HAL
open science

Cohomologies et déformations de certaines algèbres de Lie Z-graduées

Faouzi Ammar

▶ **To cite this version:**

Faouzi Ammar. Cohomologies et déformations de certaines algèbres de Lie Z-graduées. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paul Verlaine - Metz, 1990. Français. NNT : 1990METZ003S . tel-01775852

HAL Id: tel-01775852

https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01775852

Submitted on 24 Apr 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE LORRAINE

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

UNIVERSITE DE METZ
U E R MATHEMATIQUES
INFORMATIQUE ET MECANIQUE

COHOMOLOGIES ET DEFORMATIONS DE CERTAINES ALGEBRES DE LIE $\mathbb{Z}$ – GRADUEES

THESE

Presentée par :

Faouzi AMMAR

Pour l'obtention du grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE METZ

en MATHEMATIQUES

UNIVERSITE DE METZ BIBLIOTHEQUE

Devant la Commission d'Examen :

Didier ARNAL - Professeur à l'Université de METZ
Pierre [illegible] de Liège
Claude [illegible] Lyon

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE DE METZ
022 420352 0

31 JANV. 1990

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ
N° inv. 19900065
Cote S/M3 90/3
Loc Magasin

TABLE DE MATIERES

INTRODUCTION 1

CHAPITRE I : CALCUL COHOMOLOGIQUE RELATIVE A UNE ALGEBRE DE LIE SEMI SIMPLE 11

1-0 Introduction 11

1-1 Cas d'une algèbre de Lie G du type A_1 : Calcul de $H^2(G_0, G_0)$ et $H^2(G_U, G_U)$ 13

1-2 Cas où G n'est pas du type A_1 : Calcul de $H^2(G_0, G_0)$ et $H^2(G_U, G_U)$ 24

CHAPITRE II : CALCUL COHOMOLOGIQUE RELATIVE A UNE ALGEBRE DE KAC-MOODY 34

2-0 Introduction 34

2-1 Calcul de $H^2(G_0, G_0)$ 35

2-2 Calcul de $H^2(G_\Omega, G_\Omega)$ 41

CHAPITRE III : DEFORMATIONS D'ALGEBRES DE LIE $\mathbb{Z}$ GRADUEES ... 51

3-0 Définitions préléminaires 51

3-1 Introduction 52

3-2 Première déformation 55

3-3 Seconde déformation 59

CHAPITRE IV : UNICITE DE LA DEFORMATION DE G_0 VERS G 67

Cas d'une algèbre de Lie semi-simple 67

Cas d'une algèbre de Lie de Kac-Moody 72

INTRODUCTION

Adler-Kostant et Symes ont étudié des systèmes hamiltoniens complètement intégrales en utilisant les structures de Poisson des représentations coadjointes des algèbres de Lie [1].

Dans leur travaux concernant les réseaux de Toda, la décomposition d'une algèbre de Lie G de dimension finie en somme directe d'espaces vectoriels de deux sous algèbres de Lie G^+ et G^- joue un rôle essentiel dans la complète intégrabilité des systèmes hamiltoniens étudiés.

Soit G une algèbre de Lie munie d'une graduation, G se décompose en somme directe d'espaces vectoriels G^+ et G^-

Soit $G_0 = G^+ \oplus G^-$ somme directe comme algèbres de Lie .

Nous allons démontrer qu'il existe une suite de déformation de l'algèbre de Lie G_0 vers l'algèbre de Lie G .

Nous allons rappeler tout d'abord leurs principaux résultats .

0-1 SYSTEME COMPLETEMENT INTEGRABLE ET EQUATION ISOSPECTRALE DE LAX :

Définitions et notations :

Soit M une variété différentiables

Une structure de Poisson sur M, est définie par la donnée d'une application bilinéaire antisymétrique de $C^\infty(M) \times C^\infty(M)$ dans $C^\infty(M)$ notée :

$(f , g) \longrightarrow \{f , g\}$ vérifiant les conditions suivantes :

a/ $\{f , g.h\} = \{f , g\}h + \{f , h\}g$

b/ Identité de Jacobi :

b/ Identité de Jacobi :

$$\left\{f , \left\{g , h\right\}\right\} + \left\{h , \left\{f , g\right\}\right\} + \left\{g , \left\{h , f\right\}\right\} = 0$$

La variété M est appelée variété de Poisson .

A toute fonction $f \in C^{\infty}(M)$, sur la variété de Poisson M, on peut associer son champ de vecteurs hamiltonien X_f, il est défini par la proprété suivante :

Pour toute fonction $g \in C^{\infty}(M)$, on a $X_f . g = -\left\{f , g\right\}$

<u>Exemples</u> :

a/ Une variété symplectique (M , Ω) est une variété de Poisson :

pour tout couple (f , g) d'élément de $C^{\infty}(M)$, le crochet $\left\{f , g\right\}$ est donné par :

$$\left\{f , g\right\} = \Omega(X_f , X_g)$$

où X_f et X_g sont les champs de vecteurs hamiltoniens, de hamiltoniens f et g données par :

$$df = i(X_f)\Omega \qquad dg = i(X_g)\Omega$$

b/ Soit G une algèbre de Lie de dimension finie ; G^* son dual pour tout couple (f , g) d'éléments de $C^{\infty}(G^*)$ et tout $\alpha \in G^*$.

On pose : $\left\{f , g\right\}(\alpha) = \langle \alpha, \left[df(\alpha) , dg(\alpha)\right] \rangle$

Cela définit une structure de Poisson sur G^*, dite structure de Kirillov-Kostant-Sauriau .

<u>Equation isospectrale de Lax</u> :

Soit un ensemble de matrices de la forme :

$$L = \begin{bmatrix} o & a_1 & o & o & o \cdots o \\ a_1 & o & a_2 & o & o \cdots o \\ o & a_2 & o & a_3 & o \cdots o \\ \vdots & & & & \\ & & & & a_{n-1} \\ o \cdots & & & a_{n-1} & o \end{bmatrix}$$

où $a_1, \ldots\ldots a_n$ sont des entiers positifs, les valeurs propres de L sont réels et simples .

Lax considère les équations différentielles de la forme :

$$(1) \quad \dot{L} = \left[P \ , \ L\right]$$

$$P = \begin{bmatrix} o & o & a_1 a_2 & o & & & \\ o & o & o & a_2 a_3 & & & \\ -a_1 a_2 & o & \cdot & \cdot & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & & o & a_{n-2} a_{n-1} \\ & & & o & o & o & \\ & & & -a_{n-2} a_{n-1} & o & & \end{bmatrix}$$

l'équation (1) s'écrit sous la forme suivante :

$$(2) \quad \dot{a}_k = a_k(a_{k+1}^2 - a_{k-1}^2) \qquad k = 1, 2, \ldots\ldots, n-1$$

$a_o = a_n = o$

alors les coèfficients du polynôme caractéristique de L sont des intégrales premières du système (2)

On va introduire quelques notations utiles par la suite .

Soit G une algèbre de Lie réelle de dimension finie, G^+ et G^- deux de ses

sous algèbres telles que $G = G^+ + G^-$ comme espaces vectoriels mais non comme algèbres de Lie .

On désigne par G^*, G^{+*} et G^{-*} les duaux respectivement de G, G^+ et G^-

$\pi_{G^{+*}} : G^* \longrightarrow G^{+*}$ désigne la projection canonique, transposée de l'injection tion canonique $i : G^+ \longrightarrow G$

l'espace G^* est somme de deux sous espaces :

$G^* = G^{+\perp} \oplus G^{-\perp}$; $G^{+\perp} = \left\{ \xi \in G^* / \langle \xi, x \rangle = 0 \ \forall x \in G^+ \right\}$ annulateur de G^+

Lá restriction de $\pi_{G^{+*}}$ à $G^{-\perp}$ est un isomorphisme de $G^{-\perp}$ sur G^{+*} ; G^{+*} est identifié à $G^{-\perp}$.

De même on peut identifier G^{-*} au sous espace vectoriel $G^{+\perp}$

On concidère sur G^{+*} la structure de Poisson définie précédemment .

Puisque on peut identifier G^{+*} avec $G^{-\perp}$, on a maintenant une structure de Poisson sur $G^{-\perp}$.

On peut donc faire apparaître deux structures de Poisson distinctes sur G^* correspendant à deux structures d'algèbres de Lie sur G ; La structure de départ et celle obtenue comme somme directe d'algèbres de Lie G^+ et G^- ;

$G_0 = G^+ \oplus G^-$

On désigne par $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}(G^{-\perp})$ les sous algèbres de $C^\infty(G^*)$ définies respectivement par :

$$\mathcal{S} = \left\{ f \in C^\infty(G^*) / \forall \alpha \in G^*, \ ad^*_{df(\alpha)} = 0 \right\}$$

$$\mathcal{S}(G^{-\perp}) = \left\{ f \in C^\infty(G^*) \ / \ \forall \alpha \in G^{-\perp}, ad^*_{df(\alpha)} = 0 \right\}$$

où ad^* désigne la représentation coadjointe de G dans $End(G^*)$

$\mathcal{S}$ est donc le centre de l'algèbre de Lie de Poisson $C^\infty(G^*)$ muni de la structure

de Kirillov- Kostant-Souriau .

$$\left\{f\ ,\ g\ (\alpha)\right\} = -\left\langle ad^*_{df(\alpha)}\ (\alpha)\ ,\ dg(\alpha)\right\rangle$$

On remarque que $f \in C^\infty(G^*)$ est élément de $\mathcal{S}$ si et seulement si elle est constante sur chaque orbite de l'action coadjointe de G sur G^* définie par :

$O^G_\alpha = \left\{Ad^*_g \alpha / \ g \in G\right\}$ où G est le groupe de Lie de l'algèbre de Lie G

0-2 <u>THEOREME D'ADLER, KOSTANT ET SYMES</u> : [1]

On se place dans les hypothèses indiquées ci-dessus

1/ En désignant par $j : G^{-\perp} \longrightarrow G^*$ l'injection canonique,

on a, pour tout couple $(f\ ,\ g)$ d'éléments de $\mathcal{S}$ et tout $\alpha \in G^{-\perp}$,

$$\left\{f \circ j\ ,\ g \circ j\right\} = 0$$

2/ pour toute fonction $f \in \mathcal{S}$, le champ de vecteurs hamiltonien sur $G^{-\perp}$ associé à $f \circ j$, vérifie en tout $\alpha \in G$

$$(*)\ X_{f\circ j}(\alpha) = \pi_{G^{-\perp}}(ad^*_{\pi_{G^+}} df(\alpha)\alpha) = -\pi_{G^{-\perp}}(ad^*_{\pi_{G^-}} df(\alpha)\alpha)$$

Cette seconde expression est l'analogue de l'équation de Lax, en effet

$\alpha = X_{f\circ j}(\alpha)$; On note $b = -\pi_{G^-} df(\alpha)\alpha$

G^* le dual de G s'identifie à G grace à la forme de Killing de G .

(*) devient $\dot{\alpha} = \left[\alpha\ ,\ b\right]$ où $\left[\ ,\ \right]$ est le crochet de G .

<u>Détaillons le cas où G = sl(n , R)</u> :

G^* le dual de G s'identifie à G grâce à la forme de Killing de G ;

On prendra pour G^+ l'algèbre des matrices triangulaires supérieures et pour G^-, l'algèbres des matrices triangulaires inférieures de trace nulle .

On a alors $G^{+*} = G^{-\perp}$ et $G^{-*} = G^{+\perp}$, et d'autre part l'action adjointe

s'identifie à l'action coadjointe, donc $X_{foj}(\alpha) = \left[\alpha, \Pi_{G^-} df(\alpha)\right]$.

Si on prend alors pour hamiltonien $H(\alpha) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\alpha^2$; $dH(\alpha) = \alpha$

$$\dot{\alpha}_H = \left[\alpha, \Pi_{G^-}(\alpha)\right]$$

on retrouve ici une équation du type de Lax .

Un système de ce type est le célèbre réseau de Toda .

Soit un nombre fini de masses penctuelles se déplaçant librement sur l'axe réel, soumises à un potentiel en exponentielle .

Soient x_k, $k = 1, \ldots\ldots, n$ les positions des points et y_k, $k = 1, \ldots\ldots, n$ les impulsions .

Ce système est régi par le hamiltonien $H = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} y_k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} e^{x_k - x_{k+1}}$

on convient que $x_0 = x_{n+1} = 0$

Le système Hamiltonien associé est donc :

$$\dot{x}_k = \frac{\partial H}{y_k} \quad k = 1, \ldots\ldots, n$$

$$\dot{y}_k = -\frac{\partial H}{x_k} \quad K = 2, \ldots\ldots, n-1$$

$$\dot{x}_k = y_k$$

$$\dot{y}_k = e^{x_{k-1} - x_k} - e^{x_k - x_{k+1}} \quad i = 1, \ldots\ldots, n$$

H. Flaschka a introduit le changement de coordonnés

$$a_k = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}(x_k - x_{k+1})} \quad k = 1, \ldots\ldots, n-1$$

$$b_k = \frac{1}{2} y_k \qquad k = 1, \ldots, n$$

$$\dot{a}_k = (b_k - b_{k+1}) a_k$$

$$\dot{b}_k = a_{k-1} - a_k$$

Le système d'équations différentielles peut s'écrire sous la forme de Lax

$$\dot{L} = \left[P , L \right]$$

$$L = \begin{bmatrix} b_1 & a_1 & & & & \\ 1 & \ddots & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ & & & & 1 & b_n \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les intégrales premières sont obtenues à partir des polynomes caractéristique de L

$$\Delta_n(\lambda) = \det(\lambda I - l) = \prod_{k=1}^{n} (\lambda - \lambda_k) = \sum_{k=0}^{n} I_n \lambda^{n-k}$$

les coéfficients $I_1, \ldots, I_k$ sont alors constants de mouvement

Ce résultat a été obtenue pour la première fois par Lax

0-3 PRESENTATION DE NOS PRINCIPAUX RESULTATS :

Soit G une algèbre de Lie semi simple, on considère sur G les deux structures introduites par Adler, Kostant et Symes .

Si G se décompose en somme directe d'éspaces vectoriels $G = G^+ + G^-$, où G^+ et G^- sont deux sous algèbres de Lie on lui associe $G_0 = G^+ \oplus G^-$ somme directe d'algèbres de Lie, ce qui revient à annuler les crochets de la forme $\left[X , Y \right]$ avec $X \in G^+$ et $Y \in G^-$

Nous allons démontrer qu'il existe une suite de déformations de G_0 vers l'algèbre de Lie G semi-simple ; Plus précisément on peut déformer G_0 suivant une déformation formelle à l'ordre 1 en une algèbre de Lie résoluble G_U, [U est une matrice $(n-1)\times(n-1)$, si n-1 est le rang de G].

Pour certains choix particuliers de U, on peut ensuite déformer G_U suivant une déformation polynômiale formelle de degré n-1 sur l'algèbre de Lie G .

Nous montrons que dans le cas où G est l'algèbre de Kac-Moody

$G = sl(2\ ,\ R) \otimes C\left[t\ ,\ t^{-1}\right]$

il existe une suite de déformation de G_0 vers l'algèbre de Lie G_Ω plus précisément : on peut déformer G_0 suivant une déformation formelle à l'ordre 1 en une algèbre de Lie G_Ω (où Ω est une famille de paramètres) .

Pour certaines valeurs du Ω, on peut ensuite déformer G_Ω suivant une déformation formelle qui converge au sens faible (voir chapitre II)

Nous montrons dans le chapitre III que ces exemples sont des cas particuliers d'une situation générale .

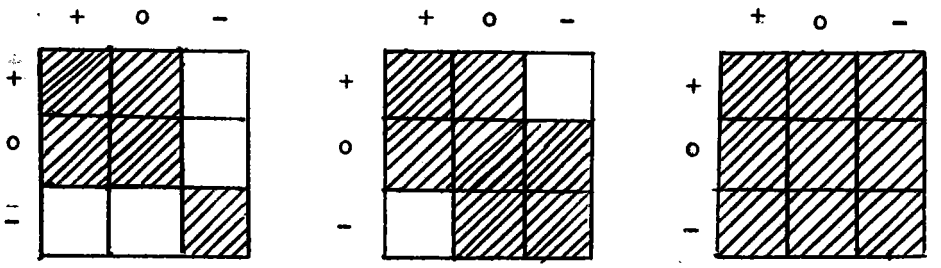
Considérons une algèbre de Lie muni d'une graduation $E = \bigoplus_{k\in Z} E_k$ où la décomposition est telle que $\left[E_k\ ,\ E_p\right] \subset E_{k+p}\quad \forall k,\ p \in Z$

Posons $E+ = \bigoplus_{k>0} E_k$ et $E- = \bigoplus_{k<0} E_k$

on a ainsi $E = E_- + E_0 + E_+$

E+ et E- sont respectivement des idéaux .

Considérons les algèbres de Lie dont les tables de multiplication sont schématisés par les tableaux suivants :



D B C = E

Les algèbres D, B et C sont des structures d'algèbres de Lie sur E, une zone hachurés dans un tableau représente les crochets de Lie dans E, une zone non hachuré représente les crochets nuls .

+, o et - représentent réspectivement des éléments arbitraires de E+, E_o et E- .

L'algèbre de Lie D n'est autre que la somme directe de $E_+ + E_o$ et E_- .

Il n'y a pas de condition à priori pour que l'algèbre B soit obtenue par une déformation formelle à l'ordre 1 de l'algèbre D .

On mettra par contre en évidence une condition nécessaire pour que l'algèbre C soit obtenue par une déformation de l'algèbre B .

Ceci fournit le premier exemple de déformation formelle convergente hors les exemples biens connus issus de la géométrie symplectique et de la théorie des star produits [2].

Le chapitre I contient les calculs cohomologiques nécéssaires au cas d'une algèbre de Lie semi simple de dimention finie, le chapitre II contient les calculs cohomologiques nécéssaires au cas d'une algèbre de Kac-Moody affine non tordue $\hat{G} = sl(2 , R) \otimes C\left[t , t^{-1}\right]$.

Le chapitre III contient le principal résultat qui consiste à prouver l'existence d'une suite de déformations de l'algèbre de Lie G_0 vers l'algèbre de Lie G dans le cas général d'une algèbre de Lie graduée sur $\mathbb{Z}$.

Le chapitre IV a pour but de montrer, en utilisant le calcul cohomologique, que pour les deux exemples d'une algèbre de Lie semi-simple de dimension finie et de $\hat{G} = sl(2 , R) \otimes C \left[t , t^{-1}\right]$, la suite de déformations donnée au chapitre III est unique, autrement dit il n'existe pas d'autres déformations qui nous permet de retrouver la structure de G à partir de celle de G_0 .

CHAPITRE I

1-0 INTRODUCTION :

Dans tout ce chapitre G désigne une algèbre de Lie semi simple réelle de dimension finie n .

Considérons une décomposition de G en somme directe d'espaces vectoriels $G = N^- + H + N^+$, où H est la sous algèbre de Cartan de G et $H + N^+$ une sous algèbre de Borel notée K .

Soit $G_0 = N^- \oplus (H + N^+)$ où $\oplus$ désigne la somme directe d'algèbres de Lie, ce qui revient à annuler les crochets de N^- avec N^+ et H .

On construira une famille d'algèbres résolubles G_U indéxée par une matrice U qui va jouer un rôle intermédiaire dans les déformations .

Notre but dans ce chapitre est de calculer $H^2(G_0 , G_0)$ et $H^2(G_U , G_U)$, la connaissance de ces espaces est essentielle pour l'étude des déformations

1-0-1 Rappel sur les algèbres de Lie semi-simples :

Soit G une algèbre de Lie semi simple réelle de dimension finie et $G = N^+ + H + N^-$ sa décomposition de Cartan associée à Δ, un système de racines, soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ les racines simples ($l = \dim H$), toute racine s'écrit donc sous la forme $\alpha = \sum_{i=1}^{l} n_i \alpha_i$

les n_i sont toutes positives ou toutes négatives ; L'espace des racines est un espace euclidien muni d'un produit scalaire (,)

Soit Δ^+ l'ensemble des racines positives et Δ^- l'ensemble des racines

négatives .

Soit G_α la sous algèbre engendrée par X_α; dim $G_\alpha = 1$

$$N^+ = \sum_{\alpha\in\Delta^+} G_\alpha \qquad N^- = \sum_{\alpha\in\Delta^+} G_{-\alpha}$$

Le groupe de Weyl est représenté par les réflexions [7] $S_{\alpha_1}, \ldots, S_{\alpha_l}$

$$S_{\alpha_i}(\beta) = \beta - 2\frac{(\alpha_i, \beta)}{(\alpha_i, \alpha_i)}\alpha_i \text{ ; on note } 2\frac{(\alpha_i, \beta)}{(\alpha_i, \alpha_i)} = \langle\alpha_i, \beta\rangle$$

les racines peuvent être ordonnées ; Si λ est la plus grande racine ;

$\lambda = \sum_{i=1}^{l} n_i\alpha_i$ alors $n_i \neq 0$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant l$.

Une base de racines $\Phi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ est une base de l'espace des racines telle que toute racine β s'écrit $\beta = \sum n_i\alpha_i$, les n_i sont tous positifs ou tous négatifs .

<u>Base de Chevalley</u> :

On construit une base de Chevalley à partir d'une base des racines $\Phi = \{\alpha_i, 1 \leqslant i \leqslant n-1\}, \{X_\alpha, \alpha\in\Delta ; H_{\alpha_i}, \alpha_i \in \Phi\}$ tel que

a/ $[H_{\alpha_i}, H_{\alpha_j}] = 0$ si $1 \leqslant i, j \leqslant n-1$

b/ $[H_{\alpha_i}, X_\alpha] = \langle\alpha, \alpha_i\rangle X_\alpha \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1 \; ; \; \alpha \in \Phi$

c/ $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = \sum H_{\alpha_i}$ où $\alpha = \sum_i H_{\alpha_i}$

d/ Si α et β sont des racines indépendantes ($\alpha \neq \pm\beta$)

soit $\beta - r\alpha, \ldots, \beta + q\alpha$ (la α-suite induite par β)

$[X_\alpha, X_\beta] = o$ si $q = o$

$[X_\alpha, X_\beta] = \pm(r+1) X_{\alpha+\beta}$ si $\alpha+\beta$ est une racine

1-1 CAS OU G EST DU TYPE A_1 :

On présente indépendamment ce cas particulier traité à part dans les travaux de Leger et luks .

On munit l'algèbre de Lie G de la base suivante :

$\{X_\alpha, X_{-\alpha}, H_\alpha\}$ où α est une racine simple positive vérifiant $\langle\alpha,\alpha\rangle = 2$

on a $[H_\alpha , X_\alpha] = 2X_\alpha$; $[H_\alpha , X_{-\alpha}] = -2X_{-\alpha}$; $[X_\alpha , X_{-\alpha}] = H_\alpha$

Soient N^+ la sous algèbre engendrée par X_α

N^- la sous algèbre engendrée par $X_{-\alpha}$

et H la sous algèbre engendrée par H_α

Soit l'algèbre de Lie $G_0 = N^- \oplus (H + N^+)$; $\oplus$ désigne la somme directe d'algèbre de Lie ; G_0 est munit du crochet suivant :

$[X_\alpha , X_{-\alpha}] = 0$; $[H_\alpha , X_\alpha] = 2X_\alpha$; $[H_\alpha , X_{-\alpha}] = 0$

Ce qui revient à annuler dans l'algèbre de Lie G les crochets de N^- et H ainsi que ceux de N^+ et N^-

<u>Proposition 1</u> :

$H^2(G_0 , G_0)$ est de dimention 1 et engendré par la classe de cohomologie représentée par le cocycle $C(H_\alpha , X_{-\alpha}) = UX_{-\alpha}$ où U est un réel non nul .

<u>Démonstration de la proposition 1</u> :

Calculons $Z^2(G_0 , G_0)$:

Soit C une 2-cochaine de G_0 à valeur dans G_0 définie par :

$C(X_\alpha , X_{-\alpha}) = aX_\alpha + bX_{-\alpha} + cH_\alpha$

$C(X_{-\alpha}, H_\alpha) = dX_\alpha + eX_{-\alpha} + fH_\alpha$

$C(X_\alpha, H_\alpha) = gX_\alpha + hX_{-\alpha} + iH_\alpha$

C est un 2 cocycle si et seulement si $\delta C = 0$ où δ est l'opérateur cobord

$$\delta C(X_\alpha, X_{-\alpha}, H_\alpha) = \left[C(X_\alpha, X_{-\alpha}), H_\alpha\right] + \left[C(X_{-\alpha}, H_\alpha), X_\alpha\right] + \left[C(H_\alpha, X_\alpha), X_{-\alpha}\right] + C(\left[X_\alpha, X_{-\alpha}\right], H_\alpha) + C(\left[X_{-\alpha}, H_\alpha\right], X_\alpha) + C(\left[H_\alpha, X_\alpha\right], X_{-\alpha})$$

$\left[C(X_\alpha, X_{-\alpha}), H_\alpha\right] = -2aX_\alpha$

$\left[C(X_{-\alpha}, H_\alpha), X_\alpha\right] = 2fX_\alpha$

$\left[C(X_\alpha, H_\alpha), X_{-\alpha}\right] = 0$

$C(\left[H_\alpha, X_\alpha\right], X_{-\alpha}) = 2aX_\alpha + 2bX_{-\alpha} + 2cH_\alpha$

$C(\left[X_\alpha, X_{-\alpha}\right], H_\alpha) = 0$

$C(\left[X_{-\alpha}, H_\alpha\right], X_\alpha) = 0$

La condition de cocycle est donc équivalente à :

$$\begin{cases} C(X_\alpha, X_{-\alpha}) = aX_\alpha \\ C(X_{-\alpha}, H_\alpha) = dX_\alpha + eX_{-\alpha} \\ C(X_\alpha, H_\alpha) = gX_\alpha + hX_{-\alpha} + iH_\alpha \end{cases}$$

on déduit que $Z^2(G_0)$ est un espace de dimension 6

<u>Calculons $B^2(G_0)$</u> :

Soit T une 1 - cochaine de G_0 à valeur dans G_0 définie par :

$$\begin{cases} T(X_\alpha) = A_1X_\alpha + B_1X_{-\alpha} + C_1H_\alpha \\ T(X_{-\alpha}) = A_2X_\alpha + B_2X_{-\alpha} + C_2H_\alpha \\ T(H_\alpha) = A_3X_\alpha + B_3X_{-\alpha} + C_3H_\alpha \end{cases}$$

Un élément de $B^2(G_0)$ est le bord d'une 1 - cochaine ; δT définie par :

$$\delta T(X_\alpha , X_{-\alpha}) = -T\left[X_\alpha , X_{-\alpha}\right] + \left[X_\alpha , T(X_{-\alpha})\right] - \left[X_{-\alpha} , T(X_\alpha)\right]$$

on a alors :

$$\begin{cases} \delta T(X_\alpha , X_{-\alpha}) = -2C_2X_\alpha \\ \delta T(X_\alpha , H_\alpha) = 2B_1X_{-\alpha} + 2C_1H_\alpha - 2C_3X_\alpha \\ \delta T(X_{-\alpha} , H_\alpha) = -2A_2X_\alpha \end{cases}$$

$B^2(G_0)$ est alors de dimension 5

donc $H^2(G_0 , G_0) = Z^2(G_0) \big/ B^2(G_0)$ est de dimension 1

Il est engendré par une classe de cohomologie $\left[C\right]$ représentée par le cocycle C défini par : $\begin{cases} C(X_{-\alpha} , H_\alpha) = UX_{-\alpha} \\ \qquad\qquad = 0 \text{ si non} \end{cases}$ U est un réel non nul

c.q.f.d

On notera G_U l'algèbre de Lie G munit du crochet suivant :

$$\left[X_\alpha , X_{-\alpha}\right] = 0 \ ; \ \left[X_{-\alpha} , H_\alpha\right] = UX_{-\alpha} \ ; \ \left[X_\alpha , H_\alpha\right] = -2X_\alpha$$

<u>Proposition 2</u> :

i/ si $U = 2$, $\dim H^2(G_U , G_U) = 2$

$H^2(G_U , G_U)$ est engendré par deux classes de cohomologie $\left[C_1\right]$ et $\left[C_2\right]$ représentée par les deux cocycles suivants :

$C_1(X_\alpha , X_{-\alpha}) = H_\alpha$ les autres termes étant nuls

$C_2(X_{-\alpha} , H_\alpha) = X_{-\alpha}$ les autres termes étant nuls

ii/ si $U = -2$ $\dim H^2(G_U , G_U) = 3$

$H^2(G_U , G_U)$ est engendré par trois classes de cohomologie $\left[C_1\right]$, $\left[C_2\right]$, $\left[C_3\right]$ représentés par les cocycles suivants :

$$\begin{cases} C_1(X_\alpha , X_{-\alpha}) = H_\alpha \text{ les autres termes étant nuls} \\ C_2(X_{-\alpha} , H_\alpha) = X_{-\alpha} \text{ les autres termes étant nuls} \\ C_3(X_\alpha , H_\alpha) = X_{-\alpha} \text{ les autres termes étant nuls} \end{cases}$$

iii/ si $U \neq \left\{2 , -2\right\}$ dim $H^2(G_U , G_U) = 1$

$H^2(G_U , G_U)$ est engendré par une classe de cohomologie $\left[C_2\right]$ représentée par le cocycle $C_2(X_{-\alpha} , H_\alpha) = X_{-\alpha}$ les autres termes étant nuls .

<u>Démonstration de la proposition 2</u> :

On utilise les mêmes notations que dans la démonstration précédente

<u>Déterminons $Z^2(G_U , G_U)$</u> :

Soit C une 2-cochaine , C est un 2 - cocycle si et seulement si

$\delta C(X_\alpha , X_{-\alpha} , H_\alpha) = o$

d'où $b = -\frac{Ni}{2}$, $f = \frac{Ua}{2}$

On rappelle que $C(X_\alpha , X_{-\alpha}) = aX_\alpha + bX_{-\alpha} + cH_\alpha$

$c = o$ si $U \neq 2$ et si $U = 2$ on peut prendre c arbitraire .

si $U \neq 2$ le cocycle s'écrit alors :

$$\begin{cases} C(X_\alpha , X_{-\alpha}) = aX_\alpha + bX_{-\alpha} \\ C(X_{-\alpha} , H_\alpha) = dX_\alpha + eX_{-\alpha} + \frac{Ua}{2} H_\alpha \\ C(X_\alpha , H_\alpha) = gX_\alpha + h X_{-\alpha} - \frac{2b}{U} H_\alpha \end{cases}$$

$Z^2(G_U)$ est donc de dimension 6

Si $U = 2$ le cocycle s'écrit alors :

$$\begin{cases} C(X_\alpha , X_{-\alpha}) = aX_\alpha + bX_{-\alpha} + cH_\alpha \\ C(X_{-\alpha} , H_\alpha) = dX_\alpha + eX_{-\alpha} + \frac{Ua}{2} H_\alpha \\ C(X_\alpha , H_\alpha) = gX_\alpha + hX_{-\alpha} - \frac{2b}{U} H_\alpha \end{cases}$$

$Z^2(G_U)$ est donc de dimension 7

$B^2(G_U)$ est déterminé par :

$$\begin{cases} \delta T(X_\alpha , X_{-\alpha}) = 2\gamma_2 X_\alpha + U\gamma_1 X_{-\alpha} \\ \delta T(X_{-\alpha} , H_\alpha) = (2 + U)\alpha_2 X_\alpha - U\gamma_3 X_{-\alpha} + U\gamma_2 H_\alpha \\ \delta T(X_\alpha , H_\alpha) = 2\gamma_3 X_\alpha - (U + 2)\beta_1 X_{-\alpha} - 2\gamma_1 H_\alpha \end{cases}$$

si $U = -2$ dim $B^2(G_U) = 3$

si $U \neq -2$ dim $B^2(G_U) = 5$

il y a trois cas à étudier :

i/ si $U = 2$, dim $H^2(G_U , G_U) = 2$

$H^2(G_U , G_U)$ est engendré par les classes de cohomologie $[C_1]$ et $[C_2]$ représentés par :

$C_1(X_\alpha , X_{-\alpha}) = H_\alpha$ les autres termes étant nuls .

$C_2(X_\alpha , H_\alpha) = X_{-\alpha}$ les autres termes étant nuls .

ii/ si $U = -2$, dim $H^2(G_U , G_U) = 3$

$H^2(G_U , G_U)$ est engendré par les classes de cohomologie $[C_1]$, $[C_2]$ et $[C_3]$ représentés par :

$C_1(X_\alpha , X_{-\alpha}) = H_\alpha$ les autres termes étant nuls ,

$C_2(X_\alpha , H_\alpha) = X_{-\alpha}$ les autres termes étant nuls ,

$C_3(X_{-\alpha} , H_\alpha) = X_\alpha$ les autres termes étant nuls .

iii/ si $U \neq \left\{2 , -2\right\}$ dim $(G_U , G_U) = 1$

$H^2(G_U , G_U)$ est engendré par une classe de cohomologie $[C]$ représentée par :

$C(X_{-\alpha} , H_\alpha) = X_{-\alpha}$ les autres termes étant nuls .

c.q.f.d

1-2 CAS OU G N'EST PAS DU TYPE A_1 :

1-2-1 Calcul de $H^2(G_0 , G_0)$:

Proposition 3 :

Soient λ la plus grande racine, $\mathbb{R}X_\lambda$ l'éspace engendré par X_λ et $K = N^+ + H$ une sous algèbre de Borel de G .

$H^2(G_0 , G_0) = \mathrm{Hom}(H , \mathrm{Der}\, N^-) \oplus H^2(K , \mathbb{R}X_{-\lambda}) \oplus H^2(N^- , N^-)$

avec Der N^- l'espace des dérivations de N^- dans N^- qui est donné par le théorème de Kostant (Leger et Luks 3)

Théorème de Kostant :

$H^1(N^- , N^-)$ est engendré par les cocycles suivants :

i/ si α_i est une racine simple négative ; D_{α_i} est définie par

$D_{\alpha_i}(X_\alpha) = n_i X_\alpha$ avec $\alpha = \sum_i n_i \alpha_i$

ii/ Soit λ la plus grande racine de G, si α est une racine simple négative, on définit D'_α par :

$D'_\alpha(X_\beta) = X_{S_\alpha(-\lambda)}$ si $\beta = \alpha$

$= 0$ si non

S_α est la réflexion définie par $S_\alpha(\beta) = \beta - 2\dfrac{(\alpha , \beta)}{(\alpha , \alpha)}\alpha$

$H^1(N^- , N^-)$ est naturellement une algèbre de Lie pour le crochet des dérivations

Calculons sa table .

$$\left[D_{\alpha_k} , D_{\alpha_l}\right] = D_{\alpha_k} \circ D_{\alpha_l}(X_\alpha) - D_{\alpha_l} \circ D_{\alpha_k}(X_\alpha)$$

$$= (n_k n_l - n_l n_k)X_\alpha = 0$$

$$\alpha = \sum_i n_i \alpha_i$$

d'où $\left[D_{\alpha_k} , D_{\alpha_l}\right] = 0$

L'espace des dérivations engendré par D_{α_i} est une algèbre abéliénne isomorphe à H .

$$\left[D_{\alpha_k} , D'_\alpha\right](X_\beta) = (m_k - 1)X_{S_\alpha(-\lambda)} \qquad \text{si } \alpha = \beta$$

$$= 0 \qquad \text{si non}$$

où m_k est la $k^{\text{ème}}$ composante de $S_\alpha(-\lambda)$

d'où $\left[D_{\alpha_k} , D'_\alpha\right] = (m_k - 1)D'_\alpha$

<u>Démonstration de la proposition 3</u> :

Calculons $H^2(G_0 , G_0)$

$G_0 = N^+ \oplus K$ où $\oplus$ est la somme directe comme algèbre de Lie .

Les deux sous algèbres de Lie K et G_0/N^- sont isomorphes, d'où la suite exacte courte d'algèbre de Lie $N^- \longrightarrow G_0 \longrightarrow K$ associée à la suite spectrale de Hochschild-Serre [8] pour la cohomologie à coéfficients dans la représentation adjointe :

$$E_2^{p,q} = H^p(K , H^q(N^- , G_0)) \Longrightarrow H^{p+q}(G_0 , G_0)$$

$H^2(G_0 , G_0)$ est déterminé par les trois termes suivants de la suite spectrale,

en fait cette suite spectrale dégénère grace à la présence de somme directe :

$$E_2^{0,2} = H^0(K , H^2(N^- , G_0)) = \mathrm{Inv}_K H^2(N^- , G_0)$$

c'est à dire les éléments de $H^2(N^- , G_0)$ invariants par l'action de K .

$$E_2^{1,1} = H^1(K , H^1(N^- , G_0)) \text{ et } E_2^{2,0} = H^2(K , H^0(N^- , G_0))$$

a/ Calculons $E_2^{0,2}$:

Lemme 1 : $E_2^{0,2} = H^2(N^- , N^-)$

Démonstration du lemme 1 :

G_0 est une somme directe de K-modules pour la représentation adjointe, on peut alors décomposer $H^2(N^- , G_0) = H^2(N^- , K) \oplus H^2(N^- , N^-)$

$$E_2^{0,2} = \mathrm{Inv}_K H^2(N^- , G_0) = \mathrm{Inv}_K H^2(N^- , K) \oplus \mathrm{Inv}_K H^2(N^- , N^-),$$

l'action de K sur N^- est triviale, K agit trivialement sur la cohomologie $H^2(N^- , N^-)$ et donc $\mathrm{Inv}_K H^2(N^- , N^-) = H^2(N^- , N^-)$

d'autre part $H^2(N^- , K) = \mathrm{Hom}(H_2(N^-) , K)$, l'action de N^- sur K étant triviale $H_2(N^-)$ est la deuxième groupe de homologie de N^- à coèfficients triviaux .

$H_2(N^-)$ a été calculé par Kostant

Théorème de Kostant (3) :

Soient α et β deux racines simples négatives distinctes et $\alpha + q\beta$ est la plus petite racine dans (la β-suite induite par α) $H_2(N^-)$ est engendré par les éléments du type $X_\beta \wedge X_{\alpha+q\beta}$. □

K agit trivialement sur $H_2(N^-)$, on vérifie facilement que Z(K) le centre de K

est nul d'où $\mathrm{Inv}_K \mathrm{Hom}(H_2(N^-), K) = 0$

b/ <u>Calculons $E_2^{2,0}$</u> :

$$E_2^{2,0} = H^2(K, H^0(N^-, G_0))$$

mais $H^0(N^-, G_0) = \mathrm{Inv}_{N^-}(G_0) = \mathrm{Inv}_{N^-}(N^-) \oplus \mathrm{Inv}_{N^-}(K)$

$$= \mathbb{R}X_{-\lambda} \oplus K$$

où $\mathbb{R}X_{-\lambda}$ désigne l'espace vectoriel de dimension 1 engendré par $X_{-\lambda}$ avec λ la plus grande racine .

d'où $E_2^{2,0} = H^2(K, \mathbb{R}X_{-\lambda} \oplus K) = H^2(K, K) \oplus H^2(K, \mathbb{R}X_{-\lambda})$

<u>Lemme 2</u> :

$$H^2(k) = H^2(H) = \hat{\wedge}_2 H$$

<u>Démonstration du lemme 2</u> :

K/N^+ est isomorphe à H d'où la suite exacte

$$N^+ \longrightarrow K \longrightarrow H$$

On associe à cette suite exacte la suite de Hochschild-Serre pour la cohomologie à coèfficients triviaux .

$$E_2^{p,q} = H^p(H, H^q(N^+)) \Longrightarrow E^{p+q}(K)$$

$H^2(K)$ est déterminé par les trois termes de cette suite :

$$E_2^{0,2} = H^0(H\ ,\ H^2(N^+))$$

$$E_2^{1,1} = H^1(H\ ,\ H^1(N^+))$$

$$E_2^{2,0} = H^2(H\ ,\ H^0(N^+))$$

$H^0(H\ ,\ H^2(N^+)) = \mathrm{Inv}_H\ (H^0(N^+)) = 0$

$H^1(H\ ,\ H^1(N^+)) = 0$ d'après le lemme 6

et $H^2(H\ ,\ H^0(N^+)) \simeq H^2(H) = \wedge_2 H$

<u>Lemme 3</u> :

$$E_2^{2,0} = \mathrm{Hom}(\wedge_2 H\ ,\ RX_{-\lambda})$$

<u>Démonstration du lemme 3</u> :

$$E_2^{2,0} = H^2(K\ ,\ K) \oplus H^2(K\ ,\ RX_{-\lambda})$$

$H^2(K\ ,\ RX_{-\lambda}) = H^2(K) \otimes RX_{-\lambda}$

$= \mathrm{Hom}(\wedge_2 H\ ,\ RX_{-\lambda})$ d'après le lemme 2

$H^2(K\ ,\ K) = 0$ d'après la proposition suivante :

<u>Proposition Leger et Luks</u> : [4]

Soit K une sous algèbre de Borel d'une algèbre de Lie semi-simple sur un corps de caractéristique 0 .

Alors $H^1(K\ ,\ K) = 0$ et $H^2(K\ ,\ K) = 0$.

c/ Calculons $E_2^{1,1}$:

Lemme 4 :

Soit Der N^- l'espace vectoriel des dérivations de N^- dans N^-, alors

$$E_2^{1,1} = \mathrm{Hom}(H\ ,\ \mathrm{Der}\ N^-)$$

Démonstration du lemme 4 :

Par définition $E_2^{1,1} = H^1(K\ ,\ H^1(N^-\ ,\ G_0)\ )$

Comme G_0 est la somme directe de deux sous algèbres $G_0 = N^- \oplus K$, on peut écrire

$$H^1(N^-\ ,\ G_0) = H^1(N^-\ ,\ N^- \oplus K)$$

$$= H^1(N^-\ ,\ N^-) \oplus H^1(N^-\ ,\ K)$$

On notera par abus de notation $H^1(N^-\ ,\ N^-) = \mathrm{Der}\ (N^-)$

$E_2^{1,1}$ est la somme de $H^1(K\ ,\ \mathrm{Der}\ N^-)$ et de $H^1(K\ ,\ H^1(N^-\ ,\ K))$

L'action de K sur N^- étant triviale, on a :

$$H^1(K\ ,\ H^1(N^-,\ K)) = H^1(K\ ,\ \mathrm{Hom}(H^1(N^-)\ ,\ K))$$

Il est alors clair que :

$$H^1(K\ ,\ \mathrm{Hom}(H_1(N^-)\ ,\ K) = \mathrm{Hom}(H_1(N^-)\ ,\ H^1(K\ ,\ K))$$

mais $H^1(K\ ,\ K) = 0$ d'après la proposition ci-dessus, donc $H^1(K\ ,\ H^1(N^-\ ,\ K)) = 0$

$E_2^{1,1}$ est alors égale à $H^1(K\ ,\ \mathrm{Der}\ N^-) = \mathrm{Hom}(H_1(K)\ ,\ \mathrm{Der}\ N^-)$ car l'action de K sur N^- est triviale .

Mais $H_1(K) = \dfrac{K}{[K\ ,\ K]} = H$ car $[K\ ,\ K] = N^+$ donc $H^1(K\ ,\ \mathrm{Der}\ N^-) = \mathrm{Hom}(H\ ,\ \mathrm{Der}\ N^-)$

c.q.f.d

1-2-2 Calcul de $H^2(G_U , G_U)$:

A chaque matrice $U = (U_{ij})i,j = 1 \dots n-1$ on associe une algèbre de Lie G_U qui contient la somme directe de $N^+ \oplus N^-$ comme sous algèbre des commutateurs et dont l'abélianisé s'identifie à H .

On a donc une suite $0 \longrightarrow N^+ \oplus N^- \longrightarrow G_U \longrightarrow H \longrightarrow 0$

et l'action de H sur $N^+ \oplus N^-$ est définie par :

$$\left[X_\alpha , H_{\alpha_i}\right] = \langle \alpha , \alpha_i \rangle X_\alpha \text{ si } \alpha \text{ est une racine simple positive}$$

$$\left[X_{-\alpha_j} , H_{\alpha_i}\right] = U_{ij} X_{-\alpha_j}$$

On note :

$$D_1 = \left\{ D'_\alpha \in \mathrm{Der}(N^+) \ / \ D'_\alpha(X_\beta) = X_{S_\alpha(\lambda)} \text{ si } \alpha = \beta \text{ et } \alpha \in \Delta^+ \text{ , simple} \right.$$
$$\left. = 0 \text{ si non} \right\}$$

$$D_2 = \left\{ D'_\alpha \in \mathrm{Der}(N^-) \ / \ D'_\alpha(X_\beta) = X_{S_\alpha(-\lambda)} \text{ si } \alpha = \beta \text{ et } \alpha \in \Delta^- \text{ , simple} \right.$$
$$\left. = 0 \text{ si non} \right\}$$

on note la plus grande racine $\lambda = \sum_I n_l \alpha_l$

Proposition 4 :

$$H^2(G_U , G_U) = \mathrm{Inv}_H(H^1(N^+) \otimes D_2) \oplus \mathrm{Inv}_H(H^1(N^-) \otimes D_1) \oplus \mathrm{Inv}_H W$$

$$\text{où } W = \left\{ \varphi \in \mathrm{Hom}(H_1(N^+) \otimes H_1(N^-), H) \ / \ \varphi(X_\alpha , X_{-\alpha}) = H_\alpha \text{ si } \alpha \in \Delta^+ \text{ simple} \right.$$
$$\left. = 0 \text{ si non} \right\}$$

pour toute matrice U telle que :

$$\left\{ U_{kj} \neq \langle \alpha_k , S_{-\alpha_j}(-\lambda) \rangle ; \sum_I U_{kl} n_l \neq \langle \alpha_k , \alpha_j \rangle \ ; \ U_{kj} \neq \langle \alpha_k , \lambda \rangle ; \right.$$

$U_{kj} = \langle \alpha_k, \alpha_j - S_{\alpha_j}(\lambda) \rangle$; $U_{ki} + U_{kj} = \langle \alpha_k, \lambda \rangle$; $\langle \alpha_k, \alpha_l \rangle + \langle \alpha_k, \alpha_j \rangle =$

$\sum n_k U_{kl}$; $\langle \alpha_k, \alpha_i \rangle + U_{kj} - \sum U_{kl} n_l = 0 \Big\}$

L'algèbre de Lie G_U est munie de la base suivante :

$\left\{ X_\alpha , \alpha \in \Delta ; H_{\alpha_i} , \alpha_i \in \Phi \right\}$ avec la table de crochets :

$$\left[X_\alpha , H_{\alpha_i} \right] = \langle \alpha , \alpha_i \rangle X_\alpha \quad \text{si } \alpha \in \Delta^+$$

$$\left[X_\alpha , H_{\alpha_i} \right] = \sum_{j=1}^{n-1} n_i U_{ij} X_\alpha \text{ si } \alpha \in \Delta^- \; ; \; \alpha = \sum_{j=1}^{n-1} -n_j \alpha_j \; , \; n_j \text{ est un entier}$$

$$\left[X_\alpha , X_\beta \right] = 0 \text{ si } \alpha \in \Delta^+ \text{ et } \beta \in \Delta^-$$

$$\left[X_\alpha , X_\beta \right] = X_{\alpha+\beta} \text{ si } \alpha+\beta \in \Delta \text{ et } \alpha , \beta \in \Delta^-$$

$$= 0 \text{ si non}$$

<u>Démonstration de la proposition 4</u> :

A la suite exacte courte $0 \longrightarrow N^+ \oplus N^- \longrightarrow G_U \longrightarrow H \longrightarrow 0$

on associe la suite spectrale de Hochschild-Serre pour la cohomologie de la représentation adjointe .

$$E_2^{p,q} = H^p(H , H^q(N^+ \oplus N^- , G_U) \Longrightarrow H^{p+q}(G_U , G_U)$$

Pour calculer $H^2(G_U , G_U)$ il faut d'abord déterminer les trois termes

$$E_2^{0,2} = H^0(H , H^2(N^+ \oplus N^- , G_U))$$

$$E_2^{1,1} = H^1(H , H^1(N^+ \oplus N^- , G_U))$$

$$E_2^{2,0} = H^2(H\ ,\ H^0(N^+ \oplus N^-\ ,\ G_U))$$

on va demontrer à la fin de ce paragraphe que cette suite spectrale dégénère .

a/ Calcul de $E_2^{2,0}$:

Lemme 5 : $E_2^{2,0} = 0$

démonstration du lemme 5 :

$$E_2^{2,0} = H^2(H\ ,\ H^0(N^+ \oplus N^-\ ,\ G_U))$$

$H^0(N^+ \oplus N^-\ ,\ G_U)$ est l'ensemble des éléments de G_U qui sont invariants par l'action de $N^+ \oplus N^-$, c'est le centre de $N^+ \oplus N^-$, soit l'espace engendré par X_λ et $X_{-\lambda}$ où λ est la plus grande racine .

On a alors $E_2^{2,0} = H^2(H\ ,\ RX_\lambda) \oplus H^2(H\ ,\ RX_{-\lambda})$

Le lemme 5 découle du lemme suivant :

Lemme 6 :

Soit H une algèbre de Lie abélienne, M un module de dimension 1 engendré par m, tel que H opère non trivalement sur M alors $H^*(H\ ,\ M) = 0$ pour $* = 1,\ 2,\ \ldots,\ n = \dim H$

Démonstration du lemme 6 :

Soit C un k-cocycle de $H^k(H\ ,\ M)$ défini par :

$C(H_0,\ \ldots,\ H_{k-1}) = \theta(H_0,\ \ldots,\ H_{k-1})$ où θ est une k forme .

$$\delta C(H_0, \ldots, H_{k-1}) = \sum_i (-1)^i \check{\alpha}(H_i)\, \theta(H_0, \ldots, H_{i-1}, H_{i+1}, \ldots, H_k)$$

$\check{\alpha}$ est un élément de H^* le dual de H de base $\varepsilon_0 = \check{\alpha}, \ldots, \varepsilon_{n-1}$

H opère non trivialement sur M donc $\check{\alpha} \neq 0$, on peut poser $\check{\alpha} = \varepsilon_0$

θ s'écrit sous la forme :

$$\theta(H_0, \ldots, H_{k-1}) = \sum_{0 \leqslant i_1 \ldots i_{k-1} \leqslant n-1} a_{i_1 \ldots i_{k-1}} \varepsilon_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varepsilon_{i_{k-1}}$$

$$\delta C = 0 \text{ si } \theta = \varepsilon_0 \wedge \sum_{0 < i_1 \ldots i_{k-2} \leqslant n-1} a_{i_1 \ldots i_{k-2}} \varepsilon_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varepsilon_{i_{k-2}}$$

donc C est un bord de

$$\sum_{0 < i_1 \ldots i_{k-2} \leqslant n-1} a_{i_1 \ldots i_{k-2}} \varepsilon_{i_1} \wedge \ldots \varepsilon_{i_{k-2}} \qquad \text{c.q.f.d}$$

b/ <u>Calcul de $E_2^{1,1}$ et $E_2^{0,2}$</u> :

Le lemme suivant donne des résultats préliminaires aux calculs de $E_2^{1,1}$ et $E_2^{0,2}$

<u>Lemme 7</u> :

$$H^1(N^+ \oplus N^-, G_U) = D_1 \oplus \mathrm{Hom}(H_1(N^+), RX_{-\lambda}) \oplus D_2 \oplus \mathrm{Hom}(H_1(N^-), RX_{\lambda})$$

$$H^2(N^+ \oplus N^-, G_U) = H^2(N^+, N^+) \oplus H^1(N^-) \otimes D_1 \oplus H^2(N^-) \otimes Z(N^+) \oplus$$

$$H^2(N^-, N^-) \oplus H^1(N^+) \otimes D_2 \oplus H^2(N^+) \otimes Z(N^-) \oplus W$$

<u>Demonstration du lemme 7</u> :

$$H \simeq G_U / N^+ \oplus N^-$$

on a alors la suite exacte $0 \longrightarrow N^+ \oplus N^- \longrightarrow G_U \longrightarrow H \longrightarrow 0$

en tant que suite des coéfficients :

$$H^0(N^+ \oplus N^- , H) \xrightarrow{\delta_0} H^1(N^+ \oplus N^- , N^+ \oplus N^-) \xrightarrow{I_1} H^1(N^+ \oplus N^- , G_U)$$

$$\xrightarrow{J_1} H^1(N^+ \oplus N^-, H) \xrightarrow{\delta_1} H^2(N^+ \oplus N^- , N^+ \oplus N^-) \xrightarrow{I_2}$$

$$H^2(N^+ \oplus N^- , G_U) \xrightarrow{J_2} H^2(N^+ \oplus N^- , H) \xrightarrow{\delta_2} H^3(N^+ \oplus N^- , N^+ \oplus N^-)$$

d'où les deux suites exactes courtes

$$0 \longrightarrow \operatorname{Im} I_1 \longrightarrow H^1(N^+ \oplus N^- , G_U) \longrightarrow \operatorname{Ker} \delta_1 \longrightarrow 0$$

$$\longrightarrow \operatorname{coker} \delta_1 \longrightarrow H^2(N^+ \oplus N^- , G_U) \longrightarrow \operatorname{Ker} \delta_2 \longrightarrow 0$$

<u>Determinons Im I_1</u> :

$$\begin{aligned} H^1(N^+ \oplus N^- , N^+ \oplus N^-) &= H^1(N^+ \oplus N^- , N^+) \oplus H^1(N^+ \oplus N^- , N^-) \\ &= H^1(N^+ , N^+) \oplus H^1(N^-) \otimes H^0(N^+ , N^+) \oplus \\ &\quad H^1(N^- , N^-) \oplus H^1(N^+) \otimes H^0(N^- , N^-) \end{aligned}$$

l'image par I_1 de $H^1(N^+ , N^+)$ resp de $H^1(N^- , N^-)$ est représentée par les dérivations D_1 resp D_2

$H^0(N^+ , N^+) = Z(N^+) = \mathbb{R}X_\lambda$ et $H^0(N^- , N^-) = Z(N^-) = \mathbb{R}X_{-\lambda}$.

Les espaces $\operatorname{Hom}(H_1(N^+) , \mathbb{R}X_{-\lambda})$ et $\operatorname{Hom}(H_1(N^-) , \mathbb{R}X_\lambda)$ s'envoient de façon évidente dans $H^2(N^+ \oplus N^- , G_U)$

d'où $\operatorname{Im} I_1 = D_1 \oplus \operatorname{Hom}(H_1(N^+) , \mathbb{R}X_{-\lambda}) \oplus D_2 \oplus \operatorname{Hom}(H_1(N^-) , \mathbb{R}X_\lambda)$

<u>Determinons Ker $_1$</u> :

$H^1(N^+ \oplus N^- , h) = \operatorname{Hom}(H_1(N^+) , H) \oplus \operatorname{Hom}(H_1(N^-) , H)$

car H est un module triviale sur $N^+ \oplus N^-$

Soient $[f] \in \operatorname{Hom}(H_1(N^+) , H)$ une classe de cohomologie représentée par

$f : H_1(N^+) \longrightarrow H$ définie par $f(X_{\alpha_i}) = \sum_j a_{ij} H_{\alpha_j}$

et $[g] \in \operatorname{Hom}(H_1(N^-) , H)$ une classe de cohomologie représentée par

$g : H_1(N^-) \longrightarrow H$ définie par $\tilde{g}(X_{-\alpha_i}) = \sum_j b_{ij} H_{\alpha_j}$

$\delta_1[f] = (\delta_1'[f], \delta''_1[f])$ tel que $\delta_1'[f] \in H^2(N^+, N^+)$ et $\delta_1''[f] \in H^1(N^+) \otimes H^1(N^-, N^-)$

$\delta_1'' f(X_{\alpha_i}, X_{-\beta}) = -\sum_j a_{ij} \langle \alpha_j , \beta \rangle X_{-\beta}$, donc $\delta_1'' f \in H^1(N^+) \otimes \mathrm{Der}(N^-)$

$\delta_1'' f$ est le produit tensoriel d'un élément de $H^1(N^+)$ avec un 1-cocycle de N^- à valeur dans N^- donc $\delta_1''[f]$ ne peut pas être nul dans $H^1(N^+) \otimes H^1(N^-, N^-)$ de la même façon $\delta_1''[g]$ ne peut être nul dans $H^1(N^-) \otimes H^1(N^+, N^+)$

donc $\mathrm{Ker}\, \delta_1 = 0$

On deduit que $\mathrm{coker}\, \delta_1 = H^1(N^+, N^+) \oplus H^1(N^+) \otimes D_2 \oplus \mathrm{Hom}(H_2(N^+), H) \oplus$

$$D_1 \oplus H^1(N^-) \otimes H^1(N^+, N^+) \oplus \mathrm{Hom}(H_2(N^-), H)$$

<u>Determinons $\mathrm{Ker}\, \delta_2$</u> :

$H^3(N^+ \oplus N^-, N^+ \oplus N^-) = H^3(N^+ \oplus N^-, N^+) \oplus H^3(N^+ \oplus N^-, N^-)$ avec

$H^3(N^+ \oplus N^-, N^+) = H^3(N^+, N^+) \oplus H^1(N^-) \otimes H^2(N^+, N^+) \oplus H^2(N^-) \otimes$

$$H^1(N^+, N^+) \oplus H^3(N^-) \otimes H^0(N^+, N^+)$$

et $H^2(N^+ \oplus N^-, H) = \mathrm{Hom}(H_2(N^+), H) \oplus \mathrm{Hom}(H_2(N^-), H) \oplus$

$$\mathrm{Hom}(H_1(N^+) \otimes H_1(N^-), H)$$

car H est un module trivial sur $N^+ \oplus N^-$

Soit $[\varphi]$ une classe de cohomologie représentée par $\varphi : H_2(N^+) \longrightarrow H$

tel que $\varphi(X_{\alpha_i} \wedge X_{\alpha_j}) = \sum_k a_{ij}^k H_{\alpha_k}$

$\delta_2[\varphi] = (\delta_2'[\varphi], \delta_2''[\varphi])$ tel que $\delta_2'[\varphi] \in H^3(N^+, N^+)$

$\delta_2''[\varphi] \in H^2(N^+) \otimes H^1(N^-, N^-)$

$\delta_2'' \varphi(X_{\alpha_i}, X_{\alpha_j}, X_{-\beta}) = -\sum_k \langle \alpha_k, \beta \rangle a_{ij}^k X_{-\beta}$ on déduit que

$\delta_2'' \varphi \in H^2(N^+) \otimes \mathrm{Der}(N^-)$

$\delta_2'' \varphi$ est le produit tensoriel d'un élément de $H^2(N^+)$ avec un 1-cocycle de N^- à valeurs dans N^-, donc $\delta_2''[\varphi]$ ne peut pas s'annuler dans $H^2(N^+) \otimes H^2(N^-, N^-)$

la même conclusion sera obtenue pour une classe de cohomologie $[\varphi] \in \mathrm{Hom}(H_2(N^-), H)$ en utilisant l'involution qui envoie N^+ sur N^- d'où $\mathrm{Hom}(H_2(N^+), H) \oplus \mathrm{Hom}(H_2(N^-), H)$ n'est pas inclus dans $\mathrm{Ker}\, \delta_2$

Reste à voir les classes de cohomologie dans $\mathrm{Hom}(H_1(N^+) \otimes H_1(N^-), H)$

Soit $[C]$ représente par $C : H_1(N^+) \otimes H_1(N^-) \longrightarrow H$

$$X_\alpha \wedge X_{-\beta} \longrightarrow C(X_\alpha \wedge X_{-\beta}) = \sum_\gamma b_{\alpha\beta}^\gamma H_\gamma$$

$\delta_2[C] = (\delta_2'[C], \delta_2''[C])$ tel que $\delta_2'[C] \in H^1(N^+) \otimes H^2(N^-, N^-)$

$\delta_2''[C] \in H^1(N^-) \otimes H^2(N^+, N^+)$

$\delta_2' C$ est définie par :

$$\delta_2' C(X_\alpha, X_{-\beta}, X_{-\delta}) = \sum_{\gamma \in \Delta} a_{\alpha\beta}^\gamma [H_\gamma, X_{-\delta}] - \sum_{\gamma \in \Delta} [H_\gamma, X_{-\beta}] a_{\alpha\delta}^\gamma$$

donc il existe $F \in C^2(N^+, N^+)$ tel que :

$\delta_2' C(X_\alpha, X_{-\beta}, X_{-\delta}) = X_\alpha \otimes F(X_{-\beta}, X_{-\delta})$; $\delta_2'[C]$ est nul si et seulement si la classe $[F]$ de cohomologie de F est nulle dans $H^2(N^+, N^+)$

d'aprés le calcul de $H^2(N^+, N^+)$ fait par Leger et Luks [3]

$\delta_2' [C] \neq 0$ sauf si $a_{\alpha\beta}^\gamma = 0$ pour $\beta \neq \gamma$

de la même façon $\delta_2''[C] \neq 0$ sauf si $a^{\gamma}_{\alpha\beta} = 0$ pour $\alpha \neq \gamma$

Ker δ_2 est définie alors par :

$$\text{Ker } \delta_2 = W = \left\{ \begin{array}{l} C \in \text{Hom}(H_1(N^+) \otimes H_1(N^-) \ , \ H) \text{ tel que } C(X_\alpha, X_{-\alpha}) = H_\alpha \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \alpha \text{ racine simple} \end{array} \right\}$$

<u>Lemme 8</u> :

$$E_2^{1,1} = H^1(H \ , \ D_2) \oplus H^1(H \ , \ \text{Hom}(H_1(N^+) \ , \ RX_{-\lambda}) \oplus$$

$$H^1(H \ , \ \text{Hom}(H_1(N^-) \ , \ RX_\lambda)$$

Pour toute matrice U telle que :

$$\left[U_{k_j} \neq \langle \alpha_k, S_{-\alpha_j}(-\lambda) \rangle ; \ \sum_l U_{il} n_l \neq \langle \alpha_i \ , \ \alpha_j \rangle \ ; \ U_{k_j} \neq \langle \alpha_k \ , \ \lambda \rangle \right]$$

<u>Demonstration du lemme 8</u> :

$E_2^{1,1} = H^1(H \ , \ H^1(N^+ \oplus N^- \ , \ G_U)$ est égale en utilisant le lemme précédent à $H^1(H \ , \ D_1) \oplus H^1(H \ , \ \text{Hom}(H_1(N^+) \ , \ RX_{-\lambda})) \oplus H^1(H \ , \ D_2) \oplus$ $H^1(H \ , \ \text{Hom}(H_1(N^-) \ , \ RX_\lambda))$

D_1 est la somme directe de H modules de dimension 1 .

L'action de H sur D_1 est non triviale, donc d'aprés le lemme 6

$H^1(H \ , \ D_1) = 0$ et $H^1(H \ , \ D_2) = 0$ sauf si $U_{kj} = \langle \alpha_k \ , \ S_{-\alpha_j}(-\lambda) \rangle$

d'aprés le même lemme $H^1(H \ , \ \text{Hom}(H_1(N^-) \ , \ RX_\lambda)) = 0$ sauf si

$U_{kj} = -\langle \alpha_k \ , \lambda \rangle$ et $H^1(H \ , \ \text{Hom}(H_1(N^+) \ , \ RX_{-\lambda})) = o$ sauf pour U tel que :

$\sum_l U_{il} \ n_l = \langle \alpha_i \ , \ \alpha_j \rangle$ on note $\lambda = \sum_l n_l \alpha_l$

$H^1(H \ , \ \text{Hom}(H_1(N^-) \ , \ RX_\lambda)) = 0$ sauf pour U tel que : $U_{kj} = \langle \alpha_k \ , \ \lambda \rangle$

Proposition : (Leger et Luks) [4] page 1024

$$\mathrm{Inv}_H\, H^2(N^+ , N^+) = 0 \ ; \ \mathrm{Inv}_H\, H^2(N^- , N^-) = 0$$

Lemme 9 :

$$E_2^{0,2} = \mathrm{Inv}_H\, H^1(N^-) \otimes D_1 \oplus \mathrm{Inv}_H\, H^1(N^+) \otimes D_2 \oplus \mathrm{Inv}_H\, H^2(N^-) \otimes \mathbb{R}X_\lambda \oplus$$

$$\mathrm{Inv}_H\, H^2(N^+) \otimes \mathbb{R}X_{-\lambda}$$

pour certaines valeurs de la matrice U qu'on va determiner .

Demonstration du lemme 9 :

$$E_2^{0,2} = \mathrm{Inv}_H\, H^2(N^+ , N^+) \oplus \mathrm{Inv}_H(H^1(N^-) \otimes D_1 \oplus \mathrm{Inv}_H(H^2(N^-) \otimes \mathbb{R}X_\lambda)$$

$$\oplus\, \mathrm{Inv}_H\, H^2(N^- , N^-) \oplus \mathrm{Inv}_H(H^1(N^+) \otimes D_2) \oplus$$

$$\mathrm{Inv}_H(H^2(N^+) \otimes \mathbb{R}X_{-\lambda})$$

mais $\mathrm{Inv}_H\, H^2(N^+ , N^+) = 0$ et $\mathrm{Inv}_H\, H^2(N^- , N^-) = 0$ d'aprés la proposition précédente (Leger et Luks)

a/ $\mathrm{Inv}_H\, H^1(N^-) \otimes D_1$ est engendré par $X_{-\alpha_i} \otimes D'_{\alpha_j}$ tel que

$$H_{\alpha_k}(X_{-\alpha_i} \otimes D'_{\alpha_j}) = 0 \quad \forall k = 1 \ldots n-1 \quad i, j = 1 \ldots n-1$$

$$H_{\alpha_k}(X_{-\alpha_i} \otimes D'_{\alpha_j}) = (U_{ki} + \langle \alpha_k , S_{\alpha_j}(\lambda) - \alpha_j \rangle)\, X_{-\alpha_i} \otimes D'_{\alpha_j}$$

pour j fixé $X_{-\alpha_i} \otimes D'_{\alpha_j}$ est invariant par H à condition que

$$U_{ki} = \langle \alpha_k , \alpha_j - S_{\alpha_j}(\lambda) \rangle$$

b/ $\mathrm{Inv}_H\, H^1(N^+) \otimes D_2$ est engendré par $X_{\alpha_i} \otimes D'_{-\alpha_j}$ tel que

$$H_{\alpha_k}(X_{\alpha_i} \otimes D'_{-\alpha_j}) = 0 \qquad k = 1 \ldots n-1 \qquad i, j = 1 \ldots n-1$$

pour j fixé $X_{\alpha_i} \otimes D'_{-\alpha_j}$ est invariant par H à condition que

$$\langle \alpha_k , \alpha_i \rangle + U_{kj} - \sum_l U_{kl}\, n_l = 0 \text{ si } S_{\alpha_j}(\lambda) = \sum_l n_l \alpha_l$$

c/ $\mathrm{Inv}_H\, H^2(N^-) \otimes RX_\lambda$ est engendré par $X_{-\alpha_i} \wedge X_{-\alpha_j} \otimes X_\lambda$

i, j = 1 ... n-1 tel que

$$H_{\alpha_k}(X_{-\alpha_i} \wedge X_{-\alpha_j} \otimes X_\lambda) = - U_{ki} - U_{kj} + \langle \alpha_k , \lambda \rangle = 0$$

$X_{-\alpha_i} \wedge X_{-\alpha_j} \otimes X_\lambda$ est invariant par l'action de H à condition que

$U_{ki} + U_{kj} = \langle \alpha_k , \lambda \rangle$ i, j = 1 ... n-1

d/ $\mathrm{inv}_H\, H^2(N^+) \otimes RX_{-\lambda}$ est engendré par $X_{\alpha_i} \wedge X_{\alpha_j} \otimes X_{-\lambda}$

i, j = 1 ... n-1 tel que $H_{\alpha_k}(X_{\alpha_i} \wedge X_{\alpha_j}) \otimes X_{-\lambda} = 0$

$X_{\alpha_i} \wedge X_{\alpha_j} \otimes X_{-\lambda}$ est invariant par l'action de H à condition que

$$\langle \alpha_k , \alpha_i \rangle + \langle \alpha_k , \alpha_j \rangle = \sum_l n_l\, u_{kl} \text{ si } \lambda = \sum_l n_l \alpha_l$$

Etudions les homomorphismes de bords

$$E_3^{0,2} \longrightarrow E_2^{0,2} \xrightarrow{d_2} E_2^{2,1}$$

$$E_\infty^{0,2} \longrightarrow E_3^{0,2} \xrightarrow{d_3} E_3^{3,0}$$

$E_2^{3,0} = 0$ (d'aprés le lemme 6) : $E_2^{1,1} = 0$ pour U vérifiant la condition (1)

pour la même raison $E_2^{2,1} = 0$, donc $E_\infty^{0,2} = E_2^{0,2}$

la suite spectrale dégénère .

CHAPITRE II

INTRODUCTION :

Ce chapitre contient le calcul cohomologique nécéssaire pour le cas où G est une algèbre de Kac-Moody .

On note $G = sl(2 , R)$

$C\left[t , t^{-1}\right]$ l'algèbre des polynômes de Laurent en t et t^{-1}

$t\, C\left[t\right]$ polynômes en t sans termes constants

$t^{-1}\, C\left[t^{-1}\right]$ polynômes en t^{-1} sans termes constants

On note $\hat{G} = G \otimes C\left[t , t^{-1}\right]$ l'algèbre de Lie de Kac-Moody affine non tordue .

$G = N^{+} \oplus H \oplus N^{-}$ une décomposition de Cartan de G on lui associe la décomposition suivante pour $\hat{G}$.

$\hat{G} = \hat{N}^{+} + H + \hat{N}^{-}$ où N^{+} et N^{-} deux sous algèbres définies par :

$\hat{N}^{+} = (G \otimes t\, C\left[t\right]) \oplus N^{+}$; $\hat{N}^{-} = (G \otimes t^{-1}\, C\left[t^{-1}\right]) \oplus N^{-}$

On note $\hat{K} = H + \hat{N}^{-}$

$\hat{G}$ est munie de la base définie par Feigin [6] construite à partir de la base bien connue de $sl(2 , \mathbb{R})$:

$$\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$$

soient $e_{3m} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} t^{m} & 0 \\ 0 & -t^{m} \end{bmatrix}$; $e_{3m+1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & t^{m} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; $e_{3m-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ t^{m} & 0 \end{bmatrix}$

$m \in Z$, vérifient $\left[e_i , e_j\right] = \alpha_{ij}\, e_{i+j}$ où $\alpha_{ij} \begin{cases} = -1,\ 0,\ 1 \\ = (j-i) \bmod 3 \end{cases}$

on associe à $\hat{G}$ l'algèbre de Lie $\hat{G}_0 = \hat{K} \oplus \hat{N}^-$ obtenue comme somme directe de $\hat{K}$ et de $\hat{N}^-$, ce qui revient à annuler dans $\hat{G}$ les crochets entre les éléments de $\hat{N}^+$ et ceux de H et de $\hat{N}^-$ à chaque famille de paramètres

$\Omega = \left\{a_{-3i+1} , a_{-3i-1} , a_{-3i} \in \mathbb{N}\right\}$

On associe une algèbre de Lie résoluble G_Ω qui contient la somme directe de $\hat{N}^+ \oplus \hat{N}^-$ comme sous algèbre de commutateurs et dont l'abélianisé s'identifie à H . On a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \hat{N}^+ \oplus \hat{N}^- \longrightarrow G_\Omega \longrightarrow H \longrightarrow 0$$

et l'action de H sur $\hat{N}^+ \oplus \hat{N}^-$ est définie par :

$\left[e_0 , e_{-3i+1}\right] = -a_{3i+1}\, e_{-3i+1}$; $\left[e_0 , e_{-3i-1}\right] = a_{-3i-1}\, e_{-3i-1}$

$\left[e_0 , e_{-3i}\right] = a_{-3i}\, e_{-3i}$

Notre but dans ce chapitre est le calcul de $H^2(\hat{G}_0 , \hat{G}_0)$ et de $H^2(\hat{G}_\Omega , \hat{G}_\Omega)$.

3-1 CALCUL DE $H^2(G_0 , G_0)$:

On énonce tout d'abord quelques résultats utiles par la suite

Théorème de Feigin-Fialowski : [5]

L'espace des dérivations externes de $\hat{N}^+$ à valeurs dans $\hat{N}^+$ noté $Der(\hat{N}^+)$ est représenté par $ad_H \oplus t\, C\left[t\right] \frac{d}{dt}$

autrement dit une dérivation de $\hat{N}^+$ à valeurs dans $\hat{N}^+$ s'écrit :

$\mathrm{ad}\ e_0 + tP\dfrac{d}{dt}$ où $P \in C\ [t]$

<u>Proposition</u> : (Kuks [6])

Le $k^{\text{ème}}$ groupe d'homologie à coéfficients triviaux $H_k(\hat{N}^+)$ est engendré par les cycles suivants :

$$e_1 \wedge e_4 \wedge \cdots \wedge e_{3k+1} \quad ; \quad e_2 \wedge e_5 \wedge \cdots \wedge e_{3k-1}$$

<u>Proposition 5</u> :

$$H^2(\hat{G}_0\ ,\ \hat{G}_0) = \mathrm{Hom}(H\ ,\ \mathrm{Der}\ \hat{N}^+) \oplus \mathrm{Hom}(H_1(\hat{N}^-\ ,\ D^+)) \oplus$$

$$\mathrm{Hom}(H\ ,\ \mathrm{Der}\ \hat{N}^-) \oplus H^2(\hat{N}^-\ ,\ \hat{N}^-)$$

<u>Demonstration de la proposition 5</u> :

A la suite exacte courte $N^+ \longrightarrow G_0 \longrightarrow \hat{K}$ on associe la suite spectrale de Hoschild-Serre [8] pour la représentation adjointe

$$E_2^{p,q} = H^p(\hat{K}\ ,\ H^q(\hat{N}^-\ ,\ \hat{G}_0)) \Longrightarrow H^{p+q}(\hat{G}_0\ ,\ \hat{G}_0)$$

$H^2(\hat{G}_0\ ,\ \hat{G}_0)$ est déterminé par trois termes :

$$E_2^{0,2} = H^0(\hat{K}\ ,\ H^2(\hat{N}^-\ ,\ \hat{G}_0) \quad ; \quad E_2^{1,1} = H^1(\hat{K}\ ,\ H^1(\hat{N}^-\ ,\ \hat{G}_0))$$

et $E_2^{2,0} = H^2(\hat{K}\ ,\ H^2(\hat{N}^-\ ,\ \hat{G}_0)$

Comme on a une somme directe d'algèbres de Lie, la suite spectrale dégénère au niveau du terme E_2 .

Cette proposition va résulter d'une suite de Lemmes préliminaires .

<u>Lemme 10</u> :

i/ $H^1(\hat{K}, \hat{N}^-) = H^1(\hat{N}^-, \hat{N}^-)$

ii/ $H^2(\hat{K}, \hat{N}^-) = \mathrm{Hom}(H, H^1(\hat{N}^-, \hat{N}^-))$

<u>Demonstration du lemme 10</u> :

i/ Regardons la suite spectrale de Hoschild-Serre associé à la suite exacte $\hat{N}^- \longrightarrow \hat{K} \longrightarrow H$

$$E_1^{0,1} = \mathrm{Inv}_H\, H^1(\hat{N}^-, \hat{N}^-) = H^1(\hat{N}^-, \hat{N}^-)$$

$$E_1^{1,0} = H^1(H, H^0(\hat{N}^+, \hat{N}^+)) = 0 \text{ car } Z(\hat{N}^+) = 0$$

on a l'homomorphisme de bord $E_1^{0,1} \longrightarrow E_1^{0,2}$ mais $E_1^{0,2} = 0$ donc

$$E_1^{0,1} = E_\infty^{0,1} = H^1(\hat{N}^-, \hat{N}^-)$$

ii/ Observons la suite spectrale de Hoschild-Serre associé à la suite exacte $\hat{N}^+ \longrightarrow \hat{K} \longrightarrow H$

on a $E_2^{0,2} = \mathrm{Inv}_H\, H^2(\hat{N}^+, \hat{N}^+) \equiv 0$ (voir page : 46)

$$E_2^{2,0} = H^2(H, H^0(\hat{N}^+, \hat{N}^+)) \equiv 0 \text{ car } Z(N^+) = 0$$

$E_2^{1,1} = H^1(H, H^1(\hat{N}^+, \hat{N}^+)) = \mathrm{Hom}(H, H^1(\hat{N}^+, \hat{N}^+))$ car H est un module trivial sur $\hat{N}^+$

Regardons les homomorphismes de bords

$$E_2^{1,1} \longrightarrow E_2^{3,0} \;;\; E_2^{3,0} = 0 \text{ donc } E_2^{1,1} = E_\infty^{1,1} = H^2(\hat{K}, \hat{N}^+)$$

Lemme 11 :

i/ $H_1(K) = 0$

ii/ $H_2(K) = 0$

Demonstration du lemme 11 :

i/ $H_1(K) = \frac{k}{[K , k]} = 0$ car $[K , K] = K$

ii/ K se décompose de la façon suivante $\hat{N}^+ \longrightarrow \hat{K} \longrightarrow H$

$H_2(K)$ est donné par :

$H_2(H , H_0(N^+)) = 0$ car $H_0(N^+) = 0$

$H_1(H , H_1(N^+)) = 0$ évident

$H_0(H , H_2(N^+)) = \mathrm{Inv}_H H_2(\hat{N}^+)$

$H_2(N^+)$ est engendré par $e_1 \wedge e_4$; $e_2 \wedge e_5$

$e_0 \cdot (e_1 \wedge e_4) = 2e_1 \wedge e_4$; $e_0 \cdot (e_2 \wedge e_5) = e_2 \wedge e_5$

donc $\mathrm{Inv}_H(H_2(N^+)) = 0$

c . q . f . d

Lemme 12 :

$H^1(\hat{K} , \hat{K}) = D^+$

où D^+ est la sous algèbre de Der $\hat{N}$ composée des dérivations de la forme $t\, C[t] \frac{d}{dt}$

Demonstration du lemme 12 :

$H^1(\hat{K} , \hat{K})$ est obtenu à l'aide de la suite exacte longue des

coéfficients associée à la suite exacte suivante :

$$\hat{N}^+ \longrightarrow \hat{K} \longrightarrow H$$

Soit $H^0(\hat{K}\ ,\ H) \xrightarrow{\delta_0} H^1(\hat{K}\ ,\ \hat{N}^+) \xrightarrow{I} H^1(\hat{K}\ ,\ \hat{K}) \xrightarrow{J} H^1(\hat{K}\ ,\ H)$

$$\downarrow \delta_1$$

$$H^2(\hat{K}\ ,\ \hat{N}^+)$$

on a : $H \xrightarrow{\delta_0} H^1(\hat{N}^+\ ,\ \hat{N}^+) \xrightarrow{I} H^1(\hat{K}\ ,\ \hat{K}) \xrightarrow{J} H^1(\hat{K}\ ,\ H)$

$$\downarrow \delta_1$$

$$H^2(\hat{K}\ ,\ \hat{N}^+)$$

d'où la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow D \longrightarrow H^1(\hat{K}\ ,\ \hat{K}) \longrightarrow \operatorname{Ker} \delta_1 \longrightarrow 0$$

Le lemme va résulter de $\operatorname{Ker} \delta_1 = 0$

$H^1(K\ ,\ H) = \operatorname{Hom}(H_1(\hat{K})\ ,\ H)$ car H est un module trivial sur $\hat{K}$ puisque $\left[\hat{K}\ ,\ \hat{K}\right] = \hat{N}^+$, $H_1(\hat{K}) = H$ est engendré par e_0 .

Un élément $[\varphi]$ de $H^1(\hat{K}\ ,\ H)$ se définit par une fonction de H à valeurs dans H telle que :

$\varphi(e_0) = ae_0$; si $\varphi \in \operatorname{Ker} \delta_1$ il existe une cochaine $g \in C^1(\hat{K}\ ,\ \hat{N}^+)$ tel que $\delta_1 \varphi = \delta g$ où δ est l'opérateur cobord .

Soit $g(e_0) = \sum_i (A_i\ e_{3i+1} + B_i\ e_{3i-1})$

on a : $\delta_1 \varphi(e_0\ ,\ e_{3m+1}) = -\left[e_{3m+1}\ ,\ \varphi(e_0)\right] = ae_{3m+1}$

$$\delta g(e_0\ ,\ e_{3m+1}) = -g(\left[e_0\ ,\ e_{3m+1}\right]) + \left[e_0\ ,\ g(e_{3m+1})\right] + \left[e_{3m+1}\ ,\ g(e_0)\right]$$

$$= -g(e_{3m+1}) + g(e_{3m+1}) - \left[e_{3m+1}\ ,\ g(e_0)\right]$$

$$= -\left[e_{3m+1}\ ,\ g(e_0)\right] = -\sum_i A_i e_{3(m+i+1)} + B_i e_{3(m+i)}$$

Dans l'expréssion de $\delta_g(e_0 , e_{3m+1})$ il n'y a pas de termes en e_{3m+1} donc a = 0 d'où $\varphi = 0$ et donc Ker δ_1 est identiquement nul .

c . q . f . d

<u>Lemme 13</u> :

$$E_2^{2,0} = H^2(\hat{K} , \hat{K}) = \mathrm{Hom}(H , \mathrm{Der}\ \hat{N}^+)$$

<u>Demonstration du lemme 13</u> :

$E_2^{2,0} = H^2(\hat{K} , H^0(\hat{N}^- , G_0)) = H^2(\hat{K} , \mathrm{Inv}_{\hat{N}^-}(G_0))$ par la même remarque que précédemment, l'action de $\hat{N}^-$ sur $\hat{K}$ est triviale et le centre de $\hat{N}^-$ est nul : donc $\mathrm{Inv}_{\hat{N}^-}(\hat{G}_0) = \hat{K}$ et $E_2^{2,0} = H^2(\hat{K} , \hat{K})$ qui est égale à $\mathrm{Hom}(H , \mathrm{Der}\ N^+)$

c . q . f . d

<u>Lemme 14</u> :

$$E_2^{1,1} = \mathrm{Hom}(H_1(\hat{N}^-) , \hat{D}) \oplus \mathrm{Hom}(H , \mathrm{Der}(\hat{N}^-))$$

<u>Demonstration du lemme 14</u> :

On a $E_2^{1,1} = H^1(\hat{K} , H^1(\hat{N}^- , G_0)$ et $H^1(\hat{N}^- , \hat{G}_0)$ et

$H^1(\hat{N}^- , \hat{G}_0) = H^1(\hat{N}^- , \hat{N}^-) \oplus H^1(\hat{N}^- , \hat{K})$

d'où $E_2^{1,1} = H^1(\hat{K} , H^1(\hat{N}^- , \hat{N}^-)) \oplus H^1(\hat{K} , H^1(\hat{N}^- , \hat{K}))$

$H^1(\hat{K} , H^1(\hat{N}^- , \hat{K})) = H^1(\hat{K} , \mathrm{Hom}(\hat{N}^-) , \hat{K}))$

$$= \mathrm{Hom}\,(H_1(\hat{N}^-)\ ,\ H^1(\hat{K}\ ,\ \hat{K}))$$

$$= \mathrm{Hom}\,(H_1(\hat{N}^-)\ ,\ \vec{D})$$ d'aprés le lemme 12

On a aussi $H^1(\hat{K}\ ,\ H^1(\hat{N}^-\ ,\ \hat{N}^-)) = H^1(\hat{K}\ ,\ \mathrm{Der}\ \hat{N}^-)$

$$= \mathrm{Hom}(H_1(\hat{K})\ ,\ \mathrm{Der}\ \hat{N}^-)$$

$$= \mathrm{Hom}(H\ ,\ \mathrm{Der}\ \hat{N}^-)$$

toujours à cause de l'action triviale de $\hat{K}$ sur $\hat{N}^-$ et donc sur sa cohomologie .

c . q . f . d

<u>Lemme 15</u> :

$$E_2^{0,2} = H^2(\hat{N}^-\ ,\ \hat{N}^-)$$

<u>Demonstration du lemme 15</u> :

$$E_2^{0,2} = \mathrm{Inv}_K\ H^2(\hat{N}^-\ ,\ \hat{G}_0) = \mathrm{Inv}_{\hat{K}}\ H^2\ (\hat{N}^-\ ,\ \hat{N}^-) \oplus \mathrm{Inv}_{\hat{K}}\ H^2(\hat{N}^-\ ,\ \hat{K})$$

mais $\mathrm{Inv}_{\hat{K}}\ H^2(\hat{N}^-\ ,\ \hat{N}^-) = H^2(\hat{N}^-\ ,\ \hat{N}^-)$ car l'action de $\hat{K}$ sur $\hat{N}^-$ est triviale .

$\mathrm{Inv}_{\hat{K}}\ H^2(\hat{N}^-\ ,\ \hat{K}) = 0$

d'où $E_2^{0,2} = H^2(\hat{N}^-\ ,\ \hat{N}^-)$

c . q . f . d

2-2 <u>CALCUL DE $H^2(G_\Omega\ ,\ G_\Omega)$</u> :

G_Ω se décompose selon la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \hat{N}^+ \oplus \hat{N}^- \longrightarrow G_\Omega \longrightarrow H \longrightarrow 0$$

A cette suite exacte courte on associe la suite spectrale de Hochschild-Serre pour la représentation adjointe .

Le calcul de $H^2(G_\Omega , G_\Omega)$ va se déduire des trois termes suivants :

$$E_2^{0,2} = H^0(H , H^2(\hat{N}^+ \oplus \hat{N}^- , \hat{G}_\Omega)$$

$$E_2^{1,1} = H^1(H , H^1(\hat{N}^+ \oplus \hat{N}^- , \hat{G}_\Omega)$$

$$E_2^{2,0} = H^2(H , H^0(\hat{N}^+ \oplus \hat{N}^- , \hat{G}_\Omega)$$

On peut énoncer la proposition suivante :

<u>Proposition 6</u> :

$$H^2(G_\Omega , G_\Omega) = \mathrm{Hom}(H , \underline{\mathrm{Der}\ \hat{N}^+ \oplus \mathrm{Der}\ \hat{N}^-}_{\Delta}) \oplus V$$

où $V = \left\{ C \in \mathrm{Hom}(H_1(\hat{N}^+) \otimes H_1(\hat{N}^-) , H) \ / \ C(e_1 , e_{-1}) = ae_0 \ ; \ C(e_2 , e_{-2}) = be_0 \right\}$

et $\Delta = \left\{ (\mathrm{ad}\ e_0 , \mathrm{ad}\ e_0) \right\} \subset \mathrm{Der}\ \hat{N}^+ \oplus \mathrm{Der}\ \hat{N}^-$

La proposition 6 va résulter de lemmes préliminaires

<u>Lemme 16</u> :

i/ $H^1(\hat{N}^+ \oplus \hat{N}^- , \hat{G}_\Omega) = D^+ \oplus D^-$

ii/ $H^2(\hat{N}^+ \oplus \hat{N}^- , \hat{G}_\Omega) = H^2(\hat{N}^+ , \hat{N}^+) \oplus H^1(\hat{N}^-) \otimes D^+ \oplus H^2(\hat{N}^- , \hat{N}^-) \oplus H^1(\hat{N}^+) \otimes D^- \oplus \mathrm{Hom}(H_1(\hat{N}^+) \otimes H_1(\hat{N}^-) , H)$

<u>Demonstration du lemme 16</u> :

On a la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \hat{N}^+ \oplus \hat{N}^- \longrightarrow G_{\Omega} \longrightarrow H \longrightarrow 0$$

et la suite exacte longue des coéfficients

$$H \xrightarrow{\delta 0} H^1(\hat{N}^+ \oplus \hat{N}^- , \hat{N}^+ \oplus \hat{N}^-) \xrightarrow{I_1} H^1(\hat{N}^+ \oplus \hat{N}^- , G_{\Omega}) \xrightarrow{J_1}$$

$$H^1(\hat{N}^+ \oplus \hat{N}^- , H) \xrightarrow{\delta_1} H^2(\hat{N}^+ \oplus \hat{N}^- , \hat{N}^+ \oplus \hat{N}^-) \xrightarrow{I_2} H^2(\hat{N}^+ \oplus \hat{N}^- , G_{\Omega})$$

$$\xrightarrow{J_2} H^2(\hat{N}^+ \oplus \hat{N}^- , H) \xrightarrow{\delta_2} H^3(\hat{N}^+ \oplus \hat{N}^- , \hat{N}^+ \oplus \hat{N}^-)$$

d'où les deux suites exactes courtes :

$$\mathrm{Im}\ I_1 \longrightarrow H^1(\hat{N}^+ \oplus \hat{N}^- , G_{\Omega}) \longrightarrow \mathrm{Ker}\ \delta_1$$

$$\mathrm{coker}\ \delta_1 \longrightarrow H^2(\hat{N}^+ \oplus \hat{N}^- , G_{\Omega}) \longrightarrow \mathrm{Ker}\ \delta_2$$

i/ $\mathrm{Im}\ I_1 = D^+ + D^-$

(i) du lemme va résulter de $\mathrm{Ker}\ \delta_1 = 0$

$H^1(\hat{N}^+ \oplus \hat{N}^- , H) = \mathrm{Hom}(H_1(N^+) , H) \oplus \mathrm{Hom}(H_1(N^-) , H)$

Soit $[\varphi]$ une classe de cohomologie de $\mathrm{Hom}(H_1(N^+) , H)$ représentée par une application $\varphi : H_1(N^+) \longrightarrow H$ définie par $\varphi(e_i) = a_i\ e_0$

$\delta_1 [\varphi] = (\delta_1' [\varphi], \delta_1'' [\varphi])$ tel que $\delta_1' [\varphi] \in H^1(N^-) \otimes H^1(N^+ , N^+)$ et

$\delta_1'' [\varphi] \in H^2(\hat{N}^+ , \hat{N}^+)$

$\delta_1' \varphi(e_i , e_{-j}) = a_i [e_0 , e_{-j}] = a_i\ \mathrm{ad}\ e_0\ (e_{-j})$

$\delta_1' [\varphi]$ ne peut pas s'annuler dans $H^1(N^+) \otimes H^1(N^- , N^-)$

De même si on considère $[\Psi]$ une classe de cohomologie de $\mathrm{Hom}(H_1(N^-) , H)$ donc $\mathrm{Ker}\ \delta_1 = 0$

ii/ On a la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \text{coker } \delta_1 \longrightarrow H^2(N^+ \oplus N^- \ , \ G_{\Omega}) \longrightarrow \text{Ker } \delta_2$$

$$\text{coker } \delta_1 = H^2(N^+ \ , \ N^+) \oplus H^1(\hat{N}^-) \otimes D^+ \oplus H^2(\hat{N}^- \ , \ \hat{N}^-) \oplus H^1(\hat{N}^+) \otimes D^-$$

Le lemme va résulter de $\text{Ker } \delta_2 = \text{Hom}(H_1(\hat{N}^+) \otimes H_1(\hat{N}^-) \ , \ H)$

$$H^2(N^+ \oplus N^- \ , \ H) = \text{Hom}(H_2(\hat{N}^+) \ , \ H) \oplus \text{Hom}(H_2(\hat{N}^-) \ , \ H) \oplus$$
$$\text{Hom}(H_1(\hat{N}^+) \otimes H_1(\hat{N}^-) \ , \ H)$$

Soit $[f]$ une classe de cohomologie de $\text{Hom}(H_2(\hat{N}^+) \ , \ H)$ représentée par le 2-cocycle $f : H_2(\hat{N}^+) \longrightarrow H$ définie par $f(e_i \wedge e_j) = a_{ij} e_0$

$\delta_2[f] = (\delta_2'[f], \delta_2''[f])$ tel que $\delta_2'[f] \in H^2(\hat{N}^+) \otimes H^1(\hat{N}^- \ , \ \hat{N}^-)$ et

$\delta_2''[f] \in H^3(\hat{N}^+ \ , \ \hat{N}^+)$

$$\delta_2' \ f(e_i \ , \ e_j \ , \ e_{-k}) = a_{ij} \ [e_0 \ , \ e_{-k}] = a_{ij} \ \text{ad } e_0 \ e_{-k}$$

donc $\delta_2'[f]$ ne peut pas s'annuler dans $H^2(\hat{N}^+) \otimes H^1(\hat{N}^- \ , \ \hat{N}^-)$

De même si on considère $[g]$ une classe de cohomologie de $\text{Hom } (H_2(\hat{N}^-) \ , \ H)$ donc $\text{Hom}(H_2(\hat{N}^+) \ , \ H)$ et $\text{Hom}(H_2(\hat{N}^-) \ , \ H)$ ne sont pas dans $\text{Ker } \delta_2$.

Reste à voir $\text{Hom}(H_1(\hat{N}^+) \otimes H_1(\hat{N}^-) \ , \ H)$

Soit $[C]$ une classe de cohomologie de $\text{Hom}(H_1(N^+) \otimes H_1(\hat{N}^-) \ , \ H)$ représentée par $C = \mathcal{E}_i \otimes \mathcal{E}_{-j} \otimes e_0 \quad i, j = 1, 2$

Le lemme va résulter du lemme suivant :

<u>Lemme 17</u> :

$$\left[\delta_2'(\mathcal{E}_i \otimes e_0)\right] = 0 \quad i = 1, 2$$

<u>Demonstration du lemme 17</u> :

Soit $f = (a\,\mathcal{E}_1 + b\,\mathcal{E}_2) \otimes e_0$; il existe $g \in C^2(N^+ \oplus N^- , N^+ \oplus N^-)$

définie par $\begin{cases} g(e_1) = 0 \\ g(e_2) = -ae_1 \\ g(e_i) = A_i e_{i-1} + B_i e_{i-2} \quad \text{pour } i \geqslant 3 \end{cases}$

$\delta_1 f = dg$ à condition que : $\begin{cases} A_{3m} = -A_{3m+1} = -A_{3m-1} = a \\ B_{3m+1} = 0 \ ; \ B_{3m-1} = -B_{3m} = -b \end{cases}$

c . q . f . d

<u>Lemme 18</u> :

$$E_2^{1,1} = H^1(H , D^+) \oplus H^1(H , D^-) = 0$$

<u>Demonstration du lemme 18</u> :

D^+ et D^- se décompose en somme directe de module sur H de dimension 1, H est abélien,d'aprés le lemme 6 du chapitre I

$E_2^{1,1} = 0$ d'où le lemme .

<u>Lemme 19</u> :

$$E_2^{2,0} = 0$$

<u>Demonstration du lemme 19</u> :

Trivial car H est de dim 1

<u>Lemme 20</u> :

$E_2^{0,2}$ est de dimension 2 et engendré par les cocycles suivants :

$C(e_1 , e_{-1}) = ae_0$ et $C(e_2 , e_{-2}) = be_0$

Pour Ω tel que $\left\{ \begin{array}{l} a_{-1} \neq 0 \ ; \ a_{-2} \neq 0 \ ; \ a_{-1} + a_{-3j} \neq a_{-3j+1} \ ; \\ a_{-1} + a_{-3j-1} \neq a_{-3j} \ ; \ a_{-2} + a_{-3j} \neq a_{-3j+2} \ ; \\ a_{-2} + a_{-3j-2} \neq -a_{-3j} \ ; \ a_{-1} + a_{-j} \neq -ja_{-j-3m} \ ; \\ a_{-2} + a_{-j} \neq -ja_{-j-3m} \end{array} \right\}$

<u>Demonstration du lemme 20</u> :

$$E_2^{0,2} = \mathrm{Inv}_H \, H^2(\hat{N}^+ \oplus \hat{N}^- , \hat{G}_\Omega)$$

D'aprés le lemme 16 $H^2(\hat{N}^+ \oplus \hat{N}^- , \hat{G}_\Omega)$ est égale à :

$H^2(\hat{N}^+ , \hat{N}^+) \oplus H^1(\hat{N}^-) \otimes D^+ \oplus H^2(\hat{N}^- , \hat{N}^-) \oplus H^1(\hat{N}^+) \otimes D^- \oplus$

$\mathrm{Hom}(H_1(\hat{N}^+) \otimes H_1(\hat{N}^-) , H)$

a/ $\mathrm{Inv}_H \, H^2(\hat{N}^+ , \hat{N}^+)$

Les 2-cocycles de $\hat{N}^+$ à valeurs dans $\hat{N}^+$ ont été déterminés par Fialowski [6]

$\mathcal{E}_1 \wedge \mathcal{E}_{3j} \otimes e_{3j-1} + \mathcal{E}_1 \wedge \mathcal{E}_{3j+1} \otimes -e_{3j} + \mathcal{E}_2 \wedge \mathcal{E}_{3j} \otimes e_{3j-2} +$

$\mathcal{E}_2 \wedge \mathcal{E}_{3j+2} \otimes e_{-3j}$ pour $j > 0$

et pour tout $m > 0$ $\mathcal{E}_1 \wedge \mathcal{E}_j \otimes je_{j+3m} + \mathcal{E}_2 \wedge \mathcal{E}_j \otimes je_{j+3m}$ $j \neq 1$

où $(\mathcal{E}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est un système de générateurs de $(\hat{N}^+)^*$(de la base de Feigin)

$$j > 0 \left[\begin{array}{l} e_0(\mathcal{E}_1 \wedge \mathcal{E}_{3j} \otimes e_{3j-1}) = -2(\mathcal{E}_1 \wedge \mathcal{E}_{3j} \otimes \mathcal{E}_{3j-1}) \\ e_0(\mathcal{E}_1 \wedge \mathcal{E}_{3j+1} \otimes e_{3j}) = -2(\mathcal{E}_1 \wedge \mathcal{E}_{3j+1} \otimes \mathcal{E}_{3j}) \end{array} \right.$$

$$j > 0 \left[\begin{array}{l} e_0(\varepsilon_2 \wedge \varepsilon_{3j} \otimes e_{3j-2}) = -4(\varepsilon_2 \wedge \varepsilon_{3j} \otimes e_{3j-1}) \\ e_0(\varepsilon_2 \wedge \varepsilon_{3j+2} \otimes -e_{3j}) = -4(\varepsilon_2 \wedge \varepsilon_{3j+2} \otimes -e_{3j}) \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{l} j \neq 1 \\ \text{pour tout } m > 0 \end{array} \left[\begin{array}{l} e\,(\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_j \otimes je_{j+3m}) = -\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_j \otimes je_{j+3m} \\ e_0(\varepsilon_2 \wedge \varepsilon_j \otimes je_{j+3m}) = 2\varepsilon_2 \wedge \varepsilon_j \otimes je_{j+3m} \end{array}\right. \quad \text{si } j=3m$$

$$\begin{array}{l} j \neq 1 \\ \text{pour tout } m > 0 \end{array} \left[\begin{array}{l} e_0(\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_j \otimes je_{j+3m}) = (-2 + j + 3m) \times \\ \qquad\qquad (\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_{3j} \otimes je_{j+3m}) \\ e_0(\varepsilon_2 \wedge \varepsilon_j \otimes je_{j+3m}) = (-2 + j + 3m) \times \\ \qquad\qquad (\varepsilon_2 \wedge \varepsilon_{3j} \otimes je_{j+3m}) \end{array}\right. \quad \text{si } j=3m+1$$

$$\begin{array}{l} j \neq 1 \\ \text{pour tout } m > 0 \end{array} \left[\begin{array}{l} e_0(\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_j \otimes je_{j+3m}) = (j + 3m) \times \\ \qquad\qquad (\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_j \otimes je_{j+3m}) \\ e_0(\varepsilon_2 \wedge \varepsilon_j \otimes je_{j+3m}) = (-1 + j + 3m) \times \\ \qquad\qquad (\varepsilon_2 \wedge \varepsilon_j \otimes je_{j+3m}) \end{array}\right. \quad \text{si } j=3m-1$$

donc $\mathrm{Inv}_H\, H^2(\hat{N}^+ , \hat{N}^+) = 0$

b/ $\mathrm{Inv}_H\, H^1(\hat{N}^-) \otimes D^+ = 0$ sauf si $a_{-1} = a_{-2} = 0$

$H^1(\hat{N}^-)$ est engendré par e_{-1}, e_{-2}

$H^1(\hat{N}^-) \otimes D^+$ est engendré par $e_{-1} \otimes tt^i \frac{d}{dt}$ i un entier positif

$e_{-2} \otimes tt^i \frac{d}{dt}$

qui ne sont pas invariants par l'action de H sauf si $a_{-1} = a_{-2} = 0$

dans la famille Ω.

c/ $\mathrm{Inv}_H\, H^1(\hat{N}^+) \otimes D^- = 0$

B.U. METZ

$H^1(\hat{N}^+)$ est engendré par e_1, e_2

$H^1(\hat{N}^+) \otimes D^-$ est engendré par $\begin{cases} e_1 \otimes t^{-1}t^{-i}\frac{d}{dt} \\ e_2 \otimes t^{-1}t^{-i}\frac{d}{dt} \end{cases}$ i un entier positif

$e_0(e_1 \otimes t^{-1}t^{-i}\frac{d}{dt}) = e_1 \otimes t^{-1}t^{-i}\frac{d}{dt}$

$e_0(e_2 \otimes t^{-1}t^{-i}\frac{d}{dt}) = e_1 \otimes t^{-1}t^{-i}\frac{d}{dt}$

d/ $\mathrm{Inv}_H H^2(\hat{N}^-, \hat{N}^-) = 0$ sauf pour certaines valeurs de la famille de paramètre Ω.

$H^2(\hat{N}^-, \hat{N}^-)$ est engendré par les cocycles suivants :

$\varepsilon_{-1} \wedge \varepsilon_{-3j} \otimes e_{-3j+1} + \varepsilon_{-1} \wedge \varepsilon_{-3j-1} \otimes -e_{3j} + \varepsilon_{-2} \wedge \varepsilon_{-3j} \otimes e_{-3j+2} +$

$\varepsilon_{-2} \wedge \varepsilon_{-3j-2} \otimes -\varepsilon_{-3j}$, pour $j > 0$

et pour tout $m > 0$ $\varepsilon_{-1} \wedge \varepsilon_{-j} \otimes -je_{-j-3m} + \varepsilon_{-2} \wedge \varepsilon_{-j} \otimes -je_{-j-3m}$;

$j \neq -1$

Détaillons les différents cas :

$\varepsilon_{-1} \wedge \varepsilon_{-3j} \otimes e_{-3j+1}$ est invariant par l'action de H si

$a_{-1} + a_{-3j} = a_{-3j+1}$ $\qquad j > 0$

$\varepsilon_{-1} \wedge \varepsilon_{-3j-1} \otimes e_{-3j}$ est invariant par l'action de H si

$a_{-1} + a_{-3j-1} = a_{-3j}$ $\qquad j > 0$

$\varepsilon_{-2} \wedge \varepsilon_{-3j} \otimes e_{-3j+2}$ est invariant par l'action de H si

$a_{-2} + a_{-3j} = a_{-3j+2}$ $\qquad j > 0$

$\varepsilon_{-2} \wedge \varepsilon_{-3j-2} \otimes -e_{-3j}$ est invariant par l'action de H si

$a_{-2} + a_{-3j-2} = -a_{-3j}$ $\qquad j > 0$

$\varepsilon_{-1} \wedge \varepsilon_{-j} \otimes -je_{-j-3m}$ est invariant par l'action de H si

$a_{-1} + a_{-j} = -ja_{-j-3m}$ $\qquad j \neq 1 \quad m > 0$

$\varepsilon_{-2} \wedge \varepsilon_{-j} \otimes -je_{-j-3m}$ est invariant par l'action de H si

$a_{-2} + a_{-j} = -ja_{-j-3m}$ $\qquad j \neq 1 \quad m > 0$

$\mathrm{Inv}_H \, \mathrm{Hom}(H_1(N^+) \otimes H_1(N^-) , H)$ est engendré par les cocycles suivants :

$\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_{-1} \otimes e_0$; $\varepsilon_2 \wedge \varepsilon_{-1} \otimes e_0$

$\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_{-2} \otimes e_0$; $\varepsilon_2 \wedge \varepsilon_{-2} \otimes e_0$

$\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_{-1} \otimes e_0$ est invariant par l'action de H si $-1 = a_{-1}$ dans Ω

$\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_{-2} \otimes e_0$ est invariant par l'action de H si $-1 = a_{-2}$ dans Ω

$\varepsilon_2 \wedge \varepsilon_{-1} \otimes e_0$ est invariant par l'action de H si $-1 = a_{-1}$

$\varepsilon_2 \wedge \varepsilon_{-2} \otimes e_0$ est invariant par l'action de H si $-2 = a_{-2}$

c . q . f . d

On considère les homomorphismes de bord de la suite spectrale

$$E_\infty^{0,2} = E_4^{0,2} \longrightarrow E_3^{0,2} \longrightarrow E_2^{0,2}$$

$$d_2 : E_2^{0,2} \longrightarrow E_2^{2,1}$$

$$d_2 : \mathrm{Inv}_H \, H^2(\hat{N}^+ \oplus \hat{N}^- , \hat{G}_\Omega) \longrightarrow H^2(H , H^1(\hat{N}^+ \oplus \hat{N}^- , \hat{G}_\Omega)$$

Comme H est de dimension 1 et $H^2(H) = 0$ on a $d_2 \equiv 0$

de même $d_3 : E_3^{0,2} \longrightarrow E_3^{3,0}$

$$E_3^{3,0} = H^3(H\ ,\ H^0(\hat{N}^+ \oplus \hat{N}^-\ ,\ G_\Omega) = 0$$

car nous avons montrer que $H^0(\hat{N}^+ \oplus \hat{N}^-\ ,\ G_\Omega) = 0$

de même $E_2^{1,1} \longrightarrow E_2^{3,0} = 0$ d'où $E_\infty^{1,1} = E_2^{1,1}$

donc $H^2(G_\Omega\ ,\ G_\Omega) = \mathrm{Hom}(H\ ,\ \underline{\mathrm{Der}\ \hat{N}^+ \oplus \mathrm{Der}\ \hat{N}^-}_{\Delta}) \oplus V$

car la suite spectrale dégénère .

On a ainsi calculé $H^2(G_0\ ,\ G_0)$ et $H^2(G_\Omega\ ,\ G_\Omega)$ qui donnent toutes les déformations possibles .

CHAPITRE III

3-0 DEFINITIONS PRELEMINAIRES :

Nous donnons ici les définitions nécéssaires pour la suite voir [9] pour plus de détails .

Définition 1 : Le crochet de Richardson Nijenhuis

Soit (M , V) l'espace des applications multilinéaires dans un espace vectoriel V, pour $a \geqslant 1$ on désigne par $M^a(V)$ l'espace des applications $(a + 1)$ linéaires de V^{a+1} dans V on a donc $M(V) = \bigoplus_{a \geqslant -1} M^a(V)$

Si $A \in M^a(V)$ et $B \in M^b(V)$, on pose $A \veebar B = 0$ si $a = -1$, si non

$$(A \veebar B)(x_0, \ldots, x_{a+b}) = \sum_{i=0}^{a} (-1)^{ib} A(x_0, \ldots, x_{i-1}, B(x_i, \ldots, x_{i+b}) x_{i+b+1}, \ldots, x_{a+b})$$

On définit ensuite que $\Delta : M(V)^2 \longrightarrow M(V)$ par :

$A \Delta B = A \veebar B + (-1)^{ab+1} B \veebar A$

$(M(V) , \Delta)$ est une algèbre de Lie graduée .

Notons ensuite α l'opérateur d'antisymétrisation :

si $A \in M^a(V)$, alors

$$(\alpha(A))(x_0, \ldots, x_a) = \left(\frac{1}{(a+1)!}\right) \sum_{\sigma} \operatorname{sign}(\sigma)\, A(X\sigma_{(0)}, \ldots, X\sigma_{(a)})$$

où $\operatorname{sign}(\sigma)$ est la signature de la permutation de $(a+1)$-éléments σ

On pose alors $A(V) = \alpha(M(V))$ et $A^a(V) = \alpha(M^a(V))$ pour $a \geqslant 1$, ensuite on définit $[\![\, , \,]\!] : A(V)^2 \longrightarrow A(V)$ par $[\![A , B]\!] = \dfrac{(a+b+1)!}{(a+1)!\,(b+1)!} \alpha(A \Delta B)$

$A \in A^a(V)$, $B \in A^b(V)$

Définition 2 :

Soit $A^1(V)_\lambda$ l'espace des séries formelles en λ à coéfficients dans $A^1(V)$ (l'espace des applications bilinéaires antisymétriques de $V \times V$ dans V) .

Soit $G = (V , [,])$ une algèbre de Lie .

On appelle déformation formelle de G une structure d'algèbre de Lie sur V_λ définie par $P_\lambda \in A^1(V)_\lambda$ telle que $P_0 = [,]$

l'identité de Jacobi s'écrit pour P_λ :

$$\sum_{i+j=k} [[P_i , P_j]] = 0 \quad \forall k \in N$$

Soit $-\delta P_k = 2 \sum_{\substack{i+j=k \\ i,j>0}} [[P_i , P_j]] = J_k(P_1, \ldots, P_{k-1})$

ainci le bord de P_k est une quantité qui s'exprime à l'aide de $P_1, \ldots, P_{k-1}$

Définiton 3 : Une déformation vraie d'ordre k

Une déformation de G d'ordre k est un élément $P_\lambda \in A^1(V)_\lambda$ telle que $P_0 = [,]$ et $-\delta P_k = J_P \quad \forall P \leqslant k$

$$\delta P_{k+1} = J_{k+1} = 0$$

ainci $P_\lambda = P_0 + \sum_{i=1}^{k} \lambda^i P_i$ est un crochet de Lie sur V pour toutes les valeurs de λ .

Remarques :

a/ L'obstruction à prolonger à l'ordre k + 1 une déformation à l'ordre k est une classe de cohomologie $[J_{k+1}] \in H^3(G , G)$

En particulier si $H^3(G , G) = 0$, toute déformation à l'ordre k de G se prolonge en une déformation formelle de G .

b/ si $H^2(G , G) = 0$, alors G est rigide (P_λ est une déformation triviale) . En particulier toute algèbre de Lie semi-simple est rigide ainci $H^3(G , G)$ intervient comme obstruction et $H^2(G , G)$ comme classification des déformations .

3-1 INTRODUCTION :

Considérons une algèbre de Lie munie d'une graduation

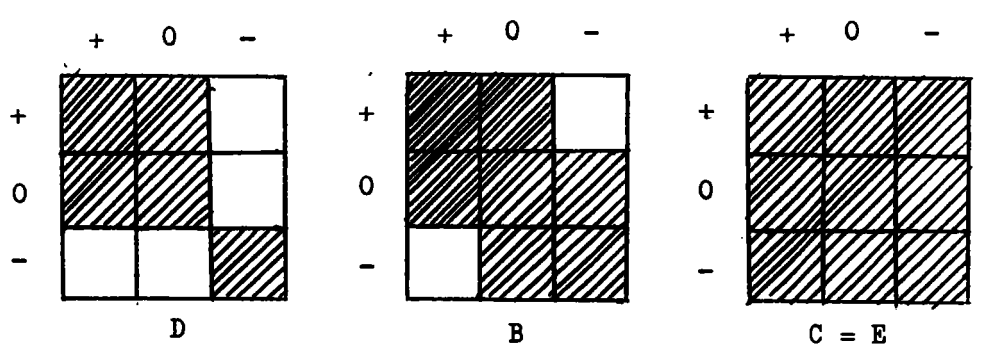
$E = \bigoplus_{k \in Z} E_k$, où la décomposition est telle que $\left[E_k , E_l\right] \subset E_{k+l}$

$\forall k, l \in Z$

Posons $E+ = \bigoplus_{k>0} E_k$ et $E_- = \bigoplus_{k<0} E_k$. On a ainci une décomposition en somme directe $E = E_+ \oplus E_0 \oplus E_-$

De plus E_+ et E_- sont respectivement des ideaux .

Considérons les algèbres de Lie dont les tables de multiplication sont schématisées par les tableaux suivants .



Les algèbres D, B, C sont des structures différentes sur l'espace E .

Une zone hachurée dans un tableau représente les crochets de Lie dans E ;

Une zone non hachurée représente les crochets nuls .

Enfin, +, 0 et - représentent respectivement des éléments arbitraires de E_+, E_0 et E_- .

L'algèbre de Lie D n'est autre que la somme directe d'algèbres de Lie de $E_+ + E_0$ et E_- ; L'algèbre $\mathcal{E}$ n'est autre que E elle même .

Il n'est pas tout à fait évident que B soit une structure d'algèbre de Lie .

Vérification de l'identité de Jacobi pour les triplets du type :

(+, +, -) ou alors (+, 0, -)

Les espaces munis de deux structures d'algèbres de Lie distinctes considérés par Adler-Kostant et Symes dans l'étude des systèmes complètement intégrables [1] et les résultats rappelés dans l'introduction) sont tous du type considérés ici : on peut avoir des paires de structures de type (C , B) et (C , D) respectivement .

Notons P_D, P_B et P_C les crochets de Lie réspectifs de D, B et C .

On passe de P_D à P_C en rajoutant progréssivement des crochets manquant .

Ainsi, on passe de P_D à P_B en rajoutant les crochets de la forme $[e_- , x]_c$ où $e_- \in E_-$, $x \in E_0$.

En d'autres termes $P_B = P_D + \delta_D$ où δ_D est la 2-cochaine définie par :

$$\delta_D(e_+ + x + e_- , e'_+ + x' + e'_-) = [e_- , x'] - [e'_- , x]$$

on a de même $P_C = P_B + \delta_B$ où

$$\delta_B(e_+ + x + e_- , e'_+ + x' + e'_-) = [e_+ , e'_-] - [e'_+ , e_-]$$

On se propose d'examiner à quelles conditions on peut réaliser les structures P_B et P_C comme déformations infinitésimales, ou éventuellement formelles de P_D et P_B réspectivement .

On peut aisément exprimer les conditions sous les quelles $P_D + t\gamma_D$ est une déformation formelle à l'ordre 1 de P_D (auquel cas, c'est une déformation de P_D qui converge de façon évidente, n'ayant que deux termes) .

Ces conditions se résument à $\left[E_- , \left[E_0 , E_0\right]\right] = 0$, ce qui s'avère satisfait dans le cas particulier où E_0 est abélien .

3-2 <u>PREMIERE DEFORMATION</u> :

Soit une algèbre de Lie $L = I + A + J$ où I, J et A sont des sous algèbres de Lie telles que $\left[A , I\right] \subset I$ et $\left[A , J\right] \subset J$

$I + A$ et $J + A$ sont donc aussi des sous algèbres de Lie .

On désigne par L_0 la somme directe des sous algèbres de Lie I et $J + A$, par P_0 son crochet de Lie et par $\gamma_0 : L_0 \times L_0 \longrightarrow L_0$ la 2-cochaine définie par :

$$\gamma_0(i + a , i' + a') = \left[i , a'\right] - \left[i' , a\right] \quad (i, i' \in I \ ; \ a, a' \in A)$$

où $\left[,\right]$ est le crochet de Lie dans L .

<u>Proposition 7</u> :

i/ on a $\left[\!\left[P_0 + \gamma_0 , P_0 + \gamma_0\right]\!\right] = 2\partial_{L_0}\gamma_0 + \left[\!\left[\gamma_0 , \gamma_0\right]\!\right] = 0$

En particulier, $P_0 + \gamma_0$ est une structure d'algèbre de Lie sur L .

ii/ $P_t = P_0 + t\gamma_0$ est une déformation formelle de P_0 à l'ordre 1 .

(i) et (ii) sont vérifiées si et seulement si $\left[I , \left[A , A\right]\right] = 0$.

sous cette condition, P_t est donc une famille à un paramètre de structures d'algèbre de Lie sur L .

<u>Démonstration de la proposition 7</u> :

Il est facile de montrer que :

$$\delta_{L_0}\gamma_0 (i_1 + a_1 + j_1 , i_2 + a_2 + j_2 , i_3 + a_3 + j_3) =$$

$$-\tfrac{1}{2}\left[\left[\gamma_0 , \gamma_0\right]\right] (i_1 + a_1 + \gamma_1 , i_2 + a_2 + \gamma_2 , i_3 + a_3 + \gamma_3)$$

$$(i_1, i_2, i_3 \in I , a_1, a_2, a_3 \in A , j_1, j_2, j_3 \in J)$$

en fait $\delta_{L_0}\gamma_0(i_1 + a_1 + j_1 , i_2 + a_2 + j_2 , i_3 + a_3 + j_3) =$

$$\sum_{\text{cycl}} \left[\left[a_1 , a_2\right] , c_3\right] = -\tfrac{1}{2} \left[\left[\gamma_0 , \gamma_0\right]\right] (i_1 + a_1 + j_1 , i_2 + a_2 + j_2 , i_3 + a_3 + j_3)$$

la proposition en résulte immédiatement

Avec les notations de l'introduction, on voit, en application de la proposition, que P_B est un crochet de Lie et l'on constate que $P_D + t\gamma_D$ est une famille à 1 paramètre de crochet de Lie si et seulement si $\left[E_- , \left[E_0 , E_0\right]\right] = 0$ comme énoncé .

<u>Contre exemple</u> :

L'hypothèse $\left[A , I\right] \subset I$ est essentielle pour que L_0 se déforme

On considère la décomposition de Iwasawa de $sl(n , R) = L$

$L_0 = (A + J) \oplus I$; où $\oplus$ est la somme directe d'algèbre de Lie

$A = H$ un sous algèbre de Cartan

$I = so(n)$

J est l'algèbre de Lie engendrée par les X_α $\alpha > 0$

$J = N^+$ avec les notations du chapitre I

Considérons une base comme dans le chapitre $\left\{X_\alpha , H_\alpha , \alpha \in \Delta\right\}$

$I = so(n)$ est engendrée par les $X_\alpha - X_{-\alpha}$ et on a :

$\left[H_\alpha , X_\alpha - X_{-\alpha}\right] = 2X_\alpha + X_{-\alpha} \notin so(n)$, l'hypothèse n'est donc pas vérifiée .

On peut en fait montrer dans ce cas la rigidité de L_0 .

<u>Lemme21 : $H^2(L_0 , L_0) = 0$</u>

<u>Démonstration du lemme 21</u> :

On considère la suite exacte courte $so(n) \longrightarrow L_0 \longrightarrow H+N^+$

à cette suite on associe la suite spectrale de Hoschild et Serre .

$H^2(L_0 , L_0)$ est déterminé par les trois termes suivants :

$H^0(H + N^+ , H^2(so(n) , L_0))$

$H^1(H + N^+ , H^1(so(n) , L_0))$

$H^2(H + N^+ , H^0(so(n) , L_0))$

$so(n)$ est une algèbre de Lie simple donc d'après le théorème de Whitehead [8] $H^1(so(n) , L_0)$ et $H^2(so(n) , L_0)$ sont nuls donc

$E_2^{1,1} = E_2^{0,2} = 0$.

Reste à voir le terme :

$H^2(H + N^+ ; H^0(so(n) , L_0))$

$H^0(so(n) , L_0) = Inv_{so(n)} (so(n) \oplus H + N^+) = H + N^+$

donc $H^2(H + N^+ , H^Q(so(n) , L_0)) = H^2(H + N^+ , H + N^+)$

$H + N^+$ est la sous algèbre de Borel de $sl(n , R)$ et d'après le théorème de (Leger et Luks) 4

$H^2(H + N^+ , H + N^+) = 0$

donc $H^2(L_0 , L_0) = 0$

c.q.f.d

<u>Remarques</u> :

i/ Cet exemple fait partie de ceux qui fournissent des systèmes complètement intégrables

ii/ Soit G est une algèbre de Lie semi-simple, $G = N^+ + H + N^-$ sa décomposition de Cartan .

On peut appliquer à G les conclusions de la proposition 7 : on pose $E = G$, $A = H$, $I = N^-$, $J = N^+$ et $[\ ,\ ]$ le crochet de G

H est abélien d'où $[I , [A , A]] = 0$

On considère le 2-cocycle définie par : $\sigma_0(i+a , i+a') = [i,a'] - [i',a]$ $(i,i' \in I, a,a' \in A)$, alors σ_0 engendre une déformation formelle à l'ordre 1 .

<u>Exemple</u> : Algèbre de Virassoro

L est une algèbre de Lie de dimension infinie définie par :

$L = \bigoplus_{i \in Z} E_i$; $E_i = Re_i$ avec $[e_i , e_j] = (j - i)\, e_{i+j}$

$L_1 = \bigoplus_{i \geqslant 1} E_i$; $L_{-1} = \bigoplus_{i \leqslant -1} E_i$; $L_0 = E_0$

$L = L_1 + E_0 + L_{-1}$; $L_1 + E_0 = L_0$ (Fuks)

On peut écrire chaque élément e_i comme une dérivation de l'algèbre des polynomes de Laurant $R\left[t\ ,\ t^{-1}\right]$ en posant $e_i = tt^i \dfrac{d}{dt}$

Il est clair que $\left[E_k\ ,\ E_l\right] \subset E_{k+l}$

On peut appliquer à L les conclusions du paragraphe précédent .

On pose $I = E$, $A = E_0$; $P_0 = \left[\ ,\ \right]$ le crochet de L

on remarque que $\left[A\ ,\ A\right] = 0$ d'où $\left[I\ ,\ \left[A\ ,\ A\right]\right] = 0$

et le 2-cocycles définie par :

$\gamma_0(i + a\ ,\ i + a') = \left[i\ ,\ a'\right] - \left[i'\ ,\ a\right]$ $(i\ ,\ i' \in I\ ,\ a,\ a' \in A)$

alors d'après la proposition 7, $P_t = P_0 + t\gamma_0$ est une déformation formelle de P_0 à l'ordre 1 .

3-3 <u>SECONDE DEFORMATION</u> :

Les notations sont celles de l'introduction . on se propose sous certaines hypothèses sur E, de montrer qu'il existe une déformation de P_B vers P_C . Lorsque E n'est pas de dimension finie, cette déformation est formelle non polynomiale . Cependant elle converge "faiblement" en ce sens que pour tout couple x , y dans E, $P_\lambda(x\ ,\ y)$ est un polynome en λ dont le degré ne dépend que des degrés des composantes homogènes de x et de y .

Soit une cochaine C sur E . Nous appellerons support de C l'ensemble $S_C \in Z^2$ défini par :

$$(p\ ,\ q) \notin S_C \Longrightarrow \left[x \in E_p\ ,\ y \in E_q \Longrightarrow C(x\ ,\ y) = 0\right]$$

Lemme 22 :

Soit une suite $\mathcal{C}_k$ $(k \in N)$ de cochaines sur E, si les support de $\mathcal{C}_k$ partitionnent $\mathbb{Z}^2$, alors la suite formelle $\sum_{k \in N} \lambda^k \mathcal{C}_k$ converge faiblement .

Démonstration du lemme 22 :

C'est évident .

Passons à présent à la définition de la déformation formelle de P_B vers P_C

On pose $C_0 = P_B$ et pour $k > 0$, on définit C_k par :

$$C_k(x , y) = [x , y]\, \delta_{e_k}(|x| , |y|) \qquad (*)$$

Dans (*), $|x|$, $|y|$ désignent réspéctivement les degrés de x , y supposés homogènes et $[\,,\,]$ est le crochet de Lie dans E .

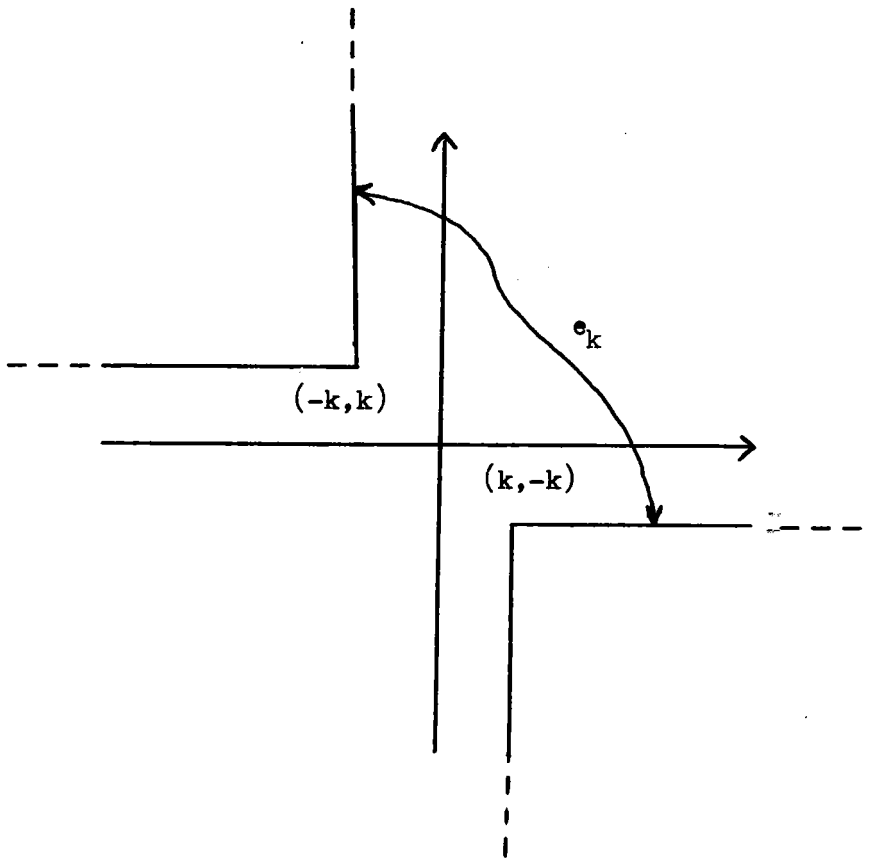
$$\delta_{e_k}(|x| , |y|) = 1 \text{ si } (|x| , |y|) \in e_k$$
$$= 0 \text{ si non}$$

où $e_k \subset \mathbb{Z}^2$ est l'ensemble

$$((k , -k) + N(0 , -1)) \cup ((k , -k) + N(1 , 0))$$

$$((-k , k) + N(-1 , 0)) \cup ((-k , k) + N(0 , 1))$$

que l'on peut visualiser commodément sur le schéma :



Si l'on observe que le support e_0 de C_0 est l'union des premier et troisième quadrants fermés, on voit que la famille des supports de la suite $C_k (k \in N)$ est une partition de Z^2 .

<u>Théorème 1</u> :

La série $C_\lambda = \sum_{k \in N} \lambda^k C_k$ converge faiblement et l'on a

$C_1 = P_C$

La série $C_\lambda = \sum_{k \in N} \lambda^k C_k$ est une déformation formelle de P_B .

<u>Démonstration du théorème 1</u> :

Montrons que l'on a

$$2\,\delta C_k(x\,,\,y\,,\,z) = \sum_{\substack{p+q=k \\ p\,,\,q>0}} [\![C_p\,,\,C_q]\!](x\,,\,y\,,\,z) \quad (**)$$

pour tout $k > 0$, où δ est l'opérateur de cobord de la représentation adjointe de P_B .

on peut se limiter à des éléments x, y, z $\in$ E homogènes .

Leurs degrés respectifs sont notés a, b, c

La signature d'un élément sera +,- ou 0 suivant son appartenance à E^+, E^- ou E^0 .

Compte tenu de la symétrie entre E^+ et E^- et de l'antisymétrie des cochaines ; il suffit de vérifier (* *) pour les (x , y , z) de signatures (+ , 0 , 0) ; (0 , 0 , 0) ; (+ , + , +) ; (+ , + , 0) ; (+ , + , -) (+ , 0 , -)

Au vu de la définition (*), il est immédiat que le membre de droite de (* *) s'annule pour les signatures (+ , + , +) et (+ , + , 0) ;

Il est immédiat également que le membre de gauche de (* *) s'annule pour (+ , + , +) et (+ , + , 0) ; pour (+ , 0 , -) on a $(2\,\delta C_k(x, y, z)) = 0$

$$\begin{aligned} 2(\delta C_k(x\,,\,y\,,\,z) &= \left[C_k(x\,,\,y)\,,\,z\right] + \left[C_k(y\,,\,z)\,,\,x\right] + \left[C_k(z\,,\,x)\,,\,y\right] \\ &\quad + C_k([x\,,\,y]\,,\,z) + C_k([y\,,\,z]\,,\,x) + C_k([z\,,\,x]\,,\,y) \\ &= C_k([x\,,\,y]\,,\,z + C_k([y\,,\,z]\,,\,x) + \left[C_k(z\,,\,x)\,,\,y\right] \\ &= \left[[x\,,\,y],z\right] + \left[[y\,,\,z]\,,\,x\right] + \left[[z\,,\,x]\,,\,y\right] = 0 \end{aligned}$$

(identité de Jacobi)

Pour les signatures (+ , 0 , 0) et (0 , 0 , 0) on obtient les deux mem-

membres égaux à 0 .

Il reste à vérifier (* *) lorsque la signature de (x , y , z) est $(+ , + , -)$.

Le calcul est long mais direct . On trouve la valeur commun suivante pour les deux membres de (* *)

$$\hat{c} < -k , a + b = k : 2 \left[z , [x , y]\right]$$

$$c = -k , a + b \geqslant k , b \geqslant k : 2 \left[[z , x] , y\right]$$

$$c = -k , a + b \geqslant k , a \geqslant k : 2 \left[[y , z] , x\right]$$

d'où le théorème .

Ce théorème permet de construire de nombreux exemples de déformations formelles .

3-4 QUELQUES EXEMPLES :

Les algèbres de Kac-Moody :

On sait, d'aprés V . Kac, associer canoniquement une algèbre de Lie G_A à toute matrice $A \in M_n(C)$.

rappelons que G_A s'écrit :

$$G_A = N^+ + H + N^-$$

où H est une sous algèbre de Cartan, abélienne, et où

$$N^+ = \bigoplus_{\alpha > 0} G \quad ; \quad N^- = \bigoplus_{\alpha < 0} G$$

L'action adjointe de H sur G_A est diagonalisable et il existe des racines simples $\alpha_1 , \ldots , \alpha_l \in H^*$ telles que tout poids α de cette action soit de la forme $\sum_{i=1}^{l} n_i \alpha_i$ où les entiers $n_1 , \ldots , n_l$ sont tous positifs

ou nuls ou bien tous négatifs non nuls .

H est l'éspace propre de poids 0, tandis que G_α, pour $\alpha \neq 0$, désigne l'espace propre de poids α ; N^+ (resp N^-) est la somme des espaces de poids positifs (resp négatifs) c'est à dire dont les coéfficients n_i ne sont pas négatifs (resp positifs)

Soient $H_1, \ldots, H_n$ un système linéairement indépendant de H et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ un système linéairement indépendant de H^*, la matrice $A = (a_{ij})$ est définie par $\langle H_i , \alpha_j \rangle = \alpha_j(H_i) = a_{ij}$ $\forall i , j \leqslant n$

L'algèbre G_A peut encore se réecrire sous la forme $\bigoplus_{k \in Z} E_k$, et cela de nombreuses façons . Voici un exemple . Appelons longueur de $\alpha = \sum n_i \alpha_i$ le nombre $n_1 + \ldots\ldots + n_l = |\alpha|$. on pose $E_k = \bigoplus_{|\alpha| = k} G_\alpha$

(Cas particulier $E_0 = H$) . Il est clair que $\left[E_k , E_l\right] \subset E_{k+l}$.

On peut donc appliquer à G_A les conclusions des paragraphes précédents .

d'une part, vu la proposition (7) l'algèbre $N^- \oplus (N^+ + H)$ se déforme suivant une déformation d'ordre 1 : on prend $A = H$, $I = N^-$, $J = N^+$, comme H est abélien, la condition $\left[I , \left[A , A\right]\right] = 0$ est automatiquement vérifié .

Cette déformation d'ordre 1 se fait vers l'algèbre P_B

D'autre part P_B se déforme formellement sur G_A grâce au théorème 1

a/ <u>Algèbre de Lie de dimention finie</u> :

Si G_A est de dimension finie, par exemple, si c'est une algèbre

de Lie semi-simple, alors cette dernière déformation est en fait une famille à un paramètre polynomial de degré $\sup\left\{k > 0 \ / \ E_k \neq 0\right\}$ d'algèbre de Lie sur G_A .

Dans le cas d'une algèbre de Lie simple, ce degré est le rang de l'algèbre .

b/ <u>Algèbre de Lie de dimension infinie</u> :

Si G_A est de dimension infinie, comme c'est le cas d'une algèbre de Kac-Moody affine ou hyperbolique par exemple alors on a une déformation formelle .

3-5 UNE CONDITION DE NON TRIVIALITE :

<u>Proposition 8</u> :

Dans les conditions du paragraphe (3-3) si $\left[E_1 , E_-\right] \neq 0$ ou si $\left[E_{-1} , E_+\right] \neq 0$, alors C_1 n'est pas un bord pour l'action adjointe de B . En particulier, C_1 n'est pas un tel bord lorsque $\left[E_+ , E_-\right] \neq 0$ et lorsque E est engendré par $E_1 + E_0 + E_{-1}$

<u>Démonstration de la proposition 8</u> :

Supposons au contraire que $C_1 = \delta T$. Pour x de degré 1 et y de degré -k ($k \geqslant 1$) on a :

$$\left[x , y\right] = \sum_{s \geqslant 0} \left[T(x)_{-s} , y\right]_B$$

$\left[, \right]_B$ désigne le crochet de la structure B où $T(x)_a$ désigne la composante de degré a de T(x) . Mais $\left[x , y\right]$ est de degré 1 - k et $\left[T(x)_{-s} , y\right]$ est de degré $-(k + 1) < 1 - k$ puisque $s \geqslant 0$.

Donc, si $\left[E_1 , E_-\right] \neq 0$, alors C_1 n'est pas un bord .

On utilise la même méthode pour établir que C_1 n'est pas un bord si $\left[E_{-1}, E_{+}\right] \neq 0$.

Pour conclure, il suffit de constater que si E est engendré par $E_{-1} \oplus E_0 \oplus E_1$ alors :

$$\left[E_1, E_{-}\right] = 0 , \left[E_{-1}, E_0\right] = 0 \Longrightarrow \left[E_{+}, E_{-}\right] = 0$$

<u>Remarque</u> :

La classe de cohomologie $\left[C_1\right]$ classifie la déformation infinitésimale . Cette proposition nous fournit donc une condition de non trivialité des déformations du type considéré dans ce chapitre .

On voit facilement que cette proposition s'applique aux deux exemples ci dessus .

CHAPITRE IV

4-0 INTRODUCTION :

Dans le chapitre III nous avons montrer l'existance d'une suite de déformations dans le cas d'une algèbre de Lie graduée qui permet d'obtenir la structure de l'algèbre de Lie G à partir de celle de G_0 .

Le calcul cohomologique fait au chapitre I permet de classifier les déformations .

Nous montrons dans ce chapitre que la seule suite de déformation qui nous donne la structure de G à partir de celle de G_0 est celle introduite dans le chapitre III pour les cas particulier de G algèbre de Lie semi simple de dimension finie et le cas où G est l'algèbre de Kac-Moody affine non tordue $G = sl(2 , R) \otimes C\left[t , t^{-1}\right]$

Ces exemples font partie de ceux étudiés par Adler [1] dans les systèmes complètement intégrables .

4-1 PREMIERE DEFORMATION :

Soit une algèbre de Lie semi simple réelle de dimension finie on a vu dans le chapitre I que

$$H^2(G_0 , G_0) = Hom(H , Der\ N^-) \oplus H^2(K , RX_{-\lambda}) \oplus H^2(N^- , N^-)$$

seul le terme $Hom(H , Der\ N^-)$ contient des cocycles intéréssantes pour les déformations que nous cherchons .

Soit $\overline{\delta}$ une application linéaire de H à valeur dans Der N^- elle est associé au 2-cocycle suivant $\delta : H \times N^- \longrightarrow N^-$ défini par :

$\overline{\delta}(H_{\alpha_i}) = \overline{D}_i$ où $\overline{D}_i$ est un élément de Der N^- alors

$\delta(H_{\alpha_i}, X_{\alpha_j}) = \overline{D}_i(X_{\alpha_j})$

δ engendre une déformation infinitésimale qui sera formelle à l'ordre 1 à condition que le crochet de Ridscharson-Nijenhuis de δ par lui même soit nul . On remarque que :

$$[\![\delta , \delta]\!](H_{\alpha_i}, H_{\alpha_j}, Y) = (\overline{D}_i \circ \overline{D}_j - \overline{D}_j \circ \overline{D}_i)(Y) = [\overline{D}_i , \overline{D}_j](Y)$$

On a vu à la page (19) la table des crochets de Der(N^-)

$$[D_{\alpha_i}, D_{\alpha_j}] = 0 \qquad [D'_{\alpha_i}, D'_{\alpha_j}] = 0$$

$[D_{\alpha_i}, D'_{\alpha_j}] = m_i^j D'_{\alpha_j}$ où m_i^j est le $i^{ème}$ composante de $S_\lambda(\alpha_j)$

On a alors deux types de déformations suivant que le cocycle δ est défini à partir des dérivations du type D_{α_i} ou du type D'_{α_i} autrement dit on a deux cas :

i/ Soit $\overline{\delta} : H \longrightarrow$ Der N^- définie par

$$\overline{\delta}(H_{\alpha_i}) = \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} D'_{-\alpha_j} \quad i = 1 \ldots n-1$$

et le cocycle associé $\delta : H \times N^- \longrightarrow N^-$ défini par :

$$\delta(H_{\alpha_i}, X_{-\alpha}) = \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} D'_{-\alpha_j}(X_{-\alpha}) = \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} X_{S_{-\lambda}(-\alpha_j)} \text{ si } \alpha = \alpha_j$$

$$= 0 \text{ si non}$$

$U_{ij} = a_{ij}$

ii/ Soit $\bar{\gamma} : H \longrightarrow \mathrm{Der}\, N^-$ définie par

$$\bar{\gamma}(H_{\alpha_i}) = \sum_{j=1}^{n-1} U_{ij}\, D_{-\alpha_i} \quad i = 1 \ldots n-1$$

et le 2-cocycle associé $\gamma : H \times N^- \longrightarrow N^-$

$$\gamma(H_{\alpha_i}, X_{-\alpha}) = \sum_{j=1}^{n-1} U_{ij}\, D_{-\alpha_j}(X_{-\alpha}) = \sum_{j=1}^{n-1} U_{ij}\, n_j\, X_{-\alpha}$$

$i = 1 \ldots n-1$

où $\alpha = \sum_j n_j \alpha_j$

Soit $U = (U_{ij})$ $i, j = 1 \ldots n-1$ une matrice à coéfficient réelle dans les deux cas décrites précédemment il existe une déformation formelle à l'ordre 1 . En fait on a $[\![\gamma, \gamma]\!] = 0$

4-2 <u>DEUXIEME DEFORMATION</u> :

Soit G_U l'algèbre de Lie résoluble qui contient la somme directe $N^+ \oplus N^-$ comme sous algèbre des commutateurs et dont l'abélianisé s'identifie à H définie au chapitre I

On a démontrer au chapitre I que :

$$H^2(G_U, G_U) = \mathrm{Inv}_H(H^1(N^+) \otimes D_2) \oplus \mathrm{Inv}_H(H^1(N^+) \otimes D_1) + \mathrm{Inv}_H W$$

$$\text{où } W = \left\{ \varphi \in \mathrm{Hom}(H_1(N^+) \otimes H_1(N^-), H) \,/\, \begin{array}{l} \varphi(X_\alpha, X_{-\alpha}) = H_\alpha \text{ si } \alpha \in \Delta^+ \text{ simple} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = 0 \text{ si non} \end{array} \right\}$$

<u>Calcul de la déformation polynomiale</u> :

Soit $\Delta_p^+ = \{\alpha \in \Delta / \alpha$ est la somme de p racines positives$\}$

$\Delta_p^- = \{\alpha \in \Delta / \alpha$ est la somme de p racines négatives$\}$

On considère le cocycle C élément de $\mathrm{Inv}_H W$ défini par :

$$C(X_{\alpha_i}, X_{-\alpha_i}) = H_{\alpha_i}$$

Ce cocycle peut être prolongé en la cochaine C_1 définie par :

$$C_1(X_{\alpha_i}, X_{-\alpha_i}) = H_{\alpha_i} \quad \alpha_i \in \Delta_1^+$$

$$C_1(X_\alpha, X_\beta) = \pm (r+1) X_{\alpha+\beta} \text{ si } \alpha \in \Delta_1^+ , \beta \in \Delta^- \setminus \Delta_1^- \text{ et } \alpha+\beta \in \Delta$$

$$= 0 \qquad \text{si non}$$

et les trmes obtenus en échangeant Δ_1^+ et Δ_1^- resp(Δ^+ et Δ^-)

avec $\beta - r\alpha, \ldots, \beta + q\alpha$ (la α-suite de racines induite par β)

voir la base de Chevalley [7]

On définit ainsi une suite de cochaines (C_p) $1 \leqslant p \leqslant n-1$

$$C_p(X_\alpha, X_{-\alpha}) = \sum_{i=k}^{p+k} H_{\alpha_i} \quad \text{si } \alpha = \sum_{i=k}^{p+k} \alpha_i \; ; \alpha \in \Delta_p^+$$

$$C_p(X_\alpha, X_\beta) = \pm (r+1) X_{\alpha+\beta} \text{ si } \alpha \in \Delta_p^+ \text{ et } \beta \in \Delta^- \setminus \bigcup_{i=1}^{p} \Delta_i^-$$

$$= 0 \text{ si non}$$

$$C_p(X_\alpha, X_\beta) = \pm (r+1) X_{\alpha+\beta} \text{ si } \alpha \in \Delta_p^- \text{ et } \beta \in \Delta^+ \setminus \bigcup_{i=1}^{p} \Delta_i^+$$

$$= 0 \text{ si non}$$

La suite (C_p) vérifie la propriété suivante :

$$C_p(X_\alpha, X_\beta) = [X_\alpha, X_\beta] \, \delta_{e_k}(|X_\alpha|, |X_\beta|)$$

où $e_k \in Z^2$ $1 \leqslant k \leqslant n-1$ est l'ensemble :

$$((k, -k) + N(0, -1)) \cup ((k, -k) + N(1, 0)) \cup$$

$$((-k, k) + N(-1, 0)) \cup ((-k, k) + N(0, -1))$$

où $|X_\alpha|$ et $|Y_\beta|$ désignent réspectivement les degrés de X et Y

On a vu au chapitre III que cette suite de cochaine vérifie :

$$2\delta_{C_k}(x , y , z) = \sum_{\substack{p+q=k \\ p,q>0}} [\![C_p , C_q]\!] (x , y , z)$$

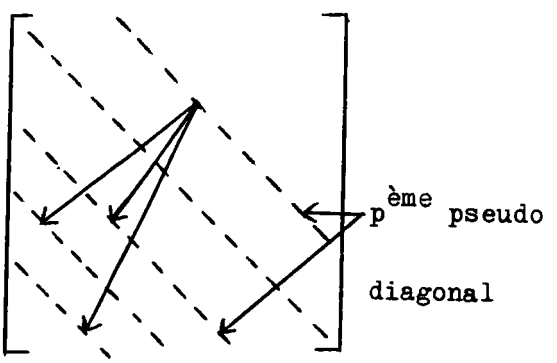
et donc (C_p) p = 1 ... n-1 engendre une déformation à l'ordre (n-1)

$$[\ ,\ ]_\lambda = [\ \ ]_0 + \sum \lambda^i C_i$$

on obtient ainsi la structure de l'algèbre de Lie G pour $\lambda = 1$

<u>Schéma explicative</u> :

C_p est définie sur un couple (X,Y) avec X élément de la $p^{ème}$ pseudo diagonal et Y un élément quelconque en dessous de la $p^{ème}$ pseudo diagonal, et la sitation symétrique.



4-3 <u>AUTRES DEFORMATIONS</u> :

Les déformations engendrées par les couples de

$Inv_H(H^1(N^+) \otimes D_2)$

on considère $X_{\alpha_i} \otimes D'_{-\beta_i}$ avec β_i fixé

Soit $C(X_{\alpha_i} , X_{-\beta_i}) = X_{S_{-\beta_i}(-\lambda)}$

on vérifie aisaiment que le crochet de Richardson-Nijenhuis de C par lui même est nul $[\![C , C]\!] = 0$

donc C engendre une déformation formelle à l'ordre 1 de G_U vers

une algèbre résoluble qui dépend aussi de la matrice U .

De la même façon $\mathrm{Inv}_H(H^1(N^-) \otimes D_1)$:

on considère les cocycles $X_{-\alpha_i} \otimes D'_{\alpha_j}$ pour α_j fixé

Soit $C(X_{-\alpha_i}, X_{\alpha_j}) = X_{S_{\alpha_j}(\lambda)}$

on vérifie que $[\![C, C]\!] = 0$

donc C engendre une déformation formelle à l'ordre 1 de G_U vers une algèbre résoluble qui dépend aussi de U .

La seule déformation qui donne la structure de G est celle donné par le théorème du chapitre précédent et qui provient de terme $\mathrm{Inv}_H W$.

4-4 <u>CAS OU G EST UNE ALGEBRE DE KAC-MOODY AFFINE NON TORDUE</u> :

Dans le chapitre II on a démontré que le deuxième groupe de cohomologie de G_0 à valeurs dans G_0 est :

$$H^2(G_0, G_0) = \mathrm{Hom}(H, \mathrm{Der}\,\hat{N}^+) \oplus H^2(\hat{N}^-, \hat{N}^-) \oplus \mathrm{Hom}(H_1(\hat{N}^-), D_2) \oplus \mathrm{Hom}(H_1(N^-), D_1)$$

où $D = \left\{ tp(t)\frac{d}{dt} \,/\, p(t) \in C[t] \right\}$

Le deuxième groupe de cohomologie de $\hat{N}^-$ à valeurs dans $\hat{N}^-$, $H^2(\hat{N}^-, \hat{N}^-)$ est déterminé par Fialowski énoncé au chapitre II

Le terme $\mathrm{Hom}(H_1(\hat{N}^-), \mathrm{Der}(\hat{N}^-))$ ne donne pas des déformations intéressantes.

Le terme $\mathrm{Hom}(H, \mathrm{Der}\,\hat{N}^-)$ est formé d'applications linéaires de H à

valeurs dans Der $\hat{N}^-$; $\bar{\gamma}_i$ tel que $\bar{\gamma}_i(e_0) = D_i$ où D_i est dans Der $\hat{N}^-$

on lui associe le 2-cocycle γ_i tel que $\gamma_i(e_0 , X) = D_i(X)$ pour

tout $X \in \hat{N}^-$

Le crochet de Richardson de γ_i par lui même est égale au crochet

de D_i par lui même en tant que dérivation $[\![\gamma_i , \gamma_i]\!] = [D_i , D_i]$

qui est nul ; γ_i engendre alors une déformation formelle à l'ordre 1 .

<u>Table de Der $\hat{N}^-$</u> :

On a $[D_i , D_j] = (j - i) D_{i+j}$

on a alors deux types de déformations :

i/ Pour $D_0 = ad_{|\hat{N}^-} e_0$

$\gamma_0(e_0 , e_{-3m+1}) = a_{-3m+1} e_{-3m+1}$

$\gamma_0(e_0 , e_{-3m-1}) = a_{-3m-1} e_{-3m-1}$

$\gamma_0(e_0 , e_{-3m}) = 0$

$\gamma_0(e_0 , e_{-1}) = -a_1 e_{-1}$

ii/ Pour $D_i = t^{-(i+1)} \frac{d}{dt}$

$\gamma_i(e_0 , e_{-3m+1}) = -m\, b_{-3m-1} e_{-3(m+i)+1}$

$\gamma_i(e_0 , e_{-3m-1}) = -m\, b_{-3m-1} e_{-3(m+i)-1}$

$\gamma_i(e_0 , e_{-3m}) = 0$

$\gamma_i(e_0 , e_{-1}) = 0$

Soit $\Omega = \left\{ a_{-3m+1} , a_{-3m-1} , a_{-3m-1} / m \in N \right\}$

Il existe dans chaque cas une déformation formelle à l'ordre 1

(G_{Ω}, P_B) où $P_B = P_D + \lambda \gamma_i$

Dans la suite on supposera que la déformation est associée au cocycle γ_0 obtenu dans (i) .

<u>Déformation de G_{Ω} :</u>

On a vu à la proposition 5 que $H^2(G_{\Omega}, G_{\Omega})$ est égale à

$\mathrm{Hom}(H, \frac{\mathrm{Der}\,\hat{N}^+ \oplus \mathrm{Der}\,\hat{N}^-}{\Delta}) \oplus V$

La déformation engendré par des cocycles de $\mathrm{Hom}(H, \frac{\mathrm{Der}\,\hat{N}^+ \oplus \mathrm{Der}\,\hat{N}^-}{\Delta})$

ne donne pas la structure de $\hat{G}$

Par contre V engendre une déformation infinitésimale qui peut être prolonger à une déformation formelle .

Il existe une suite de cochaines $(C_p)_{p \in N}$ de premier terme C_1

$C_1(e_1, e_{-1}) = ae_0$

$C_1(e_2, e_{-2}) = be_0$

$C_1(e_2, e_{-3m+1}) = -2e_{-3m+3}$

$C_1(e_2, e_{-3m}) = e_{-3m+2}$

$C_1(e_3, e_{-3m-1}) = -e_{-3m+2}$

$C_1(e_3, e_{-3m+1}) = e_{-3m+1}$

$C_1(e_4, e_{-3m-1}) = e_{-3(m-1)+1}$

$C_1(e_4, e_{-3m-1}) = -e_{-3(m-1)}$

$C_1(e_1 , e_{-3m}) = -e_{-3m+1}$

La condition de prolongement est que : $a = 1$, $b = -1$

Soit $\Delta_p = \left\{ e_{3p+1} , e_{3p} , e_{3p-1} \right\}$

La suite $(C_p)_{p \in \mathbb{N}}$ vérifie la propriété suivante :

$$C_p(X , Y) = \left[X , Y \right] \delta_{e_k}(|X| , |Y|)$$

e_k est l'ensemble $((k , -k) + N(0 , -1)) \cup ((k , -k) + N(1 , 0)) \cup$

$((-k , k) + N(-1 , 0)) \cup ((-k , k) + N(0 , -1))$

où $|X|$ et $|Y|$ désignent respectivement les degrés de X et de Y

un élément de Δ_p est de degré p

On a vu au chapitre III que cette suite de cochaines vérifie

$$2 \delta_{C_k}(X , Y , Z) = \sum_{\substack{p+q=k \\ p,q>0}} \left[\!\left[C_p , C_q \right]\!\right](X , Y , Z) \quad \forall k$$

donc $(C_p)_{p \in N}$ engendre une déformation formelle convergente .

BIBLIOGRAPHIE

1- M.ADLER : On a trace functional for formal pseudo-differential operator and the symplectic structure of the K-DV Equation .
Inventimes Math.n° 5 (1979) p.p 219 - 248 .

2- A.LICHNEROWICZ : Déformations et quantifications,. L-N in physic 106 (1979) p.p 209 - 219 .

3- G.LEGER
E.LUKS : Cohomology of nilradicals of Borel subalgebras
Transactions of the américan mathematical society p.p 305 - 316 Volume 195 année 1974 .

4- G.LEGER
E.LUKS : Cohomology theorems of Borel-like solvable Lie algebras in arbitrary characteristic .
Canad.J.Math. volume 24 (1972) p.p 1019 - 1026 .

5- B.FEIGIN
A.FIALOWSKI : Cohomology of the nilpotent subalgebras of current Lie algebras .
Studia scientiarium Mathematicarum Hunguaria(1980)

6- A.FIALOWSKI : Deformations of nilpotent Kac-Moody algebras,
Studia scientiarium Mathematicarum Hunguaria volume 13 (1984)

7- J.E.HUMPHREYS : Introduction to Lie algebras and representation theory .
Third Printing Revised .
Springer-Verlag .
New York Heidelberg Berlin .

8- P.J.HILTON : A course in homological Algebra
U.STAMMBACH Springer-Verlag .
New York Heidelberg Berlin .

9- M.DE WILDE : Formel deformations of the Poisson Lie algebra
P.B.A.LECOMTE of a symplectic manifold and Star-products .
Existence, equivalence, derivations .
Deformation theory of algebras and structures
and applications .
M.Hazewenkel M.Gerstenhaber, Eds Khuver Academie
Publishers Dordrecht 897 - 960 1988