



**HAL**  
open science

# Contribution à la stabilisation et stabilité des systèmes non linéaires : Applications à des systèmes mécaniques et épidémiologiques

Samuel Bowong Tsakou

► **To cite this version:**

Samuel Bowong Tsakou. Contribution à la stabilisation et stabilité des systèmes non linéaires : Applications à des systèmes mécaniques et épidémiologiques. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paul Verlaine - Metz, 2003. Français. NNT : 2003METZ016S . tel-01775912

**HAL Id: tel-01775912**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01775912>**

Submitted on 24 Apr 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>



BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv.	2003048S
Cote	S/Mz 03/16
Loc	

---

# Contribution à la stabilisation et stabilité des systèmes non linéaires : Applications à des systèmes mécaniques et épidémiologiques

---

## THÈSE

présentée et soutenue le 27 Novembre 2003

pour l'obtention du

**Doctorat de l'Université de Metz**  
(Spécialité : Mathématiques Appliquées)

par

**Samuel BOWONG TSAKOU**

### Composition du jury

<i>Rapporteurs :</i>	Brigitte d'ANDREA NOVEL	Professeur, Ecole des Mines de Paris
	Tewfik SARI	Professeur, Université de Mulhouse
	Rodolphe SEPULCHRE	Professeur, Université de Liège
<i>Examineurs :</i>	David BÉKOLLÉ	Professeur, Université de Yaoundé I
	Frédéric MAZENC	Chargé de recherches, INRIA Lorraine
	BITJONG NDOMBOL	Professeur, Université de Dschang
	Gauthier SALLET	Professeur, Université de Metz

*à Darelle.*

## Remerciements

Ce travail a été réalisé au sein du Projet CONGES dans le département de Mathématiques de l'Unité de Formation et de Recherche en Mathématiques, Informatique et Mécanique (UFR MIM) de l'Université de Metz. J'adresse mes sincères remerciements et ma profonde reconnaissance au Centre International de Mathématiques Pures et Appliquées (CIMPA), à l'International Center for Theoretical Physics (ICTP), à l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique (INRIA) Lorraine et au service des relations internationales de l'Université de Metz pour leur assistance financière et matérielle durant toute ma formation.

Monsieur le Professeur Gauthier Sallet, tu as accepté de me faire partager tes activités de recherche en me proposant de réaliser mon mémoire de D.E.A. , puis ma thèse de doctorat sous ta direction. Tu as su me faire confiance durant tout ce temps, tu m'as laissé prendre des initiatives (parfois malheureuses!), et tu as constamment été présent pour me conseiller et pour corriger mon travail. Nos discussions ainsi que ta vision toute particulière pour aborder les questions scientifiques m'ont beaucoup influencé et ont grandement contribué à développer mon jeune esprit d'apprenti chercheur. Je ne te remercierai jamais assez pour tout ce que tu m'as appris.

Mes plus sincères remerciements sont adressés à Monsieur le Professeur Claude Lobry pour les efforts fournis pour assurer la réussite du programme "Réseau de Recherche Mathématiques en Afrique Sub-saharienne". L'Afrique a besoin de Sciences pour pouvoir s'édifier. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude pour l'intérêt qu'il a témoigné pour notre formation.

Monsieur Frédéric Mazenc, je te remercie de m'avoir donné l'opportunité de travailler avec toi. Je te remercie encore plus pour m'avoir toujours soutenu et encouragé. Malgré ton emploi du temps chargé tu as toujours eu du temps à me consacrer et tu as su me transmettre ton enthousiasme; cela a été très important pour moi. Merci encore.

Mes remerciements s'adressent à Monsieur le Professeur Tewfik Sari qui m'a fait l'hon-

neur et le plaisir d'être rapporteur, et qui, grâce à nos nombreux échanges, m'a apporté de sa rigueur et de ses connaissances.

Je remercie sincèrement Messieurs les Professeurs Brigitte d'Andrea-Novel et Rodolphe Sepulchre d'avoir acceptés d'être rapporteurs de cette thèse.

Ma profonde gratitude va également à Monsieur le Professeur David Békollé responsable du projet "Mathématiques et Malaria" pour l'Afrique Centrale pour sa présence dans le jury de cette thèse. Ses conseils et ses rapports humains m'ont beaucoup inspirés.

Que Monsieur le Professeur Bitjong Ndombol trouve ici l'expression de mes remerciements pour être venu du Cameroun et pour ses remarques fructueuses.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et ma sympathie à Abderrahman Iggidr et Philippe Adda. Durant mes divers stages de thèse au Projet CONGE, ils ont su m'apporter leur aide et leur soutien et m'ont fait profiter de leur grande compétence scientifique, tout cela dans un climat de confiance. Cette amicale collaboration restera pour moi un très bon souvenir.

Je suis également reconnaissant à Monsieur le Professeur Paul Woafu pour m'avoir recommandé au D.E.A. de théorie de contrôle de l'I.M.S.P. de Porto-Novo (Benin).

La préparation d'une thèse nécessite une ambiance amicale et chaleureuse : j'exprime ici mon amitié à Moukam François, René Yamapi, Mama Foupouagnigni et Jean Luc Dimi. Une pensée particulière pour Xavier Fongang qui traverse une période difficile à Abidjan. Que le Seigneur le soutienne et le protège.

Il n'y a pas un jour qui passe sans que je ne pense avec amour à mes parents. Les valeurs que vous m'avez enseignées à mes frères et moi ne cessent de guider mes pas. Que cette thèse soit le témoignage que tout ceci n'ait pas été vain. Sachez tous les deux que je vous aime de tout mon cœur.

Je remercie les familles Ndakem, Fomadjou et Tsougong de Mbouda, Nguekam de Kekem, Djeumen de Nkongssamba, Sezine de Dschang et Mefunja de Bafoussam pour leur

aide morale, spirituelle, matérielle et financière.

Mes vifs remerciements vont également à : Thérèse Nguekam, Suzanne Malle, Sulamithe Mantho, Edith Njuikem, Marie Ndasse, Charlotte Magne, Delphine Mofo, Nde Victor, Emmanuel Fokou, Gustave Tamokem et Hilaire Tchio. Qu'ils trouvent ici le fruit d'un dur labeur auquel ils auront contribué chacun à sa façon.

Sabine, tu m'as apporté tant de bonheur depuis que je t'ai rencontrée qu'il me semble dérisoire d'essayer de te remercier en quelques lignes. Sache tout simplement que ma vie à tes côtés est celle dont j'ai toujours rêvée. En gage de notre amour tu m'as donné une merveilleuse petite fille. Merci à toutes les deux de me rappeler tous les jours combien la vie est belle.

Enfin, nous disons merci à tous ceux qui de près ou de loin ont contribué à réalisation de ce travail.

# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Généralités</b>	<b>9</b>
1.1 Introduction . . . . .	9
1.2 Systèmes autonomes . . . . .	9
1.2.1 Notion de stabilité . . . . .	10
1.2.2 Observabilité et observateurs des systèmes non linéaires . . . . .	14
1.3 Systèmes non autonomes . . . . .	17
1.4 Stabilisation d'un point d'équilibre . . . . .	21
1.4.1 Observateurs à grands gains . . . . .	23
1.4.2 Backstepping . . . . .	25
1.4.3 Forwarding . . . . .	27
1.5 Conclusion . . . . .	28
<b>Partie I Sur quelques problèmes de la stabilisation globale des systèmes non linéaires</b>	<b>31</b>
<b>2 Stabilisation d'un pendule en rotation et d'un système électromécanique</b>	<b>33</b>
2.1 Introduction . . . . .	33
2.2 Stabilisation des oscillations d'un pendule en rotation . . . . .	34
2.2.1 Résultat . . . . .	36
2.3 Stabilisation d'un système de lévitation magnétique . . . . .	37
2.3.1 Equations d'évolution . . . . .	38
2.3.2 Contrôle du système de lévitation magnétique . . . . .	40
2.3.3 Simulations numériques . . . . .	45



**Table des matières**

---

2.4 Conclusion . . . . .	47
<b>3 Stabilisation d'une classe de systèmes non autonomes</b>	<b>51</b>
3.1 Introduction . . . . .	51
3.2 Résultat . . . . .	54
<b>4 Stabilisation d'une trajectoire des systèmes feedforward</b>	<b>55</b>
4.1 Introduction . . . . .	55
4.2 Mouvement périodique du système pendule-chariot . . . . .	60
4.3 Stabilisation asymptotique uniforme globale d'une trajectoire . . . . .	61
 <b>Partie II Sur la stabilité des modèles épidémiologiques</b>	 <b>63</b>
<b>5 Sur le calcul de <math>R_0</math> et son rôle sur la stabilité globale</b>	<b>65</b>
5.1 Introduction . . . . .	65
5.2 Résultat . . . . .	67
<b>6 Etude d'un modèle épidémiologique appliqué à la tuberculose</b>	<b>69</b>
6.1 Introduction . . . . .	69
6.2 Généralités . . . . .	71
6.3 Mathématiques et tuberculose . . . . .	74
6.3.1 Hypothèses . . . . .	75
6.3.2 Système dynamique . . . . .	75
6.3.3 Existence des points d'équilibre . . . . .	77
6.3.4 Stabilité des points d'équilibre . . . . .	79
6.3.5 Simulations numériques . . . . .	85
6.4 Conclusion . . . . .	88
 <b>Discussion générale et perspectives</b>	 <b>89</b>
 <b>Bibliographie</b>	 <b>95</b>
 <b>Annexe</b>	 <b>103</b>

# Table des figures

1.1	Ensemble système-observateur . . . . .	16
1.2	Bouclage entre le système et l'observateur. . . . .	18
2.1	Schéma d'un pendule en rotation. . . . .	34
2.2	Schéma d'une balle dans un champ magnétique vertical. . . . .	37
2.3	Etats du système. . . . .	46
2.4	Performance du système. . . . .	47
2.5	Etats du système pour une erreur de 50% de la masse $m$ . . . . .	48
2.6	Etats du système pour une erreur de 50% du courant d'équilibre $x_{3d}$ . . . . .	49
6.1	Modèle simplifié pour la tuberculose. . . . .	75
6.2	Paramètre de seuil $R_0$ en fonction du taux de rechute $\gamma$ . . . . .	87
6.3	Nombre de malades $I$ pour trois différentes valeurs du paramètre de rechute $\gamma$ lorsque (a) $p = 0.5$ ; (b) $p = 2$ . . . . .	87
6.4	Nombre de malades $I$ pour trois différentes valeurs du taux de réinfection $p$ lorsque $\gamma = 2$ . (a) $p \in [0, 1]$ ; (b) $p > 1$ . . . . .	87

## *Table des figures*

---

# Introduction générale

L'attention portée aux problèmes non linéaires se montre de nos jours de plus en plus indispensable dans presque tous les domaines de la science. Les processus physiques, chimiques, biologiques, épidémiologiques... sont représentés par des modèles mathématiques non linéaires. Pendant une longue période, les méthodes développées pour les systèmes linéaires ont été appliquées par approximation à ces processus. Par soucis de précision et d'efficacité, il était intéressant de développer une méthodologie propre aux systèmes non linéaires. C'est ainsi que la théorie des systèmes non linéaires a obtenu des résultats significatifs au cours des deux dernières décennies. Il existe une grande variété d'approches et d'outils mathématiques pour l'analyse des systèmes non linéaires. La raison principale de cette variété est qu'aucun outil ou méthodologie n'est universellement applicable dans l'analyse des systèmes non linéaires. En conséquence, les approches systématiques et les outils mathématiques sont seulement disponibles pour certaines classes de systèmes non linéaires. Parmi ces résultats, la stabilisation des systèmes non linéaires et l'étude mathématique des maladies infectieuses représentent d'importants problèmes en théorie de contrôle moderne et en épidémiologie mathématique.

De nos jours, les systèmes contrôlés apparaissent presque partout : dans nos maisons (dans, par exemple, la radio, la télévision, la vidéo, le lecteur CD), dans plusieurs types de véhicules (dans, par exemple, les automobiles, les avions, les bateaux, le vaisseau spatial), dans l'industrie (par exemple, les robots, le contrôle des procédés), dans les télécommunications, dans la technologie biomédicale, et dans de nombreux autres endroits et situations. C'est pourquoi, le contrôle non linéaire est un domaine important en théorie du contrôle, car pratiquement tous les systèmes mécaniques, chimiques, biologiques et

## *Introduction générale*

---

épidémiologiques sont de nature non linéaires.

Au cas où un système ne dévierait pas trop de l'ensemble nominal de conditions de fonctionnement, les modèles linéaires peuvent être souvent employés pour décrire les systèmes non linéaires et concevoir des lois de commande stabilisantes. Cependant, quand la gamme d'opération exigée est étendue, un modèle linéarisé est généralement imprécis. De là, la commande non linéaire entre en jeu. Les lois de commande non linéaires sont capables de manipuler directement les non linéarités dans les plages étendues de fonctionnement. De même, lorsque la gamme d'opération est assez petite, la linéarisation ne fonctionne pas toujours car les systèmes contrôlables existent, comme une voiture, dont la linéarisation autour d'un point d'équilibre est incontrôlable. En conséquence la théorie de la commande non linéaire doit être utilisée pour ces systèmes. D'autre part, notons que dans de nombreux cas pratiques, on s'intéresse au comportement du système au voisinage d'un point d'équilibre ou d'une trajectoire de fonctionnement. D'où le rôle de l'automaticien dont l'un des buts principaux est d'établir des lois de commande pour qu'un système évolue selon un objectif prédéterminé. Cette thèse traite le problème de la stabilisation asymptotique globale de points d'équilibre ou de trajectoires de certaines classes de systèmes non linéaires en dimension finie. Le problème de la stabilisation d'un système consiste à trouver une loi de commande ou feedback dépendant de l'état du système tel que le système en boucle fermée soit asymptotiquement stable. On peut aussi chercher une loi de commande qui ne dépend que de la sortie (état mesuré). C'est le problème de la stabilisation à travers la sortie ou par retour d'état estimé.

D'autre part, les maladies émergentes et réémergentes ont conduit à un regain d'intérêt pour l'étude des maladies infectieuses, si bien que les modèles mathématiques sont devenus des outils importants dans l'analyse de la propagation et du contrôle des pathologies infectieuses. Les modèles épidémiologiques ont la propriété d'être suffisamment non linéaires pour constituer un défi mathématique intéressant, mais aussi suffisamment simples pour permettre d'obtenir des résultats applicables. Comprendre les caractéristiques de la transmission d'une maladie infectieuse dans une communauté, une région, un pays peut mener à de meilleures approches pour faire décroître la transmission de la maladie. Les modèles

---

épidémiologiques peuvent être utilisés pour comparer, planifier, mettre en place, évaluer, optimiser différents programmes de détection, de prévention, de thérapie et de contrôle d'une maladie. La modélisation épidémiologique peut aussi contribuer à la conception et à l'analyse des sondages épidémiologiques. Elle peut aussi suggérer les données cruciales à collecter, identifier des tendances, faire des prévisions et estimer l'incertitude de ces prévisions. Par ailleurs, la dynamique des modèles épidémiologiques peut être très compliquée, et des comportements tels que des cycles limites et du chaos peuvent apparaître en plus des équilibres. Il est donc important de chercher lorsqu'il y a des points d'équilibre localement stables, ceux qui sont globalement asymptotiquement stables, c'est à dire, si quelles que soient les conditions initiales les trajectoires convergeront vers ces équilibres. Cette thèse concerne également l'étude mathématique des systèmes épidémiologiques modélisés par des équations différentielles ordinaires. Une des raisons importante pour s'intéresser à de tels modèles est que c'est dans cet axe que les outils opérationnels sont les plus nombreux.

Cette thèse comporte deux parties relativement indépendantes précédées par le chapitre 1 qui contient quelques notions mathématiques et résultats strictement nécessaires pour la suite de la thèse. Des rappels de base sur la stabilité et l'observabilité des systèmes non linéaires autonomes ainsi que quelques définitions et théorèmes utiles pour la stabilité des systèmes non linéaires non autonomes sont présentés. Nous exposons également quelques théorèmes cruciaux et résultats sur la stabilisation des systèmes non linéaires à contrôles non affines et des observateurs à grands gains et illustrons brièvement les techniques du *backstepping* et du *forwarding*. Les hypothèses sur les systèmes non linéaires étudiés seront posées, ces hypothèses restant vraies tout au long de ce travail.

Dans la première partie, on aborde le problème de la stabilisation globale des systèmes non linéaires. Soit le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, u) \\ x \in M, u \in U \end{cases} \quad (1)$$

avec  $M \subset \mathbb{R}^n$  une variété différentiable connexe appelée espace d'état et  $U \subset \mathbb{R}^m$  l'espace des contrôles.  $x$  représente l'état du système à l'instant  $t$ ,  $u$  l'entrée et  $f$  un champ de

vecteurs défini sur  $M$ .

Le problème auquel on s'intéresse est de construire des lois de commande stabilisantes  $u = u(x, t)$  telles que le système en boucle fermée

$$\dot{x} = f(t, x, u(x, t)) \quad (2)$$

admette le point  $x_0 \in M$  (ou la trajectoire  $x_r(t)$ ) comme un point d'équilibre (ou une trajectoire de référence) asymptotiquement stable.

Cette partie traite trois problèmes spécifiques de la stabilisation globale de certaines classes de systèmes non linéaires. Elle est subdivisée en trois chapitres.

Le chapitre 2 est consacré à l'application de la technique de Jurdjevic-Quinn pour des systèmes non linéaires à contrôles non affines et d'un observateur à grands gains à la commande d'un pendule en rotation et d'une version du théorème de LaSalle à la commande d'un système électromécanique. Historiquement, l'un des premiers résultats significatifs dans la stabilisation globale des systèmes non linéaires est dû à Jurdjevic-Quinn [46] qui a utilisé le principe d'invariance de LaSalle pour donner une condition nécessaire et suffisante pour la stabilisation globale d'un système non linéaire à contrôles affines avec une dérive dissipative. La première partie de ce chapitre traite le problème de la stabilisation par retour d'état estimé des oscillations d'un pendule contraint à osciller dans un plan en rotation. L'algorithme de stabilisation proposé est basé sur une extension du théorème de Jurdjevic-Quinn pour des systèmes non linéaires à contrôles non affines [5] et d'un observateur à grands gains [34]. Par ailleurs, le principe d'invariance de LaSalle [55] joue un grand rôle dans l'étude de la stabilité et de la stabilisation des systèmes non linéaires en dimension finie. Dans la seconde partie de ce chapitre, nous traitons le problème de la stabilisation d'une balle soulevée magnétiquement (système de lévitation magnétique). Nous exposons une loi de commande dérivée d'une version du théorème de LaSalle [7] qui permet de maintenir la balle dans une position désirée.

Le chapitre 3 propose une extension de la technique d'ajout d'intégrateur ou *backstep-*

*ping* pour la classe de systèmes non autonomes suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) + g(t, x)z \\ \dot{z} = p(t)(u + b(t, x, z)) \end{cases} \quad (3)$$

avec  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ ,  $z \in \mathbb{R}$ ,  $u \in \mathbb{R}$  est l'entrée,  $f(t, x)$ ,  $g(t, x)$ ,  $p(t)$ ,  $b(t, x, z)$  sont des fonctions périodiques en  $t$  de période  $T$  et  $f(t, x)$  et  $b(t, x, z)$  sont telles que  $f(t, 0) = 0$  et  $b(t, 0, 0) = 0$  pour tout  $t$ .

Le but de ce travail est de donner des conditions nécessaires et suffisantes pour que la famille de systèmes non autonomes de la forme (3) soit globalement uniformément asymptotiquement et localement exponentiellement stabilisable par des feedbacks bornés et continus. Plus précisément, on cherche une loi de commande  $(t, x) \rightarrow v(t, x)$  stabilisant le sous-système  $\dot{x} = f(t, x) + g(t, x)v(x)$  (d'entrée  $v$ ) telle que le système (3) soit globalement uniformément asymptotiquement et localement exponentiellement stabilisable par une loi de commande bornée et différentiable. La méthode de contrôle utilisée est basée sur la construction des fonctions de Lyapunov strictes.

Dans le chapitre 4, nous examinons comment et sous quelles hypothèses les bouclages d'état peuvent s'étendre, dans le cas d'un système non linéaire pour stabiliser une trajectoire de référence qui n'est pas nécessairement une fonction périodique du temps. Du point de vue pratique, le problème de faire en sorte qu'un système suive une certaine trajectoire est intéressant. On peut penser aux robots qui doivent exécuter un mouvement désiré, un vaisseau spatial se déplaçant le long d'un chemin prédéterminé, des pilotes automatiques pour des avions, et de nombreux autres exemples. Puisque le problème de la poursuite de trajectoire pour des systèmes non linéaires est complexe pour être résolu en général, nous nous intéressons à une classe de systèmes non linéaires qui après un changement de variables peut se mettre sous la forme dite feedforward suivante :

$$\begin{cases} \dot{X} = MX + H_1(Y) + H_2(Y, u)u \\ \dot{Y} = F_0(Y) + F_2(Y, u)u \end{cases} \quad (4)$$

où  $X \in \mathbb{R}^m$ ,  $Y \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^q$ , toutes les fonctions sont de classe  $C^2$  avec  $H_1(0) = 0$  et  $F_0(0) = 0$ .



## Introduction générale

---

Ce travail est une continuation des résultats de Mazenc et Praly [67] sur la stabilisation d'une trajectoire de référence périodique des systèmes non linéaires possédant la forme feedforward (4) par la technique d'ajout d'intégration ou *forwarding*. Notons que la technique du *forwarding* a été inventée par Praly et Mazenc [65, 67]. En raison de la présence du terme  $u$  dans la première équation du système (4), on adopte une démarche inverse de celle appliquée pour le système (3) : on stabilise d'abord le sous-système en  $Y$  puis on cherche à stabiliser le système global. Notons que cette technique permet d'obtenir des feedbacks bornés, ce qui, d'un point de vue applicatif, présente un intérêt certain.

Dans ce chapitre, on montre comment la famille des lois de commande bornées obtenue par Mazenc et Praly [67] stabilise globalement uniformément asymptotiquement et localement exponentiellement une trajectoire de référence qui n'est pas nécessairement une fonction périodique du temps à partir de la construction des fonctions de Lyapunov. Il apparaît que l'emploi des commandes saturées permet d'obtenir d'intéressants résultats qui loin d'être théoriques se sont immédiatement avérés avoir des applications pratiques intéressantes.

Remarquons que les systèmes dont la dynamique peut se mettre sous la forme feedforward ne sont pas des singularités de la nature. Ainsi, le célèbre système pendule-chariot décrit dans presque tous les ouvrages d'Automatique, peut se mettre sous la forme feedforward après un changement de coordonnées [65]. Bien que le problème de la stabilisation du système pendule-chariot ait reçu beaucoup d'attentions [21, 67, 3, 61], le problème de la stabilisation d'une trajectoire n'a pas encore été traité. Aussi, dans ce chapitre, le problème de la stabilisation d'une trajectoire périodique pour le système pendule-chariot sera résolu.

La deuxième partie sera consacrée à l'analyse d'une classe de modèles épidémiologiques, en vue d'assurer la stabilité de ces modèles au voisinage d'un point d'équilibre (car c'est très généralement le premier problème posé au biomathématicien) et à l'étude d'un modèle épidémiologique appliqué à la tuberculose.

Le chapitre 5 est consacré au calcul d'un paramètre de seuil  $R_0$  et son rôle sur la

---

stabilité globale de la classe de modèles épidémiologiques suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = g(x_1, x_2) \end{cases} \quad (5)$$

avec  $x_1 \in \mathbb{R}_+^{n_1}$ ,  $x_2 \in \mathbb{R}_+^{n_2}$  et  $g(x_1, 0) = 0$  où  $\mathbb{R}_+^{n_1}$  et  $\mathbb{R}_+^{n_2}$  sont des espaces biologiques où toutes les variables  $x_1$  et  $x_2$  sont positives. Les fonctions  $f$  et  $g$  sont supposées de classe  $C^1$ . Cette classe de modèles épidémiologiques englobe une grande partie de systèmes épidémiologiques de certaines maladies réémergentes telles que le paludisme, la tuberculose, la dengue, le SIDA, etc. . .

Cependant, dans certains cas, ce paramètre de seuil  $R_0$  est le nombre de reproduction de base. En effet, le nombre de reproduction de base est le nombre moyen de cas secondaires produit par un individu malade pendant sa maladie lorsqu'il est introduit dans une population de susceptibles, i.e, des individus qui peuvent contacter l'infection. Ce nombre sans dimension a évidemment une signification biologique et ne peut être explicitement calculé dans la plupart des cas parce que la description mathématique de ce qu'est un individu malade est difficile à quantifier dans une population à haut degré d'hétérogénéité. Il est souvent calculé à partir de l'étude et du calcul des valeurs propres de la matrice jacobienne au point d'équilibre non endémique. Il faut noter que très peu de travaux existent sur ce sujet dans la littérature.

Inspiré des travaux de [25, 26, 18, 27], nous proposons un algorithme simple pour le calcul d'un paramètre de seuil  $R_0$ . Ensuite nous donnons une condition nécessaire pour la stabilité asymptotique globale du point d'équilibre non endémique. Notons qu'il existe un raccordement entre le paramètre de seuil  $R_0$  et la stabilité asymptotique globale du point d'équilibre non endémique. L'efficacité de cette méthode est illustrée sur les modèles épidémiologiques du paludisme [72] et de la dengue [29]. Nous corrigeons quelques erreurs contenues dans [72].

Dans le chapitre 6, nous étudions un modèle épidémiologique appliqué à la tuberculose. En effet, dans la plupart des pays à forte prévalence de l'endémie tuberculeuse, l'augmentation rapide du nombre de cas de tuberculose a causé une grande anxiété et a suscité de multiples questions telles que : "comment l'infection se propage-t-elle?", "quelle est

## *Introduction générale*

---

la prévalence actuelle de l'infection ?," "quelle sera la prévalence future ?," "parmi ceux qui sont infectés par le Bacille de Koch (BK), combien vont avoir une tuberculose à microscopie positive ?." Dans ce chapitre, un système représentant la tuberculose est rendu perceptible, grâce à l'emploi des composantes épidémiologiques qui sont des catégories épidémiologiques. L'interaction de ces composantes caractérise l'évolution future de la maladie. Nous incorporons des réinfections exogènes et des rechutes à un modèle épidémiologique typique pour la dynamique de transmission de la tuberculose. Nous explorons la possibilité du rôle fondamental que les réinfections exogènes et les rechutes peuvent jouer dans la dynamique de transmission et l'épidémiologie de la tuberculose au niveau d'une population humaine. Aussi les résultats principaux du chapitre 5 donnés dans cette thèse seront utilisés pour calculer un paramètre de seuil  $R_0$  et pour montrer que le point d'équilibre non endémique est globalement asymptotiquement stable. Notre analyse mathématique montre que les réinfections exogènes et les rechutes peuvent théoriquement augmenter le nombre des cas de tuberculose maladie et par conséquent diminuer l'efficacité des mesures de santé publique.

Au terme de ces deux parties, les problèmes de la stabilisation globale de certaines classes de systèmes non linéaires, du calcul d'un paramètre de seuil  $R_0$  et de son rôle sur la stabilité globale d'une classe de modèles épidémiologiques et de l'étude d'un modèle épidémiologique appliqué à la tuberculose sont essentiellement résolus.

Certains de nos résultats seront exposés sous la forme d'articles publiés, soumis dans des revues scientifiques et d'autres seront présentés ici pour la première fois.

Nous terminerons cette thèse par une conclusion et quelques recommandations pour des recherches futures.

# 1

## Généralités

### 1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions et résultats que nous utiliserons le long de cette thèse. Tout d'abord, quelques définitions mathématiques fondamentales sur la stabilité et l'observabilité des systèmes différentiels non linéaires autonomes sont rappelés. Le concept de la stabilité au sens de Lyapunov et le principe d'invariance de LaSalle sont brièvement présentés. Nous rappelons également un résultat de Bhatia et Szegö [7]. Ensuite, quelques définitions et théorèmes utiles pour la stabilité des systèmes non linéaires non autonomes considérés dans cette thèse sont rappelés. Nous présentons quelques théorèmes cruciaux et résultats sur la stabilisation des systèmes non linéaires à contrôles non affines et un observateur à grands gains. Des développements plus approfondis pourront être trouvés dans les ouvrages [37, 50, 38, 56]. Enfin, nous énonçons deux résultats fondamentaux sur les techniques du *backstepping* et du *forwarding*.

### 1.2 Systèmes autonomes

Soit  $\Omega$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$ . Considérons l'équation différentielle autonome définie sur  $\Omega$  par :

$$\dot{x} = X(x). \tag{1.1}$$

Nous supposons que  $X : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est continu et satisfait des conditions telles qu'une solution du système (1.1) existe en tout point, est unique et dépend de manière

continue des conditions initiales. Les états stationnaires ou points d'équilibre du système (1.1) sont des points  $x_0 \in \Omega$  satisfaisant  $X(x_0) = 0$ . Pour chaque  $x \in \Omega$ , nous notons par  $X_t(x)$  la solution de (1.1) satisfaisant  $X_0(x) = x$ . Nous supposons que  $X$  satisfait des conditions telles que  $X_t(x)$  est continu en  $(t, x)$ .

L'ensemble des points sur la courbe solution lorsque  $t$  parcourt  $\mathbb{R}$  noté  $\gamma(x)$  est appelé trajectoire.

### 1.2.1 Notion de stabilité

Nous introduisons les définitions suivantes :

**Définition 1.2.1** : Soit  $x_0 \in \Omega$  un point d'équilibre du système (1.1).  $x_0$  est un point d'équilibre stable pour (1.1) ou le système (1.1) est stable en  $x_0$ , si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un nombre réel positif  $\delta$  tel que pour chaque  $x \in \Omega$  avec  $\|x - x_0\| < \delta$ , la solution  $X_t(x)$  est définie pour tout  $t \geq 0$  et satisfait  $\|X_t(x) - x_0\| < \varepsilon$  pour tout  $t > 0$ .

Le système est dit instable en  $x_0$  s'il n'est pas stable en  $x_0$ .

**Définition 1.2.2** : Le point d'équilibre  $x_0$  est dit attractif (nous dirons aussi que le système (1.1) est attractif en  $x_0$ ) s'il existe un voisinage  $D \subset \Omega$  de  $x_0$  tel que pour toute condition initiale  $x$  commençant dans  $D$ , la solution correspondante  $X_t(x)$  de (1.1) est définie pour tout  $t \geq 0$  et tend vers  $x_0$  lorsque  $t$  tend vers l'infini, i.e.,  $\lim_{t \rightarrow \infty} X_t(x) = x_0$ , pour toute condition initiale  $x \in D$ .

Le point d'équilibre  $x_0$  est dit globalement attractif si  $\lim_{t \rightarrow \infty} X_t(x) = x_0$ , pour toute condition initiale  $x \in \Omega$ .

La région d'attraction  $\mathcal{B}(x_0)$  d'un point d'équilibre  $x_0$  est l'ensemble de tous les états  $x \in \Omega$  tels que  $\lim_{t \rightarrow \infty} X_t(x) = x_0$ .

**Définition 1.2.3** : L'état  $x_0$  est un point d'équilibre asymptotiquement stable pour le système (1.1) s'il est stable et attractif.

**Définition 1.2.4** : Un sous-ensemble  $\mathcal{U}$  de  $\Omega$  est dit invariant pour le système (1.1) si  $X_t(x) \in \mathcal{U}$  pour tout  $x \in \mathcal{U}$  et pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

Il est dit positivement invariant si  $X_t(x) \in \mathcal{U}$  pour tout  $x \in \mathcal{U}$  et pour tout  $t \geq 0$ .

**Définition 1.2.5** : Soit  $\mathcal{U}$  un sous-ensemble positivement invariant de  $\Omega$  dont l'intérieur est non vide et connexe. Soit  $x_0 \in \mathcal{U}$  un point d'équilibre de (1.1). Le système (1.1) est dit relativement stable en  $x_0$  par rapport à l'ensemble  $\mathcal{U}$ , si pour chaque  $\varepsilon > 0$ , il existe un nombre réel positif  $\delta$  tel que pour chaque  $x \in \mathcal{U}$  avec  $\|x - x_0\| < \delta$ , la solution  $X_t(x)$  est définie pour tout  $t \geq 0$  et satisfait  $\|X_t(x) - x_0\| < \varepsilon$  pour tout  $t \geq 0$ .

Si en plus le point d'équilibre  $x_0$  est attractif, i.e.,  $\lim_{t \rightarrow \infty} X_t(x) = x_0$  pour toute condition initiale  $x \in \mathcal{U}$ , on dira alors que  $x_0$  est relativement asymptotiquement stable par rapport à  $\mathcal{U}$ .

Soit  $V : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue

**Définition 1.2.6** :  $V$  est dite définie positive si  $V(x_0) = 0$  et  $V(x) > 0$  dans un voisinage  $\Omega$  de  $x_0$  pour tout  $x \neq x_0$  dans ce voisinage.

$V$  est dite semi-définie positive si  $V(x_0) = 0$  et  $V(x) \geq 0$  dans un voisinage  $\Omega$  de  $x_0$ .

$V$  est dite définie négative si  $-V$  est définie positive.

$V$  est dite radialement non bornée s'il existe une fonction  $\varphi$  de classe  $\mathcal{K}_\infty$  telle que  $V(x) \geq \varphi(\|x\|)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ . Notons qu'une fonction  $\varphi$  est dite de classe  $\mathcal{K}$  si elle est zéro en zéro et strictement croissante. Si, de plus, elle diverge vers  $+\infty$ , elle est alors de classe  $\mathcal{K}_\infty$ .

La recherche d'une fonction de Lyapunov est généralement une chose délicate et on a intérêt à se laisser guider par la nature du système étudié. Ainsi c'est l'étude de l'énergie totale d'un système mécanique qui a conduit à la notion de fonction de Lyapunov.

Relative à la fonction  $V$  de (1.1), nous introduisons la notation suivante : la fonction  $V$  est supposée de classe  $C^1$  de  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$  et  $\dot{V}$  sa dérivée le long des trajectoires du système (1.1) est définie par

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \left. \frac{d}{dt} V(X_t(x)) \right|_{t=0} \\ &= \langle X(x), \nabla V(x) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} X_i(x) \end{aligned}$$

## Chapitre 1. Généralités

---

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est le produit scalaire dans  $\mathbb{R}^n$ . La notion de dérivée directionnelle provient de ce que la fonction  $V$  évaluée le long des trajectoires du système (1.1) a pour dérivée  $\dot{V}$ .

Nous rappelons également la définition de la dérivée de Lie d'une fonction  $V(x)$  le long d'un champ de vecteur  $X(x)$ . Cette dérivée sera utilisée afin de construire une commande stabilisante d'un système non linéaire à contrôle non affine (Chapitre 2).

**Définition 1.2.7** : La dérivée de Lie d'une fonction  $V(x)$  le long d'un champ de vecteur  $X(x)$  est notée  $L_X V(x)$  et est définie par

$$L_X V(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} X_i(x)$$

pour tout  $x \in \Omega$ .

Si la fonction  $V$  est dérivée  $k$  fois le long de  $X(x)$ , on note alors  $L_X^k V(x)$  la fonction définie par

$$L_X^k V(x) = \frac{\partial}{\partial x} [L_X^{k-1} V(x)] X(x)$$

**Définition 1.2.8** : Une fonction  $V$  de classe  $C^1$  définie positive dont la dérivée par rapport au système (1.1),  $\dot{V}$  est définie négative sur  $\Omega$  est appelée fonction de Lyapunov stricte pour le système (1.1). Si  $V$  est de classe  $C^1$ , semi-définie positive et  $\dot{V}(x) \leq 0$  pour tout  $x \in \Omega$ , alors  $V$  est une fonction de LaSalle pour le système (1.1).

Si dans l'étude théorique de la stabilisation des systèmes non linéaires, des progrès considérables ont été accomplis ces dernières années, la théorie de Lyapunov y joue un rôle central. Lyapunov a montré les résultats suivants.

**Théorème 1.2.1** (Stabilité au sens de Lyapunov [37]) : Si  $V$  est définie positive et  $\dot{V}$  est semi-définie négative sur  $\Omega$  alors le point d'équilibre  $x_0$  est stable pour le système (1.1). Si  $V$  est définie positive et  $\dot{V}$  définie négative sur  $\Omega$  alors  $x_0$  est un point d'équilibre asymptotiquement stable pour le système (1.1).

Le théorème précédent prouve que pour montrer qu'un point d'équilibre  $x_0$  est stable, il suffit de trouver une fonction de Lyapunov en ce point. Par ailleurs, afin d'utiliser le théorème original de Lyapunov dans le but de prouver la stabilité asymptotique d'un système donné, nous devons trouver une fonction  $V$  définie positive dont la dérivée  $\dot{V}$  est

définie négative. En général, c'est une tâche difficile. La condition sur la dérivée  $\dot{V}$  peut-être relaxée en employant le principe d'invariance de LaSalle que nous exposons ci-après (on trouvera la démonstration dans [55]).

**Théorème 1.2.2** (*Principe d'invariance de LaSalle [55]*) : Soit  $\Omega$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$ . Supposons que  $\Omega$  est un ouvert positivement invariant pour le système (1.1). Soit  $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$ , pour (1.1) en  $x_0$  telle que :

1.  $\dot{V}(x) \leq 0$  sur  $\Omega$ .
2. Soient l'ensemble  $E = \{x \in \Omega, \dot{V}(x) = 0\}$  et  $L$  le plus grand ensemble positivement invariant par  $X$  et contenu dans  $E$ . Alors, toute solution bornée commençant dans  $\Omega$  tend vers l'ensemble  $L$  lorsque le temps tend vers l'infini.

Ce théorème est un outil très utile pour l'analyse des systèmes. A la différence du théorème de Lyapunov, il n'exige ni de la fonction  $V$  d'être définie positive, ni de sa dérivée  $\dot{V}$  d'être définie négative. Cependant, il fournit seulement des informations sur l'attractivité du système considéré. Par conséquent, il ne peut être employé que pour prouver que les solutions tendent vers un point d'équilibre si l'ensemble  $L$  est réduit à ce point d'équilibre. Mais, il n'indique pas si ce point d'équilibre est stable ou pas. Puisque nous voulons établir la stabilité asymptotique d'un point d'équilibre (supposé être  $x_0$  de  $\Omega$ ), nous employons le corollaire du principe d'invariance de LaSalle suivant :

**Corollaire 1.2.1** : Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert connexe tel que  $x_0 \in \Omega$ . Soit  $\mathcal{U}$  un voisinage de  $x_0$  de  $\Omega$ . Soit  $V : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie positive de classe  $C^1$  telle que  $\dot{V}(x) \leq 0$  sur  $\mathcal{U}$ . Soit  $E = \{x \in \mathcal{U}, \dot{V}(x) = 0\}$ , et supposons que le plus grand ensemble positivement invariant contenu dans  $E$  est réduit au point  $x_0$ . Alors  $x_0$  est un point d'équilibre asymptotiquement stable pour le système (1.1).

Si les conditions sont satisfaites pour  $\mathcal{U} = \Omega$  et si en plus  $V$  est propre sur  $\Omega$ , i.e.,

$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} V(x) = +\infty$  alors toutes les trajectoires sont bornées pour tout  $t \geq 0$  et  $x_0$  est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable pour le système (1.1).

Ce résultat contient le théorème original de Lyapunov comme un cas spécial. Il faut noter que l'ensemble  $\Omega$  n'a pas besoin d'être borné.



Cependant, lorsque  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  n'est pas un sous ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , Bhatia et Szegö [7] ont donné des conditions nécessaires et suffisantes du type LaSalle sur la stabilité des systèmes autonomes. Ce résultat est présenté dans le théorème suivant :

**Théorème 1.2.3** ([7], Théorème 3.7.11, page 346) : *Soit  $\Omega$  un ensemble compact positivement invariant pour le flot décrit par le système d'équation différentielle (1.1). Soit  $V$  une fonction de classe  $C^1$  définie sur  $\Omega$ . Supposons que  $\dot{V}(x) \leq 0$  pour tout  $x \in \Omega$ . Soit  $L$  le plus grand ensemble invariant contenu dans  $E = \{x \in \Omega, \dot{V}(x) = 0\}$ . On suppose que*

1.  *$L$  attire toutes les solutions issues de  $\Omega$ , i.e.,  $\forall x \in \Omega, d(X_t(x), L) \rightarrow 0$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$  ( $d$  est la distance entre  $X_t(x)$  et  $L$ ).*
2.  *$S$  est le plus petit ensemble relativement asymptotiquement stable par rapport à  $\Omega$  contenant  $L$ .*

*Si les hypothèses 1 et 2 sont satisfaites, alors  $L$  est asymptotiquement stable par rapport à  $\Omega$ .*

Une conséquence immédiate de ce théorème est le corollaire suivant :

**Corollaire 1.2.2** : *Sous les hypothèses du Théorème 1.2.3, si l'ensemble  $L$  est réduit au point  $x_0 \in \Omega$  alors  $x_0$  est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable pour le système (1.1) défini sur  $\Omega$ .*

Ces quelques principes précédents, très généraux, trouvent leur application dans de nombreuses disciplines. A titre d'exemple, nous abordons le problème de la stabilisation d'un système de lévitation magnétique et l'étude de la stabilité des modèles épidémiologiques dans les chapitres 2 et 5 par des méthodes du type de LaSalle.

### 1.2.2 Observabilité et observateurs des systèmes non linéaires

Dans la pratique, il peut s'avérer coûteux de mesurer l'état complet d'un système (capteurs de position et de vitesse pour un système mécanique par exemple). On peut alors se demander si la connaissance d'une certaine partie de l'état permet de reconstituer l'état complet. Ceci correspond à la propriété d'observabilité du système dont nous allons donner une définition dans la cas des systèmes non linéaires.

Soit le système non linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (1.2)$$

avec  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$  et  $y \in \mathbb{R}^p$ .  $x$  représente l'état,  $u$  l'entrée et  $y$  la sortie.

### Notion d'observabilité

Une condition nécessaire d'existence d'un observateur pour un système donné est l'observabilité de ce système dont la définition est la suivante :

**Définition 1.2.9** ([43]) : *Le système (1.2) est observable si, étant donné l'instant  $t_0$ , il existe un instant  $t_1$  fini tel que la connaissance de  $y(t_0, t_1)$  et  $u(t_0, t_1)$  permette de déterminer de manière unique l'état  $x(t_0) = x^0$  (ceci quelque soit l'entrée du système).*

En fait, le problème de l'observabilité d'un système est celui de pouvoir retrouver, à tout instant, et à partir des mesures et des entrées, une estimation de l'état à l'instant initial. Une notion importante est l'indistinguabilité de deux états initiaux.

**Définition 1.2.10** ([43]) : *Deux états initiaux  $x_1^0(t_0)$  et  $x_2^0(t_0)$  sont dits indistinguables si, pour tout  $t$  avec  $t_0 \leq t \leq t_1$ , les sorties correspondantes  $y_1(t)$  et  $y_2(t)$  sont identiques quelle que soit l'entrée admissible  $u([t_0, t_1])$  du système.*

L'indistinguabilité est une relation d'équivalence sur l'espace d'état  $\Omega$ . On note alors  $I(x^0)$  la classe d'équivalence d'un état  $x^0$  quelconque.

**Définition 1.2.11** ([43]) : *L'état  $x^0$  est observable si l'ensemble des points indistinguables de  $x^0$  se réduit à  $x^0$ , i.e.,  $I(x^0) = \{x^0\}$ . Le système (1.2) est observable si, pour tout  $x \in \Omega$ ,  $I(x) = \{x\}$ .*

On remarque que l'observabilité du système (1.2) ne signifie pas obligatoirement que toute entrée distingue tous les points de  $\Omega$ . On peut retrouver les notions brièvement exposées ci-dessus dans [48] par exemple.

### Observateurs non linéaires

L'observabilité d'un système non linéaire n'est pas suffisante pour l'existence d'un observateur : en effet, contrairement aux systèmes linéaires, on ne peut affirmer d'une

manière générale qu'un système non linéaire observable admet un observateur. Néanmoins, des travaux donnent des conditions d'existence d'un observateur pour un système donné (voir par exemple pour les observateurs exponentiels [33, 35, 44]).

Un observateur est un système dynamique qui a pour entrée les entrées et les sorties (et éventuellement un nombre fini de leurs dérivées) du système à observer, et qui a pour sortie l'estimation de l'état.

**Définition 1.2.12 :** *On appelle observateur asymptotique (ou reconstituteur d'état) du système dynamique (1.2), un système dont les entrées sont constituées des vecteurs d'entrée et de sortie du système à observer et dont le vecteur de sortie, noté  $\hat{x}$ , est l'état estimé :*

$$\begin{cases} \dot{z} = \hat{f}(z, y, u) \\ \hat{x} = \hat{h}(z, y, u) \end{cases} \quad (1.3)$$

tel que :

1.  $\|e(t)\| = \|\hat{x}(t) - x(t)\| \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$
2. Si, à  $t = t_0$ , on a  $\hat{x}(t_0) = x(t_0)$ , alors pour tout  $t \geq t_0$ , on a  $\hat{x}(t) = x(t)$ .

On peut schématiser un ensemble système-observateur comme sur la Figure 1.1.

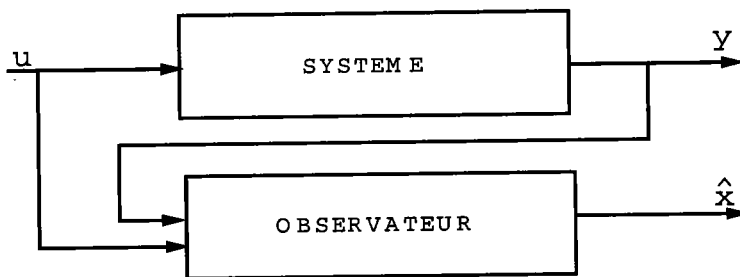


FIG. 1.1 – Ensemble système-observateur

**Remarque 1.2.1 :** *La présentation faite ci-dessus du rôle de l'observateur laisse penser que le problème posé est exclusivement celui de déterminer à un instant  $t_0$  l'état qui peut alors être considéré comme un état initial. En fait, en pratique, on recherche plutôt l'estimation de l'état à chaque instant, afin de calculer par exemple une loi de commande répondant au cahier des charges. Par contre, chaque perturbation non mesurée qui affecte*

le système peut être vue comme réinitialisation de l'observateur qui doit alors estimer un état perturbé. On peut également faire cette remarque lorsque la sortie (mesurée) du système est bruitée. L'observateur peut alors restituer un état "propre" qui permettra de déterminer une loi de commande plus performante. L'observateur a dans ce cas un rôle supplémentaire de filtre.

△

Un observateur qui satisfait les deux points de la définition 1.2.9 est dit posséder la propriété (locale) de reconstructibilité, et le système (1.3) est appelé observateur (local) asymptotique.

**Hypothèse 1.2.1** ([42]) : Il existe un voisinage  $G \subset \Omega$  de l'origine tel que, si  $e(t_0) \in G$ , alors  $\|e(t)\| \leq Ke^{-\alpha t}$  où  $K$  et  $\alpha$  sont des constantes positives.

**Définition 1.2.13** : S'il existe un observateur (1.3) pour le système (1.2) qui vérifie la définition 1.2.12 et l'hypothèse 1.2.1, alors l'observateur est dit (localement) exponentiel. Si  $G = \Omega$ , l'observateur est dit globalement exponentiel.

**Remarque 1.2.2** ([42]) : Le rôle de l'observateur étant de se "substituer" au système réel, on doit pouvoir alors déterminer, à partir de l'estimation de l'état, la loi de commande répondant au cahier des charges. On peut donc compléter le schéma de la Figure 1.1 par un bouclage système-observateur (Figure 1.2).

Le lien entre la commande et l'observateur est donc très fort, vu que les informations nécessaires à la synthèse de la loi de commande sont exclusivement issues de l'observateur. Une grande robustesse face aux variations des paramètres du système et aux bruits de mesure est donc particulièrement importante.

△

## 1.3 Systèmes non autonomes

Considérons le système non autonome suivant :

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1.4}$$

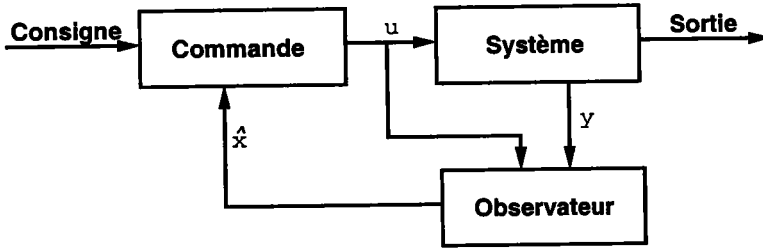


FIG. 1.2 – Bouclage entre le système et l’observateur.

où  $f : [0, \infty[ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  est continue en morceau en  $t$  et localement lipschtzienne en  $x$  sur  $[0, \infty[ \times \Omega$  avec  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un domaine contenant l’origine  $x = 0$ . Nous supposons que l’origine est un point d’équilibre pour le système (1.4) lequel est exprimé par

$$f(0, t) = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Les notions de stabilité et d’asymptotique stabilité des points d’équilibre des systèmes non autonomes sont fondamentalement les mêmes que celles introduites pour les systèmes autonomes. La solution d’un système autonome dépend de  $(t - t_0)$  alors que la solution d’un système non autonome peut dépendre de  $t$  et  $t_0$  à la fois. C’est pourquoi le comportement d’un point d’équilibre dépendra en général de  $t_0$ . La théorie de Lyapunov pour les systèmes autonomes peut-être étendue aux systèmes non autonomes. Il existe plusieurs extensions du théorème de Lyapunov pour les systèmes non autonomes. Mais, nous nous concentrerons sur la stabilité uniforme, l’uniforme asymptotique stabilité et l’uniforme exponentielle stabilité. Ce sont ces cas que nous utiliserons dans les chapitres 3 et 4.

- Nous noterons une boule ouverte de centre l’origine et de rayon  $r$  par  $B_r$ , i.e.,

$$B_r = \{x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\| < r\}.$$

- Une fonction continue  $\beta : [0, a] \times [0, \infty[ \rightarrow [0, \infty[$  est dite de classe  $\mathcal{KL}$  si pour chaque  $s$  fixé, la fonction  $\beta(r, s)$  est de classe  $\mathcal{K}$  par rapport à  $r$  et pour chaque  $r$  fixé, la fonction  $\beta(r, s)$  est décroissante par rapport à  $s$  et  $\beta(r, s) \rightarrow 0$  lorsque  $s \rightarrow 0$ .

Pour étudier la stabilité de l’origine du système (1.4), nous introduisons les notions suivantes (voir [50, 58]).

**Définition 1.3.1 :** *Le point d’équilibre  $x = 0$  de (1.4) est dit (localement) stable (au sens de Lyapunov) s’il existe une constante positive  $r > 0$  telle que pour tout  $(t_0, x(t_0)) \in$*

$\mathbb{R}_+ \times B_r$ , il existe une fonction  $\alpha$  de classe  $\mathcal{K}$  telle que :

$$\|x(t)\| \leq \alpha(\|x(t_0)\|). \quad (1.5)$$

Si la borne de (1.5) est satisfaite pour tout  $(t_0, x(t_0)) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ , alors l'origine est globalement stable.

**Définition 1.3.2** : Le point d'équilibre  $x = 0$  est dit :

1. (localement) asymptotiquement stable s'il existe une constante  $r > 0$ , telle que pour tout  $(t_0, x(t_0)) \in \mathbb{R}_+ \times B_r$ , il existe une fonction  $\beta$  de classe  $\mathcal{KL}$  telle que :

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0). \quad (1.6)$$

2. globalement asymptotiquement stable (GAS) s'il existe une fonction  $\beta$  de classe  $\mathcal{KL}$  telle que l'inégalité (1.6) est satisfaite pour tout  $(t_0, x(t_0)) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ .

**Définition 1.3.3** : Le point d'équilibre  $x = 0$  du système (1.4) est dit (localement) exponentiellement stable s'il est (localement) asymptotiquement stable et l'inégalité (1.6) est satisfaite avec

$$\beta(r, s) = kre^{-\gamma s}, \quad k > 0, \gamma > 0.$$

De manière similaire nous pouvons définir que le point d'équilibre  $x = 0$  du système (1.4) est globalement exponentiellement stable (GES).

**Définition 1.3.4** : Le point d'équilibre  $x = 0$  du système (1.4) est dit uniformément stable s'il existe une constante positive  $r > 0$  et une fonction  $\alpha$  de classe  $\mathcal{K}$  indépendamment de  $t_0$  telles que :

$$\|x(t)\| \leq \alpha(\|x(t_0)\|), \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad \forall x(t_0) \in B_r. \quad (1.7)$$

Si la borne de (1.7) est satisfaite pour tout  $(t_0, x(t_0)) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ , alors l'origine est globalement uniformément stable.

**Définition 1.3.5** : Le point d'équilibre  $x = 0$  du système (1.4) est dit

## Chapitre 1. Généralités

---

1. (localement) uniformément asymptotiquement stable s'il existe une constante positive  $r > 0$  et une fonction  $\beta$  de classe  $\mathcal{KL}$  indépendamment de  $t_0$  telle que :

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0), \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad \forall x(t_0) \in B_r. \quad (1.8)$$

2. globalement uniformément asymptotiquement stable (GUAS) s'il existe une fonction  $\beta$  de classe  $\mathcal{KL}$  telle que l'inégalité (1.8) est satisfaite pour tout  $(t_0, x(t_0)) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ .

**Définition 1.3.6** : Le point d'équilibre  $x = 0$  du système (1.4) est dit (localement) uniformément exponentiellement stable/ globalement uniformément exponentiellement stable s'il est (localement) uniformément asymptotiquement stable/globalement uniformément asymptotiquement stable, respectivement, et l'inégalité (1.8) est satisfaite avec

$$\beta(r, s) = kre^{-\gamma s}, \quad k > 0, \gamma > 0.$$

Avec toutes ces définitions de l'uniforme stabilité, nous sommes à présent à mesure de formuler quelques résultats de l'uniforme asymptotique et exponentielle stabilité des systèmes non autonomes.

**Définition 1.3.7** : Une fonction  $V(t, x)$  est dite définie positive s'il existe une fonction définie positive  $W_1(x)$  telle que  $V(t, x) \geq W_1(x)$ , radialement non bornée si  $W_1(x)$  l'est aussi.

**Théorème 1.3.1** ([50]) : Soit  $x = 0$  un point d'équilibre pour le système (1.4) et  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un domaine contenant l'origine  $x = 0$ . Le point d'équilibre  $x = 0$  est uniformément stable s'il existe une fonction continuellement différentiable  $V : [0, \infty[ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$W_1(x) \leq V(t, x) \leq W_2(x) \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq 0, \quad (1.10)$$

$\forall t \geq 0$  et  $\forall x \in \Omega$ , où  $W_1(x)$  et  $W_2(x)$  sont des fonctions continues, définies positives sur  $\Omega$ .

## 1.4. Stabilisation d'un point d'équilibre

Le point d'équilibre  $x = 0$  est dit globalement uniformément stable si les hypothèses du Théorème 1.3.1 sont satisfaites avec

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -W_3(x), \quad \forall t \geq 0 \text{ et } \forall x \in \Omega \quad (1.11)$$

où  $W_3(x)$  est une fonction continue, définie positive sur  $\Omega$ . Si en plus,  $\Omega = \mathbb{R}^n$  et  $W_1(x)$  est radialement non bornée alors  $x = 0$  est globalement uniformément asymptotiquement stable.

**Théorème 1.3.2 [50]** : Soit  $x = 0$  un point d'équilibre du système (1.4) et  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un domaine contenant  $x = 0$ . S'il existe une fonction continuellement différentiable  $V : [0, \infty[ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$k_1 \|x\|^\alpha \leq V(t, x) \leq k_2 \|x\|^\alpha \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -k_3 \|x\|^\alpha \quad (1.13)$$

$\forall t \geq 0$  et  $\forall x \in D$ , où  $k_1, k_2, k_3$  et  $\alpha$  sont des constantes positives alors  $x = 0$  est exponentiellement stable. Si les hypothèses sont satisfaites globalement alors  $x = 0$  est globalement exponentiellement stable.

Dans la section qui suit nous allons rappeler quelques résultats de stabilisation et d'un observateur à grands gains que nous utiliserons dans le chapitre 2, 3 et 4.

## 1.4 Stabilisation d'un point d'équilibre

Considérons le système contrôlé :

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (1.14)$$

où  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$  avec  $\Omega$  un ouvert connexe de  $\mathbb{R}^n$ ,  $u = (u_1, \dots, u_m)^T \in U \subset \mathbb{R}^m$  représente le contrôle et  $f : \Omega \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  est un champ de vecteurs de classe  $C^1$  ( resp.  $C^\infty$ ) satisfaisant  $f(0, 0) = 0$ . Nous introduisons la définition suivante :

**Définition 1.4.1** : Le système (1.14) sera dit stabilisable s'il existe un feedback  $u = u(x)$ , au moins continu, tel que le système en boucle fermée :

$$\dot{x} = f(x, u(x))$$



admette l'origine comme point d'équilibre asymptotiquement stable.

Supposons que le système contrôlé (1.14) peut se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x) + uY(x) \\ x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (1.15)$$

où  $X(x) = Ax$  avec  $A$  une matrice  $n \times n$  avec  $n$  valeurs propres imaginaires distinctes. Pour un tel système, Jurdjevic et Quinn ont proposé dans [46] une technique de synthèse de loi de commande stabilisante relevant de la méthode de Lyapunov. Pour cela les hypothèses requises sont :

1. L'existence d'une fonction propre définie positive  $V$  telle que la fonction  $L_X V$  est continue et satisfait

$$L_X V(x) \leq 0$$

2.

$$\text{span}\{X(x), \text{ad}_X^k Y(x); k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{R}^n, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}.$$

Si ces deux hypothèses sont satisfaites, alors l'origine du système (1.15) est globalement asymptotiquement stable au moyen de la loi de commande

$$u = -\langle x, Y(x) \rangle.$$

Une des caractéristiques de la technique de Jurdjevic et Quinn est de tirer partie d'une propriété de passivité. Cette technique va être la technique de base à laquelle nous allons nous référer dans les chapitres 2, 3 et 4. Elle ne sera pas directement applicable dans les chapitres 3 et 4 du fait des termes de couplage des systèmes considérés. Aussi notre première tâche va être d'en relâcher le plus possible les hypothèses.

Ce résultat a été ensuite généralisé à des systèmes affines quelconque par plusieurs auteurs, notamment dans [74] et sous la forme suivante :

**Théorème 1.4.1** (Outbib et Sallet [74]) : *Considérons le système affine à contrôles affines suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x) + \sum_{i=1}^m u_i Y_i(x) \\ x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m \end{cases} \quad (1.16)$$

où  $X(x)$  et  $Y(x)$  sont des champs de vecteurs avec  $X(0) = 0$ . S'il existe une fonction de classe  $C^\infty$   $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  définie positive et propre telle que :

(i) La dérivée de Lie de  $V$  par rapport au champ de vecteurs  $X$  satisfait

$$X \cdot V(x) \leq 0.$$

(ii) La solution  $x = 0$  est la seule solution de :

$$W = \{x \in \mathbb{R}^n, X^{k+1} \cdot V(x) = X^k Y_i \cdot V(x) = 0, k \in \mathbb{N}, i = 1, 2, \dots, m\} = \{0\}.$$

Alors le système bouclé avec le feedback

$$u = -(Y_1 \cdot V(x), \dots, Y_m \cdot V(x))^T \quad (1.17)$$

est globalement asymptotiquement stable à l'origine.

Il faut noter que d'intéressantes conditions suffisantes très fines ont été obtenues dans [5, 60, 6] sur la stabilisation des systèmes non linéaires à contrôles non affines. Le résultat dû à [5] va être la technique de base à laquelle nous allons nous référer dans la première partie du chapitre 2 pour le calcul d'une loi de commande bornée d'un pendule en rotation.

### 1.4.1 Observateurs à grands gains

Cette classe d'observateurs, s'appliquant à une classe de systèmes physiques très étendue, a été étudiée à travers de nombreux travaux [8, 24, 23] et appliquée à l'électrotechnique ou en chimie [33, 22]. Le résultat rappelé dans ce paragraphe est issu de [33, 44] et sera appliqué dans le chapitre 2 pour la commande d'un pendule contraint à osciller dans un plan vertical en rotation.

Une des hypothèses de base pour pouvoir appliquer ce type d'observateur est que le système soit uniformément observable pour tout entrée. On considère le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (1.18)$$

avec  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$  et  $y \in \mathbb{R}$ . On considère les hypothèses suivantes :

**H<sub>1</sub>**- Le système (1.18), pour  $u = 0$ , et uniformément observable.

**H<sub>2</sub>**- Le système (1.18) est observable pour toute entrée  $u$  admissible.

On introduit le résultat suivant :

**Théorème 1.4.2** : ([33]) *Le système (1.18) est uniformément observable pour toute entrée  $u$  si et seulement s'il est équivalent au système :*

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + f'(z) + g'(z)u \\ y = Cz \end{cases} \quad (1.19)$$

où

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad C = [1, 0, \dots, 0],$$

$f' : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $g' : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$  sont deux fonctions non linéaires sous forme triangulaire

$$f'(z) = \begin{bmatrix} f'_1(z_1) \\ f'_2(z_1, z_2) \\ \vdots \\ f'_n(z_1, \dots, z_n) \end{bmatrix}, \quad g'(z) = \begin{bmatrix} g'_1(z_1) \\ g'_2(z_1, z_2) \\ \vdots \\ g'_n(z_1, \dots, z_n) \end{bmatrix}$$

Cette classe de systèmes englobe une grande partie de systèmes physiques. On pose de plus l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 1.4.1** : *En notant par  $\bar{z}_i$  le vecteur  $(z_1, \dots, z_i)^T$ , toutes les fonctions  $f'_i$  et  $g'_i$  (avec  $1 \leq i \leq n$ ) du système (1.19) sont globalement lipschitziennes de constantes de lipschitz  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ , respectivement.*

Puisque la paire  $(A, C)$  est observable, il existe une matrice  $K \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  telle que la matrice  $M = (A - KC)$  a toutes ces valeurs propres avec des parties réelles strictement négatives. Soit  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$  une matrice symétrique définie positive, solution de l'équation matricielle  $M^T S + SM = -Q$  avec  $Q$  une matrice symétrique définie positive, on a le résultat suivant :

**Théorème 1.4.3** ([35]) : *Supposons que le système (1.18) soit uniformément observable pour toute entrée  $u$  : le système (1.18) est donc équivalent au système (1.19). Supposons que l'hypothèse 1.4.1 soit satisfaite. Soit le système*

$$\dot{\hat{z}} = A\hat{z} + f'(\hat{z}) + g'(\hat{z})u - \Delta_\theta K(C\hat{z} - y) \quad (1.20)$$

où  $(C, A)$  est sous la forme canonique d'observabilité (1.19) et  $\Delta_\theta = \text{diag}(\theta, \theta^2, \dots, \theta^n)$  avec  $\theta > 0$  une constante. Alors pour toute entrée  $u$  uniformément bornée, le système (1.20) est un observateur du système (1.19) sur  $\Omega$ , c'est à dire pour  $\theta > 0$  suffisamment grand d'où le terme de grand gain,

$$\|\hat{z} - z\| \leq L \exp(-\theta t) \|\hat{z}_0 - z_0\|.$$

**Remarque 1.4.1 :** Des conditions géométriques invariantes ont été données pour la transformation de (1.18) en (1.19) ( et également pour les systèmes non affines en  $u$ , voir [34]). On peut alors déduire une condition nécessaire et suffisante pour la transformation de (1.18) en (1.19), ce dernier système étant suffisant pour l'existence d'un observateur. A noter que les observateurs à grands gains peuvent être sensibles au bruit [34].

△

## 1.4.2 Backstepping

Une méthode couramment utilisée pour désigner des contrôles non linéaires est la technique du *backstepping*. Cette technique est adaptée à des systèmes de forme triangulaire inférieure suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n) + g_n(x_1, \dots, x_n)u \end{cases} \quad (1.21)$$

où  $u$  est l'entrée du système. Ces systèmes sont dits de forme feedback. Les avantages qu'offre cette méthode sont les suivantes :

1. Les lois de commande qu'elle procure sont régulières et induisent un comportement de stabilité asymptotique globale.
2. Cette technique est récursive : un sous-système du système considéré est stabilisé puis des composantes de l'état sont ajoutées les unes après les autres jusqu'à l'obtention du système global.

## Chapitre 1. Généralités

---

3. Les constructions reposent sur la détermination à chaque étape des fonctions de Lyapunov.

Pour mieux appréhender cette technique qui sera utilisée dans le chapitre 3, nous présentons dans ce paragraphe un résultat de base du *backstepping*. Pour plus d'explications détaillées, le lecteur est renvoyé à [16].

Considérons le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x, y)y \\ \dot{y} = u + h(x, y) \end{cases} \quad (1.22)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}$ ,  $u \in \mathbb{R}$  est l'entrée et  $f(x)$  est une fonction de classe  $C^1$  telle que  $f(0) = 0$  et  $g(x, y)$  est une fonction de classe  $C^2$ . Supposons qu'il existe une loi de commande  $y_s(x)$  de classe  $C^2$ , une fonction de Lyapunov  $V(x)$  de classe  $C^2$  et une fonction  $W(x)$  définie positive telles que :

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)[f(x) + g(x, y_s)y_s(x)] = -W(x). \quad (1.23)$$

On a le résultat suivant :

**Théorème 1.4.4** : *Le système (1.22) est globalement asymptotiquement stable et une expression particulière de la loi de commande est*

$$u = -y + y_s(x) - h(x, y) - \frac{\partial V}{\partial x}(x)[g(x, y) + \gamma(x, y)] + \frac{\partial y_s}{\partial x}(x)[f(x) + g(x, y)y] \quad (1.24)$$

où  $\gamma(x, y)$  est la fonction

$$\gamma(x, y)(y - y_s(x)) = [g(x, y) - g(x, y_s(x))]. \quad (1.25)$$

Cette technique est aussi appelée technique d'ajout d'intégrateur puisque les hypothèses requises sur le sous-système en  $x$  portent principalement sur le fait que les composantes en  $x$  intègrent des fonctions de  $y$  et de  $u$ . Notons que de nombreuses lois de commande stabilisantes peuvent être déterminées grâce à cette technique et il s'agit de choisir celles qui donnent les meilleurs résultats dans un contexte donné.

### 1.4.3 Forwarding

Le *forwarding* est une technique de stabilisation des systèmes non linéaires qui a émergé ces dernières années. L'application récursive de la technique du *forwarding* permet de traiter le problème de la stabilisation des systèmes admettant la forme triangulaire supérieure suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, u) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, u) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_{n-1}, u) \end{cases} \quad (1.26)$$

où  $u$  est l'entrée. Ces systèmes sont dits de forme feedforward, où chaque composante de l'état intervient sur celles qui les suivent dans la chaîne d'intégration en partant de la commande. A notre connaissance, il n'existe pas pour l'instant des conditions nécessaires et suffisantes de nature géométriques pour qu'après un changement de variables et bouclage dynamique un système non linéaire s'exprime sous forme feedforward. Toutefois, certaines conditions suffisantes de nature géométriques ont été exposées par Teel dans [77].

Notons que la théorie de base du *forwarding* a les mêmes caractéristiques que la technique du *backstepping*. Cependant, elles se distinguent sur deux points majeurs : les familles de systèmes auxquelles elles s'appliquent sont différentes et la théorie de base du *backstepping* procure généralement des lois de commandes non bornées tandis que celle du *forwarding* conduit à des lois de commande bornées.

Dans ce paragraphe, nous présentons un résultat fondamental de la technique du *forwarding*. Considérons la famille de systèmes non linéaires sous la forme dite feedforward suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = Mx + h_1(y) + h_2(x, y, u), \\ \dot{y} = f_0(y) + f_2(x, y, u)u \end{cases} \quad (1.27)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$ ,  $u \in \mathbb{R}^q$  est l'entrée,  $f_0(y)$ ,  $f_2(x, y, u)$ ,  $h_1(y)$  et  $h_2(x, y, u)$  sont des fonctions de classe  $C^2$  avec  $f_0(0)$  et  $h_1(0) = 0$ . Ce type de système n'est génériquement pas linéarisable par bouclage dynamique. Nous introduisons les hypothèses suivantes :

**A<sub>1</sub>** : Le sous-système  $\dot{y} = f_0(y)$  est globalement asymptotiquement stable et localement exponentiellement stable. Pour ce système, il existe une fonction de Lyapunov  $V(y)$  et  $W(y) = -\frac{\partial V}{\partial y}(y)f_0(y)$  telles que  $V(y)$  et  $W(y)$  sont localement à l'origine supérieures à une fonction quadratique définie positive.

**A<sub>2</sub>** : L'approximation linéaire du système (1.27) est asymptotiquement stabilisable. De plus le point  $x = 0$  est l'unique solution de

$$\dot{x} = Mx, \quad x^T Q(h_2(x, 0, 0) + P f_2(x, 0, 0)) = 0 \quad (1.28)$$

où  $P$  est solution de l'équation

$$P = \frac{\partial f_0}{\partial y}(0) = -MP - \frac{\partial h_1}{\partial y}(0). \quad (1.29)$$

**A<sub>3</sub>** : La matrice  $M$  est critiqueusement stable, i.e., il existe une matrice symétrique, définie positive  $Q$  telle que

$$QM + M^T Q = 0. \quad (1.30)$$

**Théorème 1.4.5** ([65, 67, 68]) : *Si les hypothèses A<sub>1</sub>, A<sub>2</sub> et A<sub>3</sub> sont vérifiées alors pour tout  $\bar{u} > 0$ , le système (1.27) est globalement asymptotiquement et localement exponentiellement stabilisable par une loi de commande  $u$  de classe  $C^2$  satisfaisant*

$$|u(x)| \leq \bar{u} \quad (1.31)$$

C'est cette approche que nous allons suivre dans le chapitre 4 pour étudier d'une part la poursuite de trajectoire qui ne sera pas nécessairement une fonction périodique du temps des systèmes non linéaires ayant une structure feedforward et la poursuite d'une trajectoire périodique du système pendule-chariot d'autre part.

## 1.5 Conclusion

Les notions mathématiques utilisées dans la suite de la thèse, ainsi que quelques résultats de base sur la stabilité, l'observabilité, la stabilisation des systèmes dynamiques non linéaires et un observateur à grands gains qui seront étudiés, ont été regroupés dans ce

chapitre. Le théorème de Lyapunov et le principe d'invariance de LaSalle seront utilisés de manière constante. Deux résultats de base sur les techniques du *backstepping* et du *forwarding* ont été brièvement rappelés. Certains outils mathématiques que nous avons présentés au cours de ce chapitre permettront de calculer soit directement, soit indirectement des lois de commande stabilisantes des systèmes non linéaires autonomes et non autonomes étudiés. Ce chapitre est donc uniquement composé de rappels.





## Première partie

# Sur quelques problèmes de la stabilisation globale des systèmes non linéaires

## 2

# Stabilisation d'un pendule en rotation et d'un système électromécanique

## 2.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'application d'une extension du théorème de Jurdjevic-Quinn pour les systèmes non linéaires à contrôles non affines, d'un observateur à grands gains et d'une version du théorème de LaSalle pour la stabilité de deux systèmes physiques dans le but de les commander. En effet, l'automatique non linéaire a, entre autres buts, celui de résoudre des problèmes concrets de commande. Une des particularités de l'automatique est de s'appliquer à des domaines physiques très divers. C'est dans cet état d'esprit qu'est exposé dans ce chapitre deux exemples physiques de commandes de systèmes non linéaires. Dans la première partie de ce chapitre, une commande bornée calculée à partir de la technique de Jurdjevic-Quinn pour des systèmes non linéaires à contrôles non affines [5] et d'un observateur à grands gains [34] d'un pendule en rotation sera développée. Le but de la construction d'un observateur est de permettre d'estimer les variables d'état non accessibles à la mesure, pour en déduire une commande réaliste. Dans la seconde partie du chapitre, une application d'une version du théorème de LaSalle [55] en électrotechnique sera développée avec la commande d'un système de lévitation magnétique.

## 2.2 Stabilisation des oscillations d'un pendule en rotation

Le modèle considéré dans cette section est constitué d'un pendule simple de masse  $m$  et de longueur  $l$  dont l'extrémité supérieure est fixée sur l'axe vertical d'un moteur. Le moteur tourne à une vitesse de rotation  $\omega$ . Le pendule est contraint à osciller dans un plan vertical tournant à la vitesse  $\omega$  autour de l'axe vertical du moteur (voir Figure 2.1). Le lecteur est renvoyé au livre de Hale [39] pour plus de précisions sur ce système oscillatoire. Cette section est donc consacrée à l'étude de la stabilisation de ce modèle mathématique.

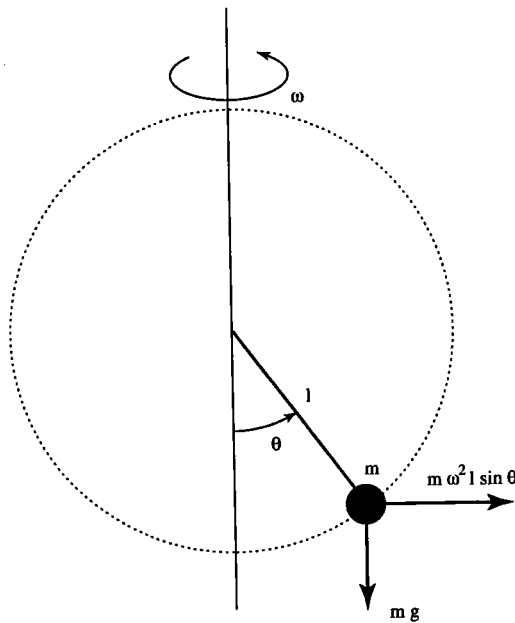


FIG. 2.1 – Schéma d'un pendule en rotation.

Soit  $\theta$  la déviation angulaire du pendule et  $\dot{\theta}$  sa vitesse. Les énergies cinétique et potentielle du système sont respectivement :

$$T = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\ell^2\omega^2 \sin^2 \theta \quad (2.1)$$

$$V = mgl(1 - \cos \theta) \quad (2.2)$$

où  $I = m\ell^2$  est le moment d'inertie du pendule. Ainsi, le hamiltonien du système est

## 2.2. Stabilisation des oscillations d'un pendule en rotation

---

donné par :

$$H = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}m\ell^2\omega^2 \sin^2 \theta + mgl(1 - \cos \theta). \quad (2.3)$$

La formulation hamiltonienne donne l'équation dynamique

$$I\ddot{\theta} = m\ell^2\omega^2 \sin \theta \cos \theta - mgl \sin \theta. \quad (2.4)$$

Supposons à présent qu'on désire contrôler le système à travers la vitesse de rotation du moteur. De ce fait, posons :

$$\omega = \omega_0 + u \quad (2.5)$$

où  $u$  est la commande et  $\omega_0$  la vitesse de rotation du moteur lorsque le pendule se trouve dans l'état d'équilibre auquel on veut stabiliser le système. Dans cet ordre, l'équation dynamique (2.4) peut se réécrire comme suit :

$$\ddot{\theta} = (\omega_0 + u)^2 \sin \theta \cos \theta - \frac{g}{\ell} \sin \theta. \quad (2.6)$$

A cause du terme  $u^2$ , le système ci-dessus est un système à contrôle non affine. Son espace d'état est  $M = S^1 \times \mathbb{R}$  avec  $S^1$  un cercle de rayon  $\ell$ . Sous forme de modèle d'état, le système (2.6) devient le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = (\omega_0 + u)^2 \sin x \cos x - \frac{g}{\ell} \sin x \end{cases} \quad (2.7)$$

où  $x = \theta$  et  $y = \dot{\theta}$ .

Notons que le système (2.7) sans aucun contrôle, i.e.,  $u = 0$  a trois points d'équilibre dans  $M$  donné par  $(0, 0)$ ,  $(0, \pi)$  et  $(\cos^{-1} \lambda, 0)$  avec  $\lambda = \frac{g}{\ell\omega_0^2}$ . Ce dernier point d'équilibre n'apparaissant bien sûr que si  $|\lambda| < 1$ .

Notre objectif est d'étudier la stabilisation de ce système avec des commandes bornées. La technique de Jurdjevic-Quinn pour des systèmes non linéaires à contrôles non affines s'est révélée très utile dans ce contexte avec des adaptations nécessaires. En effet, depuis le travail pionnier de Jurdjevic et Quinn sur la stabilisation des systèmes non linéaires à contrôles affines, plusieurs conditions suffisantes du type de Jurdjevic-Quinn ont été

développées par plusieurs auteurs aussi bien dans le cas des systèmes non linéaires à contrôles affines [74, 32, 47, 57] que dans le cas des systèmes non linéaires à contrôles non affines [5, 6, 60]. Le résultat dû à [5] va être la technique de base à laquelle nous allons nous référer dans le prochain paragraphe pour proposer une loi de feedback bornée simple pour stabiliser asymptotiquement le point d'équilibre  $(\cos^{-1} \lambda, 0)$  du pendule en rotation.

Cependant, bien que la mesure de la vitesse puisse être faite, la procédure est coûteuse et sensible aux bruits. Un observateur à grands gains permet d'estimer la vitesse de rotation du pendule, à partir de la mesure de la déviation angulaire du pendule. Une étude numérique a permis de valider les résultats théoriques obtenus.

### **2.2.1 Résultat**

# Controlling a Rotating Pendulum with Bounded Feedbacks

S. Bowong, A. Iggidr and G. Sallet

INRIA Lorraine & University of Metz

Dept. of Math. (MMAS (ESA 7035)), I.S.G.M.P. Bât A,  
Ile de Saulcy, 57045 Metz Cedex 01, France.

Tel: +33 3 87 54 72 80, Fax: +33 3 87 54 72 77

email: {bowong, iggidr, sallet}@loria.fr

Non soumis

## Abstract

This paper deals with the control problem of a rotating pendulum. We propose an output-feedback control law for stabilizing the oscillations of the pendulum to one of its equilibrium position. The control strategy is based on the Jurdjevic-Quinn result for continuous-time non affine systems and the physical character of the system. An estimate of the basin of attraction is also given. Simulation results are given to explain the effectiveness of the proposed control scheme.

**Keywords:** Non affine control system, Lyapunov function, Observer, Rotating pendulum.

## 1 Introduction

The stabilization of mechanical systems has been an active research field in recent years. Various control methodologies have been developed by many researchers from a point of view of dynamic system theory and traditional feedback control. Among these creative control algorithms are the celebrated Jurdjevic-Quinn method [3], Lyapunov approaches [3, 4, 5], backstepping strategies [6, 13], semiglobal schemes [6, 7] and robotic control methods [12, 14] (see the books [9, 10, 11] for a rather complete list of references in this quickly expanding area).

In this paper, the problem of controlling an oscillatory mechanical system with a bounded control action is addressed. The mechanical system considered is shown in Figure 1. It is a conventional pendulum of mass  $m$  and length  $\ell$  constrained to oscillate

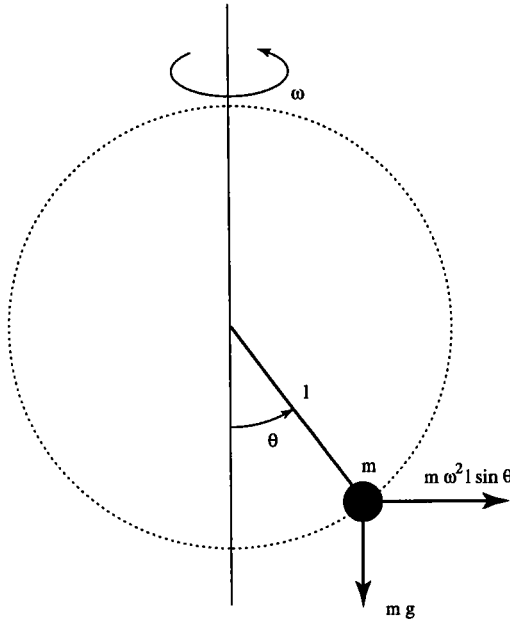


Figure 1: Rotating pendulum

in a plane rotating with angular velocity  $\omega$  about a vertical line. Let  $\theta$  denotes the angular deviation of the pendulum from the vertical line, the moment of centrifugal force is  $m\ell^2\omega^2 \sin \theta \cos \theta$ , the moment of the force due to gravity is  $mgl \sin \theta$  and the moment of inertia is  $I = m\ell^2$ . The differential equation for the motion is

$$I\ddot{\theta} = m\ell^2\omega^2 \sin \theta \cos \theta - mgl \sin \theta \quad (1)$$

The angular velocity  $\omega$  is not considered as a state variable because it is irrelevant for the stabilization of the pendulum. The interested reader should consult the book of ([8], Example 1.3, page 182) for background of oscillatory phenomena of this system.

Let the revolute pendulum on rotating disk be controlled through its velocity and let

$$\omega = \omega_0 + u \quad (2)$$

The control  $u$  is added in order to order or guide the dynamics to meet our specific requirements. Here, we are interested in moving the pendulum to one of its equilibrium position. Taking into account (2), the system (1) is equivalent to the system

$$I\ddot{\theta} = m\ell^2\frac{\omega_0^2}{2} \sin 2\theta + m\ell^2\omega_0 u \sin 2\theta + m\ell^2\frac{u^2}{2} \sin 2\theta - mgl \sin \theta \quad (3)$$

Because of the large range of motion, the control problem is highly nonlinear and challenging. Due to the  $u^2$  term, the above system is a non-affine control system. This property



is extensively used to carry out for this system the design of asymptotically stabilizing state feedbacks by using the Jurdjevic-Quinn approach for non affine control systems. To make this feedback control law physically realizable, a state observer is used to estimate the unmeasurable velocity state based on the measurable position. It is hoped that our methodologies developed for this peculiar system will be applicable to other types of underactuated mechanical systems.

The remainder of this paper is organized as follows. In the second section, the key results of [1, 4, 5] on the Jurdjevic-Quinn result for continuous-time non affine systems are briefly recalled and these results are applied to the control problem of a rotating pendulum in the third section. The fourth section is concerned with the global separation principle based on the stabilization of results developed in the third section. In the fifth section, simulations results are presented showing the performance induced to the rotating pendulum system by the control laws we determine. Finally, in the sixth section, a brief conclusion ends the paper.

## 2 Feedback control of non affine systems

Consider a continuous-time nonlinear system of the form

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (4)$$

where  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$  and  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  is a smooth function satisfying  $f(0, 0) = 0$ . Denote by  $X$  and  $Y_1, \dots, Y_m$  the vector fields defined on  $\mathbb{R}^n$  by:

$$X(x) = f(x, 0), \quad \text{and} \quad Y_i(x) = \frac{\partial f}{\partial u_i}(x, 0), \quad i = 1, \dots, m \quad (5)$$

Suppose that there exists a positive definite and proper smooth function  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  such that:

**Assumption A<sub>1</sub>:** The Lie derivative of  $V$  along the vector field  $X$  satisfies

$$XV(x) \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (6)$$

**Assumption A<sub>2</sub>:** The set  $L = \{x \in \mathbb{R}^n, X^{k+1}V(x) = X^k Y_i V(x) = 0, k \in \mathbb{N}, i = 1, \dots, m\}$  is reduced to set  $\{0\}$ .

Let  $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  be the smooth function defined by

$$\varphi(x, v, q) = \left( \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x, tv) q^2 dt \right)^T \nabla V(x) \quad (7)$$

where  $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x, tv)\right) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  (the space of bilinear applications from  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$  to  $\mathbb{R}^n$ ) is the second order derivative of  $f$  with respect to  $u$  at  $(x, tv)$  and  $q^2 = \langle q, q \rangle$ :  
 $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x, tv)q^2 = \left(q^T \frac{\partial^2 f_1}{\partial u^2}(x, tv)q, \dots, q^T \frac{\partial^2 f_n}{\partial u^2}(x, tv)q\right)$   
For a fixed  $\eta > 0$ , let  $K_1(x)$  and  $K_2(x)$  be any nonnegative smooth real valued functions satisfying, for any  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $K_1(x) + K_2(x) \neq 0$  and

$$K_1(x) \geq \sup_{\|v\| \leq \eta, \|q\|=1} |\varphi(x, v, q)|, \quad K_2(x) \geq \|Y_1 V(x), \dots, Y_m V(x)\| \quad (8)$$

and set

$$K(x) = \frac{\eta}{\eta K_1(x) + K_2(x)} \quad (9)$$

The following result gives explicitly a bounded stabilizing feedback for system (4).

**Theorem 1** [1, 4, 5]: *If Assumptions  $\mathbf{A}_1$  and  $\mathbf{A}_2$  are satisfied, then for any positive constant  $\eta$ , the non-affine system (4) is globally asymptotically stabilizable by means of the smooth state feedback control law*

$$u(x) = -K(x)(Y_1 V(x), \dots, Y_m V(x)) \quad (10)$$

which satisfies  $u(0) = 0$  and

$$\|u(x)\| \leq \eta, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (11)$$

For sake of completeness, we recall the proof of this result:

**Proof:** From the Taylor expansion formula, the derivative of the function  $V$  along the solutions of the closed-loop system (4)-(10) is

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \left\langle \nabla V(x), f(x, 0) + \frac{\partial f}{\partial u}(x, 0)u(x) + \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x, tu(x))u^2(x) dt \right\rangle \\ &= XV(x) + \sum_{i=1}^m u_i(x)Y_i V(x) + \varphi(x, u(x), u(x)) \end{aligned} \quad (12)$$

If  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(x) = 0$ , one has  $\dot{V}(x) = XV(x)$  which, according to Assumption  $\mathbf{A}_1$  is negative. Otherwise from the homogeneity property of  $\varphi(x, v, q)$  with respect to  $q$  one gets:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= XV(x) - \frac{1}{K(x)} \|u(x)\|^2 + \|u(x)\|^2 \varphi \left( x, u(x), \frac{u(x)}{\|u(x)\|} \right) \\ &= XV(x) - \frac{1}{K(x)} \|u(x)\|^2 \left[ 1 - K(x) \varphi \left( x, u(x), \frac{u(x)}{\|u(x)\|} \right) \right] \end{aligned} \quad (13)$$

According to (8), (9) and (11), one has  $1 - K(x)\varphi\left(x, u(x), \frac{u(x)}{\|u(x)\|}\right) \geq 0$ . By Assumption  $\mathbf{A}_1$  it follows that  $\dot{V}(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$  which implies that the closed-loop system (4)-(10) is Lyapunov-stable. Furthermore, from the control law (10) and inequalities (8), one has

$$u(x) \neq 0 \Rightarrow K_2(x) \neq 0 \Rightarrow 1 - K(x)\varphi\left(x, u(x), \frac{u(x)}{\|u(x)\|}\right) \neq 0$$

and, from (10), it turns out that:

$$\dot{V}(x) = 0 \iff X \cdot V(x) = 0 \text{ and } Y_i \cdot V(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (14)$$

Thanks to LaSalle's invariance principle we can conclude that the feedback (10) stabilizes globally asymptotically system (4).  $\square$

### 3 Control of the rotating pendulum system

The aim of this section is essentially to control the oscillations of the pendulum based on the stability results described in section 2.

By letting  $x = \theta$  and  $y = \dot{\theta}$ , the equation (3) has the form

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \frac{\omega_0^2}{2} \sin 2x - \frac{g}{\ell} \sin x + \omega_0 u \sin 2x + \frac{u^2}{2} \sin 2x \end{cases} \quad (15)$$

Its state space is  $H = S^1 \times \mathbb{R}$

#### 3.1 Equilibrium points

Let  $\lambda = \frac{g}{\ell\omega_0^2}$ , for  $u = 0$ , the equilibrium points of the system are located at  $(k\pi, 0)$ , for  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  and  $(\cos^{-1} \lambda, 0)$ , the last one of course appearing only if  $|\lambda| < 1$ . From the physical description of the pendulum, it is clear that for any given  $\lambda$ , the system has only three equilibrium points corresponding to the equilibrium points  $(0, 0)$ ,  $(\pi, 0)$  and  $(\cos^{-1} \lambda, 0)$ . Other equilibrium points are the repetitions of the points  $(0, 0)$  and  $(\pi, 0)$  which correspond to the number of full swings the pendulum would make.

For  $0 < \lambda < 1$ , we define  $x_0 = \cos^{-1} \lambda$  which satisfies  $0 < x_0 < \frac{\pi}{2}$  or  $\frac{3\pi}{2} < x_0 < 2\pi$ . Physically, one can have  $\lambda < 1$  if the angular velocity  $\omega_0$  is large enough. Thus, the control of the oscillations of the pendulum is reduced to the stabilization of system (15) at the equilibrium point  $(x_0, 0)$ .

### 3.2 Stabilization of the system at the equilibrium $(x_0, 0)$

As stated above, the control objective is to drive the state  $(x, y)$  to the target point  $(x_0, 0)$  by using a bounded feedback control. More precisely, we shall show that for any given positive real number  $\eta$  it is possible to construct a feedback law  $u(x, y)$  that stabilizes system (15) and which is bounded by  $\eta$ . Towards this end, we transform the stabilization problem of (15) around  $(x_0, 0)$  into the stabilization problem at the origin by performing the following change of coordinates:  $z_1 = x - x_0$ ,  $z_2 = y$ . In this way, the dynamics of system (15) becomes:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = \frac{\omega_0^2}{2} \sin 2(z_1 + x_0) - \frac{g}{\ell} \sin(z_1 + x_0) + \omega_0 u \sin 2(z_1 + x_0) + \frac{u^2}{2} \sin 2(z_1 + x_0) \end{cases} \quad (16)$$

The vector fields  $X(z)$  and  $Y(z)$  defined in (5) are given by:

$$X(z) = \begin{pmatrix} z_2 \\ \frac{\omega_0^2}{2} \sin 2(z_1 + x_0) - \frac{g}{\ell} \sin(z_1 + x_0) \end{pmatrix}, \quad Y(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_0 \sin 2(z_1 + x_0) \end{pmatrix} \quad (17)$$

We propose the following Lyapunov candidate function

$$V(z) = \frac{1}{2} z_2^2 + \frac{\omega_0^2}{2} [\cos(z_1 + x_0) - \cos x_0]^2 \quad (18)$$

This function is positive definite over the domain  $G = \{z_1 \in H, -x_0 < z_1 < \pi - x_0\}$ . From (17) and (18), the Lie derivative of  $V$  with respect the vector fields  $X(z)$  and  $Y(z)$  are given by  $X \cdot V(z) = 0$ , and

$$Y \cdot V(z) = \omega_0 z_2 \sin 2(z_1 + x_0) \quad (19)$$

Besides, the function  $\varphi$  defined in (7) is given by  $\varphi(z, v, q) = \frac{q^2}{2} z_2 \sin 2(z_1 + x_0)$ . One can easily check that, for a given  $\eta > 0$ , the real-valued nonnegative functions  $K_1$  and  $K_2$  defined on  $H$  by  $K_1(z) = \frac{1}{2}(z_2^2 + 1)$  and  $K_2(z) = 1 + \omega_0^2 z_2^2 \sin^2 2(z_1 + x_0)$  satisfy (8). Following (10), the feedback control law is designed as follows

$$u(z) = -\frac{2\eta\omega_0 z_2 \sin 2(z_1 + x_0)}{z_2^2[\eta + 2\omega_0^2 \sin^2 2(z_1 + x_0)] + \eta + 2} \quad (20)$$

The desired stability properties of the closed-loop system are summarized in the following result.

**Theorem 2 :** *The system (16) in closed-loop with the control law (20) is globally asymptotically stable at the origin within the domain*

$$\Omega = \left\{ z \in H, V(z) < \frac{\omega_0^2}{2}(1 - \cos x_0)^2 \right\} \quad (21)$$

**Proof:** It is sufficient to show that the set  $\Omega$  is a positively invariant set for the closed loop system and that the above candidate Lyapunov function  $V$  (18) together with the vector fields (17) satisfy the assumptions of Theorem 1 on the set  $\Omega$ . The assumption  $\mathbf{A}_1$  is satisfied since we have  $X \cdot V(z) = 0$ . By construction of the feedback  $u(z)$  and according to the proof of Theorem 1, the time derivative of the function  $V$  along the trajectories of the closed-loop system (16)-(20) is non positive. Therefore the function  $V$  is a nonincreasing function along the trajectories of the closed-loop system (16)-(20) which implies that the set  $\Omega$  is positively invariant.

It remains to prove that Assumption  $\mathbf{A}_2$  is fulfilled, that is, the set  $L = \{z \in \Omega, X^{k+1}V(z) = X^k Y V(z) = 0, k \in \mathbb{N}\}$  is reduced to the origin  $\{(0, 0)\}$ . From (19), one gets  $Y \cdot V(z) = 0 \iff z_2 = 0$  or  $\sin 2(z_1 + x_0) = 0$ . Suppose that  $z_2 \neq 0$ , hence  $\sin 2(z_1 + x_0) = 0$  and  $z_1 \in ] -x_0, \pi - x_0[$ . This implies that  $z_1 = \frac{\pi}{2} - x_0$ . But  $X \cdot Y \cdot V(z) = 2\omega_0 z_2^2 \neq 0$  if  $z_2 \neq 0$ . Hence, the points  $\left(\frac{\pi}{2} - x_0, z_2\right)$  do not belong to  $L$ . Therefore  $\bar{z} \in L$  implies that  $\bar{z} = (z_1, 0)$  with  $z_1 \in ] -x_0, \pi - x_0[$ . Moreover,  $X \cdot Y \cdot V(\bar{z}) = \omega_0 \sin 2(z_1 + x_0) \left[ \omega_0^2 \cos(z_1 + x_0) - \frac{g}{\ell} \right]$ . Hence, it is immediate that  $X \cdot Y \cdot V(\bar{z}) = 0$  leads to  $z_1 = 0$  or  $z_1 = \frac{\pi}{2} - x_0$  and it follows that  $\bar{z} = (0, 0)$  or  $\bar{z} = \left(\frac{\pi}{2} - x_0, 0\right)$ . Besides,  $X^3 \cdot Y \cdot V\left(\frac{\pi}{2} - x_0, 0\right) = -\frac{6g^2}{\ell} \neq 0$  which implies that  $L = \{(0, 0)\}$  and this ends the proof.  $\square$

## 4 Observer-based output feedback

The state-feedback law (20) relies on the knowledge of the system states  $z = (z_1, z_2)^T$ . The purpose of this section is to remove the assumption that  $z$  is measured and to find an observer-based output-feedback controller. Consider the case where only the output  $y = z_1$  is measured. Since  $z_2$  is unavailable to the designer, the controller (20) is not implementable. So, we need an observer to reconstruct the (unknown) variable  $z_2$ . We first rewrite the rotating pendulum equation (16) as

$$\begin{cases} \dot{z} &= Az + g(z, u) \\ y &= Cz \end{cases} \quad (22)$$

where

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = (1, 0)$$

and

$$g(z, u) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\omega_0^2}{2} \sin 2(z_1 + x_0) - \frac{g}{\ell} \sin(z_1 + x_0) + \omega_0 u \sin 2(z_1 + x_0) + \frac{u^2}{2} \sin 2(z_1 + x_0) \end{bmatrix}$$

Since the admissible controls we use are bounded by  $\eta$ , the function  $g(z, u)$  is globally Lipschitz with the Lipschitz constant  $\sigma = \frac{1}{2}(\omega_0 + \eta)^2 + \frac{g}{\ell}$ . Therefore, we can apply the results of [15, 16, 17] as follows: For any positive real number  $\theta$ , define

$$\Delta_\theta = \begin{bmatrix} \theta & 0 \\ 0 & \theta^2 \end{bmatrix} \quad (23)$$

Since the pair  $(A, C)$  is observable, there exists a matrix  $F \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$  such that  $A - FC$  has all its eigenvalues with negative real parts. Let  $S \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  be a symmetric positive definite matrix, solution of the matrix equation  $M^T S + SM = -I_{\mathbb{R}^2}$  where  $M = A - FC$  and  $I_{\mathbb{R}^2}$  the identity matrix of dimension 2.

**Theorem 3** [15, 16, 17]: *The system*

$$\dot{\hat{z}} = A\hat{z} + g(\hat{z}, u) + \Delta_\theta F(y - C\hat{z}) \quad (24)$$

where  $\Delta_\theta$  is defined in (23) and  $F$  is such that  $A - FC$  has all its eigenvalues with negative real parts, is a global observer for the state of system (16) with exponential convergence, i.e., for all initial conditions  $z(0)$  and  $\hat{z}(0)$ ,  $\hat{z}(t) - z(t)$  tends exponentially to zero when  $t \rightarrow \infty$  if  $\theta > \theta_{min} = 2\sigma\lambda_{max}(S)$ , with  $\lambda_{max}(S)$  the largest eigenvalue of  $S$ .

Now, let  $\alpha$  be any positive real number satisfying  $0 < \alpha < \frac{\omega_0^2}{2}(1 - \cos x_0)^2$ , and consider the compact set  $\Omega_\alpha = \{z \in H, V(z) \leq \alpha\}$ . This set is positively invariant for system (16-20) and is contained in  $\Omega$ . Let  $\Gamma$  be a compact of  $\mathbb{R}^2$  such that  $\Omega \subset \Gamma$ . According to [18] (Theorem 1.1, pp 128), the stabilization of system (16) by an estimated state feedback is solvable. More precisely, let  $u_\alpha(\hat{z})$  be a smooth compactly supported function satisfying

$$u_\alpha(\hat{z}) = -\frac{2\eta\omega_0\hat{z}_2 \sin 2(\hat{z}_1 + x_0)}{\hat{z}_2^2[\eta + 2\omega_0^2 \sin^2 2(\hat{z}_1 + x_0)] + \eta + 2} \quad \text{for } \hat{z} \in \Omega_\alpha.$$

Then we have the following

**Proposition 1** : *Consider the rotating pendulum equation (16) in closed-loop with the observer-based output-feedback control law (24), where  $u = u_\alpha(\hat{z})$ . If  $\theta$  is large enough, then the closed-loop system is globally asymptotically stable at the origin within  $\Omega_\alpha \times \Gamma$ .*

## 5 Simulations results

In order to validate the performance of the proposed control law we have performed simulations on MATLAB<sup>TM</sup> of the rotating pendulum moving in the vertical plane. We have considered the system taking the parameters  $m = 1Kg$ ,  $\ell = 1m$ ,  $g = 10m/s^2$  and  $\omega_0 = 12rad/s$ . The control parameter  $\eta$  was chosen as  $\eta = 10$ . The observer is constructed with

$$F = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix}, \text{ and } S = \begin{bmatrix} \frac{11}{20} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{111}{200} \end{bmatrix} \quad (\text{hence, } \theta_{min} = 530, 2)$$

and the observer gain value was chosen as  $\theta = 535$ . We must not forget that our control law requires initial conditions such that (21) is satisfied. The initial conditions for system (16) were  $(z_1(0), z_2(0)) = (1, 2)$  and for observer (24)  $(\hat{z}_1(0), \hat{z}_2(0)) = (-0.5, -5)$ . Figure 2 shows the stabilization of the rotating pendulum for the chosen initial conditions. An estimate of the basin of attraction and the phase portrait of the system are depicted in Figure 3. The simulations show that our control law brings the state of the system at the origin as expected. The performance of the system is presented in Figure 4. The Lyapunov function  $V$  is decreasing and converges to zero.

## 6 Conclusion

In this paper, we have studied the control problem of a rotating pendulum. We have presented an output-feedback control law that brings the state of the pendulum to one of its equilibrium position. The mathematical stabilizability conditions are derived from the Jurdjevic-Quinn result for continuous-time non affine systems and the rotativity property of the system. It has been shown that Lyapunov-type controllers in conjunction with recent developments in non affine control systems yield a promising way of engineering dynamics. An estimate of the basin of attraction has been explicitly computed. Simulation results are provided to show the effectiveness and the efficiency of the proposed control methodology. Further works, as the control performance, the use of this scheme in robotic and so, are going on.

## References

- [1] M. Bensoubaya, A. Ferfera and A. Iggidr "About continuous and discrete time non-linear systems" 2nd Marrakech International Conference on Differential Equation,

June 1995

- [2] J.P. Lasalle and S. Lefschetz, *Stability by Liapunov's direct method with applications*. Accademic Press, New-York, 1961
- [3] V. Jurdjevic and J.P. Quinn, *Controllability and Stability*. *Journal of Differential Equations*, 28: 381-389, 1978
- [4] W. Lin, *Global asymptotic stabilization of general nonlinear systems with stable free dynamics via passivity and bounded feedback*, *Automatica*, Vol. 32, No. 6, pp. 915-924, 1996
- [5] M. Bensoubaya, A. Ferfera and A. Iggidr, *Stabilisation de systèmes non linéaires discrets*, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 321, Série I, p. 371-374, 1995
- [6] A. R. Teel, "Nonlinear input-output stability and stabilization", *Papers presented at the 12th international symposium on the mathematical theory of networks and systems*, St. Louis, MO, USA, June 24-28, 1996. Boston, MA: Birkhäuser. *Prog. Syst. Control Theory*. 22, pp. 373-388, 1997
- [7] A. Teel and L. Praly, "Tools for semiglobal stabilization by partial state and output feedback", *SIAM J. Control Optimization*, Vol. 33, N0. 5, pp. 1443-1488, 1995
- [8] J. K. Hale, *Ordinary Differential Equations*, John Willey, 1969
- [9] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, Prentice-Hall, Inc., 1996
- [10] H. Nijmeijer and A. J. van Schaft, *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Berlin: Springer-Verlag, 1990
- [11] C. Canudas de Wit, B. Siciliano and G. Bastin, *Theory of Robot Control*, Springer-Verlag, 1996
- [12] I. Fantoni, R. Lozano and M. Spong, *Energy based control of the pendubot*, *IEEE Trans. Aut. Control*, Vol. 45, pp. 725-729, 2000
- [13] F. Mazenc and S. Bowong, *Tracking Trajectories of the cart-pendulum System*, to appear in *Automatica*
- [14] H. Berghuis, H. Nijmeijer "A passivity Approach to Controller-Observer Design for Robots", *IEEE Transaction on Robotics and Automatics*, Vol. 9, N0. 6, December 1993



- [15] J. P. Gauthier and I. A. K. Kupka, "Observability and observers for nonlinear systems", *SIAM Journal Control and Optimization*, Vol. 34, N0. 4, pp. 975-994, 1994
- [16] J. P. Gauthier, H. Hammouri and S. Othman, "A simple observer for nonlinear systems, application to bioreactor" *IEEE Trans. on Aut. Control*, Vol. 37, N0. 4, pp. 857-880, 1992
- [17] A. Iggidr and G. Sallet, "Exponential stabilization of nonlinear systems by an estimated state feedback", in *Proc. 2nd Eur. Control Conference ECC 93*, Groningen, Pays Bas, pp. 384-391, 1993
- [18] J. P. Gauthier and I. A. K. Kupka, "Deterministic observation theory and applications", Cambridge University Press. 2001

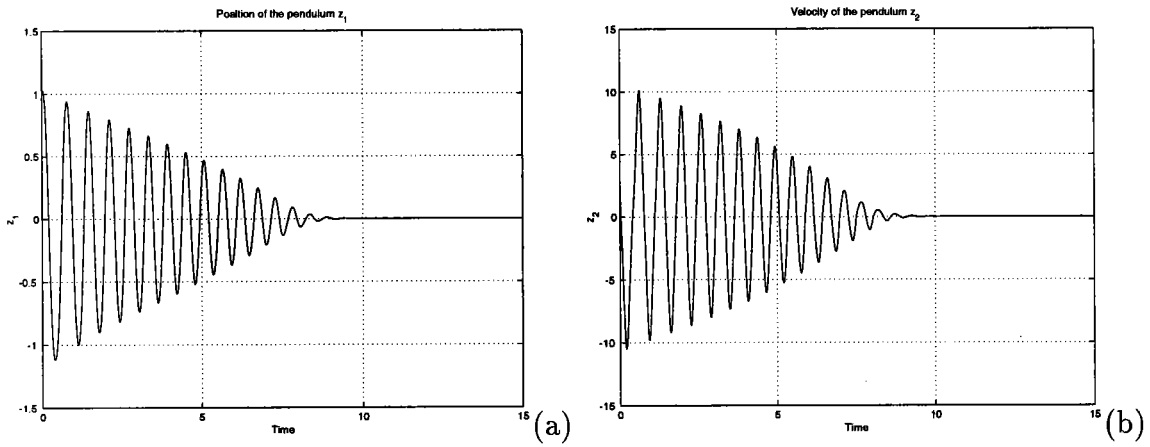


Figure 2: States of the system

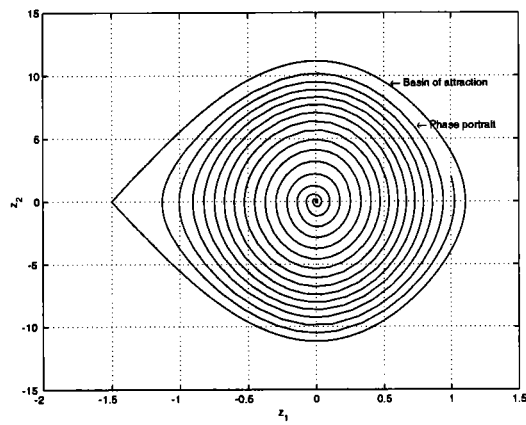


Figure 3: An estimate of the basin of attraction and phase portrait of the system

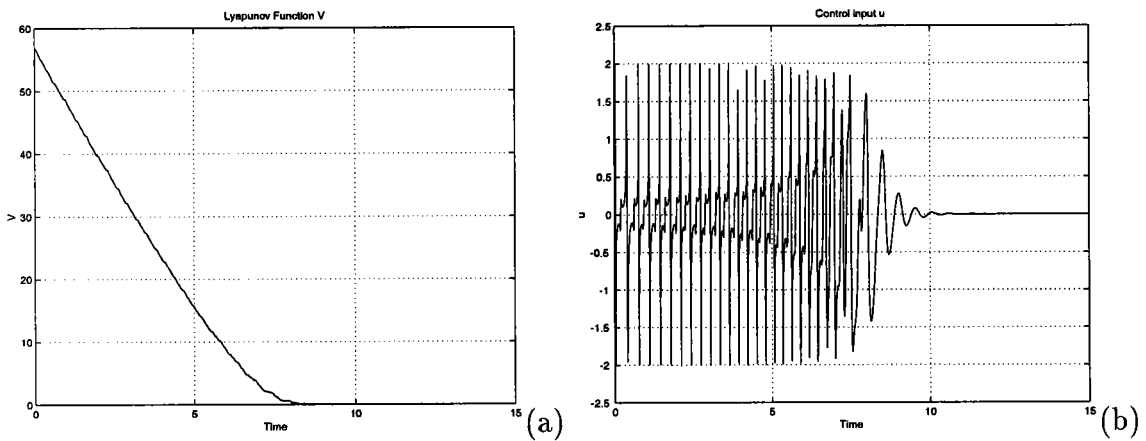


Figure 4: Performance of the system

## 2.3 Stabilisation d'un système de lévitation magnétique

L'électrotechnique constitue un champ d'application pour la théorie de la commande des systèmes non linéaires. En effet, les modèles mathématiques représentant les dynamiques des appareils électriques (à courant continu) sont non linéaires. Aussi, depuis quelques années, on peut noter une utilisation de plus en plus importante de la commande non linéaire pour contrôler des appareils électriques : on peut citer [40, 2, 73, 87, 71] (cette liste n'étant pas exhaustive).

Dans cette section, nous étudions analytiquement et numériquement cette question pour un problème simple de stabilisation d'un système de lévitation magnétique. Le système de lévitation magnétique est un système électromécanique constitué d'une partie électrique et d'une partie mécanique. Le schéma descriptif est celui de la Figure 2.2. La partie électrique est constituée d'un électroaimant produisant un champ magnétique vertical lorsqu'il est branché aux bornes d'un générateur de tension. Cet électroaimant est une bobine caractérisée par une inductance  $L$  et d'une résistance  $R > 0$  du fil qui la constitue. La partie mécanique est constituée d'une balle métallique pouvant se déplacer verticalement lorsqu'elle est soumise à une force électromagnétique. Ce système a été décrit pour la première fois par WONG en 1986. Il présente un aspect non linéaire instable en boucle ouverte très difficile à commander.

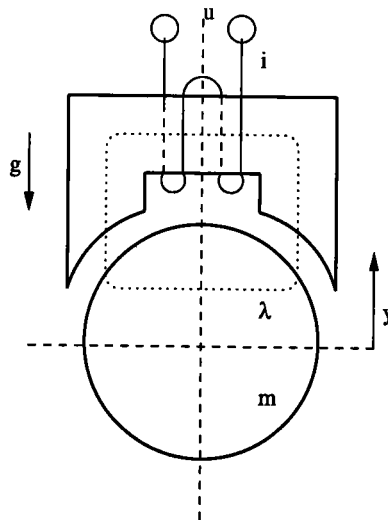


FIG. 2.2 – Schéma d'une balle dans un champ magnétique vertical.

Notre attention sera focalisée sur la construction d'une commande stabilisante de la tension d'entrée du circuit électrique qui maintiendra la balle métallique dans une position d'équilibre désirée. Ce problème de stabilisation trouve une très grande importance dans les systèmes tels que les coussinets sans frottements, dans la lévitation des trains à grandes vitesses (TGV) et les tables d'isolation vibratoire dans la fabrication des semi-conducteurs. L'une de nos motivations du choix de ce système provient du fait que les systèmes de lévitation magnétique permettent de tester différents schémas de contrôle, et sont utilisés comme "benchmark" dans différentes universités pour tester des lois de commande non linéaires.

La stabilisation du système de lévitation magnétique a déjà fait l'objet d'un grand nombre de travaux. En effet, plusieurs auteurs [73, 76, 59, 70, 9] ont proposé des résultats intéressants sur la stabilisation du système de lévitation magnétique. Cependant, un inconvénient majeur de ces méthodes est qu'elles ne prennent pas en compte les contraintes physiques imposées par le système. Dans ce travail, nous donnons une solution à ce problème. Nous proposons une méthode simple basée sur la théorie de Lyapunov qui prend en compte les contraintes physiques imposées par le système. Une estimation du bassin d'attraction du système est explicitement calculée. On s'intéresse également aux incertitudes sur la masse de la balle et le courant électrique d'équilibre du système. En effet, pour le système de lévitation magnétique, il y a des paramètres mal connus ou variant pendant l'utilisation : pour la partie mécanique, il s'agit de la masse ; pour la partie électrique, il s'agit notamment de la résistance et l'inductance de la bobine qui sont difficile à évaluer.

### 2.3.1 Equations d'évolution

Considérons le système de la Figure 3.1 consistant à une balle métallique dans un champ magnétique créée par un électroaimant. Nous notons par  $y$  la position de la balle mesurée par rapport à l'origine de l'axe  $y$  orienté vers le haut. L'équation du mouvement de la partie mécanique obtenue à partir de la loi de Newton est

$$m\ddot{y} = F(y, i) - mg \quad (2.8)$$

### 2.3. Stabilisation d'un système de lévitation magnétique

---

où  $m$  est la masse de la balle,  $mg$  est la force de gravitation,  $F(y, i)$  est la force électromagnétique produit par l'électroaimant avec  $i > 0$  le courant électrique traversant la bobine. Adoptant le modèle de flux utilisé dans [69], la force électromagnétique  $F(y, i)$  peut être calculée comme suit :

$$F(y, i) = \frac{\partial}{\partial y} \int_0^i \phi(y, z) dz$$

où  $\phi(y, i)$  est le flux magnétique. La dynamique de la partie électrique résulte des lois de voltage de Faraday et de Kirchoff

$$\dot{\phi} + Ri = u \quad (2.9)$$

avec  $R > 0$  la résistance du circuit électrique et  $u$  la tension d'entrée du circuit électrique considérée comme la commande. Si nous supposons que le circuit magnétique est linéaire, le flux est donné par  $\phi(y, i) = L(y)i$ , avec  $L(y)$  l'inductance de la bobine. Une approximation appropriée de ce dernier dans le domaine  $-\infty < y < L_1 - \varepsilon$  où  $L_1$  est une constante positive est

$$L(y) = L_0 + \frac{L_2}{L_1 - y}$$

où  $L_0$  est l'inductance de la bobine,  $\varepsilon$  est un nombre positif suffisamment petit, et  $L_2$  est une constante positive qui dépend du nombre de tours d'enroulements, de la perméabilité à l'air et de la section de l'électroaimant.

Ce modèle représente le cas où l'inductance a sa plus grande valeur lorsque la balle est proche de l'électroaimant et décroît vers l'inductance de la bobine lorsque la balle s'éloigne vers l'infini. Pour simplifier la présentation dans la suite, nous prendrons  $L_1 = 1m$  et  $L_0 = L$ .

Collectionnant toutes les équations ci-dessus en réarrangeant les termes, nous obtenons les équations d'évolution suivantes :

$$\begin{cases} \ddot{y} &= \frac{Li^2}{2m(1-y)^2} - g \\ \frac{di}{dt} &= -\frac{R}{L}i(1-y) - \frac{\dot{y}i}{1-y} + \frac{u}{L}(1-y). \end{cases} \quad (2.10)$$

Sous forme de variables d'états, le système (2.10) s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{Lx_3^2}{2m(1-x_1)^2} - g \\ \dot{x}_3 = -\frac{R}{L}x_3(1-x_1) - \frac{x_2x_3}{1-x_1} + \frac{u}{L}(1-x_1) \end{cases} \quad (2.11)$$

où  $x_1 = y$ ,  $x_2 = \dot{y}$  et  $x_3 = i$ .

L'objectif du contrôle est de trouver une loi de commande stabilisante de la tension d'entrée du circuit électrique  $u$  qui permettra de maintenir la balle dans une position désirée.

Notons pour terminer que les contraintes physiques à savoir le courant électrique  $x_3$  doit toujours rester positif et la balle ne doit pas toucher l'électroaimant imposent que le système ci-dessus soit étudié sur l'espace d'état :

$$G = ] - \infty, 1 - \varepsilon] \times \mathbb{R} \times [0, +\infty[. \quad (2.12)$$

### 2.3.2 Contrôle du système de lévitation magnétique

Dans cette étude, l'objectif du contrôle est de régler l'état  $x_1(t)$  à un état désiré  $x_{1d}$ . De l'équation (2.11), lorsque  $x_1(t) = x_{1d}$  alors  $\dot{x}_1(t) = 0$  et  $x_{2d} = 0$ . De même lorsque  $x_2(t) = x_{2d} = 0$ , il suit que  $\dot{x}_2(t) = 0$  et  $x_3(t) = x_{3d} = \pm(1-x_{1d})\sqrt{\frac{2mg}{L}}$ . Sans perdre les généralités, sur l'espace d'état  $G$ , la solution  $x_{3d} = -(1-x_{1d})\sqrt{\frac{2mg}{L}}$  est à écarter. C'est pourquoi,  $\dot{x}_3(t) = 0$  et  $u(t) = u_d = Rx_{3d}$ . Ainsi, le problème auquel on s'intéresse est de trouver  $u$  de telle sorte que le point d'équilibre  $x_d = (x_{1d}, x_{2d}, x_{3d})$  du système de lévitation magnétique (2.11) soit globalement asymptotiquement stable. Il est important de noter que ce point d'équilibre est un point d'équilibre instable car une petite perturbation éloigne la balle de cette position. La technique de stabilisation sera basée sur le résultat de Bhatia et Szegö [7]. Les propriétés de la stabilité désirée sont résumées dans le résultat suivant :

### 2.3. Stabilisation d'un système de lévitation magnétique

**Proposition 2.3.1 :** *La loi de commande*

$$u = Rx_3 - \frac{m(1-x_1)}{x_3} \left[ x_1 - x_{1d} + kx_2 + 2 \left[ \frac{Lx_3^2}{2m(1-x_1)^2} - g + x_2 \right] \right] \quad (2.13)$$

*est une solution pour le système (2.11) du problème de la stabilisation asymptotique globale du point d'équilibre*

$$x_{1d} \leq 1 - \varepsilon, \quad x_{2d} = 0 \quad \text{et} \quad x_{3d} = (1 - x_{1d}) \sqrt{\frac{2mg}{L}} \quad (2.14)$$

*dans le domaine*

$$\Omega = \{x \in G, \quad U(x) \leq c\}. \quad (2.15)$$

où  $x = (x_1, x_2, x_3)$ ,

$$U(x) = \frac{1}{2} \left[ \frac{Lx_3^2}{2m(1-x_1)^2} - g + x_1 - x_{1d} + x_2 \right]^2 + \frac{k}{2} [(x_1 - x_{1d})^2 + x_2^2]$$

et  $c = \min(c_1, c_2)$  où  $c_1$  et  $c_2$  sont des constantes positives, respectivement définies par :

$$c_1 = \frac{1}{2} [(-g + 1 - \varepsilon - x_{1d})^2 + k(1 - \varepsilon - x_{1d})^2]$$

$$c_2 = \frac{1}{2} (k + 1)(1 - \varepsilon - x_{1d})^2.$$

**Preuve :**

Pour faciliter la construction de la loi de commande  $u$ , il est utile de ramener l'étude de la stabilisation du point d'équilibre  $x_d$  à l'étude de la stabilisation de l'origine. De ce fait, posons :

$$e_1 = x_1 - x_{1d}, \quad e_2 = x_2 - x_{2d} \quad (2.16)$$

$$e_3 = x_3 - x_{3d}, \quad v = u - u_d.$$

La dynamique du système (2.11) devient

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 \\ \dot{e}_2 = \frac{L(e_3 + x_{3d})^2}{2m(1-e_1-x_{1d})^2} - g \\ \dot{e}_3 = -\frac{R}{L}e_3(1-e_1-x_{1d}) - \frac{e_2(e_3+x_{3d})}{1-e_1-x_{1d}} + \frac{v}{L}(1-e_1-x_{1d}). \end{cases} \quad (2.17)$$

## Chapitre 2. Stabilisation d'un pendule en rotation et d'un système électromécanique

Dans cette voie, l'espace d'état  $G$  devient

$$G_1 = ] - \infty, 1 - \varepsilon - x_{1d}] \times \mathbb{R} \times [-x_{3d}, +\infty[.$$

Le problème auquel nous nous proposons de résoudre à présent est de trouver une loi de commande  $v$  telle que l'origine du système (2.17) soit globalement asymptotiquement stable.

Soit la fonction de Lyapunov suivante :

$$U(e) = \frac{1}{2} \left[ \frac{L(e_3 + x_{3d})^2}{2m(1 - e_1 - x_{1d})^2} - g + e_1 + e_2 \right]^2 + \frac{k}{2}(e_1^2 + e_2^2) \quad (2.18)$$

où  $e = (e_1, e_2, e_3)^T$  et  $k$  est une constante positive. Cette fonction est définie positive et propre. La dérivée de cette fonction le long des trajectoires du système (2.17) satisfait

$$\begin{aligned} \dot{U}(e) &= \left[ -\frac{Re_3(e_3 + x_{3d})}{m(1 - e_1 - x_{1d})} + e_2 + \frac{L(e_3 + x_{3d})^2}{2m(1 - e_1 - x_{1d})^2} - g + \frac{(e_3 + x_{3d})v}{m(1 - e_1 - x_{1d})} \right] \\ &\times \left[ \frac{L(e_3 + x_{3d})^2}{2m(1 - e_1 - x_{1d})^2} - g + e_1 + e_2 \right] + ke_1e_2 + ke_2 \left[ \frac{L(e_3 + x_{3d})^2}{2m(1 - e_1 - x_{1d})^2} - g \right]. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Ainsi le choix de la loi de commande

$$v = Re_3 - \frac{m(1 - e_1 - x_{1d})}{e_3 - x_{3d}} \left[ e_1 + ke_2 + 2 \left[ \frac{L(e_3 + x_{3d})^2}{2m(1 - e_1 - x_{1d})^2} - g + e_2 \right] \right] \quad (2.20)$$

conduit à

$$\dot{U}(e) = - \left[ \frac{L(e_3 + x_{3d})^2}{2m(1 - e_1 - x_{1d})^2} - g + e_1 + e_2 \right]^2 - ke_2^2 \leq 0 \quad (2.21)$$

lequel implique que le système en boucle fermée est stable au sens de Lyapunov. Notons que toutes les trajectoires du système en boucle fermée sont bornées parce que  $V$  est propre et sa dérivée est décroissante. L'analyse de la stabilité sera basée sur le principe d'invariance de LaSalle. Soient  $E$  l'ensemble défini par  $E = \{e \in G_1, \dot{U}(e) = 0\}$  et  $L$  le plus grand ensemble positivement invariant contenu dans  $E$ . Sur l'ensemble  $E$  (voir (2.21)),  $\dot{U}(e) = 0$  implique que  $e_2 = 0$  et  $\frac{L(e_3 + x_{3d})^2}{2m(1 - e_1 - x_{1d})^2} - g + e_1 + e_2 = 0$ . Différenciant  $e_2 = 0$  nous obtenons  $\dot{e}_2 = 0$  lequel implique  $\frac{L(e_3 + x_{3d})^2}{2m(1 - e_1 - x_{1d})^2} - g = 0$ . Puisque  $\frac{L(e_3 + x_{3d})^2}{2m(1 - e_1 - x_{1d})^2} - g + e_1 + e_2 = 0$ , il vient que  $e_1 = 0$  lequel conduit à  $e_3 = 0$ . C'est



### 2.3. Stabilisation d'un système de lévitation magnétique

pourquoi le plus grand ensemble positivement invariant  $L$  contenu dans l'ensemble  $E$  est l'origine de l'espace d'état  $G_1$ , i.e., le point  $(e_1, e_2, e_3) = (0, 0, 0)$ . Notons que lorsqu'on introduit (2.16) dans (2.20), on retrouve la loi de commande (2.13).

A priori, on connaît un certain nombre de contraintes physiques que le modèle doit respecter : la variable  $x_1$  ne doit pas dépasser la valeur  $-1$  pour éviter que la balle ne touche l'électroaimant et le courant électrique doit rester positif. C'est pourquoi nous devons vérifier que le système (2.11) en boucle fermée avec la loi de commande (2.13) respecte bien ces conditions. Lorsqu'on introduit la loi de commande (2.13) dans le système (2.11), on obtient le système en boucle fermée :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{Lx_3^2}{2m(1-x_1)^2} - g \\ \dot{x}_3 = \frac{-x_2x_3}{1-x_1} - \frac{m(1-x_1)^2}{Lx_3} \left[ x_1 - x_{1d} + kx_2 + 2 \left[ \frac{Lx_3^2}{2m(1-x_1)^2} - g + x_2 \right] \right]. \end{cases} \quad (2.22)$$

Pour s'assurer que le système (2.22) satisfait bien les contraintes physiques imposées par le système, nous avons besoin de définir un ensemble compact positivement invariant  $\Omega \subset G$  qui aura la propriété que toute solution du système en boucle fermée (2.22) qui commence dans  $\Omega$  demeure dans  $\Omega$  pour tout temps futur. Pour ce fait, nous avons besoin d'analyser le comportement du système (2.22) sur la frontière de l'espace d'état  $G$ . Cette analyse pour permettra de déterminer une estimation du bassin d'attraction du système (2.22).

Soit  $W_1 = x_1$  tel que la frontière de l'ensemble  $G$  est donnée par  $W_1 = 1 - \varepsilon$ . La dérivée de  $W_1$  le long des trajectoires du système (2.22) est donnée par  $\frac{d}{dt}W_1^2 = 2W_1\dot{x}_1 = 2W_1x_2$ . Sur la frontière  $W_1 = 1 - \varepsilon$ ,

$$\frac{d}{dt}W_1^2 = 2(1 - \varepsilon)x_2 \leq 0, \quad \forall x_2 \leq 0 \quad (2.23)$$

Ceci implique que lorsque la trajectoire est en tout point d'un segment de la frontière  $W_1 = 1 - \varepsilon$  pour lequel  $x_2 \leq 0$ , il ne quitte pas l'ensemble  $G$  parce qu'en un tel point,  $W_1^2$  est une fonction décroissante. La contrainte physique  $x_2 \leq 0$  va imposer des contraintes sur la variable  $x_3$  du système. Pour garantir que le modèle conserve bien cette propriété,

il doit vérifier la propriété suivante : pour la variable  $x_2$ , le champ  $\frac{dx_2}{dt}$  doit pointer vers la partie de l'espace admissible. En d'autre terme, lorsque  $x_1 = 1 - \varepsilon$ , la contrainte physique  $x_2 \leq 0$  ne sera vérifiée que si  $\frac{dx_2}{dt} \leq 0$  lorsque  $x_2 = 0$ . Ainsi lorsque  $x_1 = 1 - \varepsilon$  et  $x_2 = 0$ , il vient que :

$$\frac{dx_2}{dt} \leq 0 \Rightarrow 0 < x_3 \leq \varepsilon \sqrt{\frac{2mg}{L}} \quad (2.24)$$

Notons que la condition  $x_3 > 0$  ne sera vérifiée que si  $\frac{dx_3}{dt} > 0$  lorsque  $x_3 = \varepsilon$  où  $\varepsilon$  est un nombre positif suffisamment petit. Ainsi, de la dernière équation du système (2.22), lorsque  $x_1 = 1 - \varepsilon$ ,  $x_2 = 0$  et  $x_3 = \varepsilon$ , il vient que

$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{m\varepsilon}{L} \left[ 2g - 1 + \varepsilon + x_{1d} - \frac{L}{m} \right].$$

On voit bien qu'on peut choisir  $L$  et  $m$  tels que  $2g - 1 + \varepsilon + x_{1d} - \frac{L}{m} > 0$ . Notons également que la condition  $x_3 \leq \varepsilon \sqrt{\frac{2mg}{L}}$  ne sera vérifiée que si  $\frac{dx_3}{dt} \leq 0$  lorsque  $x_3 = \varepsilon \sqrt{\frac{2mg}{L}}$ . Toujours de la dernière équation du système (2.22), on montre aisément que

$$\frac{dx_3}{dt} = -m\varepsilon(1 - \varepsilon - x_{1d}) \sqrt{\frac{L}{2mg}} \leq 0$$

lorsque  $x_3 = \varepsilon \sqrt{\frac{2mg}{L}}$ ,  $x_2 = 0$  et  $x_1 = 1 - \varepsilon$ .

D'autre part, soit  $W_2 = x_3$  tel que la frontière de l'ensemble  $G$  est donnée par  $W_2 = 0$ .

De là,

$$\frac{d}{dt} W_2^2 = -2m(1 - x_1)^2 [x_1 - x_{1d} + (k + 2)x_2 - 2g]. \quad (2.25)$$

De l'équation ci-dessus,  $\frac{d}{dt} W_2^2 \leq 0$  lorsque  $x_1 + (k + 2)x_2 \leq 2g + x_{1d}$ . De manière similaire, soit  $W_3 = x_1 + (k + 2)x_2$  tel que la frontière de l'ensemble  $G$  est donnée par  $W_3 = 2g + x_{1d}$  lorsque  $x_3 = 0$ . La dérivée de  $W_3^2$  le long des trajectoires du système (2.22) satisfait

$$\frac{d}{dt} W_3^2 = 2(2g + x_{1d}) [x_2 - (k + 2)g] \leq 0, \quad \forall x_2 \leq (k + 2)g. \quad (2.26)$$

Ainsi, la condition  $x_2 \leq (k + 2)g$  sera satisfaite si et seulement si  $\frac{dx_2}{dt} \leq 0$  lorsque  $x_3 = 0$  et  $x_2 = (k + 2)g$ . De la seconde équation du système (2.22), il suit que :

$$\frac{dx_2}{dt} = -g \leq 0 \quad (2.27)$$

### 2.3. Stabilisation d'un système de lévitation magnétique

Notons que lorsque  $x_2 = (k + 2)g$ , il vient que  $x_1 = g[2 - (k + 2)^2] + x_{1d}$ . Il apparait qu'on peut choisir  $k$  tel que  $x_1 \leq 1 - \varepsilon$ . Ainsi sur la frontière de l'espace d'état  $G$ , si on admet que les variables  $x_1$  et  $x_3$  sont telles que  $x_1 \leq 1 - \varepsilon$  et  $x_3 > 0$  alors les conditions (2.24) et (2.25) seront satisfaites pour tout  $x_2 \leq 0$ . On voit bien que si la condition (2.24) est satisfaite, la condition (2.25) le sera aussi. C'est pourquoi, nous nous limiterons à la condition (2.24). Ces informations seront utilisées pour former un ensemble compact positivement invariant.

Soit  $c_1$  une constante telle que la surface de Lyapunov  $U(x) = c_1$  intercepte la frontière  $x_1 = 1 - \varepsilon$  en  $x_2 = 0$  et  $x_3 = 0$ , i.e., au point  $(1 - \varepsilon, 0, 0)$ . Soit  $c_2$  une constante telle que la surface de Lyapunov  $U(x) = c_2$  intercepte la frontière  $x_1 = 1 - \varepsilon$  en  $x_2 = 0$  et  $x_3 = \varepsilon\sqrt{\frac{2mg}{L}}$ , c'est à dire au point  $\left(1 - \varepsilon, 0, \varepsilon\sqrt{\frac{2mg}{L}}\right)$ . Ainsi, La surface de Lyapunov désirée est définie par  $U(x) = \min(c_1, c_2)$  où les constantes  $c_1$  et  $c_2$  sont données à l'équation (2.15).

Puisque la fonction  $U(x)$  définie en (2.18) est propre et décroissante (voir (2.21)), alors les variables  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  sont bornées. C'est pourquoi, la solution  $X = F(X)$  demeure à l'intérieur de l'ensemble compact  $\Omega$  défini en (2.15). Cet ensemble est fermé, borné et positivement invariant. En plus,  $\dot{U}(x) \leq 0$  dans  $\Omega$  puisque  $\Omega \subset G$ . Ainsi, toutes les conditions du Théorème 1.2.3 du chapitre 1 sont satisfaites et nous pouvons conclure que toutes les trajectoires du système (2.11) qui commencent dans  $\Omega$  approchent le point  $(x_{1d}, x_{2d}, x_{3d})$  lorsque le temps tend vers l'infini.

#### 2.3.3 Simulations numériques

Pour illustrer la performance de la loi de commande proposée, nous allons présenter dans ce paragraphe quelques résultats des simulations numériques pour le système de lévitation magnétique (2.11) en boucle fermée avec la loi de commande (2.13). Nous avons donné les valeurs suivantes aux composantes du système

$$m = 1Kg, \quad L = 1H \quad \text{et} \quad R = 1\Omega.$$

N'oublions pas que la loi de commande proposée a besoin des conditions initiales telles que la condition (2.25) soit satisfaite. Nous avons une certaine liberté sur le choix du

## Chapitre 2. Stabilisation d'un pendule en rotation et d'un système électromécanique

paramètre de contrôle  $k$  et du nombre positif suffisamment petit  $\varepsilon$ . Ainsi, pour  $k = 1$  et  $\varepsilon = 0.01$ , nous avons choisi pour état initial du système (2.11)

$$x_1(0) = 0.4, \quad x_2(0) = 0 \quad \text{et} \quad x_3(0) = 2.7.$$

Supposons à présent qu'on désire soulever la balle à la position  $x_{1d} = 0.5m$ . De là, il suit que  $x_{2d} = 0m/s$ ,  $x_{3d} = 2.2361A$  et  $u_d = 2.2361V$ .

Les courbes de la Figure 2.3 montrent la position et vitesse de la balle ainsi que l'intensité du courant électrique. D'après, les résultats des simulations on remarque que la position de la balle est à  $0.5m$ , la vitesse de la balle à  $0m/s$  et l'intensité du courant électrique à  $2.2361A$ . La performance du système est donnée sur la Figure 2.4. Notons que la fonction de Lyapunov  $U$  est décroissante et tend vers zéro et que le signal de la tension d'entrée du circuit électrique tend vers la tension d'équilibre  $u_d = 2.2361V$ .

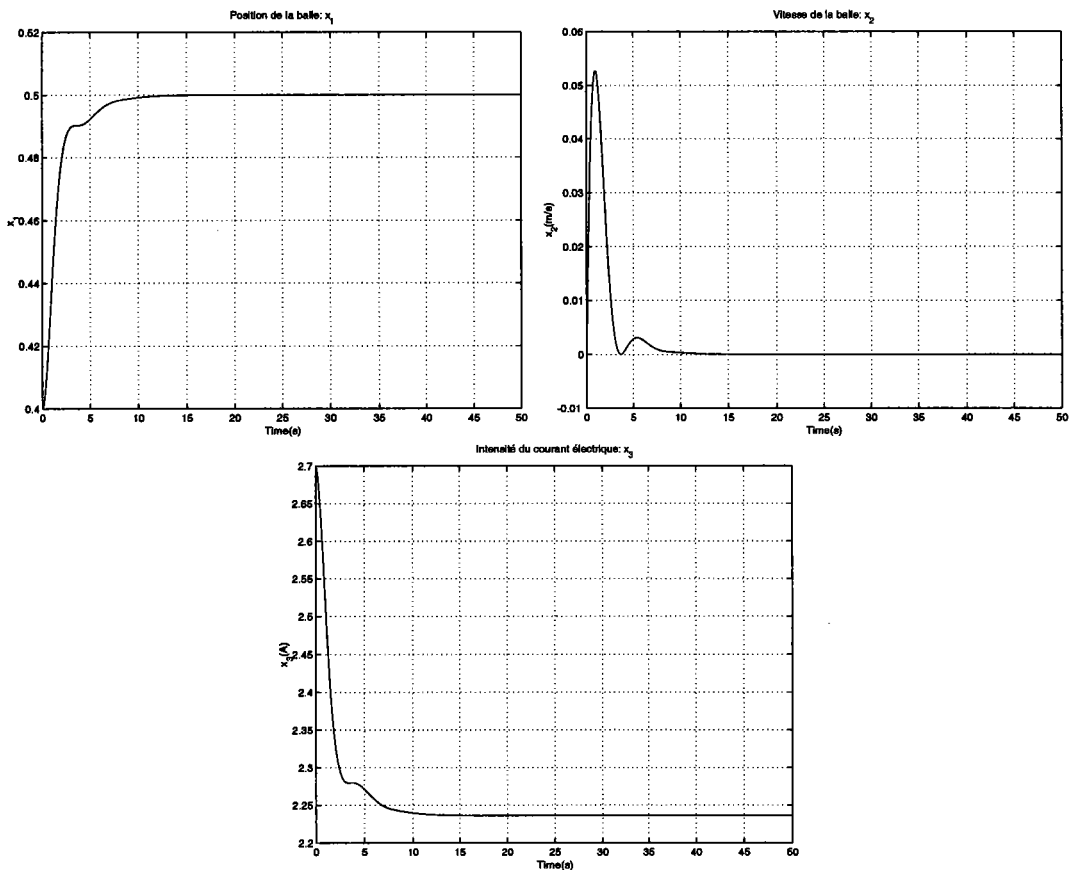


FIG. 2.3 – Etats du système.

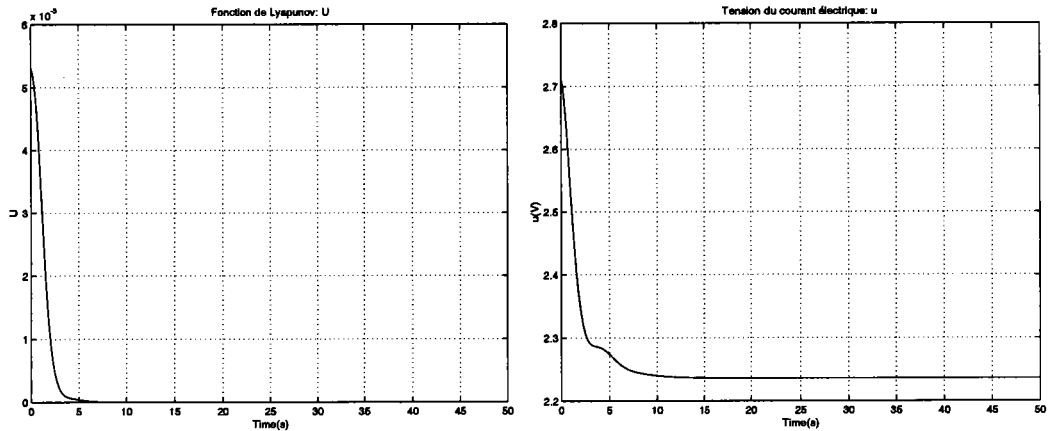


FIG. 2.4 – Performance du système.

Pour tester numériquement la robustesse de la loi de commande, on suppose qu'il y a une erreur de 50% de la masse  $m$  et du courant d'équilibre  $x_{3d}$ . Il est donc intéressant de voir comment la commande réagit à ces variations. Il semble qu'à partir des Figures 2.5 et 2.6 ci-dessous que la commande est robuste car la balle change de position dans les premiers instants, mais revient à sa position d'équilibre  $0.5m$ . D'après la Figure 2.5, l'intensité du courant électrique a augmenté, ce qui est tout à fait normal car pour maintenir des masses différentes à la même position, il faut des courants différents.

## 2.4 Conclusion

Le but de ce chapitre a été surtout de démontrer l'aspect constructif d'une extension du théorème de Jurdjevic-Quinn pour les systèmes non linéaires à contrôles non affines et d'une version du théorème de LaSalle. En effet, on a pu voir l'applicabilité de ces méthodes à travers la commande d'un pendule en rotation et d'un système de lévitation magnétique. On a également vu à travers les résultats de ce chapitre que dans certains cas la quête d'une commande stabilisante va de pair avec celle d'une fonction de Lyapunov convenant pour le système en boucle fermée, et il peut être utile de savoir s'il existe une fonction de Lyapunov héritant des propriétés géométriques dudit système, ce qui permettrait notamment de construire une estimation du bassin d'attraction d'un point d'équilibre du système en boucle fermée.

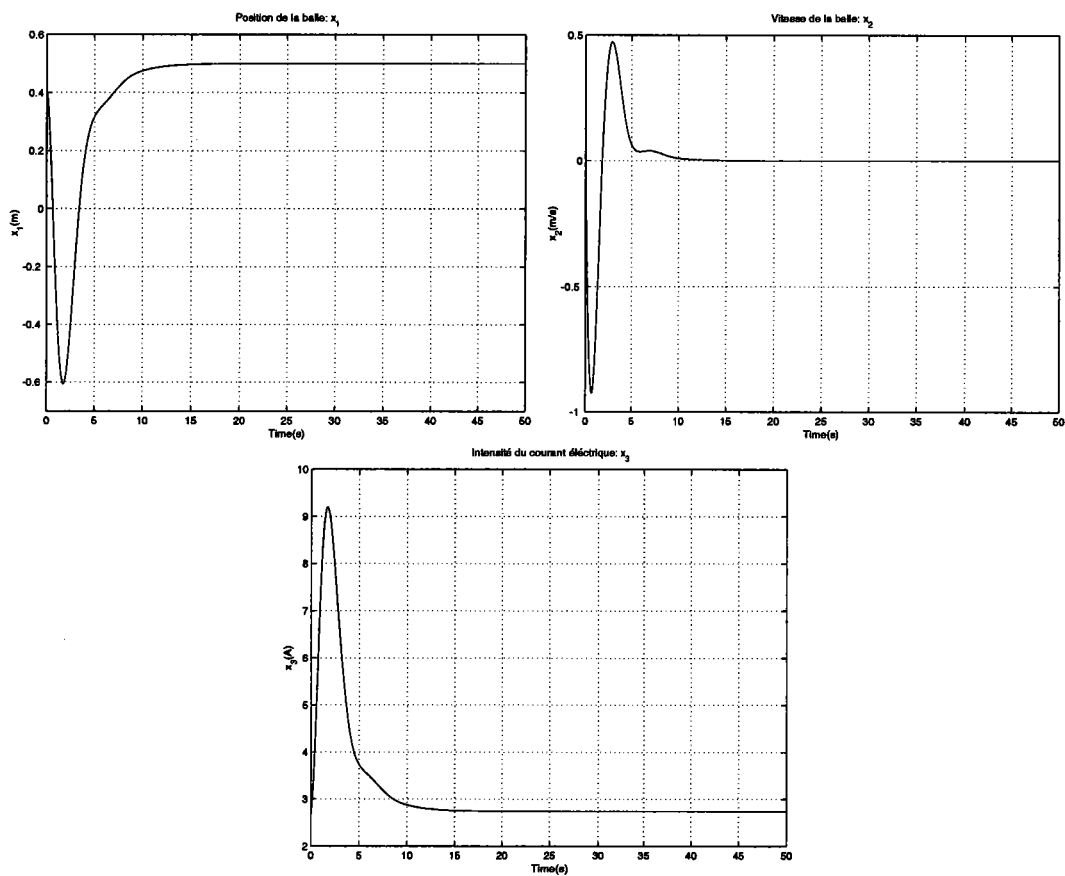
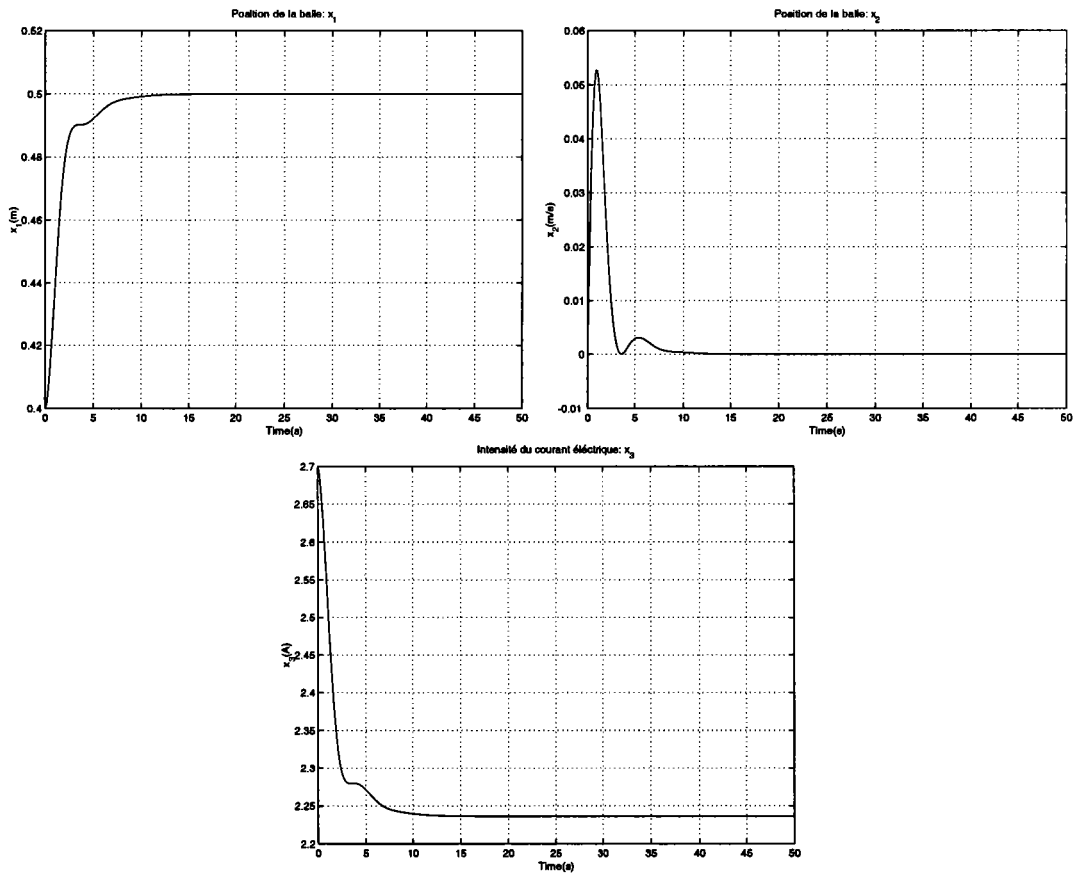


FIG. 2.5 – Etats du système pour une erreur de 50% de la masse  $m$ .

FIG. 2.6 – Etats du système pour une erreur de 50% du courant d'équilibre  $x_{3d}$ .





# 3

## Stabilisation d'une classe de systèmes non autonomes

### 3.1 Introduction

Depuis les travaux pionniers de [16, 52, 80, 20], la technique de *backstepping* ou ajout d'intégrateur a été largement développée. Elle est actuellement devenue l'un des outils de base dans les méthodes proposées pour construire les commandes stabilisantes des systèmes non linéaires. De nombreuses lois de commande stabilisantes peuvent être déterminées et la bonne application du *backstepping* consiste donc à déterminer celles qui donnent les meilleurs résultats lorsque dans un contexte particulier des propriétés spécifiques sont recherchées.

Afin de rappeler de quelle façon procède la technique du *backstepping* pour la stabilisation des systèmes non linéaires, nous donnons dans ce qui suit un exemple.

**Exemple 3.1.1 :** *Considérons le problème de la stabilisation asymptotique globale du système non autonome suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + d(t)x_1^2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ,  $u \in \mathbb{R}$  est l'entrée et  $d(t)$  est une fonction du temps inconnue telle que pour tout  $t \geq 0$ ,  $|d(t)| \leq 1$ . Nous voulons trouver une commande  $u$  qui rend le point  $(x_1, x_2) = (0, 0)$  globalement asymptotiquement stable. Il est aisé de vérifier qu'aucune commande linéaire ne permet de résoudre ce problème et que d'autre part le système

### Chapitre 3. Stabilisation d'une classe de systèmes non autonomes

non commandé est instable ce qui montre l'impossibilité d'appliquer de façon directe le théorème de Jurdjevic-Quinn. Toutefois, on peut observer qu'obtenir un résultat de stabilité asymptotique pour le sous système en  $x_1$  est immédiat en considérant  $x_2$  non pas comme la variable qu'elle est mais comme une entrée : la loi de commande  $x_2 = -x_1 - x_1^3$  convient par exemple. Cette remarque fondamentale permet de déterminer une commande stabilisante  $u$  pour le système global de telle sorte que  $x_2$  s'approche asymptotiquement de  $-x_1 - x_1^3$ . Si celui-ci est atteint,  $x_1$  convergera vers zéro.

Définissons la variable  $X_2 = x_2 + x_1 + x_1^3$ . Le système (3.1) peut se réécrire dans les nouvelles coordonnées  $(x_1, X_2)$  comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_1 - x_1^3 + d(t)x_1^2 + X_2 \\ \dot{X}_2 &= u + (1 + 3x_1^2)(X_2 - x_1 - x_1^3 + d(t)x_1^2). \end{cases} \quad (3.2)$$

Considérons  $V(x_1) = \frac{1}{2}x_1^2$  en raison du fait que cette fonction est une fonction de Lyapunov pour le sous système en  $x_1$  lorsque  $X_2 = 0$ . La dérivée de cette fonction le long des trajectoires du système (3.2) vérifie :

$$\dot{V} = -x_1^2 - x_1^4 + d(t)x_1^3 \leq -\frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_1^4 + x_1X_2$$

Pour obtenir un candidat de fonction de Lyapunov, nous ajoutons simplement la fonction de Lyapunov avec un terme quadratique en  $X_2$  :

$$U(x_1, X_2) = V(x_1) + \frac{1}{2}X_2^2 = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}X_2^2. \quad (3.3)$$

La dérivée de  $U$  le long des solutions du système (3.2) est

$$\dot{U}(x_1, X_2) \leq -\frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_1^4 + X_2[u + (1 + 3x_1^2)(X_2 - x_1 - x_1^3 + d(t)x_1^2) + x_1]. \quad (3.4)$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient

$$X_2(1 + 3x_1^2)x_1^2d(t) \leq \frac{1}{4}x_1^4 + X_2^2(1 + 3x_1^2)^2$$

pour tout  $|d(t)| \leq 1$ . Nous concluons que

$$\dot{U}(x_1, X_2) \leq -\frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{4}x_1^4 + X_2[u + x_1 + (1 + 3x_1^2)(X_2 - x_1 - x_1^3) + X_2(1 + 3x_1^2)^2]. \quad (3.5)$$

*Le choix de la loi de commande*

$$u = -X_2 - x_1 - (1 + 3x_1^2)(X_2 - x_1 - x_1^3) - X_2(1 + 3x_1^2)^2 \quad (3.6)$$

*conduit à*

$$\dot{U}(x_1, X_2) \leq -\frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{4}x_1^4 - X_2^2. \quad (3.7)$$

Remarquons que cette technique d'ajout d'intégrateur peut se combiner avec la preuve de Lyapunov que nous venons d'effectuer et cela même dans le cas où la conclusion s'obtient en appliquant le principe d'invariance de LaSalle. Notons que cette technique a été généralisée de diverses manières : systèmes incertains, contexte adaptatif, feedback d'état partiel (voir [53, 54, 58]). Malheureusement, cette technique, ne procurant que des lois de commande non bornées, ne permet pas de stabiliser les systèmes mécaniques dont l'énergie disponible est limitée. C'est récemment que la technique du *backstepping* a été adaptée au problème de la construction des lois de commande bornées grâce aux travaux de Freeman-Praly [31] et de Mazenc-Iggidr [66]. En effet, Freeman-Praly [31] et Mazenc-Iggidr [66] ont montré que pour une certaine classe de systèmes autonomes (par exemple la chaîne d'intégrateur de dimension  $n$ ) des lois de commande stabilisantes bornées peuvent être construites en appliquant la technique de *backstepping*. Cependant, les résultats obtenus par Freeman-Praly [31] et Mazenc-Iggidr [66] ne peuvent pas être étendus à des systèmes non autonomes.

Ce chapitre est consacré à la construction des lois de commande bornées accompagnée des fonctions de Lyapunov strictes pour une classe de systèmes non autonomes en appliquant la technique du *backstepping*. Une motivation d'étudier les systèmes non autonomes vient du fait que le problème de la stabilisation de trajectoires de certains systèmes non linéaires autonomes peut être reformuler comme le problème de stabilisation de la dynamique de l'erreur d'un système non autonome.

Plus précisément, le problème qu'on cherche à résoudre, peut formellement se formuler de la manière suivante. Soit le système non autonome :

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(t, x) + g(t, x)z \\ \dot{z} &= p(t)(u + b(t, x, z)) \end{cases} \quad (3.8)$$

où  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ ,  $z \in \mathbb{R}$ ,  $u \in \mathbb{R}$  est l'entrée,  $f(t, x)$ ,  $g(t, x)$ ,  $p(t)$ ,  $b(t, x, z)$  sont des fonctions périodiques en  $t$  de période  $T$  et  $f(t, x)$  et  $b(t, x, z)$  sont telles que  $f(t, 0) = 0$  et  $b(t, 0, 0) = 0$  pour tout  $t$ .

Est-il possible de construire une loi de commande bornée  $u$  telle que la stabilisabilité asymptotique globale du système :

$$\dot{x} = f(t, x) + g(t, x)z \tag{3.9}$$

entraîne la stabilisabilité asymptotique globale du système complet (3.8) ?

Dans le paragraphe qui suit, nous allons nous intéresser au problème de l'élaboration des lois de commande bornées stabilisantes accompagnée des fonctions de Lyapunov strictes pour la famille de systèmes non linéaires sous la forme (3.8) par la technique du *backstepping*.

## 3.2 Résultat

# Backstepping with bounded feedbacks for time-varying systems

F. Mazenc, S. Bowong,  
INRIA Lorraine, Projet CONGE,  
ISGMP Bât A, Ile du Saulcy,  
57 045 Metz Cedex 01, France  
email: mazenc@loria.fr, bowong@loria.fr  
Fax: + 33 3 87 54 72 77

A paraitre dans SIAM Journal of Control and Optimization

**Abstract.** A family of time-varying nonlinear systems is globally uniformly asymptotically stabilized by bounded feedbacks constructed through a new extension of the backstepping approach. Explicit expressions of control laws and Lyapunov functions are given.

**Key words.** Backstepping, bounded feedback, time-varying system.

## 1 Introduction

One of the most popular nonlinear technique of design of control laws is the backstepping approach. The multiple advantages offered by it are well-known. Observe in particular that this technique yields a wide family of globally asymptotically stabilizing control laws, allows to address robustness issues and to solve adaptive problems. However, for a long time, it was a well-established fact that this technique could not be used to solve the problem of designing feedbacks bounded in norm, which in many practical situations should be addressed: for instance the possibility of actuator saturation or constraints on actuators impose bounded input. But it turns out that as a matter of fact the backstepping approach can be adapted to the problem of designing bounded feedbacks. In three recent works [21, 2, 10], it is shown that for some time-invariant systems (an  $n$ -dimensional chain of integrators for instance), bounded stabilizing feedbacks can be constructed by applying new versions of this technique: the approach of [21, 2] mainly relies on the nested saturation control laws proposed in [17, 19] and the approach of [10] mainly relies on the determination of a particular family of control Lyapunov functions. However, for families

of time-varying systems, no bounded backstepping method has ever been developed and the main results of [21, 2] and [10] cannot be straightforwardly extended.

In the present work, we address the problem of constructing globally uniformly asymptotically stabilizing differentiable bounded feedbacks and accompanying strict Lyapunov functions using the backstepping approach for time-varying systems of the following form

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(t, x) + g(t, x)z, \\ \dot{z} &= p(t)(u + b(t, x, z)), \end{cases} \quad (1)$$

with  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ ,  $z \in \mathbb{R}$ , where  $u \in \mathbb{R}$  is the input,  $p(t)$  is a bounded function of  $t$  and  $f(t, x)$  and  $b(t, x, z)$  satisfy  $f(t, 0) = 0$ ,  $b(t, 0, 0) = 0$  for all  $t$ .

In the particular case where  $p(t)$  is a continuous function larger (resp. smaller) than a strictly positive real number (resp. a strictly negative real number), then a Lyapunov design of bounded feedbacks can be carried out for instance by combining the results of [22, 23] and [21]. But when  $p(t)$  is a time-varying function which is neither strictly positive nor strictly negative, then the construction of globally uniformly stabilizing feedbacks and accompanying strict Lyapunov functions for systems (1) is a challenging open problem: to the best of our knowledge, no technique of construction of this type of Lyapunov functions is available in the literature, even in the case where the systems (1) are stabilized by unbounded control laws. We want to emphasize that in the present paper, we *will not impose* on  $p(t)$  to be a function which is never equal to zero: we will only assume that  $p(t)$  satisfies a persistency of excitation property and is of class  $C^1$ . Observe that the study of nonlinear time-varying systems is motivated in particular by the fact that a tracking problem for a nonlinear system can be reformulated as a stabilization problem for the time-varying error system. Through the family of chained form nonholonomic systems, we will show in Section 4 how tracking problems for nonlinear systems may lead to the study of systems of the form (1) where  $p(t)$  is a function which takes positive and negative values and how, by applying the main result of the present work repeatedly, one can solve the open problem of determining explicit expressions of globally uniformly asymptotically and locally exponentially stabilizing bounded feedbacks and of accompanying strict Lyapunov functions for time-varying chains of integrators, which in turn implies that one can solve the problem of constructing globally uniformly asymptotically and locally exponentially stabilizing bounded feedbacks and accompanying strict Lyapunov functions for error equations of systems in chained form.

The approach we propose relies extensively on two results. On the one hand, we exploit the family of change of coordinates used in [10] to obtain explicit expressions of

globally uniformly asymptotically stabilizing bounded feedbacks. On the other hand, we construct explicitly strict Lyapunov functions using the main result of [9].

Observe that the strict Lyapunov functions (which at the same time are control Lyapunov functions) we will construct are not just tools enabling us to establish the asymptotic stability of the closed-loop system: the knowledge of continuously differentiable strict Lyapunov functions can be of great help. The potential benefits they offer are so multiple that they cannot be exhaustively enumerated. However, observe in particular that:

- Recent advances in stabilization of nonlinear delay systems are based on the knowledge of continuously differentiable Lyapunov functions: see in particular [20, 3, 11].
- Lyapunov functions are known to be very efficient tools for robustness analysis: for example, many proofs of nonlinear disturbance-to-state  $L^p$  stability properties rely on Lyapunov functions (see [18, 8]). Moreover, the control Lyapunov function based theory has provided control designs with guaranteed robustness to different types of disturbances including deterministic [1], stochastic, [6], as well as the robustness to unmodeled dynamics [13, 15].
- When a control Lyapunov function satisfying the small control property is available, one can apply universal formulas, in particular the one proposed in [16] and obtain that way the expression of an asymptotically stabilizing feedback which is optimal with respect to the control Lyapunov function as optimal value function.

The expressions of the bounded control law and of the Lyapunov function we propose are far from being the only possible expressions that can be obtained: many different formulas can be determined. Moreover, many extensions of the result can be proved; we have briefly mentioned some of them in the discussion of the main result given in Section 3 and in the concluding remarks of Section 5. For the sake of clarity, we have chosen to restrict ourselves to the systems (1): the control design can be easily carried out for them. However it is worth noting that the key ideas of our approach can be used in several contexts beyond the scope of the present work. In particular, they can be utilized to solve the problem of constructing bounded feedbacks for systems of the form

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(t, x, z) + h(t, x, z, u)u , \\ \dot{z} &= p(t)u + b(t, x, z) , \end{cases} \quad (2)$$

which, due to the term  $h(t, x, z, u)u$ , are not in feedback form.

The paper is organized as follows. In Section 2, a technical lemma is given. In Section 3 the main result is stated and proved. The technique is applied to an illustrative example

in Section 4. Concluding remarks in Section 5 end the work.

## Preliminaries.

1. The argument of the functions will be omitted whenever no confusion can arise from the context.
2. We assume throughout the paper that the functions encountered are sufficiently smooth.
3. For a real-valued  $C^1$  function  $k(\cdot)$ , we denote by  $k'(\cdot)$  its first derivative.
4.  $|x| = \sqrt{x^\top x}$  stands for the Euclidean norm of vector  $x \in \mathbb{R}^n$ .
5. A real-valued function  $k(\cdot)$  is of class  $\mathcal{K}_\infty$  if it is continuous, zero at zero, strictly increasing and unbounded.
6. By  $S$ , we denote the set of the functions  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  such that
  - a)  $\sigma(s)$  is a bounded function
  - b)  $s\sigma(s)$  is positive definite,
  - c)  $s\sigma(s) \leq s^2$ ,
  - d)  $\sigma'(s)$  is nonnegative, bounded and  $\sigma'(0) = 1$ .
7. A function  $V(\cdot)$  is a strict Lyapunov function for the time-varying system

$$\dot{\chi} = \varphi(t, \chi)$$

if there exists a positive definite function  $W(\chi)$  such that, for all  $t$  and  $\chi$ ,

$$\frac{\partial V}{\partial \chi}(t, \chi)\varphi(t, \chi) + \frac{\partial V}{\partial t}(t, \chi) \leq -W(\chi)$$

and there exist two functions  $\Gamma_1(\cdot), \Gamma_2(\cdot)$  of class  $\mathcal{K}_\infty$  such that, for all  $t$  and  $\chi$ ,

$$\Gamma_1(|\chi|) \leq V(t, \chi) \leq \Gamma_2(|\chi|) .$$

## 2 Technical result

In this section, we give a technical result which will be used in the next section to prove the main result of the work. We construct a strict Lyapunov function for the one dimensional time-varying system:

$$\dot{\xi} = -q(t)\sigma(\xi) \tag{3}$$

where  $q(t)$  is a nonnegative function of class  $C^1$  such that

$$0 \leq q(t) \leq \delta_1, \forall t, \tag{4}$$



$$\int_t^{t+T} q(s)ds \geq \delta_2 > 0, \forall t, \quad (5)$$

where  $\delta_1$  and  $\delta_2$  and  $T$  are positive real numbers and where  $\sigma(\cdot)$  belongs to the set  $S$  defined in the preliminaries. We carry out the construction by adapting the approach of [9] to the case where  $q(t)$  is not necessarily a periodic function of  $t$  but satisfies the persistency of excitation condition (5). First, observe that the property  $0 \leq s\sigma(s) \leq s^2$  imply that the function  $\frac{|\sigma(s)|}{|s|}$  is bounded. Moreover  $\sigma'(\cdot)$  is bounded and (4) is satisfied. It follows that

$$M = \sup_{t \in \mathbb{R}} \left[ T + \left| \int_t^{t+T} (s-t-T)q(s)ds \right| \sup_{s \in \mathbb{R}, s \neq 0} \left( \frac{|\sigma(s)| + |s\sigma'(s)|}{|s|} \right) \right] \quad (6)$$

is finite and positive. We are now in position to give a technical lemma.

**Lemma 2.1.** *The function*

$$\nu(t, \xi) = (M+1)\xi^2 + \left( \int_t^{t+T} (s-t-T)q(s)ds \right) \xi\sigma(\xi) \quad (7)$$

*is a strict Lyapunov function for the system (3).*

**Remark 1.** When  $q(t)$  is a periodic function, then  $\nu(t, \xi)$  is a periodic function of  $t$  as well and these functions have the same period.

**Proof.** The derivatives of the functions

$$R_1(t, \xi) = \left( \int_t^{t+T} (s-t-T)q(s)ds \right) \xi\sigma(\xi), \quad R_2(\xi) = \frac{1}{2}\xi^2 \quad (8)$$

along the trajectories of (3) satisfy

$$\begin{aligned} \dot{R}_1 &= \left[ -\int_t^{t+T} q(s)ds + Tq(t) \right] \xi\sigma(\xi) - \left[ \int_t^{t+T} (s-t-T)q(s)ds \right] [\sigma(\xi) + \xi\sigma'(\xi)] q(t)\sigma(\xi), \\ \dot{R}_2 &= -q(t)\xi\sigma(\xi). \end{aligned} \quad (9)$$

Further, since

$$\nu(t, \xi) = 2(M+1)R_2(\xi) + R_1(t, \xi) \quad (10)$$

it follows from (9), (6) and (5) that

$$\begin{aligned} \dot{\nu}_1(t, \xi) &\leq - \left( \int_t^{t+T} q(s)ds \right) \xi\sigma(\xi) + Mq(t)\xi\sigma(\xi) - 2(M+1)q(t)\xi\sigma(\xi) \\ &\leq -\delta_2\xi\sigma(\xi) < 0, \forall \xi \neq 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Moreover, (7) and (6) imply that

$$(M + 1)\xi^2 - M\xi^2 \leq \nu(t, \xi) \leq (M + 1)\xi^2 + M\xi^2 \quad (12)$$

which results in

$$\xi^2 \leq \nu(t, \xi) \leq (2M + 1)\xi^2. \quad (13)$$

According to (11) and (13), the function  $\nu(t, \xi)$  is a strict Lyapunov function for the system (3). This concludes the proof.  $\square$

### 3 Main result

In this section we state and prove the main result of the paper. Consider the nonlinear time-varying system (1). We introduce a set of assumptions.

**Assumption A1.** The functions  $p(t)$  and  $\dot{p}(t)$  are bounded in norm by a positive real number  $P$  and two positive numbers  $T$  and  $\gamma$  such that, for all  $t$ ,

$$\int_t^{t+T} p(s)^2 ds \geq \gamma > 0 \quad (14)$$

are known.

**Assumption A2.** Let  $\varepsilon$  be a positive real number and  $n$  a nonnegative integer. A Lyapunov function  $V(t, x)$  such that

$$\alpha_1(|x|) \leq V(t, x) \leq \alpha_2(|x|), \quad \left| \frac{\partial V}{\partial x}(t, x) \right| \leq \alpha_3(|x|), \quad (15)$$

where the  $\alpha_i(\cdot)$ 's are functions of class  $\mathcal{K}_\infty$ , a positive definite function  $W(x)$  and a feedback  $z_s(t, x) = p(t)^{n+2}\mu_s(t, x)$ , bounded in norm by  $\varepsilon$  such that  $\mu_s(t, 0) = 0$  and

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial V}{\partial x}(t, x)[f(t, x) + g(t, x)z_s(t, x)] \leq -W(x) \quad (16)$$

are known. Moreover the functions

$$|\mu_s(t, x)|, \quad \left| \frac{\partial \mu_s}{\partial t}(t, x) \right|, \quad \left| \frac{\partial \mu_s}{\partial x}(t, x)f(t, x) \right|, \quad \left| \frac{\partial \mu_s}{\partial x}(t, x)g(t, x) \right|, \quad |b(t, x, z)|, \quad (17)$$

are bounded.

**Assumption A3.** A real-valued function  $\zeta(\cdot)$  such that  $\zeta(s) > 0$  for all  $s \neq 0$  and  $\int_0^r \zeta(s)ds$  is of class  $\mathcal{K}_\infty$ , a function  $\alpha_4(\cdot)$  of class  $\mathcal{K}_\infty$  and a nonnegative function  $\beta(\cdot)$  such that the inequalities

$$\zeta(V(t, x)) \left| \frac{\partial V}{\partial x}(t, x)g(t, x) \right|^2 \leq \frac{1}{2}W(x), \quad (18)$$

$$|f(t, x)| \leq \alpha_4(|x|), |g(t, x)| \leq \beta(|x|) \quad (19)$$

are satisfied for all  $t, x$  are known.

**Assumption A3'**. The function  $W(x)$  is such that, for a real number  $c_1 > 0$ ,

$$W(x) \geq c_1|x|^2, \forall x: |x| \leq 1. \quad (20)$$

**Theorem 3.1.** *Assume that the system (1) satisfies the Assumptions A1, A2 and A3. Then the system (1) is globally uniformly asymptotically stabilizable by a bounded feedback  $u_s(t, x, z)$  such that, for all  $t$ ,  $u_s(t, 0, 0) = 0$  and a strict Lyapunov function for the corresponding closed-loop system can be constructed. If in addition Assumption A3' is satisfied, the system (1) is globally uniformly asymptotically and locally exponentially stabilizable by a bounded feedback  $u_s(t, x, z)$ , such that, for all  $t$ ,  $u_s(t, 0, 0) = 0$  and a strict Lyapunov function for the corresponding closed-loop system with a derivative along the trajectories upper bounded on a neighborhood of the origin by a negative definite quadratic function of  $(x, z)$  can be constructed.*

### Discussion of Theorem 3.1.

- All the real-valued periodic functions of class  $C^1$  which are not identically equal to zero satisfy Assumption A1. In the particular case where, for all  $t$ ,  $p(t) > 0$  or  $p(t) < 0$ , then a simpler proof than the one we shall give can be carried out by taking advantage of the change of feedback  $v = p(t)(u + b(t, x, z))$ . But assuming that, for all  $t$ ,  $p(t) > 0$  or  $p(t) < 0$  is very restrictive.
- The boundedness property of the functions in (17) in Assumption A2 and the growth property in Assumption A3 are not surprising assumptions: in the time-invariant case, similar assumptions have been imposed (see [2, 10]). Due to the finite escape time phenomenon, they cannot be removed without being replaced by other assumptions.
- Assumption A3' ensures that the feedback  $z_s(t, x)$  not only globally uniformly asymptotically stabilizes the origin of  $x$ -subsystem of (1) but also locally exponentially stabilizes it.
- In the formula of the stabilizing feedback we shall construct (see (25)), the function  $V(t, x)$  is not involved: so it turns out that the control design strategy we propose can be applied even when the function  $V(t, x)$  is not accurately known.
- An important issue is whether or not Theorem 3.1 can be applied recursively. In general, it appears that the assumptions will not be satisfied repeatedly because the presence of  $b(t, x, z)$  in the expression of the control law we will construct (see (25)) typically prevents  $u_s(t, x, z)$  and its derivatives along the trajectories from vanishing with  $p(t)$ . However, in

particular cases, Theorem 3.1 can be applied recursively. Basically, this can be done for systems of the form

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(t, x, z_1) , \\ \dot{z}_1 &= p_1(t)z_2 + b_1(t, x, z) , \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= p_n(t)u + b_n(t, x, z) , \end{cases} \quad (21)$$

when the  $b_i(t, x, z)$ 's are identically equal to zero or when, roughly speaking, they are sufficiently "small": indeed, since one can construct explicitly a globally uniformly asymptotically stabilizing feedback with an accompanying strict Lyapunov function for a systems (21) in absence of the  $b_i(t, x, z)$ 's, one can take advantage of these tools to determine in a second step how "small" the terms  $b_i(t, x, z)$ , regarded as disturbances, should be for not destroying the stability properties of the system stabilized by the control law constructed in their absence. It is quite clear that the choice of the feedback at each step plays an important role in this approach. In particular at each step the control law must anticipate the  $p_i(t)$ 's that follows: one understands from the mechanism of the control design used to prove Theorem 3.1 that a possible strategy of design for the system (21) consists in constructing repeatedly feedbacks, that for convenience we denote  $z_{i,f}(t, x, z_1, \dots, z_{i-1})$  for  $i = 2$  to  $n + 1$ , such that  $z_{i,f}(t, x, z_1, \dots, z_{i-1}) = p_i(t)^2 \dots p_n(t)^{n-i+2} \lambda(t, x, z_1, \dots, z_{i-1})$  where  $\lambda(t, x, z_1, \dots, z_{i-1})$  is a sufficiently smooth function. We will not present a rigorous and complete study of this problem: it would require pages of simple but lengthy calculations which can be inferred from the ideas of the proof of Theorem 3.1. For the sake of simplicity, we restrict ourselves to illustrating the possibility of applying the approach repeatedly by solving in Section 4 the problem of stabilizing a three-dimensional chain of integrators with time-varying coefficients.

### Proof of Theorem 3.1.

*First step: new variable.*

We introduce the variable

$$Z = \Omega(z) - z_s(t, x) \quad (22)$$

where  $\Omega(\cdot)$  is a diffeomorphism such that:

- a)  $\Omega'(z) \geq 1$  for all  $z$ ,
- b)  $\Omega'(z) = 1$  when  $|z| \leq 2\varepsilon$ ,
- c)  $\Omega'(z) \geq |z|$  when  $|z| \geq 2\varepsilon + 1$ .

Its time derivative satisfies

$$\begin{aligned}\dot{Z} &= \Omega'(z)p(t)(u + b(t, x, z)) - \frac{\partial z_a}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial z_a}{\partial x}(t, x)[f(t, x) + g(t, x)z] \\ &= \Omega'(z)p(t)(u + b(t, x, z)) + p(t)\lambda(t, x, z)\end{aligned}\quad (23)$$

with

$$\begin{aligned}\lambda(t, x, z) &= -(n + 2)\dot{p}(t)p(t)^n\mu_s(t, x) - p(t)^{n+1}\frac{\partial\mu_s}{\partial t}(t, x) \\ &\quad - p(t)^{n+1}\frac{\partial\mu_s}{\partial x}(t, x)[f(t, x) + g(t, x)z].\end{aligned}\quad (24)$$

We choose for  $u$

$$u = -b(t, x, z) - \frac{p(t)^{2m-1}\sigma(Z) + \lambda(t, x, z)}{\Omega'(z)}\quad (25)$$

where  $m$  is a positive integer and where  $\sigma(\cdot)$  is a function belonging to the set  $S$  defined in the preliminaries. Such a choice of feedback yields

$$\dot{Z} = -p(t)^{2m}\sigma(Z).\quad (26)$$

One can check readily that Assumption A1 and the properties of  $\sigma(\cdot)$  imply that this system is globally uniformly asymptotically and locally exponentially stable. Our objective is now to construct a strict Lyapunov function for the system (1) in closed-loop with (25) by exploiting the stability properties of (26).

*Second step: strict Lyapunov function for the system (26).*

Using Young's inequality, one can check readily that Assumption A1 implies that for all positive integer  $m$  one can find a positive real number  $\gamma_m$  such that, for all  $t$ ,

$$\int_t^{t+T} p(s)^{2m} ds \geq \gamma_m > 0.\quad (27)$$

Moreover  $p(t)$  is bounded in norm. It follows that Lemma 2.1 applies to the system (26): the function

$$v(t, Z) = (M + 1)Z^2 + \left( \int_t^{t+T} (s - t - T)p(s)^{2m} ds \right) Z\sigma(Z)\quad (28)$$

where

$$M = \sup_{t \in \mathbb{R}} \left[ T + \left| \int_t^{t+T} (s - t - T)p(s)^{2m} ds \right| \sup_{s \in \mathbb{R}} \left( \frac{|\sigma(s)| + |s\sigma'(s)|}{|s|} \right) \right]\quad (29)$$

is a strict Lyapunov function for the system (26): its time derivative along the trajectories of (26) satisfies

$$\dot{v}(t, Z) \leq - \left( \int_t^{t+T} p(s)^{2m} ds \right) Z\sigma(Z) \leq -\gamma_m Z\sigma(Z) < 0, \quad \forall Z \neq 0.\quad (30)$$

*Third step: strict Lyapunov function for the system (1).*

We construct a strict Lyapunov function for the system (1) in closed-loop with the feedback (25) by using a combination of the Lyapunov functions  $V(t, x)$  and  $\nu(t, Z)$ . This construction is reminiscent of the construction of Lyapunov functions presented in [12]. Consider the function

$$U(t, x, z) = l(V(t, x)) + k(\nu(t, Z)) \quad (31)$$

where  $l(\cdot)$  and  $k(\cdot)$  are functions of class  $\mathcal{K}_\infty$  such that  $k'(s) \geq 1$  for all  $s \geq 0$ . Thanks to Assumption A2, one can prove easily there exist two functions  $\gamma_1(\cdot)$ ,  $\gamma_2(\cdot)$  of class  $\mathcal{K}_\infty$  such that

$$\gamma_1(|(x, z)|) \leq U(t, x, z) \leq \gamma_2(|(x, z)|) . \quad (32)$$

The derivative of  $U(t, x, z)$  along the trajectories of the closed-loop system satisfies

$$\begin{aligned} \dot{U} &= l'(V(t, x))\dot{V} + k'(\nu(t, Z))\dot{\nu} \\ &\leq -l'(V(t, x))W(x) + l'(V(t, x))\frac{\partial V}{\partial x}(t, x)g(t, x)(z - z_s(t, x)) - k'(\nu(t, Z))\gamma_m Z\sigma(Z) . \end{aligned} \quad (33)$$

From the triangular inequality, the inequality

$$\begin{aligned} \dot{U} &\leq -l'(V(t, x))W(x) + l'(V(t, x))^2 \left| \frac{\partial V}{\partial x}(t, x)g(t, x) \right|^2 + \frac{1}{4}(z - z_s(t, x))^2 \\ &\quad - k'(\nu(t, Z))\gamma_m Z\sigma(Z) \end{aligned} \quad (34)$$

can be deduced. According to Assumption A3, a possible choice for  $l(\cdot)$  is  $l(r) = \int_0^r \zeta(s)ds$ . Moreover, for such a choice, the inequality

$$\dot{U} \leq -\frac{1}{2}\zeta(V(t, x))W(x) + \frac{1}{4}(z - z_s(t, x))^2 - \gamma_m k'(\nu(t, Z))Z\sigma(Z) \quad (35)$$

is satisfied. Now observe that

$$Z^2 = (\Omega(z) - z_s(t, x))^2 = (\Omega(z) - \Omega(z_s(t, x)))^2 \quad (36)$$

because  $|z_s(t, x)| \leq \varepsilon$  and  $\Omega(s) = s$  when  $|s| \leq 2\varepsilon$ . It follows that

$$Z^2 = \left( \int_{z_s(t, x)}^z \Omega'(s)ds \right)^2 . \quad (37)$$

Since  $\Omega'(s) \geq 1$  for all  $s$ , the inequality

$$Z^2 \geq (z - z_s(t, x))^2 \quad (38)$$

holds. Combining (38) and (35) yields

$$\dot{U} \leq -\frac{1}{2}\zeta(V(t, x))W(x) + \frac{1}{4}Z^2 - \gamma_m k'(\nu(t, Z))Z\sigma(Z) . \quad (39)$$

Thanks to the inequalities (13) and the properties of  $\sigma(\cdot)$ , one can easily determine a function  $k(\cdot)$  such that

$$\gamma_m k'(\nu(t, Z)) Z \sigma(Z) \geq \frac{1}{2} Z^2. \quad (40)$$

This inequality leads to

$$\dot{U} \leq -\frac{1}{2} \zeta(V(t, x)) W(x) - \frac{\gamma_m}{2} k'(\nu(t, Z)) Z \sigma(Z) \leq -N(x, z) \quad (41)$$

where  $N(x, z)$  is the positive definite function

$$N(x, z) = \inf_{t \in \mathbb{R}} \left( \frac{1}{2} \zeta(V(t, x)) W(x) + \frac{\gamma_m}{2} k'(\nu(t, Z)) Z \sigma(Z) \right). \quad (42)$$

It follows that  $U(t, x, z)$  is a strict Lyapunov function for the system (1) in closed-loop with the feedback (25). This implies that the system (1) in closed-loop with the feedback (25) is globally uniformly asymptotically stable.

*Fourth step: boundedness of the feedback (25).*

Since  $\Omega'(z) \geq 1$ ,  $|p(t)| \leq P$  and  $|\dot{p}(t)| \leq P$ , the inequality

$$\begin{aligned} |u| \leq & |b(t, x, z)| + P^{2m-1} |\sigma(Z)| + (n+2) P^{n+1} |\mu_s(t, x)| + P^{n+1} \left| \frac{\partial \mu_s}{\partial t}(t, x) \right| \\ & + P^{n+1} \left| \frac{\partial \mu_s}{\partial x}(t, x) f(t, x) \right| + P^{n+1} \left| \frac{\partial \mu_s}{\partial x}(t, x) g(t, x) \right| \left| \frac{z}{\Omega'(z)} \right| \end{aligned} \quad (43)$$

is satisfied. On the one hand, Assumption A2 ensures that the functions  $|b(t, x, z)|$ ,  $|\mu_s(t, x)|$ ,  $\left| \frac{\partial \mu_s}{\partial t}(t, x) \right|$ ,  $\left| \frac{\partial \mu_s}{\partial x}(t, x) f(t, x) \right|$  and  $\left| \frac{\partial \mu_s}{\partial x}(t, x) g(t, x) \right|$  are bounded. On the other hand, the functions  $\sigma(\cdot)$  and  $\Omega(\cdot)$  have been chosen such that  $|\sigma(Z)|$  and  $\left| \frac{z}{\Omega'(z)} \right|$  are bounded. It follows that the feedback (25) is bounded in norm.

*Fifth step: the particular case where Assumption A3' is satisfied.*

When (16) holds, then  $N(x, z)$  defined in (42) satisfies

$$N(x, z) \geq \inf_{t \in \mathbb{R}} \left( \frac{c_1}{2} \zeta(V(t, x)) |x|^2 + \frac{\gamma_m}{2} k'(\nu(t, Z)) Z \sigma(Z) \right), \quad \forall x : |x| \leq 1. \quad (44)$$

The function  $\sigma(\cdot)$  is such that  $\sigma'(0) = 1$  and the function  $k(\cdot)$  is such that  $k'(s) \geq 1$  for all  $s$ . It follows that there exists a positive real number  $c_2$  such that

$$N(x, z) \geq \inf_{t \in \mathbb{R}} \left( \frac{c_1}{2} \zeta(V(t, x)) |x|^2 + c_2 Z^2 \right), \quad \forall (x, Z) : |x| \leq 1, |Z| \leq 1. \quad (45)$$

Moreover Assumptions A2, A3 and A3' ensure that there exists a positive real number  $c_3$  such that

$$c_3 \left| \frac{\partial V}{\partial x}(t, x) g(t, x) \right|^2 \leq \frac{c_1}{2} |x|^2 \leq \frac{1}{2} W(x), \quad \forall x : |x| \leq 1. \quad (46)$$

It follows that, if necessary,  $\zeta(\cdot)$  can be modified in such a way that  $\zeta(0) > 0$  and (18) is satisfied. In that case,  $c_4 = \inf_{t \in \mathbb{R}, |x| \leq 1} \left( \frac{1}{2} \zeta(V(t, x)) \right)$  is a positive real number and the property

$$N(x, z) \geq c_1 c_4 |x|^2 + c_1 \gamma_m Z^2, \quad \forall (x, Z) : |x| \leq 1, |Z| \leq 1 \quad (47)$$

is satisfied. Through lengthy but simple calculations, one can prove that there exists a positive real number  $c_5$  such that

$$N(x, z) \geq c_5 (|x|^2 + |z|^2), \quad \forall (x, z) : |(x, z)| \leq 1. \quad (48)$$

This implies that the system (1) in closed-loop with the feedback (25) is globally uniformly asymptotically stable and locally exponentially stable. This concludes the proof.  $\square$

## 4 Illustration: time-varying chain of integrators

We will illustrate Theorem 3.1 by using it to construct for the particular three dimensional chain of integrators with time-varying coefficients

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \cos(t)x_2, \\ \dot{x}_2 = \cos(t)x_3, \\ \dot{x}_3 = \cos(t)u, \end{cases} \quad (49)$$

a globally uniformly asymptotically and locally exponentially stabilizing bounded state feedback and a strict Lyapunov function for the corresponding closed-loop system. Before doing that, we give a motivation for it.

### 4.1 Motivation: systems in chained form

For the sake of simplicity, we will restrict our attention to the system (49). But it is worth noting that Theorem 3.1 can be successfully applied repeatedly to any time-varying chain of integrators

$$\begin{cases} \dot{x}_n = p_n(t)x_{n-1}, \\ \dot{x}_{n-1} = p_{n-1}(t)x_{n-2}, \\ \vdots \\ \dot{x}_1 = p_1(t)u, \end{cases} \quad (50)$$

where the  $p_i(t)$ 's are functions such that the product  $p_1(t) \dots p_n(t)$  satisfies Assumption A1.



One of the motivations for solving the problem of globally uniformly asymptotically stabilizing time-varying chains of integrators by bounded feedback arises from the tracking problem for systems in chained form under input saturation. The importance of this family of systems is well-known: the kinematic model of several nonholonomic systems can be transformed into a system in chained form and a lot of interest has been devoted to the stabilization and the tracking of these systems. In particular, in [4, 5, 7], the backstepping approach has been used to achieve for them the global tracking of trajectories. Let us briefly recall how. Systems in chained form of order  $n$  with two inputs (see for instance [14]) are described by the equations

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_n = z_{n-1}v_1, \\ \vdots \\ \dot{z}_3 = z_2v_1, \\ \dot{z}_2 = v_2, \\ \dot{z}_1 = v_1. \end{array} \right. \quad (51)$$

Assume that the trajectory to be tracked satisfies

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_{n,r}(t) = z_{n-1,r}(t)v_{1,r}(t), \\ \vdots \\ \dot{z}_{3,r}(t) = z_{2,r}(t)v_{1,r}(t), \\ \dot{z}_{2,r}(t) = v_{2,r}(t), \\ \dot{z}_{1,r}(t) = v_{1,r}(t), \end{array} \right. \quad (52)$$

and is bounded. Then, after the change of feedbacks  $v_1 = v_{1,r}(t) + u_1$ ,  $v_2 = v_{2,r}(t) + u_2$ , and denoting  $v_{1,r}(t)$  simply by  $p(t)$ , the error equation is

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_{n,e} = p(t)z_{n-1,e} + z_{n-1}u_1, \\ \vdots \\ \dot{z}_{3,e} = p(t)z_{2,e} + z_2u_1, \\ \dot{z}_{2,e} = u_2, \\ \dot{z}_{1,e} = u_1, \end{array} \right. \quad (53)$$

where  $z_{i,e} = (z_i - z_{i,r}(t))$  for all  $i = 1$  to  $n$ . Assume that for the chain of integrators

$$\begin{cases} \dot{z}_{n,e} = p(t)z_{n-1,e} , \\ \vdots \\ \dot{z}_{3,e} = p(t)z_{2,e} , \\ \dot{z}_{2,e} = u_2 , \end{cases} \quad (54)$$

are available a bounded control law  $u_2(t, z_e)$  with  $z_e = (z_{2,e}, \dots, z_{n,e})$ , a strict Lyapunov function  $V_e(t, z_e)$  and a positive definite function  $W_e(z_e)$  such that the derivative of  $V_e(\cdot)$  along the trajectories of (54) in closed-loop with  $u_2(t, z_e)$  satisfies

$$\dot{V}_e \leq -W_e(z_e) . \quad (55)$$

Then the derivative of the function

$$U_e(t, z_e, z_{1,e}) = V_e(t, z_e) + \frac{1}{2}z_{1,e}^2 \quad (56)$$

along the trajectories of (53) in closed-loop with  $u_2(t, z_e)$  and the bounded feedback

$$u_1(t, z_{1,e}, z_e) = -\frac{\frac{\partial V_e}{\partial z_{n,e}}(t, z_e)z_{n-1} + \dots + \frac{\partial V_e}{\partial z_{3,e}}(t, z_e)z_2 + z_{1,e}}{1 + \left(\frac{\partial V_e}{\partial z_{n,e}}(t, z_e)z_{n-1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial V_e}{\partial z_{3,e}}(t, z_e)z_2\right)^2 + z_{1,e}^2} \quad (57)$$

satisfies

$$\dot{U}_e \leq -W_e(z_e) - \frac{\left(\frac{\partial V_e}{\partial z_{n,e}}(t, z_e)z_{n-1} + \dots + \frac{\partial V_e}{\partial z_{3,e}}(t, z_e)z_2 + z_{1,e}\right)^2}{1 + \left(\frac{\partial V_e}{\partial z_{n,e}}(t, z_e)z_{n-1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial V_e}{\partial z_{3,e}}(t, z_e)z_2\right)^2 + z_{1,e}^2} . \quad (58)$$

One can check readily that this implies that  $U_e(\cdot)$  is a strict Lyapunov function for the system (53) in closed-loop with the bounded feedbacks  $u_1(t, z_{1,e}, z_e)$ ,  $u_2(t, z_e)$ .

Consequently, we have shown that the problem of determining globally uniformly asymptotically stabilizing bounded feedbacks and strict Lyapunov functions for error equations resulting from the problem of tracking a bounded trajectory of a system in chained form can be reduced to the problem of determining globally uniformly asymptotically stabilizing bounded feedbacks for time-varying chains of integrators (50) and accompanying strict Lyapunov functions.

## 4.2 Control design for the system (49)

We begin the construction with a preliminary result which will be used throughout the remaining part of the section.

*Preliminary result.*

By applying Lemma 2.1, one can prove that the derivative of the function

$$V(t, x) = 80x^2 + \left( \int_t^{t+2\pi} (s - t - 2\pi) \cos^6(s) ds \right) \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} \quad (59)$$

along the trajectories of

$$\dot{x} = -\cos^6(t) \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad (60)$$

satisfies

$$\dot{V}(t, x) \leq -\frac{5\pi}{8} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}. \quad (61)$$

Moreover,  $V(t, x)$  is periodic of period  $2\pi$  and

$$70x^2 \leq V(t, x) \leq 90x^2. \quad (62)$$

We are ready now to carry out the backstepping construction of a bounded feedback for (49) by applying repeatedly the main result of Section 3.

*The  $x_1$ -subsystem.*

According to the preliminary result, the time derivative of the function  $V(t, x_1)$  along the trajectories of (49) satisfies

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\frac{5\pi}{8} \frac{x_1^2}{\sqrt{1+x_1^2}} + \frac{\partial V}{\partial x_1}(t, x_1) \cos(t) \left[ x_2 + \cos^5(t) \frac{x_1}{\sqrt{1+x_1^2}} \right] \\ &\leq -\frac{5\pi}{8} \frac{x_1^2}{\sqrt{1+x_1^2}} + 180|x_1| \left| x_2 + \cos^5(t) \frac{x_1}{\sqrt{1+x_1^2}} \right|. \end{aligned} \quad (63)$$

*The  $x_2$ -subsystem.*

Consider the variable

$$X_2 = \Omega_a(x_2) + \cos^5(t) \frac{x_1}{\sqrt{1+x_1^2}} \quad (64)$$

where  $\Omega_a(\cdot)$  is the odd function

$$\Omega_a(r) = \int_0^r (1 + \max\{0, 9(|s| - 2)^3\}) ds. \quad (65)$$

An immediate calculation yields

$$\begin{aligned} \dot{X}_2 &= \Omega'_a(x_2) \cos(t) x_3 - 5 \sin(t) \cos^4(t) \frac{x_1}{\sqrt{1+x_1^2}} + \cos^6(t) \frac{x_2}{(1+x_1^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= -\cos^6(t) \frac{X_2}{\sqrt{1+X_2^2}} + \Omega'_a(x_2) \cos(t) x_3 + \cos^6(t) \frac{X_2}{\sqrt{1+X_2^2}} - 5 \sin(t) \cos^4(t) \frac{x_1}{\sqrt{1+x_1^2}} \\ &\quad + \cos^6(t) \frac{x_2}{(1+x_1^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned} \quad (66)$$

Considering  $x_3$  as a fictitious input  $v$  and choosing for it

$$v(t, x_1, x_2) = \frac{-\cos^5(t)\frac{X_2}{\sqrt{1+X_2^2}} + 5\sin(t)\cos^3(t)\frac{x_1}{\sqrt{1+x_1^2}} - \cos^5(t)\frac{x_2}{(1+x_1^2)^{\frac{3}{2}}}}{\Omega'_a(x_2)} \quad (67)$$

the dynamics (66) become

$$\dot{X}_2 = -\cos^6(t)\frac{X_2}{\sqrt{1+X_2^2}}. \quad (68)$$

The derivative of

$$U(t, x_1, X_2) = l(V(t, x_1)) + k(V(t, X_2)) \quad (69)$$

satisfies

$$\begin{aligned} \dot{U} &\leq -\frac{5\pi}{8}l'(V(t, x_1))\frac{x_1^2}{\sqrt{1+x_1^2}} + 180l'(V(t, x_1))|x_1| \left| x_2 + \cos^5(t)\frac{x_1}{\sqrt{1+x_1^2}} \right| \\ &\quad - \frac{5\pi}{8}k'(V(t, X_2))\frac{X_2^2}{\sqrt{1+X_2^2}} \\ &\leq -\frac{5\pi}{8}l'(V(t, x_1))\frac{x_1^2}{\sqrt{1+x_1^2}} + 180l'(V(t, x_1))|x_1||X_2| - \frac{5\pi}{8}k'(V(t, X_2))\frac{X_2^2}{\sqrt{1+X_2^2}} \\ &\leq -\frac{\pi}{2}l'(V(t, x_1))\frac{x_1^2}{\sqrt{1+x_1^2}} + \frac{2}{\pi}180^2\sqrt{1+x_1^2}l'(V(t, x_1))X_2^2 - \frac{5\pi}{8}k'(V(t, X_2))\frac{X_2^2}{\sqrt{1+X_2^2}}. \end{aligned} \quad (70)$$

Choosing for  $l(\cdot)$

$$l(r) = \sqrt{(80 - 4\pi^2) + r} - \sqrt{80 - 4\pi^2} \quad (71)$$

leads to

$$\dot{U} \leq -\frac{\pi}{2}l'(V(t, x_1))\frac{x_1^2}{\sqrt{1+x_1^2}} + \frac{180^2\sqrt{1+x_1^2}}{\pi\sqrt{(80-4\pi^2)+(80-4\pi^2)x_1^2}}X_2^2 - \frac{5\pi}{8}k'(V(t, X_2))\frac{X_2^2}{\sqrt{1+X_2^2}}. \quad (72)$$

Choosing for  $k(\cdot)$

$$k(r) = 480 \left[ ((80 - 4\pi^2) + r)^{\frac{3}{2}} - (80 - 4\pi^2)^{\frac{3}{2}} \right] \quad (73)$$

leads to

$$\dot{U} \leq -\frac{\pi}{2}l'(V(t, x_1))\frac{x_1^2}{\sqrt{1+x_1^2}} - \frac{\pi}{2}k'(V(t, X_2))\frac{X_2^2}{\sqrt{1+X_2^2}}. \quad (74)$$

*The overall system.*

From the above analysis, it results that the system (49) is equivalent to the system

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \cos(t)x_2, \\ \dot{X}_2 = -\cos^6(t)\frac{X_2}{\sqrt{1+X_2^2}} + \Omega'_a(x_2)\cos(t)(x_3 - v(t, x_1, x_2)), \\ \dot{x}_3 = \cos(t)u, \end{cases} \quad (75)$$

with  $x_2 = \Omega_a^{-1} \left( X_2 - \cos^5(t) \frac{x_1}{\sqrt{1+x_1^2}} \right)$ .

Using the inequality

$$\begin{aligned} & \frac{(k^{-1})'(U(t, x_1, X_2))}{\sqrt{1+k^{-1}(U(t, x_1, X_2))}} \left[ \left| \frac{\partial U}{\partial X_2}((t, x_1, X_2)) \right| + \left| \frac{\partial U}{\partial x_1}((t, x_1, X_2)) \right| \right] \\ & \leq c \left( l'(V(t, x_1)) \frac{x_1^2}{\sqrt{1+x_1^2}} + k'(V(t, X_2)) \frac{X_2^2}{\sqrt{1+X_2^2}} \right) \end{aligned} \quad (76)$$

where  $c$  is a positive constant<sup>1</sup> and observing that  $\frac{(k^{-1})'(\cdot)}{\sqrt{1+k^{-1}(\cdot)}}$  is of class  $\mathcal{K}_\infty$ , one can prove that the assumptions A1, A2, A3 and A3' of Theorem 3.1 are satisfied by the system (75) with  $(x_1, X_2)^\top$  playing the role of  $x$ ,  $x_3$  playing the role of  $z$  and  $U(\cdot)$  playing the role of  $V(\cdot)$ . It follows that the construction of a globally uniformly asymptotically and locally exponentially stabilizing bounded feedback for the system (75) can be achieved. The last part of the section is devoted to this construction.

The function  $v(t, x_1, x_2)$  defined in (67) satisfies:

$$|v(t, x_1, x_2)| \leq \frac{6 + |x_2|}{1 + \max\{0, (|x_2| - 2)^3\}} \leq 10. \quad (77)$$

These inequalities lead to consider the change of variable

$$X_3 = \Omega_b(x_3) - v(t, x_1, x_2) \quad (78)$$

where  $\Omega_b(\cdot)$  is the odd function defined as

$$\Omega_b(r) = \int_0^r (1 + \max\{0, 21(|s| - 20)^3\}) ds. \quad (79)$$

Its time derivative satisfies

$$\dot{X}_3 = \Omega_b'(x_3) \cos(t)u - \dot{v}(t, x_1, x_2) \quad (80)$$

---

<sup>1</sup>The explicit value of  $c$  can be determined through lengthy calculations. But an explicit value is useless: to carry out the proof, it is only required to know that  $c$  exists.

with

$$\begin{aligned}
\dot{v} &= \cos^2(t)\zeta(t, x_1, x_2, x_3) \\
\zeta &= \frac{5 \left[ \sin(t) \cos^2(t) \left( \frac{X_2}{\sqrt{1+X_2^2}} + \frac{x_2}{(1+x_1^2)^{\frac{3}{2}}} \right) + (\cos^4(t) + 3\sin^2(t)) \frac{x_1}{\sqrt{1+x_1^2}} \right]}{1 + \max\{0, 9(|x_2|-2)^3\}} \\
&+ \frac{\cos^2(t)}{1 + \max\{0, 9(|x_2|-2)^3\}} \left[ \frac{5 \sin(t)}{(1+x_1^2)^{\frac{3}{2}}} x_2 - \frac{3 \cos^2(t) x_2^2}{(1+x_1^2)^{\frac{5}{2}}} - \cos^3(t) \frac{x_3}{(1+x_1^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \\
&- \frac{\cos^4(t) \left[ (1 + \max\{0, 9(|x_2|-2)^3\}) x_3 - 5 \sin(t) \cos^3(t) \frac{x_1}{\sqrt{1+x_1^2}} + \cos^5(t) \frac{x_2}{(1+x_1^2)^{\frac{3}{2}}} \right]}{(1 + \max\{0, 9(|x_2|-2)^3\})(1+X_2^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&+ \cos(t) \frac{\cos^2(t) \frac{X_2}{\sqrt{1+X_2^2}} - 5 \sin(t) \frac{x_1}{\sqrt{1+x_1^2}} + \cos^2(t) \frac{x_2}{(1+x_1^2)^{\frac{3}{2}}}}{(1 + \max\{0, 9(|x_2|-2)^3\})^2} \max\{0, 27(|x_2|-2)^2\}.
\end{aligned} \tag{81}$$

One can check readily that the feedback

$$u = \frac{-\cos^5(t) \frac{X_3}{\sqrt{1+X_3^2}} + \cos(t)\zeta(t, x_1, x_2, x_3)}{\Omega'_b(x_3)} = \frac{-\cos^5(t) \frac{X_3}{\sqrt{1+X_3^2}} + \cos(t)\zeta(t, x_1, x_2, x_3)}{1 + \max\{0, 21(|x_3|-20)^3\}} \tag{82}$$

yields

$$\dot{X}_3 = -\cos^6(t) \frac{X_3}{\sqrt{1+X_3^2}}. \tag{83}$$

Moreover the feedback  $u$  is bounded:

$$\begin{aligned}
|u| &\leq \frac{1 + |\zeta(t, x_1, x_2, x_3)|}{1 + \max\{0, 21(|x_3|-20)^3\}} \\
&\leq 25 + \frac{6|x_2| + x_2^2}{1 + \max\{0, 9(|x_2|-2)^3\}} + \frac{2|x_3|}{1 + \max\{0, 21(|x_3|-20)^3\}} \leq 94.
\end{aligned} \tag{84}$$

**Remark 2.** The feedback we have constructed is bounded in norm by 94. But for all  $\varepsilon > 0$ , one can modify the design in such a way that the resulting control law is bounded by  $\varepsilon$  instead of 94.  $\square$

## 5 Conclusion

We have proposed a new extension of the backstepping technique which applies to time-varying nonlinear systems and thereby can be utilized in particular for solving problems of global tracking. We do not have explored all the possible extensions of the approach: we want to emphasize that the key ideas of the technique are even more important than the results themselves. Much remains to be done, robustness and disturbance attenuation issues, applications to the control design for systems with delay are some issues that may be pursued.

**Acknowledgment.** The authors are grateful to the referees for their insightful remarks and suggestions.

## References

- [1] R. Freeman, P.V. Kokotovic, *Robust Control Nonlinear Systems*, Birkhauser, Boston, (1996).
- [2] R. Freeman, L. Praly: *Integrators Backstepping for Bounded Controls and Control Rates*. IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 43, (1998), pp. 258-262.
- [3] M. Jankovic: *Control Lyapunov-Razumikhin Functions and Robust Stabilization of Time Delay Systems*. IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 46, (2001), pp. 1048-1060.
- [4] Z.P. Jiang, H. Nijmeijer: *Backstepping-based tracking of nonholonomic chained systems*. In Proceedings of the 4th European Control Conference, Brussels, Belgium, 1997.
- [5] Z.P. Jiang, H. Nijmeijer: *Tracking control of mobile robots: a case study in backstepping*. Automatica, Vol. 33, (1997), pp. 1393-1300.
- [6] M. Kristic, H. Deng, *Stabilization of Nonlinear Uncertain Systems*, Springer-Verlag, London, 1998.
- [7] E. Lefeber: *Tracking Control of Nonlinear Mechanical Systems*. Ph.D Thesis, University of Twente, 2000.
- [8] W. Liu, Y. Chitour, E. Sontag: *On Finite Gain Stability of Linear Systems Subject to Input Saturation*. Siam J. Control and Optimization Vol. 34, (1996), pp. 1190-1219.
- [9] F. Mazenc: *Strict Lyapunov Functions for Time-varying Systems*. Automatica, Vol. 39, (2003), pp. 349-353.
- [10] F. Mazenc, A. Iggidr: *Backstepping with bounded feedbacks*. 5th IFAC SYMPOSIUM "Nonlinear Control Systems" (NOLCOS'01) and submitted for publication in Systems & Control Letters.
- [11] F. Mazenc, S. Niculescu: *Lyapunov Stability Analysis for Nonlinear Delay Systems*. Proceedings of the 39th CDC. Sydney, Australia, December 2000 and Systems & Control Letters, Vol. 42, (2001), pp. 245-251.

- [12] F. Mazenc, L. Praly: *Adding an integration and global asymptotic stabilization of feed-forward systems*. IEEE Trans. on Automatic Control, Vol.41, no.11, (1996), pp.1559-1578.
- [13] L. Praly, Y. Wang: *Stabilization in spite of matched unmodeled dynamics and an equivalent definition of input-to-state stability*. MCSS, Vol. 9, (1996), pp. 1-33.
- [14] C. Samson: *Control of Chained Systems Application to Path Following and Time-Varying Point-Stabilization of Mobile Robots*. IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 40, (1995), pp. 64-77.
- [15] R. Sepulchre, M. Jankovic, P.V. Kokotovic: *Constructive Nonlinear Control*. Springer-Verlag, 1996.
- [16] E. Sontag: *A "universal" construction of Artstein's theorem on nonlinear stabilization*. Systems & Control Letters, Vol. 13, (1989), pp. 117-123.
- [17] A. Teel: *Using saturation to stabilize a class of single-input partially linear composite systems*. Proc. IFAC Nonlinear Contr. Syst. Design Symp., Bordeaux, France, June 1992.
- [18] A. Teel: *On  $L_2$  performance induced by feedbacks with multiple saturations*. ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations. Vol. 1, (1996), pp. 225-240.
- [19] A. Teel: *Feedback stabilization: nonlinear solutions to inherently nonlinear problems*. Univ. California, Berkeley, CA. Tech Rep. UCB/ERLM92/65, June 1992.
- [20] A. Teel: *Connections between Razumikhin-type theorems and the ISS nonlinear small gain theorems*. IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 43, (1998), pp. 960-964.
- [21] J. Tsiniias: *Input to State Stability Properties of Nonlinear Systems and Applications to Bounded Feedback Stabilization Using Saturation*. ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations. Vol. 2, (1997), pp. 57-85.
- [22] J. Tsiniias: *Backstepping design for time-varying systems and application to partial-static feedback and asymptotic tracking*. Systems & Control Letters, Vol. 39, (2000), pp. 219-227.
- [23] J. Tsiniias, I. Karafyllis: *ISS property for time-varying systems and application to partial-static feedback stabilization and asymptotic tracking*. IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 44, (1999), pp. 2179 -2184.



# 4

## Stabilisation d'une trajectoire des systèmes feedforward

### 4.1 Introduction

Ce chapitre fait suite à plusieurs efforts récents concernant la stabilisation des systèmes non linéaires par la technique du *forwarding* ou ajout d'intégration (voir par exemple [45, 77, 65, 84, 58]). Il s'agit de répondre essentiellement à la question de savoir quand la stabilisabilité asymptotique globale du système :

$$\dot{y} = g(x, u) \tag{4.1}$$

implique la stabilisabilité asymptotique globale du système :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, u) \\ \dot{y} = g(x, u). \end{cases} \tag{4.2}$$

La réponse à cette question est qu'en général on ne peut rien dire.

Ce chapitre traite le problème de la stabilisation d'une trajectoire d'une famille de systèmes non linéaires sous la forme feedforward suivante :

$$\begin{cases} \dot{X} = MX + H_1(Y) + H_2(Y, u)u \\ \dot{Y} = F_0(Y) + F_2(Y, u)u \end{cases} \tag{4.3}$$

où  $X \in \mathbb{R}^m$ ,  $Y \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^q$ , toutes les fonctions sont de classe  $C^2$  avec  $H_1(0) = 0$  et  $F_0(0) = 0$ .

## Chapitre 4. Stabilisation d'une trajectoire des systèmes feedforward

Supposons qu'il existe une trajectoire de référence admissible  $(X_r(t), Y_r(t), u_r(t))$  bornée sur  $[0, \infty[$  et de classe  $C^2$  satisfaisant

$$\begin{cases} \dot{X}_r(t) &= MX_r(t) + H_1(Y_r(t)) + H_2(Y_r(t), u_r(t))u_r(t) \\ \dot{Y}_r(t) &= F_0(Y_r(t)) + F_2(Y_r(t), u_r(t))u_r(t). \end{cases} \quad (4.4)$$

Nous nous proposons de trouver une loi de commande de classe  $C^2$

$$u = u(t, X_r(t), Y_r(t), X, Y) \quad (4.5)$$

satisfaisant  $|u(t, X_r(t), Y_r(t), X, Y)| \leq \tilde{u}$  telle que pour le système en boucle fermée (4.3)-(4.5)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|X(t) - X_r(t)\| = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|Y(t) - Y_r(t)\| = 0 \quad (4.6)$$

Commençons notre analyse par l'exemple suivant qui synthétise les idées de base de la technique du *forwarding*.

**Exemple 4.1.1 :** *Considérons le problème de la poursuite de trajectoire du système suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 + x_2^3 + u^2 \\ \dot{x}_2 &= u \end{cases} \quad (4.7)$$

où  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  est l'état et  $u$  est l'entrée. Supposons que nous voulons trouver une loi de commande  $u$  telle que la variable  $x_2$  effectue un mouvement périodique  $x_{2r}(t) = \cos t$ .

Dans cette voie, une trajectoire de référence satisfaisant (4.7) est donnée par

$$\begin{cases} x_{1r}(t) &= \frac{1}{12}[6t + 21 \sin t - 3 \sin 2t + \sin 3t] \\ x_{2r}(t) &= \cos t \\ u_r(t) &= -\sin t. \end{cases} \quad (4.8)$$

Nous définissons l'erreur  $e_1 = x_1 - x_{1r}(t)$ ,  $e_2 = x_2 - x_{2r}(t)$  et  $v = u - u_r(t)$  et obtenons la dynamique de l'erreur :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 &= e_2 + (e_2 + x_{2r}(t))^3 - x_{2r}^3(t) + v^2 + 2u_r(t)v \\ \dot{e}_2 &= v. \end{cases} \quad (4.9)$$

En raison de la présence du terme  $u^2$  dans le sous-système en  $e_1$ , la technique du backstepping ne peut être appliquée. D'un côté, stabiliser le sous-système en  $e_2$ , même au moyen d'une commande bornée, ne pose aucune difficulté. Adoptons donc une démarche inverse de celle employée pour stabiliser le système (3.1) de l'exemple 3.1.1 du chapitre précédent : stabilisons d'abord le sous système en  $e_2$ , puis essayons ensuite de stabiliser le système global. Fixons comme objectif d'obtenir une loi de commande bornée, ce qui d'un point de vue applicatif présente un intérêt lorsque le phénomène de saturation des actionneurs est à prendre en compte.

Ainsi le changement de loi de commande

$$v = -\frac{e_2}{\sqrt{1+e_2^2}} + w \quad (4.10)$$

conduit au système

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{e}_1 = e_2 + (e_2 + x_{2r}(t))^3 - x_{2r}^3(t) + \frac{e_2^2}{1+e_2^2} - \frac{2u_r(t)e_2}{\sqrt{1+e_2^2}} + w^2 \\ \quad + 2u_r(t)w - \frac{2e_2}{\sqrt{1+e_2^2}}w \\ \dot{e}_2 = -\frac{e_2}{\sqrt{1+e_2^2}} + w \end{array} \right. \quad (4.11)$$

qui admet le sous système en  $e_2$  globalement asymptotiquement stable et localement exponentiellement stable lorsque  $w = 0$ . On peut montrer que ces deux propriétés impliquent que toutes les solutions du système sont des fonctions bornées du temps lorsque  $w = 0$ . En effet, la variable  $e_1$  intègre une fonction qui converge exponentiellement vers l'origine. Cette propriété va jouer un rôle crucial dans la construction d'une fonction de Lyapunov qui permettra d'appliquer le théorème de Jurdjevic-Quinn. Le changement de variable

$X_1 = e_1 + e_2$  transforme le système (4.11) en

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{e}_1 = e_2 + (e_2 + x_{2r}(t))^3 - x_{2r}^3(t) + \frac{e_2^2}{1 + e_2^2} - \frac{e_2}{\sqrt{1 + e_2^2}} - \frac{2u_r(t)e_2}{\sqrt{1 + e_2^2}} \\ \quad + w^2 + w + 2u_r(t)w - \frac{2e_2}{\sqrt{1 + e_2^2}}w \\ \dot{e}_2 = -\frac{e_2}{\sqrt{1 + e_2^2}} + w. \end{array} \right. \quad (4.12)$$

Considérons la fonction de Lyapunov

$$U(X_1, e_2) = k\left(\frac{1}{2}e_2^2\right) + \ln(1 + X_1^2) \quad (4.13)$$

où  $k(a) = 6a + 2a^2$  est une fonction de classe  $C^1$  de dérivée strictement positive, telle que  $\lim_{a \rightarrow +\infty} k(a) = +\infty$ . Sa dérivée le long des trajectoires du système (4.12) satisfait

$$\begin{aligned} \dot{U}(X_1, e_2) &= -k'\left(\frac{1}{2}e_2^2\right) \frac{e_2^2}{\sqrt{1 + e_2^2}} \\ &+ \frac{2X_1}{1 + X_1^2} \left[ e_2 + (e_2 + x_{2r}(t))^3 - x_{2r}^3(t) + \frac{e_2^2}{1 + e_2^2} - \frac{2u_r(t)e_2}{\sqrt{1 + e_2^2}} \right] \\ &+ \left[ k'\left(\frac{1}{2}e_2^2\right) e_2 + \frac{2X_1}{1 + X_1^2} \left[ 1 + 2u_r(t) - \frac{2e_2}{\sqrt{1 + e_2^2}} + w \right] \right] w. \end{aligned} \quad (4.14)$$

En remarquant que  $\ln(1 + X_1^2)$  a une dérivée bornée par 1 et que  $e_2 + (e_2 + x_{2r}(t))^3 - x_{2r}^3(t) + \frac{e_2^2}{1 + e_2^2} - \frac{2u_r(t)e_2}{\sqrt{1 + e_2^2}}$  est inférieur sur un voisinage de l'origine à une fonction quadratique, il existe une fonction  $l(\cdot)$  strictement positive telle que :

$$\left| \frac{2X_1}{1 + X_1^2} \left[ e_2 + (e_2 + x_{2r}(t))^3 - x_{2r}^3(t) + \frac{e_2^2}{1 + e_2^2} - \frac{2u_r(t)e_2}{\sqrt{1 + e_2^2}} \right] \right| \leq l\left(\frac{1}{2}e_2^2\right) \frac{e_2}{\sqrt{1 + e_2^2}}.$$

En particulier,  $l(a) = 3 + 2a$  convient. De là, il vient que  $k'(a) \geq 2l(a)$  et l'équation (4.14) devient

$$\begin{aligned} \dot{U}(X_1, e_2) &\leq -(6 + 2e_2^2) \frac{e_2^2}{2\sqrt{1 + e_2^2}} \\ &+ \left[ (6 + 2e_2^2)e_2 + \frac{2X_1}{1 + X_1^2} \left[ 1 + 2u_r(t) - \frac{2e_2}{\sqrt{1 + e_2^2}} + w \right] \right] w. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Le terme de droite de cette égalité est constitué d'un terme négatif en la variable  $e_2$ , ce qui traduit la stabilité asymptotique du sous système en  $e_2$  lorsque  $w = 0$ , et d'un terme qu'il s'agit de rendre négatif et strictement négatif lorsque  $e_2 = 0$  et  $e_1 \neq 0$  par un choix approprié de  $w$ . La loi de commande

$$w = -\frac{1}{2} \frac{(6 + 2e_2^2)e_2 + \frac{2X_1}{1 + X_1^2} \left[ 1 + 2u_r(t) - \frac{2e_2}{\sqrt{1 + e_2^2}} \right]}{\sqrt{1 + \left( (6 + 2e_2^2)e_2 + \frac{2X_1}{1 + X_1^2} \left[ 1 + 2u_r(t) - \frac{2e_2}{\sqrt{1 + e_2^2}} \right] \right)^2}} \quad (4.16)$$

conduit à

$$\dot{U}(X_1, e_2) \leq -(6 + 2e_2^2) \frac{e_2^2}{2\sqrt{1 + e_2^2}} - \frac{1}{4} \frac{\left[ (6 + 2e_2^2)e_2 + \frac{2X_1}{1 + X_1^2} \left[ 1 + 2u_r(t) - \frac{2e_2}{\sqrt{1 + e_2^2}} \right] \right]^2}{\sqrt{1 + \left( (6 + 2e_2^2)e_2 + \frac{2X_1}{1 + X_1^2} \left[ 1 + 2u_r(t) - \frac{2e_2}{\sqrt{1 + e_2^2}} \right] \right)^2}} \quad (4.17)$$

Le système (4.11) est donc globalement asymptotiquement et localement exponentiellement stabilisé à l'origine. Observons que la loi de commande  $w$  ainsi choisie est bornée et que les lois de commande arbitrairement petites en norme peuvent être trouvées. Par contre, en raison du fait que le système (4.11) est non affine en la commande et qu'en conséquence le terme de droite du système (4.15) est non affine en  $w$ , des lois de commande arbitrairement grandes solutions du problème ne peuvent être obtenues; en général, seule des commandes bornées sont solutions du problème.

C'est cette approche que nous utiliserons dans ce chapitre, i.e., dans les prochaines sections pour étudier le problème de la stabilisation d'une trajectoire périodique du système pendule-chariot et de la stabilisation d'une trajectoire qui n'est pas nécessairement une fonction périodique du temps d'une famille de systèmes non linéaires sous la forme feedforward (4.3).

Dans un premier temps, nous résolvons le problème de la stabilisation d'une trajectoire

périodique du célèbre système pendule-chariot

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{x} + m\ell \cos \theta \ddot{\theta} = m\ell \dot{\theta}^2 \sin \theta + f \\ \ddot{x} \cos \theta + \ell \ddot{\theta} = g \sin \theta \end{cases} \quad (4.18)$$

où

- $(M, x)$  est la masse et la position du chariot qui se déplace horizontalement,
- $(m, \ell, \theta)$  est la masse, la longueur et la déviation angulaire par rapport à la verticale du pendule qui pivote autour d'un point fixe sur la chariot,
- Finalement  $f$  est la force horizontale appliquée sur le chariot et considérée comme la commande.

Après un changement de variables et un changement de feedback on montre que le système (4.18) peut se mettre sous la forme (4.3) et nous appliquons les idées de [65, 68] pour trouver une loi de commande stabilisante de manière à donner à l'angle du pendule un mouvement oscillatoire d'une amplitude strictement inférieure à  $\frac{\pi}{2}$ . Les simulations numériques permettent de valider les résultats obtenus.

Dans un second temps, le problème de la stabilisation d'une trajectoire qui n'est pas nécessairement une fonction périodique du temps des systèmes non linéaires sous la forme feedforward (4.3) est résolu. Plus précisément, nous montrons sous quelles conditions les lois de commande obtenues par Mazenc et Praly dans [68] conduisent à un comportement global d'uniforme asymptotique stabilité d'une trajectoire qui n'est pas nécessairement une fonction périodique du temps.

## 4.2 Mouvement périodique du système pendule-chariot



PERGAMON

Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)

SCIENCE @ DIRECT®

Automatica 39 (2003) 677–684

automatica

[www.elsevier.com/locate/automatica](http://www.elsevier.com/locate/automatica)

Brief Paper

# Tracking trajectories of the cart-pendulum system<sup>☆</sup>

Frédéric Mazenc<sup>a,\*</sup>, Samuel Bowong<sup>b</sup>

<sup>a</sup>INRIA Lorraine, Projet CONGE, ISGMP Bât A, Ile du Saulcy, 57 045 Metz Cedex 01, France

<sup>b</sup>Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques, B.P. 613, Porto-Novo, Benin

Received 18 January 2002; received in revised form 28 October 2002; accepted 21 November 2002

## Abstract

The problem of tracking a periodic trajectory of the well-known cart-pendulum system is solved. After a change of coordinates and a change of feedback, the equations of this system are nonlinear but feedforward. This property is extensively used to carry out for this system the design of uniformly asymptotically stabilizing time-varying state feedbacks by using the forwarding approach.

© 2003 Elsevier Science Ltd. All rights reserved.

**Keywords:** Feedforward systems; Tracking; Cart-pendulum system

## 1. Introduction

The planar inverted pendulum on a cart is one of the most well-known physical devices: it is in control laboratories for 50 years. Its dynamics obtained either by applying Newton's second law or by Euler–Lagrange formulation are

$$\begin{aligned} (M + m)\dot{s} + m\ell\dot{\omega}\cos(\theta) - m\ell\omega^2\sin(\theta) &= f, & \dot{x} &= s, \\ \dot{s}\cos(\theta) + \ell\dot{\omega} - g\sin(\theta) &= 0, & \dot{\theta} &= \omega, \end{aligned} \quad (1)$$

where  $(M, x)$  are mass and position of the cart which is moving horizontally,  $(m, \ell, \theta)$  are mass, length and angular deviation from the upward vertical position for the pendulum which is pivoting around a point fixed on the cart,  $f$  is a horizontal force action on the cart. The force  $f$  is the only input of this system and in Jakubczyk and Respondek (1980), it is shown that it is not linearizable. Because of the nonlinear nature of Eqs. (1), this underactuated mechanical system is frequently used to validate the efficiency of emerging nonlinear control design techniques: see for example Atassi and Khalil (1999) and Gurumoorthy and Sanders (1993). Although the problem of globally asymptotically stabilizing the origin of this system by continuous feedback is still

an open problem which may admit no solution, large basins of attraction can be achieved through state or output feedback by applying the forwarding approach: see for example Mazenc and Praly (1996), Teel (1996) and Mazenc and Vivalda (2002). An alternative way consists in adopting energy-shaping techniques (see for example Shiriaev, Ludvigsen, & Egeland, 1998; Angeli, 2001; Spong & Praly, 1996; Lozano, Fantoni, & Block, 2000; Astrom & Furuta, 2000). In this case, the control design is carried out through Lyapunov functions which are not necessarily radially unbounded and do not admit derivatives which can be rendered negative definite.

Although the tracking control problem for nonlinear systems, due to its difficulty and its practical interest, is one of the most challenging of the control theory it has never been addressed for the cart-pendulum system. It can be solved locally for small reference state trajectories using linear control techniques. But to track bounded trajectories with large amplitudes and obtain large basins of attraction, a nonlinear technique is required: when partially linearized, system (1) is not minimum phase. Such a general technique is presented by Mazenc and Praly (2000), where a Lyapunov construction of time-varying feedbacks which globally uniformly asymptotically and locally exponentially stabilize bounded reference state trajectories of feedforward systems is presented. Indeed, it turns out that after a preliminary change of feedback, the cart-pendulum system is described by equations in feedforward form. The objective of the present work is to exploit this fact to carry out a Lyapunov design of a control law which uniformly asymptotically and locally

<sup>☆</sup> This paper was not presented at any IFAC meeting. This paper was recommended for publication in revised form by Associate Editor Daizhan Cheng under the direction of Editor Hassan Khalil.

\* Corresponding author. Tel.: +33-3-87-54-72-68; fax: +33-3-87-54-72-77.

E-mail addresses: [mazenc@loria.fr](mailto:mazenc@loria.fr) (F. Mazenc), [bowong@loria.fr](mailto:bowong@loria.fr) (Samuel Bowong).

exponentially stabilizes a periodic trajectory of the cart-pendulum system, with the set defined by  $\theta \in ] - \pi/2, \pi/2[$  as basin of attraction. Thus, for the first time, the design of Mazenc and Praly (2000) is applied to a problem of control of a mechanical system. Observe that, by applying this strategy of design, similar tracking problems can be solved for systems such as for example the PVTOL and the TORA system (see Sepulchre, Jankovic, & Kokotovic, 1997, Example 6.7 and Section 4.4), the ball and beam with a viscous friction term (see Sepulchre et al., 1997, Section 5.4.3) or models of helicopters (see Shim, Koo, Hoffmann, & Sastry, 1998; Sira-Ramirez, Castro-Linares, & Licéaga-Castro, 1999). At last, observe that neither in Mazenc and Praly (2000) nor in the present work robustness issues are studied, but since the approach of Mazenc and Praly (2000) is a Lyapunov design, robustness with respect to external perturbations and to parameters uncertainty can be proved by taking advantage of the strict Lyapunov functions<sup>1</sup> obtained for large families of feedforward systems and the cart-pendulum system in particular. The performances induced to the cart-pendulum system by the control laws we determine in this work are validated by simulations. The paper is organized as follows. In Section 2, the key results of Mazenc and Praly (2000) are briefly recalled. In Section 3, these results are applied to the problem of tracking a trajectory of the cart-pendulum system.

**Preliminaries**

- A function  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  is said to be a saturation if it is a continuous, bounded, differentiable at 0 and such that:  $\sigma(s)s > 0, \forall s \neq 0, \sigma'(0) > 0, \sigma|_{[0, +\infty[} \notin L^1([0, +\infty[), \sigma|_{]-\infty, 0]} \notin L^1(]-\infty, 0])$ .
- For  $Q > 0$ , we denote:  $|x| = \sqrt{x^T x}, |x|_Q = \sqrt{x^T Q x}$ .
- A  $\mathcal{K}_\infty$ -function  $\alpha : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  is continuous, zero at zero, strictly increasing and unbounded.
- If  $V(\chi, t)$  is a continuously differentiable function, we denote by  $\dot{V}(\chi, t)_{(2)}$  the function:  $\dot{V}(\chi, t)_{(2)} = (\partial V / \partial \chi)(\chi, t)\varphi(\chi, a, t) + (\partial V / \partial t)(\chi, t)$  where  $\varphi(\chi, a, t)$  is the vector field of the differential equation

$$\dot{\chi} = \varphi(\chi, a, t). \tag{2}$$

The function  $V(\chi, t)$  is a strict Lyapunov function for system (2) if there exist two  $\mathcal{K}_\infty$ -functions  $\alpha_1(\cdot), \alpha_2(\cdot)$  and a real-valued continuous positive definite function  $\alpha_3(\cdot)$  such that  $\alpha_1(|\chi|) \leq V(\chi, t) \leq \alpha_2(|\chi|), \dot{V}(\chi, t)_{(2)} \leq -\alpha_3(|\chi|)$ .

**2. Feedback control of feedforward systems**

In this section, we present a result which summarizes the two main results of Mazenc and Praly (2000, Theorem 1

and Corollary 6). We will exploit extensively this result in the subsequent sections. Consider the following system:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= MX + H_1(Y) + H_2(Y, u)u, \\ \dot{Y} &= F_0(Y) + F_2(Y, u)u \end{aligned} \tag{3}$$

with  $X$  in  $\mathbb{R}^n, Y$  in  $\mathbb{R}^m, u$  in  $\mathbb{R}^q$ , all the functions are of class  $C^2$  and  $H_1(0) = 0, F_0(0) = 0$  and introduce a set of assumptions:

**Assumption A1.** There exist functions  $(X_r(t), Y_r(t), u_r(t))$  bounded on  $[0, +\infty[$ , of class  $C^2$  and verifying:

$$\begin{aligned} \dot{X}_r(t) &= MX_r(t) + H_1(Y_r(t)) + H_2(Y_r(t), u_r(t))u_r(t), \\ \dot{Y}_r(t) &= F_0(Y_r(t)) + F_2(Y_r(t), u_r(t))u_r(t). \end{aligned} \tag{4}$$

Let  $\tilde{X} = X - X_r(t), \tilde{Y} = Y - Y_r(t)$ .

**Assumption A2.** The point  $\tilde{Y} = 0$  is a globally uniformly asymptotically stable equilibrium point of system:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{Y}} &= F_0(\tilde{Y} + Y_r(t)) - F_0(Y_r(t)) \\ &\quad + F_2(\tilde{Y} + Y_r(t), u_r(t))u_r(t) - F_2(Y_r(t), u_r(t))u_r(t) \end{aligned} \tag{5}$$

and there exist a positive definite symmetric matrix  $Q$  and  $c > 0, \alpha > 0$  such that

$$M^T Q + QM = -R \leq 0, \tag{6}$$

$$|\exp(M(s-t))\|\Phi_A(t, s)| \leq c \exp(-\alpha(t-s)), \quad \forall t > 0, \forall s \in [0, t] \tag{7}$$

where

$$\begin{aligned} A(t) &= \frac{\partial}{\partial \tilde{Y}} [F_0(\tilde{Y} + Y_r(t))]_{\tilde{Y}=0} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial \tilde{Y}} [F_2(\tilde{Y} + Y_r(t), u_r(t))u_r(t)]_{\tilde{Y}=0} \end{aligned}$$

and  $\Phi_A(t, t_0)$  is the transition matrix associated to this matrix, i.e. the function verifying:  $\Phi_A(t_0, t_0) = I, (\partial \Phi_A / \partial t)(t, t_0) = \Phi_A(t, t_0)A(t)$ .

**Fact 1.** If system (3) satisfies Assumptions A1 and A2, then there exist a Lyapunov function  $V(\tilde{Y}, t)$  of class  $C^1$ , a function  $W(\tilde{Y}, t)$ ,  $\mathcal{K}_\infty$ -functions  $\alpha_i(\cdot), i = 1$  to 3 of class  $C^2$  and a positive definite function  $\alpha_4(\cdot)$  of class  $C^2$  such that  $\alpha'_1(0) = \alpha'_2(0) = \alpha'_4(0) = 0, \alpha''_1(0) > 0, \alpha''_2(0) > 0, \alpha'_3(0) > 0, \alpha''_4(0) > 0$  and for  $v=0$  and for all  $\tilde{Y}$  and  $t \geq 0$ ,

$$\alpha_1(|\tilde{Y}|) \leq V(\tilde{Y}, t) \leq \alpha_2(|\tilde{Y}|), \quad \left| \frac{\partial V}{\partial \tilde{Y}}(\tilde{Y}, t) \right| \leq \alpha_3(|\tilde{Y}|), \tag{8}$$

$$\dot{V}(\tilde{Y}, t)_{(5)} = -W(\tilde{Y}, t) \leq -\alpha_4(|\tilde{Y}|) < 0, \quad \forall \tilde{Y} \neq 0. \tag{9}$$

<sup>1</sup> See the preliminaries for the definition of strict Lyapunov function.



**Fact 2.** Assumption A2 implies that the equation:  $\dot{P}(t) = MP(t) - P(t)A(t) - C(t)$  where

$$C(t) = \frac{\partial}{\partial \tilde{Y}} [H_1(\tilde{Y} + Y_r(t))] |_{\tilde{Y}=0} + \frac{\partial}{\partial \tilde{Y}} [H_2(\tilde{Y} + Y_r(t), u_r(t))u_r(t)] |_{\tilde{Y}=0},$$

admits on  $[0, +\infty[$  a unique continuous and bounded solution:

$$P(t) = \int_t^{+\infty} \exp(M(t-s))C(s)\Phi_A(s,t) ds. \quad (10)$$

Fact 2 allows us to introduce the notation:

$$D(t) = \frac{\partial H_2}{\partial u}(Y_r(t), u_r(t))u_r(t) + H_2(Y_r(t), u_r(t)) + P(t) \left[ \frac{\partial F_2}{\partial u}(Y_r(t), u_r(t))u_r(t) + F_2(Y_r(t), u_r(t)) \right]$$

and to state the assumption:

**Assumption A3.** There exist bounded and continuous functions  $K_d(t)$  and  $K_r(t)$  such that the system:

$$\dot{\chi} = (M + K_d(t)D(t))^T Q + K_r(t)R^{1/2} \chi \quad (11)$$

is exponentially stable.

Before stating the main result of this section, observe that by letting:

$$v = u - u_r(t), \quad x = \tilde{X} + P(t)\tilde{Y}, \quad y = \tilde{Y}, \quad (12)$$

where  $P(\cdot)$  is the function defined in (10), the dynamics (3) become

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Mx + h_1(y, t) + h_2(y, v, t)v, \\ \dot{y} &= f_0(y, t) + f_2(y, v, t)v, \end{aligned} \quad (13)$$

where  $h_1(\cdot)$ ,  $h_2(\cdot)$ ,  $f_0(\cdot)$  and  $f_2(\cdot)$  are functions of class  $C^1$ , bounded with respect to  $t$  and where  $h_1(\cdot)$  is such that there exists a continuous positive function  $\gamma(\cdot)$  such that  $|h_1(y, t)| \leq \gamma(|y|)|y|^2$ .

**Theorem 3.** If Assumptions A1–A3 are satisfied by system (3), there exist a  $\mathcal{X}_\infty$ -function  $\kappa(\cdot)$  of class  $C^2$  and a smooth saturation  $\sigma(\cdot)$ , such that the derivative of the Lyapunov function

$$U(x, y, t) = \kappa(V(y, t)) + \int_0^{|x|_{\mathcal{Q}}} \sigma(s) ds, \quad (14)$$

along the trajectories of (13) in closed-loop with

$$v(x, y, t) = -\lambda(y) \left[ \kappa'(V(y, t)) \frac{\partial V}{\partial y}(y, t) f_2(y, 0, t) + \sigma(|x|_{\mathcal{Q}}) \frac{x^T Q h_2(y, 0, t)}{|x|_{\mathcal{Q}}} \right]^T, \quad (15)$$

where  $\lambda(y)$  is a strictly positive function of class  $C^1$ , satisfies

$$\begin{aligned} \dot{U}(x, y, t)_{(13)} &\leq -\frac{1}{2} \kappa'(V(y, t))W(y, t) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sigma(|x|_{\mathcal{Q}}) \frac{x^T R x}{|x|_{\mathcal{Q}}} - \frac{|v(x, y, t)|^2}{2\lambda(y)}. \end{aligned} \quad (16)$$

Moreover, for all  $\check{u}$  in  $]0, +\infty[$ , one can select a function  $\lambda(y)$  such that  $\tilde{u}(X, Y, t) = u_r(t) + v(x, y, t)$  where  $v(x, y, t)$  is the function given in (15) satisfies  $|\tilde{u}(X, Y, t) - u_r(t)| \leq \check{u}$ . If  $(X_r(t), Y_r(t), u_r(t))$  are periodic functions, system (3) in closed-loop with  $\tilde{u}(X, Y, t)$  admits  $(X_r(t), Y_r(t))$  as a globally uniformly asymptotically stable and a locally exponentially stable solution.

We omit the proof of Theorem 3: a detailed demonstration of this result and discussions on its significance are given by Mazenc and Praly (2000).

### 3. Control of the cart-pendulum system

In this section, we show how Theorem 3 can be applied to stabilize the oscillation around the upward vertical position of a pendulum on a cart moving on a horizontal axis. More precisely, the problem we address is to design  $f$  so that the cart-pendulum system exhibits a periodic oscillation with the angle  $\theta$  tracking the following reference:

$$\tan(\theta_r(t)) = \cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}} t\right), \quad (17)$$

whenever the initial condition of the variable  $\theta$  is in  $] -\pi/2, \pi/2[$ .

#### 3.1. Stability analysis

As in Section C of Mazenc and Praly (1996), to simplify the analysis, we introduce the following changes of time, coordinates and control law

$$\begin{aligned} \tau &= \sqrt{\frac{g}{\ell}} t, \quad t_1 = \tan \theta, \quad r_1 = \dot{\theta}(1 + t_1^2) \sqrt{\frac{\ell}{g}}, \\ x_1 &= \frac{x}{\ell} + 2 \ln \left( t_1 + \sqrt{1 + t_1^2} \right), \\ s_1 &= \frac{\dot{x}}{\sqrt{g\ell}} + \frac{2r_1}{\sqrt{1 + t_1^2}} + t_1, \\ u_1 &= -\frac{\ell}{g} \frac{f + m\ell\dot{\theta}^2 \sin \theta - mg \sin \theta \cos \theta}{M + m \sin^2 \theta} \\ &\quad + 2t_1 \left( 1 + \frac{r_1^2}{(1 + t_1^2)^{3/2}} \right) + r_1 \end{aligned} \quad (18)$$

which transform  $\mathbb{R}^2 \times ] -\pi/2, \pi/2[ \times \mathbb{R}$  into  $\mathbb{R}^4$ . We do not recall how these transformations have been determined, explanations are given in Section C of Mazenc and Praly

(1996), and do not give the calculations showing that these transformations allow us to rewrite (1) as

$$\dot{x}_1 = s_1 - t_1,$$

$$\dot{s}_1 = u_1,$$

$$\dot{t}_1 = r_1,$$

$$\dot{r}_1 = -(t_1 + r_1)\sqrt{1 + t_1^2} + u_1\sqrt{1 + t_1^2}, \quad (19)$$

where the notation “ $\dot{\cdot}$ ” denotes the derivative with respect to the new time  $\tau$  which is still denoted  $t$ . The key property satisfied by this system is that it is a feedforward system. More precisely, the  $(s_1, t_1, r_1)$ -subsystem belongs to the family of systems (3) with  $s_1$  playing the role of  $X$  and  $(t_1, r_1)^T$  playing the role of  $Y$  and the overall system belongs to the family of systems (3) with this time  $x_1$  playing the role of  $X$  and  $(s_1, t_1, r_1)^T$  playing the role of  $Y$ . It follows that to solve the tracking problem we consider one may try to apply Theorem 3 twice. The remaining part of the section is devoted to achieving this task.

A (periodic) reference trajectory meeting (19) is given by:

$$\begin{aligned} x_{1r}(t) &= 1 - \cos(t) - \int_0^t \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin(s)\right) ds, \\ s_{1r}(t) &= \cos(t) + \sin(t) - \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin(t)\right), \\ t_{1r}(t) &= \cos(t), \quad r_{1r}(t) = -\sin(t), \\ u_{1r}(t) &= \frac{-\cos(t)}{\sqrt{1 + \cos^2(t)}} + \cos(t) - \sin(t). \end{aligned} \quad (20)$$

This allows us to transform the tracking problem we consider into the problem of the global uniform asymptotic stabilization of the origin of a time-varying nonlinear system. By letting:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= x_1 - x_{1r}(t), \quad \tilde{s}_1 = s_1 - s_{1r}(t), \\ \tilde{t}_1 &= t_1 - t_{1r}(t), \quad \tilde{r}_1 = r_1 - r_{1r}(t), \\ u_2 &= u_1 - u_{1r}(t), \end{aligned} \quad (21)$$

the dynamics of system (19) become:

$$\dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{s}_1 - \tilde{t}_1,$$

$$\dot{\tilde{s}}_1 = u_2,$$

$$\dot{\tilde{t}}_1 = \tilde{r}_1,$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{r}}_1 &= -(\tilde{t}_1 + \tilde{r}_1)\sqrt{1 + \tilde{t}_1^2} + \dot{r}_{1r} \frac{\tilde{t}_1^2 + 2\tilde{t}_1 t_{1r}(t)}{\zeta(t_1, t_{1r}(t))} \\ &\quad + u_2\sqrt{1 + \tilde{t}_1^2} \end{aligned} \quad (22)$$

with

$$\zeta(t_1, t_{1r}(t)) = 1 + t_{1r}^2(t) + \sqrt{1 + t_{1r}^2(t)}\sqrt{1 + t_1^2}. \quad (23)$$

The problem we address in the following is to design  $u_2$  to make the zero solution of these equations globally uniformly asymptotically stable and locally exponentially stable. We solve the problem in three steps: (i) Stabilization of the  $(\tilde{t}_1, \tilde{r}_1)$ -subsystem. (ii) Stabilization of the  $(\tilde{s}_1, \tilde{t}_1, \tilde{r}_1)$ -subsystem by applying Theorem 3. (iii) Stabilization of the overall system by applying Theorem 3.

### 3.2. Stability of the $(\tilde{t}_1, \tilde{r}_1)$ -subsystem

It turns out that in the family of changes of feedback which give to the  $(\tilde{t}_1, \tilde{r}_1)$ -subsystem the required stability properties, the following

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{-\dot{r}_{1r}(t)\tilde{t}_1^2}{\zeta(t_1, t_{1r}(t))\sqrt{1 + \tilde{t}_1^2}} \\ &\quad + \frac{2(\tilde{t}_1 + \tilde{r}_1)t_{1r}(t)\tilde{t}_1}{1 + \tilde{t}_1^2 + \sqrt{1 + \tilde{t}_1^2}\sqrt{1 + \tilde{t}_1^2}} + u_3 \end{aligned} \quad (24)$$

leads to reasonably simple calculations in the next two steps. The dynamics of (22) become

$$\dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{s}_1 - \tilde{t}_1,$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{s}}_1 &= \frac{-\dot{r}_{1r}(t)\tilde{t}_1^2}{\zeta(t_1, t_{1r}(t))\sqrt{1 + \tilde{t}_1^2}} \\ &\quad + \frac{2(\tilde{t}_1 + \tilde{r}_1)t_{1r}(t)\tilde{t}_1}{1 + \tilde{t}_1^2 + \sqrt{1 + \tilde{t}_1^2}\sqrt{1 + \tilde{t}_1^2}} + u_3, \end{aligned}$$

$$\dot{\tilde{t}}_1 = \tilde{r}_1,$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{r}}_1 &= -(\tilde{t}_1 + \tilde{r}_1)\sqrt{1 + \tilde{t}_1^2} - \frac{\dot{t}_{1r}^2(t)(\tilde{t}_1 + \tilde{r}_1)}{\sqrt{1 + \tilde{t}_1^2} + \sqrt{1 + \tilde{t}_1^2}} \\ &\quad + \frac{2\dot{r}_{1r}(t)t_{1r}(t)\tilde{t}_1}{1 + \tilde{t}_1^2(t) + \sqrt{1 + \tilde{t}_1^2(t)}\sqrt{1 + \tilde{t}_1^2}} + u_3\sqrt{1 + \tilde{t}_1^2}. \end{aligned} \quad (25)$$

Consider the positive definite and radially unbounded smooth function:

$$V_1(\tilde{t}_1, \tilde{r}_1) = (1 + \tilde{t}_1^2)^{3/2} - 1 + \tilde{t}_1\tilde{r}_1 + \tilde{r}_1^2. \quad (26)$$

Its derivative along the trajectories of (25) with  $u_3 = 0$  satisfies

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(\tilde{t}_1, \tilde{r}_1)_{(25)} &\leq -\tilde{t}_1^2\sqrt{1 + \tilde{t}_1^2} + \tilde{r}_1^2(1 - 2\sqrt{1 + \tilde{t}_1^2}) \\ &\quad + |\tilde{t}_1 + 2\tilde{r}_1| \left| \frac{t_{1r}(t)^2(\tilde{t}_1 + \tilde{r}_1)}{\sqrt{1 + \tilde{t}_1^2} + \sqrt{1 + \tilde{t}_1^2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\dot{t}_{1r}^2(t)\tilde{t}_1}{1 + \tilde{t}_1^2(t) + \sqrt{1 + \tilde{t}_1^2(t)}\sqrt{1 + \tilde{t}_1^2}} \right|. \end{aligned} \quad (27)$$

By using Young’s inequality, we get

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(\tilde{t}_1, \tilde{r}_1)_{(25)} \leq & -\frac{2 + \sqrt{2}}{4} \tilde{r}_1^2 \sqrt{1 + \tilde{r}_1^2} \\ & - \tilde{r}_1^2 \left( \frac{-7 + 2\sqrt{2}}{3} + 2\sqrt{1 + \tilde{r}_1^2} \right). \end{aligned} \quad (28)$$

The right-hand side of this inequality is a negative definite function independent of  $t$  and is upper bounded on a neighborhood of the origin by a negative definite quadratic form. It follows that the origin of the  $(\tilde{t}_1, \tilde{r}_1)$ -subsystem of (25) with  $u_3 = 0$  is globally uniformly asymptotically and locally exponentially stable.

### 3.3. Stabilization of the $(\tilde{s}_1, \tilde{t}_1, \tilde{r}_1)$ -subsystem

Let us check that Assumptions A1–A3 are satisfied by the  $(s_1, t_1, r_1)$ -subsystem of (19) after the changes of feedback (21), (24), with  $s_1$  playing the role of  $X$ ,  $(t_1, r_1)^T$  playing the role of  $Y$ . According to (20) Assumption A1 is satisfied. It follows from (28) that Assumption A2 is satisfied. At last, in the particular case we consider, one has  $P(t) = 0, D(t) = 1$  for all  $t$  which implies that Assumption A3 is satisfied. It follows that Theorem 3 applies: one can determine a control law  $u_3$  and a  $\mathcal{K}_\infty$ -function  $\kappa(\cdot)$  and of class  $C^2$  such that the derivative of the function

$$V_2(\tilde{s}_1, \tilde{t}_1, \tilde{r}_1) = \kappa(V_1(\tilde{t}_1, \tilde{r}_1)) + \sqrt{1 + \tilde{s}_1^2} - 1 \quad (29)$$

along the solutions of  $(\tilde{s}_1, \tilde{t}_1, \tilde{r}_1)$ -subsystem in closed-loop with  $u_3$  is smaller than a negative definite function of  $(\tilde{s}_1, \tilde{t}_1, \tilde{r}_1)$ .

One can easily prove that the inequality

$$\sqrt{1 + \tilde{s}_1^2} \leq \frac{9 - 2\sqrt{2}}{4} \tilde{r}_1^2 + \tilde{r}_1^2 + \frac{\tilde{s}_1}{\sqrt{1 + \tilde{s}_1^2}} u_3 \quad (30)$$

is satisfied. In combination with (28) it leads us to choose  $\kappa(s) = 3s$ . Such a choice yields

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(\tilde{s}_1, \tilde{t}_1, \tilde{r}_1)_{(25)} \leq & -(c_1 \tilde{t}_1^2 + c_2 \tilde{r}_1^2) \sqrt{1 + \tilde{r}_1^2} \\ & + G_1(\tilde{t}_1, \tilde{r}_1, \tilde{s}_1) u_3, \end{aligned} \quad (31)$$

where  $c_1 = 5\sqrt{2} - 3/4, c_2 = 2(\sqrt{2} - 1)$  and

$$G_1(\tilde{t}_1, \tilde{r}_1, \tilde{s}_1) = 3(\tilde{t}_1 + 2\tilde{r}_1) \sqrt{1 + \tilde{t}_1^2} + \frac{\tilde{s}_1}{\sqrt{1 + \tilde{s}_1^2}}. \quad (32)$$

At this stage, we remark that  $\dot{V}_2(\cdot)$  can be made negative definite by picking any  $u_3$  which has opposite sign to  $G_1(\cdot)$ . But  $u_3$  is not the end of the design. We still have to stabilize the  $\tilde{x}_1$  component. According to the results given in Section 2, the problem with this new component can be solved by doing the new change of coordinate (12) which is defined from the integral relation (10). To facilitate the determination of a change of coordinate (12), we choose a very particular expression for  $u_3$ . More specifically, we take  $u_3$  in

the form

$$u_3 = \xi_0 \left( \tilde{t}_1 - \frac{\tilde{s}_1}{\sqrt{1 + \tilde{s}_1^2}} \right) + u_4 \quad (33)$$

with  $\xi_0 > 0$ , a constant to be specified. The motivation for this choice is that by letting:

$$\tilde{x}_2 = \tilde{x}_1 + \frac{1}{\xi_0} \tilde{s}_1 \quad (34)$$

the expression of  $\dot{\tilde{x}}_2$  has no linear term in  $(\tilde{t}_1, \tilde{s}_1)$ . This means that the problem of determining the change of coordinates (12) is settled. However, one has to show that the above expression of  $u_3$  is appropriate.

When  $u_4 = 0$ , by using Young’s inequality and (32) one can prove, after some lengthy computations, that

$$\begin{aligned} G_1(\tilde{t}_1, \tilde{r}_1, \tilde{s}_1) u_3 \leq & \xi_0 [c_3 \tilde{t}_1^2 + c_4 \tilde{r}_1^2] \sqrt{1 + \tilde{r}_1^2} \\ & - \xi_0 \frac{\tilde{s}_1^2}{4(1 + \tilde{s}_1^2)} \end{aligned} \quad (35)$$

with  $c_3 = (37 + 3\sqrt{1 + \sqrt{5}/2}), c_4 = (23 + 3\sqrt{2 + 2\sqrt{5}})$ .

Picking for instance  $\xi_0 = \frac{1}{50}$ , the inequality

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(\tilde{s}_1, \tilde{t}_1, \tilde{r}_1)_{(25)} \leq & -\frac{10}{51} \tilde{r}_1^2 \sqrt{1 + \tilde{r}_1^2} - \frac{5}{22} \tilde{r}_1^2 \sqrt{1 + \tilde{r}_1^2} \\ & - \frac{1}{200} \frac{\tilde{s}_1^2}{(1 + \tilde{s}_1^2)} \end{aligned} \quad (36)$$

is obtained. It ensures the global uniform asymptotic stability and the local exponential stability of the origin of the  $(\tilde{s}_1, \tilde{t}_1, \tilde{r}_1)$ -subsystem when  $u_4 = 0$ .

### 3.4. Stabilization of the overall system

Using arguments similar to those invoked to show that Assumptions A1–A3 are satisfied by the  $(s_1, t_1, r_1)$ -subsystem of (19) after the change of feedback (24) one can check that these assumptions are satisfied by system (19) after the successive changes of feedback (21), (24) and (33), with  $x_1$  playing the role of  $X$ ,  $(s_1, t_1, r_1)^T$  playing the role of  $Y$ . The function  $P(t)$  corresponding to the particular case we consider is  $P(t) = (50, 0, 0)$  for all  $t$ , which leads to the change of coordinates (34) and to the system

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_2 = & \frac{\tilde{s}_1^3}{1 + \tilde{s}_1^2 + \sqrt{1 + \tilde{s}_1^2}} + \frac{50\tilde{r}_{1r}(t)\tilde{t}_1^2}{\zeta(t_1, t_{1r}(t))\sqrt{1 + \tilde{t}_1^2}} \\ & - \frac{100t_{1r}(t)(\tilde{t}_1 + \tilde{r}_1)\tilde{t}_1}{1 + \tilde{t}_1^2 + \sqrt{1 + \tilde{t}_1^2}\sqrt{1 + \tilde{r}_1^2}} + 50u_4, \\ \dot{\tilde{s}}_1 = & \frac{-\tilde{r}_{1r}(t)\tilde{t}_1^2}{\zeta(t_1, t_{1r}(t))\sqrt{1 + \tilde{t}_1^2}} + \frac{2(\tilde{t}_1 + \tilde{r}_1)t_{1r}(t)\tilde{t}_1}{1 + \tilde{t}_1^2 + \sqrt{1 + \tilde{t}_1^2}\sqrt{1 + \tilde{r}_1^2}} \\ & + \left( \frac{1}{50} \left( \tilde{t}_1 - \frac{\tilde{s}_1}{\sqrt{1 + \tilde{s}_1^2}} \right) + u_4 \right), \end{aligned}$$

$$\dot{\tilde{t}}_1 = \tilde{r}_1,$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{r}}_1 = & -(\tilde{t}_1 + \tilde{r}_1)\sqrt{1 + \tilde{t}_1^2} - \frac{\tilde{t}_{1r}^2(t)(\tilde{t}_1 + \tilde{r}_1)}{\sqrt{1 + \tilde{t}_1^2} + \sqrt{1 + \tilde{t}_1^2}} \\ & + \frac{2\tilde{r}_{1r}(t)\tilde{t}_{1r}(t)\tilde{r}_1}{1 + \tilde{t}_{1r}^2(t) + \sqrt{1 + \tilde{t}_{1r}^2(t)}\sqrt{1 + \tilde{t}_1^2}} \\ & + \left( \frac{1}{50} \left( \tilde{t}_1 - \frac{\tilde{s}_1}{\sqrt{1 + \tilde{s}_1^2}} \right) + u_4 \right) \sqrt{1 + \tilde{t}_1^2}. \end{aligned} \quad (37)$$

Let  $\tilde{Z} = (\tilde{x}_2, \tilde{s}_1, \tilde{t}_1, \tilde{r}_1)$ . One can easily deduce from Theorem 3 that one can determine a control law  $u_4$  and a  $\mathcal{K}_\infty$ -function  $\kappa(\cdot)$  and of class  $C^2$  such that the derivative of the function

$$V_3(\tilde{Z}) = \kappa(V_2(\tilde{s}_1, \tilde{t}_1, \tilde{r}_1)) + \sqrt{1 + \tilde{x}_2^2} - 1 \quad (38)$$

along the solutions of the overall system in closed-loop with  $u_4$  is smaller than a negative definite function of  $\tilde{Z}$ .

The inequality

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \tilde{x}_2^2} \leq & \frac{\tilde{s}_1^2}{\sqrt{1 + \tilde{s}_1^2}} + \frac{633}{10} \tilde{t}_1^2 + \frac{7354}{100} \tilde{r}_1^2 \\ & + \frac{50\tilde{x}_2}{\sqrt{1 + \tilde{x}_2^2}} u_4 \end{aligned} \quad (39)$$

and (36) lead us to choose  $\kappa(s) = 164(s + 1)^2 - 164$ . Such a choice yields

$$\begin{aligned} \dot{V}_3(\tilde{Z})_{(37)} \leq & -\tilde{t}_1^2\sqrt{1 + \tilde{t}_1^2} - \tilde{r}_1^2\sqrt{1 + \tilde{t}_1^2} \\ & - \frac{4\tilde{s}_1^2}{5\sqrt{1 + \tilde{s}_1^2}} + G_2(\tilde{Z})u_4 \end{aligned} \quad (40)$$

with

$$\begin{aligned} G_2(\tilde{Z}) = & \frac{50\tilde{x}_2}{\sqrt{1 + \tilde{x}_2^2}} + \psi(\tilde{s}_1, \tilde{t}_1, \tilde{r}_1) \\ & \times \left( 3(\tilde{t}_1 + 2\tilde{r}_1)\sqrt{1 + \tilde{t}_1^2} + \frac{\tilde{s}_1}{\sqrt{1 + \tilde{s}_1^2}} \right), \end{aligned}$$

$$\psi(\tilde{s}_1, \tilde{t}_1, \tilde{r}_1) = 328(V_2(\tilde{s}_1, \tilde{t}_1, \tilde{r}_1) + 1). \quad (41)$$

Since we want the origin of the overall system to be globally uniformly asymptotically stable,  $\dot{V}_3(\cdot)$  has to be negative definite. This property is induced by a control  $u_4$  with the opposite sign of  $G_2(\tilde{Z})$ .

### 3.5. Stabilizing control law

Choosing for instance

$$u_4 = -G_2(\tilde{Z}), \quad (42)$$

renders  $\dot{V}_3(\cdot)$  negative definite and locally upper bounded by a negative definite quadratic function. Returning to system (1), the final conclusion we draw is that the uniform asymptotic tracking of the reference output trajectory  $\theta_r(t) = \arctan(\cos(\ell/g)t)$  of the cart-pendulum system is achieved by the time-varying control law:

$$\begin{aligned} f = & mg \sin(\theta) \cos(\theta) - m\ell\omega^2 \sin(\theta) \\ & + \frac{g}{\ell} (M + m \sin^2(\theta)) \left[ -u_1 + 2 \tan(\theta) \right. \\ & \left. \times \left( 1 + \frac{\ell}{g} \frac{\omega^2}{\cos(\theta)} \right) + \sqrt{\frac{\ell}{g} \frac{\omega}{\cos^2(\theta)}} \right] \end{aligned} \quad (43)$$

with

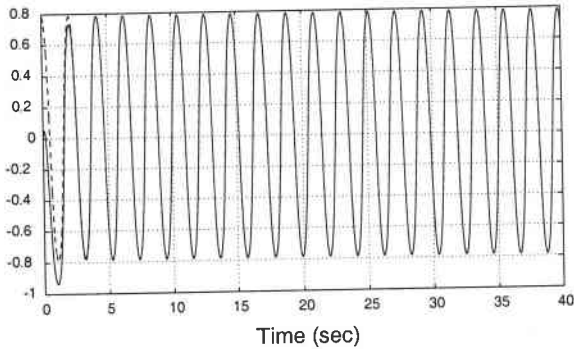
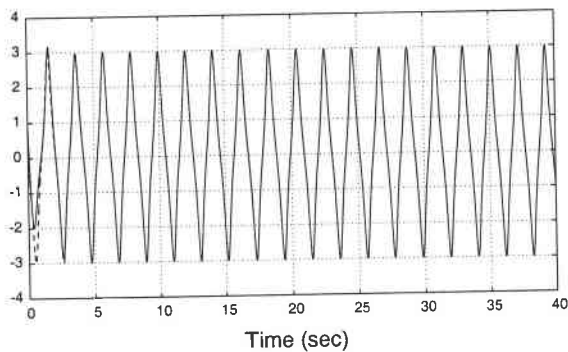
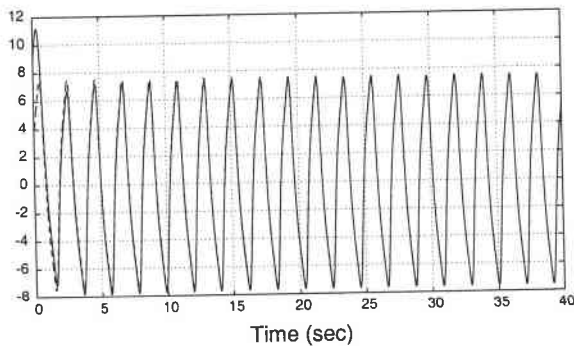
$$\begin{aligned} u_1 = & \frac{-\cos(\tau)}{\sqrt{1 + \cos^2(\tau)}} + \cos(\tau) - \sin(\tau) \\ & + \frac{\cos(\tau)\tilde{t}_1^2}{\sqrt{(1 + \cos^2(\tau))\cos(\theta)}(\sqrt{1 + \cos^2(\tau)} + \cos(\theta))} \\ & + \frac{2\cos(\tau)(\tilde{t}_1 + \tilde{r}_1)\tilde{r}_1}{\cos^2(\theta) + \sqrt{1 + \tilde{t}_1^2}\cos(\theta)} + \frac{1}{50} \left( \tilde{t}_1 - \frac{\tilde{s}_1}{\sqrt{1 + \tilde{s}_1^2}} \right) \\ & - G_2(\tilde{x}_2, \tilde{s}_1, \tilde{t}_1, \tilde{r}_1) \end{aligned} \quad (44)$$

with

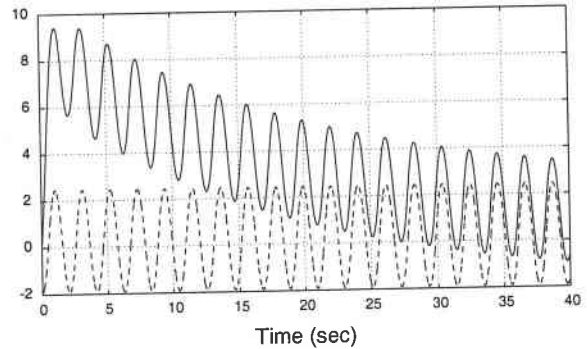
$$\begin{aligned} \tau = & \sqrt{\frac{g}{\ell}} t, \quad \tilde{t}_1 = \tan(\theta) - \cos(\tau), \\ \tilde{r}_1 = & \sqrt{\frac{\ell}{g} \frac{\omega}{\cos^2(\theta)}} + \sin(\tau), \\ \tilde{s}_1 = & \frac{s}{\sqrt{g\ell}} + \sqrt{\frac{\ell}{g} \frac{\omega}{\cos(\theta)}} + \tan(\theta) - \cos(\tau) \\ & - \sin(\tau) + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\tau)\right), \\ \tilde{x}_2 = & \frac{x}{\ell} + 2 \ln\left(\tan(\theta) + \frac{1}{\cos^2(\theta)}\right) - 1 + \cos(\tau) \\ & + \int_0^\tau \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin(s)\right) ds + 50\tilde{s}_1. \end{aligned} \quad (45)$$

### 3.6. Simulation results

In order to validate the performance of the proposed control law, we have performed in the initial coordinates simulations in Matlab. We have selected the values  $M = m = 1$ ,  $\ell = \frac{9.8}{g}$  and  $g = 9.8$  and the initial conditions  $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 9.8, \theta(0) = 0, \dot{\theta}(0) = 0$ . The three first figures show a fast

Fig. 1. The  $\theta$  component (—) and its desired values (---).Fig. 2. The  $\dot{\theta}$  component (—) and its desired values (---).Fig. 3. The  $\dot{x}$  component (—) and its desired values (---).

convergence of, respectively, the angular deviation of the pendulum, its velocity and the velocity of the cart, while the last figure shows a larger transient error and a slower convergence for the cart position. This drawback could be potentially removed by determining at each step of our recursive design the control laws which can be constructed when the decoupling change of coordinates given by Mazenc and Praly (2000) can be performed (Figs. 1–4).

Fig. 4. The  $x$  component (—) and its desired values (---).

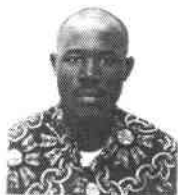
## References

- Angeli, D. (2001). Almost global stabilization of the inverted pendulum via continuous state feedback. *Automatica*, 37, 1103–1108.
- Astrom, K. J., & Furuta, K. (2000). Swinging up a pendulum by energy control. *Automatica*, 36, 287–295.
- Atassi, A., & Khalil, H. (1999). A separation principle for the stabilization of a class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(9), 1672–1687.
- Gurumoorthy, R., & Sanders, S. (1993). Controlling nonminimum phase nonlinear systems. *Proceedings of the American control conference* (pp. 680–685). San Francisco, CA.
- Jakubczyk, B., & Respondek, W. (1980). On the linearization of control systems. *Bulletin of the Academy of Polonaise Science Mathematics*, 31(6), 841–850.
- Lozano, R., Fantoni, I., & Block, D. J. (2000). Stabilization of the inverted pendulum around its homoclinic orbit. *Systems and Control Letters*, 3(40), 197–204.
- Mazenc, F., & Praly, L. (1996). Adding an integration and global asymptotic stabilization of feedforward systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(11), 1559–1578.
- Mazenc, F., & Praly, L. (2000). Asymptotic tracking of a state reference for systems with a feedforward structure. *Automatica*, 36(2), 179–187.
- Mazenc, F., & Vivalda, J. C. (2002). Global asymptotic output feedback stabilization of feedforward systems. *European Journal of Control*, 8(6), 1–12.
- Sepulchre, R., Jankovic, M., & Kokotovic, P. (1997). *Constructive nonlinear control*. London: Springer.
- Shim, H., Koo, T., Hoffmann, F., & Sastry, S. (1998). A comprehensive study of control design for an autonomous helicopter. *Proceedings of the 37th conference on decision and control*, Tampa, FL, pp. 3653–3658.
- Shiriaev, A., Ludvigsen, H., & Egeland, O. (1998). Global stabilization of unstable equilibrium point of pendulum. *Proceedings of the 37th IEEE conference on decision and control* (pp. 4584–4585). Tampa, FL.
- Sira-Ramirez, A., Castro-Linares, R., & Licéaga-Castro, E. (1999). Regulation of the longitudinal dynamics of a helicopter system: A Liovillian systems approach. *Proceedings of the American control conference ACC*. San Diego, CA.
- Spong, M., & Praly, L. (1996). Control of underactuated mechanical systems using switching and saturation. *Proceedings of the block island workshop on control using logic based switching*. Berlin: Springer.
- Teel, A. R. (1996). A nonlinear small gain theorem for the analysis of control systems with saturation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(9), 1256–1270.



**Frédéric Mazenc** was born in Cannes, France, in 1969. He received the Ph.D. degree in 1996 in automatic control and mathematics from the CAS, Ecole des Mines de Paris. In 1997, he was a Postdoctoral Fellow at the University of Louvain, in the CESAME. From 1998 to 1999 he was a Postdoctoral Fellow in the Centre for Process Systems Engineering of the Imperial College. Since 1999 he is CR2 of the INRIA Lorraine. His current research interest include nonlinear control theory, differential

equations with delay, robust control.



**Samuel Bowong**

## **4.3 Stabilisation asymptotique uniforme globale d'une trajectoire**





## Tracking Trajectories of Feedforward Systems

F. Mazenc and S. Bowong

**Abstract**—The objective of this note is to solve the problem of tracking trajectories of feedforward systems. A family of the time-varying state feedbacks which globally, uniformly, asymptotically, and locally exponentially stabilize trajectories which are not necessarily periodic functions of the time is exhibited. The control design is based on the construction of a strict Lyapunov function.

**Index Terms**—Feedforward systems, nonlinear systems, tracking.

### I. INTRODUCTION

The tracking control problem for nonlinear systems is one of the most challenging in control theory, due to its difficulty and its practical interest. It has received a considerable amount of attention from several researchers. Some approaches to this problem are well known. In particular, the linearization, the partial linearization of systems, (see [2] and [6]), and the concept of flatness (see [7] and the references therein) have been used successfully to track locally, and in some cases globally, trajectories of particular nonlinear systems. The backstepping and the passivity techniques (see [3], [11], and [10]) also provide very efficient help for solving globally the problem for wide families of systems.

However, the feedforward systems (see [8], [9], and [12]) are, in general, not in feedback form, have no particular passivity properties, are not linearizable, not flat, and, when partially linearized, nonminimum-phase. It follows that the techniques previously mentioned do not apply.

For chains of integrators with bounded input (which are particular feedforward systems), the problem has been solved in [13]. Recently, Mazenc and Praly [9] constructed a family of feedbacks (which contains bounded functions arbitrarily small in norm) which globally, uniformly, asymptotically, and locally exponentially stabilize periodic reference state trajectories of nonlinear feedforward systems. This new result relies on the construction of a Lyapunov function which is not a strict Lyapunov function, i.e., which admits a derivative along the trajectories of the closed-loop systems which is not smaller than a negative-definite function independent of the time. It follows that: 1) uniform asymptotic stability of the stabilized trajectories can be established only if they are periodic and 2) the technique cannot always be applied repeatedly.

The purpose of this note is to complement [9]. We consider the general class of systems studied in [9] and prove for these systems, under slightly more restrictive assumptions, the global uniform asymptotic stabilizability of signals which are not necessarily periodic functions of the time through the construction of a *strict* Lyapunov function which can be carried out repeatedly. Moreover, observe that strict Lyapunov functions are known to be very efficient tools for robustness analysis.

**Organization of the Note:** In Section II, the main result in [9] is briefly presented. In Section III, we construct a strict Lyapunov function and stabilizing feedbacks. Section IV contains concluding remarks.

Manuscript received March 21, 2001; revised October 24, 2001. Recommended by Associate Editor J. M. A. Scherpen.

F. Mazenc is with INRIA Lorraine, Projet CONGE, 57 045 Metz Cedex 01, France (e-mail: mazenc@loria.fr).

S. Bowong is with the Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques, B.P. 613 Porto-Novo, Bénin, France (e-mail: bowong@loria.fr).

Publisher Item Identifier 10.1109/TAC.2002.800748.

### Basic Definitions:

- We assume throughout this note that the functions are sufficiently many times differentiable.
- A function  $\sigma: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  is said to be a saturation if it is a continuous, bounded, differentiable at 0, and such that:  $\sigma(s)s > 0, \forall s \neq 0, \sigma'(0) > 0, \sigma|_{[0, +\infty[} \notin L^1([0, +\infty[), \sigma|_{]-\infty, 0]} \notin L^1(]-\infty, 0])$ . It is said to be a linear saturation if there exists  $L > 0$  such that  $\sigma(s) = s, \forall s \in [-L, L]$ .
- With  $Q$  a positive-definite symmetric matrix, we denote  $|x| = \sqrt{x^T x}, |x|_Q = \sqrt{x^T Q x}$ .
- A function  $\alpha: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  is said to be of class  $\mathcal{K}_\infty$  if it is zero at zero, strictly increasing and unbounded.
- By  $\dot{V}(\chi, t)_{(1)}$ , we denote the function:  $\dot{V}(\chi, t)_{(1)} = \langle \partial V / \partial \chi \rangle(\chi, t) \varphi(\chi, a, t) + \langle \partial V / \partial t \rangle(\chi, t)$  where  $\varphi(\chi, a, t)$  is the vector field of the differential equation

$$\dot{\chi} = \varphi(\chi, a, t). \tag{1}$$

### II. THE MAIN SOURCE OF OUR WORK

In this section, we present a result which summarizes the two main results of [9]: Theorem 1 and Corollary 6. We will exploit extensively this result in the subsequent sections. Consider the following system:

$$\begin{cases} \dot{X} = MX + H_1(Y) + H_2(Y, u) \\ \dot{Y} = F_0(Y) + F_2(Y, u) \end{cases} \tag{2}$$

with  $X$  in  $\mathbf{R}^n, Y$  in  $\mathbf{R}^m, u$  in  $\mathbf{R}^q$ , all the functions are of class  $C^2$  and  $H_1(0) = 0, F_0(0) = 0$ , and introduce a set of assumptions.

**Assumption A1:** There exist functions  $(X_r(t), Y_r(t), u_r(t))$  bounded on  $[0, +\infty[$ , of class  $C^2$  and verifying

$$\begin{cases} \dot{X}_r(t) = MX_r(t) + H_1(Y_r(t)) + H_2(Y_r(t), u_r(t)) \\ \dot{Y}_r(t) = F_0(Y_r(t)) + F_2(Y_r(t), u_r(t)) \end{cases} \tag{3}$$

Let  $\tilde{Y} = Y - Y_r(t)$ . Assumption A1 guarantees that the matrix

$$A(t) = \frac{\partial}{\partial \tilde{Y}} \left[ F_0(\tilde{Y} + Y_r(t)) + F_2(\tilde{Y} + Y_r(t), u_r(t)) \right] \Big|_{\tilde{Y}=0} \tag{4}$$

is well defined and of class  $C^1$ . Let  $\Phi_A(t, t_0)$  be the transition matrix associated to this matrix, i.e., the function verifying:  $(\partial \Phi_A / \partial t)(t, t_0) = \Phi_A(t, t_0)A(t), \Phi_A(t_0, t_0) = I$ .

**Assumption A2:**

A2.1) The point  $\tilde{Y} = 0$  is a globally uniformly asymptotically stable equilibrium point of the system

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{Y}} = F_0(\tilde{Y} + Y_r(t)) - F_0(Y_r(t)) + F_2(\tilde{Y} + Y_r(t), u_r(t)) \\ - F_2(Y_r(t), u_r(t)) \end{aligned} \tag{5}$$

A2.2) There exists a positive-definite symmetric matrix  $Q$  and  $c > 0, \alpha > 0$  such that

$$M^T Q + Q M = -R \leq 0 \tag{6}$$

$$|\exp(M(s-t))| |\Phi_A(t, s)| = c \exp(-\alpha(t-s))$$

$$\forall t > 0, \forall s \in [0, t]. \tag{7}$$

**Fact 2.1:** If (2) satisfies Assumptions A1 and A2, then there exists a Lyapunov function  $V(\tilde{Y}, t)$  of class  $C^1$ , strictly positive-real numbers  $p_i, i = 1, \dots, 5$ , a function  $W(\tilde{Y}, t)$ , and functions  $\alpha_1(\cdot), \alpha_2(\cdot), \alpha_3(\cdot)$ , and  $\alpha_4(\cdot)$  of class  $\mathcal{K}_\infty$  such that

$$p_2 |\tilde{Y}|^2 \leq V(\tilde{Y}, t) \leq p_3 |\tilde{Y}|^2 \quad \left| \frac{\partial V}{\partial \tilde{Y}}(\tilde{Y}, t) \right| \leq p_4 |\tilde{Y}|$$

$$p_5 |\tilde{Y}|^2 \leq \alpha_3(|\tilde{Y}|), \quad \text{when } |\tilde{Y}| \leq p_1 \quad (8)$$

$$\alpha_1(|\tilde{Y}|) \leq V(\tilde{Y}, t) \leq \alpha_2(|\tilde{Y}|)$$

$$\left| \frac{\partial V}{\partial \tilde{Y}}(\tilde{Y}, t) \right| \leq \alpha_4(|\tilde{Y}|), \quad \forall \tilde{Y} \quad (9)$$

$$\dot{V}(\tilde{Y}, t)_{(5)} = -W(\tilde{Y}, t) \leq -\alpha_3(|\tilde{Y}|) < 0$$

$$\forall \tilde{Y} \neq 0. \quad (10)$$

**Fact 2.2:** Assumption A2.2 implies that

$$\dot{P}(t) = MP(t) - P(t)A(t) - C(t) \quad (11)$$

where

$$C(t) = \frac{\partial}{\partial \tilde{Y}} \left[ H_1(\tilde{Y} + Y_r(t)) \right. \\ \left. + H_2(\tilde{Y} + Y_r(t), u_r(t)) u_r(t) \right] \Big|_{\tilde{Y}=0} \quad (12)$$

admits on  $[0, +\infty[$  a unique continuous and bounded solution

$$P(t) = \int_t^{+\infty} \exp(M(t-s)) C(s) \Phi_A(s, t) ds. \quad (13)$$

Fact 2.2 allows us to introduce the notation

$$D(t) = \frac{\partial H_2}{\partial u}(Y_r(t), u_r(t)) u_r(t) + H_2(Y_r(t), u_r(t)) \\ + P(t) \left[ \frac{\partial F_2}{\partial u}(Y_r(t), u_r(t)) u_r(t) \right. \\ \left. + F_2(Y_r(t), u_r(t)) \right] \quad (14)$$

and to state the following assumption.

**Assumption A3:** The pair  $(M, (QD(t), R^{1/2})^\top)$  is uniformly detectable, i.e., there exist bounded and continuous functions  $K_d(t)$  and  $K_r(t)$  such that the system

$$\dot{\xi} = (M + K_d(t)D(t)^\top Q + K_r(t)R^{1/2}) \xi \quad (15)$$

is exponentially stable.

Before stating the main result of this section, observe that by letting

$$\tilde{X} = X - X_r(t) \quad \tilde{Y} = Y - Y_r(t) \quad v = u - u_r(t) \\ x = \tilde{X} + P(t)\tilde{Y} \quad y = \tilde{Y} \quad (16)$$

where  $P(\cdot)$  is the function defined in (13), the dynamics (2) become

$$\begin{cases} \dot{x} = Mx + h_1(y, t) + h_2(y, v, t)v \\ \dot{y} = f_0(y, t) + f_2(y, v, t)v \end{cases} \quad (17)$$

where  $h_1(\cdot), h_2(\cdot), f_0(\cdot)$  and  $f_2(\cdot)$  are functions of class  $C^1$ , bounded with respect to  $t$ , and where  $h_1(\cdot)$  is such that there exists a continuous positive function  $\gamma(\cdot)$  such that

$$|h_1(y, t)| \leq \gamma(|y|)|y|^2. \quad (18)$$

**Theorem 2.3:** If Assumptions A1–A3 are satisfied, there exists a function  $\kappa(\cdot)$  of class  $\mathcal{K}_\infty$  and of class  $C^2$ , a smooth saturation  $\sigma(\cdot)$ , such that the derivative of the Lyapunov function

$$U(x, y, t) = \kappa(V(y, t)) + \int_0^{|x|_Q} \sigma(s) ds \quad (19)$$

along the trajectories of (17) in closed-loop with

$$v(x, y, t) = -\lambda(y) \left[ \kappa'(V(y, t)) \frac{\partial V}{\partial y}(y, t) f_2(y, 0, t) \right. \\ \left. + \sigma(|x|_Q) \frac{x^\top Q}{|x|_Q} h_2(y, 0, t) \right]^\top \quad (20)$$

where  $\lambda(y)$  is a strictly positive function of class  $C^1$ , satisfies

$$\dot{U}(x, y, t)_{(17)} \leq -\frac{1}{2} \kappa'(V(y, t)) W(y, t) - \frac{1}{2} \sigma(|x|_Q) \frac{x^\top R x}{|x|_Q} \\ - \frac{1}{2\lambda(y)} |v(x, y, t)|^2. \quad (21)$$

Moreover, for all  $\tilde{u}$  in  $]0, +\infty[$ , one can select a function  $\lambda(y)$  such that  $\bar{u}(X, Y, t) = u_r(t) + v(x, y, t)$  where  $v(x, y, t)$  is the function given in (20) with  $x, y$  defined in (16) satisfies:  $|\bar{u}(X, Y, t) - u_r(t)| \leq \tilde{u}$ . If  $(X_r(t), Y_r(t), u_r(t))$  are periodic functions, (2) in closed loop with  $\bar{u}(X, Y, t)$  admits  $(X_r(t), Y_r(t))$  as a globally uniformly asymptotically stable and a locally exponentially stable solution.

### III. GLOBAL UNIFORM ASYMPTOTIC STABILITY

Let us state the main result of this note.

**Theorem 3.1:** If (2) satisfies Assumptions A1–A3, then for all  $\tilde{u}$  in  $]0, +\infty[$ , there exists a continuous time-varying feedback law  $\bar{u}(X, Y, t)$  verifying

$$|\bar{u}(X, Y, t) - u_r(t)| \leq \tilde{u} \quad (22)$$

and such that the closed-loop system admits  $(X_r(t), Y_r(t))$  as a globally uniformly asymptotically and a locally exponentially stable solution.

*Proof:* To establish the result, we shall exhibit a strict Lyapunov function for the system (17) with the feedback law (20). The Lyapunov function (19) is not strict; the right-hand side of (21) with  $y = 0$  is not smaller than a negative-definite function of  $x$ . So, in a first step, we construct a Lyapunov function for the  $x$ -subsystem of (17) whose derivative along the trajectories of the system is negative-definite in  $x$  when  $y = 0$ . With this function in hand, we shall be able to build in a second step a strict Lyapunov function for the overall system.

The assumptions of Theorem 3.1 ensure that Theorem 2.3 applies. So there exists a function  $U(\cdot)$  given in (19) and a feedback law (20) such that inequality (21) holds. Notice that from (20), we have

$$v(x, 0, t) = -\lambda_0 \frac{\sigma(|x|_Q)}{|x|_Q} D(t)^\top Q x, \quad \lambda_0 = \lambda(0). \quad (23)$$

To make our arguments simpler, we restrict ourselves by imposing on  $\sigma(\cdot)$  to be a linear saturation function, bounded in norm by one and equal to the identity function on  $] -1/2, 1/2[$ .

#### A. First Step: A Lyapunov Function for the $x$ Subsystem

We start the construction with the following result established in Appendix A.

**Lemma 3.2:** Under (6) and Assumption A3, for the system

$$\dot{x} = [M - \varepsilon D(t)D(t)^\top Q] x \quad (24)$$

where  $\varepsilon$  is a strictly positive-real number, there exists a continuously differentiable, bounded, positive-definite, symmetric matrix  $Q_\varepsilon(t)$  such that

$$\overbrace{\chi^\top Q_\varepsilon(t) \chi}_{(24)} = -|\chi|^2. \quad (25)$$

Then, with  $\lambda_0$  given in (23) and  $\rho$  a strictly positive-real number to be specified later on, we let

$$\mathcal{Q}(x, t) = \rho \left( x^\top Q x \right)^2 + x^\top Q_{\lambda_0}(t) x. \quad (26)$$

This function combines the strict Lyapunov function given by  $Q_{\lambda_0}(t)$  with the one given by  $Q$ . This construction is reminiscent from the one proposed in [5] (see also [14]). The key point about  $\mathcal{Q}(\cdot)$  is the following property established in Appendix B.

*Lemma 3.3:* Consider the following system:

$$\dot{\chi} = M\chi + D(t)v(\chi, 0, t). \quad (27)$$

There exists  $\rho^*(\lambda_0) > 0$  such that, for all  $\rho \geq \rho^*(\lambda_0)$

$$\dot{\mathcal{Q}}(\chi, t)_{(27)} \leq -\lambda_0 \rho \sigma (|\chi|_Q) |\chi|_Q \left| D(t)^\top Q \chi \right|^2 - \frac{1}{2} |\chi|^2. \quad (28)$$

From now on,  $\rho$  is related to  $\lambda_0$  as indicated by this lemma.

To exploit easily the function  $\mathcal{Q}(\cdot)$  in the forthcoming construction of a strict Lyapunov function for the system (17), it is convenient to modify it as

$$A(\mathcal{Q}(x, t)) = \arctan(\mathcal{Q}(x, t)). \quad (29)$$

To simplify the notation, we use  $A(\cdot)$  to denote  $\arctan(\cdot)$ .

The derivative of  $A(\mathcal{Q}(x, t))$  along the solutions of the system (17) in closed-loop with (20) is given by

$$\overbrace{A(\mathcal{Q}(x, t))}_{(17)} = A'(\mathcal{Q}(x, t)) \left[ \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial x}(x, t) [Mx + h_1(y, t) + h_2(y, v(x, y, t), t)v(x, y, t)] + \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial t}(x, t) \right]. \quad (30)$$

Observe that the function  $\arctan(\cdot)$  admits the following first derivative:  $\arctan'(q) = 1/(1+q^2)$ . It follows that  $|A'(\mathcal{Q})(\partial \mathcal{Q}/\partial x)| < 1$ . Using this inequality, (28), and

$$\dot{\mathcal{Q}}(\chi, t)_{(27)} = \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial \chi}(\chi, t) [M\chi + D(t)v(\chi, 0, 0)] + \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial t}(\chi, t) \quad (31)$$

we deduce by adding and subtracting the term  $D(t)v(x, 0, t)$  in (30) that

$$\overbrace{A(\mathcal{Q}(x, t))}_{(17)} \leq -A'(\mathcal{Q}(x, t)) \left( \lambda_0 \rho \sigma (|\chi|_Q) |\chi|_Q \left| D(t)^\top Q x \right|^2 + \frac{1}{2} |x|^2 \right) + |h_1(y, t)| + \left| A'(\mathcal{Q}(x, t)) \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial x}(x, t) \right| \cdot |h_2(y, v(x, y, t), t)v(x, y, t) - h_2(0, 0, t)v(x, 0, t)|. \quad (32)$$

To obtain an estimation of the last term, we remark that the definition of  $v$  in (20) and the inequalities (8) and (9) imply the existence of  $c > 0$  and a positive continuous function  $\xi_2(\cdot)$  such that

$$|v(y, x, t) - v(0, x, t)| \leq \xi_2(|y|) |y| |f_2(y, 0, t)| + c |\lambda(y) h_2(y, 0, t) - \lambda_0 h_2(0, 0, t)|. \quad (33)$$

However, since  $\lambda(\cdot)$ ,  $f_2(\cdot)$ ,  $h_2(\cdot)$  are of class  $C^1$ , and both  $Y_r(t)$  and  $u_r(t)$  are bounded, this inequality can be reduced to

$$|v(y, x, t) - v(0, x, t)| \leq \xi_3(|y|) |y| \quad (34)$$

with  $\xi_3(\cdot)$  a positive continuous function. With the same arguments and the boundedness of the function  $v$ , we get

$$|h_2(y, v(y, x, t), t) - h_2(0, 0, t)| \leq \xi_4(|y|) |y| + c |v(y, x, t)| \quad (35)$$

with  $c > 0$  and  $\xi_4(\cdot)$  a positive continuous function. So, finally, with the boundedness of  $v$  and  $h_2(0, 0, t)$ , we get

$$|h_2(y, v(y, x, t), t)v(y, x, t) - h_2(0, 0, t)v(0, x, t)| \leq \Xi(|y|) |y| + c |v(0, x, t)|^2 \quad (36)$$

with  $c > 0$  and  $\Xi(\cdot)$  a positive continuous function. By using this estimation, (32) becomes

$$\overbrace{A(\mathcal{Q}(x, t))}_{(17)} \leq -A'(\mathcal{Q}(x, t)) \left( \lambda_0 \rho \sigma (|\chi|_Q) |\chi|_Q \left| D(t)^\top Q x \right|^2 + \frac{1}{2} |x|^2 \right) + |h_1(y, t)| + \left| A'(\mathcal{Q}(x, t)) \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial x}(x, t) \right| \cdot (\Xi(|y|) |y| + c |v(0, x, t)|^2). \quad (37)$$

By completing the squares, we have

$$\overbrace{A(\mathcal{Q}(x, t))}_{(17)} \leq \frac{1}{4\varepsilon} \Xi(|y|)^2 |y|^2 + |h_1(y, t)| - A'(\mathcal{Q}(x, t)) \cdot \left( \lambda_0 \rho \sigma (|\chi|_Q) |\chi|_Q \left| D(t)^\top Q x \right|^2 + \frac{1}{2} |x|^2 \right) + A'(\mathcal{Q}(x, t)) \left( c \left| \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial x}(x, t) \right| |v(0, x, t)|^2 + \varepsilon A'(\mathcal{Q}(x, t)) \left| \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial x}(x, t) \right|^2 \right) \quad (38)$$

where  $\varepsilon$  is any strictly positive-real number. To simplify further this inequality, we give the following result established in Appendix C.

*Lemma 3.4:* The constants  $\rho > 0$  and  $\lambda_0 > 0$  being given, there exists  $\varepsilon > 0$  such that

$$\varepsilon A'(\mathcal{Q}(x, t)) \left| \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial x}(x, t) \right|^2 \leq \frac{1}{8} |x|^2 \quad (39)$$

and if  $\lambda_0$  is sufficiently small, by choosing  $\rho$  sufficiently large, the inequality

$$c \left| \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial x}(x, t) \right| |v(0, x, t)|^2 \leq \frac{1}{8} |x|^2 + \frac{1}{2} \lambda_0 \rho \sigma (|\chi|_Q) |\chi|_Q \left| D(t)^\top Q x \right|^2 \quad (40)$$

holds.

With  $\rho$  and  $\varepsilon$  chosen as indicated in Lemma 3.4 and with inequality (18), we finally get

$$\overbrace{A(\mathcal{Q}(x, t))}_{(17)} \leq \frac{1}{4\varepsilon} \Xi(|y|)^2 |y|^2 + \gamma(|y|) |y|^2 - A'(\mathcal{Q}(x, t)) \cdot \left[ \frac{1}{4} |x|^2 + \frac{1}{2} \lambda_0 \rho \sigma (|\chi|_Q) |\chi|_Q \left| D(t)^\top Q x \right|^2 \right]. \quad (41)$$

This is the key result we wanted to prove: the right-hand side of (41) is negative-definite with respect to  $x$  when  $y = 0$ .

### B. Second Step: A Strict Lyapunov Function for the Overall System

Since  $U(x, y, t) \geq \kappa(V(y, t))$ , [8, Lemma B2, App. B] ensures the existence of a function  $\bar{\kappa}(\cdot)$  of class  $C^2$ , of class  $\mathcal{K}_\infty$  and with a derivative strictly larger than one such that

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \bar{\kappa}'(U(x, y, t)) \kappa'(V(y, t)) W(y, t) \\ \geq \frac{1}{4\epsilon} \Xi(|y|)^2 |y|^2 + \gamma(|y|) |y|^2. \end{aligned} \quad (42)$$

Using this (42), (21), and (8)–(10), we deduce that the derivative of the function

$$\mathcal{U}(x, y, t) = A(Q(x, t)) + \bar{\kappa}(U(x, y, t)) \quad (43)$$

along the trajectories of (17) in closed-loop with the feedback  $v$  defined in (20) satisfies

$$\dot{\mathcal{U}}_{(17)}(x, y, t) \leq -\frac{1}{4} \kappa'(V(y, t)) W(y, t) - \frac{1}{4} A'(Q(x, t)) |x|^2. \quad (44)$$

According to (10) and (26), the boundedness property of  $Q_{\lambda_0}(t)$  and the fact that  $\kappa'(s) \geq 1, \forall s \geq 0$ , there exists  $c > 0$ , such that

$$\dot{\mathcal{U}}_{(17)}(x, y, t) \leq -\frac{1}{4} \alpha_3 (|y|) - \frac{1}{4} \frac{1}{1+c|x|^2+c|x|^8} |x|^2. \quad (45)$$

To conclude our proof, we remark the following.

- From (8), from the definition of  $\mathcal{U}(\cdot)$  in (43), the fact that  $A(\cdot)$  is  $\arctan(\cdot)$  and from [7, Corollary 3.4], we deduce that the origin of the system (17) with the control (20) is locally exponentially stable.
- Since  $|Q_{\lambda_0}(t)|$  is a bounded function, we have

$$\begin{aligned} \bar{\kappa}(\kappa(\alpha_1(|y|))) + \int_0^{|x|Q} \sigma(s) ds \\ \leq \mathcal{U}(x, y, t) \\ \leq A(c|x|^2 + c|x|^4) + \bar{\kappa}(\kappa(\alpha_2(|y|))) + c|x|Q \end{aligned} \quad (46)$$

for some  $c > 0$ . Therefore,  $\mathcal{U}(x, y, t)$  is positive-definite and possesses an infinitely small upper bound.<sup>1</sup>

- The right-hand side of the inequality (45) is a negative-definite function independent of  $t$ . So, [1, Ch. 10, Th. 3.1] applies; we deduce that the feedback  $\bar{u}(X, Y, t) = v(Y - Y_r(t), X - X_r(t)) + P(t)(Y - Y_r(t), t) + u_r(t)$  globally uniformly asymptotically stabilizes the trajectory  $(X_r(t), Y_r(t))$ . At last, observe that (22) is satisfied by  $\bar{u}(X, Y, t)$ .  $\triangle$

## IV. CONCLUSION

This note is devoted to the problem of globally tracking trajectories of nonlinear feedforward systems. It is the continuation of [9] which itself is an adaptation of the key ingredients of the forwarding method to the case of tracking problems.

The novelty of the present note is the construction of strict Lyapunov functions. This tool allows us to apply the technique repeatedly and to stabilize signals which are not necessarily periodic functions of the time. Moreover, we conjecture that it can be of great help to study robustness properties (like in particular disturbance-to-state  $L_2$  stability) induced by the proposed control laws.

<sup>1</sup>See the definitions of [1, Ch. 10, Th. 3.1].

## APPENDIX A PROOF OF LEMMA 3.2

According to [4, Ch. 3, Th. 3.10], Assumption A3 implies that there exists a continuously differentiable, bounded, positive-definite, symmetric matrix  $\Omega_1(t)$  such that

$$\overbrace{\xi^\top \Omega_1(t) \xi}_{(15)} = -|\xi|^2. \quad (47)$$

Using the equality  $M - \epsilon D(t)D(t)^\top Q = M + K_d(t)D(t)^\top Q + K_r(t)R^{1/2} - K_d(t)D(t)^\top Q - K_r(t)R^{1/2} - \epsilon D(t)D(t)^\top Q$ , we deduce that

$$\begin{aligned} \overbrace{\chi^\top \Omega_1(t) \chi}_{(24)} = -|\chi|^2 + 2\chi^\top \Omega_1(t) \left[ -K_d(t)D(t)^\top Q \right. \\ \left. - K_r(t)R^{1/2} - \epsilon D(t)D(t)^\top Q \right] \chi. \end{aligned} \quad (48)$$

The boundedness of  $\Omega_1(t)$ ,  $K_d(t)$ ,  $K_r(t)$  implies that one can determine  $c > 0$  such that

$$\overbrace{\chi^\top \Omega_1(t) \chi}_{(24)} \leq -\frac{1}{2} |\chi|^2 + c \left| D(t)^\top Q \chi \right|^2 + c \left| R^{1/2} \chi \right|^2. \quad (49)$$

It follows that:

$$\overbrace{\chi^\top \Omega_2(t) \chi}_{(24)} \leq -\frac{1}{2} |\chi|^2 - \epsilon \left| D(t)^\top Q \chi \right|^2 - \chi^\top R \chi \quad (50)$$

where  $\Omega_2(t) = \Omega_1(t) + (1+c+(c/\epsilon))Q$ . It follows that the system (24) is exponentially stable. This property and [4, Ch. 3, Th. 3.10] ensure the existence of  $Q_e(t)$  continuously differentiable, bounded, positive-definite, symmetric, and satisfying (25).  $\triangle$

## APPENDIX B PROOF OF LEMMA 3.3

A simple calculation yields

$$\begin{aligned} \dot{Q}(\chi, t)_{(27)} = -2\rho\lambda_0 \chi^\top Q \chi \frac{\sigma(|\chi|Q)}{|\chi|Q} \left| D(t)^\top Q \chi \right|^2 \\ - |\chi|^2 - 2\rho\chi^\top Q \chi \chi^\top R \chi + 2\lambda_0 \left[ \frac{\sigma(|\chi|Q)}{|\chi|Q} - 1 \right] \\ \cdot \chi^\top Q_{\lambda_0}(t) D(t) D(t)^\top Q \chi. \end{aligned} \quad (51)$$

Thanks to the boundedness of  $D(t)$  and  $Q_{\lambda_0}(t)$ , by completing the squares, we get

$$\begin{aligned} 2\lambda_0 \left[ \frac{\sigma(|\chi|Q)}{|\chi|Q} - 1 \right] \chi^\top Q_{\lambda_0}(t) D(t) D(t)^\top Q \chi \\ \leq \frac{1}{2} |\chi|^2 + \mu(\lambda_0) \lambda_0 \left[ \frac{\sigma(|\chi|Q)}{|\chi|Q} - 1 \right]^2 \left| D(t)^\top Q \chi \right|^2 \end{aligned} \quad (52)$$

where  $\mu(\cdot)$  is a function defined on  $[0, +\infty[$ . Since  $\sigma(\cdot)$  is a linear saturation equal to the identity function on  $] -1/2, 1/2[$ , there exists  $\rho^*(\lambda_0) > 0$  such that

$$\mu(\lambda_0) \left[ \frac{\sigma(|\chi|Q)}{|\chi|Q} - 1 \right]^2 \leq \rho \chi^\top Q \chi \frac{\sigma(|\chi|Q)}{|\chi|Q} \quad \forall \rho \geq \rho^*(\lambda_0). \quad (53)$$

So, for such a constant  $\rho$ , we have the result.  $\triangle$

## APPENDIX C PROOF OF LEMMA 3.4

- 1) We first prove (39). Let  $Q$  and  $Q_{\lambda_0}(t)$  be symmetric positive-definite matrices with

$$Q_{\lambda_0}(t) \leq S(\lambda_0) \quad \forall t \geq 0. \quad (54)$$

From the definition of  $Q(\cdot)$ , one can prove through lengthy but simple calculations that

$$\frac{\left| \frac{\partial Q}{\partial x}(x, t) \right|^2}{1 + Q^2(x, t)} \leq (16|Q|^2 + 16\rho^2|Q|^2 + 8S(\lambda_0)^2) |x|^2. \quad (55)$$

We deduce that (39) holds with  $\varepsilon = 1/(128(|Q|^2 + \rho^2|Q|^2 + S(\lambda_0)^2))$ .

- 2) Now, we prove (40), which is satisfied if, for a given new constant  $c \geq 0$ , there exist  $\lambda_0$  and  $\rho$  such that

$$c\rho\lambda_0^2 \left| x^T Q \right| \sigma(|x|_Q)^2 \left| D(t)^T Q x \right|^2 \leq |x|^2 + \rho\lambda_0\sigma(|x|_Q) |x|_Q \left| D(t)^T Q x \right|^2 \quad (56)$$

$$c|x^T Q \lambda_0(t)|\lambda_0^2 \frac{\sigma(|x|_Q)^2}{|x|_Q^2} \left| D(t)^T Q x \right|^2 \leq |x|^2 + \rho\lambda_0\sigma(|x|_Q) |x|_Q \left| D(t)^T Q x \right|^2. \quad (57)$$

Using  $|\sigma(\cdot)| \leq 1$ , one can check readily that (56) holds if  $c\lambda_0|x^T Q| \leq |x|_Q$ . This inequality is satisfied if  $\lambda_0$  is sufficiently small.

Inequality (57) is satisfied if, with  $\lambda_0$  chosen such that (57) holds, there exists  $\rho \geq 0$  such that

$$c\lambda_0^3 S(\lambda_0) |x| \frac{\sigma(|x|_Q)^2}{|x|_Q^2} \left| D(t)^T Q x \right|^2 \leq |x|^2 + \lambda_0\rho\sigma(|x|_Q) |x|_Q \left| D(t)^T Q x \right|^2. \quad (58)$$

Using the triangular inequality, we deduce that this inequality is satisfied if

$$c\lambda_0^3\sigma(|x|_Q)^3 \left| D(t)^T Q x \right|^2 \leq \rho|x|_Q^5 \quad (59)$$

where  $c > 0$  is a constant independent of  $\rho$  and  $\lambda_0$ . Since  $|D(t)|$  is smaller than a strictly positive constant for all  $t \geq 0$ , we deduce that one can choose a sufficiently large  $\rho$  such that (59) is satisfied.  $\triangle$

#### ACKNOWLEDGMENT

The authors would like to thank L. Praly for his help and comments.

#### REFERENCES

- [1] J. K. Hale, *Ordinary Differential Equations*. Malabar, FL: Krieger, 1995.
- [2] A. Isidori, *Nonlinear Control System*, 3rd ed. New York: Springer-Verlag, 1995.
- [3] M. Krstic, I. Kanellakopoulos, and P. Kokotovic, *Nonlinear and Adaptive Control Design*. New York: Wiley, 1995.
- [4] H. Khalil, *Nonlinear Systems*, 2nd ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1996.
- [5] W. Liu, Y. Chitour, and E. Sontag, "Remarks on finite gain stabilizability of linear systems subject to input saturation," *SIAM J. Control Optim.*, vol. 34, pp. 1190–1219, July 1996.
- [6] R. Marino, I. Kanellakopoulos, and P. Kokotovic, "Adaptive tracking for feedback linearizable SISO systems," in *Proc. 28th Conf. Decision Control*, Tampa, FL, Dec. 1989.
- [7] P. Martin, S. Devasia, and B. Paden, "A different look at output tracking: Control of a VTOL aircraft," *Automatica*, vol. 32, no. 1, pp. 101–107, 1996.
- [8] F. Mazenc and L. Praly, "Adding an integration and global asymptotic stabilization of feedforward systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 41, pp. 1559–1578, Nov. 1996.
- [9] —, "Asymptotic tracking of a reference state of systems with feedforward structure," *Automatica*, vol. 36, pp. 179–187, 2000.
- [10] R. Ortega, A. Loria, P. J. Nicklasson, and H. Sira-Ramirez, *Passivity-Based Control of Euler-Lagrange Systems*. New York: Springer-Verlag, 1998.
- [11] K. Y. Pettersen and H. Nijmeijer, "Global practical stabilization and tracking of an underactuated ship—A combined averaging and backstepping approach," in *Proc. IFAC Conf. Systems Structure Control*, Nantes, France, July 1998, pp. 59–64.
- [12] R. Sepulchre, M. Jankovic, and P. Kokotovic, *Constructive Nonlinear Control*. New York: Springer-Verlag, 1996.
- [13] A. Teel, "Feedback stabilization: Nonlinear solutions to inherently nonlinear problems," Mem., UCB/ERL M92/65, June 12, 1992.
- [14] —, "A nonlinear small gain theorem for the analysis of control systems with saturation," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 41, pp. 1256–1270, Sept. 1996.

### Optimal Control of a Resource-Sharing Multiprocessor With Periodic Maintenance

Konstantin Kogan, Sheldon Lou, and Avi Herbon

**Abstract**—Shared resources and the processes that control them play a critical role in the functioning of concurrent systems. This note analyzes the production control of a workstation producing a number of products concurrently. The workstation is periodically stopped for maintenance. The objective of the production control is to minimize inventory and backlog costs over an infinite time horizon. Using the maximum principle and under the so-called agreeable cost structure, we derive the optimal production control. We prove that under this cost structure, the problem can be solved in polynomial time.

#### I. INTRODUCTION

Sharing resources is common in industrial applications. Advances in information technology have challenged Internet and database suppliers with the problem of providing a high level of service in the face of permanently growing demands. Specifically, the explosive growth of the Internet and the World Wide Web has brought a dramatic increase in the number of users that compete for the shared resources of distributed system environments [10]. Similarly, efficient control of shared resources is crucial for data base processing where online memory is allocated to each microprocessor [11], [8], as well as for designing a high-performance robot controller with multiple arithmetic processing units (APUs) [1]. Besides these modern applications, the classical problem of optimal scheduling of flexible-manufacturing systems, which comprise a number of work-cells where production resources are shared remains of significant practical importance [14].

As technology progresses, systems with shared resources become more complex. In order to realize the full economic life cycle of these systems, as well as to obtain maximum availability and reliability

Manuscript received January 4, 2000; revised October 9, 2001. Recommended by Associate Editor X. Zhou.

K. Kogan is with the Department of Interdisciplinary Studies—Logistics, Bar-Ilan University, Ramat-Gan 52900, Israel, and also with the Department of Computer Sciences, Holon Academic Institute of Technology, Holon 59102, Israel (e-mail: kogank@mail.biu.ac.il).

S. Lou is with the College of Business Administration, California State University San Marcos, San Marcos, CA 92096-0001 USA (e-mail: lou@csusm.edu).

A. Herbon is with the Department of Management and Industrial Engineering, Ariel College, Ariel 44837, Israel.

Publisher Item Identifier 10.1109/TAC.2002.800747.

Deuxième partie

Sur la stabilité des modèles  
épidémiologiques

# 5

## Sur le calcul de $R_0$ et son rôle sur la stabilité globale

### 5.1 Introduction

Les phénomènes de seuil sont répandus dans l'étude des phénomènes scientifiques. Le calcul des quantités sans dimension qui déterminent la nature des transitions dynamiques ou des points de bifurcation, ont une longue tradition en épidémiologie. Sir Ronald Ross, qui a reçu le prix Nobel pour son travail sur la *malaria* (1902), a fondé le domaine de l'épidémiologie mathématique avec sa recherche pour établir (au sein d'une communauté épidémiologique) qu'il n'est pas nécessaire de conduire une population vectorielle (moustiques) à l'extinction pour éliminer la *malaria*. Il a fait cette remarque après avoir présenté un modèle mathématique pour la *malaria* en 1911 [82]. Il a utilisé son modèle pour montrer qu'amener la population de moustiques au dessous d'un certain seuil était suffisant pour éliminer la *malaria*. Ce seuil a naturellement dépendu des facteurs biologiques tels que le taux de piqûre et la capacité vectorielle (rapport du vecteur à la population humaine). Son travail mathématique a été intensivement employé non seulement dans l'étude de la *malaria* (voir [62]) mais également dans l'étude d'autres maladies [1, 14].

L'importance des procédés de contacts (bien identifiés par Ross dans son travail sur la *malaria*) est au centre de l'étude des phénomènes de seuil (voir [15, 19]). Dans un récent livre, Diekmann et Heesterbeek [26] ont présenté une étude approfondie et systématique du phénomène de seuil. Ils définissent le nombre de reproduction de base  $R_0$  comme le

rayon spectral de l'opérateur de la prochaine génération. Ce nombre sans dimension est très souvent calculé à partir de l'étude et du calcul des valeurs propres de la matrice jacobienne au point d'équilibre non endémique. Cependant, lorsque le système étudié a une dimension supérieure à 4, le critère de Routh-Hurwitz donne des formules qui ne sont pas directement exploitables.

Indépendamment du fait que  $R_0$  peut être explicitement calculé ou pas, son rôle sur l'étude de la stabilité des points d'équilibre peut être déterminé. La plupart des modèles épidémiologiques ont au moins deux points d'équilibre : un point d'équilibre non endémique et un point d'équilibre endémique. En général, on montre que le point d'équilibre non endémique est globalement asymptotiquement stable (GAS) lorsque  $R_0 < 1$  et instable lorsque  $R_0 > 1$ . En outre dans beaucoup de modèles épidémiologiques, on montre que la condition  $R_0 > 1$  implique l'existence d'un point d'équilibre endémique localement asymptotiquement stable (LAS). En plus, plusieurs modèles trouvés dans la littérature ont été employés pour montrer que lorsque  $R_0$  croise le seuil  $R_0 = 1$ , une bifurcation transcritique a lieu, c'est à dire, la stabilité locale asymptotique est transférée à partir du point d'équilibre non endémique à un nouveau point d'équilibre endémique (positif). Dans certains cas, on montre que le transfert de la stabilité asymptotique est indépendant des conditions initiales, c'est à dire globale.

Cependant, comme nous l'avons souligné un peu plus haut, le calcul du nombre de reproduction de base  $R_0$  est souvent difficile à cause de la complexité du modèle étudié. Aussi, il existe dans la littérature des conditions de seuil équivalentes à  $R_0 < 1$  qui permettent d'étudier la stabilité globale de certaines classes de modèles épidémiologiques.

Dans ce chapitre, nous proposons un algorithme simple pour déterminer une condition de seuil  $R_0$  pour une classe de modèles épidémiologiques. Nous exploitons la structure compartimentale d'une classe de modèles épidémiologiques pour calculer un paramètre de seuil. Son rôle sur la stabilité asymptotique globale du point d'équilibre non endémique est exploré. L'utilisation de cette méthode est illustrée sur les modèles épidémiologiques du paludisme [72] et de la dengue [29]. Nous corrigeons quelques erreurs contenues dans [72]. En conclusion, des conditions qui clarifient le raccordement entre le paramètre de seuil



$R_0$  et la stabilité asymptotique globale du point d'équilibre non endémique sont données.

## **5.2 Résultat**



# On the Computation of $R_0$ and the Stability in Models Vector-Transmitted Diseases

S. Bowong<sup>1</sup>, J. L. Dimi<sup>1,2</sup>, J. C. Kamgang<sup>1,3</sup> and G. Sallet<sup>1</sup>

<sup>1</sup>INRIA Lorraine & University of Metz

MMAS (UMR CNRS 7122)), I.S.G.M.P. Bât A,

Ile de Saulcy, 57045 Metz Cedex 01, France.

Tel: +33 3 87 54 72 80, Fax: +33 3 87 54 72 77

<sup>2</sup> Département de Mathématiques, Faculté des Sciences,

Université Marien Ngouabi, B.P. 69 Brazzaville (Congo)

<sup>3</sup> Département de Mathématiques, Faculté des Sciences,

Université Yaoundé I, Yaoundé (Cameroun)

Email {bowong, dimi, kamgang, sallet}@loria.fr

Soumis à Mathematical and Computer modelling

## Abstract

Motivated by papers [1, 12, 19] we give a sufficient condition for the disease free equilibrium to be globally asymptotically stable for some epidemiological models. We pointed out and correct some errors contained in [19]. As a by product we give an algorithm to compute threshold condition.

## 1 Introduction

In this paper, motivated by [11], we consider an epidemiological model that can be

written in the form

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = g(x_1, x_2) \end{cases} \quad (1)$$

where  $x_1 \in \mathbb{R}_+^{n_1}$ ,  $x_2 \in \mathbb{R}_+^{n_2}$  and  $g(x_1, 0) = 0$ . The vector  $x_1$  denotes the number of susceptibles and other classes of uninfected individuals. The variable  $x_2$  denotes the number of infected individuals capable of transmitting the infection (e.g., latents, infectious, etc.). The functions  $f$  and  $g$  are supposed to be  $C^1$ .

We have some biological hypothesis on this systems:

1. First we suppose that the system is defined on a compact positively invariant subset  $\Omega$  of the positive orthant  $\mathbb{R}_+^n = \mathbb{R}_+^{n_1} \times \mathbb{R}_+^{n_2}$ ,
2. The appearance of new infective individuals comes from the different compartments of infected individuals. In other words, if the initial state is in the manifold  $\{x_2 = 0\}$  the forward trajectory of the system stays in this manifold. This means that  $\mathbb{R}_+^{n_1}$  (which we identify with  $\mathbb{R}_+^{n_1} \times \{0\}$  in  $\mathbb{R}_+^{n_1} \times \mathbb{R}_+^{n_2}$ ) is invariant by the system. This implies that for any  $x_1 \in \Omega$

$$g(x_1, 0) = 0$$

Since  $g$  is  $C^1$ , we can write

$$g(x_1, x_2) = A_3(x) x_2 \quad (2)$$

where  $A_3(x)$  is a  $n_2 \times n_2$  continuous matrix.

3. We suppose that there exists a disease free equilibrium of the system  $x_1^* \in \Omega \subset \mathbb{R}_+^{n_1}$ . Since  $f$  is  $C^1$ , we can write

$$f(x_1, x_2) = A_1(x) (x_1 - x_1^*) + A_2(x) x_2 \quad (3)$$

where  $A_1$  is  $n_1 \times n_1$  and  $A_2$  is  $n_1 \times n_2$ .

So we consider the pseudo-triangular form system:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1(x) (x_1 - x_1^*) + A_2(x) x_2 \\ \dot{x}_2 = A_3(x) x_2 \end{cases} \quad (4)$$

Since epidemiological systems are peculiar compartmental systems, we deduce that the matrix

$$A(x) = \begin{bmatrix} A_1(x) & A_2(x) \\ 0 & A_3(x) \end{bmatrix} \quad (5)$$

is a Metzler matrix (i.e. off diagonal terms are nonnegative).

Now we add a reasonable hypothesis: the disease free equilibrium  $x_1^* \in \mathbb{R}_+^{n_1}$  is globally asymptotically stable on  $\mathbb{R}_+^{n_1} \cap \Omega$ . This implies that for the system in  $\mathbb{R}_+^{n_1} \cap \Omega$

$$\dot{x}_1 = A_1(x_1)x_1 \quad (6)$$

$x_1^*$  is a globally asymptotically stable equilibrium.

In this paper, we give a sufficient threshold condition for system (4). We examine how our condition is related to the basic reproduction ratio  $R_0$ . We give a simple algorithm to compute  $R_0$ , as well as our necessary stability condition system of this kind .

As an application we investigate two models of vectorial diseases: malaria and dengue fever, respectively of dimension 7 and 9. The malaria model come from [19]. We show that the stability results of [19] are incorrect; and we give a necessary condition for global asymptotic stability of the disease free equilibrium.

## 2 Notations and Basic Definitions

Throughout this paper, we shall use the following notations:

- The stability modulus of matrix  $A$  is denoted by  $\alpha(A) = \max_{\lambda \in Sp(A)} \mathcal{R}_e(\lambda)$  where  $\mathcal{R}_e(\lambda)$  denotes the real part of the eigenvalue  $\lambda$  of  $A$ . [3]
- $\rho(A)$  is the spectral bound of matrix  $A$ , i.e., the greatest singular value of  $A$  [3].
- $\mathbb{R}_+$  is the set of nonnegative reals.
- $\mathfrak{M}_{m,n}$  denote the set of real matrices with  $m$  rows and  $n$  columns.

We denote as in [3]

- $x \geq 0$  iff  $x_i \geq 0$  for any  $i$
- $x \gg 0$  iff  $x_i > 0$  for any  $i$

**Definition 1** (*Metzler matrix*) [5, 17] : A real matrix  $A = a_{ij}$  is Metzler if  $a_{ij} \geq 0$ ,  $\forall i \neq j$ .

**Proposition 1** (*Metzler stable matrix*): If  $A$  is Metzler stable, the following are equivalent

1.  $\alpha(A) < 0$ .
2.  $A$  is Metzler and  $-A^{-1} \geq 0$ .
3. There exists a vector  $c \gg 0$  such that  $Ac \ll 0$ .

To prove this proposition we use another definition.

**Definition 2** (*M-matrice*): A non singular real matrix  $M$  is said to be a *M-Matrix* if  $-M$  is a Metzler matrix.

**Definition 3** (*Regular splitting*): For a real Metzler matrix  $A$ ,  $A = D + M$  is a regular splitting if  $D$  is a Metzler stable matrix and  $M \geq 0$ .

In the literature there is many references and results on M-matrices [7, 8].

## 3 Main Results

### 3.1 Computation of $R_0$

The basic reproduction number  $R_0$  is typically defined as the average number of secondary cases produced by a "typical" infected (assumed infectious) individual during his/her entire life (infectious period) when introduced in a population.  $R_0$  is defined by Dieckmann and al. [1, 2] by using the regular splitting associated to the diagonal of the Metzler matrix associated with "infected" individuals.

**Proposition 2** (Varga,1962, Theorem 3.13, [6]) :

Let  $A = D + M$  be a regular splitting of a real matrix  $A$  then  $A$  is Metzler stable if and only if  $\rho(-D^{-1}M) < 1$

**Proof:** The proof of Proposition 2 is in Varga (1960) [6, 7]. This is also in Bermann and Plemmons [8] : the condition  $N_{45}$  expressed in terms of M-matrices. From this proposition the following is immediately deduced.

$$\begin{aligned}
 \alpha(A) < 0 &\iff \rho(-D^{-1}M) < 1 \\
 \alpha(A) = 0 &\iff \rho(-D^{-1}M) = 1 \\
 \alpha(A) > 0 &\iff \rho(-D^{-1}M) > 1
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

All regular splitting give an equivalent threshold condition on the parameters. Only the spectral bound of the regular splitting associated to the diagonal of  $A$  give  $R_0$  which has

a biological meaning. In [2] this result is attributed to Nold (1980) [9], but is already in Varga (1960) [6] and in Berman and Plemmons [8]. We give an easy algorithm to compute one of the equivalent threshold conditions (obviously related to  $R_0$ ).

Let  $x^* = (x_1^*, 0) \in \mathbb{R}_+^{n_1+n_2}$  denote the disease-free equilibrium (DFE), that is,

$$f(x_1^*, 0) = g(x_1^*, 0) = 0$$

In view of the expression (4) of the system, the jacobian matrix at the DFE  $x_1^*$  can be written as

$$J = \begin{bmatrix} A_1(x_1^*) & A_2(x_1^*) \\ 0 & A_3(x_1^*) \end{bmatrix} \quad (8)$$

Since  $\dot{x}_1 = A_1(x_1)x_1$  is globally asymptotically stable at  $x_1^*$ , the Jacobian  $A_1(x_1^*)$  is non unstable, i.e.,

$$\alpha(A_1(x_1^*)) \leq 0$$

By the block triangular form of  $J$  the local stability of  $x_1^*$  is then associated to the stability of the Metzler matrix  $A_3(x_1^*)$ . Then  $\alpha(A_3(x_1^*)) < 0$  is a threshold condition for local stability, and  $\alpha(A_3(x_1^*)) > 0$  is a local condition for unstability. This result does not depends on the regular splitting. When the splitting is  $A = D + M$  with  $D$  diagonal, from [1,2] the threshold condition associated to  $R_0$  is:

$$R_0 = \rho(-D^{-1}M) \quad (9)$$

We have reduced the problem of expressing a threshold conditions to giving a condition for stability of a Metzler matrix. Now using the specificity of Metzler matrices we shall give an algorithm to obtain conditions for a Metzler matrix to be stable. Usually threshold conditions are obtained by Routh-Hurwith techniques from the jacobian at the DFE. But Routh-Hurwith conditions are usually not tractable when the dimension is superior to 4. Even more often, the Routh-Hurwith criteria remain implicit and do not yield an explicit formula. Our algorithm does not suffer from these limitations. The following facts are well known (and can be deduced easily from Proposition 1)

- any principal submatrix of a Metzler stable matrix is Metzler stable
- as a consequence a necessary condition for a Metzler matrix to be stable is that the diagonal is negative

About the jacobian matrix  $J$ , we have the following result:

**Proposition 3** : Let  $M$  be a Metzler matrix written in blocks

$$M = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{bmatrix}$$

$M$  is Metzler stable if and only if  $\mathcal{A}$  and  $\mathcal{D} - \mathcal{C}\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}$  are Metzler stable.

This proposition gives the algorithm, if we remark that 2-dimensional Metzler matrix  $\begin{bmatrix} -a & b \\ c & -d \end{bmatrix}$  with  $(a, b, c, d) \geq 0$  is Metzler stable if and only if  $ad - bc > 0$ . In a finite number of steps, we obtain a set of necessary and sufficient conditions.

**Proof:**

The condition is necessary :

Since  $M$  is Metzler stable, there exists  $c = (c_1, c_2)$  ( $c_1 \gg 0$  and  $c_2 \gg 0$ ) such that  $M c \ll 0$  which leads to

$$\begin{aligned} \mathcal{A}c_1 + \mathcal{B}c_2 &\ll 0 \\ \mathcal{C}c_1 + \mathcal{D}c_2 &\ll 0 \end{aligned} \tag{10}$$

The above inequalities imply that  $\mathcal{A}c_1 \ll 0$  and  $\mathcal{D}c_2 \ll 0$  which prove that  $\mathcal{A}$  and  $\mathcal{D}$  are Metzler stable. Since  $\mathcal{A}$  is Metzler stable,  $-\mathcal{A}^{-1} \geq 0$ . With this in mind, multiplying the first inequality of (10) by  $-\mathcal{C}\mathcal{A}^{-1} \geq 0$ , we obtain  $-\mathcal{C}c_1 - \mathcal{C}\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}c_2 \leq 0$ . From the second inequality of (10) we have  $\mathcal{D}c_2 \ll -\mathcal{C}c_1$ . Combining these two inequalities, one has  $(\mathcal{D} - \mathcal{C}\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B})c_2 \ll 0$  which implies that  $\mathcal{D} - \mathcal{C}\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}$  is a Metzler stable matrix.

The condition is sufficient:

We suppose that  $\mathcal{A}$  and  $\mathcal{D} - \mathcal{C}\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}$  are Metzler stable. So we have a vector  $c_2 \gg 0$  such that  $(\mathcal{D} - \mathcal{C}\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B})c_2 \ll 0$ . Setting  $c_3 = -\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}c_2 \geq 0$ , we have  $\mathcal{A}c_3 + \mathcal{B}c_2 = 0$  and  $\mathcal{C}c_3 + \mathcal{D}c_2 \ll 0$ . Let  $v \gg 0$  such that  $Av \ll 0$ , and  $c_1 = c_3 + \varepsilon v \gg 0$ . We choose  $\varepsilon > 0$  sufficiently small such that  $\mathcal{C}c_1 + \mathcal{D}c_2 = \mathcal{D}c_2 - \mathcal{C}\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}c_2 + \mathcal{C}\varepsilon v \ll 0$ . Since  $\mathcal{A}c_1 + \mathcal{B}c_2 = \varepsilon Av \ll 0$  we deduce that  $M$  is Metzler stable which ends the proof.

△

## 3.2 Stability Theorem

In this section, we show that under certain conditions, the disease free equilibrium is a globally asymptotically stable equilibrium for system (4) when the threshold parameter  $R_0$  is below 1.

To establish this result, we first present a stability theorem on which the main result of this section will be based.



Consider the autonomous system

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x) \\ X(x_0) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

**Theorem 1** : *If on a compact, positively invariant set  $\Omega$  containing an equilibrium  $x_0$  there exists a function  $V \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$  such that*

1.  $\dot{V}(x) = \langle \nabla V(x), X(x) \rangle \leq 0$  for all  $x \in \Omega$ .
2. *The restriction of  $X$  on the greatest positively invariant set  $M$  contained in  $\{x \in \Omega, \dot{V}(x) = 0\}$  is asymptotically stable.*

*Then  $x_0$  is an asymptotically stable equilibrium point for system (11).*

The proof of this theorem is a simple exercise from the paper of LaSalle (1968) [17] or the classical book of N. P. Bhatia-G. P. Szegö (1967) [24]. This result is immediate if the results of reduction of Seibert are used [19, 20]. The theorem is peculiar case of the reduction principle :

**Theorem 2 (Seibert: [19, 20])** : *We consider a dynamical system on  $X$  a locally metric space. Let  $K \subset Y$  two compact positively invariant sets in  $X$*

- i) *If  $K$  is asymptotically stable relatively to  $Y$ , if  $Y$  is stable then  $K$  is stable in  $X$*
- ii) *If  $K$  is an attractor relatively to  $Y$ , if  $Y$  is an attractor of  $X$ , then  $K$  is a weak attractor of  $X$*
- iii) *If  $K$  est asymptotically stable relatively to  $Y$ , if  $Y$  is asymptotically stable relatively to  $X$ , then  $K$  is asymptotically stable in  $X$*

If the function  $V$  is nonnegative this result is in Kalitine [21].

Consider now the system on the positively invariant set  $\Omega$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1(x)(x_1 - x_1^*) + A_2(x)x_2 \\ \dot{x}_2 = A_3(x)x_2 \end{cases} \quad (12)$$

In this paper, we study and analyse the model (12) under certain assumptions. To do this we make the following hypothesis :

**H<sub>1</sub>**: The system (12) is defined on a compact, positively invariant set  $\Omega$ .

**H<sub>2</sub>**: The sub-system  $\dot{x}_1 = A_1(x_1^*, 0)x_1$  is globally asymptotically stable.

**H<sub>3</sub>**: The matrix  $A_3(x)$  is Metzler and irreducible.

**H<sub>4</sub>**: There exists  $\bar{A}_3$  an irreducible upper-bound matrix for  $\mathfrak{M} = \{A_3(x) \mid x \in \Omega\}$  with the property that either  $\bar{A}_3 \notin \mathfrak{M}$  or if  $\bar{A}_3 \in \mathfrak{M}$ , i.e.,  $\bar{A}_3 = \max_{\Omega} \mathfrak{M}$ , then for any  $\bar{x} \in \Omega$  such that  $\bar{A}_3 = A_3(\bar{x})$ ,  $\bar{x} \in \partial\mathbb{R}_+^{n_2}$  (i.e., the points where the maximum is realized are on the boundary).

**H<sub>5</sub>**:  $\alpha(\bar{A}_3) \leq 0$

On these conditions, we have the following comments. Condition **H<sub>2</sub>** means that if there is no disease, all the population will stabilize at the disease free equilibrium. Condition **H<sub>1</sub>** is the case of many models with bounded demography of the literature. Condition **H<sub>3</sub>** is realistic because in most cases there are not a block of compartments with no interaction with others. Condition **H<sub>5</sub>** give a threshold condition for  $\bar{A}_3$  to be Metzler stable.

**Remark 1** : *We give a complicated condition **H<sub>4</sub>**. This is motivated by looking for the least upper bound matrix, to obtain the best conditions for the threshold given by **H<sub>5</sub>**. It can happen when the least upper bound is maximum. See also the following technical lemma.*

Moreover about the matrices  $A_3$  and  $\bar{A}_3$  we have the following technical lemma.

**Lemma 1** : *If  $A_3$  is Metzler irreducible and  $0 < A_3 \leq \bar{A}_3$  then  $\alpha(A_3) < \alpha(\bar{A}_3)$*

**Proof:**

There exists a positive constant  $m$  such that  $0 \leq A_3 + mI \leq \bar{A}_3 + mI$ . Since  $A_3$  is irreducible,  $A_3 + mI$  also. By Perron-Frobenius theorem (cf. [6, 8]) we have  $\rho(A_3 + mI) = \rho(A_3) + m$ . Since by Perron-Frobenius theorem [6, 8],  $\rho(A_3 + mI)$  is the spectral radius of  $A_3 + mI$ , we deduce  $\rho(\bar{A}_3 + mI) - m = \alpha(\bar{A}_3)$  and conclude that  $0 < \alpha(A_3) < \alpha(\bar{A}_3)$ .  $\triangle$

If system (12) satisfies the above five conditions, then the following theorem hold.

**Theorem 3** : *If all the conditions  $H_1$  to  $H_5$  and  $R_0 \leq 1$  are satisfied, then the DFE is a globally asymptotically stable for system (12).*

**Proof:**

Since  $\bar{A}_3$  is Metzler irreducible, as a consequence of Perron-Frobenius theorem (see proof of Lemma 1),  $\alpha(\bar{A}_3)$  is in the spectrum of  $\bar{A}_3$ , and there is a positive vector  $0 \ll v_2 \in \mathbb{R}_+^{n_2}$  such that

$$v_2^T \bar{A}_3 = \alpha(\bar{A}_3) v_2^T$$

Now we consider the following function

$$V(x) = \langle v_2 | x \rangle \quad (13)$$

where we identify as usually  $v_2$  with  $(0, v_2)$  in  $\mathbb{R}_+^{n_1} \times \mathbb{R}_+^{n_2}$ .

$V(x)$  is a positive semidefinite Lyapunov function on  $\Omega$ . The derivative of this function along the trajectories of system (12) satisfies

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= v_2^T \dot{x}_2 \\ &= v_2^T A_3(x) x_2 \end{aligned} \quad (14)$$

Taking into account condition  $H_4$ , Eq. (14) become

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &\leq v_2^T \bar{A}_3 x_2 \\ &\leq v_2^T \alpha(\bar{A}_3) x_2 \end{aligned} \quad (15)$$

Using condition  $H_5$ , one has  $\dot{V}(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}_+^{n_1+n_2}$ .

It remains to show that the restriction of system (12) is globally asymptotically stable on the invariant set  $M$  contained in  $E = \{x \in \Omega, / \dot{V}(x) = 0\}$ .

From (15), we have  $E = \{x \in \Omega, v_2^T A_3(x) x_2 = 0\}$ . We see that  $E \subset \partial\mathbb{R}_+^{n_2} \cap \Omega$ . If  $x_2$  realizes the maximum  $\bar{A}_3$ , there is nothing to prove by hypothesis  $\mathbf{H}_4$ . Now we suppose that  $x_2$  does not realize the maximum  $\bar{A}_3$ . We shall prove that  $x_2 \in \partial\mathbb{R}_+^{n_2}$ . By hypothesis  $A_3(x) \leq \bar{A}_3$  and  $A_3(x) \neq \bar{A}_3$ , by the preceding lemma  $\alpha(A_3(x_2)) < \alpha(\bar{A}_3(x_2))$ . Suppose  $x_2$  is not in the boundary, i.e.,  $x_2 \gg 0$ ,  $v_2^T A_3(x_2) \leq v_2^T \bar{A}_3 \leq 0$  is non positive, and nonzero because  $A_3(x_2)$  is non singular, then if  $x_2 \gg 0$  one has  $v_2^T A_3(x_2) x_2 < 0$ . Hence,  $x_2$  cannot be in  $E$ . Let  $M$  the greatest invariant set contained in  $E$ .

Let  $x \in M \subset E \subset \partial\mathbb{R}_+^{n_2} \cap \Omega$ , there exists  $i \in N_2 = [0, n_2]$ , such that  $x_i(t) = 0$  for all  $-\varepsilon \leq t < \varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ). Thus,  $(\dot{x}_2)_i(t) = \sum_{j \in N_2, i \neq j} (a_3)_{ij} x_j = 0$ . Then all the  $x_j$  for which  $(a_3)_{ij} \neq 0$  are nul on a positive interval. This proves that for all the indexes incident to  $i$  on the graph of incidence of the matrix  $A_3$  the correspondant component of  $x_2$  is null. Since the matrix  $A_3(x_2)$  is irreducible, the directed graphed is strongly connected, this proves that  $x_2 = 0$ . Hence  $M \subset \mathbb{R}_+^{n_1} \cap \Omega$ . By hypothesis  $\mathbf{H}_1$  the disease free equilibrium is globally asymptotically stable on  $M$  and this ends the proof. △

## 4 Applications

In this section, we show the usefulness of the results stated above to the malaria endemic and dengue fever.

## 4.1 Malaria Model

The following model was developed to study the dynamics of endemic malaria with variable human and mosquitoes populations (see Ngwa and Shu, 2000, [19]). The model is given by the following set of equations:

$$\begin{aligned}
 \dot{S}_h &= \lambda_h N_h + \beta_h R_h + r_h I_h - f_h(N_h) S_h - C_{vh} a_v \frac{I_v S_h}{N_h} \\
 \dot{E}_h &= C_{vh} a_v \frac{I_v S_h}{N_h} - (\nu_h + f_h(N_h)) E_h \\
 \dot{I}_h &= \nu_h E_h - (r_h + \alpha_h + \gamma_h + f_h(N_h)) I_h \\
 \dot{R}_h &= \alpha_h I_h - (\beta_h + f_h(N_h)) R_h \\
 \dot{S}_v &= \lambda_v N_v - f_v(N_v) S_v - \frac{C_{hv} a_v}{N_h} I_h S_v - \tilde{C}_{hv} a_v \frac{R_h S_v}{N_h} \\
 \dot{E}_v &= C_{hv} a_v \frac{I_h S_v}{N_h} + \tilde{C}_{hv} a_v \frac{R_h S_v}{N_h} - (\nu_v + f_v(N_v)) E_v \\
 \dot{I}_v &= \nu_v E_v - f_v(N_v) I_v
 \end{aligned} \tag{16}$$

where  $f_h(N_h)$  and  $f_v(N_v)$  are given by

$$f_h(N_h) = \nu_h + \nu_{2h} N_h, \quad f_v(N_v) = \nu_v + \nu_{2v} N_v \tag{17}$$

$S_h, E_h, I_h, R_h, S_v, E_v$  and  $I_v$  are susceptible humans, incubating humans, infectious humans, immune humans, susceptible mosquitoes, incubating mosquitoes and infectious mosquitoes, respectively. It was assumed that infectious mosquitoes never recovered. The population sizes  $N_h(t)$  and  $N_v(t)$  can be determined by  $N_h(t) = S_h(t) + E_h(t) + I_h(t) + R_h(t)$  and  $N_v(t) = S_v(t) + E_v(t) + I_v(t)$  or from the differential equations

$$\dot{N}_h = \lambda_h N_h - f_h(N_h) - \gamma_h I_h, \quad \dot{N}_v = \lambda_v N_v - f_v(N_v) \tag{18}$$

which is derived by adding the equations in (16). All the parameters are assumed to be positive. The population are governed by logistic equations, hence the restriction  $\lambda_h - \nu_h - \gamma_h > 0$  on parameters  $\lambda_h, \nu_h$  and  $\gamma_h$  guarantees the existence of a nonnegative steady-states solution for  $N_h$  from a biological point of view. The model (16) is defined in the positively invariant subset

$$\Omega = \{(S_h, E_h, I_h, R_h, S_v, E_v, I_v) \in \mathbb{R}_+^7, \quad 0 \leq S_h, E_h, I_h, R_h \leq N_h, \quad 0 \leq S_v, E_v, I_v \leq N_v\} \tag{19}$$

In their paper, Ngwa and Shu [19] consider the existence of steady-state solutions of the model, and the stability of the equilibria. They give a threshold  $\tilde{R}_0$  depending on time : Actually the system of differential equations is composed by seven equations. The authors replace this system by five nonautonomous differential equations. In their notations  $\xi$  is a function depending of time. Actually,  $\xi(t)$  is the ratio of the vectorial population by the human population, multiplied by a constant. For nonautonomous system

$$\dot{x} = f(t, x)$$

an equilibrium is a point  $x_0$  such that

$$\forall t, f(t, x_0) = 0$$

The authors give a threshold  $\tilde{R}_0$  depending on  $\xi$ , hence of time. Equating the equations of the nonautonomous model to zero yields a five-order polynomial with coefficient depending on time. The authors argue on Descartes rules of sign to conclude that the model has at least one equilibrium if  $\tilde{R}_0 < 1$ . Unfortunately this argument only proves that for any  $t$  there is a solution  $x^*(t)$ , depending on  $t$ , equating the equations to zero. This is not an equilibrium for the system. Then the Proposition 3.1 in section 3 is false.

For the stability of the equilibria, the authors "linearize" the model giving a Jacobian depending of  $\xi(t)$ . They use Routh-Hurwitz criterion to prove that this Jacobian has all his eigenvalues with negative real parts. It is well known [11] that for the nonautonomous linear equation

$$\dot{x} = A(t)x$$

this is not a sufficient condition for stability. Hence a fortiori nothing can be said for the nonautonomous system. Proposition 4.1 is then incorrect. For proving Proposition 4.2, the global stability of the DFE, the authors use Lyapunov function. They need three inequalities (see equation (26) in the quoted paper). It is true that theses three inequalities implies that  $\tilde{R}_0 \leq 0$ , the converse is not true, an easy counterexample can be given and once again Proposition 4.2 is false.

#### 4.1.1 Basic Reproduction Number

According to our notations, let  $x_1 = (S_h, S_v)$  and  $x_2 = (E_h, I_h, R_h, E_v, I_v)$ , the model (16) has the form (12) and the DFE is given by  $x^* = (N_h^*, N_v^*, 0, 0, 0, 0, 0)$  where  $N_h^* = \frac{\lambda_h - \nu_h}{\nu_{2h}}$  and  $N_v^* = \frac{\lambda_v - \nu_v}{\nu_{2v}}$ .

Thus, the Jacobian at the DFE has the form (8) with

$$A_1(x_1^*) = \begin{bmatrix} -\nu_h N_h^* & 0 \\ 0 & -\nu_v N_v^* \end{bmatrix}$$

$$A_2(x_1^*) = \begin{bmatrix} \lambda_h & r_h + \lambda_h & \beta_h + \lambda_h & 0 & C_{vh} \\ 0 & -C_{hv} a_v \frac{N_v^*}{N_h^*} & -\tilde{C}_{hv} a_v \frac{N_v^*}{N_h^*} & \lambda_v & \lambda_v \end{bmatrix}$$

and  $A_3(x_1^*)$  has the form of  $M$  given in Proposition 3 with

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} -(\nu_h + \lambda_h) & 0 & 0 \\ \nu_h & -(r_h + \alpha_h + \gamma_h + \lambda_h) & 0 \\ 0 & \alpha_h & -(\beta_h + \lambda_h) \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 & C_{vh} a_v \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0 & C_{hv} a_v \frac{N_v^*}{N_h^*} & \tilde{C}_{hv} a_v \frac{N_v^*}{N_h^*} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} -(\nu_v + \lambda_v) & 0 \\ \nu_v & -\lambda_v \end{bmatrix}$$

Clearly  $\mathcal{A}$  is always a Metzler stable matrix. Then the threshold condition reduce to the threshold condition for a 2-dimensional matrix :

$$\mathcal{D} - \mathcal{C}\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B} = \begin{bmatrix} -(\nu_v + \lambda_v) & \frac{\nu_h a_v^2 C_{vh} N_v^*}{N_h^* (\nu_h + \lambda_h) (r_h + \alpha_r + \gamma_h + \lambda_h)} \left( C_{hv} + \frac{\alpha_h \tilde{C}_{hv}}{(\beta_h + \lambda_h)} \right) \\ \nu_v & -\lambda_v \end{bmatrix}$$

Then we obtain

$$R_0 = \frac{\nu_v \nu_h a_v^2 C_{vh} N_v^* [(\beta_h + \lambda_h) C_{hv} + \alpha_h \tilde{C}_{hv}]}{N_h^* \lambda_v (\nu_v + \lambda_v) (\beta_h + \lambda_h) (\nu_h + \lambda_h) (r_h + \alpha_h + \gamma_h + \lambda_h)} \quad (20)$$

#### 4.1.2 Stability of the DFE

A simple manipulations can prove that the model (16) has the form (12), with,

$$A_1(x) = \begin{bmatrix} \lambda_h - f_h(N_h) & 0 \\ 0 & \lambda_v - f_v(N_v) \end{bmatrix}$$

$$A_2(x) = \begin{bmatrix} \lambda_h & r_h + \lambda_h & \beta_h + \lambda_h & 0 & C_{vh} \frac{S_h}{N_h} \\ 0 & -C_{hv} a_v \frac{S_v}{N_h} & -\tilde{C}_{hv} a_v \frac{S_v}{N_h} & \lambda_v & \lambda_v \end{bmatrix}$$

$$A_3(x) = \begin{bmatrix} -(\nu_h + f_h(N_h)) & 0 & 0 & 0 & C_{vh} a_v \frac{S_h}{N_h} \\ \nu_h & -\Lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_h & -(\beta_h + f_h(N_h)) & 0 & 0 \\ 0 & C_{hv} a_v \frac{S_v}{N_h} & \tilde{C}_{hv} a_v \frac{S_v}{N_h} & -(\nu_v + f_v(N_v)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_v & -f_v(N_v) \end{bmatrix}$$

where  $\Lambda = (r_h + \alpha_h + \gamma_h + f_h(N_h))$  and  $x = (S_h, S_v, E_h, I_h, R_h, E_v, I_v)$ .

Since the population vectorial and human are governed by logistic equations, we have a lower bound for these two populations

$$0 < N_h^0 \leq N_h \leq N_h^*, \quad 0 < N_v^0 \leq N_v \leq N_v^* \quad (21)$$

In this case the matrix  $\bar{A}_3$  is given by

$$\bar{A}_3 = \begin{bmatrix} -(\nu_h + f_h(N_h^0)) & 0 & 0 & 0 & C_{vh} a_v \frac{N_h^*}{N_h^0} \\ \nu_h & -\Lambda_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_h & -(\beta_h + f_h(N_h^0)) & 0 & 0 \\ 0 & C_{hv} a_v \frac{N_v^*}{N_h^0} & \tilde{C}_{hv} a_v \frac{N_v^*}{N_h^0} & -(\nu_v + f_v(N_v)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_v & -f_v(N_v^0) \end{bmatrix}$$

where  $\Lambda_0 = (r_h + \alpha_h + \gamma_h + f_h(N_h^0))$ .

$\bar{A}_3$  is strict upper bound (not a max). A necessary and sufficient condition for  $\bar{A}_3$  to be Metzler stable, is obtained by the same process as for  $R_0$ , reducing the condition to a 2-dimensional metzler matrix. Thus,  $\bar{A}_3$  is Metzler stable if the threshold parameter

$$R_c = \frac{\nu_v \nu_h a_v^2 C_{vh} N_v^0 [(\beta_h + f_h(N_h^0)) C_{hv} + \alpha_h \tilde{C}_{hv}]}{N_h^0 f_v(N_v^0) (\nu_v + f_v(N_v^0)) (\beta_h + f_h(N_h^0)) (\nu_h + f_h(N_h^0)) (r_h + \alpha_h + \gamma_h + f_h(N_h^0))} \quad (22)$$

is smaller than 1. Then we have the following result.

**Proposition 4** : *The disease-free equilibrium  $x^* = (N_h^*, N_v^*, 0, 0, 0, 0, 0)$  is globally asymptotically stable in  $\Omega$  if  $R_c \leq 1$ .*

**Proof:**

We apply Theorem 2 and check that the five hypothesis are satisfied. The restriction of the system to  $\mathbb{R}_+^{n_1}$  is given by the two subsystems :

$$\begin{aligned}\dot{S}_h &= (\lambda_h - \nu_h - \nu_{2h}S_h)S_h \\ \dot{S}_v &= (\lambda_v - \nu_v - \nu_{2v}S_v)S_v\end{aligned}\tag{23}$$

Since there are two independent logistic equations, the equilibrium  $\left(\frac{\lambda_h - \nu_h}{\mu_{2h}}, \frac{\lambda_v - \nu_v}{\mu_{2v}}\right)$  is globally asymptotically stable.

This proves also that the system is contained in a compact positively invariant set.

Since the elements under the main diagonal and the elements on the upper right corner of the matrix  $\bar{A}_3$  are never vanishing, it is straightforward to check that the directed graph associated to the matrix  $\bar{A}_3$  is strongly connected. Hence the matrix is irreducible.

The conditions  $\mathbf{H}_4$  and  $H_5$  are satisfied by the threshold condition. Since the population are governed by logistic equations, it is immediate that the trajectories are forward bounded.

Thus all conditions of Theorem 2 are satisfied and we can conclude that the DFE is a globally asymptotically stable equilibrium on  $\Omega$ .

△

## 4.2 Dengue Fever Model

We consider the following model developed in [23] to study the dynamics of dengue fever. The model equations are:

$$\begin{aligned}\dot{S} &= h - (B_1 + B_2)S - uS \\ \dot{I}_1 &= B_1S - \sigma_3 B_2 I_1 - uI_1 \\ \dot{I}_2 &= B_2S - \sigma_1 B_1 I_2 - uI_2 \\ \dot{Y}_1 &= \sigma_1 B_1 I_2 - (e_1 + u + r)Y_1 \\ \dot{Y}_2 &= \sigma_2 B_2 I_1 - (e_2 + u + r)Y_2 \\ \dot{R} &= r(Y_1 + Y_2) - uR\end{aligned}\tag{24}$$



and

$$\begin{aligned}
\dot{M} &= q - (A_1 + A_2)M - \delta M \\
\dot{V}_1 &= A_1M - \delta V_1 \\
\dot{V}_2 &= A_2M - \delta V_2
\end{aligned} \tag{25}$$

where

$$B_i = \frac{\beta_i V_i}{c + \omega_h N}, \quad A_i = \frac{\alpha_i (I_i + Y_i)}{c + \omega_v N}, \quad i = 1, 2. \tag{26}$$

$N = S + I_1 + I_2 + Y_1 + Y_2 + R$  and  $T = M + V_1 + V_2$  are the host and vector total population sizes respectively. Let

$$\begin{aligned}
\Omega &= \{(S, I_1, I_2, Y_1, Y_2, R, M, V_1, V_2) \in \mathbb{R}_+^9 : 0 < S + I_1 + I_2 + Y_1 + Y_2 + R \leq N, \\
&\quad 0 < M + V_1 + V_2 \leq T\}
\end{aligned} \tag{27}$$

be the subset on which the model (24) is defined.

#### 4.2.1 Basic Reproduction Number

The model (24) has the form (12) with  $x_1 = (S, M)$  and  $x_2 = (I_1, I_2, Y_1, Y_2, R, V_1, V_2)$ . Thus the DFE is  $(h/\mu, d/\delta, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$  and the Jacobian at the equilibrium has the form (8) with

$$\begin{aligned}
A_1(x_1^*) &= \begin{bmatrix} -\mu & 0 \\ 0 & -\delta \end{bmatrix} \\
A_2(x_1^*) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\beta_1 S^*}{c + \omega_h S^*} & -\frac{\beta_2 S^*}{c + \omega_h S^*} \\ -\frac{\alpha_1 M^*}{c + \omega_v S^*} & -\frac{\alpha_2 M^*}{c + \omega_v S^*} & -\frac{\alpha_1 M^*}{c + \omega_v S^*} & -\frac{\alpha_2 M^*}{c + \omega_v S^*} & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

and  $A_3(x_1^*)$  has the form of  $M$  given in Proposition 3 with

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \begin{bmatrix} -(e_1 + u + r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(e_2 + u + r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -u \end{bmatrix} \\
\mathcal{B} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{\beta_1 N^*}{c + \omega_h N^*} & 0 \\ 0 & \frac{\beta_2 N^*}{c + \omega_h N^*} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_1 M^*}{c + \omega_v N^*} & 0 & \frac{\alpha_1 M^*}{c + \omega_v N^*} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_2 M^*}{c + \omega_v N^*} & 0 & \frac{\alpha_2 M^*}{c + \omega_v N^*} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -\delta & 0 \\ 0 & -\delta \end{bmatrix}$$

where  $N^* = S^* = \frac{h}{u}$  and  $T^* = M^* = \frac{d}{\delta}$ . Clearly,

$$D - CA^{-1}B = \begin{bmatrix} -\delta + \frac{\alpha_1 \beta_1 N^* M^*}{u(c + \omega_h N^*)(c + \omega_v N^*)} & 0 \\ 0 & -\delta + \frac{\alpha_2 \beta_2 N^* M^*}{u(c + \omega_h N^*)(c + \omega_v N^*)} \end{bmatrix}$$

Consequently

$$R_0 = \max_i \left\{ \frac{\alpha_i \beta_i N^* M^*}{\delta u (c + \omega_h N^*)(c + \omega_v N^*)} \right\} \quad (28)$$

which is exactly the threshold parameter given in [12].

#### 4.2.2 Stability of DFE

The dynamics of the model (24) is similar to that of (12) by putting

$$A_1(x) = \begin{bmatrix} -u & 0 \\ 0 & -\delta \end{bmatrix}$$

$$A_2(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\beta_1 S}{c + \omega_h N} & -\frac{\beta_2 S}{c + \omega_h N} \\ -\frac{\alpha_1 M}{c + \omega_v N} & -\frac{\alpha_2 M}{c + \omega_v N} & -\frac{\alpha_1 M}{c + \omega_v N} & -\frac{\alpha_2 M}{c + \omega_v N} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_3(x) = \begin{bmatrix} -u - \frac{\sigma_2 \beta_2 V_2}{c + \omega_h N} & 0 & 0 & 0 & \frac{\beta_1 S}{c + \omega_h N} & 0 \\ 0 & -u - \frac{\sigma_1 \beta_1 V_1}{c + \omega_h N} & 0 & 0 & 0 & \frac{\beta_2 S}{c + \omega_h N} \\ 0 & \frac{\sigma_1 \beta_1 V_1}{c + \omega_h N} & -(e_1 + u + r) & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sigma_1 \beta_2 V_2}{c + \omega_h N} & 0 & 0 & -(e_2 + u + r) & 0 & 0 \\ \frac{\alpha_1 M}{c + \omega_v N} & 0 & \frac{\alpha_1 M}{c + \omega_v N} & 0 & -\delta & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_2 M}{c + \omega_v N} & 0 & \frac{\alpha_2 M}{c + \omega_v N} & 0 & -\delta \end{bmatrix}$$

and  $D = (h, \delta, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$ . The only difference is the migration term  $D$ . As we shall see in the sequel, this term does not causes any problem. As derived earlier, we can suppose that the following inequalities

$$0 < N^0 < N < N^*, \quad 0 < T^0 < T < T^* \quad (29)$$

hold. In this way, the matrix  $\bar{A}_3$  is given by

$$\bar{A}_3 = \begin{bmatrix} -u & 0 & 0 & 0 & \frac{\beta_1 T^*}{c + \omega_h N^*} & 0 \\ 0 & -u & 0 & 0 & 0 & \frac{\beta_2 T^*}{c + \omega_h N^*} \\ 0 & 0 & -(e_1 + u + r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(e_2 + u + r) & 0 & 0 \\ \frac{\beta_1 T^*}{c + \omega_v N^0} & 0 & 0 & \frac{\beta_1 T^*}{c + \omega_v N^0} & 0 & -\delta \\ 0 & \frac{\alpha_2 T^*}{c + \omega_v N^0} & 0 & \frac{\alpha_2 T^*}{c + \omega_v N^0} & 0 & -\delta \end{bmatrix}$$

Consider the threshold

$$R_c = \max_i \left\{ \frac{\alpha_i \beta_i S^* T^*}{\delta u (c + \omega_h N^*) (c + \omega_v N^0)} \right\} \quad (30)$$

If  $R_c > 1$ , then  $\bar{A}_3$  is Metzler stable. We have the following result about the stability of the DFE of the model (24).

**Proposition 5 :** *If  $R_{cr2} < 1$ , the DFE  $(h/\mu, d/\delta, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$  is globally asymptotically stable in  $\Omega$ .*

**Proof:**

The sub-system  $\dot{x}_1 = A_1(x_1^*, 0)x_1$  is reduced to

$$\begin{aligned} \dot{S} &= h - \mu S \\ \dot{M} &= q - \delta M \end{aligned} \quad (31)$$

which is globally asymptotically stable at  $S = h/\mu$  and  $M = q/\delta$  and the condition  $\mathbf{H}_1$  of Theorem 2 is satisfied. As in the malaria model example, it is not hard to show that the matrix  $\bar{A}_3$  is irreducible. Therefore all the conditions of Theorem 2 are satisfied which proves that the disease free equilibrium is globally asymptotically stable.

△

## 5 Conclusion

We give sufficient condition for two vectorial epidemiological models for the disease free equilibrium to be globally asymptotically stable. This condition is  $R_c \leq 1$  with  $R_0 < R_c$ . This raise the question what happens when  $R_0 < 1 < R_c$ . For the moment we have no answer on the two proposed models but an example of Feng and al. [13] (2000) shows that the disease free equilibrium can be not globally asymptotically stable.

## References

- [1] O. Dieckmann, J. A. P. Heesterbeek, On the definition and computation of the basic reproduction ratio in models for infectious diseases in heterogeneous populations, *J. Math. Biol.* 28, 365-382 (1990)
- [2] O. Dieckman and J. A. P. Heesterbeek, *Mathematical Epidemiology of Infectious Diseases: Model Building, Analysis and Interpretation*. Wiley, New York, 2000
- [3] H. C. Smith, *Monotone dynamical systems: an introduction to the theory of competitive and cooperation systems*, *Mathematical surveys and monographs*, AMS, 1995
- [4] S. Busenberg and K. Cook, *Vertically Transmitted Diseases: Models and Biomathematics* **23**, Springer-Verlag, New-York
- [5] D. G. Luenberger: *Introduction to dynamics: theory, models and applications*, John Wiley and New-York, 1979
- [6] R. S. Varga, *Matrix Iterative*, Prentice Hall series in Automatics computation (1962)
- [7] R. S. Varga, *Factorization and normalized iterative methods in boundary problems in differential equations*, R. E. Langer ed. Univ. of Press 121-142 (1960)
- [8] A. Berman and R. J. Plemmons: *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*, In *Applied Mathematics*, 1994
- [9] A.Nold, *Heterogeneity in disease-transmission modeling*, *Math. Biosci.* 52, 227-240, 1980
- [10] P.Seibert and R. Suarez, *Global stabilization of nonlinear cascade systems*, *SysControl Lett.* 14 (4),347-352 (1990)

- [11] L. Markus and H. Yamabe, Global stability criteria for differential equations, Osaka Math. J. 112,pp 305-317 (1960)
- [12] C. Castillo-Chavez, Z. Feng and W. Huang, On the computation of  $R_0$  and its role on global stability, Mathematical Approches for Emerging and Reemerging Infectious Diseases, An introduction, Springer, 1998
- [13] Castillo-Chavez, K. Cook and S. A. Levin: Results on the dynamics for models for the sexual transmission of human immunodeficiency virus, Appl. Math. Lett. **4**, 327-331, 1989
- [14] Z. Feng, C. Castillo-Chavez and A. Capurro: A model for TB with exogenous reinfection, Theo. Pop. Biol. **578**, 237-247, 2000
- [15] J. K. Hale, Ordinary Differential Equations, Malabar, F. L. Krieger (1980)
- [16] J. P. LaSalle and S. Lefschetz, Stability by Liapunov's direct method with applications, Academic Press, New York, (1961)
- [17] J. P. LaSalle, Theory for Ordinary Differential Equations, Journal of Differential Equations, **4**, 57-65 (1968)
- [18] J. P. LaSalle, The stability of dynamical systems, Regional Conference Series in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, (1976)
- [19] P. Seibert, On relative stability to a set and the whole space, *Kacestv. Met. Teor. nelin. Koleb. 2. Trudy 5 mezdunarod. Konf.* (1969), 448- 457
- [20] P. Seibert, Relative stability and stability of closed set, *Semin. Differ. Equat. Dynam. Syst. II, Maryland 1969, Lect. Notes Math. 144* (1970), 185-189
- [21] B. Kalitine, Sur la stabilité des ensembles compacts positivement invariants des systèmes dynamiques, R.A.I.R.O. Automatique **16** (3) (1982) 275-287 (1970), 185-189
- [22] G. A. Ngwa and W. S. Shu, A Mathematical Model for Endemic Malaria with Variable Human and Mosquito Populations, Math. and Computer modeling, **32**, 747-763 (2000)
- [23] Z. Feng, J. X. Velasco-Hernandez, Competitive exclusion in a vector-host model for the dengue fever, J. mathematical biology, **35**, 523-544 (1997)

[24] N.P. Bhatia and G.P. Szegö, Dynamical systems :stability theory and applications.  
Springer Verlag, Lectures Notes in Mathematics 35 (1967)

## 6

# Etude d'un modèle épidémiologique appliqué à la tuberculose

## 6.1 Introduction

Le caractère infectieux de la tuberculose a été démontré en 1865 lorsque Jean-Antoine Villemin est parvenu à transmettre la tuberculose à des lapins à partir de pus ponctionné sur des personnes tuberculeuses. En 1882, Robert Koch a isolé *Mycobacterium tuberculosis* (M. Tuberculosis) à partir des lésions pulmonaires des patients tuberculeux et a démontré de manière formelle que cette bactérie est l'agent étiologique de la tuberculose.

Les épidémies de tuberculose ont connu leur apogée en Europe au cours du XIX<sup>ème</sup> siècle, époque à laquelle elles auraient été responsables du tiers des décès survenus à Paris. Au début du 20<sup>ème</sup> siècle, l'amélioration des conditions de vie et d'hygiène, la vaccination par le bacille de Calmette et Guérin (BCG), ainsi que la découverte des premières drogues antituberculeuses ont permis un recul important de la tuberculose dans les pays industrialisés. Ce déclin de la tuberculose s'est poursuivi jusqu'au milieu des années 1985, puis a recommencé à augmenter régulièrement aussi bien en Europe, aux Etats-Unis qu'en Afrique [10, 49]. Au début des années 90, l'Organisation Mondiale de la Santé (OMS) reconnaissait que l'épidémie de tuberculose était hors de contrôle dans de nombreuses régions du monde et classait cette infection au rang des principales maladies émergentes.

Selon l'Organisation Mondiale de la Santé (OMS), la tuberculose tue encore plus de 2 millions d'hommes dans le monde. Elle représenterait ainsi la deuxième cause de mortalité

## *Chapitre 6. Etude d'un modèle épidémiologique appliqué à la tuberculose*

---

dû à un seul agent infectieux et la cinquième cause de décès dans la monde par maladie contagieuse. En 1997, 7.96 millions de nouveaux cas de tuberculose, dont la moitié hautement contagieuse seraient survenus dans le monde dont 95% sont survenus dans les pays en voie de développement. Et c'est en Afrique que l'incidence de la maladie reste la plus élevée. En 1998, 1.9 milliard de sujets seraient infectés par le bacille de la tuberculose, soit un tiers de la population mondiale. On compte dans le monde une nouvelle infection par bacille tuberculeux chaque seconde.

Toujours selon les estimations faites par l'OMS, 80 millions de nouveaux cas de tuberculose vont apparaître et entraîner près de 20 millions de décès durant cette décennie si la lutte contre la tuberculose ne s'améliore pas de manière radicale. La plupart de ces cas surviendront dans le groupe d'âge 20-49 ans, atteignant ainsi le groupe le plus actif de la population. Devant cette nouvelle "épidémie", la lutte contre la tuberculose a été proclamée "urgence mondiale". Les facteurs qui ont conduit à cette situation de crise sont multiples et aujourd'hui assez bien définis. Dans certains pays industrialisés, la dégradation des systèmes de prise en charge des soins médicaux a provoqué la marginalisation des personnes les plus vulnérables. Ainsi, chez les personnes économiquement défavorisées, les cas de tuberculose sont souvent diagnostiqués tardivement, à un stade où la charge bactérienne est très importante et où la maladie est difficile à soigner. Par ailleurs, le manque de suivi médical de ces personnes est responsable de l'échec d'un nombre important de traitements antibiotiques [4] et, par conséquent, de l'émergence et de la dissémination des souches de *M. tuberculosis* multi-résistantes aux antibiotiques. Ces problèmes sont également récurrents dans les pays en développement, mais à une échelle beaucoup plus importante puisque la prise en charge par l'Etat des problèmes de santé publique est quasiment inexistante. Par ailleurs, la progression de la pandémie du Syndrome de l'Immunodéficience Acquise (SIDA) est fortement impliquée dans la recrudescence des cas de tuberculose [36]. En effet, le Virus de l'Immunodéficience Humaine (VIH) provoque une immunodéficience chez les personnes infectées, ce qui les sensibilise aux infections par *M. tuberculosis*, ainsi que par d'autres mycobactéries atypiques. Encore aujourd'hui, les régions où le SIDA est endémique sont celles qui enregistrent la progression la plus spec-



taculaire des cas de tuberculose [41]. A titre d'exemple, au Cameroun, 30% des personnes séropositives au VIH sont également infectées par *M. tuberculosis* [75].

Devant ce constat aux perspectives inquiétantes, l'OMS a décidé de financer à nouveau des recherches sur la tuberculose dans l'espoir de découvrir de nouveaux moyens prophylactiques et/ou thérapeutiques de luttés contre les mycobactéries pathogènes.

Dans ce travail, un système représentant la tuberculose est rendu perceptible grâce à l'emploi des composantes qui sont les catégories épidémiologiques caractérisant la maladie. L'interaction de ces composantes caractérise l'évolution future de la maladie. Ce modèle de simulation pour la transmission de la tuberculose pourrait apporter une réponse simple à un problème épidémiologique en apparence surmontable : quelles actions de santé publique pouvons-nous appliquer à une population d'une région d'un pays en voie de développement pour faire face au véritable déluge de contamination rencontrée dans cette région ?

Il existe très peu de modèles classiques de l'endémie tuberculose dans la littérature. Cependant, certains auteurs ont proposé des modèles simples pouvant décrire la dynamique de transmission de la tuberculose. Nous pouvons citer les modèles de Waaler [89], Revelle [81], Blower [11, 12], Castillo Chavez [17] et de Feng [30]. Nous n'allons pas donner ici une description de ces modèles mais utiliser uniquement les idées pour construire un modèle dynamique susceptible de déterminer de façon réaliste les effectifs des sujets infectés et malades dans une population humaine.

Nous incorporons des réinfections exogènes et des rechutes à un modèle épidémiologique typique pour la dynamique de transmission de la tuberculose. Nous explorons la possibilité du rôle important et fondamental que les réinfections exogènes et les rechutes peuvent jouer dans la dynamique de transmission et l'épidémiologie de la tuberculose au niveau d'une population humaine.

## 6.2 Généralités

La tuberculose est une maladie infectieuse et contagieuse due à une mycobactérie dénommée bacille tuberculeux dont la variété la plus répandue est le bacille de type hu-

## Chapitre 6. Etude d'un modèle épidémiologique appliqué à la tuberculose

main, *Mycobacterium tuberculosis*. Dans les régions d'élevage, les bovins et les dromadaires peuvent être infectés par une autre variété, *Mycobacterium bovis* transmissible à l'homme par ingestion du lait frais bouilli. Il a été identifié chez l'homme un bacille de type intermédiaire, *Mycobacterium africanum* dont la pathogénicité est la même que celle de *Mycobacterium tuberculosis*.

La tuberculose se transmet presque toujours par voie aérienne, par l'intermédiaire des microgouttelettes de salives émises lors des toux ou des éternuements par des malades atteints de lésions ouvertes de tuberculose pulmonaire c'est à dire ceux dont l'expectoration contient des bacilles mis en évidence par l'examen microscopique direct. Ces fines gouttelettes se séchent rapidement et se transforment en noyaux microscopiques (1 à 10 $\mu$ m) demeurant longtemps en suspension dans l'air ambiant. Ces particules inhalées par un sujet sain peuvent atteindre les avéoles pulmonaires et provoquer l'infection tuberculeuse. La porte d'entrée est donc les voies respiratoires inférieures. La contamination peut être digestive (*M. Bovis*), cutanée ou conjonctivale. La pénétration et la fixation du bacille dans un organisme vierge constitue la primo-infection. Elle est habituellement silencieuse cliniquement (90 % des cas latents et 10 % des cas patents, i.e., accompagnés de signes cliniques et/ou radiologiques). Les personnes qui ont été en contact avec *M. tuberculosis* sans développer la maladie, mais qui deviennent réactifs à la tuberculine, auront 5 à 10% de chance de développer une tuberculose au cours de leur vie [85]. Cette susceptibilité accrue est due au fait que *M. tuberculosis* peut persister dans le corps sans créer de pathologie grâce à sa capacité à entrer en latence. Les bacilles peuvent rester quiescents dans l'organisme très longtemps voire toute la vie de l'hôte. Les sujets infectés par le bacille de Koch (BK) peuvent développer une tuberculose maladie à tout moment. Pour un individu, la survenue de la maladie est essentiellement liée à l'intensité de la transmission et à la qualité des moyens de défense de l'organisme .

On distingue trois types de tuberculose :

- La tuberculose pulmonaire : elle attaque le poumon dans 80 % des cas. Elle se manifeste par une toux prolongée (depuis au moins 3 semaines) le plus souvent accompagnée d'une hémoptysie ou présence de filets de sang dans l'expectoration (crachat), une dou-

leur thoracique, des difficultés respiratoires (essoufflement) et des symptômes généraux tels qu'une perte d'appétit, un amaigrissement, une transpiration nocturne, l'anorexie, de la fièvre et de la fatigue. Chez l'adulte, la tuberculose est souvent à microscopie positive et par conséquent hautement contagieuse.

- La tuberculose extra-pulmonaire : selon les pays, elle représente 20 à 35% de l'ensemble des cas de tuberculose repertoriés. Sans atteinte pulmonaire associée, elle ne joue pas un rôle important dans la transmission de la maladie. Les atteintes des organes tels que les ganglions lymphatiques, les os et les articulations, l'intestin et bien d'autres parties du corps sont fréquents. Les symptômes sont assez évocateurs et dépendent des organes atteints : tuméfactions des ganglions lymphatiques avec quelque fois écoulement de pus lorsque ces ganglions sont atteints, douleur et gonflement articulaire en cas d'atteinte des articulations, céphalée, fièvre, raideur de la nuque et confusion mentale en cas de méningite tuberculeuse.

- La tuberculose de l'enfant : chez les enfants, la tuberculose réalise habituellement une primo-infection typique (complexe gangliopulmonaire). On rencontre également des tuberculoses miliaires et des tuberculoses extra-pulmonaires souvent plurifocales.

La tuberculose est une complication fréquente des sujets séropositifs au VIH. En effet, l'infection par le VIH entraîne une destruction profonde de l'immunité cellulaire. Les personnes infectées font des maladies graves et souvent mortelles dites opportunistes. Dans les pays à forte prévalence du VIH, l'affection opportuniste la plus fréquente est la tuberculose. L'infection par le VIH est le facteur de risque le plus important que l'on connaisse dans l'apparition d'une tuberculose. La tuberculose associée à une séropositivité VIH fait actuellement partie de la définition du SIDA.

Pour finir notons que pour lutter contre la tuberculose et le problème de résistance aux drogues, l'OMS a développé un plan connu sous le nom de DOTS, pour *Direct Observed Therapy Short-Course* [4]. Ce nouveau programme de contrôle de la tuberculose a pour objectif affiché de détecter au niveau mondial 70% des cas de tuberculose et d'en guérir 85%, tout en évitant l'apparition et la dissémination des souches résistantes aux drogues. L'idée essentielle du plan DOTS repose sur une surveillance directe de la prise des drogues

prescrites aux patients tuberculeux. Cependant, la stratégie mis en place par l'OMS pour lutter contre la tuberculose a permis un ralentissement sensible de l'épidémie, mais elle ne suffit pas pour espérer éradiquer la maladie. Ceci est dû essentiellement à son coût élevé (notamment pour traiter les souches multirésistantes) et à la difficulté liée au traitement sous surveillance direct, car celle-ci nécessite une énorme logistique et une coopération à long terme des autorités locales. Pour ces raisons, l'OMS soutient la recherche fondamentale menée par les laboratoires à travers le monde, et selon ses recommandations, les axes de recherche pouvant contribuer à faire reculer la tuberculose sont : (i) la découverte de nouvelles drogues efficaces et peu toxiques pour l'homme, (ii) l'amélioration du pouvoir protecteur du BCG ou le développement de nouveaux vaccins et (iii) la compréhension détaillée de la dynamique de transmission et du cycle infectieux de *M. Tuberculosis* afin de mieux contrôler l'épidémie et de découvrir de nouveaux moyens de lutte ou la cible de nouvelles drogues [28].

### **6.3 Mathématiques et tuberculose**

Comme nous l'avons mentionné dans la section précédente, seule une faible proportion d'individus développe une tuberculose maladie après une infection primaire. La plupart des personnes restent latentes et ont un risque de développer une tuberculose maladie par suite des réinfections exogènes ou des réinfections endogènes des bacilles latents.

Dans cette section, nous formulons un modèle mathématique simple pour l'endémie tuberculose qui incorpore aussi bien les réinfection exogènes que les rechutes. La construction du modèle nécessite l'établissement d'un graphe de transmission. Et de toute évidence, ceci nécessite :

- une idée précise sur la tuberculose. Elle a été faite dans le paragraphe précédent.
- une formulation précise et claire des hypothèses de base et,
- une estimation des valeurs des paramètres pour une région donnée.

### 6.3.1 Hypothèses

Il s'agit de donner des faits épidémiologiques que l'on est en droit de considérer comme importants et qui permettront d'avoir un modèle simplifié. Elles sont les suivantes :

1. La tuberculose est une maladie transmissible d'homme à homme. On négligera les infections causées par les mycobacterium bovis.
2. En raison de leur contagiosité, nous ne considérons que les malades tuberculeux à microscopie positive, i.e., atteints de tuberculose pulmonaire bactériologiquement confirmée ou non.
3. L'isolement des malades à frottis positifs est exclu.
4. On négligera la vaccination par le BCG. En effet, il a été démontré que l'efficacité du BCG varie de 70 à 80 % dans certaines régions alors qu'elle est quasiment nulle dans d'autres régions [83]. Ce qui fait que certains pays ne pratiquent pas la vaccination par le BCG.

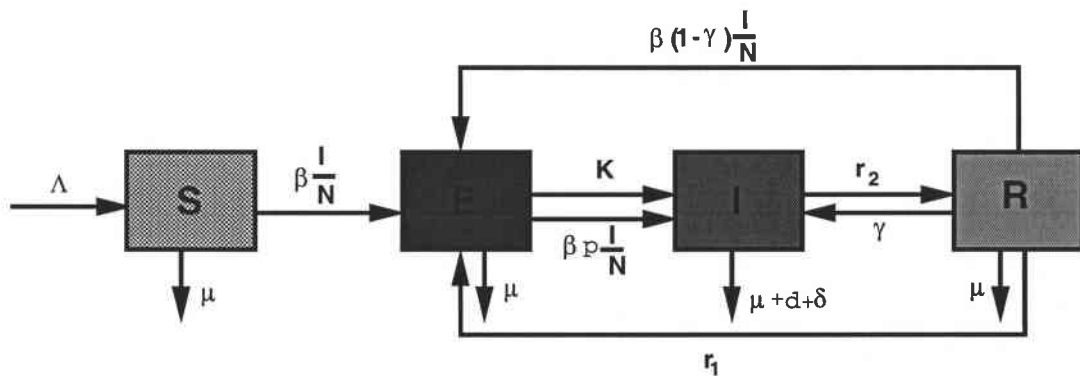


FIG. 6.1 – Modèle simplifié pour la tuberculose.

### 6.3.2 Système dynamique

Le modèle proposé est une adaptation du modèle de Castillo Chavez et al [17, 30]. En effet, Castillo Chavez et al ont proposé un modèle pour l'endémie tuberculose qui ne prend pas en compte des rechutes. Cette négligence des rechutes ne décrit pas la situation de la tuberculose dans les pays à forte prévalence du SIDA où on enrégistre un

## Chapitre 6. Etude d'un modèle épidémiologique appliqué à la tuberculose

nombre important des cas de rechutes. Ceci est le cas de la plupart des pays en voie de développement où le SIDA est endémique (c'est le cas du Cameroun). Notons que nous entendons par rechutes des individus qui ont souffert de la maladie, qui ont été déclarés guéris après une chimiothérapie antituberculeuse et dont les examens microscopiques des crachats redeviennent positives.

Dans ce travail, nous proposons un modèle simple pouvant décrire la situation de la tuberculose aussi bien dans les pays à faible et forte prévalence du SIDA. Le graphe de transmission est celui de la Figure 6.1.

La population humaine est divisée en quatre classes ou sous-groupes épidémiologiques suivants :

1. Les susceptibles ( $S$ ) : ce sont des individus réceptifs c'est à dire des sujets aptes à contacter l'infection.
2. Les infectés ( $E$ ) : ce sont des individus qui hébergent le bacille tuberculeux dans leur organisme.
3. Les malades ( $I$ ) : ce sont des sujets atteints d'une tuberculose pulmonaire à microscopie positive (bactériologiquement confirmée ou non).
4. Les guéris ( $R$ ) : il s'agit des infectés ou des malades qui ont souffert de la maladie et qui ont été déclarés "guéris" après une chimiothérapie de traitement ou de retraitement.

Au total il y a  $S + E + I + R = N$  sujets.

La dynamique de transmission de la tuberculose est donnée par le système d'équations différentielles :

$$\begin{cases} \dot{S} &= \Lambda - \beta S \frac{I}{N} - \mu S \\ \dot{E} &= \beta S \frac{I}{N} - \beta p E \frac{I}{N} + \beta(1 - \gamma) R \frac{I}{N} - (\mu + k + r_1) E \\ \dot{I} &= k E + \gamma R + \beta p E \frac{I}{N} - (\mu + d + r_2 + \delta) I \\ \dot{R} &= r_1 E + r_2 I - \beta(1 - \gamma) R \frac{I}{N} - (\mu + \gamma) R \end{cases} \quad (6.1)$$

où  $\Lambda$  est le taux de recrutement comprenant le taux d'immigration et le taux de natalité,  $\beta$  est le taux avec lequel un malade tuberculeux réussit à faire des contacts qui soient suffisants pour transmettre l'infection à un individu susceptible, infecté ou malade par unité de temps,  $k$  est le taux avec lequel un infecté devient malade,  $\gamma$  est le taux de rechute des guéris,  $\delta$  est le taux de transfert d'un malade de la région où il a commencé son traitement dans une autre région,  $\mu$  est le taux de mortalité générale,  $d$  est le taux de létalité c'est à dire le taux de mortalité due à la maladie,  $r_1$  et  $r_2$  sont les taux de guérison (naturelle et thérapeutique) des infectés et des malades. Le terme  $\beta p E \frac{I}{N}$  modélise le taux de réinfection exogène avec  $p$  un nombre positif représentant le niveau de réinfection. Lorsque  $p = 0$ , le système (6.1) est réduit à un modèle sans réinfection exogène. La valeur de  $p \in [0, 1]$  implique que la réinfection est moins probable qu'une nouvelle infection. En fait, une valeur de  $p \in [0, 1]$  implique qu'une infection primaire fournit un certain degré d'immunité aux réinfections exogènes. Une valeur de  $p > 1$  implique que l'infection tuberculeuse augmente la probabilité d'une tuberculose active. Une valeur de  $p > 1$  est raisonnable pour des individus co-infectés par le VIH.  $N$  est la population humaine considérée dont l'équation obtenue par addition des cinq équations du système (6.1) est donnée par :

$$\frac{dN}{dt} = \Lambda - \mu N - (d + \delta)I. \quad (6.2)$$

Pour le système (6.1), on montre aisément que dans l'espace d'état, l'orthant positif est positivement invariant, c'est à dire que les solutions restent dans l'espace biologique où toutes les variables sont positives. Puisque  $(d/dt)N(t) < 0$  pour  $N > \Lambda/\mu$ , sans perdre les généralités, nous ne considérons que seules les solutions du système (6.1) se trouvant dans le sous-ensemble positivement invariant de  $\mathbb{R}^4$  suivant :

$$\Omega = \left\{ (S, E, I, R), \quad 0 \leq S + E + I + R \leq \frac{\Lambda}{\mu} \right\}. \quad (6.3)$$

### 6.3.3 Existence des points d'équilibre

Dans ce paragraphe, nous présentons quelques résultats concernant l'existence des

points d'équilibre du modèle (6.1). Dans cette voie, nous nous servirons d'un paramètre de seuil que nous noterons  $R_0$ .

**Proposition 6.3.1 :** *Le modèle (6.1) a au moins un point d'équilibre  $X^* = (S^*, E^*, I^*, R^*)$  où  $S^*$ ,  $E^*$ ,  $I^*$  et  $R^*$  sont des constantes positives dont l'existence et les propriétés sont déterminées par le paramètre de seuil :*

$$R_0 = \frac{\beta[k(\mu + \gamma) + \gamma r_1] + \gamma r_2(\mu + k + r_1)}{(\mu + \gamma)(\mu + k + r_1)(\mu + d + r_2 + \delta)}. \quad (6.4)$$

**Preuve :**

Soit  $X^* = (S^*, E^*, I^*, R^*)$  un état d'équilibre du système (6.1). Nous pouvons aisément exprimer  $S^*$ ,  $E^*$ ,  $I^*$  et  $R^*$  en fonction de  $x = \frac{I^*}{N^*}$  sous la forme

$$\begin{aligned} S^* &= \frac{\Lambda}{\mu + \beta x} \\ E^* &= \frac{[(\mu + d + r_2 + \delta)[\beta(1 - \gamma)x + \mu + \gamma] - \gamma r_2]I^*}{\gamma r_1 + (k + \beta p x)[\beta(1 - \gamma)x + \mu + \gamma]} \\ R^* &= \frac{[r_1(\mu + d + r_2 + \delta) + r_2(k + \beta p x)]I^*}{\gamma r_1 + (k + \beta p x)[\beta(1 - \gamma)x + \mu + \gamma]} \\ I^* &= \frac{\Lambda x}{\mu + (d + \delta)x} \end{aligned} \quad (6.5)$$

où  $x$  est solution de l'équation :

$$x(a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4) = 0 \quad (6.6)$$

avec

$$\begin{aligned} a_1 &= \beta^3 p \mu (1 - \gamma) \\ a_2 &= \beta^2 \mu [(1 - \gamma)[\mu + d + r_2 + \delta + p(\mu + d + \delta) - \beta p] + p(\mu + \gamma + r_2)] \\ a_3 &= \beta [\mu(\mu + d + r_2 + \delta)[\mu(2 - \gamma) + k + r_1] + \gamma \mu(\mu + d + \delta + r_1) + p \mu^2 r_2 \\ &\quad + k \mu [(1 - \gamma)(\mu + d + \delta - \beta) + \gamma - d - \delta] + p \mu(\mu + \gamma)(\mu + d + \delta - \beta)] \\ a_4 &= \mu [\beta [k(\mu + \gamma) + \gamma r_1] + \gamma r_2(\mu + k + r_1)] \left( \frac{1}{R_0} - 1 \right). \end{aligned}$$



De l'équation (6.6), il vient que le système (6.1) a un point d'équilibre non endémique  $(\Lambda/\mu, 0, 0, 0)$ . De même, lorsque  $R_0 > 1$  et  $\gamma < 1$ , le modèle (6.1) a un point d'équilibre différent du point d'équilibre non endémique appelé point d'équilibre endémique. Pour démontrer l'existence de ce point d'équilibre endémique, considérons la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$  où les coefficients  $a_1, a_2, a_3$  et  $a_4$  sont ceux de l'équation (6.6). On montre que

$$f(0) = \mu[\beta[k(\mu + \gamma) + \gamma r_1] + \gamma r_2(\mu + k + r_1)] \left( \frac{1}{R_0} - 1 \right).$$

De là, il vient que  $f(0) < 0$  lorsque  $R_0 > 1$ . De même quelques manipulations algébriques montrent que :

$$\begin{aligned} f(1) = & \beta^2 p r_2 + \beta p [r_1(\mu + d + r_2 + \gamma) + k r_2] \\ & + [\beta(1 + p) + \mu + k + r_1][(\beta(1 - \gamma) + \mu)(\mu + d + r_2 + \delta) + \gamma(\mu + d + \delta)]. \end{aligned}$$

Il est maintenant trivial de voir que  $f(1) > 0$  lorsque  $\gamma < 1$ . Par application du théorème des valeurs intermédiaires on conclut qu'il existe au moins une solution  $x \in [0, 1]$  lorsque  $R_0 > 1$ .

Par ailleurs, de l'équation (6.6) on voit que si  $\gamma < 1$ , les coefficients  $a_1, a_2$  et  $a_3$  sont positifs tandis que le signe de  $a_4$  dépend de celui de  $(1 - R_0)$ . Ainsi, si  $\gamma < 1$  et  $R_0 > 1$ , il suit que  $a_4 < 0$  de sorte qu'il n'y a qu'un seul changement de signe dans la suite des coefficients  $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ . Par conséquent, en appliquant la règle de signes de Descartes, on conclut qu'il existe une seule solution  $x \in [0, 1]$  lorsque  $R_0 > 1$ .

△

### 6.3.4 Stabilité des points d'équilibre

Dans ce paragraphe, nous analysons la stabilité asymptotique des points d'équilibre obtenus dans le paragraphe précédent. Nous utiliserons la technique proposée dans le chapitre 5 pour étudier la stabilité asymptotique globale du point d'équilibre non endémique. Nous commençons par donner un résultat de la stabilité asymptotique globale du point d'équilibre non endémique. Il est le suivant :

**Proposition 6.3.2 :** *Le point d'équilibre non endémique  $X^* = (\Lambda/\mu, 0, 0, 0)$  est globalement asymptotiquement stable si  $R_0 \leq 1$  et instable si  $R_0 > 1$ .*

**Preuve :**

La matrice jacobienne du système (6.1) au point d'équilibre non endémique  $X^* = (\Lambda/\mu, 0, 0, 0)$  s'exprime comme suit :

$$J = \begin{bmatrix} -\mu & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & -(\mu + k + r_1) & \beta & 0 \\ 0 & k & -(\mu + d + r_2 + \delta) & \gamma \\ 0 & r_1 & r_2 & -(\mu + \gamma) \end{bmatrix}$$

Puisque la première composante  $-\mu$  de la matrice  $J$  est négative, la stabilité locale de la matrice jacobienne au point d'équilibre non endémique est associée à la stabilité de la sous matrice

$$J_1 = \begin{bmatrix} -(\mu + k + r_1) & \beta & 0 \\ k & -(\mu + d + r_2 + \delta) & \gamma \\ r_1 & r_2 & -(\mu + \gamma) \end{bmatrix}$$

On voit bien que  $J_1$  est une matrice de Metzler, i.e., tous les éléments non diagonaux sont positifs. De plus, la matrice  $J_1$  ci-dessus a la forme de la matrice  $M$  de la Proposition 3 du chapitre précédent avec  $A = -(\mu + k + r_1)$ ,  $B = [\beta, 0]$ ,

$$C = \begin{bmatrix} k \\ r_1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{bmatrix} -(\mu + d + r_2 + \delta) & \gamma \\ r_2 & -(\mu + \gamma) \end{bmatrix}$$

Notons que la condition  $\alpha(J_1) < 0$  (où  $\alpha(J_1)$  est la plus grande valeur de la partie réelle des valeurs propres associées à  $J_1$ ) est une condition de seuil pour la stabilité locale et  $\alpha(J_1) > 0$  est une condition d'instabilité. En utilisant la technique de la Proposition 3 de la section 3.1 du chapitre 5, on montre aisément que la condition de seuil de la matrice  $J$  se réduit à la condition de seuil de la matrice de dimension 2 suivante :

$$D - CA^{-1}B = \begin{bmatrix} -(\mu + d + r_2 + \delta) + \frac{\beta k}{\mu + k + r_1} & \gamma \\ r_2 + \frac{\beta r_1}{\mu + k + r_1} & -(\mu + \gamma) \end{bmatrix}$$

Ainsi la matrice ci-dessus sera Metzler si  $(\mu + d + r_2 + \delta)(\mu + k + r_2) \geq \beta k$  et stable si  $\det(D - CA^{-1}B) > 0$ . De la condition  $\det(D - CA^{-1}B) > 0$ , on obtient facilement que

$$R_0 = \frac{\beta[k(\mu + \gamma) + \gamma r_1] + \gamma r_2(\mu + k + r_1)}{(\mu + \gamma)(\mu + k + r_1)(\mu + d + r_2 + \delta)} \leq 1.$$

Cette dernière inégalité peut se réécrire comme suit :

$$(\mu + d + r_2 + \delta)(\mu + k + r_2) \geq \beta k + \frac{\gamma[\beta r_1 + r_2(\mu + k + r_1)]}{\mu + \gamma}$$

On remarque tout de suite que si la condition ci-dessus est satisfaite, la condition  $(\mu + d + r_2 + \delta)(\mu + k + r_2) \geq \beta k$  le sera aussi. On vient ainsi de démontrer que le point d'équilibre non endémique est localement asymptotiquement stable lorsque  $R_0 < 1$  et instable lorsque  $R_0 > 1$ .

Notons que lorsque  $\gamma = 0$ , on retrouve le nombre de reproduction de base proposé par Feng et al dans le cas d'un modèle de transmission de la tuberculose avec des réinfections exogènes [30].

Montrons à présent que le point d'équilibre non endémique est globalement asymptotiquement stable. Remarquons que le modèle (6.1) a la forme du système (12) de la section 3.2 du chapitre 5, i.e., il peut se réécrire sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + A_2(x) x_2 \\ \dot{x}_2 = A_3(x) x_2 \end{cases} \quad (6.7)$$

où  $x_1 = S$ ,  $x_2 = (E, I, R)$ ,  $A_1(x) = -\mu$ ,  $A_2(x) = \left[0, -\beta \frac{S}{N}, 0\right]$  et

$$A_3(x) = \begin{bmatrix} -(\mu + k + r_1) & \beta(2 - \gamma) \frac{S}{N} & 0 \\ k + \beta p \frac{I}{N} & -(\mu + d + r_2 + \delta) & \gamma \\ r_1 & r_2 & -(\mu + \gamma) - \beta(1 - \gamma) \frac{I}{N} \end{bmatrix}$$

En remarquant que  $\frac{S}{N} \leq 1$ ,  $\frac{I}{N} \leq 1$  et  $-(\mu + \gamma) - \beta(1 - \gamma) \frac{I}{N} \leq -(\mu + \gamma)$ , il vient qu'un majorant de la matrice  $A_3(x)$  peut s'exprimer comme suit :

$$\bar{A}_3(\bar{x}) = \begin{bmatrix} -(\mu + k + r_1) & \beta(2 - \gamma) & 0 \\ k + \beta p & -(\mu + d + r_2 + \delta) & \gamma \\ r_1 & r_2 & -(\mu + \gamma) \end{bmatrix}$$

Il est important de noter que la matrice  $\bar{A}_3(\bar{x})$  est un majorant et non un maximum. Elle nous permettra de calculer la valeur d'un paramètre de seuil pour la stabilité asymptotique

globale du point d'équilibre non endémique. Une condition nécessaire et suffisante pour  $\bar{A}_3$  d'être Metzler stable est obtenue par le même processus que pour le paramètre de seuil  $R_0$  en réduisant  $\bar{A}_3$  à une matrice de Metzler stable de dimension 2. Ainsi, toujours de la technique de la Proposition 3 de la section 3.1 du chapitre 5, on montre aisément que la valeur du paramètre de seuil s'obtient en exprimant que la matrice

$$\bar{D} - \bar{C}\bar{A}^{-1}\bar{B} = \begin{bmatrix} -(\mu + d + r_2 + \delta) + \frac{\beta(2 - \gamma)(k + p\beta)}{\mu + k + r_1} & \gamma \\ r_2 + \frac{\beta r_1(2 - \gamma)}{\mu + k + r_1} & -(\mu + \gamma) \end{bmatrix}$$

est Metzler stable, i.e.,  $(\mu + d + r_2 + \delta)(\mu + k + r_2) \geq \beta(2 - \gamma)(k + p\beta)$  et  $\det(\bar{D} - \bar{C}\bar{A}^{-1}\bar{B}) > 0$ .

On déduit alors que  $\bar{A}_3$  est stable si le seuil

$$R_{cr} = \frac{\beta(2 - \gamma)[(k + p\beta)(\mu + \gamma) + \gamma r_1] + \gamma r_2(\mu + k + r_1)}{(\mu + \gamma)(\mu + k + r_1)(\mu + d + r_2 + \delta)} \quad (6.8)$$

est plus petit que 1. Comme dans le cas du paramètre de seuil  $R_0$ , on montre aisément que la condition  $(\mu + d + r_2 + \delta)(\mu + k + r_2) \geq \beta(2 - \gamma)(k + p\beta)$  est satisfaite lorsque  $R_{cr} \leq 1$  et on conclut que  $A_3$  est Metzler stable. De même, des équations (6.4) et (6.8), on montre aisément que

$$R_{cr} = R_0 + \frac{\beta[p\beta(\mu + \gamma) + (1 - \gamma)[\gamma r_1 + (k + p\beta)(\mu + \gamma)]]}{(\mu + \gamma)(\mu + k + r_1)(\mu + d + r_2 + \delta)} \quad (6.9)$$

De là, il est facile de voir que  $R_0 < R_{cr}$ .

Par ailleurs, notons que lorsque  $x_2 = 0$ , le point  $\Lambda/\mu$  est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable pour le système  $\dot{S} = \Lambda - \mu S$ . Les conditions  $H_4$  et  $H_5$  sont satisfaites par la condition de seuil. Puisque seul le troisième élément de la première ligne de la matrice  $\bar{A}_3$  est nul, il est facile de vérifier que le graphe associé à la matrice  $\bar{A}_3$  est fortement connexe. De là, la matrice  $A_3$  est irréductible. De même, en remarquant que  $I \leq N$ , l'équation (6.2) peut se réécrire sous la forme :

$$\frac{dN}{dt} \leq \Lambda - (\mu + d + \delta)N. \quad (6.10)$$

De l'équation ci-dessus, on voit que la population totale est gouvernée par une loi logistique et il est immédiat que les trajectoires du système (6.1) sont bornées. Ainsi toutes

les conditions  $H_1 - H_5$  du Théorème 2 de la section 3.2 du chapitre 5 sont vérifiées et nous pouvons conclure que le point d'équilibre non endémique  $X^* = (\Lambda/\mu, 0, 0, 0)$  est globalement asymptotiquement stable si  $R_0 < 1$  et instable si  $R_0 > 1$ .

△

Le prochain résultat concerne la stabilité locale du point d'équilibre endémique. Nous utilisons les conditions de Routh-Hurwitz.

**Proposition 6.3.3 :** *L'unique point d'équilibre endémique est localement asymptotiquement stable si  $R_0 > 1$  et  $\gamma < 1$ .*

**Preuve :**

La stabilité locale du point d'équilibre endémique peut-être examinée en linearisant le système (6.1) au point d'équilibre endémique  $(S^*, E^*, I^*, R^*)$ . Pour ce faire, posons  $s^* = \frac{S^*}{N^*}$ ,  $e^* = \frac{E^*}{N^*}$ ,  $x^* = \frac{I^*}{N^*}$  et  $r^* = \frac{R^*}{N^*}$  où  $s^*$ ,  $e^*$ ,  $x^*$  et  $r^*$  sont solutions des équations suivantes :

$$\begin{cases} \mu(1 - s^*) - \beta s^* x^* = 0 \\ \beta s^* x^* - \beta p e^* x^* + \beta(1 - \gamma)r^* x^* - (\mu + k + r_1)e^* = 0 \\ k e^* + \gamma r^* + \beta p e^* x^* - (\mu + d + r_2 + \delta)x^* = 0 \\ r_1 e^* + r_2 x^* - \beta(1 - \gamma)r^* x^* - (\mu + \gamma)r^* = 0 \end{cases} \quad (6.11)$$

Les variables  $s^*$ ,  $e^*$  et  $r^*$  s'expriment aisément en fonction de  $x^*$  sous la forme

$$\begin{aligned} s^* &= \frac{\mu}{\mu + \beta x^*} \\ e^* &= \frac{[(\mu + d + r_2 + \delta)[\beta(1 - \gamma)x^* + \mu + \gamma] - \gamma r_2]x^*}{\gamma r_1 + (k + \beta p x^*)[\beta(1 - \gamma)x^* + \mu + \gamma]} \\ r^* &= \frac{[r_1(\mu + d + r_2 + \delta) + r_2(k + \beta p x^*)]x^*}{\gamma r_1 + (k + \beta p x^*)[\beta(1 - \gamma)x^* + \mu + \gamma]} \end{aligned} \quad (6.12)$$

où  $x^* \neq 0$  est l'unique solution de l'équation :

$$b_1(x^*)^3 + b_2(x^*)^2 + b_3 x^* + b_4 = 0 \quad (6.13)$$

avec

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \beta^3 p(1 - \gamma)(\mu + d + \delta) \\
 b_2 &= \beta^2 [(\mu + d + \delta)[(1 - \gamma)(\mu + k + p\mu) + p(\mu + \gamma)] + \mu(1 - \gamma)(r_2 - \beta p) + p\mu r_2] \\
 b_3 &= \beta [(\mu + d + \delta)[k\mu(1 - \gamma) + \gamma[\mu(p + 1) + k + r_1]] \\
 &\quad + \mu(\mu + d + r_2 + \delta)[k + r_1 + \mu(2 - \gamma + p)] + \beta\mu[k(\gamma - 1) - p(\mu + \gamma)]] \\
 b_4 &= \mu[\beta[k(\mu + \gamma) + \gamma r_1] + \gamma r_2(\mu + k + r_1)] \left( \frac{1}{R_0} - 1 \right).
 \end{aligned}$$

La matrice jacobienne du système (6.1) au point  $(s^*, e^*, x^*, r^*)$  est donnée par :

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} \mathcal{J}_1 & \beta s^* x^* & -\beta s^*(1 - x^*) & \beta s^* x^* \\ \mathcal{J}_2 & \mathcal{J}_3 & \mathcal{J}_4 & \mathcal{J}_5 \\ -\beta p e^* x^* & \mathcal{J}_6 & \mathcal{J}_7 & \gamma - \beta p e^* x^* \\ \beta(1 - \gamma)r^* x^* & \mathcal{J}_8 & \mathcal{J}_9 & \mathcal{J}_{10} \end{bmatrix}$$

où

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J}_1 &= -\mu - \beta x^*(1 - s^*) \\
 \mathcal{J}_2 &= \beta x^*[1 - s^* + p e^* - (1 - \gamma)r] \\
 \mathcal{J}_3 &= -(\mu + k + r_1) - \beta x^*[s^* + p(1 - e^*) + (1 - \gamma)r^*] \\
 \mathcal{J}_4 &= \beta[s^*(1 - x^*) + p e(x^* - 1) + r^*(1 - \gamma)(1 - x^*)] \\
 \mathcal{J}_5 &= \beta[(1 - \gamma)x^*(1 - r^*) - s^* x^* + p e^* x^*] \\
 \mathcal{J}_6 &= k + \beta p x^*(1 - e^*) \\
 \mathcal{J}_7 &= -(\mu + d + r_2 + \delta) + \beta p e^*(1 - x^*) \\
 \mathcal{J}_8 &= r_1 + \beta(1 - \gamma)r^* x^* \\
 \mathcal{J}_9 &= r_2 + \beta(1 - \gamma)r^*(x^* - 1) \\
 \mathcal{J}_{10} &= -(\mu + \gamma) + \beta(1 - \gamma)x^*(r^* - 1)
 \end{aligned}$$

Ainsi le polynôme caractéristique de la matrice jacobienne  $\mathcal{J}$  est donné par

$$X^4 + c_1 X^3 + c_2 X^2 + c_3 X + c_4 = 0 \tag{6.14}$$

avec

$$c_1 = -\mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_3 - \mathcal{J}_7 - \mathcal{J}_{10},$$

$$c_2 = \mathcal{J}_1(\mathcal{J}_3 + \mathcal{J}_{10}) + \mathcal{J}_3\mathcal{J}_{10} + \mathcal{J}_7(\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_3 + \mathcal{J}_{10}) - \mathcal{J}_4\mathcal{J}_6 - \mathcal{J}_5\mathcal{J}_8 - \gamma\mathcal{J}_9 \\ - \beta s^* x^* [\mathcal{J}_2 + \beta(1 - \gamma)r^* x^*] + \beta p e^* x^* [\mathcal{J}_9 + \beta s^* (-1 + x^*)]$$

$$c_3 = (\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_{10})(\mathcal{J}_4\mathcal{J}_6 - \mathcal{J}_3\mathcal{J}_7) + \mathcal{J}_5\mathcal{J}_8(\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_5) - \mathcal{J}_1\mathcal{J}_{10}(\mathcal{J}_3 + \mathcal{J}_7) - \mathcal{J}_5\mathcal{J}_6\mathcal{J}_9 \\ + \gamma[\mathcal{J}_9(\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_3) - \mathcal{J}_4\mathcal{J}_8] + \beta s^* x^* [\mathcal{J}_2(\mathcal{J}_7 + \mathcal{J}_{10} - \mathcal{J}_8) + \beta(1 - \gamma)r^* x^* (\mathcal{J}_3 + \mathcal{J}_7 - \mathcal{J}_5)] \\ + \beta p e^* x^* [\mathcal{J}_4\mathcal{J}_8 - \mathcal{J}_9(\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_3) + \beta s^* x^* (\mathcal{J}_4 + \mathcal{J}_9)] \\ + \beta s^* (1 - x^*) [\mathcal{J}_2\mathcal{J}_6 + \beta(1 - \gamma)r^* x^* (\gamma - \beta p e^* x^*) + \beta p e^* x^* (\mathcal{J}_3 + \mathcal{J}_{10})]$$

$$c_4 = \mathcal{J}_1[\mathcal{J}_{10}(\mathcal{J}_3\mathcal{J}_7 - \mathcal{J}_4\mathcal{J}_6) + \mathcal{J}_5(\mathcal{J}_6\mathcal{J}_9 - \mathcal{J}_7\mathcal{J}_8)] + (\beta p e^* x^* - \gamma)(\mathcal{J}_3\mathcal{J}_9 - \mathcal{J}_4\mathcal{J}_8) \\ + \beta s^* x^* [\mathcal{J}_2[\mathcal{J}_7(\mathcal{J}_8 - \mathcal{J}_{10}) + \mathcal{J}_9(\gamma - \mathcal{J}_6)] + \beta p e^* x^* [\mathcal{J}_4\mathcal{J}_8 + \mathcal{J}_9(\mathcal{J}_5 - \mathcal{J}_2 - \mathcal{J}_3) - \mathcal{J}_4\mathcal{J}_{10}]] \\ + \beta(1 - \gamma)r^* x^* [\mathcal{J}_7(\mathcal{J}_5 - \mathcal{J}_3) + \mathcal{J}_4(\mathcal{J}_6 + \beta p e^* x^* - \gamma)]$$

La condition nécessaire et suffisante de la stabilité locale du point d'équilibre endémique du système (6.1) vient des conditions de Routh-Hurwitz  $c_1 > 0$ ,  $c_2 > 0$ ,  $c_3 > 0$ ,  $c_4 > 0$  et  $c_1 c_2 c_3 - c_3^2 - c_1^2 c_4 > 0$ . Les calculs sont très longs et seront omis.

△

### 6.3.5 Simulations numériques

Dans ce paragraphe, nous analysons numériquement le modèle (6.1). Pour explorer le rôle que peuvent jouer les rechutes et les réinfections exogènes dans la dynamique de transmission de la tuberculose, nous appliquons le modèle à la situation particulière de la province du Centre du Cameroun. Les valeurs des paramètres et des conditions initiales du modèle ainsi que les sources des données sont confinées dans les tableaux suivants :

**Tableau I : Valeurs des Paramètres du modèle**

Valeurs des paramètres	Source
$\mu = 0.101$	Dérivé des estimations du MINATD <sup>1</sup>
$\beta = 13$	Dérivé des estimations de l'OMS
$k = 0.005$	Dérivé des estimations de l'OMS
$r_1 = 0$	Dérivé des estimations du PNLT <sup>2</sup>
$r_2 = 0.8$	Dérivé des estimations du PNLT
$d = 0.011$	Dérivé des estimations du PNLT
$\delta = 0.068$	Dérivé des estimations du PLNT
$\Lambda = 886803$	Dérivé des estimations du MINATD

<sup>1</sup> Ministère de l'Administration Territoriale et de la Décentralisation

<sup>2</sup> Programme National de Lutte contre la Tuberculose

**Tableau II : Conditions initiales**

$S(0) = 692958$	Nombre initial de susceptibles
$E(0) = 1625032$	Nombre initial d'infectés
$I(0) = 2322$	Nombre initial de malades contagieux
$R(0) = 1162$	Nombre initial de guéris

Ces conditions initiales décrivent bien la situation rencontrée dans les pays à forte prévalence du SIDA où 70% de la population est infectée, une personne sur 1000 est atteinte de tuberculose pulmonaire et près de 29 personnes sur 100 sont susceptibles, i.e., aptes à contacter l'infection. Les résultats des simulations sont donnés sur les Figures 6.2, 6.3 et 6.4.

La Figure 6.2 montre le paramètre de seuil  $R_0$  en fonction du taux de rechute  $\gamma$ . On voit bien que  $R_0$  croît avec  $\gamma$ , i.e., les rechutes augmentent le nombre de cas secondaires. Nous avons également tracé le nombre de malades pour différentes valeurs du taux de rechute  $\gamma$ . La Figure 6.3 montre que les rechutes n'augmentent pas de manière considérable le nombre de malades. Ce qui est tout à fait normal puisque 80% des malades tuberculeux guérissent. Un moyen de regarder le rôle que peut jouer les réinfections exogènes sur la dynamique de transmission de la tuberculose est de tracer le nombre de malades en fonction du paramètre  $p$  comme le montre la Figure 6.4. Les résultats de simulations montrent que lorsque  $p$  croît, le nombre de malades croît aussi.



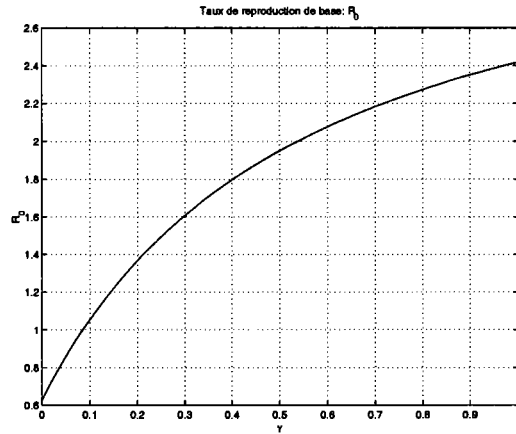


FIG. 6.2 – Paramètre de seuil  $R_0$  en fonction du taux de rechute  $\gamma$ .

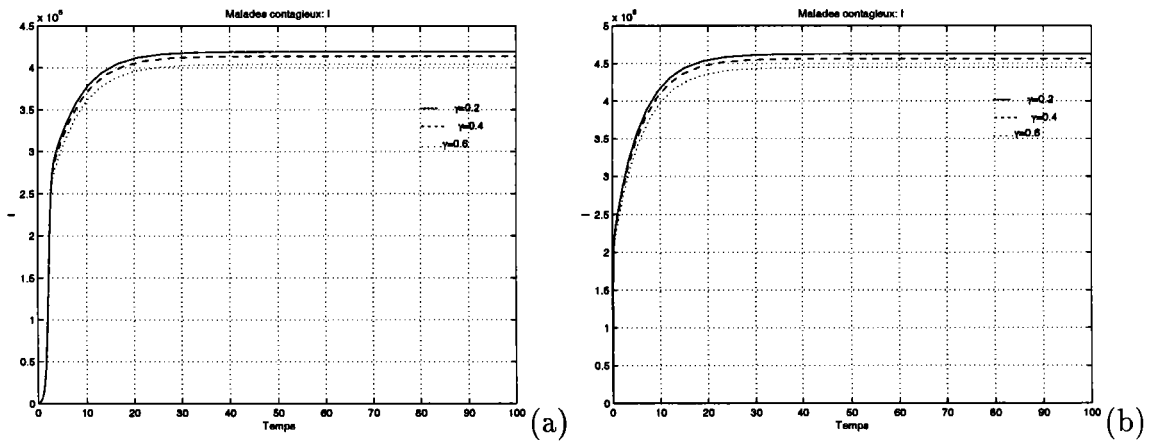


FIG. 6.3 – Nombre de malades  $I$  pour trois différentes valeurs du paramètre de rechute  $\gamma$  lorsque (a)  $p = 0.5$ ; (b)  $p = 2$ .

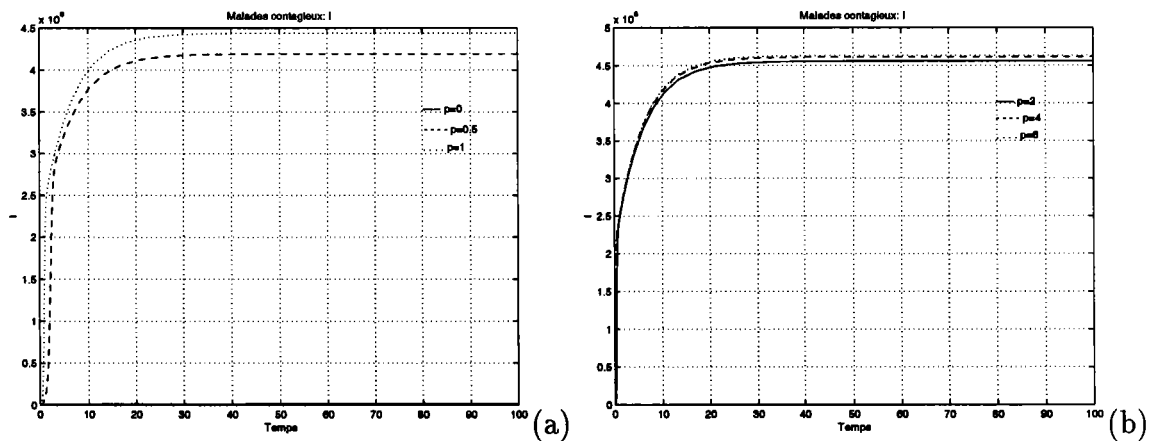


FIG. 6.4 – Nombre de malades  $I$  pour trois différentes valeurs du taux de réinfection  $p$  lorsque  $\gamma = 2$ . (a)  $p \in [0, 1]$ ; (b)  $p > 1$ .

## 6.4 Conclusion

Le but de ce chapitre a été de regarder l'effet des réinfections exogènes et des rechutes sur la dynamique de transmission de la tuberculose et l'applicabilité des résultats principaux du chapitre 5 dans le cas de la tuberculose. Nous avons examiné le rôle d'un paramètre de seuil  $R_0$  sur la stabilité asymptotique globale du point d'équilibre non endémique. L'incorporation des réinfections exogènes et des rechutes montre qu'ils peuvent théoriquement augmenter le nombre des cas de tuberculose maladie et par conséquent diminuer l'efficacité des mesures de santé publique. Ceci a été illustré par des simulations numériques.

# Discussion générale et perspectives

Le but de ce travail de thèse fut d'étudier quelques problèmes de la stabilisation globale des systèmes non linéaires, de la stabilité d'une classe de modèles épidémiologiques et de l'étude d'un modèle épidémiologique appliqué à la tuberculose.

Un bref rappel sur la théorie de la stabilité, l'observabilité et la stabilisation des systèmes non linéaires a été présenté dans le chapitre 1. D'une part, ces résultats nous ont permis de dégager des lois de commande stabilisantes qui garantissent la stabilité asymptotique globale des divers systèmes étudiés, et d'étudier la stabilité asymptotique globale du point d'équilibre non endémique pour une classe de modèles épidémiologiques d'autre part.

Dans la première partie de cette thèse, des solutions à trois problèmes spécifiques de la stabilisation asymptotique globale de points d'équilibre ou de trajectoires de certaines classes de systèmes non linéaires ont été présentées.

Tout d'abord, Nous avons étudié le problème de la stabilisation par retour d'état estimé des oscillations d'un pendule en rotation et de la stabilisation d'un système de lévitation magnétique. Dans une voie, nous avons adapté au pendule en rotation la technique de Jurdjevic-Quinn pour la stabilisation des systèmes non linéaires à contrôles non affines et un observateur à grands gains. Cette méthode nous a permis de construire une loi de commande stabilisante d'un stabilisateur à incorporer dans le moteur pour maintenir l'état du système (déviations et vitesse angulaire du pendule) dans une position d'équilibre. Notons que ce type d'approche pourrait être étendu en robotique et plus particulièrement au problème de la commande d'un pendule à deux ou plusieurs bras en rotation. Ce travail sera réalisé très prochainement. Dans une autre voie, nous avons utilisé une version

## *Discussion générale et perspectives*

---

du théorème de LaSalle pour construire une loi de commande stabilisante de la tension d'entrée du circuit électrique d'un système de lévitation magnétique qui permet de maintenir la balle dans une position désirée. En particulier, nous avons abordé numériquement la question de la sensibilité des paramètres (imprécision sur les paramètres) du système de lévitation magnétique. Une étude numérique a permis d'observer la performance de la loi de commande proposée. L'algorithme de stabilisation apparaît beaucoup plus simple comparativement aux stratégies de contrôle existantes.

On pourrait envisager de construire un observateur et faire ensuite un bouclage par retour d'état estimé par l'observateur en utilisant la technique de Gauthier-Kupka [35]. Cela fera l'objet d'un travail ultérieur. Par ailleurs, une question particulièrement importante est d'étudier analytiquement et numériquement la robustesse de la loi de commande proposée et de les comparer aux résultats existants dans la littérature.

Ensuite, nous avons proposé une construction Lyapunov de loi de commande stabilisante bornée calculée à partir d'une nouvelle extension de la technique du *backstepping* pour une classe de systèmes non autonomes.

Dans un proche avenir, cette technique pourra être étendue à d'autres classes de systèmes non autonomes.

Enfin, nous avons considéré le problème de la stabilisation d'une trajectoire qui n'est pas nécessairement une fonction périodique du temps des systèmes non linéaires ayant une structure feedforward. Ce travail est une extension de quelques résultats sur la stabilisation d'une trajectoire périodique pour une classe de système non linéaire ayant une structure feedforward [67]. La solution proposée est basée sur la technique du *forwarding* et la construction des fonctions de Lyapunov. Il est apparu que l'emploi des commandes saturées permet d'obtenir d'intéressants résultats qui loin d'être théoriques se sont immédiatement avérés avoir des applications pratiques intéressantes.

Comme nous l'avons mentionné à l'introduction, le problème de la poursuite de trajectoire des systèmes non linéaires est un important sujet de recherche ayant plusieurs applications possibles. Malheureusement, dans la pratique nous avons toujours affaire au fait que certains paramètres ne sont pas exactement connus. Par conséquent, il serait plus

---

intéressant d'étudier le problème adaptatif de la stabilisation de trajectoire des systèmes non linéaires ayant une forme feedforward. Cependant, avant que nous puissions le faire, nous devons avoir une formulation correcte et précise du problème. Evidemment, avoir une formulation appropriée du problème est un problème intéressant en soi qui mérite une attention particulière. Et une fois que nous aurons une formulation propre du problème, résoudre le problème est aussi très intéressant.

Nous avons également adapté les idées de Mazenc et Praly [67] au problème important de la stabilisation d'une trajectoire périodique du célèbre système pendule-chariot. On a montré qu'après un changement de coordonnées, le système pendule-chariot est un système ayant une structure feedforward. Cette propriété a été utilisée pour trouver une famille de lois de commande qui stabilise globalement uniformément asymptotiquement et localement exponentiellement une trajectoire périodique du système pendule-chariot. Par ailleurs, il serait intéressant d'étendre cette étude dans le cas d'une trajectoire qui ne sera pas nécessairement une fonction périodique du temps (par exemple carrée, rectangulaire,..) lequel sera aussi une contribution importante de ce travail par rapport à [67].

Pour récapituler, les contributions principales de cette partie sont les suivantes :

1. Nous avons montré les étapes de construction de deux lois de commande en temps continu dans le but de commander un pendule en rotation et un système de lévitation magnétique et souligné point par point les difficultés pratiques et les solutions envisageables.
2. Une famille de systèmes non linéaires non autonomes est stabilisée par des commandes bornées à travers une nouvelle extension de la technique du *backstepping*. Les expressions explicites des lois de commande et des fonctions de Lyapunov strictes sont données.
3. Une famille de lois de commande qui stabilise globalement uniformément asymptotiquement et localement exponentiellement une trajectoire de référence qui n'est pas nécessairement une fonction périodique du temps à partir de la construction des

## *Discussion générale et perspectives*

---

fonctions de Lyapunov est exhibée. En plus, le problème de la stabilisation d'une trajectoire périodique pour le système pendule-chariot a été résolu.

Dans la seconde partie de cette thèse, nous avons étudié le problème du calcul d'un paramètre de seuil et sa relation avec la stabilité globale du point d'équilibre non endémique pour une classe de modèles épidémiologiques qui englobe la majorité des maladies réémergentes. Un modèle épidémiologique pouvant décrire la dynamique de transmission de la tuberculose est également étudié dans cette partie. Dans un premier temps, une nouvelle méthode pour le calcul d'un paramètre de seuil évidemment lié au nombre de reproduction de base et la stabilité asymptotique globale du point d'équilibre non endémique a été présentée. Cette méthode est originale par son approche et par les moyens mis en oeuvre. Elle a conduit à énoncer des conditions nécessaires pour la stabilité asymptotique globale du point d'équilibre non endémique. L'efficacité de ce critère a été illustrée sur les modèles épidémiologiques du paludisme et de la dengue. Les résultats donnés par cette méthode sont très satisfaisants.

Par ailleurs, la dynamique de transmission de certaines maladies émergentes est décrite par des systèmes stochastiques. Ainsi on pourrait étendre l'utilisation de cette technique à des modèles épidémiologiques stochastiques.

Dans un second temps, nous avons analysé un modèle pouvant décrire la dynamique de transmission de la tuberculose aussi bien dans des pays à forte prévalence du SIDA que dans les pays à faible prévalence du SIDA. Un paramètre de seuil  $R_0$  existe et la maladie persiste lorsque  $R_0$  est plus grand que 1. Le point d'équilibre non endémique existe et est globalement asymptotiquement stable lorsque le paramètre de seuil  $R_0$  est plus petit que 1 alors que le point d'équilibre endémique existe, est unique et localement asymptotiquement stable lorsque  $R_0 > 1$ . Nous avons examiné le rôle que peut jouer les réinfections exogènes et les rechutes sur la dynamique de transmission de la tuberculose. Les résultats obtenus ont été illustrés par des simulations numériques.

Comme nous l'avons souligné au début du chapitre 6, l'une des raisons de la recrudescence de la tuberculose est l'émergence et la dissémination des souches de *M. tuberculosis*

---

multi-résistantes aux antibiotiques. Par ailleurs, la dynamique génétique et la diversité hôte-germe semblent avoir des implications majeures sur la dynamique du contrôle de l'évolution de la résistance et du contrôle de l'émergence de nouveaux pathogènes. Un modèle de la tuberculose en intra-hôte pourrait permettre la compréhension des feedbacks impliquant les deux classes de lymphocytes Th1 et Th2. C'est pourquoi, développer des modèles qui incorporeraient la réponse immunitaire et la chimiorésistance serait d'une importance considérable et devrait donner des indications pour des stratégies thérapeutiques.

Pour récapituler, les contributions de cette partie sont :

1. Nous avons mis au point un algorithme simple pour le calcul d'un paramètre de seuil  $R_0$  et une méthode pour démontrer la stabilité asymptotique globale du point d'équilibre non endémique pour une classe de modèles épidémiologiques.
2. Nous avons exploré la possibilité du rôle fondamental que les réinfections exogènes et les rechutes peuvent jouer dans la dynamique de transmission et l'épidémiologie de la tuberculose au niveau d'une population humaine.





# Bibliographie

- [1] R. M. Anderson and R. M. May, Population Biology of Infectious Diseases, Springer-Verlag, Berlin, Heideberg, New York, (1982).
- [2] B. d'Andrea-Novet et M. Cohen de Lara, Commande Linéaire des Systèmes Dynamiques, Masson, Paris, Milan, Barcelone, (1994).
- [3] D. Angeli, Almost global stabilization of the inverted pendulum via continuous state feedback, Automatica, (37) : 1103-1108, (2001).
- [4] R. Bayer and D. Wilkinson, Directly observed therapy for tuberculosis : history of an idea, Lancet North Am Ed, (345) : 1545-1548, (1995)
- [5] M. Bensoubaya, A. Ferfera and A. Iggidr, About continuous and discrete time non-linear systems, 2<sup>nd</sup> Marrakech International Conference on Differential Equation, June 1995.
- [6] M. Bensoubaya, A. Ferfera and A. Iggidr, Stabilisation des systèmes non linéaires discrets, R. Accademic des Sciences de Paris, Série I, 371-374, (1995).
- [7] N. P. Bhatia and G. P. Szegö, Dynamical systems : Stability Theory and Applications, Lecture Notes in Mathematics, No 35, Springer Verlag, (1967).
- [8] G. Bornard and H. Hammouri, A high gain observer for a class of uniformly observable systems, Proceeding of the 30th IEEE CDC, Brighton, Angleterre, 1494-1496, (1991).
- [9] H. Bleuler, D. Vischer, G. Schweitzer, A. Traxler and D. Zlatnik, New concepts for cost-effective magnetic bearing control, Automatica, (30) : 871-876, (1994).

## **Bibliographie**

---

- [10] B. R. Bloom and C. J. Murray, Tuberculosis : commentary on a reemergent killer, *Science*, (257) : 1055-1064, (1992).
- [11] S. M. Blower, P. M. Small and P. C. Hopwell, Control Strategies for Tuberculosis Epidemics : New Models for Old Problems, *Science*, (273) : 497-500, (1996).
- [12] S. M. Blower and J. L . Gerberding, Understanding, predicting and controlling the emergence of drug-resistance tuberculosis : a theoretical framework, *Journal of Molecular and Medecine*, (76) : 624-636, (1998).
- [13] S. Bowong, Stabilisation des systèmes non linéaires affine et non affine en les contrôles, Mémoire de DEA, Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques, Benin, (1999).
- [14] S. Busenberg and K. Cook, Vertically Transmitted Diseases : Models and Dynamics *Biomathematics*, 23, Springer-Verlag, New York, (1993).
- [15] S. Busenberg and C. Castillo-Chavez, A general solution of the problem of mixing subpopulations, and its applications to risk and age-structure epidemic models for the spread of AIDS, *Journal of Mathematical Applied Medecine Biology*, (8) : 1-9, (1991).
- [16] C. Byrnes and A. Isidori, New results and examples in nonlinear feedback stabilization, *Systems & Control Letters*, (12) : 437-442, (1989).
- [17] C. Castillo-Chavez and Z. Feng, To treat or not treat : the case of tuberculosis, *Journal of Mathematical Biology*, (35) : 629-656, (1997).
- [18] C. Castillo Chavez, Z. Feng and W. Huang, On the computation of  $R_0$  and its role on global stability, *Mathematical Approaches for Emerging and Reemerging Infectious Diseases, An introduction*, Springer Verlag, (1998).
- [19] C. Castillo-Chavez, J. X. Velasco-Hernandez and S. Fridman, Modeling contact structures in Biology, In *Frontiers of Theoretical Biology*, S. A. Levin (ed), Lecture notes in Biomathematics, 100, Springer-Verlag, New-York, (1994).
- [20] J. M. Coron and L. Praly, Adding an integrator for the stabilization problem, *Systems & Control Letters*, (17) : 89-104, (1991).

- 
- [21] C. C. Chung and J. Hauser, Nonlinear control of a swinging pendulum, *Automatica*, (31) : 851-862, (1995).
- [22] F. Deza, D. Bossanne, E. Busvelle, J. P. Gauthier and D. Rakotopa, Exponential observers for nonlinear systems, *IEEE Transactions on Automatic and Control*, (38) : 482-484, (1993).
- [23] F. Deza, E. Busvelle, J. P. Gauthier and D. Rakotopa, High gain estimation for nonlinear systems, *Systems & Control Letters*, (38) : 482-484, (1993).
- [24] F. Deza et J. P. Gauthier, A simple robust solution for the problem of nonlinear estimation, *Proceeding MCTS'91, Lille, France*, 449-451, (1991).
- [25] O. Diekmann and J. A. P. Heesterbeek, On the definition and computation of the basic reproduction ratio in models for infectious diseases in heterogenous populations, *Journal of Mathematical Biology*, (28) : 365-382, (1990).
- [26] O. Diekmann and J. A. P. Heesterbeek, *Mathematical Epidemiology of Infectious Diseases : Model Building, Analysis and Interpretation*, Wiley, New York, (2000).
- [27] O. Diekmann, J. A. P. Heerterbeek and J. A. J. Metz, On the definition and the computation of the basic reproduction ratio  $R_0$  in models for infectious diseases in heterogenous population, *Journal of Mathematical Biology*, (28) : 365-382, (1990).
- [28] C. Dye, G. P. Garnett, K. Sleeman and B. G. Williams, Prospect for worldwide tuberculosis control under the WHO DDOTS strategy. Directed observed short-course therapy, *Lancet*, (352) : 1886-1891, (1998).
- [29] Z. Feng and J. X. Velasco-Hernandez, Competitive exclusion in a vector-host model for the dengue fever, *Journal of Mathematical Biology*, (35) : 532-544, (1997).
- [30] Z. Feng, C. Castillo-Chavez and A. Capurro, A Model for Tuberculosis with Exogenous Reinfection, *Theoretical Population Biology*, (57) : 235-247, (2000).
- [31] R. A. Freeman and L. Praly, Integrators Backstepping for Bounded Controls and Control Rates, *IEEE Transactions on Automatic and Control*, (43) : 258-262, (1998).
- [32] J. P. Gauthier and G. Bornard, Stabilisation des systèmes non linéaires, In *Outils et*

## **Bibliographie**

---

- modèles mathématiques pour l'automatique et la théorie du signal, pages 307-324, Editions du CNRS, (1981).
- [33] J. P. Gauthier, H. Hammouri and S. Othman, A simple observer for nonlinear systems : application to bioreactors, *IEEE Transactions on Automatic and Control*, (37) : 875-880, (1992).
- [34] J. P. Gauthier and I. Kupka, Observability and observers for nonlinear systems, *SIAM Journal of Control and Optimization*, (32) : 975-994, (1994).
- [35] J. P. Gauthier and I. A. K. Kupka, Deterministic observation theory and applications, Cambridge University Press, (2001).
- [36] B. Gazzard, Tuberculosis, HIV and the developing world, *Clin. Med*, (1) : 62-68, (2001).
- [37] W. Hahn, *Stability of Motion*, Springer Verlag, (1967).
- [38] J. Hale, *Ordinary Differential Equations*, Malabar, F. L. : Krieger, (1980).
- [39] J. K. Hale, *Ordinary Differential Equations*, John Willey, (1969).
- [40] S. A. Hall, Pulse-width modulating control of a nonlinear electromagnetic, *IEEE Transactions on Industrial and Electron*, 37 : 241-249, (1990).
- [41] A. D. Harries, N. J. Hargreaves, J. Kemp, A. Jindani, D. A. Enarson, D. Maher and F. M. Salaniponi, Deaths from tuberculosis in sub-saharan African countries with a high prevalence HIV-1, *Lancet*, (357) : 1519-1523, (2001).
- [42] J. Hernandez, Sur la synthèse de lois de commande non linéaires avec observateur : applications à la robotique et à l'électrotechnique, Thèse de Doctorat, Université de Paris-Sud, Orsay, (1994).
- [43] R. Hermann and A. Krener, Nonlinear controllability and observability, *IEEE Transactions on Automatic and Control*, (22) : 728-740, (1981).
- [44] A. Iggidr and G. Sallet, Exponential stabilization of nonlinear systems by an estimated state feedback, *Proceeding 2nd European Control Conference ECC'93*, Groningen, Pays Bas, (1993).

- 
- [45] M. Jankovic, R. Sepulchre and P. V. Kokotovic, Constructive Lyapunov stabilization of nonlinear cascade systems, *IEEE Transactions on Automatic and Control*, (41) : 1723-1735, (1996).
- [46] V. Jurdjevic and J. P. Quinn, Controllability and stability, *Journal of Differential Equations*, (28) : 381-389, (1978).
- [47] N. Kalouptsidis and J. Tsiniias, Stability improvement of nonlinear systems by feedback, *IEEE Transactions on Automatic and Control*, (29) : 364-367, (1984).
- [48] T. Kailath, *Linear systems*, Ed. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New-Jersey, (1980).
- [49] S. H. Kaufmann and J. D. Embden, Tuberculosis : a neglected disease strikes back, *Trends Microbiological*, (1) : 2-5, (1993).
- [50] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems, Second Edition*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ07458, (1996).
- [51] H. Keller, Nonlinear Observer design by transformation into a generalized observer canonical form, *International Journal of Control*, (46) : 1915-1930, (1987).
- [52] A. A. Kolesnikov, Analytical construction of nonlinear algebraic regulator with given invariant manifolds, *Izv. Buisshix Uchevnik Savedenii, Electromexanica*, (3) : 100-109, (1987). See also : (5) : 58-66.
- [53] M. Kristic and H. Deng, *Stabilization of nonlinear uncertain systems, Communications and Control Engineering*, Springer Verlag, (1998).
- [54] M. Kristic, I. Kanellakopoulos and P. Kokotovic, *Nonlinear and adaptive control design*, John Wiley & Sons, New York, (1995).
- [55] J. P. LaSalle, Stability Theory for Ordinary Differential Equations, *Journal of Differential Equations*, (4) : 57-65, (1968).
- [56] J. P. LaSalle and S. Lefschetz, *Stability by Liapunov's direct method with applications*, Accademic Press, New York, (1961).
- [57] K. K. Lee and A. Araposthalis, Remarks on smooth feedback stabilization of nonlinear systems, *Systems & Control Letters*, (10) : 41-44, (1998).

## ***Bibliographie***

---

- [58] E. Lefeber, *Tracking Control of Nonlinear Mechanical Systems*, Enschede : Universiteit Twente, (2000).
- [59] J. Lévine, J. Lottin and J. C. Ponsart, A Nonlinear Approach to the Control of Magnetic Bearings, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, (4) : 520-543, (1996).
- [60] W. Lin, Global asymptotic stabilization of general nonlinear systems with stable free dynamics via passivity and bounded feedback, *Automatica*, (32) : 915-924, (1996).
- [61] R. Lozano, I. Fantoni and D. J. Block, Stabilization of the inverted pendulum around its homoclinic orbit, *Systems & Control Letters*, (40) : 197-204, (2000).
- [62] G. Macdonald, *The epidemiology and control of malaria*, Oxford University Press, (1957).
- [63] F. Mazenc and S. Bowong, Tracking Trajectories of Feedforward Systems, *IEEE Transactions on Automatic and Control*, (47) : 1338-1342, (2002).
- [64] F. Mazenc and S. Bowong, Tracking trajectories of the cart-pendulum system, *Automatica*, (39) : 677-684, (2003).
- [65] F. Mazenc, *Stabilisation de trajectoires, Ajout d'intégration, Commandes saturées*. Thèse en Mathématiques et Automatique, Ecole des Mines de Paris, (1996).
- [66] F. Mazenc and A. Iggidr, Backstepping with bounded feedbacks, à paraître dans *Systems & Control Letters*.
- [67] F. Mazenc and L. Praly, Adding an integration, Saturated Controls, and Global Stabilization of Feedforward systems, *IEEE Transactions on Automatic and Control*, (11) : 1559-1578, (1996).
- [68] F. Mazenc and L. Praly, Asymptotic tracking of a reference state for systems with a feedforward structure, *Automatic*, (36) : 179-187, (2000).
- [69] J. Meisel, *Principles of electromechanical energy conversion*, McGraw Hill, (1996).

- 
- [70] A. M. Mohamed and I. Busch-Vishniac, Imbalance compensation and automation balancing in magnetic bearing systems using the Q-parametrization theory, *IEEE Transactions on Control and System Technology*, (3) : 202-211, (1995).
- [71] P. Mouille, *Commande non linéaire de paliers magnétiques*, PhD. dissertation, Université Savoie, Annecy, France, 1994.
- [72] G. A. Ngwa and W. S. Shu, A Mathematical Model for Endemic Malaria with Variable Human and Mosquito Populations, *Mathematical and Computer Modelling*, (32) : 747-763, (2000).
- [73] R. Ortega, A. Loria, P. J. Nicklasson and H. Sira-Ramirez, *Passivity-based Control of Euler-Lagrange Systems*, Springer-Verlag, New york (1998).
- [74] R. Outbib and G. Sallet, Stabilizability of the angular velocity of a rigid body revisited, *Systems & Control Letters*, (18) : 93-98, (1992).
- [75] Programme National de Lutte contre La Tuberculose du Cameroun, Guide Technique pour les personnels de santé, Ministère de la santé publique, (1998).
- [76] M. S. de Quiroz and D. M. Dawson, Nonlinear Control Active Magnetic Bearings : A Backstepping Approach, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, (4) : 545-552, (1996).
- [77] A. Teel, Feedback stabilization : nonlinear solutions to inherently nonlinear problems, *IEEE Transactions on Automatic and Control*, No. UCB/ERL M 92/65, 12 June 1992.
- [78] M. Torres and R. Ortega, Feedback Linearization, Integrator Backstepping and Passitivity-Based Controller Designs : A Comparison Example.
- [79] J. Tsinias, A generalization of Vidyasagar's theorem on stabilizability using state detection, *Systems & Control Letters*, (17) : 37-42, (1991).
- [80] J. Tsinias, Sufficient Lyapunov-like conditions for stabilization, *Mathematical Control Signals Systems*, (2) : 343-357, (1989).
- [81] C. Revelle, W. Lynn and F. Feldmann, Mathematical models for the economic

## ***Bibliographie***

---

- allocation of tuberculosis control activities in developing nations, *Management science*, (16) : 190-211, (1962).
- [82] R. Ross, *The prevention of Malaria*, 2nd edition, with addendum, John Murray, London, (1911).
- [83] A. A. Salyers and D. D. Whitt, *Bacterial Pathogenesis*, Washington, D.C., (1984).
- [84] R. Sepulchre, M. Jankovic and P. V. Kokotovic, *Constructive Nonlinear Control*, Springer-Verlag, (1996).
- [85] P. A. Selwyn, D. Hartel, V. A. Lewis, E. E. Schoenbaum, S. H. Klein, A. T. Walker and G. H. Friedland, A prospective study of the risk of tuberculosis among intravenous drug users with human immunodeficiency virus infection, *N. Engl. J. Med.*, (320) : 545-550, (1989).
- [86] K. Styblo, *Selected Papers : Epidemiology of Tuberculosis*, Royal Netherlands Tuberculosis Association, (24) : 55-62, (1991).
- [87] P. Vedagarbha, T. Burg, J. Hu and D. Dawson, Development and demonstration of new class of adaptive partial state feedback controllers for electric machines, in *Proceeding of American Conference*, pp. 59-63, June 1995.
- [88] M. Vidyasagar, On the stabilization of nonlinear systems using state detection, *IEEE Transactions on Automatic and Control*, (25) ; 504-509, (1980).
- [89] H. Waaler, A. Geser and S. Anderson, The use of mathematical models in the study of the epidemiology of tuberculosis, *American Journal of Public Health*, (52) : 1002-1007, (1962).



# Annexe

**Tracking Trajectories of Feedforward Systems : Applications to the Cart-pendulum System**, Proceeding of the 40th IEEE Conference on Decision and Control, Orlando, Florida USA, December 2001



# Tracking Trajectories of Feedforward Systems: Application to the Cart-pendulum System

F. Mazenc  
INRIA Lorraine,  
Projet CONGE, ISGMP Bât A,  
Ile du Saulcy,  
57045 Metz Cedex 01, France,  
email: mazenc@loria.fr

S. Bowong  
Institut de Mathématiques  
et de Sciences Physiques,  
B.P. 613, Porto-Novo,  
République du Bénin,  
email: bowong@loria.fr

**Abstract.** The objective of the work is twofold. A first part is devoted to the problem of tracking trajectories of feedforward systems. A family of the time-varying state feedbacks which globally uniformly asymptotically and locally exponentially stabilize trajectories which are not necessarily periodic functions of the time is exhibited. Strict Lyapunov functions are constructed. In a second part, the problem of tracking a trajectory of the practical system called cart-pendulum system is solved.

**Key words.** Nonlinear feedforward systems, tracking, cart-pendulum system.

## 1 Introduction

The tracking problem for nonlinear systems is one of the most challenging of control theory, owing to its difficulty and its practical interest. It has received a considerable amount of attention. Some approaches of this problem are well-known. In particular, the linearization, the partial linearization (see [2, 6]), the concept of flatness (see [7] and the references therein) have been successfully used to track locally, and in some cases globally, trajectories of particular nonlinear systems. The backstepping and the passivity techniques (see [3, 11] and [10]) provide also a very efficient help for solving globally the problem for wide families of systems. However, the feedforward systems (see [8, 9, 12]) are in general not in feedback form, have no particular passivity properties, are not linearizable, not flat and, when partially linearizable, nonminimum-phase. It follows that the techniques mentioned above do not apply.

For chains of integrators with bounded input (which are particular feedforward systems), the tracking problem has been solved by A. Teel in [13]. Recently, F. Mazenc and L. Praly [9] have constructed a family of feedbacks (which contains bounded functions arbitrarily small in norm) which globally uniformly asymptot-

ically and locally exponentially stabilize periodic reference state trajectories of nonlinear feedforward systems. This new approach relies on the construction of a Lyapunov function which is not a strict Lyapunov function i.e. which admits a derivative along the trajectories of the closed-loop systems which is not smaller than a negative definite function independent of the time. It follows that: (i) The uniform asymptotic stability of the stabilized trajectories can be established only if they are periodic. (ii) The technique cannot always be applied repeatedly.

The purpose of the present work is to complement [9]. In a first part, we consider the general class of systems studied in [9] and prove for these systems, under slightly more restrictive assumptions, the global uniform asymptotic stabilizability (GUAS) and the local exponential stabilizability (LES) of signals which are not necessarily periodic functions of the time through the construction of a *strict* Lyapunov function. In a second part, we apply to the nonlinear benchmark mechanical system usually called 'the cart-pendulum system' the tracking technique of [9].

This system is a good example to illustrate cases where the design of [9] can be fruitfully applied: when partially linearized, this system is not minimum phase and, on the other hand, after a preliminary change of feedback, it is described by equations in feedforward form.

**Organization of the paper.** In Section 2, the main result in [9] is briefly presented. In Section 3, we construct a strict Lyapunov function. In Section 4, we apply the theoretical results to the cart-pendulum system. Section 5 contains concluding remarks.

**Basic definitions.**

- Unless otherwise stated, we assume that the functions are sufficiently many times differentiable.
- Throughout the paper, the symbol  $c$  denotes generically a strictly positive real number.
- A function  $\sigma : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  is said to be a saturation if it is a continuous, bounded, differentiable at 0 and such that :  $\sigma(s)s > 0, \forall s \neq 0, \sigma'(0) > 0, \sigma|_{\mathfrak{R}_+} \notin$

$L^1(\mathfrak{R}_+)$ ,  $\sigma|_{\mathfrak{R}_-} \notin L^1(\mathfrak{R}_-)$ . It is said to be a linear saturation if there exists  $L > 0$  such that for all  $s \in ]-L, L[$ , then  $\sigma(s) = s$ .

- With  $Q$  a positive definite symmetric matrix, we denote:  $|x| = \sqrt{x^T x}$ ,  $|x|_Q = \sqrt{x^T Q x}$ .
- A function  $\alpha: \mathfrak{R}_+ \rightarrow \mathfrak{R}_+$  is said to be of class  $\mathcal{K}_\infty$  if it is zero at zero, strictly increasing and unbounded.
- By  $\tilde{V}_{(1)}(\chi, t)$  we denote the function:  $\tilde{V}_{(1)}(\chi, t) = \frac{\partial V}{\partial x}(\chi, t)\varphi(\chi, a, t) + \frac{\partial V}{\partial t}(\chi, t)$ , where  $\varphi(\chi, a, t)$  is the vector field of the differential equation

$$\dot{\chi} = \varphi(\chi, a, t). \quad (1)$$

## 2 The main source of our work

In this section, we present a result which summarizes the two main results of [9]: Theorem 1 and Corollary 6. We will exploit extensively this result in the subsequent sections. Consider the following system:

$$\begin{cases} \dot{X} &= MX + H_1(Y) + H_2(Y, u)u, \\ \dot{Y} &= F_0(Y) + F_2(Y, u)u, \end{cases} \quad (2)$$

with  $X$  in  $\mathfrak{R}^n$ ,  $Y$  in  $\mathfrak{R}^m$ ,  $u$  in  $\mathfrak{R}^q$  and  $H_1(0) = 0$ ,  $F_0(0) = 0$  and introduce a set of assumptions:

**Assumption A1:** *There exist  $X_r(t), Y_r(t), u_r(t)$  bounded on  $[0, +\infty[$ , of class  $C^2$  and verifying:*

$$\begin{cases} \dot{X}_r(t) &= MX_r(t) + H_1(Y_r(t)) \\ &\quad + H_2(Y_r(t), u_r(t))u_r(t), \\ \dot{Y}_r(t) &= F_0(Y_r(t)) + F_2(Y_r(t), u_r(t))u_r(t). \end{cases}$$

This assumption guarantees that the matrix:

$$A(t) = \frac{\partial}{\partial \tilde{Y}} \left[ F_0(\tilde{Y} + Y_r(t)) \right] \Big|_{\tilde{Y}=0} + \frac{\partial}{\partial \tilde{Y}} \left[ F_2(\tilde{Y} + Y_r(t), u_r(t))u_r(t) \right] \Big|_{\tilde{Y}=0}$$

is well-defined. Let  $\Phi_A(t, t_0)$  be the transition matrix associated to this matrix, i.e. the function verifying:

$$\frac{\partial \Phi_A}{\partial t}(t, t_0) = \Phi_A(t, t_0)A(t), \quad \Phi_A(t_0, t_0) = I.$$

**Assumption A2:**

**A2.1:** *The point  $\tilde{Y} = 0$  is a GUAS equilibrium point of the system:*

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{Y}} &= F_0(\tilde{Y} + Y_r(t)) + F_2(\tilde{Y} + Y_r(t), u_r(t))u_r(t) \\ &\quad - F_0(Y_r(t)) - F_2(Y_r(t), u_r(t))u_r(t). \end{aligned} \quad (3)$$

**A2.2:** *There exist a positive definite symmetric matrix  $Q$  and  $c > 0$ ,  $\alpha > 0$  such that:*

$$M^T Q + Q M = -R \leq 0, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} |\exp(M(s-t))\Phi_A(t, s)| &\leq c \exp(-\alpha(t-s)), \\ \forall t > 0, \forall s \in [0, t]. \end{aligned} \quad (5)$$

**Fact 2.1** *If the system (2) satisfies Assumptions A1 and A2, then there exist a Lyapunov function  $V(\tilde{Y}, t)$ , strictly positive real numbers  $p_i$ ,  $i = 1$  to 5, a function  $W(\tilde{Y}, t)$  and functions  $\alpha_1(\cdot)$ ,  $\alpha_2(\cdot)$ ,  $\alpha_3(\cdot)$  and  $\alpha_4(\cdot)$  of class  $\mathcal{K}_\infty$  such that:*

- for all  $|\tilde{Y}| \leq p_1$ :

$$\begin{aligned} p_2 |\tilde{Y}|^2 \leq V(\tilde{Y}, t) \leq p_3 |\tilde{Y}|^2, \quad \left| \frac{\partial V}{\partial \tilde{Y}}(\tilde{Y}, t) \right| &\leq p_4 |\tilde{Y}|, \\ p_5 |\tilde{Y}|^2 \leq \alpha_3(|\tilde{Y}|) &\leq W(\tilde{Y}, t), \end{aligned}$$

- for  $v = 0$  and for all  $\tilde{Y}$ :

$$\begin{aligned} \alpha_1(|\tilde{Y}|) &\leq V(\tilde{Y}, t) \leq \alpha_2(|\tilde{Y}|), \\ \left| \frac{\partial V}{\partial \tilde{Y}}(\tilde{Y}, t) \right| &\leq \alpha_4(|\tilde{Y}|), \\ \dot{V}(\tilde{Y}, t)_{(3)} &= -W(\tilde{Y}, t) \leq -\alpha_3(|\tilde{Y}|). \end{aligned}$$

**Fact 2.2** *Assumption A2.2 implies that the equation:*

$$\dot{P}(t) = MP(t) - P(t)A(t) - C(t),$$

where

$$\begin{aligned} C(t) &= \frac{\partial}{\partial \tilde{Y}} \left[ H_1(\tilde{Y} + Y_r(t)) \right] \Big|_{\tilde{Y}=0} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial \tilde{Y}} \left[ H_2(\tilde{Y} + Y_r(t), u_r(t))u_r(t) \right] \Big|_{\tilde{Y}=0}, \end{aligned}$$

admits on  $[0, +\infty[$  a unique continuous and bounded solution:

$$P(t) = \int_t^{+\infty} \exp(M(t-s))C(s)\Phi_A(s, t)ds. \quad (6)$$

Fact 2.2 allows us to introduce the notation:

$$\begin{aligned} D(t) &= \frac{\partial H_2}{\partial u}(Y_r(t), u_r(t))u_r(t) + H_2(Y_r(t), u_r(t)) \\ &\quad + P(t) \left[ \frac{\partial F_2}{\partial u}(Y_r(t), u_r(t))u_r(t) + F_2(Y_r(t), u_r(t)) \right], \end{aligned}$$

and to state the assumption:

**Assumption A3:** *The pair  $\left( M, \left( QD(t), R^{\frac{1}{2}} \right)^T \right)$  is uniformly detectable.*

Before stating the main result of this section, observe that by letting:

$$\begin{aligned} \tilde{X} &= X - X_r(t), \quad \tilde{Y} = Y - Y_r(t), \quad v = u - u_r(t), \\ x &= \tilde{X} + P(t)\tilde{Y}, \quad y = \tilde{Y} \end{aligned} \quad (7)$$

where  $P(\cdot)$  is the function defined in (6), the dynamics (2) become:

$$\begin{cases} \dot{x} &= Mx + h_1(y, t) + h_2(y, v, t)v, \\ \dot{y} &= f_0(y, t) + f_2(y, v, t)v, \end{cases} \quad (8)$$

where  $h_1(\cdot)$ ,  $h_2(\cdot)$ ,  $f_0(\cdot)$  and  $f_2(\cdot)$  are functions bounded with respect to  $t$ . This system will be used in Section 3.

**Theorem 2.3** *If Assumptions A1 to A3 are satisfied, there exist a smooth function  $\kappa(\cdot)$  of class  $K_\infty$ , a smooth saturation  $\sigma(\cdot)$ , such that the derivative of the Lyapunov function*

$$U(x, y, t) = \kappa(V(y, t)) + \int_0^{|x|Q} \sigma(s) ds, \quad (9)$$

along the trajectories of (8) in closed-loop with

$$\begin{aligned} v(x, y, t) &= -\lambda(y)T(x, y, t)^\top \\ T(x, y, t) &= \kappa'(V(y, t)) \frac{\partial V}{\partial y}(y, t) f_2(y, 0, t) \\ &\quad + \sigma(|x|Q) \frac{x^\top Q}{|x|} h_2(y, 0, t), \end{aligned} \quad (10)$$

where  $\lambda(y)$  is a strictly positive function of class  $C^1$ , satisfies

$$\dot{U}(x, y, t)_{(8)} \leq \frac{-\frac{1}{2}\kappa'(V(y, t))W(y, t) - \frac{\sigma(|x|Q)x^\top R x}{2|x|Q} - \frac{|v(x, y, t)|^2}{2\lambda(y)}}{2\lambda(y)}. \quad (11)$$

Moreover, for all  $\tilde{u}$  in  $]0, +\infty[$ , one can select a function  $\lambda(y)$  such that  $\bar{u}(X, Y, t) = u_r(t) + v(x, y, t)$  where  $v(x, y, t)$  is the function given in (10) satisfies:

$$|\bar{u}(X, Y, t) - u_r(t)| \leq \tilde{u}.$$

If  $(X_r(t), Y_r(t), u_r(t))$  are periodic functions, the system (2) in closed-loop with  $\bar{u}(X, Y, t)$  admits  $(X_r(t), Y_r(t))$  as a GUAS and a LES solution.

### 3 Global uniform asymptotic stability

To deal with the more general case where  $X_r(t), Y_r(t), u_r(t)$  are not periodic and to obtain a strict Lyapunov function for the error equation, we strengthen Assumption A3 by requiring not only a detectability property but an observability property.

**Assumption A4:** The pair:  $\left(M, \left(QD(t), R^{\frac{1}{2}}\right)^\top\right)$  is uniformly observable.

Let us state the main result of the work.

**Theorem 3.1** *If the system (2) satisfies Assumptions A1 to A4, then for all  $\tilde{u}$  in  $]0, +\infty[$ , there exists a continuous time-varying feedback law  $\bar{u}(X, Y, t)$  verifying:*

$$|\bar{u}(X, Y, t) - u_r(t)| \leq \tilde{u} \quad (12)$$

and such that  $(X_r(t), Y_r(t))$  is a GUAS and a LES solution of the closed-loop system.

**Remark 1:** The control law we use is similar to the one proposed in [9] i.e. the one provided by Theorem 2.3. Only a slight additional requirement on its size is imposed.

**Sketch of the proof.** Due to space limitation, we only give the key ideas of the proof.

To establish the result, we shall exhibit a strict Lyapunov function for the system (8) with the feedback law (10). The Lyapunov function (9) is not strict: the right hand side of Inequality (11) with  $y = 0$  is not smaller than a negative definite function of  $x$ . So in a first step, we construct a Lyapunov function for the  $x$ -subsystem of (8) whose derivative along the trajectories of the system is negative definite in  $x$  when  $y = 0$ . With this function in hand, we shall be able to build in a second step a strict Lyapunov function for the overall system.

The assumptions of Theorem 3.1 ensure that Theorem 2.3 applies. So there exist a function  $U(\cdot)$  given in (9) and a feedback law (10) such that Inequality (11) holds. Notice that from (10) we have:

$$v(x, 0, t) = -\lambda_0 \frac{\sigma(|x|Q)}{|x|} D(t)^\top Q x, \quad \lambda_0 = \lambda(0). \quad (13)$$

Finally to make our arguments simpler, we impose on  $\sigma(\cdot)$  to be a linear saturation, bounded in norm by 1 and equal to the identity function on  $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ .

**First step: A Lyapunov function for the  $x$ -subsystem.**

We start the construction with the following result.

**Lemma 3.2** *Under (4) and Assumption A4, for the system*

$$\dot{\chi} = [M - \varepsilon D(t)D(t)^\top Q]\chi, \quad (14)$$

where  $\varepsilon$  is a strictly positive real number, there exists a continuously differentiable, bounded, positive definite, symmetric matrix  $Q_\varepsilon(t)$  such that:

$$\overbrace{\chi^\top Q_\varepsilon(t)\chi}_{(14)} = -|\chi|^2. \quad (15)$$

Then, with  $\lambda_0$  given in (13) and  $\rho$  a strictly positive real number to be specified later on, we let:

$$Q(x, t) = \rho[x^\top Q x]^2 + x^\top Q_{\lambda_0}(t)x.$$

This function combines the strict Lyapunov function given by  $Q_{\lambda_0}(t)$  with the one given by  $Q$ . This construction is reminiscent from the one proposed in [5] (see also [14]). The key point about  $Q(\cdot)$  is the following property.

**Lemma 3.3** *Consider the system:*

$$\dot{\chi} = M\chi + D(t)v(\chi, 0, t). \quad (16)$$

There exists  $\rho(\lambda_0) > 0$  such that, for all  $\rho \geq \rho(\lambda_0)$ :

$$\dot{Q}(x, t)_{(16)} \leq -\lambda_0 \rho \sigma(|x|_Q) |x|_Q |D(t)^\top Q x|^2 - \frac{1}{2} |x|^2.$$

From now on,  $\rho$  is related to  $\lambda_0$  as indicated by this lemma.

After calculations, which are omitted due to space limitation, we obtain, for some  $\lambda_0$  and  $\rho$  suitably chosen, the inequality

$$\overbrace{\arctan(Q(x, t))}_{(8)} \leq \frac{-P(x, t) + \frac{\Xi(|y|)^2}{4c} |y|^2}{+\gamma(|y|)|y|^2} \quad (17)$$

with

$$P(x, t) = \frac{\frac{1}{4}|x|^2 + \frac{1}{2}\lambda_0 \rho \sigma(|x|_Q) |x|_Q |D(t)^\top Q x|^2}{1 + Q(x, t)^2}$$

This is the key result we wanted to prove: the right hand side of inequality (17) is negative definite with respect to  $x$  when  $y = 0$ .

## Second step: Strict Lyapunov function for the overall system.

Using [8, Lemma B2, Appendix B], one can determine a smooth function  $\bar{\kappa}(\cdot)$  of class  $\mathcal{K}_\infty$  such that the derivative along the trajectories of (8) of the function

$$U(x, y, t) = \arctan(Q(x, t)) + \bar{\kappa}(U(x, y, t))$$

satisfies

$$\dot{U}_{(8)}(x, y, t) \leq -\frac{1}{4} \alpha_3(|y|) - \frac{1}{4} \frac{|x|^2}{1 + c|x|^2 + c|x|^8}.$$

To conclude, one can check that [1, Chapter 10, Theorem 3.1] applies: we deduce that the trajectory  $(X_r(t), Y_r(t))$  is GUAS and LES by the feedback

$$\bar{u}(X, Y, t) = v(\tilde{Y}, \tilde{X} + P(t)\tilde{Y}, t) + u_r(t),$$

which satisfies Inequality (12).  $\square$

## 4 Control of the cart-pendulum system

In this section, our main objective is to show how Theorem 2.3 can be applied to stabilize the oscillation around the upward vertical position of a pendulum on a cart moving on a horizontal axis.

### 4.1 Problem formulation

The dynamics of the cart-pendulum system obtained either by applying Newton's second law or by Euler-Lagrange formulation are:

$$\begin{aligned} (M + m)\ddot{x} + m\ell\ddot{\theta} \cos \theta - m\ell\dot{\theta}^2 \sin \theta &= f, \\ \ddot{x} \cos \theta + \ell\ddot{\theta} - g \sin \theta &= 0, \end{aligned}$$

where  $(M, x)$  are mass and position of the cart which is moving horizontally,  $(m, \ell, \theta)$  are mass, length and angular deviation from the upward vertical position for the pendulum which is pivoting around a point fixed on the cart,  $f$  is a horizontal force action on the cart. The problem we address is to design  $f$  so that the cart-pendulum system exhibits a periodic oscillation with the angle  $\theta$  tracking the following reference:

$$\tan(\theta_r(t)) = \cos\left(\frac{\ell}{g}t\right). \quad (18)$$

### 4.2 Stability analysis

After changes of coordinates, control and time (see [8, Section 5.3]), we get the following system:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = s_1 - t_1, \\ \dot{s}_1 = u_1, \quad \dot{t}_1 = r_1, \\ \dot{r}_1 = -(t_1 + r_1)\sqrt{1 + t_1^2} + u_1\sqrt{1 + t_1^2}. \end{cases} \quad (19)$$

In these coordinates, a (periodic) reference trajectory meeting (18) is given by:

$$\begin{cases} x_{1r}(t) = -\cos(t) - \int_0^t \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin(s)\right), \\ s_{1r}(t) = \cos(t) + \sin(t) - \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin(t)\right), \\ t_{1r}(t) = \cos(t), \quad r_{1r}(t) = -\sin(t), \\ u_{1r}(t) = \frac{-\cos(t)}{\sqrt{1 + \cos^2(t)}} + \cos(t) - \sin(t). \end{cases}$$

This allows us to transform the tracking problem we consider into the problem of GUAS and LES the origin of a time-varying nonlinear system. By letting:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= x_1 - x_{1r}(t), \quad \tilde{s}_1 = s_1 - s_{1r}(t), \\ \tilde{t}_1 &= t_1 - t_{1r}(t), \quad \tilde{r}_1 = r_1 - r_{1r}(t), \\ u_2 &= u_1 - u_{1r}(t), \end{aligned}$$

the dynamic of system (19) become:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{s}_1 - \tilde{t}_1, \\ \dot{\tilde{s}}_1 = u_2, \quad \dot{\tilde{t}}_1 = \tilde{r}_1, \\ \dot{\tilde{r}}_1 = -(\tilde{t}_1 + \tilde{r}_1)\sqrt{1 + \tilde{t}_1^2} + \tilde{r}_{1r} \frac{\tilde{t}_1^2 + 2\tilde{t}_1 t_{1r}(t)}{\zeta(\tilde{t}_1, \tilde{r}_1)} \\ \quad + u_2 \sqrt{1 + \tilde{t}_1^2}, \end{cases} \quad (20)$$

with

$$\zeta(\tilde{t}_1, \tilde{r}_1(t)) = 1 + \tilde{r}_{1r}^2(t) + \sqrt{1 + \tilde{t}_1^2(t)} \sqrt{1 + \tilde{r}_1^2}.$$

From now on, the problem we address is to design  $u_2$  to make the zero solution of these equations GUAS and LES. We solve the problem in three steps:

- Stabilization of the  $(\tilde{t}_1, \tilde{r}_1)$ -subsystem. The  $(\tilde{t}_1, \tilde{r}_1)$ -block is controlled by  $u_2$ . This will be a  $y$ -block according to our general notations.
- Stabilization of the  $(\tilde{s}_1, \tilde{t}_1, \tilde{r}_1)$ -subsystem. The  $\tilde{s}_1$ -block is also directly controlled by  $u_2$ . But since  $u_2$  will be predetermined by handling the  $(\tilde{t}_1, \tilde{r}_1)$ -block, we

shall consider this new block as an  $x$ -block. Together with the previous block, it gives us a feedforward system.

• **Stabilization of the overall system.** The  $\tilde{x}_1$ -block integrates functions from the previous blocks. So after having found a stabilizing control for the  $(\tilde{s}_1, \tilde{t}_1, \tilde{r}_1)$ -subsystem, the  $\tilde{x}_1$ -block will give us another  $x$ -block to handle. Before giving the starting point of our design, we have to be sure that we shall be able to pursue our design. So we have found appropriate to take the control as

$$u_2 = \frac{-\dot{r}_{1r}(t)\tilde{t}_1^2}{\zeta(t_1, t_{1r}(t))\sqrt{1+\tilde{t}_1^2}} + \frac{2(\tilde{t}_1+\tilde{r}_1)t_{1r}(t)\tilde{t}_1}{1+\tilde{t}_1^2+\sqrt{1+\tilde{t}_1^2}\sqrt{1+\tilde{r}_1^2}} + u_3.$$

The dynamics of (20) become

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{s}_1 - \tilde{t}_1, \\ \dot{\tilde{s}}_1 = \frac{-\dot{r}_{1r}(t)\tilde{t}_1^2}{\zeta(t_1, t_{1r}(t))\sqrt{1+\tilde{t}_1^2}} + \frac{2(\tilde{t}_1+\tilde{r}_1)t_{1r}(t)\tilde{t}_1}{1+\tilde{t}_1^2+\sqrt{1+\tilde{t}_1^2}\sqrt{1+\tilde{r}_1^2}} + u_3, \\ \dot{\tilde{t}}_1 = \tilde{r}_1, \\ \dot{\tilde{r}}_1 = -(\tilde{t}_1 + \tilde{r}_1)\sqrt{1+\tilde{t}_1^2} - \frac{t_{1r}^2(t)(\tilde{t}_1+\tilde{r}_1)}{\sqrt{1+\tilde{t}_1^2}\sqrt{1+\tilde{r}_1^2}} \\ + \frac{2\dot{r}_{1r}(t)t_{1r}(t)\tilde{t}_1}{1+t_{1r}^2(t)+\sqrt{1+t_{1r}^2(t)}\sqrt{1+\tilde{t}_1^2}} + u_3\sqrt{1+\tilde{t}_1^2}, \end{cases} \quad (21)$$

**Stabilization of the  $(\tilde{t}_1, \tilde{r}_1)$ -subsystem** We prove that the origin of the  $(\tilde{t}_1, \tilde{r}_1)$ -subsystem of (21) is GUAS and LES when  $u_3 = 0$  by means of the positive definite and radially unbounded smooth function:

$$V_1(\tilde{t}_1, \tilde{r}_1) = (1+\tilde{t}_1^2)^{\frac{3}{2}} - 1 + \tilde{t}_1\tilde{r}_1 + \tilde{r}_1^2.$$

By using Young's inequality, one can prove that the derivative of this function along the trajectories with  $u_3 = 0$  satisfies

$$\dot{V}_1(21) \leq -\frac{2+\sqrt{2}}{4}\tilde{t}_1^2\sqrt{1+\tilde{t}_1^2} - \tilde{r}_1^2\left(-\frac{7+2\sqrt{2}}{3} + 2\sqrt{1+\tilde{t}_1^2}\right),$$

which ensures the GUAS and the LES of the origin of the  $(\tilde{t}_1, \tilde{r}_1)$ -subsystem when  $u_3 = 0$ .

**Stabilization of the  $(\tilde{s}_1, \tilde{t}_1, \tilde{r}_1)$ -subsystem** One can check readily that

$$\sqrt{1+\tilde{s}_1^2} \leq \frac{9-2\sqrt{2}}{4}\tilde{t}_1^2 + \tilde{r}_1^2 + \frac{\tilde{s}_1}{\sqrt{1+\tilde{s}_1^2}}u_3. \quad (22)$$

This leads us to propose the following candidate Lyapunov function for the  $(\tilde{s}_1, \tilde{t}_1, \tilde{r}_1)$ -subsystem:

$$V_2(\tilde{s}_1, \tilde{t}_1, \tilde{r}_1) = 3V_1(\tilde{t}_1, \tilde{r}_1) + \sqrt{1+\tilde{s}_1^2} - 1.$$

With (22), its derivative along the trajectories satisfies

$$\dot{V}_2(21) \leq -\frac{5\sqrt{2}-3}{4}\tilde{t}_1^2\sqrt{1+\tilde{t}_1^2} - 2(\sqrt{2}-1)\tilde{r}_1^2\sqrt{1+\tilde{t}_1^2} + G_1(\tilde{t}_1, \tilde{r}_1, \tilde{s}_1)u_3,$$

where

$$G_1(\tilde{t}_1, \tilde{r}_1, \tilde{s}_1) = 3(\tilde{t}_1 + 2\tilde{r}_1)\sqrt{1+\tilde{t}_1^2} + \frac{\tilde{s}_1}{\sqrt{1+\tilde{s}_1^2}}. \quad (23)$$

At this stage, we remark that  $\dot{V}_2(\cdot)$  can be made negative definite by picking any  $u_3$  which has opposite sign to  $G_1(\cdot)$ . But  $u_3$  is not the end of the design. We still have to stabilize the  $\tilde{x}_1$  component. According to our general analysis, this problem can be solved by performing the change of coordinate (7). So to facilitate the determination of such a change of coordinate, we choose a very particular expression for  $u_3$ . More specifically, we take  $u_3$  in the form

$$u_3 = \xi_0 \left( \tilde{t}_1 - \frac{\tilde{s}_1}{\sqrt{1+\tilde{s}_1^2}} \right) + u_4,$$

with  $\xi_0 \neq 0$ , a constant to be specified. The motivation for this choice is that by letting:

$$\tilde{x}_2 = \tilde{x}_1 + \frac{1}{\xi_0}\tilde{s}_1, \quad (24)$$

the expression of  $\dot{\tilde{x}}_2$  has no linear term in  $(\tilde{t}_1, \tilde{s}_1)$ . This means that the change of coordinates (7) is simply given by  $\tilde{x}_2$ . However, it remains to be shown that the above expression of  $u_3$  is appropriate.

When we set  $u_4 = 0$ , by using Young's inequality, (23) gives, after some computations,

$$G_1(\tilde{t}_1, \tilde{r}_1, \tilde{s}_1)u_3 \leq \xi_0 \left( 37 + 3\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \right) \tilde{t}_1^2\sqrt{1+\tilde{t}_1^2} + \xi_0 \left( 23 + 3\sqrt{2+2\sqrt{5}} \right) \tilde{r}_1^2\sqrt{1+\tilde{t}_1^2} - \xi_0 \frac{\tilde{s}_1^2}{4(1+\tilde{s}_1^2)}.$$

Picking for instance  $\xi_0 = \frac{1}{50}$ , we obtain finally the inequality:

$$\dot{V}_2(21) \leq -\frac{10}{51}\tilde{t}_1^2\sqrt{1+\tilde{t}_1^2} - \frac{5}{22}\tilde{r}_1^2\sqrt{1+\tilde{t}_1^2} - \frac{1}{200}\frac{\tilde{s}_1^2}{(1+\tilde{s}_1^2)}, \quad (25)$$

which ensures that the origin of the  $(\tilde{s}_1, \tilde{t}_1, \tilde{r}_1)$ -subsystem when  $u_4 = 0$  is GUAS and LES.

**Stabilization of the overall system.** As mentioned above, we know that the variable  $\tilde{x}_2$ , introduced in (24), is a suitable coordinate. By picking  $\xi_0 = \frac{1}{50}$ , one can check readily that

$$\sqrt{1+\tilde{x}_2^2} \leq \frac{\tilde{s}_1^2}{\sqrt{1+\tilde{s}_1^2}} + 73\tilde{t}_1^2 + 50\tilde{r}_1^2 + \frac{50\tilde{x}_2}{\sqrt{1+\tilde{x}_2^2}}u_4. \quad (26)$$

Hence, we propose the following Lyapunov function which is smooth, radially unbounded and positive definite:

$$V_3(\tilde{x}_2, \tilde{s}_1, \tilde{t}_1, \tilde{r}_1) = 200V_2(\tilde{s}_1, \tilde{t}_1, \tilde{r}_1) + 101[V_2(\tilde{s}_1, \tilde{t}_1, \tilde{r}_1) + 1]^2 + \sqrt{1+\tilde{x}_2^2} - 102.$$

With (25) and (26), its time derivative satisfies:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{3(21)} \leq & -5\tilde{t}_1^2 \sqrt{1+\tilde{t}_1^2} - 5\tilde{r}_1^2 \sqrt{1+\tilde{t}_1^2} - \frac{\tilde{s}_1^2}{100\sqrt{1+\tilde{s}_1^2}} \\ & + G_2(\tilde{x}_2, \tilde{s}_1, \tilde{t}_1, \tilde{r}_1)u_4, \end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned} G_2(\tilde{x}_2, \tilde{s}_1, \tilde{t}_1, \tilde{r}_1) = & 50 \frac{\tilde{x}_2}{\sqrt{1+\tilde{x}_2^2}} \\ & + 50 \left[ 4 + \frac{101}{25} (V_2(\tilde{s}_1, \tilde{t}_1, \tilde{r}_1) + 1) \right] G_1(\tilde{t}_1, \tilde{r}_1, \tilde{s}_1). \end{aligned}$$

Since we want the origin of the overall system to be GUAS,  $\dot{V}_3(\cdot)$  has to be negative definite. This property is induced by a control  $u_4$  with the opposite sign of  $G_2(\tilde{x}_2, \tilde{s}_1, \tilde{t}_1, \tilde{r}_1)$ .

**4.2.1 Stabilizing control law:** The choice

$$u_4 = -\frac{1}{50} G_2(\tilde{x}_2, \tilde{s}_1, \tilde{t}_1, \tilde{r}_1),$$

results in a function  $\dot{V}_3(\cdot)$  smaller than a negative definite function independent of  $t$  and locally upper bounded by a negative definite quadratic function. It follows that the uniform asymptotic tracking of the (periodic) reference output trajectory  $t_{1r}(t) = \cos(t)$  of the cart-pendulum system is achieved by the time-varying control law:

$$\begin{aligned} u_1 = & \frac{-\cos(t)}{\sqrt{1+\cos^2(t)}} + \cos(t) - \sin(t) \\ & + \frac{\cos(t)\tilde{t}_1^2}{\zeta(t_1, t_{1r}(t))\sqrt{1+\tilde{t}_1^2}} + \frac{2(\tilde{t}_1 + \tilde{r}_1)\cos(t)\tilde{t}_1}{1+\tilde{t}_1^2 + \sqrt{1+\tilde{t}_1^2}} \\ & + \frac{1}{50} \left( \tilde{t}_1 - \frac{\tilde{s}_1}{\sqrt{1+\tilde{s}_1^2}} \right) - \frac{\tilde{x}_2^2}{\sqrt{1+\tilde{x}_2^2}} \\ & - \left[ 4 + \frac{101}{25} (V_2(\tilde{s}_1, \tilde{t}_1, \tilde{r}_1) + 1) \right] \\ & \times \left[ 3(\tilde{t}_1 + 2\tilde{r}_1)\sqrt{1+\tilde{t}_1^2} + \frac{\tilde{s}_1^2}{\sqrt{1+\tilde{s}_1^2}} \right]. \end{aligned}$$

## 5 Conclusion

This work is devoted to the problem of globally tracking trajectories of nonlinear feedforward systems. It is the continuation of the paper [9] which itself is an adaptation of the key ingredients of the forwarding method to the case of tracking problems. The novelty of the present paper is the construction of strict Lyapunov functions. This tool allows us to apply the technique repeatedly and to stabilize signals which are not necessarily periodic functions of the time. Moreover, we conjecture that it can be of great help to study robustness properties (like in particular disturbance-to-state  $L_2$  stability) induced by the proposed control laws. The recursive application of the tracking version of the forwarding approach has been illustrated by means of the cart-pendulum system. It allowed us to design a control law which makes uniformly asymptotically stable a periodic oscillatory behavior of the pendulum.

**Acknowledgement.** The authors are very indebted to L. Praly for his help and comments.

## References

- [1] J.K. Hale: *Ordinary differential equations*. Robert E. Krieger publishing company, Malabar, Florida.
- [2] A. Isidori: *Nonlinear Control System*. (3rd. ed), Springer-Verlag, 1995.
- [3] M. Krstic, I. Kanellakopoulos, P.V. Kokotovic: *Nonlinear and Adaptive Control Design*. Wiley, New York, 1995.
- [4] H. Khalil: *Nonlinear Systems*. MacMillan, New York, NY, 1992.
- [5] W. Liu, Y. Chitour, E. Sontag: *Remarks on Finite Gain Stabilizability of Linear Systems Subject to Input Saturation*. SIAM J. Contr. and Opt. Vol. 34, pp. 1190-1219, July 1996.
- [6] R. Marino, I. Kanellakopoulos, P. Kokotovic: *Adaptive Tracking for Feedback Linearizable SISO Systems*. Proceedings of the 28th CDC. Tampa, Florida. December 1989.
- [7] P. Martin, S. Devasia and B. Paden: *A different look at output tracking: control of a VTOL aircraft*. Automatica, Vol. 32, No.1, pp 101-107, 1996.
- [8] F. Mazenc, L. Praly: *Adding an integration and Global asymptotic stabilization of feedforward systems*. IEEE Trans. on Aut. Contr., Vol. 41, no.11, pp.1559-1578, 1996.
- [9] F. Mazenc, L. Praly: *Asymptotic tracking of a reference state of systems with feedforward structure*. Automatica Vol. 36 pp. 179-187, 2000.
- [10] R. Ortega, A. Loria, P.J. Nicklasson, H. Sira-Ramirez: *Passivity-based Control of Euler-Lagrange Systems*. Springer-Verlag, 1998.
- [11] K.Y. Pettersen, H. Nijmeijer: *Global practical stabilization and tracking of an underactuated ship - a combined averaging and backstepping approach*. In Proc. IFAC Conference on Systems Structure Control, (Nantes, France) pp. 59-64, July 1998.
- [12] R. Sepulchre, M. Jankovic, P.V. Kokotovic: *Constructive Nonlinear Control*. Springer-Verlag, 1996.
- [13] A. Teel: *Feedback stabilization: nonlinear solutions to inherently nonlinear problems*. Memorandum No. UCB/ERL M92/65. 12 June 1992.
- [14] A. Teel: *A nonlinear small gain theorem for the analysis of control systems with saturation*. IEEE Trans. on Aut. Contr., Vol. 41, No. 9, pp.1256-1270, 1996.



# Resumé

Les travaux présentés dans cette thèse portent sur la stabilisation et la stabilité globale des systèmes dynamiques non linéaires. Elle comporte deux parties relativement indépendantes. La première partie (Chapitre 2 à 4) traite du problème de la stabilisation asymptotique globale de points d'équilibres ou de trajectoires par les méthodes de Lyapunov de certaines classes de systèmes non linéaires commandés. Le chapitre 2 est consacré à la stabilisation d'un pendule en rotation et d'un système de lévitation magnétique par les techniques du type Lyapunov et du principe de séparation. Le chapitre 3 propose une extension de la technique d'ajout d'intégrateur ou *backstepping* pour la stabilisation globale d'une classe de systèmes non autonomes par des commandes bornées. Le chapitre 4 présente un résultat théorique portant sur la technique d'ajout d'intégration ou *forwarding* pour la stabilisation de trajectoires des systèmes non linéaires ayant la structure feedforward et un résultat sur la stabilisation uniforme asymptotique d'une trajectoire périodique du système mécanique dit pendule-chariot.

La deuxième partie (chapitre 5 et 6) traite des conditions de stabilité globale d'une classe de modèles épidémiologiques qui englobe la plupart de systèmes épidémiologiques des maladies réémergentes telles que le paludisme, la dengue, le sida, la tuberculose etc. Le chapitre 5 présente un résultat sur le calcul d'un paramètre de seuil  $R_0$  et sa relation avec la stabilité asymptotique globale du point d'équilibre non endémique pour une classe de modèles épidémiologiques. Un nouveau critère analytique pour la stabilité asymptotique globale du point d'équilibre non endémique de la classe de modèles épidémiologiques étudiée est proposé. L'efficacité de cette méthode a été illustrée sur les modèles épidémiologiques du paludisme et de la dengue. Le chapitre 6 applique ces résultats à un modèle épidémiologique appliqué à la tuberculose. Une particularité de ce modèle est sa prise en compte des réinfections exogènes et des rechutes dans la propagation de la maladie.

**Mots clés:** Systèmes non linéaires, Stabilité, Fonctions de Lyapunov, Stabilisation globale, Principe de séparation, Stabilisation d'une trajectoire, Modèles épidémiologiques, Paramètre de seuil.

## Abstract

The problem under interest in this thesis concerns the global stabilization and stability of nonlinear dynamics systems. The thesis consists of two relatively independent parts. The first part (chapter 2 to 4) deals with the problem of globally asymptotically stabilizing equilibrium points or trajectories of families of nonlinear control systems through Lyapunov methods. Chapter 2 is devoted to the stabilization of a rotating pendulum and a magnetic levitation system by the Lyapunov-type techniques and the principle of separation. Chapter 3 proposes an extension of the backstepping technique for the global stabilization of a class of time-varying systems by bounded feedbacks. Chapter 4 presents a theoretical result on the forwarding design for the tracking trajectories of feedforward systems and a result on the tracking a periodic trajectory of the so-called cart-pendulum system.

The second part (chapter 5 and 6) deals with global asymptotic stability conditions of a class of epidemiological models which include most of the epidemiological systems of the infectious diseases such as malaria, dengue, aids, tuberculosis etc. A new criterion for the global asymptotic stability of the disease free equilibrium for the class of epidemiological models under studied is proposed. The effectiveness of this method is illustrated on the epidemiological models of malaria and dengue fever. Chapter 6 applies these results to an epidemiological model of tuberculosis. A characteristic of this model is that it takes into account exogenous reinfections and relapses in the propagation of the disease.

**Keywords:** Nonlinear systems, Stability, Lyapunov functions, Global stabilization, Separation principle, Tracking, Epidemiological models, Threshold parameter.