HAL
open science

Comportement asymptotique de milieux hétérogènes en thermique et en mécanique des fluides

Khalid Taous

To cite this version:

Khalid Taous. Comportement asymptotique de milieux hétérogènes en thermique et en mécanique des fluides. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paul Verlaine - Metz, 1990. Français. NNT : 1990METZ005S . tel-01775854

HAL Id: tel-01775854

https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01775854v1

Submitted on 24 Apr 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE LORRAINE

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

THESE

PRÉSENTÉE DEVANT

L'UNIVERSITE DE METZ

POUR OBTENIR LE TITRE DE

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE METZ
spécialité: Mathémathiques

PAR

Khalid TAOUS

SUJET

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE MILIEUX HETEROGENES EN THERMIQUE ET EN MECANIQUE DES FLUIDES

Soutenue le 09 Février 1990, devant la Commission d'Examen

Membres du jury

Président:	D. ARNAL (Université de Metz).
Rapporteurs:	D. CIORANESCU (Université de Paris VI)
	F. CONRAD (Université de Nancy II)
Examinateurs:	H. DUCAUQUIS-LANCHON (INPL-Nancy)
	C. MOYNE (INPL-Nancy)
	J. SAINT JEAN PAULIN (Université de Metz)

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ

N° inv.	19900595
Cote	S/M3 90/5
Loc	Magasin

Texbs

Résumé

Notre travail est une contribution à l'étude du comportement asymptotique des milieux hétérogènes ayant une structure géométrique périodique. Les outils essentiels utilisés sont la méthode d'homogénéisation et la méthode des perturbations singulières. Le travail s'est fait en trois parties:

La première partie est consacrée à l'étude du transfert simultané de chaleur et de masse dans un milieu poreux humide. On clarifie l'influence des phénomènes d'évaporation-condensation sur la conductivité thermique apparente, et on étudie la dépendance du comportement global du matériau par rapport à l'ordre de grandeur relatif de deux petits paramètres: la conductivité de la phase gazeuse et la taille caractéristique des pores.

Dans la deuxième partie, on s'intérèse à l'écoulement macroscopique de deux fluides non-miscibles à travers un milieu poreux. Les "lois de Darcy généralisée" classiques sont réexaminées d'un point de vue théorique en utilisant la méthode d'homogénéisation. Il est apparu qu'elles devraient être couplées, de façon à prendre explicitement en compte les interactions aux interfaces fluide-fluide.

Dans la troisième partie, on étudie l'écoulement asymptotique de deux fluides immiscibles à travers des interstices de faibles épaisseurs entre deux solides. Par une méthode de perturbation, on établit des équations limites qui généralisent la loi de Reynolds classique au cas diphasique, en lui supperposant des termes de couplage traduisant les effets d'un fluide sur l'autre.

AVANT PROPOS

Au terme de ces quelques années passées au Laboratoire d'Energétique et de Mécanique Théorique et Appliquée de l'Institut National Polytechnique de Lorraine (LEMTA-INPL), il m'est très agréable de pouvoir exprimer mes remerciements à toutes les personnes qui m'ont aidé et contribué, de manières diverses, à la réalisation de ce travail.

C'est tout d'abord à Jeannine SAINT JEAN PAULIN, Professeur à l'Université de Metz, que je tiens à exprimer toute ma gratitude. Sa direction scientifique m'a beaucoup apporté et continuera à m'être profitable au delà de l'aboutissement de cette thèse. Je lui suis reconnaissant de cette formation dépassant souvent le cadre de la recherche en mathématiques.

Mes remerciement s'adressent tout particulièrement à Didier ARNAL, Professeur à l'Université de Metz, qui me fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Je remercie vivement Francis CONRAD, Professeur à l'Université de Nancy II, et Doina CIORANESCU, Chargé de recherche au CNRS-Université de Paris VI, qui ont accepté de juger ce travail et d'être des rapporteurs de ma thèse.

Si ce travail à bénéficié d'une ambiance agréable, c'est grâce à l'accueil et la gentillesse de tous les membres du LEMTA-ENSEM et plus particulièrement de Hélène DUCAUQUIS-LANCHON, Professeur à l'ENSEM-INPL, qui m'a beaucoup aidé. Je lui suis reconnaissant et je la remercie pour sa participation à ce Jury.

Je remercie également Christian MOYNE, Maître de conférence à l'Ecole des Mines de Nancy-INPL. Sa disponibilité et ses suggestions, tout au long de ce travail, m'ont été d'une aide considérable. Je le remercie de plus d'avoir accepté de faire partie du jury.

sommaire

INTRODUCTION GENERALE

PREMIERE PARTIE:

CONDUCTIVITES THERMIQUES EFFECTIVES D'UN MILIEU POREUX HUMIDE

INTRODUCTION I 1

1/ POSITION DU PROBLEME ET RESULTATS D'EXISTENCE ET D'UNICITE 4

1-1) Description physique du problème. 4

1-2) Existence et unicité de la solution....7

2/ HOMOGENEISATION PAR LA METHODE DES ECHELLES MULTIPLES 16

2-1) Développements asymptotiques et équations locales....19

2-2) Etude des équations locales....22

2-3) Comportement macroscopique et conductivités homogénéisées....33

3/ METHODE DE L'ENERGIE ET CORRECTEURS 38

3-1) Estimation à priori et passage à la limite....38

3-2) Identification des limites....44

3-3) Les correcteurs....49

4/ CAS D'UN GAZ DE FAIBLE CONDUCTION 57

4-1) Comportement de la température homogénéisée....57

4-2) Comportement de la solution du problème initial....71

4-3) Résumé et comparaison des limites....97

5/ INTERPRETATION PHYSIQUE ET CONCLUSION 100

DEUXIEME PARTIE:

PERMEABILITES RELATIVES DE DEUX FLUIDES NON-MISCIBLES

INTRODUCTION II 1

1/ POSITION DU PROBLEME ET RESULTATS D'EXISTENCE ET D'UNICITE

1-1) Description physique du problème.....3

1-2) Existence et unicité de la solution.....7

2/ HOMOGENEISATION PAR LA METHODE DES ECHELLES MULTIPLES 14

2-1) Développements asymptotiques et équations locales.....14

2-2) Equation macroscopique et perméabilités homogénéisées.....25

3/ METHODE VARIATIONNELLE ET RESULTATS DE CONVERGENCES 37

3-1) Lemmes préliminaires.....37

3-2) Prolongements et estimations a priori.....48

3-3) Passage à la limite.....54

TROISIEME PARTIE:

EQUATIONS DE REYNOLDS ET ECOULEMENT DE DEUX FLUIDES NON-MISCIBLES ET DE FAIBLE EPAISSEUR

INTRODUCTION III 1

1/ DESCRIPTION DU PROBLEME ET EXISTENCE ET D'UNICITE DE LA SOLUTION: .2

2/ CHANGEMENT DE VARIABLES ET D'INCONNUES.....10

3/ESTIMATION A PRIORI ET PASSAGE A LA LIMITE:.....20

4/ IDENTIFICATION DES LIMITES:.....32

5/ RESUME ET CONCLUSION:.....57

BIBLIOGRAPHIE

INTRODUCTION

Les phénomènes physiques dans les matériaux hétérogènes font intervenir souvent deux échelles d'espaces différentes: l'une macroscopique, et l'autre microscopique. Généralement seul le comportement macroscopique du matériaux intéresse le physicien. Le problème est alors de déterminer les coefficients macroscopique (intègrants les effets microscopiques) qui caractérisent le comportement global d'un milieu hétérogène à partir de la connaissance des propriétés intrinsèques de chacun de ses constituants, il s'agit donc de le remplacer par un milieu homogène équivalent. La méthode d'homogénéisation s'avère d'une grande aide et d'utilité pour résoudre un tel problème. Elle permet d'obtenir des résultats concrets surtout lorsque le matériaux a une structure géométrique périodique, car dans ce cas les caractéristiques physique globales sont déterminées explicitement à l'aide d'un calcul microscopique dans une seule période.

La méthode consiste à étudier le comportement asymptotique d'un systèmes d'équations P^{ε}, qui gouverne le phénomène physique dans le matériaux, lorsque le rapport ε entre l'échelle microscopique et l'échelle macroscopique tend vers zéro; ce rapport ε n'est rien d'autre que la taille de la période de la structure. Lorsque un (ou plusieurs) autre petit paramètre intervient dans le modèle P^{ε}, des méthodes de perturbation combinées à la précédente méthode, permettent d'étudier l'influence des ordres de grandeur relatifs de ces divers petits paramètres sur le comportement asymptotique et global du matériaux.

Notre travail est une contribution à l'étude du comportement asymptotique des milieux hétérogène ayant une structure géométrique périodique. La taille de la période est supposée très petite comparée aux autres dimensions du matériaux. Ce travail s'est fait en trois parties:

La première partie est consacré à l'étude du transfert simultané de chaleur et de masse dans un milieu poreux humide. La méthode d'homogénéisation permet d'établir l'équation macroscopique du transffert. Grâce à cette méthode, on distingue nettement la conductivité thermique apparente et la conductivité thermique "vraie" introduite par la loi de Fourier et on définit rigoureusement le facteur de résistance à la diffusion gaseuse. Cette analyse répond à la contreverse classique née de l'apparente sous-estimation théorique de la densité de flux de vapeur en milieu poreux. Lorsque la conductivité thermique de la phase gazeuse est, elle aussi, petite, on est conduit à utiliser des méthodes de perturbation pour étudier l'influence de l'ordre de grandeur relatif de ces deux petits paramètres (la taille de la période et la conductivité du gaz) sur le comportement global du milieu poreux.

Dans la deuxième partie on s'intéresse à l'écoulement macroscopique de deux fluides non-miscibles à travers un milieu poreux. La "loi de Darcy généralisée" classique est réexaminée d'un point de vue théorique en utilisant la méthode d'homogénéisation. Les résultats obtenus montrent que la vitesse de filtration macroscopique de chaque fluide, dépend non pas uniquement du seul gradient de pression et de forces exercés sur cette phase, mais s'exprime comme une combinaison linéaire des forces et des gradients de pressions exercés sur toutes les phases fluides et d'un autre terme qui traduit les effets moyens des tensions interfaciales. Ainsi, il est apparu que les lois de Darcy généralisées devraient être couplées, de façon à prendre explicitement en compte les interactions aux interfaces fluide-fluide.

Dans la troisième partie, on étudie l'écoulement asymptotique de deux fluides immiscibles à travers des interstices de faibles épaisseurs entre deux solides. Les deux fluides obeissent tous deux aux équations de Stokes. Sur les interfaces fluide-fluide, les efforts capillaires sont pris en compte, et sur les entrées et sorties des fluides, on considère des conditions mixtes: la vitesse est imposée sur une partie, et les forces surfaciques sont données sur l'autre partie. Par une méthode de perturbation on établit des résultats de convergences, et on montre que la vitesse et la pression asymptotiques peuvent être déterminées par un problème aux limites bidimensionnel. Ces équations limites généralisent la loi de Reynolds classique au cas diphasique en lui supperposant des termes de couplage qui représentent les effets d'un fluide sur l'autre.

PREMIERE PARTIE

CONDUCTIVITES THERMIQUES EFFECTIVES D'UN MILIEU POREUX HUMIDE

INTRODUCTION I

Dans un milieu poreux humide, constitué de diverses phases: liquide, gazeuse et solide, la conductivité thermique *apparente* **K** peut être déterminée, en l'absence des phénomènes d'évaporation-condensation, par *la méthode mathématique d'homogénéisation*, [5] [33], ou *la méthode physique de prise de moyenne et fermeture* [7]. elle se confond, dans ce cas, avec la conductivité λ de la *loi de FOURIER* écrite pour un milieu homogène équivalent au milieu poreux.

Quand les évaporations-condensations sont prises en compte, le transfert de chaleur est couplé avec le transfert de masse, la détermination de la conductivité apparente devient alors plus complexe. Des travaux de DE VRIES [14] et de PHILIP et DE VRIES [31] ont montré que les phénomènes d'évaporation-condensation acroissent la conductivité thermique apparente **K**, elle est liée à la conductivité thermique λ introduite par la loi de FOURIER par la relation:

$$\mathbf{K} = \lambda + \lambda_{dif}\mathbf{F} \tag{0-1}$$

où λ_{dif} est une *conductivité d'origine diffusive* et **F** désigne *le facteur de résistance à la diffusion.* Dans cette relation ni la conductivité λ, ni le facteur **F** ne sont accessibles expérimentalement, seule la conductivité apparente **K** peut être atteinte [12], [28].

L'évalution du facteur **F** est un sujet contreversé et a donné naissance à une abondante littérature essayant de réconcilier théorie et expérience. Une méthode expérimentale classique, suggérée par PHILIP ET DE VRIES [31][28], suppose que le transport enthalpique de la vapeur se retrouve uniquement dans le terme $\lambda_{dif}\mathbf{F}$; elle consiste à remplacer λ par la conductivité thermique λ_0 mesurée à basse température (pas d'effets d'évaporation-condensation), la mesure de **K** permet alors, grâce à la relation (0-1) précédente, d'identifier **F** à un facteur $\mathbf{F}_0$

expérimental. Les valeurs, anormalement élevées, observées pour F_0 incitent à réexaminer les fondements théoriques de la relation (0-1).

De récents résultats de C. MOYNE, J-C. BATSALE et A. DEGIOVANI [28], obtenus par la méthode de prise de moyenne, distinguent la conductivité λ_0 de la vraie conductivité thermique λ introduite par la loi de FOURIER, ils montrent que cette dernière est sensible aux effets d'évaporation-condensation sous-estimés dans l'analyse précédente de DE VRIES et que le facteur expérimental F_0 ne peut être physiquement et correctement intérprété comme le vrai facteur F de résistance à la diffusion. Comme la méthode de prise de moyenne est mathématiquement assez approximative et en particulier ne fournit aucune estimation sur la précision des résultats, ceci nous motive pour étudier le problème par la méthode mathématique d'homogénéisation.

Dans le premier paragraphe, on décrit le problème de transfert simultané de chaleur et de masse étudié -les équations vérifiées par la température T sont couplées avec celles de la fraction massique de vapeur ϖ- puis on établit, par la méthode variationnelle, des résultats d'existence et d'unicité de la solution (T,ϖ).

Dans le deuxième paragraphe, on suppose que le matériau a une structure périodique et que la période de la structure a une taille très petite, comparée aux dimensions du milieu, elle est de l'ordre d'un paramètre ε destiné à tendre vers zéro. En utilisant la méthode des échelles multiples [5] [33], on établit les équations macroscopiques du transfert et on définit de façon précise la conductivité apparente K, la conductivité de la loi de Fourier λ, et le facteur F de résistance à la diffusion. Les résultats obtenus par cette méthode formelle sont justifiés, dans le troisième paragraphe, par des théorèmes de convergences démontrés en utilisant la méthode variationnelle (ou de l'énergie) de TARTAR [5] [35] .

Les résultats de la méthode d'homogénéisation sont très sensibles à l'existence d'autres petits paramètres dans le modèle étudié. Nous traitons dans le quatrième paragraphe le cas d'un gaz de faible conduction. On est alors en présence de deux petits paramètres: la taille ε de la période et la conductivité intrinsèque λ_g de la phase gazeuse. La méthode des perturbations singulières combinée à la méthode d'homogénéisation permet d'étudier l'influence de l'ordre de grandeur relatif de ces deux petits paramètres sur le transfert macroscopique dans le milieu poreux.

Une interprétation physique des résultats obtenus est donnée dans le cinquième paragraphe. Les résultats du deuxième et du troisième paragraphe, obtenus par la méthode mathématique d'homogénéisation, sont comparés aux résultats de C. MOYNE, J-C. BATSALE et A. DEGIOVANI [13] [28] obtenus par la méthode de prise de moyenne. On confirme leur point de vue concernant la définition de la conductivité apparente K, de la conductivité λ de la loi de FOURIER et du facteur F de résistance à la diffusion.

1/POSITION DU PROBLEME ET RESULTATS D'EXISTENCE ET D'UNICITE:

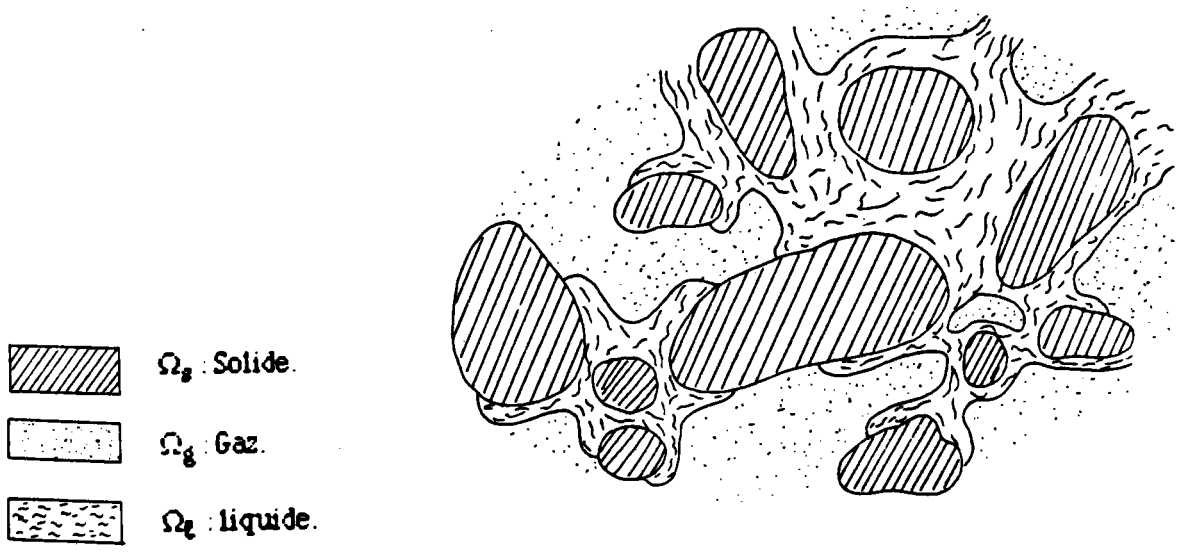
1-1) Description physique du problème

On s'intéresse à un problème de transfert simultané de chaleur et de masse dans un milieu poreux humide. Le transfert de la chaleur est traduit par des équations aux dérivées partielles vérifiées par la température T. Le transfert de la masse est traduit par des équations vérifiées par la fraction massique de vapeur ϖ: quantité d'eau qui s'évapore ou se condense par unité de temps et de volume.

Soit Ω l'ouvert borné de $\mathbb{R}^3$ occupé par le milieu poreux, ce dernier est constitué par trois phases:

- liquide occupant Ω_ℓ
- solide occupant Ω_s
- gazeuse occupant Ω_g

On désigne par $\mathcal{A}_{\alpha\beta}$ les interfaces séparant deux constituants distincts Ω_α et Ω_β, où les indices α et β représentent les phases g, ℓ ou s.



(fig. 1-1)

En régime permanent et en négligeant les mouvements convectifs de la phase gazeuse, l'équation de la fraction massique ϖ de vapeur s'écrit:

$$(1\text{-}1) \qquad -\mathrm{Div}(\rho_g \mathcal{D}\, \mathrm{grad}(\varpi)) = h^* \qquad \text{dans } \Omega_g$$

où ρ_g est la densité du gaz et $\mathcal{D}$ le coefficient de diffusion air-vapeur.

Sur l'interface $\mathcal{A}_{g\ell}$, on considère qu'il y a équilibre thermodynamique liquide-vapeur et on néglige les effets de la courbure, on écrit alors la relation:

$$\varpi = \varpi_{sat}(T)$$

où ϖ_{sat} désigne la valeur saturante et T la température. on linéarise cette relation sous la forme:

$$(1\text{-}2) \qquad \varpi = \omega_o + \omega_1 T \qquad \text{sur } \mathcal{A}_{g\ell}$$

où ω_o et ω_1 sont des constantes.(ω_1 est strictement positive).

Le bord extérieur Γ_g du gaz et l'interface gaz-solide $\mathcal{A}_{gs}$ sont considérés comme imperméables:

$$(1\text{-}3) \qquad -\rho_g \mathcal{D} \frac{\partial \varpi}{\partial n} = 0 \qquad \text{sur } \mathcal{A}_{gs} \text{ et } \Gamma_g$$

Pour le bilan thermique, le transport de chaleur sensible par convection et diffusion est négligé dans la phase gazeuse, la température T vérifie alors l'équation:

$$(1\text{-}4) \qquad -\mathrm{Div}(\lambda_\alpha \,\mathrm{grad}(T)) = f_\alpha \qquad \text{dans } \Omega_\alpha \quad (\alpha = g,\ell,s).$$

où λ_α désigne la conductivité thermique de la phase α et f_α une source de chaleur.

Sur toutes les interfaces, on suppose que la température est continue (pas de résistance thermique de contact). Sur les interfaces gaz-solide $\mathcal{A}_{gs}$ et liquide-solide $\mathcal{A}_{\ell s}$ le flux de chaleur est continu, par contre sur l'interface gaz-liquide $\mathcal{A}_{g\ell}$ il présente une discontinuité due au transfert de chaleur latente causé par l'évaporation ou la condensation, d'où les conditions suivantes:

$$(1\text{-}5) \qquad [\![T]\!]_{\alpha\beta} = 0 \qquad \text{sur } \mathcal{A}_{\alpha\beta} \quad (\alpha,\beta = g,s,\ell).$$

$$(1\text{-}6) \qquad [\![\lambda \frac{\partial T}{\partial n}]\!]_{\alpha s} = 0 \qquad \text{sur } \mathcal{A}_{\alpha s} \quad (\alpha = g,\ell).$$

$$(1\text{-}7) \qquad [\![\lambda \frac{\partial T}{\partial n}]\!]_{g\ell} = -\rho_g \mathcal{D}\, \Delta h_v \frac{\partial \varpi}{\partial n} \qquad \text{sur } \mathcal{A}_{g\ell}$$

où $[\![\varphi]\!]_{\alpha\beta}$ désigne le saut ($\varphi_\alpha - \varphi_\beta$) de φ à travers l'interface $\mathcal{A}_{\alpha\beta}$, n la normale orientée sur chaque $\mathcal{A}_{\alpha\beta}$ de Ω_α vers Ω_β et Δh_v la chaleur latente de vaporisation.

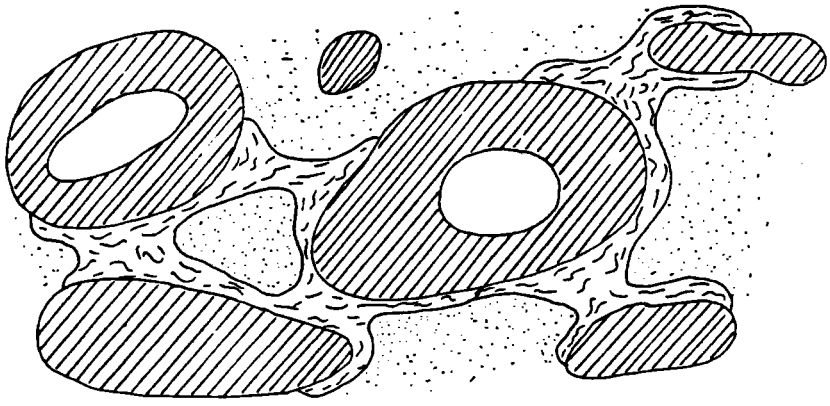
Sur le bord extérieur Γ de Ω on impose une température Θ, quitte à faire une translation on la suppose nulle:

$$(1\text{-}8) \qquad T = 0 \qquad \text{sur } \Gamma$$

Pour la validité de ces hypothèses simplificatrices, voir les références [12] et [28].

1-2) Existence et unicité de la solution:

Remarquons que la phase gazeuse, qui occupe Ω_g, peut se décomposer en deux parties disjointes: la partie qui a un contact avec le liquide (*humide*), occupant un sous- ensemble de Ω_g noté: $\Omega_g^{(\ell)}$, et la partie qui n'a de contact qu'avec le solide (*sèche*), occupant le complémentaire $\Omega_g \backslash \Omega_g^{(\ell)}$ de $\Omega_g^{(\ell)}$ dans Ω_g noté $\Omega_g^{(s)}$.



$\Omega_g^{(\ell)}$: *Gaz humide*.

$\Omega_g^{(s)}$: *Gaz sec*

(fig. 1-2)

Dans la partie *sèche* $\Omega_g^{(s)}$, la fraction massique de vapeur ϖ vérifie un problème de Neumann homogène et indépendant de T:

$$
(1\text{-}9) \quad \left|
\begin{array}{lll}
-\mathrm{Div}(\rho_g \mathcal{D}\, \mathrm{grad}(\varpi)) & = h^* & \text{dans } \Omega_g^{(s)} \\
\rho_g \mathcal{D} \dfrac{\partial \varpi}{\partial n} & = 0 & \text{sur } \partial(\Omega_g^{(s)}) = \mathcal{A}_{gp}^{(s)} \cup \Gamma_g^{(s)}
\end{array}
\right.
$$

Ainsi ϖ est déterminée par (1-9) à une constante près dans chaque composante connexe $\Omega_g^{(s)i}$ de $\Omega_g^{(s)}$ si et seulement si la moyenne de h^* sur chacune de ces composantes est nulle:

$$\int_{\Omega_g^{(s)i}} h^*(x)\, dx = 0$$

En revanche, dans les pores gazeux *humides* $\Omega_g^{(\ell)}$, les équations de la fraction massique de vapeur sont couplées avec celles de la température par les conditions (1-2) et (1-7). Puisque la fraction massique dans $\Omega_g^{(*)}$ n'intervient pas dans le problème thermique, on ne va s'intéresser, dans la suite, à la fraction massique ϖ que dans le gaz *humide* $\Omega_g^{(\ell)}$.

Pour avoir une condition de Dirichlet homogène sur l'interface $\mathcal{A}_{g\ell}$, à la place de la condition (1-2), on introduit la nouvelle inconnue ω que nous appelerons " la fraction massique translatée":

$$\omega = \varpi - (\omega_o + \omega_1 T) \quad \text{dans} \quad \Omega_g^{(\ell)}$$

La nouvelle inconnue (T,ω) vérifie alors le système suivant:

$$\left|\begin{array}{ll}
-\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda_\alpha \dfrac{\partial T}{\partial x_i}\right) = f_\alpha & \text{dans } \Omega_\alpha \ (\alpha = g,\ell,s). \\[2ex]
[\![T]\!]_{\alpha\beta} = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{\alpha\beta} \ (\alpha,\beta = g,\ell,s). \\
[\![\lambda \dfrac{\partial T}{\partial n}]\!]_{\alpha s} = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{\ell s} \text{ et } \mathcal{A}_{gs} \\
[\![\lambda \dfrac{\partial T}{\partial n}]\!]_{g\ell} = -\rho_g \mathcal{D}\, \Delta h_v \left(\dfrac{\partial \omega}{\partial n} + \omega_1 \dfrac{\partial T_g}{\partial n}\right) & \text{sur } \mathcal{A}_{g\ell} \\
T = 0 & \text{sur } \Gamma = \partial(\Omega) \\[2ex]
-\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho_g \mathcal{D} \dfrac{\partial \omega}{\partial x_i}\right) = h^* - \rho_g \mathcal{D} \dfrac{\omega_1}{\lambda_g} f & \text{dans } \Omega_g^{(\ell)} \\[2ex]
\omega = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{g\ell} \\
\dfrac{\partial \omega}{\partial n} = -\omega_1 \dfrac{\partial T_g}{\partial n} & \text{sur } \mathcal{A}_{gs}^{(\ell)} \text{ et } \Gamma_g
\end{array}\right.$$

L'étude de l'existence et de l'unicité de (T,ω) sera faite par la méthode variationnelle. On commence par introduire les espaces fonctionnels où seront recherchées les inconnues. On pose:

$$
(1\text{-}10)\quad \left|\begin{array}{l}
\mathcal{V} = H_0^1(\Omega) \\[2ex]
\|v\|_{\mathcal{V}}^2 = \displaystyle\int_\Omega v^2 dx + \int_\Omega (\nabla v)^2 dx \\[2ex]
\mathcal{W} = \left\{ \varphi \in H^1(\Omega_g^{(\ell)});\ \varphi = 0 \quad \text{sur} \quad \mathcal{A}_g \right\} \\[2ex]
\|\varphi\|_{\mathcal{W}}^2 = \displaystyle\int_{\Omega_g^{(\ell)}} \varphi^2 dx + \int_{\Omega_g^{(\ell)}} (\nabla\varphi)^2 dx \\[2ex]
E = \mathcal{V}\times\mathcal{W}\ ;\quad \|(v,\varphi)\|_E = \left(\|v\|_{\mathcal{V}}^2 + \|\varphi\|_{\mathcal{W}}^2 \right)^{\frac{1}{2}}
\end{array}\right.
$$

Pour tout (u,ψ) et (v,φ) de l'espace produit E on définit les formes suivantes:

$$
(1\text{-}12)\quad a((u,\psi),(v,\varphi)) = \int_\Omega \omega_1\mu\nabla u.\nabla v\, dx + \int_{\Omega_g^{(\ell)}} \omega_1\eta(\nabla u.\nabla\varphi + \nabla\psi\nabla v)\, dx + \int_{\Omega_g^{(\ell)}} \eta\nabla\psi.\nabla\varphi\, dx
$$

$$
L((v,\varphi)) = \int_\Omega \omega_1 f\, v\, dx + \int_{\Omega_g^{(\ell)}} \eta h\,(\varphi + \omega_1 v)\, dx
$$

où l'on note:

$$
(1\text{-}11)\quad \left|\begin{array}{l}
\mu = \begin{cases} \lambda_\alpha & \text{dans } \Omega\backslash\Omega_g^{(\ell)} \\ \lambda_g + \eta\omega_1 & \text{dans } \Omega_g^{(\ell)} \end{cases} \\[2ex]
\eta = \rho_g \mathcal{D}\, \Delta h_v \\[2ex]
h = \dfrac{\mathcal{H}^*}{\rho_g \mathcal{D}}
\end{array}\right.
$$

Théorème 1-1:

Sous les hypothèses: f *et* h *appartiennent à* $L^2(\Omega)$, *les constantes* λ_α , η *et* ω_1 *sont positives on a :*

i) *Le problème* (1-1)- (1-8) *se met sous la forme variationnelle suivante:*

$$(1\text{-}13)\qquad \begin{cases} \varpi = \omega + (\omega_0 + \omega_1 T) \\ (T,\omega) \in E \\ a((T,\omega),(v,\psi)) = L((v,\psi)) \qquad \forall\ (v,\psi) \in E \end{cases}$$

ii) *le système* (1-13) *admet une solution* (T,ω) *unique.*

démonstration.

i) On multiplie l'équation (1-1) par une fonction test $\psi \in \mathcal{W}$ et on intègre par parties, sur $\Omega_g^{(\ell)}$, en utilisant la formule de Green:

$$\int_{\Omega_g^{(\ell)}} \rho_g \mathcal{D} \nabla\varpi.\nabla\psi \ dx = \int_{\Omega_g^{(\ell)}} h^* \ \psi \ dx + \int_{\partial(\Omega_g^{(\ell)})} \rho_g \mathcal{D} \frac{\partial\varpi}{\partial n} \ \psi \ d\sigma$$

mais $\partial(\Omega_g^{(\ell)}) = \mathcal{A}_{g\ell} \cup \mathcal{A}_{gs}^{(\ell)} \cup \Gamma_g$, la trace de ψ est nulle sur $\mathcal{A}_{g\ell}$ et le flux $\rho_g \mathcal{D} \dfrac{\partial\varpi}{\partial n}$ est nul sur $\mathcal{A}_{gs}^{(\ell)} \cup \Gamma_g$, le deuxième terme du second membre est donc nul. En utilisant les notations (1-11) et la fraction massique translatée $\omega = \varpi - (\omega_0 + \omega_1 T)$ cette relation devient:

$$(1\text{-}14)\qquad \int_{\Omega_g^{(\ell)}} \nabla\omega.\nabla\psi \ dx + \int_{\Omega_g^{(\ell)}} \omega_1 \nabla T.\nabla\psi \ dx = \int_{\Omega_g^{(\ell)}} h \ \psi \ dx \qquad \forall\ \psi \in \mathcal{W}$$

On multiplie l'équation (1-4) par une fonction test v appartenant à $\mathcal{V}$ et on intègre par parties sur Ω_ℓ , Ω_s puis $\Omega_g^{(*)}$ et en tenant compte que la normale n est orientée sur chaque interface $\mathcal{A}_{\alpha\beta}$ de Ω_α vers Ω_β $(\alpha,\beta = g,\ell,s)$, la formule de Green donne:

$$
(1\text{-}15)\quad \left|\begin{array}{l}
\displaystyle\int_{\Omega_\ell} \lambda_\ell\, \nabla T.\nabla v\, dx = \int_{\Omega_\ell} f\, v\, dx - \int_{\mathcal{A}_{g\ell}} \lambda_\ell \frac{\partial T}{\partial n}\, v\, d\sigma + \int_{\mathcal{A}_{\ell s}} \lambda_\ell \frac{\partial T}{\partial n}\, v\, d\sigma \\[2ex]
\displaystyle\int_{\Omega_s} \lambda_s \nabla T.\nabla v\, dx = \int_{\Omega_s} f\, v\, dx - \int_{\mathcal{A}_{gs}} \lambda_s \frac{\partial T}{\partial n}\, v\, d\sigma - \int_{\mathcal{A}_{\ell s}} \lambda_s \frac{\partial T}{\partial n}\, v\, d\sigma \\[2ex]
\displaystyle\int_{\Omega_g^{(*)}} \lambda_g \nabla T.\nabla v\, dx = \int_{\Omega_g^{(*)}} f\, v\, dx + \int_{\mathcal{A}_{g\ell}} \lambda_g \frac{\partial T}{\partial n}\, v\, d\sigma + \int_{\mathcal{A}_{gs}^{(*)}} \lambda_g \frac{\partial T}{\partial n}\, v\, d\sigma
\end{array}\right.
$$

Les équations (1-1) et (1-4) combinées donnent:

$$
-(\lambda_g \Delta T + \eta \Delta \varpi) = f_\alpha + \eta h \quad \text{dans } \Omega_g^{(\ell)}
$$

On multiplie cette équation par une fonction v de $\mathcal{V}$ et on intègre par parties:

$$
\int_{\Omega_g^{(\ell)}} (\lambda_g \nabla T + \eta \nabla \varpi).\nabla v\, dx = \int_{\Omega_g^{(\ell)}} (f_\alpha + \eta h) v\, dx + \int_{\partial(\Omega_g^{(\ell)})} \left(\lambda_g \frac{\partial T}{\partial n} + \eta \frac{\partial \varpi}{\partial n}\right) v\, d\sigma
$$

Le bord $\partial(\Omega_g^{(\ell)})$ du gaz humide est la réunion de son interface avec le liquide $\mathcal{A}_{g\ell}$, de son interface avec le solide $\mathcal{A}_{gs}^{(\ell)}$ et de son bord exterieur $\Gamma_g^{(\ell)}$, la fonction-test v est nulle sur $\Gamma_g^{(\ell)}$ et, d'après (1-3) et (1-7), le flux $\eta \dfrac{\partial \varpi}{\partial n}$ est nul sur l'interface $\mathcal{A}_{gs}^{(\ell)}$ et vaut le saut du flux de chaleur: $-[\![\lambda \dfrac{\partial T}{\partial n}]\!]_{g\ell} = \lambda_\ell \dfrac{\partial T}{\partial n} - \lambda_g \dfrac{\partial T}{\partial n}$ sur l'interface $\mathcal{A}_{g\ell}$, la relation précédente devient donc:

$$
(1\text{-}16)\quad \int_{\Omega_g^{(\ell)}} (\lambda_g \nabla T + \eta \nabla \varpi).\nabla v\, dx = \int_{\Omega_g^{(\ell)}} (f_\alpha + \eta h) v\, dx + \int_{\mathcal{A}_{gs}^{(\ell)}} \lambda_g \frac{\partial T}{\partial n}\, v\, d\sigma + \int_{\mathcal{A}_{g\ell}} \left(\lambda_\ell \frac{\partial T}{\partial n} - \lambda_g \frac{\partial T}{\partial n}\right) v\, d\sigma
$$

Comme le saut $[\![\lambda \frac{\partial T}{\partial n}]\!]_{\alpha g}$ est nul sur les interfaces fluide-solide $\mathcal{A}_{\alpha g}$, la somme des relations (1-15) et (1-16) s'écrit:

$$\int_{\Omega} \lambda \nabla T.\nabla v \; dx \; + \int_{\Omega_g^{(\ell)}} \eta \nabla \varpi.\nabla v \; dx \; = \int_{\Omega_g^{(\ell)}} (f_\alpha + \eta h) v \; dx$$

Si on remplace ϖ par son expression : $\omega + (\omega_0 + \omega_1 T)$, en utilisant la définition (1-11) de la donnée μ, cette relation devient:

$$\boxed{(1\text{-}17) \qquad \int_{\Omega} \mu \nabla T.\nabla v \; dx \; + \int_{\Omega_g^{(\ell)}} \eta \omega_1 \nabla \omega.\nabla v \; dx \; = \int_{\Omega_g^{(\ell)}} (f_\alpha + \eta h) v \; dx}$$

Pour obtenir i) du théorème il suffit de multiplier (1-14) par η et (1-17) par ω_1 et de sommer les relations obtenues.(on a multiplié (1-14) par η et (1-17) par ω_1 pour obtenir une forme symétrique).

ii) Pour montrer l'existence et l'unicité on va utiliser le lemme classique de Lax-Milgram [6]. Il est clair que notre espace E est de Hilbert, que L(.,.) est une forme linéaire sur E et que a(.,.) est bilinéaire sur ExE, il nous reste à montrer la continuité de L(.,.) et de a(.,.) et la coercivité de a(.,.):

Pour tout ouvert $\mathcal{O}$ de Ω, on notera dans la suite:

$$|\phi|_{0,\mathcal{O}} = \|\phi\|_{L^2(\mathcal{O})}$$

$$|\phi|_{1,\mathcal{O}} = \|\nabla\phi\|_{\mathbb{L}^2(\mathcal{O})}$$

continuité de L(. ,.)

A l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on établit facilement:

$$(1\text{-}18) \quad \left|L(v,\varphi)\right| \leq M \left\|(v,\varphi)\right\|_E$$

où la constante M est donnée par:

$$M = \sqrt{2}\max\left(\omega_1 \left| f+\eta h \chi_g^{(\ell)} \right|_{0;\Omega} \; ; \; \left| h \right|_{0;\Omega}\right)$$

continuité de a(. ,.)

en appliquant les inégalités de Cauchy-Schwarz dans l'expression de a(. ,.), il vient:

$$\begin{aligned}\left|a((u,\psi),(v,\varphi))\right| &\leq C_1\left(\left|u\right|_{1;\Omega}\left|v\right|_{1;\Omega}+\left|\psi\right|_{1;\Omega_g^{(\ell)}}\left|\varphi\right|_{1;\Omega_g^{(\ell)}}+\left|\psi\right|_{1;\Omega_g^{(\ell)}}\left|v\right|_{1;\Omega}+\left|u\right|_{1;\Omega}\left|\varphi\right|_{1;\Omega_g^{(\ell)}}\right)\\ &\leq 2\,C_1\left(\left|u\right|^2_{1;\Omega}+\left|\psi\right|^2_{1;\Omega_g^{(\ell)}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\left|v\right|^2_{1;\Omega}+\left|\varphi\right|^2_{1;\Omega_g^{(\ell)}}\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

soit:

$$(1\text{-}19) \qquad \left|a((u,\psi),(v,\varphi))\right| \leq 2\,C_1 \left\|(u,\psi)\right\|_E \left\|(v,\varphi)\right\|_E$$

où l'on note:

$$C_1 = \max(\omega_1 \sup_{\Omega}(\mu), \eta, \omega_1\eta)$$

Coercivité de a(. , .):

$$a((u,\psi),(u,\psi)) = \int_{\Omega} \omega_1\mu \ (\nabla u)^2 \ dx + 2 \int_{\Omega_g^{(\ell)}} \omega_1\eta \ \nabla u.\nabla\psi \ dx + \int_{\Omega_g^{(\ell)}} \eta(\nabla\psi)^2 \ dx$$

La coercivité (et même la positivité) n'est pas évidente a priori à cause du terme rectangle sur $\Omega_g^{(\ell)}$. On introduit un paramètre δ qu'on ajustera ultérieurement et on écrit $a((u,\psi),(u,\psi))$ sous la forme suivante:

$$a((u,\psi),(u,\psi)) = \int_{\Omega} \delta(\nabla u)^2 dx + \int_{\Omega} (\omega_1\mu-\delta)(\nabla u)^2 dx + \int_{\Omega_g^{(\ell)}} 2\omega_1\eta\nabla u.\nabla\psi dx + \int_{\Omega_g^{(\ell)}} \eta(\nabla\psi)^2 dx$$

Si on choisit le paramètre δ tel que $\delta < \omega_1\mu_g$ alors:

$$a((u,\psi),(u,\psi)) = \int_{\Omega} \delta(\nabla u)^2 dx + \int_{\Omega\setminus\Omega_g^{(\ell)}} (\omega_1\mu-\delta)(\nabla u)^2 dx + \int_{\Omega_g^{(\ell)}} \left(\eta - \frac{(\omega_1\eta)^2}{\omega_1\mu_g-\delta}\right) (\nabla\psi)^2 dx +$$

$$+ \int_{\Omega_g^{(\ell)}} \left(\sqrt{\omega_1\mu_g-\delta} \ \nabla u + \frac{\omega_1\eta}{\sqrt{\omega_1\mu-\delta}} \ \nabla\psi\right)^2 dx$$

$$(1\text{-}20) \quad a((u,\psi),(u,\psi)) = \int_{\Omega_g^{(\ell)}} \delta(\nabla u)^2 dx + \int_{\Omega\setminus\Omega_g^{(\ell)}} \omega_1\mu \ (\nabla u)^2 dx + \int_{\Omega_g^{(\ell)}} \zeta \ (\nabla\psi)^2 dx +$$

$$+ \int_{\Omega_g^{(\ell)}} \left(\xi \ \nabla u + \frac{\omega_1\eta}{\xi} \ \nabla\psi\right)^2 dx$$

où l'on a noté:

$$\xi = \sqrt{\omega_1\mu_g-\delta} \quad \text{et} \quad \zeta = \eta - \frac{(\omega_1\eta)^2}{\omega_1\mu_g-\delta}$$

Un choix convenable du paramètre est alors le suivant:

- $0<\delta < \omega_1\lambda_g$ (par exemple $\delta = \dfrac{\omega_1\lambda_g}{2}$)

En effet, dans ce cas:

- $\omega_1\mu_g - \delta = \omega_1\lambda_g - \delta + \omega_1^2\eta > 0$
- $\zeta = \omega_1\eta \dfrac{\omega_1\lambda_g - \delta}{\omega_1 \mu_g - \delta} > 0$

et on peut alors déduire de la relation (1-20) que:

$$\boxed{\begin{array}{ll} (1\text{-}21) & a((u,\psi),(u,\psi)) \geqslant C\left(|u|^2_{1,\Omega} + |\psi|^2_{1,\Omega_g^{(\ell)}}\right) \\ & C = \mathrm{Min}(\zeta, \delta, \omega_1 \min(\lambda_\ell, \lambda_g)) \end{array}}$$

Puisque u est de trace nulle sur le bord extérieur de Ω et que ψ est de trace nulle sur l'interface gaz-liquide, la norme $|\,.\,|_{1,\mathcal{O}}$ est, d'après l'inégalité de Poincaré, équivalente à la norme $\|\,.\,\|_{H^1(\mathcal{O})}$ sur $H^1(\mathcal{O})$ ($\mathcal{O}$ étant Ω ou $\Omega_g^{(\ell)}$). L'inégalité (1-21) est donc équivalente à la suivante:

$$(1\text{-}22) \qquad a((u,\psi),(u,\psi)) \geq C\|(u,\psi)\|^2_E \qquad \forall \ (u,\psi) \in E$$

On a donc vérifié toutes les hypothèses du lemme de Lax- Milgram, le problème (1-13) admet alors une solution unique (T,ω) dans E. □

2/ HOMOGENEISATION PAR LA METHODE DES ECHELLES MULTIPLES:

Dans cette partie on suppose que le matériau poreux occupant Ω a une structure périodique. Soit εY la période de la structure où Y est un pavé de $\mathbb{R}^n$ fixé et ε un paramètre positif très petit par rapport aux dimensions de Ω, qui représente le rapport entre l'échelle microscopique et l'échelle macroscopique. Notre domaine peut donc être recouvert par des pavés translatés de εY, (figure 2-1).

Le domaine Ω est indépendant de ε, cependant les sous-ensembles Ω_α (α=g,ℓ,s) en dépendent. Pour chaque ε fixé, on a une solution (T^ε, ϖ^ε) du problème (1-1) à (1-8), ou une solution (T^ε,ω^ε) de (1-13). On s'intéresse alors au comportement de la température T^ε et de la fraction massique de vapeur translatée ω^ε, lorsque la période ε tend vers zéro.

La méthode des échelles multiples, [5] et [33], permet d'établir les équations macroscopiques (équations vérifiées par les limites de T^ε et de ω^ε) d'une façon formelle. Les résultats obtenus par cette méthode seront justifiés, dans le paragraphe 3, par la méthode variationnelle de Tartar [5] [35] .

(2-1) Notations:

$Y = \prod_{i=1}^{n}]0, \ell_i[$ est la cellule de base

Y_α = image de $\Omega_\alpha^\varepsilon$ par translations et homothéties $\frac{1}{\varepsilon}$ (α = g,ℓ,s)

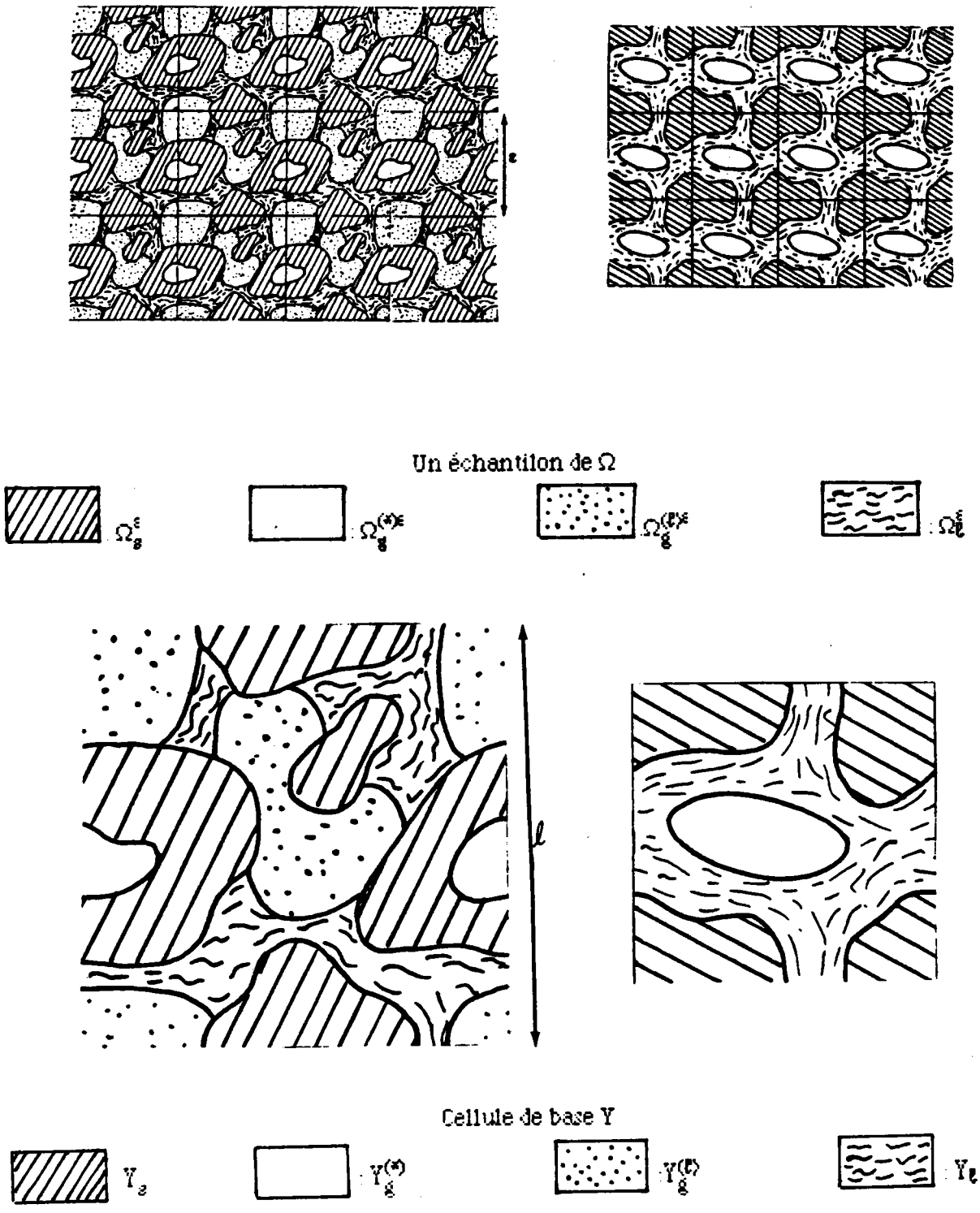
$\mathcal{A}_{\alpha\beta}$ = interface ($\partial Y_\alpha \cap \partial Y_\beta$) de Y_α avec Y_β

Γ^Y = bord extérieur (∂Y) de Y

Γ_α^Y = bord extérieur ($\partial Y_\alpha \cap \Gamma^Y$) de Y_α

$Y_g^{(\ell)}$ = image de $\Omega_g^{(\ell)\varepsilon}$ par translations et homothéties $\frac{1}{\varepsilon}$

$Y_g^{(*)}$ = image de $\Omega_g^{(*)\varepsilon}$ par translations et homothéties $\frac{1}{\varepsilon}$


ε
Un échantillon de Ω
Ω_g^ε
$\Omega_g^{(*)\varepsilon}$
$\Omega_g^{(\ell)\varepsilon}$
Ω_ℓ^ε
ℓ
Cellule de base Y
Y_g
$Y_g^{(*)}$
$Y_g^{(\ell)}$
Y_ℓ

(fig. 2-1)

(2-2) Les propriétés physiques du matériau sont εY- périodiques:

- $\lambda^\varepsilon(x) = \lambda(\frac{x}{\varepsilon})$ où λ est définie sur la cellule de base Y par:

  $\lambda(y) = \lambda_\alpha$ pour $y \in Y_\alpha$ $(\alpha = g,\ell s)$
- $\mu^\varepsilon(x) = \mu(\frac{x}{\varepsilon})$ où μ est définie sur la cellule de base Y par:

  $\mu(y) = \lambda(y) + \eta\,\omega_1 \chi_g^{(\ell)}(y)$ où $\chi_g^{(\ell)}$ désigne la fonction caractéristique de $Y_g^{(\ell)}$

(2-3) On suppose que les données f et h sont à oscillations périodiques :

- $f^\varepsilon(x) = f(x, \frac{x}{\varepsilon})$
- $h^\varepsilon(x) = h(x, \frac{x}{\varepsilon})$

  } les fonctions f et h étant dans $L^2(\Omega \times Y)$ et Y-périodiques en y.
- les constantes physiques: η, ω_1 et les λ_α, sont strictement positives.

Pour faciliter l'écriture, on va reécrire les équations initiales (1-1) à (1-8) sous une forme différente (mais équivalente). Comme on l'a déjà signalé, on ne s'intéressera à la fraction massique de vapeur translitée ω^ε que dans la composante humide $\Omega_g^{(\ell)\varepsilon}$ du gaz.

L'utilisatin de $\mu = \lambda + \eta\,\omega_1 \chi_g^{(\ell)}$ et de la fraction massique translatée $\omega^\varepsilon = \varpi^\varepsilon - (\omega_0 + \omega_1 T)$ dans les équations (1-1) à (1-8) donne les nouvelles équations suivantes:

$$
(2\text{-}4)\quad \left|\begin{array}{lll}
-\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\mu_\alpha^\varepsilon \dfrac{\partial T^\varepsilon}{\partial x_i}\right) = \left(1 + \dfrac{\eta\omega_1}{\lambda_g}\chi_g^{(\ell)\varepsilon}\right) f_\alpha & \text{dans } \Omega_\alpha\ (\alpha = g,\ell s). & \\
[\![T^\varepsilon]\!]_{\alpha\beta} = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{\alpha\beta}^\varepsilon\ (\alpha,\beta = g,\ell s). & \\
[\![\mu_\alpha^\varepsilon \dfrac{\partial T^\varepsilon}{\partial n}]\!]_{\alpha s} = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{\ell s}^\varepsilon \text{ et } \mathcal{A}_{gs}^{(*)\varepsilon} & \\
[\![\mu_\alpha^\varepsilon \dfrac{\partial T^\varepsilon}{\partial n}]\!]_{g\ell} = -\eta \dfrac{\partial \omega^\varepsilon}{\partial n} & \text{sur } \mathcal{A}_{g\ell}^\varepsilon \text{ et } \mathcal{A}_{gs}^{(\ell)\varepsilon} & \\
T^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma = \partial(\Omega) & \\
-\Delta\omega^\varepsilon = h^\varepsilon - \dfrac{\omega_1}{\lambda_g} f^\varepsilon & \text{dans } \Omega_g^{(\ell)\varepsilon} & \\
\dfrac{\partial \omega^\varepsilon}{\partial n} = -\omega_1 \dfrac{\partial T_g}{\partial n} & \text{sur } \mathcal{A}_{gs}^{(\ell)\varepsilon} \text{ et } \Gamma_g^\varepsilon & \\
\omega^\varepsilon = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{g\ell}^\varepsilon &
\end{array}\right.
$$

où $\chi_g^{(\ell)\varepsilon}$ vaut 1 dans $\Omega_g^{(\ell)\varepsilon}$ et 0 ailleurs (fonction caractéristique de $\Omega_g^{(\ell)\varepsilon}$).

2-1) Développement asymptotique et équations locales:

On cherche T^ε et ω^ε sous la forme d'un développement asymptotique dont les termes dépendent de deux variables $x \in \Omega$ et $y \in Y$. La première variable x, dite "macroscopique", mesure les variations de $(T^\varepsilon, \omega^\varepsilon)$ dans la région de Ω qui nous intéresse, la deuxième variable y, dite "microscopique" mesure les variations de $(T^\varepsilon, \omega^\varepsilon)$ au sein d'une période.

$$
\begin{aligned}
(2\text{-}5) \qquad & T^\varepsilon = u_0(x,y) + \varepsilon\, u_1(x,y) + \varepsilon^2\, u_2(x,y) + \varepsilon^3 u_3(x,y) + \ldots\ldots \\
& \omega^\varepsilon = w_0(x,y) + \varepsilon\, w_1(x,y) + \varepsilon^2\, w_2\,(x,y) + \varepsilon^3 w_3(x,y) + \ldots\ldots \\
& y = \frac{x}{\varepsilon}
\end{aligned}
$$

où les $u_j(x,y)$ et les $w_j(x,y)$ sont des fonctions régulières et Y- périodiques en y (la période est l_i - côté de Y - dans chaque direction y_i)

Avant de reporter (2-5) dans les équations (2-4) il faut signaler que pour une fonction ψ^ε définie sur Ω par $\psi^\varepsilon(x) = \psi(x, \frac{x}{\varepsilon})$ où ψ est définie sur $\Omega \times Y$ on a:

$$
\frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial x_i}(x) = \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \psi}{\partial y_i} + \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right)(x, \frac{x}{\varepsilon})
$$

L'opérateur $A^\varepsilon = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mu^\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_i}\right)$ devient donc $\varepsilon^{-2} A_{-2} + \varepsilon^{-1} A_{-1} + A_o$ où:

$$
(2\text{-}6) \quad \left|
\begin{aligned}
A_{-2} &= -\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\mu \frac{\partial}{\partial y_i}\right) \\
A_{-1} &= -\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\mu \frac{\partial}{\partial x_i}\right) - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mu \frac{\partial}{\partial y_i}\right) \\
A_o &= -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mu \frac{\partial}{\partial x_i}\right)
\end{aligned}
\right.
$$

De la même façon, l'opérateur Laplacien $-\Delta^\varepsilon$ devient $\varepsilon^{-2} \Delta_y + \varepsilon^{-1} 2\, \Delta_{yx} + \Delta_x$ où:

$$
(2\text{-}7) \quad \left|
\begin{aligned}
\Delta_y &= -\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right) \\
\Delta_{yx} &= -\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) \\
\Delta_x &= -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)
\end{aligned}
\right.
$$

On reporte (2-5) dans les équations (2-4) en tenant compte des transformations (2-6) et (2-7) des opérateurs A^{ε} et Δ^{ε}. Après identification des termes en puissances du paramètre ε, on obtient les équations locales (en la variable microscopique y) vérifiées par les termes u_j et les w_j du développement asymptotique (2-5); dans ces équations la variable macroscopique x est considéré comme un paramètre :

(2-8)	$A_{-2}\, u_0$	$= 0$	dans chaque Y_α
(2-9)	$A_{-2}\, u_1 + A_{-1}\, u_0$	$= 0$	dans chaque Y_α
(2-10)	$A_{-2}\, u_2 + A_{-1}\, u_1 + A_0\, u_0$	$= \left(1 + \frac{\eta\omega_1}{\lambda_g}\, \chi_g^{(\ell)}\right) f_\alpha$	dans chaque Y_α
(2-11)	$A_{-2}\, u_{j+2} + A_{-1}\, u_{j+1} + A_0\, u_j$	$= 0$	$\forall\ j \geq 1$

(2-12)	$\Delta_y\, W_0$	$= 0$	dans $Y_g^{(\ell)}$
(2-13)	$\Delta_y\, W_1 + 2\,\Delta_{yx}\, W_0$	$= 0$	dans $Y_g^{(\ell)}$
(2-14)	$\Delta_y\, W_2 + 2\,\Delta_{yx}\, W_1 + \Delta_x\, W_0$	$= h - \frac{\omega_1}{\lambda_g} f$	dans $Y_g^{(\ell)}$
(2-15)	$\Delta_y\, W_{j+2} + 2\,\Delta_{yx}\, W_{j+1} + \Delta_x\, W_j$	$= 0$	$\forall\ j \geq 1$

De manière analogue on reporte le développement (2-5) dans les conditions aux interfaces des équations (2-4), où n désigne cette fois la normale aux interfaces $\mathcal{A}_{\alpha\beta}$ séparant les Y_α des Y_β avec la même convention d'orientation:

la normale n est orientée sur chaque interface $\mathcal{A}_{\alpha\beta}$ de Y_α vers Y_β.

Après identification en puissances de ε on obtient:

<u>Pour la température T^{ε}</u> :

Sur $\mathcal{A}_{\mathcal{E}}$ et $\mathcal{A}_{\mathcal{E}}^{(\ell)}$:

$$(2\text{-}16)\quad \left|\begin{array}{lll} [\![u_j]\!] & = 0 & \forall\, j \geq 0 \\ [\![\mu \dfrac{\partial u_0}{\partial x_i} n_i]\!] & = -\eta \dfrac{\partial w_0}{\partial x_i} n_i & \\ [\![\mu \left(\dfrac{\partial u_{j+1}}{\partial y_i} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_i]\!] & = -\eta \left(\dfrac{\partial w_{j+1}}{\partial y_i} + \dfrac{\partial w_j}{\partial x_i} \right) n_i & \forall\, j \geq 0 \end{array}\right.$$

Sur $\mathcal{A}_{\mathcal{E}}$ et $\mathcal{A}_{\mathcal{E}}^{(*)}$:

$$(2\text{-}17)\quad \left|\begin{array}{lll} [\![u_j]\!] & = 0 & \forall\, j \geq 0 \\ [\![\mu \dfrac{\partial u_0}{\partial y_i} n_i]\!] & = 0 & \\ [\![\mu \left(\dfrac{\partial u_{j+1}}{\partial y_i} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_i]\!] & = 0 & \forall\, j \geq 0 \end{array}\right.$$

Sur Γ^Y :

(2-18) les u_j sont Y-périodiques

<u>Pour la fraction massique de vapeur translatée ω^{ε}</u> :

Sur $\mathcal{A}_{\mathcal{E}}^{(\ell)}$:

$$(2\text{-}19)\quad \left|\begin{array}{lll} \dfrac{\partial w_0}{\partial y_i} n_i & = -\omega_1 \dfrac{\partial u_0}{\partial y_i} n_i & \\ [\![\left(\dfrac{\partial w_{j+1}}{\partial y_i} + \dfrac{\partial w_j}{\partial x_i} \right) n_i]\!] & = -\omega_1 \left(\dfrac{\partial u_{j+1}}{\partial y_i} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j & \forall\, j \geq 0 \end{array}\right.$$

Sur $\mathcal{A}_{\mathcal{E}}$:

(2-20) $w_j = 0$ $\forall\, j \geq 0$

Sur Γ^Y :

(2-21) les w_j sont Y-périodiques

2-2) Etudes des équations locales:

Les équations vérifiées par les termes (u_j, w_j) du développement asymptotique sont toutes du même type; on va étudier d'abord une équation générale puis appliquer le résultat aux équations locales en (u_j, w_j).

2-2-1/ Etude d'une équation générale:

On introduit les espaces fonctionnels suivants:

$$(2\text{-}22)\quad \left|\begin{array}{l} \mathcal{V}_Y = \left\{ v \in H^1(Y);\ v \ \ Y\text{-périodique} \right\} \\ \mathcal{W}_Y = \left\{ \varphi \in H^1(Y_g^{(\ell)});\ \varphi = 0 \text{ sur } \mathcal{A}_g \text{ et } Y\text{-périodique} \right\} \\ E_Y = \mathcal{V}_Y \times \mathcal{W}_Y \end{array}\right.$$

La notion ψ est Y-périodique signifie que la fonction ψ prend des valeurs égales en deux points opposés sur les faces de Y [5] [30] . Munis respectivement des produits scalaires (et des normes associées) usuels sur $H^1(Y)$, $H^1(Y_g^{(\ell)})$ et $H^1(Y_g^{(\ell)}) \times H^1(Y)$ ces espaces sont de Hilbert.

Soient:

$$(2\text{-}23)\quad \begin{cases} F \text{ et } H \text{ deux fonctions de } L^2(\Omega \times Y) \\ \hat{\theta} \text{ et } \hat{\xi} \text{ deux fonctions de } H^1(\Omega \times Y) \text{ Y-périodique en la variable } y \end{cases}$$

On définit pour tout (θ, ξ) et (v, φ) de l'espace E_Y les deux formes suivantes:

$$
(2\text{-}24)\quad
\begin{cases}
a((\theta,\xi),(v,\varphi)) = \displaystyle\int_Y \omega_1\mu\nabla\theta.\nabla v\,dy + \int_{Y_g^{(\ell)}} \omega_1\eta(\nabla\theta.\nabla\varphi+\nabla\xi\nabla v)\,dy + \int_{Y_g^{(\ell)}} \eta\nabla\xi.\nabla\varphi\,dy \\
L((v,\varphi)) = L_{\mathcal{V}}(v) + L_{\mathcal{W}}(\varphi) + \hat{L}_{\mathcal{V}}(v) + \hat{L}_{\mathcal{W}}(\varphi)
\end{cases}
$$

où :

$$
\begin{aligned}
L_{\mathcal{V}}(v) &= \int_Y \omega_1(F + \eta H\chi_g^{(\ell)})\, v\,dy \\
L_{\mathcal{W}}(\varphi) &= \int_{Y_g^{(\ell)}} \eta\left(H + \frac{\omega_1}{\mu_g}F\right)\varphi\,dy + \\
\hat{L}_{\mathcal{V}}(v) &= \int_Y \omega_1\left(\mu\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial x_i} + \frac{\partial\hat{\xi}}{\partial x_i}\chi_g^{(\ell)}\right)\frac{\partial v}{\partial y_i}\,dy \\
\hat{L}_{\mathcal{W}}(\varphi) &= \int_{Y_g^{(\ell)}} \eta\left(\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial x_i} + \frac{\partial\hat{\xi}}{\partial x_i}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y_i}\,dy
\end{aligned}
$$

Soit le problème en (θ, ξ) suivant :

$$
(2\text{-}25)\quad
\begin{cases}
-\dfrac{\partial}{\partial y_i}\left(\mu\left(\dfrac{\partial\theta}{\partial y_i} + \dfrac{\partial\hat{\theta}}{\partial x_i}\right)\right) = F & \text{dans chaque } Y_\alpha \\
[\![\,\theta\,]\!]_{\alpha\beta} = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{\alpha\beta}\ (\alpha,\beta = g,\ell,s) \\
[\![\,\mu\left(\dfrac{\partial\theta}{\partial y_i} + \dfrac{\partial\hat{\theta}}{\partial x_i}\right)n_i\,]\!] = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{\ell s} \text{ et } \mathcal{A}_{gs}^{(*)} \\
[\![\,\mu\left(\dfrac{\partial\theta}{\partial y_i} + \dfrac{\partial\hat{\theta}}{\partial x_i}\right)n_i\,]\!] = -\eta\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial y_i} + \dfrac{\partial\hat{\xi}}{\partial x_i}\right)n_i & \text{sur } \mathcal{A}_{g\ell} \text{ et } \mathcal{A}_{gs}^{(\ell)} \\
\theta \text{ est } Y\text{-périodique} & \\
-\dfrac{\partial}{\partial y_i}\left(\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial y_i} + \dfrac{\partial\hat{\xi}}{\partial x_i}\right)\right) = H & \text{dans } Y_g^{(\ell)} \\
\xi = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{g\ell} \\
\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial y_i} + \dfrac{\partial\hat{\xi}}{\partial x_i}\right)n_i = -\omega_1\left(\dfrac{\partial\theta}{\partial y_i} + \dfrac{\partial\hat{\theta}}{\partial x_i}\right)n_i & \text{sur } \mathcal{A}_{gs}^{(\ell)} \\
\xi \text{ est } Y\text{-périodique} &
\end{cases}
$$

proposition 2-1:

Sous les hypothèses (2-23), *le problème* (2-25) *se met sous la forme variationnelle suivante:*

$$(2\text{-}26)\quad \begin{cases} (\theta,\xi) \in E_Y \quad \text{et } \forall\ (v,\varphi) \in E_Y \\ a((\theta,\xi),(v,\varphi)) = L((v,\varphi)) \end{cases}$$

Ce problème admet une solution unique à une constante (fonction de la variable x seulement) près si et seulement si la condition de compatibilité ci-dessous est satisfaite:

$$\int_Y \left(F + \eta H X_g^{(\ell)} \right)(y)\, dy = 0$$

Démonstration:

Cette proposition se démontre comme le téorème 1-1. Pour simplifier l'écriture, on notera dans la suite :

$$P_i = \mu \left(\frac{\partial\theta}{\partial y_i} + \frac{\partial\hat{\theta}}{\partial x_i}\right) \qquad \text{et} \qquad Q_i = \left(\frac{\partial\xi}{\partial y_i} + \frac{\partial\hat{\xi}}{\partial x_i}\right)$$

i) on multiplie la première équation de (2-25) par une fonction test v de $\mathcal{V}_Y$ et on intègre par parties (formule de Green) sur chaque Y_α ($\alpha = g,\ell,s$):

$$\int_{Y_\alpha} P_i \frac{\partial v}{\partial y_i} dy = \int_{Y_\alpha} F\ v\, dy + \int_{\partial Y_\alpha} P_i v\, n_i\ d\sigma \qquad (\alpha = g,\ell,s)$$

où n représente la normale extérieure à chaque Y_α.

Grâce aux conditions de périodicité, les intégrales sur les faces de Y s'annulent; en convenant que la normale n est orientée sur chaque $\mathcal{A}_{\alpha\beta}$ de Y_α vers Y_β et en exploitant les conditons sur les interfaces, la somme des relations précédentes (sur $\alpha = g,\ell,s$) est:

$$(2\text{-}27)\quad \int_Y P_i \frac{\partial v}{\partial y_i} dy = \int_Y F\ v\ dy + \int_{\mathcal{A}_g} P_i v\, n_i\ d\sigma + \int_{\mathcal{A}_g^{(\ell)}} P_i v\, n_i\ d\sigma$$

Mais, en utilisant les conditions sur les interfaces $\mathcal{A}_{g\ell}$ et $\mathcal{A}_{gs}^{(\ell)}$ puis la formule de Green et la périodicité de P_i, Q_i et de v, on a:

$$\int_{\mathcal{A}_{g\ell} \cup \mathcal{A}_{gs}^{(\ell)}} P_i v\, n_i \, d\sigma = - \int_{\mathcal{A}_{g\ell} \cup \mathcal{A}_{gs}^{(\ell)}} \eta \; Q_i v\, n_i \, d\sigma = - \int_{\partial Y_g^{(\ell)}} \eta \; Q_i v\, n_i \, d\sigma$$

$$= - \int_{Y_g^{(\ell)}} \eta \frac{\partial Q_i}{\partial y_i} v \, dy - \int_{Y_g^{(\ell)}} \eta \frac{\partial Q_i}{\partial y_i} \frac{\partial v}{\partial y_i} \, dy$$

$$= \int_{Y_g^{(\ell)}} \eta \, H \, v \, dy - \int_{Y_g^{(\ell)}} \eta \frac{\partial Q_i}{\partial y_i} \frac{\partial v}{\partial y_i} \, dy$$

La relation (2-27) devient alors:

$$\boxed{(2\text{-}28) \qquad \int_Y P_i \frac{\partial v}{\partial y_i} dy + \int_{Y_g^{(\ell)}} Q_i \frac{\partial v}{\partial y_i} dy = \int_Y F \; v \, dy + \int_{Y_g^{(\ell)}} \eta \, H \; v \; dy = \frac{1}{\omega_1} L_{\mathcal{V}}(v)}$$

On multiplie la sixième équation de (2-25) par une fonction test φ de $\mathcal{W}_Y$ et on intègre par parties sur $Y_g^{(\ell)}$:

$$(2\text{-}29) \qquad \int_{Y_g^{(\ell)}} Q_i \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} dy = \int_{Y_g^{(\ell)}} H \; \varphi \; dy + \int_{\mathcal{A}_{gs}^{(\ell)}} Q_i \; \varphi \; n_i \; d\sigma$$

Comme précédement, en utilisant les conditions sur $\mathcal{A}_{gs}^{(\ell)}$ et sur $\mathcal{A}_{g\ell}$ et la périodicité on a:

$$\int_{\mathcal{A}_{gs}^{(\ell)}} Q_i \; \varphi \; n_i \; d\sigma = \int_{\mathcal{A}_{gs}^{(\ell)}} - \frac{\omega_1}{\mu_g} P_i \; \varphi \; n_i \; d\sigma = \int_{\partial Y_g^{(\ell)}} - \frac{\omega_1}{\mu_g} P_i \; \varphi \; n_i \; d\sigma$$

$$= \int_{Y_g^{(\ell)}} - \frac{\omega_1}{\mu_g} \frac{\partial P_i}{\partial y_i} \varphi \, dy - \int_{Y_g^{(\ell)}} \frac{\omega_1}{\mu_g} P_i \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} dy -$$

$$= \int_{Y_g^{(\ell)}} \frac{\omega_1}{\mu_g} F \; \varphi \, dy - \int_{Y_g^{(\ell)}} \frac{\omega_1}{\mu_g} P_i \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} dy$$

La relation (2-29) devient alors:

$$(2\text{-}30)\qquad \int_{Y_g^{(\ell)}} Q_i \frac{\partial\varphi}{\partial y_i}\,dy + \int_{Y_g^{(\ell)}} \frac{\omega_1}{\mu_g} P_i \frac{\partial\varphi}{\partial y_i}\,dy = \int_{Y_g^{(\ell)}} H\,\varphi\,dy + \int_{Y_g^{(\ell)}} \frac{\omega_1}{\mu_g} F\varphi\,dy = \frac{1}{\eta} L_{\psi}(\varphi)$$

Il suffit alors de multiplier (2-28) par ω_1 et (2-30) par η et de faire la somme pour obtenir le problème variationnel (2-26) de la proposition 2-1.

ii) Pour l'existence et l'unicité de la solution de (2-26) on utilise le lemme de Lax-Milgram. La linéarité de L(.) et la bilinéarité de a(. ..) sont évidentes, leur continuité s'obtient aisément, comme dans le paragraphe précédent, grâce aux inégalités de Cauchy Schwarz:

<u>continuité de L(.):</u>

- $\left|L((v,\varphi))\right| \le \sqrt{2}\max(M,\hat{M})\left\|(v,\varphi)\right\|_E$

$$M = \max\left(\omega_1 \left\|F+\eta H X_g^{(\ell)}\right\|_{L^2(Y)} ;\ \left\|\eta\ \left(H + \frac{\omega_1}{\mu_g} F\right) X_g^{(\ell)}\right\|_{L^2(Y)}\right)$$

$$\hat{M} = \max\left(\left\|\omega_1 \left(\mu \frac{\partial\hat{\theta}}{\partial x_i} + \frac{\partial\hat{\xi}}{\partial x_i} X_g^{(\ell)}\right)\right\|_{L^2(Y)} ;\ \left\|\eta \left(\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial x_i} + \frac{\partial\hat{\xi}}{\partial x_i}\right) X_g^{(\ell)}\right\|_{L^2(Y)}\right)$$

<u>continuité de a(. , .):</u>

- $\left|a((\theta,\xi),(v,\varphi))\right| \le C\left\|(\theta,\xi)\right\|_E \left\|(v,\varphi)\right\|_E$

$$C = 2\max(\omega_1 \sup_Y(\mu),\ \eta,\ \omega_1\eta)$$

Pour démontrer la coercivité de $a(.,.)$, on procède de manière analogue à la démonstration du téorème 1-1. Il suffit de remplacer dans les relations (1-19) à (1-21), Ω (resp. $\mathcal{V}$) par Y (resp. $\mathcal{V}_Y$) et $\Omega_g^{(\ell)\varepsilon}$ (resp. $\mathcal{W}^\varepsilon$) par $Y_g^{(\ell)}$ (resp. $\mathcal{W}_Y$), pour montrer qu'il existe une constante C telle que:

- $$\left|a((v,\varphi),(v,\varphi))\right| \geq C_1\left(\int_Y (\nabla v)^2 dy + \int_{Y_g^{(\ell)}} (\nabla\varphi)^2 dy \right)$$

$$C_1 = \omega_1 \mathrm{Min}\left(\eta \frac{\lambda_g}{2\omega_1\eta + \lambda_g} ; \frac{\lambda_g}{2} ; \min(\lambda_\ell, \lambda_g) \right)$$

Puisque $\varphi = 0$ sur $\mathcal{A}_{g\ell}$, l'inégalité de Poincaré donne :

$$\int_{Y_g^{(\ell)}} (\nabla\varphi)^2 dx \geq C_2\left(\int_{Y_g^{(\ell)}} (\nabla\varphi)^2 dy + \int_{Y_g^{(\ell)}} \varphi^2 \, dy \right)$$

ce qui n'est pas valable cette fois pour $\int_Y (\nabla v)^2 dx$.

d'où:

$$\boxed{(2\text{-}31) \quad a((v,\varphi),(v,\varphi)) \geq C\left(\int_Y (\nabla v)^2 dy + \int_{Y_g^{(\ell)}} \varphi^2 \, dy + \int_{Y_g^{(\ell)}} (\nabla\varphi)^2 \, dy \right)}$$

Ainsi $a((v,\varphi),(v,\varphi)) = 0$ si et seulement si:

$\varphi = 0$ et $\frac{\partial v}{\partial y_i}(x,y) = 0$ donc v est constante (par rapport à la variable y)

D'après l'alternative de Fredholm, le problème (2-26) admet donc une solution si et seulement si:

$$L((c,0)) = \int_Y c(F + \eta H\chi_g^{(\ell)})(y) \, dy = 0 \qquad \forall\, c \in \mathbb{R}$$

d'où la condition de compatibilité de la proposition; de plus ξ est déterminée d'une manière unique et θ à une constante (par rapport à la variable y) près. □

2-2 -2 équations en (u_0, w_0):

corollaire 2-1:

Le premier terme $(u_0\ ,\ w_0)$ *du développement* (2-5) *vérifie:*

(2-32) $u_0\,(x\,,y) = u(x)$ *et* $w_0\ (x\,,y) = 0$

démonstration:

D'après (2-8),(2-12) et (2-16) à (2-21) le couple (u_0, w_0) vérifie les équations suivantes:

$$
(2\text{-}33)\quad \left|\begin{array}{lll}
-\dfrac{\partial}{\partial y_i}\left(\mu\ \left(\dfrac{\partial u_0}{\partial y_i}\right)\right) = 0 & & \text{dans chaque } Y_\alpha \\
[\![\ u_0\ ]\!]_{\alpha\beta} = 0 & & \text{sur } \mathcal{A}_{\alpha\beta}\ (\alpha,\beta = g,\ell,s) \\
[\![\ \mu\ \dfrac{\partial u_0}{\partial y_i} n_i\ ]\!] = 0 & & \text{sur } \mathcal{A}_{\ell s} \text{ et } \mathcal{A}_{gs}^{(*)} \\
[\![\ \mu\ \dfrac{\partial u_0}{\partial y_i} n_i\ ]\!] = -\eta\ \dfrac{\partial w_0}{\partial y_i} n_i & & \text{sur } \mathcal{A}_{g\ell} \text{ et } \mathcal{A}_{gs}^{(\ell)} \\
u_0 \quad Y\text{ - périodique} & & \\
 & & \\
\dfrac{\partial^2\ w_0}{\partial y_i \partial y_i} = 0 & & \text{dans } Y_g^{(\ell)} \\
w_0 = 0 & & \text{sur } \mathcal{A}_{g\ell} \\
\dfrac{\partial w_0}{\partial y_i} n_i = -\omega_i \dfrac{\partial u_0}{\partial y_i}\ n_i & & \text{sur } \mathcal{A}_{gs}^{(\ell)} \\
w_0 \quad Y\text{ - périodique} & &
\end{array}\right.
$$

Ce problème est analogue à (2-25) avec :

$$\theta = u_0\ ,\ \xi = w_0\ ,\ F = H = 0 \text{ et } \hat{\xi} = \hat{\theta} = 0 \qquad \text{donc } L((v,\varphi)) = 0.$$

Le problème variationnel associé s'écrit alors d'après la proposition 2-1:

$$a((u_0, w_0),(v,\varphi)) = 0 \qquad\qquad \forall\ (v,\varphi) \in E_Y$$

En prenant $(v,\varphi) = (u_0, w_0)$ on a d'après (2-31):

$$\frac{\partial u_0}{\partial y_i} = 0\ \ (i = 1,2,3) \text{ et } w_0 = 0. \qquad \square$$

2-2-3 équations en (u_1, w_1):

Grâce au fait que u_0 ne dépend que de x on va pouvoir exprimer (u_1, w_1) à l'aide de fonctions vérifiant des problèmes simples sur la cellule Y. On introduit la moyenne d'une fonction v sur la cellule de base Y:

$$\mathcal{M}_Y(v)(x) = \frac{1}{\text{mes}(Y)} \int_Y v(x,y)\, dy$$

corollaire 2-2:

w_1 est unique, u_1 est déterminé à une constante près, et s'écrivent:

$$\text{(2-34)} \quad u_1(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\, \chi^j(y) + \mathcal{M}_Y(u_1)(x)$$

$$w_1(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\, \psi^j(y)$$

où les (χ^j, ψ^j) (j = 1.. n) sont les solutions uniques de :

$$\text{(2-35)} \quad (\chi^j, \psi^j) \in E_Y \quad \text{avec} \quad \int_Y \chi^j(y)\, dy = 0$$

$$a((\chi^j, \psi^j), (v, \varphi)) = - \int_Y \omega_1 \mu \frac{\partial v}{\partial y_j}\, dy - \int_{Y_g^{(\ell)}} \eta \frac{\partial \varphi}{\partial y_j}\, dy \quad \forall\, (v, \varphi) \in E_Y$$

démonstration:

D'après les relations (2-9), (2-13) et (2-16) à (2-21) et cmopte-tenu que u_0 ne dépend que de la variable x, les équations en (u_1, w_1) s'écrivent:

$$\text{(2-36)} \quad \left| \begin{array}{lll}
-\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial y_i} + \frac{u}{\partial x_i} \right)\right) = 0 & & \text{dans chaque } Y_\alpha \\
[\![u_1]\!]_{\alpha\beta} = 0 & & \text{sur } \mathcal{A}_{\alpha\beta} \ (\alpha, \beta = g, \ell s) \\
[\![\mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial y_i} + \frac{u}{\partial x_i} \right) n_i]\!] = 0 & & \text{sur } \mathcal{A}_{\ell s} \text{ et } \mathcal{A}_{gs}^{(*)} \\
[\![\mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial y_i} + \frac{u}{\partial x_i} \right) n_i]\!] = -\eta \frac{\partial w_1}{\partial y_i} n_i & & \text{sur } \mathcal{A}_{g\ell} \text{ et } \mathcal{A}_{gs}^{(\ell)} \\
\frac{\partial^2 w_1}{\partial y_i \partial y_i} = 0 & & \text{dans } Y_g^{(\ell)} \\
w_1 = 0 & & \text{sur } \mathcal{A}_{g\ell} \\
\frac{\partial w_1}{\partial y_i} n_i = -\omega_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial y_i} + \frac{u}{\partial x_i} \right) n_i & & \text{sur } \mathcal{A}_{gs}^{(\ell)} \\
u_1 \text{ et } w_1 \text{ sont } Y\text{- périodiques.} & &
\end{array} \right.$$

L'existence d'une solution (u_1, w_1) est assurée par la proposition 2-1 puisque c'est le même problème que (2-25) avec:

$$(\theta, \xi) = (u_1, w_1) \quad , \quad (\hat{\theta}, \hat{\xi}) = (u, 0) \quad , \quad F = H = 0 \, .$$

et la condition de compatibilité est satisfaite.

De même, les problèmes (2-35) admettent des solutions (χ^j, ψ^j)(on est toujours dans le cadre de la propositon 2-1 ; de plus, puisqu'on impose aux χ^j d'avoir une moyenne nulle, les solutions χ^j, comme les ψ^j, sont uniques.

Le problème variationnel vérifié par (u_1, w_1) est:

$$\text{(2-37)} \quad a((u_1, w_1), (v, \varphi)) = - \int_Y \omega_1 \mu \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial y_i} \, dy - \int_{Y_g^{(\ell)}} \eta \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \, dy \quad \forall \, (v, \varphi) \in E_Y$$

$$= - \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \left(\int_Y \omega_1 \mu \frac{\partial v}{\partial y_i} \, dy + \int_{Y_g^{(\ell)}} \eta \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \, dy \right)$$

L'interpretation du problème variationnel (2-35) vérifié par les(χ^j, ψ^j) est la suivante:

$$\text{(2-38)} \quad \left| \begin{array}{ll}
-\dfrac{\partial}{\partial y_i}\left(\mu \dfrac{\partial}{\partial y_i} (\chi^j + y_j)\right) = 0 & \text{dans chaque } Y_\alpha \\
[\![\chi^j]\!]_{\alpha\beta} = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{\alpha\beta} \ (\alpha, \beta = g, \ell, s) \\
[\![\mu \dfrac{\partial}{\partial y_i} (\chi^j + y_j) n_i]\!] = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{\ell s} \text{ et } \mathcal{A}_{gs}^{(*)} \\
[\![\mu \dfrac{\partial}{\partial y_i} (\chi^j + y_j) n_i]\!] = - \eta \dfrac{\partial \psi^j}{\partial y_i} n_i & \text{sur } \mathcal{A}_{g\ell} \text{ et } \mathcal{A}_{gs}^{(\ell)} \\
\dfrac{\partial^2 \psi^j}{\partial y_i \partial y_i} = 0 & \text{dans } Y_g^{(\ell)} \\
\psi^j = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{g\ell} \\
\dfrac{\partial \psi^j}{\partial y_i} n_i = - \omega_1 \dfrac{\partial}{\partial y_i} (\chi^j + y_j) n_i & \text{sur } \mathcal{A}_{gs}^{(\ell)} \\
\chi^j \text{ et } \psi^j \text{ sont Y - périodiques et } \displaystyle\int_Y \chi^j(y) \, dy = 0 &
\end{array} \right.$$

En comparant (2-37), avec (2-35), après multiplication par $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ et sommation sur l'indice j, ou (2-36) avec (2-38), il est clair que (u_1, w_1) vérifie le même problème que $\frac{\partial u}{\partial x_j}(\chi^j, \psi^j)$, la seule différence est que χ^j est de moyenne nulle, d'où (2-34).

2-2-4 équations en (u_2, w_2):

corollaire 2-3:

w_2 est déterminé d'une façon unique, u_2 à une constante additive près, si et seulement si:

$$(2\text{-}39)\qquad \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\left(\int_Y \mu\left(\frac{\partial \chi^j}{\partial y_i}(y) + \delta_{ij}\right) dy + \eta \int_{Y_g^{(\ell)}} \frac{\partial \psi^j}{\partial y_i}(y)\, dy\right) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\right\} = \int_Y \left(f + \eta\, h\, \chi_g^{(\ell)}\right)(x,y)\,dy$$

démonstration:

On pose pour simplifier l'écriture:

$$(2\text{-}40)\qquad P = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial y_i} + \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right),\quad Q = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial w_1}{\partial x_i}\right)$$

D'après les relations (2-10), (2-13), (2-15) à (2-20) le couple (u_2, w_2) vérifie:

$$(2\text{-}41)\qquad \left|\begin{array}{lll}
-\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\mu\left(\frac{\partial u_2}{\partial y_i} + \frac{u_1}{\partial x_i}\right)\right) = \left(1 + \frac{\eta\omega_1}{\lambda_g}\chi_g^{(\ell)}\right) f_\alpha + P & & \text{dans chaque } Y_\alpha \\
[\![u_2]\!]_{\alpha\beta} = 0 & & \text{sur } \mathcal{A}_{\alpha\beta}\ (\alpha,\beta = g,\ell,s) \\
[\![\mu\left(\frac{\partial u_2}{\partial y_i} + \frac{\partial u_1}{\partial x_i}\right) n_i]\!] = 0 & & \text{sur } \mathcal{A}_{\eta s} \text{ et } \mathcal{A}_{gs}^{(*)} \\
[\![\mu\left(\frac{\partial u_2}{\partial y_i} + \frac{\partial u_1}{\partial x_i}\right) n_i]\!] = -\eta\left(\frac{\partial w_2}{\partial y_i} + \frac{\partial w_1}{\partial x_i}\right) n_i & & \text{sur } \mathcal{A}_{g\ell} \text{ et } \mathcal{A}_{gs}^{(\ell)} \\
-\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{\partial w_2}{\partial y_i} + \frac{w_1}{\partial x_i}\right) = h - \frac{\omega_1}{\lambda_g} f + Q & & \text{dans } Y_g^{(\ell)} \\
w_2 = 0 & & \text{sur } \mathcal{A}_{g\ell} \\
\left(\frac{\partial w_2}{\partial y_i} + \frac{w_1}{\partial x_i}\right) n_i = -\omega_1\left(\frac{\partial u_2}{\partial y_i} + \frac{\partial u_1}{\partial x_i}\right) n_i & & \text{sur } \mathcal{A}_{gs}^{(\ell)} \\
u_2 \text{ et } w_2 \text{ sont } Y\text{-périodiques} & &
\end{array}\right.$$

On est dans le cadre de la proposition 2-1 avec :

$$(\theta, \xi) = (u_2, w_2), \quad (\hat{\theta}, \hat{\xi}) = (u_1, w_1), \quad F = \left(1 + \frac{\eta\omega_1}{\lambda_g}\chi_g^{(\ell)}\right) f_\alpha + P \quad \text{et} \quad H = h - \frac{\omega_1}{\lambda_g} f + Q.$$

La condition nécessaire et suffisante pour l'existence de (u_2, w_2) est alors:

$$\int_Y \left\{ \left(1 + \frac{\eta\omega_1}{\lambda_g}\chi_g^{(\ell)}\right) f_\alpha + P + \eta\chi_g^{(\ell)}\left(h - \frac{\omega_1}{\lambda_g} f + Q\right) \right\}(x,y)dy = 0$$

c'est à dire:

$$\text{(2-42)} \qquad \int_Y (f + P + \eta(h+Q)\chi_g^{(\ell)})(x,y)dy = 0$$

Mais d'après les notations (2-40) et l'expression (2-34) de (u_1, w_1), ceci s'écrit:

$$\int_Y -\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{ \mu \left(\frac{\partial\chi^j}{\partial y_i} + \delta_{ij}\right) \frac{\partial u}{\partial x_j}\right\} dy + \eta \int_{Y_g^{(\ell)}} -\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{ \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial\psi^j}{\partial y_i}\right\} dy =$$

$$= \int_Y (f + \eta\, h\, \chi_g^{(\ell)})(x,y)\, dy$$

puisque:

$$P = \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial\chi^j}{\partial y_i} + \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right\} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\mu\left(\frac{\partial\chi^j}{\partial y_i} + \delta_{ij}\right)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\}$$

$$Q = \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial\psi^j}{\partial y_i}\right\}$$

En permutant le signe dérivation par rapport aux x_i et le signe intégration sur Y et $Y_g^{(\ell)}$ et puisque u ne dépend que de x on a la relation (2-39) du corollaire 2-3. □

2-3) Comportement macroscopique et conductivités homogénéisées:

La relation (2-39) est analogue à une équation de la chaleur en régime stationnaire écrite dans un matériau homogène occupant le domaine Ω et de conductivités thermiques K_{ij} données par :

$$(2\text{-}43) \quad K_{ij} = \frac{1}{|Y|} \left\{ \int_Y \mu \left(\frac{\partial \chi^j}{\partial y_i}(y) + \delta_{ij} \right) dy + \eta \int_{Y_g^{(\ell)}} \frac{\partial \psi^j}{\partial y_i}(y)\, dy \right\}$$

où les (χ^j, ψ^j) sont les solutions uniques de (2-35).

La température " homogénéisée " étant u et la source de chaleur est donnée par:

$$(2\text{-}44) \qquad r(x) = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left(f + \eta\, h\chi_g^{(\ell)} \right)(x,y)dy = \mathcal{M}_Y\left(f + \eta\, h\chi_g^{(\ell)} \right)$$

La conditon naturelle que doit satisfaire u sur le bord extérieur de Ω est la même que celle vérifiée par T^ϵ:

$$u = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma = \partial\Omega$$

Grâce à des propriétés des K_{ij} qu'on établira, on va démontrer que le problème homogénéisé (2-39) vérifié par u, auquel on ajoute la condition u = 0 sur le bord, admet une solution unique.

Téorème 2-1:

Sous les hypothèses (2-2) *on a :*

i) *Les conductivités apparentes* K_{ij} *, donnée par* (2-43), *s'écrivent sous la forme symétrique en i et j :*

$$K_{ij} = \frac{1}{|Y|}\left(\int_Y \lambda \frac{\partial}{\partial y_m}(\chi^j + y_j)\frac{\partial}{\partial y_m}(\chi^i + y_i)dy\right) +$$

$$+ \frac{1}{|Y|}\left\{\int_{Y_g^{(\ell)}} \omega_1 \eta \frac{\partial}{\partial y_m}\left(\chi^j + y_j + \frac{\psi^j}{\omega_1}\right)\frac{\partial}{\partial y_m}\left(\chi^i + y_i + \frac{\psi^i}{\omega_1}\right)dy\right\}$$

de plus : $\exists\ \gamma > 0\ /\quad K_{ij}\, x_i x_i \geq \gamma |x|^2 \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}^n$.

ii) *Le problème homogénéisé:*

$$(2\text{-}45)\qquad \begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(K_{ij}\dfrac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right) = r\ (x) & \textit{dans}\ \Omega \\ u = 0 & \textit{sur}\ \partial\Omega \end{cases}$$

admet une solution unique dans $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$.

Démonstration:

i) On va d'abord reécrire les K_{ij} sous une autre forme, on utilisant le problème variationnel (2-35) vérifié par les (χ^j, ψ^j).

Les conductivités K_{ij} s'écrivent en utilisant la définition de μ dans leur expression (2-43):

$$|Y|\, K_{ij} = \int_Y \lambda \frac{\partial}{\partial y_i}(\chi^j + y_j)\, dy + \int_{Y_g^{(\ell)}} \omega_1 \eta \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\chi^j + y_j + \frac{\psi^j}{\omega_1}\right) dy$$

(rappel: $\mu\ (y) = \lambda\ (y) + \eta\ \omega_1 \chi_g^{(\ell)}\ (y)$)

D'après l'expression (2-23) de la forme bilinéaire $a(.,.)$ et la définition (2-2) de μ, on peut mettre (2-35) sous la forme:

$$(2\text{-}46)\quad \left|\begin{array}{l} (\chi^j,\psi^j) \in E_Y \ , \ \displaystyle\int_Y \chi^j(y)\,dy = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall\ (v,\varphi) \in E_Y \\ \displaystyle\int_Y \lambda\frac{\partial}{\partial y_m}(\chi^j + y_j)\frac{\partial v}{\partial y_m}dy + \int_{Y_g^{(\ell)}} \omega_1\eta\ \frac{\partial}{\partial y_m}\left(\chi^j + y_j + \frac{\psi^j}{\omega_1}\right)\frac{\partial}{\partial y_m}(v + \varphi)\ dy = 0 \end{array}\right.$$

On prend dans (2-46) v égale à χ^i et φ égale à $\dfrac{\psi^i}{\omega_1}$ et on somme le premier membre de la relation obtenue (qui est nul) avec le second de la précédente, on obtient:

$$(2\text{-}47)\quad K_{ij} = \frac{1}{|Y|}\left(\int_Y \lambda\frac{\partial}{\partial y_m}(\chi^j + y_j)\frac{\partial}{\partial y_m}(\chi^i + y_i)dy\right) + \\ + \frac{1}{|Y|}\left\{\int_{Y_g^{(\ell)}} \omega_1\eta\ \frac{\partial}{\partial y_m}\left(\chi^j + y_j + \frac{\psi^j}{\omega_1}\right)\frac{\partial}{\partial y_m}\left(\chi^i + y_i + \frac{\psi^i}{\omega_1}\right)dy\right\}$$

Cette expression montre que les K_{ij} sont bien symétriques, de plus, elle permet aussi d'affirmer la coercivité, en effet:

Soit $x = (x_i)_{i=1}^n$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$, l'expression précédente montre que:

$$|Y|\ K_{ij}\ x_i x_j = \int_Y \lambda(\nabla\chi)^2\ dy + \int_{Y_g^{(\ell)}} \omega_1\eta\ (\nabla\psi)^2\ dy$$

où $\quad \chi = x_j\ (\chi^j + y_j) \qquad$ et $\quad \psi = x_j\left(\chi^j + y_j + \dfrac{\psi^j}{\omega_1}\right)$

Donc, puisque les λ_α et $\omega_1\eta$ sont positives,

$$K_{ij}\ x_i x_j \geq 0$$

Supposons qu'il existe x de $\mathbb{R}^n$ tel que $K_{ij}\ x_i x_j = 0$. Puisque les constantes λ, ω_1 et η sont positives, l'écriture précédente implique que $\nabla\chi$ et $\nabla\psi$ sont nuls dans Y et dans $Y_g^{(\ell)}$ respectivement, c'est à dire:

$$\chi \equiv C^{\underline{te}} \quad \text{dans } Y$$
$$\psi \equiv C^{\underline{te}} \quad \text{dans chaque composante connexe de } Y_g^{(\ell)}$$

mais, puisque χ^j et ψ^j (donc aussi $x_j\chi^j$ et $x_j\psi^j$) sont Y-périodiques, ceci implique que :

$$x_j\ y_j = C^{\underline{te}} - x_j\chi^j \quad \text{est Y-périodique (en la variable y !)}$$
$$x_j\ y_j = C^{\underline{te}} - x_j\psi^j \quad \text{est Y-périodique}$$

ce qui est impossible sauf si $x_j = 0$ pour tout indice $j = 1...n$, d'où:

$$K_{ij}\ x_i x_j > 0 \quad \forall\ x \in \mathbb{R}^{n*}$$

Il est clair que l'application $x \longmapsto K_{ij}\ x_i x_j$ est continue, elle atteint donc sa borne inférieure sur tout compact de $\mathbb{R}^n$, et en particulier sur la sphère unité $\{ x \in \mathbb{R}^n\ ;\ |x| = 1\}$. D'après l'inégalité précédente, cette application est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$, sa borne inférieure est donc nécessairement strictement positive :

$$\exists\ x^* \ /\ |x^*| = 1 \text{ et } \forall\ x \in \mathbb{R}^{n*}$$

$$K_{ij}\ \frac{x_i}{|x|}\frac{x_j}{|x|} \geq \inf_{|x|=1} (K_{ij}\ x_i x_j) = K_{ij}\ x_i^* x_j^* = \gamma > 0$$

d'où la coércivité des K_{ij} :

(2-48) $\quad \exists\ \gamma > 0 \quad$ telle que $\quad K_{ij}\ x_i x_j \geq \gamma\ x_i x_i \quad \forall\ x \in \mathbb{R}^n$.

ii) Le problème homogénéisé (2-45) est un problème de Dirichlet homogène; signalons que d'après les hypothèses faites sur les fonctions f et h, la fonction f est de carré intégrable sur Ω. Le problème variationnel associé à (2-45) est alors:

$$(2\text{-}49) \qquad u \in H_0^1(\Omega) \qquad \int_\Omega K_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \, dx = \int_\Omega r \; v \, dx \qquad \forall \; v \in H_0^1(\Omega)$$

D'après la coercivité des K_{ij} (2-48), le lemme de Lax-Milgram permet d'affirmer l'existence et l'unicité de la solution u. De plus u est dans $H^2(\Omega)$ d'après des résultats de régularité classiques des solutions du problème de Dirichlet [6] [25] . □

3/ METHODE DE L'ENERGIE ET CORRECTEURS:

L'objectif de cette partie est la justification des résultats obtenus dans le pararagraphe précédent car les calculs n'ont étés jusqu'à maintenant que formels. Ceci se fera en trois étapes:

1- établir des estimations à priori qui, grâce à des résultas de compacité, vont nous permettre l'extraction d'une sous-suite de $(T^\varepsilon,\omega^\varepsilon)$ convergeant vers un (T^*,ω^*) dans un sens qu'on précisera.

2- identifier la limite (T^*,ω^*) par la méthode variationnelle de Tartar [5][35], plus précisement, démontrer que la limite T^* est identique à la température homogénéisée u obtenue par la méthode des échelles multiples (solution du problème (2-45)) et que la limite de ω^* est nulle .

3- améliorer la convergence en corrigeant la suite $(T^\varepsilon,\omega^\varepsilon)$ par des correcteurs (raisonables) qu'on calculera .

Rappelons d'abord les espaces fonctionnels de travail :

$$
\left|
\begin{array}{l}
\mathcal{V} = H_0^1(\Omega) \\
\mathcal{W}^\varepsilon = \left\{ \varphi \in H^1(\Omega_g^{(\ell)\varepsilon});\ \varphi = 0 \text{ sur } \mathcal{A}_g^\varepsilon \right\} \\
E^\varepsilon = \mathcal{V} \times \mathcal{W}^\varepsilon \\
\mathcal{V}_Y = \left\{ v \in H^1(Y);\ v \quad \text{Y-périodique} \right\} \\
\mathcal{W}_Y = \left\{ \varphi \in H^1(Y_g^{(\ell)});\ \varphi = 0 \quad \text{sur } \mathcal{A}_g \ ;\ \text{Y-périodique} \right\} \\
E_Y = \mathcal{V}_Y \times \mathcal{W}_Y
\end{array}
\right.
$$

3-1) Estimation a priori:

On commence par démontrer le lemme suivant dont le but est d'évaluer la constante C_c de l'inégalité de Poincaré dans :

$$\| \varphi \|_{L^2(\Omega_g^{(\ell)\varepsilon})} \leq C_c \, \| \nabla \varphi \|_{\mathbb{L}^2(\Omega_g^{(\ell)\varepsilon})} \qquad \text{pour} \quad \varphi \in \mathcal{W}^\varepsilon$$

Cette inégalité a lieu puisque φ ($\in \mathcal{W}^\varepsilon$) a une trace nulle sur l'interface gaz-liquide $\mathcal{A}_g^\varepsilon$.

Lemme 3-1:

Pour toute fonction φ de $\mathcal{W}^\varepsilon$ on a l'inégalité suivante :

(3-1) $$\| \varphi \|_{L^2(\Omega_g^{(\ell)\varepsilon})} \leq C \, \varepsilon \, \| \nabla \varphi \|_{\mathbb{L}^2(\Omega_g^{(\ell)\varepsilon})}$$

où C est une constante indépendante de ε.

<u>démonstration:</u>

On définit pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{W}^\varepsilon$ la fonction $\hat{\varphi}_k^\varepsilon$ définie sur $Y_g^{(\ell)}$ par :

(3-2) $$\hat{\varphi}_k^\varepsilon(y) = \varphi(\varepsilon y + o_k^\varepsilon) \qquad \left(y \in Y_g^{(\ell)} \iff x = \varepsilon y + o_k^\varepsilon \in \Omega_g^{(\ell)\varepsilon} \cap C_k^\varepsilon \right)$$

où o_k^ε désigne l'origine de la $k^{\text{ème}}$ cellule C_k^ε translatée de εY. Puisque $\varphi \in \mathcal{W}^\varepsilon$ il est clair que:

(3-3) $$\hat{\varphi}_k^\varepsilon \in \left\{ \varphi \in H^1(Y_g^{(\ell)}); \ \varphi = 0 \text{ sur } \mathcal{A}_g \right\}.$$

L'inégalité de Poincaré donne alors :

$$\int_{Y_g^{(\ell)}} (\hat{\varphi}_k^\varepsilon)^2 \, dy \leq C \int_{Y_g^{(\ell)}} (\nabla \hat{\varphi}_k^\varepsilon)^2 \, dy$$

où la constante C ne dépend que de la géometrie de $Y_g^{(\ell)}$.

Si on fait dans cette inégalité le changement de variable: $x = \varepsilon y + o_k^\varepsilon$, elle devient:

$$\int_{\Omega_g^{(\ell)\varepsilon} \cap C_k^\varepsilon} \varepsilon^{-n} (\varphi)^2 \, dx \le C \int_{\Omega_g^{(\ell)\varepsilon} \cap C_k^\varepsilon} \varepsilon^{2-n} (\nabla\varphi)^2 \, dx \qquad (n \text{ est la dimension}; (= 3))$$

La somme de ces inégalités de $k = 1$ au nombre N^ε de cellules C_k^ε recouvrant Ω, donne l'inégalité cherchée:

$$\| \varphi \|^2_{L^2(\Omega_g^{(\ell)\varepsilon})} = \sum_{k=1}^{k=N^\varepsilon} \int_{\Omega_g^{(\ell)\varepsilon} \cap C_k^\varepsilon} \varphi^2 \, dx \le C \, \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{k=N^\varepsilon} \int_{\Omega_g^{(\ell)\varepsilon} \cap C_k^\varepsilon} (\nabla\varphi)^2 \, dx = C \, \varepsilon^2 \| \nabla\varphi \|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_g^{(\ell)\varepsilon})} . \square$$

A l'aide du lemme précédent on va pouvoir démontrer les estimations suivantes :

Proposition 3-1:

La solution $(T^\varepsilon, \omega^\varepsilon)$ *du problème* (2-4) *vérifie les inégalités :*

(3-4) i) $\| \omega^\varepsilon \|_{L^2(\Omega_g^{(\ell)\varepsilon})} \le C \varepsilon$ *et* $\| \nabla\omega^\varepsilon \|_{\mathbb{L}^2(\Omega_g^{(\ell)\varepsilon})} \le C$.

ii) $\| T^\varepsilon \|_{H_0^1(\Omega)} \le C$.

où C *désigne une constante positive indépendante de* ε .

Démonstration:

Le couple $(T^\varepsilon, \omega^\varepsilon)$ est solution du problème variationnel (1-13) :

(3-5)
$$\begin{cases} (T^\varepsilon, \omega^\varepsilon) \in E^\varepsilon \\ a^\varepsilon((T^\varepsilon, \omega^\varepsilon), (v, \varphi)) = L^\varepsilon((v, \varphi)) \quad \forall \ (v, \varphi) \in E^\varepsilon . \end{cases}$$

Mais on a déjà démontré dans le premier paragraphe (1-18) et (1-21) que :

$$(3\text{-}6) \qquad L^{\varepsilon}((T^{\varepsilon},\omega^{\varepsilon})) \leq M \left\|(T^{\varepsilon},\omega^{\varepsilon})\right\|_{E^{\varepsilon}}$$

$$a^{\varepsilon}((T^{\varepsilon},\omega^{\varepsilon}),(T^{\varepsilon},\omega^{\varepsilon})) \geq c_1 \left(\int_{\Omega} (\nabla T^{\varepsilon})^2 \, dx + \int_{\Omega_g^{(\ell)\varepsilon}} (\nabla \omega^{\varepsilon})^2 \, dx \right)$$

où M et c_1 sont des constantes strictement positives et indépendantes de ε .

La fonction T^{ε} est de trace nulle sur le bord de Ω, on peut donc appliquer l'inégalité de Poincaré et la constante qui y intervient ne dépend que de Ω. La fonction ω^{ε} est de trace nulle l'interface gaz-liquide et on peut utiliser le lemme 3-1 avec $\varphi = \omega^{\varepsilon}$. De la relation (3-6) on peut déduire alors qu' il existe une constante C_2, indépendante de ε, telle que:

$$a^{\varepsilon}((T^{\varepsilon},\omega^{\varepsilon}),(T^{\varepsilon},\omega^{\varepsilon})) \geq C_2 \left\| (T^{\varepsilon},\omega^{\varepsilon}) \right\|^2_{E^{\varepsilon}}$$

En prenant $(v,\varphi) = (T^{\varepsilon},\omega^{\varepsilon})$ comme fonction-test dans(3-5), compte-tenu de (3-6), on en déduit l'existence d'une constante C telle que :

$$(3\text{-}7) \qquad \left\|(T^{\varepsilon},\omega^{\varepsilon})\right\|_{E^{\varepsilon}} \leq C \qquad (\text{ constante indépendante de } \varepsilon \text{ })$$

Cette estimation avec le lemme 3-1 achève donc la démonstration de la proposition puisque

- $\left\| T^{\varepsilon} \right\|_{H^1_0(\Omega)} \leq \left\|(T^{\varepsilon},\omega^{\varepsilon})\right\|_{E^{\varepsilon}} \leq C$
- $\left\|\nabla\omega^{\varepsilon}\right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_g^{(\ell)\varepsilon})} \leq \left\|(T^{\varepsilon},\omega^{\varepsilon})\right\|_{E^{\varepsilon}} \leq C$
- $\left\| \omega^{\varepsilon} \right\|_{L^2(\Omega_g^{(\ell)\varepsilon})} \leq C\,\varepsilon \left\|\nabla\omega^{\varepsilon}\right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_g^{(\ell)\varepsilon})} \leq C\,\varepsilon$

Ceci achève donc la démonstration de la proposition. □

Dans la suite on désignera par $\widetilde{\varphi}^{\varepsilon}$ le prolongement par zéro de toute fonction φ^{ε} définie dans un sous ensemble $\mathcal{O}^{\varepsilon}$ de Ω à Ω tout entier .

Proposition 3-2:

On peut extraire une sous-suite de $(T^{\varepsilon},\omega^{\varepsilon})$ *encore notée* $(T^{\varepsilon},\omega^{\varepsilon})$ *telle que :*

i)
$$T^{\varepsilon} \longrightarrow T^{*} \quad \text{dans } H^{1}(\Omega) \text{ faible et } L^{2}(\Omega) \text{ fort}$$
$$\mu^{\varepsilon}\frac{\partial T^{\varepsilon}}{\partial x_i} \longrightarrow Q_i^{*} \quad \text{dans } L^{2}(\Omega) \text{ faible}$$
$$\widetilde{\omega}^{\varepsilon} \longrightarrow 0 \quad \text{dans } L^{2}(\Omega) \text{ faible}$$
$$\left(\widetilde{\frac{\partial \omega^{\varepsilon}}{\partial x_i}}\right) \longrightarrow P_i^{*} \quad \text{dans } L^{2}(\Omega) \text{ faible}$$

ii) *les limites* Q_i^{*} *et* P_i^{*} *sont liées par la relation:*

$$\int_{\Omega} (Q_i^{*} + \eta P_i^{*})\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx = \int_{\Omega} r\, v\, dx \qquad \forall\, v \in H_0^1(\Omega) \tag{3-8}$$

où $$r(x) = \frac{1}{|Y|}\int_{Y} (f + \eta\, h\chi_g^{(\varepsilon)})(x,y)dy = \mathcal{M}_Y(f + \eta\, h\chi_g^{(\varepsilon)})$$

Démonstration:

i) Rappelons d'abord que μ^{ε} est bornée indépendemment de ε par $\mathrm{Max}(\omega_1\eta + \lambda_g,\ \lambda_\ell,\ \lambda_s)$. Les convergences faibles sont une conséquense directe de la proposition3-1 et du résultat classique de compacité dans un espace de Banach réflexif [6] (ici $H^1(\Omega)$ et $L^2(\Omega)$). La convergence forte de la sous-suite T^{ε} dans $L^2(\Omega)$ est une conséquence du théorème de Rellich-Kondrachov [6] (*ici : compacité de l'injection de* $H^1(\Omega)$ *dans* $L^2(\Omega)$ *pour* Ω *borné*) .

ii) Cette partie se démontre par passage à la limite dans le problème variationnel (3-5) vérifié par $(T^{\varepsilon},\omega^{\varepsilon})$. Posons :

$$Q_i^{\varepsilon} = \mu^{\varepsilon}\frac{\partial T^{\varepsilon}}{\partial x_i} \quad ; \quad P_i^{\varepsilon} = \frac{\partial \omega^{\varepsilon}}{\partial x_i} .$$

Avec ces notations le problème (3-5) s'écrit:

$$(3\text{-}9)\quad \int_\Omega \omega_1 Q_i^\varepsilon \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx + \int_\Omega \omega_1 \eta \left(Q_i^\varepsilon \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x_i} + \tilde{P}_i^\varepsilon \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx + \int_\Omega \eta\ \tilde{P}_i^\varepsilon \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x_i}\, dx =$$

$$= \int_\Omega \omega_1\ (f^\varepsilon + \eta\ \tilde{h}^\varepsilon)\ v\ dx + \int_\Omega \eta\ \tilde{h}^\varepsilon\ \varphi\ dx$$

pour tout (v,φ) de E^ε. En prenant la fonction φ identiquement nulle, il vient:

$$(3\text{-}10)\quad \int_\Omega (Q_i^\varepsilon + \eta\ \tilde{P}_i^\varepsilon) \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx = \int_\Omega (f^\varepsilon + \eta\ \tilde{h}^\varepsilon)\ v\ dx \qquad \forall\ v \in \mathcal{V} = H_0^1(\Omega)$$

En utilisant i) il est alors clair que :

$$\int_\Omega (Q_i^\varepsilon + \eta\ \tilde{P}_i^\varepsilon) \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \int_\Omega (Q_i^* + \eta P_i^*) \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx$$

Pour le second membre, qui fait intervenir les fonctions f^ε et h^ε définies par:

$$f^\varepsilon(x) = f(x,\tfrac{x}{\varepsilon}) \qquad \text{et} \qquad \tilde{h}^\varepsilon(x) = h(x,\tfrac{x}{\varepsilon})\, \chi_g^{(\mathbb{P})}(\tfrac{x}{\varepsilon})$$

on sait que:

$$(3\text{-}11)\quad \left| \begin{array}{lll} f^\varepsilon \longrightarrow \mathcal{M}_Y(f) & \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible} \\ \tilde{h}^\varepsilon \longrightarrow \mathcal{M}_Y(h\chi_g^{(\mathbb{P})}) & \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible} \end{array} \right.$$

puisque les fonctions h et f sont Y-périodiques.(voir [33]). Donc:

$$(3\text{-}12)\quad \int_\Omega (f^\varepsilon + \eta\ \tilde{h}^\varepsilon)\ v\ dx \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \int_\Omega \mathcal{M}_Y(f + \eta\ h\chi_g^{(\mathbb{P})})\ v\ dx$$

Le passage à la limite dans la relation (3-10) achève donc la démonstration de la proposition. □

On sait maintenant que T^ε converge (quitte à extraire une sous-suite) vers une fonction T^*, mais peut on déterminer cette limite?, c'est l'objectif de la partie suivante:

3-2) Identification des limites:

On va démontrer que la limite de T^ε est exactement la température homogénéisée u, solution unique de l'équation (2-45) établie par la méthode des échelles multiples.

Théoreme 3-1:

La température T^ε converge dans $H_0^1(\Omega)$ faible, lorsque ε tend vers séro, vers l'unique solution u du problème homogénéisé (2-45) obtenu par la méthode des échelles multiples:

(3-13) $$T^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} u \qquad \text{dans } H_0^1(\Omega) \text{ faible}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(K_{ij} \dfrac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right) = r(x) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Démonstration:

Comparons l'équation (3-8) vérifiée par les limites Q_i^* et P_i^* dans la proposition 3-2 et la formulation faible du problème homogéniésé (2-45) vérifié par u :

(3-14) $$\int_\Omega K_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j}\, dx = \int_\Omega r\, v\, dx \qquad \forall\, v \in H_0^1(\Omega)$$

D'après l'unicité de la solution de (2-45) (ou de (3-14)), pour conclure que la limite T^* obtenue par la méthode de l'énergie est égale à la limite u donnée formellement par la méthode des échelles multiples, il nous suffit donc de démontrer que :

(3-15) $$Q_i^* + \eta P_i^* = K_{ij} \frac{\partial T^*}{\partial x_j}$$

On va démontrer la relation (3-15) en utilisant la méthode variationnelle de Tartar [5] [35]. Elle consiste à prendre, dans le problème variationnel vérifié par $(T^\varepsilon,\omega^\varepsilon)$, des fonctions-tests particulières construites grâce aux (χ^j,ψ^j) données par (2-35) ou (2-38). Posons:

$$(3\text{-}16)\qquad \begin{cases} \chi^\varepsilon(x) = x_j + \varepsilon\chi^j(\frac{x}{\varepsilon}) \\ \psi^\varepsilon(x) = \varepsilon\psi^j(\frac{x}{\varepsilon}) \end{cases}$$

Le changement de variable $y = \frac{x}{\varepsilon}$ dans les équations (2-38) vérifiées par les (χ^j,ψ^j), montre que les nouvelles fonctions $(\chi^\varepsilon,\psi^\varepsilon)$ vérifient les équations suivantes :

$$(3\text{-}17)\qquad \left|\begin{array}{lll} -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mu^\varepsilon \frac{\partial\chi^\varepsilon}{\partial x_i}\right) = 0 & & \text{dans chaque } \Omega^\varepsilon_\alpha \\ [\![\chi^\varepsilon]\!]_{\alpha\beta} = 0 & & \text{sur } \mathcal{A}^\varepsilon_{\alpha\beta}\ (\alpha,\beta = g,\ell,s) \\ [\![\mu^\varepsilon \frac{\partial\chi^\varepsilon}{\partial x_i} n_i]\!] = 0 & & \text{sur } \mathcal{A}^\varepsilon_{\ell s} \text{ et } \mathcal{A}^{(*)\varepsilon}_{gs} \\ [\![\mu^\varepsilon \frac{\partial\chi^\varepsilon}{\partial x_i} n_i]\!] = -\eta \frac{\partial\psi^\varepsilon}{\partial x_i} n_i & & \text{sur } \mathcal{A}^\varepsilon_{g\ell} \text{ et } \mathcal{A}^{(\ell)\varepsilon}_{gs} \\ -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\psi^\varepsilon}{\partial x_i}\right) = 0 & & \text{dans } \Omega^{(\ell)\varepsilon}_g \\ \psi^\varepsilon = 0 & & \text{sur } \mathcal{A}^\varepsilon_{g\ell} \\ \frac{\partial\psi^\varepsilon}{\partial x_i} n_i = -\omega_1 \frac{\partial\chi^\varepsilon}{\partial x_i} n_i & & \text{sur } \mathcal{A}^{(\ell)\varepsilon}_{gs} \end{array}\right.$$

Comme ce qui a été fait pour obtenir le problème variationnel (1-13) vérifié par $(T^\varepsilon,\omega^\varepsilon)$, on obtient par des intégrations par parties :

$$(3\text{-}18)\qquad \int_\Omega \mu^\varepsilon\ \nabla\chi^\varepsilon.\nabla v\ dx + \int_{\Omega^{(\ell)\varepsilon}_g} \eta\ \nabla\psi^\varepsilon.\nabla v\ dx = 0 \qquad \forall\ v \in \mathcal{V}$$

$$(3\text{-}19) \qquad \int_{\Omega_g^{(\varepsilon)\varepsilon}} \nabla\psi^\varepsilon . \nabla\varphi \, dx \; + \omega_1 \int_{\Omega_g^{(\varepsilon)\varepsilon}} \nabla\chi^\varepsilon . \nabla\varphi \, dx \; = 0 \qquad \forall \; \varphi \in \mathcal{W}^\varepsilon$$

Il est facile de vérifier - directement de la définition (1-16) en tenant compte de la périodicité des (χ^j, ψ^j) - que l'on a :

$$(3\text{-}20) \quad \left| \begin{array}{lll} \chi^\varepsilon & \longrightarrow \; x_j & \text{dans } L^2(\Omega) \text{ fort} \\ \mu^\varepsilon \dfrac{\partial \chi^\varepsilon}{\partial x_i} & \longrightarrow \; \mathcal{M}_Y\left(\mu \dfrac{\partial}{\partial y_i}(y_j + \chi^j)\right) & \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible} \\ \widetilde{\psi}^\varepsilon & \longrightarrow \; 0 & \text{dans } L^2(\Omega) \text{ fort} \\ \dfrac{\partial \widetilde{\psi}^\varepsilon}{\partial x_i} & \longrightarrow \; \mathcal{M}_Y\left(\dfrac{\partial \widetilde{\psi}^j}{\partial y_i}\right) & \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible} \end{array} \right.$$

où l'on désigne par $(\widetilde{\ })$ l'opérateur de prolongement par zéro.

Soit $\theta \in \mathcal{D}(\Omega)$, on choisit d'abord comme fonctions-test v égale à $\theta\, T^\varepsilon$ dans (3-18) et (v, φ) égale à $(\theta\, \chi^\varepsilon, 0)$ dans (3-9), on obtient:

$$\int_\Omega \left(Q_i^\varepsilon \frac{\partial \chi^\varepsilon}{\partial x_i} \theta + Q_i^\varepsilon \chi^\varepsilon \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) dx + \int_\Omega \eta \left(\widetilde{P}_i^\varepsilon \frac{\partial \chi^\varepsilon}{\partial x_i} \theta + \widetilde{P}_i^\varepsilon \chi^\varepsilon \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) dx =$$

$$= \int_\Omega \left(f^\varepsilon + \eta h^\varepsilon \chi_g^{(\varepsilon)\varepsilon} \right) \chi^\varepsilon \theta \; dx$$

et :

$$\int_\Omega \left(Q_i^\varepsilon \frac{\partial \chi^\varepsilon}{\partial x_i} \theta + \mu^\varepsilon T^\varepsilon \chi^\varepsilon \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) dx \; + \int_{\Omega_g^{(\varepsilon)\varepsilon}} \eta \frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial x_i} \left(\frac{\partial T^\varepsilon}{\partial x_i} \theta + T^\varepsilon \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) dx \; = 0$$

Si on soustrait la deuxième relation de la première il vient:

$$(3\text{-}21)\quad \int_{\Omega}\left(Q_i^{\varepsilon}\,\chi^{\varepsilon} - \mu^{\varepsilon}\,T^{\varepsilon}\,\frac{\partial\chi^{\varepsilon}}{\partial x_i}\right)\frac{\partial\theta}{\partial x_i}\,dx + \int_{\Omega_g^{(\ell)\varepsilon}}\eta\left(\widetilde{P}_i^{\varepsilon}\,\chi^{\varepsilon} - T^{\varepsilon}\,\frac{\partial\psi^{\varepsilon}}{\partial x_i}\right)\frac{\partial\theta}{\partial x_i}\,dx +$$

$$+\int_{\Omega_g^{(\ell)\varepsilon}}\eta\left(\widetilde{P}_i^{\varepsilon}\,\frac{\partial\chi^{\varepsilon}}{\partial x_i} - \frac{\partial T^{\varepsilon}}{\partial x_i}\,\frac{\partial\psi^{\varepsilon}}{\partial x_i}\right)\theta\,dx = \int_{\Omega}\left(f^{\varepsilon}+\eta h^{\varepsilon}\chi_g^{(\ell)\varepsilon}\right)\chi^{\varepsilon}\theta\,dx$$

On prend maintenant comme fonctions-test (v,ψ) égale $(0,\theta\psi^{\varepsilon})$ dans (3-9) et ψ égale à $\theta\,\omega^{\varepsilon}$ dans (3-19), on obtient :

$$\int_{\Omega_g^{(\ell)\varepsilon}}\left(\widetilde{P}_i^{\varepsilon}\,\frac{\partial\psi^{\varepsilon}}{\partial x_i}\,\theta + \psi^{\varepsilon}\,\widetilde{P}_i^{\varepsilon}\,\frac{\partial\theta}{\partial x_i}\right)dx + \omega_1\int_{\Omega_g^{(\ell)\varepsilon}}\left(\frac{\partial T^{\varepsilon}}{\partial x_i}\,\frac{\partial\psi^{\varepsilon}}{\partial x_i}\,\theta + \psi^{\varepsilon}\,\frac{\partial T^{\varepsilon}}{\partial x_i}\,\frac{\partial\theta}{\partial x_i}\right)dx =$$

$$= \int_{\Omega_g^{(\ell)\varepsilon}} h^{\varepsilon}\psi^{\varepsilon}\theta\,dx$$

et

$$\int_{\Omega_g^{(\ell)\varepsilon}}\left(\widetilde{P}_i^{\varepsilon}\,\frac{\partial\psi^{\varepsilon}}{\partial x_i}\,\theta + \omega^{\varepsilon}\,\frac{\partial\psi^{\varepsilon}}{\partial x_i}\,\frac{\partial\theta}{\partial x_i}\right)dx + \omega_1\int_{\Omega_g^{(\ell)\varepsilon}}\left(\frac{\partial\chi^{\varepsilon}}{\partial x_i}\,\widetilde{P}_i^{\varepsilon}\,\theta + \omega^{\varepsilon}\,\frac{\partial\chi^{\varepsilon}}{\partial x_i}\,\frac{\partial\theta}{\partial x_i}\right)dx = 0$$

on soustrait la première relation de la deuxième :

$$(3\text{-}22)\quad \int_{\Omega_g^{(\ell)\varepsilon}}\left(\left(\widetilde{P}_i^{\varepsilon} + \omega_1\,\frac{\partial T^{\varepsilon}}{\partial x_i}\right)\psi^{\varepsilon} - \left(\frac{\partial\psi^{\varepsilon}}{\partial x_i} + \omega_1\,\frac{\partial\chi^{\varepsilon}}{\partial x_i}\right)\omega^{\varepsilon}\right)\frac{\partial\theta}{\partial x_i}\,dx +$$

$$+\,\omega_1\int_{\Omega_g^{(\ell)\varepsilon}}\left(\frac{\partial T^{\varepsilon}}{\partial x_i}\,\frac{\partial\psi^{\varepsilon}}{\partial x_i} - \frac{\partial\chi^{\varepsilon}}{\partial x_i}\,\widetilde{P}_i^{\varepsilon}\right)\theta\,dx = \int_{\Omega_g^{(\ell)\varepsilon}} h^{\varepsilon}\psi^{\varepsilon}\theta\,dx$$

On multiplie (3-22) par η et (3-21) par ω_1 puis on fait la soustraction :

$$(3\text{-}23)\qquad \int_\Omega \omega_1\left(Q_i^\varepsilon\,\chi^\varepsilon - \mu^\varepsilon\,T^\varepsilon\,\frac{\partial\chi^\varepsilon}{\partial x_i}\right)\frac{\partial\theta}{\partial x_i}\,dx + \int_\Omega \eta\omega_1\left(\widetilde{P}_i^\varepsilon\,\chi^\varepsilon - T^\varepsilon\,\frac{\partial\widetilde{\psi}^\varepsilon}{\partial x_i}\right)\frac{\partial\theta}{\partial x_i}\,dx +$$

$$+\int_\Omega \eta\left(\left(\widetilde{P}_i^\varepsilon + \omega_1\frac{\partial T^\varepsilon}{\partial x_i}\right)\widetilde{\psi}^\varepsilon - \left(\frac{\partial\widetilde{\psi}^\varepsilon}{\partial x_i} + \omega_1\frac{\partial\chi^\varepsilon}{\partial x_i}\right)\omega^\varepsilon\right)\frac{\partial\theta}{\partial x_i}\,dx =$$

$$= \int_\Omega \left(f^\varepsilon + \eta h^\varepsilon \chi_g^{(\varepsilon)}\right)\chi^\varepsilon\theta\,dx + \int_\Omega h^\varepsilon\,\widetilde{\psi}^\varepsilon\theta\,dx$$

D'après la proposition 3-2 i) et les convergences (3-11) et (3-20), on a, dans chaque terme de cette relation, le produit de deux facteurs convergents, l'un fortement et l'autre faiblement. On peut donc passer à la limite dans (3-23), ce qui donne en tenant compte de définition (2-43) de la fonction r et l'expression (2-44) des conductivités K_{ij} :

$$(3\text{-}24)\qquad \int_\Omega \left(Q_i^* + \eta\,P_i^*\right)x_j\,\frac{\partial\theta}{\partial x_i}\,dx - \int_\Omega K_{ij}\,T^*\,\frac{\partial\theta}{\partial x_i}\,dx = \int_\Omega r\,\theta\,x_j\,dx$$

On prend dans l'équation (3-8), vérifiée par Q^* et P^*, la fonction-test v égale à $\theta\,x_j$, où x_j désigne la $j^{ème}$ coordonnée, et on en déduit que :

$$\int_\Omega \left(Q_i^* + \eta\,P_i^*\right)x_j\frac{\partial\theta}{\partial x_i}\,dx = \int_\Omega r\,\theta\,x_j\,dx - \int_\Omega \left(Q_i^* + \eta\,P_i^*\right)\theta\,\delta_{ij}\,dx$$

Si on remplace le premier menmbre de la relation (3-24) par son expression précédente, il vient:

$$- \int_\Omega K_{ij}\ T^* \frac{\partial \theta}{\partial x_i}\ dx = \int_\Omega (Q_j^* + \eta\ P_j^*)\ \theta\ dx \qquad \forall\ \theta \in \mathcal{D}(\Omega)$$

ou

$$\int_\Omega \left(K_{ij}\ \frac{\partial T^*}{\partial x_i} - (Q_j^* + \eta\ P_j^*)\right) \theta\ dx = 0 \qquad \forall\ \theta \in \mathcal{D}(\Omega)$$

ce qui donne l'égalité (3-15) recherchée:

$$\boxed{Q_j^* + \eta\, P_j^* = K_{ij}\ \frac{\partial T^*}{\partial x_i} \qquad \text{dans} \quad L^2(\Omega)}$$

On en déduit donc que les fonctions T^* et u sont identiques. De plus, puisque toutes les sous-suites convergentes de T^ε ont la même limite u, toute la suite T^ε converge vers la température homogénéisée u. □

3-3) Les correcteurs :

La proposition 3-2 ne donne que des résultats de convergence faible; ceci est dû à ce qui se passe au voisinage du bord Γ de Ω. Nous allons voir que, comme dans les cas d'homogénéisation, si on corrige T^ε au voisinage du bord par des fonctions bien choisies, on peut donner une bonne approximation de T^ε au sens de $H_0^1(\Omega)$ fort. Plus précisement soit m^ε une fonction régularisante telle que :

$$(3\text{-}25) \quad \left|\begin{array}{ll} m^\varepsilon \in \mathcal{D}(\Omega) & \\ m^\varepsilon(x) = 0 & \text{si } d(x,\Gamma) \le \varepsilon \\ m^\varepsilon(x) = 1 & \text{si } d(x,\Gamma) \ge 2\varepsilon \\ 0 \le m^\varepsilon(x) \le 1 & \text{si } \varepsilon \le d(x,\Gamma) \le 2\varepsilon \\ \varepsilon \left|\dfrac{\partial m^\varepsilon}{\partial x_i}\right| \le C & \forall\ i=1..n \end{array}\right.$$

où $d(x,\Gamma)$ est la distance du point x au bord Γ de Ω, et C est une constante indépendante de ε.

On vérifie aisément que :

(3-26) $\quad m^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 1 \quad$ dans $L^2(\Omega)$ fort

Théorème3-2 :

Soit les fonctions θ^ε *et* ξ^ε *de* $H_0^1(\Omega)$ *définies par :*

(3-27)
$$\theta^\varepsilon(x) = \varepsilon\, m^\varepsilon(x)\, \chi^j(\frac{x}{\varepsilon}) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x)$$
$$\xi^\varepsilon(x) = \varepsilon\, m^\varepsilon(x)\, \psi^j(\frac{x}{\varepsilon}) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x)$$

on a alors :

i) $\quad \| \theta^\varepsilon \|_{L^2(\Omega)} \leq C\varepsilon \quad$ *et* $\quad \| \xi^\varepsilon \|_{L^2(\Omega)} \leq C\varepsilon$

ii) $\quad T^\varepsilon - \theta^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} u \quad$ *dans* $H_0^1(\Omega)$ *fort et*

$\quad \| \omega^\varepsilon - \xi^\varepsilon \|_{W^\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$

<u>démonstration :</u>

i) Comme u est dans $H^2(\Omega)$, d'après le théorème 2-1, alors $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ est dans $H^1(\Omega)$. En utilisant l'injection continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^4(\Omega)$ [6] (la dimension est inférieure ou égale à 3) et les propriétés (3-25) de m^ε on a :

(3-28) $\quad \theta^\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ et

$$\| \theta^\varepsilon \|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon \| \chi^{j\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial x_j} \|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon C \| \chi^{j\varepsilon} \|_{L^4(\Omega)} \| \frac{\partial u}{\partial x_j} \|_{L^4(\Omega)}$$

où $\chi^{j\varepsilon}(x) = \chi^j(\frac{x}{\varepsilon})$.

(χ^j est définie sur la cellule de base Y et prolongée par Y-périodicité à tout $\mathbb{R}^n$).

La quantité $\left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{L^4(\Omega)}$ est une constante indépendante de ε, on va montrer qu'il en est de même pour $\left\| \chi^{j\varepsilon} \right\|_{L^4(\Omega)}$:

$$\int_\Omega (\chi^{j\varepsilon}(x))^4 dx \leq \sum_{k=1}^{k=N^\varepsilon} \int_{C_k^\varepsilon} \left(\chi^j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)^4 dx$$

$$= \varepsilon^3 \sum_{k=1}^{k=N^\varepsilon} \int_Y (\chi^j(y))^4 dy$$

$$= \varepsilon^3 \, N^\varepsilon \int_Y (\chi^j(y))^4 dy$$

où N^ε est le nombre de cellules C_k^ε recouvrant Ω, il est de l'ordre de $\frac{mes(\Omega)}{\varepsilon^3 mes(Y)}$, d'où l'on déduit que :

$$\text{(3-29)} \qquad \left\| \chi^{j\varepsilon} \right\|_{L^4(\Omega)} \leq \left(\frac{mes(\Omega)}{mes(Y)}\right)^{\frac{1}{4}} \left\| \chi^j \right\|_{L^4(Y)}$$

L'inégalité (3-28) entraîne donc i) de la proposition. Pour les mêmes raisons que les précédentes on a :

$$\text{(3-30)} \qquad \xi^\varepsilon \in \mathcal{W}^\varepsilon = \left\{ \varphi \in H^1(\Omega_g^{(\varepsilon)}) \; ; \; \varphi = 0 \quad \text{sur} \quad \mathcal{A}_g^\varepsilon \right\}$$

$$\left\| \xi^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon \, C \left(\frac{mes(\Omega)}{mes(Y)}\right)^{\frac{1}{4}} \left\| \psi^j \right\|_{L^4(Y_g^{(\varepsilon)})} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{L^4(\Omega)}$$

ii) On note X^ε et Z^ε les couples de l'espace produit $E^\varepsilon = H_0^1(\Omega) \times \mathcal{W}^\varepsilon$ définis par:

$$\text{(3-31)} \qquad \begin{cases} X^\varepsilon = (T^\varepsilon, \omega^\varepsilon) \\ Z^\varepsilon = (u+\theta^\varepsilon, \xi^\varepsilon) \\ R^\varepsilon = X^\varepsilon - Z^\varepsilon \end{cases}$$

Pour démontrer ii) de la proposition il suffit de démontrer que $a^\varepsilon(R^\varepsilon, R^\varepsilon)$ tend vers zéro avec ε, en effet on a déjà montré (3-6) que :

$$(3\text{-}32) \qquad \| T^\varepsilon - \theta^\varepsilon - u \|_{H_0^1(\Omega)} \leq \| R^\varepsilon \|_{E^\varepsilon} \leq C \sqrt{a^\varepsilon(R^\varepsilon, R^\varepsilon)}$$

$$\| \omega^\varepsilon - \xi^\varepsilon \|_{W^{-\varepsilon}} \leq \| R^\varepsilon \|_{E^\varepsilon} \leq C \sqrt{a^\varepsilon(R^\varepsilon, R^\varepsilon)} \ .$$

En utilisant la symétrie de la forme bilinéaire $a^\varepsilon(\ .,\ .\ )$ on a:

$$(3\text{-}33) \qquad a^\varepsilon(R^\varepsilon, R^\varepsilon) = a^\varepsilon(X^\varepsilon - Z^\varepsilon, X^\varepsilon - Z^\varepsilon)$$

$$= a^\varepsilon(X^\varepsilon, X^\varepsilon - 2Z^\varepsilon) + a^\varepsilon(Z^\varepsilon, Z^\varepsilon)$$

$$= L^\varepsilon(X^\varepsilon - 2Z^\varepsilon) + a^\varepsilon(Z^\varepsilon, Z^\varepsilon)$$

Explicitons l'expression de $L(.)$:

$$L^\varepsilon(X^\varepsilon - 2Z^\varepsilon) = \int_\Omega \omega_1 (f^\varepsilon + \eta h^\varepsilon \chi_g^{(\Gamma)\varepsilon})(T^\varepsilon - 2(u+\theta^\varepsilon))\, dx + \int_\Omega \eta h^\varepsilon\, (\omega^\varepsilon - 2\xi^\varepsilon)\chi_g^{(\Gamma)\varepsilon}\, dx$$

d'après les relations (3-11), (3-13), (3-4) et les résultats i) on a :

$$(3\text{-}34) \quad L^\varepsilon(X^\varepsilon - 2Z^\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} - \int_\Omega \omega_1 \mathcal{M}_Y(f + \eta h \chi_Y^{(\Gamma)})u\, dx = - \int_\Omega \omega_1 K_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j}\, dx$$

Des relations (3-33) et (3-34) on déduit alors que :

$$(3\text{-}35) \quad a^\varepsilon(R^\varepsilon, R^\varepsilon) \longrightarrow 0 \iff a^\varepsilon(Z^\varepsilon, Z^\varepsilon) \longrightarrow \int_\Omega \omega_1 K_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j}\, dx$$

On va démontrer la convergence indiquée pour $a^\varepsilon(Z^\varepsilon, Z^\varepsilon)$. Pour ce faire, on décompose $a^\varepsilon(Z^\varepsilon, Z^\varepsilon)$ en une somme de trois termes et on calcule la limite de chacun d'eux :

$$
\left|
\begin{array}{ll}
a^\varepsilon(Z^\varepsilon, Z^\varepsilon) = \omega_1 \mathbf{I}^\varepsilon + 2\eta\,\omega_1 \mathbf{J}^\varepsilon + \eta\,\mathbf{M}^\varepsilon & \\
\mathbf{I}^\varepsilon = \displaystyle\int_\Omega \mu^\varepsilon \left(\nabla(u+\theta^\varepsilon)\right)^2 dx & \\
\mathbf{J}^\varepsilon = \displaystyle\int_{\Omega_g^{(\ell)\varepsilon}} \mu^\varepsilon \nabla(u+\theta^\varepsilon).\nabla\zeta^\varepsilon\, dx & (3\text{-}36) \\
\mathbf{M}^\varepsilon = \displaystyle\int_{\Omega_g^{(\ell)\varepsilon}} (\nabla\zeta^\varepsilon)^2\, dx &
\end{array}
\right.
$$

■ **limite de $\mathbf{I}^\varepsilon$** :

On écrit d'abord $\dfrac{\partial\theta^\varepsilon}{\partial x_\ell}$ sous la forme suivante :

$$
\left|
\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial\theta^\varepsilon}{\partial x_\ell} = \zeta_\ell^\varepsilon + \delta_\ell^\varepsilon & \\
\zeta_\ell^\varepsilon(x) = m^\varepsilon(x)\dfrac{\partial\chi^j}{\partial x_\ell}(\dfrac{x}{\varepsilon})\dfrac{\partial u}{\partial x_j}(x) & \\
\delta_\ell^\varepsilon(x) = \varepsilon\left(\dfrac{\partial m^\varepsilon}{\partial x_\ell}(x)\ \chi^j(\dfrac{x}{\varepsilon})\dfrac{\partial u}{\partial x_j}(x) + m^\varepsilon(x)\ \chi^j(\dfrac{x}{\varepsilon})\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_\ell \partial x_j}(x)\right). &
\end{array}
\right.
$$

En utilisant les propriétés de la fonction m^ε, de χ^j et de u il est facile de vérifier que δ_ℓ^ε tend vers zéro avec ε dans $L^2(\Omega)$ fort, donc $\mathbf{I}^\varepsilon$ a la même limite que :

$$
\int_\Omega \mu^\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial x_\ell} + \zeta_\ell^\varepsilon\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x_\ell} + \zeta_\ell^\varepsilon\right) dx =
$$

$$
= \int_\Omega \mu^\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial x_\ell}\frac{\partial u}{\partial x_\ell} + 2\ m^\varepsilon \frac{\partial\chi^{j\varepsilon}}{\partial x_\ell}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i} + (m^\varepsilon)^2 \frac{\partial\chi^{j\varepsilon}}{\partial x_\ell}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial\chi^{i\varepsilon}}{\partial x_\ell}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) dx
$$

$$\int_\Omega \mu^\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial x_\ell} + \zeta^\varepsilon_\ell\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x_\ell} + \zeta^\varepsilon_\ell\right) dx = \int_\Omega \mu^\varepsilon \left(\delta_{ij} + m^\varepsilon \frac{\partial \chi^{j\varepsilon}}{\partial x_i}\right) \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i} dx +$$

$$+ \int_\Omega \mu^\varepsilon\, m^\varepsilon \left(\frac{\partial \chi^{i\varepsilon}}{\partial x_j} + m^\varepsilon \frac{\partial \chi^{i\varepsilon}}{\partial x_\ell}\frac{\partial \chi^{j\varepsilon}}{\partial x_\ell}\right) \frac{\partial u\, \partial u}{\partial x_i \partial x_j} dx$$

En utilisant les convergences (3-26) et (3-20) on a donc :

$$\text{(3-38)} \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} I^\varepsilon = \int_\Omega \mathcal{M}_Y\left(\mu\left(\delta_{ij} + \frac{\partial \chi^j}{\partial y_i}\right)\right) \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i} dx +$$

$$+ \int_\Omega \mathcal{M}_Y\left(\mu\left(\frac{\partial \chi^i}{\partial y_j} + \frac{\partial \chi^i}{\partial y_\ell}\frac{\partial \chi^j}{\partial y_\ell}\right)\right) \frac{\partial u\, \partial u}{\partial x_i \partial x_j} dx$$

- **limite de J^ε :**

On procède de manière analogue à la précédente :

$$\frac{\partial \xi^\varepsilon}{\partial x_\ell} = \gamma^\varepsilon_\ell + \pi^\varepsilon_\ell$$

$$\gamma^\varepsilon_\ell(x) = m^\varepsilon(x) \frac{\partial \psi^j}{\partial x_\ell}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x)$$

$$\pi^\varepsilon_\ell(x) = \varepsilon\left(\frac{\partial m^\varepsilon}{\partial x_\ell}(x)\ \psi^j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x) + m^\varepsilon(x)\ \psi^j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_\ell \partial x_j}(x)\right)$$

Notons que cette fois ξ^ε, γ^ε_ℓ et π^ε_ℓ sont définis dans $\Omega^{(P)\varepsilon}_g$ seulement, on les prolonge alors par zéro dans le domaine Ω tout entier, soient $\tilde{\xi}^\varepsilon$, $\tilde{\gamma}^\varepsilon_\ell$ et $\tilde{\pi}^\varepsilon_\ell$ leur prolongements respectifs.

Pour les mêmes raisons que les précédentes $\tilde{\pi}^{\varepsilon}_{\ell}$ tend ver zéro avec ε, $\mathbf{J}^{\varepsilon}$ a donc la même limite que:

$$\int_{\Omega} \tilde{\gamma}^{\varepsilon}_{\ell} \left(\frac{\partial u}{\partial x_{\ell}} + \zeta^{\varepsilon}_{\ell} \right) dx$$

On en déduit donc que:

$$(3\text{-}39) \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \mathbf{J}^{\varepsilon} = \int_{\Omega} \mathcal{M}_Y \left(\frac{\partial \psi^j}{\partial y_i} X_Y \mathbb{C}^{\varepsilon} \right) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} \mathcal{M}_Y \left(\frac{\partial \psi^i}{\partial y_j} + \frac{\partial \psi^j}{\partial y_{\ell}} \frac{\partial \chi^i}{\partial y_{\ell}} \right) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx$$

- **limite de $\mathbf{M}^{\varepsilon}$:**

$$\mathbf{M}^{\varepsilon} = \int_{\Omega} (\tilde{\gamma}^{\varepsilon}_{\ell} + \tilde{\pi}^{\varepsilon}_{\ell}) (\tilde{\gamma}^{\varepsilon}_{\ell} + \tilde{\pi}^{\varepsilon}_{\ell}) dx$$

Comme ce qui été fait précédement, on montre facilement que $\mathbf{M}^{\varepsilon}$ a la même limite que:

$$\int_{\Omega} \tilde{\gamma}^{\varepsilon}_{\ell} \, \tilde{\gamma}^{\varepsilon}_{\ell} \, dx$$

et on en déduit.

$$(3\text{-}40) \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \mathbf{M}^{\varepsilon} = \int_{\Omega} \mathcal{M}_Y \left(\frac{\partial \psi^j}{\partial y_i} \frac{\partial \psi^j}{\partial y_i} X_Y \mathbb{C}^{\varepsilon} \right) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx$$

Les relations (3-36) à (3-40) impliquent donc que:

$$(3\text{-}40) \qquad a^{\varepsilon}(Z^{\varepsilon}, Z^{\varepsilon}) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \int_{\Omega} \omega_1 \, K_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} \, dx + \int_{\Omega} D_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} \, dx$$

où les K_{ij} sont les conductivités homogénéisées données par l'expression (2-43), c'est à dire:

$$K_{ij} = \mathcal{M}_Y\left(\mu\left(\delta_{ij} + \frac{\partial \chi^j}{\partial y_i}\right) + \eta \frac{\partial \psi^j}{\partial y_i} \chi_{Y_g^{\mathcal{C}}}\right)$$

et les D_{ij} sont donnés par la relation suivante :

$$D_{ij} = \mathcal{M}_Y\left(\omega_1 \mu \left(\frac{\partial \chi^i}{\partial y_j} + \frac{\partial \chi^i}{\partial y_\ell} \frac{\partial \chi^j}{\partial y_\ell}\right)\right) + \eta \, \omega_1 \mathcal{M}_Y\left(\chi_{Y_g^{\mathcal{C}}} \left(\frac{\partial \psi^j}{\partial y_i} + \frac{\partial \psi^j}{\partial y_\ell} \frac{\partial \chi^i}{\partial y_\ell} + \frac{\partial \chi^j}{\partial y_\ell} \frac{\partial \psi^i}{\partial y_\ell}\right)\right) +$$

$$+ \eta \, \mathcal{M}_Y\left(\chi_{Y_g^{\mathcal{C}}} \left(\frac{\partial \psi^i}{\partial y_j} \frac{\partial \psi^i}{\partial y_\ell}\right)\right)$$

Mais remarquons que l'expression de D_{ij} est exactement l'équation variationnelle vérifiée par le couple (χ^j, ψ^j) avec les fonctions test (v, ψ) égales à (χ^i, ψ^i), donc D_{ij} est nul pour tout indice (i,j). Le deuxième terme du second membre de (3-40) est donc nul, d'après l'équivalence (3-35) on a donc démontré que $a^{\varepsilon}(R^{\varepsilon}, R^{\varepsilon})$ tend vers zéro, ceci achève la démonstration du théorème, grâce aux inégalités (3-32). □

4/ CAS D'UN GAZ DE FAIBLE CONDUCTION:

Dans ce paragraphe on suppose que le gaz occupant Ω_g a une conductivité thermique λ_g très faible, on la notera ζ pour ne pas la confondre avec les autres conductivités. On s'intéresse au comportement limite de la température T et de la fraction massique de vapeur ϖ (ou de la fraction massique translatée $\omega = \varpi - (\omega_0 + \omega_1 T)$), lorsque ζ vers zéro. Dans le cas d'un matériau périodique, de période εY très petite par rapport aux dimensions de Ω, on est en présence de deux petits paramètres: la conductivité ζ du gaz et la période ε de la structure.

L'étude du comportement limite sera faite par la méthode des perturbations singulières (lorsque ζ tend vers zéro), combinée à la méthode d'homogénéisation (ε tend vers zéro). Ce problème peut être abordé en deux étapes:

- étudier le comportement limite lorsque ζ tend vers zéro de la solution u^ζ du problème homogénéisé (2-45), ce qui correspond à: $\lim\limits_{\zeta\to 0}$ ($\lim\limits_{\varepsilon\to 0}$ T_ε^ζ).

- étudier le comportement limite lorsque ζ tend vers zéro de la solution $(T_\varepsilon^\zeta, \varpi_\varepsilon^\zeta)$ du problème initial (1-13) , la période ε étant fixe, puis homogénéiser le problème limite obtenu, ce qui correspond à : $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}$ ($\lim\limits_{\zeta\to 0}$ T_ε^ζ).

Les résultats de ces deux étapes seront comparés ensuite.

4-1) Comportement de la solution homogénéisée lorsque ζ tend vers zéro:

La température homogénéisée u dépend de ζ par l'intermédiaire des conductivités K_{ij}^ζ , ces dernières sont exprimées par (2-43) en fonction des solutions uniques (χ^j, ψ^j) de (2-35),qui dépendent de ζ, on commence alors par étudier le comportement limite des $(\chi^{j\zeta}, \psi^{j\zeta})$, on en déduira ensuite les limites des K_{ij}^ζ puis celle de u^ζ.

4-1-1) Comportement des $(\chi^{j\zeta}, \psi^{j\zeta})$:

Commençons par reécrire le problème (2-35) vérifié par les $(\chi^{j\zeta}, \psi^{j\zeta})$ sous une forme qui met en évidence le petit paramètre ζ. On rappelle que $\mu(y)$ intervenant dans (2-35) vaut $\lambda(y)$ dans $Y \setminus Y_g$, $\zeta + \eta\, \omega_1$ dans $Y_g^{(\ell)}$ et ζ dans $Y_g^{(*)}$.

Les $(\chi^{j\zeta},\psi^{j\zeta})$ sont dans l'espace E_Y dont la définition est donnée par (2-21) et que l'on rappelle:

$$\left|\begin{array}{l} E_Y = \mathcal{V}_Y \times \mathcal{W}_Y \\ \mathcal{V}_Y = \left\{ v \in H^1(Y)\,;\ v \text{ Y-périodique} \right\} \\ \mathcal{W}_Y = \left\{ \varphi \in H^1(Y_g^{(\ell)})\,;\ \varphi = 0 \text{ sur } \mathcal{A}_g\,;\ \text{Y-périodique} \right\} \end{array}\right.$$

Posons pour tout (χ,ψ) et (v,φ) de E_Y :

$$(4\text{-}1)\quad \left|\begin{array}{ll} a_0((\chi,\psi),(v,\varphi)) = & \displaystyle\int_{Y_g \cup Y_\ell} \omega_1\lambda\ \nabla\chi\cdot\nabla v\, dy + \int_{Y_g^{(\ell)}} \eta\ \nabla(\omega_1\chi + \psi)\cdot\nabla(\omega_1 v + \varphi)dy \\ a_1((\chi,\psi),(v,\varphi)) = & \displaystyle\int_{Y_g} \omega_1\ \nabla\chi\cdot\nabla v\, dy \\ L_0^j((v,\varphi)) = & \displaystyle -\int_{Y_g \cup Y_\ell} \omega_1\lambda\ \frac{\partial v}{\partial y_j}\, dy - \int_{Y_g^{(\ell)}} \eta\omega_1\ \frac{\partial}{\partial y_j}(\omega_1 v + \varphi)\ dy \\ L_1^j((v,\varphi)) = & \displaystyle -\int_{Y_g} \omega_1\ \frac{\partial\varphi}{\partial y_j}\, dy \end{array}\right.$$

Le problème (2-35) vérifié par les $(\chi^{j\zeta},\psi^{j\zeta})$ $(j = 1 \ldots n)$ s'écrit alors sous la forme suivante:

$$\boxed{\begin{array}{l} (4\text{-}2)\qquad (\chi^{j\zeta},\psi^{j\zeta}) \in E_Y \quad \text{avec} \displaystyle\int_Y \chi^{j\zeta}(y)\, dy = 0 \\ \qquad\qquad a^\zeta((\chi^{j\zeta},\psi^{j\zeta}),(v,\varphi)) = L^{j\zeta}((v,\varphi)) \qquad\qquad \forall\ (v,\varphi) \in E_Y \\ \text{où:} \\ \qquad\qquad a^\zeta((\chi,\psi),(v,\varphi)) = a_0((\chi,\psi),(v,\varphi)) + \zeta\, a_1((\chi,\psi),(v,\varphi)) \\ \qquad\qquad L^{j\zeta}((v,\varphi)) = L_0^j((v,\varphi)) + \zeta\, L_1^j((v,\varphi)) \end{array}}$$

Comme dans J.L. Lions [24] on cherchera, dans une première étape, les $(\chi^{j\zeta},\psi^{j\zeta})$ sous la forme d'un développement asymptotique formel, puis, dans une deuxième étape, on étudiera sa convergence.

Développement asymptotique:

On cherche les $(\chi^{j\zeta},\psi^{j\zeta})$ sous la forme suivante:

$$(4\text{-}3) \qquad (\chi^{j\zeta},\psi^{j\zeta}) = \sum_{k=-1}^{+\infty} \zeta^k \, (\chi_k^j, \psi_k^j)$$

Les équations vérifiées par les termes (χ_k^j,ψ_k^j) sont obtenues en reportant (4-3) dans (4-2) et en identifiant les termes en puissances de ζ:

$$(4\text{-}4) \qquad \left| \begin{array}{l} (\chi_k^j,\psi_k^j) \in E_Y \ , \quad \displaystyle\int_Y \chi_k^j(y)\,dy = 0 \quad \forall k \geq -1 \\ \text{et } \forall\ (v,\varphi) \in E_Y \text{ on a:} \\ \qquad a_0((\chi_{-1}^j,\psi_{-1}^j),(v,\varphi)) = 0 \\ \qquad a_1((\chi_{-1}^j,\psi_{-1}^j),(v,\varphi)) + a_0((\chi_0^j,\psi_0^j),(v,\varphi)) = L_0^j((v,\varphi)) \\ \qquad a_1((\chi_0^j,\psi_0^j),(v,\varphi)) + a_0((\chi_1^j,\psi_1^j),(v,\varphi)) = L_1^j((v,\varphi)) \\ \qquad a_1((\chi_k^j,\psi_k^j),(v,\varphi)) + a_0((\chi_{k+1}^j,\psi_{k+1}^j),(v,\varphi)) = 0 \qquad \forall k \geq 1 \end{array} \right.$$

Etude des équations (4-4) et convergence de (4-3)

Pour étudier l'exsistence et l'unicité des (χ_k^j,ψ_k^j) on introduit l'espace suivant:

$$(4\text{-}5) \qquad E_Y^0 = E_Y \cap \left\{ (v,\varphi) \ / \ a_0((v,\varphi),(v,\varphi)) = 0 \text{ et } \int_Y v(y)\,dy = 0 \right\}$$

Montrons d'abord quelques propriétés simples de cet espace qu'on rassemble dans le lemme 4-1 ci-dessous, où l'on désigne par " Y-translaté d'un sous ensemble $\mathcal{O}$ de Y " le translaté de $\mathcal{O}$ d'un nombre entier relatif de fois le côté ℓ_i de Y dans chaque direction y_i:

Lemme 4-1:

i) E_Y^0 *est un espace de Hilbert pour la norme induite par* E_Y (*norme* $H^1(Y)\times H^1(Y_g^{(\ell)})$).

ii) (v,φ) *appartient à* E_Y^0 *si et seulement si:*

- v *est une constante dans chaque composante connexe de la réunion des* Y-translatés *de* $\overline{Y}_s \cup \overline{Y}_\ell$.

- $\omega_1 v + \varphi$ *est une constante dans chaque composante connexe de la réunion des* Y translatés *de* $Y_g^{(\ell)}$.

iii) *l'application* $(v,\varphi) \longrightarrow \sqrt{a_1((v,\varphi),(v,\varphi))}$ *est une norme dans* E_Y^0 *équivalente à la norme induite par celle de* E_Y

preuve:

i) d'après la définition (4-1) de la forme bilinéaire $a_0(\ .\ ,\ .\ )$:

$$a_0((v,\varphi),(v,\varphi)) = \int_{Y_s \cup Y_\ell} \omega_1\lambda\ (\nabla v)^2\ dy + \int_{Y_g^{(\ell)}} \eta\ (\nabla(\omega_1 v + \varphi))^2\ dy$$

$$\leq C\left(\int_{Y_s \cup Y_\ell \cup Y_g^{(\ell)}} (\nabla v)^2\ dy + \int_{Y_g^{(\ell)}} (\nabla\varphi)^2\ dy + \int_{Y_g^{(\ell)}} 2\nabla v.\nabla\varphi\ dy \right)$$

$$\leq C\left(\| v \|^2_{H^1(Y)} + \| \varphi \|^2_{H^1(Y_g^{(\ell)})} + 2 \| v \|_{H^1(Y)} \| \varphi \|_{H^1(Y_g^{(\ell)})} \right)$$

où $C = \max(\omega_1\lambda_\ell, \omega_1\lambda_s, \omega_1\eta, \eta)$. Donc:

$$a_0((v,\varphi),(v,\varphi)) \leq C \left\|(v,\varphi)\right\|^2_{E_Y}$$

Il est alors clair que le sous-espace E_Y^0 est de Hilbert .

ii) rappelons que ω_1, λ et η sont positives, cette assertion est alors évidente en utilisant l'expression précédente de $a_0((v,\varphi),(v,\varphi))$ et le fait que v est continue à travers l'interface $\mathcal{A}_{\ell g}$ sans oublier la Y-périodicité de v et de φ.

iii) Puisque φ est de trace nulle sur $\mathcal{A}_{\ell g}$ et la fonction v est de moyenne nulle sur Y:

$$\|(v,\varphi)\|^2_{E_Y} \text{ est équivalente à } \left(\|\nabla v\|^2_{\mathbb{L}^2(Y)} + \|\nabla\varphi\|^2_{\mathbb{L}^2(Y_g^{(\ell)})}\right)$$

Il suffit donc de montrer que $a_1((v,\varphi),(v,\varphi))$ est équivalente à cette dernière norme.

Soit (v,φ) dans E^0_Y, alors, d'après ii), $\nabla v = 0$ dans $\mathbb{L}^2(Y_s \cup Y_\ell)$ et $\nabla\varphi = -\omega_1\nabla v$ dans $\mathbb{L}^2(Y_g^{(\ell)})$, donc:

$$\|\nabla v\|^2_{\mathbb{L}^2(Y)} + \|\nabla\varphi\|^2_{\mathbb{L}^2(Y_g^{(\ell)})} = \int_{Y_g} (\nabla v)^2\, dy + \int_{Y_g^{(\ell)}} \omega_1^2 (\nabla v)^2\, dy$$

Donc, en utilisant la définition (4-1) de $a_1(.,.)$ et sachant que $Y_g = Y_g^{(\ell)} \cup Y_g^*$, on a:

$$(4\text{-}6)\quad \left|\begin{array}{l} \forall\ (v,\varphi) \in E^0_Y \\ \dfrac{1}{\omega_1} a_1((v,\varphi),(v,\varphi)) = \displaystyle\int_{Y_g} (\nabla v)^2\, dy \leq \|\nabla v\|^2_{\mathbb{L}^2(Y)} + \|\nabla\varphi\|^2_{\mathbb{L}^2(Y_g^{(\ell)})} \\ (\dfrac{1}{\omega_1} + \omega_1)\, a_1((v,\varphi),(v,\varphi)) \geq \|\nabla v\|^2_{\mathbb{L}^2(Y)} + \|\nabla\varphi\|^2_{\mathbb{L}^2(Y_g^{(\ell)})}. \quad \square \end{array}\right.$$

Proposition 4-1:

Les termes (χ^j_k, ψ^j_k) sont déterminés d'une manière unique par (4-4) et on a l'estimation de l'erreur suivante:

$$\left\|(\chi^{j\zeta}, \psi^{j\zeta}) - \sum_{k=0}^{k=m} \zeta^k (\chi^j_k, \psi^j_k)\right\|_{E_Y} \leq C\, \zeta^{m+1}$$

où C est une constante indépendante de ζ.

Démonstration:

◆ *Existence et unicité des termes* (χ^j_k, ψ^j_k):

- La première équation de (4-4) avec $(v,\varphi) = (\chi^j_{-1}, \psi^j_{-1})$ entraine que les $(\chi^j_{-1}, \psi^j_{-1})$ appartiennent à E^0_Y. La deuxième équation de (4-4) et le lemme 4-1 ii) donnent :

$$a_1((\chi^j_{-1}, \psi^j_{-1}),(v,\varphi)) = 0 \qquad \forall\ (v,\varphi) \in E^0_Y$$

En prenant $(v,\varphi) = (\chi^j_{-1}, \psi^j_{-1})$ et puisque $\sqrt{a_1(\ .\ ,\ .\ )}$ est une norme dans E^0_Y on a:

(4-7) $\qquad (\chi^j_{-1}, \psi^j_{-1}) = (0,0)$.

- La deuxième et la troisième équation de (4-4) donnent:

$$(4\text{-}8)\quad \left|\begin{array}{lll} (\chi^j_0, \psi^j_0) \in E_Y \text{ et } \displaystyle\int_Y \chi^j_0\, dy = 0 & & \\ a_0((\chi^j_0, \psi^j_0),(v,\varphi)) = L^j_0((v,\varphi)) & & \forall\ (v,\varphi) \in E_Y \\ a_1((\chi^j_0, \psi^j_0),(v,\varphi)) = L^j_1((v,\varphi)) & & \forall\ (v,\varphi) \in E^0_Y \end{array}\right.$$

En appliquant l'alternative de Fredholm à la première équation dans E_Y on a:

(4-9) $\qquad$ la solution (χ^j_0, ψ^j_0) de (4-8) existe si et seulement si: $\left(L^j_0((v,\varphi)) = 0\ \forall (v,\varphi) \in E^0_Y\right)$, de plus elle est déterminée à un élément de E^0_Y près.

Or cette condition de compatibilité est satisfaite d'après le lemme 4-1. Grâce à la dernière équation dans E^0_Y on va montrer que (χ^j_0, ψ^j_0) est unique.

Soient $(\overset{*}{\chi}, \overset{*}{\psi})$ et $(\hat{\chi}, \hat{\psi})$ deux solutions de (4-8), leur différence doit donc appartenir à l'espace E^0_Y, en plus elles doivent vérifier pour tout (v,φ) de E^0_Y :

$$a_1((\overset{*}{\chi}, \overset{*}{\psi}),(v,\varphi)) = L^j_1((v,\varphi))$$
$$a_1((\hat{\chi}, \hat{\psi}),(v,\varphi)) = L^j_1((v,\varphi))$$

En prenant (v,φ) égale à $(\overset{*}{\chi}-\hat{\chi},\overset{*}{\psi}-\hat{\psi})$, la différence de ces deux relations donne:

$$a_1((\overset{*}{\chi}-\hat{\chi},\overset{*}{\psi}-\hat{\psi}),(\overset{*}{\chi}-\hat{\chi},\overset{*}{\psi}-\hat{\psi})) = 0 \quad \text{et} \quad (\overset{*}{\chi}-\hat{\chi},\overset{*}{\psi}-\hat{\psi}) \in E_Y^0$$

Mais d'après iii) du lemme 4-1, ceci implique que:

$$\overset{*}{\chi} = \hat{\chi} \quad , \quad \overset{*}{\psi} = \hat{\psi} \tag{4-10}$$

La solution (χ_0^j,ψ_0^j) du problème (4-8) est donc unique.

- L'existence et l'unicité des solutions (χ_k^j,ψ_k^j) des autres équations de (4-4) se démontre par récurrence, de façon analogue à la précédente.

◆ *Estimation de l'erreur:*

Posons:

$$\left|\begin{array}{l} \theta^\zeta = (\theta_1^\zeta,\theta_2^\zeta) = \displaystyle\sum_{k=-1}^{k=m} \zeta^k\,(\chi_k^j,\psi_k^j) \\ \hat{\theta}^\zeta = (\hat{\theta}_1^\zeta,\hat{\theta}_2^\zeta) = \theta^\zeta + \zeta^{m+1}\,(\chi_{m+1}^j,\psi_{m+1}^j) \\ Z^\zeta = (Z_1^\zeta,Z_2^\zeta) = (\chi^{j\zeta},\psi^{j\zeta}) - \hat{\theta}^\zeta \end{array}\right. \tag{4-11}$$

$$\begin{aligned} a^\zeta(\hat{\theta}^\zeta,(v,\varphi)) = {} & \zeta^{-1}\, a_0((\chi_{-1}^j,\psi_{-1}^j),(v,\varphi)) \quad + \\ & + \sum_{k=-1}^{k=m} \zeta^{k+1}\left(a_1((\chi_k^j,\psi_k^j),(v,\varphi)) + a_0((\chi_{k+1}^j,\psi_{k+1}^j),(v,\varphi))\right) + \\ & + \zeta^{m+2}\, a_1((\chi_{m+1}^j,\psi_{m+1}^j),(v,\varphi)) \qquad \forall\ (v,\varphi) \in E_Y \end{aligned}$$

Ainsi d'après les équations (4-2) et (4-4) on a pour tout couple (v,ψ) de E_Y :

$$a^{\zeta}((\chi^{j\zeta},\psi^{j\zeta}),(v,\psi)) = L^{j\zeta}((v,\psi))$$

$$\begin{aligned} a^{\zeta}(\hat{\theta}^{\zeta},(v,\psi)) &= L_0^j((v,\psi)) + \zeta\, L_1^j((v,\psi)) + \zeta^{m+2}\, a_1((\chi^j_{m+1},\psi^j_{m+1}),(v,\psi)) \\ &= L^{j\zeta}((v,\psi)) + \zeta^{m+2}\, a_1((\chi^j_{m+1},\psi^j_{m+1}),(v,\psi)) \end{aligned}$$

Avec un couple de fonctions-tests (v,ψ) égal à Z^{ζ}, la différence de ces deux relations et donne:

$$(4\text{-}12) \qquad a^{\zeta}(Z^{\zeta},Z^{\zeta}) = -\,\zeta^{m+2}\, a_1((\chi^j_{m+1},\psi^j_{m+1}),Z^{\zeta})$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée dans l'expression (4-1) de $a_1((\chi^j_{m+1},\psi^j_{m+1}),Z^{\zeta})$ entraine que :

- $a_1((\chi^j_{m+1},\psi^j_{m+1}),Z^{\zeta}) \leq \omega_1 \left\| \nabla(\chi^j_{m+1}) \right\|_{L^2(Y_g)} \left\| Z^{\zeta} \right\|_{E_Y}$

Mais, comme dans les estimations (2-31), on peut établir que l'orsque le paramètre ζ est assez petit on l'inégalité:

- $\left| a^{\zeta}((v,\psi),(v,\psi)) \right| \geq C_1\zeta \left\| (v,\psi) \right\|^2_{E_Y}$

donc

$$(4\text{-}13) \qquad C_1\zeta \left\| Z^{\zeta} \right\|^2_{E_Y} \leq a^{\zeta}(Z^{\zeta},Z^{\zeta}) \leq C_2\,\zeta^{m+2} \left\| Z^{\zeta} \right\|_{E_Y}$$

On en déduit alors l'estimation de l'erreur voulue :

$$\begin{aligned} (4\text{-}13) \qquad \left\| (\chi^{j\zeta},\psi^{j\zeta}) - \theta^{\zeta} \right\|_{E_Y} &= \left\| Z^{\zeta} + \zeta^{m+1} (\chi^j_{m+1},\psi^j_{m+1}) \right\|_{E_Y} \\ &\leq \left(\frac{C_2}{C_1} + \left\| (\chi^j_{m+1},\psi^j_{m+1}) \right\|_{E_Y} \right) \zeta^{m+1} \ . \square \end{aligned}$$

4-1-2) Limites des conductivités homogénéisées K^{ζ}_{ij}:

Rappelons l'expression (2-43) des K^{ζ}_{ij} en mettant en évidence le paramètre ζ :

$$(4\text{-}14)\quad |Y|\,K^{\zeta}_{ij} = \int_{Y_g \cup Y_\ell} \lambda \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\chi^{j\zeta} + y_j\right) dy + \eta\omega_1 \int_{Y_g^{(\ell)}} \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\chi^{j\zeta} + y_j + \frac{\psi^{j\zeta}}{\omega_1}\right) dy +$$

$$+ \zeta \int_{Y_g} \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\chi^{j\zeta} + y_j\right) dy$$

D'après l'estimation de l'erreur dans la proposition 4-1 les $(\chi^{j\zeta},\psi^{j\zeta})$ convergent dans E_Y vers les solutions uniques (χ^j_0,ψ^j_0) de (4-8), il est alors clair que les conductivités K^{ζ}_{ij} convergent aussi vers une limite K^o_{ij}. On va estimer l'erreur $\left|K^{\zeta}_{ij} - K^o_{ij}\right|$ et établir quelques propriétés des conductivités limites K^o_{ij} :

Proposition 4-2:

i) $\displaystyle \operatorname*{Max}_{i,j} \left|K^{\zeta}_{ij} - K^o_{ij}\right| \leq C\ \zeta$

$$(4\text{-}15)\quad K^o_{ij} = \frac{\eta\omega_1}{|Y|} \int_{Y_g \cup Y_\ell} \lambda \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\chi^j_0 + y_j\right) dy + \frac{\eta\omega_1}{|Y|} \int_{Y_g^{(\ell)}} \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\chi^j_0 + y_j + \frac{\psi^j_0}{\omega_1}\right) dy$$

ii) *Les conductivités limites* K^o_{ij} *s'écrivent sous la forme symétrique et coercive:*

$$(4\text{-}16)\quad K^o_{ij} = \frac{1}{|Y|}\left\{ \int_{Y_g \cup Y_\ell} \lambda \frac{\partial}{\partial y_m}\left(\chi^j_0 + y_j\right) \frac{\partial}{\partial y_m}\left(\chi^i_0 + y_i\right) dy \right\} +$$

$$+ \frac{\eta\omega_1}{|Y|}\left\{ \int_{Y_g^{(\ell)}} \frac{\partial}{\partial y_m}\left(\chi^j_0 + y_j + \frac{\psi^j_0}{\omega_1}\right) \frac{\partial}{\partial y_m}\left(\chi^i_0 + y_i + \frac{\psi^i_0}{\omega_1}\right) dy \right\}$$

Démonstration:

i) $$|Y|(K^{\zeta}_{ij} - K^{o}_{ij}) = \int_{Y_g \cup Y_\ell} \lambda \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\chi^{j\zeta} - \chi^j_0\right) dy + \zeta \int_{Y_g} \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\chi^{j\zeta} + y_j\right) dy +$$

$$+ \eta\omega_1 \int_{Y_g^{(\ell)}} \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\chi^{j\zeta} - \chi^j_0 + \frac{1}{\omega_1}(\psi^{j\zeta} - \psi^j_0)\right) dy$$

d'où :

$$|Y|\,|K^{\zeta}_{ij} - K^{o}_{ij}| \leq C\left\|(\chi^{j\zeta},\psi^{j\zeta}) - (\chi^j_0,\psi^j_0)\right\|_{E_Y} + \zeta\left(\sqrt{|Y_g|}\;\|\nabla\chi^{j\zeta}\|_{L^2(Y_g)} + |Y_g|\right)$$

Ainsi , puisque $\|\nabla\chi^{j\zeta}\|_{L^2(Y_g)}$ est borné indépendemment de ζ et d'après la proposition 4-1:

$$|Y|\,|K^{\zeta}_{ij} - K^{o}_{ij}| \leq C\,\zeta.$$

ii) On va maintenant reécrire les K^{o}_{ij} sous une forme symétrique et coercitive , comme ce qui a été fait pour les K^{ζ}_{ij} (2-47).

Les équations (4-8) vérifiées par (χ^j_0,ψ^j_0) s'écrivent:

(4-17)
$$\left|\begin{array}{l}
\forall\ (v,\psi) \in E_Y \\
\displaystyle\int_{Y_g \cup Y_\ell} \lambda \frac{\partial}{\partial y_m}\left(\chi^j_0 + y_j\right)\frac{\partial v}{\partial y_m}\, dy + \int_{Y_g^{(\ell)}} \eta \frac{\partial}{\partial y_m}\left(\chi^j_0 + y_j + \frac{\psi^j_0}{\omega_1}\right)\frac{\partial}{\partial y_m}\left(\omega_1 v + \varphi\right) dy = 0 \\
\text{et } \forall\ (v,\psi) \in E^o_Y : \\
\displaystyle\int_{Y_g} \frac{\partial}{\partial y_m}\left(\chi^j_0 + y_j\right)\frac{\partial v}{\partial y_m}\, dy = 0 \\
\text{avec } (\chi^j_0,\psi^j_0) \in E_Y \text{ et } \displaystyle\int_Y \chi^j_0\, dy = 0
\end{array}\right.$$

On prend dans la première équation de (4-17) le couple (v,ϕ) égal à $\frac{1}{|Y|}(\chi_0^i, \frac{\psi_0^i}{\omega_1})$, on somme le premier membre, qui est nul, avec l'expression (4-15) des K_{ij}^0. On vérifie alors facilement que les K_{ij}^0 s'écrivent sous la forme (4-16). La symétrie des K_{ij}^0 est alors évidente, leur coercivité se démontre en utilisant la périodicité des (χ_0^j, ψ_0^j) et en procédant comme on l'a fait pour celle des K_{ij}^ζ (voir (2-47) à (2-48)). □

Enfin, on donne la formulation forte (au moins formellement) du problème variationnel (4-16) vérifié par les fonctions (χ_0^j, ψ_0^j), qui s'obtient, comme dans les cas classiques, en prenant des fonctions-tests particulières:

$$
(4\text{-}18)\quad \left|\begin{array}{ll}
-\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\mu\left(\frac{\partial \chi_0^j}{\partial y_i}\right)\right) = 0 & \text{dans chaque } Y_\alpha\ (\alpha, = g,\ell,s) \\[2ex]
[\![\ \chi_0^j\ ]\!]_{\alpha\beta} = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{\alpha\beta}\ (\alpha,\beta = g,\ell,s) \\
[\![\ \lambda \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\chi_0^j + y_j\right) n_i\ ]\!]_{\ell s} = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{\ell s} \\
\lambda_s \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\chi_0^j + y_j\right) n_i\Big|_s = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{sg} \\
\lambda_\ell \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\chi_0^j + y_j\right) n_i\Big|_\ell = \eta \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\psi_0^j + \omega_1(\chi_0^j + y_j)\right) n_i\Big|_g & \text{sur } \mathcal{A}_{g\ell} \\[2ex]
-\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{\partial \psi_0^j}{\partial y_i}\right) = 0 & \text{dans } Y_g^{(\ell)} \\
\frac{\partial \psi_0^j}{\partial y_i} n_i = -\omega_1 \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\chi_0^j + y_j\right) n_i\Big|_g & \text{sur } \mathcal{A}_{sg}^{(\ell)} \\
\psi_0^j = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{g\ell} \\
\chi_0^j \text{ et } \psi_0^j \text{ sont Y-périodiques ;} \quad \int_Y \chi_0^j\, dy = 0 &
\end{array}\right.
$$

4-1-3) Comportement Limite de u^ζ :

Théoreme 4-1:

La température homogénéisée u^ζ *converge dans* $H_0^1(\Omega)$ *fort, lorsque* ζ *tend vers* 0, *vers la solution unique* u^0 *du problème de Dirichlet suivant:*

$$(4\text{-}19)\qquad \begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(K_{ij}^0 \dfrac{\partial u^0}{\partial x_i}\right) = \mathcal{M}_Y\left(f + \eta\ h\chi_g^{(\ell)}\right) & \text{dans } \Omega \\ u^0 = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

et on a l'estimation de l'erreur suivante:

$$\left\| u^\zeta - u^0 \right\|_{H_\partial^1(Y)} \leq C\,\zeta$$

Démonstration:

On note, comme dans (2-45), r la moyenne sur Y de la fonction $f + \eta\ h\chi_g^{(\ell)}$:

$$r(x) = \frac{1}{|Y|}\int_Y \left(f + \eta\ h\chi_g^{(\ell)}\right)(x,y)dy = \mathcal{M}_Y\left(f + \eta\ h\chi_g^{(\ell)}\right)$$

D'après les propriétés des K_{ij}^0 le problème (4-19) admet bien une solution unique u^0, de plus puisque la fonction r est dans $L^2(\Omega)$, u^0 est dans $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$.

Commençons par montrer que u^ζ est bornée indépendemment de ζ dans $H_0^1(\Omega)$. On note que l'inégalité (2-48) ne montre pas que les K_{ij}^ζ sont uniformément elliptiques en ζ, la constante γ qui y intervient peut dépendre de ζ ; pour montrer qu'elles sont uniformément elliptiques, on les écrit sous la forme suivante:

$$(4\text{-}20)\qquad K_{ij}^\zeta = \tfrac{1}{2}K_{ij}^0 + \tfrac{1}{2}K_{ij}^0 + \zeta M_{ij}^\zeta$$

où les M_{ij}^ζ, d'après la proposition 4-2, sont bornées indépendemment de ζ.

Puisque les K^0_{ij} sont coercives (et indépendantes de ζ) il existe une constante δ strictement positive telle que:

$$(4\text{-}21) \qquad K^0_{ij}\, x_i x_j \geqslant \delta\, x_i x_i \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^3$$

Donc, puisque $\zeta\, M^\zeta_{ij}$ tend vers zéro avec ζ , on a:

$$\tfrac{1}{2} K^0_{ij}\, x_i x_j + \zeta\, M^\zeta_{ij}\, x_i x_j \geqslant 0$$

On conclut donc que, lorsque ζ est assez petit, on a:

$$(4\text{-}22) \qquad K^\zeta_{ij}\, x_i x_j \geqslant \tfrac{1}{2} K^0_{ij}\, x_i x_j \geqslant \tfrac{1}{2}\delta\, x_i x_i \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^3 .$$

Montrons maintenant que la température homogénéisée u^ζ converge vers la solution u^0 du problème (4-19). D'après (2-49) elle vérifie :

$$(4\text{-}23) \qquad \left| \begin{array}{l} u^\zeta \;\; H^1_0(\Omega) \quad \text{et} \quad \forall\, v \in H^1_0(\Omega) \\[2ex] \displaystyle\int_\Omega K^\zeta_{ij} \frac{\partial u^\zeta}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j}\, dx \;=\; \int_\Omega r\; v\; dx \end{array} \right.$$

En prenant v égale à u^ζ et en utilisant (4-22) , l'inégalité de Cauchy-Schwarz et celle de Poincaré entrainent que:

$$C' \left\| u^\zeta \right\|^2_{H^1_0(\Omega)} \leqslant \int_\Omega K^\zeta_{ij} \frac{\partial u^\zeta}{\partial x_i} \frac{\partial u^\zeta}{\partial x_i}\, dx \leqslant \left\| r \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| u^\zeta \right\|_{H^1_0(\Omega)} \text{ ; d'où:}$$

$$(4\text{-}24) \qquad \left\| u^\zeta \right\|_{H^1_0(\Omega)} \leqslant C$$

On peut alors extraire une sous-suite de u^ζ qui converge faiblement dans $H_0^1(\Omega)$. On va voir que toute la suite converge et qu'on a l'estimation de l'erreur annoncée. La formulation faible associée au problème (4-19) vérifié par u^0 est :

$$(4\text{-}25)\quad \left|\begin{array}{l} u^0 \in H_0^1(\Omega) \quad \text{et} \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega K_{ij}^0 \frac{\partial u^0}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\, dx = \int_\Omega f\, v\, dx \end{array}\right.$$

Les équations (4-23) et (4-25) entrainent que:

$$(4\text{-}25)\qquad \int_\Omega K_{ij}^0 \frac{\partial}{\partial x_i}(u^0 - u^\zeta)\frac{\partial v}{\partial x_j} dx = \int_\Omega (K_{ij}^\zeta - K_{ij}^0)\frac{\partial u^\zeta}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\, dx\,.$$

En prenant la fonction-test v égale à $(u^\zeta - u^0)$ on en déduit grâce à (4-21) et l'inégalité de Poincaré que:

$$C'\delta \left\| u^\zeta - u^0 \right\|^2_{H_\partial^1(Y)} \leq \operatorname*{Max}_{i\,j} \left| K_{ij}^\zeta - K_{ij}^0 \right| \sum_{i,j} \int_\Omega \frac{\partial u^\zeta}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}(u^\zeta - u^0)\, dx$$

d'où:

$$C'\delta \left\| u^\zeta - u^0 \right\|^2_{H_\partial^1(Y)} \leq \operatorname*{Max}_{i\,j} \left| K_{ij}^\zeta - K_{ij}^0 \right| \left\| u^\zeta \right\|_{H_\partial^1(Y)} \left\| u^\zeta - u^0 \right\|_{H_\partial^1(Y)}$$

La proposition 4-2 et l'estimation (4-24) achèvent donc la démonstration:

$$(4\text{-}22)\qquad \left\| u^\zeta - u^0 \right\|_{H_\partial^1(Y)} \leq C\zeta \qquad \square.$$

4-2) Comportement de la solution initiale lorsque ζ tend vers zéro:

La température T^ζ et la fraction massique translatée ω^ζ sont solutions uniques du problème (1-13) qui s'écrit aussi, en utilisant la définition (1-11) de μ, sous la forme suivante:

$$
(4\text{-}23)\quad \left|
\begin{array}{l}
(T^\zeta,\omega^\zeta) \in E = H_0^1(\Omega) \times \left\{ \varphi \in H^1(\Omega_g^{(\ell)}) \; ; \; \varphi = 0 \;\; \text{sur} \;\; \mathcal{A}_{g\ell} \right\} \\
a^\zeta((T^\zeta,\omega^\zeta),(v,\varphi)) = L((v,\varphi)) \qquad\qquad \forall\, (v,\varphi) \in E \\
\text{où :} \\
a^\zeta((u,\chi),(v,\varphi)) = a_0((u,\chi),(v,\varphi)) + \zeta\, a_1((u,\chi),(v,\varphi)) \qquad \forall\, ((v,\varphi),(u,\chi)) \in E \times E \\
a_0((u,\chi),(v,\varphi)) = \displaystyle\int_{\Omega_g \cup \Omega_\ell} \omega_1 \lambda\, \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega_g^{(\ell)}} \eta\, \nabla(\omega_1 u + \chi) . \nabla(\omega_1 v + \varphi) dx \\
a_1((u,\chi),(v,\varphi)) = \displaystyle\int_{\Omega_g} \omega_1 \, \nabla u \cdot \nabla v \, dx \\
L((v,\varphi)) = \displaystyle\int_{\Omega} \omega_1 \, f v \, dx + \int_{\Omega_g^{(\ell)}} h(\omega_1 v + \varphi) dx
\end{array}
\right.
$$

<u>Estimations a priori</u>:

On va donner une majoration de $\| (T^\zeta,\omega^\zeta) \|_E$ en fonction du petit paramètre ζ en utilisant les inégalités (1-18) et (1-21) vérifiées par $a^\zeta(.\,,\,.)$ et $L(\,.\,)$ qui sont déjà établies dans le premier paragraphe:

$$
\begin{array}{l}
\left| L((v,\varphi)) \right| \le M \, \| (v,\varphi) \|_E \\
\left| a^\zeta((v,\varphi),(v,\varphi)) \right| \ge C_1(\zeta) \, \| (v,\varphi) \|_E^2
\end{array}
$$

où seule la constante $C_1(\zeta)$ dépend de ζ, plus précisément :

$$M = \sqrt{2}\max\left(\omega_1 \left\| f+\eta h\chi_g^{(\varepsilon)} \right\|_{L^2_{(\Omega)}} ; \left\| h \right\|_{L^2_{(\Omega)}}\right)$$

$$C_1(\zeta) = \mathrm{Min}(\beta(\zeta), \delta(\zeta), \omega_1 \min(\lambda_\ell, \lambda_g))$$

$$\delta(\zeta) = \frac{\omega_1\zeta}{2}$$

$$\beta(\zeta) = \eta\frac{\zeta}{2\omega_1\eta + \zeta}$$

En prenant $(v,\varphi) = (T^\zeta,\omega^\zeta)$ dans la première équation de (4-23) et en utilisant les inégalités précédentes on obtient:

$$\left\| (T^\zeta,\omega^\zeta) \right\|_E \le \frac{M}{C_1(\zeta)}$$

Lorsque ζ est très petit ($\zeta << 1$), la constante $C_1(\zeta) = \mathrm{Min}(\beta(\zeta), \delta(\zeta))$ vaut $\beta(\zeta)$ si ω_1 est supérieur ou égal à 1, sinon elle vaut $\delta(\zeta)$. Dans les deux cas elle est de l'ordre de ζ :

(4-24) $$\left\| (T^\zeta,\omega^\zeta) \right\|_E \le \frac{C}{\zeta} \quad \text{et} \quad a^\zeta((T^\zeta,\omega^\zeta),(T^\zeta,\omega^\zeta)) \ge C\zeta \left\| (v,\varphi) \right\|_E^2 .$$

où la constante C ne dépend ni de ζ ni de ε.

<u>Développement asymptotique:</u>

On cherche (T^ζ,ω^ζ) sous la forme :

(4-25) $$(T^\zeta,\omega^\zeta) = \zeta^{-1}(T_{-1},w_{-1}) + (T_0,w_0) + \zeta^1(T_1,w_1) + \zeta^2(T_2,w_2) + \zeta^3(T_3,w_3) + \ldots$$

où les termes (T_j,w_j) sont des éléments "réguliers" de E .

Pour simplifier l'écriture on notera dans la suite :

$$\left|\begin{array}{ll} u^{\zeta}=(T^{\zeta},\omega^{\zeta}) & \\ u_j=(T_j,w_j) & \forall\ j\geq -1 \\ \psi=(v,\varphi) \text{ pour les fonctions-tests de } E\ . & \end{array}\right.$$

Pour obtenir les équations vérifiées par les termes $u_j=(T_j,w_j)$ on reporte (4-25) dans les équations(4-23) et on identifie les termes en puissance de ζ :

$$(4\text{-}26)\quad \left|\begin{array}{ll} a_0(u_{-1},\psi)=0 & \forall\ \psi\in E \\ a_1(u_{-1},\psi)+a_0(u_0,\psi)=L(\psi) & \\ a_1(u_j,\psi)+a_0(u_{j+1},\psi)=0 & \forall\ j\geq 0 \end{array}\right.$$

<u>Etude des équations (4-26) et convergence de (4-25):</u>

On introduit d'abord l'espace E_0, défini ci-dessous, qui va nous permettre d'étudier les équations (4-26):

$$(4\text{-}27)\qquad E_0=\left\{\psi\in E\ ;\ a_0(\psi,\psi)=0\right\}$$

dont quelques propriétés sont rassemblées dans le lemme suivant:

Lemme 4-2:

i) *le couple* $\psi=(v,\varphi)$ *appartient à* E_0 *si et seulement si :*

- *la fonction* v *est constante dans chaque composante connexe de* $\bar{\Omega}_g\cup\bar{\Omega}_\ell$
- *la fonction* $\omega_1 v+\varphi$ *est constante dans chaque composante connexe de* $\Omega_g^{(\ell)}$)

iii)

Le sous-espace E_0 *est de Hilbert, et l'application* $\psi\longrightarrow\sqrt{a_1(\psi,\psi)}$ *est une norme dans* E_0 *équivalente à celle induite par* E.

preuve

i) D'après l'expression (4-23) de $a_0(.,.)$, pour $\psi = (v,\varphi)$ on a:

$$a_0(\psi,\psi) = \int_{\Omega_g \cup \Omega_\ell} \omega_1 \lambda \, (\nabla v)^2 dx + \int_{\Omega_g^{(\ell)}} \eta \, (\nabla(\omega_1 v + \varphi))^2 dx$$

et l'assertion i) est alors évidente.

ii) Remarquons, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que $a_0(\psi,\psi) \leq \|\psi\|_E^2$, il est alors clair que E_0 est un sous espace fermé de E pour la norme induite, il est donc de Hilbert. Montrons que $\psi \longrightarrow \sqrt{a_1(\psi,\psi)}$ est une norme sur E_0:

$$\|(v,\varphi)\|_E^2 = \int_{\Omega} (\nabla v)^2 dx + \int_{\Omega_g^{(\ell)}} (\nabla \varphi)^2 dx$$

$$= \int_{\Omega_g \cup \Omega_\ell} (\nabla v)^2 dx + \int_{\Omega_g^{(\ell)}} (\nabla v)^2 + (\nabla \varphi)^2 dx + \int_{\Omega_g^{(*)}} (\nabla v)^2 dx$$

Si $\psi = (v,\varphi)$ appartient à E_0 alors ,d'après i) ∇v est nul dans $\Omega_g \cup \Omega_\ell$ et $\nabla \varphi = -\omega_1 \nabla v$ dans $\Omega_g^{(\ell)}$ donc:

$$\|(v,\varphi)\|_E^2 = \int_{\Omega_g^{(\ell)}} (1+\omega_1^2)(\nabla v)^2 \, dx + \int_{\Omega_g^{(*)}} (\nabla v)^2 dx$$

d'où les inégalités suivantes:

$$a_1((v,\varphi),(v,\varphi)) \leq \omega_1 \|(v,\varphi)\|_E^2 \leq (1+\omega_1^2) \, a_1((v,\varphi),(v,\varphi)).$$

Ce qui achève la preuve du lemme 4-2. □

Théorème 4-2:

Les termes $u_j = (T_j, w_j)$ *sont déterminés d'une façon unique par les équations* (4-26) *et on a l'estimation de l'erreur suivante:*

$$\left\| u^\zeta - \sum_{j=-1}^{j=m} \zeta^j u_j \right\|_E \leq C\, \zeta^{m+1} \left\| \nabla u_{m+1} \right\|_E$$

la constante C *est indépendante de* ζ *et de* ε.

Démonstration:

-Détermination de $u_{-1} = (T_{-1}, w_{-1})$

En prenant dans la première équation de (4-26) $\psi = u_{-1}$ et dans la deuxième une fonction-test quelconque $\psi \in E_0$ on déduit que :

$$(4\text{-}28) \quad \left| \begin{array}{l} u_{-1} \in E_0 \\ a_1(u_{-1}, \psi) = L(\psi) \quad \forall \psi \in E_0 . \end{array} \right.$$

Grâce au lemme 4-2, l'existence et l'unicité de la solution u_{-1} de (4-28) est une conséquence du lemme de Lax-Milgram.

-Détermination de $u_0 = (T_0, w_0)$:

La deuxième équation de (4-26) et la troisième prise avec des fonctions-tests appartenant à E_0 montrent que u_0 vérifie :

$$(4\text{-}29) \quad \left| \begin{array}{ll} a_0(u_0, \psi) = L(\psi) - a_1(u_{-1}, \psi) & \forall \psi \in E . \\ a_1(u_0, \psi) = 0 & \forall \psi \in E_0 . \end{array} \right.$$

L'alternative de Fredholm appliquée à la première équation de (4-29) permet d'affirmer qu'il existe une solution u_0 unique à un élement de E_0 près; en effet:

$$a_0(\psi,\psi) = 0 \iff \psi \in E_0$$

et la condition de compatibilité est satisfaite d'après (4-28):

$$L(\psi) - a_1(u_{-1},\psi) \qquad \forall \psi \in E_0$$

On va maintenant utiliser la deuxième équation de (4-29) pour montrer l'unicité de u_0. Soient $\tilde{u}_0$ et $\hat{u}_0$ deux solutions de (4-29), elle doivent vérifier:

$$\left|\begin{array}{l} \tilde{u}_0 - \hat{u}_0 \in E_0 \text{ et } \forall \psi \in E_0 \\ a_1(\tilde{u}_0,\psi) = 0 \\ a_1(\hat{u}_0,\psi) = 0 . \end{array}\right.$$

On fait la différence de ces deux dernières relations et on prend $\psi = \tilde{u}_0 - \hat{u}_0$:

$$a_1(\tilde{u}_0 - \hat{u}_0, \tilde{u}_0 - \hat{u}_0) = 0$$

Mais, puisque d'après ii) du lemme 4-2, $\sqrt{a_1(\ .\ ,\ .\ )}$ est une norme sur E_0, ceci implique que les fonctions $\tilde{u}_0$ et $\hat{u}_0$ sont identiques .

- *Détermination des* $u_j = (T_j, w_j)$ $j \geq 1$:

Les termes u_j vérifient les équations suivantes :

$$(4\text{-}30) \quad \left|\begin{array}{ll} a_0(u_j,\psi) = L(\psi) - a_1(u_{j-1},\psi) & \forall \psi \in E . \\ a_1(u_j,\psi) = 0 & \forall \psi \in E_0 . \end{array}\right.$$

D'une manière analogue à la détermination de u_0, on montre, par récurrence, l'existence et l'unicité de chaque terme u_j .

- Estimation de l'erreur:

On pose:

$$\left|\begin{array}{l} \theta^\zeta = (\theta_1^\zeta, \theta_2^\zeta) = \sum_{j=-1}^{j=m} \zeta^j u_j \\ \hat{\theta}^\zeta = (\hat{\theta}_1^\zeta, \hat{\theta}_2^\zeta) = \theta^\zeta + \zeta^{m+1} u_{m+1} \\ Z^\zeta = (Z_1^\zeta, Z_2^\zeta) = u^\zeta - \hat{\theta}^\zeta \end{array}\right.$$

En remplaçant $a^\zeta(\cdot\,,\cdot)$ et $\hat{\theta}^\zeta$ par leur expressions on a pour tout ψ de E :

$$a^\zeta(\hat{\theta}^\zeta, \psi) = \zeta^{-1} a_0(u_{-1}, \psi) + \sum_{j=-1}^{j=m} \zeta^{j+1} \Big(a_1(u_j, \psi) + a_0(u_{j+1}, \psi)\Big) + \zeta^{m+2} a_1(u_{m+1}\, \psi)$$

D'après les équations (4-23) et (4-26) :

$$a^\zeta(u^\zeta, \psi) = L(\psi)$$
$$a^\zeta(\hat{\theta}^\zeta, \psi) = L(\psi) + \zeta^{m+2} a_1(u_{m+1}, \psi).$$

Donc, en prenant le couple de fonctions-tests ψ égal à Z^ζ, la différence de ces deux relations donne:

$$a^\zeta(Z^\zeta, Z^\zeta) = -\zeta^{m+2} a_1(u_{m+1}, \psi) = \int_{\Omega_g} \omega_1 \nabla T_{m+1} \cdot \nabla v \, dx .$$

(rappel: $u_{m+1} = (T_{m+1}, w_{m+1})$ et $\psi = (v, \psi)$)

L'estimation (4-24) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'expression(4-23) de $a_1(\cdot\,,\cdot)$ impliquent alors que:

(4-31) $$C\zeta \left\| Z^\zeta \right\|_E^2 \leq a^\zeta(Z^\zeta, Z^\zeta) \leq C' \omega_1 \zeta^{m+2} \left\| \nabla T_{m+1} \right\|_{L^2(\Omega_g)} \left\| Z^\zeta \right\|_E$$

d'où :

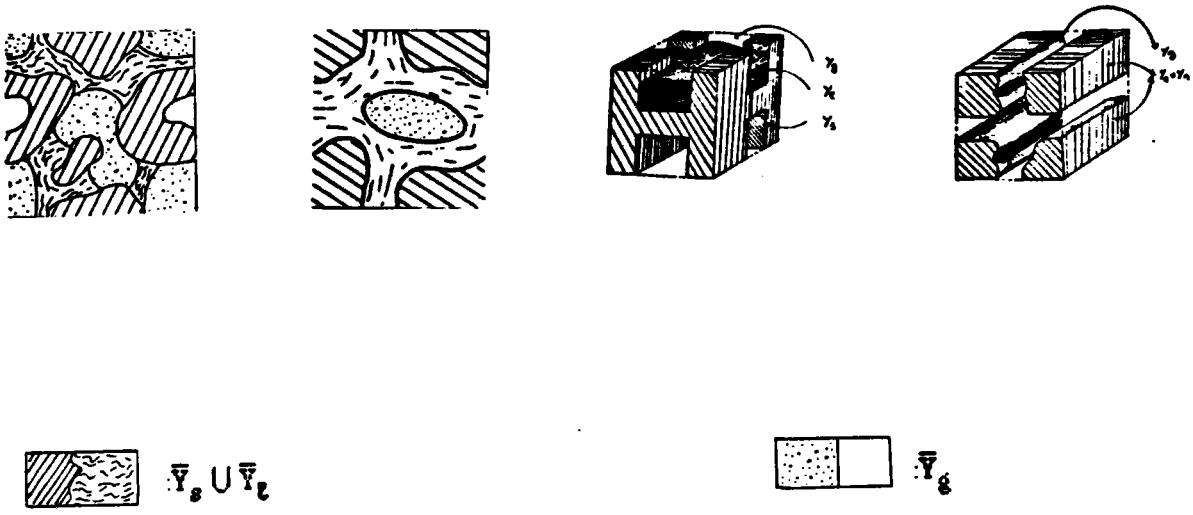
$$\left\| Z^\zeta \right\|_E = \left\| u^\zeta - \sum_{j=-1}^{j=m} \zeta^j u_j - \zeta^{m+1} u_{m+1} \right\|_E \leq \frac{C'}{C} \zeta^{m+1} \left\| \nabla T_{m+1} \right\|_{L^2(\Omega_g)}$$

Ce qui achève la démonstration du théorème.□

4-3) Comportement de T^{ε}_{-1} et T^{ε}_{0} lorsque ε tend vers zéro:

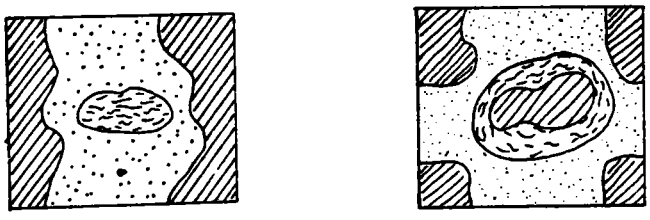
Dans cette partie on ajoute une hypothèse suplémentaire portant sur la géométrie du matériau occupant l'ensemble Ω. On suppose que :

(4-32) Toutes les composantes connexes de $\overline{\Omega}^{\varepsilon}_{s} \cup \overline{\Omega}^{\varepsilon}_{\ell}$ ont une intersection avec le bord de Ω:



Exemples de géométries vérifiant (4-32)

(fig 4-1)



Exemples de géométries ne vérifiant pas (4-32):

(fig 4-2)

L'hypothèse (4-32) a pour but de simplifier l'écriture de l'ensemble E_0 défini par (4-27) et qui intervient dans les équations vérifiées par les couples $u_{-1}^{\varepsilon} = (T_{-1}^{\varepsilon}, w_{-1}^{\varepsilon})$ et $u_0^{\varepsilon} = (T_0^{\varepsilon}, w_0^{\varepsilon})$. Sous cette hypothèse il devient :

$$(4\text{-}33) \qquad E_0 = \left\{ (v,\varphi) \in E \ ; \ v \equiv 0 \text{ dans } \overline{\Omega}_g^{\varepsilon} \cup \overline{\Omega}_\ell^{\varepsilon} \text{ et } \varphi \equiv -\omega_1 v \text{ dans } \Omega_g^{(\ell)\varepsilon} \right\}$$

En effet, si le couple $(v,\varphi) \in E_0$, alors:

- la fonction $v \in H_0^1(\Omega)$, si de plus elle est constante dans chaque composante connexe de $\overline{\Omega}_g^{\varepsilon} \cup \overline{\Omega}_\ell^{\varepsilon}$, qui a un contact avec $\partial(\Omega)$, elle est y alors forcément nulle, puisque elle l'est sur le bord $\partial(\Omega)$.

- la fonction $\varphi \in H^1(\Omega_g^{(\ell)\varepsilon})$ et est nulle sur $\mathcal{A}_{g\ell}^{\varepsilon}$, donc si $\omega_1 v + \varphi$ est constante dans chaque composante connexe de $\Omega_g^{(\ell)\varepsilon}$, puisque v et φ ont des traces identiquement nulles sur $\mathcal{A}_{g\ell}^{\varepsilon}$, cette constante est forcément nulle.

4-3-1 Comportement de T_{-1}^{ε} :

Sous l'hypothèse (4-32) l'équation (4-28) vérifiée par le couple $u_{-1}^{\varepsilon} = (T_{-1}^{\varepsilon}, w_{-1}^{\varepsilon})$ s'écrit:

$$(4\text{-}34) \qquad \left| \begin{array}{l} T_{-1}^{\varepsilon} \in H_0^1(\Omega) \ ; \ T_{-1}^{\varepsilon} \equiv 0 \text{ dans } \overline{\Omega}_g^{\varepsilon} \cup \overline{\Omega}_\ell^{\varepsilon} \text{ et:} \\ \displaystyle\int_{\Omega_g^{\varepsilon}} \nabla T_{-1}^{\varepsilon} \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega_g^{\varepsilon}} f v \, dx \qquad \forall \, v \in H_0^1(\Omega_g^{\varepsilon}) \\ w_{-1}^{\varepsilon} \equiv -\omega_1 T_{-1}^{\varepsilon} \quad \text{dans } \Omega_g^{(\ell)\varepsilon} \end{array} \right.$$

ou sous la formulation forte suivante :

$$
(4\text{-}35)\quad \left|\begin{array}{ll}
T_{-1}^{\varepsilon} = 0 & \text{dans } \overline{\Omega}_g^{\varepsilon} \cup \overline{\Omega}_\ell^{\varepsilon} \\
-\Delta T_{-1}^{\varepsilon} = f & \text{dans } \Omega_g^{\varepsilon} \\
T_{-1}^{\varepsilon} = 0 & \text{sur } \partial(\Omega_g^{\varepsilon}) \\
w_{-1}^{\varepsilon} = -\omega_1 T_{-1}^{\varepsilon} & \text{dans } \Omega_g^{(\ell)\varepsilon}
\end{array}\right.
$$

D'après les relations précédentes et puisque, par définition, $\Omega_g^{(\ell)\varepsilon}$ et $\Omega_g^{(*)\varepsilon}$ forment une partition de Ω_g^{ε}, la restriction de T_{-1}^{ε} à $\Omega_g^{(\ell)\varepsilon}$ (resp. à $\Omega_g^{(*)\varepsilon}$) est dans $H_0^1(\Omega_g^{(\ell)\varepsilon})$ (resp. dans $H_0^1(\Omega_g^{(*)\varepsilon})$). Donc, si on désigne par $\tilde{w}_{-1}^{\varepsilon}$ le prolongement par zéro de w_{-1}^{ε} dans $\Omega \backslash \Omega_g^{(\ell)\varepsilon}$, la dernière égalité de (4-35) implique que:

$$\tilde{w}_{-1}^{\varepsilon} \equiv -\omega_1 T_{-1}^{\varepsilon} \text{ dans } H_0^1(\Omega) .$$

Le comportement du couple $(T_{-1}^{\varepsilon}, \tilde{w}_{-1}^{\varepsilon})$ lorsque ε tend vers zéro est donné par la proposition suivante:

Proposition 4-3:

Le couple $(T_{-1}^{\varepsilon}, \tilde{w}_{-1}^{\varepsilon})$ *vérifie les inégalités :*

$$\left\| T_{-1}^{\varepsilon} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C\varepsilon^2 \quad ; \quad \left\| \nabla T_{-1}^{\varepsilon} \right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq C\varepsilon$$

$$\left\| \tilde{w}_{-1}^{\varepsilon} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C\varepsilon^2 \quad ; \quad \left\| \nabla \tilde{w}_{-1}^{\varepsilon} \right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq C\varepsilon$$

<u>démonstration:</u>

En prenant la fonction test $v = T_{-1}^{\varepsilon}$ dans (4-34) on a, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz:

$$\left\| \nabla T_{-1}^{\varepsilon} \right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 \leq \left\| f \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| T_{-1}^{\varepsilon} \right\|_{L^2(\Omega)}$$

Mais, comme dans le lemme 3-2, puisque T_{-1}^{ε} est de trace nulle sur $\partial(\Omega_g^{\varepsilon})$, on a l'inégalité de Poincaré suivante:

$$\| T_{-1}^{\varepsilon} \|_{L^2(\Omega)} \leq C\,\varepsilon \| \nabla T_{-1}^{\varepsilon} \|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$$

donc:

$$\| \nabla T_{-1}^{\varepsilon} \|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq \| f \|_{L^2(\Omega)} C\,\varepsilon \| \nabla T_{-1}^{\varepsilon} \|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$$

Les deux premières estimations de la proposition, sont donc démontrées. Les deux dernières estimations sont alors triviales puisque $\tilde{w}_{-1}^{\varepsilon} \equiv -\omega_1 T_{-1}^{\varepsilon}$. □

Remarque 4-1:

Si le gas est sous forme de bulles strictement incluses dans le domaine Ω (*le gas n'a aucun contact avec le bord exterieur* $\partial(\Omega)$: $\bar{\Omega}_g^{\varepsilon} \subset \Omega$ (*figure* 4-3)), *alors le couple* $(w_{-1}^{\varepsilon}, T_{-1}^{\varepsilon})$ *peut être déterminé à l'aide de fonctions vérifiant un problème dans la cellule de base* Y. *Dans ce cas l'équation* (4-35) *vérifiée par* T_{-1}^{ε} *dans* Ω_g^{ε} *consiste en* M^{ε} *équations, où l'on désigne par* M^{ε} *le nombre de composantes connexes de* Ω_g^{ε} :

$$\begin{cases} -\Delta T_{-1}^{\varepsilon} = f & \text{dans } \Omega_g^{k\varepsilon} \\ T_{-1}^{\varepsilon} = 0 & \text{sur } \partial(\Omega_g^{k\varepsilon}) \\ T_{-1}^{\varepsilon} \equiv 0 & \text{dans } \bar{\Omega}_s^{\varepsilon} \cup \bar{\Omega}_\ell^{\varepsilon} \\ w_{-1}^{\varepsilon} \equiv -\omega_1 T_{-1}^{\varepsilon} & \text{dans } \Omega_g^{(k)\varepsilon} \end{cases} \qquad (k = 1 \ldots M^{\varepsilon})$$

Sans restreindre la généralité, on suppose que Y_g *est constitué de deux composantes connexes (ou de l'une des deux), l'une "humide" :* $Y_g^{(\ell)}$ *et l'autre "sèche" :* $Y_g^{(*)}$. *Si on note* $\theta^{k\varepsilon}$ *la solution unique du problème suivant:*

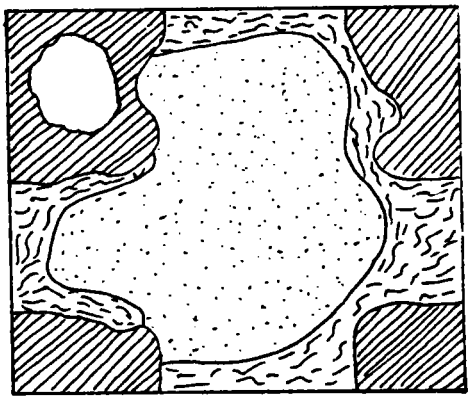
$$\begin{cases} -\Delta\theta^{k\varepsilon}(y) = f(\varepsilon y + O_k^\varepsilon) & \text{dans } Y_g \\ \theta^{k\varepsilon} = 0 & \text{sur } \partial(Y_g) \\ \theta^{k\varepsilon} \equiv 0 & \text{dans } Y_s \cup Y_\ell \end{cases}$$

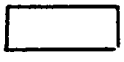
où O_k^ε *désigne l'origine de la* $k^{\text{ième}}$ *cellule* C_k^ε *translatée de* εY, *alors:*

$$T_{-1}^\varepsilon(x) = \varepsilon^2\,\theta^{k\varepsilon}\left(\frac{x - O_k^\varepsilon}{\varepsilon}\right) \qquad x \in \Omega \cap C_k^\varepsilon$$

$$w_{-1}^\varepsilon(x) = -\,\varepsilon^2\,\omega_1\,\theta^{k\varepsilon}\left(\frac{x - O_k^\varepsilon}{\varepsilon}\right) \quad x \in \Omega_g^{(\ell)\varepsilon} \cap C_k^\varepsilon$$

De plus, si la fonction f *(donnée) est une constante dans chaque* $\Omega_g^{(\ell)\varepsilon}$ *et* $\Omega_g^{(*)\varepsilon}$, *alors la solution* $\theta^{k\varepsilon}$ *ne dépend ni du paramètre* ε *ni de l'indice* k; *si elle est seulement* εY*-périodique* ($f(\varepsilon y + O_k^\varepsilon) = f(\varepsilon y)$), *alors* $\theta^{k\varepsilon}$ *dépend de* ε *mais pas de* k. □



$:\bar{Y}_s \cup \bar{Y}_\ell$  $:Y_g^{(*)}$ $:Y_g^{(\ell)}$

(fig 4-3)

4-3-2) Comportement de T_0^ε :

Sous l'hypothèse (4-32) l'équation (4-28) vérifiée par le couple $u_0^\varepsilon = (T_0^\varepsilon, w_0^\varepsilon)$ s'écrit:

$$
(4\text{-}36)\quad
\left|
\begin{array}{l}
(T_0^\varepsilon, w_0^\varepsilon) \in E^\varepsilon \text{ et :} \\[2ex]
\bullet\ \forall\ (v,\varphi) \in E^\varepsilon \\[2ex]
\displaystyle\int_{\Omega_g^\varepsilon \cup \Omega_\ell^\varepsilon} \omega_1\, \lambda \nabla T_0^\varepsilon \cdot \nabla v\, dx + \int_{\Omega_g^{(\ell)\varepsilon}} \eta \nabla(\omega_1 T_0^\varepsilon + w_0^\varepsilon) \cdot \nabla(\omega_1 v + \varphi)\, dx = \\[2ex]
\qquad\qquad \displaystyle = \int_\Omega \omega_1\, f^\varepsilon v\, dx + \int_{\Omega_g^{(\ell)\varepsilon}} \eta\, h^\varepsilon(\omega_1 v + \varphi)\, dx - \int_{\Omega_g^\varepsilon} \omega_1 \nabla T_{-1}^\varepsilon \cdot \nabla v\, dx \\[2ex]
\bullet\ \forall\ v \in H_0^1(\Omega_g^\varepsilon) \\[2ex]
\displaystyle\int_{\Omega_g^\varepsilon} \nabla T_0^\varepsilon\, \nabla v\, dx = 0\,.
\end{array}
\right.
$$

ou sous la formulation forte suivante :

$$
(4\text{-}37)\quad
\left|
\begin{array}{ll}
-\lambda_\alpha \Delta T_0^\varepsilon = f^\varepsilon & \text{dans } \Omega_\alpha^\varepsilon\ (\alpha = \ell, s) \\
-\Delta T_0^\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega_g^\varepsilon \\[2ex]
[\![\, T_0^\varepsilon \,]\!]_{\alpha\beta} = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{\alpha\beta}^\varepsilon\ (\alpha, \beta = g, \ell, s) \\
[\![\, \lambda \dfrac{\partial T_0^\varepsilon}{\partial n} \,]\!]_{\ell s} = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{\ell s}^\varepsilon \\
\lambda_s \left.\dfrac{\partial T_0^\varepsilon}{\partial n}\right|_s = \left.\dfrac{\partial T_{-1}^\varepsilon}{\partial n}\right|_g & \text{sur } \mathcal{A}_{gs}^\varepsilon \\
\lambda_\ell \left.\dfrac{\partial T_0^\varepsilon}{\partial n}\right|_\ell = \left.\dfrac{\partial T_{-1}^\varepsilon}{\partial n}\right|_g + \eta \left.\dfrac{\partial w_0^\varepsilon}{\partial n}\right|_g + \eta\omega_1 \left.\dfrac{\partial T_0^\varepsilon}{\partial n}\right|_g & \text{sur } \mathcal{A}_{g\ell}^\varepsilon \\
T_0^\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial(\Omega) \\[2ex]
-\Delta w_0^\varepsilon = h^\varepsilon & \text{dans } \Omega_g^{(\ell)\varepsilon} \\
w_0^\varepsilon = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{g\ell}^\varepsilon \text{ et } \Gamma_g^{(\ell)\varepsilon} \\
\dfrac{\partial w_0^\varepsilon}{\partial n} = -\omega_1 \left.\dfrac{\partial T_0^\varepsilon}{\partial n}\right|_g & \text{sur } \mathcal{A}_{gs}^{(\ell)\varepsilon}
\end{array}
\right.
$$

Estimations a priori:

On remplace l'hypothèse (4-32) par la suivante qui est plus forte et n'est utile que pour la démonstration du lemme 5-3 :

(4-38) la composante gazeuse n'a aucun contact avec le bord de Ω : $\bar{\Omega}_g^\varepsilon \subset \Omega$. (fig. 4-3)

Pour obtenir des estimations à priori on commence par démontrer les lemmes suivants :

Lemme 4-3:

Sous l'hypothèse (4-38) *il existe un opérateur de prolongement* $\mathcal{P}^\varepsilon \in \mathcal{L}(\mathcal{V}^\varepsilon, H_0^1(\Omega))$, *où :*

$$\mathcal{V}^\varepsilon = \left\{ v \in H^1(\Omega_g^\varepsilon \cup \Omega_\ell^\varepsilon);\ v = 0 \text{ sur } \partial(\Omega_g^\varepsilon \cup \Omega_\ell^\varepsilon) \cap \partial(\Omega) \right\}, \text{ tel que :}$$

$$\left\| \nabla \mathcal{P}^\varepsilon v \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left\| \nabla v \right\|_{L^2(\Omega_g^\varepsilon \cup \Omega_\ell^\varepsilon)} \qquad \forall\, v \in \mathcal{V}^\varepsilon$$

démonstration:

En considérant le gaz Ω_g^ε comme des trous dans Ω, ce lemme a été démontré par D.CIORANESCU et J. SAINT JEAN PAULIN [9].

Lemme 4-4:

Sous l'hypothèse (4-38) *on a l'inégalité suivante :*

$$\forall\, v \in H_0^1(\Omega_g^{(\mathbb{P})\varepsilon}) ; \qquad \left\| v \right\|_{L^2(\Omega_g^{(\mathbb{P})\varepsilon})} \leq C \left(\varepsilon^{\frac{1}{4}} \left\| \nabla v \right\|_{L^2(\Omega_g^{(\mathbb{P})\varepsilon})} + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \left\| v \right\|_{L^2(\mathcal{A}_{g\ell}^\varepsilon)} \right)$$

démonstration:

On suit la démonstration d'un lemme analogue de C. CONCA dans [10] (lemme 4.1). On se ramène

à la cellule de base comme dans la démonstration de la proposition 4-3 et on utilise le fait que l'application:

$$(4\text{-}39) \qquad \varphi \longrightarrow \left(\| \nabla \varphi \|^2_{L^2(Y_g^{(\varepsilon)})} + \| \varphi \|^2_{L^2(\mathcal{A}_g^{(\varepsilon)})} \right)^{\frac{1}{2}}$$

est une norme sur $H_0^1(Y_g^{(\varepsilon)})$ équivalente à la norme usuelle. Par le changement de variables (usuel): $y = \frac{x - O_k^\varepsilon}{\varepsilon}$, on obtient l'inégalité recherchée après sommation sur l'indice k.

Lemme 4-5:

Sous l'hypothèse (4-38) *la solution* $u_0^\varepsilon = (T_0^\varepsilon, w_0^\varepsilon)$ *vérifie les inégalités suivantes :*

i) $\| T_0^\varepsilon \|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \; \| \nabla T_0^\varepsilon \|_{L^2(\Omega_g^\varepsilon \cup \Omega_\ell^\varepsilon)}$

ii) $\| T_0^\varepsilon \|_{L^2(\partial\Omega_g^\varepsilon)} \leq \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}} \; \| \nabla T_0^\varepsilon \|_{L^2(\Omega_g^\varepsilon \cup \Omega_\ell^\varepsilon)}$

iii) $\| w_0^\varepsilon + \omega_1 T_0^\varepsilon \|_{L^2(\Omega_g^{(\varepsilon)})} \leq C \left(\varepsilon^{\frac{1}{4}} \| \nabla (w_0^\varepsilon + \omega_1 T_0^\varepsilon) \|_{L^2(\Omega_g^{(\varepsilon)})} + \| \nabla T_0^\varepsilon \|_{L^2(\Omega_g^\varepsilon \cup \Omega_\ell^\varepsilon)} \right)$

<u>démonstration:</u>

i) Soit $\mathcal{P}^\varepsilon T_0^\varepsilon$ le prolongement du lemme 4-3 de la restriction de T_0^ε à $\Omega_g^\varepsilon \cup \Omega_\ell^\varepsilon$; la restriction de $(T_0^\varepsilon - \mathcal{P}^\varepsilon T_0^\varepsilon)$ à Ω_g^ε est alors dans $H_0^1(\Omega_g^\varepsilon)$, on peut donc la prendre comme fonction test dans la deuxième équation de (4-36), d'où l'on déduit:

$$\int_{\Omega_g^\varepsilon} (\nabla T_0^\varepsilon)^2 \, dx = \int_{\Omega_g^\varepsilon} \nabla T_0^\varepsilon . \nabla (\mathcal{P}^\varepsilon T_0^\varepsilon) \, dx .$$

Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz et au lemme 4-3 on a :

$$\int_{\Omega_g^\varepsilon} (\nabla T_0^\varepsilon)^2 \, dx \leq \| \nabla T_0^\varepsilon \|_{L^2(\Omega_g^\varepsilon)} \| \nabla (\mathcal{P}^\varepsilon T_0^\varepsilon) \|_{L^2(\Omega_g^\varepsilon)} \leq C \; \| \nabla T_0^\varepsilon \|_{L^2(\Omega_g^\varepsilon)} \| \nabla T_0^\varepsilon \|_{L^2(\Omega_g^\varepsilon \cup \Omega_\ell^\varepsilon)}$$

d'où: $$\| \nabla T_0^\varepsilon \|^2_{L^2(\Omega_g^\varepsilon)} \leq C^2 \; \| \nabla T_0^\varepsilon \|^2_{L^2(\Omega_g^\varepsilon \cup \Omega_\ell^\varepsilon)}.$$

En ajoutant $\left\|\nabla T_0^\varepsilon\right\|^2_{L^2(\Omega_g^\varepsilon \cup \Omega_\ell^\varepsilon)}$ aux deux membres de cette inégalité on achève la démonstration de i).

ii) Pour démontrer cette inégalité on se ramène à la cellule de base Y, en utilisant les fonctions: $\hat{T}_0^{k\varepsilon}(y) = T_0^\varepsilon\ (\varepsilon y + O_k^\varepsilon\ )$ définies sur Y. Les $\hat{T}_0^{k\varepsilon}$ sont alors dans l'espace $H^1(Y)$ et grâce à la continuité de la trace on a :

$$\int_{\partial(Y_g)} (\hat{T}_0^{k\varepsilon})^2\ d\sigma_y \leq C\left(\int_Y (\hat{T}_0^{k\varepsilon})^2\ dy + \int_Y (\nabla_y \hat{T}_0^{k\varepsilon})^2\ dy \right).$$

On fait dans cette inégalité le changement de variable $y = \dfrac{x - O_k^\varepsilon}{\varepsilon}$ et on somme de k=1 au nombre N^ε de cellules C_k^ε recouvrant Ω :

$$\varepsilon^{1-n} \sum_{k=1}^{k=N^\varepsilon} \int_{\partial(\Omega_g^\varepsilon \cap C_k^\varepsilon)} (T_0^\varepsilon\ )^2 d\sigma_x \leq C\,\varepsilon^{-n} \sum_{k=1}^{k=N^\varepsilon} \left(\int_{C_k^\varepsilon} (T_0^\varepsilon\ )^2 dx + \varepsilon^2 \int_{C_k^\varepsilon} (\nabla_x T_0^\varepsilon\ )^2 dx \right)$$

d'où :

$$\varepsilon \int_{\partial(\Omega_g^\varepsilon)} (T_0^\varepsilon\ )^2 d\sigma_x \leq C\left(\left\| T_0^\varepsilon \right\|^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon \left\| \nabla T_0^\varepsilon \right\|^2_{L^2(\Omega)} \right) \leq C \left\| T_0^\varepsilon \right\|^2_{H_0^1(\Omega)}$$

Avec le résultat i) on achève la preuve de ii).

$$\varepsilon \int_{\partial(\Omega_g^\varepsilon)} (T_0^\varepsilon\ )^2 d\sigma_x \leq C \left\| \nabla T_0^\varepsilon \right\|^2_{L^2(\Omega_g^\varepsilon \cup \Omega_\ell^\varepsilon)}.$$

iii) On prend $v = w_0^\varepsilon + \omega_1 T_0^\varepsilon$ dans le lemme 4-4, en se souvenant que w_0^ε est de trace nulle sur l'interface $\mathcal{A}_{g\ell}^\varepsilon$ on a :

$$\left\| w_0^\varepsilon + \omega_1 T_0^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega_g^{(\ell)\varepsilon})} \leq C\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}} \left\| \nabla(w_0^\varepsilon + \omega_1 T_0^\varepsilon) \right\|_{L^2(\Omega_g^{(\ell)\varepsilon})} + \omega_1 \varepsilon^{\frac{1}{2}} \left\| T_0^\varepsilon \right\|_{L^2(\mathcal{A}_{g\ell}^\varepsilon)} \right)$$

en utilisant ii) on a le résultat voulu. □

Proposition 4-4:

Sous l'hypothèse (4-38) *la solution* $u_0^\varepsilon = (T_0^\varepsilon, w_0^\varepsilon)$ *vérifie les inégalités suivantes :*

i) $\| T_0^\varepsilon \|_{H_0^1(\Omega)} \leq C$

ii) $\| w_0^\varepsilon \|_{L^2(\Omega_g^{(\ell)\varepsilon})} \leq C\varepsilon$ et $\| \nabla w_0^\varepsilon \|_{L^2(\Omega_g^{(\ell)\varepsilon})} \leq C$

démonstration:

i) Puisque la restriction de T_{-1}^ε à Ω_g^ε est dans $H_0^1(\Omega_g^\varepsilon)$, la deuxième équation de (4-36) implique que:

$$\int_{\Omega_g^\varepsilon} \nabla T_{-1}^\varepsilon \cdot \nabla T_0^\varepsilon \, dx = 0$$

Compte-tenu de l'égalité précédente, en prenant $(T_0^\varepsilon, w_0^\varepsilon)$ comme fonction test (v, ϕ) dans la première équation du problème variationnel (4-36), on a :

$$\int_{\Omega_g^\varepsilon \cup \Omega_\ell^\varepsilon} \omega_1 \lambda (\nabla T_0^\varepsilon)^2 \, dx + \int_{\Omega_g^{(\ell)\varepsilon}} \eta \nabla (\omega_1 T_0^\varepsilon + w_0^\varepsilon)^2 \, dx = \int_\Omega \omega_1 f \, T_0^\varepsilon \, dx + \int_{\Omega_g^{(\ell)\varepsilon}} \eta \, h (\omega_1 T_0^\varepsilon + w_0^\varepsilon) \, dx$$

Sachant que les constantes ω_1, λ_α et η sont strictement positives, L'inégalité de Cauchy-Scwarz donne alors:

$$\| \nabla T_0^\varepsilon \|^2_{L^2(\Omega_g^\varepsilon \cup \Omega_\ell^\varepsilon)} + \| \nabla (w_0^\varepsilon + \omega_1 T_0^\varepsilon) \|^2_{L^2(\Omega_g^{(\ell)\varepsilon})} \leq C \left(\| T_0^\varepsilon \|_{H_0^1(\Omega)} + \| w_0^\varepsilon + \omega_1 T_0^\varepsilon \|_{L^2(\Omega_g^{(\ell)\varepsilon})} \right)$$

avec $C = \dfrac{\max(\omega_1 \| f \|_{L^2(\Omega)} \; ; \; \eta \| h \|_{L^2(\Omega)})}{\min(\omega_1 \lambda_g ; \; \omega_1 \lambda_\ell \; ; \; \eta \;)}$

L'application des résultats i) et iii) du lemme 4-5 entraine que:

$$\begin{aligned}\left\| \nabla T_0^\varepsilon \right\|^2_{L^2(\Omega_g^\varepsilon \cup \Omega_\ell^\varepsilon)} + \left\| \nabla(w_0^\varepsilon + \omega_1 T_0^\varepsilon) \right\|^2_{L^2(\Omega_g^{(\ell)\varepsilon})} &\leq \\ &\leq C \left(\left\| \nabla T_0^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega_g^\varepsilon \cup \Omega_\ell^\varepsilon)} + \varepsilon^{\frac{1}{4}} \left\| \nabla(w_0^\varepsilon + \omega_1 T_0^\varepsilon) \right\|_{L^2(\Omega_g^{(\ell)\varepsilon})} \right) \\ &\leq C \left(\left\| \nabla T_0^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega_g^\varepsilon \cup \Omega_\ell^\varepsilon)} + \left\| \nabla(w_0^\varepsilon + \omega_1 T_0^\varepsilon) \right\|_{L^2(\Omega_g^{(\ell)\varepsilon})} \right) \\ &\leq C\sqrt{2} \left(\left\| \nabla T_0^\varepsilon \right\|^2_{L^2(\Omega_g^\varepsilon \cup \Omega_\ell^\varepsilon)} + \left\| \nabla(w_0^\varepsilon + \omega_1 T_0^\varepsilon) \right\|^2_{L^2(\Omega_g^{(\ell)\varepsilon})} \right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

On en déduit, d'une part, que :

$$\left\| \nabla T_0^\varepsilon \right\|^2_{L^2(\Omega_g^\varepsilon \cup \Omega_\ell^\varepsilon)} \leq C$$

donc , d' après i) du lemme 4-5:

$$\left\| T_0^\varepsilon \right\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C' \left\| \nabla T_0^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega_g^\varepsilon \cup \Omega_\ell^\varepsilon)} \leq C$$

et d'autre part :

$$\left\| \nabla(w_0^\varepsilon + \omega_1 T_0^\varepsilon) \right\|^2_{L^2(\Omega_g^{(\ell)\varepsilon})} \leq C$$

mais:

$$\left\| \nabla w_0^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega_g^{(\ell)\varepsilon})} - \omega_1 \left\| \nabla T_0^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega_g^{(\ell)\varepsilon})} \leq \left\| \nabla(w_0^\varepsilon + \omega_1 T_0^\varepsilon) \right\|_{L^2(\Omega_g^{(\ell)\varepsilon})} \leq C$$

donc

$$\left\| \nabla w_0^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega_g^{(\ell)\varepsilon})} \leq C + \omega_1 \left\| \nabla T_0^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega_g^{(\ell)\varepsilon})} \leq C + C' \left\| T_0^\varepsilon \right\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C''.$$

Enfin, puisque w_0^ε appartient à l'espace $\mathcal{W}^\varepsilon$, d'après le lemme 3-1 on a :

$$\left\| w_0^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega_g^{(\ell)\varepsilon})} \leq C' \varepsilon \left\| \nabla w_0^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega_g^{(\ell)\varepsilon})} \leq C \ \varepsilon.$$

Ce qui achève la démonstration de la proposition. □

Remarque 4-2

On peut montrer, pour tous les termes $u_j^\varepsilon = (T_j^\varepsilon, w_j^\varepsilon)$ $(j \geq 1)$ *du développement* (4-25), *des estimations analogues à celles établies pour* $(T_0^\varepsilon, w_0^\varepsilon)$ *dans la proposition* 4-4. *Plus précisément:*

Sous l'hypothèse (4-38) *les solutions* $u_j^\varepsilon = (T_j^\varepsilon, w_j^\varepsilon)$ $(j \geq 1)$ *des équations* (4-30) *vérifient les estimations:*

i) $\left\| T_j^\varepsilon \right\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C$

ii) $\left\| w_j^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega_g^{(\ell)\varepsilon})} \leq C\varepsilon$ et $\left\| \nabla w_j^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega_g^{(\ell)\varepsilon})} \leq C$

En effet, les équations (4-30) *vérifiées par les termes* u_j *sont analogues à celle vérifié par le couple* $(T_0^\varepsilon, w_0^\varepsilon)$. *Elles s'écrivent (sous l'hypothèse* (4-32) :

$\forall\, j \geq 1 ; (T_j^\varepsilon, w_j^\varepsilon) \in E^\varepsilon$ et :

- $\forall\, (v, \varphi) \in E^\varepsilon$

$$\int_{\Omega_g^\varepsilon \cup \Omega_\ell^\varepsilon} \omega_1 \lambda \nabla T_j^\varepsilon \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega_g^{(\ell)\varepsilon}} \eta \nabla(\omega_1 T_j^\varepsilon + w_j^\varepsilon) \cdot \nabla(\omega_1 v + \varphi) \, dx =$$

$$= \int_\Omega \omega_1 f^\varepsilon v \, dx + \int_{\Omega_g^{(\ell)\varepsilon}} \eta \, h^\varepsilon(\omega_1 v + \varphi) \, dx - \int_{\Omega_g^\varepsilon} \omega_1 \nabla T_{j-1}^\varepsilon \cdot \nabla v \, dx$$

- $\forall\, v \in H_0^1(\Omega_g^\varepsilon)$

$$\int_{\Omega_g^\varepsilon} \nabla T_j^\varepsilon \cdot \nabla v \, dx = 0 .$$

Par récurrence, en utilisant les estimations obtenues pour $(T_0^\varepsilon, w_0^\varepsilon)$, *on montre aisément le résultat voulu en procédant d'une façons analogue à la démonstration de la proposition* 4-4. □

Passage à la limite:

On note:

- $\chi(\mathcal{O})$ fonction caractéristique de l'ensemble $\mathcal{O}$.
- $\tilde{\varphi}$ le prolongement par zéro de φ à Ω.
- $\mu_0^\varepsilon(x) = \begin{cases} \lambda_\alpha & \text{si } x \in \Omega_\alpha^\varepsilon \ (\alpha = \ell, s) \\ \eta\omega_1 & \text{si } x \in \Omega_g^{(\ell)\varepsilon} \\ 0 & \text{si } x \in \Omega_g^{(*)\varepsilon} \end{cases}$

(4-44)
- $Q^\varepsilon = \begin{cases} \mu_0^\varepsilon \ \nabla T_0^\varepsilon & \text{dans } \Omega \backslash \Omega_g^{(*)\varepsilon} \\ \vec{0} & \text{dans } \Omega_g^{(*)\varepsilon} \end{cases} = \mu_0^\varepsilon \nabla T_0^\varepsilon \chi(\Omega \backslash \Omega_g^{(*)\varepsilon})$
- $P^\varepsilon = \widetilde{\nabla w_0^\varepsilon}$ = le prolongement par zéro de ∇w_0^ε dans $\Omega \backslash \Omega_g^{(\ell)\varepsilon}$

Théorème 4-3:

Sous l'hypothèse (4-38), *la solution* T_0^ε *du problème* (4-36) *ou* (4-37) *converge faiblement dans* $H_0^1(\Omega)$ *vers l'unique solution* u^0 *de* (4-19):

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(K_{ij}^0 \dfrac{\partial u^0}{\partial x_i}(x)\right) = r(x) & \textit{dans } \Omega \\ u^0 = 0 & \textit{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où:

- $r(x) = \dfrac{1}{|Y|} \displaystyle\int_Y \left(f + \eta\, h \chi_g^{(\ell)}\right)(x,y)\,dy$
- $K_{ij}^0 = \dfrac{1}{|Y|} \displaystyle\int_{Y_s \cup Y_\ell} \lambda \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\chi_0^j + y_j\right) dy + \frac{\eta\omega_1}{|Y|} \int_{Y_g^{(\ell)}} \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\chi_0^j + y_j + \frac{\psi_0^j}{\omega_1}\right) dy$

démonstration:

D'après la première équation de (4-36), en prenant un couple de fonctions-test (v,0), la solution $(T_0^\varepsilon, w_0^\varepsilon)$ vérifie pour tout v appartenant à $H_0^1(\Omega)$ la relation suivante où l'on utilise les notations (4-44):

$$(4\text{-}45) \qquad \int_\Omega Q^\varepsilon \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega \eta P^\varepsilon . \nabla v \, dx = \int_\Omega (f + \eta h \chi_g^{(\varepsilon)\varepsilon}) \, v \, dx - \int_{\Omega_g^\varepsilon} \omega_1 \nabla T_{-1}^\varepsilon \cdot \nabla v \, dx$$

Puisque μ_0^ε est bornée, d'après la proposition 4-4 les fonctions Q^ε et P^ε sont bornées dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$, donc, quitte à extraire des sous-suites, il existe Q^* et P^* tels que:

$$Q^\varepsilon \longrightarrow Q^* \quad \text{dans} \quad \mathbb{L}^2(\Omega) \text{ faible}$$

$$P^\varepsilon \longrightarrow P^* \quad \text{dans} \quad \mathbb{L}^2(\Omega) \text{ faible}$$

De plus on sait, par la relation (3-11), que $(f^\varepsilon + h^\varepsilon \chi_g^{(\varepsilon)\varepsilon})$ converge faiblement vers sa moyenne sur Y dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$:

$$(f^\varepsilon + h^\varepsilon \chi_g^{(\varepsilon)\varepsilon}) \longrightarrow r(x) = \frac{1}{|Y|} \int_Y (f + \eta \, h \, \chi_g^{(\varepsilon)})(x,y) dy$$

Enfin, d'après la proposition 4-3 :

$$\nabla T_{-1}^\varepsilon \longrightarrow 0 \qquad \text{dans} \quad \mathbb{L}^2(\Omega).$$

On peut donc passer à la limite dans l'équation (4-45), ce qui donne:

$$(4\text{-}46) \qquad \int_\Omega (Q_i^* + \eta P_i^*) \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx = \int_\Omega r \, v \, dx \qquad \forall \, v \in H_0^1(\Omega)$$

Il nous reste maintenant l'identification de la limite $(Q^* + \eta P^*)$, c'est l'objectif de ce qui suit. Posons:

$$(4\text{-}47)\qquad \begin{cases} \chi_0^\varepsilon(x) = x_j + \varepsilon\chi_0^j(\frac{x}{\varepsilon}) \\ \psi_0^\varepsilon(x) = \varepsilon\psi_0^j(\frac{x}{\varepsilon}) \end{cases}$$

où les (χ_0^j, ψ_0^j) sont les solutions uniques du problème (4-16) ou (4-18). Un changement de variables $y = \frac{x}{\varepsilon}$ dans les équations (4-18), donne les équations suivantes, vérifiées par les fonctions $(\chi_0^\varepsilon, \psi_0^\varepsilon)$:

$$(4\text{-}48)\qquad \left|\begin{array}{ll} -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mu_0^\varepsilon \frac{\partial \chi_0^\varepsilon}{\partial x_i}\right) = 0 & \text{dans } \Omega_\alpha^\varepsilon \ (\alpha = g,\ell,s) \\ [\![\chi_0^\varepsilon]\!]_{\alpha\beta} = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{\alpha\beta}^\varepsilon \ (\alpha,\beta = g,\ell,s) \\ [\![\mu_0^\varepsilon \frac{\partial \chi_0^\varepsilon}{\partial n}]\!]_{\ell s} = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{\ell s}^\varepsilon \\ \lambda_s \frac{\partial \chi_0^\varepsilon}{\partial n}\Big|_s = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{gs}^\varepsilon \\ \lambda_\ell \frac{\partial \chi_0^\varepsilon}{\partial n}\Big|_\ell = \eta\left(\frac{\partial \psi_0^\varepsilon}{\partial n} + \omega_1 \frac{\partial \chi_0^\varepsilon}{\partial n}\right)\Big|_g & \text{sur } \mathcal{A}_{g\ell}^\varepsilon \\ -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \psi_0^\varepsilon}{\partial x_i}\right) = 0 & \text{dans } \Omega_g^{(\ell)\varepsilon} \\ \frac{\partial \psi_0^\varepsilon}{\partial n} = -\omega_1 \frac{\partial \chi_0^\varepsilon}{\partial n}\Big|_g & \text{sur } \mathcal{A}_{gs}^{(\ell)\varepsilon} \\ \psi_0^\varepsilon = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{g\ell}^\varepsilon \end{array}\right.$$

Comme ce qui a été fait pour obtenir le problème variationnel (1-13) en $(T^\varepsilon, \omega^\varepsilon)$, on obtient par des intégrations par parties :

$$(4\text{-}49)\qquad \int_{\Omega\setminus\Omega_g^{(*)\varepsilon}} \mu_0^\varepsilon\, \nabla\chi_0^\varepsilon.\nabla v\, dx + \int_{\Omega_g^{(\ell)\varepsilon}} \eta\, \nabla\psi_0^\varepsilon.\nabla v\, dx = 0 \qquad \forall\ v \in \mathcal{V}$$

$$(4\text{-}50)\qquad \int_{\Omega_g^{(\ell)\varepsilon}} \nabla\psi_0^\varepsilon.\nabla\varphi\, dx + \int_{\Omega_g^{(\ell)\varepsilon}} \omega_1 \nabla\chi_0^\varepsilon.\nabla\varphi\, dx = 0 \qquad \forall\ \varphi \in \mathcal{W}^\varepsilon$$

Soit $\theta \in \mathcal{D}(\Omega)$; en prenant le couple de fonctions-tests (v,φ) égal à $(\theta\chi_0^\varepsilon, 0)$ dans la première équation de (4-36) vérifiée par $(T_0^\varepsilon, w_0^\varepsilon)$, puis, la fonction v égale à $\theta\, T_0^\varepsilon$ dans la relation (4-49), on obtient:

$$\int_\Omega \left(Q^\varepsilon + \eta\, P^\varepsilon\right).\nabla\chi_0^\varepsilon\, \theta\, dx + \int_\Omega \chi_0^\varepsilon \left(Q^\varepsilon + \eta\, P^\varepsilon\right).\nabla\theta\, dx =$$

$$= \int_\Omega \left(f^\varepsilon + \eta h^\varepsilon \chi_g^{(\ell)\varepsilon}\right) \chi_0^\varepsilon\, \theta\, dx - \int_{\Omega_g^\varepsilon} \nabla T_{-1}^\varepsilon \nabla(\theta\chi)_0^\varepsilon\, dx$$

et

$$\int_\Omega \left(Q^\varepsilon.\nabla\chi_0^\varepsilon + \eta\, \nabla T_0^\varepsilon.\widetilde{\nabla\psi_0^\varepsilon}\right) \theta\, dx + \int_{\Omega\setminus\Omega_g^{(*)\varepsilon}} T_0^\varepsilon \left(\nabla\chi_0^\varepsilon + \eta\widetilde{\nabla\psi_0^\varepsilon}\right).\nabla\theta\, dx = 0.$$

En se rappelant que le gradient de T_{-1}^ε est nul en dehors de Ω_g^ε, La différence de ces deux relations s'écrit:

$$(4\text{-}51)\qquad \int_\Omega \eta \left(P^\varepsilon.\nabla\chi_0^\varepsilon - \nabla T_0^\varepsilon.\widetilde{\nabla\psi_0^\varepsilon}\right) \theta\, dx +$$

$$+ \int_\Omega \chi_0^\varepsilon \left(Q^\varepsilon + \eta\, P^\varepsilon\right).\nabla\theta\, dx - \int_{\Omega\setminus\Omega_g^{(*)\varepsilon}} T_0^\varepsilon \left(\nabla\chi_0^\varepsilon + \eta\widetilde{\nabla\psi_0^\varepsilon}\right).\nabla\theta\, dx =$$

$$= \int_\Omega \left(f^\varepsilon + \eta h^\varepsilon \chi_g^{(\ell)\varepsilon}\right) \chi_0^\varepsilon\, \theta\, dx - \int_\Omega \nabla T_{-1}^\varepsilon \nabla(\theta\chi)_0^\varepsilon\, dx$$

On prend maintenant le couple (v,φ) égal à $(0,\theta\, w_0^\varepsilon)$ dans la première équation du problème (4-36) vérifié par $(T_0^\varepsilon, w_0^\varepsilon)$, puis, la fo,ction φ égale à $\theta\, \psi_0^\varepsilon$ dans la relation (4-50). On obtient:

$$\int_\Omega \left(P^\varepsilon + \omega_1 \nabla T_0^\varepsilon\right).\widetilde{\nabla}\psi_0^\varepsilon\, \theta\, dx + \int_\Omega \widetilde{\psi}_0^\varepsilon \left(P^\varepsilon + \omega_1 \nabla T_0^\varepsilon\right).\nabla\theta\, dx = \int_\Omega h^\varepsilon\, \chi_g^{(\ell)\varepsilon}\, \psi_0^\varepsilon\, \theta\, dx$$

et

$$\int_\Omega \left(\widetilde{\nabla}\psi_0^\varepsilon + \omega_1 \nabla \chi_0^\varepsilon\right).P^\varepsilon\, \theta\, dx + \int_\Omega \widetilde{w}_0^\varepsilon \left(\widetilde{\nabla}\psi_0^\varepsilon + \omega_1 \nabla \chi_0^\varepsilon\right).\nabla\theta\, dx = 0.$$

La différence de ces deux relations donne:

$$\text{(4-52)} \qquad \int_\Omega \omega_1 \left(\nabla T_0^\varepsilon.\widetilde{\nabla}\psi_0^\varepsilon - P^\varepsilon.\nabla\chi_0^\varepsilon\right)\theta\, dx + \int_\Omega \widetilde{\psi}_0^\varepsilon \left(P^\varepsilon + \omega_1 \nabla T_0^\varepsilon\right).\nabla\theta\, dx +$$

$$- \int_\Omega \widetilde{w}_0^\varepsilon \left(\widetilde{\nabla}\psi_0^\varepsilon + \omega_1 \nabla \chi_0^\varepsilon\right).\nabla\theta\, dx = \int_\Omega h^\varepsilon\, \chi_g^{(\ell)\varepsilon}\, \psi_0^\varepsilon\, \theta\, dx$$

Compte-tenu des notations (4-44) et(4-52), si on multiplie la relation (4-51) par ω_1 et (4-52) par η, alors leur addition donne:

$$\text{(4-53)} \qquad \int_\Omega \omega_1\left(\chi_0^\varepsilon \left(Q^\varepsilon + \eta\, P^\varepsilon\right) - T_0^\varepsilon \left(q^\varepsilon + \eta\, p^\varepsilon\right)\right).\nabla\theta\, dx +$$

$$+ \int_\Omega \eta \left(\widetilde{\psi}_0^\varepsilon \left(P^\varepsilon + \omega_1 \nabla T_0^\varepsilon\right) - \widetilde{w}_0^\varepsilon \left(p^\varepsilon + \omega_1 \nabla \chi_0^\varepsilon\right)\right).\nabla\theta\, dx =$$

$$= \int_\Omega \omega_1\left(f^\varepsilon + \eta h^\varepsilon \chi_g^{(\ell)\varepsilon}\right) \chi_0^\varepsilon\, \theta\, dx + \int_\Omega \eta h^\varepsilon\, \chi_g^{(\ell)\varepsilon}\, \psi_0^\varepsilon\, \theta\, dx - \int_\Omega \omega_1 \nabla T_{-1}^\varepsilon \nabla(\theta\chi)_0^\varepsilon\, dx$$

où l'on a noté:

$$\left|\begin{array}{l} \bullet\ q^\varepsilon = \left\{\begin{array}{lll} \mu_0^\varepsilon\ \nabla\chi_0^\varepsilon & \text{dans} & \Omega\backslash\Omega_g^{(*)\varepsilon} \\ \vec{0} & \text{dans} & \Omega_g^{(*)\varepsilon} \end{array}\right\} = \mu_0^\varepsilon\ \nabla\chi_0^\varepsilon\ \chi(\Omega\backslash\Omega_g^{(*)\varepsilon}) \\ \\ \bullet\ p^\varepsilon = \widetilde{\nabla}\psi_0^\varepsilon = \text{le prolongement par zéro de } \nabla w_0^\varepsilon \text{ dans } \Omega\backslash\Omega_g^{(*)\varepsilon} \end{array}\right.$$

On peut maintenant passer à la limite dans la relation (4-53), puisque dans chaque terme on a le produit de deux facteurs l'un convergeant faiblement et l'autre fortement:

- le deuxième terme du premier membre tend vers zéro avec ε puisque :

$$\bullet\ \left\|\widetilde{\psi}_0^\varepsilon\right\|_{L^2(\Omega)} \leq C\,\varepsilon \quad \text{et} \quad \left\|p^\varepsilon + \omega_1\nabla T_0^\varepsilon\right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = \left\|\widetilde{\nabla}w_0^\varepsilon + \omega_1\nabla T_0^\varepsilon\right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq C$$

$$\bullet\ \left\|\widetilde{w}_0^\varepsilon\right\|_{L^2(\Omega)} \leq C\,\varepsilon \quad \text{et} \quad \left\|p^\varepsilon + \omega_1\nabla\chi_0^\varepsilon\right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = \left\|\widetilde{\nabla}\psi_0^\varepsilon + \omega_1\nabla\chi_0^\varepsilon\right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq C$$

- les deux derniers termes du second membre tendent vers zéro avec ε puisque :

$$\bullet\ \left\|\nabla T_{-1}^\varepsilon\right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq C\varepsilon \quad \text{et} \quad \left\|\nabla(\theta\chi_0^\varepsilon)\right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq C$$

$$\bullet\ \left\|\widetilde{\psi}_0^\varepsilon\right\|_{L^2(\Omega)} \leq C\varepsilon \quad \text{et} \quad \left\|h^\varepsilon\ \chi_g^{(*)\varepsilon}\right\|_{L^2(\Omega)} \leq C$$

- le premier terme du premier membre tend vers:

$$\int_\Omega \omega_1\left(x_j\left(Q^* + \eta\ P^*\right) - T_0^*\ K_{ij}^0\right)\frac{\partial\theta}{\partial x_i}\,dx$$

puisque:

- $\chi_0^\varepsilon \longrightarrow x_j$ dans $L^2(\Omega)$ fort
- $Q^\varepsilon \longrightarrow Q^*$ dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ faible
- $P^\varepsilon \longrightarrow P^*$ dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ faible
- $T_0^\varepsilon \longrightarrow T_0^*$ dans $L^2(\Omega)$ fort

- $q_i^\varepsilon \longrightarrow \dfrac{|Y_g \cup Y_\ell|}{|Y|} \mathcal{M}_{Y_g \cup Y_\ell}\left(\lambda \dfrac{\partial}{\partial y_i}\left(\chi_0^j + y_j\right)\right)$ dans $L^2(\Omega)$ faible

- $p_i^\varepsilon \longrightarrow \omega_1 \dfrac{|Y_g^{(\ell)}|}{|Y|} \mathcal{M}_{Y_g^{(\ell)}}\left(\dfrac{\partial}{\partial y_i}\left(\chi_0^j + y_j + \dfrac{\psi_0^j}{\omega_1}\right)\right)$ dans $L^2(\Omega)$ faible

- $q_i^\varepsilon + \eta\, p_i^\varepsilon \longrightarrow K_{ij}^0$ dans $L^2(\Omega)$ faible

- le premier terme du second membre tend vers

$$r(x) = \mathcal{M}_Y\left(f + \eta\, h \chi_g^{(\ell)}\right) = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left(f + \eta\, h\, \chi_g^{(\ell)}\right)(x,y)dy$$

Ainsi le passage à la limite dans la relation (4-53) entraine que:

$$\text{(4-54)} \qquad \int_\Omega \left(Q_i^* + \eta\, P_i^*\right) x_j \frac{\partial \theta}{\partial x_i} dx - \int_\Omega K_{ij}^0\, T_0^* \frac{\partial \theta}{\partial x_i} dx = \int_\Omega r\, \theta\, x_j\, dx$$

Mais rappelons nous que $Q^* + \eta P^*$ vérifie l'équation (4-46):

$$\int_\Omega (Q_i^* + \eta P_i^*) \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_\Omega r\, v\, dx \qquad \forall\, v \in H_0^1(\Omega)$$

En prenant la fonction test $v = \theta\, x_j$ dans cette relation on a:

$$(4\text{-}55) \qquad \int_\Omega \left(Q_i^* + \eta\, P_i^*\right) x_j \frac{\partial \theta}{\partial x_i}\, dx + \int_\Omega \left(Q_i^* + \eta\, P_i^*\right) \delta_{ij}\, \theta\, dx = \int_\Omega r\, \theta\, x_j\, dx$$

Si on retranche (4-55) de (4-54) on obtient :

$$\int_\Omega - K_{ij}^0\, T_0^* \frac{\partial \theta}{\partial x_i}\, dx = \int_\Omega \left(Q_j^* + \eta\, P_j^*\right) \theta\, dx$$

et ceci est vrai pour tout $\theta \in \mathcal{D}(\Omega)$, d'où:

$$(4\text{-}56) \qquad Q^* + \eta P^* = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(K_{ij}^0\, T_0^*\right) = K_{ij}^0 \frac{\partial T_0^*}{\partial x_i}$$

La limite T_0^* vérifie donc le même problème que celui vérifié par u^0 :

$$\int_\Omega K_{ij}^0 \frac{\partial T_0^*}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx = \int_\Omega r\, v\, dx \qquad \forall\, v \in H_0^1(\Omega)$$

et d'après l'unicité de la solution de ce problème, T_0^* et u^0 sont identiques , de plus, toute la suite T_0^ε converge vers u^0. □

4-3/ Résumé et comparaison des limites:

Les divers passages à la limite dans les équations vérifiées par la température $T^{\varepsilon\zeta}$, lorsque la taille ε de la période de la structure du matériau et la conductivité thermique ζ de la phase gazeuse tendent vers zéro, peuvent être représentés par le schéma suivant:

$$\begin{tikzcd}
T^{\varepsilon\zeta} - \frac{\varepsilon^2}{\zeta}\,\theta^{\varepsilon} \arrow[r, "\zeta \text{ fixé}", "\varepsilon \to 0"'] \arrow[d, "\varepsilon \text{ fixé}", "\zeta \to 0"'] \arrow[dr, phantom, "\text{dans } H_0^1(\Omega)"] & u^{\zeta} \arrow[d, "\zeta \to 0"] \\
T_0^{\varepsilon} \arrow[r, "\varepsilon \to 0"'] & u_0
\end{tikzcd}$$

Les convergences en ε sont faibles, cependant, les convergence en ζ sont fortes et l'erreur est de l'ordre de ζ. Rappelons qu'on a été contraint à faire l'hypothèse (4-38)" le gaz est sous forme de bulles strictement incluses dans Ω" uniquement pour établir des estimations pour la fonction T_0^{ε} afin de pouvoir justifier sa convergence vers u_0.

La fonction θ^{ε} (resp. $\varepsilon\nabla\theta^{\varepsilon}$) est bornée dans $L^2(\Omega)$ (resp. dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$) indépendemment du paramètre ε et de la conductivité thermique ζ de la phase gaseuse. Elle n'est rien d'autre que le premier terme $\varepsilon^{-2}\,T_{-1}^{\varepsilon}$ du développement assyptotique (4-25). D'après la remarque 4-1, elle peut être déterminée de la façon suivante:

$$\theta^{\varepsilon}(x) = \theta^{k\varepsilon}\left(\frac{x - o_k^{\varepsilon}}{\varepsilon}\right) \qquad x \in \Omega \cap C_k^{\varepsilon}$$

où C_k^{ε} est la $k^{\text{ième}}$ cellule translatée de εY, d'origine o_k^{ε}, k étant un multi-entier de $\mathbb{Z}^3$ et $\theta^{k\varepsilon}$ est la solution unique de:

$$\begin{cases} -\Delta\theta^{k\varepsilon}(y) = f(\varepsilon y + o_k^{\varepsilon}) & \text{dans } Y_g \\ \theta^{k\varepsilon} = 0 & \text{sur } \partial(Y_g) \\ \\ \theta^{k\varepsilon} \equiv 0 & \text{dans } Y_s \cup Y_\ell \end{cases}$$

Les limites (ε tend vers 0) et (ζ tens verd 0) ne commutent donc pas. Le résultat dépend de l'ordre de grandeur du rapport $\dfrac{\varepsilon^2}{\zeta}$.

5/ INTERPRETATION PHYSIQUE DES RESULTATS ET CONCLUSION:

Le problème qui nous préoccupe ici est de mettre en évidence *comment les phénomènes d'évaporations-condensations* au niveau microscopique *modifient la conductivité thermique λ qui apparait dans la loi de FOURIER* écrite pour le milieu homogène équivalent au milieu poreux. Dans l'expression (2-43) des conductivités thermiques apparentes K_{ij} on va distinguer les différentes conductivités et facteurs intervennant dans le transfert macroscopique de la chaleur qui est gouverné par l'équation (2-45).

Les conductivité homogénéisées K_{ij} définies par (2-43)peuvent se décomposer comme suit:

(5-1) $$K_{ij} = \lambda_{ij} + \lambda_{dif}\, F_{ij}$$

où:

(5-2) $$\lambda_{ij} = \frac{1}{|Y|} \int_{Y} \lambda \frac{\partial}{\partial y_i} (\chi^j + y_j)\, dy$$

(5-3) $$F_{ij} = \frac{1}{|Y|} \int_{Y_g^{(\mathcal{E})}} \frac{\partial}{\partial y_i} (\chi^j + y_j + \frac{1}{\omega_1} \Psi^j)\, dy$$

(5-4) $$\lambda_{dif} = \eta\, \omega_1 = \rho_g\, \mathcal{D}\, \Delta h_v\, \omega_1 = \rho_g\, \mathcal{D}\, \Delta h_v \frac{\partial \varpi_{sat}}{\partial T},$$ (voir les notations (1-2) et (1-11).

Rappelons que les (χ^j, Ψ^j) sont les solutions uniques des problèmes aux limites locaux (2-36). Les constantes ρ_g, $\mathcal{D}$ et Δh_v désignent respectivement la densité massique du gaz, le coefficient de diffision air-vapeur et la chaleur latente de vaporisation. La fonction ϖ_{sat} désigne la valeur saturante de la fraction massique de vapeur ϖ et le symbole $|Y|$ désigne le volume de la cellule de base Y.

Par des intégration par parties et en tenant compte des conditions aux limites et aux interfaces vérifiées les couples (χ^j, Ψ^j) les constante λ_{ij} et F_{ij} peuvent s'écrire aussi:

$$\lambda_{ij} = \frac{(\lambda_g - \lambda_\ell)}{|Y|} \int_{\mathcal{A}_{g\ell}} \chi^j n_i \, d\sigma + \frac{(\lambda_g - \lambda_s)}{|Y|} \int_{\mathcal{A}_{gs}} \chi^j n_i \, d\sigma + \frac{(\lambda_\ell - \lambda_s)}{|Y|} \int_{\mathcal{A}_{\ell s}} \chi^j n_i \, d\sigma +$$
$$+ \left(\frac{|Y_g|}{|Y|} \lambda_g + \frac{|Y_\ell|}{|Y|} \lambda_\ell + \frac{|Y_s|}{|Y|} \lambda_s \right) \delta_{ij}$$

$$F_{ij} = \frac{|Y_g^{(\ell)}|}{|Y|} \delta_{ij} + \frac{1}{|Y|} \int_{\mathcal{A}_{g\ell}} \chi^j n_i \, d\sigma + \frac{1}{|Y|} \int_{\mathcal{A}_{gs}^{(\ell)}} (\chi^j + \frac{\Psi^j}{\omega_1}) \, n_i \, d\sigma$$

et on retrouve les résultats de C. Moyne, J. C. Batsale et A. Degiovanni [28] obtenus en utilisant la méthode physique de prise de moyenne et fermeture.

La conductivité $\boldsymbol{\lambda}$ introduite dans la décomposition (5-1) de la conductivité apparente $\mathbf{K}$ désigne ([13],[28]) la conductivité thermique "*vraie*" au sens où c'est celle qui apparait dans la *loi de Fourier* écrite pour le milieu homogène équivalent au milieu poreux. La conductivité $\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{dif}}$ représente une conductivité thermique d'origine diffusive et le facteur $\mathbf{F}$ s'interprète comme étant le facteur de résistance à la diffusion. Les expressions (5-2), (5-3) et les problèmes locaux (2-36) vérifiés par les couples (χ^j, Ψ^j) permettent d'identifier d'un point de vue théorique la conductivité "*vraie*" λ et le facteur F. Toutefois, dans la décomposition (5-1), ni la conductivité λ ni le facteur F ne sont accessibles expérimentalement, seule la conductivité apparente K peut être atteinte ([12], [28]).

L'impossibilité d'atteindre expérimentalement la conductivité thermique "vraie" λ a conduit De Vries ([12], [13], [14], [28]) à confondre λ avec la conductivité $\mathring{\lambda}$ du milieu poreux n'échangeant que par conduction et qui elle peut être mesurée à basse température (pas effet d'évaporations-condensations) car elle se confond avec la conductivité apparente $\mathring{K}$ du milieu. En décomposant la conductivité apparente K sous la forme:

(5-5) $$K_{ij} = \mathring{\lambda}_{ij} + \lambda_{\mathbf{diff}} \mathring{F}_{ij}$$

METZ

la mesure des K_{ij} permet alors de déterminer le facteur $\overset{\circ}{F}_{ij}$. Les valeurs observées pour $\overset{\circ}{F}_{ij}$ sont anormalement élevées pour un facteur de résistance à la diffusion et ont donné lieu à une abandante littérature tentant d'éxpliquer ce phénomène. Les définitions (5-2) et (5-3) montrent que le facteur obtenu expérimentalement ne peut être physiquement correctement interprété comme étant le facteur de résistance à la diffusion ([13], [28]).

On va maintenant comparer la conductivité thermique λ de la loi de Fourier, définie par (5-2), avec la conductivité $\overset{\circ}{\lambda}$ du milieu poreux n'échangeant que par conduction et mettre en évidence l'influence des évaporations-condensations. La conductivité $\overset{\circ}{\lambda}$ se confond avec la conductivité thermique apparente $\overset{\circ}{K}$ et sa détermination est classique ([5], [33]), elle s'écrit:

$$\text{(5-6)} \qquad \overset{\circ}{K}_{ij} = \overset{\circ}{\lambda}_{ij} = \frac{1}{|Y|} \int_Y \lambda \frac{\partial}{\partial y_i} (\overset{\circ}{\chi}^j + y_j)\, dy$$

où la fonction $\overset{\circ}{\chi}^j$ est la solution unique du problème au limites suivant:

$$\text{(5-7)} \quad \left| \begin{array}{ll} -\dfrac{\partial}{\partial y_i}\left(\lambda \dfrac{\partial}{\partial y_i} (\overset{\circ}{\chi}^j + y_j)\right) = 0 & \text{dans chaque } Y_\alpha \\[2ex] [\![\overset{\circ}{\chi}^j]\!]_{\alpha\beta} = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{\alpha\beta} \ (\alpha,\beta = g,\ell,s) \\[2ex] [\![\lambda \dfrac{\partial}{\partial y_i} (\overset{\circ}{\chi}^j + y_j)\, n_i]\!]_{\alpha\beta} = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{\alpha\beta} \ (\alpha,\beta = g,\ell,s) \\[2ex] \displaystyle\int_Y \overset{\circ}{\chi}^j(y)\, dy = 0 \text{ et } \overset{\circ}{\chi}^j \text{ est } Y\text{-périodique.} & \end{array} \right.$$

La normale n étant oriontée sur chaque interface $\mathcal{A}_{\alpha\beta}$ de Ω_α vers Ω_β .

Pour pouvoir comparer la conductivité λ à $\overset{\circ}{\lambda}$, il est alors commode de décomposer les fonctions χ^j intervennant dans la définition de λ sous la forme suivante:

(5-8) $$\chi^j = \overset{\circ}{\chi}{}^j + \pi^j$$

Les fonctions π^j vérifient alors le système suivant:

(5-9)
$$\left|\begin{array}{ll}
-\dfrac{\partial}{\partial y_i}\left(\lambda\,\dfrac{\partial \pi^j}{\partial y_i}\right) = 0 & \text{dans chaque } Y_\alpha \\[2ex]
[\![\ \pi^j\ ]\!]_{\alpha\beta} = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{\alpha\beta}\ (\alpha\beta = g,\ell,s) \\[2ex]
[\![\ \lambda \dfrac{\partial \pi^j}{\partial y_i}\, n_i\ ]\!] = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{\ell s} \text{ et } \mathcal{A}_{gs}^{(*)} \\[2ex]
[\![\ \lambda \dfrac{\partial \pi^j}{\partial y_i}\, n_i\ ]\!] = -\eta \dfrac{\partial \psi^j}{\partial y_i} n_i - \eta\omega_i \dfrac{\partial}{\partial y_i}(\pi^j + \overset{\circ}{\chi}{}^j + y_j)\Big|_g n_i & \text{sur } \mathcal{A}_{g\ell} \text{ et } \mathcal{A}_{gs}^{(\ell)} \\[2ex]
\dfrac{\partial^2 \psi^j}{\partial y_i \partial y_i} = 0 & \text{dans } Y_g^{(\ell)} \\[2ex]
\psi^j = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{g\ell} \\[2ex]
\dfrac{\partial \psi^j}{\partial y_i} n_i = -\omega_i \dfrac{\partial}{\partial y_i}(\overset{\circ}{\chi}{}^j + \pi^j + y_j)\Big|_g n_i & \text{sur } \mathcal{A}_{gs}^{(\ell)} \\[2ex]
\pi^j \text{ et } \psi^j \text{ sont } Y\text{ - périodiques et } \displaystyle\int_Y \pi^j(y)\, dy = 0. &
\end{array}\right.$$

La conductivité "vraie" λ s'écrit alors:

(5-10) $$\lambda_{ij} = \overset{\circ}{\lambda}_{ij} + \frac{1}{|Y|}\int_Y \lambda\,\frac{\partial \pi^j}{\partial y_i}\, dy\,.$$

ce qui met en évidence l'influence des évaporations-condensations sur la conductivité thermique de la loi de Fourier. Le vrai facteur de résistance à la diffusion F_{ij} se distingue alors du facteur expérimental $\overset{\circ}{F}_{ij}$ déterminé par (5-5) de:

$$(5\text{-}11) \qquad F_{ij} - \overset{\circ}{F}_{ij} = \frac{1}{\lambda_{diff}|Y|} \int_Y \lambda \frac{\partial \pi^j}{\partial y_i} dy$$

L'analyse précédente répond donc à la contreverse classique consernant l'interprétation du facteur expérimental $\overset{\circ}{F}$ et la détermination du vrai facteur F de résistance à la diffusion.

DEUXIEME PARTIE

PERMEABILITES RELATIVES DE DEUX FLUIDES NON-MISCIBLES

INTRODUCTION II

L'écoulement d'un fluide **monophasique** à travers un milieu poreux est décrit par la **loi de Darcy**. Cette loi a été établie initialement de façon empirique par Darcy [11], cependant elle peut être justifiée de façon théorique soit par des méthodes Physiques (Marle [27], Gray et O'Neil [21], Whitaker [37]) soit par des méthodes mathématiques (Sanchez-Palencia [33], Levy [23], Allaire [1]). Des résutats récents de Allaire [1] montrent que l'écoulement macroscopique est décrit, selon l'ordre de grandeur de la porosité, soit par une loi de Darcy, soit par des équations de Brinkman soit par des équations de Stokes.

Dans le cas **polyphasique**, la loi (établie de façon empirique) qui décrit l'écoulement macroscopique est la "**loi de Darcy généralisée**" (Wyckoff et Botset [39]). Cette loi consiste à écrire une loi de Darcy pour chaque phase en introduisant une notion de **perméabilités relatives** à chacune des phases. Mais cette "loi de Darcy généralisée" n'a, dans le cas général, aucune justification théorique. Ceci a suscité de nombreux travaux tant théorique (Whitaker [38], Auriault et Sanchez-Palencia [2], Lipton et Avellaneda [26]) qu'expérimentaux (Dias et Payatakes [15], Kalaydjian [22]). Sous des hypothèses simplificatrices sur la géométrie ou sur les propriétés physiques des fluides étudiés, toutes ces études confirment que la vitesse de filtration de chaque fluide dépend non pas du seul gradient de pression exercé sur cette phase (comme le prétend la "loi de Darcy généralisée") mais s'exprime comme une combinaison linéaire des gradients de pression exercés sur toutes les phases.

Dans notre travail, on s'intéresse à **l'écoulement macroscopique**, à travers un milieux poreux, de deux **fluides non-miscibles** et obeissant tous deux aux **équations de Stokes**. Les deux fluides sont soumis aux forces de gravité et aux forces capillaires dues aux effets des tensions interfaciales. On considère une structure géométrique périodique et on utilise la **méthode d'homogénéisation**.

D'un point de vue mathématique, établir les équations qui décrivent l'écoulement macroscopique revient à passer à la limite dans les équations de Stokes, écrites pour chaque fluide, lorsque le rapport ε entre l'échelle microscopique et l'échelle macroscopique tend vers zéro; ce rapport ε n'est rien d'autre que la taille de la période de la structure. L'étude du cas polyphasique (comme le notre) présente des difficultés supplémentaires à celles rencontrées dans le cas monophasique, elles sont dues d'une part à la discontinuité des caractéristiques physiques et d'autre part aux conditions aux limites imposées sur les interfaces fluide-fluide; en effet, sur chaque interface séparant deux fluides, les effets des tensions interfaciales font apparaitre un saut du tenseur des contraintes normales proportionnel à la courbure moyenne H^ε de cette interface et qui est de l'ordre de ε^{-1}.

Un problème analogue au notre a été étudié par Lipton et Avellaneda [26] en prenant des approximations des conditions sur les interfaces fluide-fluide. Ces approximations ne sont valables que dans le cas de géométries où la courbure H^ε peut se mettre sous la forme: $H^\varepsilon = a\,\varepsilon^{-1} + G^\varepsilon$, avec a une constante et G^ε une fonction de l'ordre de l'unité. Puisque la pression n'est déterminée qu'à une constante additive près, ils se débarassent du terme génant a ε^{-1} par un changement de pression dans l'un des fluides.

Dans notre travail, on considère une géométrie plus générale. Comme dans le cas monophasique, on utilise des operateurs de restriction de Tartar ([34] et [1], annexe D) pour construire de bons prolongements de la pression. Puis, en utilisant des fonctions-test particulières, on passe à la limite dans le problème variationnel associé aux équations de Stokes. Les équations limites obtenues montrent que la vitesse de filtration macroscopique de chaque fluide s'éxprime comme une combinaison linéaire du gradient de pression exercé sur ce fluide, du gradient de pression exercé sur l'autre fluide et d'un terme qui représente les effets moyens des tensions interfaciales.

1/ POSITION DU PROBLEME ET RESULTATS D'EXISTENCE ET D'UNICITE:

1-1) Description physique et notations:

Soit Ω, un ouvert borné et régulier de $\mathbb{R}^3$, occupé par un milieu poreux à structure périodique. La période de la structure est un pavé de $\mathbb{R}^3$ noté εY, où Y représente la cellule de base: $Y = \prod_{i=1}^{3}]0, \ell_i[$ et le paramètre ε est un réel strictement positif représentant le rapport entre l'échelle microscopique et l'échelle macroscopique.

Le milieu poreux est constitué d'un solide rigide, d'un fluide mouillant (ℓ) et d'un autre fluide (g) non-mouillant. Ces divers constituants occupent des ouverts de Ω notés respectivement Ω_s^ε, Ω_ℓ^ε et Ω_g^ε. Les deux fluides sont incompressibles et non-miscibles, ils sont séparés par les interfaces $(\partial\Omega_g^\varepsilon \cap \partial\Omega_\ell^\varepsilon)$ notées $\mathcal{A}_{g\ell}^\varepsilon$. La réunion $\Omega_g^\varepsilon \cup \Omega_\ell^\varepsilon \cup \mathcal{A}_{g\ell}^\varepsilon$, notée Ω_f^ε, est séparée du solide Ω_s^ε par des interfaces notées $\mathcal{A}_{fs}^\varepsilon$ et elle est supposée connexe.

Chaque composante $\Omega_\alpha^\varepsilon$ du milieu poreux peut être recouverte par des translatés εY_α^k d'un ouvert εY_α de la période εY (voir figure1.1):

$$(1\text{-}1) \quad \left| \begin{array}{l} Y = \prod_{i=1}^{3}]0, \ell_i[= Y_s \cup Y_f \cup \mathcal{A}_{fs} \ ; \ Y_s \cap Y_f = \emptyset \\ \\ Y_f = Y_g \cup Y_\ell \cup \mathcal{A}_{g\ell} \ ; \ Y_g \cap Y_\ell = \emptyset \end{array} \right.$$

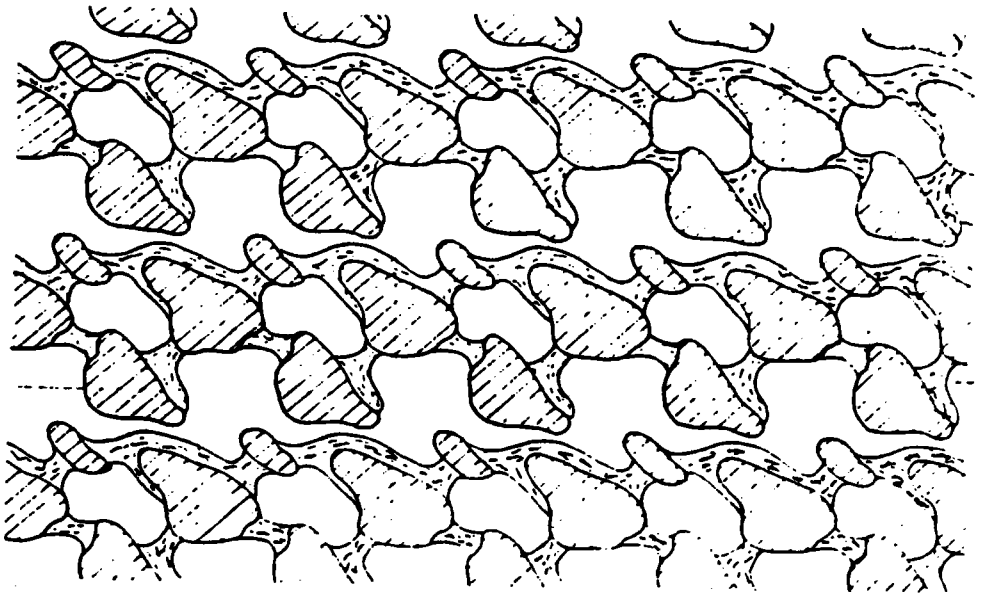
Si on définit, pour tout multi-entier $k = (k_1, k_2, k_3)$ de $\mathbb{Z}^3$, le k-translaté $\mathcal{O}^k$ d'un sous-ensemble $\mathcal{O}$ de Y par:

$$\mathcal{O}^k = kY + \mathcal{O} = \left\{ y^k = (y_1 + k_1\ell_1, y_2 + k_2\ell_2, y_3 + k_3\ell_3) \ / \ y \in \mathcal{O} \right\}$$

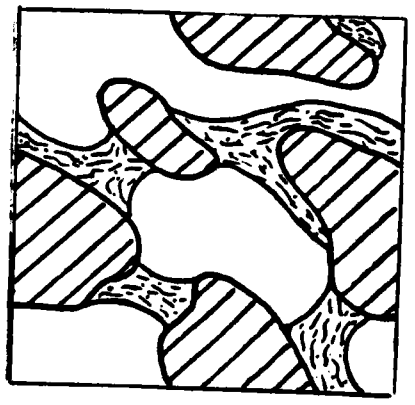
alors les composantes $\Omega_\alpha^\varepsilon$ sont définies par:

$$(1\text{-}2) \qquad \Omega_\alpha^\varepsilon = \Big(\varepsilon \bigsqcup_{k\in\mathbb{Z}^3} Y_\alpha^k\Big) \cap \Omega \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_{\alpha\beta}^\varepsilon = \Big(\varepsilon \bigsqcup_{k\in\mathbb{Z}^3} \mathcal{A}_{\alpha\beta}^k\Big) \cap \Omega . \qquad (\alpha = s, f, g, \ell)$$

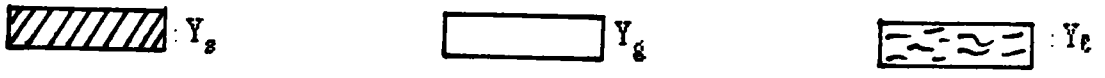
On suppose que les interfaces $\mathcal{A}_{\alpha\beta}^\varepsilon$ sont suffisament régulières (donc aussi les $\mathcal{A}_{\alpha\beta}$) et les ouverts Y_α ont des frontières localemment lipschitziennes et sont situés d'un seul côté de leur bords.



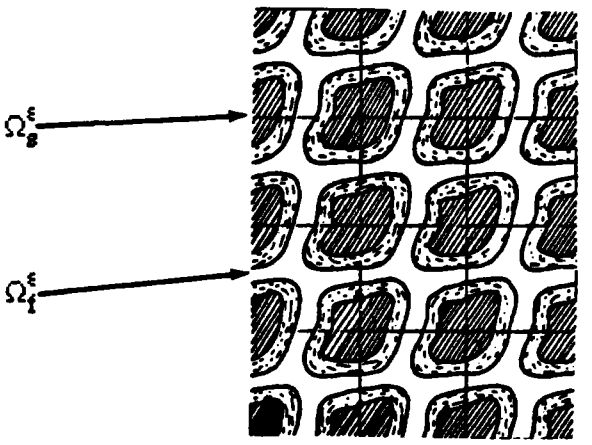
Un échantilon de Ω



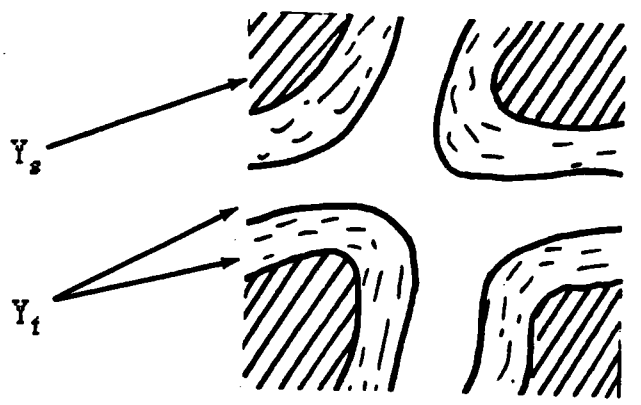
Cellule de base Y



(fig. 2-1)



Un échantilon de Ω



Cellule de base Y

(fig. 3-1)

La vitesse U^ε et la pression P^ε des fluides (g) et (ℓ) dépendent, bien sûr, de la géométrie du milieu poreux, donc de la taille ε de la période de la structure. On s'intéresse à leur comportements l'orsque la taille ε est très petite, comparée aux dimensions globales du milieu (i.e: ε tend vers zéro).

On note pour chaque fluide (α) ; $\alpha = g, \ell$:

(1-3)

$U^{\alpha\varepsilon}$: la vitesse .

$P^{\alpha\varepsilon}$: la pression.

μ_α : le coefficient de viscosité.(constante strictement positive)

$F^{\alpha\varepsilon}$: le vecteur des forces de la pesanteur.

H^ε : la courbure moyenne de l'interface $\mathcal{A}^\varepsilon_{g\ell}$.

$D^\alpha_{ij}(U^\varepsilon) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U^{\alpha\varepsilon}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U^{\alpha\varepsilon}_j}{\partial x_i}\right)$: les composantes du tenseur des vitesses de déformation.

$\mathbb{T}^\alpha_{ij}(U^\varepsilon, P^\varepsilon) = 2\mu_\alpha D^\alpha_{ij}(U^\varepsilon) - P^{\alpha\varepsilon}\delta_{ij}$: les composantes du tenseur des contraintes, où δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker.

La vitesse U^ε et la pression P^ε vérifient les équations de Stokes ci-dessous dans lesquelles on prend en compte les effets de la pression capillaire dûs aux tensions interfaciales fluide(g)- fluide(ℓ).

(1-4)

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\mathbb{T}^\alpha_{ij}(U^\varepsilon, P^\varepsilon) = F^\alpha_i \qquad \text{dans } \Omega^\varepsilon_\alpha \quad (\alpha = g, \ell)$$

$$\mathrm{div}(U^\varepsilon) = 0 \qquad \text{dans } \Omega^\varepsilon_\alpha \quad (\alpha = g, \ell)$$

$$[\![U^\varepsilon]\!]_{g\ell} = 0 \qquad \text{sur } \mathcal{A}^\varepsilon_{g\ell}$$

$$[\![\mathbb{T}_{ij}(U^\varepsilon, P^\varepsilon)n_j]\!]_{g\ell} = 2\sigma H^\varepsilon n_i \qquad \text{sur } \mathcal{A}^\varepsilon_{g\ell}$$

$$U^\varepsilon = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega^\varepsilon_f$$

où l'on adopte la convention de sommation sur les indices latins répétés. Le symbole $[\![\psi]\!]_{g\ell}$ désigne le saut de la quantité ψ à travers l'interface $\mathcal{A}^\varepsilon_{g\ell}$, la constante σ est la tension

superficielle de l'interface $\mathcal{A}^{\varepsilon}_{g\ell}$ et n est la normale unitaire, orientée de Ω^{ε}_{g} vers $\Omega^{\varepsilon}_{\ell}$ sur les interfaces $\mathcal{A}^{\varepsilon}_{g\ell}$ et vers l'extérieur de Ω^{ε}_{f} sur les entrées-sorties $\partial\Omega^{\varepsilon}_{f}$ des deux fluides.

1-2) Résultats d'existence et d'unicité:

Les résultats de ce paragraphe ne nécessitent aucune hypothèse de périodicité sur la géométrie du milieu .

L'étude de l'existence et de l'unicité de la solution $(U^{\varepsilon},P^{\varepsilon})$ sera faite par la méthode variationnelle.

<u>Cadre fonctionnel</u>:

$$
(1\text{-}5)\quad \left|\begin{array}{l}
\mathcal{V}^{\varepsilon} = \mathbb{H}^1_0(\Omega_f) = \left(H^1_0(\Omega^{\varepsilon}_f)\right)^3 \\
\mathcal{V}^{\varepsilon}(\mathrm{div},0) = \left\{ v \in \mathbb{H}^1_0(\Omega^{\varepsilon}_f);\ \mathrm{div}(v) = 0 \right\} \\
\\
L^2_0(\Omega^{\varepsilon}_f) = \left\{ q \in L^2(\Omega^{\varepsilon}_f);\ \displaystyle\int_{\Omega^{\varepsilon}_f} q\ dx = 0 \right\} \\
\mathcal{E}^{\varepsilon} = \mathcal{V}^{\varepsilon} \times L^2_0(\Omega^{\varepsilon}_f)
\end{array}\right.
$$

L'espace $\mathcal{V}^{\varepsilon}$ et son sous-espace $\mathcal{V}^{\varepsilon}(\mathrm{div},0)$ sont munis de la norme:

$$
\| v \|_{\mathcal{V}^{\varepsilon}} = \left(\int_{\Omega^{\varepsilon}_f} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\, dx \right)^{\frac{1}{2}}
$$

L'espace $L^2(\Omega^{\varepsilon}_f)$ et son sous-espace $L^2_0(\Omega^{\varepsilon}_f)$ sont munis de la norme:

$$
\| q \|_0 = \left(\int_{\Omega^{\varepsilon}_f} q^2\ dx \right)^{\frac{1}{2}}
$$

On définit pour tout couple (u,v) de $\mathcal{V}^\varepsilon \times \mathcal{V}^\varepsilon$ et toute fonction q de $L_0^2(\Omega_f^\varepsilon)$ les formes suivantes:

$$(1\text{-}6)\quad \left|\begin{array}{l} a^\varepsilon(u,v) = \displaystyle\int_{\Omega_f^\varepsilon} 2\mu^\varepsilon\, D_{ij}(u)D_{ij}(v)\, dx \\[2ex] b^\varepsilon(v,q) = -\displaystyle\int_{\Omega_f^\varepsilon} q\ \mathrm{div}(v)\, dx \\[2ex] \ell^\varepsilon(v) = \displaystyle\int_{\Omega_f^\varepsilon} F^\varepsilon.v\, dx + \int_{\mathcal{A}_{g\ell}^\varepsilon} 2\sigma\, H^\varepsilon\, v.n\, d\Gamma \end{array}\right.$$

où l'on a supposé que :

$$(1\text{-}6)\quad \left\{\begin{array}{l} F^\varepsilon \in L^2(\Omega_f^\varepsilon) \\ H^\varepsilon \in L^2(\mathcal{A}_{g\ell}^\varepsilon) \\ \mu^\varepsilon \text{ vaut } \mu_\alpha \text{ dans chaque } \Omega_\alpha^\varepsilon \quad (\alpha = g,\ \ell) \\ \text{les constantes } \mu_\alpha \text{ et } \sigma \text{ sont strictement positives.} \end{array}\right.$$

La vitesse U^ε va être recherchée dans l'espace $\mathcal{V}^\varepsilon$ et la pression P^ε dans $L^2(\Omega_f^\varepsilon)$, mais, comme dans les cas classiques, la pression n'est déterminée qu'à une constante additive près, pour fixex cette constante on va la rechercher dans le sous espace $L_0^2(\Omega_f^\varepsilon)$ (i.e de moyenne nulle).

Théorème 1.1

Si $(U^\varepsilon,P^\varepsilon)$ *est une solution du problème* (1-4), *avec* P^ε *de moyenne nulle sur* Ω_f^ε, *alors sous les hypothèses* (1-6), $(U^\varepsilon,P^\varepsilon)$ *vérifie les équations variationnelles suivantes:*

$$(1\text{-}7)\quad \left\{\begin{array}{ll} U^\varepsilon \in \mathcal{V}^\varepsilon\ ;\ P^\varepsilon \in L_0^2(\Omega_f^\varepsilon) & \\ a^\varepsilon(U^\varepsilon,v) + b^\varepsilon(v,P^\varepsilon) = \ell^\varepsilon(v) & \forall\ v \in \mathcal{V}^\varepsilon \\ b^\varepsilon(U^\varepsilon,q) = 0 & \forall\ q \in L_0^2(\Omega_f^\varepsilon) \end{array}\right.$$

Le problème (1-7) *admet une solution* $(U^\varepsilon,P^\varepsilon)$ *unique dans* $\mathcal{V}^\varepsilon(\mathrm{div},0)\times L_0^2(\Omega_f^\varepsilon)$.

Démonstration:

On multiplie la première équation de (1-4) par la $i^{ème}$ composante v_i d'une fonction v de $\mathcal{V}^\varepsilon$ et on somme sur l'indice i de 1 à 3. Puisque, $\mathbf{T}^\alpha_{ij}(U^\varepsilon,P^\varepsilon)$ et sa divergence $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mathbf{T}^\alpha_{ij}(U^\varepsilon,P^\varepsilon)\right)$, qui est égale à $-F^\alpha_i$, sont supposés dans l'espace $L^2(\Omega^\varepsilon_\alpha)$, la trace: $\mathbf{T}^\alpha_{ij}(U^\varepsilon,P^\varepsilon)n_j$ est définie comme un élément de $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega^\varepsilon_\alpha)$. On peut donc utiliser la formule d'intégration par parties de Green:

$$\int_{\Omega^\varepsilon_\alpha} -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mathbf{T}^\alpha_{ij}(U^\varepsilon,P^\varepsilon)\right) v_i \, dx = \int_{\Omega^\varepsilon_\alpha} \mathbf{T}^\alpha_{ij}(U^\varepsilon,P^\varepsilon)\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\, dx - \langle \mathbf{T}^\alpha_{ij}(U^\varepsilon,P^\varepsilon)\, n_j , v_i \rangle_{\partial\Omega^\varepsilon_\alpha}$$

où $\langle .,. \rangle_{\partial\Omega^\varepsilon_\alpha}$ désigne les crochets de dualité entre $H^{\frac{1}{2}}(\mathcal{A}^\varepsilon_{g\ell})$ et $H^{-\frac{1}{2}}(\mathcal{A}^\varepsilon_{g\ell})$ et la normale n est orientée à l'extérieur de $\Omega^\varepsilon_\alpha$. D'où:

$$\int_{\Omega^\varepsilon_\alpha} \mathbf{T}^\alpha_{ij}(U^\varepsilon,P^\varepsilon)\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\, dx = \int_{\Omega^\varepsilon_\alpha} F^\alpha_i \, v_i \, dx + \langle \mathbf{T}^\alpha_{ij}(U^\varepsilon,P^\varepsilon)n_j , v_i \rangle_{\partial\Omega^\varepsilon_\alpha} \qquad (\alpha = g,\ell)$$

Puisque v est nulle sur le bord extérieur de Ω^ε_i, le terme $\langle \mathbf{T}^\alpha_{ij}(U^\varepsilon)\, n_j , v_i \rangle_{\partial\Omega_\alpha}$ est réduit à $\langle \mathbf{T}^\alpha_{ij}(U^\varepsilon)\, n_j , v_i \rangle_{\mathcal{A}^\varepsilon_{g\ell}}$. Si on convient que la normale à $\mathcal{A}^\varepsilon_{g\ell}$ est dérigée de Ω_g vers Ω_ℓ, alors le saut $[\![\mathbf{T}_{ij}(U^\varepsilon,P^\varepsilon)\, n_j]\!]_{g\ell}$ est défini pour tout v de $\mathcal{V}^\varepsilon$ par:

$$\langle [\![\mathbf{T}_{ij}(U^\varepsilon,P^\varepsilon)\, n_j]\!]_{g\ell} , v_i \rangle_{\mathcal{A}^\varepsilon_{g\ell}} = \langle \mathbf{T}^g_{ij}(U^\varepsilon,P^\varepsilon)\, n_j , v_i \rangle_{\mathcal{A}^\varepsilon_{g\ell}} - \langle \mathbf{T}^\ell_{ij}(U^\varepsilon,P^\varepsilon)\, n_j , v_i \rangle_{\mathcal{A}^\varepsilon_{g\ell}}.$$

D'après la quatrième relation de (1-4), il vaut $2\,\sigma\, H^\varepsilon\, n_i$. Puisque H^ε est supposée dans $L^2(\mathcal{A}^\varepsilon_{g\ell})$, la somme des relations précédentes (pour $\alpha = g,\ell$) s'écrit:

$$\int_{\Omega_f^\varepsilon} \mathbb{T}_{ij}(U^\varepsilon,P^\varepsilon)\,\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\,dx = \int_{\Omega_f^\varepsilon} F_i\,v_i\,dx + \int_{\mathcal{A}_{gl}^\varepsilon} 2\,\sigma\,H^\varepsilon\,v_i\,n_i\,d\Gamma$$

En utilisant l'expression (1-2) de $\mathbb{T}_{ij}(U^\varepsilon,P^\varepsilon)$ en fonction de la vitesse U^ε et de la pression P^ε il vient:

$$\int_{\Omega_f^\varepsilon} 2\mu^\varepsilon\,D_{ij}(U^\varepsilon)\,\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\,dx - \int_{\Omega_f^\varepsilon} P^\varepsilon\,\mathrm{div}(v)\,dx = \int_{\Omega_f^\varepsilon} F.v\,dx + \int_{\mathcal{A}_{gl}^\varepsilon} 2\,\sigma\,H\,v.\,n\,d\Gamma$$

Mais, puisque D_{ij} est symétrique, $D_{ij}(U^\varepsilon)\,\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j}$ est égale à $D_{ij}(U^\varepsilon)D_{ij}(v)$, d'où:

$$(1\text{-}9)\qquad \int_{\Omega_f^\varepsilon} 2\mu^\varepsilon\,D_{ij}(U^\varepsilon)D_{ij}(v)\,dx - \int_{\Omega_f^\varepsilon} P^\varepsilon\,\mathrm{div}(v)\,dx = \int_{\Omega_f^\varepsilon} F.v\,dx + \int_{\mathcal{A}_{gl}^\varepsilon} 2\,\sigma\,H\,v.\,n\,d\Gamma$$

Cette relation n'est rien d'autre que la première équation de (1-7), la deuxième étant évidente puisque U^ε est à divergence nulle.

Pour étudier l'existence et l'unicité de la solution $(U^\varepsilon,P^\varepsilon)$ de (1-7), on va utiliser le lemme 1-1 suivant, dont une démonstration est donnée dans la référence [20]:

Lemme 1-1:

Soient $\mathbf{X}$ *et* $\mathbf{M}$ *deux espaces de Hilbert, de normes respectives* $\|\cdot\|_{\mathbf{X}}$ *et* $\|\cdot\|_{\mathbf{M}}$. *Soient* $a(.,.)$ *et* $b(.,.)$ *deux formes bilinéaires et continues, repectivement de* $\mathbf{X}\times\mathbf{X}$ *dans* $\mathbb{R}$ *et de* $\mathbf{X}\times\mathbf{M}$ *dans* $\mathbb{R}$, *alors le problème:*

Pour f *et* g *deux formes linéaires et continues, respectivement sur* $\mathbf{X}$ *et* $\mathbf{M}$, *données, trouver* (U, P) *tel que:*

$$(1\text{-}10)\qquad \begin{cases} (U, P) \in \mathbf{X}\times\mathbf{M} & \\ a(U, v) + b(v, P) = f(v) & \forall\, v \in \mathbf{X} \\ b(U, q) = g(q) & \forall\, q \in \mathbf{M} \end{cases}$$

admet une solution (U,P) *unique dans* $\left\{ v\in\mathbf{X};\ b(v,q)=0\ \forall q\in\mathbf{M} \right\}\times\mathbf{M}$, *si les conditions suivantes sont satisfaites:*

$$(1\text{-}11)\qquad \text{i)}\ \exists\,\eta>0 \quad \textit{telle que} \quad a(v,v)\geq\eta\,\|v\|_{\mathbf{X}}^{2} \qquad \forall\, v\in\left\{ v\in\mathbf{X};\ b(v,q)=0\ \forall q\in\mathbf{M} \right\}$$

$$(1\text{-}12)\qquad \text{ii)}\ \exists\,\beta>0 \quad \textit{telle que} \quad \inf_{q\in\mathbf{M}}\ \sup_{v\in\mathbf{X}} \frac{b(v,q)}{\|v\|_{\mathbf{X}}\,\|q\|_{\mathbf{M}}}\geq\beta$$

En prenant dans ce lemme les espaces $\mathbf{X} = \mathcal{V}^{\varepsilon}$, $\mathbf{M} = L_0^2(\Omega_f^{\varepsilon})$, et les formes $f = \ell^{\varepsilon}$ et g nulle, alors le problème (1-10) est le même que (1-7). Pour affirmer l'existence et l'unicité du couple $(U^{\varepsilon},P^{\varepsilon})$, il nous suffit donc de vérifier que:

- la forme linéaire sur $\mathcal{V}^{\varepsilon}$: $v \longmapsto \ell^{\varepsilon}(v)$ est continue .
- la forme bilinéaire sur $\mathcal{V}^{\varepsilon}\times\mathcal{V}^{\varepsilon}$: $(u,v) \longmapsto a^{\varepsilon}(u,v)$ est continue .
- la forme bilinéaire sur $\mathcal{V}^{\varepsilon}\times L_0^2(\Omega_f^{\varepsilon})$: $(u,q) \longmapsto b^{\varepsilon}(u,q)$ est continue .
- les conditions (1-11) et (1-12) sont satisfaites .

Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la continuité de l'application trace sur $\mathcal{A}_{g\ell}^{\varepsilon}$ on a aisément la continuité de la forme linéaire ℓ^{ε}:

$$(1\text{-}13)\qquad |\ell^{\varepsilon}(v)| \leq \left(\|F\|_{L^2(\Omega_f^{\varepsilon})} + C^{\varepsilon}\,\|H^{\varepsilon}\|_{L^2(\mathcal{A}_{g\ell}^{\varepsilon})} \right) \|v\|_{\mathcal{V}^{\varepsilon}} \qquad \forall\, v\in\mathcal{V}^{\varepsilon}$$

où C^{ε} est une constante (qui dépend du paramètre ε).

De même, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on établit:

$$(1\text{-}14) \qquad \left|a^{\varepsilon}(u,v)\right| \leq 2\max(\mu_g,\mu_\ell)\left\|u\right\|_{\mathcal{V}^{\varepsilon}}\left\|v\right\|_{\mathcal{V}^{\varepsilon}} \qquad \forall\,(u,v)\in\mathcal{V}^{\varepsilon}\times\mathcal{V}^{\varepsilon}$$

$$\left|b^{\varepsilon}(q,v)\right| \leq \left\|q\right\|_{L^2(\Omega_f^{\varepsilon})}\left\|v\right\|_{\mathcal{V}^{\varepsilon}} \qquad \forall\,(v,q)\in\mathcal{V}^{\varepsilon}\times L_0^2(\Omega_f^{\varepsilon})$$

d'où la continuité des formes bilinéaires $a^{\varepsilon}(.,.)$ et $b^{\varepsilon}(.,.)$ sur $\mathcal{V}^{\varepsilon}\times\mathcal{V}^{\varepsilon}$ et sur $\mathcal{V}^{\varepsilon}\times L_0^2(\Omega_f^{\varepsilon})$ repectivement.

La condition (1-11) est une conséquence de l'inégalité de Korn et de celle de Poincaré [18]. On peut vérifier facilement que:

$$(1\text{-}15) \qquad \left|a^{\varepsilon}(v,v)\right| \geq \frac{2}{5}\min(\mu_g,\mu_\ell)\left\|v\right\|^2_{\mathcal{V}^{\varepsilon}} \qquad \forall\, v\in\mathcal{V}^{\varepsilon}$$

(en dimension N, la constante $\frac{2}{5}$ est remplacée par $\frac{2}{N+2}$)

La condition (1-12) est une conséquence directe du lemme 1-2 ci-dessous, dont une démonstration est donnée dans [20, Th. 3.7]:

Lemme 1-2:

Il existe une constante $C>0$ *telle que:*

$$(1\text{-}16) \qquad \sup_{v\in\mathcal{V}^{\varepsilon}}\left(\frac{1}{\left\|v\right\|_{\mathcal{V}^{\varepsilon}}}\int_{\Omega_f^{\varepsilon}} q\ \mathrm{div}(v)\ dx\right) \geq C\left\|q\right\|_{0,\Omega_f^{\varepsilon}} \qquad \forall\, q\in L_0^2(\Omega_f)$$

Les conditions du lemme 1-1 sont donc satisfaites, le problème (1-7) admet alors une solution $(U^{\varepsilon},P^{\varepsilon})$ unique. □

Remarque 1-1:

On aurait pu utiliser la formulation variationnelle suivante, qui élimine dans une première étape l'inconnue P^ε:

$$(1\text{-}17)\quad \begin{cases} U^\varepsilon \in \mathcal{V}^\varepsilon(\mathrm{div},0) \\ a^\varepsilon(U^\varepsilon,v) = \ell(v) \qquad \forall\, v \in \mathcal{V}^\varepsilon(\mathrm{div},0) \end{cases}$$

On démontre d'abord l'existence et l'unicité de la solution U^ε *de* (1-17), *puis, à l'aide du lemme 1-3 ci-dessous (théorème de DE RHAM* ([36],[6])), *on établit l'existence de la pression* P^ε *vérifiant la première relation et la quatrième relation de* (1-4).

Lemme 1-3:

Soit $\mathcal{O}$ *un ouvert borné, connexe de* $\mathbb{R}^n$, *de bord* $\partial\mathcal{O}$ $\mathcal{C}^1$ *par morceaux et* $\mathcal{L}$ *une forme linéaire continue sur* $(H_0^1(\mathcal{O}))^n$, *alors les deux propositions sont équivalentes:*

- $\mathcal{L}(\psi) = 0 \quad \forall\, \psi \in \left\{\psi \in H_0^1(\mathcal{O}))^n ; \mathrm{div}(\psi) = 0\right\}$
- $\exists\, Q \in L^2(\mathcal{O}) \;/\; \forall\, \varphi \in (H_0^1(\mathcal{O}))^n \quad \mathcal{L}(\varphi) = \displaystyle\int_{\mathcal{O}} Q\ \mathrm{div}(\varphi)\ dx = \int_{\mathcal{O}} \nabla Q.\varphi\ dx$

la fonction Q *est unique à une constante additive près.*

Dans notre cas on prend:

$$\mathcal{L}(v) = \left\langle -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(2\,\mu\, D_{ij}(U^\varepsilon)\right) - F_i\,,\, v_i \right\rangle_{\Omega_f^\varepsilon} - 2\,\sigma \langle H\,,\, v_i\, n_i \rangle_{\mathcal{A}_{g\ell}^\varepsilon} \qquad \forall\, v \in (H_0^1(\Omega_f^\varepsilon))^3$$

où $\langle\, .\, .\, .\, \rangle_{\Omega_f}$ *désigne les crochets de dualité entre* $H_0^1(\Omega_f^\varepsilon)$ *et* $H_0^{-1}(\Omega_f^\varepsilon)$ *et* $\langle\, .\, .\, .\, \rangle_{\mathcal{A}_{g\ell}^\varepsilon}$ *les crochets de dualité entre* $H^{\frac{1}{2}}(\mathcal{A}_{g\ell}^\varepsilon)$ *et* $H^{-\frac{1}{2}}(\mathcal{A}_{g\ell}^\varepsilon)$. □

2/ METHODE DES ECHELLES MULTIPLES:

Comme dans la première partie, on va établir les équations macroscopiques en utilisant d'abord la méthode formelle des échelles multiples, puis par la méthode variationnelle de Tartar [5] [35], on justifiera les résultats obtenus dans le prochain paragraphe.

2-1) Développements asymptotiques et équations locales:

2-1-2 Développements asymptotiques

On cherchera la solution $(U^\varepsilon, P^\varepsilon)$ de (1-4) sous la forme du développement asymptotique suivant:

$$(2\text{-}1)\qquad \begin{cases} U^\varepsilon(x) = U^0(x,y) + \varepsilon\, U^1(x,y) + \varepsilon^2\, U^2(x,y) + \cdots\cdots \\ P^\varepsilon(x) = \dfrac{1}{\varepsilon^2} P^{-2}(x,y) + \dfrac{1}{\varepsilon}\, P^{-1}(x,y) + P^0(x,y) + \varepsilon\, P^1(x,y) + \cdots \\ y = \dfrac{x}{\varepsilon} \end{cases}$$

où les termes (U^j, P^j) sont des fonctions régulières définies sur $\Omega \times Y$ et Y-périodiques en la variable y, i.e: la période est ℓ_i - côté de Y - dans chaque direction y_i.

Avant de reporter (2-1) dans les équations (1-4), précisons comment les opérateurs différentiels, utilisés dans ces équations, se transforment quand on les applique aux termes $(U^j, P^j)(x, \frac{x}{\varepsilon})$, c'est à dire à des fonctions du type φ^ε définie sur Ω par:

$$\varphi^\varepsilon(x) = \varphi(x, \frac{x}{\varepsilon}), \text{ où } \varphi \text{ est définie sur } \Omega \times Y.$$

Les règles de dérivations de la composée de fonctions donnent:

(2-2) • $$\frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_i}(x) = \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)(x, \frac{x}{\varepsilon}).$$

• $$\mathrm{div}(\varphi^\varepsilon) = \frac{\partial \varphi_i^\varepsilon}{\partial x_i} = \left(\frac{1}{\varepsilon}\, \mathrm{div}_y + \mathrm{div}_x\right)(\varphi)(x, \frac{x}{\varepsilon}).$$

où: $$\mathrm{div}_x(\varphi) = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} \text{ et } \mathrm{div}_y(\varphi) = \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_i}.$$

• $$D_{ij}(\varphi^\varepsilon)(x) = \left(\frac{1}{\varepsilon} D^y_{ij}(\varphi) + D^x_{ij}(\varphi)\right)(x, \frac{x}{\varepsilon})$$

où: $$D^y_{ij}(\varphi) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_i} \right) \text{ et } D^x_{ij}(\varphi) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right)$$

• $$\frac{\partial D_{ii}}{\partial x_j}(\varphi^\varepsilon)(x) = \left(\varepsilon^{-2} \frac{\partial D^y_{ii}}{\partial y_j} + \varepsilon^{-1}\left(\frac{\partial D^y_{ii}}{\partial x_j} + \frac{\partial D^x_{ii}}{\partial y_j} \right) + \frac{\partial D^x_{ii}}{\partial x_j}\right)(\varphi)(x, \frac{x}{\varepsilon}).$$

Précisons aussi comment les données dépendent du paramètre ε:

<u>Dépendance des données du paramètre ε:</u>

• Le coefficient de viscosité μ^ε :

On suppose que chaque fluide (α) à un coefficient de viscosité μ_α constant. La fonction μ^ε est alors constante par morceaux et est εY-périodique (la période est $\varepsilon \ell_i$ dans chaque direction x_i):

(2-3)

$$\mu^\varepsilon(x) = \mu(\frac{x}{\varepsilon})$$

où μ est définie sur la cellule de base Y par:

$$\mu(y) = \begin{cases} \mu_g = C^{te} & \text{dans } Y_g \\ \mu_\ell = C^{te} & \text{dans } Y_\ell \end{cases}$$

et prolongée à $\mathbb{R}^3$ par Y-périodicité.

• La tension superficielle σ de $\mathcal{A}^{\varepsilon}_{g\ell}$:

(2-4) la constante σ est supposée indépendante de ε.

•les forces de la pesanteur F^{ε}

Si les masse volumiques ρ_{α} des fluides (α) $(\alpha = g,\ell)$ sont supposées de l'ordre de l'unité, alors, grâce à la structure périodique du matériau, les forces de la pesanteur F^{ε} sont εY-périodiques. Elle peuvent donc être définies par la relation:

(2-5) $$F^{\varepsilon}(x) = F(\frac{x}{\varepsilon})$$

où F est une fonction définie sur la cellule de base Y et prolongée à $\mathbb{R}^3$ par Y-périodicité. Si chaque fluide (α) est homogène, la fonction F peut être considéré comme constante dans chaque Y_{α}.

Nous allons considérer un cas plus général. On prend des forces volumiques F^{ε} qui s'écrivent sous la forme (2-6) ci-dessous. Nous signalerons en remarque comment les résultats se modifient en prenant F^{ε} sous la forme (2-5).

(2-6) $$F^{\varepsilon}(x) = \frac{1}{\varepsilon^2}F^{-2}(x,\frac{x}{\varepsilon}) + \frac{1}{\varepsilon}F^{-1}(x,\frac{x}{\varepsilon}) + F^{0}(x,\frac{x}{\varepsilon}) + \cdots$$

où les fonctions F^j sont définies dans $L^2(\Omega \times Y)$, Y-périodiques en la variable y et bornées indépendement de ε et de j à partir d'un indice J. La fonction F^{-2} est supposée telle que:

$$F^{-2}(x,y) = \begin{cases} F^{-2}_{\ell}(x) & \text{si } y \in Y_{\ell} \\ F^{-2}_{g}(x) & \text{si } y \in Y_{g} \end{cases}$$

• La courbure moyenne H^{ε} de l'interface $\mathcal{A}^{\varepsilon}_{g\ell}$:

Soit f une représentation paramétrique de la surface $\mathcal{A}_{g\ell}$. C'est une application (supposée régulière) d'un ouvert θ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ et dont l'image $f(\theta)$ est $\mathcal{A}_{g\ell}$.

$$\mathcal{A}_{gl} = \left\{ y \in Y;\ y = f(t),\ t \in \mathcal{B} \right\}$$

La courbure moyenne H de $\mathcal{A}_{gl}$ est définie par [ ]:

$$H = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 - 2\, a_3 b_3}{2\left(a_1\, a_2 - (a_3)^2\right)^{3/2}}$$

où:

$$a_1(t) = \left| \frac{\partial f}{\partial t_1} \right|^2 (t) \qquad b_1(t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t_1}, \frac{\partial f}{\partial t_2}, \frac{\partial^2 f}{\partial t_2^{\,2}} \right)(t)$$

$$a_2(t) = \left| \frac{\partial f}{\partial t_2} \right|^2 (t) \qquad b_2(t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t_1}, \frac{\partial f}{\partial t_2}, \frac{\partial^2 f}{\partial t_1^{\,2}} \right)(t)$$

$$a_3(t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t_1} \cdot \frac{\partial f}{\partial t_2} \right)(t) \qquad b_3(t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t_1}, \frac{\partial f}{\partial t_2}, \frac{\partial^2 f}{\partial t_1 \partial t_2} \right)(t)$$

Les symboles $|\ .\ |$, $(\ .\ ,\ .\ )$ et $(\ .\ ,\ .\ ,\ .\ )$ désignent, respectivement, la norme, le produit scalaire et le produit mixte euclidiens dans $\mathbb{R}^3$.

L'interface $\mathcal{A}^{\varepsilon}_{gl}$ est définie par (voir (1-2)) :

$$\mathcal{A}^{\varepsilon}_{gl} = \left\{ x^k \in \Omega;\ x^k = \varepsilon\, f(t) + \varepsilon(k_1 \ell_1, k_2 \ell_2, k_3 \ell_3),\ t \in \mathcal{B} \text{ et } k \in \mathbb{Z}^3 \right\}$$

En chaque point x^k de $\mathcal{A}^{\varepsilon}_{gl}$, la définition de la courbure moyenne H^{ε} est la même que celle de la courbure H de $\mathcal{A}_{gl}$ où l'on remplace $f(t)$ par $\varepsilon\, f(t) + \varepsilon(k_1 \ell_1, k_2 \ell_2, k_3 \ell_3)$. Les a_i sont alors remplacés par $\varepsilon^2 a_i$ et les b_i par $\varepsilon^3 b_i$. Ainsi, si on prolonge H par Y-périodicité (i.e: la période est le i^e côté ℓ_i de Y dans chaque direction y_i), la courbure H^{ε} est liée à H par la relation:

$$(2\text{-}7) \qquad H^{\varepsilon}(x) = \frac{1}{\varepsilon} H\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

$$\left(x \in \mathcal{A}^{\varepsilon}_{gl} \iff \exists\, k \in \mathbb{Z}^3 /\ y = \frac{x}{\varepsilon} - (k_1 \ell_1, k_2 \ell_2, k_3 \ell_3) \in \mathcal{A}_{gl} \right)$$

2-1-3 Equations locales

On reporte les développements (2-1) à (2-7) dans les équations (1-4). On obtient alors un développement asymptotique du problème initial. L'identification des termes en puissances de ε implique alors que les fonctions (U^j, P^j) doivent vérifier les équations locales ci-dessous qui ont lieu dans la cellule de base Y, la variable macroscopique x est considéré comme un paramètre.

(2-8)

$$\frac{\partial P^{-2}}{\partial y_i} = 0 \quad (i=1,2,3) \qquad \text{dans } Y_\alpha \ (\alpha = g,\ell)$$

$$[\![P^{-2}]\!]_{g\ell} = 0 \qquad \text{sur } \mathcal{A}_{g\ell}$$

P^{-2} est Y-périodique.

(2-9)

$$-2\,\mu_\alpha \frac{\partial}{\partial y_j} D^y_{ij}(U^0) + \frac{\partial P^{-1}}{\partial y_i} = F^{-2}_i - \frac{\partial P^{-2}}{\partial x_i} \qquad \text{dans chaque } Y_\alpha \ (\alpha = g,\ell)$$

$$\mathrm{div}_y(U^0) = 0 \qquad \text{dans chaque } Y_\alpha \ (\alpha = g,\ell)$$

$$[\![\, U^0 \,]\!]_{g\ell} = 0 \qquad \text{sur } \mathcal{A}_{g\ell}$$

$$[\![2\mu\, D^y_{ij}(U^0) - P^{-1}\delta_{ij}\,]\!]_{g\ell}\, n_j = 2\,\sigma\, H\, n_i \qquad \text{sur } \mathcal{A}_{g\ell}$$

$$U^0 = 0 \qquad \text{sur } \mathcal{A}_{f\varepsilon}$$

U^0 et P^{-1} sont Y-périodiques.

(2-10)

$$-2\,\mu_\alpha \frac{\partial}{\partial y_j}\left(D^y_{ij}(U^1) + D^x_{ij}(U^0)\right) + \frac{\partial P^0}{\partial y_i} = F^{-1}_i - \frac{\partial P^{-1}}{\partial x_i} + \mu_\alpha \frac{\partial}{\partial x_j} D^y_{ij}(U^0) \quad \text{dans } Y_\alpha \ (\alpha = g,\ell)$$

$$\mathrm{div}_y(U^1) + \mathrm{div}_x(U^0) = 0 \qquad \text{dans } Y_\alpha \ (\alpha = g,\ell)$$

$$[\![\, U^1 \,]\!]_{g\ell} = 0 \qquad \text{sur } \mathcal{A}_{g\ell}$$

$$[\![2\mu\left(D^y_{ij}(U^1) + D^x_{ij}(U^0)\right) - P^0\delta_{ij}\,]\!]_{g\ell}\, n_j = 0 \qquad \text{sur } \mathcal{A}_{g\ell}$$

$$U^1 = 0 \qquad \text{sur } \mathcal{A}_{f\varepsilon}$$

U^1 et P^0 sont Y-périodiques.

Pour les termes (U^k, P^{k-1}) $(k \geq 2)$ on obtient:

$$
(2\text{-}11)\quad \left|\begin{array}{ll}
-2\,\mu_\alpha \dfrac{\partial}{\partial y_j}\left(D^y_{ij}(U^k) + D^x_{ij}(U^{k-1})\right) + \dfrac{\partial P^{k-1}}{\partial y_i} = F^{k-2}_i - \dfrac{\partial P^{k-2}}{\partial x_i} + \mu_\alpha \dfrac{\partial}{\partial x_j} D^y_{ij}(U^{k-1}) & \text{dans } Y_\alpha \\
\mathrm{div}_y(U^k) + \mathrm{div}_x(U^{k-1}) = 0 & \text{dans } Y_\alpha \\
[\![\, U^k \,]\!]_{g\ell} = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{g\ell} \\
[\![2\mu\left(D^y_{ij}(U^k) + D^x_{ij}(U^{k-1})\right) - P^{k-1}\delta_{ij} \,]\!]_{g\ell}\, n_j = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{g\ell} \\
U^k = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{fs} \\
U^k \text{ et } P^{k-1} \text{ sont Y-périodiques.} &
\end{array}\right.
$$

2-1-4 Etude des équations locales

Puisque Y_f est supposé connexe, l'équation (2-8) montre que la fonction P^{-2} est constante par rapport à la variable y :

$$
(2\text{-}12)\qquad P^{-2}(x,y) = P^{-2}(x)
$$

Pour l'étude de l'existence et de l'unicité des équations (2-9),(2-10) et (2-11), on considère un problème modèle du même type que les équations précédentes:

$$
(2\text{-}13)\quad \left|\begin{array}{ll}
-2\,\mu_\alpha\, \Delta_y(\mathbf{w}_i) + \dfrac{\partial Q}{\partial y_i} = M_i & \text{dans chaque } Y_\alpha\ (\alpha = g,\ell) \\
\mathrm{div}_y(\mathbf{w}) = G & \text{dans chaque } Y_\alpha\ (\alpha = g,\ell) \\
[\![\, \mathbf{w} \,]\!]_{g\ell} = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{g\ell} \\
[\![2\mu\left(D^y_{ij}(\mathbf{w}) - Q\delta_{ij}\right)]\!]_{g\ell}\, n_j = \Psi\, n_i & \text{sur } \mathcal{A}_{g\ell} \\
\mathbf{w} = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{fs} \\
\mathbf{w} \text{ et } Q \text{ sont Y-périodiques.} &
\end{array}\right.
$$

Les fonctions **M**, G et Ψ sont des données dans des espaces convenables.

On introduit les espaces fonctionnels suivants:

$$
(2\text{-}14)\quad \left|
\begin{array}{l}
\mathcal{V}_Y = \left\{ v \in \mathbb{H}^1_{loc}\left(\bigsqcup_{k\in\mathbb{Z}^3} Y_f^k \right) \,/\, v = 0 \text{ sur } \bigsqcup_{k\in\mathbb{Z}^3} \mathcal{A}_{fs}^k \text{ et } v \text{ est Y-périodique} \right\} \\
\mathcal{V}_Y(\mathrm{div},0) = \mathcal{V}_Y \cap \left\{ v \;;\; \mathrm{div}_y(v) = 0 \right\} \\
\\
L_0^2(Y_f) = \left\{ q \in L^2_{loc}\left(\bigsqcup_{k\in\mathbb{Z}^3} Y_f^k \right) \,/\, q \text{ est Y-périodique et } \int_{Y_f} q \, dx = 0 \right\} \\
\mathcal{E}_Y = \mathcal{V}_Y \times L_0^2(Y_f) \text{ . (voir les notations (1-1) et (1-2) pour } Y_f^k \text{ et } \mathcal{A}_{fs}^k \text{)}
\end{array}
\right.
$$

Pour des détails sur la notion de périodicité et les propriétés des espaces du type $\mathcal{V}_Y$, $\mathcal{V}_Y(\mathrm{div},0)$ ou $L_0^2(Y_f)$, voir la référence [30].

L'espace $\mathcal{V}_Y$ peut être identifié à l'ensemble des fonctions de $\mathbb{H}^1(Y_f)$ ayant des traces nulles sur $\mathcal{A}_{fs}$ et qui prennent des valeurs égales sur deux faces opposées de Y. Muni de la norme $\| \cdot \|_{\mathcal{V}_Y}$ définie ci-dessous, il est de Hilbert.

$$
\| v \|^2_{\mathcal{V}_Y} = \int_{Y_f} D^y_{ij}(v) D^y_{ij}(v) \, dy \;; \qquad D^y_{ij}(v) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \frac{\partial v_j}{\partial y_i} \right).
$$

Cette norme est équivalente à la norme usuelle induite par $(H^1(Y_f))^3$ sur $\mathcal{V}_Y$.

L'espace $L_0^2(Y_f)$ peut être identifié à l'espace des fonctions q de carré sommable et de moyenne nulle sur Y_f, et qui vérifient la périodicité "faible":

$$
\langle \nabla_y q, v_i \rangle_{Y_f} = -\langle q, \mathrm{div}_y(v) \rangle_{Y_f} \quad \forall\, v \in \mathcal{V}_Y \;.
$$

Muni de la norme $\| \cdot \|_{0,Y}$ usuelle, il est de Hilbert.

$$
\| q \|^2_{0,Y} = \int_{Y_f} q^2 \, dy.
$$

On suppose que:

$$(2\text{-}15)\quad \begin{cases} M \in \mathbb{L}^2_{loc}\left(\bigsqcup_{k\in\mathbb{Z}^3} Y_f^k\right);\ \text{Y-périodique} \\ G \in L^2_{loc}\left(\bigsqcup_{k\in\mathbb{Z}^3} Y_f^k\right);\ \text{Y-périodique et} \quad \int_{Y_f} G\, dy = 0 \\ \Psi \in L^2_{loc}\left(\bigsqcup_{k\in\mathbb{Z}^3} \mathcal{A}_{g\ell}^k\right);\ \text{Y-périodique} \end{cases}$$

et on définit pour tout couple (u,v) de $\mathcal{V}_Y \times \mathcal{V}_Y$ et pour toute fonction q de $L^2(Y_f)$:

$$(2\text{-}16)\quad \left| \begin{array}{l} a_Y(u,v) = \displaystyle\int_{Y_f} 2\mu\, D^Y_{ij}(u) D^Y_{ij}(v)\, dy \\ b_Y(v,q) = \displaystyle\int_{Y_f} -\, q\, \mathrm{div}_y(v)\, dy \\ g_Y(q) = \displaystyle\int_{Y_f} -\, q\, G\, dy \\ \ell_Y(v) = \displaystyle\int_{Y_f} M.v\, dy + \int_{\mathcal{A}_{g\ell}} \Psi\, v.n \end{array} \right.$$

Lemme 2-1:

Sous les hypothèses (2-15), *si* (w,Q) *est une solution forte de* (2-13) *alors elle vérifie le problème variationnel:*

$$(2\text{-}17)\quad \begin{cases} w \in \mathcal{V}_Y \ ;\ Q \in L^2(Y_f) \\ a_Y(w,v) + b_Y(v,Q) = \ell_Y(v) \quad \forall\, v \in \mathcal{V}_Y \\ b_Y(w,q) = g_Y(q) \qquad \forall\, q \in L^2_0(Y_f) \end{cases}$$

Le problème (2-17) *admet une solution unique* (w,Q) *dans* $(\mathcal{V}_Y/\mathbb{R}^3) \times L^2_0(Y_f)$.

Démonstration:

Précisons d'abord que, comme dans les équations de Stokes classiques, la pression Q n'est déterminée qu'à une constante additive près, sa recherche dans l'espace $L_0^2(Y_f)$ revient alors à fixer cette constante. Pour établir la formulation faible (2-17), on procède de manière analogue à la construction, dans la démonstration du théorème 1-1, de la relation (1-9). La seule différence principale est que: dans la relation (1-9) les termes intégraux sur $\partial\Omega_f^\varepsilon$ s'annulent car les fonctions-test v ont une trace nulle sur $\partial\Omega_f^\varepsilon$, par contre pour la relation (2.17) les termes intégrales sur ∂Y_f s'annulent pour deux raisons:

- la condition " v = 0 sur $\mathcal{A}_{fs}$" vérifiée par les fonctions-tests de $\mathcal{V}_Y$.

- les conditions de périodicité pour les intégrales sur $\partial Y_f \cap \partial Y$.

Le problème (2-17) est analogue au problème (1-10) du lemme 1-1 si on pose:

$$\begin{cases} \mathbf{X} = \mathcal{V}_Y \quad \text{et} \quad \mathbf{M} = L_0^2(Y_f) \\ a(.\,,\,.) = a_Y(.\,,\,.) \text{ et } b(.\,,\,.) = b_Y(.\,,\,.) \\ f(.) = \ell_Y(.) \quad \text{et} \quad g(.) = g_Y(.) \end{cases}$$

Pour prouver l'existance et l'unicité de la solution (w,Q), il nous suffit donc de vérifier que:

- la forme linéaire $\ell_Y(.)$ est continue sur $\mathcal{V}_Y$.
- la forme linéaire $g_Y(.)$ est continue sur $L_0^2(Y_f)$.
- la forme bilinéaire $a_Y(.,.)$ est continue sur $(\mathcal{V}_Y)^2$.
- la forme bilinéaire $b_Y(.,.)$ est continue sur $\mathcal{V}_Y \times L_0^2(Y_f)$.
- les conditions (1-11) et (1-12) du lemme 1-1 sont satisfaites .

Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, les quatre premières conditions sont évidentes (pour la première on utilise aussi la continuité de l'application trace). Il ne reste donc que la vérification des conditions (1-11) et (1-12)

- la coercivité de $a_Y(.,.)$ (i.e (1-11)):

On vérifie aisément que, puisque les μ_α sont positives, $a_Y(.,.)$ est coercive:

$$a_Y(v,v) \geq \min(\mu_g, \mu_\ell) \| v \|^2_{\mathcal{V}_Y} \qquad \forall v \in \mathcal{V}_Y$$

- la condition de l'inf-sup (i.e (1-12)):

Puisque Y_f est borné, connexe, et sa frontière est localement lipschitzienne, d'après R.TEMAM ([36] Chap. I, lemme 2.4), pour toute fonction q, donnée dans $L^2_0(Y_f)$, il existe une fonction ψ_q appartenant à $\mathbb{H}^1_0(Y_f)$ telle que:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\psi_q) = -q \quad \text{dans } Y_f \\ \| \psi_q \|_{\mathbb{H}^1_0(Y_f)} \leq C \| q \|_{0,Y} \end{cases}$$

(C est une constante qui ne dépend que de la géométrie de Y_f)

Donc, puisque $\mathbb{H}^1_0(Y_f)$ est inclus dans $\mathcal{V}_Y$ et que leur normes sont équivalentes, on a:

$$\sup_{v \in \mathcal{V}_Y} \left(\frac{1}{\| v \|_{\mathcal{V}}} \int_{Y_f} -q \operatorname{div}_y(v)\, dy \right) \geq \left(\frac{1}{\| \psi_q \|_{\mathcal{V}}} \int_{Y_f} -q \operatorname{div}_y(\psi_q)\, dy \right) = \frac{\| q \|^2_{0,Y}}{\| \psi_q \|_{\mathcal{V}}}$$

$$\geq C' \frac{\| q \|^2_{0,Y}}{\| \psi_q \|_{\mathbb{H}^1_0(Y_f)}} \geq \frac{C'}{C} \| q \|_{0,Y}$$

d'où la propriété recherchée:

(2-18) $\exists\, \beta > 0$ telle que : $\displaystyle \inf_{q \in L_0^2(Y_f)} \sup_{v \in \mathcal{V}_Y} \frac{b(v\,,q)}{\| v \|_{\mathcal{V}} \| q \|_0} \geq \beta = \frac{C'}{C}$. □

D'après (2-6) et(2-12) les fonctions F_α^{-2} et $\nabla_x P^{-2}$ ne dépendent que de la variables x, elles sont donc dans $\mathbb{L}^2_{loc}\left(\bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}^3} Y_f^k \right)$. La courbure H de $\mathcal{A}_{g\ell}$ est supposée dans $L^2_{loc}\left(\bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}^3} \mathcal{A}_{g\ell}^k \right)$. Les équations (2-9) vérifient alors les hypothèse (2-15) du lemme 2-1, on a donc le résultat suivant:

Corollaire 2-1:

Les termes U^0 *et* P^{-1} *sont déterminés de manière unique par :*

$U^0 \in \mathcal{V}_Y$; $P^{-1} \in L_0^2(Y_f)$ et $\forall\, \varphi \in \mathcal{V}_Y$ $\forall\, \psi \in L_0^2(Y_f)$:

$$\int_{Y_f} 2\mu\, D^y_{mn}(U^0) D^y_{mn}(\varphi)\, dy - \int_{Y_f} P^{-1}\, \mathrm{div}_y(\varphi)\, dy = \int_{Y_g} F_g^{-2}.\varphi\, dy + \int_{Y_\ell} F_\ell^{-2}.\varphi\, dy + \int_{\mathcal{A}_{g\ell}} 2\,\sigma\, H\, \varphi.\, n\, d\Gamma$$

$$\int_{Y_f} \psi\, \mathrm{div}_y(U^0)\, dy = 0$$

Sous certaines hypothèses, on peut appliquer le lemme 2-1 pour étudier l'existence et l'unicité des autres équations. Mais, puisqu'on aura besoin uniquement des équations de U^0 pour établir l'équation macroscopique, on se contentera du corollaire ci-dessus.

2-2) Equation macroscopique et perméabilités homogénéisées:

Puisque, d'après (2-12) et l'hypothèse (2-6), le terme P^{-2} et les fonctions F_α^{-2} ne dépendent pas de la variable y, la fonction U^0 donnée par (2-9) peut s'écrire sous la forme suivante:

$$\boxed{(2\text{-}19) \qquad U^0(x,y) = \left((F_\ell^{-2})_k(x) - \frac{\partial P^{-2}}{\partial x_k}(x) \right) V_\ell^k(y) + \left((F_g^{-2})_k(x) - \frac{\partial P^{-2}}{\partial x_k}(x) \right) V_g^k(y) + \mathbb{W}(y).}$$

où, pour chaque couple (α, k) donné ($\alpha = g, \ell$ et $k = 1,2,3$), $(F_\alpha^{-2})_k$ désigne la $k^{\text{ième}}$ composante de la fonction F_α^{-2}.

Les fonctions V_α^k et $\mathbb{W}$ peuvent être choisies comme les solutions uniques des problèmes aux limites suivants :

pour chaque (α, k) fixé, le couple (V_α^k, q_α^k) est la solution de $(\mathcal{P}_\alpha^k)$:

$$(2\text{-}20) \quad \left| \begin{array}{ll} -2\,\mu_\beta \dfrac{\partial}{\partial y_j} D_{ij}^y(V_\alpha^k) + \dfrac{\partial q_\alpha^k}{\partial y_i} = \delta_{\alpha\beta}\,\delta_{ik} & \text{dans chaque } Y_\beta\ (\beta = g, \ell) \\ \operatorname{div}_y(V_\alpha^k) = 0 & \text{dans chaque } Y_\beta\ (\beta = g, \ell) \\ [\![V_\alpha^k]\!]_{g\ell} = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{g\ell} \\ [\![2\mu\, D_{ij}^y(V_\alpha^k) - q_\alpha^k\,\delta_{ij}]\!]_{g\ell}\, n_j = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{g\ell} \\ V_\alpha^k = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{1s} \\ V_\alpha^k \text{ et } q_\alpha^k \text{ sont Y-périodiques.} & \end{array} \right.$$

Les symboles δ_{ik} et $\delta_{\alpha\beta}$ désignent les symboles de Krönecker . Le symbole $\delta_{\alpha\beta}$ est introduit de telle sorte que si $\alpha = g$, le second membre de la première équation vaut δ_{ik} dans Y_g et zéro dans Y_ℓ, et l'inverse si $\alpha = \ell$.

Le couple $(\mathbb{W}, r)$ est déterminé par:

$$
(2\text{-}21)\quad \left|\begin{array}{ll}
-2\,\mu_\beta \dfrac{\partial}{\partial y_j} D^y_{ij}(\mathbb{W}) + \dfrac{\partial r}{\partial y_i} = 0 & \text{dans chaque } Y_\beta\ (\beta = g,\ell) \\[2ex]
\mathrm{div}_y(\mathbb{W}) = 0 & \text{dans chaque } Y_\beta\ (\beta = g,\ell) \\[2ex]
[\![\, \mathbb{W} \,]\!]_{g\ell} = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{g\ell} \\[2ex]
[\![2\mu\, D^y_{ij}(\mathbb{W}) - r\delta_{ij} \,]\!]_{g\ell}\, n_j = 2\,\sigma\, H\, n_i & \text{sur } \mathcal{A}_{g\ell} \\[2ex]
\mathbb{W} = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{fs} \\[2ex]
\mathbb{W} \text{ et } r \text{ sont Y-périodiques.} &
\end{array}\right.
$$

Les problèmes (2-20) et (2-21) sont du même type que le problème (2-13), ils rentrent donc dans le cadre du lemme 2-1. Les solutions (V^k_α, q^k_α) et $(\mathbb{W}, r)$ existent, les fonctions V^k_α et $\mathbb{W}$ sont uniques et les pressions q^k_α et r sont déterminées à des constantes près.

Pour obtenir la relation (2-19), il suffit de multiplier les équations de chaque problème $(\mathcal{P}^k_\alpha)$ par $\left((F^{-2}_\alpha)_k(x) - \dfrac{\partial P^{-2}}{\partial x_k}(x) \right)$, de sommer sur $\alpha = g,\ell$ et $k = 1, 2, 3$, puis additionner le résultat au problème (2-21) vérifié par $\mathbb{W}$; on remarquera en fin de compte que le deuxième membre de (2-19) vérifie le même problème que celui vérifiée par U^0, et grâce à l'unicité de la solution, l'égalité (2-19) s'en déduit .

En utilisant la deuxième relation de (2-10), on va établir une équation (macroscopique) vérifiée par la pression P^{-2} dans Ω.

On note $\mathcal{M}_Y(\varphi)(x)$ la moyenne sur Y_f de toute fonction φ définie sur $\Omega \times Y$:

$$
(2\text{-}22)\qquad \mathcal{M}_Y(\varphi)(x) = \frac{1}{|Y|} \int_{Y_f} \varphi(x,y)\, dy
$$

Théorème 2-1:

Si Y_f est connexe, alors sous l'hypothèse :

(2-23) $$F_\alpha^{-2} \in \left\{ \psi \in \mathbb{L}^2(\Omega) / \operatorname{div}(\psi) \in L^2(\Omega) \right\} \ (\alpha = g, \ell)$$

a.) La pression P^{-2} vérifie l'équation macroscopique suivante:

(2-24) $$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(K_{ij}\dfrac{\partial P^{-2}}{\partial x_j}\right) = K_{ij}^{\ell}\dfrac{\partial (F_\ell^{-2})_j}{\partial x_i} + K_{ij}^{g}\dfrac{\partial (F_g^{-2})_j}{\partial x_i} & \text{dans } \Omega \\ K_{ij}\dfrac{\partial P^{-2}}{\partial x_j} n_i = \left(K_{ij}^{\ell}(F_\ell^{-2})_j + K_{ij}^{g}(F_g^{-2})_j\right) n_i + \mathcal{M}_Y(W_j)\, n_j & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où les perméabilités K_{ij}^{α} et K_{ij} sont des constantes données par:

(2-25) $$K_{ij}^{\alpha} = \frac{1}{|Y|}\int_{Y_f} (V_\alpha^j)_i(y)\, dy \quad (\alpha = g, \ell)$$

$$K_{ij} = K_{ij}^{\ell} + K_{ij}^{g}$$

b.) Les K_{ij} s'écrivent sous la forme symétrique et coercive:

(2-26) $$K_{ij} = \frac{1}{|Y|}\int_{Y_f} 2\mu\, D_{mn}^{y}(V^j) D_{mn}^{y}(V^i)\, dy ; \qquad V^j = V_g^j + V_\ell^j$$

c.) Le problème (2-24) admet une solution P^{-2} unique dans l'espace quotient $H^1(\Omega)/_{\mathbb{R}}$.

d.) La moyenne de la vitesse U^0 est donnée par:

(2-27) $$\mathcal{M}_Y(U_i^0)(x) = K_{ij}^{\ell}\left((F_\ell^{-2})_j - \frac{\partial P^{-2}}{\partial x_j}\right)(x) + K_{ij}^{g}\left((F_g^{-2})_j - \frac{\partial P^{-2}}{\partial x_j}\right)(x) + \mathcal{M}_Y(W_i).$$

Démonstration:

a) D'après les équations (2-10), $\operatorname{div}_y(U^1) + \operatorname{div}_x(U^0)$ est nul, une intégration sur Y_f donne alors:

$$\int_{Y_f} \operatorname{div}_x(U^0)\, dy = \int_{\partial Y_f} U^1 . n\, d\Gamma$$

Mais, puisque U^1 est nulle sur l'interface $\mathcal{A}_{fs}$ et est Y-périodique, le second membre de cette égalité est nul:

$$\int_{Y_f} \mathrm{div}_x(U^0)\ dy = 0$$

La permutation du signe intégrale et div_x donne alors:

$$\text{(2-28)} \qquad \mathrm{div}_x\left(\mathcal{M}_Y(U^0)\right) = 0$$

La condition naturelle que doit satisfaire la moyenne $\mathcal{M}_Y(U^0)$ sur le bord de Ω, voir [23], est que sa composante normale est nulle:

$$\text{(2-29)} \qquad \mathcal{M}_Y(U^0)\ .\ n = 0 \qquad\qquad \text{sur}\ \partial\Omega.$$

Cette condition aux limites est a priori formelle comme la convergence du développement asymptotique (2-1) du départ, mais elle va être justifiée ultérieurement (paragraphe 3/)

Si on remplace dans l'équation (2-28) et dans la condition au bord (2-29) la fonction U^0 par son expression (2-19), on obtient l'équation macroscopique (i.e en la variable x) vérifiée par la pression P^{-2} :

$$\text{(2-30)} \quad \boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(K_{ij}\ \dfrac{\partial P^{-2}}{\partial x_j}\right) = K^{\ell}_{ij}\ \dfrac{\partial (F^{-2}_{\ell})_j}{\partial x_i} + K^{g}_{ij}\ \dfrac{\partial (F^{-2}_{g})_j}{\partial x_i} + \mathrm{div}_x(\mathcal{M}_Y(W)) & \text{dans } \Omega \\[2ex] K_{ij}\ \dfrac{\partial P^{-2}}{\partial x_j}\ n_i = \left(K^{\ell}_{ij}\ (F^{-2}_{\ell})_j + K^{g}_{ij}\ (F^{-2}_{g})_j\right) n_i + \mathcal{M}_Y(W_j)\ n_j & \text{sur}\ \partial\Omega \end{cases}}$$

Mais, puisque la fonction $\mathbf{W}$ ne dépend que de la variable y, le terme $\mathrm{div}_x(\mathcal{M}_Y(\mathbf{W}))$ est nul. L'équation (2-24) est donc établie.

b) Pour établir la forme (2-26) des perméabilités K_{ij}, on va utiliser les formulations variationnelles associées aux problèmes $(\mathcal{P}^j_\alpha)$ donnés par (2-20). Ces problèmes sont du même type que (2-13), donc, d'après la relation (2-17) du lemme 2-1, les formulations faibles associées sont:

pour chaque (α, j) ($\alpha = g, \ell$ et $j = 1,2,3$):

$$(2\text{-}31)\quad \begin{cases} V^j_\alpha \in \mathcal{V}_Y \ ; \ q^j_\alpha \in L^2_0(Y_f) \ \text{ et } \ \forall\, \varphi \in \mathcal{V}_Y \quad \forall\, \psi \in L^2_0(Y_f) : \\[2ex] \displaystyle\int_{Y_f} 2\mu\, D^y_{mn}(V^j_\alpha) D^y_{mn}(\varphi)\, dy - \int_{Y_f} q^j_\alpha\, \mathrm{div}_y(\varphi)\, dy = \int_{Y_\alpha} \varphi_j\, dy \\[2ex] \displaystyle\int_{Y_f} \psi\, \mathrm{div}_y(V^j_\alpha)\, dy = 0 \end{cases}$$

Si on note $V^j = V^j_g + V^j_\ell$ et $q^j = q^j_g + q^j_\ell$ alors la somme des relations ci-dessus (sur $\alpha = g, \ell$) montre que le couple (V^j, q^j) vérifie:

$$(2\text{-}32)\quad \begin{cases} V^j \in \mathcal{V}_Y \ ; \ q^j \in L^2_0(Y_f) \ \text{ et } \ \forall\, \varphi \in \mathcal{V}_Y \quad \forall\, \psi \in L^2_0(Y_f) : \\[2ex] \displaystyle\int_{Y_f} 2\mu\, D^y_{mn}(V^j) D^y_{mn}(\varphi)\, dy - \int_{Y_f} q^j\, \mathrm{div}_y(\varphi)\, dy = \int_{Y_f} \varphi_j\, dy \\[2ex] \displaystyle\int_{Y_f} \psi\, \mathrm{div}_y(V^j)\, dy = 0 \end{cases}$$

En prenant comme fonction-tests $\varphi = V^i$ dans (2-32) on a:

$$\int_{Y_f} 2\mu \; D^y_{mn}(V^j) D^y_{mn}(V^i) \; dy = \int_{Y_f} V^i_j \; dy$$

Mais, d'après la définition (2-25) des K^α_{ij} et de K_{ij}, le second membre de cette égalité est égal à $|Y| K_{ij}$, d'où la relation (2-26):

$$|Y| K_{ij} = \int_{Y_f} 2\mu \; D^y_{mn}(V^j) D^y_{mn}(V^i) \; dy$$

La symétrie des K_{ij} est alors évidente, leur coercivité se démontre par la méthode classique qui consiste à prouver que l'application $x \longmapsto K_{ij} \; x_i x_j$ est une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^3$:

Soit $x = (x_i)_{i=1}^3$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$.

L'expression (2-26) des K_{ij} montre que:

$$|Y| \; K_{ij} \; x_i x_j = \int_{Y_f} 2\mu \; D^y_{mn}(x_j V^j) D^y_{mn}(x_i V^i) \; dy.$$

Pour tout x de $\mathbb{R}^3$, on note χ_x la combinaison $x_j V^j$ des fonction V^j. Puisque les constantes μ_α (α=g,ℓ) sont positives on a:

$$K_{ij} \; x_i x_j \geq \frac{\min(\mu_g, \mu_\ell)}{|Y|} \int_{Y_f} D^y_{mn}(\chi_x) D^y_{mn}(\chi_x) \; dy \geq 0 \tag{2-33}$$

Supossons maintenant qu'il existe $\xi \in \mathbb{R}^3$ tel que $K_{ij} \; \xi_i \xi_j = 0$.

Puisque $\int_{Y_f} D^y_{mn}(\chi_\xi) D^y_{mn}(\chi_\xi)\, dy$ est exactement la norme élevée au carré de χ_ξ dans l'espace $\mathcal{V}_Y$, l'inégalite (2-33) implique donc que la fonction χ_ξ est nulle, et par conséquent, si on note q_ξ la combinaison linéaire $\xi_j q^j$ des pressions q^j, d'après (2-32) on a:

$$- \int_{Y_f} q_\xi \; \mathrm{div}_y(\varphi)\, dy = \xi_j \int_{Y_f} \varphi_j \, dy \qquad \forall \varphi \in \mathcal{V}_Y$$

Or, on peut trouver dans $\mathcal{V}_Y$ une fonction φ telle que: $\mathrm{div}_y(\varphi) = 0$ et $\int_{Y_f} \varphi_j \, dy = \xi_j$.

La relation précédente implique alors que le vecteur ξ est forcément nul.

On a démontré donc que l'application $x \longmapsto K_{ij}\; x_i x_j$ est une forme quadratique définie positive, la coercivité des K_{ij} s'ensuit.

c) Les équations (2-24) forment un problème classique de Neumann non homogène. L'hypothèse (2-23) faite sur les fonctions F^{-2}_α (qui est suffisante mais pas nécessaire) permet d'écrire (2-24) sous la forme faible suivante:

(2-34) \b\lc\(\a($P^{-2} \in H^1(\Omega)$ et $\forall v \in H^1(\Omega)$: , ,\i(Ω, , K_{ij} \f(∂P^{-2}, ∂x_j)

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} dx) = \int_\Omega M_i \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} G_i \; n_i \; v \; d\Gamma \;,\; M_i = K^{\ell}_{ij}(F^{-2}_{\ell})_j + K^{g}_{ij}(F^{-2}_{g})_j \;\text{ et }\; G_i = \mathcal{M}_Y(W_j) \qquad))$$

Ce problème admet une solution unique, à une constante additive près, puisque les K_{ij} sont coercives et la condition de compatibilité est satisfaite: $\int_{\partial\Omega} n_j \; d\Gamma = 0$.

d) Enfin, la relation (2-27) entre U^0 et la pression P^{-2} s'obtient en appliquant l'opérateur moyenne $\mathcal{M}_Y(.)$, défini par (2-22), à la relation (2-19). □

Remarque 2-1:

On peut remplacer, dans les relations (2-24) *et* (2-27), *la moyenne de la fonction* $\mathbb{W}$ *par un terme qui met en évidence la courbure* H *de l'interface* $\mathcal{A}_{g\ell}$. *En effet on a:*

$$(2\text{-}35) \qquad |Y|\,\mathcal{M}_Y(\mathbb{W}_j) = \int_{\mathcal{A}_{g\ell}} 2\,\sigma\, H\, V^j.\, n\; d\Gamma$$

Pour démontrer cette relation, on utilise les formulations variationnelles vérifiées par les fonctions V^j_α *et* $\mathbb{W}$. *D'après le lemme 2-1, la fonction* $\mathbb{W}$ *vérifie:*

$$(2\text{-}36) \qquad \begin{cases} \mathbb{W} \in \mathcal{V}_Y \;;\; r \in L^2_0(Y_f) \;\text{ et }\; \forall\, \phi \in \mathcal{V}_Y \quad \forall\, \psi \in L^2_0(Y_f) : \\ \displaystyle\int_{Y_f} 2\mu\, D^Y_{mn}(\mathbb{W}) D^Y_{mn}(\phi)\; dy - \int_{Y_f} r\; \mathrm{div}_Y(\phi)\; dy = \int_{\mathcal{A}_{g\ell}} 2\sigma\, H\, \phi.\, n\; d\Gamma \\ \displaystyle\int_{Y_f} \psi\; \mathrm{div}_Y(\mathbb{W})\; dy = 0 \end{cases}$$

En prenant comme fonctions-tests $\phi = \mathbb{W}$ *dans* (2-32) *et* $\phi = V^k$ *dans* (2-36) *on a:*

$$\int_{Y_f} 2\mu \; D^y_{mn}(V^j) D^y_{mn}(W) \; dy = \int_{Y_f} W_j \; dy$$

$$\int_{Y_f} 2\mu \; D^y_{mn}(W) D^y_{mn}(V^j) \; dy = \int_{\mathcal{A}_{g\ell}} 2 \; \sigma \; H \; V^j . \; n \; d\Gamma$$

d'où la relation (2-35).

Si la courbure moyenne H est constante alors la moyenne $\mathcal{M}_Y(W_j)$ *est nulle: en effet dans ce cas:*

$$|Y| \; \mathcal{M}_Y(W_j) = 2 \, \sigma \, H \int_{\mathcal{A}_{g\ell}} V^j . \; n \; d\Gamma = \int_{\Omega_g} \mathrm{div}_y(V^j) \; dy = 0. \; \square$$

Remarque 2-2:

Si on s'interesse à la moyenne de U^0 *sur cheque fluide* (α) *séperément, en intégrant la relation* (2-19), *sur* Y_ℓ *puis sur* Y_g *, on a les formules suivantes:*

$$(2\text{-}37) \quad \begin{cases} \mathcal{M}_{Y_\ell}(U_i^0 - W_i) = K_{ij}^{\ell\ell} \left((F_\ell^{-2})_j - \dfrac{\partial P^{-2}}{\partial x_j} \right) + K_{ij}^{\ell g} \left((F_g^{-2})_j - \dfrac{\partial P^{-2}}{\partial x_j} \right) \\ \mathcal{M}_{Y_g}(U_i^0 - W_i) = K_{ij}^{gg} \left((F_g^{-2})_j - \dfrac{\partial P^{-2}}{\partial x_j} \right) + K_{ij}^{g\ell} \left((F_\ell^{-2})_j - \dfrac{\partial P^{-2}}{\partial x_j} \right) \end{cases}$$

où: $\mathcal{M}_{Y_\alpha}(\psi)(x) = \dfrac{1}{|Y|} \displaystyle\int_{Y_\alpha} \psi(x,y) \; dy$ $(\alpha = g$ *ou* $\ell)$ *et:*

$$(2\text{-}38) \quad \begin{cases} K_{ij}^{\ell\ell} = \mathcal{M}_{Y_\ell}((V_\ell^j)_i) \; ; \quad K_{ij}^{gg} = \mathcal{M}_{Y_g}((V_g^j)_i) \\ K_{ij}^{\ell g} = \mathcal{M}_{Y_\ell}((V_g^j)_i) \; ; \quad K_{ij}^{g\ell} = \mathcal{M}_{Y_g}((V_\ell^j)_i) \end{cases}$$

et on peut aussi établir des relations analogues à (2-35) qui mettent en évidence la courbure H *de l'interface* $\mathcal{A}_{g\ell}$:

$$(2\text{-}39) \qquad |Y|\,\mathcal{M}_{Y_\alpha}(W_j) = \int_{\mathcal{A}_{g\ell}} 2\,\sigma\,H\,V^j_\alpha \,.\, n\,d\Gamma \qquad (\alpha = g, \ell).$$

Les divers tenseurs des perméabilités introduits ici sont liés par les relations suivantes:

$$(2\text{-}40) \qquad \begin{cases} K = K^\ell + K^g \\ K^\ell = K^{\ell\ell} + K^{g\ell} \\ K^g = K^{gg} + K^{\ell g} \end{cases}$$

En prenant dans (2-31) *l'indice* α *égal à* ℓ *et la fonction-test* φ *égale à* V^i_g, *puis l'indice* α *égal à* g *et la fonction-test* φ *égale à* V^i_ℓ, *on obtient:*

$$\int_{Y_f} 2\mu\; D^y_{mn}(V^j_\ell) D^y_{mn}(V^i_g)\; dy = \int_{Y_\ell} (V^i_g)_j\; dy = |Y|\,K^{\ell g}_{ij}$$

$$\int_{Y_f} 2\mu\; D^y_{mn}(V^j_g) D^y_{mn}(V^i_\ell)\; dy = \int_{Y_g} (V^i_\ell)_j\; dy = |Y|\,K^{g\ell}_{ij}$$

Le tenseur $K^{\ell g}$ *est donc le transposé de* $K^{g\ell}$:

$$(2\text{-}41) \qquad K^{g\ell}_{ij} = K^{\ell g}_{ji}$$

En prenant dans (2-31) *la fonction-test* φ *égale à* V^i_α, *l'indice* α *est fixé* (g *ou* ℓ), *on obtient :*

$$\int_{Y_f} 2\mu\ D^y_{mn}(V^j_{\underline{\alpha}})D^y_{mn}(V^i_{\underline{\alpha}})\ dy = \int_{Y_{\underline{\alpha}}} (V^i_{\underline{\alpha}})_j\ dy = |Y|\,K^{\alpha\alpha}_{ij}$$

(*on ne somme pas sur l'indice* α)

Les matrices $K^{\ell\ell}$ *et* K^{gg} *sont donc symétriques. en procédant de manière analogue à la démonstration de la coercivité des perméabilités* K_{ij}. *il est facile de voir q'elles sont définies positives :*

(2-42)	$K^{\ell\ell}$ *et* K^{gg} *sont symétriques et définies positives.*

Elles sont donc inversibles.

De la relation (2-37) *on peut alors déduire une deuxième forme des relations qui lient les moyennes* $\mathcal{M}_{Y_\alpha}(U^0)$ *au gradient de la pression* P^{-2} :

$$(2\text{-}43)\quad \begin{cases} \mathcal{M}_{Y_\ell}(U^0\text{-}W) = \left[K^{\ell\ell} - K^{\ell g}(K^{gg})^{-1}K^{g\ell}\right]\left(F^{-2}_\ell - \nabla P^{-2}\right) + \left[\ K^{\ell g}(K^{gg})^{-1}\right]\mathcal{M}_{Y_g}(U^0\text{-}W) \\ \mathcal{M}_{Y_g}(U^0\text{-}W) = \left[K^{gg} - K^{g\ell}(K^{\ell\ell})^{-1}K^{\ell g}\right]\left(F^{-2}_g - \nabla P^{-2}\right) + \left[\ K^{g\ell}(K^{\ell\ell})^{-1}\right]\mathcal{M}_{Y_\ell}(U^0\text{-}W) \end{cases}$$

où l'on a noté $(K^{\alpha\alpha})^{-1}$ *la matrice inverse de* $K^{\alpha\alpha}$.

Cette forme se distingue de celle obtenue par WHITAKER [38] *en utilisant la méthode physique de prise de moyenne et de fermeture. par la présence des moyennes de la fonction* W. *qui représentent ent fait les effets microscopiques de la pression capillaire . ou de la courbure de l'interface fluide* (g)*-fluide* (ℓ). *sur le comportement macroscopique du milieu poreux.* □

Remarque 2-3:

Si on prend dans le second membre de la première équation de (1-4) *des forces* F^ε *de la forme* (2-5), *alors les fonction* F_α^{-2} *sont nulles et les relations* (2-24) *et* (2-27) *deviennent:*

$$(2\text{-}44)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(K_{ij}\,\dfrac{\partial P^{-2}}{\partial x_j}\right) = 0 & \text{dans } \Omega \\[2ex] K_{ij}\,\dfrac{\partial P^{-2}}{\partial x_j}\,n_i = \dfrac{n_j}{|Y|}\displaystyle\int_{\mathcal{A}_{gl}} 2\,\sigma\,H\,V^j.\,n\,d\Gamma & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

$$(2\text{-}45)\qquad U^0(x,y) = -\frac{\partial P^{-2}}{\partial x_j}(x)\,V^j(y) + W(y).$$

(*les fonctions* V^j *et* W *ainsi que les* K_{ij} *sont les mêmes que celles du théorème 2-1*).

Dans ce cas les forces F^ε *n'interviennet ni dans l'équation macroscopique qui détermine* P^{-2} *ni dans l'expression du premier terme* U^0 *de la vitesse.* □

3/ METHODE VARIATIONNELLE ET RESULTATS DE CONVERGENCES:

L'objectif de ce paragraphe est la justification des résultats formels obtenus par la méthode des échelle multiples.

La vitesse U^ε et la pression P^ε sont définies uniquement dans le domaine Ω_f^ε occupé par les fluides. Ce domaine dépend du paramètre ε. Avant de faire tendre ε vers zéro, la première préoccupation sera donc la construction de prolongements de la vitesse et de la pression au domaine Ω tout entier qui est indépendant de ε. Ces prolongements doivent vérifier des estimations compatibles qui permettront le passage à la limite dans les équations vérifiées par la vitesse U^ε et la pression P^ε.

La vitesse U^ε peut être prolongée par zéro en dehors du fluide Ω_f^ε grâce aux conditions homogènes qu'elle vérifie sur les interfaces solide-fluide et sur les entrées et sorties du fluide. Par contre, pour prolonger la pression on aura recours à des opérateurs de restriction du domaine Ω à sa partie fluide Ω_f^ε. Cette méthode a été initialement développée par L. Tartar [34] lorsque $\overline{Y}_s$ est strictement inclus dans la cellule de base Y, mais elle a été généralisée récement par G. Allaire dans [1].

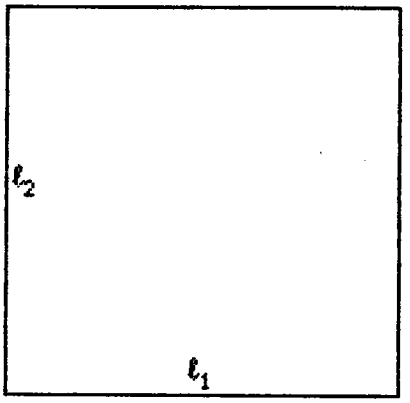
On commencera d'abord par démontrer quelques lemmes utiles pour ce paragraphe, on construira ensuite des prolongements de la vitesse et de la pression et on donnera des estimations a priori vérifiées par ces derniers. Enfin, en utilisant des fonctions-test appropriées, on établira les équations limites qui seront comparées aux résultats de la méthode des échelles multiples.

3-1) Lemmes préliminaires:

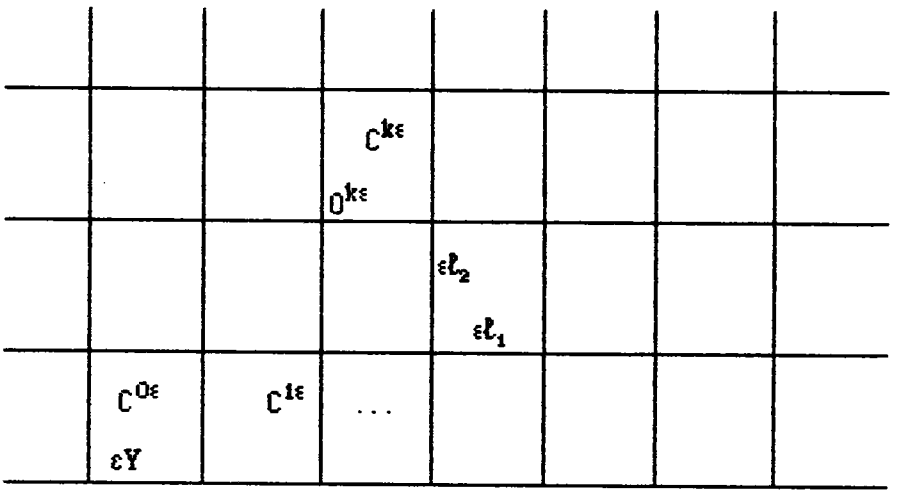
Pour toute fonction v, définie sur Ω_f^ε, on note:

$$(3\text{-}1)\quad \begin{cases} \tilde{v} : \text{le prolongement de } v \text{ par zéro en dehors de } \Omega_f^\varepsilon. \\ v^{k\varepsilon}: \text{la fonction définie sur } Y \text{ par: } v^{k\varepsilon}(y) = \tilde{v}(\varepsilon y + 0^{k\varepsilon}) \\ \text{où } 0^{k\varepsilon} \text{ désigne l'origine de la } k^{\text{ième}} \text{ cellule } C^{k\varepsilon} \text{ translatée de } \varepsilon Y \text{ (figure 3-1).} \end{cases}$$

Les cellules $C^{k\varepsilon}$ sont de la forme: $\varepsilon \prod_{i=1}^{3}]j_i\ell_i, (j_i+1)\ell_i[$, leur origine est $0^{k\varepsilon} = \varepsilon(j_1\ell_1, j_2\ell_2, j_3\ell_3)$ où (j_1, j_2, j_3) est un multi-entier de $\mathbb{Z}^3$ et ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_3 sont les côtés de la cellule de base Y.



Cellule de base Y.



Cellules $C^{k\varepsilon}$ translatées de εY.

(figure 3-1)

Inversement, pour toute fonction ϕ, définie sur l'ouvert Y_f de la cellule de base Y, on note :

$$(3\text{-}2)\quad \begin{cases} \tilde{\varphi} : \text{la prolongée par zéro de } \varphi \text{ à } Y\backslash Y_f. \\ \hat{\varphi} : \text{la prolongée de la fonction } \tilde{\varphi} \text{ par Y-périodicité à } \mathbb{R}^3. \\ \hat{\varphi}^\varepsilon : \text{la fonction définie sur } \mathbb{R}^3 \text{ par: } \hat{\varphi}^\varepsilon(x) = \hat{\varphi}(\frac{x}{\varepsilon}). \end{cases}$$

Alors si l'on N^ε le nombre de cellules $C^{k\varepsilon}$ recouvrant l'ouvert Ω, c'est à dire le plus petit entier naturel I^ε tel que:

$$\Omega \subset \bigcup_{k=1}^{I^\varepsilon} C^{k\varepsilon} \qquad \text{(fig. 3-4)}$$

on a le:

Lemme 3-1:

i) *Pour toute fonction* v *de* $\mathbb{L}^2(\Omega_f^\varepsilon)$, *les fonctions* $v^{k\varepsilon}$ *sont dans* $\mathbb{L}^2(Y)$ *et on a :*

$$\|v\|^2_{0,\Omega_f^\varepsilon} = \varepsilon^3 \sum_{k=1}^{N^\varepsilon} \|v^{k\varepsilon}\|^2_{0,Y_f}$$

Si v *est dans* $\mathbb{H}_0^1(\Omega_f^\varepsilon)$ *alors* $v^{k\varepsilon}$ *est dans* $\mathbb{H}^1(Y)$, *nulle dans* Y_s *et vérifie:*

$$\left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|^2_{0,\Omega_f^\varepsilon} = \varepsilon \sum_{k=1}^{N^\varepsilon} \left\|\frac{\partial v^{k\varepsilon}}{\partial y_i}\right\|^2_{0,Y_f}$$

ii) *Inversement, pour toute fonction* φ *de* $\mathbb{L}^2(Y_f)$, *la fonction* $\hat{\varphi}^\varepsilon$ *est dans* $\mathbb{L}^2(\Omega)$ *et on a :*

$$\|\hat{\varphi}^\varepsilon\|_{0,\Omega} \le C \|\varphi\|_{0,Y_f}$$

Si φ *est dans:* $\mathcal{V}_Y = \left\{\psi \in \mathbb{H}^1(Y_f) / \ \psi = 0 \text{ sur } \mathcal{A}_{fs} \text{ et } Y\text{-périodique}\right\}$ *alors* $\hat{\varphi}^\varepsilon$ *est dans* $\mathbb{H}^1(\Omega)$ *et vérifie:*

$$\left\|\frac{\partial \hat{\varphi}^\varepsilon}{\partial x_i}\right\|_{0,\Omega} \le \frac{C}{\varepsilon} \left\|\frac{\partial \varphi}{\partial y_i}\right\|_{0,Y}$$

où C *est une constante indépendante de* ε.

démonstration:

i) Si $v \in \mathbb{L}^2(\Omega_f^\varepsilon)$, il est clair que $v^{k\varepsilon} \in \left\{\psi \in \mathbb{L}^2(Y) / \ \psi = 0 \text{ dans } Y\backslash Y_f\right\}$ et par le changement de variable $x = \varepsilon y + 0^{k\varepsilon}$ on a :

$$\int_{\Omega_f^\varepsilon \cap C^{k\varepsilon}} v^2 \, dx = \int_{C^{k\varepsilon}} \tilde{v}^2 \, dx = \int_Y \varepsilon^3 \, (v^{k\varepsilon})^2 \, dx = \int_{Y_f} \varepsilon^3 \, (v^{k\varepsilon})^2 \, dx$$

Il suffit alors de sommer ces égalité de k=1 au nombre N^ε de cellules $C^{k\varepsilon}$ recouvrant Ω pour obtenir la première égalité du lemme.

Maintenant si $v \in \mathbb{H}_0^1(\Omega_f^\varepsilon)$ alors son prolongement par zéro $\tilde{v}$ en dehors de Ω_f^ε est dans $\mathbb{H}^1(\mathbb{R}^3)$ et est nul dans la partie solide Ω_s^ε donc nul dans tous les εY-translatés de εY_s. D'après la définition (3-1) des $v^{k\varepsilon}$ on a alors:

- $v^{k\varepsilon} \in \left\{ \psi \in \mathbb{H}^1(Y) / \ \psi = 0 \ \text{dans} \ Y \backslash Y_f \right\}$
- $\dfrac{\partial v^{k\varepsilon}}{\partial y_i}(y) = \varepsilon \dfrac{\partial \tilde{v}}{\partial x_i}(\varepsilon y + 0^{k\varepsilon})$

et par le changement de variable $x = \varepsilon y + 0^{k\varepsilon}$ il vient:

$$\int_{\Omega_f^\varepsilon \cap C^{k\varepsilon}} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2 dx = \int_{C^{k\varepsilon}} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_i}\right)^2 dx = \int_Y \varepsilon \left(\frac{\partial v^{k\varepsilon}}{\partial y_i}\right)^2 dx = \int_{Y_f} \varepsilon \left(\frac{\partial v^{k\varepsilon}}{\partial y_i}\right)^2 dx$$

La somme de ces égalités de k=1 à N^ε achève donc la démonstration de i).

ii) Soit $\varphi \in \mathbb{L}^2(Y_f)$. Il est clair, d'après la définition (3-2) que

$$\hat{\varphi}^\varepsilon \in \left\{ v \in \mathbb{L}^2\left(\bigcup_{k=1}^{N^\varepsilon} C^{k\varepsilon}\right) / \ v = 0 \ \text{dans} \left(\bigcup_{k=1}^{N^\varepsilon} C^{k\varepsilon}\right) \backslash \Omega_f^\varepsilon \right\}$$

et par le changement de variable $x = \varepsilon y + 0^{k\varepsilon}$ on a :

$$\int_{\Omega \cap C^{k\varepsilon}} \hat{\varphi}^{\varepsilon 2} \, dx = \int_{C^{k\varepsilon}} \hat{\varphi}^{\varepsilon 2} \, dx = \int_Y \varepsilon^3 \, \tilde{\varphi}^2 \, dx = \int_{Y_f} \varepsilon^3 \, \varphi^2 \, dx$$

En sommant ces égalités de k=1 à N^ε il vient:

$$(3\text{-}3) \qquad \| \hat{\varphi}^\varepsilon \|^2_{0,\Omega} = \varepsilon^3 N^\varepsilon \| \varphi \|^2_{0,Y_f}$$

Le nombre N^ε de cellules $C^{k\varepsilon}$ recouvrant Ω est égal au rapport des mesures (de Lebesgue notées: mes(.)) de $\left(\bigcup_{k=1}^{N^\varepsilon} C^{k\varepsilon}\right)$ et de la cellule εY. De simples considérations géométriques montrent que:

$$\mathrm{mes}\left(\bigcup_{k=1}^{N^\varepsilon} C^{k\varepsilon} \setminus \Omega\right) \leq C\,\varepsilon. \qquad \text{(fig. 3-4)}$$

où $\frac{C}{\sqrt{3}}$ est la surface de la plus petite sphère qui contient le domaine Ω. Donc:

$$N^\varepsilon = \frac{\mathrm{mes}\left(\bigcup_{k=1}^{N^\varepsilon} C^{k\varepsilon}\right)}{\mathrm{mes}(\varepsilon Y)} = \frac{\mathrm{mes}\left(\bigcup_{k=1}^{N^\varepsilon} C^{k\varepsilon}\right)}{\varepsilon^3\ \mathrm{mes}(Y)} = \frac{\mathrm{mes}\left(\bigcup_{k=1}^{N^\varepsilon} C^{k\varepsilon} \setminus \Omega\right) + \mathrm{mes}(\Omega)}{\varepsilon^3\ \mathrm{mes}(Y)} \leq \frac{C\,\varepsilon + \mathrm{mes}(\Omega)}{\varepsilon^3\ \mathrm{mes}(Y)}$$

Ainsi lorsque est assez petit on a:

$$(3\text{-}4) \qquad N^\varepsilon \leq \frac{1 + \mathrm{mes}(\Omega)}{\varepsilon^3\ \mathrm{mes}(Y)}$$

et en remplaçant dans l'égalité (3-3) il vient:

$$\| \hat{\varphi}^\varepsilon \|^2_{0,\Omega} \leq \frac{1 + \mathrm{mes}(\Omega)}{\mathrm{mes}(Y)} \| \varphi \|^2_{0,Y_f}$$

Enfin, la dernière inégalité du lemme 3-1 s'obtient de façon analogue en utilisant l'égalité:

$$\frac{\partial \hat{\varphi}^\varepsilon}{\partial x_i}(x) = \varepsilon^{-1} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y_i}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right). \qquad \square$$

Lemme 3-2:

Toute fonction v *de* $\mathbb{H}_0^1(\Omega_f^\varepsilon)$ *vérifie:*

$$\| v \|_{0,\Omega_f^\varepsilon} \leq C\,\varepsilon \, \| \nabla v \|_{0,\Omega_f^\varepsilon}$$

$$\left| \int_{\mathcal{A}_{g\ell}^\varepsilon} H^\varepsilon \; v.n \; dx \right| \leq \frac{C}{\varepsilon} \, \| \nabla v \|_{0,\Omega_f^\varepsilon}$$

où H^ε *désigne la courbure moyenne de l'interface* $\mathcal{A}_{g\ell}^\varepsilon$ *et* C *une constante indépendante de* ε.

Démonstration:

Pour toute fonction $v \in \mathbb{H}_0^1(\Omega_f^\varepsilon)$, les fonctions $v^{k\varepsilon}$, définies sur la cellule de base Y par la relation (3-1), sont dans $\left\{ \psi \in \mathbb{H}^1(Y) / \; \psi = 0 \text{ dans } Y \backslash Y_f \right\}$. En particulier, elles ont des traces nulles sur l'interface $\mathcal{A}_{fs}$. L'inégalité de Poincaré donne alors:

$$\| v^{k\varepsilon} \|_{0,Y_f}^2 \leq C \, \| \nabla_y (v^{k\varepsilon}) \|_{0,Y_f}^2$$

où la constante C ne dépend que de la géométrie de Y (donc indépendante de k et de ε) et le symbole $\nabla_y(.)$ désigne le gradient par rapport à la variable y : $\left(\frac{\partial \cdot}{\partial y_i} \right)_{i=1}^3$

En reportant cette inégalité dans la première relation du lemme 3-1 il vient:

$$\| v \|_{0,\Omega_f^\varepsilon}^2 \leq C\,\varepsilon^3 \sum_{k=1}^{N^\varepsilon} \| \nabla_y (v^{k\varepsilon}) \|_{0,Y_f}^2$$

et la deuxième relation du lemme 3-1 implique alors que:

$$\| v \|_{0,\Omega_f^\varepsilon}^2 \leq C\,\varepsilon^2 \, \| \nabla_x (v) \|_{0,\Omega_f^\varepsilon}^2$$

où $\nabla_x(.)$ désigne le gradient par rapport à la variable x : $\left(\frac{\partial \cdot}{\partial x_i} \right)_{i=1}^3$.

La première égalité du lemme 3-2 est alors démontrée. Pour démontrer la deuxième, on procède de manière analogue, i.e: on utilise les fonctions $v^{k\varepsilon}$ pour se ramener à la cellule de base Y:

$$\int_{\mathcal{A}^{\varepsilon}_{g\ell}} H^{\varepsilon}\ v.n\ dx = \sum_{k=1}^{N^{\varepsilon}} \int_{\mathcal{A}^{\varepsilon}_{g\ell} \cap C^{k\varepsilon}} H^{\varepsilon}\ v.n\ d(\mathcal{A}^{\varepsilon}_{g\ell})$$

En utilisant la définition (2-7) de la courbure H^{ε}, c'est à dire : $H^{\varepsilon}(x) = \varepsilon^{-1} H(\frac{x}{\varepsilon})$, où H est la prolongée par Y-périodicité de la courbure moyenne de l'interface $\mathcal{A}_{g\ell}$ $(= \partial Y_g \cap \partial Y_\ell)$, le changement de variable $x = \varepsilon y + 0^{k\varepsilon}$ dans chaque terme du second membre de l'égalité précédente donne alors:

$$\text{(3-5)} \qquad \int_{\mathcal{A}^{\varepsilon}_{g\ell}} H^{\varepsilon}\ v.n\ dx = \varepsilon^2 \varepsilon^{-1} \sum_{k=1}^{N^{\varepsilon}} \int_{\mathcal{A}_{g\ell}} H\ v^{k\varepsilon}.n_y\ d(\mathcal{A}_{g\ell})$$

Puisque les fonctions $v^{k\varepsilon}$ sont dans $\left\{ \psi \in H^1(Y) / \ \psi = 0 \ \text{ dans } Y \backslash Y_f \right\}$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'inégalité de Poincaré et la continuité de l'application trace impliquent que:

$$\left| \int_{\mathcal{A}_{g\ell}} H\ v^{k\varepsilon}.n_y\ d(\mathcal{A}_{g\ell}) \right| \leq C_1 \ \| H \|_{0,\mathcal{A}_{g\ell}} \| \nabla_y(v^{k\varepsilon}) \|_{0,Y_f}$$

et la constante C_1 ne dépend ni de ε ni de k.

En reportant cette inégalité dans (3-5) on a:

$$\left| \int_{\mathcal{A}^{\varepsilon}_{g\ell}} H^{\varepsilon}\ v.n\ dx \right| \leq C_1 \varepsilon \| H \|_{0,\mathcal{A}_{g\ell}} \sum_{k=1}^{N^{\varepsilon}} \| \nabla_y(v^{k\varepsilon}) \|_{0,Y_f}$$

Mais en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, la deuxième égalité du lemme 3-1 et l'estimation (3-4) du nombre N^{ε} il vient:

$$\left| \int_{\mathcal{A}_{g\ell}^{\varepsilon}} H^{\varepsilon}\, v.n \, dx \right| \leq C_1 \varepsilon \left\| H \right\|_{0,\mathcal{A}_{g\ell}} \sqrt{N^{\varepsilon}} \left(\sum_{k=1}^{N^{\varepsilon}} \left\| \nabla_y (v^{k\varepsilon}) \right\|_{0,Y_f}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_2 \varepsilon^{-1} \left\| H \right\|_{0,\mathcal{A}_{g\ell}} \left(\varepsilon \sum_{k=1}^{N^{\varepsilon}} \left\| \nabla_y (v^{k\varepsilon}) \right\|_{0,Y_f}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_2 \varepsilon^{-1} \left\| H \right\|_{0,\mathcal{A}_{g\ell}} \left\| \nabla_x (v) \right\|_{0,\Omega_f^{\varepsilon}}$$

avec $C_2 = C_1 \dfrac{1 + \mathrm{mes}(\Omega)}{\mathrm{mes}(Y)}$.

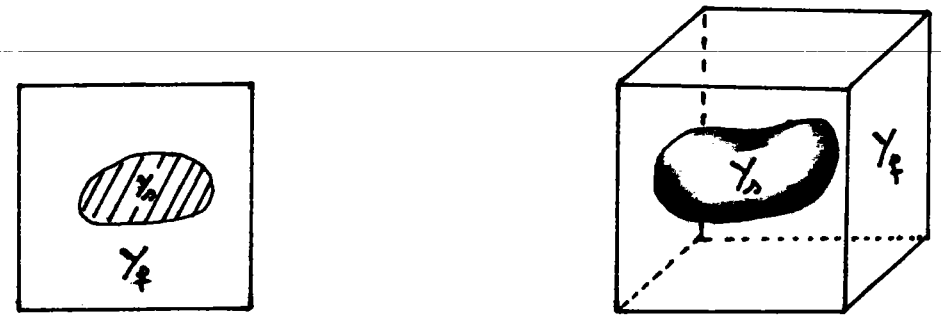
Ceci achève donc la démonstration du lemme 3-2. □

On va maitenant énnoncer un lemme crucial; il s'agit de la construction des opérateurs de restriction qui vont permettre le prolongement de la pression P^{ε} en dehors du domaine Ω_f^{ε} occupé par les deux fluides. Ces opérateurs ont été introduits par L. Tartar [34] mais ils n'étaient opérants que dans le cas où $\overline{Y}_s$ est strictement inclus dans la cellule de base Y, donc en particulier le solide Ω_s^{ε} ne peut être connexe, ce qui n'est pas en général physiquement réaliste. Le lemme suivant est une généralisation des résultats de L. Tartar à des structures géométriques plus générales où le solide Ω_s^{ε} peut être connexe ou non. Cependant, si $\overline{Y}_s$ a un intersection avec ∂Y et si le domaine Ω n'est pas un nombre entier de cellules $C^{k\varepsilon}$ translatées de εY, alors les résultas de convergence obtenus pour le prolongement de la pression ne sont valable que dans $\mathbb{L}^2_{(loc)}(\Omega)$ au lieu de $\mathbb{L}^2(\Omega)$.

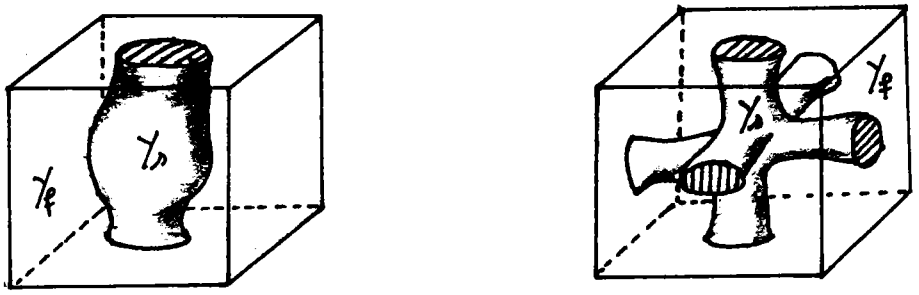
Précisons et rappelons d'abord les hypothèses (2-1) faites sur la géométrie de Y_f:

(3-6)

- a) Y_f est connexe et de frontière ∂Y_f localement lipschitzienne et est situé d'un seul côté de son bord.
- b) les interfaces $\mathcal{A}_{\alpha\beta}$ se prolongent par Y-périodicité en des surfaces régulières (C^1) de $\mathbb{R}^3$.
- c) la réunion des Y-translatés de $\overline{Y}_f$ est connexe.

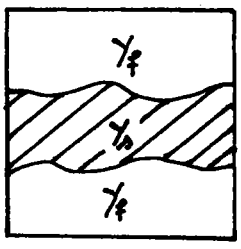


(1) géométrie autorisée dans le lemme de Tartar et dans le lemme 3-3 suivant.

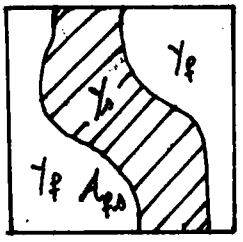


(2) géométries autorisées dans le lemme 3-3 mais non autorisées dans le lemme de Tartar.

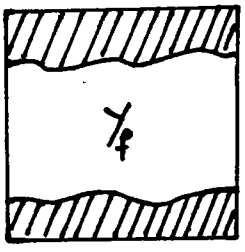
(figure 3-2)



(1) géométries ne vérifiant pas l'hypothèse a)



(2) géométries ne vérifiant pas l'hypothèse b)

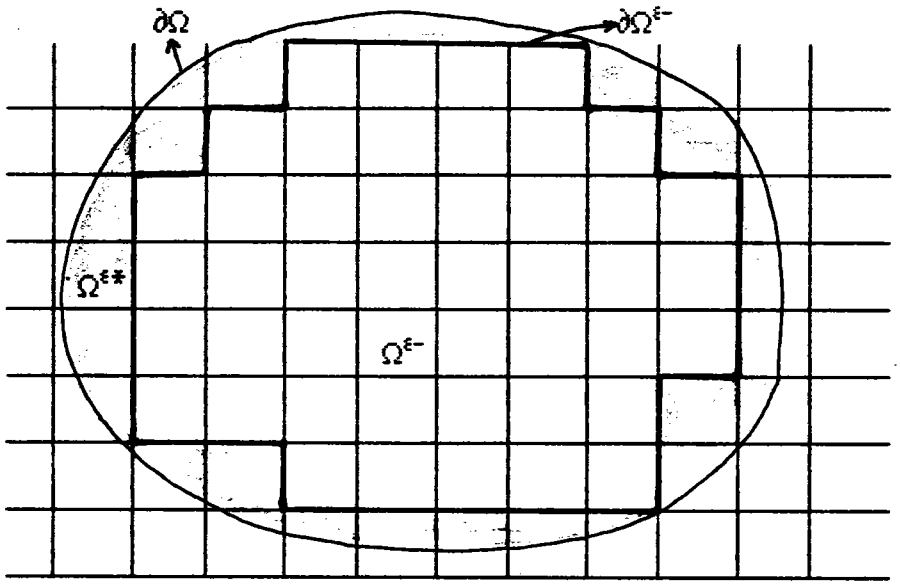


(3) géométries ne vérifiant pas l'hypothèse c)

(figure 3-3)

On introduit maintenant les notations suivantes (fig. 3-4):

(3-7)
- $\Omega^{\varepsilon-}$ = la plus grande réunion des translatées $C^{k\varepsilon}$ de la cellule εY contenue dans Ω.
- $\Omega^{\varepsilon *} = \Omega \backslash \overline{\Omega}^{\varepsilon-}$.
- $\Omega_f^{\varepsilon-} = \Omega_f^{\varepsilon} \cap \Omega^{\varepsilon-}$; $\Omega_f^{\varepsilon *} = \Omega_f^{\varepsilon} \cap \Omega^{\varepsilon *}$.



(figure 3-4)

Lemme 3-3:

Sous les hypothèses (3-6), *il existe un opérateur de restriction* $\mathcal{R}^{\varepsilon}$ *linéaire et continu tel que:*

i) $\mathcal{R}^{\varepsilon} \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_0^1(\Omega^{\varepsilon-}), \mathbb{H}_0^1(\Omega_f^{\varepsilon-}))$.

ii) *si* $v \in \mathbb{H}_0^1(\Omega_f^{\varepsilon-})$ *alors* $\mathcal{R}^{\varepsilon}(\tilde{v}) \equiv v$ *dans* $\Omega_f^{\varepsilon-}$

iii) *si* $\operatorname{div}(v) = 0$ *dans* $\Omega^{\varepsilon-}$ *alors* $\operatorname{div}(\mathcal{R}^{\varepsilon} v) = 0$ *dans* $\Omega_f^{\varepsilon-}$

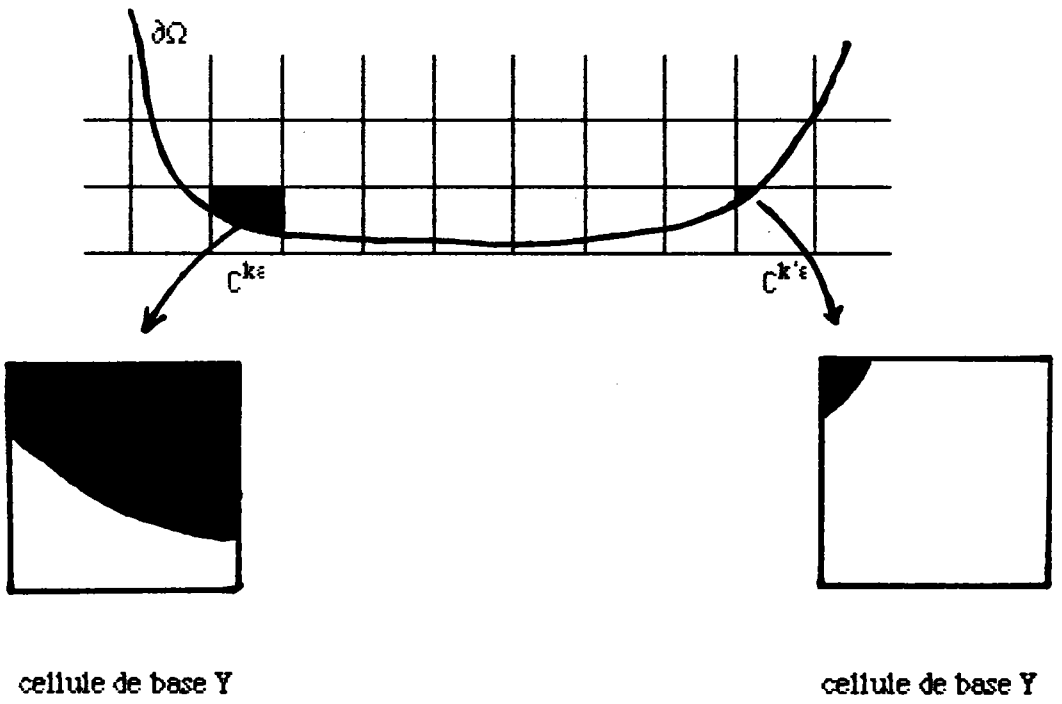
iv) *il existe une constante* C *indépendante de* ε *telle que:*

$$\left\| \nabla(\mathcal{R}^{\varepsilon} v) \right\|_{0,\Omega_f^{\varepsilon-}} \leq C\left(\frac{1}{\varepsilon} \left\| v \right\|_{0,\Omega^{\varepsilon-}} + \left\| \nabla v \right\|_{0,\Omega^{\varepsilon-}} \right) \qquad \forall v \in \mathbb{H}_0^1(\Omega^{\varepsilon-})$$

où $\tilde{}$ *désigne le prolongement par zéro en dehors de* $\Omega_f^{\varepsilon-}$.

Démonstration: (voir G. Allaire [1]).

Remarquons que l'opérateur de restriction $\mathcal{R}^\varepsilon$ est dans $\mathcal{L}(\mathbb{H}_0^1(\Omega^{\varepsilon-}),\mathbb{H}_0^1(\Omega_f^{\varepsilon-}))$ au lieu de $\mathcal{L}(\mathbb{H}_0^1(\Omega),\mathbb{H}_0^1(\Omega_f^\varepsilon))$. La construction de l'opérateur $\mathcal{R}^\varepsilon$ se fait sur chaque cellule $C^{k\varepsilon}$ en se ramenant à la cellule de base Y par homothétie $\frac{1}{\varepsilon}$ et Y-translations, il est alors dificile de construire un opérateur de restriction dans $\mathcal{L}(\mathbb{H}_0^1(\Omega),\mathbb{H}_0^1(\Omega_f^\varepsilon))$ vérifiant les propriétés ii), iii) et surtout iv) du lemme 3-3, car les images par homothétie $\frac{1}{\varepsilon}$ et Y-translations des intersections $C^{k\varepsilon} \cap \Omega^{\varepsilon *}$ sont des parties de Y dont les tailles sont variables et incontrolables (figure 3-5).



(figure 3-5)

Pour ne pas alourdir l'exposé des résultats, on supposera dorénavant que le domaine Ω est un nombre entier de cellules $C^{k\varepsilon}$ translatées de εY. Dans ce cas $\Omega^{\varepsilon-}$ coincide avec Ω, $\Omega_f^{\varepsilon-}$ coincide avec Ω_f^ε et $\Omega^{\varepsilon *}$ est vide. Mais tous les résultats peuvent être généralisés au cas où Ω n'est pas un nombre entier de cellules $C^{k\varepsilon}$, il suffit de remplacer dans ce qui suit les convergences du prolongement de la pression dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ par des convergences dans $\mathbb{L}^2_{(loc)}(\Omega)$. Faisons alors l'hypothèse suivante:

(3-8) $$\Omega = \Omega^{\varepsilon-} = \bigcup_{k=1}^{N^\varepsilon} C^{k\varepsilon} \quad ; \quad N^\varepsilon \in \mathbb{N}^*$$

3-2) Prolongements et estimations a priori:

3-2-1) Prolongement de la vitesse et estimations:

Grâce à la condition de Dirichlet homogène que vérifie la vitesse U^ε sur le bord $\partial\Omega_f^\varepsilon$ de Ω_f^ε, le prolongement $\widetilde{U}^\varepsilon$ de U^ε par zéro en dehors de Ω_f^ε est dans l'espace:

$$\mathcal{V}(\mathrm{div},0) = \left\{ v \in \mathbb{H}_0^1(\Omega);\ \mathrm{div}(v) = 0 \right\}$$

En utilisant les lemmes précédents on va établir les estimations suivantes où C désigne, comme dans toute la suite, diverses constantes indépendantes de ε.

Proposition 3-1

Sous les hypothèses (3-6) *et si:*

$$\left\| F^\varepsilon \right\|_{0,\Omega_f^\varepsilon} \le C\,\varepsilon^{-2}$$

alors le prolongement $\widetilde{U}^\varepsilon$ *de la vitesse vérifie :*

- $\left\| \widetilde{U}^\varepsilon \right\|_{0,\Omega} \le C$
- $\left\| \dfrac{\partial \widetilde{U}^\varepsilon}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega} \le C\,\varepsilon^{-1} \qquad (i = 1,2,3)$

Démonstration:

On va utiliser les équations variationnelles (1-7) vérifiées par la vitesse U^ε et la pression P^ε:

$$U^\varepsilon \in \mathcal{V}^\varepsilon = \mathbb{H}_0^1(\Omega_f) = \left(H_0^1(\Omega_f^\varepsilon)\right)^3 ; \quad P^\varepsilon \in L_0^2(\Omega_f^\varepsilon)$$

$$(3\text{-}9) \qquad \int_{\Omega_f^\varepsilon} 2\mu^\varepsilon\, D_{ij}(U^\varepsilon) D_{ij}(v)\, dx - \int_{\Omega_f^\varepsilon} P^\varepsilon\, \mathrm{div}(v)\, dx = \int_{\Omega_f^\varepsilon} F^\varepsilon . v\, dx + \int_{\mathcal{A}_{gl}^\varepsilon} 2\sigma\, H^\varepsilon\, v.n\, d\Gamma$$

$$\int_{\Omega_f^\varepsilon} q\, \mathrm{div}(U^\varepsilon)\, dx = 0 . \qquad \forall\, (v,q) \in \mathcal{V}^\varepsilon \times L_0^2(\Omega_f^\varepsilon).$$

Si on prend $v = U^\varepsilon$ comme fonction-test dans la première équation de (3-9) il vient :

$$\int_{\Omega_f^\varepsilon} 2\mu^\varepsilon \, D_{ij}(U^\varepsilon)D_{ij}(U^\varepsilon) \, dx = \int_{\Omega_f^\varepsilon} F^\varepsilon . U^\varepsilon \, dx + \int_{\mathcal{A}_{g\ell}^\varepsilon} 2\sigma \, H^\varepsilon \, U^\varepsilon . n \, d\Gamma$$

Puisque la constante σ est supposée indépendante de ε, l'inégalité (1-15), l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le lemme 3-2 impliquent alors que:

$$\| \nabla U^\varepsilon \|^2_{0,\Omega_f^\varepsilon} \leq C \left(\varepsilon \| F^\varepsilon \|_{0,\Omega_f^\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \right) \| \nabla U^\varepsilon \|_{0,\Omega_f^\varepsilon}$$

Donc si $\| F^\varepsilon \|_{0,\Omega_f^\varepsilon} \leq C \varepsilon^{-2}$ on a:

$$\| \nabla \tilde{U}^\varepsilon \|_{0,\Omega} = \| \nabla U^\varepsilon \|_{0,\Omega_f^\varepsilon} \leq C \varepsilon^{-1} .$$

Et d'après le lemme 3-2:

$$\| \tilde{U}^\varepsilon \|_{0,\Omega} = \| U^\varepsilon \|_{0,\Omega_f^\varepsilon} \leq C \varepsilon \| \nabla U^\varepsilon \|_{0,\Omega_f^\varepsilon} \leq C.$$

Ce qui achève la démonstration de la proposition. □

3-2-1) Prolongement de la pression et estimations:

L'opérateur de restriction $\mathcal{R}^\varepsilon$ du lemme 3-3 va nous permettre de construire un prolongement de la pression P^ε qui vérifie les estimations de la proposition suivante:

Proposition 3-2

Sous les hypothèses (3-6), (3-8) *et si:*

$$\| F^\varepsilon \|_{0,\Omega_f^\varepsilon} \leq C\,\varepsilon^{-2}$$

alors il existe un prolongement Q^ε *de la pression* P^ε *tel que:*

- $Q^\varepsilon \in L^2(\Omega)$ et $\displaystyle\int_{\Omega_f^\varepsilon} Q^\varepsilon \, dx = 0$.
- $\| Q^\varepsilon \|_{0,\Omega} \leq C\,\varepsilon^{-2}$
- $\| \nabla Q^\varepsilon \|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C\,\varepsilon^{-2}$

Démonstration:

Soit S^ε une distribution qui vérifie:

$$\langle S^\varepsilon , v \rangle_\Omega = - \int_{\Omega_f^\varepsilon} P^\varepsilon \, \mathrm{div}(\mathcal{R}^\varepsilon v) \, dx \qquad \forall\, v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$$

D'après le lemme 3-3 et l'hypothèse (3-8) $\mathcal{R}^\varepsilon \in \mathcal{L}(\mathbf{H}_0^1(\Omega), \mathbf{H}_0^1(\Omega_f^\varepsilon))$, il est alors clair que S^ε est dans $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$. Le symbole $\langle \, . \, , \, . \, \rangle_{\mathcal{O}}$ désigne les crochets de dualité entre $\mathbf{H}_0^1(\mathcal{O})$ et $\mathbf{H}^{-1}(\mathcal{O})$ pour tout ouvert $\mathcal{O}$ de Ω.

On commence par établir des estimations vérifiées par S^ε, puis on costruira, grâce à S^ε, le prolongement Q^ε de la pression P^ε. D'après (3-9) on a:

$$\langle S^\varepsilon , v \rangle_\Omega = \int_{\Omega_f^\varepsilon} F^\varepsilon . \mathcal{R}^\varepsilon v \, dx + \int_{\mathcal{A}_{gl}^\varepsilon} 2\sigma \, H^\varepsilon \, \mathcal{R}^\varepsilon v . n \, d\Gamma - \int_{\Omega_f^\varepsilon} 2\mu^\varepsilon \, D_{ij}(U^\varepsilon) D_{ij}(\mathcal{R}^\varepsilon v) \, dx$$

Donc, d'après l'inégalité (1-14), le lemme 3-2 et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a:

$$\left|\langle S^\varepsilon, v\rangle_\Omega\right| \le C\left(\| \nabla U^\varepsilon \|_{0,\Omega_f^\varepsilon} + \varepsilon \| F^\varepsilon \|_{0,\Omega_f^\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon}\right) \| \nabla(\mathcal{R}^\varepsilon v) \|_{0,\Omega_f^\varepsilon}$$

D'après la proposition 3-1 $\| \nabla U^\varepsilon \|_{0,\Omega_f^\varepsilon} \le C\,\varepsilon^{-1}$, donc si $\| F^\varepsilon \|_{0,\Omega_f^\varepsilon} \le C\,\varepsilon^{-2}$, l'inégalité précédente implique que:

$$\left|\langle S^\varepsilon, v\rangle_\Omega\right| \le C\,\varepsilon^{-1} \| \nabla(\mathcal{R}^\varepsilon v) \|_{0,\Omega_f^\varepsilon}$$

En utilisant l'inégalité iv) du lemme 3-3 que vérifie $\mathcal{R}^\varepsilon v$, il vient:

$$\boxed{(3\text{-}10) \qquad \left|\langle S^\varepsilon, v\rangle_\Omega\right| \le C\,\varepsilon^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\| v \|_{0,\Omega} + \| \nabla v \|_{0,\Omega}\right) \qquad \forall\, v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)}$$

On va maintenant montrer que la distribution S^ε est le gradient d'une fonction de $L^2(\Omega)$ et qu'elle coincide avec le gradient de la pression P^ε dans Ω_f^ε.

Soit $v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ telle que $\operatorname{div}(v) = 0$. D'après le lemme 3-3 $\operatorname{div}(\mathcal{R}^\varepsilon v) = 0$ et on a alors:

$$\langle S^\varepsilon, v\rangle_\Omega = -\int_{\Omega_f^\varepsilon} P^\varepsilon \operatorname{div}(\mathcal{R}^\varepsilon v)\, dx = 0 \qquad \forall\, v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \text{ telle que } \operatorname{div}(v) = 0.$$

Il existe donc ([36]) une fonction $Q^\varepsilon \in L^2(\Omega)$ telle que S^ε soit le gradient de Q^ε. cette fonction n'est déterminée qu'à une constante additive près et on peut alors la choisir de moyenne nulle sur Ω_f^ε :

$$(3\text{-}11) \qquad \exists\, Q^\varepsilon \in L^2(\Omega) \;/\; S^\varepsilon = \nabla Q^\varepsilon \text{ et } \int_{\Omega_f^\varepsilon} Q^\varepsilon \, dx = 0. \qquad (\, Q^\varepsilon \in L_0^2(\Omega_f^\varepsilon)\,).$$

Soit maintenant une fonction v quelconque de $\mathbb{H}_0^1(\Omega_f^\varepsilon)$. Son prolongement $\tilde{v}$ par zéro à Ω est dans $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$. D'après le lemme 3-3, la restriction $\mathcal{R}^\varepsilon(\tilde{v})$ de $\tilde{v}$ à Ω_f^ε coincide avec v. Donc d'après la définition de S et la relation (3-11):

$$\langle S^\varepsilon, \tilde{v} \rangle_\Omega = \langle \nabla Q^\varepsilon, \tilde{v} \rangle_\Omega = - \int_{\Omega_f^\varepsilon} P^\varepsilon \, \mathrm{div}(v) \, dx = - \int_{\Omega_f^\varepsilon} Q^\varepsilon \, \mathrm{div}(v) \, dx \qquad \forall\, v \in \mathbb{H}_0^1(\Omega_f^\varepsilon)$$

d'où:

$$\int_{\Omega_f^\varepsilon} (Q^\varepsilon - P^\varepsilon) \, \mathrm{div}(v) \, dx = 0 \qquad \forall\, v \in \mathbb{H}_0^1(\Omega_f^\varepsilon).$$

Mais Q^ε et P^ε sont dans $L_0^2(\Omega_f^\varepsilon)$ (i.e. de moyenne nulles sur Ω_f^ε), et d'après R. Temam ([36] lemme , chap. 1), l'opérateur "div" est surjectif de $\mathbb{H}_0^1(\Omega_f^\varepsilon)$ dans $L_0^2(\Omega_f^\varepsilon)$, on peut donc choisir dans la relation précédente la fonction v telle que: $\mathrm{div}(v) = (Q^\varepsilon - P^\varepsilon)$ ce qui implique que :

$$(3\text{-}12) \qquad Q^\varepsilon = P^\varepsilon \qquad \text{dans } L_0^2(\Omega_f^\varepsilon).$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré dans (3-10), la distribution S^ε , donc ∇Q^ε, vérifie, lorsque ε est assez petit:

$$\| \nabla Q^\varepsilon \|_{H^{-1}(\Omega)} \le C\, \varepsilon^{-2}$$

On va maintenant montrer que la norme de Q^ε dans $L^2(\Omega)$ vérifie une inégalité analogue à la précédente. D'après R. Temam ([36] lemme 6.1 , chap. 1), il existe une constante C' qui ne dé pend que de Ω (donc idépendante de ε) telle que:

$$\| q \|_{0,\Omega} \le C' \, \| \nabla q \|_{H^{-1}(\Omega)} \qquad \forall\, q \in L^2(\Omega) \text{ telle que } \nabla q \in \mathbb{H}^{-1}(\Omega) \text{ et } \int_\Omega q \, dx = 0.$$

Ainsi, si l'on note : $\bar{Q}^{\varepsilon} = \dfrac{1}{\mathrm{mes}(\Omega)} \displaystyle\int_{\Omega} Q^{\varepsilon}\, dx$ alors:

$$(3\text{-}13) \qquad \int_{\Omega} (Q^{\varepsilon} - \bar{Q}^{\varepsilon})^2\, dx \le C \left\| \nabla Q^{\varepsilon} \right\|^2_{H^{-1}(\Omega)} \le C\ \varepsilon^{-1}$$

Mais:

$$\int_{\Omega} (Q^{\varepsilon} - \bar{Q}^{\varepsilon})^2\, dx = \int_{\Omega} (Q^{\varepsilon})^2\, dx - \mathrm{mes}(\Omega)\,(\bar{Q}^{\varepsilon})^2$$

$$= (1-a) \int_{\Omega} (Q^{\varepsilon})^2\, dx + a \int_{\Omega} (Q^{\varepsilon})^2\, dx - \mathrm{mes}(\Omega)\,(\bar{Q}^{\varepsilon})^2$$

où a est un paramètre arbitraire.

D'après (3-11), la fonction Q^{ε} est de moyenne nulle sur Ω_f^{ε}, donc:

$$\mathrm{mes}(\Omega)\,(\bar{Q}^{\varepsilon})^2 = \frac{1}{\mathrm{mes}(\Omega)}\left(\int_{\Omega} Q^{\varepsilon}\, dx \right)^2 = \frac{1}{\mathrm{mes}(\Omega)}\left(\int_{\Omega_g^{\varepsilon}} Q^{\varepsilon}\, dx \right)^2$$

$$\le \frac{\mathrm{mes}(\Omega_g^{\varepsilon})}{\mathrm{mes}(\Omega)} \int_{\Omega_g^{\varepsilon}} (Q^{\varepsilon})^2\, dx \le \frac{\mathrm{mes}(\Omega_g^{\varepsilon})}{\mathrm{mes}(\Omega)} \int_{\Omega} (Q^{\varepsilon})^2\, dx$$

Si on choisit $a = \dfrac{\mathrm{mes}(\Omega_g^{\varepsilon})}{\mathrm{mes}(\Omega)}$, alors $0 < a < 1$, $a \displaystyle\int_{\Omega} (Q^{\varepsilon})^2\, dx - \mathrm{mes}(\Omega)\,(\bar{Q}^{\varepsilon})^2 \ge 0$ et on peut alors déduire de l'inégalité (3-13) que :

$$\int_{\Omega} (Q^{\varepsilon})^2\, dx \le \frac{C}{1-a}\ \varepsilon^{-1}$$

Ce qui achève la démonstration de la proposition. □

Remarque 3-1:

Les calculs précédents montrent qu'on peut énnoncer le lemme 6.1 de ([36], *Chap.1*) *sous la forme suivante:*

Il existe une constante C' *qui ne dépend que de* Ω *telle que:*

$$\|q\|_{0,\Omega} \leq C' \, \|\nabla q\|_{H^{-1}(\Omega)} \qquad \forall\, q \in L^2(\Omega) \text{ telle que } \nabla q \in \mathbb{H}^{-1}(\Omega) \text{ et } \int_{\Omega_0} q \, dx = 0.$$

avec Ω_0 *un sous-ensemble de* Ω *de mesure non nulle.* □

3-3) Passage à la limite:

Grâce aux estimations établies dans les propositions précédentes, on peut extraire une sous-suite du couple $(\tilde{U}^\varepsilon, \varepsilon^2 Q^\varepsilon)$ qui converge pour la topologie faible de $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$. On va démontrer que pour la sous-suite extraite de $\varepsilon^2 Q^\varepsilon$ on a des convergences fortes dans $L^2(\Omega)$. Ensuite, à l'aide des solutions V^1 et W des problèmes locaux (2-20) et (2-21), on va identifier les limites de ces sous-suites convergentes et on en déduira que toute la suite $(\tilde{U}^\varepsilon, \varepsilon^2 Q^\varepsilon)$ converge. Enfin, les résultas de convergence obtenus seront comparés à ceux du deuxième paragraphe qui sont obtenus d'une façon formelle par la méthode des échelles multiples.

Précisons d'abord que les forces volumiques F^ε vérifient, d'après leur expression (2-6), les hypothèses des propositions 3-1 et 3-2 et la convergence suivante:

$$(3\text{-}14) \qquad \varepsilon^2 F^\varepsilon \longrightarrow \frac{|Y_g|}{|Y|} F_g^{-2} + \frac{|Y_\ell|}{|Y|} F_\ell^{-2} \qquad \text{dans } \mathbb{L}^2(\Omega) \text{ faible.}$$

Cette convergence s'obtient grâce à la périodicité des F_α^{-2} et le lemme classique consernant les fonctions périodiques ([33], Chap. 7, lemme).

Théorème 3-1

Sous les hypothèses (1-6), (2-3), (3-6), (3-8) *et* (3-14), *on peut extraire une sous-suite de* $\tilde{U}^\varepsilon$, *encore notée* $\tilde{U}^\varepsilon$, *telle que*

(3-15) $$\tilde{U}^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} U \qquad \textit{dans } \mathbb{L}^2(\Omega) \textit{ faible.}$$

et $$\begin{cases} \operatorname{div}(U) = 0 & \textit{dans } \Omega \\ U.\,n = 0 & \textit{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

De même on peut extraire une sous-suite de Q^ε, *notée* Q^ε, *telle que:*

(3-16) $$\varepsilon^2 Q^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} P \qquad \textit{dans } \mathbb{L}^2(\Omega) \textit{ fort.}$$

et $$\int_\Omega P\, dx = 0.$$

démonstration:

D'après les estimations de la proposition 3-1, l'existence d'une sous-suite de $\tilde{U}^\varepsilon$ qui converge vers une fonction U est évidente. On va montrer que cette limite U est à divergence nulle dans Ω et que sa composante normale U. n est nulle sur le bord $\partial\Omega$. On introduit l'espace:

$$\mathcal{H}(\operatorname{div}) = \left\{ v \in \mathbb{L}^2(\Omega);\ \operatorname{div}(v) \in L^2(\Omega) \right\}$$

munit du produit scalaire usuel:

$$\langle v, w \rangle_{\operatorname{div}} = \int_\Omega v.w\, dx + \int_\Omega \operatorname{div}(v)\, \operatorname{div}(w)\, dx\,; \qquad \text{pour } v, w \in \mathcal{H}(\operatorname{div})$$

Puisque la suite $\tilde{U}^\varepsilon$ est dans $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ elle est dans $\mathcal{H}(\operatorname{div})$, de plus elle est à divergence nulle, donc:

$$\langle \tilde{U}^\varepsilon, v \rangle_{\operatorname{div}} = \int_\Omega \tilde{U}^\varepsilon.v\, dx \qquad \forall\, v \in \mathcal{H}(\operatorname{div}).$$

Donc, la sous-suite $\widetilde{U}^{\varepsilon}$ converge aussi dans $\mathcal{H}(\mathrm{div})$ faiblement vers U et la limite U est alors à divergence nulle. De plus, on sait ([20] Théorème 2.2) que l'application trace:

$$\gamma_n : v \longrightarrow \gamma_n(v) = v.n$$

est linéaire et continue de $\mathcal{H}(\mathrm{div})$ dans $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. La convergence faible de $\widetilde{U}^{\varepsilon}$ vers U dans $\mathcal{H}(\mathrm{div})$ implique donc celle de $\gamma_n(\widetilde{U}^{\varepsilon})$ vers $\gamma_n(U)$ dans $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. Mais puisque $\widetilde{U}^{\varepsilon}$ est nulle sur $\partial\Omega$, les traces $\gamma_n(\widetilde{U}^{\varepsilon})$ et $\gamma_n(U)$ sont nulles aussi , ce qui achève la démonstration de (3-15).

D'après la proposition 3-2, les suites $\varepsilon^2 Q^{\varepsilon}$ et $\varepsilon^2 \nabla Q^{\varepsilon}$ sont bornées respectivement dans $L^2(\Omega)$ et dans $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$. on peut donc en extraire des sous-suites telles que :

$$(3\text{-}17) \qquad \begin{cases} \varepsilon^2 Q^{\varepsilon} \longrightarrow P & \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible} \\ \varepsilon^2 \nabla Q^{\varepsilon} \longrightarrow \nabla P & \text{dans } \mathbb{H}^{-1}(\Omega) \text{ faible} \end{cases}$$

On va montrer que ces convergences ont lieu respectivement dans $L^2(\Omega)$ fort et dans $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ fort. Pour montrer que $\varepsilon^2 \nabla Q^{\varepsilon}$ converge vers ∇P dans $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ fort, il suffit de vérifier que:

$$(3\text{-}18) \qquad \begin{cases} \langle \varepsilon^2 \nabla Q^{\varepsilon}, \psi^{\varepsilon} \rangle_{\Omega} \longrightarrow \langle \nabla P, \psi \rangle_{\Omega} \\ \forall\ \psi^{\varepsilon} \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) \ \text{ telle que } \ \psi^{\varepsilon} \longrightarrow \psi \qquad \text{dans } \mathbb{H}_0^1(\Omega) \text{ faible.} \end{cases}$$

où le symbole $\langle \ldots \rangle_{\Omega}$ désigne les crochets de dualité entre $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ et $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$.

Prenons alors une suite ψ^{ε} qui converge faiblement vers une fonction ψ dans $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$. on a:

$$(3\text{-}19) \qquad \left| \langle \varepsilon^2 \nabla Q^{\varepsilon}, \psi^{\varepsilon} \rangle_{\Omega} - \langle \nabla P, \psi \rangle_{\Omega} \right| \leq \left| \langle \varepsilon^2 \nabla Q^{\varepsilon}, \psi^{\varepsilon} - \psi \rangle_{\Omega} \right| + \left| \langle \varepsilon^2 \nabla Q^{\varepsilon} - \nabla P, \psi \rangle_{\Omega} \right|.$$

D'après la deuxième convergence de (3-17), le deuxième terme du second membre de cette inégalité tend vers zéro avec ε. Quant au premier terme, d'après les relations (3-10) et (3-11) On a:

$$\left|\langle \varepsilon^2 \nabla Q^\varepsilon, \psi^\varepsilon - \psi \rangle_\Omega\right| \leq C\left(\left\|\psi^\varepsilon - \psi\right\|_{0,\Omega} + \varepsilon \left\| \nabla\psi^\varepsilon - \nabla\psi\right\|_{0,\Omega}\right).$$

Mais $\left\| \nabla\psi^\varepsilon - \nabla\psi\right\|_{0,\Omega}$ est borné indépendement de ε et, d'après la compacité de l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, la suite ψ^ε converge vers ψ fortement dans $L^2(\Omega)$. Le second membre de l'inégalité précédente tend alors vers zéro avec ε, donc celui de l'inégalité (3-19) aussi. La propriété (3-18) est alors vérifiée, d'où:

(3-20) $\qquad \varepsilon^2 \nabla Q^\varepsilon \longrightarrow \nabla P$ dans $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ fort.

Maintenant on peut montrer que $\varepsilon^2 Q^\varepsilon$ converge fortement vers P dans $L^2(\Omega)$. D'après R. Temam ([36] Chap.1, Lemme 6.1), il exite une constante C qui ne dépend que de Ω telle que:

$$\left\|\varepsilon^2 Q^\varepsilon - P\right\|_{0,\Omega} \leq C\left(\int_{\Omega_f^\varepsilon} (\varepsilon^2 Q^\varepsilon - P)\, dx + \left\|\varepsilon^2 \nabla Q^\varepsilon - \nabla P\right\|_{H^{-1}(\Omega)}\right).$$

D'après (3-20) et la première convergence de (3-17) le second membre de cette inégalité tend vers zéro avec ε, donc:

(3-21) $\qquad \varepsilon^2 Q^\varepsilon \longrightarrow P$ dans $L^2(\Omega)$ fort.

Pour achever la démonstration du théorème, il reste à montrer que la limite P est de moyenne nulle sur Ω. D'après la proposition 3-2 on a:

(3-22) $$\int_{\Omega_f^\varepsilon} \varepsilon^2 Q^\varepsilon\, dx = \int_\Omega \chi_f^\varepsilon\, \varepsilon^2 Q^\varepsilon\, dx = 0$$

où χ_f^ε désigne la fonction caractéristique de Ω_f^ε.

Mais si l'on note χ_f La prolongée à $\mathbb{R}^3$ par Y-périodicité de la fonction caractéristique de Y_f, alors: $\chi_f^\varepsilon(x) = \chi_f(\frac{x}{\varepsilon})$. La fonction χ_f^ε converge donc faiblement dans $L^2(\Omega)$ vers la moyenne $\frac{|Y_f|}{|Y|}$ de χ_f sur Y. Le passage à la limite dans (3-22) donne alors le résultat voulu, i.e:

$$\int_\Omega P\, dx = 0. \quad \square$$

On va maintenant établir les relations qui lient les deux limites U et P, puis, on va essayer de les identifier comme solutions de problèmes aux limites.

Théorème 3-2:

Sous les hypothèses du théorème 3-1, les limites U *et* P *sont liées par :*

$$U = K^\ell(F_\ell^{-2} - \nabla P) + K^g(F_g^{-2} - \nabla P) + \frac{1}{|Y|}\int_{Y_f} W(y)\, dy \tag{3-23}$$

où les K^α $(\alpha = g,\ell)$ *sont les tenseurs des perméabilités* K^α_{ij} *définies par:*

$$K^\alpha_{ij} = \frac{1}{|Y|}\int_{Y_f} (V^j_\alpha)_i(y)\, dy \qquad (\alpha = g,\ell)$$

et les fonctions V^j_α *et* W *sont les solutions uniques des problèmes locaux* (2-20) *et* (2-21).

La limite P *et déterminée de façon unique par le problème aux limites:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(K_{ij}\dfrac{\partial P}{\partial x_j}\right) = K^\ell_{ij}\dfrac{\partial (F_\ell^{-2})_j}{\partial x_i} + K^g_{ij}\dfrac{\partial (F_g^{-2})_j}{\partial x_i} & \text{dans } \Omega \\[2ex] K_{ij}\dfrac{\partial P}{\partial x_j} n_i = \left(K^\ell_{ij}(F_\ell^{-2})_j + K^g_{ij}(F_g^{-2})_j\right)n_i + \dfrac{n_i}{|Y|}\displaystyle\int_{Y_f} W_i(y)\, dy & \text{sur } \partial\Omega \\[2ex] \displaystyle\int_\Omega P\, dx = 0. \end{cases} \tag{3-24}$$

où: $K = K^\ell + K^g$.

Démonstration:

En utilisant les solutions (V_α^k, q_α^k) et $(\mathbf{W}, r)$ des problèmes (2-20) et (2-21), on définit les nouveaux couples de fonctions $(V_\alpha^{k\varepsilon}, q_\alpha^{k\varepsilon})$, $(V^{k\varepsilon}, q^{k\varepsilon})$ et $(\mathbf{W}^\varepsilon, r^\varepsilon)$ par:

$$(3\text{-}25)\qquad \begin{cases} V_\alpha^{k\varepsilon}(x) = V_\alpha^k(\frac{x}{\varepsilon})\ ;\ q_\alpha^{k\varepsilon}(x) = q_\alpha^k(\frac{x}{\varepsilon}) & (\alpha = g,\ell) \\ V^{k\varepsilon} = V_g^{k\varepsilon} + V_\ell^{k\varepsilon}\ ;\ q^{k\varepsilon} = q_g^{k\varepsilon} + q_\ell^{k\varepsilon} & (k = 1,2,3) \\ \mathbf{W}^\varepsilon(x) = \mathbf{W}(\frac{x}{\varepsilon})\ ;\ r^\varepsilon(x) = r(\frac{x}{\varepsilon}). \end{cases}$$

Les équations (2-20), vérifiées par les (V_α^k, q_α^k), impliquent alors que les nouvelles fonctions $(V_\alpha^{k\varepsilon}, q_\alpha^{k\varepsilon})$ vérifient, pour chaque couple (α, k) donné ($\alpha = g,\ell$ et $k = 1,2,3$):

$$\left|\begin{array}{ll} -2\,\mu_\beta\,\varepsilon^2 \dfrac{\partial}{\partial x_j} D_{ij}^x(V_\alpha^{k\varepsilon}) + \varepsilon \dfrac{\partial q_\alpha^{k\varepsilon}}{\partial x_i} = \delta_{\alpha\beta}\,\delta_{ik} & \text{dans chaque } \Omega_\beta^\varepsilon\ (\beta = g,\ell) \\ \mathrm{div}_x(V_\alpha^{k\varepsilon}) = 0 & \text{dans chaque } \Omega_\beta^\varepsilon\ (\beta = g,\ell) \\ [\![\, V_\alpha^{k\varepsilon} \,]\!]_{g\ell} = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{g\ell}^\varepsilon \\ [\![2\,\varepsilon\,\mu^\varepsilon\, D_{ij}^x(V_\alpha^{k\varepsilon}) - q_\alpha^{k\varepsilon}\,\delta_{ij} \,]\!]_{g\ell}\, n_j = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{g\ell}^\varepsilon \\ V_\alpha^{k\varepsilon} = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{is}^\varepsilon \end{array}\right.$$

où les δ_{ik} et $\delta_{\alpha\beta}$ désignent les symboles de Kronecker ($i,k = 1,2,3$ et $\alpha,\beta = g,\ell$).

Les couples $(V^{k\varepsilon}, q^{k\varepsilon})$ vérifient alors:

$$(3\text{-}26)\qquad \left|\begin{array}{ll} -2\,\mu_\beta\,\varepsilon^2 \dfrac{\partial}{\partial x_j} D_{ij}^x(V^{k\varepsilon}) + \varepsilon \dfrac{\partial q^{k\varepsilon}}{\partial x_i} = \delta_{ik} & \text{dans chaque } \Omega_\beta^\varepsilon\ (\beta = g,\ell) \\ \mathrm{div}_x(V^{k\varepsilon}) = 0 & \text{dans chaque } \Omega_\beta^\varepsilon\ (\beta = g,\ell) \\ [\![\, V^{k\varepsilon} \,]\!]_{g\ell} = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{g\ell}^\varepsilon \\ [\![2\,\varepsilon\,\mu^\varepsilon\, D_{ij}^x(V^{k\varepsilon}) - q^{k\varepsilon}\,\delta_{ij} \,]\!]_{g\ell}\, n_j = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{g\ell}^\varepsilon \\ V^{k\varepsilon} = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{is}^\varepsilon \end{array}\right.$$

De même, les équations (2-21) vérifiées par $(\mathbf{w},r)$ impliquent que le nouveau couple $(W^\varepsilon,r^\varepsilon)$ vérifie:

$$
(3\text{-}27)\quad \left|\begin{array}{ll}
-2\,\varepsilon^2\,\mu_\beta \dfrac{\partial}{\partial x_j} D^x_{ij}(W^\varepsilon) + \varepsilon \dfrac{\partial r^\varepsilon}{\partial x_i} = 0 & \text{dans chaque } \Omega^\varepsilon_\beta \ (\beta = g,\ell) \\
\mathrm{div}_x(W^\varepsilon) = 0 & \text{dans chaque } \Omega^\varepsilon_\beta \ (\beta = g,\ell) \\
[\![\, W^\varepsilon \,]\!]_{g\ell} = 0 & \text{sur } \mathcal{A}^\varepsilon_{g\ell} \\
[\![2\,\varepsilon\,\mu^\varepsilon\, D^x_{ij}(W^\varepsilon) - r^\varepsilon\,\delta_{ij} \,]\!]_{g\ell}\, n_j = 2\,\sigma\,\varepsilon\, H^\varepsilon\, n_i & \text{sur } \mathcal{A}^\varepsilon_{g\ell} \\
W^\varepsilon = 0 & \text{sur } \mathcal{A}^\varepsilon_{is}
\end{array}\right.
$$

(rappel: $H^\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1} H(\frac{x}{\varepsilon})$, où H est la prolongée par Y-périodicité de la courbure moyenne de l'interface $\mathcal{A}_{g\ell} = \partial Y_g \cap \partial Y_\ell$).

Maintenant, si on note:

$$
(3\text{-}28)\qquad Z^\varepsilon = U^\varepsilon - W^\varepsilon \quad \text{et} \quad X^\varepsilon = \varepsilon P^\varepsilon - r^\varepsilon ,
$$

alors, en utilisant le problème initial (1-4) vérifié par la vitesse U^ε et la pression P^ε, les nouvelle fonctions Z^ε et X^ε vérifient:

$$
(3\text{-}29)\quad \left|\begin{array}{ll}
-2\,\mu_\beta\,\varepsilon^2 \dfrac{\partial}{\partial x_j} D^x_{ij}(Z^\varepsilon) + \varepsilon \dfrac{\partial X^\varepsilon}{\partial x_i} = \varepsilon^2 F^\varepsilon_i & \text{dans chaque } \Omega^\varepsilon_\beta \ (\beta = g,\ell) \\
\mathrm{div}_x(Z^\varepsilon) = 0 & \text{dans chaque } \Omega^\varepsilon_\beta \ (\beta = g,\ell) \\
[\![\, Z^\varepsilon \,]\!]_{g\ell} = 0 & \text{sur } \mathcal{A}^\varepsilon_{g\ell} \\
[\![2\,\varepsilon\,\mu^\varepsilon\, D^x_{ij}(Z^\varepsilon) - X^\varepsilon\,\delta_{ij} \,]\!]_{g\ell}\, n_j = 0 & \text{sur } \mathcal{A}^\varepsilon_{g\ell} \\
Z^\varepsilon = 0 & \text{sur } \mathcal{A}^\varepsilon_{is}
\end{array}\right.
$$

Soit maintenant $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on multiplie la première équation de (3-29) par la $i^{\text{ème}}$ composante de $\varphi V^{k\varepsilon}$ puis on l'intègre par parties sur chaque Ω^ε_β $(\beta = g,\ell)$. Comme ce qui a été fait pour obtenir la formulation variationnelle (1-7) du problème initial (1-4), la somme des relations obtennues, sur l'indice i de 1 à 3 et sur l'indice $\beta = g,\ell$, donne en tenant compte des conditions aux interfaces:

$$(3\text{-}30) \qquad \int_{\Omega_f^\varepsilon} 2\,\varepsilon^2\,\mu^\varepsilon\,D^x_{ij}(Z^\varepsilon)D^x_{ij}(\varphi V^{k\varepsilon})\,dx = \int_{\Omega_f^\varepsilon} \varepsilon\,X^\varepsilon\,\nabla\varphi.V^{k\varepsilon}\,dx + \int_{\Omega_f^\varepsilon} \varphi\,\varepsilon^2\,F^\varepsilon.V^{k\varepsilon}\,dx$$

De même, en multipliant la première équation de (3-26) par φZ^ε, des intégrations par parties donnent:

$$(3\text{-}31) \qquad \int_{\Omega_f^\varepsilon} 2\,\varepsilon^2\,\mu^\varepsilon\,D^x_{ij}(V^{k\varepsilon})D^x_{ij}(\varphi Z^\varepsilon)\,dx = \int_{\Omega_f^\varepsilon} \varepsilon\,q^{k\varepsilon}\,\nabla\varphi.Z^\varepsilon\,dx + \int_{\Omega_f^\varepsilon} \varphi\,Z^\varepsilon_k\,dx$$

On va maintenant combiner les relations (3-30) et (3-31) et essayer d'obtenir une relation dans laquelle on peut passer à la limite, mais qui permet aussi d'obtenir une relation non triviale entre les limites des prolongement de la vitesse U^ε et celui de la pression P^ε. Remarquons d'abord que:

$$2\,D^x_{ij}(\varphi Z^\varepsilon) = 2\,\varphi\,D^x_{ij}(Z^\varepsilon) + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,Z^\varepsilon_j + \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\,Z^\varepsilon_i\right)$$

et une formule analogue pour $D^x_{ij}(\varphi V^{k\varepsilon})$.

Si on soustrait la relation (3-31) de la relation (3-30), il vient alors:

$$\int_{\Omega_f^\varepsilon} \varepsilon^2\,\mu^\varepsilon\,D^x_{ij}(Z^\varepsilon)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,V^{k\varepsilon}_j + \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\,V^{k\varepsilon}_i\right)dx - \int_{\Omega_f^\varepsilon} \varepsilon^2\,\mu^\varepsilon\,D^x_{ij}(V^{k\varepsilon})\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,Z^\varepsilon_j + \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\,Z^\varepsilon_i\right)dx =$$

$$= \int_{\Omega_f^\varepsilon} \varepsilon\,(\,X^\varepsilon\,V^{k\varepsilon} - q^{k\varepsilon}\,Z^\varepsilon\,).\nabla\varphi\,dx + \int_{\Omega_f^\varepsilon} (\,\varepsilon^2\,F^\varepsilon\,.\,V^{k\varepsilon} - Z^\varepsilon\,)\,\varphi\,dx$$

On écrit maintenant ces intégrales sur le domaine fixe Ω en utilisant le prolongement Q^ε de la pression P^ε, donné par la proposition 3-2, et les prolongement par zéro en dehors de Ω_f^ε de

toutes les autres fonctions intervenant dans la relation précédente. de façon précise, si l'on note:

$$\begin{cases} \hat{X} = \varepsilon\, Q^{\varepsilon} - \tilde{r}^{\varepsilon} & \text{(voir (3-28))} \\ \tilde{\cdot} = \text{opérateur de prolongement par zéro,} \end{cases}$$

alors la relation précédente s'écrit:

$$(3\text{-}32)\quad \int_{\Omega} \varepsilon^2 \mu^{\varepsilon} D^{x}_{ij}(\tilde{Z}^{\varepsilon}) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \tilde{V}^{k\varepsilon}_{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \tilde{V}^{k\varepsilon}_{i} \right) dx - \int_{\Omega} \varepsilon^2 \mu^{\varepsilon} D^{x}_{ij}(\tilde{V}^{k\varepsilon}) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \tilde{Z}^{\varepsilon}_{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \tilde{Z}^{\varepsilon}_{i} \right) dx =$$

$$= \int_{\Omega} \varepsilon \left(\hat{X}^{\varepsilon} \tilde{V}^{k\varepsilon} - \tilde{q}^{k\varepsilon} \tilde{Z}^{\varepsilon} \right) . \nabla \varphi \, dx + \int_{\Omega} \left(\varepsilon^2 F^{\varepsilon} . \tilde{V}^{k\varepsilon} - \tilde{Z}^{\varepsilon} \right) \varphi \, dx.$$

Mais remarquons que les fonctions $\tilde{V}^{k\varepsilon}$, $\tilde{q}^{k\varepsilon}$, $\tilde{w}^{\varepsilon}$ et $\tilde{r}^{\varepsilon}$ coincident respectivement avec les fonctions $\hat{V}^{k\varepsilon}$, $\hat{q}^{k\varepsilon}$, $\hat{w}^{\varepsilon}$ et $\hat{r}^{\varepsilon}$ qui sont définies par (3-2). Il existe donc, d'après le lemme 3-1, une constante C indépendante de ε telle que:

$$(3\text{-}33)\quad \left| \begin{array}{lll} \| \tilde{V}^{k\varepsilon} \|_{0,\Omega} \le C \| V^{k} \|_{0,Y_f} & ; & \left\| \dfrac{\partial \tilde{V}^{k\varepsilon}}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega} \le \dfrac{C}{\varepsilon} \left\| \dfrac{\partial V^{k}}{\partial y_i} \right\|_{0,Y} \\ \| \tilde{w}^{k\varepsilon} \|_{0,\Omega} \le C \| w \|_{0,Y_f} & ; & \left\| \dfrac{\partial \tilde{w}^{k\varepsilon}}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega} \le \dfrac{C}{\varepsilon} \left\| \dfrac{\partial w}{\partial y_i} \right\|_{0,Y} \\ \| \tilde{q}^{k\varepsilon} \|_{0,\Omega} \le C \| q^{k} \|_{0,Y_f} & \text{et} & \| \tilde{r}^{\varepsilon} \|_{0,\Omega} \le C \| r \|_{0,Y_f} . \end{array} \right.$$

Puisque les normes dans $\mathbb{L}^2(Y_f)$ des fonctions V^k, q^k, w, r et de leurs gradients sont indépendantes du paramètre ε, on peut passer à la limite dans la relation (3-32) grâce aux convergences (3-15) et (3-16) annoncées dans le théorème 3-1.

D'après les estimations précédentes et celles de la proposition 3-1, le premier membre de l'égalité (3-32) tend verts zéro avec ε, donc:

$$(3\text{-}34)\qquad \int_\Omega \varepsilon\,(\hat{X}^\varepsilon\,\hat{V}^{k\varepsilon} - \tilde{q}^{k\varepsilon}\,\tilde{Z}^\varepsilon).\nabla\psi\,dx + \int_\Omega (\varepsilon^2\,F^\varepsilon\,.\,\hat{V}^{k\varepsilon} - \tilde{Z}^\varepsilon)\,\psi\,dx \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.$$

Examinons maintenant la convergence de chacune des fonctions interfenant dans cette relation:

D'après la convergence (3-16) du théorème 3-1 et l'estimation de (3-33) concernant la fonction $\tilde{r}^\varepsilon$ on a:

$$(3\text{-}35)\qquad \varepsilon\hat{X}^\varepsilon = \varepsilon^2 Q^\varepsilon - \varepsilon\tilde{r}^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} P \qquad \text{dans } \mathbb{L}^2(\Omega) \text{ fort.}$$

D'après les notations (3-25), si l'on désigne par X_f la prolongée par Y-périodicité de la fonction caractéristique de Y_f alors:

$$\left|\begin{array}{ll} \tilde{V}^{k\varepsilon}_\alpha(x) = V^k_\alpha\, X_f(\frac{x}{\varepsilon}) & (\alpha = g,\ell). \\ \tilde{V}^{k\varepsilon}(x) = V^k(\frac{x}{\varepsilon})\, X_f(\frac{x}{\varepsilon}) = \left(V^k_g(\frac{x}{\varepsilon}) + V^k_\ell(\frac{x}{\varepsilon})\right) X_f(\frac{x}{\varepsilon}) & \\ \tilde{W}^\varepsilon(x) = W(\frac{x}{\varepsilon})\, X_f(\frac{x}{\varepsilon}) & \end{array}\right.$$

Grâce à la périodicité de ces fonctions on a donc:

$$(3\text{-}36)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \tilde{V}^{k\varepsilon}_\alpha \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \mathcal{M}_Y(V^k_\alpha) & \text{dans } \mathbb{L}^2(\Omega) \text{ faible.} & (\alpha = g,\ell) \\ \tilde{V}^{k\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \mathcal{M}_Y(V^k) & \text{dans } \mathbb{L}^2(\Omega) \text{ faible.} & \\ \tilde{W}^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \mathcal{M}_Y(W) & \text{dans } \mathbb{L}^2(\Omega) \text{ faible.} & \end{array}\right.$$

où l'on a noté: $\mathcal{M}_Y(\psi)(x) = \frac{1}{|Y|}\int_{Y_f} \psi(x,y)\,dy$ (pour toute fonction ψ définie sur $\Omega\times Y$).

D'après le théorème 3-1 et les convergences précédentes on a :

$$(5\text{-}37) \qquad \widetilde{Z}^{\varepsilon} = \widetilde{U}^{\varepsilon} - \widetilde{W}^{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} U - \mathcal{M}_Y(W) \qquad \text{dans } \mathbb{L}^2(\Omega) \text{ faible.}$$

Enfin, d'après l'expression (2-6) des forces volumiques F^{ε}, on a:

$$\varepsilon^2 F^{\varepsilon} \widetilde{V}^{k\varepsilon}(x) = \varepsilon^2 F^{\varepsilon}(\tfrac{x}{\varepsilon}) V^k(\tfrac{x}{\varepsilon}) \chi_f(\tfrac{x}{\varepsilon}) =$$

et

$$\varepsilon^2 F^{\varepsilon} \widetilde{V}^{k\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \mathcal{M}_Y(F^{-2} V^k) \qquad \text{dans } \mathbb{L}^2(\Omega) \text{ faible.}$$

mais:

$$F^{-2}(x,y) = \begin{cases} F_g^{-2}(x) & \text{si } y \in Y_g \\ F_\ell^{-2}(x) & \text{si } y \in Y_\ell \end{cases}$$

donc: $\mathcal{M}_Y(F^{-2} V^k \chi_\ell) = F_g^{-2} \mathcal{M}_Y(V^k \chi_g) + F_\ell^{-2} \mathcal{M}_Y(V^k \chi_\ell)$. D'où la convergence suivante:

$$(3\text{-}38) \qquad \varepsilon^2 F^{\varepsilon} \widetilde{V}^{k\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} F_g^{-2} \mathcal{M}_Y(V^k \chi_g) + F_\ell^{-2} \mathcal{M}_Y(V^k \chi_\ell) \qquad \text{dans } \mathbb{L}^2(\Omega) \text{ faible.}$$

En utilisant (3-33) à (3-38), le passage à la limite dans la relation (3-32) donne alors:

$$(3\text{-}39) \qquad \int_\Omega -K_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx = \int_\Omega \left(M_{ik}^g \, (F_g^{-2})_i + M_{ik}^\ell \, (F_\ell^{-2})_i - U_k + \mathcal{M}_Y(W_k) \right) \varphi \, dx$$

où l'on a noté :

$$(3\text{-}40) \qquad \left| \begin{array}{l} K_{ik} = \mathcal{M}_Y(V_i^k) = \dfrac{1}{|Y|} \displaystyle\int_{Y_f} V_i^k(y) \, dy \\[2ex] M_{ik}^\alpha = \mathcal{M}_Y(V_i^k \chi_\alpha) = \dfrac{1}{|Y|} \displaystyle\int_{Y_\alpha} V_i^k(y) \, dy \qquad (\alpha = g, \ell) \end{array} \right.$$

La relation (3-32) étant vraie pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on en déduit que:

$$(3\text{-}41) \qquad U_j - \mathcal{M}_Y(V_j^k) = M_{ij}^{\ell}\,(F_{\ell}^{-2})_i + M_{ij}^{g}\,(F_g^{-2})_i - K_{ij}\frac{\partial P}{\partial x_i} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega)$$

Cherchons maintenant les relations qui lient les constantes M_{ij}^{α} aux perméabilités K_{ij}^{α} et K_{ij} définies par le théorème 3-2. En prenant V^i et V_{α}^i comme fonctions-test respectivement dans les problèmes variationnels (2-31) et (2-32) on a:

$$\int_{Y_f} 2\mu\; D_{mn}^{y}(V_{\alpha}^j) D_{mn}^{y}(V^i)\; dy = \int_{Y_{\alpha}} V_j^i\; dy = |Y|\, M_{ji}^{\alpha}$$

$$\int_{Y_f} 2\mu\; D_{mn}^{y}(V^j) D_{mn}^{y}(V_{\alpha}^i)\; dy = \int_{Y_f} (V_{\alpha}^i)_j\; dy = |Y|\, K_{ji}^{\alpha}$$

En comparant les premiers membre de ces relations, il est clair que:

$$M_{ij}^{\alpha} = K_{ji}^{\alpha} \qquad (i,j = 1,2,3 \text{ et } \alpha = g,\ell).$$

Et puisque les K_{ij} sont symétriques d'après (2-25) et (2-26), la relation (3-41) peut s'écrire aussi sous la forme:

$$(3\text{-}41) \qquad U_i - \mathcal{M}_Y(V_i^k) = K_{ij}^{\ell}\,(F_{\ell}^{-2})_j + K_{ij}^{g}\,(F_g^{-2})_j - K_{ij}\frac{\partial P}{\partial x_i} \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Ce qui n'est rien d'autre que la relation (3-23) du théorème 3-2.

Montrons maintenant que la limite P vérifie les équations (3-24) annoncées par le théorème 3-2. D'après le théorème 3-1, la limite P est de moyenne nulle sur Ω et la limite U vérifie:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(U) = 0 & \textit{dans } \Omega \\ U.\,n = 0 & \textit{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Il suffit alors de remplacer dans ces équations la limite U par son expression (3-41) pour obtenir le problème aux limites (3-23) que vérifie la limite P.

D'après la coercivité des constantes K_{ij} qui a été établie dans la relation (2-6) du théorème 2-1, les équations (3-23) forment un problème de Neumann classique. La limite P est alors déterminée de manière unique ainsi que la limite U grâce à la relation (3-22). Par conséquent, on peut affirmer dans le théorème 3-1 que c'est toute la suite $(\widetilde{U}^{\varepsilon}, \varepsilon^2 Q^{\varepsilon})$ qui converge vers (U,P) et non pas uniquement une sous-suite extraite. On rappelle que $\widetilde{U}^{\varepsilon}$ désigne le prolongement de la vitesse U^{ε} par zéro en dehors du domaine Ω_f^{ε} occupé par les deux fluides (g) et (ℓ), et Q^{ε} est prolongement de la pression P^{ε} défini par la proposition 3-2 . □

En comparant les équations (2-24) (2-27) obtenues par la méthode des échelles multiples avec les équations (3-23) et les relations (3-22) obtenues par la méthode variationnelle, on a:

$$\begin{cases} P^{-2} = P & \text{dans } L^2(\Omega)/\mathbb{R} \\ \mathcal{M}_Y(U^0) = U & \text{dans } \mathbb{L}^2(\Omega) \end{cases}$$

Rappelons que U^0 et P^{-2} sont les premiers termes du développement asymptotique (2-1) sous la forme duquel à été recherchée la solution $(U^{\varepsilon}, P^{\varepsilon})$:

$$\begin{cases} U^{\varepsilon}(x) = U^0(x,y) + \varepsilon\, U^1(x,y) + \varepsilon^2\, U^2(x,y) + \cdots\cdots \\ P^{\varepsilon}(x) = \dfrac{1}{\varepsilon^2} P^{-2}(x,y) + \dfrac{1}{\varepsilon}\, P^{-1}(x,y) + P^0(x,y) + \varepsilon\, P^1(x,y) + \cdots ; \quad y = \dfrac{x}{\varepsilon} \end{cases}$$

La méthode variationnelle et La méthode des échelles multiples donnent alors les mêmes coefficients homogénéisés, c'est à dire, les perméabilités K_{ij}^{ℓ}, K_{ij}^{g} et K_{ij}.

TROISIEME PARTIE

EQUATIONS DE REYNOLDS ET ECOULEMENT DE DEUX FLUIDES NON-MISCIBLES ET DE FAIBLE EPAISSEUR

INTRODUCTION III

L'écoulement d'un fluide **monophasique** à travers un **interstice entre deux solides** est souvent décrit par la **loi de Reynolds**. Cette loi a été établie initialement par Reynolds en 1886 [32] d'une façon empirique. L'application de cette loi est vouée à l'échec dans certaines situations physiques (Fatino, Fene et Godet [17], Bayada et Chambat [4]) mais dans d'autres situations, elle pêut être justifiée de façon rigoureuse par des méthodes mathématiques. Elle s'obtient comme limite des équations de **Stokes** lorsque **l'épaisseur de l'interstice tend vers zéro** (Bayada et Chambat [3], Cimatti [8], Dridi [14]).

On considère ici un cas plus général où **l'interstice entre les deux solides** peut être occupée par **deux fluides non-miscibles**. On suppose que les deux fluides obeissent tous deux aux équations de Stokes et qu'ils adhèrent aux deux solides. Sur l'interface fluide-fluide on tient compte des efforts capillaires dûs aux **tensions interfaciales**. Sur les entrées-sorties des deux fluides, on considère des conditions mixtes: la vitesse est imposée sur une partie du bord, et les contraintes normales sont imposées sur l'autre partie. L'interstice occupé par les deux fluides est d'une **faible épaisseur** comparée aux autres dimensions du domaine, et on s'intéresse au **comportement asymptotique de l'écoulement** lorsque cette épaisseur tend vers zéro.

En s'inspirant des méthodes de [3], on établit des résultats de convergences pour la vitesse et la pressions des deux fluides. Les équations limites obtenues superposent à la loi de **Reynolds** classique des **termes de couplage** qui représentent les effets d'un fluide sur l'autre.

1/ DESCRIPTION DU PROBLEME:

On considère un interstice Ω_f^δ entre deux solides occupé par deux fluides (g) et (ℓ). L'interstice est d'une faible épaisseur comparée aux autres dimensions. Elle est de l'ordre d'un paramètre δ destiné à tendre vers zéro. On s'intéresse alors au comportement asymptotique de l'écoulement de ces deux fluides.

Pour que tous les calculs soit menés à leur termes, on va considérer une géométrie particulière, cependant, beaucoups de résultats restent valables dans des géométries plus générales.

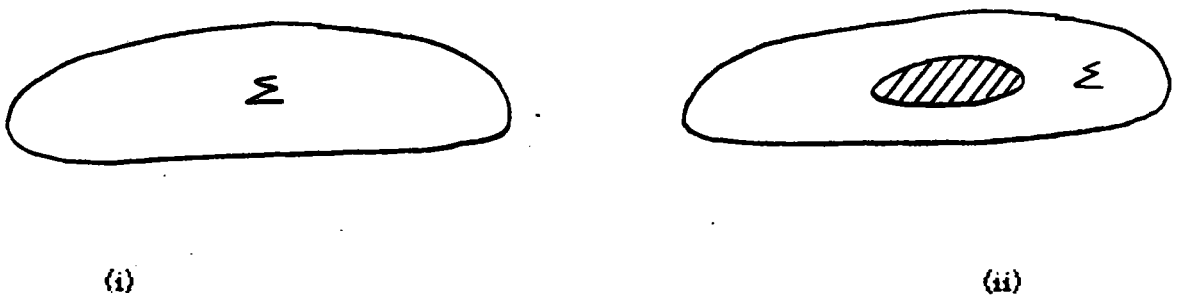
Soit Σ une surface connexe du plan (x_1,x_2) de $\mathbb{R}^3$ (fig 1-1). On définit sur $\bar{\Sigma}$ deux fonctions Ψ et S telles que:

$$(1\text{-}1)\qquad \begin{cases} \Psi,\ S:\ \bar{\Sigma} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ 0 \le \Psi(x_1,x_2) \le S(x_1,x_2) \qquad \text{p.p. dans } \Sigma \end{cases}$$

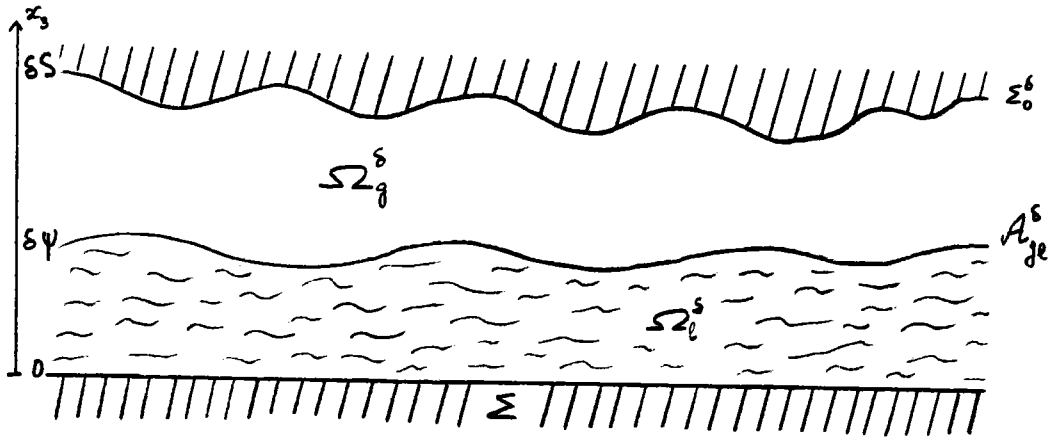
Les fluides (g) et (ℓ) occupent respectivement les ouverts Ω_g^δ et Ω_ℓ^δ définis par:

$$(1\text{-}2)\qquad \begin{cases} \Omega_\ell^\delta = \left\{ (x_1,x_2,x_3) \text{ tels que: } x'=(x_1,x_2)\in \Sigma \text{ et } 0 < x_3 < \delta\Psi(x') \right\} \\ \Omega_g^\delta = \left\{ (x_1,x_2,x_3) \text{ tels que: } x'=(x_1,x_2)\in \Sigma \text{ et } \delta\,\Psi(x') < x_3 < S(x') \right\} \end{cases}$$

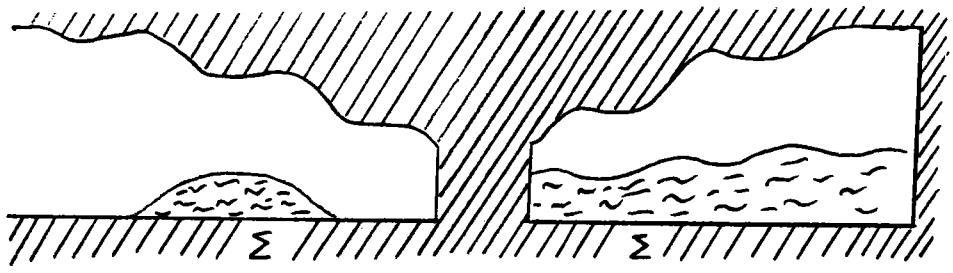
où δ est un paramètre réel strictement positif. (figures: 1-2, 1-3 et 1-4).



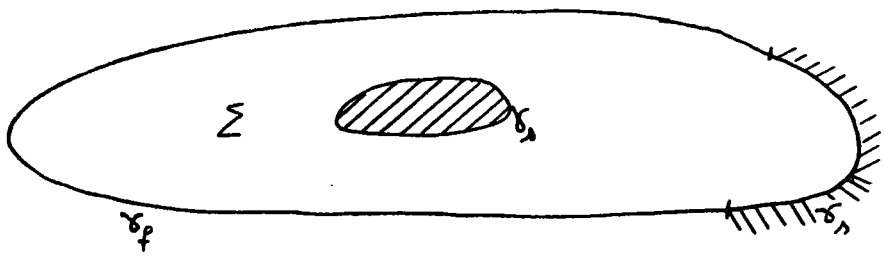
(figure 1-1)



(figure 1-2)



(figure 1-3)



(figure 1-4)

La surface Σ peut être partagée en trois parties disjointes, Σ_ℓ , Σ_g et Σ_ℓ^g , en dessus desquelles on a respectivement, uniquement le fluide (ℓ), uniquement le fluide (g) et une superposition des deux fluides (ℓ) et (g):

$$
(1\text{-}3)\qquad
\left|
\begin{array}{l}
\overline{\Sigma} = \overline{\Sigma}_\ell \cup \overline{\Sigma}_g \cup \overline{\Sigma}_\ell^g \\
\Sigma_\ell = \left\{ (x_1,x_2,0) \,;\; (x_1,x_2) \in \Sigma \text{ et } \Psi(x_1,x_2) = S(x_1,x_2) \right\} \\
\Sigma_g = \left\{ (x_1,x_2,0) \,;\; (x_1,x_2) \in \Sigma \text{ et } \Psi(x_1,x_2) = 0 < S(x_1,x_2) \right\} \\
\Sigma_\ell^g = \left\{ (x_1,x_2,0) \,;\; (x_1,x_2) \in \Sigma \text{ et } 0 < \Psi(x_1,x_2) < S(x_1,x_2) \right\}
\end{array}
\right.
$$

La frontière de La surface Σ peut se décomposer en deux parties, un bord γ_s qui génère une intérface latérale fluides-solide ou une face latérale sur laquelle la vitesse est une donnée nulle, et un bord γ_f qui génère les entrées et sorties des fluides (figure 1-4)):

$$
(1\text{-}4)\qquad \partial\Sigma = \gamma = \gamma_s \cup \gamma_f
$$

La réunion des deux fluides (g) et (ℓ) occupe l'ouvert Ω_f^δ défini par:

$$
(1\text{-}5)\qquad
\left|
\begin{array}{l}
\bullet\ \Omega_f^\delta = \Omega_\ell^\delta \cup \Omega_g^\delta \cup \mathcal{A}_{g\ell}^\delta \\
\text{où } \mathcal{A}_{g\ell}^\delta \text{ est l'interface séparant les deux fluides (g) et } (\ell)\text{, i.e:} \\
\mathcal{A}_{g\ell}^\delta = \left\{ (x_1,x_2,x_3) \,;\; (x_1,x_2) \in \Sigma \text{ et } x_3 = \delta\, \Psi(x_1,x_2) \right\} \\
\\
\bullet\ \overline{\partial\Omega_f^\delta} = \overline{\mathcal{A}}_{fs}^\delta \cup \overline{\Gamma}^\delta \\
\text{où } \mathcal{A}_{fs}^\delta \text{ désigne les interfaces fluides-solides et } \Gamma^\delta \text{ les entrées et sorties des deux} \\
\text{fluides:} \\
\Gamma^\delta = \left\{ (x_1,x_2,x_3) \,;\; (x_1,x_2) \in \gamma_f \text{ et } 0 < x_3 < \delta\, S(x_1,x_2) \right\} \\
\overline{\mathcal{A}}_{fs}^\delta = \overline{\Sigma} \cup \overline{\Sigma}_0^\delta \cup \overline{\Gamma}_s^\delta \\
\Sigma_0^\delta = \left\{ (x_1,x_2,x_3) \,;\; (x_1,x_2) \in \Sigma \text{ et } x_3 = \delta\, S(x_1,x_2) \right\} \\
\Gamma_s^\delta = \left\{ (x_1,x_2,x_3) \,;\; (x_1,x_2) \in \gamma_s \text{ et } 0 < x_3 < \delta\, S(x_1,x_2) \right\} \\
\\
\text{les surfaces } \Sigma \text{ , } \Sigma_0^\delta \text{ et } \Gamma_s^\delta \text{ représentent les interfaces des fluides avec le solide,} \\
\text{respectivement, inférieures, supérieures et latérales (fig. 1-4).}
\end{array}
\right.
$$

Les frontières de chaque ouvert Ω_α^δ occupé par le fluide (α), (α= g,ℓ), sont définies par:

$$\overline{\partial\Omega}_\alpha^\delta = \overline{\Gamma}_\alpha^\delta \cup \overline{\mathcal{A}}_{\alpha s}^\delta \qquad (\alpha = g,\ell)$$

les surfaces Γ_α^δ et $\mathcal{A}_{\alpha s}^\delta$ désignent respectivement les entrées-sorties du fluide (α) et ses interfaces avec le solide:

$$\Gamma_\ell^\delta = \left\{ (x_1,x_2,x_3) \,;\; (x_1,x_2) \in \gamma_f \text{ et } 0 < x_3 < \delta\,\Psi(x_1,x_2) \right\}$$

$$\Gamma_g^\delta = \left\{ (x_1,x_2,x_3) \,;\; (x_1,x_2) \in \gamma_f \text{ et } \delta\,\Psi(x_1,x_2) < x_3 < \delta\,S(x_1,x_2) \right\}$$

(1-6)

$$\overline{\mathcal{A}}_{\ell s}^\delta = \overline{\Sigma}_\ell \cup \overline{\Sigma}_{o\ell}^\delta \cup \overline{\Gamma}_{s\ell}^\delta$$

$$\Sigma_{o\ell}^\delta = \left\{ (x_1,x_2,x_3) \,;\; (x_1,x_2) \in \Sigma_\ell \text{ et } x_3 = \delta\,\Psi(x_1,x_2) = \delta\,S(x_1,x_2) \right\}$$

$$\Gamma_{s\ell}^\delta = \left\{ (x_1,x_2,x_3) \,;\; (x_1,x_2) \in \gamma_s \text{ et } 0 < x_3 < \delta\,\Psi(x_1,x_2) \right\}$$

$$\overline{\mathcal{A}}_{gs}^\delta = \overline{\Sigma}_g \cup \overline{\Sigma}_{og}^\delta \cup \overline{\Gamma}_{sg}^\delta$$

$$\Sigma_{og}^\delta = \left\{ (x_1,x_2,x_3) \,;\; (x_1,x_2) \in \Sigma \text{ et } x_3 = \delta\,S(x_1,x_2) > \delta\,\Psi(x_1,x_2) \right\}$$

$$\Gamma_{sg}^\delta = \left\{ (x_1,x_2,x_3) \,;\; (x_1,x_2) \in \gamma_s \text{ et } \delta\,\Psi(x_1,x_2) < x_3 < \delta\,S(x_1,x_2) \right\}$$

Comme dans la partie II précédente, les deux fluides sont supposés incompressibles et non-miscibles. Le fluide (ℓ) est mouillant et le fluide (g) est non-mouillant. La vitesse U^δ et la pression P^δ vérifient le même problème (1-4) du premier paragraphe de la partie II, mais, sur les entrées et sorties Γ^δ des fluides, on va étudier parallèlement un autre type de conditions aux limites. De façon précise, on suppose que les deux fluides satisfont aux équations de Stokes dans chaque Ω_α^δ et qu'ils adhèrent au solide, qui lui, est supposé rigide et immobile. Sur les interfaces $\mathcal{A}_{g\ell}^\delta$ séparant les deux fluides, la vitesse est continue par contre les contraintes normales présentent une discontinuité due aux tensions interfaciales. Sur une partie des entrées-sorties des fluides on impose une vitesse U^δ nulle, ce qui revient à considérer cette

partie du bord comme une interface fluide-solide (contenue dans $\mathcal{A}^{\delta}_{fs}$), sur l'autre partie Γ^{δ} on suppose que les efforts surfaciques $(2\,\mu^{\delta}\,D_{ij}(U^{\delta})n_j - P^{\delta}\,n_i)$ sont donnés:

(1-7)

Dans chaque Ω^{δ}_{α} $(\alpha = g,\ell)$:

$$-2\,\mu_{\alpha}\frac{\partial}{\partial x_j}D_{ij}(U^{\delta}) + \frac{\partial P^{\delta}}{\partial x_i} = F^{\delta}_i$$

$$\mathrm{div}(U^{\delta}) = 0.$$

Sur les interfaces $\mathcal{A}^{\delta}_{g\ell}$ fluide(g) -fluide(ℓ) :

$$[\![U^{\delta}]\!]_{g\ell} = 0$$

$$[\![2\,\mu^{\delta}\,D_{ij}(U^{\delta})n_j - P^{\delta}\,n_i\,]\!]_{g\ell} = 0.$$

Sur les interfaces fluide-solide et une partie des entrées-sorties, notées $\mathcal{A}^{\delta}_{fs}$:

$$U^{\delta} = 0.$$

Sur une autre partie Γ^{δ} des entrées-sorties des fluides :

$$2\,\mu^{\delta}\,D_{ij}(U^{\delta})n_j - P^{\delta}\,n_i = G^{\delta}.$$

Dans les équations (1-7) les notations sont les même que celle de la partie II (1-3) où l'on remplace le paramètre ε par le nouveau paramètre δ qui traduit la dépendance des données et de la solution par rapport à l'épaisseur du fluide. La seule nouvelle donnée est la fonction G^{δ}, elle n'est connue qu'à une constante additive près, mais, quitte à faire un changement de pression P^{δ}, on la suppose connue et on cherchera une pression de moyenne nulle sur Ω^{δ}_f:

(1-9)
$$\int_{\Omega^{\delta}_f} P^{\delta}\,dx = 0$$

Avant d'étudier le comportement de la vitesse U^{δ} et de la pression P^{δ} lorsque "l'épaisseur" δ tend vers zéro, on va vérifier que ce problème admet une solution. L'étude de

l'existence et l'unicité de la solution de ce problème est analogue à celle de la partie II. On va d'abord écrire ces équation (1-7) sous la forme variationnelle de Brezzi.

1-2) Existence et unicité de la solution:

On introduit les espaces fonctionnels:

$$(1\text{-}9)\qquad \left|\begin{array}{l} \mathcal{V}^{\delta} = \left\{ v \in \mathbb{H}^1(\Omega_f^{\delta});\ v = 0 \text{ sur } \mathcal{A}_{fs}^{\delta} \right\} \ ; \qquad \mathbb{H}^1(\Omega_f^{\delta}) = \left(H^1(\Omega_f^{\delta})\right)^3 \\ L_0^2(\Omega_f^{\delta}) = \left\{ q \in L^2(\Omega_f^{\delta});\ \displaystyle\int_{\Omega_f^{\delta}} q\ dx = 0 \right\}. \end{array}\right.$$

munis respectivement des normes usuelles suivantes:

$$\left| v \right|_{1,\Omega_f^{\delta}} = \left(\int_{\Omega_f^{\delta}} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left| q \right|_{0,\Omega_f^{\delta}} = \left(\int_{\Omega_f^{\delta}} q^2\ dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

où l'on adopte, comme dans tout ce qui précède et dans toute la suite, la convention de sommation sur les indices répétés et non soulignés.

Sur les données on fait les hypothèses suivantes:

$$(1\text{-}10)\qquad \left|\begin{array}{l} F^{\delta} \in L^2(\Omega_f^{\delta}). \\ H^{\delta} \in L^2(\mathcal{A}_{gp}^{\delta}). \\ G^{\delta} \in L^2(\Gamma^{\delta}). \\ \text{Les viscosités } \mu_{\alpha} \text{ sont des constantes strictement positives.} \\ \text{La tension } \sigma \text{ est constante.} \end{array}\right.$$

Les appartenances de G^δ et de la courbure H^δ respectivement à $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^\delta)$ et à $H^{-\frac{1}{2}}(\mathcal{A}^\delta_{gl})$ sont suffisantes pour la valididé des résultats qui suiveront, mais on les suppose respectivement $L^2(\Gamma^\delta)$ et dans $L^2(\mathcal{A}^\delta_{gl})$ pour simplifier l'écriture, de plus, ces hypothèses sont largement satisfaites physiquement.

On définit maintenant pour tout couple (u,v) de $\mathcal{U}^\delta \times \mathcal{U}^\delta$ et toute fonction q de $L^2_0(\Omega^\delta_f)$ les formes suivantes:

$$
(1\text{-}11)\quad \left|\begin{array}{l}
a^\delta(u,v) = \displaystyle\int_{\Omega^\delta_f} 2\mu^\delta\ D_{ij}(u)D_{ij}(v)\ dx \\[2ex]
b^\delta(v,q) = -\displaystyle\int_{\Omega^\delta_f} q\ \mathrm{div}(v)\ dx \\[2ex]
\ell^\delta(v) = \displaystyle\int_{\Omega^\delta_f} F^\delta.v\ dx + \int_{\mathcal{A}^\delta_{gl}} 2\sigma\ H^\delta\ v.n\ dr + \int_{\Gamma^\delta} G^\delta\ v.n\ dr
\end{array}\right.
$$

et on démontre le:

Théorème 1.1

Sous les hypothèses (1-10), *le problème* (1-7), *avec la condition* (1-8) *sur la pression, peut se mettre sous la forme variationnelle suivante:*

$$
(1\text{-}12)\quad \left\{\begin{array}{ll}
U^\delta \in \mathcal{U}^\delta\ ;\ P^\delta \in L^2_0(\Omega^\delta_f) & \\[1ex]
a^\delta(U^\delta,v) + b^\delta(v,P^\delta) = \ell^\delta(v)\ . & \forall\ v \in \mathcal{U}^\delta \\[1ex]
b^\delta(U^\delta,q) = 0 & \forall\ q \in L^2_0(\Omega^\delta_f)
\end{array}\right.
$$

Le problème (1-12) *admet une solution* (U^δ,P^δ) *unique avec:*

$$
(1\text{-}13)\qquad U^\delta \in \left\{ v \in \mathcal{U}^\delta\ ;\ \mathrm{div}(v) = 0 \text{ et } \int_{\Gamma^\delta} v.n\ dr = 0 \right\}
$$

Démonstration:

La formulation faible (1-12) s'obtient de manière analogue à celle du théorème 1-1 de la partie II, la seule différence est la présence d'un terme supplémentaire dans l'expression de la forme linéaire ℓ^δ, à savoir l'intégrale sur la face latérale Γ^δ de G^δ v.n.

Pour l'étude de l'existence et de l'unicité de la solution de (1-12), on utilise encore le lemme 1-1 de la partie II, c'est à dire on vérifie que les propriétées suivantes sont satisfaites:

- la forme linéaire $\ell^\delta(.)$ est continue sur $\mathcal{U}^\delta$.
- la forme bilinéaire $a^\delta(.,.)$ est continue sur $\mathcal{U}^\delta \times \mathcal{U}^\delta$ et est coercive sur:

$$\left\{ v \in \mathcal{U}^\delta \ ; \ \mathrm{div}(v) = 0 \ \text{ et } \ \int_{\Gamma^\delta} v.n \ dr = 0 \right\}$$

- la forme bilinéaire $b^\delta(.,.)$ est continue sur $\mathcal{U}^\delta \times L_0^2(\Omega_f^\delta)$ et vérifie la condition de l'inf-sup:

$$\exists\, \eta > 0 \ \text{ telle que: } \quad \inf_{q \in L_0^2(\Omega_f^\delta)} \ \sup_{v \in \mathcal{U}^\delta} \frac{b^\delta(v,q)}{|v|_{1,\Omega_f} \, |q|_{0,\Omega_f}} \geq \eta$$

La première propriété est une coséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwartz et de la continuité des traces. La continuité de la forme bilinéaire $a^\delta(.,.)$ est évidente grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwartz et celle de Poincaré, et sa coercivité est une conséquence de l'inégalité de Korn. Quant à la forme bilinéaire $b^\delta(.,.)$, sa continuité est immédiate aussi, et on va voir qu'elle vérifie la condition de l'inf-sup: d'après le lemme 1-2 de la partie II, il existe une constante C strictement positive telle que:

$$\sup_{v \in \mathbb{H}_0^1(\Omega_f^\delta)} \frac{b^\delta(v,q)}{|v|_{1,\Omega_f^\delta}} \geq C \, |q|_{0,\Omega_f^\delta} \qquad \forall\, q \in L_0^2(\Omega_f^\delta)$$

Mais, puisque $\mathbb{H}_0^1(\Omega_f^\delta) \subset \mathcal{U}^\delta$, cette inégalité reste valable si on y remplace $\mathbb{H}_0^1(\Omega_f^\delta)$ par l'espace $\mathcal{U}^\delta$:

$$\sup_{v \in \mathcal{U}^\delta} \frac{b^\delta(v,q)}{|v|_{1,\Omega_f^\delta}} \geq \sup_{v \in \mathbb{H}_0^1(\Omega_f^\delta)} \frac{b^\delta(v,q)}{|v|_{1,\Omega_f^\delta}} \geq C \, |q|_{0,\Omega_f^\delta} \qquad \forall\, q \in L_0^2(\Omega_f^\delta)$$

En divisant les deux membres de cette inégalité par $|q|_{0,\Omega_f^\delta}$ et en passant à l'inf sur $q \in L_0^2(\Omega_f^\delta)$, on obtient la condition de l'inf-sup voulue puisque la constante C ne dépend pas de q.

Les hypothèses du lemme 1-1 de la partie II sont donc satisfaites, le problème (1-12) admet alors une solution unique (U^δ, P^δ) avec U^δ de divergence nulle, et par conséquent sa composante normale $U^\delta . n$ est de moyenne nulle sur la face latérale Γ^δ, en effet:

$$- \int_{\Omega_f^\delta} \operatorname{div}(U^\delta)\, dx = \int_{\mathcal{A}_{fs}^\delta} U^\delta . n \, dr + \int_{\Gamma^\delta} U^\delta . n \, dr = \int_{\Gamma^\delta} U^\delta . n \, dr = 0$$

Ce qui achève la démonstration.□

Pour étudier le comportement asymptotique de la solution (U^δ, P^δ), lorsque δ tend vers zéro, on va d'abord faire des changements de variables pour se ramenesr à un domaine fixe, c'est à dire indépendant du paramètre δ.

2/ CHANGEMENT DE VARIABLE ET D'INCONNUES:

Pour chaque $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ on définit sur $\mathbb{R}^3$ l'application $\mathcal{H}^\delta$ suivante:

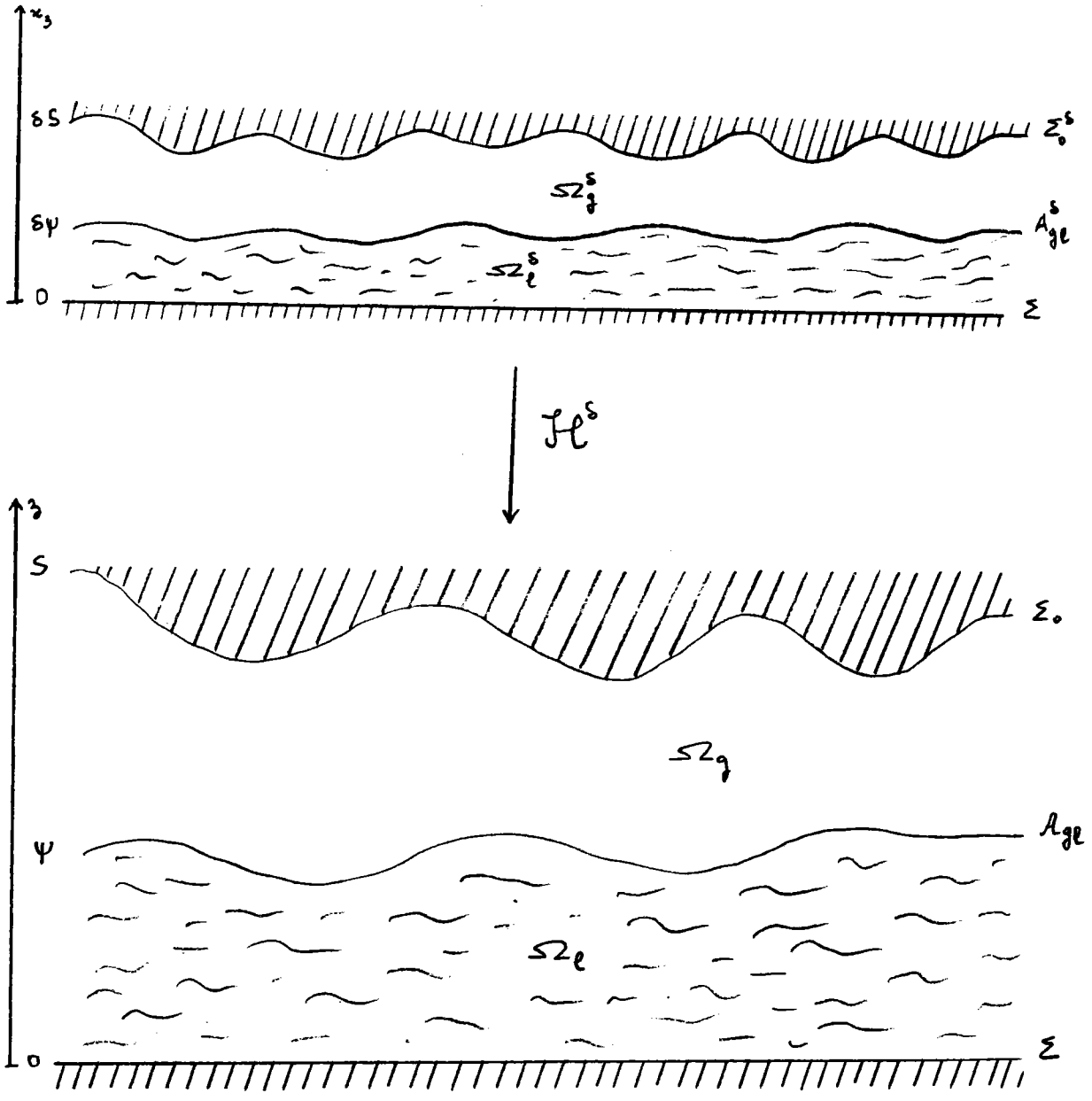
$$\text{(2-1)} \qquad \begin{aligned} \mathcal{H}^\delta : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3) &\longrightarrow \mathcal{H}^\delta(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, z) = (x_1, x_2, \frac{x_3}{\delta}) \end{aligned}$$

Les images $\Omega_\alpha = \mathcal{H}^\delta(\Omega_\alpha^\delta)$ des ouverts Ω_α^δ , $(\alpha = g, \ell)$, sont alors indépendant du paramètre δ:

$$\text{(2-2)} \qquad \begin{cases} \Omega_\ell = \left\{ (y_1, y_2, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ y = (y_1, y_2) \in \Sigma \ \text{ et } \ 0 < z < \Psi(y) \right\} \\ \Omega_g = \left\{ (y_1, y_2, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ y = (y_1, y_2) \in \Sigma \ \text{ et } \ \Psi(y) < z < S(y) \right\} \\ \Omega_f = \left\{ (y_1, y_2, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ y = (y_1, y_2) \in \Sigma \ \text{ et } \ 0 < z < S(y) \right\} \end{cases}$$

Dans la suite on notera $\mathcal{O}$ l'image de $\mathcal{O}^\delta$ par l'application $\mathcal{H}^\delta$ de tout sous- ensemble $\mathcal{O}^\delta$ de $\overline{\Omega}_f^\delta$ (i.e: on conserve les mêmes notations pour les images en ottant l'indice δ, par exemple:

$$\mathcal{H}^\delta(\mathcal{A}^\delta_{\alpha\beta}) = \mathcal{A}_{\alpha\beta} \ (\alpha, \beta = g, \ell, s); \ \mathcal{H}^\delta(\Gamma^\delta) = \Gamma; \ \mathcal{H}^\delta(\Gamma^\delta_g) = \Gamma_g; \text{ etc... (fig. 2-1).}$$



(figure 2-1)

Dans toute la suite, on notera (x_1,x_2,x_3) les coordonnées d'un point de Ω_f^δ et (y_1,y_2,z) celles d'un point dans Ω_f. Maintenant, pour toute fonction v définie sur Ω_f^δ, on définit sur l'ouvert fixe Ω_f une nouvelle fonction $\hat{v}$ par:

$$(2\text{-}3)\qquad \begin{cases} \hat{v}(y_1,y_2,z) = v(x_1,x_2,x_3) \\ (x_1,x_2,x_3) = (y_1,y_2,\delta z) = (\mathcal{H}^\delta)^{-1}(y_1,y_2,z) \end{cases}$$

Et on a les règles de calcul suivantes:

Lemme 2-1:

Pour toute fonction $v \in \mathbb{H}^1(\Omega_f^\delta)$ *on a :*

- $\left| v \right|_{1,\Omega_f^\delta} = \sqrt{\delta}\, \left| \hat{v} \right|_{1,\Omega_f}$
- $\left| \dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|_{0,\Omega_f^\delta} = \sqrt{\delta}\, \left| \dfrac{\partial \hat{v}_i}{\partial x_j} \right|_{0,\Omega_f}$ *pour* i=1,2,3 et j= 1,2.
- $\left| \dfrac{\partial v_i}{\partial x_3} \right|_{0,\Omega_f^\delta} = \dfrac{1}{\sqrt{\delta}} \left| \dfrac{\partial \hat{v}_i}{\partial z} \right|_{0,\Omega_f}$ *pour* i=1,2,3.
- $\displaystyle\int_{\Gamma^\delta} v.n \; d(\Gamma^\delta) = \delta \int_{\Gamma} \hat{v}.\hat{n} \; d(\Gamma)$

où n *et la normale extérieure à la face latérale* Γ^δ *de* Ω_f^δ *et* $\hat{n}$ *la normale extérieure à la face latérale* $\Gamma = \mathcal{H}^\delta(\Gamma^\delta)$ *de* Ω_f.

Démonstration:

D'après la définition (2-3) de la fonction $\hat{v}$, le changement de variable $(y_1,y_2,z)=(x_1,x_2,\frac{x_3}{\delta})$ donne:

$$\int_{\Omega_f^\delta} v^2(x)\; dx = \delta \int_{\Omega_f} \hat{v}^2(y,z)\; dx$$

d'où la première égalité du lemme. Pour la deuxième et la troisième égalité, on utilise le même changement de variable et les relations:

$$(2\text{-}4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial v_i}{\partial x_j}(x) = \dfrac{\partial \hat{v}_i}{\partial x_j}(y,z) & \text{pour } j=1,2 \text{ et } i=1,2,3 \\ \dfrac{\partial v_i}{\partial x_3}(x) = \dfrac{1}{\delta}\,\dfrac{\partial \hat{v}_i}{\partial z}(y,z) & \text{pour } i=1,2,3. \\ (y_1,y_2,z)=(x_1,x_2,\dfrac{x_3}{\delta}) & \end{cases}$$

pour obtenir:

$$\int_{\Omega_f^\delta} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)^2 (x)(x)\ dx = \delta \int_{\Omega_f} \left(\frac{\partial \hat{v}_i}{\partial x_j}\right)^2 (y,z)\ dx \qquad (j=1,2 \text{ et } i=1,2,3)$$

et:

$$\int_{\Omega_f^\delta} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_3}\right)^2 (x)(x)\ dx = \frac{1}{\delta} \int_{\Omega_f} \left(\frac{\partial \hat{v}_i}{\partial z}\right)^2 (y,z)\ dx \qquad (i=1,2,3).$$

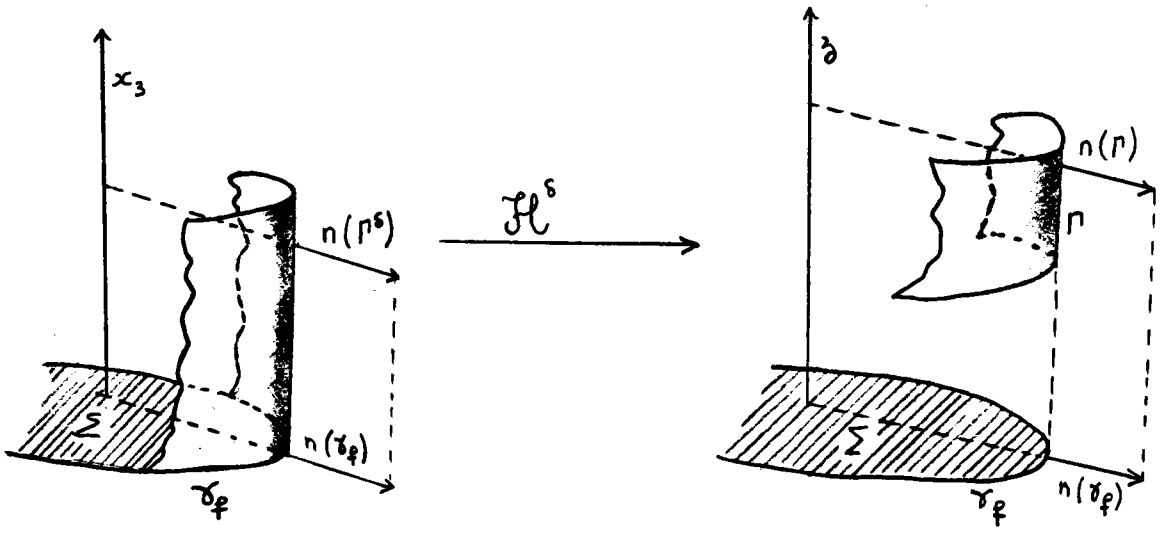
Pour la dernière égalité, remarquons que sur la face latérale Γ^δ (resp. Γ) de Ω_f^δ (resp. Ω_f), la troisième composante n_3 (resp $\hat{n}_3$) de la normale n (rep. $\hat{n}$) est nulle. Et les deux premières composantes n_1 et n_2 (resp. $\hat{n}_1$ et $\hat{n}_2$) sont indépendantes de la variable x_3 (resp. z), elles sont identiques aux composantes de la normale $n(\gamma_f)$ au bord γ_f de la surface Σ (fig. 2-2); donc:

$$(2\text{-}5)\qquad \int_{\Gamma^\delta} v.n\ d(\Gamma^\delta) = \int_{\gamma_f} \int_0^{\delta S(x')} v(x',x).\ n(\gamma_f)\ dx_3\ d(\gamma_f) \qquad (x'=(x_1,x_2))$$

$$= \delta \int_{\gamma_f} \int_0^{S(y)} \hat{v}(y,z).\ n(\gamma_f)\ dz\ d(\gamma_f) \qquad (y=(y_1,y_2))$$

$$= \delta \int_{\Gamma} \hat{v}.\hat{n}\ d(\Gamma)$$

Ce qui achève la démonstration du lemme. □



(figure 2-2)

Lemme 2-2:

Pour toute fonction $v \in \mathbb{H}^1(\Omega_f^\delta)$ *on a :*

- $$\int_{\mathcal{A}_{g\ell}^\delta} H^\delta \, v.n \, d(\mathcal{A}_{g\ell}^\delta) = \delta \int_{\mathcal{A}_{g\ell}} H^\delta \, (\hat{v}_1\hat{n}_1 + \hat{v}_2\hat{n}_2) \, d(\mathcal{A}_{g\ell}) + \int_{\mathcal{A}_{g\ell}} H^\delta \, \hat{v}_3\hat{n}_3 \, d(\mathcal{A}_{g\ell})$$
- $$\int_{\Gamma^\delta} G^\delta \, v.n \, d(\Gamma^\delta) = \delta \int_{\Gamma} \hat{G}^\delta \, \hat{v}.\hat{n} \, d(\Gamma)$$

où $\hat{G}^\delta(y,z) = G^\delta(y, \delta z)$.

Démonstration:

La normale n à la surface $\mathcal{A}_{g\ell}^\delta = \left\{ (x_1,x_2,x_3) : \ (x_1,x_2) \in \Sigma \text{ et } x_3 = \delta \, \Psi(x_1,x_2) \right\}$, orientée de Ω_g^δ vers Ω_ℓ^δ, s'exprime en fonction des dérivées partielles de Ψ comme suit:

$$(2\text{-}6) \qquad n = \frac{1}{\sqrt{1 + \delta^2 \, (\nabla\Psi)^2}} \begin{bmatrix} -\delta \dfrac{\partial\Psi}{\partial x_1} \\ -\delta \dfrac{\partial\Psi}{\partial x_2} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{où: } (\nabla\Psi)^2 = \left(\frac{\partial\Psi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial x_2}\right)^2$$

Puisque la fonction Ψ est supposée régulière, la projection de la surface $\mathcal{A}^{\delta}_{g\ell}$ sur le plan $(x_1,0,x_2)$, ou sur la surface Σ, est univoque (voir la remarque 2-1), donc:

$$\int_{\mathcal{A}^{\delta}_{g\ell}} H^{\delta} \; v.n \; d(\mathcal{A}^{\delta}_{g\ell}) = -\delta \int_{\Sigma} H^{\delta}(x') \sum_{i=1}^{2} v_i(x',\delta\Psi(x')) \frac{\partial\Psi}{\partial x_i} \, dx' + \int_{\Sigma} H^{\delta}(x') \; v_3(x',\delta\Psi(x')) \, dx'$$

où: $x' = (x_1,x_2)$.

Si on fait le changement de variables $(y_1,y_2,z)=(x_1,x_2,\frac{x_3}{\delta}) = \mathcal{H}^{\delta}(x_1,x_2,x_3)$ dans le second membre de cette égalité, alors en utilisant la définition (2-3) de la fonction $\hat{v}$, il vient:

$$(2\text{-}7) \qquad \int_{\mathcal{A}^{\delta}_{g\ell}} H^{\delta} \; v.n \; d(\mathcal{A}^{\delta}_{g\ell}) = -\delta \int_{\Sigma} H^{\delta}(y) \sum_{i=1}^{2} \hat{v}_i(y,\Psi(y)) \frac{\partial\Psi}{\partial y_i} \, dy + \int_{\Sigma} H^{\delta}(y) \; \hat{v}_3(y,\Psi(y)) \, dy.$$

Mais l'image de l'interface $\mathcal{A}^{\delta}_{g\ell}$ par l'application $\mathcal{H}^{\delta}$ est:

$$\mathcal{A}_{g\ell} = \mathcal{H}^{\delta}(\mathcal{A}^{\delta}_{g\ell}) = \left\{ (y_1,y_2,z) \; ; \; y=(y_1,y_2) \in \Sigma \text{ et } z = \Psi(y) \right\}$$

et la normale $\hat{n}$ à cette interface, orientée de Ω_g à Ω_ℓ s'écrit alors:

$$(2\text{-}8) \qquad \hat{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\nabla_y\Psi)^2}} \begin{bmatrix} -\dfrac{\partial\Psi}{\partial y_1} \\ -\dfrac{\partial\Psi}{\partial y_2} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{où: } (\nabla_y\Psi)^2 = \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y_2}\right)^2.$$

La relation (2-7) s'écrit donc:

$$\int_{\mathcal{A}_{gl}^{\delta}} H^{\delta}\ v.n\ d(\mathcal{A}_{gl}^{\delta}) = \delta \int_{\mathcal{A}_{gl}} H^{\delta}(y) \sum_{i=1}^{2} \hat{v}_i\ \hat{n}_i\ d(\mathcal{A}_{gl}) + \int_{\mathcal{A}_{gl}} H^{\delta}\ \hat{v}_3\ \hat{n}_3\ d(\mathcal{A}_{gl}).$$

d'où la première assertion du lemme.

La deuxième assertion se démontre comme l'égalité (2-5), i.e:

$$\int_{\Gamma^{\delta}} G^{\delta}\ v.n\ d(\Gamma^{\delta}) = \int_{\gamma_f} \int_{0}^{\delta S(x')} G^{\delta}(x',x)\ v(x',x).\ n(\gamma_f)\ dx_3\ d(\gamma_f) \qquad (x'=(x_1,x_2))$$

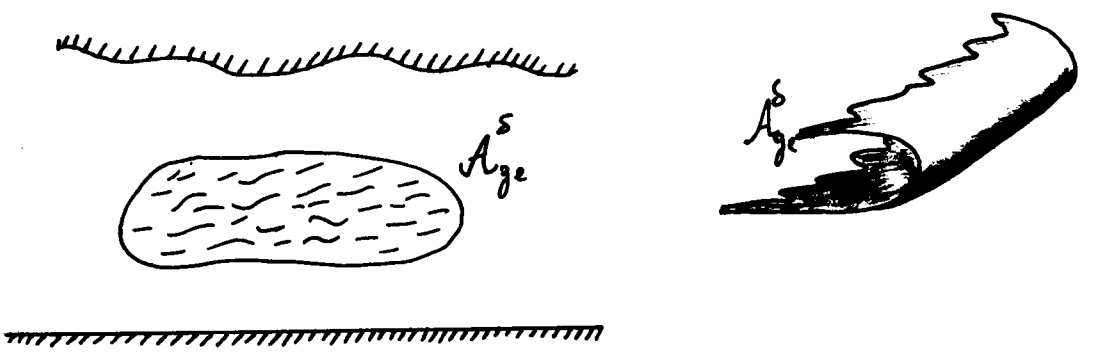
$$= \delta \int_{\gamma_f} \int_{0}^{S(y)} \hat{G}^{\delta}(y,z)\ \hat{v}(y,z).\ n(\gamma_f)\ dz\ d(\gamma_f)$$

$$= \delta \int_{\Gamma} \hat{G}^{\delta}\ \hat{v}\hat{n}\ d(\Gamma). \qquad \square$$

Remarque 2-1:

Le lemme 2-2 peut être démontré dans le cas d'une géométrie plus générale de l'interface $\mathcal{A}_{gl}^{\delta}$ en utilisant un paramétrage de la forme:

$$\mathcal{A}_{gl}^{\delta} = \left\{ (x_1,x_2,x_3)=(f_1(t),f_2(t),\delta f_3(t))\ ;\ t=(t_1,t_2)\in I \subset \mathbb{R}^2 \right\}$$



(figure 2-3)

Maintenant on va utiliser le changement de vriables et de fonctions (2-3) dans le problème variationnel (1-12) pour obtenir les équations que doivent vérifier les nouvelles inconnues $\hat{U}^\delta$ et $\hat{P}^\delta$. Commençons par voir comment le changement de variables (2-3) transforme les opérateur $D^x_{ij}(.)$ et $\mathrm{div}_x(.)$ intervenants dans (1-12):

$$D^x_{ij}(v) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)(x) \text{ et } \mathrm{div}_x(v) = \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$$

Si l'on veut exprimer $D^x_{ij}(v)$ en fonction des dérivées partielles de $\hat{v}$ par rapport aux nouvelles variables (y,z), il faut alors considérer, d'après les relations (2-4), les trois cas suivants:

(2-9)

- a) $i, j = 1, 2$ $\quad D^x_{ij}(v) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \hat{v}_i}{\partial y_j} + \frac{\partial \hat{v}_j}{\partial y_i}\right)(y,z) = D^y_{ij}(\hat{v})$

  b) $i = 1, 2$ $\quad D^x_{i3}(v) = D^x_{3i}(v) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\delta}\frac{\partial \hat{v}_i}{\partial z} + \frac{\partial \hat{v}_3}{\partial y_i}\right)(y,z)$

  c) $i = j = 3$ $\quad D^x_{33}(v) = \frac{1}{\delta}\frac{\partial \hat{v}_3}{\partial z}(y,z)$

- $\quad \mathrm{div}_x(v) = \left(\frac{\partial \hat{v}_1}{\partial y_1} + \frac{\partial \hat{v}_2}{\partial y_2} + \frac{1}{\delta}\frac{\partial \hat{v}_3}{\partial z}\right)(y,z)$

où: $(y_1,y_2,z) = (x_1,x_2,\frac{x_3}{\delta}) = \mathcal{H}^\delta(x_1,x_2,x_3)$.

Le changement de variables et de fonctions (2-3) dans l'expression (1-11) de la forme bilinéaire a^δ donne alors:

(2-10) $$a^\delta(u,v) = \frac{1}{\delta}\, a^{-1}(\hat{u},\hat{v}) + a^0(\hat{u},\hat{v}) + \delta\, a^1(\hat{u},\hat{v})$$

avec:

$$a^{-1}(\hat{u},\hat{v}) = \int_{\Omega_f} \hat{\mu}\left(\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial z}\frac{\partial \hat{v}_i}{\partial z} + 2\,\frac{\partial \hat{u}_3}{\partial z}\frac{\partial \hat{v}_3}{\partial z}\right) dydz$$

$$a^0(\hat{u},\hat{v}) = \int_{\Omega_f} \hat{\mu}\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial z}\frac{\partial \hat{v}_3}{\partial y_i} + \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial y_i}\frac{\partial \hat{v}_i}{\partial z}\right) dydz$$

$$a^1(\hat{u},\hat{v}) = \int_{\Omega_f} \hat{\mu}\sum_{i,j=1}^{2}\left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial y_j}\frac{\partial \hat{v}_j}{\partial y_i} + \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial y_i}\frac{\partial \hat{v}_i}{\partial y_i} + \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial y_i}\frac{\partial \hat{v}_3}{\partial y_i}\right) dydz$$

De même, en utilisant les nouvelles fonctions $\hat{q}$ et $\hat{v}$, la forme bilinéaire b^δ s'écrit :

$$(2\text{-}11) \qquad b^\delta(v,q) = b^0(\hat{v},\hat{q}) + \delta\, b^1(\hat{v},\hat{q})$$

avec:

$$\left|\begin{array}{l} b^0(\hat{v},\hat{q}) = \displaystyle\int_{\Omega_f} - \hat{q}\, \frac{\partial \hat{v}_3}{\partial z}\, dydz \\[2ex] b^1(\hat{v},\hat{q}) = \displaystyle\int_{\Omega_f} - \hat{q} \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial \hat{v}_{\underline{i}}}{\partial y_{\underline{i}}}\, dydz \end{array}\right.$$

Enfin, en utilisant le lemme 2-2, la forme bilinéaire ℓ^δ s'écrit:

$$(2\text{-}12) \qquad \ell^\delta(v) = \delta\, \ell^1_\delta(\hat{v}) + \delta^2\, \ell^2_\delta(\hat{v})$$

avec:

$$\left|\begin{array}{l} \ell^1_\delta(\hat{v}) = \displaystyle\int_{\Omega_f} \hat{F}^\delta . \hat{v}\, dydz + \int_{\mathcal{A}_{gl}} 2\sigma\, \frac{1}{\delta}\, H^\delta\, \hat{v}_3\, \hat{n}_3\, d(\mathcal{A}_{gl}) \\[2ex] \ell^2_\delta(\hat{v}) = \displaystyle\int_{\mathcal{A}_{gl}} 2\sigma\, \frac{1}{\delta}\, H^\delta \sum_{i=1}^{2} \hat{v}_{\underline{i}}\, \hat{n}_{\underline{i}}\, d(\mathcal{A}_{gl}) + \int_{\Gamma} \frac{1}{\delta}\, \hat{G}^\delta\, \hat{v}\, .\hat{n}\, d(\Gamma) \end{array}\right.$$

On va voir maintenant que la nouvelle vitesse $\hat{U}^\delta$ et la nouvelle pression $\hat{P}^\delta$ définies par:

$$(2\text{-}13) \quad \left\{\begin{array}{l} \hat{U}^\delta(y_1,y_2,z) = U^\delta(y_1,y_2,\delta z) \\[2ex] \hat{P}^\delta(y_1,y_2,z) = P^\delta(y_1,y_2,\delta z) \end{array}\right. \qquad (y_1,y_2,z) \in \Omega_f \text{ et } (y_1,y_2,\delta z) = (x_1,x_2,x_3) \in \Omega_f^\delta.$$

vérifient un problème variationnel qui a lieu dans des espaces indépendant du paramètre δ.

Si l'on note:

(2-14)
$$\mathcal{U} = \left\{ \hat{v} \in \mathbb{H}^1(\Omega_f);\ \hat{v} = 0 \text{ sur } \mathcal{A}_{fs} \right\}$$

$$L_0^2(\Omega_f) = \left\{ \hat{q} \in L^2(\Omega_f);\ \int_{\Omega_f} \hat{q}\ dydz = 0 \right\}.$$

alors on a le:

Lemme 2-3:

Les nouvelles fonctions $\hat{U}^\delta$ *et* $\hat{P}^\delta$ *définies par* (2-13) *vérifient:*

(2-15) • $\hat{U}^\delta \in \mathcal{U}$ *et* $\int_\Gamma \hat{U}^\delta . \hat{n}\ d(\Gamma) = 0$; $\hat{P}^\delta \in L_0^2(\Omega_f)$

(2-16) • $\forall\, \hat{v} \in \mathcal{U}$:

$$\frac{1}{\delta}\ a^{-1}(\hat{U}^\delta, \hat{v}) + a^0(\hat{U}^\delta, \hat{v}) + \delta\ a^1(\hat{U}^\delta, \hat{v}) + b^0(\hat{v}, \hat{P}^\delta) + \delta\ b^1(\hat{v}, \hat{P}^\delta) = \delta\ \mathcal{L}_\delta^1(\hat{v}) + \delta^2\ \mathcal{L}_\delta^2(\hat{v})$$

(2-17) • $\forall\, \hat{q} \in L_0^2(\Omega_f)$:

$$b^0(\hat{U}^\delta, \hat{q}) + \delta\, b^1(\hat{U}^\delta, \hat{q}) = 0\,.$$

Démonstration:

Il est clair que l'application $(\hat{\cdot})$: $v \longrightarrow \hat{v} = v \circ (\mathcal{H}^\delta)^{-1}$ est bijective de $\mathbb{H}^1(\Omega_f^\delta)$ (resp. $L^2(\Omega_f^\delta)$) dans $\mathbb{H}^1(\Omega_f)$ (resp. $L^2(\Omega_f)$).

Et il est facile de vérifier aussi qu'on a l'équivalence:

$$v = 0 \text{ sur } \mathcal{A}_{fs}^\delta \Longleftrightarrow \hat{v} = 0 \text{ sur } \mathcal{A}_{fs} = \mathcal{H}^\delta(\mathcal{A}_{fs}^\delta)$$

De plus, puisque pour toute fonction q de $L^2(\Omega_f^\delta)$: $\int_{\Omega_f^\delta} q\ dx = \delta \int_{\Omega_f} \hat{q}\ dydz$, on a:

$$q \in L_0^2(\Omega_f^\delta) \Longleftrightarrow \hat{q} \in L_0^2(\Omega_f).$$

Cette application est alors une bijection de l'espace $\mathcal{U}^\delta$ (resp.$L^2_0(\Omega_f^\delta)$) dans $\mathcal{U}$ (resp.$L^2_0(\Omega_f)$).

Et d'après le lemme 2-1 et la relation (1-13) du théorème 1-1:

$$\int_\Gamma \hat{U}^\delta . \hat{n} \; d(\Gamma) = \frac{1}{\delta} \int_{\Gamma^\delta} U^\delta . n \; d(\Gamma^\delta) = 0.$$

On a donc l'assertion (2-15) du Lemme 2-3. les autres assertions s'obtiennent grâce aux propriétés précédentes de l'application: $v \longrightarrow \hat{v} = v_0(\mathcal{H}^\delta)^{-1}$, et en utilisant les relations (2-10) à (2-13) dans le problème (1-12) vérifié par le couple (U^δ, P^δ).□

On va maintenant étudier le comportement asymptotique des nouvelles fonctions $\hat{U}^\delta$ et $\hat{P}^\delta$ lorsque le paramètre δ tend vers zéro. On commençe par établir des estimations a priori qui nous permettront de passer à la limite dans les équations (2-16) et (2-17).

3/ ESTIMATIONS A PRIORI:

On va d'abord préciser comment la courbure moyenne H^δ de l'interface $\mathcal{A}^\delta_{g\ell}$ dépend du paramètre δ. Rappelons que:

$$\mathcal{A}^\delta_{g\ell} = \left\{ (x_1,x_2,x_3) \; ; \; (x_1,x_2) \in \Sigma \text{ et } x_3 = \delta \, \Psi(x_1,x_2) \right\},$$

la courbure moyenne H^δ s'écrit alors:

$$(3\text{-}1) \qquad H^\delta = \delta \frac{(I + \delta^2 J)}{2(1 + \delta^2 L)^{-3/2}}$$

avec:

$$\left| \begin{array}{l} I = \Delta\Psi = \dfrac{\partial^2\Psi}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2\Psi}{\partial x_2^2} \\ J = \dfrac{\partial^2\Psi}{\partial x_1^2}\left(\dfrac{\partial\Psi}{\partial x_2}\right)^2 + \dfrac{\partial^2\Psi}{\partial x_2^2}\left(\dfrac{\partial\Psi}{\partial x_1}\right)^2 - 2\,\dfrac{\partial\Psi}{\partial x_1}\,\dfrac{\partial\Psi}{\partial x_2}\,\dfrac{\partial^2\Psi}{\partial x_1 \partial x_2} \\ L = (\nabla_x\Psi)^2 = \left(\dfrac{\partial\Psi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\Psi}{\partial x_2}\right)^2. \end{array} \right.$$

On fait maintenant l'hypothèse suivante, qui est satisfaite si la fonction Ψ est régulière, par exemple si Ψ et ses dérivées partielles premières et secondes sont dans $L^{\infty}(\Sigma)$:

(3-2) $\quad |H^{\delta}| \leq C\,\delta \quad$ p.p. où C est une constante indépendante de δ.

Sur les données F^{δ} et G^{δ} on fait les hypothèses suivantes:

(3-3)
$$\begin{cases} \hat{F}(y,z) = F^{\delta}(y,\delta z) = \begin{cases} F^{\ell}(y) \text{ dans } \Omega_{\ell} \text{ i.e: si } 0 < z < \Psi(y). \\ F^{g}(y) \text{ dans } \Omega_{g} \text{ i.e: si } \Psi(y) < z < S(y). \end{cases} \\ \text{avec: } F^{\alpha} \in L^{2}(\Sigma),\ (\alpha = g,\ell) \end{cases}$$

(3-4) $\quad |\hat{G}^{\delta}(y,z)| = |G^{\delta}(y,\delta z)| \leq C\,\delta \quad$ p.p. où C est une constante indépendante de δ.

Et on notera dans toute la suite:

- $\nabla v = \left(\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)_{j=1,2,3}^{i=1,2,3}$ pour les fonctions v définies sur Ω_f^{δ}

- $\nabla_y \hat{v} = \left(\dfrac{\partial \hat{v}_i}{\partial y_j}\right)_{j=1,2}^{i=1,2,3}$
- $\nabla \hat{v} = \begin{pmatrix} \nabla_y \hat{v} \\ \dfrac{\partial \hat{v}_i}{\partial z} \end{pmatrix}_{i=1,2,3}$

pour les fonctions $\hat{v}$ définies sur Ω_f.

- C, C', C_1, ... désignent des constantes diverses indépendantes du paramètre δ.

En réalité les fonctions F^{α} ($\alpha = g,\ell$) sont souvent indépendantes de la variable y aussi, elles sont égales à $\rho_{\alpha}\vec{g}$, où ρ_{α} est la densité massique du fluide (α) et $\vec{g}$ l'intensité de la

pesanteur. Mais l'hypothèse (3-3), i.e: leur indépendance de la variable z, suffira pour la démonstration des résultats voulus.

Lemme 3-1:

Sous les hypothèses (4-2), (4-3) *et* (4-4), *alors toute fonction* v *de l'espace* $\mathcal{U}^\delta$ *vérifie:*

$$\text{i)} \quad \left| \int_{\Omega_f^\delta} F^\delta . v \, dx \right| \leq C \, \delta \left| \frac{\partial \hat{v}}{\partial z} \right|_{0,\Omega_f}.$$

$$\text{ii)} \quad \left| \int_{\mathcal{A}_{g\ell}^\delta} H^\delta \; v.n \; d(\mathcal{A}_{g\ell}^\delta) \right| \leq C \, \delta \left(\delta \left| \nabla_y \hat{v} \right|_{0,\Omega_f} + \left| \frac{\partial \hat{v}}{\partial z} \right|_{0,\Omega_f} \right).$$

$$\text{iii)} \quad \left| \int_{\Gamma^\delta} G^\delta \; v.n \; d(\Gamma^\delta) \right| \leq C \, \delta^2 \left| \nabla \hat{v} \right|_{0,\Omega_f}$$

où la constante C *est indépendante de* δ.

Démonstration:

Soit v une fonction de l'espace $\mathcal{U}^\delta$.

i) L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne:

$$\text{(3-5)} \qquad \left| \int_{\Omega_f^\delta} F^\delta . v \, dx \right| \leq \left| F^\delta \right|_{0,\Omega_f^\delta} \left| v \right|_{0,\Omega_f^\delta}$$

Mais, le changement de variables $(y_1, y_2, z) = (x_1, x_2, \frac{x_3}{\delta})$ montre que:

$$\left| F^\delta \right|_{0,\Omega_f^\delta} = \sqrt{\delta} \; \left| \hat{F} \right|_{0,\Omega_f}.$$

et d'après l'hypothèse (3-3):

$$\left| \hat{F} \right|_{0,\Omega_f} = \sqrt{\left| F^\ell \right|^2_{0,\Omega_\ell} + \left| F^g \right|^2_{0,\Omega_g}}$$

est une constante indépendante du paramètre δ.

Si l'on reporte ces dernières égalités dans (3-5), il vient alors:

$$(3\text{-}6) \qquad \left| \int_{\Omega_f^\delta} F^\delta . v \, dx \right| \leq C \sqrt{\delta} \; \left| v \right|_{0,\Omega_f^\delta}$$

Mais toute fonction v de $\mathcal{V}^\delta$ s'annule sur l'interface $\mathcal{A}_{fs}^\delta$ et on peut alors appliquer l'inégalité de Poincaré, de plus la constante qui y est intervient est de l'ordre de l'épaisseur de Ω_f^δ, on peut la prendre égale à $\frac{\sqrt{2}}{2} \; \delta \sup_{x' \in \Sigma} (S(x'))$. Donc:

$$\left| v \right|_{0,\Omega_f^\delta} \leq C \, \delta \; \left| \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{0,\Omega_f^\delta}$$

et d'après le lemme 2-1: $\left| \frac{\partial v_i}{\partial x_3} \right|_{0,\Omega_f^\delta} = \frac{1}{\sqrt{\delta}} \left| \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial z} \right|_{0,\Omega_f}$. L'inégalité (3-6) devient alors:

$$\left| \int_{\Omega_f^\delta} F^\delta . v \, dx \right| \leq C \, \delta \left| \frac{\partial \hat{v}}{\partial z} \right|_{0,\Omega_f}$$

ii) D'après le lemme 2-2:

$$\int_{\mathcal{A}_{gl}^\delta} H^\delta \; v.n \; d(\mathcal{A}_{gl}^\delta) = \delta \int_{\mathcal{A}_{gl}} H^\delta \; (\hat{v}_1 \hat{n}_1 + \hat{v}_2 \hat{n}_2) \; d(\mathcal{A}_{gl}) + \int_{\mathcal{A}_{gl}} H^\delta \; \hat{v}_3 \hat{n}_3 \; d(\mathcal{A}_{gl})$$

Et d'après l'hypothèse (3-2) $|H^\delta| \leq C \, \delta$, donc la continuité de la trace implique que:

$$(3\text{-}7) \qquad \left| \int_{\mathcal{A}_{gl}^\delta} H^\delta \; v.n \; d(\mathcal{A}_{gl}^\delta) \right| \leq C \, \delta^2 \left| \nabla \hat{v} \right|_{0,\Omega_f} + C' \, \delta \int_{\mathcal{A}_{gl}} \left| \hat{v}_3 \right| \hat{n}_3 \; d(\mathcal{A}_{gl}), \quad (\hat{n}_3 \geq 0)$$

les constantes C et C' sont indépendantes de δ.

Mais toute fonction $\hat{v}$ de $\mathcal{U}$ est nulle sur l'interface $\mathcal{A}_{fg}$, et puisque la troisième composante $\hat{n}_3$ de la normale $\hat{n}$ à la face latérale Γ^δ de Ω_f^δ est nulle, on a:

$$\int_{\mathcal{A}_{gf}} |\hat{v}_3|\, \hat{n}_3 \; d(\mathcal{A}_{gf}) = \int_{\partial\Omega_g} |\hat{v}_3|\, \hat{n}_3 \; d(\partial\Omega_g).$$

Et on sait que, (Necas [29], p. 313), si $\hat{v} \in \mathbb{H}^1(\Omega_f)$ alors sa valeur absolue $|\hat{v}|$ est encore dans $\mathbb{H}^1(\Omega_f)$ et $\left|\frac{\partial|\hat{v}_3|}{\partial z}\right|_{0,\Omega_f} = \left|\frac{\partial\hat{v}_3}{\partial z}\right|_{0,\Omega_f}$ Donc:

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega_g} |\hat{v}_3|\, \hat{n}_3 \; d(\partial\Omega_g) &= -\int_{\Omega_g} \frac{\partial|\hat{v}_3|}{\partial z}\, dydz. \\ &\le C\left|\frac{\partial|\hat{v}_3|}{\partial z}\right|_{0,\Omega_g} \le C\left|\frac{\partial|\hat{v}_3|}{\partial z}\right|_{0,\Omega_f} \\ &\le C\left|\frac{\partial\hat{v}_3}{\partial z}\right|_{0,\Omega_f} \le C\left|\frac{\partial\hat{v}}{\partial z}\right|_{0,\Omega_f}\end{aligned}$$

En reportant dans (3-7), lorsque $\delta << 1$, on a:

$$\left|\int_{\mathcal{A}_{gf}^\delta} H^\delta \; v.n \; d(\mathcal{A}_{gf}^\delta)\right| \le C\,\delta\left(\delta\left|\nabla_y\hat{v}\right|_{0,\Omega_f} + \left|\frac{\partial\hat{v}}{\partial z}\right|_{0,\Omega_f}\right).$$

iii) D'après le lemme 2-2:

$$\int_{\Gamma^\delta} G^\delta \; v.n \; d(\Gamma^\delta) = \delta \int_{\Gamma} \hat{G}^\delta \; \hat{v}.\hat{n} \; d(\Gamma)$$

Donc, en utilisant l'hypothèse (3-4) on a:

$$\left|\int_{\Gamma} \hat{G}^\delta \; \hat{v}.\hat{n} \; d(\Gamma)\right| \le C_1\,\delta \int_{\Gamma} |\hat{v}.\hat{n}| \; d(\Gamma) \le C_2\,\delta\left|\nabla\hat{v}\right|_{0,\Omega_f}$$

d'où:

$$\left|\int_{\Gamma^\delta} G^\delta \; v.n \; d(\Gamma^\delta)\right| \le C\,\delta^2\left|\nabla\hat{v}\right|_{0,\Omega_f}. \qquad \square$$

On va maintenant utiliser les équations (1-12) et les lemmes précédents pour établir des estimations vérifiées par la vitesse et la pression "modifiées" $\hat{U}^\delta$ et $\hat{P}^\delta$ qui sont définies par les relations (2-13).

Théorème 3-1:

Sous les hypothèses du lemme 3-1, les fonctions $\hat{U}^\delta$ *et* $\hat{P}^\delta$ *définies par* (2-13) *vérifient:*

(3-8) $$\left|\hat{U}^\delta\right|_{0,\Omega_f} \leq C\,\delta^2$$

(3-9) $$\begin{cases} \left|\dfrac{\partial \hat{U}^\delta}{\partial z}\right|_{0,\Omega_f} \leq C\,\delta^2 \\ \left|\dfrac{\partial \hat{U}^\delta}{\partial y_i}\right|_{0,\Omega_f} \leq C\,\delta \qquad (i = 1,2) \end{cases}$$

(3-10) $$\left|\hat{P}^\delta\right|_{0,\Omega_f} \leq C$$

(3-11) $$\begin{cases} \left\|\dfrac{\partial \hat{P}^\delta}{\partial z}\right\|_{H^{-1}(\Omega_f)} \leq C\,\delta \\ \left\|\dfrac{\partial \hat{P}^\delta}{\partial y_i}\right\|_{H^{-1}(\Omega_f)} \leq C \qquad (i = 1,2) \end{cases}$$

Démonstration:

Si on prend $v = U^\delta$ comme fonction-test dans la première équation du problème variationnel (1-12) vérifié par le couple (U^δ, P^δ), on a:

(3-12) $$\int_{\Omega_f^\delta} 2\mu^\delta\, D_{ij}(U^\delta) D_{ij}(U^\delta) = \int_{\Omega_f^\delta} F^\delta . U^\delta\, dx + \int_{\mathcal{A}_{gt}^\delta} 2\sigma\, H^\delta\, U^\delta . n + \int_{\Gamma^\delta} G^\delta\, U^\delta . n$$

On sait,([18]), qu'il existe une costante C' qui ne dépend que de la dimension (ici n=3) telle que:

$$(3\text{-}13) \qquad \int_{\Omega_f^\delta} 2\mu^\delta \; D_{ij}(U^\delta)D_{ij}(U^\delta) \;\geq C' \left| \nabla U^\delta \right|^2_{0,\Omega_f^\delta}$$

En minorant μ^δ par $\mathrm{Min}(\mu_g,\mu_\ell)$, qui est strictement positif, l'égalité (3-12) implique que:

$$C \left| \nabla U^\delta \right|^2_{0,\Omega_f^\delta} \leq \left| \int_{\Omega_f^\delta} F^\delta . v \; dx \right| + \left| \int_{\mathcal{A}_{g\ell}^\delta} H^\delta \; v.n \; d(\mathcal{A}_{g\ell}^\delta) \right| + \left| \int_{\Gamma^\delta} G^\delta \; v.n \; d(\Gamma^\delta) \right|$$

Donc d'après le lemme 2-1et le lemme 3-1:

$$\delta \left| \nabla_y \hat{U}^\delta \right|^2_{0,\Omega_f} + \frac{1}{\delta} \left| \frac{\partial \hat{U}^\delta}{\partial z} \right|^2_{0,\Omega_f} \leq C\delta \left(\delta \left| \nabla_y \hat{U}^\delta \right|_{0,\Omega_f} + \left| \frac{\partial \hat{U}^\delta}{\partial z} \right|_{0,\Omega_f} \right) + C\delta^2 \left| \nabla_y \hat{U}^\delta \right|_{0,\Omega_f}.$$

Ainsi, lorsque δ est assez petit, on a:

$$(3\text{-}14) \qquad \delta \left| \nabla_y \hat{U}^\delta \right|^2_{0,\Omega_f} + \frac{1}{\delta} \left| \frac{\partial \hat{U}^\delta}{\partial z} \right|^2_{0,\Omega_f} \leq C'\delta \left(\delta \left| \nabla_y \hat{U}^\delta \right|_{0,\Omega_f} + \left| \frac{\partial \hat{U}^\delta}{\partial z} \right|_{0,\Omega_f} \right)$$

puisque:

$$\begin{aligned} \delta^2 \left| \nabla \hat{U}^\delta \right|_{0,\Omega_f} &= \delta^2 \left(\left| \nabla_y \hat{U}^\delta \right|^2_{0,\Omega_f} + \left| \frac{\partial \hat{U}^\delta}{\partial z} \right|^2_{0,\Omega_f} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \delta^2 \left| \nabla_y \hat{U}^\delta \right|_{0,\Omega_f} + \delta^2 \left| \frac{\partial \hat{U}^\delta}{\partial z} \right|_{0,\Omega_f} \\ &\leq \delta^2 \left| \nabla_y \hat{U}^\delta \right|_{0,\Omega_f} + \delta \left| \frac{\partial \hat{U}^\delta}{\partial z} \right|_{0,\Omega_f} \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz au second membre de (3-14) on obtient:

$$\delta \left| \nabla_y \hat{U}^\delta \right|^2_{0,\Omega_f} + \frac{1}{\delta} \left| \frac{\partial \hat{U}^\delta}{\partial z} \right|^2_{0,\Omega_f} \leq C'\delta \left(\delta^2 \left| \nabla_y \hat{U}^\delta \right|^2_{0,\Omega_f} + \left| \frac{\partial \hat{U}^\delta}{\partial z} \right|^2_{0,\Omega_f} \right)^{\frac{1}{2}}$$

On en déduit que:

$$\delta^2 \left| \nabla_y \hat{U}^\delta \right|^2_{0,\Omega_f} + \left| \frac{\partial \hat{U}^\delta}{\partial z} \right|^2_{0,\Omega_f} \leq C' \delta^4$$

d'où les estimations (3-9):

$$\left| \nabla_y \hat{U}^\delta \right|_{0,\Omega_f} \leq C' \delta \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial \hat{U}^\delta}{\partial z} \right|_{0,\Omega_f} \leq C' \delta^2.$$

Puisque $\hat{U}^\delta$ est de trace nulle sur l'interface $\mathcal{A}_{fs}$, l'inégalité de Poincaré donne:

$$\left| \nabla_y \hat{U}^\delta \right|_{0,\Omega_f} \leq C'' \left| \frac{\partial \hat{U}^\delta}{\partial z} \right|_{0,\Omega_f} \leq C'' C' \delta^2.$$

et l'estimation (3-8) est alors démontrée puisque la constante de Poincaré C'' ne dépend que de la géométrie de Ω_f, donc indépendante de δ.

Pour établir les estimations (3-10) et (3-11) vérifiées par la pression $\hat{P}^\delta$, on utilise encore le problème variationnel (1-12):

$$\int_{\Omega_f^\delta} P^\delta \operatorname{div}(v) = \int_{\Omega_f^\delta} 2\mu^\delta D_{ij}(U^\delta) D_{ij}(v) + \int_{\Omega_f^\delta} F^\delta . v \, dx + \int_{\mathcal{A}_{g\ell}^\delta} 2\sigma H^\delta v.n + \int_{\Gamma^\delta} G^\delta v.n$$

et ceci pour toute fonction v de $\mathcal{V}^\delta = \left\{ v \in \mathbb{H}^1(\Omega_f^\delta);\ v = 0 \text{ sur } \mathcal{A}_{fs}^\delta \right\}$.

Si on majore μ^δ par $\operatorname{Max}(\mu_g, \mu_\ell)$ et on utilise le lemme 3-1, alors, lorsque δ est assez petit, on obtient:

$$(3\text{-}15) \qquad \left| \int_{\Omega_f^\delta} P^\delta \operatorname{div}(v) \right| \leq C \left| \nabla U^\delta \right|_{0,\Omega_f^\delta} \left(\delta \left| \nabla_y \hat{v} \right|^2_{0,\Omega_f} + \frac{1}{\delta} \left| \frac{\partial \hat{v}}{\partial z} \right|^2_{0,\Omega_f} \right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ C \delta \left(\delta \left| \nabla_y \hat{v} \right|_{0,\Omega_f} + \left| \frac{\partial \hat{v}}{\partial z} \right|_{0,\Omega_f} \right)$$

Mais d'après le lemme 2-1:

$$\left| \nabla U^\delta \right|_{0,\Omega_f^\delta} = \left(\delta \left| \nabla_y \hat{U}^\delta \right|^2_{0,\Omega_f} + \frac{1}{\delta} \left| \frac{\partial \hat{U}^\delta}{\partial z} \right|^2_{0,\Omega_f} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Donc, d'après les estimations (3-9):

$$\text{(3-16)} \qquad \left| \nabla U^\delta \right|_{0,\Omega_f^\delta} \leq C \delta \sqrt{\delta}$$

et la relation (3-15) devient alors:

$$\text{(3-17)} \qquad \left| \int_{\Omega_f^\delta} P^\delta \operatorname{div}(v) \right| \leq C \delta \left(\delta^2 \left| \nabla_y \hat{v} \right|^2_{0,\Omega_f} + \left| \frac{\partial \hat{v}}{\partial z} \right|^2_{0,\Omega_f} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C \delta \left| \nabla \hat{v} \right|_{0,\Omega_f} \qquad \text{(lorsque } \delta < 1\text{)}$$

Prenons maintenant une fonction-test v dont la troisième composante v_3 est nulle. Le changement de variables $(y_1, y_2, z) = (x_1, x_2, \frac{x_3}{\delta})$ dans le premier membre de (3-17), compte tenu de (2-9), donne:

$$\text{(3-18)} \qquad \left| \delta \int_{\Omega_f} \hat{P}^\delta \left(\frac{\partial \hat{v}_1}{\partial y_1} + \frac{\partial \hat{v}_2}{\partial y_2} \right) dydz \right| \leq C \delta \left| \nabla \hat{v} \right|_{0,\Omega_f}$$

Cette inégalité est valable pour toute fonction $\hat{v}$ de $\mathcal{U} = \left\{ v \in \mathbf{H}^1(\Omega_f);\ \hat{v} = 0 \text{ sur } \mathcal{A}_{fs} \right\}$ ayant la troisième composante $\hat{v}_3$ nulle puisque: $v \in \mathcal{U}^\delta \Longleftrightarrow \hat{v} \in \mathcal{U}$ et $v_3 = 0 \Longleftrightarrow \hat{v}_3 = 0$. Elle implique alors, puisque $\mathbf{H}_0^1(\Omega_f) \subset \mathcal{U}$, que:

$$\left| \sum_{i=1}^{2} \left\langle \frac{\partial \hat{P}^\delta}{\partial y_i}, \hat{v}_i \right\rangle_{H^{-1}(\Omega_f)} \right| \leq C \left\| \hat{v} \right\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega_f)} \qquad \forall \hat{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega_f).$$

d'où:

$$\text{(3-19)} \qquad \left\| \frac{\partial \hat{P}^\delta}{\partial y_i} \right\|_{H^{-1}(\Omega_f)} \leq C \qquad (i = 1, 2)$$

Prenons maintenant dans (3-17) une fonction-test v telle que $v_1 = v_2 = 0$. Le changement de variables $(y_1, y_2, z) = (x_1, x_2, \frac{x_3}{\delta})$, compte tenu de (2-9), donne:

$$\left| \int_{\Omega_f} \hat{P}^\delta \frac{\partial \hat{v}_3}{\partial z} \, dydz \right| \leq C\,\delta \left| \nabla \hat{v}_3 \right|_{0,\Omega_f}$$

d'où l'on déduit que:

$$\left\| \frac{\partial \hat{P}^\delta}{\partial z} \right\|_{H^{-1}(\Omega_f)} \leq C\,\delta .$$

Cette inégalité et (3-19) achèvent donc la démonstration de l'estimation (3-11).

Enfin, puisque $\hat{P}^\delta$ est de moyenne nulle sur Ω_f, d'après ([36] Proposition 1.2, Chap. I), il existe une constante C', qui ne dépend que de la géométrie de Ω_f, telle que:

$$\left| \hat{P}^\delta \right|_{0,\Omega_f} \leq C' \left\| \nabla \hat{P}^\delta \right\|_{H^{-1}(\Omega_f)} \leq C .$$

Ce qui achève la démonstration du théorème. □

Grâce aux estimations du théorème précédent, on va maintenant pouvoir extraire des sous-suites de $\delta^{-2}\hat{U}^\delta$ et de $\hat{P}^\delta$ qui convergent pour la topologie faible de $L^2(\Omega_f)$. On va d'abord introduire un nouvel espace:

$$\text{(3-20)} \qquad \mathcal{U}_z = \left\{ \varphi \in L^2(\Omega_f);\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \in L^2(\Omega_f) \right\}$$

Si $\mathcal{S}$ est une une surface régulière de $\bar{\Omega}_f$, alors on peut définir sur cet espace [17] l'application "trace" suivante, qui est linéaire est continue:

$$\text{(3-21)} \qquad T^z_{\mathcal{S}} : \mathcal{U}_z \longrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\mathcal{S})$$

$$\varphi \longrightarrow \varphi \cos(\hat{n}, z)$$

On définit maintenant le saut $[\![\varphi \cos(\hat{n},z)]\!]_{g\ell}$ à travers l'interface $\mathcal{A}_{g\ell}$ d'une fonction φ de $\mathcal{U}_z$ comme suit:

$$(3\text{-}22) \qquad [\![\varphi \cos(\hat{n},z)]\!]_{g\ell} = T^{(g),z}_{\mathcal{A}_{g\ell}}(\varphi) - T^{(\ell),z}_{\mathcal{A}_{g\ell}}(\varphi)$$

où $T^{(\alpha),z}_{\mathcal{A}_{g\ell}}(\varphi) = \varphi^{(\alpha)} \cos(\hat{n},z)$, $(\alpha = g,\ell)$, la normale $\hat{n}$ est orientée de Ω_g vers Ω_ℓ et $\varphi^{(\alpha)}$ désigne la restriction de la fonction φ à Ω_α. Ceci sous entend qu'on définit les applications traces $T^{(\alpha),z}_{\mathcal{A}_{g\ell}}$ en remplaçant Ω_f par Ω_α dans la définition (3-20) de $\mathcal{U}_z$ et $\mathcal{B}$ par l'interface $\mathcal{A}_{g\ell}$ dans la définition (3-21) de $T^z_{\mathcal{B}}$.

Théorème 3-2:

Si les hypothèses du lemme 3-1 sont satisfaites alors:

i) *quitte à extraire une sous-suite, il existe* $U^* \in \mathcal{U}_z$ *telle que:*

$$(3\text{-}23) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\delta^2}\,\hat{U}^\delta \xrightarrow[\delta \to 0]{} U^* & \textit{dans } \mathbb{L}^2(\Omega_f) \textit{ faible} \\ \dfrac{1}{\delta^2}\,\dfrac{\partial \hat{U}^\delta}{\partial z} \xrightarrow[\delta \to 0]{} \dfrac{\partial U^*}{\partial z} & \textit{dans } \mathbb{L}^2(\Omega_f) \textit{ faible} \end{cases}$$

$$(3\text{-}24) \qquad \frac{1}{\delta}\,\frac{\partial \hat{U}^\delta}{\partial y_i} \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0 \qquad \textit{dans } \mathbb{L}^2(\Omega_f) \textit{ faible}$$

$$(3\text{-}25) \qquad \begin{cases} U^* \cos(\hat{n},z) = 0 & \textit{dans } H^{-\frac{1}{2}}(\mathcal{A}_{f\ell}) \\ [\![U^* \cos(\hat{n},z)]\!]_{g\ell} = 0 & \textit{dans } H^{-\frac{1}{2}}(\mathcal{A}_{g\ell}) \end{cases}$$

ii) *de même, quitte à extraire une sous-suite, il existe* $P^* \in L^2_0(\Omega_f)$ *telle que:*

$$(3\text{-}26) \qquad \begin{cases} \hat{P}^\delta \xrightarrow[\delta \to 0]{} P^* & \textit{dans } L^2_0(\Omega_f) \textit{ faible} \\ \dfrac{\partial P^*}{\partial z} = 0 & \textit{dans } H^{-1}(\Omega_f) \end{cases}$$

Démonstration:

i) L'existence d'une fonction $U^* \in \mathcal{U}_z$ et d'une sous-suite de $\hat{U}^\delta$ vérifiant (3-23) et (3-24) et une conséquence immédiate des estimations (3-8) et (3-9) du théorème 3-1, et des résultats classiques d'analyse fonctionnelle.

Les convergences (3-8) impliquent que la sous-suite de $\delta^{-2}\,\hat{U}^\delta$ convergent faiblement vers la fonction U^* dans l'espace $\mathcal{U}_z$, muni du produit scalaire classique:

$$\langle \varphi,\theta \rangle_{\mathcal{U}_z} = \int_{\Omega_f} \varphi.\theta + \int_{\Omega_f} \frac{\partial\varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial\theta}{\partial z}$$

Puisque l'application "trace" $T^z_{\mathcal{A}_{fs}}$ définie par (3-21) est linéaire et est continue de $\mathcal{U}_z$ dans $H^{-\frac{1}{2}}(\mathcal{A}_{fs})$, la convergence précédente implique que la trace $\delta^{-2}\hat{U}^\delta\cos(\hat{n},z)$ converge vers $U^*\cos(\hat{n},z)$ dans $H^{-\frac{1}{2}}(\mathcal{A}_{fs})$. Donc, puisque $\hat{U}^\delta$ est de trace nulle sur l'interface $\mathcal{A}_{fs}$, la trace $U^*\cos(\hat{n},z)$ de U^* est nulle aussi:

$$\text{(3-27)} \qquad \frac{1}{\delta^2}\,\hat{U}^\delta\cos(\hat{n},z) \xrightarrow[\delta \to 0]{} U^*\cos(\hat{n},z) = 0 \qquad \text{dans } H^{-\frac{1}{2}}(\mathcal{A}_{fs}).$$

De même l'application "saut": $\varphi \longrightarrow [\![\varphi\cos(\hat{n},z)]\!]_{g\ell}$ définie par (3-22) et linéaire et est continue de $\mathcal{U}_z$ dans $H^{-\frac{1}{2}}(\mathcal{A}_{g\ell})$, donc la convergence de $\delta^{-2}\hat{U}^\delta$ vers U^* dans $\mathcal{U}_z$, implique celle du saut $[\![\delta^{-2}\hat{U}^\delta\cos(\hat{n},z)]\!]_{g\ell}$ de $\delta^{-2}\hat{U}^\delta$ vers le saut $[\![U^*\cos(\hat{n},z)]\!]_{g\ell}$ de U^* dans $H^{-\frac{1}{2}}(\mathcal{A}_{g\ell})$. Et puisque le saut à travers l'interface $\mathcal{A}_{g\ell}$ de $\hat{U}^\delta$ est nul, il est de même pour le saut de U^*:

$$\text{(3-28)} \qquad \frac{1}{\delta^2}\,[\![\hat{U}^\delta\cos(\hat{n},z)]\!]_{g\ell} \xrightarrow[\delta \to 0]{} [\![U^*\cos(\hat{n},z)]\!]_{g\ell} = 0 \qquad \text{dans } H^{-\frac{1}{2}}(\mathcal{A}_{g\ell}).$$

ii) L'existence d'un fonction $P^* \in L^2_0(\Omega_f)$ et d'une sous-suite de $\hat{P}^\delta$ vérifiant les convergences (3-26) est une conséquence immédiate des estimations (3-10) et (3-11) du théorème 3-1. □

On va maintenant utiliser le théorème précédent pour passer à la limite dans les équations variationnelles (2-16) et (2-17) vérifiées par le couple $(\hat{U}^\delta, \hat{P}^\delta)$ et pouvoir identifier les deux limites U^* et P^* ensuite.

4/ IDENTIFICATION DES LIMITES.

On va d'abord établir les relations qui lient les deux limites, puis on essayera d'identifier chacune d'elles.

4-1) Relations entre les deux limites U^* et P^*.

D'après les relations (2-16) et (2-17) du lemme 2-3, le couple $(\hat{U}^\delta, \hat{P}^\delta)$ vérifie:

$$(4\text{-}1)\quad \begin{cases} (\hat{U}^\delta, \hat{P}^\delta) \in \mathcal{U} \times L^2_0(\Omega_f) \text{ et } \forall\ (\hat{v}, \hat{q}) \in \mathcal{U} \times L^2_0(\Omega_f) : \\ \bullet\ \frac{1}{\delta}\, a^{-1}(\hat{U}^\delta, \hat{v}) + a^0(\hat{U}^\delta, \hat{v}) + \delta\ a^1(\hat{U}^\delta, \hat{v}) + b^0(\hat{v}, \hat{P}^\delta) + \delta\ b^1(\hat{v}, \hat{P}^\delta) = \delta\ \ell^1_\delta(\hat{v}) + \delta^2\ \ell^2_\delta(\hat{v}) \\ \bullet\ b^0(\hat{U}^\delta, \hat{q}) + \delta\ b^1(\hat{U}^\delta, \hat{q}) = 0. \end{cases}$$

Les formes a^i, b^i et ℓ^i_δ sont définies par (2-10), (2-11) et (2-12).

On va voir qu'en choisissant des fonctions-test $\hat{v}$ particulières, le passage à la limite dans l'équation (4-1), lorsque δ tend vers zéro, donne le:

Théorème 4-1:

Si les hypothèses du lemme 3-1 sont satisfaites, alors les limites U^* *et* P^* *sont liées par:*

$$(4\text{-}2)\qquad \int_{\Omega_f} \hat{\mu} \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial U_i^*}{\partial z} \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial z} - \int_{\Omega_f} \sum_{i=1}^{2} P^* \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial y_i} = \int_{\Omega_f} \sum_{i=1}^{2} \hat{F}_{\underline{i}}\ \hat{v}_{\underline{i}}\ , \quad \forall\ \hat{v} \in \mathcal{U} \text{ telle que } \hat{v}_3 = 0.$$

et:

$$(4\text{-}3)\qquad U_3^* = 0 \qquad \text{dans } \Omega_f.$$

Démonstration:

Soit $\hat{v} \in \mathcal{U}$ telle que $\hat{v}_3 = 0$.

D'après les expressions (2-10) des formes bilinéaires a^i, on a:

$$\bullet\ a^{-1}(\hat{U}^\delta,\hat{v}) = \int_{\Omega_f} \hat{\mu} \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial \hat{U}_i^\delta}{\partial z} \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial z}\, dydz$$

$$\bullet\ a^{0}(\hat{U}^\delta,\hat{v}) = \int_{\Omega_f} \hat{\mu} \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial \hat{U}_3^\delta}{\partial y_i} \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial z}\, dydz)$$

$$\bullet\ a^{1}(\hat{U}^\delta,\hat{v}) = \int_{\Omega_f} \hat{\mu} \sum_{i,j=1}^{2} \left(\frac{\partial \hat{U}_i^\delta}{\partial y_i} \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial y_i} + \frac{\partial \hat{U}_i^\delta}{\partial y_i} \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial y_i} \right) dydz$$

Donc, d'après les convergences (3-23) et (3-24) du théorème 3-2, lorsque δ tend vers zéro:

$$(4\text{-}4) \quad \left| \begin{array}{l} \bullet\ \dfrac{1}{\delta^2} a^{-1}(\hat{U}^\delta,\hat{v}) \longrightarrow \displaystyle\int_{\Omega_f} \hat{\mu} \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial \hat{U}_i^*}{\partial z} \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial z}\, dydz \\ \bullet\ \dfrac{1}{\delta} a^{0}(\hat{U}^\delta,\hat{v}) \longrightarrow 0 \\ \bullet\ \quad a^{1}(\hat{U}^\delta,\hat{v}) \longrightarrow 0 \end{array} \right.$$

D'après les expressions (2-11) des formes bilinéaires b^i, on a (pour les $\hat{v} \in \mathcal{U}$ telles que $\hat{v}_3 = 0$):

$$\bullet\ b^{0}(\hat{v},\hat{P}^\delta) = 0$$

$$\bullet\ b^{1}(\hat{v},\hat{P}^\delta) = \int_{\Omega_f} - \hat{P}^\delta \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial y_i}\, dydz$$

La convergence (3-26) implique alors:

$$(4\text{-}5)\quad \left|\begin{array}{l} \bullet\ b^0(\hat{v},\hat{P}^\delta) = 0 \\ \bullet\ b^1(\hat{v},\hat{P}^\delta) \longrightarrow \displaystyle\int_{\Omega_f} - \hat{P}^* \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial y_i}\, dydz \end{array}\right.$$

D'après les expressions (2-12) des formes linéaires ℓ_δ^i, on a:

$$\bullet\ \ell_\delta^1(\hat{v}) = \int_{\Omega_f} \hat{F}.\ \hat{v}\ dydz$$

$$\bullet\ \ell_\delta^2(\hat{v}) = \int_{\mathcal{A}_{gl}} 2\sigma\ \frac{1}{\delta}\ H^\delta \sum_{i=1}^{2} \hat{v}_i\ \hat{n}_i\ d(\mathcal{A}_{gl}) + \int_{\Gamma} \frac{1}{\delta}\ \hat{G}^\delta \sum_{i=1}^{2} \hat{v}_i\ \hat{n}_i\ d(\Gamma)$$

où l'on a utilisé aussi l'hypothèse (3-3), i.e: $\hat{F}^\delta = \hat{F}$ est indépendante du paramètre δ.

Les hypothèses (2-2) et (2-4) impliquent alors que:

$$(4\text{-}6)\quad \left|\begin{array}{l} \bullet\ \ell_\delta^1(\hat{v}) \longrightarrow \displaystyle\int_{\Omega_f} \hat{F}.\ \hat{v}\ dydz \\ \bullet\ \ell_\delta^2(\hat{v}) \longrightarrow 0 \end{array}\right.$$

Maintenant si on prend $\frac{1}{\delta}\ \hat{v}$ comme fonction-test (avec $\hat{v} \in \mathcal{U}$ telles que $\hat{v}_3 = 0$) dans la première équation de (4-1) vérifiée par le couple $(\hat{U}^\delta, \hat{P}^\delta)$, alors le passage à la limite, lorsque δ tend vers zéro et compte-tenu de (4-4), (4-5) et (4-6), donne la relation (4-2) annoncée par le théorème.

Pour démontrer l'assertion (4-3), on va utiliser la deuxième équation de (4-1):

$$b^0(\hat{U}^\delta, \hat{q}) + \delta\, b^1(\hat{U}^\delta, \hat{q}) = 0 \qquad \forall\, \hat{q} \in L_0^2(\Omega_f)$$

Soit θ une fonction quelleconque de $L^2(\Omega_f)$. La fonction $\hat{q}$ définie par:

$$\hat{q} = \theta - \mathcal{M}(\theta) \ ; \ \mathcal{M}(\theta) = \frac{1}{\text{mes}(\Omega_f)} \int_{\Omega_f} \theta \ dydz$$

est dans $L_0^2(\Omega_f)$, on peut donc la prendre comme fonction-test dans l'équation précédente, ce qui donne:

$$(4\text{-}7) \qquad b^0(\hat{U}^\delta,\theta) + \delta\, b^1(\hat{U}^\delta,\theta) = \mathcal{M}(\theta)\,(\, b^0(\hat{U}^\delta,1) + \delta\, b^1(\hat{U}^\delta,1)\,) \qquad \forall\, \theta \in L^2(\Omega_f)$$

D'après les expressions (2-11) des formes bilinéaires b^i et les convergences (3-23) et (3-24) du théorème 3-2, on a:

$$\bullet \ \frac{1}{\delta^2}\, b^0(\hat{U}^\delta,\theta) = \int_{\Omega_f} -\frac{1}{\delta^2}\frac{\partial \hat{U}_3^\delta}{\partial z}\,\theta \ dydz \longrightarrow \int_{\Omega_f} -\frac{\partial \hat{U}_3^*}{\partial z}\,\theta \ dydz$$

$$\bullet \ \frac{1}{\delta}\, b^1(\hat{U}^\delta,\theta) = \int_{\Omega_f} -\frac{1}{\delta}\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial \hat{U}_i^\delta}{\partial y_i}\,\theta \ dydz \longrightarrow 0.$$

Donc le passage à la limite dans (4-7), (après la division par δ^2), donne:

$$(4\text{-}8) \qquad \int_{\Omega_f} \frac{\partial \hat{U}_3^*}{\partial z}\,\theta \ dydz = \mathcal{M}(\theta) \int_{\Omega_f} \frac{\partial \hat{U}_3^*}{\partial z}\, dydz \qquad \forall\, \theta \in L^2(\Omega_f).$$

Calculons maintenant le second membre de cette égalité:

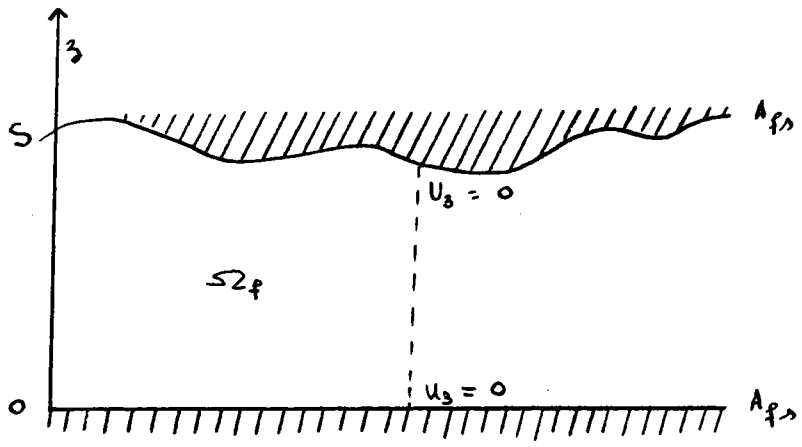
$$\int_{\Omega_f} \frac{\partial \hat{U}_3^*}{\partial z}\, dydz = -\int_{\partial\Omega_f} \hat{U}_3^*\, \cos(\hat{n},z)\ d(\partial\Omega_f) = 0$$

puisque $\cos(\hat{n},z)$ est nul sur la partie latérale Γ de $\partial\Omega_f$, (fig.3-1), et d'après le théorème 3-2 la trace $\hat{U}_3^*\cos(\hat{n},z)$ est nulle sur l'interface $\mathcal{A}_{1\varepsilon}$, ($\overline{\partial\Omega_f} = \overline{\mathcal{A}}_{1\varepsilon} \cup \overline{\Gamma}$).

La relation (4-8) s'écrit donc:

$$\int_{\Omega_f} \frac{\partial \hat{U}_3^*}{\partial z}\, \theta \; dydz = 0 \qquad \forall\, \theta \in L^2(\Omega_f).$$

On en déduit alors que $\dfrac{\partial \hat{U}_3^*}{\partial z}$ est nulle dans Ω_f, et, puisque $\hat{U}_3^* \cos(\hat{n},z)$ est nulle sur l'interface $\mathcal{A}_{fs}$, la fonction $\hat{U}_3^*$ est nécessairement nulle dans Ω_f. Ce qui achève la démonstration du théorème. □



(figure 4-1)

On va définir maintenant la moyenne $\mathcal{M}_z(\varphi)$, par rapport à la variable z, d'une fonction φ définie sur Ω_f par:

$$\text{(4-9)} \qquad \mathcal{M}_z(\varphi)(y) = \frac{1}{S(y)} \int_0^{S(y)} \varphi(y,z)\; dz$$

Comme dans [3] par un choix astucieux des fonctions-test $\hat{v}$ dans la relation (4-2), on va établir des relations entre la moyenne $\mathcal{M}_z(U^*)$ de U^*, les forces $\hat{F}$, et les gradients de la limite P^*. Montrons d'abord le lemme suivant:

Lemme 4-1:

Sous les hypothèses du Théorème 4-1. Pour toute fonction $\hat{v}$ telle que:

$$(4\text{-}10)\quad \begin{cases} \bullet\ \hat{v} \in \mathcal{U} \quad \text{et } \hat{v}_3 = 0 \\ \bullet\ \dfrac{\partial^2 \hat{v}_i}{\partial z^2} \ \textit{est constante par rapport à } s \textit{ dans chaque } \Omega_\alpha \ (\alpha = g,\ell)\ (i=1,2) \end{cases}$$

on a:

$$(4\text{-}11)\quad \int_\Sigma \mu_\ell \frac{\partial^2 \hat{v}_i}{\partial z^2} \int_0^{\Psi(y)} U_i^* \, dz \, dy + \int_\Sigma \mu_g \frac{\partial^2 \hat{v}_i}{\partial z^2} \int_{\Psi(y)}^{S(y)} U_i^* \, dz \, dy =$$

$$= - \int_\Sigma P^* \frac{\partial}{\partial y_i} \int_0^{S(y)} \hat{v}_i \, dz \, dy - \int_\Sigma F_i^\ell \int_0^{\Psi(y)} \hat{v}_i \, dz \, dy - \int_\Sigma F_i^g \int_{\Psi(y)}^{S(y)} \hat{v}_i \, dz \, dy +$$

$$+ \int_{\mathcal{A}_{g\ell}} [\![\hat{\mu} \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial z}]\!]_{g\ell} \, U_i^* \cos(\hat{n},z) \, d(\mathcal{A}_{g\ell})$$

où l'intégrale sur l'interface $\mathcal{A}_{g\ell}$ est à voir comme le produit de dualité entre un élément de $H^{-\frac{1}{2}}(\mathcal{A}_{g\ell})$, $U_i^* \cos(\hat{n},z)$, et un élément de $H^{\frac{1}{2}}(\mathcal{A}_{g\ell})$, $[\![\hat{\mu} \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial z}]\!]_{g\ell}$.

Démonstration:

En tenant compte que la trace $U_i^* \cos(\hat{n},z)$ est nulle sur l'interface $\mathcal{A}_{1s}$ et est continue à travers $\mathcal{A}_{g\ell}$ d'après le théorème 3-2, et puisque $\cos(\hat{n},z)$ est nul sur la face latérale, la régularité (4-10) des fonctions $\hat{v}$ permet d'intégrer par parties (sur chaque Ω_α à cause de la discontinuité de $\hat{\mu}$) le premier terme du premier membre de l'égalité (4-2) comme suit:

$$(4\text{-}12)\quad \int_{\Omega_f} \hat{\mu} \frac{\partial U_i^*}{\partial z} \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial z} \, dydz = - \int_{\Omega_f} \hat{\mu} \frac{\partial^2 \hat{v}_i}{\partial z^2} U_i^* \, dydz + \int_{\mathcal{A}_{g\ell}} [\![\hat{\mu} \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial z}]\!]_{g\ell} \, U_i^* \cos(\hat{n},z) \, d(\mathcal{A}_{g\ell})$$

où l'on convient, comme dans tout ce qui précède, que la normale $\hat{n}$ est orientée sur $\mathcal{A}_{g\ell}$ de Ω_g vers Ω_ℓ.

En appliquant le théorème de Fubini et sachant que:

- $$\frac{\partial^2 \hat{v}_i}{\partial z^2}(y,z) = \begin{cases} \left(\frac{\partial^2 \hat{v}_i}{\partial z^2}\right)^{\ell}(y) \text{ dans } \Omega_\ell \text{ i.e: si } 0 < z < \Psi(y). \\ \left(\frac{\partial^2 \hat{v}_i}{\partial z^2}\right)^{g}(y) \text{ dans } \Omega_g \text{ i.e: si } \Psi(y) < z < S(y). \end{cases} \quad \text{(d'après (4-10))}$$

- $$\hat{F}(y,z) = \begin{cases} F^{\ell}(y) \text{ dans } \Omega_\ell \text{ i.e: si } 0 < z < \Psi(y). \\ F^{g}(y) \text{ dans } \Omega_g \text{ i.e: si } \Psi(y) < z < S(y). \end{cases} \quad \text{(d'après (3-3))}$$

- $$\hat{\mu}(y,z) = \begin{cases} \mu_\ell \text{ dans } \Omega_\ell \text{ i.e: si } 0 < z < \Psi(y). \\ \mu_g \text{ dans } \Omega_g \text{ i.e: si } \Psi(y) < z < S(y). \end{cases}$$

- $P^*(y,z) = P^*(y)$ dans Ω_f i.e: indépendante de la variable z. (d'après le théorème 3-2)

- $$\int_0^{S(y)} \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial y_i}\, dz = \frac{\partial}{\partial y_i} \int_0^{S(y)} \hat{v}_i \, dz \quad , \text{(car } \hat{v}_i(y,S(y)) = 0).$$

on a:

- $$\int_{\Omega_f} \hat{\mu} \frac{\partial^2 \hat{v}_i}{\partial z^2} U_i^* \, dydz = \int_{\Sigma} \mu_\ell \frac{\partial^2 \hat{v}_i}{\partial z^2} \int_0^{\Psi(y)} U_i^* \, dz \, dy + \int_{\Sigma} \mu_g \frac{\partial^2 \hat{v}_i}{\partial z^2} \int_{\Psi(y)}^{S(y)} U_i^* \, dz \, dy$$

- $$\int_{\Omega_f} P^* \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial y_i} \, dydz = \int_{\Sigma} P^* \frac{\partial}{\partial y_i} \int_0^{S(y)} \hat{v}_i \, dz \, dy$$

- $$\int_{\Omega_f} \hat{F}_i \, \hat{v}_i \, dydz = \int_{\Sigma} F_i^{\ell} \int_0^{\Psi(y)} \hat{v}_i \, dz \, dy + \int_{\Sigma} F_i^{g} \int_{\Psi(y)}^{S(y)} \hat{v}_i \, dz \, dy$$

Remarquons maintenant que la relation (4-2) est vraie pour chacun des indice i = 1 ou 2 (i.e: on peut otter $\sum_{i=1}^{2}$) puisqu'on peut y prendre $\hat{v}_1 = 0$ ou $\hat{v}_2 = 0$. Compte-tenu de (4-12), il suffit alors de reporter les égalités précédentes dans (4-2) pour obtenir l'assertion (4-11) du lemme. □

On va maintenant construire explicitement les fonctions-test $\hat{v}$ qui permettront d'obtenir, à partir de (4-11), une relation entre la moyenne $\mathcal{M}_z(U^*)$ de U^*, les forces F^α et le gradient de P^*. Et on va démontrer le:

Théorème 4-2:

Si les hypothèses du lemme 3-1 sont satisfaites, alors la moyenne $\mathcal{M}_z(U^*)$ est lié à la limite P^* et aux forces F^α par:

$$(4\text{-}13)\qquad S\,\mathcal{M}_z(U_i^*) = \int_0^S U_i^*\,dz = \left[\frac{\Psi^3}{12\mu_\ell} + \frac{1}{4}\,\frac{S\,\Psi^2\,(S-\Psi)}{\mu_\ell\,(S-\Psi)+\mu_g\Psi}\right]\left[F_i^\ell - \frac{\partial P^*}{\partial y_i}\right] + \left[\frac{(S-\Psi)^3}{12\mu_g} + \frac{1}{4}\,\frac{S\,(S-\Psi)^2\,\Psi}{\mu_\ell\,(S-\Psi)+\mu_g\Psi}\right]\left[F_i^g - \frac{\partial P^*}{\partial y_i}\right]$$

Ces égalités ont lieu dans $H^{-1}(\Sigma)$ *pour* $i = 1, 2$.

Démonstration:

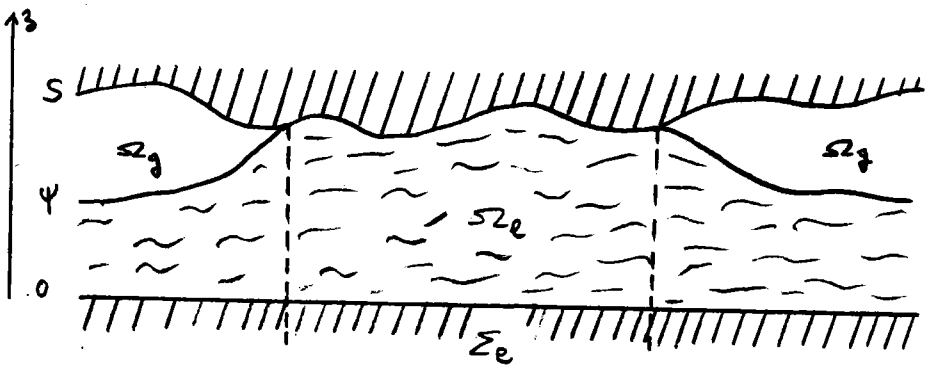
Remarquons d'abord que si on se restreint aux parties Σ_ℓ et Σ_g de Σ en dessus desquelles il n'ya qu'un seul fluide, i.e: $\{\Psi \equiv 0\}$ ou $\{S \equiv \Psi\}$ (fig. 4-2 et 4-3), alors on retrouve la forme classique des équations de Reynolds. En effet:

- En dessus de $\{y \in \Sigma, \Psi(y) = S(y)\}$ on a uniquement le fluide (ℓ) et (4-13) s'écrit:

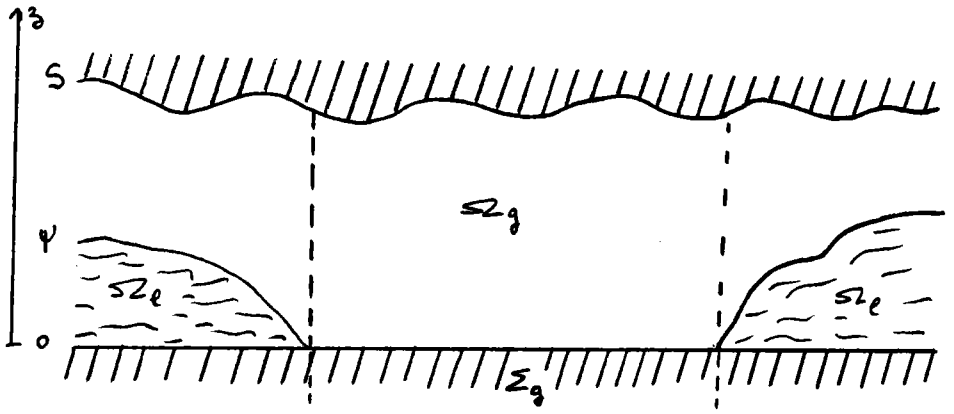
$$(4\text{-}14)\qquad \mathcal{M}_z(U_i^*) = \frac{\Psi^2}{12\mu_\ell}\left[F_i^\ell - \frac{\partial P^*}{\partial y_i}\right]$$

- En dessus de $\{y \in \Sigma, \Psi(y) = 0\}$ on a uniquement le fluide (g) et (4-13) s'écrit:

$$(4\text{-}15)\qquad \mathcal{M}_z(U_i^*) = \frac{S^2}{12\mu_g}\left[F_i^g - \frac{\partial P^*}{\partial y_i}\right]$$



(figure 4-2)



(figure 4-3)

On retrouve alors les résultats de [14] qui obtient des relations identiques à (4-14) et (4-15) par passage à la limite, lorsque l'epaisseur tend vers zéro, dans le cas de la présence d'un seul fluide obéissant aux équations de Stokes.

Démontrons maintenant la relation (4-13) annoncée par le théorème. Pour faire apparaitre $S\mathcal{M}_z(U_i^*)$ dans la relation (4-11) du lemme 4-1, il suffit de choisir la fonction-test $\hat{v}$ telle que $\mu_\ell\left(\frac{\partial^2\hat{v}_i}{\partial z^2}\right)^\ell$ soit égale à $\mu_g\left(\frac{\partial^2\hat{v}_i}{\partial z^2}\right)^g$; et pour éliminer le terme génant dans cette relation, qui est l'intégrale sur l'interface $\mathcal{A}_{g\ell}$ il faut que cette fonction-test soit telle que le saut

$[\![\hat{\mu}\frac{\partial \hat{v}_i}{\partial z}]\!]_{g\ell}$ est nul. On va donc chercher une fonction $\hat{v}$ qui vérifie les hypothèses (4-10) du lemme 4-1 et ayant les propriétés précédentes; de façon plus précise:

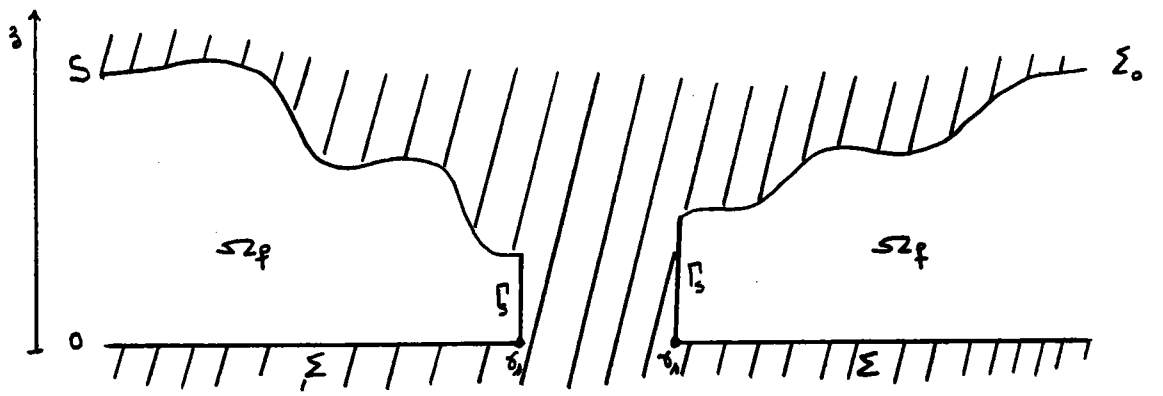
- $\hat{v} \in \mathcal{U} = \left\{ \hat{u} \in \mathbb{H}^1(\Omega_f);\ \hat{u} = 0 \text{ sur } \mathcal{A}_{fs} \right\}$ et $\hat{v}_3 = 0$

- $$\frac{\partial^2 \hat{v}_i}{\partial z^2}(y,z) = \left\{ \begin{array}{ll} \left(\frac{\partial^2 \hat{v}_i}{\partial z^2}\right)^{\ell}(y) & \text{si } 0 < z < \Psi(y). \\ \left(\frac{\partial^2 \hat{v}_i}{\partial z^2}\right)^{g}(y) & \text{si } \Psi(y) < z < S(y). \end{array} \right\} \text{ avec } \mu_\ell \left(\frac{\partial^2 \hat{v}_i}{\partial z^2}\right)^{\ell} \equiv \mu_g \left(\frac{\partial^2 \hat{v}_i}{\partial z^2}\right)^{g}$$

- $[\![\hat{\mu}\frac{\partial \hat{v}_i}{\partial z}]\!]_{g\ell} = 0$ sur $\mathcal{A}_{g\ell}$; i.e: $\mu_\ell \left(\frac{\partial \hat{v}_i}{\partial z}\right)^{\ell}(y,\Psi(y)) = \mu_g \left(\frac{\partial \hat{v}_i}{\partial z}\right)^{g}(y,\Psi(y))$.

Rappelons que l'interface $\mathcal{A}_{fs}$ est définie comme ci dessous, voir les notations (1-3) à (1-5) et la définition (2-1) de l'application $\mathcal{H}^\delta$:

$$\left| \begin{array}{l} \bar{\mathcal{A}}_{fs} = \mathcal{H}^\delta(\bar{\mathcal{A}}^\delta_{fs}) = \bar{\Sigma} \cup \bar{\Sigma}_0 \cup \bar{\Gamma}_s \\ \Sigma_0 = \left\{ (y_1,y_2,z);\ (y_1,y_2) \in \Sigma \text{ et } z = S(y_1,y_2) \right\} \\ \Gamma_s = \left\{ (y_1,y_2,z);\ (y_1,y_2) \in \gamma_s \text{ et } 0 < z < S(y_1,y_2) \right\} \end{array} \right.$$



(figure 4-4)

Une fonction $\hat{v}$ qui vérifie toutes les conditions précédentes est la suivante:

(4-16) $\bullet\ \hat{v}_1 = \varphi$ et $\hat{v}_2 = \hat{v}_3 = 0.$

$$\bullet\ \varphi = \begin{cases} \varphi^{\ell} = \mu_g\, z \left(z - \dfrac{\mu_g\, \Psi^2 + \mu_\ell\, (S^2 - \Psi^2)}{\mu_g\, \Psi + \mu_\ell\, (S - \Psi)} \right) \theta & \text{si } 0 < z < \Psi(y). \\ \varphi^{g} = \mu_\ell\, (z - S) \left(z + S - \dfrac{\mu_g\, \Psi^2 + \mu_\ell\, (S^2 - \Psi^2)}{\mu_g\, \Psi + \mu_\ell\, (S - \Psi)} \right) \theta & \text{si } \Psi(y) < z < S(y). \end{cases}$$

$\bullet\ \theta \in \mathcal{W}(\Sigma) = \left\{ \theta \in H^1(\Sigma);\ \theta = 0 \text{ sur } \gamma_s \right\}$; ne dépend que de la variable y.

En effet, puisque les fonctions S et Ψ sont supposées régulières, les restrictions de $\hat{v}$ à Ω_α ($a = g, \ell$) sont dans dans $\mathbb{H}^1(\Omega_\alpha)$; de plus, $\hat{v}$ est continue à travers l'interface $\mathcal{A}_{g\ell}$ separant Ω_ℓ de Ω_g, qui est égale à $\left\{ (y,z)\ ;\ y \in \Sigma \text{ et } z = \Psi(y) \right\}$, car:

$$\varphi^{\ell}(y,\Psi(y)) = \varphi^{g}(y,\Psi(y)) = \frac{\mu_g\, \mu_\ell\ \ S\ \Psi\ (S - \Psi)}{\mu_g\, \Psi + \mu_\ell\, (S - \Psi)} \theta\,(y),$$

elle appartient donc à $\mathbb{H}^1(\Omega_f)$; cette fonction $\hat{v}$ est nulle sur l'interface $\mathcal{A}_{fs}$, elle est alors dans l'espace $\mathcal{U}$:

$$\left.\begin{array}{lll} \hat{v} = 0 & \text{sur } \Sigma & \text{car } \varphi^{\ell}(y,0) = 0 \\ \hat{v} = 0 & \text{sur } \Sigma_0 & \text{car } \varphi^{g}(y,S(y)) = 0 \\ \hat{v} = 0 & \text{sur } \Gamma_s & \text{car } \theta = 0 \text{ sur } \gamma_s \end{array}\right\} \Longrightarrow \hat{v} = 0 \text{ sur } \mathcal{A}_{fs}.$$

Pour les autres conditions on a:

$$\bullet\ \mu_\ell \frac{\partial \varphi^{\ell}}{\partial z}(y,\Psi(y)) = \mu_g \frac{\partial \varphi^{g}}{\partial z}(y,\Psi(y)) = \mu_g\, \mu_\ell \frac{\mu_g\, \Psi^2 - \mu_\ell\, (S + \Psi)^2}{\mu_g\, \Psi + \mu_\ell\, (S - \Psi)} \theta(y).$$

$$\bullet\ \mu_\ell \frac{\partial^2 \varphi^{\ell}}{\partial z^2} \equiv \mu_g \frac{\partial^2 \varphi^{g}}{\partial z^2} \equiv 2\, \mu_g\, \mu_\ell\, \theta.$$

En prenant la fonction $\hat{v}$ définie par (4-16) comme fonction-test dans la relation (4-11) du lemme 4-1, avec l'indice i = 1, on a alors:

$$(4\text{-}17) \qquad \int_{\Sigma} 2\,\mu_g\,\mu_\ell \int_0^{S(y)} U_1^* \, dz \;\theta \, dy =$$

$$= - \int_{\Sigma} P^* \frac{\partial}{\partial y_1} \int_0^{\Psi(y)} \varphi^\ell \, dz \;\; dy \; - \int_{\Sigma} P^* \frac{\partial}{\partial y_1} \int_{\Psi(y)}^{S(y)} \varphi^g \, dz \;\; dy \; +$$

$$- \int_{\Sigma} F_1^\ell \int_0^{\Psi(y)} \varphi^\ell \, dz \;\; dy \; - \int_{\Sigma} F_1^g \int_{\Psi(y)}^{S(y)} \varphi^g \, dz \;\; dy \, .$$

On calculle maintenant l'intégrale de φ^ℓ de $z = 0$ à $z = \Psi(y)$, puis l'intégrale de φ^g de $z = \Psi(y)$ à $z = S(y)$:

$$\int_0^{\Psi} \varphi^\ell \, dz = - \mu_g \left[\frac{\Psi^3}{6} + \frac{\mu_\ell}{2} \; \frac{S\,\Psi^2\,(S - \Psi)}{\mu_\ell\,(S - \Psi) + \mu_g \Psi} \right] \theta .$$

$$\int_{\Psi}^{S} \varphi^g \, dz = - \mu_\ell \left[\frac{(S - \Psi)^3}{6} + \frac{\mu_g}{2} \; \frac{S\,(S - \Psi)^2\,\Psi}{\mu_\ell\,(S - \Psi) + \mu_g \Psi} \right] \theta .$$

En reportant ces égalités dans la relation (4-17) il vient:

$$\int_{\Sigma} 2\,\mu_g\,\mu_\ell \int_0^{S(y)} U_1^* \, dz \;\theta \, dy =$$

$$= \int_{\Sigma} \mu_g \, P^* \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\left[\frac{\Psi^3}{6} + \frac{\mu_\ell}{2} \; \frac{S\,\Psi^2\,(S - \Psi)}{\mu_\ell\,(S - \Psi) + \mu_g \Psi} \right] \theta \right) dy \; +$$

$$+ \int_{\Sigma} \mu_\ell \, P^* \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\left[\frac{(S - \Psi)^3}{6} + \frac{\mu_g}{2} \; \frac{S\,(S - \Psi)^2\,\Psi}{\mu_\ell\,(S - \Psi) + \mu_g \Psi} \right] \theta \right) dy$$

$$+ \int_{\Sigma} \mu_g \, F_1^\ell \left[\frac{\Psi^3}{6} + \frac{\mu_\ell}{2} \; \frac{S\,\Psi^2\,(S - \Psi)}{\mu_\ell\,(S - \Psi) + \mu_g \Psi} \right] \theta \;\; dy \; +$$

$$+ \int_{\Sigma} \mu_\ell \, \Gamma_1^g \left[\frac{(S - \Psi)^3}{6} + \frac{\mu_g}{2} \, \frac{S\,(S - \Psi)^2\,\Psi}{\mu_\ell\,(S - \Psi) + \mu_g \Psi} \right] \theta \; dy .$$

Puisque cette relation est vraie pour toute fonction θ de $\mathcal{W}(\Sigma)$, donc $\forall\, \theta \in H_0^1(\Sigma)$, on en déduit la relation (4-13) pour l'indice i =1; et il est clair qu'en reprenant les calculs précédents avec une fonction-test $\hat{v}$ telle que $\hat{v}_2 = \psi$ et $\hat{v}_1 = \hat{v}_3 = 0$, la fonction ψ étant la même que celle définie en (4-16), on obtient la relation (4-13) pour l'indice i = 2. Ce qui achève la démonstration du théorème. □

On va maintenant construire l'équation que doit vérifier la moyenne $\mathcal{M}_z(U^*)$ de U^*, on en déduira ensuite celle que doit vérifier la limite P^* grâce à la relation (4-13), et enfin, après avoir démontré quelleques régularités supplémentaires pour P^*, on déterminera les deux limites U^* et P^*.

4-2)Identification des limites:

On va utiliser la condition d'incompressibilité des deux fluides ($\mathrm{div}(U^\delta) = 0$) pour construire une équation, qui a lieu dans la surface Σ, que doit vérifier la moyenne $\mathcal{M}_z(U^*)$ de la limite U^*. Introduisons d'abord l'espace suivant:

$$(4\text{-}18) \qquad \mathbb{H}(\mathrm{div},\Sigma) = \left\{ \psi \in \mathbb{L}^2(\Sigma);\ \mathrm{div}_y(\psi) = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial \psi_i}{\partial y_i} \in \mathbb{L}^2(\Sigma) \text{ et } \psi_3 \equiv 0 \right\}$$

qu'on muni du produit scalaire classique:

$$(4\text{-}19) \qquad \langle \psi , \theta \rangle_{\mathbb{H}(\mathrm{div},\Sigma)} = \int_{\Sigma} \psi . \theta \; dy + \int_{\Sigma} \mathrm{div}_y(\psi)\ \mathrm{div}_y(\psi)\ dy \quad \forall\, \psi, \theta \in \mathbb{H}(\mathrm{div},\Sigma)$$

Lemme 4-2:

Sous les hypothèses du Théorème 3-2, alors, quitte à extraire une sous-suite, $\hat{U}^\delta$ vérifie:

$$(4\text{-}20) \qquad \int_0^S \frac{1}{\delta^2}\hat{U}^\delta \, dz \xrightarrow[\delta \to 0]{} S\mathcal{M}_z(U^*) = \int_0^S U^* \, dz \qquad \textit{dans } \mathbf{H}(\mathrm{div},\Sigma) \textit{ faible.}$$

et la moyenne $\mathcal{M}_z(U^*)$ vérifie la condition d'incompressibilité suivante:

$$(4\text{-}21) \qquad \mathrm{div}_y(S\mathcal{M}_z(U^*)) = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial y_i}(S\mathcal{M}_z(U_i^*)) = 0 \qquad \textit{dans } \mathbf{L}^2(\Sigma).$$

Démonstration:

D'après la deuxième équation de (4-1), $\hat{U}^\delta$ vérifie:

$$b^0(\hat{U}^\delta,\hat{q}) + \delta\, b^1(\hat{U}^\delta,\hat{q}) = 0 \qquad \forall\, \hat{q} \in L_0^2(\Omega_f)$$

Comme pour la relation (4-7) si on prend dans cette équation la fonction-test $\hat{q}$ telle que:

$$\hat{q} = \theta - \mathcal{M}(\theta) \;;\; \mathcal{M}(\theta) = \frac{1}{\mathrm{mes}(\Omega_f)} \int_{\Omega_f} \theta \, dydz \quad \text{avec} \quad \theta \in H^1(\Sigma).(\theta \text{ indépendante de } z)$$

alors il vient:

$$(4\text{-}22) \qquad b^0(\hat{U}^\delta,\theta) + \delta\, b^1(\hat{U}^\delta,\theta) = \mathcal{M}(\theta)\,(\, b^0(\hat{U}^\delta,1) + \delta\, b^1(\hat{U}^\delta,1)\,) \qquad \forall\, \theta \in H^1(\Sigma)$$

On va maintenant faire apparaitre dans cette relation la moyenne $\mathcal{M}(\hat{U}^\delta)$ de $\hat{U}^\delta$, puis on va essayer de passer à la limite. En utilisant les expressions (2-11) des formes bilinéaires b^i on a:

$$\bullet \quad \mathcal{b}^1(\hat{U}^\delta,\theta) = \int_{\Omega_f} \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial \hat{U}_i^\delta}{\partial y_i} \; \theta \; dydz = \; = \int_{\Sigma} \sum_{i=1}^{2} \int_0^{S(y)} \frac{\partial \hat{U}_i^\delta}{\partial y_i} dz \; \theta \; dy$$

$$= \int_{\Sigma} \theta \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial y_i} \int_0^{S(y)} \hat{U}_i^\delta \; dz \quad dy.$$

(car $\hat{U}^\delta = 0$ sur $\mathcal{A}_{fs}$, donc en particulier en $z=S(y)$).

$$\bullet \quad \mathcal{b}^1(\hat{U}^\delta,1) = \int_{\Omega_f} \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial \hat{U}_i^\delta}{\partial y_i} \; dydz = \int_{\partial\Omega_f} \sum_{i=1}^{2} \hat{U}_i^\delta \; \hat{n}_i \; d(\partial\Omega_f) = 0$$

(car $\hat{U}^\delta = 0$ sur $\mathcal{A}_{fs}$, $\cos(\hat{n},z) = 0$ sur la face latérale Γ et $\int_\Gamma \hat{U}^\delta . \; \hat{n} \; d(\Gamma) = 0$ d'après (2-15))

$$\bullet \quad \mathcal{b}^0(\hat{U}^\delta,\theta) = \int_{\Omega_f} \frac{\partial \hat{U}_3^\delta}{\partial z} \; \theta \; dydz = \int_{\Omega_f} \frac{\partial(\hat{U}_3^\delta \theta)}{\partial z} \; dydz$$

$$= \int_{\partial\Omega_f} \hat{U}_3^\delta \; \cos(\hat{n},z) \; \theta \; d(\partial\Omega_f) \; = 0.$$

(car $\hat{U}^\delta = 0$ sur $\mathcal{A}_{fs}$ et $\cos(\hat{n},z) = 0$ sur la face latérale Γ)

Ces relations sont valables $\forall \; \theta \in H^1(\Sigma)$ (avec θ indépendante de z), et la relation (4-22) s'écrit alors:

$$\int_{\Sigma} \theta \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial y_i} \int_0^{S(y)} \hat{U}_i^\delta \; dz \quad dy \; = 0 \qquad \forall \; \theta \in H^1(\Sigma)$$

d'où:

$$\text{(4-23)} \qquad \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial y_i} \int_0^{S} \hat{U}_i^\delta \; dz \; = 0 \qquad \text{dans } H^{-1}(\Sigma)$$

Mais d'après le théorème 3-2:

$$\frac{1}{\delta^2}\,\frac{\partial \hat{U}^\delta}{\partial y_i} \xrightarrow[\delta \to 0]{} \frac{\partial U_i^*}{\partial y_i} \qquad \text{dans } (\mathcal{D}'(\Omega_f))^3$$

et puisque l'application:

$$S\mathcal{M}_z : \varphi \longrightarrow \int_0^S \varphi \, dz$$

est linéaire et est continue de $L^2(\Omega_f)$ dans $L^2(\Sigma)$, alors d'après le théorème 3-2:

$$\int_0^S \frac{1}{\delta^2}\,\hat{U}_i^\delta \, dz \longrightarrow \int_0^S U_i^* \, dz \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Sigma)$$

et:

$$\text{(4-24)} \qquad \frac{\partial}{\partial y_i}\int_0^S \frac{1}{\delta^2}\,\hat{U}_i^\delta \, dz \longrightarrow \int_0^S \frac{\partial U_i^*}{\partial y_i}\, dz \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Sigma)$$

Le passage à la limite dans la relation (4-23) divisée par δ^2, donne alors:

$$\text{(4-25)} \qquad \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial y_i}\int_0^S U_i^* \, dz = 0 \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\Sigma)$$

On va maintenant vérifier que ces convergences ont lieu non pas uniquement dans $\mathcal{D}'(\Sigma)$ mais dans l'espace $\mathbf{H}(\text{div},\Sigma)$ défini par (4-18). Il est clair que les débits $S\mathcal{M}_z(U^\delta)$ et $S\mathcal{M}_z(U^*)$ sont dans $\mathbf{L}^2(\Sigma)$ puisque U^δ et U^* sont dans $\mathbf{L}^2(\Omega_f)$. Les égalités (4-23) et (4-25) montrent que ces débits sont dans $\mathbf{H}(\text{div},\Sigma)$, de plus:

$$\left\| S\mathcal{M}_z(U^\delta) \right\|_{\mathbf{H}(\text{div},\Sigma)} = \left| S\mathcal{M}_z(U^\delta) \right|_{0,\Sigma} + \left| \text{div}_y(S\mathcal{M}_z(U^*)) \right|_{0,\Sigma}$$

$$= \left| S\mathcal{M}_z(U^\delta) \right|_{0,\Sigma} \le C \left| U^\delta \right|_{0,\Omega_f} \qquad (\text{avec } C^2 = \sup_{\Sigma}(S)).$$

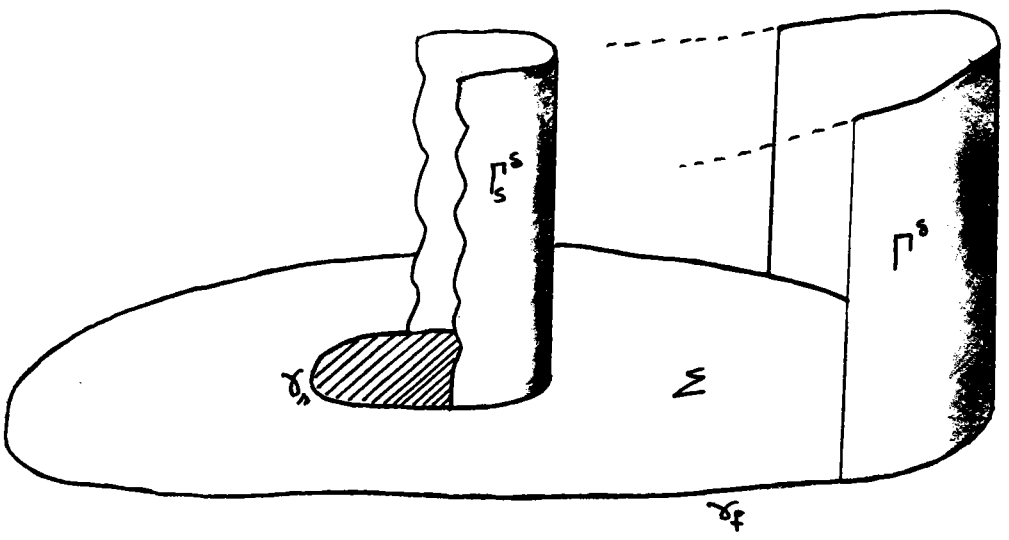
D'après l'estimation (3-8) du théorème 3-2 on a alors:

$$\left\| S\mathcal{M}_z(U^\delta) \right\|_{\mathbb{H}(\mathrm{div},\Sigma)} \leq C\,\delta^2$$

Le débit $\frac{1}{\delta^2} S\mathcal{M}_z(U^\delta)$ est donc borné dans $\mathbb{H}(\mathrm{div},\Sigma)$, et par conséquent la convergence (4-24) reste valable dans $\mathbb{H}(\mathrm{div},\Sigma)$ faible. Ce qui achève la démonstration. □

On voit maintenant que si l'on remplace dans l'équation (4-21) le débit $S\mathcal{M}_z(U^*)$ par son expression (4-13), on obtient une équation vérifié par la limite P^*. On va associer à cette équation les conditions aux limites que doit satisfaire P^* sur le bord $\partial\Sigma$, puis on vérifiera qu'elle détermine P^* de façon unique.

Rappelons d'abord que le bord γ de la surface Σ a été décomposé en deux parties (1-4), une frontière γ_s qui génère l'intérface latérale fluides-solide (et les entrées-sorties sur lesquelles on impose une vitesse U^δ nulle) i.e Γ_s^δ, et une frontière γ_f qui génère les entrées-sorties des fluides sur lesquelles on impose les contraintes normales G^δ, i.e Γ^δ.



(figure 4-5)

Pour simplifier l'écriture, on va introduire les notations suivantes:

$$(4\text{-}26)\quad \begin{cases} X^{\ell} = \left[\dfrac{\Psi^3}{12\mu_\ell} + \dfrac{1}{4}\,\dfrac{S\,\Psi^2\,(S-\Psi)}{\mu_\ell\,(S-\Psi)+\mu_g\Psi}\right] \\ X^{g} = \left[\dfrac{(S-\Psi)^3}{12\mu_g} + \dfrac{1}{4}\,\dfrac{S\,(S-\Psi)^2\,\Psi}{\mu_\ell\,(S-\Psi)+\mu_g\Psi}\right] \\ X = X^{\ell} + X^{g} \\ M = X^{\ell}\,F^{\ell} + X^{g}\,F^{g} \end{cases}$$

Théorème 4-3:

Sous les hypothèses du Théorème 4-1, et si la fonction S *vérifie*

$$(4\text{-}27)\qquad \exists\, \nu \in \mathbb{R}_+^* \ \textit{telle que}\ \ S \geq \nu \qquad \textit{p.p dans}\ \Sigma$$

alors la limite P^* *est déterminée d'une manière unique dans* $H^1(\Sigma)$ *par:*

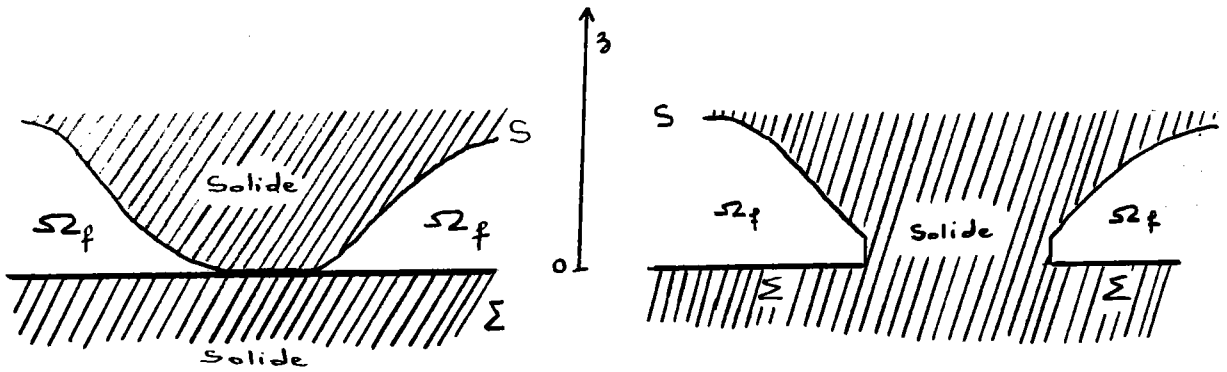
$$(4\text{-}28)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial y_i}\left(X\,\frac{\partial P^*}{\partial y_i}\right) = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial M_i}{\partial y_i} & \textit{dans}\ \Sigma \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{2} X\,\frac{\partial P^*}{\partial y_i}\,n_i = \sum_{i=1}^{2} M_i\,n_i & \textit{sur}\ \gamma_g \\ P^* = 0 & \textit{sur}\ \gamma_f \end{cases}$$

$$(4\text{-}29)\qquad \frac{\partial P^*}{\partial z} = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\Sigma} S\,P^*\,dy = 0\,;$$

Les fonctions X *et* M *sont définies par les relations* (4-25).

Démonstration:

Signalons d'abord que l'hypothèse (4-27) n'autorise pas les contacts parfaits entre les faces, inférieure et supérieure, du solide du type de la figure 4-6 (i) ci dessous, a moins d'approcher ce type de géométries par celles de la figure 4-6 (ii).



(i)

géométrie non Autorisée
par l'hypothèse (4-27)

(ii)

géométrie Autorisée
par l'hypothèse (4-27)

(figure 4-6)

On a déjà démontré dans le théorème 3-2 (3-26) que la limite P^* est indépendante de la variable z. Pour obtenir la première relation de (4-28) dans $H^{-1}(\Sigma)$, il suffit de remplacer dans l'équation (4-21) le débit $S\mathcal{M}_z(U^*)$ par son expression (4-13). On va voir que la limite P^* est dans $H^1(\Sigma)$ et qu'on peut alors donner un sens aux conditions aux limites sur les bords γ_s et γ_f de Σ. Montrons d'abord que l'hyothèse (4-26) implique la propriété de coercivité suivante pour la fonction X:

(4-30) $\exists\, \eta \in \mathbb{R}_+^*$ telle que $X \geq \eta$ p.p dans Σ

En effet, d'après les notations (4-26):

$$X = X^\ell + X^g = \left[\frac{\Psi^3}{12\mu_\ell} + \frac{(S-\Psi)^3}{12\mu_g} + \frac{1}{4}\,\frac{S^2\,\Psi\,(S-\Psi)}{\mu_\ell\,(S-\Psi) + \mu_g\Psi}\right]$$

La surface Σ peut être décomposée en deux sous-ensembles $\left\{\Psi > \frac{\nu}{2}\right\}$ et $\left\{\Psi \leq \frac{\nu}{2}\right\}$. Puisque les viscosités μ_α sont strictement positives et $0 \leq \Psi \leq S$, qui est une hypothèse géométrique de départ (1-1), alors:

- dans $\left\{y \in \Sigma; \Psi(y) > \frac{\nu}{2}\right\}$: $X \geq \dfrac{\nu^3}{96\mu_\ell}$
- dans $\left\{y \in \Sigma; \Psi(y) \leq \frac{\nu}{2}\right\}$: $X \geq \dfrac{\nu^3}{96\mu_g}$

La fonction X vérifie alors la propriété (4-30), en prenant par exemple $\eta = \dfrac{\nu^3}{96\ \max(\mu_\ell \mu_g)}$.

Montrons maintenant que $P^* \in H^1(\Sigma)$. D'après la relation (4-13) on a:

$$X \frac{\partial P^*}{\partial y_i} = M_i - S\mathcal{M}_z(U^*) \quad \text{dans } H^{-1}(\Sigma) \tag{4-32}$$

Puisque les fonctions F^ℓ et F^g sont supposées dans $\mathbb{L}^2(\Sigma)$ et les fonctions S et Ψ sont dans $L^\infty(\Sigma)$, il est facile de vérifier, compte-tenu de l'hypothèse (4-27), que la fonction $\mathbb{M}$ est dans $\mathbb{L}^2(\Sigma)$. D'après le lemme 4-2 $S\mathcal{M}_z(U^*)$ est dans $\mathbb{L}^2(\Sigma)$, la relation précédente implique donc que les dérivées $X \dfrac{\partial P^*}{\partial y_i}$ (i= 1,2) sont dans $L^2(\Sigma)$. On en déduit grâce à la propriété (4-30) que les $\dfrac{\partial P^*}{\partial y_i}$ sont dans $L^2(\Sigma)$ et par conséquent P^* est dans $H^1(\Sigma)$.

On va maintenant montrer que P^* vérifie sur γ_s et γ_f les conditions aux limites annoncées par le théorème. Commencons par la condition sur γ_s:

D'après (2-15) la fonction $\hat{U}^\delta$ est nulle sur la frontière $\Gamma_s = \left\{(y,z); y \in \gamma_s \text{ et } 0 < z < S(y)\right\}$; donc:

$$\int_{\Gamma_s} \frac{1}{\delta^2}\, \hat{U}^\delta . \hat{n}(\Gamma_s)\ \theta\ d(\Gamma_s) = \int_{\gamma_s} S\mathcal{M}_z\left(\frac{1}{\delta^2}\, \hat{U}^\delta\right) .\ n(\gamma_s)\ \theta\ d(\gamma_s) = 0 \quad \forall\, \theta \in L^2(\gamma_s) \tag{4-33}$$

D'après [20] l'application "trace" T_n :

$$T_n : \mathbb{H}(\mathrm{div},\Sigma) \longrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\gamma_g) \qquad (\mathbb{H}(\mathrm{div},\Sigma) \text{ est défini par (4-18)})$$

$$\varphi \longrightarrow \sum_{i=1}^{2} \varphi\, n(\gamma_g)_i = \varphi . n(\gamma_g)$$

est linéaire et est continue. La convergence (4-20) du lemme 4-2 implique alors, compte-tenu de (4-33), que:

$$S\mathcal{M}_z(\frac{1}{\delta^2}\hat{U}^\delta) . n(\gamma_g) \xrightarrow[\delta \to 0]{} S\mathcal{M}_z(U^*) . n(\gamma_g) = 0 \quad \text{dans } H^{-\frac{1}{2}}(\gamma_g).$$

Si on remplace $S\mathcal{M}_z(U^*)$ par son expression (4-32), sachant que P^* est dans $H^1(\Sigma)$, on obtient la condition au bord γ_g recherchée:

$$\mathcal{X}\, \nabla_y P^* . n(\gamma_g) = \mathbf{M} . n(\gamma_g) \qquad \text{dans } H^{-\frac{1}{2}}(\gamma_g)$$

Pour obtenir la condition que doit vérifier P^* sur le bord γ_f on va utiliser la relation (4-2) du théorème 4-1 en exploitant l'information supplémentaire: ($P^* \in H^1(\Sigma)$), qu'on vient de démontrer. En prenant dans la relation (4-2) des fonctions-test appartenant à $\mathcal{D}(\Omega_\alpha)$, $\alpha = g$ puis $\alpha = \ell$, on obtient:

$$(4\text{-}34) \qquad -\mu_\alpha \frac{\partial^2 U_i^*}{\partial z^2} = F_i^\alpha - \frac{\partial P^*}{\partial y_i} \qquad (i = 1, 2) \qquad \text{dans } L^2(\Omega_\alpha)\ (\alpha = g, \ell)$$

Cette égalité s'obtient d'abord dans les $\mathcal{D}'(\Omega_\alpha)$, mais puisque les F_i^α et les $\frac{\partial P^*}{\partial y_i}$ sont indépendantes de la variable z et appartiennent à $L^2(\Sigma)$, elles appartiennent aussi aux espaces $L^2(\Omega_\alpha)$ ($\alpha = g, \ell$) car les fonction S et Ψ sont bornées, et par conséquent cette égalité reste valable aussi dans les $L^2(\Omega_\alpha)$ ($\alpha = g, \ell$). Les restrictions des $\frac{\partial U_i^*}{\partial z}$ aux Ω_α sont alors dans les espaces $\mathcal{U}_z^\alpha$ définis ci dessous:

$$(4\text{-}35) \qquad \frac{\partial U_i^*}{\partial z} \in \mathcal{U}_z^\alpha = \left\{ \varphi \in L^2(\Omega_\alpha);\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \in L^2(\Omega_\alpha) \right\} \qquad (\alpha = g, \ell)$$

Comme dans les définitions (3-20) à (3-22), on peut maintenant donner un sens aux traces $\frac{\partial U^*}{\partial z}\,\hat{n}_3$ de $\frac{\partial U^*}{\partial z}$ sur des parties $\mathcal{B}$ des bords $\partial\Omega_\alpha$ comme éléments de $H^{-\frac{1}{2}}(\mathcal{B})$. On peut alors intégrer par parties la relation (4-2) comme ci dessous:

$$\left|\begin{array}{l}
\displaystyle\int_{\Omega_\ell} -\mu_\ell \frac{\partial^2 U_i^*}{\partial z^2}\,\hat{v}_i\,dydz + \int_{\Omega_g} -\mu_g \frac{\partial^2 U_i^*}{\partial z^2}\,\hat{v}_i\,dydz = \\
\displaystyle = \int_{\Omega_\ell}\left(F_i^\ell - \frac{\partial P^*}{\partial y_i}\right)\hat{v}_i\,dydz + \int_{\Omega_g}\left(F_i^g - \frac{\partial P^*}{\partial y_i}\right)\hat{v}_i\,dydz + \\
\displaystyle + \int_{\mathcal{A}_{g\ell}} [\![\,\hat{\mu}\,\frac{\partial U_i^*}{\partial z}\,\hat{n}_3\,]\!]_{g\ell}\,\hat{v}_i\,d(\mathcal{A}_{g\ell}) + \int_\Gamma P^*\,\hat{v}_i\,\hat{n}_i\,d(\Gamma); \\
\forall\,\hat{v}\in\mathcal{U} = \left\{\hat{v}\in \mathbb{H}^1(\Omega_i);\ \hat{v}=0 \text{ sur } \mathcal{A}_{is}\right\} \qquad (i=1,2)
\end{array}\right.$$

En tenant compte de la relation (4-34), on déduit alors de la précédente que:

$$\int_{\mathcal{A}_{g\ell}} [\![\,\hat{\mu}\,\frac{\partial U_i^*}{\partial z}\,\hat{n}_3\,]\!]_{g\ell}\,\hat{v}_i\,d(\mathcal{A}_{g\ell}) + \int_\Gamma P^*\,\hat{v}_i\,\hat{n}_i\,d(\Gamma) = 0 \qquad \forall\,\hat{v}\in\mathcal{U} \qquad (i=1,2)$$

En prenant dans cette relation des fonctions-test $\hat{v}$ ayant un support sans intersection avec Γ puis des fonctions $\hat{v}$ ayant un support sans intersection avec $\mathcal{A}_{g\ell}$ on obtient:

(4-36) $\quad [\![\,\hat{\mu}\,\frac{\partial U_i^*}{\partial z}\hat{n}_3\,]\!]_{g\ell} = 0 \qquad$ sur $\mathcal{A}_{g\ell}$

(4-37) $\quad P^* = 0 \qquad$ sur Γ.

Mais puisque P^* est indépendante de la variable z et :

$$\Gamma = \left\{(y_1,y_2,z);\ (y_1,y_2)\in\gamma_i \text{ et } 0<z<S(y_1,y_2)\right\}$$

la relation (4-37) implique alors que:

(4-38) $\quad P^* = 0 \qquad\qquad \text{sur } \gamma_f.$

Le problème aux limites (4-28) que doit vérifier P^* est alors démontré. La deuxième relation de (4-29) est une conséquence immédiate de l'appartenance (3-26) de P^* à $L_0^2(\Omega_f)$ (i.e: de moyenne nulle sur Ω_f) et de son indépendance par rapport à la variable z. En effet:

$$0 = \int_{\Omega_f} P^* \, dydz = \int_{\Sigma} \int_0^S P^* \, dz \, dy = \int_{\Sigma} S \, P^* \, dy$$

Les équations (4-28) forment un problème aux limites classique [25] et la propriété de coercivité (4-30) permet d'affirmer l'existence et l'unicité de la solution P^* lorsque la mesure superficielle $mes(\gamma_f)$ de γ_f est non nulle. Lorsque $mes(\gamma_f)$ est nulle, ces équations déterminent P^* à une constante additive près puisque dans ce cas la condition de compatibilité suivante est satisfaite:

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial M_i}{\partial y_i} \, dy = \int_{\partial\Sigma} M_i \, n_i \, d(\partial\Sigma) = \int_{\gamma_s} M_i \, n_i \, d(\gamma_s)$$

Mais dans ce cas aussi on a l'unicité de la solution grâce à la deuxième condition de (4-29) car d'après l'hypothèse (4-27) $\int_{\Sigma} S \, dy$ est strictement positive. Ce qui achève la démonstration du théorème. □

Remarque 4-1:

Rappelons que, comme dans les cas classiques, la pression P^δ n'est déterminée par les équations (1-7) qu'à une constante additive près, et pour fixer cette constante on a cherché P^δ (resp. $\hat{P}^\delta$) de moyenne nulle sur Ω_f^δ (resp. Ω_f). Ceci veut dire que si l'on n'impose pas cette dernière contrainte, alors la limite P^* de $\hat{P}^\delta$ est elle aussi déterminée à une constante additive près, car dans ce cas, la condition: ($P^* = 0$ sur γ_f) dans les équations (4-28) est à remplacer par:

(P^*= *une constante sur* γ_f). *Donc dans les deux cas:* $mes(\gamma_g)= 0$ ou $mes(\gamma_g) > 0$, *l'unicité de* P^* *annoncée par le théorème précédent est une conséquence de l'hypothèse de départ:* P^δ *de moyenne nulle sur* Ω_i^δ, *qui donne la deuxième condition de (4-29).* □

Les convergences (3-26) du théorème 3-2 n'étaient valables que pour des sous-suite extraites de $\hat{P}^\delta$, mais on vient de démontrer que toutes ces sous-suites convergent vers l'unique solution P^* de (4-28) et (4-29), on peut alors affirmer maintenant que c'est toute la suite $\hat{P}^\delta$ qui vérifie ces convergences. On va voir qu'il est de même pour $\hat{U}^\delta$, c'est à dire que U^* est détérminée de façon unique et par conséquent c'est toute la suite $\hat{U}^\delta$ qui vérifie les convergences (3-24) et (3-25) du théorème 3-2 et non pas uniquement une sous-suite extraite.

Théorème 4-4:

Sous les hypothèses du Théorème 4-3, la limite U^* *est déterminée d'une manière unique par:*

$$U_i^* = \begin{cases} U_i^{*\ell} & \text{dans } \Omega_\ell \text{ i.e: si } 0 < z < \Psi(y). \\ U_i^{*g} & \text{dans } \Omega_g \text{ i.e: si } \Psi(y) < z < S(y). \end{cases} \qquad (i=1,2) \tag{4-39}$$

$$U_3^* \equiv 0 \qquad \text{dans } \Omega_f \tag{4-40}$$

où:

$$U_i^{*\ell} = \frac{z}{2\mu_\ell}\left(\Psi - z + \frac{\mu_\ell\ \Psi\ (S-\Psi)}{\mu_g\ \Psi + \mu_\ell\ (S-\Psi)}\right)\left[F_i^\ell - \frac{\partial P^*}{\partial y_i}\right] + \frac{z}{2}\left(\frac{(S-\Psi)^2}{\mu_g\ \Psi + \mu_\ell\ (S-\Psi)}\right)\left[F_i^g - \frac{\partial P^*}{\partial y_i}\right] \tag{4-41}$$

$$U_i^{*g} = \frac{(S-z)}{2\mu_g}\left(z - \Psi + \frac{\mu_g\ \Psi\ (S-\Psi)}{\mu_g\ \Psi + \mu_\ell\ (S-\Psi)}\right)\left[F_i^g - \frac{\partial P^*}{\partial y_i}\right] + \frac{(S-z)}{2}\left(\frac{\Psi^2}{\mu_g\ \Psi + \mu_\ell\ (S-\Psi)}\right)\left[F_i^\ell - \frac{\partial P^*}{\partial y_i}\right] \tag{4-42}$$

Démonstration:

Puisque les fonctions F_i^α et $\dfrac{\partial P^*}{\partial y_i}$ ($i = 1, 2$ et $\alpha = g, \ell$) sont indépendantes de la variable z, l'égalité (4-34) implique que, pour y fixé, l'application $z \longrightarrow U_i^*(y,z)$ est un polynôme $U_i^{*\alpha}$ de degré deux en z dans chaque Ω_α ($\alpha = g, \ell$). Grâce aux conditions aux limites et aux interfaces que doit vérifier U_i^*, on va pouvoir déterminer les coefficients de ces deux polynômes.

D'après les relations (4-34), (4-36) et (3-25) les fonctions $U_i^{*\alpha}$ doivent vérifier:

$$
(4\text{-}43)\quad \left|\begin{array}{ll}
-\mu_\ell \dfrac{\partial^2 U_i^{*\ell}}{\partial z^2} = F_i^\ell - \dfrac{\partial P^*}{\partial y_i} & \text{pour } y \in \Sigma \text{ et } 0 < z < \Psi(y) \\
-\mu_g \dfrac{\partial^2 U_i^{*g}}{\partial z^2} = F_i^g - \dfrac{\partial P^*}{\partial y_i} & \text{pour } y \in \Sigma \text{ et } \Psi(y) < z < S(y) \\
 & \\
U_i^{*\ell}(y,\Psi(y)) = U_i^{*g}(y,\Psi(y)) & \\
-\mu_\ell \dfrac{\partial^2 U_i^{*\ell}}{\partial z^2}(y,\Psi(y)) = \mu_g \dfrac{\partial^2 U_i^{*g}}{\partial z^2}(y,\Psi(y)) & \\
 & \\
U_i^{*\ell}(y,0) = 0 & \\
U_i^{*g}(y,S(y)) = 0 &
\end{array}\right.
$$

Les deux premières équations impliquent que chaque $U_i^{*\alpha}$ est de la forme:

$$
U_i^{*\alpha}(y,z) = \frac{-1}{\mu_\alpha}\left(F_i^\alpha(y) - \frac{\partial P^*}{\partial y_i}(y)\right) z^2 + A_i^\alpha(y)\, z + B_i^\alpha(y). \quad (i = 1, 2 \text{ et } \alpha = g, \ell)
$$

où les A_i^α et les B_i^α sont des fonctions de la variable y uniquement. En reportant ces expressions dans les conditions aux interfaces ($z = \Psi(y)$) et dans les conditions aux limites ($z = 0$) et ($z = S(y)$) de (4-43) on détermine les coefficients A_i^α et B_i^α et on obtient les expressions (4-41) et (4-42) des $U_i^{*\alpha}$. Enfin, on sait d'après le théorème 4-1 que la troisième composante U_3^* de U^* est nulle. □

Remarque 4-2:

En intégrant l'égalité (4-39) *de* $z = 0$ *à* $z = \Psi$ *puis de* $z = \Psi$ *à* $z = S$ *et en sommant les résultats obtenus, on retrouve la relation* (4-13) *qui lie le débit* $S\,\mathcal{M}_z(U^*)$ *aux forces* F^α *et au gradient de* P^*. *Mais on ne peut commencer par établir la relation* (4-39) *avant* (4-13) *puisque pour l'obtenir on a utilisé la régularité* $H^1(\Omega_f)$ *de* P^* *qui a été démontrée grâce à* (4-13).

On peut s'intéresser aussi aux relations qui lient "les débits de chaque fluide" aux forces F^α *et au gradient de* P^*. *Ces relations peuvent être obtenues comme ce qui a été fait pour établir* (4-13), *c'est à dire en choisissant astucieusement les fonctions-test* $\hat{v}$ *dans la relation* (4-11) *du lemme 4-1, mais elles s'obtiennent facilement en intégrant l'égalité* (4-39) *de* $z = 0$ *à* $z = \Psi$ *puis de* $z = \Psi$ *à* $z = S$. *On obtient:*

$$\text{(4-44)} \qquad \int_0^\Psi U_i^*\,dz = \frac{\Psi^3}{12\mu_\ell}\left[1 + \frac{3\,\mu_\ell\,(S-\Psi)}{\mu_\ell\,(S-\Psi) + \mu_g\Psi}\right]\left[F_i^\ell - \frac{\partial P^*}{\partial y_i}\right] + \frac{1}{4}\left[\frac{\Psi^2\,(S-\Psi)^2}{\mu_\ell\,(S-\Psi) + \mu_g\Psi}\right]\left[F_i^g - \frac{\partial P^*}{\partial y_i}\right]$$

$$\text{(4-45)} \qquad \int_\Psi^S U_i^*\,dz = \frac{(S-\Psi)^3}{12\mu_g}\left[1 + \frac{3\,\mu_g\,\Psi}{\mu_\ell\,(S-\Psi) + \mu_g\Psi}\right]\left[F_i^g - \frac{\partial P^*}{\partial y_i}\right] + \frac{1}{4}\left[\frac{\Psi^2\,(S-\Psi)^2}{\mu_\ell\,(S-\Psi) + \mu_g\Psi}\right]\left[F_i^\ell - \frac{\partial P^*}{\partial y_i}\right]$$

5/ RESUME ET CONCLUSION:

Rappelons que les résultats de convergences des paragraphes précédents ont été établit non pas pour le vrai couple vitesse-pression (U^δ, P^δ), solution du problème (1-7), mais pour le couple $(\hat{U}^\delta, \hat{P}^\delta)$, défini par (2-13). Mais on va voir que cette étude peut nous renseigner sur le comportement asymptotique de la "vraie" vitesse U^δ et de la "vraie" pression P^δ. Résumons d'abord les résultats essentiels obtenus.

5-1) résumé:

Grâce à l'application:

$$\mathcal{H}^\delta : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x_1, x_2, x_3) \longrightarrow \mathcal{H}^\delta(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, z) = (x_1, x_2, \frac{x_3}{\delta})$$

on s'est ramené à un domaine $\Omega_f = \mathcal{H}^\delta(\Omega_f^\delta)$ indépendant du paramètre δ et sous les hypothèses des théorèmes précédents on a démontré les résultats de convergences suivants:

(5-1) Pour la pression P^δ on a:

- $$\hat{P}^\delta = P^\delta \circ (\mathcal{H}^\delta)^{-1} \xrightarrow[\delta \to 0]{} P^* \quad \text{dans } L_0^2(\Omega_f) \text{ faible.}$$

La limite P^* est détetrminée d'une manière unique par:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\chi \frac{\partial P^*}{\partial y_i}\right) = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial M_i}{\partial y_i} & \textit{dans } \Sigma \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{2} \chi \frac{\partial P^*}{\partial y_i} n_i = \sum_{i=1}^{2} M_i\, n_i & \textit{sur } \gamma_s \\ P^* = 0 & \textit{sur } \gamma_f \\ \dfrac{\partial P^*}{\partial z} = 0 & \textit{dans } \Omega_f \\ \displaystyle\int_\Sigma S\, P^*\, dy = 0 & \end{cases}$$

Les fonctions X, X^{ℓ}, X^{g} et M sont données par

$$(5\text{-}2)\qquad \begin{cases} X^{\ell} = \left[\dfrac{\Psi^3}{12\mu_\ell} + \dfrac{1}{4}\,\dfrac{S\,\Psi^2\,(S-\Psi)}{\mu_\ell\,(S-\Psi)+\mu_g\Psi}\right] \\ X^{g} = \left[\dfrac{(S-\Psi)^3}{12\mu_g} + \dfrac{1}{4}\,\dfrac{S\,(S-\Psi)^2\,\Psi}{\mu_\ell\,(S-\Psi)+\mu_g\Psi}\right] \\ X = X^{\ell} + X^{g} \\ M = X^{\ell}\,F^{\ell} + X^{g}\,F^{g} \end{cases}$$

(5-3) Pour la vitesse U^{δ} :

- $$\frac{1}{\delta^2}\hat{U}^{\delta} = \frac{1}{\delta^2}U^{\delta}{}_{0}(\mathcal{H}^{\delta})^{-1} \xrightarrow[\delta \to 0]{} U^{*} \qquad \text{dans } \mathbb{L}^2(\Omega_f) \text{ faible.}$$

La limite U^{*} est donnée par :

- dans Ω_ℓ (i.e si $0 < z < \Psi(y)$); $(i = 1,2)$:

$$U_i^{*} = \frac{z}{2\mu_\ell}\left(\Psi - z + \frac{\mu_\ell\ \Psi\ (S-\Psi)}{\mu_g\ \Psi + \mu_\ell\ (S-\Psi)}\right)\left[F_i^{\ell} - \frac{\partial P^{*}}{\partial y_i}\right] + \frac{z}{2}\left(\frac{(S-\Psi)^2}{\mu_g\ \Psi + \mu_\ell\ (S-\Psi)}\right)\left[F_i^{g} - \frac{\partial P^{*}}{\partial y_i}\right]$$

- dans Ω_g (i.e: si $\Psi(y) < z < S(y)$); $(i = 1,2)$:

$$U_i^{*} = \frac{(S-z)}{2\mu_g}\left(z - \Psi + \frac{\mu_g\ \Psi\ (S-\Psi)}{\mu_g\ \Psi + \mu_\ell\ (S-\Psi)}\right)\left[F_i^{g} - \frac{\partial P^{*}}{\partial y_i}\right] + \frac{(S-z)}{2}\left(\frac{\Psi^2}{\mu_g\ \Psi + \mu_\ell\ (S-\Psi)}\right)\left[F_i^{\ell} - \frac{\partial P^{*}}{\partial y_i}\right]$$

- $$U_3^{*} \equiv 0 \qquad \text{dans } \Omega_f .$$

(5-4) Pour la moyenne de la vitesse U^δ du fluide (ℓ), dans la direction de x_3, on a le résultat suivant:

$$\frac{1}{\delta\Psi}\int_0^{\delta\Psi}\frac{1}{\delta^2}U^\delta\,dx_3 = \frac{1}{\Psi}\int_0^{\Psi}\frac{1}{\delta^2}\hat{U}^\delta\,dz \xrightarrow[\delta\to 0]{} \frac{1}{\Psi}\int_0^{\Psi}U_i^*\,dz \quad \text{dans } \mathbb{L}^2(\Omega_f).$$

avec:

$$\frac{1}{\Psi}\int_0^{\Psi}U_i^*\,dz = \frac{\Psi^2}{12\mu_\ell}\left[1+\frac{3\,\mu_\ell\,(S-\Psi)}{\mu_\ell\,(S-\Psi)+\mu_g\Psi}\right]\left[F_i^\ell - \frac{\partial P^*}{\partial y_i}\right] + \frac{1}{4}\left[\frac{\Psi\,(S-\Psi)^2}{\mu_\ell\,(S-\Psi)+\mu_g\Psi}\right]\left[F_i^g - \frac{\partial P^*}{\partial y_i}\right]$$

(5-5) Pour la moyenne de la vitesse U^δ du fluide (g), dans la direction de x_3, on a le résultat suivant:

$$\frac{1}{\delta(S-\Psi)}\int_\Psi^{\delta(S-\Psi)}\frac{1}{\delta^2}U^\delta\,dx_3 = \frac{1}{(S-\Psi)}\int_\Psi^{(S-\Psi)}\frac{1}{\delta^2}\hat{U}^\delta\,dz \xrightarrow[\delta\to 0]{} \frac{1}{(S-\Psi)}\int_\Psi^{(S-\Psi)}U_i^*\,dz \quad \text{dans } \mathbb{L}^2(\Omega_f).$$

avec:

$$\frac{1}{(S-\Psi)}\int_\Psi^{(S-\Psi)}U_i^*\,dz = \frac{(S-\Psi)^2}{12\mu_g}\left[1+\frac{3\,\mu_g\,\Psi}{\mu_\ell\,(S-\Psi)+\mu_g\Psi}\right]\left[F_i^g - \frac{\partial P^*}{\partial y_i}\right] + \frac{1}{4}\left[\frac{(S-\Psi)\,\Psi^2}{\mu_\ell\,(S-\Psi)+\mu_g\Psi}\right]\left[F_i^\ell - \frac{\partial P^*}{\partial y_i}\right]$$

(5-6) Pour la moyenne de la vitesse U^δ des deux fluides (ℓ) et (g), dans la direction de x_3, on a le résultat suivant:

$$\frac{1}{\delta S}\int_0^{\delta S}\frac{1}{\delta^2}U^\delta\,dx_3 = \frac{1}{S}\int_0^{S}\frac{1}{\delta^2}\hat{U}^\delta\,dz \xrightarrow[\delta\to 0]{} \frac{1}{S}\int_0^{S}U_i^*\,dz \quad \text{dans } \mathbb{L}^2(\Omega_f).$$

avec

$$\int_0^{S}U_i^*\,dz = \left[\frac{\Psi^3}{12\mu_\ell} + \frac{1}{4}\,\frac{S\,\Psi^2\,(S-\Psi)}{\mu_\ell\,(S-\Psi)+\mu_g\Psi}\right]\left[F_i^\ell - \frac{\partial P^*}{\partial y_i}\right] + \left[\frac{(S-\Psi)^3}{12\mu_g} + \frac{1}{4}\,\frac{S\,(S-\Psi)^2\,\Psi}{\mu_\ell\,(S-\Psi)+\mu_g\Psi}\right]\left[F_i^g - \frac{\partial P^*}{\partial y_i}\right]$$

5-2) Conclusion:

Les résultats (5-1) permettent de justifier l'approximation:

$$\hat{P}^\delta = P^\delta \circ (\mathcal{H}^\delta)^{-1} \cong P^*$$

et puisque la limite P^* est indépendante de la variable z on a:

(5-7) $$P^\delta \cong P^* \circ \mathcal{H}^\delta = P^*$$

De plus, en multipliant les équations qui déterminent P^* par δ^3, on peut faire apparaitre les vraies épaisseurs: $\delta\Psi$ du fluide (ℓ), $(\delta S - \delta\Psi)$ du fluide (g) et δS de l'ensemble des deux fluides (ℓ) et (g); de façon plus précise, on peut remplacer dans ces équations les fonctions X, X^ℓ, X^g et $\mathbf{M}$ respectivement par les fonctions X^δ, $X^{\delta\ell}$, $X^{\delta g}$ et $\mathbf{M}^\delta$ définies ci dessous:

$$
(5\text{-}8)\qquad \begin{cases}
\chi^{\ell} = \left[\dfrac{(\delta\Psi)^3}{12\mu_\ell} + \dfrac{1}{4}\,\dfrac{\delta S\,(\delta\Psi)^2\,(\delta S - \delta\Psi)}{\mu_\ell\,(\delta S - \delta\Psi) + \mu_g\delta\Psi}\right] \\
\chi^{g} = \left[\dfrac{(\delta S - \delta\Psi)^3}{12\mu_g} + \dfrac{1}{4}\,\dfrac{\delta S\,(\delta S - \delta\Psi)^2\,\delta\Psi}{\mu_\ell\,(\delta S - \delta\Psi) + \mu_g\delta\Psi}\right] \\
\chi^{\delta} = \chi^{\delta\ell} + \chi^{\delta g} \\
M^{\delta} = \chi^{\delta\ell}\,F^{\ell} + \chi^{\delta g}\,F^{g}
\end{cases}
$$

De même, les résultats (5-2) montrent l'approximation:

$$
(5\text{-}9)\qquad U^{\delta} \cong \delta^2\, U^{*}{}_{o}\mathcal{H}^{\delta}
$$

et on voit apparaitre dans l'expression de $\delta^2 U^{*}{}_{o}\mathcal{H}^{\delta}$ la vraie variable $x_3 = \delta z$ et les vraie épaisseurs $\delta\Psi$, $\delta(S - \Psi)$ et δS.

Pour les vitesses moyennes on obtient des résultats analogues aux précédents:

$$
(5\text{-}10)\qquad \left|\begin{array}{l}
\dfrac{1}{\delta\Psi}\displaystyle\int_0^{\delta\Psi} U^{\delta}\,dx_3 \cong \delta^2\,\dfrac{1}{\Psi}\int_0^{\Psi} U_i^{*}\,dz \\[2ex]
\dfrac{1}{\delta(S-\Psi)}\displaystyle\int_{\Psi}^{\delta(S-\Psi)} U^{\delta}\,dx_3 \cong \delta^2\,\dfrac{1}{(S-\Psi)}\int_{\Psi}^{(S-\Psi)} U_i^{*}\,dz \\[2ex]
\dfrac{1}{\delta S}\displaystyle\int_0^{\delta S} \dfrac{1}{\delta^2}U^{\delta}\,dx_3 \cong \delta^2\,\dfrac{1}{S}\int_0^{S} U_i^{*}\,dz
\end{array}\right.
$$

Dans le cas monophasique, c'est à dire si l'interstice Ω_f^δ est occupé par un seul fluide, ($\Psi \equiv 0$ ou $\Psi \equiv S$) on retrouve une forme des équations de Reynolds classiques:

$$(5\text{-}11)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left((\delta S)^3 \frac{\partial P^*}{\partial x_i}\right) = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left((\delta S)^3 F_i\right) & \textit{dans } \Sigma \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial P^*}{\partial x_i} n_i = \sum_{i=1}^{2} F_i\, n_i & \textit{sur } \gamma_g \\ P^* = 0 & \textit{sur } \gamma_f \\ \dfrac{\partial P^*}{\partial x_3} = 0 & \textit{dans } \Omega_f^\delta \end{cases}$$

$$(5\text{-}12)\quad \begin{cases} P^\delta \cong P^* \\ \displaystyle\frac{1}{\delta S}\int_0^{\delta S} U^\delta\, dx_3 \cong \frac{(\delta S)^2}{12\mu}\left(F_i - \frac{\partial P^*}{\partial x_i}\right) \end{cases}$$

Dans le cas diphasique comme le notre (i.e: l'interstice Ω_f^δ est occupé par deux fluides non miscibles (ℓ) et (g)), Les résultats de cette partie III montrent que les équations qui régissent l'écoulement asymptotique, superposent aux lois de Reynolds classiques, écrites pour chaque fluide, des termes de couplage fluide-fluide. Les moyennes de la vitesse sur l'épaisseur de chaque fluide dépendent non pas uniquement des forces volumiques et des gradients de pression exercés sur ce fluide, mais d'une combinaison linéaire des forces et des gradients de pression exercés sur les deux phases. On remarque alors une analogie entre ces "équations de Reynolds généralisées" et les "équations de Darcy généralisées" obtenues par la méthode d'homogénéisation dans la partie II précédente.

Enfin, Remarquons que ni la courbure moyenne H^δ ni la donnée G^δ (vérifiant (3-4)) n'interviennent dans les équations limites qui déterminent U^* et P^*. On obtiendrait donc les mêmes résultats si l'on avait négligé au départ les forces capillaires et les efforts surfaciques devant les forces volumiques F^δ

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALLAIRE G., *Homogénéisation des équations de Stokes et de Navier-Stokes.* Thèse de doctorat de l'université de Paris 6, 1989.

[2] AURIAUT J. L. - SANCHEZ PALENCIA E., *Remarques sur la loi de Darcy pour les écoulements diphasiques en milieu poreux.* J. Theo. Appli. Mech., N° spécial, 1986, pp 141-156.

[3] BAYADA G. - CHAMBAT M., *The transition between the Stokes equations and the Reynolds equation: a mathematical proof.* Appl. Math. and Opt., 14, 1986, pp 73-93.

[4] BAYADA G. - CHAMBAT M., *Existence and uniquness for a lubrication problem with nonregular conditions on the free boundary.* Boll. Un. Math. It (6), 3-B, 1984, pp 543-557.

[5] BENSOUSSAN A. - LIONS J. L. - PAPANICOULAOU G., *Asymptotic analysis for periodic structures.* North Holland, 1978.

[6] BREZIS H., *Analyse fonctionnelle: théorie et applications.* Masson, Paris, 1983.

[7] CARBONNELL R. G - WHITAKER S., *Heat and mass transfert in porous media. Fondamentals of transport in porous media*, edit. J. Bear and M. Y. Corapcioglu, NATO ASI Series, Martinus Nijhoff Publisher, 1984, pp 121-189.

[8] CIMATTI G., *How the Reynolds equation is related to the Stokes equations.* Appli. Math. and Opt., 10, 1983, pp 267-274.

[9] CIORANESCU D. - SAINT JEAN PAULIN J., *Homogenization in open sets whith holes.* Journal of Math. Anal. Appl. 71, 2, 1979, pp 590-607.

[10] CONCA C., *On the application of the homogenization thery to a class of problems arising in fluid mechanics.* J. Math. Pures et Appl. 64, 1985, pp 31-75.

[11] DARCY H., *Les fontaines publiques de la ville de Dijon.* Ed. Dalmont, Paris, 1856.

[12] DEGIOVANNI A. - MOYNE C.,*Conductivité thermique des milieux poreux humides: évaluation théorique et possibilité de mesure.* Int. J. Heat mass transfert, vol. 30, N° 11, 1987, pp 2225-2245.

[13] DEGIOVANNI A. - MOYNE C. SAINT JEAN PAULIN J. - TAOUS K., *Conductivité thermique effictive d'un milieu poreux en présence d'évaporations-condensations.* C.R.A.S. II, 307, 1988, pp 1845-1850.

[14] DE VRIES D. A., *Simultanoeous transfert of heat and moisture in porous media.* Trans Amerc. Geophys. Union, Vol. 39, 1958, pp 909-916.

[15] DIAS M. M., PAYATAKES A. A., *Network models for tow-phase flow in porous media.* J. Fluid Mech., 164, 1986, p 337.

[16] DRIDI H., *Comportement asymptotique des équations de Navier-Stokes dans des domaines applatis.* Bull. Sc. Math 106, 1982, pp 369-385.

[17] DUMONT T., *Décomposition par projection de certains problèmes aux limites elliptiques non linéaire.* Thèse Université de Lyon I, 1987.

[18] DUVAUT G. - LIONS J. L., *Les inéquations en mécanique et en physique.* Dunod, 1972.

[19] FANTINO B. - FRENE J. - GODET M., *Conditions d'utilisation de l'équation de Reynolds en mécanique des filmes minces.* Ct. Rd. Acad. Sc., Paris, 262 A, 1971, pp 155-165.

[20] GIRAULT V. - RAVIART Pa., *Finite element approximation of the Navier-Stokes equations.* Springer Verlag, Berlin, 1981.

[21] GRAY W. G. - O'NEILL K., *On the general equations for flow in porous media and their reduction to the Darcy's law.* Water Resour., Res., 12, 2, 1976, pp 148-154.

[22] KALAYIDJIAN F., *Couplage entre phases fluides dans les écoulements diphasiques en milieux poreux.* Thèse, Université de Bordeaux I, 1988.

[23] LEVY T., *Fluid in porous media and suspensions, Homogenization techniques for composite media.* Edited by Sanchez-Palencia E. and Zaoui A., Springer Verlag, Berlin, 1987.

[24] LIONS J. L, *Perturbations singulières dans les problèmes aux limites et en controle optimal.* Springer Verlag, Berlin, 1973.

[25] LIONS J. L - MAGENES E., *Problèmes aux limites non homogènes et applications*. Vol. 1, Dunod, Paris, 1968.

[26] LIPTON R. - AVELLANEDA M., *A darcy low for slow viscous past a stationnarry array off bubbles*. Procc. Roy. Edinburg, ...

[27] MARLES C. M, *Ecoulements monophasiques en milieu poreux*. Rev. Inst. Franc. Petrol, 22, 10, 1967, pp 1471-1509.

[28] MOYNE C. - BATSALE J. C. - DEGIOVANNI A., *Approche expérimentale et théorique de la conductivité thermique des milieux poreux humides, partie II: théorie*. Int. J. Heat mass transfert, vol. 31, N° 11, 1988, pp 2319-2317.

[29] NECAS , *Les méthodes directes en théories des équations elliptiques*. . Masson Paris, 1967.

[30] NGUETSENG G. , *Sur quelques problèmes de perturbations dans des ouverts périodiques et application à la mécanique des composites*. Thèse d'état, Université de Paris 6, 1984.

[31] PHILIP J. R, DE VRIES D. A, *Moisture mouvement in porous materials under temperature gradient*. Trans. Amer. Geophys. Union, Vol. 38, pp. 222-232.

[32] REYNOLDS O., *On the theory of librication and its application to M. Beauchanp tower's experiments*. Phill Trans Roy Sc., London, A 117, 1886, pp 157-234.

[33] SANCHEZ PALENCIA E., *Non homogeneous media and vibration theory*. Lecture Notes in Physics, 127, Springer verlag, 1980.

[34] TARTAR L., *Convergence of the homogenezation process*. Appendice de [33].

[35] TARTAR L., *Problèmes d'homogénéisation dans les équations aux dérivées partielles*. Cours peccot, College de France, Paris 1977. Partiellement rédigé par Murat F.: Séminaire d'anal. Fonct. et Num., Univ. d'Alger, 1977/ 1978.

[36] TEMAM R., *Navier-Stokes equations*. North Holland, Amsterdam, 1977.

[37] WHITAKER S., *Flow in porous media I: a theoretical derivation of Darcy's law*. Transp. Porous media, 1, 1, 1986, pp 3-25.

[38] WHITAKER S., *Flow in porous media II: the governing equation for immiscible two-phase flow*. Transp. Porous media, 1, 2, 1986, pp 105-125.

[39] WYKOFF R. D. - BOTSET H. G., *Flow of gas-liquid mixtures through unconsolidated sands*. Physics 7, 1936, pp 325-345.

Résumé

Notre travail est une contribution à l'étude du comportement asymptotique des mi hétérogènes ayant une structure géométrique périodique. Les outils essentiels utilisés so méthode d'homogénéisation et la méthode des perturbations singulières. Le travail s'est fait en trois parties:

La première partie est consacrée à l'étude du transfert simultané de chaleur et de masse dans un milieu poreux humide. On clarifie l'influence des phénomènes d'évaporation-condensation sur la conductivité thermique apparente, et on étudie la dépendance du comportement global du matériau par rapport à l'ordre de grandeur relatif de deux petits paramètres: la conductivité de la phase gazeuse et la taille caractéristique des pores.

Dans la deuxième partie, on s'intérèse à l'écoulement macroscopique de deux fluides non-miscibles à travers un milieu poreux. Les "lois de Darcy généralisée" classiques sont réexaminées d'un point de vue théorique en utilisant la méthode d'homogénéisation. Il est apparu qu'elles devraient être couplées, de façon à prendre explicitement en compte les interactions aux interfaces fluide-fluide.

Dans la troisième partie, on étudie l'écoulement asymptotique de deux fluides immiscibles à travers des interstices de faibles épaisseurs entre deux solides. Par une méthode de perturbation, on établit des équations limites qui généralisent la loi de Reynolds classique au cas diphasique, en lui supperposant des termes de couplage traduisant les effets d'un fluide sur l'autre.