Sur quelques problèmes relatifs à la déformation d'une membrane élastique par des boules rigides

Saïd Fouad

▶ **To cite this version:**

Saïd Fouad. Sur quelques problèmes relatifs à la déformation d'une membrane élastique par des boules rigides. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paul Verlaine - Metz, 1999. Français. NNT : 1999METZ047S . tel-01775792

HAL Id: tel-01775792
https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01775792

Submitted on 24 Apr 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

S1112 99

Université de Metz

THESE

Présentée à l'université de Metz pour l'obtention du grade de :

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE METZ

Spécialité : Mathématiques

Par

Saïd FOUAD

Titre

SUR QUELQUES PROBLEMES RELATIFS A LA DEFORMATION D'UNE MEMBRANE ELASTIQUE PAR DES BOULES RIGIDES

Soutenue le 29.11.99, devant la commission d'examen :

J. Bemelmans	Professeur à l'université d'Aachen, Allemagne	Rapporteur
B. Brighi	Maître de conférence à l'université de Metz	Examinateur
M. Chipot	Professeur à l'université de Zürich. Suisse	Directeur de thèse
C. Guillopé	Professeur à l'université Paris XII	Rapporteur

EXCLU DU PRET

b 162566

Université de Metz

THESE

Présentée à l'université de Metz pour l'obtention du grade de :

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE METZ

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ
N° inv. 1999136 5
Cote S/Mz 99/47
Loc Magasin

Spécialité : Mathématiques

Par

Saïd FOUAD

Titre

SUR QUELQUES PROBLEMES RELATIFS A LA DEFORMATION D'UNE MEMBRANE ELASTIQUE PAR DES BOULES RIGIDES

Soutenue le 29.11.99, devant la commission d'examen :

J. Bemelmans	Professeur à l'université d'Aachen, Allemagne	Rapporteur
B. Brighi	Maître de conférence à l'université de Metz	Examinateur
M. Chipot	Professeur à l'université de Zürich, Suisse	Directeur de thèse
C. Guillopé	Professeur à l'université Paris XII	Rapporteur

SUR QUELQUES PROBLEMES RELATIFS A LA DEFORMATION D'UNE MEMBRANE ELASTIQUE PAR DES BOULES RIGIDES

*

* *

* * *

Remerciements

Le travail présenté dans ce mémoire a étè realisé au département de mathématiques de Metz sous la direction du Professeur M.Chipot.

J'aimerais d'abord exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur Michel Chipot pour m'avoir fait bénéficier de ses compétences scientifiques, pour ses encouragements et sa confiance.

Je tiens à remercier Monsieur le Professeur J. Bemelmans et Madame le Professeur C. Guillopé d'avoir bien voulu être membre du jury et rapporteur.

Je tiens à remercier Monsieur B. Brighi d'avoir bien voulu être membre du jury et examinateur.

Je veux aussi exprimer mes sincères remerciements à toutes les personnes du département de Mathématiques, à mes amis pour leur aide et leur soutien moral.

A mes parents,

à mon fils Oussama.

à la mémoire de mon frère Youssef

décedé à l'âge de 20 ans, et qui aurait tant souhaité assister à ce moment.

à tous ceux et à toutes celles qui me sont chers.

*

* *

* * *

Mots -Clés

Inéquations Variationnelles.

* * * * *

Problèmes d'obstacle.

* * * * *

Contact entre une membrane et un corps rigide.

* * * * *

Membrane élastique.

*

* *

* * *

TABLE DES MATIERES

Remerciements
Mots-Clés
Notation
Avant-Propos
Introduction

Chapitre 1. MEMBRANE ELASTIQUE SUPPORTANT UNE SEULE BOULE RIGIDE.

A—Le problème en dimension deux

I-1. Introduction 8
I-2. Formulation du problème 9
I-3. Existence 11

B—Le problème en dimension un

I-4. Introduction 18
I-5. Formulation du problème 18
I-6. Recherche de points critiques 19

Chapitre 2. UN RESULTAT DE CONTINUITE ET DE DERIVABILITE.

II-1. Introduction 25
II-2. Résultats préliminaires 26
II-3. Continuité par rapport à la variable h 27
II-4. Dérivabilité par rapport à la variable h 28

Chapitre 3. DIVERS RÉSULTATS.

III-1. Introduction 33
III-2. Quelques résultats 34
a—*La nature d'une solution du problème* $(\mathcal{P})$ 34
b—*Résumé de l'étude du problème* $(\mathcal{P})$ *par Elliott & Friedman* 36
III-3. Un résultat d'unicité et de symétrie de l'ensemble de coincidence 42
a—*Résultat d'unicité* 42
b—*Symétrie de l'ensemble de coincidence* 44
III-4. Le problème $(\mathcal{P})$ *n'admet pas en général une solution unique* 45
a—*Premier contre-exemple* 45
b—*Autres contre-exemples* 48
c—*La non convexité n'implique pas la non unicité* . . . 49
d—*Un extremum relatif d'énergie* 50
III-5. Application 52
a—*Localisation d'une solution du problème* $(\mathcal{P})$ *dans le cas d'un domaine qui admet un seul axe de symétrie* 52
b—*Localisation des centres harmoniques dans des cas particuliers* 55

Chapitre 4. LE CAS D'UNE MEMBRANE ÉLASTIQUE SUPPORTANT DEUX BOULES RIGIDES.

A—**Problème Initial**

IV-1. Introduction 58
IV-2. Problèmes d'obstacle auxiliaires 60
IV-3. Existence 64
IV-5. Un résultat d'unicité 93

B—**Problèmes Particuliers**

IV-6. Cas $n = 1$ 95
IV-7. Cas $n = 2$ 96
IV-8. Cas $n = 3$ 97
IV-9. Cas $n = 4$ 102

Chapitre 5. LE CAS D'UN FIL ÉLASTIQUE SUPPORTANT UN OU DEUX DISQUES RIGIDES

Quelques questions ouvertes
Bibliographie

*

* *

* * *

NOTATIONS

La plupart des notations utilisées dans cette étude sont signalées dès qu'elles sont introduites pour la première fois. Nous tenons cependant à préciser quelques notations d'usage courant et quelques espaces fonctionnels.

$\Longrightarrow$	signe "entraine", ou implique
$\Longleftrightarrow$	signe "équivalent"
■, □	signale la fin d'un passage formant une suite logique (remarque, preuve,..) si nécessaire pour la clarté du texte
$\forall$	quelque soit
$\exists$	il existe
ssi	si et seulement si
i.e.	c'est-à-dire
$\emptyset$	ensemble vide
(x, y)	le produit scalaire de x et y
$x = (x_1, x_2)$	les coordonnées cartésiennes de x dans $\mathbb{R}^2$
$\|x\| = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$	la norme euclidienne de x
$dx = dx_1 dx_2$	la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$
$B_r(x)$	boule ouverte de centre x et de rayon $r > 0$
Ω	domaine borné de $\mathbb{R}^2$

$\Gamma = \partial\Omega$	la frontière de Ω
$\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$	la fermeture de Ω
B	l'intérieur de B
$\det A$	le déterminant de la matrice A
$\mathcal{D}(\Omega)$	l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact inclu dans Ω
$\mathcal{D}'(\Omega)$	l'espace des distributions sur Ω
$L^p(\Omega)$	l'espace des fonctions mesurables u tel que : $\|u\|_{p,\Omega} = \|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega \|u\|^p\right)^{1/p} < \infty \qquad (1 \leq p < \infty)$
$L^\infty(\Omega)$	l'espace des fonctions mesurables u essentiellement bornées. $\|u\|_{\infty,\Omega} = \|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{M : \|u\| \leq M \quad \text{p.p. dans } \Omega\}$
$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$	l'espace des fonctions u de $L^2(\Omega)$ ayant leurs dérivées (au sens des distributions) dans $L^2(\Omega)$, muni de la norme : $\|u\|_{2,\Omega} = \|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|^2_{1,\Omega} + \|\nabla u\|^2_{1,\Omega}\right)^{1/2}$
$H^1_0(\Omega)$	l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$
$\mathcal{C}(\Omega)$	l'espace des fonctions continues dans Ω
$\mathcal{C}(\bar{\Omega})$	l'espace des fonctions continues dans $\bar{\Omega}$
$\mathcal{C}^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$, $0 < \lambda \leq 1$	l'espace des fonctions holdériennes d'ordre λ sur $\bar{\Omega}$ c'est-à-dire l'espace des fonctions u continues sur $\bar{\Omega}$ telles que $\sup_{x,y\in\Omega, x\neq y} \dfrac{\|u(x) - u(y)\|}{\|x - y\|^\lambda} < \infty$
$\mathcal{C}^m(\Omega)$	l'espace des fonctions m fois continuement dérivables dans Ω
$\mathcal{C}^{m,\lambda}(\bar{\Omega})$	l'espace des fonctions $u \in \mathcal{C}^m(\Omega)$ telles que $D^j u \in \mathcal{C}^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$. $\forall j, \quad \|j\| \leq m$
$f'(a)$	la dérivée de $f : \mathbb{R} \longrightarrow X$ (X : un espace de Banach) au point a
$f^{(n)}(a)$	la dérivée d'ordre n de f au point a $f^{(0)} = f, \quad f^{(1)} = f', \quad f^{(2)} = f''$
$Df(a)$	la dérivée (de Fréchet) de $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow X$ au point a $f(a+h) = f(a) + Df(a).h + o(h)$
$\partial f/\partial x_i$	la dérivée partielle de f par rapport à la variable x_i

D^α	l'opérateur différentiel $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ et $D^\alpha = D_1^{\alpha_1}.D_2^{\alpha_2}..D_n^{\alpha_n}$ avec $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ... \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ et $\|\alpha\| = \alpha_1 + \alpha_2 + .. + \alpha_n$
∇	l'opérateur gradient défini par : $\forall u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ $\nabla u = (u_{x_1}, u_{x_2})$
Δ	l'opérateur Laplacien défini par : $\forall u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$
$O(x)$	fonction vérifiant $\frac{\|O(x)\|}{\|x\|} \leq k$, avec k une constante
$o(x)$	fonction vérifiant $\frac{\|o(x)\|}{\|x\|} \longrightarrow 0$ quand $x \longrightarrow 0$
χ_A	la fonction caractéristique de l'ensemble A : $\chi_A(x) = \begin{cases} 1. & \text{si } x \in A; \\ 0. & \text{si } x \notin A. \end{cases}$
$f \circ g$	l'application composée de f et g
$supp\ f$	support de la fonction f qui est le plus petit ensemble fermé en dehors duquel $f = 0$
$f \vee g = \sup(f, g)$	
$f \wedge g = \inf(f, g)$	
$f^- = f \vee 0$	
$f^- = f \wedge 0$	
C	désigne les différentes constantes qui interviennent. On précise lorsque c'est nécessaire sa dépendance par rapport aux autres paramètres.

*

* *

* * *

Avant-Propos

La théorie des inéquations variationnelles (I.V) a connu un développement rapide et une grande croissance de ses applications. Il est donc important d'introduire ce domaine, sachant que les problèmes d'obstacle, reliés à mon sujet de thèse représentent une classe importante d'application des inéquations variationnelles.

L'influence des problèmes physiques concernant le développement de l'analyse mathématique est universellement reconnue, et la théorie des inéquations variationnelles, née en Italie dans les années 60, n'est pas une exception. En effet, les travaux des deux pionniers G. Fichera (1963) et G. Stampacchia (1964) étaient motivés par des problèmes concrets, le premier par la mécanique ("a problem in elasticity with a unilateral boundary condition") et le second par la théorie du potentiel (" in connection with capacity, a basic concept from electrostatics ").

L'introduction des I.V. sera donnée avec un problème modèle qui, paraphrasant J.L. Lions, "est simple, beau, et profond" : trouver la position d'équilibre

$$u = u(x),\ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$$

d'une membrane élastique contrainte de rester au-dessus d'un obstacle donné $\Psi = \Psi(x)$. *Le problème est résolu par l'unique solution du problème de minimisation suivant*

$$\min_{v \in K} \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx,$$

où K *est un ensemble convexe, de fonctions (appartenant à un espace bien approprié) supérieures ou égales à* Ψ. *Ce problème se révèle être équivalent à l'inéquation*

variationnelle suivante

$$\begin{cases} u \in K, \\ \int_\Omega \nabla u(x).\nabla(v-u)(x)dx \geq 0 \qquad \forall v \in K \end{cases}$$

qui peut être considérée comme un système "d'inéquation" d'Euler pour le problème de minimisation correspondant. Une autre forme du problème d'obstacle, en supposant u régulière, est le problème complémentaire :

$$u \geq \Psi, \quad -\triangle u \geq 0 \quad et \quad (u-\Psi)\triangle u = 0 \quad dans\ \Omega$$

et l'une des caractéristiques principales est la division de Ω en deux sous-ensembles, l'ensemble de coincidence

$$\Lambda = \{x \in \Omega \ / \ u(x) = \Psi(x)\}$$

et son complémentaire

$$I = \Omega \setminus \Lambda = \{x \in \Omega \ / \ u(x) > \Psi(x)\}.$$

La frontière en commun $\Phi = \partial\Lambda = \partial I$ est appelée la frontière libre, et formellement on a,

$$\triangle u = 0 \quad dans \quad I = \{u > \Psi\}, \quad u = \Psi \quad et \quad \nabla u = \nabla\Psi \quad sur \quad \Phi.$$

Ces conditions aux limites déterminées au-dessus sont typiques dans les problèmes de frontières libres qui apparaissent dans les applications mais il n'existe pas, en général, d'approche mathématique pour eux tous. Une importante, bien que restreinte, classe de problèmes de frontières libres peut être résolue par les I.V., directement ou indirectement après des transformations appropriées du problème, comme l'a montré Baiocchi en 1971 pour le problème de la digue.

Cette approche mène à ce qu'on appelle la formulation variationnelle faible, qui en général a une solution relativement facile à obtenir par les méthodes d'analyse fonctionnelle. Alors la question qui se pose, est de savoir dans quel sens la solution faible résout le problème physique original. Cette étude supplémentaire est très importante dans plusieurs problèmes et exige une analyse profonde de la régularité de la solution et de la frontière libre. Ce dernier point a été clarifié ces dernières années et fait partie des travaux de L. Caffarelli (1976) sur la régularité de la frontière

libre des problèmes d'obstacle, qui en particulier, donne les conditions pour établir que les solutions faibles sont, dans beaucoup de cas, classiques.

C'est un aspect des questions générales auquel l'approche variationnelle doit répondre à propos d'un problème de physique mathématiquement bien posé : Le problème est-il possible? Est-il déterminé? (...) La solution du problème est-elle continue, tout au moins d'un ordre convenable, par rapport aux données?, citant J. Hadamard [27], le premier mathématicien qui a donné explicitement la troisième condition au debut des années 30. En effet, les trois conditions d'existence, d'unicité et de dépendance continue par rapport aux données sont vérifiées pour les problèmes d'obstacle dans un sens approprié.

Pour un obstacle Ψ régulier on arrive à conclure que la première dérivée est continue et la seconde dérivée est bornée mais non continue.

Cependant, si la frontière libre est considérée comme une partie de la solution, la troisième condition (stabilité) n'est pas toujours vraie. En effet, on peut donner facilement des exemples où de petites variations des données produisent de grands changements sur la frontière libre du problème de l'obstacle. Donc, une question importante est de donner les conditions de stabilité pour la frontière libre.

De nos jours, la théorie des I.V. et ses applications atteignent un haut niveau de développement et il existe plusieurs monographies excellentes dans ce domaine ([42], [43], [5], [7], [35], [21], [15]), mais à peu d'exception près, à savoir le livre classique de G. Duvaut et J.L. Lions, peu d'attention a été accordée aux motivations physiques ou à l'interprétation supplémentaire des résultats mathématiques.

Enfin, nous illustrerons quelques descriptions de la nature d'une inéquation variationnelle et de la frontière libre par cinq exemples tirés du livre : "An Introduction To Variationnel Inequalities And Their Applications" de D. Kinderlehrer & G. Stampacchia [35].

Exemple 1— *Soit f une fonction à valeurs réelles, régulière, définie sur un intervalle $I = [a, b]$ fermé. On cherche les points $x_0 \in I$ tels que*

$$f(x_0) = \min_{x \in I} f(x).$$

on a trois cas :

i— si $a < x_0 < b$, alors $f'(x_0) = 0$
ii— si $x_0 = a$, alors $f'(x_0) \geq 0$ et
iii— si $x_0 = b$, alors $f'(x_0) \leq 0$.

on peut résumer ces cas en écrivant

$$f'(x_0)(x - x_0) \geq 0 \qquad \forall x \in I.$$

Une telle inéquation sera dite, inéquation variationnelle.

Exemple 2— *Soit f une fonction à valeurs réelles, régulière, définie sur un convexe fermé K de $\mathbb{R}^n$. On caractérisera, encore une fois, les points $x_0 \in K$ tels que*

$$f(x_0) = \min_{x \in K} f(x).$$

Supposons x_0 un point où le minimum est atteint et soit $x \in K$. Du fait que K est convexe, le segment $(1-t).x_0 + tx_0 = x_0 + t(x - x_0)$, $0 \leq t \leq 1$, est inclu dans K. La fonction

$$\Phi(t) = f(x_0 + t(x - x_0)), \qquad 0 \leq t \leq 1$$

atteint son minimum en $t = 0$: comme dans l'exemple 1,

$$\Phi'(0) = \nabla f(x_0).(x - x_0) \geq 0 \qquad \forall x \in K.$$

Par conséquent le point x_0 satisfait l'inéquation variationnelle suivante

$$x_0 \in K : \quad \nabla f(x_0).(x - x_0) \geq 0 \qquad \forall x \in K.$$

Si K est borné l'existence d'au moins un x_0 est immédiate.

Exemple 3 — *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine borné de frontière $\partial\Omega$ et soit ϕ une fonction définie sur $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ qui satisfait*

$$\max_{\Omega} \phi \geq 0 \qquad et \qquad \phi \leq 0 \quad sur \quad \partial\Omega$$

On définit

$$K = \{v \in C^1(\bar{\Omega}) \quad : \quad v \geq \phi \quad dans \quad \Omega \quad et \quad v = 0 \quad sur \quad \partial\Omega\}.$$

un ensemble convexe de fonctions qu'on supposera non vide. On cherche une fonction $u \in K$ telle que

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx = \min_{v \in K} \int_\Omega |\nabla v|^2 dx.$$

Supposons qu'un tel u existe, nous raisonnons d'une façon analogue à celle de l'exemple précédent en se basant encore une fois sur la convexité de K. Pour tout $v \in K$, la fonction $u + t(v - u) \in K$, $0 \leq t \leq 1$, et la fonction

$$\Phi(t) = \int_\Omega |\nabla(u + t(v - u))|^2 dx, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

atteint son minimum en $t = 0$. Cela implique que $\Phi'(0) \geq 0$, et par suite on a l'inéquation variationnelle suivante

$$u \in K : \quad \int_\Omega \nabla u . \nabla (v - u) dx \geq 0 \qquad \forall\, v \in K.$$

Il intervient ici l'ensemble de coincidence

$$\Lambda = \{x \in \Omega \ : \ u(x) = o(x)\}.$$

sa présence distingue u de la solution d'un problème aux limites.

On peut interpréter u comme la fonction hauteur de la position d'équilibre d'une membrane mince contrainte de rester au-dessus du corps $\{(x, x_{n-1}) \ : \ x_{n-1} \leq \Psi(x), \ x \in \Omega\}$ avec une hauteur, fixée, égale à zéro sur la frontière de Ω.

Exemple 4 — Pour Ω un ouvert borné, comme avant, soient o^1, o^2, λ_1, λ_2, f_1 et f_2 des fonctions régulières dans $\bar{\Omega}$ avec $\phi^1 \leq \phi^2$. On définit l'ensemble convexe suivant

$$K = \{v = (v^1, v^2) \ : \ v^1 \leq v^2 \ \text{ dans } \Omega, \ \ v^i = \phi^i \text{ sur } \partial\Omega, \ \ v^i \in C^1(\bar{\Omega}), \ \ i = 1, 2\}.$$

On cherche la solution $u \in K$ de

$$\sum_i \int_\Omega \{\nabla u^i . \nabla (v^i - u^i) + \lambda_i u^i (v^i - u^i)\} dx$$

$$\geq \sum_i \int_\Omega f_i (v^i - u^i) dx \qquad \forall v \in K.$$

Dans ce cas u est un point de K où la fonctionnelle

$$F(v) = \tfrac{1}{2} \sum_i \int_\Omega \{|\nabla v^i|^2 + \lambda_i (v^i)^2\} dx - \sum_i \int_\Omega f_i v^i dx$$

atteint son minimum.

La solution $u = (u^1, u^2)$ représente la position d'équilibre de deux membranes soumises à des contraintes telles, que l'une ne traverse pas l'autre. Dans ce cas l'ensemble de coincidence est

$$\Lambda = \{x \in \Omega \ : \ u^1(x) = u^2(x)\}$$

Exemple 5 — Avec Ω comme dans l'exemple 3, on cherche l'élément $u \in K$ de surface minimale, à savoir

$$\int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla u|^2} dx = \min_{v \in K} \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla v|^2} dx.$$

L'inéquation variationnelle associée est

$$u \in K : \quad \int_\Omega \frac{\nabla u \nabla (v-u)}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} dx \geq 0 \quad \forall v \in K.$$

Les deux premiers exemples considérés peuvent être résolus au moyen de calculs relativement simples car ils dépendent d'un nombre fini de variables. Les autres exemples sont des problèmes de calcul des variations du fait que l'ensemble des fonctions admissibles est inclu dans un espace de dimension infini.

Comme souvent dans l'étude de problèmes de calcul des variations, un problème formulé dans une classe de fonctions admissibles "naïve" n'admet pas, en général, une solution dans cette classe. Il est bien connu, aujourd'hui, que cette difficulté peut être surmontée en élargissant la classe des fonctions admissibles à un sous-ensemble, convenable, d'un espace de Sobolev. Dans ce contexe, l'existence et l'unicité des exemples 3 et 4 peuvent être démontrées facilement, en utilisant la propriété de la projection d'un opérateur d'un ensemble convexe sur un espace de Hilbert. A première vue, l'exemple 5 apparait plus compliqué du fait qu'il suggère la considération d'un espace de Banach qui n'est pas réflexif. Une autre approche sera d'établir les estimations a priori, convenables.

* * * * * * * * *

*

* *

* * *

INTRODUCTION

Dans ce mémoire nous traiterons quelques problèmes d'obstacle qui sont un peu particuliers: en effet, dans un problème d'obstacle on cherche assez souvent une fonction u qui minimise une certaine intégrale $I(v) = \int_\Omega f(x, v, \nabla v)dx$ *dans une classe de fonctions* $\mathbf{K}$. $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, *où* $\mathbf{K}$ *est déterminé par les conditions aux bords de u et une inégalité* $v(x) \geq \Psi(x)$, *où* Ψ *est donnée. Si par exemple* $I(v)$ *est l'intégrale de Dirichlet qu'on peut regarder comme l'énergie élastique d'une membrane, on cherche, ensuite, à trouver la surface minimale d'énergie limitée par un certain contour et contrainte de rester au-dessus de l'obstacle* $\{(x, z) \in \mathbb{R}^{n+1} : z = \Psi(x),\ x \in \Omega\}$.
Le type de problèmes étudiés ici est différent, en effet, la forme de l'obstacle est donnée, mais sa position dans l'espace est inconnue dans le problème.

Notre travail est partagé en cinq chapitres :

Le chapitre I est divisé en deux sections. Dans la première, j'ai tenu à présenter, en résumé, le travail de J.Bemelmans et M.Chipot [6], concernant un problème variationnel d'une membrane élastique supportant une seule boule rigide que nous noterons, dans toute la suite, $(\mathcal{P})$

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} \text{Trouver :} & u_0, \zeta_0, h_0 \\ \text{tels que :} & \zeta_0 \in \Omega_r, h_0 \in \mathbb{R}, u_0 \in K_{\zeta_0, h_0} \\ \text{et} & E(u_0, \zeta_0, h_0) = \inf_{\mathcal{A}} E(v, \zeta, h) \end{cases}$$

$$\mathcal{A} = \Big\{(v, \zeta, h) \ : \ \zeta \in \Omega_r, \quad h \in \mathbb{R}, \quad v \in K_{\zeta,h}\Big\}.$$

$$\Omega_r = \{\zeta \in \Omega \ : \ dist(\zeta, \Gamma) > r\}$$

$$K_{\zeta,h} = \{\, v \in H_0^1(\Omega) : \quad v(x) \geq \Psi_{\zeta,h}(x) \quad p.p.\ dans\ \ B_r(\zeta)\,\}..$$

$$E(u,\zeta,h) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx - Gh.$$

Le même problème a été étudié par Elliott et Friedman [21], mais la procédure des premiers pour résoudre le problème $(\mathcal{P})$ est différente et plus générale. J'ai trouvé, donc, important à la fois de donner en détails la technique employé par les deux premiers auteurs pour résoudre le problème $(\mathcal{P})$ et de donner un petit résumé de l'étude du même problème par les seconds auteurs.
Dans la deuxième section je considère le même problème mais cette fois-ci en dimension un, c'est-à-dire le cas d'un fil élastique supportant un seul disque rigide libre de se déplacer sur ce dernier.

$$(\mathcal{Q}) \quad \begin{cases} \text{Trouver :} & u_0, \zeta_0, h_0 \\ \text{tels que :} & \zeta_0 \in (-1+r, 1-r), h_0 \in \mathbb{R}, u_0 \in K_{\zeta_0,h_0} \\ \text{et} & E(u_0,\zeta_0,h_0) = \inf_{\mathcal{V}} E(v,\zeta,h) \end{cases}$$

$$\mathcal{V} = \Big\{(v,\zeta,h) \ : \ \zeta \in (-1+r, 1-r), \quad h \in \mathbb{R}, \quad v \in K_{\zeta,h}\Big\}.$$

$$E(u,\zeta,h) = \frac{1}{2}\int_\Omega (u_x)^2 dx - Gh.$$

Ici, je montre seulement, et d'une façon différente que celle donnée dans mon article (cf. [2]) avec M. Chipot et A. Aissani, que 0 est l'unique point critique. Aussi je calculerai la solution du problème $(\mathcal{Q})$ de la même manière que celle utilisée dans [6] dans le cas d'une boule en dimension 2. L'étude complète de ce problème ainsi que le cas de deux disques sera donnée dans le chapitre V.

Dans le chapitre II, je démontre des résultats, utiles dans la suite, à savoir la continuité et la dérivabilité de la fonction d'énergie E, défini dans le chapitre I, par rapport à la variable h. Les résultats analogues à ceux-ci c'est-à-dire la continuité et la dérivabilité par rapport à la variable ζ ont été démontré dans [6].

Dans le chapitre III, nous donnerons divers résultats en liaison avec le problème $(\mathcal{P})$. Nous commencerons par montrer quelques propriétés d'une solution de celui-ci. Nous présenterons un petit résumé de l'étude du problème $(\mathcal{P})$ par Elliott et Friedman [21] : les auteurs s'intéressent à localiser les points ζ_r^* qui sont solution

du problème $(\mathcal{P})$ *considéré seulement sur un certain compact* $\bar{\Omega}_0$ *et pour* r *assez petit.*

Théorème 0 – 1—*Pour toute solution* $\zeta_r^* \in \bar{\Omega}_0$ *de*

$$\min\{\xi_r(\zeta_r^*) \quad / \quad B_r(\zeta) \subset \bar{\Omega}_0\}$$

on a

$$dist(\zeta_r^*, \mathcal{C}) \leq c\ (r \log \tfrac{1}{r})^{\gamma} \longrightarrow 0 \qquad quand \quad r \longrightarrow 0. \qquad (0.1)$$

où, $\mathcal{C} = \{x^* : h(x^*) = \min_{x \in \Omega} h(x)\}$ *et* c, γ *sont deux constantes positives.* $(0 < \gamma \leq 1/2)$.

On signalera l'amélioration de l'inégalité (0.1) par Bandle et Flucher dans un travail assez récent [4]. Dans la démonstration du théorème 0-1, les auteurs ont donné une esquisse pour montrer la continuité de la fonction ξ_r *et par suite assurer l'existence d'au moins un minimizeur. Ici, nous démontrerons de façon différente l'existence de ces points en montrant seulement que la fonction* ξ_r *est semi-continue inférieurement.*

Dans [6], on montre que si (ζ, h) *est une solution du problème* $(\mathcal{P})$ *dans le cas d'un domaine qui admet au moins deux axes de symétries alors nécessairement* ζ *est unique et coincide avec le point d'intersection des deux axes. Ici, Nous montrons que* h *est aussi unique, d'une manière générale nous montrons le théorème suivant :*

Théorème 0 – 2:—*Pour chaque* ζ *fixé, la fonction*

$$h \longmapsto \tfrac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_{\zeta,h}(x)|^2 dx - Gh$$

est strictement convexe sur $[-r, +\infty[$.

Nous démontrons que si ζ *appartient à un axe de symétrie de* Ω *alors l'ensemble de coincidence* $\Lambda(u_{\zeta,h})$ *est symétrique par rapport à cet axe.*

Nous présentons le contre-exemple donné par Bemelmans et Chipot dans [6] qui montre que le problème $(\mathcal{P})$ *n'admet pas en général une solution unique. Nous répondrons à une question qui découle de l'étude de ce contre-exemple: en montrant que 0 centre du domaine, cité dans le contre-exemple, est un extremum d'énergie. Nous donnerons, aussi, d'autres contre-exemples qui prouvent le même résultat que le premier.*

Nous prouvons que la convexité du domaine n'est pas une condition nécessaire pour montrer l'unicité de la solution du problème $(\mathcal{P})$ *considéré sur ce domaine.*

Enfin, nous combinons les deux méthodes données dans [6] et [21] pour mieux localiser une solution du problème $(\mathcal{P})$ relatif à un domaine qui admet un seul axe de symétrie, ainsi que la localisation des centres harmoniques, les points où la fonction de Robin h atteint son minimum, pour les domaines suivants :

- *Ω un domaine qui admet un seul axe de symétrie.*
- *Ω un domaine qui admet deux axes de symétries.*
- *$\Omega = \Omega_R = [(-S, S) \times (-1, 1)] \cup [B_R(-S) \cup B_R(S)]$. $S = R - 1$.*

Le chapitre IV est divisé en deux sections. Dans la première nous généralisons le problème $(\mathcal{P})$ en étudiant le cas d'une membrane élastique supportant deux boules rigides.

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} \text{Trouver : } & u, \zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2 \\ \text{tels que : } & (\zeta_1, \zeta_2) \in \Omega_{r_1} \times \Omega_{r_2}, \quad h_1, h_2 \in \mathbb{R} \\ & (\zeta_1 - \zeta_2)^2 + (h_1 - h_2)^2 \geq (r_1 + r_2)^2, \\ & u \in K_{\zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2} \\ \text{et} & E(u, \zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2) = \inf_{\mathcal{W}} E(v, \zeta, h, \zeta', h') \end{cases}$$

$$\mathcal{W} = \Big\{ (v, \zeta, h, \zeta', h') : h, h' \in \mathbb{R}, \ (\zeta, \zeta') \in \Omega_{r_1} \times \Omega_{r_2} / \\ (\zeta - \zeta')^2 + (h - h')^2 \geq (r_1 + r_2)^2, \ v \in K_{\zeta, h, \zeta', h'} \Big\}.$$

$$K_{\zeta_i, h_1, \zeta_2, h_2} = \Big\{ v \in H_0^1(\Omega) : v(x) \geq \Psi^i_{\zeta_i, h_i}(x) \quad \text{p.p. dans } B_{r_i}(\zeta_i), \quad i = 1, 2 \Big\}.$$

$$E(u, \zeta, h, \zeta', h') = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx - G_1 \, h - G_2 \, h'.$$

Dans un premier temps nous faisons une étude du problème $(\mathcal{S})$ similaire à celle donnée dans [6] pour étudier le problème $(\mathcal{P})$. Nous avons réussi à généraliser tous les résultats données dans [6] et d'en donner d'autres.
Malheureusement! les résultats obtenus dans cette étude ne permettent pas de transformer le problème initial $(\mathcal{S})$ en un problème de minimization sur un compact. Néanmoins, cette dernière nous a permis de donner quelques caractéristiques d'une solution de ce problème. En effet on montre que :

- *$(u, \zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2)$ ne peut pas être une solution du problème $(\mathcal{S})$, lorsque ζ_1 ou ζ_2 satisfont les conditions du théorème IV-3.1 (cf. p:81), ou du théorème IV-3.2 (cf. p:84);*
- *une solution du problème $(\mathcal{S})$ doit correspondre à deux boules qui poussent toutes les deux à la fois;*

• *une solution du problème $(\mathcal{S})$ doit correspondre à deux boules qui touchent la membrane.*

Enfin, nous déduisons un résultat d'unicité, en montrant le théorème suivant :

Theorème 0 – 3:—*Pour chaque ζ_1 et ζ_2 tels que $|\zeta_1 - \zeta_2| \geq r_1 + r_2$, la fonction,*

$$(h_1, h_2) \longmapsto \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_{\zeta_1,h_1,\zeta_2,h_2}(x)|^2 dx$$

est strictement convexe sur $[-r_1, +\infty[\times[-r_2, +\infty[$.

Dans la deuxième section nous étudierons quatre problèmes particuliers.

Cas 1 : *on considère le problème $(\mathcal{S})$ sur un domaine qui admet au moins deux axes de symétries. On montre dans ce cas que la solution du problème doit correspondre à deux boules collées l'une sur l'autre.*

Cas 2 : *on considère le problème $(\mathcal{S})$ sur $B_R(O)$. Dans ce cas une solution du problème $(\mathcal{S})$ vérifie une propriété de plus que dans le cas 1, en effet, on montre que si $(u, \zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2)$ est une solution du problème $(\mathcal{S})$ considéré sur $B_R(O)$, alors, ζ_1 et ζ_2 appartienent tous les deux à un même axe qui passe par O.*

Cas 3 : *on considère de nouveau le problème $(\mathcal{S})$ sur $B_R(O)$, mais cette fois-ci dans le cas particulier : $r_1 = r_2 = r$ et $G_1 = G_2 = G$. On montre que si la solution du problème correspond à deux boules à la même hauteur alors nécessairement ces dernières sont au "centre" de la membrane, c'est-à-dire, si $(u, \zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2)$ est une solution du problème $(\mathcal{S})$ tel que $h_1 = h_2$ alors nécessairement $|\zeta_1 - O| = |\zeta_2 - O| = r$.*

Cas 4 : *On reprend l'étude du problème $(\mathcal{S})$ en généralisant celle donnée dans [21]. On montre le résultat suivant :*

Théorème 0 – 4:—*Pour toute solution $(u, \zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2)$ du problème $(\mathcal{S})$, on a*

$$dist(\zeta_1, \mathcal{C}) \leq C.\sqrt{r(\log\tfrac{1}{r} + 1)} \longrightarrow 0 \quad quand \quad r \to 0$$

$$dist(\zeta_2, \mathcal{C}) \leq C.\sqrt{r(\log\tfrac{1}{r} + 1) + 2r} \longrightarrow 0 \quad quand \quad r \to 0$$

où, $C > 0$.

Enfin, on clôre ce travail par un article fait récemment en collaboration avec mon Professeur Chipot et A. Aissani (thésard avec ce dernier) concernant la deformation d'un fil élastique par un ou deux disques rigides. Dans le cas d'un disque nous montrons l'existence d'une solution unique. Le cas de deux disques est beaucoup plus simple que le cas de deux boules en dimension deux car on peut tout calculer explicitement, néanmoins, c'est une bonne application de la théorie des inéquations

variationnelles et pourra donner des idées pour débloquer le problème dans le cas de deux boules. Au début, nous pensions que les deux disques vont se stabiliser au milieu du fil à une même hauteur. Cependant, nous montrerons que ce n'est pas toujours le cas quand leur poid G est plus grand qu'une certaine valeur qu'on déterminera.

Nous adresserons à la fin quelques questions ouvertes qui en découlent de cette étude.

*

* *

* * *

CHAPITRE I

MEMBRANE ÉLASTIQUE

SUPPORTANT UNE SEULE BOULE RIGIDE

MEMBRANE ÉLASTIQUE

SUPPORTANT UNE SEULE BOULE RIGIDE

A—Le problème en dimension deux

I – 1. Introduction

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ de frontière Γ, assez régulière. Et soit $\mathcal{M}$ une membrane élastique, qui occupe le domaine Ω dans le plan horizontal

$$\Pi = \{(x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}$$

quand elle n'est pas déformée par l'obstacle, qui correspond à une boule rigide et dont la position dans l'espace est inconnue dans notre problème, son bord Γ est supposé être attaché à un support fixe.

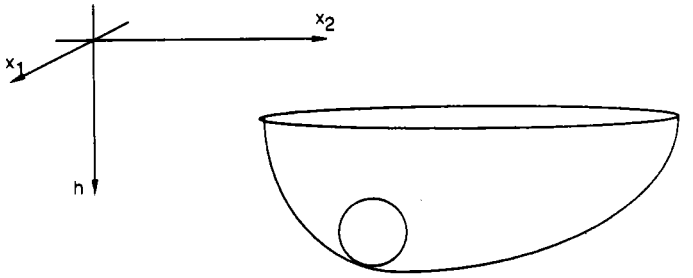

Figure 1

On suppose qu'une petite boule est posée sur cette membrane et qu'elle est libre de se déplacer sous l'effet de son poids et la tension dans la membrane. Elle va rouler jusqu'à ce qu'elle trouve une position d'équilibre. C'est ce qu'on veut analyser ici, autrement dit, on cherche à déterminer les conditions qui assurent l'existence de cette position d'équilibre. Notons que ce problème a été traité d'une façon différente dans les travaux de Elliott & Friedman [21] et de Bandle & Flucher [4] (voir chapitre III). Physiquement, la position d'équilibre est régie par l'équation suivante :

$$\mathcal{F}_{ext} + \mathcal{F}_{\mathcal{M}} = 0$$

où, $\mathcal{F}_{ext}$ et $\mathcal{F}_{\mathcal{M}}$ sont respectivement les forces extérieures exercées sur la boule et la force due à la tension dans la membrane: à l'état d'équilibre ces forces se compensent: pour plus de détails sur l'interprétation physique de ce problème voir [21].

II – 2. Formulation du problème

Notons par G le poids de la boule et par r son rayon. Son centre sera repéré par les coordonnées ζ_1, ζ_2, h, on posera $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$, dans la *figure* 1 la force de gravité pointe dans le sens positif de l'axe des h.

Pour tout déplacement u vertical de la membrane et pour toute position (ζ, h) du centre de la boule, l'énergie du système, à une constante additive près, est donnée par

$$E(u, \zeta, h) = \frac{1}{2}\sigma \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx - Gh \qquad (I-2.0)$$

où

- σ : est la tension dans la membrane, qu'on supposera uniforme. Sans perdre de généralité on posera dans toute la suite $\sigma = 1$.
- $\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla \mathbf{u(x)}|^2 \mathbf{dx}$: représente l'énergie élastique de la membrane qui varie avec le déplacement (u).
- $-\mathbf{G\ h}$: représente l'énergie potentielle de la boule.

Si on note par Σ_r la partie supérieure d'une sphère dont le centre est repéré par (ζ, h), alors, on a

$$\Sigma = \{(x, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = \Psi_{\zeta,h}(x), \quad x \in B_r(\zeta)\}$$

où

$$\Psi_{\zeta,h}(x) = h + \sqrt{r^2 - |x - \zeta|^2}. \qquad (I-2.1)$$

Comme la membrane doit supporter la boule, u doit satisfaire les contraintes suivantes

$$\begin{cases} u(x) = 0 & \text{sur} \quad \Gamma \\ u(x) \geq \Psi_{\zeta,h}(x) & \text{dans} \quad B_r(\zeta). \end{cases}$$

Nous considérons seulement, dans ce problème, les positions du centre pour lesquelles la boule ne touche pas le bord de la membrane, autrement dit, si on note par $dist(.,\Gamma)$ la distance d'un point à Γ, ζ doit satisfaire

$$dist(\zeta, \Gamma) > r.$$

On pose ensuite

$$\Omega_r = \{\zeta \in \Omega \ : \ dist(\zeta, \Gamma) > r\}$$

donc, pour tout $\zeta \in \Omega_r$, on a

$$\bar{B}_r(\zeta) = \{x \in \Omega \ : \ |x - \zeta| \leq r\} \subset \Omega.$$

Notre problème, donc, est de chercher s'il existe (u_0, ζ_0, h_0) tel que

$$u_0 \text{ soit admissible } i.e. \begin{cases} \zeta_0 \in \Omega_r, \\ u_0(x) = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma. \\ u_0(x) \geq \Psi_{\zeta_0, h_0}(x) \quad \text{dans} \quad B_r(\zeta_0) \end{cases}$$

$$E(u_0, \zeta_0, h_0) = inf\Big\{ E(u, \zeta, h) : \zeta \in \Omega_r,\ u(x) = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma. \quad u(x) \geq \Psi_{\zeta,h}(x) \quad \text{dans} \quad B_r(\zeta) \Big\}.$$

Dans le cadre des espaces de Sobolev, on introduit, pour chaque ζ, h fixé, l'ensemble des fonctions admissibles suivant :

$$K_{\zeta,h} = \{\, v \in H_0^1(\Omega) : \quad v(x) \geq \Psi_{\zeta,h}(x) \quad \text{p.p. dans} \quad B_r(\zeta) \,\}.. \qquad (I-2.2)$$

Notons qu'il est clair que $K_{\zeta,h}$ est un convexe fermé.

Soit, enfin, la formulation variationnelle de notre problème

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} \text{Trouver :} & u_0, \zeta_0, h_0 \\ \text{tels que :} & \zeta_0 \in \Omega_r, h_0 \in \mathbb{R}, u_0 \in K_{\zeta_0,h_0} \\ \text{et} & E(u_0, \zeta_0, h_0) = \inf\limits_{\mathcal{A}} E(v, \zeta, h) \end{cases}$$

$$\mathcal{A} = \Big\{ (v, \zeta, h) \ : \ \zeta \in \Omega_r, \quad h \in \mathbb{R}, \quad v \in K_{\zeta,h} \Big\}.$$

Si on note par $u = u_{\zeta,h}$ l'unique solution du problème de l'obstacle $\mathcal{B}_{\zeta,h}$:

$$\min_{v \in K_{\zeta,h}} \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx, \qquad (I-2.3)$$

alors u satisfait l'inéquation variationnelle suivante (voir [35])

$$\begin{cases} u \in K_{\zeta,h}, \\ \int_\Omega \nabla u(x).\nabla(v-u)(x)dx \geq 0 \qquad \forall v \in K_{\zeta,h} \end{cases} \tag{I-2.4}$$

donc, le problème peut être reformulé en cherchant (ζ_0, h_0) réalisant l'infimum de la fonction

$$\mathcal{F}(\zeta,h) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_{\zeta,h}(x)|^2 dx - Gh \tag{I-2.5}$$

parmi les $(\zeta,h) \in \Omega_r \times \mathbb{R}$, car si u_0 existe, alors nécessairement $u_0 = u_{\zeta_0,h_0}$.

Enfin, notons qu'il est clair que $\Omega_r \times \mathbb{R}$ n'est ni un fermé ni un compact. ■

I – 3. Existence

Pour transformer le problème $(\mathcal{P})$ en un problème de minimisation sur un compact on démontre tout d'abord le lemme suivant :

Lemme I – 3.1:—*On a*

$$\lim_{h\to\pm\infty} \mathcal{F}(\zeta,h) = +\infty$$

uniformement en ζ.

Démonstration:

1er cas : h negatif et $|h|$ assez grand, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\zeta,h) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx - Gh \\ &\geq 0 - Gh \\ &\longrightarrow +\infty \qquad \text{quand} \qquad h \longrightarrow -\infty \end{aligned}$$

2ème cas : h positif et $|h|$ assez grand, le résultat découle de l'inégalité de Poincaré et du fait que

$$u_{\zeta,h}(x) \geq \Psi_{\zeta,h}(x) \qquad \text{p.p. dans} \quad B_r(\zeta)$$

en effet,

$$\mathcal{F}(\zeta,h) \geq C\int_\Omega |u_{\zeta,h}(x)|^2 dx - Gh$$

il vient, par suite

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\zeta,h) &\geq C\int_{B_r(\zeta)}|\Psi_{\zeta,h}(x)|^2dx - Gh \\ &\geq C|B_r(\zeta)|h^2 - Gh \qquad (\text{car } h \text{ est positif}) \\ &\longrightarrow +\infty \qquad \text{quand} \qquad h \longrightarrow +\infty\end{aligned}$$

. est la mesure de Lebesgue usuelle. ■

Ensuite, si on pose

$$u = u_{\zeta,h}, \quad \Psi = \Psi_{\zeta,h}.$$

$$\Lambda = \{x \in B_r(\zeta) : u(x) = \Psi(x)\}. \tag{I-3.1}$$

Λ est appelé l'ensemble de coincidence de u avec l'obstacle Ψ. on montre le théorème suivant

Théorème I – 3.1:—*Pour chaque h fixé, la fonction*

$$\zeta \longmapsto \mathcal{D}(\zeta) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2dx \tag{I-3.2}$$

est différentiable dans Ω_r *et pour tout vecteur unitaire* ν *on a*

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \nu}(\zeta) = -\int_\Lambda \frac{\partial \Psi}{\partial \nu}(x)\,\triangle\Psi(x)dx. \tag{I-3.3}$$

Démonstration:— Nous donnons ici une preuve formelle. Pour une preuve rigoureuse voir [5]. En différentiant sous le signe intégral on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \nu}\{\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2dx\} &= \int_\Omega \nabla u.\nabla(\frac{\partial u}{\partial \nu})dx \\ &= \int_\Omega \nabla.(\nabla u.\frac{\partial u}{\partial \nu})dx - \int_\Omega \triangle u.\frac{\partial u}{\partial \nu}dx \\ &= \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}.\frac{\partial u}{\partial \nu}d\sigma(x) - \int_\Omega \triangle u.\frac{\partial u}{\partial \nu}dx \qquad (I-3.4)\end{aligned}$$

où $d\sigma(x)$ est la mesure superficielle sur Γ, n le vecteur unitaire extérieur à Γ. Sur Γ on a pour tout ζ

$$u = u_{\zeta,h} \equiv 0$$

et donc

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{u_{\zeta+\varepsilon\nu,h}(x) - u_{\zeta,h}(x)}{\varepsilon} = 0.$$

Il vient alors, d'après (I-3.4)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \nu}\{\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx\} &= -\int_\Omega \triangle u . \frac{\partial u}{\partial \nu} dx \\ &= -\int_\Lambda \frac{\partial \Psi}{\partial \nu}(x) . \triangle \Psi(x) dx \end{aligned}$$

car $\triangle u = 0$ sur $\Omega \setminus \Lambda$. ■

Dans la suite nous essayerons d'utiliser cette formule pour établir que l'énergie de la boule diminue (ou décroit) quand elle se déplace de la frontière Γ vers l'intérieur de Ω. Cette situation est décrite dans la figure 2 ci-dessous

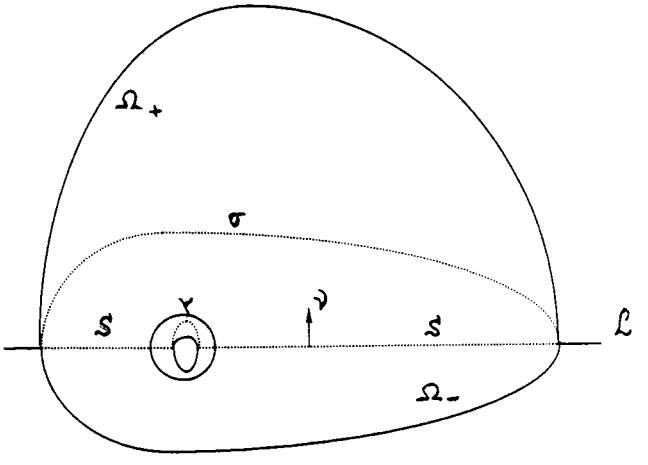

Figure 2

Théorème I – 3.2:—*Soient* $\zeta \in \Omega_r$ *et* ν *un vecteur unitaire, et soit* R *la symétrie axiale par rapport à l'axe* $\mathcal{L}$ *(voir figure 2) qui passe par* ζ *et orthogonal à* ν. *On suppose que* $h > -r$. *On pose*

$$\Omega_- = \{x \in \Omega : \langle x - \zeta, \nu \rangle < 0\}$$
$$\Omega_+ = \{x \in \Omega : \langle x - \zeta, \nu \rangle > 0\}$$

$$\Lambda_- = \Lambda \cap \Omega_-, \quad \Lambda_- = \Lambda \cap \Omega_-.$$

Si

$$R(\Omega_-) \subsetneq \Omega_- \tag{I-3.5}$$

alors

$$\Lambda_+ \subsetneq R(\Lambda_-)$$

de plus

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \nu}(\zeta) < 0.$$

Si $h \leq -r$, *alors* $\mathcal{D}(\zeta) \equiv 0$, *et par suite* $\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \nu}(\zeta) \equiv 0$.

Démonstration:— Dans $R(\Omega_-)$ on définit la fonction

$$Ru(x) = u(Rx)$$

et on considère dans $E = R(\Omega_-) \setminus R(\Lambda_-)$ la fonction $(Ru - u)$, dans la figure 2, E est la partie limitée par les lignes pointillées S, γ et σ.

Comme u est harmonique dans $\Omega_- \setminus \Lambda_-$, et le fait que l'opérateur Laplacien soit invariant par transformation euclidienne dans $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^n$ en général), on a alors

$$-\triangle(Ru - u) = \triangle u \leq 0 \qquad \text{dans } E$$

car $-\triangle u \geq 0$ p.p. dans Ω (voir [6]).

Et comme $h > -r$, alors $\Psi > 0$ sur un ensemble de mesure non nulle, de plus $\triangle u \leq 0$ dans Ω et $u = 0$ sur Γ, il vient, d'après le principe du maximum

$$u > 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

Sur la frontière ∂E de E on a

$$Ru - u = \begin{cases} 0 - u < 0 & \text{sur } \sigma, \\ \Psi - u \leq 0 & \text{sur } \gamma, \\ u - u = 0 & \text{sur } S. \end{cases}$$

d'où,

$$Ru - u \leq 0 \qquad \text{sur } \partial E.$$

On a alors, d'après le principe du maximum

$$Ru - u < 0 \qquad \text{dans } E \tag{I-3.6}$$

en particulier

$$\Lambda_- \subset R(\Lambda_-)$$

cette inclusion est stricte, sinon $\Lambda_- = R(\Lambda_-)$, et par suite $Ru - u = 0$ sur γ, et comme $\gamma = \partial\Lambda_- \cap \Omega_-$ alors on a

$$\frac{\partial}{\partial n}\{Ru - u\} = 0 \qquad \text{sur } \gamma$$

où n est la normale exterieure à γ. Or, ceci contredit le principe du maximum de Hopf (voir [51]).

D'autre part, d'après (I-3.3) on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \nu}(\zeta) &= -\int_{\Lambda} \frac{\partial \Psi}{\partial \nu}(x)\, \triangle\Psi(x)dx \\ &= -\int_{\Lambda_+} \frac{\partial \Psi}{\partial \nu}(x)\, \triangle\Psi(x)dx - \int_{R(\Lambda_-)} \frac{\partial \Psi}{\partial \nu}(x)\, \triangle\Psi(x)dx \\ &\quad - \int_{\Lambda_- \setminus R(\Lambda_+)} \frac{\partial \Psi}{\partial \nu}(x)\, \triangle\Psi(x)dx.\end{aligned}$$

Un calcul simple donne

$$\triangle\Psi(x) = -\frac{1}{\sqrt{r^2 - |x-\zeta|^2}} - \frac{r^2}{(r^2-|x-\zeta|^2)^{3/2}} < 0$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \nu}(x) = \frac{<x-\zeta, \nu>}{\sqrt{r^2 - |x-\zeta|^2}}$$

d'où,

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \nu}(Rx) = -\frac{\partial \Psi}{\partial \nu}(x)$$

de plus, il est facile de voir que, $\triangle\Psi(x)$ et Ψ sont radiales, d'où,

$$-\int_{\Lambda_+} \frac{\partial \Psi}{\partial \nu}(x)\, \triangle\Psi(x)dx = \int_{R(\Lambda_+)} \frac{\partial \Psi}{\partial \nu}(x)\, \triangle\Psi(x)dx$$

et par suite,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \nu}(\zeta) &= -\int_{\Lambda_- \setminus R(\Lambda_+)} \frac{\partial \Psi}{\partial \nu}(x)\, \triangle\Psi(x)dx \\ &< 0.\end{aligned}$$

Si $h \leq -r$, ceci entraine $\Psi \leq 0$ (car $\max \Psi = h + r$), et par suite $u \equiv 0$, et donc $\mathcal{D} \equiv 0$, il vient alors, $\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \nu}(\zeta) \equiv 0$. ■

De ce théorème on déduit un résultat d'existence du problème $(\mathcal{P})$. En effet, on a le théorème suivant

Théorème I – 3.3:—*Soit ε un nombre strictement positif. Supposons que pour tout r' tel que*

$$r < r' < r + \varepsilon$$

et pour tout $\zeta \in \Omega$ tel que $dist(\zeta;\Gamma) = r'$, il existe un vecteur unitaire ν tel que la condition (I-3.5) soit vérifiée. Alors le problème $(\mathcal{P})$ admet un minimizeur.

Démonstration:— En appliquant le théorème I-3.2, on remarque que l'infimum de $\mathcal{F}$ ne peut pas être atteint en un point où (I-3.5) est verifiée. D'où, en combinant ce résultat avec le lemme I-3.1, on voit que $\mathcal{F}$ atteint son infimum dans l'ensemble compact suivant

$$\{\zeta \in \Omega_r : dist(\zeta;\Gamma) \geq r + \varepsilon\} \times [-h^*; h^*]$$

où h^* est un réel positif assez grand. Ce qui complète la preuve du théorème si on montre de plus que $\mathcal{F}$ est continue (voir [6]). ■

Remarque I – 3.1:

• Pour un domaine Ω convexe, de frontière assez régulière et r assez petit la condition du théorème I-3.3 est vérifiée, et donc, le problème $(\mathcal{P})$ pour un tel domaine admet un minimizeur. En effet, soit $\zeta \in \Omega$ proche de la frontière de telle façon que

$$dist(\zeta, \partial\Omega) = |\zeta - \eta|$$

pour un unique $\eta \in \partial\Omega$, on choisit alors,

$$\nu = \frac{\eta - \zeta}{|\eta - \zeta|}$$

ici $\mathcal{L}$ est parallèle à la tangente à $\partial\Omega$ en η, et pour $dist(\zeta, \partial\Omega)$ assez petit nous sommes, donc, dans la situation décrite dans (I-3.5).

Ensuite on fixe $s > 0$ tel que le théorème I-3.2 soit vérifié pour tout $\zeta \in \Omega_t$ avec $r < t \leq s$ — i.e. $\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \nu}(\zeta) \leq 0$ pour chaque ζ — Alors $\mathcal{D}(\zeta)$, $\zeta \in \bar{\Omega}_r$ doit atteindre son infimum en un certain point $\zeta_0 \in \bar{\Omega}_s$ ($\bar{\Omega}_s$ est un compact).

• Il est clair, voir théorème I-3.2, que quand on est sous les hypothèses du théorème I-3.3 et que Ω admet un axe de symétrie, alors l'infimum de $\mathcal{F}$ doit être atteint en un point ζ appartenant à cet axe.

• Quand Ω admet deux axes de symétrie, alors l'infimum de $\mathcal{F}$ doit être atteint au point d'intersection de ces deux axes.

• Dans le cas où Ω est un disque on peut calculer exactement la solution du problème $(\mathcal{P})$, plus précisement si

$$\Omega = B_R(O)$$

alors l'ensemble de coincidence Λ de u_0 est donné par

$$\Lambda = B_{r_0}(O)$$

avec r_0 solution de

$$\frac{r_0^2}{\sqrt{r^2 - r_0^2}} = \frac{G}{2\pi}.$$

Notons que r_0 est indépendant de R, de plus on a

$$u_o(x) = \begin{cases} \Psi(x) = h_0 + \sqrt{r^2 - |x|^2} & \text{si} \quad |x| \leq r_0. \\ \frac{-G}{2\pi} \ln \frac{|x|}{R} & \text{si} \quad |x| \geq r_0. \end{cases}$$

avec h_0 donné par

$$h_0 = -\frac{G}{2\pi} \ln \frac{r_0}{R} - \sqrt{r^2 - r_0^2}$$

pour plus de détails voir [6].

Remarquons que

$$h_0 = h_0(R) \longrightarrow +\infty \qquad \text{quand} \quad , \quad R \longrightarrow +\infty$$

de même

$$h_0 = h_0(r) \longrightarrow +\infty \qquad \text{quand} \qquad r \longrightarrow 0.$$

□

Remarque I – 3.2:

Si on note par (u_{R_1}, O, h_{R_1}) l'unique solution du problème $(\mathcal{P})$ relative à $\Omega = B_{R_1}(O)$ et par (u_{R_2}, O, h_{R_2}) l'unique solution du problème $(\mathcal{P})$ relative à $\Omega = B_{R_2}(O)$, alors si

$$R_1 \leq R_2$$

on a, alors

$$h_{R_1} \leq h_{R_2} \qquad \text{et} \qquad u_{R_1} \leq u_{R_2}$$

□

B—Le problème en dimension un

I – 4. Introduction

Etant donné un fil élastique et un disque libre de se déplacer sur le fil. Il va rouler jusqu'à ce qu'il trouve une position d'équilibre. Cette position d'équilibre ainsi que la forme du fil seront déterminées par la minimisation de l'énergie qui correspond à cette configuration à savoir :

$$E(u,\zeta,h)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(u_x)^2dx-Gh$$

où, on a posé, sans perdre de généralité.

$$\Omega=I=(-1,1).$$

Ici, je montre seulement, et d'une façon différente que celle donnée dans mon article (cf. [2]) avec M. Chipot et A. Aissani, que 0 est l'unique point critique. Aussi je calculerai la solution du problème $(\mathcal{Q})$ de la même manière que celle utilisée dans [6] dans le cas d'une boule en dimension 2. L'étude complète de ce problème ainsi que le cas de deux disques sera donnée dans le chapitre V.

I – 5. Formulation du problème

On garde les même notations qu'en dimension deux, ici

$$\Psi^{\zeta,h}(x)=h+\sqrt{r^2-(x-\zeta)^2}.\qquad x\in(\zeta-r,\zeta+r)$$

$$K_{\zeta,h}=\left\{\,v\in H_0^1(I):\quad v(x)\geq\Psi^{\zeta,h}(x)\quad\text{dans}\quad(\zeta-r,\zeta+r)\,\right\}.$$

Le problème est donc, le suivant :

$$(\mathcal{Q})\quad\begin{cases}\text{Trouver :}\quad u_0,\zeta_0,h_0\\ \text{tels que :}\quad \zeta_0\in(-1+r,1-r),h_0\in\mathbb{R},u_0\in K_{\zeta_0,h_0}\\ \text{et}\qquad E(u_0,\zeta_0,h_0)=\inf\limits_{v}E(v,\zeta,h)\end{cases}$$

$$\mathcal{V} = \Big\{(v, \zeta, h) \ : \ \zeta \in (-1+r, 1-r), \quad h \in \mathbb{R}, \quad v \in K_{\zeta,h}\Big\}.$$

I – 6. Recherche de points critiques:

Nous montrons, sans beaucoup de peine, en reprenant les mêmes démarches qu'en dimension deux, que le problème $(\mathcal{Q})$ est équivalent au problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver :} & \zeta_0, h_0 \\ \text{tels que :} & \zeta_0 \in (-1+r, 1-r), h_0 \in [-h^*, h^*], \\ \text{et} & \mathcal{F}(\zeta_0, h_0) = \inf\limits_{\mathcal{V}'} \mathcal{F}(\zeta, h) \end{cases}$$

où, h^* est un réel assez grand et

$$\mathcal{V}' = \Big\{(\zeta, h) \ : \ \zeta \in (-1+r, 1-r), \quad h \in [-h^*, h^*]\Big\}.$$

$$\mathcal{F}(\zeta, h) = (u_{\zeta,h}, \zeta, h)$$

avec, $u_{\zeta,h}$ est l'unique solution de

$$\min_{v \in K_{\zeta,h}} \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} (v')^2 dx.$$

Si on pose, pour chaque ζ, h fixés,

$$u = u_{\zeta,h} \qquad \Psi = \Psi^{\zeta,h}$$

$$\Lambda(u_{\zeta,h}) = [a, b].$$

on montre le théorème suivant :

Théorème I – 6.1:

i) $u \in \mathcal{C}^{1,1}(\bar{I}) \cap \mathcal{C}^{\infty}(I \setminus [a, b])$.
ii) $u''(x) \geq 0$ *dans* I.
iii) $u''(x) = 0$ *dans* $I \setminus [a, b]$.
iv) $u(x) = \Psi(x)$ *dans* $[a, b]$.
v) $u(a) = u(b) = 0$.

Corollaire I – 6.1:—*La fonction u est donnée par*

$$u(x) = \begin{cases} \Psi'(a).(x+1) & si \quad x \in]-1, a] \\ \Psi(x) & si \quad x \in [a, b] \\ \Psi'(b).(x-1) & si \quad x \in [b, 1[. \end{cases}$$

Démonstration:—Se déduit facilement du théorème I-6.1.

Ici,

$$\Psi'(x) = \frac{\zeta - x}{\sqrt{r^2 - (x-\zeta)^2}}.$$

Dans la suite nous montrons deux théorèmes qui assurent l'existence et l'unicité de la solution du problème $(\mathcal{Q})$.

Théorème I – 6.2:—*Soit $h > -r$ alors on a l'équivalence suivante :*

$\Lambda(u_{\zeta,h})$ *est symétrique par rapport à* ζ *si et seulement si* $\zeta \equiv 0$.

Démonstration:

- Si on pose

$$\Lambda(u_{\zeta,h}) = [a, b]$$

alors on a par définition

$$u(a) = \Psi(a) \qquad \text{et} \qquad u(b) = \Psi(b).$$

Il vient, donc

$$\begin{cases} \Psi'(a).(a+1) = h + \sqrt{r^2 - (a-\zeta)^2} \\ \Psi'(b).(b-1) = h + \sqrt{r^2 - (b-\zeta)^2}. \end{cases}$$

On déduit que

$$\Psi'(a).(a+1) - \sqrt{r^2 - (a-\zeta)^2} = h = \Psi'(b).(b-1) - \sqrt{r^2 - (b-\zeta)^2}. \qquad (I-6.1)$$

Or si on suppose que $\Lambda(u_{\zeta,h})$ est symétrique par rapport à ζ, alors, on a nécessairement

$$\frac{a+b}{2} = \zeta \qquad (I-6.2)$$

c'est-à-dire

$$b - \zeta = \zeta - a.$$

Donc, (I-6.1) devient

$$\Psi'(a).(a+1) = \Psi'(b).(b-1).$$

D'où il vient la succession des résultats suivant :

$$\frac{\zeta - a}{\sqrt{r^2 - (a-\zeta)^2}}(a+1) = \frac{\zeta - b}{\sqrt{r^2 - (b-\zeta)^2}}(b-1)$$

$$(\zeta - a)(a+1) = (\zeta - b)(b-1)$$

$$a + 1 = -(b-1)$$

$$a = -b$$

et donc d'après (I-6.2) on déduit que

$$\zeta \equiv 0$$

• Réciproquement si on suppose $\zeta \equiv 0$, alors on montre facilement que $u_{0,h}$ est symétrique par rapport à 0, et donc, $\Lambda(u_{0,h})$ l'est aussi. ∎

Théorème I – 6.3:—*Si* (u, ζ, h) *est une solution du problème* $(\mathcal{Q})$ *tel que* ζ *est un point intérieur alors, nécessairement on a,* $\Lambda(u_{\zeta,h})$ *est symétrique par rapport à* ζ.

Démonstration:—Si (u, ζ, h) est une solution du problème $(\mathcal{Q})$ on doit avoir en ce point

$$\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(u_x)^2 dx - Gh\right) = 0.$$

Si on pose de nouveau $\Lambda(u_{\zeta,h}) = [a, b]$, on déduit d'un résultat analogue au [6. théorème 3] que

$$-\int_a^b \Psi'(x).\Psi''(x)dx = 0$$

c'est-à-dire

$$-\int_a^b \frac{x-\zeta}{\sqrt{r^2 - (x-\zeta)^2}}.\Psi''(x)dx = 0.$$

En posant le changement de variables suivant : $x - \zeta = \rho$, on obtient

$$\int_{a-\zeta}^{b-\zeta} \frac{\rho}{\sqrt{r^2-\rho^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2-\rho^2}} + \frac{r^2}{\sqrt{r^2-\rho^2}^3}\right)d\rho = 0.$$

Et donc,

$$b - \zeta = a - \zeta$$

■

On déduit, enfin, le résultat suivant :

Théorème I – 6.4:—*Si* (u, ζ, h) *est une solution du problème* $(\mathcal{Q})$ *tel que* ζ *est un point intérieur alors necessairement* $\zeta \equiv 0$. *Il existe une solution et une seule* $(u_{0,h}, 0, h)$ *du problème* $(\mathcal{Q})$.

Démonstration:—Se déduit en combinant le théorème I-6.1 et I-6.2.

Remarque I – 6.1:— Sous les hypothèses du théorème I-6.3, on peut calculer exactement la solution du problème $(\mathcal{Q})$. En effet, la solution est de la forme $(u_{0,h}, 0, h)$. En ce point on doit avoir

$$\frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(u_x)^2 dx - Gh\right) = 0.$$

et donc, en utilisant un résultat analogue au [6, théorème 3], on obtient

$$-\int_a^b \Psi''(x)dx - G = 0$$

et par suite

$$G = \Psi'(a) - \Psi'(b) = \frac{-a}{\sqrt{r^2-a^2}} - \frac{-b}{\sqrt{r^2-b^2}}$$

et comme $a = -b$, on obtient alors

$$G = \frac{-2a}{\sqrt{r^2-a^2}}$$

et donc,

$$a^2 = \frac{G^2 r^2}{4+G^2}$$

et par suite

$$a = \frac{-Gr}{\sqrt{4+G^2}}.$$

Remarquons que a respectivement b ne dépendent pas de la longueur du domaine $]-1,1[$. Ensuite, comme

$$u(a) = \Psi(a)$$

on déduit que

$$h = \Psi'(a).(a+1) - \sqrt{r^2 - a^2} = \frac{G}{2} - r\sqrt{1+\frac{G^2}{4}}.$$

*

* *

* * *

Chapitre II

Un résultat de continuité et de dérivabilité

UN RÉSULTAT DE CONTINUITÉ ET DE DÉRIVABILITÉ

II – 1. Introduction

Nous developperons, dans ce chapitre, quelques résultats analogues à ceux présentés dans le papier de J. Bemelmans & M. Chipot [6], qui nous serons utiles dans le chapitre III. Dans toute la suite, on pose pour un ζ fixé dans Ω_r

$$\Psi_h = \Psi_{\zeta,h} = h + \sqrt{r^2 - |x-\zeta|^2}$$

$$K_{\zeta,h} = \{ v \in H_0^1(\Omega) : \quad v(x) \geq \Psi_{\zeta,h}(x) \quad \text{p.p. dans} \quad B_r(\zeta) \}$$

$$u_h = u_{\zeta,h}$$

où $u_{\zeta,h}$ est l'unique solution du problème de l'obstacle suivant :

$$\min_{v \in K_{\zeta,h}} \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx.$$

On pose ensuite,

$$\mathcal{D}(h) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u_h(x)|^2 dx. \qquad (II-1.1)$$

Rappelons que

$$\triangle \Psi_h(x) = \triangle \Psi_{\zeta,h}(x) = -\frac{1}{\sqrt{r^2 - |x-\zeta|^2}} - \frac{r^2}{(r^2 - |x-\zeta|^2)^{3/2}} < 0$$

II – 2. Résultats préliminaires

Lemme II – 2.1 :—*Pour tout* $x \in B_r(\zeta)$, *on a*

$$|\Psi_h(x) - \Psi_{h'}(x)| = |h - h'|. \qquad (II-2.1)$$

Démonstration —Soit $x \in B_r(\zeta)$, on a

$$\begin{aligned}\Psi_h(x) - \Psi_{h'}(x) &= h + \sqrt{r^2 - |x-\zeta|^2} - h' + \sqrt{r^2 - |x-\zeta|^2} \\ &= h - h'\end{aligned}$$

■

Lemme II – 2.2 :—*Soient* $E \subset \Omega$ *un ensemble mesurable,* $o_1, o_2 \in L^\infty(E)$, *et* u_i, $i = 1, 2$ *la solution de l'inéquation variationnelle suivante :*

$$\int_\Omega \nabla u_i(x).\nabla(v-u)(x)dx \geq 0 \qquad \forall v \in K_i$$

où

$$K_i = \{\, v \in H_0^1(\Omega) : \quad v(x) \geq \phi_i(x) \quad p.p. \ dans \ \ E \,\}.$$

On a, alors

$$|u_1 - u_2|_{L^\infty(\Omega)} \leq |\phi_1 - \phi_2|_{L^\infty(E)}$$

Démonstration —Voir [6, lemme 5]

Lemme II – 2.3 :—*Soient* $h, h' \in \mathbb{R}$ *et* $u_h, u_{h'}$ *les solutions respectives de* $\mathcal{B}_{\zeta,h}$ *et* $\mathcal{B}_{\zeta,h'}$, *on a, alors*

$$|u_h - u_{h'}|_{L^\infty(\Omega)} \leq |h - h'| \qquad (II-2.2)$$

Démonstration —En appliquant le lemme II-2.2 pour

$$E = B_r(\zeta)$$

$$u_1 = u_h, \qquad u_2 = u_{h'}$$

$$\phi_1 = \Psi_h, \qquad \phi_2 = \Psi_{h'}$$

on obtient

$$|u_h - u_{h'}|_{L^\infty(\Omega)} \leq |\Psi_h - \Psi_{h'}|_{L^\infty(E)}$$
$$= |h - h'|$$ ■

Lemme II – 2.4 :—*Pour $|h' - h|$ assez petit, il existe $\varepsilon = \varepsilon(\zeta, h, \Omega) > 0$ tel que*

$$\Lambda(u_{h'}), \Lambda(u_h) \subset B_{r-\varepsilon}(\zeta). \qquad (II-2.3)$$

Démonstration—D'après [6, lemme 2], on sait qu'il existe $\varepsilon = \varepsilon(\zeta, h, \Omega) > 0$ tel que

$$\Lambda(u_h) \subset B_{r-\varepsilon}(\zeta).$$

Soit $x \in \Omega \setminus B_{r-\varepsilon}(\zeta)$, donc, $x \notin \Lambda(u_h)$, et par suite

$$u_h > \Psi_h.$$

Comme $u_{h'} - \Psi_{h'}$ converge vers $u_h - \Psi_h$ (d'après (II-2.1) et (II-2.2)), on déduit que, pour $|h' - h|$ assez petit

$$u_{h'} > \Psi_{h'}$$

autrement dit

$$x \notin \Lambda(u_{h'}).$$

D'où, le résultat

$$\Lambda(u_{h'}) \subset B_{r-\varepsilon}(\zeta).$$

II – 3. Continuité par rapport à la variable h

Lemme II – 3.1 :—*On a*

$$\lim_{h' \longrightarrow h} \mathcal{D}(h') = \mathcal{D}(h) \qquad (II-3.1)$$

Démonstration—On a

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(h') - \mathcal{D}(h) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_{h'}(x)|^2 - |\nabla u_h(x)|^2 dx \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega \nabla(u_{h'} - u_h).\nabla(u_{h'} + u_h)dx \\ &= -\frac{1}{2}\int_\Omega (u_{h'} - u_h).\triangle(u_{h'} + u_h)dx.\end{aligned}$$

Et donc,

$$\begin{aligned}|\mathcal{D}(h') - \mathcal{D}(h)| &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |(u_{h'} - u_h)|.|\triangle(u_{h'} + u_h)|dx \\ &\leq \frac{1}{2}.|(u_{h'} - u_h)|_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega |\triangle u_{h'}| + |\triangle u_h|dx \\ &\leq \frac{1}{2}.|h' - h|\Big(\int_{\Lambda(u_{h'})} |\triangle \Psi_{h'}|dx + \int_{\Lambda(u_h)} |\triangle \Psi_h|dx\Big) \\ &\leq |h' - h|\int_{B_{r-\varepsilon}(\zeta)} |\triangle \Psi_h|dx \qquad (cf\, II - 2.3) \\ &\leq \mathrm{C}.|h - h'|.\end{aligned}$$

II – 4. Dérivabilité par rapport à la variable h

Avant de démontrer le résultat de différentiabilité de $\mathcal{D}$ par rapport à la variable h, nous montrerons tout d'abord un résultat de convergence. Posons

$$\Lambda = \Lambda(u_h), \qquad \Lambda' = \Lambda(u_{h'})$$

$$\chi(h) = \chi_\Lambda, \qquad \chi(h') = \chi_{\Lambda'},$$

où χ_A : désigne la fonction caractéristique de l'ensemble A. On a. le lemme suivant

Lemme II – 4.1 :—*Dans* $L^2(\Omega)$ *faible on a*

$$\chi(h') \rightharpoonup \chi(h), \qquad \textit{quand} \quad h' \longrightarrow h.$$

Démonstration—Pour toute suite (h_n) qui converge vers h on peut extraire une sous suite qu'on notera encore (h_n) telle que la suite $\chi(h) - \chi(h_n)$ converge faiblement vers

une certaine fonction f, ceci est vrai car la suite $\chi(h) - \chi(h_n)$ est bornée dans $L^2(\Omega)$ qui est un espace réflexif. Il reste à montrer que $f = 0$ p.p. dans Ω.

- Pour $x \in \Omega \setminus \Lambda$ on a

$$u_h(x) > \Psi_h(x)$$

et par suite, d'après le lemme II-2.1 et le lemme II-2.3, on a,

$$u_{h_n}(x) > \Psi_{h_n}(x)$$

pour n assez grand, et donc,

$$\chi(h)(x) - \chi(h_n)(x) = 0$$

ceci implique que $f = 0$ p.p. dans $\Omega \setminus \Lambda$.

- On montre, ensuite, que $f \geq 0$ p.p. dans Λ. En effet, on a

$$\chi(h) - \chi(h_n) = 1 - \chi(h_n) \geq 0 \qquad \text{sur } \Lambda.$$

et comme l'ensemble suivant :

$$\{w \in L^2(\Lambda) \quad : \quad w(x) \geq 0 \quad \text{p.p. dans } \Lambda\}$$

est un ensemble convexe, fermé de $L^2(\Lambda)$ muni de la topologie forte, c'est, donc, un ensemble fermé de $L^2(\Lambda)$ muni de la topologie faible (voir [10]), on déduit, donc, le résultat voulu.

D'une part, d'après la convergence de $\chi(h) - \chi(h_n)$ et le lemme II-2.1, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \int_\Omega [\chi(h) - \chi(h_n)].\Psi_{h_n}(x).\triangle\Psi_\zeta(x)dx \\ &\rightarrow \int_\Omega f(x).\Psi_h(x).\triangle\Psi_\zeta(x)dx \\ &= \int_\Lambda f(x).\Psi_h(x).\triangle\Psi_\zeta(x)dx. \end{aligned} \tag{II - 4.1}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \int_\Omega \chi(h).\Psi_{h_n}(x).\triangle\Psi_\zeta(x)dx - \int_{\Lambda(u_{h_n})} \Psi_{h_n}(x).\triangle\Psi_\zeta(x)dx \\ &= \int_\Omega \chi(h).\Psi_{h_n}(x).\triangle\Psi_\zeta(x)dx + 2\mathcal{D}(h_n) \\ &\rightarrow \int_\Lambda \Psi_h(x).\triangle\Psi_\zeta(x)dx + 2\mathcal{D}(h) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{II - 4.2}$$

D'où en combinant (II-4.1) et (II-4.2), on obtient

$$\int_{\Lambda} f(x).\Psi_h(x).\triangle\Psi_\zeta(x)dx = 0.$$

et comme $\Psi\triangle\Psi$ est strictement négative sur Λ, il vient $f = 0$ p.p. dans Λ. D'où le résultat final : $f = 0$ p.p. dans Ω. ■

Lemme II – 4.2 :—*La fonction $\mathcal{D}$ est dérivable en tout point h, et la dérivée est donnée par*

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial h} = -\int_{\Lambda} \frac{\partial \Psi}{\partial h}(x)\triangle\Psi(x)dx = -\int_{\Lambda} \triangle\Psi(x)dx. \qquad (II-4.3)$$

Démonstration—Pour ε petit, on pose $h' = h + \varepsilon$, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(h') - \mathcal{D}(h) &= \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\nabla u_{h'}(x)|^2 - |\nabla u_h(x)|^2 dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{\Omega} \nabla(u_{h'} - u_h).\nabla(u_{h'} + u_h)dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_{\Omega} (u_{h'} - u_h).\triangle(2u_h + (u_{h'} - u_h))dx \\
&= -\int_{\Omega} (u_{h'} - u_h).\triangle u_h dx - \frac{1}{2}\int_{\Omega} (u_{h'} - u_h).\triangle(u_{h'} - u_h)dx \\
&= \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2.
\end{aligned}$$

Du fait que $\triangle u_h = \triangle u_{h'} = 0$ en dehors de $\Lambda \cup \Lambda'$, et que $\triangle u_h = \triangle u_{h'}$ sur $\Lambda \cap \Lambda'$ on a, alors

$$\begin{aligned}
|\mathcal{T}_2| &= \frac{1}{2}|\int_{\Lambda\cup\Lambda'} (\dot{u}_{h'} - u_h).\triangle(u_{h'} - u_h)dx| \\
&= \frac{1}{2}|\int_{\Lambda\cup\Lambda'\setminus\Lambda\cap\Lambda'} (u_{h'} - u_h).\triangle(u_{h'} - u_h)dx| \\
&\leq C.|h - h'|\int_{\Lambda\cup\Lambda'\setminus\Lambda\cap\Lambda'} dx,
\end{aligned}$$

où, $C = C(\zeta, h, \Omega)$ (voir lemme II-2.4). D'après le lemme II-4.1, on a

$$\int_{\Lambda\cup\Lambda'\setminus\Lambda\cap\Lambda'} dx = \int_{\Omega} \chi(h).(1 - \chi(h'))dx + \int_{\Omega} \chi(h').(1 - \chi(h))dx \longrightarrow 0$$

d'où,

$$\mathcal{T}_2 = o(\varepsilon).$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_1 &= -\int_\Omega (u_{h'} - u_h).\triangle u_h dx \\
&= -\int_\Lambda (\Psi_{h'} - \Psi_h).\triangle \Psi_h dx + \int_\Lambda \big[(\Psi_{h'} - \Psi_h) - (u_{h'} - u_h)\big].\triangle \Psi_h dx \\
&= -\int_\Lambda (\Psi_{h'} - \Psi_h).\triangle \Psi_h dx + \int_{\Lambda\setminus\Lambda'} \big[(\Psi_{h'} - \Psi_h) - (u_{h'} - u_h)\big].\triangle \Psi_h dx \\
&= \mathcal{T}_3 + \mathcal{T}_4.
\end{aligned}$$

Pour la seconde intégrale, on a

$$|\mathcal{T}_4| \leq C.|h - h'|.|\Lambda \setminus \Lambda'|,$$

où, $C = C(\zeta, h, \Omega)$ (voir lemme II-2.4). Et comme,

$$|\Lambda \setminus \Lambda'| = \int_\Omega \chi(h).(1 - \chi(h'))dx \longrightarrow 0$$

quand $h' \longrightarrow h$, on déduit que

$$\mathcal{T}_4 = o(\varepsilon).$$

En résumé, on a

$$\mathcal{D}(h') - \mathcal{D}(h) = -\int_\Lambda (\Psi_{h'} - \Psi_h).\triangle \Psi_h dx + o(\varepsilon). \qquad (II - 4.4)$$

En divisant par ε les deux membres de l'égalité (II-4.4) et en faisant tendre ε vers 0, on obtient alors, d'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, la formule (II-4.3).

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial h} = -\int_\Lambda \frac{\partial \Psi}{\partial h}(x)\triangle \Psi(x)dx = -\int_\Lambda \triangle \Psi(x)dx.$$

■

*

* *

* * *

Chapitre III

Divers résultats

Divers résultats

III – 1. Introduction

Nous présentons, dans ce chapitre, divers résultats en liaison avec le problème $(\mathcal{P})$. Nous commencerons par montrer quelques propriétés d'une solution de celui-ci. Nous donnerons un petit résumé de l'étude du problème $(\mathcal{P})$ par Elliott et Friedman [21] : les auteurs s'intéressent à localiser les points ζ_r^* qui sont solution du problème $(\mathcal{P})$ (voir chapitre I. p:10) considéré seulement sur un certain compact $\bar{\Omega}_0$ et pour r assez petit. Ce résultat a été amélioré dernièrement par Bandle et Flucher [4]. Pour démontrer ce résultat Elliott et Friedman ont donné une esquisse pour montrer la continuité de la fonction ξ_r et par suite assurer l'existence d'au moins un minimizeur. Ici, nous démontrerons de façon différente l'existence de ces points en montrant seulement que la fonction ξ_r est semi-continue inférieurement.

Dans [6], les auteurs montrent que si (ζ, h) est une solution du problème $(\mathcal{P})$ dans le cas d'un domaine qui admet au moins deux axes de symétries alors nécessairement ζ est unique et coincide avec le point d'intersection des deux axes. Ici, Nous montrons que h est aussi unique.
Nous démontrons que si ζ appartient à un axe de symétrie de Ω alors l'ensemble de coincidence $\Lambda(u_{\zeta,h})$ est symétrique par rapport à cet axe.

Nous présentons le contre-exemple donné par Bemelmans et Chipot dans [6] qui montre que le problème $(\mathcal{P})$ n'admet pas en général une solution unique. Nous répondrons à une question qui découle de l'étude de ce contre-exemple: en montrant que 0 centre du domaine, cité dans le contre-exemple, est un extremum d'énergie. Nous donnerons, aussi, d'autres contre-exemples qui prouvent le même résultat que le premier.

Nous prouvons que la convexité du domaine n'est pas une condition nécessaire pour montrer l'unicité de la solution du problème $(\mathcal{P})$ considéré sur ce domaine.

Enfin, nous combinons les deux méthodes données dans [6] et [21] pour mieux localiser une

solution du problème $(\mathcal{P})$ relatif à un domaine qui admet un seul axe de symétrie, ainsi que la localisation des centres harmoniques, les points où la fonction de Robin h atteint son minimum, pour quelques domaines particuliers.

III – 2. Quelques résultats

a—Nature d'une solution du problème (P)

Dans ce qui suit nous montrons un résultat, simple, de régularité d'une solution du problème $(\mathcal{P})$. Nous montrons aussi que la solution du même problème correspond toujours, à une boule qui pousse ($\Psi > 0$), et que pour tout (ζ, h) centre de la boule d'équation $z = \Psi_{\zeta,h}$), ζ appartient à l'ensemble de coincidence de $u_{\zeta,h}$, solution de $(\mathcal{B}_{\zeta,h})$ (voir I-2.3), avec l'obstacle $\Psi_{\zeta,h}$.

Théorème III – 2.1:

i) *Sous les hypothèses du théorème I-3.2, si ζ est un point où la condition (I-3.5) est vérifiée alors pour tout h, le point (ζ, h) ne peut pas être un point où l'infimum de $\mathcal{F}$ est atteint.*

ii) *Si (u_0, ζ_0, h_0) est une solution du problème $(\mathcal{P})$ alors on a*

$$u_0 \not\equiv 0, \quad u_0 \geq 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad h_0 > -r.$$

iii) *Pour tout $(\zeta, h) \in \Omega_r \times \mathbb{R}$, $h \geq -r$, on a*

$$\zeta \in \Lambda(u_{\zeta,h})$$

$$\max_{x \in \bar{\Omega}} u_{\zeta,h}(x) = \max_{x \in \bar{B}_r(\zeta)} \Psi_{\zeta,h}(x) = u_{\zeta,h}(\zeta) = \Psi_{\zeta,h}(\zeta) = h + r$$

iv) *Pour la régularité de la fonction $u_{\zeta,h}$ on montre en fait que*

$$u_{\zeta,h} \in \mathcal{C}^\infty(\Omega \setminus \Lambda).$$

Démonstration:

i) Si $\mathcal{F}$ atteint son infimum en (ζ, h) on doit avoir

$$\frac{\partial}{\partial h}\{\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx - Gh\} = 0$$

en ce point, et par suite

$$G = \frac{\partial}{\partial h}\{\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx\}.$$

En faisant appel au lemme II-4.2, on aura

$$\begin{aligned} G &= -\int_\Lambda \frac{\partial \Psi}{\partial h}(x)\triangle\Psi(x)dx \\ &= -\int_\Lambda \triangle\Psi(x)dx \\ &= -\int_\Lambda \triangle u(x)dx \\ &= -\int_\Omega \triangle u(x)dx \\ &= -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}d\sigma \\ &> 0 \end{aligned}$$

d'où, $u \not\equiv 0$, et donc nécessairement on a

$$h > -r$$

et par conséquent

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \nu}(\zeta) < 0$$

c'est-à-dire, pour ε assez petit, on a

$$\mathcal{D}(\zeta + \varepsilon\nu) < \mathcal{D}(\zeta)$$

ce qui contredit l'hypothèse.

ii) Se déduit facilement de i) et du principe du maximum.

iii) Posons, $u = u_{\zeta,h}$ et $\Psi = \Psi_{\zeta,h}$, d'après [6, théorème 2], on a

$$u \in \mathcal{C}^{1,1}(\bar{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega \setminus \Lambda)$$

et donc le maximum de u sur $\bar{\Omega}$ existe.

Posons ensuite $M = h + r$, et soit

$$v = u - (u - M)^+ = M \wedge u.$$

Il est clair que $v \in K_{\zeta,h}$ et par suite v vérifie l'inéquation suivante

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \nabla u(x).\nabla(v-u)(x)dx \geq 0 \\ \Rightarrow \quad & \int_\Omega \nabla u(x).\nabla(u-M)^+(x)dx \leq 0 \\ \Rightarrow \quad & \int_\Omega \nabla(u-M)^+(x).\nabla(u-M)^+(x)dx \leq 0 \\ \Rightarrow \quad & (u-M)^+ = 0 \qquad \text{p.p. dans } \Omega \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad u \leq M \qquad \text{p.p.} \quad \text{dans} \quad \Omega \qquad (III-2.1)$$

et donc

$$\max_{x \in \bar{\Omega}} u(x) \leq M$$

car sinon, il va exister un $x_0 \in \bar{\Omega}$ tel que $u(x_0) > M$, et comme u est continue, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que

$$u(x) > M \qquad \forall \ x \in B_\varepsilon(x_0)$$

ce qui contredit (II-2.1). Il reste à montrer que

$$h + r = \Psi(\zeta) \leq u(\zeta)$$

supposons que

$$\Psi(\zeta) > u(\zeta).$$

Comme u est continue dans $\bar{\Omega}$ et Ψ est analytique dans $B_{r-\varepsilon}(\zeta)$ pour tout $\varepsilon > 0$, alors, il existe un $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in B_\delta(\zeta), \qquad (u - \Psi)(x) < 0$$

or cela contredit le fait que

$$u \geq \Psi \qquad \text{p.p.} \quad \text{dans} \quad B_r(\zeta).$$

iv) Comme $\triangle u = 0$ dans $\Omega \setminus \Lambda$ et u est continue, donc, localement intégrable, on déduit facilement du théorème de Weyl (voir [23]) que $u_{\zeta,h} \in \mathcal{C}^\infty(\Omega \setminus \Lambda)$. ■

Remarque III – 2.1—La formule

$$G = -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma$$

peut-être démontré d'une autre façon (cf. [21]). □

b—Résumé de l'étude du problème $(\mathcal{P})$ par Elliott & Friedman.

Pour chaque ζ fixé on considère le problème auxiliaire suivant

$$(\mathcal{P}_\zeta) \quad \begin{cases} \text{Trouver :} & (u,h) \in K_\zeta \\ \text{tel que :} & \xi_r(\zeta) = \inf\left\{\xi_r(v,l) : (v,l) \in K_\zeta\right\} = \xi_r(u,h) \end{cases}$$

où

$$K_\zeta = \left\{(v,l) : l \in \mathbb{R},\ v \in H_0^1(\Omega),\ v \geq \Psi_{\zeta,l} \text{ p.p. dans } B_r(\zeta)\right\}$$

$$\xi_r(v,l) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx - Gl. \qquad (III-2)$$

Ce problème admet une solution unique qu'on notera (u_ζ, h_ζ) (cf. [21, thm 2.1]), on montre de plus que

$$h_\zeta > -r, \quad u_\zeta \geq 0, \quad u_\zeta \not\equiv 0.$$

On considère, ensuite, le problème suivant :

$$(\mathcal{Z}) \quad \begin{cases} \text{Trouver :} & \zeta_r^* \in \Omega_r \\ \text{tel que :} & \xi_r(\zeta_r^*) = \inf\limits_{\zeta\in\Omega_r} \xi_r(\zeta) \end{cases}$$

Il est clair de voir que si ζ_r^* est solution du problème $(\mathcal{Z})$ alors (u^*, ζ_r^*, h^*) est une solution du problème $(\mathcal{P})$ avec (u^*, h^*) la solution du problème $(\mathcal{P}_{\zeta_r^*})$ i.e.

$$(u^*, h^*) = (u_{\zeta_r^*}, h_{\zeta_r^*})$$

et on a,

$$\xi_r(\zeta_r^*) = \xi_r(u^*, h^*) = E(u_{\zeta_r^*, h^*}, \zeta_r^*, h^*).$$

où, ξ est la fonction d'énergie définie dans (I-2.0).

Les auteurs s'intéressent, ensuite, à localiser les points ζ_r^* qui sont solutions du problème $(\mathcal{P})$ réduit à un problème de minimisation sur un certain compact $\bar{\Omega}_0$ et pour r assez petit. Pour annoncer ce résultat nous avons besoin de considérer l'ensemble suivant

$$\mathcal{C} = \{x^* \ : \ h(x^*) = \min_{x\in\Omega} h(x)\},$$

où h est la partie régulière de la fonction de Green, on donnera dans la suite quelques propriétés de cette fonction.

Soit Ω_0 tel que

$$\mathcal{C} \subset \Omega_0 \text{ et } \bar{\Omega}_0 \subset \Omega.$$

On a pour tout r tel que

$$r < dist(\mathcal{C}, \partial\Omega_0),$$

le théorème suivant :

Théorème III – 2.1—*Pour toute solution* $\zeta_r^* \in \bar{\Omega}_0$ *de*

$$\min\{\xi_r(\zeta_r^*) \ / \ B_r(\zeta) \subset \bar{\Omega}_0\}$$

on a

$$dist(\zeta_r^*, \mathcal{C}) \leq c\ (r \log \tfrac{1}{r})^{\gamma} \longrightarrow 0 \qquad quand\ \ r \longrightarrow 0. \qquad (III-2.3)$$

où c *et* γ *sont deux constantes positives.* $(0 < \gamma \leq 1/2)$.

Démonstration:—voir [21].

Dans la démonstration de ce théorème les auteurs ont donné une esquisse pour montrer l'existence de ces ζ_r^*. Nous démontrerons de manière différente l'existence de ces derniers. Mais, avant de répondre à cette question, nous montrons tout d'abord le lemme suivant :

Lemme III – 2.1:—*Si on note par* (u_ζ, h_ζ) *l'unique solution du problème* $\mathcal{P}_\zeta$ *alors on a*

$$u_\zeta = u_{\zeta,h_\zeta}$$

où u_{ζ,h_ζ} *est l'unique solution de* $(\mathcal{B}_{\zeta,h_\zeta})$ *(voir I- 2.3).*

Démonstration:—Par définition on a,

$$\xi_r(\zeta) = \xi_r(u_\zeta, h_\zeta) \ \leq \ \xi_r(v,l) \qquad \forall\ (v,l) \in K_\zeta$$

i.e.

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_\zeta(x)|^2 dx - Gh_\zeta \ \leq \ \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx - Gl \qquad \forall\ (v,l) \in K_\zeta$$

donc en particulier pour un $v \in K_{\zeta,h_\zeta}$, on a $(v, h_\zeta) \in K_\zeta$, et donc,

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_\zeta(x)|^2 dx - Gh_\zeta \ \leq \ \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx - Gh_\zeta$$

d'où

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_\zeta(x)|^2 dx \ \leq \ \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx \qquad \forall\ v \in K_{\zeta,h_\zeta}$$

or

$$u_\zeta \in K_{\zeta,h_\zeta}$$

d'où, par unicité de la solution du problème $(\mathcal{B}_{\zeta,h_\zeta})$, on a, alors

$$u_\zeta = u_{\zeta,h_\zeta}.$$

■

Comme on minimise sur un compact, pour assurer l'existence des points ζ_r^* il suffit de montrer que la fonction ξ_r est s.c.i. Soit, donc, le lemme suivant :

Lemme III – 2.2:—*Pour tout r, la fonction suivante*

$$\zeta \longmapsto \xi_r(\zeta)$$

est s.c.i. sur Ω_r.

Démonstration:—On considère les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} \varphi_1 : \ \Omega_r &\longrightarrow H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R} \ \text{(faible)} \\ \zeta &\longmapsto (u_\zeta, h_\zeta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_2 : \ H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R} \ \text{(faible)} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v, \mu) &\longmapsto \xi_r(v, \mu) \end{aligned}$$

où, (u_ζ, h_ζ) est l'unique solution de (P_ζ) et

$$\xi_r(v, \mu) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx - G\mu$$

on a donc

$$\xi_r(\zeta) = \varphi_2 \, o \, \varphi_1(\zeta).$$

On montre, alors, que

- φ_2 est s.c.i. sur $H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R}$ muni de la topologie faible.

En effet, φ_2 est une fonction continue dans $H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R}$ (fort) et donc s.c.i. fortement, mais comme de plus φ_2 est une fonction convexe on déduit que φ_2 est s.c.i. faiblement (voir [10]).

- φ_1 est continue de Ω_r dans $H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R}$ (faible).

En effet, soit $\zeta \in \Omega_r$ et soit $\left((\zeta_m)\right)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de Ω_r tels que $\zeta_m \longrightarrow \zeta$, on cherche, donc, à montrer que

$$(u_{\zeta_m}, h_{\zeta_m}) \rightharpoonup (u_\zeta, h_\zeta).$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a

$$-Gh_{\zeta_m} \leq \xi_r(u_{\zeta_m}, h_{\zeta_m}) \leq \xi_r(0, -r) = Gr$$

car $(0, -r) \in K_{\zeta_m} \quad \forall\, m$.

On montre, ensuite, que la suite $\left((h_{\zeta_m})\right)_{m \in \mathbb{N}}$ est bornée et donc la suite $\left(\xi_r(u_{\zeta_m}, h_{\zeta_m})\right)_{m \in \mathbb{N}}$ l'est aussi: en effet, pour h_{ζ_m} très grand, on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u_{\zeta_m}(x)|^2 dx \geq C \int_\Omega |u_{\zeta_m}(x)|^2 dx &\geq C \int_{B_r(\zeta_m)} |\Psi_{\zeta_m, h_{\zeta_m}}(x)|^2 dx \\ &\geq C \int_{B_r(\zeta_m)} |h_{\zeta_m}|^2 dx \\ &\geq C h_{\zeta_m}^2 \qquad (III-2.4)\end{aligned}$$

et par suite

$$\xi_r(u_{\zeta_m}, h_{\zeta_m}) \geq \frac{C}{2} h_{\zeta_m}^2 - G h_{\zeta_m} \qquad (III-2.5)$$

donc si $h_{\zeta_m} \longrightarrow +\infty$, alors, il suit aussi que $\xi(u_{\zeta_m}, h_{\zeta_m}) \longrightarrow +\infty$ ce qui est impossible.

On déduit, donc, que la suite $\left((u_{\zeta_m})\right)_{m \in \mathbb{N}}$ est aussi bornée dans $H_0^1(\Omega)$. D'où la suite $\left((u_{\zeta_m}, h_{\zeta_m})\right)_{m \in \mathbb{N}}$ est incluse dans un compact de $H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R}$ muni de la topologie faible.

Donc, pour montrer que la suite $\left((u_{\zeta_m}, h_{\zeta_m})\right)_{m \in \mathbb{N}}$ converge il suffit de montrer qu'elle admet une unique valeur d'adhérence.

Soit donc $\left((u_{\zeta_m}, h_{\zeta_m})\right)_{m \in \mathbb{N}}$ une sous suite quelconque de $\left((u_{\zeta_m}, h_{\zeta_m})\right)_{m \in \mathbb{N}}$, alors on peut extraire une sous suite qui converge faiblement vers un élément (u, h).

On montre, ensuite, que

$$(u, h) = (u_\zeta, h_\zeta)$$

l'unique minimizer de (P_ζ); en effet, montrons tout d'abord que $(u, h) \in K_\zeta$, comme on a

$$\begin{aligned} u_{\zeta_m} &\rightharpoonup u \quad \text{dans } H_0^1(\Omega) \quad \text{(faible)} \\ h_{\zeta_m} &\longrightarrow h \quad \text{dans } \mathbb{R}. \qquad (III-2.6)\end{aligned}$$

D'après, l'injection compacte de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, on déduit que

$$u_{\zeta_m} \longrightarrow u \quad \text{dans } L^2(\Omega) \quad \text{(fort)} \qquad (III-6)$$

donc il existe une sous suite de $\left((u_{\zeta_m})\right)_{m \in \mathbb{N}}$ telle que

$$u_{\zeta_m}(x) \longrightarrow u(x) \quad \text{sur } \Omega \setminus N$$

où N est un ensemble négligeable, et comme $(u_{\zeta_m}, h_{\zeta_m}) \in K_{\zeta_m}$, alors

$$u_{\zeta_m}(x) \geq h_{\zeta_m} + \sqrt{r^2 - |x - \zeta_m|^2} \qquad \text{sur} \quad \Omega \setminus N_m.$$

où N_m est un ensemble négligeable. Donc, à la limite on a

$$u(x) \geq h + \sqrt{r^2 - |x - \zeta|^2} \qquad \text{sur} \quad \Omega \setminus (\cup_m N_m \cup N).$$

Donc $(u, h) \in K_\zeta$. Il reste, donc, à montrer que

$$\xi_r(u, h) \leq \xi_r(u_\zeta, h_\zeta).$$

Comme on a

$$\xi_r(u_{\zeta_m}, h_{\zeta_m}) \leq \xi_r(v, l) \qquad \forall (v, l) \in K_{\zeta_m},$$

et

$$(u_{\zeta_m, h_\zeta}, h_\zeta) \in K_{\zeta_m}$$

car

$$u_{\zeta_m, h_\zeta}(x) \geq h_\zeta + \sqrt{r^2 - |x - \zeta_m|^2} \qquad \text{p.p. dans} \quad B_r(\zeta_m).$$

Il vient, par suite,

$$\begin{aligned} \xi_r(u_{\zeta_m}, h_{\zeta_m})) &\leq \xi_r(u_{\zeta_m, h_\zeta}, h_\zeta) \\ &= -\frac{1}{2}\int_\Omega \triangle u_{\zeta_m, h_\zeta} . u_{\zeta_m, h_\zeta} dx - G h_\zeta \\ &= -\frac{1}{2}\int_{\Lambda(u_{\zeta_m, h_\zeta})} \triangle \Psi_{\zeta_m, h_\zeta} . \Psi_{\zeta_m, h_\zeta} dx - G h_\zeta. \end{aligned}$$

Or, d'une part, ξ_r est s.c.i. sur $H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R}$ muni de la topologie faible et

$$(u_{\zeta_m}, h_{\zeta_m}) \rightharpoonup (u, h),$$

il résulte

$$\begin{aligned} \xi_r(u, h) &\leq \liminf_{m \to +\infty} \xi_r(u_{\zeta_m}, h_{\zeta_m}) \\ &\leq \lim_{m \to +\infty} \xi_r(u_{\zeta_m, h_\zeta}, h_\zeta). \end{aligned}$$

D'autre part, d'après [6, lemme 8], on a

$$\chi_{\Lambda(u_{\zeta_m, h_\zeta})} \rightharpoonup \chi_{\Lambda(u_\zeta, h_\zeta)},$$

dans $L^2(\Omega)$ faible. Donc,

$$-\frac{1}{2}\int_{\Lambda(u_{\zeta_m},h_{\zeta_m})} \triangle\Psi_{\zeta_m,h_{\zeta_m}}.\Psi_{\zeta_m,h_{\zeta_m}}dx \quad \longrightarrow \quad -\frac{1}{2}\int_{\Lambda(u_\zeta)} \triangle\Psi_{\zeta,h_\zeta}.\Psi_{\zeta,h_\zeta}dx.$$

et par suite,

$$\begin{aligned}\lim_{m\to+\infty}\xi_r(u_{\zeta_m,h_\zeta},h_\zeta) &= -\frac{1}{2}\int_{\Lambda(u_\zeta)} \triangle\Psi_{\zeta,h_\zeta}.\Psi_{\zeta,h_\zeta}dx - Gh_\zeta \\ &= \frac{1}{2}\int_{\Lambda(u_\zeta)} |\nabla u_{\zeta,h_\zeta}(x)|^2 dx - Gh_\zeta \\ &= \xi_r(u_\zeta,h_\zeta).\end{aligned}$$

On conclut donc, que

$$\xi_r(u,h) \leq \xi_r(u_\zeta,h_\zeta).$$

D'où l'égalité souhaitée

$$\xi_r(u,h) = \xi_r(u_\zeta,h_\zeta).$$

Donc (u,h) est un minimizeur de $\xi_r(\zeta)$, et alors, par unicité de ce dernier on déduit que

$$(u,h) = (u_\zeta,h_\zeta).$$

Donc, toutes les sous suites de $\left((u_{\zeta_m},h_{\zeta_m})\right)_{m\in\mathbb{N}}$ admettent la même, et unique, valeur d'adhérence (u_ζ,h_ζ), et alors, la suite toute entière converge vers (u_ζ,h_ζ), ce qui termine notre démonstration. ■

Remarque III – 2.2:

i) Dans le cas d'un domaine convexe, l'ensemble $\mathcal{C}$ est un singleton.

ii) Dans un travail récent de Bandle et Flucher [3] il y est montré que

$$dist(\zeta_r^*,\mathcal{C}) \leq c\sqrt{r} \longrightarrow 0 \qquad \text{quand } r \longrightarrow 0.$$

III – 3. Un résultat d'unicité et de symétrie de l'ensemble de coincidence

a— Résultat d'unicité

On a vu que dans le cas d'un domaine qui admet deux axes de symétrie la solution (u_0,ζ_0,h_0) du problème $(\mathcal{P})$ correspond nécessairement à

$$\zeta_0 \equiv O$$

où O est le point d'intersection des deux axes de symétrie. Dans ce qui suit, on va montrer que h_0 est unique, mieux encore, si on pose pour chaque ζ fixé

$$u_h = u_{\zeta,h}$$

$$\mathcal{F}(\zeta, h) = \mathcal{F}(h) = \tfrac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_h(x)|^2 dx - Gh$$

on montre, alors, le théorème suivant :

Théorème III – 3.1:—*La fonction*

$$\mathcal{F}: \quad h \longmapsto \mathcal{F}(h)$$

est strictement convexe sur $[-r, +\infty[$.

Démonstration :

Soient $h_1, h_2 \in [-r, +\infty[$ tels que $h_1 \neq h_2$.
Soient $\lambda, \gamma \in (0,1)$ tels que $\lambda + \gamma = 1$, montrons que

$$\mathcal{F}(\lambda h_1 + \gamma h_2) < \lambda \mathcal{F}(h_1) + \gamma \mathcal{F}(h_2).$$

Du fait que $u_{h_i} \in K_{\zeta,h_i}$, $i = 1, 2$, on a,

$$\begin{cases} u_{h_1}(x) \geq h_1 + \sqrt{r^2 - |x-\zeta|^2}\,, & \text{p.p. dans} B_r(\zeta) \\ u_{h_2}(x) \geq h_2 + \sqrt{r^2 - |x-\zeta|^2}\,, & \text{p.p. dans} B_r(\zeta) \end{cases}$$

or $\lambda, \gamma > 0$, d'où

$$\begin{cases} \lambda u_{h_1}(x) \geq \lambda h_1 + \lambda\sqrt{r^2 - |x-\zeta|^2}\,, & \text{p.p. dans} B_r(\zeta) \\ \gamma u_{h_2}(x) \geq \gamma h_2 + \gamma\sqrt{r^2 - |x-\zeta|^2}\,, & \text{p.p. dans} B_r(\zeta) \end{cases}$$

et par suite,

$$\lambda\, u_{h_1}(x) + \gamma\, u_{h_2}(x) \geq (\lambda\, h_1 + \gamma\, h_2) + (\lambda + \gamma)\,\sqrt{r^2 - |x-\zeta|^2}, \qquad \text{p.p. dans} B_r(\zeta).$$

Or, par hypothèse on a, $\lambda + \gamma = 1$, d'où

$$\begin{aligned} \lambda u_{h_1}(x) + \gamma u_{h_2}(x) &\geq (\lambda h_1 + \gamma h_2) + \sqrt{r^2 - |x-\zeta|^2}, \qquad \text{p.p. dans} B_r(\zeta) \\ &= \Psi_{\lambda h_1 + \gamma h_2}(x). \end{aligned}$$

Il vient

$$\lambda u_{h_1} + \gamma u_{h_2} \in K_{\zeta, \lambda h_1 + \gamma h_2}.$$

Si on pose, ensuite, $u = u_{\zeta,\lambda h_1 - \gamma h_2}$ la solution du problème

$$\min_{v \in K_{\zeta,\lambda h_1 - \gamma h_2}} \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx$$

alors, on a

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx \leq \int_\Omega |\nabla(\lambda u_{h_1} + \gamma u_{h_2})(x)|^2 dx$$

Et comme la fonction

$$u \longmapsto \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx = ||u||^2_{H_0^1(\Omega)}$$

est strictement convexe, et le fait que $u_{h_1} \neq u_{h_2}$ (car $h_1 \neq h_2$), on en déduit alors que

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx < \lambda \int_\Omega |\nabla u_{h_1}(x)|^2 dx + \gamma \int_\Omega |\nabla u_{h_2}(x)|^2 dx.$$

Et donc,

$$\mathcal{F}(\lambda h_1 + \gamma h_2) < \lambda \mathcal{F}(h_1) + \gamma \mathcal{F}(h_2).$$

c.q.f.d. ■

Remarque III – 3.1:— On déduit du théorème III-3.1. que

i) Si $(u_{\zeta,h}, \zeta, h)$ et $(u_{\zeta,h'}, \zeta, h')$ sont deux solutions du problème $(\mathcal{P})$, pour un domaine convexe **quelconque**, alors nécessairement $\mathbf{h = h'}$.

ii) Dans le cas d'un domaine Ω qui admet deux axes de symétrie dont l'intersection est un point qu'on notera O, la solution du problème $(\mathcal{P})$ qui correspond à ce domaine est $(u_{0,h}, O, h)$ où h est unique (cf. théorème I-3.2 et III-3.1). Malheureusement, on ne sait pas calculer exactement cette solution sauf dans le cas particulier où $\Omega = B_R(O)$ (cf. remarque I-3.1). □

b—Symétrie de l'ensemble de coincidence

Proposition III – 3.1—*Soit Ω un domaine qui admet un ou plusieurs axes de symétrie. Si ζ est un point de Ω qui appartient à un axe l de symétrie de Ω, alors l est aussi un axe de symétrie de $\Lambda(u_{\zeta,h})$, ensemble de coincidence de $u_{\zeta,h}$ avec $\Psi_{\zeta,h}$, ceci quelque soit h.*

Démonstration:—On montre tout d'abord que $u_{\zeta,h}$ est symétrique par rapport à l. En effet, si on définit la fonction $Ru(x) = u(Rx)$ sur Ω, où, R est la symétrie axiale par rapport à l. On voit clairement que

$$Ru \in K_{\zeta,h}$$

et que

$$\int_\Omega |\nabla Ru(x)|^2 dx = \int_{R(\Omega)} |\nabla u(x)|^2 dx = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx.$$

Or, la solution de $\mathcal{B}_{\zeta,h}$ est unique, donc

$$Ru = u.$$

Et comme $\Psi_{\zeta,h}$ est radialement symétrique, on déduit que $\Lambda(u_{\zeta,h})$ est symétrique par rapport à l. □

III – 4. Le problème $(\mathcal{P})$ n'admet pas en général une solution unique

a—Premier contre-exemple

Dans le cas où Ω est un convexe qui admet un seul axe de symétrie l'unicité est fort probable (voir [21],[25], pour le cas limite r qui tend vers 0).

Dans le cas où on perd la convexité on perd en général l'unicité. En effet, dans [5] il y est montré le résultat suivant

Théorème III – 4.1—*Soit le domaine suivant :*

$$\Omega = \Omega_R = [(-S, S) \times (-1, 1)] \cup [B_R(-S) \cup B_R(S)]$$

avec $S = R + 1$, *alors la solution du problème* $(\mathcal{P})$ *qui correspond à ce domaine, n'est pas unique pour* R *assez grand.*

Démonstration:—On est dans le cas de figure suivant :

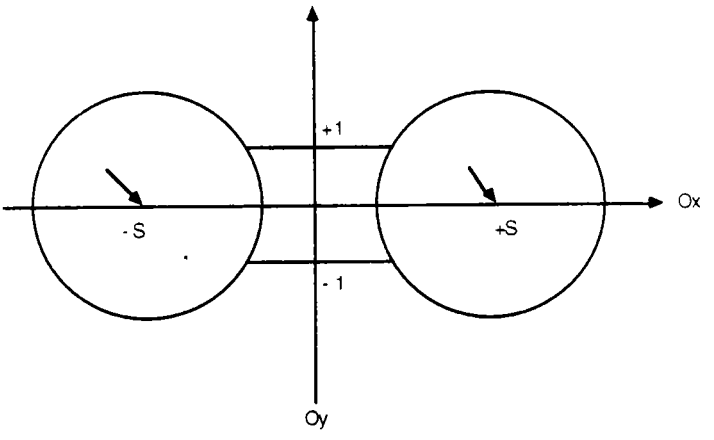

Figure 1

On suppose $r < 1$. Et on note par E l'infimum de l'énergie $\mathcal{F}$ (voir I- 2.5) dans le cas où $\Omega = Q = (-1,1)^2$.

Supposons que le problème $(\mathcal{P})$ relatif à $\Omega = \Omega_R$ admette une solution unique u_R. Pour des raisons de symétrie, on aura $\zeta_0 = 0$.

Notons, ensuite, par $h_0(R)$ la hauteur correspondante à cette solution. Du fait que $Q \subset \Omega_R$ on a, d'une part, si $h_0(R) \leq 0$

$$\begin{aligned} E &\geq \mathcal{F}(u_R, 0, h_0(R)) \\ &= \frac{1}{2}\int_{\Omega_R} |\nabla u_R(x)|^2 dx - G h_0(R) \\ &\geq \frac{1}{2}\int_{Q} |\nabla u_R(x)|^2 dx - G h_0(R) \\ &\geq -G h_0(R). \end{aligned} \qquad (III-4.1)$$

D'autre part si $h_0(R) > 0$, en utilisant l'inégalité de poincaré dans Q ($u_R = 0$, pour $x_2 = \pm 1$), il existe un $C(Q) > 0$ tel que

$$\begin{aligned} E &\geq \frac{1}{2}C(Q)\int_{Q} |u_R(x)|^2 dx - G h_0(R) \\ &\geq \frac{1}{2}C(Q)\int_{Q} |\Psi(x)|^2 dx - G h_0(R) \\ &\geq \frac{1}{2}C(Q)[h_0(R)]^2 - G h_0(R)]. \end{aligned} \qquad (III-4.2)$$

Comme E est bornée indépendamment de R, alors, d'après (III-4.1) et (III-4.2), $h_0(R)$ l'est aussi; par conséquent il existe une constante M tel que

$$\mathcal{F}(u_R, 0, h_0(R)) \geq M \qquad \forall \ R. \tag{III-4.3}$$

Maintenant, on va montrer que cela contredit le fait que $(u_R, 0, h_0(R))$ est un minimizeur. En effet, pour R suffisamment grand, on peut construire une fonction admissible $(u_R^*, (S, 0), \bar{h}(R))$ pour l'infimum de $\mathcal{F}$ dont l'énergie est inférieure à M, en effet, on pose

$$u_R^* = \begin{cases} 0 & \text{dans} \quad \Omega_R \setminus B_R(S, 0), \\ v_R & \text{dans} \quad B_R(S, 0) \end{cases}$$

où $(v_R, (S, 0), \bar{h}(R))$ est le minimizeur du problème $(\mathcal{P})$ pour le domaine $\Omega = B_R((S, 0))$. Or, on a, d'après [6, lemme 2]

$$\Lambda = B_{r_0}((S, O))$$

et

$$\bar{h}(R) = -\tfrac{G}{2\pi} \ln \tfrac{r_0}{R} - \sqrt{r^2 - r_0^2},$$

avec r_0 indépendant de R.

Ensuite, si on pose $\rho = |(S, 0) - (x_1, x_2)|$, l'énergie totale est

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u_R^*, (S, 0), \bar{h}(R)) &= -\frac{1}{2} \int_{B_{r_0}} \Psi_{\bar{h}(R)} . \triangle \Psi_{\bar{h}(R)} dx - G\bar{h}(R) \\ &= -\frac{1}{2}\ 2\pi \int_0^{r_0} (\bar{h}(R) + \sqrt{r^2 - \rho^2}) . \frac{-2r^2 + \rho^2}{\sqrt{r^2 - \rho^2}^3}\ \rho\ d\rho - G\bar{h}(R) \\ &= \bar{h}(R)\ \{\pi \int_0^{r_0} \frac{2r^2 - \rho^2}{\sqrt{r^2 - \rho^2}^3}\ \rho\ d\rho - \ G\} + \pi \int_0^{r_0} \frac{2r^2 - \rho^2}{r^2 - \rho^2}\ \rho\ d\rho \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \int_0^{r_0} \frac{2r^2 - \rho^2}{\sqrt{r^2 - \rho^2}^3}\ \rho\ d\rho &= \int_0^{r_0} \frac{\rho}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}\ d\rho + r^2 \int_0^{r_0} \frac{\rho}{\sqrt{r^2 - \rho^2}^3}\ d\rho \\ &= \frac{r_0^2}{\sqrt{r^2 - r_0^2}} \end{aligned}$$

et

$$G = \frac{2\pi r_0^2}{\sqrt{r^2 - r_0^2)}}$$

$$C = \pi \int_0^{r_0} \frac{2r^2 - \rho^2}{r^2 - \rho^2)} \rho d\rho.$$

On obtient enfin

$$\mathcal{F}(u_R^*.(S.0).\bar{h}(R)) = \bar{h}(R)\{\frac{-\pi r_0^2}{\sqrt{r^2 - r_0^2)}}\} - C.$$

Comme

$$\bar{h}(R) \longrightarrow +\infty \qquad \text{quand} \qquad R \longrightarrow +\infty$$

on a, alors,

$$\mathcal{F}(u_R^*.(S.0).\bar{h}(R)) \longrightarrow -\infty \qquad \text{quand} \qquad R \longrightarrow +\infty$$

d'où, $\mathcal{F}(u_R^*.(S.0).\bar{h}(R)) < M$ pour R assez grand, ce qui contredit (III-4.3). On conclut donc, que pour R assez grand, le problème $(\mathcal{P})$ qui correspond à Ω_R ne peut pas avoir un minimizeur unique. ■

b—Autres contre-exemples

• Soient $N_R = (-1.1)^2 \cup [(-S - R. -S + R) \times (-R. R)] \cup [(S - R. S + R) \times (-R. R)]$, où $S = R + 1$ et $r < 1$.

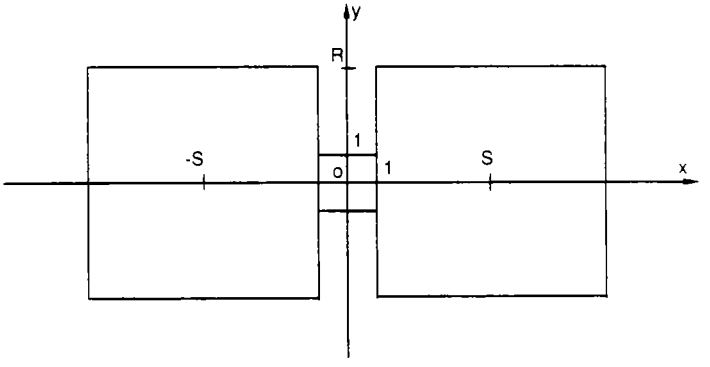

Figure 2

On montre de même, en reprenant ligne par ligne la démonstration du théorème III-4.1, qu'on n'a pas unicité non plus de la solution du problème $(\mathcal{P})$ qui correspond à ce domaine pour R assez grand.

• Soit $\Omega_R = [(-S, S) \times (-1, 1)] \cup [B_R(-S) \cup B_R(S)]$ (voir figure 1). Soit $1 \leq r < R$. Dans ce cas $\tau_\zeta \in Q = (-1, 1)^2$, on a, $B_r(\zeta) \not\subset \Omega$. Donc si $(u_{\zeta,h}, \zeta, h)$ est une solution de $(\mathcal{P})$ qui correspond à ce domaine alors, d'après le théorème I-3.2, on a

$$\zeta \in]-S, -a[\cup]a, S[$$

avec $|a| > 1$. Et donc, par symétrie, on déduit que $(u_{-\zeta,h}, -\zeta, h)$ est aussi une solution de $(\mathcal{P})$.

c—La non convexité n'implique pas la non unicité

Soit le domaine non convexe suivant :

$$\Omega = B_R(O) \cup [(-S-1, S+1) \times [-1, 1)]$$

où $S = R + 1$ et $r < 1 < R$.

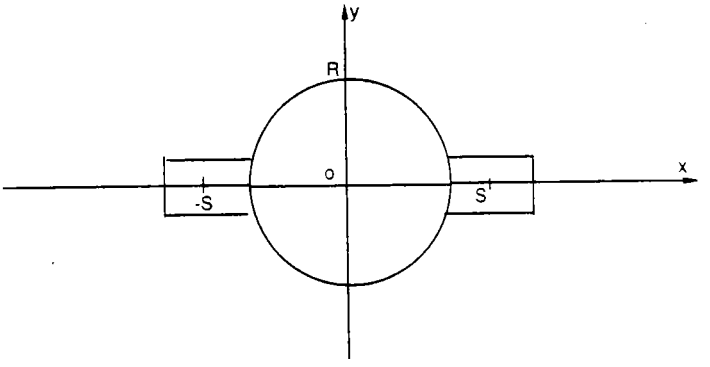

Figure 3

Nous déduisons du théorème I-3.2 et du théorème III-3.1 que le problème $(\mathcal{P})$ admet une solution unique $(u_{0,h}, o, h)$.

Remarque III – 4.1:— On déduit du théorème III-4.1 que la fonction d'énergie

$$\mathcal{F}(\zeta, h) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_R} |\nabla u_{\zeta,h_\zeta}(x)|^2 dx - Gh$$

ne peut pas être strictement convexe, pour R assez grand, car sinon on aurait unicité du minimizeur.

On s'est dit, donc, que cela est peut être dû au fait que le domaine Ω_R n'est pas convexe. Mais vu le contre-exemple c) (voir plus haut), on ne pense pas que le fait Ω soit convexe implique que $\mathcal{F}$ est forcément une fonction strictement convexe. □

d—Un extremum relatif d'énergie

Pour R assez grand, on considère de nouveau le domaine

$$\Omega_R = [(-S, S) \times (-1, 1)] \cup [B_R(-S) \cup B_R(S)]$$

(voir figure 1). D'après ce qui précède le problème $(\mathcal{P})$ relatif à Ω_R admet au moins deux solutions symétriques. Donc, il est clair qu'il existe au moins un maximum local entre ces deux points; nous nous intéresserons, dans ce qui suit, à la position de l'origine dans ce problème, soit alors, le théorème suivant :

Théorème III – 4.2—*Si on considère le problème $(\mathcal{P})$ qui correspond au domaine Ω_R. Alors O est un point critique, de plus c'est un extremum local d'énergie.*

Démonstration :

i) O est un point critique.

On rappelle que pour chaque h fixé, on a posé :

$$\mathcal{D}(\zeta) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_\zeta(x)|^2 dx.$$

Il faut montrer, donc, que $\nabla\mathcal{D}(O) = 0$. En effet, si on note par R_1 la symétrie axiale par rapport à l'axe $\mathcal{L}_1$ qui passe par O et qui est orthogonal au vecteur unitaire $e_1 = (1, 0)$, alors, on montre que

$$R_1 u = u$$

où la fonction $R_1 u$ est définie par

$$R_1 u(x) = u\big(R_1(x)\big).$$

Ceci est vrai car

$$R_1 u \in K_{O,h}$$

et

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega}|\nabla R_1 u(x)|^2 dx = \frac{1}{2}\int_{\Omega}|\nabla u(x)|^2 dx$$

Donc, par unicité de la solution du problème $\mathcal{B}_{O,h}$, on déduit le résultat voulu.

Il vient, par suite

$$R_1(\Lambda_-) = \Lambda_+.$$

où Λ est l'ensemble de coincidence de u avec $\Psi_{O,h}$, et

$$\Lambda_- = \{x \in \Lambda : \ < x.e_1 > \ < 0\}$$

$$\Lambda_+ = \{x \in \Lambda : \ < x.e_1 > \ > 0\}.$$

En faisant appel à (I-3.3), il vient

$$\begin{aligned}\frac{\partial D}{\partial e_1}(O) &= -\int_{\Lambda}\frac{\partial \Psi}{\partial e_1}(x)\,\triangle\Psi(x)dx \\ &= -\int_{\Lambda_+\cup\Lambda_-}\frac{\partial \Psi}{\partial e_1}(x)\,\triangle\Psi(x)dx \\ &= 0.\end{aligned}$$

De la même façon on montre que

$$\frac{\partial D}{\partial e_2}(O) = 0$$

où $e_2 = (0,1)$. Donc, $\nabla\mathcal{D}(O) = 0$.

ii) O est un extremum local d'énergie

• D'après le théorème I-3.2, il est clair que si $(u_{\zeta,h}, \zeta, h)$ est une solution du problème $(\mathcal{P})$, alors $\zeta \in]-S,S[$, on considère, alors, dans la suite la restriction de la fonction $\mathcal{D}$ sur le segment $]-S,S[$ qu'on notera encore $\mathcal{D}$.

On va montrer que $\mathcal{D}$ est "paire". En effet, soit $\zeta \in \ ]-S,S[$, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\zeta) &= \frac{1}{2}\int_{\Omega_R}|\nabla u_\zeta(x)|^2 dx \\ &= \min_{v\in K_{\zeta,h}}\frac{1}{2}\int_{\Omega_R}|\nabla v(x)|^2 dx\end{aligned}$$

où, rappelons le

$$K_{\zeta,h} = \{\, v \in H_0^1(\Omega_R) : \quad v(x) \geq \Psi_{\zeta,h}(x) \quad \text{p.p. dans } B_r(\zeta)\,\}.$$

On considère, ensuite, la fonction

$$u^* = R_2 u_\zeta$$

où R_2 est la symétrie axiale par rapport à l'axe $\mathcal{L}_2$ qui passe par O et qui est orthogonal au vecteur unitaire $e_2 = (0, 1)$. Alors il est facile de voir que

$$u^*(x) \geq \Psi_{-\zeta}(x) \quad \text{p.p. dans} \quad B_r(-\zeta)$$

d'où,

$$u^* \in K_{-\zeta,h}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_R} |\nabla u_{-\zeta}(x)|^2 dx &\leq \int_{\Omega_R} |\nabla u^*(x)|^2 dx \\ &= \int_{\Omega_R} |\nabla u_\zeta(x)|^2 dx.\end{aligned}$$

En changeant ζ en $-\zeta$, on a l'inégalité inverse. On conclut, alors que

$$\int_{\Omega_R} |\nabla u_\zeta(x)|^2 dx = \int_{\Omega_R} |\nabla u_{-\zeta}(x)|^2 dx$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{D}(\zeta) = \mathcal{D}(-\zeta).$$

Et donc, O est soit un maximum soit un minimum relatif de $\mathcal{D}$. ■

Remarque III – 4.2:—En fait, on peut montrer autrement que O est un point critique. En effet, du fait que $\mathcal{D}$ est differentiable en tout point $\zeta \in \Omega_R$ (voir théorème I-3.1) et le fait que $\mathcal{D}$ soit "paire" on déduit que, $\nabla\mathcal{D}(O) = 0$. □

III – 5. Application:

a—Localisation d'une solution dans le cas d'un domaine qui admet un seul axe de symétrie

Pour un domaine Ω convexe, qui admet un seul axe de symétrie $\mathcal{L}$, le problème $(\mathcal{P})$ admet au moins une solution (u^*, ζ^*, h^*); de plus, d'après le théorème I-3.2, ζ^* appartient à cet axe de symétrie, plus précisément ζ^* appartient à un intervale $I \subset \mathcal{L}$ où la condition

[-3.5] n'est plus vérifiée (voir figure 4 ci-dessous).

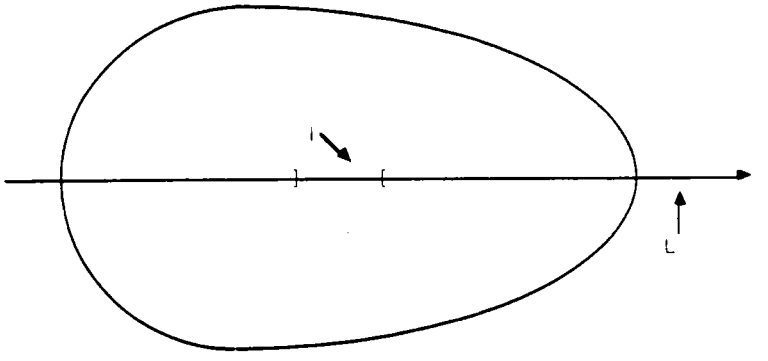

Figure 4

Dans ce qui va suivre on va essayer de mieux localiser ζ^*.

Pour cela on introduit la fonction de Green, pour l'opérateur $(-\triangle)$ dans Ω :

$$G(x,y) = \frac{1}{2\,\pi}\ \log\ \frac{1}{|x-y|} - h(x,y). \qquad (III-5.1)$$

Rappelons quelques propriétés de

$$h(x) = h(x,x)$$

la partie régulière de la fonction de Green qui s'appelle aussi la fonction de Robin de Ω en x. Cette fonction joue un rôle important dans la théorie des fonctions géométriques (cf. [28], [52]), et pour un certain nombre d'applications physiques (cf. [3], [16], [21], [22], [26], [41], [50]). D'où l'importance de rappeler quelques propriétés de cette fonction.

- Pour tout $x \in \Omega$, $h(x,.)$ est harmonique dans $\Omega \setminus \{x\}$ et continue sur $\bar{\Omega}$.
- Pour tout $x \in \Omega$, $h(x,.) = 0$ sur $\partial\Omega$.
- Pour tout $x, y \in \Omega$. $h(x,y) = h(y,x)$.
- Si $\Omega_1 \subset \Omega_2$ on a. $G_1(x,y) \leq G_2(x,y)$ $\forall x \in \Omega_1$, et donc, $h_2(x) \leq h_1(x)$ $\forall x \in \Omega_1$.
- $\triangle h(x) \geq 0$ dans Ω. Plus précisément h vérifie l'équation de Liouville (cf. [21], p.548)

$$\triangle h = 4\,e^{2h} \quad \text{dans } \Omega. \qquad (III-5.2)$$

- h vérifie au bord

$$h(x) = -\log(\delta(x)) + O(1) \qquad (III-5.3)$$

quand $x \to \partial\Omega$, où $\delta(x) = dist(x, \partial\Omega)$.

- h peut être caractérisée comme l'unique solution de (III-5.2) avec la donnée au bord (III-5.3) (voir [13].[26].[46]). h est aussi la solution maximale de (III-5.2) tout simplement.

Notons enfin, que les points critiques de h ont un intérêt particulier dans plusieurs applications physiques ([22].[16].[21]). Les points où la fonction de Robin h atteint son minimum sont applées : **centres harmoniques.**

Si Ω est borné, l'ensemble

$$\mathcal{C} = \{\bar{x} : h(\bar{x}) = \min_{x\in\Omega} h(x)\}$$

est fini (il est non vide car h est continue et $h(x)$ tend vers l'infini quand $\delta(x) \to 0$).

Si Ω est convexe (borné ou non) et différent d'une bande infinie alors, h admet un seul point critique qu'on notera $\bar{x}$.

Si on note par $(u_0^r, \zeta_0^r, h_0^r)$ l'unique solution du problème $(\mathcal{P})$, alors, pour r assez petit, ζ_0^r vérifie l'inégalité suivante

$$|\zeta_0^r - \bar{x}| \leq C\ (r \log \frac{1}{r})^{\gamma}$$

voir (III-2.3). Et comme

$$C\ (r \log \tfrac{1}{r})^{\gamma} \longrightarrow 0 \qquad \text{quand } r \longrightarrow 0$$

d'où,

$$\zeta_0^r \longrightarrow \bar{x} \qquad \text{quand } r \longrightarrow 0.$$

Comme on l'a signalé dans la remarque III-2.2, dans [4] il y est montré que

$$|\zeta_0^r - \bar{x}| \leq C\sqrt{r}$$

donc, on en déduit que

$$\zeta_0^r \in B_{C\sqrt{r}}(\bar{x}).$$

Or, d'après le théorème I-3.2, on a, pour tout r

$$\zeta_0^r \in \mathcal{I}$$

d'où,

$$\lim_{r\to 0} \zeta_0^r \in \mathcal{I}$$

et par suite,

$$\bar{x} \in \mathcal{I}$$

d'où

$$\zeta_0^r \in \mathcal{I} \cap B_{C\sqrt{r}}(\bar{x}).$$

Comme, $\mathcal{I} \cap B_{C\sqrt{r}}(\bar{x})$ n'est autre que le segment de centre $\bar{x}$ et de longueur $2C\sqrt{r}$, on a,

$$\zeta_0^r \in \left[\ \bar{x} - C\sqrt{r}, \bar{x} + C\sqrt{r}\ \right]$$

d'où, le résultat voulu. ■

b—Localisation des centres harmoniques dans des cas particuliers.

Vu, donc, l'importance des centres harmoniques (voir plus haut), on va essayer de localiser ces points, pour les domaines particuliers suivants :

- Ω un domaine qui admet un seul axe de symétrie
- Ω un domaine qui admet deux axes de symétries
- $\Omega = \Omega_R = [(-S, S) \times (-1, 1)] \cup [B_R(-S) \cup B_R(S)]$

i) D'après le raisonnement utilisé dans III-5-a, on a montré que l'unique point $\bar{x}$ qui réalise l'infimum de h pour un domaine qui admet un seul axe de symétrie appartient à un segment qui est inclu dans ce dernier.

ii) Pour un domaine convexe, qui admet deux axes de symétries qui s'intersectent en un point O, on a toujours d'après le théorème I-3.2

$$\forall r, \qquad \zeta_0^r \equiv O$$

d'où,

$$\lim_{r \to 0} \zeta_0^r = O.$$

Or, d'après encore [21] ou [4] on a,

$$\lim_{r \to 0} \zeta_0^r = \bar{x}$$

d'où,

$$\bar{x} \equiv O$$

iii) Pour le cas du domaine Ω_R, R suffisamment grand, on rappelle que le problème $(\mathcal{P})$ admet au moins deux solutions $(u_{\zeta_1^*, h^*}, \zeta_1^*, h^*)$, $(u_{-\zeta_1^*, h^*}, -\zeta_1^*, h^*)$. L'ensemble $\mathcal{C}$ des

points qui réalise l'infimum de h est fini et il n'est pas nécessairement réduit à un point car Ω_R est seulement borné et non convexe. On montre alors, le résultat suivant :

$$\begin{cases} \exists\ \bar{x}_1, \bar{x}_2 \in \mathcal{C}, \\ \text{tel que :} \quad \bar{x}_1, \bar{x}_2 \in [-S, S], \\ \text{et en plus} \quad \bar{x}_1 \equiv -\bar{x}_2. \end{cases}$$

En effet, d'après encore [21] on a,

$$dist(\zeta_0^r, \mathcal{C}) \leq C\ (r \log \tfrac{1}{r})^{\gamma}$$

pour r suffisamment petit. D'où,

$$\lim_{r \to 0} \zeta_0^r \in \mathcal{C}$$

donc, il existe un $\bar{x} \in \mathcal{C}$, tel que

$$\bar{x} = \lim_{r \to 0} \zeta_0^r.$$

Or, d'après le théorème I-3.2, on a $\zeta_0^r \in [-S, S]$ d'où,

$$\bar{x} \in [-S, S]$$

et d'après la symétrie de Ω_R, si ζ_0^r est solution du problème $(\mathcal{P}_1)$, alors, $-\zeta_0^r$ l'est aussi, d'où d'après (III-2.3), on a

$$\lim_{r \to 0} (-\zeta_0^r) \in \mathcal{C}.$$

Et comme

$$\lim_{r \to 0} (-\zeta_0^r) = -\lim_{r \to 0} \zeta_0^r = -\bar{x}$$

on déduit, enfin, que

$$-\bar{x} \in [-S, S] \cap \mathcal{C}.$$

■

*

* *

* * *

CHAPITRE IV

LE CAS

D'UNE MEMBRANE ÉLASTIQUE

SUPPORTANT DEUX BOULES RIGIDES

Le cas

d'une membrane élastique

supportant deux boules rigides

A—Problème Initial

IV – 1. Introduction

Dans ce chapitre nous commencerons par généraliser le problème $(\mathcal{P})$ (voir chapitre I p:10) en étudiant le cas d'une membrane élastique supportant deux boules rigides : nous procéderons d'une façon similaire à celle donnée dans [6] pour étudier ce problème . Nous avons réussi à généraliser tous les résultats données dans [6] et d'en donner d'autres. Malheureusement! les résultats obtenus dans cette étude ne permettent pas de transformer le problème initial en un problème de minimization sur un compact. Néanmoins, cette dernière nous a permis de donner quelques caractéristiques d'une solution de ce problème. aussi nous donnerons un résultat d'unicité. Dans un deuxième temps nous étudierons des cas particuliers de ce problème. Nous reprendrons, enfin, l'étude de ce problème en généralisant celle donnée dans [21].

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{IR}^2$ de frontière assez régulière. Soient G_1, G_2, r_1, r_2 des constantes strictement positives. On considère le problème suivant, qui correspond à une membrane élastique $\mathcal{M}$ qui occupe le domaine Ω dans le plan horizontal

$$\Pi = \{(x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{IR}^3 : x_3 = 0\}$$

quand elle n'est pas déformée par les deux boules, qui constituent les obstacles de notre problème, ces dernières roulent librement sur $\mathcal{M}$ sous l'effet de leurs poids et de la tension dans la membrane, jusqu'à ce qu'elles trouvent une position d'équilibre. Donc, notre problème est de chercher cette position d'équilibre ainsi que la forme de la membrane qui correspond à une énergie potentielle minimale.

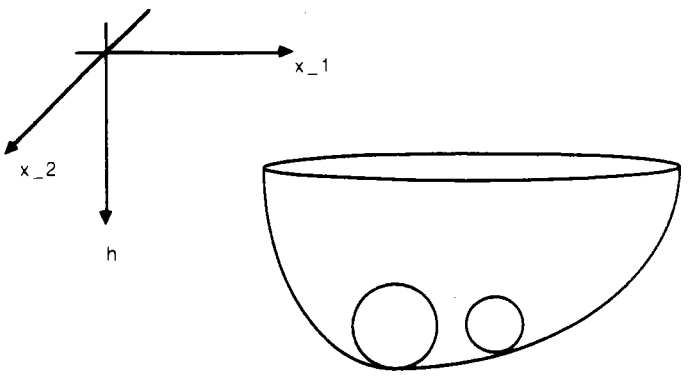

Figure 1

Dans toute la suite on note par :

- (ζ, h) les coordonnées du centre d'une boule dont la projection sur le plan Π est $B_r(\zeta) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x - \zeta| < r\}$.

- $\Psi^i_{\zeta,h}(x) = h + \sqrt{r_i^2 - |x - \zeta|^2}, \qquad i = 1, 2.$

- $\Sigma^i = \{(x, z) \in \mathbb{R}^3 / \quad z = \Psi^i_{\zeta,h}(x), \quad x \in B_{r_i}(\zeta)\}$: la moitié supérieure d'une sphère de rayon r_i dont le centre est repéré par (ζ, h). $i = 1, 2$.

- $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$: décrit le déplacement vertical de la membrane, causé par les poids des deux boules (G_1 et G_2); ici les forces de gravité pointent vers le sens positif de l'axe des hauteurs (voir figure 1).

- Pour tout déplacement u vertical de la membrane, et pour toute position (ζ_1, h_1) et (ζ_2, h_2) des centres respectifs des deux boules, l'énergie du système (à une constante additive près) est donnée par

$$E(u, \zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2) = \frac{1}{2}\sigma \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx - G_1\, h_1 - G_2\, h_2$$

où,

- σ : est la tension dans la membrane, qu'on supposera uniforme. Sans perdre de généralité on posera dans toute la suite $\sigma = 1$.

- $\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla \mathbf{u(x)}|^\mathbf{2} \mathbf{dx}$: représente l'énergie élastique de la membrane qui varie avec le déplacement u.

- $-\mathbf{G_i\ h_i}$: représente l'énergie potentielle de la boule de centre (ζ_i, h_i) et de rayon r_i, $i = 1, 2$.

Dans ce problème on suppose que la membrane supporte toujours les deux boules, qu'on supposera rigides; cela se traduit par :

$$u(x) \geq \Psi^1_{\zeta_1,h_1}(x) \qquad \text{dans } B_{r_1}(\zeta_1),$$
$$u(x) \geq \Psi^2_{\zeta_2,h_2}(x) \qquad \text{dans } B_{r_2}(\zeta_2),$$
$$(\zeta_1-\zeta_2)^2+(h_1-h_2)^2 \geq (r_1+r_2)^2.$$

Aussi, dans ce problème on cherchera les positions d'équilibre (ζ_1,ζ_2) de telle façon que $B_{r_1}(\zeta_1)$ respectivement $B_{r_2}(\zeta_2)$ n'intersecte pas la frontière de Ω, autrement dit si on note par $dist(.,\Gamma)$ la distance d'un point à Γ . ζ_1,ζ_2 doivent satisfaire :

$$dist(\zeta_1,\Gamma) > r_1$$
$$dist(\zeta_2,\Gamma) > r_2$$

c'est-à-dire

$$\bar{B}_{r_1}(\zeta_1) \subset \Omega$$
$$\bar{B}_{r_2}(\zeta_2) \subset \Omega.$$

On pose dans toute la suite

$$\Omega_r = \{\zeta \in \Omega : dist(\zeta,\Gamma) > r\}$$

Dans le cadre des espaces de Sobolev, on introduit pour chaque ζ_1,h_1,ζ_2,h_2 fixé et tel que $|\zeta_1-\zeta_2| \geq r_1+r_2$ l'ensemble des fonctions admissibles suivant :

$$K_{\zeta_1,h_1,\zeta_2,h_2} = \left\{ v \in H^1_0(\Omega) : v(x) \geq \Psi^i_{\zeta_i,h_i}(x) \quad \text{p.p. dans } B_{r_i}(\zeta_i),\ i=1,2 \right\}.$$

Maintenant on est en mesure de donner la formulation de notre problème

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} \text{Trouver : } & u,\zeta_1,h_1,\zeta_2,h_2 \\ \text{tels que : } & (\zeta_1,\zeta_2) \in \Omega_{r_1}\times\Omega_{r_2},\ h_1,h_2 \in \mathbb{R} \\ & (\zeta_1-\zeta_2)^2+(h_1-h_2)^2 \geq (r_1+r_2)^2, \\ & u \in K_{\zeta_1,h_1,\zeta_2,h_2} \\ \text{et} & E(u,\zeta_1,h_1,\zeta_2,h_2) = \inf_{\mathcal{W}} E(v,\zeta,h,\zeta',h') \end{cases}$$

$$\mathcal{W} = \Big\{ (v,\zeta,h,\zeta',h') : h,h' \in \mathbb{R},\ (\zeta,\zeta') \in \Omega_{r_1}\times\Omega_{r_2} / (\zeta_1-\zeta_2)^2+(h_1-h_2)^2 \geq (r_1+r_2)^2,\ v \in K_{\zeta,h,\zeta',h'} \Big\}$$

IV – 2. Problèmes d'obstacle auxiliaires

Pour chaque, ζ_1,h_1,ζ_2,h_2 fixé tel que $(\zeta_1-\zeta_2)^2+(h_1-h_2)^2 \geq (r_1+r_2)^2$, on considère le problème suivant :

$$\mathcal{B}(\zeta_1,h_1,\zeta_2,h_2)\quad\begin{cases}\text{Trouver :} & u\in K\\ \text{tel que :} & \frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u(x)|^2dx=\min\limits_{v\in K}\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla v(x)|^2dx\end{cases}$$

où, $K=K_{\zeta_1,h_1,\zeta_2,h_2}$.

Lemme IV – 2.1:—*Le problème* $\mathcal{B}(\zeta_1,h_1,\zeta_2,h_2)$ *admet une solution unique qu'on notera* $u_{\zeta_1,h_1,\zeta_2,h_2}$

Démonstration:— Si on considère la forme bilinéaire suivante :

$$a(u,v)=\int_\Omega\nabla u(x).\nabla v(x)dx$$

définie sur $H_0^1(\Omega)$, alors, le problème $\mathcal{B}(\zeta_1,h_1,\zeta_2,h_2)$ est équivalent au problème d'inéquation variationnelle suivant :

$$(\mathcal{V})\quad\begin{cases}\text{Trouver :} & u\in K\\ \text{tel que :} & a(u,v-u)\geq 0\qquad\forall v\in K\end{cases}\qquad(IV-2.1)$$

et comme $a(...)$ est symétrique et coercive, et K est un convexe fermé, le problème $(\mathcal{V})$ admet une solution unique (voir [35, p:24]) qu'on notera $u_{\zeta_1,h_1,\zeta_2,h_2}$. ■

Remarque IV – 2.1:—On déduit du lemme IV-2.1 que si $(u,\zeta_1,h_1,\zeta_2,h_2)$ est solution du problème $(\mathcal{S})$, alors, u est solution du problème auxiliaire $\mathcal{B}(\zeta_1,h_1,\zeta_2,h_2)$. Et comme la solution de ce dernier est unique alors nécessairement $u=u_{\zeta_1,h_1,\zeta_2,h_2}$. □

D'après cette dernière remarque, on est, donc, amené à chercher u parmi les $u_{\zeta,h,\zeta',h'}$ $\left(u_{\zeta,h,\zeta',h'},\zeta,h,\zeta',h'\right)\in\mathcal{W}$) solutions respectives des problèmes $\mathcal{B}(\zeta,h,\zeta',h')$. Donc, le problème $(\mathcal{S})$ est équivalent au problème suivant qu'on notera encore $(\mathcal{S})$

$$(\mathcal{S})\quad\begin{cases}\text{Trouver :} & \zeta_1,h_1,\zeta_2,h_2\\ \text{tels que :} & (\zeta_1,\zeta_2)\in\Omega_{r_1}\times\Omega_{r_2},\quad h_1,h_2\in\mathbb{R}\\ & (\zeta_1-\zeta_2)^2+(h_1-h_2)^2\geq(r_1+r_2)^2.\\ \text{et} & \mathcal{F}(\zeta_1,h_1,\zeta_2,h_2)=\inf\limits_{\mathcal{W}'}\mathcal{F}(\zeta,h,\zeta',h')\end{cases}$$

où

$$\mathcal{W}'=\left\{(\zeta,h,\zeta',h')\ :\ h,h'\in\mathbb{R},\ (\zeta,\zeta')\in\Omega_{r_1}\times\Omega_{r_2}/\ (\zeta-\zeta')^2+(h-h')^2\geq(r_1+r_2)^2\right\}$$

et

$$\mathcal{F}(\zeta,h,\zeta',h')=E(u_{\zeta,h,\zeta',h'},\zeta,h,\zeta',h')$$

On note dans la suite

$$K_1 = K_{\zeta_1,h_1} = \{\, v \in H_0^1(\Omega) : \quad v(x) \geq \Psi^1_{\zeta_1,h_1}(x) \quad \text{p.p. dans} \quad B_{r_1}(\zeta_1) \,\}$$
$$K_2 = K_{\zeta_2,h_2} = \{\, v \in H_0^1(\Omega) : \quad v(x) \geq \Psi^2_{\zeta_2,h_2}(x) \quad \text{p.p. dans} \quad B_{r_2}(\zeta_2) \,\}$$

$$u_1 = u_{\zeta_1,h_1} \quad \text{la solution du problème } \mathcal{B}(\zeta_1,h_1)$$
$$u_2 = u_{\zeta_2,h_2} \quad \text{la solution du problème } \mathcal{B}(\zeta_2,h_2)$$

$$\mathcal{B}(\zeta_i,h_i) \quad \begin{cases} \text{Trouver :} & u_i \in K_i \\ \text{tel que :} & \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega |\nabla u_i(x)|^2 dx = \min_{v\in K_i} \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx, \quad i = 1,2. \end{cases} \qquad (IV-2.2)$$

$$u = u_{\zeta_1,h_1,\zeta_2,h_2},$$
$$K = K_{\zeta_1,h_1,\zeta_2,h_2},$$
$$\Lambda_1 = \{\, x \in B_{r_1}(\zeta_1) \;:\; u(x) = \Psi^1_{\zeta_1,h_1}(x) \}.$$
$$\Lambda_2 = \{\, x \in B_{r_2}(\zeta_2) \;:\; u(x) = \Psi^2_{\zeta_2,h_2}(x) \}.$$

Λ_1 et Λ_2 sont les ensembles de coincidences respectifs de u avec les obstacles $\Psi^1_{\zeta_1,h_1}$ et $\Psi^2_{\zeta_2,h_2}$.

Lemme IV – 2.2:—*En tenant compte des notations au-dessus on a.*

$$u_1(x) \leq u(x) \quad p.p. \quad dans \quad \Omega$$
$$u_2(x) \leq u(x) \quad p.p. \quad dans \quad \Omega.$$

Démonstration:—Fixons i dans $\{1,2\}$ et considérons la fonction suivante :

$$v = u + (u_i - u)^+ = \max(u_i, u) \;\geq u$$

on voit clairement que $v \in K$, d'où, v vérifie

$$\int_\Omega \nabla u(x).\nabla(v-u)(x)dx \geq 0$$

et par suite,

$$\int_\Omega -\nabla u(x).\nabla(u_i-u)^+(x)dx \leq 0. \qquad (IV-2.3)$$

Soit aussi la fonction suivante :

$$w = u_i - (u_i - u)^+ = \min(u_i, u) \;\geq \Psi^i$$

d'où, $w \in K_i$, et par suite elle vérifie l'inéquation suivante (même démonstration que celle du lemme IV-2.1)

$$\int_\Omega \nabla u_i(x).\nabla(w-u_i)(x)dx \geq 0$$

il en résulte.

$$\int_\Omega \nabla u_i(x).\nabla(u_i-u)^-(x)dx \le 0. \qquad (IV-2.4)$$

En combinant (IV-2.3) et (IV-2.4), on aura.

$$\int_\Omega \nabla(u_i-u)^+(x).\nabla(u_i-u)^-(x)dx \le 0.$$

$$\Longrightarrow \quad \int_\Omega |\nabla(u_i-u)^-(x)|^2 dx \le 0.$$

$$\Longrightarrow \quad (u_i-u)^+(x)=0 \quad \text{p.p. dans} \quad \Omega$$

$$\Longrightarrow \quad u_i(x) \le u(x) \quad \text{p.p. dans} \quad \Omega.$$

Ceci pour $i=1,2$. ■

Lemme IV – 2.3:—*Il existe* $\varepsilon_1>0$, $\varepsilon_2>0$. *tels que*

$$\Lambda_1=\Lambda_1(u)\subset B_{r_1-\varepsilon_1}(\zeta_1)$$
$$\Lambda_2=\Lambda_2(u)\subset B_{r_2-\varepsilon_2}(\zeta_2).$$

où. $\varepsilon_i=\varepsilon_i(\zeta_i,h_i,\Omega)$.

Démonstration:—Du lemme IV-2.2, on déduit que

$$\Lambda_1(u)\subset\Lambda(u_1)$$
$$\Lambda_2(u)\subset\Lambda(u_2).$$

En effet, soit $x\in\Lambda_i$, alors par définition on a.

$$u(x)=\Psi^i(x)\le u_i(x)\le u(x).$$

d'où, $u_i(x)=\Psi^i(x)$, et par suite, $x\in\Lambda(u_i)$, ceci pour $i=1,2$. Or, d'après [BC, lemme 2]), il existe $\varepsilon_1=\varepsilon_1(\zeta_1,h_1,\Omega)>0$ et $\varepsilon_2=\varepsilon_2(\zeta_2,h_2,\Omega)>0$, tels que

$$\Lambda(u_1)\subset B_{r_1-\varepsilon_1}(\zeta_1)$$
$$\Lambda(u_2)\subset B_{r_2-\varepsilon_2}(\zeta_2)$$

c.q.f.d. ■

En tenant compte des notations précédentes on montre le résultat classique suivant :

Théorème IV – 2.1:— u *vérifie les propriétés suivantes*

* *i)* $u\in C^{1,1}(\bar\Omega)\cap C^\infty(\Omega\setminus(\Lambda_1\cup\Lambda_2))$.
* *ii)* $-\triangle u=0$ *p.p. dans* $\Omega\setminus(\Lambda_1\cup\Lambda_2)$.

(iii) $-\triangle u \geq 0$ $\quad p.p.\ dans\ \Omega.$

(iv) $u - \Psi^i \geq 0$ $\quad p.p.\ dans\ B_{r_i}(\zeta_i),\ i = 1, 2.$

(v) $u = \Psi^i$ $\quad p.p.\ dans\ \Lambda_i,\ i = 1, 2.$

(vi) $u = 0$ $\quad sur\ \partial\Omega.$

Démonstration: Voir [9], [11], [29], [35] ou [22].

IV – 3. Existence

Pour $\zeta_1 \in \Omega_{r_1}$ et $\zeta_2 \in \Omega_{r_2}$, fixés, tels que $(\zeta_1 - \zeta_2)^2 + (h_1 - h_2)^2 \geq (r_1 + r_2)^2$, on pose

$$\mathcal{F}(h_1, h_2) = \mathcal{F}(\zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_{h_1,h_2}(x)|^2 dx - G_1\ h_1 - G_2\ h_2$$

où, on a posé : $u_{h_1,h_2} = u_{\zeta_1,h_1,\zeta_2,h_2}$.

Lemme IV – 3.1:—*On a.*

$$\lim_{|(h_1,h_2)|\to+\infty} \mathcal{F}(h_1, h_2) = +\infty$$

uniformément en ζ_1 *et* ζ_2.

Démonstration:— Comme toutes les normes dans $\mathbb{R}^2$ sont équivalentes, on choisit la norme suivante :

$$|(h_1, h_2)| = |h_1| + |h_2|.$$

D'où,

$$|(h_1, h_2)| \to +\infty \iff |h_1| \to +\infty \quad \text{ou} \quad |h_2| \to +\infty.$$

Signalons que, d'une part, on a d'après le principe du maximum

$$u \geq 0,$$

car $-\triangle u \geq 0$ et $u = 0$ sur $\partial\Omega$. D'autre part, on a

$$u_{h_1,h_2}(x) \geq \Psi^i_{\zeta_i,h_i}(x) \geq h_i \quad \text{p.p. dans } B_{r_i}(\zeta_i),\ i = 1, 2.$$

Il vient donc, d'après l'inégalité de Poincaré le résultat suivant :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(h_1, h_2) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_{h_1,h_2}(x)|^2 dx - G_1\ h_1 - G_2\ h_2 \\ &\geq \frac{1}{2}.C(\Omega).\int_\Omega |u_{(h_1,h_2}(x)|^2 dx - G_1\ h_1 - G_2\ h_2\end{aligned}$$

$$\geq \frac{1}{2}.C'(\Omega).\int_{B_{r_1}(\zeta_1)} (h_1^-)^2 dx + \frac{1}{2}.C'(\Omega).\int_{B_{r_2}(\zeta_2)} (h_2^-)^2 dx - G_1\ h_1 - G_2\ h_2$$
$$\geq C.\left[(h_1^-)^2 + (h_2^-)^2\right] - G_1\ h_1 - G_2\ h_2 \qquad (h_i^- = h \text{ ou } 0)$$
$$\longrightarrow +\infty$$

car

$$C'(h_i^-)^2 - G_i h_i = \begin{cases} -G_i h_i \longrightarrow +\infty & \text{quand} \quad h_i \longrightarrow -\infty, \quad \text{ou bien} \\ C'(h_i)^2 - G_i h_i \longrightarrow +\infty & \text{quand} \quad h_i \longrightarrow +\infty. \end{cases}$$

c.q.f.d. ■

Lemme IV – 3.2:—$\forall \varepsilon > 0,\ \exists C_{r_i}(\varepsilon) > 0$ *tel que pour tout* $x \in B_{r_i-\varepsilon}(\zeta) \cap B_{r_i-\varepsilon}(\zeta')$ *on a*

- 1 – $|\Psi^i_{\zeta,h}(x) - \Psi^i_{\zeta',h'}(x)| \leq |h - h'| + C_{r_i}(\varepsilon)\ |\zeta - \zeta'|$ $(IV-3.1)$
- 2 – $|\triangle\Psi^i_{\zeta,h}(x) - \triangle\Psi^i_{\zeta',h'}(x)| \leq K_i.C_{r_i}(\varepsilon)\ |\zeta - \zeta'|$ $(IV-3.2)$

où $K_i = K_i(r_i, \varepsilon) > 0$. *Ceci pour* $i = 1, 2$.

Démonstration:—Soit $x \in B_{r_i-\varepsilon}(\zeta) \cap B_{r_i-\varepsilon}(\zeta')$. on a.

- 1 –

$$\begin{aligned}\Psi^i_{\zeta,h}(x) - \Psi^i_{\zeta',h'}(x) &= (h - h') + (\sqrt{r_i^2 - |x-\zeta|^2} - \sqrt{r_i^2 - |x-\zeta'|^2}) \\ &= (h - h') + \frac{|x-\zeta'|^2 - |x-\zeta|^2}{\sqrt{r_i^2 - |x-\zeta|^2} + \sqrt{r_i^2 - |x-\zeta'|^2}} \\ &= (h - h') + \frac{\langle \zeta - \zeta', x - \zeta' + x - \zeta \rangle}{\sqrt{r_i^2 - |x-\zeta|^2} + \sqrt{r_i^2 - |x-\zeta'|^2}}.\end{aligned}$$

Il vient, alors

$$\begin{aligned}|\Psi^i_{\zeta,h}(x) - \Psi^i_{\zeta',h'}(x)| &\leq |h - h'| + \frac{2r_i\ |\zeta - \zeta'|}{2\ \sqrt{r_i^2 - (r_i - \varepsilon)^2}} \\ &= |h - h'| + C_{r_i}(\varepsilon)\ |\zeta - \zeta'|\end{aligned}$$

où, $C_{r_i}(\varepsilon) = \frac{r_i}{\sqrt{r_i^2 - (r_i - \varepsilon)^2}}$.

• 2– Si on pose $\rho = |x-\zeta|$ et en utilisant la formule du Laplacien en coordonnée polaire, et le fait que $\Psi^i_{\zeta,h}$ est radiale, on aura

$$\begin{aligned}\triangle\Psi^i_{\zeta,h}(x) &= \frac{1}{\rho}.\frac{\partial\Psi^i}{\partial\rho} + \frac{\partial^2\Psi^i}{\partial\rho^2} \\ &= \frac{1}{\rho}\Big(-\rho\frac{1}{\sqrt{r_i^2-\rho^2}}\Big) - \frac{1}{\sqrt{r_i^2-\rho^2}} - \rho^2.\frac{1}{\sqrt{r_i^2-\rho^2}^3} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{r_i^2-\rho^2}} - \frac{r_i^2}{\sqrt{r_i^2-\rho^2}^3} \\ &= g\big(\sqrt{r_i^2-\rho^2}\ \big)\end{aligned}$$

où, $g(t) = -\frac{1}{t} - \frac{r_i^2}{t^3}$. On voit clairement que g est indéfiniment différentiable sur $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Si on pose aussi $\rho' = |x-\zeta'|$, et en utilisant le théorème des accroissements finis, on aura

$$\begin{aligned}|\triangle\Psi^i_{\zeta,h} - \triangle\Psi^i_{\zeta',h'}| &= g\big(\sqrt{r_i^2-\rho^2}\big) - g\big(\sqrt{r_i^2-\rho'^{\,2}}\big) \\ &= g'(\theta)\big(\sqrt{r_i^2-\rho^2} - \sqrt{r_i^2-\rho'^{\,2}}\big) \\ &= g'(\theta)\big(\Psi^i_{\zeta,h}(x) - \Psi^i_{\zeta',h}(x)\big)\end{aligned}$$

pour un certain $\theta \in \big]\sqrt{r_i^2-(r_i-\varepsilon)^2}\,, r_i\big[$. D'où, d'après (IV-3.1), et le fait que g' est bornée en dehors de 0, on obtient alors (IV-3.2): avec $K_i = \sup\{g'(t) : t \in \big]\sqrt{r_i^2-(r_i-\varepsilon)^2}\,, r_i\big[\}$. ■

Lemme IV – 3.3:—*Soient $E, E' \subset \Omega$ deux ensembles mesurables, et soient $\phi_1, \phi_2, \phi'_1, \phi'_2$ tels que*

$$\begin{aligned}\phi_1.\phi_2 &\in L^\infty(E) \\ \phi'_1.\phi'_2 &\in L^\infty(E')\end{aligned}$$

$$\Psi_i = \begin{cases}\phi_i \ \textit{dans} & E\setminus E', \\ \phi'_i \ \textit{dans} & E'\setminus E, \\ \max(\phi_i;\phi'_i) \ \textit{dans} & E\cap E'.\end{cases}$$

et soient u_i, $i=1,2$, les solutions respectives des inéquations variationnelles suivantes :

$$\int_\Omega \nabla u_i(x).\nabla(v-u_i)(x)dx \ \geq\ 0 \qquad \forall\ v\in K_i \tag{IV-3.3}$$

où,

$$K_i = \left\{ v \in H_0^1(\Omega) : v(x) \geq \Psi_i(x) \quad p.p. \ dans \ E \cup E' \right\}$$

alors, on a

$$|u_1 - u_2|_{L^\infty(\Omega)} \leq |\Psi_1 - \Psi_2|_{L^\infty(\Omega)} = Max\left\{ |o_1 - o_2|_{L^\infty(E)}, |o_1' - o_2'|_{L^\infty(E')} \right\}$$

Démonstration:— Posons

$$k = |\Psi_1 - \Psi_2|_{L^\infty(\Omega)}$$

et soit $v = u_1 - (u_1 - u_2 - k)^+$, du fait que

$$v(x) = 0 - (-k)^+ = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

alors $v \in H_0^1(\Omega)$. Et comme dans Ω on a

$$v(x) = \begin{cases} u_1(x) & \text{si } u_1 - u_2 - k \leq 0. \\ \big(u_1 - (u_1 - u_2 - k)\big)(x) = (u_2 + k)(x) & \text{si } u_1 - u_2 - k \geq 0. \end{cases}$$

et le fait que $u_1 \in K_1$ et

$$u_2(x) + k \geq \Psi_2(x) + (\Psi_1 - \Psi_2)(x) = \Psi_1(x) \quad \text{p.p. dans } E \cup E'.$$

On déduit que $v \in K_1$, et par suite v vérifie l'inéquation (IV-3.3) pour i=1

$$\int_\Omega \nabla u_1(x).\nabla(v - u_1)(x)dx \geq 0$$

d'où,

$$\int_\Omega \nabla u_1(x).\nabla(u_1 - u_2 - k)^+(x)dx \leq 0. \qquad (IV-3.4)$$

Soit aussi $w = u_2 + (u_1 - u_2 - k)^+$, du fait que

$$w(x) = 0 - (-k)^+ = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

alors $w \in H_0^1(\Omega)$. Et comme dans Ω on a

$$w(x) = \begin{cases} u_2(x) & \text{si } u_1 - u_2 - k \leq 0. \\ (u_2 + (u_1 - u_2 - k))(x) \geq u_2(x) & \text{si } u_1 - u_2 - k \geq 0. \end{cases}$$

et le fait que $u_2 \in K_2$, alors $w \in K_2$, et par suite w vérifie l'inéquation (IV-3.3) pour i=2

$$\int_\Omega \nabla u_2(x).\nabla(w - u_2)(x)dx \geq 0$$

d'où,

$$-\int_\Omega \nabla u_2(x).\nabla(u_1-u_2-k)^-(x)dx \le 0. \qquad (IV-3.5)$$

En combinant (IV-3.4) et (IV-3.5), on obtient

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \nabla(u_1-u_2)(x).\nabla(u_1-u_2-k)^-(x)dx \le 0 \\ \Longrightarrow \quad & \int_\Omega \nabla(u_1-u_2-k)^+(x).\nabla(u_1-u_2-k)^-(x)dx \le 0 \\ \Longrightarrow \quad & (u_1-u_2-k)^- = 0 \qquad \text{p.p. dans } \Omega \\ \Longrightarrow \quad & u_1-u_2 \le k \qquad \text{p.p. dans } \Omega. \end{aligned}$$

En échangeant le rôle joué, plus haut, par u_1 et u_2 on a, de même

$$u_2-u_1 \le k \qquad \text{p.p. dans } \Omega.$$

D'où, enfin

$$|u_1-u_2|_{L^\infty(\Omega)} \le |\Psi_1-\Psi_2|_{L^\infty(\Omega)}$$

c.q.f.d. ■

Lemme IV – 3.4:

1• *Si on fixe h_1, h_2 dans* $\mathbb{R}$ *et en posant*

$$u_1 = u_{\zeta_1,h_1,\zeta_2,h_2}$$
$$u_2 = u_{\zeta_1',h_1,\zeta_2',h_2}.$$

avec ζ_1, ζ_1' qui varient dans Ω_{r_1} et ζ_2, ζ_2' qui varient dans Ω_{r_2}. Alors $\exists C>0$, qui dépend de $r_1, r_2, h_1, h_2, \delta_1$ et δ_2 avec $\delta_i = dist(\zeta_i, \partial\Omega)$, tel que

$$|u_1-u_2|_{L^\infty(\Omega)} \le C.\left(|\zeta_1-\zeta_1'|+|\zeta_2-\zeta_2'|\right)$$

2• *Si on fixe ζ_1 dans Ω_{r_1} et ζ_2 dans Ω_{r_2} et en posant*

$$w_1 = u_{\zeta_1,h_1,\zeta_2,h_2}$$
$$w_2 = u_{\zeta_1,h_1',\zeta_2,h_2'}.$$

avec h_1, h_1', h_2, h_2' qui varient dans $\mathbb{R}$. *Alors, on a*

$$|w_1-w_2|_{L^\infty(\Omega)} \le |h_1-h_1'|+|h_2-h_2'|$$

Démonstration:

1• *Si $|\zeta_1-\zeta_1'|$ et $|\zeta_2-\zeta_2'|$ sont suffisamment petits, on a alors, d'après [5, lemme 2]

$$\Lambda(v_1).\Lambda(v_1') \subset E_1 = B_{r_1-\varepsilon_1}(\zeta_1) \cap B_{r_1-\varepsilon_1}(\zeta_1')$$
$$\Lambda(v_2).\Lambda(v_2') \subset E_2 = B_{r_2-\varepsilon_2}(\zeta_2) \cap B_{r_1-\varepsilon_1}(\zeta_2')$$

où,

$$v_1 = u_{\zeta_1,h_1} \qquad v_2 = u_{\zeta_2,h_2}$$
$$v_1' = u_{\zeta_1',h_1} \qquad v_2' = u_{\zeta_2',h_2}.$$

Or d'après le lemme IV-2.2. on a

$$\Lambda_1(u_1) \subset \Lambda(v_1) \text{ et } \Lambda_1(u_2) \subset \Lambda(v_1')$$
$$\Lambda_2(u_1) \subset \Lambda(v_2) \text{ et } \Lambda_2(u_2) \subset \Lambda(v_2')$$

et donc,

$$\Lambda_1(u_1).\Lambda_1(u_2) \subset E_1 = B_{r_1-\varepsilon_1}(\zeta_1) \cap B_{r_1-\varepsilon_1}(\zeta_1')$$
$$\Lambda_2(u_1).\Lambda_2(u_2) \subset E_2 = B_{r_2-\varepsilon_2}(\zeta_2) \cap B_{r_2-\varepsilon_1}(\zeta_2').$$

Posons, ensuite

$$K_1 = \{v \in H_0^1(\Omega) : \ v(x) \geq \Psi^1_{\zeta_1,h_1}(x) \quad \text{p.p. dans } E_1, \ v(x) \geq \Psi^2_{\zeta_2,h_2}(x) \quad \text{p.p. dans } E_2\}$$
$$K_2 = \{v \in H_0^1(\Omega) : \ v(x) \geq \Psi^1_{\zeta_1',h_1}(x) \quad \text{p.p.dans } E_1, \ v(x) \geq \Psi^2_{\zeta_2',h_2}(x) \quad \text{p.p. dans } E_2\}$$

On montre, alors, que u_i est solution de l'inéquation variationnelle suivante

$$\int_\Omega \nabla u_i(x).\nabla(v-u_i)(x)dx \geq 0 \qquad \forall v \in K_i$$

$i = 1, 2$. En effet, montrons ce résultat pour u_1, le résultat pour u_2 s'obtient en échangeant les indices 1 par 2.

Comme $E_1 \subset B_{r_1}(\zeta_1)$ et $E_2 \subset B_{r_2}(\zeta_2)$, alors, on a

$$u_1(x) \geq \Psi^1_{\zeta_1,h_1}(x) \quad \text{p.p. dans } E_1$$
$$u_1(x) \geq \Psi^2_{\zeta_2,h_2}(x) \quad \text{p.p. dans } E_2$$

d'où, $u_1 \in K_1$.

On a aussi pour tout $v \in K_1$

$$v + (u_1 - v)^+ = \max(u_1, v) \geq \Psi^1_{\zeta_1,h_1} \qquad \text{p.p. dans } B_{r_1}(\zeta_1)$$
$$v + (u_1 - v)^+ = \max(u_1, v) \geq \Psi^2_{\zeta_2,h_2} \qquad \text{p.p. dans } B_{r_2}(\zeta_2)$$

et donc,

$$v + (u_1 - v)^+ \in K_{\zeta_1,h_1,\zeta_2,h_2}.$$

Et par suite $v + (u_1 - v)^+$ vérifie l'inéquation suivante :

$$\int_\Omega \nabla u_1(x).\nabla(v + (u_1 - v)^+ - u_1)(x)dx \geq 0.$$

Un calcul simple montre que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla u_1(x).\nabla(v-u_1)(x)dx &= \int_\Omega \nabla u_1(x).\nabla(v+(u_1-v)^- - u_1)(x)dx \\ &\quad - \int_\Omega \nabla u_1(x).\nabla(u_1-v)^-(x)dx \\ &= \int_\Omega \nabla u_1(x).\nabla(v+(u_1-v)^- - u_1)(x)dx \\ &\quad + \int_\Omega \triangle u_1(x).(u_1-v)^-(x)dx.\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \triangle u_1(x).(u_1-v)^+(x)dx &= \int_{\Lambda_1(u_1)\cup\Lambda_2(u_1)} \triangle u_1(x).(u_1-v)^-(x)dx \\ &\quad + \int_{\Omega\setminus(\Lambda_1(u_1)\cup\Lambda_2(u_1))} \triangle u_1(x).(u_1-v)^-(x)dx \\ &= 0.\end{aligned}$$

car, d'une part, d'après le théorème IV-2.1, on a, $\triangle u_1(x) = 0$ p.p. dans $\Omega\setminus(\Lambda_1(u_1)\cup\Lambda_2(u_1))$, et d'autre part le fait que $\Lambda_1(u_1)\subset E_1$ et $\Lambda_2(u_1)\subset E_2$ on a

$$(u_1-v)^+(x) = 0 \qquad \text{p.p. dans } \Lambda_1(u_1)$$

et

$$(u_1-v)^+(x) = 0 \qquad \text{p.p. dans } \Lambda_2(u_1).$$

D'où,

$$\int_\Omega \nabla u_1(x).\nabla(v-u_1)(x)dx \geq 0.$$

En appliquant, ensuite, le lemme IV-3.3 dans le cas suivant :

$$\begin{array}{ll}\phi_1 = \Psi^1_{\zeta_1,h_1} & \phi'_1 = \Psi^2_{\zeta_2,h_2} \\ \phi_2 = \Psi^1_{\zeta'_1,h_1} & \phi'_2 = \Psi^2_{\zeta'_2,h_2} \\ E = E_1. & E' = E_2\end{array}$$

on obtient, alors

$$|u_1-u_2|_{L^\infty(\Omega)} \leq |\Psi^1_{\zeta_1,h_1} - \Psi^1_{\zeta'_1,h_1}|_{L^\infty(E_1)} + |\Psi^2_{\zeta_2,h_2} - \Psi^2_{\zeta'_2,h_2}|_{L^\infty(E_2)}.$$

Et en appliquant, enfin, le lemme IV-3.2, on obtient

$$|u_1-u_2|_{L^\infty(\Omega)} \leq C.(|\zeta_1-\zeta'_1| + |\zeta_2-\zeta'_2|)$$

où, $C = \max\big(C_{r_1}(\varepsilon_1); C_{r_2}(\varepsilon_2)\big)$.

2°Si $|\zeta_1 - \zeta_1'|$ ou $|\zeta_2 - \zeta_2'|$ est grand: c'est-à-dire

$$|\zeta_1 - \zeta_1'| + |\zeta_2 - \zeta_2'| > \delta$$

pour un certain $\delta > 0$, alors

$$\begin{aligned}\frac{|u_1 - u_2|_{L^\infty(\Omega)}}{|\zeta_1 - \zeta_1'| + |\zeta_2 - \zeta_2'|} &< \frac{|u_1 - u_2|_{L^\infty(\Omega)}}{\delta} \\ &\leq \frac{1}{\delta} \max_{x \in \Omega}\big(|u_1(x)| + |u_2(x)|\big) \\ &\leq \frac{2}{\delta} \max\big(h_1 + r_1, h_2 + r_2\big).\end{aligned}$$

D'où,

$$|u_1 - u_2|_{L^\infty(\Omega)} < C.\big(|\zeta_1 - \zeta_1'| + |\zeta_2 - \zeta_2'|\big)$$

où $C = \frac{2}{\delta} \max\big(h_1 + r_1, h_2 + r_2\big)$.

2• On reprend la même démarche utilisée plus haut, ici on a

$$\begin{aligned}\Lambda(v_1), \Lambda(v_1') &\subset E_1 = B_{r_1 - \varepsilon_1}(\zeta_1) \\ \Lambda(v_2), \Lambda(v_2') &\subset E_2 = B_{r_2 - \varepsilon_2}(\zeta_2)\end{aligned}$$

où,

$$\begin{aligned}v_1 &= u_{\zeta_1, h_1} \qquad v_2 = u_{\zeta_2, h_2} \\ v_1' &= u_{\zeta_1, h_1'} \qquad v_2' = u_{\zeta_2, h_2'}.\end{aligned}$$

et donc,

$$\begin{aligned}\Lambda_1(w_1), \Lambda_1(w_2) &\subset E_1 = B_{r_1 - \varepsilon_1}(\zeta_1) \\ \Lambda_2(w_1), \Lambda_2(w_2) &\subset E_2 = B_{r_2 - \varepsilon_2}(\zeta_2).\end{aligned}$$

On pose, ensuite

$$\begin{aligned}K_1 &= \{v \in H_0^1(\Omega) : \ v(x) \geq \Psi^1_{\zeta_1, h_1}(x) \quad \text{p.p. dans } E_1, \ v(x) \geq \Psi^2_{\zeta_2, h_2}(x) \quad \text{p.p. dans } E_2\} \\ K_2 &= \{v \in H_0^1(\Omega) : \ v(x) \geq \Psi^1_{\zeta_1, h_1'}(x) \quad \text{p.p. dans } E_1, \ v(x) \geq \Psi^2_{\zeta_2, h_2'}(x) \quad \text{p.p. dans } E_2\}.\end{aligned}$$

On montre de la même manière que dans le premier cas, que w_i est solution de l'inéquation variationnelle suivante :

$$\int_\Omega \nabla w_i(x).\nabla(v - w_i)(x)dx \geq 0 \qquad \forall v \in K_i.$$

Donc, en applicant encore une fois le lemme IV-3.3 dans le cas suivant :

$$\begin{aligned} o_1 &= \Psi^1_{\zeta_1,h_1} & o_1' &= \Psi^2_{\zeta_2,h_2'} \\ o_2 &= \Psi^1_{\zeta_1,h_1'} & o_2' &= \Psi^2_{\zeta_2,h_2} \\ E &= E_1, & E' &= E_2 \end{aligned}$$

on obtient, alors

$$|u_1 - u_2|_{L^\infty(\Omega)} \leq |\Psi^1_{\zeta_1,h_1} - \Psi^1_{\zeta_1,h_1'}|_{L^\infty(E_1)} + |\Psi^2_{\zeta_2,h_2'} - \Psi^2_{\zeta_2,h_2}|_{L^\infty,E_2}.$$

Et en applicant, enfin, le lemme IV-3.2, on obtient

$$|u_1 - u_2|_{L^\infty(\Omega)} \leq |h_1 - h_1'| + |h_2 - h_2'|.$$

■

Lemme IV – 3.5:—*La fonction*

$$\mathcal{F}: \quad (\zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2) \longmapsto \mathcal{F}(\zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2)$$

est localement lipschitzienne.

Démonstration:— Comme la fonction suivante

$$(\zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2) \longmapsto -G_1 h_1 - G_2 h_2$$

est affine, il suffit, alors, de montrer que la fonction suivante

$$\mathcal{D}: \quad (\zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2) \longmapsto \mathcal{D}(\zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_{\zeta_1,h_1,\zeta_2,h_2}(x)|^2 dx \qquad (IV-3.6)$$

est localement lipschitzienne. En effet, soient $(\zeta_i, \zeta_i') \in \Omega_{r_1} \times \Omega_{r_2}$, et soient $(h_i, h_i') \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$. Posons

$$\mathcal{J} = \mathcal{D}(\zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2) - \mathcal{D}(\zeta_1', h_1', \zeta_2', h_2')$$

et

$$\begin{aligned} u_1 &= u_{\zeta_1,h_1,\zeta_2,h_2} \\ u_2 &= u_{\zeta_1',h_1',\zeta_2',h_2'} \\ u &= u_{\zeta_1',h_1,\zeta_2',h_2} \end{aligned}$$

alors on a

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_1(x)|^2 - |\nabla u_2(x)|^2 dx \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u_1(x)|^2 - |\nabla u(x)|^2\right) + \left(|\nabla u(x)|^2 - |\nabla u_2(x)|^2\right) dx \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega \nabla(u_1 - u).\nabla(u_1 + u) dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \nabla(u - u_2).\nabla(u + u_2) dx \\ &= -\frac{1}{2}\int_\Omega (u_1 - u).\triangle(u_1 + u) dx - \frac{1}{2}\int_\Omega (u - u_2).\triangle(u + u_2) dx. \end{aligned}$$

En faisant appel au lemme IV-3.2, il vient

$$\begin{aligned}\mathcal{J} &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |u_1 - u|.|\triangle(u_1 + u)|dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |u - u_2|.|\triangle(u - u_2)|dx \\ &\leq C_1.|u_1 - u|_{L^\infty(\Omega)} + C_2.|u - u_2|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\leq C.\big(|\zeta_1 - \zeta_1'| + |\zeta_2 - \zeta_2'| + |h_1 - h_1'| + |h_2 - h_2'|\big)\end{aligned}$$ ■

pour $(\zeta_1', h_1', \zeta_2', h_2')$ proche de $(\zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2)$.

Remarque IV – 3.1— D'après le lemme IV-3.1. et le lemme IV-3.5. on déduit que le problème $(\mathcal{S})$ est équivalent au problème suivant qu'on notera encore $(\mathcal{S})$

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} \text{Trouver :} & \zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2 \\ \text{tels que :} & (\zeta_1, \zeta_2) \in \Omega_{r_1} \times \Omega_{r_2}, \quad h_1, h_2 \in [-b^*, b^*] \\ & (\zeta_1 - \zeta_2)^2 + (h_1 - h_2)^2 \geq (r_1 + r_2)^2 \\ \text{et} & \mathcal{F}(\zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2) = \inf_{\mathcal{W}''} \mathcal{F}(\zeta, h, \zeta', h') \end{cases}$$

où, b^* est un nombre positif assez grand. et

$$\mathcal{W}'' = \Big\{(\zeta, h, \zeta', h') \ : \ h, h' \in [-b^*, b^*],\ (\zeta, \zeta') \in \Omega_{r_1} \times \Omega_{r_2} :\ (\zeta - \zeta')^2 + (h - h')^2 \geq (r_1 - r_2)^2\Big\}$$

Lemme IV – 3.6:—*Si on pose,* $u = u_{\zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2}$. *alors on a*

$$\Psi^1_{\zeta_1, h_1}.\triangle\Psi^1_{\zeta_1, h_1} < 0 \quad \textit{dans} \quad \Lambda_1(u).$$

$$\Psi^2_{\zeta_2, h_2}.\triangle\Psi^2_{\zeta_2, h_2} < 0 \quad \textit{dans} \quad \Lambda_2(u).$$

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx = -\int_{\Lambda_1(u)} \Psi^1_{\zeta_1, h_1}.\triangle\Psi^1_{\zeta_1, h_1} dx - \int_{\Lambda_2(u)} \Psi^2_{\zeta_2, h_2}.\triangle\Psi^2_{\zeta_2, h_2} dx.$$

Démonstration:—Le premier et le deuxième point se déduisent du fait que Ψ^1 et Ψ^2 sont concaves.

Pour le troisième point on a,

$$(\zeta_1 - \zeta_2)^2 + (h_1 - h_2)^2 \geq (r_1 + r_2)^2$$

d'où,

$$\Lambda_1(u) \cap \Lambda_2(u) = \emptyset$$

et par suite,

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx &= -\int_\Omega u.\triangle u\, dx \\ &= -\int_{\Lambda_1(u)\cup\Lambda_2(u)} u.\triangle u\, dx - \int_{\Omega\setminus(\Lambda_1(u)\cup\Lambda_2(u))} u.\triangle u\, dx.\end{aligned}$$

Or, $\triangle u = 0$ p.p. dans $\Omega \setminus (\Lambda_1(u) \cup \Lambda_2(u))$, on a donc,

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx &= -\int_{\Lambda_1(u)} u.\triangle u\, dx - \int_{\Lambda_2(u)} u.\triangle u\, dx \\ &= -\int_{\Lambda_1(u)} \Psi^1_{\zeta_1,h_1}.\triangle \Psi^1_{\zeta_1,h_1} dx - \int_{\Lambda_2(u)} \Psi^2_{\zeta_2,h_2}.\triangle \Psi^2_{\zeta_2,h_2} dx \end{aligned}$$ ■

Lemme IV – 3.7:—*Soient* h_1, h_2 *fixés dans* $\mathbb{R}$. *si on pose*

$$\begin{aligned} u_{\zeta_1,\zeta_2} &= u_{\zeta_1,h_1,\zeta_2,h_2} \\ u_{\zeta_1',\zeta_2'} &= u_{\zeta_1',h_1,\zeta_2',h_2} \\ \Lambda_1(u_{\zeta_1,\zeta_2}) = \Lambda_1,&\quad \Lambda_2(u_{\zeta_1,\zeta_2}) = \Lambda_2, \\ \Lambda_1(u_{\zeta_1',\zeta_2'}) = \Lambda_1',&\quad \Lambda_2(u_{\zeta_1',\zeta_2'}) = \Lambda_2'. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi_{i(\zeta_1,\zeta_2)} &= \chi_{\Lambda_i} \\ \chi_{i(\zeta_1',\zeta_2')} &= \chi_{\Lambda_i'} \end{aligned}$$

$i = 1, 2$ *et où* χ_A *désigne la fonction caractéristique de l'ensemble* A. *alors, on a*

$$\chi_{i(\zeta_1',\zeta_2')} \rightharpoonup \chi_{i(\zeta_1,\zeta_2)}$$

dans $L^2(\Omega)$ *faible, quand* (ζ_1', ζ_2') *tend vers* (ζ_1, ζ_2).

Démonstration:— Soit $\{(\zeta_n^1, \zeta_n^2)\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\Omega_{r_1} \times \Omega_{r_2}$ qui converge vers (ζ_1, ζ_2), alors il existe $g_1, g_2 \in L^2(\Omega)$, et une sous suite de $\{(\zeta_n^1, \zeta_n^2)\}_{n\in\mathbb{N}}$ qu'on notera encore $\{(\zeta_n^1, \zeta_n^2)\}_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\chi_{i(\zeta_1,\zeta_2)} - \chi_{i(\zeta_n^1,\zeta_n^2)} \rightharpoonup g_i \quad \text{dans } L^2(\Omega).$$

car la suite $\{\chi_{i(\zeta_1,\zeta_2)} - \chi_{i(\zeta_n^1,\zeta_n^2)}\}$ est bornée dans $L^2(\Omega)$, qui est un espace réflexif. Il reste, donc, à montrer que

$$g_i = 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega$$

- $g_i = 0$ p.p. dans $\Omega \setminus \Lambda_i$. En effet, si $x \notin \Lambda_1$, on a alors

$$u_{\zeta_1,\zeta_2}(x) > \Psi^1_{\zeta_1,h_1}(x).$$

Or, pour n assez grand $|\zeta_n^1 - \zeta_1|$ et $|\zeta_n^2 - \zeta_2|$ sont assez petits, et par suite, d'après (IV-3.3) et (IV-3.4), on a

$$\begin{aligned} & u_{\zeta_n^1,\zeta_n^2}(x) > \Psi^1_{\zeta_n^1,h_1}(x) \\ \Longrightarrow \quad & \chi_1(\zeta_1,\zeta_2) - \chi_1(\zeta_n^1,\zeta_n^2) = 0 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad g_1 = 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega \setminus \Lambda_1.$$

On montre de la même façon, en échangeant les rôles des indices 1 et 2, que

$$g_2 = 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega \setminus \Lambda_2$$

•• $g_i \geq 0$ p.p. dans Λ_i. En effet, on a

$$\chi_{i(\zeta_1,\zeta_2)} - \chi_{i(\zeta_n^1,\zeta_n^2)} = 1 - \chi_{i(\zeta_n^1,\zeta_n^2)} \geq 0 \qquad \text{p.p. dans } \Lambda_i,$$

et l'ensemble

$$\{w \in L^2(\Lambda_i) \quad : \quad w(x) \geq 0 \quad \text{p.p. dans } \Lambda_i\}$$

est un ensemble convexe, fermé de $L^2(\Lambda_i)$ muni de la topologie forte, et par suite, c'est un ensemble fermé de $L^2(\Lambda_i)$ muni de la topologie faible (cf. [10]), ceci pour i=1,2. D'où,

$$g_1 \geq 0 \quad \text{p.p. dans } \Lambda_1$$

$$g_2 \geq 0 \quad \text{p.p. dans } \Lambda_2.$$

••• D'une part, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} = & \int_\Omega [\chi_{1(\zeta_1,\zeta_2)} - \chi_{1(\zeta_n^1,\zeta_n^2)}].\Psi^1_{\zeta_n^1,h_1}.\triangle\Psi^1_{\zeta_n^1,h_1}dx \\
& + \int_\Omega [\chi_{2(\zeta_1,\zeta_2)} - \chi_{2(\zeta_n^1,\zeta_n^2)}].\Psi^2_{\zeta_n^2,h_2}.\triangle\Psi^2_{\zeta_n^2,h_2}dx \\
\rightarrow & \int_\Omega g_1.\Psi^1_{\zeta_1,h_1}.\triangle\Psi^1_{\zeta_1,h_1}dx + \int_\Omega g_2.\Psi^2_{\zeta_2,h_2}.\triangle\Psi^2_{\zeta_2,h_2}dx \\
= & \int_{\Lambda_1} g_1.\Psi^1_{\zeta_1,h_1}.\triangle\Psi^1_{\zeta_1,h_1}dx + \int_{\Lambda_2} g_2.\Psi^2_{\zeta_2,h_2}.\triangle\Psi^2_{\zeta_2,h_2}dx.
\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} = & \int_\Omega \chi_{1(\zeta_1,\zeta_2)}.\Psi^1_{\zeta_n^1,h_1}.\triangle\Psi^1_{\zeta_n^1,h_1}dx + \int_\Omega \chi_{2(\zeta_1,\zeta_2)}.\Psi^2_{\zeta_n^2,h_2}.\triangle\Psi^2_{\zeta_n^2,h_2}dx \\
& - \int_{\Lambda_1(u_{\zeta_n^1,\zeta_n^2})} \Psi^1_{\zeta_n^1,h_1}.\triangle\Psi^1_{\zeta_n^1,h_1}dx - \int_{\Lambda_2(u_{\zeta_n^1,\zeta_n^2})} \Psi^2_{\zeta_n^2,h_2}.\triangle\Psi^2_{\zeta_n^2,h_2}dx.
\end{aligned}$$

Or, d'après le lemme IV-3.6. et (IV-3.6) on a,

$$-\int_{\Lambda_1(u_{\zeta_n^1,\zeta_n^2})} \Psi^1_{\zeta_n^1,h_1}.\triangle\Psi^1_{\zeta_n^1,h_1}dx - \int_{\Lambda_2(u_{\zeta_n^1,\zeta_n^2})} \Psi^2_{\zeta_n^2,h_2}.\triangle\Psi^2_{\zeta_n^2,h_2}dx = 2\mathcal{D}(\zeta_n^1,h_1,\zeta_n^2,h_2).$$

En faisant appel au lemme IV-3.5, il vient

$$\mathcal{D}(\zeta_n^1, h_1, \zeta_n^2, h_2) \quad \longrightarrow \quad \mathcal{D}(\zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2)$$

et par suite

$$\mathcal{I} \quad \longrightarrow \quad 0.$$

D'où, par unicité de la limite, on a

$$\int_{\Lambda_1} g_1.\Psi^1_{\zeta_1,h_1}.\triangle\Psi^1_{\zeta_1,h_1}dx + \int_{\Lambda_2} g_2.\Psi^2_{\zeta_2,h_2}.\triangle\Psi^2_{\zeta_2,h_2}dx = 0.$$

Comme $\Psi^i_{\zeta_i,h_i}.\triangle\Psi^i_{\zeta_i,h_i} < 0$ dans Λ_i (voir lemme IV-3.6), et le fait que $g_i \geq 0$ p.p. dans Λ_i, $i = 1, 2$, on déduit que

$$\int_{\Lambda_1} g_1.\Psi^1_{\zeta_1,h_1}.\triangle\Psi^1_{\zeta_1,h_1}dx \leq 0 \qquad \text{et} \qquad \int_{\Lambda_2} g_2.\Psi^2_{\zeta_2,h_2}.\triangle\Psi^2_{\zeta_2,h_2}dx \leq 0$$

d'où,

$$\int_{\Lambda_1} g_1.\Psi^1_{\zeta_1,h_1}.\triangle\Psi^1_{\zeta_1,h_1}dx = 0 \qquad \text{et} \qquad \int_{\Lambda_2} g_2.\Psi^2_{\zeta_2,h_2}.\triangle\Psi^2_{\zeta_2,h_2}dx = 0.$$

et donc, nécessairement

$$g_1 = 0 \quad \text{p.p. dans } \Lambda_1 \quad \text{et} \quad g_2 = 0 \quad \text{p.p. dans } \Lambda_2.$$

D'où, la conclusion

$$g_1 = 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega \quad \text{et} \quad g_2 = 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

■

Remarque IV – 3.2:—On déduit facilement du lemme IV-3.7 que

- si on fixe de plus ζ_1 dans Ω_{r_1}, et on laisse varier ζ_2, on a

$$\chi_{i(\zeta_2')} \quad \rightharpoonup \quad \chi_{i(\zeta_2)}$$

dans $L^2(\Omega)$ faible quand $\zeta_2' \longrightarrow \zeta_2$, où on a posé

$$\chi_{i(\zeta_2)} = \chi_{i(\zeta_1,\zeta_2)}$$

$$\chi_{i(\zeta_2')} = \chi_{i(\zeta_1,\zeta_2')}$$

- si on fixe de plus ζ_2 dans Ω_{r_2}, et on laisse varier ζ_1, on a

$$\chi_{i(\zeta_1')} \quad \rightharpoonup \quad \chi_{i(\zeta_1)}$$

dans $L^2(\Omega)$ faible quand $\zeta_1' \longrightarrow \zeta_1$, où on a posé

$$\chi_{i(\zeta_1)} = \chi_{i(\zeta_1,\zeta_2)}$$

$$\chi_{i(\zeta_1')} = \chi_{i(\zeta_1',\zeta_2)}.$$

□

Lemme IV – 3.8:—*Soit ν un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^2$, soient ζ_1, ζ_2 deux éléments de $\Omega_{r_1} \times \Omega_{r_2}$, et soient h_1, h_2 deux réels tels que $(\zeta_1 - \zeta_2)^2 + (h_1 - h_2)^2 > (r_1 + r_2)^2$. Si on note par*

$$\zeta_1' = \zeta_1 + \varepsilon\nu, \quad \zeta_2' = \zeta_2 + \varepsilon\nu,$$
$$u_{\zeta'} = u_{\zeta_1', h_1, \zeta_2', h_2},$$
$$u_\zeta = u_{\zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2},$$
$$\Psi^1 = \Psi^1_{\zeta_1, h} \quad et \quad \Psi^2 = \Psi^2_{\zeta_2, h},$$
$$\Lambda_i = \Lambda_i(u_\zeta)$$
$$\Lambda_i' = \Lambda_i(u_{\zeta'})$$
$$\mathcal{D}(\zeta_1, \zeta_2) = \mathcal{D}(\zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2),$$
$$\mathcal{D}(\zeta_1', \zeta_2') = \mathcal{D}(\zeta_1', h_1, \zeta_2', h_2).$$

$\mathcal{D}$ est définie dans (IV-3.6), alors, on a

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left(\mathcal{D}(\zeta_1', \zeta_2') - \mathcal{D}(\zeta_1, \zeta_2)\right) = -\int_{\Lambda_1} \frac{\partial \Psi^1}{\partial \nu_1} \triangle \Psi^1 dx - \int_{\Lambda_2} \frac{\partial \Psi^2}{\partial \nu_2} \triangle \Psi^2 dx. \qquad (IV - 3.7)$$

Démonstration:—On a,

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(\zeta_1', \zeta_2') - \mathcal{D}(\zeta_1, \zeta_2) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_{\zeta'}(x)|^2 - |\nabla u_\zeta(x)|^2 dx \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega \nabla(u_{\zeta'} - u_\zeta).\nabla(u_{\zeta'} + u_\zeta) dx \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega \nabla(u_{\zeta'} - u_\zeta).\nabla(2u_\zeta + (u_{\zeta'} - u_\zeta)) dx \\
&= -\int_\Omega (u_{\zeta'} - u_\zeta).\triangle u_\zeta dx - \frac{1}{2}\int_\Omega (u_{\zeta'} - u_\zeta).\triangle(u_{\zeta'} - u_\zeta) dx \\
&= \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2.
\end{aligned}$$

Rappelons que, d'après le théorème IV-2.1, on a, $\triangle u_\zeta = \triangle u_{\zeta'} = 0$ p.p. dans $\Omega \setminus (\Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \Lambda_1' \cup \Lambda_2')$ d'où,

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_2 &= -\frac{1}{2}\int_\Omega (u_{\zeta'} - u_\zeta).\triangle(u_{\zeta'} - u_\zeta) dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_{\Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \Lambda_1' \cup \Lambda_2'} (u_{\zeta'} - u_\zeta).\triangle(u_{\zeta'} - u_\zeta) dx.
\end{aligned}$$

En utilisant (IV-3.3) et (IV-3.4), on aura

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_2 \leq & \frac{1}{2}\int_{(\Lambda_1\cup\Lambda_1')\setminus(\Lambda_1\cap\Lambda_1')} |(u_{\zeta'}-u_\zeta).\triangle(u_{\zeta'}-u_\zeta)|dx \\
& + \frac{1}{2}\int_{(\Lambda_1\cap\Lambda_1')} |(\Psi^1_{\zeta_1'}-\Psi^1_{\zeta_1}).\triangle(\Psi^1_{\zeta_1'}-\Psi^1_{\zeta_1})|dx \\
& + \frac{1}{2}\int_{(\Lambda_2\cup\Lambda_2')\setminus(\Lambda_2\cap\Lambda_2')} |(u_{\zeta'}-u_\zeta).\triangle(u_{\zeta'}-u_\zeta)|dx \\
& + \frac{1}{2}\int_{(\Lambda_2\cap\Lambda_2')} |(\Psi^2_{\zeta_2'}-\Psi^2_{\zeta_2}).\triangle(\Psi^2_{\zeta_2'}-\Psi^2_{\zeta_2})|dx \\
\leq & C_1.\Big(|\zeta_1'-\zeta_1|+|\zeta_2'-\zeta_2|\Big).\Big(|(\Lambda_1\cup\Lambda_1')\setminus(\Lambda_1\cap\Lambda_1')|+|(\Lambda_2\cup\Lambda_2')\setminus(\Lambda_2\cap\Lambda_2')|\Big) \\
& + C_2.|\zeta_1'-\zeta_1|^2 + C_3.|\zeta_2'-\zeta_2|^2
\end{aligned}$$

où, C_1, C_2 et C_3 sont des constantes strictement positives. Comme

$$(\Lambda\cup\Lambda')\setminus(\Lambda\cap\Lambda') = (\Lambda\setminus\Lambda')\cup(\Lambda'\setminus\Lambda)$$

$$\chi_{A\setminus B} = \chi_A(1-\chi_B)$$

$$\chi_A.\chi_A = \chi_A$$

on a, alors

$$\begin{aligned}
|(\Lambda_i\cup\Lambda_i')\setminus(\Lambda_i\cap\Lambda_i')| &= |(\Lambda_i\setminus\Lambda_i')\cup(\Lambda_i'\setminus\Lambda_i)| \\
&= \int_{(\Lambda_i\setminus\Lambda_i')\cup(\Lambda_i'\setminus\Lambda_i)} dx \\
&= \int_\Omega \chi_{\Lambda_i\setminus\Lambda_i'}dx + \int_\Omega \chi_{\Lambda_i'\setminus\Lambda_i}dx \\
&= \int_\Omega \chi_{\Lambda_i}(1-\chi_{\Lambda_i'})dx + \int_\Omega \chi_{\Lambda_i'}(1-\chi_{\Lambda_i})dx \\
&\longrightarrow 0 \qquad (\text{quand } \varepsilon \longrightarrow 0)
\end{aligned}$$

ceci est vrai d'après le lemme IV-3.7. D'où,

$$\mathcal{T}_2 = o(\varepsilon).$$

Pour $\mathcal{T}_1$ on a,

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_1 &= -\int_\Omega (u_{\zeta'}-u_\zeta).\triangle u_\zeta dx \\
&= -\int_{\Lambda_1} (u_{\zeta'}-u_\zeta).\triangle u_\zeta dx - \int_{\Lambda_2} (u_{\zeta'}-u_\zeta).\triangle u_\zeta dx \\
&= \mathcal{T}_3 + \mathcal{T}_4,
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_3 &= -\int_{\Lambda_1}(u_{\zeta'}-u_\zeta).\triangle u_\zeta dx\\ &= -\int_{\Lambda_1}(\Psi^1_{\zeta'_1}-\Psi^1_{\zeta_1}).\triangle\Psi^1_{\zeta_1}dx+\int_{\Lambda_1}((\Psi^1_{\zeta'_1}-\Psi^1_{\zeta_1})-(u_{\zeta'}-u_\zeta)).\triangle\Psi^1_{\zeta_1}dx\\ &= \mathcal{T}_5+\mathcal{T}_6.\end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_6 &= \int_{\Lambda_1}((\Psi^1_{\zeta'_1}-\Psi^1_{\zeta_1})-(u_{\zeta'}-u_\zeta)).\triangle\Psi^1_{\zeta_1}dx\\ &= \int_{\Lambda_1\setminus\Lambda'_1}((\Psi^1_{\zeta'_1}-\Psi^1_{\zeta_1})-(u_{\zeta'}-u_\zeta)).\triangle\Psi^1_{\zeta_1}dx.\end{aligned}$$

car sur $\Lambda_1\cap\Lambda'_1$, on a $(\Psi^1_{\zeta'}-\Psi^1_{\zeta})-(u_{\zeta'}-u_\zeta)=0$. En faisant appel à (IV-3.3) et (IV-3.4), on a,

$$|\mathcal{T}_6|\leq C.\Big(|\zeta'_1-\zeta_1|+|\zeta'_2-\zeta_2|\Big).|\Lambda_1\setminus\Lambda'_1|.$$

Or, d'après, toujours, le lemme IV-3.7, on a

$$|\Lambda_1\setminus\Lambda'_1|=\textstyle\int_\Omega\chi_{\Lambda_1}(1-\chi_{\Lambda'_1})dx\quad\longrightarrow 0$$

quand $\varepsilon\longrightarrow 0$, et par suite

$$|\mathcal{T}_6|=o(\varepsilon).$$

Pour $\mathcal{T}_4$ on a

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_4 &= -\int_{\Lambda_2}(u_{\zeta'}-u_\zeta).\triangle u_\zeta dx\\ &= -\int_{\Lambda_2}(\Psi^2_{\zeta'_2}-\Psi^2_{\zeta_2}).\triangle\Psi^2_{\zeta_2}dx+\int_{\Lambda_2}((\Psi^2_{\zeta'_2}-\Psi^2_{\zeta_2})-(u_{\zeta'}-u_\zeta)).\triangle\Psi^2_{\zeta_2}dx\\ &= \mathcal{T}_7+\mathcal{T}_8.\end{aligned}$$

On montre de la même façon, comme pour $\mathcal{T}_6$, que

$$\mathcal{T}_8=o(\varepsilon).$$

Finalement, on a,

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\zeta'_1,\zeta'_2)-\mathcal{D}(\zeta_1,\zeta_2) &= \mathcal{T}_5+\mathcal{T}_7+o(\varepsilon)\\ &= -\int_{\Lambda_1}(\Psi^1_{\zeta'_1}-\Psi^1_{\zeta_1}).\triangle\Psi^1_{\zeta_1}dx\\ &\quad -\int_{\Lambda_2}(\Psi^2_{\zeta'_2}-\Psi^2_{\zeta_2}).\triangle\Psi^2_{\zeta_2}dx+o(\varepsilon).\end{aligned}$$

Et par suite, en divisant par ε et en passant à la limite, on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\big(\mathcal{D}(\zeta_1',\zeta_2')-\mathcal{D}(\zeta_1,\zeta_2)\big)=\lim_{\varepsilon\to 0}\Big[-\int_{\Lambda_1}\frac{\Psi^1_{\zeta_1'}-\Psi^1_{\zeta_1}}{\varepsilon}\triangle\Psi^1_{\zeta_1}dx$$
$$-\int_{\Lambda_2}\frac{\Psi^2_{\zeta_2'}-\Psi^2_{\zeta_2}}{\varepsilon}\triangle\Psi^2_{\zeta_2}dx-\frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}\Big].$$

En utilisant le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on peut passer la limite sous le signe intégral, on aura, donc

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\big(\mathcal{D}(\zeta_1',\zeta_2')-\mathcal{D}(\zeta_1,\zeta_2)\big)=-\int_{\Lambda_1}\frac{\partial\Psi^1}{\partial\nu}\triangle\Psi^1dx-\int_{\Lambda_2}\frac{\partial\Psi^2}{\partial\nu}\triangle\Psi^2dx$$

d'où, c.q.f.d. ■

Remarque IV – 3.3:— Soit ν un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^2$. On déduit du lemme IV-3.7 et du lemme IV-3.8 que

- Si on fixe h_1, h_2, ζ_2, et on laisse varier $\zeta_1=\zeta$, alors, on a,

$$\frac{\partial\mathcal{D}_1}{\partial\nu}(\zeta)=-\int_{\Lambda_1}\frac{\partial\Psi^1}{\partial\nu}(x)\triangle\Psi^1(x)dx \qquad (IV-3.8)$$

où, on a posé

$$\Lambda_1=\Lambda_1(u_{\zeta_1,h_1,\zeta_2,h_2})$$
$$\mathcal{D}_1(\zeta)=\mathcal{D}(\zeta,h_1,\zeta_2,h_2).$$

•• Si on fixe h_1, h_2, ζ_1, et on laisse varier $\zeta_2=\zeta$, alors, on a,

$$\frac{\partial\mathcal{D}_2}{\partial\nu}(\zeta)=-\int_{\Lambda_2}\frac{\partial\Psi^2}{\partial\nu}(x)\triangle\Psi^2(x)dx \qquad (IV-3.9)$$

où, on a posé

$$\Lambda_2=\Lambda_2(u_{\zeta_1,h_1,\zeta_2,h_2})$$
$$\mathcal{D}_2(\zeta)=\mathcal{D}(\zeta_1,h_1,\zeta,h_2).$$

D'où, la formule (IV-3.7) s'écrit

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\big(\mathcal{D}(\zeta_1',\zeta_2')-\mathcal{D}(\zeta_1,\zeta_2)\big)=\frac{\partial\mathcal{D}_1}{\partial\nu}(\zeta_1)+\frac{\partial\mathcal{D}_2}{\partial\nu}(\zeta_2).$$

□

Théorème IV – 3.1:—*Soit ν un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^2$, et soient (ζ_1, ζ_2) un élément de $\Omega_{r_1} \times \Omega_{r_2}$, $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$ tel que $(\zeta_1 - \zeta_2)^2 - (h_1 - h_2)^2 > (r_1 - r_2)^2$, R la symétrie axiale par rapport à l'axe $\mathcal{L}$, qui passe par ζ_1 et orthogonal à ν.*

$$\Omega_- = \{x \in \Omega : \langle x - \zeta_1, \nu \rangle < 0\}$$
$$\Omega_+ = \{x \in \Omega : \langle x - \zeta_1, \nu \rangle > 0\}$$
$$\Lambda_{1,-} = \Lambda_1 \cap \Omega_- \quad ; \quad \Lambda_{1,+} = \Lambda_1 \cap \Omega_-.$$

Si $h_1 > -r_1$ et

$$R(\Omega_-) \subsetneq \Omega_+ \tag{IV-3.10}$$

$$\Lambda_2(u) \cap \Omega_- = \emptyset \tag{IV-3.11}$$

on a, alors

$$\Lambda_{1,+} \subsetneq R(\Lambda_{1,-})$$

et

$$\frac{\partial D_1}{\partial \nu}(\zeta_1) < 0.$$

Démonstration:— On est dans le cas de figure suivant

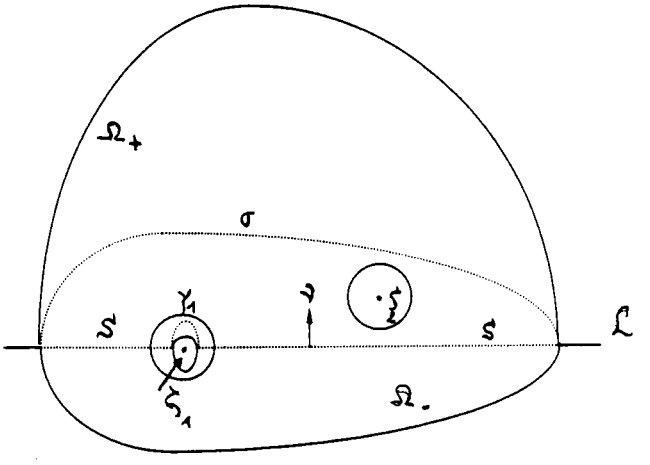

Figure 2

Dans $R(\Omega_-)$ on définit la fonction

$$Ru(x) = u(Rx)$$

et on considère dans E. défini comme suit

$$E = R(\Omega_-) \setminus R(\Lambda_{1,-})$$

la fonction $Ru - u$. Dans la figure ci-dessus E est la partie limitée par les lignes pointillées S, γ et σ.

Comme u est harmonique dans $\Omega_- \setminus \Lambda_{1,-}$, et le fait que l'opérateur Laplacien ($\triangle$) soit invariant par transformation euclidienne dans $\mathbb{R}^2$, on a alors

$$-\triangle(Ru - u) = \triangle u \leq 0 \qquad \text{dans } E$$

car $-\triangle u \geq 0$ dans Ω. Or $h_1 > -r_1$ implique que $\Psi^1 > 0$ sur un ensemble de mesure non nulle et comme on a aussi $\triangle u \leq 0$ dans Ω, et $u = 0$ sur Γ, on déduit, alors, d'après le principe du maximum que

$$u > 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

Sur la frontière ∂E de E on a

$$Ru - u = \begin{cases} 0 - u < 0 & \text{sur } \sigma. \\ \Psi^1 - u \leq 0 & \text{sur } \gamma. \\ u - u = 0 & \text{sur } S. \end{cases}$$

D'où,

$$Ru - u \leq 0 \qquad \text{sur } \partial E.$$

On a, alors, d'après le principe du maximum

$$Ru - u < 0 \qquad \text{dans } E. \tag{IV - 3.12}$$

en particulier,

$$\Lambda_{1,+} \subset R(\Lambda_{1,-}).$$

car sinon, $\exists x_0$ tel que

$$x_0 \in \Lambda_{1,+} \quad \text{et} \quad x_0 \notin R(\Lambda_{1,-}).$$

et par suite,

$$u(x_0) = \Psi^1(x_0) \quad \text{et} \quad Ru(x_0) = u(Rx_0) > \Psi^1(Rx_0) = \Psi^1(x_0)$$

et donc,

$$(Ru - u)(x_0) = u(Rx_0) - \Psi^1(x_0) > 0$$

ce qui contredit (IV-3.12).

Cette inclusion est stricte, car sinon $\Lambda_{1,+} = R(\Lambda_{1,-})$, et par suite $Ru - u = 0$ sur γ, et comme $\gamma = \partial\Lambda_{1,+} \cap \Omega_+$, alors, on a

$$\frac{\partial}{\partial n}\{Ru - u\} = 0 \qquad \text{sur } \gamma$$

où, n est la normale exterieure à γ. Mais cela contredit le principe du maximum de Hopf (voir [51]).

D'après la remarque IV-3.3, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{D}_1}{\partial \nu}(\zeta_1) &= -\int_{\Lambda_1} \frac{\partial \Psi^1}{\partial \nu}(x)\,\triangle\Psi^1(x)dx \\ &= -\int_{\Lambda_{1,-}} \frac{\partial \Psi^1}{\partial \nu}(x)\,\triangle\Psi^1(x)dx - \int_{R(\Lambda_{1,+})} \frac{\partial \Psi^1}{\partial \nu}(x)\,\triangle\Psi^1(x)dx \\ &\quad - \int_{\Lambda_{1,-}\setminus R(\Lambda_{1,+})} \frac{\partial \Psi^1}{\partial \nu}(x)\,\triangle\Psi^1(x)dx.\end{aligned}$$

Un calcul simple donne

$$\triangle\Psi^1(x) = -\frac{1}{\sqrt{r_1^2 - |x-\zeta_1|^2}} - \frac{r_1^2}{(r_1^2 - |x-\zeta_1|^2)^{3/2}} < 0$$

et

$$\frac{\partial \Psi^1}{\partial \nu}(x) = \frac{< x-\zeta_1, \nu >}{\sqrt{r_1^2 - |x-\zeta_1|^2}}$$

d'où,

$$\frac{\partial \Psi^1}{\partial \nu}(Rx) = -\frac{\partial \Psi^1}{\partial \nu}(x).$$

Il est clair, de voir que, $\triangle\Psi^1(x)$ et Ψ^1 sont radiales, d'où,

$$-\int_{\Lambda_{1,+}} \frac{\partial \Psi^1}{\partial \nu}(x)\,\triangle\Psi^1(x)dx = \int_{R(\Lambda_{1,+})} \frac{\partial \Psi^1}{\partial \nu}(x)\,\triangle\Psi^1(x)dx$$

et par suite,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{D}_1}{\partial \nu}(\zeta_1) &= -\int_{\Lambda_{1,-}\setminus R(\Lambda_{1,+})} \frac{\partial \Psi^1}{\partial \nu}(x)\,\triangle\Psi^1(x)dx \\ &< 0.\end{aligned}$$

Si $h_1 \leq -r_1$, cela entraine que $\Psi^1 \leq 0$ (car $\max \Psi^1 = h_1 + r_1$), et par suite $u = u_{\zeta_2,h_2}$, et donc $D_1 \equiv Constante$, et par conséquent $\frac{\partial D_1}{\partial \nu}(\zeta_1) \equiv 0$. ■

Remarque IV – 3.4:—En échangeant l'indice 1 par 2 dans le théorème IV-3.1, on a, sous des hypothèses analogues, le résultat suivant

$$\frac{\partial \mathcal{D}_2}{\partial \nu}(\zeta_2) < 0.$$

□

Théorème IV – 3.2:—*Soit ν un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^2$, et soient*

* *(ζ_1, ζ_2) un élément de $\Omega_{r_1} \times \Omega_{r_2}$ et h_1, h_2 deux réels tels que*
$(\zeta_1 - \zeta_2)^2 + (h_1 - h_2)^2 \geq (r_1 + r_2)^2$.
* *R la symétrie axiale par rapport à l'axe $\mathcal{L}$, qui passe par ζ_1 et ζ_2 et orthogonal à ν.*

$$\Omega_- = \{x \in \Omega : \langle x - \zeta_1, \nu\rangle < 0\} = \{x \in \Omega : \langle x - \zeta_2, \nu\rangle < 0\}.$$
$$\Omega_+ = \{x \in \Omega : \langle x - \zeta_1, \nu\rangle > 0\} = \{x \in \Omega : \langle x - \zeta_2, \nu\rangle > 0\}.$$
$$\Lambda_{1,-} = \Lambda_1 \cap \Omega_- \quad : \quad \Lambda_{1,+} = \Lambda_1 \cap \Omega_+.$$
$$\Lambda_{2,-} = \Lambda_2 \cap \Omega_- \quad : \quad \Lambda_{2,+} = \Lambda_2 \cap \Omega_+.$$

Si $h_1 > -r_1$ et/ou $h_2 > -r_2$ et si

$$R(\Omega_-) \subsetneq \Omega_+ \qquad (IV - 3.13)$$

alors,

$$\Lambda_{1,+} \subsetneq R(\Lambda_{1,-}) \quad et/ou \quad \Lambda_{2,+} \subsetneq R(\Lambda_{2,-})$$

et

$$\frac{\partial \mathcal{D}_1}{\partial \nu}(\zeta_1) < 0 \quad et/ou \quad \frac{\partial \mathcal{D}_2}{\partial \nu}(\zeta_2) < 0.$$

Démonstration:—On est dans le cas de figure suivant :

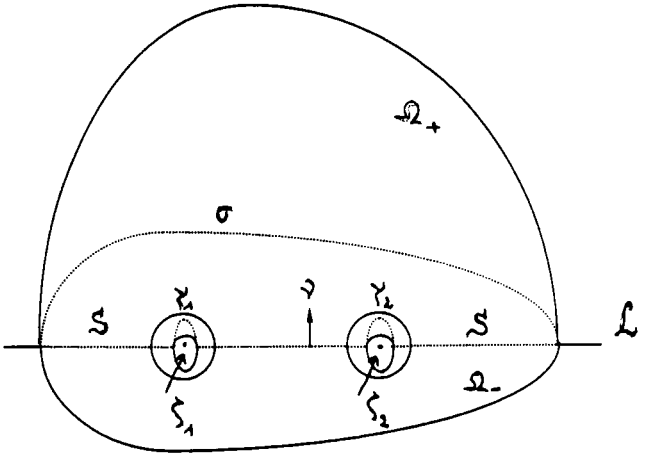

Figure 3

On reprend la démonstration du théorème IV-3.1, en remplaçant E par

$$E = R(\Omega_-) \setminus \left(R(\Lambda_{1,-}) \cup R(\Lambda_{2,-})\right)$$

dans ce cas on a (voir figure 3)

$$\partial E = S \cup \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \sigma.$$

On a, aussi

$$-\triangle(Ru-u)=\triangle u\leq 0 \qquad \text{dans } E$$

car

$$-\triangle u\geq 0 \quad \text{dans } \Omega$$

et

$$\triangle u=0 \quad \text{dans } \Omega\setminus(\Lambda_1\cup\Lambda_2).$$

Comme on suppose que $h_1>-r_1$ et/ou $h_2>-r_2$, par conséquent

$$\Psi^1>0 \quad \text{et/ou} \quad \Psi^2>0$$

sur un ensemble de mesure non nulle, et comme on a aussi $\triangle u\leq 0$ dans Ω, et $u=0$ sur Γ, d'où, d'après le principe du maximum on a

$$u>0 \quad \text{dans } \Omega.$$

Sur la frontière ∂E de E on a

$$Ru-u=\begin{cases}0-u<0 & \text{sur } \sigma,\\ \Psi^1-u\leq 0 & \text{sur } \gamma_1,\\ \Psi^2-u\leq 0 & \text{sur } \gamma_2,\\ u-u=0 & \text{sur } S.\end{cases}$$

d'où,

$$Ru-u\leq 0 \qquad \text{sur } \partial E.$$

On a, alors, d'après le principe du maximum

$$Ru-u<0 \qquad \text{dans } E.$$

en particulier,

$$\Lambda_{1,+}\subset R(\Lambda_{1,-}) \quad \text{et} \quad \Lambda_{2,+}\subset R(\Lambda_{2,-}).$$

On utilise, encore une fois, le principe du maximum de Hopf, on montre comme au théorème IV-3.1, qu'en fait, on a

$$\Lambda_{1,+}\subsetneq R(\Lambda_{1,-}) \quad \text{et/ou} \quad \Lambda_{2,+}\subsetneq R(\Lambda_{2,-}).$$

Rappelons que si $h_i\leq -r_i$ alors $\Psi^i_{\zeta_i,h_i}\leq 0$ et donc, $\Lambda_i=\emptyset$. Le même calcul utilisé dans la preuve du théorème IV-3.1 donne

$$\frac{\partial\mathcal{D}_1}{\partial\nu}(\zeta_1)=-\int_{\Lambda_{1,-}\setminus R(\Lambda_{1,+})}\frac{\partial\Psi^1}{\partial\nu}(x)\,\triangle\Psi^1(x)dx<0$$

et/ou

$$\frac{\partial\mathcal{D}_2}{\partial\nu}(\zeta_2)=-\int_{\Lambda_{2,-}\setminus R(\Lambda_{2,+})}\frac{\partial\Psi^2}{\partial\nu}(x)\,\triangle\Psi^2(x)dx<0.$$

Si $h_1 \leq -r_1$ et $h_2 \leq -r_2$, cela entraine que $\Psi^1 \leq 0$ et $\Psi^2 \leq 0$, et par suite $u = 0$, et donc, $\mathcal{D} \equiv 0$, et par conséquent $\frac{\partial \mathcal{D}_i}{\partial \nu}(\zeta_i) \equiv 0$ i=1,2. ■

Commentaire: — Le théorème IV-3.1 montre que si, par exemple, le centre de la première boule satisfait la condition (IV-3.10) et le centre de la seconde satisfait la condition (IV-3.11), alors l'énergie $\mathcal{D}$ décroit quand la première boule se "déplace" dans le sens du vecteur ν, alors que la seconde boule reste immobile, on peut expliquer ceci en utilisant la remarque IV-3.3. En effet, on a

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon}\big(\mathcal{D}(\zeta_1 + \varepsilon\ \nu, \zeta_2) - \mathcal{D}(\zeta_1, \zeta_2)\big) = \frac{\partial \mathcal{D}_1}{\partial \nu}(\zeta_1) < 0$$

d'où,

$$\mathcal{D}(\zeta_1 + \varepsilon\ \nu, \zeta_2) < \mathcal{D}(\zeta_1, \zeta_2)$$

pour ε positif, suffisamment petit.

Sous les hypothèses du théorème IV-3.2, l'énergie $\mathcal{D}$ décroit quand le centre de la première boule **et/ou** celui de la seconde boule se "déplacent" dans le sens du vecteur ν: en effet, on peut expliquer ceci en utilisant, encore une fois, la remarque IV-3.3, on a

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon}\big(\mathcal{D}(\zeta_1 + \varepsilon\ \nu, \zeta_2 + \varepsilon\ \nu) - \mathcal{D}(\zeta_1, \zeta_2)\big) = \frac{\partial \mathcal{D}_1}{\partial \nu}(\zeta_1) + \frac{\partial \mathcal{D}_2}{\partial \nu}(\zeta_2) < 0$$

d'où,

$$\mathcal{D}(\zeta_1 + \varepsilon.\nu, \zeta_2 + \varepsilon.\nu) < \mathcal{D}(\zeta_1, \zeta_2)$$

pour ε positif, suffisamment petit. Bien sûr, si on fixe l'une des deux boules on tombe dans le cas précédent de notre remarque.

Lemme IV – 3.9:—*Etant donné un* $(\zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2) \in \mathcal{W}'$ *alors, on a les deux assertions suivantes :*

i) Si $h_1 \leq -r_1$, *on a, alors,* $u = u_{\zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2} = u_{\zeta_2, h_2}$ *et* $u_{\zeta_1, h_1} = 0$.

ii) Si $h_2 \leq -r_2$, *on a, alors,* $u = u_{\zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2} = u_{\zeta_1, h_1}$ *et* $u_{\zeta_2, h_2} = 0$.

Démonstration:— Supposons, par exemple, que $h_1 \leq -r_1$ (le même raisonnement reste valable pour h_2). Dans ce cas, on a

$$\Psi^1_{\zeta_1, h_1} \leq 0$$

et par suite,

$$u_{\zeta_1,h_1} = 0.$$

Soit $u_2 = u_{\zeta_2,h_2}$. D'une part, on a d'après le principe du maximum

$$u_2 \geq 0.$$

et d'autre part, on a

$$u_2 \in K_{\zeta_2,h_2}.$$

ceci implique que

$$u_2 \in K_{\zeta_1,h_1,\zeta_2,h_2}.$$

Et comme

$$\int_\Omega |\nabla u_2(x)|^2 dx \leq \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx \qquad \forall v \in K_{\zeta_2,h_2}$$

car u_2 est la solution du problème $\mathcal{B}_{\zeta_2,h_2}$, et le fait que

$$K_{\zeta_1,h_1,\zeta_2,h_2} \subset K_{\zeta_2,h_2},$$

On déduit que u_2 est solution du problème $\mathcal{B}_{\zeta_1,h_1,\zeta_2,h_2}$. Or, cette dernière est unique et donc,

$$u_2 = u_{\zeta_1,h_1,\zeta_2,h_2}.$$

c.q.f.d. ■

Lemme IV – 4.1:—*Si ζ_1 ou ζ_2 satisfont les conditions du théorème IV-3.1. ou du théorème IV-3.2, alors pour tout $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$, $(u, \zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2)$ ne peut pas être une solution du problème $(\mathcal{S})$.*

Démonstration:

1^er cas: $h_1 \leq -r_1$ ou $h_2 \leq -r_2$.

Supposons par exemple que $h_1 \leq -r_1$, d'où, d'après le lemme IV-3.9 (en gardant les mêmes notations), on a

$$u = u_{\zeta_2,h_2} \quad \text{et} \quad u_{\zeta_1,h_1} = 0.$$

Or, si $(u, \zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2)$ est une solution du problème $(\mathcal{S})$ alors, pour tout ζ tel que $(\zeta - \zeta_2)^2 + (h_1 - h_2)^2 \geq (r_1 + r_2)^2$, on a

$$\mathcal{F}(\zeta, h_1, \zeta_2, h_2) = \mathcal{F}(\zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2).$$

Donc, en particulier Pour un ζ tel que $|\zeta - \zeta_2| \geq r_1 + r_2$, d'où

$$\mathcal{F}(\zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2) = \inf_{(h_1,h_2)\in\mathbb{R}} \mathcal{F}(\zeta, h_1, \zeta_2, h_2).$$

On doit avoir en $(\zeta, h_1, \zeta_2, h_2)$

$$\frac{\partial}{\partial h_1}\mathcal{F}(\zeta, h_1, \zeta_2, h_2) = 0.$$

C'est-à-dire

$$\frac{\partial}{\partial h_1}\left[\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx - G_1\ h_1 - G_2\ h'\right] = 0$$

d'où, on montre comme dans le lemme IV-3.8 que

$$\begin{aligned} G_1 &= -\int_{\Lambda_1} \frac{\partial \Psi^1}{\partial h}(x)\, \triangle\Psi^1(x) dx \\ &= -\int_{\Lambda_1} \triangle\Psi^1(x) dx \\ &\leq -\int_{\Lambda(u_{\zeta_1,h_1})} \triangle\Psi^1(x) dx \\ &= -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_{\zeta_1,h_1}}{\partial n} d\sigma \\ &= 0 \end{aligned}$$

ce qui contredit le fait que $G_1 > 0$.

<u>2ème cas</u> : $h_1 > -r_1$ et $h_2 > -r_2$.
Supposons, par exemple, que ζ_1 satisfasse les conditions du théorème IV-3.1, ou du théorème IV-3.2, alors, on a

$$\frac{\partial \mathcal{D}_1}{\partial \nu}(\zeta_1) < 0$$

et donc,

$$\mathcal{D}(\zeta_1 + \varepsilon\ \nu, \zeta_2) < \mathcal{D}(\zeta_1, \zeta_2)$$

pour ε positif, suffisamment petit. c.q.f.d. ■

<u>Lemme IV – 4.2</u>:—*Si* $(u, \zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2)$ *est une solution du problème* $(\mathcal{S})$, *alors, nécessairement*

$$h_1 > -r_1 \quad et \quad h_2 > -r_2$$

<u>Démonstration</u>:—Découle rapidement du $1^{er} cas$ de la démonstration du lemme IV-4.1.

<u>Remarque IV – 4.1</u>:—On déduit de ce dernier lemme que si

$$h_1 \leq -r_1 \quad \text{ou} \quad h_2 \leq -r_2$$

alors $\forall \zeta_1, \zeta_2$, $(u, \zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2)$ ne peut pas être une solution du problème $(\mathcal{S})$, autrement dit une solution de notre problème doit correspondre à deux boules qui poussent toutes les deux à la fois. □

Lemme IV – 4.3:—*Soient u et u_h les solutions respectives des problèmes suivants :*

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx = \min_{v\in K} \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx$$

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_h(x)|^2 dx = \min_{v\in K_h} \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx$$

où

$$K = \{v \in H_0^1(\Omega)/v(x) \geq \phi(x) \quad p.p.dans\, E\}$$

et

$$K_h = \{v \in H_0^1(\Omega)/v(x) \geq \phi(x) + h \quad p.p.dans\, E\}.$$

E est un ensemble mesurable, $\phi \in L^\infty(E)$ et $h > 0$. Alors on a

$$u_h \leq u + h.$$

Démonstration:—u et u_h vérifient respectivement

$$\int_\Omega \nabla u(x).\nabla(v-u)(x)dx \geq 0 \qquad v \in K$$

$$\int_\Omega \nabla u_h(x).\nabla(v-u_h)(x)dx \geq 0 \qquad v \in K_h.$$

Soit d'une part, $v = u_h - (u_h - (u+h))^+$

$$v = \begin{cases} u_h \geq \phi + h & \text{si } u_h \leq u + h. \\ u + h \geq \phi + h & \text{sinon.} \end{cases}$$

sur $\partial\Omega$ $v = (-h)^+ = 0$. D'où, $v \in K_h$. On déduit l'inégalité suivante :

$$\int_\Omega \nabla u_h(x).\nabla(u_h - (u+h))^+)(x)dx \leq 0.$$

Soit d'autre part $w = u + (u_h - (u+h))^- \geq o \quad p.p. dans E$ et sur $\partial\Omega$ $v = (-h)^- = 0$, d'où $v \in K$. On déduit donc l'inégalité suivante :

$$\int_\Omega -\nabla u(x).\nabla(u_h - (u+h))^-(x)dx \leq 0.$$

En additionnant les deux inégalités obtenues précédemment, on obtient

$$\int_\Omega \nabla(u_h - u)(x).\nabla(u_h - (u+h))^-(x)dx \leq 0.$$

c'est-à-dire $|\nabla(u_h - (u+h))^+| = 0$ p.p. dans Ω, d'où le résultat. □

Lemme IV – 4.4:—*Sous les hypothèses du lemme IV-4.3, on a*

$$\Lambda(u) \subsetneq \Lambda(u_h)$$

. *Démonstration*:—Soit $x \in \Lambda(u)$, donc $u(x) = \phi(x)$. Or,

$$\phi(x) + h \leq u_h(x) \leq \phi(x) + h.$$

D'où, $x \in \Lambda(u_h)$. Donc, $\Lambda(u) \subset \Lambda(u_h)$. Cette inclusion est stricte en effet. Supposons le contraire, dans ce cas on aura $\Lambda(u) = \Lambda(u_h)$ et sur $\Omega \setminus \Lambda(u)$, on a

$$\triangle(u) = \triangle(u_h) = 0$$

et donc $\triangle(u_h - u) = 0$. Or, $u_h \leq u + h$ p.p. dans Ω, c'est-à-dire que $u_h - u \leq h$ p.p. dans Ω.

Sur $\partial\Lambda$ $u_h - u = \phi + h - \phi = h$, donc, $u_h - u$ atteint son maximum sur $\partial\Lambda$.

Comme on a

$$u_h - u - h \equiv 0 \qquad \text{dans} \qquad \Lambda.$$

On déduit donc que

$$\frac{\partial(u_h - u - h)}{\partial n} \equiv 0 \qquad \text{dans} \qquad \Lambda.$$

où n est la normale extérieure à $\partial\Lambda$. Or ceci contredit le principe du maximum de Hopf. □

Lemme IV – 4.5:—*Si* $(u, \zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2)$ *est une solution du problème* $(\mathcal{S})$, *alors, nécessairement*

$$\Lambda_1(u) \neq \emptyset \qquad et \qquad \Lambda_2(u) \neq \emptyset.$$

Démonstration:—Supposons, sans perdre de généralité, $\Lambda_1 = \emptyset$ et $h_1 < h_2$.

1ère **cas**: $(\zeta_1 - \zeta_2)^2 + (h_1 - h_2)^2 > (r_1 + r_2)^2$: les deux boules ne sont pas collées.

Du fait que

$$\frac{\partial F}{\partial h_1} = -\int_{\Lambda_1} \triangle \Psi^1 dx - G = -G < 0.$$

On en déduit que $(u, \zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2)$ ne peut pas être une solution.

2ème **cas**: $(\zeta_1 - \zeta_2)^2 + (h_1 - h_2)^2 = (r_1 + r_2)^2$: les deux boules sont collées.

On pose $\zeta_2 - \zeta_1 = x\nu$ où ν est un vecteur unitaire et $x > 0$. On aura,

$$x^2 + (h_1 - h_2)^2 = (r_1 + r_2)^2.$$

En exprimant la fonction d'énergie $\mathcal{F}$ en fonction de x et en dérivant par rapport à cette variable on obtient :

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial h_1}.\frac{\partial h_1}{\partial x} + \nabla \mathcal{F}.\nabla_x \zeta_1 = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial h_1}.\frac{\partial h_1}{\partial x} = -G\frac{x}{\sqrt{(r_1 + r_2)^2 - x^2}} < 0,$$

et donc $(u, \zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2)$ ne peut pas être une solution. □

lemme IV – 4.6:—*Soient* $(\zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2) \in \mathcal{W}'$ *et* $u = u_{\zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2}$

* *Si* $h_1 + r_1 \leq h_2 + r_2$, *alors, on a*

$$\max_{x \in \bar{\Omega}} u(x) = \max_{x \in \bar{B}_r(\zeta_2)} \Psi^2(x) = u(\zeta_2) = \Psi^2(\zeta_2) = h_2 + r_2.$$

* *Si* $h_1 + r_1 \geq h_2 + r_2$, *alors, on a*

$$\max_{x \in \bar{\Omega}} u(x) = \max_{x \in \bar{B}_r(\zeta_1)} \Psi^1(x) = u(\zeta_1) = \Psi^1(\zeta_1) = h_1 + r_1.$$

Démonstration:—Montrons le premier cas, la preuve du deuxième est analogue au première. On a, d'après le théorème IV-2.1, u est continue, d'où,

$$\max_{x \in \bar{\Omega}} u \quad \text{existe.}$$

Posons ensuite $M = h_2 + r_2$, et soit

$$v = u - (u - M)^+ = M \wedge u.$$

Il est facile de voir que $v \in K_{\zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2}$ et par suite v vérifie l'inéquation suivante :

$$\int_\Omega \nabla u(x).\nabla(v - u)(x)dx \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad \int_\Omega \nabla u(x).\nabla(u-M)^-(x)dx \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad \int_\Omega \nabla(u-M)^+(x).\nabla(u-M)^-(x)dx \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad (u-M)^+ = 0 \qquad \text{p.p. dans } \Omega \qquad (IV-4.1)$$

$$\Rightarrow \quad u \leq M \qquad \text{p.p. dans } \Omega$$

et donc

$$\max_{x\in\bar{\Omega}} u(x) \leq M.$$

Car sinon, $\exists x_0 \in \bar{\Omega}$ tel que $u(x_0) > M$, et comme u est continue, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que

$$u(x) > M \qquad \forall\, x \in B_\varepsilon(x_0).$$

Or, ceci contredit (IV-4.1). Il reste à montrer que

$$M = \Psi^2(\zeta_2) \leq u(\zeta_2).$$

Supposons que non, c'est-à-dire

$$(u-\Psi^2)(\zeta_2) < 0.$$

Mais comme u est continue dans $\bar{\Omega}$ et Ψ^2 est analytique dans $B_{r-\varepsilon}(\zeta_2)$ pour un certain $\varepsilon > 0$, alors il existe un $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in B_\delta(\zeta_2), \quad (u-\Psi)(x) < 0$$

or celà contredit le fait que

$$u \geq \Psi^2 \qquad \text{p.p.} \quad \text{dans } B_{r_2}(\zeta_2).$$

c.q.f.d. ■

Remarque IV – 4.2:—On déduit de ce dernier lemme que

* Si $h_1 + r_1 \leq h_2 + r_2$, alors, $\zeta_2 \in \Lambda_2$

* Si $h_1 + r_1 \geq h_2 + r_2$, alors, $\zeta_1 \in \Lambda_1$. □

IV – 5. Un résultat d'unicité

Le problème $(\mathcal{S})$ relatif à un domaine quelconque n'admet pas, en général, une solution unique; si celle-ci existe. En effet, il suffit de prendre deux boules de même rayon et de même poids, dans ce cas si $(u_{\zeta_1,h_1,\zeta_2,h_2}, \zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2)$ est une solution de $(\mathcal{S})$ alors, $(u_{\zeta_2,h_2,\zeta_1,h_1}, \zeta_2, h_2, \zeta_1, h_1)$ est aussi une solution de ce problème.

Cependant on a le résultat d'unicité suivant : si $(\zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2)$ et $(\zeta_1, h'_1, \zeta_2, h'_2)$ sont solutions du problème $(\mathcal{S})$ tels que $|\zeta_1 - \zeta_2| \geq r_1 + r_2$, alors nécessairement, on a

$$(h_1, h_2) = (h'_1, h'_2).$$

En effet, pour ζ_1, ζ_2 fixés tels que $|\zeta_1 - \zeta_2| \geq r_1 + r_2$, on considère la fonction définie dans le lemme IV-3.1 par

$$\mathcal{F}(h_1, h_2) = \mathcal{F}(\zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_{h_1,h_2}(x)|^2 dx - G_1\, h_1 - G_2\, h_2.$$

On montre le résultat suivant :

Theorème IV – 5.1:—*La fonction,*

$$(h_1, h_2) \longmapsto \mathcal{F}(h_1, h_2)$$

est strictement convexe sur $[-r_1, +\infty[\times[-r_2, +\infty[$.

Démonstration:—Soient $h_1, h_2 \in [-r_1, \infty[$ et $l_1, l_2 \in [-r_2, \infty[$ tels que $(h_1, h_2) \neq (l_1, l_2)$, et soient $\lambda, \gamma \in (0, 1)$ tels que $\lambda + \gamma = 1$. Comme

$$u_{h_1,h_2} \in K_{\zeta_1,h_1,\zeta_2,h_2}$$
$$u_{l_1,l_2} \in K_{\zeta_1,l_1,\zeta_2,l_2}$$

on a, alors

$$u_{h_1,h_2} \geq h_1 + \sqrt{r_1^2 - |x-\zeta_1|^2}\,, \qquad \text{p.p. dans } B_{r_1}(\zeta_1)$$
$$u_{h_1,h_2} \geq h_2 + \sqrt{r_2^2 - |x-\zeta_2|^2}\,, \qquad \text{p.p. dans } B_{r_2}(\zeta_2)$$

et

$$u_{l_1,l_2} \geq l_1 + \sqrt{r_1^2 - |x-\zeta_1|^2}\,, \qquad \text{p.p. dans } B_{r_1}(\zeta_1)$$
$$u_{l_1,l_2} \geq l_2 + \sqrt{r_2^2 - |x-\zeta_2|^2}\,, \qquad \text{p.p. dans } B_{r_2}(\zeta_2).$$

Et comme $\lambda, \gamma > 0$, on a aussi

$$\lambda u_{h_1,h_2} \geq \lambda h_1 + \lambda\sqrt{r_1^2 - |x-\zeta_1|^2}\,, \qquad \text{p.p. dans } B_{r_1}(\zeta_1)$$

$$\lambda u_{h_1,h_2} \geq \lambda h_2 + \lambda\sqrt{r_2^2 - |x-\zeta_2|^2}\,. \qquad \text{p.p. dans } B_{r_2}(\zeta_2)$$

et

$$\gamma u_{l_1,l_2} \geq \gamma l_1 + \gamma\sqrt{r_1^2 - |x-\zeta_1|^2}\,. \qquad \text{p.p. dans } B_{r_1}(\zeta_1)$$
$$\gamma u_{l_1,l_2} \geq \gamma l_2 + \gamma\sqrt{r_2^2 - |x-\zeta_2|^2}\,. \qquad \text{p.p. dans } B_{r_2}(\zeta_2)$$

et par suite

$$\lambda\, u_{h_1,h_2} + \gamma\, u_{l_1,l_2} \geq (\lambda\, h_1 + \gamma\, l_1) + (\lambda+\gamma)\,\sqrt{r_1^2 - |x-\zeta_1|^2}. \qquad \text{p.p. dans } B_{r_1}(\zeta_1)$$
$$\lambda\, u_{h_1,h_2} + \gamma\, u_{l_1,l_2} \geq (\lambda\, h_1 + \gamma\, l_2) + (\lambda+\gamma)\,\sqrt{r_2^2 - |x-\zeta_2|^2}. \qquad \text{p.p. dans } B_{r_2}(\zeta_2).$$

Or, $\lambda + \gamma = 1$, d'où,

$$\lambda\, u_{h_1,h_2} + \gamma\, u_{l_1,l_2} \geq (\lambda\, h_1 + \gamma\, l_1) + \sqrt{r_1^2 - |x-\zeta_1|^2} = \Psi^1_{\zeta_1,\lambda\, h_1+\gamma\, l_1}(x). \quad \text{p.p. dans } B_{r_1}(\zeta_1)$$
$$\lambda\, u_{h_1,h_2} + \gamma\, u_{l_1,l_2} \geq (\lambda\, h_1 + \gamma\, l_2) + \sqrt{r_2^2 - |x-\zeta_2|^2} = \Psi^2_{\zeta_2,\lambda\, h_1+\gamma\, l_2}(x). \quad \text{p.p. dans } B_{r_2}(\zeta_2)$$

d'où,

$$\lambda\, u_{h_1,h_2} + \gamma\, u_{l_1,l_2} \in K_{\zeta_1,\lambda\, h_1+\gamma\, l_1,\zeta_2,\lambda\, h_1+\gamma\, l_2}.$$

Si on pose, ensuite $u = u_{\zeta_1,\lambda\, h_1+\gamma\, l_1,\zeta_2,\lambda\, h_1+\gamma\, l_2}$, alors, on a

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx \leq \int_\Omega |\nabla(\lambda u_{h^1,h^2} + \gamma u_{l^1,l^2})(x)|^2 dx$$

Or,

$$u \longmapsto \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx = \|u\|^2_{H^1_0(\Omega)}$$

est strictement convexe, et comme $u_{h_1,h_2} \neq u_{l_1,l_2}$, on en déduit alors, que

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx < \lambda \int_\Omega |\nabla u_{h_1,h_2}(x)|^2 dx + \gamma \int_\Omega |\nabla u_{l_1,l_2}(x)|^2 dx$$

c-à-d

$$\mathcal{F}(\lambda(h_1,h_2) + \gamma(l_1,l_2)) < \lambda\mathcal{F}(h_1,h_2) + \gamma\mathcal{F}(l_1,l_2)$$

c.q.f.d. ■

B—Problèmes Particuliers

IV – 6. Cas 1

Notre problème ici correspond à un domaine qui admet au moins deux axes de symétrie. Dans ce cas on montre qu'une solution du problème $(\mathcal{S})$ vérifie, en plus, la propriété suivante :

Théorème IV – 6.1—*Si $(u, \zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2)$ est une solution du problème $(\mathcal{S})$ pour un domaine qui admet au moins deux axes de symétrie alors, on a nécessairement*

$$(\zeta_1 - \zeta_2)^2 + (h_1 - h_2)^2 = (r_1 + r_2)^2. \qquad (IV - 6.1)$$

Démonstration:—Supposons que $(\zeta_1 - \zeta_2)^2 + (h_1 - h_2)^2 > (r_1 + r_2)^2$. On distingue deux cas

1er **cas** : $|\zeta_1 - \zeta_2| > r_1 + r_2$.
Le résultat découle facilement du théorème IV-3.1. En effet, si $(u, \zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2)$ est une solution du problème $(\mathcal{S})$ tel que

$$|\zeta_1 - \zeta_2| > r_1 + r_2.$$

alors ζ_1 et ζ_2 vérifient les conditions du théorème IV-3.1, et donc, en faisant des déplacements selon les directions des deux axes de symétries, on montre, d'après ce théorème, qu'il existe un (ζ_1', ζ_2') tel que

$$\mathcal{D}(\zeta_1', h_1, \zeta_2', h_2) < \mathcal{D}(\zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2)$$

or, ceci contredit le fait que $(u, \zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2)$ est une solution du problème $(\mathcal{S})$.

2ème **cas** : $|\zeta_1 - \zeta_2| \leq r_1 + r_2$, donc nécessairement $h_1 \neq h_2$.
Sans perdre de généralité, on peut supposer que $dist(\zeta_1, \partial\Omega) < dist(\zeta_2, \partial\Omega)$ et $h_1 < h_2$. Alors, il existe un $\varepsilon = 2|\zeta_1 - \zeta_2|$ et un vecteur unitaire $\nu = \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{|\zeta_1 - \zeta_2|}$ tels que

$$\mathcal{D}(\zeta_1 + \varepsilon\nu, h_1, \zeta_2, h_2) < \mathcal{D}(\zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2)$$

IV – 7. Cas 2

Le problème qu'on étudie ici est un cas particulier du second problème: on considère le problème $(\mathcal{S})$ pour le domaine suivant :

$$\Omega = B_R(O).$$

Dans ce cas une solution du problème $(\mathcal{S})$ vérifie, de plus, les propriétés suivantes :

Théorème IV – 7.1—*Si* $(u, \zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2)$ *est une solution du problème* $(\mathcal{S})$ *relatif à un domaine* $B_R(O)$, *alors, on a les deux assertions suivantes :*

1. $(\zeta_1 - \zeta_2)^2 + (h_1 - h_2)^2 = (r_1 + r_2)^2$.

2. ζ_1 *et* ζ_2 *appartienent tous les deux à un même axe qui passe par* O.

Démonstration:

1. $B_R(O)$ est un domaine qui admet comme axe de symétrie toute droite qui passe par O, et donc, d'après le théorème IV-6.1, on déduit le résultat voulu.

2. Supposons, par exemple, que ζ_2 n'appartienne pas à l'axe qui passe par ζ_1 et O, on est donc, dans le cas de figure suivant

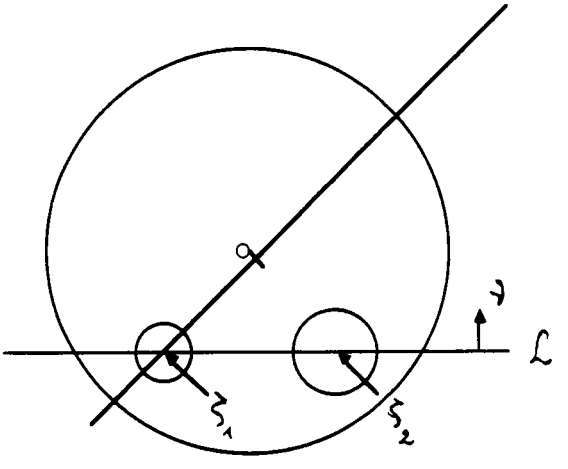

Figure 4

On considère l'axe $\mathcal{L}$ qui passe par ζ_1 et ζ_2, et soit ν le vecteur unitaire orthogonal à cet axe et qui pointe vers l'intérieur du disque $B_R(O)$ (voir figure 4). On voit donc, que

ζ_1 et ζ_2 vérifient les conditions du théorème IV-3.2. et par suite, $(\zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2)$ ne peut pas être une solution du problème $(\mathcal{S})$. Or ceci contredit l'hypothèse. ■

IV – 8. Cas 3

On considère de nouveau le problème $(\mathcal{S})$ relatif à un domaine $B_R(O)$, mais cette fois-ci dans le cas particulier suivant :

$$r_1 = r_2 = r$$

$$G_1 = G_2 = G.$$

On montre dans ce cas les théorèmes suivants :

Théorème IV – 8.1:—*Soient* ζ_1, ζ_2, h *tels que* ζ_1, ζ_2 *appartiennent à un même axe* l *qui passe par* O *et*

$$|\zeta_1 - \zeta_2| = 2r, \quad h > -r$$

et soient,

$I = \bar{B}_r(\zeta_1) \cap \bar{B}_r(\zeta_2)$.
L : *l'axe qui passe par* I *et orthogonal à* l,
ν *le vecteur unitaire colinéaire à* l, *qui pointe vers* O,
R *la symétrie axiale par rapport à* l,

$$u = u_{\zeta_1, h, \zeta_2, h},$$
$$\Omega_- = \{x \in \Omega : \langle x - I, \nu \rangle < 0\}.$$
$$\Omega_+ = \{x \in \Omega : \langle x - I, \nu \rangle > 0\}.$$

Si

$$R(\Omega_-) \subsetneq \Omega_+ \qquad (IV - 8.1)$$

alors,

$$R(\Lambda_1) \supsetneq \Lambda_2.$$

Démonstration:—Remarquons tout d'abord que Ψ^1 et Ψ^2 prennent les mêmes valeurs quand x décrit respectivement $B_r(\zeta_1)$ et $B_r(\zeta_2)$ de même pour $\triangle\Psi^1$ et $\triangle\Psi^2$.

On est dans le cas de figure suivant :

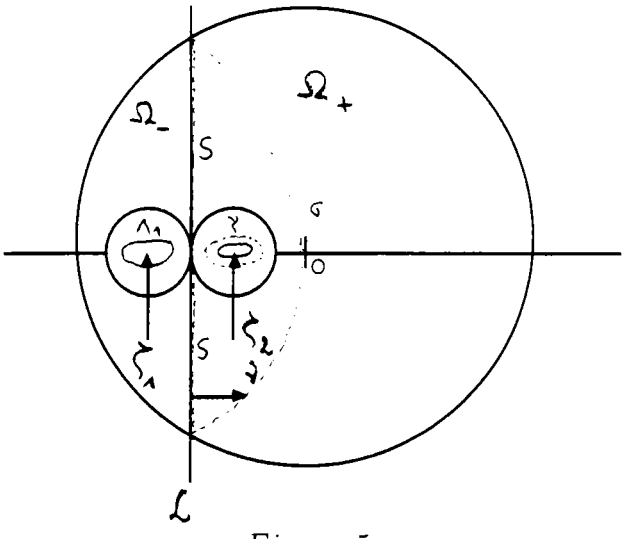

Figure 5

On emploie la même technique utilisée dans le théorème IV-3.1. Dans $R(\Omega_-)$ on définit la fonction

$$Ru(x) = u(Rx)$$

et on considère dans E, défini comme suit

$$E = R(\Omega_-) \setminus R(\Lambda_1)$$

la fonction $Ru - u$. Dans la figure ci-dessus, E est la partie limitée par les lignes pointillées S, γ et σ.

Comme u est harmonique dans $\Omega_- \setminus \Lambda_1$, et le fait que l'opérateur Laplacien $(-\triangle)$ soit invariant par transformation eucludienne dans $\mathbb{R}^2$, on a alors

$$-\triangle(Ru - u) = \triangle u \leq 0 \qquad \text{dans } E$$

car $-\triangle u \geq 0$ dans Ω.

Or $h > -r$ implique que

$$\Psi^1 > 0 \text{ et } \Psi^2 > 0$$

sur un ensemble de mesure non nulle et comme on a aussi $\triangle u \leq 0$ dans Ω, et $u = 0$ sur Γ, on déduit, alors, d'après le principe du maximum que

$$u > 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

Sur la frontière ∂E de E, on a

$$(Ru - u)(x) = \begin{cases} 0 - u(x) < 0 & \text{sur } \sigma. \\ \Psi^1(Rx) - u(x) = \Psi^2(x) - u(x) \leq 0 & \text{sur } \gamma. \\ u - u = 0 & \text{sur } S. \end{cases}$$

d'où,

$$Ru - u \leq 0 \qquad \text{sur } \partial E$$

et donc, d'après le principe du maximum

$$Ru - u < 0 \qquad \text{dans } E. \tag{IV-8.2}$$

En particulier

$$\Lambda_2 \subset R(\Lambda_1).$$

car sinon, $\exists x_0$ tel que

$$x_0 \in \Lambda_2 \quad \text{et} \quad x_0 \notin R(\Lambda_1)$$

et par suite,

$$u(x_0) = \Psi^2(x_0) \quad \text{et} \quad Ru(x_0) = u(Rx_0) > \Psi^1(Rx_0) = \Psi^2(x_0)$$

et donc

$$(Ru - u)(x_0) = u(Rx_0) - \Psi^2(x_0) > 0.$$

Or ceci contredit (IV-8.2).

Cette inclusion est stricte, car sinon $R(\Lambda_1) = \Lambda_2$, et par suite $Ru - u = 0$ sur γ, et comme $\gamma = \partial R(\Lambda_1) \cap \Omega_+$, alors on a

$$\frac{\partial}{\partial n}\{Ru - u\} = 0 \qquad \text{sur } \gamma$$

où n est la normale exterieure à γ. On aboutit, donc, à une contradiction avec le principe du maximum de Hopf (voir [51]). ■

Théorème IV – 8.2:—*Si* $|\zeta_1 - \zeta_2| = 2r$, *et si* $(\zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2)$ *est une solution du problème* $(\mathcal{S})$, *alors, on a nécessairement*

$$-G = \int_{\Lambda_1} \triangle\Psi^1(x)dx = \int_{R(\Lambda_2)} \triangle\Psi^1(x)dx \tag{IV-8.3}$$

où R *est la symétrie axiale par rapport à la médiatrice du segment* $[\zeta_1, \zeta_2]$.

Démonstration:— Rappelons que d'après le théorème IV-7.1 Si $(u, \zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2)$ est une solution du problème $(\mathcal{S})$, alors on doit avoir en ce point les deux conditions suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial h}\Big[\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx - G\,h - G\,h'\Big] = 0.$$

or

$$\frac{\partial}{\partial h'}\left[\frac{1}{2}\int_{\Omega}|\nabla u(x)|^2dx - G\ h - G\ h'\right] = 0.$$

D'où

$$\begin{aligned} G &= -\int_{\Lambda_1}\frac{\partial\Psi^1}{\partial h}(x)\,\triangle\Psi^1(x)dx \\ &= -\int_{\Lambda_1}\triangle\Psi^1(x)dx \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} G &= -\int_{\Lambda_2}\frac{\partial\Psi^2}{\partial h}(x)\,\triangle\Psi^2(x)dx \\ &= -\int_{\Lambda_2}\triangle\Psi^2(x)dx \end{aligned}$$

et par suite,

$$-G = \int_{\Lambda_1}\triangle\Psi^1(x)dx = \int_{\Lambda_2}\triangle\Psi^2(x)dx.$$

Et comme la fonction $\triangle\Psi^i$ est radiale et strictement négative :

$$\triangle\Psi^i(x) = -\frac{1}{\sqrt{r^2-|x-\zeta_1|^2}} - \frac{r^2}{(r^2-|x-\zeta_1|^2)^{3/2}} < 0$$

on déduit

$$-G = \int_{\Lambda_1}\triangle\Psi^1(x)dx = \int_{R(\Lambda_2)}\triangle\Psi^1(x)dx. \ \blacksquare$$

Théorème IV – 8.3:—*Si* $(u,\zeta_1,h_1,\zeta_2,h_2)$ *est une solution du problème* $(\mathcal{S})$, *alors, on a les trois assertions suivantes :*

1. $(\zeta_1-\zeta_2)^2+(h_1-h_2)^2 = 4r^2$.

2. ζ_1 *et* ζ_2 *appartiennent tous les deux à un même axe qui passe par* O.

3. *Si on pose* $I = \bar{B}_r(\zeta_1)\cap\bar{B}_r(\zeta_2)$, *alors on a deux et seulement deux possibilités*

   a— $I = O$ *si et seulement si* $h_1 = h_2$

   b - $I \neq O$ *et* $\begin{cases} h_1 < h_2 & si\ |\zeta_1 - O| > |\zeta_2 - O|, \\ h_1 > h_2 & si\ |\zeta_1 - O| < |\zeta_2 - O|. \end{cases}$

Démonstration:—Les assertions 1 et 2 découlent du théorème IV-7.1.

3. a Supposons que $I = O$ c'est-à-dire que $|\zeta_1 - O| = |\zeta_2 - O|$. Par raison de symétrie du domaine $B_R(O)$, on montre facilement que $(\zeta_1, h_2, \zeta_2, h_1)$ est aussi une solution du problème $(\mathcal{S})$. Et donc, d'après le théorème IV-5.1, on déduit que

$$(\zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2) = (\zeta_1, h_2, \zeta_2, h_1)$$

et par suite,

$$h_1 = h_2.$$

réciproquement, si on suppose maintenant que $h_1 = h_2$ alors nécessairement $I = O$. En effet, supposons que $I \neq O$, dans ce cas les conditions du théorème IV-8.1 sont vérifiées, et donc,

$$R(\Lambda_1) \supsetneq \Lambda_2.$$

Or, d'après le théorème IV-8.2, si $(\zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2)$ est une solution du problème $(\mathcal{S})$, alors, on a

$$\int_{\Lambda_1} \triangle \Psi^1(x)dx = \int_{R(\Lambda_2)} \triangle \Psi^1(x)dx$$

On aboutit donc, à une contradiction.

b On suppose $I \neq O$ et $|\zeta_1 - O| > |\zeta_2 - O|$ on montre alors, que $h_1 < h_2$. En effet, si on suppose le contraire c'est-à-dire $h_1 \geq h_2$ on montre, dans ce cas, que le résultat du théorème IV-8.1 est encore vrai i.e.

$$R(\Lambda_1) \supsetneq \Lambda_2.$$

En effet, en respectant les même notations de ce théorème on a

$$-\triangle(Ru - u) = \triangle u \leq 0 \qquad \text{dans } E$$

Sur la frontière ∂E de E, on a

$$(Ru - u)(x) = \begin{cases} 0 - u(x) < 0 & \text{sur } \sigma, \\ \Psi^1(Rx) - u(x) = h_1 - h_2 + \Psi^2(x) - u(x) \leq h_1 - h_2 & \text{sur } \gamma, \\ u - u = 0 & \text{sur } S. \end{cases}$$

d'où,

$$Ru - u \leq h_1 - h_2 \qquad \text{sur } \partial E$$

et donc, d'après le principe du maximum

$$Ru - u < h_1 - h_2 \qquad \text{dans } E.$$

En particulier

$$\Lambda_2 \subset R(\Lambda_1).$$

l'inclusion stricte se déduit du principe du maximum de Hopf. Ceci fait, on aboutit, comme dans a) à une contradiction, ce qui termine notre démonstration. ■

IV – 9. Cas 4

On considère le problème $(\mathcal{S})$ en remplaçant la condition $(\zeta_1 - \zeta_2)^2 + (h_1 - h_2)^2 \geq (r_1 - r_2)^2$, par $|\zeta_1 - \zeta_2| \geq 2r$ et $\Omega = B_R(O)$ par un domaine Ω_0 quelconque tel que

$$\bar{\Omega}_0 \subset \Omega \quad \text{et} \quad \mathcal{C} \subset \Omega_0$$

où, rappelons le

$$\mathcal{C} = \{\bar{x} \in \Omega \,:\, h(\bar{x}, \bar{x}) = \min_{x \in \Omega} h(x, x)$$

ensemble fini, plus précisement dans ce cas $\mathcal{C} = \{O\}$ (cf. chpIII), et h est la partie régulière de la fonction de Green relative à l'opérateur $(-\triangle)$ dans Ω

$$G(x, y) = \frac{1}{2\,\pi} \log \frac{1}{|x - y|} - h(x, y).$$

Aussi, on impose dans ce problème que l'une des deux boules soit contrainte de pousser au maximum la membrane jusqu'à la hauteur $h^* = r$ (en général jusqu'à une hauteur $h^*(r)$ fixée qui tend vers 0 quand r tend vers 0). Ici, on garde, toujours, l'hypothèse $G_1 = G_2 = G$ et $r_1 = r_2 = r$, où, r vérifie la condition suivante :

$$r < dist(\mathcal{C}, \partial\Omega_0)$$

Le problème est donc, le suivant :

$$(\mathcal{X}) \quad \begin{cases} \text{Trouver :} & \zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2 \\ \text{tels que :} & B_r(\zeta_1) \subset \bar{\Omega}_0, \quad B_r(\zeta_2) \subset \bar{\Omega}_0 \quad \text{et} \quad |\zeta_1 - \zeta_2| \geq 2r \\ & h_1 \in \mathbb{R} \\ & h_2 \in \,]-\infty, r] \\ \text{et} & \mathcal{F}(\zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2) = \inf_{y} \mathcal{F}(\zeta, h, \zeta', h') \end{cases}$$

où,

$$\mathcal{X} = \{(\zeta, h, \zeta', h') \ : \ B_r(\zeta) \subset \bar{\Omega}_0, \ B_r(\zeta') \subset \bar{\Omega}_0, \ |\zeta - \zeta'| \geq 2r, \ h \in \mathbb{R} \text{ et } h' \in]-\infty, r]\}.$$

Avant de donner le résulat principal de ce paragraphe, qui consiste à localiser les solutions de ce problème, signalons qu'on peut transformer le problème $(\mathcal{X})$ en un problème de minimisation d'une fonctionnelle continue sur un compact en utilisant le lemme IV-3.1. D'où, l'existence d'au moins une solution du problème $(\mathcal{X})$.

Théorème IV – 9.1:—*Pour toute solution* $(\zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2)$ *du problème* $(\mathcal{X})$, *on a*

$$dist(\zeta_1, \mathcal{C}) \leq C.\sqrt{r(\log \tfrac{1}{r} + 1)} \longrightarrow 0 \quad quand \quad r \to 0$$

$$dist(\zeta_2, \mathcal{C}) \leq C.\sqrt{r(\log \tfrac{1}{r} + 1)} + 2r \longrightarrow 0 \quad quand \quad r \to 0$$

où, $C > 0$.

Démonstration:—Pour montrer ce résultat on considère, encore une fois, le problème dans le cas d'une seule boule, en faisant appel à la formulation de [21] (cf. chapitre III, p:23); qu'on va rappeler ici : pour chaque ζ fixé on considère le problème auxiliaire suivant :

$$(\mathcal{P}_\zeta) \quad \begin{cases} \text{Trouver :} & (u, h) \in K_\zeta \\ \text{tel que :} & \xi(\zeta) = \inf\Big\{\xi(v, l) : (v, l) \in K_\zeta\Big\} = \xi(u, h) \end{cases}$$

où

$$K_\zeta = \Big\{(v, l) : l \in \mathbb{R}, \quad v \in H_0^1(\Omega), \quad v \geq \Psi_{\zeta, l} \quad \text{p.p. dans} \quad B_r(\zeta)\Big\}$$

$$\xi(v, l) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx - Gl.$$

Ce problème admet une solution unique qu'on notera (u_ζ, h_ζ) (cf. [21, thm 2.1]), on montre de plus que

$$h_\zeta > -r, \quad u_\zeta \geq 0, \quad u_\zeta \not\equiv 0.$$

On considère, ensuite, le problème suivant :

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} \text{Trouver :} & \zeta^* \in \Omega_r \\ \text{tel que :} & \xi(\zeta^*) = \inf\limits_{\zeta \in \Omega_r} \xi(\zeta). \end{cases}$$

Ceci fait, on montre (voir [21]) que pour r assez petit on a

$$\xi(\zeta) + \frac{G^2}{4\pi}\log\frac{1}{r} = \frac{G^2}{2}h(\zeta,\zeta) + O(r\log\frac{1}{r}). \qquad (IV-10.1)$$

Comme $\mathcal{C} = \{O\}$, on a

$$dist(\zeta_1, \mathcal{C}) = |\zeta_1 - O|.$$

On a, aussi d'après [13], le résultat suivant :

$$h(\zeta,\zeta) - h(O,O) \geq C.|\zeta - O|^2 \qquad (IV-10.2)$$

pour une certaine constante $C > 0$.

D'une part, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\zeta_1,h_1,\zeta_2,h_2) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_{\zeta_1,h_1,\zeta_2,h_2}(x)|^2 dx - G\ h_1 - G\ h_2 \\ &\geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_{\zeta_1,h_1}(x)|^2 dx - G\ h_1 - G\ h_2 \\ &\geq \xi(\zeta_1) - G\ h_2 \qquad (IV-10.3)\end{aligned}$$

car $(u_{\zeta_1,h_1}, h_1) \in K_{\zeta_1}$.

D'autre part, comme $(\zeta_1,h_1,\zeta_2,h_2)$ est une solution de $(\mathcal{X})$, alors on a,

$$0 \leq \mathcal{F}(\zeta,h,\zeta',h') - \mathcal{F}(\zeta_1,h_1,\zeta_2,h_2) \qquad \forall(\zeta,h,\zeta',h') \in \mathcal{A}^{(6)}. \qquad (IV-10.4)$$

D'où, pour un $(\zeta,h,\zeta',h') \in \mathcal{Y}$, tel que

$$\zeta = O,\ h = h_O,\ h' = -r \quad \text{et} \quad \zeta' \text{ quelconque.}$$

$(IV-10.4)$ devient

$$\begin{aligned}0 &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_{O,h_O}(x)|^2 dx - G\ h_O + G\ r - \mathcal{F}(\zeta_1,h_1,\zeta_2,h_2) \\ &\leq \xi(O) + G\ r - \xi(\zeta_1) + G\ h_2 \\ &\leq \xi(O) - \xi(\zeta_1) + 2G\ r \\ &= \frac{G^2}{2}(h(O,O) - h(\zeta_1,\zeta_1)) + O(r\log\frac{1}{r}) + 2G\ r \qquad (\text{cf. } IV-10.1) \\ &\leq -C.\frac{G^2}{2}|\zeta_1 - O|^2 + O(r\log\frac{1}{r}) + 2G\ r. \qquad (\text{cf. } IV-10.2)\end{aligned}$$

On conclut donc, que

$$|\zeta_1 - O| \leq C.\sqrt{r(\log\frac{1}{r} + 1)}.$$

Et comme on a vu dans le théorème IV-8.3. que $(\zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2)$ vérifie la propriété suivante

$$|\zeta_1 - \zeta_2| = 2r.$$

on déduit que

$$\begin{aligned} |\zeta_2 - O| &\leq |\zeta_1 - \zeta_2| + |\zeta_1 - O| \\ &\leq 2r + C.\sqrt{r(\log\frac{1}{r} + 1)}. \end{aligned}$$

c.q.f.d. ■

Remarque IV − 9.1:—On peut généraliser facilement le théorème IV-10.1. en remplaçant le domaine $B_R(O)$ par un domaine quelconque qui admet au moins deux axes de symétrie qui s'intersectent en un point O et en considérant le cas général suivant :

$$G_1 \neq G_2, \quad r_1 \neq r_2, \quad r_1, r_2 < dist(O, \partial\Omega_0).$$

En effet, on montre, alors que pour r_1, r_2 suffisamment petits, toute solution $(\zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2)$ du problème $(\mathcal{S})$ dans ce cas vérifie

$$\begin{aligned} |\zeta_1 - O| &\leq C.\sqrt{r_1 \log\frac{1}{r_1} + r_2} \\ |\zeta_2 - O| &\leq C.\sqrt{r_1 \log\frac{1}{r_1} + r_2} + r_1 + r_2. \end{aligned}$$

□

*

* *

* * *

CHAPITRE V

LE CAS

D'UN FIL ÉLASTIQUE

SUPPORTANT UN OU DEUX DISQUES RIGIDES

ON THE DEFORMATION OF AN ELASTIC WIRE BY ONE OR TWO HEAVY DISKS

A. Aissani [1]. **M. Chipot** [2]. **S. Fouad** [1]

[1] Département de Mathématiques. Université de Metz. Ile du Saulcy. F-57045 Metz cedex 01.
[2] Mathematisches Institut der Universität Zürich. Winterthurerstr 190. CH-8057 Zürich.

1. Introduction

We consider an elastic wire that in an undeformed configuration occupies the interval $\Omega = (0, 1)$. We suppose we let roll on it a disk of radius r and weight G. The disk will settle at some position that we would like to determine (see figure 1).

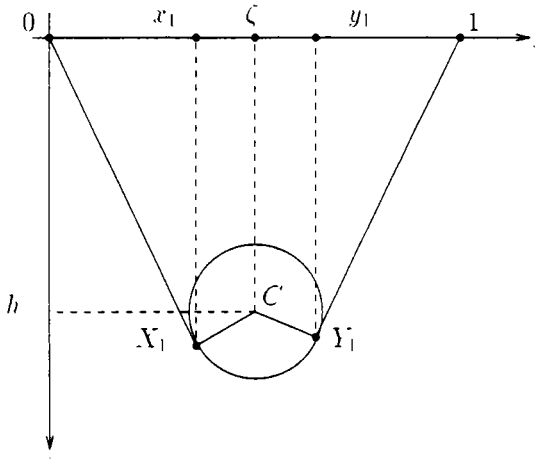

Figure 1

First we will assume that the disk can fit between the points 0, 1. In other words we will choose

$$0 < r < \frac{1}{2}. \tag{1.1}$$

Next, it is clear that the position of the disk is completely determined by the position of its center C that we will denote by

$$C = (\zeta, h). \tag{1.2}$$

For convenience we will choose coordinates axis such that h is pointing downward. Then,

an admissible deformation u of the wire is a function from Ω into $\mathbb{R}$ such that

$$u(0) = u(1) = 0. \tag{1.3}$$

and such that u is located above the heavy disk. In other words, if we denote by $v^{\zeta h}$ the function defined by

$$v^{\zeta h} = v(x) = h + \sqrt{r^2 - (x-\zeta)^2} \qquad \forall x \in B(\zeta, r) \tag{1.4}$$

where $B(\zeta, r)$ denotes the interval $(\zeta - r, \zeta + r)$ an admissible deformation is a function $u : \Omega \to \mathbb{R}$ satisfying (1.3) and such that

$$u(x) \geq v^{\zeta h}(x) \qquad \forall x \in B(\zeta, r). \tag{1.5}$$

A configuration corresponds to a choice of C, center of the disk, and to a choice of u. Then its energy is given by - we denote by u_x the derivative:

$$E(u; \zeta, h) = \frac{1}{2} \int_\Omega u_x^2(x) dx - Gh \tag{1.6}$$

where the integral part corresponds to the elastic energy stored in the wire and the second part to the potential energy of the system.

Clearly for (1.6) to make sense one can choose

$$u \in K(\zeta, h) = \{v \in H_0^1(\Omega) / \ v(x) \geq v^{\zeta h}(x) \ a.e \ x \in \Omega\}. \tag{1.7}$$

Assuming that the disk can take any position in the strip $(0, 1) \times \mathbb{R}$, the problem that we would like to address is to find if there exists a point $(u_0; \zeta_0, h_0)$ such that

$$\begin{cases} (\zeta_0, h_0) \in (r, 1-r) \times \mathbb{R}, \quad u_0 \in K(\zeta_0, h_0) \\ E(u_0; \zeta_0, h_0) \leq E(u; \zeta, h) \quad \forall (u; \zeta, h) \text{ such that} \\ \qquad (\zeta, h) \in (r, 1-r) \times \mathbb{R}, \quad u \in K(\zeta, h) \end{cases} \tag{1.8}$$

i.e minimizing E over all the possible configurations or positions of the disk.

Assuming that such a point (ζ_0, h_0) exists, u_0 will be such that

$$\begin{cases} u_0 \in K(\zeta_0, h_0), \\ E(u_0; \zeta_0, h_0) \leq E(u; \zeta_0, h_0) \quad \forall u \in K(\zeta_0, h_0) \ . \end{cases} \tag{1.9}$$

In other words u_0 will be the solution of the variational inequality

$$\begin{cases} u_0 \in K(\zeta_0, h_0), \\ \frac{1}{2} \int_\Omega u_{0x}^2(x) dx \leq \frac{1}{2} \int_\Omega u_x^2(x) dx \quad \forall u \in K(\zeta_0, h_0) \end{cases} \tag{1.10}$$

which can be also expressed (see [KS] or [C]) as

$$\begin{cases} u_0 \in K(\zeta_0, h_0), \\ \displaystyle\int_\Omega u_{0x}(v_x - u_{0x})(x)dx \geq 0 \quad \forall v \in K(\zeta_0, h_0). \end{cases} \tag{1.11}$$

This remark in mind for any $(\zeta, h) \in (r, 1-r) \times \mathbb{R}$ one can introduce $u = u(\zeta, h)$ the solution to

$$\begin{cases} u \in K(\zeta, h), \\ \displaystyle\int_\Omega u_x(v_x - u_x)(x)dx \geq 0 \quad \forall v \in K(\zeta, h). \end{cases} \tag{1.12}$$

Then, clearly, (1.8) is equivalent to

$$\begin{cases} \text{Find } (\zeta_0, h_0) \in (r, 1-r) \times \mathbb{R} \text{ minimizing} \\ F(\zeta, h) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega u_x^2(x)dx - Gh \text{ on } (r, 1-r) \times \mathbb{R} \quad (u = u(\zeta, h)). \end{cases} \tag{1.13}$$

Let us first note that one has

Proposition 1.1. *Let $(\zeta, h) \in (r, 1-r) \times \mathbb{R}$. The solution u to (1.12) is given by*

$$u = 0 \qquad if \qquad h \leq -r. \tag{1.14}$$

u = the curve drawn on figure 1 when $h > -r$ i.e - with the notation of this figure

$$u(x) = \begin{cases} xv_x(x_1) & for \quad x \in (0, x_1). \\ v(x) & for \quad x \in (x_1, y_1). \\ (x-1)v_x(y_1) & for \quad x \in (y_1, 1). \end{cases} \tag{1.15}$$

Proof. In the case where $h \leq -r$, $v \leq 0$ and $u = 0$ satisfies clearly (1.12).
In the case where $h > -r$ - i.e. when the disk touches the wire - it holds if u denotes the function in (1.15):

$$\int_0^1 u_x(v_x - u_x)(x)dx = v_x(x_1)\int_0^{x_1}(v_x - u_x)(x)dx + \int_{x_1}^{y_1} v_x(v_x - u_x)(x)dx$$

$$+v_x(y_1)\int_{y_1}^1 (v_x - u_x)(x)dx. \tag{1.16}$$

Integrating by part one has

$$\int_{x_1}^{y_1} v_x(x)(v_x - u_x)(x)dx = -\int_{x_1}^{y_1} v_{xx}(v - v)(x)dx + v_x(x)(v - v)(x)\Big|_{x_1}^{y_1}.$$

Reporting in (1.16) one obtains

$$\int_0^1 u_x(v_x - u_x)(x)dx = -\int_{x_1}^{y_1} v_{xx}(v - v)(x)dx \geq 0 \quad \forall v \in K(\zeta, h)$$

since clearly $v_{xx} \leq 0$, this completes the proof of the proposition.

Remark 1.1: The interval $[x_1, y_1]$ is called the coincidence set of the variational inequality (1.12) -i.e. this is the set where

$$u = v.$$

In the next section we will show that the problem (1.8) has a unique solution. Next we will consider the case of two disks rolling on a wire. Of course one can consider the case of balls rolling on an elastic membrane (see for instance [EF], [BC], [F]). However, the case of disks is more simple in the sense that everything can be computed almost explicitly. It provides also a nice application of the theory of variational inequalities and we hope it could open the way to the two dimensional case.

2. The case of one disk

Let for $(\zeta, h) \in (r, 1-r) \times \mathbb{R}$ consider the function F defined in (1.13). Then one has:

Proposition 2.1. *The function F is differentiable on $(r, 1-r) \times \mathbb{R}$ and it holds if $h > -r$*

$$\frac{\partial F}{\partial \zeta}(\zeta, h) = \frac{1}{2}\{v_x(y_1)^2 - v_x(x_1)^2\}, \quad \frac{\partial F}{\partial h}(\zeta, h) = v_x(x_1) - v_x(y_1) - G. \tag{2.1}$$

if $h \leq -r$

$$\frac{\partial F}{\partial \zeta}(\zeta, h) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial h}(\zeta, h) = -G. \tag{2.2}$$

Before to give the proof of the position let us establish the following lemma:

Lemma 2.1. *Assume that the center of the disk is located in (ζ, h) with $h > -r$ then it holds if (x_1, y_1) denotes the coincidence set (see figure 1)*

$$x_1 = x_1(\zeta, h) = \zeta - \frac{r^2\zeta + rh\sqrt{h^2 + \zeta^2 - r^2}}{h^2 + \zeta^2}. \tag{2.3}$$

$$y_1 = y_1(\zeta, h) = \zeta + \frac{r^2(1-\zeta) + rh\sqrt{h^2 + (1-\zeta)^2 - r^2}}{h^2 + (1-\zeta)^2}. \tag{2.4}$$

Proof. With the notation of the figure 1 using the orthogonality of OX_1, X_1C we get easily

$$x_1(x_1 - \zeta) + v(x_1)(v(x_1) - h) = 0.$$

This reads by (1.4)

$$x_1(x_1-\zeta)+\{h+\sqrt{r^2-(x_1-\zeta)^2}\}\sqrt{r^2-(x_1-\zeta)^2}=0.$$

i.e.

$$\zeta(x_1-\zeta)+r^2+h\sqrt{r^2-(x_1-\zeta)^2}=0.$$

Setting $X=\zeta-x_1$, we get squaring everything:

$$h^2(r^2-X^2)=(r^2-\zeta X)^2,$$

this leads since $X\geq 0$ easily to (2.3). the derivation of (2.4) is similar. Note that x_1, y_1 are differentiable in ζ, h.

□

Proof of the proposition 2.1. If $h\leq -r$ one has by (1.13), (1.14) $F=-Gh$ and (2.2) follows.

So, let us assume that $h>-r$, then - see figure 1 and (1.15) - one has

$$F(\zeta,h)=\frac{1}{2}x_1v_x^2(x_1)+\frac{1}{2}\int_{x_1}^{y_1}v_x^2(x)dx+\frac{1}{2}(1-y_1)v_x^2(y_1)-Gh. \tag{2.5}$$

where x_1, y_1 are given by the formulae (2.3), (2.4). Using the chain rule one has clearly with obvious notation for $x_{1\zeta}$, $y_{1\zeta}$:

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}(\frac{1}{2}\int_{x_1}^{y_1}v_x^2(x)dx)=-\frac{1}{2}v_x^2(x_1)x_{1\zeta}+\int_{x_1}^{y_1}v_xv_{x\zeta}(x)dx+\frac{1}{2}v_x^2(y_1)y_{1\zeta}.$$

Since

$$v_{x\zeta}=-v_{xx},$$

one obtains

$$A=\frac{\partial}{\partial\zeta}(\frac{1}{2}\int_{x_1}^{y_1}v_x^2(x)dx)=-\frac{1}{2}v_x^2(x_1)x_{1\zeta}+\frac{1}{2}v_x^2(x_1)-\frac{1}{2}v_x^2(y_1)+\frac{1}{2}v_x^2(y_1)y_{1\zeta}. \tag{2.6}$$

Differentiating (2.5) in ζ one gets

$$\frac{\partial F}{\partial\zeta}=\frac{1}{2}x_{1\zeta}v_x^2(x_1)+x_1v_x(x_1)\frac{\partial v_x(x_1)}{\partial\zeta}+A-\frac{1}{2}y_{1\zeta}v_x^2(y_1)+(1-y_1)v_x(y_1)\frac{\partial v_x(y_1)}{\partial\zeta}.$$

Using (2.6) it comes

$$\frac{\partial F}{\partial\zeta}(\zeta,h)=x_1v_x(x_1)\frac{\partial v_x(x_1)}{\partial\zeta}+(1-y_1)v_x(y_1)\frac{\partial v_x(y_1)}{\partial\zeta}+\frac{1}{2}v_x^2(x_1)-\frac{1}{2}v_x^2(y_1). \tag{2.7}$$

Differentiating the equality

$$x_1v_x(x_1)=v(x_1)$$

we obtain:

$$x_{1\zeta} v_x(x_1) + x_1 \frac{\partial v_x(x_1)}{\partial \zeta} = v_\zeta(x_1) + v_x(x_1) x_{1\zeta}.$$

hence

$$\frac{\partial v_x(x_1)}{\partial \zeta} = \frac{v_\zeta(x_1)}{x_1} = -\frac{v_x(x_1)}{x_1}. \tag{2.8}$$

Similarly, differentiating

$$-(1 - y_1) v_x(y_1) = v(y_1),$$

one gets

$$\frac{\partial v_x(y_1)}{\partial \zeta} = \frac{v_x(y_1)}{(1 - y_1)}. \tag{2.9}$$

Combining (2.7), (2.8), (2.9) the first equality of (2.1) follows.

To get the second one, one proceeds similarly. One has this time

$$B = \frac{\partial}{\partial h}(\frac{1}{2}\int_{x_1}^{y_1} v_x^2(x)dx) = -\frac{1}{2}v_x^2(x_1)x_{1h} + \int_{x_1}^{y_1} v_x v_{xh}(x)dx + \frac{1}{2}v_x^2(y_1)y_{1h}$$

$$= -\frac{1}{2}v_x^2(x_1)x_{1h} + \frac{1}{2}v_x^2(y_1)y_{1h}$$

since $v_{xh} = v_{hx} = 0$ - recall that $v_h = 1$.

Differentiating (2.5) with respect to h one has

$$\frac{\partial F}{\partial h}(\zeta, h) = \frac{1}{2}x_{1h}v_x^2(x_1) + x_1 v_x(x_1)\frac{\partial v_x(x_1)}{\partial h} + B - \frac{1}{2}y_{1h}v_x^2(y_1) + (1 - y_1)v_x(y_1)\frac{\partial v_x(y_1)}{\partial h} - G$$

$$= x_1 v_x(x_1)\frac{\partial v_x(x_1)}{\partial h} + (1 - y_1)v_x(y_1)\frac{\partial v_x(y_1)}{\partial h} - G$$

Proceeding as in (2.8), (2.9) one derives easily, recall that $v_h = 1$

$$\frac{\partial v_x(x_1)}{\partial h} = \frac{1}{x_1}, \quad \frac{\partial v_x(y_1)}{\partial h} = -\frac{1}{(1 - y_1)}$$

and the second equality of (2.1) follows. Note that all the above differentiations are justified easily. This completes the proof of proposition 2.1.

Then we can show:

Theorem 1.1. *Under the assumption (1.1) the problem (1.8) or (1.13) admits a unique solution, u_0 is given by (1.15) with*

$$\zeta = \frac{1}{2}, \quad h = \frac{G}{4} - r\sqrt{1 + \frac{G^2}{4}} \tag{2.10}$$

and x_1, y_1 given by (2.3), (2.4)

Proof. Suppose $h > -r$ fixed. Then, by (2.1) one has

$$\frac{\partial F}{\partial \zeta}(\zeta, h) < 0 \text{ for } \zeta < \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial F}{\partial \zeta}(\zeta, h) > 0 \text{ for } \zeta > \frac{1}{2}.$$

So, taking also (2.2) into account, for h fixed F admits a minimum for $\zeta = \frac{1}{2}$ and then

$$v_x(x_1) = -v_x(y_1).$$

Then, from (2.1) we get

$$\frac{\partial F}{\partial \zeta}(\frac{1}{2}, h) = 2v_x(x_1) - G$$

and $F(\frac{1}{2}, h)$ has a unique minimum when

$$v_x(x_1) = \frac{G}{2}.$$

If θ denotes the measure of the angle Ox, OX_1 one has

$$\tan\theta = \frac{G}{2}.$$

Hence, it follows easily that

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{G^2}{4}}}, \quad \sin\theta = \frac{G}{2\sqrt{1 + \frac{G^2}{4}}}.$$

and also

$$\zeta - x_1 = r\sin\theta, \quad \frac{Gx_1}{2} - h = r\cos\theta.$$

Taking $\zeta = \frac{1}{2}$ one derives that

$$x_1 = \frac{1}{2} - \frac{rG}{2\sqrt{1 + \frac{G^2}{4}}}, \quad h = \frac{G}{4} - r\sqrt{1 + \frac{G^2}{4}}.$$

This completes the proof of the theorem.

□

3. The case of two identical disks

We consider again a wire occupying in the underformed configuration the interval $\Omega = (0, 1)$. Then, we let roll on it two disks of the same radius r and the same weight G. We suppose that when a disk sits on the wire we can always fit another one i.e we will assume

$$r < \frac{1}{6}. \tag{3.1}$$

Then, we would like to determine the equilibrium position of these two disks. Intuitively one could expect them to stabilize in the middle of the wire at the same level. However, surprisingly, this is not the case when their weight is too large, this is what we would like to analyse now.

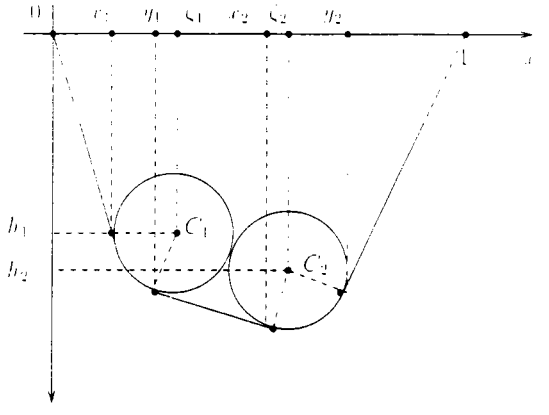

Figure 2

One will denote by

$$C_i = (\zeta_i, h_i) \qquad i = 1, 2 \tag{3.2}$$

the centers of the two disks. Moreover, we set for $i = 1, 2$

$$v^i = v^{\zeta_i h_i}(x) = h_i + \sqrt{r^2 - (x - \zeta_i)^2} \qquad \forall x \in B(\zeta_i, r). \tag{3.3}$$

Then, an admissible deformation is a function $u : \Omega \to \mathbb{R}$ such that

$$u(0) = u(1) = 0 \tag{3.4}$$

and

$$u(x) \geq v^i(x) \qquad \forall x \in B(\zeta_i, r),\ i = 1, 2. \tag{3.5}$$

A possible configuration is defined by (ζ_i, h_i), $i = 1, 2$ and an admissible deformation. Its energy is given by

$$E = E(u; \zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2) = \frac{1}{2} \int_\Omega u_x^2(x) dx - G h_1 - G h_2. \tag{3.6}$$

As in the case of one disk we will suppose that

$$\zeta_i \in (r, 1 - r),\ h_i \in \mathbb{R}. \tag{3.7}$$

However, in the new situation that we are investigating the two disks cannot penetrate each other and one thus must have

$$(\zeta_2 - \zeta_1)^2 + (h_2 - h_1)^2 \geq 4r^2. \tag{3.8}$$

We will denote by D_r the set

$$D_r = \{(\zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2)/ \ (3.7), \ (3.8) \ hold\} \tag{3.9}$$

and by $K(\zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2)$ the convex set defined by

$$K(\zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2) = \{u \in H_0^1(\Omega)/ \ u(x) \geq v^i(x) \ \ \forall x \in B(\zeta_i, r), i = 1, 2\}. \tag{3.10}$$

Then, the question we would like to adress is to find out if there exists a solution (u_0, ξ_0) of the problem:

$$\begin{cases} \xi_0 \in D_r, \ u_0 \in K(\xi_0) \\ E(u_0, \xi_0) \leq E(u, \xi) \quad \forall (u, \xi) \text{ such that } \xi \in D_r, \ u \in K(\xi). \end{cases} \tag{3.11}$$

Arguing as in the introduction for $\xi \in D_r$ one can introduce $u = u(\xi)$ the solution to the variational inequality

$$\begin{cases} u = u(\xi) \in K(\xi) \\ \displaystyle\int_\Omega u_x(v_x - u_x)(x)dx \geq 0 \quad \forall v \in K(\xi) \ . \end{cases} \tag{3.12}$$

Then, clearly, if (u_0, ξ_0) is solution to (3.11) one has necessarily

$$u_0 = u(\xi_0)$$

(see the introduction). Thus, setting

$$F(\xi) = E(u, \xi) = \frac{1}{2}\int_\Omega u_x^2(x)dx - Gh_1 - Gh_2, \tag{3.13}$$

where

$$u = u(\xi) = u(\zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2),$$

the problem (3.11) reduces to find a solution to

$$\begin{cases} \xi_0 \in D_r, \\ F(\xi_0) \leq F(\xi) \quad \forall \xi \in D_r. \end{cases} \tag{3.14}$$

So, we have to minimize F on D_r.

Remark 3.1. As in the case of one disk the set where we are minimizing F is not compact. So, even if F is continuous one cannot conclude directly to the existence of a minimum.

It is easy to show that $u(\xi)$ is obtained as in proposition one, that is to say its graph is obtained by drawing the tangent to the circles passing through 0, 1 and by drawing the tangent to both circles (see figure 2 and recall that when $u(x) \neq v^i(x)$ then $u_{xx} = 0$).

Let us first start by the following proposition:

Proposition 3.1. *Let us assume F given by (3.13) defined on $\mathbb{R}^4$ i.e. when the disks eventually interpenetrate each other. Then for $h_i \geq -r$ $i = 1, 2$, F is differentiable and with the notation of the figure 2 it holds:*

$$\frac{\partial F}{\partial \zeta_1} = \frac{1}{2}\{v_x^1(y_1)^2 - v_x^1(x_1)^2\}. \quad \frac{\partial F}{\partial \zeta_2} = \frac{1}{2}\{v_x^2(y_2)^2 - v_x^2(x_2)^2\}. \tag{3.15}$$

$$\frac{\partial F}{\partial h_1} = v_x^1(x_1) - v_x^1(y_1) - G. \quad \frac{\partial F}{\partial h_2} = v_x^2(x_2) - v_x^2(y_2) - G. \tag{3.16}$$

(Recall that v^i is given by (3.3)).

Proof. It is an easy adaptation of the proof of proposition 2.1. To convince briefly the reader let us give a short formal proof. Consider for instance the first formula (3.15). One has

$$F(\zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2) = \frac{1}{2}\int_\Omega u_x^2(x)dx - Gh_1 - Gh_2.$$

Differentiating in ζ_1 and assuming that one can differentiate under the integral it comes

$$\frac{\partial F}{\partial \zeta_1}(\zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2) = \int_\Omega u_x u_{x\zeta_1}(x)dx.$$

Since $u \equiv 0$ on the boundary of Ω one has also $u_{\zeta_1} = 0$ there. Thus integrating by parts it comes

$$\frac{\partial F}{\partial \zeta_1}(\zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2) = -\int_\Omega u_{xx}u_{\zeta_1}(x)dx = -\int_{x_1}^{y_1} v_{xx}^1 v_{\zeta_1}^1(x)dx$$

since $u_{xx} = 0$ outside of the coincidence set and $v_{\zeta_1}^2 = 0$.
Using the fact that

$$v_{\zeta_1}^1 = -v_x^1,$$

it comes

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial \zeta_1}(\zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2) &= \int_{x_1}^{y_1} v_{xx}^1 v_x^1 dx \\ &= \frac{1}{2}\{v_x^1(y_1)^2 - v_x^1(x_1)^2\}\end{aligned}$$

this complete the proof of the proposition

□

Let us then prove the following lemma:

lemma 3.1. *To minimize F on D_r one can restrict ourselves to the case where*

$$-r < h_i < C. \quad i = 1, 2 \tag{3.17}$$

C being some constant.

Proof. Suppose that $h_1, h_2 \leq -r$. Since the corresponding u vanishes one has

$$F(\zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2) = -Gh_1 - Gh_2 \geq 2rG. \tag{3.18}$$

Consider then the configuration where

$$h_1 = h_2 = h,\ \zeta_1 = \frac{1}{2} - r,\ \zeta_2 = \frac{1}{2} + r$$

i.e. the two disks are sitting at the same level in the middle of the wire. One has (see (3.16))

$$\frac{\partial}{\partial h} F(\frac{1}{2} - r, h, \frac{1}{2} + r, h) = (\frac{\partial F}{\partial h_1} + \frac{\partial F}{\partial h_2})(\frac{1}{2} - r, h, \frac{1}{2} + r, h)$$

$$= 2(v_x^1(x_1) - G)$$

(recall that $v_x^1(x_1) = -v_x^2(y_2)$, $v_x^1(y_1) = v_x^2(x_2) = 0$).

So, $F(\frac{1}{2} - r, h, \frac{1}{2} + r, h)$ has a strict minimum for $v_x^1(x_1) = G$ i.e. for a h such necessarily $h > -r$. For this h one has

$$F(\frac{1}{2} - r, h, \frac{1}{2} + r, h) < F(\frac{1}{2} - r, -r, \frac{1}{2} + r, -r) = 2Gr.$$

So, by (3.18) one can assume

$$h_1 > -r \quad or \quad h_2 > -r.$$

Suppose for instance

$$h_1 > -r$$

the case $h_2 > -r$ being similar. Suppose also without loss the generality that $\zeta_1 \leq \frac{1}{2}$. If $h_2 \leq -r$ then the second disk does not touch the wire but then, moving it on the right of the first disk until he touches the first disk and the wire (see figure 3) lowers its energy. We can thus assume that both h_1, h_2 are greater than $-r$.

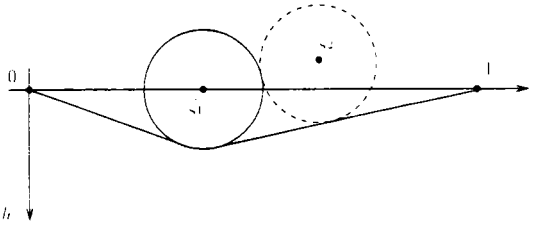

Figure 3

(Note that one can fit the second disk on the right of the first by (3.1)). Next, due to the Poincaré inequality, it holds

$$F(\zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2) = \frac{1}{2} \int_\Omega u_x^2(x) dx - Gh_1 - Gh_2$$

$$\geq \int_\Omega u^2(x)dx - Gh_1 - Gh_2$$

$$> 2rh_i^2 - Gh_1 - Gh_2, \quad i = 1, 2,$$

since $u(x) \geq v^i(x) > h_i$ on $B(\zeta_i, r)$.

This implies

$$F(\zeta_1, h_1, \zeta_2, h_2) \geq r(h_1^2 + h_2^2) - Gh_1 - Gh_2$$

and F goes to $+\infty$ when $h_1^2 + h_2^2$ does. This completes the proof of the lemma.

□

Then we have:

lemma 3.2. *To minimize F on D_r one can restrict ourselves to the case where (3.17) holds and to the case where the constraint (3.8) is saturated i.e to the case*

$$(\zeta_2 - \zeta_1)^2 + (h_2 - h_1)^2 = 4r^2. \tag{3.19}$$

Proof. Suppose that we are in the situation where (3.17) holds and where (3.19) is not saturated. Then, if one of the derivatives in (3.15), (3.16) does not vanish moving one disk or the other around will decrease the energy. Assuming all derivatives equal to 0 forces

$$v_x^1(x_1) = -v_x^2(y_2) = G = \pm\alpha$$

which is impossible. This completes the proof of the lemma.

□

Then we can prove:

Theorem 3.1. *Under the assumption (3.1) the problem (3.11) or (3.14) admits a solution.*

If $G \leq \sqrt{2}$, F admits two minima given by

$$\zeta_1 = \frac{1}{2} - r, \ \zeta_2 = \frac{1}{2} + r, \ h_1 = h_2 = G(\frac{1}{2} - r) - r\sqrt{1 + G^2} \tag{3.20}$$

$$\zeta_2 = \frac{1}{2} - r, \ \zeta_1 = \frac{1}{2} + r, \ h_1 = h_2 = G(\frac{1}{2} - r) - r\sqrt{1 + G^2} \tag{3.21}$$

this corresponds to the configuration of two disks sitting at the same level (see figure 5).

If $G > \sqrt{2}$, F admits four minima given by

$$\zeta_1 = \frac{1}{2} - \frac{r}{\sqrt{G^2 - 1}}\{1 + \frac{\sqrt{G^2 - 2}}{G}\}, \ \zeta_2 = \frac{1}{2} + \frac{r}{\sqrt{G^2 - 1}}\{1 - \frac{\sqrt{G^2 - 2}}{G}\} \tag{3.22}$$

$$h_1 = \frac{G}{2} - \frac{rG}{\sqrt{G^2 - 1}}\{1 + \frac{\sqrt{G^2 - 2}}{G}\} - r\sqrt{1 + G^2},$$

$$h_2 = \frac{G}{2} - \frac{rG}{\sqrt{G^2-1}}\{1 - \frac{\sqrt{G^2-2}}{G}\} - r\sqrt{1+G^2} \qquad (3.23)$$

and the points obtained by symetry along the axis $x = \frac{1}{2}$ *and exchanging the roles of* $\zeta_1, \zeta_2, h_1, h_2$ *(see figure 6).*
So, in this case the two disks do not remain at the same level and one has two possible symetric deformations of the wire

Proof. Consider two disks such that

$$h_1, h_2 \text{ are fixed.} \quad \zeta_2 = \zeta_1 + \delta$$

where δ is some constant and suppose that (3.17), (3.19) holds. One has

$$\frac{\partial}{\partial\zeta_1}F(\zeta_1, h_1, \zeta_1+\delta, h_2) = (\frac{\partial F}{\partial\zeta_1} + \frac{\partial F}{\partial\zeta_2})(\zeta_1, h_1, \zeta_1+\delta, h_2)$$

$$= \frac{1}{2}\{v_x^2(y_2)^2 - v_x^1(x_1)^2\}.$$

Thus, this function of ζ_1 admits a strict minimum when

$$v_x^2(y_2) = -v_x^1(x_1).$$

Thus for such a position of the disks it is enough to look for a minimum of F when the two disks are tangent to the straight lines

$$h = xv_x^1(x_1), \; h = -(x-1)v_x^1(x_1)$$

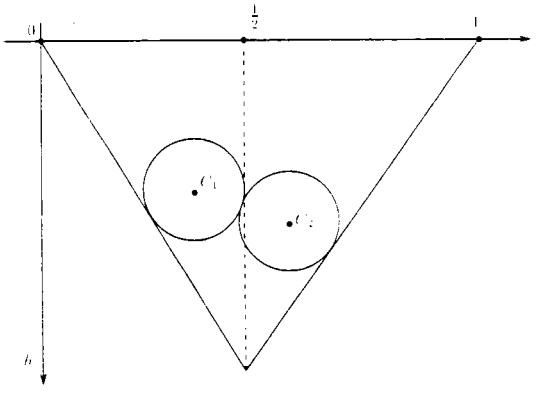

Figure 4

Assuming C_1 on the left of C_2 (see figure 4) this imposes to C_2 to be on the right of the line $x = \frac{1}{2}$ and C_1 on the left i.e this imposes

$$\zeta_1 + \delta \geq \frac{1}{2}, \; \zeta_2 - \delta \leq \frac{1}{2}$$

and thus since $\delta \leq 2r$

$$\zeta_1 \geq \frac{1}{2} - \delta > r, \quad \zeta_2 \leq \frac{1}{2} + \delta < 1 - r$$

(see 3.11). Let a, b be two numbers such that

$$r < a < \frac{1}{2} - \delta, \quad \frac{1}{2} + \delta < b < 1 - r.$$

It is clear from above that to minimize F on D_r it is enough to minimize it on the set of ζ_i, h_i satisfying (3.19) and

$$-r < h_i < C, \ a \leq \zeta_i \leq b, \quad i = 1, 2. \tag{3.24}$$

Thus one has to minimize F on a compact set. Now, clearly F is continuous on this set (even Lipschitz continuous thanks to the proposition 3.1 since the partial derivatives are uniformly bounded) and thus F admits a minimum. By what is above the minimum of F is achieved in the interior of the set defined by (3.24) thus minimizing F under the constraint (3.19) at a minimum there exists a lagrange multiplyer λ such that

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial \zeta_1} = \dfrac{1}{2}(\alpha^2 - v_x^1(x_1)^2) = 2\lambda(\zeta_1 - \zeta_2). \\ \dfrac{\partial F}{\partial \zeta_2} = \dfrac{1}{2}(v_x^2(y_2)^2 - \alpha^2) = -2\lambda(\zeta_1 - \zeta_2). \\ \dfrac{\partial F}{\partial h_1} = v_x^1(x_1) - \alpha - G = 2\lambda(h_1 - h_2). \\ \dfrac{\partial F}{\partial h_2} = \alpha - v_x^2(y_2) - G = -2\lambda(h_1 - h_2). \end{cases} \tag{3.25}$$

where we have set $\alpha = v_x^1(y_1) = v_x^2(x_2) = \dfrac{h_1 - h_2}{\zeta_1 - \zeta_2}$.

Adding the two first equations and the two last ones, one deduces easily

$$v_x^1(x_1) = -v_x^2(y_2) = G. \tag{3.26}$$

Thus one derives also reporting this in (3.25)

$$\frac{1}{2}(\alpha^2 - G^2) = -2\lambda(\zeta_2 - \zeta_1), \quad -\alpha = 2\lambda(h_1 - h_2).$$

Suppose $h_1 - h_2 \neq 0$. Then, since $\lambda = -\dfrac{\alpha}{2(h_1 - h_2)}$ one gets

$$\frac{1}{2}(\alpha^2 - G^2) = -1 \Longleftrightarrow \alpha^2 = G^2 - 2.$$

Since $\alpha \neq 0$ this is only possible when

$$\sqrt{2} < G. \tag{3.27}$$

Thus for $G \leq \sqrt{2}$ one has $h_1 = h_2$ and the two disks are tangent to the straigt line of slope G and $-G$.

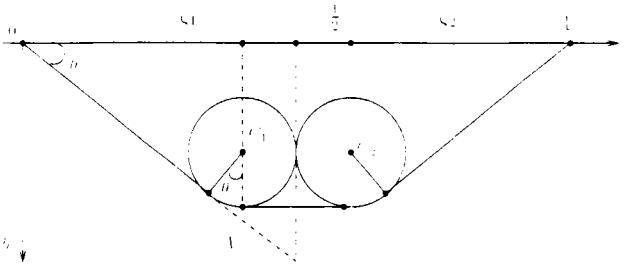

Figure 5

Since a minimum is known to exist this is the only possibility. Noting d the distance AC_1 (see figure 5), one has clearly

$$\zeta_1 = \frac{1}{2} - r, \quad \frac{r}{d} = \cos\theta, \quad \tan\theta = G, \quad \frac{h+d}{\zeta_1} = G. \tag{3.28}$$

Since $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1+G^2}}$ one derives easily (3.20), (3.21).

If now $G > \sqrt{2}$ one has

$$\alpha = \pm\sqrt{G^2 - 2}$$

and up to a symetry through the axis $x = \frac{1}{2}$ the position of the disks is given by the figure below:

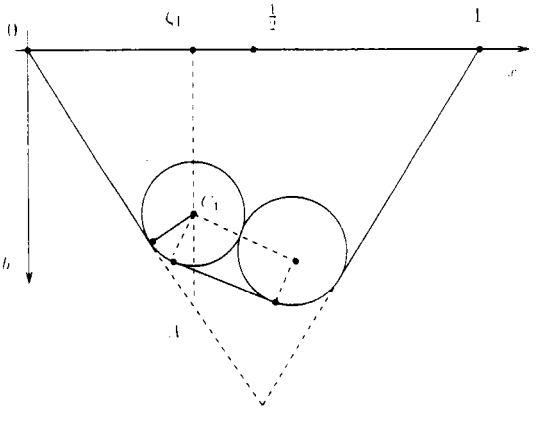

Figure 6

Setting $d = |C_1 A|$ and arguing as in (3.28) one derives easily

$$d = r\sqrt{1+G^2}, \quad h_1 = G\zeta_1 - r\sqrt{1+G^2}$$

$$h_2 = G(1-\zeta_2) - r\sqrt{1+G^2}, \quad h_1 - h_2 = \sqrt{G^2-2}(\zeta_1 - \zeta_2).$$

Noting θ' the angles such that: $\tan\theta' = \sqrt{G^2 - 2} = o$ one has

$$\zeta_2 - \zeta_1 = 2r\cos\theta' = \frac{2r}{\sqrt{G^2 - 1}}.$$

It is then not difficult to derive (3.22), (3.23).

ACKNOWLEDGEMENT

The work of the second author has been supported by the Swiss National Science Foundation under the contract :21 – 49278.96.

REFERENCES

[A] A. Aissani: Thesis. University of Metz - in preparation.

[BC] J. Bemelmans - M. Chipot: On a variational problem for an elastic membrane supporting a heavy bal. Cal. Var 3, 1995, p 447-473.

[C] M. Chipot: Variational inequalities and fluid flows in porous media. Applied Math Sciences Series :52 Springer Verlag, 1984.

[EF] C. M. Elliott - A. Friedman: The contact set of a rigid body partially supported by a membrane. Nonlin. Anal. 10, 1986, p 251-276.

[KS] D. Kinderlehrer - G. Stampacchia: An introduction to variational inequalities and their applications. Acad. Press, 1980.

[F] S. Fouad: Thesis. University of Metz, 1999.

*

* *

* * *

QUELQUES QUESTIONS OUVERTES

• *Dans le chapitre I, nous pensons que le problème $\mathcal{P}$ peut être généraliser en prenant les ζ dans Ω tout en entier au lieu de Ω_r.*

• *Dans le cas d'un domaine convexe qui admet un seul axe de symétrie, nous avons localiser (cf. III-5-a) la solution du problème $\mathcal{P}$. Nous pensons qu'on a unicité de la solution et en général ce résultat est vrai pour tout domaine convexe.*

• *Dans III-4-d, on a montré que 0 est un extremum relatif d'énergie. On pense que c'est un maximum local d'énergie.*

• *Dans le cas du problème à deux boules en dimension deux le problème d'existence reste ouvert. Nous pensons que les résultats obtenus dans le cas de deux disques en dimension 1 peut être généraliser dans ce cas.*

*

* *

* * *

BIBLIOGRAPHIE

[1] Ahlfors, L.: *Conformal Invariants. Topics in Geometric Function Theory.* McGraw-Hill, New York, 1973.

[2] Aissani, A., Chipot, M. & Fouad, S. : *On the deformation of an elastic wire by one or two heavy disks. To appear.*

[3] Andersson, B. J.: *On two-dimensional vortex motion in simply connected region.* Transactions of the Royal Institute of Technology, Stockholm, (Division of Applied Hydromechanics), Nr. 126, 1958(4 pp.).

[4] Bandle, C. & Flucher, M.: *Harmonic radius and concentration of energy, hyperbolic radius and Liouville's equation* $\triangle u = e^u$ *and* $\triangle u = u^{\frac{(n+2)}{(n-2)}}$. *preprint.*

[5] Baiocchi, C. & Capelo, A.: *Disequazioni variazionali e quasi variazionali. Applicazioni a problemi di frontiera libera vol. I, II,* Quaderni dell'U. Mat. Ital., Pitagora, Bologna, 1978. English transl. J. Wiley, Chichester-New York, 1984.

[6] Bemelmans, J. & Chipot, M.: *On a variational problem for an elastic membrane supporting a heavy ball. Calculus of variations and PDE,*

[7] Bensoussan, A., & Lions, J. L.: *Application des Inéquations Variationnelles en contrôle stochastique,* Dunod, Paris, 1978; English transl., North-Holland, Amsterdam, 1982.

[8] Berger, M.S. & Fraenkel, L.F.: *Nonlinear desingularization in certain free boundary problems,* Communs Math. Phys, 77, 149 -172, 1980.

[9] Brézis, H.: *Problème unilatéraux.* J. Math. Pures Apl. 51, 1 - 168, 1972.

[10] ——: *Analyse Fonctionnelle Théorie et Application,* Masson, 1983.

[11] Brézis, H. & Kinderlehrer, D.: The smoothness of solutions to nonlinear variational inequalities. Indiana Univ. Math. J. 23, 831 - 844, 1974.

[12] Caffarelli, L.A.: A remark on the Hausdorff Measure of a Free Boundary and the Convergence of Coincidence Sets. Boll. U.M.I. 18.A (5), 109 - 113, 1981.

[13] Caffarelli, L. A. & Friedman, A.: Convexity of solutions of semilinear elliptic equations. Duke Math. J. 52, 431 - 457, 1985.

[14] ——: Asymptotic estimates for the plasma problem. Duke Math. J 47, 705 - 742, 1980.

[15] Chipot, M.: Variational Inequalities And Flow In Porous Media. Springer Verlag, Berlin and New York, 1984.

[16] Cocker, A. D., Friedman, A. & Mcleod, B.: A variational inequality associated with liquid on a soap film. Arch. Rational Mech. Anal. 93, 15 - 44, 1986.

[17] Demkowicz, L. & Oden, J.T.: On some existence and uniqueness results in contact problems with nonlocal friction, Nonlinear Analysis 6, 1075 - 1093, 1982.

[18] Duren, P.: Univalent Functions. Springer verlag, New York, 1983.

[19] Duvaut, G.: Problèmes de contact entre corps solides deformables (Edited by P. Germain and B. Nayroles). Lecture Notes in Mathematics 503, 317 - 327. Springer, Berlin, 1976.

[20] ——: Problème mathématiques de la mécanique-équilibre d'un solide élastique avec contact unilateral et frottement de Coulomb. C.r. hebd. séanc. Acad. Sci. Paris 290, 263 - 265, 1980.

[21] Elliott, C.M. & Friedman, A.: The contact set of a rigid body partially supported by a membrane. Nonln. Anal.10, 251 - 276, 1986.

[22] Friedman, A.: Variational Principles and Free Boundary Problems. New York, 1982.

[23] Folland, Gerald, B: Introduction To Partial Differential Equations. Princeton University Press (1976).

[24] Gilbarg, D. & Trudinger, N.S.: Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Springer Verlag, Berlin, 1977.

[25] Gustaffson, B.: On the convexity of a solution of Liouville's equation. Duke Math. J. 60, 303 - 311, 1990.

[26] Gustaffson. B.: On the motion of a vortex in two dimensional flow of an ideal fluid in simply and multiply connected domains. Departement of Mathematics. Royal Institute of Technology. Stockholm. Sweden. TRITA-MAT -1979 - 7. 1979.

[27] Hadamard. J.: La théorie des Équations aux Dérivée Partielles. Editions Scientifiques. Pekin. 1964.

[28] Haegi. H. R.: Extremal probleme und Ungleichungen konformer Gebeitsgrösson. Compositio Mathematica 8. 81-111. 1951.

[29] Kawohl. B: When are solutions to nonlinear elliptic boundary value problems convex ? comm. P.D.E. 10. 1213 - 1225. 1985.

[30] ——: Rearrangements and Convexity of Level sets in PDE. Lecture Notes in Mathematics 1150. Springer Verlag, Berlin Heidelberg. 1985.

[31] Keer. L. M. & Millar. G. R.: Contact between elastically supported circular plate and a rigid indenter. Int. J. Engng Sci. 21. 681 - 690. 1983.

[32] Kinderlehrer. D.: How a minimal surface leaves an obstacle. Acta Math. 130. 221 - 242. 1973.

[33] ——: The coincidence set of solution of certain variational inequalities. Arch. Rational Mech. Anal., 40. 231 - 250, 1971.

[34] ——:The Regularity of the solution to a certain variational inequality. Proc. Symp. Pure and Appl. Math.. 23 AMS. Providence RI.

[35] Kinderlehrer. D. & Stampacchia, G.: An introduction to Variational Inequalities and their Applications. New York. 1980.

[36] Kinnington. A.: An improved convexity maximum principle and some applications. Thesis. Adelaide, Feb. 1984.

[37] Lewy. H. & Stampacchia. G.: On the regularity of the solution of a variational inequality. Communs pure appl. Math. 22. 153 - 188. 1969.

[38] ——:On the existence and smoothness of solutions of some noncoercive variational inequalities. Arch. Rational Mech. Anal. 41. 141 - 253. 1971.

[39] Lewy. H.: On the boundary behavior of minimal surfaces. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 37. 103 - 110, 1951.

[40] ——: On minimal surfaces with partly free boundary. Pure App. Math.. 4. 1 - 13. 1951.

[41] Lin. C. C.: *On the Motion of Vortices in Two Dimensions*. The University of Toronto Press. Toronto. 1943.

[42] Lions. J.L.: *Quelques Méthodes de résolution des Problèmes aux limites non linéaires*. Dunod. Paris. 1969.

[43] ——: *Sur quelques questions d'Analyse. de Mécanique et de contrôle Optimal*. Press Univ. Montreal. 1976.

[44] Lions. J.L. & Stampacchia. G.: Variational Inequalities. Comm. Pure Appl. Math. 20. 493 - 515. 1967.

[45] L. M. Milne-Thomson: *Theoretical Hydrodynamics*. MacMillan. London. 1938.

[46] Nehari. Z.: *Conformal Mapping*. Mc Graw-Hill. New York. 1952.

[47] Nitsche. J. C. C.: The boundary behavior of minimal surfaces. Invent. Math.. 8. 313 - 333. 1969.

[48] ——: On new results in the theory of minimal surfaces. Bull. Amer. Math. Soc.. 71. 195 - 270. 1965.

[49] Oden. J. T. & Kikuchi. N.: *Contact problems in elasticity*. TTCOM Report 79-8. The University of Texas at Austin. 1979.

[50] Richardson. S.: Vortices. Liouville's equation and the Bergman kernel function. Mathematica 27. 321 - 334. 1980.

[51] Rodrigues. J.F.: *Obstacle Problems in Mathematical Physics*. North Holland. Amsterdam. 1987.

[52] Sario. L. & Oikawa. K.: *Capacity Functions*. Springer Verlag. Berlin. 1969.

[53] Trimble. S. Y.: A coefficient inequality for convex univalent functions. Proc. Amer. Math. Soc 48. 266 - 267. 1975.