



**HAL**  
open science

# Opérateurs d’entrelacement des représentations unitaires et cortex des groupes de Lie nilpotents

Ali Baklouti

► **To cite this version:**

Ali Baklouti. Opérateurs d’entrelacement des représentations unitaires et cortex des groupes de Lie nilpotents. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paul Verlaine - Metz, 1995. Français. NNT : 1995METZ014S . tel-01775907

**HAL Id: tel-01775907**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01775907v1>**

Submitted on 24 Apr 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L’archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d’enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

vb 81702 .

**THÈSE de DOCTORAT  
de l'UNIVERSITÉ de METZ**

Spécialité

**MATHÉMATIQUES**

présentée le 15 Juin 1995 par

**Ali BAKLOUTI**

Pour obtenir le titre de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE METZ**

Sujet de la thèse :

**OPÉRATEURS D'ENTRELAÇEMENT DES  
REPRÉSENTATIONS UNITAIRES ET CORTEX  
DES GROUPES DE LIE NILPOTENTS.**

COMPOSITION DU JURY:

**M. J. P. Anker, Professeur, Nancy**

**M. D. Arnal, Professeur, Metz**

**M. M. E. Bekka, Professeur, Metz**

**M. H. Fujiwara, Professeur, Japon**

**M. G.**

**M. J.**

**M. J.**

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE DE METZ



022 420525 8

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv.	19950265
Cote	S/M3 95/14
Loc	Magasin

Rapporteur

Rapporteur

Rapporteur

## TABLE DE MATIÈRES

INTRODUCTION.	6
CHAPITRE I: OPÉRATEUR D'ENTRELACEMENT DES REPRÉSENTATIONS MONOMIALES.	15
I-1. Généralités.	16
I-2. Désintégration centrale canonique des représentations monomiales.	18
I-3. Construction de l'opérateur d'entrelacement.	26
I-3.1. Construction de polarisations et de bases de Malcev.	26
I-3.2. Le Théorème principal.	27
I-4. L'opérateur d'entrelacement inverse.	31
I-5. Opérateurs différentiels sur les espaces homogènes nilpotents.	40
I-6. Nouvelle désintégration lisse de $L^2(G)$ .	45
I-7. Exemples et contre-exemple.	46
I-8. Cas des groupes non nilpotents.	50
CHAPITRE II: DÉSINTÉGRATION DES RESTRICTIONS DES REPRÉSENTATIONS UNITAIRES ET OPÉRATEURS D'ENTRELACEMENT.	52
II-1. Désintégration centrale canonique des restrictions de représentations.	53
II-2. Construction de l'opérateur d'entrelacement.	59
II-2.1. Construction de polarisations et de bases de Malcev.	59
II-2.2. Description de l'opérateur d'entrelacement.	62
II-3. L'opérateur d'entrelacement inverse.	69
II-4. Opérateur d'entrelacement pour le produit tensoriel de représentations.	73
II-5. Exemples et contre-exemples.	78

CHAPITRE III: SUR LE CORTEX DES GROUPES DE LIE NILPOTENTS.	83
III-1. Généralités.	84
III-2. Cortex des algèbres de Lie de petite dimension.	86
III-3. Sur le cortex de différentes classes de groupes.	88
III-4. Cortex des groupes de Lie de pas 3.	95
III-5. Description du cortex des groupes de Lie de pas 3.	101
CONCLUSION.	109
BIBLIOGRAPHIE.	112

## INTRODUCTION

Soit  $G$  un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ . Le problème de la construction et la classification des classes de représentations unitaires et irréductibles de  $G$ , c'est-à-dire le problème de la détermination du dual unitaire  $\hat{G}$  de  $G$  a été entièrement résolu par A. A. Kirillov avec la méthode des orbites. Plus précisément, il a montré qu'il existe une bijection entre l'ensemble  $\mathfrak{g}^*/Ad^*(G)$  des orbites de la représentation coadjointe de  $G$  dans le dual  $\mathfrak{g}^*$  de  $\mathfrak{g}$ , et le dual unitaire  $\hat{G}$  de  $G$  (cf. [25]).

Cette correspondance est très explicite: étant donnée une orbite  $\mathfrak{D}$  dans  $\mathfrak{g}^*$ , on choisit  $\xi_0 \in \mathfrak{D}$  et une polarisation  $\mathfrak{b}$  en  $\xi_0$  de  $\mathfrak{g}$ , c'est à dire une sous-algèbre telle que

$$\langle \xi_0, [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] \rangle = 0$$

et de dimension maximale qui est en fait égale à

$$\dim(\mathfrak{g}) - \frac{1}{2} \dim(\mathfrak{D}) = \frac{1}{2}(\dim(\mathfrak{g}) + \dim(\mathfrak{g}(\xi_0)))$$

où  $\mathfrak{g}(\xi_0)$  est le radical de la forme bilinéaire

$$B_{\xi_0}(X, Y) = \langle \xi_0, [X, Y] \rangle .$$

Comme  $G$  est connexe et simplement connexe, l'application exponentielle est un difféomorphisme entre  $\mathfrak{g}$  et  $G$ . Ainsi  $B = \exp(\mathfrak{b})$  est le sous-groupe analytique correspondant à  $\mathfrak{b}$ , et la formule

$$\chi_0(\exp(X)) = e^{i\xi_0(X)}, \quad (X \in \mathfrak{b})$$

définit un caractère de ce groupe; soit  $\pi^{\mathfrak{D}} = \text{Ind}_B^G \chi_0$  la représentation induite de  $B$  à  $G$  qui est irréductible et dont la classe ne dépend que de  $\mathfrak{D}$ . Réciproquement, tout  $\pi \in \hat{G}$  est obtenue par ce procédé.

L'application ainsi définie

$$K : \mathfrak{g}^*/Ad^*(G) \longrightarrow \hat{G}, \mathfrak{D} \longmapsto \pi^{\mathfrak{D}}$$

est appelée la bijection de Kirillov. Munissons  $\mathfrak{g}^*/Ad^*(G)$  et  $\hat{G}$  de leurs structures topologiques et boréliennes habituelles c-à-d:  $\mathfrak{g}^*/Ad^*(G)$  de la topologie quotient, et  $\hat{G}$  de la topologie de Fell.

Il est bien connu que  $K$  est un homéomorphisme de  $\mathfrak{g}^*/Ad^*(G)$  sur  $\hat{G}$  (cf. [8]). Rappelons encore que des faits similaires se reproduisent dans le cas des groupes de Lie résolubles exponentiels. Le fait que  $K$  est un homéomorphisme de  $\mathfrak{g}^*/Ad^*(G)$  sur  $\hat{G}$  a été prouvé antérieurement par J. Ludwig (cf. [26]).

Soit  $G$  un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ . On considère la représentation monomiale  $\tau = \text{Ind}_H^G \chi$  induite par un caractère unitaire  $\chi$  d'un sous-groupe analytique  $H$  de  $G$ . Soit  $\mathfrak{h}$  la sous-algèbre de Lie correspondant à  $H$ ,  $\chi$  s'écrit sous la forme  $\chi(\exp X) = e^{if(X)}$  ( $X \in \mathfrak{h}$ ) avec  $f \in \mathfrak{h}^*$ . On note  $p : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{h}^*$  la projection canonique et  $\Omega_f$  l'orbite coadjointe de  $f$ . La représentation  $\tau$  n'est pas irréductible sauf si  $\mathfrak{h}$  est une polarisation en  $f$ , on la décompose (ou on la désintègre) en intégrale directe d'irréductibles. D'après Corwin et Greenleaf [9] et Lipsman [28], cette désintégration centrale de  $\tau$  s'obtient comme suit:

$$\tau \simeq \int_{(f+\mathfrak{h}^\perp)/H}^\oplus \pi_i d\mathfrak{l},$$

$d\mathfrak{l}$  étant une certaine mesure naturelle sur l'espace  $(f+\mathfrak{h}^\perp)/H$  des  $H$ -orbites. D'autre part, comme dans les travaux de Corwin, Greenleaf et Grélaud [11] et Lipsman [28], la désintégration centrale de  $\tau$  s'écrit aussi

$$\tau \simeq \int_{\hat{G}}^\oplus m(\pi) \pi d\mu(\pi),$$

où la classe de  $\mu$  est l'image par l'application de Kirillov  $\theta : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \hat{G}$  de celle de la mesure de Lebesgue sur  $f+\mathfrak{h}^\perp$  et  $m(\pi)$  désigne le nombre de  $H$ -orbites incluses dans  $(f+\mathfrak{h}^\perp) \cap \Omega_f$ . (C'est aussi le nombre des composantes connexes dans  $(f+\mathfrak{h}^\perp) \cap \Omega_f$  lorsque presque toutes les multiplicités sont finies).

L'un des problèmes les plus importants dans la théorie de la désintégration des représentations des groupes est de construire explicitement un opérateur qui entrelace  $\tau$  et sa décomposition centrale. La réponse à cette question peut être vue comme l'un des ingrédients primordiaux pour la résolution de plusieurs problèmes importants, par exemple dans l'étude de la résolubilité des opérateurs différentiels invariants sur l'espace homogène  $G/H$ , ou encore dans

le problème de la réciprocity de Frobenius des vecteurs généralisés semi-invariants pour lequel Hidénori Fujiwara a trouvé une solution partielle ([16], [18]).

Dans [29] et [30], Ronald L. Lipsman a déterminé un opérateur d'entrelacement pour la représentation quasi-régulière dans le cas où les multiplicités sont finies. Dans [20] Gérard Grélaud a remarqué que la formule de Plancherel sur les groupes de Lie nilpotents connexes simplement connexes permet d'obtenir explicitement un opérateur d'entrelacement entre la représentation induite et sa décomposition centrale lorsque  $\mathfrak{h}$  est un idéal de  $\mathfrak{g}$ .

Dans le premier chapitre, on va décrire un opérateur d'entrelacement unitaire entre  $\tau$  et sa décomposition centrale. La nouveauté dans ce travail par rapport aux cas déjà connus, c'est l'obtention d'un tel opérateur d'entrelacement dans le cas général. En d'autres termes nous construisons dans la première partie de cette thèse un opérateur d'entrelacement entre  $\text{Ind}_H^G \chi_f$  et sa décomposition centrale lorsque  $H$  est un sous-groupe fermé connexe quelconque, dans le cadre des groupes de Lie nilpotents connexes simplement connexes quelconques.

Dans un premier temps, nous généralisons les résultats de Corwin, Greenleaf et Grélaud [11], Lipsman [28] sur la désintégration des représentations monomiales, nous déterminons de manière précise des sous-espaces affines  $\mathfrak{Y}^{R, \mathfrak{B}}$  de  $f + \mathfrak{h}^\perp$ , ainsi qu'une mesure  $d\lambda = d\lambda^{R, \mathfrak{B}}$  sur  $\mathfrak{Y}^{R, \mathfrak{B}}$  tels que

$$\text{Ind}_H^G \chi_f \simeq \int_{\mathfrak{Y}^{R, \mathfrak{B}}}^\oplus \pi_\phi d\lambda^{R, \mathfrak{B}}(\phi),$$

$R$  désigne une famille  $\{R_1, \dots, R_r\}$  de fonctions affines définies sur  $\mathbb{R}^k$ , où  $k \in \mathbb{N}$  sera précisé par la suite, et  $\mathfrak{B}$  est une base de Malcev relative à  $\mathfrak{h}$ .

Par la suite, nous choisissons pour tout  $\phi \in \mathfrak{Y}^{R, \mathfrak{B}}$  une polarisation  $B(\phi, \mathfrak{h})$  en  $\phi$  construite par J. Ludwig et H. Zahir dans [32], cette polarisation coïncide en fait avec celle de M. Vergne. Notre opérateur  $U$  sera défini pour tout  $\phi \in \mathfrak{Y}^{R, \mathfrak{B}}$  et  $\xi$  dans l'espace de Schwartz  $S(G/H)$  satisfaisant à la relation de covariance par rapport à  $f$  par :

$$U(\xi)(\phi)(g) = \int_{B(\phi, \mathfrak{h})/B(\phi, \mathfrak{h}) \cap H} \xi(gh) \chi_\phi(h) d_{B(\phi, \mathfrak{h}), H}(h),$$

et ceci pour tout  $g \in G$ . La mesure  $d_{B(\phi, \mathfrak{h}), H}$  sur l'espace homogène  $B(\phi, \mathfrak{h})/B(\phi, \mathfrak{h}) \cap H$  est convenablement normalisée pour que  $U$  soit une isométrie.

Ce qui est spécial dans cet opérateur, c'est qu'il ne devient plus un opérateur d'entrelacement si on change la polarisation  $B(\phi, \mathfrak{h})$  par une autre (voir l'exemple (I-7.3)).

Nous démontrons par la suite que cet opérateur est inversible, et nous démontrons que son inverse est l'opérateur  $V$  défini pour tout  $K \in \int_{\mathfrak{Y}^{R, \mathfrak{B}}}^\oplus \mathcal{H}_{\pi_\phi} d\lambda^{R, \mathfrak{B}}(\phi)$  à support compact et  $g \in G$  par

$$V(K)(g) = \int_{\mathfrak{Y}^{R, \mathfrak{B}}} \int_{H/B(\phi, \mathfrak{h}) \cap H} K(\phi)(gh) \chi_f(h) d_{H, B(\phi, \mathfrak{h})}(h) d\lambda^{R, \mathfrak{B}}(\phi).$$



La mesure  $d_{H,B(\phi,\mathfrak{h})}(h)$  sur l'espace homogène  $H/B(\phi,\mathfrak{h}) \cap H$  est encore convenablement normalisée pour que  $V$  soit une isométrie.

Nous examinons ensuite quelques exemples et nous décrivons une nouvelle désintégration (lisse) de  $L^2(G)$  pour  $G$  groupe nilpotent.

Les résultats de ce chapitre sont démontrés pour des représentations monomiales, mais ils restent valables si  $\tau = \text{Ind}_H^G \sigma$ , où  $\sigma$  est une représentation unitaire et irréductible de  $H$ . En effet  $\sigma$  étant monomiale, on sait que si  $\mathfrak{b}$  est une polarisation réelle en un point  $\phi \in \Omega_H(\sigma) \subset \mathfrak{h}^*$ , alors elle vérifie la condition de Pukanszky, à savoir que

$$B \cdot \phi = \phi + \mathfrak{b}^\perp$$

avec  $B = \exp(\mathfrak{b})$ , et  $\sigma$  est induite par un caractère unitaire  $\chi_\phi$  défini par  $\chi_\phi(\exp X) = e^{i\phi(X)}$  ( $X \in \mathfrak{b}$ ). D'où

$$\text{Ind}_H^G \sigma \simeq \text{Ind}_B^G \chi_\phi,$$

et pour déduire le résultat, on raisonne comme dans la section 5 de [31].

Comme autre application de la construction de cet opérateur d'entrelacement, on donne une preuve brève d'un théorème dû à Corwin et à Greenleaf sur la commutativité des opérateurs différentiels sur les espaces homogènes nilpotents. Expliquons brièvement de quoi il s'agit:

soient

$$C^\infty(G, \tau) = \{\xi \in C^\infty(G) : \xi(gh) = \chi(h^{-1})\xi(g), g \in G, h \in H\}$$

et  $\text{Diff}(G)$  l'algèbre des opérateurs différentiels qui sont  $C^\infty$  et qui laissent  $C^\infty(G, \tau)$  invariant. Soit  $\mathfrak{D}_\tau(G/H)$  l'ensemble des restrictions  $D|_{C^\infty(G, \tau)}$  des  $D \in \text{Diff}(G)$  qui commutent avec les translations à gauche de  $G$  sur  $C^\infty(G, \tau)$ .

Corwin et Greenleaf ont prouvé que l'algèbre  $\mathfrak{D}_\tau(G/H)$  est abélienne lorsque presque toutes les multiplicités sont finies (cf. [12]). En examinant de près cette démonstration et de nombreux exemples, ils ont formulé la conjecture suivante:

*Si  $m(\pi) < \infty$  presque partout, alors l'algèbre  $\mathfrak{D}_\tau(G/H)$  est isomorphe à l'algèbre des fonctions polynomiales  $H$ -invariantes sur  $\mathfrak{f} + \mathfrak{h}^\perp$ .*

Plus récemment, ils ont vérifié cette conjecture sous les hypothèses suivantes:

(i)  $m_\pi < \infty$  pour  $\pi$  générique dans  $\text{Support}(\tau)$ .

(ii)  $\mathfrak{g}$  contient une sous-algèbre  $\mathfrak{b}$  qui polarise tous les éléments génériques de  $\Gamma_f = \mathfrak{f} + \mathfrak{h}^\perp$  et qui est normalisée par  $\mathfrak{h}$ .

Dans leur preuve, Corwin et Greenleaf ont pleinement utilisé des coordonnées bien adaptées, des transformations de Malcev-Fourier et des analyses très détaillées des orbites coadjointes.

Nous nous proposons ici de redémontrer leur conjecture sous les mêmes conditions par une méthode plus simple que la leur. Notre outil principal est l'opérateur d'entrelacement construit précédemment, et cette application termine le premier chapitre.

L'étude des représentations unitaires montre qu'il existe un très grand parallélisme entre les formules des multiplicités pour la désintégration de  $\tau = \text{Ind}_H^G \sigma$  où  $\sigma \in \hat{H}$  et celle pour la désintégration de  $\pi|_H$  quand  $\pi \in \hat{G}$ .

Rappelons les principaux résultats connus sur la désintégration des restrictions des représentations unitaires et irréductibles. Soit  $G$  un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ . On considère une représentation unitaire et irréductible  $\pi$  associée à une orbite coadjointe  $\Omega_\pi^G = \Omega_\pi \subset \mathfrak{g}^*$  associée à une forme linéaire  $f$  et  $\mu_\pi$  une mesure finie  $G$ -invariante sur  $\Omega_\pi$ . Si  $H$  est un sous-groupe analytique de  $G$  d'algèbre de Lie  $\mathfrak{h}$ , alors d'après Corwin et Greenleaf [9], la désintégration centrale de  $\pi/H$  s'obtient comme suit

$$\pi/H \simeq \int_{\Omega_\pi/H}^{\oplus} \sigma_{p(l)} d\dot{\mu}_\pi(l),$$

où  $p : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{h}^*$  est la projection canonique,  $\sigma_{p(l)} \in \hat{H}$  est associé à  $p(l) \in \mathfrak{h}^*$  et  $[\dot{\mu}_\pi]$  est la classe de la mesure  $\mu_\pi$  sur l'espace-quotient.

L'application de Kirillov-Bernat  $\theta_H : \mathfrak{h} \rightarrow \hat{H}$  induit un isomorphisme borélien de l'espace des orbites  $\mathfrak{h}^*/H$  sur  $\hat{H}$ . On considère ensuite la mesure  $\nu = \nu_H^\pi = (\theta_H \circ p)_*(\mu_\pi)$ , l'image de  $\mu_\pi$  par l'application  $\theta_H \circ p : \mathfrak{g}^* \rightarrow \hat{H}$ . Pour  $\sigma \in \hat{H}$ , on désigne par  $n_\pi(\sigma)$  le nombre des  $H$ -orbites contenues dans  $\Gamma(\pi, \sigma) = \Omega_\pi^G \cap p^{-1}(\Omega_\sigma^H)$ ; alors Lipsman [28] a démontré que

$$\pi/H \simeq \int_{\hat{H}}^{\oplus} n_\pi(\sigma) \sigma d\nu(\sigma).$$

La deuxième partie de cette thèse consiste à décrire un opérateur d'entrelacement unitaire entre la restriction d'une représentation unitaire et sa décomposition centrale ainsi qu'un espace de désintégration concret. Comme dans le cas des représentations induites, nous généralisons tout d'abord les résultats de Corwin et Greenleaf [9], sur la désintégration des restrictions des représentations unitaires et irréductibles. Nous construisons à partir d'une base  $\mathfrak{B}$  de Malcev relative à  $\mathfrak{h}$  bien construite à partir d'une suite de Jordan-Hölder de  $\mathfrak{g}$  des sous-espaces affines  $\mathfrak{X}^{R, \mathfrak{B}}$  de  $\Omega_f$ ,  $H$ -invariants ainsi qu'une mesure invariante  $d\lambda^{R, \mathfrak{B}}$  sur  $\mathfrak{X}^{R, \mathfrak{B}}$  tels que

$$\pi/H \simeq \int_{\mathfrak{X}^{R, \mathfrak{B}}}^{\oplus} \sigma_\phi d\lambda^{R, \mathfrak{B}}(\phi).$$

Ici  $R$  désigne une famille  $R_0, \dots, R_r$  ( $r = \text{codim } \mathfrak{h}$ ) de fonctions polynomiales définies sur  $\mathbb{R}^k$  où  $k \in \mathbb{N}$  sera précisé par la suite. Nous construisons ensuite un opérateur d'entrelacement

unitaire: on part d'une base de Jordan-Hölder  $\mathfrak{C}$  de  $\mathfrak{g}$ , nous construisons un algorithme qui nous fournit à partir de  $\mathfrak{C}$  une base de Jordan-Hölder  $\mathfrak{D}$  de  $\mathfrak{h}$  et une base  $\mathfrak{B}$  de Malcev relative à  $\mathfrak{h}$ . On note  $B$  la polarisation de Vergne en  $f$  pour la base  $\mathfrak{C}$  et pour tout  $\phi \in \mathfrak{X}^{R, \mathfrak{B}}$ ,  $B(\phi)$  la polarisation de Vergne en  $\phi|\mathfrak{h}$  dans  $\mathfrak{h}$  pour la base  $\mathfrak{D}$ . L'opérateur d'entrelacement  $U$  sera défini pour tout  $\xi \in S(G/B)$  et  $h \in H$  par

$$U(\xi)(\phi)(h) = \int_{B(\phi)/B(\phi) \cap B^\phi} \xi(hug_\phi) \chi_\phi(u) d_{B(\phi), B^\phi}(u)$$

où  $g_\phi$  est l'unique élément de  $G$  tel que  $\phi = Ad^*(g_\phi)f$  et  $B^\phi = g_\phi \cdot B \cdot g_\phi^{-1}$ .

Le choix propice de  $B$  et de la base de Malcev relative à  $\mathfrak{h}$  sont très importants dans cet opérateur, nous montrerons plus tard dans les exemples (II-5.6) et (II-5.7) que dès qu'on change la polarisation  $B$  ou la base  $\mathfrak{B}$  on n'obtient plus un opérateur d'entrelacement.

Nous démontrons par la suite que cet opérateur est inversible, nous explicitons son inverse et nous examinons des exemples.

A titre d'application, nous étudions la désintégration du produit tensoriel de deux représentations unitaires: soient  $\pi_j (j = 1, 2)$  deux représentations unitaires et irréductibles de  $G$  associées à deux formes linéaires  $f_1, f_2$ ; les orbites coadjointes associées à  $f_1$  et à  $f_2$  seront notées par la suite par  $\Omega_{f_1}$  et  $\Omega_{f_2}$ . Le produit de Kronecker extérieur de  $\pi_1$  et de  $\pi_2$ , noté  $\pi_1 \times \pi_2$ , correspond à l'orbite  $\Omega_{G \times G}(\pi_1 \times \pi_2) = (\Omega_{f_1}, \Omega_{f_2}) \subset \mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{g}^*$ . On identifie  $G$  au sous-groupe  $\Delta_G$  de  $G \times G$  constitué par les éléments diagonaux.

Soit  $p = p(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}, \mathfrak{g}) : \mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^*$  et  $\nu = (\theta_G \circ p)_*(\mu_{\pi_1 \times \pi_2})$ , ( $\mu_{\pi_1 \times \pi_2}$  étant la mesure invariante sur l'orbite  $(\Omega_{f_1}, \Omega_{f_2}) \subset \mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{g}^*$ ). Il est clair que

$$(\pi_1 \times \pi_2)|_{\Delta_G} = \pi_1 \otimes \pi_2,$$

et ainsi d'après [13] et [28]

$$\pi_1 \otimes \pi_2 \simeq \int_{\hat{G}}^{\oplus} m_\pi \pi d\nu(\pi) \simeq \int_{\Omega_1 \times \Omega_2 / \Delta_G}^{\oplus} \sigma_{p(l,k)} d\dot{\mu}(l, k)$$

où  $m(\pi)$  est le nombre des  $G$ -orbites incluses dans  $\Omega_1 \times \Omega_2 \cap p^{-1}(\Omega(\pi))$ .

Nous donnons une nouvelle désintégration lisse de ce produit tensoriel de représentation, un espace de désintégration concret, ainsi qu'un opérateur d'entrelacement isométrique et encore lisse.

Nous espérons que nos résultats pourront se généraliser à d'autres classes de groupes résolubles.

Dans la dernière partie, nous traitons un problème de nature différente. Il s'agit de comprendre l'espace des orbites  $\mathfrak{g}^*/Ad^*(G)$  lorsqu'il est équipé de la topologie-quotient. Cet espace

est loin d'être un espace de Hausdorff. D'une manière plus précise, on se propose de trouver une forme explicite du cortex de  $\mathfrak{g}^*$ ,  $\text{Cor}(\mathfrak{g}^*)$  qui est l'ensemble des orbites coadjointes qui ne peuvent pas être séparées au sens de Hausdorff de  $\{0\}$ . Au niveau de  $\hat{G}$ , cet ensemble correspond à l'ensemble des représentations unitaires et irréductibles qui ne peuvent pas être séparées au sens de Hausdorff de la représentation triviale  $1_G$  de  $G$ .

Il est bien connu que le cortex peut avoir une structure très compliquée (cf. [2],[3],[6],[7]), et une description explicite de cet ensemble n'a pas encore été trouvée.

Dans un premier temps, nous calculons le cortex des algèbres de Lie nilpotentes de petite dimension, nous remarquons comme on l'a déjà annoncé, que sa structure peut être incroyablement compliquée, nous avons encore constaté que pour ces algèbres on a l'égalité

$$\text{Cor}(\mathfrak{g}^*) = \text{ICor}(\mathfrak{g}^*),$$

où  $\text{ICor}(\mathfrak{g}^*)$  est l'ensemble des zéros communs des polynômes  $G$ -invariants sur  $\mathfrak{g}^*$ .

D'ailleurs dans [7], Boidol, Müller et Ludwig montrent le même résultat pour des les groupes de Lie nilpotents qui sont de la forme  $\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^n$ .

En utilisant ce calcul, nous avons cherché le cortex des algèbres nilpotentes dont la dimension maximale des orbites est deux. La classification de cette famille d'algèbre est donnée dans [1].

D'autre part, Bekka et Kanuith ont trouvé dans [6] une partie dense dans le cortex lorsque  $\mathfrak{g}$  est une algèbre nilpotente de pas deux, c'est à dire

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g}),$$

où  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$  est le centre de  $\mathfrak{g}$ . Plus précisément, il ont prouvé que

$$\text{Cor}(\mathfrak{g}^*) = \overline{\{ad^*Xl : X \in \mathfrak{g}, l \in \mathfrak{g}^*\}}$$

où  $ad^*$  est la représentation coadjointe sur l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ .

Nous généralisons également ce résultat en montrant que si  $\mathfrak{g}$  est nilpotente de pas  $r$ , (c'est à dire que la suite descendante d'ordre  $r$  est non nulle et est incluse dans le centre de  $\mathfrak{g}$ ), alors

$$\{ad^*X_1 \cdots ad^*X_{r-1}l : X_1, \dots, X_{r-1} \in \mathfrak{g}, l \in \mathfrak{g}^*\} \subset \text{Cor}(\mathfrak{g}^*) \subset \overline{\{ad^*Xl : X \in \mathfrak{g}, l \in \mathfrak{g}^*\}}.$$

Nous démontrons ensuite le théorème suivant:

*Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie nilpotente, telle que toutes les orbites associées aux formes linéaires en position générale soient des variétés linéaires (ceci est évidemment le cas lorsque  $\mathfrak{g}$  est de pas 2), alors*

$$\text{Cor}(\mathfrak{g}^*) = \overline{\{ad^*Xl : X \in \mathfrak{g}, l \in \mathfrak{g}^*\}} = \text{Support}(\gamma_G),$$

où  $\gamma_G$  est la représentation de conjugaison définie pour tout  $\xi \in L^2(G)$  et  $g, s \in G$  par

$$\gamma_G(g)\xi(s) = \xi(g^{-1} \cdot s \cdot g).$$

Par la suite, nous exploitons ce théorème pour trouver des résultats concernant le cortex ainsi que des exemples intéressants.

Nous étudions ensuite le cortex des algèbres de Lie nilpotentes de pas 3. Soit  $S_n$  le groupe des matrices symétrique  $n \times n$ ,  $S_n$  agit de manière naturelle sur le groupe de Heisenberg de dimension  $2n + 1$ ,  $H_n$ . Le produit semi-direct  $SH_n$  de  $S_n$  et  $H_n$  est un groupe de Lie nilpotent de pas trois dont le centre est unidimensionnel.

Il a été prouvé ([39], section 3) que toute algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  de pas trois dont le centre est de dimension 1 est une sous-algèbre de  $\mathfrak{S}H_n$  (l'algèbre de Lie de  $SH_n$ ) pour un certain  $n$ , de telle manière que les orbites génériques des groupes  $G, SH_n, H_n$  soient toutes de dimension  $2n$ .

Les éléments de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{S}H_n$  de  $SH_n$  s'écrivent de la forme

$$(A, u, v, \lambda), \quad A \in S_n, \quad u, v \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Le crochet dans  $\mathfrak{S}H_n$  est défini par

$$[(A, u, v, \lambda), (B, u', v', \lambda')] = (0, 0, Au - Bu', uv' - u'v),$$

pour tout  $(A, u, v, \lambda)$  et  $(B, u', v', \lambda')$  dans  $\mathfrak{S}H_n$ .

Les éléments de  $\mathfrak{S}H_n^*$  sont de la forme

$$(E, a, b, c), \quad E \in \mathfrak{S}_n, \quad a, b \in \mathbb{R}^n, \quad c \in \mathbb{R}.$$

La dualité entre  $\mathfrak{S}H_n$  et  $\mathfrak{S}H_n^*$  est donnée pour tout  $(E, a, b, c) \in \mathfrak{S}H_n^*$  et  $(S, x, y, z) \in \mathfrak{S}H_n$  par

$$[(E, a, b, c), (S, x, y, z)] = E \cdot S + \langle a, x \rangle + \langle b, y \rangle + cz,$$

pour tout  $(E, a, b, c) \in \mathfrak{S}H_n^*$  et  $(S, x, y, z) \in \mathfrak{S}H_n$ , où

$$E \cdot S = \sum_{i,j} E_{ij} S_{ij} \quad \text{et} \quad E_{ij}, S_{ij} : i, j = 1, \dots, n,$$

sont les coefficients de la matrice de  $E$  et de  $S \in \mathfrak{S}_n$ .

Pour deux vecteurs  $a = (a_1, \dots, a_n)$ ,  $b = (b_1, \dots, b_n)$ , on note  $a \otimes b$  la matrice dont les coefficients sont  $(a_i b_j)$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ .

Dans un premier temps nous décrivons le cortex de  $SH_n$ :

**Théorème [3]**

*Le cortex de  $\mathfrak{S}H_n^*$  sous son action coadjointe est l'ensemble:*

$$\begin{aligned} \text{Cor}(\mathfrak{S}H_n^*) &= \{(x \otimes c + c \otimes x, u, 0, 0) : x, u, c \in \mathbb{R}^n\} \\ &= \{ad^*Xad^*Yl : X, Y \in \mathfrak{S}H_n, l \in \mathfrak{S}H_n^*\}. \end{aligned}$$

Malheureusement, ce théorème ne nous donne pas le cortex de toute algèbre de Lie de pas trois et de centre unidimensionnel quoiqu'elles soient toutes injectées dans des algèbres de type  $\mathfrak{S}H_n$  pour un certain  $n \in \mathbb{N}^*$ , nous établissons alors une correspondance entre le cortex de  $\mathfrak{S}H_n$  et le cortex de tout groupe de Lie  $G$  nilpotent de pas trois et de centre unidimensionnel. Des exemples terminent ce chapitre.

# Chapitre I

## OPERATEUR D'ENTRELACEMENT DES REPRESENTATIONS

### MONOMIALES DES GROUPES DE LIE NILPOTENTS

On part d'un groupe de Lie  $G$  nilpotent connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ , et une représentation monomiale  $\tau = \int_H^G \chi$  induite par un caractère unitaire  $\chi$  d'un sous-groupe analytique  $H$  de  $G$ . En fait  $\mathfrak{h}$  étant la sous-algèbre de Lie correspondant à  $H$ ,  $\chi$  s'écrit sous la forme  $\chi(\exp X) = e^{if(X)}$  ( $X \in \mathfrak{h}$ ) avec  $f \in \mathfrak{h}^*$ . On note  $p : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{h}^*$  la projection canonique. Comme a été dit dans l'introduction, d'après Corwin, Greenleaf [9] et Lipsman [28], la désintégration centrale de  $\tau$  s'obtient comme suit:

$$\tau \simeq \int_{(f+\mathfrak{h}^\perp)/H}^\oplus \pi_i d\dot{l}, \quad (1)$$

$d\dot{l}$  étant une certaine mesure naturelle sur l'espace  $(f+\mathfrak{h}^\perp)/H$  des  $H$ -orbites. D'autre part, comme dans les travaux de Corwin, Greenleaf, Grélaud [11] et Lipsman [28], la désintégration centrale de  $\tau$  s'écrit aussi

$$\tau \simeq \int_{\hat{G}}^\oplus m(\pi) \pi d\mu(\pi), \quad (2)$$

où  $\mu$  dénote une mesure finie équivalente à l'image par l'application de Kirillov  $\theta : \mathfrak{g}^* \rightarrow \hat{G}$  de la mesure de Lebesgue sur  $f+\mathfrak{h}^\perp$  et  $m(\pi)$  désigne le nombre de  $H$ -orbites incluses dans  $(f+\mathfrak{h}^\perp) \cap \Omega_f$ .

On commence par donner quelques généralités et quelques notions de base qui nous seront utiles dans toute la thèse.

## I-1. Généralités.

### I-1.1 Notations et rappels.

Soit  $G$  un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ . En notant  $\exp$  l'application exponentielle, on écrira  $G = \exp \mathfrak{g}$ . Soient  $V, W$  des espaces vectoriels réels de dimension finie tels que  $W \subset V$ . On note  $V^*$  l'espace vectoriel dual de  $V$  et  $W^\perp$ , l'orthogonal de  $W$  dans  $V^*$ . Etant donnée  $f \in \mathfrak{g}^*$ , le noyau de la forme bilinéaire  $B_f$  définie par  $B_f(X, Y) = f([X, Y])$  se note  $\mathfrak{g}(f) : \mathfrak{g}(f) = \{X \in \mathfrak{g} ; B_f(X, Y) = 0 \text{ pour tout } Y \in \mathfrak{g}\}$ . On dit qu'une sous-algèbre de  $\mathfrak{g}$  est subordonnée à  $f$  si elle est totalement isotrope pour  $B_f$ . On note  $S(f, \mathfrak{g})$  l'ensemble de telles sous-algèbres et  $M(f, \mathfrak{g})$  celui des sous-algèbres qui sont en même temps des sous-espaces totalement isotropes maximaux. Un élément de  $M(f, \mathfrak{g})$  sera appelé polarisation (réelle) au point  $f$ .

Soit  $\mathfrak{h} \in S(f, \mathfrak{g})$ . Donnons-nous le caractère  $\chi_f$  du sous-groupe analytique  $H = \exp \mathfrak{h}$  correspondant à  $f$  par,  $\chi_f(\exp X) = e^{if(X)}$  quel que soit  $X \in \mathfrak{h}$ .

On construit la représentation induite  $\tau = \rho(f, \mathfrak{h}, G) = \text{Ind}_H^G \chi_f$  de  $G$ . Par définition même d'une représentation induite,  $\tau$  se réalise par translations à gauche dans l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}_\tau$  des fonctions  $\xi$  sur  $G$  vérifiant:

$$\xi(gh) = \chi_f(h^{-1})\xi(g)$$

quels que soient  $g$  dans  $G$  et  $h$  dans  $H$  et de carré intégrable sur  $G/H$  pour la mesure  $G$ -invariante. Une telle représentation sera aussi appelée monomiale.

Soit  $K : \mathfrak{g}^*/G \longrightarrow \hat{G}$  la bijection de Kirillov. Pour  $\pi \in \hat{G}$ , on notera  $\Omega(\pi)$  l'orbite correspondante  $\Omega(\pi) = K^{-1}(\pi)$ . On munit  $\mathfrak{g}^*/G$  et  $\hat{G}$  de leurs structures topologiques et boréliennes habituelles. Il est bien connu que  $K$  est un isomorphisme borélien, même un homéomorphisme, de  $\mathfrak{g}^*/G$  sur  $\hat{G}$  (cf. [8] et [25]). On confondra parfois les classes d'équivalence dans  $\hat{G}$  avec leurs représentantes, et la relation d'équivalence entre deux représentations  $\pi_1, \pi_2$  se notera  $\pi_1 \simeq \pi_2$ .

Lorsque  $g$  décrit  $G$ , on notera  $d_G(g)$  ou  $dg$  une mesure de Haar sur  $G$  et  $d\dot{g}$  une mesure invariante sur un espace homogène de  $G$ .

Soit  $V$  un espace vectoriel réel de dimension finie et  $\rho : G \longrightarrow \text{End}(V)$  une action unipotente de  $G$  sur  $V$ . On désigne par

$$(0) = V_n \subset V_{n-1} \subset \dots \subset V_1 \subset V_0 = V$$

une suite de Jordan-Hölder pour  $G$  et  $\mathfrak{B} = (v_1, \dots, v_n)$  une base de Jordan-Hölder associée ( $v_j \in V_{j-1} \setminus V_j$ ).



Si  $v \in V$  on écrit  $\rho(x)v = x \cdot v$  pour tout  $x \in G$  et  $X \cdot v = \frac{d}{dt} \{ \rho(\exp(tX)) \cdot v \} |_{t=0}$  pour tout  $X \in \mathfrak{g}$ .

L'ensemble indice  $e^{\mathfrak{B}}(v) = \{i_1 < \dots < i_d\}$  d'un élément  $v$  dans  $V$  relatif à  $\mathfrak{B}$  est l'ensemble suivant de  $\{1, \dots, n\}$ :

$$j \in e^{\mathfrak{B}}(v) \Leftrightarrow \exists X \in \mathfrak{g} : X \cdot v \in V_{i-1} \setminus V_i.$$

L'entier  $d$ , c-à-d le cardinal de  $e^{\mathfrak{B}}(v)$  est bien sûr la dimension de la  $G$ -orbite  $\Omega$  de  $v$  et ne varie pas si  $v$  parcourt  $\Omega$ .

Fixons  $d$  dans  $\mathbb{N}$ . Pour un sous ensemble  $e$  de  $\{1, \dots, n\}$  avec cardinal de  $e = d$  on note  $V_e$  la partie  $V$  qui contient tous les éléments  $v$  telle que  $e^{\mathfrak{B}}(v) = e$ . Pour chaque  $e$  il existe un polynôme  $P_e$  et une relation d'ordre sur l'ensemble des ensembles indice de longueur  $d$  tels que  $V_e = \{v \in \mathfrak{g}; P_e(v) \neq 0, P_{e'}(v) = 0, \text{ pour tout } e' > e\}$ .

La partie de  $V$  qui contient tous les éléments  $v$  telle que la dimension des  $G$ -orbites soit  $d$ , est la réunion disjointe des  $V_e$ .

Pukanszky a montré dans [38] qu'il existe un système de  $n$  fonctions réelles  $\{p_1^{\mathfrak{B}}, \dots, p_n^{\mathfrak{B}}\}$  sur  $\mathbb{R}^d \times V_e$  avec les propriétés suivantes:

- a) pour  $v \in V_e$  fixée,  $p_j^{\mathfrak{B}}(z, v)$  est une fonction polynomiale en  $z = (z_1, \dots, z_d)$  et les coefficients sont des fonctions  $G$ -invariantes sur  $V_e$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$ ;
- b)  $p_{j_k}^{\mathfrak{B}}(z, v) = z_k$  pour  $j = j_k \in e, v \in V_e$ ;
- c) si  $1 \leq i \leq n$ ,  $i_k \leq i < i_{k+1}$  alors  $p_i^{\mathfrak{B}}(z, v)$  ne dépend que de  $z_1, \dots, z_k$ ;
- d) pour tout  $v \in V_e$  on a

$$\rho(G)v = \{ p^{\mathfrak{B}}(z, v) = \sum_{j=1}^n p_j^{\mathfrak{B}}(z, v)v_j : z \in \mathbb{R}^d \}.$$

Prenons par exemple  $V = \mathfrak{g}^*$  et l'action coadjointe. Soit  $\mathfrak{B} = (l_1, \dots, l_n)$  une base de Jordan-Hölder de  $\mathfrak{g}^*$  et soit  $\mathfrak{B}_1 = (b_1, \dots, b_n)$  la base duale dans  $\mathfrak{g}$ , c-à-d  $\langle l_i, b_j \rangle = \delta_{i,j}$ ;  $1 \leq i, j \leq n$ . On note pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\mathfrak{g}_j = \langle b_1, \dots, b_j \rangle$ ; l'ensemble indice  $e^{\mathfrak{B}}(f) = \{i_1 < \dots < i_d\}$  d'un élément  $f$  dans  $\mathfrak{g}^*$  relatif à  $\mathfrak{B}$  est aussi l'ensemble suivant de  $\{1, \dots, n\}$ :

$$i \in e^{\mathfrak{B}}(f) \Leftrightarrow \mathfrak{g}(f) + \mathfrak{g}_{j-1} \subsetneq \mathfrak{g}(f) + \mathfrak{g}_j,$$

où  $\mathfrak{g}(f)$  est le radical de la forme  $(x, y) \mapsto \langle f, [x, y] \rangle$  sur  $\mathfrak{g}$ .

Soit maintenant  $l$  dans  $\mathfrak{g}^*$ . On peut obtenir une polarisation au point  $l$  par la méthode suivante de M. Vergne [40].

Soit  $\{0\} \subset \mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}_2 \dots \subset \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}$  une chaîne d'idéaux de  $\mathfrak{g}$  telle que  $\dim \mathfrak{g}_j = j$ ; soit  $l_j = l/\mathfrak{g}_j$ . Alors

$$m_l = \sum_{j=1}^n \mathfrak{g}_j(l_j) \quad (3)$$

est un élément de  $M(l, \mathfrak{g})$ .

Soit  $\mathfrak{k}$  un sous espace de  $\mathfrak{g}^*$ , et soit pour chaque  $l \in \mathfrak{k}$ ,  $\mathfrak{b}(l)$  une polarisation en  $l$ , nous disons que  $\mathfrak{b}(l)$  dépend de façon lisse de  $l$  s'il existe pour chaque  $\mathfrak{b}(l)$  une base  $\langle b_1(l), b_2(l), \dots, b_k(l) \rangle$  telle que  $l \rightarrow b_j(l)$  soit une application rationnelle de  $l$  pour tout  $j \in \{1, \dots, k\}$ . La proposition suivante est facile à démontrer.

### I-1.2 Proposition

Soit  $\mathfrak{V}$  un sous-espace de  $\mathfrak{g}^*$ . Soit pour tout  $l \in \mathfrak{V}$ ,  $\mathfrak{b}(l)$  la polarisation en  $l$  construite suivant la méthode de Vergne, alors  $\mathfrak{b}(l)$  est lisse en  $l$ .

## I-2. Désintégration centrale canonique des représentations monomiales.

### I-2.1 Choix des mesures.

Comme plus haut soit  $\mathfrak{h} \in S(f, \mathfrak{g})$  et  $\chi_f$  le caractère du sous-groupe analytique  $H = \exp \mathfrak{h}$  correspondant à  $\mathfrak{h}$  défini par, quel que soit  $X \in \mathfrak{h}$ ,  $\chi_f(\exp X) = e^{if(X)}$ .

On va décrire maintenant une mesure sur  $(f + \mathfrak{h}^\perp)/H$  due à Pukanszky [38]. Soit  $\mathfrak{B} = \{(b_1, \dots, b_n)\}$  une base de Jordan-Hölder de  $\mathfrak{g}^*$  vue comme  $\mathfrak{h}$  module, et  $\{(v_1, \dots, v_n)\}$  sa base duale, et soit  $e$  le plus petit indice tel que  $\mathfrak{g}_e^* \cap (f + \mathfrak{h}^\perp) \neq \emptyset$ , soit

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{g}_e^* \cap (f + \mathfrak{h}^\perp)$$

alors  $\mathfrak{U}$  est un ouvert de Zariski non vide dans  $(f + \mathfrak{h}^\perp)$ .

Nous disons que les éléments de  $\mathfrak{U}$  sont en position générale dans  $(f + \mathfrak{h}^\perp)$ .

Soit  $l \in \mathfrak{U}$  et  $\lambda_l = p^{\mathfrak{B}}(0, l)$ , alors  $l = p^{\mathfrak{B}}(z, \lambda_l) = \sum_{j=1}^n p_j^{\mathfrak{B}}(z, \lambda_l) b_j$  pour un certain  $z \in \mathbb{R}^d$ . En fait  $\lambda_l$  est l'unique élément de  $H \cdot l$  qui vérifie  $\lambda_l(v_j) = 0$  pour  $j \in e$ .

Soit

$$\mathfrak{W} = \mathfrak{U} \cap \{q \in f + \mathfrak{h}^\perp : q(b_j) = 0, \forall j \in e\} \quad (4)$$

et

$$\varphi : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{W} \times \mathbb{R}^d$$

qui à  $l$  associe le couple  $(\lambda_l, z)$ , alors  $\varphi$  est un difféomorphisme, en particulier  $q \longrightarrow H \cdot q$  définit une bijection de  $\mathfrak{A}$  sur  $\mathfrak{A}/H$ . Pour toute fonction continue à support compact  $k$  sur  $f + \mathfrak{h}^\perp$  on a que

$$\int_{f+\mathfrak{h}^\perp} k(q) dq = \int_{\mathfrak{A} \times \mathbb{R}^d} k \circ \varphi(\lambda, z) |d\varphi(\lambda, z)| d\lambda dz$$

où  $|d\varphi(\lambda, z)|$  est le déterminant du jacobien de  $\varphi$  qui vaut identiquement 1 (voir [38]). De cette manière on considère une mesure sur l'espace  $(f + \mathfrak{h}^\perp)/H$  qu'on notera par la suite aussi  $d\lambda$  : pour toute fonction  $\tilde{k}$ , continue à support compact sur  $(f + \mathfrak{h}^\perp)/H$  on a

$$\int_{f+\mathfrak{h}^\perp/H} \tilde{k}(H \cdot \lambda) d\lambda = \int_{\mathfrak{A}} \tilde{k}(\lambda) d\lambda.$$

Nous fixons maintenant une mesure de Haar  $dx$  sur  $G$ .

Soit  $B = \exp \mathfrak{b}$  un sous-groupe fermé connexe de  $G$  et soit  $\langle b_1, b_2, \dots, b_k \rangle$  une base de Jordan-Hölder de  $\mathfrak{b}$ . Alors l'application

$$\psi : \mathbb{R}^k \longrightarrow B$$

$$(t_1, \dots, t_k) \longrightarrow \exp t_1 b_1 \cdots \exp t_k b_k$$

est un difféomorphisme. On choisit une mesure  $db$  sur  $B$  de la manière suivante: pour toute fonction  $C^\infty$  à support compact  $h$  dans  $B$ ,

$$\int_B h(b) d(b) = \int_{\mathbb{R}^k} h(\exp(t_1 b_1) \cdots \exp(t_k b_k)) dt_1 \cdots dt_k.$$

Cette mesure est invariante à gauche, donc une mesure de Haar. D'autre part si nous choisissons une base de Malcev  $\{c_1, \dots, c_d\}$  relative à  $\mathfrak{b}$ , c.à d.  $\mathfrak{g} = \mathbb{R} c_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{R} c_d \oplus \mathfrak{b}$  et  $\sum_{k=j}^d \mathbb{R} c_k \oplus \mathfrak{b}$  est une sous-algèbre de  $\mathfrak{g}$  pour tout  $j$ , alors la mesure  $d_{G,B}$  définie sur  $G/B$  par

$$\int_{G/B} a(g) d_{G,B}(\dot{g}) = \int_{\mathbb{R}^d} a(\exp(t_1 c_1) \cdots \exp(t_d c_d)) dt_1 \cdots dt_d,$$

est aussi invariante à gauche. En renormalisant un des vecteurs  $c_j$ , on a que

$$\int_G q(g) dg = \int_{G/B} \int_B q(gb) db d_{G,B}(\dot{g})$$

pour toute fonction continue à support compact  $q$  sur  $G$ . Nous choisirons toujours les mesures invariantes  $d_{G,B}$  sur les espaces quotients  $G/B$  de telle sorte que cette identité soit vraie.

Rappelons maintenant un résultat dû à Lion [27].

Soient  $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2$  deux polarisations au point  $\phi \in \mathfrak{g}^*$ , et  $B_1, B_2$  les deux sous groupes associés. On note  $S(G/B_i, \phi)$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , l'ensemble des vecteurs  $C^\infty$  des espaces des représentations  $\text{Ind}_{B_i}^G \chi_\phi$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , qui sont en fait isomorphes tous les deux à l'espace de Schwartz de  $\mathbb{R}^{\text{codim}(\mathfrak{b}_i)}$ .

Dans toute la suite on notera  $\pi_{\phi, B}$  la représentation  $\text{Ind}_B^G \chi_\phi$ .

Si  $d_{B_2, B_2 \cap B_1}$  est une mesure sur  $B_2/B_2 \cap B_1$  invariante à gauche pour  $B_2$ , alors pour toute fonction  $k$  de  $S(G/B_1, \phi)$  l'intégrale

$$T_{B_2, B_1} k(g) = \int_{B_2/B_2 \cap B_1} k(gb) \chi_\phi(b) d_{B_2/B_2 \cap B_1}(b) \quad (5)$$

converge pour tout  $g \in G$  et définit un isomorphisme de  $S(G/B_1, \phi)$  sur  $S(G/B_2, \phi)$  qui se prolonge par continuité en un opérateur d'entrelacement entre  $\pi_{\phi, B_1}$  et  $\pi_{\phi, B_2}$ , et si les mesures sur les espaces homogènes  $G/B_1$  et  $G/B_2$  sont convenablement normalisées,  $T_{B_2, B_1}$  est une isométrie. On note  $\mathcal{H}_\tau$ , respectivement  $\mathcal{H}_\tau^\infty$ , l'espace de la représentation  $\tau = \text{Ind}_H^G \chi$ , respectivement l'espace des vecteurs  $C^\infty$  de cette représentation, et on note  $S(G/H, \phi)$  l'espace de Schwartz de la représentation  $\tau$ . Cet espace est tout simplement l'espace des fonctions  $f$  qui sont  $C^\infty$  sur  $G$ , qui vérifient  $f(xh) = \chi_\phi(h)^{-1} f(x)$  pour tout  $x$  dans  $G$  et tout  $h$  dans  $H$  et dont la restriction à  $\exp(\mathfrak{F})$ , où  $\mathfrak{F}$  est un sous-espace supplémentaire à  $\mathfrak{h}$ , définit une fonction de Schwartz ordinaire sur  $\mathfrak{F}$ . L'espace de Fréchet  $S(G/H, \phi)$  est évidemment isomorphe à l'espace de Fréchet  $S(G/H)$ .

Par abus de langage on appellera polarisation la sous-algèbre et aussi le sous-groupe associé. On remarque que l'intégrale

$$T_{B(\phi), H} \xi(g) = \int_{B(\phi)/B(\phi) \cap H} \xi(gu) \chi_\phi(u) d_{B(\phi), B(\phi) \cap H}(u) \quad (6)$$

existe pour toute fonction de Schwartz  $\xi$  de  $\mathcal{H}_\tau^\infty$  et  $g$  dans  $G$  et définit une fonction  $C^\infty$  sur  $G$  qui vérifie la relation de covariance pour  $B(l)$  et le caractère  $\chi_l$ . On va montrer que  $T_{B(\phi), H} \xi$  est en fait un élément de  $\mathcal{H}_{\pi_{\phi, B(\phi)}}^\infty$ , c'est à dire un vecteur  $C^\infty$  de la représentation induite  $\pi_{\phi, B(\phi)}$ .

### I-2.2 Lemme

Soit  $\phi \in \mathfrak{V}$  et  $B = B(\phi) = \exp \mathfrak{b}$  une polarisation en  $\phi$ . Alors il existe une constante positive  $C$  et une semi norme  $P$  continue sur l'espace de Schwartz  $S(G/H, f)$  telles que pour

tout  $\xi$  dans  $S(G/H, f)$  on a

$$\|T_{B,H}\xi\|_{L^2(G/B)} \leq CP(\xi),$$

en particulier  $T_{B,H} : S(G/H, f) \longrightarrow S(G/B, \phi)$  est une application linéaire continue et surjective.

### Preuve

On montre tout d'abord que pour tout  $\xi$  dans  $S(G/H, f)$  on a que

$$|T_{B,H}\xi|_\infty \leq C_1 P_1(\xi)$$

où  $C_1$  est une constante positive et  $P_1$  une semi-norme continue sur l'espace de Schwartz  $S(G/H, f)$ .

En effet soit  $\mathfrak{B} = (X_1, \dots, X_p)$  une base de Malcev de  $\mathfrak{g}$  relative à  $\mathfrak{h}$  telle que  $\mathfrak{B}$  contienne une base de Malcev  $(X_{i_1}, \dots, X_{i_n})$  de  $\mathfrak{b}$  relative à  $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{h}$ . On a pour tout  $g \in G$  que

$$\begin{aligned} |T_{B(\phi), H}\xi(g)| &\leq \left| \int_{B/B \cap H} \xi(gu) \chi_\phi(u) d_{B, B \cap H}(u) \right| \\ &\leq \int_{B/B \cap H} |\xi(gu)| d_{B, B \cap H}(u) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\xi(g \exp(t_1 X_{i_1}) \cdots \exp(t_n X_{i_n}))| dt_1 \cdots dt_n. \end{aligned}$$

En écrivant  $g \cdot \exp(t_1 X_{i_1}) \cdots \exp(t_n X_{i_n}) = \exp(a_1 X_1) \cdots \exp(a_p X_p) \cdot h$  où  $h \in H$  alors les  $a_i$  sont des fonctions polynomiales en  $g$  et en  $t_1, \dots, t_n$  vérifiant

$$a_{i_1} = t_1 + a'_{i_1} \text{ où } a'_{i_1} \text{ ne dépend pas de } t_1, \dots, t_n, \text{ et de manière générale}$$

$$a_{i_j} = t_j + a'_{i_j} \text{ où } a'_{i_j} \text{ ne dépend pas de } t_j, \dots, t_n \text{ pour } j \in \{1, \dots, n\}.$$

On a que

$$\begin{aligned} |T_{B(\phi), H}\xi(g)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\xi(\exp(a_1 X_1) \cdots \exp(a_p X_p) \cdot h)| dt_1 \cdots dt_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\xi(\exp(b_1 X_1) \cdots \exp(t_1 X_{i_1}) \cdots \exp(t_n X_{i_n}) \cdots \exp(b_p X_p))| dt_1 \cdots dt_n \end{aligned}$$

(pour certaines fonctions polynomiales  $b_j$ ,  $j \notin \{i_1, \dots, i_n\}$ , dans les variables  $(t_1, \dots, t_n)$ )

$$\leq P_1(\xi) \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{k=1}^n (1 + t_k^2)^{-1} dt_1 \cdots dt_n,$$

$$\text{où } P_1(\xi) = \sup_{\substack{(t_1, \dots, t_n) \\ (s_1, \dots, s_{p-n})}} \left( \prod_{i=1}^n (1 + t_i^2) |\xi(\exp(s_1 X_1) \cdots \exp(t_1 X_{i_1}) \cdots \exp(t_n X_{i_n}) \cdots \exp(s_{p-n} X_p))| \right).$$

Soit maintenant  $Q$  un polynôme sans zéro sur  $G/B$  tel que  $\frac{1}{Q}$  soit de carré intégrable. On sait d'autre part ( voir [25]) que l'image de l'algèbre enveloppante  $u(\mathfrak{g})$  de  $\mathfrak{g}$  par  $d\pi_{B,\phi}$  est l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients polynômiaux sur  $G/B$ .

Il en découle qu'il existe  $v \in u(\mathfrak{g})$  tel que

$$Q \cdot T_{B(\phi),H}\xi = d\pi_\phi(v)T_{B(\phi),H}(\xi) = T_{B(\phi),H}(d\tau(v)\xi).$$

On obtient que

$$\begin{aligned} \|T_{B(\phi),H}\xi\|_{L^2(G/B)}^2 &= \int_{G/B} |Q(g)T_{B(\phi),H}\xi(g)|^2 \frac{1}{Q^2(g)} d_{G,B}(\dot{g}) \\ &= \int_{G/B} |T_{B(\phi),H}(d\tau(v)\xi)(g)|^2 \frac{1}{Q^2(g)} d_{G,B}(\dot{g}) \\ &\leq \|T_{B(\phi),H}(d\tau(v)\xi)\|_\infty^2 \int_{G/B} \frac{1}{Q^2(g)} d_{G,B}(\dot{g}) \\ &\leq C_1^2 (P_1(d\tau(v)\xi))^2 \int_{G/B} \frac{1}{Q^2(g)} \leq C^2 P^2(\xi) \end{aligned}$$

pour une nouvelle semi norme de Schwartz et une certaine constante, ce qui achève la preuve. ■

### I-2.3 Définition

Comme plus haut on note  $\Gamma_f = f + \mathfrak{h}^\perp$ . Soit

$$(0) = \mathfrak{g}^n \subset \mathfrak{g}^{n-1} \subset \cdots \subset \mathfrak{g}^j \subset \mathfrak{g}^{j-1} \subset \cdots \subset \mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}$$

une suite de Jordan-Hölder de  $\mathfrak{g}$  et soit  $\mathcal{C} = \{l_1, \dots, l_n\}$  une base de Jordan-Hölder de  $\mathfrak{g}$  extraite de cette suite. On tire de  $\mathcal{C}$  une suite de Malcev  $\{\mathfrak{g}_j\}$  et une base de Malcev  $\{b_r, \dots, b_1\}$  de  $\mathfrak{g}$  relative à  $\mathfrak{h}$  de la façon suivante. Regardons les sous-algèbres  $\mathfrak{h}_j = \mathfrak{g}_j + \mathfrak{h}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , de  $\mathfrak{g}$ . Soit  $j_1$  le plus grand indice tel que  $\mathfrak{h}_{j_1} \neq \mathfrak{h}_{j_1+1}$  et posons  $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{h}_{j_1}$  et  $b_1 = l_{j_1}$ . De proche en proche, on détermine les indices  $j_1, \dots, j_{k-1}$  et si  $j_k$  est le plus grand indice inférieur à  $j_{k-1}$  tel que  $\mathfrak{h}_{j_k} \neq \mathfrak{h}_{j_k+1}$ , alors nous prenons  $\mathfrak{g}_k = \mathfrak{h}_{j_k}$ ,  $b_k = l_{j_k}$ . Posons  $G_j = \exp(\mathfrak{g}_j)$ ,  $j = 1, \dots, r$ .

Nous utiliserons cette base de Malcev de  $\mathfrak{g}$  relative à  $\mathfrak{h}$  pour déterminer une mesure  $G$ -invariante sur  $G/H$  donc pour fixer la norme sur l'espace de l'induite  $\text{Ind}_H^G \chi_f$ . En prenant la

base duale  $\mathfrak{B} = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  des  $b_i$ , on obtient une base de Jordan-Hölder de  $\mathfrak{h}^\perp$  pour l'action de  $H$ .

On note  $I^H = \{i_1 < i_2 < \dots < i_s\} \subset \{1, \dots, r\}$  l'ensemble indice de Pukanzsky relativement à cette action des éléments en position générale dans  $\Gamma_f$  et  $J^H$  le complémentaire de  $I^H$  dans  $\{1, \dots, r\}$ , on pose

$K^H = \left\{ j \in J^H / \text{presque toutes les } H\text{-orbites en position générale dans } \Gamma_f \text{ ne sont pas saturées par rapport à } \mathfrak{g}_{j-1} \text{ dans } \mathfrak{g}_j^*, \text{ mais presque toutes les } G_j\text{-orbites le sont} \right\}$ .

Finalement soit

$$L^H = J^H \setminus K^H = \{1, \dots, r\} \setminus \{I^H \cup K^H\}.$$

Nous allons désintégrer la représentation  $\text{Ind}_H^G \chi_f$  sur certains sous-espaces affines  $\mathfrak{V}^{R, \mathfrak{B}}$  de  $\Gamma_f$  qui ont la forme suivante. Ici  $R$  désigne une famille  $\{R_1, \dots, R_r\}$  de fonctions affines définies sur  $\mathbb{R}^k$ , où  $k$  dénote le cardinal de  $(L^H)$ . Nous exigeons aussi des fonctions  $R_j$  que pour  $j \notin L^H$ ,  $R_j(t_1, \dots, t_k)$  ne dépend que de  $t_1, \dots, t_{j'}$ , où  $i_{j'} \leq j < i_{j'+1}$  et que pour tout  $i_j \in L^H$ ,  $R_{i_j}(t_1, \dots, t_k) = t_j$ . Alors

$$\mathfrak{V}^{R, \mathfrak{B}} = f + \left\{ \sum_{i=1}^r R_i(T) b_i ; T \in \mathbb{R}^k \right\}.$$

Par définition un sous-espace affine  $\mathfrak{V}$  de  $\Gamma_f$  est appelé adapté à  $(f, \mathfrak{h})$ , si  $\mathfrak{V}$  est de la forme  $\mathfrak{V}^{R, \mathfrak{B}}$ . Nous prenons sur  $\mathfrak{V}^{R, \mathfrak{B}}$  la mesure de Lebesgue  $dT$  que nous noterons  $d\lambda = d\lambda^{R, \mathfrak{B}}$ .

Nous seront souvent amenés à faire des changements de base du type

$$l'_j = l_j + \sum_{k>j} c_{j,k} l_k, \quad j = 1, \dots, n.$$

Alors la base de Malcev  $\{b_1, \dots, b_r\}$  est changée en  $\{b'_1, \dots, b'_r\}$ , où

$$b'_j = b_j + \sum_{i>j} a_{i,j} b_i, \quad j = 1, \dots, r.$$

De même un élément  $\phi = \sum_{i=1}^r \phi_i f_i$  s'écrit dans la nouvelle base  $\mathfrak{B}'$  comme

$$\phi = \sum_{i=1}^r \phi_i (f'_i + \sum_{k>i} d_{k,i} f'_k), \quad d_{k,i} \in \mathbb{R}.$$

Nous trouvons donc une nouvelle famille de fonctions affines  $R'$ , telle que pour la nouvelle base  $\mathfrak{B}'$  les espaces  $\mathfrak{Y}^{R, \mathfrak{B}}$  et  $\mathfrak{Y}^{R', \mathfrak{B}'}$  coïncident de même que les mesures  $d\lambda^{R, \mathfrak{B}}$  et  $d\lambda^{R', \mathfrak{B}'}$ .

Remarquons que  $G \cdot \mathfrak{Y}^{R, \mathfrak{B}} \cap \Gamma_f$  contient un ouvert de Zariski de  $\Gamma_f$ . En particulier  $\mathfrak{Y}^{R, \mathfrak{B}}$  est en position générale dans  $\Gamma_f$ .

#### I-2.4 Notation

Dans toute la suite, on fixe une suite de Malcev relative à  $\mathfrak{h}$

$$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}_2 \subset \dots \subset \mathfrak{g}_{r-1} \subset \mathfrak{g}_r = \mathfrak{g}$$

et  $\mathfrak{B}$  une base de Malcev associée.

Prenons  $\mathfrak{Y}^{R, \mathfrak{B}}$  comme en (I-2.3). Soit  $\phi \rightarrow B(\phi)$ ,  $\phi \in \mathfrak{Y}^{R, \mathfrak{B}}$  un choix lisse de polarisations en  $\phi$ . On note  $(\int_{\mathfrak{Y}^{R, \mathfrak{B}}}^{\oplus} \mathcal{H}_{\pi_\phi} d\lambda^{R, \mathfrak{B}}(\phi))_C$  l'ensemble des applications

$$\psi : \mathfrak{Y}^{R, \mathfrak{B}} \rightarrow \bigcup_{\phi \in \mathfrak{Y}^{R, \mathfrak{B}}} L^2(G/B(\phi), \phi)$$

continues et qui vérifient

$$\|\psi\|_2^2 = \int_{\mathfrak{Y}^{R, \mathfrak{B}}} \|\psi(\phi)\|_{L^2(G/B(\phi), \phi)}^2 d\lambda(\phi) < \infty.$$

On définit  $\int_{\mathfrak{Y}^{R, \mathfrak{B}}}^{\oplus} \mathcal{H}_{\pi_\phi} d\lambda^{R, \mathfrak{B}}(\phi)$  comme étant le complété de  $(\int_{\mathfrak{Y}^{R, \mathfrak{B}}}^{\oplus} \mathcal{H}_{\pi_\phi} d\lambda^{R, \mathfrak{B}}(\phi))_C$  pour la norme  $\|\cdot\|_2$ .

#### I-2.5 Théorème

Soit  $G$  un groupe de Lie nilpotent connexe simplement connexe d'algèbre de  $\mathfrak{g}$ , soit  $f \in \mathfrak{g}^*$  et soit  $\mathfrak{h}$  une sous-algèbre de  $\mathfrak{g}$  subordonnée à  $f$ ,  $H = \exp \mathfrak{h}$  étant le sous groupe fermé connexe de  $G$  associé à  $\mathfrak{h}$ ,  $\tau$  la représentation monomiale induite à partir du caractère unitaire  $\chi_f$  de  $H$ . Soit  $\mathfrak{B}$  une base de Malcev de  $\mathfrak{g}$  relative à  $\mathfrak{h}$  et soit  $\mathfrak{Y}^{R, \mathfrak{B}} \subset \Gamma_f$  un des sous-espaces affines décrits en (I-2.3) et soit  $d\lambda = d\lambda^{R, \mathfrak{B}}$  sa mesure, alors la désintégration centrale canonique de  $\tau$  en irréductibles s'écrit :

$$\tau \simeq \int_{\mathfrak{Y}^{R, \mathfrak{B}}}^{\oplus} \pi_\phi d\lambda(\phi). \quad (7)$$



**Preuve**

On fait une récurrence sur la dimension de  $\mathfrak{g}$ . Ecrivons

$$\mathfrak{B} = \{b_1, \dots, b_r\}.$$

Le sous-espace  $\mathfrak{g}_0 = \text{vect}\{\mathfrak{h}, b_1, \dots, b_{r-1}\}$  est un idéal de codimension 1 de  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{B}_0 = \{b_1, \dots, b_{r-1}\}$  est une base de Malcev de  $\mathfrak{g}_0$  relative à  $\mathfrak{h}$ . On désigne par  $\mathfrak{Y}_0^{R_0, \mathfrak{B}_0}$  la partie de  $\Gamma_{f_0}$  obtenue par le même procédé comme plus haut relativement à la sous algèbre  $\mathfrak{g}_0$ . En fait  $\mathfrak{Y}^{R_0, \mathfrak{B}_0}$  est la restriction de  $\mathfrak{Y}^{R, \mathfrak{B}}$  à  $\mathfrak{g}_0$ .

On sait que  $\text{Ind}_H^G \chi_f = \text{Ind}_{G_0}^G \text{Ind}_H^{G_0} \chi_f$  et en utilisant l'hypothèse de récurrence sur  $G_0$  on obtient

$$\text{Ind}_H^G \chi_f \simeq \int_{\mathfrak{Y}^{R_0, \mathfrak{B}_0}}^{\oplus} \text{Ind}_{G_0}^G \pi_{\phi_0} d\lambda_0(\phi_0),$$

il nous faut donc étudier les trois cas suivants.

(1) Les  $H$ -orbites sont saturées par rapport à  $\mathfrak{g}_0$ , donc il en est de même pour les  $G$ -orbites et  $\text{Ind}_{G_0}^G \pi_{\phi_0}$  est irréductible pour presque tout  $\phi_0 \in \mathfrak{Y}^{R_0, \mathfrak{B}_0}$ . En plus on a que  $\mathfrak{Y}^{R, \mathfrak{B}} \simeq \mathfrak{Y}^{R_0, \mathfrak{B}_0}$  et la mesure  $d\lambda_0$  sur  $\mathfrak{Y}^{R_0, \mathfrak{B}_0}$  est la même sur  $\mathfrak{Y}^{R, \mathfrak{B}}$  d'où le résultat.

(2) Les  $H$ -orbites ne sont pas saturées par rapport à  $\mathfrak{g}_0$  mais les  $G$ -orbites le sont, dans ce cas  $r-1 \in K^H$  et par suite on a de nouveau

$$\mathfrak{Y}^{R, \mathfrak{B}} \simeq \mathfrak{Y}^{R_0, \mathfrak{B}_0}.$$

(3) Les  $G$ -orbites ne sont pas saturées par rapport à  $\mathfrak{g}_0$ , donc les  $H$ -orbites non plus. Soit  $X \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{g}_0$  (on peut supposer que  $X = b_r$ ). On a dans ce cas que

$$\mathfrak{Y}^{R, \mathfrak{B}} \simeq \{q + sX^*, s \in \mathbb{R}, q \in \mathfrak{Y}^{R_0, \mathfrak{B}_0}\},$$

donc la mesure  $d\lambda$  est exactement  $d\lambda_0 \otimes ds$ , où  $ds$  est la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$ , d'autre part on a que

$$\text{Ind}_{G_0}^G \pi_{\phi_0} \simeq \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \pi_{\phi_0 + \alpha X^*} d\alpha,$$

il en résulte que

$$\text{Ind}_H^G \chi_f \simeq \int_{\mathfrak{Y}^{R_0, \mathfrak{B}_0}}^{\oplus} \left( \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \pi_{\phi_0 + \alpha X^*} d\alpha \right) d\lambda_0(\phi_0) = \int_{\mathfrak{Y}^{R, \mathfrak{B}}}^{\oplus} \pi_{\phi} d\lambda(\phi)$$

ce qui achève la démonstration. ■

### I-3. Construction de l'opérateur d'entrelacement .

#### I-3.1 Construction de polarisations et de bases de Malcev

On reprend la base de Jordan-Hölder  $\mathfrak{C} = \{l_1, \dots, l_n\}$  de  $\mathfrak{g}$  et nous construisons une base de Malcev  $\{b_r, \dots, b_1\}$  de  $\mathfrak{g}$  relative à  $\mathfrak{h}$  comme en (I-2.3).

On va construire maintenant pour  $\phi \in f + \mathfrak{h}^\perp$  une polarisation  $B(\phi) = \exp(\mathfrak{b}(\phi))$ , une base de Malcev  $\{X_1(\phi), \dots, X_i(\phi)\}$  de  $\mathfrak{g}$  relative à  $\mathfrak{b}(\phi)$  et une base de Malcev  $\{Y_1(\phi), \dots, Y_m(\phi)\}$  de  $\mathfrak{b}(\phi)$  relative à  $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{b}(\phi)$  et  $\{U_1(\phi), \dots, U_p(\phi)\}$  de  $\mathfrak{h}$  relative à  $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{b}(\phi)$ . Les vecteurs  $X_j(\phi)$  vont nous définir la mesure  $G$ -invariante sur  $G/B(\phi)$ , donc la norme de l'espace de  $\pi_\phi$ , les  $Y_j(\phi)$  la mesure  $G$ -invariante sur  $B(\phi)/H \cap B(\phi)$ , donc l'opérateur d'entrelacement infinitésimal  $T_{B(\phi), H}$  et les vecteurs  $U_j(\phi)$  la mesure sur  $H/H \cap B(\phi)$ . Avec ces données nous pourrons écrire l'opérateur d'entrelacement cherché. Nous procéderons par récurrence sur  $\dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ .

On part d'une base de Jordan-Hölder  $(l_1, \dots, l_n)$  de  $\mathfrak{g}$  telle que  $l_n$  soit central. Notons  $\mathfrak{a}(\phi)$  le plus grand idéal de  $\mathfrak{g}$  contenu dans  $\mathfrak{g}(\phi)$ . Si  $\mathfrak{a}(\phi) \neq \mathfrak{g}$ , il existe  $j$  dans  $\{1, \dots, n\}$  tel que  $Y = l_j$  n'appartienne pas à  $\mathfrak{a}(\phi)$  et  $l_k$  appartient à  $\mathfrak{a}(\phi)$  pour tout  $k > j$ . Supposons d'abord que  $(l_n, \dots, l_{h-1})$  appartient à  $\mathfrak{h}$ , mais que  $l_h$  n'appartient pas à  $\mathfrak{h}$  pour un certain  $h > j$ . Nous prenons  $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{R}l_h$ . Alors  $\mathfrak{h}'$  est une sous-algèbre subordonnée à  $f$  et l'hypothèse de récurrence nous donne  $B(\phi)$ , les  $Y_i(\phi)$ , les  $U_i(\phi)$  et les  $X_i(\phi)$ . Nous ajoutons  $Y_m(\phi) = l_h$  à la base de Malcev de  $\mathfrak{b}(\phi)$  relative à  $\mathfrak{h}' \cap B(\phi)$ . Si tous les  $l_h, h = n, \dots, j-1$  sont dans  $\mathfrak{h}$ , alors  $\mathfrak{h} \oplus \mathbb{R}Y$  est une sous-algèbre de  $\mathfrak{g}$ . Et pour  $\phi \in f + \mathfrak{h}^\perp$ ,  $Y$  n'appartient pas à  $\mathfrak{a}(\phi)$ . Soit alors

$$r = \max\{r' : \langle \phi, [Y, l_{r'}] \rangle \neq 0\}.$$

On pose  $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_1(\phi) = \{u \in \mathfrak{g} \text{ tel que } \langle f, [Y, u] \rangle = 0\}$ .

$\mathfrak{g}_1(\phi)$  est un idéal de codimension 1 dans  $\mathfrak{g}$ . De plus les vecteurs

$$l_k^1 = l_k - \frac{\langle \phi, [Y, l_k] \rangle}{\langle \phi, [Y, l_r] \rangle} l_r, \text{ pour } k \in \{1, \dots, r-1\}$$

$$l_{k-1}^1 = l_k, \text{ pour } k \in \{r+1, \dots, n\}$$

forment une base de Jordan-Hölder de  $\mathfrak{g}_1(\phi)$  (cf.[32]).

Si  $\mathfrak{h}$  est contenu dans  $\mathfrak{g}_1(\phi)$  l'hypothèse de récurrence nous donne la polarisation  $\mathfrak{b}(\phi) = \mathfrak{b}(\phi_1)$ , où  $\phi_1 = \phi|_{\mathfrak{g}_1}$ , la base de Malcev  $\{X_i(\phi)\}$  de  $\mathfrak{g}_1(\phi)$  relative à  $\mathfrak{h}$  et la base de Malcev  $\{Y_i(\phi)\}$  de  $\mathfrak{b}(\phi)$  relative à  $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{b}(\phi)$  et les  $U_I(\phi)$ . Nous prenons le vecteur  $X_1 = l_r$  comme premier vecteur de la base de Malcev de  $\mathfrak{g}$  relative à  $\mathfrak{h}$ .

Si  $\mathfrak{h}$  n'est pas contenu dans  $\mathfrak{g}_1$ , alors  $Y \notin \mathfrak{h}$  et nous prenons  $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_1 \oplus \mathbb{R}Y$ . L'hypothèse de récurrence pour  $\mathfrak{h}'$  et  $\mathfrak{g}_1$  nous donne de nouveau  $\mathfrak{b}(\phi) = \mathfrak{b}(\phi|_{\mathfrak{g}_1})$  et les bases de Malcev  $Y_i(\phi), U_i(\phi), X_i(\phi)$ . Comme  $\mathfrak{b}(\phi)/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{b}(\phi)$  est isomorphe à  $(\mathfrak{b}(\phi)/\mathfrak{h}' \cap \mathfrak{b}(\phi)) \oplus \mathbb{R}Y$  il suffit d'ajouter le vecteur  $Y_m(\phi) = Y$  aux  $Y_i(\phi)$ . Pour compléter la base des  $X_i(\phi)$ , nous prenons un vecteur  $X = X_1(\phi)$  de  $\mathfrak{h} \setminus \mathfrak{g}_1$  tel que  $\phi[X, Y] = 1$ . De même ajoutons  $X = U_1(\phi)$  à la base de Malcev de  $\mathfrak{h}'$  relative à  $\mathfrak{h}' \cap \mathfrak{b}(\phi)$ .

Tous ces choix peuvent être faits de manière lisse en  $\phi$ .

On continue cette construction pour  $\mathfrak{g}_1(\phi)$  et  $\phi_1 = \phi|_{\mathfrak{g}_1(\phi)}$ . On obtient ainsi un processus qui nous permet de construire à partir d'une base de Jordan-Hölder de  $\mathfrak{g}_s(\phi)$  un idéal  $\mathfrak{g}_{s+1}(\phi)$  de codimension 1 dans  $\mathfrak{g}_s(\phi)$ , une base de Jordan-Hölder de  $\mathfrak{g}_{s+1}(\phi)$ . Ce processus s'arrête lorsqu'il existe  $d \in \mathbb{N}$  tel que

$$\mathfrak{a}(\phi_d) = \mathfrak{g}_d(\phi).$$

Il a été prouvé qu'alors  $\mathfrak{g}_d(\phi)$  est une polarisation en  $\phi$  (cf.[32]), et elle coïncide avec celle de Michèle Vergne décrite plus haut en (I-1.1) et donc dépend de manière lisse de  $\phi$ .

Dans toute la suite on note  $B(\phi, \mathfrak{h})$  le choix lisse de polarisation en  $\phi \in f + \mathfrak{h}^\perp$  qu'on vient de décrire.

### I-3.2 Théorème

Soit  $G$  un groupe de Lie nilpotent connexe simplement connexe d'algèbre de  $\mathfrak{g}$ , soit  $f \in \mathfrak{g}^*$  et soit  $\mathfrak{h}$  une sous-algèbre de  $\mathfrak{g}$  subordonnée à  $f$ ,  $H = \exp(\mathfrak{h})$  étant le sous groupe fermé connexe de  $G$  associé à  $\mathfrak{h}$ ,  $\tau$  la représentation monomiale induite à partir du caractère unitaire  $\chi_f$  de  $H$ . Soit  $\mathfrak{B}$  une base de Malcev de  $\mathfrak{g}$  relative à  $\mathfrak{h}$ , soit  $\mathfrak{Y}^{R, \mathfrak{B}} \subset \Gamma_f$  un des sous-espaces affines décrits en (I-2.3) et soit  $d\lambda = d\lambda^{R, \mathfrak{B}}$  sa mesure. Soit  $\phi \rightarrow B(\phi, \mathfrak{h})$  le choix lisse de polarisation en  $\phi \in \mathfrak{Y}^{R, \mathfrak{B}}$  décrit en (I-3.1). Alors on a que

$$\tau \simeq \int_{\mathfrak{Y}^{R, \mathfrak{B}}}^{\oplus} \pi_{\phi, B(\phi, \mathfrak{h})} d\lambda^{R, \mathfrak{B}}(\phi). \quad (8)$$

L'application

$$U : S(G/H, f) \rightarrow \int_{\mathfrak{Y}^{R, \mathfrak{B}}}^{\oplus} \mathcal{H}_{\pi_\phi} d\lambda^{R, \mathfrak{B}}(\phi) \quad (9)$$

définie pour tout  $\xi \in S(G/H, f)$  par :

$$U(\xi)(\phi) = T_{B(\phi, \mathfrak{h}), H} \xi$$

est un opérateur linéaire isométrique qui se prolonge par continuité en un opérateur d'entrelacement isométrique de (8), lorsque les mesures sur  $G/B(\phi, \mathfrak{h})$  et sur  $B(\phi, \mathfrak{h})/B(\phi, \mathfrak{h}) \cap H$  sont convenablement normalisées comme dans (I-3.1).

### Preuve

Il est clair que l'opérateur  $U$  du théorème entrelace formellement  $\tau$  et l'intégrale  $\int_{\mathfrak{Y}^{R, \mathfrak{B}}}^{\oplus} \pi_{\phi, B(\phi, \mathfrak{h})} d\lambda^{R, \mathfrak{B}}(\phi)$ . On raisonne par récurrence sur  $\dim(G) + \dim(G/H)$  et on va prouver que pour le choix lisse de polarisations en  $\phi$ ,  $\phi \in \mathfrak{Y}^{R, \mathfrak{B}}$ , décrit plus haut, on a que  $U$  est une isométrie.

On garde la base de Jordan-Hölder  $(l_1, \dots, l_n)$  de  $\mathfrak{g}$  telle que  $l_n$  soit central. On sait qu'il existe  $j$  dans  $\{1, \dots, n\}$  tel que  $l_j = Y$  n'appartienne pas à  $\mathfrak{a}(f)$  et  $l_k$  appartient à  $\mathfrak{a}(f)$  pour tout  $k > j$ , on pose alors

$$\mathfrak{g}_1 = \{u \in \mathfrak{g} \text{ tel que } \langle f, [Y, u] \rangle = 0\}.$$

Alors  $\mathfrak{g}_1$  est un idéal de codimension 1 dans  $\mathfrak{g}$ , et si  $Y \in \mathfrak{h}$  alors  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_1$ . On va étudier les cas possibles suivants.

Cas 1: Il existe  $h > j$ , tel que  $l_i \in \mathfrak{h}$  pour tout  $i > h$  et  $l_h \notin \mathfrak{h}$ . Soit  $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{R}l_h$ . Alors d'après la construction des  $b_j$ , on a que  $l_h = b_1$  et donc  $1 \in L^H$ . Ainsi nous avons que

$$\Gamma_f = \bigcup_{s \in \mathbb{R}} \Gamma_{f_s}$$

où  $f_s = f + sl_h^*$ , où  $\Gamma_{f_s} = f_s + \mathfrak{h}'^\perp = \{\phi \in \Gamma_f; \phi(l_h) = f(l_h) + s\}$ . Soit  $\mathfrak{B}' = \{b_2, \dots, b_r\}$  la base de Malcev de  $\mathfrak{g}$  relative à  $\mathfrak{h}'$  et soit pour tout  $i$

$${}_s R_i(t_2, \dots, t_m) = R_i(s, t_2, \dots, t_m) \text{ et } R_s = \{{}_s R_i, i\}.$$

Alors

$$\mathfrak{Y}^{R, \mathfrak{B}} = \bigcup_{s \in \mathbb{R}} \mathfrak{Y}^{R_s, \mathfrak{B}'}, \quad (10)$$

et  $d\lambda^{R, \mathfrak{B}} = \int_{\mathbb{R}} ds d\lambda^{R_s, \mathfrak{B}'}$ . L'hypothèse de récurrence nous dit maintenant que pour tout  $s \in \mathbb{R}$ ,

$$U_s : S(G/H', f_s) \longrightarrow \int_{\mathfrak{Y}^{R_s, \mathfrak{B}'}}^{\oplus} \mathcal{H}_{\pi_\phi} d\lambda^{R_s, \mathfrak{B}'}(\phi)$$

est une isométrie. Or pour  $\xi \in S(G/H, f)$ ,

$$\xi^s(u) = \int_{\mathbb{R}} \xi(u \exp(t l_h)) e^{-2i\pi t s} dt \quad (11)$$

définit un élément  $\xi^s$  de  $S(G/H', f_s)$  et

$$\|\xi\|^2 = \int_{\mathbb{R}} \|\xi^s\|^2 ds$$

d'après le théorème de Plancherel. Donc

$$\begin{aligned} \|\xi\|_{L^2(G/H)}^2 &= \int_{\mathbb{R}} \|\xi^s\|_{L^2(G/H')}^2 ds = \int_{\mathbb{R}} \|U_s(\xi^s)\|_2^2 ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathfrak{Y}^{R_s, \mathfrak{B}'}} \|T_{B(\phi, \mathfrak{h}'), H'} \xi^s\|_{L^2(G/B(\phi, \mathfrak{h}'), \phi)}^2 d\lambda^{R_s, \mathfrak{B}'}(\phi) ds \\ &= \int_{\mathfrak{Y}^{R, \mathfrak{B}}} \|T_{B(\phi, \mathfrak{h}), H} \xi\|_{L^2(G/B(\phi, \mathfrak{h}), \phi)}^2 d\lambda^{R, \mathfrak{B}}(\phi), \end{aligned}$$

puisque pour  $\phi \in \mathfrak{Y}^{R_s, \mathfrak{B}'}$  on a que

$$B(\phi, \mathfrak{h}) = B(\phi, \mathfrak{h}') \quad (12)$$

et

$$T_{B(\phi, \mathfrak{h}), H} \xi = T_{B(\phi, \mathfrak{h}'), H'} \xi^s. \quad (13)$$

Cas 2 :  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_1$  et  $l_n, \dots, l_{j+1} \in \mathfrak{h}$ .

On reprend la suite de Malcev relative à  $\mathfrak{h}$

$$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}_2 \subset \dots \subset \mathfrak{g}_r,$$

et la base de Malcev  $\mathfrak{B} = (b_1, \dots, b_r)$  de  $\mathfrak{g}$  relative à  $\mathfrak{h}$  avec laquelle on a défini  $\mathfrak{Y}^{R, \mathfrak{B}}$ .

Remarquons qu'il existe  $k \in \{1, \dots, r\}$  tel que  $b_{k+1} = X = l_m \notin \mathfrak{g}_1$ , dans les notations de (I-3.1). Par suite la base de Jordan-Hölder  $\{X, l_1^1, \dots, l_{n-1}^1\}$  de  $\mathfrak{g}$ , qui passe par  $\mathfrak{g}_1$ , nous définit la nouvelle base de Malcev  $\mathfrak{B}' = \{X, b_{r-1}^1, \dots, b_1^1\}$  de  $\mathfrak{g}$  relative à  $\mathfrak{h}$  et  $\mathfrak{B}_1 = \{b_{r-1}^1, \dots, b_1^1\}$  de  $\mathfrak{g}_1$  relative à  $\mathfrak{h}$ . Nous avons évidemment que  $b_j^1 = l_{k(j)}^1$  pour tout  $j$ , où  $k(j)$  dépend de  $j$ . Décrivons maintenant  $\mathfrak{Y}^{R, \mathfrak{B}}$  par la nouvelle base  $\mathfrak{B}'$ . Nous obtenons une nouvelle application affine  $R'$  telle que  $\mathfrak{Y}^{R, \mathfrak{B}} = \mathfrak{Y}^{R', \mathfrak{B}'}$  et pour tout  $T \in \mathbb{R}^n$ , il existe un  $T' \in \mathbb{R}^n$  qui dépend de façon affine de  $T$ , tel que

$$\sum_{i=1}^r R_i(T) f_i = \sum_{i=1}^{r-1} R_{1,i}(T') f_i^1 + R_{1,r}(T') X^* = R_1(T') + R_{1,r}(T') X^*.$$

Nous remarquons que l'orbite de  $f$  est saturée par rapport à  $\mathfrak{g}_1$  et de même la  $G_{k+1}$ -orbite de  $f' = f|_{\mathfrak{g}_{k+1}}$  est saturée par rapport à  $\mathfrak{g}_k$ . Donc  $r \in I^{H, \mathfrak{B}_1}$  et  $k+1 \in I^{H, \mathfrak{B}}$ . En outre l'espace  $\mathfrak{Y}^{R_1, \mathfrak{B}_1} \subset \mathfrak{g}_1^*$  est la restriction de  $\mathfrak{Y}^{R, \mathfrak{B}}$  à  $\mathfrak{g}_1$ .

Tout élément  $g$  de  $G$  s'écrit de manière unique sous la forme  $g = \exp(tX) \cdot g'$ , avec  $t \in \mathbb{R}$ , et  $g' \in G_1 = \exp \mathfrak{g}_1$ . Pour une fonction  $K$  sur  $G$ , on note  $K_t$  la fonction sur  $G_1$  définie par  $K_t(g') = K(\exp(tX)g')$  pour tout  $g' \in G_1$ .

En se référant à la construction du (I-3.1) du choix lisse de polarisation  $B(\phi, \mathfrak{h})$ , on remarque que

$$B(\phi, \mathfrak{h}) = B(\phi_1, \mathfrak{h}) \subset \mathfrak{g}_1 \quad (14)$$

où  $\phi_1 = \phi|_{\mathfrak{g}_1}$ , on a donc pour tout  $\eta \in S(G_1/H)$  via l'hypothèse de récurrence

$$\|\eta\|_{L^2(G_1/H)}^2 = \int_{\mathfrak{Y}^{R_1, \mathfrak{B}_1}} \|T_{B(\phi', \mathfrak{h}), H} \eta\|_{L^2(G_1/B(\phi', \mathfrak{h}), \phi')}^2 d\lambda^{R, \mathfrak{B}}(\phi).$$

Pour ce choix de polarisation on a pour tout  $\xi \in S(G/H, f)$  que

$$\begin{aligned} \|U(\xi)\|_2^2 &= \int_{\mathfrak{Y}^{R, \mathfrak{B}}} \|U(\xi)(\phi)\|_{L^2(G/B(\phi, \mathfrak{h}), \phi)}^2 d\lambda^{R, \mathfrak{B}}(\phi) \\ &= \int_{\mathfrak{Y}^{R, \mathfrak{B}}} \|T_{B(\phi, \mathfrak{h}), H} \xi\|_{L^2(G/B(\phi, \mathfrak{h}), \phi)}^2 d\lambda^{R, \mathfrak{B}}(\phi) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathfrak{Y}^{R_1, \mathfrak{B}_1}} \|T_{B(\phi_1, \mathfrak{h}), H} \xi_t\|_{L^2(G_1/B(\phi_1, \mathfrak{h}), \phi_1)}^2 d\lambda^{R_1, \mathfrak{B}_1}(\phi_1) dt \end{aligned}$$

(on applique l'hypothèse de récurrence sur  $G_1$ )

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}} \|\xi_t\|_{L^2(G_1/H)}^2 dt \\ &= \|\xi\|_{L^2(G/H)}^2. \end{aligned}$$

Cas 3:  $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{g}'$ .

Dans ce cas  $Y \notin \mathfrak{g}_1$ , on pose  $\mathfrak{h}' = (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}') \oplus \mathbb{R}Y$  et  $H' = \exp \mathfrak{h}'$ . On sait que les induites  $\text{Ind}_H^G \chi_f$  et  $\text{Ind}_{H'}^G \chi_f$  sont équivalentes. L'opérateur  $T_{H', H}$  qui entrelace ces deux induites est définie pour tout  $\xi \in S(G/H, f)$  et  $g \in G$  par

$$T_{H', H} \xi(g) = \int_{H'/H' \cap H} \xi(gh) d\dot{h} = \int_{\mathbb{R}} \xi(g \exp(tY)) dt. \quad (15)$$

Cet opérateur est  $|\alpha|$ -fois une isométrie, où  $\alpha = f([X_r, Y])$ , d'après le choix des mesures sur  $G/H \simeq G_1/H \cap G_1$  et  $G/H'$ . En outre on vérifie facilement que pour tout  $\phi \in \mathfrak{Y}^{R, \mathfrak{B}}$  et tout  $\xi \in S(G/H, l)$  on a que

$$T_{B(\phi, \mathfrak{h}), H'} \circ T_{H', H} \xi = T_{B(\phi, \mathfrak{h}), H} \xi \quad (16)$$

et ceci découle d'un calcul intégral direct.

Comme  $Y \notin \mathfrak{h}$ , nous avons que  $b_1 = Y$ . On a évidemment que  $1 \in I^H$ . En particulier, la première composante de  $R$ , la fonction  $R_1$ , est constante et  $\mathfrak{Y}^{R, \mathfrak{B}}$  est aussi adapté à  $(f, \mathfrak{h}')$ . En effet, on peut supposer que les vecteurs  $l_j$  de la base  $\mathfrak{C}$  sont tous dans  $\mathfrak{g}_1$  sauf le premier  $l_1$ . Et alors  $\mathfrak{C}$  définit la base de Malcev  $\mathfrak{B} = \{b_r, \dots, b_1 = Y\}$  de  $\mathfrak{g}$  relative à  $\mathfrak{h}$  et la base de Malcev  $\mathfrak{B}' = \{l_1, b_r, \dots, b_2\}$  de  $\mathfrak{g}$  relative à  $\mathfrak{h}'$ .

Toujours en se référant à la construction du (I-3.1) du choix lisse de polarisation  $B(\phi, \mathfrak{h})$ , on remarque que

$$B(\phi, \mathfrak{h}) = B(\phi_1, \mathfrak{h}') \quad (17)$$

où  $\phi_1 = \phi/\mathfrak{g}_1$ . Nous obtenons donc que

$$\begin{aligned} \|U(\xi)\|_2^2 &= \int_{\mathfrak{Y}^{R, \mathfrak{B}}} \|U(\xi)(\phi)\|_{L^2(G/B(\phi, \mathfrak{h}), \phi)}^2 d\lambda^{R, \mathfrak{B}}(\phi) \\ &= \int_{\mathfrak{Y}^{R, \mathfrak{B}}} \|T_{B(\phi, \mathfrak{h}), H} \xi\|_{L^2(G/B(\phi, \mathfrak{h}), \phi)}^2 d\lambda^{R, \mathfrak{B}}(\phi) \\ &= \int_{\mathfrak{Y}^{R, \mathfrak{B}}} |\alpha| \cdot \|T_{B(\phi, \mathfrak{h}'), H'} \circ T_{H', H} \xi\|_{L^2(G/B(\phi, \mathfrak{h}'), \phi)}^2 d\lambda^{R, \mathfrak{B}}(\phi) \end{aligned}$$

(on applique le cas 2)

$$\begin{aligned} &= |\alpha| \cdot \|T_{H', H} \xi\|_{L^2(G/H', f)}^2 \\ &= \|\xi\|_{L^2(G/H, f)}^2. \end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve du théorème. ■

Nous verrons plus tard par un exemple qu'on ne peut pas prendre n'importe quel choix lisse de polarisations pour obtenir un opérateur d'entrelacement.

#### I-4 L'opérateur inverse

Ce paragraphe consiste à démontrer que l'opérateur  $U$  est inversible et à décrire explicitement son inverse. Pour cela considérons pour  $\phi \in \mathfrak{Y}^{R, \mathfrak{B}}$  l'opérateur  $T_{H, B(\phi, \mathfrak{h})}$  défini sur les éléments

$$K \in \left( \int_{\mathfrak{Y}^{R, \mathfrak{B}}}^{\oplus} \mathcal{H}_{\pi_\phi}^\infty d\lambda^{R, \mathfrak{B}}(\phi) \right)_C$$

à support compact pour tout  $g \in G$  par

$$T_{H, B(\phi, \mathfrak{h})} K(g) = \int_{H/B(\phi, \mathfrak{h}) \cap H} K(\phi)(gb) \chi_{\phi}(b) d_{H, H \cap B(\phi, \mathfrak{h})}(b) \quad (18)$$

où  $\phi \longrightarrow B(\phi, \mathfrak{h})$  désigne le choix lisse de polarisations en  $\phi \in \mathfrak{A}^{R, \mathfrak{B}}$  décrit en (I-3.1), et  $d_{H, B(\phi, \mathfrak{h}) \cap H}$  est la mesure sur  $H/B(\phi, \mathfrak{h}) \cap H$  décrite en (I-3.1).

Nous démontrons d'abord que l'image de  $U$  est dense.

#### **I-4.1 Proposition**

*Soit*

$$\phi \longrightarrow B(\phi, \mathfrak{h}), \quad \phi \in \mathfrak{A},$$

le choix lisse de polarisations en  $\phi$  décrit en (I-3.1), alors l'image de l'opérateur  $U$ , qu'on note  $im(U) = U(S(G/H, f))$  est dense dans  $\int_{\mathfrak{A}^{R, \mathfrak{B}}}^{\oplus} L^2(G/B(\phi, \mathfrak{h}), \phi) d\lambda^{R, \mathfrak{B}}(\phi)$ .

#### **Preuve**

Dans toute la démonstration on garde les mêmes notations que dans le Théorème (I-3.2) et sa preuve et on utilise encore une récurrence sur  $\dim(\mathfrak{g}) + \dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ .

Cas 1 :  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_1$  et il existe  $k > j$ , tel que  $Z = l_k \notin \mathfrak{h}$ , mais  $l_{k'} \in \mathfrak{h}$  pour tout  $k' > k$ .

On regarde toujours  $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{R}Z$  et on note  $H' = \exp(\mathfrak{h}')$ ,  $f_s = f + sZ^*$ , on a bien que comme dans (10)

$$\mathfrak{A}^{R, \mathfrak{B}} = \bigcup_{s \in \mathbb{R}} \mathfrak{A}^{R_s, \mathfrak{B}'}$$

On rappelle que pour  $g \in G$  et  $\xi \in S(G/H, f)$ , on a que:

$$\begin{aligned} U(\xi)(\phi + sY^*)(g) &= \int_{B(\phi_s, \mathfrak{h}')/H \cap B(\phi_s, \mathfrak{h}')} \xi(g \cdot b) \chi_{\phi + sZ^*}(b) db \\ &= \int_{B(\phi_s, \mathfrak{h}')/H' \cap B(\phi_s, \mathfrak{h}')} \int_{\mathbb{R}} \xi(g \cdot \exp(tZ) b_s) \chi_{\phi}(b_s) e^{-its} db_s dt \\ &= \int_{B(\phi_s, \mathfrak{h}')/H' \cap B(\phi_s, \mathfrak{h}')} \xi^s(g \cdot b_s) \chi_{\phi}(b_s) db_s, \end{aligned}$$

où  $\xi^s$  est la fonction sur  $G$  définie pour tout  $g \in G$  par

$$\xi^s(g) = \int_{\mathbb{R}} \xi(g \cdot \exp(tZ)) e^{-its} dt$$



donc finalement  $U(\xi)(\phi_s) = U_s(\xi^s)(\phi_s)$  où  $U_s$  est l'opérateur  $T_{B(\phi_s, \mathfrak{h}'), H'}$ , en plus il est facile à vérifier que les fonctions  $\xi^s$  possèdent la covariance suivant  $f_s$ .

Soit maintenant  $K \in \text{im}(U)^\perp$ , alors

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathfrak{Y}^{R_s, \mathfrak{B}'}} \langle K(\phi_s), U_s(\xi^s)(\phi_s) \rangle_{L^2(G/B(\phi_s, \mathfrak{h}'))} d\lambda^{R_s, \mathfrak{B}'}(\phi) ds = 0.$$

Soit  $\gamma$  dans l'espace de Schwartz  $S(\exp(\mathbb{R}Z))$ , alors il est facile à vérifier que

$$\left( \underset{H}{\text{Ind}}(\chi_f)(\gamma)\xi \right)^s = (\gamma \star \xi)^s = \hat{\gamma}(s)\xi^s$$

où  $\star$  désigne le produit de convolution et  $\hat{\gamma}(s)$  la transformée de Fourier de la fonction  $\gamma$  calculée au point  $s$ . Il s'ensuit que

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{\gamma}(s) \int_{\mathfrak{Y}^{R_s, \mathfrak{B}'}} \langle K(\phi, s), U_s(\xi^s)(\phi_s) \rangle_{L^2(G/B(\phi_s, \mathfrak{h}'))} d\lambda^{R_s, \mathfrak{B}'}(\phi) ds = 0$$

pour tout  $\gamma \in S(\exp(\mathbb{R}Z))$ , et donc pour tout  $s \in \mathbb{R}$

$$\int_{\mathfrak{Y}^{R_s, \mathfrak{B}'}} \langle K(\phi, s), U_s(\xi^s)(\phi_s) \rangle_{L^2(G/B(\phi_s, \mathfrak{h}'))} d\lambda^{R_s, \mathfrak{B}'}(\phi) = 0.$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence, on peut en déduire que  $\phi_s \rightarrow K(\phi_s)$  est nulle pour presque tout  $s \in \mathbb{R}$  et donc que  $K = 0$ .

Cas 2 :  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_1$  et  $l_n, \dots, l_{j+1} \in \mathfrak{h}$ .

Rappelons que

$$\mathfrak{Y}^{R, \mathfrak{B}}|_{\mathfrak{g}_1} = \mathfrak{Y}^{R_1, \mathfrak{B}_1}$$

Soit maintenant  $K \in \text{im}(U)^\perp$ , alors

$$\int_{\mathfrak{Y}^{R, \mathfrak{B}}} \langle K(\phi), U(\xi)(\phi) \rangle_{L^2(G/B(\phi, \mathfrak{h}), \phi)} d\lambda(\phi) = 0$$

donc

$$\int_{\mathfrak{Y}^{R, \mathfrak{B}}} \int_{G/B(\phi, \mathfrak{h})} \overline{K(\phi)(g)} U(\xi)(\phi)(g) dg d\lambda(\phi) = 0$$

ainsi

$$\int_{\mathfrak{Y}^{R, \mathfrak{B}}} \int_{\mathbb{R}} \int_{G_1/B(\phi, \mathfrak{h})} K(\phi)(\exp tXg_0) \overline{U(\xi)(\phi)(\exp tXg_0)} dg_0 dt d\lambda(\phi) = 0$$

et par conséquent

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathfrak{A}^{R, \mathfrak{B}}} \int_{G_1/B(\phi, \mathfrak{h})} K(\phi)_t(g_0) \overline{U(\xi)(\phi)_t(g_0)} dg_0 dt d\lambda(\phi) = 0.$$

Soit  $\alpha$  une fonction de  $S(\exp(\mathbb{R}X))$ , on remplace dans l'intégrale ci-dessus  $\xi$  par  $\alpha\xi$ , on a bien  $(\alpha\xi)_t = \alpha(t)\xi_t$ , il s'ensuit que

$$\int_{\mathbb{R}} \alpha(t) \int_{\mathfrak{A}^{R, \mathfrak{B}}} \int_{G_1/B(\phi', \mathfrak{h})} K(\phi)_t(g_0) \overline{U(\xi)(\phi)_t(g_0)} dg_0 dt d\lambda(\phi) = 0.$$

pour tout  $\alpha$  dans  $S(\exp(\mathbb{R}X))$  ainsi

$$\int_{\mathfrak{A}^{R, \mathfrak{B}}} \int_{G_1/B(\phi', \mathfrak{h})} K(\phi)_t(g_0) \overline{U(\xi)(\phi)_t(g_0)} dg_0 d\lambda(\phi) = 0,$$

et en faisant appel à l'hypothèse de récurrence on a  $K(\phi)_t = 0$  pour presque tout  $t \in \mathbb{R}$ , d'où le résultat.

Cas 3:  $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{g}'$ .

Comme dans le cas 3 du théorème (I-3.2) on pose  $\mathfrak{h}' = (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}') \oplus \mathbb{R}Y$  et  $H' = \exp \mathfrak{h}'$ . Les induites  $\text{Ind}_H^G \chi_f$  et  $\text{Ind}_{H'}^G \chi_f$  sont équivalentes. L'opérateur qui entrelace ces deux induites est  $T_{H, H'}$  (15), et on a comme dans (16) que

$$U \circ T_{H, H'} = U'$$

où  $U'$  est l'opérateur d'entrelacement pour  $\tau' = \text{Ind}_{H'}^G \chi_f$ , qui est une isométrie avec image dense d'après le cas précédent. Donc  $U$  a aussi une image dense. ■

#### **I-4.2 Théorème**

On garde les mêmes hypothèses et les notations que dans le théorème (I-3.2). Alors l'opérateur d'entrelacement  $U$  décrit dans ce théorème est inversible. Son inverse  $U^{-1}$  est donné pour tout  $K \in (\int_{\mathfrak{A}^{R, \mathfrak{B}}}^{\oplus} \mathcal{H}_{\pi_\phi}^\infty d\lambda^{R, \mathfrak{B}}(\phi))_C$  à support compact et  $g \in G$  par:

$$U^{-1}(K)(g) = \int_{\mathfrak{A}^{R, \mathfrak{B}}} T_{H, B(\phi, \mathfrak{h})} K(\phi)(g) d\lambda^{R, \mathfrak{B}}(\phi). \quad (19)$$

$U^{-1}$  est alors un nouvel opérateur d'entrelacement isométrique de (8) lorsque la mesure sur  $H/B(\phi, \mathfrak{h}) \cap H$  est correctement normalisée comme dans (I-3.1).

**Preuve**

Une fois qu'on a prouvé que  $U$  est une isométrie (théorème **(I-3.2)**) et vu que son image est dense d'après la proposition **(I-4.1)** qu'on vient de démontrer, on peut déduire qu'il est inversible. Cherchons son inverse, pour cela considérons pour  $K \in (\int_{\mathfrak{Y}^{R, \mathfrak{B}}}^{\oplus} L^2(G/B(\phi), \phi) d\lambda^{R, \mathfrak{B}}(\phi))_C$  à support compact et  $g \in G$

$$V(K)(g) = \int_{\mathfrak{Y}^{R, \mathfrak{B}}} T_{H, B(\phi, \mathfrak{h})} K(\phi)(g) d\lambda^{R, \mathfrak{B}}(\phi).$$

Il est clair que  $V \circ \int_{\mathfrak{Y}^{R, \mathfrak{B}}}^{\oplus} \pi_{\phi} d\lambda^{R, \mathfrak{B}}(\phi) = \text{Ind}_H^G(\chi_f) \circ V$  et que  $V(K)$  possède la covariance suivant  $f$ , on va prouver que pour  $K \in (\int_{\mathfrak{Y}^{R, \mathfrak{B}}}^{\oplus} L^2(G/B(\phi), \phi) d\lambda^{R, \mathfrak{B}}(\phi))_C$  à support compact,  $V(K)$  est un élément de  $L^2(G/H)$ .

On raisonne comme avant par récurrence sur  $\dim(G) + \dim(G/H)$  et on garde toutes les notations du théorème **(I-3.2)**. Pour cela montrons que

$$\|V(K)\|_{L^2(G/H)}^2 = \int_{\mathfrak{Y}^{R, \mathfrak{B}}} \|K(\phi)\|_{L^2(G/B(\phi, \mathfrak{h}))}^2 d\lambda^{R, \mathfrak{B}}(\phi).$$

Cas 1 :  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_1$  et il existe  $k > j$ , tel que  $T = l_k \notin \mathfrak{h}$  mais tel que  $l_{k'} \in \mathfrak{h}$  pour tout  $k' > k$ .

On regarde  $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{R} T$ , on note  $H' = \exp(\mathfrak{h}')$  et pour tout  $s \in \mathbb{R}$ ,  $f_s = f + sT^*$ , on a bien comme dans (10) que

$$\mathfrak{Y}^{R, \mathfrak{B}} = \bigcup_{s \in \mathbb{R}} \mathfrak{Y}^{R_s, \mathfrak{B}'}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \|V(K)\|_{L^2(G/H)}^2 &= \int_{\mathbb{R}} \int_{G/H'} |V(K)(g_0 \cdot \exp(sT))|^2 d\dot{g}_0 ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{G/H'} \left| \int_{\mathfrak{Y}^{R, \mathfrak{B}}} T_{H, B(\phi, \mathfrak{h})} K(\phi)(g_0 \cdot \exp(sT)) d\lambda^{R, \mathfrak{B}}(\phi) \right|^2 d\dot{g}_0 ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{G/H'} \left| \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathfrak{Y}^{R_t, \mathfrak{B}'}} T_{H', B(\phi_t)} K(\phi_t)(g_0) e^{-its} d\lambda^{R_t, \mathfrak{B}'}(\phi_t) dt \right|^2 d\dot{g}_0 ds \end{aligned}$$

(on utilise la formule de Plancherel)

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{G/H'} \left| \int_{\mathfrak{Y}^{R_s, \mathfrak{B}'}} T_{H', B(\phi_s, \mathfrak{h}')} K(\phi_s)(g_0) d\lambda^{R_s, \mathfrak{B}'}(\phi_s) \right|^2 d\dot{g}_0 ds$$

(on applique l'hypothèse de récurrence)

$$= \int_{\mathfrak{Y}^{R, \mathfrak{B}}} \|K(\phi)\|_{L^2(G/B(\phi, \mathfrak{h}))}^2 d\lambda^{R, \mathfrak{B}}(\phi).$$

Cas 2:  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_1$ .

On a alors que

$$\|V(K)\|_{L^2(G/H)}^2 = \int_{\mathbb{R}} \|V(K)_t\|_{L^2(G_1/H)}^2 dt$$

on applique l'hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathfrak{Y}^{R_1, \mathfrak{B}_1}} \|K(\phi)_t\|_{L^2(G_1/B(\phi, \mathfrak{h}))}^2 d\lambda^{R_1, \mathfrak{B}_1}(\phi) dt. \\ &= \int_{\mathfrak{Y}^{R, \mathfrak{B}}} \|K(\phi)\|_{L^2(G/B(\phi, \mathfrak{h}))}^2 d\lambda^{R, \mathfrak{B}}(\phi). \end{aligned}$$

Cas 3 :  $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{g}'$ .

Dans ce cas  $Y \notin \mathfrak{g}_1$ , on pose  $\mathfrak{h}' = (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}') \oplus \mathbb{R}Y$  et  $H' = \exp \mathfrak{h}'$ . On sait que les induites  $\text{Ind}_H^G \chi_f$  et  $\text{Ind}_{H'}^G \chi_f$  sont équivalentes. Alors, on a comme dans (16) que

$$T_{H, H'} \circ T_{H', B(\phi, \mathfrak{h}')} = T_{H, B(\phi, \mathfrak{h})}, \quad \phi \in \mathfrak{Y}^{R, \mathfrak{B}},$$

d'où  $V = T_{H, H'} \circ V'$ , où  $V'$  désigne l'opérateur du cas précédent, donc on voit tout de suite que  $V$  est isométrique. Ce qui achève la preuve.

En réalité, on a prouvé finalement que  $V$  est un opérateur d'entrelacement isométrique, il nous reste finalement à prouver que  $U \circ V = Id$ . On raisonne encore par récurrence sur  $\dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) + \dim(\mathfrak{g})$ .

Cas 1:  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_1$  et  $S = l_k \notin \mathfrak{h}$ ,  $l'_k \in \mathfrak{h}$  pour tout  $k' > k$ .

On regarde  $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{R}S$  et on note  $H' = \exp \mathfrak{h}'$ ,  $f_s = f + sS^*$ , etc.

Soit  $g \in G$ , on a que:

$$\begin{aligned}
U \circ V(K)(\phi_1 + sS^*)(g) &= T_{B(\phi_1 + sS^*, \mathfrak{h}), H} V(K)(g) \\
&= \int_{B(\phi_1 + sS^*, \mathfrak{h})/H \cap B(\phi_1 + sS^*, \mathfrak{h})} \left( \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathfrak{R}_{r, \mathfrak{B}'}} T_{H, B(\phi + sS^*, \mathfrak{h}')} \right. \\
&\quad \left. K(\theta_1 + rS^*)(gb) d\lambda^{R_r, \mathfrak{B}'}(\theta_1) dr \right) \chi_{\phi_1 + sS^*}(b) db
\end{aligned}$$

d'après ce qui précède et vu que  $H/H \cap B(\phi_1 + sS^*, \mathfrak{h}') \simeq H'/H' \cap B(\phi + sS^*, \mathfrak{h}')$ , on obtient que

$$\begin{aligned}
U \circ V(K)(\phi_1 + sS^*)(g) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{B(\phi_1 + sS^*, \mathfrak{h})/H' \cap B(\phi_1 + sS^*, \mathfrak{h})} \left( \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathfrak{R}_{r, \mathfrak{B}'}} T_{H', B(\theta + rS^*, \mathfrak{h}')} \right. \\
&\quad \left. K(\theta + rS^*)(gb \cdot \exp(tS)) d\lambda^{R_r, \mathfrak{B}'}(\theta) ds \right) \chi_{\phi_1}(b) db e^{its} dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{B(\phi_1 + sS^*, \mathfrak{h})/H' \cap B(\phi_1 + sS^*, \mathfrak{h})} \left( \int_{\mathfrak{R}_{r, \mathfrak{B}'}} T_{H', B(\theta_1 + rS^*, \mathfrak{h}')} \right. \\
&\quad \left. K(\theta + rS^*)(gb) e^{its} e^{-itr} d\lambda^{R_1, \mathfrak{B}_1}(\theta_1) \right) \chi_{\phi_1}(b) db dt dr
\end{aligned}$$

(on fait appel à l'hypothèse de récurrence)

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^2} K(\phi_1 + rS^*)(g) e^{its} e^{-itr} dt dr \\
&= K(\phi_1 + sS^*)(g) \text{ d'après la formule d'inversion de Fourier.}
\end{aligned}$$

Cas 2 :  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_1$ .

Soit  $X \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{g}_1$ .

Soit  $\phi \in \mathfrak{R}^{R, \mathfrak{B}}$  et  $g = \exp(tX) \cdot g_1 \in G$ , on a que:

$$\begin{aligned}
U \circ V(K)(\phi)(g) &= \int_{B(\phi, \mathfrak{h})/H \cap B(\phi, \mathfrak{h})} \left( \int_{\mathfrak{R}^{R, \mathfrak{B}}} T_{H, B(\theta, \mathfrak{h})} K(\theta)(gb) d\lambda^{R, \mathfrak{B}}(\theta) \right) \chi_{\phi}(b) db \\
&= \int_{B(\phi)/H \cap B(\phi)} \left( \int_{\mathfrak{R}^{R_1, \mathfrak{B}_1}} T_{H, B(\phi, \mathfrak{h})} K_t(\phi)(g_1 b) d\lambda^{R_1, \mathfrak{B}_1}(\phi) \right) \chi_{\phi}(b) db
\end{aligned}$$

(on applique la récurrence)

$$= K_t(\phi)(g_0) = K(\phi)(\exp(tX)g_0) = K(\phi)(g).$$

Cas 3:  $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{g}'$ .

On rappelle que  $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}' \oplus \mathbb{R}Y$ , les induites  $\text{Ind}_H^G(\chi_f)$  et  $\text{Ind}_{H'}^G(\chi_f)$  sont équivalentes. Soit  $T_{H, H'}$  l'opérateur (15) qui les entrelace; on sait encore d'après (16) que

$$T_{H, H'} \circ T_{H', B(\phi, \mathfrak{h})} = T_{H, B(\phi, \mathfrak{h})},$$

d'où  $V = T_{H,H'} \circ V'$ . D'autre part  $U' = U \circ T_{H,H'}$ . Alors  $U \circ V = U' \circ T_{H',H} \circ T_{H,H'} \circ V' = Id$ , selon le choix de nos normalisations.

Ceci achève la démonstration du théorème (I-4.2). ■

Une fois qu'on a construit un opérateur d'entrelacement, on va donner une nouvelle caractérisation des espaces  $\mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}}$  et ceci fait l'objet de

### **I-4.3 Proposition.**

Soit  $G$  un groupe de Lie nilpotent connexe simplement connexe d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{h} \in S(f, \mathfrak{g})$  et  $H$  le sous groupe de Lie connexe fermé de  $G$  correspondant. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes:

- i) presque toutes les représentations unitaires et irréductibles qui apparaissent dans la désintégration de  $\tau = \underset{H}{\text{Ind}}^G \chi_f$  sont de multiplicités finies.
- ii)  $K^H = \emptyset$  et l'espace  $\Gamma_f/H$  des  $H$ -orbites dans  $\Gamma_f$  est isomorphe aux espaces  $\mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}}$ .

### **Preuve**

i)  $\implies$  ii)

On considère une suite de Malcev relative à  $\mathfrak{h}$

$$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}_2 \subset \dots \subset \mathfrak{g}_r = \mathfrak{g}.$$

On va prouver l'assertion suivante: supposons que presque toutes les représentations unitaires et irréductibles qui apparaissent dans la désintégration de  $\tau = \underset{H}{\text{Ind}}^G \chi_f$  sont de multiplicités finies. Si pour un certain  $i \in \{1, \dots, r\}$  les  $G_i$ -orbites sont saturées par rapport à  $\mathfrak{g}_{i-1}$  dans  $\mathfrak{g}_i^*$ , alors il est de même pour les  $H$ -orbites.

Supposons donc qu'il existe  $i \in \{1, \dots, r\}$  tel que les  $G_i$ -orbites en position générale soient saturées par rapport à  $\mathfrak{g}_{i-1}$  dans  $\mathfrak{g}_i^*$ , alors que les  $H$ -orbites ne le soient pas. Soit  $\phi \in \Gamma_f$  et prenons  $b_i \in \mathfrak{g}_i^* \setminus \mathfrak{g}_{i-1}^*$ . On a donc d'une part

$$(\phi + \mathbb{R}b_i^*) \cap H\phi = \{\phi\}$$

à cause du fait que les  $H$ -orbites ne sont pas saturées par rapport à  $\mathfrak{g}_{i-1}$  dans  $\mathfrak{g}_i^*$ , et d'autre part, vue la saturation des  $G_i$ -orbites en position générale par rapport à  $\mathfrak{g}_{i-1}$  dans  $\mathfrak{g}_i^*$ , on a que

$$\phi + \mathbb{R}b_i^* \subset \Gamma_f \cap G\phi$$

Il s'ensuit que pour tout  $s \neq t \in \mathbb{R}$ ,  $H(\phi + sb_i^*)$  et  $H(\phi + tb_i^*)$  sont deux  $H$ -orbites disjointes contenues dans  $\Gamma_f \cap G\phi$ , ce qui contredit le fait que les multiplicités sont presque partout finies.

ii)  $\implies$  i)

On raisonne par récurrence sur la dimension de  $G/H$ , pour cela reprenons la suite de Malcev relative à  $\mathfrak{h}$

$$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}_2 \subset \dots \subset \mathfrak{g}_r = \mathfrak{g}.$$

Posons  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_{r-1}$  qui est un idéal de codimension 1 dans  $\mathfrak{g}$  contenant  $\mathfrak{h}$ , et  $G_0 = \exp(\mathfrak{g}_0)$ .

Cas 1:

supposons que les  $G$ -orbites ne sont pas saturées par rapport à  $\mathfrak{g}_0$  dans  $\mathfrak{g}^*$ , il en est alors de même pour les  $H$ -orbites, donc en particulier on a que  $K^H = K_0^H = \emptyset$  où  $K_0^H$  est le même ensemble défini dans  $\mathfrak{g}_0$  et avec la suite de Malcev relative à  $\mathfrak{h}$

$$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}_2 \subset \dots \subset \mathfrak{g}_{r-1} = \mathfrak{g}_0.$$

Soit par ailleurs  $X \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{g}_0$ , alors on a que

$$\mathfrak{Y}^{R, \mathfrak{B}} \simeq \{q + sX^*, s \in \mathbb{R}, q \in \mathfrak{Y}^{R_0, \mathfrak{B}_0}\},$$

où  $\mathfrak{B}_0$  est la base de Malcev de  $\mathfrak{g}_0$  relative à  $\mathfrak{h}$  et  $R_0$  la famille de fonctions définies comme dans le théorème (I-2.5).

D'autre part, la mesure  $d\lambda$  sur  $\mathfrak{Y}^{R, \mathfrak{B}}$  est exactement  $d\lambda_0 \otimes ds$ , où  $ds$  est la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$  et  $d\lambda_0$  est la mesure sur  $\mathfrak{Y}^{R_0, \mathfrak{B}_0}$ , on a alors que

$$\text{Ind}_{G_0}^G \pi_{\phi_0} \simeq \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \pi_{\phi_0 + \alpha X^*} d\alpha,$$

il en résulte que

$$\text{Ind}_H^G \chi_f \simeq \text{Ind}_{G_0}^G \text{Ind}_H^{G_0} \chi_f \simeq \int_{\mathfrak{Y}^{R_0, \mathfrak{B}_0}}^{\oplus} \left( \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \pi_{\phi_0 + \alpha X^*} d\alpha \right) d\lambda_0(\phi_0) = \int_{\mathfrak{Y}^{R, \mathfrak{B}}}^{\oplus} \pi_{\phi} d\lambda(\phi)$$

L'hypothèse de récurrence nous informe que les multiplicités des représentations qui apparaissent dans la désintégration de  $\text{Ind}_H^{G_0} \chi_f$  sont finies, et puisque les multiplicités dans ce cas n'augmentent pas, on aura certainement que  $\text{Ind}_H^G \chi_f$  est de multiplicités finies.

Cas 2:

supposons que les  $G$ -orbites sont saturées par rapport à  $\mathfrak{g}_0$  dans  $\mathfrak{g}^*$ , il en est alors de même pour les  $H$ -orbites car  $K^H = \emptyset$ ,  $\text{Ind}_{G_0}^G \pi_{\phi_0}$  est irréductible pour presque tout  $\phi_0 \in \mathfrak{Y}^{R_0, \mathfrak{B}_0}$ . En plus on a que  $\mathfrak{Y}^{R, \mathfrak{B}} \simeq \mathfrak{Y}^{R_0, \mathfrak{B}_0}$  et la mesure  $d\lambda_0$  sur  $\mathfrak{Y}^{R_0, \mathfrak{B}_0}$  est la même sur  $\mathfrak{Y}^{R, \mathfrak{B}}$ , il est clair dans ce cas qu'on peut appliquer l'hypothèse de récurrence sur  $G_0$  qui nous donne en fait que  $\text{Ind}_H^{G_0} \chi_f$  est de multiplicités finies, et par suite d'après [11] et [28] on a que

$$\dim G_0 \phi_0 = 2 \dim H \phi_0.$$

D'autre part et vu la saturation des  $H$ -orbites on a pour tout  $\phi \in \mathfrak{g}^*$  tel que  $\phi/\mathfrak{g}_0 = \phi_0$  que

$$\dim H \phi = 1 + \dim H \phi_0,$$

et par conséquent on a que

$$\begin{aligned} \dim G \phi &= 2 + \dim G_0 \phi_0 \\ &= 2 + 2 \dim H \phi_0 \\ &= 2 (1 + \dim H \phi_0) \\ &= 2 \dim H \phi. \end{aligned}$$

Il en résulte que les multiplicités de  $\text{Ind}_H^G \chi_f$  sont finies, ce qui achève la preuve. ■

**I-5 Opérateurs différentiels sur les espaces homogènes nilpotents.**

Notre objet maintenant est d'étudier une certaine algèbre d'opérateurs différentiels:  
soit

$$C^\infty(G, \tau) = \{\xi \in C^\infty(G) : \xi(gh) = \chi(h^{-1})\xi(g), g \in G, h \in H\}$$

et  $\text{Diff}(G)$  l'algèbre des opérateurs différentiels qui sont  $C^\infty$  et qui laisse  $C^\infty(G, \tau)$  invariant. On pose  $\mathfrak{D}_\tau(G/H)$  l'ensemble des restrictions  $D|_{C^\infty(G, \tau)}$  de  $D \in \text{Diff}(G)$  commutant avec les translations à gauche de  $G$  sur  $C^\infty(G, \tau)$ .

Notons que Corwin et Greenleaf ont prouvé que l'algèbre  $\mathfrak{D}_\tau(G/H)$  est abélienne lorsque presque toutes les multiplicités sont finies (cf. [10]). En examinant de près cette démonstration et bien des exemples ils posent la conjecture suivante

*Si  $m(\pi) < \infty$  presque partout, alors l'algèbre  $\mathfrak{D}_\tau(G/H)$  est isomorphe à l'algèbre des fonctions polynomiales  $H$ -invariantes sur  $f + \mathfrak{h}^\perp$ .* (20)



Et puis plus récemment ils ont des résultats positifs sous une hypothèse assez gênante.

Supposons:

(i)  $m_\pi < \infty$  pour  $\pi$  générique dans Support  $(\tau)$ .

(ii)  $\mathfrak{g}$  contient une sous-algèbre  $\mathfrak{h}$  qui polarise tous les éléments génériques de  $\Gamma_f = f + \mathfrak{h}^\perp$  et qui est normalisée par  $\mathfrak{h}$ .

Sous ces conditions, ils démontrent leur conjecture (cf. [12]).

Ensuite, suivant [10], [12] (voir aussi [15]), décrivons l'algèbre  $\mathcal{D}_\tau(G/H)$  en termes de l'algèbre enveloppantes  $u(\mathfrak{g})$  de  $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ . Pour  $g \in G$  ou  $A \in u(\mathfrak{g})$ , on note  $R_g$  ou  $R(A)$  (resp.  $L_g$  ou  $L(A)$ ) l'action à droite (resp. à gauche). Soient  $u(\mathfrak{g}, \tau)$  l'ensemble des  $A \in u(\mathfrak{g})$  tels que  $R(A)$  laisse  $C^\infty(G, \tau)$  stable,  $\mathfrak{a}_\tau$  le sous espace vectoriel de  $u(\mathfrak{g})$  engendré par  $Y + 2\pi i f(Y)$ ,  $Y$  parcourant  $\mathfrak{h}$ , et  $u(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$  l'idéal gauche engendré par  $\mathfrak{a}_\tau$ . Alors il vient que

$$u(\mathfrak{g}, \tau) = \{A \in u(\mathfrak{g}) : [A, \mathfrak{h}] \in u(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau\}$$

et que l'application  $A \mapsto R(A)|_{C^\infty(G, \tau)}$  nous donne un homomorphisme de  $u(\mathfrak{g}, \tau)$  sur  $\mathcal{D}_\tau(G/H)$  avec le noyau  $u(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$ . En somme,

$$\mathcal{D}_\tau(G/H) \simeq u(\mathfrak{g}, \tau)/u(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau.$$

De plus, si le couple  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  est réductif dans le sens qu'il existe un supplémentaire  $\mathfrak{m}$  de  $\mathfrak{h}$  dans  $\mathfrak{g}$  tel que  $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ , on voit que

$$u(\mathfrak{g}, \tau) = u^H(\mathfrak{g}) + u(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$$

avec  $u^H(\mathfrak{g}) = \{A \in u(\mathfrak{g}) : [A, Y] = 0, \forall Y \in \mathfrak{h}\}$ . D'où

$$\mathcal{D}_\tau(G/H) \simeq u^H(\mathfrak{g})/u^H(\mathfrak{g}) \cap u(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau.$$

Nous donnons ici une démonstration brève de la conjecture (20) sous les conditions (i) et (ii).

Soit alors  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie nilpotente. Soient  $f \in \mathfrak{g}^*$ , et soient  $\mathfrak{h}, \mathfrak{b}$  deux sous-algèbres de  $\mathfrak{g}$ . Supposons que  $\mathfrak{h}$  soit subordonnée à  $f$ , c.à.d.  $f([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]) = (0)$  et que  $\mathfrak{b}$  soit une polarisation en  $\phi$  pour tout  $f \in \Gamma_f$  et que  $\mathfrak{h}$  normalise  $\mathfrak{b}$ . Soit  $G = \exp \mathfrak{g}, H = \exp \mathfrak{h}, B = \exp \mathfrak{b}$ . Supposons en plus que la représentation  $\tau = \text{Ind}_H^G \chi_f$  de  $G$  se décompose sur  $\hat{G}$  avec des multiplicités finies.

On remarque d'abord que  $\mathfrak{c} = \mathfrak{h} + \mathfrak{b}$  est une sous-algèbre de  $\mathfrak{g}$ , comme  $\mathfrak{h}$  normalise  $\mathfrak{b}$ . Soit  $C = \exp(\mathfrak{c})$ . Alors  $\tau = \text{Ind}_C^G \tau_0$  où  $\tau_0 = \text{Ind}_H^C \chi_f$  et donc d'après [10, (35)] l'algèbre  $\mathcal{D}_\tau(G/H)$  est

isomorphe à l'algèbre  $\mathfrak{D}_{\tau_0}$ . En outre, presque toutes les  $H$ -orbites dans  $\Gamma_f$  sont saturées par rapport à  $\mathfrak{c}$ . Donc l'algèbre des fonctions polynomiales  $H$ -invariantes sur  $\Gamma_f$  est  $H$ -isomorphe à l'algèbre des fonctions polynomiales  $H$ -invariantes définies sur  $f|_{\mathfrak{c}} + \mathfrak{h}^{\perp, \mathfrak{c}} \subset \mathfrak{c}^*$ . Nous pouvons donc supposer que  $G = C$ . En particulier  $\mathfrak{b}$  est maintenant un idéal de  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{b}$ .

### I-5.1 Corollaire

*La réciprocity de Frobenius s'établit dans ces conditions.*

Expliquons un peu ce qu'est cette réciprocity: pour une représentation unitaire  $\pi$  de  $G$ , on note  $\mathcal{H}_\pi$ ,  $\mathcal{H}_\pi^\infty$  et  $\mathcal{H}_\pi^{-\infty}$  respectivement l'espace de  $\pi$ , l'espace des vecteurs  $C^\infty$  de  $\pi$  et l'antidual de  $\mathcal{H}_\pi^\infty$ . Pour  $a \in \mathcal{H}_\pi^{-\infty}$  et  $b \in \mathcal{H}_\pi^\infty$ , on note  $\langle a, b \rangle$  l'image de  $b$  par  $a$ . Et de même  $\mathcal{H}_\pi^\infty$  agit sur  $\mathcal{H}_\pi^{-\infty}$  par

$$\langle b, a \rangle = \overline{\langle a, b \rangle}.$$

On pose

$$(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H, \chi_f} = \{a \in \mathcal{H}_\pi^{-\infty} : \pi(h)a = \chi_f(h)a, \text{ pour tout } h \in H\}.$$

Avec ces données il y a (cf. [16]) une question concernant une sorte de réciprocity:  $\dim(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H, \chi_f}$  se qualifie-t-elle pour la multiplicité  $m(\pi)$  dans la désintégration de  $\tau = \text{Ind}_H^G \chi_f$ ? Dans [18] H. Fujiwara et S. Yamagami ont répondu par oui à cette question lorsque  $\mathfrak{h}$  est un idéal de  $\mathfrak{g}$  ou que  $\pi$  admet une polarisation distinguée. Dans notre cas, tout  $\pi = \pi_\phi = \text{Ind}_B^G(\chi_\phi)$  dans le support de  $\tau$  admet une polarisation distinguée qui est  $\mathfrak{b}$ , d'où le résultat. ■

En outre pour presque tout  $\phi \in \Gamma_f$ , les espaces  $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$ ,  $\mathfrak{h}/\mathfrak{b} \cap \mathfrak{h}$ ,  $\text{ad}^*(\mathfrak{b})\phi$  et  $\text{ad}^*(\mathfrak{h})\phi$  ont même dimension, de même que les espaces  $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$  et  $\mathfrak{b}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{b}$ .

Soit maintenant  $\{l_1, \dots, l_n\}$  une base de Jordan-Hölder de  $\mathfrak{g}$  passant par  $\mathfrak{b}$ , c.à.d.  $\mathfrak{b} = \text{vect}\{l_k, \dots, l_n\}$  et  $(l_1, \dots, l_{k-1}) \in \mathfrak{h}$ . Nous prenons pour  $\mathfrak{V}$  l'espace

$$\Gamma_0 = \{\phi \in \Gamma_f \mid \phi(l_j) = 0, \forall j \in I^H\}.$$

En appliquant les constructions (I-3.1), nous obtenons la base de Malcev

$$(X_1(\phi), \dots, X_r(\phi)) \subset \mathfrak{h}$$

de  $\mathfrak{g}$  relative à  $\mathfrak{b}$ , et la base de Malcev  $\{Y_1, \dots, Y_r\}$  de  $\mathfrak{b}$  relative à  $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{h}$ , qui est la même pour tout  $\phi \in \mathfrak{V}$  et qui est contenue dans  $\{l_k, \dots, l_n\}$ . Les vecteurs  $X_i(\phi)$  et  $Y_j$  ont pour presque

tout  $\phi$  la propriété suivante:

$$\begin{aligned} \phi([X_i(\phi), Y_j]) &= 0, i < j \\ &= 1, i = j. \end{aligned} \quad (21)$$

Pour presque tout  $\phi \in \Gamma_f$ , on a que le stabilisateur  $\mathfrak{h}(\phi)$  de  $\phi$  dans  $\mathfrak{h}$  est égal à  $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{b}$  et ainsi  $Ad^*(H)\phi$  est difféomorphe à  $H/H \cap B$ . Nous pouvons donc identifier l'espace  $S(G/B, \phi) = S(H/H \cap B, \chi_f)$  avec l'espace  $S(Ad^*(H)\phi)$  des fonctions à décroissance rapide  $C^\infty$  définies sur  $Ad^*(H)\phi$  par l'application :  $\xi \in S(H/B \cap H) \rightarrow \tilde{\xi}$ , où

$$\tilde{\xi}(Ad^*(h)\phi) = \chi_f(h)\xi(h), h \in H.$$

De même les espaces  $L^2(G/B, \phi)$ ,  $L^2(H/H \cap B)$  et  $L^2(Ad^*(H)\phi)$  sont isométriquement isomorphes. Ce dernier espace est muni de la norme

$$\|\xi\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^r} |\xi(\exp t_1 X_1(\phi) \cdots \exp t_r X_r(\phi) \cdot \phi)|^2 dt_1 \cdots dt_r.$$

Nous pouvons donc transférer la représentation  $\pi_\phi$  de  $G$  sur  $L^2(G/B, \phi)$  à  $L^2(Ad^*(H)\phi)$  et nous obtenons les formules :

$$\pi_\phi(h)\xi(\psi) = \xi(Ad^*(h^{-1})\psi), \psi \in Ad^*(H)\phi, h \in H$$

et

$$\pi_\phi(b)\xi(\psi) = e^{i\psi(b)}\xi(\psi), b \in B.$$

L'application  $\mathfrak{V} \times H/H \cap B \rightarrow \Gamma_f$ :

$$(\phi, h \text{ mod } H/H \cap B) \rightarrow Ad^*(h)\phi$$

définit une bijection rationnelle d'un certain ouvert Zariski-dense de  $\mathfrak{V} \times H/H \cap B$  sur un ouvert Zariski-dense de  $\Gamma_f$  et la mesure de Lebesgue  $d\phi$  sur  $\Gamma_f$  se décompose en une intégrale de mesures orbitales :

$$\int_{f+\mathfrak{h}^\perp} g(\phi)d\phi = \int_{\mathfrak{V}} \int_{\mathbb{R}^r} g(Ad^*(\exp t_1 X_1(\phi) \cdots \exp t_r X_r(\phi))\phi) dt_1 \cdots dt_r d\lambda(\phi),$$

d'après les relations (21). Cette identité nous permet d'identifier l'espace hilbertien  $L^2(\Gamma_f)$  avec l'espace

$$L^2(\mathfrak{V} \times H/H \cap B) = \int_{\mathfrak{V}}^\oplus L^2(G/B, \phi)d\lambda(\phi).$$

Pour cela, nous écrivons pour une fonction  $L \in L^2(\Gamma_f)$ ,  $K(\phi, \dot{h}) = \tilde{L}(\phi, \dot{h}) = L(\text{Ad}^*(h)\phi)$ ,  $\phi \in \mathfrak{A}$ ,  $\dot{h} \in H/H \cap B$ . Alors  $K \in L^2(\Gamma_f)$  et  $\|K\|_2 = \|L\|_2$ .

Pour  $\phi \in \Gamma_f$ ,  $h \in H$ ,  $\xi \in S(G/H, \phi)$  nous avons que

$$\begin{aligned} \int_{B/B \cap H} \xi(hb) \chi_\phi(b) d_{B, B \cap H}(b) &= \int_{B/B \cap H} \xi(b) \chi_\phi(h^{-1}bh) \chi_f(h) d_{B, B \cap H}(b) \\ &= \overline{\chi_f(h)} \hat{\xi}(\text{Ad}^*(h)\phi), \end{aligned}$$

où  $\hat{\xi}$  dénote la transformée de Fourier usuelle de la fonction  $\xi \in S(\mathfrak{h}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{b})$ . L'opérateur

$$U : L^2(G/H, \chi_f) \rightarrow \int_{\mathfrak{A}}^{\oplus} \mathcal{H}_\phi d\lambda(\phi) = L^2(\Gamma_f)$$

est donc simplement donné par :

$$U\xi(\psi) = \hat{\xi}(\psi)$$

et pour l'application réciproque

$$U^{-1} : \int_{\mathfrak{A}}^{\oplus} \mathcal{H}_\phi d\lambda(\phi) = L^2(\Gamma_f) \rightarrow L^2(G/H, \chi_f)$$

on obtient pour  $b \in B$ ,  $\psi \in L^2(\Gamma_f)$ , que

$$\begin{aligned} U^{-1}(\eta)(b) &= \int_{\mathfrak{A}} \int_{H/H \cap B} \eta(\phi)(bh) \chi_f(h) d_{H, H \cap B}(h) d\lambda(\phi) \\ &= \int_{\Gamma_f} \eta(\psi) e^{i\psi(b)} d\psi = \hat{\eta}(-b). \end{aligned}$$

Donc si  $D$  est un élément de  $\mathfrak{D}_\tau(G/H)$ , alors  $D$  commute à  $\tau(b)$  pour tout  $b \in B$ . En outre  $D$  est représenté par un élément de l'algèbre enveloppante  $u(\mathfrak{g})$  de  $\mathfrak{g}$ , donc il s'écrit sur  $S(G/H, \chi_f)$  comme un opérateur aux dérivées partielles à coefficients polynômiaux. Soit  $D' = U \circ D \circ U^{-1}$  l'opérateur correspondant agissant sur  $S(\Gamma_f)$ . Alors  $D'$  est aussi un opérateur aux dérivées partielles à coefficients polynômiaux et  $D'$  commute à la multiplication avec les fonctions  $e^{i(\cdot)(b)}$ ,  $b \in B$  et donc  $D'$  est lui-même un opérateur de multiplication avec une fonction polynomiale  $P_D$ . Comme  $D$  commute aussi à l'action de  $H$ , la fonction  $P_D$  doit être  $H$ -invariante. Donc  $P_D$  est un polynôme  $H$ -invariant sur  $\Gamma_f$ . D'autre-part, si  $P$  est un polynôme  $H$ -invariant sur  $\Gamma_f$ , alors la multiplication avec  $P$  définit un opérateur  $D'$  sur  $S(\Gamma_f)$  qui permute à l'action de  $G$ . Donc  $D = U^{-1} \circ D' \circ U$  est un élément de  $\mathfrak{D}_\tau(G/H)$ . Ainsi nous voyons que  $\mathfrak{D}_\tau(G/H)$  est isomorphe à l'algèbre des fonctions polynomiales  $H$ -invariantes définies sur  $\Gamma_f$ .

**I-6 Nouvelle désintégration (lisse) de  $L^2(G)$ .**

Soit  $G$  un groupe de Lie nilpotent connexe simplement connexe d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ , on sait que  $\text{Ind}_{\{e\}}^G 1$  est la représentation régulière gauche  $\lambda_G$  qui se réalise sur  $L^2(G)$  par

$$\lambda_G(s)\xi(x) = \xi(s^{-1}x)$$

pour tout  $s, x \in G$  et  $\xi \in L^2(G)$ .

Soit donc une suite de Jordan-Hölder de  $\mathfrak{g}$

$$\mathfrak{g}_0 = \{0\} \subset \mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}_2 \subset \dots \subset \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}$$

à laquelle on associe une base de Jordan-Hölder  $\mathfrak{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ ,  $b_i \in \mathfrak{g}_i \setminus \mathfrak{g}_{i-1}$ . De même on considère l'action de  $G$  sur  $\mathfrak{g}^*$  (vu comme  $G$ -module) relativement à cette base, on note  $I^G$  l'ensemble indice de Pukanszky pour cette action. Dans ce cas et suivant la définition (I-2.3) on a que

$$K^{\{e\}} = \left\{ j \in \{1, \dots, n\} : \text{presque toutes les } G_{j-1}\text{-orbites sont saturées par rapport à } G_j \right\},$$

il en découle que

$$\mathfrak{Y}^{R, \mathfrak{B}} = \{ \phi \in \Gamma_f : \phi(b_j) = 0, j \in K^{\{e\}} \}.$$

Soit  $\Omega$  une  $G$ -orbite et  $\phi \in \Omega \subset \mathfrak{g}^*$ , on note  $\phi_i = \phi|_{\mathfrak{g}_i}$ , soit  $B(\phi)$  une polarisation de Vergne en  $\phi$ , on note  $\mathfrak{b}(\phi)$  la sous algèbre associée à  $B(\phi)$  qui est en fait égale à  $\sum_{i=1}^n \mathfrak{g}_i(\phi_i)$ , on sait que

$$\text{Ad}^*(B(\phi))\phi = \phi + \mathfrak{b}(\phi)^\perp = \phi + \sum_{k \in K^{\{e\}}} \mathbb{R} b_k^*,$$

il est clair donc que  $\text{Ad}^*(B(\phi))\phi \cap \mathfrak{Y}^{R, \mathfrak{B}} = \{ \phi \}$ .

On peut de même vérifier que  $K^{\{e\}} \subset I^G$  et que  $\#(K^{\{e\}}) = \frac{1}{2}\#(I^G)$ . Soit  $\mu_G$  la mesure de Haar sur  $G$ , on obtient la désintégration lisse de  $L^2(G)$  suivante:

$$\left( L^2(G), \mu_G \right) \simeq \int_{\mathfrak{Y}^{R, \mathfrak{B}}}^{\oplus} \left( L^2(G/B(\phi), \phi) \right) d\lambda(\phi).$$

**I-7. Exemples.****I-7.1.**

On prend l'algèbre de Heisenberg  $\mathfrak{g}$  engendrée par trois générateurs  $\langle X, Y, Z \rangle$  tels que  $[X, Y] = Z$ , on désigne par  $G$  le groupe de Lie associé. Soit  $\mathfrak{h} = \mathbb{R}(X - Y)$  et  $H = \exp(\mathfrak{h})$  et  $f = 0$ . On considère  $\tau = \text{Ind}_H^G 1_H$ , prenons comme suite de Jordan-Hölder les vecteurs  $\{Z, Y, X\}$ . Nous obtenons la suite de Malcev

$$\mathfrak{h} = \langle X - Y \rangle \subset \mathfrak{g}_1 = \langle X - Y, Z \rangle \subset \mathfrak{g}.$$

Il s'ensuit dans cet exemple que  $\mathfrak{B} = \mathbb{R}Z^*$  et que pour tout  $\phi \in \mathfrak{h}^\perp$ ,  $\mathfrak{b}(\phi) = \langle Y, Z \rangle$  est la polarisation lisse en  $\phi$ . Soit  $U$  l'opérateur d'entrelacement décrit dans le théorème (I-3.2).

On a pour tout  $\xi \in L^2(\mathbb{R}^2)$  et  $g \in G$

$$U(\xi)(\lambda Z^*)(g) = \int_{\mathbb{R}^2} \xi(g \exp(\frac{t}{\lambda} Y) \exp(sZ)) e^{-is\lambda} ds dt.$$

Montrons directement que cet opérateur est isométrique. En effet pour tout  $\xi \in S(G/H, 0) \simeq S(\mathbb{R}^2)$  on a que

$$\begin{aligned} \|U(\xi)\|_2^2 &= \int_{\mathfrak{B}} \|U(\xi)(\phi)\|_{L^2(G/B(\phi))}^2 d\lambda(\phi) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left| \int_{\mathbb{R}^2} \xi(\exp(\frac{a}{\lambda}(X - Y)) \exp(tY) \exp(sZ)) e^{-is\lambda} ds dt \right|^2 da d\lambda. \end{aligned}$$

Vu que  $\exp(\frac{a}{\lambda}(X - Y)) \exp(tY) = \exp(tY) \exp(\frac{a}{\lambda}(X - Y)) \exp(\frac{a}{\lambda}tZ)$ , on obtient

$$\begin{aligned} \|U(\xi)\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} \left| \int_{\mathbb{R}^2} \xi(\exp(tY) \exp((s + \frac{ta}{\lambda})Z)) e^{-is\lambda} ds dt \right|^2 da d\lambda \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left| \int_{\mathbb{R}^2} \xi(\exp(tY) \exp(sZ)) e^{-is\lambda} e^{-it(-a)} ds dt \right|^2 da d\lambda \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{\xi}(\exp(-aY) \exp(\lambda Z))|^2 da d\lambda \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} |\xi(\exp(aY) \exp(\lambda Z))|^2 da d\lambda \\ &= \|\xi\|_{L^2(G/H)}^2. \end{aligned}$$

L'opérateur réciproque  $V : \int_{\mathbb{R}}^\oplus L^2(G/B, \lambda Z^*) d\lambda \rightarrow L^2(G/H)$  est donné pour tout  $g \in G$  par

$$V(K)(g) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} K(\lambda Z^*)(g \cdot \exp(r \frac{X - Y}{\lambda})) dr d\lambda.$$

**I-7.2.**

Soit  $\mathfrak{g}$  l'algèbre engendrée par quatre générateurs  $\langle X_1, X_2, X_3, X_4 \rangle$  tels que  $[X_1, X_2] = X_3$  et  $[X_1, X_3] = X_4$ . On désigne par  $G$  le groupe de Lie associé.

Les orbites en position générale dans  $\mathfrak{g}^*$  peuvent être paramétrisées par  $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ . En effet si pour  $\alpha \in \mathbb{R}^*$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $g_{\alpha, \lambda}$  désigne la forme linéaire  $g_{\alpha, \lambda} = \alpha X_4^* + \lambda X_2^*$ , alors la  $G$ -orbite  $\Omega_{\alpha, \lambda}$  correspondante est la partie suivante de  $\mathfrak{g}^*$

$$\Omega_{\alpha, \lambda} = \left\{ \alpha X_4^* + t X_3^* + \left( \lambda + \frac{t^2}{2\alpha} \right) X_2^* + s X_1^*, t, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

**A.**

Soit  $\mathfrak{h} = \text{vect} \langle X_4 \rangle$  et  $H = \exp(\mathfrak{h})$  et  $f_\alpha = \alpha X_4^*$  une forme linéaire sur  $\mathfrak{h}$  avec  $\alpha \neq 0$ . On désire désintégrer  $\tau = \text{Ind}_H^G \chi_{f_\alpha}$ . On choisit une base de Malcev relative à  $\mathfrak{h}$  comme dans (I-3.1)

$$\mathfrak{h} = \text{vect} \langle X_4 \rangle \subset \mathfrak{g}_1 = \text{vect} \langle X_3, X_4 \rangle \subset \mathfrak{g}_2 = \text{vect} \langle X_2, X_3, X_4 \rangle \subset \mathfrak{g}_3 = \text{vect} \langle X_1, X_2, X_3, X_4 \rangle$$

Pour toute  $\phi \in \mathfrak{g}^*$  en position générale, on obtient la polarisation  $B(\phi) = \mathfrak{g}_2$ .

Les  $G$ -orbites sont saturées par rapport à  $\mathfrak{g}_2$ , alors que les  $H$ -orbites ne le sont pas, ainsi  $\mathfrak{g}^{R, \mathfrak{B}} = \{ \phi \in f_\alpha + \langle \mathfrak{h} \rangle^\perp : \phi(X_1) = 0 \} = \alpha X_4^* + (\mathbb{R} X_3^* \oplus \mathbb{R} X_2^*) \simeq \mathbb{R}^2$ , il en résulte que

$$\text{Ind}_H^G \chi_{f_\alpha} \simeq \int_{\mathfrak{g}^{R, \mathfrak{B}}}^\oplus \pi_\phi d\lambda(\phi).$$

L'opérateur d'entrelacement est donné pour  $\xi \in L^2(\mathbb{R}^3)$  par

$$U(\xi)(\alpha X_4^* + a X_3^* + b X_2^*)(g) = \int_{\mathbb{R}} \xi(g \exp t X_3 \exp s X_2) e^{-ita} e^{-isb} dt ds$$

pour tout  $g \in G$ .

L'opérateur inverse  $U^{-1}$  est exprimé pour tout  $K \in \left( \int_{\mathfrak{g}^{R, \mathfrak{B}}}^\oplus L^2(G/G_2, \phi) d\lambda(\phi) \right)_C$  à support compact et  $g \in G$  par

$$U^{-1}(K)(g) = \int_{\mathbb{R}^2} K(\alpha X_4^* + t X_3^* + s X_2^*)(g) dt ds.$$

**B.**

Prenons maintenant  $\mathfrak{h} = \text{vect} \langle X_3 \rangle$  et  $H = \exp(\mathfrak{h})$  et  $f_\beta = \beta X_3^*, \beta \neq 0$ . Alors il est clair que  $\Omega_{\lambda, \mu} \cap (f_\beta + \mathfrak{h}^\perp)$  est une seule droite qui est en fait une  $H$ -orbite. Notre base de Jordan-Hölder nous donne la suite de Malcev relative à  $\mathfrak{h}$

$$\mathfrak{h} = \text{vect} \langle X_3 \rangle \subset \mathfrak{g}_1 = \text{vect} \langle X_3, X_4 \rangle \subset \mathfrak{g}_2 = \text{vect} \langle X_3, X_4, X_2 \rangle \subset \mathfrak{g}_3 = \text{vect} \langle X_3, X_4, X_2, X_1 \rangle$$

Presque toutes les  $H$ -orbites en position générale sont saturées par rapport à  $\mathfrak{g}_2$ , il en est ainsi pour les  $G$ -orbites, donc

$$\mathfrak{A}^{R, \mathfrak{B}} = \beta X_3^* + \langle \mathfrak{h} \rangle^\perp \cap \{\phi; \phi(X_1) = 0\} = \beta X_3^* + (\mathbb{R}X_4^* \oplus \mathbb{R}X_3^*) \simeq \mathbb{R}^2$$

et ainsi

$$\text{Ind}_H^G \chi_{f_\beta} \simeq \int_{\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}}^\oplus \pi_{\lambda, \mu} d\lambda d\mu.$$

Un opérateur d'entrelacement est donc donné pour tout  $\xi \in L^2(\mathbb{R}^3)$  par

$$U(\xi)(\beta X_3^* + bX_4^* + aX_3^*)(g) = \int_{\mathbb{R}^2} \xi(g \exp tX_2 \exp sX_4) e^{-ita} e^{-isb} dt ds$$

pour tout  $g \in G$ .

L'opérateur inverse  $U^{-1}$  agit sur  $K \in \left( \int_{\mathfrak{A}^{R, \mathfrak{B}}}^\oplus \mathcal{H}(G/G_2, \phi, ) d\lambda(\phi) \right)_C$  à support compact par

$$U^{-1}(K)(g) = \int_{\mathbb{R}^2} K(\beta X_3^* + sX_2^* + rX_4^*)(g) ds dr.$$

**C.**

Prenons maintenant  $\mathfrak{h} = \text{vect} \langle X_2 \rangle$  et  $H = \exp(\mathfrak{h})$  et  $f = X_2^*$ . Alors il est clair que  $\Omega_{\alpha, \lambda} \cap (f + \mathfrak{h}^\perp)$  est la réunion de deux  $H$ -orbites si  $\alpha(1 - \lambda) > 0$ . Nous obtenons la suite de Malcev relative à  $\mathfrak{h}$ :

$$\mathfrak{h} = \text{vect} \langle X_2 \rangle \subset \mathfrak{g}_1 = \text{vect} \langle X_2, X_4 \rangle \subset \mathfrak{g}_2 = \text{vect} \langle X_2, X_4, X_3 \rangle \subset \mathfrak{g}_3 = \text{vect} \mathfrak{g}.$$

Presque toutes les  $H$ -orbites en position générales sont saturées par rapport à  $\mathfrak{g}_2$ , il en est ainsi pour les  $G$ -orbites, donc

$$\mathfrak{A}^{R, \mathfrak{B}} = f + \langle \mathfrak{h} \rangle^\perp \cap \{\phi; \phi(X_1) = 0\} = X_2^* + (\mathbb{R}X_4^* \oplus \mathbb{R}X_3^*).$$

Un opérateur d'entrelacement est donc donné pour tout  $\xi \in L^2(\mathbb{R}^3)$  par

$$U(\xi)(X_2^* + aX_3^* + bX_4^*)(g) = \int_{\mathbb{R}^2} \xi(g \exp tX_3 \exp sX_4) e^{-ita} e^{-isb} dt ds$$



pour tout  $g \in G$ .

L'opérateur inverse  $U^{-1}$  est donné pour tout  $K \in (\int_{\mathfrak{A}^{R, \mathfrak{B}}}^{\oplus} \mathcal{H}(G, \phi, \mathfrak{g}_2) d\lambda(\phi))_{\mathbb{C}}$  à support compact et  $g \in G$  par

$$U^{-1}(K)(g) = \int_{\mathbb{R}^2} K(X_2^* + sX_3^* + rX_4^*)(g) ds dr.$$

**D.**

Prenons maintenant  $\mathfrak{h} = \mathbb{R}X_1^*$ ,  $f = 0$ . Alors nous obtenons la suite de Malcev

$$\mathfrak{g}_1 = \text{vect} \langle X_1, X_4 \rangle \subset \mathfrak{g}_2 = \text{vect} \langle X_1, X_4, X_3 \rangle \subset \mathfrak{g}_3 = \text{vect} \langle X_1, X_4, X_3, X_2 \rangle \subset \mathfrak{g}_4 = \mathfrak{g}.$$

Ici  $L^H = \{1, 3\}$  et donc  $\mathfrak{A}^{R, \mathfrak{B}} = \mathbb{R}X_4^* \oplus \mathbb{R}X_2^*$ . Ainsi l'opérateur d'entrelacement

$$U : L^2(G/H, f) \rightarrow \int_{\mathfrak{A}^{R, \mathfrak{B}}}^{\oplus} L^2(G/G_2, \phi) d\lambda(\phi)$$

est donné par

$$U(\xi)(aX_4^* + bX_2^*)(g) = \int_{\mathbb{R}^3} \xi(g \exp(tX_2) \exp(sX_3) \exp(rX_4)) e^{-i(ar+bt)} dr ds dt.$$

L'opérateur inverse  $V$  agit sur  $K \in \int_{\mathfrak{A}^{R, \mathfrak{B}}}^{\oplus} L^2(G/G_2, \phi) d\lambda(\phi)$  par

$$V(K)(g) = \int_{\mathbb{R}^3} K(sX_4^* + tX_2^*)(g \exp(rX_1)) ds dt dr$$

et ceci pour tout  $g \in G$ .

### **I-7.3 Un contre-exemple.**

Montrons ici que le choix des polarisations  $B(\phi)$  pour  $\phi \in \mathfrak{A}$  est très important. En effet, soit  $\mathfrak{g}$  l'algèbre de Lie engendrée par les vecteurs  $X, P, Y, Q, Z$  avec les crochets

$$[X, Y] = Z, [P, Q] = Z,$$

soit  $\mathfrak{h} = \text{vect}(Z, X - P)$ ,  $f = Z^*$ , et soit  $\mathfrak{C} = \{X, P, Y, Q, Z\}$  une base de Jordan-Hölder de  $\mathfrak{g}$ . Donc  $\mathfrak{B} = \{Q, Y, X\}$  est la base de Malcev de  $\mathfrak{g}$  relative à  $\mathfrak{h}$ . L'ensemble  $L^H$  a un seul élément, qui est associé à  $Y$ . Prenons  $\mathfrak{A} = \mathbb{R}Y^*$  et  $B = B(\phi) = \text{vect}(Z, X, P)$  pour tous les  $\phi \in \mathfrak{A}$ . Cette algèbre  $B$  est une polarisation pour toute forme linéaire  $\phi \in \mathfrak{g}^*$  en position générale,

mais n'est pas une polarisation de Vergne pour la base  $\mathfrak{C}$ . Alors l'opérateur d'entrelacement infinitésimal  $U$  définies pour tout  $\xi \in S(G/H, f)$  et  $g \in G$  par

$$U(\xi)(sY^*)(g) = T_{B(sY^*), H}\xi(g) = \int_{B/B \cap H} \xi(gb)\chi_{sY^*}(b)db = \int_{\mathbb{R}} \xi(g \exp(pP))dp$$

ne dépend pas de  $s \in \mathbb{R}$ , et donc  $U$  ne peut pas être isométrique.

### I-8 Cas des groupes non nilpotents.

On va construire maintenant des opérateurs d'entrelacement sur des exemples des groupes résolubles exponentiels, commençons par en donner un fondamental qui est souvent rencontré.

#### A.

Soit  $\mathfrak{g}$  l'algèbre de  $ax + b$ ;  $\mathfrak{g} = \mathbb{R}X \oplus \mathbb{R}Y$ ,  $[X, Y] = Y$ . On prend  $f = Y^*$  et  $\mathfrak{h} = \mathbb{R}X \in M(f, \mathfrak{g})$ . Le groupe complètement résoluble  $G = \exp \mathfrak{g}$  n'a que deux représentations unitaires irréductibles de dimension infinie  $\pi_{\pm}$  associées à deux orbites ouvertes  $\pm G \cdot Y^*$ . La représentation monomiale  $\tau = \text{Ind}_H^G \chi_f$ ,  $H = \exp \mathfrak{h}$ , est équivalente à la somme directe  $\pi_+ \oplus \pi_-$ .

On réalise  $\pi_{\pm}$  comme  $\text{Ind}_B^G \chi_{\pm Y^*}$  où  $B = \exp(\mathbb{R}Y)$  et on identifie  $\mathcal{H}_{\pi_{\pm}}$  à  $L^2(\mathbb{R})$  par l'application

$$\xi \longmapsto \tilde{\xi}(t) = \xi(\exp tX), \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Soit par ailleurs l'opérateur  $U$  défini pour un tel  $\xi$  et pour un  $g \in G$  par

$$U(\xi)(Y^*)(g) = \int_{\mathbb{R}} \xi(g \cdot \exp(tY))e^{it} dt$$

et

$$U(\xi)(-Y^*)(g) = \int_{\mathbb{R}} \xi(g \cdot \exp(tY))e^{-it} dt.$$

Lorsque  $g = \exp(bX)$  ces expressions deviennent

$$U(\xi)(Y^*)(\exp(bX)) = \int_{\mathbb{R}} \xi(\exp(tY))e^{ie^b t} e^{\frac{b}{2}t} dt = e^{\frac{b}{2}} \hat{\xi}(e^b Y)$$

et

$$U(\xi)(-Y^*)(\exp(bX)) = \int_{\mathbb{R}} \xi(\exp(tY))e^{-ie^b t} e^{\frac{b}{2}t} dt = e^{\frac{b}{2}} \hat{\xi}(-e^b Y).$$

On aura donc

$$\|U(\xi)\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |e^{\frac{b}{2}} \hat{\xi}(e^b Y)|^2 db + \int_{\mathbb{R}} |e^{\frac{b}{2}} \hat{\xi}(-e^b Y)|^2 db$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}} e^b |\hat{\xi}(e^b Y)|^2 db + \int_{\mathbb{R}} e^b |\hat{\xi}(-e^b Y)|^2 db \\
&= \int_0^{+\infty} |\hat{\xi}(bY)|^2 db + \int_{-\infty}^0 |\hat{\xi}(bY)|^2 db \\
&= \int_{\mathbb{R}} |\hat{\xi}(bY)|^2 db = \|\hat{\xi}\|_{L^2(G/H)}^2.
\end{aligned}$$

**B.**

Soit  $G$  le groupe de Boidol, son algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  est engendrée par les vecteurs  $(A, X, Y, Z)$  tels que  $[A, X] = X$ ,  $[A, Y] = -Y$ ,  $[X, Y] = Z$ . Soit  $H = \exp(\mathfrak{h}) = \exp(\mathbb{R}A \oplus \mathbb{R}Z)$  le sous-groupe analytique de  $G$ . Soit encore  $\mathfrak{B} = (A, X, Y, Z)$  une base de Jordan-Hölder de  $\mathfrak{g}$ , de cette suite on extrait une base  $\mathfrak{B}_1 = (X, Y)$  de Malcev relative à  $\mathfrak{h}$ . Soit  $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{R}X$  et  $G_1 = \exp(\mathfrak{g}_1)$ , on regarde

$$\tau = \underset{H}{\text{Ind}}^G 1 = \underset{G_1}{\text{Ind}}^G \underset{H}{\text{Ind}}^{G_1} 1.$$

Comme dans l'exemple précédent, on a que  $\underset{H}{\text{Ind}}^{G_1} 1 = \pi_{Y^*} \oplus \pi_{-Y^*}$  et donc

$$\tau \simeq \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \pi_{Y^* + sX^*} \oplus \pi_{-Y^* + sX^*} ds.$$

La polarisation de Vergne en  $\pm Y^* + sX^*$  relativement à la base  $\mathfrak{B}$  est  $\text{vect}(X, Y, Z)$ , l'opérateur d'entrelacement  $U$  est défini donc pour  $\xi$  à support compact modulo  $H$  et pour un  $g \in G$  par

$$U(\xi)(\pm Y^* + sX^*)(g) = \int_{\mathbb{R}^2} \xi(g \cdot \exp(tX) \exp(rY)) e^{ir} e^{\pm its} dt dr.$$

Des calculs comme dans l'exemple précédent nous montrent effectivement que  $U$  est bien une isométrie.

# Chapitre II

## DÉSINTÉGRATION DES RESTRICTIONS DE REPRÉSENTATIONS

### UNITAIRES DES GROUPES DE LIE NILPOTENTS

#### ET OPÉRATEUR D'ENTRELACEMENT

Soit  $G$  un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ . On considère une représentation unitaire et irréductible  $\pi$  associée à une orbite coadjointe  $\Omega_\pi^G = \Omega_\pi \subset \mathfrak{g}^*$  d'une forme linéaire  $f$ . Si  $H$  est un sous groupe analytique de  $G$  d'algèbre de Lie  $\mathfrak{h}$ , alors d'après Corwin et Greenleaf [9], la désintégration centrale de  $\pi|_H$  s'obtient comme suit. Soit  $\mu_\pi$  une mesure finie sur  $\Omega_\pi$  qui est équivalente à la mesure  $G$ -invariante. Alors

$$\pi|_H \simeq \int_{\Omega_\pi/H}^{\oplus} \sigma_{p(l)} d\mu_\pi(l), \quad (22)$$

où  $p : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{h}^*$  est la projection canonique et  $\sigma_{p(l)} \in \hat{H}$  est associé à  $p(l) \in \mathfrak{h}^*$ .

L'application de Kirillov  $\theta_H : \mathfrak{h}^* \rightarrow \hat{H}$  induit un homéomorphisme de l'espace des orbites  $\mathfrak{h}^*/H$  sur  $\hat{H}$ . On considère finalement la mesure  $\nu = \nu_H^\pi = (\theta_H \circ p)_*(\mu_\pi)$ , l'image de  $\mu_\pi$  par l'application  $\theta_H \circ p : \mathfrak{g}^* \rightarrow \hat{H}$ . Pour  $\sigma \in \hat{H}$ , on désigne par  $n_\pi(\sigma)$  le nombre des  $H$ -orbites contenues dans  $\Gamma(\pi, \sigma) = \Omega_\pi^G \cap p^{-1}(\Omega_\sigma^H)$  alors

$$\pi|_H \simeq \int_{\hat{H}}^{\oplus} n_\pi(\sigma) \sigma d\nu(\sigma), \quad (23)$$

ce qui a été démontré par Lipsman [28].

Ce même résultat a été généralisé par Ronald L. Lipsman dans le cadre des groupes complètement résolubles (cf. [31]) et par H. Fujiwara pour les groupes résolubles exponentiels (cf. [19]).

Le but de ce chapitre est de présenter un espace de désintégration concret et un opérateur d'entrelacement précis pour  $\pi|_H$ .

## II-1. Désintégration centrale canonique des restrictions des représentations unitaires et irréductibles.

### II-1.1 Mesure sur les orbites .

Comme plus haut soit un sous-groupe analytique  $H = \exp \mathfrak{h}$  de  $G$  et une représentation unitaire et irréductible  $\pi$  associée à une orbite coadjointe  $\Omega_\pi^G = \Omega_\pi \subset \mathfrak{g}^*$  associée à une forme linéaire  $f$  et  $\mu_\pi$  une mesure  $G$ - invariante sur  $\Omega_\pi$ .

On va décrire maintenant une mesure sur  $\Omega_\pi/H$ , puis des parties fermées  $\mathfrak{X}^{R,\mathfrak{B}}$  et une mesure  $d\lambda^{R,\mathfrak{B}}$  sur  $\mathfrak{X}^{R,\mathfrak{B}}$  avec laquelle on va déterminer notre opérateur d'entrelacement.

On regarde  $\mathfrak{g}^*$  comme étant un  $H$ -module. Soit  $\mathfrak{B} = \{(v_1, \dots, v_n)\}$  une base de Jordan-Hölder de  $\mathfrak{g}^*$  sous l'action de  $\mathfrak{h}$  et  $\{(b_1, \dots, b_n)\}$  sa base duale. Soit  $e$  le plus petit ensemble indice tel que  $\mathfrak{W} = \mathfrak{g}^* \cap \Omega_\pi$  soit un ouvert de Zariski non vide dans  $\Omega_\pi$ .

Soit  $l \in \mathfrak{W}$  et  $\lambda_l = p^{\mathfrak{B}}(0, \lambda_l)$ , alors  $l = p^{\mathfrak{B}}(z, \lambda_l) = \sum_{j=1}^n p_j^{\mathfrak{B}}(z, \lambda_l) v_j : z \in \mathbb{R}^d$ , en fait  $\lambda_l$  est l'unique élément de  $H \cdot l$  qui vérifie  $\lambda_l(v_j) = 0$  pour  $j \in e$ . On regarde

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{W} \cap \{q \in \Omega_\pi : q(v_j) = 0, \forall j \in e\}$$

qui est un fermé de Zariski dans  $\mathfrak{W}$ . Soit

$$\varphi : \mathfrak{W} \longrightarrow \mathfrak{X} \times \mathbb{R}^d$$

qui à  $l$  associe le couple  $(\lambda_l, z)$ , alors  $\varphi$  est un difféomorphisme, en particulier l'application  $q \longrightarrow H \cdot q$  définie une bijection de  $\mathfrak{X}$  dans  $\mathfrak{W}/H$  et on a pour toute fonction  $k$ ,  $C^\infty$  à support compact dans  $\mathfrak{W}$

$$\int_{\mathfrak{W}} k(q) d\mu_\pi(q) = \int_{\mathfrak{X} \times \mathbb{R}^d} k \circ \varphi^{-1}(\lambda, z) d\lambda dz.$$

De cette manière on considère cette mesure  $d\lambda$  sur les  $H$ -orbites qu'on notera par la suite  $\lambda_\pi$ , telle que pour toute fonction  $\tilde{k}$  continue à support compact dans  $\Omega_\pi/H$  on a

$$\int_{\Omega_\pi/H} \tilde{k}(q) d_\pi(q) = \int_{\mathfrak{X}} \tilde{k}(H \cdot \lambda) d\lambda.$$

Soient  $g$  un élément de  $G$ ,  $\phi = Ad^*(g)f/\mathfrak{h}$  et soit  $B(\phi) = \exp(\mathfrak{b}(\phi))$  une polarisation de  $\mathfrak{h}$  au point  $\phi$ . On construit une mesure  $\nu_{B(\phi), g \cdot B \cdot g^{-1}}$  sur  $B(\phi)/B(\phi) \cap g \cdot B \cdot g^{-1}$  comme plus haut. On remarque que l'intégrale

$$T_{B(\phi),g \cdot B \cdot g^{-1}} \xi(h) = \int_{B(\phi)/B(\phi) \cap g \cdot B \cdot g^{-1}} \xi(hug) \chi_\phi(u) d_{B(\phi),g \cdot B \cdot g^{-1}}(u) \quad (24)$$

définie pour toute fonction  $\xi$  de  $\mathcal{H}_\pi^\infty$  et  $h$  dans  $H$  est une fonction  $C^\infty$  qui vérifie la relation de covariance pour  $B(\phi)$  et le caractère  $\chi_\phi$ .

Remarquons par un simple changement de variable que

$$T_{B(\phi),g \cdot B \cdot g^{-1}} \xi(h) = \int_{g^{-1} \cdot B(\phi) \cdot g / g^{-1} \cdot B(\phi) \cdot g \cap B} \xi(hgu) \chi_\phi(u) d_{g^{-1} \cdot B(\phi) \cdot g, B}(u). \quad (25)$$

On va montrer que  $T_{B(\phi),g \cdot B \cdot g^{-1}} \xi$  est en fait un élément de  $S(H/B(\phi), \phi)$ , c'est à dire un vecteur  $C^\infty$  de la représentation induite  $\text{Ind}_{B(\phi)}^H \chi_\phi$ . Dans toute la suite on note  $B^g$  au lieu de  $g \cdot B \cdot g^{-1}$ .

### II-1.2 Proposition

Soit  $\phi = \text{Ad}^*(g)f/\mathfrak{h} \in \mathfrak{h}^*$ ,  $g \in G$  et  $B(\phi)$  une polarisation en  $\phi/\mathfrak{h}$ . Alors il existe une constante positive  $C$  et une semi norme continue  $P$  sur l'espace de Schwartz  $S(G/B, f)$  telles que pour tout  $\xi$  dans  $S(G/B, f)$  on a

$$\|T_{B(\phi),B^g} \xi\|_{L^2(H/B(\phi))} \leq CP(\xi).$$

En particulier  $T_{B(\phi),B^g} : S(G/B, f) \longrightarrow S(H/B(\phi), \phi)$  est une application linéaire continue et surjective.

### Preuve

On montre tout d'abord que pour tout  $\xi$  dans  $S(G/B, f)$  on a que

$$|T_{B(\phi),B^g} \xi|_\infty \leq C_1 P_1(\xi)$$

où  $C_1$  est une constante positive et  $P_1$  une semi norme sur l'espace de Schwartz  $S(G/B, f)$ .

On sait d'après (24) que

$$T_{B(\phi),B^g} \xi(h) = \int_{B(\phi)/B(\phi) \cap B^g} \xi(hug) \chi_\phi(u) d_{B(\phi),B^g}(u).$$

On refait maintenant un raisonnement analogue à celui de Lemme (I-2.2) qui est le suivant:

Soit  $\mathfrak{B} = (X_1, \dots, X_p)$  une base de Malcev de  $\mathfrak{h}$  relative à  $B^g \cap B(\phi)$  telle que  $\mathfrak{B}$  contienne une base de Malcev  $(X_{i_1}, \dots, X_{i_m})$  de  $B(\phi)$  relative à  $B(\phi) \cap B^g$ . On a pour tout  $h \in H$  que

$$\begin{aligned}
|T_{B(\phi), B^g} \xi(h)| &= \left| \int_{B(\phi)/B(\phi) \cap B^g} \xi(hug) \chi_\phi(u) d_{B(\phi), B^g}(u) \right| \\
&\leq \int_{B(\phi)/B(\phi) \cap B^g} |\xi(hug)| d_{B(\phi), B^g}(u) \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} |\xi(h \exp(t_1 X_{i_1}) \cdots \exp(t_m X_{i_m}) g)| dt_1 \cdots dt_m.
\end{aligned}$$

En écrivant  $h \cdot \exp(t_1 X_{i_1}) \cdots \exp(t_m X_{i_m}) = \exp(a_1 X_1) \cdots \exp(a_p X_p) \cdot b$  où  $b \in B^g \cap B(\phi)$  et les  $a_i$  sont des fonctions polynômiales en  $h$  et en  $t_1, \dots, t_m$  vérifiant

$$a_{i_1} = t_1 + a'_{i_1} \text{ où } a'_{i_1} \text{ ne dépend pas de } t_1, \dots, t_m, \text{ et de manière générale}$$

$$a_{i_j} = t_j + a'_{i_j} \text{ où } a'_{i_j} \text{ ne dépend pas de } t_j, \dots, t_m \text{ pour } j \in \{1, \dots, n\}.$$

On a que

$$\begin{aligned}
|T_{B(\phi), B^g} \xi(h)| &\leq \int_{\mathbb{R}^m} |\xi(\exp(a_1 X_1) \cdots \exp(a_p X_p) \cdot bg)| dt_1 \cdots dt_m \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} |\xi(\exp(b_1 X_1) \cdots \exp(t_1 X_{i_1}) \cdots \exp(t_m X_{i_m}) \cdots \exp(b_p X_p) g)| dt_1 \cdots dt_m
\end{aligned}$$

(pour certaines fonctions polynômiales  $b_j, j \notin \{i_1, \dots, i_m\}$  dans les variables  $(t_1, \dots, t_m)$ .)

$$\leq P_1(\xi) \int_{\mathbb{R}^m} \prod_{k=1}^m (1 + t_k^2)^{-1} dt_1 \cdots dt_m$$

où

$$\begin{aligned}
P_1(\xi) = \sup_{t_1, \dots, t_m, s_1, \dots, s_{p-m}} &\left( \prod_{i=1}^m (1 + t_i^2) |\xi(\exp(s_1 X_1) \cdots \exp(t_1 X_{i_1}) \right. \\
&\quad \left. \cdots \exp(t_m X_{i_m}) \cdots \exp(s_{m-p} X_p) g) \right|.
\end{aligned}$$

Soit maintenant  $Q$  un polynôme sans zéros sur  $H/B(\phi)$  telle que  $\frac{1}{Q}$  soit de carré intégrable.

On sait d'autre part que l'image de l'algèbre enveloppante  $u(\mathfrak{h})$  de  $\mathfrak{h}$  par  $\pi_\phi = \text{Ind}_{B(\phi)}^H \chi_\phi$  est l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients polynômiaux sur  $H/B(\phi)$ .

Il en découle qu'il existe  $v \in u(\mathfrak{h})$  tel que

$$d\pi_\phi(v) T_{B(\phi), B^g}(\xi) = T_{B(\phi), B^g}(d\pi(v)\xi) = Q \cdot T_{B(\phi), B^g} \xi.$$

On a que

$$\|T_{B(\phi), B^g} \xi\|_{L^2(H/B(\phi))}^2 = \int_{H/B(\phi)} |Q(h) T_{B(\phi), B^g} \xi(h)|^2 \frac{1}{Q^2(h)} d_{H, B(\phi)}(h)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{H/B(\phi)} |T_{B(\phi), B^g}(d\pi(v)\xi)(h)|^2 \frac{1}{Q^2(h)} d_{H, B(\phi)}(h) \\
&\leq |T_{B(\phi), B^g}(d\pi(v)\xi)|_\infty^2 \int_{H/B(\phi)} \frac{1}{Q^2(h)} d_{H, B(\phi)}(h) \\
&\leq C'_1 P_1^2((d\pi(v)\xi)) \leq CP^2(\xi)
\end{aligned}$$

pour une nouvelle semi norme continue  $P$  de Schwartz et une constante  $C$ , ce qui achève la preuve. ■

### II-1.3 Définitions

On note toujours  $\Omega_f$  l'orbite associée à la forme linéaire  $f$ . La paramétrisation de Pukanszky nous définit un difféomorphisme entre  $\Omega_f$  et  $\mathbb{R}^d$  où  $d = \dim \mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f)$  et toute fonction polynomiale sur  $\mathfrak{g}^*$  définit alors par restriction une fonction polynomiale sur  $\Omega_f$ .

Soit

$$(0) = \mathfrak{g}^n \subset \mathfrak{g}^{n-1} \subset \dots \subset \mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g},$$

une suite de Jordan-Hölder de  $\mathfrak{g}$ . Nous en extrayons une base  $\mathfrak{C} = (l_1, \dots, l_n)$  de Jordan-Hölder. A partir de  $\mathfrak{C}$  nous obtenons une base de Jordan-Hölder  $\mathfrak{D} = \{h_1, \dots, h_p\}$  de  $\mathfrak{h}$  et une base de Malcev  $\mathfrak{B} = \{b_r, \dots, b_1\}$  de  $\mathfrak{g}$  relative à  $\mathfrak{h}$  de la façon suivante. On regarde  $\mathfrak{g}^j + \mathfrak{h}$  par rapport à  $\mathfrak{g}^{j-1} + \mathfrak{h}$  et on suppose qu'on a déjà trouvé tous les vecteurs  $h_m, \dots, h_r$  de la base qui se trouvent dans  $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}^{j-1}$  et tous les vecteurs  $b_1, \dots, b_s$  qui se trouvent dans  $\mathfrak{g}^{j-1} + \mathfrak{h}$ .

Si  $\mathfrak{g}^j + \mathfrak{h} = \mathfrak{g}^{j-1} + \mathfrak{h}$ , alors il existe  $h_{r-1}$  dans  $\mathfrak{g}^j \cap \mathfrak{h}$  tel que  $h_{r-1} = l_j$  modulo un vecteur dans  $\mathfrak{g}^{j-1} \cap \mathfrak{h}$ . Si  $\mathfrak{g}^j + \mathfrak{h} \supsetneq \mathfrak{g}^{j-1} + \mathfrak{h}$  alors  $l_j \notin \mathfrak{h} + \mathfrak{g}^{j-1}$  et nous posons  $b_{s+1} = l_j$ .

Nous regardons maintenant  $\mathfrak{g}^*$  comme un  $\mathfrak{h}$  module et nous prenons comme base de Jordan-Hölder la base duale dans  $\mathfrak{g}^*$  de la base  $\{b_r, \dots, b_1, h_1, \dots, h_p\}$ . Posons

$$\mathfrak{g}_j = \text{vect}(\mathfrak{h}, b_1, \dots, b_j), \quad j = 1, \dots, r.$$

On note  $I^H = \{i_1 < i_2 < \dots < i_s\} \subset \{1, \dots, n\}$  l'ensemble indice de Pukanszky relative à l'action de  $H$  des éléments en position générale dans  $\Omega_f$  et  $\Omega_I$  l'ensemble des  $\phi$  dans  $\Omega_f$  qui admettent  $I^H$  comme ensemble indice,  $\Omega_I$  est un ouvert de Zarisky dans  $\Omega_f$ .



Soit encore

$$L_{\mathfrak{B}}^H = L^H = \left\{ j \in \{1, \dots, r\} \mid \text{pour presque tout } \phi \in \Omega_f, \text{ la } G_j - \text{orbite} \right. \\ \left. \text{de } \phi|_{\mathfrak{g}_j} \text{ est saturée par rapport à } \mathfrak{g}_{j-1} \right\}.$$

Nous allons désintégrer la représentation  $\pi|_H$  sur certaines parties  $\mathfrak{X}^{R, \mathfrak{B}}$  de  $\Omega_f$  qui ont la forme suivante. Ici  $R$  désigne une famille  $R_0, R_1, \dots, R_r$  de fonctions polynomiales définies sur  $\mathbb{R}^k$ , où  $k = \text{cardinal}(L^H)$ . Pour  $j > 0$ , il s'agit de fonctions polynomiales réelles, pour  $j = 0$ ,  $R_0(T), T \in \mathbb{R}^k$ , est une expression polynomiale en  $T$  d'éléments de  $\mathfrak{h}$ . Nous exigeons des fonctions  $R_j$  que pour  $j \notin L^H$ ,  $R_j(t_1, \dots, t_k)$  ne dépend que de  $(t_r, \dots, t_{j'})$ , où  $i_{j'} \geq j > i_{j'-1}$  et que pour tout  $i_j \in L^H$ ,  $R_{i_j}(t_1, \dots, t_k) = t_j$ . En outre posons

$$R(T) = R_0(T) \cdot \prod_{i=1}^r \exp(R_i(T)b_i), \quad T \in \mathbb{R}^k,$$

et

$$\mathfrak{X}^{R, \mathfrak{B}} = \{ Ad^*(R(T))f \mid T \in \mathbb{R}^k \}.$$

Nous remarquons que l'application  $\mathbb{R}^k \ni T \rightarrow Ad^*(R(T))f$  est injective.

Prenons sur  $\mathfrak{X}^{R, \mathfrak{B}}$  la mesure de Lebesgue  $dT = dt_1 dt_2 \dots dt_k$  que nous noterons  $d\lambda = d\lambda^{R, \mathfrak{B}}$ .

Nous disons que la famille  $R$  est adaptée à  $\mathfrak{B}$ .

Dans la suite nous serons souvent amenés à faire des changements de base de type

$$b'_j = \sum_{i=1}^j a_{i,j} b_i, \quad j = 1, \dots, k,$$

où  $a_{j,j} = 1$ . Nous trouverons alors une nouvelle famille de fonctions  $R'$ , telle que pour la nouvelle base  $\mathfrak{B}'$  les espaces  $\mathfrak{X}^{R, \mathfrak{B}}$  et  $\mathfrak{X}^{R', \mathfrak{B}'}$  coïncident ainsi que leurs mesures.

Soit  $\phi \rightarrow B(\phi), \phi \in \mathfrak{X}^{R, \mathfrak{B}}$  un choix lisse de polarisations en  $\phi$ . On note

$$\left( \int_{\mathfrak{X}^{R, \mathfrak{B}}}^{\oplus} \mathcal{H}_{\pi_\phi} d\lambda^{R, \mathfrak{B}}(\phi) \right)_C$$

l'ensemble des fonctions  $\psi : \mathfrak{X}^{R, \mathfrak{B}} \rightarrow \bigcup_{\phi \in \mathfrak{X}^{R, \mathfrak{B}}} L^2(H/B(\phi), \phi)$  continues et qui vérifient

$$\|\psi\|_2^2 = \int_{\mathfrak{X}^{R, \mathfrak{B}}} \|\psi(\phi)\|_{L^2(H/B(\phi))}^2 d\lambda^{R, \mathfrak{B}}(\phi) < \infty.$$

On définit  $\int_{\mathfrak{X}^{R, \mathfrak{B}}}^{\oplus} \mathcal{H}_{\pi_\phi} d\lambda^{R, \mathfrak{B}}(\phi)$  comme étant le complété de  $\left( \int_{\mathfrak{X}^{R, \mathfrak{B}}}^{\oplus} \mathcal{H}_{\pi_\phi} d\lambda^{R, \mathfrak{B}}(\phi) \right)_C$  pour la norme  $\|\cdot\|_2$ .

### II-1.4 Théorème

Soit  $G$  un groupe de Lie nilpotent connexe simplement connexe d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ .  $H$  étant un sous groupe de Lie fermé connexe de  $G$  de sous algèbre de Lie  $\mathfrak{h}$ ,  $\pi$  une représentation unitaire et irréductible de  $G$  liée à une forme linéaire  $f \in \mathfrak{g}^*$ , soit  $\Omega_\pi$  l'orbite coadjointe associée à  $f$ . Etant donnée une base  $\mathfrak{B}$  de Malcev relative à  $\mathfrak{h}$  et  $\mathfrak{X}^{R,\mathfrak{B}}$  le fermé de Zariski de  $\Omega_\pi$  décrit dans (II-1.1) relativement à cette base,  $d\lambda^{R,\mathfrak{B}}$  la mesure sur  $\mathfrak{X}^{R,\mathfrak{B}}$ , alors on a

$$\pi|_H \simeq \int_{\mathfrak{X}^{R,\mathfrak{B}}}^{\oplus} \sigma_\phi d\lambda^{R,\mathfrak{B}}(\phi) \quad (26)$$

où pour  $\phi \in \mathfrak{X}^{R,\mathfrak{B}}$ ,  $\sigma_\phi$  est la représentation unitaire et irréductible associée à  $\phi|_{\mathfrak{h}} \in \mathfrak{h}^*$ .

### Preuve

On fait une récurrence sur la dimension de  $\mathfrak{g}$ . Soit  $G_0 = \exp(\mathfrak{g}_0)$  où  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_{r-1}$ . On a que

$$H \subset G_0 \subset G.$$

On désigne par  $\mathfrak{B}_0$  la base de Malcev de  $\mathfrak{g}_0$  relative à  $\mathfrak{h}$ . Si  $r \in L^H$ , on note pour  $t \in \mathbb{R}$ ,  $R_t$  la famille de fonctions

$$R_j^t(t_1, \dots, t_{k-1}) = R_j(t_1, \dots, t_{k-1}, t), \quad j = 1, \dots, r-1.$$

définies sur  $\mathbb{R}^{k-1}$ . Il nous faut étudier les deux situations suivantes:

(1) Les  $G$ -orbites en position générales sont saturées par rapport à  $\mathfrak{g}_0$ . Alors on a que  $r \in L^H$  et

$$\mathfrak{X}_{|\mathfrak{g}_0}^{R,\mathfrak{B}} = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \mathfrak{X}^{R^t, \mathfrak{B}_0}$$

par suite la mesure  $\lambda^{R,\mathfrak{B}}$  sur  $\mathfrak{X}^{R,\mathfrak{B}}$  coïncide avec  $\lambda^{R^t, \mathfrak{B}_0} \otimes dt$  sur  $\bigcup_{t \in \mathbb{R}} \mathfrak{X}^{R^t, \mathfrak{B}_0}$ .

D'autre part on sait que, en posant  $f_t = Ad^*(\exp(tb_r))f|_{\mathfrak{g}_0}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\pi|_H = \left( \pi|_{G_0} \right)|_H;$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence sur  $G_0$  on obtient

$$\pi|_H \simeq \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} (\sigma_{f_t}) dt \simeq \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \int_{\mathfrak{X}^{R^t, \mathfrak{B}_0}} \sigma_{\phi_t|_{\mathfrak{h}}} d\lambda^{R^t, \mathfrak{B}_0}(\phi_t) dt$$

$$\simeq \int_{\mathfrak{X}^{R, \mathfrak{B}}}^{\oplus} \sigma_{\phi} d\lambda^{R, \mathfrak{B}}(\phi).$$

(2) Les  $G$ -orbites ne sont pas saturées par rapport à  $\mathfrak{g}_0$  et donc  $r \notin L^H$ . Il en résulte que la dernière composante de la fonction  $R$  est constante. Dans ce cas on a que  $\pi|_{G_0} = \pi_{f_0} = \pi_0$  et que si  $p_0 : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}_0^*$  est la projection canonique, alors  $p_0 : \Omega_f \rightarrow \Omega_{f_0}$  est un difféomorphisme qui respecte les mesures. En outre

$$\mathfrak{X}^{R, \mathfrak{B}} \simeq \mathfrak{X}^{R_0, \mathfrak{B}_0}$$

où  $R_0 = \{R_1, \dots, R_{r-1}\}$  et où  $\mathfrak{X}^{R_0, \mathfrak{B}_0} = Ad^*(R(\mathbb{R}^k))f_0$  avec  $f_0 = Ad^*(\exp(R_r(0)b_r)f)|_{\mathfrak{g}_0}$ . On a finalement que

$$\pi|_H \simeq \pi_0|_H \simeq \int_{\mathfrak{X}^{R_0, \mathfrak{B}_0}}^{\oplus} \sigma_{\phi} d\lambda^{R_0, \mathfrak{B}_0}(\phi) \simeq \int_{\mathfrak{X}^{R, \mathfrak{B}}}^{\oplus} \sigma_{\phi} d\lambda^{R, \mathfrak{B}}(\phi)$$

ce qui achève la démonstration. ■

## II-2. Construction de l'opérateur d'entrelacement .

### II-2.1 Construction de polarisations et de bases de Malcev.

#### Définitions.

Nous partons comme avant d'une base de Jordan-Hölder  $\mathfrak{C} = \{l_1, \dots, l_n\}$  de  $\mathfrak{g}$ , ce qui nous donne la base de Jordan-Hölder  $\mathfrak{D} = \{h_1, \dots, h_p\}$  de  $\mathfrak{h}$  et la base de Malcev  $\mathfrak{B} = \{b_r, \dots, b_1\}$  de  $\mathfrak{g}$  relative à  $\mathfrak{h}$ . On va construire maintenant une polarisation  $B = \exp(\mathfrak{b})$ ,  $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$  en  $f$ , des polarisations  $B(\phi) = \exp(\mathfrak{b}(\phi))$ ,  $\mathfrak{b}(\phi) \subset \mathfrak{h}$  en  $\phi|_{\mathfrak{h}}$ ,  $\phi \in \mathfrak{X}^{R, \mathfrak{B}}$ , et finalement une base de Malcev de  $\mathfrak{h}$  relative à  $\mathfrak{b}(\phi)$ , ainsi qu'une base de Malcev de  $\mathfrak{b}(\phi)$  relative à  $\mathfrak{b}(\phi) \cap \mathfrak{b}^{\phi}$  où  $\mathfrak{b}^{\phi}$  est une polarisation en  $\phi$  qui sera définie correctement plus tard. Ces bases vont nous définir la mesure  $H$ -invariante sur  $H/B(\phi)$ , donc la norme de l'espace de la représentation  $\text{Ind}_{B(\phi)}^H \chi_{\phi|_{\mathfrak{h}}}$  et aussi l'opérateur infinitésimal d'entrelacement  $T_{\phi}$  qu'on décrira plus tard.

#### **A.**

On va utiliser dans la suite une polarisation  $B$  en  $f$  construite dans le chapitre I:

Notons  $\mathfrak{a}(f)$  le plus grand idéal de  $\mathfrak{g}$  contenue dans  $\mathfrak{g}(f)$ . Si  $\mathfrak{a}(f) \neq \mathfrak{g}$ , il existe alors un

indice  $j$  dans  $\{1, \dots, n\}$  tel que  $l_j \notin \mathfrak{a}(f)$  et  $l_k \in \mathfrak{a}(f)$  pour tout  $k > j$ . Soit alors

$$m = \sup\{i \in \{1, \dots, n\} \text{ tel que } \langle f, [l_j, l_i] \rangle \neq 0\}.$$

Alors l'espace  $\mathfrak{g}_1(f) = \{u \in \mathfrak{g} \text{ tel que } \langle f, [l_j, u] \rangle = 0\}$ , est un idéal de codimension 1 dans  $\mathfrak{g}$ . De plus, si on pose

$$l_k^1 = l_k - \frac{\langle f, [l_j, l_k] \rangle}{\langle f, [l_j, l_m] \rangle} l_m, \text{ pour } k \in \{1, \dots, m-1\}$$

$$l_{k-1}^1 = l_k, \text{ pour } k \in \{m+1, \dots, n\},$$

alors  $\mathcal{C}' = \{l_m, l_1^1, \dots, l_{n-1}^1\}$  est une nouvelle base de Jordan-Hölder de  $\mathfrak{g}$  et  $\mathcal{C}_1 = \{l_1^1, \dots, l_{n-1}^1\}$  est une base de Jordan-Hölder de  $\mathfrak{g}_1(f)$  (cf.[32]).

On recommence cette construction pour  $\mathfrak{g}_1(f)$  et  $f_1 = f|_{\mathfrak{g}_1(f)}$ . On obtient ainsi un processus qui nous permet de construire à partir d'une base de Jordan-Hölder de  $\mathfrak{g}_s(f)$  un idéal  $\mathfrak{g}_{s+1}(f)$  de codimension 1 dans  $\mathfrak{g}_s(f)$ , une base de Jordan-Hölder de  $\mathfrak{g}_{s+1}(f)$ . Ce processus s'arrête lorsqu'il existe  $d \in \mathbb{N}$  tel que

$$\mathfrak{a}(f_d) = \mathfrak{g}_d(f).$$

Il a été prouvé qu'alors  $\mathfrak{g}_d(f)$  est une polarisation en  $f$  (cf.[32]), et elle coïncide avec celle de Michèle Vergne décrite plus haut en (I-1.2) pour la base  $\mathcal{C}$  et aussi pour la base  $\mathcal{C}'$ .(cf. [4]).

Dans toute la suite on note  $B$  la polarisation qu'on vient de décrire .

## B.

Pour chaque  $\phi \in \mathfrak{X}^{R, \mathfrak{B}}$  on note  $\mathfrak{b}^\phi$  la sous-algèbre  $\mathfrak{b}^\phi = \text{Ad}(R(T_\phi))\mathfrak{b}$ , où  $T_\phi$  est l'unique élément de  $\mathbb{R}^k$ , tel que  $\text{Ad}^*(R(T_\phi))f = \phi$ . Le sous groupe  $B^\phi$  associé à  $\mathfrak{b}^\phi$  vérifie

$$B^\phi = R(T_\phi) \cdot B \cdot R(T_\phi)^{-1}.$$

En fait  $B^\phi$  est une polarisation en  $\phi$ . En outre la polarisation  $B(\phi)$  sera la polarisation de Vergne en  $\phi|_{\mathfrak{h}}$  pour la base de Jordan-Hölder  $\mathcal{D}$  de  $\mathfrak{h}$ .

Nous allons déterminer toutes nos bases de Malcev  $\mathfrak{X}(\phi)$  de  $\mathfrak{h}$  relative à  $\mathfrak{b}(\phi)$  et  $\mathfrak{Y}(\phi)$  de  $\mathfrak{b}(\phi)$  relative à  $\mathfrak{b}(\phi) \cap \mathfrak{b}^\phi$  par récurrence sur  $\dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ .

Posons  $Y = l_j$ , où comme plus haut,  $j$  est le plus grand indice tel que  $l_j \notin \mathfrak{a}(f)$ .

### B-1.

Supposons d'abord que  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_1 = \{U \in \mathfrak{g} \mid f([U, Y]) = 0\}$ . Nous changeons comme en haut la base  $\mathcal{C}$  en  $\mathcal{C}'$ . Alors  $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$  et donc  $B(\phi) = B'(\phi) = \exp(\mathfrak{b}'(\phi))$  pour tout  $\phi \in \mathfrak{X}^{R, \mathfrak{B}}$ .

Il est facile de voir que pour la nouvelle base de Malcev  $\mathfrak{B}'$  de  $\mathfrak{g}$  relative à  $\mathfrak{h}$  construite à partir de  $\mathfrak{C}'$ , il existe une famille  $R' = (R'_0, \dots, R'_k)$  d'applications polynomiales, qui est adaptée à l'ensemble indice  $L_{\mathfrak{B}'}^H$ , telle que  $\mathfrak{X}^{R', \mathfrak{B}'} = \mathfrak{X}^{R, \mathfrak{B}}$  et telle que  $dT' = dT$ . Nous pouvons donc oublier la base  $\mathfrak{C}$  et poser  $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}'$ . Donc  $l_2, \dots, l_{r-1} \in \mathfrak{g}_1$  et  $l_1 \notin \mathfrak{g}_1$ . L'indice  $r$  est maintenant dans  $L^H$ , ainsi

$$\mathfrak{X}_{|\mathfrak{g}_1}^{R, \mathfrak{B}} = \cup_{t \in \mathbb{R}} \mathfrak{X}^{R_t, \mathfrak{B}_1},$$

où  $B_1 = \{b_1, \dots, b_{r-1}\}$  et où  $R_t = (R_0(-, \dots, -, t), \dots, R_{r-1}(-, \dots, -, t)), t \in \mathbb{R}$ . Nous appliquons maintenant l'hypothèse de récurrence aux formes linéaires  $f_t = Ad^*(\exp(tl_1))f_{|\mathfrak{g}_1}$ , ce qui nous donne les bases  $\mathfrak{X}(\phi)$  et  $\mathfrak{Y}(\phi)$  pour tout  $\phi \in \mathfrak{X}^{R, \mathfrak{B}}$  dans ce cas.

### B-2.

Supposons maintenant que  $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{g}_1$  et qu'il existe  $k > j$ , tel que  $l_k \notin \mathfrak{h}$ , mais  $l_{k'} \in \mathfrak{h}$  pour  $k' > k$ . Nous pouvons donc supposer que tous les éléments de  $\mathfrak{B}$  se trouvent dans  $\mathfrak{g}_1$  en les corrigeant si nécessaire par un élément de  $\mathfrak{h}$ . Soit  $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{R}l_k$ . Alors  $\mathfrak{D}' = \mathfrak{D} \cup \{l_k\}$  et donc

$$B'(\phi) = B(\phi) \cdot \exp(\mathbb{R}l_k), \quad B(\phi) = B'(\phi) \cap H.$$

Nous avons par l'hypothèse de récurrence une base de Malcev  $\mathfrak{X}'(\phi) = \{X_1(\phi), \dots\}$  de  $\mathfrak{h}'$  relative à  $\mathfrak{b}'(\phi)$ , une base de Malcev  $\mathfrak{Y}'(\phi) = \{Y_1'(\phi), \dots\}$  de  $\mathfrak{b}'(\phi)$  relative à  $\mathfrak{b}'(\phi) \cap \mathfrak{b}^\phi$  et une base de Malcev  $\mathfrak{U}'(\phi) = \{U_1, \dots\}$  de  $\mathfrak{b}^\phi$  relative à  $\mathfrak{b}^\phi \cap \mathfrak{b}'(\phi)$ , les indices indiquant que les choix ont été faits pour  $\mathfrak{h}'$ . Nous ajoutons un multiple de  $l_k$  à tous les vecteurs  $X_j'(\phi)$  pour obtenir des vecteurs  $X_j(\phi)$  dans  $\mathfrak{h}$  et nous prenons pour  $\mathfrak{X}(\phi)$  les vecteurs  $\{X_1(\phi), \dots, l_k\}$ . De même, nous changeons les  $Y_j'(\phi)$  en  $Y_j(\phi) \in \mathfrak{h}$  et comme  $l_k \in \mathfrak{b}^\phi \cap \mathfrak{b}'(\phi)$  nous obtenons alors une base de Malcev  $\mathfrak{Y}(\phi) = \{Y_1(\phi), \dots\}$  de  $\mathfrak{b}(\phi)$  relative à  $\mathfrak{b}(\phi) \cap \mathfrak{b}^\phi$ .

### C.

Supposons que  $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{g}_1$ , et que  $Y, l_k \in \mathfrak{h}$  pour tout  $k > j$ . Nous prenons  $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_1$ . Nous remplaçons  $\mathfrak{C}$  par  $\mathfrak{C}'$  et nous pouvons donc supposer que  $l_1 \in \mathfrak{h}$ . Comme  $\mathfrak{b}(\phi)$  et  $\mathfrak{b}$  sont contenus dans  $\mathfrak{g}_1$ , l'hypothèse de récurrence pour  $\mathfrak{h}_1$  et  $\mathfrak{g}_1$  nous procure les bases  $\mathfrak{Y}(\phi) = \mathfrak{Y}_1(\phi)$  et  $\mathfrak{X}_1(\phi)$ . En outre nous prenons pour base  $\mathfrak{X}(\phi)$  l'ensemble  $\{l_1\} \cup \mathfrak{X}_1(\phi)$ . Remarquons que le vecteur  $X_1(\phi)$  ne dépend pas de  $\phi$ .

### D.

Supposons que  $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{g}_1$ , que  $l_{j+1}, \dots, l_n \in \mathfrak{a}(f)$  et que  $Y \notin \mathfrak{h}$ . Soit  $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{R}Y$  et  $\mathfrak{D}' = \mathfrak{D} \cup \{Y\}$ . Alors la polarisation  $\mathfrak{b}'(\phi)$  en  $\phi|_{\mathfrak{h}'}$  est contenu dans  $\mathfrak{g}_1$  et le stabilisateur de  $\phi|_{\mathfrak{h}'}$  est contenu dans  $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_1$ . Donc  $\mathfrak{b}(\phi) \subset \mathfrak{h}$  n'est pas contenu dans  $\mathfrak{g}_1$ , car  $Y$  n'est pas dans le stabilisateur de  $\phi|_{\mathfrak{h}}$ . Ainsi

$$B(\phi) = (B'(\phi) \cap H) \cdot \exp(\mathbb{R}X_0(\phi)),$$

où  $X_0(\phi)$  est un élément quelconque du stabilisateur de  $\phi|_{\mathfrak{h}}$  qui vérifie  $\phi([X(\phi), Y]) \neq 0$ . En outre nous pouvons supposer que  $\mathfrak{X}'(\phi)$  et  $\mathfrak{Y}'(\phi) \subset \mathfrak{h}$ . En plus nous savons d'après (II-2.1, B-2) que  $X'_1(\phi)$  ne dépend pas de  $\phi$  et que  $X'_j(\phi) \in \mathfrak{g}_1$  pour tout  $j > 1$ . Ceci nous donne la base de Malcev  $\mathfrak{X}(\phi) = \{X'_2(\phi), \dots\}$  de  $\mathfrak{h}$  relative à  $\mathfrak{b}(\phi)$ .

Soit  $Y_1(\phi)$  un vecteur du stabilisateur de  $\phi|_{\mathfrak{h}}$  qui vérifie  $\phi([Y_1(\phi), Y]) = |\alpha|^{\frac{1}{2}}$ , où  $\alpha = \phi([X'_1(\phi), Y]) \neq 0$ . Comme

$$\begin{aligned} B(\phi)/B(\phi) \cap B^\phi &\simeq (B'(\phi) \cap H/B'(\phi) \cap B^\phi \cap H) \cdot \exp(\mathbb{R}Y_1(\phi)) \\ &\simeq (B'(\phi)/B'(\phi) \cap B^\phi) \cdot \exp(\mathbb{R}Y_1(\phi)) \end{aligned}$$

nous pouvons prendre comme base de Malcev de  $\mathfrak{b}(\phi)$  relative à  $\mathfrak{b}(\phi) \cap \mathfrak{b}^\phi$  la base  $\mathfrak{Y}(\phi) = \{Y_1(\phi)\} \cup \mathfrak{Y}'(\phi)$ .

## II-2.2 Description de l'opérateur d'entrelacement

Nous allons décrire maintenant un opérateur d'entrelacement  $U$  pour la désintégration centrale de  $\pi_f|_H$ . Nous écrivons  $\sigma_{\phi, B(\phi)}$  pour la représentation irréductible  $\text{Ind}_{B(\phi)}^H \chi_\phi$  de  $H$  ( $\phi \in \Omega_f$ ).

Rappelons que pour  $\phi \in \Omega_f$ , l'opérateur  $T_\phi = T_{B(\phi), B^\phi}$  envoie  $S(G/B, f)$  sur  $S(H/B(\phi), \phi|_{\mathfrak{h}})$ . Pour  $\xi \in S(G/B, f)$ , la fonction  $T_\phi \xi$ , qui est définie pour tout  $h \in H$  par

$$T_\phi \xi(h) = \int_{B(\phi)/B(\phi) \cap B^\phi} \xi(hug_\phi) \chi_\phi(u) d_{B(\phi), B^\phi}(u), \quad (27)$$

où  $g_\phi = R(T_\phi)$  et où  $T_\phi$  est l'unique élément de  $\mathbb{R}^k$ , tel que  $\phi = \text{Ad}^*(R(T_\phi)f)$ . De façon plus générale, on peut définir pour tout  $g \in G$  et  $\xi \in S(G/B, f)$  la fonction  $T_g \xi$  sur  $H$  par

$$T_g \xi(h) = \int_{B(\phi_g)/B(\phi_g) \cap B^g} \xi(hug) \chi_{\phi_g}(u) d_{B(\phi_g), B^g}(u), \quad h \in H, \quad (28)$$

où  $\phi_g = \text{Ad}^*(g)f$ . On vérifie facilement la relation de covariance suivante

$$T_{h_0 \cdot g} \xi(h) = T_g(\xi)(h \cdot h_0), \quad h, h_0 \in H, g \in G.$$

Enonçons maintenant notre théorème principal:

## II-2.3 Théorème

Soit  $G$  un groupe de Lie nilpotent connexe simplement connexe d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  et soit  $H$  un sous groupe de Lie fermé connexe de  $G$  de sous algèbre de Lie  $\mathfrak{h}$ . Soit  $\pi$  une représentation unitaire et irréductible de  $G$  liée à une forme linéaire  $f \in \mathfrak{g}^*$ . Soit  $\mathfrak{C} = \{l_1, \dots, l_n\}$  une base

de Jordan-Hölder de  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{B}$  la base de Malcev de  $\mathfrak{g}$  relative à  $\mathfrak{h}$ . Soit  $\mathfrak{X}^{R,\mathfrak{B}}$  la partie fermée de  $\Omega_f$  décrite dans (II-1.3) avec sa mesure  $d\lambda^{R,\mathfrak{B}}$ .

Si  $B$  désigne l'élément de  $M(f, \mathfrak{g})$  décrit en (II-2,A), et si les mesures sur  $H/B(\phi)$  et sur  $B(\phi)/B(\phi) \cap B^\phi$  sont normalisées à l'aide des bases constuites dans (II-2,B), alors l'application

$$U : S(G/B, f) \longrightarrow \int_{\mathfrak{X}^{R,\mathfrak{B}}}^{\oplus} \mathcal{H}_{\sigma_\phi} d\lambda^{R,\mathfrak{B}}(\phi)$$

donnée pour tout  $\xi$  dans  $S(G/B_0, f)$  par :

$$U(\xi)(\phi) = T_\phi \xi$$

définit un opérateur linéaire d'entrelacement isométrique de

$$\pi|_H \simeq \int_{\mathfrak{X}^{R,\mathfrak{B}}}^{\oplus} \sigma_{\phi, B(\phi)} d\lambda^{R,\mathfrak{B}}(\phi). \quad (29)$$

### Preuve

On raisonne par récurrence sur  $\dim G + \dim G/H$ . Notre opérateur  $U$  est formellement un opérateur d'entrelacement. Il suffit donc de prouver que  $U$  est une isométrie.

On garde la base de Jordan-Hölder  $(l_1, \dots, l_n)$  de  $\mathfrak{g}$  telle que  $l_n$  soit central. On sait qu'il existe  $j$  dans  $\{1, \dots, n\}$  tel que  $l_j = Y \notin \mathfrak{a}(f)$  et  $l_k \in \mathfrak{a}(f)$  pour tout  $k > j$ , on pose alors comme avant

$$\mathfrak{g}_1 = \{U \in \mathfrak{g} \text{ tel que } \langle f, [Y, U] \rangle = 0\},$$

$\mathfrak{g}_1$  est un idéal de codimension 1 dans  $\mathfrak{g}$ . Soit  $G_1 = \exp(\mathfrak{g}_1)$ . Par définition de  $B$  on a que  $B \subset G_1$ .

Nous allons utiliser les notations du paragraphe (II-2.1).

On doit étudier les cas possibles suivants:

Cas 1 :  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_1$ .

Dans cette situation nous pouvons supposer que presque toutes les  $G$ -orbites sont saturées par rapport  $\mathfrak{g}_1$  et que

$$\mathfrak{X}_{\mathfrak{g}_1}^{R,\mathfrak{B}} = \cup_{t \in \mathbb{R}} \mathfrak{X}^{R_t, \mathfrak{B}_1}.$$

Posons pour  $\xi \in S(G/B, f)$  et  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\xi^t(g_1) = \xi(\exp(tl_1)g_1)$$

et

$$\xi_t(g_1) = \xi(g_1 \exp(tl_1)),$$

$g_1 \in G_1$ . En outre soit  $f_t = \left( Ad^*(\exp(tl_1))f \right)_{|\mathfrak{g}_1}$ ,  $B_t = \exp(Ad(\exp(tl_1))B)$  et nous écrivons  $\phi_t$  pour les éléments de  $\left( Ad^*(R(\mathbb{R}^{k-1} \times \{t\}))f \right)_{|\mathfrak{g}_1}$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} \|U(\xi)\|_2^2 &= \int_{\mathfrak{X}^{R, \mathfrak{B}}} \|T_\phi \xi\|^2 d\lambda^{R, \mathfrak{B}}(\phi) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathfrak{X}^{R_t, \mathfrak{B}_1}} \|T_{\phi_t} \xi_t\|_{L^2(H/B(\phi_t), \phi_t)}^2 d\lambda^{R_t, \mathfrak{B}_1}(\phi_t) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \|\xi_t\|_{L^2(G_1/B_t, f_t)}^2 dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \|\xi^t\|_{L^2(G_1/B, f)}^2 dt \\ &= \|\xi\|_{L^2(G/B, f)}^2. \end{aligned}$$

Cas 2 :  $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{g}_1$  et il existe  $k > j$  tel que  $l_k \notin \mathfrak{h}, l_{k'} \in \mathfrak{h}$  pour tout  $k' > k$ .

Soit de nouveau  $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{R}l_k$ . Alors  $\mathfrak{B}' = \{b_2, \dots, b_r\}$  est la base de Malcev relative à  $\mathfrak{h}'$ ; En outre comme  $b_1 = l_k$ , l'application  $R$  est aussi adaptée à  $\mathfrak{B}'$ . Comme  $T_\phi \xi = T'_\phi \xi|_H$  pour tout  $\phi \in \mathfrak{X}^{R, \mathfrak{B}}$ ,  $\xi \in S(G/B, f)$ , où  $T'_\phi$  désigne l'opérateur infinitésimal pour  $H'$ , nous avons que

$$\|T_\phi(\xi)\|_{L^2(H/B(\phi), \phi)}^2 = \|T'_\phi(\xi)\|_{L^2(H'/B'(\phi), \phi)}^2$$

où

$$B'(\phi) = B(\phi) \cdot \exp(\mathbb{R}l_k)$$

et l'hypothèse de récurrence nous permet d'écrire que

$$\begin{aligned} \|U(\xi)\|_2^2 &= \int_{\mathfrak{X}^{R, \mathfrak{B}}} \|T_\phi \xi\|_{L^2(H/B(\phi), \phi)}^2 d\lambda^{R, \mathfrak{B}}(\phi) \\ &= \int_{\mathfrak{X}^{R, \mathfrak{B}'}} \|T_\phi \xi\|_{L^2(H'/B'(\phi), \phi)}^2 d\lambda^{R, \mathfrak{B}'}(\phi) \\ &= \|\xi\|_{L^2(G/B)}^2. \end{aligned}$$



Cas 3 :  $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{g}_1$ ,  $Y \in \mathfrak{h}$  et  $l_k \in \mathfrak{h}$  pour tout  $k > j$ .

On pose  $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_1$  et  $H_1 = \exp(\mathfrak{h}_1)$ .

Nous pouvons admettre que  $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{g}_1$ . Soit  $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B} \cup \{X\}$  où  $X = l_1 \in \mathfrak{h}$  est le premier vecteur de la base de Jordan-Hölder adaptée à  $\mathfrak{g}_1$ . Alors  $\mathfrak{B}_1$  est une base de Malcev de  $\mathfrak{g}$  relative à  $\mathfrak{h}_1$  et pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , la famille  $\mathfrak{B}^t$  des vecteurs  $b_1^t, \dots, b_r^t$ , où  $b_j^t = Ad(\exp(tX))b_j$ , ( $j = 1, \dots, r$ ), est une base de Malcev de  $\mathfrak{g}$  relative à  $\mathfrak{h}^t = Ad(\exp(tX))\mathfrak{h}$ . Nous posons

$$R^t(T) = \prod_{j=1}^r \exp(R_j(T)b_j^t) = \exp(tX) \cdot R(T) \cdot \exp(-tX),$$

$T \in \mathbb{R}^k$ . Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\xi \in S(G/H, f)$ ,  $\phi \in \mathfrak{X}^{R, \mathfrak{B}}$  nous avons pour  $h_1 \in H_1$  que

$$\begin{aligned} T_\phi(\xi)(\exp(tX)h_1) &= \int_{B(\phi)/B(\phi) \cap B^\phi} \xi(\exp(tX)h_1 u g_\phi) \chi_\phi(u) d_{B(\phi), B^\phi}(u) \\ &= \int_{B(\phi)/B(\phi) \cap B^\phi} \xi(\exp(tX)h_1 \exp(-tX) \exp(tX) u g_\phi) \chi_\phi(u) d_{B(\phi), B^\phi}(u) \\ &= \int_{B(\phi_t)/B(\phi_t) \cap B^{\phi_t}} \xi_t(\exp(tX)h_1 \exp(-tX) u g_{\phi_t}) \chi_{\phi_t}(u) d_{B(\phi_t), B^{\phi_t}}(u), \end{aligned}$$

où pour  $\phi \in \mathfrak{X}^{R, \mathfrak{B}}$ ,  $\phi_t = Ad^*(\exp(tX))\phi$  et où  $\xi_t(g) = \xi(g \exp(tX))$ . Soit aussi  $\xi^t(g) = \xi(\exp(tX) \cdot g)$ ,  $g \in G$ .

On a donc que

$$\|\xi\|_{L^2(G/B)}^2 = \int_{\mathbb{R}} \|\xi_t\|_{L^2(G_1/B_t, f_t)}^2 dt$$

on applique l'hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathfrak{X}^{R, \mathfrak{B}_t}} \|T_{\phi_t} \xi_t\|_{L^2(H_1^t/B(\phi_t), \phi_t)}^2 d\lambda^{R, \mathfrak{B}_t}(\phi_t) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathfrak{X}^{R, \mathfrak{B}}} \|T_\phi \xi^t\|_{L^2(H_1/B(\phi), \phi)}^2 d\lambda^{R, \mathfrak{B}}(\phi) dt \\ &= \int_{\mathfrak{X}^{R, \mathfrak{B}}} \|T_\phi \xi\|_{L^2(H/B(\phi), \phi)}^2 d\lambda^{R, \mathfrak{B}}(\phi) \\ &= \|U(\xi)\|_2^2. \end{aligned}$$

Cas 4 :  $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{g}_1$ ,  $Y \notin \mathfrak{h}$  mais  $l_k \in \mathfrak{h}$  pour tout  $k > j$ .

Nous pouvons admettre que  $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{g}_1$ . On pose  $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{R}Y$ ,  $H' = \exp(\mathfrak{h}_1)$ .

Comme  $b_1 = Y$ , les vecteurs  $\{b_2, \dots, b_r\}$  forment la base de Malcev de  $\mathfrak{g}$  relative à  $\mathfrak{h}'$ . En outre  $1 \in L^H$ , donc si  $R' = (R_2, \dots, R_k)$ , si

$$\mathfrak{X}_s^{R', \mathfrak{B}'} = \prod_{j=2}^k \exp(R_j(T')) f_s, s \in \mathbb{R},$$

où  $f_s = Ad^*(\exp(sY))f$ , alors

$$\mathfrak{X}^{R, \mathfrak{B}} = \cup_{s \in \mathbb{R}} \mathfrak{X}_s^{R', \mathfrak{B}'}$$

Ecrivons  $\phi_s$  pour les éléments de  $\mathfrak{X}_s^{R', \mathfrak{B}'}$  et  $\mathfrak{X}^{R', \mathfrak{B}'} = \mathfrak{X}_0^{R', \mathfrak{B}'}$ . Rappelons que pour tout  $\phi \in \Omega_f$ ,

$$Ad^*(\exp(sY))\phi = \phi + sX^*$$

(ici  $X^*$  désigne la forme linéaire qui vaut 0 sur  $\mathfrak{g}_1$  et 1 sur un vecteur  $X \in \mathfrak{g}$  pour lequel  $f([X, Y]) = 1$ ). Comme pour  $s \in \mathbb{R}$ ,  $\phi_s = Ad^*(\exp(sY))\phi$  pour un  $\phi \in \mathfrak{X}^{R', \mathfrak{B}'}$ , nous voyons que

$$\begin{aligned} T_{\phi_s} \xi(h) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{B(\phi_s) \cap G_1/B(\phi_s) \cap B^{\phi_s}} \xi(h \exp(tY_1(\phi_s))u_1 R(T_{\phi_s})) \\ &\quad \chi_{\phi_s}(\exp(tY_1(\phi_s))u_1) d_{B(\phi_s), B^{\phi_s}}(u_1) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{B(\phi) \cap G_1/B(\phi) \cap B^{\phi}} \xi(h \exp(tY_1(\phi))u_1 R(T_{\phi})) \chi_{\phi}(\exp(tY_1(\phi))u_1) d_{B(\phi), B^{\phi}}(u_1) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \chi_{\phi}(\exp(sY)) e^{ist\phi([Y_1(\phi), Y])} \end{aligned}$$

$$\left( \int_{B(\phi) \cap G_1/B(\phi) \cap B^{\phi}} \xi(h \exp(tY_1(\phi))u_1 R(T_{\phi})) \chi_{\phi}(\exp(tY_1(\phi))u_1) d_{B(\phi), B^{\phi}}(u_1) \right) dt.$$

Alors, d'après Plancherel, comme  $Y_1(\phi) = \alpha X_1(\phi)$ , où  $\alpha = |\phi([X_1(\phi), Y])|^{-\frac{1}{2}}$ ,

$$\int_{\mathbb{R}} \|T_{\phi_s} \xi\|_{L^2(H/B(\phi_s), \phi_s)}^2 ds = \frac{1}{|\alpha\phi([X_1(\phi), Y])|} \int_{H/B(\phi)} \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{B'(\phi)/B'(\phi) \cap B^{\phi}} \right.$$

$$\xi(h \exp(t\alpha X_1(\phi))u_1 R(T_{\phi})) \chi_{\phi}(u_1) d_{B(\phi), B^{\phi}}(\exp(tY_1(\phi))u_1) \left. \right|^2 dt d_{H, B(\phi)}(h)$$

$$= \frac{1}{|\alpha^2 \phi([X_1(\phi), Y])|} \int_{H'/B'(\phi)} |T'_{\phi} \xi(h')|^2 d_{H', B'(\phi)}(h') = \|T'_{\phi} \xi\|^2$$

d'après la définition de  $\alpha$ . Ainsi

$$\|U(\xi)\|^2 = \int_{\mathfrak{X}^{R, \mathfrak{B}}} \|T_{\phi} \xi\|_{L^2(H/B(\phi), \phi)}^2 d\lambda^{R, \mathfrak{B}}(\phi)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathfrak{X}_s^{R', \mathfrak{B}'}} \int_{H/B(\phi_s)} |T_{\phi_s} \xi(h)|^2 d_{H, B(\phi_s)}(h) d\lambda^{R', \mathfrak{B}'}(\phi_s) ds \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathfrak{X}_s^{R', \mathfrak{B}'}} \int_{H'/B'(\phi_s)} \int_{\mathbb{R}} |T_{\phi_s} \xi(h)|^2 d_{H', B'(\phi_s)}(h) dt d\lambda^{R', \mathfrak{B}'}(\phi_s) ds \\
&= \int_{\mathfrak{X}^{R', \mathfrak{B}'}} \|T'_\phi \xi\|_{L^2(H'/B'(\phi), \phi)}^2 d\lambda^{R', \mathfrak{B}'}(\phi) = \|\xi\|_{L^2(G/B, f)}^2
\end{aligned}$$

d'après l'hypothèse de récurrence. Ce qui termine la preuve du théorème **II-2.3**. ■

On va prouver maintenant que l'image de  $U$  est dense dans  $\int_{\mathfrak{X}^{R, \mathfrak{B}}}^{\oplus} L^2(H/B(\phi), \phi) d\lambda^{R, \mathfrak{B}}(\phi)$  et ceci fait l'objet de:

### II-2.4 Proposition

On garde les hypothèses du théorème (II-2.3). L'image de l'opérateur  $U$  est dense dans  $\int_{\mathfrak{X}^{R, \mathfrak{B}}}^{\oplus} L^2(H/B(\phi), \phi) d\lambda^{R, \mathfrak{B}}(\phi)$ .

### Preuve

On raisonne encore par récurrence sur  $\dim G + \dim G/H$ . On garde toutes les notations introduites dans le théorème (II-2.3) et on note dans toute la suite  $\text{im}(U)$  l'image de  $U$ .

Soit  $\eta$  un élément de  $\text{im}(U)^\perp$ . Nous devons montrer que  $\eta = 0$ .

On rappelle que

$$\mathfrak{g}_1 = \{u \in \mathfrak{g} \text{ tel que } \langle f, [Y, u] \rangle = 0\}$$

est un idéal de codimension 1 dans  $\mathfrak{g}$ . Soit  $G_1 = \exp(\mathfrak{g}_1)$ , on va étudier les cas possibles suivants:

Cas 1:  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_1$ .

On a alors que

$$\int_{\mathfrak{X}^{R, \mathfrak{B}}} \langle T_\phi \xi, \eta(\phi) \rangle_{L^2(H/B(\phi), \phi)} d\lambda^{R, \mathfrak{B}}(\phi) = 0$$

donc

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathfrak{X}^{R_t, \mathfrak{B}_t}} \langle T_{\phi_t} \xi, \eta(\phi_t) \rangle_{L^2(H/B(\phi_t), \phi_t)} d\lambda^{R_t, \mathfrak{B}_t}(\phi_t) dt = 0.$$

Soit  $\gamma \in S(\exp(\mathbb{R}X))$ , on remplace  $\xi$  par  $\gamma\xi$ , où

$$(\gamma\xi)(\exp(tb_r) \cdot h_1) = \gamma(t)\xi(\exp(tb_r) \cdot g_1).$$

On obtient

$$\int_{\mathbb{R}} \gamma(t) \int_{\mathfrak{X}^{R_t, \mathfrak{B}_t}} \langle T_{\phi_t} \xi_t, \eta(\phi_t) \rangle_{L^2(H/B(\phi_t), \phi_t)} d\lambda^{R_t, \mathfrak{B}_t}(\phi_t) dt = 0.$$

Donc pour presque tout  $t \in \mathbb{R}$  on a que

$$\int_{\mathfrak{X}^{R_t, \mathfrak{B}_t}} \langle T_{\phi_t} \xi_t, \eta(\phi_t) \rangle_{L^2(H/B(\phi_t), \phi_t)} d\lambda^{R_t, \mathfrak{B}_t}(\phi_t) = 0$$

et ainsi d'après l'hypothèse de récurrence  $\eta(\phi_t) = 0$  pour presque tout  $t \in \mathbb{R}$ , d'où le résultat.

Cas 2 :  $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{g}_1$ , il existe  $k > j$  tel que  $l_{k'} \in \mathfrak{h}$  pour tout  $k' > k$ , mais  $l_k \notin \mathfrak{h}$ .

On pose  $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{R}l_k$  et  $H' = \exp(\mathfrak{h}')$ . Comme  $\mathfrak{X}^{R, \mathfrak{B}} = \mathfrak{X}^{R', \mathfrak{B}'}$ , comme  $T_{\phi} \xi = T'_{\phi} \xi|_H$  et comme donc

$$\int_{\mathfrak{X}^{R, \mathfrak{B}}}^{\oplus} L^2(H/B(\phi), \phi) d\lambda^{R, \mathfrak{B}} = \int_{\mathfrak{X}^{R', \mathfrak{B}'}}^{\oplus} L^2(H'/B'(\phi), \phi) d\lambda^{R', \mathfrak{B}'},$$

l'hypothèse de récurrence pour  $H'$  nous permet de conclure.

Cas 3 :  $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{g}_1$ ,  $l_k \in \mathfrak{h}$ ,  $k > j$ , et  $Y \in \mathfrak{h}$ .

On pose  $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_1$  et  $H_1 = \exp(\mathfrak{h}_1)$ . Utilisant toujours les notations de 3.3 Cas 3, nous voyons que

$$\int_{\mathfrak{X}^{R, \mathfrak{B}}} \langle T_{\phi} \xi, \eta(\phi) \rangle_{L^2(H/B(\phi), \phi)} d\lambda^{R, \mathfrak{B}}(\phi) = 0$$

pour tout  $\xi \in L^2(G/B, f)$ . Donc

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathfrak{X}^{R_t, \mathfrak{B}_t}} \langle T_{\phi_t} \xi_t, \eta(\phi_t) \rangle_{L^2(H_1/B(\phi_t), \phi_t)} d\lambda^{R_t, \mathfrak{B}_t}(\phi_t) dt = 0.$$

Soit  $\gamma \in S(\exp(\mathbb{R}X))$ , on remplace  $\xi$  par  $\gamma\xi$  et on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} \gamma(t) \int_{\mathfrak{X}^{R_t, \mathfrak{B}_t}} \langle T_{\phi_t} \xi_t, \eta(\phi_t) \rangle_{L^2(H_1/B(\phi_t), \phi_t)} d\lambda^{R_t, \mathfrak{B}_t}(\phi_t) dt = 0.$$

Donc on a pour presque tout  $t \in \mathbb{R}$  que

$$\int_{\mathfrak{X}^{R_t, \mathfrak{B}_t}} \langle T_{\phi_t} \xi_t, \eta(\phi_t) \rangle_{L^2(H_1/B(\phi_t), \phi_t)} d\lambda^{R_t, \mathfrak{B}_t}(\phi_t) dt = 0.$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence, on trouve que  $\eta(\phi_t) = 0$  pour presque tout  $t \in \mathbb{R}$ , et donc  $\eta = 0$ .

Cas 4:  $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{g}_1$ ,  $l_k \in \mathfrak{h}$ ,  $k > j$ , et  $Y \notin \mathfrak{h}$ .

On pose  $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{R}Y$ ,  $H' = \exp(\mathfrak{h}')$ . Quite à changer  $Y_1(\phi)$  en y ajoutant un élément de  $\mathfrak{a}(f)$ , nous pouvons supposer que  $f(Y_1(\phi)) = 0$ . Alors d'après (II-2.3), Cas 4,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \langle T_{\phi_s} \xi, \eta(\phi_s) \rangle_{L^2(H/B(\phi_s), \phi_s)} ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{H/B(\phi)} e^{-ist\alpha\phi([X_1(\phi), Y])} \chi_{\phi}(\exp(tY_1(\phi))) \\ & \quad \left( \int_{\mathbb{R}} \int_{B(\phi) \cap G_1/B(\phi) \cap B^{\phi}} \xi(h \exp(tY_1(\phi))u_1 R(T_{\phi})) \chi_{\phi}(u_1) d_{B(\phi), B^{\phi}}(u_1) dt \right. \\ & \quad \left. \cdot \overline{\eta(\phi_s)(h)} d_{H, B(\phi)}(h) ds \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{H/B(\phi)} \left( \int_{B(\phi) \cap G_1/B(\phi) \cap B^{\phi}} \xi(h \exp(tY_1(\phi))u_1 R(T_{\phi})) \chi_{\phi}(\exp(tY_1(\phi))u_1) d_{B(\phi), B^{\phi}}(u_1) \right. \\ & \quad \left. \cdot \overline{q(\phi)(h \exp(tY_1(\phi)))} d_{H, B(\phi)}(h) dt \right) \\ & \quad \left( \text{où } q(\phi)(h \exp(tY_1(\phi))) = \int_{\mathbb{R}} \eta(\phi_s)(h) e^{-ist\alpha^2} ds, h \in H, t \in \mathbb{R}, \right) \\ &= \langle T'_{\phi} \xi, q(\phi) \rangle_{L^2(H'/B'(\phi), \phi)}. \end{aligned}$$

Donc pour tout  $\xi \in S(G/B, f)$ , on a que

$$0 = \langle U(\xi), \eta \rangle = \int_{\mathfrak{A}^{R', \mathfrak{B}'}} \langle T'_{\phi} \xi, q(\phi) \rangle_{L^2(H'/B'(\phi), \phi)} d\lambda^{R', \mathfrak{B}'}(\phi),$$

nous permet de conclure grâce à l'hypothèse de récurrence que

$$\int_{\mathfrak{A}^{R', \mathfrak{B}'}}^{\oplus} L^2(H'/B'(\phi), \phi) d\lambda^{R', \mathfrak{B}'} \ni q = 0,$$

et donc aussi que  $\eta = 0$ . ■

### II-3 L'opérateur inverse

Nous allons brièvement indiquer comment on peut décrire l'opérateur inverse  $V$  de  $U$ . Nous devons utiliser une base coexponentielle  $\mathfrak{E} = \{e_1, \dots, e_c, f_{c+1}, \dots, f_d\}$  de  $\mathfrak{g}$  relative à  $B$ ,

c.à d une base telle que l'application

$$\mathbb{R}^d \mapsto G/B; (t_1, \dots, t_d) \rightarrow \exp(t_d f_d) \cdots \exp(t_1 e_1) \cdot B$$

soit un difféomorphisme bipolynomial qui respecte les mesures. En outre  $\mathfrak{F} = \{f_{c+1}, \dots, f_d\}$  est contenu dans  $\mathfrak{h}$  et  $\mathfrak{E}_1 = \{e_1, \dots, e_c\}$  est choisie dans  $\mathfrak{g} \setminus (\mathfrak{b} + \mathfrak{h})$ .

Nous déterminerons cette base par récurrence sur  $\dim(G) + \dim(G/H)$ .

### Cas E-1

Soit  $\mathfrak{E}_1 \subset \mathfrak{g}_1$  déterminée par l'hypothèse de récurrence pour  $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h})$ . Posons  $\mathfrak{E} = \{e'_1\} \cup \mathfrak{E}_1$  où  $e'_1 \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{g}_1$  bien choisi.

### Cas E-2

Ici il suffit de prendre  $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}'$ , où  $\mathfrak{E}'$  est déterminé par l'hypothèse de récurrence pour  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}' = \mathfrak{h} + \mathbb{R}l_k)$ .

### Cas E-3

Nous prenons  $\mathfrak{E}' = \{e_1, \dots, e_c, f_{c+2}, \dots, f_d\} \subset \mathfrak{g}_1$ , déterminée par l'hypothèse de récurrence pour  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_1)$  et nous y ajoutons  $f_{c+1} = l_1 \in \mathfrak{h}$ .

### Cas E-4

Il suffit de prendre  $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}'$ , où  $\mathfrak{E}'$  est obtenue pour  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}' = \mathfrak{h} + \mathbb{R}l_j)$ .

Ecrivons pour chaque  $T_0 = (t_1, \dots, t_c) \in \mathbb{R}^c$

$$E(T_0) = \prod_{i=c}^1 \exp(t_i e_i)$$

et définissons par récurrence sur  $\dim(G) + \dim(G/H)$  pour chaque  $T_0$  une partie fermée  $R^0(T_0)$  de  $G$  et une mesure  $d\lambda^{T_0}$  sur  $R^0(T_0)$  telle que

$$R(\mathbb{R}^k) = \bigcup_{T_0 \in \mathbb{R}^c} R^0(T_0) \cdot E(T_0)$$

et telle que

$$d\lambda^{R, \mathfrak{B}} = dT_0 \otimes d\lambda^{T_0}$$

où  $d_{T_0}$  est la mesure de Lebesgue de  $\mathbb{R}^c$

### Cas E-1

Nous avons  $R(\mathbb{R}^k) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} R_t(\mathbb{R}^k)$ . Il suffit d'appliquer l'hypothèse de récurrence aux  $R_t$  pour  $T_0^t = (t_2, \dots, t_c) \in \mathbb{R}^{c-1}$ .

### Cas E-2

On prend  $R^0(T_0)$  e.c. obtenu pour  $(G, H')$ .

### Cas E-3

On prend  $R^0(T_0)$  e.c. obtenu pour  $(G_1, H_1)$ .

### Cas E-4

On a que  $R(t_1, t_2, \dots) = \exp(t_1 Y) \cdot R'(t_2, \dots)$ . Nous obtenons pour tout  $T_0$  nos objets  $R'^0(T_0)$  et  $d\lambda'^{T_0}$  de la façon suivante. Il suffit d'écrire  $R^0(T_0) = \exp(\mathbb{R}Y) \cdot R'^0(T_0)$  et  $d\lambda^{T_0} = d\lambda'^{T_0} \otimes \beta ds$ , où  $\beta = (f, [l_1, Y])^{-1}$ .

Utilisons la notation suivante. Désignons par

$$S(\mathfrak{X}^{R, \mathfrak{B}}) = \int_{\mathfrak{X}^{R, \mathfrak{B}}}^{\oplus} S(H/B(\phi), \phi) d\lambda^{R, \mathfrak{B}}(\phi)$$

l'espace des applications continues

$$K : \mathfrak{X}^{R, \mathfrak{B}} \mapsto \bigcup_{\phi} S(H/B(\phi), \phi); K(\phi) \in S(H/B(\phi), \phi), \forall \phi,$$

qui sont contenues dans  $\int_{\mathfrak{X}^{R, \mathfrak{B}}}^{\oplus} L^2(H/B(\phi), \phi) d\lambda^{R, \mathfrak{B}}(\phi)$ .

Posons pour  $K \in S(\mathfrak{X}^{R, \mathfrak{B}})$ ,  $T_0 = (t_1, \dots, t_c)$ ,

$$\begin{aligned} & V(K) \left( \exp(s_d f_d) \cdots \exp(s_{c+1} f_{c+1}) \exp(t_c e_c) \cdots \exp(t_1 e_1) \cdot b \right) \\ &= \chi_f(b^{-1}) \int_{R^0(T_0)} K(Ad^*(S) Ad^*(E(T_0)) f) (\exp(s_d f_d) \cdots \exp(s_{c+1} f_{c+1})) d\lambda^{T_0}(S), \quad (30) \end{aligned}$$

pour tout  $t_1, \dots, t_c, s_{c+1}, \dots, s_d \in \mathbb{R}, b \in B$ .

**II-3.2 Proposition**

Pour tout  $K \in S(\mathfrak{X}^{R,\mathfrak{B}})$ ,  $V(K) \in L^2(G/B, f)$  et  $\|V(K)\|_{L^2(G/B, f)} = \|K\|_2$ . En plus,

$$V \circ U = Id_{L^2(G/B, f)}.$$

$V$  est alors un nouvel opérateur linéaire d'entrelacement isométrique de (29).

**Preuve**

Nous démontrons ici seulement l'égalité  $V \circ U = Id_{L^2(G/B, f)}$ . On en déduit facilement que  $V$  est une isométrie.

Nous procédons comme toujours par une récurrence sur  $\dim G + \dim G/H$  et nous utiliserons les notations de la preuve de (II-2.3).

**Cas E-1**

Rappelons que  $\mathfrak{X}_{\mathfrak{g}_1}^{R,\mathfrak{B}} = \cup_t \mathfrak{X}^{R_t, \mathfrak{B}_t}$ . En outre pour  $\xi \in S(G/B, f)$ ,  $g_1 \in G_1$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$V \circ U(\xi)(g_1 \cdot \exp(tl_1)) = V_t \circ U_t(\xi_t)(g_1) = \xi_t(g_1) = \xi(g_1 \cdot \exp(tl_1)),$$

où  $U_t$  désigne l'opérateur d'entrelacement défini pour  $(G_1, \mathfrak{h})$  et  $Ad^*(\exp(tl_1))f|_{\mathfrak{g}_1}$  et où

$$V_t : S(\mathfrak{X}^{R_t, B_t}) \mapsto L^2(G_1/B, f_1)$$

est l'opérateur inverse de  $U_t$  d'après l'hypothèse de récurrence.

**Cas E-2**

Comme  $U'(\xi)|_H = U(\xi)$  pour  $\xi \in S(G/B, f)$ , et comme  $V(K) = V'(K')$  pour tout  $K \in S(\mathfrak{X}^{R,\mathfrak{B}})$ ,  $K' \in S(\mathfrak{X}^{R',\mathfrak{B}'})$  tels que  $K'(\phi)|_H = K(\phi)$ ,  $\phi \in \mathfrak{X}^{R,\mathfrak{B}}$ , on voit que

$$V \circ U = V' \circ U' = Id_{L^2(G/B, f)}.$$

**Cas E-3**

Soit  $U_1$  l'opérateur défini pour  $(G_1, H_1)$ . Alors pour  $\xi \in S(G/B, f)$ ,  $K \in S(\mathfrak{X}^{R,\mathfrak{B}})$  on a que  $U(\xi)_t = U_1(\xi_t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et si  $V_1$  désigne l'opérateur inverse de  $U_1$ , alors  $V_1(K_t) = V(K)_t$ . Ici  $K_t$  est défini par

$$K_t(\phi)(g_1) = K(\phi)(\exp(tl_1) \cdot g_1), \quad g_1 \in G_1, \phi \in \mathfrak{X}^{R,\mathfrak{B}}.$$



Ainsi  $V \circ U(\xi)(g_1 \cdot \exp(tl_1)) = V_1 \circ U_1(\xi_t)(g_1) = \xi_t(g_1) = \xi(g_1 \cdot \exp(tl_1))$ .

#### Cas E-4

Comme pour  $\xi \in S(G/B, f)$ ,

$$U(\xi)(\phi_s)(h) = \int_{\mathbb{R}} U'(\xi)(\phi)(h \exp(rY_1(\phi))) \chi_\phi(\exp(tY_1(\phi))) e^{-isr\phi([Y_1(\phi), Y])} dr$$

et comme  $V = \int_{\mathbb{R}} V'_s ds$ , où  $V'_s$  désigne l'opérateur inverse de  $U'_s$  associé à  $(G, H')$  et  $\phi_s$ , nous voyons que

$$\begin{aligned} V \circ U(\xi)(\exp(tl_1) \cdot g_1) &= \int_{\mathbb{R}} V'_s \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-isr\phi([Y_1(\phi), Y])} U'(\phi)(\xi)(\exp(tl_1) \cdot g_1 \exp(rY_1(\phi))) \chi_\phi(\exp(tY_1(\phi))) dr \right) ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} V' \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-isr} U'(\phi)(\xi)(\exp(tl_1) \cdot g_1 \exp(rY_1(\phi))) \chi_\phi(\exp(tY_1(\phi))) dr \right) ds \\ &= V' \circ U'(\xi)(\exp(tl_1) \cdot g_1) = \xi(\exp(tl_1) \cdot g_1). \end{aligned}$$

Ici  $U'$  désigne l'opérateur défini pour  $(G, H', f)$ .

■

### II-4 Opérateur d'entrelacement pour le produit tensoriel de représentations irréductibles.

#### II-4.1 Désintégration du produit tensoriel

Soit  $G = \exp \mathfrak{g}$  un groupe de Lie nilpotent. Soient  $\pi_j (j = 1, 2)$  deux représentations unitaires et irréductibles de  $G$  associées à deux formes linéaires  $f_1, f_2$ . Les orbites coadjointes de  $f_1$  et  $f_2$  seront notées par la suite par  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ . Le produit de Kronecker extérieur de  $\pi_1$  et de  $\pi_2$ , noté  $\pi_1 \times \pi_2$ , correspond à la  $G^2 = G \times G$  orbite  $\Omega(\pi_1 \times \pi_2) = \Omega_1 \times \Omega_2 \subset \mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{g}^*$ . On identifie  $G$  au sous groupe  $\Delta_G = \Delta$  de  $G^2$  constitué par les éléments diagonaux.

L'application de Kirillov-Bernat  $\theta_G : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \hat{G}$  induit un isomorphisme topologique de l'espace des orbites  $\mathfrak{g}^*/G$  sur  $\hat{G}$ .

Soit  $p : \mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^*$  l'application restriction et  $\nu = (\theta_G \circ p)_*(\mu)$ , où  $\mu$  désigne la mesure  $G^2$  invariante sur l'orbite  $\Omega_1 \times \Omega_2$ . Alors il est clair que

$$(\pi_1 \times \pi_2)|_{\Delta_G} = \pi_1 \otimes \pi_2,$$

et ainsi d'après [13] et [28]

$$\pi_1 \otimes \pi_2 \simeq \int_{\hat{G}}^{\oplus} m_{\pi} \pi d\nu(\pi) \simeq \int_{\Omega_1 \times \Omega_2 / \Delta_G}^{\oplus} \sigma_{p(l,k)} d\dot{\mu}(l, k) \quad (31)$$

où  $m(\pi)$  est le nombre des  $G$ -orbites incluses dans  $\Omega_1 \times \Omega_2 \cap p^{-1}(\Omega(\pi))$ .

#### II-4.2 Notation et choix des bases:

On pose  $\mathfrak{g}^2 = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ ,  $\Delta_{\mathfrak{g}}$  la sous algèbre de  $\mathfrak{g}^2$  constituée par les éléments diagonaux. On note  $\Pi = \pi_1 \times \pi_2$  et  $\Omega_{\Pi} = \Omega_1 \times \Omega_2 \subset \mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{g}^*$ .

On part d'une base de Jordan-Hölder  $\mathfrak{D} = (l_1, \dots, l_n)$  de  $\mathfrak{g}$  telle que  $l_n$  soit central. L'algèbre de Lie de  $\Delta_{\mathfrak{g}}$  possède comme base les vecteurs

$$\bar{l}_1 = (l_1, l_1), \dots, \bar{l}_n = (l_n, l_n).$$

A partir de la suite de Jordan-Hölder  $\mathfrak{D}$  de  $\mathfrak{g}$ , on considère la base  $\mathfrak{C}$  de Jordan-Hölder de  $\mathfrak{g}^2$

$$\mathfrak{C} = \left( (0, l_1), (l_1, 0), \dots, (0, l_n), (l_n, 0) \right),$$

on fait fonctionner l'algorithme décrit dans le paragraphe (II-1.3) pour obtenir à partir de  $\mathfrak{C}$  la base de Jordan-Hölder de  $\Delta_{\mathfrak{g}}$

$$\mathfrak{D} = (\bar{l}_1, \dots, \bar{l}_n), \quad (32)$$

et la base de Malcev relative à  $\Delta_{\mathfrak{g}}$

$$\mathfrak{B} = \left( b_1 = (l_n, 0), \dots, b_n = (l_1, 0) \right). \quad (33)$$

On pose alors

$$\Delta_{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{g}_1^2 \subset \mathfrak{g}_2^2 \subset \dots \subset \mathfrak{g}_n^2 = \mathfrak{g}^2,$$

où les sous-algèbres  $\mathfrak{g}_i^2$  sont construites de la manière suivante: pour  $i \in \{1, \dots, n\}$  on pose

$$\mathfrak{g}_i^2 = \Delta_{\mathfrak{g}} \oplus \sum_{k=1}^i \mathbb{R}b_k, \quad (34)$$

Soit encore  $G_i^2$  le sous groupe de  $G^2$  associé à la sous-algèbre  $\mathfrak{g}_i^2$ .

Rappelons que  $L^{\Delta G}$  est par définition l'ensemble des  $i$  dans  $\{1, \dots, n\}$  tels que la  $G_i^2$ -orbite de  $(f_1, f_2)|_{\mathfrak{g}_i^2}$  est saturée par rapport à  $\mathfrak{g}_{i-1}^2$ . Ainsi  $i \in L^{\Delta G}$  si et seulement s'il existe  $U \in \mathfrak{g}_i^2$  tel que  $ad^*(U)(f_1, f_2) = 0$  sur  $\mathfrak{g}_{i-1}^2$  et  $ad^*(U)(f_1, f_2)(b_i) = 1$ .

Ecrivons  $U = (X + X_i, X)$  avec  $X \in \mathfrak{g}$  et  $X_i \in \mathfrak{g}_i = \sum_{j=n}^{n-i+1} \mathbb{R}l_j$ . Alors si  $0 < n-i+1 < j$  on a que

$$ad^*(X + X_i)f_1 + ad^*(X)f_2 = 0 \text{ et } ad^*(X + X_i)f_1(l_j) = 0,$$

et en plus  $ad^*(X + X_i)f_1(l_{n-i+1}) = 1$ . Ainsi

$$L^{\Delta G} = \{i \in \{1, \dots, n\} \mid ad^*(\mathfrak{g}(f_{|\mathfrak{g}_{i-1}}) \setminus \mathfrak{g}(f_{|\mathfrak{g}_i})) (f_1 + f_2) \cap ad^*(\mathfrak{g}_i)f_1 \neq 0\}. \quad (35)$$

Soit  $R_0 = 0, R_j(t_1, \dots, t_k) = 0$  si  $j \notin L^{\Delta G}$  et  $R_{j_i}(t_1, \dots, t_k) = t_i$ , si  $j_i \in L^{\Delta G}, (j = 1, \dots, k = \text{card}(L^{\Delta G}))$  et soit

$$R(T) = \left( \prod_{j=1}^n Ad^*(\exp(R_j(T)b_j))f_1, f_2 \right), T \in \mathbb{R}^k.$$

Alors la partie  $\mathfrak{F}^{R, \mathfrak{B}}$  de  $\Omega_{f_1, f_2}$  définies dans (II-1.3) est ici l'ensemble

$$\mathfrak{F}^{R, \mathfrak{B}} = \left\{ \left( Ad^*(R(T))f_1, f_2 \right), T \in \mathbb{R}^k \right\} = \left( Ad^*(R(\mathbb{R}^k))f_1, f_2 \right). \quad (36)$$

Il nous reste à écrire l'opérateur d'entrelacement, commençons par prouver ce Lemme:

**Lemme:**

Soient  $B_1$  et  $B_2$  les polarisations de Vergne en  $f_1$  et  $f_2$  relative à la base  $\mathfrak{D}$ , alors  $B = B_1 \times B_2$  est la polarisation de Vergne en  $(f_1, f_2)$  relative à la base  $\mathfrak{E}$ .

**Preuve :**

Ceci découle immédiatement du fait que pour tout  $i, j \in \{1, \dots, n\}$

$$\mathfrak{g}_i(f_{1|\mathfrak{g}_i}) \times \mathfrak{g}_j(f_{2|\mathfrak{g}_j}) = (\mathfrak{g}_i \times \mathfrak{g}_j) \left( (f_1, f_2)|_{\mathfrak{g}_i \times \mathfrak{g}_j} \right).$$

■

On sait que l'espace de la représentation  $\pi_1 \otimes \pi_2$  est l'espace

$$L^2(G/B_1, f_1) \otimes L^2(G/B_2, f_2) = L^2(G \times G/B_1 \times B_2, (f_1, f_2))$$

et donc pour  $\phi = (\phi_1, f_2) = (R(T)f_1, f_2) \in \mathfrak{F}^{R, \mathfrak{B}}$  on obtient

$$U(\xi)((\phi_1, f_2))(x) = \int_{B(\phi)/B(\phi) \cap B^\phi} \xi(xuR(T), xu) \chi_{\phi_1 + f_2}(u) d_{B(\phi), B^\phi}(u), \quad x \in G.$$

Nous remarquons que le produit tensoriel  $\pi_{f_1} \otimes \pi_{f_2}$  se décompose en une intégrale où interviennent seulement les représentations associées aux formes linéaires  $\phi_1 + f_2$ , où  $\phi_1 \in Ad^*(R(\mathbb{R}^k))f_1$ .

### II-4.3-Exemples

1)

Prenons d'abord le groupe de Heisenberg  $H_1 = \mathbb{R}^3$  avec la multiplication

$$(x, y, z) \cdot (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z' + \frac{1}{2}(xy' - x'y)).$$

Soit  $\mathfrak{D} = \{X, Y, Z\}$  la base usuelle de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{h}_1$  de  $H_1$ , telle que  $[X, Y] = Z$ .

Alors  $\mathfrak{C} = \{(X, 0), (0, X), (Y, 0), (0, Y), (Z, 0), (0, Z)\}$  et  $\mathfrak{B} = \{(Z, 0), (Y, 0), (X, 0)\}$ .  
Déterminons  $L^\Delta$  pour  $\pi = \pi_\lambda \otimes \pi_\mu$ , où  $\pi_\lambda$  et  $\pi_\mu$  sont les deux représentations irréductibles de  $H_1$  associées aux deux formes linéaires non nulles  $\lambda = (0, 0, \lambda)$  et  $\mu = (0, 0, \mu)$  de  $\mathfrak{h}_1$ .

Supposons d'abord que  $\lambda + \mu \neq 0$ . Nous voyons que 1 n'est pas dans  $L^\Delta$ , car sinon on devrait avoir  $ad^*(U)\lambda(Z) = 1$ , pour un  $U \in \mathfrak{h}_1$ , ce qui est impossible. Si  $2 \in L^\Delta$ , il faudrait que  $ad^*(U + \beta Y)(\lambda) + ad^*(U)(\mu) = 0$  et  $ad^*(U + \beta Y)(\lambda)(Y) = 1$ , pour un  $\beta \in \mathbb{R}$  et  $U \in \mathfrak{h}_1$ .  
Mais alors

$$ad^*(U)(\lambda + \mu)(Y) = -ad^*(\beta Y)(\lambda)(Y) = 0$$

et aussi

$$ad^*(U)(\lambda)(Y) = 1$$

ce qui est impossible, comme  $\lambda + \mu \neq 0$ . Par contre l'indice 3 est dans  $L^\Delta$ , il suffit de prendre  $U$  et  $V$  dans  $\mathfrak{h}_1$ , tels que

$$ad^*(U + V)\lambda = X^* = -ad^*(U)\mu \quad \text{où } X^* = (1, 0, 0) \in \mathfrak{h}_1^*.$$

Ces conditions déterminent  $U$  et  $V$  de façon unique modulo  $\mathbb{R}Z$ .

Nous pouvons donc prendre pour  $\mathfrak{F}^{R, \mathfrak{B}}$  la partie

$$\mathfrak{F}^{R, \mathfrak{B}} = \left( Ad^*(\exp \mathbb{R}X)\lambda, \mu \right) = (\lambda + \mathbb{R}Y^*, \mu),$$

où  $Y^* = (0, 1, 0) \in \mathfrak{h}_1^*$ . Ceci nous donne pour tout  $s \in \mathbb{R}, g \in H_1$ , pour tout  $\xi \in L^2(\mathbb{R}^2) = \mathcal{H}_{\pi_\lambda \otimes \pi_\mu}$ ,

$$U(\xi)((\lambda - s\lambda Y^*, \mu)(g) = \xi(g \exp(sX), g),$$

comme pour tout  $\phi \in \mathfrak{X}^{R, \mathfrak{B}}$ ,  $B(\phi) = \text{vect}(Y, Z)$  et  $B(\phi) \cap B^\phi = B(\phi)$ .

Si  $\lambda + \mu = 0$ , alors 2 et 3 sont dans  $L^\Delta$ . Alors

$$\mathfrak{X}^{R, \mathfrak{B}} = (\lambda + Z^\perp, -\lambda),$$

et pour tout  $\phi \in \mathfrak{X}^{R, \mathfrak{B}}$ ,  $B(\phi) = \mathfrak{h}_1$ . Alors pour  $s, t \in \mathbb{R}, g \in H_1$ ,

$$U\xi(t\lambda X^* - s\lambda Y^*)(g) = \int_{\mathbb{R}} \xi(g \cdot \exp((u+t)X), g \cdot \exp(uX)) e^{i\lambda(s(t-u))} du.$$

2)

Prenons comme deuxième exemple le groupe

$$G = \{(a_{i,j}) \mid a_{i,j} \in \mathbb{R}, a_{i,i} = 1, a_{i,j} = 0, i > j, 1 \leq i, j \leq 5\}$$

des matrices carrées d'ordre 5 triangulaires supérieures. Prenons comme base  $\mathfrak{D}$  de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  de  $G$  la partie  $\mathfrak{D} = \{E_{i,j} \mid i < j\}$  de  $\mathfrak{g}$  formée par les matrices élémentaires  $E_{i,j} = (\delta_{k,i} \delta_{l,j})_{k,l}$ . Identifions l'espace dual de  $\mathfrak{g}$  avec l'espace  $\mathfrak{X}_i$  des matrices carrées d'ordre 5 triangulaires inférieures strictes à l'aide de

$$(A, B) \rightarrow \text{tr}(A \cdot B), A \in \mathfrak{g}, B \in \mathfrak{X}_i.$$

Alors la base duale  $\mathfrak{D}^*$  de  $\mathfrak{D}$  est formée par les vecteurs  $\mathfrak{D}^* = \{E_{i,j} \mid i > j\}$

Prenons maintenant pour formes linéaires  $f_1 = E_{5,1}$  et  $f_2 = E_{4,2}$ . Alors

$$\text{ad}^*(\mathfrak{g})f_1 = \text{vect}\{E_{2,1}, E_{3,1}, E_{4,1}, E_{5,2}, E_{5,3}, E_{5,4}\}$$

et

$$\text{ad}^*(\mathfrak{g})f_2 = \text{vect}\{E_{3,2}, E_{4,3}\}.$$

Ainsi  $\text{ad}^*(\mathfrak{g})f_1 \cap \text{ad}^*(\mathfrak{g})f_2 = (0)$  et alors  $L^\Delta = \emptyset$ , d'après (35). Ainsi  $\pi_{f_1} \otimes \pi_{f_2} \simeq \pi_{f_1+f_2}$  est irréductible.

Cet exemple a été suggéré par Corwin et Greenleaf dans [13].

**II-5 Exemples .****II-5.1**

Soit  $\mathfrak{g}$  l'algèbre de Lie réelle nilpotente de dimension 4 avec la base  $(X, U, Y, Z)$  et les crochets non nuls  $[X, U] = Y, [X, Y] = Z$ . On désigne par  $G$  le groupe de Lie associé, on pose  $f = Z^*$  et  $\mathfrak{h}$  la sous algèbre de Lie engendrée par  $(X, Z)$ . Soit  $H = \exp(\mathfrak{h})$ .

La polarisation  $B_0$  construite suivant le procédé (II-2.1,A) en  $f = Z^*$  est dans cet exemple  $B_0 = (U, Y, Z)$  et la base de Malcev  $\mathfrak{B}$  relative à  $\mathfrak{h}$  est formée des vecteurs

$$\mathfrak{B} = \{Z, Y, U\}.$$

Relativement à cette base, on a que

$$\mathfrak{A}^{R, \mathfrak{B}} = \{\exp(tY)f, t \in \mathbb{R}\} = \{Z^* + tX^*, t \in \mathbb{R}\}.$$

En outre

$$U(\xi)(\exp(yY)f)(\exp(zZ) \cdot \exp(xX)) = e^{-iz} e^{ixy} \hat{\xi}(y)$$

pour tout  $\xi \in L^2(G/B_0, f) \simeq L^2(\mathbb{R}, f)$ .

L'opérateur inverse  $U^{-1}$  est donné pour tout  $K \in L^2(\mathbb{R})$  et  $g_0 \in B_0$  par

$$U^{-1}(K)(\exp(xX)g_0) = \chi_f^{-1}(g_0) \int_{\mathbb{R}} K(\exp(yY)f)(e) e^{-ixy} dy.$$

**II-5.2**

Supposons maintenant que  $\mathfrak{h} = (U, Z)$ . La base  $\mathfrak{B}$  devient alors  $\{Y, X\}$  et  $L^\Delta = \{2\}$ . Relativement à cette base, on a que

$$\mathfrak{A}^{R, \mathfrak{B}} = \{\exp(tX)f, t \in \mathbb{R}\},$$

et donc

$$U(\xi)(\exp(xX)f)(\exp(zZ) \cdot \exp(uU)) = e^{-iz} e^{-i\frac{x^2}{2}u} \xi(\exp(xX)).$$

pour tout  $\xi \in L^2(G/B_0, f) \simeq L^2(\mathbb{R}, f)$ .

L'opérateur inverse  $U^{-1}$  est donné pour tout  $K \in (\int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \mathbb{C} dt)_C$  et  $g_0 \in B_0$  par

$$U^{-1}(K)(\exp(xX)g_0) = \chi_f^{-1}(g_0) K(\exp(xX)f)(e).$$

**II-5.3**

Soit  $\mathfrak{g}$  l'algèbre de Lie réelle nilpotente de dimension 5, donnée par la base  $(X_1, \dots, X_5)$  et les crochets non nuls  $[X_5, X_4] = X_3, [X_5, X_3] = X_2, [X_5, X_2] = X_1$ . On désigne par  $G$  le groupe de Lie associé, on pose  $f = X_1^*$  et  $\mathfrak{h}$  la sous algèbre de Lie engendrée par le vecteur  $(X_2)$ . Soit  $H = \exp(\mathfrak{h})$ .

La polarisation  $B_0$  construite suivant le procédé (II-2.1,A) en  $f = Z^*$  est dans cet exemple  $B_0 = (X_1, \dots, X_4)$  et la base de Malcev relative à  $\mathfrak{h}$

$$\mathfrak{B} = \{X_1, X_3, X_4, X_5\}.$$

Relativement à cette base, on a que

$$\mathfrak{X}^{R, \mathfrak{B}} = \{\exp(x_5 X_5) f, x_5 \in \mathbb{R}\}.$$

Soit  $\pi$  la représentation correspondante à  $X_1^*$  et  $\chi_\lambda$  le caractère de  $\hat{H}$  défini par

$$\chi_\lambda(\exp(tX_2)) = e^{2i\pi\lambda t},$$

alors on a que

$$\pi|_H \simeq \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \chi_\lambda d\lambda.$$

On a que

$$U(\xi)(\exp(x_5 X_5) f)(\exp(x_2 X_2)) = e^{ix_2 x_5} \hat{\xi}(\exp(x_5 X_5))$$

pour tout  $\xi \in L^2(G/B_0, f) \simeq L^2(\mathbb{R}, f)$ .

L'opérateur inverse  $U^{-1}$  est donné pour tout  $K \in (\int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \mathbb{C} dt)_C$  et  $g_0 \in B_0$  par

$$U^{-1}(K)(\exp(x_5 X_5) g_0) = \chi_f^{-1}(g_0) K(\exp(x_5 X_5) f)(e).$$

**II-5.4**

Supposons maintenant que  $\mathfrak{h} = \text{vect}(X_5, X_1)$  et la suite de Malcev relative à  $\mathfrak{h}$

$$\mathfrak{h} = \text{vect}(X_1, X_5) \subset \text{vect}(\mathfrak{h}, X_2) \subset \text{vect}(\mathfrak{h}, X_2, X_3) \subset \text{vect}(\mathfrak{h}, X_2, X_3, X_4) = \mathfrak{g}.$$

On a alors que

$$\mathfrak{X}^{R, \mathfrak{B}} \simeq \{\exp(x_2 X_2) f, x_2 \in \mathbb{R}\} \simeq \{X_1^* + x_2 X_5^*, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

et que

$$\pi|_H \simeq \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \chi_{X_1^* + \lambda X_5^*} d\lambda$$

où  $\chi_{X_1^* + \lambda X_5^*}$  est le caractère défini sur  $\mathfrak{h}$ . On a que

$$U(\xi)(\exp(x_2 X_2) f)(\exp(x_1 X_1) \exp(x_5 X_5)) = e^{-ix_1} e^{ix_2 x_5} \hat{\xi}(\exp(x_2 X_2))$$

pour tout  $\xi \in L^2(G/B_0, f) \simeq L^2(\mathbb{R}, f)$ .

L'opérateur inverse  $U^{-1}$  est donné pour tout  $K \in (\int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \mathbb{C} dt)_G$  et tout  $g_0 \in B_0$  par

$$U^{-1}(K)(\exp(x_5 X_5) g_0) = \chi_f^{-1}(g_0) \int_{\mathbb{R}} K(\exp(x_2 X_2) f)(e) e^{-ix_2 x_5} dx_2.$$

### II-5.5

Supposons maintenant que  $f = X_1^* + X_3^*$  et  $\mathfrak{h} = (X_5, X_2, X_1)$ , soit la suite de Malcev relative à  $\mathfrak{h}$

$$\mathfrak{h} \subset \text{vect}(\mathfrak{h}, X_3) \subset \text{vect}(\mathfrak{h}, X_3, X_4) = \mathfrak{g}.$$

Nous voyons que  $\mathfrak{X}^{R, \mathfrak{B}} = \{f\}$  il en résulte que  $\pi|_H$  est irréductible. Le théorème (II-2.3) nous oblige de prendre la polarisation  $B_1 = \text{vect}(X_1, X_2)$  dans  $\mathfrak{h}$  en  $f$ .

L'opérateur d'entrelacement sera donc

$$U(\xi)(f)(\exp(x_1 X_1) \exp(x_2 X_2) \exp(x_5 X_5)) = e^{-ix_1} e^{ix_2 x_5} \xi(\exp(x_5 X_5))$$

pour tout  $\xi \in L^2(G/B_0, f) \simeq L^2(\mathbb{R}, f)$ .

L'opérateur inverse  $U^{-1}$  est donné pour tout  $K \in L^2(H/B_1)$  et tout  $g_0 \in B_0$  par

$$U^{-1}(K)(\exp(x_5 X_5) g_0) = \chi_f^{-1}(g_0) K(f)(\exp(x_5 X_5)).$$

### II-5.6 Contre exemple.

On va montrer finalement dans cet exemple que le choix de la base de Malcev relative à  $\mathfrak{h}$  doit être nécessairement comme dans (II-1.3). On reprend toujours l'exemple précédent,  $\mathfrak{h}$  étant la sous algèbre de Lie engendrée par le vecteur central  $(X_1)$ . Soit  $H = \exp(\mathfrak{h})$ .

Prenons la suite suivante de Malcev relative à  $\mathfrak{h}$

$$\mathfrak{h} \subset \text{vect}(\mathfrak{h}, X_5) \subset \text{vect}(\mathfrak{h}, X_5, X_2) \subset \text{vect}(\mathfrak{h}, X_5, X_2, X_3) \subset \text{vect}(\mathfrak{h}, X_5, X_2, X_3, X_4) = \mathfrak{g}.$$



Relativement à cette base, on a que

$$\mathfrak{X}^{R, \mathfrak{B}} = \{\exp(tX_2)f, t \in \mathbb{R}\} = \{X_1^* + tX_5^*, t \in \mathbb{R}\}.$$

Avec cette base, notre opérateur d'entrelacement sera donc

$$U(\xi)(\exp(x_2X_2)f)(\exp(x_1X_1)) = e^{-ix_1}\xi(e)$$

pour tout  $\xi \in L^2(G/B_1, f) \simeq L^2(\mathbb{R}, f)$ . Donc  $U$  ne peut pas être une isométrie.

### II-5.7 Contre exemple.

Soit  $\mathfrak{g}$  l'algèbre de Lie engendrée par les vecteurs  $X, P, Y, Q, Z, A, B$  avec les crochets

$$[X, Y] = [P, Q] = [A, B] = Z.$$

Soit  $\mathfrak{h} = \text{vect}(X, P, Y, Q, Z)$ ,  $f = Z^*$ , et soit  $\mathfrak{C} = \{B, A, X, Y, P, Q, Z\}$  une base de Jordan-Hölder de  $\mathfrak{g}$ . Donc la base de Jordan-Hölder associée à  $\mathfrak{h}$  décrit dans l'algorithme (II-1.3) est  $\mathfrak{C}' = \{X, Y, P, Q, Z\}$  et la suite de Malcev relative à  $\mathfrak{h}$  est  $(\mathfrak{h}, \mathbb{R}A, \mathbb{R}B)$ . Il est clair que les  $G$ -orbites en position générale sont saturées par rapport à la sous-algèbre  $\mathfrak{h} \oplus \mathbb{R}A$ , il en résulte que la partie  $\mathfrak{X}^{R, \mathfrak{B}}$  est isomorphe à

$$\{\exp(bB)f, b \in \mathbb{R}\}.$$

La polarisation  $B_0$  construite suivant le procédé (II-2.1,A) en  $f = Z^*$  est dans cet exemple  $B = \text{vect}(A, Y, Q, Z)$ , et la polarisation qu'on doit prendre dans  $\mathfrak{h}$  en  $f$  est  $\text{vect}(Y, Q, Z)$ .

Notre opérateur d'entrelacement est alors donné pour tout  $\xi \in S(G/B_0, f)$  et  $h \in H$  par

$$U(\xi)(\exp(bB)f)(h) = \xi(h \exp(bB)).$$

Vérifions qu'on a bien un opérateur d'entrelacement:

$$\begin{aligned} \|U(\xi)\|_2^2 &= \int_{\mathfrak{X}^{R, \mathfrak{B}}} \int_{H/B(\phi)} |U(\xi)(\exp(bB)f)(h)|^2 d_{H, B(\phi)}(\dot{h}) d\lambda^{\mathfrak{X}^{R, \mathfrak{B}}}(\phi) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^2} |\xi(\exp(xX) \exp(pP) \exp(bB))|^2 dx dp db \\ &= \|\xi\|_{L^2(G/B)}^2. \end{aligned}$$

D'autre part, en écrivant  $G = \exp(\mathbb{R}B) \cdot \exp(\mathbb{R}X) \cdot \exp(\mathbb{R}P) \cdot B_0$ , l'opérateur inverse  $U^{-1}$  est donné pour tout  $K \in \int_{\mathfrak{X}^{R, \mathfrak{B}}}^{\oplus} L^2(H/B(\phi)) d\lambda^{\mathfrak{X}^{R, \mathfrak{B}}}(\phi)$  et tout  $g_0 \in B_0$  par

$$U^{-1}(K)(\exp(bB) \cdot \exp(xX) \cdot \exp(pP) \cdot g_0) = \chi_f^{-1}(g_0)K(\exp(bB)f)(\exp(xX) \cdot \exp(pP)).$$

On va montrer maintenant que le choix de la polarisation  $B$  est important. Prenons par exemple la polarisation  $\text{vect}(Y, Q, Z, B)$  en  $f$ , l'opérateur d'entrelacement sera donc

$$U(\xi)(\exp(bB)f)(h) = \xi(h \exp(bB)) = \xi(h)$$

pour tout  $\xi \in L^2(G/B, f)$  et  $h \in H$ . Cet opérateur ne dépend pas de  $b$ , donc il ne peut pas être une isométrie.

# Chapitre III

## SUR LE CORTEX DES GROUPES DE LIE NILPOTENTS

Soit  $G$  un groupe localement compact et  $\pi$  une représentation continue de  $G$  sur un espace vectoriel de dimension finie  $\mathfrak{V}$ . On dit qu'un point  $v \in \mathfrak{V}$  (respectivement sa  $G$ -orbite  $\Omega = \pi(G)v$ ) est infiniment petit par rapport à l'action de  $G$ , s'il ne peut pas exister deux voisinages  $G$ -invariants disjoints de  $0$  et de  $v$ .

Autrement dit, en terme de l'espace des orbites  $\mathfrak{V}/\pi(G)$  sous l'action  $\pi$  de  $G$  équipé de la topologie canonique quotient,  $v$  est infiniment petit par rapport à l'action de  $G$  si  $\Omega = \pi(G)v$  et  $\Omega_0 = \{0\}$  ne peuvent pas être séparées au sens de Hausdorff dans  $\mathfrak{V}/\pi(G)$ .

L'ensemble des éléments infiniment petits de  $\mathfrak{V}$  par rapport à l'action de  $G$  s'appelle le  $\pi$ -cortex de  $0$ , ou plus simplement le  $\pi$ -cortex, et il se note  $\text{Cor}_\pi(\mathfrak{V})$ .

Manifestement  $v \in \text{Cor}_\pi(\mathfrak{V})$  si et seulement si il existe des suites  $\{v_k\}_k \subset \mathfrak{V}$  et  $\{g_k\}_k \subset G$  telles que  $\lim v_k = 0$  et  $\lim \pi(g_k)v_k = v$ .

Si  $G$  est un groupe de Lie nilpotent et  $\pi$  est une représentation unipotente de  $G$ , on définit le cortex des invariants de  $\pi$  et on le note  $\text{ICor}_\pi(\mathfrak{V})$  l'ensemble

$$\{v \in \mathfrak{V} : P(0) = P(v) \text{ pour tout polynôme } G\text{-invariant sur } \mathfrak{V}\}.$$

Il est clair qu'on a toujours

$$\text{Cor}_\pi(\mathfrak{V}) \subset \text{ICor}_\pi(\mathfrak{V}). \tag{37}$$

Dans la littérature (cf. [41]) le cortex a été défini autrement:

soit  $G$  un groupe localement compact et  $\hat{G}$  l'ensemble des classes d'équivalence des représentations unitaires et irréductible de  $G$ .  $\hat{G}$ , équipé de sa topologie usuelle, s'appelle l'espace dual de  $G$  (nous allons décrire cette topologie plus tard). En général,  $\hat{G}$  est loin d'être un espace de Hausdorff. Le cortex de  $G$ ,  $\text{Cor}(G)$ , est l'ensemble fermé de toutes les représentations  $\pi \in \hat{G}$  qui ne peuvent pas être séparées au sens de Hausdorff de la représentation triviale  $1_G$  of  $G$ .

Si  $G$  est nilpotent, connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ , l'homomorphisme de Kirillov nous permet de dire que les deux définitions ci-dessus coïncident, mais dans le cas général il n'est pas clair que ces deux définitions sont liées.

Il est bien connu que la topologie des voisinages de  $1_G$  est reliée à la structure du groupe  $G$ . Vershik et Karpushev [41] ont établi des connections entre la cohomologie de  $G$  pour les espaces des représentations unitaires et le cortex. Boidol, Ludwig et Müller [7] ont étudié le cortex des groupes de Lie nilpotents connexes simplement connexe qui sont un produit semi-direct de la forme  $\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^n$ . Dans [6] M. Bekka and E. Kaniuth ont étudié cet ensemble pour différentes classes de groupes.

Très récemment, Annette Markfort a étudié le cortex des groupes nilpotents de pas deux qui ne contiennent pas des éléments compacts non-triviaux. En particulier, elle a montré que dans ce cas le cortex coïncide avec le support de la représentation de conjugaison qui sera définie plus tard.

### III-1 Généralités

On introduit d'abord quelques notations. Soit  $G$  un groupe localement compact et  $C^*(G)$  sa  $C^*$ -algèbre. On utilise la même notation  $\pi$  pour une représentation unitaire de  $G$  et la représentation correspondante de  $C^*(G)$ , et  $C^*\text{-Ker}(\pi)$  est le noyau de  $\pi$  dans  $C^*(G)$ .

Si  $\sigma$  et  $\tau$  sont deux représentations unitaires de  $G$ , alors  $\sigma$  est faiblement contenue dans  $\tau$ , ( $\sigma \prec \tau$ ) si

$$\text{Ker}(\tau) \subset \text{Ker}(\sigma).$$

Pour une représentation unitaire  $\pi$  de  $G$ , le support de  $\pi$  est l'ensemble fermé

$$\text{Supp}(\pi) = \{\tau \in \hat{G}; \tau \prec \pi\}.$$

On va décrire la topologie sur  $\hat{G}$ , pour cela on pose

$$\text{Prim}(C^*(G)) = \{C^*\text{-Ker}(\pi), \pi \in \hat{G}\},$$

$C^*$ -Ker  $(\pi)$  est un idéal dans  $C^*(G)$ , un tel idéal est appelé primitif.

Topologie de Jacobson: elle est définie sur l'opération de fermeture suivante: pour tout  $\mathcal{S} \subset \text{Prim}(C^*(G))$ ,  $C^* - \text{Ker}(\pi) \in \text{Prim}(C^*(G))$

$$C^* - \text{Ker}(\pi) \in \bar{\mathcal{S}} \iff \bigcap_{C^* - \text{Ker}(\rho) \in \mathcal{S}} C^* - \text{Ker}(\rho) \subset C^* - \text{Ker}(\pi).$$

On montre que c'est bien une topologie sur  $\text{Prim}(C^*(G))$ , cette topologie n'est en général pas séparée.

Soit  $\Psi : \hat{G} \rightarrow \text{Prim}(C^*(G))$ ,  $\Psi(\pi) = C^* - \text{Ker}(\pi)$ ,  $(\pi \in \hat{G})$ .

On munit  $\hat{G}$  de la topologie image réciproque par  $\Psi$ , c-à-d les ouverts dans  $\hat{G}$  sont les ensembles  $\Psi^{-1}(\mathcal{O})$  où  $\mathcal{O}$  est un ouvert dans  $\text{Prim}(C^*(G))$ .

La topologie sur  $\hat{G}$  peut être décrite autrement.

Topologie de Fell: soit  $\pi \in \hat{G}$ ,  $\xi \in \mathcal{H}_\pi$ ,  $\|\xi\| = 1$ . Pour tout compact  $K \subset G$  et tout  $\epsilon > 0$ , on pose

$$\mathcal{U}(K, \epsilon) = \left\{ \rho \in \hat{G} : \exists \eta \in \mathcal{H}_\rho, \|\eta\| = 1 \text{ tels que } \sup_{g \in K} | \langle \pi(g)\xi, \xi \rangle - \langle \rho(g)\eta, \eta \rangle | < \epsilon \right\},$$

alors  $\mathcal{U}(K, \epsilon)$  est un système fondamental de voisinages de  $\pi \in \hat{G}$ , on a donc que:  $\lim \pi_i = \pi$  si et seulement si pour tout  $\xi \in \mathcal{H}_\pi$ ,  $\|\xi\| = 1$ ,  $\exists \eta_i \in \mathcal{H}_{\pi_i}$ ,  $\|\eta_i\| = 1$  tel que

$$\lim \langle \pi(g)\eta_i, \eta_i \rangle = \langle \pi(g)\xi, \xi \rangle.$$

Si  $H$  est un sous-groupe fermé de  $G$ ,  $\tau$  une représentation de  $H$ , alors on note  $\text{Ind}_H^G \tau$  la représentation de  $G$  induite de  $\tau$ , cette représentation est décrite dans le premier chapitre.

Soit maintenant  $G$  un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ . Soit  $\pi$  est une représentation unitaire de  $G$  sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ , si  $\mathcal{H}^\infty$  est l'ensemble des vecteurs  $C^\infty$  dans  $\mathcal{H}$ , alors la formule

$$\pi_\infty(X)\xi = \frac{d}{dt}(\pi(\exp(tX)\xi))_{t=0}, \quad X \in \mathfrak{g}, \quad \xi \in \mathcal{H}^\infty$$

définit une représentation de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  sur  $\mathcal{H}^\infty$ . L'extension de  $\pi_\infty$  à  $u(\mathfrak{g})$ , l'algèbre enveloppante de l'algèbre complexifiée de  $\mathfrak{g}$  sera notée par le même symbole. Si  $\pi$  est irréductible, alors il existe un homomorphisme  $\chi_\pi$  du centre  $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$  de  $u(\mathfrak{g})$  dans  $\mathbb{C}$  tel que

$$\pi_\infty(a) = \chi_\pi(a)I, \quad \text{pour tout } a \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g}),$$

(cf. [42], 4.4.1.6).  $\chi_\pi$  est appelé le caractère infinitésimal de  $\pi$ .

**III-1.1 Proposition [6]**

Soit  $G$  un groupe de Lie connexe et  $\pi$  une représentation dans le cortex de  $G$ . Alors  $\pi$  a un caractère infinitésimal trivial, c-à-d  $\chi_\pi = \chi_{1_G}$ .

Si le groupe  $G$  est nilpotent connexe et simplement connexe, on sait qu'il existe un isomorphisme entre  $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$  et l'algèbre  $I(\mathfrak{g}^*)$  de toutes les fonctions polynomiales complexes  $G$ -invariantes sur  $\mathfrak{g}^*$  (cf. [42]). Soit  $f \in \mathfrak{g}^*$ . Alors on a la formule suivante:

$$\chi_{\pi_f}(a) = a(f), \quad a \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g}),$$

où  $a$  est identifié avec le polynôme correspondant de  $I(\mathfrak{g}^*)$  et  $a(f)$  sa valeur en  $f$ . Ceci nous permet de calculer les représentations de  $G$  avec un caractère infinitésimal. Maintenant, il est clair que pour  $f \in \mathfrak{g}^*$ ,  $\pi_f$  a un caractère infinitésimal trivial si et seulement si  $f$  est un zéro commun de tout  $P \in I(\mathfrak{g}^*)$  avec  $P(0) = 0$ . Notons

$$ICor(\mathfrak{g}^*) = \bigcap_{P \in I(\mathfrak{g}^*)} P^{-1}\{0\}, \quad (38)$$

on a alors que

$$Cor(\mathfrak{g}^*) \subset ICor(\mathfrak{g}^*). \quad (39)$$

**III-2 Cortex des algèbres nilpotentes de petite dimension**

On suppose dans toute la suite que  $G$  est un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe.  $\mathfrak{g}$  étant l'algèbre de Lie de  $G$ , on étudiera le cortex de  $\mathfrak{g}^*$  sous l'action coadjointe, cet ensemble sera noté par la suite par  $Cor(\mathfrak{g}^*)$ .

Plusieurs travaux ont été publiés sur le cortex des groupes localement compacts, mais on n'en a pas donné une forme explicite, ceci est dû au fait que sa structure est incroyablement compliquée. Cependant, nous avons calculé dans un premier temps le cortex des groupes de Lie nilpotents de dimension inférieure ou égale à 6 dans l'espoir de comprendre la structure de cet ensemble pour les groupes de Lie nilpotents (cf.[2]). Nous avons prouvé le résultat suivant:

**III-2.1 Proposition**

Soit  $G$  un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe de dimension inférieure ou égale à six, soit  $\mathfrak{g}$  l'algèbre de Lie de  $G$ , alors on a

$$Cor(\mathfrak{g}^*) = ICor(\mathfrak{g}^*). \quad (40)$$

La preuve de cette proposition est basée sur l'étude des classifications des algèbres de Lie nilpotentes de dimension inférieure ou égale à six qui sont faites, d'une part par J. Dixmier pour les algèbres de Lie de dimension cinq, et d'autre part par une série d'auteurs pour la dimension six tels que V. V. Morozov (1958), T. Skejelberd et T. Sund (1977), K. A. Umlauf (1891) et M. Vergne (1966).

Nous n'allons pas reproduire tous les calculs du cortex pour ces algèbres, on laisse au lecteur le soin de les consulter dans [2].

Notons de même que Bekka et Kanuith [6] croyaient que pour des groupes de Lie nilpotents de dimension six l'assertion

$$\text{Cor}(\mathfrak{g}^*) = G/\hat{Z}$$

où  $Z$  est un certain sous-groupe de  $G$  est vraie, mais lors de la preuve de la proposition ci-dessus, nous avons alors prouvé que ce n'est pas le cas.

Application: on utilise maintenant ce calcul pour déterminer le cortex de la classe suivante d'algèbres de Lie nilpotentes.

Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie nilpotente telle que toutes les orbites coadjointes sont de dimension maximale plus petite ou égales à deux. La classification de cette classe d'algèbres a été faite par Arnal, Cahen et Ludwig (voir [1]). Ils ont montré que sous cette hypothèse,  $\mathfrak{g}$  est l'une des algèbres suivantes:

a)  $\mathfrak{g} = \mathbb{R} \oplus \mathfrak{g}_1$  où  $\mathfrak{g}_1$  est un idéal abélien de codimension un.

b)  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{6,15} \oplus U$  où  $U$  est un idéal central et  $\mathfrak{g}_{6,15}$  est l'algèbre nilpotente de dimension 6 dont une base  $(X_j)_{1 \leq j \leq 6}$  vérifie

$$[X_1, X_2] = X_4, [X_1, X_3] = X_6, [X_2, X_3] = X_5$$

c)  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{5,4} \oplus U$  où  $U$  est un idéal central et  $\mathfrak{g}_{5,4}$  est l'algèbre nilpotente de dimension 5 dont une base  $(X_j)_{1 \leq j \leq 5}$  vérifie

$$[X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = X_4, [X_2, X_3] = X_5.$$

Il en résulte que le cortex de  $\mathfrak{g}$  est l'un des ensembles suivants:

a) si  $\mathfrak{g} = \mathbb{R} \oplus \mathfrak{g}_1$  où  $\mathfrak{g}_1$  est un idéal abélien de codimension un, alors  $\text{Cor}(\mathfrak{g}^*) = I\text{Cor}(\mathfrak{g}^*)$ .

b) Si  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{6,15} \oplus U$ , alors  $\text{Cor}(\mathfrak{g}^*) = \text{Cor}(\mathfrak{g}_{6,15}^*) = \text{vect}(X_1^*, X_2^*, X_3^*)$ .

c) Si  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{5,4} \oplus U$ , alors  $\text{Cor}(\mathfrak{g}^*) = \text{Cor}(\mathfrak{g}_{5,4}^*) = \text{vect}(X_1^*, X_2^*)$ .

Si  $\mathfrak{g} = \mathbb{R} \oplus \mathfrak{g}_1$  où  $\mathfrak{g}_1$  est un idéal abélien de codimension un, alors  $\text{Cor}(\mathfrak{g}^*) = \text{ICor}(\mathfrak{g}^*)$  (cf. [7]). Le calcul du cortex dans [2] nous permet de compléter la preuve.

Pour résumer, on a le résultat suivant:

### **III-2.2 Proposition**

*Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie nilpotente telle que toutes les orbites coadjointes de dimension maximale égales à deux, alors le cortex de  $\mathfrak{g}$  est un sous-espace vectoriel et on a que*

$$\text{Cor}(\mathfrak{g}^*) = \text{ICor}(\mathfrak{g}^*).$$

### **III-3 Sur le cortex de différentes classes de groupes.**

On va rappeler maintenant quelques notions qui sont déjà mentionnées dans le chapitre I.

Soit  $\mathfrak{B} = (l_1, \dots, l_n)$  une base de Jordan-Hölder de  $\mathfrak{g}^*$  et soit  $\mathfrak{B}_1 = (b_1, \dots, b_n)$  la base duale dans  $\mathfrak{g}$ , c-à-d.  $\langle l_i, b_j \rangle = \delta_{i,j}$ ;  $1 \leq i, j \leq n$ . On note pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\mathfrak{g}_j = \text{vect} \langle b_1, \dots, b_j \rangle$ ; l'ensemble indice  $e^{\mathfrak{B}}(f) = \{i_1 < \dots < i_d\}$  d'un élément  $f$  dans  $\mathfrak{g}^*$  relatif à  $\mathfrak{B}$  est aussi l'ensemble suivant de  $\{1, \dots, n\}$ :

$$i \in e^{\mathfrak{B}}(f) \Leftrightarrow \mathfrak{g}(f) + \mathfrak{g}_{j-1} \subsetneq \mathfrak{g}(f) + \mathfrak{g}_j,$$

où  $\mathfrak{g}(f)$  est le radical de la forme  $(x, y) \mapsto \langle f, [x, y] \rangle$  sur  $\mathfrak{g}$ .

On considère la relation d'ordre sur les ensembles indice définie dans le chapitre I, soit  $e$  le plus grand indice pour cette relation d'ordre. Introduisons la fonction polynomiale suivante

$$Q_e^{\mathfrak{B}}(f) = \det\{\langle f, [b_i, b_j] \rangle; i, j \in e\}.$$

$Q_e^{\mathfrak{B}}$  est une fonction polynomiale invariante et homogène de degré  $d$  sur  $\mathfrak{g}^*$  et dans toute la suite, on dira que  $f$  est en position générale si  $Q_e^{\mathfrak{B}}(f) \neq 0$ .

On notera  $Xf$  au lieu de  $ad^*X(f)$  où  $ad^*$  désigne la représentation coadjointe sur l'algèbre de Lie de  $G$ , et  $\mathfrak{g}f$  l'ensemble  $\{Xf, X \in \mathfrak{g}\}$ . De la même façon, on notera pour  $X, Y \in \mathfrak{g}$  et  $f \in \mathfrak{g}^*$ ,  $XYf$  au lieu de  $ad^*Xad^*Yf$

Nous allons prouver ce lemme qui va être considérablement important dans toute la suite.

### **III-3.1 Lemme**

*Soit  $G$  un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ . Soit  $f \in \text{Cor}(\mathfrak{g}^*)$ , alors il existe  $(f_p)_{p \in \mathbb{N}}$  en position générale et  $(x_p)_{p \in \mathbb{N}} \in G$  tels que*

$$f_p \rightarrow 0 \text{ et } f = \lim Ad^*(x_p)f_p.$$



**Preuve**

Dans le cas où les formes linéaires  $f_p$  ne sont pas en position générale, on peut trouver une suite  $q_p \in \mathfrak{g}^*$  tel que:

$$Q_e^{\mathfrak{B}}(q_p) \neq 0, \text{ et } Q_e^{\mathfrak{B}}(f_p + \epsilon_p q_p) \neq 0,$$

où  $\epsilon_p$  est une suite de nombre réel aussi petit que l'on veut pour que,

$$\lim Ad^*(\exp(X_p))f_p = \lim Ad^*(\exp(X_p))(f_p + \epsilon_p q_p).$$

■

La représentation de conjugaison  $\gamma_G$  est définie sur  $L^2(G)$  par

$$\gamma_G(x)f(y) = f(x^{-1} \cdot y \cdot x)$$

pour tout  $x, y \in G$  et  $f \in L^2(G)$ . Il est possible de décrire le support of  $\gamma_G$  comme suit (cf. [24]): pour  $h \in \mathfrak{g}^*$  on a

$$\begin{aligned} \pi_h \in \text{Supp}(\gamma_G) &\iff \exists (f_n) \in \mathfrak{g}^*, x_n, y_n \in G \text{ tel que} \\ &h = \lim \left( Ad^*(x_n)f_n - Ad^*(y_n)f_n \right) \\ &\iff h \in \overline{\{\Omega_f - \Omega_f, f \in \mathfrak{g}^*\}}. \end{aligned}$$

En effet, il n'est pas difficile de voir que si  $\Delta_G$  est le sous-groupe  $\{(x, x) : x \in G\}$  de  $G \times G$ , alors  $\gamma_G$  est la restriction à  $\Delta_G$  de la représentation  $\text{Ind}_{\Delta_G}^{G \times G} 1_G$ . c-à-d

$$\gamma_G = \text{Ind}_{\Delta_G}^{G \times G} 1_G / \Delta_G.$$

Il a été prouvé dans [24] que le cortex est inclu dans le support de cette représentation pour tous les groupes moyennables, mais l'égalité n'est pas toujours vraie.

Soit maintenant  $l \in \mathfrak{g}^*$  et  $\Omega_l$  l'orbite coadjointe associée à  $l$ . Alors l'orbite  $\Omega_l$  est dite plate si elle est un sous-espace affine de  $\mathfrak{g}^*$  et ceci est équivalent aux conditions suivantes

- 1)  $\mathfrak{g}(l)$  est un idéal de  $\mathfrak{g}$ .
- 2)  $\Omega_l = l + \mathfrak{g}(l)^\perp$ .

Rappelons que Bekka et Kaniuth [6] ont montré que si  $G$  est un groupe de Lie nilpotent de pas 2, alors

$$\text{Cor}(\mathfrak{g}^*) = \overline{\{Xl, X \in \mathfrak{g}, l \in \mathfrak{g}^*\}}.$$

Nous allons maintenant généraliser ce résultat pour une classe plus grande d'algèbre de Lie.

### III-3.2 Proposition

Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie nilpotente de pas  $r$  (c-à-d la suite centrale descendante d'ordre  $r$  est non nulle et est incluse dans le centre de  $\mathfrak{g}$ ), alors:

$$\text{Cor}(\mathfrak{g}^*) \subset \overline{\{Xl, X \in \mathfrak{g}, l \in \mathfrak{g}^*\}}$$

en plus

$$\{X_1 \cdots X_{r-1}l, X_i \in \mathfrak{g}, l \in \mathfrak{g}^*\} \subset \text{Cor}(\mathfrak{g}^*).$$

### Preuve

Soit  $f \in \text{Cor}(\mathfrak{g}^*)$ , alors il existe une suite  $f_n \in \mathfrak{g}^*$  et  $f_n \rightarrow 0$ , une suite  $X_n$  de points de  $\mathfrak{g}$  telle que:

$$\text{Ad}^*(\exp(X_n))f_n \rightarrow f.$$

Par suite :

$$f_n + X_n f_n + \dots + \frac{(X_n)^{r-1}}{(r-1)!} f_n \rightarrow f$$

donc

$$f \in \overline{\{X[Id + \frac{X}{2!} + \dots + \frac{X^{r-2}}{(r-1)!}](l), X \in \mathfrak{g}, l \in \mathfrak{g}^*\}}.$$

L'opérateur

$$Id + \frac{X}{2!} + \dots + \frac{X^{r-2}}{(r-1)!}$$

étant inversible, par suite on a

$$\text{Cor}(\mathfrak{g}^*) \subset \overline{\{Xl, X \in \mathfrak{g}, l \in \mathfrak{g}^*\}}.$$

D'autre part, soit  $X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{g}$  et  $f \in \mathfrak{g}^*$ ,  $X_n = nX_1$  et  $f_n = \frac{1}{n}X_2 \cdots X_{r-1} \cdot f$ , alors:

$$f_n \rightarrow 0$$

et

$$Ad^*(\exp(X_n))f_n = f_n + X_1 \cdots X_{r-1} \cdot f$$

donc

$$\{X_1 \cdots X_{r-1} \cdot f, X_i \in \mathfrak{g}, f \in \mathfrak{g}^*\} \subset \text{Cor}(\mathfrak{g}^*)$$

puisque  $X_1 \cdots X_{r-1} \cdot f = \lim Ad^*(\exp(X_n))f_n$ .

### III-3.3 Théorème

Soit  $G$  un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ , et supposons que toutes les orbites coadjointes dans  $\mathfrak{g}^*$  associées aux formes linéaires en position générale sont des variétés affines (ceci est le cas quand  $G$  est de pas 2), alors

$$\text{Cor}(\mathfrak{g}^*) = \overline{\{Xl, X \in \mathfrak{g}, l \in \mathfrak{g}^*\}} = \text{Supp}(\gamma_G).$$

#### Preuve

Soit  $l \in \mathfrak{g}^*$  en position générale et  $l_n = \frac{1}{n} l$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , alors

$$Ad^*(G)l_n = l_n + \mathfrak{g}(l_n)^\perp = l_n + \mathfrak{g}(l)^\perp$$

d'où

$$\mathfrak{g}(l)^\perp = \{Xl, X \in \mathfrak{g}\} \subset \text{Cor}(\mathfrak{g}^*).$$

Par conséquent  $\{Xl, X \in \mathfrak{g}, l \in \mathfrak{g}^*\} \subset \text{Cor}(\mathfrak{g}^*)$  puisque  $\text{Cor}(\mathfrak{g}^*)$  est un ensemble fermé.

D'autre part, soit  $f \in \text{Cor}(\mathfrak{g}^*)$ . Il existe  $X_n \in \mathfrak{g}$  et  $f_n \in \mathfrak{g}^*$  en position générale tel que  $f_n \rightarrow 0$  et

$$Ad^*(\exp X_n)f_n \rightarrow f$$

alors  $Ad^*(\exp X_n)f_n \in \Omega_{f_n} = f_n + \mathfrak{g}(f_n)^\perp = f_n + \mathfrak{g}f_n$ , il en résulte qu'il existe  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  tel que

$$Ad^*(\exp X_n)f_n = f_n + Y_n f_n \rightarrow f$$

et enfin

$$f \in \overline{\{Xk, X \in \mathfrak{g}, k \in \mathfrak{g}^*\}}.$$

Remarquons que si  $l \in \mathfrak{g}^*$  n'est pas en position générale, alors on peut approcher  $l$  par une suite de formes linéaires en position générale, finalement on obtient

$$\{Xl, X \in \mathfrak{g}, l \in \mathfrak{g}^*\} \subset \text{Cor}(\mathfrak{g}^*) \subset \overline{\{Xl, X \in \mathfrak{g}, l \in \mathfrak{g}^*\}}$$

et puisque  $\text{Cor}(\mathfrak{g}^*)$  est un ensemble fermé, on a le résultat.

D'un autre côté, on a que

$$\text{Supp}(\gamma_G) = \{ \pi_h \in \hat{G} : h \in \overline{\{ \Omega_f - \Omega_f, f \in \mathfrak{g}^* \text{ en position générale} \}} \},$$

puisque toutes les orbites en position générales sont des variétés linéaires, donc  $\Omega_f = f + \mathfrak{g}(f)^\perp$ , et alors

$$\text{Supp}(\gamma_G) = \overline{\{ Xl, X \in \mathfrak{g}, l \in \mathfrak{g}^* \}} = \text{Cor}(\mathfrak{g}^*).$$

■

D'après (39), on a

$$\text{Cor}(\mathfrak{g}^*) \subset \text{ICor}(\mathfrak{g}^*),$$

mais l'égalité (40) n'est pas toujours vraie. En effet, soit  $\mathfrak{g}$  l'algèbre de Lie nilpotente de dimension 8 engendrée par  $(X_1, \dots, X_6, Z_1, Z_2)$  avec les commutateurs non triviaux suivants:

$$[X_1, X_5] = Z_1, [X_2, X_3] = Z_1$$

$$[X_1, X_6] = Z_2, [X_2, X_4] = Z_2$$

Il est clair que  $\mathfrak{g}$  est nilpotente de pas 2, donc d'après le théorème (III-3.3) on a:

$$\text{Cor}(\mathfrak{g}^*) = \overline{\{ Xl, X \in \mathfrak{g}, l \in \mathfrak{g}^* \}},$$

et un simple calcul montre que

$$\text{Cor}(\mathfrak{g}^*) = \left\{ \sum_{i=1}^6 t_i X_i^*, t_i \in \mathbb{R} : t_3 t_6 = t_4 t_5 \right\}.$$

D'autre part, si  $f = x_1 X_1^* + \dots + x_6 X_6^* + z_1 Z_1^* + z_2 Z_2^*$  les uniques polynômes invariants en  $f$  sont les suivants:

$$P_1(f) = z_1$$

$$P_2(f) = z_2$$

$$P_3(f) = x_4 z_1 - x_3 z_2$$

$$P_4(f) = x_6 z_1 - x_5 z_2.$$

Ainsi

$$\text{Cor}(\mathfrak{g}^*) \subsetneq \text{ICor}(\mathfrak{g}^*).$$

Cet exemple à été suggéré par Bekka et Kaniuth dans [6].

### III-3.4 Proposition

Soit  $G$  comme dans le théorème (III-3.3), supposons que  $\text{Cor}(\mathfrak{g}^*)$  soit un sous-espace vectoriel de  $\mathfrak{g}^*$ , alors

$$\text{Cor}(\mathfrak{g}^*) = \text{ICor}(\mathfrak{g}^*) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})^\perp$$

où  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$  est le centre de  $\mathfrak{g}$ .

#### Preuve

Il est clair que  $\text{Cor}(\mathfrak{g}^*) \subset \text{ICor}(\mathfrak{g}^*) \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g})^\perp$ , supposons que la dimension de  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$  est  $p$ , alors

$$\dim \text{Cor}(\mathfrak{g}^*) \leq n - p. \quad (41)$$

Supposons que  $\dim \text{Cor}(\mathfrak{g}^*) < n - p$ . Alors  $\dim \text{Cor}(\mathfrak{g}^*) = n - p - j$  pour un  $j \in \{1, \dots, n - p\}$ . Soit  $\mathfrak{B}_1 = (f_1, \dots, f_{n-p-j})$  une base de  $\text{Cor}(\mathfrak{g}^*)$ . On l'a complète en une base  $\mathfrak{B} = (f_1, \dots, f_{n-p-j}, l_1, \dots, l_j, q_1, \dots, q_p)$  de  $\mathfrak{g}^*$ , où  $(f_1, \dots, f_{n-p-j}, l_1, \dots, l_j)$  est une base de  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})^\perp$ .

Soit  $\mathfrak{B}' = (F_1, \dots, F_{n-p-j}, L_1, \dots, L_j, Q_1, \dots, Q_p)$  la base duale de  $\mathfrak{B}$ . Pour  $k \in \{1, \dots, j\}$  on a que  $L_k \notin \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ . Donc il existe  $X_k \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$  tel que  $[L_k, X_k] = Y_k$  et  $Y_k \neq 0$ . Il s'ensuit qu'il existe  $g_k \in \mathfrak{g}^*$  tel que  $X_k g_k = l_k + d_k$  et  $d_k(L_k) = 0$ , alors

$$X_k g_k = l_k + \sum_{i=1}^{n-p-j} \alpha_i f_i + \sum_{p=1, p \neq k}^j \beta_p l_p + \sum_{r=1}^p \lambda_r q_r$$

où  $\alpha_i, \beta_p, \lambda_r \in \mathbb{R}$ .

Puisque  $X_k g_k \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})^\perp$ , on aura obligatoirement  $d_k \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})^\perp$  et par suite  $\lambda_r = 0$  pour tout  $r$ . On peut conclure que:

$$l_k + \sum_{p=1, p \neq k}^j \beta_p l_p = X_k g_k - \sum_{i=1}^{n-p-j} \alpha_i f_i \in \text{Cor}(\mathfrak{g}^*)$$

puisque  $X_k g_k \in \text{Cor}(\mathfrak{g}^*)$  (en vertu du théorème (III-3.3)) et  $\text{Cor}(\mathfrak{g}^*)$  est additif, donc, on obtient un élément qui est linéairement indépendant avec  $(f_1, \dots, f_{n-p-j})$  et ceci est contradictoire avec (41). ■

**III-3.5 Remarque**

La condition que toutes les orbites coadjointes dans  $\mathfrak{g}^*$  associées aux formes linéaires en position générale soient des variétés affines est essentielle dans la proposition (III-3.4). Cependant, on peut remarquer dans l'exemple suivant que le cortex peut être un sous-espace vectoriel sans que toutes les orbites coadjointes dans  $\mathfrak{g}^*$  associées aux formes linéaires en position générale soient des variétés affines.

Soit  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{5,4} = \text{vect}(X_1, \dots, X_5)$  avec les crochets non nuls sont

$$[X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = X_4, [X_2, X_3] = X_5.$$

Alors,  $\text{Cor}(\mathfrak{g}^*) = \text{vect}(X_1^*, X_2^*)$  (voir [2]) mais  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})^\perp = \text{vect}(X_1^*, X_2^*, X_3^*)$ , par suite

$$\text{Cor}(\mathfrak{g}^*) \subsetneq \mathfrak{z}(\mathfrak{g})^\perp.$$

**III-3.6 Exemples**

1) Soit  $G$  comme dans le théorème (III-3.3), supposons qu'il existe  $f \in \mathfrak{g}^*$  telle que  $\mathfrak{g}(f) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ . Puisque  $\mathfrak{g}(f) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ , on a que  $\mathfrak{g}f = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})^\perp$ , il en résulte que

$$\mathfrak{g}f = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})^\perp \subset \overline{\bigcup_{f \in \mathfrak{g}^*} \mathfrak{g}f} = \text{Cor}(\mathfrak{g}^*) \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g})^\perp$$

et alors  $\text{Cor}(\mathfrak{g}^*) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})^\perp$ .

En particulier, s'il existe  $f \in \mathfrak{g}^*$  telle que la représentation associée à  $f$ ,  $\pi_f$  est de carré intégrable modulo le centre de  $G$ , alors suivant [37] on a  $\mathfrak{g}(f) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ .

2) Soit encore  $G$  comme dans le théorème (III-3.3), supposons en plus que pour tout  $f, k \in \mathfrak{g}^*$  on a  $\mathfrak{g}f \subset \mathfrak{g}k$  ou  $\mathfrak{g}k \subset \mathfrak{g}f$ . Nous allons montrer que  $\text{Cor}(\mathfrak{g}^*)$  est un sous-espace vectoriel et en vertu de la proposition (III-3.4) il coïncide avec  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})^\perp$ .

En effet, soit  $l_1, l_2 \in \text{Cor}(\mathfrak{g}^*)$ , alors il existe  $x_n, y_n \in G$  et  $f_n, g_n$  en position générale tels que

$$l_1 = \lim Ad^*(x_n) f_n, f_n \longrightarrow 0$$

$$l_2 = \lim Ad^*(y_n) g_n, g_n \longrightarrow 0.$$

On sait que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $u_n \in \mathfrak{g}(f_n)^\perp$  et  $v_n \in \mathfrak{g}(g_n)^\perp$  tels que

$$Ad^*(x_n) f_n = f_n + u_n, Ad^*(y_n) g_n = g_n + v_n$$

il s'ensuit que  $l_1 + l_2 = \lim (f_n + u_n + g_n + v_n)$  et alors

$l_1 + l_2 \in \overline{\{Xl + Yf, X, Y \in \mathfrak{g}, f, l \in \mathfrak{g}^*\}}$ , et en utilisant le fait que  $\mathfrak{g}f \subset \mathfrak{g}l$  ou  $\mathfrak{g}l \subset \mathfrak{g}f$  on peut déduire que  $l_1 + l_2 \in \text{Cor}(\mathfrak{g}^*)$  et alors le cortex est un ensemble additif, par suite un sous-espace vectoriel.

3) Supposons encore que  $G$  est comme dans le théorème (III-3.3) et supposons que  $\dim G \leq 6$ . En utilisant la classification des ces groupes de Lie (cf. [2]), on peut conclure dans ce cas que le cortex est encore un sous-espace vectoriel.

### III-4 Cortex des groupes de Lie nilpotents de pas 3.

Dans ce paragraphe, on note  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire usuel de  $\mathbb{R}^n$  et  $\|\cdot\|$  la norme correspondante.

#### III-4.1 Préliminaires

Soit  $H_n$  le groupe de Heisenberg de dimension  $(2n + 1)$  d'algèbre de Lie  $\mathfrak{H}_n$ , un élément de  $\mathfrak{H}_n$  s'écrit  $(x, y, z)$ , où  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $z \in \mathbb{R}$ , avec le crochet

$$[(x, y, z), (x', y', z')] = (0, 0, \langle x, y' \rangle - \langle x', y \rangle). \quad (42)$$

Soit  $\mathfrak{W}$  le sous-espace de  $\mathfrak{H}_n$  défini par

$$\mathfrak{W} = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}^n\},$$

alors (42) définit une forme symplectique sur  $\mathfrak{W}$ . Le groupe d'isométrie  $SP_{2n}$  de cette forme agit sur  $\mathfrak{H}_n$  par des automorphismes. Si

$$\mathfrak{V} = \{(0, y, 0) : y \in \mathbb{R}^n\},$$

alors le sous-groupe  $S_n$  de  $SP_{2n}$  qui fixe  $\mathfrak{V}$  est un sous-groupe unipotent de  $SP_{2n}$ .

Concrètement,  $S_n$  est isomorphe au groupe abélien de toutes les matrices carré d'ordre  $n$ , symétriques, d'algèbre de Lie  $\mathfrak{S}_n$ .

Si on forme le produit semi-direct  $\mathfrak{S}H_n$  de  $\mathfrak{S}_n$  et  $\mathfrak{H}_n$ , on obtient une algèbre de Lie nilpotente. Un élément de  $\mathfrak{S}H_n$  s'écrit  $(S, x, y, z)$ , où  $S \in \mathfrak{S}_n$ ,  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $z \in \mathbb{R}$  et le crochet est

$$[(S, x, y, z), (S', x', y', z')] = (0, 0, Sx' - S'x, \langle x, y' \rangle - \langle x', y \rangle).$$

**III-4.1.1 Théorème [39]**

Toute algèbre de Lie nilpotente  $\mathfrak{g}$  de pas 3 dont le centre est de dimension un est isomorphe à une sous-algèbre de  $\mathfrak{S}H_n$  pour un certain  $n$ . En particulier il existe une injection  $J : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{S}H_n$  telle que

$$J(\mathfrak{g}) + \mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}H_n.$$

Les éléments de  $\mathfrak{S}H_n^*$  sont de la forme  $(E, a, b, c)$ , où  $E \in \mathfrak{S}_n$ ,  $a, b \in \mathbb{R}^n$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .

La dualité entre  $\mathfrak{S}H_n$  et  $\mathfrak{S}H_n^*$  est donnée pour tout  $(E, a, b, c) \in \mathfrak{S}H_n^*$  et  $(S, x, y, z) \in \mathfrak{S}H_n$  par

$$[(E, a, b, c), (S, x, y, z)] = E \cdot S + \langle a, x \rangle + \langle b, y \rangle + cz,$$

pour tout  $(E, a, b, c) \in \mathfrak{S}H_n^*$  et  $(S, x, y, z) \in \mathfrak{S}H_n$ , where

$$E \cdot S = \sum_{i,j} E_{ij} S_{ij} \text{ et } E_{ij}, S_{ij} : i, j = 1, \dots, n,$$

sont les coefficients de la matrice de  $E$  et de  $S \in \mathfrak{S}_n$ .

Pour deux vecteurs  $a = (a_1, \dots, a_n)$ ,  $b = (b_1, \dots, b_n)$ , on note  $a \otimes b$  la matrice dont les coefficients sont  $(a_i b_j)$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ .

**III-4.1.2 Proposition [39]**

Soit  $\xi_0 = (A, 0, 0, \lambda) \in \mathfrak{S}H_n^*$  avec  $\lambda \neq 0$ , alors l'orbite coadjointe  $\mathfrak{D}_{A,\lambda}$  dans  $\mathfrak{S}H_n^*$  de  $\xi_0$  est décrite par:

$$\mathfrak{D}_{A,\lambda} = \left\{ \left( A - \frac{1}{2\lambda} y \otimes y, x, y, \lambda \right) : x, y \in \mathbb{R}^n \right\}. \quad (43)$$

Remarquons que toute orbite coadjointe  $\mathfrak{D}_\xi$  avec  $\xi = (E, a, b, \lambda)$  et  $\lambda \neq 0$ , est égale à  $\mathfrak{D}_{\xi_0}$  pour  $\xi_0 = (A, 0, 0, \lambda)$ , où  $A = E + \frac{1}{2\lambda} b \otimes b$ .

Finalement, il a été prouvé dans [39] que la restriction de  $J^*$  sur  $\mathfrak{D}_{\xi_0}$  est un isomorphisme dans  $\mathfrak{D}_{J^*(\xi_0)}$ .



### Structure du cortex pour les groupes de Lie nilpotents de pas 3

Notation: soit  $i : \mathfrak{H}_n \longrightarrow \mathfrak{S}H_n$  l'injection définie par

$$i(x, y, z) = (0, x, y, z)$$

pour tout  $(x, y, z) \in \mathfrak{H}_n$  et notons  $j : \mathfrak{S}_n \longrightarrow \mathfrak{S}H_n$  l'injection définie par  $j(S) = (S, 0, 0, 0)$  pour tout  $S \in \mathfrak{S}_n$ .

Pour deux éléments  $K \in \mathfrak{H}_n$  et  $S \in \mathfrak{S}_n$ , on note dans la suite par  $K + S$  l'élément de  $\mathfrak{S}H_n$ :  $i(K) + j(S)$ .

#### III-4.2 Lemme

Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie nilpotente de pas 3 dont le centre est de dimension un, et soit  $J : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{S}H_n = \mathfrak{S}_n \oplus \mathfrak{H}_n$  l'injection de Ratcliff, alors:

$$J(\mathfrak{g}) = \mathfrak{F} \oplus \mathfrak{D} \oplus \mathfrak{A}$$

où

$\mathfrak{F}$  est un sous-espace de  $\mathfrak{S}_n$ , c-à-d  $\mathfrak{F} = \text{vect}(S_1, \dots, S_p)$ ,  $p \leq \frac{n(n+1)}{2}$ .

$\mathfrak{D} = \text{vect}(X_1 + T_1, \dots, X_l + T_l)$ ,  $X_1, \dots, X_l \in \mathfrak{H}_n$ ,  $T_1, \dots, T_l \in \mathfrak{S}_n$ .

$\mathfrak{A} = \text{vect}(X_{l+1}, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n, Z)$  et  $(X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n, Z)$  est une base de  $\mathfrak{H}_n$  telle que

$$[X_i, Y_j] = \delta_{i,j} Z.$$

En plus, les matrices  $(S_1, \dots, S_p, T_1, \dots, T_l)$  sont linéairement indépendants.

#### Preuve

Ceci est une conséquence immédiate du théorème 3.1 dans [39].

■

#### III-4.3 Proposition

Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie nilpotente de pas 3 dont le centre est de dimension un, et soit  $J : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{S}H_n = \mathfrak{S}_n \oplus \mathfrak{H}_n$  l'injection de Ratcliff,  $J^* : \mathfrak{S}H_n^* \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ , alors:

$$J^*(\text{Cor}(\mathfrak{S}H_n^*)) \subset \text{Cor}(\mathfrak{g}^*).$$

**Preuve**

Observons tout d'abord que pour un élément  $f \in \mathfrak{S}H_n^*$  en position générale, il existe  $\xi_0^f \in \mathfrak{S}H_n^*$  (voir préliminaires plus haut) tel que

$$Ad^*(SH_n)f = Ad^*(\exp(J(\mathfrak{g})))Ad^*(\exp(\mathfrak{S}_n))\xi_0^f = Ad^*(\exp(J(\mathfrak{g})))\xi_0^f.$$

Si  $f \in \text{Cor}(\mathfrak{S}H_n^*)$ , alors il existe  $f_p \rightarrow 0$  et  $X_p \in \mathfrak{S}H_n$  tels que:

$$Ad^*(\exp(X_p))f_p \rightarrow f.$$

En utilisant le Lemme (III-3.1) on peut supposer que  $f_p$  est en position générale pour tout  $p \in \mathbb{N}$ . Il s'ensuit que  $f = \lim Ad^*(k_p)\xi_0^p$ , où  $\xi_0^p = (A_p, 0, 0, \lambda_p)$  et  $k_p$  est une suite de  $SH_n$ .

$$Ad^*(k_p)\xi_0^p = Ad^*(\exp(J(Y_p)))\xi_0^p, Y_p \in \mathfrak{g},$$

alors

$$J^*(Ad^*(k_p)\xi_0^p) = J^*(Ad^*(\exp(J(Y_p)))\xi_0^p) = Ad^*(\exp(Y_p))J^*(\xi_0^p),$$

par suite

$$J^*(f) = \lim Ad^*(\exp(Y_p))J^*(\xi_0^p) \text{ et donc } J^*(f) \in \text{Cor}(\mathfrak{g}^*).$$

■

De cette proposition, on peut obtenir seulement une partie du cortex de  $\mathfrak{g}$ . Cependant, le théorème suivant et les remarques qui vont le suivre nous disent que

$$J^*(\text{Cor}(\mathfrak{S}H_n^*)) \neq \text{Cor}(\mathfrak{g}^*)$$

en général.

**III-4.4 Théorème**

*Le cortex de  $\mathfrak{S}H_n^*$  est l'ensemble suivant:*

$$\begin{aligned} \text{Cor}(\mathfrak{S}H_n^*) &= \{(x \otimes c + c \otimes x, u, 0, 0) : x, u, c \in \mathbb{R}^n\} \\ &= \{ad^*Xad^*Yl : X, Y \in \mathfrak{S}H_n, l \in \mathfrak{S}H_n^*\}. \end{aligned}$$

**Preuve**

Prouvons d'abord ce Lemme.

**III-4.5 Lemme**

1) Si  $x, y$  sont deux vecteurs non nuls de  $\mathbb{R}^n$ , alors la matrice  $x \otimes y + y \otimes x$  est non nulle.

2) Si  $a$  est un vecteur non nul de  $\mathbb{R}^n$ , on a

$$\{Sa, S \in \mathfrak{S}_n\} = \mathbb{R}^n.$$

**Preuve du Lemme**

1) Supposons que la matrice  $x \otimes y + y \otimes x$  soit nulle, donc tous ces termes diagonaux sont nuls, il s'ensuit que  $x \perp y$ .

D'autre part, pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , on a  $\langle \xi, y \rangle x = -\langle \xi, x \rangle y$ , donc  $x$  et  $y$  sont proportionnels et donc  $x = 0$  ou  $y = 0$ . On aboutit alors à une contradiction.

2) C'est une simple construction.

D'après (43), on peut voir que  $P(A, a, b, \lambda) = 2\lambda A + b \otimes b$  est un polynôme  $SH_n$ -invariant, donc pour tout  $(A, a, b, \lambda) \in \text{Cor}(\mathfrak{S}H_n^*)$ , on doit avoir  $\lambda = 0$  et donc  $b = 0$ . Par ailleurs

$$\text{Cor}(\mathfrak{S}H_n^*) \subset \{(A, u, 0, 0), A \in \mathfrak{S}_n, u \in \mathbb{R}^n\}.$$

Calculons maintenant l'action coadjointe de  $\mathfrak{S}H_n$ :

$$\begin{aligned} Ad^*(\exp(S, x, y, z))(E, a, b, \lambda) &= \left( E + \left(\frac{b}{2} - \frac{\lambda x}{4}\right) \otimes x + x \otimes \left(\frac{b}{2} - \frac{\lambda x}{4}\right), \right. \\ &\quad \left. a - Sb + \lambda y + \frac{1}{2}\lambda Sx, b - \lambda x, \lambda \right). \end{aligned}$$

Soit maintenant  $(A, u, 0, 0)$  dans  $\text{Cor}(\mathfrak{S}H_n^*)$ , alors il existe  $(E_m, a_m, b_m, \lambda_m) \in \mathfrak{S}H_n^*$  qui converge vers 0, et  $(S_m, x_m, y_m, z_m) \in \mathfrak{S}H_n$  tels que :

$$Ad^*(\exp(S_m, x_m, y_m, z_m))(E_m, a_m, b_m, \lambda_m) \longrightarrow (A, u, 0, 0).$$

Posons  $h_m = \frac{b_m}{2} - \frac{\lambda_m x_m}{4}$ , puisque  $b_m - \lambda_m x_m \longrightarrow 0$ , on a que  $h_m \longrightarrow 0$  et

$$h_m \otimes x_m + x_m \otimes h_m \longrightarrow A.$$

On écrit maintenant

$$h_m \otimes x_m + x_m \otimes h_m = \|x_m\| \|h_m\| \left( \frac{h_m}{\|h_m\|} \otimes \frac{x_m}{\|x_m\|} + \frac{x_m}{\|x_m\|} \otimes \frac{h_m}{\|h_m\|} \right).$$

Supposons alors quitte à passer à des sous-suites, que  $\frac{h_m}{\|h_m\|}$  et  $\frac{x_m}{\|x_m\|}$  convergent, notons

$$h_\infty = \lim \frac{h_m}{\|h_m\|}, \quad x_\infty = \lim \frac{x_m}{\|x_m\|}.$$

Puisque  $h_\infty \otimes x_\infty + x_\infty \otimes h_\infty \neq 0$ , (1-Lemma 2.5) alors la sous-suite  $\|x_m\| \|h_m\|$  converge, soit  $r$  sa limite, alors

$$A = r(h_\infty \otimes x_\infty + x_\infty \otimes h_\infty),$$

et donc

$$\text{Cor}(\mathfrak{S}H_n^*) \subset \{(x \otimes c + c \otimes x, u, 0, 0) : x, u, c \in \mathbb{R}^n \}.$$

Finalement, il est facile de voir que

$$\lim Ad^*(\exp(0, nx, \frac{n^2 a}{2}, 0))(0, 0, \frac{c}{n}, \frac{1}{n^2}) = \left( (c - \frac{x}{2}) \otimes \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \otimes (c - \frac{x}{2}), \frac{a}{2}, 0, 0 \right),$$

et donc

$$\{x \otimes c + c \otimes x, u, 0, 0\} : x, u, c \in \mathbb{R}^n \} \subset \text{Cor}(\mathfrak{S}H_n^*).$$

Calculons maintenant  $\{ad^* X ad^* Y l : X, Y \in \mathfrak{S}H_n, l \in \mathfrak{S}H_n^*\}$ .

Pour  $X = (S', a', b', c')$  et  $Y = (S, a, b, c)$  et  $l = (T, u, v, \lambda)$ , on a:

$$ad^* X ad^* Y l = \left( \frac{-\lambda}{2} (a \otimes a' + a' \otimes a), \lambda S' a, 0, 0 \right),$$

et en utilisant (2-Lemme III-4.5) on a le résultat. ■

### III-4.6 Remarques

1) On n'a pas pour toute algèbre de Lie nilpotente  $\mathfrak{g}$  de pas 3 dont le centre est de dimension un que

$$\text{Cor}(\mathfrak{g}^*) = \{ad^* X ad^* Y f : X, Y \in \mathfrak{g}, f \in \mathfrak{g}^*\},$$

quoique  $\mathfrak{g}$  soit injectée dans  $\mathfrak{S}H_n$  pour un  $n$  bien déterminé. En effet, soit  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{5,3} = \text{vect}(X_1, \dots, X_5)$  avec les commutateurs non triviaux

$$[X_1, X_2] = X_4, \quad [X_1, X_4] = X_5, \quad [X_2, X_3] = X_5.$$

$\text{Cor}(\mathfrak{g}^*) = \text{vect}(X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*)$  (voir [2]), mais  $\{ad^*Xad^*Yf : X, Y \in \mathfrak{g}, f \in \mathfrak{g}^*\} = \text{vect}(X_1^*, X_2^*)$ . Donc

$$\{ad^*Xad^*Yf : X, Y \in \mathfrak{g}, f \in \mathfrak{g}^*\} \neq \text{Cor}(\mathfrak{g}^*).$$

2) Si  $\text{Cor}(\mathfrak{g}^*) = \{ad^*Xad^*Yf : X, Y \in \mathfrak{g}, f \in \mathfrak{g}^*\}$ , alors  $J^*(\text{Cor}(\mathfrak{S}H_n^*)) = \text{Cor}(\mathfrak{g}^*)$ . En effet, soit  $k \in \text{Cor}(\mathfrak{g}^*)$ , alors il existe  $h \in \mathfrak{S}H_n^*$  tel que

$$k = ad^*Xad^*YJ^*(h) = J^*(ad^*J(X)ad^*J(Y)(h) \in J^*(\text{Cor}(\mathfrak{S}H_n^*)),$$

il en résulte que  $\text{Cor}(\mathfrak{g}^*) \subset J^*(\text{Cor}(\mathfrak{S}H_n^*))$ , et en utilisant la proposition (III-4.3), on a le résultat.

### III-5 Description du cortex des groupes de Lie nilpotents de pas 3

Nous allons maintenant regarder de très près le cortex des groupes de Lie de pas trois dont le centre est unidimensionnel. Pour une matrice symétrique  $S$ , on note  $S/\mathfrak{F}$  la restriction de la forme linéaire  $(S, 0, 0, 0)$  au sous-espace  $\mathfrak{F}$  de  $J(\mathfrak{g})$ .

#### III-5.1 Proposition

Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie nilpotente de pas 3 dont le centre est de dimension un, et supposons que

$$J(\mathfrak{g}) = \text{vect}(S_1, \dots, S_p, X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n, Z) = \mathfrak{F} \oplus \mathfrak{h}_n,$$

où  $J : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{S}H_n$  est l'injection de Ratcliff.

Si  $p = 1$  c-à-d  $J(\mathfrak{g}) = \text{vect}(S, X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n, Z)$ , alors

$$\text{Cor}(\mathfrak{g}^*) = \{(aS, u, v, 0) : a \in \mathbb{R}, u, v \in \mathbb{R}^n, \langle Sv, v \rangle = 0\}.$$

Si  $p \geq 1$ , le cortex  $\text{Cor}(\mathfrak{g}^*)$  de  $\mathfrak{g}$  contient l'ensemble suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \left( w_{k+1} \otimes v + v \otimes w_{k+1} + \frac{1}{2} \sum_{i+j=k+1} w_i \otimes w_j + w_j \otimes w_i \right) / \mathfrak{F}, u, v, 0 \right) \\ u, v, w_i \in \mathbb{R}^n \\ v \otimes v / \mathfrak{F} = 0 \\ \forall r \in \{1, \dots, k\} : \left( w_r \otimes v + v \otimes w_r + \frac{1}{2} \sum_{i+j=r} w_i \otimes w_j + w_j \otimes w_i \right) / \mathfrak{F} = 0 \end{array} \right\}.$$

**Preuve**

Supposons que  $p = 1$ .

Il est clair d'après (43) que pour  $i \in \{1, \dots, p\}$  le polynôme

$$P(A, u, v, \lambda) = 2\lambda SA + \langle Sv, v \rangle$$

est invariant, donc :

$$\text{Cor}(\mathfrak{g}^*) \subset \{(\varphi, u, v, 0) : u, v \in \mathbb{R}^n, \langle Sv, v \rangle = 0, \varphi \in \mathbb{R}\}.$$

Soit

$$l = (\varphi, u, v, 0) \in \text{Cor}(\mathfrak{g}^*),$$

on doit montrer qu'il existe des suites  $(A_m, u_m, v_m, \lambda_m)$  telles que  $A_m \rightarrow 0$ ,  $u_m \rightarrow u$ ,  $v_m \rightarrow v$  et  $\lambda_m \rightarrow 0$  avec

$$(SA_m - \frac{\langle Sv_m, v_m \rangle}{2\lambda_m}, u_m, v_m, \lambda_m) \rightarrow (\varphi, u, v, 0).$$

Si  $Sv \neq 0$ , alors il existe  $x \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\langle Sv, x \rangle = \varphi$  et on peut prendre

$$v_m = v + \frac{x}{m}, \quad u_m = u, \quad \lambda_m = -\frac{1}{m}, \quad A_m = 0,$$

il s'ensuit que

$$(SA_m - \frac{\langle Sv_m, v_m \rangle}{2\lambda_m}, u_m, v_m, \lambda_m) = (\varphi + \frac{1}{2m} \langle Sx, x \rangle, u, v + \frac{x}{m}, -\frac{1}{m}) \rightarrow (\varphi, u, v, 0).$$

Si  $Sv = 0$ , on peut trouver  $w \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\varphi = \langle Sw, w \rangle$  ou  $\varphi = -\langle Sw, w \rangle$ , alors si  $\varphi = \langle Sw, w \rangle$ , on peut choisir

$$v_m = v + \frac{w}{m}, \quad u_m = u, \quad \lambda_m = -\frac{1}{2m^2}, \quad A_m = 0.$$

Si  $\varphi = -\langle Sw, w \rangle$ , on peut choisir

$$v_m = v + \frac{w}{m}, \quad u_m = u, \quad \lambda_m = \frac{1}{2m^2}, \quad A_m = 0$$

et on a le résultat, d'où le premier cas.

Supposons maintenant que  $p > 1$ , on identifie  $\mathfrak{F}$  avec  $\mathbb{R}^p$  à travers la base  $(S_1, \dots, S_p)$ . Remarquons que dès que  $p \geq 2$  la structure du cortex va dépendre fortement des matrices symétriques qui engendrent l'algèbre de Lie en question. Soit  $\mathcal{L}_k$  l'ensemble

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \left( w_{k+1} \otimes v + v \otimes w_{k+1} + \frac{1}{2} \sum_{i+j=k+1} w_i \otimes w_j + w_j \otimes w_i \right) / \mathfrak{F}, u, v, 0 \right) \\ u, v, w_i \in \mathbb{R}^n \\ v \otimes v / \mathfrak{F} = 0 \\ \forall r \in \{1, \dots, n\} : \left( w_r \otimes v + v \otimes w_r + \frac{1}{2} \sum_{i+j=r} w_i \otimes w_j + w_j \otimes w_i \right) / \mathfrak{F} = 0 \end{array} \right\}$$

On doit prouver que  $\mathcal{L}_k \subset \text{Cor}(\mathfrak{g}^*)$ . Pour cela, trouvons des suites  $(u_m, v_m, \lambda_m)_m$  telles que

$$\begin{aligned} v_m &\rightarrow v \\ \lambda_m &\rightarrow 0 \\ u_m &\rightarrow u \\ -\frac{v_m \otimes v_m}{2\lambda_m} / \mathfrak{F} &\rightarrow \left( w_{k+1} \otimes v + v \otimes w_{k+1} + \frac{1}{2} \sum_{i+j=k+1} w_i \otimes w_j + w_j \otimes w_i \right) / \mathfrak{F}. \end{aligned}$$

Supposons d'abord que  $k$  est pair et prenons

$$v_m = v + \sum_{i=1}^{k+1} \frac{w_i}{m^i}$$

et

$$\lambda_m = -\frac{1}{2} m^{-k-1}.$$

Pour une matrice symétrique  $S$ , on a que

$$\begin{aligned} -\frac{\langle Sv_m, v_m \rangle}{2\lambda_m} &= m^{k+1} \left\langle S \left( v + \sum_{i=1}^{k+1} \frac{w_i}{m^i} \right), \left( v + \sum_{j=1}^{k+1} \frac{w_j}{m^j} \right) \right\rangle \\ &= m^{k+1} \left\langle 2Sv, \sum_{j=1}^{k+1} \frac{w_j}{m^j} \right\rangle + m^{k+1} \left\langle S \left( \sum_{i=1}^{k+1} \frac{w_i}{m^i} \right), \sum_{j=1}^{k+1} \frac{w_j}{m^j} \right\rangle \\ &= m^{k+1} \left\langle 2Sv, \sum_{j=1}^{k+1} \frac{w_j}{m^j} \right\rangle + 2 \left( \sum_{i,j, i \neq j}^{k+1} m^{-(j+i)+k+1} \langle Sw_i, w_j \rangle \right) \end{aligned}$$

$$+ \left( \sum_{i=1}^{k+1} m^{k+1-2i} \langle Sw_i, w_i \rangle \right).$$

En utilisant les contraintes

$$\forall r \in \{1, \dots, k\} : \left( w_r \otimes v + v \otimes w_r + \frac{1}{2} \sum_{i+j=r} w_i \otimes w_j + w_j \otimes w_i \right) / \mathfrak{F} = 0$$

on obtient pour  $S \in \mathfrak{F}$  que

$$-\frac{\langle Sv_m, v_m \rangle}{2\lambda_m} = (2Sv, w_{k+1}) + \sum_{i+j=k+1} (Sw_i, w_j) + \sum_{i+j>k+1} (Sw_i, w_j) m^{-(j+i)+k+1}.$$

Donc si  $m \rightarrow \infty$ ,  $-\frac{\langle Sv_m, v_m \rangle}{2\lambda_m}$  tend vers  $2(Sv, w_{k+1}) + \sum_{j+i=k+1} (Sw_i, w_j)$ .

Si  $k$  est impair, les mêmes calculs sont valables et la limite obtenue est

$$2(Sv, w_{k+1}) + 2 \sum_{j+i=k+1} (Sw_i, w_j) + (Sw_{\frac{k+1}{2}}, w_{\frac{k+1}{2}}).$$

Finalement, on a que  $\mathfrak{L}_k \subset \text{Cor}(\mathfrak{g}^*)$ . ■

### III-5.2 Corollaire

Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie nilpotente de pas 3 dont le centre est de dimension un, et supposons que

$$J(\mathfrak{g}) = \text{vect} (S_1, \dots, S_p, X_1 + T_1, \dots, X_l + T_l, X_{l+1}, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n, Z) = \mathfrak{F} \oplus \mathfrak{D} \oplus \mathfrak{A}$$

l'écriture de  $\mathfrak{g}$  comme dans le lemme III-4.2. Alors, pour tout  $k \geq 1$ , le cortex  $\text{Cor}(\mathfrak{g}^*)$  de  $\mathfrak{g}^*$  contient l'ensemble suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \left( w_{k+1} \otimes v + v \otimes w_{k+1} + \frac{1}{2} \sum_{i+j=k+1} w_i \otimes w_j + w_j \otimes w_i \right) / \mathfrak{F}, h, u, v, 0 \right) \\ v, w_i \in \mathbb{R}^n \\ h \in \mathbb{R}^l, u \in \mathbb{R}^{n-l} \\ v \otimes v / \mathfrak{F} = 0 \\ \forall r \in \{1, \dots, k\} : \left( w_r \otimes v + v \otimes w_r + \frac{1}{2} \sum_{i+j=r} w_i \otimes w_j + w_j \otimes w_i \right) / \mathfrak{F} = 0 \end{array} \right\}.$$



**Preuve**

Comme dans le Lemme **III-4.2** on a:

$$J(\mathfrak{g}) = \text{vect}(S_1, \dots, S_p, X_1 + T_1, \dots, X_l + T_l, X_{l+1}, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n, Z)$$

avec les commutateurs non triviaux suivants:

$$[S_i, X_h + T_h] \in \text{vect}(Y_1, \dots, Y_n), \quad i \in \{1, \dots, p\}, \quad h \in \{1, \dots, l\},$$

$$[X_h + T_h, Y_i] = \delta_{i,h} Z, \quad i \in \{1, \dots, n\}, \quad h \in \{1, \dots, l\}.$$

$\delta_{i,h}$  est l'indice de Kronecker.

Les variables attachées aux vecteurs de bases  $X_1 + T_1, \dots, X_l + T_l$  sont libres, les indices de ces vecteurs sont dans l'ensembles indice de Pukanszky  $e^{\mathfrak{B}}(f)$  pour une forme linéaire  $f$  en position générale, en utilisant alors la proposition (**III-5.1**), on obtient le résultat. ■

**III-5.3 Exemples****Exemple 1**

Soit  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{6,5}$  l'algèbre de Lie engendrée par les vecteurs  $(X_1, \dots, X_6)$ , avec les commutateurs non triviaux

$$[X_1, X_2] = X_4, \quad [X_1, X_4] = X_6, \quad [X_3, X_5] = X_6, \quad [X_1, X_3] = X_5.$$

En utilisant le procédé de Ratcliff, on peut voir que  $\mathfrak{g}$  s'injecte dans  $\mathfrak{S}H_2$ , notons

$$\mathfrak{h}_2 = \text{vect}(A_1, A_2, B_1, B_2, Z), \quad [A_i, B_j] = \delta_{i,j} Z,$$

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit  $J$  l'injection décrite plus haut, alors

$$J(X_1) = A_1 + K_{1,2}$$

$$J(X_2) = E_{1,1}$$

$$J(X_3) = A_2$$

$$J(X_4) = B_1$$

$$J(X_5) = B_2$$

$$J(X_6) = Z.$$

Un calcul facile montre que pour tout  $k \in \mathbb{N}$  on a

$$\mathfrak{L}_k = \{wE_{1,1}^* + b(A_1 + K_{1,2})^* + cA_2^* + hB_2^*, w, b, c, h \in \mathbb{R}\}.$$

D'autre part, on a que  $\text{Cor}(\mathfrak{g}^*) = \text{vect}(X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_5^*)$  (voir [2]). Alors

$$\mathfrak{L}_k = \text{Cor}(\mathfrak{g}^*).$$

### **Exemple 2**

Soit  $\mathfrak{g}$  l'algèbre de Lie engendrée par les vecteurs  $(X_1, \dots, X_7)$ , avec les commutateurs non triviaux

$$[X_1, X_3] = X_5, [X_2, X_4] = X_6, [X_3, X_5] = X_7, [X_4, X_6] = X_7.$$

En utilisant de nouveau le procédé de Ratcliff, on peut voir que  $\mathfrak{g}$  s'injecte dans  $\mathfrak{S}H_2$ , on garde la même notation que dans l'exemple 1, et soit

$$E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Soit  $J$  l'injection de Ratcliff, alors

$$J(X_1) = E_{1,1}$$

$$J(X_2) = E_{2,2}$$

$$J(X_3) = A_1$$

$$J(X_4) = A_2$$

$$J(X_5) = B_1$$

$$J(X_6) = B_2$$

$$J(X_7) = Z.$$

Un calcul analogue à celui de l'exemple 1 montre que pour tout  $k \in \mathbb{N}$  on a

$$\mathfrak{L}_k = \{wE_{1,1}^* + bE_{2,2}^* + cA_1^* + hA_2^*, w, b, c, h \in \mathbb{R}, \text{sg}(w) = \text{sg}(b)\}.$$

D'autre part, en utilisant les polynômes invariants on a que

$$\text{Cor}(\mathfrak{g}^*) \subset \text{vect}(X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*).$$

Posons  $f_n = f_n^1 X_1^* + \dots + f_n^7 X_7^* \longrightarrow 0$  et  $X_n = x_n^1 X_1 + \dots + x_n^7 X_7$  tels que

$$\text{Ad}^*(\exp(X_n))f_n \longrightarrow f \in \text{Cor}(\mathfrak{g}^*),$$

les coordonnées de  $\text{Ad}^*(\exp(X_n))f_n$  dans la base  $(X_1^*, \dots, X_7^*)$  sont

$$\begin{aligned} & f_n^1 + x_n^3 f_n^5 - \frac{1}{2}(x_n^3)^2 f_n^7 \\ & f_n^2 + x_n^4 f_n^6 - \frac{1}{2}(x_n^4)^2 x_n^6 f_n^7 \\ & f_n^3 - x_n^1 f_n^5 + x_n^5 f_n^7 + \frac{1}{2}x_n^1 x_n^3 f_n^7 \\ & f_n^4 + x_n^2 f_n^6 - x_n^6 f_n^7 \\ & f_n^5 - x_n^3 f_n^7 \\ & f_n^6 - x_n^4 f_n^7 \\ & f_n^7. \end{aligned}$$

Soit  $l = dX_1^* + c X_2^* + bX_3^* + a X_4^* \in \text{vect}(X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*)$ , alors si on choisit les suites suivantes:

$$f_n^6 = f_n^5 = \frac{1}{n^2}, f_n^7 = \frac{1}{n^5}, x_n^2 = -an^2, x_n^4 = +cn^2, x_n^3 = +dn^2, x_n^1 = -bn^2 \text{ alors}$$

$$\text{Ad}^*(\exp(X_n))f_n \longrightarrow l \in \text{Cor}(\mathfrak{g}^*),$$

et alors

$$\text{Cor}(\mathfrak{g}^*) = \text{vect}(X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*),$$

finalement

$$\mathfrak{L}_k \underset{\neq}{\subset} \text{Cor}(\mathfrak{g}^*).$$

**III-5.4 Proposition finale**

Soit  $G$  un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ , et supposons que toutes les orbites coadjointes dans  $\mathfrak{g}^*$  associées aux formes linéaires en position générale sont des variétés affines (ceci est le cas quand  $G$  est de pas 2). Alors pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , le cortex de  $\mathfrak{g}$  contient l'ensemble suivant:

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{i+j=2p} X_i f_j, \quad X_1, \dots, X_{2p-1} \in \mathfrak{g}, \quad f_1, \dots, f_{2p-1} \in \mathfrak{g}^*, \\ & \sum_{i+j=r} X_i f_j = 0, \quad r \in \{2, \dots, 2p-1\} \end{aligned} \right\}.$$

**Preuve**

Appellons  $\mathfrak{J}_p$  l'ensemble:  $\{ \sum_{i+j=2p} X_i f_j, X_1, \dots, X_{2p-1} \in \mathfrak{g}, f_1, \dots, f_{2p-1} \in \mathfrak{g}^*,$

$$\sum_{i+j=r} X_i l_j = 0, \quad r \in \{2, \dots, 2p-1\} \}.$$

La preuve consiste à montrer que  $\mathfrak{J}_p \subset \text{Cor}(\mathfrak{g}^*)$ . En effet, puisque

$$\text{Cor}(\mathfrak{g}^*) = \overline{\{ad^* X l : X \in \mathfrak{g}, l \in \mathfrak{g}^*\}},$$

on a

$$\begin{aligned} \left[ \sum_{i=1}^{2p-1} n^{2p-i} X_i \right] \left[ \sum_{j=1}^{2p-1} \frac{f_j}{n^j} \right] &= \sum_{i=1, j=1}^{2p-1} n^{2p-(i+j)} X_i f_j \\ &= \sum_{i+j>2p} n^{2p-(i+j)} X_i f_j + \sum_{i+j=2p} X_i f_j + \sum_{i+j<2p} n^{2p-(i+j)} X_i f_j. \end{aligned}$$

D'autre part, on a que

$$\sum_{i+j<2p} n^{2p-(i+j)} X_i f_j = \sum_{r=2}^{2p-1} n^{2p-r} \sum_{i+j=r} X_i f_j = 0,$$

puisque  $\sum_{i+j=r} X_i f_j = 0$  pour  $r \in \{2, \dots, 2p-1\}$ .

Alors  $\lim \left[ \sum_{i=1}^{2p-1} n^{2p-i} X_i \right] \left[ \sum_{j=1}^{2p-1} \frac{f_j}{n^j} \right] = \sum_{i+j=2p} X_i f_j$  puisque

$$\sum_{i+j>2p} n^{2p-(i+j)} X_i f_j \longrightarrow 0,$$

finalemt  $\mathfrak{J}_p \subset \text{Cor}(\mathfrak{g}^*)$ .

## CONCLUSION

Dans les deux premiers chapitres, nous avons construit des opérateurs d'entrelacement d'une part entre les représentations induites et leurs désintégrations centrales canoniques et d'autre part entre les restrictions des représentations unitaires et leurs désintégrations. Pour cela, nous avons employé la méthode des orbites (cf. [8], [25]). Tous nos résultats ont été établis dans un cadre tout à fait général pour les groupes nilpotents connexes et simplement connexes, la majorité de nos preuves sont basées sur un raisonnement par récurrence sur la dimension du groupe ou d'un espace homogène associé, d'ailleurs c'est le type de raisonnement utilisé dans la littérature dans ce type de problèmes.

Nous pensons actuellement d'étendre ces résultats pour des classes plus grandes de groupes résolubles. La première espèce de groupes résolubles qu'on désire traiter est ce qu'on appelle les groupes résolubles exponentiels dont l'application exponentielle est un difféomorphisme sur leurs algèbres de Lie.

Soit  $G = \exp \mathfrak{g}$  un tel groupe, la méthode des orbites dit que le dual unitaire  $\hat{G}$  est paramétré par l'espace des orbites coadjointes de  $G$ . Plus en détail, pour  $f \in \mathfrak{g}^*$  quelconque il existe une polarisation réelle  $\mathfrak{b}$  vérifiant la condition de Pukansky et la représentation monomiale  $\rho(f, \mathfrak{b}, G)$  de  $G$ , induite par un caractère unitaire  $\chi_f$  du sous-groupe  $B = \exp \mathfrak{b}$  dont la différentielle,  $i f|_{\mathfrak{b}}$ , s'avère irréductible. En plus la classe d'équivalence de  $\rho(f, \mathfrak{b}, G)$  ne dépend que de l'orbite coadjointe  $G \cdot f$ , ce qui nous donne une bijection de l'espace des orbites  $\mathfrak{g}^*/G$  sur  $\hat{G}$ .

Soit  $H = \exp \mathfrak{h}$  un sous-groupe fermé connexe de  $G$ ,  $\chi_f$  étant un caractère unitaire de  $H$ , alors comme dans [17], la désintégration centrale de  $\tau = \text{Ind}_H^G \chi_f$  s'écrit:

$$\tau \simeq \int_{\hat{G}}^{\oplus} m(\pi) \pi d\nu(\pi) \tag{44}$$

où  $\nu$  est l'image par l'application de Kirillov d'une mesure positive finie sur  $f + \mathfrak{h}^{\perp}$  équivalente à la mesure de Lebesgue, et  $m(\pi)$  est le nombre de  $H$ -orbites contenues dans  $(f + \mathfrak{h}^{\perp}) \cap \Omega(\pi)$ .

La question qu'on se pose ici est la suivante: peut-on construire une isométrie qui entrelace cette désintégration. Dans la littérature cette question n'a pas été encore abordée, notre expérience dans le cas nilpotent nous donne une idée sur l'ordre de difficulté de cette construction dont l'importance est capitale comme on l'a déjà remarqué dans le cas des groupes nilpotents.

Soit  $\Delta_G, \Delta_H$  les fonctions modules respectivement de  $G$  et de  $H$ , la représentation induite agit sur les fonctions  $\xi \in L^2(G/H)$  vérifiant

$$\xi(gh) = \xi(g)\chi_f(h^{-1})\Delta_H^{\frac{1}{2}}(h)\Delta_G^{-\frac{1}{2}}(h). \quad (45)$$

Soit  $U$  l'opérateur défini sur une telle fonction  $\xi$  qui est en plus à support compact modulo  $H$  et  $g \in G$  par

$$U(\xi)(\phi)(g) = \int_{B(\phi)/B(\phi) \cap H} \xi(gb)\chi_\phi(b)\Delta_{B(\phi)}^{-\frac{1}{2}}(b)\Delta_G^{\frac{1}{2}}(b)d_{B(\phi),H}(b), \quad (\phi \in (f + \mathfrak{h}^\perp)/H),$$

$B(\phi)$  étant la polarisation de Vergne en  $\phi$  extraite à partir d'une bonne suite de sous-algèbres et  $d_{B(\phi),H}$  une mesure invariante sur l'espace homogène  $B(\phi)/B(\phi) \cap H$ .

Cet opérateur transforme des fonctions qui vérifient la relation de covariance (45) pour  $H$  en des fonctions qui vérifient la même relation pour  $B(\phi)$ , et il entrelace formellement la formule (44). Il en résulte que cet opérateur peut être un candidat sous réserve de convergence, d'ailleurs les opérateurs des exemples (I-8,A,B) sont tirés de la formule de  $U$ . Il nous reste à voir si c'est le bon candidat. Il est à noter que la même question se pose pour les restrictions des représentations unitaires des groupes résolubles exponentiels.

Revenons maintenant au cas des groupes nilpotents, rappelons l'algèbre  $\mathfrak{D}_\tau(G/H)$  des opérateurs différentiels qui commutent avec les translations à droite, nous nous sommes intéressé à démontrer ou à contredire la conjecture (21) qui affirme que cette algèbre est en fait isomorphe à l'algèbre  $\mathbb{C}[f + \mathfrak{h}^\perp]^H$  des fonctions polynomiales  $H$ -invariantes sur  $f + \mathfrak{h}^\perp$ . Nous avons étudié des exemples assez compliqués où l'opérateur (9) varie de façon (très rationnelle) en fonction de  $\phi$ , mais malgré ça, tous les éléments de  $\mathfrak{D}_\tau(G/H)$  se diagonalisent polynomialement.

Autre question concernant cette algèbre et suggérée par Corwin et Greenleaf dans [12] est de voir la conjecture suivante pour tous les groupes nilpotents:

*$\mathfrak{D}_\tau(G/H)$  est abélienne si et seulement si toutes les multiplicités sont finies dans la désintégration de  $\tau$ .*

Si cette conjecture est correcte, alors elle ne doit pas sortir du cadre des groupes nilpotents, un tel contre-exemple dans le cas des groupes résolubles exponentiels est donné dans [12].

Ajoutons qu'il est intéressant d'obtenir des résultats équivalents sur les opérateurs différentiels dans le cas de la désintégration des restrictions des représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents.

Enfin, nous comptons revenir sur le problème du cortex évoqué dans le dernier chapitre. Plus précisément, soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie nilpotente et supposons que toutes les orbites coadjointes dans  $\mathfrak{g}^*$  associées aux formes linéaires en position générale soient des variétés affines (ceci est le cas quand  $G$  est de pas 2). La question importante sera la suivante: est-ce que le cortex de  $\mathfrak{g}^*$  est l'ensemble suivant:

$$\left\{ \sum_{i+j=2p} X_i l_j, X_1, \dots, X_{2p-1} \in \mathfrak{g}, f_1, \dots, f_{2p-1} \in \mathfrak{g}^*, \right. \\ \left. \sum_{i+j=r} X_i l_j = 0, r \in \{2, \dots, 2p-1\} \right\},$$

pour un certain  $p \in \mathbb{N}$ . Si tel est le cas, alors  $p \geq 2n + 1$  où  $n$  est la dimension de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ . Il a été prouvé que le cortex est contenu dans l'ensemble ci-dessus (Proposition **III-5.4**) mais pour l'inclusion réciproque nous n'avons pour le moment ni preuve ni contre-exemple. Une analyse plus détaillée de la structure du cortex nous laisse beaucoup d'espoir pour savoir si cette égalité est vraie ou fausse. Cependant, malgré les difficultés énormes pour résoudre ce problème dans cette situation spéciale, on peut se demander quelle peut être la forme du cortex pour des algèbres de Lie dont le pas est supérieur à deux.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] D. Arnal, M. Cahen and J. Ludwig: Lie groups whose coadjoint orbits are of dimension smaller or equal to two. Letters in Math physics. To appear.
- [2] A. Baklouti.: Le Cortex en dimension six. Publication du centre Universitaire de Luxembourg. Fascicule V, 1993.(7 - 45).
- [3] A. Baklouti.: On the Cortex of connected Simply connected Nilpotent Lie Groups. Russian Journal of Mathematical Physics. To appear.
- [4] A. Baklouti et J. Ludwig., Opérateur d'entrelacement des représentations monomiales des groupes de Lie nilpotents. Soumis dans Pacific Journal of Mathematics.
- [5] A. Baklouti et J. Ludwig, La Désintégration des Restrictions des Représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents. Soumis dans les annales de l'institut Fourier.
- [6] M. Bekka and E. Kanuith: Irreducible representation of locally compact group that can not be Hausdorff separated from the identity representation. J, Reine Angew, Mat 385(1988)203-220.
- [7] J. Boidol, J. Ludwig, and D. Müller. On infinitely small orbits, Studia Mathematica, T. LXXXVIII. (1988).
- [8] I. Brown, dual topology of a nilpotent Lie group, Ann.Sci.Ecole Norm.Sup.6(1973), 407-411.



- [9] L. Corwin and F. P. Greenleaf, A canonical approach to multiplicity formulas for induced and restricted representations of nilpotent Lie groups, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, Vol. XLI, 1051-1088 (1988) .
- [10] L. Corwin and F. P. Greenleaf, Spectral decomposition of invariant differential operators on certain nilpotent homogeneous spaces, *J. Func. Anal.* 108(1992), 374-426.
- [11] L. Corwin, F. P. Greenleaf and G. Grélaud, Direct integral decompositions and multiplicities for induced representations of nilpotent Lie groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* (1988), 601-622 .
- [12] L. Corwin and F. P. Greenleaf , Commutativity of Invariant Differential Operators On nilpotent Homogeneous Spaces with finite Multiplicity, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, Vol XLV, 681-748 (1992).
- [13] L. Corwin and F. P. Greenleaf, Spectrum and Multiplicities for Restrictions of Unitary Representation in Nilpotent Lie Groups. *Pacific Journal of Mathematics* Vol. 135, No 2, 1988.
- [14] J. Dixmier, *Algèbres enveloppantes*, Gauthier-Villars, 1974.
- [15] M. Duflo, *Opérateurs différentiels invariants et homologie des algèbres de Lie (L'appendice du cours à Tunis)*, 1983.
- [16] H. Fujiwara, Représentation monomiales des groupes de Lie nilpotents, *Pacific journal of Mathematics*, vol. 127, No. 2, 1987.
- [17] H. Fujiwara, Représentation monomiales des groupes de Lie résolubles exponentiels, dans "The orbit method in representation theory ", Birkhäuser 1990, 61-84.
- [18] H. Fujiwara et S. Yamagami, Certaines représentations monomiales des groupes de Lie résolubles exponentiels, *Adv. St. Pure Math.* 14(1988), 153-190.
- [19] H. Fujiwara, Sur les restrictions des représentation unitaires des groupes de Lie résolubles exponentiels, *Invent. math.* 104, 647-654 (1991).
- [20] G. Grélaud, Une formule de Plancherel pour les espaces homogènes des groupes de Lie nilpotents. Préprint de l'université de Poitiers.
- [21] G. Grélaud, Sur les représentations des groupes de Lie résolubles, thèse.

- Université de Poitiers, 1984.
- [22] G. Grélaud, On representations of simply connected nilpotent and solvable Lie groups. Prépublication no 76, Univ. de Poitiers, 1993.
- [23] G. Grélaud, La formule de Plancherel pour les espaces homogènes des groupes de Heisenberg, *J. reine angew. Math.* , 398(1989), 92-100.
- [24] E. Kaniuth. On the Conjugation Representation of a Locally Compact Group. *Math. Z.* 202, 275-288(1989)
- [25] A. A. Kirillov, Unitary representations of nilpotent Lie groups, *Uspekhi Mat. Nauk* 17 (4) (1962) 57-110(in Russian).
- [26] H. Leptin and J. Ludwig: Unitary Representation Theory of Exponential Lie Groups De Gruyter Expositions In Mathematics 18.
- [27] G. Lion, Intégrale d'entrelacement sur des groupes de Lie nilpotents et indices de Maslov, *Lect. Notes in Math.* ,587(1977), 160-176.
- [28] R. Lipsman, Orbital parameters for induced and restricted representation, *Trans. Amer. Math. Soc.* 313 (1989), 433-473.
- [29] R. Lipsman, The Plancherel formula for homogeneous spaces with polynomial spectrum, *Pacific journal of Mathematics*, vol. 159, No. 2,1993.
- [30] R. Lipsman, The Penny-Fujiwara Plancherel formula for abelian symmetric space and completely solvable homogeneous spaces, *Pacific journal of Mathematics*, vol. 151, No. 2, 1991.
- [31] R. Lipsman, Restricting Representations of Completely Solvable Lie Groups, *Can. J. Math.* Vol. XLII,No.5,1990 pp. 790-824.
- [32] J. Ludwig and H. Zahir, On the Nilpotent  $\star$ - Fourier Transform. *Letters in Mathematical Physics* 30: 23-34, 1994.
- [33] J. Ludwig: On the behaviour of sequences in the dual of a nilpotent Lie group; *Math. Ann.* 287,239-257(1990).
- [34] J. Ludwig, G. Rosenbaum, J. Samuel: The elements of bounded trace in the  $C^*$  algebra of a nilpotent Lie group. *Invent.* 83.,167-190(1986).

- [35] J. Ludwig, : Good ideals in the group algebra of a nilpotent Lie group.  
Math. Z. 16,195-210 (1978).
- [36] J. Ludwig, : On the Hilbert-Schmidt Semi-Norms of  $L^1$  of a nilpotent Lie group.  
Math. Ann. 273,383-395 (1986).
- [37] C. C. Moore and J. A. Wolf., Square integrable representation of nilpotent groups,  
Trans. Amer. Math. Soc., 185 (1973). 445-462.
- [38] L. Pukanszky., Leçons sur les représentations des groupes, Dunod, Paris 1967.
- [39] G. Ratcliff, Symbols and Orbits for 3-step nilpotent Lie groups. Journal of  
functional analysis 62, 38-64 (1985).
- [40] M. Vergne, . Construction de sous-algèbres subordonnées à un élément du dual  
d'une algèbre de Lie résoluble, *C. R. Acad. Sci . (Paris) A-B270(1970)*,  
A 173-175, A 704-707, pp. 30, 37.
- [41] A. M. Vershik and S. I. Karpushev, Cohomology of groups in unitary  
representations, the neighbourhood of the identity, and conditionally positive  
definite functions, *Mat. SB .47 (2) (1984)*.
- [42] G. Warner, Harmonic analysis on semi-simple Lie groups, I,  
Berlin-Heidelberg-New York 1972.