



**HAL**  
open science

# Comportement asymptotique de milieux hétérogènes en thermique et en mécanique des fluides

Khalid Taous

► **To cite this version:**

Khalid Taous. Comportement asymptotique de milieux hétérogènes en thermique et en mécanique des fluides. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paul Verlaine - Metz, 1990. Français. NNT : 1990METZ005S . tel-01775854

**HAL Id: tel-01775854**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01775854>**

Submitted on 24 Apr 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

# THESE

PRÉSENTÉE DEVANT

## L'UNIVERSITE DE METZ

POUR OBTENIR LE TITRE DE

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE METZ**  
spécialité: **Mathématiques**

PAR

**Khalid TAOUS**

SUJET

**COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE MILIEUX HETEROGENES  
EN THERMIQUE ET EN MECANIQUE DES FLUIDES**

Soutenu le 09 Février 1990, devant la Commission d'Examen

Membres du jury

Président:

**D. ARNAL** (Université de Metz).

Rapporteurs:

**D. CIORANESCU** (Université de Paris VI)

**F. CONRAD** (Université de Nancy II)

Examineurs:

**H. DUCAUQUIS-LANCHON** (INPL-Nancy)

**C. MOYNE** (INPL-Nancy)

**J. SAINT JEAN PAULIN** (Université de Metz)



BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv.	19900595
Cote	SM3 90/5
Loc	Magasin

## **Résumé**

Notre travail est une contribution à l'étude du comportement asymptotique des milieux hétérogènes ayant une structure géométrique périodique. Les outils essentiels utilisés sont la méthode d'homogénéisation et la méthode des perturbations singulières. Le travail s'est fait en trois parties:

La première partie est consacrée à l'étude du transfert simultané de chaleur et de masse dans un milieu poreux humide. On clarifie l'influence des phénomènes d'évaporation-condensation sur la conductivité thermique apparente, et on étudie la dépendance du comportement global du matériau par rapport à l'ordre de grandeur relatif de deux petits paramètres: la conductivité de la phase gazeuse et la taille caractéristique des pores.

Dans la deuxième partie, on s'intéresse à l'écoulement macroscopique de deux fluides non-miscibles à travers un milieu poreux. Les "lois de Darcy généralisée" classiques sont réexaminées d'un point de vue théorique en utilisant la méthode d'homogénéisation. Il est apparu qu'elles devraient être couplées, de façon à prendre explicitement en compte les interactions aux interfaces fluide-fluide.

Dans la troisième partie, on étudie l'écoulement asymptotique de deux fluides immiscibles à travers des interstices de faibles épaisseurs entre deux solides. Par une méthode de perturbation, on établit des équations limites qui généralisent la loi de Reynolds classique au cas diphasique, en lui superposant des termes de couplage traduisant les effets d'un fluide sur l'autre.

## AVANT PROPOS

---

*Au terme de ces quelques années passées au Laboratoire d'Energétique et de Mécanique Théorique et Appliquée de l'Institut National Polytechnique de Lorraine (LEMTA-INPL), il m'est très agréable de pouvoir exprimer mes remerciements à toutes les personnes qui m'ont aidé et contribué, de manières diverses, à la réalisation de ce travail.*

*C'est tout d'abord à Jeannine SAINT JEAN PAULIN, Professeur à l'Université de Metz, que je tiens à exprimer toute ma gratitude. Sa direction scientifique m'a beaucoup apporté et continuera à m'être profitable au delà de l'aboutissement de cette thèse. Je lui suis reconnaissant de cette formation dépassant souvent le cadre de la recherche en mathématiques.*

*Mes remerciement s'adressent tout particulièrement à Didier ARNAL, Professeur à l'Université de Metz, qui me fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.*

*Je remercie vivement Francis CONRAD, Professeur à l'Université de Nancy II, et Doina CIORANESCU, Chargé de recherche au CNRS-Université de Paris VI, qui ont accepté de juger ce travail et d'être des rapporteurs de ma thèse.*

*Si ce travail à bénéficié d'une ambiance agréable, c'est grâce à l'accueil et la gentillesse de tous les membres du LEMTA-ENSEM et plus particulièrement de Hélène DUCAUQUIS-LANCHON, Professeur à l'ENSEM-INPL, qui m'a beaucoup aidé. Je lui suis reconnaissant et je la remercie pour sa participation à ce Jury.*

*Je remercie également Christian MOYNE, Maître de conférence à l'Ecole des Mines de Nancy-INPL. Sa disponibilité et ses suggestions, tout au long de ce travail, m'ont été d'une aide considérable. Je le remercie de plus d'avoir accepté de faire partie du jury.*

## s o m m a i r e

### INTRODUCTION GENERALE

#### PREMIERE PARTIE:

#### CONDUCTIVITES THERMIQUES EFFECTIVES D'UN MILIEU POREUX HUMIDE

INTRODUCTION I	1
1/ POSITION DU PROBLEME ET RESULTATS D'EXISTENCE ET D'UNICITE	4
1-1) Description physique du problème.....	4
1-2) Existence et unicité de la solution.....	7
2/ HOMOGENEISATION PAR LA METHODE DES ECHELLES MULTIPLES	16
2-1) Développements asymptotiques et équations locales.....	19
2-2) Etude des équations locales.....	22
2-3) Comportement macroscopique et conductivités homogénéisées.....	33
3/ METHODE DE L'ENERGIE ET CORRECTEURS	38
3-1) Estimation à priori et passage à la limite.....	38
3-2) Identification des limites.....	44
3-3) Les correcteurs.....	49
4/ CAS D'UN GAZ DE FAIBLE CONDUCTION	57
4-1) Comportement de la température homogénéisée.....	57
4-2) Comportement de la solution du problème initial.....	71
4-3) Résumé et comparaison des limites.....	97
5/ INTERPRETATION PHYSIQUE ET CONCLUSION	100

## DEUXIEME PARTIE:

### PERMEABILITES RELATIVES DE DEUX FLUIDES NON-MISCIBLES

INTRODUCTION II	1
1/ POSITION DU PROBLEME ET RESULTATS D'EXISTENCE ET D'UNICITE	
1-1) Description physique du problème.....	3
1-2) Existence et unicité de la solution.....	7
2/ HOMOGENEISATION PAR LA METHODE DES ECHELLES MULTIPLES	14
2-1) Développements asymptotiques et équations locales.....	14
2-2) Equation macroscopique et perméabilités homogénéisées.....	25
3/ METHODE VARIATIONNELLE ET RESULTATS DE CONVERGENCES	37
3-1) Lemmes préliminaires.....	37
3-2) Prolongements et estimations a priori.....	48
3-3) Passage à la limite.....	54

## TROISIEME PARTIE:

### EQUATIONS DE REYNOLDS ET ECOULEMENT DE DEUX FLUIDES NON-MISCIBLES ET DE FAIBLE EPAISSEUR

INTRODUCTION III	1
1/ DESCRIPTION DU PROBLEME ET EXISTENCE ET D'UNICITE DE LA SOLUTION:	2
2/ CHANGEMENT DE VARIABLES ET D'INCONNUES.....	10
3/ESTIMATION A PRIORI ET PASSAGE A LA LIMITE:.....	20
4/ IDENTIFICATION DES LIMITES:.....	32
5/ RESUME ET CONCLUSION:.....	57

## **BIBLIOGRAPHIE**

## INTRODUCTION

Les phénomènes physiques dans les matériaux hétérogènes font intervenir souvent deux échelles d'espaces différentes: l'une macroscopique, et l'autre microscopique. Généralement seul le comportement macroscopique du matériaux intéresse le physicien. Le problème est alors de déterminer les coefficients macroscopique (intègrants les effets microscopiques) qui caractérisent le comportement global d'un milieu hétérogène à partir de la connaissance des propriétés intrinsèques de chacun de ses constituants, il s'agit donc de le remplacer par un milieu homogène équivalent. La méthode d'homogénéisation s'avère d'une grande aide et d'utilité pour résoudre un tel problème. Elle permet d'obtenir des résultats concrets surtout lorsque le matériaux a une structure géométrique périodique, car dans ce cas les caractéristiques physique globales sont déterminées explicitement à l'aide d'un calcul microscopique dans une seule période.

La méthode consiste à étudier le comportement asymptotique d'un systèmes d'équations  $P^\varepsilon$ , qui gouverne le phénomène physique dans le matériaux, lorsque le rapport  $\varepsilon$  entre l'échelle microscopique et l'échelle macroscopique tend vers zéro; ce rapport  $\varepsilon$  n'est rien d'autre que la taille de la période de la structure. Lorsque un (ou plusieurs) autre petit paramètre intervient dans le modèle  $P^\varepsilon$ , des méthodes de perturbation combinées à la précédente méthode, permettent d'étudier l'influence des ordres de grandeur relatifs de ces divers petits paramètres sur le comportement asymptotique et global du matériaux.

Notre travail est une contribution à l'étude du comportement asymptotique des milieux hétérogène ayant une structure géométrique périodique. La taille de la période est supposée très petite comparée aux autres dimensions du matériaux. Ce travail s'est fait en trois parties:



La première partie est consacré à l'étude du transfert simultané de chaleur et de masse dans un milieu poreux humide. La méthode d'homogénéisation permet d'établir l'équation macroscopique du transfert. Grâce à cette méthode, on distingue nettement la conductivité thermique apparente et la conductivité thermique "vraie" introduite par la loi de Fourier et on définit rigoureusement le facteur de résistance à la diffusion gazeuse. Cette analyse répond à la controverse classique née de l'apparente sous-estimation théorique de la densité de flux de vapeur en milieu poreux. Lorsque la conductivité thermique de la phase gazeuse est, elle aussi, petite, on est conduit à utiliser des méthodes de perturbation pour étudier l'influence de l'ordre de grandeur relatif de ces deux petits paramètres (la taille de la période et la conductivité du gaz) sur le comportement global du milieu poreux.

Dans la deuxième partie on s'intéresse à l'écoulement macroscopique de deux fluides non-miscibles à travers un milieu poreux. La "loi de Darcy généralisée" classique est réexaminée d'un point de vue théorique en utilisant la méthode d'homogénéisation. Les résultats obtenus montrent que la vitesse de filtration macroscopique de chaque fluide, dépend non pas uniquement du seul gradient de pression et de forces exercés sur cette phase, mais s'exprime comme une combinaison linéaire des forces et des gradients de pressions exercés sur toutes les phases fluides et d'un autre terme qui traduit les effets moyens des tensions interfaciales. Ainsi, il est apparu que les lois de Darcy généralisées devraient être couplées, de façon à prendre explicitement en compte les interactions aux interfaces fluide-fluide.

Dans la troisième partie, on étudie l'écoulement asymptotique de deux fluides immiscibles à travers des interstices de faibles épaisseurs entre deux solides. Les deux fluides obéissent tous deux aux équations de Stokes. Sur les interfaces fluide-fluide, les efforts capillaires sont pris en compte, et sur les entrées et sorties des fluides, on considère des conditions mixtes: la vitesse est imposée sur une partie, et les forces surfaciques sont données sur l'autre partie. Par une méthode de perturbation on établit des résultats de convergences, et on montre que la vitesse et la pression asymptotiques peuvent être déterminées par un problème aux limites bidimensionnel. Ces équations limites généralisent la loi de Reynolds classique au cas diphasique en lui superposant des termes de couplage qui représentent les effets d'un fluide sur l'autre.

PREMIERE PARTIE

**CONDUCTIVITES THERMIQUES  
EFFECTIVES D'UN MILIEU POREUX  
HUMIDE**

## INTRODUCTION I

Dans un milieu poreux humide, constitué de diverses phases: liquide, gazeuse et solide, la conductivité thermique *apparente*  $K$  peut être déterminée, en l'absence des phénomènes d'évaporation-condensation, par *la méthode mathématique d'homogénéisation*, [5] [33], ou *la méthode physique de prise de moyenne et fermeture* [7]. elle se confond, dans ce cas, avec la conductivité  $\lambda$  de la *loi de FOURIER* écrite pour un milieu homogène équivalent au milieu poreux.

Quand les évaporations-condensations sont prises en compte, le transfert de chaleur est couplé avec le transfert de masse, la détermination de la conductivité apparente devient alors plus complexe. Des travaux de DE VRIES [14] et de PHILIP et DE VRIES [31] ont montré que les phénomènes d'évaporation-condensation accroissent la conductivité thermique apparente  $K$ , elle est liée à la conductivité thermique  $\lambda$  introduite par la loi de FOURIER par la relation:

$$(0-1) \quad K = \lambda + \lambda_{\text{dif}} F$$

où  $\lambda_{\text{dif}}$  est une *conductivité d'origine diffusive* et  $F$  désigne le *facteur de résistance à la diffusion*. Dans cette relation ni la conductivité  $\lambda$ , ni le facteur  $F$  ne sont accessibles expérimentalement, seule la conductivité apparente  $K$  peut être atteinte [12], [28].

L'évaluation du facteur  $F$  est un sujet controversé et a donné naissance à une abondante littérature essayant de réconcilier théorie et expérience. Une méthode expérimentale classique, suggérée par PHILIP ET DE VRIES [31][ 28], suppose que le transport enthalpique de la vapeur se retrouve uniquement dans le terme  $\lambda_{\text{dif}} F$ ; elle consiste à remplacer  $\lambda$  par la conductivité thermique  $\lambda_0$  mesurée à basse température ( pas d'effets d'évaporation-condensation), la mesure de  $K$  permet alors, grâce à la relation (0-1) précédente, d'identifier  $F$  à un facteur  $F_0$

expérimental. Les valeurs, anormalement élevées, observées pour  $F_0$  incitent à réexaminer les fondements théoriques de la relation (0-1).

De récents résultats de C. MOYNE, J-C. BATSALE et A. DEGIOVANI [28], obtenus par la méthode de prise de moyenne, distinguent la conductivité  $\lambda_0$  de la vraie conductivité thermique  $\lambda$  introduite par la loi de FOURIER, ils montrent que cette dernière est sensible aux effets d'évaporation-condensation sous-estimés dans l'analyse précédente de DE VRIES et que le facteur expérimental  $F_0$  ne peut être physiquement et correctement interprété comme le vrai facteur  $F$  de résistance à la diffusion. Comme la méthode de prise de moyenne est mathématiquement assez approximative et en particulier ne fournit aucune estimation sur la précision des résultats, ceci nous motive pour étudier le problème par la méthode mathématique d'homogénéisation.

Dans le premier paragraphe, on décrit le problème de transfert simultané de chaleur et de masse étudié -les équations vérifiées par la température  $T$  sont couplées avec celles de la fraction massique de vapeur  $\omega$ - puis on établit, par la méthode variationnelle, des résultats d'existence et d'unicité de la solution  $(T, \omega)$ .

Dans le deuxième paragraphe, on suppose que le matériau a une structure périodique et que la période de la structure a une taille très petite, comparée aux dimensions du milieu, elle est de l'ordre d'un paramètre  $\varepsilon$  destiné à tendre vers zéro. En utilisant la méthode des échelles multiples [5] [33], on établit les équations macroscopiques du transfert et on définit de façon précise la conductivité apparente  $K$ , la conductivité de la loi de Fourier  $\lambda$ , et le facteur  $F$  de résistance à la diffusion. Les résultats obtenus par cette méthode formelle sont justifiés, dans le troisième paragraphe, par des théorèmes de convergences démontrés en utilisant la méthode variationnelle (ou de l'énergie) de TARTAR [5] [35].

Les résultats de la méthode d'homogénéisation sont très sensibles à l'existence d'autres petits paramètres dans le modèle étudié. Nous traitons dans le quatrième paragraphe le cas d'un gaz de faible conduction. On est alors en présence de deux petits paramètres: la taille  $\varepsilon$  de la période et la conductivité intrinsèque  $\lambda_g$  de la phase gazeuse. La méthode des perturbations singulières combinée à la méthode d'homogénéisation permet d'étudier l'influence de l'ordre de grandeur relatif de ces deux petits paramètres sur le transfert macroscopique dans le milieu poreux.

Une interprétation physique des résultats obtenus est donnée dans le cinquième paragraphe. Les résultats du deuxième et du troisième paragraphe, obtenus par la méthode mathématique d'homogénéisation, sont comparés aux résultats de C. MOYNE, J-C. BATSALE et A. DEGIOVANI [13] [28] obtenus par la méthode de prise de moyenne. On confirme leur point de vue concernant la définition de la conductivité apparente  $K$ , de la conductivité  $\lambda$  de la loi de FOURIER et du facteur  $F$  de résistance à la diffusion.

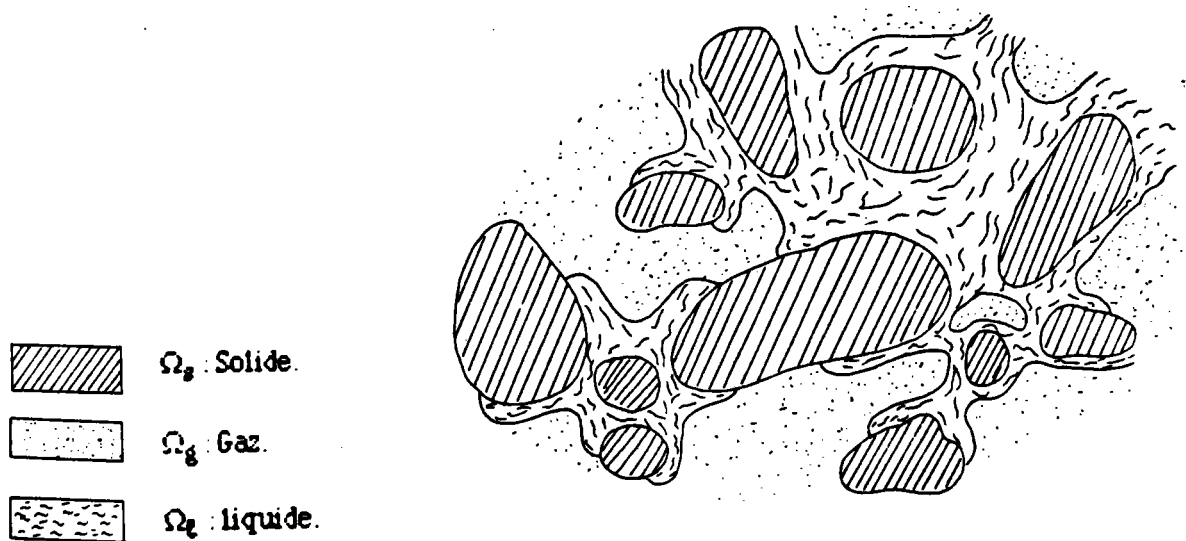
**1/ POSITION DU PROBLEME ET RESULTATS D'EXISTENCE ET D'UNICITE:****1-1) Description physique du problème**

On s'intéresse à un problème de transfert simultané de chaleur et de masse dans un milieu poreux humide. Le transfert de la chaleur est traduit par des équations aux dérivées partielles vérifiées par la température  $T$ . Le transfert de la masse est traduit par des équations vérifiées par la fraction massique de vapeur  $\omega$ : quantité d'eau qui s'évapore ou se condense par unité de temps et de volume.

Soit  $\Omega$  l'ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$  occupé par le milieu poreux, ce dernier est constitué par trois phases:

- liquide occupant  $\Omega_l$
- solide occupant  $\Omega_s$
- gazeuse occupant  $\Omega_g$

On désigne par  $\mathcal{A}_{\alpha\beta}$  les interfaces séparant deux constituants distincts  $\Omega_\alpha$  et  $\Omega_\beta$ , où les indices  $\alpha$  et  $\beta$  représentent les phases g, l, ou s.



(fig. 1-1)

En régime permanent et en négligeant les mouvements convectifs de la phase gazeuse, l'équation de la fraction massique  $\bar{w}$  de vapeur s'écrit:

$$(1-1) \quad -\text{Div}(\rho_g \mathcal{D} \text{grad}(\bar{w})) = h^* \quad \text{dans } \Omega_g$$

où  $\rho_g$  est la densité du gaz et  $\mathcal{D}$  le coefficient de diffusion air-vapeur.

Sur l'interface  $\mathcal{A}_{lg}$ , on considère qu'il y a équilibre thermodynamique liquide-vapeur et on néglige les effets de la courbure, on écrit alors la relation:

$$\bar{w} = \bar{w}_{s,l}(T)$$

où  $\bar{w}_{s,l}$  désigne la valeur saturante et  $T$  la température, on linéarise cette relation sous la forme:

$$(1-2) \quad \bar{w} = \omega_0 + \omega_1 T \quad \text{sur } \mathcal{A}_{lg}$$

où  $\omega_0$  et  $\omega_1$  sont des constantes ( $\omega_1$  est strictement positive).

Le bord extérieur  $\Gamma_g$  du gaz et l'interface gaz-solide  $\mathcal{A}_{gs}$  sont considérés comme imperméables:

$$(1-3) \quad -\rho_g \mathcal{D} \frac{\partial \bar{w}}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \mathcal{A}_{gs} \text{ et } \Gamma_g$$

Pour le bilan thermique, le transport de chaleur sensible par convection et diffusion est négligé dans la phase gazeuse, la température  $T$  vérifie alors l'équation:

$$(1-4) \quad -\operatorname{Div}(\lambda_\alpha \operatorname{grad}(T)) = f_\alpha \quad \text{dans } \Omega_\alpha \quad (\alpha = g, l, s).$$

où  $\lambda_\alpha$  désigne la conductivité thermique de la phase  $\alpha$  et  $f_\alpha$  une source de chaleur.

Sur toutes les interfaces, on suppose que la température est continue (pas de résistance thermique de contact). Sur les interfaces gaz-solide  $\mathcal{A}_{gs}$  et liquide-solide  $\mathcal{A}_{ls}$  le flux de chaleur est continu, par contre sur l'interface gaz-liquide  $\mathcal{A}_{gl}$  il présente une discontinuité due au transfert de chaleur latente causé par l'évaporation ou la condensation, d'où les conditions suivantes:

$$(1-5) \quad \llbracket T \rrbracket_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{sur } \mathcal{A}_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = g, s, l).$$

$$(1-6) \quad \llbracket \lambda \frac{\partial T}{\partial n} \rrbracket_{\alpha s} = 0 \quad \text{sur } \mathcal{A}_{\alpha s} \quad (\alpha = g, l).$$

$$(1-7) \quad \llbracket \lambda \frac{\partial T}{\partial n} \rrbracket_{gl} = -\rho_g \mathcal{D} \Delta h_v \frac{\partial m}{\partial n} \quad \text{sur } \mathcal{A}_{gl}$$

où  $\llbracket \varphi \rrbracket_{\alpha\beta}$  désigne le saut ( $\varphi_\alpha - \varphi_\beta$ ) de  $\varphi$  à travers l'interface  $\mathcal{A}_{\alpha\beta}$ ,  $n$  la normale orientée sur chaque  $\mathcal{A}_{\alpha\beta}$  de  $\Omega_\alpha$  vers  $\Omega_\beta$  et  $\Delta h_v$  la chaleur latente de vaporisation.

Sur le bord extérieur  $\Gamma$  de  $\Omega$  on impose une température  $\Theta$ , quitte à faire une translation on la suppose nulle:

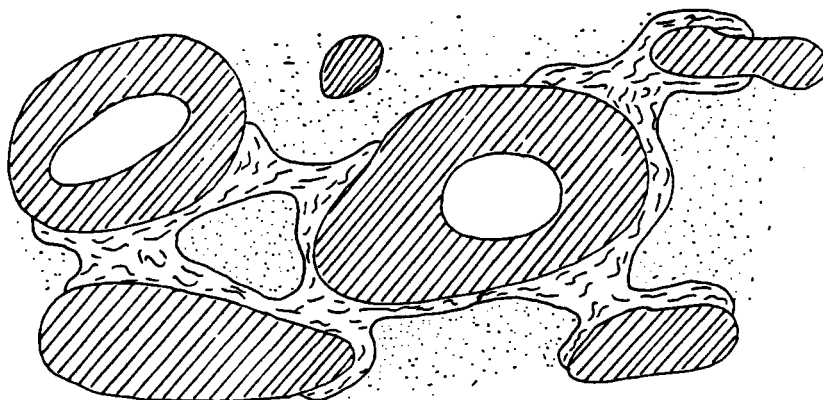
$$(1-8) \quad T = \Theta \quad \text{sur } \Gamma$$

Pour la validité de ces hypothèses simplificatrices, voir les références [12] et [28].



1-2) Existence et unicité de la solution:

Remarquons que la phase gazeuse, qui occupe  $\Omega_g$ , peut se décomposer en deux parties disjointes: la partie qui a un contact avec le liquide (*humide*), occupant un sous-ensemble de  $\Omega_g$  noté:  $\Omega_g^{(h)}$ , et la partie qui n'a de contact qu'avec le solide (*sèche*), occupant le complémentaire  $\Omega_g \setminus \Omega_g^{(h)}$  de  $\Omega_g^{(h)}$  dans  $\Omega_g$  noté  $\Omega_g^{(s)}$ .



$\Omega_g^{(h)}$ : Gas humide.



$\Omega_g^{(s)}$ : Gas sec

(fig. 1-2)

Dans la partie *sèche*  $\Omega_g^{(s)}$ , la fraction massique de vapeur  $\bar{w}$  vérifie un problème de Neumann homogène et indépendant de T:

$$(1-9) \quad \left\{ \begin{array}{ll} -\text{Div}(\rho_g \nabla \text{grad}(\bar{w})) = h^* & \text{dans } \Omega_g^{(s)} \\ \rho_g \nabla \frac{\partial \bar{w}}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial(\Omega_g^{(s)}) = \mathcal{A}_g^{(s)} \cup \Gamma_g^{(s)} \end{array} \right.$$

Ainsi  $\bar{w}$  est déterminée par (1-9) à une constante près dans chaque composante connexe  $\Omega_g^{(s)i}$  de  $\Omega_g^{(s)}$  si et seulement si la moyenne de  $h^*$  sur chacune de ces composantes est nulle:

$$\int_{\Omega_g^{(s)i}} h^*(x) \, dx = 0$$

En revanche, dans les pores gazeux *humides*  $\Omega_g^{(E)}$ , les équations de la fraction massique de vapeur sont couplées avec celles de la température par les conditions (1-2) et (1-7). Puisque la fraction massique dans  $\Omega_g^{(s)}$  n'intervient pas dans le problème thermique, on ne va s'intéresser, dans la suite, à la fraction massique  $\bar{\omega}$  que dans le gaz *humide*  $\Omega_g^{(E)}$ .

Pour avoir une condition de Dirichlet homogène sur l'interface  $\mathcal{A}_g$ , à la place de la condition (1-2), on introduit la nouvelle inconnue  $\omega$  que nous appellerons "la fraction massique translatée":

$$\omega = \bar{\omega} - (\omega_0 + \omega_1 T) \quad \text{dans } \Omega_g^{(E)}$$

La nouvelle inconnue  $(T, \omega)$  vérifie alors le système suivant:

$$\left. \begin{array}{ll} -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda_\alpha \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) = f_\alpha & \text{dans } \Omega_\alpha \quad (\alpha = g, l, s). \\ \\ \llbracket T \rrbracket_{\alpha\beta} = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = g, l, s). \\ \llbracket \lambda \frac{\partial T}{\partial n} \rrbracket_{\alpha s} = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{\alpha s} \text{ et } \mathcal{A}_{\alpha g} \\ \llbracket \lambda \frac{\partial T}{\partial n} \rrbracket_g = -\rho_g \mathcal{D} \Delta h_v \left( \frac{\partial \omega}{\partial n} + \omega_1 \frac{\partial T_g}{\partial n} \right) & \text{sur } \mathcal{A}_g \\ T = 0 & \text{sur } \Gamma = \partial(\Omega) \\ \\ -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \rho_g \mathcal{D} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right) = h^* - \rho_g \mathcal{D} \frac{\omega_1}{\lambda_g} f & \text{dans } \Omega_g^{(E)} \\ \\ \omega = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_g \\ \frac{\partial \omega}{\partial n} = -\omega_1 \frac{\partial T_g}{\partial n} & \text{sur } \mathcal{A}_g^{(E)} \text{ et } \Gamma_g \end{array} \right\}$$

L'étude de l'existence et de l'unicité de  $(T, \omega)$  sera faite par la méthode variationnelle. On commence par introduire les espaces fonctionnels où seront recherchées les inconnues. On pose:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{V} &= H_0^1(\Omega) \\
 \|\mathbf{v}\|_{\mathcal{V}}^2 &= \int_{\Omega} \mathbf{v}^2 dx + \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{v})^2 dx \\
 \mathcal{W} &= \left\{ \varphi \in H^1(\Omega_g^{(E)}); \varphi = 0 \text{ sur } \mathcal{A}_g \right\} \\
 \|\varphi\|_{\mathcal{W}}^2 &= \int_{\Omega_g^{(E)}} \varphi^2 dx + \int_{\Omega_g^{(E)}} (\nabla \varphi)^2 dx \\
 E &= \mathcal{V} \times \mathcal{W}; \quad \|(\mathbf{v}, \varphi)\|_E = \left( \|\mathbf{v}\|_{\mathcal{V}}^2 + \|\varphi\|_{\mathcal{W}}^2 \right)^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}
 \tag{1-10}$$

Pour tout  $(u, \psi)$  et  $(v, \varphi)$  de l'espace produit  $E$  on définit les formes suivantes:

$$a((u, \psi), (v, \varphi)) = \int_{\Omega} \omega_1 \mu \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega_g^{(E)}} \omega_1 \eta (\nabla u \cdot \nabla \varphi + \nabla \psi \cdot \nabla v) dx + \int_{\Omega_g^{(E)}} \eta \nabla \psi \cdot \nabla \varphi dx
 \tag{1-12}$$

$$L((v, \varphi)) = \int_{\Omega} \omega_1 f v dx + \int_{\Omega_g^{(E)}} \eta h (\varphi + \omega_1 v) dx$$

où l'on note:

$$\begin{aligned}
 \mu &= \begin{cases} \lambda_{\alpha} & \text{dans } \Omega \setminus \Omega_g^{(E)} \\ \lambda_g + \eta \omega_1 & \text{dans } \Omega_g^{(E)} \end{cases} \\
 \eta &= \rho_g \mathcal{D} \Delta h_v \\
 h &= \frac{h^*}{\rho_g \mathcal{D}}
 \end{aligned}
 \tag{1-11}$$

**Théorème 1-1:**

Sous les hypothèses:  $f$  et  $h$  appartiennent à  $L^2(\Omega)$ , les constantes  $\lambda_\alpha$ ,  $\eta$  et  $\omega_1$  sont positives on a :

i) Le problème (1-1)- (1-8) se met sous la forme variationnelle suivante:

$$(1-13) \quad \begin{cases} \bar{w} = w + (\omega_0 + \omega_1 T) \\ (T, w) \in E \\ a((T, w), (v, \varphi)) = L((v, \varphi)) \quad \forall (v, \varphi) \in E \end{cases}$$

ii) le système (1-13) admet une solution  $(T, w)$  unique.

démonstration.

i) On multiplie l'équation (1-1) par une fonction test  $\varphi \in \mathcal{W}$  et on intègre par parties, sur  $\Omega_g^{(E)}$ , en utilisant la formule de Green:

$$\int_{\Omega_g^{(E)}} \rho_g \mathcal{D} \nabla w \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega_g^{(E)}} h^* \varphi \, dx + \int_{\partial(\Omega_g^{(E)})} \rho_g \mathcal{D} \frac{\partial w}{\partial n} \varphi \, d\sigma$$

mais  $\partial(\Omega_g^{(E)}) = \mathcal{A}_g \cup \mathcal{A}_g^{(E)} \cup \Gamma_g$ , la trace de  $\varphi$  est nulle sur  $\mathcal{A}_g$  et le flux  $\rho_g \mathcal{D} \frac{\partial w}{\partial n}$  est nul sur  $\mathcal{A}_g^{(E)} \cup \Gamma_g$ , le deuxième terme du second membre est donc nul. En utilisant les notations (1-11) et la fraction massique translatée  $w = \bar{w} - (\omega_0 + \omega_1 T)$  cette relation devient:

$$(1-14) \quad \int_{\Omega_g^{(E)}} \nabla w \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_{\Omega_g^{(E)}} \omega_1 \nabla T \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega_g^{(E)}} h \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{W}$$

On multiplie l'équation (1-4) par une fonction test  $v$  appartenant à  $\mathcal{V}$  et on intègre par parties sur  $\Omega_\ell$ ,  $\Omega_s$  puis  $\Omega_g^{(*)}$  et en tenant compte que la normale  $n$  est orientée sur chaque interface  $\mathcal{A}_{\alpha\beta}$  de  $\Omega_\alpha$  vers  $\Omega_\beta$  ( $\alpha, \beta = g, \ell, s$ ), la formule de Green donne:

$$(1-15) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_{\Omega_g} \lambda_g \nabla T \cdot \nabla v \, dx &= \int_{\Omega_g} f \, v \, dx - \int_{\mathcal{A}_{gs}^{(g)}} \lambda_g \frac{\partial T}{\partial n} v \, d\sigma + \int_{\mathcal{A}_{gl}^{(g)}} \lambda_g \frac{\partial T}{\partial n} v \, d\sigma \\ \int_{\Omega_s} \lambda_s \nabla T \cdot \nabla v \, dx &= \int_{\Omega_s} f \, v \, dx - \int_{\mathcal{A}_{gs}^{(s)}} \lambda_s \frac{\partial T}{\partial n} v \, d\sigma - \int_{\mathcal{A}_{gl}^{(s)}} \lambda_s \frac{\partial T}{\partial n} v \, d\sigma \\ \int_{\Omega_g^{(a)}} \lambda_g \nabla T \cdot \nabla v \, dx &= \int_{\Omega_g^{(a)}} f \, v \, dx + \int_{\mathcal{A}_{gs}^{(a)}} \lambda_g \frac{\partial T}{\partial n} v \, d\sigma + \int_{\mathcal{A}_{gl}^{(a)}} \lambda_g \frac{\partial T}{\partial n} v \, d\sigma \end{aligned} \right.$$

Les équations (1-1) et (1-4) combinées donnent:

$$-(\lambda_g \Delta T + \eta \Delta \varpi) = f_\alpha + \eta h \quad \text{dans } \Omega_g^{(g)}$$

On multiplie cette équation par une fonction  $v$  de  $V$  et on intègre par parties:

$$\int_{\Omega_g^{(g)}} (\lambda_g \nabla T + \eta \nabla \varpi) \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega_g^{(g)}} (f_\alpha + \eta h) v \, dx + \int_{\partial(\Omega_g^{(g)})} \left( \lambda_g \frac{\partial T}{\partial n} + \eta \frac{\partial \varpi}{\partial n} \right) v \, d\sigma$$

Le bord  $\partial(\Omega_g^{(g)})$  du gaz humide est la réunion de son interface avec le liquide  $\mathcal{A}_{gl}^{(g)}$ , de son interface avec le solide  $\mathcal{A}_{gs}^{(g)}$  et de son bord extérieur  $\Gamma_g^{(g)}$ , la fonction-test  $v$  est nulle sur  $\Gamma_g^{(g)}$  et, d'après (1-3) et (1-7), le flux  $\eta \frac{\partial \varpi}{\partial n}$  est nul sur l'interface  $\mathcal{A}_{gs}^{(g)}$  et vaut le saut du flux de chaleur:  $-\llbracket \lambda \frac{\partial T}{\partial n} \rrbracket_{\mathcal{A}_{gs}^{(g)}} = \lambda_l \frac{\partial T}{\partial n} - \lambda_g \frac{\partial T}{\partial n}$  sur l'interface  $\mathcal{A}_{gl}^{(g)}$ , la relation précédente devient donc:

$$(1-16) \quad \int_{\Omega_g^{(g)}} (\lambda_g \nabla T + \eta \nabla \varpi) \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega_g^{(g)}} (f_\alpha + \eta h) v \, dx + \int_{\mathcal{A}_{gl}^{(g)}} \lambda_g \frac{\partial T}{\partial n} v \, d\sigma + \\ + \int_{\mathcal{A}_{gl}^{(g)}} \left( \lambda_l \frac{\partial T}{\partial n} - \lambda_g \frac{\partial T}{\partial n} \right) v \, d\sigma$$

Comme le saut  $\left[ \lambda \frac{\partial T}{\partial n} \right]_{\alpha s}$  est nul sur les interfaces fluide-solide  $\mathcal{A}_{\alpha s}$ , la somme des relations (1-15) et (1-16) s'écrit:

$$\int_{\Omega} \lambda \nabla T \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega_g^{(e)}} \eta \nabla \bar{\omega} \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega_g^{(e)}} (f_{\alpha} + \eta h) v \, dx$$

Si on remplace  $\bar{\omega}$  par son expression :  $\omega + (\omega_0 + \omega_1 T)$ , en utilisant la définition (1-11) de la donnée  $\mu$ , cette relation devient:

$$(1-17) \quad \int_{\Omega} \mu \nabla T \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega_g^{(e)}} \eta \omega_1 \nabla \omega \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega_g^{(e)}} (f_{\alpha} + \eta h) v \, dx$$

Pour obtenir i) du théorème il suffit de multiplier (1-14) par  $\eta$  et (1-17) par  $\omega_1$  et de sommer les relations obtenues. (on a multiplié (1-14) par  $\eta$  et (1-17) par  $\omega_1$  pour obtenir une forme symétrique).

ii) Pour montrer l'existence et l'unicité on va utiliser le lemme classique de Lax-Milgram [6]. Il est clair que notre espace  $E$  est de Hilbert, que  $L(\cdot, \cdot)$  est une forme linéaire sur  $E$  et que  $a(\cdot, \cdot)$  est bilinéaire sur  $E \times E$ , il nous reste à montrer la continuité de  $L(\cdot, \cdot)$  et de  $a(\cdot, \cdot)$  et la coercivité de  $a(\cdot, \cdot)$ :

Pour tout ouvert  $\mathcal{O}$  de  $\Omega$ , on notera dans la suite:

$$|\phi|_{0, \mathcal{O}} = \|\phi\|_{L^2(\mathcal{O})}$$

$$|\phi|_{1, \mathcal{O}} = \|\nabla \phi\|_{L^2(\mathcal{O})}$$

continuité de  $L(\dots)$ 

A l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on établit facilement:

$$(1-18) \quad |L(v, \varphi)| \leq M \|(v, \varphi)\|_E$$

où la constante  $M$  est donnée par:

$$M = \sqrt{2} \max \left( \omega_1 \left| f + \eta h \chi_s^{(E)} \right|_{0, \Omega} ; \left| h \right|_{0, \Omega} \right)$$

continuité de  $a(\dots)$ 

en appliquant les inégalités de Cauchy-Schwarz dans l'expression de  $a(\dots)$ , il vient:

$$\begin{aligned} |a((u, \psi), (v, \varphi))| &\leq C_1 \left( |u|_{1, \Omega} \left| v \right|_{1, \Omega^+} + \left| \psi \right|_{1, \Omega_s^{(E)}} \left| \varphi \right|_{1, \Omega_s^{(E)}} + \left| \psi \right|_{1, \Omega_s^{(E)}} \left| v \right|_{1, \Omega^+} + \left| u \right|_{1, \Omega} \left| \varphi \right|_{1, \Omega_s^{(E)}} \right) \\ &\leq 2 C_1 \left( |u|_{1, \Omega}^2 + \left| \psi \right|_{1, \Omega_s^{(E)}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \left| v \right|_{1, \Omega^+}^2 + \left| \varphi \right|_{1, \Omega_s^{(E)}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

soit:

$$(1-19) \quad |a((u, \psi), (v, \varphi))| \leq 2 C_1 \|(u, \psi)\|_E \|(v, \varphi)\|_E$$

où l'on note:

$$C_1 = \max(\omega_1 \sup_{\Omega} (\mu), \eta, \omega_1 \eta)$$

Coercivité de  $a(\dots)$ :

$$a((u,\psi),(u,\psi)) = \int_{\Omega} \omega_1 \mu (\nabla u)^2 dx + 2 \int_{\Omega_g^{(E)}} \omega_1 \eta \nabla u \cdot \nabla \psi dx + \int_{\Omega_g^{(E)}} \eta (\nabla \psi)^2 dx$$

La coercivité ( et même la positivité) n'est pas évidente a priori à cause du terme rectangle sur  $\Omega_g^{(E)}$ . On introduit un paramètre  $\delta$  qu'on ajustera ultérieurement et on écrit  $a((u,\psi),(u,\psi))$  sous la forme suivante:

$$a((u,\psi),(u,\psi)) = \int_{\Omega} \delta (\nabla u)^2 dx + \int_{\Omega} (\omega_1 \mu - \delta) (\nabla u)^2 dx + \int_{\Omega_g^{(E)}} 2\omega_1 \eta \nabla u \cdot \nabla \psi dx + \int_{\Omega_g^{(E)}} \eta (\nabla \psi)^2 dx$$

Si on choisit le paramètre  $\delta$  tel que  $\delta < \omega_1 \mu_g$  alors:

$$\begin{aligned} a((u,\psi),(u,\psi)) &= \int_{\Omega} \delta (\nabla u)^2 dx + \int_{\Omega \setminus \Omega_g^{(E)}} (\omega_1 \mu - \delta) (\nabla u)^2 dx + \int_{\Omega_g^{(E)}} \left( \eta - \frac{(\omega_1 \eta)^2}{\omega_1 \mu_g - \delta} \right) (\nabla \psi)^2 dx + \\ &+ \int_{\Omega_g^{(E)}} \left( \sqrt{\omega_1 \mu_g - \delta} \nabla u + \frac{\omega_1 \eta}{\sqrt{\omega_1 \mu_g - \delta}} \nabla \psi \right)^2 dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1-20) \quad a((u,\psi),(u,\psi)) &= \int_{\Omega_g^{(E)}} \delta (\nabla u)^2 dx + \int_{\Omega \setminus \Omega_g^{(E)}} \omega_1 \mu (\nabla u)^2 dx + \int_{\Omega_g^{(E)}} \zeta (\nabla \psi)^2 dx + \\ &+ \int_{\Omega_g^{(E)}} \left( \xi \nabla u + \frac{\omega_1 \eta}{\xi} \nabla \psi \right)^2 dx \end{aligned}$$

où l'on a noté:

$$\xi = \sqrt{\omega_1 \mu_g - \delta} \quad \text{et} \quad \zeta = \eta - \frac{(\omega_1 \eta)^2}{\omega_1 \mu_g - \delta}$$



Un choix convenable du paramètre est alors le suivant:

$$\bullet \quad 0 < \delta < \omega_1 \lambda_g \quad (\text{par exemple } \delta = \frac{\omega_1 \lambda_g}{2})$$

En effet, dans ce cas:

$$\bullet \quad \omega_1 \mu_g - \delta = \omega_1 \lambda_g - \delta + \omega_1^2 \eta > 0$$

$$\bullet \quad \zeta = \omega_1 \eta \frac{\omega_1 \lambda_g - \delta}{\omega_1 \mu_g - \delta} > 0$$

et on peut alors déduire de la relation (1-20) que:

$$(1-21) \quad a((u,\psi),(u,\psi)) \geq c \left( \|u\|_{1,\Omega}^2 + \|\psi\|_{1,\Omega_g^{\text{ext}}}^2 \right)$$

$$c = \text{Min}(\zeta, \delta, \omega_1 \min(\lambda_l, \lambda_g))$$

Puisque  $u$  est de trace nulle sur le bord extérieur de  $\Omega$  et que  $\psi$  est de trace nulle sur l'interface gaz-liquide, la norme  $\|\cdot\|_{1,\mathcal{B}}$  est, d'après l'inégalité de Poincaré, équivalente à la norme  $\|\cdot\|_{H^1(\mathcal{B})}$  sur  $H^1(\mathcal{B})$  ( $\mathcal{B}$  étant  $\Omega$  ou  $\Omega_g^{\text{ext}}$ ). L'inégalité (1-21) est donc équivalente à la suivante:

$$(1-22) \quad a((u,\psi),(u,\psi)) \geq c \|(u,\psi)\|_E^2 \quad \forall (u,\psi) \in E$$

On a donc vérifié toutes les hypothèses du lemme de Lax- Milgram, le problème (1-13) admet alors une solution unique  $(T,\omega)$  dans  $E$ .  $\square$

**2/ HOMOGENEISATION PAR LA METHODE DES ECHELLES MULTIPLES:**

Dans cette partie on suppose que le matériau poreux occupant  $\Omega$  a une structure périodique. Soit  $\varepsilon Y$  la période de la structure où  $Y$  est un pavé de  $\mathbb{R}^n$  fixé et  $\varepsilon$  un paramètre positif très petit par rapport aux dimensions de  $\Omega$ , qui représente le rapport entre l'échelle microscopique et l'échelle macroscopique. Notre domaine peut donc être recouvert par des pavés translatés de  $\varepsilon Y$ , (figure 2-1).

Le domaine  $\Omega$  est indépendant de  $\varepsilon$ , cependant les sous-ensembles  $\Omega_\alpha$  ( $\alpha=g, l, s$ ) en dépendent. Pour chaque  $\varepsilon$  fixé, on a une solution  $(T^\varepsilon, \omega^\varepsilon)$  du problème (1-1) à (1-8), ou une solution  $(T^\varepsilon, \omega^\varepsilon)$  de (1-13). On s'intéresse alors au comportement de la température  $T^\varepsilon$  et de la fraction massique de vapeur translatée  $\omega^\varepsilon$ , lorsque la période  $\varepsilon$  tend vers zéro.

La méthode des échelles multiples, [5] et [33], permet d'établir les équations macroscopiques (équations vérifiées par les limites de  $T^\varepsilon$  et de  $\omega^\varepsilon$ ) d'une façon formelle. Les résultats obtenus par cette méthode seront justifiés, dans le paragraphe 3, par la méthode variationnelle de Tartar [5] [35].

(2-1) Notations:

$$Y = \prod_{i=1}^n ]0, \ell_i[ \quad \text{est la cellule de base}$$

$$Y_\alpha = \text{image de } \Omega_\alpha^\varepsilon \text{ par translations et homothéties } \frac{1}{\varepsilon} \quad (\alpha = g, l, s)$$

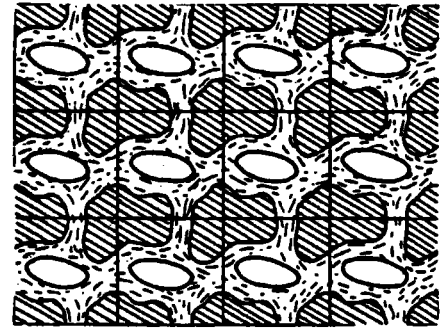
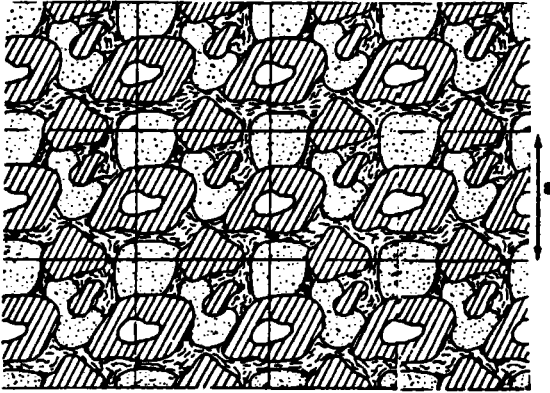
$$\mathcal{A}_{\alpha\beta} = \text{interface } (\partial Y_\alpha \cap \partial Y_\beta) \text{ de } Y_\alpha \text{ avec } Y_\beta$$

$$\Gamma^Y = \text{bord extérieur } (\partial Y) \text{ de } Y$$

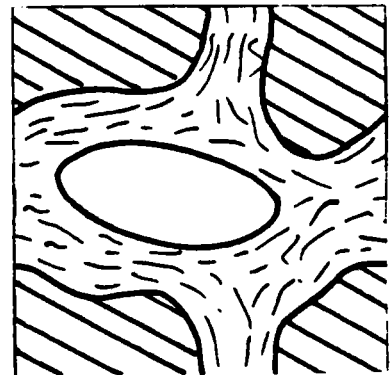
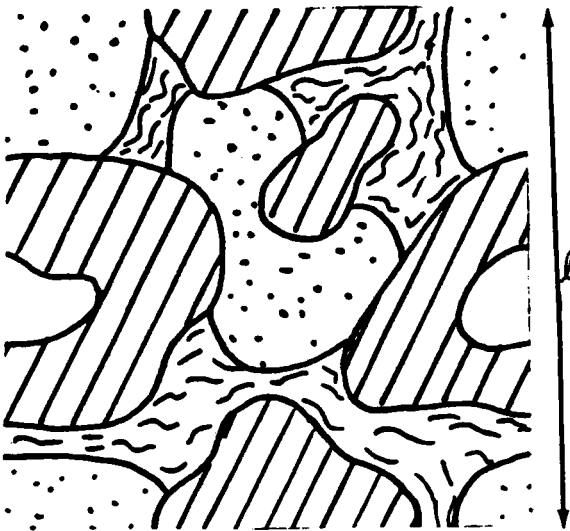
$$\Gamma_\alpha^Y = \text{bord extérieur } (\partial Y_\alpha \cap \Gamma^Y) \text{ de } Y_\alpha$$

$$Y_\alpha^{(g)} = \text{image de } \Omega_\alpha^{(g)\varepsilon} \text{ par translations et homothéties } \frac{1}{\varepsilon}$$

$$Y_\alpha^{(s)} = \text{image de } \Omega_\alpha^{(s)\varepsilon} \text{ par translations et homothéties } \frac{1}{\varepsilon}$$



Un échantillon de  $\Omega$



Cellule de base Y



(fig. 2-1)

(2-2) Les propriétés physiques du matériau sont  $\epsilon Y$ -périodiques:

- $\lambda^\epsilon(x) = \lambda(\frac{x}{\epsilon})$  où  $\lambda$  est définie sur la cellule de base  $Y$  par:  
 $\lambda(y) = \lambda_\alpha$  pour  $y \in Y_\alpha$  ( $\alpha = g, l, s$ )
- $\mu^\epsilon(x) = \mu(\frac{x}{\epsilon})$  où  $\mu$  est définie sur la cellule de base  $Y$  par:  
 $\mu(y) = \lambda(y) + \eta \omega_1 X_g^{(\epsilon)}$  où  $X_g^{(\epsilon)}$  désigne la fonction caractéristique de  $Y_g^{(\epsilon)}$

(2-3) On suppose que les données  $f$  et  $h$  sont à oscillations périodiques :

- $f^\epsilon(x) = f(x, \frac{x}{\epsilon})$
  - $h^\epsilon(x) = h(x, \frac{x}{\epsilon})$
- } les fonctions  $f$  et  $h$  étant dans  $L^2(\Omega \times Y)$  et  $Y$ -périodiques en  $y$ .
- les constantes physiques:  $\eta$ ,  $\omega_1$  et les  $\lambda_\alpha$ , sont strictement positives.

Pour faciliter l'écriture, on va réécrire les équations initiales (1-1) à (1-8) sous une forme différente ( mais équivalente). Comme on l'a déjà signalé, on ne s'intéressera à la fraction massique de vapeur translatée  $\omega^\epsilon$  que dans la composante humide  $\Omega_g^{(\epsilon)}$  du gaz.

L'utilisatin de  $\mu = \lambda + \eta \omega_1 X_g^{(\epsilon)}$  et de la fraction massique translatée  $\omega^\epsilon = \bar{\omega}^\epsilon - (\omega_0 + \omega_1 T)$  dans les équations (1-1) à (1-8) donne les nouvelles équations suivantes:

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \mu_\alpha^\epsilon \frac{\partial T^\epsilon}{\partial x_1} \right) = \left( 1 + \frac{\eta \omega_1}{\lambda_g} X_g^{(\epsilon)} \right) f_\alpha \quad \text{dans } \Omega_\alpha \quad (\alpha = g, l, s). \\
 & \quad \quad \quad \llbracket T^\epsilon \rrbracket_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{sur } \mathcal{A}_{\alpha\beta}^\epsilon \quad (\alpha, \beta = g, l, s). \\
 & \quad \quad \quad \llbracket \mu_\alpha^\epsilon \frac{\partial T^\epsilon}{\partial n} \rrbracket_{\alpha s} = 0 \quad \text{sur } \mathcal{A}_{ls}^\epsilon \text{ et } \mathcal{A}_{gs}^{(\epsilon)} \\
 & \quad \quad \quad \llbracket \mu_\alpha^\epsilon \frac{\partial T^\epsilon}{\partial n} \rrbracket_g = - \eta \frac{\partial \omega^\epsilon}{\partial n} \quad \text{sur } \mathcal{A}_{lg}^\epsilon \text{ et } \mathcal{A}_{gs}^{(\epsilon)} \\
 & \quad \quad \quad T^\epsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma = \partial(\Omega) \\
 (2-4) \quad & - \Delta \omega^\epsilon = h^\epsilon - \frac{\omega_1}{\lambda_g} f^\epsilon \quad \text{dans } \Omega_g^{(\epsilon)} \\
 & \frac{\partial \omega^\epsilon}{\partial n} = - \omega_1 \frac{\partial T_g}{\partial n} \quad \text{sur } \mathcal{A}_{gs}^{(\epsilon)} \text{ et } \Gamma_g^\epsilon \\
 & \omega^\epsilon = 0 \quad \text{sur } \mathcal{A}_g^\epsilon
 \end{aligned}$$

où  $X_g^{(\epsilon)}$  vaut 1 dans  $\Omega_g^{(\epsilon)}$  et 0 ailleurs (fonction caractéristique de  $\Omega_g^{(\epsilon)}$ ).

### 2-1) Développement asymptotique et équations locales:

On cherche  $T^\varepsilon$  et  $\omega^\varepsilon$  sous la forme d'un développement asymptotique dont les termes dépendent de deux variables  $x \in \Omega$  et  $y \in Y$ . La première variable  $x$ , dite "macroscopique", mesure les variations de  $(T^\varepsilon, \omega^\varepsilon)$  dans la région de  $\Omega$  qui nous intéresse, la deuxième variable  $y$ , dite "microscopique" mesure les variations de  $(T^\varepsilon, \omega^\varepsilon)$  au sein d'une période.

$$(2-5) \quad \begin{aligned} T^\varepsilon &= u_0(x, y) + \varepsilon u_1(x, y) + \varepsilon^2 u_2(x, y) + \varepsilon^3 u_3(x, y) + \dots \\ \omega^\varepsilon &= w_0(x, y) + \varepsilon w_1(x, y) + \varepsilon^2 w_2(x, y) + \varepsilon^3 w_3(x, y) + \dots \\ y &= \frac{x}{\varepsilon} \end{aligned}$$

où les  $u_i(x, y)$  et les  $w_i(x, y)$  sont des fonctions régulières et  $Y$ -périodiques en  $y$  (la période est  $l_i$  - côté de  $Y$  - dans chaque direction  $y_i$ )

Avant de reporter (2-5) dans les équations (2-4) il faut signaler que pour une fonction  $\psi^\varepsilon$  définie sur  $\Omega$  par  $\psi^\varepsilon(x) = \psi(x, \frac{x}{\varepsilon})$  où  $\psi$  est définie sur  $\Omega \times Y$  on a:

$$\frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial x_i}(x) = \left( \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \psi}{\partial y_i} + \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) \left( x, \frac{x}{\varepsilon} \right)$$

L'opérateur  $A^\varepsilon = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \mu^\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_i} \right)$  devient donc  $\varepsilon^{-2} A_{-2} + \varepsilon^{-1} A_{-1} + A_0$  où:

$$(2-6) \quad \left\{ \begin{aligned} A_{-2} &= -\frac{\partial}{\partial y_i} \left( \mu \frac{\partial}{\partial y_i} \right) \\ A_{-1} &= -\frac{\partial}{\partial y_i} \left( \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \mu \frac{\partial}{\partial y_i} \right) \\ A_0 &= -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \end{aligned} \right.$$

De la même façon, l'opérateur Laplacien  $-\Delta^\varepsilon$  devient  $\varepsilon^{-2} \Delta_y + \varepsilon^{-1} 2 \Delta_{yx} + \Delta_x$  où:

$$(2-7) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta_y &= -\frac{\partial}{\partial y_i} \left( \frac{\partial}{\partial y_i} \right) \\ \Delta_{yx} &= -\frac{\partial}{\partial y_i} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \\ \Delta_x &= -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \end{aligned} \right.$$

On reporte (2-5) dans les équations (2-4) en tenant compte des transformations (2-6) et (2-7) des opérateurs  $\hat{A}^\varepsilon$  et  $\hat{\Delta}^\varepsilon$ . Après identification des termes en puissances du paramètre  $\varepsilon$ , on obtient les équations locales ( en la variable microscopique  $\gamma$ ) vérifiées par les termes  $u_j$  et les  $w_j$  du développement asymptotique (2-5); dans ces équations la variable macroscopique  $x$  est considéré comme un paramètre :

$$(2-8) \quad \hat{A}_{-2} u_0 = 0 \quad \text{dans chaque } Y_\alpha$$

$$(2-9) \quad \hat{A}_{-2} u_1 + \hat{A}_{-1} u_0 = 0 \quad \text{dans chaque } Y_\alpha$$

$$(2-10) \quad \hat{A}_{-2} u_2 + \hat{A}_{-1} u_1 + \hat{A}_0 u_0 = \left( 1 + \frac{\eta \omega_1}{\lambda_g} \chi_g^{(E)} \right) f_\alpha \quad \text{dans chaque } Y_\alpha$$

$$(2-11) \quad \hat{A}_{-2} u_{j+2} + \hat{A}_{-1} u_{j+1} + \hat{A}_0 u_j = 0 \quad \forall j \geq 1$$

$$(2-12) \quad \Delta_\gamma W_0 = 0 \quad \text{dans } Y_g^{(E)}$$

$$(2-13) \quad \Delta_\gamma W_1 + 2 \Delta_{\gamma X} W_0 = 0 \quad \text{dans } Y_g^{(E)}$$

$$(2-14) \quad \Delta_\gamma W_2 + 2 \Delta_{\gamma X} W_1 + \Delta_X W_0 = h - \frac{\omega_1}{\lambda_g} f \quad \text{dans } Y_g^{(E)}$$

$$(2-15) \quad \Delta_\gamma W_{j+2} + 2 \Delta_{\gamma X} W_{j+1} + \Delta_X W_j = 0 \quad \forall j \geq 1$$

De manière analogue on reporte le développement (2-5) dans les conditions aux interfaces des équations (2-4), où  $n$  désigne cette fois la normale aux interfaces  $\mathcal{A}_{\alpha\beta}$  séparant les  $Y_\alpha$  des  $Y_\beta$  avec la même convention d'orientation:

la normale  $n$  est orientée sur chaque interface  $\mathcal{A}_{\alpha\beta}$  de  $Y_\alpha$  vers  $Y_\beta$ .

Après identification en puissances de  $\varepsilon$  on obtient:

Pour la température  $T^e$  :

Sur  $\mathcal{A}_\varepsilon$  et  $\mathcal{A}_\varepsilon^{(E)}$  :

$$(2-16) \quad \left\{ \begin{array}{l} [u_j] = 0 \quad \forall j \geq 0 \\ \left[ \mu \frac{\partial u_0}{\partial x_i} n_i \right] = -\eta \frac{\partial w_0}{\partial x_i} n_i \\ \left[ \mu \left( \frac{\partial u_{j+1}}{\partial y_i} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_i \right] = -\eta \left( \frac{\partial w_{j+1}}{\partial y_i} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right) n_i \quad \forall j \geq 0 \end{array} \right.$$

Sur  $\mathcal{A}_\varepsilon$  et  $\mathcal{A}_\varepsilon^{(*)}$  :

$$(2-17) \quad \left\{ \begin{array}{l} [u_j] = 0 \quad \forall j \geq 0 \\ \left[ \mu \frac{\partial u_0}{\partial y_i} n_i \right] = 0 \\ \left[ \mu \left( \frac{\partial u_{j+1}}{\partial y_i} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_i \right] = 0 \quad \forall j \geq 0 \end{array} \right.$$

Sur  $\Gamma^Y$  :

$$(2-18) \quad \text{les } u_j \text{ sont } Y\text{-périodiques}$$

Pour la fraction massique de vapeur translatée  $\omega^e$  :

Sur  $\mathcal{A}_\varepsilon^{(E)}$  :

$$(2-19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w_0}{\partial y_i} n_i = -\omega_1 \frac{\partial u_0}{\partial y_i} n_i \\ \left[ \left( \frac{\partial w_{j+1}}{\partial y_i} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right) n_i \right] = -\omega_1 \left( \frac{\partial u_{j+1}}{\partial y_i} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_i \quad \forall j \geq 0 \end{array} \right.$$

Sur  $\mathcal{A}_\varepsilon$  :

$$(2-20) \quad w_j = 0 \quad \forall j \geq 0$$

Sur  $\Gamma^Y$  :

$$(2-21) \quad \text{les } w_j \text{ sont } Y\text{-périodiques}$$

## 2-2) Etudes des équations locales:

Les équations vérifiées par les termes  $(u_j, w_j)$  du développement asymptotique sont toutes du même type: on va étudier d'abord une équation générale puis appliquer le résultat aux équations locales en  $(u_j, w_j)$ .

### 2-2-1/ Etude d'une équation générale:

On introduit les espaces fonctionnels suivants:

$$(2-22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{V}_Y = \{ v \in H^1(Y); v \text{ Y-périodique} \} \\ \mathcal{W}_Y = \{ \varphi \in H^1(Y_{\frac{g}{2}}); \varphi = 0 \text{ sur } \mathcal{A}_{\frac{g}{2}} \text{ et Y-périodique} \} \\ E_Y = \mathcal{V}_Y \times \mathcal{W}_Y \end{array} \right.$$

La notion  $\psi$  est Y-périodique signifie que la fonction  $\psi$  prend des valeurs égales en deux points opposés sur les faces de Y [5] [30]. Munis respectivement des produits scalaires (et des normes associées) usuels sur  $H^1(Y)$ ,  $H^1(Y_{\frac{g}{2}})$  et  $H^1(Y_{\frac{g}{2}}) \times H^1(Y)$  ces espaces sont de Hilbert.

Soient:

$$(2-23) \quad \left\{ \begin{array}{l} F \text{ et } H \text{ deux fonctions de } L^2(\Omega \times Y) \\ \hat{\theta} \text{ et } \hat{\xi} \text{ deux fonctions de } H^1(\Omega \times Y) \text{ Y-périodique en la variable } y \end{array} \right.$$

On définit pour tout  $(\theta, \xi)$  et  $(v, \varphi)$  de l'espace  $E_Y$  les deux formes suivantes:



$$(2-24) \quad a((\theta, \xi), (v, \varphi)) = \int_Y \omega_1 \mu \nabla \theta \cdot \nabla v \, dy + \int_{Y_g^{(\xi)}} \omega_1 \eta (\nabla \theta \cdot \nabla \varphi + \nabla \xi \cdot \nabla v) \, dy + \int_{Y_g^{(\xi)}} \eta \nabla \xi \cdot \nabla \varphi \, dy$$

$$L((v, \varphi)) = L_Y(v) + L_{Y_g}(\varphi) + \hat{L}_Y(v) + \hat{L}_{Y_g}(\varphi)$$

où

$$L_Y(v) = \int_Y \omega_1 (F + \eta H X_g^{(\xi)}) v \, dy$$

$$L_{Y_g}(\varphi) = \int_{Y_g^{(\xi)}} \eta \left( H + \frac{\omega_1}{\mu_g} F \right) \varphi \, dy +$$

$$\hat{L}_Y(v) = \int_Y \omega_1 \left( \mu \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial x_i} + \frac{\partial \hat{\xi}}{\partial x_i} X_g^{(\xi)} \right) \frac{\partial v}{\partial y_i} \, dy$$

$$\hat{L}_{Y_g}(\varphi) = \int_{Y_g^{(\xi)}} \eta \left( \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial x_i} + \frac{\partial \hat{\xi}}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \, dy$$

Soit le problème en  $(\theta, \xi)$  suivant :

$$(2-25) \quad \begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial y_i} \left( \mu \left( \frac{\partial \theta}{\partial y_i} + \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial x_i} \right) \right) &= F && \text{dans chaque } Y_\alpha \\ \llbracket \theta \rrbracket_{\alpha\beta} &= 0 && \text{sur } \mathcal{A}_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = g, \ell, s) \\ \llbracket \mu \left( \frac{\partial \theta}{\partial y_i} + \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial x_i} \right) n_i \rrbracket &= 0 && \text{sur } \mathcal{A}_{\ell s} \text{ et } \mathcal{A}_{\ell g}^{(*)} \\ \llbracket \mu \left( \frac{\partial \theta}{\partial y_i} + \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial x_i} \right) n_i \rrbracket &= -\eta \left( \frac{\partial \xi}{\partial y_i} + \frac{\partial \hat{\xi}}{\partial x_i} \right) n_i && \text{sur } \mathcal{A}_{\ell g} \text{ et } \mathcal{A}_{\ell s}^{(\xi)} \\ \theta &\text{ est } Y\text{-périodique} \\ \\ -\frac{\partial}{\partial y_i} \left( \left( \frac{\partial \xi}{\partial y_i} + \frac{\partial \hat{\xi}}{\partial x_i} \right) \right) &= H && \text{dans } Y_g^{(\xi)} \\ \xi &= 0 && \text{sur } \mathcal{A}_{\ell g} \\ \left( \frac{\partial \xi}{\partial y_i} + \frac{\partial \hat{\xi}}{\partial x_i} \right) n_i &= -\omega_1 \left( \frac{\partial \theta}{\partial y_i} + \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial x_i} \right) n_i && \text{sur } \mathcal{A}_{\ell g}^{(\xi)} \\ \xi &\text{ est } Y\text{-périodique} \end{aligned}$$

**proposition 2-1:**

Sous les hypothèses (2-23), le problème (2-25) se met sous la forme variationnelle suivante:

$$(2-26) \quad \begin{cases} (\theta, \xi) \in E_Y \text{ et } \forall (v, \varphi) \in E_Y \\ a((\theta, \xi), (v, \varphi)) = L((v, \varphi)) \end{cases}$$

Ce problème admet une solution unique à une constante (fonction de la variable  $x$  seulement) près si et seulement si la condition de compatibilité ci-dessous est satisfaite:

$$\int_Y (F + \eta H X_g^{(g)})(y) dy = 0$$

Démonstration:

Cette proposition se démontre comme le théorème 1-1. Pour simplifier l'écriture, on notera dans la suite :

$$P_i = \mu \left( \frac{\partial \theta}{\partial y_i} + \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial x_i} \right) \quad \text{et} \quad Q_i = \left( \frac{\partial \xi}{\partial y_i} + \frac{\partial \hat{\xi}}{\partial x_i} \right)$$

i) on multiplie la première équation de (2-25) par une fonction test  $v$  de  $V_Y$  et on intègre par parties (formule de Green) sur chaque  $Y_\alpha$  ( $\alpha = g, l, s$ ):

$$\int_{Y_\alpha} P_i \frac{\partial v}{\partial y_i} dy = \int_{Y_\alpha} F v dy + \int_{\partial Y_\alpha} P_i v n_i d\sigma \quad (\alpha = g, l, s)$$

où  $n$  représente la normale extérieure à chaque  $Y_\alpha$ .

Grâce aux conditions de périodicité, les intégrales sur les faces de  $Y$  s'annulent; en convenant que la normale  $n$  est orientée sur chaque  $\mathcal{A}_{\alpha\beta}$  de  $Y_\alpha$  vers  $Y_\beta$  et en exploitant les conditions sur les interfaces, la somme des relations précédentes (sur  $\alpha = g, l, s$ ) est:

$$(2-27) \quad \int_Y P_i \frac{\partial v}{\partial y_i} dy = \int_Y F v dy + \int_{\mathcal{A}_g} P_i v n_i d\sigma + \int_{\mathcal{A}_s^{(l)}} P_i v n_i d\sigma$$

Mais, en utilisant les conditions sur les interfaces  $\mathcal{A}_g$  et  $\mathcal{A}_g^{(E)}$  puis la formule de Green et la périodicité de  $P_i, Q_i$  et de  $v$ , on a:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{A}_g \cup \mathcal{A}_g^{(E)}} P_i v n_i \, d\sigma &= - \int_{\mathcal{A}_g \cup \mathcal{A}_g^{(E)}} \eta Q_i v n_i \, d\sigma = - \int_{\partial Y_g^{(E)}} \eta Q_i v n_i \, d\sigma \\ &= - \int_{Y_g^{(E)}} \eta \frac{\partial Q_i}{\partial y_i} v \, dy - \int_{Y_g^{(E)}} \eta \frac{\partial Q_i}{\partial y_i} \frac{\partial v}{\partial y_i} \, dy \\ &= \int_{Y_g^{(E)}} \eta H v \, dy - \int_{Y_g^{(E)}} \eta \frac{\partial Q_i}{\partial y_i} \frac{\partial v}{\partial y_i} \, dy \end{aligned}$$

La relation (2-27) devient alors:

$$(2-28) \quad \int_Y P_i \frac{\partial v}{\partial y_i} \, dy + \int_{Y_g^{(E)}} Q_i \frac{\partial v}{\partial y_i} \, dy = \int_Y F v \, dy + \int_{Y_g^{(E)}} \eta H v \, dy = \frac{1}{\omega_1} L_Y(v)$$

On multiplie la sixième équation de (2-25) par une fonction test  $\varphi$  de  $W_Y$  et on intègre par parties sur  $Y_g^{(E)}$ :

$$(2-29) \quad \int_{Y_g^{(E)}} Q_i \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \, dy = \int_{Y_g^{(E)}} H \varphi \, dy + \int_{\mathcal{A}_g^{(E)}} Q_i \varphi n_i \, d\sigma$$

Comme précédemment, en utilisant les conditions sur  $\mathcal{A}_g^{(E)}$  et sur  $\mathcal{A}_g$  et la périodicité on a:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{A}_g^{(E)}} Q_i \varphi n_i \, d\sigma &= \int_{\mathcal{A}_g^{(E)}} - \frac{\omega_1}{\mu_g} P_i \varphi n_i \, d\sigma = \int_{\partial Y_g^{(E)}} - \frac{\omega_1}{\mu_g} P_i \varphi n_i \, d\sigma \\ &= \int_{Y_g^{(E)}} - \frac{\omega_1}{\mu_g} \frac{\partial P_i}{\partial y_i} \varphi \, dy - \int_{Y_g^{(E)}} \frac{\omega_1}{\mu_g} P_i \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \, dy \\ &= \int_{Y_g^{(E)}} \frac{\omega_1}{\mu_g} F \varphi \, dy - \int_{Y_g^{(E)}} \frac{\omega_1}{\mu_g} P_i \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \, dy \end{aligned}$$

La relation (2-29) devient alors:

$$(2-30) \quad \int_{Y_g^{(E)}} Q_i \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} dy + \int_{Y_g^{(E)}} \frac{\omega_1}{\mu_g} P_i \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} dy = \int_{Y_g^{(E)}} H \varphi dy + \int_{Y_g^{(E)}} \frac{\omega_1}{\mu_g} F \varphi dy$$

$$= \frac{1}{\eta} L_{\psi}(\varphi)$$

Il suffit alors de multiplier (2-28) par  $\omega_1$  et (2-30) par  $\eta$  et de faire la somme pour obtenir le problème variationnel (2-26) de la proposition 2-1.

ii) Pour l'existence et l'unicité de la solution de (2-26) on utilise le lemme de Lax-Milgram. La linéarité de  $L(\cdot)$  et la bilinéarité de  $a(\cdot, \cdot)$  sont évidentes, leur continuité s'obtient aisément, comme dans le paragraphe précédent, grâce aux inégalités de Cauchy Schwarz:

continuité de  $L(\cdot)$ :

$$\bullet \quad |L((v, \varphi))| \leq \sqrt{2} \max(M, \hat{M}) \| (v, \varphi) \|_E$$

$$M = \max \left( \omega_1 \| F + \eta H X_g^{(E)} \|_{L^2(Y)} ; \left\| \eta \left( H + \frac{\omega_1}{\mu_g} F \right) X_g^{(E)} \right\|_{L^2(Y)} \right)$$

$$\hat{M} = \max \left( \left\| \omega_1 \left( \mu \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial x_i} + \frac{\partial \hat{\xi}}{\partial x_i} X_g^{(E)} \right) \right\|_{L^2(Y)} ; \left\| \eta \left( \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial x_i} + \frac{\partial \hat{\xi}}{\partial x_i} \right) X_g^{(E)} \right\|_{L^2(Y)} \right)$$

continuité de  $a(\cdot, \cdot)$ :

$$\bullet \quad |a((\theta, \xi), (v, \varphi))| \leq c \| (\theta, \xi) \|_E \| (v, \varphi) \|_E$$

$$c = 2 \max(\omega_1 \sup_Y(\mu), \eta, \omega_1 \eta)$$

Pour démontrer la coercivité de  $a(\dots)$ , on procède de manière analogue à la démonstration du théorème 1-1. Il suffit de remplacer dans les relations (1-19) à (1-21),  $\Omega$  (resp.  $V$ ) par  $Y$  (resp.  $V_Y$ ) et  $\Omega_g^{(E)}$  (resp.  $W^E$ ) par  $Y_g^{(E)}$  (resp.  $W_Y$ ), pour montrer qu'il existe une constante  $C$  telle que:

$$\begin{aligned} \bullet \quad |a((v,\varphi),(v,\varphi))| &\geq C_1 \left( \int_Y (\nabla v)^2 dy + \int_{Y_g^{(E)}} (\nabla \varphi)^2 dy \right) \\ C_1 &= \omega_1 \text{Min} \left( \eta \frac{\lambda_g}{2\omega_1 \eta + \lambda_g} ; \frac{\lambda_g}{2} ; \min(\lambda_e, \lambda_s) \right) \end{aligned}$$

Puisque  $\varphi = 0$  sur  $\mathcal{A}_g$ , l'inégalité de Poincaré donne :

$$\int_{Y_g^{(E)}} (\nabla \varphi)^2 dx \geq C_2 \left( \int_{Y_g^{(E)}} (\nabla \varphi)^2 dy + \int_{Y_g^{(E)}} \varphi^2 dy \right)$$

ce qui n'est pas valable cette fois pour  $\int_Y (\nabla v)^2 dx$ .

d'où:

$$(2-31) \quad a((v,\varphi),(v,\varphi)) \geq C \left( \int_Y (\nabla v)^2 dy + \int_{Y_g^{(E)}} \varphi^2 dy + \int_{Y_g^{(E)}} (\nabla \varphi)^2 dy \right)$$

Ainsi  $a((v,\varphi),(v,\varphi)) = 0$  si et seulement si:

$$\varphi = 0 \text{ et } \frac{\partial v}{\partial y_1}(x,y) = 0 \text{ donc } v \text{ est constante (par rapport à la variable } y)$$

D'après l'alternative de Fredholm, le problème (2-26) admet donc une solution si et seulement si:

$$L((c,0)) = \int_Y c(F + \eta H X_g^{(E)})(y) dy = 0 \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

d'où la condition de compatibilité de la proposition: de plus  $\xi$  est déterminée d'une manière unique et  $\theta$  à une constante (par rapport à la variable  $y$ ) près.  $\square$

2-2-2 équations en  $(u_0, w_0)$ :

corollaire 2-1:

Le premier terme  $(u_0, w_0)$  du développement (2-5) vérifie:

$$(2-32) \quad u_0(x, y) = u(x) \quad \text{et} \quad w_0(x, y) = 0$$

démonstration:

D'après (2-8), (2-12) et (2-16) à (2-21) le couple  $(u_0, w_0)$  vérifie les équations suivantes:

$$(2-33) \quad \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\partial}{\partial y_i} \left( \mu \left( \frac{\partial u_0}{\partial y_i} \right) \right) = 0 & \text{dans chaque } Y_\alpha \\ \llbracket u_0 \rrbracket_{\alpha\beta} = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = g, \ell, s) \\ \llbracket \mu \frac{\partial u_0}{\partial y_i} n_i \rrbracket = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{\ell s} \text{ et } \mathcal{A}_{\ell s}^{(*)} \\ \llbracket \mu \frac{\partial u_0}{\partial y_i} n_i \rrbracket = -\eta \frac{\partial w_0}{\partial y_i} n_i & \text{sur } \mathcal{A}_{\ell g} \text{ et } \mathcal{A}_{\ell s}^{(\ell)} \\ u_0 \quad Y\text{-périodique} & \\ \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y_i \partial y_i} = 0 & \text{dans } Y_g^{(\ell)} \\ w_0 = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{\ell g} \\ \frac{\partial w_0}{\partial y_i} n_i = -\omega_i \frac{\partial u_0}{\partial y_i} n_i & \text{sur } \mathcal{A}_{\ell s}^{(\ell)} \\ w_0 \quad Y\text{-périodique} & \end{array} \right.$$

Ce problème est analogue à (2-25) avec :

$$\theta = u_0, \quad \xi = w_0, \quad F = H = 0 \quad \text{et} \quad \hat{\xi} = \hat{\theta} = 0 \quad \text{donc} \quad L((v, \varphi)) = 0.$$

Le problème variationnel associé s'écrit alors d'après la proposition 2-1:

$$a((u_0, w_0), (v, \varphi)) = 0 \quad \forall (v, \varphi) \in E_Y$$

En prenant  $(v, \varphi) = (u_0, w_0)$  on a d'après (2-31):

$$\frac{\partial u_0}{\partial y_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad \text{et} \quad w_0 = 0. \quad \square$$

2-2-3 équations en  $(u_1, w_1)$ :

Grâce au fait que  $u_0$  ne dépend que de  $x$  on va pouvoir exprimer  $(u_1, w_1)$  à l'aide de fonctions vérifiant des problèmes simples sur la cellule  $Y$ . On introduit la moyenne d'une fonction  $v$  sur la cellule de base  $Y$ :

$$\mathcal{M}_Y(v)(x) = \frac{1}{\text{mes}(Y)} \int_Y v(x, y) dy$$

**corollaire 2-2:**

$w_1$  est unique,  $u_1$  est déterminé à une constante près, et s'écrivent:

$$(2-34) \quad \begin{aligned} u_1(x, y) &= \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \chi^j(y) + \mathcal{M}_Y(u_1)(x) \\ w_1(x, y) &= \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \psi^j(y) \end{aligned}$$

où les  $(\chi^j, \psi^j)$  ( $j = 1..n$ ) sont les solutions uniques de :

$$(2-35) \quad (\chi^j, \psi^j) \in E_Y \quad \text{avec} \quad \int_Y \chi^j(y) dy = 0$$

$$a((\chi^j, \psi^j), (v, \varphi)) = - \int_Y \omega_{,\mu} \frac{\partial v}{\partial y_j} dy - \int_{Y^{(g)}} \eta \frac{\partial \varphi}{\partial y_j} dy \quad \forall (v, \varphi) \in E_Y$$

démonstration:

D'après les relations (2-9), (2-13) et (2-16) à (2-21) et compte-tenu que  $u_0$  ne dépend que de la variable  $x$ , les équations en  $(u_1, w_1)$  s'écrivent:

$$(2-36) \quad \left\{ \begin{aligned} - \frac{\partial}{\partial y_i} \left( \mu \left( \frac{\partial u_1}{\partial y_i} + \frac{u}{\partial x_i} \right) \right) &= 0 && \text{dans chaque } Y_\alpha \\ \llbracket u_1 \rrbracket_{\alpha\beta} &= 0 && \text{sur } \mathcal{A}_{\alpha\beta} \ (\alpha, \beta = g, l, s) \\ \llbracket \mu \left( \frac{\partial u_1}{\partial y_i} + \frac{u}{\partial x_i} \right) n_i \rrbracket &= 0 && \text{sur } \mathcal{A}_{\alpha g} \text{ et } \mathcal{A}_{\alpha s}^{(*)} \\ \llbracket \mu \left( \frac{\partial u_1}{\partial y_i} + \frac{u}{\partial x_i} \right) n_i \rrbracket &= - \eta \frac{\partial w_1}{\partial y_i} n_i && \text{sur } \mathcal{A}_{\alpha g} \text{ et } \mathcal{A}_{\alpha s}^{(*)} \\ \frac{\partial^2 w_1}{\partial y_i \partial y_i} &= 0 && \text{dans } Y_g^{(*)} \\ w_1 &= 0 && \text{sur } \mathcal{A}_{\alpha g} \\ \frac{\partial w_1}{\partial y_i} n_i &= - \omega_{,1} \left( \frac{\partial u_1}{\partial y_i} + \frac{u}{\partial x_i} \right) n_i && \text{sur } \mathcal{A}_{\alpha s}^{(*)} \end{aligned} \right.$$

$u_1$  et  $w_1$  sont  $Y$ -périodiques.

L'existence d'une solution  $(u_1, w_1)$  est assurée par la proposition 2-1 puisque c'est le même problème que (2-25) avec:

$$(\theta, \xi) = (u_1, w_1) \quad , \quad (\hat{\theta}, \hat{\xi}) = (u, 0) \quad , \quad F = H = 0$$

et la condition de compatibilité est satisfaite.

De même, les problèmes (2-35) admettent des solutions  $(\chi^j, \psi^j)$  (on est toujours dans le cadre de la proposition 2-1 ; de plus, puisqu'on impose aux  $\chi^j$  d'avoir une moyenne nulle, les solutions  $\chi^j$ , comme les  $\psi^j$ , sont uniques.

Le problème variationnel vérifié par  $(u_1, w_1)$  est:

$$(2-37) \quad a((u_1, w_1), (v, \varphi)) = - \int_Y \omega_{\mu} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial y_i} dy - \int_{Y_g^{(E)}} \eta \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} dy \quad \forall (v, \varphi) \in E_Y$$

$$= - \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \left( \int_Y \omega_{\mu} \frac{\partial v}{\partial y_i} dy + \int_{Y_g^{(E)}} \eta \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} dy \right)$$

L'interprétation du problème variationnel (2-35) vérifié par les  $(\chi^j, \psi^j)$  est la suivante:

$$(2-38) \quad \left\{ \begin{array}{ll} - \frac{\partial}{\partial y_i} \left( \mu \frac{\partial}{\partial y_i} (\chi^j + \gamma_j) \right) = 0 & \text{dans chaque } Y_{\alpha} \\ \llbracket \chi^j \rrbracket_{\alpha\beta} = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = g, l, s) \\ \llbracket \mu \frac{\partial}{\partial y_i} (\chi^j + \gamma_j) n_i \rrbracket = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{\mathcal{E}} \text{ et } \mathcal{A}_{\mathcal{E}}^{(*)} \\ \llbracket \mu \frac{\partial}{\partial y_i} (\chi^j + \gamma_j) n_i \rrbracket = - \eta \frac{\partial \psi^j}{\partial y_i} n_i & \text{sur } \mathcal{A}_{\mathcal{E}} \text{ et } \mathcal{A}_{\mathcal{E}}^{(E)} \\ \frac{\partial^2 \psi^j}{\partial y_i \partial y_i} = 0 & \text{dans } Y_g^{(E)} \\ \psi^j = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{\mathcal{E}} \\ \frac{\partial \psi^j}{\partial y_i} n_i = - \omega_1 \frac{\partial}{\partial y_i} (\chi^j + \gamma_j) n_i & \text{sur } \mathcal{A}_{\mathcal{E}}^{(E)} \\ \chi^j \text{ et } \psi^j \text{ sont } Y\text{-périodiques et } \int_Y \chi^j(y) dy = 0 \end{array} \right.$$



En comparant (2-37), avec (2-35), après multiplication par  $\frac{\partial u}{\partial x_j}$  et sommation sur l'indice j, ou (2-36) avec (2-38), il est clair que  $(u_1, w_1)$  vérifie le même problème que  $\frac{\partial u}{\partial x_j} (\chi^j, \psi^j)$ , la seule différence est que  $\chi^j$  est de moyenne nulle, d'où (2-34).

2-2-4 équations en  $(u_2, w_2)$ :

**corollaire 2-3:**

$w_2$  est déterminé d'une façon unique,  $u_2$  à une constante additive près, si et seulement si:

$$(2-39) \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \left( \int_Y \mu \left( \frac{\partial \chi^j}{\partial y_i} (y) + \delta_{ij} \right) dy + \eta \int_{Y_g^{(E)}} \frac{\partial \psi^j}{\partial y_i} (y) dy \right) \frac{\partial u}{\partial x_j} (x) \right\} = \int_Y (f + \eta h \chi_g^{(E)})(x, y) dy$$

démonstration:

On pose pour simplifier l'écriture:

$$(2-40) \quad P = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \mu \left( \frac{\partial u_1}{\partial y_i} + \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \right), \quad Q = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial w_1}{\partial x_i} \right)$$

D'après les relations (2-10), (2-13), (2-15) à (2-20) le couple  $(u_2, w_2)$  vérifie:

$$(2-41) \quad \left. \begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial y_i} \left( \mu \left( \frac{\partial u_2}{\partial y_i} + \frac{u_1}{\partial x_i} \right) \right) &= \left( 1 + \frac{\eta \omega_1}{\lambda_g} \chi_g^{(E)} \right) f_\alpha + P && \text{dans chaque } Y_\alpha \\ \llbracket u_2 \rrbracket_{\alpha\beta} &= 0 && \text{sur } \mathcal{A}_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = g, l, s) \\ \llbracket \mu \left( \frac{\partial u_2}{\partial y_i} + \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \right) n_i \rrbracket &= 0 && \text{sur } \mathcal{A}_{l_s} \text{ et } \mathcal{A}_g^{(*)} \\ \llbracket \mu \left( \frac{\partial u_2}{\partial y_i} + \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \right) n_i \rrbracket &= -\eta \left( \frac{\partial w_2}{\partial y_i} + \frac{\partial w_1}{\partial x_i} \right) n_i && \text{sur } \mathcal{A}_g \text{ et } \mathcal{A}_g^{(E)} \\ -\frac{\partial}{\partial y_i} \left( \frac{\partial w_2}{\partial y_i} + \frac{w_1}{\partial x_i} \right) &= h - \frac{\omega_1}{\lambda_g} f + Q && \text{dans } Y_g^{(E)} \\ w_2 &= 0 && \text{sur } \mathcal{A}_g \\ \left( \frac{\partial w_2}{\partial y_i} + \frac{w_1}{\partial x_i} \right) n_i &= -\omega_1 \left( \frac{\partial u_2}{\partial y_i} + \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \right) n_i && \text{sur } \mathcal{A}_g^{(E)} \end{aligned} \right\}$$

$u_2$  et  $w_2$  sont  $Y$  - périodiques

On est dans le cadre de la proposition 2-1 avec :

$$(\theta, \xi) = (u_2, w_2), \quad (\hat{\theta}, \hat{\xi}) = (u_1, w_1), \quad F = \left(1 + \frac{\eta \omega_1}{\lambda_g} X_g^{(F)}\right) f_\alpha + P \quad \text{et} \quad H = h - \frac{\omega_1}{\lambda_g} f + Q.$$

La condition nécessaire et suffisante pour l'existence de  $(u_2, w_2)$  est alors:

$$\int_Y \left\{ \left(1 + \frac{\eta \omega_1}{\lambda_g} X_g^{(F)}\right) f_\alpha + P + \eta X_g^{(F)} \left(h - \frac{\omega_1}{\lambda_g} f + Q\right) \right\} (x, y) dy = 0$$

c'est à dire:

$$(2-42) \quad \int_Y (f + P + \eta(h+Q)X_g^{(F)})(x, y) dy = 0$$

Mais d'après les notations (2-40) et l'expression (2-34) de  $(u_1, w_1)$ , ceci s'écrit:

$$\begin{aligned} \int_Y - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \mu \left( \frac{\partial \lambda^j}{\partial y_i} + \delta_{ij} \right) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right] dy + \eta \int_{Y_g^{(F)}} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \psi^j}{\partial y_i} \right] dy = \\ = \int_Y (f + \eta h X_g^{(F)})(x, y) dy \end{aligned}$$

puisque:

$$\begin{aligned} P &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \lambda^j}{\partial y_i} + \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \mu \left( \frac{\partial \lambda^j}{\partial y_i} + \delta_{ij} \right) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right] \\ Q &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \psi^j}{\partial y_i} \right] \end{aligned}$$

En permutant le signe dérivation par rapport aux  $x_i$  et le signe intégration sur  $Y$  et  $Y_g^{(F)}$  et puisque  $u$  ne dépend que de  $x$  on a la relation (2-39) du corollaire 2-3.  $\square$

### 2-3) Comportement macroscopique et conductivités homogénéisées:

La relation (2-39) est analogue à une équation de la chaleur en régime stationnaire écrite dans un matériau homogène occupant le domaine  $\Omega$  et de conductivités thermiques  $K_{ij}$  données par :

$$(2-43) \quad K_{ij} = \frac{1}{|Y|} \left\{ \int_Y \mu \left( \frac{\partial \chi^j}{\partial y_i} (y) + \delta_{ij} \right) dy + \eta \int_{Y_g^{(E)}} \frac{\partial \psi^j}{\partial y_i} (y) dy \right\}$$

où les  $(\chi^j, \psi^j)$  sont les solutions uniques de (2-35).

La température " homogénéisée " étant  $u$  et la source de chaleur est donnée par:

$$(2-44) \quad r(x) = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left( f + \eta h \chi_g^{(E)} \right) (x, y) dy = \mathcal{M}_Y \left( f + \eta h \chi_g^{(E)} \right)$$

La condition naturelle que doit satisfaire  $u$  sur le bord extérieur de  $\Omega$  est la même que celle vérifiée par  $T^e$ :

$$u = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma = \partial\Omega$$

Grâce à des propriétés des  $K_{ij}$  qu'on établira, on va démontrer que le problème homogénéisé (2-39) vérifié par  $u$ , auquel on ajoute la condition  $u = 0$  sur le bord, admet une solution unique.

**Téorème 2-1:**

Sous les hypothèses (2-2) on a :

i) Les conductivités apparentes  $K_{ij}$ , donnée par (2-43), s'écrivent sous la forme symétrique en  $i$  et  $j$  :

$$K_{ij} = \frac{1}{|Y|} \left( \int_Y \lambda \frac{\partial}{\partial y_m} (\chi^j + \gamma_j) \frac{\partial}{\partial y_m} (\chi^i + \gamma_i) dy \right) + \\ + \frac{1}{|Y|} \left\{ \int_{\frac{Y(\mathbb{E})}{\mathbb{E}}} \omega_1 \eta \frac{\partial}{\partial y_m} \left( \chi^j + \gamma_j + \frac{\psi^j}{\omega_1} \right) \frac{\partial}{\partial y_m} \left( \chi^i + \gamma_i + \frac{\psi^i}{\omega_1} \right) dy \right\}$$

de plus :  $\exists \gamma > 0 / K_{ij} x_i x_j \geq \gamma |x|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ .

ii) Le problème homogénéisé :

$$(2-45) \quad \begin{cases} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( K_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} (x) \right) = r(x) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

admet une solution unique dans  $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ .

Démonstration:

i) On va d'abord réécrire les  $K_{ij}$  sous une autre forme, on utilisant le problème variationnel (2-35) vérifié par les  $(\chi^j, \psi^j)$ .

Les conductivités  $K_{ij}$  s'écrivent en utilisant la définition de  $\mu$  dans leur expression (2-43):

$$|Y| K_{ij} = \int_Y \lambda \frac{\partial}{\partial y_i} (\chi^j + \gamma_j) dy + \int_{\frac{Y(\mathbb{E})}{\mathbb{E}}} \omega_1 \eta \frac{\partial}{\partial y_i} \left( \chi^j + \gamma_j + \frac{\psi^j}{\omega_1} \right) dy$$

(rappel:  $\mu(y) = \lambda(y) + \eta \omega_1 \chi_{\mathbb{E}}^{\mathbb{E}}(y)$ )

D'après l'expression (2-23) de la forme bilinéaire  $a(\dots)$  et la définition (2-2) de  $\mu$ , on peut mettre (2-35) sous la forme:

$$(2-46) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\chi^j, \psi^j) \in E_Y, \quad \int_Y \chi^j(y) dy = 0 \quad \text{et} \quad \forall (v, \varphi) \in E_Y \\ \int_Y \lambda \frac{\partial}{\partial y_m} (\chi^j + y_j) \frac{\partial v}{\partial y_m} dy + \int_{Y^{(E)}} \omega_i \eta \frac{\partial}{\partial y_m} \left( \chi^j + y_j + \frac{\psi^j}{\omega_j} \right) \frac{\partial}{\partial y_m} (v + \varphi) dy = 0 \end{array} \right.$$

On prend dans (2-46)  $v$  égale à  $\chi^i$  et  $\varphi$  égale à  $\frac{\psi^i}{\omega_i}$  et on somme le premier membre de la relation obtenue (qui est nul) avec le second de la précédente, on obtient:

$$(2-47) \quad K_{ij} = \frac{1}{|Y|} \left( \int_Y \lambda \frac{\partial}{\partial y_m} (\chi^j + y_j) \frac{\partial}{\partial y_m} (\chi^i + y_i) dy \right) + \\ + \frac{1}{|Y|} \left\{ \int_{Y^{(E)}} \omega_i \eta \frac{\partial}{\partial y_m} \left( \chi^j + y_j + \frac{\psi^j}{\omega_j} \right) \frac{\partial}{\partial y_m} \left( \chi^i + y_i + \frac{\psi^i}{\omega_i} \right) dy \right\}$$

Cette expression montre que les  $K_{ij}$  sont bien symétriques, de plus, elle permet aussi d'affirmer la coercivité, en effet:

Soit  $x = (x_i)_{i=1}^n$  un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ , l'expression précédente montre que:

$$|Y| K_{ij} x_i x_j = \int_Y \lambda (\nabla \chi)^2 dy + \int_{Y^{(E)}} \omega_i \eta (\nabla \psi)^2 dy$$

$$\text{où} \quad \chi = x_j (\chi^j + y_j) \quad \text{et} \quad \psi = x_j \left( \chi^j + y_j + \frac{\psi^j}{\omega_j} \right)$$

Donc, puisque les  $\lambda_\alpha$  et  $\omega_i \eta$  sont positives,

$$K_{ij} x_i x_j \geq 0$$

Supposons qu'il existe  $x$  de  $\mathbb{R}^n$  tel que  $K_{ij} x_i x_j = 0$ . Puisque les constantes  $\lambda$ ,  $\omega_1$  et  $\eta$  sont positives, l'écriture précédente implique que  $\nabla \chi$  et  $\nabla \psi$  sont nuls dans  $Y$  et dans  $Y_g^{(E)}$  respectivement, c'est à dire:

$$\begin{aligned} \chi &\equiv \text{cte} && \text{dans } Y \\ \psi &\equiv \text{cte} && \text{dans chaque composante connexe de } Y_g^{(E)} \end{aligned}$$

mais, puisque  $\chi^j$  et  $\psi^j$  (donc aussi  $x_j \chi^j$  et  $x_j \psi^j$ ) sont  $Y$ -périodiques, ceci implique que :

$$\begin{aligned} x_j y_j &= \text{cte} - x_j \chi^j && \text{est } Y\text{-périodique (en la variable } y \text{ !)} \\ x_j y_j &= \text{cte} - x_j \psi^j && \text{est } Y\text{-périodique} \end{aligned}$$

ce qui est impossible sauf si  $x_j = 0$  pour tout indice  $j = 1 \dots n$ , d'où:

$$K_{ij} x_i x_j > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^{n*}$$

Il est clair que l'application  $x \longmapsto K_{ij} x_i x_j$  est continue, elle atteint donc sa borne inférieure sur tout compact de  $\mathbb{R}^n$ , et en particulier sur la sphère unité  $\{x \in \mathbb{R}^n ; |x| = 1\}$ . D'après l'inégalité précédente, cette application est une forme quadratique sur  $\mathbb{R}^n$ , sa borne inférieure est donc nécessairement strictement positive :

$$\begin{aligned} \exists x^* / |x^*| = 1 \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}^{n*} \\ K_{ij} \frac{x_i}{|x|} \frac{x_j}{|x|} \geq \inf_{|x|=1} (K_{ij} x_i x_j) = K_{ij} x_i^* x_j^* = \gamma > 0 \end{aligned}$$

d'où la coercivité des  $K_{ij}$  :

$$(2-48) \quad \exists \gamma > 0 \quad \text{telle que} \quad K_{ij} x_i x_j \geq \gamma x_i x_i \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

ii) Le problème homogénéisé (2-45) est un problème de Dirichlet homogène; signalons que d'après les hypothèses faites sur les fonctions  $f$  et  $h$ , la fonction  $r$  est de carré intégrable sur  $\Omega$ . Le problème variationnel associé à (2-45) est alors:

$$(2-49) \quad u \in H_0^1(\Omega) \quad \int_{\Omega} K_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega} r v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

D'après la coercivité des  $K_{ij}$  (2-48), le lemme de Lax-Milgram permet d'affirmer l'existence et l'unicité de la solution  $u$ . De plus  $u$  est dans  $H^2(\Omega)$  d'après des résultats de régularité classiques des solutions du problème de Dirichlet [6] [25].  $\square$

**3/ METHODE DE L'ENERGIE ET CORRECTEURS:**

L'objectif de cette partie est la justification des résultats obtenus dans le paragraphe précédent car les calculs n'ont été jusqu'à maintenant que formels. Ceci se fera en trois étapes:

1- établir des estimations à priori qui, grâce à des résultats de compacité, vont nous permettre l'extraction d'une sous-suite de  $(T^\varepsilon, \omega^\varepsilon)$  convergeant vers un  $(T^*, \omega^*)$  dans un sens qu'on précisera.

2- identifier la limite  $(T^*, \omega^*)$  par la méthode variationnelle de Tartar [5][35], plus précisément, démontrer que la limite  $T^*$  est identique à la température homogénéisée  $u$  obtenue par la méthode des échelles multiples (solution du problème (2-45)) et que la limite de  $\omega^*$  est nulle.

3- améliorer la convergence en corrigeant la suite  $(T^\varepsilon, \omega^\varepsilon)$  par des correcteurs (raisonables) qu'on calculera.

Rappelons d'abord les espaces fonctionnels de travail :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{V} = H_0^1(\Omega) \\ \mathcal{W}^\varepsilon = \left\{ \varphi \in H^1(\Omega_\varepsilon^{(D)}); \varphi = 0 \text{ sur } \mathcal{A}_\varepsilon^\varepsilon \right\} \\ E^\varepsilon = \mathcal{V} \times \mathcal{W}^\varepsilon \\ \mathcal{V}_Y = \left\{ v \in H^1(Y); v \text{ Y-périodique} \right\} \\ \mathcal{W}_Y = \left\{ \varphi \in H^1(Y_\varepsilon^{(D)}); \varphi = 0 \text{ sur } \mathcal{A}_\varepsilon^Y; \text{ Y-périodique} \right\} \\ E_Y = \mathcal{V}_Y \times \mathcal{W}_Y \end{array} \right.$$



**3-1) Estimation a priori:**

On commence par démontrer le lemme suivant dont le but est d'évaluer la constante  $C_\epsilon$  de l'inégalité de Poincaré dans :

$$\| \psi \|_{L^2(\Omega_g^{(k)\epsilon})} \leq C_\epsilon \| \nabla \psi \|_{L^2(\Omega_g^{(k)\epsilon})} \quad \text{pour } \psi \in W^\epsilon$$

Cette inégalité a lieu puisque  $\psi$  ( $\in W^\epsilon$ ) a une trace nulle sur l'interface gaz-liquide  $\mathcal{A}_g^\epsilon$ .

**Lemme 3-1:**

*Pour toute fonction  $\psi$  de  $W^\epsilon$  on a l'inégalité suivante :*

$$(3-1) \quad \| \psi \|_{L^2(\Omega_g^{(k)\epsilon})} \leq C \epsilon \| \nabla \psi \|_{L^2(\Omega_g^{(k)\epsilon})}$$

*où  $C$  est une constante indépendante de  $\epsilon$ .*

démonstration:

On définit pour toute fonction  $\psi \in W^\epsilon$  la fonction  $\hat{\psi}_k^\epsilon$  définie sur  $Y_g^{(k)}$  par :

$$(3-2) \quad \hat{\psi}_k^\epsilon(y) = \psi(\epsilon y + o_k^\epsilon) \quad \left( y \in Y_g^{(k)} \iff x = \epsilon y + o_k^\epsilon \in \Omega_g^{(k)\epsilon} \cap C_k^\epsilon \right)$$

où  $o_k^\epsilon$  désigne l'origine de la  $k^{\text{ème}}$  cellule  $C_k^\epsilon$  translatée de  $\epsilon Y$ . Puisque  $\psi \in W^\epsilon$  il est clair que:

$$(3-3) \quad \hat{\psi}_k^\epsilon \in \left\{ \psi \in H^1(Y_g^{(k)}); \psi = 0 \text{ sur } \mathcal{A}_g^\epsilon \right\}.$$

L'inégalité de Poincaré donne alors :

$$\int_{Y_g^{(k)}} (\hat{\psi}_k^\epsilon)^2 dy \leq C \int_{Y_g^{(k)}} (\nabla \hat{\psi}_k^\epsilon)^2 dy$$

où la constante  $C$  ne dépend que de la géométrie de  $Y_g^{(k)}$ .

Si on fait dans cette inégalité le changement de variable:  $x = \varepsilon y + o_k^\varepsilon$ , elle devient:

$$\int_{\Omega_g^{(E_k^\varepsilon)} \cap C_k^\varepsilon} \varepsilon^{-n} (\varphi)^2 dx \leq C \int_{\Omega_g^{(E_k^\varepsilon)} \cap C_k^\varepsilon} \varepsilon^{2-n} (\nabla \varphi)^2 dx \quad (n \text{ est la dimension; } (= 3))$$

La somme de ces inégalités de  $k = 1$  au nombre  $N^\varepsilon$  de cellules  $C_k^\varepsilon$  recouvrant  $\Omega$ , donne l'inégalité cherchée:

$$\|\varphi\|_{L^2(\Omega_g^{(E_k^\varepsilon)})}^2 = \sum_{k=1}^{k=N^\varepsilon} \int_{\Omega_g^{(E_k^\varepsilon)} \cap C_k^\varepsilon} \varphi^2 dx \leq C \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{k=N^\varepsilon} \int_{\Omega_g^{(E_k^\varepsilon)} \cap C_k^\varepsilon} (\nabla \varphi)^2 dx = C \varepsilon^2 \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega_g^{(E_k^\varepsilon)})}^2 \quad \square$$

A l'aide du lemme précédent on va pouvoir démontrer les estimations suivantes :

### Proposition 3-1:

*La solution  $(T^\varepsilon, \omega^\varepsilon)$  du problème (2-4) vérifie les inégalités :*

$$(3-4) \quad \text{i) } \|\omega^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_g^{(E_k^\varepsilon)})} \leq C \varepsilon \quad \text{et} \quad \|\nabla \omega^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_g^{(E_k^\varepsilon)})} \leq C$$

$$\text{ii) } \|T^\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C$$

*où C désigne une constante positive indépendante de  $\varepsilon$ .*

### Démonstration:

Le couple  $(T^\varepsilon, \omega^\varepsilon)$  est solution du problème variationnel (1-13) :

$$(3-5) \quad \left| \begin{array}{l} (T^\varepsilon, \omega^\varepsilon) \in E^\varepsilon \\ a^\varepsilon((T^\varepsilon, \omega^\varepsilon), (\mathbf{v}, \varphi)) = L^\varepsilon((\mathbf{v}, \varphi)) \quad \forall (\mathbf{v}, \varphi) \in E^\varepsilon \end{array} \right.$$

Mais on a déjà démontré dans le premier paragraphe (1-18) et (1-21) que :

$$(3-6) \quad L^\varepsilon((T^\varepsilon, \omega^\varepsilon)) \leq M \left\| (T^\varepsilon, \omega^\varepsilon) \right\|_{E^\varepsilon}$$

$$a^\varepsilon((T^\varepsilon, \omega^\varepsilon), (T^\varepsilon, \omega^\varepsilon)) \geq c_1 \left( \int_{\Omega} (\nabla T^\varepsilon)^2 dx + \int_{\Omega_g^{(E^\varepsilon)}} (\nabla \omega^\varepsilon)^2 dx \right)$$

où  $M$  et  $c_1$  sont des constantes strictement positives et indépendantes de  $\varepsilon$ .

La fonction  $T^\varepsilon$  est de trace nulle sur le bord de  $\Omega$ , on peut donc appliquer l'inégalité de Poincaré et la constante qui y intervient ne dépend que de  $\Omega$ . La fonction  $\omega^\varepsilon$  est de trace nulle l'interface gaz-liquide et on peut utiliser le lemme 3-1 avec  $\psi = \omega^\varepsilon$ . De la relation (3-6) on peut déduire alors qu'il existe une constante  $C_2$ , indépendante de  $\varepsilon$ , telle que:

$$a^\varepsilon((T^\varepsilon, \omega^\varepsilon), (T^\varepsilon, \omega^\varepsilon)) \geq C_2 \left\| (T^\varepsilon, \omega^\varepsilon) \right\|_{E^\varepsilon}^2$$

En prenant  $(v, \psi) = (T^\varepsilon, \omega^\varepsilon)$  comme fonction-test dans (3-5), compte-tenu de (3-6), on en déduit l'existence d'une constante  $C$  telle que :

$$(3-7) \quad \left\| (T^\varepsilon, \omega^\varepsilon) \right\|_{E^\varepsilon} \leq C \quad (\text{constante indépendante de } \varepsilon)$$

Cette estimation avec le lemme 3-1 achève donc la démonstration de la proposition puisque

- $\left\| T^\varepsilon \right\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \left\| (T^\varepsilon, \omega^\varepsilon) \right\|_{E^\varepsilon} \leq C$
- $\left\| \nabla \omega^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega_g^{(E^\varepsilon)})} \leq \left\| (T^\varepsilon, \omega^\varepsilon) \right\|_{E^\varepsilon} \leq C$
- $\left\| \omega^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega_g^{(E^\varepsilon)})} \leq C \varepsilon \left\| \nabla \omega^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega_g^{(E^\varepsilon)})} \leq C \varepsilon$

Ceci achève donc la démonstration de la proposition.  $\square$

Dans la suite on désignera par  $\tilde{\varphi}^\varepsilon$  le prolongement par zéro de toute fonction  $\varphi^\varepsilon$  définie dans un sous ensemble  $\mathcal{O}^\varepsilon$  de  $\Omega$  à  $\Omega$  tout entier.

**Proposition 3-2:**

On peut extraire une sous-suite de  $(T^\varepsilon, \omega^\varepsilon)$  encore notée  $(T^\varepsilon, \omega^\varepsilon)$  telle que :

$$\begin{aligned} \text{i) } \quad T^\varepsilon &\longrightarrow T^* && \text{dans } H^1(\Omega) \text{ faible et } L^2(\Omega) \text{ fort} \\ \mu^\varepsilon \frac{\partial T^\varepsilon}{\partial x_i} &\longrightarrow Q_i^* && \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible} \\ \tilde{\omega}^\varepsilon &\longrightarrow 0 && \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible} \\ \left( \frac{\partial \tilde{\omega}^\varepsilon}{\partial x_i} \right) &\longrightarrow P_i^* && \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible} \end{aligned}$$

ii) les limites  $Q_i^*$  et  $P_i^*$  sont liées par la relation:

$$(3-8) \quad \int_{\Omega} (Q_i^* + \eta P_i^*) \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} r v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

$$\text{où} \quad r(x) = \frac{1}{|Y|} \int_Y (f + \eta h \chi_{\mathcal{O}^\varepsilon}^\varepsilon)(x, y) dy = \mathcal{M}_Y(f + \eta h \chi_{\mathcal{O}^\varepsilon}^\varepsilon)$$

Démonstration:

i) Rappelons d'abord que  $\mu^\varepsilon$  est bornée indépendamment de  $\varepsilon$  par  $\text{Max}(\omega_1 \eta + \lambda_g, \lambda_e, \lambda_g)$ . Les convergences faibles sont une conséquence directe de la proposition 3-1 et du résultat classique de compacité dans un espace de Banach réflexif [6] (ici  $H^1(\Omega)$  et  $L^2(\Omega)$ ). La convergence forte de la sous-suite  $T^\varepsilon$  dans  $L^2(\Omega)$  est une conséquence du théorème de Rellich-Kondrachov [6] (ici : compacité de l'injection de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$  pour  $\Omega$  borné).

ii) Cette partie se démontre par passage à la limite dans le problème variationnel (3-5) vérifié par  $(T^\varepsilon, \omega^\varepsilon)$ . Posons :

$$Q_i^\varepsilon = \mu^\varepsilon \frac{\partial T^\varepsilon}{\partial x_i} \quad ; \quad P_i^\varepsilon = \frac{\partial \omega^\varepsilon}{\partial x_i}$$

Avec ces notations le problème (3-5) s'écrit:

$$(3-9) \quad \int_{\Omega} \omega_1 Q_1^\varepsilon \frac{\partial v}{\partial x_1} dx + \int_{\Omega} \omega_1 \eta \left( Q_1^\varepsilon \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x_1} + \tilde{P}_1^\varepsilon \frac{\partial v}{\partial x_1} \right) dx + \int_{\Omega} \eta \tilde{P}_1^\varepsilon \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x_1} dx =$$

$$= \int_{\Omega} \omega_1 (f^\varepsilon + \eta \tilde{h}^\varepsilon) v dx + \int_{\Omega} \eta \tilde{h}^\varepsilon \varphi dx$$

pour tout  $(v, \varphi)$  de  $E^\varepsilon$ . En prenant la fonction  $\varphi$  identiquement nulle, il vient:

$$(3-10) \quad \int_{\Omega} (Q_1^\varepsilon + \eta \tilde{P}_1^\varepsilon) \frac{\partial v}{\partial x_1} dx = \int_{\Omega} (f^\varepsilon + \eta \tilde{h}^\varepsilon) v dx \quad \forall v \in \mathcal{V} = H_0^1(\Omega)$$

En utilisant i) il est alors clair que :

$$\int_{\Omega} (Q_1^\varepsilon + \eta \tilde{P}_1^\varepsilon) \frac{\partial v}{\partial x_1} dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} (Q_1^* + \eta P_1^*) \frac{\partial v}{\partial x_1} dx$$

Pour le second membre, qui fait intervenir les fonctions  $f^\varepsilon$  et  $h^\varepsilon$  définies par:

$$f^\varepsilon(x) = f(x, \frac{x}{\varepsilon}) \quad \text{et} \quad \tilde{h}^\varepsilon(x) = h(x, \frac{x}{\varepsilon}) \chi_{\frac{(\mathbb{R}^n)}{\mathbf{g}}}(x, \frac{x}{\varepsilon})$$

on sait que:

$$(3-11) \quad \left\{ \begin{array}{l} f^\varepsilon \longrightarrow \mathcal{M}_Y(f) \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible} \\ \tilde{h}^\varepsilon \longrightarrow \mathcal{M}_Y(h \chi_{\frac{(\mathbb{R}^n)}{\mathbf{g}}}) \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible} \end{array} \right.$$

puisque les fonctions  $h$  et  $f$  sont  $Y$ -périodiques. ( voir [33] ). Donc:

$$(3-12) \quad \int_{\Omega} (f^\varepsilon + \eta \tilde{h}^\varepsilon) v dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \mathcal{M}_Y(f + \eta h \chi_{\frac{(\mathbb{R}^n)}{\mathbf{g}}}) v dx$$

Le passage à la limite dans la relation (3-10) achève donc la démonstration de la proposition.  $\square$

On sait maintenant que  $T^\varepsilon$  converge (quitte à extraire une sous-suite) vers une fonction  $T^*$ , mais peut-on déterminer cette limite?, c'est l'objectif de la partie suivante:

### 3-2) Identification des limites:

On va démontrer que la limite de  $T^\varepsilon$  est exactement la température homogénéisée  $u$ , solution unique de l'équation (2-45) établie par la méthode des échelles multiples.

#### Théorème 3-1:

*La température  $T^\varepsilon$  converge dans  $H_0^1(\Omega)$  faible, lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro, vers l'unique solution  $u$  du problème homogénéisé (2-45) obtenu par la méthode des échelles multiples:*

$$(3-13) \quad T^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u \quad \text{dans } H_0^1(\Omega) \text{ faible}$$

$$\begin{cases} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( K_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = r(x) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

#### Démonstration:

Comparons l'équation (3-8) vérifiée par les limites  $Q_i^*$  et  $P_i^*$  dans la proposition 3-2 et la formulation faible du problème homogénéisé (2-45) vérifié par  $u$ :

$$(3-14) \quad \int_{\Omega} K_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega} r v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

D'après l'unicité de la solution de (2-45) (ou de (3-14)), pour conclure que la limite  $T^*$  obtenue par la méthode de l'énergie est égale à la limite  $u$  donnée formellement par la méthode des échelles multiples, il nous suffit donc de démontrer que :

$$(3-15) \quad Q_i^* + \eta P_i^* = K_{ij} \frac{\partial T^*}{\partial x_j}$$

On va démontrer la relation (3-15) en utilisant la méthode variationnelle de Tartar [5] [35]. Elle consiste à prendre, dans le problème variationnel vérifié par  $(T^\varepsilon, \omega^\varepsilon)$ , des fonctions-tests particulières construites grâce aux  $(X^j, \psi^j)$  données par (2-35) ou (2-38). Posons:

$$(3-16) \quad \begin{cases} X^\varepsilon(x) = x_j + \varepsilon X^j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \\ \psi^\varepsilon(x) = \varepsilon \psi^j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \end{cases}$$

Le changement de variable  $y = \frac{x}{\varepsilon}$  dans les équations (2-38) vérifiées par les  $(X^j, \psi^j)$ , montre que les nouvelles fonctions  $(X^\varepsilon, \psi^\varepsilon)$  vérifient les équations suivantes :

$$(3-17) \quad \left. \begin{array}{ll} -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \mu^\varepsilon \frac{\partial X^\varepsilon}{\partial x_i} \right) = 0 & \text{dans chaque } \Omega_\alpha^\varepsilon \\ \llbracket X^\varepsilon \rrbracket_{\alpha\beta} = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{\alpha\beta}^\varepsilon \quad (\alpha, \beta = g, l, s) \\ \llbracket \mu^\varepsilon \frac{\partial X^\varepsilon}{\partial x_i} n_i \rrbracket = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{\alpha\beta}^\varepsilon \text{ et } \mathcal{A}_{\mathcal{E}}^{(*)\varepsilon} \\ \llbracket \mu^\varepsilon \frac{\partial X^\varepsilon}{\partial x_i} n_i \rrbracket = -\eta \frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial x_i} n_i & \text{sur } \mathcal{A}_{\mathcal{E}}^\varepsilon \text{ et } \mathcal{A}_{\mathcal{E}}^{(\mathcal{E})\varepsilon} \\ -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial x_i} \right) = 0 & \text{dans } \Omega_{\mathcal{E}}^{(\mathcal{E})\varepsilon} \\ \psi^\varepsilon = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{\mathcal{E}}^\varepsilon \\ \frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial x_i} n_i = -\omega_1 \frac{\partial X^\varepsilon}{\partial x_i} n_i & \text{sur } \mathcal{A}_{\mathcal{E}}^{(\mathcal{E})\varepsilon} \end{array} \right\}$$

Comme ce qui a été fait pour obtenir le problème variationnel (1-13) vérifié par  $(T^\varepsilon, \omega^\varepsilon)$ , on obtient par des intégrations par parties :

$$(3-18) \quad \int_{\Omega} \mu^\varepsilon \nabla X^\varepsilon \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega_{\mathcal{E}}^{(\mathcal{E})\varepsilon}} \eta \nabla \psi^\varepsilon \cdot \nabla v \, dx = 0 \quad \forall v \in \mathcal{V}$$

$$(3-19) \quad \int_{\Omega(\mathbb{R}^s)} \nabla \psi^\varepsilon \cdot \nabla \psi \, dx + \omega_1 \int_{\Omega(\mathbb{R}^s)} \nabla \chi^\varepsilon \cdot \nabla \psi \, dx = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{W}^\varepsilon$$

Il est facile de vérifier - directement de la définition (1-16) en tenant compte de la périodicité des  $(\chi^j, \psi^j)$  - que l'on a :

$$(3-20) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \chi^\varepsilon & \longrightarrow x_j \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ fort} \\ \mu^\varepsilon \frac{\partial \chi^\varepsilon}{\partial x_i} & \longrightarrow \mathcal{M}_Y \left( \mu \frac{\partial}{\partial y_i} (y_j + \chi^j) \right) \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible} \\ \tilde{\psi}^\varepsilon & \longrightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ fort} \\ \frac{\partial \tilde{\psi}^\varepsilon}{\partial x_i} & \longrightarrow \mathcal{M}_Y \left( \frac{\partial \tilde{\psi}^j}{\partial y_i} \right) \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible} \end{array} \right.$$

où l'on désigne par  $(\tilde{\cdot})$  l'opérateur de prolongement par zéro.

Soit  $\theta \in \mathcal{D}(\Omega)$ , on choisit d'abord comme fonctions-test  $v$  égale à  $\theta \Gamma^\varepsilon$  dans (3-18) et  $(v, \varphi)$  égale à  $(\theta \chi^\varepsilon, 0)$  dans (3-9), on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left( Q_i^\varepsilon \frac{\partial \chi^\varepsilon}{\partial x_i} \theta + Q_i^\varepsilon \chi^\varepsilon \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) dx + \int_{\Omega} \eta \left( \tilde{P}_i^\varepsilon \frac{\partial \chi^\varepsilon}{\partial x_i} \theta + \tilde{P}_i^\varepsilon \chi^\varepsilon \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) dx = \\ = \int_{\Omega} \left( f^\varepsilon + \eta h^\varepsilon \chi^\varepsilon \right) \chi^\varepsilon \theta \, dx \end{aligned}$$

et :

$$\int_{\Omega} \left( Q_i^\varepsilon \frac{\partial \chi^\varepsilon}{\partial x_i} \theta + \mu^\varepsilon \Gamma^\varepsilon \chi^\varepsilon \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) dx + \int_{\Omega(\mathbb{R}^s)} \eta \frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \Gamma^\varepsilon}{\partial x_i} \theta + \Gamma^\varepsilon \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) dx = 0$$



Si on soustrait la deuxième relation de la première il vient:

$$(3-21) \quad \int_{\Omega} \left( Q_i^\varepsilon \chi^\varepsilon - \mu^\varepsilon \Gamma^\varepsilon \frac{\partial \chi^\varepsilon}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega^{(\mathcal{E})^\varepsilon}} \eta \left( \tilde{P}_i^\varepsilon \chi^\varepsilon - \Gamma^\varepsilon \frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} dx +$$

$$+ \int_{\Omega^{(\mathcal{E})^\varepsilon}} \eta \left( \tilde{P}_i^\varepsilon \frac{\partial \chi^\varepsilon}{\partial x_i} - \frac{\partial \Gamma^\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial x_i} \right) \theta dx = \int_{\Omega} \left( r^\varepsilon + \eta h^\varepsilon \chi^\varepsilon \right) \chi^\varepsilon \theta dx$$

On prend maintenant comme fonctions-test ( $v, \varphi$ ) égale  $(0, \theta \psi^\varepsilon)$  dans (3-9) et  $\varphi$  égale à  $\theta \omega^\varepsilon$  dans (3-19), on obtient :

$$\int_{\Omega^{(\mathcal{E})^\varepsilon}} \left( \tilde{P}_i^\varepsilon \frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial x_i} \theta + \psi^\varepsilon \tilde{P}_i^\varepsilon \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) dx + \omega_1 \int_{\Omega^{(\mathcal{E})^\varepsilon}} \left( \frac{\partial \Gamma^\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial x_i} \theta + \psi^\varepsilon \frac{\partial \Gamma^\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) dx =$$

$$= \int_{\Omega^{(\mathcal{E})^\varepsilon}} h^\varepsilon \psi^\varepsilon \theta dx$$

et

$$\int_{\Omega^{(\mathcal{E})^\varepsilon}} \left( \tilde{P}_i^\varepsilon \frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial x_i} \theta + \omega^\varepsilon \frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) dx + \omega_1 \int_{\Omega^{(\mathcal{E})^\varepsilon}} \left( \frac{\partial \chi^\varepsilon}{\partial x_i} \tilde{P}_i^\varepsilon \theta + \omega^\varepsilon \frac{\partial \chi^\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) dx = 0$$

on soustrait la première relation de la deuxième :

$$(3-22) \quad \int_{\Omega^{(\mathcal{E})^\varepsilon}} \left( \left( \tilde{P}_i^\varepsilon + \omega_1 \frac{\partial \Gamma^\varepsilon}{\partial x_i} \right) \psi^\varepsilon - \left( \frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial x_i} + \omega_1 \frac{\partial \chi^\varepsilon}{\partial x_i} \right) \omega^\varepsilon \right) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} dx +$$

$$+ \omega_1 \int_{\Omega^{(\mathcal{E})^\varepsilon}} \left( \frac{\partial \Gamma^\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial x_i} - \frac{\partial \chi^\varepsilon}{\partial x_i} \tilde{P}_i^\varepsilon \right) \theta dx = \int_{\Omega^{(\mathcal{E})^\varepsilon}} h^\varepsilon \psi^\varepsilon \theta dx$$

On multiplie (3-22) par  $\eta$  et (3-21) par  $\omega_1$  puis on fait la soustraction :

$$\begin{aligned}
 (3-23) \quad & \int_{\Omega} \omega_1 \left( Q_i^\varepsilon \chi^\varepsilon - \mu^\varepsilon \Gamma^\varepsilon \frac{\partial \chi^\varepsilon}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} \eta \omega_1 \left( \tilde{P}_i^\varepsilon \chi^\varepsilon - \Gamma^\varepsilon \frac{\partial \tilde{\psi}^\varepsilon}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} dx + \\
 & + \int_{\Omega} \eta \left( \left( \tilde{P}_i^\varepsilon + \omega_1 \frac{\partial \Gamma^\varepsilon}{\partial x_i} \right) \tilde{\psi}^\varepsilon - \left( \frac{\partial \tilde{\psi}^\varepsilon}{\partial x_i} + \omega_1 \frac{\partial \chi^\varepsilon}{\partial x_i} \right) \omega^\varepsilon \right) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} dx = \\
 & = \int_{\Omega} (r^\varepsilon + \eta h^\varepsilon \chi^\varepsilon) \chi^\varepsilon \theta dx + \int_{\Omega} h^\varepsilon \tilde{\psi}^\varepsilon \theta dx
 \end{aligned}$$

D'après la proposition 3-2 i) et les convergences (3-11) et (3-20), on a, dans chaque terme de cette relation, le produit de deux facteurs convergents, l'un fortement et l'autre faiblement. On peut donc passer à la limite dans (3-23), ce qui donne en tenant compte de définition (2-43) de la fonction  $r$  et l'expression (2-44) des conductivités  $K_{ij}$  :

$$(3-24) \quad \int_{\Omega} (Q_i^* + \eta P_i^*) x_j \frac{\partial \theta}{\partial x_i} dx - \int_{\Omega} K_{ij} \Gamma^* \frac{\partial \theta}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} r \theta x_j dx$$

On prend dans l'équation (3-8), vérifiée par  $Q^*$  et  $P^*$ , la fonction-test  $v$  égale à  $\theta x_j$ , où  $x_j$  désigne la  $j^{\text{ème}}$  coordonnée, et on en déduit que :

$$\int_{\Omega} (Q_i^* + \eta P_i^*) x_j \frac{\partial \theta}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} r \theta x_j dx - \int_{\Omega} (Q_i^* + \eta P_i^*) \theta \delta_{ij} dx$$

Si on remplace le premier membre de la relation (3-24) par son expression précédente, il vient :

$$- \int_{\Omega} K_{ij} T^* \frac{\partial \theta}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} (Q_j^* + \eta P_j^*) \theta dx \quad \forall \theta \in \mathcal{D}(\Omega)$$

ou

$$\int_{\Omega} \left( K_{ij} \frac{\partial T^*}{\partial x_i} - (Q_j^* + \eta P_j^*) \right) \theta dx = 0 \quad \forall \theta \in \mathcal{D}(\Omega)$$

ce qui donne l'égalité (3-15) recherchée:

$$Q_j^* + \eta P_j^* = K_{ij} \frac{\partial T^*}{\partial x_i} \quad \text{dans } L^2(\Omega)$$

On en déduit donc que les fonctions  $T^*$  et  $u$  sont identiques. De plus, puisque toutes les sous-suites convergentes de  $T^\varepsilon$  ont la même limite  $u$ , toute la suite  $T^\varepsilon$  converge vers la température homogénéisée  $u$ .  $\square$

### 3-3) Les correcteurs :

La proposition 3-2 ne donne que des résultats de convergence faible; ceci est dû à ce qui se passe au voisinage du bord  $\Gamma$  de  $\Omega$ . Nous allons voir que, comme dans les cas d'homogénéisation, si on corrige  $T^\varepsilon$  au voisinage du bord par des fonctions bien choisies, on peut donner une bonne approximation de  $T^\varepsilon$  au sens de  $H_0^1(\Omega)$  fort. Plus précisément soit  $m^\varepsilon$  une fonction régularisante telle que :

$$(3-25) \quad \left\{ \begin{array}{ll} m^\varepsilon \in \mathcal{D}(\Omega) & \\ m^\varepsilon(x) = 0 & \text{si } d(x, \Gamma) \leq \varepsilon \\ m^\varepsilon(x) = 1 & \text{si } d(x, \Gamma) \geq 2\varepsilon \\ 0 \leq m^\varepsilon(x) \leq 1 & \text{si } \varepsilon \leq d(x, \Gamma) \leq 2\varepsilon \\ \varepsilon \left| \frac{\partial m^\varepsilon}{\partial x_i} \right| \leq C & \forall i=1 \dots n \end{array} \right.$$

où  $d(x, \Gamma)$  est la distance du point  $x$  au bord  $\Gamma$  de  $\Omega$ , et  $C$  est une constante indépendante de  $\varepsilon$ .

On vérifie aisément que :

$$(3-26) \quad m^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 1 \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ fort}$$

**Théorème 3-2 :**

Soit les fonctions  $\theta^\varepsilon$  et  $\xi^\varepsilon$  de  $H_0^1(\Omega)$  définies par :

$$(3-27) \quad \theta^\varepsilon(x) = \varepsilon m^\varepsilon(x) \chi^\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x)$$

$$\xi^\varepsilon(x) = \varepsilon m^\varepsilon(x) \psi^\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x)$$

on a alors :

$$i) \quad \|\theta^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C\varepsilon \quad \text{et} \quad \|\xi^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C\varepsilon$$

$$ii) \quad T^\varepsilon - \theta^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u \quad \text{dans } H_0^1(\Omega) \text{ fort et}$$

$$\|\omega^\varepsilon - \xi^\varepsilon\|_{W^\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

démonstration :

i) Comme  $u$  est dans  $H^2(\Omega)$ , d'après le théorème 2-1, alors  $\frac{\partial u}{\partial x_j}$  est dans  $H^1(\Omega)$ . En utilisant l'injection continue de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^4(\Omega)$  [6] ( la dimension est inférieure ou égale à 3) et les propriétés (3-25) de  $m^\varepsilon$  on a :

$$(3-28) \quad \theta^\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \text{ et}$$

$$\|\theta^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon \left\| \chi^{j\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon C \left\| \chi^{j\varepsilon} \right\|_{L^4(\Omega)} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{L^4(\Omega)}$$

où  $\chi^{j\varepsilon}(x) = \chi^j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ .

(  $\chi^j$  est définie sur la cellule de base  $Y$  et prolongée par  $Y$ -périodicité à tout  $\mathbb{R}^n$ ).

La quantité  $\left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{L^4(\Omega)}$  est une constante indépendante de  $\varepsilon$ , on va montrer qu'il en est de même pour  $\left\| \chi^{\varepsilon} \right\|_{L^4(\Omega)}$ :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\chi^{\varepsilon}(x))^4 dx &\leq \sum_{k=1}^{k=N^{\varepsilon}} \int_{C_k^{\varepsilon}} (\chi(\frac{x}{\varepsilon}))^4 dx \\ &= \varepsilon^3 \sum_{k=1}^{k=N^{\varepsilon}} \int_Y (\chi(y))^4 dy \\ &= \varepsilon^3 N^{\varepsilon} \int_Y (\chi(y))^4 dy \end{aligned}$$

où  $N^{\varepsilon}$  est le nombre de cellules  $C_k^{\varepsilon}$  recouvrant  $\Omega$ , il est de l'ordre de  $\frac{\text{mes}(\Omega)}{\varepsilon^3 \text{mes}(Y)}$ , d'où l'on déduit que :

$$(3-29) \quad \left\| \chi^{\varepsilon} \right\|_{L^4(\Omega)} \leq \left( \frac{\text{mes}(\Omega)}{\text{mes}(Y)} \right)^{\frac{1}{4}} \left\| \chi \right\|_{L^4(Y)}$$

L'inégalité (3-28) entraîne donc i) de la proposition. Pour les mêmes raisons que les précédentes on a :

$$(3-30) \quad \xi^{\varepsilon} \in \mathcal{W}^{\varepsilon} = \left\{ \psi \in H^1(\Omega(\frac{\cdot}{\varepsilon})) ; \psi = 0 \text{ sur } \mathcal{A}_{\mathcal{G}}^{\varepsilon} \right\}$$

$$\left\| \xi^{\varepsilon} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon C \left( \frac{\text{mes}(\Omega)}{\text{mes}(Y)} \right)^{\frac{1}{4}} \left\| \psi^j \right\|_{L^4(Y(\frac{\cdot}{\varepsilon}))} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{L^4(\Omega)}$$

ii) On note  $X^{\varepsilon}$  et  $Z^{\varepsilon}$  les couples de l'espace produit  $E^{\varepsilon} = H_0^1(\Omega) \times \mathcal{W}^{\varepsilon}$  définis par:

$$(3-31) \quad \begin{cases} X^{\varepsilon} = (T^{\varepsilon}, \omega^{\varepsilon}) \\ Z^{\varepsilon} = (u + \theta^{\varepsilon}, \xi^{\varepsilon}) \\ R^{\varepsilon} = X^{\varepsilon} - Z^{\varepsilon} \end{cases}$$

Pour démontrer ii) de la proposition il suffit de démontrer que  $a^\varepsilon(R^\varepsilon, R^\varepsilon)$  tend vers zéro avec  $\varepsilon$ , en effet on a déjà montré (3-6) que :

$$(3-32) \quad \begin{aligned} \|T^\varepsilon - \theta^\varepsilon - u\|_{H_0^1(\Omega)} &\leq \|R^\varepsilon\|_{E^\varepsilon} \leq C \sqrt{a^\varepsilon(R^\varepsilon, R^\varepsilon)} \\ \|\omega^\varepsilon - \xi^\varepsilon\|_{W^\varepsilon} &\leq \|R^\varepsilon\|_{E^\varepsilon} \leq C \sqrt{a^\varepsilon(R^\varepsilon, R^\varepsilon)}. \end{aligned}$$

En utilisant la symétrie de la forme bilinéaire  $a^\varepsilon(\cdot, \cdot)$  on a :

$$(3-33) \quad \begin{aligned} a^\varepsilon(R^\varepsilon, R^\varepsilon) &= a^\varepsilon(X^\varepsilon - Z^\varepsilon, X^\varepsilon - Z^\varepsilon) \\ &= a^\varepsilon(X^\varepsilon, X^\varepsilon - 2Z^\varepsilon) + a^\varepsilon(Z^\varepsilon, Z^\varepsilon) \\ &= L^\varepsilon(X^\varepsilon - 2Z^\varepsilon) + a^\varepsilon(Z^\varepsilon, Z^\varepsilon) \end{aligned}$$

Explicitons l'expression de  $L^\varepsilon(\cdot)$  :

$$L^\varepsilon(X^\varepsilon - 2Z^\varepsilon) = \int_{\Omega} \omega_1 (f^\varepsilon + \eta h^\varepsilon \chi_{\frac{\Omega}{\varepsilon}}^{(T^\varepsilon)}) (T^\varepsilon - 2(u + \theta^\varepsilon)) \, dx + \int_{\Omega} \eta h^\varepsilon (\omega^\varepsilon - 2\xi^\varepsilon) \chi_{\frac{\Omega}{\varepsilon}}^{(T^\varepsilon)} \, dx$$

d'après les relations (3-11), (3-13), (3-4) et les résultats i) on a :

$$(3-34) \quad L^\varepsilon(X^\varepsilon - 2Z^\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} - \int_{\Omega} \omega_1 \mathcal{M}_\gamma (f + \eta h \chi_{\frac{\Omega}{\varepsilon}}^{(T)}) u \, dx = - \int_{\Omega} \omega_1 K_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \, dx$$

Des relations (3-33) et (3-34) on déduit alors que :

$$(3-35) \quad a^\varepsilon(R^\varepsilon, R^\varepsilon) \longrightarrow 0 \iff a^\varepsilon(Z^\varepsilon, Z^\varepsilon) \longrightarrow \int_{\Omega} \omega_1 K_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \, dx$$

On va démontrer la convergence indiquée pour  $a^\varepsilon(Z^\varepsilon, Z^\varepsilon)$ . Pour ce faire, on décompose  $a^\varepsilon(Z^\varepsilon, Z^\varepsilon)$  en une somme de trois termes et on calcule la limite de chacun d'eux :

$$(3-36) \quad \left\{ \begin{aligned} a^\varepsilon(Z^\varepsilon, Z^\varepsilon) &= \omega_1 I^\varepsilon + 2 \eta \omega_1 J^\varepsilon + \eta M^\varepsilon \\ I^\varepsilon &= \int_{\Omega} \mu^\varepsilon (\nabla(u+\theta^\varepsilon))^2 dx \\ J^\varepsilon &= \int_{\Omega_g^{(P^\varepsilon)}} \mu^\varepsilon \nabla(u+\theta^\varepsilon) \cdot \nabla \xi^\varepsilon dx \\ M^\varepsilon &= \int_{\Omega_g^{(P^\varepsilon)}} (\nabla \xi^\varepsilon)^2 dx \end{aligned} \right.$$

■ limite de  $I^\varepsilon$  :

On écrit d'abord  $\frac{\partial \theta^\varepsilon}{\partial x_\ell}$  sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \theta^\varepsilon}{\partial x_\ell} &= \zeta_\ell^\varepsilon + \delta_\ell^\varepsilon \\ \zeta_\ell^\varepsilon(x) &= m^\varepsilon(x) \frac{\partial \chi^j}{\partial x_\ell} \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \\ \delta_\ell^\varepsilon(x) &= \varepsilon \left( \frac{\partial m^\varepsilon}{\partial x_\ell}(x) \chi^j \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) + m^\varepsilon(x) \chi^j \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x_\ell \partial x_j}(x) \right) \end{aligned} \right.$$

En utilisant les propriétés de la fonction  $m^\varepsilon$ , de  $\chi^j$  et de  $u$  il est facile de vérifier que  $\delta_\ell^\varepsilon$  tend vers zéro avec  $\varepsilon$  dans  $L^2(\Omega)$  fort, donc  $I^\varepsilon$  a la même limite que :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mu^\varepsilon \left( \frac{\partial u}{\partial x_\ell} + \zeta_\ell^\varepsilon \right) \left( \frac{\partial u}{\partial x_\ell} + \zeta_\ell^\varepsilon \right) dx = \\ & = \int_{\Omega} \mu^\varepsilon \left( \frac{\partial u}{\partial x_\ell} \frac{\partial u}{\partial x_\ell} + 2 m^\varepsilon \frac{\partial \chi^{j\varepsilon}}{\partial x_\ell} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} + (m^\varepsilon)^2 \frac{\partial \chi^{j\varepsilon}}{\partial x_\ell} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \chi^{i\varepsilon}}{\partial x_\ell} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) dx \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega} \mu^\varepsilon \left( \frac{\partial u}{\partial x_\ell} + \zeta_\ell^\varepsilon \right) \left( \frac{\partial u}{\partial x_\ell} + \zeta_\ell^\varepsilon \right) dx = \int_{\Omega} \mu^\varepsilon \left( \delta_{ij} + m^\varepsilon \frac{\partial \chi^{j\varepsilon}}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx +$$

$$+ \int_{\Omega} \mu^\varepsilon m^\varepsilon \left( \frac{\partial \chi^{i\varepsilon}}{\partial x_j} + m^\varepsilon \frac{\partial \chi^{i\varepsilon}}{\partial x_\ell} \frac{\partial \chi^{j\varepsilon}}{\partial x_\ell} \right) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx$$

En utilisant les convergences (3-26) et (3-20) on a donc :

$$(3-38) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I^\varepsilon = \int_{\Omega} \mathcal{M}_Y \left( \mu \left( \delta_{ij} + \frac{\partial \chi^j}{\partial y_i} \right) \right) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx +$$

$$+ \int_{\Omega} \mathcal{M}_Y \left( \mu \left( \frac{\partial \chi^i}{\partial y_j} + \frac{\partial \chi^i}{\partial y_\ell} \frac{\partial \chi^j}{\partial y_\ell} \right) \right) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx$$

### ■ limite de $J^\varepsilon$ :

On procède de manière analogue à la précédente :

$$\left| \begin{aligned} \frac{\partial \xi^\varepsilon}{\partial x_\ell} &= \gamma_\ell^\varepsilon + \pi_\ell^\varepsilon \\ \gamma_\ell^\varepsilon(x) &= m^\varepsilon(x) \frac{\partial \psi^j}{\partial x_\ell} \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \\ \pi_\ell^\varepsilon(x) &= \varepsilon \left( \frac{\partial m^\varepsilon}{\partial x_\ell}(x) \psi^j \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) + m^\varepsilon(x) \psi^j \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x_\ell \partial x_j}(x) \right) \end{aligned} \right.$$

Notons que cette fois  $\xi^\varepsilon$ ,  $\gamma_\ell^\varepsilon$  et  $\pi_\ell^\varepsilon$  sont définis dans  $\Omega_{\frac{\varepsilon}{g}}^{(\mathbb{R}^n)}$  seulement, on les prolonge alors par zéro dans le domaine  $\Omega$  tout entier, soient  $\tilde{\xi}^\varepsilon$ ,  $\tilde{\gamma}_\ell^\varepsilon$  et  $\tilde{\pi}_\ell^\varepsilon$  leur prolongements respectifs.



Pour les mêmes raisons que les précédentes  $\tilde{\pi}_\ell^\varepsilon$  tend vers zéro avec  $\varepsilon$ ,  $J^\varepsilon$  a donc la même limite que:

$$\int_{\Omega} \tilde{\gamma}_\ell^\varepsilon \left( \frac{\partial u}{\partial x_\ell} + \zeta_\ell^\varepsilon \right) dx$$

On en déduit donc que:

$$(3-39) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J^\varepsilon = \int_{\Omega} \mathcal{M}_Y \left( \frac{\partial \psi^j}{\partial y_i} X_{Y_\ell}^{\otimes j} \right) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx + \\ + \int_{\Omega} \mathcal{M}_Y \left( \frac{\partial \psi^i}{\partial y_j} + \frac{\partial \psi^j}{\partial y_\ell} \frac{\partial \chi^i}{\partial y_\ell} \right) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx$$

■ limite de  $\mathbf{M}^\varepsilon$  :

$$\mathbf{M}^\varepsilon = \int_{\Omega} (\tilde{\gamma}_\ell^\varepsilon + \tilde{\pi}_\ell^\varepsilon) (\tilde{\gamma}_\ell^\varepsilon + \tilde{\pi}_\ell^\varepsilon) dx$$

Comme ce qui été fait précédement, on montre facilement que  $\mathbf{M}^\varepsilon$  a la même limite que:

$$\int_{\Omega} \tilde{\gamma}_\ell^\varepsilon \tilde{\gamma}_\ell^\varepsilon dx$$

et on en déduit:

$$(3-40) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{M}^\varepsilon = \int_{\Omega} \mathcal{M}_Y \left( \frac{\partial \psi^i}{\partial y_i} \frac{\partial \psi^j}{\partial y_i} X_{Y_\ell}^{\otimes j} \right) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx$$

Les relations (3-36) à (3-40) impliquent donc que :

$$(3-40) \quad a^\varepsilon(Z^\varepsilon, Z^\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \omega_1 K_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} D_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx$$

où les  $K_{ij}$  sont les conductivités homogénéisées données par l'expression (2-43), c'est à dire :

$$K_{ij} = \mathcal{M}_{\Upsilon} \left( \mu \left( \delta_{ij} + \frac{\partial \chi^i}{\partial y_i} \right) + \eta \frac{\partial \psi^j}{\partial y_i} X_{Y_g}^{\otimes} \right)$$

et les  $D_{ij}$  sont donnés par la relation suivante :

$$D_{ij} = \mathcal{M}_{\Upsilon} \left( \omega_1 \mu \left( \frac{\partial \chi^i}{\partial y_j} + \frac{\partial \chi^i}{\partial y_\ell} \frac{\partial \chi^j}{\partial y_\ell} \right) + \eta \omega_1 \mathcal{M}_{\Upsilon} \left( X_{Y_g}^{\otimes} \left( \frac{\partial \psi^j}{\partial y_i} + \frac{\partial \psi^j}{\partial y_\ell} \frac{\partial \chi^i}{\partial y_\ell} + \frac{\partial \chi^j}{\partial y_\ell} \frac{\partial \psi^i}{\partial y_\ell} \right) \right) + \right. \\ \left. + \eta \mathcal{M}_{\Upsilon} \left( X_{Y_g}^{\otimes} \left( \frac{\partial \psi^i}{\partial y_j} \frac{\partial \psi^j}{\partial y_\ell} \right) \right) \right)$$

Mais remarquons que l'expression de  $D_{ij}$  est exactement l'équation variationnelle vérifiée par le couple  $(\chi^j, \psi^j)$  avec les fonctions test  $(v, \varphi)$  égales à  $(\chi^i, \psi^i)$ , donc  $D_{ij}$  est nul pour tout indice  $(i, j)$ . Le deuxième terme du second membre de (3-40) est donc nul, d'après l'équivalence (3-35) on a donc démontré que  $a^\varepsilon(R^\varepsilon, R^\varepsilon)$  tend vers zéro, ceci achève la démonstration du théorème, grâce aux inégalités (3-32).  $\square$

**4/ CAS D'UN GAZ DE FAIBLE CONDUCTION:**

Dans ce paragraphe on suppose que le gaz occupant  $\Omega_g$  a une conductivité thermique  $\lambda_g$  très faible, on la notera  $\zeta$  pour ne pas la confondre avec les autres conductivités. On s'intéresse au comportement limite de la température  $T$  et de la fraction massique de vapeur  $\bar{\omega}$  (ou de la fraction massique translaturée  $\omega = \bar{\omega} - (\omega_0 + \omega_1 T)$ ), lorsque  $\zeta$  vers zéro. Dans le cas d'un matériau périodique, de période  $\varepsilon Y$  très petite par rapport aux dimensions de  $\Omega$ , on est en présence de deux petits paramètres: la conductivité  $\zeta$  du gaz et la période  $\varepsilon$  de la structure.

L'étude du comportement limite sera faite par la méthode des perturbations singulières (lorsque  $\zeta$  tend vers zéro), combinée à la méthode d'homogénéisation ( $\varepsilon$  tend vers zéro). Ce problème peut être abordé en deux étapes:

- ♦ étudier le comportement limite lorsque  $\zeta$  tend vers zéro de la solution  $u^\zeta$  du problème homogénéisé (2-45), ce qui correspond à:  $\lim_{\zeta \rightarrow 0} (\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_\varepsilon^\zeta)$ .
- ♦ étudier le comportement limite lorsque  $\zeta$  tend vers zéro de la solution  $(T_\varepsilon^\zeta, \bar{\omega}_\varepsilon^\zeta)$  du problème initial (1-13), la période  $\varepsilon$  étant fixe, puis homogénéiser le problème limite obtenu, ce qui correspond à:  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\lim_{\zeta \rightarrow 0} T_\varepsilon^\zeta)$ .

Les résultats de ces deux étapes seront comparés ensuite.

**4-1) Comportement de la solution homogénéisée lorsque  $\zeta$  tend vers zéro:**

La température homogénéisée  $u$  dépend de  $\zeta$  par l'intermédiaire des conductivités  $K_{ij}^\zeta$ , ces dernières sont exprimées par (2-43) en fonction des solutions uniques  $(\chi^j, \psi^j)$  de (2-35), qui dépendent de  $\zeta$ , on commence alors par étudier le comportement limite des  $(\chi^{j\zeta}, \psi^{j\zeta})$ , on en déduira ensuite les limites des  $K_{ij}^\zeta$  puis celle de  $u^\zeta$ .

**4-1-1) Comportement des  $(\chi^{j\zeta}, \psi^{j\zeta})$ :**

Commençons par réécrire le problème (2-35) vérifié par les  $(\chi^{j\zeta}, \psi^{j\zeta})$  sous une forme qui met en évidence le petit paramètre  $\zeta$ . On rappelle que  $\mu(\gamma)$  intervenant dans (2-35) vaut  $\lambda(\gamma)$  dans  $Y \setminus Y_g$ ,  $\zeta + \eta \omega_1$  dans  $Y_g^{(R)}$  et  $\zeta$  dans  $Y_g^{(*)}$ .

Les  $(\chi^{j\zeta}, \psi^{j\zeta})$  sont dans l'espace  $E_Y$  dont la définition est donnée par (2-21) et que l'on rappelle:

$$\left\{ \begin{aligned} E_Y &= \mathcal{V}_Y \times \mathcal{W}_Y \\ \mathcal{V}_Y &= \left\{ v \in H^1(Y); v \text{ Y-périodique} \right\} \\ \mathcal{W}_Y &= \left\{ \varphi \in H^1(Y_g^{(E)}); \varphi = 0 \text{ sur } \mathcal{A}_g; \text{ Y-périodique} \right\} \end{aligned} \right.$$

Posons pour tout  $(\chi, \psi)$  et  $(v, \varphi)$  de  $E_Y$ :

$$(4-1) \quad \left\{ \begin{aligned} a_0((\chi, \psi), (v, \varphi)) &= \int_{Y_s \cup Y_\ell} \omega_1 \lambda \nabla \chi \cdot \nabla v \, dy + \int_{Y_g^{(E)}} \eta \nabla(\omega_1 \chi + \psi) \cdot \nabla(\omega_1 v + \varphi) \, dy \\ a_1((\chi, \psi), (v, \varphi)) &= \int_{Y_g} \omega_1 \nabla \chi \cdot \nabla v \, dy \\ L_0^j((v, \varphi)) &= - \int_{Y_s \cup Y_\ell} \omega_1 \lambda \frac{\partial v}{\partial y_j} \, dy - \int_{Y_g^{(E)}} \eta \omega_1 \frac{\partial}{\partial y_j} (\omega_1 v + \varphi) \, dy \\ L_1^j((v, \varphi)) &= - \int_{Y_g} \omega_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y_j} \, dy \end{aligned} \right.$$

Le problème (2-35) vérifié par les  $(\chi^{j\zeta}, \psi^{j\zeta})$  ( $j = 1 \dots n$ ) s'écrit alors sous la forme suivante:

$$(4-2) \quad \left\{ \begin{aligned} (\chi^{j\zeta}, \psi^{j\zeta}) &\in E_Y \quad \text{avec} \quad \int_Y \chi^{j\zeta}(y) \, dy = 0 \\ a^\zeta((\chi^{j\zeta}, \psi^{j\zeta}), (v, \varphi)) &= L^{j\zeta}((v, \varphi)) \quad \forall (v, \varphi) \in E_Y \\ \text{où:} \\ a^\zeta((\chi, \psi), (v, \varphi)) &= a_0((\chi, \psi), (v, \varphi)) + \zeta a_1((\chi, \psi), (v, \varphi)) \\ L^{j\zeta}((v, \varphi)) &= L_0^j((v, \varphi)) + \zeta L_1^j((v, \varphi)) \end{aligned} \right.$$

Comme dans J.L. Lions [24] on cherchera, dans une première étape, les  $(\chi^k, \psi^k)$  sous la forme d'un développement asymptotique formel, puis, dans une deuxième étape, on étudiera sa convergence.

#### Développement asymptotique:

On cherche les  $(\chi^k, \psi^k)$  sous la forme suivante:

$$(4-3) \quad (\chi^k, \psi^k) = \sum_{k=-1}^{+\infty} \zeta^k (\chi_k^j, \psi_k^j)$$

Les équations vérifiées par les termes  $(\chi_k^j, \psi_k^j)$  sont obtenues en reportant (4-3) dans (4-2) et en identifiant les termes en puissances de  $\zeta$ :

$$(4-4) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\chi_k^j, \psi_k^j) \in E_Y, \quad \int_Y \chi_k^j(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = 0 \quad \forall k \geq -1 \\ \text{et } \forall (\mathbf{v}, \varphi) \in E_Y \text{ on a:} \\ a_0((\chi_{-1}^j, \psi_{-1}^j), (\mathbf{v}, \varphi)) = 0 \\ a_1((\chi_{-1}^j, \psi_{-1}^j), (\mathbf{v}, \varphi)) + a_0((\chi_0^j, \psi_0^j), (\mathbf{v}, \varphi)) = L_0^j((\mathbf{v}, \varphi)) \\ a_1((\chi_0^j, \psi_0^j), (\mathbf{v}, \varphi)) + a_0((\chi_1^j, \psi_1^j), (\mathbf{v}, \varphi)) = L_1^j((\mathbf{v}, \varphi)) \\ a_1((\chi_k^j, \psi_k^j), (\mathbf{v}, \varphi)) + a_0((\chi_{k+1}^j, \psi_{k+1}^j), (\mathbf{v}, \varphi)) = 0 \quad \forall k \geq 1 \end{array} \right.$$

#### Etude des équations (4-4) et convergence de (4-3)

Pour étudier l'existence et l'unicité des  $(\chi_k^j, \psi_k^j)$  on introduit l'espace suivant:

$$(4-5) \quad E_Y^0 = E_Y \cap \left\{ (\mathbf{v}, \varphi) / a_0((\mathbf{v}, \varphi), (\mathbf{v}, \varphi)) = 0 \text{ et } \int_Y \mathbf{v}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = 0 \right\}$$

Montrons d'abord quelques propriétés simples de cet espace qu'on rassemble dans le lemme 4-1 ci-dessous, où l'on désigne par "  $Y$ -translaté d'un sous ensemble  $\mathcal{B}$  de  $Y$  " le translaté de  $\mathcal{B}$  d'un nombre entier relatif de fois le côté  $\ell_i$  de  $Y$  dans chaque direction  $y_i$ :

**Lemme 4-1:**

i)  $E_Y^0$  est un espace de Hilbert pour la norme induite par  $E_Y$  (norme  $H^1(Y) \times H^1(Y_g^{(e)})$ ).

ii)  $(v, \varphi)$  appartient à  $E_Y^0$  si et seulement si:

-  $v$  est une constante dans chaque composante connexe de la réunion des  $Y$ -translatés de  $\bar{Y}_s \cup \bar{Y}_\ell$ .

-  $\omega_1 v + \varphi$  est une constante dans chaque composante connexe de la réunion des  $Y$ -translatés de  $Y_g^{(e)}$ .

iii) l'application  $(v, \varphi) \longrightarrow \sqrt{a_1((v, \varphi), (v, \varphi))}$  est une norme dans  $E_Y^0$  équivalente à la norme induite par celle de  $E_Y$

preuve:

i) d'après la définition (4-1) de la forme bilinéaire  $a_0(\dots)$ :

$$\begin{aligned} a_0((v, \varphi), (v, \varphi)) &= \int_{Y_s \cup Y_\ell} \omega_1 \lambda (\nabla v)^2 dy + \int_{Y_g^{(e)}} \eta (\nabla(\omega_1 v + \varphi))^2 dy \\ &\leq C \left( \int_{Y_s \cup Y_\ell \cup Y_g^{(e)}} (\nabla v)^2 dy + \int_{Y_g^{(e)}} (\nabla \varphi)^2 dy + \int_{Y_g^{(e)}} 2 \nabla v \cdot \nabla \varphi dy \right) \\ &\leq C \left( \|v\|_{H^1(Y)}^2 + \|\varphi\|_{H^1(Y_g^{(e)})}^2 + 2 \|v\|_{H^1(Y)} \|\varphi\|_{H^1(Y_g^{(e)})} \right) \end{aligned}$$

où  $C = \max(\omega_1 \lambda \ell, \omega_1 \lambda s, \omega_1 \eta, \eta)$ . Donc:

$$a_0((v, \varphi), (v, \varphi)) \leq C \|(v, \varphi)\|_{E_Y}^2$$

Il est alors clair que le sous-espace  $E_Y^0$  est de Hilbert.

ii) rappelons que  $\omega_1$ ,  $\lambda$  et  $\eta$  sont positives, cette assertion est alors évidente en utilisant l'expression précédente de  $a_0((v, \varphi), (v, \varphi))$  et le fait que  $v$  est continue à travers l'interface  $\mathcal{A}_g$  sans oublier la  $Y$ -périodicité de  $v$  et de  $\varphi$ .

iii) Puisque  $\varphi$  est de trace nulle sur  $\mathcal{A}_g$  et la fonction  $v$  est de moyenne nulle sur  $Y$ :

$$\|(v, \varphi)\|_{E_Y}^2 \text{ est équivalente à } \left( \|\nabla v\|_{L^2(Y)}^2 + \|\nabla \varphi\|_{L^2(Y_g^{(E)})}^2 \right)$$

Il suffit donc de montrer que  $a_1((v, \varphi), (v, \varphi))$  est équivalente à cette dernière norme.

Soit  $(v, \varphi)$  dans  $E_Y^0$ , alors, d'après ii),  $\nabla v = 0$  dans  $L^2(Y_g \cup Y_g^*)$  et  $\nabla \varphi = -\omega_1 \nabla v$  dans  $L^2(Y_g^{(E)})$ , donc:

$$\|\nabla v\|_{L^2(Y)}^2 + \|\nabla \varphi\|_{L^2(Y_g^{(E)})}^2 = \int_{Y_g} (\nabla v)^2 dy + \int_{Y_g^{(E)}} \omega_1^2 (\nabla v)^2 dy$$

Donc, en utilisant la définition (4-1) de  $a_1(\dots)$  et sachant que  $Y_g = Y_g^{(E)} \cup Y_g^*$ , on a:

$$(4-6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall (v, \varphi) \in E_Y^0 \\ \frac{1}{\omega_1} a_1((v, \varphi), (v, \varphi)) = \int_{Y_g} (\nabla v)^2 dy \leq \|\nabla v\|_{L^2(Y)}^2 + \|\nabla \varphi\|_{L^2(Y_g^{(E)})}^2 \\ \left(\frac{1}{\omega_1} + \omega_1\right) a_1((v, \varphi), (v, \varphi)) \geq \|\nabla v\|_{L^2(Y)}^2 + \|\nabla \varphi\|_{L^2(Y_g^{(E)})}^2 \quad \square \end{array} \right.$$

#### Proposition 4-1:

Les termes  $(\chi_k^i, \psi_k^j)$  sont déterminés d'une manière unique par (4-4) et on a l'estimation de l'erreur suivante:

$$\|(X^k, \psi^k) - \sum_{k=0}^{k=m} \zeta^k (\chi_k^i, \psi_k^j)\|_{E_Y} \leq C \zeta^{m+1}$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $\zeta$ .

Démonstration:

♦ *Existence et unicité des termes  $(\chi_k^j, \psi_k^j)$ :*

- La première équation de (4-4) avec  $(v, \varphi) = (\chi_{-1}^j, \psi_{-1}^j)$  entraîne que les  $(\chi_{-1}^j, \psi_{-1}^j)$  appartiennent à  $E_Y^0$ . La deuxième équation de (4-4) et le lemme 4-1 ii) donnent :

$$a_1((\chi_{-1}^j, \psi_{-1}^j), (v, \varphi)) = 0 \quad \forall (v, \varphi) \in E_Y^0$$

En prenant  $(v, \varphi) = (\chi_{-1}^j, \psi_{-1}^j)$  et puisque  $\sqrt{a_1(\dots)}$  est une norme dans  $E_Y^0$  on a:

$$(4-7) \quad (\chi_{-1}^j, \psi_{-1}^j) = (0, 0).$$

- La deuxième et la troisième équation de (4-4) donnent:

$$(4-8) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\chi_0^j, \psi_0^j) \in E_Y \text{ et } \int_Y \chi_0^j dy = 0 \\ a_0((\chi_0^j, \psi_0^j), (v, \varphi)) = L_0^j((v, \varphi)) \quad \forall (v, \varphi) \in E_Y \\ a_1((\chi_0^j, \psi_0^j), (v, \varphi)) = L_1^j((v, \varphi)) \quad \forall (v, \varphi) \in E_Y^0 \end{array} \right.$$

En appliquant l'alternative de Fredholm à la première équation dans  $E_Y$  on a:

$$(4-9) \quad \text{la solution } (\chi_0^j, \psi_0^j) \text{ de (4-8) existe si et seulement si: } (L_0^j((v, \varphi)) = 0 \quad \forall (v, \varphi) \in E_Y^0),$$

de plus elle est déterminée à un élément de  $E_Y^0$  près.

Or cette condition de compatibilité est satisfaite d'après le lemme 4-1. Grâce à la dernière équation dans  $E_Y^0$  on va montrer que  $(\chi_0^j, \psi_0^j)$  est unique.

Soient  $(\hat{\chi}^j, \hat{\psi}^j)$  et  $(\check{\chi}^j, \check{\psi}^j)$  deux solutions de (4-8), leur différence doit donc appartenir à l'espace  $E_Y^0$ , en plus elles doivent vérifier pour tout  $(v, \varphi)$  de  $E_Y^0$ :

$$\begin{aligned} a_1((\hat{\chi}^j, \hat{\psi}^j), (v, \varphi)) &= L_1^j((v, \varphi)) \\ a_1((\check{\chi}^j, \check{\psi}^j), (v, \varphi)) &= L_1^j((v, \varphi)) \end{aligned}$$



En prenant  $(v, \varphi)$  égale à  $(\hat{\chi}^* - \hat{\chi}, \hat{\psi}^* - \hat{\psi})$ , la différence de ces deux relations donne:

$$a_1((\hat{\chi}^* - \hat{\chi}, \hat{\psi}^* - \hat{\psi}), (\hat{\chi}^* - \hat{\chi}, \hat{\psi}^* - \hat{\psi})) = 0 \quad \text{et} \quad (\hat{\chi}^* - \hat{\chi}, \hat{\psi}^* - \hat{\psi}) \in E_Y^0$$

Mais d'après iii) du lemme 4-1, ceci implique que:

$$(4-10) \quad \hat{\chi}^* = \hat{\chi}, \quad \hat{\psi}^* = \hat{\psi}$$

La solution  $(\chi_0^j, \psi_0^j)$  du problème (4-8) est donc unique.

- L'existence et l'unicité des solutions  $(\chi_k^j, \psi_k^j)$  des autres équations de (4-4) se démontre par récurrence, de façon analogue à la précédente.

◆ *Estimation de l'erreur:*

Posons:

$$(4-11) \quad \left\{ \begin{aligned} \theta^\zeta &= (\theta_1^\zeta, \theta_2^\zeta) = \sum_{k=-1}^{k=m} \zeta^k (\chi_k^j, \psi_k^j) \\ \hat{\theta}^\zeta &= (\hat{\theta}_1^\zeta, \hat{\theta}_2^\zeta) = \theta^\zeta + \zeta^{m+1} (\chi_{m+1}^j, \psi_{m+1}^j) \\ z^\zeta &= (z_1^\zeta, z_2^\zeta) = (\chi_{m+1}^j, \psi_{m+1}^j) - \hat{\theta}^\zeta \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} a^\zeta(\hat{\theta}^\zeta, (v, \varphi)) &= \zeta^{-1} a_0((\chi_{-1}^j, \psi_{-1}^j), (v, \varphi)) + \\ &+ \sum_{k=-1}^{k=m} \zeta^{k+1} \left( a_1((\chi_k^j, \psi_k^j), (v, \varphi)) + a_0((\chi_{k+1}^j, \psi_{k+1}^j), (v, \varphi)) \right) + \\ &+ \zeta^{m+2} a_1((\chi_{m+1}^j, \psi_{m+1}^j), (v, \varphi)) \quad \forall (v, \varphi) \in E_Y \end{aligned}$$

Ainsi d'après les équations (4-2) et (4-4) on a pour tout couple  $(v, \varphi)$  de  $E_Y$  :

$$\begin{aligned} a^\zeta((\chi^\zeta, \psi^\zeta), (v, \varphi)) &= L^\zeta((v, \varphi)) \\ a^\zeta(\hat{\theta}^\zeta, (v, \varphi)) &= L_0^j((v, \varphi)) + \zeta L_1^j((v, \varphi)) + \zeta^{m+2} a_1((\chi_{m+1}^j, \psi_{m+1}^j), (v, \varphi)) \\ &= L^\zeta((v, \varphi)) + \zeta^{m+2} a_1((\chi_{m+1}^j, \psi_{m+1}^j), (v, \varphi)) \end{aligned}$$

Avec un couple de fonctions-tests  $(v, \varphi)$  égal à  $Z^\zeta$ , la différence de ces deux relations et donne :

$$(4-12) \quad a^\zeta(Z^\zeta, Z^\zeta) = - \zeta^{m+2} a_1((\chi_{m+1}^j, \psi_{m+1}^j), Z^\zeta)$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée dans l'expression (4-1) de  $a_1((\chi_{m+1}^j, \psi_{m+1}^j), Z^\zeta)$  entraîne que :

$$\bullet \quad a_1((\chi_{m+1}^j, \psi_{m+1}^j), Z^\zeta) \leq \omega_1 \left\| \nabla(\chi_{m+1}^j) \right\|_{L^2(Y_g)} \left\| Z^\zeta \right\|_{E_Y}$$

Mais, comme dans les estimations (2-31), on peut établir que l'orsque le paramètre  $\zeta$  est assez petit on l'inégalité :

$$\bullet \quad |a^\zeta((v, \varphi), (v, \varphi))| \geq C_1 \zeta \left\| (v, \varphi) \right\|_{E_Y}^2$$

donc

$$(4-13) \quad C_1 \zeta \left\| Z^\zeta \right\|_{E_Y}^2 \leq a^\zeta(Z^\zeta, Z^\zeta) \leq C_2 \zeta^{m+2} \left\| Z^\zeta \right\|_{E_Y}$$

On en déduit alors l'estimation de l'erreur voulue :

$$(4-13) \quad \begin{aligned} \left\| (\chi^\zeta, \psi^\zeta) - \theta^\zeta \right\|_{E_Y} &= \left\| Z^\zeta + \zeta^{m+1} (\chi_{m+1}^j, \psi_{m+1}^j) \right\|_{E_Y} \\ &\leq \left( \frac{C_2}{C_1} + \left\| (\chi_{m+1}^j, \psi_{m+1}^j) \right\|_{E_Y} \right) \zeta^{m+1} \quad \square \end{aligned}$$

#### 4-1-2) Limites des conductivités homogénéisées $K_{ij}^\zeta$ :

Rappelons l'expression (2-43) des  $K_{ij}^\zeta$  en mettant en évidence le paramètre  $\zeta$ :

$$(4-14) \quad |Y| K_{ij}^\zeta = \int_{Y_s \cup Y_\ell} \lambda \frac{\partial}{\partial y_i} \left( \chi^{j\zeta} + y_j \right) dy + \eta \omega_1 \int_{Y_g^{(\zeta)}} \frac{\partial}{\partial y_i} \left( \chi^{j\zeta} + y_j + \frac{\psi^{j\zeta}}{\omega_1} \right) dy + \\ + \zeta \int_{Y_g} \frac{\partial}{\partial y_i} \left( \chi^{j\zeta} + y_j \right) dy$$

D'après l'estimation de l'erreur dans la proposition 4-1 les  $(\chi^{j\zeta}, \psi^{j\zeta})$  convergent dans  $E_Y$  vers les solutions uniques  $(\chi_0^j, \psi_0^j)$  de (4-8), il est alors clair que les conductivités  $K_{ij}^\zeta$  convergent aussi vers une limite  $K_{ij}^0$ . On va estimer l'erreur  $|K_{ij}^\zeta - K_{ij}^0|$  et établir quelques propriétés des conductivités limites  $K_{ij}^0$ :

#### Proposition 4-2:

$$i) \quad \max_{i,j} |K_{ij}^\zeta - K_{ij}^0| \leq C \zeta$$

$$(4-15) \quad K_{ij}^0 = \frac{\eta \omega_1}{|Y|} \int_{Y_s \cup Y_\ell} \lambda \frac{\partial}{\partial y_i} \left( \chi_0^j + y_j \right) dy + \frac{\eta \omega_1}{|Y|} \int_{Y_g^{(\zeta)}} \frac{\partial}{\partial y_i} \left( \chi_0^j + y_j + \frac{\psi_0^j}{\omega_1} \right) dy$$

ii) Les conductivités limites  $K_{ij}^0$  s'écrivent sous la forme symétrique et coercive:

$$(4-16) \quad K_{ij}^0 = \frac{1}{|Y|} \left\{ \int_{Y_s \cup Y_\ell} \lambda \frac{\partial}{\partial y_m} \left( \chi_0^j + y_j \right) \frac{\partial}{\partial y_m} \left( \chi_0^i + y_i \right) dy \right\} + \\ + \frac{\eta \omega_1}{|Y|} \left\{ \int_{Y_g^{(\zeta)}} \frac{\partial}{\partial y_m} \left( \chi_0^j + y_j + \frac{\psi_0^j}{\omega_1} \right) \frac{\partial}{\partial y_m} \left( \chi_0^i + y_i + \frac{\psi_0^i}{\omega_1} \right) dy \right\}$$

Démonstration:

$$\begin{aligned}
 i) \quad |Y| (K_{ij}^{\zeta} - K_{ij}^0) &= \int_{Y_g \cup Y_\ell} \lambda \frac{\partial}{\partial y_i} (\chi^{\mathbb{K}} - \chi_0^j) dy + \zeta \int_{Y_g} \frac{\partial}{\partial y_i} (\chi^{\mathbb{K}} + y_j) dy + \\
 &\quad + \eta \omega_1 \int_{Y_g^{(e)}} \frac{\partial}{\partial y_i} \left( \chi^{\mathbb{K}} - \chi_0^j + \frac{1}{\omega_1} (\psi^{\mathbb{K}} - \psi_0^j) \right) dy
 \end{aligned}$$

d'où:

$$|Y| \left| K_{ij}^{\zeta} - K_{ij}^0 \right| \leq C \left\| (\chi^{\mathbb{K}}, \psi^{\mathbb{K}}) - (\chi_0^j, \psi_0^j) \right\|_{E_Y} + \zeta \left( \sqrt{|Y_g|} \left\| \nabla \chi^{\mathbb{K}} \right\|_{L^2(Y_g)} + |Y_g| \right)$$

Ainsi, puisque  $\left\| \nabla \chi^{\mathbb{K}} \right\|_{L^2(Y_g)}$  est borné indépendamment de  $\zeta$  et d'après la proposition 4-1:

$$|Y| \left| K_{ij}^{\zeta} - K_{ij}^0 \right| \leq C \zeta.$$

ii) On va maintenant réécrire les  $K_{ij}^0$  sous une forme symétrique et coercitive, comme ce qui a été fait pour les  $K_{ij}^{\zeta}$  (2-47).

Les équations (4-8) vérifiées par  $(\chi_0^j, \psi_0^j)$  s'écrivent:

$$\begin{aligned}
 &\left. \begin{aligned}
 &\nabla (v, \varphi) \in E_Y \\
 &\int_{Y_g \cup Y_\ell} \lambda \frac{\partial}{\partial y_m} (\chi_0^j + y_j) \frac{\partial v}{\partial y_m} dy + \int_{Y_g^{(e)}} \eta \frac{\partial}{\partial y_m} \left( \chi_0^j + y_j + \frac{\psi_0^j}{\omega_1} \right) \frac{\partial}{\partial y_m} (\omega_1 v + \varphi) dy = 0
 \end{aligned} \right\} \\
 (4-17) \quad &\text{et } \nabla (v, \varphi) \in E_Y^0 : \\
 &\quad \int_{Y_g} \frac{\partial}{\partial y_m} (\chi_0^j + y_j) \frac{\partial v}{\partial y_m} dy = 0 \\
 &\text{avec } (\chi_0^j, \psi_0^j) \in E_Y \text{ et } \int_Y \chi_0^j dy = 0
 \end{aligned}$$

On prend dans la première équation de (4-17) le couple  $(v, \varphi)$  égal à  $\frac{1}{|Y|} (\chi_0^i, \frac{\psi_0^i}{\omega_1})$ , on somme le premier membre, qui est nul, avec l'expression (4-15) des  $K_{ij}^0$ . On vérifie alors facilement que les  $K_{ij}^0$  s'écrivent sous la forme (4-16). La symétrie des  $K_{ij}^0$  est alors évidente, leur coercivité se démontre en utilisant la périodicité des  $(\chi_0^j, \psi_0^j)$  et en procédant comme on l'a fait pour celle des  $K_{ij}^\zeta$  (voir (2-47) à (2-48)).  $\square$

Enfin, on donne la formulation forte (au moins formellement) du problème variationnel (4-16) vérifié par les fonctions  $(\chi_0^j, \psi_0^j)$ , qui s'obtient, comme dans les cas classiques, en prenant des fonctions-tests particulières:

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 & -\frac{\partial}{\partial y_i} \left( \mu \left( \frac{\partial \chi_0^j}{\partial y_i} \right) \right) = 0 && \text{dans chaque } Y_\alpha \ (\alpha = g, l, s) \\
 & \llbracket \chi_0^j \rrbracket_{\alpha\beta} = 0 && \text{sur } \mathcal{A}_{\alpha\beta} \ (\alpha, \beta = g, l, s) \\
 & \llbracket \lambda \frac{\partial}{\partial y_i} (\chi_0^j + \gamma_j) n_i \rrbracket_{\mathcal{E}} = 0 && \text{sur } \mathcal{A}_{\mathcal{E}} \\
 & \lambda_s \frac{\partial}{\partial y_i} (\chi_0^j + \gamma_j) n_i \Big|_s = 0 && \text{sur } \mathcal{A}_s \\
 & \lambda_\ell \frac{\partial}{\partial y_i} (\chi_0^j + \gamma_j) n_i \Big|_\ell = \eta \frac{\partial}{\partial y_i} (\psi_0^j + \omega_1 (\chi_0^j + \gamma_j)) n_i \Big|_\ell && \text{sur } \mathcal{A}_\ell
 \end{aligned} \right\} (4-18) \\
 \\
 & \left. \begin{aligned}
 & -\frac{\partial}{\partial y_i} \left( \frac{\partial \psi_0^j}{\partial y_i} \right) = 0 && \text{dans } Y_g^{(\mathcal{E})} \\
 & \frac{\partial \psi_0^j}{\partial y_i} n_i = -\omega_1 \frac{\partial}{\partial y_i} (\chi_0^j + \gamma_j) n_i \Big|_\mathcal{E} && \text{sur } \mathcal{A}_\mathcal{E}^{(\mathcal{E})} \\
 & \psi_0^j = 0 && \text{sur } \mathcal{A}_g
 \end{aligned} \right\} \\
 & \chi_0^j \text{ et } \psi_0^j \text{ sont } Y\text{-périodiques ; } \int_Y \chi_0^j dy = 0
 \end{aligned}$$

4-1-3) Comportement Limite de  $u^\zeta$ :

## Théoreme 4-1:

La température homogénéisée  $u^\zeta$  converge dans  $H_0^1(\Omega)$  fort, lorsque  $\zeta$  tend vers 0, vers la solution unique  $u^0$  du problème de Dirichlet suivant:

$$(4-19) \quad \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( K_{ij}^0 \frac{\partial u^0}{\partial x_j} \right) = \mathcal{M}_Y(f + \eta hX_g^{(\zeta)}) & \text{dans } \Omega \\ u^0 = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

et on a l'estimation de l'erreur suivante:

$$\|u^\zeta - u^0\|_{H_0^1(Y)} \leq C \zeta$$

## Démonstration:

On note, comme dans (2-45),  $r$  la moyenne sur  $Y$  de la fonction  $f + \eta hX_g^{(\zeta)}$ :

$$r(x) = \frac{1}{|Y|} \int_Y (f + \eta hX_g^{(\zeta)})(x,y) dy = \mathcal{M}_Y(f + \eta hX_g^{(\zeta)})$$

D'après les propriétés des  $K_{ij}^0$ , le problème (4-19) admet bien une solution unique  $u^0$ , de plus puisque la fonction  $r$  est dans  $L^2(\Omega)$ ,  $u^0$  est dans  $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ .

Commençons par montrer que  $u^\zeta$  est bornée indépendamment de  $\zeta$  dans  $H_0^1(\Omega)$ . On note que l'inégalité (2-48) ne montre pas que les  $K_{ij}^\zeta$  sont uniformément elliptiques en  $\zeta$ , la constante  $\gamma$  qui  $\gamma$  intervient peut dépendre de  $\zeta$ ; pour montrer qu'elles sont uniformément elliptiques, on les écrit sous la forme suivante:

$$(4-20) \quad K_{ij}^\zeta = \frac{1}{2} K_{ij}^0 + \frac{1}{2} K_{ij}^0 + \zeta M_{ij}^\zeta$$

où les  $M_{ij}^\zeta$ , d'après la proposition 4-2, sont bornées indépendamment de  $\zeta$ .

Puisque les  $K_{ij}^0$  sont coercives (et indépendantes de  $\zeta$ ) il existe une constante  $\delta$  strictement positive telle que:

$$(4-21) \quad K_{ij}^0 x_i x_j \geq \delta x_i x_i \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$$

Donc, puisque  $\zeta M_{ij}^\zeta$  tend vers zéro avec  $\zeta$ , on a:

$$\frac{1}{2} K_{ij}^0 x_i x_j + \zeta M_{ij}^\zeta x_i x_j \geq 0$$

On conclut donc que, lorsque  $\zeta$  est assez petit, on a:

$$(4-22) \quad K_{ij}^\zeta x_i x_j \geq \frac{1}{2} K_{ij}^0 x_i x_j \geq \frac{1}{2} \delta x_i x_i \quad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

Montrons maintenant que la température homogénéisée  $u^\zeta$  converge vers la solution  $u^0$  du problème (4-19). D'après (2-49) elle vérifie :

$$(4-23) \quad \left\{ \begin{array}{l} u^\zeta \in H_0^1(\Omega) \text{ et } \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ \int_{\Omega} K_{ij}^\zeta \frac{\partial u^\zeta}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega} r v dx \end{array} \right.$$

En prenant  $v$  égale à  $u^\zeta$  et en utilisant (4-22), l'inégalité de Cauchy-Schwarz et celle de Poincaré entraînent que:

$$(4-24) \quad \begin{aligned} c \|u^\zeta\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &\leq \int_{\Omega} K_{ij}^\zeta \frac{\partial u^\zeta}{\partial x_i} \frac{\partial u^\zeta}{\partial x_j} dx \leq \|r\|_{L^2(\Omega)} \|u^\zeta\|_{H_0^1(\Omega)}; \text{ d'où:} \\ \|u^\zeta\|_{H_0^1(\Omega)} &\leq c \end{aligned}$$

On peut alors extraire une sous-suite de  $u^\xi$  qui converge faiblement dans  $H_0^1(\Omega)$ . On va voir que toute la suite converge et qu'on a l'estimation de l'erreur annoncée. La formulation faible associée au problème (4-19) vérifiée par  $u^0$  est :

$$(4-25) \quad \left| \begin{array}{l} u^0 \in H_0^1(\Omega) \quad \text{et} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ \int_{\Omega} K_{ij}^0 \frac{\partial u^0}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega} r v dx \end{array} \right.$$

Les équations (4-23) et (4-25) entraînent que:

$$(4-25) \quad \int_{\Omega} K_{ij}^0 \frac{\partial}{\partial x_i} (u^0 - u^\xi) \frac{\partial v}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega} (K_{ij}^\xi - K_{ij}^0) \frac{\partial u^\xi}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx.$$

En prenant la fonction-test  $v$  égale à  $(u^\xi - u^0)$  on en déduit grâce à (4-21) et l'inégalité de Poincaré que:

$$C \delta \|u^\xi - u^0\|_{H_\delta^1(Y)}^2 \leq \text{Max}_{i,j} |K_{ij}^\xi - K_{ij}^0| \sum_{i,j} \int_{\Omega} \frac{\partial u^\xi}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} (u^\xi - u^0) dx$$

d'où:

$$C \delta \|u^\xi - u^0\|_{H_\delta^1(Y)}^2 \leq \text{Max}_{i,j} |K_{ij}^\xi - K_{ij}^0| \|u^\xi\|_{H_\delta^1(Y)} \|u^\xi - u^0\|_{H_\delta^1(Y)}$$

La proposition 4-2 et l'estimation (4-24) achèvent donc la démonstration:

$$(4-22) \quad \|u^\xi - u^0\|_{H_\delta^1(Y)} \leq C \zeta \quad \square.$$



4-2) Comportement de la solution initiale lorsque  $\zeta$  tend vers zéro:

La température  $T^\zeta$  et la fraction massique translatée  $\omega^\zeta$  sont solutions uniques du problème (1-13) qui s'écrit aussi, en utilisant la définition (1-11) de  $\mu$ , sous la forme suivante:

$$(4-23) \quad \left. \begin{aligned} & (T^\zeta, \omega^\zeta) \in E = H_0^1(\Omega) \times \left\{ \varphi \in H^1(\Omega_g^{(E)}) : \varphi = 0 \text{ sur } \mathcal{A}_g \right\} \\ & a^\zeta((T^\zeta, \omega^\zeta), (v, \varphi)) = L((v, \varphi)) \quad \forall (v, \varphi) \in E \\ & \text{où :} \\ & a^\zeta((u, \chi), (v, \varphi)) = a_0((u, \chi), (v, \varphi)) + \zeta a_1((u, \chi), (v, \varphi)) \quad \forall ((v, \varphi), (u, \chi)) \in E \times E \\ & a_0((u, \chi), (v, \varphi)) = \int_{\Omega_g \cup \Omega_\ell} \omega_1 \lambda \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega_g^{(E)}} \eta \nabla(\omega_1 u + \chi) \cdot \nabla(\omega_1 v + \varphi) \, dx \\ & a_1((u, \chi), (v, \varphi)) = \int_{\Omega_g} \omega_1 \nabla u \cdot \nabla v \, dx \\ & L((v, \varphi)) = \int_{\Omega} \omega_1 f v \, dx + \int_{\Omega_g^{(E)}} h(\omega_1 v + \varphi) \, dx \end{aligned} \right\}$$

Estimations a priori:

On va donner une majoration de  $\| (T^\zeta, \omega^\zeta) \|_E$  en fonction du petit paramètre  $\zeta$  en utilisant les inégalités (1-18) et (1-21) vérifiées par  $a^\zeta(\dots)$  et  $L(\dots)$  qui sont déjà établies dans le premier paragraphe:

$$\begin{aligned} |L((v, \varphi))| &\leq M \| (v, \varphi) \|_E \\ |a^\zeta((v, \varphi), (v, \varphi))| &\geq C_1(\zeta) \| (v, \varphi) \|_E^2 \end{aligned}$$

où seule la constante  $C_1(\zeta)$  dépend de  $\zeta$ , plus précisément :

$$M = \sqrt{2} \max \left( \omega_1 \left\| f + \eta h \chi_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\epsilon)} \right\|_{L^2(\Omega)} ; \left\| h \right\|_{L^2(\Omega)} \right)$$

$$C_1(\zeta) = \text{Min}(\beta(\zeta), \delta(\zeta), \omega_1 \min(\lambda_e, \lambda_g))$$

$$\delta(\zeta) = \frac{\omega_1 \zeta}{2}$$

$$\beta(\zeta) = \eta \frac{\zeta}{2\omega_1 \eta + \zeta}$$

En prenant  $(v, \varphi) = (T^\zeta, \omega^\zeta)$  dans la première équation de (4-23) et en utilisant les inégalités précédentes on obtient:

$$\left\| (T^\zeta, \omega^\zeta) \right\|_E \leq \frac{M}{C_1(\zeta)}$$

Lorsque  $\zeta$  est très petit ( $\zeta \ll 1$ ), la constante  $C_1(\zeta) = \text{Min}(\beta(\zeta), \delta(\zeta))$  vaut  $\beta(\zeta)$  si  $\omega_1$  est supérieur ou égal à 1, sinon elle vaut  $\delta(\zeta)$ . Dans les deux cas elle est de l'ordre de  $\zeta$ :

$$(4-24) \quad \left\| (T^\zeta, \omega^\zeta) \right\|_E \leq \frac{C}{\zeta} \quad \text{et} \quad a^\zeta((T^\zeta, \omega^\zeta), (T^\zeta, \omega^\zeta)) \geq C \zeta \left\| (v, \varphi) \right\|_E^2$$

où la constante  $C$  ne dépend ni de  $\zeta$  ni de  $\epsilon$ .

#### Développement asymptotique:

On cherche  $(T^\zeta, \omega^\zeta)$  sous la forme :

$$(4-25) \quad (T^\zeta, \omega^\zeta) = \zeta^{-1}(T_{-1}, w_{-1}) + (T_0, w_0) + \zeta^1(T_1, w_1) + \zeta^2(T_2, w_2) + \zeta^3(T_3, w_3) + \dots$$

où les termes  $(T_j, w_j)$  sont des éléments "réguliers" de  $E$ .

Pour simplifier l'écriture on notera dans la suite :

$$\left\{ \begin{array}{l} u^{\xi} = (T^{\xi}, \omega^{\xi}) \\ u_j = (T_j, \Psi_j) \quad \forall j \geq -1 \\ \psi = (\nabla, \varphi) \text{ pour les fonctions-tests de } E. \end{array} \right.$$

Pour obtenir les équations vérifiées par les termes  $u_j = (T_j, \Psi_j)$  on reporte (4-25) dans les équations (4-23) et on identifie les termes en puissance de  $\zeta$  :

$$(4-26) \quad \left\{ \begin{array}{ll} a_0(u_{-1}, \psi) = 0 & \forall \psi \in E \\ a_1(u_{-1}, \psi) + a_0(u_0, \psi) = L(\psi) \\ a_1(u_j, \psi) + a_0(u_{j+1}, \psi) = 0 & \forall j \geq 0 \end{array} \right.$$

Etude des équations (4-26) et convergence de (4-25):

On introduit d'abord l'espace  $E_0$ , défini ci-dessous, qui va nous permettre d'étudier les équations (4-26):

$$(4-27) \quad E_0 = \left\{ \psi \in E : a_0(\psi, \psi) = 0 \right\}$$

dont quelques propriétés sont rassemblées dans le lemme suivant:

**Lemme 4-2:**

i) le couple  $\psi = (\nabla, \varphi)$  appartient à  $E_0$  si et seulement si :

- ♦ la fonction  $\nabla$  est constante dans chaque composante connexe de  $\bar{\Omega}_g \cup \bar{\Omega}_q$
- ♦ la fonction  $\omega_1 \nabla + \varphi$  est constante dans chaque composante connexe de  $\Omega_g^{(E)}$

iii)

Le sous-espace  $E_0$  est de Hilbert et l'application  $\psi \rightarrow \sqrt{a_1(\psi, \psi)}$  est une norme dans  $E_0$  équivalente à celle induite par  $E$ .

preuve

i) D'après l'expression (4-23) de  $a_0(\dots)$ , pour  $\psi = (\mathbf{v}, \phi)$  on a:

$$a_0(\psi, \psi) = \int_{\Omega_g \cup \Omega_L} \omega_1 \lambda (\nabla \mathbf{v})^2 dx + \int_{\Omega_g^{(E)}} \eta (\nabla(\omega_1 \mathbf{v} + \phi))^2 dx$$

et l'assertion i) est alors évidente.

ii) Remarquons, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que  $a_0(\psi, \psi) \leq \|\psi\|_E^2$ , il est alors clair que  $E_0$  est un sous espace fermé de  $E$  pour la norme induite, il est donc de Hilbert. Montrons que  $\psi \rightarrow \sqrt{a_1(\psi, \psi)}$  est une norme sur  $E_0$ :

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{v}, \phi)\|_E^2 &= \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{v})^2 dx + \int_{\Omega_g^{(E)}} (\nabla \phi)^2 dx \\ &= \int_{\Omega_g \cup \Omega_L} (\nabla \mathbf{v})^2 dx + \int_{\Omega_g^{(E)}} (\nabla \mathbf{v})^2 + (\nabla \phi)^2 dx + \int_{\Omega_g^{(*)}} (\nabla \mathbf{v})^2 dx \end{aligned}$$

Si  $\psi = (\mathbf{v}, \phi)$  appartient à  $E_0$  alors, d'après i)  $\nabla \mathbf{v}$  est nul dans  $\Omega_g \cup \Omega_L$  et  $\nabla \phi = -\omega_1 \nabla \mathbf{v}$  dans  $\Omega_g^{(E)}$  donc:

$$\|(\mathbf{v}, \phi)\|_E^2 = \int_{\Omega_g^{(E)}} (1 + \omega_1^2) (\nabla \mathbf{v})^2 dx + \int_{\Omega_g^{(*)}} (\nabla \mathbf{v})^2 dx$$

d'où les inégalités suivantes:

$$a_1((\mathbf{v}, \phi), (\mathbf{v}, \phi)) \leq \omega_1 \|( \mathbf{v}, \phi )\|_E^2 \leq (1 + \omega_1^2) a_1((\mathbf{v}, \phi), (\mathbf{v}, \phi)).$$

Ce qui achève la preuve du lemme 4-2.  $\square$

**Théorème 4-2:**

Les termes  $u_j = (T_j, w_j)$  sont déterminés d'une façon unique par les équations (4-26) et on a l'estimation de l'erreur suivante:

$$\left\| u^\zeta - \sum_{j=-1}^{j=m} \zeta^j u_j \right\|_E \leq C \zeta^{m+1} \left\| \nabla u_{m+1} \right\|_E$$

La constante  $C$  est indépendante de  $\zeta$  et de  $\epsilon$ .

Démonstration:

- Détermination de  $u_{-1} = (T_{-1}, w_{-1})$ .

En prenant dans la première équation de (4-26)  $\psi = u_{-1}$  et dans la deuxième une fonction-test quelconque  $\psi \in E_0$  on déduit que :

$$(4-28) \quad \left| \begin{array}{l} u_{-1} \in E_0 \\ a_1(u_{-1}, \psi) = L(\psi) \quad \forall \psi \in E_0 \end{array} \right.$$

Grâce au lemme 4-2, l'existence et l'unicité de la solution  $u_{-1}$  de (4-28) est une conséquence du lemme de Lax-Milgram.

- Détermination de  $u_0 = (T_0, w_0)$ :

La deuxième équation de (4-26) et la troisième prise avec des fonctions-tests appartenant à  $E_0$  montrent que  $u_0$  vérifie :

$$(4-29) \quad \left| \begin{array}{ll} a_0(u_0, \psi) = L(\psi) - a_1(u_{-1}, \psi) & \forall \psi \in E \\ a_1(u_0, \psi) = 0 & \forall \psi \in E_0 \end{array} \right.$$

L'alternative de Fredholm appliquée à la première équation de (4-29) permet d'affirmer qu'il existe une solution  $u_0$  unique à un élément de  $E_0$  près; en effet:

$$a_0(\psi, \psi) = 0 \iff \psi \in E_0$$

et la condition de compatibilité est satisfaite d'après (4-28):

$$L(\psi) - a_1(u_{j-1}, \psi) \quad \forall \psi \in E_0$$

On va maintenant utiliser la deuxième équation de (4-29) pour montrer l'unicité de  $u_0$ . Soient  $\tilde{u}_0$  et  $\hat{u}_0$  deux solutions de (4-29), elle doivent vérifier:

$$\left| \begin{array}{l} \tilde{u}_0 - \hat{u}_0 \in E_0 \text{ et } \forall \psi \in E_0 \\ a_1(\tilde{u}_0, \psi) = 0 \\ a_1(\hat{u}_0, \psi) = 0. \end{array} \right.$$

On fait la différence de ces deux dernières relations et on prend  $\psi = \tilde{u}_0 - \hat{u}_0$ :

$$a_1(\tilde{u}_0 - \hat{u}_0, \tilde{u}_0 - \hat{u}_0) = 0$$

Mais, puisque d'après ii) du lemme 4-2,  $\sqrt{a_1(\dots)}$  est une norme sur  $E_0$ , ceci implique que les fonctions  $\tilde{u}_0$  et  $\hat{u}_0$  sont identiques.

-Détermination des  $u_j = (T_j, w_j)$   $j \geq 1$ :

Les termes  $u_j$  vérifient les équations suivantes :

$$(4-30) \quad \left| \begin{array}{ll} a_0(u_j, \psi) = L(\psi) - a_1(u_{j-1}, \psi) & \forall \psi \in E. \\ a_1(u_j, \psi) = 0 & \forall \psi \in E_0. \end{array} \right.$$

D'une manière analogue à la détermination de  $u_0$ , on montre, par récurrence, l'existence et l'unicité de chaque terme  $u_j$ .

- Estimation de l'erreur :

On pose :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta^\zeta = (\theta_1^\zeta, \theta_2^\zeta) = \sum_{j=-1}^{j=m} \zeta^j u_j \\ \hat{\theta}^\zeta = (\hat{\theta}_1^\zeta, \hat{\theta}_2^\zeta) = \theta^\zeta + \zeta^{m+1} u_{m+1} \\ z^\zeta = (z_1^\zeta, z_2^\zeta) = u^\zeta - \hat{\theta}^\zeta \end{array} \right.$$

En remplaçant  $a^\zeta(\dots)$  et  $\hat{\theta}^\zeta$  par leur expressions on a pour tout  $\psi$  de  $E$  :

$$a^\zeta(\hat{\theta}^\zeta, \psi) = \zeta^{-1} a_0(u_{-1}, \psi) + \sum_{j=-1}^{j=m} \zeta^{j+1} (a_1(u_j, \psi) + a_0(u_{j+1}, \psi)) + \zeta^{m+2} a_1(u_{m+1}, \psi)$$

D'après les équations (4-23) et (4-26) :

$$\begin{aligned} a^\zeta(u^\zeta, \psi) &= L(\psi) \\ a^\zeta(\hat{\theta}^\zeta, \psi) &= L(\psi) + \zeta^{m+2} a_1(u_{m+1}, \psi). \end{aligned}$$

Donc, en prenant le couple de fonctions-tests  $\psi$  égal à  $z^\zeta$ , la différence de ces deux relations donne :

$$a^\zeta(z^\zeta, z^\zeta) = - \zeta^{m+2} a_1(u_{m+1}, \psi) = \int_{\Omega_g} \omega_1 \nabla T_{m+1} \cdot \nabla v \, dx.$$

(rappel:  $u_{m+1} = (T_{m+1}, v_{m+1})$  et  $\psi = (v, \psi)$ )

L'estimation (4-24) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'expression (4-23) de  $a_1(\dots)$  impliquent alors que :

$$(4-31) \quad C \zeta \|z^\zeta\|_E^2 \leq a^\zeta(z^\zeta, z^\zeta) \leq C \omega_1 \zeta^{m+2} \|\nabla T_{m+1}\|_{L^2(\Omega_g)} \|z^\zeta\|_E$$

d'où :

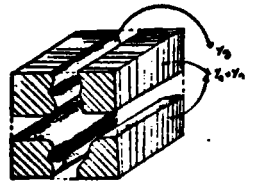
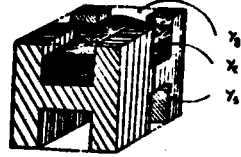
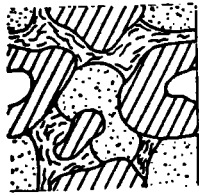
$$\|z^\zeta\|_E = \left\| u^\zeta - \sum_{j=-1}^{j=m} \zeta^j u_j - \zeta^{m+1} u_{m+1} \right\|_E \leq \frac{C}{C} \zeta^{m+1} \|\nabla T_{m+1}\|_{L^2(\Omega_g)}$$

Ce qui achève la démonstration du théorème.  $\square$

4-3) Comportement de  $T_{-1}^{\varepsilon}$  et  $T_0^{\varepsilon}$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro:

Dans cette partie on ajoute une hypothèse supplémentaire portant sur la géométrie du matériau occupant l'ensemble  $\Omega$ . On suppose que :

(4-32) Toutes les composantes connexes de  $\bar{\Omega}_g^{\varepsilon} \cup \bar{\Omega}_s^{\varepsilon}$  ont une intersection avec le bord de  $\Omega$ :



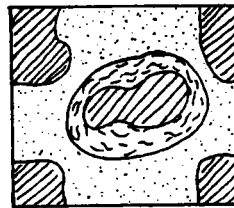
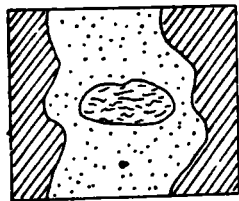
$\bar{\Omega}_s \cup \bar{\Omega}_\varepsilon$



$\bar{\Omega}_g$

Exemples de géométries vérifiant (4-32)

(fig 4-1)



Exemples de géométries ne vérifiant pas (4-32):

(fig 4-2)



L'hypothèse (4-32) a pour but de simplifier l'écriture de l'ensemble  $E_0$  défini par (4-27) et qui intervient dans les équations vérifiées par les couples  $u_{-1}^\varepsilon = (T_{-1}^\varepsilon, \mathbf{w}_{-1}^\varepsilon)$  et  $u_0^\varepsilon = (T_0^\varepsilon, \mathbf{w}_0^\varepsilon)$ . Sous cette hypothèse il devient :

$$(4-33) \quad E_0 = \left\{ (v, \varphi) \in E ; v \equiv 0 \text{ dans } \bar{\Omega}_g^\varepsilon \cup \bar{\Omega}_g^\varepsilon \text{ et } \varphi \equiv -\omega_1 v \text{ dans } \Omega_g^{(F)} \right\}$$

En effet, si le couple  $(v, \varphi) \in E_0$ , alors :

- la fonction  $v \in H_0^1(\Omega)$ , si de plus elle est constante dans chaque composante connexe de  $\bar{\Omega}_g^\varepsilon \cup \bar{\Omega}_g^\varepsilon$ , qui a un contact avec  $\partial(\Omega)$ , elle est  $v$  alors forcément nulle, puisque elle l'est sur le bord  $\partial(\Omega)$ .

- la fonction  $\varphi \in H^1(\Omega_g^{(F)})$  et est nulle sur  $\mathcal{A}_g^\varepsilon$ , donc si  $\omega_1 v + \varphi$  est constante dans chaque composante connexe de  $\Omega_g^{(F)}$ , puisque  $v$  et  $\varphi$  ont des traces identiquement nulles sur  $\mathcal{A}_g^\varepsilon$ , cette constante est forcément nulle.

#### 4-3-1 Comportement de $T_{-1}^\varepsilon$ :

Sous l'hypothèse (4-32) l'équation (4-28) vérifiée par le couple  $u_{-1}^\varepsilon = (T_{-1}^\varepsilon, \mathbf{w}_{-1}^\varepsilon)$  s'écrit :

$$(4-34) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_{-1}^\varepsilon \in H_0^1(\Omega) ; T_{-1}^\varepsilon \equiv 0 \text{ dans } \bar{\Omega}_g^\varepsilon \cup \bar{\Omega}_g^\varepsilon \text{ et :} \\ \int_{\Omega_g^\varepsilon} \nabla T_{-1}^\varepsilon \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega_g^\varepsilon} f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega_g^\varepsilon) \\ \mathbf{w}_{-1}^\varepsilon \equiv -\omega_1 T_{-1}^\varepsilon \quad \text{dans } \Omega_g^{(F)} \end{array} \right.$$

ou sous la formulation forte suivante :

$$(4-35) \quad \left\{ \begin{array}{ll} T_{-1}^\varepsilon = 0 & \text{dans } \bar{\Omega}_g^\varepsilon \cup \bar{\Omega}_g^{\varepsilon^*} \\ -\Delta T_{-1}^\varepsilon = f & \text{dans } \Omega_g^\varepsilon \\ T_{-1}^\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial(\Omega_g^\varepsilon) \\ \tilde{w}_{-1}^\varepsilon = -\omega_1 T_{-1}^\varepsilon & \text{dans } \Omega_g^{\varepsilon^*} \end{array} \right.$$

D'après les relations précédentes et puisque, par définition,  $\Omega_g^{\varepsilon^*}$  et  $\Omega_g^{\varepsilon^*}$  forment une partition de  $\Omega_g^\varepsilon$ , la restriction de  $T_{-1}^\varepsilon$  à  $\Omega_g^{\varepsilon^*}$  (resp. à  $\Omega_g^{\varepsilon^*}$ ) est dans  $H_0^1(\Omega_g^{\varepsilon^*})$  (resp. dans  $H_0^1(\Omega_g^{\varepsilon^*})$ ). Donc, si on désigne par  $\tilde{w}_{-1}^\varepsilon$  le prolongement par zéro de  $w_{-1}^\varepsilon$  dans  $\Omega \setminus \Omega_g^{\varepsilon^*}$ , la dernière égalité de (4-35) implique que:

$$\tilde{w}_{-1}^\varepsilon \equiv -\omega_1 T_{-1}^\varepsilon \text{ dans } H_0^1(\Omega).$$

Le comportement du couple  $(T_{-1}^\varepsilon, \tilde{w}_{-1}^\varepsilon)$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro est donné par la proposition suivante:

**Proposition 4-3:**

*Le couple  $(T_{-1}^\varepsilon, \tilde{w}_{-1}^\varepsilon)$  vérifie les inégalités :*

$$\begin{aligned} \|T_{-1}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} &\leq C\varepsilon^2 & ; & \quad \| \nabla T_{-1}^\varepsilon \|_{L^2(\Omega)} \leq C\varepsilon \\ \|\tilde{w}_{-1}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} &\leq C\varepsilon^2 & ; & \quad \| \nabla \tilde{w}_{-1}^\varepsilon \|_{L^2(\Omega)} \leq C\varepsilon \end{aligned}$$

démonstration:

En prenant la fonction test  $v = T_{-1}^\varepsilon$  dans (4-34) on a, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz:

$$\| \nabla T_{-1}^\varepsilon \|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \| f \|_{L^2(\Omega)} \| T_{-1}^\varepsilon \|_{L^2(\Omega)}$$

Mais, comme dans le lemme 3-2, puisque  $T_{-1}^\varepsilon$  est de trace nulle sur  $\partial(\Omega_g^\varepsilon)$ , on a l'inégalité de Poincaré suivante:

$$\|T_{-1}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C\varepsilon \|\nabla T_{-1}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}$$

donc:

$$\|\nabla T_{-1}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} C\varepsilon \|\nabla T_{-1}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}$$

Les deux premières estimations de la proposition, sont donc démontrées. Les deux dernières estimations sont alors triviales puisque  $\tilde{w}_{-1}^\varepsilon \equiv -\omega_1 T_{-1}^\varepsilon$ .  $\square$

#### Remarque 4-1:

*Si le gaz est sous forme de bulles strictement incluses dans le domaine  $\Omega$  ( le gaz n'a aucun contact avec le bord extérieur  $\partial(\Omega)$  :  $\bar{\Omega}_g^\varepsilon \subset \Omega$  (figure 4-3) ), alors le couple  $(w_{-1}^\varepsilon, T_{-1}^\varepsilon)$  peut être déterminé à l'aide de fonctions vérifiant un problème dans la cellule de base  $Y$ . Dans ce cas l'équation (4-35) vérifiée par  $T_{-1}^\varepsilon$  dans  $\Omega_g^\varepsilon$  consiste en  $M^\varepsilon$  équations, où l'on désigne par  $M^\varepsilon$  le nombre de composantes connexes de  $\Omega_g^\varepsilon$ :*

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta T_{-1}^\varepsilon = f & \text{dans } \Omega_g^{k\varepsilon} \\ T_{-1}^\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial(\Omega_g^{k\varepsilon}) \\ \\ T_{-1}^\varepsilon \equiv 0 & \text{dans } \bar{\Omega}_g^\varepsilon \cup \bar{\Omega}_g^\varepsilon \\ \\ w_{-1}^\varepsilon \equiv -\omega_1 T_{-1}^\varepsilon & \text{dans } \Omega_g^{(k)\varepsilon} \end{array} \right. \quad (k=1 \dots M^\varepsilon)$$

Sans restreindre la généralité, on suppose que  $Y_g$  est constitué de deux composantes connexes (ou de l'une des deux), l'une "humide":  $Y_g^{(h)}$  et l'autre "sèche":  $Y_g^{(s)}$ . Si on note  $\theta^{k\epsilon}$  la solution unique du problème suivant:

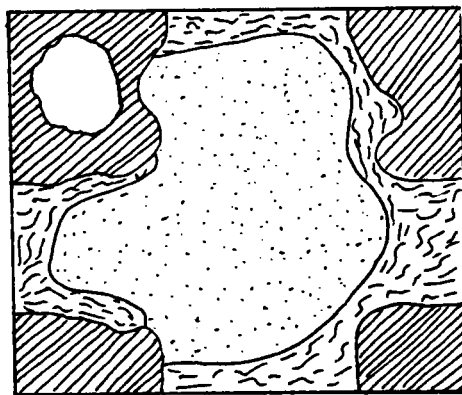
$$\begin{cases} -\Delta \theta^{k\epsilon}(y) = f(\epsilon y + 0_k^\epsilon) & \text{dans } Y_g \\ \theta^{k\epsilon} = 0 & \text{sur } \partial(Y_g) \\ \theta^{k\epsilon} \equiv 0 & \text{dans } Y_s \cup Y_t \end{cases}$$

où  $0_k^\epsilon$  désigne l'origine de la  $k$ ème cellule  $C_k^\epsilon$  traduite de  $\epsilon Y$ , alors:

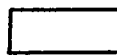
$$T_{-1}^\epsilon(x) = \epsilon^2 \theta^{k\epsilon}\left(\frac{x - 0_k^\epsilon}{\epsilon}\right) \quad x \in \Omega \cap C_k^\epsilon$$

$$W_{-1}^\epsilon(x) = -\epsilon^2 \omega_1 \theta^{k\epsilon}\left(\frac{x - 0_k^\epsilon}{\epsilon}\right) \quad x \in \Omega_g^{(s)\epsilon} \cap C_k^\epsilon$$

De plus, si la fonction  $f$  (donnée) est une constante dans chaque  $\Omega_g^{(h)\epsilon}$  et  $\Omega_g^{(s)\epsilon}$ , alors la solution  $\theta^{k\epsilon}$  ne dépend ni du paramètre  $\epsilon$  ni de l'indice  $k$ ; si elle est seulement  $\epsilon Y$ -périodique ( $f(\epsilon y + 0_k^\epsilon) = f(\epsilon y)$ ), alors  $\theta^{k\epsilon}$  dépend de  $\epsilon$  mais pas de  $k$ .  $\square$



$Y_s \cup Y_t$



$Y_g^{(s)}$



$Y_g^{(h)}$

(fig 4-3)

4-3-2) Comportement de  $T_0^\varepsilon$  :

Sous l'hypothèse (4-32) l'équation (4-28) vérifiée par le couple  $u_0^\varepsilon = (T_0^\varepsilon, w_0^\varepsilon)$  s'écrit:

$$\begin{aligned}
 & (T_0^\varepsilon, w_0^\varepsilon) \in E^\varepsilon \text{ et :} \\
 & \bullet \nabla(v, \varphi) \in E^\varepsilon \\
 & \int_{\Omega_g^\varepsilon \cup \Omega_l^\varepsilon} \omega_1 \lambda \nabla T_0^\varepsilon \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega_g^{(T)^\varepsilon}} \eta \nabla(\omega_1 T_0^\varepsilon + w_0^\varepsilon) \cdot \nabla(\omega_1 v + \varphi) \, dx = \\
 (4-36) \quad & = \int_{\Omega} \omega_1 f^\varepsilon v \, dx + \int_{\Omega_g^{(T)^\varepsilon}} \eta h^\varepsilon(\omega_1 v + \varphi) \, dx - \int_{\Omega_g^\varepsilon} \omega_1 \nabla T_{-1}^\varepsilon \cdot \nabla v \, dx \\
 & \bullet \nabla v \in H_0^1(\Omega_g^\varepsilon) \\
 & \int_{\Omega_g^\varepsilon} \nabla T_0^\varepsilon \cdot \nabla v \, dx = 0 .
 \end{aligned}$$

ou sous la formulation forte suivante :

$$\begin{aligned}
 & -\lambda_\alpha \Delta T_0^\varepsilon = f^\varepsilon && \text{dans } \Omega_\alpha^\varepsilon \ (\alpha = l, s) \\
 & -\Delta T_0^\varepsilon = 0 && \text{dans } \Omega_g^\varepsilon \\
 & [T_0^\varepsilon]_{\alpha\beta} = 0 && \text{sur } \mathcal{A}_{\alpha\beta}^\varepsilon \ (\alpha, \beta = g, l, s) \\
 & \left[ \lambda \frac{\partial T_0^\varepsilon}{\partial n} \right]_{\Gamma_s} = 0 && \text{sur } \mathcal{A}_{\Gamma_s}^\varepsilon \\
 & \lambda_s \frac{\partial T_0^\varepsilon}{\partial n} \Big|_s = \frac{\partial T_{-1}^\varepsilon}{\partial n} \Big|_g && \text{sur } \mathcal{A}_{\Gamma_s}^\varepsilon \\
 (4-37) \quad & \lambda_l \frac{\partial T_0^\varepsilon}{\partial n} \Big|_l = \frac{\partial T_{-1}^\varepsilon}{\partial n} \Big|_g + \eta \frac{\partial w_0^\varepsilon}{\partial n} \Big|_g + \eta \omega_1 \frac{\partial T_0^\varepsilon}{\partial n} \Big|_g && \text{sur } \mathcal{A}_{\Gamma_s}^\varepsilon \\
 & T_0^\varepsilon = 0 && \text{sur } \partial(\Omega) \\
 & -\Delta w_0^\varepsilon = h^\varepsilon && \text{dans } \Omega_g^{(T)^\varepsilon} \\
 & w_0^\varepsilon = 0 && \text{sur } \mathcal{A}_{\Gamma_s}^\varepsilon \text{ et } \Gamma_g^{(T)^\varepsilon} \\
 & \frac{\partial w_0^\varepsilon}{\partial n} = -\omega_1 \frac{\partial T_0^\varepsilon}{\partial n} \Big|_g && \text{sur } \mathcal{A}_{\Gamma_s}^{(T)^\varepsilon}
 \end{aligned}$$

**Estimations a priori:**

On remplace l'hypothèse (4-32) par la suivante qui est plus forte et n'est utile que pour la démonstration du lemme 5-3 :

(4-38) la composante gazeuse n'a aucun contact avec le bord de  $\Omega$  :  $\bar{\Omega}_g^\varepsilon \subset \Omega$ . (fig. 4-3)

Pour obtenir des estimations a priori on commence par démontrer les lemmes suivants :

**Lemme 4-3:**

*Sous l'hypothèse (4-38) il existe un opérateur de prolongement  $\mathcal{P}^\varepsilon \in \mathcal{L}(\mathcal{V}^\varepsilon, H_0^1(\Omega))$ , où :*

$$\mathcal{V}^\varepsilon = \left\{ v \in H^1(\Omega_g^\varepsilon \cup \Omega_l^\varepsilon); v = 0 \text{ sur } \partial(\Omega_g^\varepsilon \cup \Omega_l^\varepsilon) \cap \partial(\Omega) \right\}, \text{ tel que :}$$

$$\| \nabla \mathcal{P}^\varepsilon v \|_{L^2(\Omega)} \leq C \| \nabla v \|_{L^2(\Omega_g^\varepsilon \cup \Omega_l^\varepsilon)} \quad \forall v \in \mathcal{V}^\varepsilon$$

démonstration:

En considérant le gaz  $\Omega_g^\varepsilon$  comme des trous dans  $\Omega$ , ce lemme a été démontré par D.CIORANESCU et J. SAINT JEAN PAULIN [9].

**Lemme 4-4:**

*Sous l'hypothèse (4-38) on a l'inégalité suivante :*

$$\forall v \in H_0^1(\Omega_g^{\varepsilon/2}); \quad \| v \|_{L^2(\Omega_g^{\varepsilon/2})} \leq C \left( \varepsilon^{\frac{1}{4}} \| \nabla v \|_{L^2(\Omega_g^{\varepsilon/2})} + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \| v \|_{L^2(\Omega_g^{\varepsilon/2})} \right)$$

démonstration:

On suit la démonstration d'un lemme analogue de C. CONCA dans [10] (lemme 4.1). On se ramène

à la cellule de base comme dans la démonstration de la proposition 4-3 et on utilise le fait que l'application:

$$(4-39) \quad \psi \longrightarrow \left( \left\| \nabla \psi \right\|_{L^2(Y_g^{\mathbb{Q}})}^2 + \left\| \psi \right\|_{L^2(\partial Y_g^{\mathbb{Q}})}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

est une norme sur  $H_0^1(Y_g^{\mathbb{Q}})$  équivalente à la norme usuelle. Par le changement de variables (usuel):  $y = \frac{x - 0_k}{\varepsilon}$ , on obtient l'inégalité recherchée après sommation sur l'indice k.

**Lemme 4-5:**

*Sous l'hypothèse (4-38) la solution  $u_0^\varepsilon = (T_0^\varepsilon, w_0^\varepsilon)$  vérifie les inégalités suivantes :*

$$i) \quad \left\| T_0^\varepsilon \right\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \left\| \nabla T_0^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega_g^\varepsilon \cup \Omega_p^\varepsilon)}$$

$$ii) \quad \left\| T_0^\varepsilon \right\|_{L^2(\partial \Omega_g^\varepsilon)} \leq \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}} \left\| \nabla T_0^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega_g^\varepsilon \cup \Omega_p^\varepsilon)}$$

$$iii) \quad \left\| w_0^\varepsilon + \omega_1 T_0^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega_g^{\mathbb{Q}})} \leq C \left( \varepsilon^{\frac{1}{2}} \left\| \nabla (w_0^\varepsilon + \omega_1 T_0^\varepsilon) \right\|_{L^2(\Omega_g^{\mathbb{Q}})} + \left\| \nabla T_0^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega_g^\varepsilon \cup \Omega_p^\varepsilon)} \right)$$

démonstration:

i) Soit  $\mathcal{P}^\varepsilon T_0^\varepsilon$  le prolongement du lemme 4-3 de la restriction de  $T_0^\varepsilon$  à  $\Omega_g^\varepsilon \cup \Omega_p^\varepsilon$ ; la restriction de  $(T_0^\varepsilon - \mathcal{P}^\varepsilon T_0^\varepsilon)$  à  $\Omega_g^\varepsilon$  est alors dans  $H_0^1(\Omega_g^\varepsilon)$ , on peut donc la prendre comme fonction test dans la deuxième équation de (4-36), d'où l'on déduit:

$$\int_{\Omega_g^\varepsilon} (\nabla T_0^\varepsilon)^2 dx = \int_{\Omega_g^\varepsilon} \nabla T_0^\varepsilon \nabla (\mathcal{P}^\varepsilon T_0^\varepsilon) dx.$$

Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz et au lemme 4-3 on a :

$$\int_{\Omega_g^\varepsilon} (\nabla T_0^\varepsilon)^2 dx \leq \left\| \nabla T_0^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega_g^\varepsilon)} \left\| \nabla (\mathcal{P}^\varepsilon T_0^\varepsilon) \right\|_{L^2(\Omega_g^\varepsilon)} \leq C \left\| \nabla T_0^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega_g^\varepsilon)} \left\| \nabla T_0^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega_g^\varepsilon \cup \Omega_p^\varepsilon)}$$

d'où: 
$$\left\| \nabla T_0^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega_g^\varepsilon)}^2 \leq C^2 \left\| \nabla T_0^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega_g^\varepsilon \cup \Omega_p^\varepsilon)}^2.$$

En ajoutant  $\|\nabla T_0^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_g^\varepsilon \cup \Omega_p^\varepsilon)}^2$  aux deux membres de cette inégalité on achève la démonstration de i).

ii) Pour démontrer cette inégalité on se ramène à la cellule de base  $Y$ , en utilisant les fonctions:  $\hat{T}_0^{k\varepsilon}(y) = T_0^\varepsilon(\varepsilon y + O_k^\varepsilon)$  définies sur  $Y$ . Les  $\hat{T}_0^{k\varepsilon}$  sont alors dans l'espace  $H^1(Y)$  et grâce à la continuité de la trace on a :

$$\int_{\partial(Y_g)} (\hat{T}_0^{k\varepsilon})^2 d\sigma_y \leq C \left( \int_Y (\hat{T}_0^{k\varepsilon})^2 dy + \int_Y (\nabla_y \hat{T}_0^{k\varepsilon})^2 dy \right).$$

On fait dans cette inégalité le changement de variable  $y = \frac{x - O_k^\varepsilon}{\varepsilon}$  et on somme de  $k=1$  au nombre  $N^\varepsilon$  de cellules  $C_k^\varepsilon$  recouvrant  $\Omega$  :

$$\varepsilon^{1-n} \sum_{k=1}^{k=N^\varepsilon} \int_{\partial(\Omega_g^\varepsilon \cap C_k^\varepsilon)} (T_0^\varepsilon)^2 d\sigma_x \leq C \varepsilon^{-n} \sum_{k=1}^{k=N^\varepsilon} \left( \int_{C_k^\varepsilon} (T_0^\varepsilon)^2 dx + \varepsilon^2 \int_{C_k^\varepsilon} (\nabla_x T_0^\varepsilon)^2 dx \right)$$

d'où :

$$\varepsilon \int_{\partial(\Omega_g^\varepsilon)} (T_0^\varepsilon)^2 d\sigma_x \leq C \left( \|T_0^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon \|\nabla T_0^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \leq C \|T_0^\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)}^2$$

Avec le résultat i) on achève la preuve de ii).

$$\varepsilon \int_{\partial(\Omega_g^\varepsilon)} (T_0^\varepsilon)^2 d\sigma_x \leq C \|\nabla T_0^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_g^\varepsilon \cup \Omega_p^\varepsilon)}^2$$

iii) On prend  $v = w_0^\varepsilon + \omega_1 T_0^\varepsilon$  dans le lemme 4-4, en se souvenant que  $w_0^\varepsilon$  est de trace nulle sur l'interface  $\mathcal{A}_g^\varepsilon$  on a :

$$\|w_0^\varepsilon + \omega_1 T_0^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_g^\varepsilon)} \leq C \left( \varepsilon^{\frac{1}{4}} \|\nabla(w_0^\varepsilon + \omega_1 T_0^\varepsilon)\|_{L^2(\Omega_g^\varepsilon)} + \omega_1 \varepsilon^{\frac{1}{2}} \|T_0^\varepsilon\|_{L^2(\mathcal{A}_g^\varepsilon)} \right)$$

en utilisant ii) on a le résultat voulu.  $\square$



**Proposition 4-4:**

*Sous l'hypothèse (4-38) la solution  $u_0^\varepsilon = (T_0^\varepsilon, \mathbf{w}_0^\varepsilon)$  vérifie les inégalités suivantes :*

$$i) \quad \|T_0^\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C$$

$$ii) \quad \|\mathbf{w}_0^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_g^{\mathcal{E}^*})} \leq C\varepsilon \quad \text{et} \quad \|\nabla \mathbf{w}_0^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_g^{\mathcal{E}^*})} \leq C$$

démonstration:

i) Puisque la restriction de  $T_{-1}^\varepsilon$  à  $\Omega_g^\varepsilon$  est dans  $H_0^1(\Omega_g^\varepsilon)$ , la deuxième équation de (4-36) implique que:

$$\int_{\Omega_g^\varepsilon} \nabla T_{-1}^\varepsilon \cdot \nabla T_0^\varepsilon \, dx = 0$$

Compte-tenu de l'égalité précédente, en prenant  $(T_0^\varepsilon, \mathbf{w}_0^\varepsilon)$  comme fonction test  $(v, \varphi)$  dans la première équation du problème variationnel (4-36), on a :

$$\int_{\Omega_g^\varepsilon \cup \Omega_g^\varepsilon} \omega_1 \lambda (\nabla T_0^\varepsilon)^2 \, dx + \int_{\Omega_g^{\mathcal{E}^*}} \eta \nabla (\omega_1 T_0^\varepsilon + \mathbf{w}_0^\varepsilon)^2 \, dx = \int_{\Omega} \omega_1 f T_0^\varepsilon \, dx + \int_{\Omega_g^{\mathcal{E}^*}} \eta h (\omega_1 T_0^\varepsilon + \mathbf{w}_0^\varepsilon) \, dx$$

Sachant que les constantes  $\omega_1$ ,  $\lambda_\alpha$  et  $\eta$  sont strictement positives, L'inégalité de Cauchy-Swarz donne alors:

$$\|\nabla T_0^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_g^\varepsilon \cup \Omega_g^\varepsilon)}^2 + \|\nabla (\omega_1 T_0^\varepsilon + \mathbf{w}_0^\varepsilon)\|_{L^2(\Omega_g^{\mathcal{E}^*})}^2 \leq C \left( \|T_0^\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} + \|\omega_1 T_0^\varepsilon + \mathbf{w}_0^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_g^{\mathcal{E}^*})} \right)$$

$$\text{avec } C = \frac{\max(\omega_1 \|f\|_{L^2(\Omega)} ; \eta \|h\|_{L^2(\Omega)})}{\min(\omega_1 \lambda_g ; \omega_1 \lambda_e ; \eta)}$$

L'application des résultats i) et iii) du lemme 4-5 entraîne que :

$$\begin{aligned} & \left\| \nabla T_0^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega_g^\varepsilon \cup \Omega_p^\varepsilon)}^2 + \left\| \nabla (\mathbf{w}_0^\varepsilon + \omega_1 T_0^\varepsilon) \right\|_{L^2(\Omega_g^\varepsilon)}^2 \leq \\ & \leq C \left( \left\| \nabla T_0^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega_g^\varepsilon \cup \Omega_p^\varepsilon)}^2 + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \left\| \nabla (\mathbf{w}_0^\varepsilon + \omega_1 T_0^\varepsilon) \right\|_{L^2(\Omega_g^\varepsilon)} \right) \\ & \leq C \left( \left\| \nabla T_0^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega_g^\varepsilon \cup \Omega_p^\varepsilon)}^2 + \left\| \nabla (\mathbf{w}_0^\varepsilon + \omega_1 T_0^\varepsilon) \right\|_{L^2(\Omega_g^\varepsilon)} \right) \\ & \leq C \sqrt{2} \left( \left\| \nabla T_0^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega_g^\varepsilon \cup \Omega_p^\varepsilon)}^2 + \left\| \nabla (\mathbf{w}_0^\varepsilon + \omega_1 T_0^\varepsilon) \right\|_{L^2(\Omega_g^\varepsilon)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

On en déduit, d'une part, que :

$$\left\| \nabla T_0^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega_g^\varepsilon \cup \Omega_p^\varepsilon)}^2 \leq C$$

donc, d'après i) du lemme 4-5 :

$$\left\| T_0^\varepsilon \right\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \cdot \left\| \nabla T_0^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega_g^\varepsilon \cup \Omega_p^\varepsilon)} \leq C$$

et d'autre part :

$$\left\| \nabla (\mathbf{w}_0^\varepsilon + \omega_1 T_0^\varepsilon) \right\|_{L^2(\Omega_g^\varepsilon)}^2 \leq C$$

mais :

$$\left\| \nabla \mathbf{w}_0^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega_g^\varepsilon)} - \omega_1 \left\| \nabla T_0^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega_g^\varepsilon)} \leq \left\| \nabla (\mathbf{w}_0^\varepsilon + \omega_1 T_0^\varepsilon) \right\|_{L^2(\Omega_g^\varepsilon)} \leq C$$

donc

$$\left\| \nabla \mathbf{w}_0^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega_g^\varepsilon)} \leq C + \omega_1 \left\| \nabla T_0^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega_g^\varepsilon)} \leq C + C \cdot \left\| T_0^\varepsilon \right\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C''.$$

Enfin, puisque  $\mathbf{w}_0^\varepsilon$  appartient à l'espace  $\mathcal{W}^\varepsilon$ , d'après le lemme 3-1 on a :

$$\left\| \mathbf{w}_0^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega_g^\varepsilon)} \leq C' \varepsilon \left\| \nabla \mathbf{w}_0^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega_g^\varepsilon)} \leq C \varepsilon.$$

Ce qui achève la démonstration de la proposition.  $\square$

**Remarque 4-2**

On peut montrer, pour tous les termes  $u_j^\varepsilon = (T_j^\varepsilon, w_j^\varepsilon)$  ( $j \geq 1$ ) du développement (4-25), des estimations analogues à celles établies pour  $(T_0^\varepsilon, w_0^\varepsilon)$  dans la proposition 4-4. Plus précisément:

Sous l'hypothèse (4-38) les solutions  $u_j^\varepsilon = (T_j^\varepsilon, w_j^\varepsilon)$  ( $j \geq 1$ ) des équations (4-30) vérifient les estimations:

$$\begin{aligned} \text{i) } & \|T_j^\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \\ \text{ii) } & \|w_j^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_g^{\varepsilon^*})} \leq C\varepsilon \quad \text{et} \quad \|\nabla w_j^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_g^{\varepsilon^*})} \leq C \end{aligned}$$

En effet, les équations (4-30) vérifiées par les termes  $u_j$  sont analogues à celle vérifié par le couple  $(T_0^\varepsilon, w_0^\varepsilon)$ . Elles s'écrivent (sous l'hypothèse (4-32) :

$$\forall j \geq 1 : (T_j^\varepsilon, w_j^\varepsilon) \in E^\varepsilon \text{ et :}$$

$$\bullet \nabla(v, \varphi) \in E^\varepsilon$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_g^\varepsilon \cup \Omega_g^\varepsilon} \omega_1 \lambda \nabla T_j^\varepsilon \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega_g^{\varepsilon^*}} \eta \nabla(\omega_1 T_j^\varepsilon + w_j^\varepsilon) \cdot \nabla(\omega_1 v + \varphi) \, dx = \\ = \int_{\Omega} \omega_1 f^\varepsilon v \, dx + \int_{\Omega_g^{\varepsilon^*}} \eta h^\varepsilon(\omega_1 v + \varphi) \, dx - \int_{\Omega_g^\varepsilon} \omega_1 \nabla T_{j-1}^\varepsilon \cdot \nabla v \, dx \end{aligned}$$

$$\bullet \nabla v \in H_0^1(\Omega_g^\varepsilon)$$

$$\int_{\Omega_g^\varepsilon} \nabla T_j^\varepsilon \cdot \nabla v \, dx = 0.$$

Par récurrence, en utilisant les estimations obtenues pour  $(T_0^\varepsilon, w_0^\varepsilon)$ , on montre aisément le résultat voulu en procédant d'une façon analogue à la démonstration de la proposition 4-4.  $\square$

**Passage à la limite:**

On note:

- $X(\mathcal{O})$  fonction caractéristique de l'ensemble  $\mathcal{O}$ .
- $\tilde{\varphi}$  le prolongement par zéro de  $\varphi$  à  $\Omega$ .

$$\mu_0^\varepsilon(x) = \begin{cases} \lambda_\alpha & \text{si } x \in \Omega_\alpha^\varepsilon \quad (\alpha = l, s) \\ \eta\omega_1 & \text{si } x \in \Omega_g^{(E)\varepsilon} \\ 0 & \text{si } x \in \Omega_g^{(*)\varepsilon} \end{cases}$$

(4-44) 
$$Q^\varepsilon = \begin{cases} \mu_0^\varepsilon \nabla T_0^\varepsilon & \text{dans } \Omega \setminus \Omega_g^{(*)\varepsilon} \\ \vec{0} & \text{dans } \Omega_g^{(*)\varepsilon} \end{cases} = \mu_0^\varepsilon \nabla T_0^\varepsilon X(\Omega \setminus \Omega_g^{(*)\varepsilon})$$

- $P^\varepsilon = \tilde{\nabla w_0^\varepsilon}$  = le prolongement par zéro de  $\nabla w_0^\varepsilon$  dans  $\Omega \setminus \Omega_g^{(E)\varepsilon}$

**Théorème 4-3:**

*Sous l'hypothèse (4-38), la solution  $T_0^\varepsilon$  du problème (4-36) ou (4-37) converge faiblement dans  $H_0^1(\Omega)$  vers l'unique solution  $u^0$  de (4-19):*

$$\begin{cases} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( K_{ij}^0 \frac{\partial u^0}{\partial x_j} (x) \right) = r(x) & \text{dans } \Omega \\ u^0 = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où:

$$r(x) = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left( f + \eta h X_g^{(E)}(x, y) \right) dy$$

$$K_{ij}^0 = \frac{1}{|Y|} \int_{Y_s \cup Y_l} \lambda \frac{\partial}{\partial y_i} \left( \chi_0^j + y_j \right) dy + \frac{\eta\omega_1}{|Y|} \int_{Y_g^{(E)}} \frac{\partial}{\partial y_i} \left( \chi_0^j + y_j + \frac{\psi_0^j}{\omega_1} \right) dy$$

démonstration:

D'après la première équation de (4-36), en prenant un couple de fonctions-test  $(v, 0)$ , la solution  $(T_0^\varepsilon, v_0^\varepsilon)$  vérifie pour tout  $v$  appartenant à  $H_0^1(\Omega)$  la relation suivante où l'on utilise les notations (4-44):

$$(4-45) \quad \int_{\Omega} Q^\varepsilon \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} \eta P^\varepsilon \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} (f + \eta h X_g^{(E^\varepsilon)}) v \, dx - \int_{\Omega_g^\varepsilon} \omega_1 \nabla T_{-1}^\varepsilon \cdot \nabla v \, dx$$

Puisque  $\mu_0^\varepsilon$  est bornée, d'après la proposition 4-4 les fonctions  $Q^\varepsilon$  et  $P^\varepsilon$  sont bornées dans  $L^2(\Omega)$ , donc, quitte à extraire des sous-suites, il existe  $Q^*$  et  $P^*$  tels que:

$$Q^\varepsilon \longrightarrow Q^* \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible}$$

$$P^\varepsilon \longrightarrow P^* \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible}$$

De plus on sait, par la relation (3-11), que  $(f^\varepsilon + h^\varepsilon X_g^{(E^\varepsilon)})$  converge faiblement vers sa moyenne sur  $Y$  dans  $L^2(\Omega)$ :

$$(f^\varepsilon + h^\varepsilon X_g^{(E^\varepsilon)}) \longrightarrow r(x) = \frac{1}{|Y|} \int_Y (f + \eta h X_g^{(E^\varepsilon)})(x, y) dy$$

Enfin, d'après la proposition 4-3 :

$$\nabla T_{-1}^\varepsilon \longrightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega).$$

On peut donc passer à la limite dans l'équation (4-45), ce qui donne:

$$(4-46) \quad \int_{\Omega} (Q_i^* + \eta P_i^*) \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx = \int_{\Omega} r v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Il nous reste maintenant l'identification de la limite  $(Q^* + \eta P^*)$ , c'est l'objectif de ce qui suit. Posons:

$$(4-47) \quad \begin{cases} \chi_0^\varepsilon(x) = x_j + \varepsilon \chi_0^j(\frac{x}{\varepsilon}) \\ \psi_0^\varepsilon(x) = \varepsilon \psi_0^j(\frac{x}{\varepsilon}) \end{cases}$$

où les  $(\chi_0^j, \psi_0^j)$  sont les solutions uniques du problème (4-16) ou (4-18). Un changement de variables  $y = \frac{x}{\varepsilon}$  dans les équations (4-18), donne les équations suivantes, vérifiées par les fonctions  $(\chi_0^\varepsilon, \psi_0^\varepsilon)$ :

$$(4-48) \quad \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \mu_0^\varepsilon \frac{\partial \chi_0^\varepsilon}{\partial x_i} \right) = 0 & \text{dans } \Omega_\alpha^\varepsilon \ (\alpha = g, l, s) \\ \llbracket \chi_0^\varepsilon \rrbracket_{\alpha\beta} = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{\alpha\beta}^\varepsilon \ (\alpha, \beta = g, l, s) \\ \llbracket \mu_0^\varepsilon \frac{\partial \chi_0^\varepsilon}{\partial n} \rrbracket_{\mathcal{E}} = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{\mathcal{E}}^\varepsilon \\ \lambda_s \frac{\partial \chi_0^\varepsilon}{\partial n} \Big|_s = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_s^\varepsilon \\ \lambda_l \frac{\partial \chi_0^\varepsilon}{\partial n} \Big|_l = \eta \left( \frac{\partial \psi_0^\varepsilon}{\partial n} + \omega_1 \frac{\partial \chi_0^\varepsilon}{\partial n} \right) \Big|_l & \text{sur } \mathcal{A}_l^\varepsilon \\ \\ -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \psi_0^\varepsilon}{\partial x_i} \right) = 0 & \text{dans } \Omega_g^{(\varepsilon)} \\ \frac{\partial \psi_0^\varepsilon}{\partial n} = -\omega_1 \frac{\partial \chi_0^\varepsilon}{\partial n} \Big|_g & \text{sur } \mathcal{A}_g^{(\varepsilon)} \\ \psi_0^\varepsilon = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_g^\varepsilon \end{array} \right.$$

Comme ce qui a été fait pour obtenir le problème variationnel (1-13) en  $(T^\varepsilon, \omega^\varepsilon)$ , on obtient par des intégrations par parties :

$$(4-49) \quad \int_{\Omega \setminus \Omega_g^{(\varepsilon)}} \mu_0^\varepsilon \nabla \chi_0^\varepsilon \nabla v \, dx + \int_{\Omega_g^{(\varepsilon)}} \eta \nabla \psi_0^\varepsilon \nabla v \, dx = 0 \quad \forall v \in \mathcal{V}$$

$$(4-50) \quad \int_{\Omega_g^{(\varepsilon)}} \nabla \psi_0^\varepsilon \nabla \psi \, dx + \int_{\Omega_g^{(\varepsilon)}} \omega_1 \nabla \chi_0^\varepsilon \nabla \psi \, dx = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{W}^\varepsilon$$

Soit  $\theta \in \mathcal{D}(\Omega)$ ; en prenant le couple de fonctions-tests  $(v, \psi)$  égal à  $(\theta \chi_0^\varepsilon, 0)$  dans la première équation de (4-36) vérifiée par  $(T_0^\varepsilon, \psi_0^\varepsilon)$ , puis, la fonction  $v$  égale à  $\theta T_0^\varepsilon$  dans la relation (4-49), on obtient:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left( Q^\varepsilon + \eta P^\varepsilon \right) \nabla \chi_0^\varepsilon \theta \, dx + \int_{\Omega} \chi_0^\varepsilon \left( Q^\varepsilon + \eta P^\varepsilon \right) \nabla \theta \, dx = \\ = \int_{\Omega} \left( r^\varepsilon + \eta h^\varepsilon \chi_g^{(\varepsilon)} \right) \chi_0^\varepsilon \theta \, dx - \int_{\Omega_g^\varepsilon} \nabla T_{-1}^\varepsilon \nabla (\theta \chi_0^\varepsilon) \, dx \end{aligned}$$

et

$$\int_{\Omega} \left( Q^\varepsilon \nabla \chi_0^\varepsilon + \eta \nabla T_0^\varepsilon \nabla \tilde{\psi}_0^\varepsilon \right) \theta \, dx + \int_{\Omega \setminus \Omega_g^{(\varepsilon)}} T_0^\varepsilon \left( \nabla \chi_0^\varepsilon + \eta \nabla \tilde{\psi}_0^\varepsilon \right) \nabla \theta \, dx = 0.$$

En se rappelant que le gradient de  $T_{-1}^\varepsilon$  est nul en dehors de  $\Omega_g^\varepsilon$ , La différence de ces deux relations s'écrit:

$$(4-51) \quad \int_{\Omega} \eta \left( P^\varepsilon \nabla \chi_0^\varepsilon - \nabla T_0^\varepsilon \nabla \tilde{\psi}_0^\varepsilon \right) \theta \, dx + \\ + \int_{\Omega} \chi_0^\varepsilon \left( Q^\varepsilon + \eta P^\varepsilon \right) \nabla \theta \, dx - \int_{\Omega \setminus \Omega_g^{(\varepsilon)}} T_0^\varepsilon \left( \nabla \chi_0^\varepsilon + \eta \nabla \tilde{\psi}_0^\varepsilon \right) \nabla \theta \, dx = \\ = \int_{\Omega} \left( r^\varepsilon + \eta h^\varepsilon \chi_g^{(\varepsilon)} \right) \chi_0^\varepsilon \theta \, dx - \int_{\Omega} \nabla T_{-1}^\varepsilon \nabla (\theta \chi_0^\varepsilon) \, dx$$

On prend maintenant le couple  $(v, \varphi)$  égal à  $(0, \theta \mathbf{w}_0^\varepsilon)$  dans la première équation du problème (4-36) vérifié par  $(T_0^\varepsilon, \mathbf{w}_0^\varepsilon)$ , puis, la fonction  $\varphi$  égale à  $\theta \psi_0^\varepsilon$  dans la relation (4-50). On obtient:

$$\int_{\Omega} \left( P^\varepsilon + \omega_1 \nabla T_0^\varepsilon \right) \cdot \tilde{\nabla} \psi_0^\varepsilon \theta \, dx + \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{w}}_0^\varepsilon \left( P^\varepsilon + \omega_1 \nabla T_0^\varepsilon \right) \cdot \nabla \theta \, dx = \int_{\Omega} h^\varepsilon \chi_{\frac{\varepsilon}{g}}^{(T^\varepsilon)} \psi_0^\varepsilon \theta \, dx$$

et

$$\int_{\Omega} \left( \tilde{\nabla} \psi_0^\varepsilon + \omega_1 \nabla \chi_0^\varepsilon \right) \cdot P^\varepsilon \theta \, dx + \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{w}}_0^\varepsilon \left( \tilde{\nabla} \psi_0^\varepsilon + \omega_1 \nabla \chi_0^\varepsilon \right) \cdot \nabla \theta \, dx = 0.$$

La différence de ces deux relations donne:

$$(4-52) \quad \int_{\Omega} \omega_1 \left( \nabla T_0^\varepsilon \cdot \tilde{\nabla} \psi_0^\varepsilon - P^\varepsilon \cdot \nabla \chi_0^\varepsilon \right) \theta \, dx + \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{w}}_0^\varepsilon \left( P^\varepsilon + \omega_1 \nabla T_0^\varepsilon \right) \cdot \nabla \theta \, dx + \\ - \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{w}}_0^\varepsilon \left( \tilde{\nabla} \psi_0^\varepsilon + \omega_1 \nabla \chi_0^\varepsilon \right) \cdot \nabla \theta \, dx = \int_{\Omega} h^\varepsilon \chi_{\frac{\varepsilon}{g}}^{(T^\varepsilon)} \psi_0^\varepsilon \theta \, dx$$

Compte-tenu des notations (4-44) et (4-52), si on multiplie la relation (4-51) par  $\omega_1$  et (4-52) par  $\eta$ , alors leur addition donne:

$$(4-53) \quad \int_{\Omega} \omega_1 \left( \chi_0^\varepsilon \left( Q^\varepsilon + \eta P^\varepsilon \right) - T_0^\varepsilon \left( q^\varepsilon + \eta p^\varepsilon \right) \right) \cdot \nabla \theta \, dx + \\ + \int_{\Omega} \eta \left( \tilde{\mathbf{w}}_0^\varepsilon \left( P^\varepsilon + \omega_1 \nabla T_0^\varepsilon \right) - \tilde{\mathbf{w}}_0^\varepsilon \left( p^\varepsilon + \omega_1 \nabla \chi_0^\varepsilon \right) \right) \cdot \nabla \theta \, dx = \\ = \int_{\Omega} \omega_1 \left( r^\varepsilon + \eta h^\varepsilon \chi_{\frac{\varepsilon}{g}}^{(T^\varepsilon)} \right) \chi_0^\varepsilon \theta \, dx + \int_{\Omega} \eta h^\varepsilon \chi_{\frac{\varepsilon}{g}}^{(T^\varepsilon)} \psi_0^\varepsilon \theta \, dx - \int_{\Omega} \omega_1 \nabla T_{-1}^\varepsilon \cdot \nabla (\theta \chi_0^\varepsilon) \, dx$$



où l'on a noté:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet q^\varepsilon = \begin{cases} \mu_0^\varepsilon \nabla \chi_0^\varepsilon & \text{dans } \Omega \setminus \Omega_g^{(\varepsilon)} \\ \vec{0} & \text{dans } \Omega_g^{(\varepsilon)} \end{cases} = \mu_0^\varepsilon \nabla \chi_0^\varepsilon \chi(\Omega \setminus \Omega_g^{(\varepsilon)}) \\ \bullet p^\varepsilon = \widetilde{\nabla} \psi_0^\varepsilon = \text{le prolongement par zéro de } \nabla \psi_0^\varepsilon \text{ dans } \Omega \setminus \Omega_g^{(\varepsilon)} \end{array} \right.$$

On peut maintenant passer à la limite dans la relation (4-53), puisque dans chaque terme on a le produit de deux facteurs l'un convergeant faiblement et l'autre fortement:

• le deuxième terme du premier membre tend vers zéro avec  $\varepsilon$  puisque :

$$\begin{aligned} \bullet \|\widetilde{\psi}_0^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} &\leq C \varepsilon & \text{et} & \quad \|\mathbf{p}^\varepsilon + \omega_1 \nabla T_0^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} = \|\widetilde{\nabla} \psi_0^\varepsilon + \omega_1 \nabla T_0^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C \\ \bullet \|\widetilde{\psi}_0^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} &\leq C \varepsilon & \text{et} & \quad \|\mathbf{p}^\varepsilon + \omega_1 \nabla \chi_0^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} = \|\widetilde{\nabla} \psi_0^\varepsilon + \omega_1 \nabla \chi_0^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C \end{aligned}$$

• les deux derniers termes du second membre tendent vers zéro avec  $\varepsilon$  puisque :

$$\begin{aligned} \bullet \|\nabla T_{-1}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} &\leq C \varepsilon & \text{et} & \quad \|\nabla(\theta \chi_0^\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \\ \bullet \|\widetilde{\psi}_0^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} &\leq C \varepsilon & \text{et} & \quad \|h^\varepsilon \chi_0^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C \end{aligned}$$

• le premier terme du premier membre tend vers:

$$\int_{\Omega} \omega_1(x_j (Q^* + \eta P^*) - T_0^* K_{ij}^0) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} dx$$

puisque:

- $\chi_0^\varepsilon \longrightarrow x_j$  dans  $L^2(\Omega)$  fort
- $Q^\varepsilon \longrightarrow Q^*$  dans  $L^2(\Omega)$  faible
- $P^\varepsilon \longrightarrow P^*$  dans  $L^2(\Omega)$  faible
- $T_0^\varepsilon \longrightarrow T_0^*$  dans  $L^2(\Omega)$  fort
  
- $q_i^\varepsilon \longrightarrow \frac{|Y_s U Y_\ell|}{|Y|} \mathcal{M}_{Y_s U Y_\ell} \left( \lambda \frac{\partial}{\partial y_i} \left( \chi_0^j + y_j \right) \right)$  dans  $L^2(\Omega)$  faible
- $P_i^\varepsilon \longrightarrow \omega_1 \frac{|Y_g^{(e)}|}{|Y|} \mathcal{M}_{Y_g^{(e)}} \left( \frac{\partial}{\partial y_i} \left( \chi_0^j + y_j + \frac{\psi_0^j}{\omega_1} \right) \right)$  dans  $L^2(\Omega)$  faible
- $q_i^\varepsilon + \eta P_i^\varepsilon \longrightarrow K_{ij}^0$  dans  $L^2(\Omega)$  faible

• le premier terme du second membre tend vers

$$r(x) = \mathcal{M}_Y \left( f + \eta h \chi_g^{(e)} \right) = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left( f + \eta h \chi_g^{(e)} \right) (x, y) dy$$

Ainsi le passage à la limite dans la relation (4-53) entraîne que:

$$(4-54) \quad \int_{\Omega} \left( Q_i^* + \eta P_i^* \right) x_j \frac{\partial \theta}{\partial x_i} dx - \int_{\Omega} K_{ij}^0 T_0^* \frac{\partial \theta}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} r \theta x_j dx$$

Mais rappelons nous que  $Q^* + \eta P^*$  vérifie l'équation (4-46):

$$\int_{\Omega} \left( Q_i^* + \eta P_i^* \right) \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} r v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

En prenant la fonction test  $v = \theta x_j$  dans cette relation on a :

$$(4-55) \quad \int_{\Omega} \left( Q_i^* + \eta P_i^* \right) x_j \frac{\partial \theta}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} \left( Q_i^* + \eta P_i^* \right) \delta_{ij} \theta dx = \int_{\Omega} r \theta x_j dx$$

Si on retranche (4-55) de (4-54) on obtient :

$$\int_{\Omega} - K_{ij}^0 T_0^* \frac{\partial \theta}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} \left( Q_j^* + \eta P_j^* \right) \theta dx$$

et ceci est vrai pour tout  $\theta \in \mathcal{D}(\Omega)$ , d'où :

$$(4-56) \quad Q^* + \eta P^* = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( K_{ij}^0 T_0^* \right) = K_{ij}^0 \frac{\partial T_0^*}{\partial x_i}$$

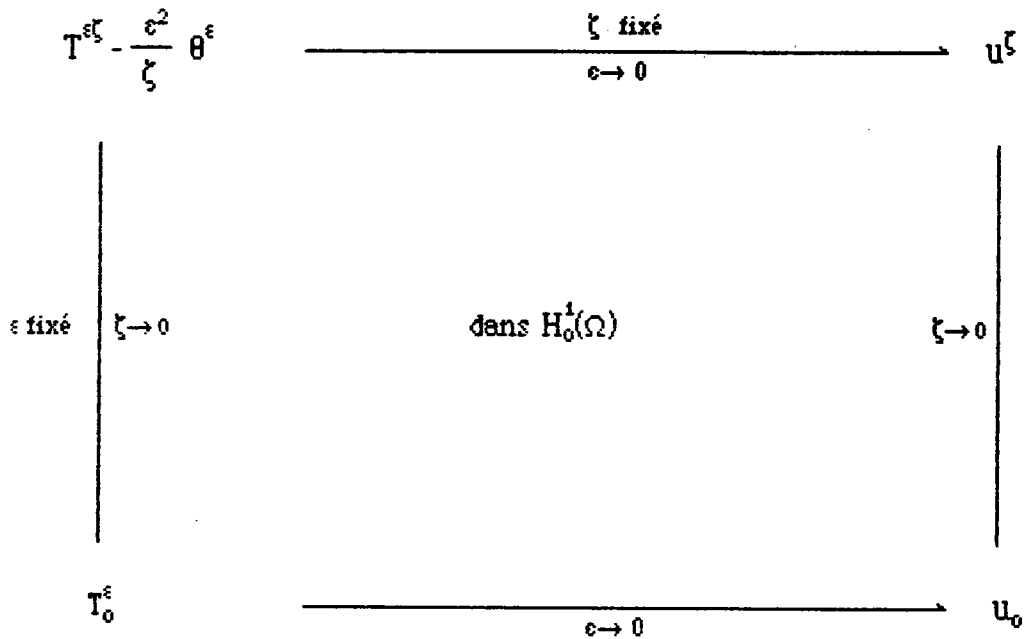
La limite  $T_0^*$  vérifie donc le même problème que celui vérifié par  $u^0$  :

$$\int_{\Omega} K_{ij}^0 \frac{\partial T_0^*}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega} r v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

et d'après l'unicité de la solution de ce problème,  $T_0^*$  et  $u^0$  sont identiques, de plus, toute la suite  $T_0^\varepsilon$  converge vers  $u^0$ .  $\square$

#### 4-3/ Résumé et comparaison des limites:

Les divers passages à la limite dans les équations vérifiées par la température  $T^{\varepsilon\zeta}$ , lorsque la taille  $\varepsilon$  de la période de la structure du matériau et la conductivité thermique  $\zeta$  de la phase gazeuse tendent vers zéro, peuvent être représentés par le schéma suivant:



Les convergences en  $\epsilon$  sont faibles, cependant, les convergence en  $\zeta$  sont fortes et l'erreur est de l'ordre de  $\zeta$ . Rappelons qu'on a été contraint à faire l'hypothèse (4-38) " le gaz est sous forme de bulles strictement incluses dans  $\Omega$ " uniquement pour établir des estimations pour la fonction  $T_0^\epsilon$  afin de pouvoir justifier sa convergence vers  $u_0$ .

La fonction  $\theta^\epsilon$  (resp.  $\epsilon \nabla \theta^\epsilon$ ) est bornée dans  $L^2(\Omega)$  (resp. dans  $L^2(\Omega)$ ) indépendemment du paramètre  $\epsilon$  et de la conductivité thermique  $\zeta$  de la phase gaseuse. Elle n'est rien d'autre que le premier terme  $\epsilon^{-2} T_{-1}^\epsilon$  du développement assyptotique (4-25). D'après la remarque 4-1, elle peut être déterminée de la façon suivante:

$$\theta^\epsilon(x) = \theta^{k\epsilon} \left( \frac{x - o_k^\epsilon}{\epsilon} \right) \quad x \in \Omega \cap C_k^\epsilon$$

où  $C_k^\epsilon$  est la  $k^{\text{ième}}$  cellule translatée de  $\epsilon Y$ , d'origine  $o_k^\epsilon$ ,  $k$  étant un multi-entier de  $\mathbb{Z}^3$  et  $\theta^{k\epsilon}$  est la solution unique de:

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta \theta^{k\varepsilon}(y) = f(\varepsilon y + o_k^\varepsilon) & \text{dans } Y_g \\ \theta^{k\varepsilon} = 0 & \text{sur } \partial(Y_g) \\ \theta^{k\varepsilon} \equiv 0 & \text{dans } Y_s \cup Y_f \end{array} \right.$$

Les limites ( $\varepsilon$  tend vers 0) et ( $\zeta$  tend vers 0) ne commutent donc pas. Le résultat dépend de l'ordre de grandeur du rapport  $\frac{\varepsilon^2}{\zeta}$ .

**5/ INTERPRÉTATION PHYSIQUE DES RÉSULTATS ET CONCLUSION:**

Le problème qui nous préoccupe ici est de mettre en évidence *comment les phénomènes d'évaporations-condensations* au niveau microscopique *modifient la conductivité thermique  $\lambda$  qui apparaît dans la loi de FOURIER* écrite pour le milieu homogène équivalent au milieu poreux. Dans l'expression (2-43) des conductivités thermiques apparentes  $K_{ij}$  on va distinguer les différentes conductivités et facteurs intervenant dans le transfert macroscopique de la chaleur qui est gouverné par l'équation (2-45).

Les conductivité homogénéisées  $K_{ij}$  définies par (2-43) peuvent se décomposer comme suit:

$$(5-1) \quad K_{ij} = \lambda_{ij} + \lambda_{dif} F_{ij}$$

où:

$$(5-2) \quad \lambda_{ij} = \frac{1}{|Y|} \int_Y \lambda \frac{\partial}{\partial y_i} (X^j + y_j) dy$$

$$(5-3) \quad F_{ij} = \frac{1}{|Y|} \int_{Y_g^{(c)}} \frac{\partial}{\partial y_i} (X^j + y_j + \frac{1}{\omega_1} \Psi^j) dy$$

$$(5-4) \quad \lambda_{dif} = \eta \omega_1 = \rho_g \mathcal{D} \Delta h_v \omega_1 = \rho_g \mathcal{D} \Delta h_v \frac{\partial \omega_{sat}}{\partial T}, \text{ (voir les notations (1-2) et (1-11)).}$$

Rappelons que les  $(X^j, \Psi^j)$  sont les solutions uniques des problèmes aux limites locaux (2-36). Les constantes  $\rho_g$ ,  $\mathcal{D}$  et  $\Delta h_v$  désignent respectivement la densité massique du gaz, le coefficient de diffusion air-vapeur et la chaleur latente de vaporisation. La fonction  $\omega_{sat}$  désigne la valeur saturante de la fraction massique de vapeur  $\omega$  et le symbole  $|Y|$  désigne le volume de la cellule de base  $Y$ .

Par des intégration par parties et en tenant compte des conditions aux limites et aux interfaces vérifiées les couples  $(\chi^j, \Psi^j)$  les constante  $\lambda_{ij}$  et  $F_{ij}$  peuvent s'écrire aussi:

$$\lambda_{ij} = \frac{(\lambda_g - \lambda_e)}{|Y|} \int_{\mathcal{A}_{ge}} \chi^j n_i d\sigma + \frac{(\lambda_g - \lambda_s)}{|Y|} \int_{\mathcal{A}_{gs}} \chi^j n_i d\sigma + \frac{(\lambda_e - \lambda_s)}{|Y|} \int_{\mathcal{A}_{es}} \chi^j n_i d\sigma +$$

$$+ \left( \frac{|Y_g|}{|Y|} \lambda_g + \frac{|Y_e|}{|Y|} \lambda_e + \frac{|Y_s|}{|Y|} \lambda_s \right) \delta_{ij}$$

$$F_{ij} = \frac{|Y_g^{(e)}|}{|Y|} \delta_{ij} + \frac{1}{|Y|} \int_{\mathcal{A}_{ge}} \chi^j n_i d\sigma + \frac{1}{|Y|} \int_{\mathcal{A}_{gs}^{(e)}} (\chi^j + \frac{\Psi^j}{\omega_1}) n_i d\sigma$$

et on retrouve les résultats de C. Moyne, J. C. Batsale et A. Degiovanni [28] obtenus en utilisant la méthode physique de prise de moyenne et fermeture.

La conductivité  $\lambda$  introduite dans la décomposition (5-1) de la conductivité apparente  $K$  désigne ([13][28]) la conductivité thermique "vraie" au sens où c'est celle qui apparait dans la loi de Fourier écrite pour le milieu homogène équivalent au milieu poreux. La conductivité  $\lambda_{diff}$  représente une conductivité thermique d'origine diffusive et le facteur  $F$  s'interprète comme étant le facteur de résistance à la diffusion. Les expressions (5-2), (5-3) et les problèmes locaux (2-36) vérifiés par les couples  $(\chi^j, \Psi^j)$  permettent d'identifier d'un point de vue théorique la conductivité "vraie"  $\lambda$  et le facteur  $F$ . Toutefois, dans la décomposition (5-1), ni la conductivité  $\lambda$  ni le facteur  $F$  ne sont accessibles expérimentalement, seule la conductivité apparente  $K$  peut être atteinte ([12], [28]).

L'impossibilité d'atteindre expérimentalement la conductivité thermique "vraie"  $\lambda$  a conduit De Vries ([12] [13] [14] [28]) à confondre  $\lambda$  avec la conductivité  $\overset{\circ}{\lambda}$  du milieu poreux n'échangeant que par conduction et qui elle peut être mesurée à basse température (pas effet d'évaporations-condensations) car elle se confond avec la conductivité apparente  $\overset{\circ}{K}$  du milieu. En décomposant la conductivité apparente  $K$  sous la forme:

$$(5-5) \quad K_{ij} = \overset{\circ}{\lambda}_{ij} + \lambda_{diff} \overset{\circ}{F}_{ij}$$



la mesure des  $K_{ij}$  permet alors de déterminer le facteur  $\mathring{F}_{ij}$ . Les valeurs observées pour  $\mathring{F}_{ij}$  sont anormalement élevées pour un facteur de résistance à la diffusion et ont donné lieu à une abondante littérature tentant d'expliquer ce phénomène. Les définitions (5-2) et (5-3) montrent que le facteur obtenu expérimentalement ne peut être physiquement correctement interprété comme étant le facteur de résistance à la diffusion ([13] [28]).

On va maintenant comparer la conductivité thermique  $\lambda$  de la loi de Fourier, définie par (5-2), avec la conductivité  $\mathring{\lambda}$  du milieu poreux n'échangeant que par conduction et mettre en évidence l'influence des évaporations-condensations. La conductivité  $\mathring{\lambda}$  se confond avec la conductivité thermique apparente  $\mathring{K}$  et sa détermination est classique ([5] [33]), elle s'écrit:

$$(5-6) \quad \mathring{K}_{ij} = \mathring{\lambda}_{ij} = \frac{1}{|Y|} \int_Y \lambda \frac{\partial}{\partial y_i} (\mathring{\chi}^j + y_j) dy$$

où la fonction  $\mathring{\chi}^j$  est la solution unique du problème aux limites suivant:

$$(5-7) \quad \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\partial}{\partial y_i} \left( \lambda \frac{\partial}{\partial y_i} (\mathring{\chi}^j + y_j) \right) = 0 & \text{dans chaque } Y_\alpha \\ \llbracket \mathring{\chi}^j \rrbracket_{\alpha\beta} = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{\alpha\beta} \ (\alpha, \beta = g, l, s) \\ \llbracket \lambda \frac{\partial}{\partial y_i} (\mathring{\chi}^j + y_j) n_i \rrbracket_{\alpha\beta} = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{\alpha\beta} \ (\alpha, \beta = g, l, s) \\ \int_Y \mathring{\chi}^j(y) dy = 0 \text{ et } \mathring{\chi}^j \text{ est } Y\text{-périodique.} \end{array} \right.$$

La normale  $n$  étant orientée sur chaque interface  $\mathcal{A}_{\alpha\beta}$  de  $\Omega_\alpha$  vers  $\Omega_\beta$ .

Pour pouvoir comparer la conductivité  $\lambda$  à  $\mathring{\lambda}$ , il est alors commode de décomposer les fonctions  $\mathring{\chi}^j$  intervenant dans la définition de  $\lambda$  sous la forme suivante:



$$(5-8) \quad \lambda^j = \overset{\circ}{\lambda}^j + \pi^j$$

Les fonctions  $\pi^j$  vérifient alors le système suivant:

$$(5-9) \quad \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\partial}{\partial y_i} \left( \lambda \frac{\partial \pi^j}{\partial y_i} \right) = 0 & \text{dans chaque } Y_\alpha \\ \llbracket \pi^j \rrbracket_{\alpha\beta} = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{\alpha\beta} \ (\alpha\beta = g, l, s) \\ \llbracket \lambda \frac{\partial \pi^j}{\partial y_i} n_i \rrbracket = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{\mathcal{E}} \text{ et } \mathcal{A}_{\mathcal{F}}^{(*)} \\ \llbracket \lambda \frac{\partial \pi^j}{\partial y_i} n_i \rrbracket = -\eta \frac{\partial \psi^j}{\partial y_i} n_i - \eta \omega_1 \frac{\partial}{\partial y_i} (\pi^j + \overset{\circ}{\lambda}^j + y_j) \Big|_{\mathcal{G}} n_i & \text{sur } \mathcal{A}_{\mathcal{E}} \text{ et } \mathcal{A}_{\mathcal{F}}^{(E)} \\ \frac{\partial^2 \psi^j}{\partial y_i \partial y_i} = 0 & \text{dans } Y_{\mathcal{E}} \\ \psi^j = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{\mathcal{E}} \\ \frac{\partial \psi^j}{\partial y_i} n_i = -\omega_1 \frac{\partial}{\partial y_i} (\overset{\circ}{\lambda}^j + \pi^j + y_j) \Big|_{\mathcal{G}} n_i & \text{sur } \mathcal{A}_{\mathcal{F}}^{(E)} \\ \pi^j \text{ et } \psi^j \text{ sont } Y \text{-périodiques et } \int_Y \pi^j(y) dy = 0. \end{array} \right.$$

La conductivité "vraie"  $\lambda$  s'écrit alors:

$$(5-10) \quad \lambda_{ij} = \overset{\circ}{\lambda}_{ij} + \frac{1}{|Y|} \int_Y \lambda \frac{\partial \pi^j}{\partial y_i} dy.$$

ce qui met en évidence l'influence des évaporations-condensations sur la conductivité thermique de la loi de Fourier. Le vrai facteur de résistance à la diffusion  $F_{ij}$  se distingue alors du facteur expérimental  $\overset{\circ}{F}_{ij}$  déterminé par (5-5) de:

$$(5-11) \quad F_{ij} - \overset{\circ}{F}_{ij} = \frac{1}{\lambda_{\text{diff}}|Y|} \int_Y \lambda \frac{\partial \pi^i}{\partial y_i} dy$$

L'analyse précédente répond donc à la controverse classique concernant l'interprétation du facteur expérimental  $\overset{\circ}{F}$  et la détermination du vrai facteur  $F$  de résistance à la diffusion.

DEUXIEME PARTIE

**PERMEABILITES RELATIVES  
DE DEUX  
FLUIDES NON-MISCIBLES**

## INTRODUCTION II

L'écoulement d'un fluide monophasique à travers un milieu poreux est décrit par la loi de Darcy. Cette loi a été établie initialement de façon empirique par Darcy [11], cependant elle peut être justifiée de façon théorique soit par des méthodes Physiques ( Marle [27], Gray et O'Neil [21], Whitaker [37] ) soit par des méthodes mathématiques ( Sanchez-Palencia [33], Levy [23], Allaire [1] ). Des résultats récents de Allaire [1] montrent que l'écoulement macroscopique est décrit, selon l'ordre de grandeur de la porosité, soit par une loi de Darcy, soit par des équations de Brinkman soit par des équations de Stokes.

Dans le cas polyphasique, la loi (établie de façon empirique) qui décrit l'écoulement macroscopique est la "loi de Darcy généralisée" (Wyckoff et Botset [39] ). Cette loi consiste à écrire une loi de Darcy pour chaque phase en introduisant une notion de perméabilités relatives à chacune des phases. Mais cette "loi de Darcy généralisée" n'a, dans le cas général, aucune justification théorique. Ceci a suscité de nombreux travaux tant théorique ( Whitaker [38], Auriault et Sanchez-Palencia [2], Lipton et Avellaneda [26] ) qu'expérimentaux (Dias et Payatakes [15], Kalaydjian [22] ). Sous des hypothèses simplificatrices sur la géométrie ou sur les propriétés physiques des fluides étudiés, toutes ces études confirment que la vitesse de filtration de chaque fluide dépend non pas du seul gradient de pression exercé sur cette phase ( comme le prétend la "loi de Darcy généralisée" ) mais s'exprime comme une combinaison linéaire des gradients de pression exercés sur toutes les phases.

Dans notre travail, on s'intéresse à l'écoulement macroscopique, à travers un milieu poreux, de deux fluides non-miscibles et obéissant tous deux aux équations de Stokes. Les deux fluides sont soumis aux forces de gravité et aux forces capillaires dues aux effets des tensions interfaciales. On considère une structure géométrique périodique et on utilise la méthode d'homogénéisation.

D'un point de vue mathématique, établir les équations qui décrivent l'écoulement macroscopique revient à passer à la limite dans les équations de Stokes, écrites pour chaque fluide, lorsque le rapport  $\varepsilon$  entre l'échelle microscopique et l'échelle macroscopique tend vers zéro; ce rapport  $\varepsilon$  n'est rien d'autre que la taille de la période de la structure. L'étude du cas polyphasique (comme le notre) présente des difficultés supplémentaires à celles rencontrées dans le cas monophasique, elles sont dues d'une part à la discontinuité des caractéristiques physiques et d'autre part aux conditions aux limites imposées sur les interfaces fluide-fluide; en effet, sur chaque interface séparant deux fluides, les effets des tensions interfaciales font apparaître un saut du tenseur des contraintes normales proportionnel à la courbure moyenne  $H^\varepsilon$  de cette interface et qui est de l'ordre de  $\varepsilon^{-1}$ .

Un problème analogue au notre a été étudié par Lipton et Avellaneda [26] en prenant des approximations des conditions sur les interfaces fluide-fluide. Ces approximations ne sont valables que dans le cas de géométries où la courbure  $H^\varepsilon$  peut se mettre sous la forme:  $H^\varepsilon = a \varepsilon^{-1} + G^\varepsilon$ , avec  $a$  une constante et  $G^\varepsilon$  une fonction de l'ordre de l'unité. Puisque la pression n'est déterminée qu'à une constante additive près, ils se débarrassent du terme gênant  $a \varepsilon^{-1}$  par un changement de pression dans l'un des fluides.

Dans notre travail, on considère une géométrie plus générale. Comme dans le cas monophasique, on utilise des opérateurs de restriction de Tartar ([34] et [1], annexe D) pour construire de bons prolongements de la pression. Puis, en utilisant des fonctions-test particulières, on passe à la limite dans le problème variationnel associé aux équations de Stokes. Les équations limites obtenues montrent que la vitesse de filtration macroscopique de chaque fluide s'exprime comme une combinaison linéaire du gradient de pression exercé sur ce fluide, du gradient de pression exercé sur l'autre fluide et d'un terme qui représente les effets moyens des tensions interfaciales.

**1/ POSITION DU PROBLEME ET RESULTATS D'EXISTENCE ET D'UNICITE:****1-1) Description physique et notations:**

Soit  $\Omega$ , un ouvert borné et régulier de  $\mathbb{R}^3$ , occupé par un milieu poreux à structure périodique. La période de la structure est un pavé de  $\mathbb{R}^3$  noté  $\varepsilon Y$ , où  $Y$  représente la cellule de base:  $Y = \prod_{i=1}^3 ]0, \ell_i[$  et le paramètre  $\varepsilon$  est un réel strictement positif représentant le rapport entre l'échelle microscopique et l'échelle macroscopique.

Le milieu poreux est constitué d'un solide rigide, d'un fluide mouillant ( $l$ ) et d'un autre fluide ( $g$ ) non-mouillant. Ces divers constituants occupent des ouverts de  $\Omega$  notés respectivement  $\Omega_s^\varepsilon$ ,  $\Omega_l^\varepsilon$  et  $\Omega_g^\varepsilon$ . Les deux fluides sont incompressibles et non-miscibles, ils sont séparés par les interfaces  $(\partial\Omega_g^\varepsilon \cap \partial\Omega_l^\varepsilon)$  notées  $\mathcal{A}_{gl}^\varepsilon$ . La réunion  $\Omega_g^\varepsilon \cup \Omega_l^\varepsilon \cup \mathcal{A}_{gl}^\varepsilon$ , notée  $\Omega_f^\varepsilon$ , est séparée du solide  $\Omega_s^\varepsilon$  par des interfaces notées  $\mathcal{A}_{ls}^\varepsilon$  et elle est supposée connexe.

Chaque composante  $\Omega_\alpha^\varepsilon$  du milieu poreux peut être recouverte par des translatés  $\varepsilon Y_\alpha^k$  d'un ouvert  $\varepsilon Y_\alpha$  de la période  $\varepsilon Y$  (voir figure 1.1):

$$(1-1) \quad \left\{ \begin{array}{l} Y = \prod_{i=1}^3 ]0, \ell_i[ = Y_s \cup Y_f \cup \mathcal{A}_{ls} ; Y_s \cap Y_f = \emptyset \\ Y_f = Y_g \cup Y_l \cup \mathcal{A}_{gl} ; Y_g \cap Y_l = \emptyset \end{array} \right.$$

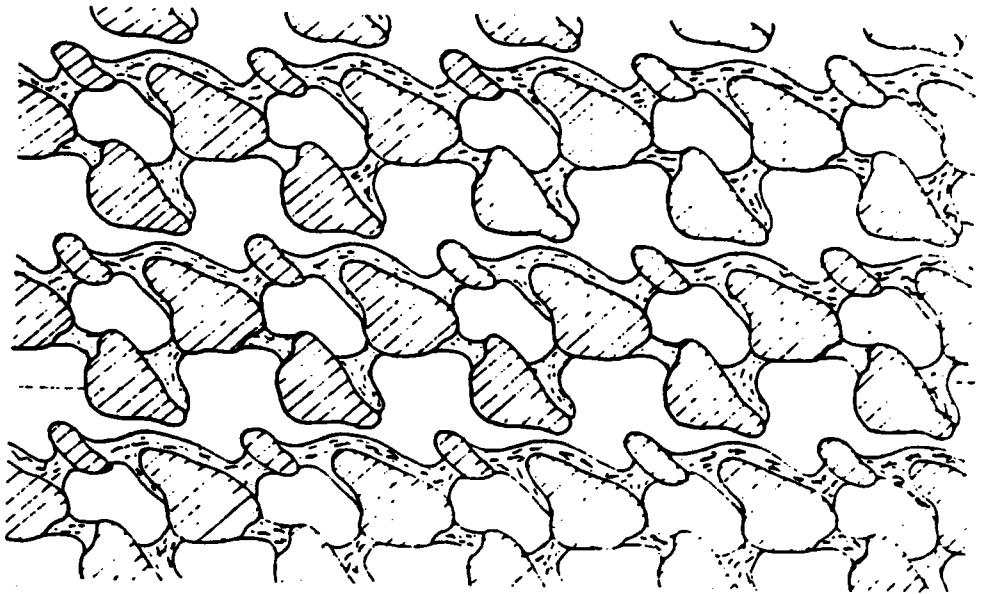
Si on définit, pour tout multi-entier  $k = (k_1, k_2, k_3)$  de  $\mathbb{Z}^3$ , le  $k$ -translaté  $\mathcal{O}^k$  d'un sous-ensemble  $\mathcal{O}$  de  $Y$  par:

$$\mathcal{O}^k = kY + \mathcal{O} = \left\{ y^k = (y_1 + k_1 \ell_1, y_2 + k_2 \ell_2, y_3 + k_3 \ell_3) / y \in \mathcal{O} \right\}$$

alors les composantes  $\Omega_\alpha^\varepsilon$  sont définies par:

$$(1-2) \quad \Omega_\alpha^\varepsilon = \left( \varepsilon \bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}^3} Y_\alpha^k \right) \cap \Omega \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_{\alpha\beta}^\varepsilon = \left( \varepsilon \bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}^3} \mathcal{A}_{\alpha\beta}^k \right) \cap \Omega. \quad (\alpha = s, f, g, l)$$

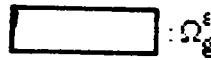
On suppose que les interfaces  $\mathcal{A}_{\alpha\beta}^\varepsilon$  sont suffisamment régulières (donc aussi les  $\mathcal{A}_{\alpha\beta}$ ) et les ouverts  $Y_\alpha$  ont des frontières localement lipschitziennes et sont situés d'un seul côté de leur bords.



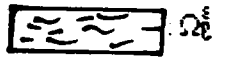
Un échantillon de  $\Omega$



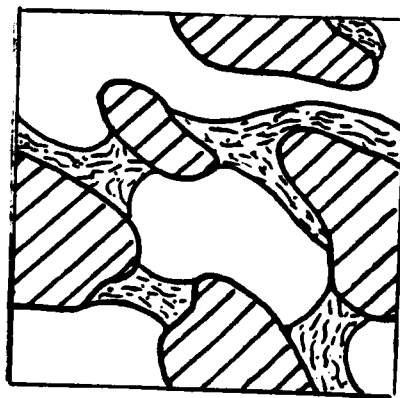
$\Omega_g^f$



$\Omega_g^e$



$\Omega_g^c$



Cellule de base Y



$Y_g$

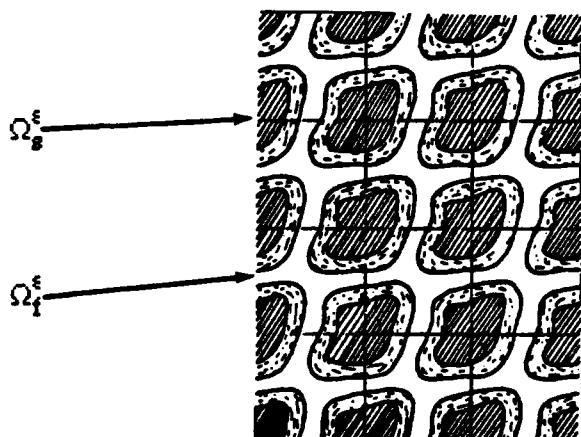


$Y_g^e$

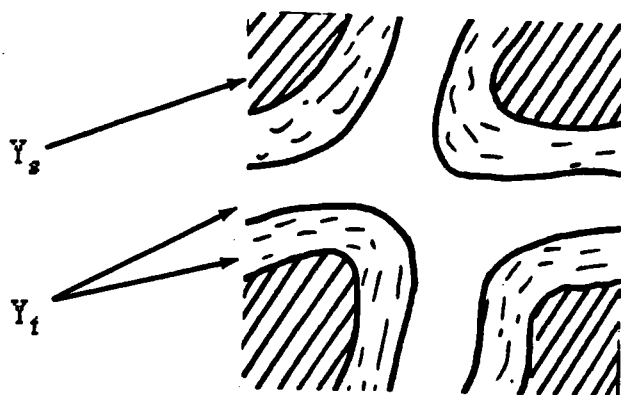


$Y_g^c$

(fig. 2-1)



Un échantillon de  $\Omega$



Cellule de base Y

(fig. 3-1)



La vitesse  $U^\varepsilon$  et la pression  $P^\varepsilon$  des fluides (g) et (l) dépendent, bien sûr, de la géométrie du milieu poreux, donc de la taille  $\varepsilon$  de la période de la structure. On s'intéresse à leur comportements l'orsque la taille  $\varepsilon$  est très petite, comparée aux dimensions globales du milieu (i.e:  $\varepsilon$  tend vers zéro).

On note pour chaque fluide ( $\alpha$ );  $\alpha = g, l$ :

- (1-3)
- $U^{\alpha\varepsilon}$  : la vitesse .
  - $P^{\alpha\varepsilon}$  : la pression.
  - $\mu_\alpha$  : le coefficient de viscosité.(constante strictement positive)
  - $F^{\alpha\varepsilon}$  : le vecteur des forces de la pesanteur.
  - $H^\varepsilon$  : la courbure moyenne de l'interface  $\mathcal{A}_{gg}^\varepsilon$ .
  - $D_{ij}^\alpha(U^\varepsilon) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i^{\alpha\varepsilon}}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j^{\alpha\varepsilon}}{\partial x_i} \right)$  : les composantes du tenseur des vitesses de déformation.
  - $T_{ij}^\alpha(U^\varepsilon, P^\varepsilon) = 2\mu_\alpha D_{ij}^\alpha(U^\varepsilon) - P^{\alpha\varepsilon} \delta_{ij}$  : les composantes du tenseur des contraintes, où  $\delta_{ij}$  désigne le symbole de Kronecker.

La vitesse  $U^\varepsilon$  et la pression  $P^\varepsilon$  vérifient les équations de Stokes ci-dessous dans lesquelles on prend en compte les effets de la pression capillaire dus aux tensions interfaciales fluide(g)- fluide(l).

- (1-4)
- $-\frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij}^\alpha(U^\varepsilon, P^\varepsilon) = F_i^\alpha$  dans  $\Omega_\alpha^\varepsilon$  ( $\alpha = g, l$ )
  - $\text{div}(U^\varepsilon) = 0$  dans  $\Omega_\alpha^\varepsilon$  ( $\alpha = g, l$ )
  - $[[U^\varepsilon]]_{gg} = 0$  sur  $\mathcal{A}_{gg}^\varepsilon$
  - $[[T_{ij}(U^\varepsilon, P^\varepsilon)n_j]]_{gg} = 2\sigma H^\varepsilon n_i$  sur  $\mathcal{A}_{gg}^\varepsilon$
  - $U^\varepsilon = 0$  sur  $\partial\Omega_l^\varepsilon$

où l'on adopte la convention de sommation sur les indices latins répétés. Le symbole  $[[\varphi]]_{gg}$  désigne le saut de la quantité  $\varphi$  à travers l'interface  $\mathcal{A}_{gg}^\varepsilon$ , la constante  $\sigma$  est la tension

superficielle de l'interface  $\mathcal{A}_{gg}^\varepsilon$  et  $n$  est la normale unitaire, orientée de  $\Omega_g^\varepsilon$  vers  $\Omega_f^\varepsilon$  sur les interfaces  $\mathcal{A}_{gg}^\varepsilon$  et vers l'extérieur de  $\Omega_f^\varepsilon$  sur les entrées-sorties  $\partial\Omega_f^\varepsilon$  des deux fluides.

**1-2) Résultats d'existence et d'unicité:**

Les résultats de ce paragraphe ne nécessitent aucune hypothèse de périodicité sur la géométrie du milieu.

L'étude de l'existence et de l'unicité de la solution  $(U^\varepsilon, P^\varepsilon)$  sera faite par la méthode variationnelle.

Cadre fonctionnel:

$$(1-5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{V}^\varepsilon = \mathbf{H}_0^1(\Omega_f) = (\mathbf{H}_0^1(\Omega_f^\varepsilon))^3 \\ \mathcal{V}^\varepsilon(\text{div}, 0) = \left\{ v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega_f^\varepsilon); \text{div}(v) = 0 \right\} \\ L_0^2(\Omega_f^\varepsilon) = \left\{ q \in L^2(\Omega_f^\varepsilon); \int_{\Omega_f^\varepsilon} q \, dx = 0 \right\} \\ \mathcal{E}^\varepsilon = \mathcal{V}^\varepsilon \times L_0^2(\Omega_f^\varepsilon) \end{array} \right.$$

L'espace  $\mathcal{V}^\varepsilon$  et son sous-espace  $\mathcal{V}^\varepsilon(\text{div}, 0)$  sont munis de la norme:

$$\|v\|_{\mathcal{V}^\varepsilon} = \left( \int_{\Omega_f^\varepsilon} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

L'espace  $L^2(\Omega_f^\varepsilon)$  et son sous-espace  $L_0^2(\Omega_f^\varepsilon)$  sont munis de la norme:

$$\|q\|_0 = \left( \int_{\Omega_f^\varepsilon} q^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

On définit pour tout couple  $(u,v)$  de  $V^\varepsilon \times V^\varepsilon$  et toute fonction  $q$  de  $L_0^2(\Omega_i^\varepsilon)$  les formes suivantes:

$$(1-6) \quad \left\{ \begin{aligned} a^\varepsilon(u,v) &= \int_{\Omega_i^\varepsilon} 2\mu^\varepsilon D_{ij}(u)D_{ij}(v) \, dx \\ b^\varepsilon(v,q) &= - \int_{\Omega_i^\varepsilon} q \operatorname{div}(v) \, dx \\ \ell^\varepsilon(v) &= \int_{\Omega_i^\varepsilon} F^\varepsilon \cdot v \, dx + \int_{\mathcal{A}_{gl}^\varepsilon} 2\sigma H^\varepsilon v \cdot n \, d\Gamma \end{aligned} \right.$$

où l'on a supposé que :

$$(1-6) \quad \left\{ \begin{aligned} F^\varepsilon &\in L^2(\Omega_i^\varepsilon) \\ H^\varepsilon &\in L^2(\mathcal{A}_{gl}^\varepsilon) \\ \mu^\varepsilon &\text{ vaut } \mu_\alpha \text{ dans chaque } \Omega_\alpha^\varepsilon \quad (\alpha = g, t) \\ &\text{les constantes } \mu_\alpha \text{ et } \sigma \text{ sont strictement positives.} \end{aligned} \right.$$

La vitesse  $U^\varepsilon$  va être recherchée dans l'espace  $V^\varepsilon$  et la pression  $P^\varepsilon$  dans  $L^2(\Omega_i^\varepsilon)$ , mais, comme dans les cas classiques, la pression n'est déterminée qu'à une constante additive près, pour fixer cette constante on va la rechercher dans le sous espace  $L_0^2(\Omega_i^\varepsilon)$  (i.e de moyenne nulle).

**Théorème 1.1**

*Si  $(U^\varepsilon, P^\varepsilon)$  est une solution du problème (1-4), avec  $P^\varepsilon$  de moyenne nulle sur  $\Omega_i^\varepsilon$ , alors sous les hypothèses (1-6),  $(U^\varepsilon, P^\varepsilon)$  vérifie les équations variationnelles suivantes:*

$$(1-7) \quad \left\{ \begin{aligned} U^\varepsilon &\in V^\varepsilon \quad ; \quad P^\varepsilon \in L_0^2(\Omega_i^\varepsilon) \\ a^\varepsilon(U^\varepsilon, v) + b^\varepsilon(v, P^\varepsilon) &= \ell^\varepsilon(v) \quad \forall v \in V^\varepsilon \\ b^\varepsilon(U^\varepsilon, q) &= 0 \quad \forall q \in L_0^2(\Omega_i^\varepsilon) \end{aligned} \right.$$

*Le problème (1-7) admet une solution  $(U^\varepsilon, P^\varepsilon)$  unique dans  $V^\varepsilon(\operatorname{div}, 0) \times L_0^2(\Omega_i^\varepsilon)$ .*

Démonstration:

On multiplie la première équation de (1-4) par la  $i^{\text{ème}}$  composante  $v_i$  d'une fonction  $v$  de  $\mathcal{V}^\varepsilon$  et on somme sur l'indice  $i$  de 1 à 3. Puisque,  $\mathbf{T}_{ij}^\alpha(U^\varepsilon, P^\varepsilon)$  et sa divergence  $\frac{\partial}{\partial x_j} (\mathbf{T}_{ij}^\alpha(U^\varepsilon, P^\varepsilon))$ , qui est égale à  $-F_i^\alpha$ , sont supposés dans l'espace  $L^2(\Omega_\alpha^\varepsilon)$ , la trace:  $\mathbf{T}_{ij}^\alpha(U^\varepsilon, P^\varepsilon)n_j$  est définie comme un élément de  $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_\alpha^\varepsilon)$ . On peut donc utiliser la formule d'intégration par parties de Green:

$$\int_{\Omega_\alpha^\varepsilon} - \frac{\partial}{\partial x_j} (\mathbf{T}_{ij}^\alpha(U^\varepsilon, P^\varepsilon)) v_i dx = \int_{\Omega_\alpha^\varepsilon} \mathbf{T}_{ij}^\alpha(U^\varepsilon, P^\varepsilon) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx - \langle \mathbf{T}_{ij}^\alpha(U^\varepsilon, P^\varepsilon) n_j, v_i \rangle_{\partial\Omega_\alpha^\varepsilon}$$

où  $\langle \dots \rangle_{\partial\Omega_\alpha^\varepsilon}$  désigne les crochets de dualité entre  $H^{\frac{1}{2}}(\mathcal{A}_{g\ell}^\varepsilon)$  et  $H^{-\frac{1}{2}}(\mathcal{A}_{g\ell}^\varepsilon)$  et la normale  $n$  est orientée à l'extérieur de  $\Omega_\alpha^\varepsilon$ . D'où:

$$\int_{\Omega_\alpha^\varepsilon} \mathbf{T}_{ij}^\alpha(U^\varepsilon, P^\varepsilon) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega_\alpha^\varepsilon} F_i^\alpha v_i dx + \langle \mathbf{T}_{ij}^\alpha(U^\varepsilon, P^\varepsilon) n_j, v_i \rangle_{\partial\Omega_\alpha^\varepsilon} \quad (\alpha = g, \ell)$$

Puisque  $v$  est nulle sur le bord extérieur de  $\Omega_\ell^\varepsilon$ , le terme  $\langle \mathbf{T}_{ij}^\alpha(U^\varepsilon) n_j, v_i \rangle_{\partial\Omega_\alpha^\varepsilon}$  est réduit à  $\langle \mathbf{T}_{ij}^\alpha(U^\varepsilon) n_j, v_i \rangle_{\mathcal{A}_{g\ell}^\varepsilon}$ . Si on convient que la normale à  $\mathcal{A}_{g\ell}^\varepsilon$  est dirigée de  $\Omega_g$  vers  $\Omega_\ell$ , alors le saut  $[\mathbf{T}_{ij}(U^\varepsilon, P^\varepsilon) n_j]_{g\ell}$  est défini pour tout  $v$  de  $\mathcal{V}^\varepsilon$  par:

$$\langle [\mathbf{T}_{ij}(U^\varepsilon, P^\varepsilon) n_j]_{g\ell}, v_i \rangle_{\mathcal{A}_{g\ell}^\varepsilon} = \langle \mathbf{T}_{ij}^g(U^\varepsilon, P^\varepsilon) n_j, v_i \rangle_{\mathcal{A}_{g\ell}^\varepsilon} - \langle \mathbf{T}_{ij}^\ell(U^\varepsilon, P^\varepsilon) n_j, v_i \rangle_{\mathcal{A}_{g\ell}^\varepsilon}$$

D'après la quatrième relation de (1-4), il vaut  $2\sigma H^\varepsilon n_i$ . Puisque  $H^\varepsilon$  est supposée dans  $L^2(\mathcal{A}_{g\ell}^\varepsilon)$ , la somme des relations précédentes (pour  $\alpha = g, \ell$ ) s'écrit:

$$\int_{\Omega_f^\varepsilon} \mathbb{T}_{ij}(U^\varepsilon, P^\varepsilon) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega_f^\varepsilon} F_i v_i dx + \int_{\mathcal{A}_{gg}^\varepsilon} 2 \sigma H^\varepsilon v_i n_i d\Gamma$$

En utilisant l'expression (1-2) de  $\mathbb{T}_{ij}(U^\varepsilon, P^\varepsilon)$  en fonction de la vitesse  $U^\varepsilon$  et de la pression  $P^\varepsilon$  il vient:

$$\int_{\Omega_f^\varepsilon} 2\mu^\varepsilon D_{ij}(U^\varepsilon) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx - \int_{\Omega_f^\varepsilon} P^\varepsilon \operatorname{div}(v) dx = \int_{\Omega_f^\varepsilon} F \cdot v dx + \int_{\mathcal{A}_{gg}^\varepsilon} 2 \sigma H v \cdot n d\Gamma$$

Mais, puisque  $D_{ij}$  est symétrique,  $D_{ij}(U^\varepsilon) \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$  est égale à  $D_{ij}(U^\varepsilon) D_{ij}(v)$ , d'où:

$$(1-9) \quad \int_{\Omega_f^\varepsilon} 2\mu^\varepsilon D_{ij}(U^\varepsilon) D_{ij}(v) dx - \int_{\Omega_f^\varepsilon} P^\varepsilon \operatorname{div}(v) dx = \int_{\Omega_f^\varepsilon} F \cdot v dx + \int_{\mathcal{A}_{gg}^\varepsilon} 2 \sigma H v \cdot n d\Gamma$$

Cette relation n'est rien d'autre que la première équation de (1-7), la deuxième étant évidente puisque  $U^\varepsilon$  est à divergence nulle.

Pour étudier l'existence et l'unicité de la solution  $(U^\varepsilon, P^\varepsilon)$  de (1-7), on va utiliser le lemme 1-1 suivant, dont une démonstration est donnée dans la référence [20]:

**Lemme 1-1:**

Soient  $X$  et  $M$  deux espaces de Hilbert, de normes respectives  $\| \cdot \|_X$  et  $\| \cdot \|_M$ . Soient  $a(\dots)$  et  $b(\dots)$  deux formes bilinéaires et continues, respectivement de  $X \times X$  dans  $\mathbb{R}$  et de  $X \times M$  dans  $\mathbb{R}$ , alors le problème:

Pour  $f$  et  $g$  deux formes linéaires et continues, respectivement sur  $X$  et  $M$ , données, trouver  $(U, P)$  tel que:

$$(1-10) \quad \begin{cases} (U, P) \in X \times M \\ a(U, v) + b(v, P) = f(v) & \forall v \in X \\ b(U, q) = g(q) & \forall q \in M \end{cases}$$

admet une solution  $(U, P)$  unique dans  $\{v \in X; b(v, q) = 0 \forall q \in M\} \times M$ , si les conditions suivantes sont satisfaites:

$$(1-11) \quad i) \exists \eta > 0 \text{ telle que } a(v, v) \geq \eta \|v\|_X^2 \quad \forall v \in \{v \in X; b(v, q) = 0 \forall q \in M\}$$

$$(1-12) \quad ii) \exists \beta > 0 \text{ telle que } \inf_{q \in M} \sup_{v \in X} \frac{b(v, q)}{\|v\|_X \|q\|_M} \geq \beta$$

En prenant dans ce lemme les espaces  $X = V^\epsilon$ ,  $M = L_0^2(\Omega_f^\epsilon)$ , et les formes  $f = L^\epsilon$  et  $g$  nulle, alors le problème (1-10) est le même que (1-7). Pour affirmer l'existence et l'unicité du couple  $(U^\epsilon, P^\epsilon)$ , il nous suffit donc de vérifier que:

- ◆ la forme linéaire sur  $V^\epsilon$ :  $v \mapsto L^\epsilon(v)$  est continue.
- ◆ la forme bilinéaire sur  $V^\epsilon \times V^\epsilon$ :  $(u, v) \mapsto a^\epsilon(u, v)$  est continue.
- ◆ la forme bilinéaire sur  $V^\epsilon \times L_0^2(\Omega_f^\epsilon)$ :  $(u, q) \mapsto b^\epsilon(u, q)$  est continue.
- ◆ les conditions (1-11) et (1-12) sont satisfaites.

Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la continuité de l'application trace sur  $\mathcal{A}_{\text{gl}}^\epsilon$  on a aisément la continuité de la forme linéaire  $L^\epsilon$ :

$$(1-13) \quad |L^\epsilon(v)| \leq \left( \|F\|_{L^2(\Omega_f^\epsilon)} + C^\epsilon \|H^\epsilon\|_{L^2(\mathcal{A}_{\text{gl}}^\epsilon)} \right) \|v\|_{V^\epsilon} \quad \forall v \in V^\epsilon$$

où  $C^\epsilon$  est une constante (qui dépend du paramètre  $\epsilon$ ).

De même, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on établit:

$$(1-14) \quad \begin{aligned} |a^\varepsilon(u, v)| &\leq 2 \max(\mu_g, \mu_\ell) \|u\|_{V^\varepsilon} \|v\|_{V^\varepsilon} \quad \forall (u, v) \in V^\varepsilon \times V^\varepsilon \\ |b^\varepsilon(q, v)| &\leq \|q\|_{L^2(\Omega_f^\varepsilon)} \|v\|_{V^\varepsilon} \quad \forall (v, q) \in V^\varepsilon \times L_0^2(\Omega_f^\varepsilon) \end{aligned}$$

d'où la continuité des formes bilinéaires  $a^\varepsilon(\dots)$  et  $b^\varepsilon(\dots)$  sur  $V^\varepsilon \times V^\varepsilon$  et sur  $V^\varepsilon \times L_0^2(\Omega_f^\varepsilon)$  respectivement.

La condition (1-11) est une conséquence de l'inégalité de Korn et de celle de Poincaré [18]. On peut vérifier facilement que:

$$(1-15) \quad |a^\varepsilon(v, v)| \geq \frac{2}{5} \min(\mu_g, \mu_\ell) \|v\|_{V^\varepsilon}^2 \quad \forall v \in V^\varepsilon$$

(en dimension  $N$ , la constante  $\frac{2}{5}$  est remplacée par  $\frac{2}{N+2}$ )

La condition (1-12) est une conséquence directe du lemme 1-2 ci-dessous, dont une démonstration est donnée dans [20, Th. 3.7]:

**Lemme 1-2:**

*Il existe une constante  $C > 0$  telle que:*

$$(1-16) \quad \sup_{v \in V^\varepsilon} \left( \frac{1}{\|v\|_{V^\varepsilon}} \int_{\Omega_f^\varepsilon} q \operatorname{div}(v) \, dx \right) \geq C \|q\|_{L_0^2(\Omega_f^\varepsilon)} \quad \forall q \in L_0^2(\Omega_f^\varepsilon)$$

Les conditions du lemme 1-1 sont donc satisfaites, le problème (1-7) admet alors une solution  $(U^\varepsilon, P^\varepsilon)$  unique.  $\square$

**Remarque 1-1:**

On aurait pu utiliser la formulation variationnelle suivante, qui élimine dans une première étape l'inconnue  $P^\varepsilon$ :

$$(1-17) \quad \begin{cases} U^\varepsilon \in \mathcal{V}^\varepsilon(\text{div}, 0) \\ a^\varepsilon(U^\varepsilon, v) = L(v) \quad \forall v \in \mathcal{V}^\varepsilon(\text{div}, 0) \end{cases}$$

On démontre d'abord l'existence et l'unicité de la solution  $U^\varepsilon$  de (1-17), puis, à l'aide du lemme 1-3 ci-dessous (théorème de DERHAM ([36], [6])), on établit l'existence de la pression  $P^\varepsilon$  vérifiant la première relation et la quatrième relation de (1-4).

**Lemme 1-3:**

Soit  $\mathcal{O}$  un ouvert borné, connexe de  $\mathbb{R}^n$ , de bord  $\partial\mathcal{O}$   $\mathcal{C}^1$  par morceaux et  $\mathcal{L}$  une forme linéaire continue sur  $(H_0^1(\mathcal{O}))^n$ , alors les deux propositions sont équivalentes:

$$\bullet \mathcal{L}(\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in \left\{ \psi \in (H_0^1(\mathcal{O}))^n; \text{div}(\psi) = 0 \right\}$$

$$\bullet \exists Q \in L^2(\mathcal{O}) / \forall \varphi \in (H_0^1(\mathcal{O}))^n \quad \mathcal{L}(\varphi) = \int_{\mathcal{O}} Q \text{div}(\varphi) \, dx = \int_{\mathcal{O}} \nabla Q \cdot \varphi \, dx$$

la fonction  $Q$  est unique à une constante additive près.

Dans notre cas on prend:

$$\mathcal{L}(v) = \left\langle -\frac{\partial}{\partial x_j} (2 \mu D_{ij}(U^\varepsilon)) - F_i, v_i \right\rangle_{\Omega_1^\varepsilon} - 2 \sigma \langle H, v_i n_i \rangle_{\mathcal{A}_{gg}^\varepsilon} \quad \forall v \in (H_0^1(\Omega_1^\varepsilon))^3$$

où  $\langle \dots \rangle_{\Omega_1}$  désigne les crochets de dualité entre  $H_0^1(\Omega_1^\varepsilon)$  et  $H_0^{-1}(\Omega_1^\varepsilon)$  et  $\langle \dots \rangle_{\mathcal{A}_{gg}^\varepsilon}$  les crochets de dualité entre  $H^{\frac{1}{2}}(\mathcal{A}_{gg}^\varepsilon)$  et  $H^{-\frac{1}{2}}(\mathcal{A}_{gg}^\varepsilon)$ .  $\square$



**2/ METHODE DES ECHELLES MULTIPLES:**

Comme dans la première partie, on va établir les équations macroscopiques en utilisant d'abord la méthode formelle des échelles multiples, puis par la méthode variationnelle de Tartar [5][35], on justifiera les résultats obtenus dans le prochain paragraphe.

**2-1) Développements asymptotiques et équations locales:**2-1-2 Développements asymptotiques

On cherchera la solution  $(U^\epsilon, P^\epsilon)$  de (1-4) sous la forme du développement asymptotique suivant:

$$(2-1) \quad \begin{cases} U^\epsilon(x) = U^0(x, y) + \epsilon U^1(x, y) + \epsilon^2 U^2(x, y) + \dots \\ P^\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^2} P^{-2}(x, y) + \frac{1}{\epsilon} P^{-1}(x, y) + P^0(x, y) + \epsilon P^1(x, y) + \dots \\ y = \frac{x}{\epsilon} \end{cases}$$

où les termes  $(U^j, P^j)$  sont des fonctions régulières définies sur  $\Omega \times Y$  et  $Y$ -périodiques en la variable  $y$ , i.e. la période est  $\ell_i$  - côté de  $Y$  - dans chaque direction  $y_i$ .

Avant de reporter (2-1) dans les équations (1-4), précisons comment les opérateurs différentiels, utilisés dans ces équations, se transforment quand on les applique aux termes  $(U^j, P^j)(x, \frac{x}{\epsilon})$ , c'est à dire à des fonctions du type  $\varphi^\epsilon$  définie sur  $\Omega$  par:

$$\varphi^\epsilon(x) = \varphi(x, \frac{x}{\epsilon}), \text{ où } \varphi \text{ est définie sur } \Omega \times Y.$$

Les règles de dérivations de la composée de fonctions donnent:

$$(2-2) \quad \diamond \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_i}(x) = \left( \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) \left( x, \frac{x}{\varepsilon} \right).$$

$$\diamond \operatorname{div}(\varphi^\varepsilon) = \frac{\partial \varphi_i^\varepsilon}{\partial x_i} = \left( \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}_Y + \operatorname{div}_X \right) (\varphi) \left( x, \frac{x}{\varepsilon} \right).$$

$$\text{où:} \quad \operatorname{div}_X(\varphi) = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} \quad \text{et} \quad \operatorname{div}_Y(\varphi) = \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_i}.$$

$$\diamond D_{ij}(\varphi^\varepsilon)(x) = \left( \frac{1}{\varepsilon} D_{ij}^Y(\varphi) + D_{ij}^X(\varphi) \right) \left( x, \frac{x}{\varepsilon} \right)$$

$$\text{où:} \quad D_{ij}^Y(\varphi) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_i} \right) \quad \text{et} \quad D_{ij}^X(\varphi) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right)$$

$$\diamond \frac{\partial D_{ij}}{\partial x_j}(\varphi^\varepsilon)(x) = \left( \varepsilon^{-2} \frac{\partial D_{ij}^Y}{\partial y_j} + \varepsilon^{-1} \left( \frac{\partial D_{ij}^Y}{\partial x_j} + \frac{\partial D_{ij}^X}{\partial y_j} \right) + \frac{\partial D_{ij}^X}{\partial x_j} \right) (\varphi) \left( x, \frac{x}{\varepsilon} \right).$$

Précisons aussi comment les données dépendent du paramètre  $\varepsilon$ :

Dépendance des données du paramètre  $\varepsilon$ :

• Le coefficient de viscosité  $\mu^\varepsilon$ :

On suppose que chaque fluide ( $\alpha$ ) à un coefficient de viscosité  $\mu_\alpha$  constant. La fonction  $\mu^\varepsilon$  est alors constante par morceaux et est  $\varepsilon Y$ -périodique ( la période est  $\varepsilon \xi_i$  dans chaque direction  $x_i$ ):

$$(2-3) \quad \left| \begin{array}{l} \mu^\varepsilon(x) = \mu\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \\ \text{où } \mu \text{ est définie sur la cellule de base } Y \text{ par:} \\ \mu(y) = \begin{cases} \mu_g = \text{Cte} & \text{dans } Y_g \\ \mu_g = \text{Cte} & \text{dans } Y_g \end{cases} \\ \text{et prolongée à } \mathbb{R}^3 \text{ par } Y\text{-périodicité.} \end{array} \right.$$

♦ La tension superficielle  $\sigma$  de  $\mathcal{A}_{gg}^\varepsilon$  :

(2-4) la constante  $\sigma$  est supposée indépendante de  $\varepsilon$ .

♦ les forces de la pesanteur  $F^\varepsilon$

Si les masses volumiques  $\rho_\alpha$  des fluides ( $\alpha$ ) ( $\alpha = g, l$ ) sont supposées de l'ordre de l'unité, alors, grâce à la structure périodique du matériau, les forces de la pesanteur  $F^\varepsilon$  sont  $\varepsilon Y$ -périodiques. Elles peuvent donc être définies par la relation :

$$(2-5) \quad F^\varepsilon(x) = F\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

où  $F$  est une fonction définie sur la cellule de base  $Y$  et prolongée à  $\mathbb{R}^3$  par  $Y$ -périodicité. Si chaque fluide ( $\alpha$ ) est homogène, la fonction  $F$  peut être considérée comme constante dans chaque  $Y_\alpha$ .

Nous allons considérer un cas plus général. On prend des forces volumiques  $F^\varepsilon$  qui s'écrivent sous la forme (2-6) ci-dessous. Nous signalerons en remarque comment les résultats se modifient en prenant  $F^\varepsilon$  sous la forme (2-5).

$$(2-6) \quad \left. \begin{aligned} F^\varepsilon(x) &= \frac{1}{\varepsilon^2} F^{-2}\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \frac{1}{\varepsilon} F^{-1}\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + F^0\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \dots \\ &\text{où les fonctions } F^j \text{ sont définies dans } L^2(\Omega \times Y), Y\text{-périodiques en la variable } y \text{ et} \\ &\text{bornées indépendamment de } \varepsilon \text{ et de } j \text{ à partir d'un indice } J. \text{ La fonction } F^{-2} \text{ est} \\ &\text{supposée telle que:} \\ F^{-2}(x, y) &= \begin{cases} F_l^{-2}(x) & \text{si } y \in Y_l \\ F_g^{-2}(x) & \text{si } y \in Y_g \end{cases} \end{aligned} \right\}$$

♦ La courbure moyenne  $H^\varepsilon$  de l'interface  $\mathcal{A}_{gg}^\varepsilon$  :

Soit  $f$  une représentation paramétrique de la surface  $\mathcal{A}_{gg}$ . C'est une application (supposée régulière) d'un ouvert  $\theta$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^3$  et dont l'image  $f(\theta)$  est  $\mathcal{A}_{gg}$ .

$$\mathcal{A}_{gg} = \left\{ y \in Y: y = f(t), t \in \mathcal{O} \right\}$$

La courbure moyenne H de  $\mathcal{A}_{gg}$  est définie par [ ] :

$$H = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 - 2 a_3 b_3}{2(a_1 a_2 - (a_3)^2)^{3/2}}$$

où:

$$a_1(t) = \left| \frac{\partial f}{\partial t_1} \right|^2 (t)$$

$$b_1(t) = \left( \frac{\partial f}{\partial t_1}, \frac{\partial f}{\partial t_2}, \frac{\partial^2 f}{\partial t_2^2} \right) (t)$$

$$a_2(t) = \left| \frac{\partial f}{\partial t_2} \right|^2 (t)$$

$$b_2(t) = \left( \frac{\partial f}{\partial t_1}, \frac{\partial f}{\partial t_2}, \frac{\partial^2 f}{\partial t_1^2} \right) (t)$$

$$a_3(t) = \left( \frac{\partial f}{\partial t_1}, \frac{\partial f}{\partial t_2} \right) (t)$$

$$b_3(t) = \left( \frac{\partial f}{\partial t_1}, \frac{\partial f}{\partial t_2}, \frac{\partial^2 f}{\partial t_1 \partial t_2} \right) (t)$$

Les symboles  $\left| \cdot \right|$ ,  $( \dots )$  et  $( \dots )$  désignent, respectivement, la norme, le produit scalaire et le produit mixte euclidiens dans  $\mathbb{R}^3$ .

L'interface  $\mathcal{A}_{gg}^\varepsilon$  est définie par ( voir (1-2) ) :

$$\mathcal{A}_{gg}^\varepsilon = \left\{ x^k \in \Omega; x^k = \varepsilon f(t) + \varepsilon(k_1 \ell_1, k_2 \ell_2, k_3 \ell_3), t \in \mathcal{O} \text{ et } k \in \mathbb{Z}^3 \right\}$$

En chaque point  $x^k$  de  $\mathcal{A}_{gg}^\varepsilon$ , la définition de la courbure moyenne  $H^\varepsilon$  est la même que celle de la courbure H de  $\mathcal{A}_{gg}$  où l'on remplace  $f(t)$  par  $\varepsilon f(t) + \varepsilon(k_1 \ell_1, k_2 \ell_2, k_3 \ell_3)$ . Les  $a_i$  sont alors remplacés par  $\varepsilon^2 a_i$  et les  $b_i$  par  $\varepsilon^3 b_i$ . Ainsi, si on prolonge H par Y-périodicité (i.e: la période est le  $i^e$  côté  $\ell_i$  de Y dans chaque direction  $y_i$ ), la courbure  $H^\varepsilon$  est liée à H par la relation:

$$(2-7) \quad H^\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} H\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

$$( x \in \mathcal{A}_{gg}^\varepsilon \iff \exists k \in \mathbb{Z}^3 / y = \frac{x}{\varepsilon} - (k_1 \ell_1, k_2 \ell_2, k_3 \ell_3) \in \mathcal{A}_{gg} )$$

2-1-3 Equations locales

On reporte les développements (2-1) à (2-7) dans les équations (1-4). On obtient alors un développement asymptotique du problème initial. L'identification des termes en puissances de  $\epsilon$  implique alors que les fonctions  $(U^j, P^j)$  doivent vérifier les équations locales ci-dessous qui ont lieu dans la cellule de base  $Y$ , la variable macroscopique  $x$  est considéré comme un paramètre.

$$(2-8) \quad \left. \begin{array}{l} \frac{\partial P^{-2}}{\partial y_i} = 0 \quad (i=1,2,3) \quad \text{dans } Y_\alpha \quad (\alpha = g, \ell) \\ [P^{-2}]_{g\ell} = 0 \quad \text{sur } \mathcal{A}_{g\ell} \\ P^{-2} \text{ est } Y\text{-périodique.} \end{array} \right\}$$

$$(2-9) \quad \left. \begin{array}{l} -2\mu_\alpha \frac{\partial}{\partial y_j} D_{ij}^y(U^0) + \frac{\partial P^{-1}}{\partial y_i} = F_i^{-2} - \frac{\partial P^{-2}}{\partial x_i} \quad \text{dans chaque } Y_\alpha \quad (\alpha = g, \ell) \\ \text{div}_y(U^0) = 0 \quad \text{dans chaque } Y_\alpha \quad (\alpha = g, \ell) \\ [U^0]_{g\ell} = 0 \quad \text{sur } \mathcal{A}_{g\ell} \\ [2\mu D_{ij}^y(U^0) - P^{-1} \delta_{ij}]_{g\ell} \cdot n_j = 2\sigma H n_i \quad \text{sur } \mathcal{A}_{g\ell} \\ U^0 = 0 \quad \text{sur } \mathcal{A}_{fs} \\ U^0 \text{ et } P^{-1} \text{ sont } Y\text{-périodiques.} \end{array} \right\}$$

$$(2-10) \quad \left. \begin{array}{l} -2\mu_\alpha \frac{\partial}{\partial y_j} (D_{ij}^y(U^1) + D_{ij}^x(U^0)) + \frac{\partial P^0}{\partial y_i} = F_i^{-1} - \frac{\partial P^{-1}}{\partial x_i} + \mu_\alpha \frac{\partial}{\partial x_j} D_{ij}^y(U^0) \quad \text{dans } Y_\alpha \quad (\alpha = g, \ell) \\ \text{div}_y(U^1) + \text{div}_x(U^0) = 0 \quad \text{dans } Y_\alpha \quad (\alpha = g, \ell) \\ [U^1]_{g\ell} = 0 \quad \text{sur } \mathcal{A}_{g\ell} \\ [2\mu(D_{ij}^y(U^1) + D_{ij}^x(U^0)) - P^0 \delta_{ij}]_{g\ell} \cdot n_j = 0 \quad \text{sur } \mathcal{A}_{g\ell} \\ U^1 = 0 \quad \text{sur } \mathcal{A}_{fs} \\ U^1 \text{ et } P^0 \text{ sont } Y\text{-périodiques.} \end{array} \right\}$$

Pour les termes  $(U^k, P^{k-1})$  ( $k \geq 2$ ) on obtient:

$$\begin{aligned}
 & -2 \mu_\alpha \frac{\partial}{\partial y_j} (D_{ij}^y(U^k) + D_{ij}^x(U^{k-1})) + \frac{\partial P^{k-1}}{\partial y_i} = F_i^{k-2} - \frac{\partial P^{k-2}}{\partial x_i} + \mu_\alpha \frac{\partial}{\partial x_j} D_{ij}^y(U^{k-1}) \text{ dans } Y_\alpha \\
 & \operatorname{div}_y(U^k) + \operatorname{div}_x(U^{k-1}) = 0 \text{ dans } Y_\alpha \\
 (2-11) \quad & [U^k]_{g\ell} = 0 \text{ sur } \mathcal{A}_{g\ell} \\
 & [2\mu(D_{ij}^y(U^k) + D_{ij}^x(U^{k-1})) - P^{k-1}\delta_{ij}]_{g\ell} n_j = 0 \text{ sur } \mathcal{A}_{g\ell} \\
 & U^k = 0 \text{ sur } \mathcal{A}_{fs} \\
 & U^k \text{ et } P^{k-1} \text{ sont } Y\text{-périodiques.}
 \end{aligned}$$

2-1-4 Etude des équations locales

Puisque  $Y_f$  est supposé connexe, l'équation (2-8) montre que la fonction  $P^{-2}$  est constante par rapport à la variable  $y$  :

(2-12)	$P^{-2}(x, y) = P^{-2}(x)$
--------	----------------------------

Pour l'étude de l'existence et de l'unicité des équations (2-9), (2-10) et (2-11), on considère un problème modèle du même type que les équations précédentes:

$$\begin{aligned}
 & -2 \mu_\alpha \Delta_y(w_i) + \frac{\partial Q}{\partial y_i} = M_i \text{ dans chaque } Y_\alpha \text{ } (\alpha = g, \ell) \\
 & \operatorname{div}_y(w) = G \text{ dans chaque } Y_\alpha \text{ } (\alpha = g, \ell) \\
 (2-13) \quad & [w]_{g\ell} = 0 \text{ sur } \mathcal{A}_{g\ell} \\
 & [2\mu(D_{ij}^y(w) - Q\delta_{ij})]_{g\ell} n_j = \Psi n_i \text{ sur } \mathcal{A}_{g\ell} \\
 & w = 0 \text{ sur } \mathcal{A}_{fs} \\
 & w \text{ et } Q \text{ sont } Y\text{-périodiques.}
 \end{aligned}$$

Les fonctions  $M, G$  et  $\Psi$  sont des données dans des espaces convenables.

On introduit les espaces fonctionnels suivants:

$$(2-14) \left\{ \begin{aligned} \mathcal{V}_Y &= \left\{ v \in H^1_{loc} \left( \bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}^3} Y_f^k \right) / v=0 \text{ sur } \bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}^3} \mathcal{A}_{fs}^k \text{ et } v \text{ est } Y\text{-périodique} \right\} \\ \mathcal{V}_Y(\text{div},0) &= \mathcal{V}_Y \cap \left\{ v : \text{div}_Y(v) = 0 \right\} \\ L^2_0(Y_f) &= \left\{ q \in L^2_{loc} \left( \bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}^3} Y_f^k \right) / q \text{ est } Y\text{-périodique et } \int_{Y_f} q \, dx = 0 \right\} \\ \mathcal{E}_Y &= \mathcal{V}_Y \times L^2_0(Y_f) . \text{ (voir les notations (1-1) et (1-2) pour } Y_f^k \text{ et } \mathcal{A}_{fs}^k \text{ )} \end{aligned} \right.$$

Pour des détails sur la notion de périodicité et les propriétés des espaces du type  $\mathcal{V}_Y$ ,  $\mathcal{V}_Y(\text{div},0)$  ou  $L^2_0(Y_f)$ , voir la référence [30].

L'espace  $\mathcal{V}_Y$  peut être identifié à l'ensemble des fonctions de  $H^1(Y_f)$  ayant des traces nulles sur  $\mathcal{A}_{fs}$  et qui prennent des valeurs égales sur deux faces opposées de  $Y$ . Muni de la norme  $\| \cdot \|_{\mathcal{V}_Y}$  définie ci-dessous, il est de Hilbert.

$$\| v \|_{\mathcal{V}_Y}^2 = \int_{Y_f} D_{ij}^Y(v) D_{ij}^Y(v) \, dy : \quad D_{ij}^Y(v) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \frac{\partial v_j}{\partial y_i} \right)$$

Cette norme est équivalente à la norme usuelle induite par  $(H^1(Y_f))^3$  sur  $\mathcal{V}_Y$ .

L'espace  $L^2_0(Y_f)$  peut être identifié à l'espace des fonctions  $q$  de carré sommable et de moyenne nulle sur  $Y_f$ , et qui vérifient la périodicité "faible":

$$\langle \nabla_Y q, v_i \rangle_{Y_f} = - \langle q, \text{div}_Y(v) \rangle_{Y_f} \quad \forall v \in \mathcal{V}_Y .$$

Muni de la norme  $\| \cdot \|_{0,Y}$  usuelle, il est de Hilbert.

$$\| q \|_{0,Y}^2 = \int_{Y_f} q^2 \, dy .$$

On suppose que:

$$(2-15) \quad \begin{cases} M \in L^2_{loc} \left( \bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}^3} Y_f^k \right); \text{ Y-périodique} \\ G \in L^2_{loc} \left( \bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}^3} Y_f^k \right); \text{ Y-périodique et } \int_{Y_f} G \, dy = 0 \\ \Psi \in L^2_{loc} \left( \bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}^3} \mathcal{A}_{gl}^k \right); \text{ Y-périodique} \end{cases}$$

et on définit pour tout couple  $(u, v)$  de  $V_Y \times V_Y$  et pour toute fonction  $q$  de  $L^2(Y_f)$  :

$$(2-16) \quad \begin{cases} a_Y(u, v) = \int_{Y_f} 2\mu D_{ij}^Y(u) D_{ij}^Y(v) \, dy \\ b_Y(v, q) = \int_{Y_f} -q \operatorname{div}_Y(v) \, dy \\ g_Y(q) = \int_{Y_f} -q G \, dy \\ L_Y(v) = \int_{Y_f} M \cdot v \, dy + \int_{\mathcal{A}_{gl}} \Psi \cdot v \cdot n \end{cases}$$

**Lemme 2-1:**

*Sous les hypothèses (2-15), si  $(w, Q)$  est une solution forte de (2-13) alors elle vérifie le problème variationnel:*

$$(2-17) \quad \begin{cases} w \in V_Y \quad ; \quad Q \in L^2(Y_f) \\ a_Y(w, v) + b_Y(v, Q) = L_Y(v) \quad \forall v \in V_Y \\ b_Y(w, q) = g_Y(q) \quad \forall q \in L^2_0(Y_f) \end{cases}$$

*Le problème (2-17) admet une solution unique  $(w, Q)$  dans  $(V_Y/\mathbb{R}^3) \times L^2_0(Y_f)$ .*



Démonstration:

Précisons d'abord que, comme dans les équations de Stokes classiques, la pression  $Q$  n'est déterminée qu'à une constante additive près, sa recherche dans l'espace  $L_0^2(Y_f)$  revient alors à fixer cette constante. Pour établir la formulation faible (2-17), on procède de manière analogue à la construction, dans la démonstration du théorème 1-1, de la relation (1-9). La seule différence principale est que: dans la relation (1-9) les termes intégraux sur  $\partial\Omega_f^{\pm}$  s'annulent car les fonctions-test  $v$  ont une trace nulle sur  $\partial\Omega_f^{\pm}$ , par contre pour la relation (2.17) les termes intégrales sur  $\partial Y_f$  s'annulent pour deux raisons:

- la condition " $v = 0$  sur  $\mathcal{A}_{f_0}$ " vérifiée par les fonctions-tests de  $V_Y$ .
- les conditions de périodicité pour les intégrales sur  $\partial Y_f \cap \partial Y$ .

Le problème (2-17) est analogue au problème (1-10) du lemme 1-1 si on pose:

$$\begin{cases} X = V_Y \text{ et } M = L_0^2(Y_f) \\ a(\dots) = a_Y(\dots) \text{ et } b(\dots) = b_Y(\dots) \\ f(\dots) = \ell_Y(\dots) \text{ et } g(\dots) = g_Y(\dots) \end{cases}$$

Pour prouver l'existence et l'unicité de la solution  $(w, Q)$ , il nous suffit donc de vérifier que:

- ♦ la forme linéaire  $\ell_Y(\dots)$  est continue sur  $V_Y$ .
- ♦ la forme linéaire  $g_Y(\dots)$  est continue sur  $L_0^2(Y_f)$ .
- ♦ la forme bilinéaire  $a_Y(\dots)$  est continue sur  $(V_Y)^2$ .
- ♦ la forme bilinéaire  $b_Y(\dots)$  est continue sur  $V_Y \times L_0^2(Y_f)$ .
- ♦ les conditions (1-11) et (1-12) du lemme 1-1 sont satisfaites.

Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, les quatre premières conditions sont évidentes (pour la première on utilise aussi la continuité de l'application trace). Il ne reste donc que la vérification des conditions (1-11) et (1-12)

• la coercivité de  $a_Y(\dots)$  (i.e (1-11)):

On vérifie aisément que, puisque les  $\mu_\alpha$  sont positives,  $a_Y(\dots)$  est coercive:

$$a_Y(v, v) \geq \min(\mu_g, \mu_t) \left\| v \right\|_{V_Y}^2 \quad \forall v \in V_Y$$

• la condition de l'inf-sup (i.e (1-12)):

Puisque  $Y_f$  est borné, connexe, et sa frontière est localement lipschitzienne, d'après R.TEMAM ([36] Chap. I, lemme 2.4), pour toute fonction  $q$ , donnée dans  $L_0^2(Y_f)$ , il existe une fonction  $\psi_q$  appartenant à  $H_0^1(Y_f)$  telle que:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\psi_q) = -q & \text{dans } Y_f \\ \left\| \psi_q \right\|_{H_0^1(Y_f)} \leq C \left\| q \right\|_{0,Y} \end{cases}$$

(C est une constante qui ne dépend que de la géométrie de  $Y_f$ )

Donc, puisque  $H_0^1(Y_f)$  est inclus dans  $V_Y$  et que leur normes sont équivalentes, on a:

$$\begin{aligned} \sup_{v \in V_Y} \left( \frac{1}{\left\| v \right\|_V} \int_{Y_f} -q \operatorname{div}_y(v) \, dy \right) &\geq \left( \frac{1}{\left\| \psi_q \right\|_V} \int_{Y_f} -q \operatorname{div}_y(\psi_q) \, dy \right) = \frac{\left\| q \right\|_{0,Y}^2}{\left\| \psi_q \right\|_V} \\ &\geq C \frac{\left\| q \right\|_{0,Y}^2}{\left\| \psi_q \right\|_{H_0^1(Y_f)}} \geq \frac{C}{C} \left\| q \right\|_{0,Y} \end{aligned}$$

d'où la propriété recherchée:

$$(2-18) \quad \exists \beta > 0 \text{ telle que: } \inf_{q \in L_0^2(Y_f)} \sup_{v \in \mathcal{V}_Y} \frac{b(v, q)}{\|v\|_Y \|q\|_0} \geq \beta = \frac{C'}{C}. \quad \square$$

D'après (2-6) et (2-12) les fonctions  $F_\alpha^{-2}$  et  $\nabla_x P^{-2}$  ne dépendent que de la variables  $x$ , elles sont donc dans  $L_{loc}^2\left(\bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}^3} Y_f^k\right)$ . La courbure  $H$  de  $\mathcal{A}_{gg}$  est supposée dans  $L_{loc}^2\left(\bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}^3} \mathcal{A}_{gt}^k\right)$ .

Les équations (2-9) vérifient alors les hypothèse (2-15) du lemme 2-1, on a donc le résultat suivant:

**Corollaire 2-1:**

*Les termes  $U^0$  et  $P^{-1}$  sont déterminés de manière unique par :*

$$U^0 \in \mathcal{V}_Y; P^{-1} \in L_0^2(Y_f) \text{ et } \forall \varphi \in \mathcal{V}_Y \quad \forall \psi \in L_0^2(Y_f):$$

$$\int_{Y_f} 2\mu D_{mn}^y(U^0) D_{mn}^y(\varphi) dy - \int_{Y_f} P^{-1} \operatorname{div}_y(\varphi) dy = \int_{Y_g} F_g^{-2} \cdot \varphi dy + \int_{Y_t} F_t^{-2} \cdot \varphi dy + \int_{\mathcal{A}_{gt}} 2 \sigma H \varphi \cdot n d\Gamma$$

$$\int_{Y_f} \psi \operatorname{div}_y(U^0) dy = 0$$

Sous certaines hypothèses, on peut appliquer le lemme 2-1 pour étudier l'existence et l'unicité des autres équations. Mais, puisqu'on aura besoin uniquement des équations de  $U^0$  pour établir l'équation macroscopique, on se contentera du corollaire ci-dessus.

2-2) Equation macroscopique et perméabilités homogénéisées:

Puisque, d'après (2-12) et l'hypothèse (2-6), le terme  $P^{-2}$  et les fonctions  $F_{\alpha}^{-2}$  ne dépendent pas de la variable  $y$ , la fonction  $U^0$  donnée par (2-9) peut s'écrire sous la forme suivante:

$$(2-19) \quad U^0(x,y) = \left[ (F_{\ell}^{-2})_k(x) - \frac{\partial P^{-2}}{\partial x_k}(x) \right] V_{\ell}^k(y) + \left[ (F_g^{-2})_k(x) - \frac{\partial P^{-2}}{\partial x_k}(x) \right] V_g^k(y) + W(y).$$

où, pour chaque couple  $(\alpha, k)$  donné ( $\alpha = g, \ell$  et  $k = 1, 2, 3$ ),  $(F_{\alpha}^{-2})_k$  désigne la  $k^{i\text{ème}}$  composante de la fonction  $F_{\alpha}^{-2}$ .

Les fonctions  $V_{\alpha}^k$  et  $W$  peuvent être choisies comme les solutions uniques des problèmes aux limites suivants :

pour chaque  $(\alpha, k)$  fixé, le couple  $(V_{\alpha}^k, q_{\alpha}^k)$  est la solution de  $(\mathcal{P}_{\alpha}^k)$ :

$$(2-20) \quad \left\{ \begin{array}{ll} -2 \mu_{\beta} \frac{\partial}{\partial y_j} D_{ij}^y(V_{\alpha}^k) + \frac{\partial q_{\alpha}^k}{\partial y_i} = \delta_{\alpha\beta} \delta_{ik} & \text{dans chaque } Y_{\beta} \ (\beta = g, \ell) \\ \operatorname{div}_y(V_{\alpha}^k) = 0 & \text{dans chaque } Y_{\beta} \ (\beta = g, \ell) \\ [V_{\alpha}^k]_{g\ell} = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{g\ell} \\ [2\mu D_{ij}^y(V_{\alpha}^k) - q_{\alpha}^k \delta_{ij}]_{g\ell} \cdot n_j = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{g\ell} \\ V_{\alpha}^k = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{1\alpha} \\ V_{\alpha}^k \text{ et } q_{\alpha}^k \text{ sont } Y\text{-périodiques.} & \end{array} \right.$$

Les symboles  $\delta_{ik}$  et  $\delta_{\alpha\beta}$  désignent les symboles de Krönecker . Le symbole  $\delta_{\alpha\beta}$  est introduit de telle sorte que si  $\alpha = g$ , le second membre de la première équation vaut  $\delta_{ik}$  dans  $Y_g$  et zéro dans  $Y_{\ell}$ , et l'inverse si  $\alpha = \ell$ .

Le couple  $(W, r)$  est déterminé par:

$$\begin{array}{l}
 (2-21) \quad \left\{ \begin{array}{ll}
 -2 \mu_{\beta} \frac{\partial}{\partial y_j} D_{ij}^{\gamma}(W) + \frac{\partial r}{\partial y_i} = 0 & \text{dans chaque } Y_{\beta} \ (\beta = g, \ell) \\
 \operatorname{div}_y(W) = 0 & \text{dans chaque } Y_{\beta} \ (\beta = g, \ell) \\
 [W]_{g\ell} = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{g\ell} \\
 [2\mu D_{ij}^{\gamma}(W) - r\delta_{ij}]_{g\ell} \cdot n_j = 2\sigma H n_i & \text{sur } \mathcal{A}_{g\ell} \\
 W = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{fs} \\
 W \text{ et } r \text{ sont } Y\text{-périodiques.} & 
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Les problèmes (2-20) et (2-21) sont du même type que le problème (2-13), ils rentrent donc dans le cadre du lemme 2-1. Les solutions  $(v_{\alpha}^k, q_{\alpha}^k)$  et  $(W, r)$  existent, les fonctions  $v_{\alpha}^k$  et  $W$  sont uniques et les pressions  $q_{\alpha}^k$  et  $r$  sont déterminées à des constantes près.

Pour obtenir la relation (2-19), il suffit de multiplier les équations de chaque problème  $(\mathcal{P}_{\alpha}^k)$  par  $\left( (F_{\alpha}^{-2})_k(x) - \frac{\partial P^{-2}}{\partial x_k}(x) \right)$ , de sommer sur  $\alpha = g, \ell$  et  $k = 1, 2, 3$ , puis additionner le résultat au problème (2-21) vérifié par  $W$ ; on remarquera en fin de compte que le deuxième membre de (2-19) vérifie le même problème que celui vérifiée par  $U^0$ , et grâce à l'unicité de la solution, l'égalité (2-19) s'en déduit.

En utilisant la deuxième relation de (2-10), on va établir une équation (macroscopique) vérifiée par la pression  $P^{-2}$  dans  $\Omega$ .

On note  $\mathcal{M}_Y(\varphi)(x)$  la moyenne sur  $Y_f$  de toute fonction  $\varphi$  définie sur  $\Omega \times Y$ :

$$(2-22) \quad \mathcal{M}_Y(\varphi)(x) = \frac{1}{|Y|} \int_{Y_f} \varphi(x, y) \, dy$$

**Théorème 2-1:**

*Si  $Y_f$  est connexe, alors sous l'hypothèse :*

$$(2-23) \quad F_\alpha^{-2} \in \left\{ \psi \in L^2(\Omega) / \operatorname{div}(\psi) \in L^2(\Omega) \right\} \quad (\alpha = g, \ell)$$

*a.) La pression  $P^{-2}$  vérifie l'équation macroscopique suivante:*

$$(2-24) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( K_{ij} \frac{\partial P^{-2}}{\partial x_j} \right) = K_{ij}^\ell \frac{\partial (F_\ell^{-2})_j}{\partial x_i} + K_{ij}^g \frac{\partial (F_g^{-2})_j}{\partial x_i} & \text{dans } \Omega \\ K_{ij} \frac{\partial P^{-2}}{\partial x_j} n_i = (K_{ij}^\ell (F_\ell^{-2})_j + K_{ij}^g (F_g^{-2})_j) n_i + \mathcal{M}_Y(W_j) n_j & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

*où les perméabilités  $K_{ij}^\alpha$  et  $K_{ij}$  sont des constantes données par:*

$$(2-25) \quad \begin{aligned} K_{ij}^\alpha &= \frac{1}{|Y|} \int_{Y_f} (V_\alpha^j)_i(y) dy \quad (\alpha = g, \ell) \\ K_{ij} &= K_{ij}^\ell + K_{ij}^g \end{aligned}$$

*b.) Les  $K_{ij}$  s'écrivent sous la forme symétrique et coercive:*

$$(2-26) \quad K_{ij} = \frac{1}{|Y|} \int_{Y_f} 2\mu D_{mn}^Y(V^j) D_{mn}^Y(V^i) dy; \quad V^j = V_g^j + V_\ell^j$$

*c.) Le problème (2-24) admet une solution  $P^{-2}$  unique dans l'espace quotient  $H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ .*

*d.) La moyenne de la vitesse  $U^0$  est donnée par:*

$$(2-27) \quad \mathcal{M}_Y(U_i^0)(x) = K_{ij}^\ell \left( (F_\ell^{-2})_j - \frac{\partial P^{-2}}{\partial x_j} \right)(x) + K_{ij}^g \left( (F_g^{-2})_j - \frac{\partial P^{-2}}{\partial x_j} \right)(x) + \mathcal{M}_Y(W_i).$$

**Démonstration:**

a) D'après les équations (2-10),  $\operatorname{div}_Y(U^1) + \operatorname{div}_X(U^0)$  est nul, une intégration sur  $Y_f$  donne alors:

$$\int_{Y_f} \operatorname{div}_X(U^0) dy = \int_{\partial Y_f} U^1 \cdot n dr$$

Mais, puisque  $U^1$  est nulle sur l'interface  $\mathcal{A}_{12}$  et est  $Y$ -périodique, le second membre de cette égalité est nul:

$$\int_{Y_f} \operatorname{div}_x(U^0) dy = 0$$

La permutation du signe intégrale et  $\operatorname{div}_x$  donne alors:

$$(2-28) \quad \operatorname{div}_x (\mathcal{M}_Y(U^0)) = 0$$

La condition naturelle que doit satisfaire la moyenne  $\mathcal{M}_Y(U^0)$  sur le bord de  $\Omega$ , voir [23], est que sa composante normale est nulle:

$$(2-29) \quad \mathcal{M}_Y(U^0) \cdot n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

Cette condition aux limites est a priori formelle comme la convergence du développement asymptotique (2-1) du départ, mais elle va être justifiée ultérieurement (paragraphe 3/)

Si on remplace dans l'équation (2-28) et dans la condition au bord (2-29) la fonction  $U^0$  par son expression (2-19), on obtient l'équation macroscopique (i.e en la variable  $x$ ) vérifiée par la pression  $P^{-2}$ :

$$(2-30) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( K_{ij} \frac{\partial P^{-2}}{\partial x_j} \right) = K_{ij}^l \frac{\partial (F_l^{-2})_j}{\partial x_i} + K_{ij}^g \frac{\partial (F_g^{-2})_i}{\partial x_i} + \operatorname{div}_x(\mathcal{M}_Y(W)) & \text{dans } \Omega \\ K_{ij} \frac{\partial P^{-2}}{\partial x_j} n_i = (K_{ij}^l (F_l^{-2})_j + K_{ij}^g (F_g^{-2})_j) n_i + \mathcal{M}_Y(W_j) n_j & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Mais, puisque la fonction  $W$  ne dépend que de la variable  $y$ , le terme  $\text{div}_x(\mathcal{M}_Y(W))$  est nul. L'équation (2-24) est donc établie.

b) Pour établir la forme (2-26) des perméabilités  $K_{ij}$ , on va utiliser les formulations variationnelles associées aux problèmes  $(\mathcal{P}_\alpha^j)$  donnés par (2-20). Ces problèmes sont du même type que (2-13), donc, d'après la relation (2-17) du lemme 2-1, les formulations faibles associées sont:

pour chaque  $(\alpha, j)$  ( $\alpha = g, \ell$  et  $j = 1, 2, 3$ ):

$$(2-31) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_\alpha^j \in \mathcal{V}_Y : q_\alpha^j \in L_0^2(Y_f) \text{ et } \forall \varphi \in \mathcal{V}_Y \quad \forall \psi \in L_0^2(Y_f) : \\ \int_{Y_f} 2\mu D_{mn}^Y(v_\alpha^j) D_{mn}^Y(\varphi) \, dy - \int_{Y_f} q_\alpha^j \text{div}_Y(\varphi) \, dy = \int_{Y_\alpha} \varphi_j \, dy \\ \int_{Y_f} \psi \text{div}_Y(v_\alpha^j) \, dy = 0 \end{array} \right.$$

Si on note  $V^j = v_g^j + v_\ell^j$  et  $q^j = q_g^j + q_\ell^j$  alors la somme des relations ci-dessus (sur  $\alpha = g, \ell$ ) montre que le couple  $(V^j, q^j)$  vérifie:

$$(2-32) \quad \left\{ \begin{array}{l} V^j \in \mathcal{V}_Y : q^j \in L_0^2(Y_f) \text{ et } \forall \varphi \in \mathcal{V}_Y \quad \forall \psi \in L_0^2(Y_f) : \\ \int_{Y_f} 2\mu D_{mn}^Y(V^j) D_{mn}^Y(\varphi) \, dy - \int_{Y_f} q^j \text{div}_Y(\varphi) \, dy = \int_{Y_f} \varphi_j \, dy \\ \int_{Y_f} \psi \text{div}_Y(V^j) \, dy = 0 \end{array} \right.$$

En prenant comme fonction-tests  $\varphi = V^j$  dans (2-32) on a:



$$\int_{Y_f} 2\mu D_{mn}^Y(V^j)D_{mn}^Y(V^i) dy = \int_{Y_f} V_j^i dy$$

Mais, d'après la définition (2-25) des  $K_{ij}^\alpha$  et de  $K_{ij}$ , le second membre de cette égalité est égal à  $|Y|K_{ij}$ , d'où la relation (2-26):

$$|Y|K_{ij} = \int_{Y_f} 2\mu D_{mn}^Y(V^j)D_{mn}^Y(V^i) dy$$

La symétrie des  $K_{ij}$  est alors évidente, leur coercivité se démontre par la méthode classique qui consiste à prouver que l'application  $x \mapsto K_{ij} x_i x_j$  est une forme quadratique définie positive sur  $\mathbb{R}^3$ :

Soit  $x = (x_i)_{i=1}^3$  un vecteur de  $\mathbb{R}^3$ .

L'expression (2-26) des  $K_{ij}$  montre que:

$$|Y| K_{ij} x_i x_j = \int_{Y_f} 2\mu D_{mn}^Y(x_j V^j) D_{mn}^Y(x_i V^i) dy.$$

Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}^3$ , on note  $\chi_x$  la combinaison  $x_j V^j$  des fonction  $V^j$ . Puisque les constantes  $\mu_\alpha$  ( $\alpha=g, \ell$ ) sont positives on a:

$$(2-33) \quad K_{ij} x_i x_j \geq \frac{\min(\mu_g, \mu_\ell)}{|Y|} \int_{Y_f} D_{mn}^Y(\chi_x) D_{mn}^Y(\chi_x) dy \geq 0$$

Supposons maintenant qu'il existe  $\xi \in \mathbb{R}^3$  tel que  $K_{ij} \xi_i \xi_j = 0$ .

Puisque  $\int_{Y_f} D_{mn}^Y(\chi_\xi) D_{mn}^Y(\chi_\xi) dy$  est exactement la norme élevée au carré de  $\chi_\xi$  dans l'espace  $V_Y$ , l'inégalité (2-33) implique donc que la fonction  $\chi_\xi$  est nulle, et par conséquent, si on note  $q_\xi$  la combinaison linéaire  $\xi_j q^j$  des pressions  $q^j$ , d'après (2-32) on a:

$$- \int_{Y_f} q_\xi \operatorname{div}_Y(\varphi) dy = \xi_j \int_{Y_f} \varphi_j dy \quad \forall \varphi \in V_Y$$

Or, on peut trouver dans  $V_Y$  une fonction  $\varphi$  telle que:  $\operatorname{div}_Y(\varphi) = 0$  et  $\int_{Y_f} \varphi_j dy = \xi_j$ .

La relation précédente implique alors que le vecteur  $\xi$  est forcément nul.

On a démontré donc que l'application  $x \mapsto K_{ij} x_i x_j$  est une forme quadratique définie positive, la coercivité des  $K_{ij}$  s'ensuit.

c) Les équations (2-24) forment un problème classique de Neumann non homogène. L'hypothèse (2-23) faite sur les fonctions  $F_\alpha^{-2}$  (qui est suffisante mais pas nécessaire) permet d'écrire (2-24) sous la forme faible suivante:

(2-34)  $\forall u, v \in H^1(\Omega)$  et  $\forall v \in H^1(\Omega)$ :  $\int_{\Omega} K_{ij} u_i v_j dx = \int_{\Omega} M_i \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} G_i n_i v d\Gamma$ ,  $M_i = K_{ij}^L(F_\xi^{-2})_j + K_{ij}^G(F_g^{-2})_j$  et  $G_i = \mathcal{M}_Y(W_j)$  ))

Ce problème admet une solution unique, à une constante additive près, puisque les  $K_{ij}$  sont

coercives et la condition de compatibilité est satisfaite: 
$$\int_{\partial\Omega} n_j \, d\Gamma = 0.$$

d) Enfin, la relation (2-27) entre  $U^0$  et la pression  $P^{-2}$  s'obtient en appliquant l'opérateur moyenne  $\mathcal{M}_Y(\cdot)$ , défini par (2-22), à la relation (2-19).  $\square$

**Remarque 2-1:**

*On peut remplacer, dans les relations (2-24) et (2-27), la moyenne de la fonction  $W$  par un terme qui met en évidence la courbure  $H$  de l'interface  $\mathcal{A}_{gg}$ . En effet on a:*

$$(2-35) \quad |Y| \mathcal{M}_Y(W_j) = \int_{\mathcal{A}_{gg}} 2 \sigma H V^j \cdot n \, d\Gamma$$

*Pour démontrer cette relation, on utilise les formulations variationnelles vérifiées par les fonctions  $V_\alpha^j$  et  $W$ . D'après le lemme 2-1, la fonction  $W$  vérifie:*

$$(2-36) \quad \left\{ \begin{array}{l} W \in \mathcal{V}_Y : r \in L_0^2(Y_f) \text{ et } \forall \varphi \in \mathcal{V}_Y \quad \forall \psi \in L_0^2(Y_f) : \\ \int_{Y_f} 2\mu D_{mn}^Y(W) D_{mn}^Y(\varphi) \, dy - \int_{Y_f} r \operatorname{div}_Y(\varphi) \, dy = \int_{\mathcal{A}_{gg}} 2\sigma H \varphi \cdot n \, d\Gamma \\ \int_{Y_f} \psi \operatorname{div}_Y(W) \, dy = 0 \end{array} \right.$$

*En prenant comme fonctions-tests  $\varphi = W$  dans (2-32) et  $\varphi = V^k$  dans (2-36) on a:*

$$\int_{Y_f} 2\mu D_{mn}^y(V^j)D_{mn}^y(W) dy = \int_{Y_f} W_j dy$$

$$\int_{Y_f} 2\mu D_{mn}^y(W)D_{mn}^y(V^j) dy = \int_{\Omega_g} 2\sigma H V^j \cdot n d\Gamma$$

d'où la relation (2-35).

Si la courbure moyenne  $H$  est constante alors la moyenne  $\mathcal{M}_Y(W_j)$  est nulle: en effet dans ce cas:

$$|Y| \mathcal{M}_Y(W_j) = 2\sigma H \int_{\Omega_g} V^j \cdot n d\Gamma = \int_{\Omega_g} \text{div}_Y(V^j) dy = 0. \square$$

**Remarque 2-2:**

Si on s'intéresse à la moyenne de  $U^0$  sur chaque fluide ( $\alpha$ ) séparément, en intégrant la relation (2-19), sur  $Y_\ell$  puis sur  $Y_g$ , on a les formules suivantes:

$$(2-37) \quad \begin{cases} \mathcal{M}_{Y_\ell}(U_i^0 - W_i) = K_{ij}^{\ell\ell} \left( (F_\ell^{-2})_j - \frac{\partial P^{-2}}{\partial x_j} \right) + K_{ij}^{\ell g} \left( (F_g^{-2})_j - \frac{\partial P^{-2}}{\partial x_j} \right) \\ \mathcal{M}_{Y_g}(U_i^0 - W_i) = K_{ij}^{gg} \left( (F_g^{-2})_j - \frac{\partial P^{-2}}{\partial x_j} \right) + K_{ij}^{g\ell} \left( (F_\ell^{-2})_j - \frac{\partial P^{-2}}{\partial x_j} \right) \end{cases}$$

où:  $\mathcal{M}_{Y_\alpha}(\varphi)(x) = \frac{1}{|Y|} \int_{Y_\alpha} \varphi(x,y) dy \quad (\alpha = g \text{ ou } \ell) \text{ et:}$

$$(2-38) \quad \begin{cases} K_{ij}^{\ell\ell} = \mathcal{M}_{Y_\ell}((v_\ell^j)_i) ; & K_{ij}^{gg} = \mathcal{M}_{Y_g}((v_g^j)_i) \\ K_{ij}^{\ell g} = \mathcal{M}_{Y_\ell}((v_g^j)_i) ; & K_{ij}^{g\ell} = \mathcal{M}_{Y_g}((v_\ell^j)_i) \end{cases}$$

et on peut aussi établir des relations analogues à (2-35) qui mettent en évidence la courbure  $H$  de l'interface  $\mathcal{A}_{g\ell}$  :

$$(2-39) \quad |Y| \mathcal{M}_{Y_\alpha}(W_j) = \int_{\mathcal{A}_{g\ell}} 2 \sigma H V_\alpha^j \cdot n \, d\Gamma \quad (\alpha = g, \ell).$$

Les divers tenseurs des perméabilités introduits ici sont liés par les relations suivantes :

$$(2-40) \quad \begin{cases} K = K^\ell + K^g \\ K^\ell = K^{\ell\ell} + K^{g\ell} \\ K^g = K^{g\ell} + K^{\ell g} \end{cases}$$

En prenant dans (2-31) l'indice  $\alpha$  égal à  $\ell$  et la fonction-test  $\varphi$  égale à  $V_g^i$ , puis l'indice  $\alpha$  égal à  $g$  et la fonction-test  $\varphi$  égale à  $V_\ell^i$ , on obtient :

$$\int_{Y_f} 2\mu D_{mn}^y(V_\ell^j) D_{mn}^y(V_g^i) \, dy = \int_{Y_\ell} (V_g^i)_j \, dy = |Y| K_{ij}^{\ell g}$$

$$\int_{Y_f} 2\mu D_{mn}^y(V_g^j) D_{mn}^y(V_\ell^i) \, dy = \int_{Y_g} (V_\ell^i)_j \, dy = |Y| K_{ij}^{g\ell}$$

Le tenseur  $K^{\ell g}$  est donc le transposé de  $K^{g\ell}$  :

$$(2-41) \quad K_{ij}^{g\ell} = K_{ji}^{\ell g}$$

En prenant dans (2-31) la fonction-test  $\varphi$  égale à  $V_\alpha^i$ , l'indice  $\alpha$  est fixé ( $g$  ou  $\ell$ ), on obtient :

$$\int_{Y_f} 2\mu D_{mn}^y(v_\alpha^j) D_{mn}^y(v_\alpha^i) dy = \int_{Y_\alpha} (v_\alpha^i)_j dy = |Y| K_{ij}^{\alpha\alpha}$$

( on ne somme pas sur l'indice  $\alpha$  )

Les matrices  $K^{ll}$  et  $K^{gg}$  sont donc symétriques, en procédant de manière analogue à la démonstration de la coercivité des perméabilités  $K_{ij}$ , il est facile de voir qu'elles sont définies positives :

$$(2-42) \quad K^{ll} \text{ et } K^{gg} \text{ sont symétriques et définies positives.}$$

Elles sont donc inversibles.

De la relation (2-37) on peut alors déduire une deuxième forme des relations qui lient les moyennes  $\mathcal{M}_{Y_\alpha}(U^0)$  au gradient de la pression  $P^{-2}$  :

$$(2-43) \quad \begin{cases} \mathcal{M}_{Y_\ell}(U^0-W) = [K^{ll} - K^{lg}(K^{gg})^{-1}K^{gl}](F_\ell^{-2} - \nabla P^{-2}) + [K^{lg}(K^{gg})^{-1}] \mathcal{M}_{Y_g}(U^0-W) \\ \mathcal{M}_{Y_g}(U^0-W) = [K^{gg} - K^{gl}(K^{ll})^{-1}K^{lg}](F_g^{-2} - \nabla P^{-2}) + [K^{gl}(K^{ll})^{-1}] \mathcal{M}_{Y_\ell}(U^0-W) \end{cases}$$

où l'on a noté  $(K^{\alpha\alpha})^{-1}$  la matrice inverse de  $K^{\alpha\alpha}$ .

Cette forme se distingue de celle obtenue par WHITAKER [38] en utilisant la méthode physique de prise de moyenne et de fermeture, par la présence des moyennes de la fonction  $W$ , qui représentent en fait les effets microscopiques de la pression capillaire, ou de la courbure de l'interface fluide (g)-fluide (l), sur le comportement macroscopique du milieu poreux.  $\square$

**Remarque 2-3:**

Si on prend dans le second membre de la première équation de (1-4) des forces  $F^e$  de la forme (2-5), alors les fonction  $F_{\alpha}^{-2}$  sont nulles et les relations (2-24) et (2-27) deviennent:

$$(2-44) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( K_{ij} \frac{\partial P^{-2}}{\partial x_j} \right) = 0 & \text{dans } \Omega \\ K_{ij} \frac{\partial P^{-2}}{\partial x_j} n_i = \frac{n_j}{|Y|} \int_{\mathcal{A}_{\text{gr}}} 2 \sigma H V^i \cdot n \, d\Gamma & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

$$(2-45) \quad U^0(x, y) = - \frac{\partial P^{-2}}{\partial x_j}(x) V^j(y) + W(y).$$

( les fonctions  $V^j$  et  $W$  ainsi que les  $K_{ij}$  sont les mêmes que celles du théorème 2-1 ).

Dans ce cas les forces  $F^e$  n'interviennent ni dans l'équation macroscopique qui détermine  $P^{-2}$  ni dans l'expression du premier terme  $U^0$  de la vitesse.  $\square$

**3/ METHODE VARIATIONNELLE ET RESULTATS DE CONVERGENCES:**

L'objectif de ce paragraphe est la justification des résultats formels obtenus par la méthode des échelle multiples.

La vitesse  $U^\varepsilon$  et la pression  $P^\varepsilon$  sont définies uniquement dans le domaine  $\Omega_f^\varepsilon$  occupé par les fluides. Ce domaine dépend du paramètre  $\varepsilon$ . Avant de faire tendre  $\varepsilon$  vers zéro, la première préoccupation sera donc la construction de prolongements de la vitesse et de la pression au domaine  $\Omega$  tout entier qui est indépendant de  $\varepsilon$ . Ces prolongements doivent vérifier des estimations compatibles qui permettront le passage à la limite dans les équations vérifiées par la vitesse  $U^\varepsilon$  et la pression  $P^\varepsilon$ .

La vitesse  $U^\varepsilon$  peut être prolongée par zéro en dehors du fluide  $\Omega_f^\varepsilon$  grâce aux conditions homogènes qu'elle vérifie sur les interfaces solide-fluide et sur les entrées et sorties du fluide. Par contre, pour prolonger la pression on aura recours à des opérateurs de restriction du domaine  $\Omega$  à sa partie fluide  $\Omega_f^\varepsilon$ . Cette méthode a été initialement développée par L. Tartar [34] lorsque  $\bar{Y}_g$  est strictement inclus dans la cellule de base  $Y$ , mais elle a été généralisée récemment par G. Allaire dans [1].

On commencera d'abord par démontrer quelques lemmes utiles pour ce paragraphe, on construira ensuite des prolongements de la vitesse et de la pression et on donnera des estimations a priori vérifiées par ces derniers. Enfin, en utilisant des fonctions-test appropriées, on établira les équations limites qui seront comparées aux résultats de la méthode des échelles multiples.

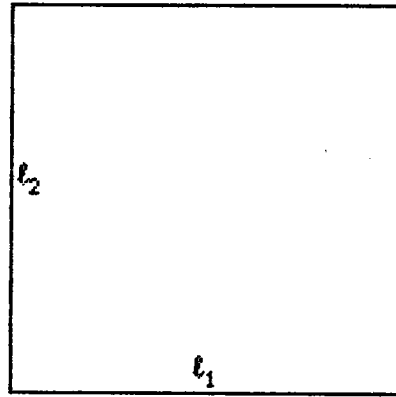
**3-1) Lemmes préliminaires:**

Pour toute fonction  $v$ , définie sur  $\Omega_f^\varepsilon$ , on note:

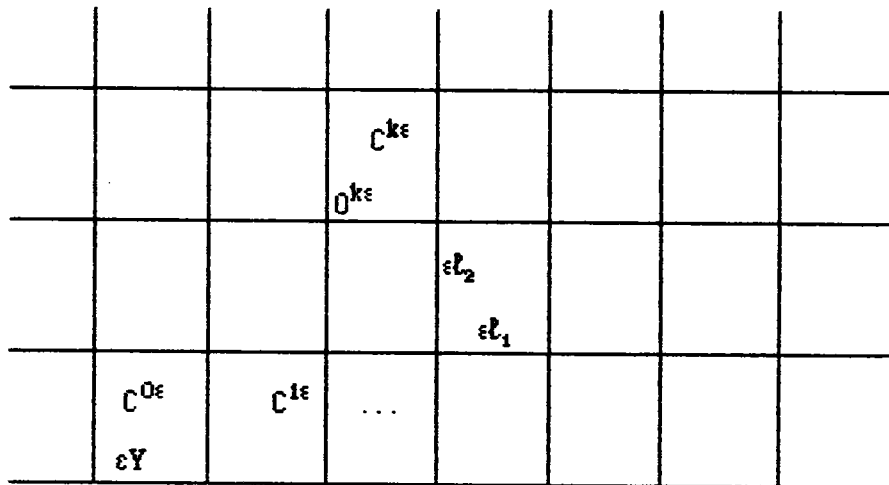
$$(3-1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{v} : \text{le prolongement de } v \text{ par zéro en dehors de } \Omega_f^\varepsilon. \\ v^{k\varepsilon}: \text{ la fonction définie sur } Y \text{ par: } v^{k\varepsilon}(y) = \tilde{v}(cy + 0^{k\varepsilon}) \\ \text{où } 0^{k\varepsilon} \text{ désigne l'origine de la } k\text{-ième cellule } C^{k\varepsilon} \text{ translatée de } \varepsilon Y \text{ (figure 3-1).} \end{array} \right.$$



Les cellules  $C^{k\epsilon}$  sont de la forme:  $\epsilon \prod_{i=1}^3 ]j_i t_i, (j_i + 1)t_i[$ . leur origine est  $0^{k\epsilon} = \epsilon(j_1 t_1, j_2 t_2, j_3 t_3)$  où  $(j_1, j_2, j_3)$  est un multi-entier de  $\mathbb{Z}^3$  et  $t_1, t_2$  et  $t_3$  sont les côtés de la cellule de base  $Y$ .



Cellule de base  $Y$ .



Cellules  $C^{k\epsilon}$  traduitées de  $\epsilon Y$ .

(figure 3-1)

Inversement, pour toute fonction  $\phi$ , définie sur l'ouvert  $Y_f$  de la cellule de base  $Y$ , on note :

$$(3-2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\varphi} : \text{la prolongée par zéro de } \varphi \text{ à } Y \setminus Y_f. \\ \hat{\varphi} : \text{la prolongée de la fonction } \tilde{\varphi} \text{ par } Y\text{-périodicité à } \mathbb{R}^3. \\ \hat{\varphi}^\varepsilon : \text{la fonction définie sur } \mathbb{R}^3 \text{ par: } \hat{\varphi}^\varepsilon(x) = \hat{\varphi}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right). \end{array} \right.$$

Alors si l'on  $N^\varepsilon$  le nombre de cellules  $C^{k\varepsilon}$  recouvrant l'ouvert  $\Omega$ , c'est à dire le plus petit entier naturel  $I^\varepsilon$  tel que:

$$\Omega \subset \bigcup_{k=1}^{I^\varepsilon} C^{k\varepsilon} \quad (\text{fig. 3-4})$$

on a le:

**Lemme 3-1:**

i) Pour toute fonction  $v$  de  $L^2(\Omega_f^\varepsilon)$ , les fonctions  $v^{k\varepsilon}$  sont dans  $L^2(Y)$  et on a :

$$\|v\|_{0,\Omega_f^\varepsilon}^2 = \varepsilon^3 \sum_{k=1}^{N^\varepsilon} \|v^{k\varepsilon}\|_{0,Y_f}^2$$

Si  $v$  est dans  $H_0^1(\Omega_f^\varepsilon)$  alors  $v^{k\varepsilon}$  est dans  $H^1(Y)$ , nulle dans  $Y_g$  et vérifie:

$$\left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega_f^\varepsilon}^2 = \varepsilon \sum_{k=1}^{N^\varepsilon} \left\| \frac{\partial v^{k\varepsilon}}{\partial y_i} \right\|_{0,Y_f}^2$$

ii) Inversement, pour toute fonction  $\varphi$  de  $L^2(Y_f)$ , la fonction  $\hat{\varphi}^\varepsilon$  est dans  $L^2(\Omega)$  et on a :

$$\|\hat{\varphi}^\varepsilon\|_{0,\Omega} \leq C \|\varphi\|_{0,Y_f}$$

Si  $\varphi$  est dans:  $V_Y = \left\{ \psi \in H^1(Y_f) / \psi = 0 \text{ sur } \mathcal{A}_{1g} \text{ et } Y\text{-périodique} \right\}$  alors  $\hat{\varphi}^\varepsilon$  est dans  $H^1(\Omega)$  et vérifie:

$$\left\| \frac{\partial \hat{\varphi}^\varepsilon}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega} \leq \frac{C}{\varepsilon} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \right\|_{0,Y}$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $\varepsilon$ .

démonstration:

i) Si  $v \in L^2(\Omega_f^\varepsilon)$ , il est clair que  $v^{k\varepsilon} \in \left\{ \psi \in L^2(Y) / \psi = 0 \text{ dans } Y \setminus Y_f \right\}$  et par le changement de variable  $x = \varepsilon y + 0^{k\varepsilon}$  on a :

$$\int_{\Omega_f^\varepsilon \cap C^{k\varepsilon}} v^2 dx = \int_{C^{k\varepsilon}} \tilde{v}^2 dx = \int_Y \varepsilon^3 (v^{k\varepsilon})^2 dx = \int_{Y_f} \varepsilon^3 (v^{k\varepsilon})^2 dx$$

Il suffit alors de sommer ces égalités de  $k=1$  au nombre  $N^\varepsilon$  de cellules  $C^{k\varepsilon}$  recouvrant  $\Omega$  pour obtenir la première égalité du lemme.

Maintenant si  $v \in H_0^1(\Omega_f^\varepsilon)$  alors son prolongement par zéro  $\tilde{v}$  en dehors de  $\Omega_f^\varepsilon$  est dans  $H^1(\mathbb{R}^3)$  et est nul dans la partie solide  $\Omega_g^\varepsilon$  donc nul dans tous les  $\varepsilon Y$ -translatés de  $\varepsilon Y_g$ . D'après la définition (3-1) des  $v^{k\varepsilon}$  on a alors:

$$\begin{aligned} \bullet v^{k\varepsilon} &\in \left\{ \psi \in H^1(Y) / \psi = 0 \text{ dans } Y \setminus Y_f \right\} \\ \bullet \frac{\partial v^{k\varepsilon}}{\partial y_i}(y) &= \varepsilon \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_i}(\varepsilon y + 0^{k\varepsilon}) \end{aligned}$$

et par le changement de variable  $x = \varepsilon y + 0^{k\varepsilon}$  il vient:

$$\int_{\Omega_f^\varepsilon \cap C^{k\varepsilon}} \left( \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 dx = \int_{C^{k\varepsilon}} \left( \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_i} \right)^2 dx = \int_Y \varepsilon \left( \frac{\partial v^{k\varepsilon}}{\partial y_i} \right)^2 dx = \int_{Y_f} \varepsilon \left( \frac{\partial v^{k\varepsilon}}{\partial y_i} \right)^2 dx$$

La somme de ces égalités de  $k=1$  à  $N^\varepsilon$  achève donc la démonstration de i).

ii) Soit  $\varphi \in L^2(Y_f)$ . Il est clair, d'après la définition (3-2) que

$$\hat{\varphi}^\varepsilon \in \left\{ v \in L^2\left(\bigcup_{k=1}^{N^\varepsilon} C^{k\varepsilon}\right) / v = 0 \text{ dans } \left(\bigcup_{k=1}^{N^\varepsilon} C^{k\varepsilon}\right) \setminus \Omega_f^\varepsilon \right\}$$

et par le changement de variable  $x = \varepsilon y + 0^{k\varepsilon}$  on a :

$$\int_{\Omega \cap C^{k\varepsilon}} \hat{\varphi}^{\varepsilon^2} dx = \int_{C^{k\varepsilon}} \hat{\varphi}^{\varepsilon^2} dx = \int_Y \varepsilon^3 \tilde{\varphi}^2 dx = \int_{Y_f} \varepsilon^3 \varphi^2 dx$$

En sommant ces égalités de  $k=1$  à  $N^\varepsilon$  il vient:

$$(3-3) \quad \|\hat{\varphi}^\varepsilon\|_{0,\Omega}^2 = \varepsilon^3 N^\varepsilon \|\psi\|_{0,Y_f}^2$$

Le nombre  $N^\varepsilon$  de cellules  $C^{k\varepsilon}$  recouvrant  $\Omega$  est égal au rapport des mesures ( de Lebesgue notées:  $\text{mes}(\cdot)$  ) de  $(\bigcup_{k=1}^{N^\varepsilon} C^{k\varepsilon})$  et de la cellule  $\varepsilon Y$ . De simples considérations géométriques montrent que:

$$\text{mes}(\bigcup_{k=1}^{N^\varepsilon} C^{k\varepsilon} \setminus \Omega) \leq C \varepsilon. \quad (\text{fig. 3-4})$$

où  $\frac{C}{\sqrt{3}}$  est la surface de la plus petite sphère qui contient le domaine  $\Omega$ . Donc:

$$N^\varepsilon = \frac{\text{mes}(\bigcup_{k=1}^{N^\varepsilon} C^{k\varepsilon})}{\text{mes}(\varepsilon Y)} = \frac{\text{mes}(\bigcup_{k=1}^{N^\varepsilon} C^{k\varepsilon})}{\varepsilon^3 \text{mes}(Y)} = \frac{\text{mes}(\bigcup_{k=1}^{N^\varepsilon} C^{k\varepsilon} \setminus \Omega) + \text{mes}(\Omega)}{\varepsilon^3 \text{mes}(Y)} \leq \frac{C \varepsilon + \text{mes}(\Omega)}{\varepsilon^3 \text{mes}(Y)}$$

Ainsi lorsque  $\varepsilon$  est assez petit on a:

$$(3-4) \quad N^\varepsilon \leq \frac{1 + \text{mes}(\Omega)}{\varepsilon^3 \text{mes}(Y)}$$

et en remplaçant dans l'égalité (3-3) il vient:

$$\|\hat{\varphi}^\varepsilon\|_{0,\Omega}^2 \leq \frac{1 + \text{mes}(\Omega)}{\text{mes}(Y)} \|\psi\|_{0,Y_f}^2$$

Enfin, la dernière inégalité du lemme 3-1 s'obtient de façon analogue en utilisant l'égalité:

$$\frac{\partial \hat{\varphi}^\varepsilon}{\partial x_i}(x) = \varepsilon^{-1} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y_i} \left( \frac{x}{\varepsilon} \right). \quad \square$$

**Lemme 3-2:**

Toute fonction  $v$  de  $H_0^1(\Omega_f^\varepsilon)$  vérifie:

$$\|v\|_{0,\Omega_f^\varepsilon} \leq C \varepsilon \|\nabla v\|_{0,\Omega_f^\varepsilon}$$

$$\left| \int_{\mathcal{A}_{gl}^\varepsilon} H^\varepsilon v \cdot n \, dx \right| \leq \frac{C}{\varepsilon} \|\nabla v\|_{0,\Omega_f^\varepsilon}$$

où  $H^\varepsilon$  désigne la courbure moyenne de l'interface  $\mathcal{A}_{gl}^\varepsilon$  et  $C$  une constante indépendante de  $\varepsilon$ .

Démonstration:

Pour toute fonction  $v \in H_0^1(\Omega_f^\varepsilon)$ , les fonctions  $v^{k\varepsilon}$ , définies sur la cellule de base  $Y$  par la relation (3-1), sont dans  $\{\psi \in H^1(Y) / \psi = 0 \text{ dans } Y \setminus Y_f\}$ . En particulier, elles ont des traces nulles sur l'interface  $\mathcal{A}_{fs}$ . L'inégalité de Poincaré donne alors:

$$\|v^{k\varepsilon}\|_{0,Y_f}^2 \leq C \|\nabla_Y(v^{k\varepsilon})\|_{0,Y_f}^2$$

où la constante  $C$  ne dépend que de la géométrie de  $Y$  (donc indépendante de  $k$  et de  $\varepsilon$ ) et le symbole  $\nabla_Y(\cdot)$  désigne le gradient par rapport à la variable  $y$ :  $\left(\frac{\partial \cdot}{\partial y_i}\right)_{i=1}^3$

En reportant cette inégalité dans la première relation du lemme 3-1 il vient:

$$\|v\|_{0,\Omega_f^\varepsilon}^2 \leq C \varepsilon^3 \sum_{k=1}^{N_f} \|\nabla_Y(v^{k\varepsilon})\|_{0,Y_f}^2$$

et la deuxième relation du lemme 3-1 implique alors que:

$$\|v\|_{0,\Omega_f^\varepsilon}^2 \leq C \varepsilon^2 \|\nabla_x(v)\|_{0,\Omega_f^\varepsilon}^2$$

où  $\nabla_x(\cdot)$  désigne le gradient par rapport à la variable  $x$ :  $\left(\frac{\partial \cdot}{\partial x_i}\right)_{i=1}^3$

La première égalité du lemme 3-2 est alors démontrée. Pour démontrer la deuxième, on procède de manière analogue, i.e. on utilise les fonctions  $v^{k\epsilon}$  pour se ramener à la cellule de base  $Y$ :

$$\int_{\mathcal{A}_{g\epsilon}^\epsilon} H^\epsilon v \cdot n \, dx = \sum_{k=1}^{N^\epsilon} \int_{\mathcal{A}_{g\epsilon}^\epsilon \cap C^{k\epsilon}} H^\epsilon v \cdot n \, d(\mathcal{A}_{g\epsilon}^\epsilon)$$

En utilisant la définition (2-7) de la courbure  $H^\epsilon$ , c'est à dire :  $H^\epsilon(x) = \epsilon^{-1} H(\frac{x}{\epsilon})$ , où  $H$  est la prolongée par  $Y$ -périodicité de la courbure moyenne de l'interface  $\mathcal{A}_{g\epsilon} (= \partial Y_g \cap \partial Y_f)$ , le changement de variable  $x = \epsilon y + 0^{k\epsilon}$  dans chaque terme du second membre de l'égalité précédente donne alors:

$$(3-5) \quad \int_{\mathcal{A}_{g\epsilon}^\epsilon} H^\epsilon v \cdot n \, dx = \epsilon^2 \epsilon^{-1} \sum_{k=1}^{N^\epsilon} \int_{\mathcal{A}_{g\epsilon}} H v^{k\epsilon} \cdot n_\gamma \, d(\mathcal{A}_{g\epsilon})$$

Puisque les fonctions  $v^{k\epsilon}$  sont dans  $\{\psi \in H^1(Y) / \psi = 0 \text{ dans } Y \setminus Y_f\}$ , l'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'inégalité de Poincaré et la continuité de l'application trace impliquent que:

$$\left| \int_{\mathcal{A}_{g\epsilon}} H v^{k\epsilon} \cdot n_\gamma \, d(\mathcal{A}_{g\epsilon}) \right| \leq C_1 \|H\|_{0, \mathcal{A}_{g\epsilon}} \|\nabla_Y(v^{k\epsilon})\|_{0, Y_f}$$

et la constante  $C_1$  ne dépend ni de  $\epsilon$  ni de  $k$ .

En reportant cette inégalité dans (3-5) on a:

$$\left| \int_{\mathcal{A}_{g\epsilon}^\epsilon} H^\epsilon v \cdot n \, dx \right| \leq C_1 \epsilon \|H\|_{0, \mathcal{A}_{g\epsilon}} \sum_{k=1}^{N^\epsilon} \|\nabla_Y(v^{k\epsilon})\|_{0, Y_f}$$

Mais en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, la deuxième égalité du lemme 3-1 et l'estimation (3-4) du nombre  $N^\epsilon$  il vient:

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\mathcal{A}_g^\varepsilon} H^\varepsilon \nabla \cdot n \, dx \right| &\leq C_1 \varepsilon \|H\|_{0, \mathcal{A}_g^\varepsilon} \sqrt{N^\varepsilon} \left( \sum_{k=1}^{N^\varepsilon} \|\nabla_Y(v^{k\varepsilon})\|_{0, Y_f}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq C_2 \varepsilon^{-1} \|H\|_{0, \mathcal{A}_g^\varepsilon} \left( \varepsilon \sum_{k=1}^{N^\varepsilon} \|\nabla_Y(v^{k\varepsilon})\|_{0, Y_f}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq C_2 \varepsilon^{-1} \|H\|_{0, \mathcal{A}_g^\varepsilon} \|\nabla_x(v)\|_{0, \Omega_f^\varepsilon}
 \end{aligned}$$

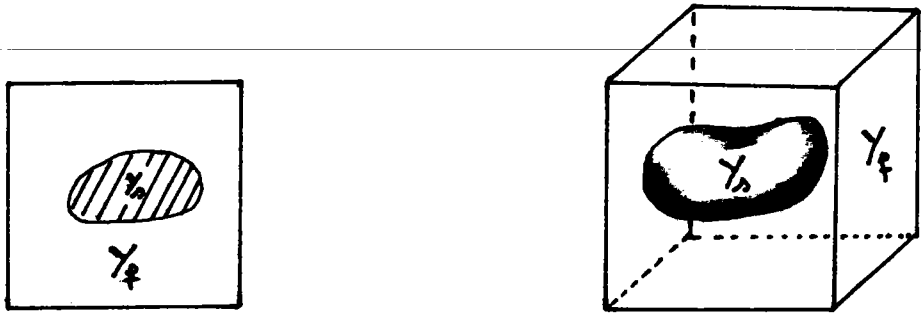
avec  $C_2 = C_1 \frac{1 + \text{mes}(\Omega)}{\text{mes}(Y)}$ .

Ceci achève donc la démonstration du lemme 3-2.  $\square$

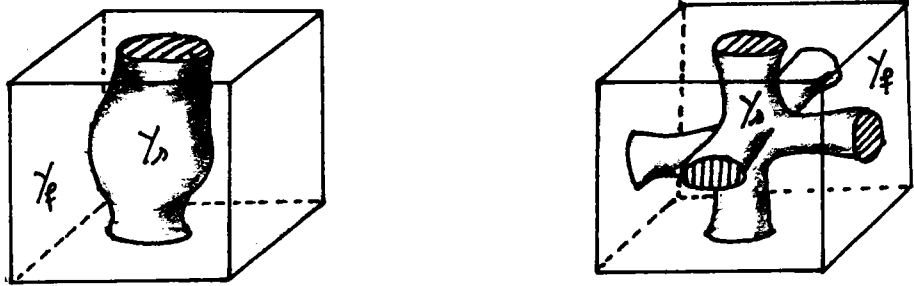
On va maintenant énoncer un lemme crucial; il s'agit de la construction des opérateurs de restriction qui vont permettre le prolongement de la pression  $P^\varepsilon$  en dehors du domaine  $\Omega_f^\varepsilon$  occupé par les deux fluides. Ces opérateurs ont été introduits par L. Tartar [34] mais ils n'étaient opérants que dans le cas où  $\bar{Y}_g$  est strictement inclus dans la cellule de base  $Y$ , donc en particulier le solide  $\Omega_g^\varepsilon$  ne peut être connexe, ce qui n'est pas en général physiquement réaliste. Le lemme suivant est une généralisation des résultats de L. Tartar à des structures géométriques plus générales où le solide  $\Omega_g^\varepsilon$  peut être connexe ou non. Cependant, si  $\bar{Y}_g$  a une intersection avec  $\partial Y$  et si le domaine  $\Omega$  n'est pas un nombre entier de cellules  $C^{k\varepsilon}$  translatées de  $\varepsilon Y$ , alors les résultats de convergence obtenus pour le prolongement de la pression ne sont valables que dans  $L^2_{(loc)}(\Omega)$  au lieu de  $L^2(\Omega)$ .

Précisons et rappelons d'abord les hypothèses (2-1) faites sur la géométrie de  $Y_f$ :

- a)  $Y_f$  est connexe et de frontière  $\partial Y_f$  localement lipschitzienne et est situé d'un seul côté de son bord.
- b) les interfaces  $\mathcal{A}_{\alpha\beta}$  se prolongent par  $Y$ -périodicité en des surfaces régulières ( $C^1$ ) de  $\mathbb{R}^3$ .
- c) la réunion des  $Y$ -translatés de  $\bar{Y}_f$  est connexe.

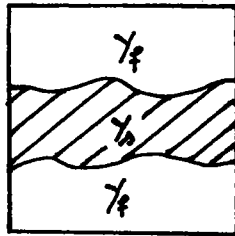


(1) géométrie autorisée dans le lemme de Tartar et dans le lemme 3-3 suivant.

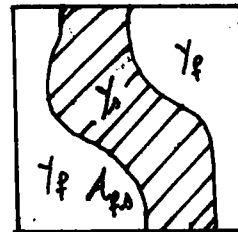


(2) géométries autorisées dans le lemme 3-3 mais non autorisées dans le lemme de Tartar.

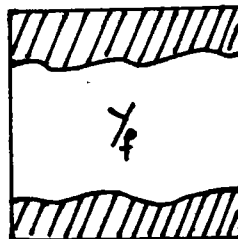
(figure 3-2)



(1) géométries ne vérifiant pas l'hypothèse a)



(2) géométries ne vérifiant pas l'hypothèse b)



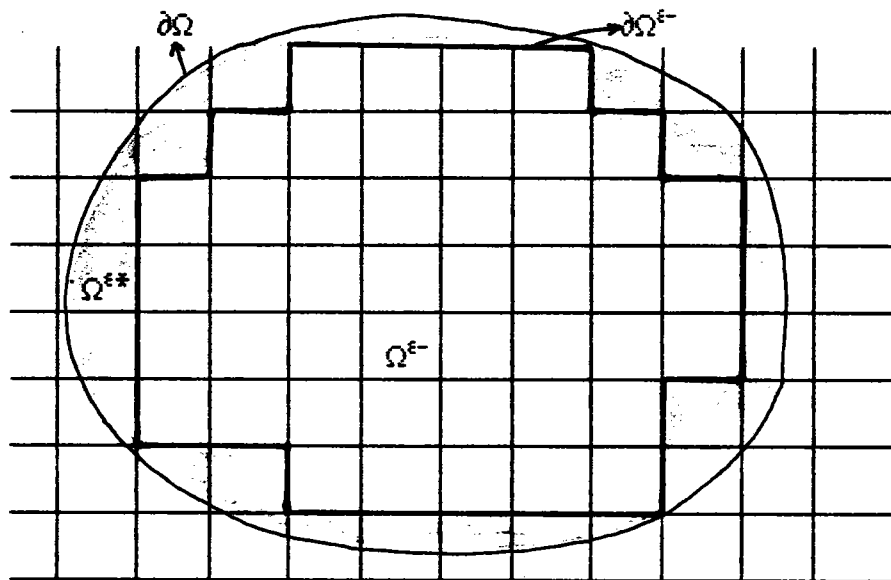
(3) géométries ne vérifiant pas l'hypothèse c)

(figure 3-3)



On introduit maintenant les notations suivantes (fig. 3-4):

- (3-7)  $\left\{ \begin{array}{l} \diamond \Omega^{\varepsilon^-} = \text{la plus grande r\u00e9union des translat\u00e9es } C^{k\varepsilon} \text{ de la cellule } \varepsilon Y \text{ contenue dans } \Omega. \\ \diamond \Omega^{\varepsilon*} = \Omega \setminus \bar{\Omega}^{\varepsilon^-}. \\ \diamond \Omega_f^{\varepsilon^-} = \Omega_f^\varepsilon \cap \Omega^{\varepsilon^-} ; \Omega_f^{\varepsilon*} = \Omega_f^\varepsilon \cap \Omega^{\varepsilon*}. \end{array} \right.$



(figure 3-4)

**Lemme 3-3:**

*Sous les hypoth\u00e8ses (3-6), il existe un op\u00e9rateur de restriction  $\mathcal{R}^\varepsilon$  lin\u00e9aire et continu tel que:*

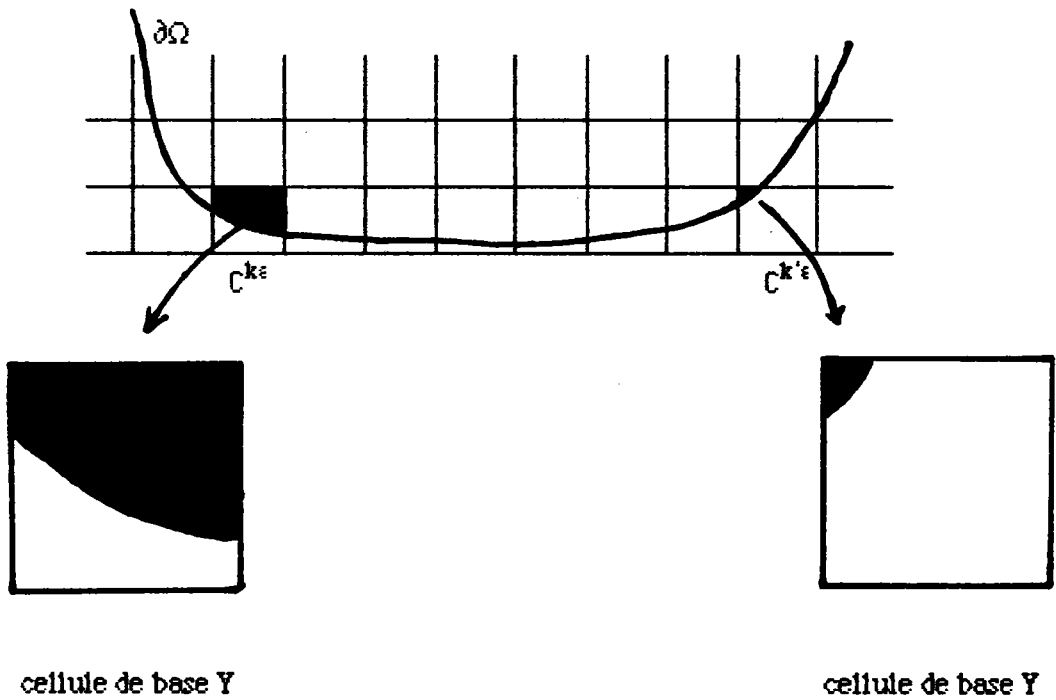
- i)  $\mathcal{R}^\varepsilon \in \mathcal{L}(\mathbf{H}_0^1(\Omega^{\varepsilon^-}), \mathbf{H}_0^1(\Omega_f^{\varepsilon^-}))$ .
- ii) si  $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega_f^{\varepsilon^-})$  alors  $\mathcal{R}^\varepsilon(\tilde{\mathbf{v}}) = \mathbf{v}$  dans  $\Omega_f^{\varepsilon^-}$
- iii) si  $\text{div}(\mathbf{v}) = 0$  dans  $\Omega^{\varepsilon^-}$  alors  $\text{div}(\mathcal{R}^\varepsilon \mathbf{v}) = 0$  dans  $\Omega_f^{\varepsilon^-}$
- iv) il existe une constante  $C$  ind\u00e9pendante de  $\varepsilon$  telle que:

$$\| \nabla(\mathcal{R}^\varepsilon \mathbf{v}) \|_{0, \Omega_f^{\varepsilon^-}} \leq C \left( \frac{1}{\varepsilon} \| \mathbf{v} \|_{0, \Omega^{\varepsilon^-}} + \| \nabla \mathbf{v} \|_{0, \Omega^{\varepsilon^-}} \right) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega^{\varepsilon^-})$$

o\u00f9  $\tilde{\mathbf{v}}$  d\u00e9signe le prolongement par z\u00e9ro en dehors de  $\Omega_f^{\varepsilon^-}$ .

D\u00e9monstration: ( voir G. Allaire [1] ).

Remarquons que l'opérateur de restriction  $\mathcal{R}^\varepsilon$  est dans  $\mathcal{L}(H_0^1(\Omega^{\varepsilon^-}), H_0^1(\Omega_f^{\varepsilon^-}))$  au lieu de  $\mathcal{L}(H_0^1(\Omega), H_0^1(\Omega_f^\varepsilon))$ . La construction de l'opérateur  $\mathcal{R}^\varepsilon$  se fait sur chaque cellule  $C^{k\varepsilon}$  en se ramenant à la cellule de base  $Y$  par homothétie  $\frac{1}{\varepsilon}$  et  $Y$ -translations, il est alors difficile de construire un opérateur de restriction dans  $\mathcal{L}(H_0^1(\Omega), H_0^1(\Omega_f^\varepsilon))$  vérifiant les propriétés ii), iii) et surtout iv) du lemme 3-3, car les images par homothétie  $\frac{1}{\varepsilon}$  et  $Y$ -translations des intersections  $C^{k\varepsilon} \cap \Omega^{\varepsilon*}$  sont des parties de  $Y$  dont les tailles sont variables et incontrôlables (figure 3-5).



(figure 3-5)

Pour ne pas alourdir l'exposé des résultats, on supposera dorénavant que le domaine  $\Omega$  est un nombre entier de cellules  $C^{k\varepsilon}$  translatées de  $\varepsilon Y$ . Dans ce cas  $\Omega^{\varepsilon^-}$  coïncide avec  $\Omega$ ,  $\Omega_f^{\varepsilon^-}$  coïncide avec  $\Omega_f^\varepsilon$  et  $\Omega^{\varepsilon*}$  est vide. Mais tous les résultats peuvent être généralisés au cas où  $\Omega$  n'est pas un nombre entier de cellules  $C^{k\varepsilon}$ , il suffit de remplacer dans ce qui suit les convergences du prolongement de la pression dans  $L^2(\Omega)$  par des convergences dans  $L^2_{(loc)}(\Omega)$ . Faisons alors l'hypothèse suivante:

$$(3-8) \quad \Omega = \Omega^{\varepsilon^-} = \bigcup_{k=1}^{N^\varepsilon} C^{k\varepsilon} \quad ; \quad N^\varepsilon \in \mathbb{N}^*$$

**3-2) Prolongements et estimations a priori:**

**3-2-1) Prolongement de la vitesse et estimations:**

Grâce à la condition de Dirichlet homogène que vérifie la vitesse  $U^\epsilon$  sur le bord  $\partial\Omega_f^\epsilon$  de  $\Omega_f^\epsilon$ , le prolongement  $\tilde{U}^\epsilon$  de  $U^\epsilon$  par zéro en dehors de  $\Omega_f^\epsilon$  est dans l'espace:

$$\mathcal{V}(\text{div}, 0) = \left\{ v \in H_0^1(\Omega); \text{div}(v) = 0 \right\}$$

En utilisant les lemmes précédents on va établir les estimations suivantes où C désigne, comme dans toute la suite, diverses constantes indépendantes de  $\epsilon$ .

**Proposition 3-1**

*Sous les hypothèses (3-6) et si:*

$$\|F^\epsilon\|_{0, \Omega_f^\epsilon} \leq C \epsilon^{-2}$$

*alors le prolongement  $\tilde{U}^\epsilon$  de la vitesse vérifie :*

- $\|\tilde{U}^\epsilon\|_{0, \Omega} \leq C$
- $\left\| \frac{\partial \tilde{U}^\epsilon}{\partial x_i} \right\|_{0, \Omega} \leq C \epsilon^{-1} \quad (i = 1, 2, 3)$

Démonstration:

On va utiliser les équations variationnelles (1-7) vérifiées par la vitesse  $U^\epsilon$  et la pression  $P^\epsilon$ :

$$(3-9) \quad \left. \begin{aligned} &U^\epsilon \in \mathcal{V}^\epsilon = H_0^1(\Omega_f) = (H_0^1(\Omega_f^\epsilon))^3; \quad P^\epsilon \in L_0^2(\Omega_f^\epsilon) \\ &\int_{\Omega_f^\epsilon} 2\mu^\epsilon D_{ij}(U^\epsilon) D_{ij}(v) \, dx - \int_{\Omega_f^\epsilon} P^\epsilon \text{div}(v) \, dx = \int_{\Omega_f^\epsilon} F^\epsilon \cdot v \, dx + \int_{\mathcal{A}_{gg}^\epsilon} 2\sigma H^\epsilon v \cdot n \, d\Gamma \\ &\int_{\Omega_f^\epsilon} q \text{div}(U^\epsilon) \, dx = 0, \quad \forall (v, q) \in \mathcal{V}^\epsilon \times L_0^2(\Omega_f^\epsilon). \end{aligned} \right\}$$

Si on prend  $v = U^\varepsilon$  comme fonction-test dans la première équation de (3-9) il vient :

$$\int_{\Omega_1^\varepsilon} 2\mu^\varepsilon D_{ij}(U^\varepsilon)D_{ij}(U^\varepsilon) dx = \int_{\Omega_1^\varepsilon} F^\varepsilon U^\varepsilon dx + \int_{\mathcal{A}_{gl}^\varepsilon} 2\sigma H^\varepsilon U^\varepsilon n d\Gamma$$

Puisque la constante  $\sigma$  est supposée indépendante de  $\varepsilon$ , l'inégalité (1-15), l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le lemme 3-2 impliquent alors que:

$$\|\nabla U^\varepsilon\|_{0,\Omega_1^\varepsilon}^2 \leq C \left( \varepsilon \|F^\varepsilon\|_{0,\Omega_1^\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \right) \|\nabla U^\varepsilon\|_{0,\Omega_1^\varepsilon}$$

Donc si  $\|F^\varepsilon\|_{0,\Omega_1^\varepsilon} \leq C\varepsilon^{-2}$  on a:

$$\|\widehat{U}^\varepsilon\|_{0,\Omega} = \|\nabla U^\varepsilon\|_{0,\Omega_1^\varepsilon} \leq C\varepsilon^{-1}$$

Et d'après le lemme 3-2:

$$\|\widehat{U}^\varepsilon\|_{0,\Omega} = \|U^\varepsilon\|_{0,\Omega_1^\varepsilon} \leq C\varepsilon \|\nabla U^\varepsilon\|_{0,\Omega_1^\varepsilon} \leq C.$$

Ce qui achève la démonstration de la proposition.  $\square$

### 3-2-1) Prolongement de la pression et estimations:

L'opérateur de restriction  $\mathcal{R}^\varepsilon$  du lemme 3-3 va nous permettre de construire un prolongement de la pression  $P^\varepsilon$  qui vérifie les estimations de la proposition suivante:

**Proposition 3-2**

Sous les hypothèses (3-6), (3-8) et si:

$$\|F^\varepsilon\|_{0,\Omega_\varepsilon^i} \leq C \varepsilon^{-2}$$

alors il existe un prolongement  $Q^\varepsilon$  de la pression  $P^\varepsilon$  tel que:

- $Q^\varepsilon \in L^2(\Omega)$  et  $\int_{\Omega_\varepsilon^i} Q^\varepsilon dx = 0$ .
- $\|Q^\varepsilon\|_{0,\Omega} \leq C \varepsilon^{-2}$
- $\|\nabla Q^\varepsilon\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C \varepsilon^{-2}$

Démonstration:

Soit  $S^\varepsilon$  une distribution qui vérifie:

$$\langle S^\varepsilon, \mathbf{v} \rangle_\Omega = - \int_{\Omega_\varepsilon^i} P^\varepsilon \operatorname{div}(\mathcal{R}^\varepsilon \mathbf{v}) dx \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$$

D'après le lemme 3-3 et l'hypothèse (3-8)  $\mathcal{R}^\varepsilon \in \mathcal{L}(\mathbf{H}_0^1(\Omega), \mathbf{H}_0^1(\Omega_\varepsilon^i))$ , il est alors clair que  $S^\varepsilon$  est dans  $H^{-1}(\Omega)$ . Le symbole  $\langle \dots \rangle_{\mathcal{O}}$  désigne les crochets de dualité entre  $\mathbf{H}_0^1(\mathcal{O})$  et  $H^{-1}(\mathcal{O})$  pour tout ouvert  $\mathcal{O}$  de  $\Omega$ .

On commence par établir des estimations vérifiées par  $S^\varepsilon$ , puis on construira, grâce à  $S^\varepsilon$ , le prolongement  $Q^\varepsilon$  de la pression  $P^\varepsilon$ . D'après (3-9) on a:

$$\langle S^\varepsilon, \mathbf{v} \rangle_\Omega = \int_{\Omega_\varepsilon^i} F^\varepsilon \mathcal{R}^\varepsilon \mathbf{v} dx + \int_{\mathcal{A}_{\text{gl}}^\varepsilon} 2\sigma H^\varepsilon \mathcal{R}^\varepsilon \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Omega_\varepsilon^i} 2\mu^\varepsilon D_{ij}(U^\varepsilon) D_{ij}(\mathcal{R}^\varepsilon \mathbf{v}) dx$$

Donc, d'après l'inégalité (1-14), le lemme 3-2 et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a:

$$\left| \langle S^\varepsilon, \mathbf{v} \rangle_\Omega \right| \leq C \left( \|\nabla U^\varepsilon\|_{0, \Omega_f^\varepsilon} + \varepsilon \|F^\varepsilon\|_{0, \Omega_f^\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \right) \|\nabla(\mathcal{R}^\varepsilon \mathbf{v})\|_{0, \Omega_f^\varepsilon}$$

D'après la proposition 3-1  $\|\nabla U^\varepsilon\|_{0, \Omega_f^\varepsilon} \leq C \varepsilon^{-1}$ , donc si  $\|F^\varepsilon\|_{0, \Omega_f^\varepsilon} \leq C \varepsilon^{-2}$ , l'inégalité précédente implique que:

$$\left| \langle S^\varepsilon, \mathbf{v} \rangle_\Omega \right| \leq C \varepsilon^{-1} \|\nabla(\mathcal{R}^\varepsilon \mathbf{v})\|_{0, \Omega_f^\varepsilon}$$

En utilisant l'inégalité iv) du lemme 3-3 que vérifie  $\mathcal{R}^\varepsilon \mathbf{v}$ , il vient:

(3-10)  $\left| \langle S^\varepsilon, \mathbf{v} \rangle_\Omega \right| \leq C \varepsilon^{-1} \left( \frac{1}{\varepsilon} \|\mathbf{v}\|_{0, \Omega} + \|\nabla \mathbf{v}\|_{0, \Omega} \right) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$

On va maintenant montrer que la distribution  $S^\varepsilon$  est le gradient d'une fonction de  $L^2(\Omega)$  et qu'elle coïncide avec le gradient de la pression  $P^\varepsilon$  dans  $\Omega_f^\varepsilon$ .

Soit  $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$  telle que  $\text{div}(\mathbf{v}) = 0$ . D'après le lemme 3-3  $\text{div}(\mathcal{R}^\varepsilon \mathbf{v}) = 0$  et on a alors:

$$\langle S^\varepsilon, \mathbf{v} \rangle_\Omega = - \int_{\Omega_f^\varepsilon} P^\varepsilon \text{div}(\mathcal{R}^\varepsilon \mathbf{v}) \, dx = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \text{ telle que } \text{div}(\mathbf{v}) = 0.$$

Il existe donc ([36]) une fonction  $Q^\varepsilon \in L^2(\Omega)$  telle que  $S^\varepsilon$  soit le gradient de  $Q^\varepsilon$ . cette fonction n'est déterminée qu'à une constante additive près et on peut alors la choisir de moyenne nulle sur  $\Omega_f^\varepsilon$ :

$$(3-11) \quad \exists Q^\varepsilon \in L^2(\Omega) / S^\varepsilon = \nabla Q^\varepsilon \text{ et } \int_{\Omega_f^\varepsilon} Q^\varepsilon dx = 0. \quad (Q^\varepsilon \in L_0^2(\Omega_f^\varepsilon)).$$

Soit maintenant une fonction  $v$  quelconque de  $H_0^1(\Omega_f^\varepsilon)$ . Son prolongement  $\tilde{v}$  par zéro à  $\Omega$  est dans  $H_0^1(\Omega)$ . D'après le lemme 3-3, la restriction  $\mathcal{R}^\varepsilon(\tilde{v})$  de  $\tilde{v}$  à  $\Omega_f^\varepsilon$  coïncide avec  $v$ . Donc d'après la définition de  $S$  et la relation (3-11):

$$\langle S^\varepsilon, \tilde{v} \rangle_\Omega = \langle \nabla Q^\varepsilon, \tilde{v} \rangle_\Omega = - \int_{\Omega_f^\varepsilon} P^\varepsilon \operatorname{div}(v) dx = - \int_{\Omega_f^\varepsilon} Q^\varepsilon \operatorname{div}(v) dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega_f^\varepsilon)$$

d'où:

$$\int_{\Omega_f^\varepsilon} (Q^\varepsilon - P^\varepsilon) \operatorname{div}(v) dx = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega_f^\varepsilon).$$

Mais  $Q^\varepsilon$  et  $P^\varepsilon$  sont dans  $L_0^2(\Omega_f^\varepsilon)$  (i.e. de moyenne nulle sur  $\Omega_f^\varepsilon$ ), et d'après R. Temam ([36] lemme chap. 1), l'opérateur "div" est surjectif de  $H_0^1(\Omega_f^\varepsilon)$  dans  $L_0^2(\Omega_f^\varepsilon)$ , on peut donc choisir dans la relation précédente la fonction  $v$  telle que:  $\operatorname{div}(v) = (Q^\varepsilon - P^\varepsilon)$  ce qui implique que :

$$(3-12) \quad Q^\varepsilon = P^\varepsilon \quad \text{dans } L_0^2(\Omega_f^\varepsilon).$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré dans (3-10), la distribution  $S^\varepsilon$ , donc  $\nabla Q^\varepsilon$ , vérifie, lorsque  $\varepsilon$  est assez petit:

$$\|\nabla Q^\varepsilon\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C \varepsilon^{-2}$$

On va maintenant montrer que la norme de  $Q^\varepsilon$  dans  $L^2(\Omega)$  vérifie une inégalité analogue à la précédente. D'après R. Temam ([36] lemme 6.1, chap. 1), il existe une constante  $C'$  qui ne dépend que de  $\Omega$  (donc indépendante de  $\varepsilon$ ) telle que:

$$\|q\|_{L^2(\Omega)} \leq C' \|\nabla q\|_{H^{-1}(\Omega)} \quad \forall q \in L^2(\Omega) \text{ telle que } \nabla q \in H^{-1}(\Omega) \text{ et } \int_{\Omega} q dx = 0.$$

Ainsi, si l'on note :  $\bar{Q}^\varepsilon = \frac{1}{\text{mes}(\Omega)} \int_{\Omega} Q^\varepsilon dx$  alors:

$$(3-13) \quad \int_{\Omega} (Q^\varepsilon - \bar{Q}^\varepsilon)^2 dx \leq C \|\nabla Q^\varepsilon\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \leq C \varepsilon^{-1}$$

Mais:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (Q^\varepsilon - \bar{Q}^\varepsilon)^2 dx &= \int_{\Omega} (Q^\varepsilon)^2 dx - \text{mes}(\Omega) (\bar{Q}^\varepsilon)^2 \\ &= (1-a) \int_{\Omega} (Q^\varepsilon)^2 dx + a \int_{\Omega} (Q^\varepsilon)^2 dx - \text{mes}(\Omega) (\bar{Q}^\varepsilon)^2 \end{aligned}$$

où  $a$  est un paramètre arbitraire.

D'après (3-11), la fonction  $Q^\varepsilon$  est de moyenne nulle sur  $\Omega_g^\varepsilon$ , donc:

$$\begin{aligned} \text{mes}(\Omega) (\bar{Q}^\varepsilon)^2 &= \frac{1}{\text{mes}(\Omega)} \left( \int_{\Omega} Q^\varepsilon dx \right)^2 = \frac{1}{\text{mes}(\Omega)} \left( \int_{\Omega_g^\varepsilon} Q^\varepsilon dx \right)^2 \\ &\leq \frac{\text{mes}(\Omega_g^\varepsilon)}{\text{mes}(\Omega)} \int_{\Omega_g^\varepsilon} (Q^\varepsilon)^2 dx \leq \frac{\text{mes}(\Omega_g^\varepsilon)}{\text{mes}(\Omega)} \int_{\Omega} (Q^\varepsilon)^2 dx \end{aligned}$$

Si on choisit  $a = \frac{\text{mes}(\Omega_g^\varepsilon)}{\text{mes}(\Omega)}$ , alors  $0 < a < 1$ ,  $a \int_{\Omega} (Q^\varepsilon)^2 dx - \text{mes}(\Omega) (\bar{Q}^\varepsilon)^2 \geq 0$  et on peut

alors déduire de l'inégalité (3-13) que :

$$\int_{\Omega} (Q^\varepsilon)^2 dx \leq \frac{C}{1-a} \varepsilon^{-1}$$

Ce qui achève la démonstration de la proposition.  $\square$



**Remarque 3-1:**

*Les calculs précédents montrent qu'on peut énoncer le lemme 6.1 de ([36], Chap.1) sous la forme suivante:*

*Il existe une constante C' qui ne dépend que de  $\Omega$  telle que:*

$$\|q\|_{0,\Omega} \leq C' \|\nabla q\|_{H^{-1}(\Omega)} \quad \forall q \in L^2(\Omega) \text{ telle que } \nabla q \in H^{-1}(\Omega) \text{ et } \int_{\Omega_0} q \, dx = 0.$$

avec  $\Omega_0$  un sous-ensemble de  $\Omega$  de mesure non nulle.  $\square$

**3-3) Passage à la limite:**

Grâce aux estimations établies dans les propositions précédentes, on peut extraire une sous-suite du couple  $(\tilde{U}^\varepsilon, \varepsilon^2 Q^\varepsilon)$  qui converge pour la topologie faible de  $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ . On va démontrer que pour la sous-suite extraite de  $\varepsilon^2 Q^\varepsilon$  on a des convergences fortes dans  $L^2(\Omega)$ . Ensuite, à l'aide des solutions  $V^j$  et  $W$  des problèmes locaux (2-20) et (2-21), on va identifier les limites de ces sous-suites convergentes et on en déduira que toute la suite  $(\tilde{U}^\varepsilon, \varepsilon^2 Q^\varepsilon)$  converge. Enfin, les résultats de convergence obtenus seront comparés à ceux du deuxième paragraphe qui sont obtenus d'une façon formelle par la méthode des échelles multiples.

Précisons d'abord que les forces volumiques  $F^\varepsilon$  vérifient, d'après leur expression (2-6), les hypothèses des propositions 3-1 et 3-2 et la convergence suivante:

$$(3-14) \quad \varepsilon^2 F^\varepsilon \longrightarrow \frac{|Y_g|}{|Y|} F_g^{-2} + \frac{|Y_t|}{|Y|} F_t^{-2} \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible.}$$

Cette convergence s'obtient grâce à la périodicité des  $F_\alpha^{-2}$  et le lemme classique concernant les fonctions périodiques ([33], Chap. 7, lemme).

**Théorème 3-1**

*Sous les hypothèses (1-6), (2-3), (3-6), (3-8) et (3-14), on peut extraire une sous-suite de  $\tilde{U}^\epsilon$ , encore notée  $\tilde{U}^\epsilon$ , telle que*

(3-15)  $\tilde{U}^\epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} U$  dans  $L^2(\Omega)$  faible.

et  $\begin{cases} \operatorname{div}(U) = 0 & \text{dans } \Omega \\ U \cdot n = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$

*De même on peut extraire une sous-suite de  $Q^\epsilon$ , notée  $Q^\epsilon$ , telle que:*

(3-16)  $\epsilon^2 Q^\epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} P$  dans  $L^2(\Omega)$  fort.

et  $\int_{\Omega} P \, dx = 0.$

démonstration:

D'après les estimations de la proposition 3-1, l'existence d'une sous-suite de  $\tilde{U}^\epsilon$  qui converge vers une fonction  $U$  est évidente. On va montrer que cette limite  $U$  est à divergence nulle dans  $\Omega$  et que sa composante normale  $U \cdot n$  est nulle sur le bord  $\partial\Omega$ . On introduit l'espace:

$$\mathcal{H}(\operatorname{div}) = \left\{ v \in L^2(\Omega); \operatorname{div}(v) \in L^2(\Omega) \right\}$$

munit du produit scalaire usuel:

$$\langle v, w \rangle_{\operatorname{div}} = \int_{\Omega} v \cdot w \, dx + \int_{\Omega} \operatorname{div}(v) \operatorname{div}(w) \, dx; \quad \text{pour } v, w \in \mathcal{H}(\operatorname{div})$$

Puisque la suite  $\tilde{U}^\epsilon$  est dans  $H_0^1(\Omega)$  elle est dans  $\mathcal{H}(\operatorname{div})$ , de plus elle est à divergence nulle, donc:

$$\langle \tilde{U}^\epsilon, v \rangle_{\operatorname{div}} = \int_{\Omega} \tilde{U}^\epsilon \cdot v \, dx \quad \forall v \in \mathcal{H}(\operatorname{div}).$$

Donc, la sous-suite  $\tilde{U}^\epsilon$  converge aussi dans  $\mathcal{H}(\text{div})$  faiblement vers  $U$  et la limite  $U$  est alors à divergence nulle. De plus, on sait ([20] Théorème 2.2) que l'application trace:

$$\gamma_n : \nabla \longrightarrow \gamma_n(\nabla) = \nabla \cdot n$$

est linéaire et continue de  $\mathcal{H}(\text{div})$  dans  $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ . La convergence faible de  $\tilde{U}^\epsilon$  vers  $U$  dans  $\mathcal{H}(\text{div})$  implique donc celle de  $\gamma_n(\tilde{U}^\epsilon)$  vers  $\gamma_n(U)$  dans  $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ . Mais puisque  $\tilde{U}^\epsilon$  est nulle sur  $\partial\Omega$ , les traces  $\gamma_n(\tilde{U}^\epsilon)$  et  $\gamma_n(U)$  sont nulles aussi, ce qui achève la démonstration de (3-15).

D'après la proposition 3-2, les suites  $\epsilon^2 Q^\epsilon$  et  $\epsilon^2 \nabla Q^\epsilon$  sont bornées respectivement dans  $L^2(\Omega)$  et dans  $H^{-1}(\Omega)$ . on peut donc en extraire des sous-suites telles que :

$$(3-17) \quad \begin{cases} \epsilon^2 Q^\epsilon \longrightarrow P & \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible} \\ \epsilon^2 \nabla Q^\epsilon \longrightarrow \nabla P & \text{dans } H^{-1}(\Omega) \text{ faible} \end{cases}$$

On va montrer que ces convergences ont lieu respectivement dans  $L^2(\Omega)$  fort et dans  $H^{-1}(\Omega)$  fort. Pour montrer que  $\epsilon^2 \nabla Q^\epsilon$  converge vers  $\nabla P$  dans  $H^{-1}(\Omega)$  fort, il suffit de vérifier que:

$$(3-18) \quad \begin{cases} \langle \epsilon^2 \nabla Q^\epsilon, \psi^\epsilon \rangle_\Omega \longrightarrow \langle \nabla P, \psi \rangle_\Omega \\ \forall \psi^\epsilon \in H_0^1(\Omega) \text{ telle que } \psi^\epsilon \longrightarrow \psi \text{ dans } H_0^1(\Omega) \text{ faible.} \end{cases}$$

où le symbole  $\langle \dots \rangle_\Omega$  désigne les crochets de dualité entre  $H^{-1}(\Omega)$  et  $H_0^1(\Omega)$ .

Prenons alors une suite  $\psi^\epsilon$  qui converge faiblement vers une fonction  $\psi$  dans  $H_0^1(\Omega)$ . on a:

$$(3-19) \quad \left| \langle \epsilon^2 \nabla Q^\epsilon, \psi^\epsilon \rangle_\Omega - \langle \nabla P, \psi \rangle_\Omega \right| \leq \left| \langle \epsilon^2 \nabla Q^\epsilon, \psi^\epsilon - \psi \rangle_\Omega \right| + \left| \langle \epsilon^2 \nabla Q^\epsilon - \nabla P, \psi \rangle_\Omega \right|.$$

D'après la deuxième convergence de (3-17), le deuxième terme du second membre de cette inégalité tend vers zéro avec  $\epsilon$ . Quant au premier terme, d'après les relations (3-10) et (3-11) On a:

$$\left| \langle \epsilon^2 \nabla Q^\epsilon, \psi^\epsilon - \psi \rangle_\Omega \right| \leq C \left( \|\psi^\epsilon - \psi\|_{0,\Omega} + \epsilon \|\nabla \psi^\epsilon - \nabla \psi\|_{0,\Omega} \right).$$

Mais  $\|\nabla \psi^\epsilon - \nabla \psi\|_{0,\Omega}$  est borné indépendamment de  $\epsilon$  et, d'après la compacité de l'injection de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$ , la suite  $\psi^\epsilon$  converge vers  $\psi$  fortement dans  $L^2(\Omega)$ . Le second membre de l'inégalité précédente tend alors vers zéro avec  $\epsilon$ , donc celui de l'inégalité (3-19) aussi. La propriété (3-18) est alors vérifiée, d'où:

$$(3-20) \quad \epsilon^2 \nabla Q^\epsilon \longrightarrow \nabla P \quad \text{dans } H^{-1}(\Omega) \text{ fort.}$$

Maintenant on peut montrer que  $\epsilon^2 Q^\epsilon$  converge fortement vers  $P$  dans  $L^2(\Omega)$ . D'après R. Temam ([36] Chap.1, Lemme 6.1), il existe une constante  $C$  qui ne dépend que de  $\Omega$  telle que:

$$\|\epsilon^2 Q^\epsilon - P\|_{0,\Omega} \leq C \left( \int_{\Omega_f^\epsilon} (\epsilon^2 Q^\epsilon - P) \, dx + \|\epsilon^2 \nabla Q^\epsilon - \nabla P\|_{H^{-1}(\Omega)} \right).$$

D'après (3-20) et la première convergence de (3-17) le second membre de cette inégalité tend vers zéro avec  $\epsilon$ , donc:

$$(3-21) \quad \epsilon^2 Q^\epsilon \longrightarrow P \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ fort.}$$

Pour achever la démonstration du théorème, il reste à montrer que la limite  $P$  est de moyenne nulle sur  $\Omega$ . D'après la proposition 3-2 on a:

$$(3-22) \quad \int_{\Omega_f^\epsilon} \epsilon^2 Q^\epsilon \, dx = \int_{\Omega} X_f^\epsilon \epsilon^2 Q^\epsilon \, dx = 0$$

où  $X_f^\epsilon$  désigne la fonction caractéristique de  $\Omega_f^\epsilon$ .

Mais si l'on note  $X_f$  La prolongée à  $\mathbb{R}^3$  par  $Y$ -périodicité de la fonction caractéristique de  $Y_f$ , alors:  $X_f^\varepsilon(x) = X_f(\frac{x}{\varepsilon})$ . La fonction  $X_f^\varepsilon$  converge donc faiblement dans  $L^2(\Omega)$  vers la moyenne  $\frac{|Y_f|}{|Y|}$  de  $X_f$  sur  $Y$ . Le passage à la limite dans (3-22) donne alors le résultat voulu, i.e:

$$\int_{\Omega} P \, dx = 0. \quad \square$$

On va maintenant établir les relations qui lient les deux limites  $U$  et  $P$ , puis, on va essayer de les identifier comme solutions de problèmes aux limites.

**Théorème 3-2:**

*Sous les hypothèses du théorème 3-1, les limites  $U$  et  $P$  sont liées par :*

$$(3-23) \quad U = K^l (F_l^{-2} - \nabla P) + K^g (F_g^{-2} - \nabla P) + \frac{1}{|Y|} \int_{Y_f} W(y) \, dy$$

où les  $K^\alpha$  ( $\alpha = g, l$ ) sont les tenseurs des perméabilités  $K_{ij}^\alpha$ , définies par:

$$K_{ij}^\alpha = \frac{1}{|Y|} \int_{Y_f} (V_\alpha^j)_i(y) \, dy \quad (\alpha = g, l)$$

et les fonctions  $V_\alpha^j$  et  $W$  sont les solutions uniques des problèmes locaux (2-20) et (2-21).

*La limite  $P$  est déterminée de façon unique par le problème aux limites:*

$$(3-24) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( K_{ij} \frac{\partial P}{\partial x_j} \right) = K_{ij}^l \frac{\partial (F_l^{-2})_j}{\partial x_i} + K_{ij}^g \frac{\partial (F_g^{-2})_j}{\partial x_i} & \text{dans } \Omega \\ K_{ij} \frac{\partial P}{\partial x_j} n_i = (K_{ij}^l (F_l^{-2})_j + K_{ij}^g (F_g^{-2})_j) n_i + \frac{n_i}{|Y|} \int_{Y_f} W_f(y) \, dy & \text{sur } \partial\Omega \\ \int_{\Omega} P \, dx = 0. & \end{array} \right.$$

où:  $K = K^l + K^g$ .

Démonstration:

En utilisant les solutions  $(V_{\alpha}^k, q_{\alpha}^k)$  et  $(W, r)$  des problèmes (2-20) et (2-21), on définit les nouveaux couples de fonctions  $(V_{\alpha}^{k\epsilon}, q_{\alpha}^{k\epsilon})$ ,  $(V^{k\epsilon}, q^{k\epsilon})$  et  $(W^{\epsilon}, r^{\epsilon})$  par:

$$(3-25) \quad \left\{ \begin{array}{l} V_{\alpha}^{k\epsilon}(x) = V_{\alpha}^k\left(\frac{x}{\epsilon}\right) ; q_{\alpha}^{k\epsilon}(x) = q_{\alpha}^k\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \quad (\alpha = g, \ell) \\ V^{k\epsilon} = V_g^{k\epsilon} + V_{\ell}^{k\epsilon} ; q^{k\epsilon} = q_g^{k\epsilon} + q_{\ell}^{k\epsilon} \quad (k = 1, 2, 3) \\ W^{\epsilon}(x) = W\left(\frac{x}{\epsilon}\right) ; r^{\epsilon}(x) = r\left(\frac{x}{\epsilon}\right). \end{array} \right.$$

Les équations (2-20), vérifiées par les  $(V_{\alpha}^k, q_{\alpha}^k)$ , impliquent alors que les nouvelles fonctions  $(V_{\alpha}^{k\epsilon}, q_{\alpha}^{k\epsilon})$  vérifient, pour chaque couple  $(\alpha, k)$  donné  $(\alpha = g, \ell \text{ et } k = 1, 2, 3)$ :

$$\left. \begin{array}{ll} -2 \mu_{\beta} \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial x_j} D_{ij}^x(V_{\alpha}^{k\epsilon}) + \epsilon \frac{\partial q_{\alpha}^{k\epsilon}}{\partial x_i} = \delta_{\alpha\beta} \delta_{ik} & \text{dans chaque } \Omega_{\beta}^{\epsilon} \quad (\beta = g, \ell) \\ \operatorname{div}_x(V_{\alpha}^{k\epsilon}) = 0 & \text{dans chaque } \Omega_{\beta}^{\epsilon} \quad (\beta = g, \ell) \\ [V_{\alpha}^{k\epsilon}]_{g\ell} = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{g\ell}^{\epsilon} \\ [2 \epsilon \mu^{\epsilon} D_{ij}^x(V_{\alpha}^{k\epsilon}) - q_{\alpha}^{k\epsilon} \delta_{ij}]_{g\ell} \cdot n_j = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{g\ell}^{\epsilon} \\ V_{\alpha}^{k\epsilon} = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{is}^{\epsilon} \end{array} \right\}$$

où les  $\delta_{ik}$  et  $\delta_{\alpha\beta}$  désignent les symboles de Kronecker ( $i, k = 1, 2, 3$  et  $\alpha, \beta = g, \ell$ ).

Les couples  $(V^{k\epsilon}, q^{k\epsilon})$  vérifient alors:

$$(3-26) \quad \left. \begin{array}{ll} -2 \mu_{\beta} \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial x_j} D_{ij}^x(V^{k\epsilon}) + \epsilon \frac{\partial q^{k\epsilon}}{\partial x_i} = \delta_{ik} & \text{dans chaque } \Omega_{\beta}^{\epsilon} \quad (\beta = g, \ell) \\ \operatorname{div}_x(V^{k\epsilon}) = 0 & \text{dans chaque } \Omega_{\beta}^{\epsilon} \quad (\beta = g, \ell) \\ [V^{k\epsilon}]_{g\ell} = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{g\ell}^{\epsilon} \\ [2 \epsilon \mu^{\epsilon} D_{ij}^x(V^{k\epsilon}) - q^{k\epsilon} \delta_{ij}]_{g\ell} \cdot n_j = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{g\ell}^{\epsilon} \\ V^{k\epsilon} = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{is}^{\epsilon} \end{array} \right\}$$

De même, les équations (2-21) vérifiées par  $(w, r)$  impliquent que le nouveau couple  $(W^\epsilon, r^\epsilon)$  vérifie:

$$(3-27) \quad \left\{ \begin{array}{ll} -2 \epsilon^2 \mu_\beta \frac{\partial}{\partial x_j} D_{ij}^x(W^\epsilon) + \epsilon \frac{\partial r^\epsilon}{\partial x_i} = 0 & \text{dans chaque } \Omega_\beta^\epsilon \ (\beta = g, \ell) \\ \operatorname{div}_x(W^\epsilon) = 0 & \text{dans chaque } \Omega_\beta^\epsilon \ (\beta = g, \ell) \\ \llbracket W^\epsilon \rrbracket_{g\ell} = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{g\ell}^\epsilon \\ \llbracket 2 \epsilon \mu^\epsilon D_{ij}^x(W^\epsilon) - r^\epsilon \delta_{ij} \rrbracket_{g\ell} n_j = 2 \sigma \epsilon H^\epsilon n_i & \text{sur } \mathcal{A}_{g\ell}^\epsilon \\ W^\epsilon = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{I\beta}^\epsilon \end{array} \right.$$

(rappel:  $H^\epsilon(x) = \epsilon^{-1} H(\frac{x}{\epsilon})$ , où  $H$  est la prolongée par  $Y$ -périodicité de la courbure moyenne de l'interface  $\mathcal{A}_{g\ell} = \partial Y_g \cap \partial Y_\ell$ ).

Maintenant, si on note:

$$(3-28) \quad Z^\epsilon = U^\epsilon - W^\epsilon \quad \text{et} \quad X^\epsilon = \epsilon P^\epsilon - r^\epsilon,$$

alors, en utilisant le problème initial (1-4) vérifié par la vitesse  $U^\epsilon$  et la pression  $P^\epsilon$ , les nouvelles fonctions  $Z^\epsilon$  et  $X^\epsilon$  vérifient:

$$(3-29) \quad \left\{ \begin{array}{ll} -2 \mu_\beta \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial x_j} D_{ij}^x(Z^\epsilon) + \epsilon \frac{\partial X^\epsilon}{\partial x_i} = \epsilon^2 F_i^\epsilon & \text{dans chaque } \Omega_\beta^\epsilon \ (\beta = g, \ell) \\ \operatorname{div}_x(Z^\epsilon) = 0 & \text{dans chaque } \Omega_\beta^\epsilon \ (\beta = g, \ell) \\ \llbracket Z^\epsilon \rrbracket_{g\ell} = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{g\ell}^\epsilon \\ \llbracket 2 \epsilon \mu^\epsilon D_{ij}^x(Z^\epsilon) - X^\epsilon \delta_{ij} \rrbracket_{g\ell} n_j = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{g\ell}^\epsilon \\ Z^\epsilon = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{I\beta}^\epsilon \end{array} \right.$$

Soit maintenant  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , on multiplie la première équation de (3-29) par la  $i^{\text{ème}}$  composante de  $\varphi V^{k\epsilon}$  puis on l'intègre par parties sur chaque  $\Omega_\beta^\epsilon$  ( $\beta = g, \ell$ ). Comme ce qui a été fait pour obtenir la formulation variationnelle (1-7) du problème initial (1-4), la somme des relations obtenues, sur l'indice  $i$  de 1 à 3 et sur l'indice  $\beta = g, \ell$ , donne en tenant compte des conditions aux interfaces:

$$(3-30) \quad \int_{\Omega_i^\varepsilon} 2 \varepsilon^2 \mu^\varepsilon D_{ij}^x(Z^\varepsilon) D_{ij}^x(\varphi V^{k\varepsilon}) \, dx = \int_{\Omega_i^\varepsilon} \varepsilon X^\varepsilon \nabla \varphi \cdot V^{k\varepsilon} \, dx + \int_{\Omega_i^\varepsilon} \varphi \varepsilon^2 F^\varepsilon \cdot V^{k\varepsilon} \, dx$$

De même, en multipliant la première équation de (3-26) par  $\varphi Z^\varepsilon$ , des intégrations par parties donnent:

$$(3-31) \quad \int_{\Omega_i^\varepsilon} 2 \varepsilon^2 \mu^\varepsilon D_{ij}^x(V^{k\varepsilon}) D_{ij}^x(\varphi Z^\varepsilon) \, dx = \int_{\Omega_i^\varepsilon} \varepsilon q^{k\varepsilon} \nabla \varphi \cdot Z^\varepsilon \, dx + \int_{\Omega_i^\varepsilon} \varphi Z_k^\varepsilon \, dx$$

On va maintenant combiner les relations (3-30) et (3-31) et essayer d'obtenir une relation dans laquelle on peut passer à la limite, mais qui permet aussi d'obtenir une relation non triviale entre les limites des prolongement de la vitesse  $U^\varepsilon$  et celui de la pression  $P^\varepsilon$ . Remarquons d'abord que:

$$2 D_{ij}^x(\varphi Z^\varepsilon) = 2 \varphi D_{ij}^x(Z^\varepsilon) + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} Z_j^\varepsilon + \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} Z_i^\varepsilon \right)$$

et une formule analogue pour  $D_{ij}^x(\varphi V^{k\varepsilon})$ .

Si on soustrait la relation (3-31) de la relation (3-30), il vient alors:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_i^\varepsilon} \varepsilon^2 \mu^\varepsilon D_{ij}^x(Z^\varepsilon) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} V_j^{k\varepsilon} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} V_i^{k\varepsilon} \right) \, dx - \int_{\Omega_i^\varepsilon} \varepsilon^2 \mu^\varepsilon D_{ij}^x(V^{k\varepsilon}) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} Z_j^\varepsilon + \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} Z_i^\varepsilon \right) \, dx = \\ & = \int_{\Omega_i^\varepsilon} \varepsilon ( X^\varepsilon V^{k\varepsilon} - q^{k\varepsilon} Z^\varepsilon ) \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_{\Omega_i^\varepsilon} ( \varepsilon^2 F^\varepsilon \cdot V^{k\varepsilon} - Z^\varepsilon ) \varphi \, dx \end{aligned}$$

On écrit maintenant ces intégrales sur le domaine fixe  $\Omega$  en utilisant le prolongement  $Q^\varepsilon$  de la pression  $P^\varepsilon$ , donné par la proposition 3-2, et les prolongement par zéro en dehors de  $\Omega_i^\varepsilon$  de



toutes les autres fonctions intervenant dans la relation précédente. de façon précise, si l'on note:

$$\begin{cases} \hat{X} = \varepsilon Q^\varepsilon - \tilde{r}^\varepsilon & \text{(voir (3-28))} \\ \tilde{\cdot} = \text{opérateur de prolongement par zéro.} \end{cases}$$

alors la relation précédente s'écrit:

$$\begin{aligned} (3-32) \quad & \int_{\Omega} \varepsilon^2 \mu^\varepsilon D_{ij}^x(\tilde{Z}^\varepsilon) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \tilde{V}_j^{k\varepsilon} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \tilde{V}_i^{k\varepsilon} \right) dx - \int_{\Omega} \varepsilon^2 \mu^\varepsilon D_{ij}^x(\tilde{V}^{k\varepsilon}) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \tilde{Z}_j^\varepsilon + \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \tilde{Z}_i^\varepsilon \right) dx = \\ & = \int_{\Omega} \varepsilon \left( \hat{X}^\varepsilon \tilde{V}^{k\varepsilon} - \tilde{q}^{k\varepsilon} \tilde{Z}^\varepsilon \right) \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_{\Omega} \left( \varepsilon^2 F^\varepsilon \cdot \tilde{V}^{k\varepsilon} - \tilde{Z}^\varepsilon \right) \varphi \, dx. \end{aligned}$$

Mais remarquons que les fonctions  $\tilde{V}^{k\varepsilon}$ ,  $\tilde{q}^{k\varepsilon}$ ,  $\tilde{w}^\varepsilon$  et  $\tilde{r}^\varepsilon$  coïncident respectivement avec les fonctions  $\hat{V}^{k\varepsilon}$ ,  $\hat{q}^{k\varepsilon}$ ,  $\hat{w}^\varepsilon$  et  $\hat{r}^\varepsilon$  qui sont définies par (3-2). Il existe donc, d'après le lemme 3-1, une constante C indépendante de  $\varepsilon$  telle que:

$$(3-33) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \|\hat{V}^{k\varepsilon}\|_{0,\Omega} \leq C \|\mathbf{V}^k\|_{0,Y_f} & ; \quad \left\| \frac{\partial \hat{V}^{k\varepsilon}}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega} \leq \frac{C}{\varepsilon} \left\| \frac{\partial \mathbf{V}^k}{\partial y_i} \right\|_{0,Y} \\ \|\hat{w}^\varepsilon\|_{0,\Omega} \leq C \|\mathbf{w}\|_{0,Y_f} & ; \quad \left\| \frac{\partial \hat{w}^\varepsilon}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega} \leq \frac{C}{\varepsilon} \left\| \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y_i} \right\|_{0,Y} \\ \|\hat{q}^{k\varepsilon}\|_{0,\Omega} \leq C \|\mathbf{q}^k\|_{0,Y_f} & \text{et} \quad \|\hat{r}^\varepsilon\|_{0,\Omega} \leq C \|\mathbf{r}\|_{0,Y_f} \end{array} \right.$$

Puisque les normes dans  $L^2(Y_f)$  des fonctions  $\mathbf{V}^k$ ,  $\mathbf{q}^k$ ,  $\mathbf{w}$ ,  $\mathbf{r}$  et de leurs gradients sont indépendantes du paramètre  $\varepsilon$ , on peut passer à la limite dans la relation (3-32) grâce aux convergences (3-15) et (3-16) annoncées dans le théorème 3-1.

D'après les estimations précédentes et celles de la proposition 3-1, le premier membre de l'égalité (3-32) tend vers zéro avec  $\varepsilon$ , donc:

$$(3-34) \quad \int_{\Omega} \varepsilon (\hat{X}^\varepsilon \hat{V}^{k\varepsilon} - \tilde{Q}^{k\varepsilon} \tilde{Z}^\varepsilon) \cdot \nabla \psi \, dx + \int_{\Omega} (\varepsilon^2 F^\varepsilon \cdot \hat{V}^{k\varepsilon} - \tilde{Z}^\varepsilon) \psi \, dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Examinons maintenant la convergence de chacune des fonctions intervenant dans cette relation:

D'après la convergence (3-16) du théorème 3-1 et l'estimation de (3-33) concernant la fonction  $\hat{r}^\varepsilon$  on a:

$$(3-35) \quad \varepsilon \hat{X}^\varepsilon = \varepsilon^2 Q^\varepsilon - \varepsilon \hat{r}^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} P \quad \text{dans } \mathbf{L}^2(\Omega) \text{ fort.}$$

D'après les notations (3-25), si l'on désigne par  $X_f$  la prolongée par Y-périodicité de la fonction caractéristique de  $Y_f$  alors:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{V}_\alpha^{k\varepsilon}(x) = v_\alpha^k X_f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad (\alpha = g, \ell). \\ \hat{V}^{k\varepsilon}(x) = v^k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) X_f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \left( v_g^k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + v_\ell^k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right) X_f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \\ \hat{W}^\varepsilon(x) = W\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) X_f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \end{array} \right.$$

Grâce à la périodicité de ces fonctions on a donc:

$$(3-36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{V}_\alpha^{k\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{M}_Y(v_\alpha^k) \quad \text{dans } \mathbf{L}^2(\Omega) \text{ faible. } (\alpha = g, \ell) \\ \hat{V}^{k\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{M}_Y(v^k) \quad \text{dans } \mathbf{L}^2(\Omega) \text{ faible.} \\ \hat{W}^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{M}_Y(W) \quad \text{dans } \mathbf{L}^2(\Omega) \text{ faible.} \end{array} \right.$$

où l'on a noté:  $\mathcal{M}_Y(\psi)(x) = \frac{1}{|Y|} \int_{Y_f} \psi(x, y) \, dy$  (pour toute fonction  $\psi$  définie sur  $\Omega \times Y$ ).

D'après le théorème 3-1 et les convergences précédentes on a :

$$(5-37) \quad \tilde{Z}^\varepsilon = \tilde{U}^\varepsilon - \tilde{W}^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} U - \mathcal{M}_Y(W) \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible.}$$

Enfin, d'après l'expression (2-6) des forces volumiques  $F^\varepsilon$ , on a :

$$\varepsilon^2 F^\varepsilon \tilde{V}^{k\varepsilon}(x) = \varepsilon^2 F^\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) V^k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \chi_f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) =$$

et

$$\varepsilon^2 F^\varepsilon \tilde{V}^{k\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{M}_Y(F^{-2} V^k) \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible.}$$

mais :

$$F^{-2}(x, y) = \begin{cases} F_g^{-2}(x) & \text{si } y \in Y_g \\ F_\ell^{-2}(x) & \text{si } y \in Y_\ell \end{cases}$$

donc :  $\mathcal{M}_Y(F^{-2} V^k \chi_\ell) = F_g^{-2} \mathcal{M}_Y(V^k \chi_g) + F_\ell^{-2} \mathcal{M}_Y(V^k \chi_\ell)$ . D'où la convergence suivante :

$$(3-38) \quad \varepsilon^2 F^\varepsilon \tilde{V}^{k\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} F_g^{-2} \mathcal{M}_Y(V^k \chi_g) + F_\ell^{-2} \mathcal{M}_Y(V^k \chi_\ell) \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible.}$$

En utilisant (3-33) à (3-38), le passage à la limite dans la relation (3-32) donne alors :

$$(3-39) \quad \int_{\Omega} -K_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} \left( M_{ik}^g (F_g^{-2})_i + M_{ik}^\ell (F_\ell^{-2})_i - U_k + \mathcal{M}_Y(W_k) \right) \varphi dx$$

où l'on a noté :

$$(3-40) \quad \left| \begin{aligned} K_{ik} &= \mathcal{M}_Y(V_i^k) = \frac{1}{|Y|} \int_{Y_f} V_i^k(y) dy \\ M_{ik}^\alpha &= \mathcal{M}_Y(V_i^k \chi_\alpha) = \frac{1}{|Y|} \int_{Y_\alpha} V_i^k(y) dy \quad (\alpha = g, \ell) \end{aligned} \right.$$

La relation (3-32) étant vraie pour toute fonction  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , on en déduit que:

$$(3-41) \quad U_j - \mathcal{M}_Y(V_j^k) = M_{ij}^l (F_l^{-2})_i + M_{ij}^g (F_g^{-2})_i - K_{ij} \frac{\partial P}{\partial x_i} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega)$$

Cherchons maintenant les relations qui lient les constantes  $M_{ij}^\alpha$  aux perméabilités  $K_{ij}^\alpha$  et  $K_{ij}$  définies par le théorème 3-2. En prenant  $V^i$  et  $V_\alpha^i$  comme fonctions-test respectivement dans les problèmes variationnels (2-31) et (2-32) on a:

$$\int_{Y_f} 2\mu D_{mn}^Y(V_\alpha^j) D_{mn}^Y(V^i) \, dY = \int_{Y_\alpha} V_j^i \, dY = |Y| M_{ji}^\alpha$$

$$\int_{Y_f} 2\mu D_{mn}^Y(V^j) D_{mn}^Y(V_\alpha^i) \, dY = \int_{Y_f} (V_\alpha^i)_j \, dY = |Y| K_{ji}^\alpha$$

En comparant les premiers membre de ces relations, il est clair que:

$$M_{ij}^\alpha = K_{ji}^\alpha \quad (i, j = 1, 2, 3 \text{ et } \alpha = g, l).$$

Et puisque les  $K_{ij}$  sont symétriques d'après (2-25) et (2-26), la relation (3-41) peut s'écrire aussi sous la forme:

$$(3-41) \quad U_i - \mathcal{M}_Y(V_i^k) = K_{ij}^l (F_l^{-2})_j + K_{ij}^g (F_g^{-2})_j - K_{ij} \frac{\partial P}{\partial x_i} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Ce qui n'est rien d'autre que la relation (3-23) du théorème 3-2.

Montrons maintenant que la limite P vérifie les équations (3-24) annoncées par le théorème 3-2. D'après le théorème 3-1, la limite P est de moyenne nulle sur  $\Omega$  et la limite U vérifie:

$$\begin{cases} \operatorname{div} (U) = 0 & \text{dans } \Omega \\ U \cdot n = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Il suffit alors de remplacer dans ces équations la limite  $U$  par son expression (3-41) pour obtenir le problème aux limites (3-23) que vérifie la limite  $P$ .

D'après la coercivité des constantes  $K_{ij}$  qui a été établie dans la relation (2-6) du théorème 2-1, les équations (3-23) forment un problème de Neumann classique. La limite  $P$  est alors déterminée de manière unique ainsi que la limite  $U$  grâce à la relation (3-22). Par conséquent, on peut affirmer dans le théorème 3-1 que c'est toute la suite  $(\tilde{U}^\varepsilon, \varepsilon^2 Q^\varepsilon)$  qui converge vers  $(U, P)$  et non pas uniquement une sous-suite extraite. On rappelle que  $\tilde{U}^\varepsilon$  désigne le prolongement de la vitesse  $U^\varepsilon$  par zéro en dehors du domaine  $\Omega_i^\varepsilon$  occupé par les deux fluides (g) et (l), et  $Q^\varepsilon$  est prolongement de la pression  $P^\varepsilon$  défini par la proposition 3-2.  $\square$

En comparant les équations (2-24) (2-27) obtenues par la méthode des échelles multiples avec les équations (3-23) et les relations (3-22) obtenues par la méthode variationnelle, on a:

$$\begin{cases} P^{-2} = P & \text{dans } L^2(\Omega)/\mathbb{R} \\ \mathcal{M}_Y(U^0) = U & \text{dans } L^2(\Omega) \end{cases}$$

Rappelons que  $U^0$  et  $P^{-2}$  sont les premiers termes du développement asymptotique (2-1) sous la forme duquel à été recherchée la solution  $(U^\varepsilon, P^\varepsilon)$ :

$$\begin{cases} U^\varepsilon(x) = U^0(x, y) + \varepsilon U^1(x, y) + \varepsilon^2 U^2(x, y) + \dots \\ P^\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^2} P^{-2}(x, y) + \frac{1}{\varepsilon} P^{-1}(x, y) + P^0(x, y) + \varepsilon P^1(x, y) + \dots ; \quad y = \frac{x}{\varepsilon} \end{cases}$$

La méthode variationnelle et La méthode des échelles multiples donnent alors les mêmes coefficients homogénéisés, c'est à dire, les perméabilités  $K_{ij}^l$ ,  $K_{ij}^g$  et  $K_{ij}$ .

TROISIEME PARTIE

**EQUATIONS DE REYNOLDS ET  
ECOULEMENT DE DEUX FLUIDES  
NON-MISCIBLES ET DE FAIBLE  
EPAISSEUR**

## INTRODUCTION III

L'écoulement d'un fluide monophasique à travers un interstice entre deux solides est souvent décrit par la loi de Reynolds. Cette loi a été établie initialement par Reynolds en 1886 [32] d'une façon empirique. L'application de cette loi est vouée à l'échec dans certaines situations physiques (Fatino, Fene et Godet [17], Bayada et Chambat [4]) mais dans d'autres situations, elle peut être justifiée de façon rigoureuse par des méthodes mathématiques. Elle s'obtient comme limite des équations de Stokes lorsque l'épaisseur de l'interstice tend vers zéro ( Bayada et Chambat [3], Cimatti [8], Dridi [14]).

On considère ici un cas plus général où l'interstice entre les deux solides peut être occupé par deux fluides non-miscibles. On suppose que les deux fluides obéissent tous deux aux équations de Stokes et qu'ils adhèrent aux deux solides. Sur l'interface fluide-fluide on tient compte des efforts capillaires dus aux tensions interfaciales. Sur les entrées-sorties des deux fluides, on considère des conditions mixtes: la vitesse est imposée sur une partie du bord, et les contraintes normales sont imposées sur l'autre partie. L'interstice occupé par les deux fluides est d'une faible épaisseur comparée aux autres dimensions du domaine, et on s'intéresse au comportement asymptotique de l'écoulement lorsque cette épaisseur tend vers zéro.

En s'inspirant des méthodes de [3], on établit des résultats de convergences pour la vitesse et la pressions des deux fluides. Les équations limites obtenues superposent à la loi de Reynolds classique des termes de couplage qui représentent les effets d'un fluide sur l'autre.

**1/ DESCRIPTION DU PROBLEME:**

On considère un interstice  $\Omega_f^\delta$  entre deux solides occupé par deux fluides (g) et (l). L'interstice est d'une faible épaisseur comparée aux autres dimensions. Elle est de l'ordre d'un paramètre  $\delta$  destiné à tendre vers zéro. On s'intéresse alors au comportement asymptotique de l'écoulement de ces deux fluides.

Pour que tous les calculs soit menés à leur terme, on va considérer une géométrie particulière, cependant, beaucoup de résultats restent valables dans des géométries plus générales.

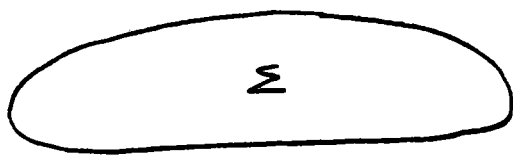
Soit  $\Sigma$  une surface connexe du plan  $(x_1, x_2)$  de  $\mathbb{R}^3$  (fig 1-1). On définit sur  $\bar{\Sigma}$  deux fonctions  $\Psi$  et  $S$  telles que:

$$(1-1) \quad \begin{cases} \Psi, S: \bar{\Sigma} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ 0 \leq \Psi(x_1, x_2) \leq S(x_1, x_2) \quad \text{p.p. dans } \Sigma \end{cases}$$

Les fluides (g) et (l) occupent respectivement les ouverts  $\Omega_g^\delta$  et  $\Omega_l^\delta$  définis par:

$$(1-2) \quad \begin{cases} \Omega_l^\delta = \{ (x_1, x_2, x_3) \text{ tels que: } x'=(x_1, x_2) \in \Sigma \text{ et } 0 < x_3 < \delta \Psi(x') \} \\ \Omega_g^\delta = \{ (x_1, x_2, x_3) \text{ tels que: } x'=(x_1, x_2) \in \Sigma \text{ et } \delta \Psi(x') < x_3 < S(x') \} \end{cases}$$

où  $\delta$  est un paramètre réel strictement positif. (figures: 1-2, 1-3 et 1-4).



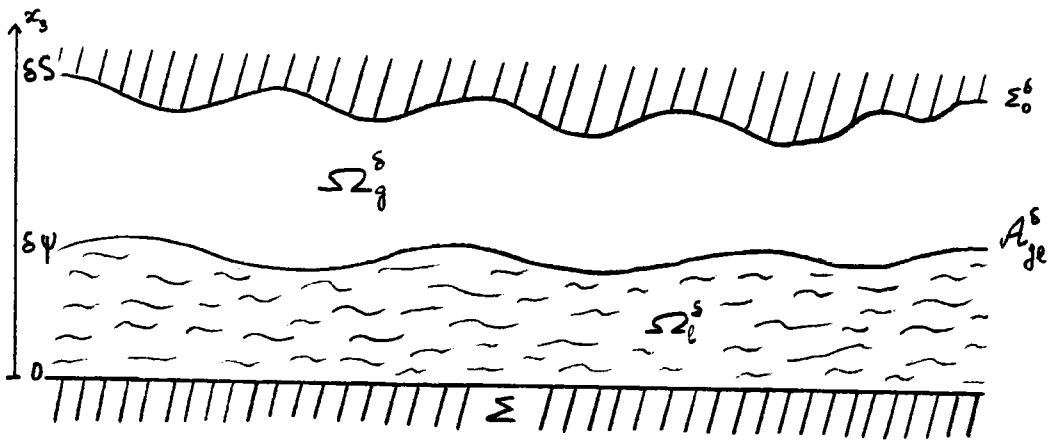
(i)



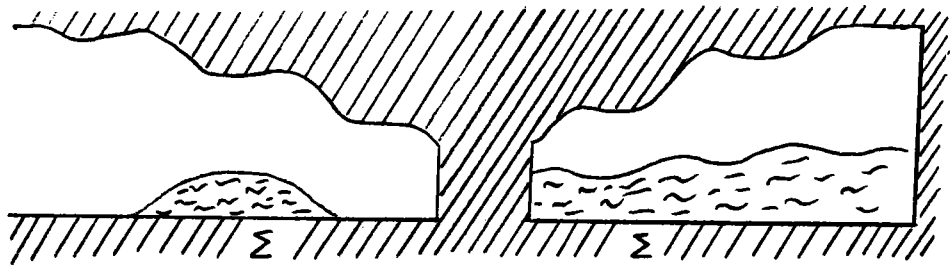
(ii)

(figure 1-1)

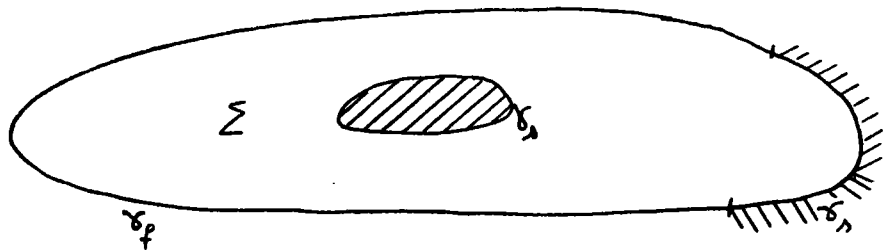




(figure 1-2)



(figure 1-3)



(figure 1-4)

La surface  $\Sigma$  peut être partagée en trois parties disjointes,  $\Sigma_\ell$ ,  $\Sigma_g$  et  $\Sigma_\ell^g$ , en dessus desquelles on a respectivement, uniquement le fluide ( $\ell$ ), uniquement le fluide ( $g$ ) et une superposition des deux fluides ( $\ell$ ) et ( $g$ ):

$$(1-3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\Sigma} = \bar{\Sigma}_\ell \cup \bar{\Sigma}_g \cup \bar{\Sigma}_\ell^g \\ \Sigma_\ell = \{ (x_1, x_2, 0) : (x_1, x_2) \in \Sigma \text{ et } \Psi(x_1, x_2) = S(x_1, x_2) \} \\ \Sigma_g = \{ (x_1, x_2, 0) : (x_1, x_2) \in \Sigma \text{ et } \Psi(x_1, x_2) = 0 < S(x_1, x_2) \} \\ \Sigma_\ell^g = \{ (x_1, x_2, 0) : (x_1, x_2) \in \Sigma \text{ et } 0 < \Psi(x_1, x_2) < S(x_1, x_2) \} \end{array} \right.$$

La frontière de La surface  $\Sigma$  peut se décomposer en deux parties, un bord  $\delta_g$  qui génère une interface latérale fluides-solide ou une face latérale sur laquelle la vitesse est une donnée nulle, et un bord  $\delta_\ell$  qui génère les entrées et sorties des fluides ( figure 1-4 ):

$$(1-4) \quad \partial\Sigma = \delta = \delta_g \cup \delta_\ell$$

La réunion des deux fluides ( $g$ ) et ( $\ell$ ) occupe l'ouvert  $\Omega_f^\delta$  défini par:

$$(1-5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bullet \Omega_f^\delta = \Omega_\ell^\delta \cup \Omega_g^\delta \cup \mathcal{A}_{gg}^\delta \\ \text{où } \mathcal{A}_{gg}^\delta \text{ est l'interface séparant les deux fluides (g) et (l), i.e:} \\ \mathcal{A}_{gg}^\delta = \{ (x_1, x_2, x_3) : (x_1, x_2) \in \Sigma \text{ et } x_3 = \delta \Psi(x_1, x_2) \} \\ \\ \bullet \bar{\partial}\Omega_f^\delta = \bar{\mathcal{A}}_{f_s}^\delta \cup \bar{\Gamma}^\delta \\ \text{où } \bar{\mathcal{A}}_{f_s}^\delta \text{ désigne les interfaces fluides-solides et } \bar{\Gamma}^\delta \text{ les entrées et sorties des deux} \\ \text{fluides:} \\ \Gamma^\delta = \{ (x_1, x_2, x_3) : (x_1, x_2) \in \delta_\ell \text{ et } 0 < x_3 < \delta S(x_1, x_2) \} \\ \bar{\mathcal{A}}_{f_s}^\delta = \bar{\Sigma} \cup \bar{\Sigma}_0^\delta \cup \bar{\Gamma}_s^\delta \\ \Sigma_0^\delta = \{ (x_1, x_2, x_3) : (x_1, x_2) \in \Sigma \text{ et } x_3 = \delta S(x_1, x_2) \} \\ \Gamma_s^\delta = \{ (x_1, x_2, x_3) : (x_1, x_2) \in \delta_g \text{ et } 0 < x_3 < \delta S(x_1, x_2) \} \\ \\ \text{les surfaces } \Sigma, \Sigma_0^\delta \text{ et } \Gamma_s^\delta \text{ représentent les interfaces des fluides avec le solide,} \\ \text{respectivement, inférieures, supérieures et latérales (fig. 1-4).} \end{array} \right.$$

Les frontières de chaque ouvert  $\Omega_\alpha^\delta$  occupé par le fluide ( $\alpha$ ), ( $\alpha = g, \ell$ ), sont définies par:

$$\overline{\Omega_\alpha^\delta} = \overline{\Gamma_\alpha^\delta} \cup \overline{\mathcal{A}_{\alpha g}^\delta} \quad (\alpha = g, \ell)$$

les surfaces  $\Gamma_\alpha^\delta$  et  $\mathcal{A}_{\alpha g}^\delta$  désignent respectivement les entrées-sorties du fluide ( $\alpha$ ) et ses interfaces avec le solide:

$$\Gamma_\ell^\delta = \{ (x_1, x_2, x_3) : (x_1, x_2) \in \mathcal{Y}_\ell \text{ et } 0 < x_3 < \delta \Psi(x_1, x_2) \}$$

$$\Gamma_g^\delta = \{ (x_1, x_2, x_3) : (x_1, x_2) \in \mathcal{Y}_g \text{ et } \delta \Psi(x_1, x_2) < x_3 < \delta S(x_1, x_2) \}$$

$$(1-6) \quad \overline{\mathcal{A}_{\ell g}^\delta} = \overline{\Sigma_\ell^\delta} \cup \overline{\Sigma_{o\ell}^\delta} \cup \overline{\Gamma_{g\ell}^\delta}$$

$$\Sigma_{o\ell}^\delta = \{ (x_1, x_2, x_3) : (x_1, x_2) \in \Sigma_\ell \text{ et } x_3 = \delta \Psi(x_1, x_2) = \delta S(x_1, x_2) \}$$

$$\Gamma_{g\ell}^\delta = \{ (x_1, x_2, x_3) : (x_1, x_2) \in \mathcal{Y}_g \text{ et } 0 < x_3 < \delta \Psi(x_1, x_2) \}$$

$$\overline{\mathcal{A}_{g\ell}^\delta} = \overline{\Sigma_g^\delta} \cup \overline{\Sigma_{og}^\delta} \cup \overline{\Gamma_{g\ell}^\delta}$$

$$\Sigma_{og}^\delta = \{ (x_1, x_2, x_3) : (x_1, x_2) \in \Sigma \text{ et } x_3 = \delta S(x_1, x_2) > \delta \Psi(x_1, x_2) \}$$

$$\Gamma_{g\ell}^\delta = \{ (x_1, x_2, x_3) : (x_1, x_2) \in \mathcal{Y}_g \text{ et } \delta \Psi(x_1, x_2) < x_3 < \delta S(x_1, x_2) \}$$

Comme dans la partie II précédente, les deux fluides sont supposés incompressibles et non-miscibles. Le fluide ( $\ell$ ) est mouillant et le fluide ( $g$ ) est non-mouillant. La vitesse  $U^\delta$  et la pression  $P^\delta$  vérifient le même problème (1-4) du premier paragraphe de la partie II, mais, sur les entrées et sorties  $\Gamma^\delta$  des fluides, on va étudier parallèlement un autre type de conditions aux limites. De façon précise, on suppose que les deux fluides satisfont aux équations de Stokes dans chaque  $\Omega_\alpha^\delta$  et qu'ils adhèrent au solide, qui lui, est supposé rigide et immobile. Sur les interfaces  $\mathcal{A}_{\alpha\beta}^\delta$  séparant les deux fluides, la vitesse est continue par contre les contraintes normales présentent une discontinuité due aux tensions interfaciales. Sur une partie des entrées-sorties des fluides on impose une vitesse  $U^\delta$  nulle, ce qui revient à considérer cette

partie du bord comme une interface fluide-solide (contenue dans  $\mathcal{A}_{fs}^\delta$ ), sur l'autre partie  $\Gamma^\delta$  on suppose que les efforts surfaciques  $(2 \mu^\delta D_{ij}(U^\delta)n_j - P^\delta n_i)$  sont donnés:

Dans chaque  $\Omega_\alpha^\delta$  ( $\alpha = g, l$ ):

$$-2 \mu_\alpha \frac{\partial}{\partial x_j} D_{ij}(U^\delta) + \frac{\partial P^\delta}{\partial x_i} = F_i^\delta$$

$$\text{div}(U^\delta) = 0.$$

Sur les interfaces  $\mathcal{A}_{gl}^\delta$  fluide(g) - fluide(l) :

$$[U^\delta]_{gl} = 0$$

$$(1-7) \quad [2 \mu^\delta D_{ij}(U^\delta)n_j - P^\delta n_i]_{gl} = 0.$$

Sur les interfaces fluide-solide et une partie des entrées-sorties, notées  $\mathcal{A}_{fs}^\delta$ :

$$U^\delta = 0.$$

Sur une autre partie  $\Gamma^\delta$  des entrées-sorties des fluides :

$$2 \mu^\delta D_{ij}(U^\delta)n_j - P^\delta n_i = G^\delta.$$

Dans les équations (1-7) les notations sont les même que celle de la partie II (1-3) où l'on remplace le paramètre  $\varepsilon$  par le nouveau paramètre  $\delta$  qui traduit la dépendance des données et de la solution par rapport à l'épaisseur du fluide. La seule nouvelle donnée est la fonction  $G^\delta$ , elle n'est connue qu'à une constante additive près, mais, quitte à faire un changement de pression  $P^\delta$ , on la suppose connue et on cherchera une pression de moyenne nulle sur  $\Omega_f^\delta$ :

$$(1-9) \quad \int_{\Omega_f^\delta} P^\delta dx = 0$$

Avant d'étudier le comportement de la vitesse  $U^\delta$  et de la pression  $P^\delta$  lorsque "l'épaisseur"  $\delta$  tend vers zéro, on va vérifier que ce problème admet une solution. L'étude de

l'existence et l'unicité de la solution de ce problème est analogue à celle de la partie II. On va d'abord écrire ces équation (1-7) sous la forme variationnelle de Brezzi.

**1-2) Existence et unicité de la solution:**

On introduit les espaces fonctionnels:

$$(1-9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{V}^\delta = \left\{ v \in H^1(\Omega_f^\delta); v = 0 \text{ sur } \mathcal{A}_{fs}^\delta \right\} ; \quad H^1(\Omega_f^\delta) = (H^1(\Omega_f^\delta))^3 \\ L_0^2(\Omega_f^\delta) = \left\{ q \in L^2(\Omega_f^\delta); \int_{\Omega_f^\delta} q \, dx = 0 \right\}. \end{array} \right.$$

munis respectivement des normes usuelles suivantes:

$$\begin{aligned} |v|_{1, \Omega_f^\delta} &= \left( \int_{\Omega_f^\delta} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ |q|_{0, \Omega_f^\delta} &= \left( \int_{\Omega_f^\delta} q^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

où l'on adopte, comme dans tout ce qui précède et dans toute la suite, la convention de sommation sur les indices répétés et non soulignés.

Sur les données on fait les hypothèses suivantes:

$$(1-10) \quad \left\{ \begin{array}{l} F^\delta \in L^2(\Omega_f^\delta). \\ H^\delta \in L^2(\mathcal{A}_{gg}^\delta). \\ G^\delta \in L^2(\Gamma^\delta). \\ \text{Les viscosités } \mu_\alpha \text{ sont des constantes strictement positives.} \\ \text{La tension } \sigma \text{ est constante.} \end{array} \right.$$

Les appartenances de  $G^\delta$  et de la courbure  $H^\delta$  respectivement à  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^\delta)$  et à  $H^{-\frac{1}{2}}(\mathcal{A}_{gp}^\delta)$  sont suffisantes pour la validité des résultats qui suivront, mais on les suppose respectivement  $L^2(\Gamma^\delta)$  et dans  $L^2(\mathcal{A}_{gp}^\delta)$  pour simplifier l'écriture, de plus, ces hypothèses sont largement satisfaites physiquement.

On définit maintenant pour tout couple  $(u,v)$  de  $\mathcal{U}^\delta \times \mathcal{U}^\delta$  et toute fonction  $q$  de  $L_0^2(\Omega_f^\delta)$  les formes suivantes:

$$(1-11) \quad \left\{ \begin{aligned} a^\delta(u,v) &= \int_{\Omega_f^\delta} 2\mu^\delta D_{ij}(u)D_{ij}(v) \, dx \\ b^\delta(v,q) &= - \int_{\Omega_f^\delta} q \operatorname{div}(v) \, dx \\ l^\delta(v) &= \int_{\Omega_f^\delta} F^\delta \cdot v \, dx + \int_{\mathcal{A}_{gp}^\delta} 2\sigma H^\delta v \cdot n \, dr + \int_{\Gamma^\delta} G^\delta v \cdot n \, dr \end{aligned} \right.$$

et on démontre le:

**Théorème 1.1**

*Sous les hypothèses(1-10), le problème(1-7), avec la condition (1-8) sur la pression, peut se mettre sous la forme variationnelle suivante:*

$$(1-12) \quad \left\{ \begin{aligned} U^\delta \in \mathcal{U}^\delta \quad ; \quad P^\delta \in L_0^2(\Omega_f^\delta) \\ a^\delta(U^\delta, v) + b^\delta(v, P^\delta) = l^\delta(v) \quad \forall v \in \mathcal{U}^\delta \\ b^\delta(U^\delta, q) = 0 \quad \forall q \in L_0^2(\Omega_f^\delta) \end{aligned} \right.$$

*Le problème (1-12) admet une solution  $(U^\delta, P^\delta)$  unique avec:*

$$(1-13) \quad U^\delta \in \left\{ v \in \mathcal{U}^\delta \quad ; \quad \operatorname{div}(v) = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\Gamma^\delta} v \cdot n \, dr = 0 \right\}$$

Démonstration:

La formulation faible (1-12) s'obtient de manière analogue à celle du théorème 1-1 de la partie II, la seule différence est la présence d'un terme supplémentaire dans l'expression de la forme linéaire  $\mathcal{L}^\delta$ , à savoir l'intégrale sur la face latérale  $\Gamma^\delta$  de  $G^\delta \forall n$ .

Pour l'étude de l'existence et de l'unicité de la solution de (1-12), on utilise encore le lemme 1-1 de la partie II, c'est à dire on vérifie que les propriétés suivantes sont satisfaites:

- ♦ la forme linéaire  $\mathcal{L}^\delta(\cdot)$  est continue sur  $\mathcal{U}^\delta$ .
- ♦ la forme bilinéaire  $a^\delta(\cdot, \cdot)$  est continue sur  $\mathcal{U}^\delta \times \mathcal{U}^\delta$  et est coercive sur:

$$\left\{ v \in \mathcal{U}^\delta ; \operatorname{div}(v) = 0 \text{ et } \int_{\Gamma^\delta} v \cdot n \, dr = 0 \right\}$$

- ♦ la forme bilinéaire  $b^\delta(\cdot, \cdot)$  est continue sur  $\mathcal{U}^\delta \times L_0^2(\Omega_f^\delta)$  et vérifie la condition de l'inf-sup:

$$\exists \eta > 0 \text{ telle que: } \inf_{q \in L_0^2(\Omega_f^\delta)} \sup_{v \in \mathcal{U}^\delta} \frac{b^\delta(v, q)}{\|v\|_{1, \Omega_f^\delta} \|q\|_{0, \Omega_f^\delta}} \geq \eta$$

La première propriété est une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwartz et de la continuité des traces. La continuité de la forme bilinéaire  $a^\delta(\cdot, \cdot)$  est évidente grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwartz et celle de Poincaré, et sa coercivité est une conséquence de l'inégalité de Korn. Quant à la forme bilinéaire  $b^\delta(\cdot, \cdot)$ , sa continuité est immédiate aussi, et on va voir qu'elle vérifie la condition de l'inf-sup: d'après le lemme 1-2 de la partie II, il existe une constante C strictement positive telle que:

$$\sup_{v \in \mathbb{H}_0^1(\Omega_f^\delta)} \frac{b^\delta(v, q)}{\|v\|_{1, \Omega_f^\delta}} \geq C \|q\|_{0, \Omega_f^\delta} \quad \forall q \in L_0^2(\Omega_f^\delta)$$

Mais, puisque  $\mathbb{H}_0^1(\Omega_f^\delta) \subset \mathcal{U}^\delta$ , cette inégalité reste valable si on y remplace  $\mathbb{H}_0^1(\Omega_f^\delta)$  par l'espace  $\mathcal{U}^\delta$ :

$$\sup_{v \in \mathcal{U}^\delta} \frac{b^\delta(v, q)}{\|v\|_{1, \Omega_f^\delta}} \geq \sup_{v \in \mathbb{H}_0^1(\Omega_f^\delta)} \frac{b^\delta(v, q)}{\|v\|_{1, \Omega_f^\delta}} \geq C \|q\|_{0, \Omega_f^\delta} \quad \forall q \in L_0^2(\Omega_f^\delta)$$

En divisant les deux membres de cette inégalité par  $|q|_{0, \Omega_\delta^\delta}$  et en passant à l'inf sur  $q \in L_0^2(\Omega_\delta^\delta)$ , on obtient la condition de l'inf-sup voulue puisque la constante C ne dépend pas de q.

Les hypothèses du lemme 1-1 de la partie II sont donc satisfaites, le problème (1-12) admet alors une solution unique  $(U^\delta, P^\delta)$  avec  $U^\delta$  de divergence nulle, et par conséquent sa composante normale  $U^\delta \cdot n$  est de moyenne nulle sur la face latérale  $\Gamma^\delta$ , en effet:

$$- \int_{\Omega_\delta^\delta} \operatorname{div}(U^\delta) \, dx = \int_{\mathcal{A}_{ts}^\delta} U^\delta \cdot n \, dr + \int_{\Gamma^\delta} U^\delta \cdot n \, dr = \int_{\Gamma^\delta} U^\delta \cdot n \, dr = 0$$

Ce qui achève la démonstration.  $\square$

Pour étudier le comportement asymptotique de la solution  $(U^\delta, P^\delta)$ , lorsque  $\delta$  tend vers zéro, on va d'abord faire des changements de variables pour se ramener à un domaine fixe, c'est à dire indépendant du paramètre  $\delta$ .

**2/ CHANGEMENT DE VARIABLE ET D'INCONNUES:**

Pour chaque  $\delta \in \mathbb{R}_+^*$  on définit sur  $\mathbb{R}^3$  l'application  $\mathcal{H}^\delta$  suivante:

$$(2-1) \quad \begin{aligned} \mathcal{H}^\delta: \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3) &\longrightarrow \mathcal{H}^\delta(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, z) = (x_1, x_2, \frac{x_3}{\delta}) \end{aligned}$$

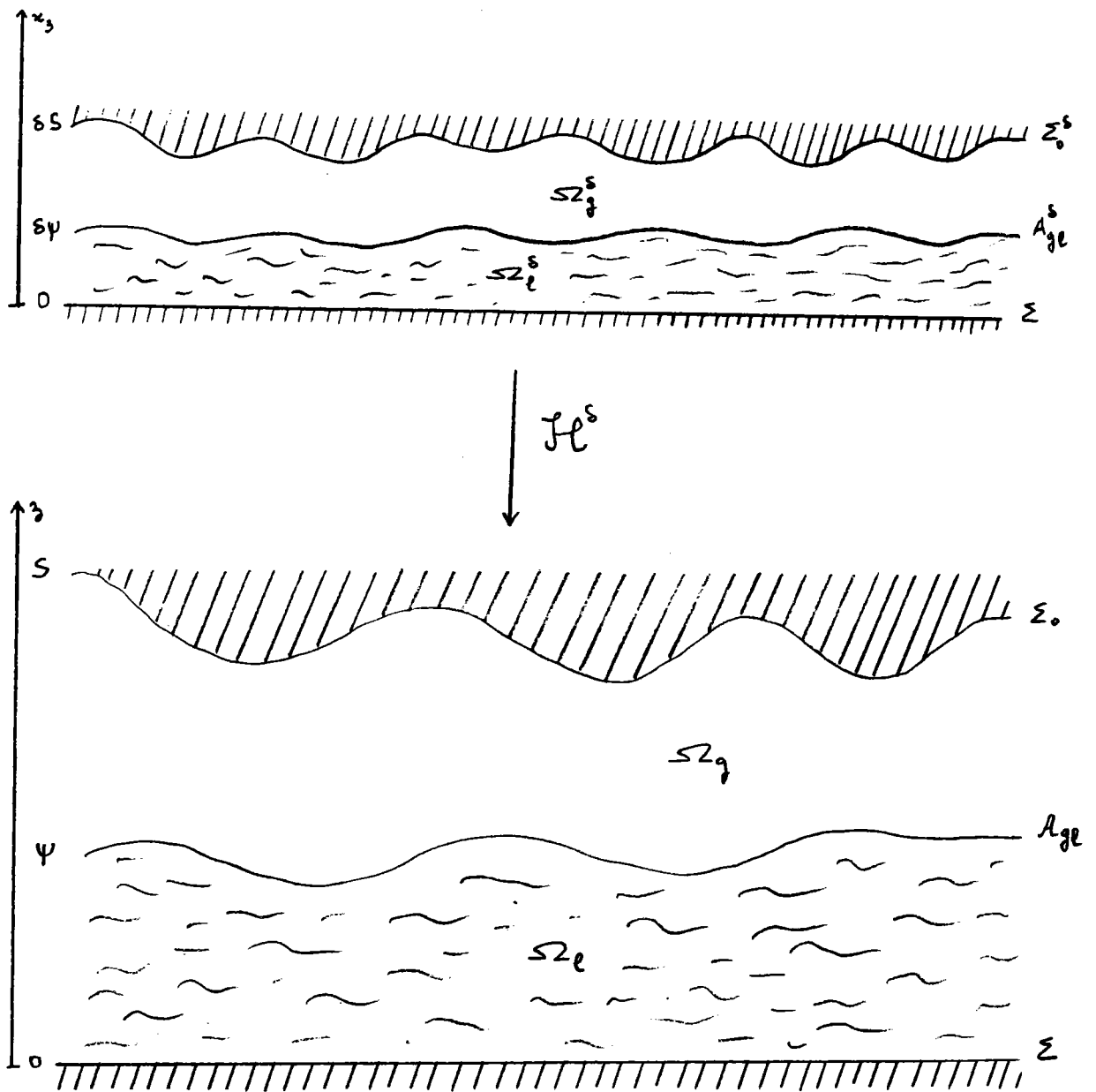
Les images  $\Omega_\alpha = \mathcal{H}^\delta(\Omega_\alpha^\delta)$  des ouverts  $\Omega_\alpha^\delta$ , ( $\alpha = g, \ell$ ), sont alors indépendant du paramètre  $\delta$ :

$$(2-2) \quad \left\{ \begin{aligned} \Omega_g &= \{ (y_1, y_2, z) \in \mathbb{R}^3 / y = (y_1, y_2) \in \Sigma \text{ et } 0 < z < \Psi(y) \} \\ \Omega_g &= \{ (y_1, y_2, z) \in \mathbb{R}^3 / y = (y_1, y_2) \in \Sigma \text{ et } \Psi(y) < z < S(y) \} \\ \Omega_\ell &= \{ (y_1, y_2, z) \in \mathbb{R}^3 / y = (y_1, y_2) \in \Sigma \text{ et } 0 < z < S(y) \} \end{aligned} \right.$$



Dans la suite on notera  $\mathcal{O}$  l'image de  $\mathcal{O}^\delta$  par l'application  $\mathcal{H}^\delta$  de tout sous- ensemble  $\mathcal{O}^\delta$  de  $\bar{\Omega}_f^{-\delta}$  (i.e: on conserve les mêmes notations pour les images en ottant l'indice  $\delta$ , par exemple:

$$\mathcal{H}^\delta(\mathcal{A}_{\alpha\beta}^\delta) = \mathcal{A}_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = g, l, s); \quad \mathcal{H}^\delta(\Gamma^\delta) = \Gamma; \quad \mathcal{H}^\delta(\Gamma_g^\delta) = \Gamma_g; \quad \text{etc... (fig. 2-1).$$



(figure 2-1)

Dans toute la suite, on notera  $(x_1, x_2, x_3)$  les coordonnées d'un point de  $\Omega_f^\delta$  et  $(y_1, y_2, z)$  celles d'un point dans  $\Omega_f$ . Maintenant, pour toute fonction  $v$  définie sur  $\Omega_f^\delta$ , on définit sur l'ouvert fixe  $\Omega_f$  une nouvelle fonction  $\hat{v}$  par:

$$(2-3) \quad \begin{cases} \hat{v}(y_1, y_2, z) = v(x_1, x_2, x_3) \\ (x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, \delta z) = (\mathcal{J}\mathcal{C}^\delta)^{-1}(y_1, y_2, z) \end{cases}$$

Et on a les règles de calcul suivantes:

**Lemme 2-1:**

Four toute fonction  $v \in H^1(\Omega_f^\delta)$  on a :

$$\begin{aligned} & \bullet \left| v \right|_{1, \Omega_f^\delta} = \sqrt{\delta} \left| \hat{v} \right|_{1, \Omega_f} \\ & \bullet \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|_{0, \Omega_f^\delta} = \sqrt{\delta} \left| \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial x_j} \right|_{0, \Omega_f} \quad \text{pour } i=1,2,3 \text{ et } j=1,2. \\ & \bullet \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_3} \right|_{0, \Omega_f^\delta} = \frac{1}{\sqrt{\delta}} \left| \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial z} \right|_{0, \Omega_f} \quad \text{pour } i=1,2,3. \\ & \bullet \int_{\Gamma^\delta} v \cdot n \, d(\Gamma^\delta) = \delta \int_{\Gamma} \hat{v} \hat{n} \, d(\Gamma) \end{aligned}$$

où  $n$  est la normale extérieure à la face latérale  $\Gamma^\delta$  de  $\Omega_f^\delta$  et  $\hat{n}$  la normale extérieure à la face latérale  $\Gamma = \mathcal{J}\mathcal{C}^\delta(\Gamma^\delta)$  de  $\Omega_f$ .

Démonstration:

D'après la définition (2-3) de la fonction  $\hat{v}$ , le changement de variable  $(y_1, y_2, z) = (x_1, x_2, \frac{x_3}{\delta})$  donne:

$$\int_{\Omega_f^\delta} v^2(x) \, dx = \delta \int_{\Omega_f} \hat{v}^2(y, z) \, dx$$

d'où la première égalité du lemme. Pour la deuxième et la troisième égalité, on utilise le même changement de variable et les relations:

$$(2-4) \quad \begin{cases} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial x_j}(y,z) & \text{pour } j=1,2 \text{ et } i=1,2,3 \\ \frac{\partial v_i}{\partial x_3}(x) = \frac{1}{\delta} \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial z}(y,z) & \text{pour } i=1,2,3. \\ (y_1, y_2, z) = (x_1, x_2, \frac{x_3}{\delta}) \end{cases}$$

pour obtenir:

$$\int_{\Omega_f^\delta} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2(x)(x) dx = \delta \int_{\Omega_f} \left( \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial x_j} \right)^2(y,z) dx \quad (j=1,2 \text{ et } i=1,2,3)$$

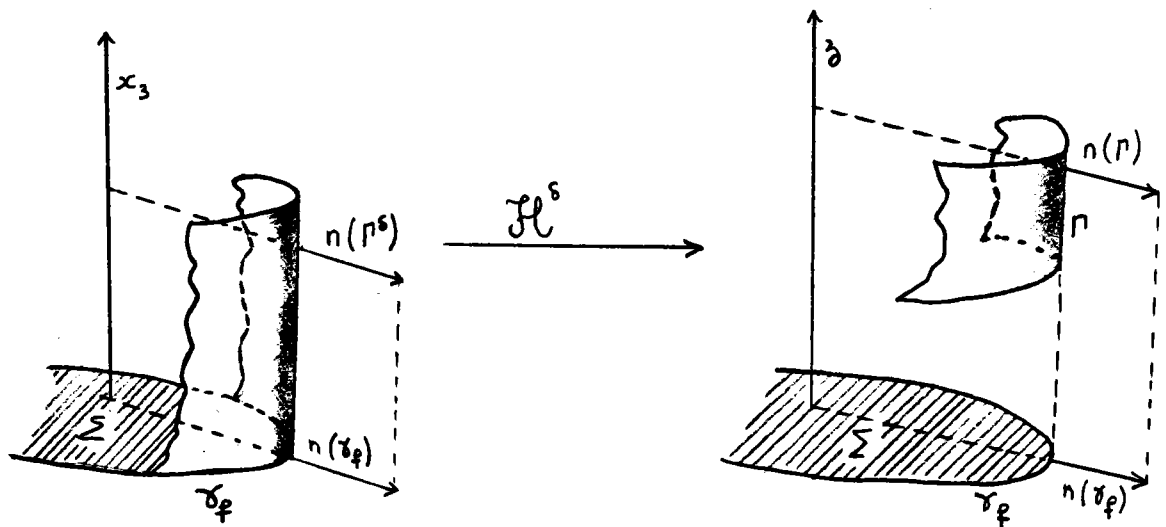
et:

$$\int_{\Omega_f^\delta} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_3} \right)^2(x)(x) dx = \frac{1}{\delta} \int_{\Omega_f} \left( \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial z} \right)^2(y,z) dx \quad (i=1,2,3).$$

Pour la dernière égalité, remarquons que sur la face latérale  $\Gamma^\delta$  (resp.  $\Gamma$ ) de  $\Omega_f^\delta$  (resp.  $\Omega_f$ ), la troisième composante  $n_3$  (resp.  $\hat{n}_3$ ) de la normale  $n$  (resp.  $\hat{n}$ ) est nulle. Et les deux premières composantes  $n_1$  et  $n_2$  (resp.  $\hat{n}_1$  et  $\hat{n}_2$ ) sont indépendantes de la variable  $x_3$  (resp.  $z$ ), elles sont identiques aux composantes de la normale  $n(\gamma_f)$  au bord  $\gamma_f$  de la surface  $\Sigma$  (fig. 2-2); donc:

$$(2-5) \quad \begin{aligned} \int_{\Gamma^\delta} v \cdot n \, d(\Gamma^\delta) &= \int_{\gamma_f} \int_0^{\delta S(x')} v(x',x) \cdot n(\gamma_f) \, dx_3 \, d(\gamma_f) && (x'=(x_1, x_2)) \\ &= \delta \int_{\gamma_f} \int_0^{S(y)} \hat{v}(y,z) \cdot n(\gamma_f) \, dz \, d(\gamma_f) && (y=(y_1, y_2)) \\ &= \delta \int_{\Gamma} \hat{v} \cdot \hat{n} \, d(\Gamma) \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration du lemme.  $\square$



(figure 2-2)

**Lemme 2-2:**

Pour toute fonction  $v \in H^1(\Omega_1^\delta)$  on a :

$$\begin{aligned} \bullet \int_{\mathcal{A}_{\Omega}^\delta} H^\delta v \cdot n \, d(\mathcal{A}_{\Omega}^\delta) &= \delta \int_{\mathcal{A}_{\Omega}^\delta} H^\delta (\hat{v}_1 \hat{n}_1 + \hat{v}_2 \hat{n}_2) \, d(\mathcal{A}_{\Omega}^\delta) + \int_{\mathcal{A}_{\Omega}^\delta} H^\delta \hat{v}_3 \hat{n}_3 \, d(\mathcal{A}_{\Omega}^\delta) \\ \bullet \int_{\Gamma^\delta} G^\delta v \cdot n \, d(\Gamma^\delta) &= \delta \int_{\Gamma} \hat{G}^\delta \hat{v} \hat{n} \, d(\Gamma) \end{aligned}$$

où  $\hat{G}^\delta(y,z) = G^\delta(y, \delta z)$ .

**Démonstration:**

La normale  $n$  à la surface  $\mathcal{A}_{\Omega}^\delta = \{(x_1, x_2, x_3) : (x_1, x_2) \in \Sigma \text{ et } x_3 = \delta \Psi(x_1, x_2)\}$ , orientée de  $\Omega_g^\delta$  vers  $\Omega_f^\delta$ , s'exprime en fonction des dérivées partielles de  $\Psi$  comme suit:

$$(2-6) \quad n = \frac{1}{\sqrt{1 + \delta^2 (\nabla\Psi)^2}} \begin{bmatrix} -\delta \frac{\partial\Psi}{\partial x_1} \\ -\delta \frac{\partial\Psi}{\partial x_2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{où: } (\nabla\Psi)^2 = \left(\frac{\partial\Psi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial x_2}\right)^2$$

Puisque la fonction  $\Psi$  est supposée régulière, la projection de la surface  $\mathcal{A}_{\text{gl}}^\delta$  sur le plan  $(x_1, 0, x_2)$ , ou sur la surface  $\Sigma$ , est univoque (voir la remarque 2-1), donc:

$$\int_{\mathcal{A}_{\text{gl}}^\delta} H^\delta \, v \cdot n \, d(\mathcal{A}_{\text{gl}}^\delta) = -\delta \int_{\Sigma} H^\delta(x') \sum_{i=1}^2 v_i(x', \delta\Psi(x')) \frac{\partial\Psi}{\partial x_i} \, dx' + \int_{\Sigma} H^\delta(x') \, v_3(x', \delta\Psi(x')) \, dx'$$

où:  $x' = (x_1, x_2)$ .

Si on fait le changement de variables  $(y_1, y_2, z) = (x_1, x_2, \frac{x_3}{\delta}) = \mathcal{H}^\delta(x_1, x_2, x_3)$  dans le second membre de cette égalité, alors en utilisant la définition (2-3) de la fonction  $\hat{v}$ , il vient:

$$(2-7) \quad \int_{\mathcal{A}_{\text{gl}}^\delta} H^\delta \, v \cdot n \, d(\mathcal{A}_{\text{gl}}^\delta) = -\delta \int_{\Sigma} H^\delta(y) \sum_{i=1}^2 \hat{v}_i(y, \Psi(y)) \frac{\partial\Psi}{\partial y_i} \, dy + \int_{\Sigma} H^\delta(y) \, \hat{v}_3(y, \Psi(y)) \, dy.$$

Mais l'image de l'interface  $\mathcal{A}_{\text{gl}}^\delta$  par l'application  $\mathcal{H}^\delta$  est:

$$\mathcal{A}_{\text{gl}} = \mathcal{H}^\delta(\mathcal{A}_{\text{gl}}^\delta) = \left\{ (y_1, y_2, z) : y = (y_1, y_2) \in \Sigma \text{ et } z = \Psi(y) \right\}$$

et la normale  $\hat{n}$  à cette interface, orientée de  $\Omega_g$  à  $\Omega_g$  s'écrit alors:

$$(2-8) \quad \hat{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\nabla_y\Psi)^2}} \begin{bmatrix} -\frac{\partial\Psi}{\partial y_1} \\ -\frac{\partial\Psi}{\partial y_2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{où: } (\nabla_y\Psi)^2 = \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y_2}\right)^2.$$

La relation (2-7) s'écrit donc:

$$\int_{\mathcal{A}_{gg}^\delta} H^\delta v \cdot n \, d(\mathcal{A}_{gg}^\delta) = \delta \int_{\mathcal{A}_{gg}} H^\delta(\gamma) \sum_{i=1}^2 \hat{v}_i \hat{n}_i \, d(\mathcal{A}_{gg}) + \int_{\mathcal{A}_{gg}} H^\delta \hat{v}_3 \hat{n}_3 \, d(\mathcal{A}_{gg}).$$

d'où la première assertion du lemme.

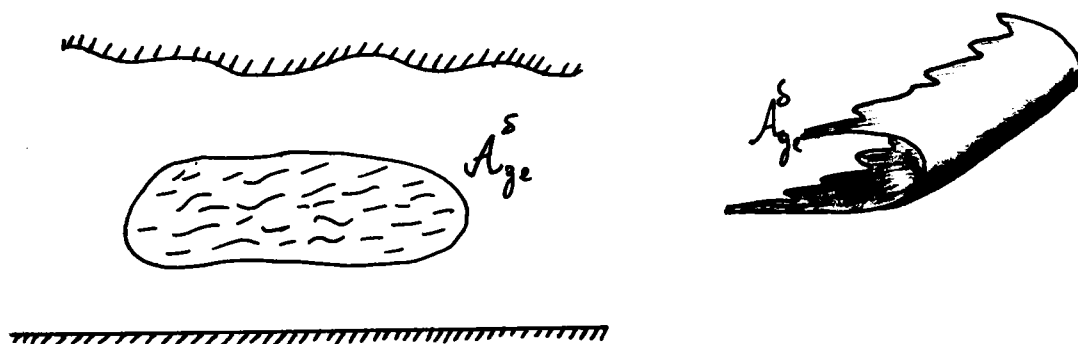
La deuxième assertion se démontre comme l'égalité (2-5), i.e:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^\delta} G^\delta v \cdot n \, d(\Gamma^\delta) &= \int_{\gamma_f} \int_0^{\delta S(x')} G^\delta(x',x) v(x',x) \cdot n(\gamma_f) \, dx_3 \, d(\gamma_f) \quad (x'=(x_1,x_2)) \\ &= \delta \int_{\gamma_f} \int_0^{S(\gamma)} \hat{G}^\delta(\gamma,z) \hat{v}(\gamma,z) \cdot n(\gamma_f) \, dz \, d(\gamma_f) \\ &= \delta \int_{\Gamma} \hat{G}^\delta \hat{v} \hat{n} \, d(\Gamma). \quad \square \end{aligned}$$

**Remarque 2-1:**

Le lemme 2-2 peut être démontré dans le cas d'une géométrie plus générale de l'interface  $\mathcal{A}_{gg}^\delta$  en utilisant un paramétrage de la forme:

$$\mathcal{A}_{gg}^\delta = \{ (x_1, x_2, x_3) = (f_1(t), f_2(t), \delta f_3(t)); t = (t_1, t_2) \in I \subset \mathbb{R}^2 \}$$



(figure 2-3)

Maintenant on va utiliser le changement de variables et de fonctions (2-3) dans le problème variationnel (1-12) pour obtenir les équations que doivent vérifier les nouvelles inconnues  $\hat{U}^\delta$  et  $\hat{P}^\delta$ . Commençons par voir comment le changement de variables (2-3) transforme les opérateur  $D_{ij}^x(\cdot)$  et  $\text{div}_x(\cdot)$  intervenants dans (1-12):

$$D_{ij}^x(v) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) (x) \text{ et } \text{div}_x(v) = \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$$

Si l'on veut exprimer  $D_{ij}^x(v)$  en fonction des dérivées partielles de  $\hat{v}$  par rapport aux nouvelles variables  $(y,z)$ , il faut alors considérer, d'après les relations (2-4), les trois cas suivants:

$$(2-9) \quad \left. \begin{array}{l} \bullet \text{ a) } i, j = 1, 2 \quad D_{ij}^x(v) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial y_j} + \frac{\partial \hat{v}_j}{\partial y_i} \right) (y,z) = D_{ij}^y(\hat{v}) \\ \text{b) } i = 1, 2 \quad D_{i3}^x(v) = D_{3i}^x(v) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\delta} \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial z} + \frac{\partial \hat{v}_3}{\partial y_i} \right) (y,z) \\ \text{c) } i = j = 3 \quad D_{33}^x(v) = \frac{1}{\delta} \frac{\partial \hat{v}_3}{\partial z} (y,z) \\ \bullet \quad \text{div}_x(v) = \left( \frac{\partial \hat{v}_1}{\partial y_1} + \frac{\partial \hat{v}_2}{\partial y_2} + \frac{1}{\delta} \frac{\partial \hat{v}_3}{\partial z} \right) (y,z) \end{array} \right\}$$

où:  $(y_1, y_2, z) = (x_1, x_2, \frac{x_3}{\delta}) = \mathcal{H}^\delta(x_1, x_2, x_3)$ .

Le changement de variables et de fonctions (2-3) dans l'expression (1-11) de la forme bilinéaire  $a^\delta$  donne alors:

$$(2-10) \quad a^\delta(u, v) = \frac{1}{\delta} a^{-1}(\hat{u}, \hat{v}) + a^0(\hat{u}, \hat{v}) + \delta a^1(\hat{u}, \hat{v})$$

avec:

$$\left. \begin{array}{l} a^{-1}(\hat{u}, \hat{v}) = \int_{\Omega_f} \hat{\mu} \left( \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial z} \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial z} + 2 \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial z} \frac{\partial \hat{v}_3}{\partial z} \right) dydz \\ a^0(\hat{u}, \hat{v}) = \int_{\Omega_f} \hat{\mu} \sum_{i=1}^2 \left( \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial z} \frac{\partial \hat{v}_3}{\partial y_i} + \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial y_i} \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial z} \right) dydz \\ a^1(\hat{u}, \hat{v}) = \int_{\Omega_f} \hat{\mu} \sum_{i,j=1}^2 \left( \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial y_i} \frac{\partial \hat{v}_j}{\partial y_i} + \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial y_i} \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial y_j} + \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial y_i} \frac{\partial \hat{v}_3}{\partial y_i} \right) dydz \end{array} \right\}$$

De même, en utilisant les nouvelles fonctions  $\hat{q}$  et  $\hat{v}$ , la forme bilinéaire  $b^\delta$  s'écrit :

$$(2-11) \quad b^\delta(v, q) = b^0(\hat{v}, \hat{q}) + \delta b^1(\hat{v}, \hat{q})$$

avec:

$$\left| \begin{array}{l} b^0(\hat{v}, \hat{q}) = \int_{\Omega_f} - \hat{q} \frac{\partial \hat{v}_3}{\partial z} dydz \\ b^1(\hat{v}, \hat{q}) = \int_{\Omega_f} - \hat{q} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial y_i} dydz \end{array} \right.$$

Enfin, en utilisant le lemme 2-2, la forme bilinéaire  $l^\delta$  s'écrit:

$$(2-12) \quad l^\delta(v) = \delta l_\delta^1(\hat{v}) + \delta^2 l_\delta^2(\hat{v})$$

avec:

$$\left| \begin{array}{l} l_\delta^1(\hat{v}) = \int_{\Omega_f} \hat{F}^\delta \cdot \hat{v} dydz + \int_{\mathcal{A}_{gg}} 2\sigma \frac{1}{\delta} H^\delta \hat{v}_3 \hat{n}_3 d(\mathcal{A}_{gg}) \\ l_\delta^2(\hat{v}) = \int_{\mathcal{A}_{gg}} 2\sigma \frac{1}{\delta} H^\delta \sum_{i=1}^2 \hat{v}_i \hat{n}_i d(\mathcal{A}_{gg}) + \int_{\Gamma} \frac{1}{\delta} \hat{G}^\delta \hat{v} \hat{n} d(\Gamma) \end{array} \right.$$

On va voir maintenant que la nouvelle vitesse  $\hat{U}^\delta$  et la nouvelle pression  $\hat{P}^\delta$  définies par:

$$(2-13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{U}^\delta(y_1, y_2, z) = U^\delta(y_1, y_2, \delta z) \\ \hat{P}^\delta(y_1, y_2, z) = P^\delta(y_1, y_2, \delta z) \end{array} \right. \quad (y_1, y_2, z) \in \Omega_f \text{ et } (y_1, y_2, \delta z) = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega_f^\delta.$$

vérifient un problème variationnel qui a lieu dans des espaces indépendant du paramètre  $\delta$ .



Si l'on note:

$$(2-14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{U} = \left\{ \hat{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega_f); \hat{v} = 0 \text{ sur } \mathcal{A}_{1s} \right\} \\ L_0^2(\Omega_f) = \left\{ \hat{q} \in L^2(\Omega_f); \int_{\Omega_f} \hat{q} \, dydz = 0 \right\}. \end{array} \right.$$

alors on a le:

**Lemme 2-3:**

*Les nouvelles fonctions  $\hat{U}^\delta$  et  $\hat{P}^\delta$  définies par (2-13) vérifient:*

$$(2-15) \quad \bullet \hat{U}^\delta \in \mathcal{U} \text{ et } \int_{\Gamma} \hat{U}^\delta \hat{n} \, d(\Gamma) = 0; \quad \hat{P}^\delta \in L_0^2(\Omega_f)$$

$$(2-16) \quad \bullet \forall \hat{v} \in \mathcal{U}: \\ \frac{1}{\delta} a^{-1}(\hat{U}^\delta, \hat{v}) + a^0(\hat{U}^\delta, \hat{v}) + \delta a^1(\hat{U}^\delta, \hat{v}) + b^0(\hat{v}, \hat{P}^\delta) + \delta b^1(\hat{v}, \hat{P}^\delta) = \delta L_\delta^1(\hat{v}) + \delta^2 L_\delta^2(\hat{v})$$

$$(2-17) \quad \bullet \forall \hat{q} \in L_0^2(\Omega_f): \\ b^0(\hat{U}^\delta, \hat{q}) + \delta b^1(\hat{U}^\delta, \hat{q}) = 0.$$

Démonstration:

Il est clair que l'application  $(\hat{\cdot}): \mathbf{v} \longrightarrow \hat{v} = v_0(\mathcal{Y}^\delta)^{-1}$  est bijective de  $\mathbf{H}^1(\Omega_f^\delta)$  (resp.  $L^2(\Omega_f^\delta)$ ) dans  $\mathbf{H}^1(\Omega_f)$  (resp.  $L^2(\Omega_f)$ ).

Et il est facile de vérifier aussi qu'on a l'équivalence:

$$v = 0 \text{ sur } \mathcal{A}_{1s}^\delta \iff \hat{v} = 0 \text{ sur } \mathcal{A}_{1s} = \mathcal{Y}^\delta(\mathcal{A}_{1s}^\delta)$$

De plus, puisque pour toute fonction  $q$  de  $L^2(\Omega_f^\delta)$ :  $\int_{\Omega_f^\delta} q \, dx = \delta \int_{\Omega_f} \hat{q} \, dydz$ , on a:

$$q \in L_0^2(\Omega_f^\delta) \iff \hat{q} \in L_0^2(\Omega_f).$$

Cette application est alors une bijection de l'espace  $\mathcal{U}^\delta$  (resp.  $L_0^2(\Omega_t^\delta)$ ) dans  $\mathcal{U}$  (resp.  $L_0^2(\Omega_t)$ ).

Et d'après le lemme 2-1 et la relation (1-13) du théorème 1-1:

$$\int_{\Gamma} \hat{U}^\delta \cdot \hat{n} \, d(\Gamma) = \frac{1}{\delta} \int_{\Gamma^\delta} U^\delta \cdot n \, d(\Gamma^\delta) = 0.$$

On a donc l'assertion (2-15) du Lemme 2-3. les autres assertions s'obtiennent grâce aux propriétés précédentes de l'application:  $v \longrightarrow \hat{v} = v_0(\mathcal{P}^\delta)^{-1}$ , et en utilisant les relations (2-10) à (2-13) dans le problème (1-12) vérifié par le couple  $(U^\delta, P^\delta)$ .  $\square$

On va maintenant étudier le comportement asymptotique des nouvelles fonctions  $\hat{U}^\delta$  et  $\hat{P}^\delta$  lorsque le paramètre  $\delta$  tend vers zéro. On commence par établir des estimations a priori qui nous permettront de passer à la limite dans les équations (2-16) et (2-17).

### 3/ ESTIMATIONS A PRIORI:

On va d'abord préciser comment la courbure moyenne  $H^\delta$  de l'interface  $\mathcal{A}_{\text{gl}}^\delta$  dépend du paramètre  $\delta$ . Rappelons que:

$$\mathcal{A}_{\text{gl}}^\delta = \left\{ (x_1, x_2, x_3) ; (x_1, x_2) \in \Sigma \text{ et } x_3 = \delta \Psi(x_1, x_2) \right\}.$$

la courbure moyenne  $H^\delta$  s'écrit alors:

$$(3-1) \quad H^\delta = \delta \frac{(I + \delta^2 J)}{2(1 + \delta^2 L)^{3/2}}$$

avec:

$$\left| \begin{array}{l} I = \Delta \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2^2} \\ J = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \right)^2 + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2^2} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \right)^2 - 2 \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1 \partial x_2} \\ L = (\nabla_{\mathbf{x}} \Psi)^2 = \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \right)^2 \end{array} \right.$$

On fait maintenant l'hypothèse suivante, qui est satisfaite si la fonction  $\Psi$  est régulière, par exemple si  $\Psi$  et ses dérivées partielles premières et secondes sont dans  $L^\infty(\Sigma)$ :

$$(3-2) \quad |H^\delta| \leq C \delta \quad \text{p.p.} \quad \text{où } C \text{ est une constante indépendante de } \delta.$$

Sur les données  $F^\delta$  et  $G^\delta$  on fait les hypothèses suivantes:

$$(3-3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{F}(y,z) = F^\delta(y,\delta z) = \begin{cases} F^g(y) \text{ dans } \Omega_g \text{ i.e: si } 0 < z < \Psi(y). \\ F^g(y) \text{ dans } \Omega_g \text{ i.e: si } \Psi(y) < z < S(y). \end{cases} \\ \text{avec: } F^\alpha \in L^2(\Sigma), (\alpha = g, \ell) \end{array} \right.$$

$$(3-4) \quad |\hat{G}^\delta(y,z)| = |G^\delta(y,\delta z)| \leq C \delta \quad \text{p.p.} \quad \text{où } C \text{ est une constante indépendante de } \delta.$$

Et on notera dans toute la suite:

$$\bullet \nabla v = \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)_{\substack{i=1,2,3 \\ j=1,2,3}} \quad \text{pour les fonctions } v \text{ définies sur } \Omega_f^\delta$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \nabla_y \hat{v} = \left( \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial y_j} \right)_{\substack{i=1,2,3 \\ j=1,2}} \\ \bullet \nabla \hat{v} = \left( \begin{array}{c} \nabla_y \hat{v} \\ \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial z} \end{array} \right)_{\substack{i=1,2,3 \\ j=1,2}} \end{array} \right\} \quad \text{pour les fonctions } \hat{v} \text{ définies sur } \Omega_f.$$

•  $C, C', C_1, \dots$  désignent des constantes diverses indépendantes du paramètre  $\delta$ .

En réalité les fonctions  $F^\alpha$  ( $\alpha = g, \ell$ ) sont souvent indépendantes de la variable  $y$  aussi, elles sont égales à  $\rho_\alpha \vec{g}$ , où  $\rho_\alpha$  est la densité massique du fluide ( $\alpha$ ) et  $\vec{g}$  l'intensité de la

pesanteur. Mais l'hypothèse (3-3), i.e: leur indépendance de la variable  $z$ , suffira pour la démonstration des résultats voulus.

**Lemme 3-1:**

*Sous les hypothèses (4-2), (4-3) et (4-4), alors toute fonction  $v$  de l'espace  $\mathcal{U}^\delta$  vérifie:*

$$i) \left| \int_{\Omega_f^\delta} \Gamma^\delta \cdot v \, dx \right| \leq C \delta \left| \frac{\partial \hat{v}}{\partial z} \right|_{0, \Omega_f}$$

$$ii) \left| \int_{\mathcal{A}_{ge}^\delta} H^\delta \cdot v \cdot n \, d(\mathcal{A}_{ge}^\delta) \right| \leq C \delta \left( \delta \left| \nabla_y \hat{v} \right|_{0, \Omega_f} + \left| \frac{\partial \hat{v}}{\partial z} \right|_{0, \Omega_f} \right)$$

$$iii) \left| \int_{\Gamma^\delta} G^\delta \cdot v \cdot n \, d(\Gamma^\delta) \right| \leq C \delta^2 \left| \nabla \hat{v} \right|_{0, \Omega_f}$$

où la constante  $C$  est indépendante de  $\delta$ .

**Démonstration:**

Soit  $v$  une fonction de l'espace  $\mathcal{U}^\delta$ .

i) L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne:

$$(3-5) \quad \left| \int_{\Omega_f^\delta} \Gamma^\delta \cdot v \, dx \right| \leq \left| \Gamma^\delta \right|_{0, \Omega_f^\delta} \left| v \right|_{0, \Omega_f^\delta}$$

Mais, le changement de variables  $(y_1, y_2, z) = (x_1, x_2, \frac{x_3}{\delta})$  montre que:

$$\left| \Gamma^\delta \right|_{0, \Omega_f^\delta} = \sqrt{\delta} \left| \hat{\Gamma} \right|_{0, \Omega_f}$$

et d'après l'hypothèse (3-3):

$$\left| \hat{\Gamma} \right|_{0, \Omega_f} = \sqrt{\left| \Gamma^t \right|_{0, \Omega_t}^2 + \left| \Gamma^g \right|_{0, \Omega_g}^2}$$

est une constante indépendante du paramètre  $\delta$ .

Si l'on reporte ces dernières égalités dans (3-5), il vient alors:

$$(3-6) \quad \left| \int_{\Omega_f^\delta} F^\delta \cdot \nabla dx \right| \leq C \sqrt{\delta} \left| \nabla \right|_{0, \Omega_f^\delta}$$

Mais toute fonction  $v$  de  $\mathcal{U}^\delta$  s'annule sur l'interface  $\mathcal{A}_{fs}^\delta$  et on peut alors appliquer l'inégalité de Poincaré, de plus la constante qui y est intervenue est de l'ordre de l'épaisseur de  $\Omega_f^\delta$ , on peut la prendre égale à  $\frac{\sqrt{2}}{2} \delta \sup_{x' \in \Sigma} (S(x'))$ . Donc:

$$\left| \nabla \right|_{0, \Omega_f^\delta} \leq C \delta \left| \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{0, \Omega_f^\delta}$$

et d'après le lemme 2-1:  $\left| \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right|_{0, \Omega_f^\delta} = \frac{1}{\sqrt{\delta}} \left| \frac{\partial \hat{v}_1}{\partial z} \right|_{0, \Omega_f}$ . L'inégalité (3-6) devient alors:

$$\left| \int_{\Omega_f^\delta} F^\delta \cdot \nabla dx \right| \leq C \delta \left| \frac{\partial \hat{v}}{\partial z} \right|_{0, \Omega_f}$$

ii) D'après le lemme 2-2:

$$\int_{\mathcal{A}_{gs}^\delta} H^\delta \cdot \nu \cdot n \, d(\mathcal{A}_{gs}^\delta) = \delta \int_{\mathcal{A}_{gs}} H^\delta (\hat{\nu}_1 \hat{n}_1 + \hat{\nu}_2 \hat{n}_2) \, d(\mathcal{A}_{gs}) + \int_{\mathcal{A}_{gs}} H^\delta \hat{\nu}_3 \hat{n}_3 \, d(\mathcal{A}_{gs})$$

Et d'après l'hypothèse (3-2)  $|H^\delta| \leq C \delta$ , donc la continuité de la trace implique que:

$$(3-7) \quad \left| \int_{\mathcal{A}_{gs}^\delta} H^\delta \cdot \nu \cdot n \, d(\mathcal{A}_{gs}^\delta) \right| \leq C \delta^2 \left| \nabla \hat{v} \right|_{0, \Omega_f} + C' \delta \int_{\mathcal{A}_{gs}} |\hat{\nu}_3| \hat{n}_3 \, d(\mathcal{A}_{gs}), \quad (\hat{n}_3 \geq 0)$$

les constantes  $C$  et  $C'$  sont indépendantes de  $\delta$ .

Mais toute fonction  $\hat{v}$  de  $\mathcal{U}$  est nulle sur l'interface  $\mathcal{A}_{12}$ , et puisque la troisième composante  $\hat{n}_3$  de la normale  $\hat{n}$  à la face latérale  $\Gamma^\delta$  de  $\Omega_f^\delta$  est nulle, on a:

$$\int_{\mathcal{A}_{12}} |\hat{v}_3| \hat{n}_3 \, d(\mathcal{A}_{12}) = \int_{\partial\Omega_g} |\hat{v}_3| \hat{n}_3 \, d(\partial\Omega_g).$$

Et on sait que, (Necas [29] p. 313), si  $\hat{v} \in \mathbb{H}^1(\Omega_f)$  alors sa valeur absolue  $|\hat{v}|$  est encore dans

$\mathbb{H}^1(\Omega_f)$  et  $\left| \frac{\partial |\hat{v}_3|}{\partial z} \right|_{0,\Omega_f} = \left| \frac{\partial \hat{v}_3}{\partial z} \right|_{0,\Omega_f}$ . Donc:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_g} |\hat{v}_3| \hat{n}_3 \, d(\partial\Omega_g) &= - \int_{\Omega_g} \frac{\partial |\hat{v}_3|}{\partial z} \, dydz \\ &\leq C \left| \frac{\partial |\hat{v}_3|}{\partial z} \right|_{0,\Omega_g} \leq C \left| \frac{\partial |\hat{v}_3|}{\partial z} \right|_{0,\Omega_f} \\ &\leq C \left| \frac{\partial \hat{v}_3}{\partial z} \right|_{0,\Omega_f} \leq C \left| \frac{\partial \hat{v}}{\partial z} \right|_{0,\Omega_f} \end{aligned}$$

En reportant dans (3-7), lorsque  $\delta \ll 1$ , on a:

$$\left| \int_{\mathcal{A}_{12}^\delta} H^\delta \, v \cdot n \, d(\mathcal{A}_{12}^\delta) \right| \leq C \delta \left( \delta \left| \nabla_y \hat{v} \right|_{0,\Omega_f} + \left| \frac{\partial \hat{v}}{\partial z} \right|_{0,\Omega_f} \right).$$

iii) D'après le lemme 2-2:

$$\int_{\Gamma^\delta} G^\delta \, v \cdot n \, d(\Gamma^\delta) = \delta \int_{\Gamma} \hat{G}^\delta \, \hat{v} \hat{n} \, d(\Gamma)$$

Donc, en utilisant l'hypothèse (3-4) on a:

$$\left| \int_{\Gamma} \hat{G}^\delta \, \hat{v} \hat{n} \, d(\Gamma) \right| \leq C_1 \delta \int_{\Gamma} |\hat{v} \hat{n}| \, d(\Gamma) \leq C_2 \delta \left| \nabla \hat{v} \right|_{0,\Omega_f}$$

d'où:

$$\left| \int_{\Gamma^\delta} G^\delta \, v \cdot n \, d(\Gamma^\delta) \right| \leq C \delta^2 \left| \nabla \hat{v} \right|_{0,\Omega_f} \quad \square$$

On va maintenant utiliser les équations (1-12) et les lemmes précédents pour établir des estimations vérifiées par la vitesse et la pression "modifiées"  $\hat{U}^\delta$  et  $\hat{P}^\delta$  qui sont définies par les relations (2-13).

**Théorème 3-1:**

*Sous les hypothèses du lemme 3-1, les fonctions  $\hat{U}^\delta$  et  $\hat{P}^\delta$  définies par (2-13) vérifient:*

$$(3-8) \quad \left| \hat{U}^\delta \right|_{0, \Omega_f} \leq C \delta^2$$

$$(3-9) \quad \begin{cases} \left| \frac{\partial \hat{U}^\delta}{\partial z} \right|_{0, \Omega_f} \leq C \delta^2 \\ \left| \frac{\partial \hat{U}^\delta}{\partial \gamma_i} \right|_{0, \Omega_f} \leq C \delta \quad (i = 1, 2) \end{cases}$$

$$(3-10) \quad \left| \hat{P}^\delta \right|_{0, \Omega_f} \leq C$$

$$(3-11) \quad \begin{cases} \left\| \frac{\partial \hat{P}^\delta}{\partial z} \right\|_{H^{-1}(\Omega_f)} \leq C \delta \\ \left\| \frac{\partial \hat{P}^\delta}{\partial \gamma_i} \right\|_{H^{-1}(\Omega_f)} \leq C \quad (i = 1, 2) \end{cases}$$

Démonstration:

Si on prend  $v = U^\delta$  comme fonction-test dans la première équation du problème variationnel (1-12) vérifié par le couple  $(U^\delta, P^\delta)$ , on a:

$$(3-12) \quad \int_{\Omega_f^\delta} 2\mu^\delta D_{ij}(U^\delta) D_{ij}(U^\delta) = \int_{\Omega_f^\delta} F^\delta U^\delta dx + \int_{\partial \Omega_f^\delta} 2\sigma H^\delta U^\delta \cdot n + \int_{\Gamma^\delta} G^\delta U^\delta \cdot n$$

On sait, ([18]), qu'il existe une constante  $C'$  qui ne dépend que de la dimension (ici  $n=3$ )

telle que:

$$(3-13) \quad \int_{\Omega_f^\delta} 2\mu^\delta D_{ij}(U^\delta) D_{ij}(U^\delta) \geq C' \left| \nabla U^\delta \right|_{0, \Omega_f^\delta}^2$$

En minorant  $\mu^\delta$  par  $\text{Min}(\mu_g, \mu_f)$ , qui est strictement positif, l'égalité (3-12) implique que:

$$C \left| \nabla U^\delta \right|_{0, \Omega_f^\delta}^2 \leq \left| \int_{\Omega_f^\delta} F^\delta \cdot \nu \, dx \right| + \left| \int_{\mathcal{A}_{gg}^\delta} H^\delta \cdot \nu \, n \, d(\mathcal{A}_{gg}^\delta) \right| + \left| \int_{\Gamma^\delta} G^\delta \cdot \nu \, n \, d(\Gamma^\delta) \right|$$

Donc d'après le lemme 2-1 et le lemme 3-1:

$$\delta \left| \nabla_y \hat{U}^\delta \right|_{0, \Omega_f}^2 + \frac{1}{\delta} \left| \frac{\partial \hat{U}^\delta}{\partial z} \right|_{0, \Omega_f}^2 \leq C \delta \left( \delta \left| \nabla_y \hat{U}^\delta \right|_{0, \Omega_f} + \left| \frac{\partial \hat{U}^\delta}{\partial z} \right|_{0, \Omega_f} \right) + C \delta^2 \left| \nabla_y \hat{U}^\delta \right|_{0, \Omega_f}$$

Ainsi, lorsque  $\delta$  est assez petit, on a:

$$(3-14) \quad \delta \left| \nabla_y \hat{U}^\delta \right|_{0, \Omega_f}^2 + \frac{1}{\delta} \left| \frac{\partial \hat{U}^\delta}{\partial z} \right|_{0, \Omega_f}^2 \leq C' \delta \left( \delta \left| \nabla_y \hat{U}^\delta \right|_{0, \Omega_f} + \left| \frac{\partial \hat{U}^\delta}{\partial z} \right|_{0, \Omega_f} \right)$$

puisque:

$$\begin{aligned} \delta^2 \left| \nabla \hat{U}^\delta \right|_{0, \Omega_f}^2 &= \delta^2 \left( \left| \nabla_y \hat{U}^\delta \right|_{0, \Omega_f}^2 + \left| \frac{\partial \hat{U}^\delta}{\partial z} \right|_{0, \Omega_f}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \delta^2 \left| \nabla_y \hat{U}^\delta \right|_{0, \Omega_f} + \delta^2 \left| \frac{\partial \hat{U}^\delta}{\partial z} \right|_{0, \Omega_f} \\ &\leq \delta^2 \left| \nabla_y \hat{U}^\delta \right|_{0, \Omega_f} + \delta \left| \frac{\partial \hat{U}^\delta}{\partial z} \right|_{0, \Omega_f} \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz au second membre de (3-14) on obtient:

$$\delta \left| \nabla_y \hat{U}^\delta \right|_{0, \Omega_f}^2 + \frac{1}{\delta} \left| \frac{\partial \hat{U}^\delta}{\partial z} \right|_{0, \Omega_f}^2 \leq C' \delta \left( \delta^2 \left| \nabla_y \hat{U}^\delta \right|_{0, \Omega_f}^2 + \left| \frac{\partial \hat{U}^\delta}{\partial z} \right|_{0, \Omega_f}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$



On en déduit que:

$$\delta^2 \left| \nabla_{\mathbf{y}} \hat{U}^\delta \right|_{0, \Omega_f}^2 + \left| \frac{\partial \hat{U}^\delta}{\partial z} \right|_{0, \Omega_f}^2 \leq C' \delta^4$$

d'où les estimations (3-9):

$$\left| \nabla_{\mathbf{y}} \hat{U}^\delta \right|_{0, \Omega_f} \leq C' \delta \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial \hat{U}^\delta}{\partial z} \right|_{0, \Omega_f} \leq C' \delta^2.$$

Puisque  $\hat{U}^\delta$  est de trace nulle sur l'interface  $\mathcal{A}_{fs}^\delta$ , l'inégalité de Poincaré donne:

$$\left| \nabla_{\mathbf{y}} \hat{U}^\delta \right|_{0, \Omega_f} \leq C'' \left| \frac{\partial \hat{U}^\delta}{\partial z} \right|_{0, \Omega_f} \leq C'' C' \delta^2.$$

et l'estimation (3-8) est alors démontrée puisque la constante de Poincaré  $C''$  ne dépend que de la géométrie de  $\Omega_f$ , donc indépendante de  $\delta$ .

Pour établir les estimations (3-10) et (3-11) vérifiées par la pression  $\hat{P}^\delta$ , on utilise encore le problème variationnel (1-12):

$$\int_{\Omega_f^\delta} P^\delta \operatorname{div}(\mathbf{v}) = \int_{\Omega_f^\delta} 2\mu^\delta D_{ij}(U^\delta) D_{ij}(\mathbf{v}) + \int_{\Omega_f^\delta} F^\delta \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\mathcal{A}_{fs}^\delta} 2\sigma H^\delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} + \int_{\Gamma^\delta} G^\delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$$

et ceci pour toute fonction  $\mathbf{v}$  de  $\mathcal{U}^\delta = \left\{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega_f^\delta); \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \mathcal{A}_{fs}^\delta \right\}$ .

Si on majore  $\mu^\delta$  par  $\operatorname{Max}(\mu_g, \mu_f)$  et on utilise le lemme 3-1, alors, lorsque  $\delta$  est assez petit, on obtient:

$$(3-15) \quad \left| \int_{\Omega_f^\delta} P^\delta \operatorname{div}(\mathbf{v}) \right| \leq C \left| \nabla U^\delta \right|_{0, \Omega_f^\delta} \left( \delta \left| \nabla_{\mathbf{y}} \hat{\mathbf{v}} \right|_{0, \Omega_f}^2 + \frac{1}{\delta} \left| \frac{\partial \hat{\mathbf{v}}}{\partial z} \right|_{0, \Omega_f}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \\ + C \delta \left( \delta \left| \nabla_{\mathbf{y}} \hat{\mathbf{v}} \right|_{0, \Omega_f} + \left| \frac{\partial \hat{\mathbf{v}}}{\partial z} \right|_{0, \Omega_f} \right)$$

Mais d'après le lemme 2-1:

$$\left| \nabla U^\delta \right|_{0, \Omega_f^\delta} = \left( \delta \left| \nabla_y \hat{U}^\delta \right|_{0, \Omega_f}^2 + \frac{1}{\delta} \left| \frac{\partial \hat{U}^\delta}{\partial z} \right|_{0, \Omega_f}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Donc, d'après les estimations (3-9):

$$(3-16) \quad \left| \nabla U^\delta \right|_{0, \Omega_f^\delta} \leq C \delta \sqrt{\delta}$$

et la relation (3-15) devient alors:

$$(3-17) \quad \left| \int_{\Omega_f^\delta} P^\delta \operatorname{div}(v) \right| \leq C \delta \left( \delta^2 \left| \nabla_y \hat{v} \right|_{0, \Omega_f}^2 + \left| \frac{\partial \hat{v}}{\partial z} \right|_{0, \Omega_f}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ \leq C \delta \left| \nabla \hat{v} \right|_{0, \Omega_f} \quad (\text{lorsque } \delta < 1)$$

Prenons maintenant une fonction-test  $v$  dont la troisième composante  $v_3$  est nulle. Le changement de variables  $(y_1, y_2, z) = (x_1, x_2, \frac{x_3}{\delta})$  dans le premier membre de (3-17), compte tenu de (2-9), donne:

$$(3-18) \quad \left| \delta \int_{\Omega_f} \hat{P}^\delta \left( \frac{\partial \hat{v}_1}{\partial y_1} + \frac{\partial \hat{v}_2}{\partial y_2} \right) dy dz \right| \leq C \delta \left| \nabla \hat{v} \right|_{0, \Omega_f}$$

Cette inégalité est valable pour toute fonction  $\hat{v}$  de  $\mathcal{U} = \left\{ v \in H^1(\Omega_f); \hat{v} = 0 \text{ sur } \mathcal{A}_{12} \right\}$  ayant la troisième composante  $\hat{v}_3$  nulle puisque:  $v \in \mathcal{U}^\delta \iff \hat{v} \in \mathcal{U}$  et  $v_3 = 0 \iff \hat{v}_3 = 0$ . Elle implique alors, puisque  $H_0^1(\Omega_f) \subset \mathcal{U}$ , que:

$$\left| \sum_{i=1}^2 \left\langle \frac{\partial \hat{P}^\delta}{\partial y_i}, \hat{v}_i \right\rangle_{H^{-1}(\Omega_f)} \right| \leq C \left\| \hat{v} \right\|_{H_0^1(\Omega_f)} \quad \forall \hat{v} \in H_0^1(\Omega_f)$$

d'où:

$$(3-19) \quad \left\| \frac{\partial \hat{P}^\delta}{\partial y_i} \right\|_{H^{-1}(\Omega_f)} \leq C \quad (i = 1, 2)$$

Prenons maintenant dans (3-17) une fonction-test  $v$  telle que  $v_1 = v_2 = 0$ . Le changement de variables  $(y_1, y_2, z) = (x_1, x_2, \frac{x_3}{\delta})$ , compte tenu de (2-9), donne:

$$\left| \int_{\Omega_f} \hat{P}^\delta \frac{\partial \hat{v}_3}{\partial z} dy dz \right| \leq C \delta \left| \nabla \hat{v}_3 \right|_{0, \Omega_f}$$

d'où l'on déduit que:

$$\left\| \frac{\partial \hat{P}^\delta}{\partial z} \right\|_{H^{-1}(\Omega_f)} \leq C \delta.$$

Cette inégalité et (3-19) achèvent donc la démonstration de l'estimation (3-11).

Enfin, puisque  $\hat{P}^\delta$  est de moyenne nulle sur  $\Omega_f$ , d'après ([36] Proposition 1.2, Chap. I), il existe une constante  $C'$ , qui ne dépend que de la géométrie de  $\Omega_f$  telle que:

$$\left| \hat{P}^\delta \right|_{0, \Omega_f} \leq C' \left\| \nabla \hat{P}^\delta \right\|_{H^{-1}(\Omega_f)} \leq C.$$

Ce qui achève la démonstration du théorème.  $\square$

Grâce aux estimations du théorème précédent, on va maintenant pouvoir extraire des sous-suites de  $\delta^{-2} \hat{U}^\delta$  et de  $\hat{P}^\delta$  qui convergent pour la topologie faible de  $L^2(\Omega_f)$ . On va d'abord introduire un nouvel espace:

$$(3-20) \quad \mathcal{U}_z = \left\{ \varphi \in L^2(\Omega_f); \frac{\partial \varphi}{\partial z} \in L^2(\Omega_f) \right\}$$

Si  $\mathcal{Q}$  est une surface régulière de  $\bar{\Omega}_f$ , alors on peut définir sur cet espace [17] l'application "trace" suivante, qui est linéaire est continue:

$$(3-21) \quad \begin{array}{ccc} T_{\mathcal{Q}}^z: \mathcal{U}_z & \longrightarrow & H^{-\frac{1}{2}}(\mathcal{Q}) \\ & & \varphi \longrightarrow \varphi \cos(\hat{n}, z) \end{array}$$

On définit maintenant le saut  $[\varphi \cos(\hat{n}, z)]_{g\ell}$  à travers l'interface  $\mathcal{A}_{g\ell}$  d'une fonction  $\varphi$  de  $\mathcal{U}_z$  comme suit:

$$(3-22) \quad [\varphi \cos(\hat{n}, z)]_{g\ell} = T_{\mathcal{A}_{g\ell}}^{(g),z}(\varphi) - T_{\mathcal{A}_{g\ell}}^{(\ell),z}(\varphi)$$

où  $T_{\mathcal{A}_{g\ell}}^{(\alpha),z}(\varphi) = \varphi^{(\alpha)} \cos(\hat{n}, z)$ , ( $\alpha = g, \ell$ ), la normale  $\hat{n}$  est orientée de  $\Omega_g$  vers  $\Omega_\ell$  et  $\varphi^{(\alpha)}$  désigne la restriction de la fonction  $\varphi$  à  $\Omega_\alpha$ . Ceci sous entend qu'on définit les applications traces  $T_{\mathcal{A}_{g\ell}}^{(\alpha),z}$  en remplaçant  $\Omega_\ell$  par  $\Omega_\alpha$  dans la définition (3-20) de  $\mathcal{U}_z$  et  $\mathcal{B}$  par l'interface  $\mathcal{A}_{g\ell}$  dans la définition (3-21) de  $T_{\mathcal{B}}^z$ .

### Théorème 3-2:

*Si les hypothèses du lemme 3-1 sont satisfaites alors:*

i) *quitte à extraire une sous-suite, il existe  $U^* \in \mathcal{U}_z$  telle que:*

$$(3-23) \quad \begin{cases} \frac{1}{\delta^2} \hat{U}^\delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} U^* & \text{dans } L^2(\Omega_f) \text{ faible} \\ \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial \hat{U}^\delta}{\partial z} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \frac{\partial U^*}{\partial z} & \text{dans } L^2(\Omega_f) \text{ faible} \end{cases}$$

$$(3-24) \quad \frac{1}{\delta} \frac{\partial \hat{U}^\delta}{\partial y_i} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega_f) \text{ faible}$$

$$(3-25) \quad \begin{cases} U^* \cos(\hat{n}, z) = 0 & \text{dans } H^{-\frac{1}{2}}(\mathcal{A}_{f\ell}) \\ [U^* \cos(\hat{n}, z)]_{g\ell} = 0 & \text{dans } H^{-\frac{1}{2}}(\mathcal{A}_{g\ell}) \end{cases}$$

ii) *de même, quitte à extraire une sous-suite, il existe  $P^* \in L_0^2(\Omega_f)$  telle que:*

$$(3-26) \quad \begin{cases} \hat{P}^\delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} P^* & \text{dans } L_0^2(\Omega_f) \text{ faible} \\ \frac{\partial P^*}{\partial z} = 0 & \text{dans } H^{-1}(\Omega_f) \end{cases}$$

Démonstration:

i) L'existence d'une fonction  $U^* \in \mathcal{U}_z$  et d'une sous-suite de  $\hat{U}^\delta$  vérifiant (3-23) et (3-24) et une conséquence immédiate des estimations (3-8) et (3-9) du théorème 3-1, et des résultats classiques d'analyse fonctionnelle.

Les convergences (3-8) impliquent que la sous-suite de  $\delta^{-2} \hat{U}^\delta$  convergent faiblement vers la fonction  $U^*$  dans l'espace  $\mathcal{U}_z$ , muni du produit scalaire classique:

$$\langle \varphi, \theta \rangle_{\mathcal{U}_z} = \int_{\Omega_f} \varphi \cdot \theta + \int_{\Omega_f} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z}$$

Puisque l'application "trace"  $T_{\mathcal{A}_{1z}}^z$  définie par (3-21) est linéaire et est continue de  $\mathcal{U}_z$  dans  $H^{-\frac{1}{2}}(\mathcal{A}_{1z})$ , la convergence précédente implique que la trace  $\delta^{-2} \hat{U}^\delta \cos(\hat{n}, z)$  converge vers  $U^* \cos(\hat{n}, z)$  dans  $H^{-\frac{1}{2}}(\mathcal{A}_{1z})$ . Donc, puisque  $\hat{U}^\delta$  est de trace nulle sur l'interface  $\mathcal{A}_{1z}$ , la trace  $U^* \cos(\hat{n}, z)$  de  $U^*$  est nulle aussi:

$$(3-27) \quad \frac{1}{\delta^2} \hat{U}^\delta \cos(\hat{n}, z) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} U^* \cos(\hat{n}, z) = 0 \quad \text{dans } H^{-\frac{1}{2}}(\mathcal{A}_{1z}).$$

De même l'application "saut":  $\varphi \longrightarrow \llbracket \varphi \cos(\hat{n}, z) \rrbracket_{\mathcal{A}_{gz}}$  définie par (3-22) et linéaire et est continue de  $\mathcal{U}_z$  dans  $H^{-\frac{1}{2}}(\mathcal{A}_{gz})$ , donc la convergence de  $\delta^{-2} \hat{U}^\delta$  vers  $U^*$  dans  $\mathcal{U}_z$ , implique celle du saut  $\llbracket \delta^{-2} \hat{U}^\delta \cos(\hat{n}, z) \rrbracket_{\mathcal{A}_{gz}}$  de  $\delta^{-2} \hat{U}^\delta$  vers le saut  $\llbracket U^* \cos(\hat{n}, z) \rrbracket_{\mathcal{A}_{gz}}$  de  $U^*$  dans  $H^{-\frac{1}{2}}(\mathcal{A}_{gz})$ . Et puisque le saut à travers l'interface  $\mathcal{A}_{gz}$  de  $\hat{U}^\delta$  est nul, il est de même pour le saut de  $U^*$ :

$$(3-28) \quad \frac{1}{\delta^2} \llbracket \hat{U}^\delta \cos(\hat{n}, z) \rrbracket_{\mathcal{A}_{gz}} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \llbracket U^* \cos(\hat{n}, z) \rrbracket_{\mathcal{A}_{gz}} = 0 \quad \text{dans } H^{-\frac{1}{2}}(\mathcal{A}_{gz}).$$

ii) L'existence d'un fonction  $P^* \in L_0^2(\Omega_f)$  et d'une sous-suite de  $\hat{P}^\delta$  vérifiant les convergences (3-26) est une conséquence immédiate des estimations (3-10) et (3-11) du théorème 3-1.  $\square$

On va maintenant utiliser le théorème précédent pour passer à la limite dans les équations variationnelles (2-16) et (2-17) vérifiées par le couple  $(\hat{U}^\delta, \hat{P}^\delta)$  et pouvoir identifier les deux limites  $U^*$  et  $P^*$  ensuite.

#### 4/ IDENTIFICATION DES LIMITES.

On va d'abord établir les relations qui lient les deux limites, puis on essaiera d'identifier chacune d'elles.

##### 4-1) Relations entre les deux limites $U^*$ et $P^*$ .

D'après les relations (2-16) et (2-17) du lemme 2-3, le couple  $(\hat{U}^\delta, \hat{P}^\delta)$  vérifie:

$$(4-1) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\hat{U}^\delta, \hat{P}^\delta) \in \mathcal{U} \times L_0^2(\Omega_f) \text{ et } \forall (\hat{v}, \hat{q}) \in \mathcal{U} \times L_0^2(\Omega_f) : \\ + \frac{1}{\delta} a^{-1}(\hat{U}^\delta, \hat{v}) + a^0(\hat{U}^\delta, \hat{v}) + \delta a^1(\hat{U}^\delta, \hat{v}) + b^0(\hat{v}, \hat{P}^\delta) + \delta b^1(\hat{v}, \hat{P}^\delta) = \delta L_8^1(\hat{v}) + \delta^2 L_8^2(\hat{v}) \\ + b^0(\hat{U}^\delta, \hat{q}) + \delta b^1(\hat{U}^\delta, \hat{q}) = 0. \end{array} \right.$$

Les formes  $a^i$ ,  $b^i$  et  $L_8^i$  sont définies par (2-10), (2-11) et (2-12).

On va voir qu'en choisissant des fonctions-test  $\hat{v}$  particulières, le passage à la limite dans l'équation (4-1), lorsque  $\delta$  tend vers zéro, donne le:

##### Théorème 4-1:

*Si les hypothèses du lemme 3-1 sont satisfaites, alors les limites  $U^*$  et  $P^*$  sont liées par:*

$$(4-2) \quad \int_{\Omega_f} \hat{\mu} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial U_i^*}{\partial z} \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial z} - \int_{\Omega_f} \sum_{i=1}^2 P_i^* \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial \bar{y}_i} = \int_{\Omega_f} \sum_{i=1}^2 \hat{E}_i \hat{v}_i, \quad \forall \hat{v} \in \mathcal{U} \text{ telle que } \hat{v}_3 = 0.$$

et:

$$(4-3) \quad U_3^* = 0 \quad \text{dans } \Omega_f.$$

Démonstration:

Soit  $\hat{v} \in \mathcal{U}$  telle que  $\hat{v}_3 = 0$ .

D'après les expressions (2-10) des formes bilinéaires  $a^i$ , on a:

$$\begin{aligned} \bullet a^{-1}(\hat{U}^\delta, \hat{v}) &= \int_{\Omega_f} \hat{\mu} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \hat{U}_i^\delta}{\partial z} \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial z} dydz \\ \bullet a^0(\hat{U}^\delta, \hat{v}) &= \int_{\Omega_f} \hat{\mu} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \hat{U}_3^\delta}{\partial y_i} \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial z} dydz \\ \bullet a^1(\hat{U}^\delta, \hat{v}) &= \int_{\Omega_f} \hat{\mu} \sum_{i,j=1}^2 \left( \frac{\partial \hat{U}_i^\delta}{\partial y_i} \frac{\partial \hat{v}_j}{\partial y_i} + \frac{\partial \hat{U}_i^\delta}{\partial y_i} \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial y_j} \right) dydz \end{aligned}$$

Donc, d'après les convergences (3-23) et (3-24) du théorème 3-2, lorsque  $\delta$  tend vers zéro:

$$(4-4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bullet \frac{1}{\delta^2} a^{-1}(\hat{U}^\delta, \hat{v}) \longrightarrow \int_{\Omega_f} \hat{\mu} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \hat{U}_i^*}{\partial z} \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial z} dydz \\ \bullet \frac{1}{\delta} a^0(\hat{U}^\delta, \hat{v}) \longrightarrow 0 \\ \bullet a^1(\hat{U}^\delta, \hat{v}) \longrightarrow 0 \end{array} \right.$$

D'après les expressions (2-11) des formes bilinéaires  $b^i$ , on a (pour les  $\hat{v} \in \mathcal{U}$  telles que  $\hat{v}_3 = 0$ ):

$$\begin{aligned} \bullet b^0(\hat{v}, \hat{P}^\delta) &= 0 \\ \bullet b^1(\hat{v}, \hat{P}^\delta) &= \int_{\Omega_f} -\hat{P}^\delta \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial y_i} dydz \end{aligned}$$

La convergence (3-26) implique alors:

$$(4-5) \quad \left| \begin{array}{l} \diamond b^0(\hat{v}, \hat{P}^\delta) = 0 \\ \diamond b^1(\hat{v}, \hat{P}^\delta) \longrightarrow \int_{\Omega_f} - \hat{P}^* \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial y_i} dydz \end{array} \right.$$

D'après les expressions (2-12) des formes linéaires  $\mathcal{L}_\delta^i$ , on a:

$$\begin{aligned} \diamond \mathcal{L}_\delta^1(\hat{v}) &= \int_{\Omega_f} \hat{F} \cdot \hat{v} \, dydz \\ \diamond \mathcal{L}_\delta^2(\hat{v}) &= \int_{\mathcal{A}_{gg}} 2\sigma \frac{1}{\delta} H^\delta \sum_{i=1}^2 \hat{v}_i \hat{n}_i \, d(\mathcal{A}_{gg}) + \int_{\Gamma} \frac{1}{\delta} \hat{G}^\delta \sum_{i=1}^2 \hat{v}_i \hat{n}_i \, d(\Gamma) \end{aligned}$$

où l'on a utilisé aussi l'hypothèse (3-3), i.e:  $\hat{F}^\delta = \hat{F}$  est indépendante du paramètre  $\delta$ .

Les hypothèses (2-2) et (2-4) impliquent alors que:

$$(4-6) \quad \left| \begin{array}{l} \diamond \mathcal{L}_\delta^1(\hat{v}) \longrightarrow \int_{\Omega_f} \hat{F} \cdot \hat{v} \, dydz \\ \diamond \mathcal{L}_\delta^2(\hat{v}) \longrightarrow 0 \end{array} \right.$$

Maintenant si on prend  $\frac{1}{\delta} \hat{v}$  comme fonction-test (avec  $\hat{v} \in \mathcal{U}$  telles que  $\hat{v}_3 = 0$ ) dans la première équation de (4-1) vérifiée par le couple  $(\hat{U}^\delta, \hat{P}^\delta)$ , alors le passage à la limite, lorsque  $\delta$  tend vers zéro et compte-tenu de (4-4), (4-5) et (4-6), donne la relation (4-2) annoncée par le théorème.

Pour démontrer l'assertion (4-3), on va utiliser la deuxième équation de (4-1):

$$b^0(\hat{U}^\delta, \hat{q}) + \delta b^1(\hat{U}^\delta, \hat{q}) = 0 \quad \forall \hat{q} \in L_0^2(\Omega_f)$$



Soit  $\theta$  une fonction quelconque de  $L^2(\Omega_f)$ . La fonction  $\hat{q}$  définie par:

$$\hat{q} = \theta - \mathcal{M}(\theta) ; \quad \mathcal{M}(\theta) = \frac{1}{\text{mes}(\Omega_f)} \int_{\Omega_f} \theta \, dydz$$

est dans  $L_0^2(\Omega_f)$ , on peut donc la prendre comme fonction-test dans l'équation précédente, ce qui donne:

$$(4-7) \quad b^0(\hat{U}^\delta, \theta) + \delta b^1(\hat{U}^\delta, \theta) = \mathcal{M}(\theta) (b^0(\hat{U}^\delta, 1) + \delta b^1(\hat{U}^\delta, 1)) \quad \forall \theta \in L^2(\Omega_f)$$

D'après les expressions (2-11) des formes bilinéaires  $b^i$  et les convergences (3-23) et (3-24) du théorème 3-2, on a:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{1}{\delta^2} b^0(\hat{U}^\delta, \theta) &= \int_{\Omega_f} -\frac{1}{\delta^2} \frac{\partial \hat{U}_3^\delta}{\partial z} \theta \, dydz \longrightarrow \int_{\Omega_f} -\frac{\partial \hat{U}_3^*}{\partial z} \theta \, dydz \\ \bullet \quad \frac{1}{\delta} b^1(\hat{U}^\delta, \theta) &= \int_{\Omega_f} -\frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \hat{U}_i^\delta}{\partial y_i} \theta \, dydz \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Donc le passage à la limite dans (4-7), (après la division par  $\delta^2$ ), donne:

$$(4-8) \quad \int_{\Omega_f} \frac{\partial \hat{U}_3^*}{\partial z} \theta \, dydz = \mathcal{M}(\theta) \int_{\Omega_f} \frac{\partial \hat{U}_3^*}{\partial z} \, dydz \quad \forall \theta \in L^2(\Omega_f).$$

Calculons maintenant le second membre de cette égalité:

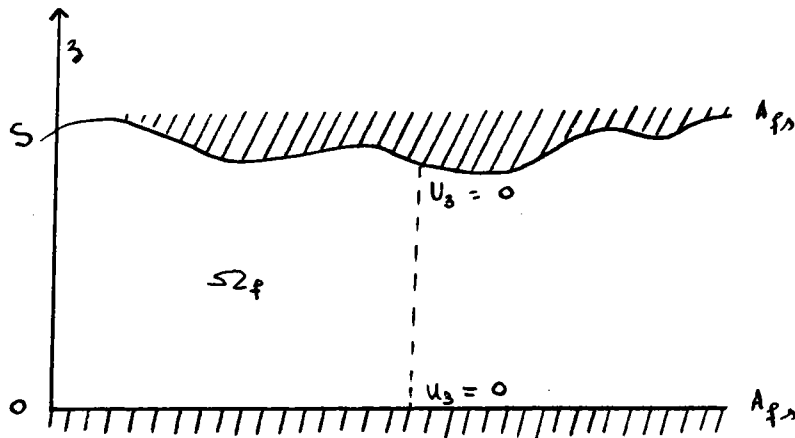
$$\int_{\Omega_f} \frac{\partial \hat{U}_3^*}{\partial z} \, dydz = - \int_{\partial\Omega_f} \hat{U}_3^* \cos(\hat{n}, z) \, d(\partial\Omega_f) = 0$$

puisque  $\cos(\hat{n}, z)$  est nul sur la partie latérale  $\Gamma$  de  $\partial\Omega_f$ , (fig.3-1), et d'après le théorème 3-2 la trace  $\hat{U}_3^* \cos(\hat{n}, z)$  est nulle sur l'interface  $\mathcal{A}_{12}$ , ( $\overline{\partial\Omega_f} = \overline{\mathcal{A}_{12}} \cup \overline{\Gamma}$ ).

La relation (4-8) s'écrit donc:

$$\int_{\Omega_f} \frac{\partial \hat{U}_3^*}{\partial z} \theta \, d\gamma dz = 0 \quad \forall \theta \in L^2(\Omega_f).$$

On en déduit alors que  $\frac{\partial \hat{U}_3^*}{\partial z}$  est nulle dans  $\Omega_f$ , et, puisque  $\hat{U}_3^* \cos(\hat{n}, z)$  est nulle sur l'interface  $\mathcal{A}_{fs}$ , la fonction  $\hat{U}_3^*$  est nécessairement nulle dans  $\Omega_f$ . Ce qui achève la démonstration du théorème.  $\square$



(figure 4-1)

On va définir maintenant la moyenne  $\mathcal{M}_z(\varphi)$ , par rapport à la variable  $z$ , d'une fonction  $\varphi$  définie sur  $\Omega_f$  par:

$$(4-9) \quad \mathcal{M}_z(\varphi)(y) = \frac{1}{S(y)} \int_0^{S(y)} \varphi(y, z) \, dz$$

Comme dans [3] par un choix astucieux des fonctions-test  $\hat{v}$  dans la relation (4-2), on va établir des relations entre la moyenne  $\mathcal{M}_z(U^*)$  de  $U^*$ , les forces  $\hat{F}$ , et les gradients de la limite  $P^*$ . Montrons d'abord le lemme suivant:

**Lemme 4-1:**

*Sous les hypothèses du Théorème 4-1. Pour toute fonction  $\hat{v}$  telle que:*

$$(4-10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bullet \hat{v} \in \mathcal{U} \text{ et } \hat{v}_3 = 0 \\ \bullet \frac{\partial^2 \hat{v}_i}{\partial z^2} \text{ est constante par rapport à } z \text{ dans chaque } \Omega_\alpha \text{ (}\alpha=g,l \text{) (}i=1,2 \text{)} \end{array} \right.$$

*on a:*

$$(4-11) \quad \int_{\Sigma} \mu_e \frac{\partial^2 \hat{v}_i}{\partial z^2} \int_0^{w(y)} U_i^* dz dy + \int_{\Sigma} \mu_g \frac{\partial^2 \hat{v}_i}{\partial z^2} \int_{w(y)}^{S(y)} U_i^* dz dy =$$

$$= - \int_{\Sigma} P^* \frac{\partial}{\partial y_i} \int_0^{S(y)} \hat{v}_i dz dy - \int_{\Sigma} F_i^* \int_0^{w(y)} \hat{v}_i dz dy - \int_{\Sigma} F_i^* \int_{w(y)}^{S(y)} \hat{v}_i dz dy +$$

$$+ \int_{\mathcal{A}_{gl}} \left[ \hat{\mu} \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial z} \right]_{gl} U_i^* \cos(\hat{n}, z) d(\mathcal{A}_{gl})$$

*où l'intégrale sur l'interface  $\mathcal{A}_{gl}$  est à voir comme le produit de dualité entre un élément de  $H^{-\frac{1}{2}}(\mathcal{A}_{gl})$ ,  $U_i^* \cos(\hat{n}, z)$ , et un élément de  $H^{\frac{1}{2}}(\mathcal{A}_{gl})$ ,  $\left[ \hat{\mu} \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial z} \right]_{gl}$ .*

**Démonstration:**

En tenant compte que la trace  $U_i^* \cos(\hat{n}, z)$  est nulle sur l'interface  $\mathcal{A}_{lg}$  et est continue à travers  $\mathcal{A}_{gl}$  d'après le théorème 3-2, et puisque  $\cos(\hat{n}, z)$  est nul sur la face latérale, la régularité (4-10) des fonctions  $\hat{v}$  permet d'intégrer par parties (sur chaque  $\Omega_\alpha$  à cause de la discontinuité de  $\hat{\mu}$ ) le premier terme du premier membre de l'égalité (4-2) comme suit:

$$(4-12) \quad \int_{\Omega_f} \hat{\mu} \frac{\partial U_i^*}{\partial z} \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial z} dy dz = - \int_{\Omega_f} \hat{\mu} \frac{\partial^2 \hat{v}_i}{\partial z^2} U_i^* dy dz + \int_{\mathcal{A}_{gl}} \left[ \hat{\mu} \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial z} \right]_{gl} U_i^* \cos(\hat{n}, z) d(\mathcal{A}_{gl})$$

où l'on convient, comme dans tout ce qui précède, que la normale  $\hat{n}$  est orientée sur  $\mathcal{A}_{gl}$  de  $\Omega_g$  vers  $\Omega_l$ .

En appliquant le théorème de Fubini et sachant que:

$$\bullet \frac{\partial^2 \hat{v}_i}{\partial z^2}(y,z) = \begin{cases} \left(\frac{\partial^2 \hat{v}_i}{\partial z^2}\right)^p(y) \text{ dans } \Omega_p \text{ i.e: si } 0 < z < \Psi(y). \\ \left(\frac{\partial^2 \hat{v}_i}{\partial z^2}\right)^g(y) \text{ dans } \Omega_g \text{ i.e: si } \Psi(y) < z < S(y). \end{cases} \quad (\text{d'après (4-10)})$$

$$\bullet \hat{F}(y,z) = \begin{cases} F^p(y) \text{ dans } \Omega_p \text{ i.e: si } 0 < z < \Psi(y). \\ F^g(y) \text{ dans } \Omega_g \text{ i.e: si } \Psi(y) < z < S(y). \end{cases} \quad (\text{d'après (3-3)})$$

$$\bullet \hat{\mu}(y,z) = \begin{cases} \mu_p & \text{dans } \Omega_p \text{ i.e: si } 0 < z < \Psi(y). \\ \mu_g & \text{dans } \Omega_g \text{ i.e: si } \Psi(y) < z < S(y). \end{cases}$$

$$\bullet P^*(y,z) = P^*(y) \text{ dans } \Omega_f \text{ i.e: indépendante de la variable } z. \text{ (d'après le théorème 3-2)}$$

$$\bullet \int_0^{S(y)} \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial y_i} dz = \frac{\partial}{\partial y_i} \int_0^{S(y)} \hat{v}_i dz \quad . \text{ (car } \hat{v}_i(y,S(y)) = 0).$$

on a:

$$\bullet \int_{\Omega_f} \hat{\mu} \frac{\partial^2 \hat{v}_i}{\partial z^2} U_i^* dydz = \int_{\Sigma} \mu_p \frac{\partial^2 \hat{v}_i}{\partial z^2} \int_0^{\Psi(y)} U_i^* dz dy + \int_{\Sigma} \mu_g \frac{\partial^2 \hat{v}_i}{\partial z^2} \int_{\Psi(y)}^{S(y)} U_i^* dz dy$$

$$\bullet \int_{\Omega_f} P^* \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial y_i} dydz = \int_{\Sigma} P^* \frac{\partial}{\partial y_i} \int_0^{S(y)} \hat{v}_i dz dy$$

$$\bullet \int_{\Omega_f} \hat{F}_i \hat{v}_i dydz = \int_{\Sigma} F_i^p \int_0^{\Psi(y)} \hat{v}_i dz dy + \int_{\Sigma} F_i^g \int_{\Psi(y)}^{S(y)} \hat{v}_i dz dy$$

Remarquons maintenant que la relation (4-2) est vraie pour chacun des indice  $i = 1$  ou  $2$  (i.e: on peut otter  $\sum_{i=1}^2$ ) puisqu'on peut y prendre  $\hat{v}_1 = 0$  ou  $\hat{v}_2 = 0$ . Compte-tenu de (4-12), il suffit alors de

reporter les égalités précédentes dans (4-2) pour obtenir l'assertion (4-11) du lemme.  $\square$

On va maintenant construire explicitement les fonctions-test  $\hat{v}$  qui permettront d'obtenir, à partir de (4-11), une relation entre la moyenne  $\mathcal{M}_z(U^*)$  de  $U^*$ , les forces  $F^\alpha$  et le gradient de  $P^*$ . Et on va démontrer le:

### Théorème 4-2:

*Si les hypothèses du lemme 3-1 sont satisfaites, alors la moyenne  $\mathcal{M}_z(U^*)$  est liée à la limite  $P^*$  et aux forces  $F^\alpha$  par:*

$$(4-13) \quad S \mathcal{M}_z(U_i^*) = \int_0^S U_i^* dz = \left[ \frac{\Psi^3}{12\mu_\ell} + \frac{1}{4} \frac{S \Psi^2 (S - \Psi)}{\mu_\ell (S - \Psi) + \mu_g \Psi} \right] \left[ F_i^\ell - \frac{\partial P^*}{\partial y_i} \right] + \\ + \left[ \frac{(S - \Psi)^3}{12\mu_g} + \frac{1}{4} \frac{S (S - \Psi)^2 \Psi}{\mu_\ell (S - \Psi) + \mu_g \Psi} \right] \left[ F_i^g - \frac{\partial P^*}{\partial y_i} \right]$$

*Ces égalités ont lieu dans  $H^{-1}(\Sigma)$  pour  $i=1, 2$ .*

Démonstration:

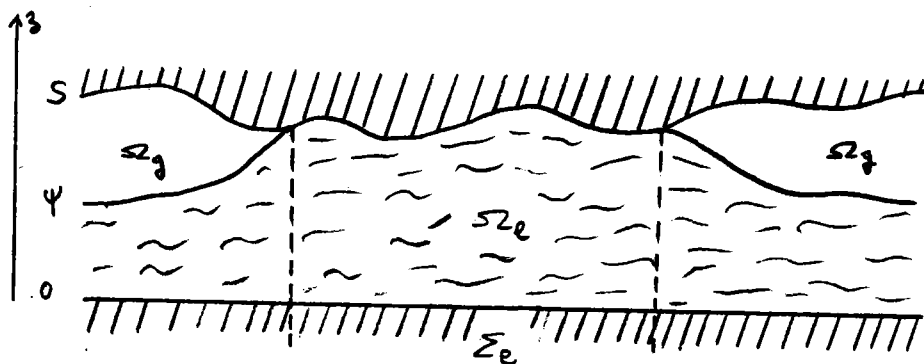
Remarquons d'abord que si on se restreint aux parties  $\Sigma_\ell$  et  $\Sigma_g$  de  $\Sigma$  en dessus desquelles il n'y a qu'un seul fluide, i.e.  $\{\Psi \equiv 0\}$  ou  $\{S \equiv \Psi\}$  (fig. 4-2 et 4-3), alors on retrouve la forme classique des équations de Reynolds. En effet:

- En dessus de  $\{y \in \Sigma, \Psi(y) = S(y)\}$  on a uniquement le fluide ( $\ell$ ) et (4-13) s'écrit:

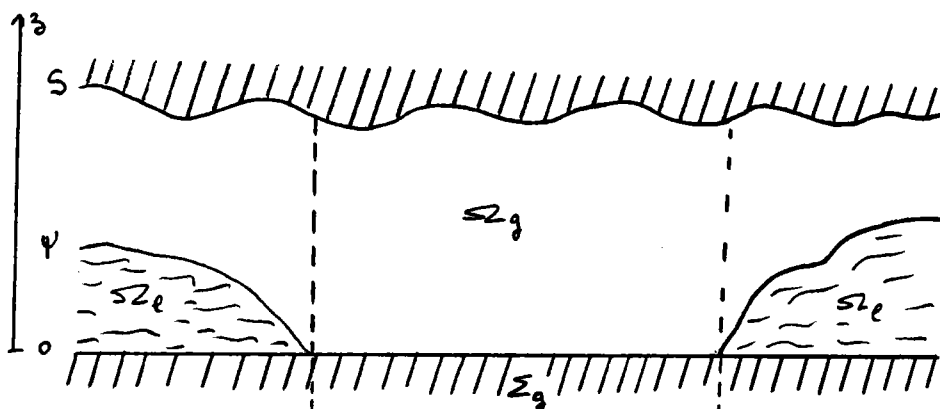
$$(4-14) \quad \mathcal{M}_z(U_i^*) = \frac{\Psi^2}{12\mu_\ell} \left[ F_i^\ell - \frac{\partial P^*}{\partial y_i} \right]$$

- En dessus de  $\{y \in \Sigma, \Psi(y) = 0\}$  on a uniquement le fluide ( $g$ ) et (4-13) s'écrit:

$$(4-15) \quad \mathcal{M}_z(U_i^*) = \frac{S^2}{12\mu_g} \left[ F_i^g - \frac{\partial P^*}{\partial y_i} \right]$$



(figure 4-2)



(figure 4-3)

On retrouve alors les résultats de [14] qui obtient des relations identiques à (4-14) et (4-15) par passage à la limite, lorsque l'épaisseur tend vers zéro, dans le cas de la présence d'un seul fluide obéissant aux équations de Stokes.

Démontrons maintenant la relation (4-13) annoncée par le théorème. Pour faire apparaître  $S \mathcal{M}_z(U_1^*)$  dans la relation (4-11) du lemme 4-1, il suffit de choisir la fonction-test  $\hat{v}$  telle que  $\mu_e \left( \frac{\partial^2 \hat{v}_1}{\partial z^2} \right)^e$  soit égale à  $\mu_g \left( \frac{\partial^2 \hat{v}_1}{\partial z^2} \right)^g$ ; et pour éliminer le terme gênant dans cette relation, qui est l'intégrale sur l'interface  $\mathcal{A}_{g,e}$ , il faut que cette fonction-test soit telle que le saut

$[[\hat{\mu} \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial z}]]_{\mathcal{G}\mathcal{E}}$  est nul. On va donc chercher une fonction  $\hat{v}$  qui vérifie les hypothèses (4-10) du lemme 4-1 et ayant les propriétés précédentes; de façon plus précise:

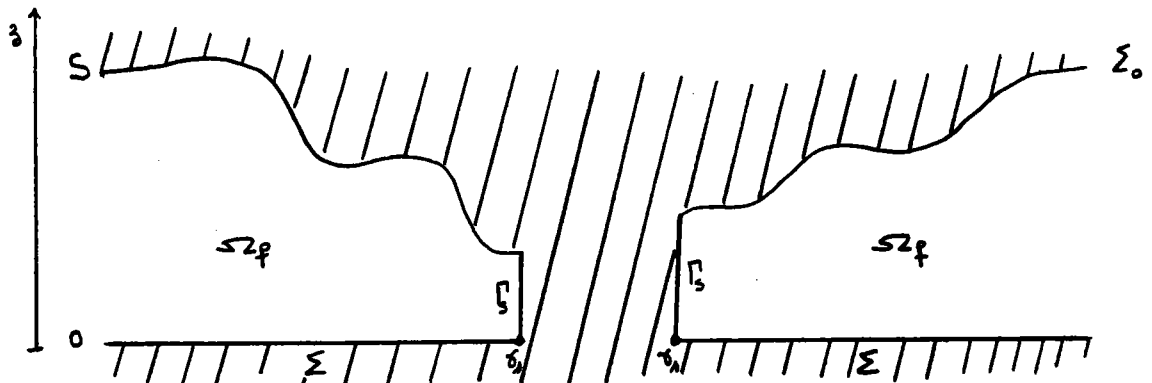
•  $\hat{v} \in \mathcal{U} = \left\{ \hat{u} \in H^1(\Omega_f); \hat{u} = 0 \text{ sur } \mathcal{A}_{1s} \right\}$  et  $\hat{v}_3 = 0$

•  $\frac{\partial^2 \hat{v}_i}{\partial z^2}(y,z) = \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\partial^2 \hat{v}_i}{\partial z^2} \right)^L(y) \text{ si } 0 < z < \Psi(y). \\ \left( \frac{\partial^2 \hat{v}_i}{\partial z^2} \right)^G(y) \text{ si } \Psi(y) < z < S(y). \end{array} \right\}$  avec  $\mu_L \left( \frac{\partial^2 \hat{v}_i}{\partial z^2} \right)^L = \mu_G \left( \frac{\partial^2 \hat{v}_i}{\partial z^2} \right)^G$

•  $[[\hat{\mu} \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial z}]]_{\mathcal{G}\mathcal{E}} = 0$  sur  $\mathcal{A}_{\mathcal{G}\mathcal{E}}$ ; i.e.  $\mu_L \left( \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial z} \right)^L(y, \Psi(y)) = \mu_G \left( \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial z} \right)^G(y, \Psi(y))$ .

Rappelons que l'interface  $\mathcal{A}_{1s}$  est définie comme ci dessous, voir les notations (1-3) à (1-5) et la définition (2-1) de l'application  $\mathcal{H}^\delta$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\mathcal{A}}_{1s} = \mathcal{H}^\delta(\bar{\mathcal{A}}_{1s}^\delta) = \bar{\Sigma} \cup \bar{\Sigma}_0 \cup \bar{\Gamma}_s \\ \Sigma_0 = \left\{ (y_1, y_2, z) : (y_1, y_2) \in \Sigma \text{ et } z = S(y_1, y_2) \right\} \\ \Gamma_s = \left\{ (y_1, y_2, z) : (y_1, y_2) \in \mathcal{Y}_s \text{ et } 0 < z < S(y_1, y_2) \right\} \end{array} \right.$$



(figure 4-4)

Une fonction  $\hat{v}$  qui vérifie toutes les conditions précédentes est la suivante:

$$(4-16) \quad \hat{v}_1 = \varphi \text{ et } \hat{v}_2 = \hat{v}_3 = 0.$$

$$\varphi = \begin{cases} \varphi^g = \mu_g z \left( z - \frac{\mu_g \Psi^2 + \mu_l (S^2 - \Psi^2)}{\mu_g \Psi + \mu_l (S - \Psi)} \right) \theta & \text{si } 0 < z < \Psi(\gamma). \\ \varphi^l = \mu_l (z - S) \left( z + S - \frac{\mu_g \Psi^2 + \mu_l (S^2 - \Psi^2)}{\mu_g \Psi + \mu_l (S - \Psi)} \right) \theta & \text{si } \Psi(\gamma) < z < S(\gamma). \end{cases}$$

$$\theta \in \mathcal{W}(\Sigma) = \left\{ \theta \in H^1(\Sigma); \theta = 0 \text{ sur } \gamma_s \right\}; \text{ ne dépend que de la variable } \gamma.$$

En effet, puisque les fonctions  $S$  et  $\Psi$  sont supposées régulières, les restrictions de  $\hat{v}$  à  $\Omega_\alpha$  ( $\alpha = g, l$ ) sont dans  $H^1(\Omega_\alpha)$ ; de plus,  $\hat{v}$  est continue à travers l'interface  $\mathcal{A}_{gl}$  séparant  $\Omega_l$  de  $\Omega_g$ , qui est égale à  $\{(y, z); \gamma \in \Sigma \text{ et } z = \Psi(\gamma)\}$ , car:

$$\varphi^g(\gamma, \Psi(\gamma)) = \varphi^l(\gamma, \Psi(\gamma)) = \frac{\mu_g \mu_l S \Psi (S - \Psi)}{\mu_g \Psi + \mu_l (S - \Psi)} \theta(\gamma),$$

elle appartient donc à  $H^1(\Omega_f)$ ; cette fonction  $\hat{v}$  est nulle sur l'interface  $\mathcal{A}_{ls}$ , elle est alors dans l'espace  $\mathcal{U}$ :

$$\left. \begin{array}{l} \hat{v} = 0 \text{ sur } \Sigma \quad \text{car } \varphi^l(\gamma, 0) = 0 \\ \hat{v} = 0 \text{ sur } \Sigma_0 \quad \text{car } \varphi^g(\gamma, S(\gamma)) = 0 \\ \hat{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_s \quad \text{car } \theta = 0 \text{ sur } \gamma_s \end{array} \right\} \implies \hat{v} = 0 \text{ sur } \mathcal{A}_{ls}.$$

Pour les autres conditions on a:

$$\mu_l \frac{\partial \varphi^l}{\partial z}(\gamma, \Psi(\gamma)) = \mu_g \frac{\partial \varphi^g}{\partial z}(\gamma, \Psi(\gamma)) = \mu_g \mu_l \frac{\mu_g \Psi^2 - \mu_l (S + \Psi)^2}{\mu_g \Psi + \mu_l (S - \Psi)} \theta(\gamma).$$

$$\mu_l \frac{\partial^2 \varphi^l}{\partial z^2} \equiv \mu_g \frac{\partial^2 \varphi^g}{\partial z^2} \equiv 2 \mu_g \mu_l \theta.$$

En prenant la fonction  $\hat{v}$  définie par (4-16) comme fonction-test dans la relation (4-11) du lemme 4-1, avec l'indice  $i = 1$ , on a alors:



$$\begin{aligned}
 (4-17) \quad & \int_{\Sigma} 2 \mu_g \mu_l \int_0^{S(y)} U_1^* dz \theta dy = \\
 & = - \int_{\Sigma} P^* \frac{\partial}{\partial y_1} \int_0^{\Psi(y)} \varphi^l dz dy - \int_{\Sigma} P^* \frac{\partial}{\partial y_1} \int_{\Psi(y)}^{S(y)} \varphi^g dz dy + \\
 & - \int_{\Sigma} F_1^l \int_0^{\Psi(y)} \varphi^l dz dy - \int_{\Sigma} F_1^g \int_{\Psi(y)}^{S(y)} \varphi^g dz dy.
 \end{aligned}$$

On calcule maintenant l'intégrale de  $\varphi^l$  de  $z=0$  à  $z=\Psi(y)$ , puis l'intégrale de  $\varphi^g$  de  $z=\Psi(y)$  à  $z=S(y)$ :

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\Psi} \varphi^l dz &= -\mu_g \left[ \frac{\Psi^3}{6} + \frac{\mu_l}{2} \frac{S \Psi^2 (S - \Psi)}{\mu_l (S - \Psi) + \mu_g \Psi} \right] \theta. \\
 \int_{\Psi}^S \varphi^g dz &= -\mu_l \left[ \frac{(S - \Psi)^3}{6} + \frac{\mu_g}{2} \frac{S (S - \Psi)^2 \Psi}{\mu_l (S - \Psi) + \mu_g \Psi} \right] \theta.
 \end{aligned}$$

En reportant ces égalités dans la relation (4-17) il vient:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Sigma} 2 \mu_g \mu_l \int_0^{S(y)} U_1^* dz \theta dy = \\
 & = \int_{\Sigma} \mu_g P^* \frac{\partial}{\partial y_1} \left( \left[ \frac{\Psi^3}{6} + \frac{\mu_l}{2} \frac{S \Psi^2 (S - \Psi)}{\mu_l (S - \Psi) + \mu_g \Psi} \right] \theta \right) dy + \\
 & + \int_{\Sigma} \mu_l P^* \frac{\partial}{\partial y_1} \left( \left[ \frac{(S - \Psi)^3}{6} + \frac{\mu_g}{2} \frac{S (S - \Psi)^2 \Psi}{\mu_l (S - \Psi) + \mu_g \Psi} \right] \theta \right) dy \\
 & + \int_{\Sigma} \mu_g F_1^l \left[ \frac{\Psi^3}{6} + \frac{\mu_l}{2} \frac{S \Psi^2 (S - \Psi)}{\mu_l (S - \Psi) + \mu_g \Psi} \right] \theta dy +
 \end{aligned}$$

$$+ \int_{\Sigma} \mu_l F_1^g \left[ \frac{(S - \Psi)^3}{6} + \frac{\mu_g}{2} \frac{S(S - \Psi)^2 \Psi}{\mu_l(S - \Psi) + \mu_g \Psi} \right] \theta \, d\gamma.$$

Puisque cette relation est vraie pour toute fonction  $\theta$  de  $\mathcal{W}(\Sigma)$ , donc  $\forall \theta \in H_0^1(\Sigma)$ , on en déduit la relation (4-13) pour l'indice  $i=1$ ; et il est clair qu'en reprenant les calculs précédents avec une fonction-test  $\hat{v}$  telle que  $\hat{v}_2 = \varphi$  et  $\hat{v}_1 = \hat{v}_3 = 0$ , la fonction  $\varphi$  étant la même que celle définie en (4-16), on obtient la relation (4-13) pour l'indice  $i = 2$ . Ce qui achève la démonstration du théorème.  $\square$

On va maintenant construire l'équation que doit vérifier la moyenne  $\mathcal{M}_z(U^*)$  de  $U^*$ , on en déduira ensuite celle que doit vérifier la limite  $P^*$  grâce à la relation (4-13), et enfin, après avoir démontré quelques régularités supplémentaires pour  $P^*$ , on déterminera les deux limites  $U^*$  et  $P^*$ .

#### 4-2) Identification des limites:

On va utiliser la condition d'incompressibilité des deux fluides ( $\text{div}(U^{\delta}) = 0$ ) pour construire une équation, qui a lieu dans la surface  $\Sigma$ , que doit vérifier la moyenne  $\mathcal{M}_z(U^*)$  de la limite  $U^*$ . Introduisons d'abord l'espace suivant:

$$(4-18) \quad \mathbf{H}(\text{div}, \Sigma) = \left\{ \varphi \in \mathbf{L}^2(\Sigma); \text{div}_\gamma(\varphi) = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \varphi_i}{\partial \gamma_i} \in \mathbf{L}^2(\Sigma) \text{ et } \varphi_3 = 0 \right\}$$

qu'on muni du produit scalaire classique:

$$(4-19) \quad \langle \varphi, \theta \rangle_{\mathbf{H}(\text{div}, \Sigma)} = \int_{\Sigma} \varphi \cdot \theta \, d\gamma + \int_{\Sigma} \text{div}_\gamma(\varphi) \text{div}_\gamma(\theta) \, d\gamma \quad \forall \varphi, \theta \in \mathbf{H}(\text{div}, \Sigma)$$

**Lemme 4-2:**

Sous les hypothèses du Théorème 3-2. alors, quitte à extraire une sous-suite,  $\hat{U}^\delta$  vérifie:

$$(4-20) \quad \int_0^s \frac{1}{\delta^2} \hat{U}^\delta dz \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} S \mathcal{M}_z(U^*) = \int_0^s U^* dz \quad \text{dans } \mathbf{H}(\text{div}, \Sigma) \text{ faible.}$$

et la moyenne  $\mathcal{M}_z(U^*)$  vérifie la condition d'incompressibilité suivante:

$$(4-21) \quad \text{div}_Y(S \mathcal{M}_z(U^*)) = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial Y_i} (S \mathcal{M}_z(U_i^*)) = 0 \quad \text{dans } L^2(\Sigma).$$

Démonstration:

D'après la deuxième équation de (4-1),  $\hat{U}^\delta$  vérifie:

$$b^0(\hat{U}^\delta, \hat{q}) + \delta b^1(\hat{U}^\delta, \hat{q}) = 0 \quad \forall \hat{q} \in L_0^2(\Omega_f)$$

Comme pour la relation (4-7) si on prend dans cette équation la fonction-test  $\hat{q}$  telle que:

$$\hat{q} = \theta - \mathcal{M}(\theta); \quad \mathcal{M}(\theta) = \frac{1}{\text{mes}(\Omega_f)} \int_{\Omega_f} \theta dy dz \quad \text{avec } \theta \in H^1(\Sigma) \text{ (}\theta \text{ indépendante de } z\text{)}$$

alors il vient:

$$(4-22) \quad b^0(\hat{U}^\delta, \theta) + \delta b^1(\hat{U}^\delta, \theta) = \mathcal{M}(\theta) (b^0(\hat{U}^\delta, 1) + \delta b^1(\hat{U}^\delta, 1)) \quad \forall \theta \in H^1(\Sigma)$$

On va maintenant faire apparaître dans cette relation la moyenne  $\mathcal{M}(\hat{U}^\delta)$  de  $\hat{U}^\delta$ , puis on va essayer de passer à la limite. En utilisant les expressions (2-11) des formes bilinéaires  $b^i$  on a:

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad b^1(\hat{U}^\delta, \theta) &= \int_{\Omega_f} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \hat{U}_i^\delta}{\partial y_i} \theta \, dy dz = \int_{\Sigma} \sum_{i=1}^2 \int_0^{S(y)} \frac{\partial \hat{U}_i^\delta}{\partial y_i} \, dz \, \theta \, dy \\
 &= \int_{\Sigma} \theta \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial y_i} \int_0^{S(y)} \hat{U}_i^\delta \, dz \, dy.
 \end{aligned}$$

(car  $\hat{U}^\delta = 0$  sur  $\mathcal{A}_{fs}$ , donc en particulier en  $z=S(y)$ ).

$$\bullet \quad b^1(\hat{U}^\delta, 1) = \int_{\Omega_f} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \hat{U}_i^\delta}{\partial y_i} \, dy dz = \int_{\partial\Omega_f} \sum_{i=1}^2 \hat{U}_i^\delta \, \hat{n}_i \, d(\partial\Omega_f) = 0$$

(car  $\hat{U}^\delta = 0$  sur  $\mathcal{A}_{fs}$ ,  $\cos(\hat{n}, z) = 0$  sur la face latérale  $\Gamma$  et  $\int_{\Gamma} \hat{U}^\delta \cdot \hat{n} \, d(\Gamma) = 0$  d'après (2-15))

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad b^0(\hat{U}^\delta, \theta) &= \int_{\Omega_f} \frac{\partial \hat{U}_3^\delta}{\partial z} \theta \, dy dz = \int_{\Omega_f} \frac{\partial(\hat{U}_3^\delta \theta)}{\partial z} \, dy dz \\
 &= \int_{\partial\Omega_f} \hat{U}_3^\delta \cos(\hat{n}, z) \theta \, d(\partial\Omega_f) = 0.
 \end{aligned}$$

(car  $\hat{U}^\delta = 0$  sur  $\mathcal{A}_{fs}$  et  $\cos(\hat{n}, z) = 0$  sur la face latérale  $\Gamma$ )

Ces relations sont valables  $\forall \theta \in H^1(\Sigma)$  (avec  $\theta$  indépendante de  $z$ ), et la relation (4-22) s'écrit alors:

$$\int_{\Sigma} \theta \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial y_i} \int_0^{S(y)} \hat{U}_i^\delta \, dz \, dy = 0 \quad \forall \theta \in H^1(\Sigma)$$

d'où:

$$(4-23) \quad \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial y_i} \int_0^S \hat{U}_i^\delta \, dz = 0 \quad \text{dans } H^{-1}(\Sigma)$$

Mais d'après le théorème 3-2:

$$\frac{1}{\delta^2} \frac{\partial \hat{U}^\delta}{\partial y_i} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \frac{\partial U_i^*}{\partial y_i} \quad \text{dans } (\mathcal{D}'(\Omega_f))^3$$

et puisque l'application:

$$SM_z: \varphi \longrightarrow \int_0^S \varphi \, dz$$

est linéaire et est continue de  $L^2(\Omega_f)$  dans  $L^2(\Sigma)$ , alors d'après le théorème 3-2:

$$\int_0^S \frac{1}{\delta^2} \hat{U}_i^\delta \, dz \longrightarrow \int_0^S U_i^* \, dz \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Sigma)$$

et:

$$(4-24) \quad \frac{\partial}{\partial y_i} \int_0^S \frac{1}{\delta^2} \hat{U}_i^\delta \, dz \longrightarrow \int_0^S \frac{\partial U_i^*}{\partial y_i} \, dz \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Sigma)$$

Le passage à la limite dans la relation (4-23) divisée par  $\delta^2$ , donne alors:

$$(4-25) \quad \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial y_i} \int_0^S U_i^* \, dz = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Sigma)$$

On va maintenant vérifier que ces convergences ont lieu non pas uniquement dans  $\mathcal{D}'(\Sigma)$  mais dans l'espace  $\mathbf{H}(\text{div}, \Sigma)$  défini par (4-18). Il est clair que les débits  $SM_z(U^\delta)$  et  $SM_z(U^*)$  sont dans  $L^2(\Sigma)$  puisque  $U^\delta$  et  $U^*$  sont dans  $L^2(\Omega_f)$ . Les égalités (4-23) et (4-25) montrent que ces débits sont dans  $\mathbf{H}(\text{div}, \Sigma)$ , de plus:

$$\begin{aligned} \left\| SM_z(U^\delta) \right\|_{\mathbf{H}(\text{div}, \Sigma)} &= \left| SM_z(U^\delta) \right|_{0, \Sigma} + \left| \text{div}_y (SM_z(U^\delta)) \right|_{0, \Sigma} \\ &= \left| SM_z(U^\delta) \right|_{0, \Sigma} \leq C \left| U^\delta \right|_{0, \Omega_f} \quad (\text{avec } C^2 = \sup(S)). \end{aligned}$$

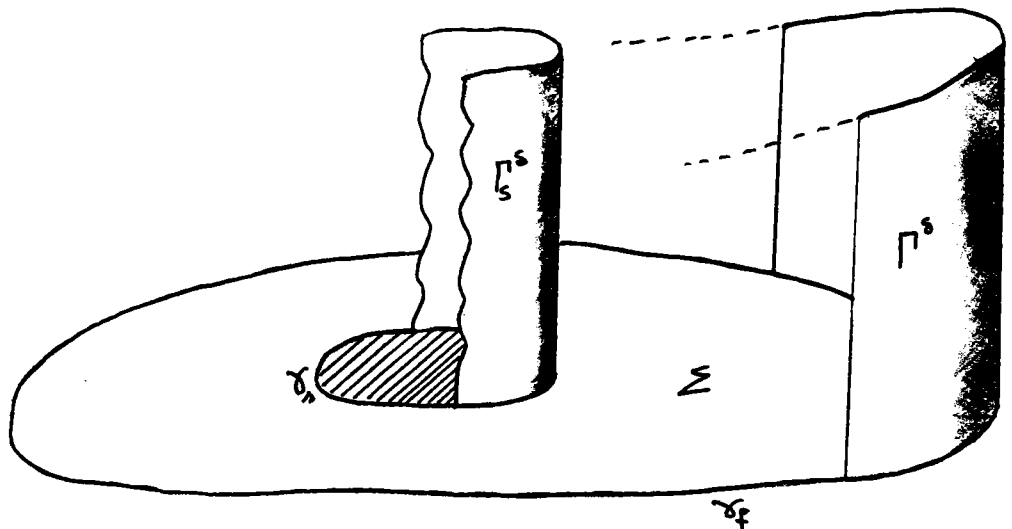
D'après l'estimation (3-8) du théorème 3-2 on a alors:

$$\left\| S\mathcal{M}_z(U^\delta) \right\|_{\mathbf{H}(\text{div}, \Sigma)} \leq C \delta^2$$

Le débit  $\frac{1}{\delta^2} S\mathcal{M}_z(U^\delta)$  est donc borné dans  $\mathbf{H}(\text{div}, \Sigma)$ , et par conséquent la convergence (4-24) reste valable dans  $\mathbf{H}(\text{div}, \Sigma)$  faible. Ce qui achève la démonstration.  $\square$

On voit maintenant que si l'on remplace dans l'équation (4-21) le débit  $S\mathcal{M}_z(U^*)$  par son expression (4-13), on obtient une équation vérifiée par la limite  $P^*$ . On va associer à cette équation les conditions aux limites que doit satisfaire  $P^*$  sur le bord  $\partial\Sigma$ , puis on vérifiera qu'elle détermine  $P^*$  de façon unique.

Rappelons d'abord que le bord  $\gamma$  de la surface  $\Sigma$  a été décomposé en deux parties (1-4), une frontière  $\gamma_g$  qui génère l'interface latérale fluides-solide (et les entrées-sorties sur lesquelles on impose une vitesse  $U^\delta$  nulle) i.e  $\Gamma_g^\delta$ , et une frontière  $\gamma_f$  qui génère les entrées-sorties des fluides sur lesquelles on impose les contraintes normales  $G^\delta$ , i.e  $\Gamma_f^\delta$ .



(figure 4-5)

Pour simplifier l'écriture, on va introduire les notations suivantes:

$$(4-26) \quad \left\{ \begin{array}{l} X^l = \left[ \frac{\Psi^3}{12\mu_l} + \frac{1}{4} \frac{S \Psi^2 (S - \Psi)}{\mu_l (S - \Psi) + \mu_g \Psi} \right] \\ X^g = \left[ \frac{(S - \Psi)^3}{12\mu_g} + \frac{1}{4} \frac{S (S - \Psi)^2 \Psi}{\mu_l (S - \Psi) + \mu_g \Psi} \right] \\ X = X^l + X^g \\ M = X^l F^l + X^g F^g \end{array} \right.$$

### Théorème 4-3:

*Sous les hypothèses du Théorème 4-1. et si la fonction S vérifie.*

$$(4-27) \quad \exists v \in \mathbb{R}_+^* \text{ telle que } S \geq v \quad p.p \text{ dans } \Sigma$$

*alors la limite  $P^*$  est déterminée d'une manière unique dans  $H^1(\Sigma)$  par:*

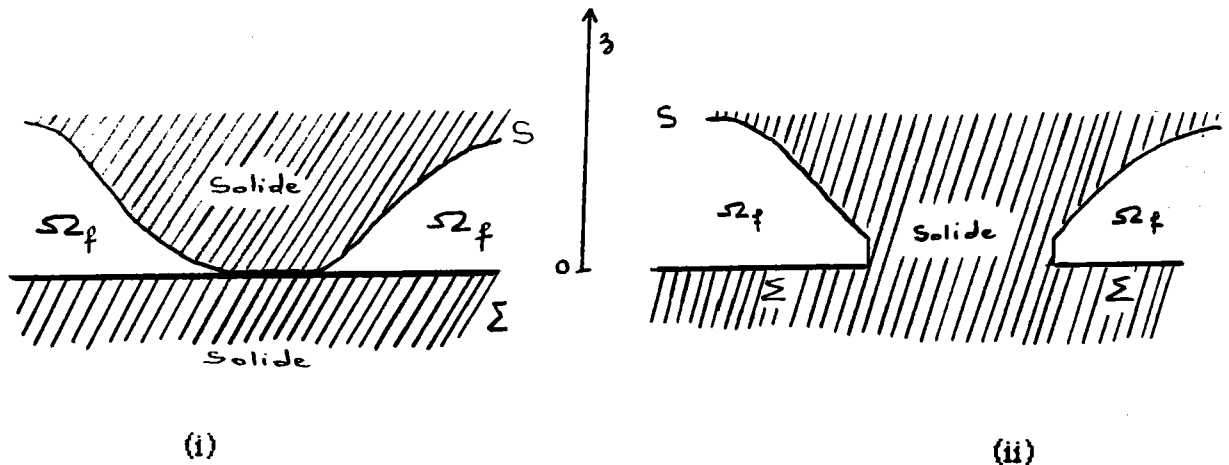
$$(4-28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial y_i} \left( X \frac{\partial P^*}{\partial y_i} \right) = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial M_i}{\partial y_i} \quad \text{dans } \Sigma \\ \sum_{i=1}^2 X \frac{\partial P^*}{\partial y_i} n_i = \sum_{i=1}^2 M_i n_i \quad \text{sur } \gamma_g \\ P^* = 0 \quad \text{sur } \gamma_l \end{array} \right.$$

$$(4-29) \quad \frac{\partial P^*}{\partial z} = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\Sigma} S P^* dy = 0.$$

*Les fonctions  $X$  et  $M$  sont définies par les relations (4-25).*

Démonstration:

Signalons d'abord que l'hypothèse (4-27) n'autorise pas les contacts parfaits entre les faces, inférieure et supérieure, du solide du type de la figure 4-6 (i) ci dessous, a moins d'approcher ce type de géométries par celles de la figure 4-6 (ii).



(i)  
géométrie non Autorisée  
par l'hypothèse (4-27)

(ii)  
géométrie Autorisée  
par l'hypothèse (4-27)

(figure 4-6)

On a déjà démontré dans le théorème 3-2 (3-26) que la limite  $P^*$  est indépendante de la variable  $z$ . Pour obtenir la première relation de (4-28) dans  $H^{-1}(\Sigma)$ , il suffit de remplacer dans l'équation (4-21) le débit  $S\mathcal{M}_z(U^*)$  par son expression (4-13). On va voir que la limite  $P^*$  est dans  $H^1(\Sigma)$  et qu'on peut alors donner un sens aux conditions aux limites sur les bords  $\gamma_g$  et  $\gamma_f$  de  $\Sigma$ . Montrons d'abord que l'hypothèse (4-26) implique la propriété de coercivité suivante pour la fonction  $\chi$ :

$$(4-30) \quad \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \text{ telle que } \chi \geq \eta \quad p.p \text{ dans } \Sigma$$

En effet, d'après les notations (4-26):

$$\chi = \chi^l + \chi^g = \left[ \frac{\Psi^3}{12\mu_e} + \frac{(S - \Psi)^3}{12\mu_g} + \frac{1}{4} \frac{S^2 \Psi (S - \Psi)}{\mu_e (S - \Psi) + \mu_g \Psi} \right]$$



La surface  $\Sigma$  peut être décomposée en deux sous-ensembles  $\{\Psi > \frac{\nu}{2}\}$  et  $\{\Psi \leq \frac{\nu}{2}\}$ . Puisque les viscosités  $\mu_\alpha$  sont strictement positives et  $0 \leq \Psi \leq S$ , qui est une hypothèse géométrique de départ (1-1), alors:

- dans  $\{\gamma \in \Sigma; \Psi(\gamma) > \frac{\nu}{2}\}$ :  $X \geq \frac{\nu^3}{96\mu_e}$
- dans  $\{\gamma \in \Sigma; \Psi(\gamma) \leq \frac{\nu}{2}\}$ :  $X \geq \frac{\nu^3}{96\mu_g}$

La fonction  $X$  vérifie alors la propriété (4-30), en prenant par exemple  $\eta = \frac{\nu^3}{96 \max(\mu_e, \mu_g)}$ .


Montrons maintenant que  $P^* \in H^1(\Sigma)$ . D'après la relation (4-13) on a:

$$(4-32) \quad X \frac{\partial P^*}{\partial \gamma_i} = M_i - S \mathcal{M}_z(U^*) \quad \text{dans } H^{-1}(\Sigma)$$

Puisque les fonctions  $F^2$  et  $F^3$  sont supposées dans  $L^2(\Sigma)$  et les fonctions  $S$  et  $\Psi$  sont dans  $L^\infty(\Sigma)$ , il est facile de vérifier, compte-tenu de l'hypothèse (4-27), que la fonction  $M$  est dans  $L^2(\Sigma)$ . D'après le lemme 4-2  $S \mathcal{M}_z(U^*)$  est dans  $L^2(\Sigma)$ , la relation précédente implique donc que les dérivées  $X \frac{\partial P^*}{\partial \gamma_i}$  ( $i=1,2$ ) sont dans  $L^2(\Sigma)$ . On en déduit grâce à la propriété (4-30) que les  $\frac{\partial P^*}{\partial \gamma_i}$  sont dans  $L^2(\Sigma)$  et par conséquent  $P^*$  est dans  $H^1(\Sigma)$ .

On va maintenant montrer que  $P^*$  vérifie sur  $\gamma_g$  et  $\gamma_f$  les conditions aux limites annoncées par le théorème. Commençons par la condition sur  $\gamma_g$ :

D'après (2-15) la fonction  $\hat{U}^\delta$  est nulle sur la frontière  $\Gamma_g = \{(\gamma, z): \gamma \in \gamma_g \text{ et } 0 < z < S(\gamma)\}$ ; donc:

$$(4-33) \quad \int_{\Gamma_g} \frac{1}{\delta^2} \hat{U}^\delta \cdot \hat{n}(\Gamma_g) \cdot \theta \, d(\Gamma_g) = \int_{\gamma_g} S \mathcal{M}_z \left( \frac{1}{\delta^2} \hat{U}^\delta \right) \cdot n(\gamma_g) \cdot \theta \, d(\gamma_g) = 0 \quad \forall \theta \in L^2(\gamma_g)$$


D'après [20] l'application "trace"  $T_n$  :

$$T_n : H(\text{div}, \Sigma) \longrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\gamma_g) \quad (H(\text{div}, \Sigma) \text{ est défini par (4-18)})$$

$$\varphi \longrightarrow \sum_{i=1}^2 \varphi n(\gamma_g)_i = \varphi \cdot n(\gamma_g)$$

est linéaire et est continue. La convergence (4-20) du lemme 4-2 implique alors, compte-tenu de (4-33), que:

$$S\mathcal{M}_z\left(\frac{1}{\delta^2} \hat{U}^\delta\right) \cdot n(\gamma_g) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} S\mathcal{M}_z(U^*) \cdot n(\gamma_g) = 0 \text{ dans } H^{-\frac{1}{2}}(\gamma_g).$$

Si on remplace  $S\mathcal{M}_z(U^*)$  par son expression (4-32), sachant que  $P^*$  est dans  $H^1(\Sigma)$ , on obtient la condition au bord  $\gamma_g$  recherchée:

$$X \nabla_y P^* \cdot n(\gamma_g) = M \cdot n(\gamma_g) \quad \text{dans } H^{-\frac{1}{2}}(\gamma_g)$$

Pour obtenir la condition que doit vérifier  $P^*$  sur le bord  $\gamma_i$  on va utiliser la relation (4-2) du théorème 4-1 en exploitant l'information supplémentaire: ( $P^* \in H^1(\Sigma)$ ), qu'on vient de démontrer. En prenant dans la relation (4-2) des fonctions-test appartenant à  $\mathcal{D}(\Omega_\alpha)$ ,  $\alpha = g$  puis  $\alpha = \ell$ , on obtient:

$$(4-34) \quad -\mu_\alpha \frac{\partial^2 U_i^*}{\partial z^2} = F_i^\alpha - \frac{\partial P^*}{\partial y_i} \quad (i = 1, 2) \quad \text{dans } L^2(\Omega_\alpha) (\alpha = g, \ell)$$

Cette égalité s'obtient d'abord dans les  $\mathcal{D}'(\Omega_\alpha)$ , mais puisque les  $F_i^\alpha$  et les  $\frac{\partial P^*}{\partial y_i}$  sont indépendantes de la variable  $z$  et appartiennent à  $L^2(\Sigma)$ , elles appartiennent aussi aux espaces  $L^2(\Omega_\alpha)$  ( $\alpha = g, \ell$ ) car les fonction  $S$  et  $\Psi$  sont bornées, et par conséquent cette égalité reste valable aussi dans les  $L^2(\Omega_\alpha)$  ( $\alpha = g, \ell$ ). Les restrictions des  $\frac{\partial U_i^*}{\partial z}$  aux  $\Omega_\alpha$  sont alors dans les espaces  $\mathcal{U}_z^\alpha$  définis ci dessous:

$$(4-35) \quad \frac{\partial U_i^*}{\partial z} \in \mathcal{U}_z^\alpha = \left\{ \varphi \in L^2(\Omega_\alpha); \frac{\partial \varphi}{\partial z} \in L^2(\Omega_\alpha) \right\} \quad (\alpha = g, \ell)$$

Comme dans les définitions (3-20) à (3-22), on peut maintenant donner un sens aux traces  $\frac{\partial U^*}{\partial z} \hat{n}_3$  de  $\frac{\partial U^*}{\partial z}$  sur des parties  $\mathcal{Q}$  des bords  $\partial\Omega_\alpha$  comme éléments de  $H^{-\frac{1}{2}}(\mathcal{Q})$ . On peut

alors intégrer par parties la relation (4-2) comme ci dessous:

$$\left. \begin{aligned} & \int_{\Omega_e} -\mu_e \frac{\partial^2 U_i^*}{\partial z^2} \hat{v}_i \, dydz + \int_{\Omega_g} -\mu_g \frac{\partial^2 U_i^*}{\partial z^2} \hat{v}_i \, dydz = \\ & = \int_{\Omega_e} \left( \Gamma_i^e - \frac{\partial P^*}{\partial y_i} \right) \hat{v}_i \, dydz + \int_{\Omega_g} \left( \Gamma_i^g - \frac{\partial P^*}{\partial y_i} \right) \hat{v}_i \, dydz + \\ & + \int_{\mathcal{A}_{ge}} \left[ \hat{\mu} \frac{\partial U_i^*}{\partial z} \hat{n}_3 \right]_{ge} \hat{v}_i \, d(\mathcal{A}_{ge}) + \int_{\Gamma} P^* \hat{v}_i \hat{n}_i \, d(\Gamma); \\ & \forall \hat{v} \in \mathcal{U} = \left\{ \hat{v}_i \in H^1(\Omega_i); \hat{v}_i = 0 \text{ sur } \mathcal{A}_{is} \right\} \quad (i=1,2) \end{aligned} \right|$$

En tenant compte de la relation (4-34), on déduit alors de la précédente que:

$$\int_{\mathcal{A}_{ge}} \left[ \hat{\mu} \frac{\partial U_i^*}{\partial z} \hat{n}_3 \right]_{ge} \hat{v}_i \, d(\mathcal{A}_{ge}) + \int_{\Gamma} P^* \hat{v}_i \hat{n}_i \, d(\Gamma) = 0 \quad \forall \hat{v} \in \mathcal{U} \quad (i=1,2)$$

En prenant dans cette relation des fonctions-test  $\hat{v}$  ayant un support sans intersection avec  $\Gamma$  puis des fonctions  $\hat{v}$  ayant un support sans intersection avec  $\mathcal{A}_{ge}$  on obtient:

$$(4-36) \quad \left[ \hat{\mu} \frac{\partial U_i^*}{\partial z} \hat{n}_3 \right]_{ge} = 0 \quad \text{sur } \mathcal{A}_{ge}$$

$$(4-37) \quad P^* = 0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

Mais puisque  $P^*$  est indépendante de la variable  $z$  et :

$$\Gamma = \left\{ (y_1, y_2, z) : (y_1, y_2) \in \mathcal{Y}_i \text{ et } 0 < z < S(y_1, y_2) \right\}$$

la relation (4-37) implique alors que:

$$(4-38) \quad P^* = 0 \quad \text{sur } \gamma_f.$$

Le problème aux limites (4-28) que doit vérifier  $P^*$  est alors démontré. La deuxième relation de (4-29) est une conséquence immédiate de l'appartenance (3-26) de  $P^*$  à  $L_0^2(\Omega_f)$  (i.e. de moyenne nulle sur  $\Omega_f$ ) et de son indépendance par rapport à la variable  $z$ . En effet:

$$0 = \int_{\Omega_f} P^* \, dydz = \int_{\Sigma} \int_0^S P^* \, dz \, dy = \int_{\Sigma} S P^* \, dy$$

Les équations (4-28) forment un problème aux limites classique [25] et la propriété de coercivité (4-30) permet d'affirmer l'existence et l'unicité de la solution  $P^*$  lorsque la mesure superficielle  $\text{mes}(\gamma_f)$  de  $\gamma_f$  est non nulle. Lorsque  $\text{mes}(\gamma_f)$  est nulle, ces équations déterminent  $P^*$  à une constante additive près puisque dans ce cas la condition de compatibilité suivante est satisfaite:

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial M_i}{\partial \gamma_i} \, dy = \int_{\partial \Sigma} M_i \, n_i \, d(\partial \Sigma) = \int_{\gamma_g} M_i \, n_i \, d(\gamma_g)$$

Mais dans ce cas aussi on a l'unicité de la solution grâce à la deuxième condition de (4-29) car d'après l'hypothèse (4-27)  $\int_{\Sigma} S \, dy$  est strictement positive. Ce qui achève la démonstration du

théorème.  $\square$

#### Remarque 4-1:

*Rappelons que, comme dans les cas classiques, la pression  $P^\delta$  n'est déterminée par les équations (1-7) qu'à une constante additive près, et pour fixer cette constante on a cherché  $P^\delta$  (resp.  $\hat{P}^\delta$ ) de moyenne nulle sur  $\Omega_f^\delta$  (resp.  $\Omega_f$ ). Ceci veut dire que si l'on n'impose pas cette dernière contrainte, alors la limite  $P^*$  de  $\hat{P}^\delta$  est elle aussi déterminée à une constante additive près, car dans ce cas, la condition: ( $P^* = 0$  sur  $\gamma_f$ ) dans les équations (4-28) est à remplacer par:*

( $P^*$  = une constante sur  $\delta_1$ ). Donc dans les deux cas:  $\text{mes}(\delta_g) = 0$  ou  $\text{mes}(\delta_g) > 0$ , l'unicité de  $P^*$  annoncée par le théorème précédent est une conséquence de l'hypothèse de départ:  $P^\delta$  de moyenne nulle sur  $\Omega_1^\delta$ , qui donne la deuxième condition de (4-29).  $\square$

Les convergences (3-26) du théorème 3-2 n'étaient valables que pour des sous-suite extraites de  $\hat{P}^\delta$ , mais on vient de démontrer que toutes ces sous-suites convergent vers l'unique solution  $P^*$  de (4-28) et (4-29), on peut alors affirmer maintenant que c'est toute la suite  $\hat{P}^\delta$  qui vérifie ces convergences. On va voir qu'il est de même pour  $\hat{U}^\delta$ , c'est à dire que  $U^*$  est déterminée de façon unique et par conséquent c'est toute la suite  $\hat{U}^\delta$  qui vérifie les convergences (3-24) et (3-25) du théorème 3-2 et non pas uniquement une sous-suite extraite.

**Théorème 4-4:**

*Sous les hypothèses du Théorème 4-3, la limite  $U^*$  est déterminée d'une manière unique par:*

$$(4-39) \quad U_i^* = \begin{cases} U_i^{*e} & \text{dans } \Omega_e \text{ i.e: si } 0 < z < \Psi(y). \\ U_i^{*g} & \text{dans } \Omega_g \text{ i.e: si } \Psi(y) < z < S(y). \end{cases} \quad (i=1,2)$$

$$(4-40) \quad U_3^* \equiv 0 \quad \text{dans } \Omega_f$$

où:

$$(4-41) \quad U_i^{*e} = \frac{z}{2\mu_e} \left( \Psi - z + \frac{\mu_e \Psi (S - \Psi)}{\mu_g \Psi + \mu_e (S - \Psi)} \right) \left[ F_i^e - \frac{\partial P^*}{\partial y_i} \right] + \frac{z}{2} \left( \frac{(S - \Psi)^2}{\mu_g \Psi + \mu_e (S - \Psi)} \right) \left[ F_i^g - \frac{\partial P^*}{\partial y_i} \right]$$

$$(4-42) \quad U_i^{*g} = \frac{(S - z)}{2\mu_g} \left( z - \Psi + \frac{\mu_g \Psi (S - \Psi)}{\mu_g \Psi + \mu_e (S - \Psi)} \right) \left[ F_i^g - \frac{\partial P^*}{\partial y_i} \right] + \frac{(S - z)}{2} \left( \frac{\Psi^2}{\mu_g \Psi + \mu_e (S - \Psi)} \right) \left[ F_i^e - \frac{\partial P^*}{\partial y_i} \right]$$

Démonstration:

Puisque les fonctions  $F_i^\alpha$  et  $\frac{\partial P^*}{\partial y_i}$  ( $i = 1, 2$  et  $\alpha = g, \ell$ ) sont indépendantes de la variable  $z$ ,

l'égalité (4-34) implique que, pour  $y$  fixé, l'application  $z \longrightarrow U_i^{*\alpha}(y, z)$  est un polynôme  $U_i^{*\alpha}$  de degré deux en  $z$  dans chaque  $\Omega_\alpha$  ( $\alpha = g, \ell$ ). Grâce aux conditions aux limites et aux interfaces que doit vérifier  $U_i^*$ , on va pouvoir déterminer les coefficients de ces deux polynômes.

D'après les relations (4-34), (4-36) et (3-25) les fonctions  $U_i^{*\alpha}$  doivent vérifier:

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l}
 -\mu_\ell \frac{\partial^2 U_i^{*\ell}}{\partial z^2} = F_i^\ell - \frac{\partial P^*}{\partial y_i} \quad \text{pour } y \in \Sigma \text{ et } 0 < z < \Psi(y) \\
 -\mu_g \frac{\partial^2 U_i^{*g}}{\partial z^2} = F_i^g - \frac{\partial P^*}{\partial y_i} \quad \text{pour } y \in \Sigma \text{ et } \Psi(y) < z < S(y) \\
 \\
 U_i^{*\ell}(y, \Psi(y)) = U_i^{*g}(y, \Psi(y)) \\
 -\mu_\ell \frac{\partial^2 U_i^{*\ell}}{\partial z^2}(y, \Psi(y)) = \mu_g \frac{\partial^2 U_i^{*g}}{\partial z^2}(y, \Psi(y)) \\
 \\
 U_i^{*\ell}(y, 0) = 0 \\
 U_i^{*g}(y, S(y)) = 0
 \end{array} \right\} \quad (4-43)
 \end{array}$$

Les deux premières équations impliquent que chaque  $U_i^{*\alpha}$  est de la forme:

$$U_i^{*\alpha}(y, z) = \frac{-1}{\mu_\alpha} \left( F_i^\alpha(y) - \frac{\partial P^*}{\partial y_i}(y) \right) z^2 + A_i^\alpha(y) z + B_i^\alpha(y), \quad (i = 1, 2 \text{ et } \alpha = g, \ell)$$

où les  $A_i^\alpha$  et les  $B_i^\alpha$  sont des fonctions de la variable  $y$  uniquement. En reportant ces expressions dans les conditions aux interfaces ( $z = \Psi(y)$ ) et dans les conditions aux limites ( $z = 0$ ) et ( $z = S(y)$ ) de (4-43) on détermine les coefficients  $A_i^\alpha$  et  $B_i^\alpha$  et on obtient les expressions (4-41) et (4-42) des  $U_i^{*\alpha}$ . Enfin, on sait d'après le théorème 4-1 que la troisième composante  $U_3^*$  de  $U^*$  est nulle.  $\square$

**Remarque 4-2:**

En intégrant l'égalité (4-39) de  $z = 0$  à  $z = \Psi$  puis de  $z = \Psi$  à  $z = S$  et en sommant les résultats obtenus, on retrouve la relation (4-13) qui lie le débit  $S \mathcal{M}_z(U^*)$  aux forces  $F^\alpha$  et au gradient de  $P^*$ . Mais on ne peut commencer par établir la relation (4-39) avant (4-13) puisque pour l'obtenir on a utilisé la régularité  $H^1(\Omega_f)$  de  $P^*$  qui a été démontrée grâce à (4-13).

On peut s'intéresser aussi aux relations qui lient "les débits de chaque fluide" aux forces  $F^\alpha$  et au gradient de  $P^*$ . Ces relations peuvent être obtenues comme ce qui a été fait pour établir (4-13), c'est à dire en choisissant astucieusement les fonctions-test  $\hat{v}$  dans la relation (4-11) du lemme 4-1, mais elles s'obtiennent facilement en intégrant l'égalité (4-39) de  $z = 0$  à  $z = \Psi$  puis de  $z = \Psi$  à  $z = S$ . On obtient:

$$(4-44) \quad \int_0^{\Psi} U_i^* dz = \frac{\Psi^3}{12\mu_l} \left[ 1 + \frac{3\mu_l(S-\Psi)}{\mu_l(S-\Psi) + \mu_g\Psi} \right] \left[ \Gamma_i^l - \frac{\partial P^*}{\partial y_i} \right] + \\ + \frac{1}{4} \left[ \frac{\Psi^2(S-\Psi)^2}{\mu_l(S-\Psi) + \mu_g\Psi} \right] \left[ \Gamma_i^g - \frac{\partial P^*}{\partial y_i} \right]$$

$$(4-45) \quad \int_{\Psi}^S U_i^* dz = \frac{(S-\Psi)^3}{12\mu_g} \left[ 1 + \frac{3\mu_g\Psi}{\mu_l(S-\Psi) + \mu_g\Psi} \right] \left[ \Gamma_i^g - \frac{\partial P^*}{\partial y_i} \right] + \\ + \frac{1}{4} \left[ \frac{\Psi^2(S-\Psi)^2}{\mu_l(S-\Psi) + \mu_g\Psi} \right] \left[ \Gamma_i^l - \frac{\partial P^*}{\partial y_i} \right]$$

**5/ RESUME ET CONCLUSION:**

Rappelons que les résultats de convergences des paragraphes précédents ont été établit non pas pour le vrai couple vitesse-pression  $(U^\delta, P^\delta)$ , solution du problème (1-7), mais pour le couple  $(\hat{U}^\delta, \hat{P}^\delta)$ , défini par (2-13). Mais on va voir que cette étude peut nous renseigner sur le comportement asymptotique de la "vraie" vitesse  $U^\delta$  et de la "vraie" pression  $P^\delta$ . Résumons d'abord les résultats essentiels obtenus.

**5-1) résumé:**

Grâce à l'application:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^\delta: \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3) &\longrightarrow \mathcal{H}^\delta(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, z) = (x_1, x_2, \frac{x_3}{\delta}) \end{aligned}$$

on s'est ramené à un domaine  $\Omega_f = \mathcal{H}^\delta(\Omega_f^\delta)$  indépendant du paramètre  $\delta$  et sous les hypothèses des théorèmes précédents on a démontré les résultats de convergences suivants:

(5-1) Pour la pression  $P^\delta$  on a:

$$\begin{aligned} * \quad \hat{P}^\delta &= P^\delta \circ (\mathcal{H}^\delta)^{-1} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} P^* \quad \text{dans } L^2(\Omega_f) \text{ faible.} \\ \text{La limite } P^* &\text{ est déterminée d'une manière unique par:} \\ \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial y_i} \left( \chi \frac{\partial P^*}{\partial y_i} \right) = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial M_i}{\partial y_i} & \text{dans } \Sigma \\ \sum_{i=1}^2 \chi \frac{\partial P^*}{\partial y_i} n_i = \sum_{i=1}^2 M_i n_i & \text{sur } \gamma_s \\ P^* = 0 & \text{sur } \gamma_f \\ \frac{\partial P^*}{\partial z} = 0 & \text{dans } \Omega_f \\ \int_{\Sigma} S P^* dy = 0 & \end{array} \right. \end{aligned}$$



Les fonctions  $X$ ,  $X^l$ ,  $X^g$  et  $M$  sont données par

$$(5-2) \quad \begin{cases} X^l = \left[ \frac{\Psi^3}{12\mu_l} + \frac{1}{4} \frac{S \Psi^2 (S - \Psi)}{\mu_l (S - \Psi) + \mu_g \Psi} \right] \\ X^g = \left[ \frac{(S - \Psi)^3}{12\mu_g} + \frac{1}{4} \frac{S (S - \Psi)^2 \Psi}{\mu_l (S - \Psi) + \mu_g \Psi} \right] \\ X = X^l + X^g \\ M = X^l F^l + X^g F^g \end{cases}$$

(5-3) Pour la vitesse  $U^\delta$ :

$$\bullet \quad \frac{1}{\delta^2} \hat{U}^\delta = \frac{1}{\delta^2} U^\delta \circ (\mathcal{H}^\delta)^{-1} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} U^* \quad \text{dans } L^2(\Omega_f) \text{ faible.}$$

La limite  $U^*$  est donnée par :

• dans  $\Omega_l$  (i.e si  $0 < z < \Psi(y)$ ): ( $i = 1, 2$ ):

$$U_i^* = \frac{z}{2\mu_l} \left( \Psi - z + \frac{\mu_l \Psi (S - \Psi)}{\mu_g \Psi + \mu_l (S - \Psi)} \right) \left[ \Gamma_i^l - \frac{\partial P^*}{\partial y_i} \right] + \frac{z}{2} \left( \frac{(S - \Psi)^2}{\mu_g \Psi + \mu_l (S - \Psi)} \right) \left[ \Gamma_i^g - \frac{\partial P^*}{\partial y_i} \right]$$

• dans  $\Omega_g$  (i.e: si  $\Psi(y) < z < S(y)$ ): ( $i = 1, 2$ ):

$$U_i^* = \frac{(S - z)}{2\mu_g} \left( z - \Psi + \frac{\mu_g \Psi (S - \Psi)}{\mu_g \Psi + \mu_l (S - \Psi)} \right) \left[ \Gamma_i^g - \frac{\partial P^*}{\partial y_i} \right] + \frac{(S - z)}{2} \left( \frac{\Psi^2}{\mu_g \Psi + \mu_l (S - \Psi)} \right) \left[ \Gamma_i^l - \frac{\partial P^*}{\partial y_i} \right]$$

•  $U_3^* \equiv 0$  dans  $\Omega_f$ .

- (5-4) Pour la moyenne de la vitesse  $U^\delta$  du fluide (l), dans la direction de  $x_3$ , on a le résultat suivant:

$$\frac{1}{\delta\Psi} \int_0^{\delta\Psi} \frac{1}{\delta^2} U^\delta dx_3 = \frac{1}{\Psi} \int_0^\Psi \frac{1}{\delta^2} \hat{U}^\delta dz \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Psi} \int_0^\Psi U_i^* dz \quad \text{dans } \mathbf{L}^2(\Omega_f).$$

avec:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Psi} \int_0^\Psi U_i^* dz = & \frac{\Psi^2}{12\mu_l} \left[ 1 + \frac{3\mu_l(S-\Psi)}{\mu_l(S-\Psi) + \mu_g\Psi} \right] \left[ \Gamma_i^l - \frac{\partial P^*}{\partial y_i} \right] + \\ & + \frac{1}{4} \left[ \frac{\Psi(S-\Psi)^2}{\mu_l(S-\Psi) + \mu_g\Psi} \right] \left[ \Gamma_i^g - \frac{\partial P^*}{\partial y_i} \right] \end{aligned}$$

- (5-5) Pour la moyenne de la vitesse  $U^\delta$  du fluide (g), dans la direction de  $x_3$ , on a le résultat suivant:

$$\frac{1}{\delta(S-\Psi)} \int_\Psi^{\delta(S-\Psi)} \frac{1}{\delta^2} U^\delta dx_3 = \frac{1}{(S-\Psi)} \int_\Psi^{(S-\Psi)} \frac{1}{\delta^2} \hat{U}^\delta dz \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{(S-\Psi)} \int_\Psi^{(S-\Psi)} U_i^* dz \quad \text{dans } \mathbf{L}^2(\Omega_f).$$

avec:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(S-\Psi)} \int_\Psi^{(S-\Psi)} U_i^* dz = & \frac{(S-\Psi)^2}{12\mu_g} \left[ 1 + \frac{3\mu_g\Psi}{\mu_l(S-\Psi) + \mu_g\Psi} \right] \left[ \Gamma_i^g - \frac{\partial P^*}{\partial y_i} \right] + \\ & + \frac{1}{4} \left[ \frac{(S-\Psi)\Psi^2}{\mu_l(S-\Psi) + \mu_g\Psi} \right] \left[ \Gamma_i^l - \frac{\partial P^*}{\partial y_i} \right] \end{aligned}$$

(5-6) Pour la moyenne de la vitesse  $U^\delta$  des deux fluides (l) et (g), dans la direction de  $x_3$ , on a le résultat suivant:

$$\frac{1}{\delta S} \int_0^{\delta S} \frac{1}{\delta^2} U^\delta dx_3 = \frac{1}{S} \int_0^S \frac{1}{\delta^2} \hat{U}^\delta dz \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{S} \int_0^S U_i^* dz \quad \text{dans } L^2(\Omega_f).$$

avec

$$\int_0^S U_i^* dz = \left[ \frac{\Psi^3}{12\mu_l} + \frac{1}{4} \frac{S \Psi^2 (S - \Psi)}{\mu_l (S - \Psi) + \mu_g \Psi} \right] \left[ \Gamma_i^l - \frac{\partial P^*}{\partial y_i} \right] + \left[ \frac{(S - \Psi)^3}{12\mu_g} + \frac{1}{4} \frac{S (S - \Psi)^2 \Psi}{\mu_l (S - \Psi) + \mu_g \Psi} \right] \left[ \Gamma_i^g - \frac{\partial P^*}{\partial y_i} \right]$$

## 5-2) Conclusion:

Les résultats (5-1) permettent de justifier l'approximation:

$$\hat{p}^\delta = p^\delta \circ (\mathcal{H}^\delta)^{-1} \cong P^*$$

et puisque la limite  $P^*$  est indépendante de la variable  $z$  on a:

$$(5-7) \quad p^\delta \cong P^* \circ \mathcal{H}^\delta = P^*$$

De plus, en multipliant les équations qui déterminent  $P^*$  par  $\delta^3$ , on peut faire apparaître les vraies épaisseurs:  $\delta\Psi$  du fluide (l),  $(\delta S - \delta\Psi)$  du fluide (g) et  $\delta S$  de l'ensemble des deux fluides (l) et (g); de façon plus précise, on peut remplacer dans ces équations les fonctions  $X$ ,  $X^l$ ,  $X^g$  et  $M$  respectivement par les fonctions  $X^\delta$ ,  $X^{\delta l}$ ,  $X^{\delta g}$  et  $M^\delta$  définies ci dessous:

$$(5-8) \quad \begin{cases} X^l = \left[ \frac{(\delta\Psi)^3}{12\mu_l} + \frac{1}{4} \frac{\delta S (\delta\Psi)^2 (\delta S - \delta\Psi)}{\mu_l (\delta S - \delta\Psi) + \mu_g \delta\Psi} \right] \\ X^g = \left[ \frac{(\delta S - \delta\Psi)^3}{12\mu_g} + \frac{1}{4} \frac{\delta S (\delta S - \delta\Psi)^2 \delta\Psi}{\mu_l (\delta S - \delta\Psi) + \mu_g \delta\Psi} \right] \\ X^\delta = X^{\delta l} + X^{\delta g} \\ M^\delta = X^{\delta l} F^l + X^{\delta g} F^g \end{cases}$$

De même, les résultats (5-2) montrent l'approximation:

$$(5-9) \quad U^\delta \cong \delta^2 U^* \mathcal{H}^\delta$$

et on voit apparaître dans l'expression de  $\delta^2 U^* \mathcal{H}^\delta$  la vraie variable  $x_3 = \delta z$  et les vraies épaisseurs  $\delta\Psi$ ,  $\delta(S - \Psi)$  et  $\delta S$ .

Pour les vitesses moyennes on obtient des résultats analogues aux précédents:

$$(5-10) \quad \begin{cases} \frac{1}{\delta\Psi} \int_0^{\delta\Psi} U^\delta dx_3 \cong \delta^2 \frac{1}{\Psi} \int_0^\Psi U_i^* dz \\ \frac{1}{\delta(S-\Psi)} \int_\Psi^{\delta(S-\Psi)} U^\delta dx_3 \cong \delta^2 \frac{1}{(S-\Psi)} \int_\Psi^{(S-\Psi)} U_i^* dz \\ \frac{1}{\delta S} \int_0^{\delta S} \frac{1}{\delta^2} U^\delta dx_3 \cong \delta^2 \frac{1}{S} \int_0^S U_i^* dz \end{cases}$$

Dans le cas monophasique, c'est à dire si l'interstice  $\Omega_i^\delta$  est occupé par un seul fluide, ( $\Psi \equiv 0$  ou  $\Psi \equiv S$ ) on retrouve une forme des équations de Reynolds classiques:

$$\begin{aligned}
 (5-11) \quad & \left\{ \begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( (\delta S)^3 \frac{\partial P^*}{\partial x_i} \right) = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( (\delta S)^3 F_i \right) && \text{dans } \Sigma \\
 & \sum_{i=1}^2 \frac{\partial P^*}{\partial x_i} n_i = \sum_{i=1}^2 F_i n_i && \text{sur } \gamma_s \\
 & P^* = 0 && \text{sur } \gamma_f \\
 & \frac{\partial P^*}{\partial x_3} = 0 && \text{dans } \Omega_i^\delta
 \end{aligned} \right. \\
 (5-12) \quad & \left\{ \begin{aligned}
 & P^\delta \cong P^* \\
 & \frac{1}{\delta S} \int_0^{\delta S} U^\delta dx_3 \cong \frac{(\delta S)^2}{12\mu} \left( F_i - \frac{\partial P^*}{\partial x_i} \right)
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Dans le cas diphasique comme le notre (i.e. l'interstice  $\Omega_i^\delta$  est occupé par deux fluides non miscibles ( $\ell$ ) et ( $g$ )). Les résultats de cette partie III montrent que les équations qui régissent l'écoulement asymptotique, superposent aux lois de Reynolds classiques, écrites pour chaque fluide, des termes de couplage fluide-fluide. Les moyennes de la vitesse sur l'épaisseur de chaque fluide dépendent non pas uniquement des forces volumiques et des gradients de pression exercés sur ce fluide, mais d'une combinaison linéaire des forces et des gradients de pression exercés sur les deux phases. On remarque alors une analogie entre ces "équations de Reynolds généralisées" et les "équations de Darcy généralisées" obtenues par la méthode d'homogénéisation dans la partie II précédente.

Enfin, Remarquons que ni la courbure moyenne  $H^\delta$  ni la donnée  $G^\delta$  (vérifiant (3-4)) n'interviennent dans les équations limites qui déterminent  $U^*$  et  $P^*$ . On obtiendrait donc les mêmes résultats si l'on avait négligé au départ les forces capillaires et les efforts surfaciques devant les forces volumiques  $F^\delta$

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] ALLAIRE G., *Homogénéisation des équations de Stokes et de Navier-Stokes*. Thèse de doctorat de l'université de Paris 6, 1989.
- [2] AURIAUT J. L. - SANCHEZ PALENCIA E., *Remarques sur la loi de Darcy pour les écoulements diphasiques en milieu poreux*. J. Theo. Appli. Mech., N° spécial, 1986, pp 141-156.
- [3] BAYADA G. - CHAMBAT M., *The transition between the Stokes equations and the Reynolds equation: a mathematical proof*. Appl. Math. and Opt., 14, 1986, pp 73-93.
- [4] BAYADA G. - CHAMBAT M., *Existence and uniqueness for a lubrication problem with nonregular conditions on the free boundary*. Boll. Un. Math. It (6), 3-B, 1984, pp 543-557.
- [5] BENSOUSSAN A. - LIONS J. L. - PAPANICOULAOU G., *Asymptotic analysis for periodic structures*. North Holland, 1978.
- [6] BREZIS H., *Analyse fonctionnelle: théorie et applications*. Masson, Paris, 1983.
- [7] CARBONNELL R. G - WHITAKER S., *Heat and mass transfert in porous media. Fondamentals of transport in porous media*, edit. J. Bear and M. Y. Corapcioglu, NATO ASI Series, Martinus Nijhoff Publisher, 1984, pp 121-189.
- [8] CIMATTI G., *How the Reynolds equation is related to the Stokes equations*. Appli. Math. and Opt., 10, 1983, pp 267-274.
- [9] CIORANESCU D. - SAINT JEAN PAULIN J., *Homogenization in open sets with holes*. Journal of Math. Anal. Appl. 71, 2, 1979, pp 590-607.
- [10] CONCA C., *On the application of the homogenization theory to a class of problems arising in fluid mechanics*. J. Math. Pures et Appl. 64, 1985, pp 31-75.
- [11] DARCY H., *Les fontaines publiques de la ville de Dijon*. Ed. Dalmont, Paris, 1856.

- [12] DEGIOVANNI A. - MOYNE C., *Conductivité thermique des milieux poreux humides: évaluation théorique et possibilité de mesure*. Int. J. Heat mass transfert, vol. 30, N° 11, 1987, pp 2225-2245.
- [13] DEGIOVANNI A. - MOYNE C. SAINT JEAN PAULIN J. - TAOUS K., *Conductivité thermique effective d'un milieu poreux en présence d'évaporations-condensations*. C.R.A.S. II, 307, 1988, pp 1845-1850.
- [14] DE VRIES D. A., *Simultaneous transfert of heat and moisture in porous media*. Trans Amerc. Geophys. Union, Vol. 39, 1958, pp 909-916.
- [15] DIAS M. M., PAYATAKES A. A., *Network models for tow-phase flow in porous media*. J. Fluid Mech., 164, 1986, p 337.
- [16] DRIDI H., *Comportement asymptotique des équations de Navier-Stokes dans des domaines aplatis*. Bull. Sc. Math 106, 1982, pp 369-385.
- [17] DUMONT T., *Décomposition par projection de certains problèmes aux limites elliptiques non linéaire*. Thèse Université de Lyon I, 1987.
- [18] DUVAUT G. - LIONS J. L., *Les inéquations en mécanique et en physique*. Dunod, 1972.
- [19] FANTINO B. - FRENE J. - GODET M., *Conditions d'utilisation de l'équation de Reynolds en mécanique des filmes minces*. Ct. Rd. Acad. Sc., Paris, 262 A, 1971, pp 155-165.
- [20] GIRAULT V. - RAVIART Pa., *Finite element approximation of the Navier-Stokes equations*. Springer Verlag, Berlin, 1981.
- [21] GRAY W. G. - O'NEILL K., *On the general equations for flow in porous media and their reduction to the Darcy's law*. Water Resour., Res., 12, 2, 1976, pp 148-154.
- [22] KALAYIDJIAN F., *Couplage entre phases fluides dans les écoulements diphasiques en milieux poreux*. Thèse, Université de Bordeaux I, 1988.
- [23] LEVY T., *Fluid in porous media and suspensions*, *Homogenization techniques for composite media*. Edited by Sanchez-Palencia E. and Zaoui A., Springer Verlag, Berlin, 1987.
- [24] LIONS J. L., *Perturbations singulières dans les problèmes aux limites et en controle optimal*. Springer Verlag, Berlin, 1973.

- [25] LIONS J. L - MAGENES E., Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. 1, Dunod, Paris, 1968.
- [26] LIPTON R. - AVELLANEDA M., *A darcy law for slow viscous past a stationary array of bubbles*. Proc. Roy. Edinburg, ...
- [27] MARLES C. M., *Ecoulements monophasiques en milieu poreux*. Rev. Inst. Franc. Petrol, 22, 10, 1967, pp 1471-1509.
- [28] MOYNE C. - BATSALE J. C. - DEGIOVANNI A., *Approche expérimentale et théorique de la conductivité thermique des milieux poreux humides, partie II: théorie*. Int. J. Heat mass transfert, vol. 31, N° 11, 1988, pp 2319-2317.
- [29] NECAS , Les méthodes directes en théories des équations elliptiques. Masson Paris, 1967.
- [30] NGUETSENG G. , *Sur quelques problèmes de perturbations dans des ouverts périodiques et application à la mécanique des composites*. Thèse d'état, Université de Paris 6, 1984.
- [31] PHILIP J. R, DE VRIES D. A, *Moisture movement in porous materials under temperature gradient*. Trans. Amer. Geophys. Union, Vol. 38, pp. 222-232.
- [32] REYNOLDS O., *On the theory of lubrication and its application to M. Beauchamp tower's experiments*. Phill Trans Roy Sc., London, A 117, 1886, pp 157-234.
- [33] SANCHEZ PALENCIA E., Non homogeneous media and vibration theory. Lecture Notes in Physics, 127, Springer verlag, 1980.
- [34] TARTAR L., *Convergence of the homogenization process*. Appendice de [33].
- [35] TARTAR L., *Problèmes d'homogénéisation dans les équations aux dérivées partielles*. Cours peccot, Collège de France, Paris 1977. Partiellement rédigé par Murat F.: Séminaire d'anal. Fonct. et Num., Univ. d'Alger, 1977/ 1978.
- [36] TEMAM R., Navier-Stokes equations. North Holland, Amsterdam, 1977.
- [37] WHITAKER S., *Flow in porous media I: a theoretical derivation of Darcy's law*. Transp. Porous media, 1, 1, 1986, pp 3-25.
- [38] WHITAKER S., *Flow in porous media II: the governing equation for immiscible two-phase flow*. Transp. Porous media, 1, 2, 1986, pp 105-125.
- [39] WYKOFF R. D. - BOTSET H. G., *Flow of gas-liquid mixtures through unconsolidated sands*. Physics 7, 1936, pp 325-345.



## Résumé

Notre travail est une contribution à l'étude du comportement asymptotique des milieux hétérogènes ayant une structure géométrique périodique. Les outils essentiels utilisés sont la méthode d'homogénéisation et la méthode des perturbations singulières. Le travail s'est fait en trois parties:

La première partie est consacrée à l'étude du transfert simultané de chaleur et de masse dans un milieu poreux humide. On clarifie l'influence des phénomènes d'évaporation-condensation sur la conductivité thermique apparente, et on étudie la dépendance du comportement global du matériau par rapport à l'ordre de grandeur relatif de deux petits paramètres: la conductivité de la phase gazeuse et la taille caractéristique des pores.

Dans la deuxième partie, on s'intéresse à l'écoulement macroscopique de deux fluides non-miscibles à travers un milieu poreux. Les "lois de Darcy généralisée" classiques sont réexaminées d'un point de vue théorique en utilisant la méthode d'homogénéisation. Il est apparu qu'elles devraient être couplées, de façon à prendre explicitement en compte les interactions aux interfaces fluide-fluide.

Dans la troisième partie, on étudie l'écoulement asymptotique de deux fluides immiscibles à travers des interstices de faibles épaisseurs entre deux solides. Par une méthode de perturbation, on établit des équations limites qui généralisent la loi de Reynolds classique au cas diphasique, en lui superposant des termes de couplage traduisant les effets d'un fluide sur l'autre.