HAL
open science

Problèmes d'inclusions à frontière mobile et applications

Hafid Sabar

To cite this version:

Hafid Sabar. Problèmes d'inclusions à frontière mobile et applications. Physique [physics]. Université Paul Verlaine - Metz, 1990. Français. NNT : 1990METZ022S . tel-01775887

HAL Id: tel-01775887

https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01775887

Submitted on 24 Apr 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE LORRAINE

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

THESE

présentée

à l'UNIVERSITE de METZ

INSTITUT SUPERIEUR DE GENIE MECANIQUE ET PRODUCTIQUE

par

Hafid SABAR

pour obtenir le grade de

DOCTEUR de l'UNIVERSITE de METZ

Spécialité : Génie Mécanique

PROBLEMES D'INCLUSIONS A FRONTIERE MOBILE ET APPLICATIONS

soutenue le 12 Juillet 1990 devant la Commission d'examen :

A. ZAOUI	Université de Paris-Nord	Président
E. KRÖNER	Université de Stuttgart	Rapporteur
G. MARTIN	CEA/CEN SACLAY (Paris)	Rapporteur
G. GUENIN	INSA Lyon	
M. BERVEILLER	Université de Metz	
O. FASSI-FEHRI	Université Mohamed V (Rabat)	
M. BUISSON	Université de Metz	

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE METZ

N° inv. 19900485

Cote S|M3 90/22

Loc Magasin

Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux
U.A. au CNRS n° 1215
Faculté des Sciences

Remerciements

Ce travail a été réalisé au Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux de la Faculté des Sciences de Metz sous la direction de Monsieur le Professeur M. BERVEILLER.

Je remercie Monsieur le Professeur A. ZAOUI, de l'Université de Paris-Nord, de m'avoir fait l'honneur d'être le président de ce jury de thèse. Je remercie également sincèrement Messieurs G. MARTIN, Directeur de recherche au CEA/CEN Saclay, O. FASSI-FEHRI, Professeur à l'Université Mohamed V de Rabat, G. GUENIN, Professeur à l'INSA de Lyon, qui ont accepté de faire partie de mon jury de thèse.

C'est un grand honneur pour moi de présenter ce travail devant Monsieur le Professeur E. KRÖNER, de l'Université de Stuttgart, qui a bien voulu juger cette étude.

Je remercie vivement Monsieur le Professeur M. BERVEILLER de m'avoir initié à la recherche et d'avoir dirigé mon travail qui n'aurait pu être mené à terme sans son aide. Ce travail lui doit beaucoup, je tiens à lui exprimer toute ma reconnaissance pour la confiance qu'il m'a témoignée et l'aide qu'il m'a apportée par ses suggestions et conseils.

Je désire exprimer ma cordiale reconnaissance et sympathie à Monsieur M. BUISSON, Maître de Conférences à l'Université de Metz, pour son aide à la rédaction de ce travail et sa participation à ce jury.

J'adresse mes sincères remerciements à mes camarades chercheurs, techniciens, ainsi qu'à Madame MARCELET et Mademoiselle LALLEMAND pour l'excellente impression de cette thèse.

PLAN

CHAPITRE I :

INTRODUCTION GENERALE 1

CHAPITRE II :

PROBLEMES CLASSIQUES D'INCLUSIONS D'ESHELBY-KRÖNER 4

II.1. Rappel des équations fondamentales de la mécanique des milieux continus 5

II.1.1. Cinématique 6

II.1.2. Conditions de compatibilité 7

II.1.3. Incompatibilités plastiques 8

II.1.4. Statique 9

II.1.5. Comportement élastique du matériau 10

II.1.6. Elastostatique et méthode du tenseur de Green 10

II.2. Les problèmes d'inclusions 13

II.2.1. Le problème de l'inclusion plastique d'Eshelby-Kröner 15

a) Matrice élastique (Eshelby) 15

b) Matrice plastifiée (Eshelby-Kröner) 20

II.2.2. Le problème de l'inclusion hétérogène 23

II.2.3. Le problème de l'inclusion plastique et hétérogène 25

a) Equation intégrale 25

b) Résolution de l'équation intégrale 27

II.2.4. Energie élastique 29

a) Formulation générale 29

b) Evaluation du tenseur $\underline{E}^*$ 31

c) Cas particuliers 33

II.3. Conclusion 37

CHAPITRE III :

EXTENSION DES PROBLEMES D'INCLUSIONS D'ESHELBY-KRÖNER :
LE PROBLEME D'INCLUSION A FRONTIERE MOBILE 39

III.1. Introduction 40
III.2. Analyse descriptive du mouvement d'interface 45
III.3. Synthèse mathématique 49
III.4. Problèmes d'inclusion à frontière mobile 53
III.5. Conclusion 67

CHAPITRE IV :

DETERMINATION DES TENSEURS : $\underline{T}^I$, $\underline{S}$, $\underline{A}$, $\delta\underline{T}^I/\delta t$, $\delta\underline{S}/\delta t$ et $\delta\underline{A}/\delta t$ 69

IV.1. Cinématique de la transformation 70

IV.2. Méthodes de calcul 73

IV.2.1. Méthode de la transformée de Fourier 73
a) Cas de l'élasticité isotrope 74
b) Cas de l'élasticité anisotrope 76
IV.2.2. Méthode des fonctions potentielles 77
IV.2.3. Méthode directe à partir des résultats d'Eshelby 80

IV.3. Résultats 83

IV.3.1. Cas de l'élasticité isotrope 83
a) Inclusion ellipsoïdale quelconque 85
b) Inclusion sphérique 89
c) Inclusion aplatie 97
d) Bande 106
e) Commentaires et conclusion 109

IV.3.2. Cas de l'élasticité anisotrope 113

a) Inclusion sphérique 115

b) Inclusion aplatie 117

c) Bande 119

d) Commentaires et conclusion 121

IV.3.3. Conclusion 123

CHAPITRE V :

APPLICATIONS 126

V.1. Effet de la taille des grains sur le comportement plastique des polycristaux métalliques 128

V.1.1. Notions préliminaires 128

a) Ecrouissage intracristallin 130

b) Ecrouissage intercristallin 132

c) Empilement des dislocations 133

V.1.2. Formulation du problème 136

a) Equations 136

b) Cas particulier 137

c) Loi de comportement W ($\partial\gamma/\partial t$) 140

V.1.3. Résultats et discussion 145

V.2. Restitution d'énergie - exemple 150

CHAPITRE VI :

CONCLUSION GENERALE 159

ANNEXES

A - Calcul des tenseurs $\underline{T}^{I}$ et $\underline{T}^{I\alpha}$ par la méthode de la transformée de Fourier

B - Détermination des fonctions potentielles ϕ, ψ, ϕ^{α}, ψ^{α} et leurs dérivées partielles

C - Calcul des tenseurs $\partial\underline{S}/\partial a_{\alpha}$ et $\partial\underline{A}/\partial a_{\alpha}$ à partir des résultats classiques d'Eshelby

CHAPITRE I

INTRODUCTION GENERALE

Depuis plusieurs décennies, on assiste à un développement important de travaux ayant pour objectif la détermination des lois de comportement macroscopique des solides à partir des mécanismes physiques de déformation et de la microstructure (souvent granulaire) de ces matériaux.

Ainsi, le problème des matériaux à comportement linéaire (élasticité, thermoélasticité,...) abordé dans un premier temps par les solutions de problèmes d'inclusions, a été formulé de manière générale dans le cadre des théories statistiques des milieux désordonnés. Ces méthodes, rigoureuses en soi, sont difficiles et lourdes à mettre en oeuvre. Dans le cas de matériaux à comportement non linéaire (élastoplasticité, viscoplasticité, endommagement et rupture...), les méthodes statistiques systématiques sont encore plus complexes à mettre en oeuvre du fait de l'évolution de la microstructure avec le chargement. Dans l'état actuel des travaux, ces problèmes sont traités plutôt dans le cadre de l'approche autocohérente.

Les matériaux étudiés entrent dans la classe des solides microhétérogènes et macrohomogènes tels que :

- les polycristaux monophasés
- les polycristaux multiphasés
- les composites à renforts discontinus
- ...

Ces matériaux présentent une microstructure du type granulaire, c'est-à-dire que leurs propriétés sont constantes par morceaux. Il existe donc des interfaces appelées joints de grains, joints de phase, interface ou interphase, séparant les constituants à propriétés uniformes. La microstructure de cet arrangement granulaire résulte des procédés d'élaboration du matériau (solidification, recristallisation, moulage sous pression...). Au cours d'une déformation ces interfaces ne sont affectées que par la déformation matérielle. Or, dans de nombreux problèmes de mécanique physique et de sciences des matériaux, les interfaces existantes ou créées pendant le chargement thermomécanique sont susceptibles de posséder un mouvement propre différent de la vitesse particulaire du matériau.

Nous citons quelques exemples qui illustrent l'importance scientifique et technologique de ce mécanisme :

- Dans le cas de la recristallisation primaire et secondaire, on assiste à un déplacement des joints de grains créant une nouvelle architecture granulaire.

- Dans les problèmes de maclage mécanique ou des transformations de phase du 1er ordre, le mouvement de l'interface entre la phase mère et la phase (ou macle) transformée constitue le

mécanisme essentiel de déformation.

- Certains problèmes plus macroscopiques ("moins métallurgiques") peuvent également être analysés à partir du concept d'interface mobile. Nous citons l'exemple des bandes de Lüders, de la formation et de la croissance de l'endommagement, de la rupture, etc...

Dans tous ces problèmes, le mouvement de l'interface entre constituants s'avère être d'une grande importance dans le comportement global du matériau. Ce mouvement peut être présent de manière isolée ou constituer un mécanisme simultané à d'autres mécanismes (diffusion, glissement plastique...).

Le présent travail a pour objectif, par une approche micromécanique, d'inclure ce mouvement d'interface dans l'étude du comportement des matériaux hétérogènes. Ce vaste problème n'est pas résolu ici dans sa généralité ; on se limite à étudier le problème d'inclusion à frontière mobile.

Dans le chapitre II, on rappelle, en précisant les notations et les méthodes d'études des problèmes de micromécanique, les résultats classiques des problèmes d'inclusions.

Dans le chapitre III, une analyse globale du problème du mouvement d'interface est présentée et la solution générale du problème d'inclusion à frontière mobile est démontrée. Elle fait intervenir un nouveau tenseur dont les composantes sont calculées par différentes méthodes dans le chapitre IV.

Une première application des solutions obtenues est proposée dans le chapitre V pour expliquer, d'un point de vue micromécanique, le rôle de la taille des grains sur la limite d'écoulement plastique des polycristaux métalliques. Dans ce chapitre, on souligne également certains effets liés à la propagation d'une interface sur les variations de l'énergie interne d'un matériau.

Pour ne pas trop alourdir le texte principal de calculs et de formules trop complexes, les méthodes analytiques et numériques des développements théoriques sont présentées dans les annexes A, B et C.

CHAPITRE II

PROBLEMES CLASSIQUES D'INCLUSIONS D'ESHELBY-KRÖNER

II.1. Rappel des équations fondamentales de la mécanique des milieux continus

II.1.1. Cinématique

II.1.2. Conditions de compatibilité

II.1.3. Incompatibilités plastiques

II.1.4. Statique

II.1.5. Comportement élastique du matériau

II.1.6. Elastostatique et méthode du tenseur de Green

II.2. Les problèmes d'inclusions

II.2.1. Le problème de l'inclusion plastique d'Eshelby-Kröner

a) Matrice élastique (Eshelby)

b) Matrice plastifiée (Eshelby-Kröner)

II.2.2. Le problème de l'inclusion hétérogène

II.2.3. Le problème de l'inclusion plastique et hétérogène

a) Equation intégrale

b) Résolution de l'équation intégrale

II.2.4. Energie élastique

a) Formulation générale

b) Evaluation du tenseur $\underline{E}^*$

c) Cas particuliers

II.3. Conclusion

De nombreux problèmes de mécanique des solides ou de mécanique des matériaux sont résolus par la solution d'Eshelby du problème d'inclusion plastique et inhomogène : citons le cas, pour les solides microhétérogènes, des schémas auto-cohérents [1] [2] ou bien le cas, pour l'échelle plus fine du matériau monocristallin, des modèles de création de précipités ou de formation de zones de Guinier-Preston.

Les problèmes de base, qui se posent dans de telles études, sont les suivants :

- analyse des contraintes, déformations, rotations dans le cas d'une inclusion plastique considérée comme source élémentaire volumique de contraintes internes ;
- analyse des contraintes, déformations, rotations dans le cas d'une hétérogénéité, c'est-à-dire d'une inclusion de caractéristiques mécaniques différentes de celles de la matrice

On se propose dans ce chapitre d'introduire le problème de l'inclusion en rappelant tout d'abord la formulation générale du problème et en utilisant la technique du tenseur de Green ; on calcule les champs de déformations, de rotations et de contraintes, ainsi que l'énergie élastique associée à l'inclusion.

Suivant l'hétérogénéité élastique ou plastique, on distingue trois types de problèmes d'inclusions : le problème de l'inclusion plastique, le problème de l'inclusion hétérogène et le problème de l'inclusion plastique et hétérogène. Pour le dernier type de problème, on rappelle l'équation intégrale démontrée par Berveiller et Zaoui [3] et on l'applique à notre problème mixte pour évaluer les champs de déformations, de rotations et de contraintes, ainsi que l'énergie élastique.

Nous rappelons d'abord les équations de base de la mécanique des milieux continus, puis par la méthode du tenseur de Green nous donnons la solution de chaque problème d'inclusion.

II.1. Rappel des équations fondamentales de la mécanique des milieux continus

Nous nous limitons aux transformations infinitésimales (petites déformations et petites rotations), dans l'approximation quasi-statique (les forces d'inerties sont négligées). La condition de continuité du champ de déformation se traduit par les équations de compatibilité et le principe fondamental de la dynamique impose les équations d'équilibre au champ des contraintes. Nous travaillons toujours dans un système de coordonnées cartésiennes ; dans lequel x_1, x_2, x_3 dési -

gnent les coordonnées d'un point r du milieu ; u, de composantes u_1, u_2, u_3 désigne le champ du déplacement en un point donné.

Le problème posé consiste à décrire le champ des contraintes et des déformations du milieu pour une répartition donnée des déformations inélastiques ; les conditions de chargement à la frontière du milieu étant précisées. Nous indiquons ci-après les équations du problème.

II.1.1. Cinématique

Le gradient du déplacement est défini par :

$$\underline{\beta} = \vec{\text{grad}}.\vec{u} \tag{II-1}$$

soit :

$$\beta_{ij} = u_{i,j}$$

(on utilise la notation $f_{,j} = \partial f/\partial x_j$).

La partie symétrique de $\underline{\beta}$ donne le tenseur de déformation $\underline{\varepsilon}$ et sa partie anti-symétrique le tenseur rotation $\underline{\omega}$ c'est-à-dire :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\beta_{ij} + \beta_{ji}\right) = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \tag{II-2}$$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\beta_{ij} - \beta_{ji}\right) = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} - u_{j,i}\right) \tag{II-3}$$

En plasticité (ce qui reste valable pour d'autres déformations inélastiques) les quantités $\underline{\beta}$, $\underline{\varepsilon}$ et $\underline{\omega}$ peuvent être décomposées en parties élastique et plastique pour de petites transformations :

$$\begin{aligned} \underline{\beta} &= \underline{\beta}^e + \underline{\beta}^p \\ \underline{\varepsilon} &= \underline{\varepsilon}^e + \underline{\varepsilon}^p \\ \underline{\omega} &= \underline{\omega}^e + \underline{\omega}^p \end{aligned} \tag{II-4}$$

avec

$$\underline{\beta}^e = \underline{\varepsilon}^e + \underline{\omega}^e$$

$$\underline{\beta}^p = \underline{\varepsilon}^p + \underline{\omega}^p$$

II.1.2. Conditions de compatibilité

Un champ de tenseur $\underline{\beta}$ caractérisant une transformation donnée n'est pas toujours intégrable. Pour que le milieu ne perde pas sa compacité dans l'espace euclidien, il faut qu'il existe un champ de déplacement u tel que $\underline{\beta}$ en soit le gradient. Autrement dit, la différentielle $du_i = \beta_{ij}\, dx_j$ doit être totale exacte.

Ceci s'exprime par les conditions de Cauchy à l'aide de l'opérateur rotationnel Rot :

$$\vec{\text{Rot}}\, \underline{\beta} = 0 \qquad \text{(II-5)}$$

soit :

$$\in_{ikl} \beta_{jl,k} = 0$$

(on utilise, sauf indication contraire, la convention d'Einstein de sommation sur les indices répétés).

$\underline{\in}$ est le tenseur permutation de Ricci :

$$\in_{ikl} = \begin{cases} 0 & \text{si 2 indices au moins sont égaux} \\ 1 & \text{si (i,k,l) est une permutation paire de (1,2,3)} \\ -1 & \text{si (i,k,l) est une permutation impaire de (1,2,3)} \end{cases}$$

Une autre forme des relations de compatibilité est donnée par Kröner [4] qui introduit le tenseur incompatibilité Inc et écrit :

$$\underline{\text{Inc}}\, \underline{\varepsilon} = 0 \qquad \text{(II-6)}$$

soit :

$$\in_{ikl} \in_{jmn} \varepsilon_{lm,kn} = 0$$

II.1.3. Incompatibilités plastiques [4]

* Tenseur densité de dislocations

Considérons une distribution donnée de déformation plastique $\underline{\varepsilon}^p$ et de rotation $\underline{\omega}^p$ telle que la résultante $\underline{\beta}^p$ soit incompatible. Les équations (II-5) de compatibilité portant sur $\underline{\beta}^p$ ne sont pas satisfaites ($\mathrm{Rot}\,\underline{\beta}^p \neq 0$) et on définit alors en tout point le tenseur densité de dislocations $\underline{\alpha}$ par :

$$\underline{\alpha} = -\,\vec{\mathrm{Rot}}\,\underline{\beta}^p \qquad \text{(II-7)}$$

ou encore :

$$\alpha_{ij} = -\,\epsilon_{ikl}\,\beta^p_{jl,k}$$

Il représente la distribution des dislocations à l'origine de l'incompatibilité plastique.

* Tenseur d'incompatibilité

Lorsque la déformation plastique $\underline{\varepsilon}^p$ n'est pas compatible, on introduit également le tenseur du second ordre symétrique $\underline{\eta}$ défini par :

$$\underline{\eta} = -\,\underline{\mathrm{Inc}}\,\underline{\varepsilon}^p \qquad \text{(II-8)}$$

soit :

$$\eta_{ij} = -\,\epsilon_{ikl}\,\epsilon_{jmn}\,\varepsilon^p_{lm,kn}$$

On peut exprimer $\underline{\eta}$ en fonction de $\underline{\alpha}$ par la relation :

$$\eta_{ij} = \frac{1}{2}\left(\epsilon_{imn}\,\alpha_{jm,n} + \epsilon_{jmn}\,\alpha_{im,n}\right) \qquad \text{(II-9)}$$

Ces diverses relations portant sur $\underline{\alpha}$ et $\underline{\eta}$ permettent de ramener à un même problème les situations à $\underline{\alpha}$, $\underline{\eta}$ ou $\underline{\beta}^p$ données pour le calcul des contraintes internes.

Elles sont utilisées dans la méthode du potentiel des contraintes qui consiste à calculer les

contraintes et les déformations à partir d'une seule fonction dite fonction potentielle des contraintes. Cette fonction est déduite par la seule connaissance des incompatibilités plastiques.

Le calcul des contraintes fait l'objet de la statique.

II.1.4. Statique

Considérons un milieu continu fini de frontière ∂V non déformé, dans un état initial naturel (contraintes nulles). Si on le soumet à l'action des forces extérieures (de densité volumique F_i) en imposant à la surface ∂V une répartition mixte d'efforts (de densité surfacique T_i^s) et de déplacement U_i^s, le milieu sera en équilibre sous le siège de contraintes σ_{ij} et d'un champ de déplacement u_i continu sans vide ni recouvrement.

L'application de la relation fondamentale de la dynamique se traduit par :

- l'équilibre des forces : $\sigma_{ij,j} + F_i = 0$ (II-10)
- l'équilibre des moments : $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ (en l'absence de couples)

et le respect des conditions de frontière nécessite :

pour les efforts : $\sigma_{ij}\, n_j^s = T_i^s$

(II-11)

pour le déplacement : $u_i = U_i^s$ à la frontière ∂V

(n^s : normale unitaire extérieure à la surface ∂V).

Pour compléter l'étude, il faut préciser la loi de comportement du matériau.

II.1.5. Comportement élastique du matériau

La déformation élastique $\underline{\varepsilon}^e(r)$ est associée aux contraintes locales $\underline{\sigma}(r)$, par la loi de Hooke locale d'élasticité anisotrope :

$$\sigma_{ij}(\vec{r}) = C_{ijkl}(\vec{r})\,\varepsilon^e_{kl}(\vec{r}) \qquad \text{(II-12)}$$

où $C_{ijkl}(r)$ désigne les composantes du tenseur d'élasticité en r.

Dans le cas d'un matériau homogène, C_{ijkl} ne dépend pas de r. En général, C_{ijkl} possède les symétries suivantes :

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij} \qquad \text{(II-13)}$$

Les équations ainsi précisées constituent un système d'équations aux dérivées partielles permettant de trouver les contraintes et déformations au sein du matériau pour une répartition donnée des déformations plastiques et en respectant les conditions de frontière imposées (II-11). En règle générale deux méthodes de résolution ont été proposées :

- celle qui exprime le problème en termes de contraintes (ou de potentiel de contraintes), commentée brièvement ci-dessus (II.1.3) ;
- celle qui part d'une formulation cinématique que nous nous proposons d'utiliser en l'adaptant au problème qui nous intéresse ici (présence d'une déformation plastique).

II.1.6. Elastostatique et méthode du tenseur de Green

On considère le cas d'un milieu infini, les conditions de frontière (II-11) sont rejetées à l'infini et on note :

- pour les contraintes : $\sigma_{ij}(\infty) = \Sigma_{ij}$

(II-14)

- pour le déplacement : $u_i(\infty) = U_i^o$

Partant de la loi de comportement élastique (II-12) en utilisant (II-4) et (II-13) :

$$\sigma_{ij}(\vec{r}) = C_{ijkl}(\vec{r})\left(u_{k,l}(\vec{r}) - \beta^{p}_{kl}(\vec{r})\right) \qquad \text{(II-15)}$$

les équations d'équilibre (II-10) s'écrivent alors pour un milieu homogène ($\underline{C}(r) = \underline{C}^{o}$) :

$$C^{o}_{ijkl}\, u_{k,lj}(\vec{r}) - C^{o}_{ijkl}\, \beta^{p}_{kl,j}(\vec{r}) + F_i(\vec{r}) = 0 \qquad \text{(II-16)}$$

Ce qui constitue un système d'équations aux dérivées partielles dont les inconnues sont les $u_i(r)_{(i=1,2,3)}$ et qu'il faut résoudre en tenant compte des conditions de frontière à l'infini (II-14).

Une résolution avantageuse de (II-16) fait appel à la technique du tenseur de Green $\underline{G}$ pour le milieu infini homogène de constantes d'élasticité $\underline{C}^{o}$:

$G_{km}(r - r')$ représente le déplacement, dans ce milieu, dans la direction de l'axe k, au point r quelconque lorsqu'une force unité $f_i = \delta_{im}\,\delta(r - r')$ est appliquée au point r' dans la direction de l'axe m, G_{km} est symétrique par rapport à k et m. Il vérifie :

$$C^{o}_{ijkl}\, G_{km,jl}(\vec{r} - \vec{r}') + \delta_{im}\,\delta(\vec{r} - \vec{r}') = 0 \qquad \text{(II-17)}$$

avec la condition auxiliaire que $\underline{G}$ s'annule à l'infini.

δ_{im} est le tenseur de Kronecker et $\delta(r - r')$ est la distribution de Dirac à trois dimensions dont les propriétés permettent d'écrire :

$$u_i(\vec{r}) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \delta_{im}\,\delta(\vec{r} - \vec{r}')\, u_m(\vec{r}')\, dV' \qquad \text{(II-18)}$$

où dV' est l'élément de volume ($dV' = dx_1'\, dx_2'\, dx_3'$), x_1', x_2', x_3' étant les coordonnées carté - siennes du point r', et où l'intégrale est étendue à tout le milieu infini.

Soit d'après (II-17) en substituant $\delta_{im}\,\delta(r-r')$ dans (II-18) :

$$u_i(\vec{r}) = -\iiint_{-\infty}^{+\infty} C^{o}_{mjkl}\, G_{ki,jl}(\vec{r} - \vec{r}')\, u_m(\vec{r}')\, dV' \qquad \text{(II-19)}$$

Il convient d'indiquer ici les relations entre les dérivées partielles portant sur $G_{ki}(r-r')$ à savoir :

$$G_{ki,j}(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{\partial}{\partial x_j} G_{ik}(\vec{r}-\vec{r}') = -\frac{\partial}{\partial x_j'} G_{ik}(\vec{r}-\vec{r}') = -G_{ik,j'}(\vec{r}-\vec{r}') \qquad \text{(II-20)}$$

on a alors : $G_{ik,jl}(r-r') = G_{ik,j'l'}(r-r')$.

(II-19) devient :

$$u_i(\vec{r}) = -\iiint_{-\infty}^{+\infty} C^o_{mjkl}\, G_{ki,j'l'}(\vec{r}-\vec{r}')\, u_m(\vec{r}')\, dV' \qquad \text{(II-21)}$$

En utilisant le théorème de la divergence et en tenant compte des conditions à l'infini en déplacement(II-14), l'équation (II-21) s'écrit alors :

$$u_i(\vec{r}) = U^o_i(\vec{r}) - \iiint_{-\infty}^{+\infty} C^o_{mjkl}\, G_{ki}(\vec{r}-\vec{r}')\, u_{m,j'l'}(\vec{r}')\, dV' \qquad \text{(II-22)}$$

L'intégrale de surface est nulle du fait que $\underline{G}$ s'annule à l'infini.

Soit en utilisant (II-16) :

$$u_i(\vec{r}) = U^o_i(\vec{r}) + \iiint_{-\infty}^{+\infty} G_{ki}(\vec{r}-\vec{r}')\, \left\{ F_k(\vec{r}') - C^o_{klmn}\, \beta^p_{mn,l'}(\vec{r}') \right\} dV' \qquad \text{(II-23)}$$

Lorsqu'il n'y a pas de forces volumiques, il reste :

$$u_i(\vec{r}) = U^o_i(\vec{r}) - \iiint_{-\infty}^{+\infty} G_{ki}(\vec{r}-\vec{r}')\, C^o_{klmn}\, \beta^p_{mn,l'}(\vec{r}')\, dV' \qquad \text{(II-24)}$$

L'intégrale (II-24) permet de trouver le déplacement total u_i pour une distribution de déformations inélastiques $\underline{\beta}^p$ donnée. Ce formalisme est utilisé et généralisé à l'élasticité hétérogène dans le paragraphe suivant dans le cas où la répartition des $\underline{\beta}^p$ correspond à celle des problèmes d'inclusions.

On aborde ainsi trois types de problèmes, le problème de l'inclusion plastique, le problème de l'inclusion hétérogène et le problème de l'inclusion plastique et hétérogène dont les solutions respectives trouvées par Eshelby et Kröner seront justifiées à l'aide de la solution intégrale (II-24).

II.2. Les problèmes d'inclusions

On considère le cas d'une région (inclusion V_I) plongée dans un milieu infini (Matrice M). Par hypothèse, le champ des déformations plastiques et le tenseur des constantes d'élasticité sont uniformes dans chaque domaine (V_I) et (M).

On note ε^p_{ij} et C^I_{ijkl} respectivement les composantes du tenseur de déformation plastique et les composantes du tenseur d'élasticité au sein de l'inclusion, de même E^p_{ij} et C^o_{ijkl} désignent les composantes correspondantes pour la matrice (Fig. II-1).

De cette description, on distingue trois types de problèmes :

1° Le problème de l'inclusion plastique ($\underline{C}^I = \underline{C}^o$, $\underline{\varepsilon}^p \neq \underline{E}^p$) :

La matrice et l'inclusion ont les mêmes constantes d'élasticité.

L'hétérogénéité ne provient que des déformations plastiques. On définit pour cela le tenseur $\Delta\underline{\varepsilon}^p$ non nul par :

$$\Delta\underline{\varepsilon}^p = \underline{\varepsilon}^p - \underline{E}^p$$

N.B. :

La solution de ce problème élémentaire a été obtenue par Eshelby [5] lorsque la matrice est élastique. Kröner [1] a généralisé la solution d'Eshelby au cas où la matrice a subi une déformation plastique homogène.

Topologie du problème classique d'inclusion

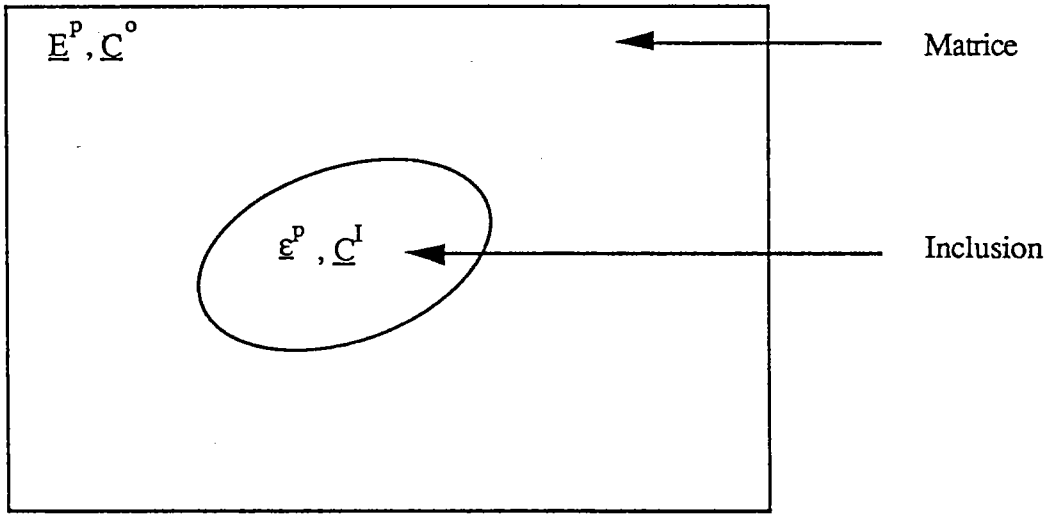


Fig. II-1 : Inclusion ellipsoïdale ($\underline{\varepsilon}^p$, $\underline{C}^I$) dans une matrice homogène infinie ($\underline{E}^p$, $\underline{C}^o$).

On indique à titre bibliographique les deux études uniquement pour ce premier problème ; les autres cas seront systématiquement avec $\underline{E}^p \neq 0$.

2° Le problème de l'inclusion hétérogène ($\underline{\varepsilon}^p = \underline{E}^p = 0$, $\underline{C}^I \neq \underline{C}^o$) :

Il s'agit d'un problème sans plasticité. L'hétérogénéité ne provient que des constantes d'élasticité. On définit pour cela le tenseur $\Delta\underline{C}$ non nul par :

$$\Delta\underline{C} = \underline{C}^I - \underline{C}^o$$

3° Le problème de l'inclusion plastique et hétérogène ($\Delta\underline{C} \neq 0$, $\Delta\underline{\varepsilon}^p \neq 0$) :

C'est le cas le plus général qui combine les deux problèmes précédents puisqu'on a simultanément une double hétérogénéité.
D'une part, celle de l'élasticité du matériau ($\Delta\underline{C} \neq 0$) et d'autre part, celle de l'hétérogénéité plastique ($\Delta\underline{\varepsilon}^p \neq 0$).

II.2.1. Le problème de l'inclusion plastique d'Eshelby-Kröner

a - Matrice élastique (Eshelby)

Considérons au sein de la matrice homogène de constantes d'élasticité C^o_{ijkl} une inclusion de volume V_I limitée par une surface S. Nous supposons qu'à l'interface S, le déplacement est continu.

Nous supposons que cette inclusion a subi une transformation plastique uniforme $\underline{\beta}^p$.
A l'aide de la fonction indicatrice d'Heaviside $\delta^o_v(r)$ définie par :

$$\delta^o_v(\vec{r}) = \begin{cases} 1, & \vec{r} \in V_I \\ 0, & \vec{r} \notin V_I \end{cases} \qquad \text{(II-25)}$$

On a pour la partie plastique $\underline{\beta}^p(r)$ du gradient de déplacement supposée uniforme dans l'inclusion et nulle dans la matrice :

$$\underline{\beta}^p(\vec{r}) = \underline{\beta}^p \, \delta v^o(\vec{r}) \tag{II-26}$$

A partir des équations (II-12), (II-13) et (II-4), le tenseur des contraintes s'écrit :

$$\sigma_{ij}(\vec{r}) = C^o_{ijkl}\,(u_{k,l}(\vec{r}) - \beta^p_{kl}(\vec{r})) \tag{II-27}$$

et les équations d'équilibre donnent, en l'absence de forces volumiques :

$$\sigma_{ij,j}(\vec{r}) = 0 \tag{II-28}$$

(II-27) devient alors :

$$C^o_{ijkl}\, u_{k,lj}(\vec{r}) - C^o_{ijkl}\, \beta^p_{kl,j}(\vec{r}) = 0 \tag{II-29}$$

Ces équations peuvent être considérées comme celles d'un problème purement élastique pour un milieu soumis à une distribution de forces de volume :

$$f_i = -\, C^o_{ijkl}\, \beta^p_{kl,j}(\vec{r}) \tag{II-30}$$

Si l'on connaît la réponse en déplacement de ce milieu, à l'application d'une force ponctuelle f^p appliquée en un point r', soit :

$$u_i(\vec{r}) = G_{ij}(\vec{r}-\vec{r}')\, f^p_j(\vec{r}') \tag{II-31}$$

on en déduit par intégration la réponse à toute distribution continue de force f :

$$u_i(\vec{r}) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} G_{ij}(\vec{r}-\vec{r}')\, f_j(\vec{r}')\, dV' \tag{II-32}$$

soit en utilisant (II-30)

$$\varepsilon_{ij}(\vec{r}) = \iiint_{V_I} \Gamma_{ijkl}(\vec{r}-\vec{r}')\, C^{o}_{klmn}\, \beta^{p}_{mn}\, dV' \qquad \text{(II-39)}$$

$\underline{\Gamma}$ est le tenseur de Green modifié défini par :

$$\Gamma_{ijkl}(\vec{r}-\vec{r}') = -\frac{1}{2}\left\{G_{ik,jl}(\vec{r}-\vec{r}') + G_{jk,il}(\vec{r}-\vec{r}')\right\} \qquad \text{(II-40)}$$

De même pour la rotation totale, on procède à une antisymétrisation de $u_{i,j}$ par rapport aux indices i et j :

$$\omega_{ij}(\vec{r}) = \iiint_{V_I} \Lambda_{ijkl}(\vec{r}-\vec{r}')\, C^{o}_{klmn}\, \beta^{p}_{mn}\, dV' \qquad \text{(II-41)}$$

où

$$\Lambda_{ijkl}(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{-1}{2}\left\{G_{ik,jl}(\vec{r}-\vec{r}') - G_{jk,il}(\vec{r}-\vec{r}')\right\} \qquad \text{(II-42)}$$

En rappelant que les termes C^{o}_{klmn} et β^{p}_{mn} sont uniformes dans l'inclusion V_I, (II-38) devient alors :

$$u_{i,j}(\vec{r}) = -\iiint_{V_I} G_{ik,jl}(\vec{r}-\vec{r}')\, dV' \;\; C^{o}_{klmn}\, \beta^{p}_{mn} \qquad \text{(II-43)}$$

Il apparaît à ce stade utile de définir le tenseur $\underline{T}$ d'ordre 4 par :

$$T_{ijkl}(\vec{r}) = -\iiint_{V_I} G_{ik,jl}(\vec{r}-\vec{r}')\, dV' \qquad \text{(II-44)}$$

On peut effectivement utiliser ce terme pour présenter une écriture compacte de $u_{i,j}$, ε_{ij} et ω_{ij} à savoir :

$$\begin{aligned} u_{i,j}(\vec{r}) &= T_{ijkl}(\vec{r})\, C^{o}_{klmn}\, \beta^{p}_{mn} \\ \varepsilon_{ij}(\vec{r}) &= \frac{1}{2}\left\{T_{ijkl}(\vec{r}) + T_{jikl}(\vec{r})\right\} C^{o}_{klmn}\, \beta^{p}_{mn} \qquad \text{(II-45)} \\ \omega_{ij}(\vec{r}) &= \frac{1}{2}\left\{T_{ijkl}(\vec{r}) - T_{jikl}(\vec{r})\right\} C^{o}_{klmn}\, \beta^{p}_{mn} \end{aligned}$$

r est un point quelconque dans la matrice ou dans l'inclusion.

Le calcul de $\underline{T}$ est en général difficile pour une inclusion quelconque ; Eshelby [5] a montré toutefois que la valeur de $\underline{T}$ est uniforme et accessible à l'intérieur d'une inclusion de forme ellipsoïdale. C'est pourquoi on se propose de concentrer explicitement notre attention sur la situation à l'intérieur d'une inclusion ellipsoïdale.

On notera alors pour $r \in V_I$ (ellipsoïde) : $\underline{T}(r) = \underline{T}^I$.

Dans ce cas on dispose des formules suivantes pour trouver les champs cinématiques et statiques dans l'inclusion ellipsoïdale :

a - le gradient du déplacement : $\beta^I_{ij} = T^I_{ijkl}\, C^o_{klmn}\, \beta^p_{mn}$

b - la déformation totale : $\varepsilon^I_{ij} = 1/2\, (T^I_{ijkl} + T^I_{jikl})\, C^o_{klmn}\, \beta^p_{mn}$

c - la déformation élastique : $\varepsilon^{eI}_{ij} = \varepsilon^I_{ij} - \varepsilon^p_{ij}$ (II-46)

d - la rotation totale : $\omega^I_{ij} = 1/2\, (T^I_{ijkl} - T^I_{jikl})\, C^o_{klmn}\, \beta^p_{mn}$

e - la rotation élastique : $\omega^{eI}_{ij} = \omega^I_{ij} - \omega^p_{ij}$

f - les contraintes : $\sigma^I_{ij} = C^o_{ijpq}\, \{1/2\, (T^I_{pqkl} + T^I_{qpkl})\, C^o_{klmn}\beta^p_{mn} - \varepsilon^p_{pq}\}$

La formule (II-46-b) est identique à la formule d'Eshelby [5], reliant la déformation totale $\underline{\varepsilon}^I$ dans l'inclusion ellipsoïdale à la déformation plastique $\underline{\varepsilon}^p$ qui s'écrit :

$$\varepsilon^I_{ij} = S_{ijkl}\, \varepsilon^p_{kl} \tag{II-47}$$

où $\underline{S}$ est le tenseur d'Eshelby défini par :

$$S_{ijkl} = \frac{1}{2}\left(T^I_{ijmn} + T^I_{jimn}\right) C^o_{mnkl} \tag{II-48}$$

De même, on peut introduire le tenseur $\underline{A}$ pour relier la rotation totale $\underline{\omega}^I$ dans l'inclusion à la déformation plastique $\underline{\varepsilon}^p$ par :

$$\omega^I_{ij} = A_{ijkl}\, \varepsilon^p_{kl} \tag{II-49}$$

où

$$A_{ijkl} = \frac{1}{2}\left(T^I_{ijmn} - T^I_{jimn}\right) C^o_{mnkl} \tag{II-50}$$

Remarques :

* pour calculer explicitement les tenseurs $\underline{S}$ et $\underline{A}$, il suffit de connaître le tenseur $\underline{T}^I$
* les tenseurs $\underline{S}$ et $\underline{A}$ possèdent les symétries suivantes :

pour $\underline{S}$:

$$S_{ijkl} = S_{jikl} = S_{ijlk}$$

mais en général : $S_{ijkl} \neq S_{klij}$

(II-51)

pour $\underline{A}$:

$$A_{ijkl} = A_{ijlk} = - A_{jikl}$$

On constate ainsi l'importance de connaître le tenseur $\underline{T}^I$. La généralisation au cas d'une matrice plastifiée est immédiate, on obtient alors les formules d'Eshelby-Kröner.

b - Matrice plastifiée (Eshelby-Kröner)

Kröner a généralisé la solution d'Eshelby au cas où la matrice a subi une déformation plastique uniforme. Nous supposons qu'à l'interface S, le déplacement est continu.
Pour en rendre compte, on désigne par $\underline{\beta}^p$ (resp. $\underline{\beta}^{po}$) la partie plastique du gradient total de l'inclusion u_i (resp. de la matrice $U^o{}_i$). $\underline{\beta}^p$ (resp. $\underline{\beta}^{po}$) est supposé uniforme dans l'inclusion (resp. la matrice).
Dans ce cas, la partie plastique du gradient de déplacement total s'écrit à l'aide de (II-25) :

$$\begin{aligned} \underline{\beta}^p(\vec{r}) &= \underline{\beta}^{po} + (\underline{\beta}^p - \underline{\beta}^{po})\,\delta^o_v(\vec{r}) \\ &= \underline{\beta}^{po} + \Delta\underline{\beta}^p\,\delta^o_v(\vec{r}) \end{aligned} \qquad \text{(II-52)}$$

Les équations d'équilibre (II-29) s'écrivent en tenant compte de (II-52) :

$$C^o_{ijkl} u_{k,lj}(\vec{r}) - C^o_{ijkl}\left(\beta^{po}_{kl} + \Delta\beta^p_{kl}\,\delta^o_v(\vec{r})\right)_{,j} = 0$$

ou encore :

$$C^o_{ijkl}\, u_{k,lj}(\vec{r}) - C^o_{ijkl}\,\Delta\beta^p_{kl}\,\delta^o_{v,j}(\vec{r}) = 0 \qquad \text{(II-53)}$$

Le terme $\{ - C^o_{ijkl}\, \Delta\beta^p_{kl}\, \delta^o_{v,j}(r) \}$ peut être considéré comme une distribution fictive de forces volumiques, et on a en tenant compte du déplacement à l'infini :

$$u_i(\vec{r}) = U^o_i(\vec{r}) - \iiint_{-\infty}^{+\infty} G_{ki}(\vec{r} - \vec{r}')\, C^o_{klmn}\, \Delta\beta^p_{mn}\, \delta_{v,l'}(\vec{r}')\, dV' \qquad \text{(II-54)}$$

On applique les mêmes procédures de (II-33) à (II-37), on aboutit à :

$$u_i(\vec{r}) = U^o_i(\vec{r}) - \iiint_{V_I} G_{ki,l}(\vec{r} - \vec{r}')\, C^o_{klmn}\, \Delta\beta^p_{mn}\, dV' \qquad \text{(II-55)}$$

et le gradient du déplacement est donné par :

$$u_{i,j}(\vec{r}) = U^o_{i,j}(\vec{r}) - \iiint_{V_I} G_{ki,lj}(\vec{r} - \vec{r}')\, C^o_{klmn}\, \Delta\beta^p_{mn}\, dV' \qquad \text{(II-56)}$$

enfin pour la déformation et la rotation totales, on les obtient ainsi :

$$\varepsilon_{ij}(\vec{r}) = E^T_{ij} + \iiint_{V_I} \Gamma_{ijkl}(\vec{r} - \vec{r}')\, C^o_{klmn}\, \Delta\beta^p_{mn}\, dV' \qquad \text{(II-57)}$$

$$\omega_{ij}(\vec{r}) = \Omega^T_{ij} + \iiint_{V_I} \Lambda_{ijkl}(\vec{r} - \vec{r}')\, C^o_{klmn}\, \Delta\beta^p_{mn}\, dV' \qquad \text{(II-58)}$$

où $\underline{E}^T$ et $\underline{\Omega}^T$ sont respectivement la déformation et la rotation totales à l'infini.
Ces quantités peuvent être décomposées en parties élastique et plastique, comme :

$$\begin{aligned} \underline{E}^T &= \underline{E}^e + \underline{E}^p \\ \underline{\Omega}^T &= \underline{\Omega}^e + \underline{\Omega}^p \end{aligned} \qquad \text{(II-59)}$$

En voulant indiquer les champs cinématiques uniformes à l'intérieur d'une inclusion ellipsoïdale à l'aide des notations précédentes, on a :

$$\varepsilon^I_{ij} = E^T_{ij} + S_{ijkl}\, \Delta\beta^p_{kl} = E^T_{ij} + S_{ijkl}(\varepsilon^p_{kl} - E^p_{kl}) \qquad \text{(II-60)}$$

$$\varepsilon^{eI}_{ij} = E^T_{ij} + S_{ijkl}(\varepsilon^p_{kl} - E^p_{kl}) - \varepsilon^p_{ij} \qquad \text{(II-61)}$$

$$\omega^{I}_{ij} = \Omega^{T}_{ij} + A_{ijkl}\,\Delta\beta^{p}_{kl} = \Omega^{T}_{ij} + A_{ijkl}\,(\varepsilon^{p}_{kl} - E^{p}_{kl}) \qquad \text{(II-62)}$$

$$\omega^{eI}_{ij} = \Omega^{T}_{ij} + A_{ijkl}\,(\varepsilon^{p}_{kl} - E^{p}_{kl}) - \omega^{p}_{ij} \qquad \text{(II-63)}$$

et pour les contraintes avec $\underline{\sigma}^{I} = \underline{C}^{o}\,\underline{\varepsilon}^{eI}$, on a :

$$\sigma^{I}_{ij} = C^{o}_{ijpq}\,\left\{\, E^{e}_{pq} + (S_{pqkl} - I_{pqkl})\,(\varepsilon^{p}_{kl} - E^{p}_{kl}) \,\right\} \qquad \text{(II-64)}$$

où $\underline{I}$ est le tenseur unité d'ordre 4 défini par :

$$I_{ijkl} = \frac{1}{2}\,(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \qquad \text{(II-65)}$$

En définissant la contrainte à l'infini $\underline{\Sigma}$ par :

$$\underline{\Sigma} = \underline{C}^{o}\,\underline{E}^{e} \qquad \text{(II-66)}$$

on obtient enfin pour les contraintes :

$$\sigma^{I}_{ij} = \Sigma_{ij} + C^{o}_{ijpq}\,(S_{pqkl} - I_{pqkl})\,(\varepsilon^{p}_{kl} - E^{p}_{kl}) \qquad \text{(II-67)}$$

Dans le cas d'un milieu isotrope et d'une inclusion sphérique avec $\Delta\beta^{p}_{kk} = 0$, (II-67) devient :

$$\sigma^{I}_{ij} = \Sigma_{ij} + 2\mu\,(1 - \beta)\,(E^{p}_{ij} - \varepsilon^{p}_{ij}) \qquad \text{(II-68)}$$

ce qui est précisément la loi d'interaction formulée par Kröner avec

$$\beta = \frac{2\,(4 - 5\nu)}{15\,(1 - \nu)}$$

μ,ν sont respectivement le module de cisaillement et le coefficient de Poisson.

II.2.2. Le problème de l'inclusion hétérogène

Nous considérons un milieu infini de constantes d'élasticité $\underline{C}^o$ en tous les points sauf à l'intérieur d'une inclusion de volume V_I où elles sont égales à $\underline{C}^I$. Comme dans le cas de l'inclusion plastique, nous supposons qu'à l'interface S, le déplacement est continu.

Nous cherchons le champ de déformation (élastique car nous supposons qu'il n'y a pas de déformations inélastiques) dû à des forces surfaciques qui créent un champ uniforme ($\underline{\Sigma}$, $\underline{\beta}^{eo}$) dans la matrice infinie homogène.

Nous cherchons un système d'équations portant uniquement sur le déplacement u (r), en portant (II-2) dans (II-12) :

$$\sigma_{ij}(\vec{r}) = C_{ijkl}(\vec{r})\,\frac{1}{2}\,(u_{k,l}(\vec{r}) + u_{l,k}(\vec{r})) = C_{ijkl}(\vec{r})\,u_{k,l}(\vec{r}) \qquad \text{(II-69)}$$

et en portant (II-69) dans (II-10) en l'absence de forces volumiques, nous sommes conduits au système d'équations aux dérivées partielles :

$$[C_{ijkl}(\vec{r})\,u_{k,l}(\vec{r})]_{,j} = 0 \qquad \text{(II-70)}$$

Il est alors avantageux d'écrire $\underline{C}(r)$ sous la forme :

$$\underline{C}(\vec{r}) = \underline{C}^o + \delta\underline{C}(\vec{r}) \qquad \text{(II-71)}$$

Dans notre cas, et avec les notations du paragraphe précédent, on a :

$$\begin{aligned}\underline{C}(\vec{r}) &= \underline{C}^o + (\underline{C}^I - \underline{C}^o)\,\delta^o_v(\vec{r}) \\ &= \underline{C}^o + \Delta\underline{C}\,\delta^o_v(\vec{r})\end{aligned} \qquad \text{(II-72)}$$

(II-70) devient alors :

$$C^o_{ijkl}\,u_{k,lj}(\vec{r}) + [\Delta C_{ijkl}\,\delta^o_v(\vec{r})\,u_{k,l}(\vec{r})]_{,j} = 0 \qquad \text{(II-73)}$$

Le terme $[\Delta C_{ijkl}\,\delta^o{}_v(r)\,u_{k,l}(r)]_{,j}$ peut être considéré comme une distribution de forces volumiques fictives. Utilisons le tenseur de Green du milieu infini de constantes d'élasticité $\underline{C}^o$ pour écrire la solution de (II-73) ainsi :

$$u_i(\vec{r}) = U_i^o(\vec{r}) + \iiint_{-\infty}^{+\infty} G_{ki}(\vec{r} - \vec{r}')\,[\Delta C_{klmn}\, u_{m,n}(\vec{r}')\, \delta_v^o(\vec{r}')]_{,l'}\, dV' \qquad \text{(II-74)}$$

que l'on peut intégrer par parties et en annulant l'intégrale de surface du fait des propriétés à l'infini de $\underline{G}$:

$$u_i(\vec{r}) = U_i^o(\vec{r}) + \iiint_{-\infty}^{+\infty} G_{ki,l}(\vec{r} - \vec{r}')\, \Delta C_{klmn}\, \delta_v^o(\vec{r}')\, u_{m,n}(\vec{r}')\, dV' \qquad \text{(II-75)}$$

soit pour le gradient du déplacement et en tenant compte des propriétés de $\delta^o{}_v(r)$:

$$u_{i,j}(\vec{r}) = U_{i,j}^o + \iiint_{V_I} G_{ki,lj}(\vec{r} - \vec{r}')\, \Delta C_{klmn}\, \varepsilon_{mn}(\vec{r}')\, dV' \qquad \text{(II-76)}$$

Cette équation intégrale appelée équation L.S.D. par Kröner [6] a été proposée sous cette forme par Dederichs et Zeller [7] en ce qui concerne la déformation.

La solution exacte de cette équation pour une inclusion quelconque est encore très complexe et difficile à déduire en général ; nous pensons obtenir une solution approchée en remplaçant dans l'intégrale (II-76), la déformation $\underline{\varepsilon}(r)$ par sa valeur moyenne $\underline{\varepsilon}^I$. (rappelons également que d'après Eshelby [5], $\underline{\varepsilon}$ est uniforme dans une inclusion ellipsoïdale).

On a donc pour le gradient du déplacement dans l'inclusion ellipsoïdale :

$$\beta_{ij}^I = \beta_{ij}^{eo} + \iiint_{V_I} G_{ki,jl}(\vec{r} - \vec{r}')\, \Delta C_{klmn}\, \varepsilon_{mn}^I\, dV' \qquad \text{(II-77)}$$

La déformation dans l'inclusion est donc solution de :

$$\varepsilon_{ij}^I = E_{ij}^e - \frac{1}{2}\left\{ T_{ijkl}^I + T_{jikl}^I \right\} \Delta C_{klmn}\, \varepsilon_{mn}^I \qquad \text{(II-78)}$$

et la rotation s'écrit :

$$\omega^I_{ij} = \Omega^e_{ij} - \frac{1}{2}\left\{ T^I_{ijkl} - T^I_{jikl} \right\} \Delta C_{klmn}\, \varepsilon^I_{mn} \qquad \text{(II-79)}$$

On voit donc d'après (II-78) et (II-79) que la solution du problème de l'inclusion hétérogène se ramène également à la détermination du même tenseur $\underline{T}^I$ que celui introduit lors du problème de l'inclusion plastique.

Les deux cas traités dans les paragraphes précédents sont en fait des cas particuliers d'un problème plus général d'inclusions plastiques et hétérogènes, c'est-à-dire une région de volume V_I d'un matériau subissant à la fois une déformation inélastique et ayant des modules élastiques différents ; c'est le cas par exemple des transformations de phase.

II.2.3. Le problème de l'inclusion plastique et hétérogène

Pour traiter ce problème plus complexe, nous partons d'une équation intégrale proposée par Berveiller et Zaoui [3] et reprise par Berveiller, Fassi-Fehri et Hihi [8] pour résoudre le problème de la paire d'inclusions, et nous l'appliquons au problème de l'inclusion plastique et hétérogène. Nous considérons donc un milieu infini hétérogène pour lequel les constantes d'élasticité en un point r sont $\underline{C}$ (r) et où une déformation sans contrainte $\underline{\varepsilon}^p$ (r) s'est produite à partir d'un état initial sans contrainte. Des contraintes $\underline{\Sigma}$ sont appliquées à la surface du milieu infini et nous supposons qu'elles sont telles qu'elles provoqueraient une déformation élastique uniforme $\underline{E}^e$ si le milieu était homogène.

a) Equation intégrale

La présence des déformations sans contraintes $\underline{\varepsilon}^p$ (r), qui a priori sont incompatibles engendre des contraintes internes et des déformations élastiques $\underline{\varepsilon}^e$ (r) dans le milieu, telle que la déformation totale $\underline{\varepsilon}$ (r) soit compatible c'est-à-dire dérive d'un champ de déplacement u (r). On a alors :

$$\varepsilon_{ij}(\vec{r}) = \frac{1}{2}\left(u_{i,j}(\vec{r}) + u_{j,i}(\vec{r})\right) = \varepsilon^p_{ij}(\vec{r}) + \varepsilon^e_{ij}(\vec{r})$$

La partie élastique est reliée aux contraintes par la loi de Hooke (II-12) :

$$\sigma_{ij}(\vec{r}) = C_{ijkl}(\vec{r})\, \varepsilon^{e}_{kl}(\vec{r}) = C_{ijkl}(\vec{r})\, (\varepsilon_{kl}(\vec{r}) - \varepsilon^{p}_{kl}(\vec{r})) = C_{ijkl}(\vec{r})\, (u_{k,l}(\vec{r}) - \varepsilon^{p}_{kl}(\vec{r}))$$

Le champ des contraintes $\underline{\sigma}$ (r) doit être en équilibre (II-28) :

$$[C_{ijkl}(\vec{r})\, (u_{k,l}(\vec{r}) - \varepsilon^{p}_{kl}(\vec{r}))]_{,j} = 0 \qquad \text{(II-80)}$$

Il est alors avantageux d'écrire $\underline{C}$ (r) sous la forme :

$$C_{ijkl}(\vec{r}) = C^{o}_{ijkl} + \delta C_{ijkl}(\vec{r}) \qquad \text{(II-81)}$$

nous déduisons alors de (II-80) en introduisant [9] dès maintenant la déformation plastique $\underline{E}^{p}$:

$$C^{o}_{ijkl} u_{k,lj}(\vec{r}) - \left\{ C_{ijkl}(\vec{r})\, \varepsilon^{p}_{kl}(\vec{r}) - C^{o}_{ijkl} E^{p}_{kl} - \delta C_{ijkl}(\vec{r})\, \varepsilon_{kl}(\vec{r}) \right\}_{,j} = 0 \qquad \text{(II-82)}$$

Le terme $f_i = - \{ C_{ijkl}(r)\, \varepsilon^{p}_{kl}(r) - C^{o}_{ijkl} E^{p}_{kl} - \delta C_{ijkl}(r)\, \varepsilon_{kl}(r) \}_{,j}$ peut être considéré comme une distribution de forces volumiques fictives. Nous remarquons que le terme $C^{o}_{ijkl}\, E^{p}_{kl}$ est uniforme donc son gradient est nul $((C^{o}_{ijkl} E^{p}_{kl})_{,j} = 0)$; cependant nous le retenons dans l'équation (II-82). On peut retrouver à partir de (II-82) les deux cas précédents des problèmes d'inclusions, en effet :

- dans le cas du problème de l'inclusion plastique d'Eshelby-Kröner, on a :

$$\delta \underline{C} = 0 \;\; : \;\; f_i = - C^{o}_{ijkl}\, (\varepsilon^{p}_{kl}(\vec{r}) - E^{p}_{kl})_{,j} = - C^{o}_{ijkl}\, (\Delta\varepsilon^{p}_{kl}\, \delta^{o}_{v}(\vec{r}))_{,j}$$

- dans le cas du problème de l'inclusion hétérogène, on a :

$$\underline{\varepsilon}^{p} = \underline{E}^{p} \;\; : \;\; f_i = (\delta C_{ijkl}(r)\, \varepsilon_{kl}(\vec{r}))_{,j}$$

Une équation analogue à (II-82) a été retrouvée en utilisant la technique du champ de déplacement auxiliaire nul à l'infini [10].

La solution de (II-82) obtenue à partir du tenseur de Green s'écrit :

$$u_i(\vec{r}) = U_i^o(\vec{r}) - \iiint_{-\infty}^{+\infty} G_{ik}(\vec{r}-\vec{r}') \left\{ C_{klmn}(\vec{r}')\, \varepsilon_{mn}^p(\vec{r}') - C_{klmn}^o E_{mn}^p - \delta C_{klmn}(\vec{r}')\, \varepsilon_{mn}(\vec{r}') \right\}_{,l'} dV' \tag{II-83}$$

où $U^o{}_i$ est le déplacement correspondant à la déformation $\underline{E}^T$.

On peut intégrer par parties (II-83) pour obtenir, compte tenu des relations (II-20), le gradient de déplacement total :

$$u_{i,j}(\vec{r}) = U_{i,j}^o - \iiint_{-\infty}^{+\infty} G_{ik,jl}(\vec{r}-\vec{r}') \left\{ C_{klmn}(\vec{r}')\varepsilon_{mn}^p(\vec{r}') - C_{klmn}^o E_{mn}^p - \delta C_{klmn}(\vec{r}')\varepsilon_{mn}(\vec{r}') \right\} dV' \tag{II-84}$$

Compte tenu de (II-40), l'équation proposée par Berveiller et Zaoui [3] pour les déformations totales locales s'écrit :

$$\varepsilon_{ij}(\vec{r}) = E_{ij}^T + \iiint_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_{ijkl}(\vec{r}-\vec{r}') \left\{ C_{klmn}\, \varepsilon_{mn}^p(\vec{r}') - C_{klmn}^o E_{mn}^p - \delta C_{klmn}(\vec{r}')\, \varepsilon_{mn}(\vec{r}') \right\} dV' \tag{II-85}$$

Cette équation intégrale contient à la fois celle de Dederichs et Zeller [7] pour les milieux hétérogènes ($\underline{\varepsilon}^p(r) = 0$) et celle de Mura-Willis [11] [12] pour un milieu homogène plastique ($\delta\underline{C}(r) = 0$).

Nous allons l'utiliser dans ce qui suit pour traiter le problème de l'inclusion plastique et hétérogène située dans un milieu anisotrope.

b) <u>Résolution de l'équation intégrale</u>

Soient $\underline{C}^I{}_{ijkl}$ les constantes d'élasticité d'une inclusion ellipsoïdale de volume V_I, limitée par une surface S et située dans une matrice de constantes d'élasticité $C^o{}_{ijkl}$.

Nous désignons par $\underline{\beta}^p$ (resp. $\underline{\beta}^{po}$) la partie plastique du gradient du déplacement total de l'inclusion (resp. de la matrice). $\underline{\beta}^p$ (resp. $\underline{\beta}^{po}$) est supposé uniforme dans l'inclusion (resp. la matrice).

A l'aide de la fonction d'Heaviside δ^o_v (r) définie par (II-25), on a pour $\underline{C}$ (r) et $\underline{\beta}^p$ (r) :

$$\underline{C}(\vec{r}) = \underline{C}^o + (\underline{C}^I - \underline{C}^o)\,\delta^o_v(\vec{r}) = \underline{C}^o + \Delta\underline{C}\delta^o_v(\vec{r}) \qquad \text{(II-86)}$$

$$\underline{\beta}^p(\vec{r}) = \underline{\beta}^{po} + (\underline{\beta}^p - \underline{\beta}^{po})\,\delta^o_v(\vec{r}) = \underline{\beta}^{po} + \Delta\underline{\beta}^p\,\delta^o_v(\vec{r}) \qquad \text{(II-87)}$$

En reportant ces expressions dans l'équation intégrale (II-84) et compte tenu de (II-25), le gradient de déplacement total est donné par :

$$u_{i,j}(\vec{r}) = U^o_{i,j} + \iiint_{V_I} G_{ki,jl}(\vec{r}-\vec{r}')\,\left\{\Delta C_{klmn}\varepsilon_{mn}(\vec{r}') + C^o_{klmn}E^p_{mn} - C^I_{klmn}\varepsilon^p_{mn}\right\}\,dV' \qquad \text{(II-88)}$$

D'après Eshelby, $\underline{\varepsilon}$ est uniforme dans l'inclusion ellipsoïdale. Nous pouvons donc remplacer dans l'intégrale (II-88), la déformation $\underline{\varepsilon}$(r) par la déformation uniforme $\underline{\varepsilon}^I$.
On a alors en isolant les termes uniformes hors de la sommation :

$$u_{i,j}(\vec{r}) = U^o_{i,j} - \iiint_{V_I} G_{ki,jl}(\vec{r}-\vec{r}')\,dV'\,\left\{C^I_{klmn}\varepsilon^p_{mn} - C^o_{klmn}E^p_{mn} - \Delta C_{klmn}\varepsilon^I_{mn}\right\} \qquad \text{(II-89)}$$

soit en utilisant le tenseur $\underline{T}$ (II-44), on a :

$$u_{i,j}(\vec{r}) = U^o_{i,j} + T_{ijkl}(\vec{r})\,\left\{C^I_{klmn}\varepsilon^p_{mn} - C^o_{klmn}E^p_{mn} - \Delta C_{klmn}\varepsilon^I_{mn}\right\} \qquad \text{(II-90)}$$

Enfin, on obtient pour les déformations et rotations totales dans l'inclusion ellipsoïdale en remplaçant $\underline{T}$(r) par $\underline{T}^I$ uniforme :

$$\varepsilon^I_{ij} = E^T_{ij} + \frac{1}{2}\left(T^I_{ijkl} + T^I_{jikl}\right)\left\{C^I_{klmn}\varepsilon^p_{mn} - C^o_{klmn}E^p_{mn} - \Delta C_{klmn}\varepsilon^I_{mn}\right\} \qquad \text{(II-91)}$$

$$\omega^I_{ij} = \Omega^T_{ij} + \frac{1}{2}\left(T^I_{ijkl} - T^I_{jikl}\right)\left\{C^I_{klmn}\varepsilon^p_{mn} - C^o_{klmn}E^p_{mn} - \Delta C_{klmn}\varepsilon^I_{mn}\right\} \qquad \text{(II-92)}$$

La connaissance des déformations et rotations totales dans l'inclusion permet de calculer les déformations et rotations élastiques à partir de :

$$\varepsilon^{eI}_{ij} = \varepsilon^I_{ij} - \varepsilon^p_{ij} \qquad \text{(II-93)}$$

$$\omega^{eI}_{ij} = \omega^I_{ij} - \omega^p_{ij} \qquad \text{(II-94)}$$

et les contraintes dans l'inclusion, comme suit :

$$\sigma^{I}_{ij} = C^{I}_{ijkl}\,\varepsilon^{eI}_{kl} = C^{I}_{ijkl}\left(\varepsilon^{I}_{kl} - \varepsilon^{p}_{kl}\right) \qquad \text{(II-95)}$$

La solution précédente contient évidemment les cas particuliers examinés de l'inclusion plastique (II.2.1) et de l'inclusion hétérogène (II.2.2). Toutes dépendent du tenseur $\underline{T}^{I}$.

Il a été indiqué à chaque fois un calcul des rotations élastiques qui peut permettre d'accéder aux rotations du réseau cristallin, ou à la modélisation de la formation des textures de déformation plastique dans les problèmes de plasticité des polycristaux métalliques [2].
Connaissant à présent le champ cinématique des déformations et le champ statique des contraintes, il est possible d'étudier l'énergie élastique du système constitué par l'inclusion dans la matrice. La formulation générale du problème de l'inclusion plastique hétérogène s'accorde parfaitement à l'utilisation de la méthode de l'inclusion plastique équivalente élaborée par Eshelby [13]. Les calculs d'énergie élastique constituent en effet un moyen efficace pour évaluer l'occurence d'une transformation de phase ou du changement de forme d'un grain.

II.2.4. Energie élastique

Pour déterminer l'énergie élastique associée à la présence d'une inclusion plastique et hétérogène dans un milieu anisotrope, il est commode de remplacer le problème hétérogène et plastique par un problème homogène avec des déformations plastiques fictives qui conduisent aux mêmes contraintes et déformations totales que dans le problème réel. Cette méthode de l'inclusion équivalente a été proposée par Eshelby [13] et exploitée notamment par O.F. Fehri [14].
Dans les problèmes d'inclusions, on étend cette méthode au cas où la matrice se déforme plastiquement et on donne alors les déformations plastiques fictives notées ε^{p*}_{ij}.

a) Formulation générale [14]

Un solide de volume V est soumis sur sa frontière à des contraintes uniformes Σ_{ij} et est le siège d'un champ de déformation plastique ε^{p}_{ij} (r) créant des contraintes internes $(\sigma_{ij}(r) - \Sigma_{ij})$.
L'énergie élastique dans le milieu s'écrit :

$$W = \frac{1}{2} \iiint_V \sigma_{ij}(\vec{r})\, \varepsilon^e_{ij}(\vec{r})\, dV \tag{II-96}$$

et d'après les décompositions (II-2) et (II-4) :

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \iiint_V \sigma_{ij}(\vec{r})\, (u_{i,j}(\vec{r}) - \varepsilon^p_{ij}(\vec{r}))\, dV \\ &= \frac{1}{2} \iiint_V \sigma_{ij}(\vec{r})\, u_{i,j}(\vec{r})\, dV - \frac{1}{2} \iiint_V \sigma_{ij}(\vec{r})\, \varepsilon^p_{ij}(\vec{r})\, dV \end{aligned} \tag{II-97}$$

Par le théorème de la divergence, on a :

$$\frac{1}{2} \iiint_V \sigma_{ij}(\vec{r})\, u_{i,j}(\vec{r})\, dV = \frac{1}{2} \iint_S \sigma_{ij}\, n_j\, u_i(\vec{r})\, dS - \frac{1}{2} \iiint_V \sigma_{ij,j}(\vec{r})\, u_i(\vec{r})\, dV$$

et en tenant compte des équations d'équilibre (II-28), il vient :

$$W = \frac{1}{2} \iint_S \sigma_{ij}(\vec{r})\, n_j u_i(\vec{r})\, dS - \frac{1}{2} \iiint_V \sigma_{ij}(\vec{r})\, \varepsilon^p_{ij}(\vec{r})\, dV \tag{II-98}$$

où S est la frontière du milieu, et n (x_j) le vecteur normal unitaire orienté vers l'extérieur. On a par les conditions de frontière sur S :

$$\sigma_{ij} n_j = \Sigma_{ij} n_j \text{ sur S.} \tag{II-99}$$

et en repassant à l'intégrale de volume :

$$W = \frac{1}{2} \iiint_V \Sigma_{ij} u_{i,j}(\vec{r})\, dV - \frac{1}{2} \iiint_V \sigma_{ij}(\vec{r})\, \varepsilon^p_{ij}(\vec{r})\, dV \tag{II-100}$$

Σ_{ij} étant uniforme, et en posant :

$$E^*_{ij} = \frac{1}{2V} \iiint_V [u_{i,j}(\vec{r}) + u_{j,i}(\vec{r})]\, dV \tag{II-101}$$

il vient en définitif pour W :

$$W = \frac{V}{2} \Sigma_{ij}\, E^*_{ij} - \frac{1}{2} \iiint_V \sigma_{ij}(\vec{r})\, \varepsilon^p_{ij}(\vec{r})\, dV \tag{II-102}$$

b) Evaluation du tenseur $\underline{E}^*$

Pour calculer le tenseur $\underline{E}^*$ donné par (II-101), on introduit un milieu homogène équivalent de constantes d'élasticité C^o_{ijkl}, pour lequel on va évaluer la déformation plastique fictive correspondante $\underline{\varepsilon}^{p*}(r)$ assurant le même champ des déformations totales.

Pour un milieu hétérogène et plastique, on rappelle que (voir II.2.3.) la déformation totale locale s'écrit (II-85) où $\underline{E}^T$ est la déformation totale à l'infini :

$$\varepsilon^T_{ij}(\vec{r}) = E^T_{ij} + \iiint_{V'} \Gamma_{ijkl}(\vec{r} - \vec{r}') \left\{ C_{klmn}(\vec{r}')\, \varepsilon^p_{mn}(\vec{r}') - C^o_{klmn} E^p_{mn} - \delta C_{klmn}(\vec{r}')\, \varepsilon_{mn}(\vec{r}') \right\} dV' \tag{II-103}$$

On définit alors la déformation plastique fictive $\underline{\varepsilon}^{p*}$ telle que :

$$\forall\, \vec{r} \in V : C^o_{ijkl}\, \varepsilon^{p*}_{kl}(\vec{r}) = C_{ijkl}(\vec{r})\, \varepsilon^p_{kl}(\vec{r}) - C^o_{klmn} E^p_{mn} - \delta C_{ijkl}(\vec{r})\, \varepsilon_{kl}(\vec{r}) \tag{II-104}$$

La déformation totale macroscopique $\underline{E}^*$ donnée par (II-101) est alors égale à :

$$E^*_{ij} = \frac{1}{V} \iiint_V \varepsilon^T_{ij}(\vec{r})\, dV$$

ou encore :

$$E^*_{ij} = \frac{1}{V} \iiint_V \left(\varepsilon^e_{ij}(\vec{r}) + \varepsilon^{p*}_{ij}(\vec{r}) \right) dV \tag{II-105}$$

Le milieu fictif étant homogène, on peut encore écrire :

$$E^*_{ij} = E^e_{ij} + E^{p*}_{ij} \tag{II-106}$$

avec :

$$E^e_{ij} = \frac{1}{V} \iiint_V \varepsilon^e_{ij}(\vec{r})\, dV \quad \text{et} \quad E^{p*}_{ij} = \frac{1}{V} \iiint_V \varepsilon^{p*}_{ij}(\vec{r})\, dV \tag{II-107}$$

En effet, pour un milieu fictif homogène, on a :

$$\varepsilon^{e}_{ij}(\vec{r}) = s^{o}_{ijkl}\,\sigma_{kl}(\vec{r})$$

où $\underline{s}^{o}$ est la compliance (l'inverse de $\underline{C}^{o}$), il vient donc :

$$\frac{1}{V}\iiint_V \varepsilon^{e}_{ij}(\vec{r})\,dV = \frac{1}{V}\,s^{o}_{ijkl}\iiint_V \sigma_{kl}(\vec{r})\,dV$$

et $1/V \iiint_V \sigma_{ij}(r)\,dV$ n'est autre que la contrainte macroscopique Σ_{ij}, donc :

$$\frac{1}{V}\iiint_V \varepsilon^{e}_{ij}(\vec{r})\,dV = s^{o}_{ijkl}\,\Sigma_{kl}$$

enfin sachant que (II-66) :

$$s^{o}_{ijkl}\,\Sigma_{kl} = E^{e}_{ij}$$

on peut écrire alors : $E^{e}_{ij} = 1/V \iiint_V \varepsilon^{e}_{ij}(r)\,dV$.
En reportant dans (II-106), on a dans le cas homogène :

$$E^{*}_{ij} = E^{e}_{ij} + \frac{1}{V}\iiint_V \varepsilon^{p*}_{ij}(\vec{r})\,dV$$

et donc pour l'énergie élastique :

$$W = \frac{1}{2}\Sigma_{ij}E^{e}_{ij}V + \frac{1}{2}\Sigma_{ij}\iiint_V \varepsilon^{p*}_{ij}(\vec{r})\,dV - \frac{1}{2}\iiint_V \sigma_{ij}(\vec{r})\,\varepsilon^{p}_{ij}(\vec{r})\,dV \qquad \text{(II-108)}$$

Appliquons le formalisme général précédent à des situations particulières de problèmes d'inclusions afin de détailler les intégrales de (II-108).

c) Cas particuliers

Les résultats précédents sont applicables aux problèmes d'inclusions et permettent de retrouver par une voie directe les résultats classiques d'Eshelby.

* Cas de l'inclusion plastique d'Eshelby (II.2.1.a)

Dans ce cas, le champ de déformation plastique $\underline{\varepsilon}^p(r)$ et le tenseur d'élasticité $\underline{C}(r)$ s'écrivent :

$$\varepsilon^p_{ij}(\vec{r}) = \varepsilon^p_{ij}\,\delta^o_v(\vec{r}) \quad \text{et} \quad C_{ijkl}(\vec{r}) = C^o_{ijkl}$$

On obtient pour l'énergie élastique dans le cas où la matrice n'est pas chargée :

$$W = -\frac{1}{2}\iiint_{V_I} \sigma_{ij}(\vec{r})\,\varepsilon^p_{ij}\,dV \qquad \text{(II-109)}$$

Si l'inclusion de volume V_I est ellipsoïdale, σ_{ij} est uniforme dans l'inclusion ellipsoïdale.

Alors, on a :

$$W = -\frac{1}{2} V_I\,\sigma^I_{ij}\,\varepsilon^p_{ij} \qquad \text{(II-110)}$$

Ceci représente l'énergie élastique d'une inclusion ellipsoïdale ayant subi une déformation plastique uniforme et située dans une matrice non chargée.

Ce résultat est identique à celui trouvé par Eshelby.

Les contraintes internes dans l'inclusion ellipsoïdale (II-46) sont :

$$\sigma^I_{ij} = C^o_{ijkl}\,(S_{klmn} - I_{klmn})\,\varepsilon^p_{mn}$$

Enfin on obtient :

$$W = -\frac{1}{2} V_I\,C^o_{ijkl}\,(S_{klmn} - I_{klmn})\,\varepsilon^p_{mn}\,\varepsilon^p_{ij} \qquad \text{(II-111)}$$

* <u>Cas de l'inclusion plastique d'Eshelby-Kröner (II.2.1.b)</u>

D'après le paragraphe précédent (II.2.1.b), nous avons :

$$\varepsilon^p_{ij}(\vec{r}) = E^p_{ij} + \Delta\varepsilon^p_{ij}\,\delta^o_v(\vec{r}) \quad \text{et} \quad C_{ijkl}(\vec{r}) = C^o_{ijkl}$$

La déformation plastique fictive $\underline{\varepsilon}^{p*}$ est donnée par (II-104) :

$$\forall\, \vec{r} \in V : \varepsilon^{p*}_{ij}(\vec{r}) = \Delta\,\varepsilon^p_{ij}\,\delta^o_v(\vec{r})$$

Ces équations conduisent alors à écrire les intégrales dans l'équation (II-108) sous la forme :

$$\iiint_V \varepsilon^{p*}_{ij}(\vec{r})dV = V_I\,\Delta\varepsilon^p_{ij} \qquad \text{(II-112)}$$

et

$$\iiint_V \sigma_{ij}(\vec{r})\varepsilon^p_{ij}(\vec{r})\,dV = \iiint_{V_I} \sigma_{ij}(\vec{r})\varepsilon^p_{ij}dV + \iiint_{V-V_I} \sigma_{ij}(\vec{r})E^p_{ij}dV = V_I\sigma^I_{ij}\varepsilon^p_{ij} + (V-V_I)\sigma^M_{ij}E^p_{ij}$$

avec respectivement :

$$\sigma^I_{ij} = \frac{1}{V_I}\iiint_{V_I} \sigma_{ij}(\vec{r})\,dV \quad \text{et} \quad \sigma^M_{ij} = \frac{1}{(V-V_I)}\iiint_{(V-V_I)} \sigma_{ij}(\vec{r})\,dV$$

La contrainte macroscopique Σ_{ij} est donnée par :

$$\begin{aligned}\Sigma_{ij} &= \frac{1}{V}\iiint_V \sigma_{ij}(\vec{r})\,dV \\ &= \frac{1}{V}\iiint_{V_I} \sigma_{ij}(\vec{r})\,dV + \frac{1}{V}\iiint_{(V-V_I)} \sigma_{ij}(\vec{r})\,dV \\ &= V_I\,\sigma^I_{ij} + (V - V_I)\,\sigma^M_{ij}\end{aligned}$$

Donc on tire σ^M_{ij} :

$$(V - V_I)\,\sigma^M_{ij} = V\,\Sigma_{ij} - V_I\,\sigma^I_{ij} \qquad \text{(II-113)}$$

On a alors pour la deuxième intégrale :

$$\iiint_V \sigma_{ij}(\vec{r})\, \varepsilon^p_{ij}(\vec{r})\, dV = V\, \Sigma_{ij} E^p_{ij} + V_I \sigma^I_{ij}\, (\varepsilon^p_{ij} - E^p_{ij}) \qquad \text{(II-114)}$$

et les relations (II-112) et (II-114) donnent pour l'énergie élastique :

$$W = \frac{1}{2} V\, \Sigma_{ij} \left(E^e_{ij} - E^p_{ij}\right) + \frac{1}{2} V_I\, (\Sigma_{ij} - \sigma^I_{ij})\, (\varepsilon^p_{ij} - E^p_{ij})$$

Les contraintes internes sont données par (II-67) :

$$\sigma^I_{ij} = \Sigma_{ij} + C^o_{ijkl}\, (S_{klmn} - I_{klmn})\, (\varepsilon^p_{mn} - E^p_{mn})$$

et l'énergie élastique s'écrit :

$$W = \frac{1}{2} V \Sigma_{ij} \left(E^e_{ij} - E^p_{ij}\right) - \frac{1}{2} V_I\, C^o_{ijkl}\, (S_{klmn} - I_{klmn})\, (\varepsilon^p_{mn} - E^p_{mn})\, (\varepsilon^p_{ij} - E^p_{ij})$$

et en posant :

$$W_o = \frac{1}{2} V \Sigma_{ij} \left(E^e_{ij} - E^p_{ij}\right)$$

On a alors :

$$W = W_o - \frac{1}{2} V_I\, C^o_{ijkl}\, (S_{klmn} - I_{klmn})\, (\varepsilon^p_{mn} - E^p_{mn})\, (\varepsilon^p_{ij} - E^p_{ij}) \qquad \text{(II-115)}$$

* <u>Cas d'une inclusion hétérogène (II.2.2)</u>

Dans ce cas, on a :

$$\varepsilon^p\, (\vec{r}) = 0 \quad \text{et} \quad C_{ijkl}\, (\vec{r}) = C^o_{ijkl} + \Delta C_{ijkl}\, \delta^o_v\, (\vec{r})$$

alors on a pour la déformation plastique fictive $\underline{\varepsilon}^{p*}$, correspondante au milieu homogène équivalent (II-104) :

$$\forall \vec{r} \in V_I : C^o_{ijkl} \quad \varepsilon^{p*}_{kl}(\vec{r}) = - \Delta C_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\vec{r}) \delta^o_v(\vec{r})$$

Les intégrales de l'équation (II-108) s'écrivent alors dans ce cas :

$$\iiint_V C^o_{ijkl} \varepsilon^{p*}_{ij}(\vec{r}) dV = - V_I \Delta C_{ijkl} \varepsilon^I_{kl}$$

et $$\iiint_V \sigma_{ij}(\vec{r}) \varepsilon^p_{ij}(\vec{r}) dV = 0$$

On obtient alors pour l'énergie élastique :

$$W = \frac{1}{2} V \Sigma_{ij} E^e_{ij} - \frac{1}{2} V_I \Sigma_{ij} s^o_{ijkl} \Delta C_{klmn} \varepsilon^I_{mn} \qquad \text{(II-116)}$$

* <u>Cas général d'une inclusion plastique et hétérogène (II.2.3)</u>

Dans ce cas, nous avons :

$$\varepsilon^p_{ij}(\vec{r}) = E^p_{ij} + \Delta E^p_{ij} \delta^o_v(\vec{r}) \quad \text{et} \quad C_{ijkl}(\vec{r}) = C^o_{ijkl} + \Delta C_{ijkl} \delta^o_v(\vec{r})$$

la déformation plastique fictive s'écrit alors :

$$\forall \vec{r} \in V_I : C^o_{ijkl} \varepsilon^{p*}_{kl}(\vec{r}) = \left[C^I_{ijkl} \varepsilon^p_{kl} - C^o_{ijkl} E^p_{kl} - \Delta C_{ijkl} \varepsilon^I_{kl} \right] \delta^o_v(\vec{r})$$

D'après Eshelby [6], ε^I_{ij} est uniforme dans l'inclusion V_I et le terme que multiplie $\delta^o_v(r)$ dans l'équation précédente est constant.

Ceci permet d'écrire les intégrales de l'équation (II-108), en tenant compte des équations précédentes, comme :

$$\iiint_V C^o_{ijkl} \varepsilon^{p*}_{kl}(\vec{r}) dV = V_I \left(C^I_{ijkl} \varepsilon^p_{kl} - C^o_{ijkl} E^p_{kl} - \Delta C_{ijkl} \varepsilon^I_{kl} \right)$$

et $$\iiint_V \sigma_{ij}(\vec{r}) \varepsilon^p_{ij}(\vec{r}) dV = V \Sigma_{ij} E^p_{ij} + V_I \sigma^I_{ij} (\varepsilon^p_{ij} - E^p_{ij})$$

Ces relations donnent pour l'énergie élastique :

$$W = W_o + \frac{1}{2} V_I \Sigma_{ij} \left\{ \overset{o}{s}_{ijkl} C^I_{klmn} \varepsilon^p_{mn} - E^p_{ij} - \overset{o}{s}_{ijkl} \Delta C_{klmn} \varepsilon^I_{mn} \right\} - \frac{1}{2} V_I \sigma^I_{ij} (\varepsilon^p_{ij} - E^p_{ij}) \quad \text{(II-117)}$$

C'est l'énergie élastique globale d'une inclusion homogène de constantes d'élasticité $\underline{C}^I$, ayant subi une déformation plastique uniforme $\underline{\varepsilon}^p$ et située dans une matrice homogène de constantes d'élasticité $\underline{C}^o$, ayant subi une déformation plastique uniforme $\underline{E}^p$ et chargée à l'infini.

II.3. Conclusion

Nous avons examiné les trois principaux types de problèmes d'inclusions :

- inclusion plastique
- inclusion hétérogène
- inclusion plastique et hétérogène.

Nous avons exploité la technique du tenseur de Green pour transformer les équations aux dérivées partielles de ces problèmes en équations intégrales. Utilisant alors les hypothèses d'uniformité des champs de déformations et contraintes démontrées par Eshelby pour une inclusion ellipsoïdale, nous avons obtenu pour chaque problème les champs de déformation totale $\underline{\varepsilon}^I$, de rotation totale $\underline{\omega}^I$ et de contrainte $\underline{\sigma}^I$ dans l'inclusion. Nous avons également indiqué le calcul de l'énergie élastique.

Outre la définition du tenseur d'Eshelby $\underline{S}$ lié aux déformations et parallèlement celle du tenseur $\underline{A}$ lié aux rotations, nous avons signalé l'importance du tenseur $\underline{T}^I$ qui permet de déduire facilement $\underline{S}$ et $\underline{A}$, nous avons détaillé son calcul en annexes.

Ce chapitre nous a permis de nous familiariser au formalisme des problèmes d'inclusions d'Eshelby-Kröner et va à présent servir de base pour introduire une nouvelle formulation qui doit être considérée comme une extension des problèmes classiques d'inclusions.

Bibliographie du chapitre II

[1] E. Kröner, 1961, Acta. Met, 9, 155.

[2] M. Berveiller et A. Zaoui, 1978, ICOTOM, Aachen.

[3] M. Berveiller et A. Zaoui, 1982, Colloque International du CNRS, N° 139.

[4] E. Kröner, 1966, Dislocations field theory, Sammer School Hrami, Ed. Academia Prague.

[5] J.D. Eshelby, 1957, Proc. Roy. Soc. A, 241, 376.

[6] E. Kröner, 1981, 15ème Colloque du G.F.R.

[7] P.H. Dederichs et Zeller, 1973, Elastic inclusions and inhomogeneities, P.S.S., B55.

[8] M. Berveiller, O. Fassi Fehri et A. Hihi, 1986, Comptes rendus des 5èmes journées nationales sur les composites, (JNC 5), Paris, 237-247.

[9] H. Sabar, M. Buisson et M. Berveiller, 1990, The inhomogeneous and plastic inclusion problem with moving boundary, International Journal of Mechanics (à paraître).

[10] M. Berveiller, 1978, Thèse d'Etat, Université de Paris 13, France.

[11] T. Mura, 1971, J. Appl. Mech., 38.

[12] J.R. Willis, 1970, Phil. Mag., 21.

[13] J.D. Eshelby, 1961, Prog. Sol. Mech., North-Holland.

[14] O. Fassi Fehri, 1986, Thèse d'Etat, Université de Metz, France.

CHAPITRE III

EXTENSION DES PROBLEMES D'INCLUSIONS D'ESHELBY-KRÖNER : LE PROBLEME D'INCLUSION A FRONTIERE MOBILE

III.1. Introduction

III.2. Analyse descriptive du mouvement d'interface

III.3. Synthèse mathématique

III.4. Problèmes d'inclusion à frontière mobile

III.5. Conclusion

III.1. Introduction

Les problèmes d'inclusions plastiques ou (et) inhomogènes présentés dans le chapitre précédent jouent un rôle central dans les méthodes d'homogénéisation du comportement des solides microhétérogènes. Ils sont utilisés notamment dans les méthodes self-consistentes et fournissent des résultats intéressants dans la recherche des propriétés effectives de nombreux matériaux microhétérogènes [1], [2]. Ces résultats sont valables tant que la fraction volumique ou la forme des différents constituants (phase ou zone affectée inélastiquement définissant des grains, etc...) n'évoluent pas au cours de la transformation.

Il existe cependant de nombreuses situations dans lesquelles la microstructure du matériau évolue par l'intermédiaire du mouvement des interfaces séparant les constituants. Par constituant nous entendons ici, les domaines dans lesquels la composition chimique, la cristallographie et la microstructure sont uniformes.

On peut donner une liste de ces différents problèmes :

- formation et propagation des bandes de "Lüders" : dans ce cas, l'interface sépare deux régions dont la composition chimique et la cristallographie sont quasiment identiques mais la matière en arrière de l'interface a subi une déformation plastique
- maclage
- transformation de phase par diffusion et précipitation structurale
- recristallisation primaire et secondaire, et croissance des grains
- transformation martensitique.

Nous analysons un peu plus en détail ces deux derniers exemples.

1er exemple : la recristallisation et la croissance des grains

Selon les traitements mécaniques et thermiques subis par le matériau de départ, on distingue plusieurs évolutions possibles de la structure par recristallisation, à savoir :

. la recristallisation primaire [3] : pour un matériau déformé à froid, il y a d'abord un processus de germination puis de croissance. Les cristaux de recristallisation primaire se développent

au détriment de la matrice déformée, ils sont d'une taille semblable

. la recristallisation secondaire [4] : à l'issue de la recristallisation primaire, certains cristaux ont une tendance à une croissance préférentielle qui peut alors s'effectuer avec une grande vitesse. Le phénomène de recristallisation est étroitement lié au déplacement des joints de grains. La recristallisation secondaire est caractéristique des matériaux ayant été soumis à une forte déformation à froid (texture de laminage par exemple). Elle apparaît également au cours du traitement de recuit ; la figure III-1 montre l'influence de la température de recuit sur la forme des grains.

Les premières études sur le déplacement des joints de grains ont mis en jeu surtout des tests de relaxation. Il a été montré que la nature et l'amplitude des causes à l'origine du déplacement dépendent de nombreux paramètres (structure, chargement,...) et qu'il était nécessaire de compléter la palette des essais expérimentaux. On dispose assez peu de résultats quantitatifs concernant le fluage et très récemment des essais de fatigue à chaud ont été entrepris par Raman *et al.* [5]. Ils ont obtenu dans un aluminium de haute pureté soumis à une flexion cyclique un déplacement important du joint de grain : la figure III-2 montre clairement une correspondance entre l'amplitude des déplacements successifs de la frontière et le nombre de cycles imposés.

2ème exemple : la transformation martensitique

Lors d'un chargement thermomécanique ou sous l'effet d'un vieillissement, l'une des phases se développe au détriment de l'autre par un déplacement de l'interface phase mère-phase produit. Des observations expérimentales successives sur des alliages en transformation martensitique ont été faites par des méthodes cinématographiques, aux rayons X ou au microscope électronique. Elles montrent toutes que la phase produit se développe au sein de la phase mère par le déplacement de l'interface phase mère-phase produit :

- Z.S. Basinski et J.W. Christian [6] ont étudié la transformation martensitique des alliages Indium-Thallium, au moyen de méthodes cinématographiques et aux rayons X. Après un recuit convenable, des monocristaux se transforment par le déplacement d'une interface d'une extrémité à l'autre. La figure III-3 montre l'interface en mouvement.

- E. Patoor et al. [7] ont fait des études par microscopie électronique sur un alliage thermoélastique Cu-Zn-Al en transformation martensitique. Ils ont observé le déplacement de l'interface entre le variant de martensite formé et l'austénite (Fig. III-4). On présente une schématisation expliquant le mouvement de l'interface (Fig. III-5).

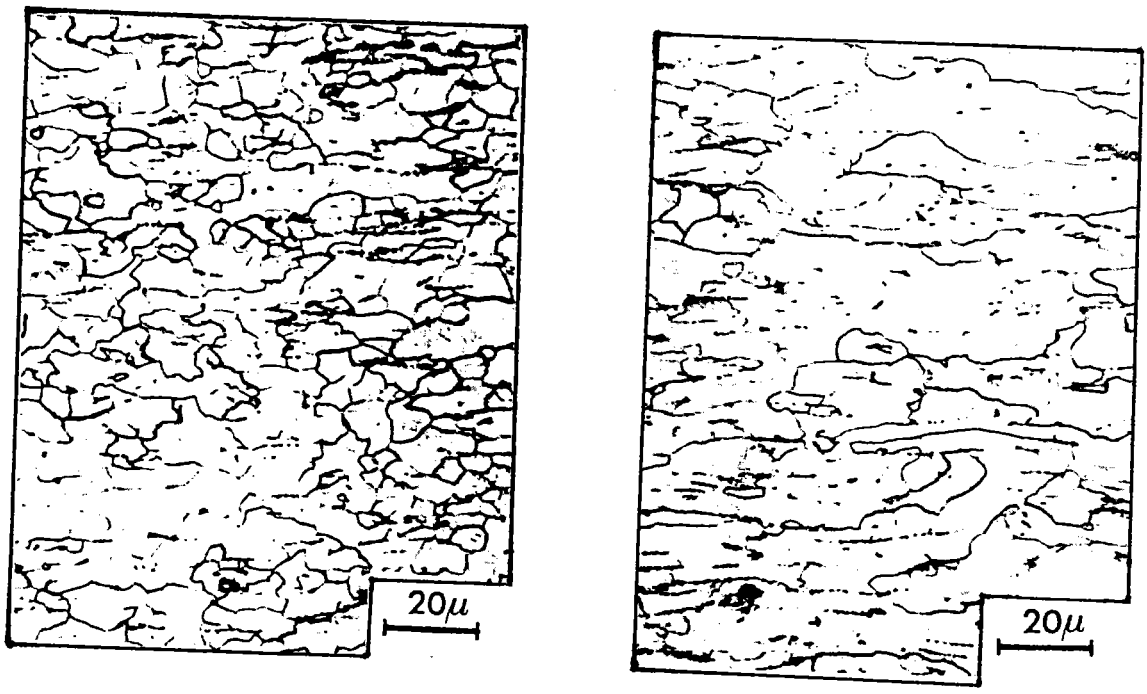


Fig. III-1 : Structure micrographique d'une tôle mince d'acier extra doux calmée à l'aluminium (photos prises dans la direction transverse D.T. Attaque nital).
a : après un recuit à 650°C (30 mn)
b : après un recuit à 525°C (47 h).

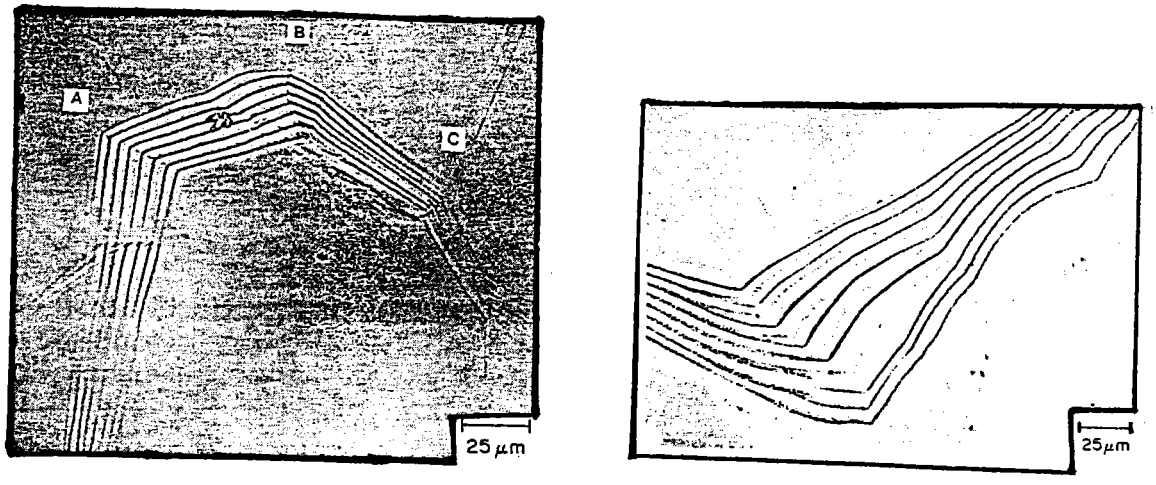


Fig. III-2 : Observation de la migration de la frontière du grain d'un aluminium polycristallin après 8 cycles à la :
. température : 583°K
. déformation : 0.25%
. fréquence : 0.013 HZ.
La position initiale de la frontière du grain est marquée par ABC.

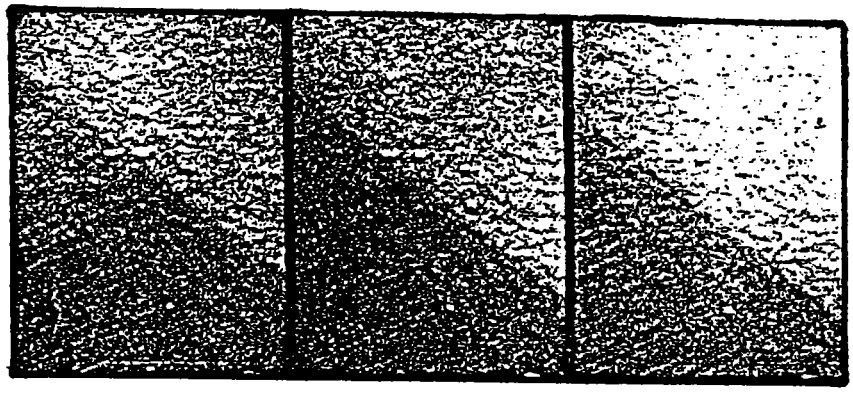


Fig. III-3 : Mouvement de l'interface dans l'alliage indium-thallium au cours d'une transformation martensitique (X70).

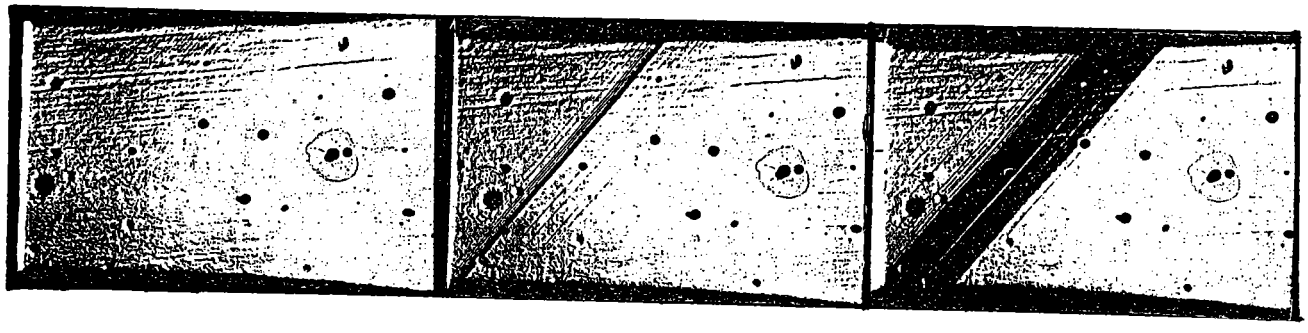


Fig. III-4 : Développement d'un variant de martensite par déplacement de l'interface martensite-austénite au cours d'une transformation martensitique d'un alliage Cu-Zn-Al.

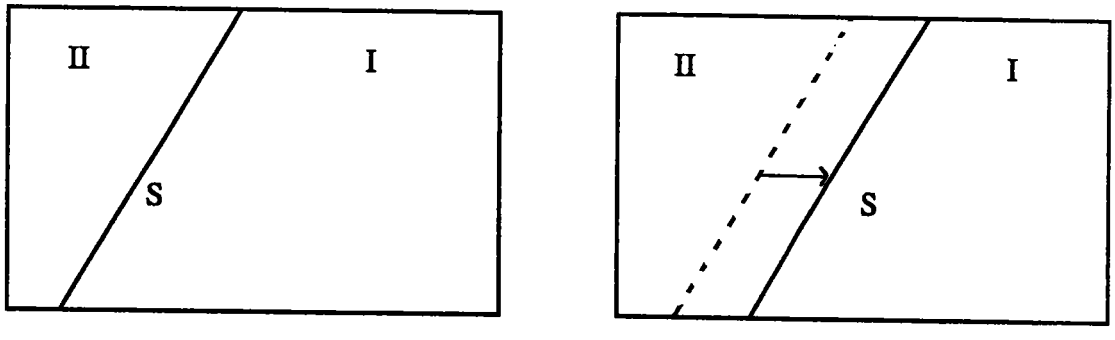


Fig. III-5 : Schématisation du mouvement de l'interface. La phase produit II se développe au détriment de la phase mère I par déplacement de l'interface S.

- Des observations récentes sur le même alliage ont été faites par T. Katata et H. Saka [8] et mettent en évidence le mouvement de la frontière entre les variants de martensite.

On constate par conséquent, dans le cas de la recristallisation ou le cas de la transformation martensitique, que l'évolution de la forme des constituants résulte simultanément du déplacement d'une interface et de la déformation propre des constituants. Les deux exemples décrits sommairement sont fondamentaux et présentent des implications technologiques importantes ; il apparaît dès lors utile de développer des études qui prennent en compte les phénomènes liés au déplacement d'interface.

Un certain nombre de travaux ont déjà été proposés et relèvent plus d'une approche de physique expérimentale. Chang et Read [9] observent dès 1951 le déplacement d'interface au cours d'une transformation martensitique sur un alliage or-cadmium. Basinski et Christian [6] ont décrit également pour d'autres alliages le mouvement d'interface au cours de la même transformation. Les premières études sur la recristallisation signalées par C. Jourdan [10] proposent des modèles simples et descriptifs de la vitesse de déplacement des joints de grains en se basant sur des constatations expérimentales. Mais, conclut Jourdan, ces résultats restent phénoménologiques et nécessitent de pousser plus loin les investigations à l'échelle microscopique.

Le présent travail a pour objectif, par une approche micromécanique, d'incorporer le déplacement d'interface (ou le changement de forme des constituants) dans l'étude du comportement des matériaux hétérogènes. On propose pour cela une généralisation des problèmes d'inclusions précédents (déjà bien adaptés aux milieux hétérogènes) où on inclut explicitement l'évolution de la géométrie de l'inclusion au cours de la transformation par l'intermédiaire du déplacement de l'interface inclusion-matrice. Il s'agit, comme dans le chapitre II, d'accéder aux calculs des champs de contraintes, déformations et rotations.

On élabore un nouveau type de problème d'inclusion pour lequel la méthode adopte, de la même façon que pour les problèmes précédents, une répartition des déformations et rotations plastiques uniformes par domaines ($\underline{\beta}^P$ pour une inclusion ellipsoïdale, $\underline{\beta}^{Po}$ pour la matrice), mais la résolution est plus complexe puisque, d'une part la frontière entre ces domaines peut changer au cours de la transformation et, d'autre part, les valeurs de $\underline{\beta}^P$ et $\underline{\beta}^{Po}$ peuvent évoluer

simultanément. Cette nouvelle formulation se présente comme une extension du problème d'inclusion ; nous l'appelons :

"le problème d'inclusion à frontière mobile".

Outre une bonne connaissance des problèmes d'inclusions d'Eshelby-Kröner (ch. II), cette extension se base sur deux approches complémentaires que l'on détaille ci-après, à savoir :

- d'une part (III.2.), une analyse descriptive, du ressort de la métallurgie physique, où on met en évidence la notion de vitesse propre de la frontière mobile. Cette vitesse propre est reliée par une "loi de comportement" à une force thermodynamique associée. Nous ne détaillons pas cette partie qui est propre à chaque phénomène physique
- d'autre part (III.3.), une synthèse mathématique où on utilise judicieusement la notion de dérivée propre pour décrire de manière globale le problème de l'inclusion à frontière mobile. Cette description suppose connue la "loi de comportement" décrivant le mouvement de l'interface.

III.2. Analyse descriptive du mouvement d'interface

Les métallurgistes concentrent essentiellement leurs efforts sur l'étude de la vitesse de déplacement des joints de grains. Nous ne développerons pas en détail les diverses théories qui visent à construire des "lois de comportement" possibles pour décrire le mouvement de l'interface. Ces théories proposent principalement deux types de relations donnant la vitesse de déplacement de l'interface (notée W) à partir de la force motrice (notée F) de ce déplacement :

a) soit $W = M\,F$

b) soit $W = M\,F^n$ $\quad (n = \text{cste})$

où M représente la mobilité du joint. Elle peut être décomposée en deux termes : une mobilité intrinsèque M_I due aux caractéristiques propres du joint (sa nature, sa courbure,...) et d'une mobilité extrinsèque M_{II} (impuretés, température, ...). M_I et M_{II} sont reliés à la mobilité macroscopique M par la relation :

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{M_I} + \frac{1}{M_{II}}$$

Cette mobilité dépend de la nature du matériau.

La force motrice (appelée quelquefois pression sur le joint) peut être introduite de façon classique par une approche thermodynamique : soit 1 et 2 deux cristaux d'enthalpie libre par unité de volume égale à g_1 et g_2 et de volume V_1 et V_2. Soit S et g l'aire et l'enthalpie libre par unité d'aire du joint. X définit la position du joint (Fig. III-6). L'enthalpie libre du système s'écrit :

$$G = V_1 (X)\, g_1 + V_2 (X)\, g_2 + S\ (X)\, g$$

Si X varie de dX à température et pression constantes, on a :

$$\frac{dG}{dX} = g_1 \frac{dV_1}{dX} + g_2 \frac{dV_2}{dX} + g \frac{dS}{dX}$$

Pour qu'il y ait déplacement du joint il faut que $dG/dX < 0$; si on prend pour la force motrice F, la définition usuelle $F = - dG/dX$ et sachant que $dV_2/dX = - dV_1/dX$, on obtient alors :

$$F = \left(g_2 - g_1\right) \frac{dV_1}{dX} - g \frac{dS}{dX}$$

F est donc formé de deux termes :

$(g_2 - g_1)\, dV_1/dX$ = terme volumique = force volumique = F_V

$- g\, dS/dX$ = terme surfacique = force surfacique = F_S.

Lorsqu'au cours du déplacement l'aire est constante $F_S \approx 0$. $F_V > 0$ si $g_2 > g_1$. Cette diffé - rence entre g_2 et g_1 provient de la différence d'énergie interne emmagasinée. Elle provient des dislocations introduites lors de la déformation. La diminution d'énergie emmagasinée entraîne la croissance du grain le moins déformé vers le plus déformé.

D'une façon générale, on a $F_V \approx 0$ lorsque les grains contiennent une densité de défauts comparable et $F_S > 0$ lorsque l'aire du joint diminue. En pratique ces deux forces agissent simultanément mais elles ne sont ni d'intensité égale ni les seules.

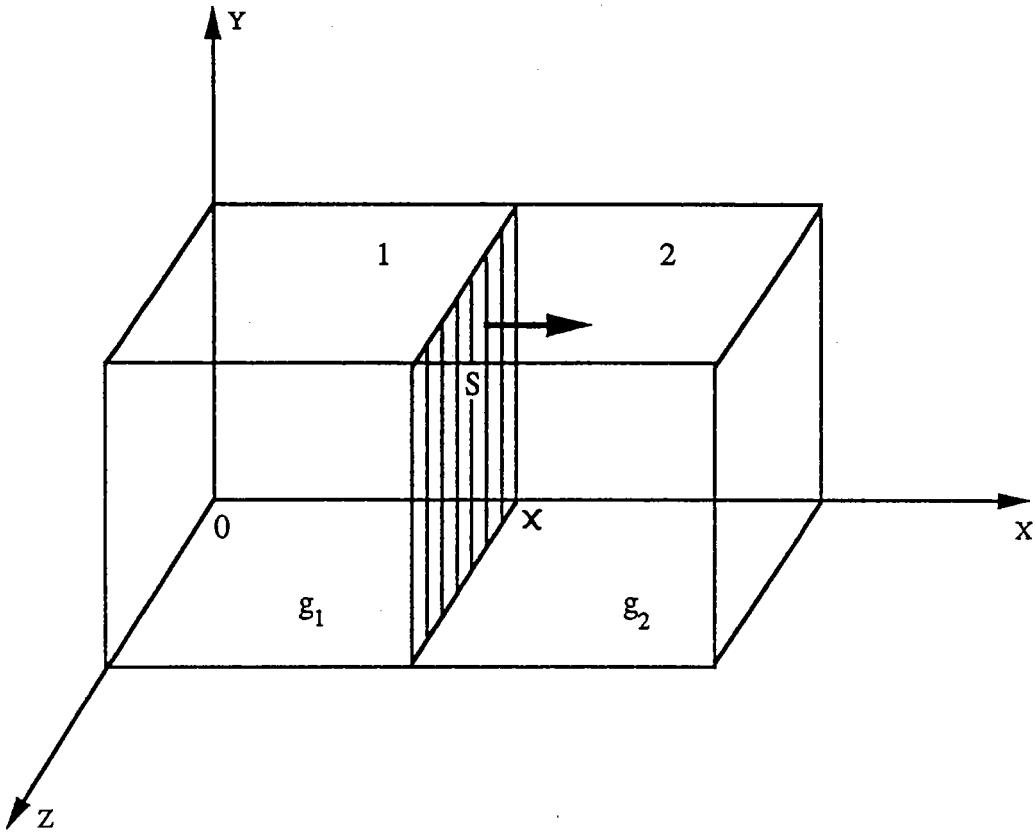


Fig. III-6 : Représentation schématique du déplacement unidirectionnel du joint de grain S limitant les deux cristaux 1 et 2.

Au cours de la recristallisation d'un métal écroui, on peut observer l'action successive de ces deux forces F_V et F_S. Dans un premier temps, les germes des futurs cristaux se forment et ceux qui atteignent une taille critique se développeront dans la matrice de façon isolée les uns des autres : la force motrice est dans ce cas essentiellement de nature volumique (F_V). Dès que ces cristaux entrent en contact les uns avec les autres, on observera un réarrangement de ceux-ci dû à une force motrice, cette fois de nature superficielle (F_S).

Pour de nombreux autres exemples, il apparaît également que la relation (a ou b) est d'une grande importance dans la compréhension et la maîtrise du problème de mouvement des interfaces dans les matériaux hétérogènes. Le lecteur, pour plus de détails, devra se reporter aux articles généraux rassemblés par C. Jourdan [10].

De façon plus générale, on peut remarquer que la loi (a) peut être qualifiée de loi de comportement linéaire tandis que la loi (b) est non linéaire. De là, on peut naturellement envisager des lois de comportement autres qui distingueront des mouvements d'interface réversibles (exemple : réorientation des variantes de martensite par mouvement d'interface entre variantes) ou des mouvements à seuil, réversibles ou irréversibles (exemple : plasticité de transformation, plasticité classique).

Pour le cas de notre approche micromécanique, nous supposons connue la loi de comportement et nous retenons de l'étude microphysique l'aspect géométrique de la vitesse W du déplacement des interfaces. Précisons cette notion de vitesse géométrique :

- par exemple, au cours de la transformation martensitique, le déplacement de l'interface n'est pas accompagné obligatoirement d'une migration significative d'atomes. Le déplacement de chaque atome par rapport à ses voisins est de l'ordre d'une distance interatomique tandis que celui de l'interface (Fig. III-5) est de l'ordre de la taille de l'éprouvette. L'interface est donc munie d'une vitesse propre différente de celle des particules

- de même, dans le cas de la plasticité, l'interface ou le joint de grain est une paroi constituée de dislocations réparties géométriquement de façon à assurer la compatibilité du champ des déformations totales (selon Ashby : dislocations géométriquement nécessaires) [11], [12] (dans le cas de l'inélasticité, on généralise en parlant d'une répartition de quasi-dislocations). Par conséquent, le mouvement de l'interface est lié à celui de ces dislocations et de fait, sera considéré en tant que mouvement géométrique.

En rappelant l'objectif du travail qui consiste à mieux prendre en compte le changement de forme de l'inclusion, simultané à l'évolution du champ des déformations inélastiques, on conclut de cette analyse descriptive que le caractère géométrique du déplacement d'interface est un aspect essentiel du problème. C'est pourquoi, et sans qu'il soit nécessaire (dans l'immédiat) de bien détailler la "loi de comportement" ($W = M F^n$, ou autres), on se propose de construire un modèle dont une particularité essentielle est de faire apparaître dans les calculs cette vitesse géométrique : la théorie de la mécanique des milieux continus [13] nous fournit pour cela un outil mathématique parfaitement adapté.

III.3. Synthèse mathématique

Dans le paragraphe précédent, il apparaît clairement que l'inclusion (et sa frontière) sont déterminées en tant que zones caractérisées par leur déformation plastique (ou inélastique) propre (traduction de eigen plastic strain d'après la terminologie anglaise signalée par MURA et inspirée du terme allemand initial Eigenspannung issu d'une étude microphysique).

Ces zones affectées plastiquement doivent donc être considérées comme des domaines géométriques non attachés aux particules du milieu qu'ils recouvrent.

Dès lors, le problème consiste à suivre l'évolution des contraintes et des déformations totales dans ces domaines en tenant compte de la combinaison possible d'une part, du changement de forme de ces domaines (par un déplacement géométrique de leurs frontières) et d'autre part, de la variation de la déformation plastique propre.

Pour se placer dans un contexte mathématique, il suffit de considérer les contraintes, déformations et rotations comme des grandeurs A inconnues et la frontière des domaines comme une variété géométrique de vitesse propre W.

Le problème posé ci-dessus s'énonce comme suit [13] : "Il s'agit de suivre l'évolution de ces grandeurs A en des points ou sur des variétés ayant un mouvement propre défini par un champ de vitesse W différent du champ de vitesse U des particules du milieu".

On introduit pour cela la notion de dérivée propre. C'est une dérivée par rapport au temps des grandeurs A définies à partir des domaines où l'une de leurs variétés a un mouvement propre (notion mathématique de dérivation par rapport à un champ de vitesse arbitraire [13]).

En d'autres termes, il faut procéder à la dérivation propre de A suivant le champ de vitesse propre W.

On considère un système de coordonnées cartésiennes, dans lequel $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ désigneront les coordonnées euleriennes d'un point M (X,t) du milieu à l'instant t. Les grandeurs A et la vitesse seront écrites en variables d'Euler (X,t) comme : A (X,t) et W (X,t).

On désigne par $\delta/\delta t$ la dérivation par rapport au temps, obtenue lorsqu'on suit un point ou une variété dans le mouvement propre défini par W (X,t).

Mathématiquement, la dérivée propre de A (X,t) suivant le champ de vecteurs vitesses W (X,t) s'écrit, d'après le théorème de la dérivée des fonctions composées [13] :

$$\begin{aligned}\frac{\delta A}{\delta t}(\vec{X},t) &= \frac{\partial A}{\partial t}(\vec{X},t) + (\vec{W}(\vec{X},t).\vec{\text{grad}})\, A(\vec{X},t) \\ &= \frac{\partial A}{\partial t}(\vec{X},t) + \sum_{\alpha=1}^{3} W_\alpha(\vec{X},t)\, A_{,\alpha}(\vec{X},t)\end{aligned} \qquad \text{(III-1)}$$

où $\partial/\partial t$ est la dérivée partielle par rapport au temps t et grad est l'opérateur gradient par rapport à la position X.

La formule (III-1) montre que l'évolution de A (X,t) provient de deux termes :

- le premier terme $\partial A/\partial t$ (X,t) qui représente la dérivée partielle de A (X,t) s'identifie avec la dérivée de A (X,t) lorsque le domaine est fixe dans le temps
- le deuxième terme (W(X,t).grad) A (X,t) qui est un terme dû au mouvement, souvent appelé <u>terme de convection</u>, et qui n'est autre que la dérivée de A (X,t) suivant le vecteur W (X,t) à l'instant t considéré.

La grandeur A (X,t) peut être une fonction à valeurs vectorielles, réelles, tensorielles ; cela ne pose aucune difficulté supplémentaire puisque le repère dans lequel on exprime les coordon-

nées et les composantes est un repère orthonormé indépendant du point M et du temps t.

Lorsque A (X,t) est donnée par une intégrale de volume qui évolue au cours du temps, on peut calculer la dérivée propre de A (X,t) suivant W (X,t) en tenant compte de l'évolution du volume noté : D (t).

Alors, soit à calculer $\delta A/\delta t$ (X,t) avec :

$$A(\vec{X},t) = \iiint_{D(t)} f(\vec{X},\vec{X}',t)\, dV' \qquad \text{(III-2)}$$

où f est une fonction à valeurs scalaires continue dans la fermeture de D(t) et dérivable dans D(t).

<u>Lemme</u> [13] :

Si le champ des vitesses est continu et dérivable, et si la frontière ∂D est lisse par morceaux, la dérivée propre de l'intégrale de volume (III-2) est donnée par l'une des formules :

$$\begin{aligned}
\frac{\delta A}{\delta t}(\vec{X},t) &= \iiint_{D(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(\vec{X},\vec{X}',t)\, dV' + \iint_{\partial D(t)} f(\vec{X},\vec{X}',t)\, \vec{W}(\vec{X}',t).\vec{n}\, dS \\
&= \iiint_{D(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(\vec{X},\vec{X}',t)\, dV' + \iiint_{D(t)} \operatorname{div}\left[f(\vec{X},\vec{X}',t)\, \vec{W}(\vec{X}',t)\right] dV' \qquad \text{(III-3)} \\
&= \iiint_{D(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(\vec{X},\vec{X}',t)\, dV' + \sum_{\alpha=1}^{3} \iiint_{D(t)} \left[f(\vec{X},\vec{X}',t) W_\alpha(\vec{X}',t)\right]_{,\alpha'} dV'
\end{aligned}$$

où n désigne la normale unitaire et extérieure à D(t) et dS est l'élément de surface de ∂D.

Les trois expressions données sont équivalentes. On passe en particulier de la première à la seconde en appliquant le théorème de la divergence. On trouvera les démonstrations plus détaillées et plus rigoureuses en [13].

La deuxième expression est suggestive : l'intégrale de volume $\iiint_{D(t)} \partial f/\partial t\, dV$ exprime la contribution due au fait que f dépend non seulement de X mais aussi de t, c'est le terme que l'on obtiendrait si le domaine D(t) était fixe quand le temps varie. L'intégrale de surface $\iint_{\partial D(t)} f\, W.n\, dS$ exprime la contribution due au mouvement de la frontière de D(t) ; seule la composante normale de W sur D(t) intervient dans le calcul de ce terme souvent qualifié de terme de convection (Fig. III-7).

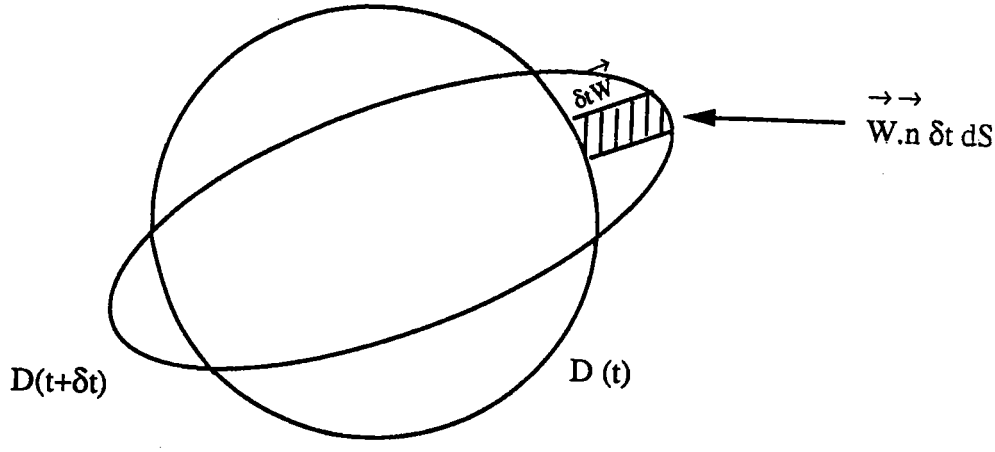


Fig. III-7 : Interprétation géométrique du terme de convection dans la dérivée propre.

Le résultat s'étend au cas de l'intégrale d'une fonction à valeurs vectorielles ou tensorielles.

* Notons bien que la dérivée particulaire habituellement utilisée s'écrit :

$$\frac{d(\,)}{dt} = \frac{\partial(\,)}{\partial t} + \vec{U}.\,\vec{\text{grad}}\,(\,),$$

où U désigne la vitesse des particules. Il est clair qu'elle est différente de la dérivée propre :

$$\frac{\delta(\,)}{\delta t} = \frac{\partial(\,)}{\partial t} + \vec{W}.\,\vec{\text{grad}}\,(\,).$$

L'originalité de notre travail intervient ici clairement par le fait que nous utilisons la dérivation propre.
La synthèse mathématique ainsi exposé répond bien à l'objectif fixé au cours de l'analyse microphysique (III.2.) à savoir : faire apparaître explicitement la vitesse W et ce, de façon simultanée aux évolutions des champs des déformations plastiques.

Même si, rappelons-le, nous ne maîtrisons pas dans l'immédiat la loi de comportement de l'interface, il apparaît maintenant possible de reprendre les problèmes classiques d'inclusions vus au chapitre II et de les généraliser par cette synthèse au cas des problèmes d'inclusions à frontière mobile.

III.4. Problèmes d'inclusion à frontière mobile

Les formules générales (III-1), (III-3) de dérivée propre seront appliquées aux problèmes d'inclusions (ch. II) en prenant comme mouvement propre celui de la frontière inclusion-matrice. Toutes les formules du chapitre II seront examinées cette fois en tant que grandeurs dépendant du temps et de la position.
Nous procéderons systématiquement à leur dérivation propre afin de déduire l'évolution des champs mécaniques. On présente ainsi les équations du problème d'inclusion à frontière mobile et ce en tant qu'extension du problème d'inclusion (ch. II).

Pour cela, reprenons le cas général du problème de l'inclusion plastique et hétérogène. L'équation intégrale est donnée pour le gradient de déplacement suivant (II-88) :

$$u_{i,j}(\vec{r}) = U^o_{i,j} + \iiint_{V'_I} G_{ik,jl}(\vec{r}-\vec{r'}) \left\{ \Delta C_{klmn}\varepsilon_{mn}(\vec{r'}) + C^o_{klmn}E^p_{mn} - C^I_{klmn}\varepsilon^p_{mn} \right\} dV' \quad \text{(III-4)}$$

Cette équation est valable à chaque instant t et on écrit de façon explicite :

$$u_{i,j}(\vec{r},t) = U^o_{i,j}(t) + \iiint_{V'_I(t)} G_{ik,jl}(\vec{r}-\vec{r'},t) \left\{ \Delta C_{klmn}(t)\varepsilon_{mn}(\vec{r'},t) + C^o_{klmn}(t)E^p_{mn}(t) - C^I_{klmn}(t)\varepsilon^p_{mn}(t) \right\} dV' \quad \text{(III-5)}$$

Cette écriture générale en fonction du temps prend en compte les grandeurs qui évoluent, à savoir :

a) les déformations plastiques $\underline{\varepsilon}^p(t)$ (inclusion) et $\underline{E}^p(t)$ (matrice) : fonctions qui représentent l'évolution au cours du temps de la transformation inélastique
b) le volume de l'inclusion $V_I(t)$ qui représente le changement de forme de l'inclusion au cours du temps
c) les constantes d'élasticité $\underline{C}^I(t)$ (inclusion) et $\underline{C}^o(t)$ (matrice) : que l'on peut également considérer, pour être général, comme des fonctions du temps (certaines transformations de phases, traitements thermiques, ...).

On désire à présent suivre l'évolution de $u_{i,j}$ en tenant compte simultanément de a), b) et c). Pour cela il faut considérer dans l'équation (III-5) le domaine d'intégration $V_I(t)$ comme le volume des particules $V_{Ip}(t)$ constituant l'inclusion en coïncidence à l'instant t avec le volume géométrique $V_{IG}(t)$ de la zone plastifiée. A un instant ultérieur $t + \Delta t$, les deux volumes $V_{Ip}(t)$ et $V_{IG}(t)$ auront varié de deux façons qu'il convient de distinguer : $V_{Ip}(t)$ est changé en $V_{Ip}(t) + dV_{Ip}(t)$ engendré par le déplacement $du/dt\ \Delta t$ des particules tandis que V_{IG} devient $V_{IG} + \delta V_{IG}$ ce qui traduit une extension géométrique de la zone plastifiée $\underline{\varepsilon}^p$ au détriment de $\underline{E}^p$. Le suivi de cette zone est assuré par l'évolution de la grandeur $\underline{\varepsilon}^p$ en des points ayant un mouvement propre défini par le champ de vitesse $\underline{W}$ différent de celui du/dt des particules. Mathématiquement cela revient bien à utiliser la dérivation $\delta/\delta t$ par rapport au temps lorsque la frontière $\partial V_I(t)$ du domaine d'intégration $V_I(t)$ s'anime d'un mouvement propre W (Figure III-8).

Topologie du problème d'inclusion à frontière mobile

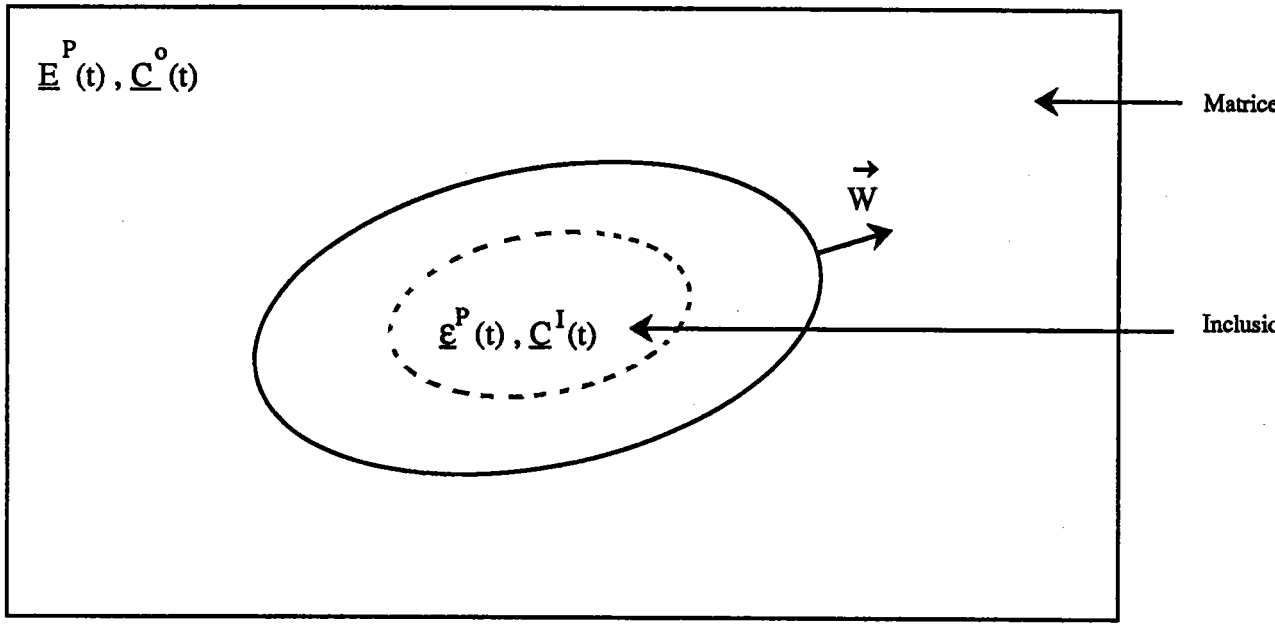


Fig. III-8 : Déplacement à la vitesse W de la frontière inclusion-matrice traduisant une extension de la zone plastique.

La dérivation propre de $u_{i,j}$ donnée par (III-5) s'écrit donc à l'aide de (III-3) :

$$\frac{\delta u_{i,j}}{\delta t}(\vec{r},t) = \frac{\delta U^{o}_{i,j}}{\delta t}(t) + \iiint_{V_I(t)} \frac{\partial}{\partial t}\left[G_{ki,jl}(\vec{r}-\vec{r}',t)\ \left\{\Delta C_{klmn}(t)\varepsilon_{mn}(\vec{r}',t)+C^{o}_{klmn}(t)E^{p}_{mn}(t)-C^{I}_{klmn}(t)\varepsilon^{p}_{mn}(t)\right\}\right] dV'$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{3}\iiint_{V_I(t)}\left[G_{ki,jl}(\vec{r}-\vec{r}',t)\ \left\{\Delta C_{klmn}(t)\varepsilon_{mn}(\vec{r}',t)+C^{o}_{klmn}(t)E^{p}_{mn}(t)-C^{I}_{klmn}(t)\varepsilon^{p}_{mn}(t)\right\}W_{\alpha}(\vec{r}',t)\right]_{,\alpha'} dV'$$

ou encore :

$$\frac{\delta u_{i,j}}{\delta t}(\vec{r},t) = \frac{\delta U^{o}_{i,j}}{\delta t}(t) + \iiint_{V_I(t)} \frac{\partial}{\partial t}\left[G_{ki,jl}(\vec{r}-\vec{r}',t)\right]\left\{\Delta C_{klmn}(t)\varepsilon_{mn}(\vec{r}',t)+C^{o}_{klmn}(t)E^{p}_{mn}(t)-C^{I}_{klmn}(t)\varepsilon^{p}_{mn}(t)\right\} dV'$$

$$+\iiint_{V_I(t)} G_{ki,jl}(\vec{r}-\vec{r}',t)\frac{\partial}{\partial t}\ \left\{\Delta C_{klmn}(t)\varepsilon_{mn}(\vec{r}',t) + C^{o}_{klmn}(t)E^{p}_{mn}(t) - C^{I}_{klmn}(t)\varepsilon^{p}_{mn}(t)\right\} dV'$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{3}\iiint_{V_I(t)} G_{ki,jl\alpha'}(\vec{r}-\vec{r},t)\{\Delta C_{klmn}(t)\varepsilon_{mn}(\vec{r}',t)+C^{o}_{klmn}(t)E^{p}_{mn}(t)-C^{I}_{klmn}(t)\varepsilon^{p}_{mn}(t)\}W_{\alpha}(\vec{r}',t)dV'$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{3}\iiint_{V_I(t)} G_{ki,jl}\ (\vec{r}-\vec{r}',t)\ \left\{\Delta C_{klmn}(t)\varepsilon_{mn}(\vec{r}',t)+C^{o}_{klmn}(t)E^{p}_{mn}(t)-C^{I}_{klmn}(t)\varepsilon^{p}_{mn}(t)\right\}_{,\alpha'} W_{\alpha}(\vec{r}',t)dV'$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{3}\iiint_{V_I(t)} G_{ki,jl}\ (\vec{r}-\vec{r}',t)\ \left\{\Delta C_{klmn}(t)\varepsilon_{mn}(\vec{r}',t)+C^{o}_{klmn}(t)E^{p}_{mn}(t)-C^{I}_{klmn}(t)\varepsilon^{p}_{mn}(t)\right\}W_{\alpha,\alpha'}(\vec{r}',t)dV' \qquad \text{(III-6)}$$

(Le tenseur de Green $\underline{G}$ dépend du temps par l'intermédiaire de $\underline{C}^{o}(t)$).

Cette équation intégrale fondamentale fait apparaître plusieurs termes qu'il convient de commenter :

- le terme $\delta U^{o}_{i,j}/\delta t$ représente l'évolution au cours du temps du gradient de déplacement total à l'infini ; il est lié aux conditions extérieures de chargement

- le terme

$$\iiint_{V_I(t)} \frac{\partial}{\partial t}\left[G_{ki,jl}(\vec{r}-\vec{r}',t)\left\{\Delta C_{klmn}(t)\varepsilon_{mn}(\vec{r}',t) + C^{o}_{klmn}(t)E^{p}_{mn}(t) - C^{I}_{klmn}(t)\varepsilon^{p}_{mn}(t)\right\}\right] dV'$$

exprime le fait que $\underline{G}$, $\underline{\varepsilon}$, $\underline{\varepsilon}^p$, $\underline{C}^I$ et $\underline{C}^o$ dépendent du temps t et représentent la dérivée partielle du gradient de déplacement total $u_{i,j}$ qui serait obtenue de façon classique pour un volume d'inclusion V_I invariable (ce qui est traité dans le cadre des problèmes d'inclusions classiques (ch. II) où la géométrie de l'inclusion ne change pas au cours du temps)

- le terme

$$\sum_{\alpha=1}^{3}\iiint_{V_I(t)}\left[G_{ki,jl}(\vec{r}-\vec{r}',t)\ \left\{\Delta C_{klmn}(t)\varepsilon_{mn}(\vec{r}',t)+C^{o}_{klmn}(t)E^{p}_{mn}(t)-C^{I}_{klmn}(t)\varepsilon^{p}_{mn}(t)\right\} W_{\alpha}(\vec{r}',t)\right]_{,\alpha'} dV'$$

exprime la contribution due au mouvement de la frontière de $V_I(t)$, souvent appelé terme de convection (et qui n'est autre que la dérivée par rapport au temps de $u_{i,j}$ suivant le vecteur vitesse W).

Remarque :

Il est facile de généraliser (III-6) au cas où les termes $\underline{C}^I(t)$ et $\underline{\varepsilon}^p(t)$ dépendent de la position r' (grandeurs non homogènes), il suffit de les remplacer dans (III-6) respectivement par $\underline{C}^I(r',t)$ et $\underline{\varepsilon}^p(r',t)$.

En général, la résolution de l'équation intégrale (III-6) est très complexe et se heurte à de nombreuses difficultés et ce n'est qu'avec des hypothèses simplificatrices que l'on arrive à obtenir des résultats pratiques. La solution exacte de cette équation nécessite des méthodes numériques très performantes.

Dans la suite, nous allons faire les deux hypothèses simplificatrices :

H_1 : L'inclusion est ellipsoïdale et les champs des déformations plastiques et les constantes d'élasticité sont supposés uniformes dans chaque domaine ($\underline{E}^p(t)$ et $\underline{C}^o(t)$) dans la matrice, $\underline{\varepsilon}^p(t)$ et $\underline{C}^I(t)$ dans l'inclusion).

Alors, d'après Eshelby la déformation totale est uniforme dans l'inclusion $\underline{\varepsilon}^I(t)$.

H_2 : La première et la seconde intégrales de la deuxième égalité de l'équation (III-6) dépendent du temps par les fonctions $\underline{C}^o(t)$, $\underline{C}^I(t)$, $\underline{\varepsilon}(r,t)$ et $\underline{\varepsilon}^p(t)$. La dérivée partielle par rapport au temps du terme $[G_{ki,jl}(r-r',t)\{\Delta C_{klmn}(t)\varepsilon(r',t) + C^o_{klmn}(t)E^p_{mn}(t) - C^I_{klmn}(t)\varepsilon^p_{mn}(t)\}$ est très difficile à effectuer. Le tenseur de Green $\underline{G}$ qui dépend du temps par l'intermédiaire de $\underline{C}^o(t)$ n'est pas connu explicitement dans le cas où $\underline{C}^o$ est anisotrope, et par conséquent, la dérivée partielle par rapport au temps de $\underline{G}$ est très difficile à expliciter ; l'intégrale sur $\partial\underline{G}/\partial t$ sera lourde.

Pour revenir au problème de base, nous considérons par la suite que les constantes d'élasticité $\underline{C}^o$ et $\underline{C}^I$ n'évoluent pas au cours du temps. On a immédiatement $\partial\underline{G}/\partial t = 0$.

Cette hypothèse est cohérente avec la transformation martensitique et d'autres phénomènes métallurgiques (recristallisation...).

En tenant compte alors de ces hypothèses (H_1 et H_2) l'équation (III-6) devient en isolant les termes uniformes hors de la sommation :

$$\frac{\delta u_{i,j}}{\delta t}(\vec{r},t) = \frac{\delta U^o_{i,j}(t)}{\delta t} + \iiint_{V_I(t)} G_{ki,jl}(\vec{r}-\vec{r}')\, dV' \left[\Delta C_{klmn}\frac{\partial \varepsilon^I_{mn}(t)}{\partial t} + C^o_{klmn}\frac{\partial E^p_{mn}(t)}{\partial t} - C^o_{klmn}\frac{\partial \varepsilon^p_{mn}(t)}{\partial t}\right]$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{3}\iiint_{V_I(t)} G_{ki,jl\alpha'}(\vec{r}-\vec{r}')W_\alpha(\vec{r}',t)dV' \left[\Delta C_{klmn}\varepsilon^I_{mn}(t) + C^o_{klmn}E^p_{mn}(t) - C^I_{klmn}\varepsilon^p_{mn}(t)\right] \qquad \text{(III-7)}$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{3}\iiint_{V_I(t)} G_{ki,jl}(\vec{r}-\vec{r}')W_{\alpha,\alpha'}(\vec{r}',t)dV' \left[\Delta C_{klmn}\varepsilon^I_{mn}(t) + C^o_{klmn}E^p_{mn}(t) - C^I_{klmn}\varepsilon^p_{mn}(t)\right]$$

A l'aide de (III-3), il est utile d'indiquer la dérivation suivante :

$$\frac{\delta}{\delta t}\iiint_{V_I(t)} G_{ki,jl}(\vec{r}-\vec{r}')dV' = \sum_{\alpha=1}^{3}\iiint_{V_I(t)}\left[G_{ki,jl\alpha'}(\vec{r}-\vec{r}')W_\alpha(\vec{r}',t) + G_{ki,jl}(\vec{r}-\vec{r}')W_{\alpha,\alpha'}(\vec{r}',t)\right]dV' \qquad \text{(III-8)}$$

Par conséquent, l'équation (III-7) peut être réduite sous la forme suivante :

$$\frac{\delta u_{i,j}}{\delta t}(\vec{r},t) = \frac{\delta U^o_{i,j}}{\delta t}(t) + \iiint_{V_I(t)} G_{ki,jl}(\vec{r}-\vec{r}')dV'\left[\Delta C_{klmn}\frac{\partial \varepsilon^I_{mn}(t)}{\partial t} + C^o_{klmn}\frac{\partial E^p_{mn}(t)}{\partial t} - C^I_{klmn}\frac{\partial \varepsilon^p_{mn}(t)}{\partial t}\right]$$

$$+ \frac{\delta}{\delta t}\left\{\iiint_{V_I(t)} G_{ki,jl}(\vec{r}-\vec{r}')dV'\right\}\left[\Delta C_{klmn}\varepsilon^I_{mn}(t) + C^o_{klmn}E^p_{mn}(t) - C^I_{klmn}\varepsilon^p_{mn}(t)\right] \qquad \text{(III-9)}$$

Le deuxième terme du second membre de cette équation fait apparaître le tenseur $\underline{T}$ défini

précédemment (II-44) par :

$$T_{ijkl}(\vec{r},t) = -\iiint_{V_I(t)} G_{ki,jl}(\vec{r}-\vec{r}')\, dV' \quad . \qquad \text{(III-10)}$$

Le troisième terme de l'équation (III-9) fait apparaître la dérivée propre de l'intégrale (III-10) notée $\delta\underline{T}/\delta t$ et donnée par :

$$\frac{\delta T_{ijkl}}{\delta t}(\vec{r},t) = -\frac{\delta}{\delta t}\iiint_{V_I(t)} G_{ki,jl}(\vec{r}-\vec{r}')\, dV' \qquad \text{(III-11)}$$

Soit en utilisant (III-8) :

$$\frac{\delta T_{ijkl}}{\delta t}(\vec{r},t) = -\sum_{\alpha=1}^{3}\iiint_{V_I(t)}\left[G_{ki,jl\alpha'}(\vec{r}-\vec{r}')\, W_{\alpha}(\vec{r}',t) + G_{ki,jl}(\vec{r}-\vec{r}')\, W_{\alpha,\alpha'}(\vec{r}',t)\right] dV' \qquad \text{(III-12)}$$

A partir de (III-9), la dérivée propre du gradient de déplacement total s'écrit finalement, compte tenu des relations (III-10) et (III-11) comme suit :

$$\frac{\delta u_{i,j}}{\delta t}(\vec{r},t) = \frac{\delta U^{o}_{i,j}}{\delta t}(t) + T_{ijkl}(\vec{r},t)\left\{C^{I}_{klmn}\frac{\partial \varepsilon^{p}_{mn}}{\partial t}(t) - C^{o}_{klmn}\frac{\partial E^{p}_{mn}}{\partial t}(t) - \Delta C_{klmn}\frac{\partial \varepsilon^{I}_{mn}}{\partial t}(t)\right\}$$

$$+ \frac{\delta T_{ijkl}}{\delta t}(\vec{r},t)\left\{C^{I}_{klmn}\varepsilon^{p}_{mn}(t) - C^{o}_{klmn}E^{p}_{mn}(t) - \Delta C_{klmn}\varepsilon^{I}_{mn}(t)\right\} \qquad \text{(III-13)}$$

C'est une équation fondamentale et générale qui gère la solution du problème de l'inclusion plastique et hétérogène à frontière mobile.

Par l'intermédiaire de (III-13), cette équation remplit les objectifs que nous nous sommes fixés en faisant apparaître explicitement et simultanément :

. les variations des déformations plastiques $\underline{\varepsilon}^{p}(t)$ et $\underline{E}^{p}(t)$,

. la vitesse W traduisant le changement de forme de l'inclusion,

. la variation des champs cinématiques à l'infini $U_{i,j}^{o}(t)$.

Ce résultat est donc une étape fondamentale et il faut de plus noter qu'il se présente très pratique-

Ce résultat est donc une étape fondamentale et il faut de plus noter qu'il se présente très pratiquement sous la forme de deux termes (à part le terme $\delta U^o_{i,j}/\delta t$ dans (III-13)) :

- le premier terme ($\underline{T}$ {$\underline{C}^I\, \partial\underline{\varepsilon}^p/\partial t - \underline{C}^o\, \partial\underline{E}^p/\partial t - \Delta\, \underline{C}\, \partial\underline{\varepsilon}^I/\partial t$ }) est classique et tient compte de l'évolution de $\underline{\varepsilon}^p(t)$ et $\underline{E}^p(t)$. On y retrouve le tenseur $\underline{T}$ qui intervient dans les formules d'Eshelby-Kröner des problèmes d'inclusions (voir ch. II). Il est calculé à chaque instant par les techniques habituelles dans le cas général d'une inclusion ellipsoïdale de forme quelconque et pour des anisotropies quelconques de la matrice (voir ch. IV et annexes) ;

- le deuxième terme ($\delta\underline{T}/\delta t$ { $\underline{C}^I\, \underline{\varepsilon}^p - \underline{C}^o\, \underline{E}^p - \Delta\underline{C}\, \underline{\varepsilon}^I$ }) est nouveau et provient de l'évolution de la géométrie de l'inclusion par l'intermédiaire de la dérivation propre $\delta\underline{T}/\delta t$. Il est remarquable ici de constater que l'aspect "frontière mobile" est concentré de façon pratique dans le tenseur $\delta\underline{T}/\delta t$. Le calcul explicite de ce tenseur fait l'objet du chapitre IV dans le cas général d'une inclusion ellipsoïdale dans un milieu anisotrope.

Ainsi, à part le calcul des tenseurs $\underline{T}$ et $\delta\underline{T}/\delta t$, la résolution du problème de l'inclusion à frontière mobile se ramène à des opérations d'algèbre tensorielle courantes et on peut calculer à partir de l'équation de base (III-13), les évolutions des différents champs de déformations, rotations, contraintes et de l'énergie élastique dans l'inclusion.

<u>Détermination des taux de déformations et rotations totales</u>

Notons d'abord par $T_{\{ij\}kl}$ et $T_{\}ij\{kl}$ respectivement la partie symétrique et antisymétrique du tenseur T_{ijkl}.
La partie symétrique de $\delta u_{i,j}/\delta t$ dans l'équation (III-13) donne le taux de déformation totale :

$$\frac{\delta\varepsilon_{ij}}{\delta t}(\vec{r},t) = \frac{\delta E^T_{ij}(t)}{\delta t} + T_{\{ij\}kl}(\vec{r},t)\left[C^I_{klmn}\frac{\partial\varepsilon^p_{mn}(t)}{\partial t} - C^o_{klmn}\frac{\partial E^p_{mn}(t)}{\partial t} - \Delta C_{klmn}\frac{\partial\varepsilon^I_{mn}(t)}{\partial t}\right]$$

$$+\frac{\delta T_{\{ij\}kl}}{\delta t}(\vec{r},t)\left[C^I_{klmn}\varepsilon^p_{mn}(t) - C^o_{klmn}E^p_{mn}(t) - \Delta C_{klmn}\varepsilon^I_{mn}(t)\right] \qquad \text{(III-14)}$$

et la partie antisymétrique donne le taux de rotation totale :

$$\frac{\delta\omega_{ij}}{\delta t}(\vec{r},t) = \frac{\delta\Omega^{T}_{ij}(t)}{\delta t} + T_{)ij\{kl}(\vec{r},t)\left[C^{I}_{klmn}\frac{\partial\varepsilon^{p}_{mn}(t)}{\partial t} - C^{o}_{klmn}\frac{\partial E^{p}_{mn}(t)}{\partial t} - \Delta C_{klmn}\frac{\partial\varepsilon^{I}_{mn}(t)}{\partial t}\right]$$

$$+\frac{\delta T_{)ij\{kl}}{\delta t}(\vec{r},t)\left[C^{I}_{klmn}\varepsilon^{p}_{mn}(t) - C^{o}_{klmn}E^{p}_{mn}(t) - \Delta C_{klmn}\varepsilon^{I}_{mn}(t)\right] \qquad \text{(III-15)}$$

Le taux des contraintes s'obtient en effectuant la dérivée propre de la loi de Hooke (II-12) :

$$\frac{\delta\underline{\sigma}}{\delta t}(\vec{r},t) = \frac{\delta}{\delta t}\left[\underline{C}(\vec{r})\left\{\underline{\varepsilon}(\vec{r},t) - \underline{\varepsilon}^{p}(\vec{r},t)\right\}\right] \qquad \text{(III-16)}$$

En général, ces champs calculés ne sont pas uniformes et dépendent de la position r dans le milieu infini (inclusion ou matrice) par l'intermédiaire des tenseurs $\underline{T}$ et $\delta\underline{T}/\delta t$. De la même façon que dans le chapitre II, nous calculons ce champ de contraintes dans une inclusion ellipsoïdale $V_I(t)$. Ceci nous amène à déterminer les tenseurs $\underline{T}$ et $\delta\underline{T}/\delta t$ dans $V_I(t)$.

. Eshelby a montré que le tenseur $\underline{T}$ est uniforme dans l'inclusion ellipsoïdale et ne dépend que des constantes d'élasticité $\underline{C}^o$ et de la géométrie de l'inclusion.

. Nous montrons également que le nouveau tenseur $\delta\underline{T}/\delta t$ est uniforme dans une inclusion ellipsoïdale (voir chapitre IV et annexes) et ne dépend que des constantes d'élasticité $\underline{C}^o$ et de la géométrie de l'inclusion.

On note alors pour ces deux tenseurs :

$$\forall\,\vec{r}\in V_I(t) : \quad \begin{cases} \underline{T}(\vec{r},t) = \underline{T}^{I}(t) \\ \dfrac{\delta\underline{T}}{\delta t}(\vec{r},t) = \dfrac{\delta\underline{T}^{I}}{\delta t}(t) \end{cases} \qquad \text{(III-17)}$$

En tenant compte des équations (III-14), (III-15) et (III-16), les champs des taux de déformations, rotations et de contraintes sont uniformes dans $V_I(t)$ et seront notés respectivement $\delta\underline{\varepsilon}^{I}/\delta t\,(t)$, $\delta\underline{\omega}^{I}/\delta t\,(t)$ et $\delta\underline{\sigma}^{I}/\delta t\,(t)$.

Dans ce cas, ces équations deviennent pour l'inclusion $V_I(t)$

$$\frac{\delta\varepsilon^I_{ij}}{\delta t}(t) = \frac{\delta E^T_{ij}}{\delta t}(t) + T^I_{\{ij\}kl}(t)\left[C^I_{klmn}\frac{\partial\varepsilon^p_{mn}(t)}{\partial t} - C^o_{klmn}\frac{\partial E^p_{mn}(t)}{\partial t} - \Delta C_{klmn}\frac{\partial\varepsilon^I_{mn}(t)}{\partial t}\right]$$

$$+\frac{\delta T^I_{\{ij\}kl}(t)}{\delta t}\left[C^I_{klmn}\varepsilon^p_{mn}(t) - C^o_{klmn}E^p_{mn}(t) - \Delta C_{klmn}\varepsilon^I_{mn}(t)\right] \qquad \text{(III-18)}$$

$$\frac{\delta\omega^I_{ij}}{\delta t}(t) = \frac{\delta\Omega^T_{ij}}{\delta t}(t) + T^I_{\}ij\{kl}(t)\left[C^I_{klmn}\frac{\partial\varepsilon^p_{mn}(t)}{\partial t} - C^o_{klmn}\frac{\partial E^p_{mn}(t)}{\partial t} - \Delta C_{klmn}\frac{\partial\varepsilon^I_{mn}(t)}{\partial t}\right]$$

$$+\frac{\delta T^I_{\}ij\{kl}(t)}{\delta t}\left[C^I_{klmn}\varepsilon^p_{mn}(t) - C^o_{klmn}E^p_{mn}(t) - \Delta C_{klmn}\varepsilon^I_{mn}(t)\right] \qquad \text{(III-19)}$$

et

$$\frac{\delta\sigma^I_{ij}}{\delta t}(t) = C^I_{ijkl}\left[\frac{\delta\varepsilon^I_{kl}}{\delta t}(t) - \frac{\partial\varepsilon^p_{kl}}{\partial t}(t)\right]. \qquad \text{(III-20)}$$

Dans la suite, pour condenser l'écriture, on supprime la variable t et les indices des tenseurs correspondants :

notation indicielle : $A_{ij}(t) \rightarrow$ notation tensorielle condensée $\underline{A}$.

Pour calculer le taux des contraintes internes, on tire d'abord $\delta\underline{\varepsilon}^I/\delta t$ à partir de (III-18) et on trouve en le substituant dans (III-20) :

$$\frac{\delta\underline{\sigma}^I}{\delta t} = \underline{C}^I\left[\left\{\frac{\delta\underline{E}^T}{\delta t} + \underline{T}^I\left(\underline{C}^I\frac{\partial\underline{\varepsilon}^p}{\partial t} - \underline{C}^o\frac{\partial\underline{E}^p}{\partial t}\right) + \frac{\delta\underline{T}^I}{\delta t}\left(\underline{C}^I\underline{\varepsilon}^p - \underline{C}^o\underline{E}^p - \Delta\underline{C}\,\underline{\varepsilon}^I\right)\right\} \times\right.$$

$$\left.\left\{\underline{I} + \underline{T}^I\Delta\underline{C}\right\}^{-1} - \frac{\partial\underline{\varepsilon}^p}{\partial t}\right] \qquad \text{(III-21)}$$

où $\underline{I}$ est le tenseur unité d'ordre 4.

La solution proposée ici du problème d'inclusion plastique et hétérogène à frontière mobile est générale et contient évidemment les cas particuliers d'inclusion plastique à frontière mobile et d'inclusion hétérogène à frontière mobile, il suffit de prendre suivant les cas cités :

1° <u>problème d'inclusion hétérogène à frontière mobile</u> : $\underline{\varepsilon}^p = \underline{E}^p = 0$

On trouve à partir des équations précédentes :

le champ des taux de déformation totale :

$$\frac{\delta \underline{\varepsilon}^I}{\delta t} = \frac{\delta \underline{E}^e}{\delta t} - \underline{T}^s \Delta \underline{C} \frac{\partial \underline{\varepsilon}^I}{\partial t} - \frac{\delta \underline{T}^s}{\delta t} \Delta \underline{C}\, \underline{\varepsilon}^I \qquad \text{(III-22)}$$

le champ des taux de rotation totale :

$$\frac{\delta \underline{\omega}^I}{\delta t} = \frac{\delta \underline{\Omega}^e}{\delta t} - \underline{T}^a \Delta \underline{C} \frac{\partial \underline{\varepsilon}^I}{\partial t} - \frac{\delta \underline{T}^a}{\delta t} \Delta \underline{C}\, \underline{\varepsilon}^I \qquad \text{(III-23)}$$

où $\underline{T}^s$ et $\underline{T}^a$ sont respectivement la partie symétrique et antisymétrique de $\underline{T}^I$.

le champ des taux de contraintes internes :

$$\frac{\delta \underline{\sigma}^I}{\delta t} = \underline{C}^I \left[\frac{\delta \underline{E}^e}{\delta t} - \frac{\delta \underline{T}^I}{\delta t} \Delta \underline{C}\, \underline{\varepsilon}^I \right] \left[\underline{I} + \underline{T}^I \Delta \underline{C} \right]^{-1} \qquad \text{(III-24)}$$

<u>N.B.</u> : Le fait d'étudier uniquement le cas de l'élasticité hétérogène peut paraître contradictoire avec la notion d'extension de zone plastique (III.4.). Ici la zone doit être considérée comme zone définie par le mouvement des domaines élastiques.

2° <u>problème d'inclusion plastique à frontière mobile</u> : $\underline{C}^I = \underline{C}^o = \underline{C}$.

Dans le cas où l'élasticité est homogène, les formules précédentes (III-18), (III-19) et (III-21) sont beaucoup plus simples (sans avoir à inverser le tenseur $[\underline{I} + \underline{T}^I \Delta \underline{C}]$, qui vaut alors l'unité). Dans ce qui suit, on se limitera à l'hypothèse d'homogénéité des constantes d'élasticité et on fera apparaître le tenseur d'Eshelby $\underline{S}$ qui est égal à $\underline{T}^s\, \underline{C}$ dans le cas d'une inclusion ellipsoïdale. On calculera les champs des taux de contraintes, déformations, rotations ainsi que le taux d'énergie élastique.

En rappelant les notations du chapitre II :

$\underline{S} = \underline{T}^s\,\underline{C}$	tenseur d'Eshelby
$\underline{A} = \underline{T}^a\,\underline{C}$	tenseur antisymétrique donnant la rotation totale à partir de la déformation plastique
$\underline{\Sigma} = \underline{C}\,\underline{E}^e$	contrainte macroscopique.

Le taux de déformation totale s'obtient à partir de (III-18) :

$$\frac{\delta \underline{\varepsilon}^I}{\delta t} = \frac{\delta \underline{E}^T}{\delta t} + \underline{S}\left(\frac{\partial \underline{\varepsilon}^p}{\partial t} - \frac{\partial \underline{E}^p}{\partial t}\right) + \frac{\delta \underline{S}}{\delta t}\left(\underline{\varepsilon}^p - \underline{E}^p\right) \qquad \text{(III-25)}$$

le taux de rotation totale à partir de (III-19) :

$$\frac{\delta \underline{\omega}^I}{\delta t} = \frac{\delta \underline{\Omega}^T}{\delta t} + \underline{A}\left(\frac{\partial \underline{\varepsilon}^p}{\partial t} - \frac{\partial \underline{E}^p}{\partial t}\right) + \frac{\delta \underline{A}}{\delta t}\left(\underline{\varepsilon}^p - \underline{E}^p\right) \qquad \text{(III-26)}$$

et le taux des contraintes internes à partir de (III-21) :

$$\frac{\delta \underline{\sigma}^I}{\delta t} = \frac{\delta \underline{\Sigma}}{\delta t} + \underline{C}\left(\underline{S} - \underline{I}\right)\left(\frac{\partial \underline{\varepsilon}^p}{\partial t} - \frac{\partial \underline{E}^p}{\partial t}\right) + \underline{C}\,\frac{\delta \underline{S}}{\delta t}\left(\underline{\varepsilon}^p - \underline{E}^p\right) \qquad \text{(III-27)}$$

Les équations (III-25), (III-26) et (III-27) ainsi obtenues peuvent être retrouvées par une méthode directe en partant des équations du chapitre II et en procédant à la dérivation propre $\delta/\delta t$ de façon à tenir compte des grandeurs qui évoluent en fonction du temps (à savoir les déformations plastiques $\underline{\varepsilon}^p$ et $\underline{E}^p$). Mais, de plus, pour tenir compte de la variation du volume de l'inclusion $V_I(t)$ par déplacement d'interface, il convient également de dériver $\underline{T}^I$, $\underline{S}$ et $\underline{A}$ faisant apparaître $\delta\underline{T}^I/\delta t$, $\delta\underline{S}/\delta t$ et $\delta\underline{A}/\delta t$. Pour bien marquer l'originalité du travail, il faut signaler que la plupart des études précédentes, à notre connaissance, dérivent les équations du chapitre II par la dérivée particulaire classique d/dt en gardant $\underline{T}^I$, $\underline{S}$ et $\underline{A}$ constants.

Ecrivons par exemple la solution d'Eshelby-Kröner en terme de déformation totale (II-60) :

$$\underline{\varepsilon}^I = \underline{E}^T + \underline{S}\,(\underline{\varepsilon}^p - \underline{E}^p)$$

On procède à la dérivation propre de cette équation et on obtient bien (III-25).

De même, les contraintes internes données par (II-67) :

$$\underline{\sigma}^I = \underline{\Sigma} + \underline{C}\,(\underline{S} - \underline{I})\,(\underline{\varepsilon}^p - \underline{E}^p)$$

fournirait (III-27).

Remarques :

Les deux méthodes de dérivation propre que nous avons qualifiées ci-dessus, l'une de méthode directe, l'autre en passant par la dérivée d'une intégrale de volume (III-6), ne sont équivalentes que si on tient compte des hypothèses d'uniformité H_1 et H_2.
Il est nécessaire cependant d'utiliser les formules de dérivation d'une intégrale de volume pour accéder au calcul de $\delta\underline{T}^I/\delta t$, $\delta\underline{S}/\delta t$ et $\delta\underline{A}/\delta t$. On le détaille dans le cas général dans le chapitre IV.
Il est également intéressant de suivre l'évolution de l'énergie élastique associée aux contraintes internes dues à la présence d'une inclusion ellipsoïdale à frontière mobile.

Variation de l'énergie élastique : $\delta W/\delta t$

L'étude de la variation d'énergie est un point intéressant pour les phénomènes de croissance d'une inclusion. Il est en effet utile de rappeler (comme l'a souligné Eshelby) que le calcul de la variation d'énergie élastique est une étape importante dès qu'il s'agit, par une approche thermodynamique, de prévoir l'apparition (ou pas) du changement de phase, de la recristallisation...
Dans le cas où l'élasticité est homogène et en absence des contraintes macroscopiques, l'énergie élastique par unité de volume est donnée par (II-111) :

$$W = -\frac{1}{2}\underline{\sigma}^I\left(\underline{\varepsilon}^p - \underline{E}^p\right) \qquad \text{(III-28)}$$

Alors, par application de la dérivation propre $\delta/\delta t$ à W, on a :

$$\frac{\delta W}{\delta t} = -\frac{1}{2}\underline{\sigma}^I\left(\frac{\delta\underline{\varepsilon}^p}{\delta t} - \frac{\delta\underline{E}^p}{\delta t}\right) - \frac{1}{2}\frac{\delta\underline{\sigma}^I}{\delta t}\left(\underline{\varepsilon}^p - \underline{E}^p\right) \qquad \text{(III-29)}$$

$\underline{\sigma}^I$ et $\delta\underline{\sigma}^I/\delta t$ sont obtenues respectivement à partir de (II-67) et (III-27), le taux d'énergie élastique s'écrit comme suit :

$$\frac{\delta W}{\delta t} = -\frac{1}{2} C_{ijkl} \left(S_{klmn} - I_{klmn}\right) \left\{ \left(\varepsilon^p_{mn} - E^p_{mn}\right)\left(\frac{\delta \varepsilon^p_{ij}}{\delta t} - \frac{\delta E^p_{ij}}{\delta t}\right) + \left(\frac{\delta \varepsilon^p_{mn}}{\delta t} - \frac{\delta E^p_{mn}}{\delta t}\right)\left(\varepsilon^p_{ij} - E^p_{ij}\right) \right\}$$

$$-\frac{1}{2} C_{ijkl} \frac{\delta S_{klmn}}{\delta t} \left(\varepsilon^p_{mn} - E^p_{mn}\right)\left(\varepsilon^p_{ij} - E^p_{ij}\right) \qquad \text{(III-30)}$$

Cette formule se présente sous la somme de deux termes. Le premier est classique et provient des variations $\underline{\varepsilon}^p(t)$ et $\underline{E}^p(t)$. En général, il est positif et traduit une étape de stockage d'énergie.

Le deuxième terme est nouveau puisqu'il provient de $\delta\underline{S}/\delta t$. On montrera dans une application du chapitre V que ce terme peut devenir négatif ce qui traduit une étape de restitution d'énergie. Notre approche nous permet ainsi d'accéder de façon originale à la compétition entre le stockage d'énergie et sa restitution : ce point est important dès qu'il s'agit de calculer le seuil d'apparition d'une transformation.

Les formules des problèmes d'inclusions à frontière mobile ainsi exposées, il apparaît clairement que les champs des taux de contraintes, de déformations, de rotations et la variation d'énergie élastique dépendent, pour leurs calculs, de la connaissance des tenseurs $\underline{T}^I$ et $\delta\underline{T}^I/\delta t$. Le calcul de ces tenseurs est complexe en général ; au chapitre IV et dans les annexes, nous donnons trois méthodes valables pour une inclusion ellipsoïdale dans un milieu anisotrope :

- méthode de la transformée de Fourier,
- méthode des fonctions potentielles,
- méthode directe à partir des résultats d'Eshelby.

Le calcul de $\underline{T}^I$ est classique et déjà acquis par de nombreuses études [14], [15], [16] et [17] ; on y exploite notamment les techniques de calcul précédentes. Il reste donc à déterminer le nouveau tenseur :

$$\frac{\delta T_{ijkl}}{\delta t}(\vec{r},t) = -\sum_{\alpha=1}^{3} \iiint_{V_I(t)} \left[G_{ik,jl\alpha'}(\vec{r}-\vec{r}')\, W_{\alpha}(\vec{r}',t) + G_{ik,jl}(\vec{r}-\vec{r}')\, W_{\alpha,\alpha'}(\vec{r}',t) \right] dV'$$

On montrera, ce qui est remarquable, que le calcul peut utiliser les mêmes techniques indiquées ci-dessus et ce, sans difficulté supplémentaire, et que ce tenseur est uniforme dans une inclusion ellipsoïdale.

III.5. Conclusion

La présentation compacte des problèmes d'inclusions à frontière mobile montre que leur solution passe en fin de compte par le calcul des tenseurs $\underline{T}^I$ et $\delta\underline{T}^I/\delta t$.

Le modèle de l'inclusion à frontière mobile se présente donc comme un modèle très pratique car on tient compte explicitement du mouvement d'interface inclusion-matrice par le tenseur $\delta\underline{T}^I/\delta t$ calculable (ch. IV) sans avoir à bien connaître la "loi d'évolution" de cette interface (ch. III).

L'intérêt de ce modèle consiste en 3 remarques :

- sa facilité de mise en oeuvre ; on précise par là que les calculs qu'il induit ne sont pas plus difficiles que ceux des problèmes d'inclusions du chapitre II
- son originalité : cela provient du fait qu'on a combiné de façon tout à fait logique la notion de déformation plastique à la notion de dérivation propre. La déformation plastique (ou inélastique) est souvent qualifiée, à juste titre, de déformation propre (eigenspannungen) ; il est naturel de lui associer une dérivée propre définie par rapport au champ W de la vitesse d'extension de la zone plastifiée
- sa pertinence : elle consiste justement à avoir porté son attention plus sur le champ de vitesse W que sur la vitesse des particules. Il est effectivement clair que la compréhension totale de l'évolution des hétérogénéités nécessite la connaissance du comportement propre des interfaces : cet élément d'information est directement lié à W.

De façon brève, on peut résumer le modèle comme une extension des problèmes d'inclusion permettant de prendre en compte à la fois le déplacement d'interface (qui relève d'une loi de comportement fournie par la microphysique du déplacement), la variation des déformations plastiques (qui obéissent à une loi d'évolution telle que le critère de Schmid pour la plasticité ou d'autres lois s'inscrivant dans le cadre plus général de l'inélasticité) et les conditions de chargements.

On montre dans la suite, en concentrant notre attention sur le cas général de la croissance d'une inclusion ellipsoïdale dans une matrice anisotrope, que ce modèle nécessite des calculs tout à fait accessibles et classiques pour qui connaît bien les problèmes d'inclusion d'Eshelby-Kröner.

Bibliographie du chapitre III

[1] E. Kröner, 1958, Z. Phys., 15, 504-518.

[2] M. Berveiller et A. Zaoui, 1980, Journal de Mécanique, 19, N° 2.

[3] J.E. Burke et D. Turnbull, 1952, Progress in Met. Phys. 3, 220.

[4] J.E. May et D. Turnbull, 1958, Trans. AIME, 212, 769.

[5] V. Raman et T.G. Langdon, 1990, Acta. Metall. Mater, 38, N° 3, 497-507.

[6] Z.S. Basinski et J.W. Christian, 1954, Acta. Met., 2, Janv.

[7] M. Berveiller, S. Dominiak, A. Eberhardt et E. Patoor, 1985, A.T.P. Mat. 4, Plasticité des matériaux solides, Metz.

[8] T. Katata et H. Saka, 1989, Phil. Mag. A, 59, N° 3, 677-686.

[9] L.C. Chang et T.A. Read, 1951, Trans. AIME, 191, 47.

[10] C. Jourdan, 1984, Métallurgie physique, Ecole d'été, Edd de physique.

[11] M.F. Ashby, 1970, Phil. Mag. 21, 399.

[12] E. Kröner, 1961, Acta. met. 9, 155.

[13] P. Germain, 1986, Cours de mécanique des milieux continus, Tome 1, Théorie générale, Paris, Edd Masson.

[14] G. Faivre, 1971, Journal de Physique, 32, 325.

[15] M. Berveiller, 1978, Thèse d'Etat, Université de Paris 13, France.

[16] S. Tiem, 1987, Thèse d'Université de Metz, France.

[17] O. Fassi-Fehri, 1986, Thèse d'Etat, Université de Metz, France.

CHAPITRE IV

DETERMINATION DES TENSEURS : $\underline{T}^I$, $\underline{S}$, $\underline{A}$, $\delta\underline{T}^I/\delta t$, $\delta\underline{S}/\delta t$ et $\delta\underline{A}/\delta t$

IV.1. Cinématique de la transformation

IV.2. Méthodes de calcul

IV.2.1. Méthode de la transformée de Fourier

a) Cas de l'élasticité isotrope

b) Cas de l'élasticité anisotrope

IV.2.2. Méthode des fonctions potentielles

IV.2.3. Méthode directe à partir des résultats d'Eshelby

IV.3. Résultats

IV.3.1. Cas de l'élasticité isotrope

a) Inclusion ellipsoïdale quelconque

b) Inclusion sphérique

c) Inclusion aplatie

d) Bande

e) Commentaires et conclusion

IV.3.2. Cas de l'élasticité anisotrope

a) Inclusion sphérique

b) Inclusion aplatie

c) Bande

d) Commentaires et conclusion

IV.3.3. Conclusion

Dans le présent chapitre, nous calculons les tenseurs $\underline{T}$ et $\delta\underline{T}/\delta t$ que nous rappelons ici :

$$T_{ijkl}(\vec{r},t) = -\iiint_{V_I(t)} G_{ki,jl}(\vec{r}-\vec{r}')\, dV'$$

et

$$\frac{\delta T_{ijkl}}{\delta t}(\vec{r},t) = -\iint_{\partial V_I(t)} G_{ki,jl}(\vec{r}-\vec{r}')\,\vec{W}(\vec{r}',t).\vec{n}\, dS'$$

(n est la normale unitaire et extérieure à $V_I(t)$).

La première intégrale dépend du volume de l'inclusion à l'instant t et la deuxième fait intervenir la vitesse de déplacement de la frontière afin de traduire le changement de volume $V_I(t)$. Il apparaît donc nécessaire de préciser la cinématique du changement de la forme de l'inclusion.

IV.1. Cinématique de la transformation

Nous prenons le cas général d'une inclusion ellipsoïdale dans la matrice qui se transforme en un autre ellipsoïde. Ce cas particulier de la transformation respecte les hypothèses d'uniformité précédentes (H_1).

On considère alors, à l'instant t, le cas d'un volume ellipsoïdal dont les demi-axes sont fonctions du temps ($a_1(t)$, $a_2(t)$, $a_3(t)$). Les directions des axes propres de l'ellipsoïde définissent les axes du repère d'observation R (on ne considère pas ici une rotation éventuelle de l'inclusion afin de simplifier les calculs).

Dans ce cas, l'évolution de la zone plastique au sein du milieu élastique anisotrope est régie par la vitesse W de composantes :

$$\vec{r} \in \partial V_I(t) \quad W_\alpha(\vec{r},t) = x_\alpha \frac{\dot{a}_\alpha(t)}{a_\alpha(t)} \qquad \text{(IV-1)}$$

(sans sommation sur l'indice grec α)

où $\dot{a}_\alpha = \partial a_\alpha/\partial t$ désigne la vitesse d'évolution des demi-axes de l'ellipsoïde(dans tout ce qui suit, l'indice grec répété ne fera pas l'objet d'une sommation) .

Nous allons montrer que le calcul de $\delta\underline{T}/\delta t$ revient à celui des trois dérivées partielles $\partial\underline{T}/\partial a_\alpha$ ($\alpha = 1,2,3$). Pour cela reprenons la définition de la dérivation propre en se plaçant dans le cas où le gradient des composantes T_{ijkl} s'annule en raison de l'argument d'uniformité dans le domaine de l'ellipsoïde tandis qu'en dehors de l'inclusion, W est nulle (cela correspond à la topologie du problème d'inclusion à frontière mobile).

Par la formule :

$$\frac{\delta}{\delta t}(\ ) = \frac{\partial}{\partial t}(\ ) + \vec{W}\,.\,\vec{\mathrm{grad}}(\ ) \qquad \text{(IV-2)}$$

on a pour notre cas :

$$\frac{\delta\underline{T}}{\delta t}(\vec{r},t) = \frac{\partial\underline{T}}{\partial t}(\vec{r},t) \qquad \text{(IV-3)}$$

L'équation (III-12) devient alors :

$$\frac{\delta T_{ijkl}}{\delta t}(\vec{r},t) = \frac{\partial T_{ijkl}}{\partial t}(\vec{r},t) = -\iint_{\partial V_I(t)} G_{ki,jl}(\vec{r}-\vec{r}\,')\,\vec{W}(\vec{r}\,',t)\,.\,\vec{n}\ dS' \qquad \text{(IV-4)}$$

Si on tient compte de (IV-1), (III-10) et du théorème de la divergence, (IV-4) s'écrit encore:

$$\frac{\partial T_{ijkl}}{\partial t}(\vec{r},t) = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\dot{a}_\alpha}{a_\alpha}\left\{ T_{ijkl}(\vec{r},t) - \iiint_{V_I(t)} G_{ki,jl\alpha'}(\vec{r}-\vec{r}\,')\ x'_\alpha\ dV' \right\} \qquad \text{(IV-5)}$$

ce qui doit être identique selon la règle de composition des dérivées partielles à :

$$\frac{\partial\underline{T}}{\partial t}(\vec{r},t) = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial\underline{T}}{\partial a_\alpha}(\vec{r},t)\ \dot{a}_\alpha \qquad \text{(IV-6)}$$

puisque (voir III-10) $\underline{T}$ ne dépend, par $\underline{G}$ et $\underline{C}^o$, que de la position r, des composantes d'élasticité (constantes) et des dimensions a_α (t) de l'inclusion.

L'identification entre (IV-5) et (IV-6) permet l'accès au calcul de $\partial\underline{T}/\partial a_\alpha$ par :

$$\frac{\partial T_{ijkl}}{\partial a_\alpha}(\vec{r},t) = \frac{1}{a_\alpha}\left\{ T_{ijkl}(\vec{r},t) - \iiint_{V_I(t)} G_{ki,jl\alpha'}(\vec{r}-\vec{r}\,')\ x'_\alpha\ dV' \right\} \qquad \text{(IV-7)}$$

Le calcul de $\delta\underline{T}/\delta t$ nécessite en fait l'utilisation de (IV-7) pour substituer $\partial\underline{T}/\partial a_\alpha$ dans (IV-6). Le

terme $\dot{a}_\alpha$ étant supposé donné par l'équation supplémentaire fournie par la loi de comportement de l'interface.

Les mêmes arguments (uniformité dans l'inclusion et vitesse W nulle dans la matrice) s'appliquent également pour le calcul de $\delta\underline{S}/\delta t$ et $\delta\underline{A}/\delta t$.

De la définition (II-48) du tenseur d'Eshelby $\underline{S}$ et celle (II-40) du tenseur de Green modifié $\underline{\Gamma}$, on a d'une part :

$$\frac{\partial S_{ijkl}}{\partial t}(\vec{r},t) = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\dot{a}_\alpha}{a_\alpha} \left\{ S_{ijkl}(\vec{r},t) + \iiint_{V_I(t)} \Gamma_{ijmn,\alpha'}(\vec{r}-\vec{r}')\, C_{mnkl}\, x'_\alpha dV' \right\} \tag{IV-8}$$

Egalement en terme du tenseur antisymétrique des rotations $\underline{A}$ (II-50) :

$$\frac{\partial A_{ijkl}}{\partial t}(\vec{r},t) = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\dot{a}_\alpha}{a_\alpha} \left\{ A_{ijkl}(\vec{r},t) + \iiint_{V_I(t)} \Lambda_{ijmn,\alpha'}(\vec{r}-\vec{r}')\, C_{mnkl}\, x'_\alpha dV' \right\} \tag{IV-9}$$

d'autre part :

$$\frac{\partial \underline{S}}{\partial t}(\vec{r},t) = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial \underline{S}}{\partial a_\alpha}(\vec{r},t)\, \dot{a}_\alpha \tag{IV-10}$$

et

$$\frac{\partial \underline{A}}{\partial t}(\vec{r},t) = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial \underline{A}}{\partial a_\alpha}(\vec{r},t)\, \dot{a}_\alpha \tag{IV-11}$$

d'où :

$$\frac{\partial S_{ijkl}}{\partial a_\alpha}(\vec{r},t) = \frac{1}{a_\alpha} \left\{ S_{ijkl}(\vec{r},t) + \iiint_{V_I(t)} \Gamma_{ijmn,\alpha'}(\vec{r}-\vec{r}')\, C_{mnkl}\, x'_\alpha dV' \right\} \tag{IV-12}$$

et

$$\frac{\partial A_{ijkl}}{\partial a_\alpha}(\vec{r},t) = \frac{1}{a_\alpha} \left\{ A_{ijkl}(\vec{r},t) + \iiint_{V_I(t)} \Lambda_{ijmn,\alpha'}(\vec{r}-\vec{r}')\, C_{mnkl}\, x'_\alpha dV' \right\} \tag{IV-13}$$

Dans la suite, nous indiquons les principes de deux méthodes qui calculent les intégrales des formules (IV-7-12-13). Les détails seront reportés en annexes.

Une troisième méthode part directement des formules proposées par Eshelby.

Ces trois méthodes fournissent des résultats identiques mais certaines se révèlent plus pra-

tiques que d'autres suivant le type de calcul envisagé :

- dans le cas de l'élasticité anisotrope, on conseille la première méthode dite de Transformée de Fourier ;

- la deuxième méthode, dite des fonctions potentielles, permet dans le cas de l'élasticité isotrope, une écriture indicielle complète des résultats.

IV.2. Méthodes de calcul

IV.2.1. Méthode de la transformée de Fourier

La détermination de $\underline{T}$ et $\partial\underline{T}/\partial a_\alpha$ ($\alpha = 1,2,3$) donnés respectivement par (III-10) et (IV-7) nécessite le calcul des deux intégrales :

$$T_{ijkl}(\vec{r},t) = -\iiint_{V_I(t)} G_{ki,jl}(\vec{r}-\vec{r}')\, dV' \qquad \text{(IV-14)}$$

$$T^{\alpha}_{ijkl}(\vec{r},t) = -\iiint_{V_I(t)} G_{ki,jl\alpha}(\vec{r}-\vec{r}')\, x'_\alpha\, dV' \qquad \text{(IV-15)}$$

Avec cette notation, $\partial\underline{T}/\partial a_\alpha$ s'écrit alors en fonction de ces deux intégrales :

$$\frac{\partial \underline{T}}{\partial a_\alpha} = \frac{1}{a_\alpha}\left(\underline{T} - \underline{T}^{\alpha}\right) \quad . \qquad \text{(IV-16)}$$

Le calcul de $\underline{T}$ et $\underline{T}^{\alpha}$ est complexe à cause de la présence du tenseur de Green, qui ne peut être donné explicitement dans le cas d'une anisotropie quelconque. Une méthode numérique, pour le problème d'une inclusion ellipsoïdale a été proposée pour le calcul de $\underline{T}$ par Kneer [1] et reprise par Mura [2], Laws [3] et Gharhemani [4] ; elle consiste à utiliser la transformée de Fourier du tenseur de Green et à intégrer dans l'espace k (conjugué de r).

Nous utilisons une méthode analogue pour le calcul des tenseurs $\underline{T}$ et $\underline{T}^{\alpha}$ dans le cas d'une inclusion ellipsoïdale dans un milieu anisotrope.

A partir des intégrales (IV-14) et (IV-15), on substitue le tenseur de Green $\underline{G}$ par sa transformée

de Fourier, nous obtenons les composantes des tenseurs $\underline{T}^I$ (A-25) et $\underline{T}^{I\alpha}$ (A-26) dans l'inclusion ellipsoïdale ; les détails de calcul sont exposés en Annexe A :

$$T^I_{ijkl} = \frac{a_1 a_2 a_3}{4\pi} \iint_S \chi_j \chi_l \, M^{-1}_{iK}(\vec{\chi}) \, (a_1^2\chi_1^2 + a_2^2\chi_2^2 + a_3^2\chi_3^2)^{-3/2} \, dS \qquad \text{(IV-17)}$$

et

$$T^{I\alpha}_{ijkl} = \frac{3 a_1 a_2 a_3 a_\alpha^2}{4\pi} \iint_S \chi_j \chi_l \chi_\alpha^2 \, M^{-1}_{iK}(\vec{\chi}) \, (a_1^2\chi_1^2 + a_2^2\chi_2^2 + a_3^2\chi_3^2)^{-5/2} \, dS \qquad \text{(IV-18)}$$

L'élément différentiel dS de la surface unité S et les vecteurs unitaires χ_i sont définis en annexe A.

On note un résultat important, c'est que $\underline{T}^I$ et $\underline{T}^{I\alpha}$ sont uniformes dans l'inclusion ellipsoïdale ; ce résultat a été indiqué précédemment par Eshelby au sujet du tenseur $\underline{T}^I$.

L'évaluation des deux intégrales (IV-17) et (IV-18) dépend du tenseur $\underline{M}^{-1}$ (Annexe A) qui n'est connu explicitement que dans le cas de l'élasticité isotrope : on obtient alors des résultats analytiques. Par contre, dans le cas anisotrope, les deux intégrales sont calculées par une méthode numérique classique (intégration par point de Gauss) et on obtient alors des résultats numériques.

a) <u>Cas de l'élasticité isotrope</u>

Appelons (μ^o, λ^o) ou (μ^o, ν^o) les constantes élastiques qui caractérisent le milieu isotrope ; les composantes du tenseur d'élasticité sont données par :

$$C^o_{ijkl} = \lambda^o \, \delta_{ij}\delta_{kl} + \mu^o \, (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{jk}\delta_{il}) \, .$$

Alors dans ce cas la transformée de Fourier du tenseur de Green est connue explicitement [5] et on a pour $\underline{M}^{-1}$:

$$M^{-1}_{iK}(\vec{\chi}) = \frac{1}{\mu^o} \left\{ \delta_{iK} - \frac{\lambda^o + \mu^o}{\lambda^o + 2\mu^o} \chi_i \chi_K \right\} = \frac{1}{\mu^o} \left\{ \delta_{iK} - \frac{1}{2(1-\nu^o)} \chi_i \chi_K \right\} \qquad \text{(IV-19)}$$

on obtient les composantes des tenseurs $\underline{T}^I$ (IV-17) et $\underline{T}^{I\alpha}$ (IV-18) :

$$T^I_{ijkl} = \frac{a_1 a_2 a_3}{4\pi \mu^o} \iint_S \chi_j \chi_l \left\{ \delta_{iK} - \frac{1}{2(1-\nu^o)} \chi_i \chi_K \right\} \left(a_1^2\chi_1^2 + a_2^2\chi_2^2 + a_3^2\chi_3^2 \right)^{-3/2} dS \qquad \text{(IV-20)}$$

et

$$T^{I\alpha}_{ijkl} = \frac{3a_1a_2a_3a_\alpha^2}{4\pi\mu^o}\iint_S \chi_j\chi_l\chi_\alpha^2\left\{\delta_{iK}-\frac{1}{2(1-\nu^o)}\chi_i\chi_K\right\}\left(a_1^2\chi_1^2+a_2^2\chi_2^2+a_3^2\chi_3^2\right)^{-5/2} dS \quad \text{(IV-21)}$$

Les intégrales ainsi présentées sont valables quelle que soit la forme de l'inclusion (c'est-à-dire : $\forall\ a_1, a_2, a_3$) ; nous envisageons par la suite les formes d'inclusions suivantes :

. Inclusion sphérique

Dans ce cas $a_1 = a_2 = a_3$; on obtient les tenseurs $\underline{T}^I$ et $\underline{T}^{I\alpha}$:

$$T^{I}_{ijkl} = \frac{1}{4\pi\mu^o}\iint_S \chi_j\chi_l\left\{\delta_{iK}-\frac{1}{2(1-\nu^o)}\chi_i\chi_K\right\} dS \quad \text{(IV-22)}$$

et

$$T^{I\alpha}_{ijkl} = \frac{3}{4\pi\mu^o}\iint_S \chi_j\chi_l\chi_\alpha^2\left\{\delta_{iK}-\frac{1}{2(1-\nu^o)}\chi_i\chi_K\right\} dS \quad \text{(IV-23)}$$

Alors, il suffit d'effectuer les intégrales doubles sur θ et φ des fonctions trigonométriques de la forme $\cos^n\theta\ \sin^m\varphi$; les détails de calcul sont présentés en Annexe D. Les résultats sont reportés au paragraphe IV.3.

. Inclusion ellipsoïdale

Dans le cas général d'une inclusion ellipsoïdale ($a_1 > a_2 > a_3$), la détermination des composantes des tenseurs $\underline{T}^I$ et $\underline{T}^{I\alpha}$ se ramène au calcul des intégrales elliptiques :

$$F(\varphi,K) = \int_o^\varphi \frac{d\psi}{\sqrt{1-K^2\sin^2\psi}} \quad \text{et} \quad E(\varphi,K) = \int_o^\varphi \sqrt{1-K^2\sin^2\psi}\ d\psi$$

avec

$$\varphi = \sin^{-1}\sqrt{1-\frac{a_3^2}{a_1^2}} \quad \text{et} \quad K^2 = \frac{a_1^2-a_2^2}{a_1^2-a_3^2}.$$

Ces intégrales ne sont pas connues explicitement dans le cas général d'inclusion ($a_1 > a_2 > a_3$) ;

on peut obtenir F et E explicitement en prenant des cas particuliers d'inclusion, par exemple :

- le cas d'une inclusion aplatie (penny-shape : $a_1 = a_2 >> a_3$), on obtient des expressions polynomiales quand $K^2 << 1$
- le cas d'une bande ($a_1 \rightarrow +\infty$, $a_2 >> a_3$), E tend vers 1.

L'annexe C constitue une étude remarquable et complète pour la mise en oeuvre des intégrales elliptiques : leurs expressions polynomiales dans les cas particuliers d'inclusions, leur dérivée... etc.

Nous présentons dans IV.3. et en annexe C les résultats analytiques uniquement pour les tenseurs d'Eshelby $\underline{S}$, $\partial\underline{S}/\partial a_\alpha$, les tenseurs des rotations $\underline{A}$, $\partial\underline{A}/\partial a_\alpha$ dans le cas général d'inclusion ($a_1 > a_2 > a_3$). Pour les cas particuliers (penny-shape et bande), on présente dans IV.3. les résultats pour $\underline{T}^I$, $\underline{T}^{I\alpha}$, $\partial\underline{T}^I/\partial a_\alpha$, $\underline{S}$, $\partial\underline{S}/\partial a_\alpha$, $\underline{A}$ et $\partial\underline{A}/\partial a_\alpha$.

On a vérifié que les résultats obtenus pour les tenseurs $\underline{T}^I$, $\underline{S}$, $\underline{A}$ sont bien identiques à ceux calculés antérieurement dans les problèmes classiques d'inclusions.

b) <u>Cas de l'élasticité anisotrope</u>

Pour un milieu anisotrope, le tenseur de Green $\underline{G}$ n'est pas connu et par suite le tenseur $\underline{M}^{-1}$ n'est pas connu explicitement : le calcul des intégrales (IV-17) et (IV-18) ne peut pas être fait explicitement. Pour cela, on fait appel à une méthode numérique d'intégration dite méthode de Gauss qui consiste à remplacer le signe somme dans (IV-17) et (IV-18) par une sommation discrète en utilisant les points de Gauss classiques.

Nous avons mis au point un programme informatique effectué pour déterminer numériquement tous les tenseurs déjà présentés ($\underline{T}^I$,$\underline{S}$,$\underline{A}$) et leurs dérivées ($\partial\underline{T}^I/\partial a_\alpha$, $\partial\underline{S}/\partial a_\alpha$, $\partial\underline{A}/\partial a_\alpha$) dans une situation générale d'inclusion ellipsoïdale dans un milieu anisotrope. Le procédé de calcul est le suivant :

le programme calcule d'abord les composantes de $\underline{M}^{-1}$ à partir de la formule (A-15) en se donnant les constantes d'élasticité (isotropes ou anisotropes), puis par la méthode de Gauss, on peut alors déterminer numériquement les composantes des tenseurs précédents en se donnant les dimensions a_1, a_2, a_3 de l'inclusion.

Dans le cas isotrope, pour valider le programme, nous trouvons des résultats identiques à ceux

trouvés analytiquement pour tous les tenseurs précédents et pour des inclusions de la forme : sphérique, penny-shape, bande.

Dans le cas anisotrope, nous donnons des résultats pour une inclusion ellipsoïdale dans un milieu :

- cubique (Cu)
- Hexagonal (Zn).

IV.2.2. Méthode des fonctions potentielles

Dans le cas d'un milieu isotrope infini, le tenseur de Green $\underline{G}$ est donné par [5] :

$$G_{iK}(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{1}{4\pi\mu^o|\vec{r}-\vec{r}'|}\delta_{iK} - \frac{1}{16\pi\mu^o(1-\nu^o)}|\vec{r}-\vec{r}'|_{,ik} \qquad \text{(IV-24)}$$

qui, substitué dans l'intégrale (III-10), fait apparaître $\underline{T}$ sous la forme :

$$T_{ijkl}(\vec{r},t) = \frac{-1}{4\pi\mu^o}\delta_{iK}\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_l}\iiint_{V_f(t)}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV' + \frac{1}{16\pi\mu^o(1-\nu^o)}\frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_K \partial x_l}\iiint_{V_f(t)}|\vec{r}-\vec{r}'|\,dV'$$

(IV-25)

On note les deux intégrales ci-dessus (IV-25) par :

$$\Phi(\vec{r},t) = \iiint_{V_f(t)}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV' \quad \text{et} \quad \Psi(\vec{r},t) = \iiint_{V_f(t)}|\vec{r}-\vec{r}'|\,dV' \qquad \text{(IV-26)}$$

ce qui définit les fonctions potentielles d'Eshelby Φ et ψ. Avec ces notations, on a :

$$T_{ijkl}(\vec{r},t) = \frac{-1}{4\pi\mu^o}\delta_{iK}\Phi_{,jl}(\vec{r},t) + \frac{1}{16\pi\mu^o(1-\nu^o)}\psi_{,ijkl}(\vec{r},t) \qquad \text{(IV-27)}$$

Le tenseur d'Eshelby $\underline{S}$ s'obtient compte tenu de (II-48) et dans le cas de l'élasticité homogène (on simplifie l'écriture : $\Phi(r,t)) = \Phi$ et $\psi(r,t) = \psi$) :

$$8\pi(1-\nu)S_{ijkl} = \psi_{,ijkl} - (1-\nu)(\Phi_{,iK}\delta_{jl} + \Phi_{,jK}\delta_{il} + \Phi_{,jl}\delta_{Ki} + \Phi_{,il}\delta_{Kj}) - 2\nu\,\delta_{Kl}\Phi_{,ij}$$

(IV-28)

de même pour le tenseur antisymétrique $\underline{A}$ (II-50) par :

$$8\pi\, A_{ijkl} = \varphi_{iK}\,\delta_{jl} + \varphi_{,il}\,\delta_{jK} - \varphi_{,jK}\,\delta_{il} - \varphi_{,jl}\,\delta_{iK} \qquad \text{(IV-29)}$$

Eshelby a calculé explicitement les fonctions potentielles Φ et ψ dans une inclusion ellipsoïdale ; il a montré alors l'uniformité de $\underline{T}$ au sein d'un ellipsoïde.

Dans l'annexe B, on donne les expressions de Φ et ψ pour une inclusion ellipsoïdale quelconque puis pour le cas particulier d'une sphère.

De la même façon, nous présentons $\underline{T}^{\alpha}$ (IV-15) suivant :

$$T^{\alpha}_{ijkl}(\vec{r},t) = \frac{-1}{4\pi\mu^{o}}\,\delta_{iK}\,\frac{\partial^3}{\partial x_j \partial x_l \partial x_\alpha}\iiint_{V_f(t)} \frac{x'_\alpha}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,dV' + \frac{1}{16\pi\mu^{o}(1-\nu^{o})}\,\frac{\partial^5}{\partial x_i \partial x_j \partial x_K \partial x_l \partial x_\alpha}\iiint_{V_f(t)} x'_\alpha\,|\vec{r}-\vec{r}'|\,dV' \qquad \text{(IV-30)}$$

On définit deux nouvelles fonctions potentielles par :

$$\Phi^{\alpha}(\vec{r},t) = \iiint_{V_f(t)} \frac{x'_\alpha}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,dV' \quad \text{et} \quad \psi^{\alpha}(\vec{r},t) = \iiint_{V_f(t)} x'_\alpha\,|\vec{r}-\vec{r}'|\,dV' \qquad \text{(IV-31)}$$

Le tenseur $\underline{T}^{\alpha}$ s'écrit avec ces notations :

$$T^{\alpha}_{ijkl}(\vec{r},t) = \frac{-1}{4\pi\mu^{o}}\,\delta_{iK}\,\Phi^{\alpha}_{,jl\alpha}(\vec{r},t) + \frac{1}{16\pi\mu^{o}(1-\nu^{o})}\,\psi^{\alpha}_{,ijkl\alpha}(\vec{r},t) \qquad \text{(IV-32)}$$

Dans le cas de l'élasticité homogène, les tenseurs $\underline{S}^{\alpha}$ et $\underline{A}^{\alpha}$ définis respectivement par :

$$S^{\alpha}_{ijkl} = \frac{1}{2}\,(T^{\alpha}_{ijmn} + T^{\alpha}_{jimn})\,C_{mnkl} \qquad \text{(IV-33)}$$

et

$$A^{\alpha}_{ijkl} = \frac{1}{2}\,(T^{\alpha}_{ijmn} - T^{\alpha}_{jimn})\,C_{mnkl} \qquad \text{(IV-34)}$$

s'obtiennent en tenant compte de (IV-32) :

$$8\pi(1-\nu)\,S^{\alpha}_{ijkl} = \psi^{\alpha}_{,ijkl\alpha} - (1-\nu)\,(\Phi^{\alpha}_{,ik\alpha}\,\delta_{jl} + \Phi^{\alpha}_{,jk\alpha}\,\delta_{ik} + \Phi^{\alpha}_{,jl\alpha}\,\delta_{ik} + \Phi^{\alpha}_{,il\alpha}\,\delta_{jk}) - 2\,\nu\,\Phi^{\alpha}_{,ij\alpha}\,\delta_{kl} \qquad \text{(IV-35)}$$

et

$$8\pi\, A^{\alpha}_{ijkl} = \Phi^{\alpha}_{,ik\alpha}\,\delta_{jl} + \Phi^{\alpha}_{,il\alpha}\,\delta_{jk} - \Phi^{\alpha}_{,jk\alpha}\,\delta_{il} - \Phi^{\alpha}_{,jl\alpha}\,\delta_{ik} \qquad \text{(IV-36)}$$

Les détails de calcul de Φ^α et ψ^α sont présentés en annexe B : Φ^α et ψ^α sont trouvés explicitement pour une inclusion ellipsoïdale, et on donne leurs expressions dans le cas particulier d'une inclusion sphérique.

A l'aide des équations précédentes on a pu calculer les tenseurs $\underline{T}^{I\alpha}$, $\underline{S}^\alpha$ et $\underline{A}^\alpha$. Ces tenseurs sont uniformes dans l'inclusion ellipsoïdale.

Ainsi on peut calculer les tenseurs $\partial\underline{T}^I/\partial a_\alpha$, $\partial\underline{S}/\partial a_\alpha$ et $\partial\underline{A}/\partial a_\alpha$ à l'aide des relations que nous rappelons ici :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \underline{T}^I}{\partial a_\alpha} &= \frac{1}{a_\alpha}(\underline{T}^I - \underline{T}^{I\alpha}) \qquad \alpha = 1, 2, 3 \\
\frac{\partial \underline{S}}{\partial a_\alpha} &= \frac{1}{a_\alpha}(\underline{S} - \underline{S}^\alpha) \qquad \alpha = 1, 2, 3 \\
\frac{\partial \underline{A}}{\partial a_\alpha} &= \frac{1}{a_\alpha}(\underline{A} - \underline{A}^\alpha) \qquad \alpha = 1, 2, 3
\end{aligned} \tag{IV-37}$$

Des expressions (IV-33) et (IV-34), nous avons les symétries :

$$\begin{aligned}
S^\alpha_{ijkl} &= S^\alpha_{ijlk} = S^\alpha_{jikl} \\
A^\alpha_{ijkl} &= A^\alpha_{ijlk} = A^\alpha_{jikl}
\end{aligned} \tag{IV-38}$$

De même, compte tenu des symétries des tenseurs $\underline{S}$ et $\underline{A}$ et de (IV-38) ; on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S_{ijkl}}{\partial a_\alpha} &= \frac{\partial S_{ijlk}}{\partial a_\alpha} = \frac{\partial S_{jikl}}{\partial a_\alpha} \\
\frac{\partial A_{ijkl}}{\partial a_\alpha} &= \frac{\partial A_{ijlk}}{\partial a_\alpha} = \frac{\partial A_{jikl}}{\partial a_\alpha}
\end{aligned} \tag{IV-39}$$

Par cette méthode on arrive à des intégrales elliptiques du même type que celles obtenues par la méthode de la transformée de Fourier dans le cas d'un ellipsoïde quelconque.

On poursuit les calculs pour les mêmes exemples que dans IV.2.1.a. (sphère, inclusion aplatie, bande) en procédant de la même façon aux développements des intégrales elliptiques.

Les résultats obtenus en IV.2.1.a ou IV.2.2. sont identiques mais les derniers se présentent de façon plus condensée (IV.3.).

IV.2.3. Méthode directe à partir des résultats d'Eshelby

La solution du problème d'inclusion plastique a été développée par Eshelby [6] pour résoudre certains problèmes relatifs aux champs de contraintes et de déformations des inclusions dans une matrice infinie.

Eshelby a calculé le tenseur $\underline{S}$ pour une inclusion ellipsoïdale dans une matrice isotrope permettant de trouver la déformation totale $\underline{\varepsilon}^I$ à l'intérieur de l'inclusion, en fonction de la déformation plastique $\underline{\varepsilon}^p$:

$$\underline{\varepsilon}^I = \underline{S}\,\underline{\varepsilon}^p. \qquad \text{(IV-40)}$$

La déformation $\underline{\varepsilon}^I$ dépend de la forme de l'ellipsoïde par l'intermédiaire du tenseur $\underline{S}$ que nous notons $\underline{S}$ (a_1, a_2, a_3).

On a vu au chapitre III que l'extension de ce problème d'inclusion plastique (cas d'une matrice non chargée) fournit le taux des déformations totales dans une inclusion ellipsoïdale :

$$\frac{\delta\underline{\varepsilon}^I}{\delta t} = \underline{S}\,\frac{\delta\underline{\varepsilon}^p}{\delta t} + \frac{\delta\underline{S}}{\delta t}\,\underline{\varepsilon}^p \qquad \text{(IV-41)}$$

où $\delta\underline{S}/\delta t$ peut être calculé par :

$$\frac{\delta\underline{S}}{\delta t} = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial\underline{S}}{\partial a_\alpha}\,\dot{a}_\alpha \qquad \text{(IV-42)}$$

avec

$$\frac{\partial\underline{S}}{\partial a_\alpha} = \frac{1}{a_\alpha}\left\{\underline{S} - \iiint_{V_I} \underline{C}\,\underline{\Gamma}_{,\alpha}\,(\vec{r}-\vec{r}')\,x'_\alpha\,dV'\right\} \qquad \text{(IV-43)}$$

Le calcul de $\partial\underline{S}/\partial a_\alpha$ par la forme intégrale (IV-43) est envisagé par les deux méthodes précédentes (voir paragraphes IV.2.1. et IV.2.2.).

Notre propos pour cette dernière méthode est de partir directement pour le calcul de $\partial\underline{S}/\partial a_\alpha$ des résultats d'Eshelby relatifs à $\underline{S}$ pour une inclusion ellipsoïdale.

Cela, en effet, se justifie en remarquant que la formule d'Eshelby (IV-40) après avoir été écrite à un instant t donné comme :

$$\underline{\varepsilon}^{I}(t) = \underline{S}\left(a_1(t), a_2(t), a_3(t)\right) \underline{\varepsilon}^{P}(t)$$

fournit par la dérivation propre $\delta/\delta t$ la formule (IV-41) précédente (à condition de bien prendre en compte la variation de $\underline{S}$ en fonction du temps par l'intermédiaire des demi-axes $a_\alpha(t)$ de l'ellipsoïde).

Il s'agit donc de considérer le tenseur d'Eshelby $\underline{S}$ sous la forme d'une fonction $\underline{S}$ $(a_1(t), a_2(t), a_3(t))$ de telle sorte que :

$$\frac{\delta \underline{S}}{\delta t} = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial \underline{S}}{\partial a_\alpha} \dot{a}_\alpha ,$$

ce qui revient tout d'abord à calculer les composantes du tenseur $\partial\underline{S}/\partial a_\alpha$ à partir de la fonction $\underline{S}$ $(a_1(t), a_2(t), a_3(t))$.

Les résultats d'Eshelby fournissent les composantes du tenseur $\underline{S}$ pour une inclusion ellipsoïdale quelconque. Les expressions de ces composantes sont complexes car elles contiennent les intégrales elliptiques E (a_α) et F (a_α). Ceci nécessite le calcul des dérivées partielles de E et de F par rapport à a_α ; en effet, posons :

$$\underline{S} = \underline{Y}\,(a_\alpha, E, F)$$

où $\underline{Y}$ est une fonction tensorielle à variable réelle.

On obtient, selon la règle de composition des dérivées partielles :

$$\frac{\partial \underline{S}}{\partial a_\alpha} = \frac{\partial \underline{Y}}{\partial a_\alpha} + \frac{\partial \underline{Y}}{\partial E}\frac{\partial E}{\partial a_\alpha} + \frac{\partial \underline{Y}}{\partial F}\frac{\partial F}{\partial a_\alpha} \qquad \text{(IV-44)}$$

Les détails de calcul de $\partial E/\partial a_\alpha$ ($\alpha = 1,3$) et $\partial F/\partial a_\alpha$ ($\alpha = 1,3$) sont donnés en annexe C.

On s'aperçoit que ces termes dépendent à nouveau de E et F. Par conséquent, d'après (IV-44), les composantes du tenseur $\partial\underline{S}/\partial a_\alpha$ dépendent aussi des intégrales elliptiques E et F (voir IV.2.1).

Les résultats ainsi trouvés pour les tenseurs $\partial\underline{S}/\partial a_\alpha$ son généraux, ils correspondent à une inclusion ellipsoïdale quelconque. A titre d'applications relatives à des formes d'inclusions particuliè-

res (sphère, inclusion aplatie, bande) nous poursuivons les calculs de la même façon que pour les deux autres méthodes en procédant aux développements des intégrales elliptiques E et F (annexe C).

Nous faisons de même pour le tenseur antisymétrique $\underline{A}$ donnant la rotation totale dans l'inclusion en fonction de la déformation plastique $\underline{\varepsilon}^P$

$$\underline{\omega}^I = \underline{A}\,\underline{\varepsilon}^P$$

Nous donnons $\partial\underline{A}/\partial a_\alpha$ à partir des résultats établis par [5].

On présente dans le paragraphe suivant pour ces trois méthodes les résultats pour le cas général d'une inclusion ellipsoïdale ($a_1 > a_2 > a_3$) puis dans les cas particuliers (sphère, inclusion aplatie, bande). On s'attache à montrer une bonne cohérence entre tous ces résultats et on met en évidence des relations de symétrie si elles existent liées à la géométrie de l'inclusion.

Il est à noter que les méthodes F.P. (fonctions potentielles) et D.E. (dérivation directe à partir des résultats d'Eshelby) ne sont envisagées que pour un milieu isotrope tandis que la méthode T.F. (tranformée de Fourier) s'applique de plus à un milieu anisotrope pour lequel nous disposons de résultats sous forme numérique. Nous avons d'ailleurs tester le programme numérique (adapté initialement à un milieu anisotrope) en le configurant pour un milieu isotrope de façon à vérifier ses calculs par rapport aux résultats analytiques.

On s'attache également à vérifier les relations de symétrie induites par la structure H.C. et la structure C.C.

IV.3. Résultats

Les trois méthodes résumées en IV.2. (T.F. : transformée de Fourier , F.P. : fonctions potentielles, D.E. : dérivation directe à partir des résultats classiques d'Eshelby) fournissent des résultats généraux concernant une inclusion ellipsoïdale quelconque ($a_1 > a_2 > a_3$). On donne de plus des résultats plus explicites pour le cas d'une sphère, inclusion aplatie ou bande (Fig. IV-1).

Le paragraphe IV.3.1. rassemble les résultats analytiques obtenus par T.F., F.P. et D.E. dans le cas d'un milieu isotrope (voir le tableau suivant).

Nous donnons en IV.3.2. les résultats numériques relatifs à un ellipsoïde dans un milieu anisotrope. Ces résultats sont tous issus de T.F.

Le programme numérique correspondant est également appliqué au cas isotrope ; on vérifie en IV.3.2. que les résultats qu'il donne sont identiques à ceux obtenus par les formules analytiques. Nous constatons également que les expressions analytiques relatives à $\underline{T}^I$, $\underline{S}$, $\underline{A}$ sont bien identiques à celles trouvées antérieurement par les problèmes classiques d'inclusions.

IV.3.1. Cas de l'élasticité isotrope

Les constantes d'élasticité de l'inclusion et de la matrice sont données respectivement dans le cas isotrope par :

$$C^I_{ijkl} = \lambda^I \delta_{ij}\delta_{kl} + \mu^I (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$$
$$C^o_{ijkl} = \lambda^o \delta_{ij}\delta_{kl} + \mu^o (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$$

où (λ^I, μ^I) et (λ^o, μ^o) sont respectivement les propriétés élastiques de l'inclusion et de la matrice. On introduit les coefficients de poisson définis par :

$$\nu^I = \frac{\lambda^I}{2(\lambda^I + \mu^I)} \quad \text{et} \quad \nu^o = \frac{\lambda^o}{2(\lambda^o + \mu^o)}$$

pour écrire les constantes d'élasticité $\underline{C}^I$ et $\underline{C}^o$ sous la forme suivante :

$$C^I_{ijkl} = \mu^I \left[\frac{2\nu^I}{(1 - 2\nu^I)} \delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right]$$
$$C^o_{ijkl} = \mu^o \left[\frac{2\nu^o}{(1 - 2\nu^o)} \delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right]$$

Cas isotrope (Résultats analytiques)

	$\underline{T}^I$	$\underline{S}$	$\underline{A}$	$\underline{T}^{I\alpha}$	$\partial \underline{T}^I / \partial a_\alpha$	$\frac{\partial \underline{S}}{\partial a_\alpha}$	$\partial \underline{A} / \partial a_\alpha$
IV.3.1.a) Ellipsoïde	T.F , F.P	$\underline{S} = \underline{T}^{I_s} \underline{C}$, E	$\underline{A} = \underline{T}^{I_\alpha} \underline{C}$, B	T.F , F.P	$\frac{\partial \underline{T}^I}{\partial a_\alpha} = \frac{1}{a_\alpha} (\underline{T}^I - \underline{T}^{I\alpha})$	$\frac{\partial \underline{S}}{\partial a_\alpha} = \frac{\partial \underline{T}^s}{\partial a_\alpha} \underline{C}$, DE	$\frac{\partial \underline{A}}{\partial a_\alpha} = \frac{\partial \underline{T}^a}{\partial a_\alpha} \underline{C}$, DE
b) Sphère	T.F , F.P , B	" , "	" , "	" , "	"	" , D.E D.V.L	" , D.E D.V.L
c) I. aplatie	D.V.L	" , M	" , "	" , D.V.L	" , D.V.L	" , D.E D.V.L	" , D.E D.V.L
d) Bande		D.V.L , M	D.V.L , B			D.E, D.V.L	D.E D.V.L

F.P : Fonctions potentielles
T.F : Transformée de Fourier
D.E : Dérivation à partir des résultats d'Eshelby (→)
E : Eshelby [6]
B : Berveiller [5]
M : Mura [2]
D.V.L : Développement limité à partir des résultats de l'ellipsoïde (↓)

Dans le cas de l'élasticité homogène, nous avons $\underline{C}^o = \underline{C}^I = \underline{C}$ en écrivant les composantes dans le même repère.

a) Inclusion ellipsoïdale quelconque *($a_1 > a_2 > a_3$; isotrope)*

On a vu précédemment que la détermination des tenseurs $\partial\underline{T}^I/\partial a_\alpha$, $\partial\underline{S}/\partial a_\alpha$ et $\partial\underline{A}/\partial a_\alpha$ se ramène aux calculs des composantes des tenseurs $\underline{T}^I$ et $\underline{T}^{I\alpha}$. Les trois méthodes précédentes nous fournissent respectivement :

- **T.F.** : les composantes des tenseurs $\underline{T}^I$ (A-25) et $\underline{T}^{I\alpha}$ (A-26) :

$$T^I_{ijkl} = \frac{a_1 a_2 a_3}{4\pi} \iint_S \chi_j \chi_l \, M^{-1}_{ik}(\vec{\chi}) \left(a_1^2\chi_1^2 + a_2^2\chi_2^2 + a_3^2\chi_3^2\right)^{-3/2} dS$$

$$T^{I\alpha}_{ijkl} = \frac{3 a_1 a_2 a_3 a_\alpha^2}{4\pi} \iint_S \chi_j \chi_l \chi_\alpha^2 \, M^{-1}_{ik}(\vec{\chi}) \left(a_1^2\chi_1^2 + a_2^2\chi_2^2 + a_3^2\chi_3^2\right)^{-5/2} dS$$

L'élément différentiel dS et les vecteurs unitaires χ_i sont définis en Annexe A. La présence du terme $(a^2_1\chi^2_1 + a^2_2\chi^2_2 + a^2_3\chi^2_3)^{-n/2}$ (n = 3 ou 5) dans ces intégrales complique les calculs. Après plusieurs intégrations par parties sur θ et ψ, les calculs se ramènent à des intégrales elliptiques (annexe C).

L'écriture des résultats obtenus est très lourde : nous avons vérifié qu'ils étaient identiques à ceux obtenus par la méthode F.P. qui, eux, se prêtent à une présentation beaucoup plus condensée.

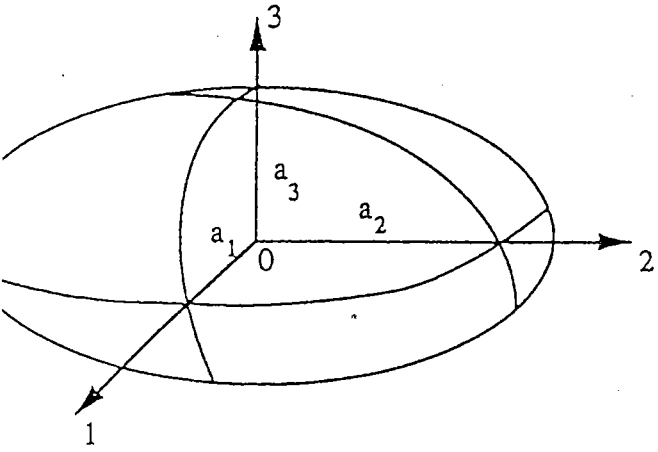
- **F.P.** : les composantes des tenseurs $\underline{T}^I$ (IV-27) et $\underline{T}^{I\alpha}$ (IV-32) s'obtiennent par :

$$T^I_{ijkl} = \frac{-1}{4\pi\mu^o} \delta_{ik} \Phi_{,jl} + \frac{1}{16\pi\mu^o(1-\nu^o)} \psi_{,ijkl}$$

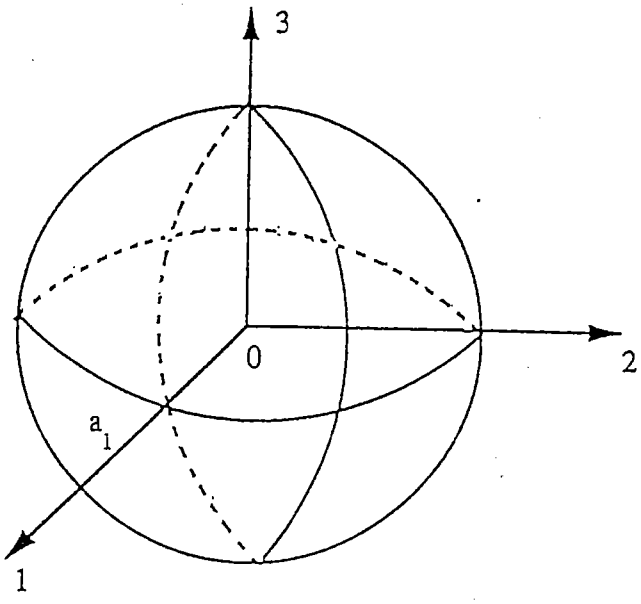
$$T^{I\alpha}_{ijkl} = \frac{-1}{4\pi\mu^o} \delta_{ik} \Phi^\alpha_{,jl\alpha} + \frac{1}{16\pi\mu^o(1-\nu^o)} \psi^\alpha_{,ijkl\alpha}$$

En utilisant les résultats de l'annexe B donnant les dérivées partielles des fonctions potentielles Φ, ψ, Φ^α et ψ^α intervenant dans les expressions de $\underline{T}^I$ et $\underline{T}^{I\alpha}$, on obtient :

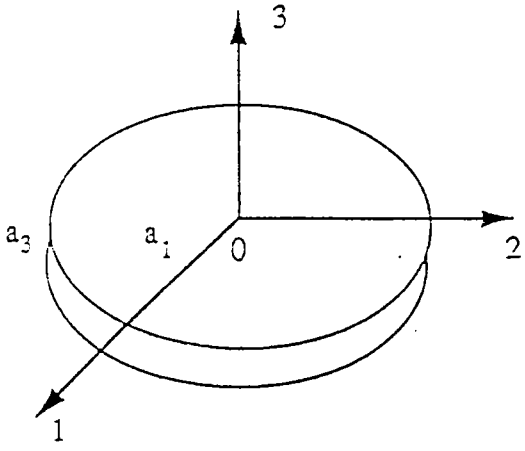
a) $a_1 > a_2 > a_3$



b) $a_1 = a_2 = a_3$



c) $a_1 = a_2 >> a_3$



d) $a_1 \rightarrow +\infty$, $a_2 >> a_3$

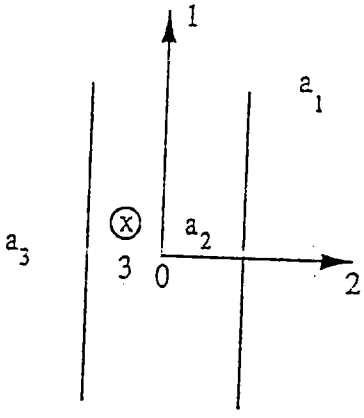


Fig IV-1 : Différentes formes de l'inclusion :

a) inclusion ellipsoïdale

b) inclusion sphérique

c) inclusion aplatie

d) bande.

$$16\pi\mu^{o}(1-\nu^{o})\, T^{I}_{ijkl} = -\,\delta_{ij}\delta_{kl}(I_k - a_i^2 I_{Ik}) - (\delta_{jl}\delta_{ik} + \delta_{il}\delta_{jk})(I_J - a_i^2 I_{IJ}) + 4\,(1-\nu^{o})\delta_{ik}\delta_{jl}I_J$$

$$16\pi\mu^{o}(1-\nu^{o})\, T^{I\alpha}_{ijkl} = 4\,(1-\nu^{o})\, a_\alpha^2\,(\delta_{ij}I_{I\alpha} + 2\,\delta_{i\alpha}\delta_{j\alpha}I_{\alpha\alpha})$$

$$-\frac{1}{2}a_\alpha^2\left(\delta_{ij}\delta_{kl}I_{kI} + \delta_{ki}\delta_{jl}I_{JI} + \delta_{il}\delta_{jk}I_{JI} + \delta_{ik}\delta_{jl}I_{IJ} + \delta_{il}\delta_{kj}I_{IJ} + \delta_{kl}\delta_{ij}I_{Ik}\right)$$

$$-2a_\alpha^2\left(\delta_{i\alpha}\delta_{j\alpha}\delta_{kl}I_{k\alpha} + \delta_{i\alpha}\delta_{k\alpha}\delta_{jl}I_{J\alpha} + \delta_{i\alpha}\delta_{l\alpha}\delta_{kj}I_{J\alpha} + \delta_{j\alpha}\delta_{k\alpha}\delta_{il}I_{I\alpha} + \delta_{j\alpha}\delta_{l\alpha}\delta_{ik}I_{I\alpha} + \delta_{l\alpha}\delta_{k\alpha}\delta_{ij}I_{I\alpha}\right)$$

$$+2a_\alpha^4\left(\delta_{i\alpha}\delta_{j\alpha}\delta_{kl}I_{k\alpha\alpha} + \delta_{i\alpha}\delta_{k\alpha}\delta_{jl}I_{J\alpha\alpha} + \delta_{i\alpha}\delta_{l\alpha}\delta_{jk}I_{J\alpha\alpha} + \delta_{j\alpha}\delta_{k\alpha}\delta_{il}I_{J\alpha\alpha} + \delta_{l\alpha}\delta_{j\alpha}\delta_{ik}I_{I\alpha\alpha} + \delta_{l\alpha}\delta_{k\alpha}\delta_{ij}I_{I\alpha\alpha}\right)$$

$$+\frac{a_\alpha^4}{2}\left(\delta_{ij}\delta_{kl}I_{kI\alpha} + \delta_{il}\delta_{jk}I_{JI\alpha} + \delta_{ik}\delta_{jl}I_{JI\alpha} + \delta_{jk}\delta_{il}I_{IJ\alpha} + \delta_{jl}\delta_{ik}I_{IJ\alpha} + \delta_{kl}\delta_{ij}I_{Ik\alpha}\right).$$

Les coefficients I_i, I_{ij}, I_{ijk} sont donnés en annexes B et C.
Alors, à partir de ces expressions, on peut déterminer en tenant compte respectivement des formules (II-48), (II-50), (IV-37) les tenseurs $\underline{S}$, $\underline{A}$, $\partial\underline{T}^I/\partial a_\alpha$, $\partial\underline{S}/\partial a_\alpha$ et $\partial\underline{A}/\partial a_\alpha$.

- **D.E.** : La dérivation directe par rapport à a_α de l'expression de $\underline{T}^I$ ci-dessus implique donc la dérivation des constantes d'Eshelby I_1, I_2, I_3. La procédure est donnée en annexe C. On obtient des résultats identiques à ceux trouvés par T.F. ou F.P.
Dans le cas d'une inclusion ellipsoïdale quelconque, nous donnons uniquement d'une façon explicite les composantes non nulles des tenseurs $\partial\underline{S}/\partial a_\alpha$ et $\partial\underline{A}/\partial a_\alpha$.
Pour ne pas alourdir l'écriture des formules, nous remplaçons les demi-axes a_1, a_2, a_3 respectivement par a, b, c. Nous indiquons ci-dessous les formules relatives à $\partial S_{1111}/\partial a$ et $\partial A_{1212}/\partial a$; toutes les autres composantes non nulles étant écrites en annexe C.

$$2\,(1-\nu)\frac{\partial S_{1111}}{\partial a} = \frac{b^2c^2}{a\,(a^2-b^2)^2(a^2-c^2)^2}\left[5a^2b^2 + 5a^2c^2 - 9a^4 - b^2c^2\right]$$

$$-\,2\nu\left[\frac{bc\,(F-E)}{(a^2-b^2)^2(a^2-c^2)^{3/2}}\left(a^2c^2 + b^2c^2 - 2a^4\right) + \frac{a^2bcE}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)^{3/2}} - \frac{b^2c^2}{a\,(a^2-b^2)(a^2-c^2)}\right]$$

$$+\frac{2\,a^2bcE}{(a^2-b^2)^2(a^2-c^2)^{5/2}}\left[3\,a^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - a^2c^2\right]$$

$$+\frac{b\,c\,(F-E)}{(a^2-b^2)^3(a^2-c^2)^{5/2}}\left[-8a^8+7a^6c^2+a^6b^2-3a^4c^4-a^4b^4+b^4c^4+13a^4b^2c^2-6a^2b^2c^4-4a^2c^2b^4\right]$$

$$\frac{\partial A_{1212}}{\partial a}=\frac{bc\,(F-E)}{2\,(a^2-b^2)^2(a^2-c^2)^{3/2}}\left(-3a^4-a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2\right)+\frac{bc\,E}{2(b^2-c^2)(a^2-b^2)}\frac{(2a^2b^2-b^2c^2-a^2c^2)}{(a^2-c^2)^{3/2}}$$

$$-\frac{b^2c^2}{2a\,(b^2-c^2)(a^2-b^2)(a^2-c^2)}(a^2+b^2-2c^2)$$

Les résultats ainsi présentés concernent une inclusion ellipsoïdale quelconque, nous allons passer par la suite à des cas particuliers d'ellipsoïde.

b) Inclusion sphérique *($a_1 = a_2 = a_3$, isotrope)*

- **T.F.** : dans ce cas particulier, les composantes des tenseurs $\underline{T}^I$ (IV-22) et $\underline{T}^{I\alpha}$ (IV-23) s'écrivent :

$$T^I_{ijkl} = \frac{1}{4\pi\mu^o} \iint_S \chi_j\chi_l \left\{ \delta_{ik} - \frac{1}{2\,(1-\nu^o)} \chi_i\chi_k \right\} dS$$

$$T^{I\alpha}_{ijkl} = \frac{3}{4\pi\mu^o} \iint_S \chi_j\chi_l\chi^2_\alpha \left\{ \delta_{ik} - \frac{1}{2\,(1-\nu^o)} \chi_i\chi_k \right\} dS$$

Ce sont des intégrales doubles des fonctions trigonométriques du type $\chi_i\chi_j \cdots \chi_n$. Les détails de calcul de ces intégrales sont reportés en annexe A. Les résultats de calcul donnant les composantes des tenseurs $\underline{T}^I$, $\underline{S}$, $\underline{A}$, $\underline{T}^{I\alpha}$, $\partial\underline{T}^I/\partial a_\alpha$, $\partial\underline{S}/\partial a_\alpha$ et $\partial\underline{A}/\partial a_\alpha$ sont présentés à la fin de cette section sous forme de tableaux.

- **F.P.** : les composantes des tenseurs $\underline{T}^I$ et $\underline{T}^{I\alpha}$ sont obtenues à partir des fonctions potentielles calculées en annexes B et C dans le cas d'une inclusion sphérique :

$$T^I_{ijkl} = \frac{1}{30\mu^o(1-\nu^o)} \left\{ (9 - 10\nu^o)\,\delta_{ik}\delta_{jl} - (\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{jk}\delta_{il}) \right\}$$

$$T^{I\alpha}_{ijkl} = \frac{1}{70\mu^o\,(1-\nu^o)} \left\{ (13 - 14\nu^o)\,(\delta_{ik}\delta_{jl} + 2\,\delta_{ik}\delta_{j\alpha}\delta_{l\alpha}) - (\delta_{ij}\delta_{kl} + \right.$$
$$\left. \delta_{kj}\delta_{il} + 2\,\delta_{jk}\delta_{i\alpha}\delta_{l\alpha} + 2\,\delta_{ij}\delta_{k\alpha}\delta_{l\alpha} + 2\,\delta_{il}\delta_{k\alpha}\delta_{j\alpha} + 2\,\delta_{kl}\delta_{i\alpha}\delta_{j\alpha} + 2\,\delta_{jl}\delta_{i\alpha}\delta_{k\alpha} \right\}$$

d'où pour $\alpha = 1, 2, 3$:

$$a_1 \frac{\partial T^I_{ijkl}}{\partial a_\alpha} = \frac{1}{105\mu^o(1-\nu^o)} \left\{ (12 - 14\,\nu^o)\,\delta_{ik}\delta_{jl} - 2\,(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{jk}\delta_{il}) - (39 - 42\,\nu^o)\,\delta_{ik}\delta_{j\alpha}\delta_{l\alpha} \right.$$
$$\left. + 3\,(\delta_{jk}\delta_{i\alpha}\delta_{l\alpha} + \delta_{ij}\delta_{k\alpha}\delta_{l\alpha} + \delta_{il}\delta_{k\alpha}\delta_{j\alpha} + \delta_{kl}\delta_{i\alpha}\delta_{j\alpha} + \delta_{jl}\delta_{k\alpha}\delta_{i\alpha}) \right\} .$$

De même dans le cas de l'élasticité homogène ($\underline{C}^o = \underline{C}^I = \underline{C}$), les autres tenseurs s'obtiennent à partir de $\underline{T}^I$ et $\underline{T}^{I\alpha}$:

$$S_{ijkl} = \frac{1}{15\,(1-\nu)} \left\{ \delta_{ij}\,\delta_{kl} + (4-5\nu)\,(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{jk}\delta_{il}) \right\}$$

$$A_{ijkl} = 0$$

$$a_1 \frac{\partial S_{ijkl}}{\partial a_\alpha} = \frac{1}{105\,(1-\nu)} \Big\{ (-4 + 14\nu)\,\delta_{ij}\delta_{kl} + (10 - 14\nu)\,(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$$

$$+ (6-42\nu)\,\delta_{kl}\delta_{i\alpha}\delta_{j\alpha} + 6\,\delta_{ij}\delta_{k\alpha}\delta_{l\alpha} + (-15 + 21\nu)\,(\delta_{jk}\delta_{i\alpha}\delta_{l\alpha} +$$

$$\delta_{il}\delta_{j\alpha}\delta_{k\alpha} + \delta_{ik}\delta_{j\alpha}\delta_{l\alpha} + \delta_{jl}\delta_{i\alpha}\delta_{k\alpha}) \Big\}$$

$$a_1 \frac{\partial A_{ijkl}}{\partial a_\alpha} = \frac{1}{5} \left\{ \delta_{jl}\delta_{i\alpha}\delta_{k\alpha} + \delta_{jk}\delta_{i\alpha}\delta_{l\alpha} - \delta_{il}\delta_{j\alpha}\delta_{k\alpha} - \delta_{ik}\delta_{j\alpha}\delta_{l\alpha} \right\}$$

- D.E. : A partir des résultats généraux concernant une inclusion ellipsoïdale quelconque, on peut obtenir des résultats correspondant au cas particulier d'une inclusion sphérique ; le procédé de calcul est présenté en annexe C. Les résultats relatifs à $\underline{T}^{I\alpha}$ sont présentés sous forme de tableaux.

Nous donnons tout d'abord les résultats correspondant aux problèmes classiques d'inclusions, on trouve les composantes non nulles des tenseurs :

$\underline{T}^I$:

$$T^I_{1111} = T^I_{2222} = T^I_{3333} = (7 - 10\,\nu^o)\,\gamma$$

$$T^I_{1122} = T^I_{2211} = T^I_{1133} = T^I_{3311} = T^I_{2233} = T^I_{3322} = -\gamma$$

$$T^I_{1212} = T^I_{1313} = T^I_{2323} = T^I_{2121} = T^I_{3131} = T^I_{3232} = (9 - 10\,\nu^o)\,\gamma$$

$$T^I_{1221} = T^I_{1331} = T^I_{2332} = T^I_{2112} = T^I_{3113} = T^I_{3223} = -\gamma$$

avec

$$\gamma = \frac{1}{30\mu^o\,(1-\nu^o)}$$

Ces résultats sont identiques à ceux trouvés par Berveiller et Fassi-Fehri [5] [7].

$\underline{S}$: (composantes non nulles et respectant les symétries (II-51))

$$S_{1111} = S_{2222} = S_{3333} = (7 - 5\,\nu)\,\delta$$

$$S_{1122} = S_{2211} = S_{3311} = S_{1133} = S_{2233} = S_{3322} = (5\nu - 1)\,\delta$$

$$S_{1212} = S_{2323} = S_{1313} = (4 - 5\nu)\,\delta$$

avec

$$\delta = \frac{1}{15\,(1 - \nu)}$$

Ces résultats sont identiques à ceux établis par Eshelby [6].

$\underline{A} = 0$

Ce résultat est identique à celui établi par Berveiller [5] ; selon la formule

$\underline{\omega}^I = \underline{A}\,\underline{\varepsilon}^p$

reliant la rotation totale de la sphère à sa déformation plastique, on vérifie que la déformation plastique quelle qu'elle soit n'engendre aucune rotation de la sphère lorsque l'élasticité est homogène isotrope.

Les tableaux qui suivent concernent les résultats successivement pour $\underline{T}^{I\alpha}$, $\partial\underline{T}^I/\partial a_\alpha$, $\partial\underline{S}/\partial a_\alpha$, $\partial\underline{A}/\partial a_\alpha$.

Composantes non nulles des tenseurs $\underline{T}^{I\alpha}$ (α = 1,2,3) *($a_1 = a_2 = a_3$, isotrope)*

Les tableaux ci-dessous peuvent être obtenus par T.F., F.P. (voir annexes A, B, C).

Pour α = 1,2,3 (exemple : $T^{I1}{}_{1111} = A$, $T^{I2}{}_{1111} = B$, $T^{I3}{}_{1122} = D$)

(ij)(kl) → ↓	11	22	33
11	A,B,B	C,C,D	C,D,C
22	C,C,D	B,A,B	D,C,C
33	C,D,C	D,C,C	B,B,A

$T^{I\alpha}$ → ijkl ↓	T^{I1}	T^{I2}	T^{I3}
1212	B	E	F
2121	E	B	F
1313	B	F	E
3131	E	F	B
2323	F	B	E
3232	F	E	B

$T^{I\alpha}$ → ijkl ↓	T^{I1}	T^{I2}	T^{I3}
1221	C	C	D
2112	C	C	D
1331	C	D	C
3113	C	D	C
2332	D	C	C
3223	D	C	C

avec : $\beta = 1/[70\mu^o(1-\nu^o)]$

$A = (27 - 42\nu^o)\,\beta$, $B = (11 - 14\nu^o)\,\beta$, $C = -3\,\beta$

$D = -\beta$, $E = (39 - 42\nu^o)\,\beta$, $F = (13 - 14\nu^o)\,\beta$.

Composantes non nulles des tenseurs $\partial \underline{T}^I/\partial a_\alpha$ (α = 1,2,3) *($a_1 = a_2 = a_3$, isotrope)*

Les tableaux ci-dessous sont obtenus par : $\partial T^I/\partial a_\alpha = 1/a_\alpha\,(T^I - T^{I\alpha})$

Pour α = 1,2,3 (exemple : $\partial T_{1111}/\partial a_1 = P$, $\partial T^I{}_{1111}/\partial a_2 = Q$, $\partial T^I{}_{1133}/\partial a_3 = R$)

(ij) kl → ↓	11	22	33
11	P,Q,Q	R,R,S	R,S,R
22	R,R,S	Q,P,Q	S,R,R
33	R,S,R	S,R,R	Q,Q,P

$\partial T^I/\partial a_\alpha$ → ijkl ↓	$\frac{\partial T^I}{\partial a_1}$	$\frac{\partial T^I}{\partial a_2}$	$\frac{\partial T^I}{\partial a_3}$
1212	T	U	V
2121	U	T	V
1313	T	V	U
3131	U	V	T
2323	V	T	U
3232	V	U	T

$\partial T^I/\partial a_\alpha$ → ijkl ↓	$\frac{\partial T^I}{\partial a_1}$	$\frac{\partial T^I}{\partial a_2}$	$\frac{\partial T^I}{\partial a_3}$
1221	R	R	S
2112	R	R	S
1331	R	S	R
3113	R	S	R
2332	S	R	R
3223	S	R	R

avec : $\eta = 1/[105 a_1 \mu^o (1-\nu^o)]$, $P = (-16 + 28\nu^o)\,\eta$, $Q = (8 - 14\nu^o)\,\eta$

$R = \eta$, $S = -2\eta$, $T = (15 - 14\nu^o)\,\eta$

$U = (-27 + 28\nu^o)\,\eta$, $V = (12 - 14\nu^o)\,\eta$

Composantes non nulles des tenseurs $\partial\underline{S}/\partial a_\alpha$ (α = 1,2,3) *($a_1 = a_2 = a_3$, isotrope)*
Les résultats ci-dessous sont obtenus par $\partial\underline{S}/\partial a_\alpha = \partial\underline{T}^s/\partial a_\alpha \cdot \underline{C}$ ou un développement limité de $\partial\underline{S}/\partial a_\alpha$ obtenu pour un ellipsoïde quelconque (D.V.L.).

$105\ a_1\ (1-\nu)\ \partial S_{ijkl}/\partial a_1$:

(ij)(kl) → ↓	11	22	33
11	-32+28ν	2-28ν	2-28ν
22	2+14ν	16-14ν	-4+14ν
33	2+14ν	-4+14ν	16-14ν
(ijkl) →	1212	1313	2323
	-5+7ν	-5+7ν	10-14ν

$105\ a_1\ (1-\nu)\ \partial S_{ijkl}/\partial a_2$:

(ij)(kl) → ↓	11	22	33
11	16-14ν	2+14ν	-4+14ν
22	2-28ν	-32+28ν	2-28ν
33	-4+14ν	2+14ν	16-14ν
(ijkl) →	1212	1313	2323
	-5+7ν	10-14ν	-5+7ν

105 a_1 (1-ν) $\partial S_{ijkl}/\partial a_3$:

(ij)(kl) → ↓	11	22	33
11	16-14ν	-4+14ν	2+14ν
22	-4+14ν	16-14ν	2+14ν
33	2-28ν	2-28ν	-32+28ν

(ijkl) →	1212	1313	2323
	10-14ν	-5+7ν	-5+7ν

Composantes non nulles des tenseurs $\partial \underline{A}/\partial a_\alpha$ (α = 1,2,3) *($a_1 = a_2 = a_3$, isotrope)*
Les méthodes utilisées sont soit par $\partial \underline{A}/\partial a_\alpha = \partial \underline{T}^a/\partial a_\alpha \,.\, \underline{C}$ ou D.E. ou D.V.L.

$5\ a_1\ \partial A_{ijkl}/\partial a_1$:

(ijkl) →	1212	1313	2323
	1	1	0

$5\ a_1\ \partial A_{ijkl}/\partial a_2$:

(ijkl) →	1212	1313	2323
	-1	0	1

$5\ a_1\ \partial A_{ijkl}/\partial a_3$:

(ijkl) →	1212	1313	2323
	0	-1	-1

c) Inclusion aplatie : *($a_1 = a_2 >> a_3$, isotrope)*

Nous obtenons les composantes des tenseurs $\underline{T}^I$, $\underline{S}$, $\underline{A}$, $\underline{T}^\alpha$, $\partial\underline{S}/\partial a_\alpha$ et $\partial\underline{A}/\partial a_\alpha$ en tenant-compte de la géométrie particulière de l'inclusion ($a_1 = a_2 >> a_3$). On procède à des développements limités sur les intégrales elliptiques E et F comme indiqués en annexe C. (D.V.L.)
On donne les résultats suivants.

Composantes non nulles du tenseur $\underline{T}^I$

$$T^I_{1111} = T^I_{2222} = \frac{(13 - 16\,\nu^o)\pi\alpha}{64\mu^o(1-\nu^o)}\,,\quad T^I_{3333} = \frac{1 - 2\,\nu^o}{2\mu^o(1-\nu^o)} + \frac{(4\nu^o - 1)\,\pi\alpha}{8\mu^o(1-\nu^o)}$$

$$T^I_{1122} = T^I_{2211} = T^I_{1221} = T^I_{2112} = \frac{-\,\pi\alpha}{64\mu^o\,(1-\nu^o)}$$

$$T^I_{1133} = T^I_{3311} = T^I_{2233} = T^I_{3322} = \frac{-\,\pi\alpha}{16\mu^o(1-\nu^o)}$$

$$T^I_{1212} = T^I_{2121} = \frac{(15 - 16\,\nu^o)\,\pi\alpha}{64\mu^o(1-\nu^o)}\,,$$

$$T^I_{1313} = T^I_{2323} = \frac{(-\,9 + 8\,\nu^o)\,\pi\alpha}{16\mu^o(1-\nu^o)} + \frac{1}{\mu^o}$$

$$T^I_{1331} = T^I_{3113} = T^I_{3223} = T^I_{2332} = \frac{-\,\pi\alpha}{16\mu^o(1-\nu^o)}$$

$$T^I_{3131} = T^I_{3232} = \frac{(3 - 4\,\nu^o)\,\pi\alpha}{16\mu^o(1-\nu^o)}$$

$$\text{avec } \alpha = \frac{a_3}{a_1}$$

A notre connaissance, ce résultat n'a pas été établi ultérieurement sous forme analytique.
Dans le cas de l'élasticité homogène ($\underline{C}^o = \underline{C}^I = \underline{C}$), le tenseur d'Eshelby $\underline{S}$ et le tenseur $\underline{A}$ s'obtiennent à partir de $\underline{T}^I$:

Composantes non nulles du tenseur $\underline{S}$ *($a_1 = a_2 >> a_3$; isotrope)*

$$S_{1111} = S_{2222} = \frac{(13 - 8\nu)\pi\alpha}{32(1-\nu)} \quad , \quad S_{3333} = 1 + \frac{(2\nu - 1)\pi\alpha}{4\,(1-\nu)}$$

$$S_{1122} = S_{2211} = \frac{(8\nu - 1)\,\pi\alpha}{32\,(1-\nu)} \quad , \quad S_{1133} = S_{2233} = \frac{(2\nu - 1)\,\pi\alpha}{8\,(1-\nu)}$$

$$S_{3311} = S_{3322} = \frac{\nu}{1-\nu}\left(1 - \frac{(4\nu + 1)\,\pi\alpha}{8\,\nu}\right) ,$$

$$S_{1212} = \frac{(7 - 8\,\nu)\pi\alpha}{32\,(1-\nu)} \quad , \quad S_{1313} = S_{2323} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{(\nu - 2)\pi\alpha}{4\,(1-\nu)}\right)$$

avec $\alpha = \frac{a_2}{a_1}$

Résultats identiques à ceux indiqués par Mura [2].

Composantes non nulles du tenseur $\underline{A}$ *($a_1 = a_2 >> a_3$; isotrope)*

$$A_{1313} = A_{1331} = \frac{1}{2} - \frac{3}{8}\pi\alpha$$

$$A_{2323} = A_{2323} = \frac{1}{2} - \frac{3}{8}\pi\alpha$$

avec $\alpha = \frac{a_3}{a_1}$

Résultats identiques à ceux indiqués par Berveiller [5].

Composantes des tenseurs $\underline{T}^{I\alpha}$ (α = 1,2,3) *($a_1 = a_2 >> a_3$; isotrope)*

pour α = 1,2,3 (exemple : $T^{I1}{}_{1111} = p$, $T^{I2}{}_{1111} = q$, $T^{I3}{}_{1111} = o$)

(ij)(kl) → ↓	11	22	33
11	p,q,0	x,x,0	z,y,0
22	x,x,0	q,p,0	y,z,0
33	z,y,0	y,z,0	r,r,c

$T^{I\alpha}$ → ijkl ↓	T^{I1}	T^{I2}	T^{I3}
1212	q	s	0
2121	s	q	0
1313	t	v	d
3131	u	w	0
2323	v	t	d
3232	w	u	0

$T^{I\alpha}$ → ijkl ↓	T^{I1}	T^{I2}	T^{I3}
1221	x	x	0
2112	x	x	0
1331	z	y	0
3113	z	y	0
2332	y	z	0
3223	y	z	0

avec :

$$c = (1 - 2\nu^o)/[2\mu^o (1 - \nu^o)]$$

$$d = 1/\mu^o$$

$$\delta = \pi a_3/[128\mu^o (1 - \nu^o) a_1]$$

$$p = (57 - 72 \nu^o) \delta$$

$$q = (21 - 24 \nu^o) \delta$$

$$r = 8 (- 3 + 12 \nu^o) \delta + C$$

$$s = (69 - 72 \nu^o) \delta$$

$$t = 2 (- 57 + 48 \nu^o) \delta + d$$

$$u = 2 (27 - 36 \nu^o) \delta$$

$$v = 2 (- 51 + 48 \nu^o) \delta + d$$

$$w = 2 (9 - 12 \nu^o) \delta$$

$$x = - 3 \delta$$

$$y = - 6 \delta$$

$$z = - 18 \delta$$

Composantes des tenseurs $\partial \underline{T}^I/\partial a_\alpha$ (α = 1,2,3) *($a_1 = a_2 >> a_3$, isotrope)*

pour α = 1,2,3 (exemple : $\partial T^I{}_{1111}/\partial a_1 = p_1$, $\partial T^I{}_{1111}/\partial a_2 = q_1$, $\partial T^I{}_{1133}/\partial a_2 = z_2$)

(ij)(kl) → ↓	11	22	33
11	$p_1, q_1, 0$	$\delta, \delta, 0$	$y_1, z_2, 0$
22	$\delta, \delta, 0$	$q_1, p_1, 0$	$z_2, y_1, 0$
33	$y_1, z_1, 0$	$z_2, y_1, 0$	r_1, r_1, c_1

$\frac{\partial T^I}{\partial a_\alpha}$ → ijkl ↓	$\frac{\partial T^{I1}}{\partial a_1}$	$\frac{\partial T^I}{\partial a_2}$	$\frac{\partial T^I}{\partial a_3}$
1212	s_1	t_1	0
2121	t_1	s_1	0
1313	u_1	w_1	d_1
3131	v_1	x_1	0
2323	w_1	u_1	d_1
3232	x_1	v_1	

$\frac{\partial T^I}{\partial a_\alpha}$ → ijkl ↓	$\frac{\partial T^I}{\partial a_1}$	$\frac{\partial T^I}{\partial a_2}$	$\frac{\partial T^I}{\partial a_3}$
1221	δ	δ	0
2112	δ	δ	0
1331	y_1	z_2	0
3113	y_1	z_2	0
2332	z_2	y_1	0
3223	z_2	y_1	0

avec :

$$\delta = \pi\, a_3/[128\, \mu^o\, (1 - \nu^o)\, a_1]$$

$$c_1 = 16\, (4\, \nu^o - 1)\, \delta$$

$$d_1 = 8\, (- 9 + 8\, \nu^o)\, \delta$$

$$p_1 = (- 31 + 40\, \nu^o)\, \delta$$

$$q_1 = (5 - 8\, \nu^o)\, \delta$$

$$r_1 = 8\, (1 - 4\, \nu^o)\, \delta$$

$$s_1 = (9 - 8\, \nu^o)\, \delta$$

$$t_1 = (- 39 + 40\, \nu^o)\, \delta$$

$$u_1 = 2\, (21 - 16\, \nu^o)\, \delta$$

$$v_1 = 2\, (- 15 + 20\, \nu^o)\, \delta$$

$$w_1 = 2\, (15 - 16\, \nu^o)\, \delta$$

$$x_1 = 2\, (3 - 4\, \nu^o)\, \delta$$

$$y_1 = 10\, \delta$$

$$z_1 = - \delta$$

$$z_2 = - 2\, \delta$$

Composantes non nulles des tenseurs $\partial \underline{S}/\partial a_\alpha$ (α = 1,2,3) *($a_1 = a_2 >> a_3$, isotrope)*

$8\,(1 - \nu)\, a^2_1/\pi a_3\, \partial S_{ijkl}/\partial a_1$:

(ij)(kl)	11	22	33
11	(-31+20ν)/8	(1-20ν)/8	5(1-2ν)/4
22	(1+4ν)/8	(5-4ν)/8	(2ν-1)/4
33	(5+8ν)/4	(-1+8ν)/4	1-2ν

(ijkl)	1212	1313	2323
	(-7+8ν)/8	(4+ν)/4	(4-5ν)/4

$8\,(1 - \nu)\, a^2_1/\pi a_3\, \partial S_{ijkl}/\partial a_2$:

(ij)(kl)	11	22	33
11	(5-4ν)/8	(1+4ν)/8	(2ν-1)/4
22	(1-20ν)/8	(-31+20ν)/8	5(1-2ν)/4
33	(-1+8ν)/4	(5+8ν)/4	(1-2ν)

(ijkl)	1212	1313	2323
	(-7+8ν)/8	(4-5ν)/4	(4+ν)/4

$(8/\pi)\ (1 - \nu)\ a_1\ \partial S_{ijkl}/\partial a_3$:

(ij)(kl)	11	22	33
11	(13-8ν)/4	(-1+8ν)/4	2ν-1
22	(-1+8ν)/4	(13-8ν)/4	2ν-1
33	-(1+4ν)	-(1+4ν)	2(2ν-1)

(ijkl)	1212	1313	2323
	(7-8ν)/4	- 2 + ν	- 2 + ν

Composantes non nulles des tenseurs $\partial \underline{A}/\partial a_\alpha$ (α = 1,2,3) *($a_1 = a_2 >> a_3$, isotrope)*

$16a_1^2/3\pi a_3\ \partial A_{ijkl}/\partial a_1$:

(ijkl) →	1212	1313	2323
	1	3/2	1/2

$16a_1^2/3\pi a_3\ \partial A_{ijkl}/\partial a_2$:

(ijkl) →	1212	1313	2323
	-1	1/2	3/2

$8a_1/3\pi\ \partial A_{ijkl}/\partial a_3$:

(ijkl) →	1212	1313	2323
	0	-1	-1

d) Bande : *($a_1 \rightarrow +\infty$, $a_2 >> a_3$, isotrope)*

A partir des résultats généraux concernant une inclusion ellipsoïdale quelconque, on peut obtenir les résultats qui correspondent au cas particulier de la bande ; la méthode de calcul est présentée en annexe C.

Nous donnons les résultats suivants :

Composantes non nulles du tenseur $\underline{S}$

$$S_{2222} = \frac{(3-2\nu)\, a_3}{2\,(1-\nu)\, a_2} \quad , \quad S_{3333} = 1$$

$$S_{2233} = \frac{(2\nu-1)\, a_3}{2\,(1-\nu)\, a_2} \quad , \quad S_{3311} = \frac{\nu}{1-\nu} - \frac{\nu\, a_3}{(1-\nu)\, a_2}$$

$$S_{2211} = \frac{\nu\, a_3}{(1-\nu)\, a_2} \quad , \quad S_{3322} = \frac{\nu}{1-\nu} - \frac{(1+2\nu)\, a_3}{2\,(1-\nu)\, a_2}$$

$$S_{2323} = \frac{1}{2} - \frac{a_3}{2\,(1-\nu)\, a_2} \quad , \quad S_{1313} = \frac{1}{2} - \frac{a_3}{a_2}$$

$$S_{1212} = \frac{a_3}{2\, a_2}$$

Résultats identiques à ceux indiqués par Mura [2].

Composantes non nulles du tenseur $\underline{A}$

$$A_{1212} = \frac{a_3}{2\, a_2}$$

$$A_{1313} = \frac{1}{2}$$

$$A_{2323} = \frac{1}{2} - \frac{a_3}{2\,(1-\nu)\, a_2}$$

Résultats identiques à ceux indiqués par Berveiller [5].

Composantes des tenseurs $\partial \underline{S}/\partial a_\alpha$ (α = 1,2,3) *($a_1 \to +\infty$, $a_2 > a_3$, isotrope)*

$\partial S_{ijkl}/\partial a_1 = 0$

$2\,(1-\nu)\, a^2_2/a_3\, \partial S_{ijkl}/\partial a_2$:

(ij)(kl) → ↓	11	22	33
11	0	0	0
22	-2ν	$-3+2\nu$	$1-2\nu$
33	2ν	$1+2\nu$	$1-2\nu$

(ijkl) →	1212	1313	2323
	$\nu-1$	$1-\nu$	1

$2\,(1-\nu)\, a_2\, \partial S_{ijkl}/\partial a_3$:

(ij)(kl) → ↓	11	22	33
11	0	0	0
22	2ν	$3-2\nu$	$2\nu-1$
33	-2ν	$-1-2\nu$	$2\nu-1$

(ijkl) →	1212	1313	2323
	$1-\nu$	$\nu-1$	-1

Composantes non nulles des tenseurs $\partial \underline{A}/\partial a_\alpha$ (α = 1,2,3)

$2\,(1-\nu)\,a^2{}_2/a_3\;\partial A_{ijkl}/\partial a_2$:

(ijkl) ⟶	1212	1313	2323
	$\nu - 1$	$3\,(1-\nu)$	$3 - 4\nu$

$4\,(1-\nu)\,a_2\;\partial A_{ijkl}/\partial a_3$:

(ijkl) ⟶	1212	1313	2323
	$2\,(1-\nu)$	$2\,(\nu - 1)\,)$	-3

On reporte le bilan de ces résultats en IV.3.3.

e) Commentaires et conclusion

Le nombre de résultats exposés est important. Il se pose donc la question de vérifier la cohérence de tous ces résultats. Pour ce faire, l'utilisation du tableau initial IV.3.1. permet de constater que la plupart de nos résultats sont obtenus par des méthodes différentes, ce qui est un élément de validité ; donnons l'exemple de calcul de $\partial \underline{S}/\partial a_\alpha$ pour une sphère où trois méthodes sont employées :

1) $\partial \underline{S}/\partial a_\alpha = \partial \underline{T}^s/\partial a_\alpha \, \underline{C}$

il s'agit de reprendre la partie symétrique du tenseur $\partial \underline{T}^I/\partial a_\alpha$ calculé à partir de $\underline{T}^I$ et $\underline{T}^{I\alpha}$ tel que : $\partial \underline{T}^I/\partial a_\alpha = 1/a_\alpha \, (\underline{T}^I - \underline{T}^{I\alpha})$ et où $\underline{T}^I$ et $\underline{T}^{I\alpha}$ sont déterminés par la méthode de la transformée de Fourier (T.F.) (voir annexe A).

2) F.P. : on détermine les fonctions potentielles Φ, ψ, Φ^α et ψ^α pour calculer $\underline{T}^I$ et $\underline{T}^{I\alpha}$ (voir annexe B), on calcule ensuite $\partial \underline{T}^I/\partial a_\alpha = 1/a_\alpha \, (\underline{T}^I - \underline{T}^{I\alpha})$ puis enfin $\partial \underline{S}/\partial a_\alpha = \partial \underline{T}^s/\partial a_\alpha \, \underline{C}$.

3) Nous utilisons les résultats d'Eshelby relatifs à $\underline{S}$ pour un ellipsoïde quelconque, on dérive par rapport aux paramètres a_α et on applique les résultats trouvés au cas de la sphère.

N.B. : D.E. correspond à un travail en "ligne" dans le tableau IV.3.1. en ce sens qu'on part d'un résultat situé vers la gauche du tableau et on arrive à un résultat situé sur la même ligne mais à droite du tableau.
D.V.L. correspond à un travail en "colonne" en ce sens qu'on part d'un résultat situé en haut pour arriver à un résultat dans la même colonne mais situé plus bas. D.E. et D.V.L. constituent pour une case donnée deux méthodes qui partent de lieux différents mais arrivent au même résultat.

La cohérence des résultats ainsi trouvés constitue donc un argument de validité. Un autre moyen, simple et efficace, consiste à porter son attention sur des propriétés de symétrie du milieu isotrope : le moyen est efficace puisque ces propriétés sont indépendantes de tout calcul.
Au préalable on a contrôlé que les propriétés classiques (II-51) :

$$S_{ijkl} = S_{jikl} = S_{ijlk} \qquad (*)$$

sont bien respectées par les composantes que nous avons calculées pour $\underline{S}$. De même, les tenseurs $\partial\underline{S}/\partial a_\alpha$ vérifient les propriétés suivantes (IV-39) :

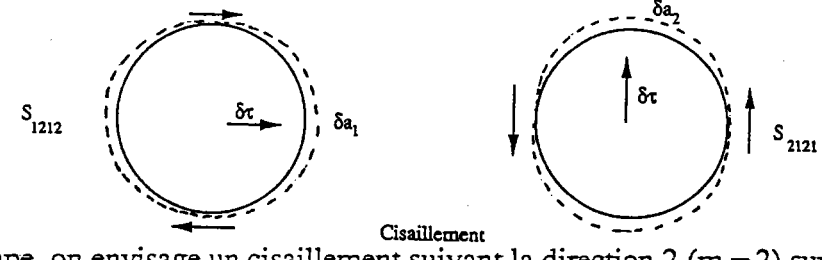
$$\frac{\partial S_{ijkl}}{\partial a_\alpha} = \frac{\partial S_{jikl}}{\partial a_\alpha} = \frac{\partial S_{ijlk}}{\partial a_\alpha} \qquad \alpha = 1,2,3 \qquad (**)$$

Soulignons ici que ces propriétés sont triviales car directement issues de (*) d'un point de vue mathématique ; mais cela n'était a priori pas prévisible par nos calculs ; on a là un autre argument de validité.

En continuant nos remarques sur les symétries, nous découvrons des propriétés intéressantes. Nous avons trouvé par exemple <u>pour la sphère</u> :

$$\frac{\partial S_{1212}}{\partial a_1} = \frac{\partial S_{1212}}{\partial a_2} \qquad (***)$$

ce qui s'interprète géométriquement en deux étapes. On indique tout d'abord que les indices 1212 représentent un cisaillement d'une sphère dans la direction 1 (on note m = 1) sur un plan de normale 2 (on note n = 2) et engendrant un accroissement $\delta S = \partial S_{1212}/\partial a_1\ \delta a_1$.



En deuxième étape, on envisage un cisaillement suivant la direction 2 (m = 2) sur le plan de normale 1 (n = 1) qui engendre $\delta S = \partial S_{2121}/\partial a_2\ \delta a_2$ et qui par symétrie pour un milieu isotrope infini doit être le même que le précédent dans la mesure où $\delta a_1 = \delta a_2$. Par conséquent, par illustration de ce cas de cisaillement, on a :

$$\frac{\partial S_{1212}}{\partial a_1} = \frac{\partial S_{2121}}{\partial a_2}$$

et immédiatement la propriété (***) puisque $S_{2121} = S_{1212}$.

Plus généralement, on peut constater pour le milieu isotrope et pour une inclusion respectant les conditions sur ses demi-axes : $a_\alpha = a_\beta$ que :

$$\frac{\partial S_{\alpha\beta\alpha\beta}}{\partial a_\alpha} = \frac{\partial S_{\alpha\beta\alpha\beta}}{\partial a_\beta} \qquad (\alpha,\beta = 1,2,3)$$

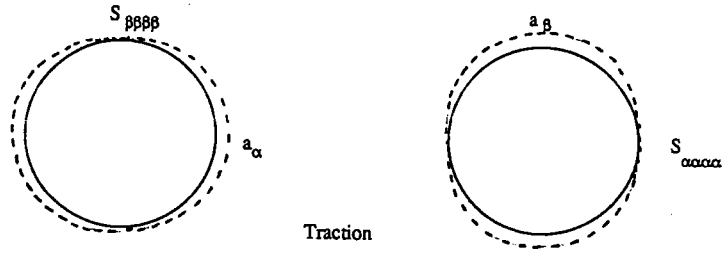
Nous remarquons également que :

$$\frac{\partial S_{1111}}{\partial a_2} = \frac{\partial S_{2222}}{\partial a_1}$$

ou plus généralement que pour un ellipsoïde respectant $a_\alpha = a_\beta$:

$$\frac{\partial S_{\alpha\alpha\alpha\alpha}}{\partial a_\beta} = \frac{\partial S_{\beta\beta\beta\beta}}{\partial a_\alpha}$$

qui traduit le fait qu'un allongement suivant a_α entraîne une variation de $S_{\beta\beta\beta\beta}$ identique à celle subie par $S_{\alpha\alpha\alpha\alpha}$ pour un allongement suivant a_β (figure ci-dessous) :



D'autres relations de symétrie liées à la géométrie de l'inclusion peuvent exister, par exemple :

$$\frac{\partial S_{\alpha\alpha\gamma\gamma}}{\partial a_\beta} = \frac{\partial S_{\beta\beta\gamma\gamma}}{\partial a_\alpha} \qquad (a_\alpha = a_\beta \neq a_\gamma)$$

$$\frac{\partial S_{\alpha\alpha\alpha\alpha}}{\partial a_\alpha} = \frac{\partial S_{\beta\beta\beta\beta}}{\partial a_\beta} \qquad (a_\alpha = a_\beta)$$

Ces remarques de symétrie sont très utiles car elles constituent d'une part un moyen de vérification de nos résultats, et d'autre part elles confortent le fait que notre formalisme constitue une extension du problème d'inclusion d'Eshelby au cas d'une inclusion à frontière mobile. En effet, Eshelby a souligné le fait important que le tenseur $\underline{S}$ dépend de la forme de l'inclusion ; par extension, nous disons que le tenseur $\partial\underline{S}/\partial a_\alpha$ s'attache lui à gérer le changement de forme de l'inclusion : nous venons de le montrer par les propriétés de symétrie citées ci-dessus car elles s'appliquent en fait à un cas de figure de déformation d'un ellipsoïde (cisaillement ou traction ; voir figures ci-dessus) parfaitement prévisible par des considérations géométriques simples.

Le changement de forme de l'inclusion analysé géométriquement (qualitativement) est bien quantifié par le tenseur $\partial\underline{S}/\partial a_\alpha$.

Nous avons trouvé des relations de symétrie (*, **, ***) analogues pour le tenseur antisymétrique $\partial \underline{A}/\partial a_\alpha$.

Remarque :

Nous examinons à présent la transformation géométrique particulière d'une inclusion sphérique en une autre inclusion sphérique :

$$a_\alpha(o) = a(o) \rightarrow a_\alpha(t) = a(t) \qquad \alpha = 1,2,3$$

La vitesse de transformation W (IV-1) s'écrit dans ce cas :

$$W_\alpha(\vec{r},t) = x_\alpha \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \qquad \alpha = 1,2,3$$

Evaluons alors le tenseur $\delta\underline{T}^I/\delta t$ dans l'inclusion sphérique traduisant cette transformation :

$$\frac{\delta \underline{T}^I}{\delta t} = \sum_{\alpha=1} \frac{\partial \underline{T}^I}{\partial a_\alpha} \dot{a}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{3} (\underline{T}^I - \underline{T}^{I\alpha}) \frac{\dot{a}_\alpha}{a_\alpha} = \frac{\dot{a}}{a} \sum_{\alpha=1}^{3} (\underline{T}^I - \underline{T}^{I\alpha})$$

Les composantes des tenseurs $\underline{T}^I$ et $\underline{T}^{I\alpha}$ s'obtiennent, par exemple, à l'aide de la méthode de la transformée de Fourier (IV-22) et (IV-23) et on a alors :

$$\frac{\delta T^I_{ijkl}}{\delta t} = \frac{\dot{a}}{4\pi\mu^o a} \iint_S M^{-1}_{ik} \chi_j \chi_l \left[\sum_{\alpha=1}^{3} 1 - 3 \sum_{\alpha=1}^{3} \chi_\alpha^2 \right] dS$$

$\underline{\chi}$ étant un vecteur orthonormé (annexe A), on a alors :

$$\sum_{\alpha=1}^{3} 1 - 3 \sum_{\alpha=1}^{3} \chi_\alpha^2 = 0$$

soit finalement :

$$\frac{\delta \underline{T}^I}{\delta t} = 0$$

La contribution de cette transformation particulière est nulle ; ceci exprime le fait qu'une inclusion sphérique se transformant en une autre inclusion sphérique n'influe pas sur la réponse du

matériau.

De plus, en rappelant que dans un milieu infini, le rayon de la sphère n'intervient pas dans le calcul des contraintes internes dans l'inclusion (effet de similitude), nous montrons ici de façon explicite que l'évolution de ces contraintes internes n'est pas affectée au cours même de la variation du rayon de la sphère.

Par conséquent, nous avons les propriétés suivantes ($a \neq 0$) :

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial \underline{T}^I}{\partial a_\alpha} = 0 \quad , \quad \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial \underline{S}}{\partial a_\alpha} = 0 \quad , \quad \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial \underline{A}}{\partial a_\alpha} = 0 \qquad (****)$$

Ces propriétés constituent également un moyen pour tester les formules analytiques et numériques (voir sphère dans un milieu isotrope et anisotrope).

Nous indiquons ci-dessous une remarque intéressante au sujet du tenseur $\delta\underline{A}/\delta t$. On constate en effet que pour une sphère dans un milieu isotrope on a :

$\underline{A} = 0$ mais $\delta\underline{A}/\delta t \neq 0$, ceci implique que la rotation dans l'inclusion s'écrit :

$$\frac{\delta \underline{\omega}^I}{\delta t} = \underline{A}\,\frac{\delta \underline{\varepsilon}^p}{\delta t} + \frac{\delta \underline{A}}{\delta t}\,\underline{\varepsilon}^p = \frac{\delta \underline{A}}{\delta t}\,\underline{\varepsilon}^p$$

Pour la suite nous donnons des résultats pour le cas anisotrope ; des considérations de symétrie sont également envisagées.

IV.3.2. Cas de l'élasticité anisotrope

Nous traitons deux cas d'élasticité homogène anisotrope correspondant respectivement à un matériau à symétrie cubique (cuivre) et à symétrie hexagonale (zinc).

Pour le cas du cuivre, les composantes non nulles du tenseur d'élasticité $\underline{C}^o$ s'écrivent :

$C^o_{1111} = 176370$ N/mm^2

$C^o_{1122} = 129200$ N/mm^2

$C^o_{1212} = 75190$ N/mm^2

et pour le zinc :

$C^o_{1111} = 158250\ N/mm^2$

$C^o_{1122} = 31510\ N/mm^2$

$C^o_{1212} = 47440\ N/mm^2$

$C^o_{3333} = 61600\ N/mm^2$

$C^o_{1313} = 40000\ N/mm^2$

(les indices i,j,k,l des composantes C^o_{ijkl} correspondent aux mêmes axes d'orientation de l'ellipsoïde; d'autres orientations sont bien sûr envisageables).

Le programme numérique nous permet de déterminer les composantes T^I_{ijkl} et $T^{I\alpha}_{ijkl}$ pour un ellipsoïde quelconque ($a_1 > a_2 > a_3$) données par les formules (IV-22) et (IV-23) :

$$T^I_{ijkl} = \frac{a_1 a_2 a_3}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \chi_j \chi_l\, M^{-1}_{ik}(\vec{\chi}) \left(a_1^2\chi_1^2 + a_2^2\chi_2^2 + a_3^2\chi_3^2\right)^{-3/2} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$T^{I\alpha}_{ijkl} = \frac{3 a_1 a_2 a_3\, a_\alpha^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \chi_j \chi_l \chi_\alpha^2\, M^{-1}_{ik}(\vec{\chi}) \left(a_1^2\chi_1^2 + a_2^2\chi_2^2 + a_3^2\chi_3^2\right)^{-5/2} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

où les composantes χ_i sont des fonctions trigonométriques de θ et φ (voir annexe A) et où $M^{-1}_{ik}(\chi)$ est donné par :

$$M^{-1}_{ik}(\vec{\chi}) = \left[C^o_{ijkl}\, \chi_j\, \chi_l\right]^{-1}$$

Ce programme cherche les composantes M^{-1}_{ik} en donnant les composantes C^o_{ijkl}, procède à l'intégrale double sur θ et φ. La technique d'intégration utilise la méthode de Gauss en remplaçant le signe de sommation dans les formules précédentes par une sommation discrète.

Nous obtenons enfin les composantes T^I_{ijkl} et $T^{I\alpha}_{ijkl}$. Celles-ci nous permettent l'accès au calcul à la détermination des autres tenseurs $\underline{S}$, $\underline{A}$, $\partial\underline{T}^I/\partial a_\alpha$, $\partial\underline{S}/\partial a_\alpha$ et $\partial\underline{A}/\partial a_\alpha$ déduites par les formules (II-48), (II-50) et (IV-37).

Le programme a été testé en se donnant une structure isotrope. Les résultats qu'il a donnés ont été comparés avec ceux des formules analytiques (IV.2) ; l'écart relatif maximal est de 10^{-4}.

Nous indiquons les résultats successivement pour une sphère ($a_1 = a_2 = a_3$), une inclusion aplatie ($a_1 = a_2 >> a_3$) et une bande ($a_1 \to +\infty$, $a_2 >> a_3$).

Les composantes de $\underline{T}^I$, $\partial\underline{T}^I/\partial a_\alpha$, $\underline{A}$, $\partial\underline{A}/\partial a_\alpha$ sont données en annexe A et nous retenons plus par-

ticulièrement notre attention ci-dessous sur les composantes de $\underline{S}$ et $\partial\underline{S}/\partial a_\alpha$. (Elles se prêtent à des remarques relatives à des propriétés de symétrie).

a) Inclusion sphérique *($a_1 = a_2 = a_3$, anisotrope)*

* Cas du cuivre

S(ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.4417742	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.1309943	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.1294806
12	0.0000000	0.2798475	0.0000000	0.2798475	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	0.2786334	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.2786334	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	0.2798475	0.0000000	0.2798475	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.1307689	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.4414836	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.1292381
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.2785964	0.0000000	0.2785964	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	0.2786334	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.2786334	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.2785964	0.0000000	0.2785964	0.0000000
33	0.1289551	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.1289380	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.4425877

a1 ∂S/∂a1 (ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	-0.3740205	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.2076542	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.2070257
12	0.0000000	-0.0436007	0.0000000	-0.0436007	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	-0.0429201	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0429201	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	-0.0436007	0.0000000	-0.0436007	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.1447493	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.1889846	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0634361
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0861664	0.0000000	0.0861664	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	-0.0429201	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0429201	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0861664	0.0000000	0.0861664	0.0000000
33	0.1434649	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0615232	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.1857448

a1 ∂S/∂a2 (ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.1890632	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.1443341	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0632802
12	0.0000000	-0.0437987	0.0000000	-0.0437987	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	0.0861446	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0861446	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	-0.0437987	0.0000000	-0.0437987	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	-0.2078162	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.3735962	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.2069286
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0429332	0.0000000	-0.0429332	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	0.0861446	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0861446	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0429332	0.0000000	-0.0429332	0.0000000
33	0.0614722	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.1434137	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.1857075

a1 ∂S/∂a3 (ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.1849573	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0633201	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.1437454
12	0.0000000	0.0873994	0.0000000	0.0873994	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	-0.0432245	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0432245	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	0.0873994	0.0000000	0.0873994	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0630669	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.1846116	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.1434925
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0432332	0.0000000	-0.0432332	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	-0.0432245	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0432245	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0432332	0.0000000	-0.0432332	0.0000000
33	-0.2049371	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.2049369	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.3714523

* Cas du zinc ($a_1 = a_2 = a_3$)

S(ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.5481420	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0231191	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0639549
12	0.0000000	0.2341137	0.0000000	0.2341137	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	0.2448608	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.2448608	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	0.2341137	0.0000000	0.2341137	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	-0.0314696	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.5315225	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0526862
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.2907826	0.0000000	0.2907826	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	0.2448608	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.2448608	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.2907826	0.0000000	0.2907826	0.0000000
33	0.0866270	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0698104	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.3808213

a1 ∂S/∂a1 (ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	-0.3117874	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0255135	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0767815
12	0.0000000	-0.0326278	0.0000000	-0.0326278	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	-0.0545425	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0545425	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	-0.0326278	0.0000000	-0.0326278	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0192848	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.1484957	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0027783
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0902218	0.0000000	0.0902218	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	-0.0545425	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0545425	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0902218	0.0000000	0.0902218	0.0000000
33	0.1504908	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0057948	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.1571888

a1 ∂S/∂a2 (ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.1554972	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0220984	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0036058
12	0.0000000	-0.0417517	0.0000000	-0.0417517	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	0.0924983	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0924983	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	-0.0417517	0.0000000	-0.0417517	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	-0.0254542	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.3209828	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0802224
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0572595	0.0000000	-0.0572595	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	0.0924983	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0924983	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0572595	0.0000000	-0.0572595	0.0000000
33	0.0055545	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.1634105	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.1785115

a1 ∂S/∂a3 (ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.1562903	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0034150	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0731757
12	0.0000000	0.0743795	0.0000000	0.0743795	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	-0.0379558	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0379558	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	0.0743795	0.0000000	0.0743795	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0061693	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.1724871	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0774441
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0329623	0.0000000	-0.0329623	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	-0.0379558	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0379558	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0329623	0.0000000	-0.0329623	0.0000000
33	-0.1560453	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.1576156	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.3357003

b) Inclusion aplatie ($a_1 = a_2 >> a_3$, *anisotrope*)

* <u>Cas du cuivre</u> ($a_1 = a_2 = 100\ a_3$)

S(ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0081939	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0014366	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0015660
12	0.0000000	0.0073583	0.0000000	0.0073583	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	0.4949086	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.4949086	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	0.0073583	0.0000000	0.0073583	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0014343	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0081911	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0015687
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.4949081	0.0000000	0.4949081	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	0.4949086	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.4949086	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.4949081	0.0000000	0.4949081	0.0000000
33	0.7225884	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.7225881	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.9997349

a1 ∂S/∂a1 (ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	-0.0107178	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0032019	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0015390
12	0.0000000	-0.0035879	0.0000000	-0.0035879	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	0.0035552	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0035552	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	-0.0035879	0.0000000	-0.0035879	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0017018	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0025753	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0001563
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0041459	0.0000000	0.0041459	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	0.0035552	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0035552	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0041459	0.0000000	0.0041459	0.0000000
33	0.0102829	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0036839	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0030765

a1 ∂S/∂a2 (ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0025762	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0016989	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0001568
12	0.0000000	-0.0035890	0.0000000	-0.0035890	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	0.0041457	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0041457	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	-0.0035890	0.0000000	-0.0035890	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	-0.0032032	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0107148	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0015403
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0035553	0.0000000	0.0035553	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	0.0041457	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0041457	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0035553	0.0000000	0.0035553	0.0000000
33	0.0036835	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0102826	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0030750

a1 ∂S/∂a3 (ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.8146186	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.1470936	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.1437115
12	0.0000000	0.7228476	0.0000000	0.7228476	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	-0.7082506	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.7082506	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	0.7228476	0.0000000	0.7228476	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.1468625	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.8143381	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.1439776
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.7083067	0.0000000	-0.7083067	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	-0.7082506	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.7082506	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.7083067	0.0000000	-0.7083067	0.0000000
33	-1.2981999	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-1.2982349	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.4705252

* <u>Cas du zinc</u> ($a_1 = a_2 = 100\ a_3$)

S(ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0152712	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0022701	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0016978
12	0.0000000	0.0061437	0.0000000	0.0061437	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	0.4921450	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.4921450	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	0.0061437	0.0000000	0.0061437	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	-0.0025353	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0127339	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0021591
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.4943629	0.0000000	0.4943629	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	0.4921450	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.4921450	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.4943629	0.0000000	0.4943629	0.0000000
33	0.7526696	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.7534702	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.9971615

a1 ∂S/∂a1 (ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	-0.0175214	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0025180	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0021105
12	0.0000000	-0.0025331	0.0000000	-0.0025331	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	0.0061790	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0061790	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	-0.0025331	0.0000000	-0.0025331	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	-0.0004111	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0023284	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0005202
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0034965	0.0000000	0.0034965	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	0.0061790	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0061790	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0034965	0.0000000	0.0034965	0.0000000
33	0.0220995	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0008559	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0040685

a1 ∂S/∂a2 (ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0026504	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0004126	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0005915
12	0.0000000	-0.0034611	0.0000000	-0.0034611	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	0.0041144	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0041144	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	-0.0034611	0.0000000	-0.0034611	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0027898	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0148393	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0025015
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0046957	0.0000000	0.0046957	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	0.0041144	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0041144	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0046957	0.0000000	0.0046957	0.0000000
33	-0.0008475	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0214518	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0046512

a1 ∂S/∂a3 (ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	1.4976619	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.2156180	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.1570008
12	0.0000000	0.6034910	0.0000000	0.6034910	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	-0.9721310	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.9721310	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	0.6034910	0.0000000	0.6034910	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	-0.2426030	0.0000000	0.0000000	0.0000000	1.2564840	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.2030675
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.7586841	0.0000000	-0.7586841	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	-0.9721310	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.9721310	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.7586841	0.0000000	-0.7586841	0.0000000
33	-2.0347951	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-1.9646195	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.7284856

c) Bande ($a_1 \rightarrow +\infty$, $a_2 >> a_3$, *anisotrope*)

* <u>Cas du cuivre</u> ($a_2 = 100\ a_3$)

S(ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0000001	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
12	0.0000000	0.0081170	0.0000000	0.0081170	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	0.4942787	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.4942787	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	0.0081170	0.0000000	0.0081170	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0036460	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0182998	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0061015
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.4963971	0.0000000	0.4963971	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	0.4942787	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.4942787	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.4963971	0.0000000	0.4963971	0.0000000
33	0.4215197	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.4117722	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.9984887

a2 ∂S/∂a1 (ijkl)=0

a2 ∂S/∂a2 (ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0000001	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
12	0.0000000	-0.0007266	0.0000000	-0.0007266	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	0.0052268	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0052268	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	-0.0007266	0.0000000	-0.0007266	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	-0.0003487	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0016682	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0005018
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0050236	0.0000000	0.0050236	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	0.0052268	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0052268	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0050236	0.0000000	0.0050236	0.0000000
33	0.0044645	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0053150	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0096219

a2 ∂S/∂a3 (ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0000057	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000021	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000026
12	0.0000000	0.7755981	0.0000000	0.7755981	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	-0.6296975	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.6296975	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	0.7755981	0.0000000	0.7755981	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.3709096	0.0000000	0.0000000	0.0000000	1.7790642	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.5381175
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.4135140	0.0000000	-0.4135140	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	-0.6296975	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.6296975	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.4135140	0.0000000	-0.4135140	0.0000000
33	-0.5446179	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-1.4536445	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.3684482

* <u>Cas du zinc</u> $(a_1 \rightarrow +\infty,\ a_2 = 100\ a_3)$

S(ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0000001	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
12	0.0000000	0.0081170	0.0000000	0.0081170	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	0.4942786	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.4942786	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	0.0081170	0.0000000	0.0081170	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	-0.0015297	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0240972	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0034655
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.4944699	0.0000000	0.4944699	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	0.4942786	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.4942786	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.4944699	0.0000000	0.4944699	0.0000000
33	1.2602199	0.0000000	0.0000000	0.0000000	1.2170586	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.9965456

a2 ∂S/∂a1 (ijkl)=0

a2 ∂S/∂a2 (ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0000001	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
12	0.0000000	-0.0007266	0.0000000	-0.0007266	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	0.0052268	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0052268	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	-0.0007266	0.0000000	-0.0007266	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0000680	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0022123	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0002548
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0051753	0.0000000	0.0051753	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	0.0052268	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0052268	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0051753	0.0000000	0.0051753	0.0000000
33	0.0129314	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0166078	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0098626

a2 ∂S/∂a3 (ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0000127	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000023	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000013
12	0.0000000	0.7755965	0.0000000	0.7755965	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	-0.6297002	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.6297002	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	0.7755965	0.0000000	0.7755965	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	-0.0765242	0.0000000	0.0000000	0.0000000	2.3577526	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.2750052
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.5764432	0.0000000	-0.5764432	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	-0.6297002	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.6297002	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.5764432	0.0000000	-0.5764432	0.0000000
33	-1.2291695	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-5.1628288	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.6212768

d) Commentaires et conclusion

Cette partie numérique présente également de nombreux résultats. Le programme a d'abord été testé pour un milieu isotrope (Annexe A). Il nous reste alors à examiner les informations que peuvent nous apporter des considérations de symétrie.

Nous avons au préalable vérifié que la propriété de symétrie (*) $S_{ijkl} = S_{jikl} = S_{ijlk}$ est automatiquement vérifiée pour le cas cubique et hexagonal compact car cela découle de la définition

$$S_{ijkl} = T^{s}_{ijmn}\, C_{mnkl} \qquad (\underline{T}^{s} : \text{partie symétrique en ij de } \underline{T}^{I})$$

et des propriétés de symétrie de C_{mnkl} (voir tableaux ci-dessus).

De même, nous constatons bien que la propriété (**)

$$\frac{\partial S_{ijkl}}{\partial a_{\alpha}} = \frac{\partial S_{ijkl}}{\partial a_{\alpha}} = \frac{\partial S_{ijkl}}{\partial a_{\alpha}} \qquad (\text{pour } \alpha = 1,2,3)$$

est vérifiée quelle que soit l'anisotropie (voir tableaux).

L'effet de l'anisotropie nous permet de constater par contre que les autres propriétés de symétries indiquées en (IV.3.1.e.) sont plus ou moins bien respectées suivant que l'on se place respectivement dans le cas du cuivre ou du zinc.

Portons notre attention plus particulièrement sur la propriété de symétrie :

$$\frac{\partial S_{\alpha\beta\alpha\beta}}{\partial a_{\alpha}} = \frac{\partial S_{\alpha\beta\alpha\beta}}{\partial a_{\beta}}$$

Nous indiquons par exemple le cas $\alpha = 2$ et $\beta = 3$ en retirant des valeurs des tableaux précédents :

	CI Sphère (Cu)	CII Sphère (Zn)	CIII I. aplatie (Cu)	CIV I. aplatie (Zn)	CV Bande (Cu)	CVI Bande (Zn)
$a_2 \dfrac{\partial S_{2323}}{\partial a_2}$ L_I	-0.0429	-0.0572	0.0035	0.0046	0.0050	0.0051
$a_2 \dfrac{\partial S_{2323}}{\partial a_3}$ L_{II}	-0.0432	-0.0329	-0.708	-0.7586	-0.4135	-0.5764
différence relative $= \dfrac{\Delta}{Max}$ L_{III}	0.0063	0.423	1	1	1	1

La comparaison par couples de colonnes de ce tableau nous permet de constater deux effets d'anisotropie sur les valeurs de $\partial \underline{S}/\partial a_\alpha$:

- l'effet lié à l'<u>anisotropie élastique</u> est sensible en regardant (CI) et (CII). Pour une même géométrie sphérique, l'examen des différences relatives (LIII) montre que la plus forte anisotropie élastique du zinc par rapport à celle du cuivre induit de plus grandes différences relatives pour les valeurs de $\partial S_{2323}/\partial a_2$ et $\partial S_{2323}/\partial a_3$ (égales dans le cas isotrope) ;

- l'effet lié à la forme de l'inclusion (<u>anisotropie géométrique</u>) s'observe en comparant les colonnes (CI, CIII, CV) entre elles (ou (CII, CIV, CVI)) correspondant à une même anisotropie élastique. L'écart relatif entre $\partial S_{2323}/\partial a_2$ et $\partial S_{2323}/\partial a_3$ est très fort pour une géométrie aussi prononcée que l'inclusion aplatie ou que la bande, et est beaucoup plus faible pour la sphère, géométriquement isotrope. De plus, le fait que l'on trouve sensiblement la même valeur 1 pour le cuivre ou le zinc montre que la forme de l'inclusion aplatie ou de la bande est tellement accentuée qu'elle masque l'effet d'anisotropie élastique.

Signalons que 2323 représente les indices pour un cisaillement dans la direction 2 et un plan de normale 3 et regardons maintenant le cas pour $\alpha = 1$ et $\beta = 3$; on relève

	Inclusion aplatie		Bande	
	cuivre	zinc	cuivre	zinc
$a_2 \dfrac{\partial S_{1313}}{\partial a_1}$	0.0035	0.0061	0	0
$a_2 \dfrac{\partial S_{1313}}{\partial a_3}$	-0.708	-0.972	-0.6296	-0.6297
	CVII	CVIII	CIX	CV

On constate que CVII et CIII sont identiques ; on passe de 2323 à 1313, ce qui revient à changer uniquement de direction de cisaillement (de 2 à 1). Mais pour l'inclusion aplatie, on a $a_2 = a_1$, ce qui fait que la géométrie de cette inclusion est neutre vis-à-vis de ce changement de sollicitation. Pour le zinc et les colonnes CIV et CVIII la géométrie reste la même ainsi que le changement de sollicitation ; pourtant ces colonnes diffèrent, ce qui est dû à la forte anisotropie élastique du zinc qui réagit de façon sensible au changement d'orientation de la sollicitation.

Pour le cas de la bande, cette fois même les colonnes CV et CIX du cuivre faiblement élastiquement anisotrope sont différentes. Cela provient du fait que la géométrie de la bande ($a_3 << a_2$, $a_1 = +\infty$) n'est plus indifférente au changement de direction de sollicitation.

Le nombre de remarques relatives aux questions de symétrie est considérable et elles proviennent de l'examen des tableaux des résultats. Pour notre cas, nous avons signalé quelques exemples afin d'exprimer un sens physique à chaque cas de symétrie.

IV.3.3. Conclusion

Ces résultats issus de l'extension des problèmes d'Eshelby-Kröner sont relatifs à une déformation inélastique qui peut évoluer mais restant uniforme dans un ellipsoïde se transformant en un autre ellipsoïde.

On a trouvé les résultats classiques d'Eshelby pour les tenseurs $\underline{T}^I$ et $\underline{S}$. Les nouveaux résultats concernant les calculs de $\partial\underline{T}^I/\partial a_\alpha$, $\partial\underline{S}/\partial a_\alpha$ et $\partial\underline{A}/\partial a_\alpha$ obtenus par les trois méthodes T.F., F.P.,

D.E. et le programme numérique sont cohérents. Cependant, en dehors de remarques sur les symétries, ce qui d'ailleurs fournit de nombreux indices sur l'évolution de la géométrie de l'inclusion, ces résultats ne sont porteurs que s'ils sont intégrés dans le contexte d'une application bien précisée et dans cet objectif, les perspectives sont très vastes car ces résultats concernent de nombreux problèmes de mécanique des matériaux présentant une évolution de la microstructure par l'intermédiaire des mouvements des interfaces séparant les constituants.

Le chapitre V, à ce titre, indique deux applications empruntées à la plasticité :

- l'effet de la taille des grains sur le comportement plastique des polycristaux métalliques,
- la mise en évidence d'une relaxation d'énergie par le déplacement de l'interface.

Ces deux exemples ne sont pas restrictifs, ils sont choisis pour bien montrer l'usage des tenseurs précédents (notamment $\delta\underline{S}/\delta t$) et pour inciter à exploiter les résultats du problème d'inclusion à frontière mobile afin de répondre aux problèmes liés à l'évolution de la microstructure ; ces deux exemples toutefois, comme de nombreuses autres applications, nécessitent que, outre les résultats du chapitre IV, d'autres équations soient mises en oeuvre, notamment celles donnant la loi de comportement qui décrit le mouvement de l'interface.

Bibliographie du chapitre IV

[1] G. Kneer, 1965, Phys.Stat. Sol., 9.

[2] T. Mura, 1973, Phys. Stat. Sol., 15.

[3] N. Laws, 1977, J. Elasticity.

[4] F. Gharhemani, 1977, Mech. Res. Comm., 4 (2).

[5] M. Berveiller, 1978, Thèse d'Etat, Université de Paris 13, France.

[6] J.D. Eshelby, 1961, Prog. Sol. Mech.

[7] O. Fassi-Fehri, 1985, Thèse d'Etat, Université de Metz, France.

CHAPITRE V
APPLICATIONS

V.1. Effet de la taille des grains sur le comportement plastique des polycristaux métalliques

V.1.1. Notions préliminaires

a) Ecrouissage intracristallin

b) Ecrouissage intercristallin

c) Empilement des dislocations

V.1.2. Formulation du problème

a) Equations

b) Cas particulier

c) Loi de comportement W ($\partial\gamma/\partial t$)

V.1.3. Résultats et discussion

V.2. Restitution d'énergie - exemple

Les résultats précédents du problème d'inclusion à frontière mobile se situent dans le cadre assez général de l'évolution d'un champ de déformation inélastique qui s'accompagne simultanément d'un changement de la forme de l'inclusion. Ces résultats peuvent s'appliquer, en ce qui concerne l'évolution des déformations inélastiques, aux cas d'une déformation plastique, d'une transformation de phase, d'une recristallisation, ... où, pour chaque cas, il convient de préciser complémentairement la loi de comportement de l'interface inclusion-matrice.

A titre d'application, nous proposons ici d'examiner le cas où la déformation inélastique est obtenue par glissement plastique.

Cas du glissement plastique

Pour les métaux, la déformation plastique à froid est due essentiellement à des glissements sur des plans cristallographiques et dans des directions bien définies dus au mouvement des dislocations. Dans le cas des métaux C.F.C., il s'agit des plans (111) et des directions <110> ; il existe ainsi douze possibilités géométriques de glissement sur les douze systèmes (111) <110>. Nous utilisons un repère privilégié pour décrire les différentes grandeurs mécaniques associées au mécanisme de glissement ; il s'agit d'un repère directeur [1] attaché au réseau atomique du métal dont l'orientation n'est pas affectée par le seul glissement plastique.

Lorsqu'un glissement γ a eu lieu sur un système de glissement dont la normale unitaire au plan de glissement est n et la direction unitaire de glissement m, la partie plastique du gradient de déplacement total dans l'inclusion s'écrit dans le repère directeur (o, m, n, m $\wedge$ n) ayant pour origine le point o supposé fixe :

$$\beta^p_{ij} = \gamma\, m_i n_j \qquad \text{(V-1)}$$

Pour la déformation plastique on obtient alors :

$$\varepsilon^p_{ij} = \frac{\gamma}{2}\left(m_i n_j + m_j n_i\right) = \gamma\, R_{ij} \qquad \text{(V-2)}$$

en notant $R_{ij} = 1/2\ (m_i n_j + m_j n_i)$

R_{ij} est appelé tenseur d'orientation du système de glissement (m, n).

La cinématique du glissement plastique étant ainsi précisée, nous envisageons deux applications qui montrent comment on peut utiliser la solution fondamentale du problème d'inclusion à

frontière mobile en reprenant les équations du chapitre III et notamment le nouveau tenseur $\delta\underline{S}/\delta t$. La première application éclaircit l'effet de la taille des grains sur le comportement plastique du polycristal. On utilise la théorie de l'empilement des dislocations pour établir la loi de comportement de l'interface inclusion-matrice.

La seconde application met en évidence par un exemple simple (cisaillement d'un ellipsoïde aplati) le fait que le mouvement de l'interface peut être un facteur de relaxation d'énergie.

V.1. Effet de la taille des grains sur le comportement plastique des polycristaux métalliques

V.1.1. Notions préliminaires

Il est expérimentalement démontré que la réponse à un chargement macroscopique d'un polycristal constitué d'un ensemble de grains monocristallins dépend de la taille de ces grains. Pour tenter de mettre en évidence le rôle de la taille des grains dans la déformation plastique des polycristaux, on distingue deux types d'approche possibles :

- La première approche est physique et à l'échelle du grain, elle est donnée par les modèles proposés par Hall [2], Petch [3], Cottrel [4]... ; ils reposent essentiellement sur le calcul des effets de contrainte dans un grain dus à un empilement de dislocations dans un grain voisin déformé par glissement.

D'une façon générale, la plupart des auteurs sont d'accord pour représenter la variation de la limite élastique et de la contrainte d'écoulement σ en fonction de la taille de grain d d'un polycristal par une loi du type :

$$\sigma = \sigma_o(\varepsilon) + K(\varepsilon)\, d^{-n} \qquad \text{(V-3)}$$

$\sigma_o(\varepsilon)$ et $K(\varepsilon)$ sont deux fonctions de la déformation ε et n est une constante. La valeur de la constante n donne lieu à certaines controverses et Hirth [5] retient que la plupart des résultats expérimentaux peuvent être approchés avec une valeur de n comprise entre 1/3 et 1, la valeur 1/2 ayant été proposée au départ par Hall et Petch. D'autres modèles [6] [7] montrent cependant qu'une variation en d^{-1} est aussi acceptable.

L'expérience montre que la fonction $\sigma_0(\varepsilon)$ est toujours croissante et qu'elle a en général une allure parabolique ; dans certains cas il y a une relation linéaire entre σ_0 et ε [8]. La variation de la fonction $K(\varepsilon)$ est plus complexe et tous les cas possibles ont été observés : constante pour le cuivre à la température ordinaire [8] ; proportionnelle à $\varepsilon^{1/2}$ pour le molybdene [9].
Ce type d'approche est d'ordre microscopique car elle tient compte de la structure monocristalline. Cependant elle ne permet pas généralement de remonter au comportement du polycristal. On ne peut effectivement pas procéder de façon simple à des opérations de moyenne pour reconstituer le comportement du polycristal à partir de celui du monocristal sans masquer l'effet de l'empilement des dislocations.

- Au contraire, la deuxième approche (exemples : Taylor [10], Kröner [11], Hill [12]) utilise la solution classique du problème d'inclusion plastique et permet, en se basant sur un procédé d'homogénéisation, de prendre en compte la structure polycristalline dans le comportement du polycristal. L'inconvénient de cette méthode est qu'elle ne tient pas compte de l'effet de la taille des grains : cela est évident pour les modèles de Taylor, Kröner et Hill, du fait que les contraintes internes sont indépendantes de la taille de "l'inclusion" (effet de similitude, les autres grains entourant l'inclusion sont remplacés par un milieu homogène infini).
Pour pallier à cet inconvénient, il serait nécessaire d'introduire le paramètre taille du grain dans le comportement *in situ* du monocristal mais les modèles cités ci-dessus ne s'y prêtent pas facilement.
Le modèle d'inclusion à frontière mobile fournit ici une application intéressante en ce sens que l'information *in situ* relative à la taille du grain est prise en compte facilement par la loi complémentaire du comportement de l'interface ($W = MF^n$) ; cette loi étant construite à l'aide de la théorie de l'empilement des dislocations.
D'un point de vue pratique, nous savons que le comportement du polycristal est principalement conditionné par la répartition des dislocations au sein de chaque grain et aux joints de grains (ceci est vérifié par les études expérimentales et théoriques citées ci-dessus) ; la taille du grain (ou le joint du grain) apparaît alors comme un facteur inévitable puisqu'elle agit directement sur la distribution des dislocations dans le polycristal : la distribution des dislocations conditionne l'écrouissage du polycristal.
Pour illustrer les mécanismes élémentaires régissant l'influence de la taille des grains sur l'écrouissage du polycristal, nous présentons brièvement une analyse physique des différentes sources d'écrouissage à partir de considérations sur la répartition des dislocations dans le poly-

cristal. Cette répartition peut faire apparaître en général trois sous-ensembles de dislocations (Fig. V-1) :

- les dislocations "statistiques" [13] responsables de l'écrouissage intracristallin (a),
- les dislocations "géométriquement nécessaires" [13] responsables de l'écrouissage intercristallin et dessinant le joint du grain (b),
- à une échelle plus fine, le joint de grain étant un obstacle au mouvement des dislocations, la répartition de ces dernières au voisinage du joint est plus complexe (par exemple l'empilement des dislocations). Ceci est à l'origine de ce qu'on appelle l'écrouissage au voisinage du joint de grain (c).

Les équations ci-dessous sont utilisées dans le problème de l'inclusion à frontière mobile pour éclaircir l'effet de la taille des grains sur l'écrouissage polycristallin.

a) Ecrouissage intracristallin

Dans le cas où la déformation plastique est obtenue par le glissement plastique cristallographique provoqué par le mouvement des dislocations, on observe généralement la formation d'une microstructure sous forme de paroi de dislocations limitant des cellules à l'intérieur desquelles la densité de dislocations est beaucoup plus faible.
A une échelle plus fine, les dislocations "statistiques", prises individuellement, proviennent de la déformation plastique elle-même ; leur multiplication par source de Frank-Read et leur mobilité sont directement liées aux interactions entre dislocations mobiles et dislocations immobiles. Ces dislocations sont liées aux incompatibilités de volume I_V.
En fin de compte, l'écrouissage du monocristal résulte de l'ensemble des mécanismes précédents. Diverses modélisations [14] ont été proposées pour décrire les interactions entre les dislocations. Mandel [1] a proposé une approche phénoménologique intéressante pour décrire le comportement du monocristal en utilisant une matrice d'écrouissage $\underline{H}$ (théorie du potentiel plastique multiple). Cette matrice permet de relier la cission critique τ_c sur un système de glissement à l'amplitude de glissement γ sur le même système de glissement. Cette loi d'écrouissage linéaire :

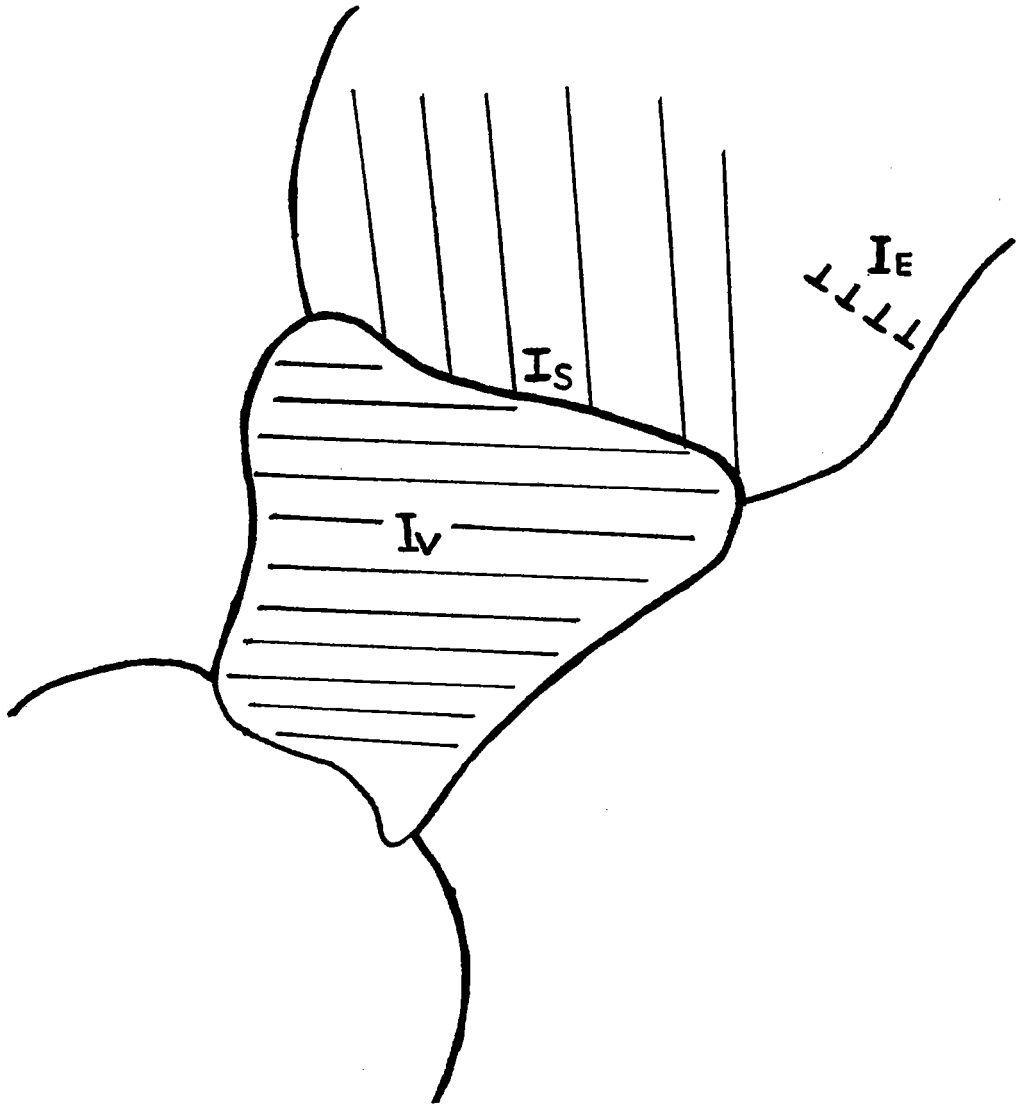


Fig. V-1 : Répartition des dislocations dans un polycristal :

. dislocations statistiques liées aux incompatibilités de volume I_V

. dislocations géométriquement nécessaires liées aux incompatibilités de surface I_S

. empilement des dislocations liées aux incompatibilités et représentant la structure fine du joint de I_S.

$$\tau_c = \tau_o + H\gamma \qquad \text{(V-4)}$$

représente en fait la partie locale de l'écrouissage intracristallin due aux interactions de dislocations statistiques ; τ_o est la cission critique initiale. γ est choisi positif par une orientation convenable de m. H est la composante diagonale représentant l'autodurcissement d'un système de glissement sur lui-même.

La cission réduite τ sur le plan n et dans la direction m vaut :

$$\tau = \sigma_{ij} R_{ij} \qquad \text{(V-5)}$$

Selon la loi de Schmid, un système de glissement est actif lorsque la cission τ y a atteint la valeur critique τ_c :

$$\tau = \tau_c \qquad \text{(V-6)}$$

b) <u>Ecrouissage intercristallin</u>

Du fait des désorientations relatives entre les grains, la déformation plastique <u>uniforme</u> dans chacun d'entre eux est différente ; il en résulte des incompatibilités de surface I_S localisées dans les joints de grains. Ces incompatibilités sont représentées par une répartition géométrique de dislocations situées sur la frontière de séparation des grains ; il s'agit des dislocations interfaciales "géométriquement nécessaires".

L'écrouissage intercristallin provient alors de l'incompatibilité des déformations plastiques.

Kröner a montré clairement la nature superficielle de la densité de dislocations liées à l'incompatibilité plastique $\Delta\underline{\varepsilon}^p$. Les contraintes internes à <u>longue distance</u> associées à cette incompatibilité sont données par la loi d'interaction de Kröner (II-68) pour un milieu isotrope:

$$\sigma^I_{ij} = \Sigma_{ij} + 2\mu\,(1-\beta)\,(E^p_{ij} - \varepsilon^p_{ij}) \qquad \text{(V-7)}$$

Par contre, si on s'intéresse aux effets à <u>courte distance</u>, les incompatibilités Is pourraient être remplacées par des micro-incompatibilités IE associées aux empilements de dislocations à l'intérieur des joints de grains. Ces micro-incompatibilités IE correspondent en fait à la "structure fine" des incompatibilités superficielles Is.

On observe sur la figure (V-2) une répartition de dislocations à l'interface et au voisinage immédiat sous forme d'empilement de dislocations [15].
La taille du grain intervient ici fondamentalement en ce sens que le joint de grain apparaît en tant qu'obstacle au libre parcours des dislocations et de fait organise l'empilement.

c) Empilement des dislocations

La théorie de l'empilement des dislocations est très complexe, nous nous limitons ici à une brève présentation des idées de base pour décrire la répartition de ces dislocations au voisinage du joint de grain, et nous indiquons les résultats importants qui seront utiles dans cette étude.
Soit une source de Frank-Read produisant de nombreuses dislocations situées dans un plan de glissement. Supposons que la première boucle de dislocation créée soit arrêtée au cours de son mouvement vers l'extérieur. Un joint de grain peut, par exemple, constituer l'obstacle. Les dislocations situées derrière la dislocation immobile vont s'empiler sur elle comme si elles étaient incapables de se mouvoir perpendiculairement au plan de glissement (pas de montée). Dans la figure (V-3) nous voyons les positions approximatives supposées d'un groupe de dislocations coins rectilignes parallèles après que la dislocation de tête ait rencontré l'obstacle a priori infranchissable. Les dislocations sont soumises à une contrainte de cisaillement σ due aux répulsions mutuelles des dislocations et à l'action de l'obstacle.
On peut trouver la position des lignes de dislocations parallèles en écrivant que la force résultante agissant sur chaque dislocation est nulle. La somme des forces agissant sur la ième dislocation est :

$$\frac{\mu b^2}{2\pi (1-\nu)} \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{x_i - x_j} - \sigma b = 0 \qquad \text{(V-8)}$$

où n est le nombre de dislocations empilées derrière la dislocation de tête, désignée par l'indice 0, et b est la composante du vecteur de Burgers de chaque dislocation. Il est évident que cette équation ne s'applique pas à la dislocation de tête. L'équation (V-8) a été résolue par Eshelby, Frank et Nabarro [16] par une méthode mathématique très complexe. L'un des plus importants résultats obtenus à partir de la solution de l'équation (V-8) est que la dislocation de tête subit une contrainte due à la présence des autres dislocations et à la contrainte de cisaillement appliquée ;

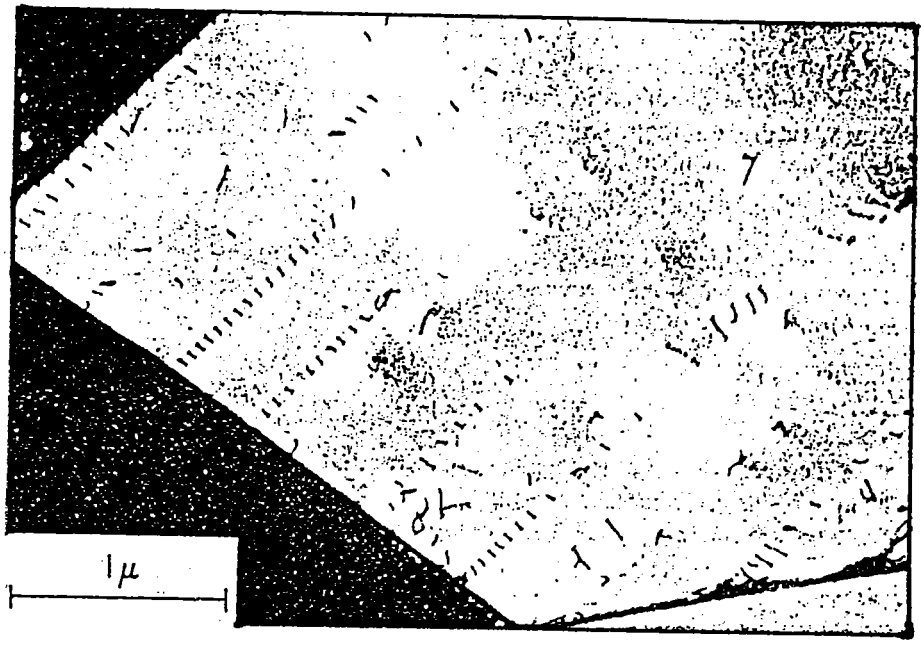


Fig. V-2 : Observation par microscopie électronique des empilements de dislocations au voisi nage de la frontière du grain dans le cuivre.

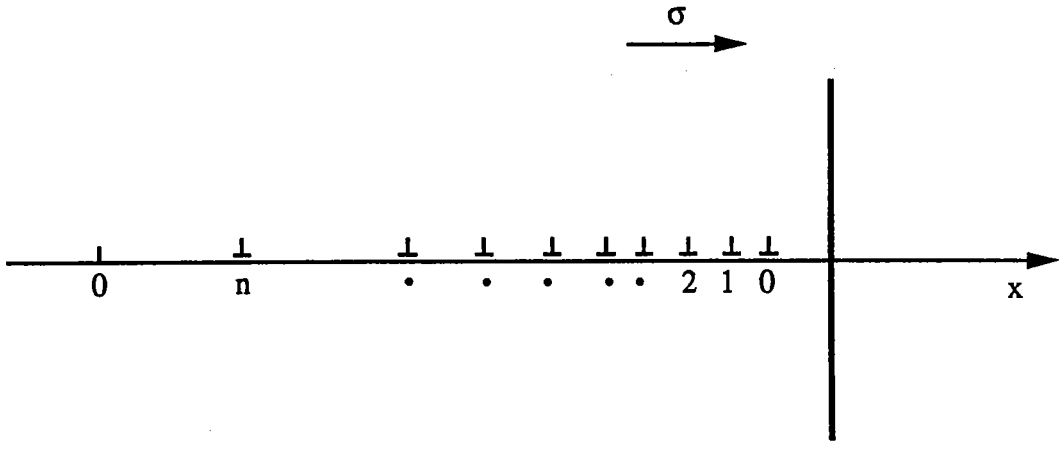


Fig. V-3 : Empilement des dislocations sur l'axe x au voisinage de l'obstacle sous l'effet d'une contrainte de cisaillement σ.

cette contrainte σ^* est égale à :

$$\sigma^* = n\,\sigma \tag{V-9}$$

et la largeur L de l'empilement est donnée par la formule :

$$L = \frac{n\,\mu\,b}{\pi\,(1-\nu)\,\sigma} \tag{V-10}$$

Ce dernier résultat peut être obtenu facilement en utilisant la notion de distribution continue de dislocations.

V.1.2. Formulation du problème

a) Equations

L'écrouissage polycristallin résulte donc à la fois d'un écrouissage intracristallin, d'un écrouissage intercristallin et d'un écrouissage dû à l'empilement des dislocations au voisinage du joint de grain. De l'analyse précédente de ce dernier écrouissage, on peut s'attendre à observer l'effet de la taille du grain sur l'écrouissage global du polycristal.
Pour prendre en compte cette contribution à la structure fine des dislocations interfaciales, nous utilisons le problème de l'inclusion à frontière mobile. Une remarque préalable nous montre que le modèle est bien adapté à cette situation :

- du fait que le joint est un obstacle au mouvement des dislocations, nous avons vu aussi que les dislocations géométriquement nécessaires s'empilent au voisinage du joint. Il vient donc que leur parcours libre moyen diminue quand la déformation plastique augmente : dès lors on voit un grain dont la taille diminue au fur et à mesure que sa déformation plastique augmente simultanément (cette diminution est non homothétique). Ceci est à l'origine de l'influence de la taille des grains sur l'écrouissage polycristallin.
On se place ainsi tout à fait dans le cadre de notre modèle de l'inclusion à frontière mobile où on aura connaissance de la loi de comportement de l'interface donnant la vitesse W de déplacement de l'interface en fonction ici du glissement plastique à l'aide de la théorie d'empilement des dislocations.

On indique tout d'abord ce que deviennent les équations du chapitre III dans le cas du glissement plastique et on associe la loi W ($\partial\gamma/\partial t$).

Rappelons l'expression des taux de contraintes internes donnée dans le chapitre III dans le cas de l'élasticité homogène (III-27) :

$$\frac{\delta \underline{\sigma}^I}{\delta t} = \frac{\delta \underline{\Sigma}}{\delta t} + \underline{C}\,(\underline{S} - \underline{I})\left(\frac{\partial \underline{\varepsilon}^p}{\partial t} - \frac{\partial \underline{E}^p}{\partial t}\right) + \underline{C}\,\frac{\delta \underline{S}}{\delta t}\,(\underline{\varepsilon}^p - \underline{E}^p) \qquad \text{(V-11)}$$

En tenant compte de (V-2) et en prenant $\underline{E}^p = 0$, (V-11) s'écrit :

$$\frac{\delta \underline{\sigma}^I}{\delta t} = \frac{\delta \underline{\Sigma}}{\delta t} + \underline{C}\,(\underline{S} - \underline{I})\,\underline{R}\,\frac{\partial \gamma}{\partial t} + \underline{C}\,\frac{\delta \underline{S}}{\delta t}\,\underline{R}\,\gamma \qquad \text{(V-12)}$$

où $\underline{R}$ est le tenseur d'orientation et γ est l'amplitude de glissement.

A partir de la définition de τ (V-5) et de (V-12), on obtient la variation de la cission réduite :

$$\frac{\delta \tau}{\delta t} = \frac{\delta \underline{\Sigma}}{\delta t}\,\underline{R} + \underline{C}\,(\underline{S} - \underline{I})\,\underline{R}\,\underline{R}\,\frac{\partial \gamma}{\partial t} + \underline{C}\,\frac{\delta \underline{S}}{\delta t}\,\underline{R}\,\underline{R}\,\gamma \qquad \text{(V-13)}$$

Enfin dans le cas de l'élasticité isotrope de constantes élastiques μ et ν, et compte tenu de la décomposition de $\delta\underline{S}/\delta t$ (IV-10), on a :

$$\frac{\delta \tau}{\delta t} = \frac{\delta \underline{\Sigma}}{\delta t}\,\underline{R} + 2\mu\,(\underline{S} - \underline{I})\,\underline{R}\,\underline{R}\,\frac{\partial \gamma}{\partial t} + 2\mu \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial \underline{S}}{\partial a_\alpha}\,\underline{R}\,\underline{R}\,\gamma\,\frac{\partial a_\alpha}{\partial t} \qquad \text{(V-14)}$$

Le dernier terme du membre de droite correspond à la structure fine du joint ; il vient s'ajouter aux contraintes internes trouvées par Kröner correspondant aux incompatibilités interfaciales. Ce terme est à l'origine de la dépendance de la taille des grains avec les contraintes internes.

Pour illustrer cet effet, on se contentera d'expliciter l'équation (V-14) dans un cas particulier du glissement simple et pour une inclusion sphérique.

b) Cas particulier

On considère une inclusion sphérique de centre O et de demi-axes à l'instant initial ($a_1(o) = a_2(o) = a_3(o)$). Soit un repère orthonormé (o, e_1, e_2, e_3), dans lequel x_1, x_2, x_3 désignent les

coordonnées cartésiennes d'un point du milieu (Fig. V-4).

Nous supposons que le glissement plastique γ dans la sphère est obtenu par le système de glissement (m,n) tel que :

$$\vec{m} // \vec{e}_1 \quad \text{et} \quad \vec{n} // \vec{e}_2 \qquad \text{ou } \vec{m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{n} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le tenseur d'orientation $\underline{R}$ pour ce système s'écrit :

$$R_{ij} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{V-15}$$

Supposons que sous l'action d'une cission dans l'inclusion sphérique, des dislocations coins se déplacent sur les plans parallèles de glissement de normale n. Ces dislocations se propagent vers la frontière de la sphère jusqu'au moment où elles sont épinglées par celle-ci ; elles forment alors des empilements de dislocations dans la direction m au voisinage de la frontière de la sphère (Fig. V-5). Au fur et à mesure que la déformation plastique augmente, le nombre de dislocations constituant les empilements augmente ; on observe un allongement de ces derniers. Les dislocations étant épinglées au voisinage de la frontière de la sphère (uniquement dans la direction de glissement m), l'amplitude de déformation plastique diminue dans ces zones ; l'étude de l'état de déformation plastique (systèmes de glissement actif, ...) est très complexe.

Nous supposons que cette déformation plastique est nulle dans ces zones d'empilement des dislocations. Ceci est observé expérimentalement [17] sur une éprouvette polycristalline (Fig. V-6). Nous voyons donc clairement que le parcours des dislocations diminue quand la déformation plastique augmente.

L'accumulation des dislocations s'effectue suivant l'axe e_1, ce qui crée une modification de la forme sphérique initiale de l'interface. On déduit les fonctions $a_1(t)$, $a_2(t)$, $a_3(t)$ respectant les conditions initiales $a_1(o) = a_2(o) = a_3(o)$ de la forme sphérique en utilisant la loi de comportement $W(\partial\gamma/\partial t)$ décrivant le mouvement de l'interface ; il faut s'attendre à trouver les valeurs de a_2 et a_3 invariables ($a_2(t) = a_3(t) = a_1(o)$) et $a_1(t)$ non constant, traduisant ainsi géométriquement l'empilement des dislocations suivant l'axe e_1.

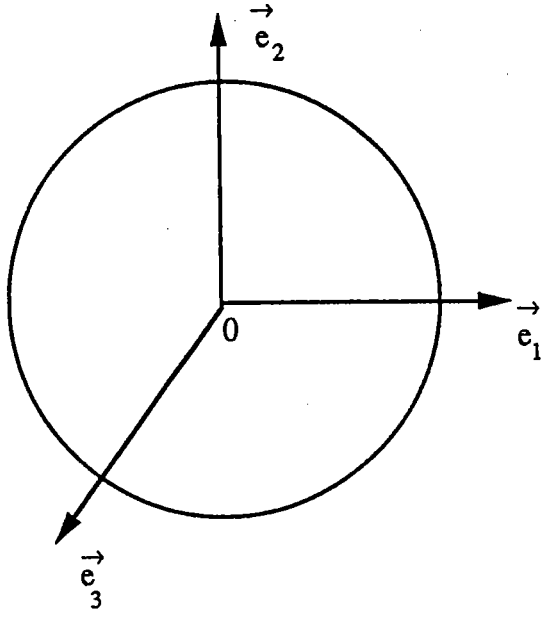


Fig V-4 : Sphère (o, a_1(o)) et repère orthonormé (o, e_1, e_2, e_3).

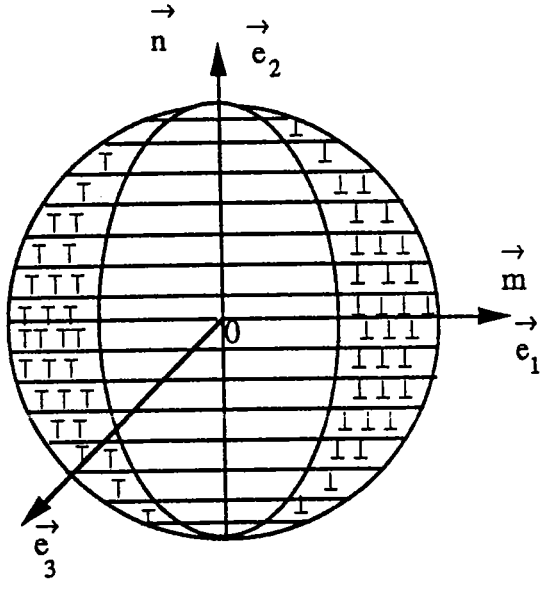


Fig V-5 : Empilement des dislocations sur les plans de normale n au voisinage de la frontière de la sphère ; les dernières dislocations empilées sur ces plans constituent une nouvelle interface.

c) Loi de comportement W ($\partial\gamma/\partial t$)

La vitesse W représente la vitesse géométrique de l'interface dont la structure fine est constituée par l'empilement des dislocations. Si $\underline{\alpha}$ désigne le tenseur densité de ces dislocations, on peut écrire une relation entre $\underline{\alpha}$ et γ par les deux équations (II-7) et (V-1) :

$$\alpha_{ij} = - \epsilon_{ikl}\, \beta^{p}_{jl,k}(\vec{r})$$
$$\beta^{p}_{jl}(\vec{r}) = \gamma\, m_j n_l\, \delta^{o}_{v}(\vec{r})$$

où $\delta^{o}_{v}(r)$ est la distribution d'Heaviside définie en (II-25) et à l'aide de sa dérivée partielle (II-34), on obtient pour α_{ij} :

$$\alpha_{ij} = \epsilon_{ikl}\, m_j n_l\, N_k\, \delta(S) \qquad \text{(V-16)}$$

où N est la normale sortante unitaire sur la surface de la sphère de composantes $N_k = x_k/a_1$.
Pour un empilement de dislocations coins ($m \,//\, e_1$, $n \,//\, e_2$), la seule composante α_{ij} non nulle est α_{31}. On a alors dans le plan $x_3 = 0$:

$$\alpha_{31} = \gamma \frac{x_1}{a_1}\, \delta(S) \qquad \text{(V-17)}$$

On constate dans cette équation, par la présence de la fonction de Dirac $\delta(S)$ de surface, que la structure fine de l'empilement est en fait approximée par une distribution de surface. A chaque progression du cisaillement γ, l'empilement (α_{31}) sur l'axe e_1 construit le nouvel interface. De plus, puisque α_{31} est la seule composante non nulle du tenseur $\underline{\alpha}$, il est clair que le changement de forme de la sphère concerne uniquement la fonction $a_1(t)$ et consiste par l'empilement à un recul de l'interface vers le centre du grain.
On quantifie ce recul en écrivant que le déplacement de l'interface est proportionnel à la densité de dislocations par [18] :

$$\int W_1\, \delta t = - K(\gamma, a_1)\, \alpha_{31} \qquad \text{(V-18)}$$

et les autres composantes W_2, W_3 de W sont nulles (car $a_2 = a_3 = 0$). Ce qui constitue la loi de comportement décrivant le mouvement de l'interface.
En remplaçant α_{31} de (V-17) et en restant sur la surface ($x_3 = 0$) :

$$\int W_1 \, \delta t = - K(\gamma, a_1) \frac{x_1}{a_1} \gamma \tag{V-19}$$

soit en différenciant cette équation :

$$W_1 = - \left(K \frac{\delta\gamma}{\delta t} + \frac{\partial K}{\partial \gamma} \frac{\delta\gamma}{\delta t} \right) \frac{x_1}{a_1} \tag{V-20}$$

ce qui donne W_1 sous la forme :

$$W_1 = - F(\gamma, a_1) \frac{x_1}{a_1} \frac{\delta\gamma}{\delta t} \tag{V-21}$$

Il convient d'identifier l'expression de W_1 donnée par (IV-1) :

$$W_1 = \frac{\delta a_1}{\delta t} \frac{x_1}{a_1}$$

de sorte que :

$$\frac{\delta a_1}{\delta t} = - F(\gamma, a_1) \frac{\delta\gamma}{\delta t} \tag{V-22}$$

La forme de la fonction $F(\gamma, a_1)$ est explicitée par la théorie de l'empilement des dislocations [16] qui reprend la formule (V-10) de la longueur de l'empilement <u>sur l'axe e_1</u> :

$$L = \frac{n \mu b}{\pi (1 - \nu) \sigma}$$

Le nombre de dislocations de l'empilement dépend du cisaillement γ et de la distance p entre les lignes de glissement [19] :

$$\gamma = \frac{n b}{p} \tag{V-23}$$

On écrit L en fonction de γ puis par différenciation :

$$\frac{\delta L}{\delta t} = \frac{\mu p}{\pi (1 - \nu) \sigma} \frac{\delta\gamma}{\delta t} \tag{V-24}$$

Or l'incrément de la longueur de l'empilement n'est autre que le recul de l'interface sur l'axe e_1 :

$$\frac{\delta L}{\delta t} = - \frac{\delta a_1}{\delta t} \qquad \text{(V-25)}$$

d'où en comparant les équations (V-22), (V-24) et (V-25) on tire F :

$$F = \frac{\mu\, p}{\pi\,(1 - \nu)\,\sigma} \qquad \text{(V-26)}$$

Par exemple, pour un métal de structure C.F.C., on a approximativement $\mu/\sigma \approx 10^3$ et $p \approx 0.1$ µm de sorte que la loi décrivant le mouvement de l'interface s'écrit finalement :

$$\frac{\delta a_1}{\delta t} = - \frac{10^2}{\pi\,(1 - \nu)} \frac{\delta \gamma}{\delta t} \qquad (\mu m) \qquad \text{(V-27)}$$

avec pour notre cas :

$a_2(t) = a_1(o)$

$a_3(t) = a_1(o)$

et le champ de vitesse W s'écrit alors (IV-1) :

$$W = \begin{cases} W_1 = - \dfrac{10^2}{\pi\,(1 - \nu)} \dfrac{x_1}{a_1} \dfrac{\delta \gamma}{\delta t} \\ W_2 = 0 \\ W_3 = 0 \end{cases} \qquad \text{(V-28)}$$

Immédiatement on peut déduire le tenseur $\delta \underline{S}/\delta t$ (IV-10) :

$$\frac{\delta \underline{S}}{\delta t} = \frac{\partial \underline{S}}{\partial a_1} \frac{\delta a_1}{\delta t} \qquad \text{(V-29)}$$

où $\partial \underline{S}/\partial a_1$ est déterminé en considérant la transformation d'une sphère en un ellipsoïde (Fig V-7) :

$a_1(o) \rightarrow a_1(t)$

$a_2(o) = a_1(o) \rightarrow a_1(o)$

$a_3(o) = a_1(o) \rightarrow a_1(o)$

ce qui a été donné en IV.3.1.b.

La variation de la cission réduite (V-14) s'écrit donc en tenant compte de (V-15) et (V-29) :

$$\frac{\delta\tau}{\delta t} = \frac{\delta\Sigma}{\delta t} - \mu\,(1 - \beta)\,\frac{\partial\gamma}{\partial t} + 2\,\mu\,\frac{\partial S}{\partial a_1}\,\gamma\,\frac{\partial a_1}{\partial t} \qquad \text{(V-30)}$$

où

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta t} = \frac{\delta\Sigma_{ij}}{\delta t}\,R_{ij}$$

$$\beta = \frac{2}{15}\,\frac{(4 - 5\,\nu)}{(1 - \nu)}$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = \frac{\partial S_{1212}}{\partial a_1} = \frac{\partial S_{1221}}{\partial a_1} = \frac{\partial S_{2112}}{\partial a_1} = \frac{\partial S_{2121}}{\partial a_1} = \frac{-5 + 7\,\nu}{105\,(1-\nu)\,a_1} \qquad \text{(V-31)}$$

La formule (V-30) exprime la variation de la cission réduite en fonction de la contrainte appliquée, de la variation du glissement plastique et simultanément du changement de forme de l'inclusion.

A partir de cette équation, on met en évidence l'effet de la taille du grain sur l'écrouissage polycristallin dans la discussion suivante.

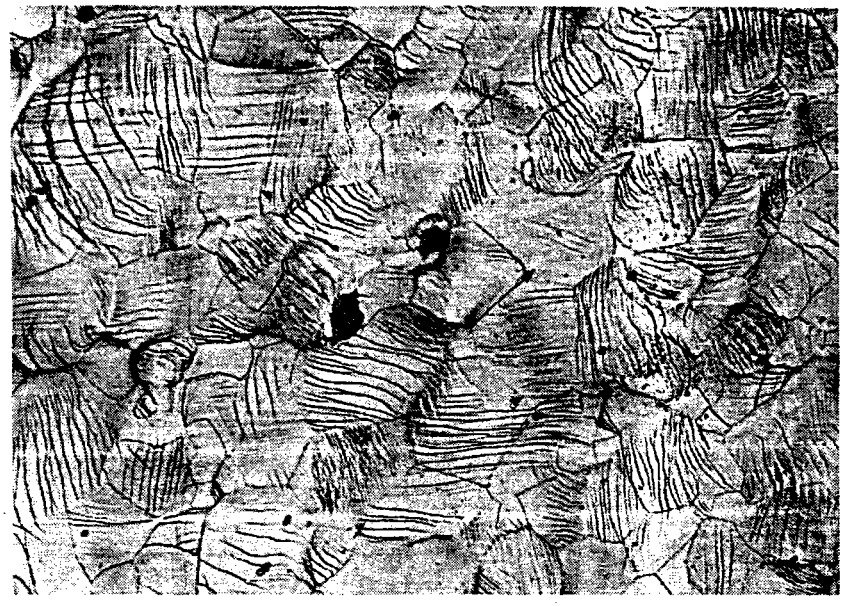


Fig V-6 : Eprouvette polycristalline de fer déformée de 15% par traction, aspects des lignes de glissement (x 150).

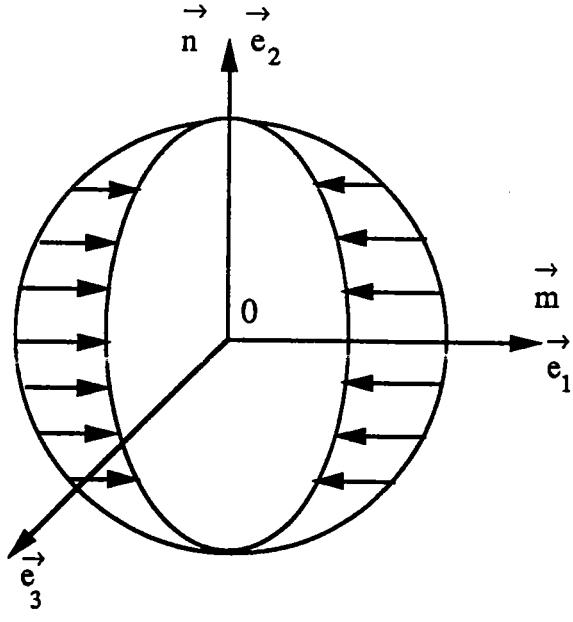


Fig V-7 : Changement de la forme de la sphère en un ellipsoïde suivant la direction e_1 :

a_1 (o) $\rightarrow$ a_1 (t)

a_2 (o) $\rightarrow$ a_1 (o)

a_3 (o) $\rightarrow$ a_1 (o).

V.1.3. Résultats et discussion

Pour introduire l'effet de la taille du grain sur l'écrouissage du polycristal, nous écrivons la loi de Schmid (V-6) sous la forme différentielle :

$$\frac{\delta\tau}{\delta t} = \frac{\delta\tau_c}{\delta t} = H\,\frac{\delta\gamma}{\delta t} \qquad \text{(V-32)}$$

et nous obtenons alors, compte tenu de l'expression de $\delta\tau/\delta t$ (V-30) :

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta t} - \mu\,(1-\beta)\,\frac{\partial\gamma}{\partial t} + 2\mu\,\frac{\partial S}{\partial a_1}\,\gamma\,\frac{\partial a_1}{\partial t} = H\,\frac{\delta\gamma}{\delta t} \qquad \text{(V-33)}$$

Ceci nous permet d'aboutir au taux de contrainte appliquée en tenant compte des équations (V-27) et (V-31) :

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta t} = \left\{ H + \mu(1-\beta) + 2\mu\,\frac{(-5+7\nu)}{105\,(1-\nu)\,a_1}\,\gamma\,F(\gamma,a) \right\}\frac{\delta\gamma}{\delta t} \qquad \text{(V-34)}$$

Pour $\nu = 1/3$ et la valeur de F donnée par (V-26), nous avons pour $\gamma = 0.005$:

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta t} = \left\{ H + \frac{\mu}{2} - \mu\,\frac{0.02}{a_1} \right\}\frac{\delta\gamma}{\delta t} \qquad (a_1 \text{ en } \mu\text{m}) \qquad \text{(V-35)}$$

et l'écrouissage du polycristal s'obtient finalement par :

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta\gamma} = H + \frac{\mu}{2} - \mu\,\frac{0.02}{a_1} \qquad (a_1 \text{ en } \mu\text{m}) \qquad \text{(V-36)}$$

C'est l'équation de base qui fait apparaître trois termes correspondant aux trois sources d'écrouissage du polycristal, décrites précédemment :

- le premier terme H représente l'écrouissage intracristallin (V.1.1.a.) ; il peut être évalué à partir des mesures d'écrouissage ; sa valeur correspond à celle obtenue dans le stade II des monocristaux C.F.C, soit $\mu/250$;

- le deuxième terme $\mu/2$ représente l'écrouissage intercristallin (V.1.1.b.) ; il est dû aux très fortes contraintes internes telles qu'elles sont prévues par le modèle de Kröner du fait d'une accommodation purement élastique. Ce terme est tempéré par un facteur d'accommodation α [20] pour tenir compte d'une accommodation élastoplastique ; l'ordre de grandeur de α est 0.01.
Les deux premiers termes sont indépendants de la taille du grain.
- le dernier terme $\mu\ 0.02/a_1$ représente l'écrouissage (V.1.1.c.) dû aux micro-incompatibilités correspondant à la structure fine du joint de grain constituée par les empilements de dislocations. C'est là qu'intervient la taille du grain en tant que paramètre agissant sur les contraintes internes et sur l'écrouissage du polycristal. Le signe de ce terme dépend de celui de $(\underline{\varepsilon}^p - \underline{E}^p)$ (voir V-7).

En tenant compte des considérations précédentes ($\alpha = 0.01$ et $H = \mu/250$), l'équation (V-36) s'écrit alors :

$$\frac{\delta\Sigma}{\mu\delta\gamma} = \frac{1}{250} + \frac{1}{200} - \frac{0.04}{D} \qquad (D_1 \text{ en } \mu\text{m}) \qquad \text{(V-37)}$$

D est la taille du grain ($D = 2a_1$).
Le terme $\delta\Sigma/\mu\delta\gamma$ représente pour une même déformation de cisaillement le rapport de la variation de contrainte de cisaillement du polycristal par la variation de contrainte de cisaillement du monocristal ; il constitue une mesure de l'écrouissage du polycristal tenant compte au niveau du grain des trois sources d'écrouissage précédentes.
Ceci nous amène à tracer les trois courbes caractéristiques de ces trois sources d'écrouissage :
courbe a : écrouissage intracristallin
courbe b : écrouissage intercristallin
courbe c : écrouissage dû à l'empilement des dislocations
sur la figure V-8 représentant en abscisse la taille de grain D et en ordonnée le terme $\delta\Sigma/\mu\delta\gamma$.
Il est clair que les courbes a et b sont indépendantes de la taille du grain. Par contre, la courbe c est une fonction décroissante en D^{-1} ; elle exprime une diminution de l'écrouissage (c) quand la taille du grain augmente. On distingue deux domaines d'évolution de cet écrouissage suivant la valeur de D :

- lorsque D est inférieur à 10 µm, la grandeur de l'écrouissage (c) est importante et nettement supérieure aux deux autres (a) et (b). Dans ce cas, on a une influence importante de la taille du grain sur l'écrouissage du polycristal ; la contribution associée l'emporte sur celles de l'écrouissage intracristallin et intercristallin ;

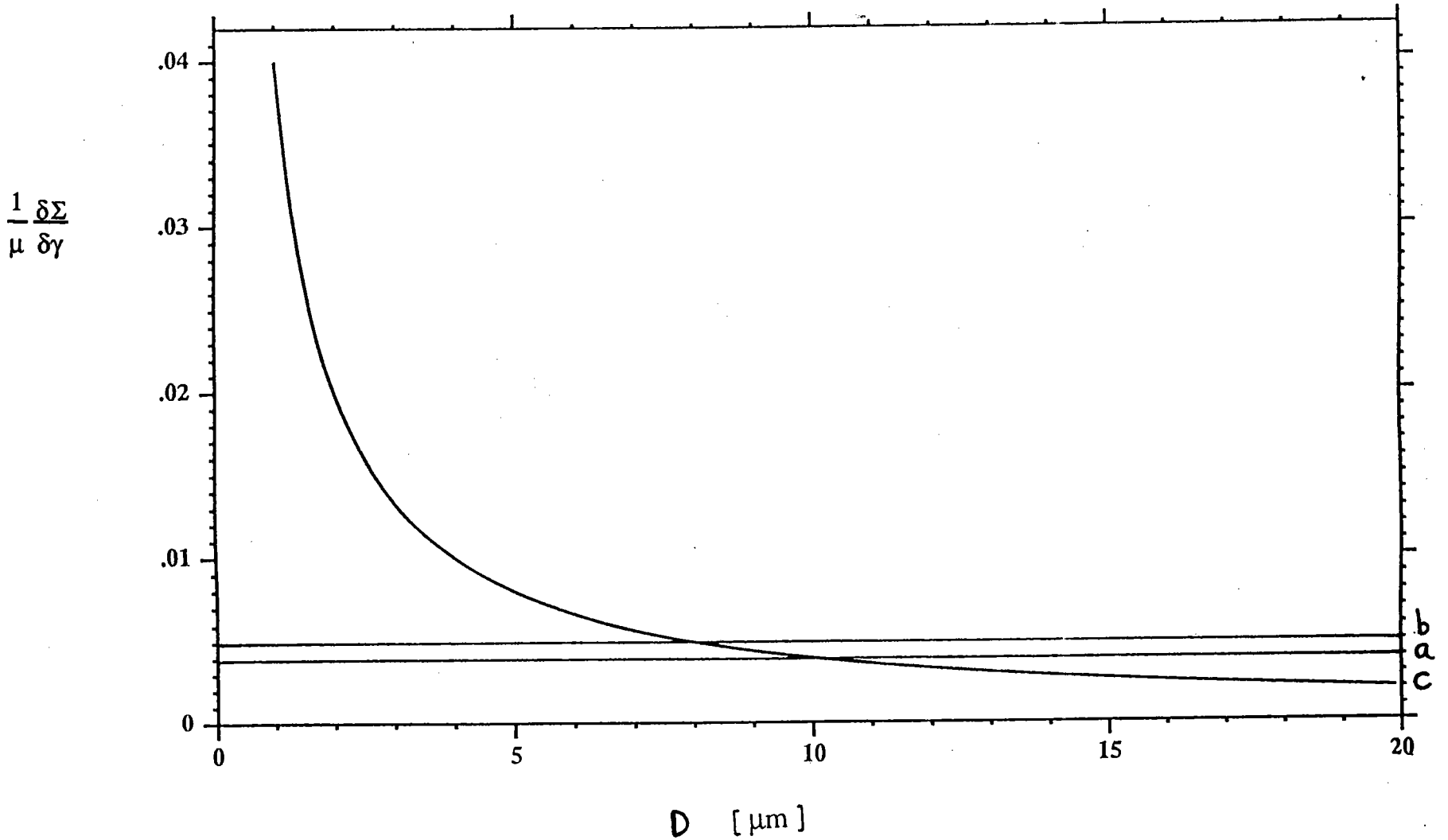


Fig V-8 : Influence de la taille du grain D sur les trois termes d'écrouissage de l'équation (V-37) :

a - écrouissage intracristallin

b - écrouissage intercristallin

c - écrouissage dû à l'empilement des dislocations.

- lorsque D est supérieur à 10 μm, l'écrouissage (c) devient de plus en plus faible devant les autres écrouissages (a) et (b) (il tend vers zéro lorsque D devient très grand). Alors dans ce cas-là, l'influence de la taille du grain sur l'écrouissage du polycristal est négligeable.

On montre ainsi que l'écrouissage dû à la structure fine du joint (empilement des dislocations) devient prépondérant dans le cas de grains fins : pour D < 10 μm, il ne faut plus considérer l'interface comme une distribution purement surfacique de dislocations car cela masquerait la structure fine du joint qui, dans le cas de grains fins, a une contribution importante à l'écrouissage polycristallin.

Ces constatations sont tout à fait cohérentes avec les observations expérimentales [6] qui ont également montré l'existence d'une valeur "critique" de la taille du grain (10 μm) et constaté les mêmes effets de la taille du grain (Fig. V-9).
On peut traduire cela très simplement en disant qu'un grain fin est nettement moins "souple" (moindre accommodation) qu'un gros grain et confère en conséquence au polycristal une limite d'écoulement plus grande. En bref, les résultats ainsi obtenus mettent bien en évidence le fait pratique très important qu'à <u>un affinement du grain</u> correspond <u>une augmentation de la limite d'écoulement</u>.
L'utilisation de la solution du problème de l'inclusion à frontière mobile permet donc de rendre compte de l'effet de la taille du grain ; on a pu incorporer la structure fine du joint de grain en tant qu'information *in situ* donnée par la loi de comportement de l'interface ; cela peut constituer une perspective intéressante pour les méthodes d'homogénéisation telles que les méthodes self-consistentes pour décrire l'effet de la taille des grains sur le comportement macroscopique du polycristal.

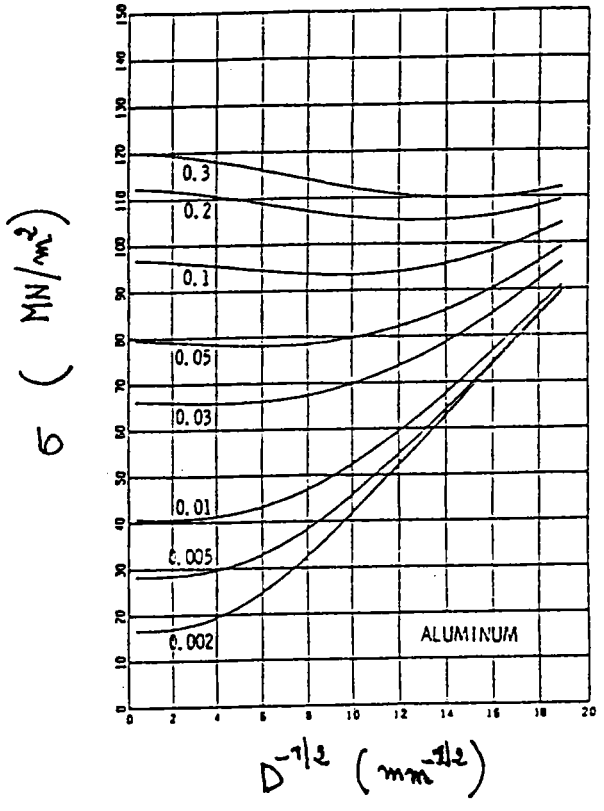


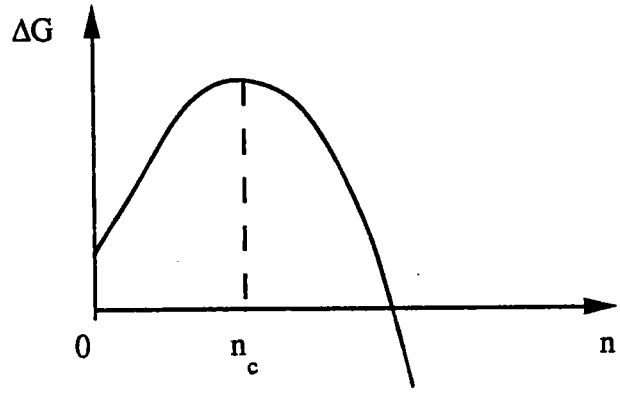
Fig V-9 : Dépendance de la contrainte d'écoulement σ en fonction de la taille des grains D pour différentes valeurs de déformation.

V.2. Restitution d'énergie - exemple

Plusieurs processus (nucléation, croissance, coalescence,...) se produisant au cours de la transformation d'un matériau font partie des exemples d'applications de la notion générale d'énergie de déformation.

Comme l'a signalé Eshelby [21], un calcul de la variation d'énergie fournit en général par une approche thermodynamique, une réponse à la question de savoir si une déformation inélastique peut se produire.

Très récemment, Mura *et al.* [22] se sont directement inspirés des travaux d'Eshelby et ont proposé un modèle permettant quantitativement de prédire l'initiation d'une microfissure de fatigue. Le principe de la méthode est basé sur le calcul à chaque cycle de la différence d'énergie libre $\Delta G = G_2 - G_1$ entre un état initial (G_1) correspondant à une bande fine de cisaillement formée par une distribution dipolaire de dislocations et un état final (G_2) correspond à une microfissure qui serait obtenue par ouverture de la microbande initiale. Ils montrent que la variation de ΔG par rapport au nombre de cycles n est positive ($\partial\Delta G/\partial n > 0$) au début des cycles de fatigue puis atteint un maximum au bout d'un nombre critique n_c de cycles de chargement (Fig. ci-dessous).



Au-delà de n_c, il y a instabilité de la microbande qui se transforme en une microfissure ; le terme $\partial\Delta G/\partial n$ étant alors négatif : le changement de signe de $\partial\Delta G/\partial n$ indique que par une restitution d'énergie on a atteint un seuil de transformation.

Le calcul de ΔG fait en toute rigueur appel au calcul de l'énergie élastique W et de l'énergie potentielle liée au chargement extérieur.

L'exemple que nous traitons ci-dessous est plus restrictif puisque nous nous intéressons uniquement au cas de la variation de l'énergie élastique mais cette restriction ne retire en rien son intérêt car, à partir de la solution du problème de l'inclusion à frontière mobile, nous mettons en éviden-

ce le phénomène de restitution d'énergie élastique par le changement de forme de l'inclusion (on peut d'ailleurs suggérer un chargement constant induisant le changement de forme de l'inclusion, ce qui fait que le calcul de ΔG revient à celui de W [21]. Le cas général ferait intervenir en fait le calcul de l'énergie potentielle totale où apparaîtraient de plus des termes d'interactions avec les conditions de chargement) .

A titre d'illustration, nous proposons le cas simple d'un ellipsoïde aplati (penny-shape) de demi-axes $a_1 = a_2 >> a_3$ dans une matrice soumise à une contrainte macroscopique constante de cisaillement ; on place l'axe 2 de l'ellipsoïde en alignement avec la direction de cisaillement. L'élasticité est homogène et isotrope de constantes élastiques μ et ν.

Nous reprenons les équations générales du chapitre III et nous regardons ce qu'elles deviennent dans ce cas particulier d'une inclusion aplatie cisaillée suivant son axe principal. Nous rappelons donc la variation de l'énergie élastique par unité de volume (III-30) en l'absence d'un chargement extérieur :

$$\frac{\delta W}{\delta t} = -\frac{1}{2}\underline{C}\,(\underline{S} - \underline{I})\,\frac{\delta \Delta \underline{\varepsilon}^p}{\delta t}\,\Delta \underline{\varepsilon}^p - \frac{1}{2}\underline{C}\,(\underline{S} - \underline{I})\,\Delta \underline{\varepsilon}^p\,\frac{\delta \Delta \underline{\varepsilon}^p}{\delta t} - \frac{1}{2}\underline{C}\,\frac{\delta S}{\delta t}\,\Delta \underline{\varepsilon}^p\,\Delta \underline{\varepsilon}^p \qquad \text{(V-38)}$$

C'est la formule générale donnant la variation de l'énergie élastique qui résulte d'une part de l'évolution des déformations plastiques (premier terme) et, d'autre part de l'évolution de la forme de l'inclusion par le tenseur $\delta\underline{S}/\delta t$ (deuxième terme).

Pour examiner le sens de variation de chaque contribution, on explicitera l'équation (V-38) dans le cas particulier d'un cisaillement et d'une inclusion aplatie.

Cas particulier

A l'instant initial, l'inclusion aplatie est de centre o et de demi-axes $a_1(o) = a_2(o) >> a_3(o)$. Les axes du repère orthonormé (o, e_1, e_2, e_3) sont confondus avec les directions des axes propres de l'inclusion aplatie.

Nous supposons que le cisaillement se produit suivant la direction m et sur des plans de normale n tels que (Fig. V-10) :

$$\vec{m} // \vec{e}_2 \quad \text{et} \quad \vec{n} // \vec{e}_3 \qquad \text{ou} \qquad \vec{m}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{n}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

de sorte que le tenseur de déformation $\Delta\underline{\varepsilon}^p$ s'écrit :

$$\Delta\varepsilon^p_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta\varepsilon^p_{23} \\ 0 & \Delta\varepsilon^p_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

L'équation (V-38) se réduit alors dans le cas isotrope :

$$\frac{\delta W}{\delta t} = 2\mu\,(1 - 2\,S_{2323})\,\Delta\varepsilon^p_{23}\,\frac{\delta\Delta\varepsilon^p_{23}}{\delta t} - 4\mu\,\frac{\delta S_{2323}}{\delta t}\,(\Delta\varepsilon^p_{23})^2 \qquad \text{(V-39)}$$

Pour expliciter le terme $\delta S_{2323}/\delta t$ dans cette équation, nous supposons que le changement de forme de l'inclusion s'effectue uniquement dans la direction de glissement e_2 (Fig. V-11) ; nous avons alors d'après (IV-10) :

$$\frac{\delta S_{2323}}{\delta t} = \frac{\partial S_{2323}}{\partial a_2}\,\frac{\delta a_2}{\delta t} \qquad \text{(V-40)}$$

où $\partial S_{2323}/\partial a_2$ est déterminé en considérant la transformation d'une inclusion aplatie en une autre inclusion aplatie :

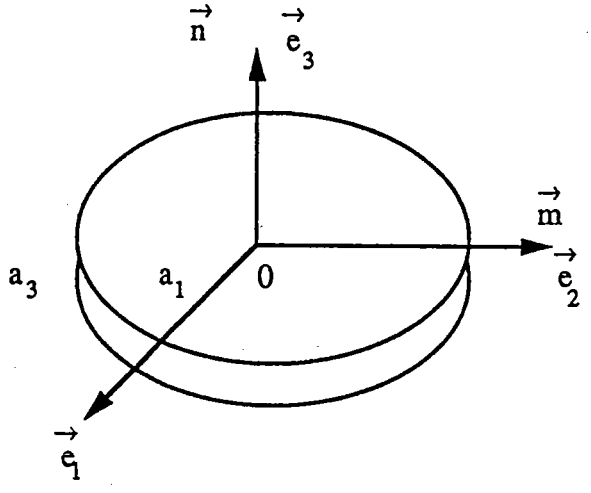


Fig V-10 : Inclusion aplatie ($a_1 = a_2 >> a_3$) dont les axes principaux définissent le repère orthonormé.

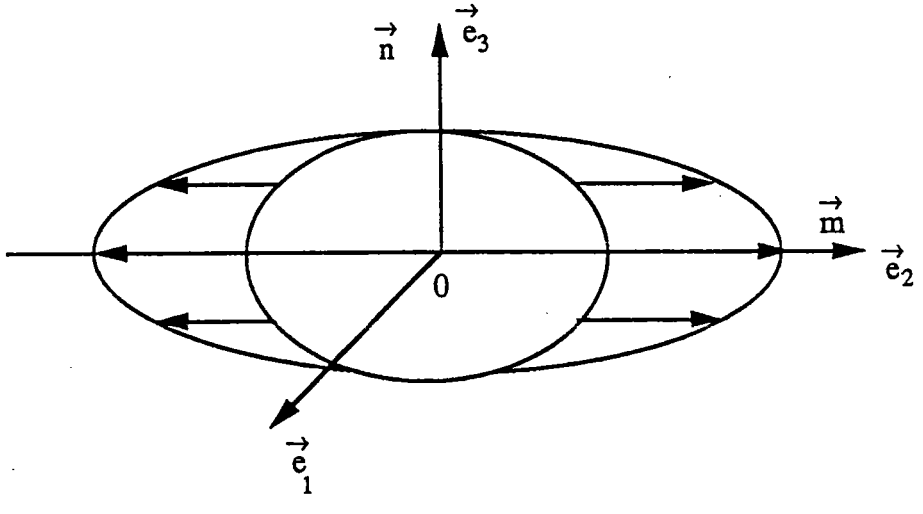


Fig V-11 : Changement de la forme de l'inclusion aplatie en un autre ellipsoïde suivant la direction e_2 :

$a_1(o) \rightarrow a_1(o)$

$a_2(o) \rightarrow a_2(t)$

$a_3(o) \rightarrow a_3(o)$.

$a_1(o) \rightarrow a_1(o)$

$a_2(o) \rightarrow a_2(t)$

$a_3(o) \rightarrow a_3(o)$

ce qui a été donné en IV.3.2.c.

Nous avons alors pour les tenseurs S_{2323} et $\partial S_{2323}/\partial a_2$:

$$S_{2323} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{(\nu - 2)\,\pi\, a_3}{4\,(1-\nu)\, a_1}\right)$$

$$\frac{\partial S_{2323}}{\partial a_2} = \frac{(4+\nu)\,\pi\, a_3}{32\,(1-\nu)\, a_1^2} \qquad \text{(V-41)}$$

La variation de l'énergie élastique (V-39) s'écrit alors en tenant compte de (V-40) et (V-41) :

$$\frac{\delta W}{\delta t} = \frac{\mu\,(2-\nu)\,\pi a3}{2\,(1-\nu)\, a_1}\,\Delta\varepsilon^p_{23}\,\frac{\delta\Delta\varepsilon^p_{23}}{\delta t} - \frac{\mu\,(4+\nu)\,\pi\, a_3}{8\,(1-\nu)\, a_1^2}\,(\Delta\varepsilon^p_{23})^2\,\frac{\delta a_2}{\delta t} \qquad \text{(V-42)}$$

On a généralement pour ν :

$$-1 < \nu < 1/2$$

alors pour les coefficients de l'équation (V-42) :

$$\frac{(2-\nu)}{2\,(1-\nu)} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{(4+\nu)}{8\,(1-\nu)} > 0$$

Examinons les deux termes de droite de l'équation (V-42) :

le premier terme ($\mu(2-\nu)\pi a_3/[2(1-\nu)a_1]\ \Delta\varepsilon^p_{23}\ \delta\Delta\varepsilon^p_{23}/\delta t$) est toujours <u>positif</u> au cours du cisaillement ($\Delta\varepsilon^p_{23} > 0$, $\delta\Delta\varepsilon^p_{23}/\delta t > 0$) et traduit une phase de <u>stockage</u> d'énergie élastique.

Le deuxième terme ($-\ \mu(4+\nu)\pi a_3/[8(1-\nu)a^2_1]\ (\Delta\varepsilon^p_{23})^2\ \delta a_2/\delta t$) est toujours <u>négatif</u> pour une inclusion de plus en plus effilée dans la direction du glissement (Fig V-11) :

$$a_1(o) = a_2(o) >> a_3(o) \rightarrow \frac{\delta a_1}{\delta t} = 0\ ,\ \frac{\delta a_2}{\delta t} > 0\ ,\ \frac{\delta a_3}{\delta t} = 0$$

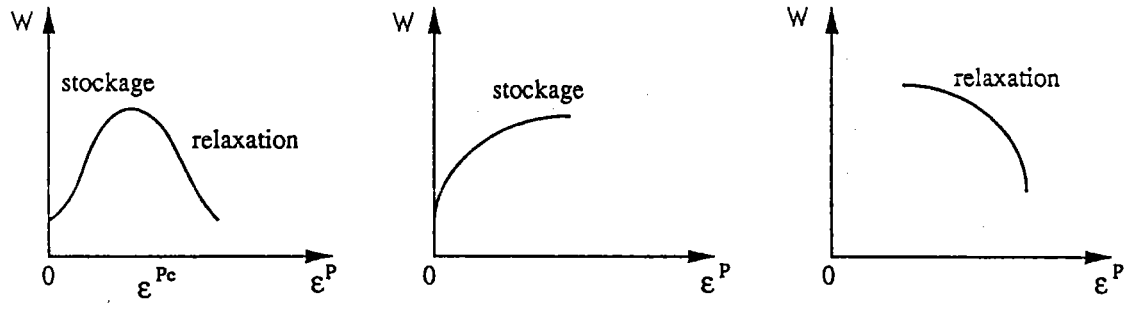
On obtient là une phase de <u>restitution</u> (relaxation ou adoucissement) d'énergie élastique.

On met ainsi en évidence une compétition entre un processus de stockage d'énergie (l'écrouissage

qui a lieu au cours du cisaillement plastique) et un processus de restitution d'énergie (par changement de forme de l'inclusion).

Le résultat de cette compétition est donné par la valeur et le signe de $\delta W/\delta t$ résultante ; on l'obtient dans la mesure où on connaît la loi de comportement de l'interface qui donnerait le changement de forme de l'inclusion en fonction de l'évolution de la déformation plastique.

Nous ne disposons pas actuellement de cette loi de comportement ; quoiqu'il en soit, la formule (V-42) est significative en ce sens qu'elle permet de mettre en évidence l'existence ou pas d'un seuil pour lequel on peut observer un maximum de variation d'énergie suivant différents cas de figures :



Si on se réfère aux travaux d'Eshelby, ces cas de figures, exploités par une approche thermodynamique, peuvent être utiles à indiquer l'occurence ou pas d'une instabilité liée par exemple à une transformation martensitique, à la création d'une fissure ou peut-être dans notre cas à l'amorce de la création d'une bande de cisaillement (par une augmentation subite de a_2).

Une autre information intéressante que l'on peut déduire de la formule (V-38) consiste à savoir dans quel sens va évoluer l'énergie élastique suivant que l'on observe une croissance de l'inclusion selon l'axe 1, 2 ou 3. Cela peut être indiqué en calculant le gradient de l'énergie par rapport aux paramètres a_1, a_2, a_3 ; respectivement donc :

$$\frac{\partial W}{\partial a_1}, \frac{\partial W}{\partial a_2}, \frac{\partial W}{\partial a_3}$$

Par exemple si $\partial W/\partial a_1 < 0$ alors cela signifie une diminution d'énergie lorsque a_1 augmente (plus généralement, pour un paramètre ξ quelconque dont dépend W, Eshelby a montré que $\partial W/\partial \xi$ définit la force thermodynamique agissant sur l'inclusion et associée aux variations de ξ).

Pour calculer ces dérivations partielles, nous reprenons l'équation (V-38) et en tenant compte de (IV-10) pour un changement quelconque de l'ellipsoïde ($\delta a_\alpha/\delta t \neq 0$, $\alpha = 1,2,3$) :

$$\frac{\delta W}{\delta t} = -\frac{1}{2}\underline{C}(\underline{S}-\underline{I})\,\Delta\underline{\varepsilon}^p\frac{\delta\Delta\underline{\varepsilon}^p}{\delta t} - \frac{1}{2}\underline{C}(\underline{S}-\underline{I})\,\frac{\delta\Delta\underline{\varepsilon}^p}{\delta t}\,\Delta\underline{\varepsilon}^p - \frac{1}{2}\underline{C}\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial\underline{S}}{\partial a_\alpha}\frac{\delta a_\alpha}{\delta t}\,\Delta\underline{\varepsilon}^p\Delta\underline{\varepsilon}^p \qquad \text{(V-43)}$$

ce qui doit être identique selon la règle de composition des dérivées partielles à :

$$\frac{\delta W}{\delta t} = \frac{\partial W}{\partial \Delta \underline{\varepsilon}^p} \frac{\delta \Delta \underline{\varepsilon}^p}{\delta t} + \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial W}{\partial a_\alpha} \frac{\delta a_\alpha}{\delta t} \tag{V-44}$$

L'identification entre (V-43) et (V-44) permet l'accès au calcul de $\partial W/\partial a_\alpha$:

$$\frac{\partial W}{\partial a_\alpha} = -\frac{1}{2} \underline{C} \frac{\partial \underline{S}}{\partial a_\alpha} \Delta \underline{\varepsilon}^p \, \Delta \underline{\varepsilon}^p \tag{V-45}$$

A titre d'illustration, nous reprenons l'exemple précédent du cisaillement dans un milieu isotrope et d'une inclusion aplatie ; nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial a_1} &= -4\mu \, (\Delta \varepsilon^p_{23})^2 \frac{\partial S_{2323}}{\partial a_1} \\ \frac{\partial W}{\partial a_2} &= -4\mu \, (\Delta \varepsilon^p_{23})^2 \frac{\partial S_{2323}}{\partial a_2} \\ \frac{\partial W}{\partial a_3} &= -4\mu \, (\Delta \varepsilon^p_{23})^2 \frac{\partial S_{2323}}{\partial a_3} \end{aligned} \tag{V-46}$$

Les composantes $\partial S_{2323}/\partial a_\alpha$ sont données au paragraphe IV.3.1.c. ; nous les rappelons :

$$\frac{\partial S_{2323}}{\partial a_1} = \frac{(4-5\nu)\,\pi a_3}{32(1-\nu)a_1^2} \quad , \quad \frac{\partial S_{2323}}{\partial a_3} = \frac{(-2+\nu)\,\pi}{8(1-\nu)\,a_1} \tag{V-47}$$

et $\partial S_{2323}/\partial a_2$ est donné en (V-41).

On obtient finalement :

$$\frac{\partial W}{\partial a_1} = - \mu \, (\Delta\varepsilon^p)^2 \, \frac{(4-5\nu)\, \pi a_3}{8\,(1-\nu)\, a_1^2}$$

$$\frac{\partial W}{\partial a_2} = - \mu \, (\Delta\varepsilon^p)^2 \, \frac{(4+\nu)\, \pi a_3}{8\,(1-\nu)\, a_1^2}$$

$$\frac{\partial W}{\partial a_3} = - \mu \, (\Delta\varepsilon^p)^2 \, \frac{(-2+\nu)\, \pi}{2\,(1-\nu)\, a_1}$$

ce qui amène plusieurs remarques ($-1 < \nu < 1/2$) :

. $\partial W/\partial a_1 < 0$: il y a une relaxation d'énergie lorsque a_1 augmente,

. $\partial W/\partial a_2 < 0$: il y a également relaxation d'énergie lorsque a_2 augmente,

. $\partial W/\partial a_2 \approx 2\, \partial W/\partial a_1$ ce qui signifie que la relaxation est plus forte suivant a_2 qui n'est autre que le sens de glissement et qui, de fait, suggère un effilement préférentiel de l'inclusion suivant le cisaillement.

. $\partial W/\partial a_3 > 0$: l'épaississement de l'inclusion dans une direction normale au plan de cisaillement traduit une augmentation d'énergie élastique. Cela est cohérent avec les observations par exemple de plaquettes de martensites qui présentent [23] une énergie minimale pour une forme très mince ($a_3/a_1 \rightarrow 0$).

On montre ainsi par des considérations thermodynamiques, comme le souligne Eshelby, que le calcul de la variation d'énergie élastique peut être utile dans la théorie de la transformation martensitique, de l'initiation d'une fissure ou d'une bande de cisaillement ; l'aspect nouveau concerne surtout le fait que le problème d'inclusion à frontière mobile nous permet de mettre en évidence l'influence du changement de forme de l'inclusion sur le processus de stockage ou de relaxation d'énergie. Cela offre de nombreuses perspectives pour les calculs relatifs à l'évolution et à la stabilité d'un processus de déformation où se combinent à la fois les variations du champ des déformations inélastiques et l'évolution de la forme des constituants du matériau hétérogène.

Bibliographie du chapitre V

[1] J. Mandel, 1971, C.R. Acad. Sci. 272, 276.

[2] E.O. Hall, 1951, Proc. Phys. Soc., B64, 742.

[3] N.J. Petch, 1953, J. Iron Steel Inst., 174, 25.

[4] A.H. Cottrell, 1958, Trans. AIME, 212, 192.

[5] J.P. Hirth, 1972, Met. Trans., 3, 3047.

[6] A.W. Thompson, 1975, Acta Met., 23, 1337.

[7] U.F. Kocks, 1970, Met. Trans. 1, 1121, 1143.

[8] N. Hansen et B. Ralph, 1982, Acta Met., 30, 411.

[9] K. Tanove et H. Matsuda, 1982, Trans. Japan. Inst. Met., 23, 727.

[10] G.I. Taylor, 1938, J. Inst. Met., 62, 307.

[11] E. Kröner, 1961, Acta Met., 9, 155.

[12] R. Hill, 1955, J. Mech. Phys. Solids, 13, 89.

[13] M.F. Ashby, 1970, Phil. Mag. 21, 399.

[14] P. Franciosi et A. Zaoui, 1982, Acta Met., 28, 273.

[15] P.R. Swann et J. Nutting, 1961, J. Inst. Met., 50, 133.

[16] J.D. Eshelby, F.C. Frank et F.R.N. Nabarro, 1951, The equilibrium of linear arrays of dislocations, Phil. Mag., 42, 351-364.

[17] Y. Adda, J.M. Dupouy, J. Philibert et Y. Quere, 1979, Elément de métallurgie physique. 5, Edité par le commissariat à l'énergie atomique.

[18] H. Sabar et M. Berveiller, Juin 1989, Cont. Mod. and Discret Systems, Dijon, France.

[19] J. Friedel. 1964. Les dislocations. Ed. Gauthier-Villars. Paris.

[20] M. Berveiller et A. Zaoui, 1979, An extension of the self-consistent scheme to plastically flowing polycristals, J. Mech. Phys. Solids, 26, 325-344.

[21] J.D. Eshelby, 1961, Prog. Sol. Mech., North-Holland.

[22] G. Venkataraman, Y.W. Chung, Y. Nakasone et T. Mura, 1990, Acta. Metall. Mater. 1, 38, 31-40.

[23] H. Bouaouine, 1987, Thèse d'Etat, Université de Metz, France.

CHAPITRE VI

CONCLUSION GENERALE

Dans ce travail, on a présenté la solution du problème d'inclusion à frontière mobile qui élargit les champs d'applications des problèmes classiques d'inclusion d'Eshelby-Kröner. Cette solution fait apparaître explicitement la vitesse propre de l'interface entre inclusion et matrice dont la "loi de comportement" dépend de chaque problème physique susceptible d'être traité à partir de la solution obtenue. Les deux applications simples qui ont été présentées montrent l'importance mécanique et physique des problèmes liés au mouvement d'interface.

Il est évident que pour obtenir des résultats simples et pratiques, nous nous sommes restreints aux hypothèses classiques usuelles des problèmes d'inclusion :

- déformation inélastique et comportement constants par morceaux
- forme ellipsoïdale de l'inclusion
- pas d'interaction entre l'inclusion et la surface externe de la matrice (milieu infini)
- la vitesse de l'interface est limitée à la transformation d'ellipsoïdes en ellipsoïdes.

En théorie ces restrictions limitent le champ d'application des résultats obtenus mais permettent cependant de traiter un grand nombre de problèmes.

Pour pouvoir être appliqués à des problèmes de comportement des matériaux, les résultats précédents doivent être complétés par la détermination de la loi donnant le champ de vitesse W à partir de la physique du processus. Cette loi est propre à chaque cas physique envisagé ainsi que cela a été montré dans les applications.

Nous pensons que les résultats présentés dans ce travail ouvrent un large champ d'investigations micromécaniques et structurales qui permettront d'apporter un nouveau développement aux phénomènes cités dans l'introduction : changement de phase, recristallisation, maclage...

ANNEXES

Annexe A

Calcul des tenseurs $\underline{T}^I$ et $\underline{T}^{I\alpha}$ par la méthode de la transformée de Fourier

A.1. Cas général d'une inclusion ellipsoïdale dans un milieu anisotrope

A.2. Calcul des tenseurs $\underline{T}^I$ et $\underline{T}^{I\alpha}$ dans le cas particulier d'une inclusion sphérique située dans un milieu isotrope

A.2.1. Résultats analytiques

A.2.2. Validation du programme numérique

A.3. Résultats numériques concernant une inclusion aplatie et une bande dans un milieu isotrope

A.4. Résultats numériques dans le cas général d'une inclusion ellipsoïdale dans un milieu anisotrope

A.4.1. Inclusion sphérique : Cu, Zn

A.4.2. Inclusion aplatie : Cu, Zn

A.4.3. Bande : Cu, Zn

A.1. Cas général d'une inclusion ellipsoïdale dans un milieu anisotrope

La transformée de Fourier du tenseur de Green $\underline{G}$ est définie par :

$$\tilde{G}_{jn}(\vec{k}) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} G_{jn}(\vec{r})\, e^{-i\vec{K}.\vec{r}}\, dV \tag{A-1}$$

et sa transformée de Fourier inverse :

$$G_{jn}(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi^3} \iiint_{V_K} \tilde{G}_{jn}(\vec{k})\, e^{i\vec{K}.\vec{r}}\, dV_K \tag{A-2}$$

Si k_1, k_2, k_3 sont les coordonnées cartésiennes du vecteur k, et x_1, x_2, x_3 celles de r alors l'élé - ment différentiel dV_K est :

$$dV_K = dk_1\, dk_2\, dk_3$$

$$\text{et} \quad \vec{k}.\vec{r} = k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 \tag{A-3}$$

de (A-2) on a :

$$G_{jn,i}(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi^3} \iiint_{V_K} \tilde{G}_{jn}(\vec{k})\, (ik_i)\, e^{i\vec{K}.\vec{r}}\, dV_K$$

$$\text{et} \tag{A-4}$$

$$G_{jn,ik}(\vec{r}) = \frac{-1}{8\pi^3} \iiint_{V_K} \tilde{G}_{jn}(\vec{k})\, k_ik_k\, e^{i\vec{K}.\vec{r}}\, dV_K$$

Le tenseur $\underline{G}$ présente une singularité d'ordre $|r|^{-1}$. Les calculs d'intégration et de dérivation sont à faire au sens des distributions [1].

De plus la transformée de Fourier de la fonction δ de Dirac est donnée par :

$$\tilde{\delta}(\vec{k}) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\vec{K}.\vec{r}}\, \delta(\vec{r})\, dV = 1$$

et la transformée inverse :

$$\delta(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi^3} \iiint_{V_K} e^{i\vec{K}.\vec{r}}\, dV_K \tag{A-5}$$

Le tenseur de Green qui intervient dans les expressions de $\underline{T}$ et $\underline{T}^{\alpha}$ est solution des équations (II-17) que l'on rappelle :

$$C^{o}_{ijkl}\, G_{jn,ik}\,(\vec{r}) + \delta_{ln}\,\delta\,(\vec{r}) = 0 \qquad \text{(A-6)}$$

On obtient à la place de (A-6), compte tenu de (A-4) et (A-5) le système linéaire :

$$C^{o}_{ijkl}\,\tilde{G}_{jn}\,(\vec{k})\,k_i k_k = \delta_{ln} \qquad \text{(A-7)}$$

On rappelle les expressions des tenseurs $\underline{T}$ (IV-14) et $\underline{T}^{\alpha}$ (IV-15) sous la forme suivante :

$$T_{ijkl}\,(\vec{r},t) = -\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_l}\iiint_{V'_I(t)} G_{ki}\,(\vec{r}-\vec{r}')\,dV' \qquad \text{(A-8)}$$

$$T^{\alpha}_{ijkl}\,(\vec{r},t) = -\frac{\partial^3}{\partial x_j \partial x_l \partial x_\alpha}\iiint_{V'_I(t)} G_{ki}\,(\vec{r}-\vec{r}')\;x'_\alpha\,dV' \qquad \text{(A-9)}$$

qu'on peut écrire en définissant le tenseur $\underline{\tau}$ par :

$$\tau_{ijkl}\,(\vec{r},t) = -\frac{D\partial^2}{\partial x_j \partial x_l}\iiint_{V'_I(t)} G_{ki}\,(\vec{r}-\vec{r}')\,f\,(\vec{r}')\,dV' \qquad \text{(A-10)}$$

où D est un opérateur différentiel et f une fonction réelle définis par :

$$\begin{aligned} &1)\ D = 1 \quad \text{et} \quad f\,(r') = 1 \qquad \forall\, r' \in V_I \qquad \text{pour } \underline{\tau} = \underline{T} \\ &2)\ D = \partial/\partial x_\alpha \quad \text{et} \quad f\,(r') = x'_\alpha \qquad \forall\, r' \in V_I \qquad \text{pour } \underline{\tau} = \underline{T}^{\alpha} \end{aligned} \qquad \text{(A-11)}$$

La fonction f est nulle en dehors de V'_I.

<u>N.B.</u> La singularité d'ordre $|\,r\,|^{-4}$ introduite par la dérivation de G ($G_{ik,jl\alpha}$) ne pose pas de difficultés majeures si on veut faire le calcul en un point de l'inclusion ellipsoïdale [2].

En substituant le tenseur de Green $\underline{G}$ par sa transformée de Fourier (A-2) dans l'équation (A-10), on obtient :

$$\tau_{ijkl}(\vec{r},t) = -\frac{1}{8\pi^3}\frac{D\partial^2}{\partial x_j \partial x_l}\iiint_{V'_I(t)}\iiint_{V_K} \tilde{G}_{ik}\,(\vec{k})\,f\,(\vec{r}')\,e^{i\vec{K}(\vec{r}-\vec{r}')}\,dV_K\;dV' \qquad \text{(A-12)}$$

Introduisons les cosinus directeurs de k qu'on notera (χ_j) j = 1,2,3 et soit k le module du vecteur k. Prenons comme repère le repère R d'origine O, centre de l'inclusion et ayant pour axes les 3 diamètres orthogonaux de l'inclusion, on a alors :

$$k_j = k\,\chi_j \quad \forall_j = 1,2,3$$

avec :

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \sin\theta\cos\varphi \\ \chi_2 &= \sin\theta\sin\varphi \\ \chi_3 &= \cos\theta \end{aligned} \tag{A-13}$$

k, θ, φ coordonnées sphériques de k, et tels que :

$$k = \|\vec{k}\| \in [0, +\infty[\quad , \quad \theta \in [0,\pi] \quad , \quad \varphi \in [0,2\pi]$$

L'équation (A-7) s'écrit alors :

$$C^{o}_{ijkl}\,\chi_j\,\chi_l\,(k^2\tilde{G}_{km}\,(\vec{k})) = \delta_{im} \tag{A-14}$$

En définissant les composantes M_{ik} par

$$C^{o}_{ijkl}\,\chi_j\chi_l = M_{ik} \tag{A-15}$$

on a alors :

$$k^2\,\tilde{G}_{ik}(\vec{k}) = M^{-1}_{ik}\,(\vec{\chi})$$

Le tenseur $\underline{M}$ ne dépend que de la direction de k, c'est-à-dire des angles fixant cette direction. Par ailleurs, en coordonnées sphériques, l'élément de volume dV_K s'écrit :

$$dV_K = k^2\,dk\,dS\,(\vec{\chi}) \tag{A-16}$$

où dS (χ) est l'élément de surface sur la sphère (S) dans l'espace k

$$dS\,(\vec{\chi}) = \sin\theta\,d\theta\,d\varphi \tag{A-17}$$

(A-12) devient, en tenant compte des équations précédentes :

$$\tau_{ijkl}(\vec{r},t) = \frac{-1}{8\pi^3}\frac{D\partial^2}{\partial x_j\partial x_l}\iiint_{V_f(t)}\int_{o}^{+\infty}\iint_{S} M^{-1}_{ik}\,(\vec{\chi})\,f(\vec{r}')\,e^{ik\vec{\chi}\,(\vec{r}-\vec{r}')}dk\,dS\,(\vec{\chi})\,dV' \tag{A-18}$$

nous obtenons en effectuant les dérivées partielles D, $\partial/\partial x_j$, $\partial/\partial x_l$:

$$T^{I}_{ijkl} = \frac{a_1 a_2 a_3}{4\pi} \iint_S \chi_j \chi_l M^{-1}_{ik}(\vec{\chi}) (a_1^2 \chi_1^2 + a_2^2 \chi_2^2 + a_3^2 \chi_3^2)^{-3/2} dS \qquad \text{(A-25)}$$

$$T^{I\alpha}_{ijkl} = \frac{3 a_1 a_2 a_3 a_\alpha^2}{4\pi} \iint_S \chi_j \chi_l \chi_\alpha^2 M^{-1}_{ik}(\vec{\chi}) (a_1^2 \chi_1^2 + a_2^2 \chi_2^2 + a_3^2 \chi_3^2)^{-5/2} dS \qquad \text{(A-26)}$$

Nous remarquons que les deux intégrales sont uniformes dans le cas où r est intérieur à l'inclusion ellipsoïdale.
Ce résultat est prévu par Eshelby pour $\underline{T}^I$.

La détermination des tenseurs $\underline{T}^I$ et $\underline{T}^{I\alpha}$ dépend de la connaissance du tenseur $\underline{M}^{-1}$ donné par (A-15) ; les résultats analytiques sont obtenus dans le cas isotrope puisque $\underline{M}^{-1}$ est connu explicitement et les résultats sont numériques dans le cas anisotrope.

A.2. Calcul des tenseurs $\underline{T}^I$ et $\underline{T}^{I\alpha}$ dans le cas particulier d'une inclusion sphérique située dans un milieu isotrope

A.2.1. Résultats analytiques

Le calcul des tenseurs $\underline{T}^I$ (A-25) et $\underline{T}^{I\alpha}$ (A-26) se font de la même manière que dans le cas du problème élastique traité par Faivre [3] Berveiller [6] Tiem [7] et Fassi-Fehri [8].
Dans ce cas, le tenseur $\underline{M}^{-1}$ s'obtient à partir de (A-15) :

$$M^{-1}_{ik} = \frac{1}{\mu^o} \left\{ \delta_{ik} - \frac{1}{2(1-\nu^o)} \chi_i \chi_k \right\} \qquad \text{(A-28)}$$

et par la transformée de Fourier inverse (A-2), on a la forme explicite de $\underline{G}$:

$$G_{ik}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\mu^o |\vec{r}|} \delta_{ik} - \frac{1}{16\pi\mu^o(1-\nu^o)} |\vec{r}|_{,ik} \qquad \text{(A-29)}$$

Les intégrales (A-25) et (A-26) s'écrivent alors en tenant compte de (A-28) et en faisant $a_1 = a_2 = a_3$:

$$T^{I}_{ijkl} = \frac{1}{4\pi\mu^{o}} \iint_{S} \chi_j\chi_l \left\{ \delta_{ik} - \frac{1}{2(1-\nu^{o})}\chi_i\chi_k \right\} dS \tag{A-30}$$

$$T^{I\alpha}_{ijkl} = \frac{3}{4\pi\mu^{o}} \iint_{S} \chi_j\chi_l\chi_\alpha^2 \left\{ \delta_{ik} - \frac{1}{2(1-\nu^{o})}\chi_i\chi_k \right\} dS \tag{A-31}$$

<u>Calcul du tenseur T^I</u>

$$T^{I}_{ijkl} = \frac{1}{4\pi\mu^{o}} \delta_{ik} \int_{o}^{\pi}\int_{o}^{2\pi} \chi_j\chi_l \sin\theta \, d\theta \, d\varphi - \frac{1}{8\pi\mu^{o}(1-\nu^{o})} \int_{o}^{\pi}\int_{o}^{2\pi} \chi_i\chi_j\chi_k\chi_l \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

Les termes

$$\Delta_{jl} = \int_{o}^{\pi}\int_{o}^{2\pi} \chi_j\chi_l \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

et $$\Delta_{ijkl} = \int_{o}^{\pi}\int_{o}^{2\pi} \chi_i\chi_j\chi_l\chi_k \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

se calculent facilement et on obtient :

$$\Delta_{11} = \int_{o}^{\pi}\int_{o}^{2\pi} \sin^3\theta \cos^2\varphi \, d\theta d\varphi = \frac{4\pi}{3}$$

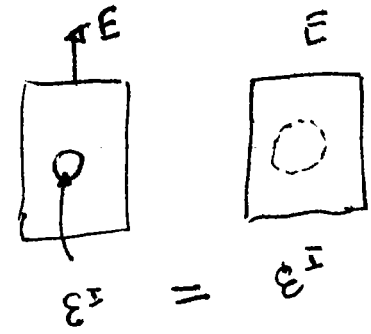
$$\Delta_{22} = \int_{o}^{\pi}\int_{o}^{2\pi} \sin^3\theta \sin^2\varphi \, d\theta d\varphi = \frac{4\pi}{3}$$

$$\Delta_{33} = \int_{o}^{\pi}\int_{o}^{2\pi} \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta d\varphi = \frac{4\pi}{3}$$

$$\Delta_{12} = \Delta_{13} = \Delta_{23} = 0$$

soit encore de manière condensée :

$$\Delta_{jl} = \frac{4\pi}{3} \delta_{jl} \, .$$



De même pour les composantes non nulles Δ_{ijkl} :

$$\Delta_{1111} = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin^5\theta \cos^4\varphi \, d\theta \, d\varphi = \frac{12\pi}{5}$$

$$\Delta_{2222} = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin^5\theta \sin^4\varphi \, d\theta \, d\varphi = \frac{12\pi}{5}$$

$$\Delta_{3333} = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin\theta \cos^4\theta \, d\theta \, d\varphi = \frac{12\pi}{5}$$

$$\Delta_{1122} = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin^5\theta \cos^2\varphi \sin^2\varphi \, d\theta \, d\varphi = \frac{4\pi}{15}$$

$$\Delta_{1133} = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin^3\theta \cos^2\theta \cos^2\varphi \, d\theta \, d\varphi = \frac{4\pi}{15}$$

$$\Delta_{2233} = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin^3\theta \cos^2\theta \sin^2\theta \, d\theta \, d\varphi = \frac{4\pi}{15}$$

Soit encore de manière condensée :

$$\Delta_{ijkl} = \frac{4\pi}{15}\left(\delta_{ij}\,\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right)$$

$\frac{4}{15\mu^o}$

Les composantes du tenseur $\underline{T}^I$ s'écrivent alors :

$$T^I_{ijkl} = \frac{1}{30\mu^o(1-\nu^o)}\left\{(9-10\nu^o)\,\delta_{ik}\delta_{jl} - (\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{il}\delta_{jk})\right\} \qquad \text{(A-32)}$$

<u>Calcul des tenseurs</u> $\underline{T}^{I\alpha}$ ($\alpha = 1,2,3$)

$$T^{I\alpha}_{ijkl} = \frac{3}{4\pi\mu^o}\,\delta_{ik}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \chi_j\chi_l\chi_\alpha^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi - \frac{3}{8\pi\mu^o(1-\nu^o)}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \chi_i\chi_j\chi_k\chi_l\chi_\alpha^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

Les termes

$$\Delta^{\alpha}_{jl} = \int_{o}^{\pi}\int_{o}^{2\pi} \chi_j \chi_l \chi_\alpha^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$\text{et} \quad \Delta^{\alpha}_{ijkl} = \int_{o}^{\pi}\int_{o}^{2\pi} \chi_i \chi_j \chi_k \chi_l \chi_\alpha^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

se calculent facilement et on obtient :

- <u>pour $\alpha = 1$</u> :

$$\Delta^{1}_{11} = \int_{o}^{\pi}\int_{o}^{2\pi} \sin^5\theta \cos^4\varphi \, d\theta \, d\varphi = \frac{4\pi}{5}$$

$$\Delta^{1}_{22} = \int_{o}^{\pi}\int_{o}^{2\pi} \sin^5\theta \cos^2\varphi \, \sin^2\varphi \, d\theta \, d\varphi = \frac{4\pi}{15}$$

$$\Delta^{1}_{33} = \int_{o}^{\pi}\int_{o}^{2\pi} \sin^3\theta \cos^2\theta \, \cos^2\varphi \, d\theta \, d\varphi = \frac{4\pi}{15}$$

$$\Delta^{1}_{12} = \Delta^{1}_{13} = \Delta^{1}_{23} = 0$$

ou encore d'une manière condensée :

$$\Delta^{1}_{jl} = \frac{4\pi}{15}\left(\delta_{jl} + 2\,\delta_{1j}\delta_{1l}\right)$$

De même, pour les composantes non nulles Δ^{1}_{ijkl} :

$$\Delta^{1}_{1111} = \int_{o}^{\pi}\int_{o}^{2\pi} \sin^7\theta \cos^6\varphi \, d\theta \, d\varphi = \frac{4\pi}{7}$$

$$\Delta^{1}_{2222} = \int_{o}^{\pi}\int_{o}^{2\pi} \sin^7\theta \cos^2\varphi \, \sin^2\varphi \, d\theta \, d\varphi = \frac{4\pi}{35}$$

$$\Delta^{1}_{3333} = \int_{o}^{\pi}\int_{o}^{2\pi} \sin^3\theta \cos^4\theta \, \cos^2\varphi \, d\theta \, d\varphi = \frac{4\pi}{35}$$

$$\Delta^1_{1122} = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin^7\theta \cos^4\varphi \sin^2\varphi \, d\theta \, d\varphi = \frac{4\pi}{35}$$

$$\Delta^1_{1133} = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin^5\theta \cos^2\theta \cos^4\varphi \, d\theta \, d\varphi = \frac{4\pi}{35}$$

$$\Delta^1_{2233} = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin^5\theta \cos^2\theta \cos^2\varphi \sin^2\varphi \, d\theta \, d\varphi = \frac{4\pi}{105}$$

soit de manière condensée :

$$\Delta^1_{ijkl} = \frac{4\pi}{105}\Big(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{jk}\delta_{il} + 2\,\delta_{ik}\delta_{1j}\delta_{1l} + 2\,\delta_{jk}\delta_{1i}\delta_{1l} + 2\,\delta_{il}\delta_{1j}\delta_{1k} + 2\,\delta_{kl}\delta_{1i}\delta_{1j} + 2\,\delta_{jl}\delta_{1k}\delta_{1i} + 2\,\delta_{ij}\delta_{1k}\delta_{1l}\Big)$$

- <u>Pour $\alpha = 2,3$</u> : il suffit de remplacer dans les expressions donnant Δ^1_{jl} et Δ^1_{ijkl} l'indice 1 par α afin d'obtenir Δ^α_{jl} et Δ^α_{ijkl} d'une façon condensée :

$$\Delta^\alpha_{jl} = \frac{4\pi}{15}\Big(\delta_{jl} + 2\,\delta_{j\alpha}\delta_{l\alpha}\Big)$$

$$\Delta^\alpha_{ijkl} = \frac{4\pi}{105}\Big\{\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{jk}\delta_{il} + 2\,\delta_{ik}\delta_{j\alpha}\delta_{l\alpha} + 2\,\delta_{jk}\delta_{i\alpha}\delta_{l\alpha} + 2\,\delta_{il}\delta_{j\alpha}\delta_{k\alpha} + 2\,\delta_{kl}\delta_{i\alpha}\delta_{j\alpha} + 2\,\delta_{jl}\delta_{k\alpha}\delta_{i\alpha} + 2\,\delta_{ij}\delta_{k\alpha}\delta_{l\alpha}\Big\}$$

Nous obtenons finalement les composantes des tenseurs $\underline{T}^{I\alpha}$ ($\alpha = 1,2,3$) :

$$T^{I\alpha}_{ijkl} = \frac{1}{70\mu^o(1-\nu^o)}\Big\{(13-14\nu^o)(\delta_{ik}\delta_{jl} + 2\,\delta_{ik}\delta_{j\alpha}\delta_{l\alpha}) - (\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{jk}\delta_{il}) - 2\,(\delta_{jk}\delta_{i\alpha}\delta_{l\alpha} + \delta_{ij}\delta_{k\alpha}\delta_{l\alpha} + \delta_{il}\delta_{k\alpha}\delta_{j\alpha} + \delta_{kl}\delta_{i\alpha}\delta_{j\alpha} + \delta_{jl}\delta_{i\alpha}\delta_{k\alpha})\Big\} \quad \text{(A-33)}$$

Les expressions des tenseurs $\underline{T}^I$ et $\underline{T}^{I\alpha}$ sont retrouvées en utilisant la méthode des fonctions potentielles (voir IV.3.1.a).

A.2.2. Validation du programme numérique

Pour valider le programme numérique, nous avons traité ce cas particulier d'un milieu isotrope et une inclusion sphérique ; les résultats sont identiques à ceux donnés ici (à 10^{-4} près). Nous avons pour $\nu = 0.33$ et $\mu = 3000$ daN/mm^2 respectivement les composantes des tenseurs $\underline{T}^I$, $\partial\underline{T}^I/\partial a_\alpha$, $\underline{S}$, $\partial\underline{S}/\partial a_\alpha$, $\underline{A}$, $\partial\underline{A}/\partial a_\alpha$:

* <u>Cas isotrope</u> $(a_1 = a_2 = a_3)$

$T^I(ijkl)$:

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.000611	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000067	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000167
12	0.000000	0.0000944	0.0000000	-0.0000167	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.000000	0.0000000	0.0000944	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000167	0.0000000	0.0000000
21	0.000000	-0.0000167	0.0000000	0.0000944	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	-0.000167	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000611	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000167
23	0.000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000944	0.0000000	-0.0000167	0.0000000
31	0.000000	0.0000000	-0.0000167	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000944	0.0000000	0.0000000
32	0.000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000167	0.0000000	0.0000944	0.0000000
33	-0.000167	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000167	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000611

a1 $\partial T^I/\partial a1$ (ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	-0.0000317	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000048	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000048
12	0.0000000	0.0000492	0.0000000	0.0000048	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	0.0000492	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000048	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	0.0000048	0.0000000	-0.0000841	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0000048	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000159	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000095
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000349	0.0000000	-0.0000095	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	0.0000048	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000841	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000095	0.0000000	0.0000349	0.0000000
33	0.0000048	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000095	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000159

a1 $\partial T^I/\partial a2$ (ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0000159	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000048	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000095
12	0.0000000	-0.0000841	0.0000000	0.0000048	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	0.0000349	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000095	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	0.0000048	0.0000000	0.0000492	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0000048	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000317	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000048
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000492	0.0000000	0.0000048	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	-0.0000095	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000349	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000048	0.0000000	-0.0000841	0.0000000
33	-0.0000095	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000048	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000159

a1 $\partial T^I/\partial a3$ (ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0000159	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000095	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000048
12	0.0000000	0.0000349	0.0000000	-0.0000095	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	-0.0000841	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000048	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	-0.0000095	0.0000000	0.0000349	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	-0.0000095	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000159	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000048
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000841	0.0000000	0.0000048	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	0.0000048	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000492	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000048	0.0000000	0.0000492	0.0000000
33	0.0000048	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000048	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000317

* <u>Cas isotrope</u> $(a_1 = a_2 = a_3)$

S(ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.5333333	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0666667	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0666667
12	0.0000000	0.2333333	0.0000000	0.2333333	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	0.2333333	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.2333333	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	0.2333333	0.0000000	0.2333333	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0666667	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.5333333	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0666667
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.2333333	0.0000000	0.2333333	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	0.2333333	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.2333333	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.2333333	0.0000000	0.2333333	0.0000000
33	0.0666667	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0666667	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.5333333

a1 ∂S/∂a1(ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	-0.3238160	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.1047555	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.1047619
12	0.0000000	-0.0380888	0.0000000	-0.0380888	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	-0.0380952	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0380952	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	-0.0380888	0.0000000	-0.0380888	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0952446	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.1618983	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0095238
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0761905	0.0000000	0.0761905	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	-0.0380952	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0380952	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0761905	0.0000000	0.0761905	0.0000000
33	0.0952381	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0095238	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.1619048

a1 ∂S/∂a2(ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.1619113	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0952316	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0095238
12	0.0000000	-0.0381017	0.0000000	-0.0381017	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	0.0761905	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0761905	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	-0.0381017	0.0000000	-0.0381017	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	-0.1047684	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.3238031	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.1047619
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0380952	0.0000000	-0.0380952	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	0.0761905	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0761905	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0380952	0.0000000	-0.0380952	0.0000000
33	0.0095238	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0952381	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.1619048

a1 ∂S/∂a3(ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.1619048	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0095238	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0952381
12	0.0000000	0.0761905	0.0000000	0.0761905	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	-0.0380952	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0380952	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	0.0761905	0.0000000	0.0761905	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0095238	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.1619048	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0952381
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0380952	0.0000000	-0.0380952	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	-0.0380952	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0380952	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0380952	0.0000000	-0.0380952	0.0000000
33	-0.1047619	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.1047619	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.3238095

* <u>Cas isotrope</u> $(a_1 = a_2 = a_3)$

A(ijkl) = 0

al ∂A/∂a1 (ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
12	0.0000000	0.2000000	0.0000000	0.2000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	0.2000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.2000000	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	-0.2000000	0.0000000	-0.2000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	-0.2000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.2000000	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
33	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000

al ∂A/∂a2 (ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
12	0.0000000	-0.2000000	0.0000000	-0.2000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	0.2000000	0.0000000	0.2000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.2000000	0.0000000	0.2000000	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.2000000	0.0000000	-0.2000000	0.0000000
33	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000

al ∂A/∂a3 (ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
12	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	-0.2000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.2000000	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.2000000	0.0000000	-0.2000000	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	0.2000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.2000000	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.2000000	0.0000000	0.2000000	0.0000000
33	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000

A.3. Résultats numériques concernant une inclusion aplatie et une bande dans un milieu isotrope

* <u>Cas isotrope</u> $(a_1 = a_2 = 100\, a_3)$

$T^I(ijkl)$:

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0000019	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000002	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000010
12	0.0000000	0.0000023	0.0000000	-0.0000002	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	0.0003284	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000010	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	-0.0000002	0.0000000	0.0000023	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	-0.0000002	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000019	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000010
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0003284	0.0000000	-0.0000010	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	-0.0000010	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000016	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000010	0.0000000	0.0000016	0.0000000
33	-0.0000010	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000010	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000843

a1 $\partial T^I/\partial a1$ (ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	-0.0000021	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000001	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000012
12	0.0000000	0.0000008	0.0000000	0.0000001	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	0.0000041	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000012	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	0.0000001	0.0000000	-0.0000031	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0000001	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000003	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000003
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000026	0.0000000	-0.0000003	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	0.0000012	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000020	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000003	0.0000000	0.0000004	0.0000000
33	0.0000012	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000003	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000002

a1 $\partial T^I/\partial a2$ (ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0000003	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000001	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000003
12	0.0000000	-0.0000031	0.0000000	0.0000001	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	0.0000026	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000003	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	0.0000001	0.0000000	0.0000008	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0000001	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000021	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000012
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000041	0.0000000	0.0000012	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	-0.0000003	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000004	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000012	0.0000000	-0.0000020	0.0000000
33	-0.0000003	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000012	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000002

a1 $\partial T^I/\partial a3$ (ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0001812	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000246	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000929
12	0.0000000	0.0002304	0.0000000	-0.0000246	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	-0.0006282	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000929	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	-0.0000246	0.0000000	0.0002304	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	-0.0000246	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0001812	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000929
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0006282	0.0000000	-0.0000929	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	-0.0000929	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0001620	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000929	0.0000000	0.0001620	0.0000000
33	-0.0000929	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000929	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000521

* <u>Cas isotrope</u> ($a_1 = a_2 = 100\ a_3$)

S(ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0150199	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0024143	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0018805
12	0.0000000	0.0063028	0.0000000	0.0063028	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	0.4920877	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.4920877	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	0.0063028	0.0000000	0.0063028	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0024143	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0150199	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0018805
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.4920877	0.0000000	0.4920877	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	0.4920877	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.4920877	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.4920877	0.0000000	0.4920877	0.0000000
33	0.4881992	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.4881992	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.9994740

a1 ∂S/∂a1(ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	-0.0173412	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0040577	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0022303
12	0.0000000	-0.0030628	0.0000000	-0.0030628	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	0.0065543	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0065543	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	-0.0030628	0.0000000	-0.0030628	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0017293	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0027605	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0005102
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0038138	0.0000000	0.0038138	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	0.0065543	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0065543	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0038138	0.0000000	0.0038138	0.0000000
33	0.0113465	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0028189	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0031306

a1 ∂S/∂a2(ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0027607	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0017291	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0005102
12	0.0000000	-0.0030631	0.0000000	-0.0030631	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	0.0038138	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0038138	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	-0.0030631	0.0000000	-0.0030631	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	-0.0040580	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0173410	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0022303
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0065543	0.0000000	0.0065543	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	0.0038138	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0038138	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0065543	0.0000000	0.0065543	0.0000000
33	0.0028189	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0113465	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0031306

a1 ∂S/∂a3(ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	1.4697660	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.2350063	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.1752779
12	0.0000000	0.6173799	0.0000000	0.6173799	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	-0.9781897	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.9781897	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	0.6173799	0.0000000	0.6173799	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.2350063	0.0000000	0.0000000	0.0000000	1.4697660	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.1752779
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.9781897	0.0000000	-0.9781897	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	-0.9781897	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.9781897	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.9781897	0.0000000	-0.9781897	0.0000000
33	-1.3605634	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-1.3605634	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.4905207

* <u>Cas isotrope</u> ($a_1 = a_2 = 100\ a_3$)

A(ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
12	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	0.4900797	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.4900797	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.4900797	0.0000000	0.4900797	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	-0.4900797	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.4900797	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.4900797	0.0000000	-0.4900797	0.0000000
33	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000

a1 ∂A/∂a1 (ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
12	0.0000000	0.0057871	0.0000000	0.0057871	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	0.0091161	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0091161	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	-0.0057871	0.0000000	-0.0057871	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0033291	0.0000000	0.0033291	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	-0.0091161	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0091161	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0033291	0.0000000	-0.0033291	0.0000000
33	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000

a1 ∂A/∂a2 (ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
12	0.0000000	-0.0057871	0.0000000	-0.0057871	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	0.0033291	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0033291	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	0.0057871	0.0000000	0.0057871	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0091161	0.0000000	0.0091161	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	-0.0033291	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0033291	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0091161	0.0000000	-0.0091161	0.0000000
33	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000

a1 ∂A/∂a3 (ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
12	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	-1.1852855	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-1.1852855	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-1.1852855	0.0000000	-1.1852855	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	1.1852855	0.0000000	0.0000000	0.0000000	1.1852855	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	1.1852855	0.0000000	1.1852855	0.0000000
33	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000

* <u>Cas isotrope</u> $(a_1 \to +\infty, a_2 = 100\, a_3)$

$T^I(ijkl)$:

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
12	0.0000000	0.0000054	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	0.0003295	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000034	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000020
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0003275	0.0000000	-0.0000020	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000020	0.0000000	0.0000034	0.0000000
33	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000020	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000844

$a2\ \partial T^I/\partial a1(ijkl)=0$

$a2\ \partial T^I/\partial a2\ (ijkl)$:

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
12	0.0000000	-0.0000005	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	0.0000035	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000003	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000002
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000037	0.0000000	0.0000002	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000002	0.0000000	-0.0000003	0.0000000
33	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000002	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000007

$a2\ \partial T^I/\partial a3\ (ijkl)$:

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
12	0.0000000	0.0005171	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	-0.0004198	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0003126	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0001833
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0006031	0.0000000	-0.0001833	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0001833	0.0000000	0.0003338	0.0000000
33	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0001833	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000783

* <u>Cas isotrope</u> $(a_1 \to +\infty, a_2 = 100\, a_3)$

S(ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0000002	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
12	0.0000000	0.0081170	0.0000000	0.0081170	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	0.4942786	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.4942786	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	0.0081170	0.0000000	0.0081170	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0081170	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0283046	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0039535
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.4903251	0.0000000	0.4903251	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	0.4942786	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.4942786	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.4903251	0.0000000	0.4903251	0.0000000
33	0.4942786	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.4822081	0.0000000	0.0000000	0.0000000	1.0006279

a2 ∂S/∂a1(ijkl)=0

a2 ∂S/∂a2(ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0000001	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
12	0.0000000	-0.0007266	0.0000000	-0.0007266	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	0.0052268	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0052268	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	-0.0007266	0.0000000	-0.0007266	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	-0.0007266	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0024807	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0003009
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0055277	0.0000000	0.0055277	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	0.0052268	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0052268	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0055277	0.0000000	0.0055277	0.0000000
33	0.0052267	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0062543	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0094261

a2 ∂S/∂a3(ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0000158	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000009	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000017
12	0.0000000	0.7755946	0.0000000	0.7755946	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	-0.6297013	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.6297013	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	0.7755946	0.0000000	0.7755946	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.7755913	0.0000000	0.0000000	0.0000000	2.6509391	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.3241484
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.9538480	0.0000000	-0.9538480	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	-0.6297013	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.6297013	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.9538480	0.0000000	-0.9538480	0.0000000
33	-0.6297046	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-1.7294435	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.1596505

* <u>Cas isotrope</u> $(a_1 \to +\infty, a_2 = 100\, a_3)$

A(ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
12	0.0000000	0.0081170	0.0000000	0.0081170	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	0.4942786	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.4942786	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	-0.0081170	0.0000000	-0.0081170	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.4861616	0.0000000	0.4861616	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	-0.4942786	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.4942786	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.4861616	0.0000000	-0.4861616	0.0000000
33	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000

a2 ∂A/∂a1 (ijkl)=0

a2 ∂A/∂a2 (ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
12	0.0000000	-0.0007266	0.0000000	-0.0007266	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	0.0052267	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0052267	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	0.0007266	0.0000000	0.0007266	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0059534	0.0000000	0.0059534	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	-0.0052267	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0052267	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0059534	0.0000000	-0.0059534	0.0000000
33	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000

a2 ∂A/∂a3 (ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
12	0.0000000	0.7755922	0.0000000	0.7755922	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	-0.6297030	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.6297030	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	-0.7755922	0.0000000	-0.7755922	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-1.4052952	0.0000000	-1.4052952	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	0.6297030	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.6297030	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	1.4052952	0.0000000	1.4052952	0.0000000
33	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000

A.4. Résultats numériques dans le cas général d'une inclusion ellipsoïdale dans un milieu anisotrope

A.4.1. Inclusion sphérique

* Cas du cuivre ($a_1 = a_2 = a_3$)

$T^I(ijkl)$:

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0000305	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000078	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000078
12	0.0000000	0.0000302	0.0000000	-0.0000078	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	0.0000302	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000078	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	-0.0000078	0.0000000	0.0000302	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	-0.0000078	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000305	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000078
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000302	0.0000000	-0.0000078	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	-0.0000078	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000302	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000078	0.0000000	0.0000302	0.0000000
33	-0.0000078	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000078	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000305

a1 $\partial T^I/\partial a1$ (ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	-0.0000215	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000026	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000026
12	0.0000000	0.0000106	0.0000000	0.0000026	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	0.0000105	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000026	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	0.0000026	0.0000000	-0.0000233	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0000026	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000108	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000053
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000128	0.0000000	-0.0000053	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	0.0000026	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000233	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000053	0.0000000	0.0000128	0.0000000
33	0.0000026	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000053	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000107

a1 $\partial T^I/\partial a2$ (ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0000108	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000026	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000053
12	0.0000000	-0.0000234	0.0000000	0.0000026	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	0.0000128	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000053	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	0.0000026	0.0000000	0.0000106	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0000026	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000215	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000026
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000105	0.0000000	0.0000026	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	-0.0000053	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000128	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000026	0.0000000	-0.0000233	0.0000000
33	-0.0000053	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000026	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000107

a1 $\partial T^I/\partial a3$ (ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0000107	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000052	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000026
12	0.0000000	0.0000128	0.0000000	-0.0000052	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	-0.0000233	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000026	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	-0.0000052	0.0000000	0.0000128	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	-0.0000052	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000107	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000026
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000233	0.0000000	0.0000026	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	0.0000026	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000105	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000026	0.0000000	0.0000105	0.0000000
33	0.0000026	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000026	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000215

* <u>Cas du cuivre</u> ($a_1 = a_2 = a_3$)

A(ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
12	0.0000000	0.0000935	0.0000000	0.0000935	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	-0.0000298	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000298	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	-0.0000935	0.0000000	-0.0000935	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000159	0.0000000	-0.0000159	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	0.0000298	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000298	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000159	0.0000000	0.0000159	0.0000000
33	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000

a1 ∂A/∂a1 (ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
12	0.0000000	0.2190896	0.0000000	0.2190896	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	0.2181482	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.2181482	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	-0.2190896	0.0000000	-0.2190896	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000508	0.0000000	0.0000508	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	-0.2181482	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.2181482	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000508	0.0000000	-0.0000508	0.0000000
33	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000

a1 ∂A/∂a2 (ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
12	0.0000000	-0.2191612	0.0000000	-0.2191612	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	0.0000150	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000150	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	0.2191612	0.0000000	0.2191612	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.2181056	0.0000000	0.2181056	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	-0.0000150	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000150	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.2181056	0.0000000	-0.2181056	0.0000000
33	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000

a1 ∂A/∂a3 (ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
12	0.0000000	0.0000716	0.0000000	0.0000716	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	-0.2181632	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.2181632	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	-0.0000716	0.0000000	-0.0000716	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.2181564	0.0000000	-0.2181564	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	0.2181632	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.2181632	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.2181564	0.0000000	0.2181564	0.0000000
33	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000

* <u>Cas du zinc</u> ($a_1 = a_2 = a_3$)

$T^I(ijkl)$:

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0000433	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000083	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000244
12	0.0000000	0.0000609	0.0000000	-0.0000083	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	0.0000693	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000244	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	-0.0000083	0.0000000	0.0000598	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	-0.0000083	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000432	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000253
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000656	0.0000000	-0.0000253	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	-0.0000244	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000978	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000253	0.0000000	0.0000928	0.0000000
33	-0.0000244	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000253	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0001513

a1 $\partial T^I/\partial a1$ (ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	-0.0000220	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000032	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000003
12	0.0000000	0.0000313	0.0000000	0.0000032	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	0.0000343	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000003	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	0.0000032	0.0000000	-0.0000521	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0000032	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000136	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000164
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000277	0.0000000	-0.0000164	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	0.0000003	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000622	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000164	0.0000000	0.0000416	0.0000000
33	0.0000003	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000164	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000690

a1 $\partial T^I/\partial a2$ (ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0000137	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000033	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000165
12	0.0000000	-0.0000527	0.0000000	0.0000033	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	0.0000298	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000165	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	0.0000033	0.0000000	0.0000302	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0000033	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000223	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000001
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000310	0.0000000	0.0000001	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	-0.0000165	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000466	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000001	0.0000000	-0.0000547	0.0000000
33	-0.0000165	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000001	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000715

a1 $\partial T^I/\partial a3$ (ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0000083	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000065	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000162
12	0.0000000	0.0000214	0.0000000	-0.0000065	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	-0.0000640	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000162	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	-0.0000065	0.0000000	0.0000219	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	-0.0000065	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000086	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000163
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000587	0.0000000	0.0000163	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	0.0000162	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000155	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000163	0.0000000	0.0000130	0.0000000
33	0.0000162	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000163	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0001405

* <u>Cas du zinc</u> $(a_1 = a_2 = a_3)$

A(ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
12	0.0000000	0.0025586	0.0000000	0.0025586	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	-0.0676013	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0676013	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	-0.0025586	0.0000000	-0.0025586	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0754148	0.0000000	-0.0754148	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	0.0676013	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0676013	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0754148	0.0000000	0.0754148	0.0000000
33	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000

a1 ∂A/∂a1 (ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
12	0.0000000	0.1978814	0.0000000	0.1978814	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	0.2287101	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.2287101	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	-0.1978814	0.0000000	-0.1978814	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0387208	0.0000000	-0.0387208	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	-0.2287101	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.2287101	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0387208	0.0000000	0.0387208	0.0000000
33	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000

a1 ∂A/∂a2 (ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
12	0.0000000	-0.1966878	0.0000000	-0.1966878	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	-0.0399346	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0399346	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	0.1966878	0.0000000	0.1966878	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.2373760	0.0000000	0.2373760	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	0.0399346	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0399346	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.2373760	0.0000000	-0.2373760	0.0000000
33	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000

a1 ∂A/∂a3 (ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
12	0.0000000	-0.0011936	0.0000000	-0.0011936	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	-0.1887755	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.1887755	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	0.0011936	0.0000000	0.0011936	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.1986552	0.0000000	-0.1986552	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	0.1887755	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.1887755	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.1986552	0.0000000	0.1986552	0.0000000
33	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000

A.4.2. Inclusion aplatie

* Cas du cuivre ($a_1 = a_2 = 100\ a_3$)

$T^I(ijkl)$:

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0000007	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000001	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000004
12	0.0000000	0.0000007	0.0000000	-0.0000001	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	0.0000768	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000004	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	-0.0000001	0.0000000	0.0000007	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	-0.0000001	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000007	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000004
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000768	0.0000000	-0.0000004	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	-0.0000004	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000007	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000004	0.0000000	0.0000007	0.0000000
33	-0.0000004	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000004	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000569

a1 $\partial T^I/\partial a1$ (ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	-0.0000009	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000005
12	0.0000000	0.0000001	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	0.0000002	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000005	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000008	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000002	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000001
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000008	0.0000000	-0.0000001	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	0.0000005	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000008	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000001	0.0000000	0.0000002	0.0000000
33	0.0000005	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000001	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000001

a1 $\partial T^I/\partial a2$ (ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0000002	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000001
12	0.0000000	-0.0000008	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	0.0000008	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000001	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000001	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000009	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000005
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000002	0.0000000	0.0000005	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	-0.0000001	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000002	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000005	0.0000000	-0.0000008	0.0000000
33	-0.0000001	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000005	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000001

a1 $\partial T^I/\partial a3$ (ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0000705	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000098	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000410
12	0.0000000	0.0000661	0.0000000	-0.0000098	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	-0.0000878	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000410	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	-0.0000098	0.0000000	0.0000661	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	-0.0000098	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000705	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000410
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000878	0.0000000	-0.0000410	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	-0.0000410	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000663	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000410	0.0000000	0.0000663	0.0000000
33	-0.0000410	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000410	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000064

* <u>Cas du cuivre</u> ($a_1 = a_2 = 100\ a_3$)

A(ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
12	0.0000000	0.0000011	0.0000000	0.0000011	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	0.4920863	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.4920863	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	-0.0000011	0.0000000	-0.0000011	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.4920864	0.0000000	0.4920864	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	-0.4920863	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.4920863	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.4920864	0.0000000	-0.4920864	0.0000000
33	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000

a1 ∂A/∂a1 (ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
12	0.0000000	0.0060081	0.0000000	0.0060081	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	0.0067714	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0067714	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	-0.0060081	0.0000000	-0.0060081	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0038313	0.0000000	0.0038313	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	-0.0067714	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0067714	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0038313	0.0000000	-0.0038313	0.0000000
33	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000

a1 ∂A/∂a2 (ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
12	0.0000000	-0.0060092	0.0000000	-0.0060092	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	0.0038307	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0038307	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	0.0060092	0.0000000	0.0060092	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0067707	0.0000000	0.0067707	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	-0.0038307	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0038307	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0067707	0.0000000	-0.0067707	0.0000000
33	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000

a1 ∂A/∂a3 (ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
12	0.0000000	0.0001060	0.0000000	0.0001060	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	-0.9956877	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.9956877	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	-0.0001060	0.0000000	-0.0001060	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.9956703	0.0000000	-0.9956703	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	0.9956877	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.9956877	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.9956703	0.0000000	0.9956703	0.0000000
33	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000

* <u>Cas du zinc</u> ($a_1 = a_2 = 100\ a_3$)

$T^I(ijkl)$:

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0000014	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000001	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000022
12	0.0000000	0.0000016	0.0000000	-0.0000001	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	0.0002095	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000022	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	-0.0000001	0.0000000	0.0000015	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	-0.0000001	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000013	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000022
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0001799	0.0000000	-0.0000022	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	-0.0000022	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000030	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000022	0.0000000	0.0000029	0.0000000
33	-0.0000022	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000022	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0003215

a1 $\partial T^I/\partial a1$ (ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	-0.0000017	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000027
12	0.0000000	0.0000005	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	0.0000004	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000027	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000018	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000003	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000005
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000018	0.0000000	-0.0000005	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	0.0000027	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000037	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000005	0.0000000	0.0000007	0.0000000
33	0.0000027	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000005	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000011

a1 $\partial T^I/\partial a2$ (ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0000003	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000006
12	0.0000000	-0.0000020	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	0.0000022	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000006	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000004	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000016	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000026
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000002	0.0000000	0.0000026	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	-0.0000006	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000008	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000026	0.0000000	-0.0000035	0.0000000
33	-0.0000006	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000026	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000009

a1 $\partial T^I/\partial a3$ (ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0001373	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000065	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0002109
12	0.0000000	0.0001526	0.0000000	-0.0000065	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	-0.0002232	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0002109	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	-0.0000065	0.0000000	0.0001437	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	-0.0000065	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0001313	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0002082
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0001405	0.0000000	-0.0002082	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	-0.0002109	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0002920	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0002082	0.0000000	0.0002846	0.0000000
33	-0.0002109	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0002082	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0002514

* <u>Cas du zinc</u> ($a_1 = a_2 = 100\ a_3$)

A(ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
12	0.0000000	0.0002208	0.0000000	0.0002208	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	0.4898554	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.4898554	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	-0.0002208	0.0000000	-0.0002208	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.4903275	0.0000000	0.4903275	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	-0.4898554	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.4898554	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.4903275	0.0000000	-0.4903275	0.0000000
33	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000

a1 ∂A/∂a1 (ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
12	0.0000000	0.0054652	0.0000000	0.0054652	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	0.0096050	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0096050	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	-0.0054652	0.0000000	-0.0054652	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0030798	0.0000000	0.0030798	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	-0.0096050	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0096050	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0030798	0.0000000	-0.0030798	0.0000000
33	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000

a1 ∂A/∂a2 (ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
12	0.0000000	-0.0056734	0.0000000	-0.0056734	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	0.0032849	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0032849	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	0.0056734	0.0000000	0.0056734	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0093820	0.0000000	0.0093820	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	-0.0032849	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0032849	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0093820	0.0000000	-0.0093820	0.0000000
33	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000

a1 ∂A/∂a3 (ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
12	0.0000000	0.0211624	0.0000000	0.0211624	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	-1.2218682	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-1.2218682	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	-0.0211624	0.0000000	-0.0211624	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-1.1776773	0.0000000	-1.1776773	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	1.2218682	0.0000000	0.0000000	0.0000000	1.2218682	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	1.1776773	0.0000000	1.1776773	0.0000000
33	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000

A.4.3. Bande

* Cas du cuivre ($a_1 \rightarrow +\infty$, $a_2 = 100\, a_3$)

$T^I(ijkl)$:

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
12	0.0000000	0.0000013	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	0.0000765	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000014	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000010
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000773	0.0000000	-0.0000010	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000010	0.0000000	0.0000015	0.0000000
33	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000010	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000570

$a2\ \partial T^I/\partial a1\ (ijkl)=0$

$a2\ \partial T^I/\partial a2\ (ijkl)$:

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
12	0.0000000	-0.0000001	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	0.0000008	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000001	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000001
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000007	0.0000000	0.0000001	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000001	0.0000000	-0.0000001	0.0000000
33	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000001	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000005

$a2\ \partial T^I/\partial a3\ (ijkl)$:

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
12	0.0000000	0.0001201	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	-0.0000975	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0001392	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000898
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000253	0.0000000	-0.0000898	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000898	0.0000000	0.0001409	0.0000000
33	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000898	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000174

* <u>Cas du cuivre</u> $(a_1 \to +\infty,\ a_2 = 100\ a_3)$

A(ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
12	0.0000000	0.0081170	0.0000000	0.0081170	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	0.4942786	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.4942786	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	-0.0081170	0.0000000	-0.0081170	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.4900944	0.0000000	0.4900944	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	-0.4942786	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.4942786	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.4900944	0.0000000	-0.4900944	0.0000000
33	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000

a2 ∂A/∂a1 (ijkl)=0

a2 ∂A/∂a2 (ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
12	0.0000000	-0.0007266	0.0000000	-0.0007266	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	0.0052268	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0052268	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	0.0007266	0.0000000	0.0007266	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0056451	0.0000000	0.0056451	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	-0.0052268	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0052268	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0056451	0.0000000	-0.0056451	0.0000000
33	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000

a2 ∂A/∂a3 (ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
12	0.0000000	0.7755934	0.0000000	0.7755934	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	-0.6297014	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.6297014	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	-0.7755934	0.0000000	-0.7755934	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-1.0737566	0.0000000	-1.0737566	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	0.6297014	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.6297014	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	1.0737566	0.0000000	1.0737566	0.0000000
33	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000

* <u>Cas du zinc</u> ($a_1 \to +\infty$, $a_2 = 100\, a_3$)

$T^I(ijkl)$:

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
12	0.0000000	0.0000034	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	0.0002084	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000027	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000045
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0001815	0.0000000	-0.0000045	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000045	0.0000000	0.0000060	0.0000000
33	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000045	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0003219

$a2\ \partial T^I/\partial a1\ (ijkl)=0$

$a2\ \partial T^I/\partial a2\ (ijkl)$:

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
12	0.0000000	-0.0000003	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	0.0000022	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000002	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000004
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000016	0.0000000	0.0000004	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000004	0.0000000	-0.0000005	0.0000000
33	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000004	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000026

$a2\ \partial T^I/\partial a3\ (ijkl)$:

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
12	0.0000000	0.0003270	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	-0.0002655	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0002519	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0004070
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000341	0.0000000	-0.0004070	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0004070	0.0000000	0.0005718	0.0000000
33	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0004070	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0003195

* <u>Cas du zinc</u> $(a_1 \rightarrow +\infty, a_2 = 100\, a_3)$

A(ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
12	0.0000000	0.0081170	0.0000000	0.0081170	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	0.4942786	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.4942786	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	-0.0081170	0.0000000	-0.0081170	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.4862242	0.0000000	0.4862242	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	-0.4942786	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.4942786	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.4862242	0.0000000	-0.4862242	0.0000000
33	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000

a2 ∂A/∂a1 (ijkl)≈0

a2 ∂A/∂a2 (ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
12	0.0000000	-0.0007266	0.0000000	-0.0007266	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	0.0052267	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0052267	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	0.0007266	0.0000000	0.0007266	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0060374	0.0000000	0.0060374	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	-0.0052267	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0052267	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0060374	0.0000000	-0.0060374	0.0000000
33	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000

a2 ∂A/∂a3 (ijkl):

ij \kl	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
12	0.0000000	0.7755922	0.0000000	0.7755922	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000	-0.6297030	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.6297030	0.0000000	0.0000000
21	0.0000000	-0.7755922	0.0000000	-0.7755922	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
22	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
23	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-1.4895155	0.0000000	-1.4895155	0.0000000
31	0.0000000	0.0000000	0.6297030	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.6297030	0.0000000	0.0000000
32	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	1.4895155	0.0000000	1.4895155	0.0000000
33	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000

Bibliographie de l'annexe A

[1] L. Schwartz, 1973, Théorie des distributions, Hermann, Paris.

[2] H. Sabar, M. Berveiller et M. Buisson, 1990, Comptes rendus de l'académie des sciences, Paris, T.310, série II, p. 447-452.

[3] G. Faivre, 1971, Journal de Physique 32, 325.

[4] W. Kecs et P.P. Teodorescu, 1974, Applications of the theory of distributions in mechanics, Abacus Press, England.

[5] H. Sabar, M. Buisson et M. Berveiller, 1990, The inhomogeneous and plastic inclusion problem with moving boundary, International Journal of Mechanics (à paraître).

[6] M. Berveiller, 1978, Thèse d'Etat, Université Paris 13, France.

[7] S. Tiem, 1987, Thèse d'université de Metz, France.

[8] O. Fassi-Fehri, 1986, Thèse d'Etat, Université de Metz, France.

Annexe B

Détermination des fonctions potentielles $\Phi, \psi, \Phi^{\alpha}, \psi^{\alpha}$ et leurs dérivées partielles

B.1. Cas général d'une inclusion ellipsoïdale ($a_1 > a_2 > a_3$) dans un milieu isotrope

B.1.1. Fonctions potentielles ϕ et ψ et leurs dérivées

B.1.2. Fonctions potentielles ϕ^{α} et ψ^{α} et leurs dérivées

B.2. Cas particulier d'une inclusion sphérique dans un milieu isotrope

B.1. Cas général d'une inclusion ellipsoïdale (a1 > a2 > a3) dans un milieu isotrope

B.1.1. les fonctions potentielles Φ et ψ d'Eshelby dans une inclusion ellipsoïdale de demi-axes $a_1 > a_2 > a_3$ sont données par [1] :

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{2}(I - x_r x_r I_R)$$
$$\psi_{,i}(\vec{r}) = \frac{1}{2} x_i [I - x_r x_r I_R - a_i^2 (I_i - x_r x_r I_{IR})] \tag{B-1}$$

où I_R et I_{IR} sont les coefficients d'Eshelby donnés en annexe C.
Dans les expressions (B-1), la règle de sommation sur les indices répétés n'est pas applicable ; par contre, il faut respecter les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} x_k I_k &= x_1 I_1 && \text{si } k = 1 \\ &= x_2 I_2 && \text{si } k = 2 \\ \delta_{ij} I_J &= I_2 && \text{si } i = j = 2 \\ &= 0 && \text{si } i \neq j \end{aligned} \tag{B-2}$$

A partir de (B-1), nous procédons à des dérivations partielles de Φ et $\psi_{,i}$:

$$\begin{aligned} &\Phi_{,i} = - x_i I_I \Rightarrow \Phi_{,ij} = - \delta_{ij} I_I \\ &\psi_{,ij} = \frac{1}{2}[1 - x_r x_r I_R - a_i^2 (I_I - x_r x_r I_{IR})]\, \delta_{ij} - x_i x_j (I_J - a_i^2 I_{IJ}) \\ &\psi_{,ijK} = (- x_K I_K + a_i^2 x_K I_{KI})\, \delta_{ij} - (x_j \delta_{iK} + x_i \delta_{jK})(I_J - a_i^2 I_{IJ}) \end{aligned} \tag{B-3}$$

$$\psi_{,ijkl} = - \delta_{ij}\delta_{kl}(I_K - a_i^2 I_{JK}) - (\delta_{jK}\delta_{il} + \delta_{jl}\delta_{iK})(I_J - a_i^2 I_{IJ}) . \tag{B-4}$$

B.1.2. Les fonctions potentielles Φ^α et ψ^α dans une inclusion ellipsoïdale ($a_1 > a_2 > a_3$) sont données par [1] :

$$\Phi^\alpha(\vec{r}) = \frac{1}{2} a_\alpha^2 x_\alpha (I_\alpha - x_r x_r I_{R\alpha})$$

$$\psi^\alpha_{,i}(\vec{r}) = -\frac{1}{4}\delta_{i\alpha} a_\alpha^2 [V - x_r x_r V_R - a_\alpha^2 (V_\alpha - x_r x_r V_{R\alpha})] + a_\alpha^2 x_i x_\alpha (V_I - a_\alpha^2 V_{I\alpha}) \tag{B-5}$$

où

$$V = \frac{1}{2}(I - x_r x_r I_R)$$
$$V_i = \frac{1}{2}(I_i - x_r x_r I_{RI})$$
$$V_{ij} = \frac{1}{2}(I_{IJ} - x_r x_r I_{RIJ})$$

Les coefficients I_{IJK} sont obtenus par une permutation circulaire des indices (1,2,3) des relations suivantes :

$$I_{123} = [I_{23} - I_{13}] / (a_1^2 - a_2^2),$$
$$I_{112} = [I_{12} - I_{11}] / (a_1^2 - a_2^2),$$
$$I_{113} = [I_{13} - I_{11}] / (a_1^2 - a_3^2),$$
$$5\, I_{111} = 4\pi/a_1^4 - I_{112} - I_{113}.$$

De même, en procédant à des dérivations partielles de Φ^α et $\psi^\alpha_{,i}$, on trouve :

$$\Phi^\alpha_{,ij\alpha} = -a_\alpha^2 (\delta_{ij} I_{I\alpha} + 2\,\delta_{i\alpha}\delta_{j\alpha} I_{\alpha\alpha}) \tag{B-6}$$

$$\psi^\alpha_{,ijkl\alpha} = -\frac{1}{2} a_\alpha^2 (\delta_{ij}\delta_{kl} I_{kI} + \delta_{ki}\delta_{jl} I_{JI} + \delta_{il}\delta_{jk} I_{JI} + \delta_{ik}\delta_{jl} I_{IJ} +$$

$$+ \delta_{il}\delta_{kj} I_{IJ} + \delta_{kl}\delta_{ij} I_{IK}) - 2\, a_\alpha^2 (\delta_{i\alpha}\delta_{j\alpha}\delta_{kl} I_{k\alpha} + \delta_{i\alpha}\delta_{k\alpha}\delta_{jl} I_{J\alpha} +$$

$$\delta_{i\alpha}\delta_{l\alpha}\delta_{kj} I_{J\alpha} + \delta_{j\alpha}\delta_{k\alpha}\delta_{il} I_{I\alpha} + \delta_{j\alpha}\delta_{l\alpha}\delta_{ik} I_{I\alpha} + \delta_{l\alpha}\delta_{k\alpha}\delta_{ij} I_{J\alpha\alpha})$$

$$+ 2\, a_\alpha^4 (\delta_{i\alpha}\delta_{j\alpha}\delta_{kl} I_{k\alpha\alpha} + \delta_{i\alpha}\delta_{k\alpha}\delta_{jl} I_{J\alpha\alpha} + \delta_{i\alpha}\delta_{l\alpha}\delta_{jk} I_{J\alpha\alpha} +$$

$$\delta_{j\alpha}\delta_{k\alpha}\delta_{il} I_{J\alpha\alpha} + \delta_{l\alpha}\delta_{j\alpha}\delta_{ik} I_{I\alpha\alpha} + \delta_{l\alpha}\delta_{k\alpha}\delta_{ij} I_{I\alpha\alpha})$$

$$+ \frac{a_\alpha^4}{2} (\delta_{ij}\delta_{kl} I_{KI\alpha} + \delta_{il}\delta_{jk} I_{JI\alpha} + \delta_{ik}\delta_{jl} I_{JI\alpha} + \delta_{jk}\delta_{il} I_{IJ\alpha}$$

$$+ \delta_{jl}\delta_{ik}I_{IJ\alpha} + \delta_{kl}\delta_{ij}I_{IK\alpha}). \qquad \text{(B-7)}$$

On remarque que $\Phi_{,ij}$, $\Psi_{,ijkl}$, $\Phi^{\alpha}{}_{,ij\alpha}$ et $\Psi^{\alpha}{}_{,ijkl\alpha}$ sont uniformes et compte tenu des équations du paragraphe IV.2.2., les composantes des tenseurs $\underline{T}^{I}$ et $\underline{T}^{I\alpha}$ sont uniformes dans l'inclusion ellipsoïdale.

Les composantes de ces tenseurs dépendent des intégrales elliptiques E et F par l'intermédiaire des coefficients d'Eshelby I_I, I_{IJ}, I_{IJK} (annexe C) dans le cas d'une inclusion ellipsoïdale quelconque ($a_1 > a_2 > a_3$).

Ces intégrales elliptiques prennent des formes polynômiales dans des cas particuliers d'inclusions (sphère, inclusion aplatie, bande). Dans l'annexe C, on trouve les détails de calcul de ces formes polynômiales et également les calculs qui font passer des résultats concernant un ellipsoïde quelconque à ceux qui correspondent aux formes particulières précédentes.

B.2. Cas particulier d'une inclusion sphérique dans un milieu isotrope

Indiquons par exemple comment nous traitons le cas particulier d'une inclusion sphérique de rayon a :

après un développement limité des intégrales elliptiques E et F lorsque les demi-axes a_1, a_2, a_3 convergent vers a, les coefficients d'Eshelby se réduisent à :

$$I = 4\pi a^2 \quad , \quad I_I = \frac{4\pi}{3} \quad , \quad I_{IJ} = \frac{4\pi}{5a^2} \quad \text{et} \quad I_{IJK} = \frac{4\pi}{7a^4} .$$

En substituant ces valeurs dans les équations (B-3-4-6-7), les dérivées partielles des fonctions potentielles nécessaires pour calculer les tenseurs $\underline{T}^{I}$ et $\underline{T}^{I\alpha}$ s'obtiennent par :

$$\Phi_{,ij} = -\frac{4\pi}{3}\delta_{ij}$$

$$\Psi_{,ijkl} = -\frac{8\pi}{15}[\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{jk}\delta_{il} + \delta_{jl}\delta_{ik}] \qquad \text{(B-8)}$$

$$\Phi^{\alpha}{}_{,ij\alpha} = -\frac{4\pi}{5}[\delta_{ij} + 2\,\delta_{i\alpha}\,\delta_{j\alpha}]$$

$$\psi^{\alpha}_{,ijkl\alpha} = -\frac{8\pi}{35}[\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{kj}\delta_{il} + 2\delta_{i\alpha}\delta_{l\alpha}\delta_{jk} + 2\delta_{ij}\delta_{l\alpha}\delta_{k\alpha}$$

$$+ 2\delta_{il}\delta_{j\alpha}\delta_{k\alpha} + 2\delta_{kl}\delta_{j\alpha}\delta_{i\alpha} + 2\delta_{ik}\delta_{j\alpha}\delta_{l\alpha} + 2\delta_{k\alpha}\delta_{jl}\delta_{i\alpha}]$$

Ces formules sont reprises pour obtenir T^{I} (IV-27) et $T^{I\alpha}$ (IV-32).

Bibliographie de l'annexe B

[1] T. Mura, 1982, Micromechanics of defects in solids, Martinus Nijholf pub.

Annexe C

Détermination des tenseurs $\partial \underline{S}/\partial a_\alpha$ et $\partial \underline{A}/\partial a_\alpha$ à partir des résultats classiques d'Eshelby

C.1. Tenseurs d'Eshelby $\underline{S}$ et antisymétrique $\underline{A}$

C.2. Calcul des tenseurs $\partial \underline{S}/\partial a_\alpha$ et $\partial \underline{A}/\partial a_\alpha$

C.2.1. Dérivées partielles des intégrales elliptiques E et F

C.2.2. Dérivées partielles des coefficients d'Eshelby I_i (i = 1,2,3)

C.3. Cas particuliers d'ellipsoïdes

C.3.1. Développement des intégrales elliptiques E et F dans le cas intermédiaire d'inclusion : $a_1 = a_2 > a_3$

C.3.2. Composantes des tenseurs $\partial \underline{S}/\partial a_\alpha$ dans ce cas intermédiaire

C.3.3. Cas particuliers d'une inclusion sphérique et d'une inclusion aplatie

C.1. Tenseurs d'Eshelby $\underline{S}$ et antisymétrique $\underline{A}$:

Les composantes du tenseur d'Eshelby $\underline{S}$ définies par (II-48) sont données dans le cas d'une inclusion ellipsoïdale de demi-axes a_1, a_2, a_3 par [1] :

$$
\begin{aligned}
8\pi\,(1-\nu)\,S_{1111} &= 3\,a_1^2\,I_{11} + (1-2\nu)\,I_1,\\
8\pi\,(1-\nu)\,S_{1122} &= a_2^2\,I_{12} - (1-2\nu)\,I_1,\\
8\pi\,(1-\nu)\,S_{1133} &= a_3^2\,I_{13} - (1-2\nu)\,I_1,\\
16\pi\,(1-\nu)\,S_{1212} &= (a_1^2+a_2^2)\,I_{12} + (1-2\nu)\,(I_1+I_2).
\end{aligned}
\tag{C-1}
$$

Les autres composantes non nulles sont obtenues par une permutation circulaire des indices (1,2,3) et par les relations de symétrie (II-51). Les composantes du type S_{1112}, S_{1223}, S_{1232} sont nulles.

I_1, I_2, I_3 étant des coefficients numériques donnés par Eshelby. Pour $a_1 > a_2 > a_3$, on a :

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{4\pi\,a_1a_2a_3}{(a_1^2-a_2^2)\,(a_1^2-a_3^2)^{1/2}}\Big[F(\varphi,K) - E(\varphi,K)\Big],\\
I_3 &= \frac{4\pi\,a_1a_2a_3}{(a_2^2-a_3^2)\,(a_1^2-a_3^2)^{1/2}}\left[\frac{a_2\,(a_1^2-a_3^2)^{1/2}}{a_1a_3} - E(\varphi,K)\right],\\
I_2 &= 4\pi - I_1 - I_3
\end{aligned}
\tag{C-2}
$$

où F et E désignent les intégrales elliptiques de la première et deuxième espèce :

$$
\begin{aligned}
&F(\varphi,K) = \int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{(1-K^2\sin^2\psi)^{1/2}}\ ,\quad E(\varphi,K) = \int_0^{\varphi} (1-K^2\sin^2\psi)^{1/2}\,d\psi\ ,\\
&\varphi = \sin^{-1}\left(1-\frac{a_3^2}{a_1^2}\right)^{1/2}\ ,\quad K^2 = \frac{a_1^2-a_2^2}{a_1^2-a_3^2}\ ,
\end{aligned}
\tag{C-3}
$$

et les coefficients du type I_{ij} sont donnés par une permutation circulaire de (1,2,3) des relations suivantes :

$$3I_{11} + I_{12} + I_{13} = 4\pi/a_1^2 \ ,$$
$$3a_1^2 I_{11} + a_2^2 I_{12} + a_3^2 I_{13} = 3\, I_1 \ , \qquad \text{(C-4)}$$
$$I_{12} = \frac{I_2 - I_1}{a_1^2 - a_2^2} \ .$$

Ces coefficients peuvent s'exprimer en termes des I_i et par suite des intégrales elliptiques E et F (C-2).

Donc, les composantes S_{ijkl} dépendent par l'intermédiaire des I_i (C-1) des intégrales elliptiques E et F et des demi-axes a_α.

De même, en utilisant ces coefficients (I_i), Berveiller [2] a calculé les composantes non nulles du tenseur antisymétrique $\underline{A}$ donnant la rotation totale, il a trouvé :

$$8\pi\, A_{1212} = I_2 - I_1$$
$$8\pi\, A_{1313} = I_3 - I_1 \qquad \text{(C-5)}$$
$$8\pi\, A_{2323} = I_3 - I_2$$

Les autres composantes s'obtiennent par les relations de symétrie (II-51).

Nous remarquons aussi que les composantes A_{ijkl} dépendent des intégrales elliptiques et des demi-axes de l'ellipsoïde a_α.

Les tenseurs $\underline{S}$ et $\underline{A}$ peuvent alors être représentés par deux fonctions tensorielles à plusieurs variables respectivement $\underline{Y}$ et $\underline{Z}$:

$$\underline{S} = \underline{Y}\,(a_\beta, E, F)$$
$$\underline{A} = \underline{Z}\,(a_\beta, E, F) \qquad \text{(C-6)}$$

C.2. Calcul des tenseurs $\partial\underline{S}/\partial a_\alpha$ et $\partial\underline{A}/\partial a_\alpha$:

Nous accédons à la dérivation partielle de $\underline{S}$ et $\underline{A}$ par rapport aux demi-axes a_α. Pour cela, en utilisant les écritures (C-6), on obtient d'après la règle de composition des dérivées partielles :

$$\frac{\partial \underline{S}}{\partial a_\alpha} = \frac{\partial \underline{Y}}{\partial a_\alpha} + \frac{\partial \underline{Y}}{\partial E}\frac{\partial E}{\partial a_\alpha} + \frac{\partial \underline{Y}}{\partial F}\frac{\partial F}{\partial a_\alpha} \qquad \text{(C-7)}$$

$$\frac{\partial \underline{A}}{\partial a_\alpha} = \frac{\partial \underline{Z}}{\partial a_\alpha} + \frac{\partial \underline{Z}}{\partial E}\frac{\partial E}{\partial a_\alpha} + \frac{\partial \underline{Z}}{\partial F}\frac{\partial F}{\partial a_\alpha}$$

Pour obtenir les tenseurs $\partial \underline{S}/\partial a_\alpha$ et $\partial \underline{A}/\partial a_\alpha$, il faut donc calculer les termes $\partial E/\partial a_\alpha$ et $\partial F/\partial a_\alpha$.

C.2.1. Dérivées partielles des intégrales elliptiques : $\partial E/\partial a_\alpha$ et $\partial F/\partial a_\alpha$

Les intégrales elliptiques définies précédemment (C-3) sont fonction de φ et K, leurs dérivées partielles s'écrivent :

$$\frac{\partial E}{\partial a_\alpha} = \frac{\partial E}{\partial K}\frac{\partial K}{\partial a_\alpha} + \frac{\partial E}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial a_\alpha} \qquad \text{(C-8)}$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_\alpha} = \frac{\partial F}{\partial K}\frac{\partial K}{\partial a_\alpha} + \frac{\partial F}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial a_\alpha}$$

A partir des équations (C-3), on obtient les dérivées partielles de E et F par rapport à φ et K :

E : $$\frac{\partial E}{\partial K} = \frac{E-F}{K} \quad ; \quad \frac{\partial E}{\partial \varphi} = \frac{a_2}{a_1} \qquad \text{(C-9)}$$

F : $$\frac{\partial F}{\partial K} = \frac{1}{(1-K^2)}\left[\frac{E-(1-K^2)F}{K} - \frac{a_3}{a_1 a_2}(a_1^2 - a_2^2)^{1/2}\right] \quad ; \quad \frac{\partial F}{\partial \varphi} = \frac{a_1}{a_2} \quad ,$$

et les dérivées partielles de K et φ par rapport à a_α sont données par :

K : $$\frac{\partial K}{\partial a_1} = \frac{a_1 (a_2^2 - a_3^2)}{K (a_1^2 - a_3^2)^2} \quad , \quad \frac{\partial K}{\partial a_2} = -\frac{a_2}{K (a_1^2 - a_3^2)} \quad , \quad \frac{\partial K}{\partial a_3} = \frac{a_3 (a_1^2 - a_2^2)}{K (a_1^2 - a_3^2)^2}$$

φ : $$\frac{\partial \varphi}{\partial a_1} = \frac{a_3}{a_1 (a_1^2 - a_3^2)^{1/2}} \quad , \quad \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} = 0 \quad \frac{\partial \varphi}{\partial a_3} = -\frac{1}{(a_1^2 - a_3^2)^{1/2}} \qquad \text{(C-10)}$$

En substituant les dérivées partielles obtenues (C-9) et (C-10) dans (C-8), on obtient alors :

$$\frac{\partial E}{\partial a_1} = \frac{a_1 (a_2^2 - a_3^2)(E-F)}{(a_1^2 - a_2^2)(a_1^2 - a_3^2)} + \frac{a_2 a_3}{a_1^2 (a_1^2 - a_3^2)^{1/2}}$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_2} = - \frac{a_2 (E-F)}{(a_1^2 - a_2^2)}$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_3} = \frac{a_3 (E-F)}{(a_1^2 - a_3^2)} - \frac{a_2}{a_1 (a_1^2 - a_3^2)^{1/2}} \qquad \text{(C-11)}$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_1} = \frac{a_1 E}{(a_1^2 - a_2^2)} - \frac{a_1 (a_2^2 - a_3^2) F}{(a_1^2 - a_3^2)(a_1^2 - a_2^2)}$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_2} = - \frac{a_2 (a_1^2 - a_3^2) E}{(a_1^2 - a_2^2)(a_2^2 - a_3^2)} + \frac{a_2 F}{(a_1^2 - a_2^2)} + \frac{a_3 (a_1^2 - a_3^2)^{1/2}}{a_1 (a_2^2 - a_3^2)}$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_3} = \frac{a_3 E}{(a_2^2 - a_3^2)} - \frac{a_3 F}{(a_1^2 - a_3^2)} - \frac{a_2 (a_1^2 - a_3^2)^{1/2}}{a_1 (a_2^2 - a_3^2)} \quad .$$

C.2.2. <u>Dérivées partielles des coefficients d'Eshelby I_i (i = 1,2,3</u>

Finalement, compte tenu des relations (C-2) et (C-11), nous avons pour les dérivées partielles des coefficients I_i :

$$\frac{\partial I_1}{\partial a_1} = \frac{4\pi a_2 a_3 (a_1^2 a_3^2 + a_2^2 a_3^2 - 2a_1^4)}{(a_1^2 - a_2^2)^2 (a_1^2 - a_3^2)^{3/2}} (F-E) + \frac{4\pi a_1^2 a_2 a_3 E}{(a_1^2 - a_2^2)(a_1^2 - a_3^2)^{3/2}} - \frac{4\pi a_2^2 a_3^2}{a_1 (a_1^2 - a_2^2)(a_1^2 - a_3^2)}$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial a_2} = \frac{4\pi a_1 a_3 (a_1^2 + a_2^2)}{(a_1^2 - a_2^2)^2 (a_1^2 - a_3^2)^{1/2}} (F-E) - \frac{4\pi a_1 a_2^2 a_3 E}{(a_1^2 - a_2^2)(a_2^2 - a_3^2)(a_1^2 - a_3^2)^{1/2}} + \frac{4\pi a_2 a_3^2}{(a_1^2 - a_2^2)(a_2^2 - a_3^2)}$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial a_3} = \frac{4\pi a_1^3 a_2}{(a_1^2 - a_2^2)(a_1^2 - a_3^2)^{3/2}} (F-E) + \frac{4\pi a_1 a_2 a_3^2 E}{(a_2^2 - a_3^2)(a_1^2 - a_3^2)^{3/2}} - \frac{4\pi a_2^2 a_3}{(a_2^2 - a_3^2)(a_1^2 - a_3^2)}$$

$$\frac{\partial I_3}{\partial a_1} = \frac{4\pi\, a_1^2 a_2 a_3}{(a_1^2 - a_2^2)\,(a_1^2 - a_3^2)^{3/2}}\,(F-E) + \frac{4\pi\, a_2 a_3^3}{(a_2^2 - a_3^2)\,(a_1^2 - a_3^2)^{3/2}}\,E - \frac{4\pi\, a_2^2 a_3^2}{a_1(a_2^2 - a_3^2)\,(a_1^2 - a_3^2)} \qquad \text{(C-12)}$$

$$\frac{\partial I_3}{\partial a_2} = \frac{-\,4\pi\, a_1 a_2^2 a_3}{(a_1^2 - a_2^2)\,(a_2^2 - a_3^2)\,(a_1^2 - a_3^2)^{1/2}}\,(F-E) + \frac{4\pi\, a_1 a_3\,(a_2^2 + a_3^2)}{(a_2^2 - a_3^2)^2 (a_1^2 - a_3^2)^{1/2}}\,E - \frac{8\pi\, a_2 a_3^2}{(a_2^2 - a_3^2)^2}$$

$$\frac{\partial I_3}{\partial a_3} = \frac{4\pi\, a_1 a_2 a_3^2}{(a_2^2 - a_3^2)\,(a_1^2 - a_3^2)^{3/2}}\,(F-E) - \frac{4\pi\, a_1 a_2\,(a_1^2 a_2^2 + a_1^2 a_3^2 - 2a_3^2)\,E}{(a_2^2 - a_3^2)^2 (a_1^2 - a_3^2)^{3/2}} + \frac{4\pi\, a_2^2 a_3\,(2a_1^2 + a_2^2 - 3a_3^2)}{(a_2^2 - a_3^2)^2 (a_1^2 - a_3^2)}$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial a_1} = -\frac{\partial I_1}{\partial a_1} - \frac{\partial I_3}{\partial a_1}$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial a_2} = -\frac{\partial I_1}{\partial a_2} - \frac{\partial I_3}{\partial a_2}$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial a_3} = -\frac{\partial I_1}{\partial a_3} - \frac{\partial I_3}{\partial a_3}\ .$$

A partir des relations (C-1) et (C-5), nous obtenons en définitive les dérivées partielles des tenseurs $\underline{S}$ et $\underline{A}$ par rapport aux demi-axes a_α en tenant compte des équations (C-2) et (C-12).

Composantes des tenseurs $\partial \underline{S}/\partial a_\alpha$ (α = 1,2,3) : *($a > b > c$, isotrope)*

$$2(1-\nu)\frac{\partial S_{1111}}{\partial a} = \frac{b^2 c^2}{a(a^2-b^2)^2(a^2-c^2)^2}\left[5a^2b^2 + 5a^2c^2 - 9a^4 - b^2c^2\right]$$

$$-2\nu\left[\frac{bc\,(F-E)}{(a^2-b^2)^2(a^2-c^2)^{3/2}}\left(a^2c^2 + b^2c^2 - 2a^4\right) + \frac{a^2 b c E}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)^{3/2}} - \frac{b^2c^2}{a(a^2-b^2)(a^2-c^2)}\right]$$

$$+\frac{2a^2 b c E}{(a^2-b^2)^2(a^2-c^2)^{5/2}}\left[3a^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - a^2c^2\right]$$

$$+\frac{b c\,(F-E)}{(a^2-b^2)^3(a^2-c^2)^{5/2}}\left[-8a^8 + 7a^6c^2 + a^6b^2 - 3a^4c^4 - a^4b^4 + b^4c^4 + 13a^4b^2c^2 - 6a^2b^2c^4 - 4a^2c^2b^4\right]$$

$$2(1-\nu)\frac{\partial S_{1111}}{\partial b} = \frac{b c^2}{(a^2-b^2)^2(a^2-c^2)(b^2-c^2)}\left[4a^4 - 5a^2c^2 + b^2c^2\right]$$

$$+\frac{a c E}{(a^2-b^2)^2(b^2-c^2)(a^2-c^2)^{3/2}}\left[a^4c^2 - 5a^4b^2 - c^2b^4 + a^2b^4 + 4a^2b^2c^2\right]$$

$$+\frac{a c\,(F-E)}{(a^2-b^2)^3(a^2-c^2)^{3/2}}\left[4a^6 - a^2b^4 + b^4c^2 - 3a^4c^2 - 6a^2b^2c^2 + 5a^4b^2\right]$$

$$-2\nu\left[\frac{-a b^2 c E}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)(a^2-c^2)^{1/2}} + \frac{b c^2}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)} + \frac{a c\,(a^2+b^2)}{(a^2-b^2)^2(a^2-c^2)^{1/2}}(F-E)\right]$$

$$2(1-\nu)\frac{\partial S_{1111}}{\partial c} = \frac{b^2 c}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)(a^2-c^2)^2}\left[-4a^4 + 5a^2b^2 - b^2c^2\right]$$

$$-2\nu\left[\frac{a^3 b\,(F-E)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)^{3/2}} + \frac{a b c^2 E}{(b^2-c^2)(a^2-c^2)^{3/2}} - \frac{b^2 c}{(b^2-c^2)(a^2-c^2)}\right]$$

$$+\frac{a b E}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)(a^2-c^2)^{5/2}}\left[5a^4c^2 - a^4b^2 - a^2c^4 + b^2c^4 - 4a^2b^2c^2\right]$$

$$+\frac{2a^3 b\,(F-E)}{(a^2-b^2)^2(a^2-c^2)^{5/2}}\left[2a^4 - a^2b^2 - b^2c^2\right]$$

$$2\,(1-\nu)\,\frac{\partial S_{2222}}{\partial a} = \frac{b^2\,c^2}{a\,(a^2-b^2)^2(b^2-c^2)^2}\left[-5b^4+a^2b^2+a^2c^2+3b^2c^2\right]$$

$$-2\nu\left[\frac{b^2\,c^2}{a(a^2-b^2)(b^2-c^2)} - \frac{b^3\,c\,E}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)(a^2-c^2)^{1/2}} + \frac{b\,c\,(a^2+b^2)\,(F-E)}{(a^2-b^2)^2(a^2-c^2)^{1/2}}\right]$$

$$+\frac{b^3\,c\,E}{(a^2-b^2)^2(b^2-c^2)^2(a^2-c^2)^{1/2}}\left[4b^4-2a^2c^2-2b^2c^2\right]$$

$$+\frac{b\,c\,(F-E)}{(a^2-b^2)^3(b^2-c^2)(a^2-c^2)^{1/2}}\left[-4b^6+a^4b^2+6\,a^2b^2c^2-5\,a^2b^4+3\,b^4c^2-a^4c^2\right]$$

$$2\,(1-\nu)\,\frac{\partial S_{2222}}{\partial b} = \frac{b}{(a^2-b^2)^2(b^2-c^2)^3}\left[8a^4b^2c^2-18a^2b^4c^2+a^2b^2c^4+14b^6c^2-9b^4c^4+3b^2c^6+a^2c^6\right]$$

$$-2\nu\left[\frac{bc^2\,(c^2+2a^2-3b^2)}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)^2} + \frac{a\,c\,E}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)^2(a^2-c^2)^{1/2}}\left(2b^4-a^2b^2-a^2c^2\right)\right.$$

$$\left.+\frac{a\,c\,(F-E)}{(a^2-b^2)^2(b^2-c^2)(a^2-c^2)^{1/2}}\left(-2b^4+a^2c^2+b^2c^2\right)\right]$$

$$+\frac{a\,c\,E}{(a^2-b^2)^2(b^2-c^2)^3(a^2-c^2)^{1/2}}\left[-8b^8-b^4c^4-3a^4b^4+a^4c^4+7a^2b^6+b^6c^2-6a^4b^2c^2\right.$$
$$\left.+13a^2b^4c^2-4a^2b^2c^4\right]$$

$$+\frac{a\,c\,(F-E)}{(a^2-b^2)^3(b^2-c^2)^2(a^2-c^2)^{1/2}}\left[2b^8+8a^2b^6-4b^6c^2-2a^4b^4+3b^4c^4-a^4c^4+4a^4b^2c^2-16a^2b^4c^2+6a^2b^2c^4\right.$$

$$2\,(1-\nu)\,\frac{\partial S_{2222}}{\partial c} = \frac{b^4c}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)^3}\left[-8\,a^2+9\,b^2-c^2\right]$$

$$-2\nu\left[\frac{-2b^2c}{(b^2-c^2)^2} + \frac{ab\,(b^2+c^2)\,E}{(b^2-c^2)^2(a^2-c^2)^{1/2}} - \frac{ab^3\,(F-E)}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)(a^2-c^2)^{1/2}}\right]$$

$$+\frac{a\,b\,E}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)^3(a^2-c^2)^{1/2}}\left[-4b^6+3a^2b^4-5b^4c^2-a^2c^4+b^2c^4+6a^2b^2c^2\right]$$

$$+\frac{2\,ab^3\,(F-E)}{(a^2-b^2)^2(b^2-c^2)^2(a^2-c^2)^{1/2}}\left[2\,b^4-a^2c^2-a^2b^2\right]$$

$$2\,(1-\nu)\,\frac{\partial S_{3333}}{\partial a} = \frac{b^2c^2}{a\,(a^2-c^2)^2(b^2-c^2)^2}\left[3\,b^2c^2 + a^2c^2 - 5\,c^4 + a^2b^2\right]$$

$$-\,2\nu\left[\frac{a^2\,b\,c\,(F-E)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)^{3/2}} - \frac{b^2c^2}{a\,(b^2-c^2)(a^2-c^2)} + \frac{b\,c^3\,E}{(b^2-c^2)(a^2-c^2)^{3/2}}\right]$$

$$+\,\frac{2\,b\,c^3\,E}{(b^2-c^2)^2(a^2-c^2)^{5/2}}\left[-\,a^2b^2 - b^2c^2 + 2\,c^4\right]$$

$$+\,\frac{b\,c\,(F-E)}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)(a^2-c^2)^{5/2}}\left[-\,4a^2b^2c^2 + 5a^2c^4 + a^4b^2 - a^4c^2 - b^2c^4\right]$$

$$2\,(1-\nu)\,\frac{\partial S_{3333}}{\partial b} = \frac{b\,c^4}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)^3}\left[8\,a^2 - 9\,c^2 + b^2\right]$$

$$-\,2\nu\left[-\frac{2\,b\,c^2}{(b^2-c^2)^2} + \frac{ac\,(b^2+c^2)\,E}{(b^2-c^2)^2(a^2-c^2)^{1/2}} - \frac{a\,b^2\,c\,(F-E)}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)(a^2-c^2)^{1/2}}\right]$$

$$+\,\frac{a\,c\,E}{(b^2-c^2)^3(a^2-c^2)^{3/2}}\left[4\,c^6 - 6\,a^2b^2c^2 - 3\,a^2c^4 + 5\,b^2c^4 + a^2b^4 - b^4c^2\right]$$

$$+\,\frac{a\,c\,(F-E)}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)^2(a^2-c^2)^{3/2}}\left[4\,a^2b^2c^2 - 5\,b^2c^4 - a^2b^4 + b^4c^2 + a^2c^4\right]$$

$$2\,(1-\nu)\,\frac{\partial S_{3333}}{\partial c} = \frac{b^2\,c}{(b^2-c^2)^3(a^2-c^2)^2}\left[-\,14c^6 - a^2b^2c^2 - 8a^4c^2 + 18a^2c^4 - 3b^4c^2 - a^2b^4 + 9b^2c^4\right]$$

$$-\,2\nu\left[\frac{b^2c\,(2a^2+b^2-3c^2)}{(b^2-c^2)^2(a^2-c^2)} + \frac{abc^2\,(F-E)}{(b^2-c^2)(a^2-c^2)^{3/2}} - \frac{ab\,(a^2b^2+a^2c^2-2c^4)\,E}{(b^2-c^2)^2(a^2-c^2)^{3/2}}\right]$$

$$+\,\frac{2\,abc^2\,(F-E)}{(a^2-c^2)^{5/2}(b^2-c^2)^2}\left[3\,c^4 - a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2\right]$$

$$+\,\frac{ab\,E}{(b^2-c^2)^3(a^2-c^2)^{5/2}}\left[8c^8 + 3a^4c^4 - a^4b^4 + b^4c^4 - 7a^2c^6 - b^2c^6 + 6a^4b^2c^2 - 13a^2b^2c^4 + 4a^2b^4c^2\right]$$

$$2(1-\nu)\frac{\partial S_{1122}}{\partial a} = \frac{b^2c^2}{a(a^2-b^2)^2(b^2-c^2)(a^2-c^2)}\left[2a^2b^2-b^2c^2-3a^2c^2+2a^4\right]$$

$$+2\nu\left[-\frac{b^2c^2}{a(a^2-b^2)(a^2-c^2)}+\frac{a^2bcE}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)^{3/2}}+\frac{bc(F-E)}{(a^2-b^2)^2(a^2-c^2)^{3/2}}(a^2c^2+b^2c^2-2a^4)\right]$$

$$+\frac{bcE}{(a^2-b^2)^2(b^2-c^2)(a^2-c^2)^{3/2}}\left[2a^2b^2c^2-a^2b^4+a^4c^2-3a^4b^2+b^4c^2\right]$$

$$+\frac{bc(F-E)}{(a^2-b^2)^3(a^2-c^2)^{3/2}}\left[2a^6-6a^2b^2c^2+5a^4b^2+a^2b^4-b^4c^2-a^4c^2\right]$$

$$2(1-\nu)\frac{\partial S_{1122}}{\partial b} = \frac{b}{(a^2-b^2)^2(b^2-c^2)^2}\left[a^2b^2c^2+2b^6-2a^2b^4+3a^2c^4-3b^4c^2-b^2c^4\right]$$

$$+2\nu\left[\frac{bc^2}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}-\frac{ab^2cE}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)(a^2-c^2)^{1/2}}+\frac{ac(a^2+b^2)(F-E)}{(a^2-b^2)^2(a^2-c^2)^{1/2}}\right]$$

$$+\frac{2ab^2cE}{(a^2-b^2)^2(b^2-c^2)^2(a^2-c^2)^{1/2}}\left[b^4+a^2b^2-2a^2c^2\right]$$

$$+\frac{ac(F-E)}{(a^2-b^2)^3(b^2-c^2)(a^2-c^2)^{1/2}}\left[6a^2b^2c^2-5a^2b^4-a^4b^2-2b^6+a^4c^2+b^4c^2\right]$$

$$2(1-\nu)\frac{\partial S_{1122}}{\partial c} = \frac{b^2c}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)^2(a^2-c^2)}\left[2b^2c^2-a^2c^2-a^2b^2\right]$$

$$+2\nu\left[-\frac{b^2c}{(b^2-c^2)(a^2-c^2)}+\frac{abc^2E}{(b^2-c^2)(a^2-c^2)^{3/2}}+\frac{a^3b(F-E)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)^{3/2}}\right]$$

$$+\frac{abE}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)^2(a^2-c^2)^{3/2}}\left[-b^4c^2+a^2b^4+a^2c^4-b^2c^4\right]$$

$$+\frac{ab(F-E)}{(a^2-b^2)^2(b^2-c^2)(a^2-c^2)^{3/2}}\left[-a^2b^4+b^4c^2-a^4b^2+a^4c^2\right]$$

$$2\,(1-\nu)\,\frac{\partial S_{2233}}{\partial a} = \frac{b^2\,c^2}{a\,(a^2-b^2)(b^2-c^2)^2(a^2-c^2)}\left[2\,b^2c^2 - a^2b^2 - a^2c^2\right]$$

$$+\,2\nu\left[\frac{b^2c^2}{a\,(a^2-b^2)(b^2-c^2)} - \frac{b^3c\,E}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)(a^2-c^2)^{1/2}} + \frac{bc\,(a^2+b^2)\,(F-E)}{(a^2-b^2)^2(a^2-c^2)^{1/2}}\right]$$

$$+\,\frac{b\,c\,E}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)^2(a^2-c^2)^{3/2}}\left[a^2b^4 + a^2c^4 - b^2c^4 - b^4c^2\right]$$

$$+\,\frac{bc\,(F-E)}{(a^2-b^2)^2(b^2-c^2)(a^2-c^2)^{3/2}}\left[-\,a^2b^4 - a^4b^2 + a^4c^2 + b^4c^2\right]$$

$$2\,(1-\nu)\,\frac{\partial S_{2233}}{\partial b} = \frac{b\,c^2}{(b^2-c^2)^3(a^2-b^2)}\left[5b^4 - 4\,a^2b^2 - 4\,a^2c^2 + 3\,b^2c^2\right]$$

$$+\,2\nu\left[\frac{bc^2(2a^2+c^2-3b^2)}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)^2} + \frac{ac\,(2b^4-a^2b^2-a^2c^2)\,E}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)^2(a^2-c^2)^{1/2}} + \frac{ac\,(a^2c^2+b^2c^2-2b^4)(F-E)}{(a^2-b^2)^2(b^2-c^2)(a^2-c^2)^{1/2}}\right]$$

$$+\,\frac{ac\,E}{(b^2-c^2)^3(a^2-b^2)(a^2-c^2)^{1/2}}\left[-\,2b^6 - 5b^4c^2 + a^2b^4 + a^2c^4 - b^2c^4 + 6a^2b^2c^2\right]$$

$$+\,\frac{2\,ab^2c\,(F-E)}{(a^2-b^2)^2(b^2-c^2)^2(a^2-c^2)^{1/2}}\left[b^4 + b^2c^2 - 2a^2c^2\right]$$

$$2\,(1-\nu)\,\frac{\partial S_{2233}}{\partial c} = \frac{b^2c}{(b^2-c^2)^3(a^2-c^2)}\left[-\,5c^4 + 4\,a^2b^2 + 4\,a^2c^2 - 3\,b^2c^2\right]$$

$$+\,2\nu\left[-\,\frac{2\,b^2c}{(b^2-c^2)^2} + \frac{ab\,(b^2+c^2)\,E}{(b^2-c^2)^2(a^2-c^2)^{1/2}} - \frac{ab^3\,(F-E)}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)(a^2-c^2)^{1/2}}\right]$$

$$+\,\frac{a\,b\,E}{(b^2-c^2)^3(a^2-c^2)^{3/2}}\left[2c^6 - 6a^2b^2c^2 - a^2b^4 + 5b^2c^4 - a^2c^4 + b^4c^2\right]$$

$$+\,\frac{ab\,(F-E)}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)^2(a^2-c^2)^{3/2}}\left[a^2b^4 - b^4c^2 + a^2c^4 - 3b^2c^4 + 2\,a^2b^2c^2\right]$$

$$2(1-\nu)\frac{\partial S_{3311}}{\partial a} = \frac{b^2c^2}{a(a^2-b^2)(b^2-c^2)(a^2-c^2)^2}\left[3a^2b^2 - 2a^4 - 2a^2c^2 + b^2c^2\right]$$

$$+2\nu\left[-\frac{b^2c^2}{a(b^2-c^2)(a^2-c^2)} + \frac{a^2bc\,(F-E)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)^{3/2}} + \frac{bc^3E}{(b^2-c^2)(a^2-c^2)^{3/2}}\right]$$

$$+\frac{bc\,E}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)(a^2-c^2)^{5/2}}\left[-2a^2b^2c^2 + 3a^4c^2 + a^2c^4 - b^2c^4 - a^4b^2\right]$$

$$+\frac{2a^2bc\,(F-E)}{(a^2-b^2)^2(a^2-c^2)^{5/2}}\left[a^2c^2 + a^4 - 2b^2c^2\right]$$

$$2(1-\nu)\frac{\partial S_{3311}}{\partial b} = \frac{bc^2}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)^2(a^2-c^2)}\left[2b^2c^2 - a^2b^2 - a^2c^2\right]$$

$$+2\nu\left[-\frac{2bc^2}{(b^2-c^2)^2} + \frac{ac\,(b^2+c^2)E}{(b^2-c^2)^2(a^2-c^2)^{1/2}} - \frac{ab^2c\,(F-E)}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)(a^2-c^2)^{1/2}}\right]$$

$$+\frac{ac\,E}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)^2(a^2-c^2)^{3/2}}\left[a^2b^4 - b^4c^2 + a^2c^4 - b^2c^4\right]$$

$$+\frac{ac\,(F-E)}{(a^2-b^2)^2(b^2-c^2)(a^2-c^2)^{3/2}}\left[-a^4b^2 + a^4c^2 - a^2b^4 + b^4c^2\right]$$

$$2(1-\nu)\frac{\partial S_{3311}}{\partial c} = \frac{b^2c}{(a^2-c^2)^2(b^2-c^2)^2}\left[3a^2b^2 - a^2c^2 - 3c^4 + b^2c^2\right]$$

$$+2\nu\left[\frac{b^2c\,(2a^2+b^2-3c^2)}{(b^2-c^2)^2(a^2-c^2)} + \frac{abc^2\,(F-E)}{(b^2-c^2)(a^2-c^2)^{3/2}} + \frac{ab\,E\,(2c^4 - a^2c^2 - a^2b^2)}{(b^2-c^2)^2(a^2-c^2)^{3/2}}\right]$$

$$+\frac{2abc^2E}{(b^2-c^2)^2(a^2-c^2)^{5/2}}\left[c^4 + a^2c^2 - 2a^2b^2\right]$$

$$+\frac{ab\,(F-E)}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)(a^2-c^2)^{5/2}}\left[-2a^2b^2c^2 - a^4b^2 - b^2c^4 + 3a^2c^4 + a^4c^2\right]$$

$$2\,(1-\nu)\,\frac{\partial S_{1133}}{\partial a} = \frac{b^2\,c^2}{a\,(a^2-b^2)(b^2-c^2)(a^2-c^2)^2}\left[3a^2b^2-2a^2c^2+b^2c^2-2a^4\right]$$

$$+\,2\nu\left[-\frac{b^2\,c^2}{a\,(a^2-b^2)(a^2-c^2)}+\frac{a^2bc\,E}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)^{3/2}}+\frac{bc\,(a^2c^2+b^2c^2-2a^4)\,(F-E)}{(a^2-b^2)^2(a^2-c^2)^{3/2}}\right]$$

$$+\,\frac{bc\,E}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)(a^2-c^2)^{5/2}}\left[-2a^2b^2c^2+3a^4c^2+a^2c^4-b^2c^4-a^4b^2\right]$$

$$+\,\frac{2\,a^2bc\,(F-E)}{(a^2-b^2)^2(a^2-c^2)^{5/2}}\left[a^2c^2-2\,b^2c^2+a^4\right]$$

$$2\,(1-\nu)\,\frac{\partial S_{1133}}{\partial b} = \frac{b\,c^2}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)^2(a^2-c^2)}\left[-a^2b^2-a^2c^2+2\,b^2c^2\right]$$

$$+\,2\nu\left[\frac{b\,c^2}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}-\frac{a\,b^2\,c\,E}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)(a^2-c^2)^{1/2}}+\frac{ac\,(a^2+b^2)\,(F-E)}{(a^2-b^2)^2(a^2-c^2)^{1/2}}\right]$$

$$+\,\frac{a\,c\,E}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)^2(a^2-c^2)^{3/2}}\left[a^2c^4-b^4c^2-b^2c^4+a^2b^4\right]$$

$$+\,\frac{ac\,(F-E)}{(a^2-b^2)^2(b^2-c^2)(a^2-c^2)^{3/2}}\left[a^4c^2+b^4c^2-a^2b^4-a^4b^2\right]$$

$$2\,(1-\nu)\,\frac{\partial S_{1133}}{\partial c} = \frac{b^2\,c}{(b^2-c^2)^2(a^2-c^2)^2}\left[-3c^4-a^2c^2+b^2c^2+3a^2b^2\right]$$

$$+\,2\nu\left[-\frac{b^2\,c}{(b^2-c^2)(a^2-c^2)}+\frac{abc^2\,E}{(b^2-c^2)(a^2-c^2)^{3/2}}+\frac{a^3b\;\;(F-E)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)^{3/2}}\right]$$

$$+\,\frac{2\,abc^2\,E}{(b^2-c^2)^2(a^2-c^2)^{5/2}}\left[a^2c^2+c^4-2\,a^2b^2\right]$$

$$+\,\frac{ab\,(F-E)}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)(a^2-c^2)^{5/2}}\left[-2\,a^2b^2c^2+3\,a^2c^4-b^2c^4-a^4b^2+a^4c^2\right]$$

$$2(1-\nu)\frac{\partial S_{2211}}{\partial a} = \frac{b^2 c^2}{a(a^2-b^2)^2(b^2-c^2)(a^2-c^2)}\left[-3a^2c^2+2a^4-b^2c^2+2a^2b^2\right]$$

$$+2\nu\left[\frac{b^2c^2}{a(a^2-b^2)(b^2-c^2)} - \frac{b^3c\,E}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)(a^2-c^2)^{1/2}} + \frac{bc(a^2+b^2)(F-E)}{(a^2-b^2)^2(a^2-c^2)^{1/2}}\right]$$

$$+\frac{bc\,E}{(a^2-b^2)^2(b^2-c^2)(a^2-c^2)^{3/2}}\left[2a^2b^2c^2-3a^4b^2+a^4c^2-a^2b^4+b^4c^2\right]$$

$$+\frac{bc(F-E)}{(a^2-b^2)^3(a^2-c^2)^{3/2}}\left[2a^6+5a^4b^2-a^4c^2-6a^2b^2c^2+a^2b^4-b^4c^2\right]$$

$$2(1-\nu)\frac{\partial S_{2211}}{\partial b} = \frac{b\,c^2}{(a^2-b^2)^2(b^2-c^2)^2}\left[-3b^4-a^2b^2+3a^2c^2+b^2c^2\right]$$

$$+2\nu\left[\frac{bc^2(2a^2+c^2-3b^2)}{(b^2-c^2)^2(a^2-b^2)} + \frac{ac(2b^4-a^2b^2-a^2c^2)E}{(b^2-c^2)^2(a^2-b^2)(a^2-c^2)^{1/2}} + \frac{ac(a^2c^2+b^2c^2-2b^4)(F-E)}{(a^2-b^2)^2(b^2-c^2)(a^2-c^2)^{1/2}}\right]$$

$$+\frac{2ab^2c\,E}{(a^2-b^2)^2(b^2-c^2)^2(a^2-c^2)^{1/2}}\left[a^2b^2+b^4-2a^2c^2\right]$$

$$+\frac{a\,c(F-E)}{(a^2-b^2)^3(b^2-c^2)(a^2-c^2)^{1/2}}\left[6a^2b^2c^2-2b^6-a^4b^2+a^4c^2+b^4c^2-5a^2b^4\right]$$

$$2(1-\nu)\frac{\partial S_{2211}}{\partial c} = \frac{b^2\,c}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)^2(a^2-c^2)}\left[2b^2c^2-a^2b^2-a^2c^2\right]$$

$$+2\nu\left[-\frac{2b^2c}{(b^2-c^2)^2} + \frac{ab(b^2+c^2)E}{(b^2-c^2)^2(a^2-c^2)^{1/2}} - \frac{ab^3(F-E)}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)(a^2-c^2)^{1/2}}\right]$$

$$+\frac{ab\,E}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)^2(a^2-c^2)^{3/2}}\left[a^2c^4+a^2b^4-b^4c^2-b^2c^4\right]$$

$$+\frac{ab(F-E)}{(a^2-b^2)^2(b^2-c^2)(a^2-c^2)^{3/2}}\left[-a^4b^2+a^4c^2-a^2b^4+b^4c^2\right]$$

$$2\,(1-\nu)\,\frac{\partial S_{3322}}{\partial a} = \frac{b^2c^2}{a\,(a^2-b^2)(b^2-c^2)^2(a^2-c^2)}\left[2b^2c^2-a^2c^2-a^2b^2\right]$$

$$+\,2\nu\left[-\frac{b^2c^2}{a\,(b^2-c^2)(a^2-c^2)}+\frac{a^2bc\,(F-E)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)^{3/2}}+\frac{bc^3\,E}{(b^2-c^2)(a^2-c^2)^{3/2}}\right]$$

$$+\,\frac{bc\,E}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)^2(a^2-c^2)^{3/2}}\left[a^2b^4-b^4c^2-b^2c^4+a^2c^4\right]$$

$$+\,\frac{bc\,(F-E)}{(a^2-b^2)^2(b^2-c^2)(a^2-c^2)^{3/2}}\left[-a^2b^4+b^4c^2-a^4b^2+a^4c^2\right]$$

$$2\,(1-\nu)\,\frac{\partial S_{3322}}{\partial b} = \frac{b\,c^2}{(b^2-c^2)^3(a^2-b^2)}\left[-4a^2b^2+5b^4+3b^2c^2-4a^2c^2\right]$$

$$+\,2\nu\left[-\frac{2\,b\,c^2}{(b^2-c^2)^2}+\frac{ac\,(b^2+c^2)\,E}{(b^2-c^2)^2(a^2-c^2)^{1/2}}-\frac{ab^2c\,(F-E)}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)(a^2-c^2)^{1/2}}\right]$$

$$+\,\frac{a\,c\,E}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)^3(a^2-c^2)^{1/2}}\left[6\,a^2b^2c^2-5\,b^4c^2+a^2b^4+a^2c^4-b^2c^4-2\,b^6\right]$$

$$+\,\frac{2\,ab^2\,c\,(F-E)}{(a^2-b^2)^2(b^2-c^2)^2(a^2-c^2)^{1/2}}\left[b^4-2\,a^2c^2+b^2c^2\right]$$

$$2\,(1-\nu)\,\frac{\partial S_{3322}}{\partial c} = \frac{b^2\,c}{(b^2-c^2)^3(a^2-c^2)}\left[4\,a^2b^2-3\,b^2c^2+4\,a^2c^2-5\,c^4\right]$$

$$+\,2\nu\left[\frac{b^2c\,(2a^2+b^2-3c^2)}{(b^2-c^2)^2(a^2-c^2)}+\frac{abc^2\,(F-E)}{(b^2-c^2)(a^2-c^2)^{3/2}}-\frac{ab\,E\,(a^2b^2+a^2c^2-2c^4)}{(b^2-c^2)^2(a^2-c^2)^{3/2}}\right]$$

$$+\,\frac{a\,b\,E}{(b^2-c^2)^3(a^2-c^2)^{3/2}}\left[-6\,a^2b^2c^2-a^2b^4-a^2c^4+b^4c^2+5\,b^2c^4+2\,c^6\right]$$

$$+\,\frac{a\,b\,(F-E)}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)^2(a^2-c^2)^{3/2}}\left[2\,a^2b^2c^2-b^4c^2+a^2b^4+a^2c^4-3b^2c^4\right]$$

$$2(1-\nu)\frac{\partial S_{1212}}{\partial a} = \frac{b^2 c^2}{a(a^2-b^2)^2(b^2-c^2)(a^2-c^2)}\left[3a^4 - 3a^2c^2 + b^4 - b^2c^2\right]$$

$$-\nu\left[\frac{b^2c^2}{a(b^2-c^2)(a^2-c^2)} - \frac{a^2bc\,(F-E)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)^{3/2}} - \frac{b\,c^3E}{(b^2-c^2)(a^2-c^2)^{3/2}}\right]$$

$$+\frac{b\,c\,E}{(a^2-b^2)^2(b^2-c^2)(a^2-c^2)^{3/2}}\left[4a^2b^2c^2 - 3a^4b^2 - a^2b^4\right]$$

$$+\frac{b\,c\,(F-E)}{(a^2-b^2)^3(a^2-c^2)^{3/2}}\left[a^6 - a^4c^2 + 7a^4b^2 - 6a^2b^2c^2 - b^4c^2\right]$$

$$2(1-\nu)\frac{\partial S_{1212}}{\partial b} = \frac{b\,c^2}{(a^2-b^2)^2(b^2-c^2)^2}\left[-5a^2b^2 + 3a^2c^2 + 2a^4 - b^4 + b^2c^2\right]$$

$$-\nu\left[\frac{2\,b\,c^2}{(b^2-c^2)^2} + \frac{a\,b^2\,c\,(F-E)}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)(a^2-c^2)^{1/2}} - \frac{ac\,(b^2+c^2)\,E}{(b^2-c^2)^2\,(a^2-c^2)^{1/2}}\right]$$

$$+\frac{a\,c\,E}{(a^2-b^2)^2(b^2-c^2)^2(a^2-c^2)^{1/2}}\left[b^6 + 4a^2b^4 - 2a^2b^2c^2 - a^4c^2 - b^4c^2 - b^2a^4\right]$$

$$+\frac{ac\,(F-E)}{(a^2-b^2)^3(b^2-c^2)(a^2-c^2)^{1/2}}\left[-b^6 + 6a^2b^2c^2 + b^4c^2 + a^4c^2 - 7a^2b^4\right]$$

$$2(1-\nu)\frac{\partial S_{1212}}{\partial c} = \frac{b^2\,c}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)^2(a^2-c^2)}\left[b^4 - 2a^4 + 2a^2c^2 - b^2c^2\right]$$

$$-\nu\left[-\frac{b^2c\,(2a^2+b^2-3c^2)}{(b^2-c^2)^2(a^2-c^2)} - \frac{abc^2(F-E)}{(b^2-c^2)(a^2-c^2)^{3/2}} + \frac{ab\,(a^2b^2+a^2c^2-2c^4)\,E}{(b^2-c^2)^2(a^2-c^2)^{3/2}}\right]$$

$$+\frac{ab\,E}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)^2(a^2-c^2)^{3/2}}\left[-a^2b^2c^2 - b^4c^2 + a^4b^2 + a^4c^2 + b^2c^4 - a^2c^4\right]$$

$$+\frac{ab\,(F-E)}{(a^2-b^2)^2(b^2-c^2)(a^2-c^2)^{3/2}}\left[2a^2b^2c^2 - a^4b^2 - a^2b^4\right]$$

$$2\,(1-\nu)\,\frac{\partial S_{2323}}{\partial a} = \frac{b^2\,c^2}{a\,(a^2-b^2)(b^2-c^2)^2(a^2-c^2)}\left[b^4+c^4-a^2b^2-a^2c^2\right]$$

$$-\,\nu\left[\frac{b^2\,c^2}{a\,(a^2-b^2)(a^2-c^2)} - \frac{a^2bc\,E}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)^{3/2}} + \frac{bc\,(F-E)\,(2a^4-b^2c^2-a^2c^2)}{(a^2-b^2)^2(a^2-c^2)^{3/2}}\right]$$

$$+\,\frac{b\,c\,E}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)^2(a^2-c^2)^{3/2}}\left[2\,a^2b^2c^2-b^2c^4-b^4c^2\right]$$

$$+\,\frac{bc\,(F-E)}{(a^2-b^2)^2(b^2-c^2)(a^2-c^2)^{3/2}}\left[a^4b^2-a^2b^2c^2-a^2b^4-a^4c^2+b^2c^4+a^2c^4\right]$$

$$2\,(1-\nu)\,\frac{\partial S_{2323}}{\partial b} = \frac{b\,c^2}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)^3}\left[-c^4-4\,a^2c^2+5\,b^2c^2+4\,b^4-4\,a^2b^2\right]$$

$$-\,\nu\left[-\frac{b\,c^2}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)} + \frac{a\,b^2\,c\,E}{(b^2-c^2)(a^2-b^2)(a^2-c^2)^{1/2}} - \frac{ac\,(a^2+b^2)\,(F-E)}{(a^2-b^2)^2(a^2-c^2)^{1/2}}\right]$$

$$+\,\frac{ac\,E}{(b^2-c^2)^3(a^2-b^2)(a^2-c^2)^{1/2}}\left[a^2b^4-b^6+6\,a^2b^2c^2-7\,b^4c^2+a^2c^4\right]$$

$$+\,\frac{ac\,(F-E)}{(a^2-b^2)^2(b^2-c^2)^2(a^2-c^2)^{1/2}}\left[b^6-a^2b^4+4\,b^4c^2-b^2c^4-a^2c^4-2\,a^2b^2c^2\right]$$

$$2\,(1-\nu)\,\frac{\partial S_{2323}}{\partial c} = \frac{b^2c}{(b^2-c^2)^3(a^2-c^2)}\left[4\,a^2b^2-5\,b^2c^2+4\,a^2c^2-4\,c^4+b^4\right]$$

$$-\,\nu\left[\frac{b^2\,c}{(b^2-c^2)(a^2-c^2)} - \frac{abc^2\,E}{(b^2-c^2)(a^2-c^2)^{3/2}} - \frac{a^3b\,(F-E)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)^{3/2}}\right]$$

$$+\,\frac{ab\,E}{(b^2-c^2)^3(a^2-c^2)^{3/2}}\left[-6\,a^2b^2c^2+7\,b^2c^4-a^2c^4+c^6-a^2b^4\right]$$

$$+\,\frac{ab^3\,(F-E)}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)^2(a^2-c^2)^{3/2}}\left[4\,a^2c^2-3\,c^4-b^2c^2\right]$$

$$2\,(1-\nu)\,\frac{\partial S_{3131}}{\partial a} = \frac{b^2\,c^2}{a\,(a^2-b^2)(b^2-c^2)(a^2-c^2)^2}\left[-c^4+3\,a^2b^2-3\,a^4+b^2c^2\right]$$

$$-\,\nu\left[-\frac{b^2\,c^2}{a\,(a^2-b^2)(b^2-c^2)}+\frac{b^3\,c\,E}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)(a^2-c^2)^{1/2}}-\frac{bc\,(a^2+b^2)\,(F-E)}{(a^2-b^2)^2(a^2-c^2)^{1/2}}\right]$$

$$+\frac{b\,c^3\,E}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)(a^2-c^2)^{5/2}}\left[3\,a^4-4\,a^2b^2+a^2c^2\right]$$

$$+\frac{bc\,(F-E)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)^{5/2}}\left[a^6+4\,a^4c^2-a^4b^2-2\,a^2b^2c^2-a^2c^4-b^2c^4\right]$$

$$2\,(1-\nu)\,\frac{\partial S_{3131}}{\partial b} = \frac{b\,c^2}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)^2(a^2-c^2)}\left[-2\,a^4+c^4+2\,a^2b^2-b^2c^2\right]$$

$$-\,\nu\left[\frac{bc^2\,(3b^2-c^2-2a^2)}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)^2}+\frac{ac\,E\,(a^2b^2+a^2c^2-2b^4)}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)^2(a^2-c^2)^{1/2}}+\frac{ac\,(F-E)\,(2b^4-a^2c^2-b^2c^2)}{(a^2-b^2)^2(b^2-c^2)(a^2-c^2)^{1/2}}\right]$$

$$+\frac{a\,c\,E}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)^2(a^2-c^2)^{3/2}}\left[a^4b^2+a^4c^2-a^2b^4-a^2b^2c^2+b^4c^2-b^2c^4\right]$$

$$+\frac{ac\,(F-E)}{(a^2-b^2)^2(b^2-c^2)(a^2-c^2)^{3/2}}\left[-a^4b^2+a^2b^4-a^2b^2c^2-b^4c^2+a^2c^4+b^2c^4\right]$$

$$2\,(1-\nu)\,\frac{\partial S_{3131}}{\partial c} = \frac{b^2c}{(a^2-c^2)^2(b^2-c^2)^2}\left[3\,a^2b^2-5\,a^2c^2+b^2c^2-c^4+2\,a^4\right]$$

$$-\,\nu\left[\frac{2\,b^2\,c}{(b^2-c^2)^2}-\frac{ab\,(b^2+c^2)\,E}{(b^2-c^2)^2(a^2-c^2)^{1/2}}+\frac{ab^3\,(F-E)}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)(a^2-c^2)^{1/2}}\right]$$

$$+\frac{a\,b\,E}{(b^2-c^2)^2(a^2-c^2)^{5/2}}\left[-2\,a^2b^2c^2+4\,a^2c^4-b^2c^4+c^6-a^4b^2-a^4c^2\right]$$

$$+\frac{abc^2\,(F-E)}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)(a^2-c^2)^{5/2}}\left[-4\,a^2b^2+3\,a^2c^2+a^4\right]$$

Les autres composantes non nulles sont obtenues par les relations de symétrie (IV-39).

Composantes des tenseurs $\partial \underline{A}/\partial a_\alpha$ (α = 1,2,3) : *($a > b > c$, isotrope)*

$$\frac{\partial A_{1212}}{\partial a} = \frac{bc\,(F-E)}{2\,(a^2-b^2)^2(a^2-c^2)^{3/2}}\left(-3a^4-a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2\right)+\frac{bc\,E}{2(b^2-c^2)(a^2-b^2)}\,\frac{(2a^2b^2-b^2c^2-a^2c^2)}{(a^2-c^2)^{3/2}}$$

$$-\frac{b^2c^2}{2a\,(b^2-c^2)(a^2-b^2)(a^2-c^2)}\,(a^2+b^2-2c^2)$$

$$\frac{\partial A_{1212}}{\partial b} = \frac{ac\,(F-E)}{2\,(a^2-b^2)^2(b^2-c^2)(a^2-c^2)^{1/2}}\,(a^2b^2+b^4-2a^2c^2)+\frac{b\,c}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)^2}\,(2b^2-a^2-c^2)$$

$$+\frac{ac\,E}{2\,(b^2-c^2)^2(a^2-b^2)(a^2-c^2)^{1/2}}\,(a^2b^2-3b^4+b^2c^2+a^2c^2)$$

$$\frac{\partial A_{1212}}{\partial c} = \frac{ab\,(F-E)}{2\,(a^2-b^2)(b^2-c^2)(a^2-c^2)^{3/2}}\,(2a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2)+\frac{b^2\,c}{2\,(b^2-c^2)^2(a^2-c^2)}\,(2a^2-b^2-c^2)$$

$$+\frac{ab\,E}{2\,(b^2-c^2)^2(a^2-c^2)^{3/2}}\,(2b^2c^2-a^2c^2-a^2b^2)$$

$$\frac{\partial A_{2323}}{\partial a} = \frac{bc\,(F-E)}{2\,(a^2-b^2)^2(a^2-c^2)^{3/2}}(2a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2) + \frac{bc\,E}{2\,(a^2-b^2)(b^2-c^2)(a^2-c^2)^{3/2}}(2b^2c^2-a^2c^2-a^2b^2)$$

$$+\frac{b^2c^2}{2a\,(a^2-b^2)(b^2-c^2)(a^2-c^2)}(2a^2-b^2-c^2)$$

$$\frac{\partial A_{2323}}{\partial b} = \frac{a\,c\,(F-E)}{2(a^2-b^2)^2(b^2-c^2)(a^2-c^2)^{1/2}}(-3b^4+a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2) + \frac{b\,c^2}{2(a^2-b^2)(b^2-c^2)^2}(4a^2-5b^2+C^2)$$

$$+\frac{ac\,E}{2\,(a^2-b^2)(b^2-c^2)^2(a^2-c^2)^{1/2}}(3b^4-2a^2b^2+b^2c^2-2a^2c^2)$$

$$\frac{\partial A_{2323}}{\partial c} = \frac{ab\,(F-E)}{2\,(a^2-b^2)(b^2-c^2)(a^2-c^2)^{3/2}}\left[2b^2c^2-a^2b^2-a^2c^2\right] + \frac{b^2c\,(5c^2-4a^2-b^2)}{2\,(b^2-c^2)^2(a^2-c^2)}$$

$$+\frac{ab\,E}{2\,(b^2-c^2)^2(a^2-c^2)^{3/2}}\left[2a^2b^2+2a^2c^2-b^2c^2-3c^4\right]$$

$$\frac{\partial A_{1313}}{\partial a} = \frac{bc\,(F-E)}{2(a^2-b^2)^2(a^2-c^2)^{3/2}}\left[-3a^4+b^2c^2+a^2b^2+a^2c^2\right] + \frac{b^2c^2\,(a^2+c^2-2b^2)}{2a\,(a^2-b^2)(b^2-c^2)(a^2-c^2)}$$

$$+\frac{b\,c\,E}{2\,(a^2-b^2)(b^2-c^2)(a^2-c^2)^{3/2}}\left[a^2b^2+b^2c^2-2a^2c^2\right]$$

$$\frac{\partial A_{1313}}{\partial b} = \frac{ac\,(F-E)\,[2a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2]}{2\,(a^2-b^2)^2(b^2-c^2)(a^2-c^2)^{1/2}} + \frac{ac\,E\,(2b^2c^2-a^2b^2-a^2c^2)}{2\,(a^2-b^2)(b^2-c^2)^2(a^2-c^2)^{1/2}} + \frac{bc^2\,(2a^2-b^2-c^2)}{2(a^2-b^2)(b^2-c^2)^2}$$

$$\frac{\partial A_{1313}}{\partial c} = \frac{ab\,(F-E)\,[a^2b^2+b^2c^2-2a^2c^2]}{2\,(a^2-b^2)(b^2-c^2)(a^2-c^2)^{3/2}} + \frac{ab\,E\,[-3c^4+a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2]}{2\,(b^2-c^2)^2(a^2-c^2)^{3/2}} + \frac{b^2c\,[2c^2-a^2-b^2]}{(b^2-c^2)^2(a^2-c^2)}$$

De même, les autres composantes non nulles sont obtenues par les relations de symétrie (IV-39).

Les résultats ainsi présentés sont généraux car ils correspondent à une inclusion ellipsoïdale de forme quelconque ($a_1 > a_2 > a_3$) située dans un milieu isotrope ; ceci se manifeste par la présence des intégrales elliptiques qui apparaissent de nouveau dans les expressions des tenseurs $\partial \underline{S}/\partial a_\alpha$ et $\partial \underline{A}/\partial a_\alpha$.

En effet, ces intégrales elliptiques ne sont pas connues explicitement pour des valeurs a_1, a_2 et a_3 quelconques. Cependant ces intégrales peuvent avoir des formes explicites pour certains cas particuliers de l'ellipsoïde, c'est ce que nous essayons de faire par la suite.

C.3. Cas particuliers d'ellipsoïdes

On a vu précédemment, outre la présente méthode de calcul, que les deux méthodes précédentes (par la transformée de Fourier ou en utilisant les fonctions potentielles) convergent vers les mêmes résultats pour les tenseurs $\underline{T}^I$, $\underline{S}$, $\underline{A}$, $\underline{T}^{I\alpha}$, $\partial\underline{S}/\partial a_\alpha$, $\partial\underline{A}/\partial a_\alpha$ dans le cas d'une inclusion el - lipsoïdale ($a_1 > a_2 > a_3$) située dans un milieu isotrope et que ces résultats dépendent tous des intégrales elliptiques E et F. C'est pourquoi, nous présentons ici la partie commune de calcul qui montre comment on passe des résultats généraux pour une inclusion ellipsoïdale quelconque à des résultats pratiques et explicites concernant des ellipsoïdes particulières ; d'une manière très précise, ce sont les intégrales elliptiques qui prennent des formes différentes selon les cas envisagés d'ellipsoïdes que nous traitons par la suite :

. sphère : $a_1 = a_2 = a_3$,
. inclusion aplatie "penny-shape" : $a_1 = a_2 >> a_3$,
. bande : $a_1 \rightarrow +\infty$, $a_2 >> a_3$.

Pour les deux premiers cas, nous prenons le cas intermédiaire suivant :
$a_1 = a_2 > a_3$ ("oblate sphéroïde").
Dans ce cas, nous avons pour K^2 (défini en (C-3)) : $K^2 << 1$.
Alors il convient de faire un développement limité des intégrales elliptiques E et F au voisinage de K^2 très petit devant 1.

C.3.1. Développement des intégrales elliptiques E et F dans le cas intermédiaire d'inclusion : $a_1 = a_2 > a_3$

En se référant au livre [3] sur les intégrales elliptiques, nous avons les développements limités d'ordre n de F et E :

- pour F :

$$F(\varphi,K) = \frac{2}{\pi} K'\varphi - \sin\varphi\cos\varphi \left[a_o + \frac{2}{3} a_1 \sin^2\varphi + \frac{8}{15} a_2 \sin^4\varphi + \ldots\right]$$

où

$$a_o = \frac{2}{\pi} K' - 1 \quad , \quad a_n = a_{n-1} - \left[\frac{(2n-1)\,!!}{2^n\, n!}\right]^2 K^{2n}$$

$$K' = \frac{\pi}{2}\left[1 + \frac{K^2}{4} + \frac{9K^4}{64} + \frac{25K^6}{256} + \ldots\right].$$

En se limitant à l'ordre 6 :

$$a_o = \frac{K^2}{4} + \frac{9K^4}{64} + \frac{25K^6}{256}$$

$$a_1 = \frac{9K^4}{64} + \frac{25K^6}{256}$$

$$a_2 = \frac{25}{256} K^6$$

$$\cos\varphi = \frac{a_3}{a_1}$$

on a finalement le développement de F à l'ordre 6 :

$$F(\varphi,K) = \cos^{-1}\frac{a_3}{a_1}\left[1 + \frac{K^2}{4} + \frac{9K^4}{64} + \frac{25K^6}{256}\right] - \frac{a_3}{a_1}\left(1 - \frac{a_3^2}{a_1}\right)^{1/2}$$
$$\left[\frac{K^2}{4} + \frac{9K^4}{64} + \frac{25K^6}{256} + \frac{2}{3}\left(1 - \frac{a_3^2}{a_1^2}\right)\left(\frac{9K^4}{64} + \frac{25K^6}{256} + \frac{5K^6}{96}\left(1 - \frac{a_3^2}{a_1^2}\right)^2\right]\right. \qquad \text{(C-13)}$$

- <u>pour E</u> :

$$E(\varphi,K) = \frac{2}{\pi} E'\varphi + \sin\varphi\cos\varphi\left[b_o + \frac{2}{3} b_1 \sin^2\varphi + \frac{8}{15} b_2 \sin^4\varphi + \ldots\right]$$

où, en se limitant à l'ordre 6 :

$$b_o = \frac{K^2}{4} + \frac{3K^4}{64} + \frac{5K^6}{256}$$

$$b_1 = \frac{3}{64} K^4 + \frac{5K^6}{256}$$

$$b_2 = \frac{5K^6}{256}$$

on trouve le développement de E à l'ordre 6 :

$$E(\varphi,K) = \cos^{-1}\frac{a_3}{a_1}\left[1-\frac{K^2}{4}-\frac{3K^4}{64}-\frac{5K^6}{256}\right]+\frac{a_3}{a_1}\left(1-\frac{a_3^2}{a_1^2}\right)^{1/2}$$
$$\left[\frac{K^2}{4}+\frac{3K^4}{64}+\frac{5K^6}{256}+\frac{2}{3}\left(1-\frac{a_3^2}{a_1^2}\right)\left(\frac{3K^4}{64}+\frac{5K^6}{256}\right)+\frac{K^6}{96}\left(1-\frac{a_3^2}{a_1^2}\right)^2\right] \qquad \text{(C-14)}$$

En substituant les intégrales elliptiques dans les expressions des tenseurs $\underline{T}^I$, $\underline{S}$, $\underline{A}$, $\underline{T}^{I\alpha}$, $\partial\underline{S}/\partial a_\alpha$, $\partial\underline{A}/\partial a_\alpha$ par leurs développements (C-13) et 1 (C-14) et se limitant à l'ordre 0 de K^2 ($0(K^2)$), on obtient des résultats compacts des tenseurs précédents où apparaissent uniquement les termes finis : a_1 et le rapport $\alpha = a_3/a_1$.

C.3.2. Composantes des tenseurs $\partial\underline{S}/\partial a_\alpha$ dans ce cas intermédiaire

Pour éviter une écriture trop longue, nous préférons indiquer uniquement les composantes des tenseurs $\partial\underline{S}/\partial a_\alpha$ afin de bien clarifier les démarches de calcul. Nous avons alors les composantes non nulles $\partial S_{ijkl}/\partial a_\alpha$:

$$8(1-\nu)\, a_1 \frac{\partial S_{1111}}{\partial a_1} = -\frac{21\alpha + 54\,\alpha^3}{4(1-\alpha^2)^{7/2}} \cos^{-1}\alpha + \frac{75\alpha^2 - 4\alpha^4 + 4\alpha^6}{4(1-\alpha^2)^3} + (1-2\nu)\, A$$

$$8(1-\nu)\, a_1 \frac{\partial S_{1111}}{\partial a_2} = \frac{3\alpha - 18\,\alpha^3}{4(1-\alpha^2)^{7/2}} \cos^{-1}\alpha + \frac{3\alpha^2 + 16\alpha^4 - 4\alpha^6}{4(1-\alpha^2)^3} + (1-2\nu)\, B$$

$$8(1-\nu)\, a_1 \frac{\partial S_{1111}}{\partial a_3} = \frac{9 + 36\,\alpha^2}{2(1-\alpha^2)^{7/2}} \cos^{-1}\alpha - \frac{6\alpha^3 + 39\alpha}{2(1-\alpha^2)^3} - (1-2\nu)\, C$$

$$\frac{\partial S_{2222}}{\partial a_1} = \frac{\partial S_{1111}}{\partial a_2}$$

$$\frac{\partial S_{2222}}{\partial a_2} = \frac{\partial S_{1111}}{\partial a_1}$$

$$\frac{\partial S_{2222}}{\partial a_3} = \frac{\partial S_{1111}}{\partial a_3}$$

$$8(1-\nu)\, a_1 \frac{\partial S_{3333}}{\partial a_1} = \frac{8\alpha^2 + 22\,\alpha^4}{(1-\alpha^2)^3} - \frac{18\alpha^3 + 12\alpha^5}{(1-\alpha^2)^{7/2}} \cos^{-1}\alpha - (1-2\nu)\alpha\, C$$

$$\frac{\partial S_{3333}}{\partial a_2} = \frac{\partial S_{3333}}{\partial a_1}$$

$$8(1-\nu)\, a_1 \frac{\partial S_{3333}}{\partial a_3} = -\frac{16\alpha + 44\,\alpha^3}{(1-\alpha^2)^3} + \frac{36\alpha^2 + 24\alpha^4}{(1-\alpha^2)^{7/2}} \cos^{-1}\alpha + 2\,(1-2\nu)\, C$$

$$8(1-\nu)\, a_1 \frac{\partial S_{1122}}{\partial a_1} = \frac{23\alpha^2 - 12\alpha^4 + 4\alpha^6}{4\,(1-\alpha^2)^3} - \frac{\alpha\,(9 + 6\alpha^2)}{4\,(1-\alpha^2)^{7/2}} \cos^{-1}\alpha - (1-2\nu)\, A$$

$$8(1-\nu)\, a_1 \frac{\partial S_{1122}}{\partial a_2} = \frac{3\alpha - 18\,\alpha^3}{4(1-\alpha^2)^{7/2}} \cos^{-1}\alpha + \frac{3\alpha^2 + 16\alpha^4 - 4\alpha^6}{4(1-\alpha^2)^3} - (1-2\nu)\, B$$

$$8(1-\nu)\, a_1 \frac{\partial S_{1122}}{\partial a_3} = \frac{(3 + 12\,\alpha^2)}{2(1-\alpha^2)^{7/2}} \cos^{-1}\alpha - \frac{\alpha\,(13 + 2\,\alpha^2)}{2(1-\alpha^2)^3} + (1-2\nu)\, C$$

$$8(1-\nu)\, a_1 \frac{\partial S_{2233}}{\partial a_1} = \frac{-\alpha^4(13 + 2\alpha^2)}{2(1-\alpha^2)^3} + \frac{3\alpha^3(1 + 4\alpha^2)}{2(1-\alpha^2)^{7/2}} \cos^{-1}\alpha - (1-2\nu)\, B$$

$$8(1-\nu)\, a_1 \frac{\partial S_{2233}}{\partial a_2} = \frac{-16\alpha^2 + 2\alpha^6 - 31\alpha^4}{2\,(1-\alpha^2)^3} + \frac{33\alpha^2 + 12\alpha^5}{2\,(1-\alpha^2)^{7/2}} \cos^{-1}\alpha - (1-2\nu)\, A$$

$$8(1-\nu)\, a_1 \frac{\partial S_{2233}}{\partial a_3} = \frac{8\alpha + 22\alpha^3}{(1-\alpha^2)^3} - \frac{18\alpha^2 + 12\alpha^4}{(1-\alpha^2)^{7/2}} \cos^{-1}\alpha + (1-2\nu)\, C$$

$$8(1-\nu)\, a_1 \frac{\partial S_{3311}}{\partial a_1} = -\frac{39\alpha^2 + 6\alpha^4}{2\,(1-\alpha^2)^3} + \frac{36\alpha^3 + 9\alpha}{2\,(1-\alpha^2)^{7/2}} \cos^{-1}\alpha + (1-2\nu)\, \alpha\, C$$

$$8(1-\nu)\, a_1 \frac{\partial S_{3311}}{\partial a_2} = \frac{-\alpha^2\,(13 + 2\alpha^2)}{2\,(1-\alpha^2)^3} + \frac{3\alpha\,(1 + 4\alpha^2)}{2\,(1-\alpha^2)^{7/2}} \cos^{-1}\alpha + (1-2\nu)\, \alpha\, C$$

$$8(1-\nu)\, a_1 \frac{S_{3311}}{\partial a_3} = \frac{26\alpha + 4\alpha^3}{(1-\alpha^2)^3} - \frac{6 + 24\alpha^2}{(1-\alpha^2)^{7/2}} \cos^{-1}\alpha - 2\,(1-2\nu)\, C$$

$$8(1-\nu)\, a_1 \frac{\partial S_{1133}}{\partial a_1} = \frac{-16\alpha^2 + 2\alpha^6 - 31\alpha^4}{2\,(1-\alpha^2)^3} + \frac{(33\,\alpha^3 + 12\,\alpha^5)\cos^{-1}\alpha}{2\,(1-\alpha^2)^{7/2}} - (1-2\nu)\, A$$

$$8(1-\nu)\, a_1 \frac{\partial S_{1133}}{\partial a_2} = \frac{-\alpha^4\,(13 + 2\alpha^2)}{2\,(1-\alpha^2)^3} + \frac{3\alpha^3\,(1 + 4\alpha^2)\cos^{-1}\alpha}{2\,(1-\alpha^2)^{7/2}} - (1-2\nu)\, B$$

$$8(1-\nu)\, a_1 \frac{\partial S_{1133}}{\partial a_3} = \frac{8\alpha + 22\alpha^3}{(1-\alpha^2)^3} - \frac{(18\alpha^2 + 12\alpha^4)\cos^{-1}\alpha}{(1-\alpha^2)^{7/2}} + (1-2\nu)\, C$$

$$8(1-\nu)\, a_1 \frac{\partial S_{2211}}{\partial a_1} = \frac{(3\alpha - 18\alpha^3)\cos^{-1}\alpha}{4\,(1-\alpha^2)^{7/2}} + \frac{3\alpha^2 + 16\alpha^4 - 4\alpha^6}{4\,(1-\alpha^2)^3} - (1-2\nu)\, B$$

$$8(1-\nu)\, a_1 \frac{\partial S_{2211}}{\partial a_2} = \frac{23\alpha^2 - 12\alpha^4 + 4\alpha^6}{4\,(1-\alpha^2)^3} - \frac{\alpha\,(9 + 6\alpha^2)}{4\,(1-\alpha^2)^{7/2}} \cos^{-1}\alpha - (1-2\nu)\, A$$

$$8(1-\nu)\, a_1 \frac{\partial S_{2211}}{\partial a_3} = \frac{(3 + 12\alpha^2)\cos^{-1}\alpha}{2\,(1-\alpha^2)^{7/2}} - \frac{\alpha\,(13 + 2\alpha^2)}{2\,(1-\alpha^2)^3} + (1-2\nu)\, C$$

$$8(1-\nu)\, a_1 \frac{\partial S_{3322}}{\partial a_1} = \frac{-\alpha^2\,(13 + 2\alpha^2)}{2\,(1-\alpha^2)^3} + \frac{3\alpha\,(1 + 4\alpha^2)}{2\,(1-\alpha^2)^{7/2}} \cos^{-1}\alpha + (1-2\nu)\, \alpha C$$

$$8(1-\nu)\, a_1 \frac{\partial S_{3322}}{\partial a_2} = \frac{-39\alpha^2 - 6\alpha^4}{2\,(1-\alpha^2)^3} + \frac{9\alpha + 36\alpha^3}{2\,(1-\alpha^2)^{7/2}} \cos^{-1}\alpha + (1-2\nu)\, \alpha\, C$$

$$8(1-\nu)\, a_1 \frac{S_{3322}}{\partial a_3} = \frac{26\alpha + 4\alpha^3}{(1-\alpha^2)^3} - \frac{6 + 24\alpha^2}{(1-\alpha^2)^{7/2}} \cos^{-1}\alpha - 2(1-2\nu)\, C$$

$$16(1-\nu)\, a_1 \frac{\partial S_{1212}}{\partial a_1} = \frac{2\alpha^4 + 13\alpha^2}{2\,(1-\alpha^2)^3} - \frac{3\alpha + 12\alpha^3}{2\,(1-\alpha^2)^{7/2}} \cos^{-1}\alpha + (1-2\nu)\, \alpha\, C$$

$$\frac{\partial S_{1212}}{\partial a_2} = \frac{\partial S_{1212}}{\partial a_1}$$

$$16(1-\nu)\, a_1 \frac{\partial S_{1212}}{\partial a_3} = \frac{3 + 12\alpha^2}{(1-\alpha^2)^{7/2}} \cos^{-1}\alpha - \frac{\alpha\,(13 + 2\alpha^2)}{(1-\alpha^2)^3} - 2(1-2\nu)\, C$$

$$16(1-\nu)\, a_1 \frac{\partial S_{2323}}{\partial a_1} = \frac{-\alpha^2(1+\alpha^2)\,(13+2\alpha^2)}{2(1-\alpha^2)^3} + \frac{3\alpha\,(1+\alpha^2)\,(1+4\alpha^2)\cos^{-1}\alpha}{2\,(1-\alpha^2)^{7/2}} - (1-2\nu)\, A$$

$$16(1-\nu)\, a_1 \frac{\partial S_{2323}}{\partial a_2} = \frac{2\alpha^6 - 37\alpha^4 - 55\alpha^2}{2\,(1-\alpha^2)^3} + \frac{12\alpha^5 + 69\alpha^3 + 9\alpha}{2\,(1-\alpha^2)^{7/2}} \cos^{-1}\alpha - (1-2\nu)\, B$$

$$16(1-\nu)\, a_1 \frac{\partial S_{2323}}{\partial a_3} = \frac{34\alpha + 26\alpha^3}{(1-\alpha^2)^3} - \frac{6 + 12\alpha^4 + 42\alpha^2}{(1-\alpha^2)^{7/2}} \cos^{-1}\alpha + (1-2\nu)\, C$$

$$\frac{\partial S_{1313}}{\partial a_1} = \frac{\partial S_{2323}}{\partial a_2}$$

$$\frac{\partial S_{1313}}{\partial a_2} = \frac{\partial S_{2323}}{\partial a_1} \qquad \text{(C-15)}$$

$$\frac{\partial S_{1313}}{\partial a_3} = \frac{\partial S_{2323}}{\partial a_3}$$

où

$$A = \frac{\alpha^2\,(11-2\alpha^2)}{2\,(1-\alpha^2)^2} - \frac{\alpha\,(5+4\alpha^2)}{2\,(1-\alpha^2)^{5/2}} \cos^{-1}\alpha$$

$$B = \frac{\alpha^2\,(1+2\alpha^2)}{2\,(1-\alpha^2)^2} + \frac{\alpha\,(1-4\alpha^2)}{2\,(1-\alpha^2)^{5/2}} \cos^{-1}\alpha$$

$$C = \frac{6\alpha}{(1-\alpha^2)^2} - \frac{2\,(1+2\alpha^2)}{(1-\alpha^2)^{5/2}} \cos^{-1}\alpha$$

Les autres composantes sont obtenues par les relations de symétrie (IV-39).

Les résultats pour les autres tenseurs ($\underline{T}^I$, $\underline{T}^{I\alpha}$, $\underline{S}$, $\underline{A}$, $\partial\underline{A}/\partial a_\alpha$) sont de la même forme et dépendent du rapport $\alpha = a_3/a_1$, que ceux présentés ici (C-15) pour le tenseur $\partial\underline{S}/\partial a_\alpha$ dans le cas de l'ellipsoïde défini par $a_1 = a_2 > a_3$.

C.3.3. Cas particuliers d'une inclusion sphérique et d'une inclusion aplatie

Pour passer de l'ellipsoïde ($a_1 = a_2 > a_3$) à la sphère ($a_1 = a_2 = a_3$) ou à l'inclusion aplatie ($a_1 = a_2 >> a_3$), il suffit de reprendre les résultats précédents et faire tendre α dans le cas de :

. la sphère : vers 1 : ($\alpha \to 1$)

. l'inclusion aplatie : vers 0 : ($\alpha \to 0$).

A titre d'exemple, nous indiquons le passage relatif à la composante $\partial S_{1313}/\partial a_3$ dans les formules (C-15) pour obtenir le cas de la sphère ou de l'inclusion aplatie.

On a :

$$4\,(1-\nu)a_1 \frac{\partial S_{1313}}{\partial a_3} = H - \nu\, G$$

$$\text{où } H = \frac{5\alpha\,(2+\alpha^2)\,(1-\alpha^2)^{1/2} - (2+11\alpha^2+2\alpha^4)\cos^{-1}\alpha}{(1-\alpha^2)^{7/2}}$$

$$G = \frac{3\alpha\,(1-\alpha^2)\,(1+2\alpha^2)\cos^{-1}\alpha}{(1-\alpha^2)^{5/2}}$$

- <u>cas de la sphère</u> : ($\alpha \to 1$)

$$4\,(1-\nu)\,a_1 \lim_{\alpha\to 1} \frac{\partial S_{1313}}{\partial a_3} = \lim_{\alpha\to 1} H - \nu \lim_{\alpha\to 1} G$$

On utilise la règle de l'Hôpital que nous rappelons :

Si $H(\alpha) = \dfrac{N(\alpha)}{D(\alpha)}$ et $N^{(n)}(1) = D^{(n)}(1) = 0$ pour les dérivées d'ordre n

alors $\displaystyle \lim_{\alpha\to 1} H(\alpha) = \lim_{\alpha\to 1} \frac{N^{(n+1)}(\alpha)}{D^{(n+1)}(\alpha)} = \frac{N^{(n+1)}(1)}{D^{(n+1)}(1)}$.

Dans notre cas, on vérifie que

$$\begin{cases} N(1) = N^{(1)}(1) = N^{(2)}(1) = N^{(3)}(1) = 0 \\ D(1) = D^{(1)}(1) = D^{(2)}(1) = D^{(3)}(1) = 0 \end{cases}$$

et $N^{(4)}(\alpha) = \dfrac{-20}{(1-\alpha^2)^{1/2}} - 48\cos^{-1}\alpha$, $D^{(4)}(\alpha) = \dfrac{105\,(1-8\alpha^2+8\alpha^4)\cos^{-1}\alpha}{(1-\alpha^2)^{1/2}}$

Donc :

$$\lim_{\alpha\to 1} H(\alpha) = \lim_{\alpha\to 1} \frac{-20-48\,(1-\alpha^2)^{1/2}\cos^{-1}\alpha}{105\,(1-8\alpha^2+8\alpha^4)} = -\frac{4}{21}$$

De même, on trouve pour G :

$$\lim_{\alpha\to 1} G(\alpha) = \frac{-4}{15}$$

finalement, on obtient la composante $\partial S_{1313}/\partial a_3$:

$$a_1 \frac{\partial S}{\partial a_3}_{1313} = \frac{-5+7\nu}{105\,(1-\nu)}$$

- <u>cas de l'inclusion aplatie</u> : $(\alpha \to 0)$

lorsque $\alpha \to 0$:

$\cos^{-1}\alpha \to \pi/2$

$H(\alpha) \to -\pi$

$G(\alpha) \to -\pi/2$

et on trouve finalement :

$$a_1 \frac{\partial S_{1313}}{\partial a_3} = \frac{(-2+\nu)\,\pi}{8\,(1-\nu)}$$

Les résultats obtenus dans ces deux cas de la sphère et de l'inclusion aplatie sont présentés au paragraphe IV.3.1.

On a aussi traité le cas de la bande ($a_1 \to +\infty$, $a_2 >> a_3$), sans passer par les développements des intégrales elliptiques E et F. Il suffit d'effectuer les opérations suivantes dans les expressions des tenseurs $\underline{T}^I$ et $\underline{T}^{I\alpha}$ dans le cas d'une inclusion ellipsoïdale quelconque ($a_1 > a_2 > a_3$) :

. faire tendre a_1 vers l'infini ($a_1 \to +\infty$),

. remplacer l'intégrale elliptique E par 1 (E = 1 lorsque $a_1 \to +\infty$),

. garder uniquement les termes du premier ordre en a_3/a_2

pour obtenir les composantes des tenseurs $\underline{T}^I$, $\underline{T}^{I\alpha}$, $\underline{S}$, $\underline{A}$, $\partial\underline{S}/\partial a_\alpha$, $\partial\underline{A}/\partial a_\alpha$ présentés dans IV.3.1.

Bibliographie de l'annexe C

[1] J.D. Eshelby, 1957, Proc. Roy. Soc. A 241, 376.

[2] M. Berveiller, 1978, Thèse d'Etat, Université de Paris 13, France.

[3] I.S. Gradshteyn et I.M. Ryzhik, 1980, Table of integrals, series, Academic press, Inc. (London) LTD. ch 8-9, specialles fonctions : Elliptiques integrals and fonctions, page 904.