i>Rapporteur</i>	Professeur à l'Université de la Méditerranée - Ecole Supérieure de Mécanique de Marseille
<b>E. DI PASQUALE</b>	<i>Examineur</i>	Directeur de la société SIMTECH (SIMulation et TECHnologie)
<b>G. DUVAUT</b>	<i>Président</i>	Professeur, Membre de l'Académie des Sciences, Laboratoire de Mécanique, Modélisation et Calcul
<b>P. GRATACOS</b>	<i>Examineur</i>	Responsable à l'I.R.S.I.D. (Centre de recherche du Groupe USINOR)
<b>M. POTIER-FERRY</b>	<i>Directeur</i>	Professeur à l'Université de Metz, Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux - I.S.G.M.P.
<b>C. TEODOSIU</b>	<i>Rapporteur</i>	Directeur de Recherche C.N.R.S., Institut Galilée - Université de Paris XIII

*Ce travail de recherche a été réalisé au Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux de l'Université de Metz sous la direction du professeur Michel Potier-Ferry et de monsieur Hua Lei Cao.*

*Je remercie monsieur Georges Dupaut pour m'avoir fait l'honneur de présider la soutenance de thèse, messieurs Bruno Cochelin et Christian Téodostu pour avoir accepté la lourde charge de rapporter ce travail, monsieur Jean-Loup Chenot pour avoir pris le temps d'examiner ce mémoire et d'assister à la soutenance, messieurs Edmondo Di Pasquale et Pascal Gratacos pour avoir apporté leurs points de vue d'industriels.*

*J'exprime mes plus vifs remerciements à messieurs Michel Potier-Ferry et Hua Lei Cao pour le temps qu'ils ont consacré à mon travail, pour leur patience et leur sympathie, qu'ils trouvent tous deux en ces quelques lignes ma profonde gratitude.*

*Un clin d'œil à mes amis qui ont su me laisser de ces années en leur compagnie de merveilleux souvenirs.*

*A ma Famille,*

*A Jean-Christophe,*

*Merci.*

# Sommaire

<b>Introduction générale</b>	1
<b>Chapitre I Formulation du problème viscoplastique incompressible pour la M.A.N.</b>	
<i>Introduction</i>	10
<i>I-1 Modèle rigide-viscoplastique</i>	11
I-1-a Loi de comportement	11
I-1-b Loi de comportement régularisée	14
<i>I-2 Formulation du problème viscoplastique</i>	14
I-2-a Equilibre et conditions aux limites	15
I-2-b Formulation variationnelle en vitesse	15
I-2-b Formulation variationnelle mixte en vitesse et pression	16
I-2-c Formulation pour la M.A.N.	17
I-2-d Chargement de type pression	20
<i>Conclusion</i>	21
<b>Chapitre II Une méthode de résolution : la Méthode Asymptotique Numérique</b>	
<i>Introduction</i>	22
<i>II-1 Principe de la méthode</i>	23
II-1-a Technique de perturbation	23
II-1-b Méthode des éléments finis	27
II-1-c Détermination de la solution	29
<i>II-2 Calcul d'une branche de solution complexe</i>	30
II-2-a Procédure de calcul d'un pas asymptotique numérique	31
II-2-b Principe de continuation	34
II-2-c Amélioration de la représentation analytique de la solution	37
<i>Conclusion</i>	39

## **Chapitre III Simulation du gonflement hydraulique**

<i>Introduction</i>	40
<i>III-1 Continuation asymptotique</i>	42
<i>III-2 La M.A.N.</i>	46
III-2-a Points forts de la M.A.N.	46
III-2-b Influence de l'ordre de troncature	50
III-2-c Représentations polynomiale et rationnelle de la solution	52
<i>III-3 Validation et étude de l'efficacité de la M.A.N.</i>	54
III-3-a Exemple 1	55
III-3-b Exemple 2	60
<i>III-4 Conditions de déformation plane</i>	66
<i>Conclusion</i>	68

## **Chapitre IV Formulation et résolution du problème de contact avec frottement**

<i>Introduction</i>	70
<i>IV-1 Contact avec frottement</i>	71
IV-1-a Conditions de contact	71
IV-1-b Lois de contact régularisées	73
IV-1-c Géométrie du contact	75
<i>IV-2 Formulation du problème de contact et résolution</i>	77
IV-2-a Formulation variationnelle	77
IV-2-b Méthode Asymptotique Numérique	83
<i>Conclusion</i>	87

<b>Chapitre V Simulation du poinçonnement hémisphérique</b>	
<i>Introduction</i>	88
<i>V-1 Analyse de la régularisation du contact</i>	90
V-1-a Influence du paramètre de régularisation	90
V-1-b Influence de la vitesse de l'outil	95
V-1-c Influence du maillage	101
<i>V-2 Validation et étude de l'efficacité de la M.A.N.</i>	105
V-2-a Exemple 1	107
V-2-b Exemple 2	110
<i>Conclusion</i>	114
<b>Conclusion générale</b>	115
<b>Références bibliographiques</b>	117

## **Annexes**

*Annexe A : Procédure itérative de résolution*

*Annexe B : Développement asymptotique du problème viscoplastique*

*Annexe C : Développement asymptotique du problème de contact avec frottement*

*Annexe D : Méthode des éléments finis*

## Introduction générale

### Les procédés de mise en forme

Les divers objets sortant des usines ont subi au cours de leur fabrication un ensemble d'opérations visant à mettre en forme, étape par étape, le produit. Ces opérations de mise en forme sont souvent complexes et supposent l'utilisation d'outils de formes variées dans des conditions opératoires différentes d'un procédé à l'autre. Ces procédés sont très divers et dépendent du matériau à mettre en forme et de l'utilisation qui sera faite ensuite du produit fini ou semi-fini. Nous avons essayé de présenter brièvement les procédés de mise en forme les plus couramment utilisés dont il est possible de trouver des descriptions plus détaillées dans les ouvrages [CNRS/1976] et [CNRS/1990].

Le laminage de produits plats est un procédé très répandu dans l'industrie métallurgique. Il consiste à réduire l'épaisseur du produit et se caractérise par un contact de roulement entre le produit laminé et l'outil. A chaud, le laminage permet d'ajuster les caractéristiques métallurgiques du produit, tandis que le laminage à froid est destiné à affiner les caractéristiques géométriques et mécaniques tout en conférant au produit laminé un état de surface.

La tôle ainsi laminée est ensuite soumise à différentes opérations dites de parachèvement comme l'emboutissage qui transforme la tôle fine plane en une surface non développable au moyen de presses mécaniques ou hydrauliques.

Le forgeage et le matriçage constituent une autre classe de procédés de mise en forme. Ils consistent en une ou des opérations de déformation à chaud à l'aide d'outils, ouverts lors du forgeage et fermés dans le cas du matriçage, agissant par chocs ou pression.

Ces différents procédés sont principalement utilisés dans l'industrie automobile, dans l'industrie des équipements ménagers, dans le bâtiment, ...

Les polymères remplissent des fonctions de plus en plus importantes comme matériaux de structure mais les procédés de mise en forme sont parfois très différents de ceux utilisés pour mettre en forme les métaux, [Rachik et al./1997] et [Bellet et al./1997].

Dans le procédé de thermoformage, une feuille de polymère, préalablement chauffée, est déformée au moyen d'une pression gazeuse et éventuellement d'un poinçon, de façon à lui donner la forme d'un moule. Ce procédé, appliqué à un grand nombre de polymères essentiellement des thermoplastiques, est employé dans la fabrication des emballages pour l'industrie alimentaire ou des pièces plus ou moins techniques comme les habillages intérieurs dans l'industrie automobile, les cuves d'appareils frigorifiques, les baignoires ...

Le procédé d'extrusion-soufflage consiste à souffler un polymère à l'état fondu après extrusion sous forme d'un tube cylindrique. Il est appliqué principalement à la fabrication de corps creux tels que bouteilles, flacons, réservoirs de carburant.

### **Intérêt de la simulation numérique**

Les simulations numériques en mise en forme des métaux et polymères prennent de plus en plus d'importance dans la phase de définition et de mise au point des gammes de fabrication des pièces, aussi bien au niveau pré-étude qu'au niveau vérification de la faisabilité du produit.

Dans cet objectif de nombreux codes de calcul numérique, par exemple PAMSTAMP, OPTRIS, FORGE, ABAQUS, MARC, ont été développés. Les progrès réalisés font que ces logiciels sont aujourd'hui des outils très largement utilisés dans l'industrie.

Les codes de calcul doivent encore progresser pour prendre en compte des comportements de plus en plus complexes et nécessitant des temps de calcul raisonnables. De plus ces codes de calcul doivent être automatiques et de plus en plus fiables afin d'être utilisés soit par des utilisateurs 'ignorants' leurs fonctionnements, soit par un autre logiciel pour traiter des problèmes inverses d'identification de paramètres ou d'optimisation de forme [Fourment/1996] et [Massoni/1996].

### **Modélisation de la mise en forme des matériaux**

Il est indispensable, pour assurer la validité des calculs numériques, d'introduire un comportement du matériau aussi réaliste que possible et prenant en compte l'ensemble des processus physiques susceptibles d'intervenir, [Lemaitre et al./1985] et [CNRS/1990].

En vue de la mise en forme des matériaux la caractéristique dominante du comportement est la plasticité, c'est à dire l'apparition au-delà d'un certain seuil de contrainte, d'une déformation plastique permanente, qui subsiste après relâchement des contraintes. Cette déformation est irréversible et se superpose à la déformation élastique qui, elle, est réversible, on parle alors d'élasto-plasticité. Dans certains cas, on se permet de négliger la déformation élastique : on parle alors de modèles rigides-plastiques qui ne sont raisonnables qu'aux grandes déformations et qui négligent le phénomène de retour élastique. Cette description est suffisante pour le comportement à froid car il ne dépend pas de la vitesse de déformation. Cela n'est plus vrai pour le comportement à chaud et il est nécessaire dans ce cas de prendre en compte la viscosité du matériau et d'introduire le temps et les vitesses dans la modélisation qui devient viscoplastique, [Zienkiewicz/1984] et [Wang/1984].

Dans la pratique, les problèmes de mise en forme incluent souvent des conditions aux limites de type contact unilatéral avec frottement, [Germain/1985], [Durville/1993], [Chenot/1993], [Hacquin/1996], [Hans Raj et al./1996], [Chenot/1997], [Fourment et al./1997]. En effet dans les opérations de mise en forme, le matériau se déplace plus ou moins par rapport aux outillages, ce qui génère des efforts de pression et de frottement entre produit et outil. Il est donc nécessaire de posséder un algorithme permettant de prendre en compte ces conditions. A la grande diversité des procédés et des produits fabriqués correspond une large gamme de conditions de contact et de frottement, les vitesses de glissement et les pressions de contact se situent dans une gamme étendue de valeurs d'un procédé à l'autre.

D'un point de vue numérique, la simulation des procédés de mise en forme est difficile à mettre en œuvre. En effet la non-linéarité matérielle (comportement) est combinée aux non-linéarités dues aux grands déplacements et aux grandes déformations et rotations auxquelles s'ajoutent les conditions de contact unilatéral avec frottement.

## **Méthodes de résolution**

La méthode des éléments finis a connu un essor considérable et est maintenant utilisée dans la plupart des méthodes numériques pour les sciences de l'ingénieur, elle permet d'effectuer une discrétisation spatiale du problème à résoudre. De nombreux ouvrages existent sur le sujet : [Dhatt et al./1984], [Bathe/1987], [Batoz et al./1990], [Imbert/1991], [Zienkiewicz et al./1991].

### **Classiquement ...**

La résolution numérique du problème étudié consiste à déterminer les différentes configurations de la structure au cours de ses déformations. Dans le domaine des procédés de mise en forme, l'approche la plus utilisée est l'approche incrémentale qui consiste à discrétiser le chargement en plusieurs incréments et à déterminer les configurations correspondant aux différents pas de chargement, [CNRS/1990].

Le schéma de résolution le plus utilisé pour résoudre ces problèmes non linéaires, discrétisés en temps et en espace, est celui de Newton-Raphson, basé sur la méthode de résolution de type Newton [Dhatt et al./1984], [Bathe/1987], [Zienkiewicz et al./1991]. Dans l'approche incrémentale, cette stratégie de résolution itérative, comme d'autres, posent des difficultés de convergence dues au problème du choix de l'intervalle entre deux incréments de chargement qu'il est difficile de rendre automatique. En pratique, cet intervalle est fixé par l'utilisateur ou tout au moins une gamme d'intervalles est donnée et c'est le programme qui détermine dans ce cas la taille optimale de l'intervalle à imposer pour une bonne convergence du processus numérique. L'utilisation de cette technique de résolution suppose que l'utilisateur soit averti et ait une bonne idée du résultat à obtenir.

De nombreuses équipes de recherche s'intéressent au développement d'outils numériques. Un des champs d'action est le développement de nouveaux algorithmes de calculs précis, robustes et fiables.

### **Nouvellement ...**

En rupture avec la méthode incrémentale classiquement utilisée, nous pouvons citer la méthode dite à "grands incréments de temps" introduite par Ladevèze en 1984, [Ladevèze, 1996]. Cette méthode n'est pas bâtie sur la notion d'incrément : il s'agit d'une méthode itérative, qui, à chaque itération, propose une approximation des variables en tout point de la structure et sur la totalité de l'intervalle d'étude en temps.

Les difficultés dues à l'utilisation des processus itératifs ont motivé le développement et l'utilisation de schémas non itératifs dits explicites. C'est ainsi que l'approche dynamique explicite, traditionnellement utilisée pour résoudre des problèmes d'impact, a été adoptée avec succès à la modélisation de l'emboutissage des tôles et au thermoformage des polymères, [Rachik et al./1997].

Depuis 1990, l'équipe du professeur Potier-Ferry s'attache à développer une méthode de résolution non itérative en associant une technique de perturbation à la méthode des éléments finis : c'est ce que l'on nomme la **Méthode Asymptotique Numérique** (M.A.N.).

L'utilisation de la technique de perturbation n'est pas nouvelle. Thompson et Walker [Thompson et al./1968], il y a trente ans, ont été les premiers à associer cette technique aux éléments finis pour l'étude de problèmes de mécanique des structures. D'autres travaux ont suivi : nous pouvons citer ceux de [Walker/1969] et [Yokoo et al./1976]. Certaines études, [Gallagher/1975] et [Riks/1984], ont mis en doute l'efficacité numérique d'une telle association.

Toutefois, après de premiers résultats concluant [Damil et al./1990], le professeur Potier-Ferry a poursuivi dans cette voie et l'on peut dire, aujourd'hui, que la M.A.N. est une méthode fiable et simple à utiliser dont l'efficacité à résoudre des problèmes fortement non linéaires a été prouvée aussi bien en mécanique du solide qu'en mécanique des fluides. Cette efficacité a été obtenue en formulant les problèmes étudiés dans un cadre quadratique et en régularisant toutes les singularités [Potier-Ferry et al./1997].

Le cadre quadratique est essentiel pour une bonne mise en œuvre de la méthode. Dans son travail [Zahrouni/1998], Zahrouni présente une étude originale qui lui a permis d'évaluer le coût d'une formulation quadratique et de montrer l'intérêt de cette dernière par rapport à une formulation cubique. Comme nous le verrons aux chapitres II et IV, lors de l'application de la M.A.N., la technique de perturbation fait intervenir des sommes : double sommation dans le cas d'une formulation cubique et simple sommation dans le cas d'une formulation quadratique. De toute évidence une simple sommation permet de gagner beaucoup en terme de temps de calcul, par contre, formuler le problème sous forme quadratique nécessite le stockage de variables supplémentaires et peut donc être coûteux en espace mémoire. Les tests qu'il a réalisés, dans son cadre d'étude, ont montré que la formulation cubique consomme 87% plus de temps que la formulation quadratique en économisant uniquement 15% de la taille mémoire totale. Bien entendu ces chiffres ne concernent que ce cadre d'étude mais nous n'en disposons pas d'autres pour les différents travaux réalisés sur la M.A.N.. Nous retiendrons juste le fait que la formulation quadratique permet un gain en temps de calcul considérable moyennant une augmentation de la l'espace mémoire nécessaire et nous l'appliquerons dans ce travail comme cela a toujours été fait dans tous les travaux sur la M.A.N..

Le tableau ci-dessous rassemble de manière thématique les études réalisées sur la M.A.N..

<b>Techniques de base de la M.A.N.</b>	
<b>Principe de continuation et détermination du domaine de validité</b>	[Cochelin/1994a],[Cochelin/1994b], [Cochelin et al./1994b]
<b>Régularisation des lois singulières</b>	[Braikat/1995] [Cadou/1997],[Potier-Ferry et al./1997] [Elhage-Hussein/1998]
<b>Représentation rationnelle de la solution : approximants de Padé</b>	[Azrar et al./1992] [Cochelin/1994a],[Cochelin et al./1994a] [Braikat/1995] [Najah/1996],[Tri/1996] [Azrar et al./1998b],[Najah et al./1998], [Elhage-Hussein /1998],[Elhage-Hussein et al./1998]
<b>Technique de bases réduites</b>	[Noor et al./1981] [Damil et al./1994],[Cochelin/1994a]
<b>Type de problèmes résolus</b>	
<b>Recherche de courbes <math>\tilde{u}(\lambda)</math> solutions d'un problème <math>F(\tilde{u}, \lambda) = 0</math></b>	[Cochelin/1994a],[Boutyour/1994] [Braikat/1995] [Tri/1996] [Cadou/1997] [Zahrouni/1998],[Elhage-Hussein/1998]
<b>Résolution d'un problème <math>F(\tilde{u}) = 0</math></b>	[Najah/1996] [Damil et al./1998]
<b>Détection des points de bifurcation et Calcul des branches bifurquées</b>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>en mécanique des structures</i></li> </ul>	[Damil et al./1990] [Azrar et al./1992] [Azrar et al./1993],[Boutyour et al./1993] [Boutyour/1994] [Jamal et al./1998],[Vannucci et al./1998], [Thieffry/1998]
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>en mécanique des fluides</i></li> </ul>	[Tri et al./1996] [Cadou/1997]
<b>Calcul de valeurs propres</b>	[Boutyour/1994],[Elhage-Hussein/1994] [Zitouni/1996] [Daya/1997]
<b>Problèmes instationnaires</b>	[De Oliviera/1997] [Cochelin et al./1998],[Jamal/1998]

<b>Structures élastiques</b>	
Plaques et coques en rotations modérées (statique)	[Azrar et al./1993]
Plaques et coques en rotations modérées (vibrations)	[Daya/1997] [Azrar et al./1998a],[Azrar et al./1998b], [Cochelin et al./1998]
Plaques et coques en grandes rotations	[Ammar/1996] [Zahrouni/1998],[Zahrouni et al/1998a], [Zahrouni et al/1998b]
<b>Structures anélastiques et contact</b>	
Plasticité en déformation totale	[Braikat/1995] [Braikat et al./1997] [Zahrouni/1998],[Zahrouni et al/1998a], [Zahrouni et al/1998b]
Contact sans frottement	[Elhage-Hussein/1998],Elhage-Hussein et al./1998]
<b>Mécanique des fluides</b>	
Navier-Stockes – Problèmes non linéaires stationnaires et instationnaires - bifurcations stationnaires et de Hopf Vers l'interaction fluides-structures	[Tri/1996],[Tri et al./1996],[Cadou et al./1996] [Cadou/1997] [De Oliviera/1997]
<b>Problèmes instationnaires</b>	
Résolution d'un problème discrétisé en temps <ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>Vibrations de plaques</i></li> <li>• <i>Equations de Navier-Stockes</i></li> <li>• <i>Problèmes d'ondes, équation Kortney De Vries</i></li> </ul>	[Cochelin et al./1998] [De Oliviera/1997] [Jamal/1998]
Résolution par développement en temps	[Fafard/1998]
Résolution par développement par rapport aux données initiales	[Mordane/1995]

Ces nombreuses études font que la M.A.N. est devenue une technique standard et efficace dans un grand nombre de cas. Au cours de ces travaux, il est apparu une grande robustesse en terme de suivi de courbe et d'adaptation automatique de la longueur des pas, ainsi qu'une économie en temps de calcul due au nombre peu important d'opérations sur les matrices tangentes des problèmes étudiés.

Pour convaincre de l'efficacité de la méthode, il était nécessaire de passer à des cas d'études plus complexes et plus proches des problèmes industriels où plusieurs non-linéarités (comportement, géométrie, contact) sont couplées. C'est l'objet de ce travail de thèse dans lequel nous avons choisi d'aborder la **simulation de la mise en forme à chaud**.

Nous utilisons un modèle **rigide-viscoplastique** qui prend en compte : d'une part les effets de viscosité dus aux températures élevées et d'autre part l'incompressibilité du matériau due aux effets élastiques négligeables. La formulation du problème étudié est donc dépendante du temps et l'inconnue principale est la vitesse. Afin de prendre en compte les effets de pression et de frottement intervenant à l'interface structure-outil lors de la mise en forme, nous introduisons des conditions unilatérales de **contact** et une loi régissant le **frottement**. Nous considérons le problème étudié dans le cadre quasi-statique dans lequel les effets d'inertie sont négligés.

## Contenu de la thèse

Le **Chapitre I** est consacré à la formulation du problème viscoplastique incompressible. Le choix d'une loi modélisant le comportement du matériau puis l'intégration de cette loi dans l'équation d'équilibre, en tenant compte des conditions aux limites imposées au système, conduisent à la formulation d'un principe variationnel. En vue d'utiliser la M.A.N. pour résoudre le problème ainsi défini, il est nécessaire de réécrire la formulation afin de la mettre dans un cadre quadratique.

Au cours du **Chapitre II** nous exposons le principe de la M.A.N. en l'appliquant à la résolution du problème viscoplastique incompressible formulé dans le premier chapitre. Nous appliquons successivement la technique de perturbation et la méthode des éléments finis. La combinaison de ces deux techniques, appelée M.A.N., permet l'obtention d'une solution analytique dont le domaine de validité est limité. La courbe de solution ainsi obtenue est polynomiale et il est possible d'en étendre le domaine de validité en utilisant une représentation rationnelle, basée sur les Approximants de Padé, de la solution, [Cochelin/1994a], [Cochelin et al./1994a], [Elhage-Hussein/1998]. Le calcul d'une branche de solution complexe est réalisé à partir d'un principe de continuation basé sur une détermination automatique des incréments de chargement, [Cochelin/1994a], [Cochelin/1994b].

Afin de valider la M.A.N. développée, le **Chapitre III** est consacré à la simulation numérique de problèmes tests. Le cas du gonflement hydraulique d'une tôle encastrée sur son pourtour est présenté. Les tests réalisés nous permettent d'illustrer la M.A.N. et de mettre en avant ses points forts, notamment, par comparaison avec la méthode de Newton-Raphson dont la procédure est rappelée en **Annexe A**.

La résolution par la M.A.N. du problème viscoplastique incompressible étant validée, il est intéressant de compliquer quelque peu le problème en y introduisant des conditions unilatérales de contact et une loi de frottement. C'est l'objet du **Chapitre IV**. Partant des travaux d'Elhage-Hussein [Elhage-Hussein/1998] qui a proposé de traiter le contact unilatéral par introduction d'une loi régularisée dans le cas de structures élastiques, nous étendons cette approche à l'étude de structures viscoplastiques dans des problèmes de contact faisant intervenir du frottement.

Dans le **Chapitre V**, nous présentons la simulation numérique du poinçonnement hémisphérique de tôles viscoplastiques. Les tests réalisés nous permettent de valider les choix effectués pour la régularisation du contact et d'illustrer l'efficacité de la M.A.N., par comparaison à la méthode de Newton-Raphson, pour résoudre les problèmes combinant à la fois la non-linéarité matérielle et la non-linéarité due au contact.

# Chapitre I

## Formulation du problème viscoplastique incompressible pour la M.A.N.

<i>Introduction</i>	10
<i>I-1 Modèle rigide-viscoplastique</i>	11
I-1-a Loi de comportement	11
I-1-b Loi de comportement régularisée	14
<i>I-2 Formulation du problème viscoplastique</i>	14
I-2-a Equilibre et conditions aux limites	15
I-2-b Formulation variationnelle en vitesse	15
I-2-b Formulation variationnelle mixte en vitesse et pression	16
I-2-c Formulation pour la M.A.N.	17
I-2-d Chargement de type pression	20
<i>Conclusion</i>	21

## Introduction

L'objectif de ce chapitre est de formuler le problème à résoudre : d'une part par le choix d'un modèle de comportement et d'autre part par l'écriture du principe variationnel qui lui est associé.

Le formage nécessite de grandes déformations effectuées à des vitesses relativement élevées et les contraintes nécessaires pour effectuer ces déformations à chaud dépendent de l'évolution au cours du temps de la température, de la déformation et de la vitesse de déformation. L'approximation rigide-viscoplastique simplifie notablement le problème de la prise en compte du comportement matériel et, comme nous l'avons vu dans l'introduction générale, cette approximation peut être utilisée avec intérêt dans les problèmes de mise en forme à chaud. Dans la première partie de ce chapitre, nous définissons les différentes relations intervenant dans le modèle de comportement rigide-viscoplastique.

La résolution de l'équation d'équilibre, en tenant compte du comportement et des conditions aux limites, est réalisée à partir d'une formulation variationnelle découlant de l'existence d'un potentiel lié au comportement [Germain/1985]. Au cours du chargement, le solide passe par une infinité de configurations et la résolution du problème mécanique consiste à déterminer ces différentes configurations successives qui représentent l'état du solide au cours de son histoire. Dans la seconde partie de ce chapitre, nous nous attachons à écrire le principe variationnel, ce principe est formulé dans un cadre quadratique de manière à pouvoir ensuite utiliser la M.A.N. pour résoudre le problème mécanique étudié.

## I-1 Modèle rigide-viscoplastique

L'influence de l'histoire thermomécanique sur le comportement du matériau est traduite par la dépendance de la loi de comportement en fonction de paramètres microstructuraux. Chacun de ces paramètres influence le comportement macroscopique à des degrés divers. La plupart se traduisent par des évolutions d'écrouissage (évolution au cours de la déformation du seuil de plasticité) et d'anisotropie. Toutefois, le modèle d'écrouissage isotrope constitue le modèle de base en mise en forme, il est à la fois le plus simple et le plus couramment utilisé, c'est aussi celui que nous choisissons.

En général, le comportement viscoplastique est modélisé par une loi de Norton-Hoff, [Germain/1985], [Chenot,1993], [Hacquain/1996], [Hans Raj et al./1996], [Chenot/1997], [Fourment et al./1997]. Cette loi, couramment employée pour les métaux, est d'ailleurs implantée dans le code de calcul FORGE®.

Le modèle de G'Sell & Jonas [G'Sell/1995], exprimé sous forme d'une loi exponentielle, rend bien compte du comportement de la plupart des polymères. En fait, cette loi rhéologique présente une analogie avec la loi de Norton-Hoff et cette similitude permet, en général, l'utilisation des codes éléments finis, à l'origine conçus pour les métaux, dans l'étude des polymères, [Haudin et al./1996]. Il a d'ailleurs été montré que les lois phénoménologiques employées pour les matériaux métalliques sont transposables et utilisables pour les matériaux polymères, [Chaboche/1995].

C'est pourquoi nous faisons le choix d'introduire dans notre formulation la loi de comportement de Norton-Hoff.

### I-1-a Loi de comportement

Les matériaux formés à chaud, viscoplastiques et incompressibles, ont un comportement qui découle d'un potentiel  $\Phi$  appelé potentiel viscoplastique, fonction isotrope de la vitesse de déformation :

$$\Phi = K \frac{\bar{D}^{m+1}}{m+1} \quad (I-1)$$

$K$  est la consistance du matériau et  $m$  est le coefficient de sensibilité à la vitesse de déformation.

La loi de comportement dérive directement de ce potentiel et s'exprime par une relation non linéaire entre les tenseurs déviateurs des contraintes et des taux de déformation, cette loi est appelée loi de Norton-Hoff :

$$\boldsymbol{\sigma}' = K \bar{D}^{m-1} \mathbf{D}' \quad (\text{I-2})$$

$K$  et  $m$  dépendent de la nature du matériau et des conditions thermomécaniques du procédé : l'écoulement et la température. Dans ce travail nous supposons que la déformation est isotherme et par conséquent nous ne considérons pas l'évolution de la température.

Un modèle d'écoulement, couramment utilisé [Wang/1984], [Mesrar/1991], [Chenot/1997], suppose que le coefficient  $K$  dépend de la déformation plastique cumulée sous forme de loi puissance où  $n$  est le coefficient d'écoulement :

$$K(\bar{\varepsilon}) = \frac{2}{3} k (\alpha + \bar{\varepsilon})^n \quad (\text{I-3})$$

$\alpha$  est une constante du matériau.

Le tenseur déviateur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}'$  est défini par :

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} + p \mathbf{I} \quad (\text{I-4})$$

où  $\boldsymbol{\sigma}$  est le tenseur des contraintes de Cauchy et  $p$  la contrainte volumique ou pression.

Le tenseur des taux de déformation est décrit à partir du champ de vitesse en introduisant  $\nabla_x \mathbf{v}$  le gradient eulérien des vitesses :

$$\mathbf{D} = \{\nabla_x \mathbf{v}\}_{\text{sym.}} = \frac{1}{2} \{\nabla_x \mathbf{v} + {}^T \nabla_x \mathbf{v}\} \quad (\text{I-5})$$

Et le tenseur déviateur des taux de déformation est défini par la relation :

$$\mathbf{D}' = \mathbf{D} - \frac{\text{Tr}(\mathbf{D})}{3} \mathbf{I} \quad (\text{I-6})$$

Le comportement viscoplastique est donc décrit par la loi :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}' = C \mathbf{D}' \\ C = \frac{2}{3} k (\alpha + \bar{\varepsilon})^n \bar{D}^{m-1} \end{cases} \quad (\text{I-7})$$

On définit la déformation équivalente (ou déformation plastique cumulée) et la vitesse de déformation équivalente par les expressions suivantes :

$$\begin{cases} \frac{d\bar{\epsilon}}{dt} = \bar{D} \\ \bar{D} = \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{D}' : \mathbf{D}'} \end{cases} \quad (\text{I-8})$$

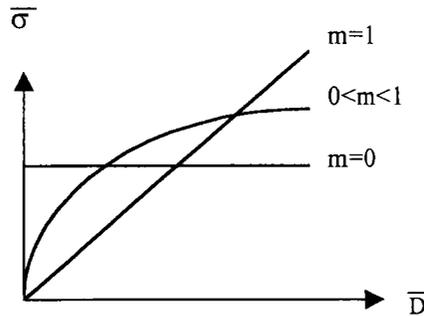
La contrainte d'écoulement est associée par le critère de Von-Mises au deuxième invariant du tenseur déviateur des contraintes :

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}'} \quad (\text{I-9})$$

Il vient donc :

$$\bar{\sigma} = k (\alpha + \bar{\epsilon})^n \bar{D}^m \quad (\text{I-10})$$

On retrouve ainsi l'expression unidimensionnelle de Norton entre les invariants des tenseurs. L'influence de  $m$  sur la contrainte d'écoulement est traduite par la figure ci-dessous :



Le comportement rigide-plastique, pour  $m=0$ , est très fortement non linéaire et représente le cas limite de cette étude où la loi de Norton-Hoff dégénère et la fonction  $\bar{\sigma} = \hat{\sigma}(\bar{D})$  est indéterminée à l'origine.

Le champ de déplacement ou encore le champ des positions est relié naturellement au champ de vitesse par une équation différentielle :

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \quad (\text{I-11})$$

L'incompressibilité du matériau est traduite par l'équation :

$$\text{Tr}(\mathbf{D}) = 0 \quad (\text{I-12})$$

### **I-1-b Loi de comportement régularisée**

La loi de Norton-Hoff est une loi puissance et dès que le coefficient  $m$  est différent de la valeur un, la loi n'est pas indéfiniment dérivable en zéro. Cette irrégularité est d'autant plus forte que  $m$  est proche de zéro. Il est donc nécessaire de régulariser la loi de comportement, [Potier-Ferry et al./1997], en introduisant un petit paramètre dans la définition de la vitesse de déformation équivalente (I-8), il vient :

$$\bar{D} = \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{D}' : \mathbf{D}' + \left( \gamma \frac{V_c}{L_c} \right)^2} \quad (\text{I-13})$$

où  $\gamma$  est un petit paramètre sans dimension,  $V_c$  et  $L_c$  sont une vitesse et une longueur caractéristiques du problème étudié.

On retrouve ce type de régularisation dans les travaux sur la M.A.N. [Cadou/1997], [Zahrouni/1998], ou encore dans ceux de [Germain/1985], [Hacquin/1996].

## **I-2 Formulation du problème viscoplastique**

La résolution d'un problème mécanique passe par l'écriture du principe variationnel qui lui est associé. L'utilisation, par la suite, de la M.A.N. pour résoudre le problème, nous oblige à formuler ce principe sous une forme particulière.

Une procédure asymptotique consiste à chercher une branche solution et non un point en équilibre sur cette branche comme c'est le cas dans toute procédure itérative ; il existe par conséquent un nombre illimité de configurations courantes inconnues. Pour cette raison, il est nécessaire d'écrire le principe variationnel sur une configuration fixe de référence.

De plus dans cette procédure de résolution, comme nous l'avons fait remarquer dans l'introduction générale, formuler le problème à résoudre dans un cadre quadratique permet non seulement d'en simplifier l'écriture mais aussi de minimiser les calculs et donc d'économiser du temps de calcul.

### I-2-a Equilibre et conditions aux limites

Dans cette étude nous considérons un matériau viscoplastique incompressible occupant un domaine  $\Omega$  de frontière  $\partial\Omega$ . Nous supposons que le domaine  $\Omega$  est soumis à des efforts extérieurs donnés sur une partie  $\partial\Omega_f$  et à des vitesses imposées nulles sur une partie  $\partial\Omega_v$ .

En considérant que les forces de volume et d'inertie sont négligeables, l'équilibre s'écrit :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) = 0 & \text{sur } \Omega \\ \mathbf{v} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_v \\ \operatorname{Tr}(\mathbf{D}) = 0 & \text{sur } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \lambda(t) \mathcal{F}(\mathbf{x}) & \text{sur } \partial\Omega_f \end{cases} \quad (\text{I-14})$$

où  $\lambda(t)$  est un paramètre de charge fonction du temps.

### I-2-b Formulation variationnelle en vitesse

Soit l'ensemble  $CA_{inc}$  défini par :

$$CA_{inc} = \{ \mathbf{v} / \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_v \text{ et } \operatorname{Tr}(\mathbf{D}) = 0 \text{ sur } \Omega \}$$

La forme variationnelle associée aux équations d'équilibre (I-14), en tenant compte de la loi de comportement, s'exprime par :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}'(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \mathbf{v}) : \delta \mathbf{D} \, d\Omega = \lambda(t) \int_{\partial\Omega_f} \mathcal{F}(\mathbf{x}) \delta \mathbf{v} \, dS \\ \mathbf{v} \in CA_{inc} \text{ et } \forall \delta \mathbf{v} \in CA_{inc} \end{cases} \quad (\text{I-15})$$

Il faut bien évidemment compléter cette formulation par les relations de comportement  $\boldsymbol{\sigma}' = \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \mathbf{v})$  et les relations géométriques et cinématiques.

Les variables qui déterminent une configuration donnée, peuvent être explicitées dans plusieurs types de repères : liés à une configuration de référence ou liés à la configuration courante.

Si la déformation du solide est suffisamment petite, les configurations courante et initiale sont pratiquement les mêmes. Cependant en grandes déformations, ces deux configurations peuvent être très différentes et la configuration courante devient alors une inconnue du problème. On comprend donc l'intérêt d'écrire la formulation dans une configuration de référence, la formulation est alors dite lagrangienne. Dans la partie numérique de ce travail, nous

choisirons de prendre la configuration au début du pas de calcul comme configuration de référence. La formulation (I-15) est alors réécrite à chaque pas et on parle de formulation lagrangienne réactualisée par opposition à la formulation lagrangienne totale dans laquelle la configuration de référence est la configuration initiale.

La transformation géométrique est caractérisée par le tenseur gradient de la transformation Lagrange-Euler noté  $\mathbf{F}$ .

En tenant compte du fait que  $\sigma$  est un tenseur symétrique et que :

$$(\nabla_{\mathbf{x}} \bullet) = (\nabla_{\mathbf{X}} \bullet) \cdot \mathbf{f} \quad \text{avec} \quad \mathbf{f} = \mathbf{F}^{-1}$$

(où  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{X}$  représentent les vecteurs positions, respectivement sur la configuration courante et sur la configuration de référence), la formulation variationnelle se réécrit sur la configuration de référence de la manière suivante, compte tenu de l'incompressibilité :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_0} \sigma'(\bar{\varepsilon}, \mathbf{v}) : (\nabla_{\mathbf{X}} \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}) d\Omega_0 = \lambda(t) \int_{\partial\Omega_0} \mathcal{F}_0(\mathbf{x}) \delta \mathbf{v} dS_0 \\ \mathbf{v} \in \text{CA}_{inc} \quad \text{et} \quad \forall \delta \mathbf{v} \in \text{CA}_{inc} \end{array} \right. \quad (\text{I-16})$$

Le vecteur force surfacique  $\mathcal{F}_0$  est bien sûr différent de  $\mathcal{F}$  qui apparaît dans l'expression (I-15) et il sera précisé en **I-2-d** pour le chargement considéré ici.

Dans ce qui suit, nous notons :

$$\nabla_{\mathbf{X}} \bullet = \nabla \bullet$$

### **I-2-b Formulation variationnelle mixte en vitesse et pression**

Les problèmes numériques liés à l'incompressibilité proviennent du fait qu'il n'est pas a priori évident de construire des champs de vitesses vérifiant la relation d'incompressibilité (I-12). Mais il est possible de relaxer la condition d'incompressibilité pour avoir une formulation mixte en vitesse  $\mathbf{v}$  et pression  $p$ . La pression  $p$ , appelée aussi contrainte volumique, est séparée du champ de contraintes total et traitée comme une variable indépendante.

Il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_0} \sigma'(\bar{\epsilon}, \mathbf{v}) : (\nabla_X \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}) d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} p \operatorname{Tr}(\nabla \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}) d\Omega_0 = \lambda(t) \int_{\partial\Omega_{or}} \mathcal{F}_0(\mathbf{x}) \delta \mathbf{v} dS_0 \\ \int_{\Omega_0} \operatorname{Tr}(\nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}) \delta p d\Omega_0 = 0 \\ \mathbf{v} \in CA \quad \text{et} \quad \forall \delta \mathbf{v} \in CA, \forall \delta p \end{array} \right. \quad (\text{I-17})$$

avec  $CA = \{ \mathbf{v} / \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_v \}$

Afin de satisfaire numériquement la condition d'incompressibilité, on introduit en général, [Germain/1985], [Chenot/1993], [Hans Raj/1996], [Hacquin/1996], un terme de pression pénalisé par un coefficient noté  $C_{pén}$ , très grand que nous préciserons un peu plus loin. Cela signifie que la condition d'incompressibilité (I-12) est remplacée par une sorte de loi visqueuse :

$$p = -C_{pén} \operatorname{Tr}(\mathbf{D}) \quad (\text{I-18})$$

L'évolution du matériau n'est alors plus incompressible et il faut modifier les deux équations (I-17) et introduire une nouvelle variable  $J$  définie par :

$$J = \det(\mathbf{F}) \quad \text{ou encore} \quad \dot{J} = J \operatorname{Tr}(\mathbf{D}) \quad (\text{I-19})$$

En effet, lorsque le matériau est incompressible, on a :  $J = 1$ .

La formulation variationnelle est alors modifiée de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_0} J \sigma'(\bar{\epsilon}, \mathbf{v}) : (\nabla_X \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}) d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} J p \operatorname{Tr}(\nabla \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}) d\Omega_0 = \lambda(t) \int_{\partial\Omega_{or}} \mathcal{F}_0(\mathbf{x}) \delta \mathbf{v} dS_0 \\ \int_{\Omega_0} J \left[ \operatorname{Tr}(\nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}) + \frac{p}{C_{pén}} \right] \delta p d\Omega_0 = 0 \\ \mathbf{v} \in CA \quad \text{et} \quad \forall \delta \mathbf{v} \in CA_{inc}, \forall \delta p \end{array} \right. \quad (\text{I-20})$$

### I-2-c Formulation pour la M.A.N.

Il est plus facile et plus économique d'appliquer la procédure asymptotique dans un cadre quadratique [Zahrouni/1998]. Pour ce faire, nous introduisons quelques variables supplémentaires intermédiaires et nous transformons les relations puissances introduites par la loi de comportement [Potier-Ferry/1997].

L'ensemble des variables supplémentaires qui seront introduites est noté  $(\bullet)_v$ . Soit  $\Lambda$  l'ensemble des variables intervenant dans la formulation :

$$\Lambda = \{ \mathbf{v}, \bar{D}, \mathbf{x}, \bar{\epsilon}, p, J, \mathbf{L}, \mathbf{f}, \boldsymbol{\sigma}', \mathbf{D}, \mathbf{D}', (A, C, H, Q)_v \} \quad (\text{I-21})$$

◆ **Comportement du matériau :**

$$\boldsymbol{\sigma}' = C(\bar{\epsilon}, \mathbf{D}') \mathbf{D}' \quad (\text{I-22})$$

La viscosité du matériau (I-7) est fonction de la déformation équivalente et de la vitesse de déformation. Cette fonction peut être mise sous la forme d'une relation quadratique en introduisant deux nouvelles variables scalaires notées H et Q :

$$\left\{ \begin{array}{l} C = \frac{2}{3} k H Q \\ \text{avec} \\ H = (\alpha + \bar{\epsilon})^n \\ Q = \bar{D}^{m-1} \\ \text{et} \\ \bar{D}^2 = \frac{2}{3} \mathbf{D}' : \mathbf{D}' + \left( \gamma \frac{V_c}{L_c} \right)^2 \end{array} \right. \quad (\text{I-23})$$

Les quantités H et Q sont définies par des relations puissances qui ne sont pas quadratiques. Toutefois la fonction  $y = x^n$  peut être réécrite sous une forme différentielle équivalente  $x dy = n y dx$  qui est quadratique par rapport aux variables x et y. Les deux quantités H et Q sont donc définies par les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\alpha + \bar{\epsilon}) d H = n H d \bar{\epsilon} \\ \text{et} \\ \bar{D} d Q = (m - 1) Q d \bar{D} \end{array} \right. \quad (\text{I-24})$$

◆ **Equations différentielles :**

L'aspect incrémental du problème étudié apparaît sous forme d'équations différentielles par rapport au temps qui sont quadratiques :

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v} & \text{et} & \frac{d\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}{dt} = \bar{\mathbf{D}} \\ \frac{dJ}{dt} = J \text{Tr}(\mathbf{D}) \end{cases} \quad (\text{I-25})$$

◆ **Relations géométriques et cinématiques :**

Le gradient inverse de la transformation, le gradient de la vitesse et les tenseurs des taux de déformations sont définis par des équations naturellement linéaires ou quadratiques :

$$\begin{cases} \mathbf{f} = (\nabla\mathbf{x})^{-1} & \text{et} & \mathbf{L} = \nabla\mathbf{v} \\ \mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L}\mathbf{f} + {}^t(\mathbf{L}\mathbf{f})) & \text{et} & \mathbf{D}' = \mathbf{D} - \frac{\text{Tr}(\mathbf{D})}{3} \mathbf{I} \end{cases} \quad (\text{I-26})$$

Nous introduisons la variable  $A$  définie par la relation quadratique :

$$\mathbf{A} = J {}^t\mathbf{f} \quad (\text{I-27})$$

◆ **Equations de vitesses et pression :**

Tenant compte des nouvelles variables introduites  $(\bullet)_v$ , l'équation (I-20) peut être reformulée à l'aide d'un opérateur quadratique  $\mathbf{Q}_0(\bullet, \bullet)$ . Le problème d'écoulement viscoplastique s'écrit alors :

$$\mathbf{Q}_0(\Lambda, \Lambda) = \lambda(t) \mathcal{F}_0(\mathbf{x}) \quad (\text{I-28})$$

avec :

$$\begin{aligned} \left\langle \mathbf{Q}_0(\Lambda, \Lambda), \begin{pmatrix} \delta\mathbf{v} \\ \delta p \end{pmatrix} \right\rangle &= \int_{\Omega_0} \mathbf{A} \boldsymbol{\sigma}'(\mathbf{C}, \mathbf{D}') : (\delta\mathbf{L}) d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} \mathbf{A} p \text{Tr}(\delta\mathbf{L}) d\Omega_0 \\ &\quad - \int_{\Omega_0} \left[ \mathbf{A} \text{Tr}(\mathbf{L}) + J \frac{p}{C_{\text{pén}}} \right] \delta p d\Omega_0 \end{aligned} \quad (\text{I-29})$$

et

$$\left\langle \mathcal{F}_0, \begin{pmatrix} \delta\mathbf{v} \\ \delta p \end{pmatrix} \right\rangle = \int_{\Omega_0} \mathcal{F}_0(\mathbf{x}) \delta\mathbf{v} dS_0 \quad (\text{I-30})$$

### I-2-d Chargement de type pression

Nous avons choisi de soumettre la structure à un chargement de type pression hydrostatique.

Au cours du temps la structure se déforme et le chargement reste normal à la surface chargée. Ainsi,  $\dot{p}^d$  étant une vitesse de pression, nous définissons localement la pression imposée :

$$\mathbf{P} = -\lambda(t) * \dot{p}^d \mathbf{n}$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale extérieure à l'élément de surface déformé et le paramètre de chargement  $\lambda(t)$  est simplement identifié au temps  $t$ . Il s'agit donc d'un chargement croissant proportionnellement au temps.

Dans le passage Euler-Lagrange, on a :

$$\mathbf{n} dS = J {}^t\mathbf{f} \mathbf{n}_0 dS_0$$

où  $\mathbf{n}_0$  est la normale extérieure définie sur la configuration de référence.

Ainsi nous pouvons écrire :

$$\mathcal{F}_0(\mathbf{x}) = - \dot{p}^d \mathbf{A} \mathbf{n}_0 \tag{I-31}$$

## Conclusion

Dans ce chapitre nous nous sommes attachés à définir la formulation du problème viscoplastique incompressible.

Le principe variationnel a été écrit sur une configuration de référence et l'aspect incrémental du problème à résoudre apparaît sous forme de deux équations différentielles dont l'intégration donne l'évolution de la géométrie et la déformation plastique cumulée. Les inconnues variationnelles sont les champs de vitesse et de pression, et le déviateur des contraintes résulte directement du champ de vitesse. L'incompressibilité du matériau est traitée par une méthode de pénalisation.

La procédure incrémentale, de type lagrangienne réactualisée, ainsi formulée permet d'étudier le problème de la manière suivante :

- durant chaque incrément de charge ou de temps, toutes les variables sont définies par rapport à l'état du système, en équilibre, au début de l'incrément,
- à la fin de chaque incrément, les variables sont actualisées sur la nouvelle configuration en équilibre.

En vue d'appliquer la M.A.N., le système à résoudre a été formulé dans un cadre quadratique, en introduisant quelques variables supplémentaires et en différenciant les lois puissances, de manière à en simplifier le plus possible l'écriture et à économiser du temps de calcul.

Le comportement viscoplastique, introduit par l'intermédiaire de la loi de Norton-Hoff, fait de ce problème mécanique à étudier un problème fortement non linéaire. Naturellement, la résolution exacte des équations est impossible et l'on est conduit à rechercher des approximations de la solution. Dans le cadre de ce travail, nous proposons d'utiliser la M.A.N..

## Chapitre II

### Une méthode de résolution : la Méthode Asymptotique Numérique

<i>Introduction</i>	22
<i>II-1 Principe de la méthode</i>	23
II-1-a Technique de perturbation	23
II-1-b Méthode des éléments finis	27
II-1-c Détermination de la solution	29
<i>II-2 Calcul d'une branche de solution complexe</i>	30
II-2-a Procédure de calcul d'un pas asymptotique numérique	31
II-2-b Principe de continuation	34
II-2-c Amélioration de la représentation analytique de la solution	37
<i>Conclusion</i>	39

## Introduction

Nous proposons d'utiliser la M.A.N. pour résoudre la formulation variationnelle en vitesse et pression, écrite sur une configuration de référence et formulée dans un cadre quadratique, section *I-2-c*. Dans ce chapitre, nous rappelons les principes de base de la méthode en les appliquant au problème viscoplastique incompressible que nous cherchons à résoudre.

Dans une première partie, nous décrivons le principe de la M.A.N.. Cette méthode consiste à combiner deux techniques : la technique de perturbation et la méthode des éléments finis. Le problème formulé dans la section *I-2-c* est ainsi transformé et peut être résolu simplement.

La résolution du problème conduit à une solution dont le domaine de validité est limité. Afin de déterminer entièrement une branche de solution complexe, il est nécessaire de définir un principe de continuation qui permet alors de calculer la solution pas à pas. C'est l'objet de la seconde partie.

## II-1 Principe de la méthode

Dans la M.A.N., la technique de perturbation et la méthode des éléments finis sont appliquées successivement.

Dans une première étape, les variables du problème sont développées sous forme de séries entières en fonction d'un paramètre puis condensées dans la formulation variationnelle. Le système, initialement non linéaire, est ainsi transformé en un ensemble de systèmes linéaires à résoudre : c'est la technique de perturbation, [Koiter/1945], [Hangai et al./1972].

Puis, dans une seconde étape, nous effectuons une discrétisation spatiale de ces systèmes linéaires par la méthode des éléments finis, [Dhatt et al./1984], [Bathe/1987], [Batoz et al./1990], [Imbert/1991], [Zienkiewicz et al./1991]. Cette méthode est très couramment utilisée en simulation numérique, elle consiste à choisir une approximation nodale des inconnues variationnelles.

### II-1-a Technique de perturbation

#### Développements asymptotiques

La technique de perturbation consiste à chercher les inconnues du problème sous forme de développements asymptotiques au voisinage d'une solution initiale connue que nous notons  $\Lambda(0)$ .

Le problème à résoudre, décrit dans la section **I-2-c**, nous montre qu'un développement par rapport au temps est naturel. Nous introduisons un paramètre  $\tau$  qui représente la différence de temps entre l'instant courant  $t$  et l'instant  $t_0$  au début de l'incrément de chargement. Le paramètre de charge, que nous avons identifié au temps (**I-2-d**), est donc défini par  $\lambda(t) = t_0 + \tau$ .

Les variables du problème viscoplastique  $\Lambda = \{ \mathbf{v}, \bar{\mathbf{D}}, \mathbf{x}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, p, J, \mathbf{L}, \mathbf{f}, \boldsymbol{\sigma}', \mathbf{D}, \mathbf{D}', (\mathbf{A}, C, H, Q)_v \}$  sont ainsi développées en séries entières fonction de  $\tau$ . Nous notons  $N$  l'ordre de troncature de l'approximation polynomiale, il vient :

$$\Lambda = \Lambda(0) + \tau \Lambda(1) + \dots + \tau^i \Lambda(i) + \dots + \tau^N \Lambda(N) \quad (\text{II-1})$$

Il ne s'agit plus de déterminer un seul ensemble  $\Lambda$  d'inconnues mais plusieurs ensembles  $\Lambda(i)$  d'inconnues.

### Condensation des variables

Nous commençons par introduire ces développements asymptotiques dans les différentes relations définissant les variables introduites dans la section I-2-c.

D'une manière générale, les relations étant quadratiques et donc de la forme  $C = A * B$ , il est simple de déterminer les termes en puissance de la série  $C$  à partir des développements de  $A$  et de  $B$ . En effet, si on introduit les développements en série des variables dans la relation quadratique, il vient :

$$C(0) + \tau C(1) + \dots + \tau^i C(i) + \dots = A(0) * B(0) + \tau (A(0) * B(1) + A(1) * B(0)) + \dots + \tau^i \sum_{r=0}^{r=i} A(r) * B(i-r) + \dots$$

Cette égalité étant valable pour toute valeur de  $\tau$ , il est possible d'identifier les coefficients suivant les puissances de  $\tau$ , ce qui conduit finalement à :

$$C(i) = \sum_{r=0}^{r=i} A(r) * B(i-r) \quad \text{pour } 1 \leq i \leq N$$

Cette technique d'identification des termes des développements asymptotiques est appliquée à l'ensemble des variables intervenant dans les relations numérotées de (I-22) à (I-31).

A titre d'illustration, nous présentons le cas des variables  $\bar{\epsilon}$  et  $H = (\alpha + \bar{\epsilon})^n$ . En supposant que tous les coefficients  $\Lambda(j)$  ont déjà été calculés pour les ordres allant de  $j=0$  à  $j=i-1$ , à partir de l'équation différentielle (I-25) et de la relation puissance (I-24), on voit que  $\bar{\epsilon}(i)$  et  $H(i)$  s'expriment en fonction des termes d'ordre antérieur du développement de  $\bar{D}$ ,  $\bar{\epsilon}$  et  $H$  :

$$\bar{\epsilon}(i) = \frac{1}{i} \bar{D}(i-1)$$

et

$$H(i) = \frac{1}{\alpha + \bar{\epsilon}(0)} \left\{ \sum_{r=0}^{r=i-1} \left( n - \frac{r(n+1)}{i} \right) H(r) \bar{\epsilon}(i-r) \right\}$$

En **Annexe B**, nous présentons le développement complet de toutes les variables.

L'application successive de cette technique permet d'aboutir à une expression dans laquelle les termes inconnus de la vitesse et de la pression, pour chaque ordre, peuvent être séparés des autres variables.

L'opérateur tangent est linéaire et est défini par :

$$\mathbf{L}_{0t}(\bullet) = \mathbf{Q}_0(\Lambda(0), \bullet) + \mathbf{Q}_0(\bullet, \Lambda(0)) \quad (\text{II-2})$$

Le système à résoudre est alors le suivant :

$$\text{Trouver } \mathbf{V}_p(i) = \begin{Bmatrix} \mathbf{v}(i) \\ \mathbf{p}(i) \end{Bmatrix} \text{ pour } [1 \leq i \leq N], \text{ solution de :}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ordre 1} : \mathbf{L}_{0t}(\mathbf{V}_p(1)) = \mathcal{F}_0(1) - \mathbf{Q}_0(\Lambda(0), \Lambda(0)) \\ \text{Ordre 2} : \mathbf{L}_{0t}(\mathbf{V}_p(2)) = \mathcal{F}_0(2) - \mathbf{Q}_0(\Lambda(1), \Lambda(1)) \\ \vdots \\ \text{Ordre } i : \mathbf{L}_{0t}(\mathbf{V}_p(i)) = \mathcal{F}_0(i) - \sum_{r=1}^{i-1} \mathbf{Q}_0(\Lambda(r), \Lambda(i-r)) \\ \vdots \\ \text{Ordre } N : \mathbf{L}_{0t}(\mathbf{V}_p(N)) = \mathcal{F}_0(N) - \sum_{r=1}^{N-1} \mathbf{Q}_0(\Lambda(r), \Lambda(N-r)) \end{array} \right. \quad (\text{II-3})$$

A chaque ordre, il apparaît un problème linéaire constitué d'un 1<sup>er</sup> membre contenant les inconnues vitesse et pression à l'ordre considéré et un 2<sup>nd</sup> membre dépendant des termes au ordres inférieurs. Le problème non linéaire (I-28) a ainsi été transformé en une suite récurrente de N problèmes linéaires.

Il ne s'agit donc plus de résoudre un seul problème non linéaire mais plusieurs problèmes linéaires. La linéarité de ces problèmes en permet une résolution très simple.

Une propriété essentielle de la technique de perturbation est l'unicité de l'opérateur tangent quel que soit l'ordre considéré [Hangai et al./1972]. Cette propriété permet de résoudre le système (II-3) en ne construisant qu'une seule fois l'opérateur tangent, ceci est bien évidemment très avantageux en terme de temps de calcul.

Par contre, dans chacun des problèmes, les 2<sup>nd</sup> membres sont différents. Pour chaque ordre considéré, le 2<sup>nd</sup> membre est construit à partir des variables déterminées aux ordres précédents. Cette tâche est très simple à effectuer mais peut être coûteuse en temps de calcul. C'est d'ailleurs dans la détermination de ces 2<sup>nd</sup> membres que la formulation quadratique prend tout son intérêt puisqu'elle ne fait intervenir que de simples sommations.

En indiquant par le signe '\*' les tenseurs lagrangiens des vitesses de déformation, le problème à l'ordre  $i$  se formule de la manière suivante :

$$\begin{cases} \int_{\Omega_0} \delta \mathbf{D}^* : \mathbf{M}(0) : \mathbf{D}^*(i) \, d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} \text{Tr}(\delta \mathbf{D}^*) p(i) \, d\Omega_0 = t_0 \mathcal{F}(i) + \mathcal{F}(i-1) - \mathcal{R}p_0^{i-1} \\ \int_{\Omega_0} \delta p \left[ \text{Tr}(\mathbf{D}^*(i)) + \frac{p(i)}{C_{\text{pén}}} \right] \, d\Omega_0 = - \mathcal{R}p_0^{i-1} \end{cases} \quad (\text{II-4})$$

avec

$$\begin{cases} \mathcal{F}(i) = \int_{\partial\Omega_0} \delta v \, \dot{p}_d \, \mathbf{A}(i) \, \mathbf{n}_0 \, dS_0 \\ \mathcal{R}p_0^{i-1} = \int_{\Omega_0} \delta \mathbf{D}^* \left( [\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{v}] + \left[ \sum_{r=0}^{i-1} \mathbf{A}(i-r) \sigma'(r) \right] \right) \, dS_0 - \int_{\Omega_0} \text{Tr}(\delta \mathbf{D}^*) \left[ \sum_{r=0}^{i-1} \mathbf{A}(i-r) p(r) \right] \, dS_0 \\ \mathcal{R}p_0^{i-1} = \int_{\Omega_0} \delta p \sum_{r=0}^{i-1} \left[ \mathbf{A}(i-r) : \mathbf{L}(r) + \mathbf{J}(i-r) \frac{p(r)}{C_{\text{pén}}} \right] \, d\Omega_0 \end{cases} \quad (\text{II-5})$$

L'expression du terme  $[\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{v}]$  est présentée en **Annexe B**.

$\mathbf{M}(0)$  est la matrice de comportement visqueux du matériau, elle est symétrique et est donnée par :

$$\mathbf{M}(0) = C(0) \, \mathbf{I} \circ \mathbf{I} + \frac{2}{3} \frac{(m-1)C(0)}{(\overline{D}(0))^2} \mathbf{D}'(0) \otimes \mathbf{D}'(0) \quad (\text{II-6})$$

où  $C(0)$  est la viscosité locale tangente. Cette matrice ne dépend que de l'ordre 0, elle est donc entièrement définie lors du calcul asymptotique. Les détails sur l'obtention de cette matrice se trouvent en **Annexe B**. On définit :  $(\mathbf{I} \circ \mathbf{I})_{ijkl} = \delta_{ik} \delta_{jl}$  et  $(\mathbf{D}' \otimes \mathbf{D}')_{ijkl} = D'_{ij} D'_{kl}$ .

La valeur du coefficient de pénalisation est généralement caractérisée par une quantité physique du problème étudié, [Zienkiewicz/1984], [Cadou/1997]. Afin d'ajuster la viscosité volumique à la viscosité tangente locale, nous définissons le coefficient de pénalisation par :

$$C_{\text{pén}} = G * C(0) \quad (\text{II-7})$$

où  $G$  est un très grand paramètre de l'ordre de  $10^{+7}$ .

### II-1-b Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis permet de discrétiser une formulation intégrale pour conduire à un système d'équations algébriques qui fournit une solution approchée du problème. La forme variationnelle (II-4) définie sur le milieu continu est ainsi remplacée par une forme variationnelle dite discrétisée qui fait intervenir les inconnues nodales.

Le domaine  $\Omega_0$  est représenté par un ensemble de sous-domaines  $\Omega_0^e$  :

$$\Omega_0 = \bigcup \Omega_0^e$$

et la géométrie de chaque élément  $\Omega_0^e$  est interpolée par :

$$\{x(\zeta)\} = [N(\zeta)]\{x_n\} \quad (II-8)$$

$\{x\}$  est la position d'un point et  $\{x_n\}$  est le vecteur coordonnées des nœuds définissant  $\Omega_0^e$ .  $[N(\zeta)]$  représente la matrice des fonctions d'interpolation en variables paramétriques où les  $\zeta$  sont les coordonnées paramétriques.

Sur chaque élément, les interpolations des variables solutions  $\{v, p\}$  et des variables virtuelles  $\{\delta v, \delta p\}$  prennent la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \begin{array}{l} \{v\} = [Nv]\{v_n\} \\ \{\delta v\} = [Nv]\{\delta v_n\} \end{array} \right. \\ \text{et} \\ \left| \begin{array}{l} \{p\} = [Np]\{p_n\} \\ \{\delta p\} = [Np]\{\delta p_n\} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (II-9)$$

$\{v_n\}$  et  $\{p_n\}$  sont les variables nodales solutions,  $\{\delta v_n\}$  et  $\{\delta p_n\}$  sont les variables nodales virtuelles. Les matrices d'interpolation  $[Nv]$  et  $[Np]$  sont différentes.

Les matrices  $[B]$  et  $[Bv]$  sont alors définies par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \begin{array}{l} \{D^*\} = [B]\{v_n\} \\ \{\delta D^*\} = [B]\{\delta v_n\} \end{array} \right. \\ \text{et} \\ \left| \begin{array}{l} \text{Tr}(D^*) = [Bv]\{v_n\} \\ \text{Tr}(\delta D^*) = [Bv]\{\delta v_n\} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (II-10)$$

où  $[Bv]$  est un arrangement de  $[B]$  et représente la trace des vitesses de déformation. La construction de ces matrices est décrite avec plus de détails en annexe (**Annexe D**).

En ce qui concerne le tenseur déviatorique des vitesses de déformation, il convient d'introduire une autre matrice, notée  $[B']$ , constituée à partir des matrices  $[B]$  et  $[Bv]$  :

$$\begin{cases} \{D'^*\} = [B']\{v_n\} \\ \{\delta D'^*\} = [B']\{\delta v_n\} \end{cases} \quad (II-11)$$

En introduisant les interpolations dans le problème (II-4) à résoudre et en effectuant l'opération d'assemblage des matrices et des vecteurs, nous obtenons le système suivant :

$$\begin{bmatrix} [Kv] & -^t[Kvp] \\ [Kvp] & [Kpp] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_n(i) \\ p_n(i) \end{Bmatrix}_g = \begin{Bmatrix} \mathcal{F}_{ext}(i) \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathcal{R}_o(i-1) \\ \mathcal{R}_p(i-1) \end{Bmatrix} \quad (II-12)$$

$\{v_n(i)\}_g$  et  $\{p_n(i)\}_g$  représentent les vecteurs assemblés des inconnues nodales.  $[Kv]$ ,  $[Kvp]$  et  $[Kpp]$  représentent les matrices assemblées, elle ne dépendent que des variables à l'ordre 0 et sont définies par :

$$\begin{cases} [Kv] = \sum_{\text{éléments}} \int_{\Omega_0^e} {}^t[B'] [M_0] [B'] d\Omega_0^e \\ [Kvp] = \sum_{\text{éléments}} \int_{\Omega_0^e} {}^t[Np] [Bv] d\Omega_0^e \\ [Kpp] = \sum_{\text{éléments}} \int_{\Omega_0^e} \frac{1}{G * C(0)} {}^t[Np] [Np] d\Omega_0^e \end{cases} \quad (II-13)$$

Les intégrales sont calculées par la méthode de Gauss.

Le vecteur des efforts extérieurs est donné par l'expression suivante :

$$\{\mathcal{F}_{ext}(i)\} = t_0 \{\mathcal{F}(i)\} + \{\mathcal{F}(i-1)\} \quad (II-14)$$

$\{\mathcal{F}(i)\}$ ,  $\{\mathcal{R}_D(i-1)\}$  et  $\{\mathcal{R}_P(i-1)\}$  sont les vecteurs globaux obtenus également par assemblage de vecteurs élémentaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} \{\mathcal{F}(i)\} = \sum_{\text{éléments}} \int_{\Omega_0^e} \dot{p}_d \quad {}^t[\mathbf{N}_v] \mathbf{A}(i) \mathbf{n}_0^e \, d\Omega_0^e \\ \{\mathcal{R}_D(i-1)\} = \sum_{\text{éléments}} \int_{\Omega_0^e} {}^t[\mathbf{B}'] \left( \left[ \tilde{\mathbf{R}}_v \right] + \left[ \sum_{r=0}^{r=i} \mathbf{A}(i-r) \sigma'(r) \right] \right) d\Omega_0^e - \\ \sum_{\text{éléments}} \int_{\Omega_0^e} {}^t[\mathbf{B}_v] \left[ \sum_{r=0}^{r=i} \mathbf{A}(i-r) p(r) \right] d\Omega_0^e \\ \{\mathcal{R}_P(i-1)\} = \sum_{\text{éléments}} \int_{\Omega_0^e} {}^t[\mathbf{N}_p] \left( \sum_{r=0}^{r=i} \left[ \mathbf{A}(i-r) \text{Tr}(\mathbf{L}(r)) + J(i-r) \frac{p(r)}{C_{\text{pén}}} \right] \right) d\Omega_0^e \end{array} \right. \quad (\text{II-15})$$

### II-1-c Détermination de la solution

Les inconnues vitesse et pression sont déterminées par résolution du problème discrétisé (II-12).

Habituellement, [Zienkiewicz, 1984], [Cadou/1997], on effectue une condensation de la pression au niveau local et on résout globalement un problème en vitesse. Suite à des problèmes de 'verrouillage' rencontrés, problèmes liés à notre formulation, nous avons choisi de résoudre globalement un problème en vitesse et pression.

La première équation tirée du système (II-12) donne :

$$[\mathbf{K}_v] \{v_n(i)\}_g = \{\mathcal{F}_{ext}(i)\} - \{\mathcal{R}_D(i-1)\} + {}^t[\mathbf{K}_{vp}] \{p_n(i)\}_g \quad (\text{II-16})$$

Cette expression est alors introduite dans la seconde équation tirée du système (II-12) et après quelques arrangements, il vient :

$$[\mathbf{K}_p] \{p_n(i)\}_g = -[\mathbf{K}_{vp}] [\mathbf{K}_v]^{-1} \left( \{\mathcal{F}_{ext}(i)\} - \{\mathcal{R}_D(i-1)\} \right) - \{\mathcal{R}_P(i-1)\} \quad (\text{II-17})$$

avec

$$[\mathbf{K}_p] = [\mathbf{K}_{pp}] + [\mathbf{K}_{vp}] [\mathbf{K}_v]^{-1} {}^t[\mathbf{K}_{vp}] \quad (\text{II-18})$$

Les matrices et les vecteurs définis dans l'opération d'assemblage ne tiennent pas compte des conditions aux limites, ce qui est nécessaire pour pouvoir inverser la matrice  $[Kv]$  puis la matrice  $[Kp]$ . Les conditions aux limites sont introduites directement par modification des matrices  $[Kv]$ ,  $[Kvp]$  et des termes des seconds membres  $\{\mathcal{F}_{ext}(i)\}$ ,  $\{\mathcal{R}_o(i-1)\}$  et  $\{\mathcal{R}_p(i-1)\}$ , [Batoz et al./1990].

Il est important de noter que les matrices  $[Kv]$  et  $[Kp]$  sont symétriques, ce qui permet d'en simplifier les inversions et d'en minimiser le stockage.

Toutefois, le fait de ne pas pouvoir condenser localement la pression pour résoudre le problème en vitesse complique la programmation et augmente la taille des tableaux à stocker. Les matrices  $[Kv]$  et  $[Kp]$  sont stockées en 'ligne de ciel' tandis que la matrice  $[Kvp]$  ne peut pas l'être.

Pour chaque ordre  $i$ , l'ensemble  $\Lambda(i)$  est ainsi déterminé et la solution approchée  $\Gamma = \{\mathbf{v}, \mathbf{p}, \mathbf{x}, \bar{\epsilon}\}$  est alors reconstruite à l'aide du développement (II-1) et calculée pour toute valeur du paramètre  $\tau$ . Les variables de l'ensemble  $\Lambda$ , autres que celles contenues dans l'ensemble  $\Gamma$ , sont recalculées de 'manière exacte' en utilisant les relations qui existent entre les différentes variables du problème. Il aurait été possible de déterminer toute la solution approchée  $\Lambda$  à l'aide du développement (II-1).

## II-2 Calcul d'une branche de solution complexe

La procédure décrite dans la section précédente permet d'effectuer un pas de calcul asymptotique et de détenir ainsi une représentation analytique locale de la solution dont le domaine de validité est limité. Pour déterminer une branche complexe de solution, il est alors nécessaire d'appliquer la M.A.N. pas à pas et donc de définir un principe de continuation, [Cochelin/1994a], [Cochelin/1994b].

D'autre part, de façon à augmenter le domaine de validité de la solution, il est possible d'introduire des approximants de Padé dans la représentation analytique de la solution. En effet, la transformation des approximations polynomiales en fractions rationnelles asymptotiquement équivalentes peut améliorer de manière significative la représentation analytique de la solution et donc en augmenter le domaine de validité, [Padé/1892], [Baker et al./1996].

### **II-2-a Procédure de calcul d'un pas asymptotique numérique**

A partir d'un point  $\Lambda(0)$  connu, la procédure asymptotique peut être appliquée. La solution ainsi obtenue est fonction de  $\tau$ , ce qui donne une représentation analytique de la solution.

Dans un premier temps, nous présentons l'algorithme (Fig. II-1) de la procédure asymptotique établie dans la section **II-1** :

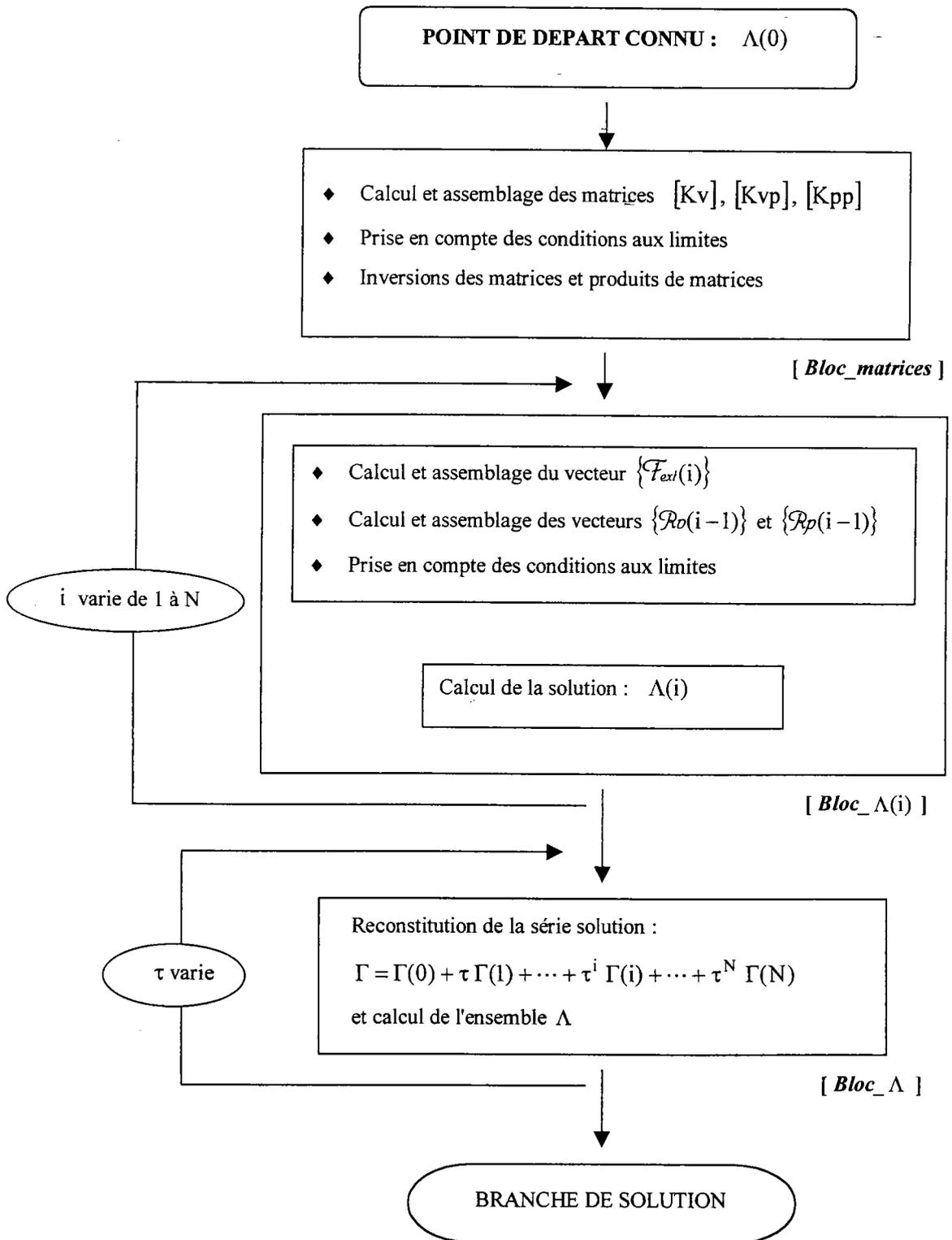


Fig. II-1 : Algorithme asymptotique

Avec une seule opération de ‘construction-inversion’ des matrices ([ *Bloc\_matrices* ]), il est possible de calculer un grand nombre de termes de la série ([ *Bloc\_Λ(i)* ]) qui permettent ensuite de déterminer l’approximation polynomiale de la solution par reconstruction de la série ([ *Bloc\_Λ* ]).

Toute série possède un rayon de convergence, par conséquent, les développements asymptotiques, introduits sous forme de séries polynomiales, possèdent un domaine de validité dont la taille dépend de l’ordre de troncature des développements. En effet, plus l’ordre de troncature est élevé, meilleure est l’approximation de la solution et donc plus le domaine de validité correspondant est grand.

Une détermination automatique du domaine de validité de la solution a été établie par Cochelin, [Cochelin/1994a], [Cochelin/1994b], et utilisée depuis dans les autres travaux d’application de la M.A.N.. Le principe utilisé est basé sur le fait que deux approximations polynomiales d’ordres de troncature successifs s’écartent l’une de l’autre lorsque le rayon de convergence est atteint. Un critère simple consiste alors à imposer que la différence entre les deux approximations, d’ordres consécutifs, soit inférieure à un paramètre donné  $\varepsilon$ . Ce qui se traduit par :

$$\frac{\|v_{\text{ordre } N} - v_{\text{ordre } N-1}\|}{\|v_{\text{ordre } N} - v_{\text{ordre } 0}\|} = \frac{\|\tau^N v(N)\|}{\|\tau v(1) + \dots + \tau^N v(N)\|} < \varepsilon \quad (\text{II-19})$$

Puis, par approximation du dénominateur, nous obtenons une estimation du domaine de validité :

$$\tau_m = \left( \varepsilon \frac{\|v(1)\|}{\|v(N)\|} \right)^{1/(N-1)} \quad (\text{II-20})$$

Ce domaine est intrinsèque au calcul puisqu’il dépend des termes calculés dans la procédure asymptotique et de l’ordre de troncature de l’approximation polynomiale. Cette possibilité d’estimer le domaine de validité de la solution au cours du processus de calcul est un point crucial de la M.A.N..

Toutefois  $\tau_m$  n’est qu’une estimation, paramétrée par  $\varepsilon$ , du rayon de convergence des séries solutions :  $\varepsilon$  choisi trop grand conduit à une solution de mauvaise qualité c’est à dire à des résidus d’équations non acceptables et  $\varepsilon$  choisi trop petit limite inutilement la validité de la solution. C’est pourquoi, dans le cadre de cette étude, nous proposons de chercher le domaine de

validité maximal dans lequel la solution asymptotique conduit à des résidus des équations d'équilibre et d'incompressibilité acceptables suivant des critères imposés. Nous parlons alors de domaine de validité optimal que nous notons  $\tau_{opt}$  et qui est déterminé par dichotomie autour de l'estimation  $\tau_m$  suivant des critères imposés sur les résidus des équations. Nous notons  $Crit_{eq}^{man}$  et  $Crit_m^{man}$  les critères imposés sur les résidus respectivement de l'équation d'équilibre et de l'équation d'incompressibilité. La recherche de  $\tau_{opt}$  élimine donc le problème du choix de  $\varepsilon$  moyennant quelques calculs de résidus.

La représentation de la solution est limitée (par  $\tau_m$  ou par  $\tau_{opt}$ ) et pour déterminer complètement la branche solution, il va falloir appliquer la M.A.N. pas à pas. Il est donc nécessaire de définir un principe de continuation.

### **II-2-b Principe de continuation**

Après avoir effectué un pas de calcul avec la M.A.N., il suffit de définir un nouveau point de départ sur la portion de branche solution déterminée puis d'appliquer de nouveau la M.A.N. à partir de ce point. Il est ainsi possible de représenter une branche de solution complexe à l'aide d'une succession de représentations analytiques locales.

Le point de départ d'un nouveau pas de calcul est choisi égal au dernier point du pas précédent calculé soit en  $\tau_m$ , soit en  $\tau_{opt}$ .

La procédure de continuation, établie par Cochelin, [Cochelin/1994a], [Cochelin/1994b], et classiquement utilisée dans les travaux sur la M.A.N., utilise la valeur  $\tau_m$  du domaine de validité moyennant le paramètre  $\varepsilon$  bien choisi. A partir d'une solution déterminée sur le domaine limité par  $\tau_m$ , un nouveau pas asymptotique est appliqué et ainsi de suite. Sur chaque pas de calcul, la représentation analytique de la solution est une approximation, par conséquent après une succession de pas de calcul les valeurs non nulles des résidus des équations se cumulent et peuvent atteindre finalement des valeurs non acceptables malgré un bon choix du paramètre  $\varepsilon$ . Il est dans ce cas nécessaire d'effectuer une correction de la solution à l'aide d'un algorithme itératif.

Nous avons vu que la recherche dichotomique autour de l'estimation  $\tau_m$  est effectuée par contrôle des résidus des équations suivant des critères fixés ( $Crit_{eq}^{man}$  et  $Crit_m^{man}$ ) pour tout le

processus de calcul puisqu'ils rendent compte directement de la précision désirée sur la solution. A la fin de chaque pas asymptotique, les résidus sont donc les résidus maximaux admissibles. Or le résidu croît au cours d'un pas asymptotique, il est donc nécessaire de détenir au début de chaque pas une très bonne approximation de la solution. Une phase correctrice par l'algorithme de Newton-Raphson est donc effectuée à la fin de chaque pas asymptotique, les critères sur les résidus sont notés :  $Crit_{eq}^{corr}$  et  $Crit_{in}^{corr}$ . Ces critères sont choisis tels que :  $Crit_{eq}^{corr} < Crit_{eq}^{man}$  et  $Crit_{in}^{corr} < Crit_{in}^{man}$ .

Dans un souci d'économie de calcul, l'opération de 'construction-inversion' n'est pas exécutée une nouvelle fois dans l'algorithme asymptotique, en effet les matrices des deux algorithmes sont très peu différentes puisqu'une seule itération de Newton-Raphson les sépare. Dans l'**Annexe B**, nous démontrons que l'expression de la matrice de rigidité tangente pour l'ordre 0 est identique à celle la matrice de rigidité tangente pour tout autre ordre  $i$ .

Au **Chapitre III**, nous validerons l'algorithme de continuation que nous venons d'établir (Algorithme 2) en le comparant à l'algorithme habituellement utilisé dans les travaux sur la M.A.N. (Algorithme 1).

La figure (Fig. II-2) schématise la différence entre ces deux algorithmes. Le tout premier point est déterminé à partir d'un calcul itératif basé sur la méthode de Newton-Raphson.

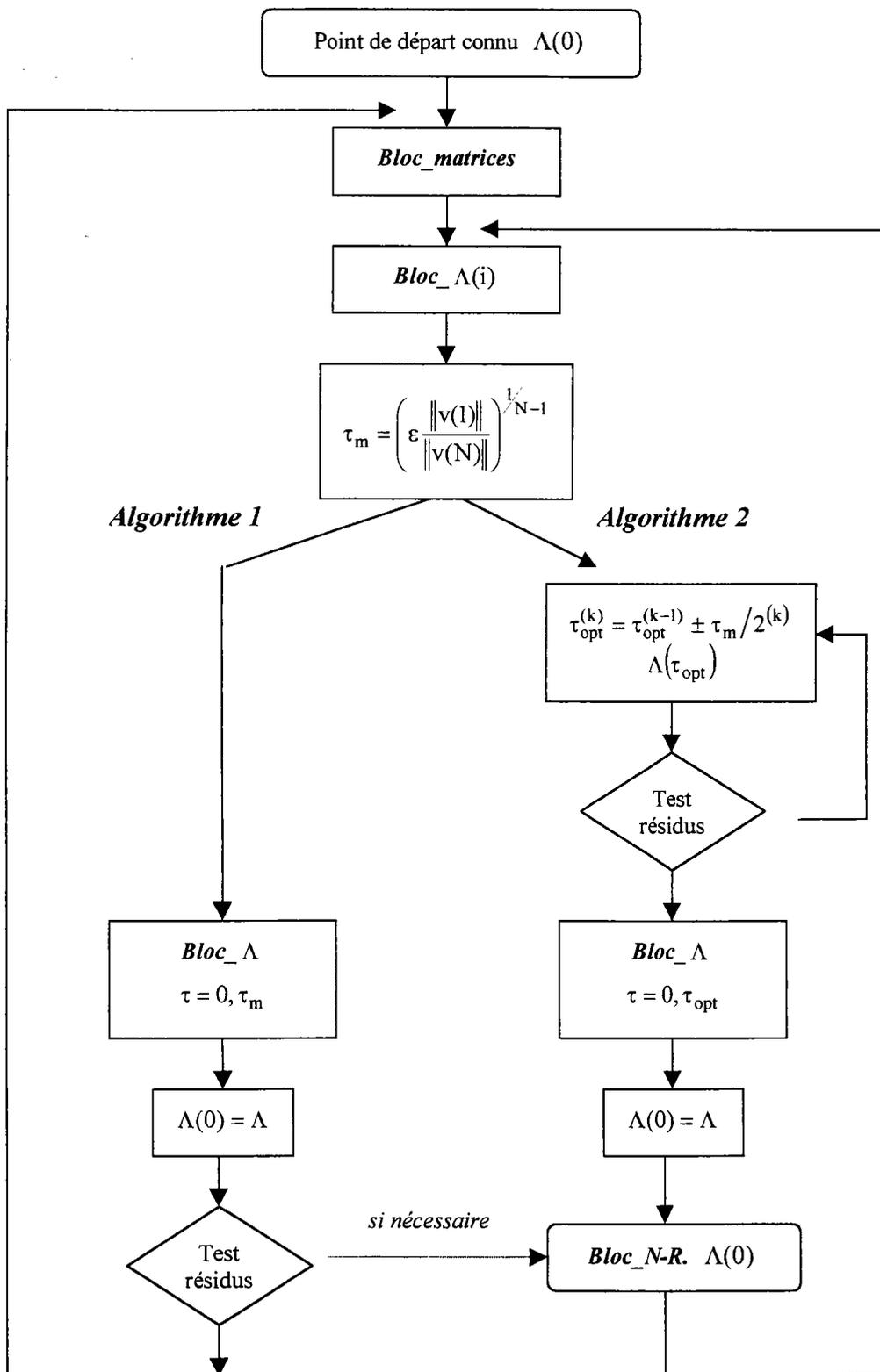


Fig. II-2 : Algorithme de continuation asymptotique

### II-2-c Amélioration de la représentation analytique de la solution

Il est possible de transformer la représentation polynomiale de la solution en une représentation rationnelle de type approximants de Padé de façon à en augmenter le domaine de validité. Si la représentation analytique de la solution possède un domaine de validité plus grand alors moins de pas de calcul sont nécessaires pour déterminer entièrement la branche solution, ce qui est très intéressant en vue du temps de calcul.

Cette technique a déjà été utilisée dans plusieurs études : [Azrar et al./1992], [Cochelin/1994a], [Cochelin et al./1994a], [Braikat/1995], [Najah/1996], [Tri/1996], [Najah et al./1998], [Elhage-Hussein/1998], [Elhage-Hussein et al./1998], [Azrar et al./1998b], et a montré de bons résultats.

Parce que les approximants de Padé sont des fractions il existe nécessairement des pôles où la solution n'est pas définie. Afin de limiter le nombre de pôles, les fractions sont choisies avec un même dénominateur, [Braikat/1995], [Najah/1996], [Tri/1996].

Elhage-Hussein, [Elhage-Hussein/1998], [Elhage-Hussein et al./1998], a associé à la M.A.N. un algorithme de recherche des pôles de manière à contrôler la fiabilité et la qualité de la solution approchée. Dans l'étude des problèmes de contact en élasticité non linéaire, il a montré qu'il est possible de doubler le domaine de validité avec ce type de représentation, comparée à la représentation polynomiale, et que les gains en temps de calcul peuvent atteindre 50%.

Une fois les termes des séries déterminés par la procédure asymptotique (II-2-a), il s'agit tout d'abord de construire une base orthogonale à partir des vecteurs de base  $\mathbf{v}(i)$  ( $i = 1, N$ ) par la méthode d'orthogonalisation de Gram-Schmidt. Puis  $N-1$  approximants de Padé  $P_{\text{Padé}(i)}(\tau)$  ( $i = 1, N-1$ ) avec même dénominateur sont calculés et il est ainsi possible de remplacer la représentation polynomiale (II-1) des variables solutions par une représentation rationnelle :

$$\Lambda = \Lambda(0) + \tau \Lambda(1) * P_{\text{Padé}(1)}(\tau) + \dots + \tau^i \Lambda(i) * P_{\text{Padé}(i)}(\tau) + \dots + \tau^{N-1} \Lambda(N-1) * P_{\text{Padé}(N-1)}(\tau) \quad (\text{II-21})$$

Il faut noter que, pour un même nombre de termes calculés, l'ordre de la représentation rationnelle est inférieur à celui de la représentation polynomiale.

La solution approchée  $\Gamma = \{\mathbf{v}, p, \mathbf{x}, \bar{\epsilon}\}$  est reconstruite à l'aide du développement (II-21) et calculée pour toute valeur du paramètre  $\tau$ . Les autres variables de l'ensemble  $\Lambda$  sont recalculées de 'manière exacte' en utilisant les relations qui existent entre les différentes variables du problème.

De la même manière que pour l'approximation polynomiale, nous recherchons un domaine de validité optimal (II-2-a). La recherche s'effectue à l'intérieur de l'intervalle  $[0, \tau_p[$ , où  $\tau_p$  est le plus petit pôle réel déterminé et sert de borne supérieure au domaine de validité de la solution.

L'algorithme de continuation (Fig. II-2) exposé dans la section II-2-b reste valable.

Les opérations supplémentaires qu'engendre l'utilisation de la représentation rationnelle sont les suivantes :

- ✓ orthogonalisation de la base  $\mathbf{v}(i)$  ( $i = 1, N$ ),
- ✓ recherche itérative des pôles,
- ✓ calcul des  $(N-1)$  approximants de Padé.

Cochelin, [Cochelin/1994a], et Elhage-Hussein, [Elhage-Hussein/1998], avaient déjà mis au point ces trois opérations, elles sont contenues dans des 'boîtes noires' que nous avons réutilisées.

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes attachés à présenter la M.A.N. en l'appliquant à la résolution du problème viscoplastique incompressible en vitesse et pression.

La M.A.N. consiste, dans un premier temps, à développer les variables sous forme de séries polynomiales en fonction d'un paramètre  $\tau$ , ici identifié au temps. Après introduction des développements asymptotiques dans les équations à résoudre puis condensation de toutes les variables, le problème non linéaire de départ a été transformé en une **suite récurrente de problèmes linéaires** ayant tous le **même opérateur tangent**. Dans un deuxième temps, nous utilisons la méthode des éléments finis pour discrétiser les systèmes linéaires à résoudre.

La M.A.N. permet ainsi de détenir une **représentation analytique locale continue** de la **solution** et, suivant un principe de continuation, il est possible de déterminer une branche de solution complexe composée d'une succession de ces représentations locales. La solution peut être laissée sous sa forme polynomiale de départ ou être remplacée par une forme rationnelle qui permet alors d'élargir le domaine de validité de la solution.

Sur chaque pas de calcul asymptotique, l'estimation du domaine de validité de la solution est réalisée après avoir calculé les termes des séries polynomiales. Le domaine de **validité** de la **solution** peut donc varier et ainsi **s'adapter automatiquement à la non-linéarité** rencontrée.

Nous disposons donc d'un algorithme asymptotique qui va nous permettre de simuler numériquement quelques procédés de mise en forme à chaud.

## Chapitre III

### Simulation du gonflement hydraulique

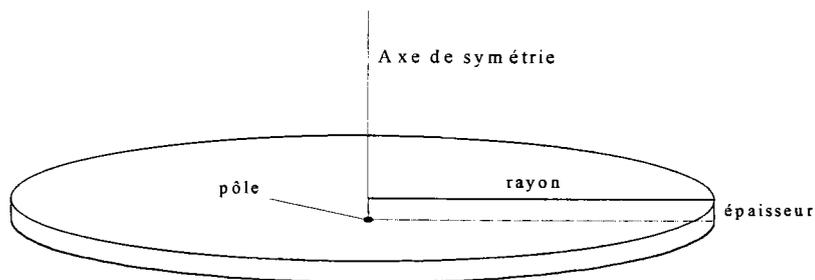
<i>Introduction</i>	40
<i>III-1 Continuation asymptotique</i>	42
<i>III-2 La M.A.N.</i>	46
III-2-a Points forts de la M.A.N.	46
III-2-b Influence de l'ordre de troncature	50
III-2-c Représentations polynomiale et rationnelle de la solution	52
<i>III-3 Validation et étude de l'efficacité de la M.A.N.</i>	54
III-3-a Exemple 1	55
III-3-b Exemple 2	60
<i>III-4 Conditions de déformation plane</i>	66
<i>Conclusion</i>	68

## Introduction

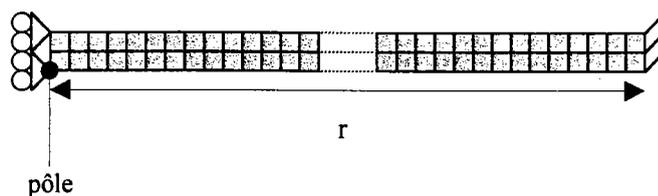
Dans ce chapitre, nous testons et validons la M.A.N. à travers des simulations de mise en forme de tôles par gonflement hydraulique. Le gonflement hydraulique, aussi appelé essai Jovinot, est un test couramment utilisé dans la littérature, [Wang/1984], [Mesrar/1991]. La symétrie des structures d'étude, du chargement et des conditions aux limites conduisent à simplifier la simulation en se ramenant à l'étude de structures bidimensionnelles.

### Présentation du gonflement hydraulique d'une tôle circulaire

Une tôle circulaire est encadrée sur son pourtour et est soumise sur sa surface supérieure à une pression. Cette pression est appliquée progressivement au cours du temps par l'intermédiaire d'une vitesse de pression. Au cours du chargement, les efforts surfaciques restent normaux à la surface chargée.



Les conditions d'axisymétrie permettent de n'étudier qu'une section de la tôle circulaire. La structure d'étude est discrétisée en éléments quadrilatères à quatre nœuds (2 degrés de liberté par nœud) possédant quatre points Gauss d'intégration numérique plus un point de Gauss au centre pour l'intégration de la pression qui est prise constante sur chaque élément.



Pour des raisons d'efficacité de stockage et de résolution, les nœuds sont en général numérotés suivant une petite largeur de bande, ici l'épaisseur ; en effet ce choix de numérotation conduit à un grand nombre de coefficients nuls dans les matrices. Toutefois, nous avons choisi d'effectuer la numérotation des nœuds suivant la grande largeur de bande, c'est à dire le rayon. Ceci nous permet de travailler sur des matrices quasiment pleines et donc de dire que les calculs et les discussions faites sont représentatifs de cas d'étude de problèmes à plus grand nombre de degrés de liberté comme ceux rencontrés en mise en forme.

La vitesse de pression est fixée :  $\dot{p}^d = 10^{-3} \text{ MPa s}^{-1}$  et toutes les simulations numériques sont effectuées jusqu'à un déplacement du pôle égal au demi rayon de la structure.

Le principe de continuation que nous avons établi dans ce travail est quelque peu différent de celui habituellement utilisé dans les travaux sur la M.A.N., ceci a conduit à l'élaboration des deux algorithmes de continuation asymptotique présentés dans la section *II-2-b*, (**Fig. II-1**) et (**Fig. II-2**). En comparant les résultats numériques obtenus à partir de ces deux algorithmes, nous justifions la mise au point de ce nouveau principe de continuation.

Ensuite, l'étude d'un exemple nous permet d'illustrer les avantages que procure l'utilisation d'un algorithme basé sur la M.A.N. dans une simulation numérique. Nous avons vu que la M.A.N. consiste à effectuer un développement asymptotique tronqué des variables du problème étudié, nous regardons quelle est l'influence du choix de l'ordre de troncature sur les paramètres de calcul : nombre de pas, nombre d'opérations de 'construction-inversion' (**d'op.** 'c-i') de matrices et temps de calcul (**Temps CPU**).

Il existe deux manières de représenter la solution : soit sous la forme polynomiale définie par le développement asymptotique (II-1), soit sous la forme rationnelle (II-21) qui, en théorie, permet d'élargir le domaine de validité de la solution et permet donc de limiter le nombre de pas de calcul. C'est ce que nous vérifions numériquement.

Par la suite, nous montrons l'efficacité de la M.A.N. en la comparant à la méthode de Newton-Raphson, méthode classiquement utilisée en calcul numérique. Nous présentons deux exemples de simulation de gonflement hydraulique qui diffèrent par le choix du comportement du matériau.

Enfin, nous présentons une dernière simulation effectuée dans des conditions de déformation plane.

### III-1 Continuation asymptotique

Deux algorithmes de continuation asymptotique ont été programmés : le premier est basé sur le principe habituellement utilisé dans les travaux sur la M.A.N. et son efficacité a largement été démontrée, le second a été établi pour la première fois dans ce travail. Nous cherchons donc à justifier l'utilisation de notre nouvel algorithme en le comparant au premier.

#### Géométrie de la structure bidimensionnelle et rhéologie du matériau :

$$\begin{cases} r = 50 \text{ mm} \\ e = 1 \text{ mm} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} k = 180.0 \text{ MPa s}^{0.8} \\ \alpha = 0.0001 \\ m = 0.8 \\ n = 0.2 \end{cases}$$

La structure est discrétisée en 40 éléments : 2 dans l'épaisseur et 20 dans la direction radiale.

Nous rappelons que le premier algorithme (**Algorithme 1**) de continuation consiste à estimer sur chaque pas de calcul le domaine de validité  $\tau_m$  dépendant d'un paramètre de précision  $\varepsilon$ , puis d'appliquer le pas suivant à partir du point calculé en  $\tau_m$ . Il est parfois nécessaire, à la fin de certains pas de calcul, d'effectuer une phase itérative de correction à partir d'un algorithme basé sur la méthode de Newton-Raphson.

Le second algorithme (**Algorithme 2**) consiste à effectuer une recherche optimale du domaine de validité  $\tau_{opt}$  par contrôle des résidus des équations d'équilibre et d'incompressibilité, une phase itérative de correction étant alors nécessaire à la fin de chaque pas de calcul. Dans cet algorithme, le domaine de validité de la solution ne dépend pas du paramètre  $\varepsilon$  mais uniquement des critères  $Crit_{eq}^{man}$  et  $Crit_{in}^{man}$  sur les résidus des équations et donc de la précision souhaitée sur le calcul. Ensuite il s'agit d'appliquer le pas suivant à partir du point calculé en  $\tau_{opt}$ .

Le tableau (Tab. III-1) donne le nombre de pas de calcul et le nombre d'opérations de 'construction-inversion' de matrices nécessaire pour simuler la déformation de la structure. Les calculs sont effectués pour différentes valeurs du paramètre de précision  $\varepsilon$  avec l'**Algorithme 1** et des critères imposés sur les résidus avec l'**Algorithme 2**.

Les résidus sont en fait des résidus relatifs par rapport aux efforts imposés et les critères sur ces résidus sont fixés :  $Crit_{eq}^{man} = 10^{-2}$  et  $Crit_{in}^{man} = 10^{-5}$  dans la continuation asymptotique de l'**Algorithme 2**.  $Crit_{eq}^{corr} = 10^{-4}$  et  $Crit_{in}^{corr} = 10^{-7}$  sont les critères imposés sur les résidus dans les phases itératives de correction.

Dans tous les calculs, les développements asymptotiques sont tronqués à l'ordre 15.

		Nbre de Pas	Nbre d'op. 'c-i'
Algorithme 1	$\varepsilon=10^{-3}$	22	28
	$\varepsilon=10^{-4}$	24	26
	$\varepsilon=10^{-5}$	27	28
	$\varepsilon=10^{-6}$	32	33
Algorithme 2	$\forall \varepsilon$	27	28

Tab. III-1 : Comparaison des deux algorithmes de continuation asymptotique

Plus le paramètre  $\varepsilon$  est petit, plus l'estimation du domaine de validité  $\tau_m$  (II-20) est petite. C'est pourquoi en ce qui concerne les résultats de l'**Algorithme 1**, le nombre de pas de calcul nécessaire pour déformer la structure augmente quand  $\varepsilon$  diminue. Lorsque le nombre de pas et le nombre d'opérations de 'construction-inversion' de matrices sont très différents, par exemple  $\varepsilon=10^{-3}$ , cela signifie que certains pas de calcul ont nécessité une phase de correction.

Nous constatons que les résultats obtenus à partir des deux algorithmes sont comparables, si nous considérons le paramètre de précision  $\varepsilon = 10^{-5}$  dans l'**Algorithme 1**.

Nous regardons ce qui se passe au niveau de l'évolution des résidus des équations d'équilibre (Résidu 1) et d'incompressibilité (Résidu 2). Les figures (Fig. III-1) et (Fig. III-2) représentent l'évolution de ces résidus au cours des calculs effectués avec les deux algorithmes et pour différentes valeurs du paramètre  $\varepsilon$ . Pour faciliter la comparaison, nous traçons les logarithmes des résidus et localisons les courbes autour des valeurs des critères imposés sur les résidus et sur une petite échelle de temps.

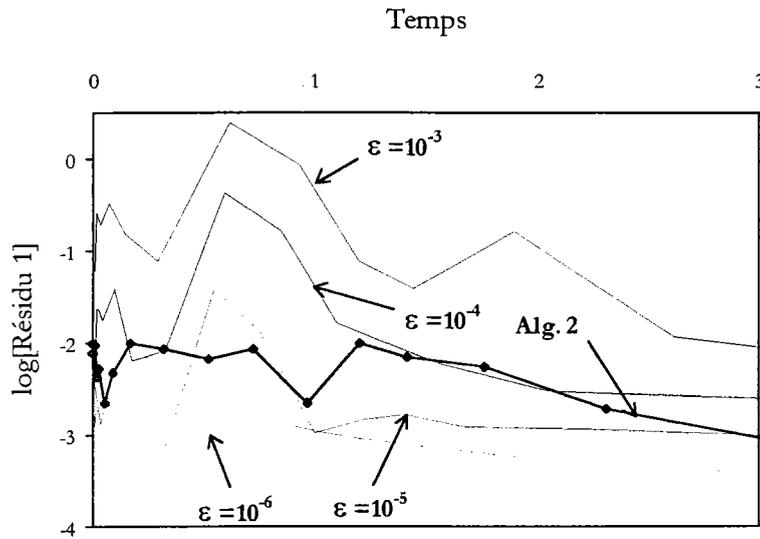


Fig. III-1 : Evolution du résidu de l'équation d'équilibre /  $\text{Crit}_{eq}^{man} = 10^{-2}$  est le critère imposé sur le résidu dans l'Algorithme 2

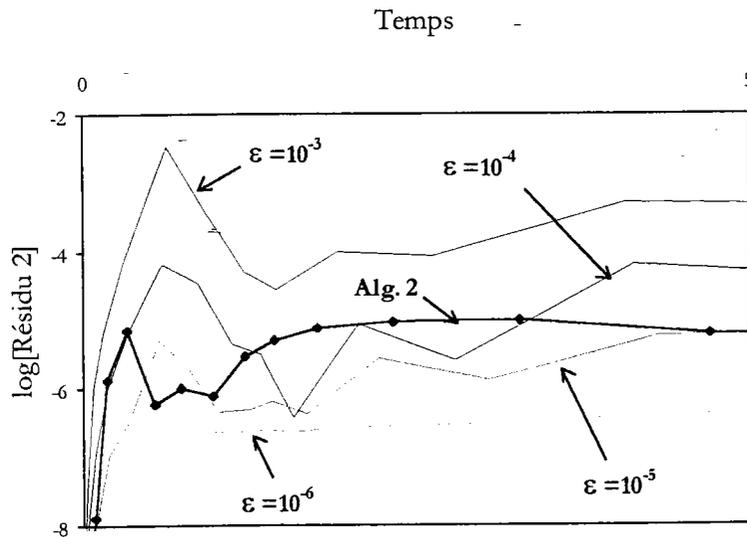


Fig. III-2: Evolution du résidu de l'équation d'incompressibilité /  $Crit_{in}^{man} = 10^{-5}$  est le critère imposé sur le résidu dans l'Algorithme 2

Quelle que soit l'équation considérée, les résidus obtenus lors des calculs avec l'Algorithme 2 restent toujours inférieurs aux critères imposés  $Crit_{eq}^{man}$  et  $Crit_{in}^{man}$ , alors qu'avec l'Algorithme 1 seules les valeurs  $\epsilon = 10^{-5}$  et  $\epsilon = 10^{-6}$  du paramètre de précision permettent de rester dans une gamme de résidus acceptables.

Les deux algorithmes de continuation sont donc équivalents si l'on choisit bien le paramètre de précision  $\epsilon$  dans le premier (Algorithme 1). Le second algorithme (Algorithme 2) présente donc l'avantage d'être plus automatique et très fiable au niveau de la précision des résultats.

### En conclusion

Le principe de continuation que nous avons établi dans ce travail, basé sur la recherche du domaine de validité optimal  $\tau_{opt}$ , permet de minimiser le nombre de pas de calcul en associant la détermination automatique des tailles de pas et le contrôle des résidus des équations.

Toute simulation effectuée à partir de l'algorithme qui découle de ce principe nécessite seulement la donnée au début du calcul : de l'ordre de troncature des développements

asymptotiques et des **critères sur les résidus** des équations d'équilibre et d'incompressibilité. Cet algorithme est utilisé dans toutes les simulations qui suivent.

### III-2 La M.A.N.

Dans un premier temps, nous mettons en avant les points essentiels qui apparaissent lors de l'utilisation de l'algorithme établi, basé sur la M.A.N., lors d'une simulation numérique.

Toute simulation passe par le choix de l'ordre de troncature des développements asymptotiques, nous étudions en quoi et comment ce choix influence le calcul numérique.

Enfin, nous avons vu qu'il existe au moins deux manières de représenter la solution asymptotique : soit sous la forme classique polynomiale (II-1), soit sous une forme rationnelle (II-2) utilisant les approximants de Padé. Nous comparons ces deux représentations.

La géométrie de la structure et la rhéologie du matériau sont pris comme dans la section III-1.

#### III-2-a Points forts de la M.A.N.

Nous effectuons un calcul numérique à partir de l'algorithme de continuation que nous avons établi et testé dans la section III-1. L'ordre de troncature est pris égal à 15 et les critères sur les résidus des équations sont :  $Crit_{eq}^{man} = 10^{-2}$  et  $Crit_{in}^{man} = 10^{-5}$ .

La simulation a été effectuée en 27 pas de calcul et a nécessité 28 opérations de 'construction-inversion' de matrices. Ceci correspond à 1 opération de 'construction-inversion' à chaque pas de calcul sauf au premier pas pour lequel est comprise la détermination du point de départ du processus de calcul et nécessite 1 itération supplémentaire.

Nous choisissons de tracer, figure (Fig. III-3), l'évolution de la vitesse du pôle au cours du chargement.

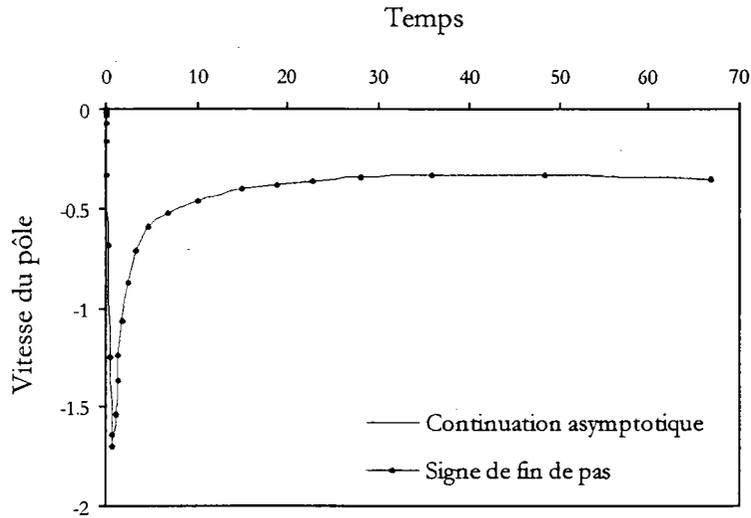


Fig. III-3 : Evolution de la vitesse du pôle (mms<sup>-1</sup>) au cours du temps (s)

La solution en vitesse est continue sur tout le processus de calcul, en effet le principe de continuation permet de déterminer entièrement la branche de solution complexe à partir d'une succession de représentations analytiques locales de la solution.

En regardant la position des signes de fin de pas sur la figure (Fig. III-3), nous voyons que la répartition de ces signes sur la courbe solution n'est pas régulière, autrement dit la taille des pas de temps varie au cours du processus de calcul et donc au cours du temps. Au début les pas de temps sont petits alors qu'à la fin du calcul les pas sont très grands. En effet, nous avons vu dans la section II-2-a que la détermination des pas de calcul s'effectue de manière automatique à partir de la solution, ce qui permet aux pas de temps de s'adapter à la non linéarité locale de la courbe de réponse étudiée. La figure (Fig. III-4) donne l'évolution de la taille des pas de temps au cours du processus de calcul.

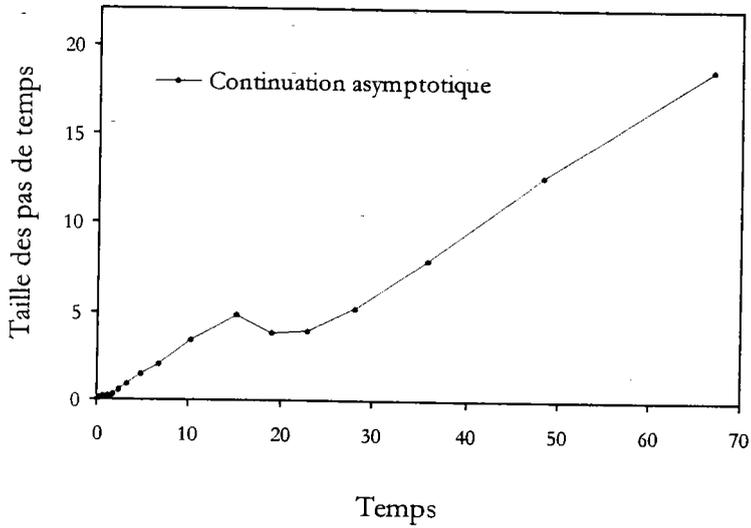


Fig. III-4 : Evolution de la taille des pas de temps (s)

La courbe confirme bien une évolution permanente et très importante de la taille des pas de temps au cours du processus de calcul.

L'algorithme de continuation asymptotique que nous avons établi est paramétré par le choix de critères imposés sur les résidus des équations d'équilibre et d'incompressibilité. Les figures (Fig. III-5) et (Fig. III-6) montrent l'évolution de ces deux résidus au cours du calcul.

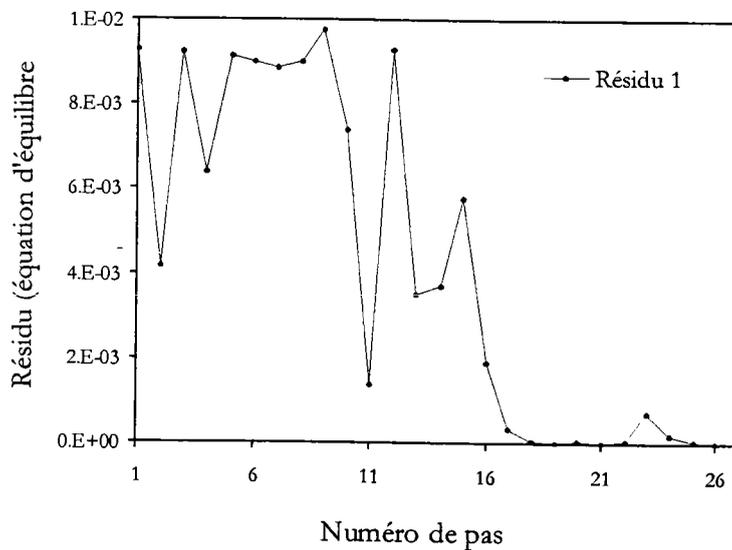


Fig. III-5 : Résidu de l'équation d'équilibre sur chaque pas de calcul, le critère imposé étant  $Crit_{eq}^{man} = 10^{-2}$

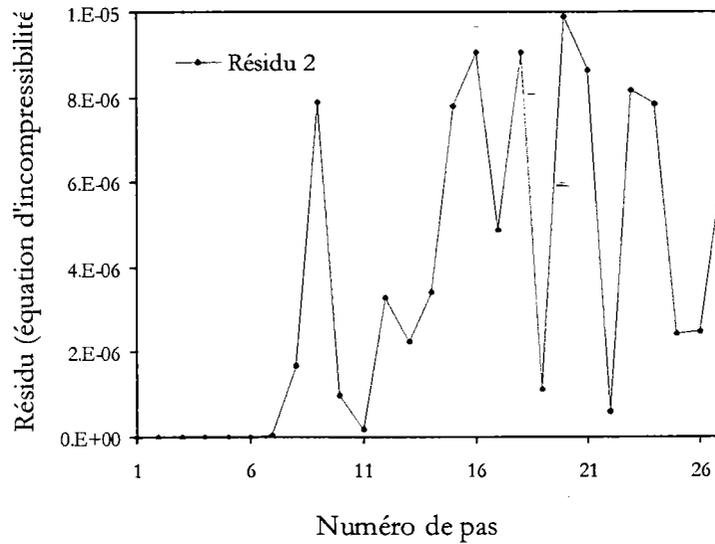


Fig. III-6 : Résidu de l'équation d'équilibre sur chaque pas de calcul, le critère imposé étant  $Crit_{in}^{man} = 10^{-5}$

Les résidus ne dépassent jamais les limites admissibles introduites par l'intermédiaire des critères. De plus, nous remarquons qu'au début c'est le résidu d'équilibre qui est déterminant dans l'évaluation de la taille de pas et qu'après le 15<sup>ème</sup> pas c'est le résidu d'incompressibilité.

**En résumé, quatre points essentiels apparaissent :**

- nous disposons d'une représentation continue de la solution,
- une seule opération de 'construction-inversion' de matrices est nécessaire par pas de calcul,
- la taille des pas de calcul évolue automatiquement de manière à s'adapter à la non-linéarité locale rencontrée,
- la qualité de la solution, exprimée en terme de résidus des équations, est constante au cours du processus de calcul.

### III-2-b Influence de l'ordre de troncature

Nous étudions l'influence du choix de l'ordre de troncature des développements asymptotiques (II-1) sur le nombre de pas et sur le temps de calcul nécessaires pour déformer la structure.

Le tableau (Tab. III-2) rassemble pour une structure composée de 40 éléments (126 degrés de liberté) le nombre de pas et le temps CPU pour différents ordres de troncature.

	Nbre de pas	Temps CPU
Ordre 5	59	1.05
Ordre 10	32	1.00
Ordre 15	27	1.33
Ordre 20	26	1.83

Tab. III-2 : Nombre de pas de calcul et temps de calcul (mn) pour les ordres 5, 10, 15 et 20

Lorsque l'ordre augmente, le nombre de pas de calcul diminue. Ceci s'explique par le fait que, sur chaque pas asymptotique, plus l'ordre de troncature est élevé, meilleure est la représentation de la solution et donc plus le domaine de validité est grand. La figure (Fig. III-7), qui donne l'évolution de la taille des pas pour différents ordres, confirme cette remarque.

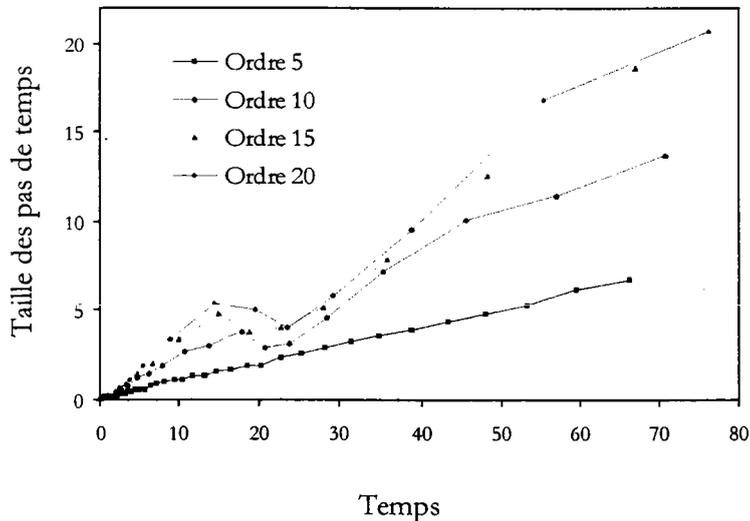


Fig. III-7 : Evolution de la taille des pas de temps (s) pour les ordres 5, 10, 15 et 20

La diminution du nombre de pas doit en toute logique conduire à une diminution du temps de calcul, pourtant seul le temps entre les ordres 5 et 10 diminue. La diminution du nombre de pas et donc du nombre d'opérations de 'construction-inversion' ne suffit pas à diminuer le temps de calcul. En effet l'opération de 'construction-inversion' de matrices est très coûteuse en temps mais il ne faut pas négliger le temps nécessaire à calculer les seconds membres du système (II-3) dont le nombre est égal à l'ordre de troncature et sont donc nombreux pour un ordre élevé. La structure étant petite (126 degrés de liberté), la matrice de rigidité n'est pas très volumineuse et donc la construire puis l'inverser ne constituent pas des opérations beaucoup plus coûteuses que les calculs des seconds membres. Des tests ont été réalisés par Zahrouni [Zahrouni/1998], il a évalué le rapport des temps nécessaires au calcul des seconds membres et de l'opération de 'construction-inversion' des matrices. Il a ainsi montré qu'avec un ordre de troncature supérieur à 10, pour une structure de 240 degrés de liberté, le calcul des seconds membres domine l'opération de 'construction-inversion' de matrice.

En considérant une structure plus importante, le phénomène devrait s'inverser. C'est ce que nous vérifions en analysant les résultats obtenus pour une structure composée de 200 éléments (606 degrés de liberté). Le tableau (Tab. III-3) rassemble les résultats des calculs.

	Nbre de pas	Temps CPU
Ordre 5	64	40.9
Ordre 10	41	30.1
Ordre 15	37	31.5
Ordre 20	35	34.5

Tab. III-3 : Nombre de pas de calcul et temps de calcul (mn) pour les ordres 5, 10, 15 et 20

Le nombre de pas diminue toujours quand l'ordre de troncature augmente et les temps de calcul augmentent toujours entre les ordres 10 et 15 et les ordres 15 et 20. Par contre cette augmentation de temps est beaucoup moins importante que pour la structure à 40 éléments : 5% à 10% contre environ 35% pour la petite structure. Ceci signifie que le coût de l'opération 'construction-inversion' commence à dominer sur les calculs des seconds membres.

En fait, selon la grandeur de la structure considérée, l'ordre de troncature optimal change. Pour ces structures à faible degré de liberté, cet ordre optimal se situe autour de 10. Mais plus la structure sera importante, plus l'opération de 'construction-inversion' dominera les temps de

calcul de chacun des pas et plus l'ordre optimal sera grand. Ce résultat avait déjà été établi : l'ordre optimal étant en général 15 ou 20 pour des systèmes à 5000 ou 10000 degrés de liberté .

### III-2-c Représentations polynomiale et rationnelle de la solution

Les données du tableau (Tab. III-3), concernant la représentation polynomiale pour une structure comprenant 200 éléments, sont reprises et comparées, dans le tableau (Tab. III-4), aux résultats des calculs effectués en considérant une représentation rationnelle de la solution. La comparaison est effectuée pour les ordres 10, 15 et 20.

	Représentation polynomiale		Représentation rationnelle	
	Nbre de pas	Temps CPU	Nbre de pas	Temps CPU
Ordre 10	41	30.1	34	24.95
Ordre 15	37	31.5	26	22.15
Ordre 20	35	34.5	22	22.18

Tab. III-4 : Nombre de pas de calcul et temps de calcul (mn) pour les deux représentations de la solution aux ordres 10, 15 et 20

Nous remarquons et donc confirmons qu'utiliser une représentation rationnelle de la solution permet de diminuer le nombre de pas de calcul nécessaire pour déformer la structure. La diminution du nombre de pas de calcul provient de l'augmentation du domaine de validité de la solution due à la représentation rationnelle.

Cette diminution se traduit directement en terme de diminution du temps de calcul. En effet, malgré quelques opérations supplémentaires (orthogonalisation de la base, recherche itérative des pôles, calcul des approximants de Padé) nécessaires dans le cas d'une représentation rationnelle, pour un même ordre de troncature et donc un même nombre de seconds membres à calculer à chaque pas, la diminution du nombre de pas et donc d'opérations de 'construction-inversion' se répercute directement sur le temps de calcul.

Alors que pour la représentation polynomiale l'ordre optimal se situe autour de 10, dans le cas de la représentation rationnelle l'ordre optimal est environ 15.

La figure (Fig. III-8) montre l'évolution de la taille des pas de calcul pour les deux représentations de la solution aux ordres 10 et 15.

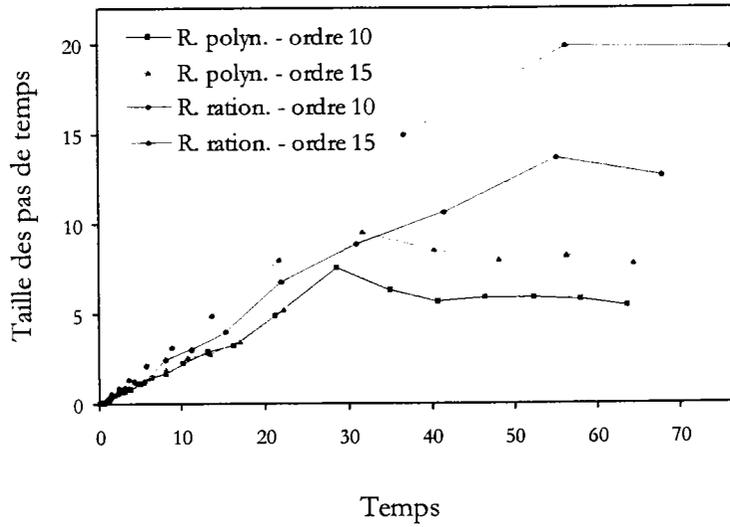


Fig. III-8 : Evolution de la taille des pas de temps (s) pour les deux représentations de la solution aux ordres 10 et 15

Le tableau (Tab. III-5) contient les gains en nombre de pas et en temps de calcul qu’apporte la représentation rationnelle de la solution par rapport à la représentation polynomiale.

		Ordre 10	Ordre 15	Ordre 20
Gain de la R. rationnelle sur la R. polynomiale	Nbre de pas	17%	30%	37%
	Temps CPU	17%	30%	36%

Tab. III-5 : Gains réalisés par la représentation rationnelle de la solution sur la représentation polynomiale, en terme de nombre de pas et de temps de calcul, pour les ordres 10, 15 et 20

Ce tableau montre que plus l’ordre de troncature est élevé, plus le gain est important et que le gain réalisé en nombre de pas est entièrement répercuté en gain de temps de calcul.

### En conclusion

La M.A.N. permet d’obtenir une **solution continue de qualité constante** avec **peu d’opérations de ‘construction-inversion’ de matrices** et des **tailles de pas variables** déterminées de manière **automatique**.

L'ordre de troncature optimal dépend de la grandeur de la structure. En effet, plus le problème étudié a un nombre de degré de liberté important, plus l'opération de 'construction-inversion' de matrice est coûteuse et donc plus la diminution du nombre de pas, par le choix d'un ordre de troncature élevé, est avantageuse en terme de temps de calcul. Par contre, il ne faut pas oublier que le stockage en est d'autant plus coûteux que le nombre de degré de liberté est important et que l'ordre de troncature est élevé.

La représentation rationnelle de la solution permet de diminuer, pour un stockage approximativement identique (même ordre de troncature), le nombre de pas de calcul et donc le temps de calcul du processus en augmentant le domaine de validité de la solution.

Dans le cas des structures étudiées, de 100 à 1000 degrés de liberté mais avec une numérotation des nœuds suivant une grande largeur de bande, l'ordre optimal est 10 pour une représentation polynomiale de la solution et 15 pour une représentation rationnelle. Le terme 'optimal' ne concerne que le temps de calcul, en toute rigueur, il ne faudrait parler d'ordre optimal que si nous prenions en compte le stockage.

### III-3 Validation et étude de l'efficacité de la M.A.N.

Afin de valider numériquement la M.A.N. et de mettre en évidence son efficacité, l'algorithme asymptotique est comparé à un algorithme itératif basé sur la méthode de Newton-Raphson. Cet algorithme est présenté en **Annexe A**, nous l'avons introduit dans notre code de calcul, il résout le problème formulé au **Chapitre I** avec la loi de comportement régularisée. Les deux algorithmes permettent de résoudre exactement le même problème mais de deux manières différentes. Les techniques d'assemblage, d'inversion, de stockage, ... sont identiques.

Nous présentons deux exemples de simulation de gonflement hydraulique d'une structure composée de 100 éléments : 2 dans l'épaisseur et 50 dans la direction radiale. Dans le premier exemple le comportement du matériau est choisi de manière arbitraire et le second exemple concerne le cas limite rigide-plastique.

Les critères sur les résidus d'équilibre et d'incompressibilité sont pris identiques dans les deux algorithmes de sorte à déterminer avec une même précision les solutions :

$$Crit_{eq}^{man} = Crit_{eq}^{iter} = 10^{-2} \text{ (équation d'équilibre)}$$

$$Crit_{in}^{man} = Crit_{in}^{iter} = 10^{-5} \text{ (équation d'incompressibilité)}$$

Nous notons  $Crit_{eq}^{iter}$  et  $Crit_{in}^{iter}$  les critères de l'algorithme itératif, à ne pas confondre avec les critères  $Crit_{eq}^{corr}$  et  $Crit_{in}^{corr}$  de la phase corrective dans l'algorithme asymptotique.

En ce qui concerne les calculs asymptotiques, nous considérons les résultats de calcul pour les deux représentations possibles de la solution. Les calculs asymptotiques avec la représentation polynomiale de la solution sont effectués en prenant un ordre de troncature égal à 10 et les calculs pour la représentation rationnelle sont effectués pour un ordre égal à 15. Pour la structure considérée, ces deux ordres de troncature correspondent en effet aux ordres optimaux pour chacune des représentations.

Nous notons les résultats numériques obtenus par l'algorithme itératif par 'M.N.R.' (méthode de Newton-Raphson).

### **III-3-a Exemple 1**

Dans cet exemple, les coefficients de sensibilité à la vitesse de déformation et d'écrouissage sont choisis de manière arbitraire et donc pas nécessairement représentatifs d'un matériau existant.

#### **Géométrie de la structure bidimensionnelle et rhéologie du matériau :**

$$\begin{cases} r = 50 \text{ mm} \\ e = 1 \text{ mm} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} k = 180.0 \text{ MPa s}^{0.8} \\ \alpha = 0.0001 \\ m = 0.8 \\ n = 0.2 \end{cases}$$

### *Calculs numériques avec l'algorithme itératif*

La difficulté d'un calcul itératif réside dans le choix du pas de chargement. Nous essayons plusieurs pas de temps fixés pour tout le calcul.

- Pour un pas de temps égal à **1.0 s** : dès le 1<sup>er</sup> pas de calcul, après 20 itérations, le processus n'a pas toujours convergé.
- Nous essayons donc un pas de temps plus petit, égal à **0.1 s**, le processus de calcul ne converge toujours pas.
- Par contre pour un pas de temps encore plus petit égal à **0.01 s**, le calcul converge : 17 itérations sont nécessaires dans le 1<sup>er</sup> pas de calcul et 2 à 3 itérations pour les autres pas.

Dans ce dernier cas, le calcul converge mais nécessite un nombre très élevé de pas de calcul alors qu'il n'est peut être pas nécessaire de limiter les pas de chargement sur tout le processus de calcul.

Dans le but de faciliter l'utilisation de l'algorithme itératif et surtout de le rendre plus performant, nous laissons la possibilité pour l'algorithme d'effectuer des divisions successives et automatiques du pas de chargement lorsque le processus de calcul itératif rencontre des difficultés de convergence. La 1<sup>ère</sup> division du pas est réalisée si la convergence du processus n'est pas atteinte après 20 itérations, la 2<sup>ème</sup> après 40 itérations et ainsi de suite. Dans le calcul d'un nouveau pas, le pas de chargement revient toujours à la valeur initialement imposée.

C'est ainsi que nous avons effectué trois calculs itératifs avec des pas de temps imposés différents.

Le tableau (Tab. III-6) rassemble les paramètres de calcul ainsi obtenus et ceux provenant de deux calculs asymptotiques pour les représentations polynomiale et rationnelle de la solution.

		Nbre de pas	Nbre d'op. 'c-i'	Temps CPU
M.A.N.	R. polynomiale ordre 10	36	37	5.1
	R. rationnelle ordre 15	22	23	4.33
M.N.R.	dt=2.0-1.0	36	688	48.7
	dt=1.0-0.5	62	397	28.2
	dt=0.5-0.25	123	558	39.58

Tab. III-6 : Comparaison entre la M.A.N. et la méthode de Newton-Raphson : nombre de pas de calcul, nombre d'opérations de 'construction-inversion' de matrices et temps de calcul (mn)

La première chose à remarquer est le nombre très important d'opérations de 'construction-inversion' de matrices nécessaires lors de la résolution itérative du problème. En effet, chaque pas de calcul nécessite plusieurs itérations et donc plusieurs opérations de 'construction-inversion' avant que le processus de calcul puisse converger. Nous rappelons que les opérations de 'construction-inversion' de matrices se traduisent directement en terme de temps de calcul (Temps CPU).

Le pas de temps 'dt=1.0-0.5' nécessite plus de pas de calcul que le pas de temps 'dt=2.0-1.0', mais par contre, le nombre d'opérations de 'construction-inversion' en est très inférieur. En effet, un pas de temps choisi trop grand entraîne des difficultés de convergence, ce qui se manifeste par un nombre important d'itérations et donc d'opérations de 'construction-inversion' de matrices.

D'autre part, si le pas de temps est choisi trop petit, la convergence du processus est facile mais par contre les pas de temps sont limités inutilement et sont donc nombreux, ce qui entraîne un nombre important d'opérations de 'construction-inversion' de matrices et donc des temps de calcul trop longs. C'est ce qui se passe pour le pas de chargement 'dt=0.5-0.25'.

Dans un calcul itératif, la taille du pas de temps doit être choisie judicieusement de sorte à trouver le meilleur compromis entre une bonne convergence du processus et un nombre de pas de calcul raisonnable. De cette manière il est possible de minimiser, pour ce type de calcul, le

nombre des opérations effectuées sur les matrices et donc de diminuer au mieux les temps de calcul.

La M.A.N. permet de surmonter cette difficulté avec un calcul automatique de la taille des pas de temps et une unique opération de ‘construction-inversion’ par pas de calcul.

Même si le nombre de pas de temps du calcul itératif avec ‘dt=2.0-1.0’ est identique au nombre de pas du calcul asymptotique pour une représentation polynomiale de la solution, la convergence difficile se répercute directement sur le temps de calcul.

La figure (Fig. III-9) représente l’évolution de la vitesse du pôle de la structure au cours du chargement pour les calculs effectués avec l’algorithme asymptotique et l’algorithme itératif pour ‘dt=1.0-0.5’ qui paraît être le pas de temps optimal.

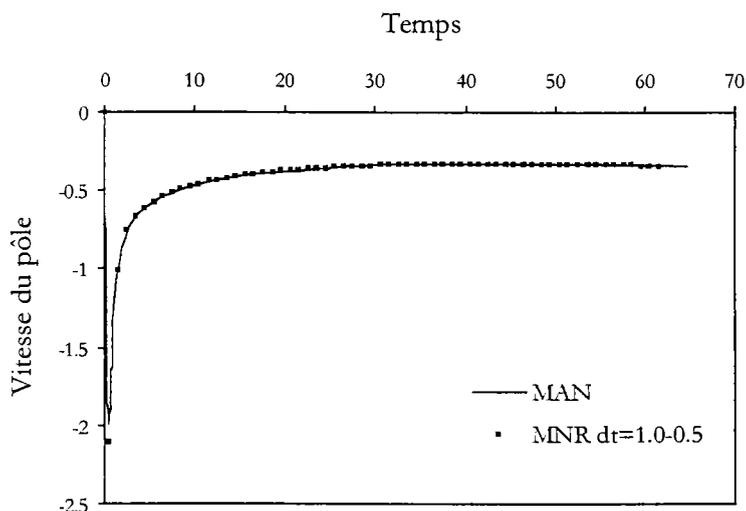


Fig. III-9 : Comparaison entre la M.A.N. et la méthode de Newton-Raphson : évolution de la vitesse du pôle (mms<sup>-1</sup>) au cours du temps (s)

La M.A.N. permet d’obtenir une représentation continue de la solution alors que la représentation obtenue par l’algorithme itératif n’est connue que point par point. De plus au début du calcul, là où la variation de vitesse est importante sur un petit intervalle de temps, le calcul itératif ne permet pas d’avoir une bonne connaissance de la solution.

Sur la figure (Fig. III-10), sont représentées les vitesses du pôle obtenues par l’algorithme asymptotique et par l’algorithme itératif pour différentes tailles de pas avec notamment le calcul

itératif pour 'dt=0.01' que nous pouvons considérer comme étant la référence numérique du calcul.

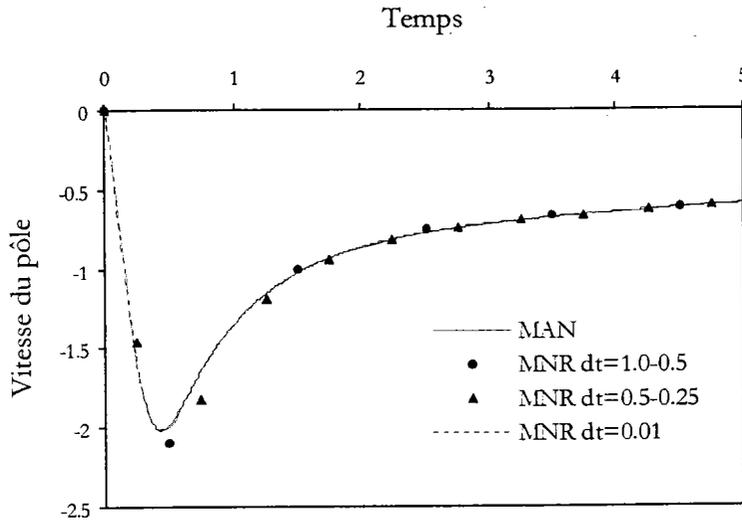


Fig. III-10 : Comparaison entre la M.A.N. et la méthode de Newton-Raphson : évolution de la vitesse du pôle (mms<sup>-1</sup>) au cours du temps (s) (courbe localisée au début du calcul)

Les courbes montrent que la M.A.N. est équivalente, en terme de branche de solution, à un calcul itératif avec un très petit pas de temps. Par contre, en ce qui concerne le nombre de pas, il n'est même pas pensable de les comparer puisque la petite portion de courbe représentée sur la figure est déterminée en 500 pas avec le calcul itératif pour 'dt=0.01'. La M.A.N. peut donc être considérée comme **une référence numérique**.

Le tableau (Tab. III-7) donne les gains réalisés sur les paramètres de calcul par la M.A.N..

	M.N.R. dt=1.0-0.5	M.A.N.	
		R. polynomiale ordre 10	R. rationnelle ordre 15
Nbre de pas	62	-42%	-65%
Nbre d'op. 'c-i'	397	-91%	-94%
Temps CPU	28.2	-82%	-85%

Tab. III-7 : Gains réalisés par la M.A.N. sur la méthode de Newton-Raphson, en terme de pas de calcul, d'opérations de 'construction-inversion' de matrices et de temps de calcul

Les gains réalisés sont considérables, surtout en ce qui concerne le nombre d'opérations de 'construction-inversion' de matrices. Ceci est très encourageant en vue d'étudier des structures plus importantes. Sans oublier que :

- l'algorithme asymptotique est automatique : seuls l'ordre de troncature et la précision de la solution (critères sur les résidus d'équilibre et d'incompressibilité) sont à fixer au début du calcul, le reste est géré de manière autonome par l'algorithme,
- toute branche de solution est connue sous forme d'un ensemble de solutions analytiques locales continues.

Dans le calcul asymptotique, la représentation rationnelle (ordre 15) de la solution permet d'accroître les gains réalisés sur les calculs itératifs, par contre elle nécessite un stockage plus important que la représentation polynomiale (ordre 10) de la solution.

**Remarque :**

La M.A.N. considère l'équilibre sur tout l'intervalle de temps, ce qui n'est bien évidemment pas le cas avec une méthode itérative puisque l'équilibre n'est recherché qu'en fin de pas de calcul.

**III-3-b Exemple 2**

Ce deuxième exemple est tiré de l'article [Iseki et al./1977] dans lequel sont présentés les résultats expérimentaux du gonflement hydraulique d'une tôle circulaire. La particularité de ce dernier exemple porte sur le comportement du matériau qui est rigide-plastique et non pas rigide-viscoplastique, ce qui constitue un cas limite d'étude dans lequel le comportement est très fortement non linéaire.

**Géométrie de la structure bidimensionnelle et rhéologie du matériau :**

$$\begin{cases} r = 24 \text{ mm} \\ e = 0.314 \text{ mm} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} k = 180.0 \text{ MPa} \\ \alpha = 0.000769 \\ m = 0.0 \\ n = 0.29 \end{cases}$$

Pour commencer, nous comparons la courbe obtenue par un calcul asymptotique et celle tirée des résultats expérimentaux présentés dans l'article. Les figures (Fig. III-11) et (Fig. III-12) représentent la pression de chargement, respectivement, en fonction de la variation de l'épaisseur de la structure et du déplacement du pôle divisé par le rayon de la structure.

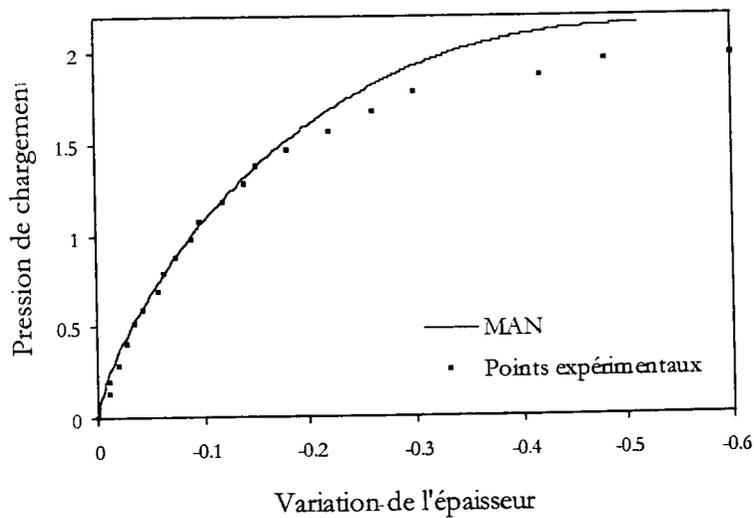


Fig. III-11 : Comparaison entre la M.A.N. et les points expérimentaux tirés de l'article [Iseki et al./1977] : courbe 'pression de chargement - variation de l'épaisseur'

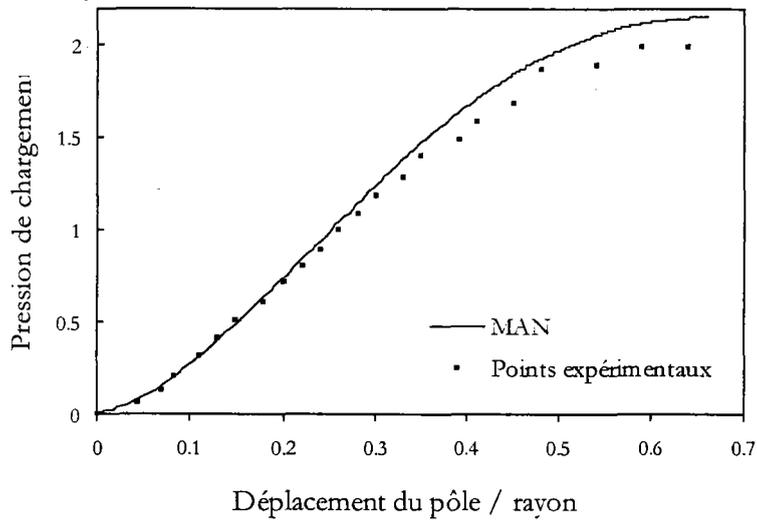


Fig. III-12 : Comparaison entre la M.A.N. et les points expérimentaux tirés de l'article [Iseki et al./1977] : courbe 'pression de chargement (MPa) – déplacement du pôle/rayon'

Les courbes obtenues par le calcul asymptotique concordent avec celles des résultats expérimentaux présentés dans l'article.

Maintenant nous comparons les résultats obtenus par les algorithmes asymptotique et itératif. Comme pour l'exemple précédent (III-3-a), les calculs itératifs sont effectués pour plusieurs pas de temps avec une division possible des pas lorsque le processus rencontre des difficultés de convergence. Les calculs asymptotiques sont réalisés pour les deux représentations de la solution : polynomiale à l'ordre 10 et rationnelle à l'ordre 15.

Le tableau (Tab. III-8) rassemble les résultats des calculs numériques.

		Nbre de pas	Nbre d'op. 'c-i'	Temps CPU
M.A.N.	R. polynomiale ordre 10	130	130	17.9
	R. rationnelle ordre 15	37	43	7.6
M.N.R.	dt=10.0	Divergence	Divergence	Divergence
	dt=5.0-2.5-1.25	404	2073	147.0
	dt=2.5-1.25	793	2447	173.0

Tab. III-8 : Comparaison entre la M.A.N. et la méthode de Newton-Raphson : nombre de pas de calcul, nombre d'opérations de 'construction-inversion' de matrices et temps de calcul (mn)

En ce qui concerne la M.A.N. avec la représentation rationnelle, la différence entre le nombre de pas de calcul et le nombre d'opérations de 'construction-inversion' de matrices ne provient pas du calcul du point de départ. La correction à la fin de certains pas asymptotiques a nécessité deux itérations au lieu d'une mais ceci reste tout à fait raisonnable.

Le nombre d'opérations de 'construction-inversion' de matrices est considérable pour les calculs itératifs, ce qui se répercute directement sur les temps de calcul. Ceci est dû à la forte non-linéarité du comportement du matériau qui est ici rigide-plastique. De plus il s'est avéré très difficile de trouver un pas de temps convenable pour le calcul itératif.

Comparativement aux calculs asymptotiques, les calculs itératifs sont très coûteux en terme de pas de calcul, d'opérations de 'construction-inversion' de matrices et de temps de calcul.

Le figure (Fig. III-13) donne l'évolution de la vitesse du pôle, au début des simulations, pour le calcul asymptotique et pour les calculs itératifs.

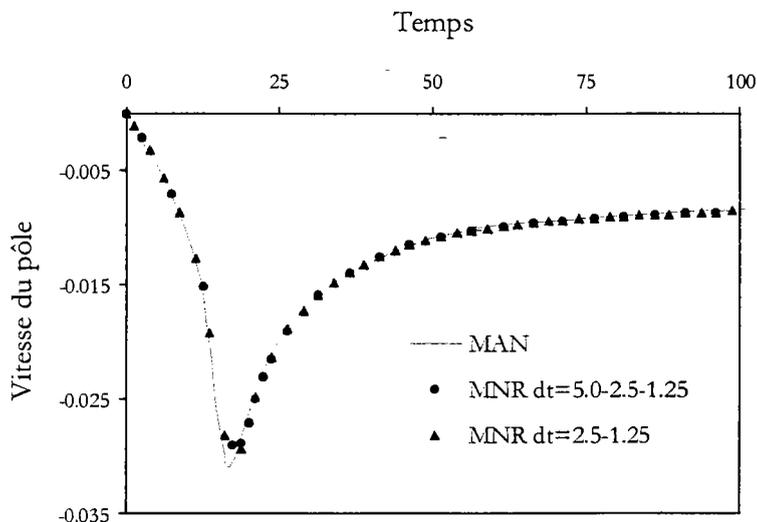


Fig. III-13 : Comparaison entre la M.A.N. et la méthode de Newton-Raphson : évolution de la vitesse du pôle ( $mm\cdot s^{-1}$ ) au cours du temps ( $s$ ) (courbe localisée au début du calcul)

En considérant la courbe obtenue par le calcul asymptotique comme référence numérique, les deux calculs itératifs donnent une assez bonne représentation de la solution.

Le tableau (Tab. III-9) donne les gains réalisés par les calculs asymptotiques sur le calcul itératif avec le pas de temps 'dt=5.0-2.5-1.25'.

	M.N.R.	M.A.N.	
	dt=5.0-2.5-1.25	R. polynomiale ordre 10	R. rationnelle ordre 15
Nbre de pas	404	-68%	-91%
Nbre d'inv.	2073	-94%	-98%
Temps CPU	147.0	-88%	-95%

Tab. III-9 : Gains réalisés par la M.A.N. sur la méthode de Newton-Raphson, en terme de pas de calcul, d'opérations de 'construction-inversion' de matrices et de temps de calcul

Les gains réalisés par la M.A.N. sont encore plus importants que ceux réalisés dans l'exemple précédent.

Le tableau (Tab. III-9) montre que dans cet exemple, la représentation rationnelle de la solution permet une diminution remarquable des paramètres de calcul. Le tableau (Tab. III-10)

rassemble les gains réalisés par la représentation rationnelle par rapport à la représentation polynomiale de la solution.

	M.A.N.	
	R. polynomiale ordre 10	R. rationnelle ordre 15
Nbre de pas	130	-72%
Nbre d'op. 'c-i'	130	-67%
Temps CPU	17.9	-58%

Tab. III-10 : Gains réalisés par la représentation rationnelle de la solution sur la représentation polynomiale, en terme de pas de calcul, d'opérations de 'construction-inversion' de matrices et de temps de calcul

Les gains sont nettement supérieurs à ceux réalisés dans le premier exemple : 72% contre à peu près 39% pour le nombre de pas de calcul, 67% contre 38% pour le nombre d'opérations de 'construction-inversion' de matrices et 58% contre seulement 15% pour le temps de calcul.

## En conclusion

Dans cette troisième partie, nous avons présenté deux cas de gonflement hydraulique de tôles circulaires. Les simulations numériques ont été réalisées sur des structures d'étude de comportement viscoplastique différent, ceci afin d'étudier l'efficacité de la M.A.N. sur des problèmes à non-linéarité différente avec en particulier le cas limite d'une structure de comportement rigide plastique.

Un algorithme itératif, basé sur la méthode de Newton-Raphson, a été introduit dans notre code de calcul et joue le rôle de référence numérique. D'autant plus qu'il résout le même problème viscoplastique régularisé et qu'il utilise les mêmes techniques de construction, d'inversion, de stockage, ... que l'algorithme basé sur la M.A.N..

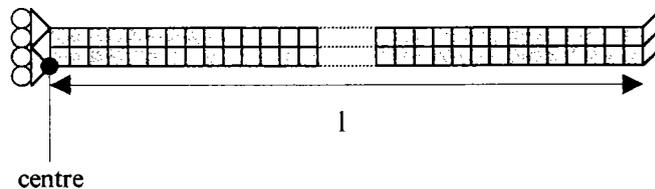
Comparée à la méthode de Newton-Raphson, la M.A.N. nécessite peu de pas de calcul et peu d'opérations sur les matrices pour simuler la déformation de la structure et permet de déterminer une branche complexe de solution à partir d'une succession de représentations analytiques locales continues, autrement dit la solution est connue partout sur la branche et pas seulement en quelques points. En fait, la M.A.N. est équivalente, en terme de suivi de courbe, à la

méthode de Newton-Raphson avec un très petit pas de temps. En ce qui concerne le temps de calcul, il convient de rester prudent. En effet, la résolution du problème par la M.A.N. n'a pu être faite par condensation de la pression dans l'équation d'équilibre (section **II-1-c**) et nous avons fait de même pour la résolution par la méthode de Newton-Raphson alors que cela n'était pas nécessaire. En conséquence, nous avons compliqué inutilement le principe de résolution de la méthode itérative, ce qui entraîne naturellement une augmentation des temps de résolution.

Nous avons vu que représenter la solution sous une forme rationnelle permet de diminuer, par rapport à la représentation classique polynomiale, les nombres de pas de calcul et d'opérations sur les matrices et donc de diminuer les temps de calcul.

### III-4 Conditions de déformation plane

Nous simulons le gonflement hydraulique d'une tôle rectangulaire encadrée sur ses bords. Les conditions de symétrie conduisent à l'étude d'une section bidimensionnelle dans des conditions de déformation plane.



La structure est discrétisée en éléments quadrilatères à quatre nœuds comprenant quatre points de Gauss d'intégration numérique et un point de Gauss au centre pour l'intégration de la pression.

#### Géométrie de la structure bidimensionnelle et rhéologie du matériau :

$$\begin{cases} l = 50 \text{ mm} \\ e = 1 \text{ mm} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} k = 180.0 \text{ MPa s}^{0.8} \\ \alpha = 0.0001 \\ m = 0.8 \\ n = 0.2 \end{cases}$$

Les simulations numériques sont effectuées pour une structure composée de 100 éléments (2 dans l'épaisseur et 50 sur la longueur) jusqu'à un déplacement du centre égal à une demi-longueur de la structure.

Deux calculs asymptotiques sont exécutés : un premier calcul en considérant une représentation polynomiale de la solution avec l'ordre de troncature pris égal à 10 et un second calcul pour une représentation rationnelle de la solution avec l'ordre de troncature égal à 15.

Le calcul numérique pour la représentation polynomiale de la solution a été réalisé en 62 pas de calcul et a nécessité 63 opérations de 'construction-inversion' de matrices, ce qui correspond à un temps de calcul de 8.5 minutes.

Le calcul numérique pour la représentation rationnelle de la solution a été réalisé en 25 pas de calcul, 26 opérations de 'construction-inversion' et un temps de calcul de 4.9 minutes. Les gains réalisés, par rapport à la représentation polynomiale, sont donc : **60%** en pas de calcul et en opérations sur les matrices et **40%** en temps de calcul.

L'algorithme asymptotique que nous avons développé est capable de prendre en compte des conditions de déformation plane.

## Conclusion

A partir de simulations de gonflement hydraulique de tôles, nous avons testé et validé la M.A.N. développée au **Chapitre II**.

Dans ce travail, nous avons établi un principe de continuation basé sur des pas de temps optimaux par contrôle des résidus des équations d'équilibre et d'incompressibilité (**II-2-b**). Nous avons validé le choix de ce nouveau principe en le comparant au principe de continuation habituellement utilisé dans les travaux sur la M.A.N., (**III-1**). Chaque nouveau calcul nécessite seulement la donnée de l'**ordre de troncature** des développements asymptotiques et la donnée des **critères sur les résidus** des équations.

D'autre part, les **solutions** obtenues sont de **qualités constantes** (les résidus des équations restent toujours inférieurs aux critères imposés) et **connues à tout moment** du processus de calcul par la succession de représentations analytiques locales continues (**III-2**).

Nous avons vu qu'il existe un **ordre de troncature optimal** qui dépend de la grandeur de la structure étudiée et du choix de la représentation de la solution, (**III-2**). Dans le cadre de ce travail, les structures étudiées sont à un faible nombre de degré de liberté mais le choix de la numérotation des nœuds en ont fait des structures proches, d'un point de vue numérique, de cas réels en mise en forme. A partir de cela, il a été constaté que l'ordre optimal se situe entre 10 et 15.

Les calculs effectués avec la M.A.N. conduisent aux mêmes résultats que ceux obtenus avec la méthode de Newton-Raphson mais avec un petit nombre d'opérations de 'construction-inversion' de matrices, ce qui, en terme de temps de calcul, est très avantageux (**III-3**). De plus, la M.A.N. permet de ne pas avoir à choisir a priori la taille des pas de temps, comme c'est le cas avec la méthode de Newton-Raphson. En effet, sur chaque pas de calcul, la taille du pas est calculée a posteriori à partir de la solution elle-même. Ce fait rend l'**algorithme** asymptotique extrêmement **robuste**.

La représentation rationnelle de la solution permet, en augmentant le domaine de validité de la solution sur chaque pas de calcul, de diminuer le nombre de pas de calcul nécessaires pour déformer la structure. Le principe de continuation, basé sur cette représentation de la solution, est fiable puisqu'une recherche des pôles des approximants de Padé est effectuée. En considérant les ordres optimaux de chacune des représentations de la solution, la **représentation rationnelle**

de la solution permet une **diminution** du nombre de pas de calcul, par rapport à la représentation polynomiale, qui peut varier de **40% à 70%** suivant le cas étudié (**III-3**).

Les tests réalisés ont montré que la M.A.N. est une **méthode** à la fois **rapide, robuste** et totalement **automatique**.

D'autre part, nous avons vu que l'algorithme que nous avons développé est capable de traiter des structures bidimensionnelles sous conditions axisymétriques ou sous conditions de déformation plane (**III-4**).

## Chapitre IV

### Formulation et résolution du problème de contact avec frottement

<i>Introduction</i>	70
<i>IV-1 Contact avec frottement</i>	71
IV-1-a Conditions de contact	71
IV-1-b Lois de contact régularisées	73
IV-1-c Géométrie du contact	75
<i>IV-2 Formulation du problème de contact et résolution</i>	77
IV-2-a Formulation variationnelle	77
IV-2-b Méthode Asymptotique Numérique	83
<i>Conclusion</i>	87

## Introduction

La prise en compte des conditions de contact et de frottement entre matériau et outil de mise en forme revêt un caractère essentiel pour une bonne mise en œuvre et un suivi effectif des procédés de mise en forme, [Wang/1984], [Germain/1985], [Durville/1993], [Chenot/1993], [Hacquín/1996], [Hans Raj et al./1996], [Chenot/1997], [Fourment et al./1997]. Ces conditions de contact et de frottement évolutives au cours de la mise en forme du matériau sont à considérer sur la surface de contact : par exemple, le matériau se rapproche de l'outil, prend le contact, reste en contact puis le perd.

Au cours du procédé il y a évolution permanente du contact entre la structure déformable et l'outil. En pratique, quatre problèmes distincts sont à traiter :

- l'analyse de la position relative des nœuds de la surface déformable par rapport à la surface solide,
- la prise en compte des conditions de contact dans la résolution de l'équation d'équilibre,
- le calcul des cissions de frottement à l'interface,
- le décollement des nœuds de la surface de l'outil.

Tout problème de contact est donc géré par un ensemble de conditions unilatérales, [Kikuchi et al./1988], [Raous et al./1988], [Jean/1993], [Zhong/1993]. Ces conditions sont évolutives et constituent une très forte non linéarité qui s'ajoute à la non-linéarité matérielle provenant du comportement viscoplastique du matériau.

La nécessité de détenir des relations non singulières pour pouvoir appliquer une technique de perturbation a motivé la recherche d'une régularisation des conditions de contact. C'est dans cette voie qu'Elhage-Hussein a travaillé sur la résolution par la M.A.N. des problèmes de contact sans frottement entre une structure élastique et un solide rigide, [Elhage-Hussein/1998], [Elhage-Hussein et al./1998]. Partant de ces travaux, nous les étendons à l'étude du contact avec frottement entre une structure viscoplastique et un outil supposé rigide.

## IV-1 Contact avec frottement

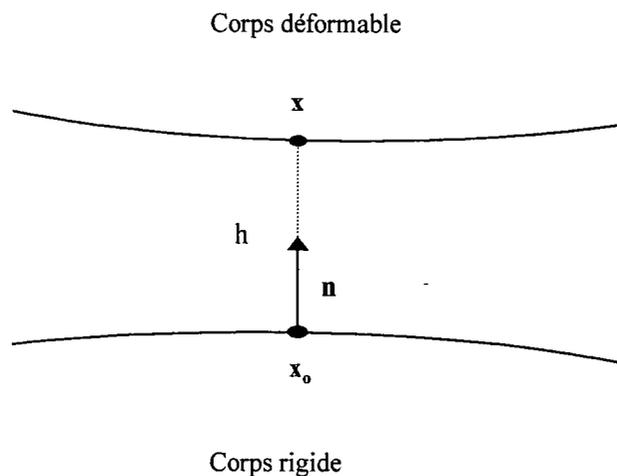
La première partie de ce chapitre est consacrée à la présentation des conditions intervenant dans un problème de contact avec frottement. Ces conditions de contact sont ensuite régularisées de manière à les rendre analytiques puisque cette propriété est indispensable lors de l'application d'une technique de perturbation.

### IV-1-a Conditions de contact

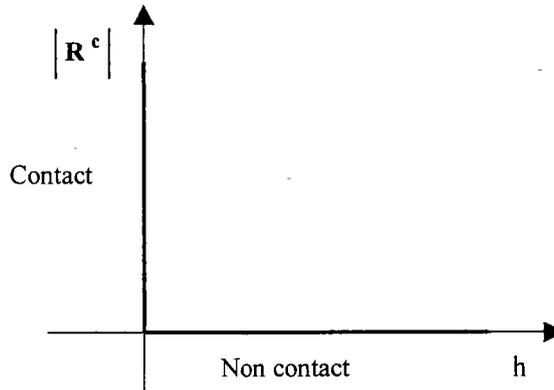
Considérant un solide viscoplastique qui occupe un domaine  $\Omega$  de frontière  $\delta\Omega$  dont une partie  $\delta\Omega_c$  est susceptible d'entrer en contact avec une surface rigide.

La zone effective de contact ainsi que les efforts de contact évoluent au cours du temps et sont donc des inconnues du problème étudié.

L'action locale de l'outil sur le matériau est représentée par une force de réaction, notée  $\mathbf{R}^c$ , sur la surface de contact. Les composantes normale et tangentielle de cet effort sont les paramètres du contact : la première quantité est assimilée à une pression de contact et la seconde quantité est assimilée à une cission de frottement qui traduit une résistance plus ou moins grande au déplacement relatif du matériau par rapport à l'outil.



Le point  $x$  du corps déformable est en contact avec le corps rigide lorsque la distance de ce point à la surface de l'outil rigide est nulle.



On définit la distance  $h$  et la vitesse relative  $\Delta \mathbf{v}$  entre un point du matériau et un point de la surface rigide par :

$$\begin{cases} h \mathbf{n} = (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}) \\ \Delta \mathbf{v} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_0 \end{cases} \quad (\text{IV-1})$$

$\mathbf{n}$  est la normale extérieure à la surface rigide,  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0)$  et  $(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  représentent la position et la vitesse respectivement sur la surface de l'outil (surface rigide) et sur la surface du matériau (surface déformable).

A tout point candidat au contact sont associées les variables  $h$  et  $\Delta \mathbf{v}$ . Ce point candidat doit alors satisfaire les conditions de contact suivantes :

- Le point de contact ne doit pas pénétrer la surface rigide :

$$h \geq 0 \quad (\text{IV-2})$$

- Le point de contact ne doit pas adhérer à la surface rigide :

$$\mathbf{R}^c \cdot \mathbf{n} \geq 0 \quad (\text{IV-3})$$

- D'une part lorsque le point est en contact l'écart  $h$  est nul et une réaction de contact est générée. D'autre part en l'absence de contact,  $h$  est non nul et la force de réaction est réduite à zéro :

$$|R^c| * h = 0 \quad (\text{IV-4})$$

- Il y a contact avec glissement tangentiel de la structure sur l'outil lorsque :

$$\Delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (\text{IV-5})$$

- La réaction tangentielle (ou cission de frottement) de contact s'oppose au déplacement relatif du matériau par rapport à l'outil :

$$\mathbf{R}_t^c \cdot \Delta \mathbf{v} < 0 \quad (\text{IV-6})$$

#### IV-1-b Lois de contact régularisées

Les conditions de contact (IV-2), (IV-3), (IV-4), (IV-5) et (IV-6) ne sont pas analytiques. Or cette propriété est nécessaire pour appliquer la procédure asymptotique. Elhage-Hussein [Elhage-Hussein/1998] a proposé une régularisation de forme hyperbolique, il a ainsi écrit :

$$\mathbf{R}_n^c = \eta \frac{(\delta - h)}{h} \mathbf{n} \quad (\text{IV-7})$$

où  $\delta$  est l'écart initial entre les surfaces et  $\eta$  est un petit paramètre positif. Ainsi pour une valeur assez petite de  $\eta$  la loi (IV-7) est proche de la loi (IV-4) et la condition (IV-3) est ainsi vérifiée.

La surface de contact est constituée d'un ensemble de points caractérisés chacun par le couple de variables  $\delta$  et  $h$ , la régularisation (IV-7) n'est donc pas uniforme sur toute la surface. Il faut donc définir le paramètre de régularisation  $\eta$  en chaque point de façon à homogénéiser le comportement à l'interface. Si on suppose un écart donné  $h^d$  et qu'on lui associe une pression de contact donnée  $R^d$ , alors le paramètre de régularisation peut être défini en un point de contact par l'expression :

$$R^d * h^d = \eta_{(\text{point})} (\delta_{(\text{point})} - h^d) \quad (\text{IV-8})$$

Ainsi pour l'ensemble des points de la surface de contact, la régularisation est uniforme. Bien évidemment, la valeur  $h^d$  doit être inférieure à la valeur minimale des écarts initiaux  $\delta$  sur tous les points.

La condition (IV-6) se traduit par une écriture générale de la forme suivante :

$$\mathbf{R}_t^c = -f(\Delta\mathbf{v}, |\mathbf{R}_n^c|, T, \dots) \frac{\Delta\mathbf{v}}{|\Delta\mathbf{v}|} \quad (\text{IV-9})$$

où  $T$  est la température, mais dans le cas présent nous négligeons les effets thermiques.

Lors du contact, la condition (IV-5) est vérifiée et la vitesse relative entre la structure et l'outil est alors réduite à sa composante tangentielle, appelée aussi vitesse de glissement tangentiel et notée  $\mathbf{v}_t$ . La forme (IV-9) de la composante tangentielle de la réaction de contact peut donc être exprimée en fonction de la vitesse relative tangentielle.

Le modèle de Coulomb, couramment utilisé en mise en forme : [Durville/1993], [Hacquín/1996], stipule une relation mécanique du type :

$$\mathbf{R}_t^c = -\mu |\mathbf{R}_n^c| \frac{\mathbf{v}_t}{|\mathbf{v}_t|} \quad (\text{IV-10})$$

où  $\mu$  est un coefficient de frottement moyen, macroscopique et isotrope.

Une autre loi surfacique utilise la vitesse de glissement comme paramètre principal du frottement et a une expression analogue à la loi viscoplastique de Norton-Hoff, [Germain/1985], [Hacquín/1996], [Fourment et al./1997]. Cette loi est non linéaire et s'écrit :

$$\mathbf{R}_t^c = -\mu |\mathbf{v}_t|^{q-1} \frac{\mathbf{v}_t}{|\mathbf{v}_t|} \quad (\text{IV-11})$$

où  $q$  est le coefficient de sensibilité à la vitesse de glissement. Ce modèle a pour base l'existence d'une couche de matériau viscoplastique d'épaisseur faible mais non nulle, cisailée entre l'outil et le matériau formé générant une cisssion, [Germain/1985]. Dans FORGE®, le frottement peut être décrit par cette loi.

Comme dans cette étude nous travaillons sur un matériau viscoplastique et donc que le problème à résoudre est un problème en vitesse, il est intéressant de modéliser le comportement du matériau à l'interface par un frottement du type (IV-11) dans lequel une sensibilité à la vitesse de glissement entre les surfaces en contact intervient.

La composante tangentielle du contact (IV-11) doit être régularisée et le choix le plus naturel est de régulariser les deux composantes de la réaction de contact de la même manière.

Nous exprimons donc  $\mathbf{R}_t^c$  en fonction du terme  $|\mathbf{R}_n^c|$ , on a ainsi :

$$\mathbf{R}_t^c = -\mu |\mathbf{R}_n^c| |\mathbf{v}_t|^{q-1} \mathbf{v}_t \quad (\text{IV-12})$$

Cette expression revient à combiner les deux définitions de frottement (IV-10) et (IV-11) de manière à créer une nouvelle loi qui tient compte des effets de la vitesse de glissement et de la pression de contact, ce qui avait déjà été proposé par Chenot [Chenot/1993], [Chenot/1997]. On notera que, pour  $q = 0$ , on retrouve la loi de frottement de Coulomb (IV-11).

La régularisation des conditions de contact rend automatique l'étude de l'évolution du contact, c'est à dire : l'analyse des positions relatives des points, la prise en compte des conditions de contact dans l'équilibre, le calcul des cisssions de frottement et enfin le décollement des points.

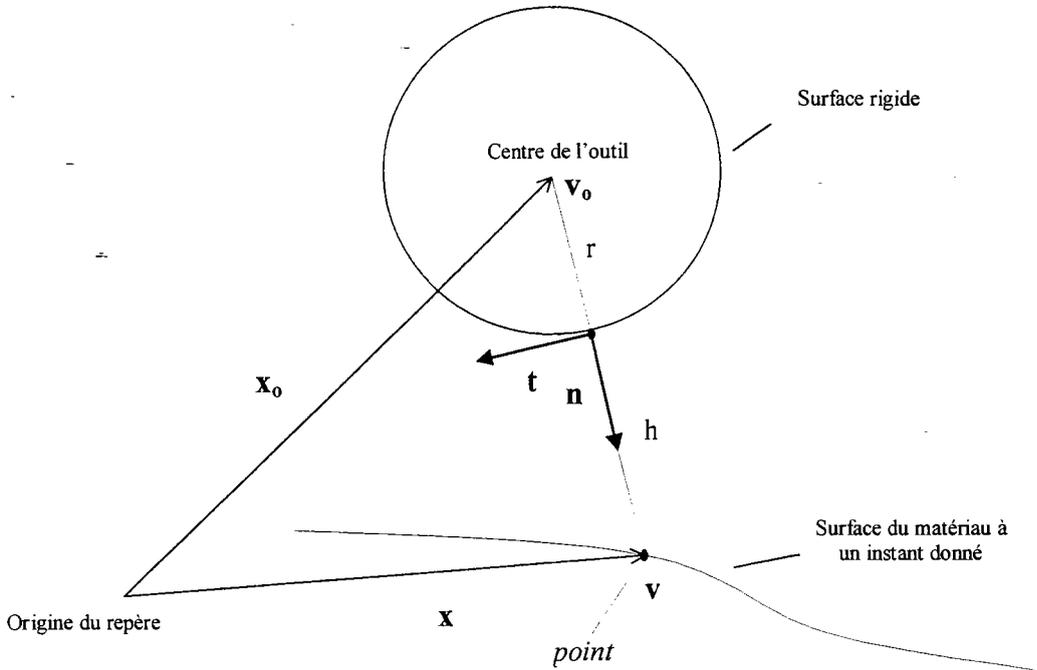
La loi surfacique tangentielle du contact (IV-12) est discontinue au voisinage de vitesses de glissement nulles. De la même manière que pour la loi de comportement (I-13), la vitesse relative tangentielle est régularisée à l'aide d'une vitesse caractéristique du problème étudié et d'un petit paramètre sans dimension  $\omega$  :

$$|\mathbf{v}_t| = \sqrt{\mathbf{v}_t \cdot \mathbf{v}_t + (\omega V_c)^2} \quad (\text{IV-13})$$

Notons qu'il n'est pas nécessaire de régulariser l'expression de la force normale  $|\mathbf{R}_n^c|$  qui ne sera jamais complètement nulle avec le choix de régularisation qui a été fait.

### **IV-1-c Géométrie du contact**

Elhage-Hussein [Elhage-Hussein/1998] a étudié le contact pour différents types de surface : surface plane, surface circulaire et surface quelconque. Dans ce travail, nous nous limiterons à l'étude du contact avec une surface circulaire.



Le couple  $(\mathbf{t}, \mathbf{n})$  constitue une base locale orthonormée directe.

Soit  $\mathbf{x}$  un point candidat au contact, on désigne par  $\delta$  et  $\mathbf{v}$  : l'écart initial entre le point et la surface rigide et la vitesse du point. L'écart  $h$ , la normale  $\mathbf{n}$  et les forces de contact sont alors définis par les relations suivantes :

➤ relations géométriques :

$$\begin{cases} h = -r + |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \\ \mathbf{n} = \frac{1}{r+h} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \end{cases} \quad (\text{IV-14})$$

➤ efforts de contact :

$$\begin{cases} \mathbf{R}^c = \mathbf{R}_n^c + \mathbf{R}_t^c \\ \mathbf{R}_n^c = \eta \frac{(\delta - h)}{h} \mathbf{n} \\ \mathbf{R}_t^c = -\mu |\mathbf{R}_n^c| |\mathbf{v}_t|^{q-1} \mathbf{v}_t \\ \text{avec } |\mathbf{v}_t| = \sqrt{\mathbf{v}_t \cdot \mathbf{v}_t + (\omega \mathbf{v}_c)^2} \quad \text{et } \mathbf{v}_t = ((\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{t}) \mathbf{t} \end{cases} \quad (\text{IV-15})$$

où  $\omega$  est un petit paramètre sans dimension et  $\mathbf{v}_c$  est une vitesse caractéristique du problème étudié.

Il ne faut pas oublier que toutes ces relations sont définies en chaque point de la surface susceptible d'entrer en contact avec la surface rigide circulaire.

**La régularisation du problème de contact permet de supposer connus a priori les points candidats au contact et d'imposer en chacun de ces points un effort de contact régularisé.**

## IV-2 Formulation du problème de contact et résolution

Maintenant que les lois de contact sont régularisées, il faut les introduire dans le principe variationnel en vitesse et pression décrit dans la section I-2. Nous verrons les modifications que la prise en compte du contact engendre au niveau de la formulation et de l'application de la méthode asymptotique, notamment avec l'introduction d'une rigidité de contact due au terme de frottement.

### IV-2-a Formulation variationnelle

Nous considérons un matériau viscoplastique incompressible occupant un domaine  $\Omega$  de frontière  $\partial\Omega$ . Des vitesses sont imposées nulles sur une partie  $\partial\Omega_v$  de  $\partial\Omega$ . Une autre partie de  $\partial\Omega$ , notée  $\partial\Omega_c$ , est soumise aux efforts extérieurs de contact.

La difficulté d'un problème de contact provient de la frontière  $\partial\Omega_c$  qui est variable au cours du temps. Mais la régularisation qui a été introduite dans la section IV-1-b au niveau des lois de contact, permet de surmonter cette difficulté. En effet la régularisation des efforts de contact permet de supposer que l'élément de frontière  $\partial\Omega_c$  est invariable et qu'il contient un ensemble de points  $\mathbf{P}$  susceptibles d'entrer en contact avec une surface rigide extérieure au domaine considéré. Les réactions de contact, définies par les relations (IV-14) et (IV-15), sont des efforts ponctuels agissant aux points  $\mathbf{P}$ .

La résolution du problème étudié donnera l'évolution du sous-ensemble de  $\partial\Omega_c$  contenant les points réellement en contact et les efforts de contact au cours du temps.

① **Equilibre**

L'équilibre du problème s'écrit :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) = 0 & \text{sur } \Omega \\ \mathbf{v} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_v \\ \operatorname{Tr}(\mathbf{D}) = 0 & \text{sur } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{R}^c(t) & \text{sur } \partial\Omega_c \end{cases} \quad (\text{IV-16})$$

② **Formulation en vitesse**

La formulation variationnelle écrite pour le problème viscoplastique reste valable et d'après l'équilibre (IV-16), seuls la surface où sont imposés les efforts extérieurs et les efforts extérieurs eux même changent. Les efforts de contact sont des fonctions très compliquées du temps.

Nous réécrivons la formulation variationnelle du problème incompressible sur la configuration lagrangienne (I-16) dans le cas d'un chargement extérieur de type effort de contact :

$$\begin{cases} \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\sigma}'(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \mathbf{v}) : (\nabla_X \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}) \, d\Omega_0 = \mathbf{R}^c(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \delta \mathbf{v}_p \\ \mathbf{v} \in CA_{inc} \quad \text{et} \quad \forall (\delta \mathbf{v}, \delta \mathbf{v}_p) \in CA_{inc} \end{cases} \quad (\text{IV-17})$$

Le premier membre de l'équation (IV-17) est homogène et de degré  $m$  par rapport à la vitesse  $\mathbf{v}$ , ou plus précisément par rapport à la vitesse de déformation  $\mathbf{D}$ . La matrice tangente qui sera obtenue à partir du premier membre dépend de la vitesse caractéristique du procédé : en particulier, si  $m$  est compris entre 0 et 1, cette matrice tend vers l'infini lorsque la vitesse est faible. Or on sait qu'une régularisation ou une pénalisation est efficace si la matrice tangente correspondant au second membre est petite par rapport à la première en l'absence de contact et grande, mais pas trop grande, lorsqu'il y a contact. Nos premières expériences numériques ont montré que nous ne pouvions choisir le même paramètre de régularisation de contact  $\eta$  pour toutes les vitesses du procédé : à petite vitesse nous nous éloignons trop de la solution pour une loi de contact parfaite et à grande vitesse l'algorithme ne convergeait plus, ce qui traduit un phénomène de 'verrouillage'.

Nous proposons donc que le petit paramètre de régularisation soit un paramètre sans dimension  $\eta^*$ , le paramètre  $\eta$  étant alors défini à partir d'une vitesse  $V_c$  et d'une longueur  $L_c$  caractéristiques du problème :

$$\eta_{(\text{point})} = \eta^*_{(\text{point})} \left( \frac{V_c}{L_c} \right)^m (L_c)^2 \quad (\text{IV-18})$$

Comme nous l'avons fait pour  $\eta$  (IV-8),  $\eta^*$  est défini sur chaque point de la surface de contact par :

$$\eta^*_{(\text{point})} = \frac{R^d h^d}{\delta_{(\text{point})} - h^d} \quad (\text{IV-19})$$

Considérant un procédé de référence, la régularisation est alors fixée par la donnée du couple  $(R^d, h^d)$  où  $R^d$  est une donnée sans dimension.

### ③ Formulation mixte en vitesse et pression

Partant de la formulation mixte écrite sur la configuration lagrangienne réactualisée (I-20), la formulation s'exprime maintenant par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_0} J \sigma'(\bar{\epsilon}, \mathbf{v}) : (\nabla_X \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}) d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} J p \text{Tr}(\nabla \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}) d\Omega_0 = \mathbf{R}^c(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \delta \mathbf{v}_p \\ \int_{\Omega_0} J \left[ \text{Tr}(\nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}) + \frac{p}{C_{\text{pén}}} \right] \delta p d\Omega_0 = 0 \\ \mathbf{v} \in \text{CA} \quad \text{et} \quad \forall (\delta \mathbf{v}, \delta \mathbf{v}_p) \in \text{CA}_{\text{inc}}, \forall \delta p \end{array} \right. \quad (\text{IV-20})$$

Cette formulation doit être complétée par la loi de comportement viscoplastique, par les lois de contact régularisées, par les relations géométriques et cinématiques, et par les équations différentielles.

### ④ Formulation pour la M.A.N.

De la même manière que pour le problème à résoudre sans contact (I-2-c), nous réécrivons la formulation variationnelle (IV-20) dans un cadre quadratique moyennant quelques variables supplémentaires et la transformation des lois puissances introduites par la loi de comportement

mais aussi par la loi de frottement. L'ensemble des variables supplémentaires introduites ici est noté  $(\bullet)_c$ .

Soit  $\Lambda$  le nouvel ensemble des variables intervenant dans la formulation :

$$\Lambda = \left\{ \mathbf{v}, \bar{D}, \mathbf{x}, \bar{\varepsilon}, p, J, \mathbf{L}, \mathbf{f}, \boldsymbol{\sigma}', \mathbf{D}, \mathbf{D}', (\mathbf{A}, C, H, Q)_v, \mathbf{R}_n^c, \mathbf{R}_t^c, |\mathbf{R}_n^c|, \mathbf{v}_t, |\mathbf{v}_t|, h, \mathbf{n}, \mathbf{t}, (\mathbf{S}, P, \mathbf{V}_q)_c \right\} \quad (\text{IV-21})$$

◆ **Comportement du matériau :**

En ce qui concerne le comportement du matériau, nous avons toujours la loi de comportement sous forme quadratique :

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{C}(\bar{\varepsilon}, \mathbf{D}') \mathbf{D}' \quad (\text{IV-22})$$

et les variables  $C, Q, H$  supplémentaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} C = \frac{2}{3} k H Q \\ \text{avec} \\ H = (\alpha + \bar{\varepsilon})^n \\ Q = \bar{D}^{m-1} \\ \text{et} \\ \bar{D}^2 = \frac{2}{3} \mathbf{D}' : \mathbf{D}' + \left( \gamma \frac{\mathbf{V}_c}{\mathbf{L}_c} \right)^2 \end{array} \right. \quad (\text{IV-23})$$

Les relations puissances  $H$  et  $Q$  sont écrites sous une forme différentielle quadratique :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\alpha + \bar{\varepsilon}) dH = n H d\bar{\varepsilon} \\ \text{et} \\ \bar{D} dQ = (m-1) Q d\bar{D} \end{array} \right. \quad (\text{IV-24})$$

◆ **Lois de contact :**

Les relations (IV-15) définissant les forces de contact peuvent se mettre sous une forme quadratique si on introduit trois variables supplémentaires : deux scalaires  $S$  et  $P$  et une variable vectorielle  $\mathbf{V}_q$ .

$$\begin{cases} \mathbf{R}_n^c(\mathbf{x}) = |\mathbf{R}_n^c| \mathbf{n} \quad \text{et} \quad |\mathbf{R}_n^c| = \eta \frac{(\delta - h)}{h} \\ \mathbf{R}_t^c(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = -\mu |\mathbf{R}_n^c| \mathbf{V}_q \end{cases} \quad (\text{IV-25})$$

et

$$\begin{cases} |\mathbf{v}_t| = (\mathbf{v} - \mathbf{v}_o) \cdot \mathbf{t} \\ \mathbf{v}_t = |\mathbf{v}_t| \mathbf{t} \\ S = \mathbf{v}_t \cdot \mathbf{v}_t + (\omega \mathbf{V}_c)^2 \\ P = S^{(q-1/2)} \\ \mathbf{V}_q = P \mathbf{v}_t \end{cases} \quad (\text{IV-26})$$

Les variables  $S$  et  $\mathbf{V}_q$  sont définies par des relations quadratiques, par contre la relation définissant la variable  $P$  est une loi puissance. Utilisant la même technique que pour les variables  $H$  et  $Q$ , on écrit :

$$S \, dP = \frac{q-1}{2} P \, dS \quad (\text{IV-27})$$

◆ **Equations différentielles :**

Les équations différentielles par rapport au temps sont quadratiques :

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v} \quad \text{et} \quad \frac{d\bar{\epsilon}}{dt} = \bar{\mathbf{D}} \\ \frac{dJ}{dt} = J \text{Tr}(\mathbf{D}) \end{cases} \quad (\text{IV-28})$$

◆ **Relations géométriques et cinématiques :**

Au relations géométriques et cinématiques du problème sans contact, il convient d'ajouter les relations introduites par la géométrie du contact :

$$\begin{cases} \mathbf{f} = (\nabla \mathbf{x})^{-1} & \text{et} & \mathbf{L} = \nabla \mathbf{v} \\ \mathbf{D} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} \mathbf{f} + {}^t(\mathbf{L} \mathbf{f})) & \text{et} & \mathbf{D}' = \mathbf{D} - \frac{\text{Tr}(\mathbf{D})}{3} \mathbf{I} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} (r+h)^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \\ \mathbf{n} = \frac{1}{r+h} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \end{cases}$$

(IV-29)

et

$$\mathbf{A} = \mathbf{J} {}^t \mathbf{f} \quad (\text{IV-30})$$

♦ **Equations de vitesses et pression :**

Tenant compte des nouvelles variables introduites  $(\bullet)_v$  et  $(\bullet)_c$  et des lois puissances transformées, l'équation (IV-20) est formulée à l'aide d'un nouvel opérateur quadratique  $\mathbf{Q}_0^*(\bullet, \bullet)$ .

Le problème de contact avec frottement dans un écoulement viscoplastique s'écrit alors :

$$\mathbf{Q}_0^*(\Lambda, \Lambda) = \mathcal{R}_n^c \quad (\text{IV-31})$$

avec :

$$\begin{aligned} \left\langle \mathbf{Q}_0^*(\Lambda, \Lambda), \begin{pmatrix} \delta \mathbf{v} \\ \delta p \end{pmatrix} \right\rangle &= \int_{\Omega_0} \mathbf{A} \sigma'(\mathbf{C}, \mathbf{D}') : (\delta \mathbf{L}) \, d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} \mathbf{A} p \, \text{Tr}(\delta \mathbf{L}) \, d\Omega_0 \\ &- \int_{\Omega_0} \left[ \mathbf{A} \, \text{Tr}(\mathbf{L}) + \mathbf{J} \frac{p}{C_{\text{pén}}} \right] \delta p \, d\Omega_0 + \left( \mu \left| \mathbf{R}_n^c \right| \mathbf{V}_q \right)_p \delta v_p \end{aligned} \quad (\text{IV-32})$$

et

$$\left\langle \mathcal{R}_n^c, \begin{pmatrix} \delta \mathbf{v} \\ \delta p \end{pmatrix} \right\rangle = \left( \mathbf{R}_n^c(\mathbf{x}) \right)_p \delta v_p \quad (\text{IV-33})$$

avec l'indice 'p' indiquant que la quantité est ponctuelle.

Nous avons choisi de considérer séparément les composantes normale et tangentielle de la réaction de contact, la composante normale ne dépendant pas de l'inconnue variationnelle vitesse. On comprendra mieux ce choix lors de l'application de la technique de perturbation.

## IV-2-b Méthode Asymptotique Numérique

### ① Technique de perturbation

Les variables du problème contenues dans l'ensemble  $\Lambda = \left\{ \mathbf{v}, \bar{\mathbf{D}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\varepsilon}, p, J, \mathbf{L}, \mathbf{f}, \sigma', \mathbf{D}, \mathbf{D}', (\mathbf{A}, \mathbf{C}, \mathbf{H}, \mathbf{Q})_{\mathbf{v}}, \mathbf{R}_{\mathbf{n}}^c, \mathbf{R}_{\mathbf{t}}^c, \left| \mathbf{R}_{\mathbf{n}}^c \right|, \mathbf{v}_{\mathbf{t}}, \left| \mathbf{v}_{\mathbf{t}} \right|, h, \mathbf{n}, \mathbf{t}, (\mathbf{S}, \mathbf{P}, \mathbf{V}_{\mathbf{q}})_{\mathbf{c}} \right\}$  sont développées en fonction de  $\tau$ , sous forme de séries entières tronquées à l'ordre  $N$ , au voisinage d'une solution initiale connue notée  $\Lambda(0)$ .

Ainsi nous avons :

$$\Lambda = \Lambda(0) + \tau \Lambda(1) + \dots + \tau^i \Lambda(i) + \dots + \tau^N \Lambda(N) \quad (\text{IV-34})$$

où les  $\Lambda(i)$  sont désormais les inconnues du problème.

Le paramètre  $\tau$  est identifié au temps et représente la différence de temps entre l'instant courant  $t$  et l'instant  $t_0$  au début de l'incrément de chargement, soit :  $\tau = t - t_0$ .

Le problème de contact est régularisé, il est géré par la variable  $h$  qui est la distance entre un point de la surface déformable et un point de la surface rigide de l'outil. Le chargement de la structure s'effectue donc par déplacement de l'outil. Se donnant une vitesse  $\mathbf{V}_0$  de déplacement de l'outil rigide, il vient :

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0(0) + \tau \mathbf{V}_0 \quad (\text{IV-35})$$

où  $\mathbf{x}_0(0)$  est la position du centre de l'outil circulaire au début de l'incrément.

Tous les détails sur la condensation des variables sont présentés en **Annexe C**.

A l'ordre  $i$ , la composante normale de la réaction de contact ne dépend pas de l'inconnue variationnelle  $\mathbf{v}(i)$ , en effet,  $\mathcal{R}_{\mathbf{n}}^c(i)$  ne dépend que de  $\mathbf{x}(i) = \frac{1}{i} \mathbf{v}(i-1)$ . C'est pourquoi nous avons choisi, dans la section **IV-2-a**, de ne pas inclure la réaction normale du contact dans l'opérateur quadratique (IV-32).

Nous définissons un nouvel opérateur tangent :

$$\mathbf{L}_{0t}^*(\bullet) = \mathbf{Q}_0^*(\Lambda(0), \bullet) + \mathbf{Q}_0^*(\bullet, \Lambda(0)) \quad (\text{IV-36})$$

Après condensation de toutes les variables, le problème non linéaire (IV-31) est simplement transformé en un ensemble de N problèmes linéaires :

$$\text{Trouver } \mathbf{V}_p(i) = \begin{cases} \mathbf{v}(i) \\ p(i) \end{cases} \text{ pour } [1 \leq i \leq N] \text{ solution de :}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ordre 1} : \mathbf{L}_{0t}^*(\mathbf{V}_p(1)) = \mathcal{R}_n^c(1) - \mathbf{Q}_0^*(\Lambda(0), \Lambda(0)) \\ \text{Ordre 2} : \mathbf{L}_{0t}^*(\mathbf{V}_p(2)) = \mathcal{R}_n^c(2) - \mathbf{Q}_0^*(\Lambda(1), \Lambda(1)) \\ \vdots \\ \text{Ordre } i : \mathbf{L}_{0t}^*(\mathbf{V}_p(i)) = \mathcal{R}_n^c(i) - \sum_{r=1}^{i-1} \mathbf{Q}_0^*(\Lambda(r), \Lambda(i-r)) \\ \vdots \\ \text{Ordre } N : \mathbf{L}_{0t}^*(\mathbf{V}_p(N)) = \mathcal{R}_n^c(N) - \sum_{r=1}^{N-1} \mathbf{Q}_0^*(\Lambda(r), \Lambda(N-r)) \end{array} \right. \quad (\text{IV-37})$$

La résolution du problème non linéaire (IV-31) passe donc par la résolution de cette suite récurrente de problèmes linéaires ayant tous le même opérateur tangent.

La forme de ce système est semblable à celle du système (II-3) du problème viscoplastique sans contact, la résolution en sera donc identique.

Le problème à l'ordre i se formule de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_0} \delta \mathbf{D}^* : \mathbf{M}(0) : \mathbf{D}^*(i) \, d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} \text{Tr}(\delta \mathbf{D}^*) p(i) \, d\Omega_0 - \delta \mathbf{v}_p \mathbf{M}^c(0) \mathbf{v}_p(i) = \mathcal{R}_n^c(i) - \mathcal{R}_{c0}^{i-1} \\ \int_{\Omega_0} \delta p \left[ \text{Tr}(\mathbf{D}^*(i)) + \frac{p(i)}{C_{\text{pén}}} \right] \, d\Omega_0 = - \mathcal{R}_{p0}^{i-1} \end{array} \right. \quad (\text{IV-38})$$

avec

$$\begin{cases} \mathcal{R}_n^c(i) = \delta v_p \mathbf{R}_n^c(i) \\ \mathcal{R}_{co}^{i-1} = \mathcal{R}_o^{i-1} - \delta v_p [\tilde{\mathbf{R}}c] \\ \mathcal{R}_p^{i-1} = \int_{\Omega_0} \delta p \sum_{r=0}^{i-1} \left[ \mathbf{A}(i-r) : \mathbf{L}(r) + \mathbf{J}(i-r) \frac{p(r)}{C_{\text{pén}}} \right] d\Omega_0 \end{cases} \quad (\text{II-39})$$

L'expression du terme  $\mathcal{R}_o^{i-1}$  a déjà été donnée pour le problème sans contact (II-1-a) et l'expression de  $[\tilde{\mathbf{R}}c]$  est présentée en **Annexe C**.

$\mathbf{M}(0)$  est la matrice de comportement visqueux du matériau (II-6).

La composante tangentielle du terme de contact contient l'inconnue variationnelle en vitesse, ceci conduit à une nouvelle matrice symétrique  $\mathbf{M}^c(0)$  appelée matrice de contact et donnée par l'expression suivante :

$$\mathbf{M}^c(0) = -\mu \left| \mathbf{R}_n^c \right| (0) P(0) \left( 1 + \frac{(q-1) \left( \left| \mathbf{V}_t \right| (0) \right)^2}{S(0)} \right) \left[ {}^t \mathbf{t}(0) \mathbf{t}(0) \right] \quad (\text{II-40})$$

Les détails sur l'obtention de cette matrice se trouvent en **Annexe C**.

## ② Méthode des éléments finis

Le domaine  $\Omega_0$  est discrétisé et les matrices d'interpolation sont les mêmes que dans le problème viscoplastique sans contact (II-1-b).

Comme cela a été fait dans la résolution par la M.A.N. des problèmes de contact en élasticité [Elhage-Hussein/1998], nous supposons que les efforts de contact s'exercent aux nœuds de la surface de contact discrétisée. Autrement dit, nous pouvons identifier les points  $\mathbf{P}$ , candidats au contact, de la surface  $\partial\Omega_c$  aux nœuds de la surface discrétisée.

Le système à résoudre est le suivant :

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{K}_v] & -{}^t[\mathbf{K}_{vp}] \\ [{}^t\mathbf{K}_{vp}] & [\mathbf{K}_{pp}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_n(i) \\ \mathbf{p}_n(i) \end{Bmatrix}_g = \begin{Bmatrix} \mathcal{R}_n(i) \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathcal{R}_{co}(i-1) \\ \mathcal{R}_p(i-1) \end{Bmatrix} \quad (\text{IV-41})$$

La rigidité des éléments dont certains nœuds entrent en contact ou sont en contact avec le solide rigide est modifiée. La matrice de rigidité tangente tient compte des termes de frottement et la contribution du contact est ainsi introduite dans la matrice  $[Kv]$  au niveau élémentaire :

$$[Kv] = \sum_{\text{éléments}} \left\{ \int_{\Omega_0^e} {}^t[B][M_0][B] d\Omega_0^e - [M_0^c]_e \right\} \quad (\text{IV-42})$$

Les matrices élémentaires  $[M_0^c]_e$  ne sont calculées que si l'élément considéré contient des nœuds appartenant à la surface de contact.

Le terme  $\{\mathcal{R}_{co}(i-1)\}$  contient une partie provenant du terme tangentiel de contact.

$$\begin{cases} \{\mathcal{R}_n(i)\} = \{R_n^c(i)\}_{\text{nœuds}} \\ \{\mathcal{R}_{co}(i-1)\} = \{\mathcal{R}_o(i-1)\} - \{[\tilde{R}c]\}_{\text{nœuds}} \\ \{\mathcal{R}_p(i-1)\} = \sum_{\text{éléments}} \int_{\Omega_0^e} {}^t[Np] \left( \sum_{r=0}^{r=i} \left[ A(i-r) \text{Tr}(\mathbf{L}(r)) + J(i-r) \frac{p(r)}{C_{\text{pén}}} \right] \right) d\Omega_0^e \end{cases} \quad (\text{II-43})$$

**Remarque :** Nous aurions pu introduire des éléments surfaciques sur la surface de contact et définir les efforts de contact sur ces éléments.

### ③ Résolution et calcul d'une branche de solution

La résolution du problème viscoplastique avec contact s'effectue de la même manière que la résolution du problème viscoplastique sans contact établi dans la section **II-1-c**. La procédure de calcul du domaine de validité optimal (**II-2-a**), le principe de continuation (**II-2-b**) et l'amélioration de la solution par une représentation rationnelle (**II-2-c**) sont inchangés.

La résolution du problème de contact avec frottement entre un matériau viscoplastique et un solide rigide passe donc par l'utilisation des algorithmes établis dans la section **II-2**.

## Conclusion

Les conditions de contact et de frottement, évolutives au cours de la mise en forme d'un matériau, ont été transformées en une relation analytique fonction de l'écart entre la surface déformable et la surface rigide de l'outil. On parle alors de contact régularisé. Ceci permet de considérer un ensemble de nœuds susceptibles d'entrer en contact avec la surface rigide circulaire et la résolution du problème donne l'évolution de l'ensemble des nœuds réellement en contact. Tous les problèmes liés au décollement et au glissement sont gérés automatiquement par l'algorithme.

Nous avons couplé le problème de contact ainsi défini au problème viscoplastique précédemment formulé au **Chapitre I** et le principe variationnel a été modifié en conséquence. Après avoir formulé ce nouveau problème sous forme quadratique, nous avons pu appliquer la technique de perturbation. Comme au **Chapitre II** pour le problème viscoplastique sans contact, le problème non linéaire de départ a été transformé en une suite récurrente de problèmes linéaires à résoudre ayant tous le même opérateur tangent. Il faut signaler que l'opérateur tangent contient une partie provenant de la loi de comportement viscoplastique et une autre provenant de la loi de frottement. La méthode des éléments finis a été appliquée de façon à effectuer une discrétisation spatiale des problèmes linéaires à résoudre. La matrice de rigidité, commune à tous ces problèmes, est constituée d'un terme de comportement et d'un terme de contact.

Chaque problème linéaire a été écrit sous une forme identique à ceux définis dans le problème sans contact, par conséquent, la résolution est identique et l'algorithme de continuation, l'amélioration de la représentation de la solution par des fractions rationnelles restent valables et utilisables dans le problème avec contact.

Nous disposons donc d'un algorithme asymptotique qui va nous permettre de simuler quelques procédés de mise en forme à chaud faisant intervenir des phénomènes de contact avec frottement.

## Chapitre V

### Simulation du poinçonnement hémisphérique

<i>Introduction</i>	88
<i>V-1 Analyse de la régularisation du contact</i>	90
V-1-a Influence du paramètre de régularisation	90
V-1-b Influence de la vitesse de l'outil	95
V-1-c Influence du maillage	101
<i>V-2 Validation et étude de l'efficacité de la M.A.N.</i>	105
V-2-a Exemple 1	107
V-2-b Exemple 2	110
<i>Conclusion</i>	114

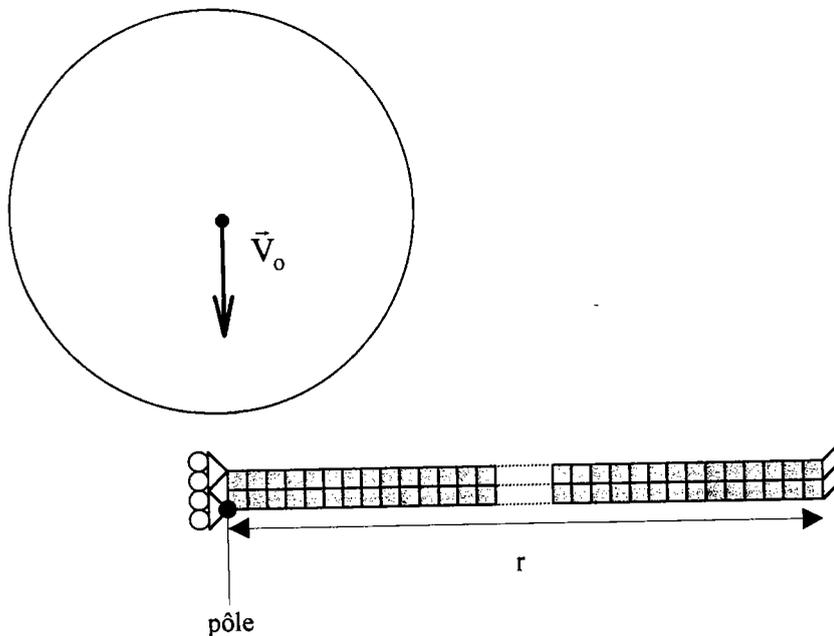
## Introduction

Dans ce chapitre, à travers la simulation du poinçonnement hémisphérique de tôles, [Wang/1984], [Huang et al./1994], nous étudions la régularisation du problème de contact puis nous testons et validons la M.A.N.. La symétrie de la structure d'étude, de l'outil et des conditions aux limites permettent de simplifier la simulation par l'étude d'une structure bidimensionnelle.

### Présentation du poinçonnement hémisphérique d'une tôle circulaire

Une tôle circulaire composée d'un matériau viscoplastique est déformée par contact avec un outil sphérique de rayon 25 mm qui se déplace avec une vitesse  $V_0$  dans le sens vertical descendant. Le poinçonnement est réalisé à partir d'un outil sphérique et non hémisphérique, le premier étant très semblable au second.

Les conditions d'axisymétrie conduisent à l'étude d'une section de tôle en contact avec une surface rigide circulaire. La structure d'étude est discrétisée en éléments quadrilatères à quatre nœuds (2 degrés de liberté par nœud) possédant quatre points de Gauss d'intégration numérique plus un point de Gauss au centre pour l'intégration de la pression qui est prise constante sur chaque élément.



Les nœuds susceptibles d'entrer en contact avec la surface rigide sont situés sur la surface supérieure de la structure déformable.

Comme au **Chapitre III**, les nœuds de la structure discrétisée sont numérotés suivant une grande largeur de bande c'est à dire suivant la direction radiale de la structure. De cette manière, il est possible de dire que les calculs et les discussions qui suivent sont représentatifs de l'étude de problèmes à plus grand nombre de degrés de liberté.

Toutes les simulations numériques sont effectuées jusqu'à un déplacement du pôle égal au demi rayon de la structure.

Dans la section **IV-1**, nous avons régularisé les conditions non analytiques de contact en introduisant une relation hyperbolique fonction de l'écart entre les surfaces entrant en contact et d'un paramètre de régularisation. Plus ce paramètre de régularisation est petit, plus la loi de contact régularisée s'approche du contact 'parfait' : c'est ce que nous testons pour commencer. Ensuite, nous étudions les influences de la vitesse d'outil et du maillage sur la régularisation de contact.

Pour finir, nous testons l'efficacité de la M.A.N. en la comparant à la méthode de Newton-Raphson. Deux exemples de simulation de poinçonnement hémisphérique sont présentés : dans le 1<sup>er</sup> exemple le frottement de contact mis en jeu est sensible à la vitesse de glissement alors que dans le 2<sup>nd</sup> exemple le frottement de contact est un frottement de Coulomb.

## V-1 Analyse de la régularisation du contact

Dans cette partie, nous analysons le contact régularisé en étudiant l'influence du choix du paramètre de régularisation, de la vitesse de déplacement de l'outil et du maillage de la structure ou plus précisément du nombre de nœuds appartenant à la surface de contact.

Dans toutes les études qui suivent, nous fixons la géométrie de la structure et la rhéologie du matériau.

### Géométrie de la structure bidimensionnelle et rhéologie du matériau :

$$\begin{cases} r = 50 \text{ mm} \\ e = 1 \text{ mm} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} k = 180.0 \text{ MPa s}^{0.8} \\ \alpha = 0.0001 \\ m = 0.8 \\ n = 0.2 \end{cases}$$

La structure est composée de 50 éléments dont 2 dans l'épaisseur, la surface de contact contient donc 26 nœuds.

Le paramètre de régularisation est calculé à partir d'un couple  $(R^d, h^d)$  donné et sa valeur dépend du nœud considéré de sorte que la régularisation soit uniforme sur toute la surface de contact (IV-19).

### **V-1-a Influence du paramètre de régularisation**

La vitesse d'outil  $V_o$  est prise égale à  $1 \text{ mm s}^{-1}$  et le contact est pour l'instant sans frottement.

Les données caractéristiques sont fixées :

$$\begin{cases} L_c = 1 \text{ mm} \\ v_c = V_o = 1 \text{ mm s}^{-1} \end{cases}$$

De cette manière, on a :

$$\eta_{(\text{nœud})} = \eta^*_{(\text{nœud})}$$

Modifier la régularisation du contact revient à choisir plusieurs couples  $(R^d, h^d)$ . Nous fixons  $h^d = 0.05$  et nous faisons varier  $R^d$  : à chaque  $R^d$  correspond un ensemble de valeurs du paramètre de régularisation  $\eta$ . La figure (Fig. V-1) rassemble ces valeurs.

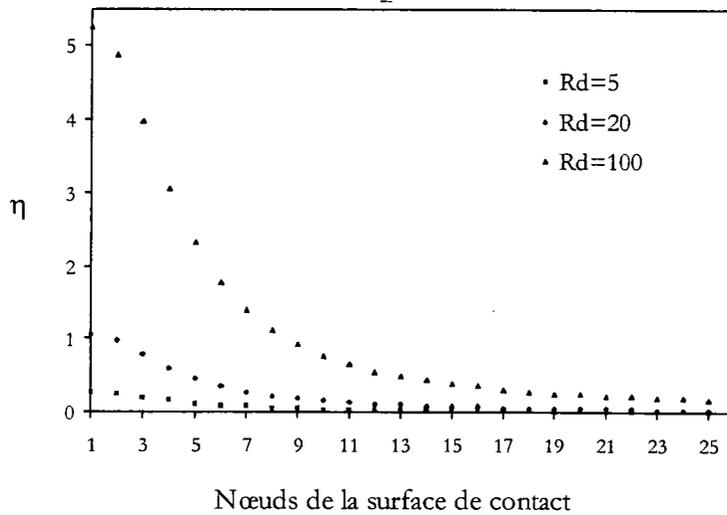


Fig. V-1 : Valeurs du paramètre de régularisation pour les trois valeurs de  $R^d$

Plus le paramètre de régularisation est petit, c'est à dire plus  $R^d$  est petit, plus la loi de contact régularisée ( $R^c(h)$ ) doit s'approcher de la loi réelle de contact ( $R^c * h = 0$ ). La figure (Fig. V-2) représente l'évolution de la réaction de contact en un nœud de la surface de contact lorsque l'écart  $h$  entre le nœud et la surface rigide tend à s'annuler, autrement dit lorsque le solide rentre en contact avec la surface déformable au nœud considéré.

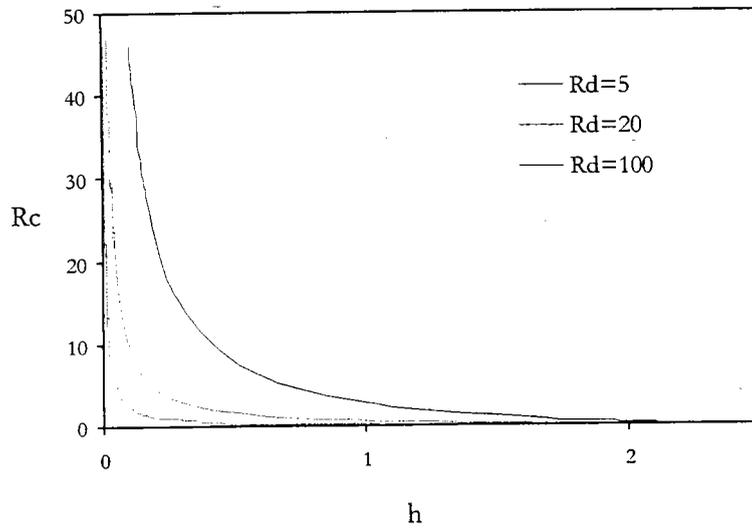


Fig. V-2 Intensité de la réaction de contact (N) en un nœud suivant la distance entre le nœud et la surface rigide pour les trois régularisations

Pour  $R^d = 5$ , le paramètre de régularisation est très petit et la loi régularisée  $R^c(h)$  correspondante est très voisine de la loi discontinue ( $R^c * h = 0$ ) du contact réel pour laquelle soit l'écart est nul, soit la réaction de contact est nulle : on dira alors que la régularisation du contact est forte.

La figure (Fig. V-3) donne l'écart  $h$  entre chaque nœud de la surface de contact et la surface rigide de l'outil, à la fin du processus de calcul.

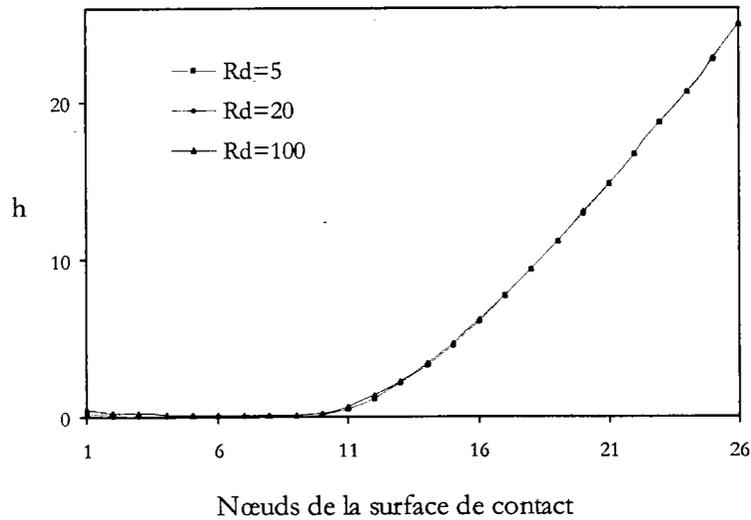


Fig. V-3 : Ecart entre chaque nœud et la surface rigide de l'outil à la fin du calcul pour les trois régularisations

Quelle que soit la régularisation, la zone de contact est la même, elle s'étend approximativement du nœud 1 au nœud 10. Nous localisons cette courbe sur la zone de contact : figure (Fig. V-4).

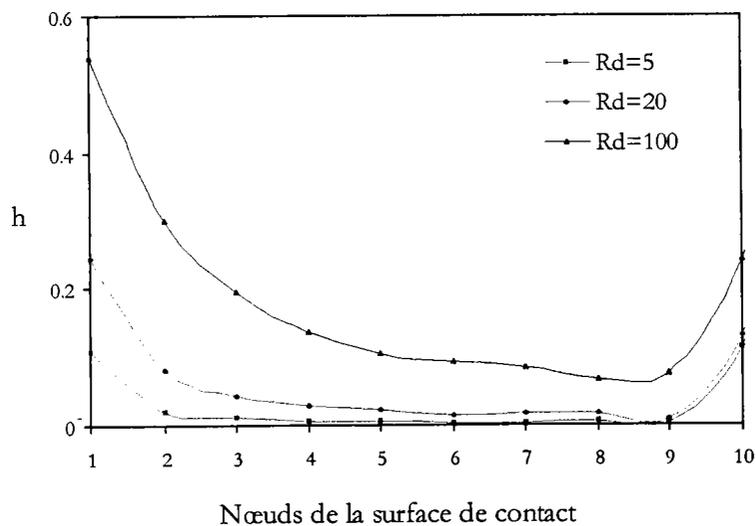


Fig. V-4 : Ecart entre chaque nœud et la surface rigide de l'outil à la fin du calcul pour les trois régularisations (Courbe localisée sur la zone de contact)

Plus le paramètre de régularisation est petit, plus les surfaces entrant en contact sont proches l'une de l'autre autrement dit plus le contact régularisé tend vers le contact 'parfait' ou 'réel'.

La figure (Fig. V-5) représente les intensités des réactions de contact sur chaque nœud pour les différentes régularisations, à la fin des processus de calcul.

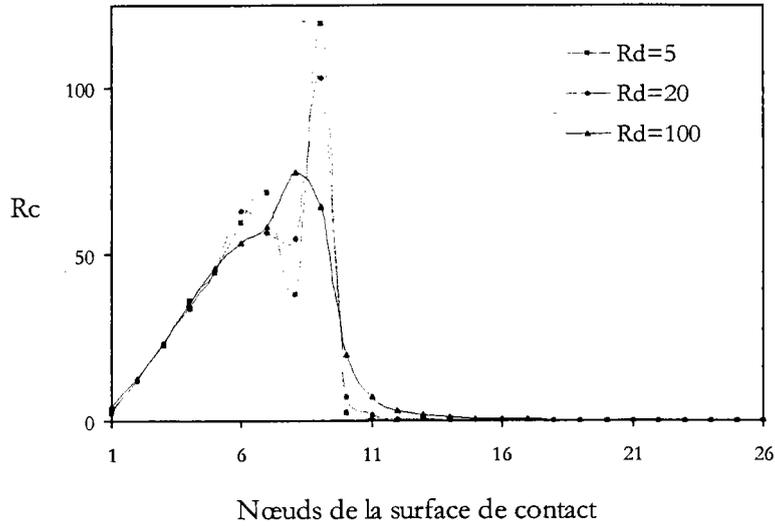


Fig. V-5 : Réactions de contact (N) aux nœuds à la fin du calcul pour les trois régularisations

Ces courbes montrent que la zone de contact est d’autant mieux définie que la régularisation est forte, autrement dit que le paramètre est petit. Nous pouvons noter une chute de l’intensité de la réaction de contact sur le nœud 8 pour  $R^d = 5$  et  $R^d = 20$ , ceci signifie qu’il y a un léger décollement de ce nœud, décollement inexistant pour une régularisation trop faible ( $R^d = 100$ ).

Le tableau (Tab. V-1) rassemble les paramètres de calcul pour les différentes régularisations du problème de contact.

	Nbre de pas	Temps CPU
$R^d = 100$	33	2.3
$R^d = 20$	97	6.5
$R^d = 5$	455	30.7

Tab. V-1 : Nombre de pas de calcul et temps de calcul (mn) pour les trois régularisations

Avec un ‘petit’ paramètre de régularisation ( $R^d = 5$ ), la loi régularisée s’approche très fortement de la loi réelle de contact. La non-linéarité due au contact est alors très forte, ce qui conduit à un nombre de pas de calcul très important et un temps de calcul très élevé en comparaison avec les régularisations plus faibles pour  $R^d = 100$  et  $R^d = 20$ .

Bien définir la régularisation du contact consiste à choisir le paramètre de régularisation, c’est à dire le couple  $(R^d, h^d)$ , tel que le contact régularisé soit très proche du contact ‘parfait’ tout en faisant attention à ne pas rendre la non-linéarité de contact trop forte car cela peut augmenter considérablement le nombre de pas nécessaires au calcul numérique et donc augmenter le temps de calcul.

### **V-1-b Influence de la vitesse de l’outil**

#### ① Sans adimensionnement de la régularisation

Dans la section *IV-2-a*, nous nous sommes avancés en disant qu’il était nécessaire d’adimensionner le paramètre de régularisation sous peine de rencontrer des problèmes de verrouillage. C’est ce que nous nous attachons à vérifier ici.

Tout d’abord, nous utilisons l’expression (IV-8) du paramètre de régularisation, sa valeur sur chaque nœud est fixée par la donnée du couple  $(R^d, h^d)$  et ne dépend que de l’écart initial  $\delta$  :

$$\begin{cases} h^d = 0.05 \text{ mm} \\ R^d = 20 \text{ N} \end{cases}$$

La figure (Fig. V-6) donne les valeurs du paramètre de régularisation sur chaque nœud de la surface de contact discrétisée.

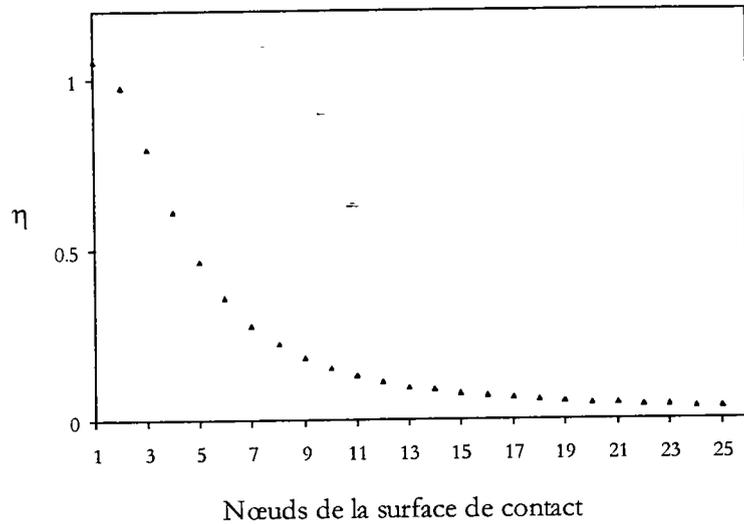


Fig. V-6 : Valeurs du paramètre de régularisation

Nous faisons varier la vitesse de l'outil dans une large gamme :

- $V_o = 0.0001 \text{ mm s}^{-1}$
- $V_o = 0.01 \text{ mm s}^{-1}$
- $V_o = 1 \text{ mm s}^{-1}$
- $V_o = 100 \text{ mm s}^{-1}$

Les processus des calculs numériques pour les vitesses d'outil  $V_o = 0.0001 \text{ mm s}^{-1}$  et  $V_o = 100 \text{ mm s}^{-1}$  ont rencontré des problèmes de verrouillage. Pour comprendre ce qui se passe lorsque nous faisons varier la vitesse de l'outil, nous étudions les courbes obtenues à partir des calculs pour les vitesses  $V_o = 0.01 \text{ mm s}^{-1}$  et  $V_o = 1 \text{ mm s}^{-1}$  qui se sont déroulés sans aucun problème.

Les figures (Fig. V-7) et (Fig. V-8) représentent l'intensité de la réaction de contact sur chaque nœud pour ces deux vitesses d'outil, à la fin des processus de calcul.

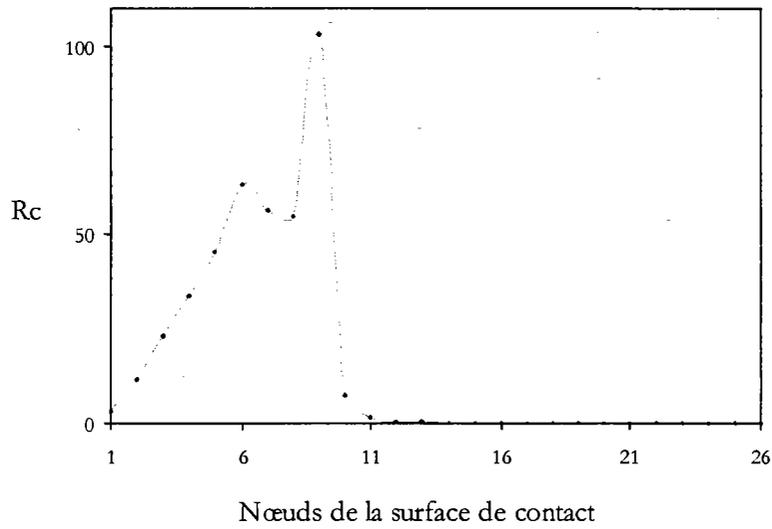


Fig. V-7 : Réactions de contact (N) aux nœuds à la fin du calcul pour la vitesse  $V_0 = 1 \text{ mm s}^{-1}$

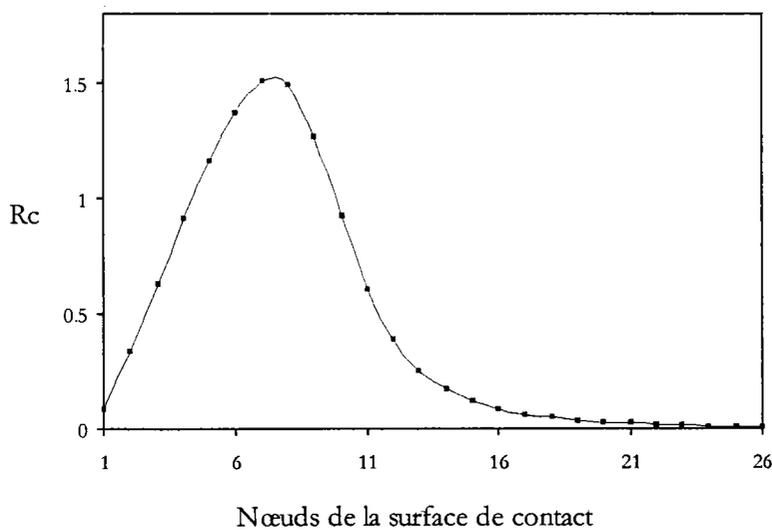


Fig. V-8 : Réactions de contact (N) aux nœuds à la fin du calcul pour la vitesse  $V_0 = 0.01 \text{ mm s}^{-1}$

Même si les échelles d'intensité sont différentes, nous voyons que la zone de contact n'est pas nettement définie dans le cas de la plus petite vitesse contrairement à l'autre vitesse pour laquelle il est immédiat de voir que la zone de contact s'étend exactement du nœud 1 au nœud 11.

Autrement dit, nous pouvons affirmer que la régularisation du contact doit être liée à la vitesse de l'outil considérée comme une vitesse caractéristique du problème étudié. C'est pourquoi, dans la section *IV-2-a*, nous avons choisi d'adimensionner la régularisation. Une étude de dimension nous a permis d'établir une relation simple (IV-18) entre le paramètre, une vitesse et une longueur caractéristiques du problème. Ce qui suit nous permet de vérifier que ce choix est correct et intéressant pour simuler simplement un procédé de mise en forme qui ferait intervenir une vitesse d'outil différente sans avoir à rechercher la nouvelle régularisation adéquate.

② **Adimensionnement de la régularisation**

Nous faisons varier la vitesse de l'outil  $V_o$  et la vitesse caractéristique  $V_c$  du procédé est identifiée à cette vitesse, la longueur caractéristique  $L_c$  est prise égale à 1 mm.

La régularisation est fixée par la donnée du couple  $(R^d, h^d)$  :

$$\begin{cases} h^d = 0.05 \text{ mm} \\ R^d = 20 \end{cases}$$

mais le paramètre de régularisation est calculé, en tenant compte de la vitesse et de la longueur caractéristiques, à partir de la relation (IV-18). La figure (Fig. V-9) donne les valeurs du paramètre de régularisation sur chaque nœud pour différentes vitesses d'outil.

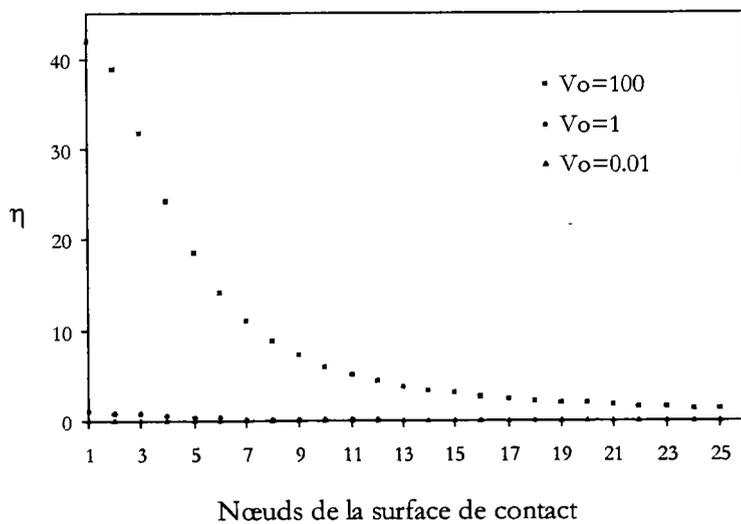


Fig. V-9 : Valeurs du paramètre de régularisation pour les trois vitesses de déplacement de l'outil

Le paramètre de régularisation est maintenant différent pour chaque vitesse d'outil, il est ainsi ajusté en fonction de la matrice tangente du matériau de sorte à ce que tous les problèmes soient régularisés de manière comparable quelle que soit la vitesse imposée à l'outil. Les figures (Fig. V-10), (Fig. V-11) et (Fig. V-12) représentent l'intensité de la réaction de contact sur chaque nœud pour les trois vitesses d'outil.

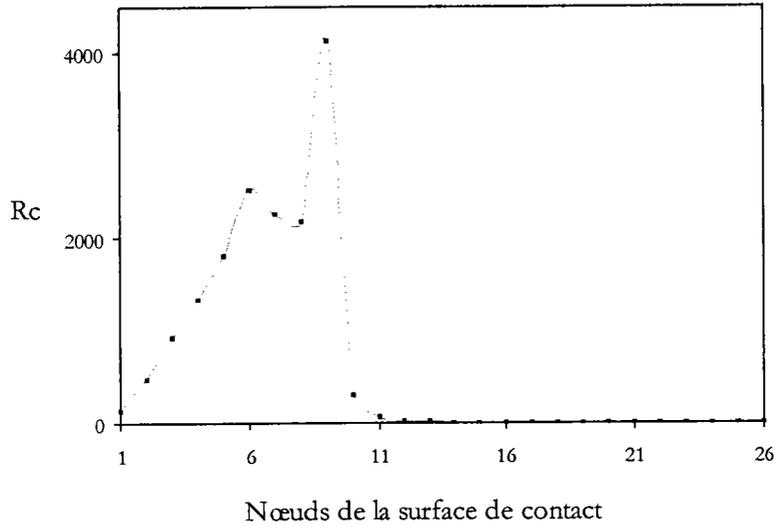


Fig. V-10 : Réactions de contact (N) aux nœuds à la fin du calcul pour la vitesse  $V_o = 100 \text{ mm s}^{-1}$

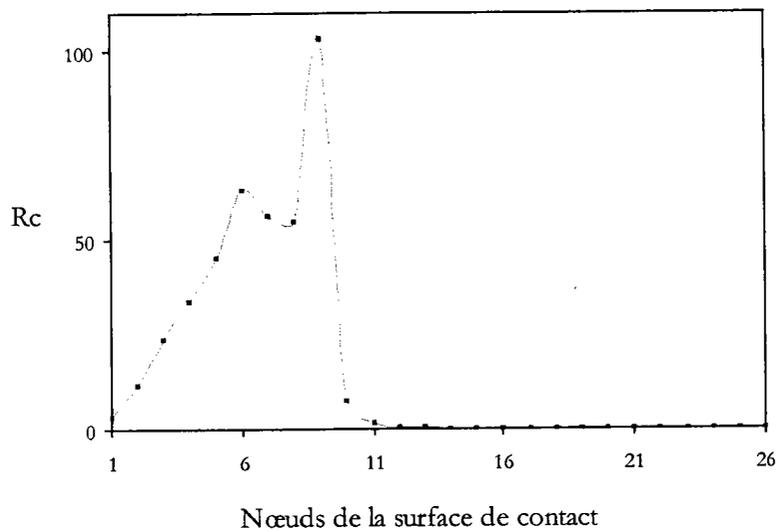


Fig. V-11 : Réactions de contact (N) aux nœuds à la fin du calcul pour la vitesse  $V_o = 1 \text{ mm s}^{-1}$

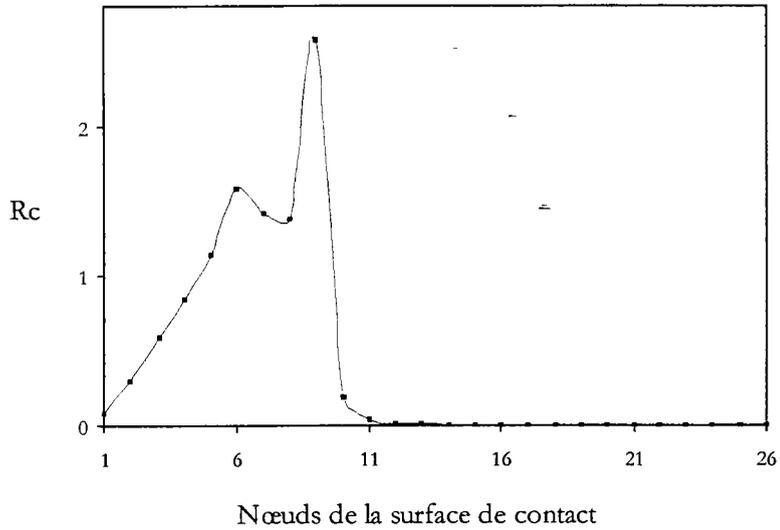


Fig. V-12 : Réactions de contact (N) aux nœuds à la fin du calcul pour la vitesse  $V_o = 0.01 \text{ mm s}^{-1}$

Les échelles d'intensité sont différentes pourtant il est manifeste que la régularisation du contact conduit à une zone de contact identique et à des profils de pression comparables. La figure (Fig. V-13), représentant l'écart entre les surfaces en contact, confirme cette remarque.

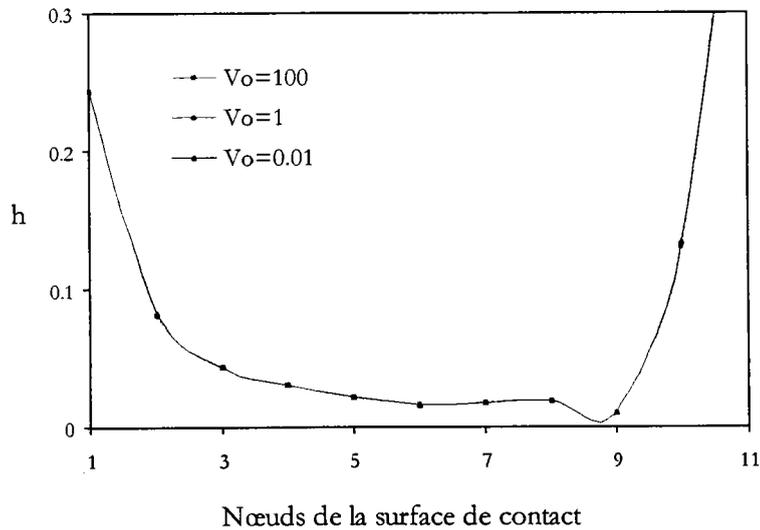


Fig. V-13 : Ecart entre chaque nœud et la surface rigide de l'outil à la fin du calcul pour les trois vitesses de déplacement de l'outil

L'adimensionnement du paramètre de régularisation permet donc de définir une régularisation unique du contact qui est satisfaisante quelle que soit la vitesse de l'outil.

### V-1-c Influence du maillage

La surface de la structure déformable entrant en contact avec l'outil est discrétisée et est donc composée d'un ensemble d'éléments surfaciques. Chaque élément surfacique est soumis à un effort de contact, d'intensité  $R^c$ , appliqué sous forme de deux forces d'intensité chacune  $R^c/2$ . Maintenant si le maillage est affiné et que chaque élément surfacique est scindé en  $k$  éléments alors, sur chaque élément,  $k-1$  nœuds sont introduits et l'effort de contact est appliqué sous forme de deux forces aux extrémités d'intensité chacune  $R^c/(2k)$  et de  $k-1$  forces d'intensité chacune  $R^c/k$ . Ainsi, l'effort de contact appliqué sur la surface n'est pas modifié et vaut toujours  $R^c$ .

Pour maintenir une régularisation acceptable en évitant le verrouillage ou une solution trop éloignée du problème physique lorsque le maillage est modifié, il est donc nécessaire, pour un même  $h^d$ , d'ajuster  $R^d$ .

Si le nombre de nœuds appartenant à la surface de contact double alors il est logique de diviser par deux la valeur  $R^d$ . Nous avons effectué les calculs sur trois maillages différents et pour chacun de ces calculs nous avons choisi une nouvelle valeur du paramètre  $R^d$ .

- 50 éléments (2 \* 25) donc 26 nœuds de contact,  $R^d = 40$ ,
- 100 éléments (2 \* 50) donc 51 nœuds de contact,  $R^d = 20$ ,
- 200 éléments (2 \* 100) donc 101 nœuds de contact,  $R^d = 10$ .

Les autres valeurs nécessaires au calcul du paramètre de régularisation sont les suivantes :

$$\begin{cases} L_c = 1 \text{ mm} \\ v_c = V_o = 1 \text{ mm s}^{-1} \\ h^d = 0.05 \text{ mm} \end{cases}$$

La figure (Fig. V-14) donne les valeurs du paramètre, pour chaque structure, en fonction de la position radiale des nœuds sur la surface de contact.

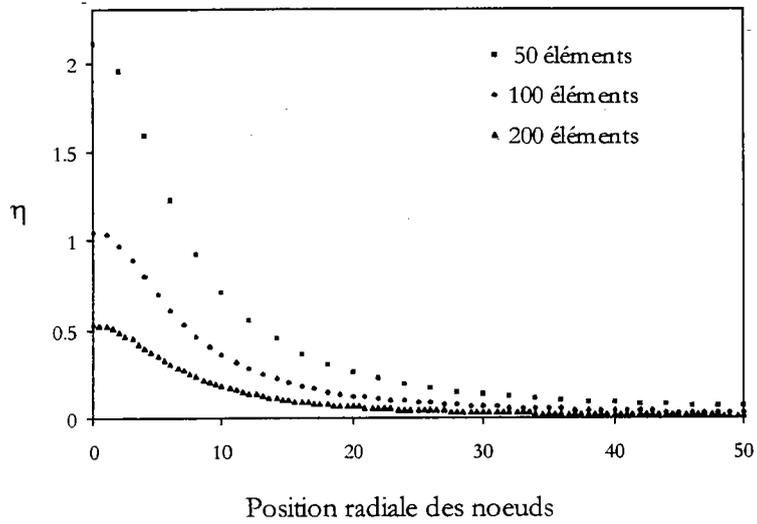


Fig. V-14 : Valeurs du paramètre de régularisation suivant la position radiale des noeuds pour les trois maillages

Au cours du déplacement de l'outil, nous traçons l'évolution de l'effort de contact sur toute la surface pour les trois structures : figure (Fig. V-15).

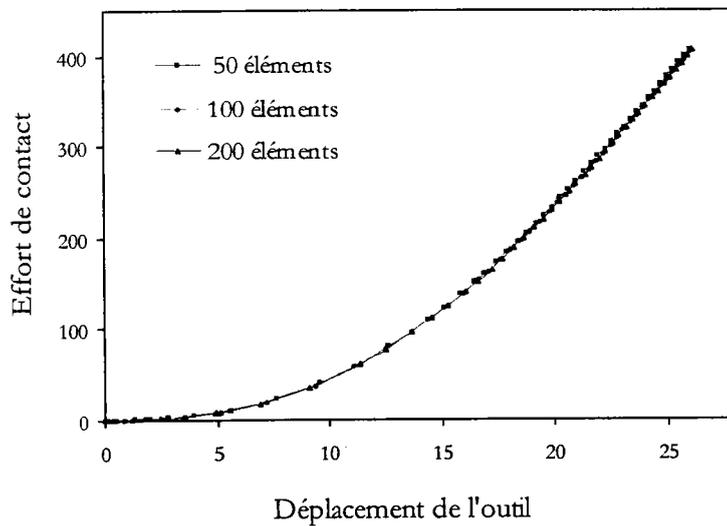


Fig. V-15 : Evolution de l'effort de contact (MPa) sur la surface au cours du déplacement (mm) de l'outil pour les trois maillages

L'effort sur la surface de contact est identique quel que soit le maillage considéré.

Les figures (Fig. V-16), (Fig. V-17) et (Fig. V-18) donnent, à la fin des calculs numériques, les intensités des efforts de contact aux nœuds pour les trois maillages.

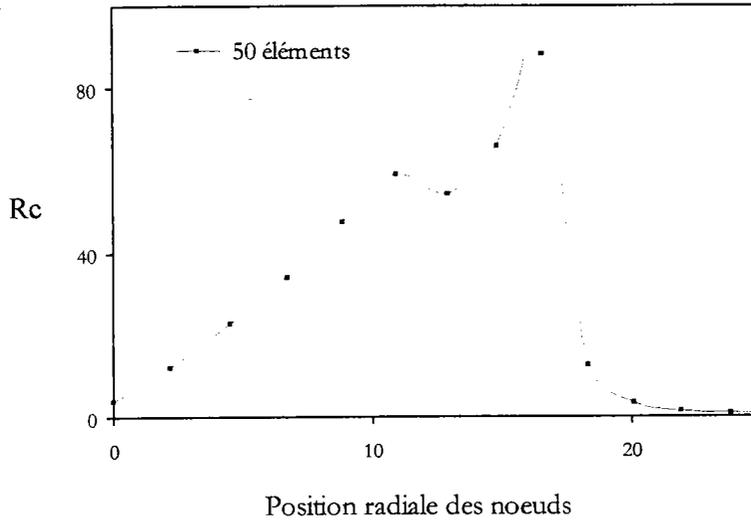


Fig. V-16 : Réactions de contact (N) aux nœuds à la fin du calcul pour le maillage à 50 éléments

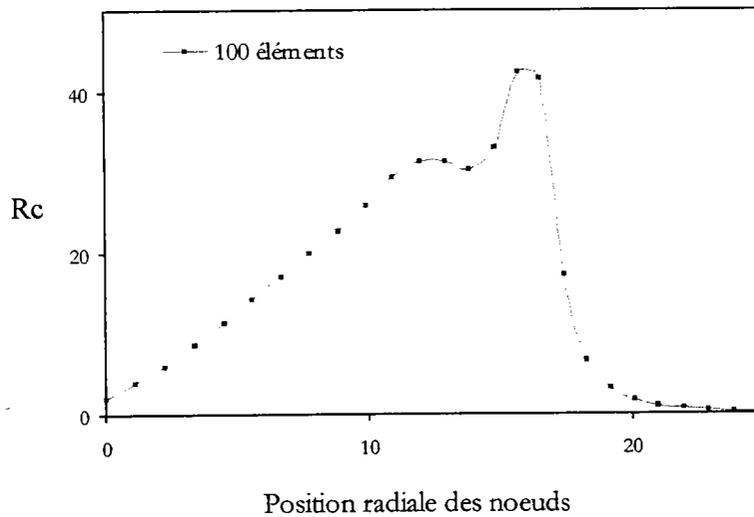


Fig. V-17 : Réactions de contact (N) aux nœuds à la fin du calcul pour le maillage à 100 éléments

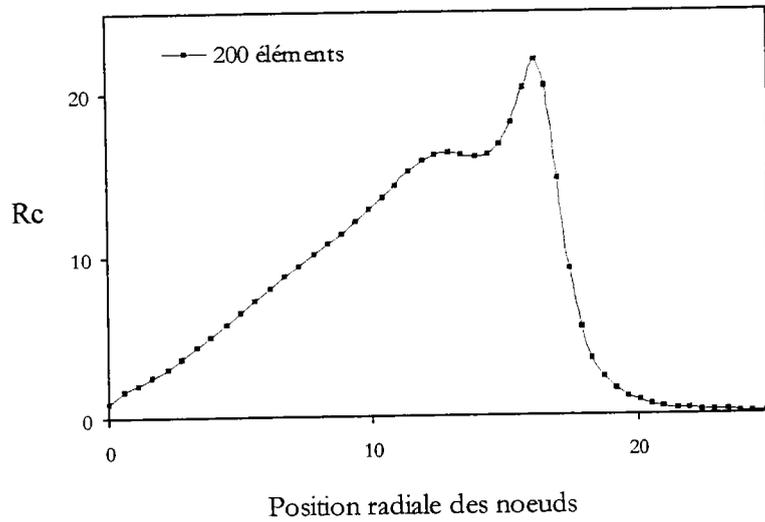


Fig. V-18 : Réactions de contact (N) aux nœuds à la fin du calcul pour le maillage à 200 éléments

Pour les trois structures, les zones de contact sont identiques et les profils de pression sont comparables.

En ce qui concerne l'interface de contact, la figure (Fig. V-19) donne l'écart entre la surface déformable et la surface rigide de l'outil suivant la position radiale des nœuds à la fin des processus de calcul.

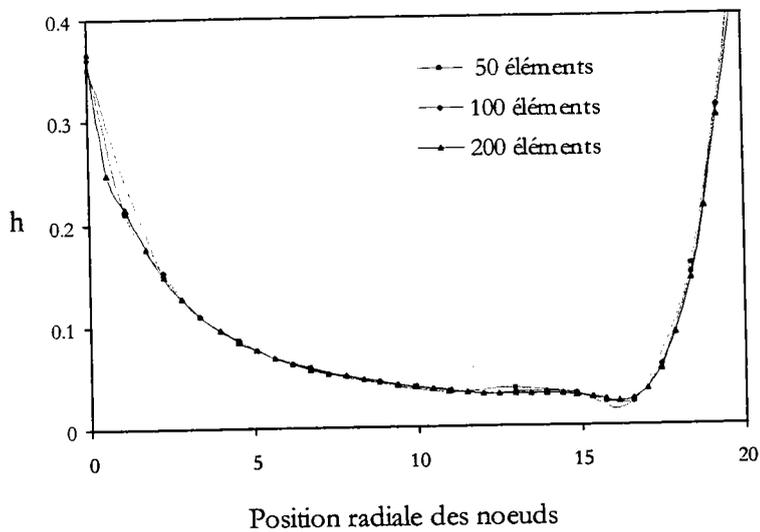


Fig. V-19 : Ecart entre chaque nœud et la surface rigide de l'outil à la fin du calcul pour les trois maillages (Courbe localisée sur la zone de contact)

Les écarts entre les surfaces en contact sont bien identiques quelle soit la structure considérée.

Nous avons ainsi établi une technique qui nous permet de varier le maillage sans modifier le problème de contact.

## En conclusion

Dans cette partie, nous avons vu que le contact régularisé, défini au **Chapitre IV**, permet de simuler le poinçonnement hémisphérique de tôles en utilisant un algorithme basé sur la M.A.N.. La difficulté de la régularisation du contact réside dans le paramètre qu'il est nécessaire de bien choisir afin que le problème régularisé s'approche au mieux du problème 'réel' de contact sans pour autant introduire une trop forte non-linéarité qui engendre un temps de calcul élevé (**V-1-a**).

L'adimensionnement de la régularisation, introduit dans la section **IV-2-a**, a permis d'exprimer le paramètre de régularisation en fonction d'une vitesse et d'une longueur caractéristiques du problème étudié. La régularisation du contact est ainsi définie de manière unique quelle que soit la vitesse de l'outil (**V-1-b**).

Nous avons élaboré une technique qui permet d'ajuster très simplement la régularisation du contact lorsque le maillage est modifié autrement dit lorsque le nombre de nœuds appartenant à la surface entrant en contact change (**V-1-c**). Il ne s'agit que d'une technique mais qui s'avère très utile quand on réalise des tests en simulation du contact.

## V-2 Validation et étude de l'efficacité de la M.A.N.

Comme dans l'étude du gonflement hydraulique de tôles, **Chapitre III**, nous avons élaboré un algorithme itératif qui nous permet, par comparaison, de valider la M.A.N. et de mettre en évidence son efficacité. L'algorithme itératif, présenté en **Annexe A**, résout le problème formulé au **Chapitre IV** avec la loi de comportement et les conditions de contact régularisées. Nous disposons donc de deux algorithmes basés sur deux méthodes de résolution différentes pour résoudre le problème de contact avec frottement entre une structure de comportement viscoplastique et un solide rigide. Les techniques d'assemblage, d'inversion, de stockage, ... sont identiques dans les deux algorithmes de résolution.

L'algorithme itératif a la possibilité d'effectuer automatiquement des divisions successives du pas de chargement lorsque le processus de calcul itératif rencontre des difficultés de convergence. Dans le calcul d'un nouveau pas, le pas de chargement revient toujours à la valeur initialement imposée.

Les critères sur les résidus d'équilibre et d'incompressibilité sont pris identiques dans les deux algorithmes de sorte à déterminer avec une même précision les solutions :

$$Crit_{eq}^{man} = Crit_{eq}^{iter} = 10^{-2} \text{ (équation d'équilibre)}$$

$$Crit_{in}^{man} = Crit_{in}^{iter} = 10^{-5} \text{ (équation d'incompressibilité)}$$

Les calculs asymptotiques avec la représentation polynomiale de la solution sont effectués en prenant un ordre de troncature égal à 10 et les calculs pour la représentation rationnelle sont effectués pour un ordre égal à 15.

Nous présentons deux exemples de simulation de poinçonnement hémisphérique. Le premier exemple fait intervenir du contact avec frottement de type viscoplastique et le second du contact avec un frottement de Coulomb.

Dans les deux exemples étudiés, la géométrie de la structure et la rhéologie du matériau sont choisies de manière identique.

**Géométrie de la structure bidimensionnelle et rhéologie du matériau :**

$$\begin{cases} r = 50 \text{ mm} \\ e = 1 \text{ mm} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} k = 180.0 \text{ MPa s}^{0.8} \\ \alpha = 0.0001 \\ m = 0.8 \\ n = 0.2 \end{cases}$$

Les structures étudiées sont composées de 100 éléments dont 2 dans l'épaisseur, la surface de contact contient donc 51 nœuds susceptibles d'entrer en contact.

### V-2-a Exemple 1

Dans cet exemple, nous choisissons d'étudier le contact avec frottement de type viscoplastique. Ce frottement est caractérisé par un coefficient de frottement et une sensibilité à la vitesse de glissement que nous prenons égale à la sensibilité à la vitesse de déformation :

$$\begin{cases} \mu = 0.3 \\ q = 0.8 \end{cases}$$

La vitesse d'outil est :  $V_o = 10 \text{ mm s}^{-1}$ .

La régularisation du contact est prise comme suit :

$$\begin{cases} L_c = 1 \text{ mm} \\ v_c = V_o \\ h^d = 0.05 \text{ mm} \\ R^d = 20 \end{cases}$$

La figure (Fig. V-20) donne les valeurs du paramètre de régularisation en chaque nœud de la surface de contact :

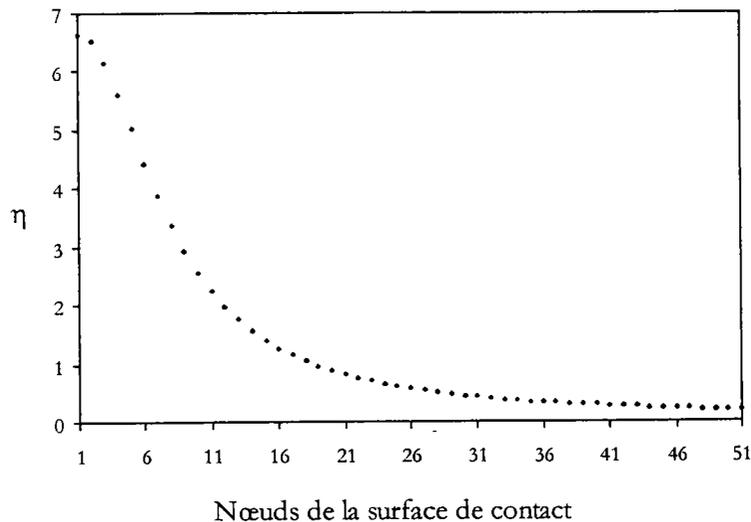


Fig. V-20 : Valeurs du paramètre de régularisation

Les calculs numériques avec l'algorithme asymptotique sont effectués pour les représentations polynomiale et rationnelle de la solution et les calculs itératifs sont exécutés pour plusieurs tailles de pas. Dans un calcul itératif, il existe toujours une taille de pas optimale difficile

de déterminer, tandis que dans un calcul asymptotique les tailles de pas sont calculées de manière totalement automatique et s'adaptent donc à la non-linéarité locale du problème étudié.

Le tableau (Tab. V-2) rassemble les résultats des calculs.

		Nbre de pas	Nbre d'op. 'c-i'	Temps CPU
M.A.N.	R. polynomiale ordre 10	57	61	8.38
	R. rationnelle ordre 15	24	28	4.94
M.N.R.	dt=0.1-0.025-0.0125	36	1590	111.12
	dt=0.05-0.025	53	553	38.83
	dt=0.025-0.0125	105	723	50.63

Tab. V-2 : Comparaison entre la M.A.N. et la méthode de Newton-Raphson : nombre de pas de calcul, nombre d'opérations de 'construction-inversion' de matrices et temps de calcul (mn)

En ce qui concerne la comparaison des résultats de calcul pour les algorithmes asymptotique et itératif, les remarques faites dans la section III-3 pour le gonflement hydraulique sont identiques. Même si parfois dans un calcul itératif le nombre de pas de calcul est du même ordre de grandeur que le nombre de pas d'un calcul asymptotique, le nombre d'opérations de 'construction-inversion' de matrices et le temps de calcul sont toujours beaucoup plus importants dans le calcul itératif. De plus les calculs asymptotiques donnent des représentations analytiques de la solution, contrairement aux calculs itératifs pour lesquels les branches de solution ne sont connues que de manière discrète. Ainsi, un calcul asymptotique permet de connaître l'évolution des variables au cours des pas de calcul alors qu'un calcul itératif ne permet de connaître les variables qu'en fin de chaque pas de calcul.

La figure (Fig. V-21) représente, au cours du déplacement de l'outil, l'évolution de l'effort de contact sur toute la surface pour le calcul asymptotique et pour un des calculs itératifs.

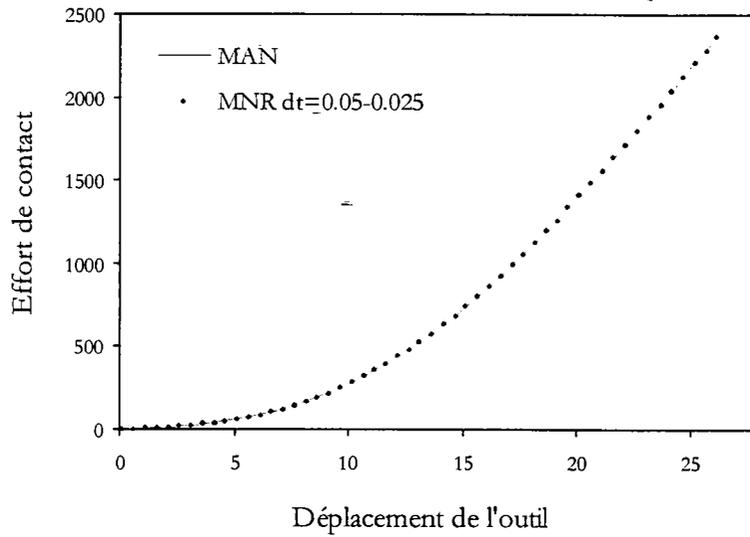


Fig. V-21 : Comparaison entre la M.A.N. et la méthode de Newton-Raphson : évolution de l'effort de contact (MPa) sur la surface au cours du déplacement de l'outil (mm)

Avec les deux types de calcul, nous retrouvons bien la même évolution de l'action de l'outil sur la surface de contact. De la même manière nous voyons, figure (Fig. V-22), que les intensités des réactions de contact aux nœuds, à la fin des simulations, sont identiques.

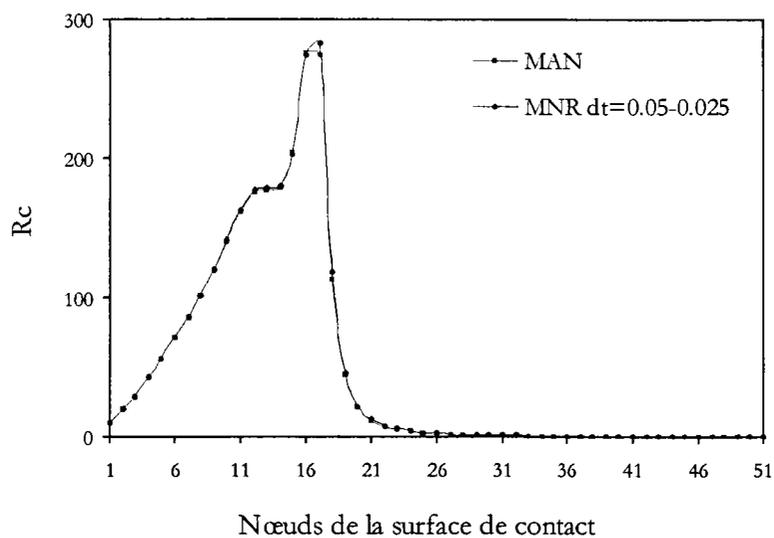


Fig. V-22 : Comparaison entre la M.A.N. et la méthode de Newton-Raphson : réactions de contact (N) aux nœuds à la fin des calculs

La zone de contact est identique et s'étend approximativement du nœud 1 au nœud 21.

L'algorithme asymptotique permet donc de simuler le poinçonnement de la tôle de la même manière que l'algorithme itératif mais avec un nombre d'opérations de 'construction-inversion' de matrices et des temps de calculs très inférieurs.

D'autre part, l'utilisation de la représentation rationnelle entraîne un gain de 58% en nombre de pas, 54% en nombre d'opérations de 'construction-inversion' de matrices et 40% en temps de calcul par rapport à la représentation polynomiale.

### V-2-b Exemple 2

Dans ce second exemple le frottement dû au contact est un frottement de Coulomb, c'est à dire que la sensibilité à la vitesse de glissement est nulle. Le coefficient de frottement et la sensibilité à la vitesse de glissement sont :

$$\begin{cases} \mu = 0.3 \\ q = 0 \end{cases}$$

Dans cet exemple, la vitesse d'outil est :  $V_o = 0.1 \text{ mm s}^{-1}$ .

La régularisation du contact est définie par :

$$\begin{cases} L_c = 1 \text{ mm} \\ v_c = V_o \\ h^d = 0.05 \text{ mm} \\ R^d = 20 \end{cases}$$

La figure (Fig. V-23) donne les valeurs du paramètre de régularisation en chaque nœud de la surface de contact :

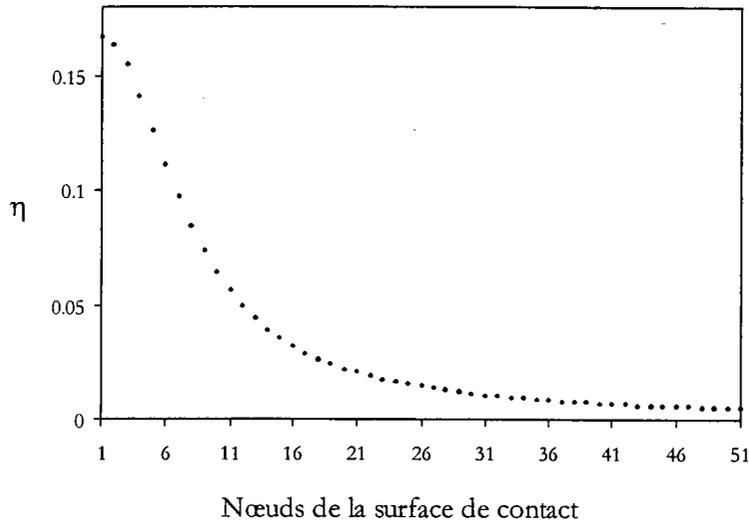


Fig. V-23 : Valeurs du paramètre de régularisation

Les calculs numériques avec l’algorithme asymptotique sont effectués pour les représentations polynomiale et rationnelle de la solution et les calculs itératifs sont exécutés pour plusieurs tailles de pas. Le tableau (Tab. V-3) rassemble les résultats des calculs.

		Nbre de pas	Nbre d’op. ‘c-i’	Temps CPU
M.A.N.	R. polynomiale ordre 10	64	65	9.08
	R. rationnelle ordre 15	24	25	4.81
M.N.R.	dt=10.0-5.0-2.5	38	1559	111.42
	dt=5.0-2.5	53	422	30.04
	dt=2.5-1.25	104	622	44.22

Tab. V-3 : Comparaison entre la M.A.N. et la méthode de Newton-Raphson : nombre de pas de calcul, nombre d’opérations de ‘construction-inversion’ de matrices et temps de calcul (mn)

Une fois de plus, comparé à l’algorithme itératif, l’algorithme asymptotique nécessite un petit nombre d’opérations de ‘construction-inversion’ de matrices et un faible temps de calcul.

La figure (Fig. V-24) représente, au cours du déplacement de l’outil, l’évolution de l’effort de contact sur toute la surface pour le calcul asymptotique et pour un des calculs itératifs.

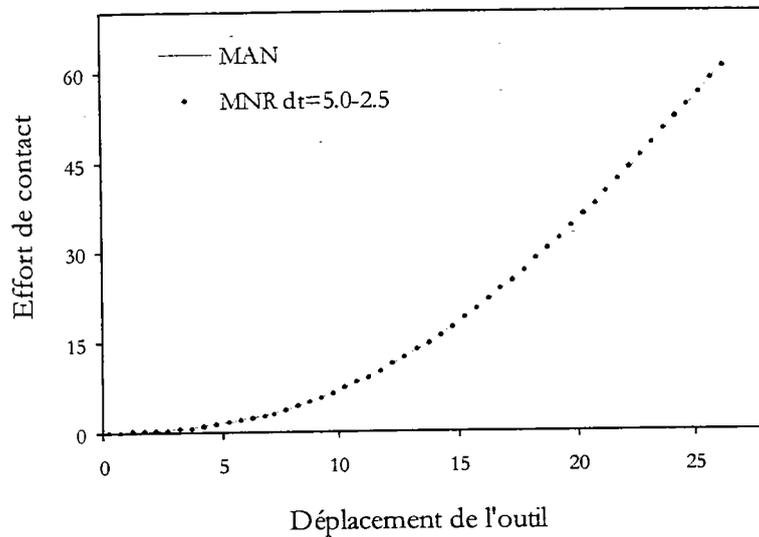


Fig. V-24 : Comparaison entre la M.A.N. et la méthode de Newton-Raphson : évolution de l'effort de contact (MPa) sur la surface au cours du déplacement de l'outil (mm)

L'évolution de l'action de l'outil sur la surface de contact est la même quelle que soit la méthode de résolution utilisée. De même, nous voyons sur la figure (Fig. V-25) que les intensités des réactions de contact aux nœuds à la fin des calculs sont identiques.

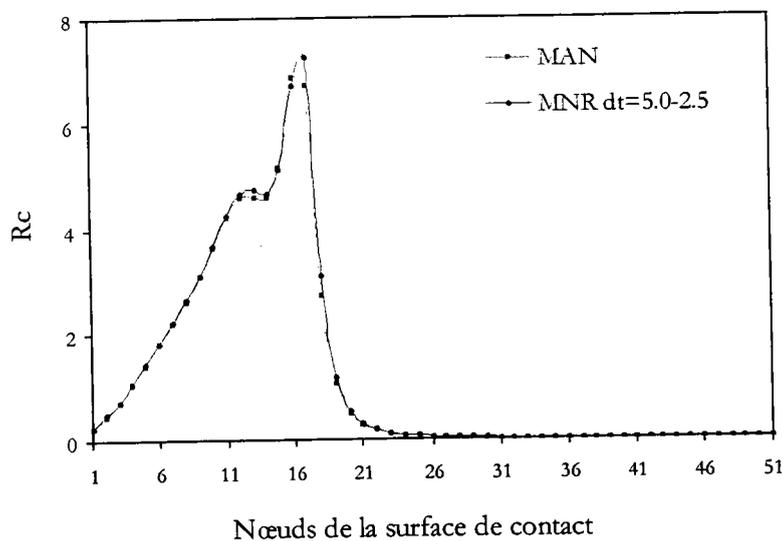


Fig. V-25 : Comparaison entre la M.A.N. et la méthode de Newton-Raphson : réactions de contact (N) aux nœuds à la fin des calculs

La zone de contact est identique et s'étend approximativement du nœud 1 au nœud 21.

Avec un nombre d'opérations de 'construction-inversion' de matrices et des temps de calculs beaucoup moins importants que ceux de l'algorithme itératif, l'algorithme asymptotique permet de simuler le poinçonnement hémisphérique d'une tôle.

L'utilisation de la représentation rationnelle entraîne un gain d'environ 62% en nombre de pas et en nombre d'opérations de 'construction-inversion' de matrices et 47% en temps de calcul par rapport à la représentation polynomiale.

## En conclusion

Dans cette deuxième partie, nous avons présenté deux exemples de poinçonnement hémisphérique de tôles circulaires. Les simulations numériques ont été réalisées sur des structures de même comportement viscoplastique mais dans le premier exemple le contact a été choisi avec un frottement tenant compte de la vitesse de glissement à l'interface de contact (*V-2-a*) alors que dans le second exemple le frottement est un frottement de Coulomb. (*V-2-b*)

Un algorithme itératif, basé sur la méthode de Newton-Raphson, a été introduit dans le code de calcul et nous permet de valider et d'étudier l'efficacité de l'algorithme asymptotique développé dans le cadre de ce travail. Les deux algorithmes permettent de résoudre par deux méthodes numériques différentes le même problème de contact régularisé.

Comparée à la méthode de Newton-Raphson, la M.A.N. nécessite très peu d'opérations sur les matrices, ce qui est très intéressant au niveau du temps de calcul. De plus, la détermination des tailles de pas étant automatique, l'algorithme asymptotique ne rencontre jamais de problème de convergence des processus de calcul. D'autre part, la M.A.N. permet de connaître l'évolution à tout moment du calcul des quantités comme les efforts de contact aux nœuds ou encore l'écart entre les surfaces entrant en contact, ...

Comme dans la résolution du problème viscoplastique sans contact, **Chapitre III**, la représentation rationnelle de la solution permet de diminuer, par rapport à la représentation polynomiale, le nombre de pas de calcul, le nombre d'opérations sur les matrices et le temps de calcul.

## Conclusion

A partir de simulations de poinçonnement de tôles, nous avons testé et validé la M.A.N. développée au **Chapitre IV**.

La résolution par la M.A.N. des problèmes de contact avec prise en compte du frottement ne pouvait se faire que par l'intermédiaire d'une régularisation des conditions de contact. Nous avons montré que cette technique est efficace et, moyennant un bon choix du paramètre de régularisation, le problème régularisé est très proche d'un problème de contact 'réel' (**V-1**).

Le fait de coupler la non-linéarité du comportement du matériau et celle provenant du contact n'a pas altéré l'efficacité de la M.A.N. : les tests réalisés (**V-2**) ont montré que la M.A.N. reste une méthode **rapide, robuste** et totalement **automatique**.

Selon le cas étudié (**V-2**), représenter la solution sous la **forme rationnelle** permet une **diminution** de **50%** à **60%** du nombre de pas de calcul par rapport à la représentation classique polynomiale de la solution.

## Conclusion générale

Après les nombreuses études réalisées sur la M.A.N., aussi bien en mécanique du solide qu'en mécanique des fluides, l'enjeu de ce travail de thèse était grand puisqu'il s'agissait d'aborder des problèmes à caractère industriel. C'est chose faite puisque nous avons fait nos premiers pas dans la simulation des procédés de **mise en forme à chaud**.

La mise en forme à chaud fait intervenir un comportement du matériau de type **rigide-viscoplastique** qui tient compte des effets de viscosité et de l'incompressibilité du matériau. Ce modèle est en général caractérisé par la loi de Norton-Hoff qui s'avère être bien adaptée au comportement des métaux.

En ce qui concerne le problème de **contact unilatéral avec ou sans frottement**, celui-ci est omniprésent en mise en forme. Or, la résolution par la M.A.N. de ce type de problème, ne pouvait se faire que par l'intermédiaire d'une **régularisation des conditions de contact**. Initialement développé pour l'étude du contact entre un matériau élastique et un solide rigide, [Elhage-Hussein/1998], le champ d'application du contact régularisé a été élargi à l'étude du contact avec frottement entre un matériau viscoplastique et un solide rigide. La loi de frottement que nous avons introduite est une loi de type viscoplastique, tenant compte à la fois de la pression contact et de la vitesse de glissement à l'interface, dont le cas particulier conduit à un frottement de Coulomb. Que ce soit avec la M.A.N. ou avec la méthode de résolution de Newton-Raphson, le contact régularisé simplifie notablement la prise en compte des conditions de contact et de frottement.

Le couplage de la non-linéarité de contact avec la non-linéarité matérielle a été réalisé avec succès. Les applications numériques présentées : les **simulations de formage de tôles** par pression hydraulique et par poinçonnement hémisphérique, ont permis de montrer la supériorité de la **M.A.N.** sur la méthode itérative de Newton-Raphson dans le sens où elle plus **rapide**, très **précise** et totalement **automatique**.

Pour convaincre véritablement de l'efficacité de la M.A.N., il paraît indispensable de mesurer notre code de calcul à un code commercial, comme FORGE ou MARC, à travers quelques simulations de mise en forme de tôles. Ceci devrait être réalisé prochainement.

À très court terme, il serait intéressant d'introduire dans nos développements le paramétrage d'une surface de forme arbitraire à l'aide d'un polynôme de Bézier comme cela a déjà été fait pour le contact en élasticité, [Elhage-Hussein/1998]. Ceci nous permettrait de simuler la mise en forme de tôles par un outil de forme plus complexe que le poinçon hémisphérique.

Dans le but de poursuivre et de compléter ce travail, un des axes de recherche est l'introduction des phénomènes thermiques dans ce qui a été développé. En effet, le rôle de la température est important en mise en forme à chaud et, dans les études réalisées sur le sujet : [Chenot/1993], [Billon/1996], [Hacquin/1996], [Hans Raj/1996], [Chenot/1997], l'aspect thermique est généralement pris en compte. La température devient alors une fonction inconnue régie par l'équation de la chaleur. D'autres axes de recherche sont possibles : l'introduction dans notre code du modèle de comportement de G'Sell et Jonas pour les matériaux polymères [G'Sell/1995] ou encore la prise en compte du caractère directionnel ou anisotrope de l'écroutissage [Mesrar/1991].

De façon à pouvoir aborder une plus large classe de procédés, il est indispensable de pouvoir tenir compte des phénomènes de charge et de décharge élastiques intervenant lors de la mise en forme à basse et moyenne températures. D'autre part, il apparaît important d'étendre les travaux sur la mise en forme dans l'espace tridimensionnel. Ces aspects sont en cours d'étude dans le cadre de deux thèses de doctorat.

**La rapidité, la fiabilité et la simplicité sont des qualités essentielles pour des applications industrielles et la M.A.N. paraît être un outil performant pour aborder la simulation des procédés de mise en forme.**

## Références bibliographiques

- [Baker et al./1996] G. A. Baker, P. Graves-Morris, Padé approximants. Encyclopaedia of Mathematics and its applications, 2<sup>de</sup> édition, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [Bathe/1987] K. J. Bathe, Finite element procedures in engineering analysis, Prentice-Hall, 1987.
- [Batoz et al./1990] J. L. Batoz, G. Dhatt, Modélisation des structures par éléments finis, Hermès, Paris, 1990.
- [Bellet et al./1997] M. Bellet, J. F. Agassant, B. Monasse, M.-H. Vantal, A. Rodriguez-Villa, Simulation par éléments finis des procédés de soufflages des polymères. Publication en cours dans un ouvrage intitulé Eléments Finis Polymères, Edité par J.C. Grandidier et C. G'Sell, APOLLOR et INPL, Nancy, 1998.
- [Billon/1996] N. Billon, Comportement des polymères à grande vitesse : application aux chocs. La Mise en forme des Matériaux : Vingt ans de recherche au CEMEF, Ecole des mines de Paris, Paris, 1996.
- [Cao et al./1998] H. L. Cao, M. Potier-Ferry, An improved iterative method for large strain viscoplastic problems. Int. J. Num. Meth. Engng, 1998, à paraître.
- [Chaboche/1995] J. L. Chaboche, Formalisme général des lois de comportement (métaux et polymères). Introduction à la mécanique des polymères, Institut National Polytechnique de Lorraine, Vandoeuvre lès Nancy, 1995, pp 119-140.
- [Chenot/1993] J. L. Chenot, La modélisation numérique des procédés de mise en forme des métaux. La revue de métallurgie-CIT/Science et Génie des Matériaux, 1993, pp 1567-1576.
- [Chenot/1997] J. L. Chenot, New trends in finite element modelling of metal forming processes. Computational Plasticity, Barcelone, CIMNE, 1997, Fundamentals and Applications, pp 209-223.
- [CNRS/1976] Mise en forme des métaux et alliages. Ecole d'été de métallurgie physique de Villars-sur-Ollon (Suisse), textes rassemblés par B. Baudelet, Ed. du CNRS, 1976.

- [CNRS/1990] Physique et mécanique de la mise en forme des métaux. Ecole d'été d'Oléron, dirigée par F. Moussi et P. Franciosi, Ed. du CNRS, 1990.
- [Dhatt et al./1984] G. Dhatt, G. Touzot, Une présentation de la méthode des éléments finis. Maloine, Paris, 1984.
- [Durville/ 1993] D. Durville, Modélisation mécanique et simulation numérique de l'avalement dans le procédé d'emboutissage des tôles minces. Thèse de doctorat, Ecole centrale Paris, 1993.
- [Fourment et al./1997] L. Fourment, K. Mocellin, J. L. Chenot, An implicit contact algorithm for 3D simulation of the forging process. Computational Plasticity, Barcelone, CIMNE, 1997, Fundamentals and Applications, pp 873-877.
- [Fourment/1996] L. Fourment, 'Récents progrès en modélisation du forgeage'. La Mise en forme des Matériaux : Vingt ans de recherche au CEMEF, Ecole des mines de Paris, Paris, 1996.
- [Germain/1985] Y. Germain, Modélisation par éléments finis d'écoulement viscoplastique avec frottement - Application au forgeage à chaud. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1985.
- [G'Sell/1995] C. G'Sell, Lois de comportement mécanique des polymères solides. Introduction à la mécanique des polymères, Institut National Polytechnique de Lorraine, Vandoeuvre lès Nancy, 1995, pp 141-168.
- [Hacquain/1996] A. Hacquin, Modélisation thermomécanique tridimensionnelle du laminage. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1996.
- [Hans Raj et al./1996] K. Hans Raj, J. L. Chenot, Finite element modelling of hot metal forming. Indian Journal of Engineering & Materials Sciences, 1996, 3, pp 234-238.
- [Haudin et al./1996] J.M. Haudin, B. Monasse, N. Billon, C. G'Sell, La rhéologie des polymères solides. La Mise en forme des Matériaux : Vingt ans de recherche au CEMEF, Ecole des mines de Paris, Paris, 1996.
- [Huang et al./1994] Y.-M. Huang and C.-H. Liu, The effects of strain rate anisotropy upon the sheet-stretching process. Int. J. Mech. Sci., 1994, 36, No 2, pp 105-120.

- [Imbert/1991] J. F. Imbert, Analyse de structures par éléments finis. 3<sup>ème</sup> édition CEPADUES, Toulouse, 1991.
- [Iseki et al./1977] H. Iseki, T. Jimma and T. Murota, Finite element method of analysis of the hydrostatic bulging of sheet metal. Bull, JSME, 1977, 20, pp 285-291.
- [Jean/1993] M. Jean, Simulation numérique des problèmes de contact avec frottement. Matériaux & techniques, 1993, N°1-2-3, pp 22-32.
- [Kikuchi et al./1988] N. Kikuchi and J. T. Oden, Contact Problems in Elasticity : A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods. SIAM Studies in Applied Mathematics, 1988.
- [Ladevèze/1996] P. Ladevèze, Mécanique non linéaire des Structures : Nouvelle approche et méthodes de calcul non incrémentales. Hermès, Paris, 1996.
- [Lemaitre et al./1985] J. Lemaitre, J. L. Chaboche, Mécanique des matériaux solides. Dunod, Paris, 1985.
- [Massoni/1996] E. Massoni, La rhéologie assistée par ordinateur. La Mise en forme des Matériaux : Vingt ans de recherche au CEMEF, Ecole des mines de Paris, Paris, 1996.
- [Mesrar/1991] R. Mesrar, Comportement plastique des tôles sous sollicitation biaxiale et analyse numérique de la mise en forme par gonflement hydraulique. Thèse de doctorat, Université de Metz, 1991.
- [Padé/1892] H. Padé, Sur la représentation approchée d'une fonction par des fractions rationnelles, Thèse, Paris, 1892.
- [Raous et al./1988] M. Raous, P. Chabrand, F. Lebon, Numerical methods for frictional contact problems and applications. Journal de Mécanique théorique et appliquée, special issue, 1988, supplement N°1 to 7, pp 111-128.
- [Rachik et al./1997] M. Rachik, J. M. Roelandt, Algorithmes pour la simulation de la mise en forme des polymères : application au thermoformage. Publication en cours dans un ouvrage intitulé Eléments Finis Polymères, Edité par J.C. Grandidier et C. G'Sell, APOLLOR et INPL, Nancy, 1998.

[Zhong/1993] Z.-H. Zhong, Finite element procedures for contact-impact problems. Oxford University Press, Oxford, 1993.

[Zienkiewicz/1984] O. C. Zienkiewicz, Flow formulation for numerical solution of forming processes. Numerical Analysis of Forming Processes, edited by J.F.T. Pittman, O.C. Zienkiewicz, R. D. Wood, and J. M. Alexander, John Wiley & Sons Ltd., London, 1984, pp 1-44.

[Wang/1984] N. M. Wang, A Rigid-Plastic Rate-Sensitive Finite Element Method for Modelling Sheet Metal Forming Processes. Numerical Analysis of Forming Processes, edited by J.F.T. Pittman, O.C. Zienkiewicz, R. D. Wood, and J. M. Alexander, John Wiley & Sons Ltd., London, 1984, pp 117-164.

[Zienkiewicz et al./1991] O. C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, The finite element method. Mc Graw-Hill, 4<sup>th</sup> edition, London - New-York, 1991.

## La Méthode Asymptotique Numérique

[Ammar/1996] S. Ammar, Méthode asymptotique numérique perturbée appliquée à la résolution des problèmes non linéaires en grande rotation et grand déplacement. Thèse de doctorat, Université Laval Québec, 1996.

[Azrar et al./1992] L. Azrar, B. Cochelin, N. Damil, M. Potier-Ferry, An asymptotic-numerical method to compute bifurcating branches. New Advances in Computational Structural Mechanics, Elsevier, Amsterdam, 1992, pp 117-131.

[Azrar et al./1993] L. Azrar, B. Cochelin, N. Damil, M. Potier-Ferry, An asymptotic-numerical method to compute the postbuckling behaviour of elastic plates and shells. Int. J. Num. Meth. Engng, 1993, 36, pp 1251-1277.

[Azrar et al./1998a] L. Azrar, B. Cochelin, N. Damil, M. Potier-Ferry, An asymptotic-numerical method for nonlinear vibrations of elastic structures. Gordon and Breach International Series in Engineering, Technology and Applied Science, Volumes on 'Structural Dynamics Systems, Computational Techniques and Optimization', édité par C.T. Leondes, 1998, à paraître.

- [Azrar et al./1998b] L. Azrar, R. Benamar, M. Potier-Ferry, An asymptotic-numerical method for large-amplitude free vibrations of thin elastic plates. *Journal of Sound and Vibrations*, 1998, à paraître.
- [Boutyour et al./1993] E.H. Boutyour, B. Cochelin, M. Potier-Ferry, Calculs des points de bifurcation par une méthode asymptotique numérique. 1<sup>er</sup> Congrès National de Mécanique au Maroc, 1993, pp 371-378.
- [Boutyour/1994] E. H. Boutyour, Méthode asymptotique numérique pour le calcul de bifurcations : application aux structures élastiques. Thèse de doctorat, Université de Metz, 1994.
- [Braikat/1995] B. Braikat, Méthode asymptotique-numérique et fortes non-linéarités. Thèse de doctorat, Université Hassan II - Casablanca (Maroc), 1995.
- [Braikat et al./1997] B. Braikat, N. Damil, M. Potier-Ferry, Méthodes asymptotiques numériques pour la plasticité. *Revue européenne des éléments finis*, 1997, 6, pp 337-357.
- [Brunelot et al./1997a] J. Descamps (Brunelot), H. L. Cao, M. Potier-Ferry, An asymptotic numerical method to solve large strain viscoplastic problems. *Computational Plasticity, Fundamentals and Applications*, Barcelone, CIMNE, 1997, pp 393-400.
- [Brunelot et al./1997b] J. Descamps (Brunelot), H. L. Cao, M. Potier-Ferry, Simulation Numérique du Gonflement hydrostatique d'une Structure Polymère par la Méthode Asymptotique Numérique. Publication en cours dans un ouvrage intitulé *Éléments Finis Polymères*, Edité par J.C. Grandidier et C. G'Sell, APOLLOR et INPL, Nancy, 1998.
- [Cadou et al./1996] J. M. Cadou, B. Cochelin, M. Potier-Ferry, The asymptotic numerical method : application to fluid-structure interaction. *Proceedings of the Third ECOMAS Computational Fluid Dynamics Conference*, 1996, pp 131-138.
- [Cadou/1997] J. M. Cadou, Méthode Asymptotique Numérique pour le calcul des branches solutions et des instabilités dans les fluides et pour les problèmes d'interaction fluide-structure. Thèse de doctorat, Université de Metz, 1997.
- [Cochelin/1994a] B. Cochelin, Méthodes Asymptotiques-Numériques pour le calcul non-linéaire géométrique des structures élastiques. Habilitation à diriger des recherches, Université de Metz, 1994.

- [Cochelin/1994b] B. Cochelin, A path following technique via an asymptotic numerical method. *Comp. and Struct.*, 1994, 53, pp 1181-1192.
- [Cochelin et al./1994a] B. Cochelin, N. Damil, M. Potier-Ferry, An asymptotic-numerical method and Padé approximants for non-linear elastic structures. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, , 1994, 37, pp 1187-1213.
- [Cochelin et al./1994b] B. Cochelin, N. Damil, M. Potier-Ferry, An asymptotic-numerical method : an efficient perturbation technique for nonlinear structural mechanics. *Revue européenne des éléments finis*, 1994, 3, pp 281-297.
- [Cochelin et al./1998] B. Cochelin, C. Compain, Asymptotic numerical method for nonlinear structural dynamics. *World Congres Computational Mechanics*, Buenos Aires, 1998.
- [Damil et al./1990] N. Damil, M. Potier-Ferry, A new method to compute perturbed bifurcations : application to the buckling of imperfect elastic structures. *Int. J. Engng Sci.*, 1990, 28, pp 943-957.
- [Damil et al./1994] N. Damil, M. Potier-Ferry, B. Braikat, Une technique de perturbation pour le calcul des structures avec fortes non-linéarité. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série II*, 1994, pp 713-719.
- [Damil et al./1998] N. Damil, M. Potier-Ferry, A. Najah, H. Lahmam, An iterative method based upon Padé approximants. *Numerical Methods in Engineering*, 1998, soumis.
- [Daya/1997] M. Daya, M. Potier-Ferry, Vibrations des tôles sandwich. Rapport de contrat LPMM/Sollac.
- [De Oliveira/1997] J. De Oliveira, Résolution des équations instationnaires de Navier-Stokes par une Méthode Asymptotique Numérique. Mémoire de DEA, LPMM, ISGMP, Université de Metz, 1997.
- [Elhage-Hussein/1994] A. Elhage-Hussein, Résolution d'un problème de thermique instationnaire par une méthode asymptotique numérique. Mémoire de DEA, LPMM, ISGMP, Université de Metz, 1994.
- [Elhage-Hussein/1998] A. Elhage-Hussein, Modélisation des Problèmes de Contact par une Méthode Asymptotique Numérique. Thèse de doctorat, Université de Metz, 1998.

- [Elhage-Hussein et al./1998] A. Elhage-Hussein, N. Damil, M. Potier-Ferry, An Asymptotic Numerical Algorithm for Frictionless Contact Problems. *Revue européenne des éléments finis*, 1998, 7, pp 119-130.
- [Fafard et al./1998] M. Fafard, S. Ammar, K. Henchi, G. Gendron, Application of an Asymptotic Method to Transient Dynamic Problems. *Journal of Sound and Vibrations*. A paraître.
- [Gallagher/1975] R. H. Gallagher, Perturbation procedures in nonlinear finite element structural analysis. *Computational Mechanics, Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin, 1975, 461, pp 75-89.
- [Hangai et al./1972] Y. Hangai, S. Kawamata, Perturbation methods in the analysis of geometrically non-linear stability problems. *Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design*, J. T. Oden et al Eds, UAH Press, The University of Alabama in Huntsville, 1972, pp 473-492.
- [Jamal/1998] M. Jamal, Contribution au calcul non linéaire en mécanique. Habilitation à diriger des recherches,, Université Hassan II - Casablanca (Maroc), 1998.
- [Jamal et al./1998] M. Jamal, H. Elasmr, B. Braikat, E. Boutyour, B. Cochelin, N. Damil, M. Potier-Ferry, Bifurcation indicators. *Acta Mechanica*, 1998, à paraître.
- [Koiter/1945] W. T. Koiter, On the stability of elastic equilibrium. Thesis, Delft, 1945.
- [Mordane/1995] Mordane, Calcul du problème de la houle non linéaire et instationnaire par une méthode asymptotique numérique. Thèse de doctorat, Université Hassan II - Casablanca (Maroc), 1995.
- [Najah/1996] A. Najah, Calcul non linéaire des structures par des méthodes asymptotiques numériques et accélération de la convergence. Thèse de doctorat, Université Hassan II - Casablanca (Maroc), 1996.
- [Najah et al./1998] A. Najah, B. Cochelin, N. Damil, M. Potier-Ferry, A critical Review of Asymptotic Numerical Methods. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 1998, 5, pp 31-50.

[Noor et al./1981] A. K. Noor, J. M. Peters, Tracing post-limit-point paths with reduced basis technique. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 1981, 28, pp 217-240.

[Potier-Ferry et al./1997] M. Potier-Ferry, N. Damil, B. Braikat, J. Descamps (Brunelot), J. M. Cadou, H. L. Cao, A. Elhage Hussein, Traitement des fortes non-linéarités par la méthode asymptotique numérique. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1997, Série II, pp 171-177.

[Potier-Ferry et al./1998] M. Potier-Ferry, H. L. Cao, J. Brunelot, N. Damil, An asymptotic numerical method for numerical analysis of large deformation viscoplastic problems. *Comp. and Struct.*, 1998, soumis.

[Riks, 1984] E. Riks, Some computational aspects of the stability analysis of non-linear structures. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 1984, 47, pp 219-259.

[Thieffry/1998] P. Thieffry, Modélisation post-critique des coques avec défauts : mise en œuvre des méthodes asymptotiques et évaluation de la fiabilité. Thèse de doctorat, Université Blaise Pascal – Clermont II, 1998.

[Thompson et al./1968] J. M. T. Thompson, A. C. Walker, The nonlinear perturbation analysis of discrete structural systems. *Int. J. Solids Structures*, 1968, vol 4, pp 757-768.

[Tri/1996] A. Tri, Méthode asymptotique numérique pour les fluides visqueux incompressibles et la détection de la bifurcation de Hopf. Thèse de doctorat, Université de Metz, 1996.

[Tri et al./1996] A. Tri, B. Cochelin, M. Potier-Ferry, Résolution des équations de Navier-Stockes et détection des bifurcations stationnaires par une Méthode Asymptotique-Numérique. *Revue européenne des éléments finis*, 1996, 5, pp 415-442.

[Vanucci et al./1998] P. Vannucci, B. Cochelin, N. Damil, M. Potier-Ferry, An asymptotic-numerical method to compute bifurcating branches. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 1998, 41, pp 1365-1389.

[Walker/1969] A.C. Walker, A nonlinear finite element analysis of shallow circular arches. *Int. J. Solids Structures*, 1969, 5, pp 97-107.

[Yokoo et al./1976] Y. Yokoo, T. Nakamura, K. Uetani, The incremental perturbation method for large displacement analysis of elastic-plastic structures. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 1976, 10, pp 503-525.

**[Zitouni/1996]** Zitouni, Application de la méthode asymptotique numérique sur un problème de thermique instationnaire. Mémoire de DEA, LPMM, ISGMP, Université de Metz, 1996.

**[Zahrouni/1998]** H. Zahrouni, Méthode asymptotique numérique pour les coques en grandes rotations. Thèse de doctorat, Université de Metz, 1998.

**[Zahrouni et al./1998a]** H. Zahrouni, B. Cochelin, M. Potier-Ferry, Computing finite rotations of shells by an asymptotic-numerical method. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 1998, à paraître.

**[Zahrouni et al./1998b]** H. Zahrouni, N. Damil, H. Elasmr, M. Potier-Ferry, Asymptotic numerical method for nonlinear constitutive laws. *Revue européenne des éléments finis*, 1998, à paraître.

# **ANNEXES**

## **Annexes**

### ***Annexe A : Procédure itérative de résolution***

**A-1 Méthode itérative de résolution : la méthode de Newton-Raphson**

**A-2 Résolution itérative du problème viscoplastique**

**A-3 Résolution itérative du problème de contact avec frottement**

### ***Annexe B : Développement asymptotique du problème viscoplastique***

**B-1 Développement asymptotique des variables**

**B-2 Système à l'ordre 0**

**B-3 Système à l'ordre  $i$**

### ***Annexe C : Développement asymptotique du problème de contact avec frottement***

**C-1 Développement asymptotique des variables**

**C-2 Système à l'ordre 0**

**C-3 Système à l'ordre  $i$**

### ***Annexe D : Méthode des éléments finis***

**D-1 Discrétisation de la structure**

**D-2 Conditions d'axisymétrie**

**D-3 Conditions de déformation plane**

## Annexe A

### A-1 Méthode itérative de résolution : la méthode de Newton-Raphson

Nous rappelons brièvement la procédure de résolution de la méthode de Newton-Raphson qui est une méthode de type prédiction-correction.

Sur chaque incrément de chargement :

- Partant d'un vecteur  $\{\mathbf{v}, \mathbf{p}\}$  qui ne satisfait pas l'équation, le résidu de l'équation est donc non nul :

$$R(\mathbf{v}, \mathbf{p}) \neq 0$$

- Le vecteur  $\{\mathbf{v}, \mathbf{p}\}$  est corrigé à l'aide d'un vecteur  $\{\mathbf{d v}, \mathbf{d p}\}$  tel que ce nouveau vecteur est supposé être solution de l'équation. Cette solution annule donc le résidu de l'équation :

$$R(\mathbf{v} + \mathbf{d v}, \mathbf{p} + \mathbf{d p}) = 0$$

Le développement du résidu en série de Taylor au voisinage de  $\{\mathbf{v}, \mathbf{p}\}$ , en négligeant les termes d'ordre supérieur à un, conduit à :

$$\frac{\partial R(\mathbf{v}, \mathbf{p})}{\partial (\mathbf{v}, \mathbf{p})} \{\mathbf{d v}, \mathbf{d p}\} = -R(\mathbf{v}, \mathbf{p})$$

La résolution de ce système est simple puisque le problème est linéaire.

- Le système est ensuite discrétisé, il prend la même forme que le système discrétisé obtenu à partir de la M.A.N. :

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{Kv}] & -^t[\mathbf{Kvp}] \\ [\mathbf{Kvp}] & [\mathbf{Kpp}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d v}_n \\ \mathbf{d p}_n \end{Bmatrix}_g = \begin{Bmatrix} \mathcal{F}_{ext} \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathcal{R}_{o_{int}} \\ \mathcal{R}_{p_{int}} \end{Bmatrix}$$

$$\text{où } R(\mathbf{v}, \mathbf{p}) = - \begin{Bmatrix} \mathcal{F}_{ext} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathcal{R}_{o_{int}} \\ \mathcal{R}_{p_{int}} \end{Bmatrix}$$

- Après résolution du système, la solution corrigée est la suivante :

$$\{\mathbf{v}, \mathbf{p}\} = \{\mathbf{v}, \mathbf{p}\} + \varpi \{\mathbf{d v}, \mathbf{d p}\}$$

où  $\varpi$  est un coefficient de relaxation, il facilite la convergence du processus itératif.

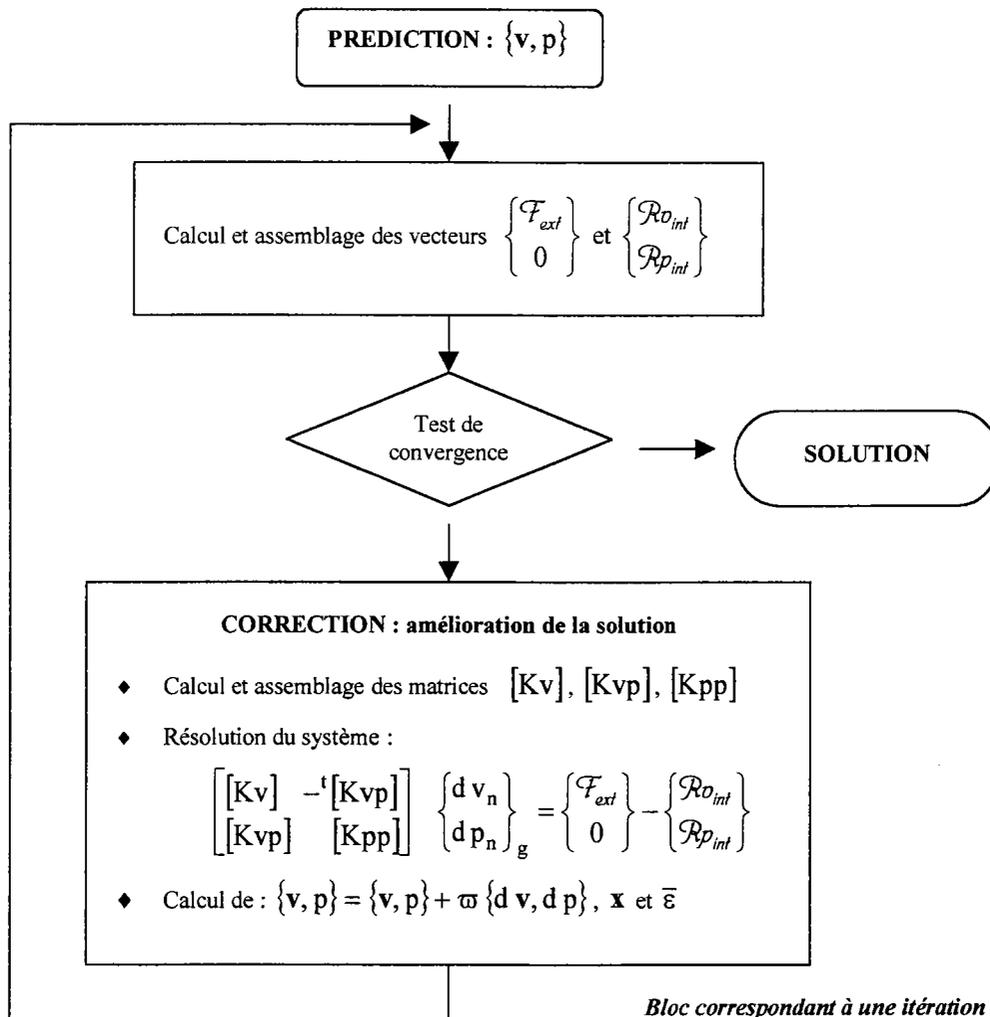
Puis, par intégration sur l'incrément de temps, le vecteur position et la déformation plastique cumulée sont calculés à partir des valeurs au débuts de l'incrément :

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_i + \left( \frac{\mathbf{v}_i + \mathbf{v}}{2} \right) (\Delta t)$$

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_i + \bar{\mathbf{D}} (\Delta t)$$

Ce processus se répétant jusqu'à ce que le résidu de déséquilibre  $R(\mathbf{v}, \mathbf{p})$  soit jugé suffisamment proche de zéro.

L'algorithme de résolution sur un incrément de temps est le suivant :



Bloc correspondant à une itération de Newton-Raphson

Cet algorithme est utilisé dans les cas suivants :

- Détermination du point de départ de la procédure asymptotique avec  $(\Delta t)$  très petit.
- Phase corrective de la procédure asymptotique avec  $(\Delta t) = 0$ .
- Procédure de calcul incrémentale, avec  $(\Delta t) \neq 0$ , utilisée pour valider la M.A.N. et étudier son efficacité. Cet algorithme est alors répété de nombreuses fois afin de déterminer pas à pas la solution. Le point de départ d'un pas de calcul est le point solution du pas précédent.

## A-2 Résolution itérative du problème viscoplastique

On prend :  $\mathbf{f} = \mathbf{I}$ ,  $J = 1$  et donc  $\mathbf{A} = J^{-1} \mathbf{f} = \mathbf{I}$ .

$$\sigma' : \delta \mathbf{L} = \sigma' : \delta \mathbf{D}^*$$

Le système (I-28) à résoudre est :

$$\begin{cases} \mathcal{R}o_{int} - \mathcal{F}_{ext} = 0 \\ \mathcal{R}p_{int} = 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_{ext} = t \mathcal{F}(\mathbf{x})$$

$$\mathcal{R}o_{int} = \int_{\Omega_0} \sigma' : \delta \mathbf{D}^* d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} \text{Tr}(\delta \mathbf{D}^*) p d\Omega_0$$

$$\mathcal{R}p_{int} = \int_{\Omega_0} \delta p \left[ \text{Tr}(\mathbf{D}^*) + \frac{p}{C_{pén}} \right] d\Omega_0$$

Le chargement extérieur est imposé de manière incrémentale par l'intermédiaire du temps :  $t^{(k+1)} = t^{(k)} + (\Delta t)$ . Le ' $k$  ième', incrément étant déterminé, on cherche à résoudre le système pour le ' $(k+1)$  ième', incrément.

L'intégration du vecteur position et de la déformation équivalente donne :

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \left( \frac{\mathbf{v}^{(k)} + \mathbf{v}^{(k+1)}}{2} \right) (\Delta t)$$

$$\bar{\varepsilon}^{(k+1)} = \bar{\varepsilon}^{(k)} + \bar{D}^{(k+1)} (\Delta t)$$

Pour l'incrément de temps  $(\Delta t)$ , on a :

$$\begin{cases} \mathbf{v}^{(k+1)} = \mathbf{v}^{(k)} + d \mathbf{v} \\ \mathbf{p}^{(k+1)} = \mathbf{p}^{(k)} + d \mathbf{p} \end{cases}$$

La résolution s'effectue par la méthode itérative de Newton-Raphson. Pour cela, il faut linéariser le système à résoudre.

$$d \sigma' = C d D' + d C D'$$

$$\triangleright d C = \frac{2}{3} k (d H Q + H d Q)$$

$$\triangleright d H = \frac{n}{(\alpha + \bar{\epsilon})} H d \bar{\epsilon}$$

$$\triangleright d \bar{\epsilon} = d \bar{D} (\Delta t)$$

$$\triangleright d \bar{D} = \frac{2}{3} \frac{1}{\bar{D}} D' : d D'$$

$$\triangleright d Q = \frac{(m-1)}{\bar{D}} Q d \bar{D}$$

$$\Rightarrow d \sigma' = C d D' + \frac{2}{3} k H Q \left( \frac{n}{(\alpha + \bar{\epsilon})} (\Delta t) + \frac{(m-1)}{\bar{D}} \right) d \bar{D} D'$$

$$d \sigma' = \left( C I + \left( \frac{2 n C}{3 \bar{D} (\alpha + \bar{\epsilon})} (\Delta t) + \frac{2 (m-1) C}{3 (\bar{D})^2} \right) D' : d D' \right) D'$$

D'où :

$$\begin{cases} \int_{\Omega_0} \delta \mathbf{D}^* : \mathbf{M} : d \mathbf{D}^* d \Omega_0 - \int_{\Omega_0} \text{Tr}(\delta \mathbf{D}^*) d p d \Omega_0 = \mathcal{F}_{ext} - \mathcal{R}_{\sigma_{int}} \\ \int_{\Omega_0} \delta p \left[ \text{Tr}(d \mathbf{D}^*) + \frac{d p}{C_{pén}} \right] d \Omega_0 = -\mathcal{R}_{p_{int}} \end{cases}$$

$$\text{avec } \mathbf{M} = C I + \left( \frac{2 n C}{3 \bar{D} (\alpha + \bar{\epsilon})} (\Delta t) + \frac{2 (m-1) C}{3 (\bar{D})^2} \right) \mathbf{D}' \otimes \mathbf{D}'$$

On définit :  $(I \circ I)_{ijkl} = \delta_{ik} \delta_{jl}$  et  $(\mathbf{D}' \otimes \mathbf{D}')_{ijkl} = D'_{ij} D'_{kl}$ .

### A-3 Résolution itérative du problème de contact avec frottement

Le système (IV-31) à résoudre est :

$$\begin{cases} \mathcal{R}o_{int} - \mathcal{F}_{ext} = 0 \\ \mathcal{R}p_{int} = 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_{ext} = (\mathbf{R}^c)_p \delta \mathbf{v}_p = (\mathbf{R}_n^c + \mathbf{R}_t^c)_p \delta \mathbf{v}_p$$

$$\mathcal{R}o_{int} = \int_{\Omega_0} \sigma' : \delta \mathbf{D}^* d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} \text{Tr}(\delta \mathbf{D}^*) p d\Omega_0$$

$$\mathcal{R}p_{int} = \int_{\Omega_0} \delta p \left[ \text{Tr}(\mathbf{D}^*) + \frac{p}{C_{pén}} \right] d\Omega_0$$

Le déplacement de l'outil est imposé de manière incrémentale :  $\mathbf{x}_o^{(k+1)} = \mathbf{x}_o^{(k)} + (\Delta t) \mathbf{V}_o$ . Le 'k<sup>ième</sup>' incrément étant déterminé, on cherche à résoudre le système pour le '(k+1)<sup>ième</sup>' incrément.

L'intégration du vecteur position et de la déformation équivalente donne :

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \left( \frac{\mathbf{v}^{(k)} + \mathbf{v}^{(k+1)}}{2} \right) (\Delta t)$$

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(k+1)} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(k)} + \bar{\mathbf{D}}^{(k+1)} (\Delta t)$$

Pour l'incrément de temps ( $\Delta t$ ), on a :

$$\begin{cases} \mathbf{v}^{(k+1)} = \mathbf{v}^{(k)} + d\mathbf{v} \\ \mathbf{p}^{(k+1)} = \mathbf{p}^{(k)} + d\mathbf{p} \end{cases}$$

La résolution s'effectue par la méthode itérative de Newton-Raphson. Pour cela, il faut linéariser le système à résoudre :

$$d\mathbf{R}_t^c = -\mu \left| \mathbf{R}_n^c \right| d\mathbf{V}_q - \mu d \left| \mathbf{R}_n^c \right| \mathbf{V}_q \quad \text{et} \quad d\mathbf{R}_n^c = \left| \mathbf{R}_n^c \right| d\mathbf{n} + d \left| \mathbf{R}_n^c \right| \mathbf{n}$$

$$\triangleright d\mathbf{x} = \left( \frac{\Delta t}{2} \right) d\mathbf{v}$$

$$\triangleright d\mathbf{h} = \left( \frac{\Delta t}{2} \right) d\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$$

$$\triangleright d\mathbf{n} = \left( \frac{\Delta t}{2} \right) \frac{1}{r+h} (d\mathbf{v} - (d\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}) = \left( \frac{\Delta t}{2} \right) \frac{1}{r+h} (d\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}) \mathbf{t}$$

$$\triangleright d\mathbf{t} = (d\mathbf{t} \cdot \mathbf{t})\mathbf{t} + (d\mathbf{t} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} = -(\mathbf{t} \cdot d\mathbf{n})\mathbf{n}$$

$$\triangleright d|R_n^c| = -\eta \delta \left( \frac{\Delta t}{2} \right) \frac{1}{h^2} d\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$$

$$\triangleright d\mathbf{V}_q = dP \mathbf{v}_t + P d\mathbf{v}_t$$

$$\triangleright dP = \frac{q-1}{2} \frac{P}{S} dS$$

$$\triangleright d\mathbf{v}_t = d|v_t| \mathbf{t} + |v_t| d\mathbf{t}$$

$$\triangleright d|v_t| = d\mathbf{v} \cdot \mathbf{t} + (\mathbf{v} - \mathbf{V}_0) \cdot d\mathbf{t}$$

$$\triangleright dS = 2|v_t| * d|v_t| = 2((\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{t}) * (d\mathbf{v} \cdot \mathbf{t} + (\mathbf{v} - \mathbf{V}_0) \cdot d\mathbf{t})$$

$\Rightarrow$

$$d\mathbf{R}_t^c = -\mu |R_n^c| \left( \begin{array}{l} \left( (q-1) \frac{P}{S} (|v_t|)^2 (d\mathbf{v} \cdot \mathbf{t} + (\mathbf{v} - \mathbf{V}_0) \cdot d\mathbf{t}) \mathbf{t} + \right. \\ \left. P((d\mathbf{v} \cdot \mathbf{t} + (\mathbf{v} - \mathbf{V}_0) \cdot d\mathbf{t}) \mathbf{t} + |v_t| d\mathbf{t}) \right) \\ + \mu \eta \delta \left( \frac{\Delta t}{2} \right) \frac{1}{h^2} (d\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) P |v_t| \mathbf{t} \end{array} \right)$$

$$d\mathbf{R}_t^c = -\mu |R_n^c| \left( \begin{array}{l} \left( (q-1) \frac{P}{S} (|v_t|)^2 \left( d\mathbf{v} \cdot \mathbf{t} - \left( \frac{\Delta t}{2} \right) \frac{1}{r+h} ((\mathbf{v} - \mathbf{V}_0) \cdot \mathbf{n}) (d\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}) \right) \mathbf{t} \right) \\ + P \left( \begin{array}{l} \left( d\mathbf{v} \cdot \mathbf{t} - \left( \frac{\Delta t}{2} \right) \frac{1}{r+h} ((\mathbf{v} - \mathbf{V}_0) \cdot \mathbf{n}) (d\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}) \right) \mathbf{t} \\ - |v_t| \left( \frac{\Delta t}{2} \right) \frac{1}{r+h} (d\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}) \mathbf{n} \end{array} \right) \\ + \mu \eta \delta \left( \frac{\Delta t}{2} \right) \frac{1}{h^2} (d\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) P |v_t| \mathbf{t} \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow d\mathbf{R}_n^c = |R_n^c| \left( \frac{\Delta t}{2} \right) \frac{1}{r+h} (d\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}) \mathbf{t} - \eta \delta \left( \frac{\Delta t}{2} \right) \frac{1}{h^2} (d\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}$$

$$\begin{aligned}
d\mathbf{R}^c = & \left\{ -\mu \left| \mathbf{R}_n^c \right| P \left[ 1 + \frac{(q-1)(|v_t|)^2}{S} \right] \left[ 1 - \left( \frac{\Delta t}{2} \right) \frac{1}{r+h} ((\mathbf{v} - \mathbf{V}_o) \cdot \mathbf{n}) \right] + \left| \mathbf{R}_n^c \right| \left( \frac{\Delta t}{2} \right) \frac{1}{r+h} \right\} (\mathbf{d}\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}) \mathbf{t} \\
& - \eta \delta \left( \frac{\Delta t}{2} \right) \frac{1}{h^2} (\mathbf{d}\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \\
& + \mu \left| \mathbf{R}_n^c \right| P |v_t| \left( \frac{\Delta t}{2} \right) \frac{1}{r+h} (\mathbf{d}\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}) \mathbf{n} \\
& + \mu \eta \delta P |v_t| \left( \frac{\Delta t}{2} \right) \frac{1}{h^2} (\mathbf{d}\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{t}
\end{aligned}$$

ou encore :  $d\mathbf{R}^c = \mathbf{M}^c d\mathbf{v}$ , en négligeant les termes non symétriques, il vient :

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}^c = & \left\{ -\mu \left| \mathbf{R}_n^c \right| P \left[ 1 + \frac{(q-1)(|v_t|)^2}{S} \right] \left[ 1 - \left( \frac{\Delta t}{2} \right) \frac{1}{r+h} ((\mathbf{v} - \mathbf{V}_o) \cdot \mathbf{n}) \right] + \left| \mathbf{R}_n^c \right| \left( \frac{\Delta t}{2} \right) \frac{1}{r+h} \right\} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \mathbf{t} \\ \mathbf{t} \mathbf{n} \mathbf{n} \end{bmatrix} \\
& - \eta \delta \left( \frac{\Delta t}{2} \right) \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \mathbf{t} \\ \mathbf{t} \mathbf{n} \mathbf{n} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{cases} \int_{\Omega_0} \delta \mathbf{D}^* : \mathbf{M} : d\mathbf{D}^* d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} \text{Tr}(\delta \mathbf{D}^*) dp d\Omega_0 - \delta v_p \mathbf{M}^c d\mathbf{v}_p = \mathcal{F}_{ext} - \mathcal{R}_{int} \\ \int_{\Omega_0} \delta p \left[ \text{Tr}(d\mathbf{D}^*) + \frac{dp}{C_{pen}} \right] d\Omega_0 = -\mathcal{R}_{int} \end{cases}$$

## Annexe B

### B-1 Développement asymptotique des variables

$$(1) \quad \sigma' = C D' \quad \begin{cases} \sigma'(0) = C(0) D'(0) \\ \sigma'(i) = C(0) D'(i) + C(i) D'(0) + [R\sigma']_i^{i-1} \end{cases}$$

$$\text{avec } [R\sigma']_i^{i-1} = \sum_{r=1}^{r=i-1} C(r) D'(i-r)$$

$$(2) \quad C = \frac{2}{3} k H Q \quad \begin{cases} C(0) = \frac{2}{3} k H(0) Q(0) \\ C(i) = \frac{2}{3} k H(0) Q(i) + [RC]_0^{i-1} \end{cases}$$

$$\text{avec } [RC]_0^{i-1} = \frac{2}{3} k \sum_{r=0}^{r=i-1} H(i-r) Q(r)$$

$$(3) \quad H = (\alpha + \bar{\varepsilon})^n \quad \begin{cases} H(0) = (\alpha + \bar{\varepsilon}(0))^n \\ \text{et } (\alpha + \bar{\varepsilon}) dH = n H d\bar{\varepsilon} \\ H(i) = \frac{1}{\alpha + \bar{\varepsilon}(0)} \left[ \sum_{r=0}^{r=i-1} \left( n - \frac{r(n+1)}{i} \right) \bar{\varepsilon}(i-r) H(r) \right] \end{cases}$$

$$(4) \quad Q = \bar{D}^{m-1} \quad \begin{cases} Q(0) = \bar{D}(0)^{m-1} \\ \text{et } \bar{D} dQ = (m-1) Q d\bar{D} \\ Q(i) = \frac{(m-1)}{\bar{D}(0)} Q(0) \bar{D}(i) + [RQ]_i^{i-1} \end{cases}$$

$$\text{avec } [RQ]_i^{i-1} = \frac{1}{\bar{D}(0)} \left[ \sum_{r=1}^{r=i-1} \left( (m-1) - \frac{r m}{i} \right) \bar{D}(i-r) Q(r) \right]$$

$$(5) \quad \bar{D}^2 = \frac{2}{3} D' : D' + \left( \gamma \frac{v_c}{L_c} \right)^2 \quad \begin{cases} \bar{D}(0) = \sqrt{\frac{2}{3} D'(0) : D'(0) + \left( \gamma \frac{v_c}{L_c} \right)^2} \\ \bar{D}(i) = \frac{2}{3} \frac{1}{\bar{D}(0)} D'(0) : D'(i) + [\mathbf{RD}]_i^{i-1} \end{cases}$$

$$\text{avec } [\mathbf{RD}]_i^{i-1} = \frac{1}{2 \bar{D}(0)} \left[ \sum_{r=1}^{i-1} \left( \frac{2}{3} D'(r) : D'(i-r) - \bar{D}(r) \bar{D}(i-r) \right) \right]$$

$$(6) \quad \frac{dx}{dt} = v \quad \begin{cases} x(0) \\ x(i) = \frac{1}{i} v(i-1) \end{cases}$$

$$(7) \quad \frac{d\bar{\epsilon}}{dt} = \bar{D} \quad \begin{cases} \bar{\epsilon}(0) \\ \bar{\epsilon}(i) = \frac{1}{i} \bar{D}(i-1) \end{cases}$$

$$(8) \quad \frac{dJ}{dt} = J \text{Tr}(D) \quad \begin{cases} J(0) = \det(F(0)) = 1 \\ J(i) = \frac{1}{i} \sum_{r=0}^{i-1} J(r) \text{Tr}(D(i-r-1)) \end{cases}$$

$$(9) \quad L = \nabla v \quad \begin{cases} L(0) = \nabla v(0) \\ L(i) = \nabla v(i) \end{cases}$$

$$(10) \quad f = (\nabla x)^{-1} \quad \begin{cases} f(0) = (\nabla x(0))^{-1} = I \\ f(i) = -f(0) \sum_{r=0}^{i-1} \frac{1}{i-r} f(r) L(i-r-1) \end{cases}$$

$$(11) \quad \mathbf{A} = \mathbf{J}^t \mathbf{f} \quad \begin{cases} \mathbf{A}(0) = \mathbf{J}(0)^t \mathbf{f}(0) = \mathbf{I} \\ \mathbf{A}(0) = \sum_{r=0}^{i-1} \mathbf{A}(r)^t \mathbf{f}(i-r) \end{cases}$$

$$(12) \quad \mathbf{D} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} \mathbf{f} + {}^t(\mathbf{L} \mathbf{f})) \quad \begin{cases} \mathbf{D}(0) = \frac{1}{2} (\mathbf{L}(0) \mathbf{f}(0) + {}^t(\mathbf{L}(0) \mathbf{f}(0))) = \mathbf{D}^*(0) \\ \mathbf{D}(i) = \mathbf{D}^*(i) + [\mathbf{RD}]_0^{i-1} \end{cases}$$

$$\text{avec } \mathbf{D}^*(i) = \frac{1}{2} (\mathbf{L}(i) \mathbf{f}(0) + {}^t(\mathbf{L}(i) \mathbf{f}(0))) = \frac{1}{2} (\mathbf{L}(i) + {}^t \mathbf{L}(i))$$

$$\text{et } [\mathbf{RD}]_0^{i-1} = \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{i-1} (\mathbf{L}(r) \mathbf{f}(i-r) + {}^t(\mathbf{L}(r) \mathbf{f}(i-r)))$$

$$(13) \quad \mathbf{D}' = \mathbf{D} - \frac{\text{Tr}(\mathbf{D})}{3} \mathbf{I} \quad \begin{cases} \mathbf{D}'(0) = \mathbf{D}(0) - \frac{\text{Tr}(\mathbf{D}(0))}{3} \mathbf{I} = \mathbf{D}'^*(0) \\ \mathbf{D}'(i) = \mathbf{D}'^*(i) + [\mathbf{RD}']_0^{i-1} \end{cases}$$

$$\text{avec } \mathbf{D}'^*(i) = \mathbf{D}^*(i) - \frac{\text{Tr}(\mathbf{D}^*(i))}{3} \mathbf{I}$$

$$\text{et } [\mathbf{RD}']_0^{i-1} = [\mathbf{RD}]_0^{i-1} - \frac{[\mathbf{RD}]_0^{i-1}}{3} \mathbf{I}$$

## B-2 Système à l'ordre 0

$$\{\mathbf{A} \boldsymbol{\sigma}' : \delta \mathbf{L}\}_{\text{Ordre } 0} = \mathbf{A}(0) \boldsymbol{\sigma}'(0) : \delta \mathbf{L} = \boldsymbol{\sigma}'(0) : \delta \mathbf{L} = \boldsymbol{\sigma}'(0) : \delta \mathbf{D}'^*$$

A l'ordre 0, le système (I-28) à résoudre devient :

$$\begin{cases} \mathcal{R}o_{int} - \mathcal{F}_{ext} = 0 \\ \mathcal{R}p_{int} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{ext} &= t_0 \mathcal{F}(0) \\ \mathcal{R}_{\sigma_{int}} &= \int_{\Omega_0} \sigma'(0) : \delta \mathbf{D}^* \, d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} \text{Tr}(\delta \mathbf{D}^*) p(0) \, d\Omega_0 \\ \mathcal{R}_{p_{int}} &= \int_{\Omega_0} \delta p \left[ \text{Tr}(\mathbf{D}^*(0)) + \frac{p(0)}{C_{pén}} \right] \, d\Omega_0\end{aligned}$$

Ce système est équivalent au système non linéaire de départ à résoudre.

La résolution s'effectue par la méthode itérative de Newton-Raphson. Pour cela, il faut linéariser le système à résoudre.

$$d \sigma'(0) = C(0) \, d D'(0) + d C(0) \, D'(0)$$

$$\triangleright \, d C(0) = \frac{2}{3} k \left( d H(0) Q(0) + H(0) \, d Q(0) \right)$$

$$\triangleright \, d H(0) = \frac{n}{(\alpha + \bar{\varepsilon}(0))} H(0) \, d \bar{\varepsilon}(0) = 0$$

$$\triangleright \, d Q(0) = \frac{(m-1)}{D(0)} Q(0) \, d \bar{D}(0)$$

$$\triangleright \, d \bar{D}(0) = \frac{2}{3} \frac{1}{D(0)} D'(0) : d D'(0)$$

$$\Rightarrow d \sigma'(0) = \left( C(0) \, \mathbf{I} + \frac{2}{3} \frac{(m-1)}{(D(0))^2} C(0) (D'(0) : D'(0)) \right) d D'(0)$$

D'où :

$$\begin{cases} \int_{\Omega_0} \delta \mathbf{D}^* : \mathbf{M}(0) : \mathbf{D}^*(0) \, d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} \text{Tr}(\delta \mathbf{D}^*) \, d p(0) \, d\Omega_0 = \mathcal{F}_{ext} - \mathcal{R}_{\sigma_{int}} \\ \int_{\Omega_0} \delta p \left[ \text{Tr}(d \mathbf{D}^*(0)) + \frac{d p(0)}{C_{pén}} \right] \, d\Omega_0 = -\mathcal{R}_{p_{int}} \end{cases}$$

$$\text{avec } \mathbf{M}(0) = C(0) \, \mathbf{I} \circ \mathbf{I} + \frac{2}{3} \frac{(m-1)C(0)}{(D(0))^2} \mathbf{D}'(0) \otimes \mathbf{D}'(0)$$

**Remarque :** on retrouve le matrice  $\mathbf{M}$  avec  $(\Delta t) = 0$  obtenue dans l'Annexe A pour la résolution du problème par la méthode de Newton-Raphson.

On définit :  $(\mathbf{I} \circ \mathbf{I})_{ijkl} = \delta_{ik} \delta_{jl}$  et  $(\mathbf{D}' \otimes \mathbf{D}')_{ijkl} = D'_{ij} D'_{kl}$ .

### B-3 Système à l'ordre $i$

$$\sigma'(i) = C(0) D'(i) + C(i) D'(0) + [R\sigma']_i^{i-1}$$

$$\triangleright \sigma'(i) = C(0) D'(i) + \frac{2}{3} k H(0) Q(i) D'(0) + \left\{ [RC]_0^{i-1} D'(0) + [R\sigma']_i^{i-1} \right\}$$

$$\triangleright \sigma'(i) = C(0) D'(i) + \frac{2}{3} k H(0) \frac{(m-1)}{\bar{D}(0)} Q(0) \bar{D}(i) D'(0) + \left\{ \left( \frac{2}{3} k H(0) [RQ]_i^{i-1} + [RC]_0^{i-1} \right) D'(0) + [R\sigma']_i^{i-1} \right\}$$

$\triangleright$

$$\sigma'(i) = C(0) D'(i) + \frac{2}{3} \frac{(m-1)}{(\bar{D}(0))^2} C(0) (D'(0) : D'(i)) D'(0) + \left\{ \left( \frac{2}{3} k H(0) \left( \frac{(m-1)}{\bar{D}(0)} Q(0) [R\bar{D}]_i^{i-1} + [RQ]_i^{i-1} \right) + [RC]_0^{i-1} \right) D'(0) + [R\sigma']_i^{i-1} \right\}$$

$$\triangleright \sigma'(i) = \left( C(0) I + \frac{2}{3} \frac{(m-1)}{(\bar{D}(0))^2} C(0) (D'(0) : D'(0)) \right) D'(i) + \dots$$

$$\Rightarrow \sigma'(i) = \left( C(0) I + \frac{2}{3} \frac{(m-1)}{(\bar{D}(0))^2} C(0) (D'(0) : D'(0)) \right) D'^*(i) + [\tilde{R}v]$$

avec

$$[\tilde{R}v] = \left( C(0) I + \frac{2}{3} \frac{(m-1)}{(\bar{D}(0))^2} C(0) (D'(0) : D'(0)) \right) [RD']_i^{i-1} + \left( \frac{2}{3} k H(0) \left( \frac{(m-1)}{\bar{D}(0)} Q(0) [R\bar{D}]_i^{i-1} + [RQ]_i^{i-1} \right) + [RC]_0^{i-1} \right) D'(0) + [R\sigma']_i^{i-1}$$

D'où :

$$\{A \sigma' : \delta L\}_{\text{Ordre } i} = \delta D'^* : M(0) : D'^*(i) + \delta D'^* \left( [\tilde{R}v] + \sum_{r=0}^{i-1} A(i-r) \sigma'(r) \right)$$

On retrouve ainsi la même matrice que pour l'ordre 0.

A l'ordre  $i$ , le système (I-28) à résoudre devient :

$$\begin{cases} \int_{\Omega_0} \delta \mathbf{D}^* : \mathbf{M}(0) : \mathbf{D}^*(i) \, d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} \text{Tr}(\delta \mathbf{D}^*) p(i) \, d\Omega_0 = t_0 \mathcal{F}(i) + \mathcal{F}(i-1) - \mathcal{R}o_0^{i-1} \\ \int_{\Omega_0} \delta p \left[ \text{Tr}(\mathbf{D}^*(i)) + \frac{p(i)}{C_{\text{pén}}} \right] \, d\Omega_0 = -\mathcal{R}p_0^{i-1} \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} \mathcal{F}(i) = \int_{\partial\Omega_0} \delta v \, \dot{p}_d \, \mathbf{A}(i) \, n_0 \, dS_0 \\ \mathcal{R}o_0^{i-1} = \int_{\Omega_0} \delta \mathbf{D}^* \left( [\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{v}] + \left[ \sum_{r=0}^{i-1} \mathbf{A}(i-r) \sigma'(r) \right] \right) \, dS_0 - \int_{\Omega_0} \text{Tr}(\delta \mathbf{D}^*) \left[ \sum_{r=0}^{i-1} \mathbf{A}(i-r) p(r) \right] \, dS_0 \\ \mathcal{R}p_0^{i-1} = \int_{\Omega_0} \delta p \sum_{r=0}^{i-1} \left[ \mathbf{A}(i-r) : \mathbf{L}(r) + J(i-r) \frac{p(r)}{C_{\text{pén}}} \right] \, d\Omega_0 \end{cases}$$

## Annexe C

### C-1 Développement asymptotique des variables

$$(1) \quad \mathbf{R}_n^c = |\mathbf{R}_n^c| \mathbf{n} \quad \begin{cases} \mathbf{R}_n^c(0) = |\mathbf{R}_n^c|(0) \mathbf{n}(0) \\ \mathbf{R}_n^c(i) = \sum_{r=0}^{i-1} |\mathbf{R}_n^c|(r) \mathbf{n}(i-r) \end{cases}$$

$$(2) \quad |\mathbf{R}_n^c| = \eta \frac{(\delta - h)}{h} \quad \begin{cases} |\mathbf{R}_n^c|(0) = \eta \frac{(\delta - h(0))}{h(0)} \\ |\mathbf{R}_n^c|(i) = -\frac{1}{h(0)} \left[ \eta h(i) + \sum_{r=0}^{i-1} |\mathbf{R}_n^c|(r) h(i-r) \right] \end{cases}$$

$$(3) \quad \mathbf{R}_t^c = -\mu |\mathbf{R}_n^c| \mathbf{V}_q \quad \begin{cases} \mathbf{R}_t^c(0) = -\mu |\mathbf{R}_n^c|(0) \mathbf{V}_q(0) \\ \mathbf{R}_t^c(i) = -\mu |\mathbf{R}_n^c|(0) \mathbf{V}_q(i) + [\mathbf{R}\mathbf{R}_t^c]_0^{i-1} \end{cases}$$

avec  $[\mathbf{R}\mathbf{R}_t^c]_0^{i-1} = -\mu \sum_{r=0}^{i-1} |\mathbf{R}_n^c|(r) \mathbf{V}_q(i-r)$

$$(4) \quad \mathbf{V}_q = \mathbf{P} \mathbf{v}_t \quad \begin{cases} \mathbf{V}_q(0) = \mathbf{P}(0) \mathbf{v}_t(0) \\ \mathbf{V}_q(i) = \mathbf{P}(0) \mathbf{v}_t(i) + \mathbf{P}(i) \mathbf{v}_t(0) + [\mathbf{R}\mathbf{V}_q]_1^{i-1} \end{cases}$$

avec  $[\mathbf{R}\mathbf{V}_q]_1^{i-1} = \sum_{r=1}^{i-1} \mathbf{P}(r) \mathbf{v}_t(i-r)$

$$(5) \quad \mathbf{v}_t = |\mathbf{v}_t| \mathbf{t} \quad \begin{cases} \mathbf{v}_t(0) = |\mathbf{v}_t|(0) \mathbf{t}(0) \\ \mathbf{v}_t(i) = |\mathbf{v}_t|(i) \mathbf{t}(0) + [\mathbf{R}\mathbf{v}_t]_0^{i-1} \end{cases}$$

avec  $[\mathbf{R}\mathbf{v}_t]_0^{i-1} = \sum_{r=1}^{i-1} |\mathbf{v}_t|(r) \mathbf{t}(i-r)$

$$(6) \quad |v_t| = (v - v_o) \cdot t \quad \begin{cases} |v_t|(0) = (v(0) - v_o) \cdot t(0) \\ |v_t|(i) = v(i) \cdot t(0) + [Rv_t]_0^{i-1} \end{cases}$$

$$\text{avec } [Rv_t]_0^{i-1} = \sum_{r=1}^{i-1} v(r) \cdot t(i-r)$$

$$(7) \quad P = S^{(q-1/2)} \quad \begin{cases} P(0) = S(0)^{(q-1/2)} \\ P(i) = \frac{(q-1)}{2} \frac{P(0)}{S(0)} S(i) + [RP]_0^{i-1} \end{cases}$$

$$\text{et } S dP = \frac{q-1}{2} P dS$$

$$\text{avec } [RP]_0^{i-1} = \frac{1}{S(0)} \left[ \sum_{r=1}^{i-1} \left( \frac{(q-1)}{2} - \frac{r}{i} * \frac{(q+1)}{2} \right) S(i-r) P(r) \right]$$

$$(8) \quad S = v_t \cdot v_t + (\omega v_c)^2 \quad \begin{cases} S(0) = |v_t|(0) * |v_t|(0) + (\omega v_c)^2 \\ S(i) = 2 |v_t|(0) * |v_t|(i) + [RS]_0^{i-1} \end{cases}$$

ou

$$S = |v_t| * |v_t| + (\omega v_c)^2 \quad \text{avec } [RS]_0^{i-1} = \sum_{r=1}^{i-1} |v_t|(r) * |v_t|(i-r)$$

$$(9) \quad (r+h)^2 = (x - x_o) \cdot (x - x_o) \quad \begin{cases} h(0) = -r + \sqrt{(x(0) - x_o(0)) \cdot (x(0) - x_o(0))} \\ h(1) = \frac{1}{r+h(0)} (x(0) - x_o(0)) \cdot (x(1) - V_o) \\ h(2) = \frac{1}{2(r+h(0))} \left[ 2 * (x(0) - x_o(0)) \cdot x(2) + (x(1) - V_o) \cdot (x(1) - V_o) \right] \\ h(i) = \frac{1}{2(r+h(0))} \left[ 2 * (x(0) - x_o(0)) \cdot x(i) + 2 * (x(1) - V_o) \cdot x(i-1) \right. \\ \left. + \sum_{r=2}^{i-2} x(r) \cdot x(i-r) - \sum_{r=1}^{i-1} h(r) * h(i-r) \right] \\ (i \geq 3) \end{cases}$$

$$(10) \quad \mathbf{n} = \frac{1}{r+h} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \quad \begin{cases} \mathbf{n}(0) = \frac{1}{r+h(0)} (\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_o(0)) \\ \mathbf{n}(1) = \frac{1}{r+h(0)} (\mathbf{x}(1) - \mathbf{V}_o - h(1) \mathbf{n}(0)) \\ \mathbf{n}(i) = \frac{1}{r+h(0)} \left( \mathbf{x}(i) - \sum_{r=0}^{i-1} h(i-r) \mathbf{n}(r) \right) \\ (i \geq 2) \end{cases}$$

$$(11) \quad \mathbf{t} = \mathbf{n} \wedge \mathbf{z} \quad \begin{cases} \mathbf{t}(0) = \mathbf{n}(0) \wedge \mathbf{z} \\ \mathbf{t}(i) = \mathbf{n}(i) \wedge \mathbf{z} \end{cases}$$

## C-2 Système à l'ordre 0

$$\left\{ -\mu \left| \mathbf{R}_n^c \right| \mathbf{V}_q \right\}_{\text{Ordre 0}} = \mathbf{R}_t^c(0)$$

A l'ordre 0, le système (IV-31) à résoudre devient :

$$\begin{cases} \mathcal{R}o_{int} - \mathcal{F}_{ext} = 0 \\ \mathcal{R}p_{int} = 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_{ext} = \mathbf{R}_n^c(0)$$

$$\mathcal{R}o_{int} = \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\sigma}'(0) : \delta \mathbf{D}^* d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} \text{Tr}(\delta \mathbf{D}^*) p(0) d\Omega_0 - (\mathbf{R}_t^c(0))_p \delta \mathbf{v}_p$$

$$\mathcal{R}p_{int} = \int_{\Omega_0} \delta p \left[ \text{Tr}(\mathbf{D}^*(0)) + \frac{p(0)}{C_{pén}} \right] d\Omega_0$$

Ce système est équivalent au système non linéaire de départ à résoudre.

La résolution s'effectue par la méthode itérative de Newton-Raphson. Pour cela, il faut linéariser le système à résoudre.

$$\mathbf{R}_t^c(0) = -\mu \left| \mathbf{R}_n^c \right| (0) \mathbf{V}_q(0)$$

$$\triangleright d \mathbf{R}_n^c(0) = 0, \text{ en effet : } d \mathbf{x}(0) = 0$$

$$\triangleright d \mathbf{V}_q(0) = dP(0) \mathbf{v}_t(0) + P(0) d \mathbf{v}_t(0)$$

$$\triangleright dP(0) = \frac{q-1}{2} \frac{P(0)}{S(0)} dS(0)$$

$$\triangleright dS(0) = 2 |v_t|(0) * d|v_t|(0) = 2 ((v(0) - v_o) \cdot t(0)) * (d v(0) \cdot t(0))$$

$$\triangleright d v_t(0) = d|v_t|(0) t(0)$$

$$\triangleright d|v_t|(0) = d v(0) \cdot t(0)$$

$$\Rightarrow dR_t^c(0) = -\mu |R_n^c|(0) P(0) \left( \frac{(q-1)}{S(0)} (|v_t|(0))^2 + 1 \right) [{}^t t(0) t(0)] d v(0)$$

ou encore :  $dR_t^c(0) = M^c(0) d v(0)$

$$\text{avec } M^c(0) = -\mu |R_n^c|(0) P(0) \left( 1 + \frac{(q-1) (|v_t|(0))^2}{S(0)} \right) [{}^t t(0) t(0)]$$

**Remarque :** on retrouve la matrice  $M^c$  avec  $(\Delta t) = 0$  obtenue dans l'Annexe A pour la résolution du problème par la méthode de Newton-Raphson.

D'où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_0} \delta D^* : M(0) : dD^*(0) d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} \text{Tr}(\delta D^*) dp(0) d\Omega_0 - \delta v_p M^c(0) d v_p(0) = \mathcal{F}_{ext} - \mathcal{R}_{o,int} \\ \int_{\Omega_0} \delta p \left[ \text{Tr}(dD^*(0)) + \frac{dp(0)}{C_{pén}} \right] d\Omega_0 = -\mathcal{R}_{p,int} \end{array} \right.$$

### C-3 Système à l'ordre i

$$R_t^c(i) = -\mu |R_n^c|(0) V_q(i) + [RR_t^c]_0^{i-1}$$

$$\triangleright R_t^c(i) = -\mu |R_n^c|(0) (P(0) v_t(i) + P(i) v_t(0)) + \left\{ -\mu |R_n^c|(0) [RV_q]_1^{i-1} + [RR_t^c]_0^{i-1} \right\}$$

$\triangleright$

$$\mathbf{R}_t^c(i) = -\mu \left| \mathbf{R}_n^c \right| (0) \left( P(0) \left| \mathbf{v}_t \right| (i) \mathbf{t}(0) + \frac{(q-1) P(0)}{2} \frac{P(0)}{S(0)} S(i) \mathbf{v}_t(0) \right) \\ + \left\{ -\mu \left| \mathbf{R}_n^c \right| (0) \left( P(0) \left[ \mathbf{Rv}_t \right]_0^{i-1} + \left[ \mathbf{RP} \right]_1^{i-1} \mathbf{v}_t(0) + \left[ \mathbf{RV}_q \right]_1^{i-1} \right) + \left[ \mathbf{RR}_t^c \right]_0^{i-1} \right\}$$

➤

$$\mathbf{R}_t^c(i) = -\mu \left| \mathbf{R}_n^c \right| (0) \left( P(0) \left| \mathbf{v}_t \right| (i) \mathbf{t}(0) + \frac{(q-1) P(0)}{2} \frac{P(0)}{S(0)} 2 \left| \mathbf{v}_t \right| (0) * \left| \mathbf{v}_t \right| (i) * \left| \mathbf{v}_t \right| (0) \mathbf{t}(0) \right) \\ + \left\{ -\mu \left| \mathbf{R}_n^c \right| (0) \left( P(0) \left[ \mathbf{Rv}_t \right]_0^{i-1} + \frac{(q-1) P(0)}{2} \frac{P(0)}{S(0)} \left[ \mathbf{RS} \right]_1^{i-1} \mathbf{v}_t(0) \right) + \left[ \mathbf{RR}_t^c \right]_0^{i-1} \right\}$$

$$\Rightarrow \mathbf{R}_t^c(i) = -\mu \left| \mathbf{R}_n^c \right| (0) \left( P(0) \mathbf{v}(i) \cdot \mathbf{t}(0) \mathbf{t}(0) + (q-1) \frac{P(0)}{S(0)} \left( \left| \mathbf{v}_t \right| (0) \right)^2 \mathbf{v}(i) \cdot \mathbf{t}(0) \mathbf{t}(0) \right) + \left[ \tilde{\mathbf{Rc}} \right]$$

avec

$$\left[ \tilde{\mathbf{Rc}} \right] = \left\{ -\mu \left| \mathbf{R}_n^c \right| (0) \left( P(0) \left[ \mathbf{Rv}_t \right]_0^{i-1} \mathbf{t}(0) + \frac{(q-1) P(0)}{2} \frac{P(0)}{S(0)} \left( \left| \mathbf{v}_t \right| (0) \right)^2 \left[ \mathbf{Rv}_t \right]_0^{i-1} \mathbf{t}(0) \right) \right. \\ \left. + P(0) \left[ \mathbf{Rv}_t \right]_0^{i-1} + \frac{(q-1) P(0)}{2} \frac{P(0)}{S(0)} \left[ \mathbf{RS} \right]_1^{i-1} \mathbf{v}_t(0) + \left[ \mathbf{RP} \right]_1^{i-1} \mathbf{v}_t(0) + \left[ \mathbf{RV}_q \right]_1^{i-1} \right\} + \left[ \mathbf{RR}_t^c \right]_0^{i-1}$$

Finalement :

$$\mathbf{R}_t^c(i) = \mathbf{M}^c(0) \mathbf{v}(i) + \left[ \tilde{\mathbf{Rc}} \right]$$

On retrouve ainsi la **même matrice que pour l'ordre 0**.

On a :

$$\left\{ -\mu \left| \mathbf{R}_n^c \right| \mathbf{V}_q \right\}_{\text{Ordre } i} = \mathbf{R}_t^c(i)$$

A l'ordre  $i$ , le système (IV-31) à résoudre devient :

$$\begin{cases} \int_{\Omega_0} \delta \mathbf{D}^* : \mathbf{M}(0) : \mathbf{D}^*(i) \, d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} \text{Tr}(\delta \mathbf{D}^*) p(i) \, d\Omega_0 - \delta \mathbf{v}_p \mathbf{M}^c(0) \mathbf{v}_p(i) = \mathcal{R}_n^c(i) - \mathcal{R}_{c0}^{i-1} \\ \int_{\Omega_0} \delta p \left[ \text{Tr}(\mathbf{D}^*(i)) + \frac{p(i)}{C_{\text{pén}}} \right] \, d\Omega_0 = -\mathcal{R}_{p0}^{i-1} \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} \mathcal{R}_n^c(i) = \delta v_p \mathbf{R}_n^c(i) \\ \mathcal{R}_{co_0}^{i-1} = \mathcal{R}_{o_0}^{i-1} - \delta v_p [\tilde{\mathbf{R}}c] \\ \mathcal{R}_{p_0}^{i-1} = \int_{\Omega_0} \delta p \sum_{r=0}^{i-1} \left[ \mathbf{A}(i-r) : \mathbf{L}(r) + J(i-r) \frac{p(r)}{C_{\text{pén}}} \right] d\Omega_0 \end{cases}$$

$$\{D^*\} = \begin{Bmatrix} v_{r,r} \\ v_r \\ r \\ v_{z,z} \\ v_{r,z} + v_{z,r} \end{Bmatrix}$$

$$\text{Tr}(D^*) = D_{rr} + D_{\theta\theta} + D_{zz}$$

$$D'^* = D^* - \frac{\text{Tr}(D^*)}{3} I$$

Sur chaque élément :

$$\{D^*\} = \begin{bmatrix} N_{1,r} & 0 & \vdots \\ N_1 & 0 & \dots \\ r & 0 & \dots \\ 0 & N_{1,z} & \dots \\ N_{1,z} & N_{1,r} & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_r^{(i)} \\ v_z^{(i)} \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad \rightarrow \quad \{D^*\} = [B]\{v_n\}$$

$$\text{Tr}(D^*) = \begin{bmatrix} N_{1,r} + \frac{N_1}{r} & N_{1,z} & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_r^{(i)} \\ v_z^{(i)} \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad \rightarrow \quad \text{Tr}(D^*) = [Bv]\{v_n\}$$

$$\{D'^*\} = \begin{bmatrix} N_{1,r} - \frac{1}{3} \left( N_{1,r} + \frac{N_1}{r} \right) & -\frac{1}{3} N_{1,z} & \vdots \\ \frac{N_1}{r} - \frac{1}{3} \left( N_{1,r} + \frac{N_1}{r} \right) & -\frac{1}{3} N_{1,z} & \dots \\ -\frac{1}{3} \left( N_{1,r} + \frac{N_1}{r} \right) & N_{1,z} - \frac{1}{3} N_{1,z} & \dots \\ N_{1,z} & N_{1,r} & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_r^{(i)} \\ v_z^{(i)} \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad \rightarrow \quad \{D'^*\} = [B']\{v_n\}$$

## Annexe D

### D-1 Discrétisation de la structure

On se place dans l'espace plan, c'est à dire que chaque variable vectorielle a deux coordonnées et chaque champ dépend de deux coordonnées d'espace  $x$  et  $y$  par rapport à un référentiel fixe.

Le domaine est discrétisé en nœuds sur lesquels sont construits des éléments. La façon de construire les éléments et leurs fonctions d'interpolation est présentée dans les ouvrages spécialisés.

Nous définissons une matrice  $[Nv]$  contenant toutes les fonctions d'interpolation associées à chaque nœud du maillage :

$$[Nv] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & N_n & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots & 0 & N_n \end{bmatrix}$$

'n' est le nombre total de nœuds du maillage.

Alors la vitesse est donnée par :

$$\{v\} = [Nv]\{v_n\}$$

Les composantes du tenseur des vitesses de déformation sont rangées dans un vecteur noté  $\{D^*\}$ .

### D-2 Conditions d'axisymétrie

➤  $v(v_r, v_z)$  (coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ )

$$\{D^*\} = \begin{Bmatrix} D_{rr} \\ D_{\theta\theta} \\ D_{zz} \\ 2D_{rz} \end{Bmatrix}$$

### D-3 Conditions de déformation plane

➤  $v(v_x, v_y)$

$$\{D^*\} = \begin{Bmatrix} D_{xx} \\ D_{yy} \\ 2D_{xy} \\ D_{zz} = 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{D^*\} = \begin{Bmatrix} v_{x,x} \\ v_{y,y} \\ v_{x,y} + v_{y,x} \\ v_{z,z} = 0 \end{Bmatrix}$$

$$\text{Tr}(D^*) = D_{xx} + D_{yy}$$

$$D^* = D^* - \frac{\text{Tr}(D^*)}{3} I$$

Sur chaque élément :

$$\{D^*\} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & \vdots \\ 0 & N_{1,y} & \vdots \\ N_{1,y} & N_{1,x} & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_x^{(l)} \\ v_y^{(l)} \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad \rightarrow \quad \{D^*\} = [B] \{v_n\}$$

$$\text{Tr}(D^*) = [N_{1,x} \quad N_{1,y} \quad \dots] \begin{Bmatrix} v_x^{(l)} \\ v_y^{(l)} \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad \rightarrow \quad \text{Tr}(D^*) = [Bv] \{v_n\}$$

$$\{D^{**}\} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & -\frac{1}{3}N_{1,x} & -\frac{1}{3}N_{1,y} & \vdots \\ -\frac{1}{3}N_{1,x} & N_{1,y} & -\frac{1}{3}N_{1,y} & \vdots \\ N_{1,y} & N_{1,x} & \vdots & \vdots \\ -\frac{1}{3}N_{1,x} & -\frac{1}{3}N_{1,y} & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_x^{(l)} \\ v_y^{(l)} \\ \vdots \end{Bmatrix} \rightarrow \{D^{**}\} = [B']\{v_n\}$$

## Simulation de la mise en forme à chaud par la Méthode Asymptotique Numérique

Dans ce travail de thèse, la **Méthode Asymptotique Numérique** (M.A.N.) est examinée pour l'étude des problèmes mécaniques combinant plusieurs non-linéarités : matérielle, géométrique, contact avec frottement.

Nous abordons ainsi la mise en forme à chaud de tôles en appliquant la M.A.N. à la résolution des problèmes viscoplastiques (loi de Norton-Hoff) en grande déformation avec prise en compte du contact avec frottement.

Pour appliquer la M.A.N., des techniques d'introduction de variables, de régularisation, ainsi que de modification des relations sont employées dans le but de rendre les expressions quadratiques et analytiques. En particulier, les conditions unilatérales de contact sont régularisées.

La M.A.N. consiste à combiner une technique de perturbation et la méthode des éléments finis. Les inconnues du problème sont ainsi développées sous forme de séries entières et le problème non linéaire de départ à résoudre se transforme alors en une suite récurrente de problèmes linéaires ayant le même opérateur tangent et résolus par la Méthode des Eléments Finis.

Les applications numériques traitées : simulations de formage de tôles par pression hydraulique et par poinçonnement hémisphérique, permettent de montrer la supériorité de la M.A.N. sur une méthode itérative dans le sens où elle est plus **rapide** (peu d'opérations de 'construction-inversion' de matrices), très **précise** (équilibre satisfait à tout moment de la déformation) et totalement **automatique** (calcul intrinsèque des pas de chargement).

### **Mots Clés :**

Méthodes numériques – Eléments finis – Régularisation – Calcul non linéaire – Viscoplasticité – Contact – Frottement – Mise en forme

## Hot metal forming simulation by the Asymptotic Numerical Method

In this thesis work, the **Asymptotic Numerical Method** (A.N.M.) is investigated to analyse mechanical problems combining several non-linearities : material, geometrical, friction contact.

We study hot sheet metal forming by applying the A.N.M. to solve viscoplastic problems (Norton-Hoff law) with large deformation and friction contact.

To apply the A.N.M., techniques of variables introduction, regularization and relations modification are used in order to transform the expressions into quadratic and analytic ones. Particularly, unilateral contact conditions are regularized.

The A.N.M. consists in combining a perturbation technique and the Finite Element Method. The unknowns of the problem are thus developed into asymptotic expansions and the initial non-linear problem to solve is transformed into a recursive succession of linear ones having the same tangent operator and solved numerically by the Finite Element Method.

Numerical applications presented : sheet metal forming processes by hydraulic pressure and by hemispheric stamp, allow to show the superiority of the A.N.M. with respect to an iterative method in that the A.N.M. is **faster** (few 'construction-inversion' matrix operations), very **accurate** (equilibrium satisfied at any time in the deformation) and totally **automatic** (intrinsic determined load step).

### **Keywords :**

Numerical methods – Finite Element Method – Regularization – Non-linear computation – Viscoplasticity – Contact – Friction – Sheet metal forming