



# Compression et microflambage dans les matériaux composites à fibres longues

Jean-Claude Grandidier

## ► To cite this version:

Jean-Claude Grandidier. Compression et microflambage dans les matériaux composites à fibres longues. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université Paul Verlaine - Metz, 1991. Français. NNT : 1991METZ004S . tel-01775927

**HAL Id: tel-01775927**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01775927>**

Submitted on 24 Apr 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

VB 72788

INSTITUT SUPERIEUR DE GENIE MECANIQUE ET PRODUCTIQUE  
UNIVERSITE DE METZ

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE  
- METZ

|         |           |
|---------|-----------|
| N° inv. | 19910085  |
| Cote    | S/M3 91/4 |
| Loc     | Magasin   |

# THESE

présentée à l'UNIVERSITE de METZ par

*JEAN-CLAUDE GRANDIDIER*

pour l'obtention du grade de

**DOCTEUR de L'UNIVERSITE de METZ**

**en SCIENCES pour l'INGENIEUR**

## **COMPRESSION ET MICROFLAMBAGE DANS LES MATERIAUX COMPOSITES A FIBRES LONGUES**

soutenue le 13 Février 1991 devant la commission d'Examen composée de:

L. ANQUEZ  
G. FERRON  
D. GUEDRA-DEGEORGES  
P. LADEVEZE  
J.J. MARIGO  
M. POTIER-FERRY  
D. VARCHON

Rapporteur  
Rapporteur  
Rapporteur

Laboratoire de Physique et de Mécanique des Matériaux U.A. CNRS 1215  
Faculté des Sciences, Ile du Saulcy, 57045 METZ Cedex 01

*Avant de vous présenter mon travail je tiens à remercier toutes les personnes qui m'ont permis de le mener à bien, grâce à leur aide, à leur écoute et au temps qu'ils m'ont consacré.*

*C'est au sein du Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux de l'Université de Metz que j'ai réalisé ce travail sous la direction de Monsieur Michel Potier-Ferry.*

*Ma gratitude et mon amicale reconnaissance s'adressent tout d'abord à Michel qui a accepté de diriger cette thèse. C'est avec patience gentillesse et enthousiasme qu'il m'a initié à la recherche et grâce à lui j'ai beaucoup appris aussi bien sur le plan scientifique qu'humain.*

*Je tiens également à exprimer mon amicale reconnaissance et ma gratitude à Monsieur Gérard Ferron qui m'a fait l'honneur d'examiner et de porter un jugement sur ce travail. De plus, je le remercie de m'avoir fait profiter généreusement de tout son savoir expérimental.*

*Messieurs Didier Guedra-Degeorges et Pierre Ladevèze m'ont fait l'honneur de lire de commenter et de juger ce mémoire, qu'ils veuillent bien trouver ici l'expression de ma profonde reconnaissance. Je les remercie également pour le vif intérêt qu'ils ont porté sur ce travail.*

*Je remercie également Monsieur Jean-Jacques Marigo tout d'abord pour l'honneur qu'il m'a fait de présider le jury et ensuite pour ses nombreux encouragements.*

*Je suis très reconnaissant à Monsieur Daniel Varchon de m'avoir fait profiter de ses connaissances et de m'avoir accueilli au sein du Laboratoire de Mécanique Appliqué de Besançon pour m'apprendre à fabriquer des composites. Je le remercie également de l'honneur qu'il m'a fait de participer au jury.*

*Je tiens aussi à remercier Monsieur Louis Anquez d'avoir accepté de participer au jury et de l'intérêt qu'il a porté à ces travaux.*

*Que tous mes collègues et amis du Laboratoire trouvent ici l'expression de mes sincères remerciements. Je tiens également à associer à ce travail mes collègues du groupe Calcul des structures pour les fructueuses discussions que j'ai pu avoir avec eux, ainsi que tous les techniciens ingénieur et chercheurs qui m'ont généreusement offert leur temps et leur savoir tout au long de cette thèse. Enfin je remercie Madame Marcelet et Mademoiselle Lili Sténo d'avoir supporté la frappe de ce mémoire et les lourdes tâches de secrétariat.*

*Je profite de ces quelques lignes pour exprimer ma profonde et sincère reconnaissance à mon épouse et mes parents sans qui tout cela n'aurait été possible.*



# **PLAN DE LA THESE**

## **INTRODUCTION**

### **CHAPITRE I : COMPOSITE STRATIFIE**

1. Description et mise en oeuvre
  - a) Pourquoi choisir un matériau composite
  - b) Constitution des composites stratifiés
    - Les fibres
    - Les matrices
  - c) Fabrication des stratifiés
  - d) Utilisation
2. Comportement et essais
  - a) Modélisation du comportement élastique
  - b) Modélisation simple de la rupture
  - c) Modélisation plus fine du comportement anélastique
    - Pli unidirectionnel
    - Le stratifié
  - d) Caractérisation
    - Essai de traction
    - Essai de cisaillement
3. Modélisation des stratifiés et transition d'échelles
  - a) Introduction
  - b) Théorie des stratifiés
  - c) Théorie de l'homogénéisation périodique
    - Homogénéisation
    - Localisation

### **CHAPITRE II : COMPRESSION DANS LES STRATIFIES**

1. Pourquoi étudier le comportement en compression
2. Description du comportement en compression des fibres
  - a) Méthode indirecte
  - b) Méthode directe
3. Description du comportement en compression du pli et du stratifié
  - Essais de compression

- a) Résultats des essais de compression pure
- b) Résultats des essais de flexion
- c) Discussion

#### **4. Modélisations du microflambage. Bibliographie**

- a) Poutre sur fondation
- b) Méthode énergétique
- c) Modèle de poutre multicouches
- d) Etudes bidimensionnelles
- e) Modèles tridimensionnels
- f) Remarques sur les modèles de microflambage

### **CHAPITRE III : NOTRE MODELISATION DU MICROFLAMBAGE**

- 1. Introduction
- 2. Premier modèle
  - a) Présentation
  - b) Poutre sur fondation
  - c) Homogénéisation périodique
  - d) Calcul numérique
  - e) Calcul de la charge critique
  - f) Discussion du résultat
- 3. Second modèle
  - a) Présentation
  - b) Calcul de la Force de Rappel
  - c) Poutre sur fondation. Equations
- 4. Conclusion

### **CHAPITRE IV : EXPERIENCES DE FLEXION-COMPRESSION**

- 1. Objectifs
- 2. Présentation du montage expérimental et simulation rupture
  - a) Présentation du montage et du déroulement de sa conception
  - b) Simulation numérique du montage
  - c) Hypothèse de déformée circulaire
  - d) Hypothèse des petites déformations et rotations modérées
- 3. Fabrication et description des éprouvettes testées
- 4. Description du déroulement des essais
  - a) Matériel

- b) Eprouvettes et tests effectués
  - c) Problèmes rencontrés au cours des essais
    - Essai de flexion
    - Essai de flexion-compression
5. Résultats des essais
- a) Comportement élastique en compression
  - b) Rupture sous sollicitations de flexion et flexion-compression
    - Description des tableaux de résultats
    - Description des modes de rupture
    - Remarques
6. Problèmes posés par une modélisation de la rupture

## **CONCLUSION**

## **ANNEXE 1**

## **ANNEXE 2**

## **ANNEXE 3**

## **BIBLIOGRAPHIE**

## INTRODUCTION

De plus en plus, dans différents secteurs industriels, on utilise des composites stratifiés à fibres longues. En effet, leurs caractéristiques spécifiques très élevées et la possibilité de maîtriser leur anisotropie les vouent aux secteurs de pointe. Dans ces domaines, la conception et l'optimisation des structures en composite demandent une bonne connaissance du comportement mécanique de ces matériaux.

Dans la littérature, de nombreuses études portent sur l'identification et la caractérisation des stratifiés et de leurs plis ; par exemple, GILLETTA [1985], VITTECOQ [1991], STEVANOVIC [1987]. Plusieurs de ces travaux ont mis clairement en évidence une différence de comportement entre la traction et la compression. En particulier dans la direction des fibres, les caractéristiques mécaniques en compression sont plus faibles que celles en traction. Or, les structures industrielles en composite sont soumises, au cours de leur service, à des sollicitations complexes. C'est pourquoi le comportement en compression devient souvent un paramètre fortement dimensionnant. Une utilisation optimale de ces stratifiés nécessite donc la compréhension et la modélisation des mécanismes conduisant à cette diminution des caractéristiques mécaniques dans le sens des fibres.

Plus précisément, si l'on observe les résultats d'essais en compression pure et en flexion pure (4 points), il apparaît dès le début du chargement une moindre rigidité en compression lorsqu'on la compare à celle de traction. ALLIX *et al.* [1988] font subir des charges et des décharges au matériau, qui mettent clairement en évidence le caractère élastique de ce phénomène. Le comportement en compression des stratifiés à fibres longues est non linéaire élastique jusqu'à des taux de contrainte élevés.

Lorsque ces essais de compression ou de flexion sont menés jusqu'à la rupture, la contrainte ultime en compression que l'on obtient est bien plus faible que celle en traction.

S'il est indéniable que ces caractéristiques mécaniques en compression sont plus faibles qu'en traction, les résultats (rigidité et contrainte à rupture) sont fortement dépendants du type d'essai (flexion ou compression pure) ou plus précisément du champ de contrainte dans l'épaisseur, de la forme de l'éprouvette dans le cas particulier d'un essai en compression pure. Ces essais mettent également en évidence l'influence de la séquence d'empilement et du diamètre des fibres sur la non linéarité du comportement en compression et sur la contrainte à rupture.

Certains auteurs proposent d'expliquer la diminution de la résistance en compression par l'apparition d'un microflambage au niveau de quelques fibres, alors que d'autres pensent que ceci est dû à une instabilité en cisaillement. La première modélisation du microflambage a été proposée par ROSEN [1964]. Il modélise le couple fibre-matrice par une poutre sur fondation et démontre que la contrainte critique pour des taux de fibres élevés n'est fonction que du module de cisaillement de la matrice  $G_M$  et de la fonction volumique  $f$  :  $\sigma_{Cr} = G_M / (1-f)$ . Quelques améliorations ont par la suite été apportées par d'autres auteurs (par exemple : JUNE et LAGER [1969],

KULKARINI *et al.* [1975], STEIF [1988]). Ils prennent en compte la non linéarité de la matrice, un endommagement de l'interface ou un défaut initial de la fibre. DAVIS [1975], WANG [1979] et d'autres représentent le couple fibre-matrice par une poutre multicouche. La prise en compte de la non linéarité du module de cisaillement du pli, lorsqu'évolue la charge de compression, leur permet de calculer la charge correspondant à l'apparition d'une instabilité en cisaillement. Récemment ANQUEZ [1990] a proposé un modèle d'instabilité en cisaillement qui montre clairement que la contrainte critique est égale au module de cisaillement transverse du composite. Or, lorsqu'il compare cette valeur à la contrainte à rupture, il conclut qu'il est nécessaire de prendre en compte les défauts pour réviser à la baisse les résultats prévisionnels. En effet, tous ces modèles conduisent à des contraintes sensiblement identiques entre elles et supérieures aux contraintes à rupture obtenues expérimentalement. De plus, ils ne permettent pas de rendre compte de l'influence de la séquence d'empilement du type de chargement et de la géométrie de l'éprouvette.

Le caractère non linéaire élastique du comportement en compression est donc expérimentalement bien établi. Ceci ne peut s'expliquer que par des effets non linéaires géométriques à une échelle microscopique (fibre ou pli), c'est-à-dire par une instabilité de type flambage plus ou moins franche. Quant au comportement à la rupture, il peut être fortement influencé par une telle instabilité. C'est pourquoi, nous avons repris les modèles de microflambage en les associant à la théorie de l'homogénéisation périodique. Ceci nous permet d'obtenir un résultat qualitatif très important, à savoir l'introduction de la variable d'épaisseur dans le modèle. Le seuil de microflambage ainsi obtenu dépend de la séquence d'empilement, des conditions aux limites et de la répartition des contraintes dans l'épaisseur du stratifié.

Afin de mettre en évidence cet effet d'épaisseur sur le comportement en compression, nous avons essayé de réaliser des essais de compression, de flexion et de flexion-compression sur des stratifiés Verre-Epoxy constitués de différentes séquences d'empilement.

La présentation de ce travail se divise en 4 parties :

## **PREMIERE PARTIE**

La modélisation du comportement des composites stratifiés passe tout d'abord par une bonne connaissance de leur constitution interne qui est présentée à différentes échelles (pli et fibre). Ensuite, nous exposons d'une manière générale leur comportement en traction et en cisaillement, ainsi que les diverses modélisations plus ou moins fines proposées pour représenter leur comportement. Puis nous décrivons les modèles mathématiques permettant de calculer dans de tels matériaux les champs de déplacement et de contrainte à diverses échelles, ainsi que les moyens actuels permettant d'effectuer une transition entre ces échelles.

## **DEUXIEME PARTIE**

Dans ce chapitre sont exposés, en détail, le comportement en compression des stratifiés et des constituants ainsi que les essais qui ont permis de les mettre en évidence. Certains auteurs expliquent la moindre résistance mécanique en compression observée par l'apparition d'un microflambage. Quelques-uns de ces articles proposant une modélisation du phénomène sont alors analysés en détail.

## **TROISIEME PARTIE**

Les différents modèles proposés dans la littérature surestiment la charge critique et sont incapables de rendre compte de l'effet d'épaisseur. Nous proposons alors deux modèles dont l'objectif est de mieux appréhender la déformation induite dans la matrice. Les développements mathématiques qui nous ont permis de calculer la charge critique sont expliqués en détail. La détermination des contraintes fait apparaître un paramètre représentatif de l'effet de la séquence d'empilement sur le microflambage. La relation liant microflambage et séquence d'empilement est alors discutée.

## **QUATRIEME PARTIE**

Pour vérifier l'influence de la répartition de contrainte dans l'épaisseur, et l'influence de l'empilement sur le comportement en compression, nous avons tenté d'effectuer des essais de flexion, compression et flexion-compression. Dans ce chapitre, nous présentons le montage expérimental qui nous a permis d'effectuer de tels essais, ainsi que les résultats obtenus sur des stratifiés Verre-Epoxy.

# **CHAPITRE I : COMPOSITE STRATIFIE**

## **1. Description et mise en oeuvre**

- a) Pourquoi choisir un matériau composite
- b) Constitution des composites stratifiés
  - Les fibres
  - Les matrices
- c) Fabrication des stratifiés
- d) Utilisation

## **2. Comportement et essais**

- a) Modélisation du comportement élastique
- b) Modélisation simple de la rupture
- c) Modélisation plus fine du comportement anélastique
  - Pli unidirectionnel
  - Le stratifié
- d) Caractérisation
  - Essai de traction
  - Essai de cisaillement

## **3. Modélisation des stratifiés et transition d'échelles**

- a) Introduction
- b) Théorie des stratifiés
- c) Théorie de l'homogénéisation périodique
  - Homogénéisation
  - Localisation

# I - COMPOSITE STRATIFIE

## 1. DESCRIPTION ET MISE EN OEUVRE

### a) Pourquoi choisir un matériau composite

Par souci d'économie d'énergie et une volonté de diminuer la pollution (problèmes très actuels), les concepteurs des structures mobiles motorisées recherchent une meilleure aérodynamique ainsi qu'une masse minimale. Par exemple dans le secteur aérospatial, ce gain de masse est en corrélation directe avec le gain en charge payante.

GAY [1989] présente un exemple qui résume bien cette situation :

Un avion de 150 tonnes transportant 250 passagers est constitué de 60 tonnes de structure. Une introduction progressive de 1 600 kgs de matériaux composites à hautes performances permet le transport de 16 passagers supplémentaires, munis de leurs bagages. Un gain de masse de 1 kg entraîne alors une diminution de 120 litres de carburant par année d'exploitation, ainsi qu'une augmentation du rayon d'action de l'appareil.

Nous aurions pu trouver des exemples tout à fait similaires dans d'autres secteurs. Si l'on observe les solutions adoptées, nous remarquons que deux familles de composites sont développées avec des objectifs différents.

- Composites Grande Diffusion (GD) : Ces composites possèdent de faibles caractéristiques mécaniques (inférieures à celles de l'acier). Ils sont utilisés pour leur coût global compétitif (matériau + fabrication), et leur faible poids (ex : pare-choc d'automobile ne devant résister qu'à un choc de 5 km/heure).

- Composites Hautes Performances (HP) : A l'opposé des précédents, ils possèdent des caractéristiques spécifiques supérieures à celles des aciers, et certains d'entre eux (carbone/carbone) peuvent même supporter des températures très élevées ( $\approx 1000^{\circ}\text{C}$ ). Mais, du fait de la difficulté de fabrication de ces matériaux, leur prix est souvent très élevé.

Par conséquent, ils sont utilisés dans des structures très performantes (RAFALE, FORMULE 1, PROTOTYPE 905 PEUGEOT,...) où les contraintes mécaniques et/ou thermiques sont extrêmes, et la recherche d'une solution optimale est cruciale. Bien sûr, pour atteindre cet optimum, il est essentiel de maîtriser le comportement physique et mécanique de ces matériaux, ce qui justifie en partie le nombre croissant de recherches développées sur le sujet. Dans la suite de la présentation, nous nous intéresserons uniquement à ces composites Hautes Performances.



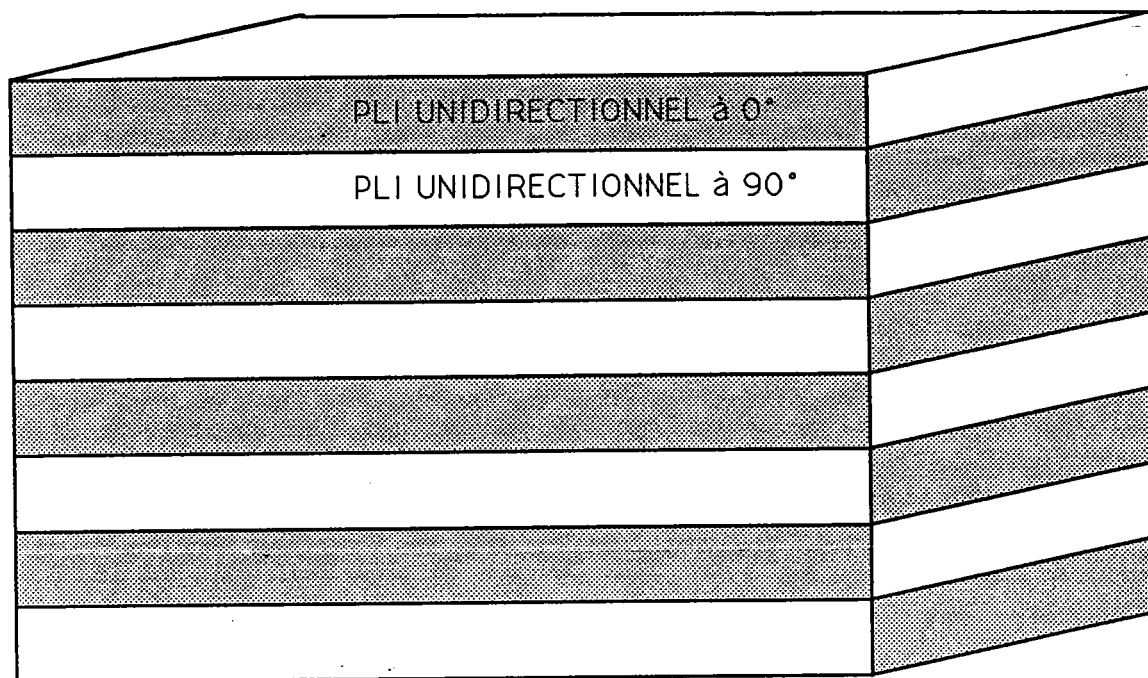


FIGURE 1 : Description des stratifiés unidirectionnels à fibres longues

| STRATIFIE                                          | NOTATION                |
|----------------------------------------------------|-------------------------|
| 45°<br>- 45°<br>- 30°<br>30°<br>0°                 | $[\pm 45 / \mp 30 / 0]$ |
| 45°<br>0°<br>- 60°<br>- 60°<br>30°                 | $[45 / 0 / -60_2 / 30]$ |
| 45°<br>45°<br>- 45°<br>- 45°<br>0°                 | $[45_2 / -45_2 / 0]$    |
| 45°<br>- 45°<br>- 45°<br>45°<br>45°<br>- 45°<br>0° | $[\pm \pm 45 / 0]$      |

| STRATIFIE                     | NOTATION          |
|-------------------------------|-------------------|
| 0°<br>45°<br>90°<br>45°<br>0° | $[0 / 45 / 90]_s$ |

| STRATIFIE                                                                    | NOTATION                                            |
|------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| 45°<br>0°<br>90°<br>45°<br>0°<br>90°<br>90°<br>0°<br>45°<br>90°<br>0°<br>45° | $[(45 / 0 / 90)_2]_s$<br>ou<br>$[45 / 0 / 90]_{2s}$ |

TABLEAU 1 : Notation des empilements dans un stratifié

## b) Constitution des composites stratifiés

Dans les différentes utilisations des matériaux composites, la rigidité est principalement assurée par des fibres fines possédant des caractéristiques mécaniques élevées. Ces fibres sont noyées dans un liant appelé matrice dont la fonction principale est d'assurer la cohésion de l'ensemble. Pour les composites HP, les fibres utilisées sont généralement de très grandes longueurs et leur disposition dans la matrice est variable selon leur utilisation. Par exemple, pour les voilures d'avion, on emploie couramment un composite sous forme de STRATIFIÉ. Comme le montre la figure 1, un stratifié est constitué d'une superposition de PLIS, dans lesquels les fibres sont disposées soit parallèlement les unes aux autres pour un UNIDIRECTIONNEL, soit sous forme d'un tissu bidimensionnel pour un TISSE.

Comme nous le verrons par la suite, le comportement d'un pli unidirectionnel est fortement anisotrope. Dans la direction des fibres, la rigidité est très élevée, mais dans le sens perpendiculaire le pli possède en général de faibles caractéristiques mécaniques. Dans le cas du stratifié, cette anisotropie est entièrement maîtrisée en effectuant un choix judicieux de l'orientation et du nombre de plis dans la séquence d'empilement. Une désignation spécifique est d'ailleurs utilisée pour décrire l'empilement. Chaque pli est représenté par l'angle en degrés entre la fibre et une direction principale prédéfinie sur le stratifié. Dans le tableau 1, nous vous présentons quelques exemples de notation.

Ces empilements de plis unidirectionnels ou bidimensionnels peuvent se présenter sous forme de plaques, de coques ou même de profilés plus ou moins complexes. Pour les structures de révolution, les fibres sont directement bobinées sur un mandrin de forme désirée. Plus récemment, des arrangements tridimensionnels de fibres ont été réalisés, par exemple pour construire le divergent du moteur d'apogée d'ARIANE. Le pourcentage de fibres introduites dans la matrice est adapté à chaque situation, mais il est souvent tributaire du procédé de fabrication.

Les possibilités de ces matériaux sont d'autant plus importantes qu'une large gamme de fibres et de matrices est disponible. Dans ce qui suit, nous présentons quelques-uns des matériaux les plus couramment utilisés.

### - Les fibres

#### . *Fibres de verre*

En ajoutant à la Silice liquide à 1300°C des constituants tels que l'Alumine ( $Al_2O_3$ ), l'Oxyde de Bore ( $B_2O_3$ ), etc... on obtient différentes nuances de fibres de verre qui sont :

\* Verre E : il possède des caractéristiques mécanique moyennes et représente à lui seul 99% des

quantités produites en raison de sa polyvalence et de son prix le plus bas.

\* Verre R ou S : l'ajout de 25% d'Alumine, de chaux et de Magnésie à la Silice, permet d'obtenir une fibre très résistante à la traction ( $\sigma_T$  Rupture = 4400 MPa), mais son prix est 4 fois plus élevé que celui du verre E.

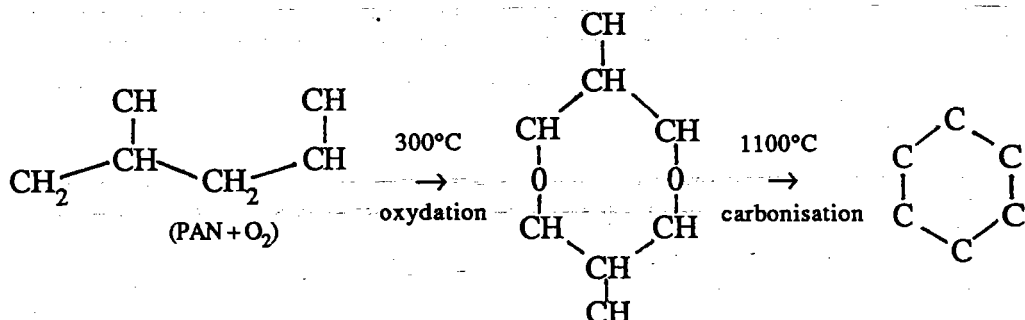
\* Verre D : c'est un verre qui possède des propriétés diélectriques élevées.

\* Verre C : sa particularité principale est une résistance élevée aux acides.

En général, nous constaterons sur les tableaux 2 et 3, que ces fibres possèdent une résistance à la rupture en traction très importante, mais que leur rigidité est inférieure à celle des aciers. Il est assez surprenant que cette résistance soit si élevée, car sous forme massive, comme nous le connaissons habituellement, le verre est fragile. Ceci peut s'expliquer par une très grande sensibilité à la fissuration et à la propagation sous une sollicitation de traction qui disparaît lorsque le verre est étiré à grande vitesse (60 m/s), dans des filières de 7 à 13 microns de diamètre. En résumé, malgré une densité élevée qui limite leurs caractéristiques spécifiques, ils possèdent une bonne tenue à la température (25°C - 500°C), aux agents chimiques et à l'humidité.

### *. Fibres de carbone*

Etant dotées d'excellentes caractéristiques spécifiques et mécaniques, ces fibres se rencontrent principalement dans des structures composites fortement sollicitées. Leurs températures d'utilisation peuvent être importantes car leur résistance à la rupture augmente jusqu'à 1500°C dans une atmosphère non oxydante. Cependant, leur utilisation est limitée car leur coût de fabrication est élevé. En effet, il est nécessaire de faire subir 4 traitements à des fibres élaborées à partir de Polyacrylonitrile (PAN) pour obtenir le produit désiré:



Une oxydation à 300°C, suivie d'une carbonisation à 1100°C, permet d'obtenir une structure hexagonale d'atomes de carbone. Les fibres ainsi obtenues possèdent une bonne résistance à la

rupture et un module d'Young honorable de 200 000 MPa, pour une densité de 1,75 : on les appelle fibres Haute Ténacité (HT). Afin d'augmenter leur rigidité, on effectue une graphitisation à 2600°C en atmosphère neutre, ce qui entraîne une réorientation des réseaux hexagonaux suivant l'axe de la fibre. Cependant, au cours de ce dernier traitement des défauts apparaissent, ce qui a pour effet de diminuer sensiblement leur résistance à la rupture.

Au terme de ce traitement, on obtient des fibres appelées Haut Module (HM) dont la rigidité peut atteindre 600 000 MPa. Au cours de la dernière étape la rugosité des fibres est augmentée par un traitement de surface, dans le but d'améliorer la liaison fibre-résine.

### *. Fibres de Bore et de Carbure de Silicium*

En 1959, dans un laboratoire, des fibres aussi performantes que les fibres de carbone ont été obtenues en effectuant un dépôt chimique en phase vapeur sur un fil support en tungstène. A l'heure actuelle, selon le même principe, on fabrique :

- des fibres de Bore (B)
- des fibres de Bore - Carbure de Bore ( $B + B_4C$ )
- des fibres de Carbure de Silicium ( $SiC$ )
- des fibres de Bore - Carbure de Silicium ( $B + SiC$ ).

Leur rigidité et leur limite à la rupture en traction comme en compression sont excellentes et certaines de ces fibres conservent même leurs propriétés jusqu'à 1000°C. Malheureusement, leur densité est plus élevée que celle des fibres de carbone, ce qui limite leurs caractéristiques spécifiques. Avec un diamètre extérieur pouvant atteindre 100  $\mu m$ , leur utilisation demande quelques précautions particulières. De plus leur fabrication est coûteuse car le dépôt est très lent et difficile à mettre en oeuvre.

### *. Fibres aramides (KEVLAR)*

Ces fibres sont composées de polyamides aromatiques et possèdent la plus importante résistance à la rupture en traction spécifique. Leur rigidité se situe entre celle de l'acier et du verre, mais leur résistance en compression est faible. L'unique fabricant, DUPONT DE NEMOURS, propose son produit à un tarif concurrentiel et garde secret son procédé de fabrication.

$\sigma_c$  : résistance en compression (MPa)

$E_c$  : module d'Young en compression (MPa)

$\sigma_T$  : résistance en traction (MPa)

$E_T$  : module d'Young en traction (MPa)

$d$  : densité du matériaux ( $\text{kg}/\text{dm}^3$ )

(.) : valeurs de la densité du matériau

[.] : prix approximatif, à masse égale, du matériau brut comparé à celui de la fibre de verre (1983).

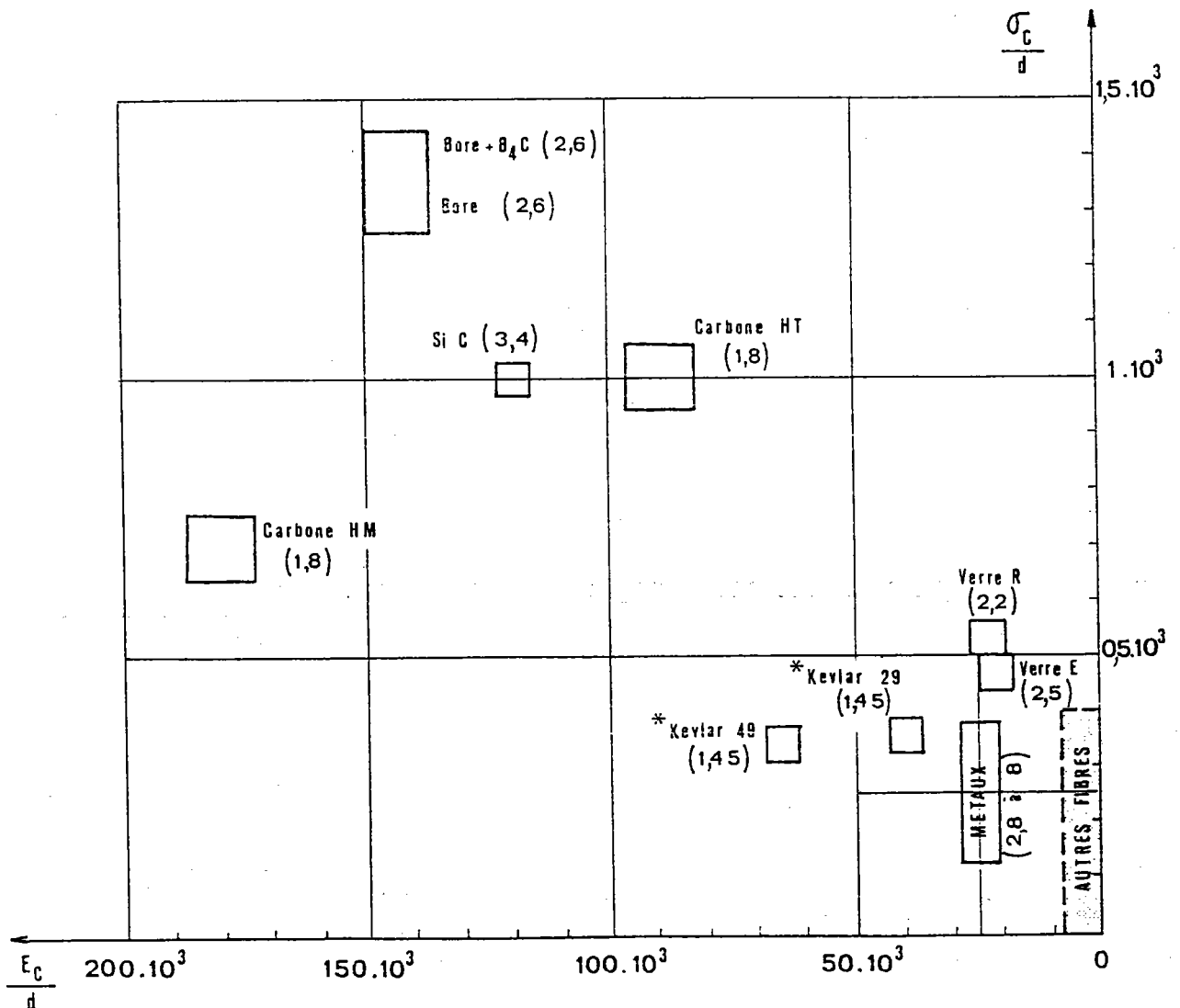


TABLEAU 2 : Caractéristiques mécaniques spécifiques en compression (BORD et WEISS[1983])

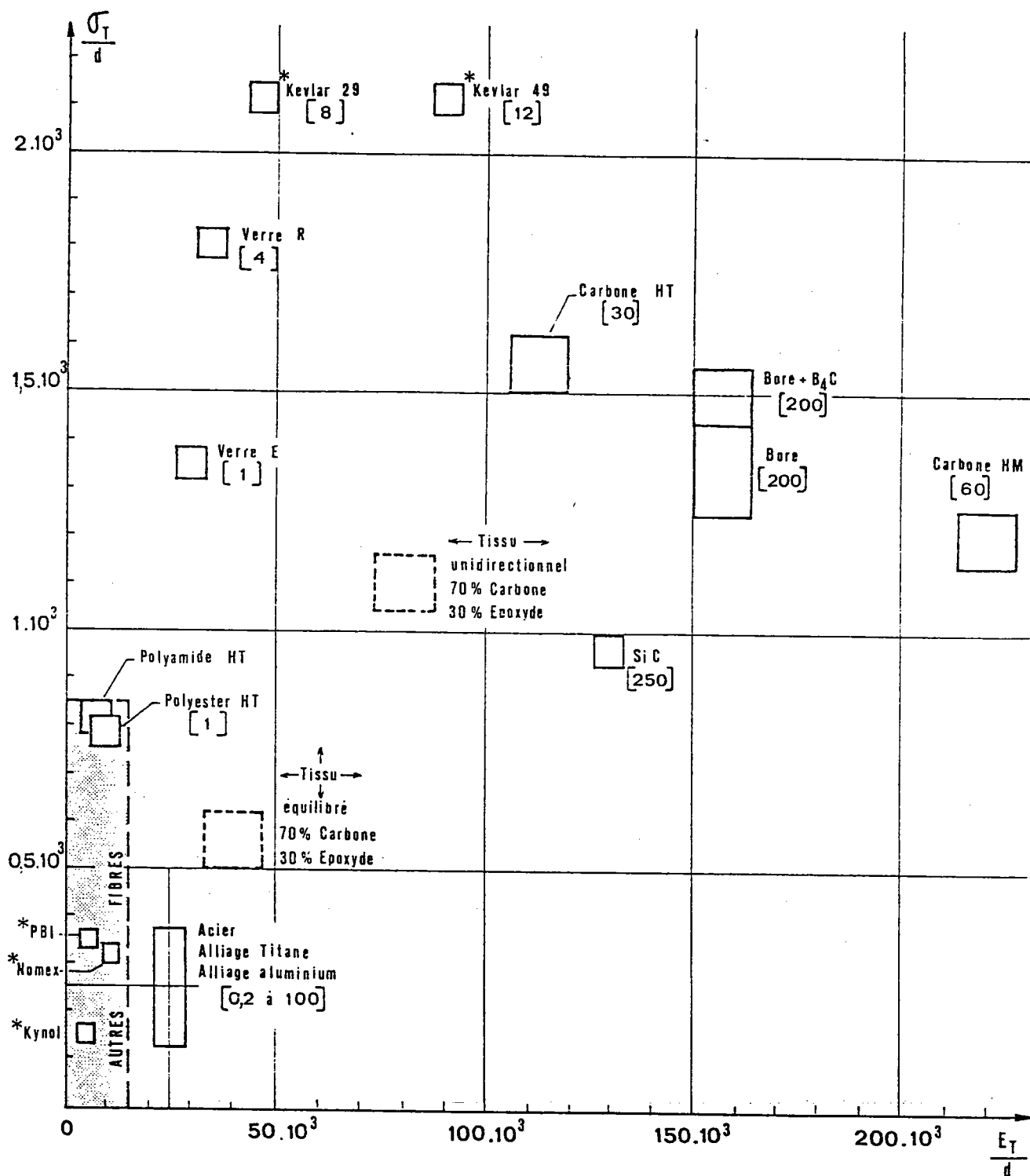


TABLEAU 3 : Caractéristiques mécaniques spécifiques en traction (BORD et WEISS[1983])

### *. Autres fibres*

Il existe sur le marché beaucoup d'autres fibres telles que : les polyamides-imides, polyamides aromatiques et les phénoliques qui possèdent des caractéristiques mécaniques plus faibles. Leur utilisation dans des applications thermiques (isolation, réservoir de carburant,...) est justifiée par un excellent comportement thermomécanique et leur caractère ininflammable.

On rencontre aussi des fibres de métal quelquefois utilisées pour des structures où le poids n'est pas un facteur déterminant, mais où une bonne conductibilité est recherchée. Fabriquées par des moyens conventionnels (étirage, usinage), leur prix est principalement fonction du type de métal utilisé.

Dans quelques années nous verrons certainement apparaître, avec la génération future d'avions, d'autres fibres céramiques à base d'alumine et d'alumine-silice.

La liste des fibres qui vous est présentée n'est évidemment pas exhaustive ; seules les fibres les plus performantes ont attiré notre attention. Pour les comparer entre elles, leurs caractéristiques mécaniques (traction et compression) et leurs caractéristiques spécifiques sont reportées dans les tableaux 2 et 3 issus du livre BORD et WEISS [1983]. Les valeurs entre crochets correspondent au prix de la fibre, rapporté à celui de la fibre de verre E.

### *. Les matrices*

En général, le diamètre des fibres utilisées est compris entre 6  $\mu$  et 100  $\mu$ , leur longueur dépasse le centimètre et la cohésion de l'ensemble ainsi que la protection de ces fibres sont assurées par un liant de faible densité appelé matrice. Les matériaux les plus couramment utilisés sont les résines thermodurcissables et thermoplastiques.

#### - Les résines thermodurcissables

Lorsque l'on soumet certains polymères constitués de substances organiques ou semi-organiques à une élévation de la température, il se crée un phénomène de polymérisation au cours duquel les monomères s'associent pour former un réseau tridimensionnel rigide. Avant la réaction de polymérisation qui s'effectue en pratique sous haute pression à une température constante (supérieure ou égale à 100°C-180°C), la viscosité du polymère diminue. Ceci favorise un bon mélange des fibres et de la résine et conduit à une répartition homogène des deux produits.

Le matériau final se présente alors sous la forme d'un corps solide et infusible. Parmi tou-

tes les résines thermodurcissables ce sont les résines époxydes qui offrent les meilleures propriétés thermomécaniques et d'adhésion avec les fibres, ceci justifiant leur utilisation massive dans les composites HP, malgré un prix élevé.

La réaction de polymérisation étant irréversible, ces matériaux ne peuvent être mis en forme qu'une seule fois, à l'opposé des thermoplastiques.

### - Les résines thermoplastiques

Pour les matrices thermoplastiques, ce sont les forces de Van der Waals et les forces polaires qui assurent la cohésion de polymères linéaires et ramifiés. Cette constitution physico-chimique de la matrice permet à tout moment de modifier la forme du composite en effectuant un simple chauffage suivi d'un refroidissement lent. Dans ce cas, le recyclage des rebuts et déchets est envisageable. L'industrie automobile les utilise pour leur malléabilité sous forme de composites à fibres courtes injectables (GD) et de composites estampables. Malheureusement, ces résines possèdent des caractéristiques mécaniques plus faibles que les thermodurcissables et, par conséquent, elles sont très peu utilisées dans les secteurs de pointe.

Il est intéressant de noter que dans certaines utilisations, la rigidité de la matrice et sa tenue en compression sont améliorées en ajoutant des charges dans la résine. En général, elles se présentent sous forme de fibres courtes ou de microbilles de terre creuses.

### . *Matrices Carbone et Céramique* (Carbure de Silicium SiC, Alumine Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>)

L'inconvénient majeur des résines thermoplastiques est leur température d'utilisation inférieure à 200°C-250°C. Des matrices métalliques en carbone ou en céramique sont alors utilisées pour tirer profit de la bonne tenue en température des fibres de Carbone, de Bore, de Carbure et de Silicium ou d'Alumine.

Différents moyens sont développés pour déposer le Carbone, le Carbure ou l'Alumine sur les fibres :

- le dépôt chimique par décomposition thermique d'un hydrocarbure en phase vapeur à températures et pressions bien définies permet d'obtenir une matrice de Carbone ou de Carbure de Silicium

- le dépôt liquide par imprégnation de brai, d'un liquide vitrocéramique ou d'un précurseur organique nous donne respectivement des matrices de Carbone, de Carbure ou d'Alumine



- la compression à 2500°C des fibres recouvertes de Carbone par une des deux méthodes précédentes.

Les composites contenant ce genre de matrice réfractaire peuvent supporter des températures supérieures à 3500°C pendant de courts intervalles de temps.

### *. Matrices métalliques*

D'utilisation moins courante que les précédentes, nous pouvons citer par exemple l'association d'Aluminium ou de Titane à des fibres de Bore qui, malgré une densité élevée, offre des caractéristiques thermomécaniques très intéressantes.

Comme nous pouvons le constater, une gamme importante de matériaux de base plus ou moins performants est proposée aux utilisateurs. Les fabricants développent une énergie considérable pour améliorer les caractéristiques mécaniques de leur produit et augmenter l'adhésion entre les fibres et la matrice. Effectivement, l'interface joue un rôle essentiel sur les performances finales du composite. Par exemple, la très faible résistance en compression des composites aramides/epoxy peut s'expliquer par une faible adhérence entre les deux constituants. Dans le cas des fibres de Carbone, un traitement thermique est réalisé dont le but est d'augmenter leur rugosité et de favoriser l'adhésion mécanique avec la résine. Quant aux fibres de verre, elles sont recouvertes (ensimage) d'un agent de pontage qui se lie chimiquement avec la fibre et la résine. La qualité de l'interface est aussi tributaire du soin avec lequel le composite est fabriqué.

### c) Fabrication des stratifiés

Un stratifié à fibres longues, cohérent et rigide, est obtenu à partir des matériaux de base selon 2 techniques : l'enroulement filamentaire dans le cas des pièces de révolution, et le formage par moulage dans les autres cas. Au cours du formage par moulage, nous pouvons distinguer différentes opérations :

\* L'imprégnation est une opération au cours de laquelle on recouvre les fibres de matrice prête à la polymérisation. Cette technique, très artisanale, demande une certaine expérience dans la manipulation des produits chimiques pour obtenir un stratifié final de qualité. C'est pourquoi, les fabricants de matériaux de base proposent aujourd'hui toute une gamme de fibres pré-imprégnées prêtes à subir l'opération de moulage.

\* Le moulage consiste à positionner le mélange fibre-matrice sur un moule (en métal, résine, bois ou plâtre possédant la forme adéquate) en respectant scrupuleusement la direction des fibres dans chaque pli ainsi que le nombre de ces plis.

\* Un compactage de l'empilement est alors nécessaire pour éliminer l'air et assurer une meilleure cohésion entre les plis. Diverses techniques sont alors utilisées et dépendent des cadences journalières, des dimensions des pièces fabriquées ainsi que du type de polymérisation adopté. Pour les petites séries, le compactage est effectué manuellement par un rouleau (moulage au contact). Dans ce cas, le moule n'est constitué que d'une seule pièce mâle ou femelle appelée moule ouvert. Dans le cas d'un moulage sous presse, une pression d'un ou deux bars peut être obtenue par un contre-moule associé à un serrage mécanique. Ce dispositif est bien adapté aux moyennes séries. Pour obtenir de bonnes caractéristiques mécaniques, le moulage sous vide permet une élimination efficace des bulles d'air. Le composite placé sur un moule ouvert est recouvert d'une feuille de plastique sous laquelle on fait le vide. Une surpression pouvant atteindre 7 bars peut aussi être obtenue au cours de la fabrication des carbone-epoxy dans un autoclave.

\* La réaction de polymérisation s'effectue, soit à des températures élevées ( $> 100^{\circ}\text{C}$ ) obtenues dans une étuve ou par des résistances chauffantes insérées dans le moule et le contre-moule (moulage sous vide, moulage sous presse), soit à température ambiante par l'adjonction d'un accélérateur (catalyseur) dans la résine.

\* Après le démoulage, une opération de finition est parfois nécessaire pour améliorer l'état de surface et obtenir les caractéristiques géométriques spécifiées par le Bureau d'Etude.

La fabrication par enroulement filamentaire se déroule exactement suivant le même principe, mais les opérations d'imprégnation de moulage et de compactage sont effectuées en une seule phase sur un tour. Les fibres sèches se présentent sous forme de bobine et sont enroulées autour d'un mandrin de forme (démontable). L'imprégnation s'opère lors de la traversée des fibres dans un bain de résine liquide. La tension appliquée sur la fibre au cours du bobinage assure un compactage suffisant. La polymérisation s'effectue, soit en étuve ou autoclave, soit en continu pour les pièces de grandes séries telles que les tubes.

Bien évidemment, les moyens mis en oeuvre pour la fabrication dépendent du nombre de pièces, de la cadence qui reste généralement faible pour les HP, mais aussi du prix et de la qualité désirée. En revanche, la fabrication des composites GD fait appel à des techniques plus sophistiquées qui sont rentabilisées sur d'énormes séries (par exemple: moulage par injection + découpe laser automatique de la calandre avant de la 405 PEUGEOT).

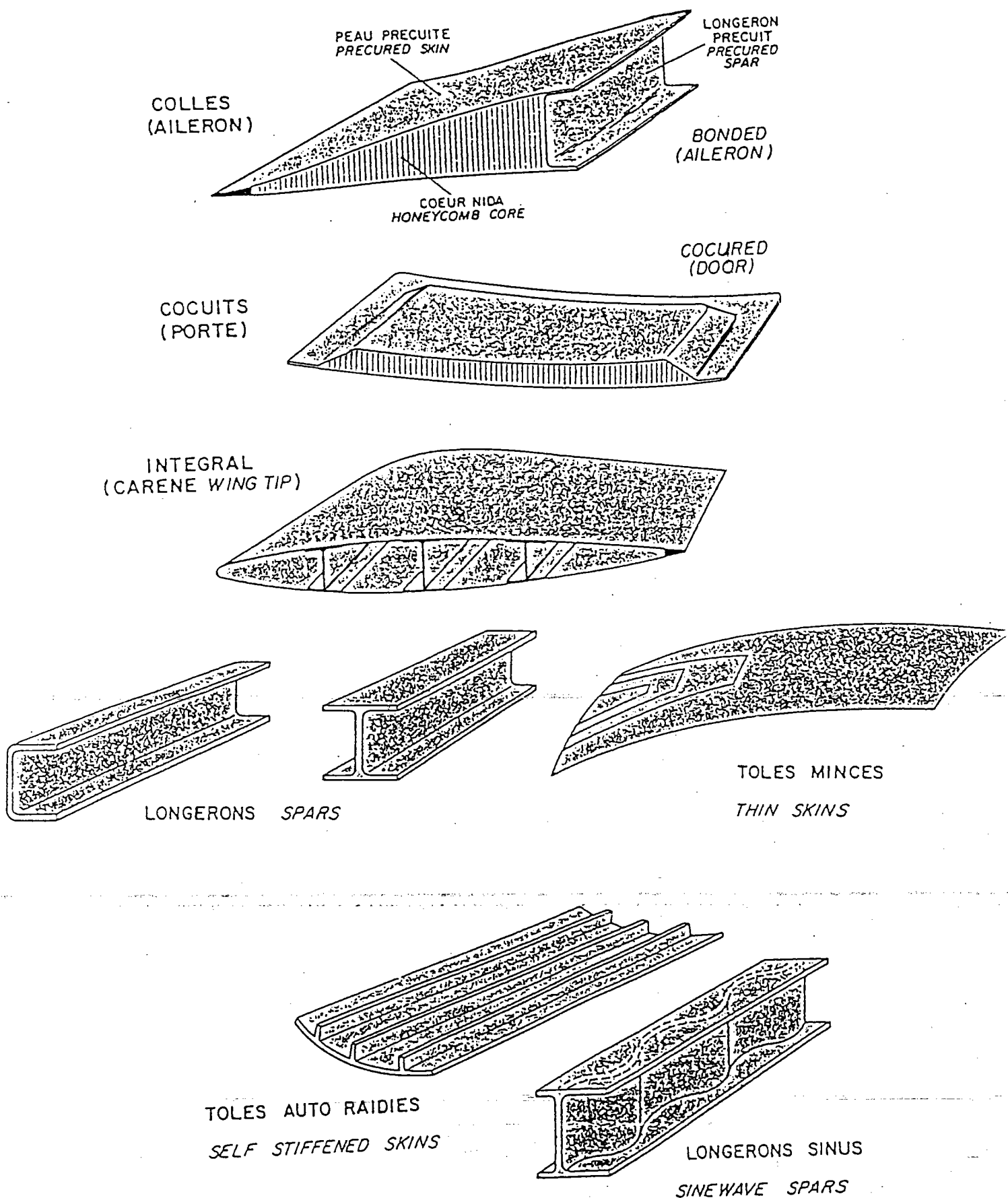


FIGURE 2 : Formes d'utilisation des stratifiés dans l'industrie (Documents AMD-BA)

#### d) Utilisation

Les avantages offerts par les stratifiés sont sans conteste leurs caractéristiques spécifiques ainsi qu'une anisotropie "modulable". La conjugaison de ces deux qualités permet un rapport maximal entre les performances et le poids. L'exemple de la conception du RAFALE est très significatif. L'optimisation des stratifiés (Carbone/Epoxy et Kevlar/Epoxy) composant la voilure, le fuselage, le carénage et la dérive, consiste à déterminer le nombre de plis minimal ainsi que l'orientation optimale des fibres dans chaque pli, permettant à l'avion de supporter chacune des situations rencontrées dans. Dans le cas du RAFALE l'utilisation de composites sans optimisation entraîne un allègement de 25% de la masse, en comparaison avec une conception métallique plus classique du type MIRAGE 2000. L'optimisation de la structure composite du RAFALE a permis d'effectuer un gain supplémentaire de poids compris entre 10 et 25% sur la masse de chacun des éléments. Dans le secteur aérospatial, les stratifiés sont utilisés sous forme de tôles minces, de panneaux autoraidis, de longerons en U et en I, de caissons assemblés à l'aide de raidisseurs, de structures sandwich, de poutres de flexion (Fig. 2 ) ou d'associations de ces constituants réalisées par collage ou rivetage. Pour l'empennage horizontal, une solution hybride intéressante est utilisée : la structure sandwich est composée d'alliage de Titane sur le bord d'attaque, puis d'un Carbone Epoxy stratifié.

La combinaison de différents composites pour créer des structures permet de spécialiser chacun des matériaux. Le meilleur exemple est la pale d'hélicoptère pour laquelle la forme aérodynamique et la raideur en tension sont assurées par un stratifié (Verre Epoxy + Carbone Epoxy à  $\pm 45^\circ$ ). Les efforts de traction et de flexion auxquels est soumise cette pale sont supportés et transmis par un unidirectionnel (Verre/Epoxy) entourant des douilles d'acier constituant la liaison avec le rotor. La structure est alors remplie de mousse ou de nid d'abeille pour empêcher la déformation du profil. Les bords d'attaque et de fuite sont recouverts d'acier inoxydable résistant au frottement. Cette conception possède des avantages multiples se traduisant par une augmentation des performances et de la durée de vie du produit ainsi qu'une possibilité de réparation.

Dans le cas du RAFALE, les stratifiés optimum constituant les différents éléments de la structure doivent supporter les sollicitations rencontrées en service, sans rompre. Par contre, pour le rotor d'hélicoptère reliant l'arbre moteur aux pales, l'organisation des plis du stratifié dépend essentiellement de l'anisotropie et des flexibilités recherchées pour la liaison (liaison sans jeu). Un tel matériau permet d'intégrer plusieurs fonctions (cinématiques, amortissement, raideur), et la diminution du nombre de pièces qui en résulte est spectaculaire. De 377 pièces mécaniques (30 roulements), on passe à une solution composite de 70 pièces où aucun roulement n'est nécessaire, ce qui rend l'ensemble fiable et durable.

Pour d'autres utilisations, ce sont les qualités thermiques optimales qui sont recherchées.

Les composites Carbone/Carbone, Bore/matrice Céramique et les Céramique/Céramique sont capables de supporter des températures et des flux thermique très élevés. On les rencontre dans les boucliers protecteurs des navettes spatiales (HERMES Carbone/Carbone 3D) ainsi que dans les tuyères et moteurs d'avion. Ils permettront de réaliser les réacteurs des futurs avions hypersoniques. Mais la conception et l'optimisation des composites dans les différentes utilisations ne peuvent s'avérer performantes que si l'on connaît exactement le comportement thermohydromécanique du matériau.

## 2. COMPORTEMENT ET ESSAIS

Dans le chapitre précédent, une description succincte des stratifiés est présentée. Toutefois, elle nous permet d'apprécier la complexité de l'architecture d'un tel matériau à diverses échelles et la différence de structure atomique existant entre les constituants de base et leur interface. Par conséquent, le comportement thermomécanique de tels matériaux est complexe et difficile à modéliser. Afin de simplifier la présentation, nous l'avons structurée en quatre parties. Dans les trois premières parties, nous présentons le comportement élastique du stratifié, ainsi que des modélisations plus ou moins complexes de la rupture et du comportement anélastique. Enfin, la dernière partie est une présentation rapide des divers types d'essais qu'il est nécessaire d'effectuer pour obtenir les caractéristiques mécaniques du stratifié.

### a) Modélisation du comportement élastique

Dans le premier paragraphe de ce chapitre, nous avons présenté la constitution des stratifiés et des plis unidirectionnels. Ces derniers sont en fait l'association de deux constituants qui sont des fibres longues disposées parallèlement entre elles et d'une résine permettant d'assurer la cohésion à l'ensemble. Cette résine possède un comportement isotrope en première approximation, bien qu'il soit difficile de le vérifier expérimentalement. En effet, un essai sur un bloc de résine sans fibres n'est pas représentatif, car la polymérisation est fortement influencée par la présence de ces dernières. La même approximation est couramment utilisée pour le comportement des fibres. Toutefois, en observant de plus près des fibres de Carbone, il apparaît une superposition transversale de strates cylindriques ou planes, ce qui laisse sous-entendre un comportement isotrope transverse ou complètement anisotrope (strates planes). En conclusion, le comportement global d'un pli unidirectionnel peut être considéré comme celui d'un pli de matériau homogène isotrope transverse. En effet, la rigidité dans la direction des fibres est sans aucun doute plus élevée que la rigidité transversale due à l'association fibres-résine. Cette dernière étant indépendante

des deux directions ( $x_2$  et  $x_3$  orthogonales au plan du pli), même dans le cas de fibres anisotropes si l'on prend garde de les disposer aléatoirement.

L'observation des résultats de différents essais simples, qui seront exposés par la suite, fait apparaître le caractère élastique du comportement d'un pli jusqu'à des taux élevés de déformations dans le sens des fibres ; à l'opposé du sens transverse où l'anélasticité apparaît tôt. Dans une approximation, le comportement de ce pli unidirectionnel constitué de fibres longues peut être représenté par un comportement élastique isotrope transverse.

La matrice reliant le tenseur des déformations au tenseur des contraintes est donc invariante par rotation autour de l'axe parallèle aux fibres ( $0, x_1$ ) et seulement 5 coefficients suffisent pour représenter le comportement du pli :

- $E_1$  module d'Young dans le sens des fibres
- $E_2$  module d'Young dans le sens transverse
- $\nu_{12}$  coefficient de Poisson dans le plan des fibres
- $\nu_{23}$  coefficient de Poisson dans le plan transverse
- $G$  module de cisaillement.

D'où la relation entre contraintes et déformations:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ 2 \epsilon_{23} \\ 2 \epsilon_{13} \\ 2 \epsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & & & \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & & & \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & & & \\ & & & \frac{2(1+\nu_{23})}{E_2} & & \\ & & & & \frac{1}{G} & \\ & & & & & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_1 \\ \Sigma_2 \\ \Sigma_3 \\ \Sigma_{23} \\ \Sigma_{13} \\ \Sigma_{12} \end{bmatrix}$$

Si l'on désire exprimer la loi de comportement dans des directions ne coïncidant pas avec la direction des fibres et celles du plan transverse, il suffit d'effectuer une transformation entre les

deux systèmes de coordonnées. Ceci permet, entre autres, de prévoir les caractéristiques mécaniques d'un pli unidirectionnel dont les fibres font un angle  $\theta$  par rapport à un axe privilégié de la structure (voir tableau 4).

Dans le cas des stratifiés, la difficulté augmente car ils sont constitués d'une superposition de plis unidirectionnels possédant tous diverses orientations. Toutefois, sous certaines hypothèses, il est possible d'établir la loi de comportement du stratifié à partir des caractéristiques mécaniques de chacun des plis, grâce à la théorie des stratifiés exposée au paragraphe I-3.

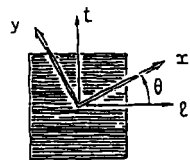
#### b) Modélisation simple de la rupture

Dans les bureaux d'études, la conception des composites nécessite la connaissance des rigidités élastiques du matériau, afin d'effectuer le calcul des champs de contraintes et de déplacements lorsque la structure est soumise aux charges de service. De plus, sous des sollicitations extrêmes, il est impératif d'appréhender au mieux la rupture. A l'heure actuelle, dans les bureaux d'études et au sein des codes d'éléments finis, c'est l'approche phénoménologique qui est utilisée pour estimer les contraintes à rupture. Le pli est alors considéré comme homogène et un modèle mathématique est établi pour corréler les réponses du matériau, sans nécessairement expliciter les mécanismes mis en jeu.

Les plus simples des critères de rupture sont sans conteste le critère de résistance maximum et le critère de déformation maximum qui s'énoncent de la façon suivante : selon les directions principales du pli, la rupture se produit lorsque la contrainte (respectivement la déformation) atteint la contrainte (respectivement la déformation) à rupture. Les valeurs limites sont issues d'essais simples (traction, compression pure). Malheureusement, ces critères sont très optimistes et surestiment amplement la résistance du pli soumis à un état complexe de contrainte.

Dans le cadre d'une approche phénoménologique, WU [1974] montre que la forme mathématique la mieux adaptée aux critères de rupture des matériaux anisotropes est une expression polynomiale en contrainte, et que l'on peut se limiter aux termes du second ordre (critère quadratique). Il propose d'ailleurs une forme matricielle générale :

$$\sigma^T F \sigma + \bar{F}^T \sigma = 1$$



$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{E}_{11} & \bar{E}_{12} & \bar{E}_{13} \\ \bar{E}_{21} & \bar{E}_{22} & \bar{E}_{23} \\ \bar{E}_{31} & \bar{E}_{32} & \bar{E}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

avec :

$$\bar{E}_{11}(\theta) = c^4 \bar{E}_\ell + s^4 \bar{E}_t + 2c^2 s^2 (\nu_{\ell t} \bar{E}_\ell + 2G_{\ell t})$$

$$\bar{E}_{22}(\theta) = s^4 \bar{E}_\ell + c^4 \bar{E}_t + 2c^2 s^2 (\nu_{\ell t} \bar{E}_\ell + 2G_{\ell t})$$

$$\bar{E}_{33}(\theta) = c^2 s^2 (\bar{E}_\ell + \bar{E}_t - 2\nu_{\ell t} \bar{E}_\ell) + (c^2 - s^2)^2 G_{\ell t}$$

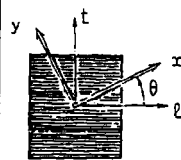
$$\bar{E}_{12}(\theta) = c^2 s^2 (\bar{E}_\ell + \bar{E}_t - 4G_{\ell t}) + (c^4 + s^4) \nu_{\ell t} \bar{E}_\ell$$

$$\bar{E}_{13}(\theta) = -cs \{ c^2 \bar{E}_\ell - s^2 \bar{E}_t - (c^2 - s^2) (\nu_{\ell t} \bar{E}_\ell + 2G_{\ell t}) \}$$

$$\bar{E}_{23}(\theta) = -cs \{ s^2 \bar{E}_\ell - c^2 \bar{E}_t + (c^2 - s^2) (\nu_{\ell t} \bar{E}_\ell + 2G_{\ell t}) \}$$

expressions dans lesquelles :

$$\bar{E}_\ell = E_\ell / (1 - \nu_{\ell t} \nu_{t\ell}) ; \quad \bar{E}_t = E_t / (1 - \nu_{\ell t} \nu_{t\ell})$$



$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\bar{E}_x} & -\frac{\nu_{yx}}{\bar{E}_y} & \frac{g_{xy}}{G_{xy}} \\ -\frac{\nu_{xy}}{\bar{E}_x} & \frac{1}{\bar{E}_y} & \frac{\mu_{xy}}{G_{xy}} \\ \frac{g_{xy}}{\bar{E}_x} & \frac{\mu_{xy}}{\bar{E}_y} & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

avec :

$$E_x(\theta) = \frac{1}{\frac{c^4}{\bar{E}_\ell} + \frac{s^4}{\bar{E}_t} + c^2 s^2 \left( \frac{1}{G_{\ell t}} - 2 \frac{\nu_{\ell t}}{\bar{E}_t} \right)}$$

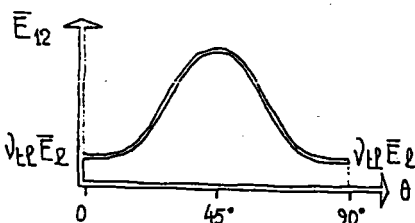
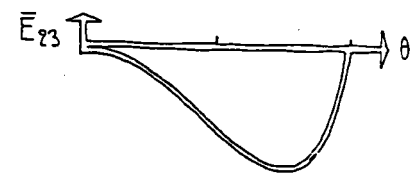
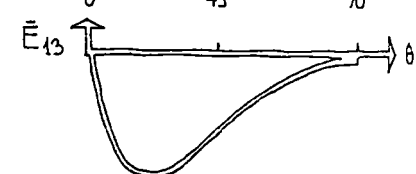
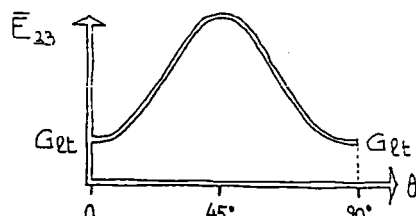
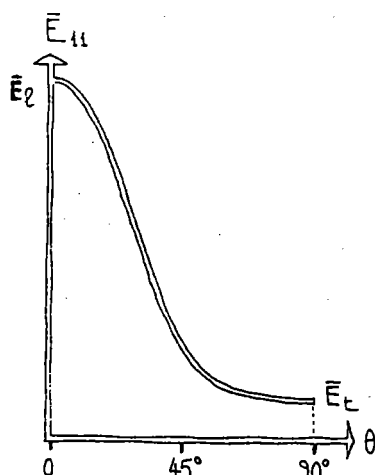
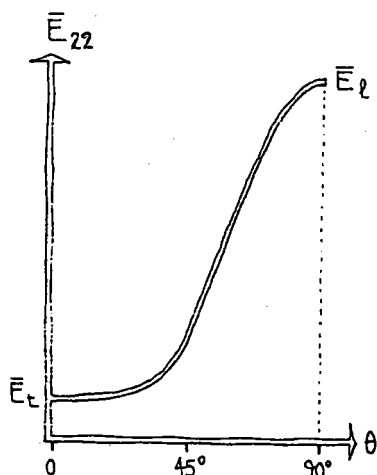
$$E_y(\theta) = \frac{1}{\frac{s^4}{\bar{E}_\ell} + \frac{c^4}{\bar{E}_t} + c^2 s^2 \left( \frac{1}{G_{\ell t}} - 2 \frac{\nu_{\ell t}}{\bar{E}_t} \right)}$$

$$G_{xy}(\theta) = \frac{1}{4c^2 s^2 \left( \frac{1}{\bar{E}_\ell} + \frac{1}{\bar{E}_t} + 2 \frac{\nu_{\ell t}}{\bar{E}_t} \right) + \frac{(c^2 - s^2)^2}{G_{\ell t}}}$$

$$\frac{\nu_{yx}}{E_y}(\theta) = \frac{\nu_{\ell t}}{\bar{E}_t} (c^4 + s^4) - c^2 s^2 \left( \frac{1}{\bar{E}_\ell} - \frac{1}{\bar{E}_t} - \frac{1}{G_{\ell t}} \right)$$

$$\frac{g_{xy}}{G_{xy}}(\theta) = -2cs \left\{ \frac{c^2}{\bar{E}_\ell} - \frac{s^2}{\bar{E}_t} + (c^2 - s^2) \left( \frac{\nu_{\ell t}}{\bar{E}_t} - \frac{1}{2G_{\ell t}} \right) \right\}$$

$$\frac{\mu_{xy}}{G_{xy}}(\theta) = -2cs \left\{ \frac{s^2}{\bar{E}_\ell} - \frac{c^2}{\bar{E}_t} - (c^2 - s^2) \left( \frac{\nu_{\ell t}}{\bar{E}_t} - \frac{1}{2G_{\ell t}} \right) \right\}$$



c : cos  $\theta$   
s : sin  $\theta$

TABLEAU 4 : Caractéristiques mécaniques hors des axes transverse (t) et longitudinal (l) de l'unidirectionnel (GAY[1989])



Comme nous le verrons par la suite, l'état de contrainte dans un stratifié peut être supposé plan sous certaines hypothèses, ce qui réduit par conséquent l'ordre des tenseurs  $F$  et  $\bar{F}$ . La forme la plus complète de ce critère est proposée par TSAI-WU [1971] et il se présente sous la forme:

$$[\Sigma_{11}, \Sigma_{22}, \Sigma_{12}] \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & 0 \\ F_{12} & F_{22} & 0 \\ 0 & 0 & F_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_{11} \\ \Sigma_{22} \\ \Sigma_{12} \end{bmatrix} + [\bar{F}_1, \bar{F}_2, 0] \begin{bmatrix} \Sigma_{11} \\ \Sigma_{22} \\ \Sigma_{12} \end{bmatrix} = 1$$

où dans le tableau 5 les coefficients  $F_{11}$ ,  $F_{12}$ ,  $F_{22}$ ,  $F_{66}$  sont exprimés en fonction des caractéristiques mécaniques déterminées par des essais de sollicitations simples. Il est à noter que le terme  $F_{12}^*$  ne peut être obtenu que par une traction biaxiale (1-2) extrêmement difficile à mettre en oeuvre. D'autres critères basés sur la même forme quadratique ont été proposés par HILL, HOFFMAN[1967] et CHAMIS[1984], où les termes de chacune des matrices  $F$  et  $\bar{F}$  sont reportés et comparés à ceux de TSAI-WU dans le tableau 5.

Très pratiques à utiliser, ces critères possèdent un inconvénient majeur : ils ne fournissent aucun renseignement sur les différents modes de rupture. Pour remédier à cela, HASHIN [1980] propose un modèle où il utilise en "parallèle" quatre critères de rupture fragile sous forme polynomiale, qui caractérisent respectivement les quatre modes de rupture observables au cours d'essais sur des unidirectionnels soumis à des sollicitations simples :

- . Rupture fragile des fibres en traction :  $[\Sigma_{11}/\sigma_L^+]^2 + [\Sigma_{12}/\tau_L]^2 = 1$
- . Rupture en traction de la matrice par fissuration transverse :  $\Sigma_{22} > 0$  (et/ou) décohésion de l'interface  $[\Sigma_{12}/\tau_L]^2 + [\Sigma_{22}/\sigma_L^+]^2 = 1$
- . Rupture en compression des fibres :  $\Sigma_{11} = -\sigma_L^-$
- . Rupture en compression de la matrice  $\Sigma_{22} < 0$
- $[(\sigma_T^-/2\tau_T)^2 - 1] \Sigma_{12}/\sigma_T^- + [\Sigma_{22}/2\tau_T]^2 + [\Sigma_{12}/\tau_L]^2 = 1$

Après avoir soigneusement identifié les contraintes limites  $\sigma_L^+$ ,  $\tau_L$ ,  $\sigma_L^-$ ,  $\sigma_T^+$ ,  $\sigma_T^-$  et  $\tau_T$ , il est possible d'expliciter ces quatre polynômes.

Il est évident que ce critère ne peut rendre compte de l'endommagement qui s'accumule dans la matrice lorsqu'elle est soumise à une traction transverse. C'est pourquoi, ALLIX [1989] associe les différents critères de rupture du pli aux différents mécanismes rencontrés (fragile ou endommagement) :

|          | HILL                         | HOFFMAN                                           | CHAMIS                          | TSAI-WU                                           |
|----------|------------------------------|---------------------------------------------------|---------------------------------|---------------------------------------------------|
| $F_{11}$ | $\frac{1}{\sigma_{11T}^2}$   | $-\frac{1}{\sigma_{11T} \sigma_{11C}}$            | $\frac{1}{\sigma_{11T}^2}$      | $-\frac{1}{\sigma_{11T} \sigma_{11C}}$            |
| $F_{22}$ | $\frac{1}{\sigma_{22T}^2}$   | $-\frac{1}{\sigma_{22T} \sigma_{22C}}$            | $\frac{1}{\sigma_{22T}^2}$      | $-\frac{1}{\sigma_{22T} \sigma_{22C}}$            |
| $F_{12}$ | $-\frac{1}{2\sigma_{11T}^2}$ | $\frac{1}{2} \frac{1}{\sigma_{11T} \sigma_{11C}}$ | $F_{12}^* \sqrt{F_{11} F_{22}}$ | $F_{12}^* \sqrt{F_{11} F_{22}}$                   |
| $F_{66}$ | $\frac{1}{\sigma_{12S}^2}$   | $\frac{1}{\sigma_{12S}^2}$                        | $\frac{1}{\sigma_{12S}^2}$      | $\frac{1}{\sigma_{12S}^2}$                        |
| $F_1$    | 0                            | $\frac{1}{\sigma_{11T}} + \frac{1}{\sigma_{11C}}$ | 0                               | $\frac{1}{\sigma_{11T}} + \frac{1}{\sigma_{11C}}$ |
| $F_2$    | 0                            | $\frac{1}{\sigma_{22T}} + \frac{1}{\sigma_{22C}}$ | 0                               | $\frac{1}{\sigma_{22T}} + \frac{1}{\sigma_{22C}}$ |

Le critère de Tsai-Wu se ramène au critère de HOFFMAN, si :

$$F_{12}^* = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sigma_{22T} \sigma_{22C}}{\sigma_{11T} \sigma_{11C}}}$$

Il se ramène au critère de HILL, si :

$$\sigma_{11C} = -\sigma_{11T} ; \sigma_{22C} = -\sigma_{22T} \text{ et } F_{12}^* = -\frac{1}{2} \frac{\sigma_{22T}}{\sigma_{11T}}$$

TABLEAU 5 : Coefficients des différents critères de rupture

- Rupture fragile des fibres en traction ou compression
- Rupture par fissuration transverse de la matrice, conséquence d'un endommagement cumulé
- Rupture de l'interface fibres-matrice (fragile ou issue d'une dégradation).

Dans le cas où la rupture est la conséquence d'un endommagement cumulé, il déduit le critère de rupture d'une condition d'instabilité. Mais si la rupture possède un caractère fragile, un simple critère de contrainte maximum ou de déformation maximum est utilisé.

Si ces modèles donnent d'assez bons résultats pour les plis unidirectionnels, il en est autrement pour les stratifiés. En effet, l'utilisation du critère de TSAI-WU [1971] n'est guère intéressante, car pour chacune des séquences d'empilement, il est nécessaire de mener une campagne d'essais pour déterminer les coefficients. Nous comprenons bien que cette méthode est alors inutilisable dans le cadre d'une optimisation de structure, où l'on recherche l'empilement le plus judicieux en vue de supporter les sollicitations avec un poids minimal.

Toutefois, une analyse couche par couche permet de modéliser le scénario de la rupture d'un stratifié possédant une séquence d'empilement quelconque. De plus, elle ne nécessite la connaissance que des coefficients de la forme quadratique du critère de rupture d'un seul pli unidirectionnel. Au cours de l'évolution du chargement extérieur, les sollicitations et les déformations dans chacune des couches sont calculables par la théorie des stratifiés. Lorsque dans une des couches, le champ de contrainte ne vérifie plus le critère, on la considère rompue. Par conséquent, on affecte à cette couche soit une rigidité nulle, soit une rigidité résiduelle adaptée au mode de rupture, ce qui a pour effet de modifier la répartition des contraintes dans l'épaisseur du stratifié. A partir de ce nouvel état, il est possible de réitérer les calculs jusqu'à la rupture complète de l'empilement. Malgré des temps de calcul relativement longs, cette méthode donne d'assez bons résultats.

Suite à cette courte présentation, il est intéressant de noter que pour améliorer les critères de rupture issus d'une étude phénoménologique, il est nécessaire de modéliser les mécanismes conduisant à la rupture (HASHIN[1980] et ALLIX[1989]). En effet, ces critères ne permettent pas de prendre en compte facilement d'autres paramètres tels que la fabrication (taux de fibre variable, défaut, polymérisation  $\neq$  entre chaque éprouvette) et l'évolution des conditions ambiantes (température et hygrométrie).

Ces critères phénoménologiques sont établis à partir d'essais de sollicitations simples. Or les structures en service sont soumises à des chargements complexes, et dans ce cadre, la confrontation des résultats prévisionnels aux résultats d'essais sur site n'est pas toujours bonne. En fait, sous de tels chargements, plusieurs mécanismes peuvent apparaître et interagir, conduisant à une diminution importante de la résistance du stratifié. De plus, même une analyse couche par

couche ne permet pas de bien modéliser la rupture des stratifiés, car elle est incapable de rendre compte par exemple de l'influence d'un délaminage entre deux couches sur la ruine du matériau composite. Par conséquent, il est crucial d'étudier plus finement les micromécanismes, qui sont source d'endommagement.

### c) Modélisation plus fine du comportement anélastique

#### - Modes de rupture d'un pli unidirectionnel

Si l'on observe de plus près les résultats d'essais, le comportement anélastique d'un pli unidirectionnel est fortement anisotrope, car les mécanismes activés sous diverses sollicitations sont très différents.

Dans la direction des fibres, le comportement en traction est linéaire élastique fragile et, pour des taux de contraintes s'approchant de la limite à la rupture, une succession de fibres se rompent entraînant la rupture de la matrice et la ruine globale de l'éprouvette. Le caractère élastique du comportement est principalement dû au fait que ce sont les fibres qui supportent la majorité des contraintes ; par conséquent, la matrice faiblement sollicitée s'endommage peu. De plus, la non rectitude initiale des fibres mesurée par DAVIS [1975] peut entraîner un léger raidissement en traction de l'unidirectionnel, ce qui fut observé par exemple au cours d'une flexion quatre points par ALLIX *et al.* [1988].

Par contre, une sollicitation en traction transverse ou en cisaillement fait apparaître des phénomènes d'endommagement et de plasticité. En effet, sous de tels chargements, la matrice est fortement sollicitée, et il y apparaît des fissures qui sont parallèles aux fibres dans le cas du cisaillement et transverses dans le cas de la traction. Les niveaux de déformations pour lesquels apparaît la fissuration sont inférieurs à 0,2% et cet endommagement est parfaitement réparti, aussi bien dans le cas d'une matrice thermodurcissable que thermoplastique. Comme l'interface entre les deux constituants est parfois de mauvaise qualité, elle aussi peut être sujette à une dégradation conduisant à une décohésion. L'initiation de ces fissures dans la matrice et à l'interface peut s'expliquer par la présence de multiples défauts générés pendant la fabrication (bulle d'air, mauvais ensimage, mauvaise polymérisation et mauvaise adhésion avec les charges), qui sont sources de concentrations de contrainte.

### - Modélisation de l'endommagement par passage micro-macro

Il est intéressant de pouvoir modéliser l'évolution d'un tel endommagement, mais l'échelle à laquelle apparaissent ces phénomènes ne facilite pas l'observation et la détermination des caractéristiques mécaniques, telle que la résistance à rupture de l'interface entre la fibre et la matrice. Toutefois, il est possible de quantifier l'impact de cet endommagement d'interface sur le comportement global. Par exemple LENE [1984] utilise la théorie de l'homogénéisation périodique pour prévoir les caractéristiques mécaniques, lorsque l'interface fibre-matrice s'endommage. MARI-GO et PIDERI [1987] et GRESSIER *et al.* [1989] proposent un critère énergétique d'initiation d'une microfissure ou d'une décohésion entre la fibre et la matrice en déterminant le comportement du pli avant et après l'endommagement via l'homogénéisation. Alors l'évolution de l'endommagement aura lieu dès que la restitution de l'énergie qu'il entraîne atteint une valeur critique fonction du type de matériau. ANDRIEUX [1989] utilise aussi ce critère, mais dans le cadre des composites à matrice viscoélastique. Comme le phénomène de microfissuration est réparti dans la matrice, de nombreux auteurs utilisent une méthode probabiliste. Par exemple PETTERS [1988] recueille des données expérimentales sur une seule éprouvette pour connaître la déformation à première rupture et établir une description statistique de fissuration du pli transverse en fonction des défauts présents.

Associées à cet endommagement, l'évolution de la plasticité dans la matrice et son influence sur le comportement global du pli ont été étudiées par SUQUET [1982] qui établit alors la théorie de l'homogénéisation périodique dans le cadre de comportements plastiques. Evidemment, toutes ces théories d'homogénéisation sont très élégantes, car elles permettent de prévoir le comportement global d'un pli ou d'une structure à partir de la seule connaissance de l'évolution d'un phénomène microscopique (échelle de la fibre).

### - Autres modélisations

Comme nous l'avons fait remarquer précédemment, les caractéristiques microscopiques transverses d'une fibre, par exemple, sont difficiles à appréhender, ainsi que le comportement de la matrice *in situ*. C'est pourquoi, LADEVEZE [1983] propose une théorie de l'endommagement anisotrope où la chute des rigidités globales de la couche sont les variables choisies pour décrire les dommages du pli. Cette théorie prend en compte l'anisotropie des mécanismes de dégradation et le caractère unilatéral suivant le type de sollicitation (traction-compression) ainsi que le couplage avec la plasticité.

Nous avons vu dans le paragraphe précédent qu'il est possible de prévoir la rupture d'un pli grâce à une étude phénoménologique. Cette dernière ne permet en aucun cas de rendre compte

des mécanismes associés à la rupture. Toutefois, SUQUET [1983] établit ce critère de rupture globale du pli à partir des critères de rupture de la matrice et des fibres, en associant analyse limite et homogénéisation. Le but d'une telle approche est de limiter le nombre de paramètres et d'en apporter une signification claire. De plus, TALIERCO [1989] prend en compte l'influence de la résistance à l'interface fibre-matrice sur le critère de rupture globale. Il montre que seulement 4 paramètres suffisent pour décrire le critère macroscopique de résistance d'un pli :

- résistance uniaxiale en traction de la fibre
- résistance uniaxiale en compression de la fibre
- résistance de la matrice modélisée par un critère de Von-Mises
- résistance en traction de l'interface.

La comparaison entre la surface limite de rupture obtenue par cette méthode et les résultats expérimentaux sur un graphite/epoxy montre une excellente corrélation. En conclusion, si l'on connaît les résistances des éléments de base (fibre et matrice) et de l'interface, il est alors possible d'utiliser cette méthode pour prévoir la limite à rupture d'un pli.

#### - Endommagement et rupture des stratifiés - Délaminage

Bien évidemment, l'étude spécifique du comportement d'un seul pli ne suffit pas, car lorsqu'on sollicite un stratifié, d'autres types d'endommagement sont observés. Le mode de rupture du stratifié par la défaillance successive des plis n'est pas le seul qui conduise la structure à sa ruine. En effet, au cours de l'opération de moulage, des délaminages entre les plis peuvent apparaître, conduisant à une diminution de la résistance globale du pli. Des chocs mécaniques, des contraintes interlaminaires excessives ainsi que la propagation des fissures dans la matrice à l'intérieur du pli ou à l'interface, sont également sources de délaminage.

De nombreux auteurs tentent de modéliser la propagation de délaminages établis, en utilisant le critère classique de la mécanique de la rupture fragile  $G = G_c$ , adaptée au cas des matériaux anisotropes hétérogènes (où  $G_c$  est le taux de restitution d'énergie critique fonction du matériau uniquement). La propagation se produit si le taux de restitution de l'énergie calculé par des approches numériques ou analytiques (3D ou 2D) atteint la valeur critique  $G_c$ . Très simple et bien adapté à la rupture fragile des métaux, ce critère pose quelques problèmes dans le cas des composites, car la valeur critique représentant uniquement la résistance du matériau augmente avec la longueur du délaminage. En fait, des ponts de fibres reliant les deux lèvres du délaminage apparaissent et s'opposent à la propagation. Il en résulte une augmentation de l'énergie nécessaire à l'évolution du délaminage et une différenciation des valeurs critiques suivant les différents modes.

D'autres études portent sur l'initiation d'un délaminage. Dans la majorité des cas, c'est près des bords que la décohésion entre les plis débute, et la prévision de la position de cette initiation dans l'épaisseur nécessite un calcul précis du champ des contraintes près des bords.

Par exemple, BERHNART [1982] détermine les contraintes interlaminaires dans le stratifié en utilisant la méthode variationnelle de RITZ. Ses résultats mettent en évidence l'influence de la séquence d'empilement, ainsi que le nombre de plis sur ce champ de contrainte. Le signe et la valeur des contraintes normales suffisent pour prévoir qualitativement la position de l'initiation dans l'empilement. La corrélation des résultats numériques avec les expériences est d'ailleurs bonne. D'autres auteurs se limitent à la détermination complète du champ de contrainte près des bords et des points d'application des efforts extérieurs (libres ou chargés), car les stratifiés utilisés en pratique possèdent de forts élancements, et loin de ces points particuliers le champ de contrainte peut être supposé plan. Dans un article DUMONTET *et al.* [1987] comparent les méthodes de calcul simplifiées du champ des contraintes 3D dans la couche limite, proposées par ENGRAND [1985] et DUMONTET [1985], qui sont basées sur des développements asymptotiques.

Dans cette couche limite, LEGUILLON et SANCHEZ [1986] déterminent numériquement les singularités du champ de contraintes aux diverses interfaces entre les plis, et ceci en fonction de l'anisotropie des plis de part et d'autre de l'interface, et des conditions aux limites. Toutes ces études sont très intéressantes pour quantifier la sensibilité des empilements à l'initiation des délaminages près du bord et le mode de rupture (I, II, III) qui va en résulter. Toutefois, LADEVEZE [1987] fait remarquer que l'utilisation de la mécanique de la rupture avec ces modèles est très difficile pour simuler l'initiation puis la propagation des délaminages à partir des bords. En effet, ce phénomène est piloté, entre autres, par les conditions aux limites, et ce n'est pas uniquement une caractéristique du matériau comme le suppose la mécanique de la rupture. Dans son article, il préconise de modéliser le matériau en intégrant le processus de détérioration et présente une liste de travaux utilisant la théorie de l'endommagement. ALLIX [1989] appréhende l'initiation et la propagation en modélisant l'interface comme une couche fine endommageable. Il suppose que l'accumulation des dégradations représentées par une variable ( $d$ ) entraîne la rupture de la liaison entre les couches lorsque  $d$  atteint sa valeur maximum 1. Associé à son modèle d'endommagement et de plasticité d'un pli unidirectionnel, il représente ainsi l'ensemble des mécanismes de rupture par l'évolution de toutes les variables thermodynamiques du modèle réunissant pli et interface.

Des critères empiriques ou semi-empiriques plus simples de type "point stress" ou "average stress" sont utilisés dans les bureaux d'études. Par exemple pour les structures trouées AMB-DA utilise la méthode du "point stress" qui consiste à comparer l'allongement dans les fibres tangentes au trou, situées à 0,5 mm du bord (problème de singularité) avec l'allongement à rupture de l'UD. Ce dernier étant corrigé par 2 coefficients empiriques représentatifs d'un effet de structure

(chargement, conditions aux limites, empilement) et de l'impact des conditions d'utilisation (température, hygrométrie). Le problème de ces critères est la dépendance des valeurs limites en fonction de la séquence du chargement et des conditions aux limites qui empêchent leur utilisation dans les études prévisionnelles.

#### d) Caractérisation

Pour expliciter le comportement des composites et déterminer les caractéristiques mécaniques telles que les modules d'Young dans le sens des fibres et le sens transverse, les coefficients de Poisson et de cisaillement, il est nécessaire d'effectuer des essais de sollicitations simples.

##### - Essai de traction

Deux essais de traction sur un simple barreau droit dont la partie utile est constituée de l'unidirectionnel étudié suffisent pour déterminer les caractéristiques (rigidité et limite à rupture) dans le sens longitudinal et transversal. La transmission des efforts aux mors posant quelques problèmes de surcontraintes, la norme préconise de coller des talons dégressifs de part et d'autre de cet unidirectionnel. Le but recherché est d'atteindre la rupture au centre de l'éprouvette, ce qui est l'assurance de bons résultats. Malgré toutes les précautions que l'on peut prendre, les caractéristiques mécaniques dans le sens transverse sont plus difficiles à appréhender, car comme nous l'avons vu, une sollicitation appliquée perpendiculairement aux fibres entraîne de nombreux mécanismes (endommagement et plasticité) qui sont issus en général de défauts apparus au cours de la fabrication. La diminution de la partie utile de l'éprouvette limite le risque de rencontrer un dé-

faut important dans la matrice, améliore par la même occasion les résultats et facilite la description du comportement anélastique.

##### - Essai de cisaillement

Pour obtenir le module de cisaillement d'un pli unidirectionnel, les essais sont bien plus délicats à réaliser. La méthode la plus simple est de solliciter le pli en traction hors axes. Dans la partie utile les fibres forment un angle  $\theta$  avec la direction de la charge. En utilisant les règles de changement de repère, il est alors possible de relier le module de cisaillement  $G$  à la rigidité du pli dans la direction  $\theta$  par la relation:



$$\frac{1}{E_{\theta}} = \frac{\cos^4 \theta}{E_1} + \frac{\sin^4 \theta}{E_2} + \cos^2 \theta \sin^2 \theta \left[ \frac{1}{G} - \frac{2\nu_{12}}{E_1} \right]$$

Ceci sous-entend d'avoir effectué préalablement les deux essais précédents avec le même matériau. La déformation de cisaillement induite dans le composite est fonction de l'angle  $\theta$  et elle prend sa valeur maximale pour des valeurs de 10 à 15° dans le cas d'un carbone-epoxy. C'est pourquoi, certains essais sont effectués avec cet angle pour augmenter la précision des mesures. Toutefois, il subsiste une difficulté majeure : la qualité des résultats qui est principalement fonction de la maîtrise de l'orientation des fibres au sein de l'éprouvette. Sachant que pour la plupart d'entre elles, leur diamètre est inférieur à 15  $\mu\text{m}$ , il en résulte une grande dispersion des résultats. La sollicitation en torsion d'un barreau d'unidirectionnel à section carrée permet aussi d'obtenir indirectement ce module de cisaillement (Fig. 3). La seule mesure directe des caractéristiques mécaniques en cisaillement du pli ou d'un stratifié est obtenue par la méthode du rail. Malheureusement, elle est difficile à mettre en oeuvre car le champ de cisaillement est perturbé par les effets de bord à l'encastrement et aux bords libres de la plaque (Fig. 4). La partie utile de l'éprouvette est par conséquent sujette à un état complexe de contrainte. On est confronté au même problème lorsqu'on soumet l'éprouvette d'Iospecu (Fig. 5) à une flexion 3 points. Plus récemment, KARAMA [ ] applique à une plaque carrée une flexion antiélastique où seule la mesure des deux déformations suffit pour déterminer le module de cisaillement des unidirectionnels.

Tous ces essais mettent aussi en évidence les phénomènes anélastiques lorsqu'on soumet l'éprouvette à une suite de charges et décharges. Lorsqu'on effectue ces essais avec précaution, il est possible d'obtenir toutes les caractéristiques mécaniques et d'explicitier les micromécanismes sous des sollicitations simples.

Au cours de ces différents paragraphes, nous avons essayé de présenter les principaux phénomènes qui pilotent le comportement mécanique du pli et du stratifié. Le nombre des paramètres influençant ces mécanismes est important. En voici quelques-uns qui n'ont pas encore été mentionnés :

- fraction volumique des fibres
- hygrométrie (variation du comportement de la matrice)
- cycle de fabrication (température et pression)
- fraction volumique des charges
- température.

De plus, pour maîtriser correctement l'optimisation de tels matériaux, il est nécessaire de connaître avec précision le comportement à la fatigue et au choc. Ces problèmes ne seront pas

abordés ici. Par contre, le chapitre suivant présente en détail un aspect du comportement non abordé jusqu'ici, la compression, qui s'avère être différent de celui de la traction. Les essais de caractérisation, plus complexes à mettre en oeuvre que ceux de traction, y sont développés.

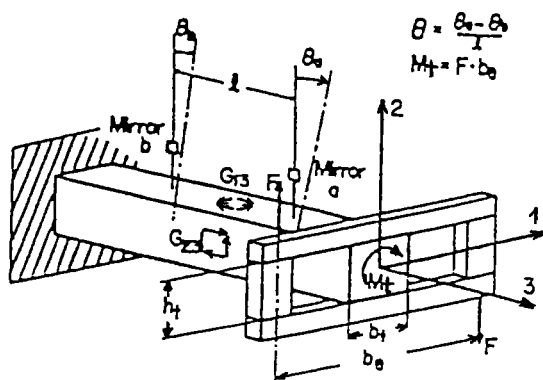


FIGURE 3 :Essai de cisaillement par sollicitation en torsion d'un barreau rectangulaire

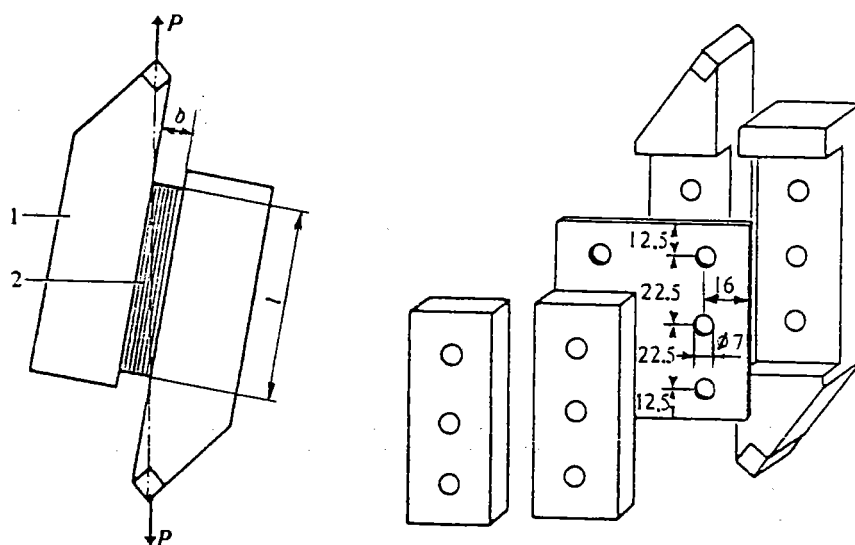


FIGURE 4 : Essai de cisaillement par la méthode du rail

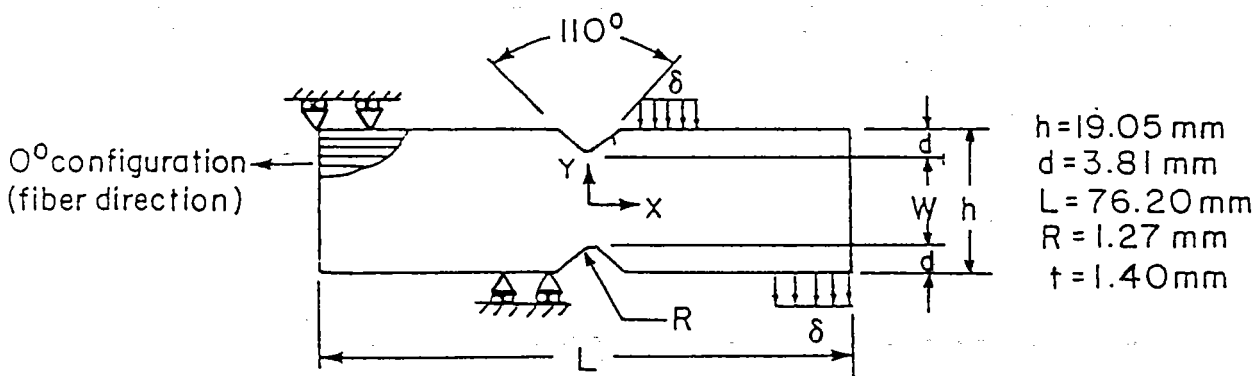


FIGURE 5 : Essai de cisaillement par sollicitation de flexion sur une éprouvette d'Iosipescu

### 3. MODELISATION DES STRATIFIES ET TRANSITION D'ECHELLES

#### a) Introduction

La possibilité d'adapter exactement les caractéristiques mécaniques aux types de contraintes que les stratifiés doivent supporter au cours de leur service (drapage sur le RAFALE, pale d'hélicoptère), en choisissant le type de fibre de matrice, le pourcentage relatif des deux constituants et la séquence d'empilement, conduit à une multitude de matériaux. Il n'est pas concevable financièrement d'effectuer toute la série d'essais précédemment présentée sur chaque composite conçu pour en déterminer ses caractéristiques mécaniques. Par conséquent, il est nécessaire de développer des méthodes permettant la prévision du comportement et des caractéristiques mécaniques des composites quels que soient l'empilement et les constituants de base.

Toutes ces méthodes de prévision sont établies à partir d'une modélisation de la constitution hétérogène du matériau, qui est indissociable de la notion d'échelle. Effectivement, le composite peut être étudié à différentes échelles. La plus grande est celle de la structure complète, où le stratifié peut se modéliser comme une plaque mince homogène anisotrope. Mais lorsqu'on étudie les phénomènes apparaissant dans l'épaisseur, le matériau est alors représenté par un empilement de plis homogènes isotropes transverses d'une épaisseur de 100 à 200  $\mu\text{m}$ . En revanche, une observation plus fine (10  $\mu\text{m}$ ) de ces plis fait apparaître leur constitution fibreuse hétérogène, où les deux matériaux, fibre et matrice, semblent être homogènes isotropes. Si l'on observe ces deux constituants à l'échelle du micron, la matrice présente des hétérogénéités physiques ainsi que des porosités (notamment près d'une interface). Quant aux fibres de Carbone, par exemple, elles sont constituées de strates circulaires ou planes. A chacune des échelles (stratifié, pli, fibre-matrice), les modèles proposés pour représenter le matériau sont bien différents, ainsi que les inconnues mécaniques et les lois de comportement qui leur sont associées.

Diverses théories plus ou moins sophistiquées sont développées et utilisées pour établir un lien entre ces diverses échelles. Par exemple, la théorie des stratifiés permet la prévision du comportement global d'une plaque mince stratifiée en fonction des caractéristiques mécaniques des plis constituant l'empilement (homogénéisation). De plus, la seule connaissance des efforts intérieurs (efforts normaux, moments fléchissants et efforts tranchants) dans cette plaque suffit pour établir la répartition des contraintes et des déformations dans chaque pli (localisation). Une seconde méthode nommée homogénéisation périodique complète la précédente puisqu'elle permet la détermination des caractéristiques mécaniques d'un pli à partir des caractéristiques de la matrice et de la fibre, ainsi que du pourcentage relatif des deux constituants. L'hypothèse principale de cette méthode est la périodicité de l'arrangement des fibres dans la matrice, ce qui est très discutable. Toutefois, elle permet une bonne approximation des contraintes au niveau des fibres, de la matrice et de l'interface à partir de la répartition globale des contraintes dans le pli, calculée en utilisant

la méthode précédente. La combinaison de ces deux théories est très intéressante pour prévoir le comportement global des stratifiés à partir de micromécanismes établis à l'échelle de quelques fibres (fissuration dans la matrice et à l'interface fibre-matrice) ou à une échelle plus grossière de quelques plis (délamination). Mais elles ne suffisent pas à la modélisation complète du composite car, près des bords où le champ de contraintes est 3D, les résultats de la théorie des stratifiés sont trop approximatifs et la théorie de l'homogénéisation périodique ne suffit plus. C'est pourquoi on trouve dans la littérature des études spécifiques sur les bords où la majeure partie de l'endommagement apparaît (par exemple : LADEVEZE et PECASTAING [1989]).

Dans notre étude ultérieure, nous verrons que les phénomènes de perte de rigidité ne proviennent pas d'effets de bord. Donc seules la théorie des stratifiés et la théorie d'homogénéisation périodique nous suffisent pour modéliser le phénomène.

b) Théorie des stratifiés

La majorité des stratifiés rencontrés dans les structures Hautes Performances présente un fort élanement (quelques millimètres d'épaisseur pour plusieurs centimètres ou mètres dans les deux directions transverses) et, par conséquent, il est justifié de représenter ce composite par une théorie de plaque mince, où le champ de déplacement et les efforts intérieurs sont définis sur une surface bidimensionnelle (notée  $\omega$ ). Les notations que nous utilisons par la suite pour cette présentation sont :

|             |                                                                   |
|-------------|-------------------------------------------------------------------|
| $x_1$ $x_2$ | axes situés dans le plan moyen de la plaque noté $w$              |
| $x_3$       | normale au plan moyen                                             |
|             | les indices grecs varient de 1 à 2 et les indices latins de 1 à 3 |
| $\Omega$    | volume représentatif de la plaque                                 |
| $\omega$    | plan moyen de la plaque.                                          |

Du fait de la relative minceur de la plaque, on suppose que le champ de déplacement  $u$  dans le plan varie linéairement dans l'épaisseur. Le déplacement vertical est choisi indépendant du paramètre de position  $x_3$ . En résumé, tous les points situés sur une même verticale ont un déplacement de corps solide, ce qui se traduit sous la forme :

$$u = (u_{\alpha}(x_1, x_2) - x_3 \beta_{\alpha}(x_1, x_2)) x_{\alpha} + (w(x_1, x_2)) x_3 \tag{1}$$

où  $\beta_\alpha$  sont les angles entre l'ensemble des points formant un segment solide et l'axe  $x_\alpha$  après déformation de la plaque (Fig. 6 ). Ces hypothèses sur le déplacement correspondent à la théorie d'HENCKY-MINDLIN.

Dans la théorie de LOVE-KIRCHHOFF, on impose en plus du mouvement de solide, que la normale à la plaque reste normale après déformation, ce qui se traduit par:

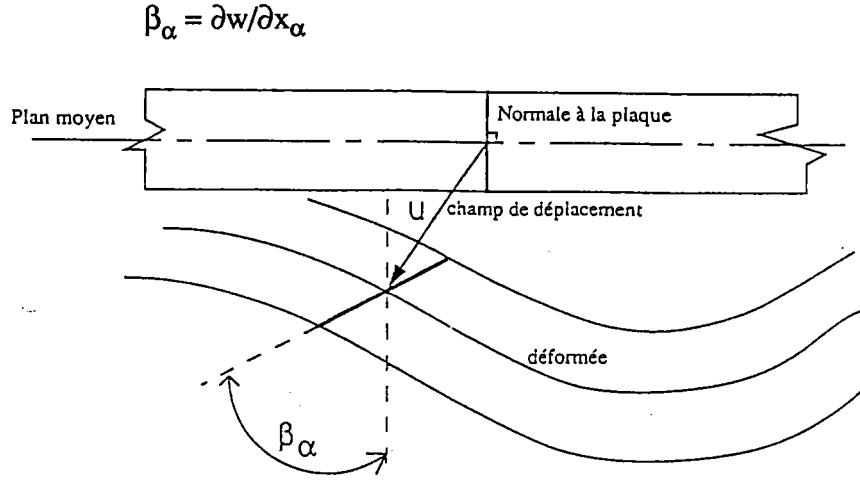


FIGURE 6 : Champ de déformation dans la théorie d'HENCKY-MINDLIN

En théorie linéaire ( hypothèses de petites perturbations) les déformations  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  sont linéaires dans l'épaisseur et s'écrivent sous la forme:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta} + x_3 K_{\alpha\beta} \quad (2)$$

avec

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right)$$

$$K_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \beta_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \beta_\beta}{\partial x_\alpha} \right)$$

où  $e_{\alpha\beta}$  est le tenseur de déformation de la surface moyenne et  $K_{\alpha\beta}$  le tenseur de courbure de cette surface.

De plus, il faut remarquer que cette théorie des stratifiés d'HENCKY-MINDLIN n'est utilisable que dans le cadre des petites déformations. Dans la théorie non linéaire de VON KARMAN qui s'applique aux cas des petites déformations avec des rotations modérées ( $\beta < 10^\circ$ ), le tenseur  $\sigma_{\alpha\beta}$  correspond alors au second tenseur de Piola Kirchhoff et le tenseur de déformations

de membrane s'exprime :

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial u_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial w}{\partial x_{\beta}}$$

Les déformations de cisaillements transverses s'écrivent:

$$\epsilon_{\alpha 3} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x_{\alpha}} - \beta_{\alpha} \right)$$

Remarquons dans le cas de la théorie de LOVE-KIRCHHOFF ces déformations sont par définition nulles.

Pour définir les efforts intérieurs dans la plaque, associés aux déformations généralisées et de cisaillement, nous utilisons l'expression tridimensionnelle de la puissance virtuelle des efforts intérieurs correspondant au champ de déplacement (1). Dans la théorie d'HENCKY-MINDLIN, cette expression est simplifiée par l'hypothèse supplémentaire de nullité de la contrainte  $\Sigma_{33}$ , qui se justifie sous certaines conditions (GREEN ZERNA[1954], DESTUYNDER[1986]).

$$\mathcal{P}_{int}(\delta \mathbf{u}) = - \int_{\Omega} \Sigma_{\alpha\beta} \delta \epsilon_{\alpha\beta} d\Omega - \int_{\Omega} \Sigma_{\alpha 3} \delta \epsilon_{\alpha 3} d\Omega \quad (3)$$

en utilisant les équations (2), (3), et en remarquant l'indépendance de  $e_{\alpha\beta}$ ,  $K_{\alpha\beta}$  et  $\epsilon_{\alpha 3}$  envers la variable  $x_3$ , la puissance virtuelle des efforts intérieurs se présente sous une forme simplifiée :

$$\mathcal{P}_{int}(\delta \mathbf{u}) = - \int_{\omega} \left[ \left( \int_{-h/2}^{h/2} \Sigma_{\alpha\beta} dx_3 \right) \delta e_{\alpha\beta} + \left( \int_{-h/2}^{h/2} x_3 \Sigma_{\alpha\beta} dx_3 \right) \delta K_{\alpha\beta} + \left( \int_{-h/2}^{h/2} \Sigma_{\alpha\beta} dx_3 \right) \delta \epsilon_{\alpha 3} \right] d\omega$$

où  $h$  correspond à l'épaisseur de la plaque. En utilisant cette dernière expression et la dualité contrainte-déformation, nous pouvons définir les efforts intérieurs à la plaque à partir de la répartition dans l'épaisseur des contraintes :

efforts de membrane

$$N_{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \Sigma_{\alpha\beta} dx_3$$

moments fléchissants

$$M_{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} x_3 \Sigma_{\alpha\beta} dx_3$$

efforts tranchants

$$Q_{\alpha} = \int_{-h/2}^{h/2} \Sigma_{\alpha 3} dx_3$$

Nous obtenons alors l'expression de la puissance virtuelle des efforts intérieurs:

$$\mathcal{P}_{\text{int}}(\delta u) = - \int_w (N_{\alpha\beta} \delta e_{\alpha\beta} + M_{\alpha\beta} \delta K_{\alpha\beta} + Q_{\alpha} \delta \epsilon_{\alpha 3}) dw$$

Connaissant l'expression de la puissance virtuelle des efforts intérieurs, il nous suffit d'appliquer le principe des puissances virtuelles à la plaque pour en déduire les équations d'équilibre que doivent vérifier  $N_{\alpha\beta}$ ,  $M_{\alpha\beta}$ ,  $Q_{\alpha}$  et la forme générale des efforts extérieurs que l'on peut appliquer.

$$\mathcal{P}_{\text{ext}}^* = \int_{\omega} (f_{\alpha} \delta u_{\alpha} + f_3 \delta w + m_{\alpha} \delta \beta_{\alpha}) d\omega + \int_{\partial\omega} (F_{\alpha} \delta u_{\alpha} + F_3 \delta w + M_{e\alpha} \delta \beta_{\alpha}) ds$$

$$\begin{aligned} \text{Equations d'équilibre : } N_{\alpha\beta,\beta} + f_{\alpha} &= 0 & -M_{\alpha\beta,\beta} + Q_{\alpha} + m_{\alpha} &= 0 & Q_{\alpha,\alpha} + f_3 &= 0 & \text{ dans } \omega \\ \text{sur le bord } \partial\omega : & M_{\alpha\beta} n_{\beta} + M_{e\alpha} &= 0 & -N_{\alpha} n_{\alpha} + F_{\alpha} &= 0 \\ & -Q_{\alpha} n_{\alpha} + F_3 &= 0 \end{aligned}$$

où  $f_{\alpha}$  et  $f_3$  sont des efforts répartis sur la plaque et  $m_{e\alpha}$  un moment réparti ;  $F_{\alpha}$  et  $F_3$  des efforts appliqués et  $M_{e\alpha}$  des moments appliqués sur le bord  $\partial\omega$  avec  $n$  la normale au bord de la plaque.

Pour résoudre ce problème de plaque, il est nécessaire d'établir la loi de comportement qui lie les efforts intérieurs aux déformations généralisées et de cisaillement de la plaque mince. Cette relation, traduisant le comportement global du stratifié, est directement fonction de la séquence d'empilement et des caractéristiques mécaniques de chacun des plis (TSAI et HAHN[1980]).

Nous supposons que les plis peuvent se représenter par des couches homogènes et isotropes transverses possédant une différence d'orientation entre leurs axes d'orthotropie.

En écartant le cas d'une plaque délaminée, la parfaite cohésion entre couches permet la simplification du champ de contraintes dans chacun des plis où  $\Sigma_{33}$  est supposée nulle.



La loi de comportement reliant les déformations aux contraintes se présente alors sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{ll} \\ \Sigma_{tt} \\ \Sigma_{lt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_l}{(1-\nu_{lt}\nu_{tl})} & \frac{\nu_{tl} E_l}{(1-\nu_{lt}\nu_{tl})} & 0 \\ \frac{\nu_{lt} E_t}{(1-\nu_{lt}\nu_{tl})} & \frac{E_t}{(1-\nu_{lt}\nu_{tl})} & 0 \\ 0 & 0 & G_{lt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_l \\ \epsilon_t \\ 2\epsilon_{lt} \end{bmatrix}$$

où

- $E_l$  est le module d'Young dans le sens des fibres
- $E_t$  est le module d'Young dans le sens transverse
- et  $\nu_{lt}$  est le coefficient de Poisson dans le plan des fibres.

Pour un pli unique, la direction(l)correspondent à la direction parallèle aux fibres et ( t ) à la direction transverse . Elles font un angle de 0°, 90° ou 45° par rapport aux axes  $x_1$   $x_2$  dans la plupart des stratifiés. Toutefois, en utilisant des règles de rotation courantes exposées dans le tableau 4, il est possible d'exprimer les matrices de comportement dans un repère unique défini sur la plaque ( $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ ). Si le stratifié est constitué de N couches possédant diverses orientations, la loi de comportement dans la ième couche située entre les altitudes  $z^i$  et  $z^{i-1}$  (Fig. 7) dont les fibres sont orientées d'un angle  $\theta_i$  par rapport à l'axe  $x_1$  sera notée :

$$\Sigma_{\alpha\beta} = \mathcal{L}^i_{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon_{\alpha\beta}$$

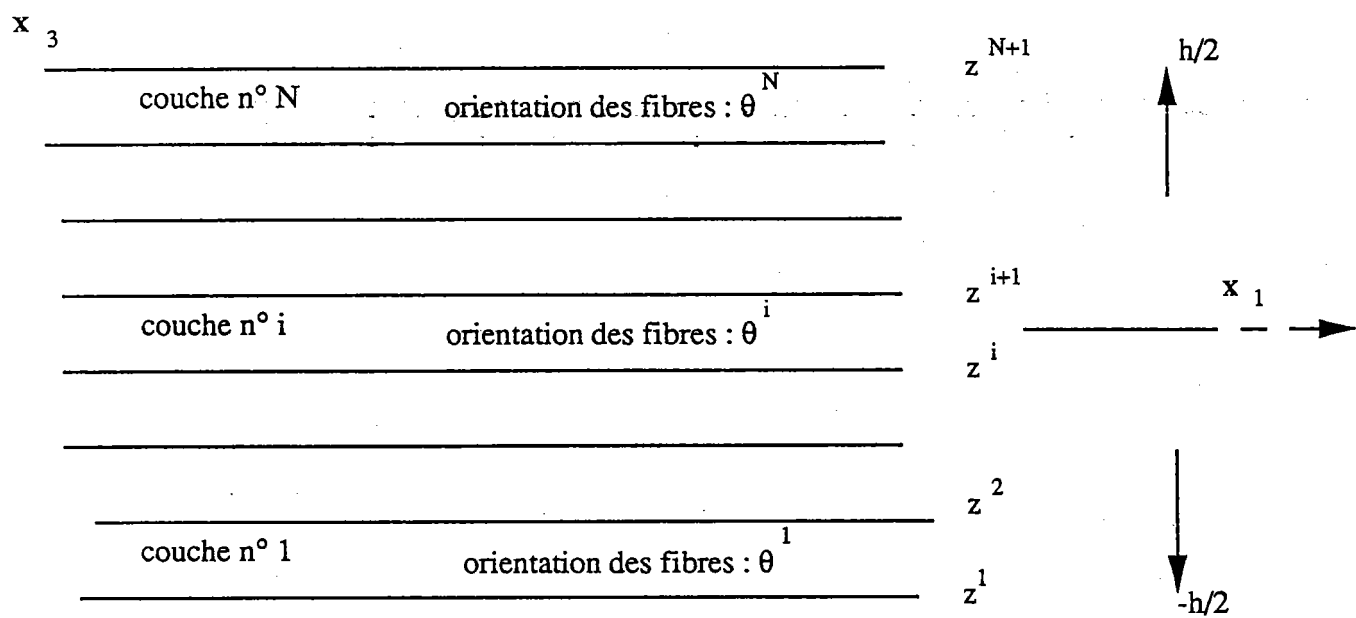


FIGURE 7 : Description de l'empilement

Par conséquent :

$$N_{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \Sigma_{\alpha\beta} dx_3 = \sum_{i=1}^N \int_{z_i}^{z_{i+1}} \mathcal{L}_{\alpha\beta\gamma\delta}^i \varepsilon_{\alpha\beta} dx_3$$

$$M_{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} x_3 \Sigma_{\alpha\beta} dx_3 = \sum_{i=1}^N \int_{z_i}^{z_{i+1}} \mathcal{L}_{\alpha\beta\gamma\delta}^i \varepsilon_{\alpha\beta} x_3 dx_3$$

où  $z_1 = -h/2$  et  $z_{N+1} = h/2$ .

Finalement, en utilisant l'expression (2), il est possible de relier les contraintes généralisées aux déformations généralisées par les relations :

$$N_{\alpha\beta} = \left( \sum_{i=1}^N \int_{z_i}^{z_{i+1}} \mathcal{L}_{\alpha\beta\gamma\delta}^i dx_3 \right) e_{\gamma\delta} + \left( \sum_{i=1}^N \int_{z_i}^{z_{i+1}} \mathcal{L}_{\alpha\beta\gamma\delta}^i x_3 dx_3 \right) K_{\gamma\delta} \quad (4)$$

$$M_{\alpha\beta} = \left( \sum_{i=1}^N \int_{z_i}^{z_{i+1}} \mathcal{L}_{\alpha\beta\gamma\delta}^i x_3 dx_3 \right) e_{\gamma\delta} + \left( \sum_{i=1}^N \int_{z_i}^{z_{i+1}} \mathcal{L}_{\alpha\beta\gamma\delta}^i x_3^2 dx_3 \right) K_{\gamma\delta} \quad (5)$$

que l'on écrit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \\ M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ {}^t B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ 2e_{12} \\ K_{11} \\ K_{22} \\ 2K_{12} \end{bmatrix}$$

Nous pouvons remarquer la symétrie de la matrice de comportement et la nullité de la matrice B si l'empilement présente une symétrie miroir par rapport au plan moyen.

Dans la théorie des plaques minces, la détermination de la loi de comportement reliant les efforts tranchants et les déformations de cisaillement pose quelques problèmes. En effet dans cette théorie la déformation de cisaillement est supposée constante dans l'épaisseur. Or la résolution des équations d'équilibre tridimensionnelles (DESTUYNDER [1986]) dans le cas homogène isotrope, fait apparaître une évolution quadratique de la contrainte  $\sigma_{\alpha 3}$ . Par conséquent si on utilise la loi de comportement linéaire locale, les déformations  $\varepsilon_{\alpha 3}$  calculées à partir du champ de déplacement (1) conduisent à une répartition constante des contraintes  $\sigma_{\alpha 3}$ . La forte approxima-

tion faite sur les déformations nous oblige à corriger la relation (6) qui est établie en appliquant la loi de comportement en cisaillement locale.

$$Q_{\alpha} = \left( \sum_{i=1}^N \int_{z_i}^{z_{i+1}} G_{\alpha 3}^i dx_3 \right) 2 \varepsilon_{\alpha 3} \quad (6)$$

Ce qui nous donne:

$$\begin{cases} Q_1 = k_1 \left( \sum_{i=1}^N \int_{z_i}^{z_{i+1}} G_{13} dx_3 \right) \left( \frac{\partial w}{\partial x_1} - \beta_1 \right) \\ Q_2 = k_2 \left( \sum_{i=1}^N \int_{z_i}^{z_{i+1}} G_{23} dx_3 \right) \left( \frac{\partial w}{\partial x_2} - \beta_2 \right) \end{cases}$$

En conclusion, dans la théorie d'HENCKY-MINDLIN, les relations (4) (5) (6) permettent simplement d'établir la loi de comportement globale du stratifié à partir des caractéristiques mécaniques des plis. Le calcul des intégrales est explicite car, dans cette modélisation du stratifié, les plis sont supposés homogènes isotropes transverses, et par conséquent leurs caractéristiques mécaniques sont constantes. Une fois la loi de comportement généralisée établie, nous sommes en mesure de résoudre un problème de plaque stratifiée et de déterminer ainsi en chaque point les inconnues de déplacement ( $u_{\alpha}$ ,  $w$ ) et les efforts intérieurs. Dans les codes d'Eléments Finis actuels, des éléments spécifiques pour les composites stratifiés sont proposés et ils permettent de calculer numériquement les inconnues pour les différents problèmes rencontrés dans l'industrie. De plus, cette théorie offre un intérêt supplémentaire puisque ce calcul suffit pour approximer la répartition des contraintes dans chacun des plis. Effectivement, une fois que l'on a déterminé le champ de déplacement et par conséquent le champ de déformation dans l'épaisseur, les contraintes dans le  $i$ ème pli sont obtenues par la loi de comportement :

$$\sigma_{\alpha\beta}(x_3) : L_{\alpha\beta\gamma\delta}^i \varepsilon_{\gamma\delta}(x_3) \quad \text{où} \quad \varepsilon_{\gamma\delta} = e_{\gamma\delta} + x_3 K_{\gamma\delta}.$$

### c) Passage micro-macro dans le cadre périodique

La théorie des stratifiés est établie en représentant le matériau par un empilement de couches homogènes isotropes transverses. Cette description peut être affinée, en observant le pli de plus près. Mais à une échelle plus petite, la constitution est fortement hétérogène car les deux matériaux de base possèdent des caractéristiques mécaniques souvent très différentes, et la disposition géométrique des fibres est en partie aléatoire. Dans ces conditions, la détermination du champ des

contraintes et de déplacement dans tout le pli hétérogène est inconcevable. Même si nous possédions une machine de calcul suffisamment puissante, le caractère en partie aléatoire de la position des renforts ne permet pas une modélisation complète par des éléments finis tridimensionnels, à une échelle inférieure à celle des hétérogénéités. Toutefois, un compromis est possible pour appréhender au mieux le comportement réel du pli en le représentant par un arrangement périodique de fibres dans une matrice.

Pour simplifier la présentation de la méthode dans ce paragraphe, nous nous limiterons au cas particulier où les fibres et la matrice possèdent un comportement élastique et où leur interface est supposée parfaite. Ces hypothèses ne sont pas du tout limitatives. En effet, par exemple SUQUET [1982][1983], MARIGO et al.[1987], MARIGO[1988], MICHEL[1984],LENE[1984] utilisent la méthode d'homogénéisation périodique avec des comportements plastiques ou visqueux et même une interface endommageable ou fissurée.

#### \* Représentation de la géométrie interne du composite

Dans le cas des composites unidirectionnels, la structure microscopique du pli est modélisée par un arrangement périodique qui se présente sous la forme d'un réseau de cellules de base. Ces dernières sont représentatives du comportement microscopique. Leur géométrie est fonction de la disposition et de la forme des fibres utilisées (Fig. 8). On leur associe alors un système d'axes  $(0', y_1, y_2)$  représentatif de l'échelle microscopique. Pour visualiser ce qui se passe au voisinage d'un point  $x_c$  situé dans le pli auquel est associé le système d'axes orthonormés  $(0, x_1, x_2, x_3)$ , on effectue un zoom sur ce voisinage. Ceci se traduit mathématiquement par une homothétie de rapport  $1/\eta$ , où  $\eta$  est la largeur de la cellule de base pointée par la coordonnée  $x_c$ . Les coordonnées  $y = (y_1, y_2, y_3)$  à l'échelle locale sont directement reliées aux coordonnées macroscopiques par la relation  $y = x - x_c/\eta$ .

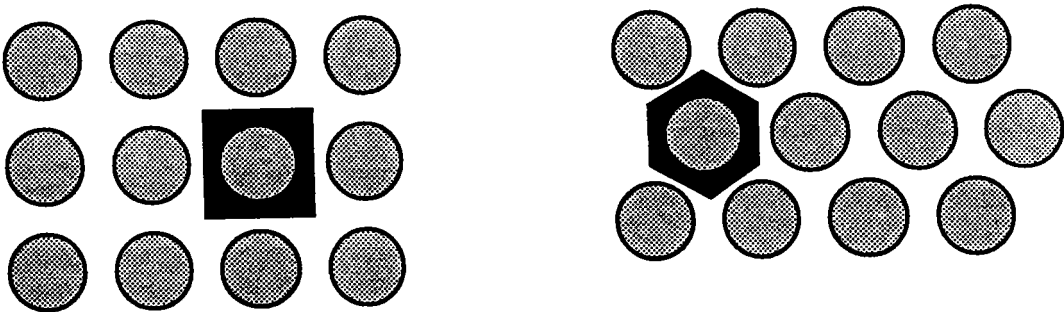


FIGURE 8 : Forme des cellules de base avec différentes dispositions de fibre

### \* Problème de structure et champ de déplacement

Dans le pli hétérogène périodique, les champs de contraintes  $\sigma^\eta$  et de déplacement  $u^\eta$  sont solution d'un problème classique de mécanique.

$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma^\eta + f = 0 \\ \sigma^\eta = a(y) \varepsilon(u^\eta) \end{cases} \quad (7)$$

Dans le matériau périodique l'hétérogénéité est la source de fortes oscillations au niveau de la cellule de base. Par conséquent, le champ de déplacement est recherché sous forme d'un développement en puissance entière de  $\eta$ , où le premier terme  $u_0$  représente les évolutions au niveau de la structure et ne dépend que de la position où l'on se trouve dans le pli. Alors que les termes suivants  $u_1, u_2, \dots$  sont fonction des deux variables  $x$  et  $y$  et oscillent rapidement dans la cellule.

$$u^\eta = u_0(x) + \eta u_1(x, y) + \eta^2 u_2(x, y) + \dots / y = x - x_0 / \eta.$$

De plus, la géométrie périodique du pli nous conduit à supposer que ces champs de déplacements  $u_\alpha$  ( $\alpha \neq 0$ ) sont périodiques par rapport à la variable  $y$  sur la cellule de base (noté Y-périodiques).

### \* Expression des champs de déformation et de contraintes - Loi de comportement

A partir de cette expression du champ de déplacement, nous pouvons simplement déterminer le champ de déformation en utilisant la règle de dérivation suivante:

$$\frac{d}{dx_i} (f(x, y)) = \frac{\partial}{\partial x_i} f(x, y) + \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial y_i} f(x, y)$$

d'où

$$\varepsilon(u^\eta) = \varepsilon_0(x, y) + \eta \varepsilon_1(x, y) + \eta^2 \varepsilon_2(x, y) + \dots$$

avec

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(x, y) &= \varepsilon_x(u_0) + \varepsilon_y(u_1) \\ \varepsilon_1(x, y) &= \varepsilon_x(u_1) + \varepsilon_y(u_2) \end{aligned}$$

Notons que pour l'ensemble des opérateurs utilisés par la suite, les indices  $x$  et  $y$  signifient que les dérivations s'effectuent respectivement par rapport aux deux variables  $x$  et  $y$ .

Sur une cellule de base, la loi de comportement se présente sous la forme :

$$\begin{cases} \sigma^\eta = \mathcal{L}^M \varepsilon^\eta \text{ dans la matrice} \\ \sigma^\eta = \mathcal{L}^F \varepsilon^\eta \text{ dans la fibre} \end{cases} \quad \text{que l'on notera } \sigma^\eta = \mathcal{L}(\mathbf{y}) \varepsilon^\eta$$

où  $\mathcal{L}^M$  et  $\mathcal{L}^F$  représentent respectivement le comportement de la matrice et de la fibre. Classiquement dans les calculs d'homogénéisation, ces deux matériaux sont supposés isotropes.

Finalement ceci nous permet d'obtenir l'expression du champ de contrainte:

$$\sigma^\eta = \sigma_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \eta \sigma_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots$$

et les relations qui existent entre les champs  $\sigma_\alpha$  et  $\mathcal{E}_\alpha$  :

$$\begin{cases} \sigma_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = a(\mathbf{y}) \mathcal{E}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = a(\mathbf{y}) (\varepsilon_x(\mathbf{u}_0) + \varepsilon_y(\mathbf{u}_1)) \\ \sigma_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = a(\mathbf{y}) \mathcal{E}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = a(\mathbf{y}) (\varepsilon_x(\mathbf{u}_1) + \varepsilon_y(\mathbf{u}_2)) \\ \sigma_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = a(\mathbf{y}) \mathcal{E}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = a(\mathbf{y}) (\varepsilon_x(\mathbf{u}_2) + \varepsilon_y(\mathbf{u}_3)) \end{cases} \quad (8)$$

#### \* Homogénéisation

L'objectif de l'homogénéisation est de représenter le matériau microscopiquement hétérogène, par un milieu homogène possédant un comportement à l'échelle du pli similaire à celui du matériau réel. En effet, si l'on observe le composite à l'échelle de la fibre, la structure interne nous apparaît hétérogène ; par contre, à l'échelle du pli elle semble être homogène. Du point de vue mathématique, cela équivaut à diminuer la taille des hétérogénéités, c'est-à-dire faire tendre  $\eta$  vers zéro. Au cours du passage à la limite le problème (7) tend vers un problème homogène équivalent, où la loi de comportement  $\mathcal{L}^{\text{eff}}$  est identique en tous points du pli.

Lorsque  $\eta$  diminue, nous voyons rapidement que  $\mathbf{u}^\eta$  tend vers le champ de déplacement  $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$  appelé déplacement macroscopique. Pour ce qui est du champ de déformation, c'est un peu plus compliqué, car la déformation au premier ordre  $\mathcal{E}_0$  est la somme d'une déformation constante  $\varepsilon_x(\mathbf{u}_0)$  sur la cellule de base et d'une déformation locale  $\varepsilon_y(\mathbf{u}_1)$ . Or, cette dernière n'a aucune influence à l'échelle macroscopique car sa moyenne sur une cellule de base est nulle. En effet, si l'on définit l'opérateur moyenne par  $\langle f \rangle = 1/V_y \int_{V_y} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$  où  $V_y$  est la surface de la cellule de base dans le cas des fibres longues ( $V_y$  est un volume dans le cas d'inclusion 3D), une simple intégration par partie suffit pour démontrer la nullité de  $\langle \varepsilon_y(\mathbf{u}_1) \rangle$ , puisque les fonctions  $\mathbf{u}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  sont Y-périodiques. La déformation macroscopique est donc représentée par le champ  $\varepsilon_x(\mathbf{u}_0)$  et il lui correspond une contrainte macroscopique  $\langle \sigma_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle$ .

En effet, ce champ de contrainte vérifie localement les équations d'équilibre. Pour le démontrer, il est nécessaire d'établir les équations d'équilibre que doivent vérifier les champs  $\sigma^\alpha$ . SANCHEZ [1980] montre qu'en identifiant les différentes puissances de  $\eta$ , l'équation:

$$\text{div } \sigma^\eta + f = 0$$

est équivalente au système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{div}_y \sigma_0 = 0 & \text{ordre } 1/\eta \\ \text{div}_x \sigma_0 + \text{div}_y \sigma_1 + f = 0 & \text{ordre } 1 \\ \text{div}_x \sigma_1 + \text{div}_y \sigma_2 = 0 & \text{ordre } \eta \end{array} \right. \quad (9)$$

où les champs  $\sigma_\alpha(x,y)$  sont Y-périodiques. En appliquant l'opérateur moyenne à chacun des membres de la relation (9), nous obtenons l'équation recherchée :  $\text{div}_x \langle \sigma_0 \rangle + f = 0$  puisque  $\sigma_1(x,y)$  est Y-périodique.

En conclusion, le problème homogène équivalent ou macroscopique se présente sous la forme :

$$\text{div } \Sigma + f = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

où

$$\Sigma = \mathcal{L}^{\text{eff}} \varepsilon_x(u^0)$$

$$\Sigma = \langle \sigma_0(x,y) \rangle.$$

Nous avons substitué au milieu hétérogène un matériau homogène équivalent, dont la loi de comportement  $\mathcal{L}^{\text{eff}}$  reste à préciser. L'idée est d'utiliser la relation (8) ; malheureusement, en appliquant l'opérateur moyenne, nous obtenons  $\langle \sigma_0 \rangle = \langle a(y) \rangle \varepsilon_x(u_0) + \langle a(y) \cdot \varepsilon_y(u_1) \rangle$ , ce qui ne permet pas d'obtenir une relation explicite entre  $\langle \sigma_0 \rangle$  et  $\varepsilon_x(u_0)$  puisque  $\langle a(y) \cdot \varepsilon_y(u_1) \rangle$  est différent de zéro. Il est donc nécessaire de calculer le champ de déplacement  $u_1(x,y)$  qui est inconnu. Nous savons qu'il est solution du problème local suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{div}_y \sigma_0 = 0 & \text{ordre } 1/\eta \\ \sigma_0 = a(y) [\varepsilon_y(u_1) + \varepsilon_x(u_0)] & \\ u_1 \text{ est Y-périodique} & \\ \sigma_0 \text{ n est Y-antipériodique} & \end{array} \right.$$

Ce problème admet une solution unique  $u_1(x,y)$  définie à une translation près.

Pour le résoudre, on remarque que les champs de déplacement  $u_1$  et de contrainte dépendent linéairement des données macroscopiques ( $\varepsilon_x(u_1)$ ). Donc le champ de déplacement  $u_1(x,y)$

peut être recherché comme la superposition de six déplacements  $\chi^{kh}$  correspondant à six déformations de base :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Les champs  $u_1$  et  $\sigma_o$  sont alors définis comme suit :

$$\begin{cases} u_1(x, y) = \chi^{kh}(y) \varepsilon_x^{kh}(u_o) \\ \sigma_o(x, y) = S^{kh}(y) \varepsilon_x^{kh}(u_o) \end{cases} \quad (10)$$

où les deux nouvelles inconnues sont solutions de six problèmes  $\mathcal{P}^{kh}$  posés sur la cellule de base:

$$\mathcal{P}^{kh} \begin{cases} \operatorname{div}_y S^{kh}(y) = 0 \\ S^{kh}(y) = a(y) \varepsilon_y [P^{kh} + \chi^{kh}] \\ \chi^{kh}(y) \text{ sont } Y\text{-périodiques et } S^{kh}(n) \text{ } Y\text{-antipériodiques} \end{cases}$$

$$\text{où } P_i^{kh} = y_h \delta_{ki} \text{ avec } \delta \text{ le symbole de Kronecker}$$

Une fois ces problèmes  $\mathcal{P}^{kh}$  résolus, il est possible d'établir simplement la loi de comportement homogénéisée en calculant la moyenne :

$$\langle \sigma_o \rangle = \langle S^{kh}(y) \rangle \varepsilon_x^{kh}(u_o)$$

La loi de comportement macroscopique à l'échelle du pli est ainsi déterminée à partir des caractéristiques mécaniques des deux constituants ( $a(y)$ ) mais aussi de l'arrangement, de la forme et de la fraction volumique des fibres dans la matrice. En effet, les solutions  $\chi^{kh}$  sont fonctions de ces paramètres, ainsi que  $\mathcal{L}^{eff}$  puisque:

$$\mathcal{L}_{ijkh}^{eff}(y) = \langle a_{ijpq}(y) \{ \varepsilon_{ypq}(P^{kh} + \chi^{kh}) \} \rangle$$

De plus il est simple de montrer que, si le tenseur de comportement  $a(y)$  est positif en chaque point de la cellule, le tenseur représentatif du comportement homogène équivalent  $\mathcal{L}^{eff}$  l'est



aussi, et par conséquent il est possible d'établir la relation inverse :

$$\varepsilon_x(u_o) = (\mathcal{L}^{eff})^{-1} < \sigma_o >$$

Dans le cas des composites à fibres longues, la cellule de base est bidimensionnelle ( $y_2, y_3$ ) (hexagonale ou carrée), et elle correspond à une section transversale du pli. En effet, dans de tels matériaux, le champ de déplacement évolue lentement à l'échelle du pli ( $x$ ), et il oscille fortement à l'échelle microscopique suivant les directions transverses ( $y_2$  et  $y_3$ ) uniquement. Par conséquent, le développement asymptotique se présente sous la forme suivante :

$$\begin{cases} u^\eta = u_o(x) + \eta u_1(x, y_\alpha) + \dots \\ \sigma^\eta = \sigma_o(x, y_\alpha) + \eta \sigma_1(x, y_\alpha) + \dots \end{cases}$$

Si, de plus, les constituants sont élastiques et monocliniques d'axe  $y_1$ , alors LENE [1984] montre que les champs  $\chi^{ij}(y)$  recherchés sont indépendants de  $y_1$  et ils sont tels que:

$$\begin{aligned} \chi^{\alpha\beta}(y) &= (o, \chi_2^{\alpha\beta}, \chi_3^{\alpha\beta}) & \alpha &= 2-3 \\ & & \beta &= 2-3 \\ \chi^{11}(y) &= (o, \chi_2^1, \chi_3^1) \\ \chi^{\alpha 1}(y) &= (\chi_1^{\alpha 1}, o, o) \end{aligned}$$

où les champs  $\chi^{\alpha\beta}$  et  $\chi^{11}$  sont solutions de problèmes d'élasticité en déformations planes et  $\chi^{\alpha 1}$  solutions de problèmes scalaires sous forme Laplacien.

La résolution numérique des problèmes 22, 33, 23 et 11 dans le cadre des composites à fibres longues est entièrement détaillé par LENE [1984].

#### \* Localisation

A l'étape précédente, nous avons vu que la résolution de six problèmes sur une cellule de base et quelques calculs de moyenne suffisent pour établir la loi de comportement homogène équivalente. Ce calcul couplé avec la théorie des stratifiés permet d'approximer globalement la réponse du composite à des sollicitations extérieures. Mais peut-on en déduire des informations microscopiques (à l'échelle de la cellule) en utilisant les résultats de l'homogénéisation périodique ? Ceci est tout à fait possible, car dans les développements asymptotiques des champs  $\varepsilon^\eta$  et  $\sigma^\eta$ ,

les premiers termes :

$$\begin{aligned} \text{et} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_o &= \left\{ \varepsilon_y (\mathbf{P}^{kh} - \chi^{kh}) \right\} \quad \varepsilon_x^{kh} (\mathbf{u}_o) \\ \boldsymbol{\sigma}_o &= \mathbf{a} (y) \left\{ \varepsilon_y (\mathbf{P}^{kh} - \chi^{kh}) \right\} \quad \varepsilon_x^{kh} (\mathbf{u}_o) \end{aligned}$$

correspondent aux déformations et contraintes microscopiques, et la seule connaissance du champ de déformation macroscopique  $\varepsilon_x (\mathbf{u}_o)$  suffit pour les déterminer.

Le tenseur  $\mathcal{L} (y) = \mathbf{a} (y) \left\{ \varepsilon_y (\mathbf{P}^{kh} + \chi^{kh}) \right\}$  est appelé tenseur de localisation de la contrainte. Il est construit à partir des solutions  $\chi^{kh}$  des problèmes  $\mathcal{P}^{kh}$  précédemment présentés. D'autres tenseurs peuvent être définis pour relier les différentes grandeurs macroscopiques et microscopiques entre elles :

localisation des contraintes :  $\boldsymbol{\sigma}_o (\mathbf{x}, y) = \mathcal{C} (y) < \boldsymbol{\sigma}_o >$  avec  $\mathcal{C} (y) = \mathcal{L} (y) (\mathcal{L}^{eff})^{-1}$

localisation des déformations :  $\boldsymbol{\varepsilon}_o (\mathbf{x}, y) = \mathcal{D} (\mathbf{x}, y) \varepsilon_x (\mathbf{u}_o)$  avec  $\mathcal{D} (y) = \mathbf{a}^{-1} (y) \mathcal{L} (y)$ .

Le champ des déplacements microscopiques  $\mathbf{u}_1 (\mathbf{x}, y)$  s'obtient tout aussi simplement par la relation de linéarité (10).

#### \* Commentaires

Comme nous l'avons vu, cette méthode d'homogénéisation périodique demande une mise en oeuvre numérique par éléments finis, mais une fois les vecteurs  $\chi^{kh}$  calculés, le passage micro-macro est rapide. La méthode "self-consistante" (BERVEILLER et ZAOUÏ [1979]) est bien plus efficace en terme de rapidité de calcul, mais malheureusement, elle suppose que la constitution interne soit entièrement aléatoire. Or, l'hypothèse de périodicité, qui est certes discutable, est la mieux adaptée pour représenter les composites à fibres longues. En fait, la limitation principale de la méthode d'homogénéisation périodique n'est pas son coût calcul, mais la connaissance des caractéristiques mécaniques locales (rigidité en compression de la fibre, dans le sens transverse, coefficient de Poisson de la fibre, inhomogénéité de la matrice lorsqu'elle est polymérisée avec les fibres). Ainsi, les constructeurs de produits de base déterminent ces grandeurs en effectuant une homogénéisation "inverse" sur les résultats d'essais effectués sur un unidirectionnel.

D'autres méthodes plus simples mais plus approximatives sont aussi utilisées dans les bureaux d'études pour estimer rapidement les caractéristiques mécaniques macroscopiques d'un pli ou d'un empilement. L'idée est de modéliser le milieu hétérogène fibreux par une superposition de deux couches possédant des caractéristiques similaires à celles de la matrice et de la fibre. Leurs épaisseurs sont choisies de manière à ce que la fraction volumique soit respectée. La description du comportement global est obtenue en effectuant une succession de chargements sim-

ples (traction pure, cisaillement pur). Les champs de déformations et de contraintes induits sont recherchés constants par morceaux dans chacune des couches et l'on obtient :

$$\begin{aligned}
 E_{11}^{\text{Pli}} &= f E^f + (1 - f) E^M & \nu_{12}^{\text{Pli}} &= f \nu^f + (1 - F) \nu^M \\
 E_{22}^{\text{Pli}} = E_{33} &= \left( \frac{f}{E^f} + \frac{1 - f}{E^M} \right)^{-1} \\
 \frac{1}{2G_{12}^{\text{Pli}}} &= \frac{f}{2G_{12}^f} + \frac{1 - f}{2G_{12}^M}
 \end{aligned}$$

avec f: fraction volumique

$E^f$ : module d'Young de la fibre

$E^M$ : module d'Young de la matrice

$G_{12}^f$ : module de cisaillement transverse de la fibre

$G_{12}^M$ : module de cisaillement transverse de la matrice

$\nu_{12}^f$ : coefficient de Poisson de la fibre

$\nu_{12}^M$ : coefficient de Poisson de la matrice

Bien évidemment, cette méthode basée sur une modélisation simple du composite est incapable de rendre compte des effets de géométrie interne (forme et arrangement des fibres) et ne permet en aucun cas une approche microscopique.

## **CHAPITRE II : COMPRESSION DANS LES STRATIFIES**

### **1. Pourquoi étudier le comportement en compression**

### **2. Description du comportement en compression des fibres**

- a) Méthode indirecte
- b) Méthode directe

### **3. Description du comportement en compression du pli et du stratifié.**

Essais de compression

- a) Résultats des essais de compression pure
- b) Résultats des essais de flexion
- c) Discussion

### **4. Modélisations du microflambage. Bibliographie**

- a) Poutre sur fondation
- b) Méthode énergétique
- c) Modèle de poutre multicouche
- d) Etudes bidimensionnelles
- e) Modèles tridimensionnels
- f) Remarques sur les modèles de microflambage

## **II - COMPRESSION DANS LE STRATIFIE**

### **1. POURQUOI ETUDIER LE COMPORTEMENT EN COMPRESSION ?**

Comme les structures industrielles sont soumises à des sollicitations complexes, le comportement en compression dans certains cas peut devenir un paramètre dimensionnant. Par exemple à l'échelle du pli (10 mm), lorsque des défauts du type délaminage préexistent ou apparaissent dans l'empilement (suite à un choc), une sollicitation de compression peut conduire à un flambage locale des deux lèvres ; ce qui peut favoriser la propagation du délaminage (COCHELIN et POTIER-FERRY[1990]). Ce phénomène conduit à un affaiblissement de la résistance en compression de la structure comparée à celle de traction.

A l'échelle du pli, il apparaît aussi une différence de comportement entre ces deux types de sollicitations. A l'inverse du béton, le stratifié présente une faiblesse en compression dans le sens des fibres, qui se traduit à la fois par une moindre rigidité et une moindre résistance à la rupture.

Donc il ne faut en aucun cas espérer extrapoler à la compression les résultats des études portant sur la traction. En effet les mécanismes microscopiques sont très différents. Par conséquent si l'on désire les décrire et les modéliser, il est nécessaire de porter notre attention sur ce comportement.

Notre travail portant sur la modélisation du comportement en compression des stratifiés dans le sens des fibres, nous présentons dans ce paragraphe les résultats expérimentaux effectués au niveau des fibres et au niveau du stratifié. Ensuite nous détaillons quelques modèles issus de la littérature, qui expliquent cette moindre résistance en compression par un microflambage.

### **2. DESCRIPTION DU COMPORTEMENT EN COMPRESSION DES FIBRES**

C'est un problème difficile qui se présente aux fabricants et aux concepteurs, car si l'on peut facilement évaluer les caractéristiques mécaniques en traction d'une fibre, qui je le rappelle est en général d'un diamètre inférieur à 20  $\mu\text{m}$ , celles en compression et dans le sens transverse à l'axe demandent une certaine ingéniosité. Deux familles de méthodes sont développées pour caractériser le comportement en compression des fibres : des méthodes indirectes et des méthodes directes.

#### a) Méthode indirecte

En combinant la théorie de l'homogénéisation périodique à la connaissance des caractéristiques mécaniques de la matrice, nous pouvons alors déduire celles de la fibre du comportement global d'un pli unidirectionnel. La précision du résultat dépend alors étroitement avec laquelle sont connues la fraction volumique et les caractéristiques mécaniques de la matrice. Malheureusement, ces dernières sont difficiles à appréhender car on obtient deux produits légèrement différents, lorsqu'on polymérise la résine seule ou en présence des fibres. Par conséquent, les résultats issus des essais effectués sur des résines massives ne sont que peu représentatifs du comportement *in situ*. Quant au taux de fibre introduit dans la matrice, il est mesuré précisément par la pesée de l'unidirectionnel puis des renforts, après avoir brûlé la matrice (résine thermoplastique - thermodurcissable). Toutefois, en prenant soin de conserver la même résine, ces essais permettent une comparaison qualitative entre les comportements des différentes fibres, voir les tableaux 2 et 3. L'observation de ces résultats nous amène à conclure que la diminution des rigidités et des résistances en compression est fonction de la fibre utilisée. Mais la question qui se pose est de savoir si l'on peut associer cette perte des caractéristiques mécaniques du pli aux caractéristiques en compression de la fibre. Pour y répondre, certains chercheurs ont mis en oeuvre des essais de compression sur une seule fibre.

#### b) Méthode directe

La principale limitation d'un essai de compression pure sur une fibre est l'apparition d'une instabilité du type flambage. La charge critique est directement fonction de l'élancement de l'éprouvette et des conditions aux limites imposées aux extrémités. Pour éviter cette instabilité, il est nécessaire de limiter la longueur à quelques dizaines de microns pour un diamètre de fibre approchant les 10 microns. Mais de telles dimensions demandent des systèmes de chargement et de mesure très adaptés.

GREENWOOD et ROSE[1974] détournent cette difficulté en évaluant le comportement en compression par un essai de traction réalisé sur une fibre formant une boucle (Fig. 9 et 10). L'excentration des deux efforts engendre un moment fléchissant au sommet de cette boucle, et la face interne se trouve par conséquent soumise à une sollicitation de compression. Le matériau testé est un KEVLAR 49 qui possède une très mauvaise résistance en compression. Au cours du chargement, la mesure du grand et du petit axe est effectuée avec l'aide d'un microscope, puis elle est comparée à un résultat numérique établi en supposant les comportements en traction et en compression identiques et linéaires. La diminution observée du rayon de courbure au sommet de la boucle et la déformation résiduelle qui subsiste après la décharge démontrent le caractère non

linéaire et plastique du comportement en compression. Ceci est confirmé par l'apparition de plis sur la face intérieure à la boucle de la fibre. Le traitement des résultats pour en extraire les caractéristiques mécaniques en compression de la fibre est difficilement concevable, car la répartition non uniforme des contraintes au sommet de la boucle s'applique à un matériau hétérogène dans l'épaisseur de la fibre. Effectivement, l'observation par un microscope électronique d'une section a montré que la surface de la fibre est dure, comparée à sa partie centrale.

BOLL *et al.* [1990] évite cet inconvénient en effectuant un essai de compression pure sur une seule fibre qu'ils noient dans une résine Epoxy, faisant alors office de support pour éviter le flambage. Son montage expérimental est installé sur un microscope doté de filtres polarisés qui permettent de tirer profit de la propriété de biréfringence de la matrice utilisée. L'endommagement et la rupture de la fibre sont ainsi directement détectables lorsqu'il apparaît une évolution des images de biréfringence (Fig. 11-a). Les différentes fibres de Carbone testées (IM6, IM7, AS4) présentent toutes un mode de rupture fragile identique, qui conduit en phase finale à une fragmentation répartie uniformément sur la longueur. Les faciés de rupture observés sont tous différents (Fig. 11-b). A l'opposé la fibre de verre dans la résine epoxy est sujette à un microflambage d'une demi-longueur d'onde de  $20\text{ }\mu\text{m}$  (Fig. 12), qui peut s'expliquer par la faible rigidité mais la forte résistance du verre. Seule la limite à rupture correspondant à la première section rompue est mesurée sur ce montage car la rigidité est plus difficile à appréhender. Les contraintes limites obtenues pour les fibres de Carbone et de Verre sont extrêmement basses (10% de la charge à rupture de l'unidirectionnel correspondant), mais l'auteur fait remarquer qu'en aucun cas la rupture d'une seule fibre ne doit être associée à la rupture d'un pli unidirectionnel soumis à une compression pure, qui est le résultat final d'une suite de ruptures de fibres.

En conclusion, ces deux tests mettent en évidence des comportements en compression totalement différents entre les diverses fibres étudiées (Fibre de Verre, Fibres de Carbone AS4, IM6, IM7, Aramide). Leur intérêt est incontestable pour les chimistes qui recherchent des traitements afin d'améliorer les matériaux, et plus particulièrement leur constitution. Mais l'aspect qualitatif de ces résultats ne permet pas leur utilisation explicite à travers la méthode d'homogénéisation périodique pour la prévision du comportement global en compression d'un pli unidirectionnel. Ces essais sur de simples fibres sont bien évidemment insuffisants pour caractériser par exemple le mode de rupture d'un pli constitué d'un assemblage de fibres rigides très fines qui sont liées entre elles par une matrice qui possèdent comparativement de plus faibles caractéristiques mécaniques. Le comportement en compression longitudinale d'un tel assemblage va certes dépendre des caractéristiques mécaniques de la fibre, mais dans quelle mesure la matrice et les propriétés de son interface avec le renfort interviennent-elles ? Quels sont les mécanismes de rupture qui peuvent expliquer une telle différence entre la contrainte à rupture en compression longitudinale d'une fibre et d'un pli constitué de plus de 60% de fibres ? Pour bien comprendre le comportement en compression des composites et modéliser les micromécanismes intervenants, il est essentiel d'effectuer des essais sur des unidirectionnels et des stratifiés.

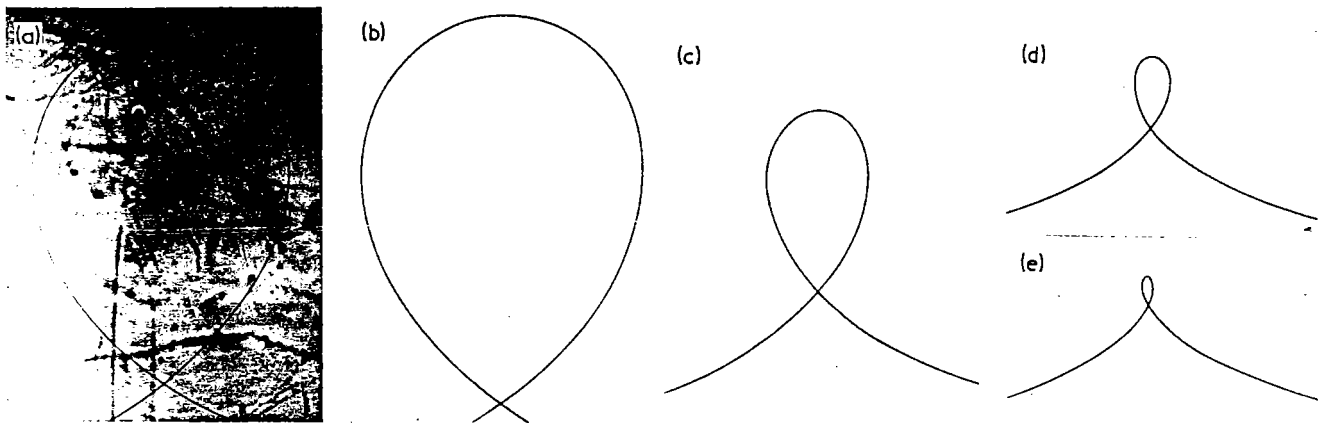


FIGURE 9 : Etats progressifs (a,b,c,d,e) au cours d'un essai élastique de traction sur un fibre formant un boucle (GREENWOOD et ROSE[1974])

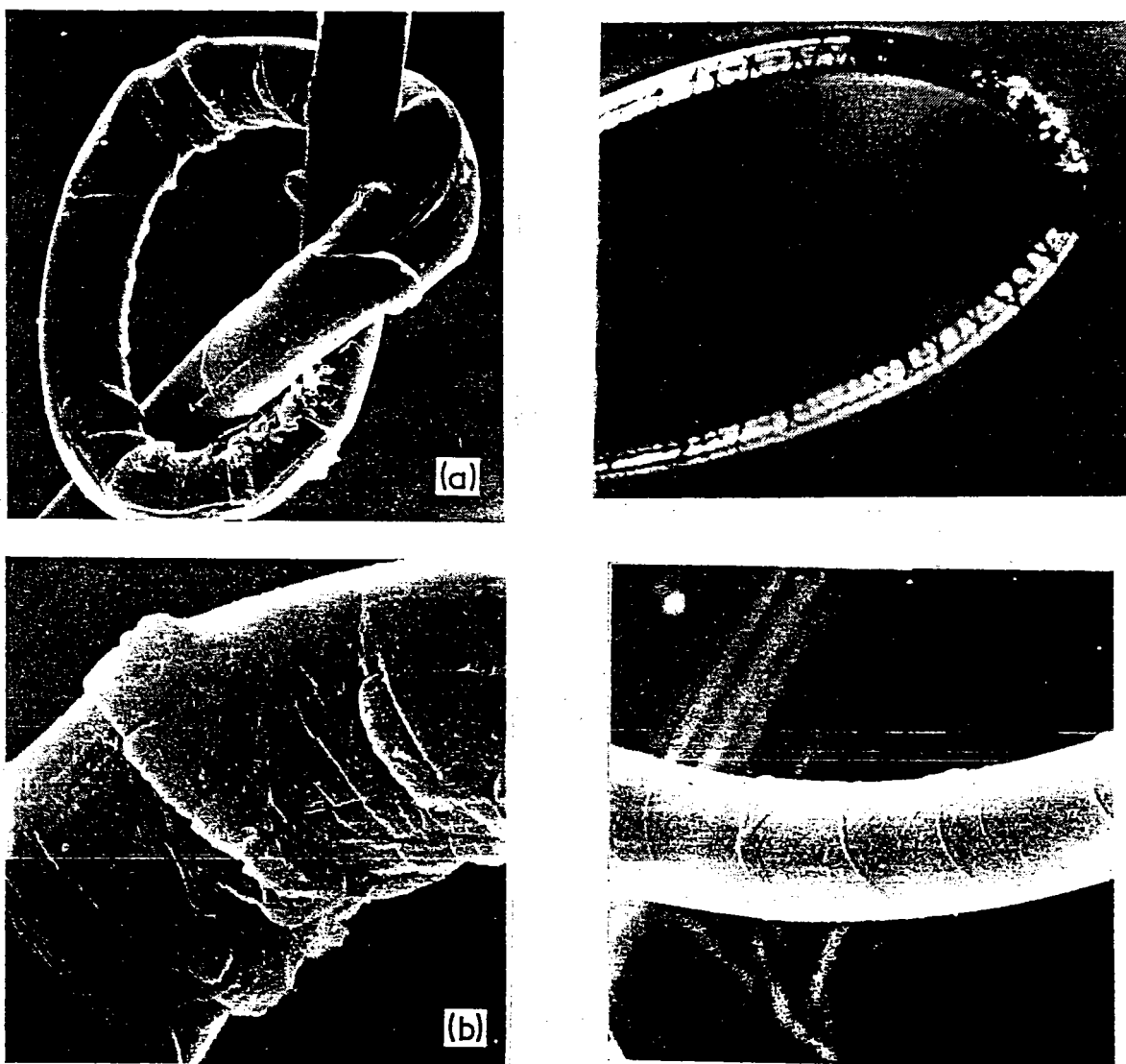


FIGURE 10 : Détail d'une fibre de Kevlar 49 soumise à un essai du type "boucle", sur la face en compression on voit apparaître des renflements (GREENWOOD et ROSE[1974])



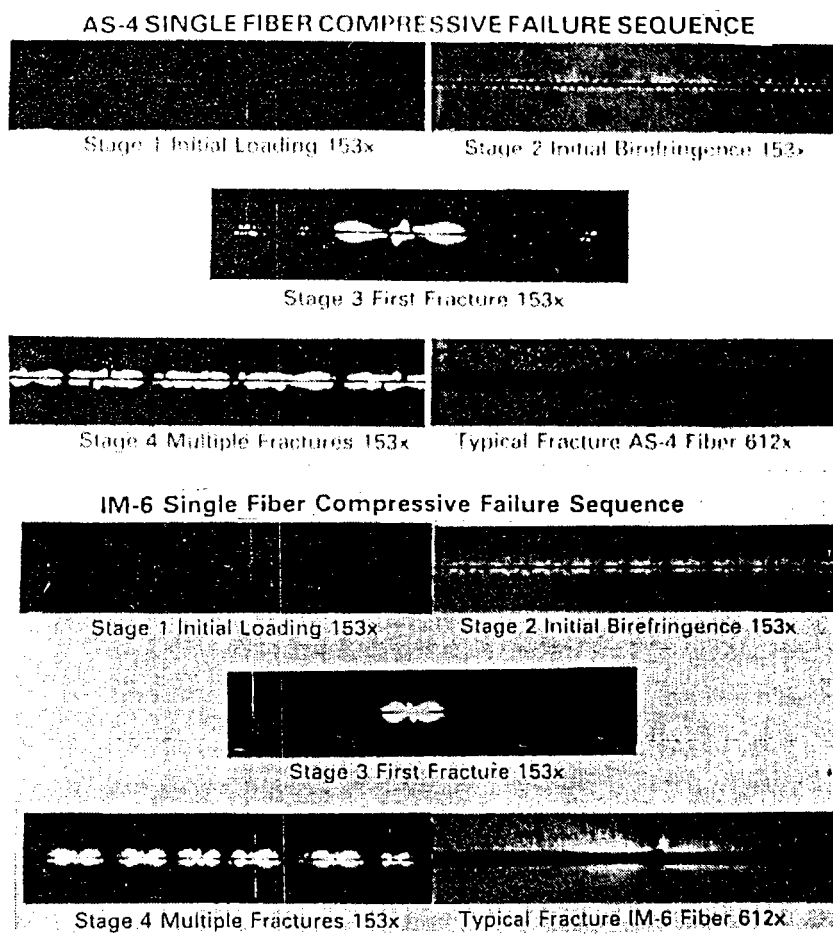


FIGURE 11-a : Visualisation des différents états de contrainte (par biréfringence) pour deux types de fibres et différentes charges de compression (BOLL et *al.* [1990])

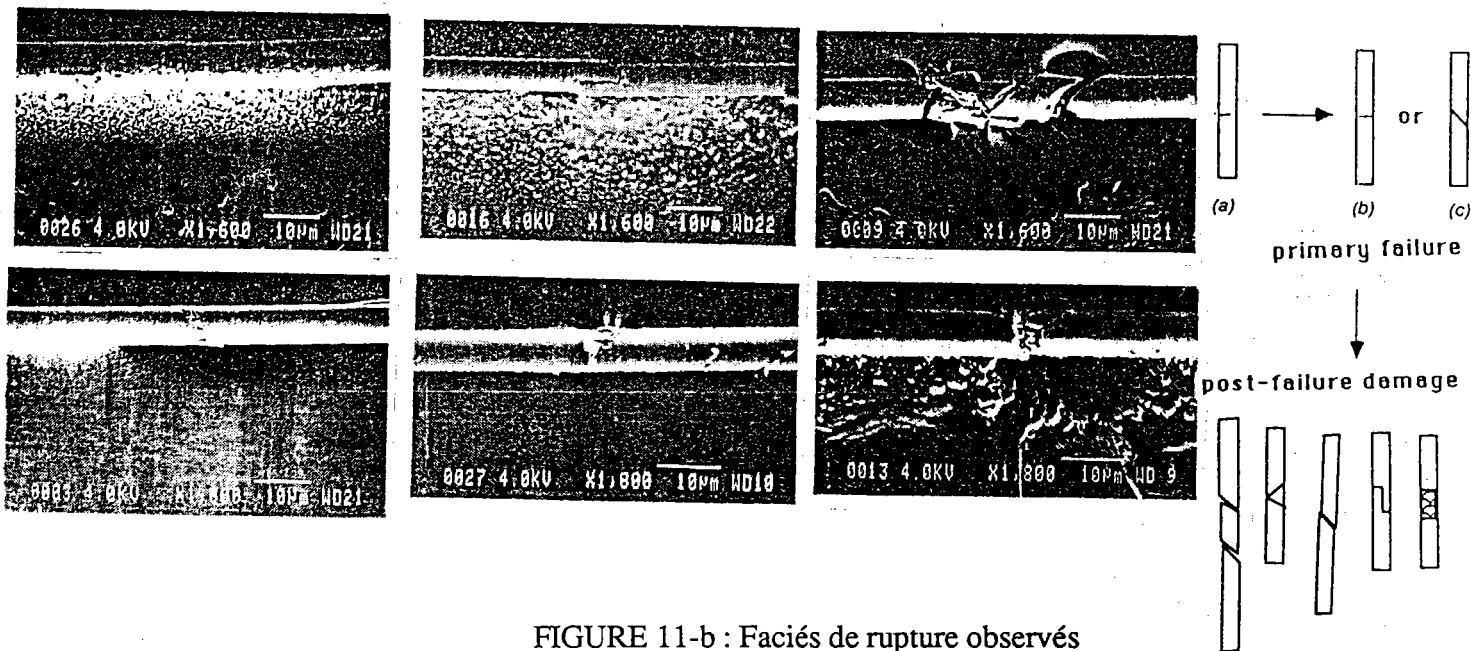


FIGURE 11-b : Faciès de rupture observés

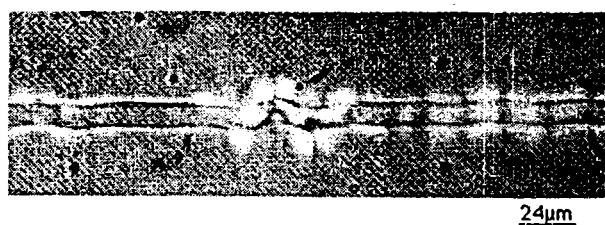
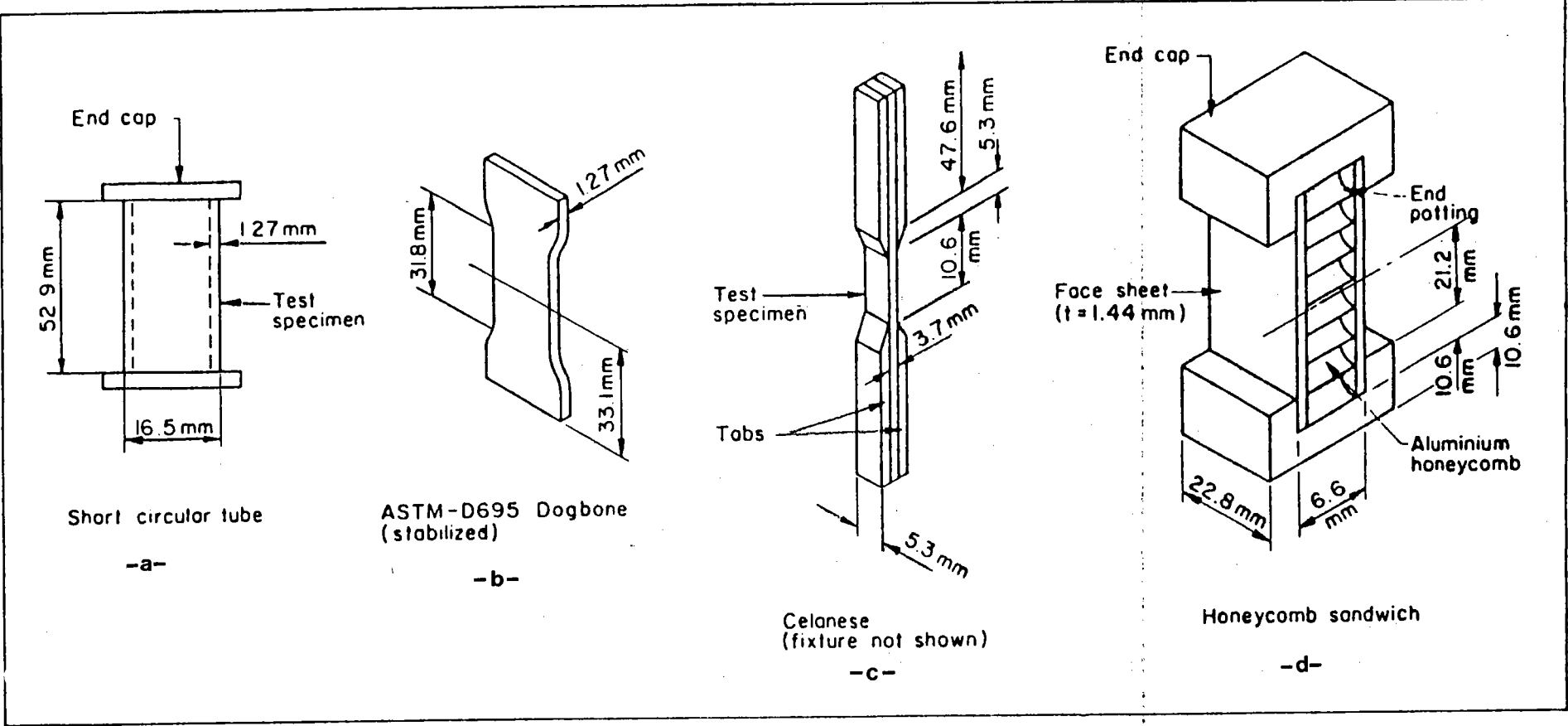


FIGURE 12 : Microflambage d'une fibre de verre soumise à de la compression



Specimens for uniaxial compression test

FIGURE 13 : Forme des éprouvettes de compression pure (KULKARNI et al.[1975])

### 3. DESCRIPTION DU COMPORTEMENT EN COMPRESSION DU PLI ET DU STRATIFIE. ESSAIS DE COMPRESSION

Pour bien comprendre le comportement des stratifiés et des plis unidirectionnels, nous présentons dans ce chapitre les résultats de différents essais de compression. Comme précédemment pour éviter l'apparition d'un flambage avant la rupture, il est nécessaire de concevoir des formes appropriées d'éprouvette ou de créer un état de flexion (stable) par un montage classique 4 points ou 3 points. Ce dernier permet en plus une comparaison directe entre les comportements de traction et de compression. Dans la littérature, les auteurs utilisent ces deux familles d'essais pour décrire le comportement en compression des composites. Voici détaillées quelques-unes des études.

#### a) Résultats d'essais de compression pure

##### \* Eprouvette de compression pure

Dans l'article proposé par KULKARNI *et al.*[1975], les dimensions géométriques et la forme des différentes éprouvettes de la norme ASTM sont présentées. La figure 13 nous permet de comparer les diverses solutions retenues pour éviter l'instabilité avant la rupture complète de l'éprouvette. Ces solutions se résument à un faible élanement de la partie utile (éprouvette a,b,c) et un support latéral obtenu par une structure sandwich à nid d'abeille (éprouvette d).

En utilisant la même idée de support, il est possible aussi d'utiliser des éprouvettes longues de traction, en prenant soin de les placer entre deux guides antiflembage contenant une lumière centrale libérant ainsi l'éprouvette sur une courte distance (Fig. 14). Malheureusement, cette diversité de forme des éprouvettes complexifie le dépouillement des résultats qui ne peuvent être dissociés de la méthode expérimentale utilisée.

##### \* Résultats d'essais

Par exemple STEVANOVIC *et al.*[1987] a choisi le test de compression CELANESE proposé par la norme ASTM D3410 pour déterminer toutes les caractéristiques mécaniques d'un pli unidirectionnel constitué de fibres de Carbone T300 enrobées d'une résine epoxy. Sur le tableau 6 directement issu de son article, la contrainte à rupture ( $\sigma_x$ ), le module d'Young ( $E_x$ ), le coefficient de Poisson dans le plan de l'éprouvette ( $\nu_{xy}$ ) et la déformation à rupture ( $\epsilon_x$ ) en traction et compression sont reportées pour différentes éprouvettes unidirectionnelles, dont les fibres font

un angle de 0°, 45°, 90° avec l'axe du chargement (x). Ces essais mettent en évidence, dans le sens transverse, une rigidité et une résistance en compression supérieures à celles de traction. Sous une telle sollicitation de traction transverse, les défauts du type microvide et fissure dans la matrice ainsi que la décohésion de l'interface s'ouvrent et sont alors une source de concentration de contraintes qui entraîne un endommagement réparti apparaissant très tôt. En revanche, une sollicitation de compression referme ces microfissures et n'engendre une propagation de ces défauts qu'à des taux de contrainte plus élevés.

| orientat.<br>des fibres<br>(°) | essais   | taux des<br>fibres<br>(%v) | $\sigma_x$<br>(MPa) | $E_x$<br>(GPa) | $\nu_{xy}$ | $e_x$<br>(%) |
|--------------------------------|----------|----------------------------|---------------------|----------------|------------|--------------|
| 0                              | compress | 60.4                       | 1225.0±47.0         | 111.9±2.4      | 0.298      | 1.11         |
|                                | traction | 60.4                       | 1562.1±91.6         | 139.2±3.9      | 0.298      | 1.02         |
| 90                             | compress | 52.3                       | 172.6±7.2           | 11.5±0.5       | 0.0197     | 1.52         |
|                                | traction | 60.4                       | 48.4±5.6            | 8.4±0.5        | 0.0175     | 0.60         |
| 45                             | compress | 52.3                       | 193.3±10.2          | 11.1±0.4       | 0.582      | 2.71         |
|                                | traction | 60.4                       | 64.1±8.5            | 10.4±0.3       | 0.233      | 0.60         |

TABLEAU 6 : Résultat des essais de STEVANOVIC (test en compression : CELANESE)

Dans le sens longitudinal des fibres, il en est tout autrement, puisque les caractéristiques mécaniques en compression sont très inférieures à celles de traction. Plus précisément, STEVANOVIC observe une diminution du module d'élasticité longitudinal au fur et à mesure que la déformation augmente. La valeur inscrite dans le tableau correspond à un taux de déformation en compression de 0,3%. En ce qui concerne la rupture en compression de l'unidirectionnel, elle apparaît à un niveau de contrainte plus faible mais à un taux de déformation plus élevé.

L'observation des faciès de rupture, et plus particulièrement des fractures transverses au niveau des fibres, montre des lignes de clivage qui indiqueraient l'apparition d'un microflambage conduisant à la rupture de groupes de fibres. Le mécanisme proposé par STEVANOVIC pour expliquer la diminution du module d'Young et l'augmentation de la déformation à rupture est une instabilité du cisaillement élastique précédant et provoquant le microflambage, mais nous y reviendrons. Au cours de la phase ultérieure, des fissures apparaissent dans la matrice et sont suivies de la propagation rapide d'une fracture transverse. Pour un pli à 45°, la situation est similaire au cas de l'unidirectionnel à 90° car la matrice joue un rôle essentiel dans la transmission des contraintes. D'ailleurs, le faciès de la fracture inclinée à 45° et traversant l'éprouvette dans son épaisseur montre que des fissures se sont propagées le long de l'interface fibre-matrice et dans la matrice sous l'action du cisaillement et de la compression transverse. Toutefois, les fibres jouent un rôle certain, car la déformation à rupture en compression est exceptionnellement élevée et peut s'expliquer par un mouvement des fibres dû au cisaillement, qui sollicite principalement l'interfa-

ce. La sollicitation de compression appliquée aux différents stratifiés testés conduit aux mêmes modes de rupture dans les plis constituant l'empilement que ceux observés pour les unidirectionnels. De plus, l'examen de la rupture du stratifié  $(\pm 45)_{4s}$  met en évidence l'apparition et la propagation d'un délaminage interlaminaire longitudinal dues à la contrainte de cisaillement transmise par l'interface.

En résumé, le comportement des plis et stratifiés en compression est fortement anisotropes (rigidité et résistance) et les micromécanismes observés sont très différents de ceux rencontrés sous une sollicitation de traction.

Des résultats tout à fait identiques ont été obtenus par MASSON *et al.* [1988] mais sur une éprouvette longue maintenue par deux guides antiflambage. Le problème majeur d'une telle méthode d'essai est la forte dépendance entre la résistance à la rupture et la longueur libre de l'éprouvette (Fig. 14). La comparaison des divers résultats obtenus avec un test CELANESE a conduit les auteurs à choisir une longueur non soutenue de 10 mm. Les essais statiques qu'ils ont effectués sur divers empilements mettent en évidence l'influence des caractéristiques de la fibre sur le comportement global du composite, puisque deux types de renforts sont utilisés T300-T800. L'utilisation d'une fibre haute résistance T800 n'apporte donc aucune amélioration sur la résistance en compression du composite car le faible diamètre de cette fibre la rend plus sensible au microflambage. Pour conclure, les auteurs font aussi remarquer l'influence de la géométrie (section et longueur libre de l'éprouvette) sur la résistance à la rupture et le rôle important de la matrice qui doit assurer un maintien suffisant à la fibre pour retarder l'apparition d'un microflambage.

## b) Résultats des essais de flexion

### \* Description des essais

Il est possible d'obtenir un état de compression constant dans l'épaisseur sans risque de flambage. En effet, si on colle le stratifié testé sur les deux faces d'une structure épaisse à nid d'abeille, une sollicitation de flexion pure appliquée sur la poutre sandwich permet d'obtenir l'état de compression pure. D'ailleurs MASSON, dans son article, a comparé les résistances à rupture obtenues par cette méthode aux résultats de compression pure. Malheureusement, le support qu'offre le nid d'abeille au stratifié augmente fortement la contrainte pour laquelle la rupture apparaît.

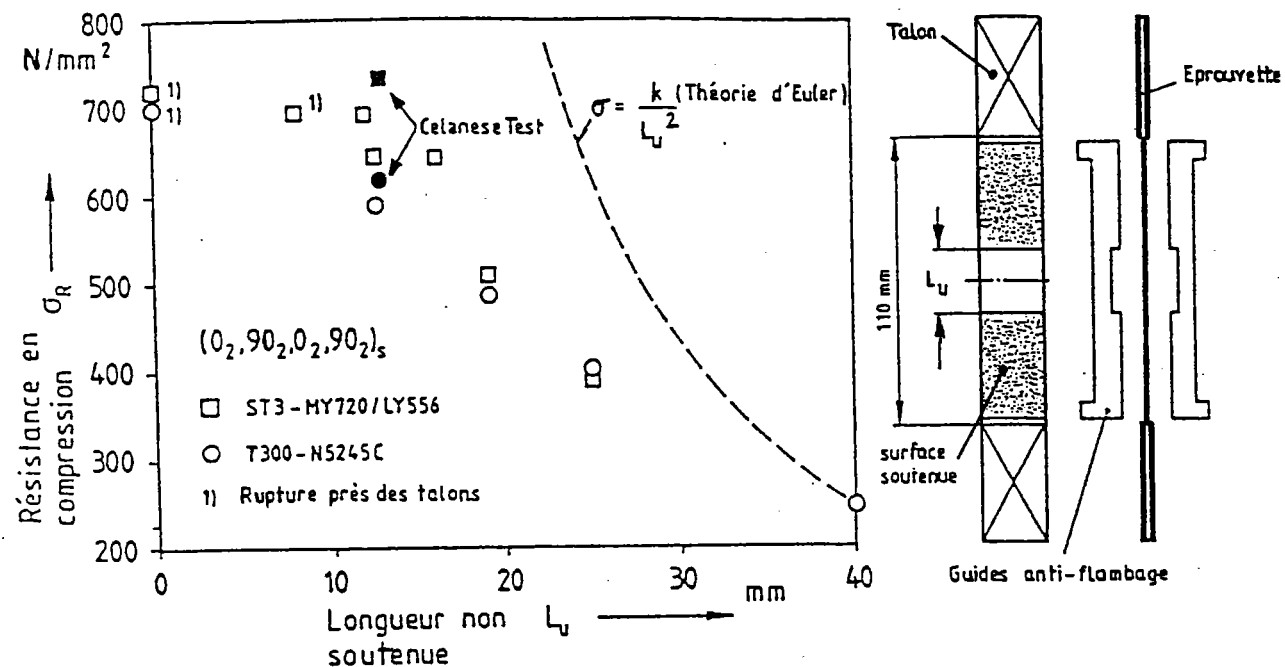


FIGURE 14 : Dépendance de la résistance à rupture en fonction de la longueur de l'éprouvette et comparaison avec le test CELANESE (MASSON et al.[1988])

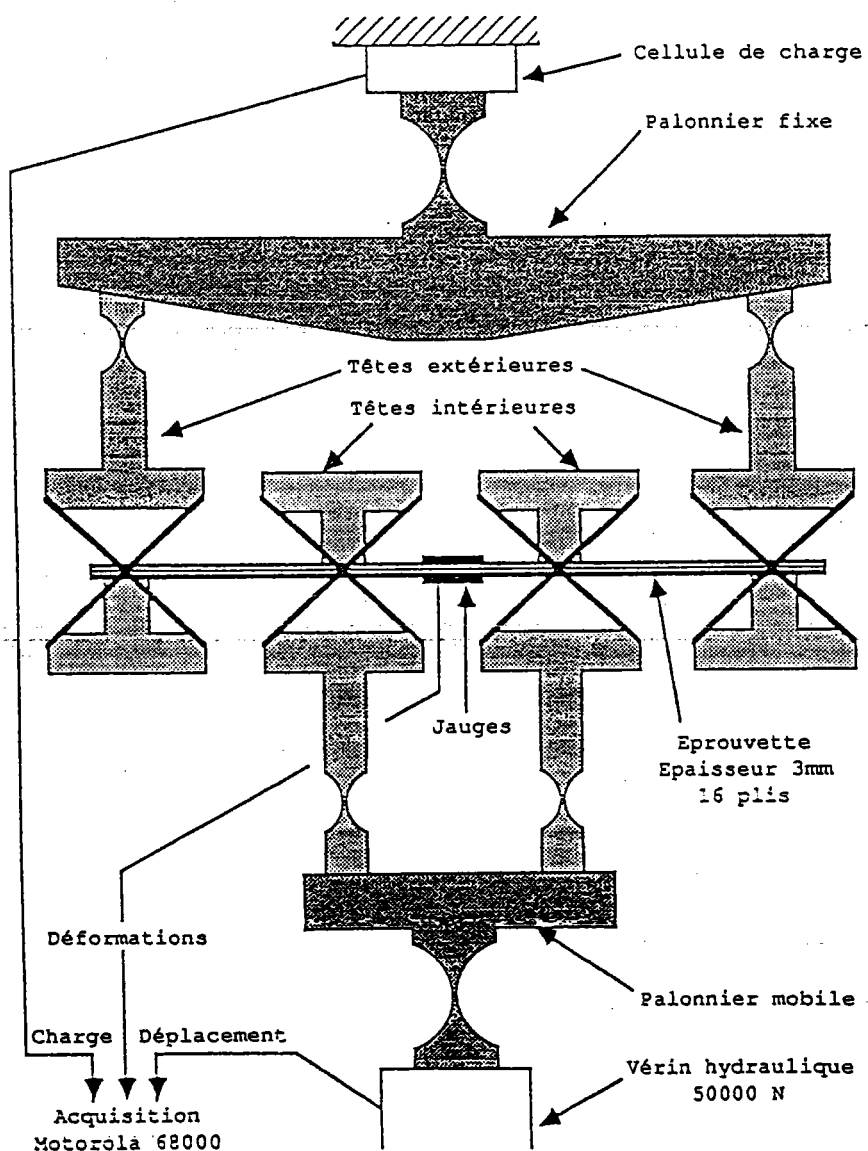


FIGURE 15 : Montage de flexion quatre points (ALLIX et al.[1988])

Cet inconvénient est évité lorsqu'on effectue l'essai de flexion directement sur le stratifié, mais le champ de déformation imposé au composite est linéaire dans l'épaisseur. Ce qui peut paraître un handicap à première vue est en fait l'avantage principal de ce test, car il permet une comparaison directe entre les comportements en traction et en compression du matériau dans les mêmes conditions d'essais (géométrie de l'éprouvette, ambiance, caractéristiques mécaniques des constituants, cycle de fabrication). Permettant d'obtenir une large zone de flexion pure, le montage de flexion 4 points est le mieux adapté pour mesurer et comparer précisément les modules d'élasticité et les contraintes à rupture.

VITTECOQ [1991] a conçu un tel montage (Fig. 15) où les quatre têtes qui transmettent les efforts sont réalisées et reliées entre elles par des éléments déformables et sans jeu. Par conséquent, seuls des déplacements verticaux sont transmis à l'éprouvette et la mobilité horizontale ainsi permise évite l'apparition de contraintes de traction parasites. La vérification de l'état de contrainte dans la partie utile par des jauges de déformation ainsi que la rupture d'une éprouvette au centre pendant les essais confirment la qualité du montage (faible cisaillement dans le plan). Les composites testés sont constitués de fibres IM6 et T300 noyées dans une résine Epoxy 914 et les différentes séquences d'empilement choisies sont :  $[0,90]_{6s}$ ,  $[0_6, 90_6]_s$ , et un unidirectionnel de 24 plis. Ces stratifiés sont bien évidemment symétriques pour pouvoir comparer les comportements de traction et de compression par la simple mesure des déformations sur les faces supérieures et inférieures de l'éprouvette.

#### \* Résultats obtenus

L'examen des courbes reliant le moment fléchissant aux deux déformations pour les différents empilements montre une similitude de comportement entre ceux-ci. Le comportement de traction est élastique linéaire (avec un léger raidissement), ce qui est en accord avec les essais de traction pure. En revanche, sur la face comprimée, VITTECOQ (ALLIX et al. [1988]) observe, comme STEVANOVIC, un comportement de compression non linéaire. Le tracé des modules sécants et tangents au cours de l'évolution met en évidence une chute progressive de la rigidité en compression qui apparaît dès le début du chargement et atteint 25 à 35% du module initial avant la rupture. Ce phénomène dépend du type de fibre utilisée et de la séquence d'empilement du stratifié. Plus précisément, les composites constitués de fibres IM6 voient leur rigidité chuter plus rapidement que ceux contenant des T300. Une explication identique à celle de MASSON peut être proposée car les diamètres respectifs de ces fibres sont de 5,5  $\mu\text{m}$  et 7,5  $\mu\text{m}$ . Ces deux essais montrent sans conteste l'influence du diamètre des renforts sur le mécanisme qui affaiblit le composite sous compression longitudinale.

De plus, l'examen des courbes de charge, décharge et recharge a permis de mettre en évidence (à première vue) le caractère élastique du comportement en compression de ces stratifiés. Aucun phénomène de plasticité, de viscosité ou d'endommagement n'apparaît, même en chargeant l'éprouvette à un taux de déformation proche de celui de la rupture. En résumé, ces stratifiés possèdent un comportement élastique non linéaire fragile sous une sollicitation de compression. En ce qui concerne les contraintes à rupture en compression, une diminution par rapport à celles de traction est aussi observée. Mais si les contraintes obtenues (1350 MPa: T300 ; 1520 MPa: IM6) sont inférieures aux résultats d'essais de compression pure (1480 MPa: T300 ; 1585 MPa: IM6), les déformations à rupture correspondantes sont plus élevées (essai flexion 1,3% T300 et IM6 compression pure ; 0,9% T300 ; 1,2% IM6). Le mode de rupture en compression des stratifiés se résume à des ruptures de fibres dans les plis longitudinaux et un délaminage pour le composite IM6  $[0_6, 90_6]_s$ .

### c) Discussion

D'un point de vue qualitatif, ces différents essais (compression pure, flexion 4 points) ont abouti à la même conclusion sur le comportement en compression des plis unidirectionnels et des stratifiés. Dans tous les cas, une moindre rigidité et une moindre résistance à rupture ainsi qu'une plus grande déformation à rupture sont observées. Malheureusement, le nombre important de paramètres influant sur les caractéristiques ne facilite pas une comparaison précise et simple entre les différents résultats, qui sont principalement dépendants de la méthode d'essai utilisée pour les obtenir.

Toutefois, ces expériences mettent en évidence l'influence de quelques paramètres majeurs. Le premier cité par différents auteurs est le diamètre des fibres de Carbone constituant le composite testé. Par exemple, l'utilisation des fibres T300 et IM6 ( $7,5 \mu\text{m}$  -  $5,5 \mu\text{m}$ ) conduit à des résistances au niveau du pli très différentes. Mais, vu les résultats d'essais effectués sur une fibre, ne serait-ce pas le comportement propre des fibres de Carbone soumises à de la compression qui influerait sur cette résistance globale du pli ? En effet, comme nous l'avons vu au paragraphe 2 de ce chapitre, malgré une constitution atomique commune, elles possèdent toutes des comportements distincts.

De plus, lorsqu'on compare les contraintes limites obtenues avec différents montages proposés dans la littérature, nous pouvons conclure que la géométrie de l'éprouvette (ou les conditions de bord) influe sur les micromécanismes de rupture. Remarquons que les deux paramètres ( $\varnothing$  des fibres et géométrie) ainsi que la séquence d'empilement du stratifié influent aussi sur la perte de rigidité. La comparaison des résultats des essais de compression pure avec ceux de flexion nous montre aussi l'influence de la répartition de la déformation dans l'épaisseur sur la résistance.



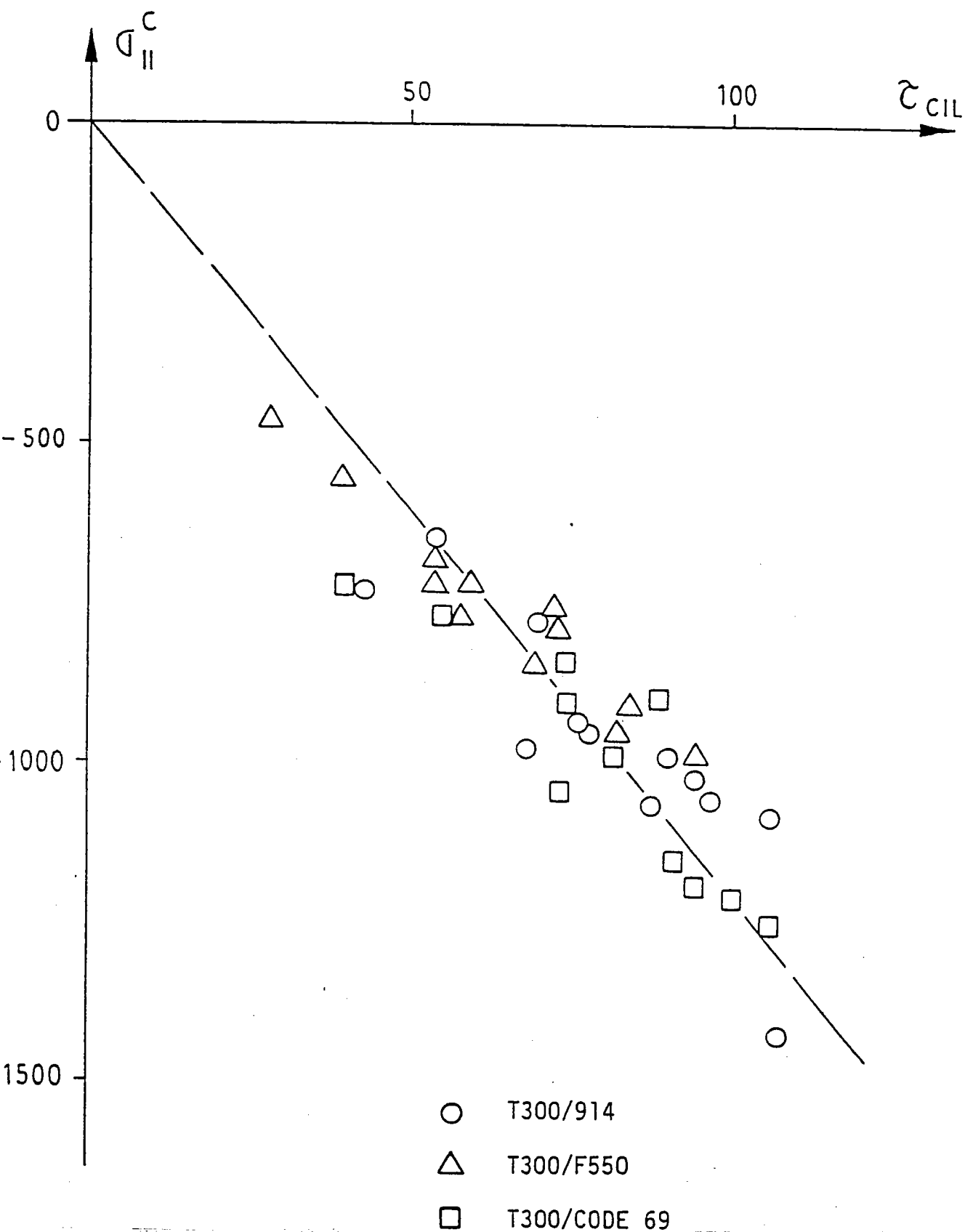
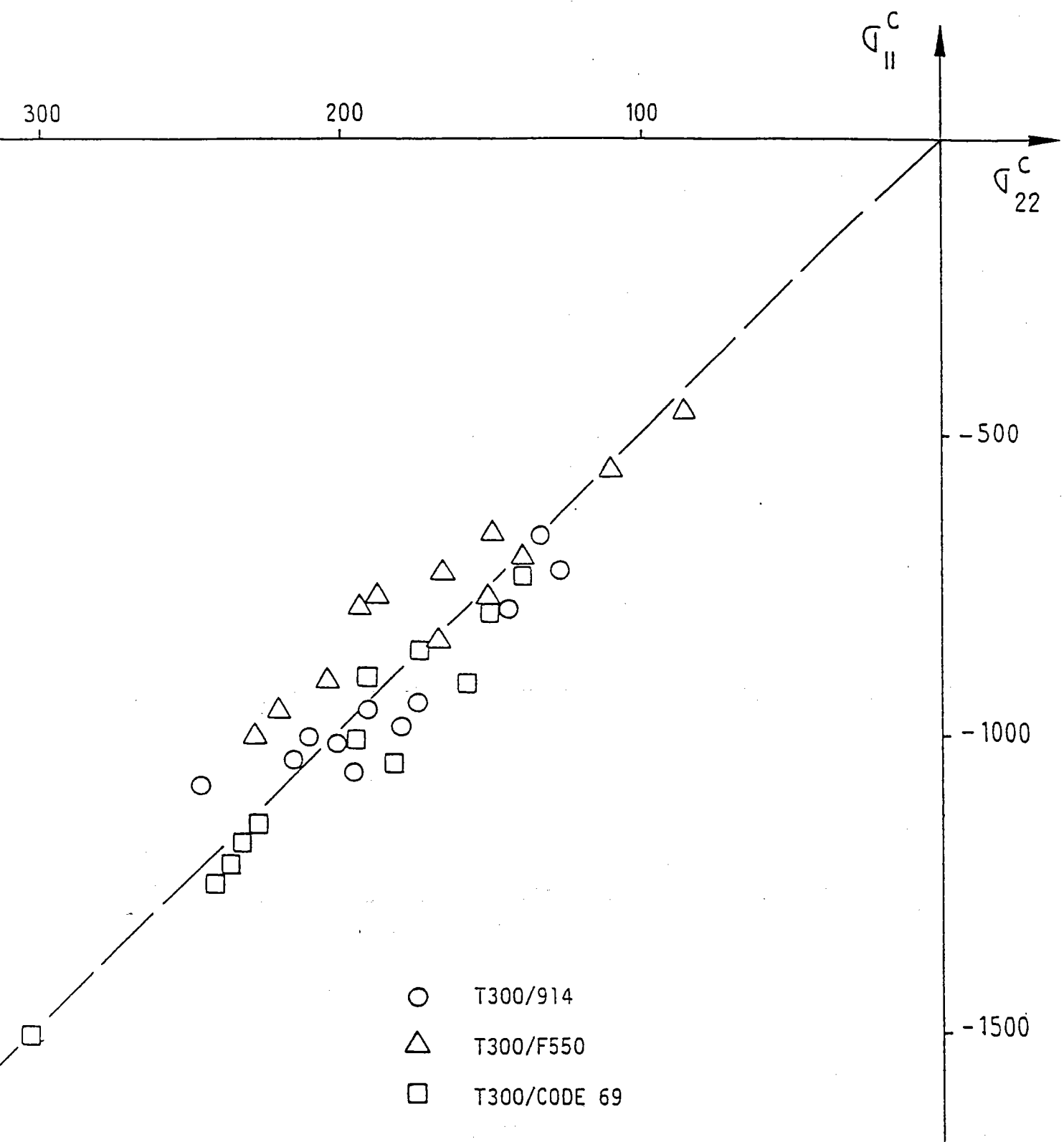


FIGURE 16 : Evolution de la contrainte de compression à rupture sens fibre en fonction du cisaillement interlaminaire à rupture pour divers états thermohygrométriques



(SOURCE : THESE MICHAEL GADKE)

FIGURE 17 : Evolution de la contrainte de compression à rupture sens fibre en fonction de la contrainte de compression sens traverse à rupture pour divers états thermohygrométriques

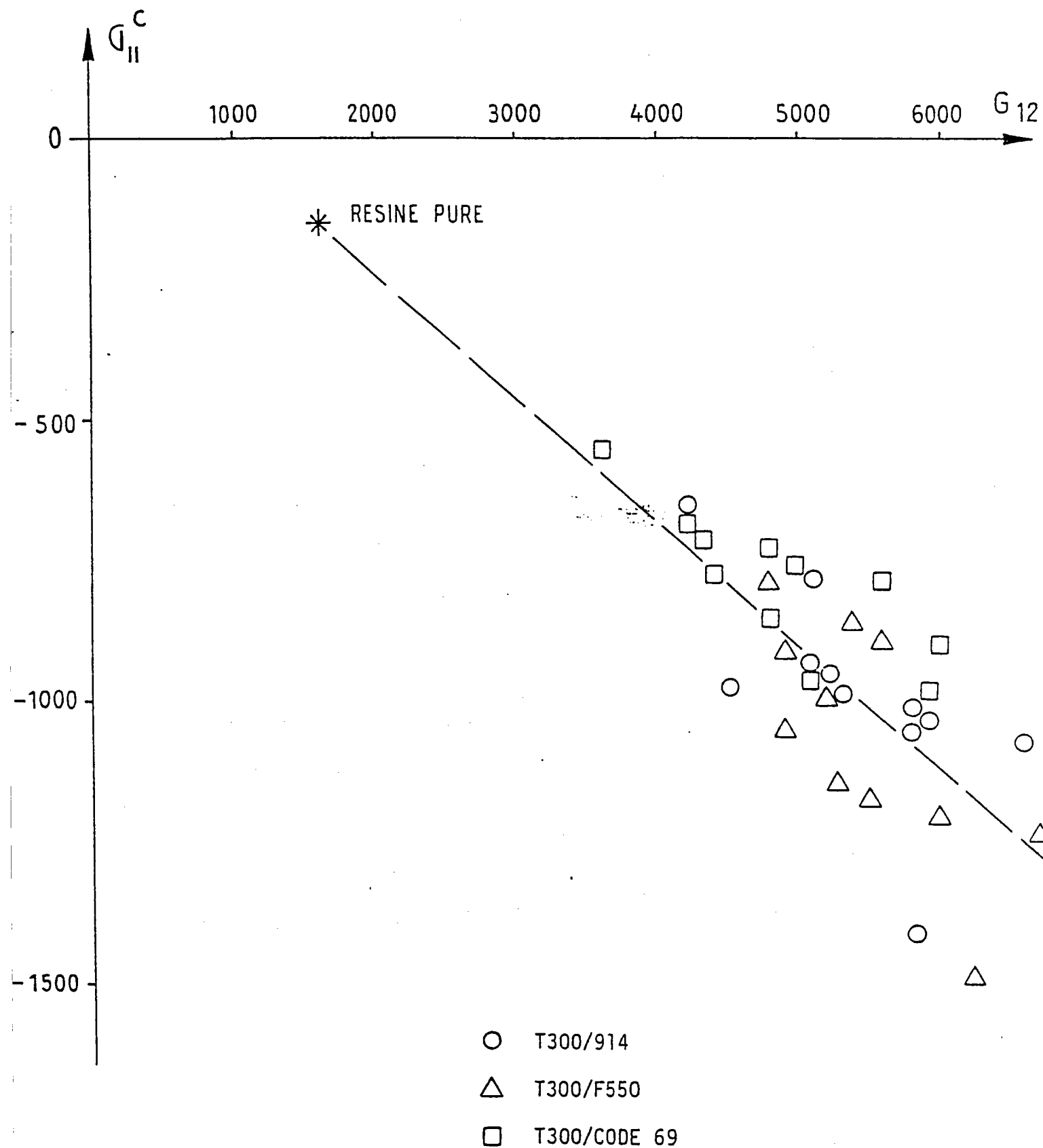


FIGURE 18 : Evolution de la contrainte de compression à rupture sens fibre en fonction du module de cisaillement pour divers états thermohygrométriques

ANQUEZ [1990] exploite la thèse de Mickael GÄDKE [ ] pour mettre en évidence un autre paramètre très important : le comportement de la résine. Il reporte la valeur de la contrainte de compression sous fibre, pour divers états thermohygro-métriques, en fonction de la valeur d'une autre caractéristique mécanique dans le même état (Fig. 16-17-18). En fait, ceci est équivalent à comparer les évolutions des différentes caractéristiques mécaniques (contrainte à rupture sens fibre, module de cisaillement  $G_{12}$ , contrainte à rupture interlaminaire, contrainte à rupture de compression transverse) lorsque celles de la matrice évoluent, puisque celles de la fibre sont très peu influencées par l'état thermohygro-métrique. La proportionnalité obtenue entre toutes ces grandeurs macroscopiques avec différents constituants (T300/914 ; T300/F550 ; T300/CODE69) lui permet d'affirmer que la rupture en compression est une rupture pilotée par la résine. Toutefois, si l'on pratique de même avec d'autres fibres, change-t-on uniquement le rapport de proportionnalité ? Si c'est le cas, il devrait s'en dégager une modélisation simple.

Afin d'appréhender au mieux la rupture en compression des composites, nous pensons qu'il est essentiel de bien connaître et, par la suite, modéliser le phénomène de perte de rigidité en compression des stratifiés. Remarquons que cette chute du module d'Young ne peut pas, au premier abord, être associée à des phénomènes anélastiques, visqueux ou d'endommagement, car le comportement est souvent non linéaire élastique jusqu'à des taux proches de la rupture.

En conclusion, les mécanismes qui sont à la source d'un tel comportement sont non linéaires, mais réversibles. De plus, nous savons qu'ils sont influencés par la géométrie macroscopique (empilement - forme d'éprouvette, répartition de contrainte) et la géométrie microscopique ( $\emptyset$  des fibres). D'après les divers résultats précédemment présentés, il semble que les caractéristiques mécaniques de la fibre et de la résine influent aussi sur le phénomène. Mais la plupart des modélisations proposées dans la littérature ne portent que sur la rupture en compression des composites. Seuls quelques articles ([SCHUERCH], [FUNG]) essaient d'expliquer le phénomène de perte de rigidité par des mécanismes anélastiques.

Certains auteurs attribuent tout simplement le comportement non linéaire réversible en compression à celui des fibres, et d'autres pensent que la rupture prématurée du composite est due à l'apparition d'une instabilité du type microflambage au niveau des fibres. Des mécanismes d'instabilité en cisaillement ont été proposés pour modéliser la rupture dans les unidirectionnels. Nous pensons que le faible diamètre des fibres combiné à la faiblesse des caractéristiques mécaniques de la matrice favorisent l'apparition d'une instabilité de type microflambage. Cette non linéarité géométrique est bien réversible et elle pourrait être la source d'une perte de rigidité en compression du composite, conduisant à une diminution de la charge à rupture due à un endommagement de la résine. Dans la littérature, de nombreux modèles sont proposés pour modéliser le microflambage des fibres, et plus particulièrement la charge critique de son apparition.

#### 4. MODELISATION DU MICROFLAMBAGE - BIBLIOGRAPHIE

##### a) Poutre sur fondation

La première et principale modélisation du microflambage a été proposée par ROSEN [1964], où le composite est tout simplement représenté par une superposition bidimensionnelle ( $x_1, x_2$ ) de couches raides et souples correspondant respectivement à la fibre et à la matrice. Lorsque l'ensemble est soumis à un état de compression pure  $\sigma_c$  suivant  $x_1$ , ROSEN peut alors déterminer l'équilibre entre les forces de compression et la rigidité de flexion des fibres et de cisaillement de la matrice lorsque l'instabilité apparaît. En fait, deux modes de flambage peuvent apparaître dans le composite : le mode en phase et le mode en opposition de phase qui sont représentés sur la figure 18.

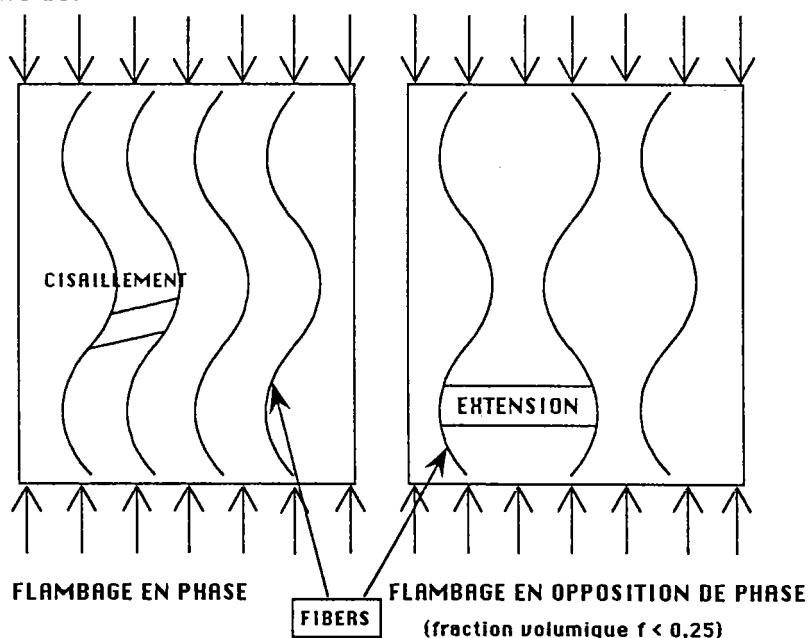


FIGURE 19 : Modes de microflambage du modèle de ROSEN

Pour le mode en opposition de phase, la matrice de module d'Young  $E_M$  est soumise alternativement à une traction et une compression. Si l'on note  $d$  et  $D$  l'épaisseur respective des couches raides et souples, et  $v$  leur déplacement transversal, l'action répartie de la matrice sur la fibre par unité de largeur avec l'hypothèse d'une parfaite cohésion entre les couches s'exprime alors :

$$F_{M \rightarrow f} = \frac{4 E_M v}{D}$$

Dans les zones tendues et comprimées, les déformations induites dans la matrice sont respectivement :

$$\frac{\left(\frac{D}{2} + v\right)}{(D/2)} \quad \text{et} \quad -\frac{\left(\frac{D}{2} - v\right)}{(D/2)}$$

A partir de ces résultats, il est possible de déterminer simplement la charge critique en modélisant l'association fibre-matrice par une poutre de section rectangulaire égale à  $(d * 1)$  sur une fondation dont la rigidité en traction vaut  $4E_M / D$ . L'équation de la stabilité se présente alors sous la forme :

$$E_F I_F \frac{\partial^4 v(x_1)}{\partial x_1^4} + P \frac{\partial^2 v(x_1)}{\partial x_1^2} + \frac{4E_M}{D} v = 0 \quad (11)$$

où  $P$  est la charge de compression appliquée sur la fibre et  $v$  est fonction uniquement de la variable de position  $x_1$ , ce qui suppose des dimensions infinies dans les directions  $x_1$  et  $x_2$ .

La résolution de l'équation (11) dans le cas particulier d'une poutre de longueur  $L$  encastree aux deux extrémités, conduit à l'expression suivante de la charge critique :

$$P_{cr} = \frac{4\pi^2 E_f I_f}{L^2} + 2 \sqrt{\frac{4E_M}{D} E_f I_f}$$

qui se simplifie lorsque  $L \rightarrow \infty$  :

$$P_{cr} = 2 \sqrt{\frac{4E_M}{D} E_f I_f}$$

En remarquant que  $I_f = d^3 * 1/12$  et  $S_f = d * 1$  pour une longueur unitaire, la contrainte appliquée sur la fibre s'exprime simplement sous la forme :

$$\sigma_{fcr} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{d}{D} E_M E_f}$$

Mais il n'est guère intéressant de conserver cette expression car  $d$  et  $D$  n'ont aucune signification physique immédiate. Il est donc préférable de remplacer le rapport  $d/D$  par  $f/1-f$  puisque  $f$  est la fraction volumique du composite.

ROSEN calcule alors la contrainte de compression globale appliquée au composite lors de l'apparition de l'instabilité, en établissant la relation entre  $\sigma_e$  et la contrainte sur une fibre :

$$\sigma_e = (1 - f) \sigma_M + f \sigma_f \quad \text{avec} \quad \sigma_M = \sigma_f E_M / E_f$$

puisque les déformations de compression induites dans la matrice sont identiques. En conclusion, le mode de microflambage en opposition de phase apparaît lorsque la contrainte dans le composite atteint la valeur critique suivante :

$$\sigma_{cr} = \frac{2}{\sqrt{3}} f \sqrt{\frac{f}{1-f} E_M E_f} \left( 1 + \left( \frac{1-f}{f} \right) \frac{E_M}{E_p} \right)$$

Dans le cas du mode en phase, la matrice est sollicitée en cisaillement et la déformation induite dans la matrice a pour expression :

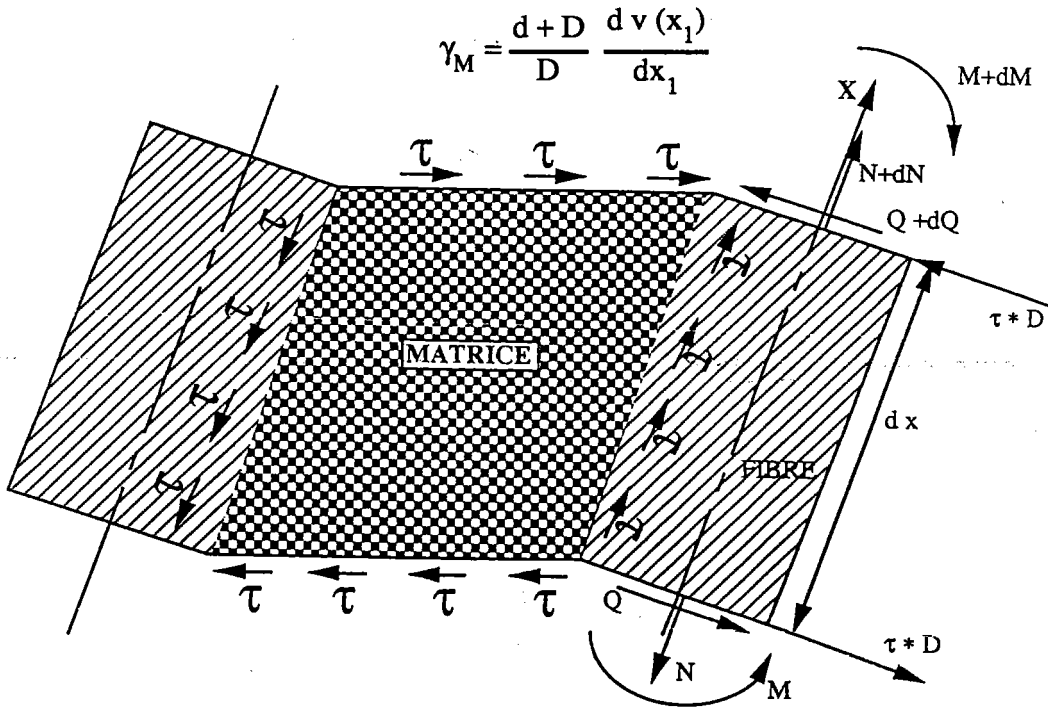


FIGURE 20 : Equilibre d'un tronçon constitué de deux fibres séparées de matrice

Pour obtenir l'équation de la stabilité de la poutre sur fondation, il suffit d'isoler un tronçon  $dx_1$  de fibre (Fig. 20) et d'en déduire les équations d'équilibre que doivent vérifier les efforts intérieurs (M,Q) à la poutre :

$$\begin{cases} \frac{dM}{dx} - Q + \tau_M (D + d) = 0 & (\text{somme des moments nuls}) \\ \frac{dQ}{dx} - P \frac{dv^2}{dx^2} = 0 & (\text{somme des efforts tranchants}) \end{cases}$$

où  $\tau_M$  représente le cisaillement induit dans la matrice. Il est relié à la déformation  $\gamma_M$  par la loi de comportement en cisaillement de la matrice :  $\tau = G_M \gamma_M$ . En utilisant la relation entre le moment fléchissant et la courbure, ce système se réduit à une seule équation différentielle en déplacement  $v$  :

$$E_f I_f \frac{d^4 v}{dx^4} + \left( G_M \frac{(D+d)^2}{D} + P \right) \frac{d^2 v}{dx^2} = 0$$

La solution est recherchée sous une forme sinusoïdale :  $v = A \sin \pi x_1 / l_0$  où  $l_0$  est la demi-longueur d'onde du mode. En opérant comme précédemment, on obtient directement l'expression de la contrainte critique globale :

$$\sigma_{cr} = \left( f + (1-f) \frac{E_M}{E_f} \right) \left[ \frac{E_f d^2 \pi^2}{12 l_0} + G_M / (1-f) f \right]$$

Comme la demi-longueur d'onde est bien plus grande que l'épaisseur  $d$  de la couche raide il est possible de proposer une forme simplifiée :

$$\sigma_{cr} = \frac{G_M}{1-f} + \frac{G_M}{f} \frac{E_M}{E_f} \quad (12)$$

De plus, le microflambage ne peut apparaître que dans les composites possédant une matrice très souple en comparaison avec la rigidité des fibres et le second terme de l'expression (12) peut être ainsi négligé. D'où l'expression finale de la contrainte critique qu'il faut appliquer au composite pour que le mode en phase apparaisse :

$$\sigma_{cr} = G_M / (1-f) \quad (13)$$

qui est en première approximation égal au module de cisaillement transverse équivalent du pli. La question qui se pose maintenant est de déterminer dans quel cas l'un ou l'autre des deux modes apparaît. Pour y répondre, SCHUERCH [1966] a recherché la famille des paramètres  $E_M/E_f$ ,  $f$  et  $v_M$  qui conduit à une égalité entre les deux charges critiques. Sur les courbes de la figure 21 issues de son article on distingue nettement les deux zones. Il est intéressant de remarquer que, dans tous les cas, pour des fractions volumiques supérieures à 0,25, c'est le mode en phase qui apparaît.



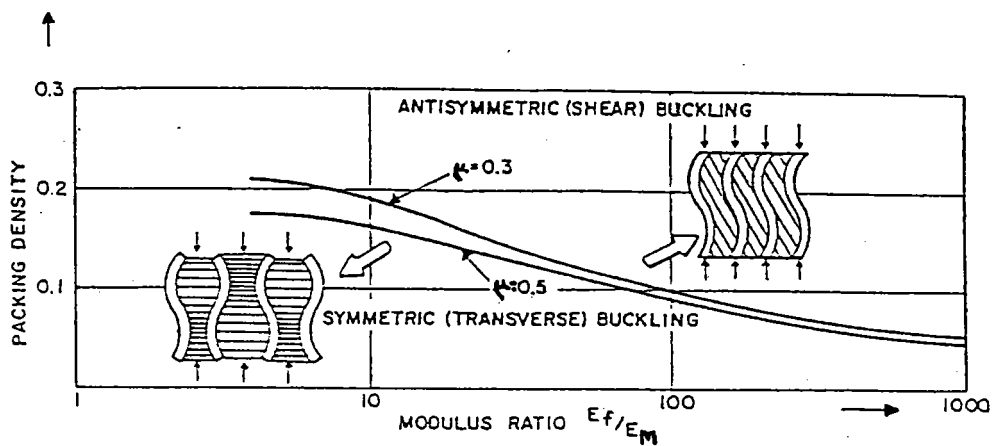


FIGURE 21 : Comparaison des charges critiques correspondantes aux deux modes de micro-flambage en fonction de la fraction volumique

Dans la majeure partie des composites utilisés actuellement, les fractions volumiques sont comprises entre 0,4 et 0,7 et les matrices utilisées sont des résines epoxy dont le module de cisaillement est de l'ordre de 10-12 GPa. Par exemple, dans le cas d'un carbone epoxy dont le module d'Young vaut 160 MPa dans la direction des fibres et la fraction volumique 0,65, la déformation critique correspondant à l'apparition du microflambage est égale à 18%. Même si l'on applique l'expression (13) à d'autres types de composites, les résultats ne sont guère meilleurs, car on obtient des charges critiques supérieures aux charges à rupture du composite.

De nombreuses études ultérieures ont permis l'amélioration de ce modèle et, par conséquent, une diminution significative de la charge critique. Par exemple, dans le cas d'un composite constitué de fibres de Boron noyées dans une matrice métallique, SCHUERCH [1966] complète le modèle précédant en étudiant le cas où la matrice est plastifiée avant l'apparition du microflambage. L'équation qu'il propose est identique dans sa forme, mais le module de cisaillement correspond à la tangente de la courbe reliant la contrainte de cisaillement à la déformation de cisaillement dans la matrice. En comparant les deux charges critiques et la limite d'élasticité, il montre que dans le cas du Boron/Titanium, Boron/Aluminium, Boron/Magnésium, la plasticité précède le microflambage et la contrainte critique correspond à quelques pour cent près, à la contrainte limite à rupture du composite.

Quant à JUNE et LAGER[1969], ils affectent la charge critique obtenue par ROSEN, d'un coefficient réducteur déterminé expérimentalement avec deux types de résine (BP 907 et A6 126) et quatre fractions volumiques. Ils justifient l'introduction de ce coefficient par le fait que le modèle de ROSEN [1964] est bidimensionnel, alors que les fibres sont cylindriques et que la matrice est anisotrope. Les échantillons testés sont élaborés avec une parfaite maîtrise de la géométrie interne et possèdent des fractions volumiques variant de 0,084 à 0,410. Le coefficient de réduction ainsi déterminé est unique et il est égal à 0,63. Les auteurs obtiennent ainsi une parfaite corrélation entre les charges critiques du microflambage et les charges à rupture des deux composites Boron/BP 907, Boron/AF 126, testés avec les différentes fractions volumiques.

Quant à KULVARNI *et al.* [1975], ils ont étudié l'influence de l'endommagement de l'interface fibre-matrice sur la contrainte de microflambage. Pour modéliser cet endommagement, ils représentent le glissement qui apparaît entre les deux constituants, par un coefficient  $k$  variant de 1 dans le cas d'une interface parfaite, à  $-1-f/f$  pour une interface rompue. La conséquence d'un tel glissement entre la fibre et la matrice est une diminution de la déformation induite dans la matrice et, par conséquent, de la charge critique. De plus, ces auteurs apportent un complément au modèle de ROSEN [1964] en prenant en compte la déformation de cisaillement dans la fibre due à la flexion de cette dernière ; ceci conduit donc à l'expression de la charge critique suivante :

$$\sigma_{cr} = G_M \left[ \frac{1 - (1 - k) f}{1 - \left(1 - \frac{G_M}{G_f} k\right) f} \right] \left[ 1 - \left(1 - \frac{G_M}{G_f}\right) f \right] \left( -\frac{1-f}{f} \leq k \leq 1 \right)$$

Malheureusement, cette prédiction analytique de microflambage conduit aussi à des charges critiques supérieures à la résistance en rupture du matériau. Dans cette étude, la dégradation de l'interface est représentée par un coefficient qu'il est nécessaire de déterminer et dont nous n'avons aucune information sur son évolution.

Dans l'article de STEIF [1988], une loi constitutive portant sur le cisaillement à l'interface  $\tau$  est proposée pour modéliser l'apparition d'une décohésion. Elle se présente sous la forme :

$$\tau_{int} = \begin{cases} G_M B \frac{dv}{dx_1} & \text{si } \left| \frac{dv}{dx_1} \right| < \frac{\tau_c}{G_M B} \\ \tau_c & \text{si } \left| \frac{dv}{dx_1} \right| > \frac{\tau_c}{G_M B} \end{cases}$$

où  $\tau_c$  est la contrainte limite en cisaillement que peut transmettre l'interface et  $B$  un facteur géométrique reliant la pente de la fibre à la déformation de cisaillement dans la matrice ( $B = 1/1 - f$  pour le modèle de ROSEN). STEIF [1988] établit alors les équations d'équilibre de la poutre sur fondation dans le cas d'une interface saine et rompue. De plus, une imperfection initiale de rectitude des fibres dans le composite, modélisée par l'ondulation de toutes les fibres à l'état non chargé, est prise en compte dans les équations et le calcul de la charge critique. Après avoir résolu ces équations, STEIF [1988] met en évidence que les scénarios de rupture dépendent de la rigidité de l'interface. Effectivement, une interface fragile conduit à une défaillance graduelle en compression due à la propagation de la décohésion. Par contre, si l'interface est très résistante, la défaillance est catastrophique et correspond à l'apparition de l'instabilité. Malgré une surestimation de la sensibilité de la contrainte à rupture en compression, à la résistance en cisaillement de l'interfa-

ce et au degré de désalignement, la théorie permet une bonne prédiction des résistances en compression lorsqu'on les compare aux résultats expérimentaux.

Dans d'autres articles, HARRIS et LEE[1988] ainsi que HANASAKI *et al.* [1974] étudient plus spécifiquement l'influence d'un défaut modal préexistant au niveau des fibres sur la contrainte critique.

#### b) Méthode énergétique

Pour obtenir la charge critique dans le cas du mode en cisaillement, GRESZCZUK [1975] applique le théorème de l'énergie potentielle à une cellule de base du composite qui est supposé parfaitement périodique. Cette représentation périodique du composite est sans conteste plus réaliste que la modélisation bidimensionnelle proposée par ROSEN [1964] ; ainsi la contrainte critique obtenue se présente sous une forme légèrement différente :

$$\sigma_{cr} = \pi^2 E_f \left( \frac{f}{C} \right) \left( \frac{r_f}{l} \right)^2 + G$$

où  $l$  est la longueur entre appuis et  $C$  est un coefficient représentatif des conditions aux limites :

$C = 4$  pour un appui simple

$C = 1$  pour un encastrement .

Comme le rapport  $r_f/l$  est très faible, la contrainte critique est approximativement égale au module de cisaillement du composite dans le plan des fibres.

C'est un résultat qui coïncide avec celui de KULKARNI *et al.*[1975] dans le cas d'une parfaite cohésion entre la fibre et la matrice ( $k = 1$ ) et qui surestime la résistance du composite. Dans l'article de 1982, il décrit tous les modes de rupture qui peuvent apparaître dans un unidirectionnel soumis à une charge de compression pure, illustrés sur la figure 22. Pour chacun de ces modes, GRESZCZUK[1982] propose une expression de la contrainte à rupture qu'il compare à des résultats expérimentaux effectués sur des éprouvettes massives constituées de quelques fibres d'Aluminium parfaitement disposées et possédant un rayon de l'ordre du millimètre. Malheureusement, il est difficile d'appliquer ces résultats à des composites stratifiés industriels qui sont constitués de fibres longues possédant un diamètre inférieur à 10  $\mu\text{m}$ .

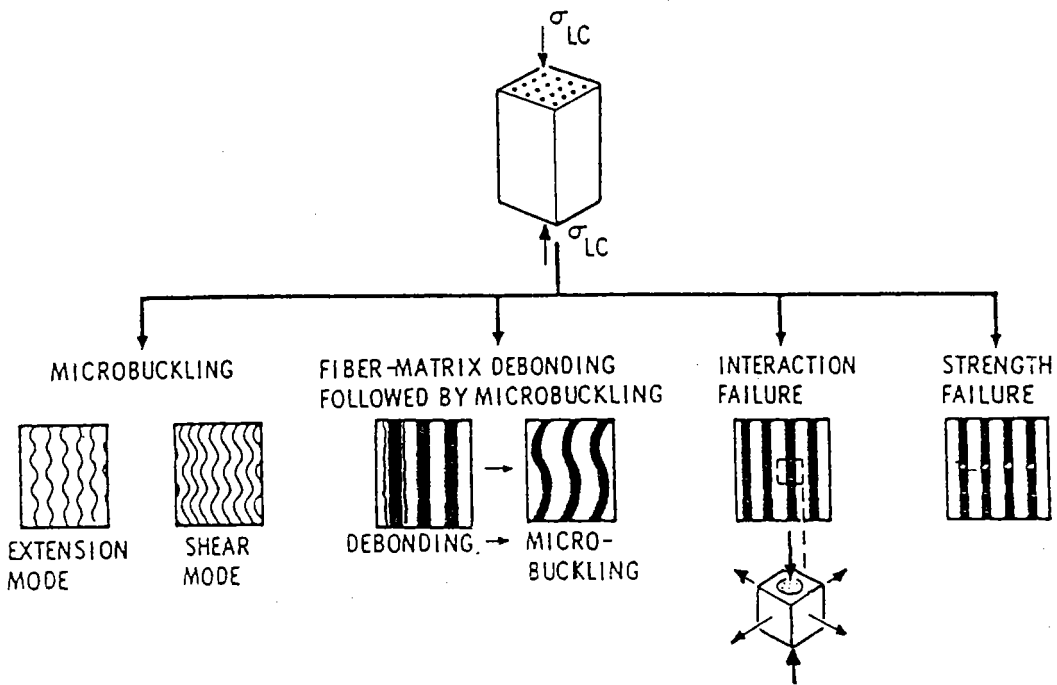


FIGURE 21: Modes de rupture d'un unidirectionnel proposés par GRESZCZUK[1975].

### c) Modèles de poutre multicouche

DAVIS [1975] pense que la rupture en compression des composites unidirectionnels est due à une propagation de délaminages apparaissant à l'interface des deux matériaux sous l'effet d'un déplacement transversal de fibres initialement courbes, ou d'une instabilité en cisaillement qui peut s'expliquer par un comportement non linéaire de la matrice. Pour calculer les contraintes de cisaillement en tous points, il utilise le modèle bidimensionnel de ROSEN et étudie une période (fibres entourées de deux demi-couches de matrice) comme une poutre multicouche (TIMOSHENKO [1922]) chargée en compression. Après avoir établi la relation entre la charge de compression extérieure et le champ de déplacement transversal en appliquant le théorème de l'énergie potentielle à la poutre multicouche, il détermine la charge critique à laquelle l'instabilité apparaît. Le résultat qu'il obtient est identique à celui de ROSEN lorsqu'on suppose les modules de cisaillement constants. Mais DAVIS a mis en oeuvre une expérience de compression torsion qui fait apparaître une non linéarité du module de cisaillement  $G$  équivalent en fonction de la charge en compression appliquée.

Evidemment, cette chute de rigidité en cisaillement conduit à une diminution de la charge critique. La comparaison de ses résultats numériques avec la courbe expérimentale du module  $G$  permet une approximation du défaut géométrique initial des fibres dont l'amplitude rapportée à la longueur de la fibre est comprise entre 0,0018 et 0,00375. Ce résultat est alors validé par une mesure précise de la position des fibres dans différentes sections de l'éprouvette. En s'appuyant

sur les résultats des tests et son analyse, il conclut que la rupture du Boron Epoxy sous un chargement de compression axiale est due à une instabilité en cisaillement.

Plus récemment, une étude tout à fait similaire a été proposée par TEPLY *et al.* [1989]. De même, WANG [1979] reprend le travail de DAVIS [1975] et propose une méthode incrémentale pour établir la courbe reliant la charge de compression au déplacement transversal des fibres. La rupture en compression apparaît alors lorsque la contrainte appliquée conduit à une augmentation instable de la flèche ou à une variation excessive de la contrainte de cisaillement dans le plan des fibres. La comparaison des résultats numériques avec les contraintes à rupture expérimentales de Carbone/Epoxy à différentes températures est excellente.

#### d) Etudes bidimensionnelles

STEIF [1987] représente le composite par un empilement bidimensionnel de couches souples et raides. Il étudie l'influence de divers paramètres (géométrie, chargement mécanique ou thermique, non linéarité physique des matériaux) sur l'apparition du microflambage en phase ou en opposition de phase, ainsi que sur l'existence de modes à grandes longueurs d'onde. La méthode employée par l'auteur est similaire à celle proposée par HILL et HUTCHINSON [1975] pour appréhender les phénomènes de bifurcation dans un solide sujet à un état de déformation plane. Dans le cas de matériaux linéaires, il retrouve l'égalité obtenue par différents auteurs entre la contrainte de microflambage et le module de cisaillement. La transition entre les deux modes de flambage s'effectue bien à une fraction volumique basse, mais cette limite est fortement influencée par la non linéarité des constituants. L'évolution de la température conduit à des déformations critiques très différentes mais toujours trop élevées en comparaison avec les résistances à rupture en compression des composites. STEIF [1987] conclut alors que le microflambage ne doit pas être la cause de la rupture en compression.

Récemment ANQUEZ [1990] étudie l'instabilité de cisaillement en considérant le matériau comme un corps élastique linéaire et isotrope. Après avoir exprimé la loi de comportement en fonction de l'énergie libre, il applique le théorème de l'énergie potentielle en supposant qu'il existe une précontrainte homogène dans une direction (correspond à un chargement dans la direction des fibres). Le résultat est intéressant puisqu'il montre que l'instabilité se produit dès que la contrainte de compression est égale au module de cisaillement du matériau.

Il obtient le même résultat dans le cas d'un corps homogène isotrope transverse, la contrainte critique est égale au module transverse  $G_{12}$ . Ceci est en total accord avec les modèles précédents. Pour vérifier cette égalité dans le cas d'un matériau hétérogène fibreux, il effectue un calcul numérique sur une structure bidimensionnelle composée d'un assemblage de plusieurs fibres séparées par des bandes de résine. En ayant pris soin de vérifier la convergence lorsque le

nombre de fibre augmente, il obtient un charge critique minimale qui s'approche du module de cisaillement transverse équivalent du pli.

#### e) Modèles tridimensionnels

Deux études menées par SADOWSKI [1967] et HERRMAN *et al.* [1967] proposent une méthode originale pour le calcul de la charge critique. L'interaction fibre-matrice est modélisée par une poutre cylindrique sur fondation, mais les caractéristiques mécaniques de cette dernière sont déduites du calcul de l'interaction entre une fibre se déplaçant transversalement dans une matrice supposée infinie dans les trois directions. HERRMAN *et al.* [1967] étudient plus particulièrement l'influence d'un défaut initial sur la charge critique. Cette modélisation tridimensionnelle sous-entend une faible interaction entre deux fibres voisines et, par conséquent, elle ne s'applique qu'à des fractions volumiques très faibles. FUNG et LANIR [1972] représentent le composite par une disposition régulière et parallèle de cylindres constitués d'une fibre au centre entourée de matrice. La résolution des équations d'équilibre d'un cylindre chargé axialement avec des conditions de périodicité sur les faces latérales permet aux auteurs de modéliser avec une bonne approximation l'interaction entre la fibre et la matrice. Ils complètent ce modèle en étudiant le comportement post-flambage d'une fibre partiellement décollée. Les charges critiques de microflambage sont alors inférieures aux contraintes limites, mais pour ces auteurs le flambage ne devrait pas avoir un effet significatif sur le comportement global dans le domaine linéaire. Ils pensent que des non linéarités physiques devraient affecter ce comportement pour des valeurs élevées du rapport  $E_f/E_M$ .

#### f) Remarques sur les modèles de microflambage

Les modèles de microflambage qui ont été présentés n'établissent pas de façon claire que le phénomène de microflambage est la cause principale de la baisse des caractéristiques mécaniques en compression des composites. Un fait est certain, les modèles proposés dans la littérature conduisent à des charges critiques supérieures aux résistances à rupture des composites. Ainsi, les auteurs associent le mécanisme de rupture finale à l'apparition du microflambage.

Par exemple ANQUEZ [1990] pour un composite T300/914 ( $f=60\%$ ) obtient une contrainte critique de 6000 MPa, or la contrainte à rupture pour ce matériau n'est que de 1500 MPa. Il suppose que le microflambage est le phénomène qui pilote la rupture. Pour obtenir une meilleure prévision de la contrainte à rupture, il prend en compte la variation locale du module de cisaillement en fonction du taux volumique de fibre et du désalignement des fibres.

## **CHAPITRE III : NOTRE MODELISATION DU MICROFLAMBAGE**

### **1. Introduction**

### **2. Premier modèle**

- a) Présentation
- b) Poutre sur fondation
- c) Homogénéisation périodique
- d) Calcul numérique
- e) Calcul de la charge critique
- f) Discussion du résultat

### **3. Second modèle**

- a) Présentation
- b) Calcul de la Force de Rappel
- c) Poutre sur fondation. Equations

### **4. Conclusion**

## NOTATIONS

|                    |                                                             |
|--------------------|-------------------------------------------------------------|
| $E_M$              | module d'Young de la matrice                                |
| $x_1$              | direction de la fibre                                       |
| $x_2$              | direction transversale                                      |
| $x_3$              | direction de l'épaisseur                                    |
| $u, v, w$          | déplacement dans les directions $x_1, x_2, x_3$             |
| $E_f$              | module d'Young de la fibre                                  |
| $\nu_M$            | coefficient de Poisson de la matrice                        |
| $G_M$              | module de cisaillement de la matrice                        |
| $S_f$              | surface de la fibre                                         |
| $G$                | module de cisaillement du composite dans le plan des fibres |
| $r_f$              | rayon de la fibre                                           |
| $\lambda_M, \mu_M$ | coefficient Lamé de la matrice                              |



### III - NOTRE MODELISATION DU MICROFLAMBAGE

#### 1. INTRODUCTION

Lorsqu'un stratifié est soumis à une sollicitation de compression, nous avons vu que deux phénomènes apparaissent. Dès le début du chargement pour des déformations avoisinant  $1/1000$  (seuil que l'on notera  $\epsilon_{RIG}$ ), on observe une moindre rigidité en compression dans la direction des fibres comparée à celle en traction. Cette diminution se poursuit jusqu'à la rupture qui survient en compression à des taux de contrainte bien plus faibles qu'en traction. A l'opposé, la déformation à rupture est plus importante en compression et son ordre de grandeur se situe entre 1% et 4%.

De nombreux auteurs pensent que la chute de résistance correspond à l'apparition du microflambage. En fait, peut-on espérer expliquer l'un ou l'autre des deux phénomènes par une instabilité des fibres ? Plusieurs cas sont envisageables. Si la déformation critique est plus faible que  $\epsilon_{RIG}$ , il est censé d'associer le microflambage au comportement non linéaire en compression et à la moindre rigidité. Alors qu'une déformation critique plus élevée, comprise entre  $\epsilon_{RIG}$  et la déformation à rupture, ne nous permet plus de lier directement microflambage et non linéarité. Toutefois, la prise en compte de défauts importants dans le composite devrait permettre de diminuer de manière significative cette déformation critique, ce qui nous conduirait à la conclusion précédente. Si l'apparition de l'instabilité correspond à la rupture, l'explication de la ruine du matériau est par conséquent évidente. Mais si l'on obtient une déformation critique supérieure à la déformation à rupture, nous pouvons en conclure que le microflambage n'influe pas de manière significative sur la résistance. Il est donc nécessaire d'imaginer d'autres mécanismes.

Si l'on analyse de cette façon les résultats des modèles de microflambage issus de la littérature, nous remarquons que toutes les déformations critiques obtenues sont supérieures à celles correspondant à la rupture. En conclusion, le microflambage n'intervient pas dans les mécanismes de chute des caractéristiques mécaniques. Pourtant, ce dernier est un excellent candidat pour expliquer la perte de rigidité, et surtout le comportement non linéaire élastique.

Par conséquent, il est nécessaire de proposer une nouvelle approche du microflambage, qui ne possède pas les inconvénients des modèles proposés jusqu'ici. C'est à dire l'instabilité est du type locale et ne peut en aucun cas relier l'influence de la séquence d'empilement, de l'épaisseur ou du chargement sur la non linéarité. A part la longueur de l'éprouvette, ces modèles sont incapables de donner une longueur d'onde caractéristique du microflambage. De plus, le choix du mode de flambage est tel que la déformation de cisaillement induite dans la matrice est la même entre toutes les fibres. Or cette concentration conduit sans aucun doute à des déformations critiques élevées.

Suite à toutes ces remarques, nous proposons deux modèles dont l'objectif principal est d'essayer de mieux appréhender le microflambage et d'en conclure si cette instabilité peut expliquer la chute de rigidité. Nous verrons que les hypothèses faites ne nous permettront en aucun cas de trancher sur les conséquences de ces modèles.

L'idée principale de nos deux modèles est d'essayer de répartir la déformation induite dans la matrice à l'échelle d'un pli voire plusieurs. Cette échelle étant plus importante que celle séparant deux fibres, il est censé d'espérer obtenir une bonne approximation de la charge critique.

## 2. PREMIER MODELE

### a) But

En marge des études précédemment exposées, SCHAEFFERS [1976] modélise le microflambage de toute une famille de fibres. Son observation du déplacement des fibres dans la matrice (élastomère) au cours d'une sollicitation de flexion appliquée à un unidirectionnel est riche d'informations, puisque dans la zone de compression une ondulation des fibres est visible. Elle engendre même par l'intermédiaire de la matrice un déplacement de celles qui sont tendues. De plus, les longueurs d'onde observées sur l'éprouvette sont fonction du diamètre et de la concentration des fibres, ainsi que des propriétés de l'élastomère. L'idée principale de sa modélisation et de la notre consiste à considérer un déplacement des fibres qui est fonction de leurs positions transversales dans le pli unidirectionnel GRANDIDIER et POTIER-FERRY[1990]. Ce champ de déplacement nous permet de répartir la déformation sur l'épaisseur (distance supérieure à celle qui sépare deux fibres). Nous espérons ainsi obtenir une charge critique plus faible.

Comme dans un stratifié soumis à un état de compression pure, seuls les plis dont les fibres possèdent la même direction que la charge sont sujets au microflambage. Nous avons limité dans un premier temps notre modèle à un pli unidirectionnel d'épaisseur  $t$  soumis à une charge axiale  $\sigma_x$  répartie uniformément. Dans la plupart des composites utilisés aujourd'hui, le rapport entre l'épaisseur et les dimensions transversales est très faible ; cette particularité nous conduit à supposer que le déplacement des fibres sous le chargement de compression  $\sigma_x$  est dirigé parallèlement aux faces supérieure et inférieure du pli suivant ( $x_z$ ). Comme dans les modèles précédents, le mode de microflambage des fibres est en phase ; et l'amplitude de ce déplacement n'est donc fonction que de la position dans l'épaisseur du pli. Ceci peut simplement se traduire par l'expression du champ de déplacement des fibres dans le pli suivante :

$$U^* = V(x_3) \sin(k x_1) x_2$$

où  $k$  est le nombre d'onde.

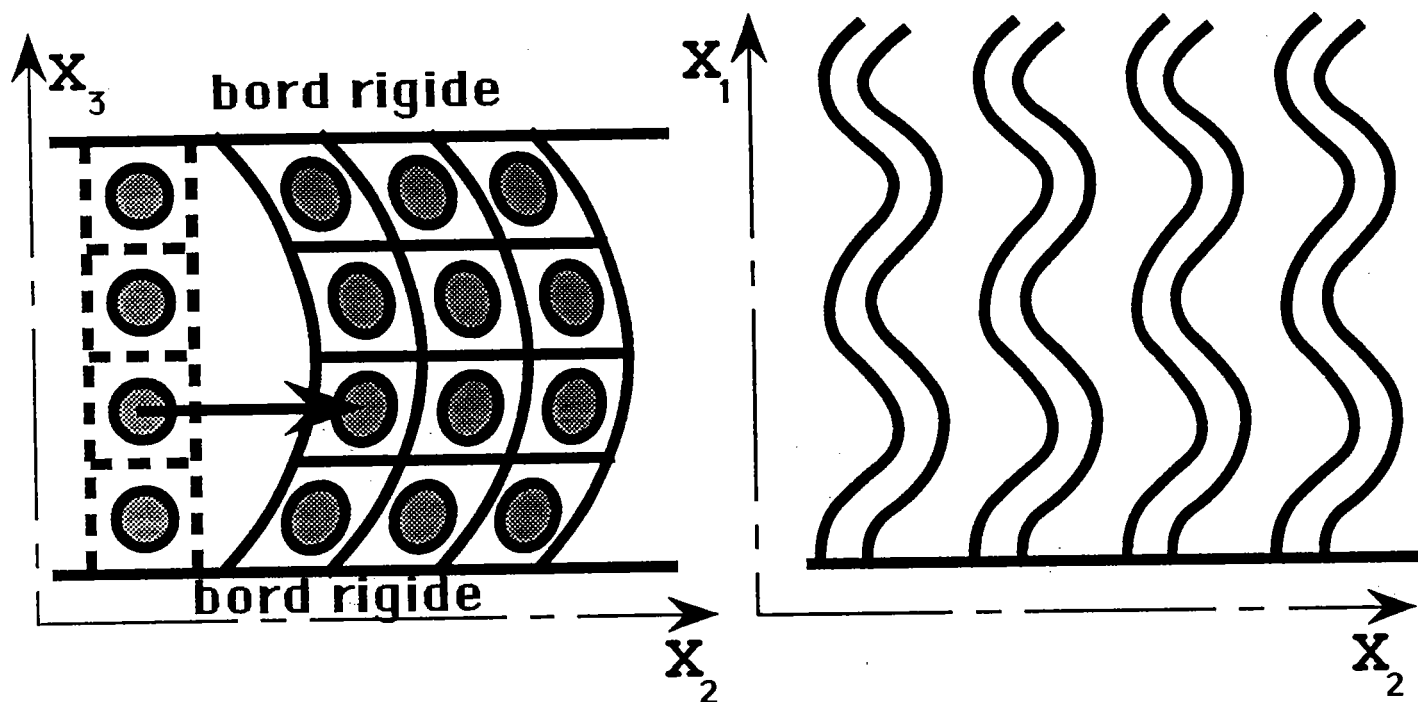


FIGURE 23 : Champ de déplacement supposé

Mais qu'apporte cette représentation du microflambage par rapport au modèle de ROSEN ? Raisonnablement, la seule information qu'elle puisse nous apporter, est l'impact de la répartition de la déformation  $\epsilon_{23}$  à l'échelle de l'épaisseur du pli sur la contrainte critique de microflambage. Effectivement, il ne faut en aucun cas espérer, par l'intermédiaire de ce modèle, obtenir une contrainte plus faible que celle établie par ROSEN, car la déformation  $\epsilon_{12}$  induite dans la matrice est toujours concentrée entre deux fibres voisines.

L'idée directrice de notre étude est donc de déterminer la charge critique en omettant volontairement la déformation  $\epsilon_{12}$ . Si la répartition de déformation conduit à une faible charge critique, nous pourrions appliquer cette même idée à la déformation dans le plan des fibres ( $\epsilon_{12}$ ), en proposant un champ de déplacement plus complet que le précédent.

#### b) Poutre sur fondation

Dans le cadre de toutes ces approximations, nous pouvons calculer simplement la charge critique à partir de laquelle le microflambage apparaît, en modélisant l'association fibre-matrice

par une poutre sur fondation. Dans différentes études présentées précédemment, nous avons vu que l'équation de la stabilité d'une telle poutre se présente sous la forme :

$$E_f I_f \frac{\partial^4 v}{\partial x_1^4} + \sigma_e S_f \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} - F = 0$$

Dans notre cas, le champ de déplacement  $v$  est fonction des paramètres de position  $x_1, x_3$  et s'exprime de la manière suivante  $v(x_1, x_3) = V(x_3) \sin k x_1$ . Le premier terme de cette équation représente la flexion induite dans la fibre par le déplacement transversal, et le second le moment intérieur engendré par la charge de compression. Ce déplacement des renforts induit alors une déformation dans la matrice qui va, par conséquent, réagir sur la fibre. On note  $F$  cette force de rappel par unité de longueur représentative de l'interaction entre la fibre et le matrice. Mais pour résoudre l'équation différentielle précédente, il est nécessaire d'exprimer cette force  $F$  en fonction du champ de déplacement ou de ses dérivées.

#### Force de rappel

L'étude de SCHAEFFERS [1976] est très intéressante à ce sujet, car elle met bien en évidence la relation qui existe entre les déformations et cette force de rappel. L'auteur représente son composite comme une superposition périodique de couches constituées d'une seule fibre dans l'épaisseur et d'un arrangement régulier suivant la direction ( $x_2$ ). Le champ de déplacement qu'il propose est identique au nôtre puisqu'il suppose que toutes les fibres d'une même couche possèdent le même déplacement, mais ce dernier est différent pour chacune des couches. Dans ces conditions, la force de rappel est due à deux déformations :

- La déformation de cisaillement dans le plan des fibres, qui est identique à celle proposée par ROSEN et conduit à une expression identique de la force de rappel. SCHAEFFERS la nomme "intralayer".

- La déformation de cisaillement transverse due au déplacement différentiel des fibres situées sur les couches supérieure et inférieure. Par exemple, une fibre située sur la  $i^{\text{ème}}$  couche subit, par unité de longueur, la force de rappel :

$$\frac{2 r_f G_M}{\delta_2} (2 v_i - v_{i-1} - v_{i+1})$$

où  $\delta_2$  est l'espace entre deux fibres situées sur la même verticale et  $v_i$  représente le déplacement dans la  $i^{\text{ème}}$  couche suivant la direction  $x_2$ .

Malheureusement, cette expression condamne SCHAEFFERS à résoudre simultanément les équations d'équilibre de toutes les fibres situées sur la même verticale. Le système différentiel qu'il obtient est très complexe et sa taille est identique au nombre de fibres contenues dans l'épaisseur, ce qui peut être considérable. Pour simplifier ses calculs, il suppose que les fibres sont rectangulaires et que le nombre de couches est infini. Le système se réduit alors à une seule équation différentielle aux dérivées partielles identique à celle que nous avons présentée précédemment. La force de rappel due à la déformation transverse  $\epsilon_{23}$  y est proportionnelle à  $\partial^2 v / \partial^2 x_3$  où  $v(x_1, x_3) = V(x_3) \sin k x_1$ , et elle est dirigée suivant  $x_2$ . Effectivement, nous pouvons prévoir cette relation linéaire entre la force de rappel et le déplacement  $v$ , car si cette force était proportionnelle à la première dérivée  $\partial v / \partial x_3$ , on obtiendrait une dissymétrie indésirable entre les deux faces du pli. Une analyse dimensionnelle, nous permet de proposer l'expression de la force de rappel en fonction du déplacement:

$$F = C E_M S_f \frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2} \quad (14)$$

où  $C$  est un coefficient sans dimension qui dépend du coefficient de Poisson, de la matrice  $v_M$ , de la forme des fibres, de leur arrangement et, notamment, de la fraction volumique des fibres.

SCHAEFFERS n'obtient qu'une expression très simplifiée de ce coefficient puisqu'il modélise les fibres par des poutres rectangulaires et ne peut rendre compte de l'influence de tous les paramètres cités ci-dessus.

### c) Homogénéisation périodique

Pour calculer ce coefficient  $C$ , nous allons représenter le composite par un arrangement parfaitement périodique et utiliser la théorie de l'homogénéisation périodique. Effectivement, cette méthode va nous permettre de déterminer simplement les micro-contraintes à l'interface fibre-matrice. La somme de ces microcontraintes sur toute la circonférence de l'interface fibre-matrice n'est autre que la force de rappel.

La théorie de l'homogénéisation consiste à effectuer un développement classique en double échelle du champ de déplacement:

$$u(x, y) = u_0(x) + \eta u_1(x, y) + \eta^2 u_2(x, y) \quad \text{avec} \quad y = x/\eta$$

où les variables  $x$  et  $y$  représentent respectivement la position d'un point dans la structure (ici le pli) et de son homologue dans la cellule de base  $Y$ . Les champs  $u_\alpha(x,y)$  sont  $Y$ -périodiques par rapport à la variable  $y$  et  $u_0(x)$  correspond au champ macroscopique qui est tout simplement le champ de déplacement supposé  $U^*$ . Pour simplifier notre étude, nous supposons que les fibres sont rigides (en comparaison avec la souplesse de la matrice) et l'interface parfaite. Comme dans un premier temps nous avons négligé l'effet du cisaillement dans le plan (1-2) des fibres, la force de rappel est donc dirigée suivant  $x_2$  uniquement, puisqu'elle est la conséquence de la déformation de cisaillement dans le plan  $(x_2, x_3)$ . Nous limiterons donc notre étude au plan d'équation  $x_1 = 0$  où le champ de déformation se réduit au cisaillement :

$$\varepsilon_x(u_0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \frac{dV(x_3)}{dx_3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \frac{dV(x_3)}{dx_3} \end{pmatrix}$$

Notre problème se résume à la détermination des champs microscopiques  $(u_1, \sigma_0(x,y))$  dans une cellule de base bidimensionnelle à partir des champs macroscopiques. Nous avons vu au paragraphe I-4, que les champs microscopiques sont solutions sur la cellule de base des équations suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} \text{div}_y \sigma_0 = 0 \\ \sigma_0 = \mathcal{L}_M(\varepsilon_x(u_0) + \varepsilon_y(u_1)) \\ u_1 \text{ périodique sur les faces opposées de la cellule de base} \\ \sigma_0(n) \text{ Y-antipériodique} \\ \varepsilon_x(u_0) + \varepsilon_y(u_1) = 0 \text{ dans la fibre supposée rigide} \end{array} \right\} \text{ dans la matrice} \quad (15)$$

Du fait de la linéarité,  $\sigma_0(x,y)$  et  $u_1(x,y)$  peuvent être reliés à la déformation macroscopique de cisaillement  $1/2 dV/dx_3$  par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \sigma_0(x,y) &= N_0(y) \frac{1}{2} \frac{dV}{dx_3} \\ u_1(x,y) &= U_1(y) \frac{1}{2} \frac{dV}{dx_3} + c(x) \end{aligned}$$

Nous pouvons remarquer que dans le cas bidimensionnel avec une déformation de cisaillement pur, les problèmes kh précédemment définis (I-4) se réduisent au seul problème 2-3, où

le champ de déplacement est défini à une constante additive près notée  $c(x)$ . Au niveau de la cellule de base, elle représente un mouvement de corps rigide que l'on peut décomposer en un déplacement de translation et d'une rotation autour de l'axe  $x_1$ , ce qui nous conduit à l'expression suivante de cette constante  $c(x) = c + r(x) x_1 \wedge y$ . Or, à l'échelle microscopique, on peut choisir d'annuler les déplacements rigides de la fibre. Cette condition entraîne la nullité de la constante  $c$ . Quant à la rotation, il est nécessaire de développer l'opérateur rotationnel par rapport aux deux paramètres de position  $x$  et  $y$  pour la calculer et l'annuler.

$$\text{rot}(u) = \text{rot}_x(u_o) + \text{rot}_y(u_1) + \eta(\text{rot}_x(u_1) + \text{rot}_y(u_2))$$

Au premier ordre du développement, la nullité de vecteur de rotation  $\Omega = 1/2 \text{rot } u$  conduit alors à l'égalité :

$$\text{rot}_x(u_o) = -\text{rot}_y(u_1(x,y)) \qquad \text{avec } \text{rot}_x(u_o) = -(dV/dx_3) y_1 \qquad (16)$$

Mais comme la fibre est rigide, nous avons les relations suivantes :

$$\text{rot}_y(u_1(x,y)) = \text{rot}_y(u_1(x,o)) = \text{rot}_y r(x) (-y_3 y_2 + y_2 y_3) = 2 r y_1 \qquad (17)$$

La combinaison des relations (16) et (17) suffit pour montrer que la rotation  $r$  est égale à  $(1/2) (dV(x_3)/dx_3)$ . Nous en déduisons alors l'expression du champ de déplacement dans la matrice où la constante  $c(x)$  peut être exprimée à l'interface comme le fibre est rigide:

$$u_1(x,y) = \frac{1}{2} \frac{dV}{dx_3} U_1(y) + \frac{1}{2} \frac{dV}{dx_3} (-r y_3 y_2 + r y_2 y_3)$$

où  $(r y_2, r y_3)$  sont les coordonnées des points appartenant à cette interface fibre-matrice. Le système (15) se présente alors sous la forme simplifiée :

$$\left. \begin{aligned} \text{div}_y N_o &= 0 \\ N_o &= L_M \epsilon_y (P^{23} + U_1(y)) \end{aligned} \right\} \text{ dans la matrice}$$

$$\left. \begin{aligned} U_1(y) &\text{ Y-périodique} \\ N_o(n) &\text{ Y-antipériodique} \\ \epsilon_y (P^{23} + U_1(y)) &= 0 \text{ dans la fibre} \end{aligned} \right\} \qquad (18)$$

où  $P^{23} = y_3 y_2 + y_2 y_3$ . La dernière équation permet en fait de résoudre le problème uniquement dans la matrice, car elle nous donne l'information suivante sur le bord de la fibre (notée  $\partial\phi$ ) concernant le champ de déplacement  $U_1(y)$  :

$$U_1(\partial\phi) = -f y_3 y_2 - f y_2 y_3$$

qui se présente sous la forme d'un déplacement imposé à l'interface. Pour résoudre simplement ce problème, il nous suffit de combiner les deux premières équations du système (18) et de les remplacer par la suivante :

$$\text{div}_y \mathcal{L}_M \varepsilon_y(U_1(y)) = -\text{div}_y \mathcal{L}_M \varepsilon_y(P^{23})$$

où le terme de droite est nul. Par conséquent, nous obtenons une formulation tout à fait "classique" (déformation contrainte, loi de comportement, équation d'équilibre) avec des conditions aux limites bien posées :

- déplacement imposé sur le bord de la fibre
- périodicité sur les faces opposées de la cellule de base.

Ce qui nous conduit au système suivant:

$$\begin{cases} \text{div}_y \hat{O}_0 = 0 \\ \hat{O}_0 = \mathcal{L}_M \varepsilon_y(U_1(y)) \\ \hat{O}_0(n) \text{ Y-antipériodique} \\ U_1(y) \text{ Y-périodique} \\ U_1(\partial\phi) = -f y_3 y_2 - f y_2 y_3 \end{cases}$$

où la troisième équation est évidente puisque  $N_0(n)$  est Y-antipériodique et comme  $\mathcal{L}_M \varepsilon_y(P^{23})$  est indépendant du paramètre de position  $y$ , le vecteur  $\mathcal{L}_M \varepsilon_y(P^{23})(n)$  est aussi Y-antipériodique.

Malheureusement, ceci est insuffisant pour déterminer la force de rappel. En effet, les conditions d'équilibre local et de périodicité entraînent la nullité de la somme des contraintes  $\sigma_0(n)$  à l'interface et, par conséquent, la force de rappel.

Sur une cellule de base, les équations d'équilibre du système (18) sont vérifiées si, et seulement si le Principe de Puissances Virtuelles, qui est une formulation équivalente, l'est aussi :



$$\forall \delta (P^{23} + U_1) \text{ C.A. : } - \int_S \text{Tr} (N_o \delta \epsilon_y (P^{23} + U_1)(y)) dS = 0$$

où S est la surface totale de la cellule de base. Mais l'intégrale sur cette surface peut se dissocier en deux intégrations sur les domaines délimitant la matrice et la fibre ( $S_M$  et  $S_f$ )

$$- \int_S \text{Tr} (N_o \delta \epsilon_y (P^{23} + U_1)(y)) dS = - \int_{S_M} \text{Tr} (N_o \delta \epsilon_y (P^{23} + U_1)(y)) dS - \int_{S_f} \text{Tr} (N_o \delta \epsilon_y (P^{23} + U_1)(y)) dS$$

Or, le second terme est nul puisque la fibre est supposée rigide et la combinaison des deux équations précédentes nous donne l'égalité suivante :

$$- \int_{S_M} \text{Tr} (N_o \delta \epsilon_y (P^{23} + U_1)(y)) dS = 0 \quad (19)$$

Maintenant, pour obtenir le résultat attendu, il suffit d'appliquer la formule d'intégration par partie suivante sur une surface correspondant à la matrice.

$$\int_{S_M} \delta (P^{23} + U_1)(y) \text{div}_y N_o dS = - \int_{S_M} \text{Tr} (N_o \delta \epsilon_y (P^{23} + U_1)(y)) dS + \int_{\partial S_M} N_o(n) \delta (P^{23} + U_1) (\partial y) ds$$

L'équation d'équilibre locale combinée à la relation (19) nous conduit à :

$$\int_{\partial S_M} N_o(n) \delta (P^{23} + U_1) ds = 0 \quad \forall \delta (P^{23} + U_1) \text{ C.A.}$$

Les limites de la surface  $S_M$  sont les faces extérieures de la cellule et l'interface entre les deux constituants ( $\partial\phi$ ). Mais les conditions de périodicité sur le champ de déplacement  $U_1(y)$  et d'antipériodicité du champ  $N_o(n)$  conduit à la nullité de la somme des contraintes à l'interface

$$\int_{\partial\phi} N_o(n) = 0 \quad \forall U_1 \text{ C.A.}$$

Par conséquent, il est nécessaire d'effectuer le développement jusqu'au second ordre: si l'on suppose qu'aucun effort de volume ne s'applique à la structure, alors les champs  $(u_2, \sigma_1)$  "doublement microscopiques" sont solution du système :

$$\left. \begin{aligned}
\operatorname{div}_x \sigma_o + \operatorname{div}_y \sigma_1 &= 0 \\
\sigma_1 &= \mathcal{L}_M [\varepsilon_x(u_1) + \varepsilon_y(u_2)] \\
\varepsilon_x(u_1) + \varepsilon_y(u_2) &= 0 \\
u_2(y) &\text{ Y-périodique} \\
\sigma_1(n) &\text{ Y-antipériodique}
\end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{dans la matrice} \\ \text{dans la fibre} \end{array} \quad \} (20)$$

A l'étape précédente, nous avons déterminé précisément les champs microscopiques  $\sigma_o$  et  $u_1$  qui seront considérés comme des données. Par similitude avec l'étape précédente, nous pouvons combiner les deux premières équations dans le but d'obtenir une forme "plus classique" :

$$\operatorname{div}_y \mathcal{L}_M \varepsilon_y(u_2) = -\operatorname{div}_x \sigma_o - \operatorname{div}_y \mathcal{L}_M \varepsilon_x(u_1)$$

Or,  $\operatorname{div}_x \sigma_o$  et  $\operatorname{div}_y \mathcal{L}_M \varepsilon_x(u_1)$  sont reliés à  $d^2V/dx_3^2$  (données macroscopiques) par les relations suivantes :

$$\operatorname{div}_x \sigma_o = \operatorname{div}_x \left[ \frac{1}{2} \frac{dV}{dx_3} \mathcal{L}_M (\varepsilon_y(U_1) + \varepsilon_y(P^{23})) \right] = \frac{d^2V}{dx_3^2} h(y) \quad \text{où } h(y) = \begin{bmatrix} \frac{\dot{O}_{o23}}{2} + \mu \\ \frac{\dot{O}_{o33}}{2} \end{bmatrix}$$

où  $\dot{O}_{oij}$  correspond au  $ij^{\text{ème}}$  terme du tenseur  $\dot{O}_o(y)$ , et

$$\varepsilon_x(u_1) = \varepsilon_x \left[ \frac{1}{2} \frac{dV_o}{dx_3} \left( U_1(y) - f y_3 y_2 + f y_2 y_3 \right) \right]$$

ce qui est équivalent à :

$$\varepsilon_x(u_1) = \frac{d^2V_o}{dx_3^2} \begin{bmatrix} 0 & \frac{V_1}{4} - \frac{f y_3}{4} \\ \text{Sym.} & \frac{W_1}{2} + \frac{f y_2}{2} \end{bmatrix} = \frac{d^2V_o}{dx_3^2} \Sigma(y)$$

où  $V_1$  et  $W_1$  sont les projections du vecteur  $U_1(y)$  dans le repère  $(y_2, y_3)$ .

$$U_1(y) = V_1 y_2 + W_1 y_3$$

Par dérivation, nous pouvons calculer  $\text{div}_y \mathcal{L}_M \varepsilon_x(u_1)$  qui se présente sous la forme :

$$\text{div}_y \mathcal{L}_M \varepsilon_x(u_1) = \frac{d^2 V_0}{dx_3^2} f(y) \quad \text{où} \quad f(y) = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_M}{2} \frac{dW_1}{dy_2} + \frac{\lambda_M}{2} + \frac{\mu_M}{2} \frac{dV_1}{dy_3} - \frac{\mu_M}{2} \\ \frac{\mu_M}{2} \frac{dV_1}{dy_2} + \left( \frac{\lambda_M + 2\mu_M}{2} \right) \frac{dW_1}{dy_3} \end{bmatrix}$$

Par conséquent, au second ordre, nous utilisons aussi la linéarité des champs  $u_2$  et  $\sigma_1$  par rapport à  $d^2V/dx_3^2$

$$u_2 = \frac{d^2 V}{dx_3^2} U_2 + c(x) \quad \text{et} \quad \sigma_1 = \frac{d^2 V}{dx_3^2} \mathcal{L}_M [\Sigma(y) + \varepsilon_y(U_2)]$$

où  $u_2$  est défini à une constante additive près sur la cellule.

En ce qui concerne la condition de rigidité de la fibre, traduite par l'équation  $\varepsilon_x(u_1) + \varepsilon_y(u_2) = 0$ , elle est comme précédemment équivalente à un déplacement imposé sur le bord de la fibre :

$$\text{sur } \partial\phi : u_2(\partial\phi) = \frac{1}{2} \frac{d^2 V}{dx_3^2} f y_3 y_2 + c_2(x) \quad (21)$$

Pour déterminer la fonction  $c_2(x)$ , nous opérons comme précédemment en la décomposant comme suit :  $c_2(x) = c_2 + r_2(x) x_1 \wedge y$ .

La translation nulle de la fibre supposée rigide conduit à la nullité de la constante  $c_2$ . Pour vérifier la nullité de la rotation, il est nécessaire ici d'effectuer le développement de l'opérateur  $\text{rot } u$  au second ordre où l'on obtient la relation suivante :

$$\text{rot}_x(u_1) + \text{rot}_y(u_2) = 0$$

Mais à l'interface :

$$\text{rot}_x(u_1(\partial\phi)) = \frac{d^2 V}{dx_3^2} f y_3 y_1$$

$$\text{et } \text{rot}_y(u_2(\partial\phi)) = \frac{d^2 V}{dx_3^2} (-f y_3) y_1 + 2r_2 y_1$$

Par conséquent,  $r_2 = 0$  et l'expression (21) se réduit à :

$$u_2(\partial\varphi) = \frac{d^2V}{dx_3^2} \begin{bmatrix} \frac{f y_3^2}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad U_2(\partial\varphi) = \begin{bmatrix} \frac{f y_3^2}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Après toutes ces modifications, le problème se présente sous une forme très simplifiée :

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div}_y \mathcal{L}_M \varepsilon_y(U_2) &= - (h(y) + f(y)) \\ U_2 &\text{ est } Y\text{-périodique} \\ \mathcal{L}_M(\varepsilon_y(U_2) + \varepsilon_x(U_1)(n)) &\text{ } Y\text{-antipériodique} \\ \text{sur } \partial\varphi \quad U_2(\partial\varphi) &= \begin{bmatrix} f y_3^2/2 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} (22)$$

Malheureusement, la troisième équation ne conduit pas à une conclusion simple sur les contraintes  $\mathcal{L}_M \varepsilon_y(U_2)$  puisque le terme

$$\mathcal{L}_M[\varepsilon_x(u_1)](n) = \frac{d^2V_0}{dx_3^2} \begin{bmatrix} \lambda_M \left( \frac{W_1}{2} + \frac{f y_2}{2} \right) & \mu_M \left( \frac{V_1}{2} - \frac{f y_3}{2} \right) \\ \mu_M \left( \frac{V_1}{2} - \frac{f y_3}{2} \right) & (\lambda_M + 2\mu_M) \left( \frac{W_1}{2} + \frac{f y_2}{2} \right) \end{bmatrix} (n)$$

n'est pas  $Y$ -antipériodique du fait des constantes  $f y_2, f y_3$  qu'il contient. Par la suite, nous montrerons comment transformer cette condition en effort réparti sur le bord afin que le problème au second ordre se résolve classiquement par la méthode des Eléments Finis.

En résumé, seulement deux problèmes aux limites bien posés sont à résoudre pour déterminer complètement le champ des contraintes jusqu'au second ordre.

La dernière étape consiste alors à calculer la force de rappel due à l'action de la matrice sur la fibre. Pour cela, nous utilisons la forme générale de la force de rappel

$$F = \int_{\partial\varphi} (\sigma \cdot n) dS$$

Par le biais du développement asymptotique double échelle et en faisant remarquer que la somme du champ de contrainte au premier ordre est nulle, nous obtenons :

$$\mathbf{F} = \int_{\partial\phi} (\eta \sigma_1 + \theta (\eta^2)) \mathbf{n} \, ds(\mathbf{x})$$

Or,  $ds(\mathbf{x}) = \eta \, ds(\mathbf{y})$  et par conséquent :

$$\mathbf{F} = \eta^2 \int_{\partial\phi} \sigma_1 \mathbf{n} \, ds(\mathbf{y})$$

avec  $\sigma_1 = \mathcal{L}_M (\epsilon_x (\mathbf{u}_1) + \epsilon_y (\mathbf{u}_2))$  qui peut être exprimé en fonction du champ macroscopique puisque

$$\sigma_1 = \frac{d^2V}{dx_3^2} \mathcal{L}_M [\Sigma(\mathbf{y}) + \epsilon_y (\mathbf{U}_2(\mathbf{y}))]$$

Nous obtenons alors le résultat suivant :

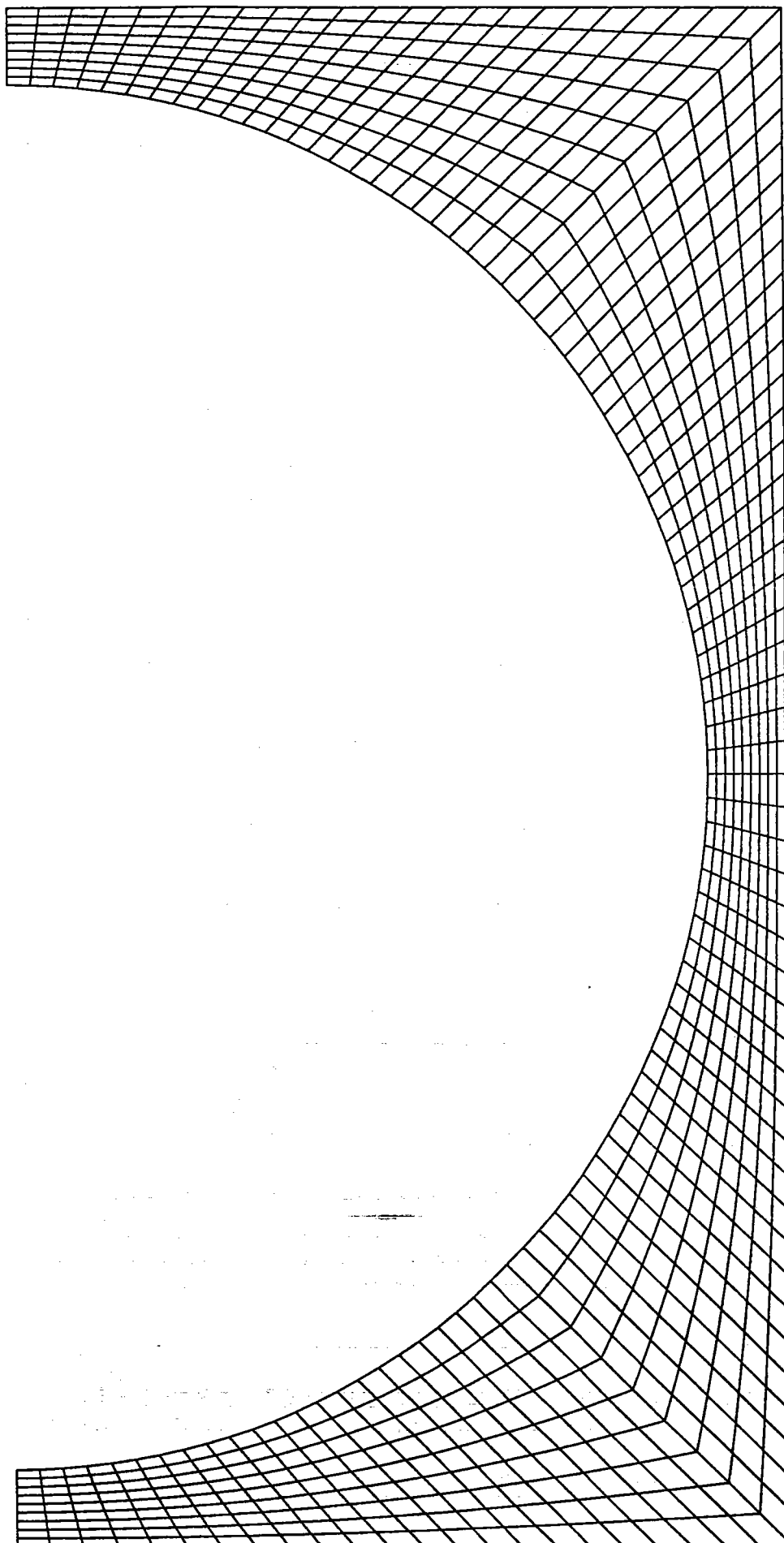
$$\mathbf{F} = \frac{d^2V}{dx_3^2} \int_{\partial\phi} \mathcal{L}_M [\Sigma(\mathbf{y}) + \epsilon_y (\mathbf{U}_2(\mathbf{y}))] (\mathbf{n}) \, ds(\mathbf{y})$$

qui est une expression tout à fait similaire à celle que nous avons proposée précédemment (14) où le coefficient C s'exprime de la façon suivante:

$$C y_2 = (\eta^2 / E_M S_f) \int_{\partial\phi} \mathcal{L}_M [\Sigma(\mathbf{y}) + \epsilon_y (\mathbf{U}_2(\mathbf{y}))] (\mathbf{n}) \, ds(\mathbf{y})$$

Ce coefficient représente bien l'effet du coefficient de Poisson par l'intermédiaire de la loi de comportement  $\mathcal{L}_M$ , mais aussi l'arrangement et la fraction volumique des fibres qui conduisent à une répartition spécifique des micro-contraintes à l'interface. Dans ce qui suit, nous présentons comment déterminer les champs  $\Sigma(\mathbf{y})$  et  $\mathbf{U}_2(\mathbf{y})$  et calculer l'intégrale sur  $\partial\phi$ .

**FIGURE 24 : Solution du problème au premier ordre avec une cellule de base carrée**

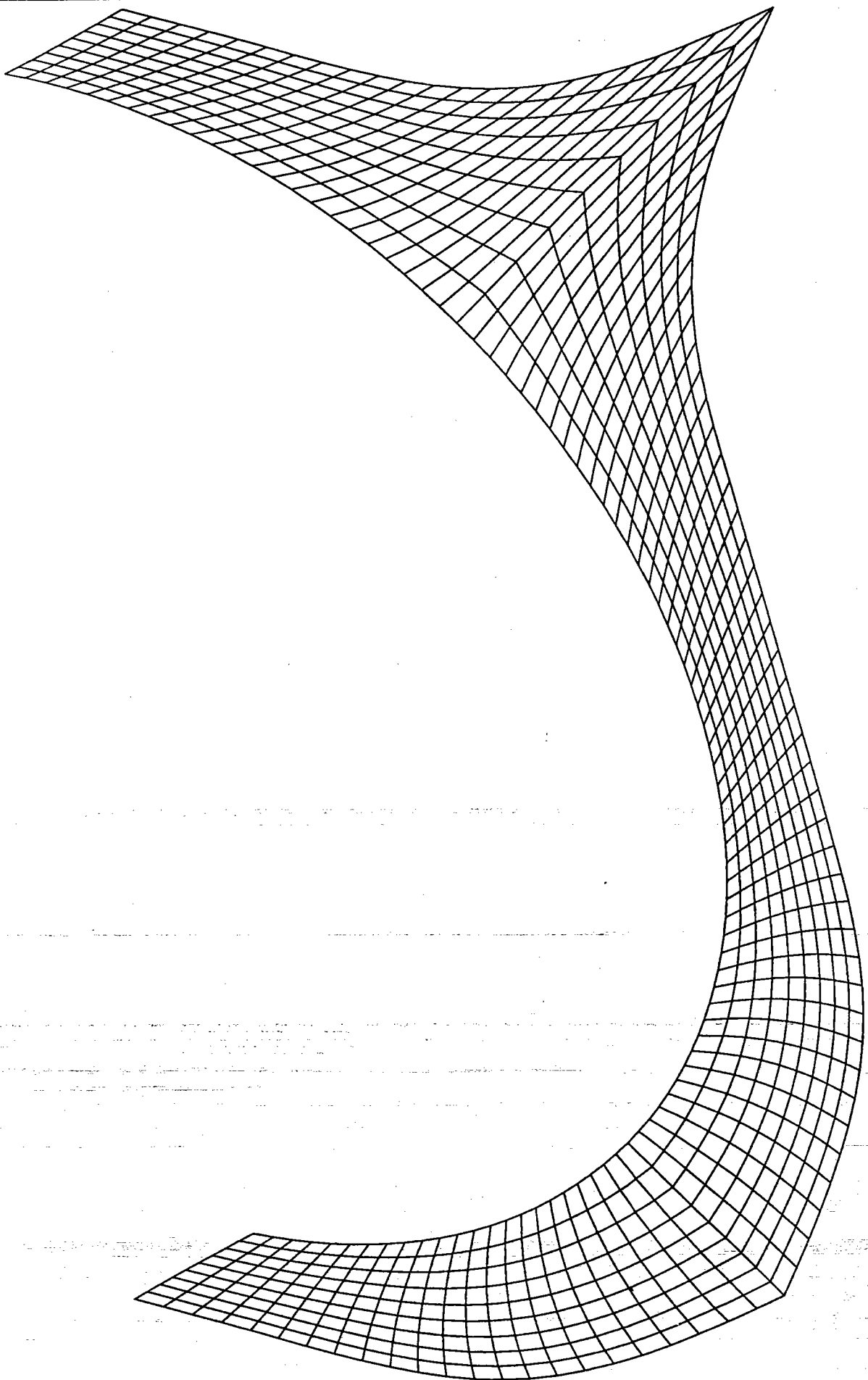


DEPLACEMENT MINIMAL +0.000000

DEPLACEMENT MAXIMAL +0.450000

$f=0.64$

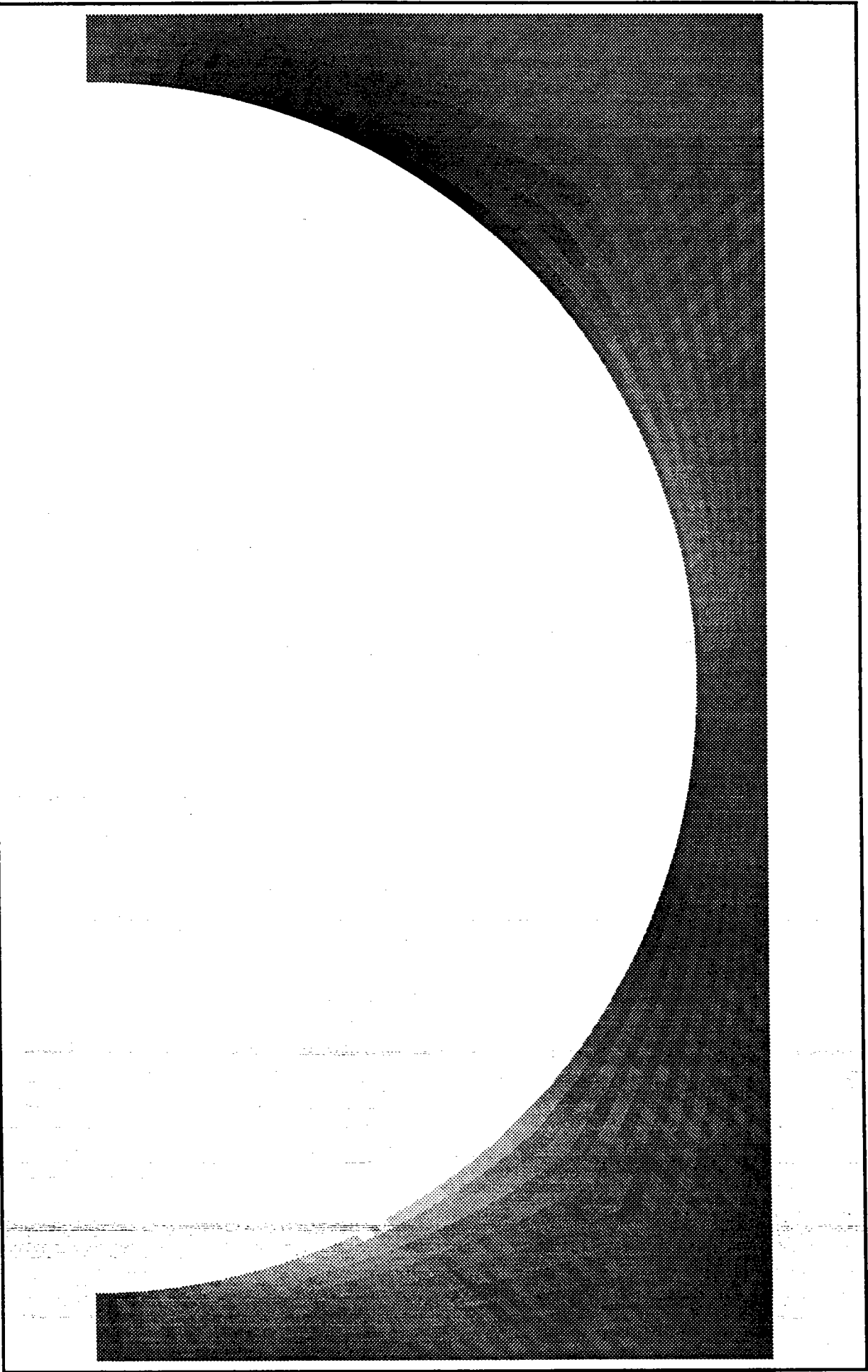
L.P.M.M.  
UNIVERSITE DE METZ



DEPLACEMENT MINIMAL +0.000000

DEPLACEMENT MAXIMAL +0.450000





SIGMA MAX

+9202.78200000  
+8645.03100000  
+8087.28000000  
+7529.52900000  
+6971.77800000  
+6414.02700000  
+5856.27600000  
+5298.52500000  
+4740.77400000  
+4183.02400000  
+3625.27300000  
+3067.52200000  
+2509.77100000  
+1952.02000000  
+1394.26900000  
+836.5176000000  
+278.7666000000  
-278.9834000000  
-836.7344000000  
-1394.48500000  
-1952.23600000  
-2509.98700000  
-3067.73800000  
-3625.48900000  
-4183.24000000  
-4740.99100000  
-5298.74200000  
-5856.49300000  
-6414.24400000  
-6971.99400000  
-7529.74700000  
-8087.49900000  
-8645.24900000  
-9202.99900000

SIGMA MIN

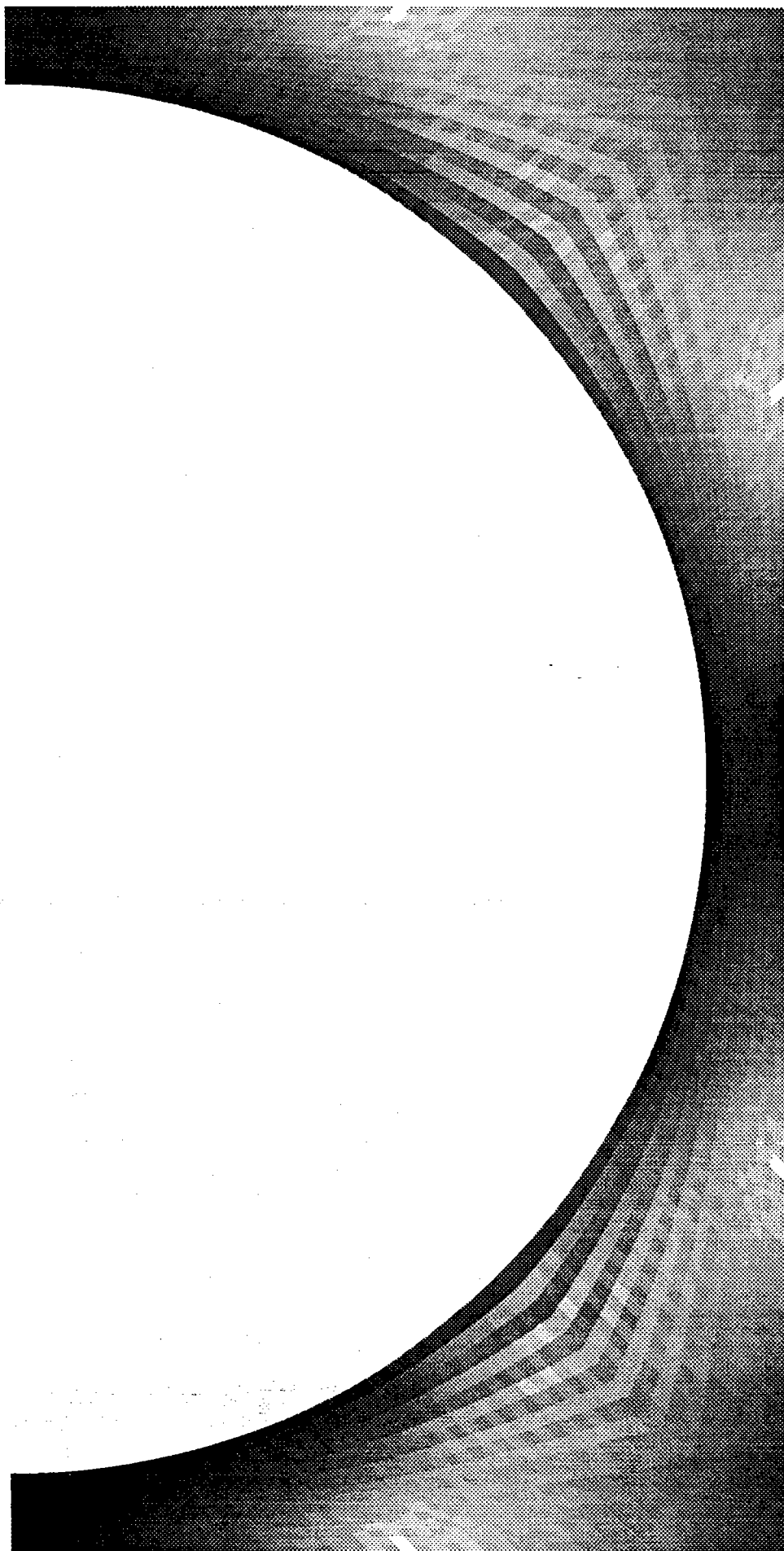
SIGMAXX

SIGMA MAX

+9202.896000000  
+8645.144000000  
+8087.390000000  
+7529.637000000  
+6971.884000000  
+6414.130000000  
+5856.377000000  
+5298.624000000  
+4740.871000000  
+4183.117000000  
+3625.364000000  
+3067.610000000  
+2509.857000000  
+1952.104000000  
+1394.351000000  
+836.597700000  
+278.844700000  
-278.908200000  
-836.662100000  
-1394.415000000  
-1952.169000000  
-2509.922000000  
-3067.676000000  
-3625.429000000  
-4183.182000000  
-4740.935000000  
-5298.688000000  
-5856.441000000  
-6414.194000000  
-6971.948000000  
-7529.701000000  
-8087.453000000  
-8645.207000000  
-9202.961000000

SIGMA MIN

SIGMAYY



SIGMA MAX

+10371.2000000  
+10167.2900000  
+9963.3750000  
+9759.4620000  
+9555.5490000  
+9351.6360000  
+9147.7230000  
+8943.8090000  
+8739.8960000  
+8535.9820000  
+8332.0690000  
+8128.1560000  
+7924.2430000  
+7720.3300000  
+7516.4170000  
+7312.5040000  
+7108.5910000  
+6904.6780000  
+6700.7650000  
+6496.8510000  
+6292.9380000  
+6089.0250000  
+5885.1120000  
+5681.1980000  
+5477.2860000  
+5273.3720000  
+5069.4590000  
+4865.5460000  
+4661.6320000  
+4457.7200000  
+4253.8060000  
+4049.8940000  
+3845.9800000  
+3642.0670000

SIGMA MIN

SIGMA VON MISES

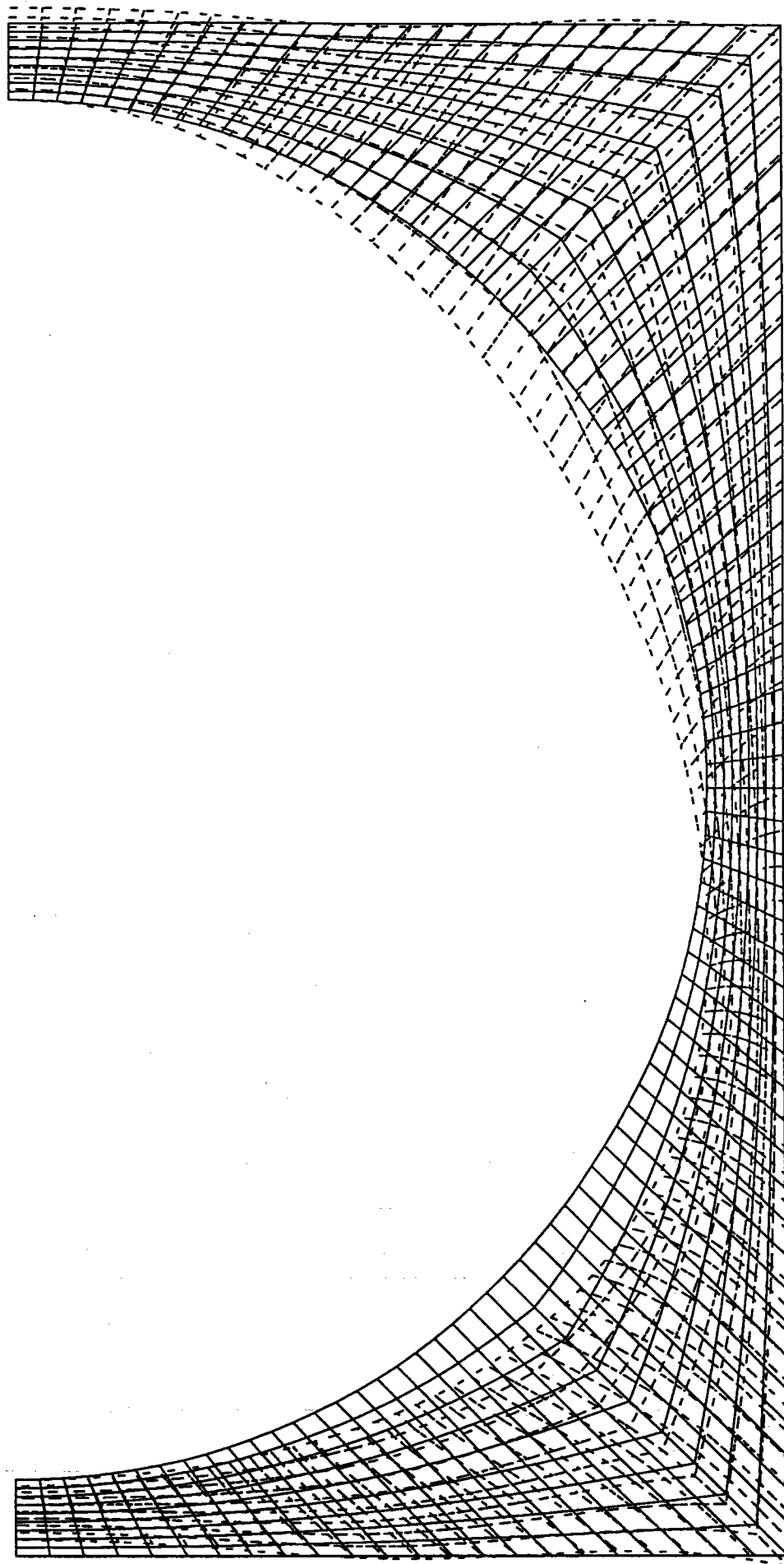
SIGMA MAX

+12662.65000000  
+12265.17000000  
+11867.69000000  
+11470.21000000  
+11072.73000000  
+10675.25000000  
+10277.77000000  
+9880.28400000  
+9482.80300000  
+9085.32200000  
+8687.84200000  
+8290.36000000  
+7892.87900000  
+7495.39800000  
+7097.91700000  
+6700.43600000  
+6302.95500000  
+5905.47400000  
+5507.99300000  
+5110.51200000  
+4713.03100000  
+4315.55000000  
+3918.06900000  
+3520.58800000  
+3123.10600000  
+2725.62600000  
+2328.14500000  
+1930.66400000  
+1533.18300000  
+1135.70100000  
+738.220700000  
+340.739300000  
-56.7412100000  
-454.222700000

SIGMA MIN

SIGMAXY

**FIGURE 25 : Soution du problème au second ordre avec une cellule de base carrée**



DEPLACEMENT MINIMAL +0.000000

DEPLACEMENT MAXIMAL +0.101250

3-22

L.P.M.M.  
UNIVERSITE DE METZ

SIGMA MAX

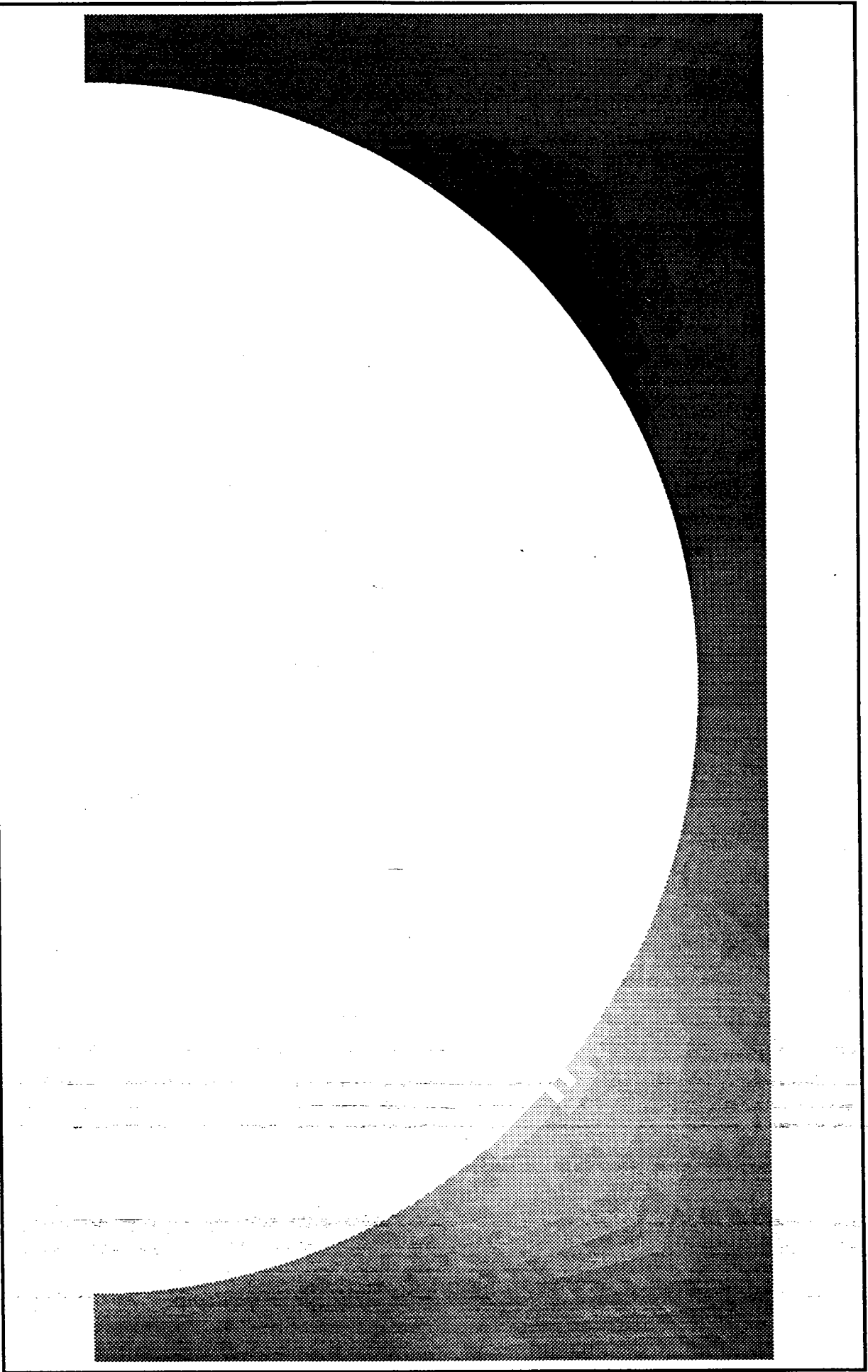
+1283.45800000  
+1205.67300000  
+1127.88800000  
+1050.10200000  
+972.31700000  
+894.53170000  
+816.74630000  
+738.96110000  
+661.17580000  
+583.39040000  
+505.60520000  
+427.81980000  
+350.03450000  
+272.24920000  
+194.46400000  
+116.67860000  
+38.893310000  
-38.891970000  
-116.67740000  
-194.46260000  
-272.24790000  
-350.03330000  
-427.81860000  
-505.60390000  
-583.38930000  
-661.17460000  
-738.95980000  
-816.74510000  
-894.53030000  
-972.31590000  
-1050.1010000  
-1127.8860000  
-1205.6720000  
-1283.4570000

SIGMA MIN

SIGMAXX

2-33,3-22

L.P.M.M.  
UNIVERSITE DE METZ



SIGMA MAX

+2377.17500000  
+2233.10400000  
+2089.03300000  
+1944.96100000  
+1800.89000000  
+1656.81900000  
+1512.74800000  
+1368.67700000  
+1224.60500000  
+1080.53400000  
+936.462900000  
+792.391700000  
+648.320400000  
+504.249300000  
+360.178100000  
+216.106900000  
+72.0356400000  
-72.0356400000  
-216.106900000  
-360.178000000  
-504.249300000  
-648.320600000  
-792.391600000  
-936.462900000  
-1080.53400000  
-1224.60500000  
-1368.67700000  
-1512.74800000  
-1656.81900000  
-1800.89000000  
-1944.96100000  
-2089.03300000  
-2233.10400000  
-2377.17500000

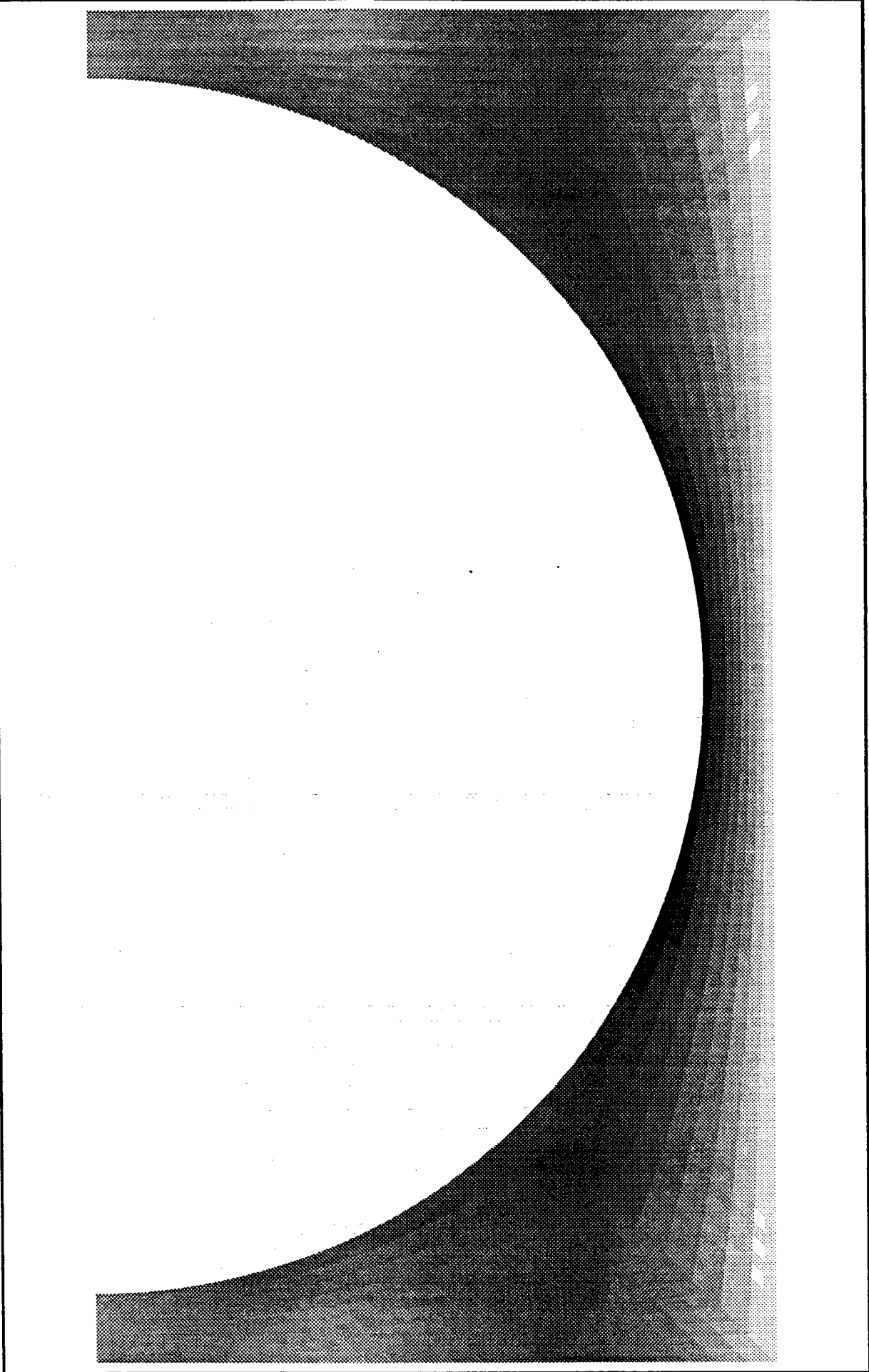
SIGMA MIN

SIGMAYY

2-33,3-22

L.P.M.M.  
UNIVERSITE DE METZ





SIGMA MAX

+670.8444000000  
+640.2355000000  
+609.6265000000  
+579.0176000000  
+548.4088000000  
+517.7998000000  
+487.1909000000  
+456.5820000000  
+425.9731000000  
+395.3642000000  
+364.7553000000  
+334.1464000000  
+303.5375000000  
+272.9286000000  
+242.3197000000  
+211.7108000000  
+181.1019000000  
+150.4930000000  
+119.8841000000  
+89.2751500000  
+58.6662600000  
+28.0573700000  
-2.551514000000  
-33.160460000000  
-63.769410000000  
-94.378300000000  
-124.9872000000  
-155.5961000000  
-186.2050000000  
-216.8139000000  
-247.4228000000  
-278.0317000000  
-308.6406000000  
-339.2495000000

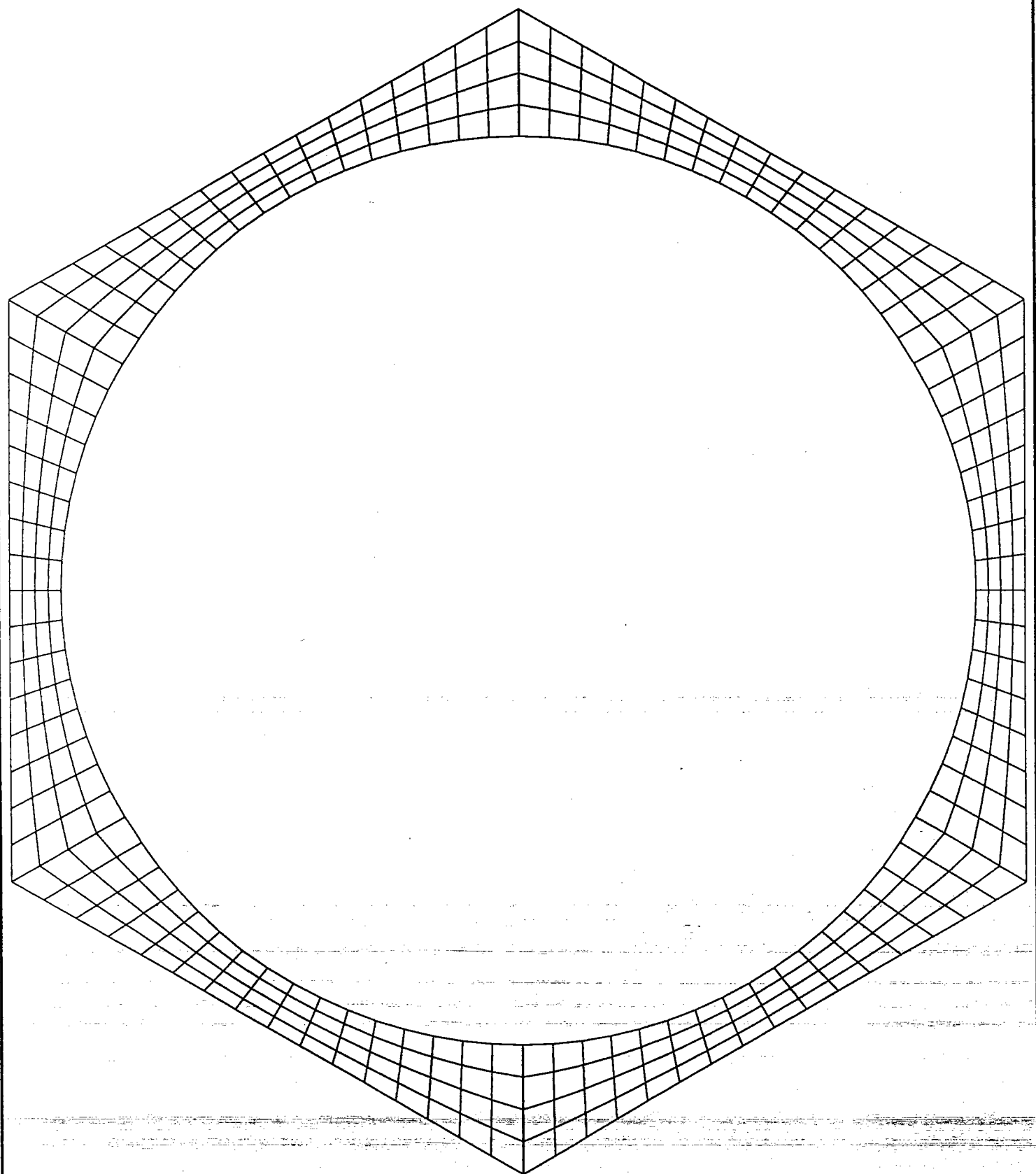
SIGMA MIN

SIGMAXY

2-33,3-22

L.P.M.M.  
UNIVERSITE DE METZ

**FIGURE 26 : Solution du problème au premier ordre avec une cellule de base hexagonale**

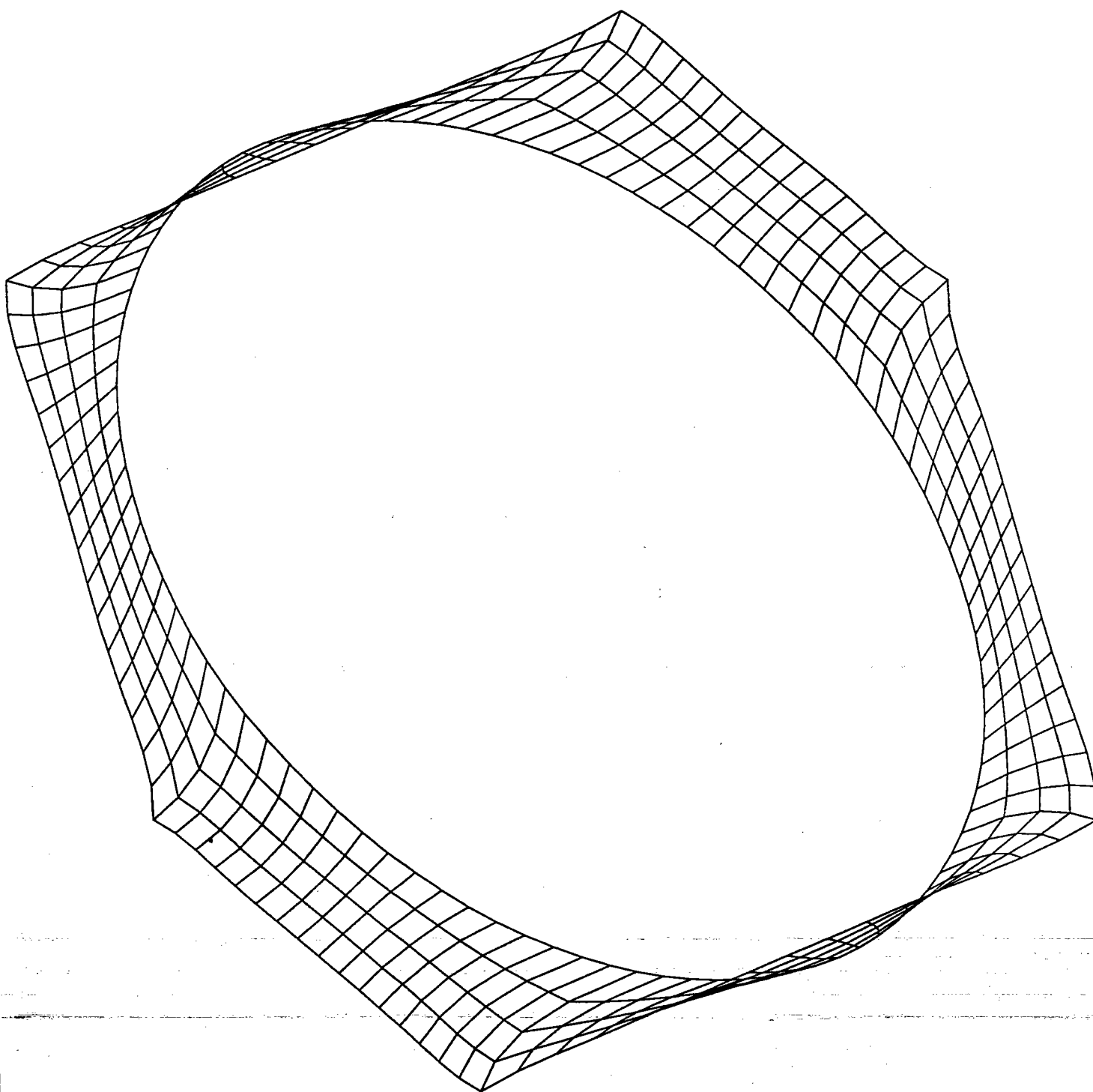


DEPLACEMENT MINIMAL +0.000000

DEPLACEMENT MAXIMAL +0.450000

$$f = 0,73$$

L.P.M.M.  
UNIVERSITE DE METZ



DEPLACEMENT MINIMAL +0.000000

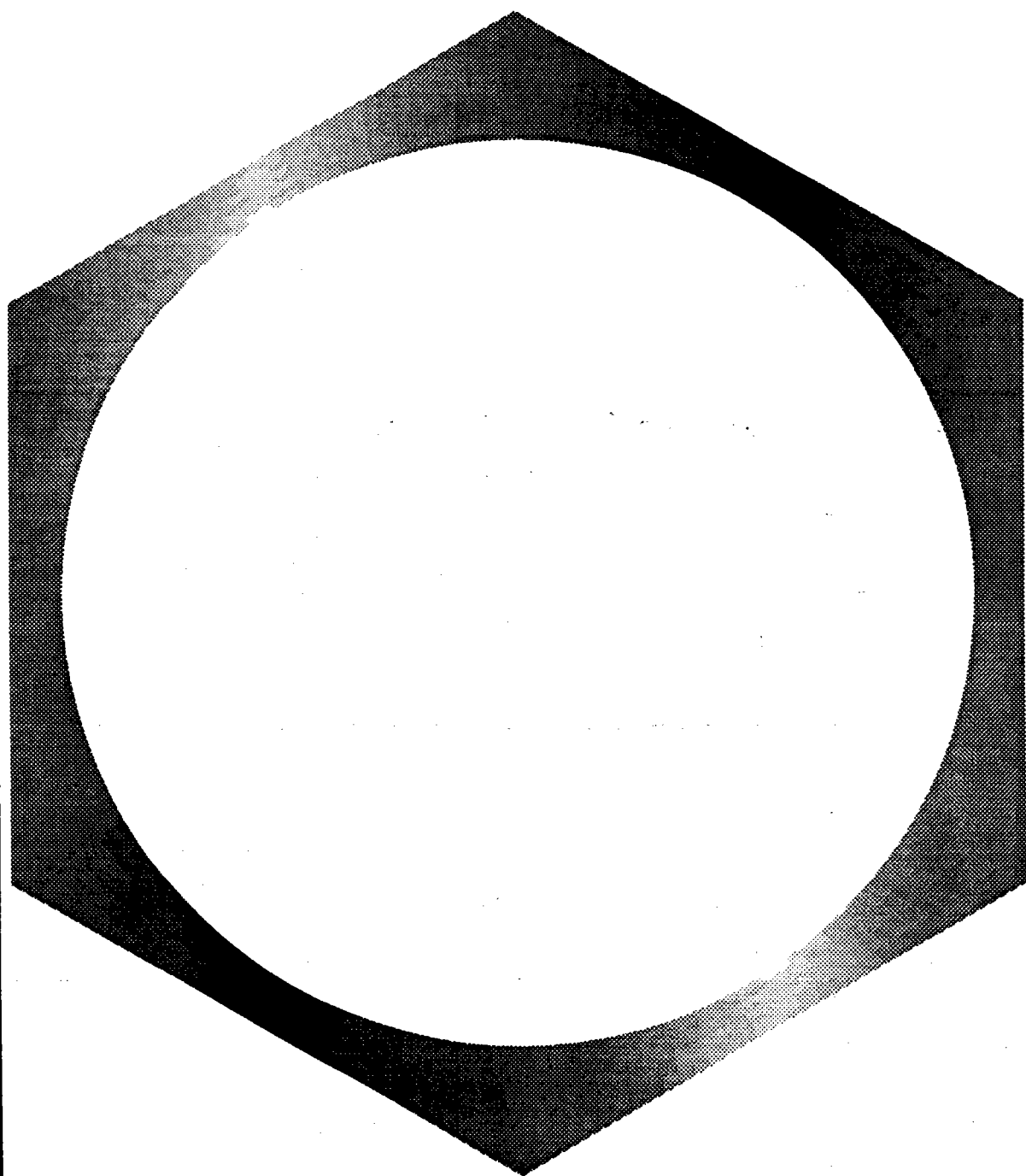
DEPLACEMENT MAXIMAL +0.450000

SIGMA MAX

+38200.80000000  
+35885.60000000  
+33570.40000000  
+31255.20000000  
+28940.00000000  
+26624.80000000  
+24309.61000000  
+21994.41000000  
+19679.21000000  
+17364.01000000  
+15048.81000000  
+12733.61000000  
+10418.41000000  
+8103.20900000  
+5788.01000000  
+3472.81300000  
+1157.61300000  
-1157.59000000  
-3472.78500000  
-5787.98800000  
-8103.18400000  
-10418.39000000  
-12733.59000000  
-15048.78000000  
-17363.98000000  
-19679.18000000  
-21994.38000000  
-24309.58000000  
-26624.78000000  
-28939.98000000  
-31255.18000000  
-33570.38000000  
-35885.57000000  
-38200.78000000

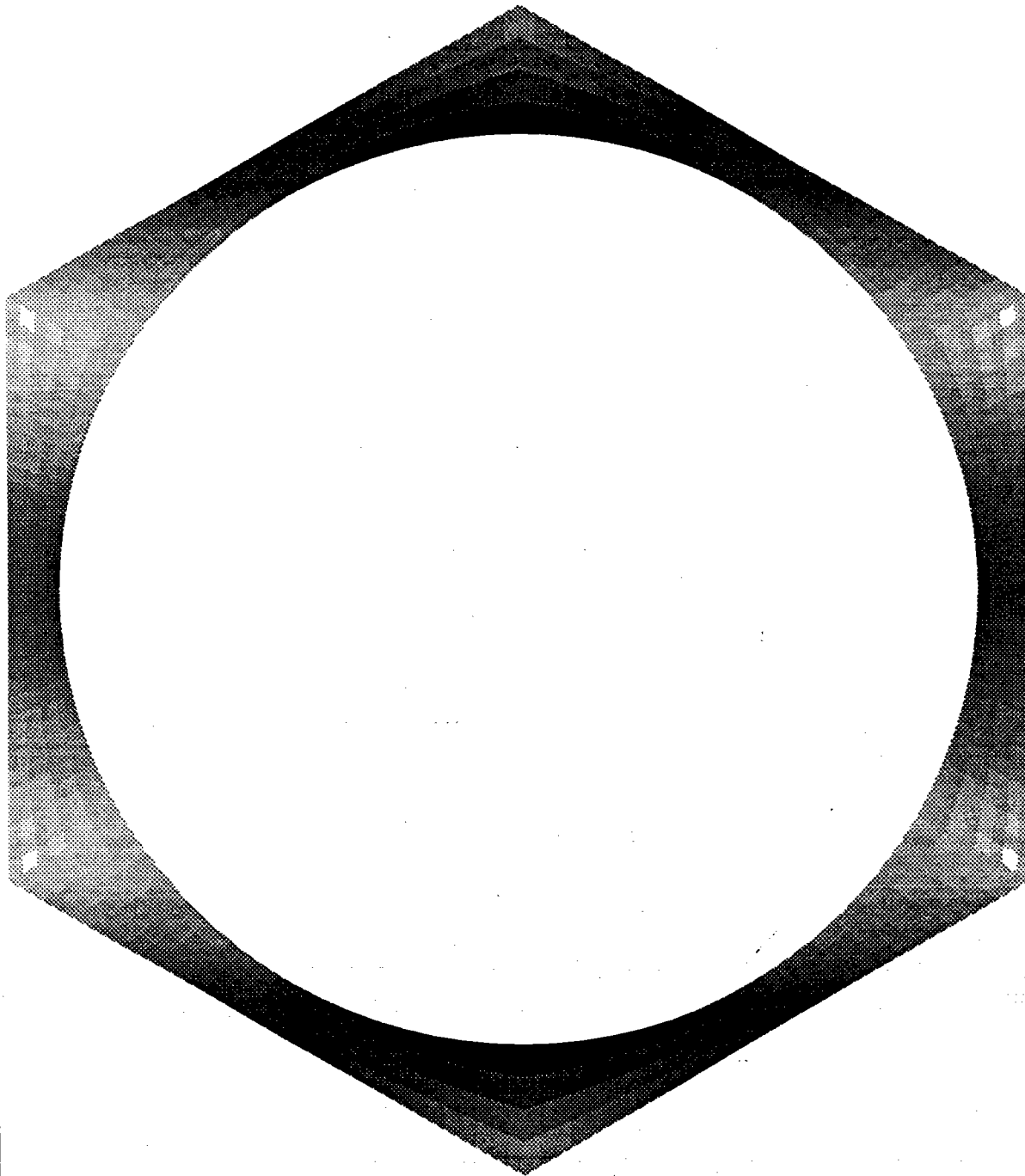
SIGMA MIN

SIGMAXX



|                 |
|-----------------|
| SIGMA MAX       |
| +37111.22000000 |
| +34862.05000000 |
| +32612.89000000 |
| +30363.73000000 |
| +28114.56000000 |
| +25865.39000000 |
| +23616.23000000 |
| +21367.07000000 |
| +19117.90000000 |
| +16868.74000000 |
| +14619.57000000 |
| +12370.41000000 |
| +10121.25000000 |
| +7872.08000000  |
| +5622.91600000  |
| +3373.75000000  |
| +1124.58600000  |
| -1124.57800000  |
| -3373.74200000  |
| -5622.90600000  |
| -7872.07400000  |
| -10121.23000000 |
| -12370.40000000 |
| -14619.57000000 |
| -16868.73000000 |
| -19117.89000000 |
| -21367.06000000 |
| -23616.22000000 |
| -25865.39000000 |
| -28114.55000000 |
| -30363.72000000 |
| -32612.88000000 |
| -34862.05000000 |
| -37111.21000000 |
| SIGMA MIN       |

SIGMAYY

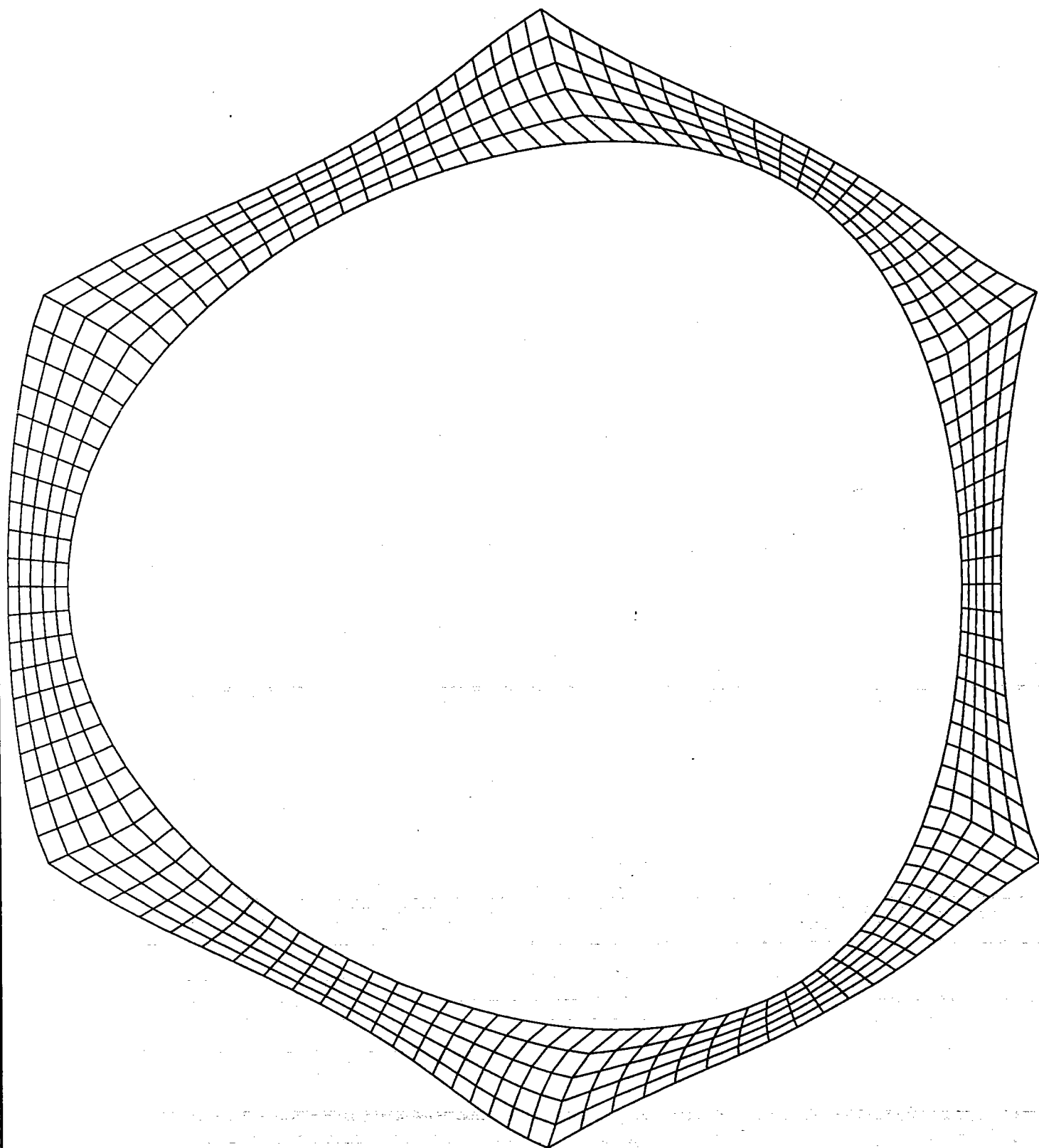


SIGMA MAX  
+16781.41000000  
+16311.14000000  
+15840.87000000  
+15370.59000000  
+14900.32000000  
+14430.05000000  
+13959.78000000  
+13489.51000000  
+13019.23000000  
+12548.96000000  
+12078.69000000  
+11608.42000000  
+11138.15000000  
+10667.87000000  
+10197.60000000  
+9727.33000000  
+9257.05800000  
+8786.78500000  
+8316.51400000  
+7846.24100000  
+7375.96900000  
+6905.69700000  
+6435.42600000  
+5965.15300000  
+5494.88100000  
+5024.60900000  
+4554.33700000  
+4084.06400000  
+3613.79300000  
+3143.52100000  
+2673.24900000  
+2202.97700000  
+1732.70500000  
+1262.43300000  
SIGMA MIN

SIGMAXY

**FIGURE 27 : Solution du problème au second ordre avec une cellule de base hexagonale**



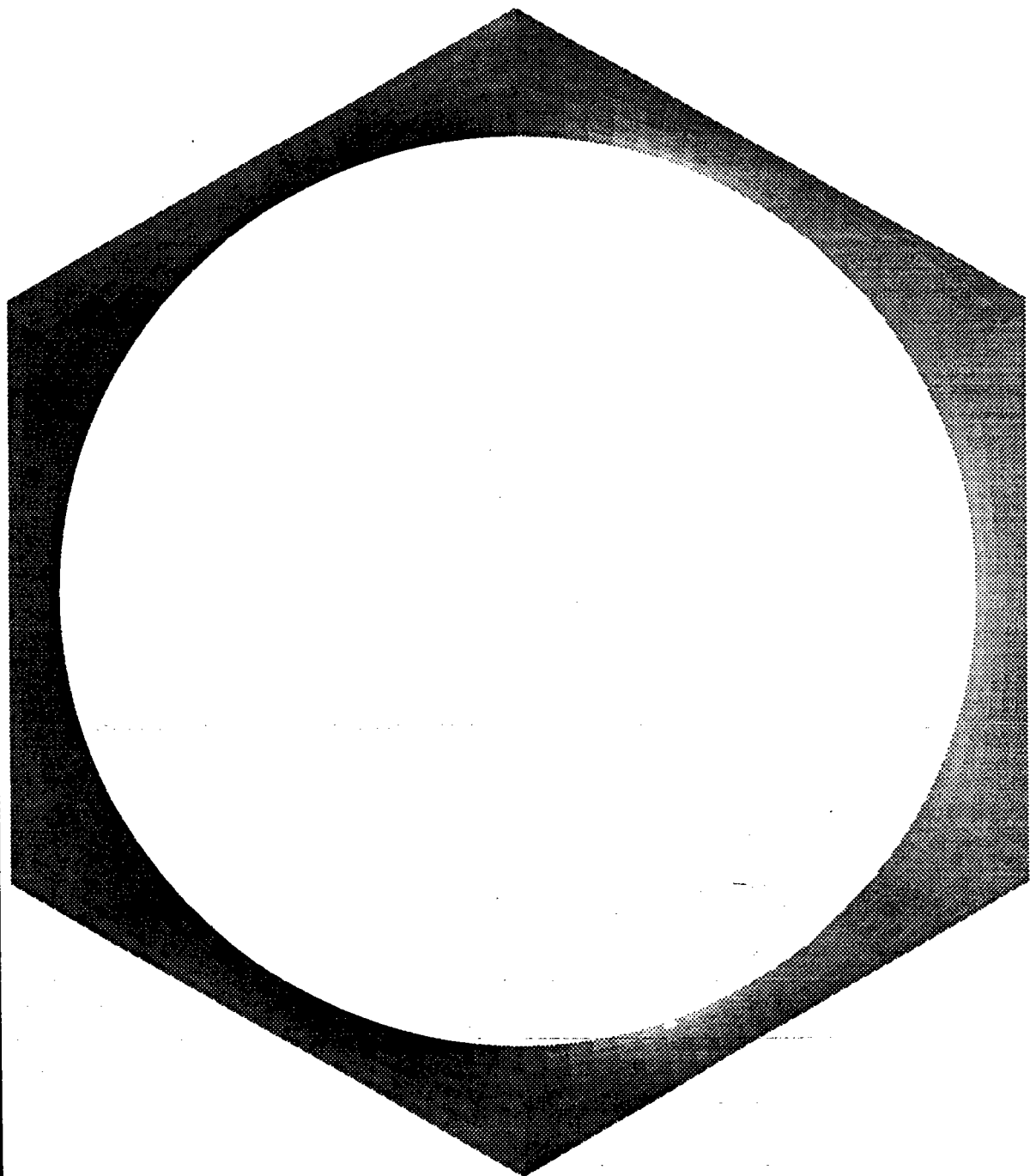


DEPLACEMENT MINIMAL +0.000000

DEPLACEMENT MAXIMAL +0.101250

2-33

L.P.M.M.  
UNIVERSITE DE METZ



SIGMA MAX

+2246.627000000  
+2110.468000000  
+1974.309000000  
+1838.150000000  
+1701.990000000  
+1565.831000000  
+1429.672000000  
+1293.513000000  
+1157.354000000  
+1021.195000000  
+885.035400000  
+748.876200000  
+612.717200000  
+476.558100000  
+340.398800000  
+204.239600000  
+68.0805700000  
-68.0786100000  
-204.237500000  
-340.397000000  
-476.556200000  
-612.715100000  
-748.874500000  
-885.033400000  
-1021.193000000  
-1157.352000000  
-1293.511000000  
-1429.670000000  
-1565.829000000  
-1701.988000000  
-1838.148000000  
-1974.307000000  
-2110.466000000  
-2246.625000000

SIGMA MIN

SIGMAXX

2-33

L.P.M.M.  
UNIVERSITE DE METZ

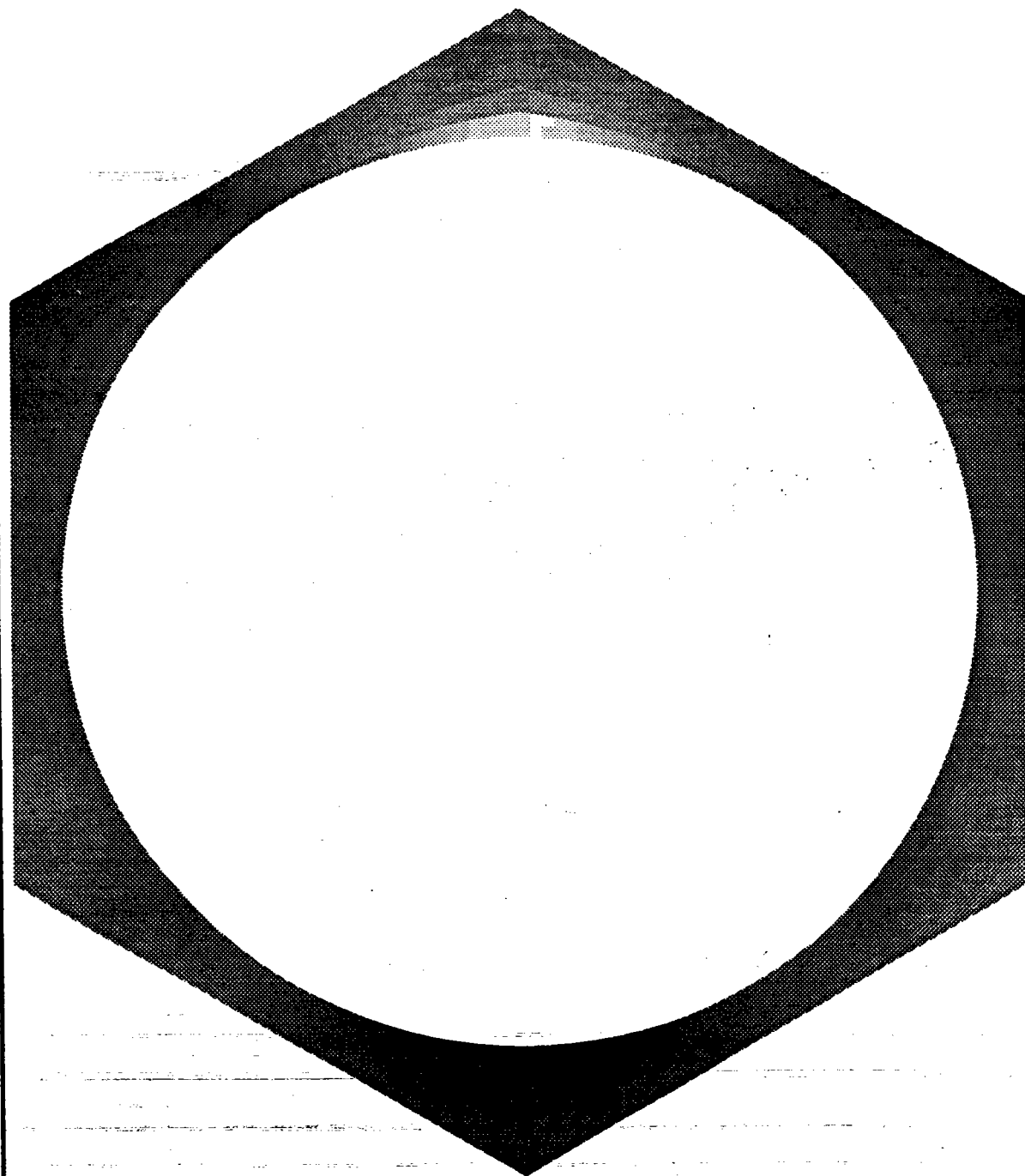
SIGMA MAX

+2203.718000000  
+2070.160000000  
+1936.601000000  
+1803.043000000  
+1669.484000000  
+1535.926000000  
+1402.367000000  
+1268.809000000  
+1135.250000000  
+1001.692000000  
+868.133500000  
+734.575200000  
+601.016700000  
+467.458300000  
+333.899800000  
+200.341300000  
+66.78296000000  
-66.77563000000  
-200.334000000  
-333.892600000  
-467.450900000  
-601.009300000  
-734.567600000  
-868.126200000  
-1001.685000000  
-1135.243000000  
-1268.802000000  
-1402.360000000  
-1535.918000000  
-1669.477000000  
-1803.035000000  
-1936.594000000  
-2070.152000000  
-2203.711000000  
SIGMA MIN

SIGMAYY

2-33

L.P.M.M.  
UNIVERSITE DE METZ



SIGMA MAX

+1768.07600000  
+1660.92000000  
+1553.76400000  
+1446.60800000  
+1339.45200000  
+1232.29600000  
+1125.14000000  
+1017.98400000  
+910.82750000  
+803.67140000  
+696.51540000  
+589.35940000  
+482.20310000  
+375.04710000  
+267.89100000  
+160.73500000  
+53.5788600000  
-53.5772700000  
-160.7333000000  
-267.8893000000  
-375.0454000000  
-482.2014000000  
-589.3574000000  
-696.5137000000  
-803.6699000000  
-910.8259000000  
-1017.9820000000  
-1125.1380000000  
-1232.2940000000  
-1339.4500000000  
-1446.6060000000  
-1553.7620000000  
-1660.9180000000  
-1768.0740000000

SIGMA MIN

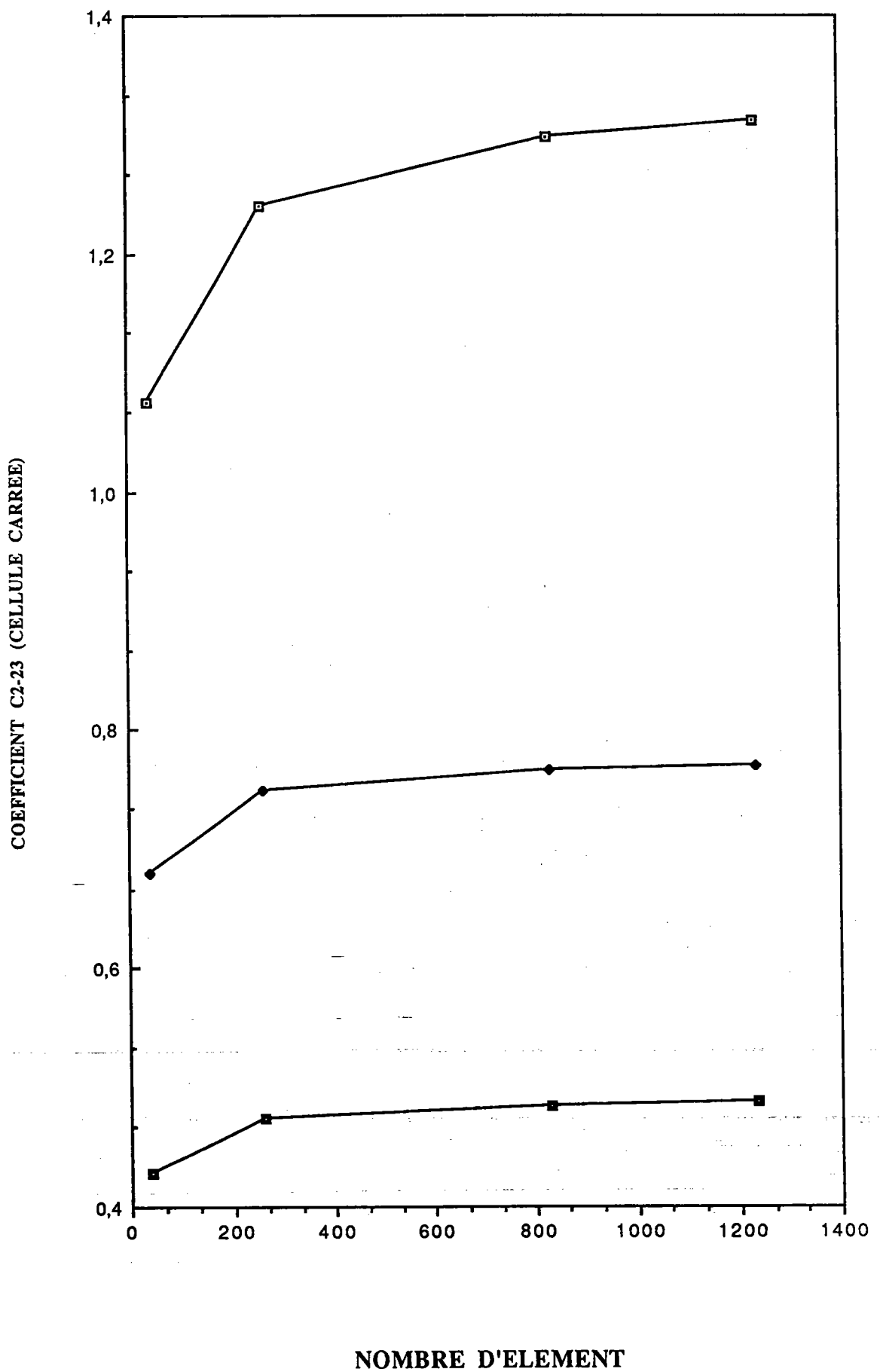
SIGMAXY

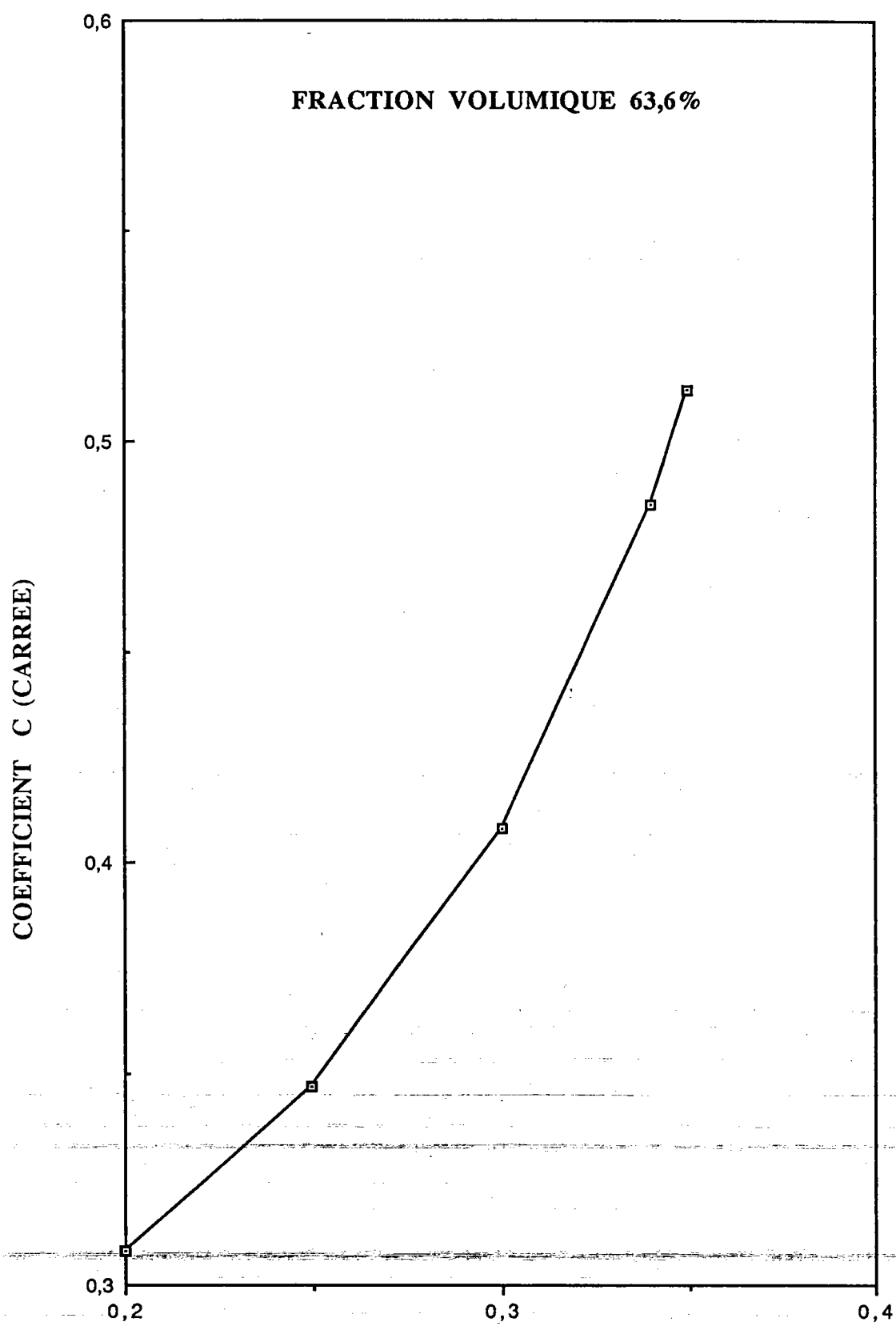
2-33

L.P.M.M.  
UNIVERSITE DE METZ

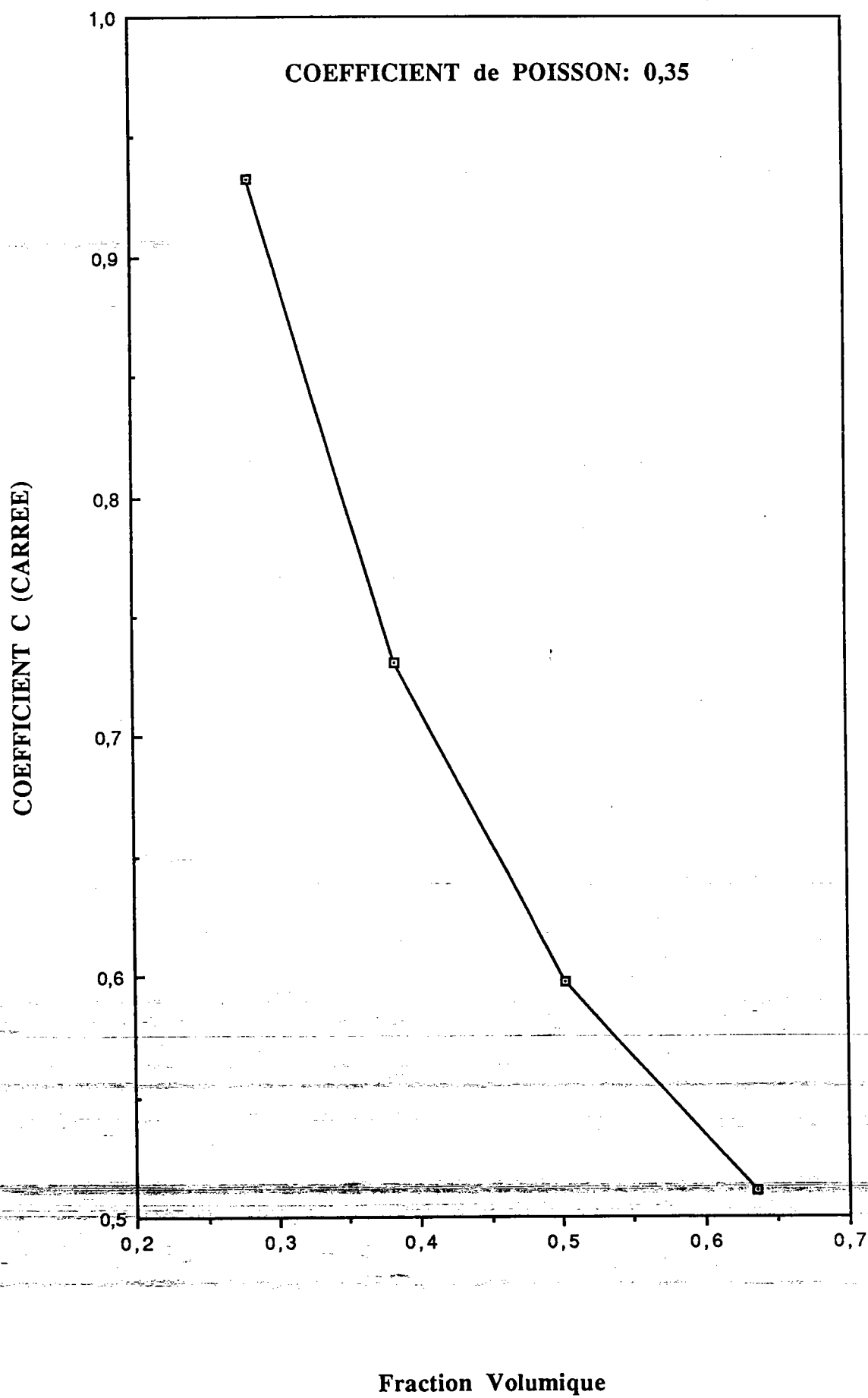
**FIGURE 28 : Evolution du coefficient C en fonction de la fraction volumique, de l'arrangement des fibres et du coefficient de Poisson de la matrice**

## CONVERGENCE DU CALCUL ELEMENT FINI



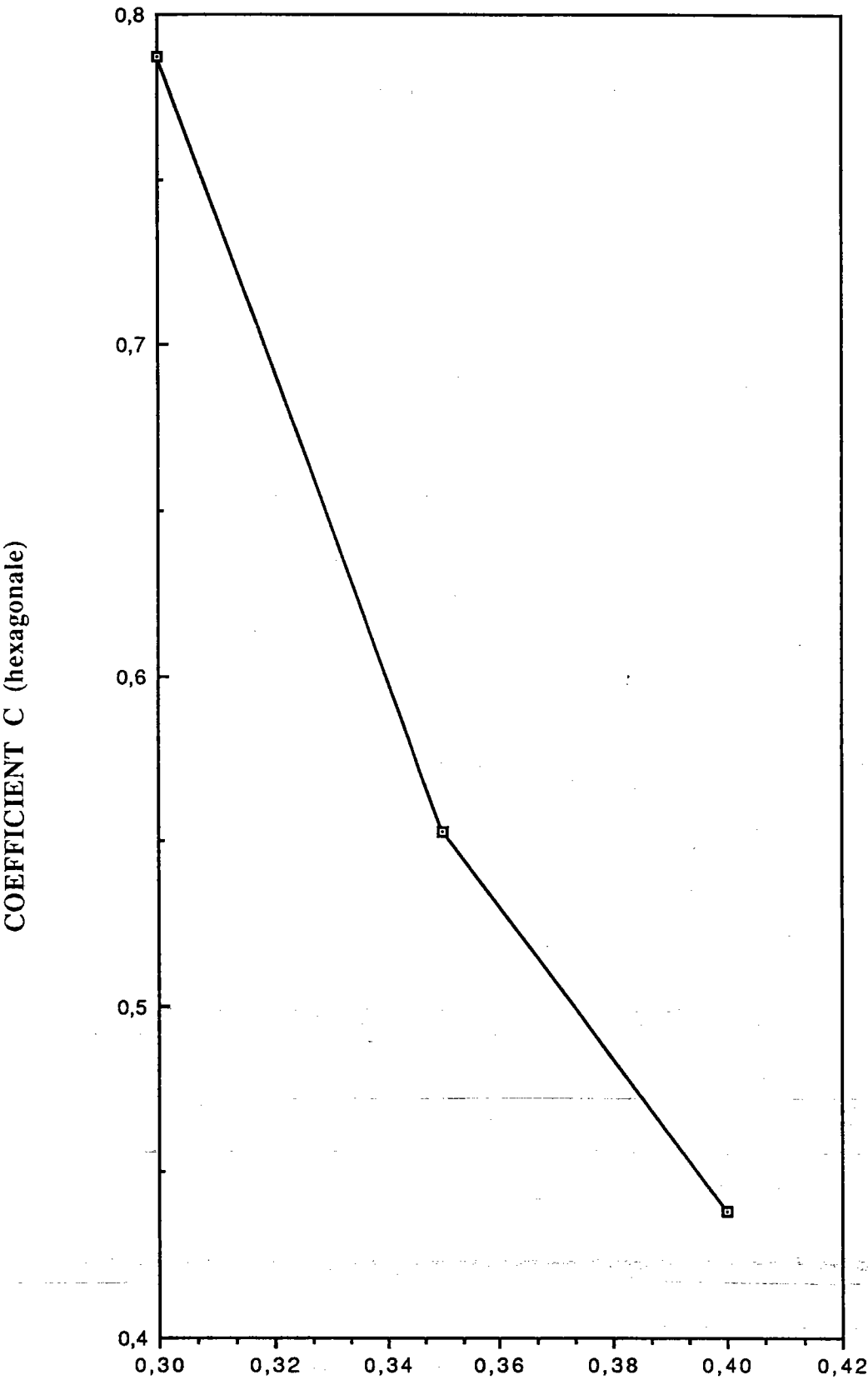


**COEFFICIENT de POISSON de la MATRICE**



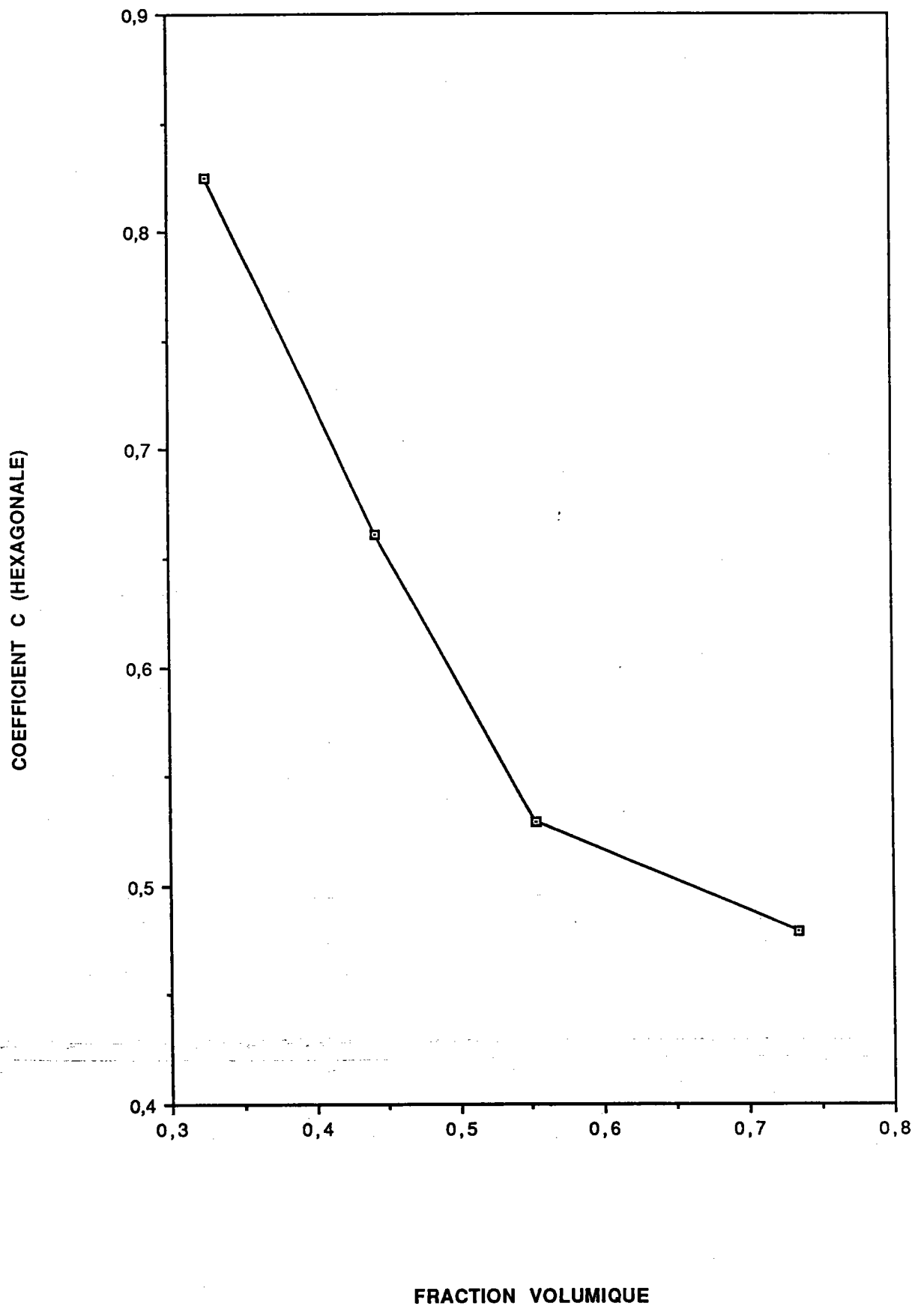


**FRACTION VOLUMIQUE : 58%**



**COEFFICIENT de POISSON de la MATRICE**

COEFFICIENT de POISSON = 0,35



#### d) Calcul numérique

Dans le cas des composites à fibres longues, ces dernières sont généralement cylindriques et deux types d'arrangement peuvent être proposés pour représenter le composite : régulier ou en quinconce (Fig.8), ce qui conduit à deux formes particulières de la cellule de base, carrée et hexagonale respectivement. L'étude des symétries des cellules de base effectuée par LENE[1984] permet de réduire au premier ordre le calcul au 1/4 d'une cellule de base carrée et au 1/6 dans le cas hexagonale. Au second ordre, le problème nous oblige à effectuer le calcul sur une demi cellule de base carrée et sur une cellule hexagonale complète car les axes d'isotropie ne correspondent pas avec les axes  $x_1$   $x_2$ . Il est intéressant d'utiliser ces symétries car les conditions de périodicité sont alors équivalentes à des déplacements imposés nuls. Sur les figures (24,25,26,27) sont représentées les solutions des problèmes aux premier et second ordres avec une cellule de base carrée et une cellule de base hexagonale.

Une fois le programme de résolution établi, il est très simple d'étudier l'influence des paramètres tels que : fraction volumique, arrangement des fibres et coefficient de Poisson sur ce coefficient. Sur les courbes de la figure (28) nous avons représenté l'évolution de ce coefficient en fonction des paramètres.

#### e) Calcul de la charge critique

La théorie de l'homogénéisation périodique nous a permis d'approcher au mieux la rigidité de la fondation caractérisée par le coefficient C bien que, dans la réalité, cette hypothèse de périodicité ne soit pas parfaitement vérifiée. De plus, l'utilisation de cette théorie nous a permis de montrer que la force de rappel était bien proportionnelle à  $\partial^2 v / \partial x_3^2$ , ce qui nous conduit à l'équation de la stabilité de la poutre écrite en terme de déplacement POTIER-FERRY[1985]:

$$E_f I_f \frac{\partial^4 v}{\partial x_1^4} + \sigma_e S_f \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} - C E_M S_f \frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2} = 0$$

Or, en recherchant le champ de déplacement sous la forme  $U^* = V(x_3) \sin(k x_1) x_2$ , nous obtenons une équation différentielle portant sur la fonction amplitude  $V(x_3)$

$$- C E_M S_f \frac{d^2 V}{d^2 x_3} + (- \sigma_e S_f k^2 + E_f I_f k^2) V = 0 \quad (23)$$

Bien évidemment, cette équation est insuffisante pour déterminer la fonction  $V(x_3)$ . Il est nécessaire d'y ajouter les conditions aux limites imposées sur les faces supérieures et inférieures du pli. Or, ces dernières dépendent de la position du pli dans le stratifié ainsi que de l'orientation des couches supérieures et inférieures. Notre modèle met donc en évidence un effet de structure à l'échelle du pli. Ceci est nouveau, en comparaison des modèles microscopiques proposés dans la littérature. Mais tout le travail reste à faire pour appréhender l'impact de la séquence sur le microflambage et le rôle certain que joue l'interface entre les plis.

Dans un premier temps, pour représenter toutes les configurations, nous introduisons une épaisseur  $H$  associée au pli qui caractérise cet effet de structure. Par conséquent, la fonction d'amplitude est recherchée sous la forme :

$$V(x_3) = \sin\left(\frac{\pi x_3}{H}\right) \quad (24)$$

où  $H$  est assimilée à une longueur d'onde dans l'épaisseur qui est fonction des conditions aux limites. Sur la figure (29), nous proposons quelques valeurs de ce paramètre  $H$  lorsque le pli unidirectionnel chargé en compression se trouve dans diverses configurations. Pour obtenir ces valeurs, il nous a fallu modéliser l'interaction entre les plis. Par exemple, si le microflambage apparaît près d'un bord libre, il est certain que les fibres près de ce bord posséderont le déplacement transversal maximal. Par contre, à l'interface entre le pli unidirectionnel et un pli à  $90^\circ$ , les fibres auront quelques difficultés à se déplacer transversalement, ce que nous modélisons par un encastrement. La proximité d'un pli orienté à  $45^\circ$  par rapport au chargement conduit certainement à une influence intermédiaire à celle du bord libre et du pli à  $90^\circ$ .

Avec cette modélisation simple de l'impact de la séquence sur la fonction d'amplitude, nous pouvons calculer la charge critique. En injectant (24) dans l'équation différentielle (23), nous obtenons le polynôme caractéristique en  $k$  suivant :

$$C E_M S_f \frac{\pi^2}{H^2} - \sigma_e S_f k^2 + E_f I_f k^4 = 0$$

$$\text{où } \sigma_e S_f = \frac{C E_M S_f \frac{\pi^2}{H^2} + E_f I_f k^4}{k^2}$$

Pour obtenir la charge critique, il suffit de minimiser la fonction  $\sigma_e(k)$  par rapport au nombre d'onde  $k$  suivant la direction  $x_1$ . Ce minimum est obtenu en annulant la dérivée partielle de  $\sigma_e$  par rapport à  $k$

$$\frac{\partial \sigma_e}{\partial k} = 0 \Rightarrow k^4 = C \frac{E_M}{E_f} \left( \frac{\pi}{H r_{gf}} \right)^2 \quad \text{où} \quad r_{gf} = \sqrt{\frac{I_f}{S_f}}$$

La longueur d'onde dans la direction  $x_1$  se présente sous la forme :

$$l = 2 \sqrt{\pi} \sqrt[4]{\frac{E_f}{C E_M}} \sqrt{r_{gf} H}$$

La charge correspondant au minimum est, par conséquent, fonction des caractéristiques mécaniques de la fibre et de la matrice de la géométrie microscopique, de la fraction volumique et de l'effet de structure :

$$\sigma_{ec} = \sqrt{C E_M E_f} \pi r_f / H$$

#### f) Discussion du résultat

Certes, il est très intéressant d'obtenir la charge critique d'apparition du microflambage en fonction de paramètres microscopiques et macroscopiques, mais elle n'est pas, à ce stade, comparable à la charge réelle. En effet, rappelons les objectifs de notre étude : l'idée principale était de quantifier l'impact de la répartition de la déformation  $\epsilon_{23}$  dans le plan transverse à l'échelle du pli. Pour cela, nous avons volontairement négligé la déformation  $\epsilon_{12}$  dans le plan des fibres qui nous conduirait à des charges critiques du même ordre que celles de ROSEN. Mais nous avons obtenu une longueur d'onde caractéristique différente de la longueur de l'éprouvette. Pour ce qui est de la valeur critique, il est intéressant de comparer, sur un exemple, la charge critique (ou déformation critique) que nous avons obtenue avec celle de ROSEN et les résultats expérimentaux de flexion quatre points d'ALLIX *et al.* . Nous avons tout d'abord estimé, par la loi des mélanges, les caractéristiques mécaniques des constituants d'une plaque stratifiée en carbone epoxy  $E_f = 240$  GPa ;  $E_M = 15$  GPa ;  $\nu_M = 0,35$  ;  $f = 0,64$  ;  $2r_f = 7,5$  ;  $t = 125$  (épaisseur d'un pli pour un empilement de 24 plis). Dans le cas d'une cellule de base carrée, la résolution par éléments finis des deux problèmes nécessaires à l'obtention du coefficient C nous a donné  $C = 0,51$  (Fig. 28). Si le microflambage apparaît dans un seul pli superficiel, l'épaisseur caractéristique est alors supposée être égale au double de l'épaisseur, ce qui nous conduit à une déformation critique de 0,8%. Par contre, si le microflambage apparaît dans la demi épaisseur de la plaque (unidirectionnel en flexion pure), la déformation critique ne vaut plus que 0,14%. En résumé, ce simple exemple nous a permis de quantifier l'influence directe de la répartition de la déformation sur la charge critique. Si l'on compare aux contraintes de ROSEN, la différence est très importante. Ceci nous permet d'espérer que l'on peut expliquer le caractère non linéaire élastique du comportement en compres-

sion ou la rupture par un microflambage. Toutefois, un effort est encore à faire puisque la prise en compte de la déformation de cisaillement dans le plan des fibres (1-2) va nécessairement augmenter la déformation critique, même si l'on prend soin de la répartir à l'échelle du pli.

# EFFET DE STRUCTURE

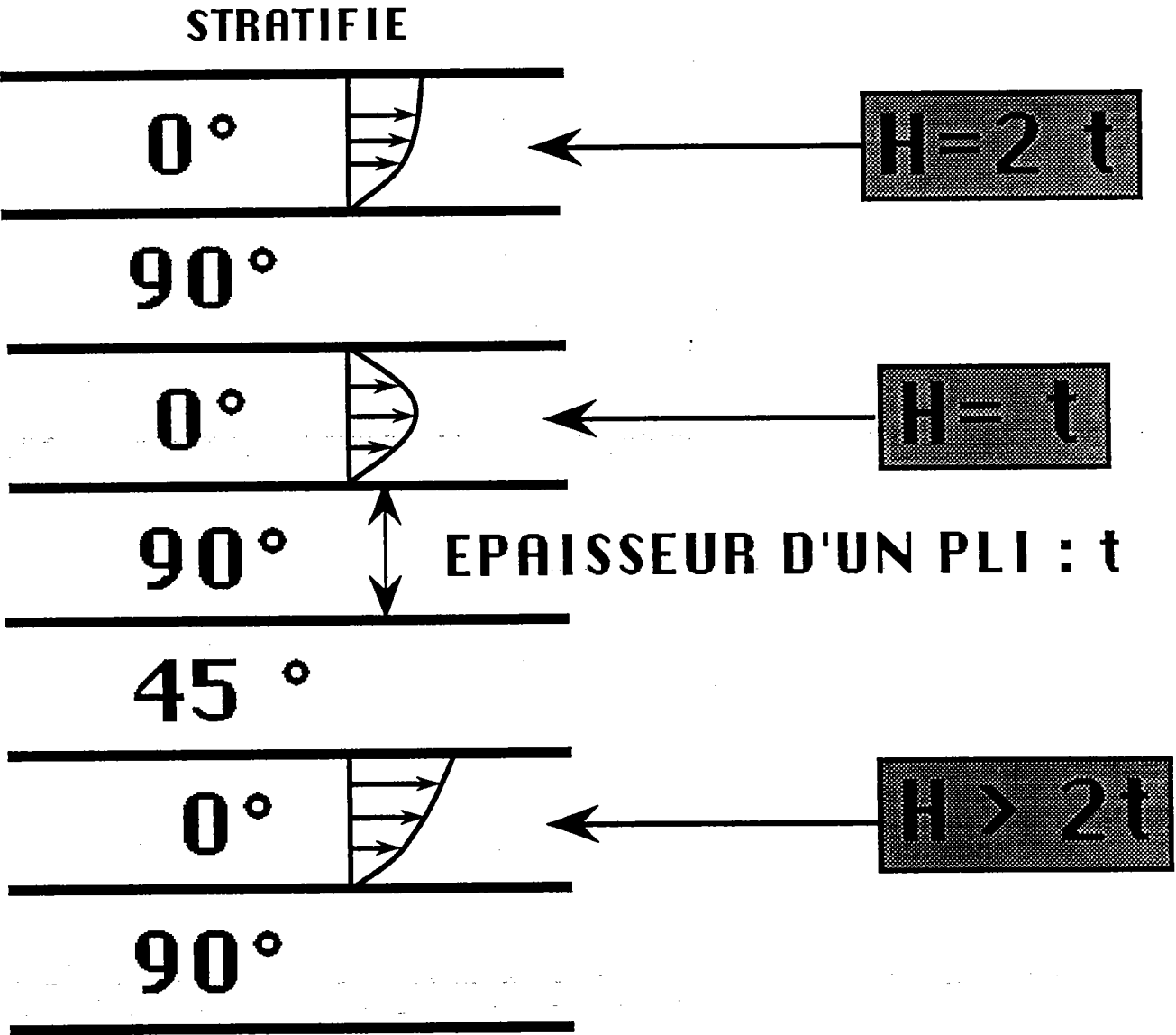


FIGURE 29 : Valeurs de  $H$  proposées pour représenter l'influence de la séquence d'empilement

### 3. SECOND MODELE

Dans un premier temps, nous nous limitons au même cadre d'étude que dans le cas précédent, mais nous proposons un champ de déplacement plus riche, qui devrait entraîner une diminution sensible de cette charge critique.

#### a) Second modèle (plan transverse)

L'idée de ce second modèle nous est apparue en étudiant plus particulièrement les fibres se situant près d'un bord libre ou au centre d'un pli interne de forte épaisseur. En effet, pour ces deux cas, il est incontestable qu'un déplacement des fibres suivant la direction de l'épaisseur ( $x_3$ ) est tout à fait possible ; de plus, un tel champ est certainement moins sévère du point de vue énergétique que celui proposé dans le premier modèle. En supposant que toutes les fibres flambent en phase, la forme générale du champ de déplacement que nous proposons se présente sous la forme:

$$U^* = V_o(x_3) \cos k_2 x_2 \sin k_1 x_1 + W_o(x_3) \sin k_2 x_2 \sin k_1 x_1$$

où  $k_2$  est la longueur d'onde suivant la direction  $x_2$  (Fig. 30).

Comme dans le second modèle, nous retrouvons des amplitudes fonction de la position de la fibre dans l'épaisseur du pli, qui vont dépendre bien évidemment des conditions aux limites qui sont imposées sur les faces supérieures et inférieures, qu'il sera nécessaire de préciser. Le champ de déformation induit dans la matrice par le déplacement supposé des fibres est plus complexe que dans le cas précédent :

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x_1} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x_3} + \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial w}{\partial x_3} \\ \text{Sym} & & \end{bmatrix} \quad (25)$$

avec:  $v(x_3, x_2, x_1) = V_o(x_3) \cos k_2 x_2 \sin k_1 x_1$

$w(x_3, x_2, x_1) = W_o(x_3) \sin k_2 x_2 \sin k_1 x_1$

## SECOND MODEL:

CHAMP de DEPLACEMENT :

$$U = V(x_3) \cos(k_2 x_2) \sin(k_1 x_1) X_2$$

$$W(x_3) \sin(k_2 x_2) \sin(k_1 x_1) X_3$$

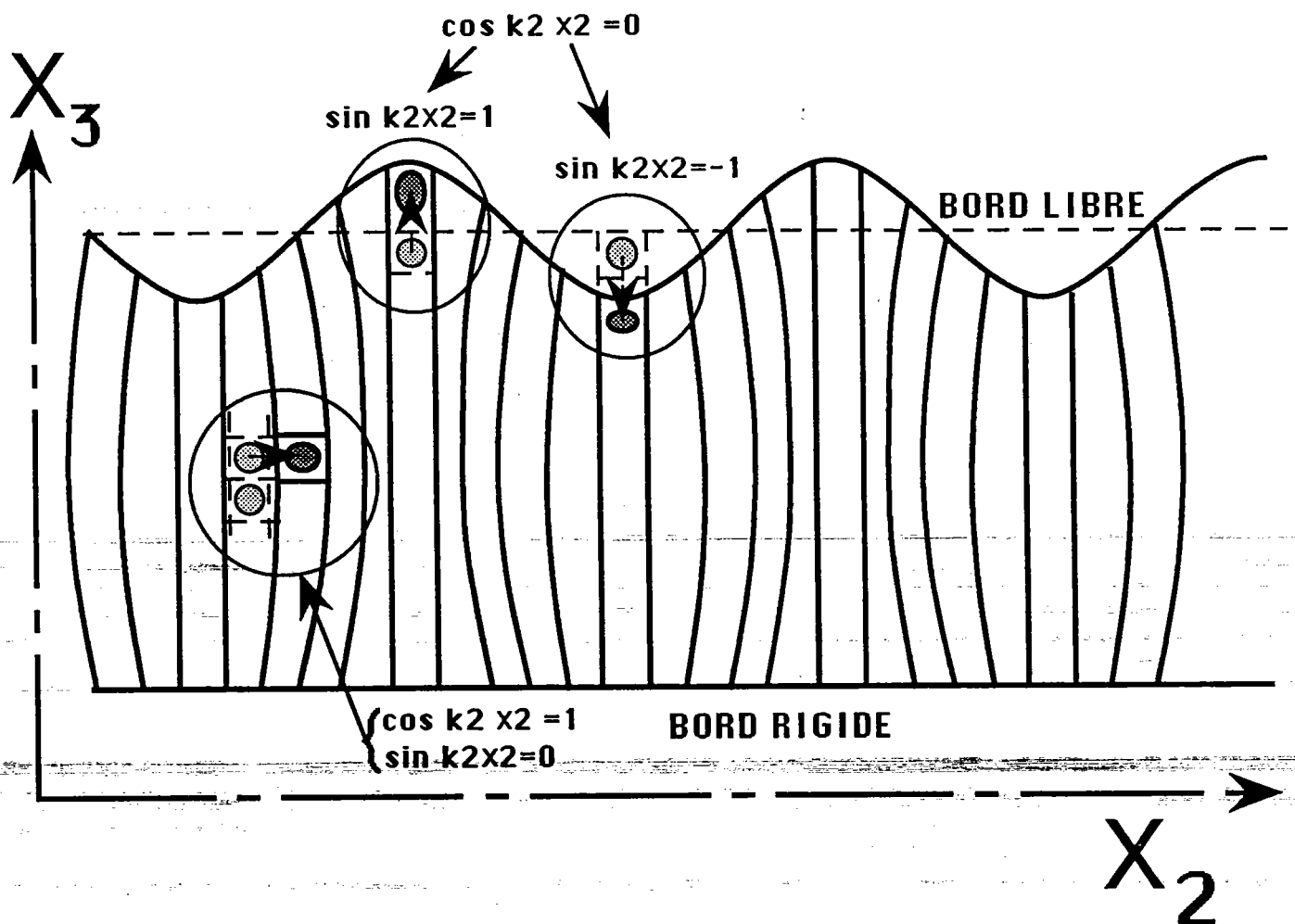


FIGURE 30 : Champ de déplacement proposé dans le second modèle



### b) Calcul de la force de rappel

Pour ce second modèle, il est inutile d'espérer obtenir directement l'expression de la force de rappel en fonction de  $V_o$  et  $W_o$ . Par contre, la théorie d'homogénéisation périodique qui nous a permis de mettre en place cette relation dans le cas du premier modèle devrait nous permettre de résoudre le problème. En prenant en compte les remarques présentées au début du paragraphe qui, nous le rappelons, consiste à omettre volontairement les déformations hors du plan transverse (2-3), il est possible de limiter l'étude au plan (2-3) où la force de rappel agissant sur une fibre possède deux composantes suivant les directions  $x_2$  et  $x_3$  qui seront notées  $F_2$  et  $F_3$ .

### Homogénéisation périodique

Les données nécessaires pour déterminer les expressions de  $F_2$  et  $F_3$  en fonction de  $V_o$  et  $W_o$  sont le champ de déplacement macroscopique et le champ de déformation qui lui est associé. Pour les mêmes raisons exprimées au paragraphe précédent (2), nous nous plaçons dans le plan d'équation  $x_1 = 0$  où le champ de déformation macroscopique est égal à :

$$\epsilon(u_o) = \begin{bmatrix} -V_o k_2 \sin k_2 x_2 & \frac{1}{2} \left( \frac{dV_o}{dx_3} + k_2 W_o \right) \cos k_2 x_2 \\ \frac{dW_o}{dx_3} \sin k_2 x_2 & \end{bmatrix}$$

### Premier ordre

Comme au premier ordre, le champ de déplacement microscopique  $u_1(x,y)$  dépend linéairement de la déformation macroscopique ; il s'exprime sous cette forme :

$$u_1(x,y) = -V_o k_2 \sin k_2 x_2 U_1^{22}(y) + \frac{dW_o}{dx_3} \sin k_2 x_2 U_1^{33}(y) + \frac{1}{2} \left( \frac{dV_o}{dx_3} + k_2 W_o \right) \cos k_2 x_2 U_1^{23}(y) + c(x)$$

Ce champ de déplacement est défini à une constante additive près, que l'on détermine en annulant le déplacement microscopique de corps rigide de la fibre qui est supposée indéformable :

$$c(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{dV_o}{dx_3} - k_2 W_o \right) \cos k_2 x_2 (-f y_3 y_2 + f y_2 y_3)$$

Le système (15) est, par conséquent, découpé en trois problèmes qui représentent respectivement les réponses microscopiques à des déformations macroscopiques simples planes ( $\epsilon_{22}$ ,  $\epsilon_{33}$ ,  $\epsilon_{23}$ ). Ils se présentent tous sous une forme commune qui est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div } N^{kh} = 0 \\ N^{kh} = L_M \epsilon_y (P^{kh} + U^{kh}) \\ U_1^{kh} \text{ Y-périodique} \\ \epsilon_y (P^{kh} + U_1^{kh}) = 0 \\ N^{kh}(n) \text{ Y-antipériodique} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{dans la matrice} \\ \\ \text{dans la fibre} \\ \text{où } kh = 22, 33, 23 \end{array}$$

et  $\sigma_o = \epsilon_x^{kh}(u_o) N^{kh}$

Nous proposons une forme légèrement différente qui simplifie la résolution par la méthode des Eléments Finis :

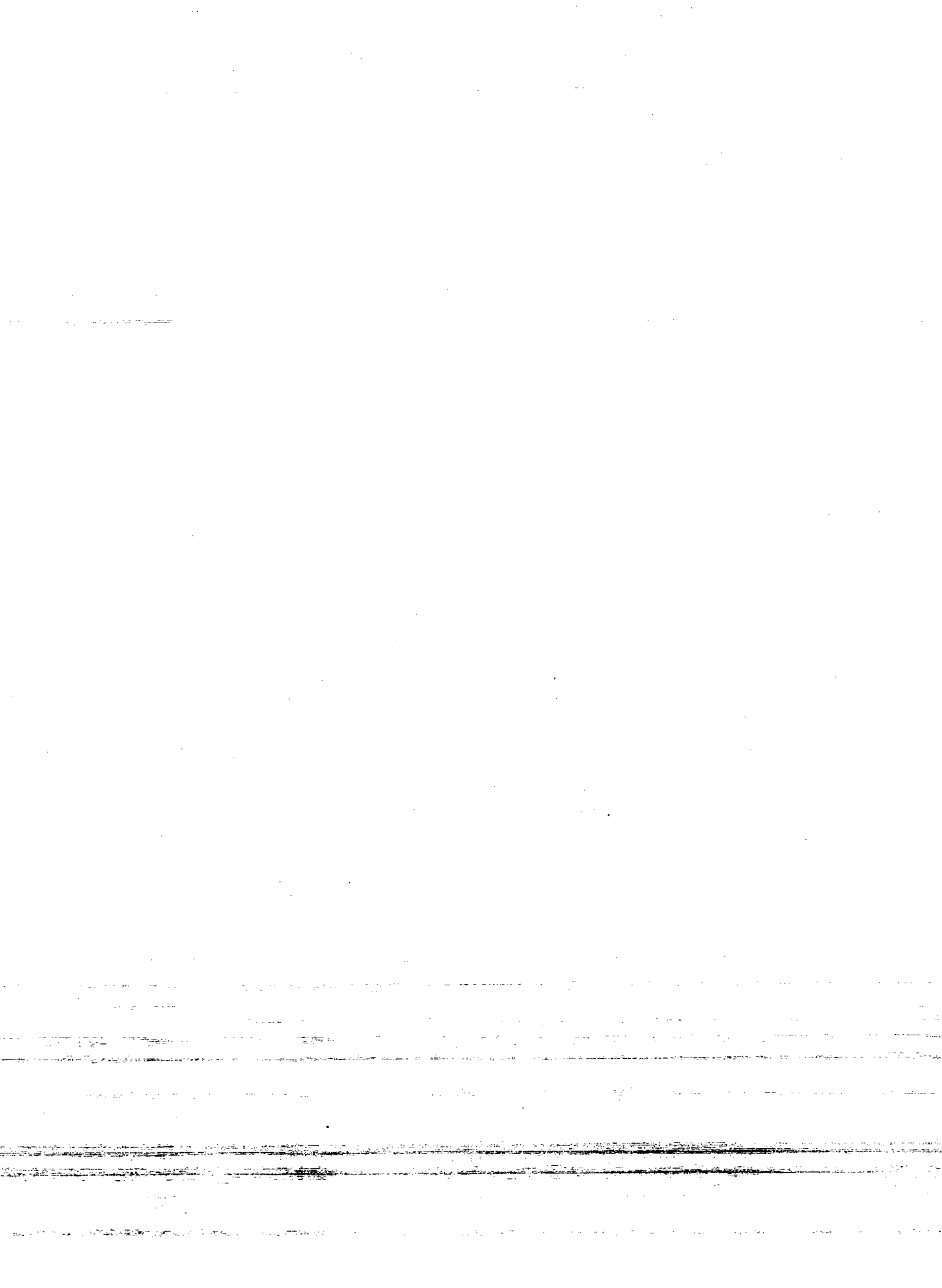
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div}_y \hat{O}_o^{kh} = 0 \\ \hat{O}_o^{kh} = L_M \epsilon_y (U_1(y)) \\ \hat{O}_o(n) \text{ est Y-antipériodique} \\ U_1^{kh}(y) \text{ Y-périodique} \end{array} \right\} \text{ dans la matrice}$$

à l'interface

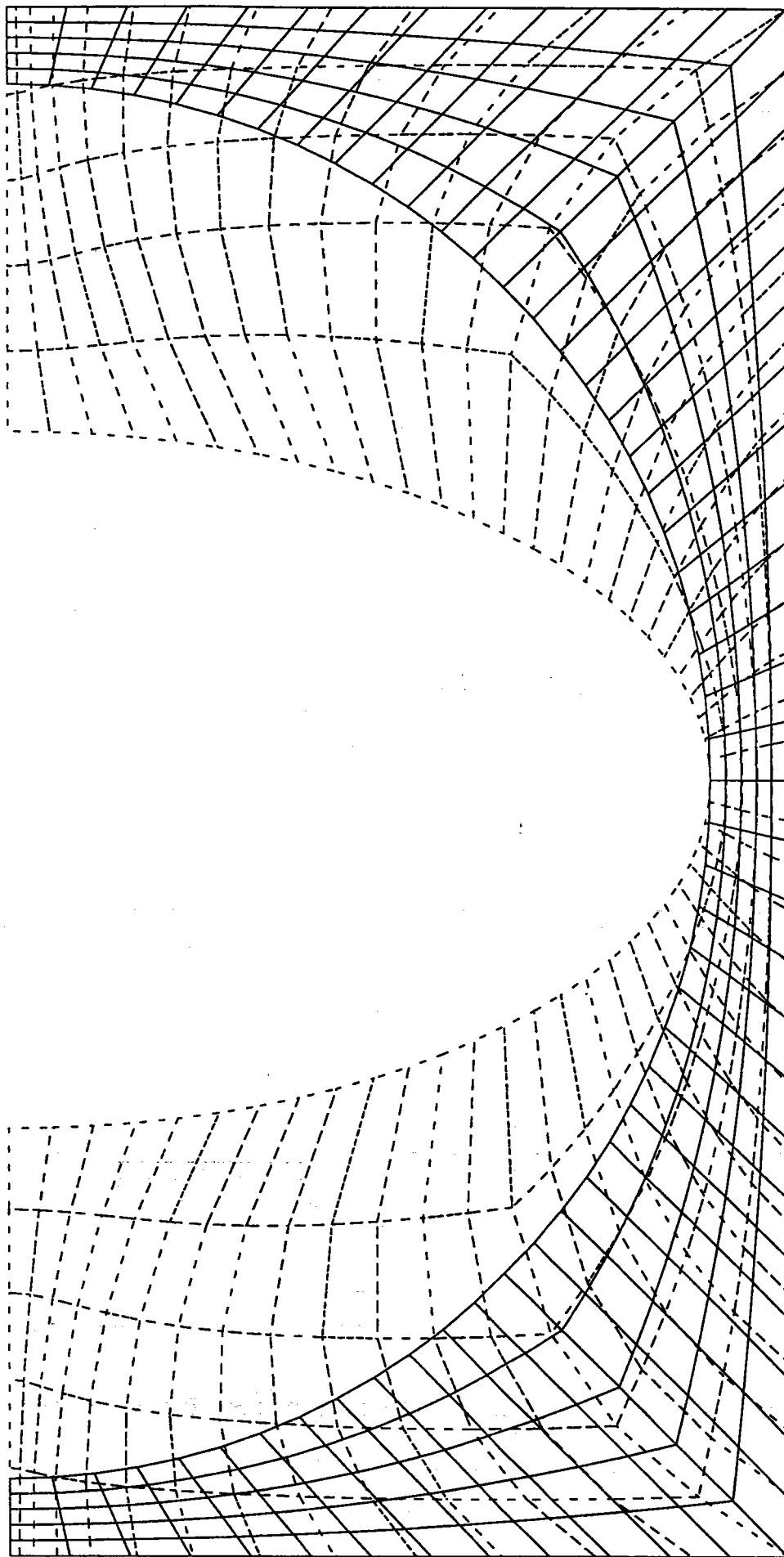
$$\begin{aligned} U_1^{22}(\partial\phi) &= -f y_2 y_2 \\ U_1^{33}(\partial\phi) &= -f y_3 y_3 \\ U_1^{23}(\partial\phi) &= -f y_3 y_2 - f y_2 y_3 \end{aligned}$$

Du point de vue informatique, la résolution de ces trois problèmes est simple et nécessite peu de temps de calcul. Effectivement, entre ces trois problèmes, seul le déplacement imposé à l'interface diffère ; par conséquent, il est nécessaire de construire et de décomposer une seule fois la matrice de rigidité, puis d'effectuer 3 résolutions avec des seconds membres différents. Sur les figures (24,25,31,32,33,34) sont représentés les champs de déplacement  $U_1^{kh}$  et  $\hat{O}_o^{kh}$  pour chaque problème dans le cas d'une cellule de base carrée et hexagonale. Il est intéressant de remarquer que pour une cellule de base carrée, les symétries de cette cellule combinées avec l'isotropie transverse de la matrice, le problème (22) est le symétrique du problème (33) par rapport à la droite d'équation  $y_2 = -y_3$ , ceci réduisant encore le temps de calcul. Malheureusement, comme dans le premier modèle, il est inutile d'espérer s'arrêter au premier ordre puisque les conditions de périodicité entraînent la nullité de la force de rappel.

**FIGURE 31 : Solution du problème 22 cas d'une cellule de base carrée**

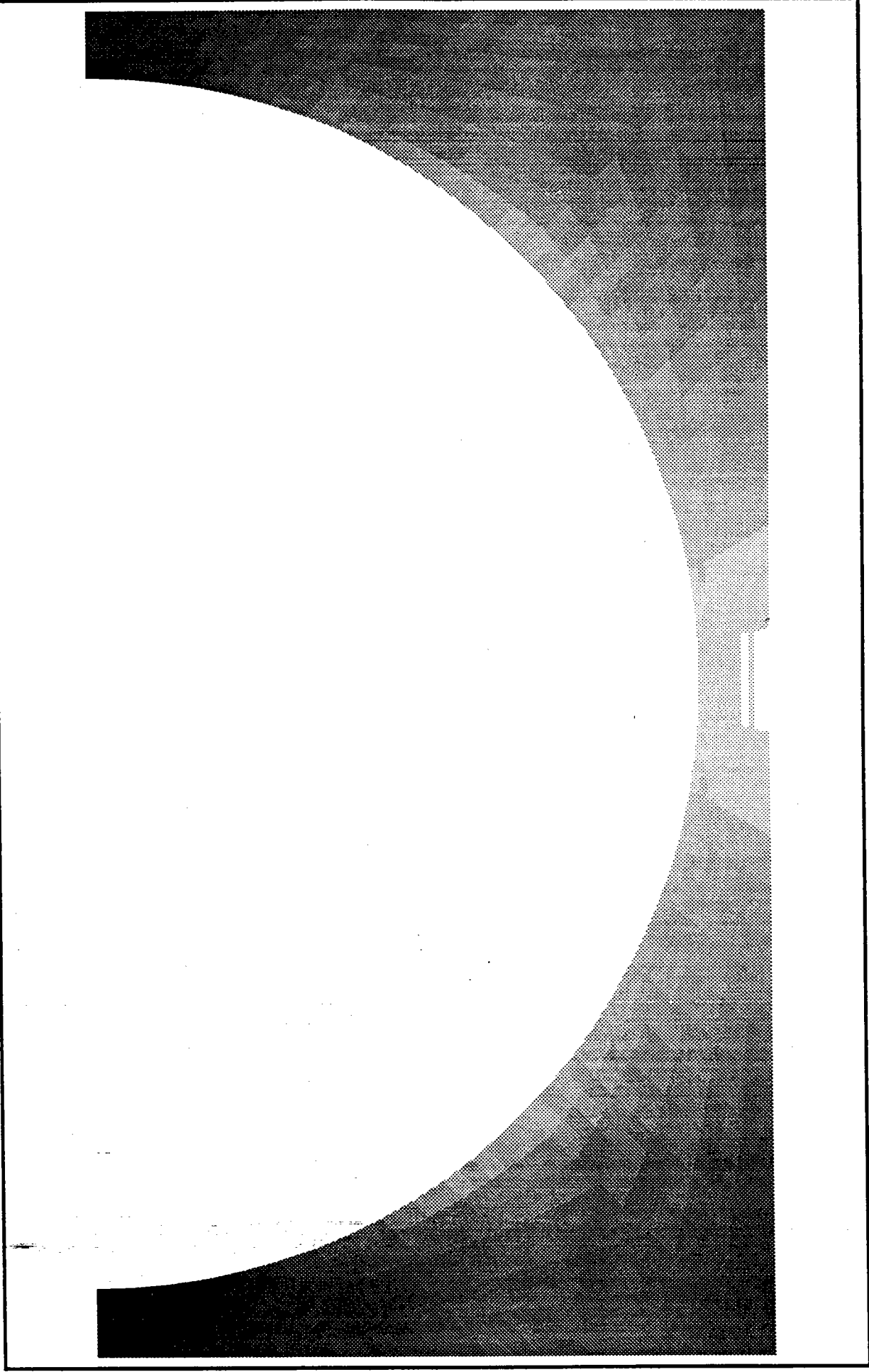


**FIGURE 32 : Solution du problème 33 cas d'une cellule de base carrée**



DEPLACEMENT MINIMAL +0.000000

DEPLACEMENT MAXIMAL +0.450000



SIGMA MAX

+25683.30000000  
+24825.07000000  
+23966.84000000  
+23108.61000000  
+22250.38000000  
+21392.16000000  
+20533.93000000  
+19675.70000000  
+18817.47000000  
+17959.24000000  
+17101.01000000  
+16242.78000000  
+15384.56000000  
+14526.33000000  
+13668.10000000  
+12809.87000000  
+11951.64000000  
+11093.41000000  
+10235.18000000  
+9376.95400000  
+8518.72700000  
+7660.49800000  
+6802.26800000  
+5944.03900000  
+5085.81300000  
+4227.58200000  
+3369.35400000  
+2511.12700000  
+1652.89600000  
+794.66800000  
-63.5605500000  
-921.7891000000  
-1780.01800000  
-2638.24600000

SIGMA MIN

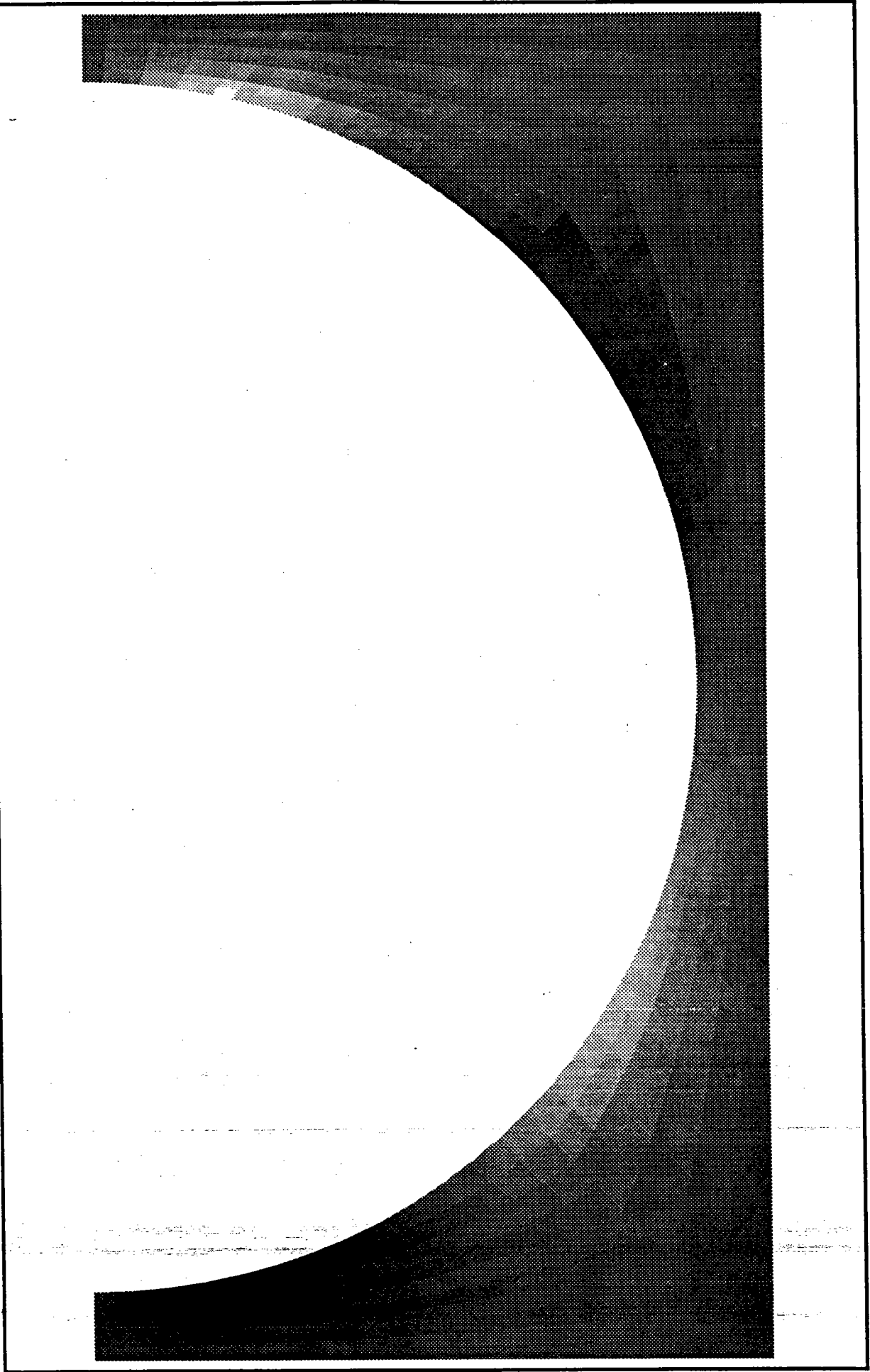
SIGMAXX

SIGMA MAX

+52012.11000000  
+50266.11000000  
+48520.12000000  
+46774.12000000  
+45028.13000000  
+43282.13000000  
+41536.13000000  
+39790.14000000  
+38044.14000000  
+36298.14000000  
+34552.15000000  
+32806.15000000  
+31060.16000000  
+29314.16000000  
+27568.16000000  
+25822.17000000  
+24076.17000000  
+22330.18000000  
+20584.18000000  
+18838.18000000  
+17092.19000000  
+15346.19000000  
+13600.20000000  
+11854.20000000  
+10108.20000000  
+8362.20700000  
+6616.21100000  
+4870.21500000  
+3124.21900000  
+1378.22300000  
-367.7734000000  
-2113.77000000  
-3859.76600000  
-5605.76200000

SIGMA MIN

SIGMAYY



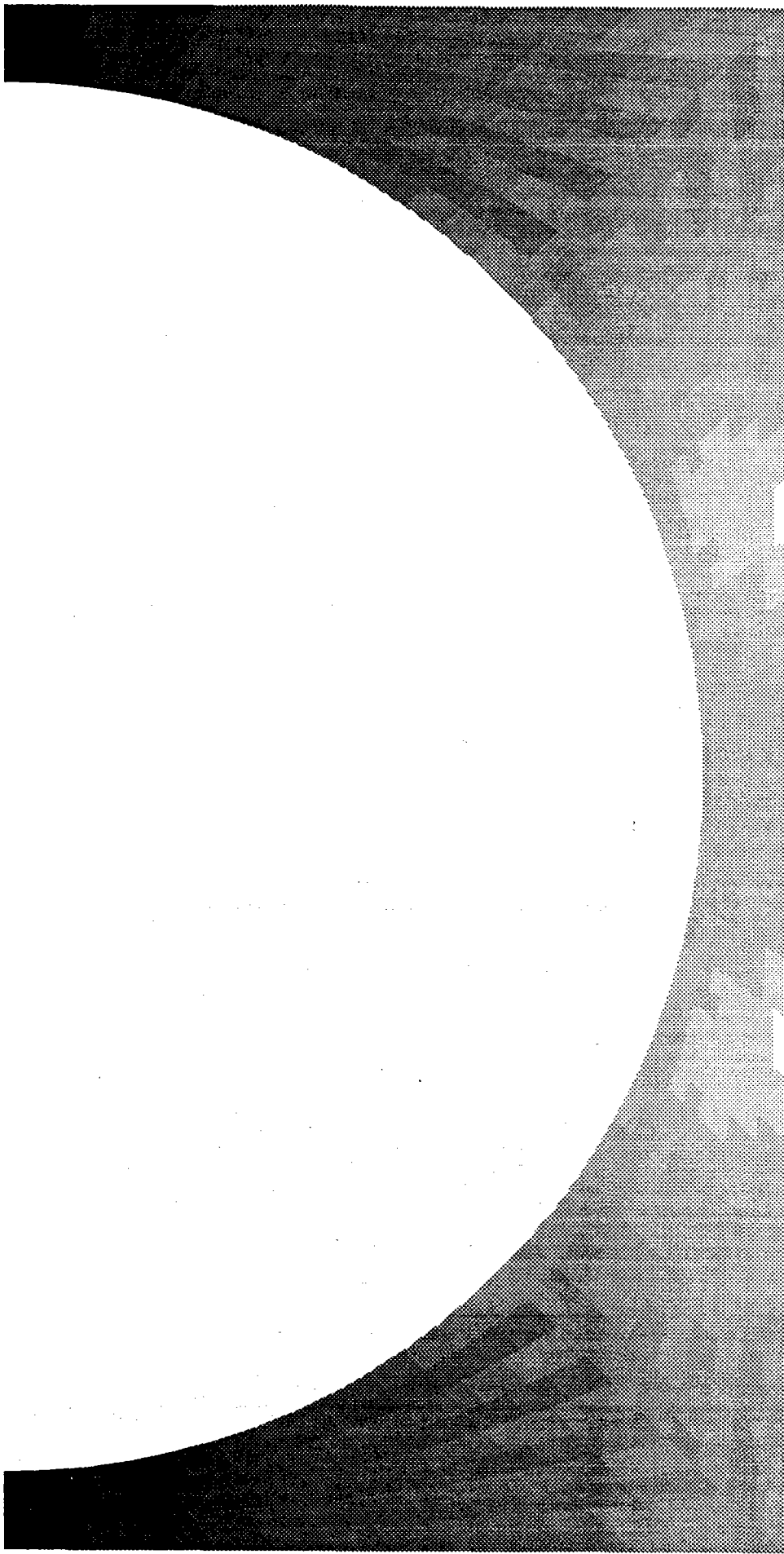
SIGMA MAX

+4734.989000000  
+4448.021000000  
+4161.053000000  
+3874.085000000  
+3587.116000000  
+3300.148000000  
+3013.180000000  
+2726.212000000  
+2439.244000000  
+2152.275000000  
+1865.307000000  
+1578.339000000  
+1291.371000000  
+1004.403000000  
+717.434800000  
+430.466300000  
+143.498000000  
-143.470200000  
-430.438500000  
-717.406300000  
-1004.375000000  
-1291.343000000  
-1578.311000000  
-1865.279000000  
-2152.248000000  
-2439.215000000  
-2726.184000000  
-3013.152000000  
-3300.120000000  
-3587.089000000  
-3874.057000000  
-4161.025000000  
-4447.993000000  
-4734.961000000

SIGMA MIN

SIGMAXY





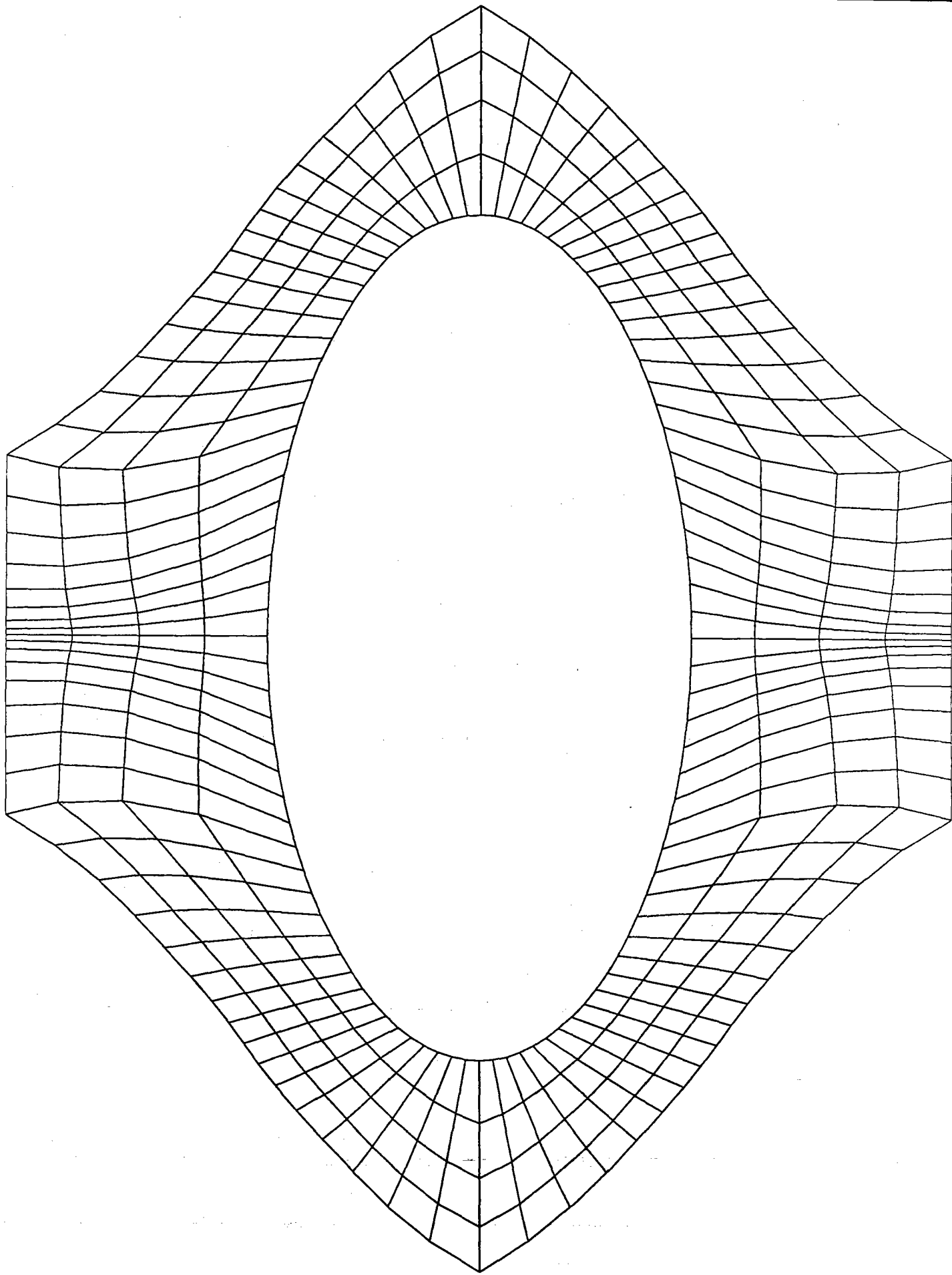
SIGMA MAX

+51470.92000000  
+49922.09000000  
+48373.26000000  
+46824.43000000  
+45275.59000000  
+43726.76000000  
+42177.93000000  
+40629.09000000  
+39080.26000000  
+37531.43000000  
+35982.60000000  
+34433.77000000  
+32884.93000000  
+31336.10000000  
+29787.27000000  
+28238.44000000  
+26689.60000000  
+25140.77000000  
+23591.94000000  
+22043.11000000  
+20494.27000000  
+18945.44000000  
+17396.61000000  
+15847.78000000  
+14298.95000000  
+12750.11000000  
+11201.28000000  
+9652.44900000  
+8103.61300000  
+6554.78100000  
+5005.95300000  
+3457.11700000  
+1908.28500000  
+359.4531000000

SIGMA MIN

SIGMA VON MISES

**FIGURE 33 : Solution du problème 22 cas d'une cellule de base hexagonale**



DEPLACEMENT MINIMAL +0.000000

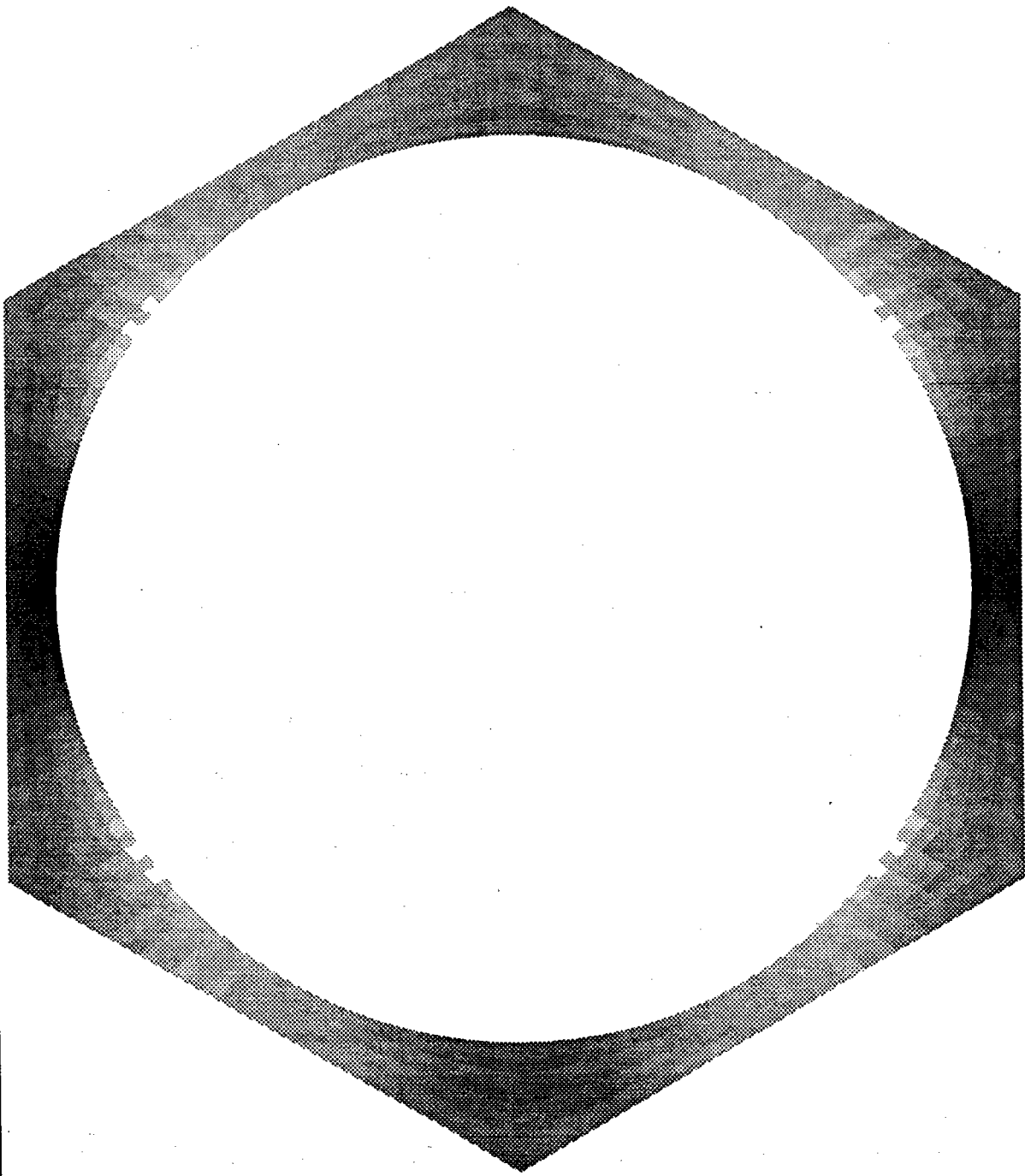
DEPLACEMENT MAXIMAL +0.450000

SIGMA MAX

+52098.90000000  
+50571.11000000  
+49043.32000000  
+47515.53000000  
+45987.74000000  
+44459.95000000  
+42932.16000000  
+41404.36000000  
+39876.57000000  
+38348.78000000  
+36820.99000000  
+35293.20000000  
+33765.41000000  
+32237.62000000  
+30709.83000000  
+29182.04000000  
+27654.25000000  
+26126.45000000  
+24598.66000000  
+23070.87000000  
+21543.08000000  
+20015.29000000  
+18487.50000000  
+16959.71000000  
+15431.92000000  
+13904.13000000  
+12376.34000000  
+10848.54000000  
+9320.75000000  
+7792.96500000  
+6265.17200000  
+4737.37900000  
+3209.59000000  
+1681.79700000

SIGMA MIN

SIGMAXX



SIGMA MAX

|                 |
|-----------------|
| +25713.86000000 |
| +24988.87000000 |
| +24263.87000000 |
| +23538.87000000 |
| +22813.88000000 |
| +22088.88000000 |
| +21363.88000000 |
| +20638.88000000 |
| +19913.89000000 |
| +19188.89000000 |
| +18463.89000000 |
| +17738.90000000 |
| +17013.90000000 |
| +16288.91000000 |
| +15563.91000000 |
| +14838.91000000 |
| +14113.91000000 |
| +13388.92000000 |
| +12663.92000000 |
| +11938.92000000 |
| +11213.93000000 |
| +10488.93000000 |
| +9763.93400000  |
| +9038.93800000  |
| +8313.94100000  |
| +7588.94500000  |
| +6863.94900000  |
| +6138.95100000  |
| +5413.95500000  |
| +4688.95700000  |
| +3963.95900000  |
| +3238.96300000  |
| +2513.96700000  |
| +1788.97100000  |

SIGMA MIN

SIGMAYY

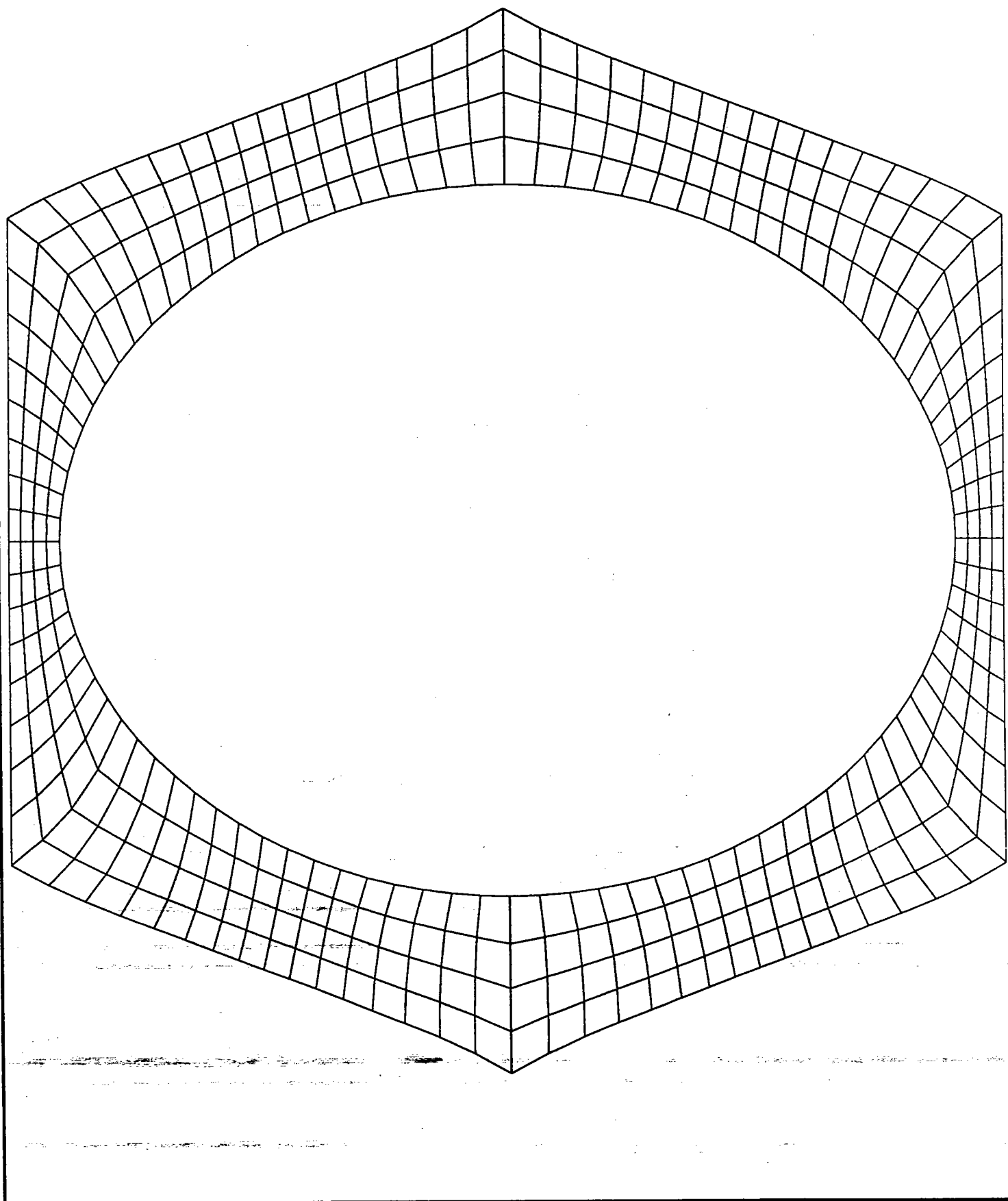
SIGMA MAX

+6932.036000000  
+6511.913000000  
+6091.790000000  
+5671.667000000  
+5251.543000000  
+4831.420000000  
+4411.297000000  
+3991.174000000  
+3571.051000000  
+3150.928000000  
+2730.805000000  
+2310.682000000  
+1890.559000000  
+1470.436000000  
+1050.313000000  
+630.189500000  
+210.066400000  
-210.056600000  
-630.179700000  
-1050.302000000  
-1470.425000000  
-1890.548000000  
-2310.671000000  
-2730.794000000  
-3150.917000000  
-3571.042000000  
-3991.165000000  
-4411.288000000  
-4831.411000000  
-5251.534000000  
-5671.657000000  
-6091.780000000  
-6511.903000000  
-6932.026000000

SIGMA MIN

SIGMAXY

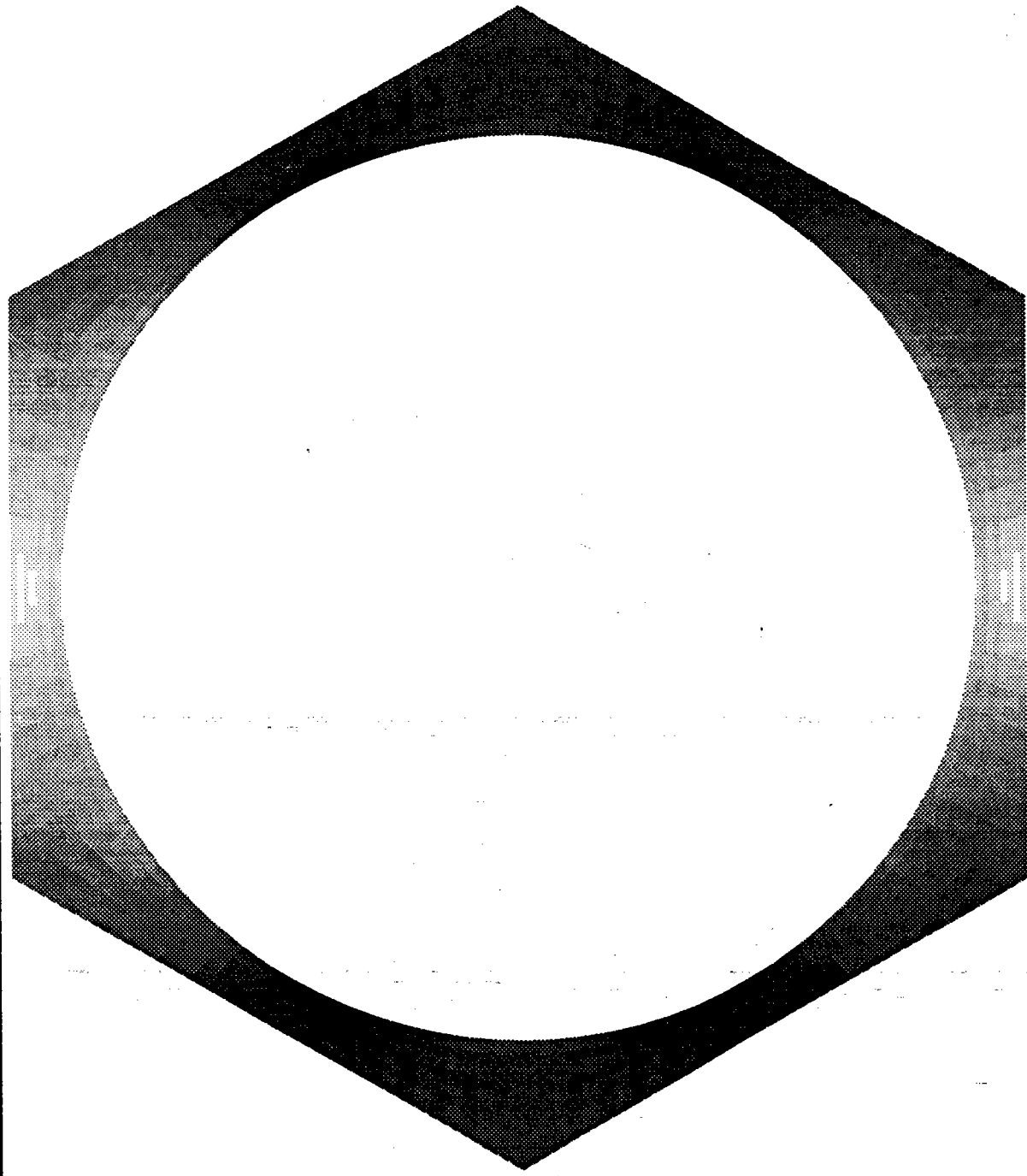
**FIGURE 34 : Solution du problème 33 cas d'une cellule de base hexagonale**



DEPLACEMENT MINIMAL +0.000000

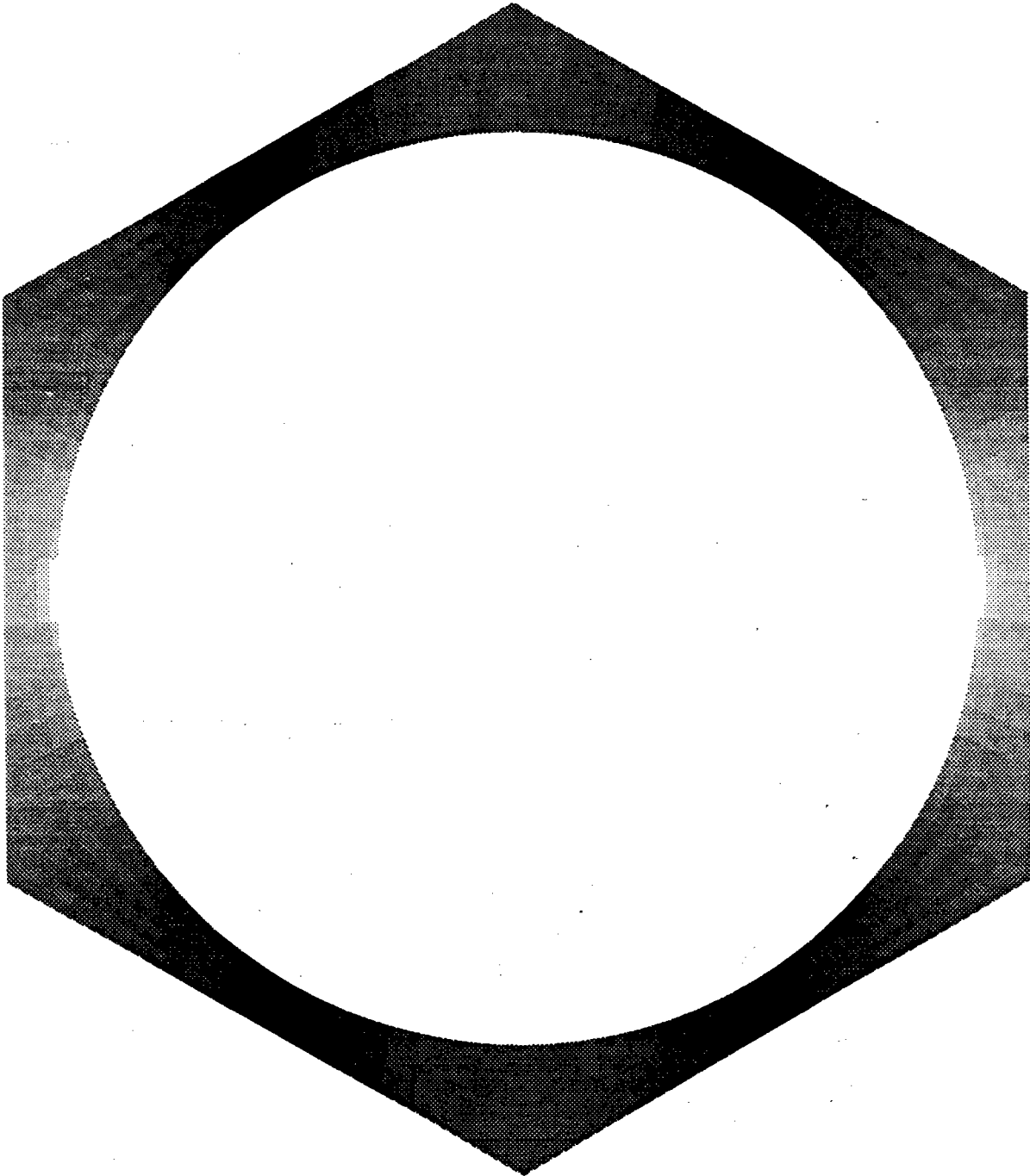
DEPLACEMENT MAXIMAL +0.450000





| SIGMA MAX       |
|-----------------|
| +19669.26000000 |
| +19009.64000000 |
| +18350.03000000 |
| +17690.41000000 |
| +17030.79000000 |
| +16371.18000000 |
| +15711.56000000 |
| +15051.95000000 |
| +14392.33000000 |
| +13732.71000000 |
| +13073.10000000 |
| +12413.48000000 |
| +11753.86000000 |
| +11094.25000000 |
| +10434.63000000 |
| +9775.012000000 |
| +9115.396000000 |
| +8455.778000000 |
| +7796.162000000 |
| +7136.545000000 |
| +6476.929000000 |
| +5817.312000000 |
| +5157.695000000 |
| +4498.079000000 |
| +3838.463000000 |
| +3178.846000000 |
| +2519.230000000 |
| +1859.611000000 |
| +1199.994000000 |
| +540.3789000000 |
| -119.2383000000 |
| -778.8535000000 |
| -1438.471000000 |
| -2098.088000000 |
| SIGMA MIN       |

SIGMAXX

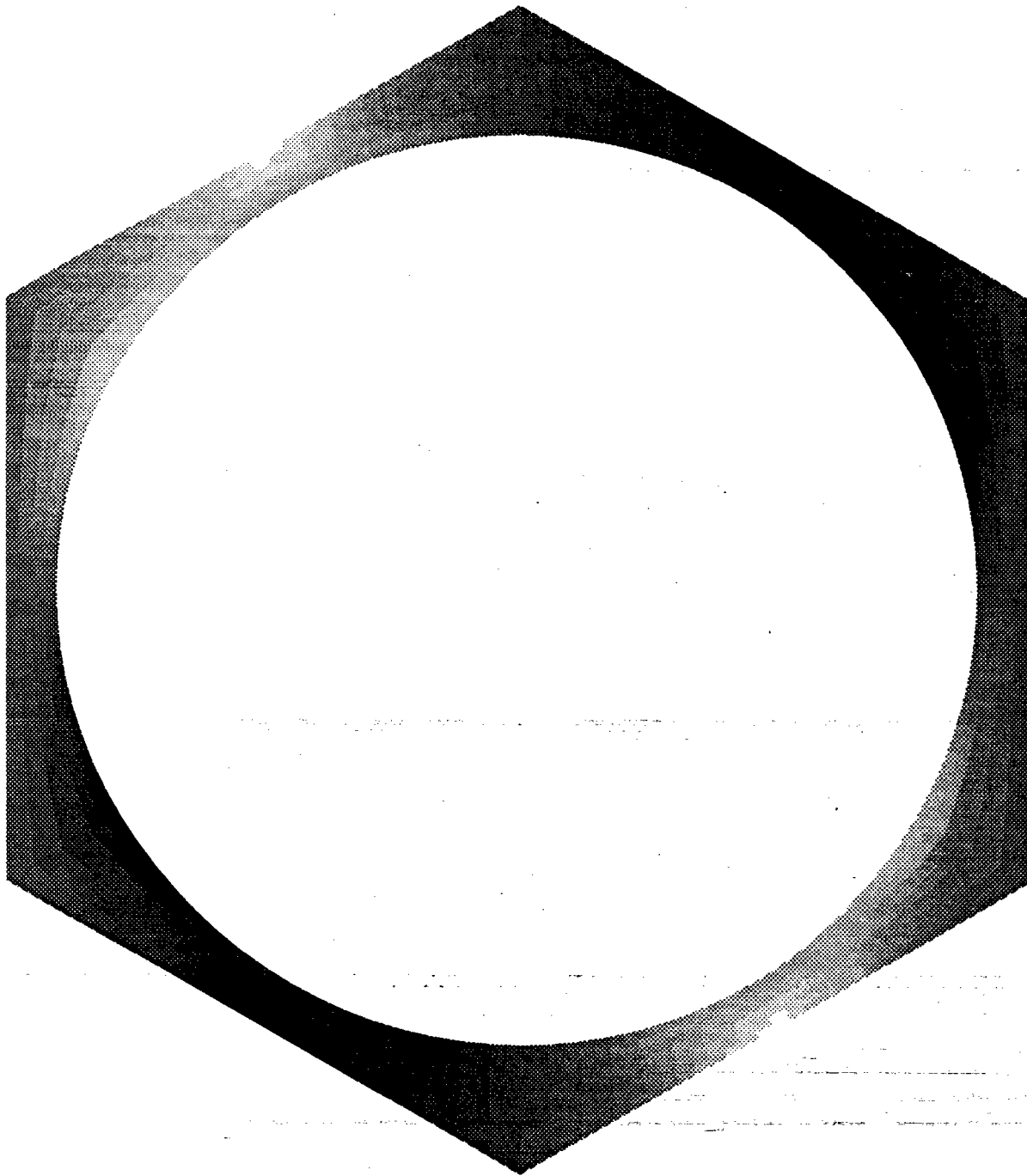


SIGMA MAX

+38757.82000000  
+37430.75000000  
+36103.68000000  
+34776.61000000  
+33449.53000000  
+32122.46000000  
+30795.38000000  
+29468.31000000  
+28141.24000000  
+26814.16000000  
+25487.09000000  
+24160.02000000  
+22832.95000000  
+21505.87000000  
+20178.80000000  
+18851.73000000  
+17524.65000000  
+16197.58000000  
+14870.51000000  
+13543.43000000  
+12216.36000000  
+10889.29000000  
+9562.213000000  
+8235.139000000  
+6908.066000000  
+5580.992000000  
+4253.918000000  
+2926.848000000  
+1599.770000000  
+272.6992000000  
-1054.371000000  
-2381.449000000  
-3708.520000000  
-5035.594000000

SIGMA MIN

SIGMAYY



SIGMA MAX

+8320.053000000  
+7815.807000000  
+7311.562000000  
+6807.316000000  
+6303.071000000  
+5798.825000000  
+5294.580000000  
+4790.335000000  
+4286.089000000  
+3781.844000000  
+3277.598000000  
+2773.353000000  
+2269.107000000  
+1764.862000000  
+1260.617000000  
+756.371100000  
+252.125500000  
-252.119100000  
-756.365200000  
-1260.611000000  
-1764.856000000  
-2269.102000000  
-2773.347000000  
-3277.592000000  
-3781.838000000  
-4286.084000000  
-4790.329000000  
-5294.574000000  
-5798.819000000  
-6303.064000000  
-6807.311000000  
-7311.557000000  
-7815.802000000  
-8320.047000000

SIGMA MIN

SIGMAXY

## Second ordre

La liaison entre les deux ordres s'effectue par l'intermédiaire des opérateurs  $\text{div}_x \sigma_0$  et  $\text{div}_y \mathcal{L}_M \varepsilon_x(u_1)$  dont les calculs sont reportés dans l'annexe 2. Ce calcul préalable nous permet donc d'exprimer le second membre de l'équation d'équilibre relatif au second ordre sous la forme :

$$\begin{aligned} \text{div}_y \mathcal{L}_M \varepsilon_y(u_2(x,y)) = & V_0 k_2^2 \cos k_2 x_2 (h_6 + f_6) + \frac{dV_0}{dx_3} k_2 \sin k_2 x_2 (h_5 + f_5) + \frac{d^2 V_0}{dx_3^2} \cos k_2 x_2 (h_4 + f_4) \\ & + W_0 k_2^2 \sin k_2 x_2 (h_3 + f_3) + \frac{dW_0}{dx_3} k_2 \cos k_2 x_2 (h_2 + f_2) + \frac{d^2 W_0}{dx_3^2} \sin k_2 x_2 (h_1 + f_1) + c_2(x) \end{aligned}$$

où les fonctions  $h_i(y)$  et  $f_i(y)$  dépendent des trois problèmes précédents, qui sont décrits en annexe 1. Le champ de déplacement  $u_2(x,y)$  peut alors être recherché sous la forme d'une fonction linéaire des différentes dérivées secondes des fonctions  $v$  et  $w$  du champ macroscopique :

$$\begin{aligned} u_2(x,y) = & V_0 k_2^2 \cos k_2 x_2 {}^2U_2^{22} + \frac{dV_0}{dx_3} k_2 \sin k_2 x_2 {}^2U_2^{23} + \frac{d^2 V_0}{dx_3^2} \cos k_2 x_2 {}^2U_2^{33} \\ & + W_0 k_2^2 \sin k_2 x_2 {}^3U_2^{22} + \frac{dW_0}{dx_3} k_2 \cos k_2 x_2 {}^3U_2^{23} + \frac{d^2 W_0}{dx_3^2} \sin k_2 x_2 {}^3U_2^{33} + c_2(x) \end{aligned}$$

où l'on fait apparaître 6 champs de déplacement correspondant aux 6 dérivées secondes possibles. D'ailleurs, le choix des exposants est justement attribué en fonction des dérivées secondes correspondantes. Par exemple,  ${}^3U_2^{23}(y)$  correspond au déplacement du second ordre (indice 2) associé à la dérivée seconde par rapport aux variables  $y_2$  et  $y_3$  (exposant de droite 23) de la composante  $W$  (exposant gauche 3).

Le champ de déplacement au second ordre  $u_2(x,y)$  est aussi défini à une constante additive près qui est obtenue en annulant le déplacement de corps rigide de la fibre au second ordre. En annexe 2, nous avons reporté les calculs qui ont permis de montrer la nullité de la constante  $c_2(x)$ .

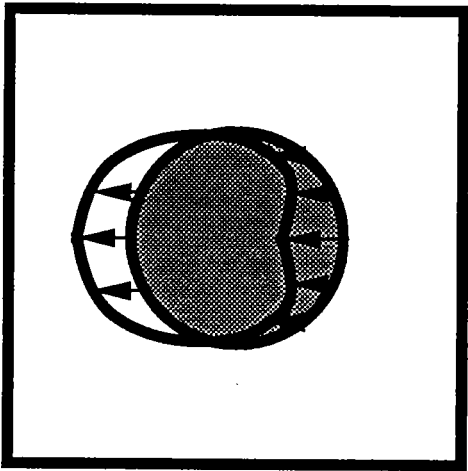
La dernière étape pour résoudre le problème au second ordre est la détermination des conditions que l'on doit imposer aux champs de déplacement  ${}^iU^j_k(y)$  à l'interface fibre-matrice, afin que le champ de déformation au second ordre  $\mathcal{E}_1 = \varepsilon_x(u_1) + \varepsilon_y(u_2)$  soit nul dans la fibre supposée rigide. Les détails de ce calcul se trouvent en annexe 4, où nous avons obtenu sur le bord  $\partial\phi$  l'expression du champ microscopique  $u_2$  :

$$\begin{aligned}
u_2(x, \partial\phi) = & V_o k_2^2 \sin k_2 x_2 \begin{bmatrix} -\frac{f y_2^2}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{dV_o}{dx_3} \sin k_2 x_2 \begin{bmatrix} -f y_2 f y_3 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{d^2 V_o}{dx_3^2} \cos k_2 x_2 \begin{bmatrix} \frac{f y_3^2}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \\
& + \frac{d^2 W_o}{dx_3^2} \sin k_2 x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{f y_3}{2} \end{bmatrix} + \frac{dW_o}{dx_3} k_2 \cos k_2 x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ f y_3 f y_2 \end{bmatrix} + W_o k_2^2 \sin k_2 x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{f y_2^2}{2} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Finalement, la résolution du problème (20) au second ordre qui nous permet d'obtenir les champs microscopiques  $u_2$  et  $\sigma_1$  s'obtient en combinant les six problèmes décrits ci-dessous pour une cellule de base carrée et hexagonale, où l'on notera pour plus de clarté  $\lambda$  et  $\mu$  les coefficients de Lamé de la matrice.

$$^2U_2^{22} \quad V_o k_2^2 \cos k_2 x_2$$

Cellule de Base CARREE



$$\operatorname{div}_y \mathcal{L}_m \varepsilon_y (^2U_2^{22}) = \begin{cases} {}_o\dot{O}_{22}^{22} + (\lambda + 2\mu) V_{1,2}^{22} + \mu W_{1,3}^{22} + \lambda + 2\mu \\ {}_o\dot{O}_{23}^{22} + \mu W_{1,2}^{22} + \lambda V_{1,3}^{22} \end{cases}$$

$$^2U_2^{22} = \begin{cases} \frac{-r^2 y_2^2}{2} & \text{sur } \partial\phi \\ 0 & \end{cases}$$

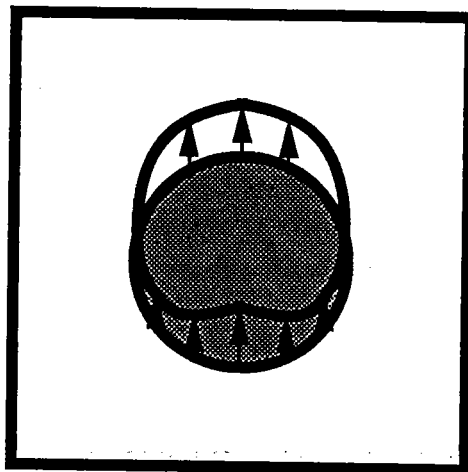
$$^2U_2^{22} \text{ p\'eriodique } (\partial\Omega_1, \partial\Omega_2); (\partial\Omega_3, \partial\Omega_4)$$

$$^2\dot{O}_1^{22}(n) \text{ antip\'eriodique}$$

$${}^3U_2^{33}$$

$$\frac{d^2 W_o}{dx_3^2} \sin k_2 x_2$$

Cellule de Base CARREE



$$\operatorname{div}_y \mathcal{L}_m \varepsilon_y ({}^3U_2^{33}) = \begin{cases} -{}_o\hat{O}_{23}^{33} - \lambda W_{1,2}^{33} - \mu V_{1,3}^{33} \\ -{}_o\hat{O}_{33}^{33} - \mu V_{1,2}^{33} - (\lambda + 2\mu) W_{1,3}^{33} - \lambda - 2\mu \end{cases}$$

$${}^3U_2^{33} = \begin{cases} 0 \\ \frac{f y_3^2}{2} \end{cases} \text{ sur } \partial\phi$$

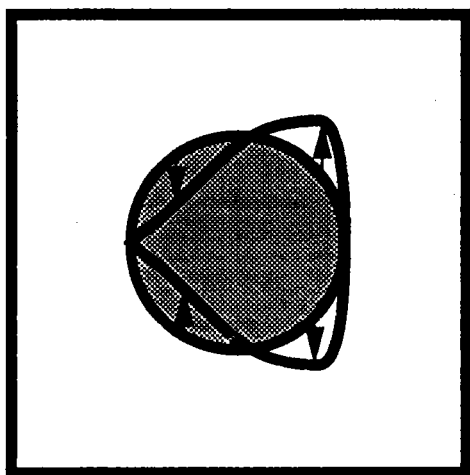
${}^3U_2^{33}$  périodique

${}_o\hat{O}_1^{33}(n)$  antipériodique

$${}^3U_2^{23}$$

$$\frac{dW_o}{dx_3} k_2 \cos k_2 x_2$$

Cellule de Base CARREE



$$\operatorname{div}_y \mathcal{L}_m \varepsilon_y ({}^3U_2^{23}) = \begin{cases} -\circ \dot{O}_{22}^{33} - \frac{\circ \dot{O}_{23}^{23}}{2} - (\lambda + 2\mu) V_{1,2}^{33} - \lambda \frac{W_{1,2}^{23}}{2} - \mu \left( W_{1,3}^{33} + \frac{V_{1,3}^{23}}{2} \right) - \frac{\lambda}{2} - \frac{3\mu}{2} \\ -\circ \dot{O}_{23}^{33} - \frac{\circ \dot{O}_{33}^{23}}{2} - \mu \left( W_{1,2}^{33} + \frac{V_{1,2}^{23}}{2} \right) - \lambda V_{1,3}^{33} - (\lambda + 2\mu) \frac{W_{1,3}^{23}}{2} \end{cases}$$

$${}^3U_2^{23} = \begin{vmatrix} 0 \\ +f y_2 \\ f y_3 \end{vmatrix} \quad \text{sur } \partial\varphi$$

${}^3U_2^{23}$  périodique

$$\begin{aligned} \text{bords } \partial\Omega_1 \partial\Omega_2 & \int_{-0,5}^{0,5} \left( \frac{-\mu}{2} \right) \delta u_1 dy_2 \rightarrow \frac{1}{2} \text{ bord } \partial\Omega_1 \\ & \rightarrow \frac{1}{2} \text{ bord } \partial\Omega_2 \end{aligned}$$

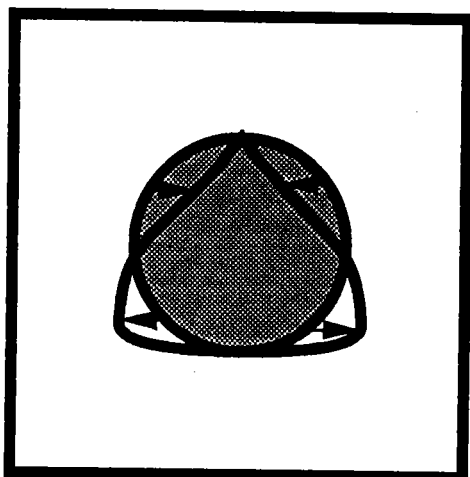
$$\begin{aligned} \text{bords } \partial\Omega_3 \partial\Omega_4 & \int_{-0,5}^{0,5} \left( \frac{\lambda}{2} \right) \delta u_2 dy_3 \rightarrow \frac{1}{2} \text{ bord } \partial\Omega_3 \\ & \rightarrow \frac{1}{2} \text{ bord } \partial\Omega_4 \end{aligned}$$



$${}^2U_2^{23}$$

$$\frac{dV_o}{dx_3} k_2 \sin k_2 x_2$$

Cellule de Base CARREE



$$\operatorname{div}_y \mathcal{L}_m \varepsilon_y ({}^2U_2^{23}) = \begin{cases} \circ \dot{O}_{23}^{22} + \frac{\circ \dot{O}_{22}^{23}}{2} + (\lambda + 2\mu) \frac{V_{1,2}^{23}}{2} + \lambda W_{1,2}^{22} + \mu \left( V_{1,3}^{22} + \frac{W_{1,3}^{23}}{2} \right) \\ \circ \dot{O}_{33}^{22} + \frac{\circ \dot{O}_{23}^{23}}{2} + \mu \left( V_{1,2}^{22} + \frac{W_{1,2}^{23}}{2} \right) + \lambda \frac{V_{1,3}^{23}}{2} + (\lambda + 2\mu) W_{1,3}^{22} + \frac{3\mu}{2} + \frac{\lambda}{2} \end{cases}$$

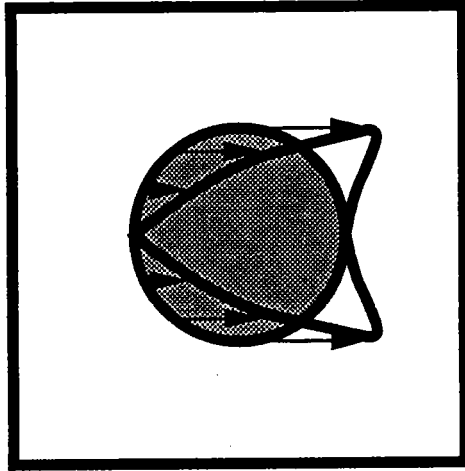
$${}^2U_2^{23} = \begin{cases} -f^y_2 f^y_3 \\ 0 \end{cases} \quad \text{sur } \partial\phi$$

${}^2U_2^{23}$  périodique

$$\begin{aligned} \text{bords } \partial\Omega_1 \partial\Omega_2 & \int_{-0,5}^{0,5} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\lambda}{2} \end{pmatrix} \delta u_1 dy_2 & \rightarrow \frac{1}{2} \text{ bord } \partial\Omega_1 \\ & \rightarrow \frac{1}{2} \text{ bord } \partial\Omega_2 \\ \text{bords } \partial\Omega_3 \partial\Omega_4 & \int_{-0,5}^{0,5} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\mu}{2} \end{pmatrix} \delta u_2 dy_3 & \rightarrow \frac{1}{2} \text{ bord } \partial\Omega_3 \\ & \rightarrow \frac{1}{2} \text{ bord } \partial\Omega_4 \end{aligned}$$

$${}^2U_2^{33} \quad \frac{d^2 V_0}{dx_3^2} \sin k_2 x_2$$

Cellule de Base CARREE



$$\operatorname{div}_y \mathcal{L}_m \varepsilon_y ({}^2U_2^{33}) = \begin{cases} \frac{\sigma_{23}^{23}}{2} - \lambda \frac{W_{1,2}^{23}}{2} - \mu \frac{V_{1,3}^{23}}{2} - \frac{\lambda}{2} - \frac{\mu}{2} \\ \frac{\sigma_{33}^{23}}{2} - \mu \frac{V_{1,2}^{23}}{2} - (\lambda + 2\mu) \frac{W_{1,3}^{23}}{2} \end{cases}$$

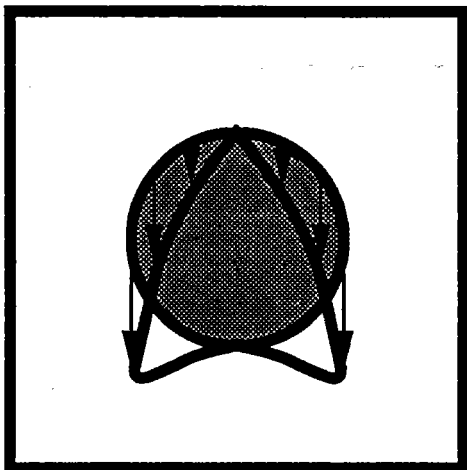
$${}^2U_2^{33} = \begin{cases} \frac{fy_3^2}{2} \\ 0 \end{cases} \quad \text{sur } \partial\varphi$$

${}^2U_2^{33}$  périodique

$$\begin{aligned} \text{bords } \partial\Omega_1 \partial\Omega_2 & \quad \int_{-0,5}^{0,5} \left( \frac{\mu}{2} \right) \delta u_1 dy_2 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} \text{ bord } \partial\Omega_1 \\ & \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} \text{ bord } \partial\Omega_2 \\ \text{bords } \partial\Omega_3 \partial\Omega_4 & \quad \int_{-0,5}^{0,5} \left( \frac{-\lambda}{2} \right) \delta u_2 dy_3 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} \text{ bord } \partial\Omega_3 \\ & \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} \text{ bord } \partial\Omega_4 \end{aligned}$$

$${}^3U_2^{22} \quad W_o k_2^2 \sin k_2 x_2$$

Cellule de Base CARREE



$$\text{div}_y \mathcal{L}_m \varepsilon_y ({}^3U_2^{22}) = \begin{cases} \frac{{}_o\dot{O}_{22}^{23}}{2} + (\lambda+2\mu) \frac{V_{1,2}^{23}}{2} + \mu \frac{W_{1,3}^{23}}{2} \\ \frac{{}_o\dot{O}_{23}^{23}}{2} + \mu \frac{W_{1,2}^{23}}{2} + \lambda \frac{V_{1,3}^{23}}{2} + \frac{\lambda}{2} + \frac{\mu}{2} \end{cases}$$

$${}^3U_2^{22} = \begin{cases} 0 \\ -\frac{y_2^2}{2} \end{cases} \quad \text{sur } \partial\varphi$$

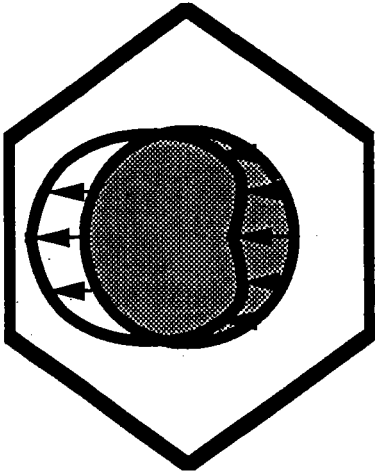
${}^3U_2^{22}$  périodique

$$\begin{aligned} \text{bords } \partial\Omega_1 \partial\Omega_2 & \int_{-0,5}^{0,5} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\lambda}{2} \end{pmatrix} \delta u_1 dy_2 & \rightarrow \frac{1}{2} \text{ bord } \partial\Omega_1 \\ & & \rightarrow \frac{1}{2} \text{ bord } \partial\Omega_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{bords } \partial\Omega_3 \partial\Omega_4 & \int_{-0,5}^{0,5} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\mu}{2} \end{pmatrix} \delta u_2 dy_3 & \rightarrow \frac{1}{2} \text{ bord } \partial\Omega_3 \\ & & \rightarrow \frac{1}{2} \text{ bord } \partial\Omega_4 \end{aligned}$$

$$^2U_2^{22} \quad V_o k_2^2 \cos k_2 x_2$$

Cellule de Base HEXAGONALE



$$\operatorname{div}_y \mathcal{L}_m \varepsilon_y (^2U_2^{22}) = \begin{cases} {}_o\dot{O}_{22}^{22} + (\lambda + 2\mu) V_{1,2}^{22} + \mu W_{1,3}^{22} + \lambda + 2\mu \\ {}_o\dot{O}_{23}^{22} + \mu W_{1,2}^{22} + \lambda V_{1,3}^{22} \end{cases}$$

$$^2U_2^{22} = \begin{cases} \frac{-f y_2^2}{2} & \text{sur } \partial\varphi \\ 0 & \end{cases}$$

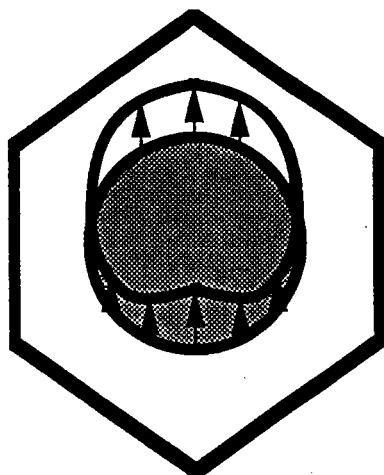
$^2U_2^{22}$  périodique

$^2\dot{O}_1^{22}(n)$  antipériodique

$${}^3U_2^{33}$$

$$\frac{d^2 W_o}{dx_3^2} \sin k_2 x_2$$

Cellule de Base HEXAGONALE



$$\operatorname{div}_y \mathcal{L}_m \varepsilon_y ({}^3U_2^{33}) = \begin{cases} -\dot{O}_{23}^{33} - \lambda W_{1,2}^{33} - \mu V_{1,3}^{33} \\ -\dot{O}_{33}^{33} - \mu V_{1,2}^{33} - (\lambda + 2\mu) W_{1,3}^{33} - \lambda - 2\mu \end{cases}$$

$${}^3U_2^{33} = \begin{cases} 0 \\ \frac{f y_3^2}{2} \end{cases} \text{ sur } \partial\varphi$$

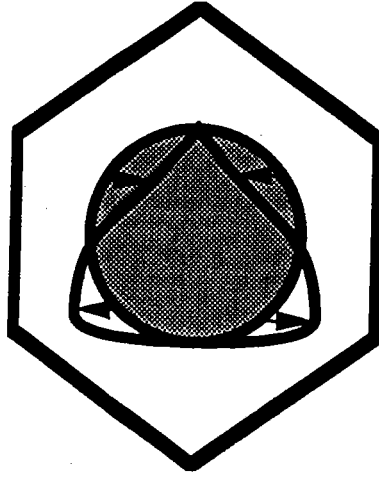
${}^3U_2^{33}$  périodique

$\dot{O}_1^{33}(n)$  antipériodique

$${}^2U_2^{23}$$

$$\frac{dV_o}{dx_3} k_2 \sin k_2 x_2$$

Cellule de Base HEGAXONALE



$$\operatorname{div}_y \mathcal{L}_m \varepsilon_y ({}^2U_2^{23}) = \begin{cases} {}_o\dot{O}_{23}^{22} + \frac{{}_o\dot{O}_{22}^{23}}{2} + (\lambda+2\mu) \frac{V_{1,2}^{23}}{2} + \lambda W_{1,2}^{22} + \mu \left( V_{1,3}^{22} + \frac{W_{1,3}^{23}}{2} \right) \\ {}_o\dot{O}_{33}^{22} + \frac{{}_o\dot{O}_{23}^{23}}{2} + \mu \left( V_{1,2}^{22} + \frac{W_{1,2}^{23}}{2} \right) + \lambda \frac{V_{1,3}^{23}}{2} + (\lambda+2\mu) W_{1,3}^{22} + \frac{3\mu}{2} + \frac{\lambda}{2} \end{cases}$$

$${}^2U_2^{23} = \begin{cases} -f^y{}_2 f^y{}_3 \\ 0 \end{cases} \quad \text{sur } \partial\varphi$$

${}^2U_2^{23}$  périodique

$$\begin{aligned} \text{bords } \partial\Omega_1\partial\Omega_2 & \int_{-\frac{1}{2\sqrt{3}}}^{\frac{1}{2\sqrt{3}}} \left( \frac{\mu}{2} \right) \delta u_1 \, ds \rightarrow \frac{1}{2} \text{ bord } \partial\Omega_1 \\ & \rightarrow \frac{1}{2} \text{ bord } \partial\Omega_2 \end{aligned}$$

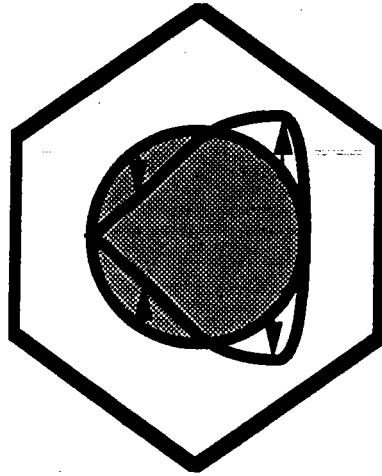
$$\begin{aligned} \text{bords } \partial\Omega_5\partial\Omega_6 & \int_{-\frac{1}{2\sqrt{3}}}^{\frac{1}{2\sqrt{3}}} \left( \begin{array}{c} -\frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{\lambda+\mu}{4} \right) \\ -\frac{1}{2} \left( \frac{3\lambda-\mu}{4} \right) \end{array} \right) \delta u_5 \, ds \rightarrow \frac{1}{2} \text{ bord } \partial\Omega_5 \\ & \rightarrow \frac{1}{2} \text{ bord } \partial\Omega_6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{bords } \partial\Omega_3\partial\Omega_4 & \int_{-\frac{1}{2\sqrt{3}}}^{\frac{1}{2\sqrt{3}}} \left( \begin{array}{c} -\frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{\lambda+\mu}{4} \right) \\ -\frac{1}{2} \left( \frac{3\lambda-\mu}{4} \right) \end{array} \right) \delta u_3 \, ds \rightarrow \frac{1}{2} \text{ bord } \partial\Omega_3 \\ & \rightarrow \frac{1}{2} \text{ bord } \partial\Omega_4 \end{aligned}$$

$${}^3U_2^{23}$$

$$\frac{dW_0}{dx_3} k_2 \cos k_2 x_2$$

Cellule de Base HEXAGONALE



$$\operatorname{div}_y \mathcal{L}_m \varepsilon_y ({}^3U_2^{23}) = \begin{cases} -\sigma_{22}^{33} - \frac{\sigma_{23}^{23}}{2} - (\lambda+2\mu) V_{1,2}^{33} - \lambda \frac{W_{1,2}^{23}}{2} - \mu \left( W_{1,3}^{33} + \frac{V_{1,3}^{23}}{2} \right) \frac{\lambda}{2} - \frac{3\mu}{2} \\ -\sigma_{23}^{33} - \frac{\sigma_{33}^{23}}{2} - \mu \left( W_{1,2}^{33} + \frac{V_{1,2}^{23}}{2} \right) - \lambda V_{1,3}^{33} - (\lambda+2\mu) \frac{W_{1,3}^{23}}{2} \end{cases}$$

$${}^3U_2^{23} = \begin{cases} 0 \\ f y_2 f y_3 \end{cases} \quad \text{sur } \partial\phi$$

${}^3U_2^{23}$  périodique

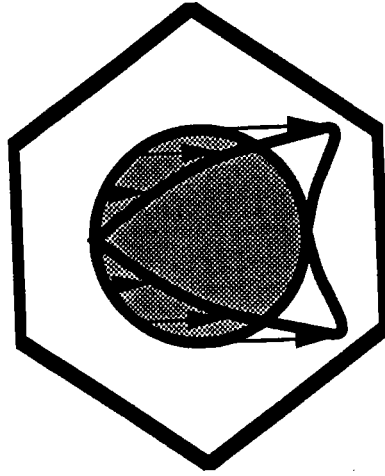
$$\begin{aligned} \text{bords } \partial\Omega_1 \partial\Omega_2 & \int_{-\frac{1}{2\sqrt{3}}}^{\frac{1}{2\sqrt{3}}} \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \delta u_1 \, ds \rightarrow \frac{1}{2} \text{ bord } \partial\Omega_1 \\ & \rightarrow \frac{1}{2} \text{ bord } \partial\Omega_2 \end{aligned}$$

$$\text{bords } \partial\Omega_5 \partial\Omega_6 \int_{-\frac{1}{2\sqrt{3}}}^{\frac{1}{2\sqrt{3}}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left( \frac{\lambda-3\mu}{4} \right) \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{\lambda+\mu}{4} \right) \end{pmatrix} \delta u_5 \, ds$$

$$\text{bords } \partial\Omega_3 \partial\Omega_4 \int_{-\frac{1}{2\sqrt{3}}}^{\frac{1}{2\sqrt{3}}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left( \frac{\lambda-3\mu}{4} \right) \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{\lambda+\mu}{4} \right) \end{pmatrix} \delta u_3 \, ds$$

$${}^2U_2^{33} \quad \frac{d^2 V_0}{dx_3^2} \sin k_2 x_2$$

Cellule de Base HEXAGONALE



$$\operatorname{div}_y \mathcal{L}_m \varepsilon_y ({}^2U_2^{33}) = \begin{cases} \frac{\bar{\sigma}_{23}^{23}}{2} - \lambda \frac{W_{1,2}^{23}}{2} - \mu \frac{V_{1,3}^{23}}{2} - \frac{\lambda}{2} - \frac{\mu}{2} \\ \frac{\bar{\sigma}_{33}^{23}}{2} - \mu \frac{V_{1,2}^{23}}{2} - (\lambda + 2\mu) \frac{W_{1,3}^{23}}{2} \end{cases}$$

$${}^2U_2^{33} = \begin{cases} \frac{fy_3^2}{2} \\ 0 \end{cases} \quad \text{sur } \partial\varphi$$

${}^2U_2^{33}$  périodique

$$\text{bords } \partial\Omega_1 \partial\Omega_2 \quad \int_{-\frac{1}{2\sqrt{3}}}^{\frac{1}{2\sqrt{3}}} \left( \begin{pmatrix} -\lambda \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \delta u_1 \, ds$$

$$\text{bords } \partial\Omega_5 \partial\Omega_6 \quad \int_{-\frac{1}{2\sqrt{3}}}^{\frac{1}{2\sqrt{3}}} \left( \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left( \frac{3\mu - \lambda}{4} \right) \\ \sqrt{3} \left( \frac{\lambda + \mu}{4} \right) \end{pmatrix} \right) \delta u_5 \, ds$$

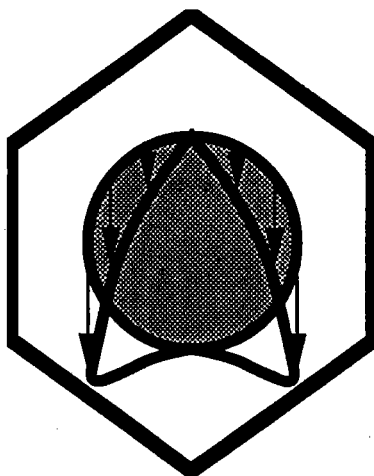
$$\text{bords } \partial\Omega_3 \partial\Omega_4 \quad \int_{-\frac{1}{2\sqrt{3}}}^{\frac{1}{2\sqrt{3}}} \left( \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left( \frac{3\mu - \lambda}{4} \right) \\ +\sqrt{3} \left( \frac{\lambda + \mu}{4} \right) \end{pmatrix} \right) \delta u_3 \, ds$$



$${}^3U_2^{22}$$

$$W_o k_2^2 \sin k_2 x_2$$

Cellule de Base HEXAGONALE



$$\operatorname{div}_y \mathcal{L}_m \varepsilon_y ({}^3U_2^{22}) = \begin{cases} \frac{\circ \dot{O}_{22}^{23}}{2} + (\lambda + 2\mu) \frac{V_{1,2}^{23}}{2} + \mu \frac{W_{1,3}^{23}}{2} \\ \frac{\circ \dot{O}_{23}^{23}}{2} + \mu \frac{W_{1,2}^{23}}{2} + \lambda \frac{V_{1,3}^{23}}{2} + \frac{\lambda}{2} + \frac{\mu}{2} \end{cases}$$

$${}^3U_2^{22} = \begin{cases} 0 \\ -\frac{f y_2^2}{2} \end{cases} \quad \text{sur } \partial\varphi$$

${}^3U_2^{22}$  périodique

$$\text{bords } \partial\Omega_1 \partial\Omega_2 \quad \int_{-\frac{1}{2\sqrt{3}}}^{\frac{1}{2\sqrt{3}}} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\mu}{2} \end{pmatrix} \delta u_1 \, ds$$

$$\text{bords } \partial\Omega_5 \partial\Omega_6 \quad \int_{-\frac{1}{2\sqrt{3}}}^{\frac{1}{2\sqrt{3}}} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{\lambda + \mu}{4} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{3\lambda - \mu}{4} \right) \end{pmatrix} \delta u_5 \, ds$$

$$\text{bords } \partial\Omega_3 \partial\Omega_4 \quad \int_{-\frac{1}{2\sqrt{3}}}^{\frac{1}{2\sqrt{3}}} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{\lambda + \mu}{4} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{3\lambda - \mu}{4} \right) \end{pmatrix} \delta u_3 \, ds$$

Afin de simplifier la résolution des six problèmes par la méthode des éléments finis, nous avons remplacé les conditions d'Y-antipériodicité par des efforts répartis sur les bords extérieurs de la cellule de base.

Malgré le nombre important de problèmes à résoudre, les temps de calcul sont relativement courts. En effet, pour une cellule de base hexagonale, il suffit de construire et de décomposer une seule fois la matrice de rigidité [K]. A chaque problème correspond un second membre [F'] différent. En revanche, dans le cas d'une cellule de base carrée, le problème est différent. Nous avons alors réduit le calcul à une demi-cellule de base, car au premier ordre comme au second, l'axe  $y_2$  ou  $y_3$  est un axe de symétrie. Sur cette demi-cellule, les conditions de périodicité du champ de déplacement sont équivalentes à des déplacements imposés nuls au bord. Or, pour le problème 23 du premier ordre, ces conditions sont différentes de celles imposées dans les 4 problèmes 22 (33), 2-22 (3-33), 2-23 (3-23), 2-33 (3-22). En conclusion, deux matrices [K] sont à construire et à inverser. Toutefois, l'opération d'assemblage des Eléments Finis ne s'opère qu'une seule fois.

#### Calcul de la force de rappel

Ces solutions nous permettent de calculer la contrainte microscopique  $\sigma_1(y)$  en chaque point de la cellule de base :

$$\begin{aligned}\sigma_1(y) = & V_o k_2^2 \cos k_2 x_2 (\mathcal{L}_M \Sigma_6(y) + {}^2\hat{O}_1^{22}(y)) + \frac{dV_o}{dx_3} k_2 \sin k_2 x_2 (\mathcal{L}_M \Sigma_5(y) + {}^2\hat{O}_1^{23}(y)) \\ & + \frac{d^2 V_o}{dx_3^2} \cos k_2 x_2 (\mathcal{L}_M \Sigma_4(y) + {}^2\hat{O}_1^{33}(y)) + \frac{d^2 W_o}{dx_3^2} \sin k_2 x_2 (\mathcal{L}_M \Sigma_1(y) + {}^3\hat{O}_1^{33}(y)) \\ & + \frac{dW_o}{dx_3} k_2 \cos k_2 x_2 (\mathcal{L}_M \Sigma_2(y) + {}^3\hat{O}_1^{23}(y)) + W_o k_2^2 \sin k_2 x_2 (\mathcal{L}_M \Sigma_3(y) + {}^3\hat{O}_1^{22}(y))\end{aligned}$$

Connaissant ce champ en tout point, il est très simple d'en déduire la force de rappel puisqu'elle est égale à la somme des vecteurs contraintes  $\sigma_1(n)$  en chaque point de l'interface fibre-matrice.

En étudiant les symétries de chaque problème du second ordre, il est possible de proposer une forme équivalente à (14) :

$$F = (- {}^2C^{22}E_M S_f V_o k_2^2 \cos k_2 x_2 + {}^3C^{23}E_M S_f \frac{dW_o}{dx_3} k_2 \cos k_2 x_2 + {}^2C^{33}E_M S_f \frac{d^2V_o}{dx_3^2} \cos k_2 x_2) y_2$$

$$+ ({}^3C^{33}E_M S_f \frac{d^2W_o}{dx_3^2} \sin k_2 x_2 - {}^2C^{23}E_M S_f \frac{dV_o}{dx_3} k_2 \sin k_2 x_2 - {}^3C^{22}E_M S_f W_o k_2^2 \sin k_2 x_2) y_3$$

où les coefficients  ${}^iC^{jk}$  sont exprimés dans l'annexe 3. Pour une cellule carrée, les symétries entre les différents problèmes entraînent les égalités suivantes :  ${}^2C^{22} = {}^3C^{33} = c_i$  ;  ${}^2C^{23} = {}^3C^{23} = c_{23}$  ;  ${}^3C^{22} = {}^2C^{33} = c_d$ . Une fois le programme informatique créé, il est simple de mener ces calculs pour différents coefficients de Poisson, fraction volumique, précision, arrangement. Sur les courbes de la figure (35), nous avons représenté l'évolution des coefficients en fonction des différents paramètres.

### c) Poutre sur fondation

Comme dans le premier modèle, la charge critique d'apparition du microflambage peut être obtenue en modélisant le couple fibre-matrice par une poutre sur fondation. Cette dernière agit dans les deux directions  $y_2$  et  $y_3$ . Par conséquent, il est très simple d'exprimer les deux équations traduisant la stabilité de la poutre dans la cas d'un arrangement de fibre alignée:

$$\begin{cases} E_f I_f \frac{\partial^4 v}{\partial x_1^4} + \sigma_e S_f \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} - E_M S_f \left( c_d \frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2} + c_{23} \frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial x_2} + c_i \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \right) / y_2 \\ E_f I_f \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + \sigma_e S_f \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - E_M S_f \left( c_i \frac{\partial^2 w}{\partial x_3^2} + c_{23} \frac{\partial^2 v}{\partial x_3 \partial x_2} + c_d \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) / y_3 \end{cases}$$

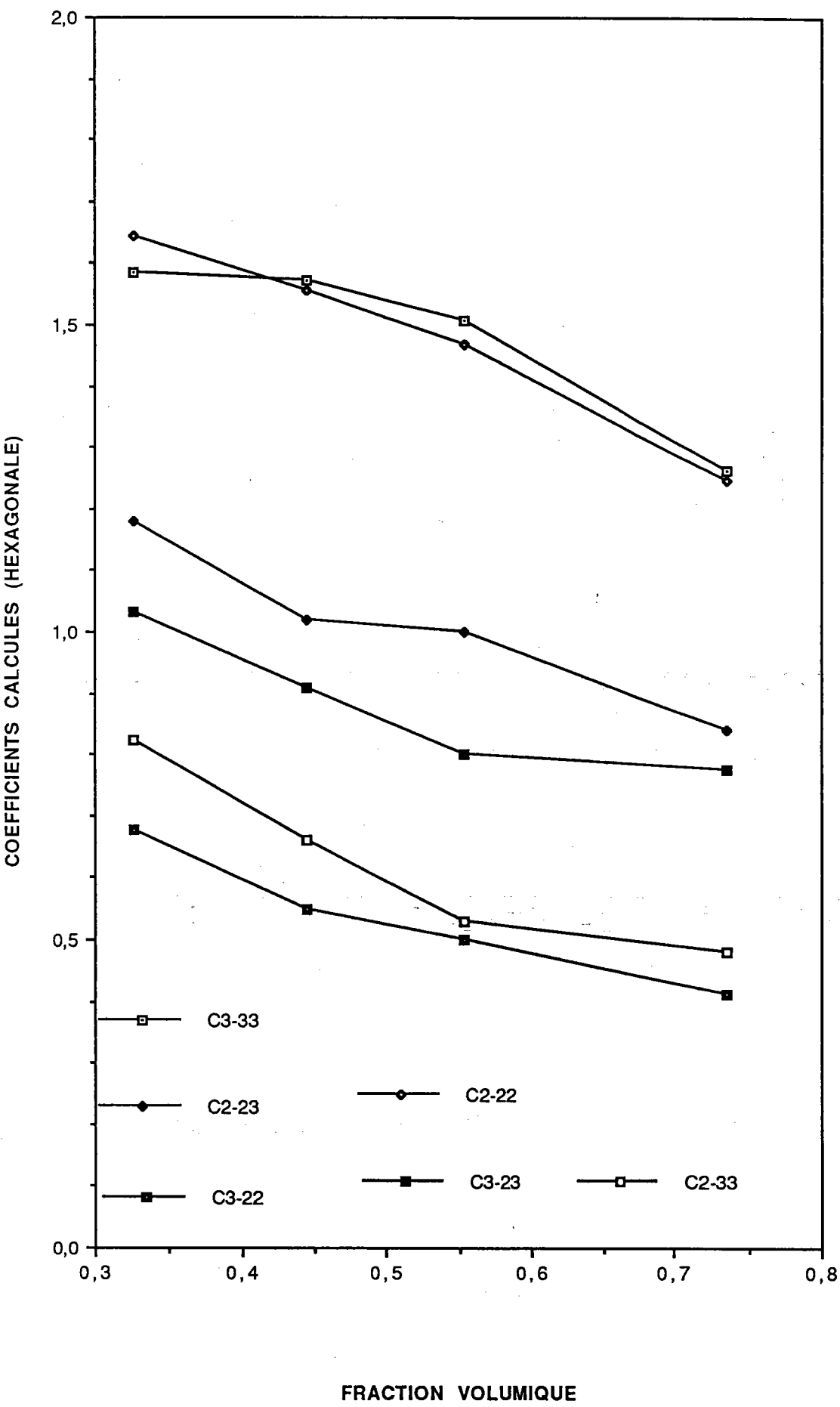
qui peuvent se simplifier en utilisant les expressions de  $v(x)$  et  $w(x)$  proposées au début du paragraphe

$$\begin{cases} E_f I_f k_1^4 V_o - \sigma_e S_f k_1^2 V_o - E_M S_f \left( c_d \frac{d^2 V_o}{dx_3^2} + c_{23} k_2 \frac{dW_o}{dx_3} - c_i k_2^2 V_o \right) = 0 / y_2 \\ E_f I_f k_1^4 W_o - \sigma_e S_f k_1^2 W_o - E_M S_f \left( c_i \frac{d^2 W_o}{dx_3^2} - c_{23} k_2 \frac{dV_o}{dx_3} - c_d k_2^2 W_o \right) = 0 / y_3 \end{cases}$$

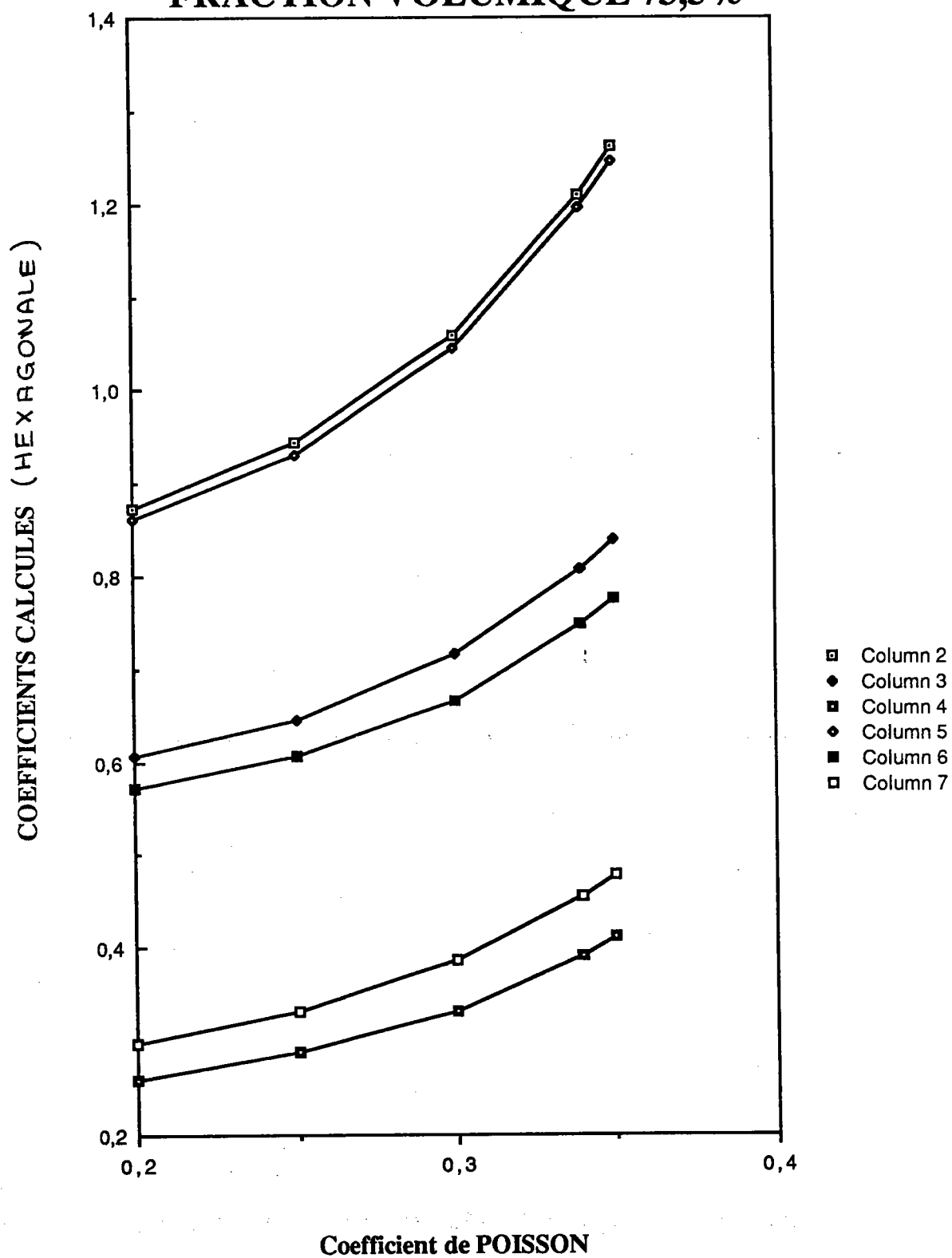
Ces deux équations ne suffisent pas pour déterminer la charge critique et les fonctions d'amplitudes  $V_o(x_3)$  et  $W_o(x_3)$ . Il est nécessaire de préciser les conditions aux limites imposées aux bords. Ces conditions peuvent être de deux types en déplacement (C.A.) ou en contrainte (S.A.).

**FIGURE 35 : Coefficients  ${}^iC^k$  en fonction des paramètres**

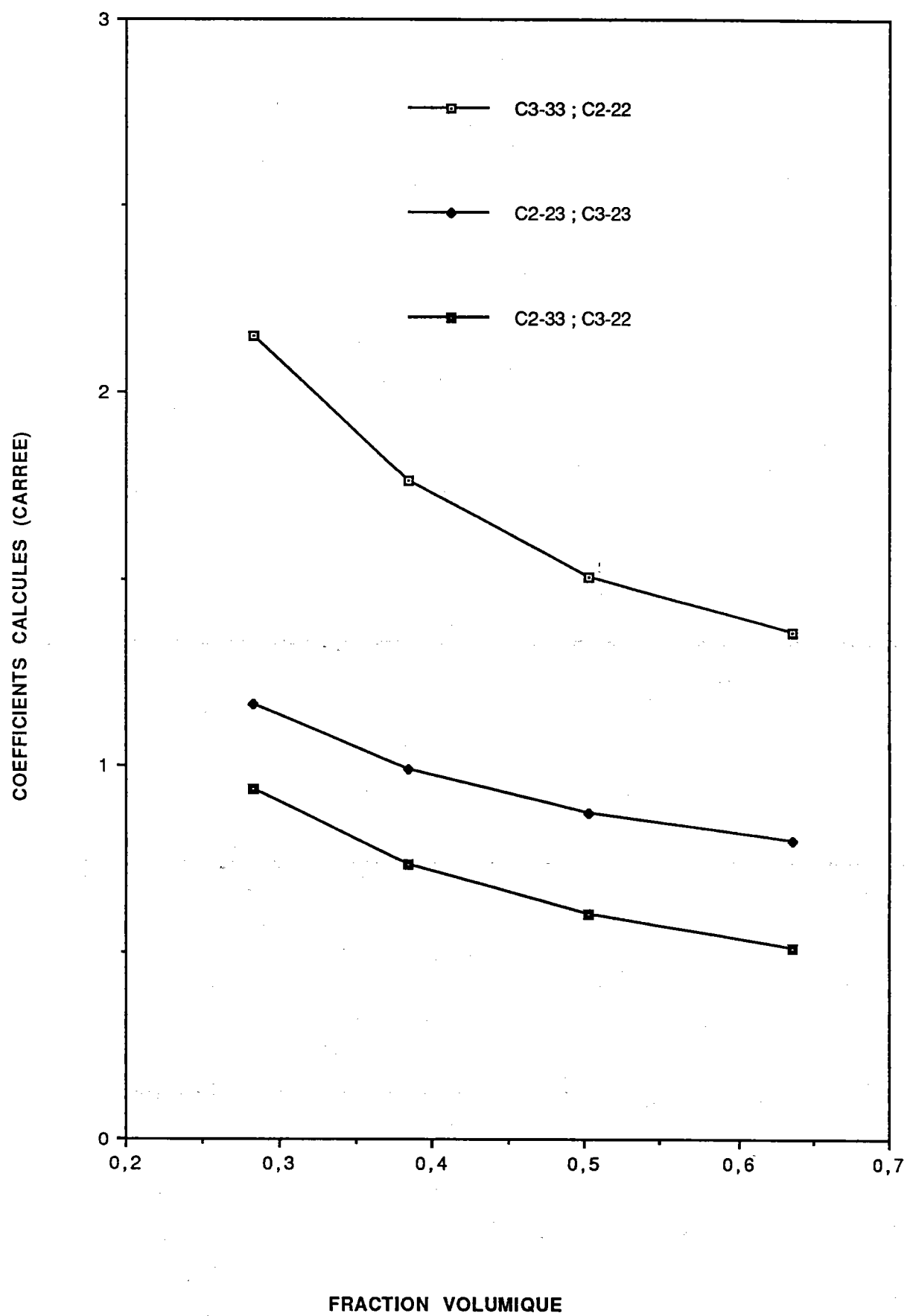
COEFFICIENT DE POISSON=0,35



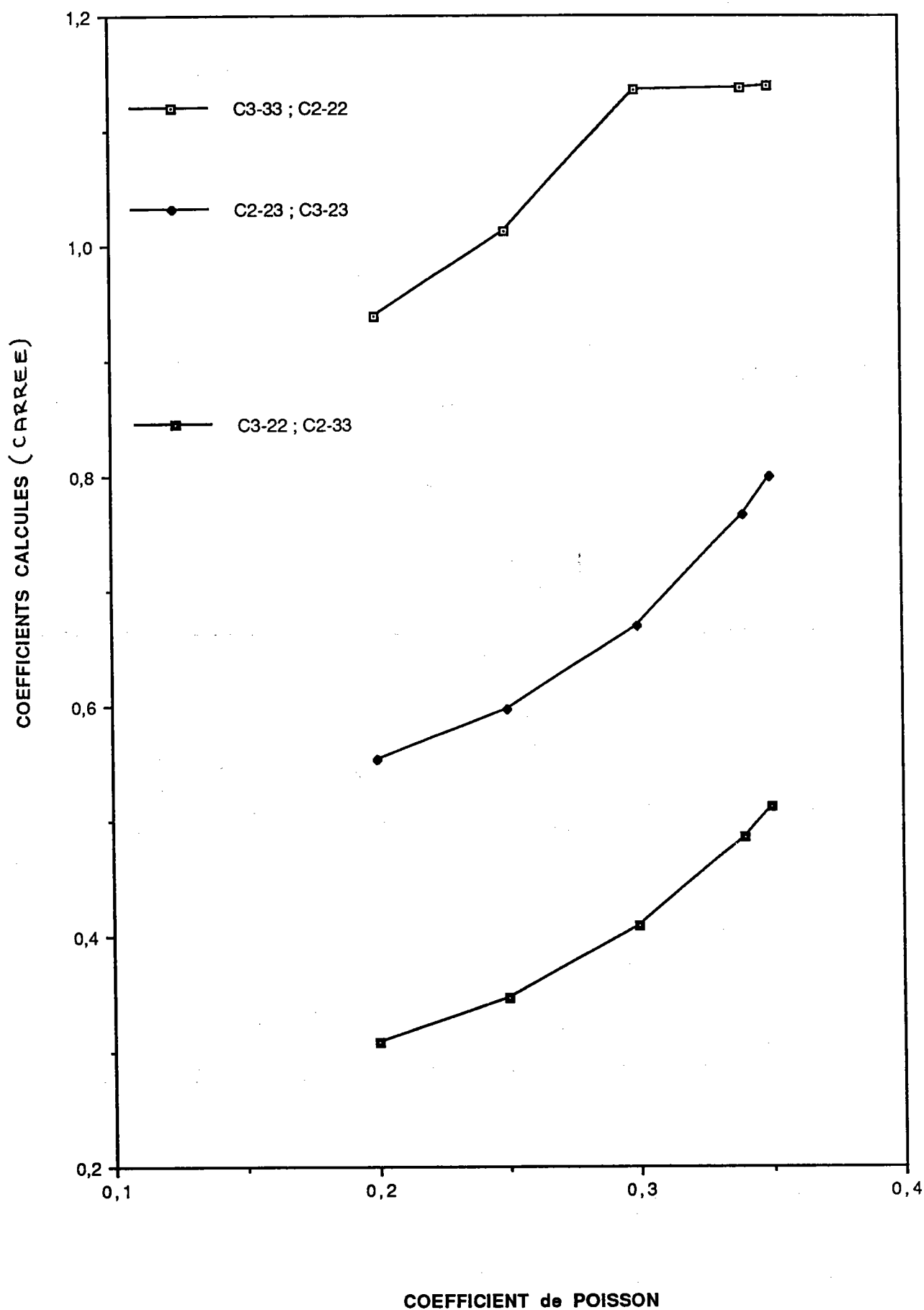
# FRACTION VOLUMIQUE 73,5%



COEFFICIENT de POISSON=0,35



FRACTION VOLUMIQUE = 63,2%





Pour les obtenir, il suffit de rechercher la formulation équivalente en déplacement du problème (Energie Potentielle). La démarche à suivre est classique :

- multiplication de la première équation par  $\delta v$
- multiplication de la seconde équation par  $\delta w$
- sommation et intégration sur l'épaisseur
- intégration par partie.

En notant  $t$  l'épaisseur du pli, nous obtenons pour une cellule de base carrée :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \delta \left\{ \int_{x_3} E_{ff} k_1^4 (W_o^2 + V_o^2) dx_3 - \int_{x_3} \sigma_e S_f k_1^2 (W_o^2 + V_o^2) dx_3 + \int_{x_3} E_M S_f \left[ c_d \left( \frac{dV_o}{dx_3} \right)^2 + c_i \left( \frac{dW_o}{dx_3} \right)^2 \right. \right. \\ \left. \left. + c_i k_2^2 V_o^2 + c_d k_2^2 W_o^2 \right] dx_3 \right. \\ \left. + \int_{x_3} E_M S_f c_{23} k_2 \left( W_o \frac{dV_o}{dx_3} - V_o \frac{dW_o}{dx_3} \right) dx_3 \right\} \\ - E_M S_f \left[ c_i \frac{dW_o(t)}{dx_3} - \frac{c_{23}}{2} k_2 V_o(t) \right] \delta W_o(t) - E_M S_f \left[ c_d \frac{dV_o(t)}{dx_3} + \frac{c_{23}}{2} k_2 W_o(t) \right] \delta V(t) \\ + E_M S_f \left[ c_d \frac{dV_o(o)}{dx_3} + \frac{c_{23}}{2} k_2 W_o(o) \right] \delta V_o(o) + E_M S_f \left[ c_i \frac{dW_o(o)}{dx_3} - \frac{c_{23}}{2} k_2 V_o(o) \right] \delta W(o) = 0 \end{aligned}$$

Les champs  $\delta V_o$  et  $\delta W_o$  sont cinématiquement admissibles, c'est-à-dire qu'ils vérifient les liaisons imposées au bord. Si l'on suppose les deux faces totalement bloquées alors  $\delta V_o(o)$ ,  $\delta W_o(o)$ ,  $\delta V_o(t)$ ,  $\delta W_o(t)$  sont tous nuls. Par contre, dans le cas où les bords sont libres, nous avons les relations :

$$c_d \frac{dV_o(t)}{dx_3} + \frac{c_{23}}{2} k_2 W_o(t) = 0 \quad ; \quad c_i \frac{dW_o(t)}{dx_3} - \frac{c_{23}}{2} k_2 V_o(t) = 0$$

La dernière étape qu'il reste à effectuer est le calcul de la charge critique et la détermination des deux nombres d'onde  $k_1$ ,  $k_2$  ainsi que les fonctions d'amplitude  $V_o(x_3)$  et  $W_o(x_3)$ . Les résultats seront bien évidemment fonction des conditions aux limites imposées aux bords du pli. En conclusion, ce second modèle apporte une amélioration sur la prise en compte des effets de l'empilement sur le champ de déplacement puisque les conditions aux limites sont plus complètes que dans le cas précédent.

Mais la charge critique qu'il est possible de calculer par une discrétisation unidimensionnelle ne devrait être que légèrement inférieure à la précédente. Ainsi, nous pensons utile de diriger nos efforts sur la modélisation du problème lorsque la déformation  $\epsilon_{12}$  est prise en compte.

#### 4. CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons tenté de construire des modèles de microflambage permettant d'expliquer le comportement élastique et à la rupture des composites en compression. Notre approche est une véritable approche micro-macro à 2 échelles, alors que les modèles classiques de type ROSEN [1964] sont purement microscopiques. Les équations de stabilité obtenues font intervenir des dérivées dans le sens de l'épaisseur du stratifié, ce qui montre que le microflambage doit être compris comme une instabilité de structure et pas seulement comme une instabilité locale. La contrainte critique dépend donc de la composition du stratifié dans l'épaisseur (séquence d'empilement), des conditions aux limites ( $\sigma_c$  n'est pas le même si le microflambage a lieu dans un pli superficiel ou dans un pli interne) et de l'état de contrainte au moment du flambage. Ainsi, la contrainte de microflambage ne sera pas la même en flexion pure, en compression pure ou en chargement mixte (flexion-compression). C'est pourquoi, nous avons choisi de compléter ce travail théorique par un travail expérimental et nous avons tenté de réaliser des essais en flexion, en compression et en flexion-compression.

Dans cette approche théorique, nous avons d'abord tenté de renouveler les idées de base car aucune des variantes de l'approche classique ne donne des résultats satisfaisants. Il est certain que les défauts tels que:

- défaut d'alignement des fibres (ANQUEZ [1990],...)
- décohésion fibre-matrice
- défaut de périodicité.
- etc...

jouent un rôle.

Un phénomène encore plus important a été négligé dans les deux modèles proposés ici, à savoir la rigidité de cisaillement dans les plans 1-2 et 1-3, qui est essentielle dans la description classique du microflambage. L'introduction du cisaillement dans un passage micro-macro est actuellement à l'étude au laboratoire. C'est pourquoi, nous insistons sur les résultats qualitatifs (effet d'épaisseur) et les méthodes employées (approche multi-échelle). Mais les résultats quantitatifs obtenus par les deux modèles présentés doivent être considérés avec prudence.

## **CHAPITRE IV : EXPERIENCES DE FLEXION-COMPRESSION**

### **1. Ojectifs**

### **2. Présentation du montage expérimental et simulation**

- a) Présentation du montage et du déroulement de sa conception
- b) Simulation numérique du montage
- c) Hypothèse de déformée circulaire
- d) Hypothèse des petites déformations et rotations modérées

### **3. Fabrication et description des éprouvettes testées**

### **4. Description du déroulement des essais**

- a) Matériel
- b) Eprouvettes et tests effectués
- c) Problèmes rencontrés au cours des essais
  - Essai de flexion
  - Essai de flexion-compression

### **5. Résultats des essais**

- a) Comportement élastique en compression
- b) Rupture sous sollicitations de flexion et flexion-compression
  - Description des tableaux de résultats
  - Description des modes de rupture
  - Remarques

### **6. Problèmes posés par une modélisation de la rupture**

## IV - EXPERIENCES DE FLEXION COMPRESSION

### 1. OBJECTIFS

Avant de poursuivre notre étude théorique, nous avons voulu confronter les quelques résultats obtenus avec l'expérience. Plus précisément, nous désirons mettre en évidence l'influence du chargement et de la séquence d'empilement sur la non linéarité et la moindre rigidité en compression et vérifier par la même occasion le caractère réversible des phénomènes. Dans la mesure du possible, nous tenterons d'atteindre la charge de rupture afin d'en examiner le faciès, ce qui nous apportera des renseignements sur le(s) mécanisme(s) précédant la ruine.

A l'heure actuelle, les résultats expérimentaux sont issus d'essais de flexion et de compression pure et, comme nous l'avons fait remarquer dans le chapitre I, les caractéristiques mécaniques obtenues sont fortement dépendantes du type d'essai et de son déroulement. Pour comparer au mieux les comportements du composite lorsqu'il est soumis à divers chargements, il est intéressant d'utiliser un montage unique. Les différentes sollicitations seront appliquées sur des éprouvettes possédant la même géométrie avec des mors identiques et donc des conditions aux limites similaires.

Nous avons choisi de solliciter l'éprouvette stratifiée en flexion compression, ce qui permet de choisir la zone du composite qui sera comprimée. De plus, si l'on choisit judicieusement la séquence d'empilement, il est possible de mettre en évidence l'effet de structure associé au micro-flambage.

### 2. PRESENTATION DU MONTAGE EXPERIMENTAL ET SIMULATION

#### a) Présentation du montage et du déroulement de sa conception

Pour solliciter une éprouvette en flexion compression, il est nécessaire d'appliquer à ses extrémités un couple et un effort normal. Or un montage constitué de quatre barres, deux consoles et deux mors nous permet de réaliser ce type de chargement (Fig. 36). Le choix des cotes ( $a_1$ ,  $a_2$ ,  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $Y_1$ ,  $Y_2$ ) représentées sur la figure 36, conduit à différentes configurations de chargement sur l'éprouvette en appliquant un effort unique de traction sur les deux consoles suivant l'axe de symétrie du montage. Par exemple, si tout l'ensemble est symétrique par rapport à l'axe de l'éprouvette, cette dernière est alors soumise à un effort de traction ou de compression suivant l'inclinaison des deux biellettes. Pour obtenir de la flexion, il suffit de disymétriser la position des deux axes  $A_1$  et  $A_2$  ou des deux angles  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ .

Les possibilités offertes par un tel montage sont vastes. Afin de simplifier notre étude, nous avons choisi de fixer quelques-unes des cotes du montage. Ce choix ne s'est pas fait au hasard mais avec les objectifs suivants :

- . minimiser le nombre de pièces à manipuler
- . éviter les problèmes d'encombrement (aux mors) et de résistance (montage rendu possible avec des biellettes suffisamment grandes)
- . simplifier la fabrication (prix) et l'assemblage.

Finalement, nous avons recherché une géométrie telle que le seul changement de la console inférieure nous permette d'obtenir les différents chargements :

- . flexion pure  $a_2 > 0$
- . flexion compression
- . compression pure  $a_2 = a_1 < 0$

De plus, pour simplifier le dépouillement des mesures de déformation sur la partie centrale, il est essentiel que le rapport entre le moment fléchissant et l'effort normal au centre (fonction de la géométrie du système) reste constant au cours du chargement.

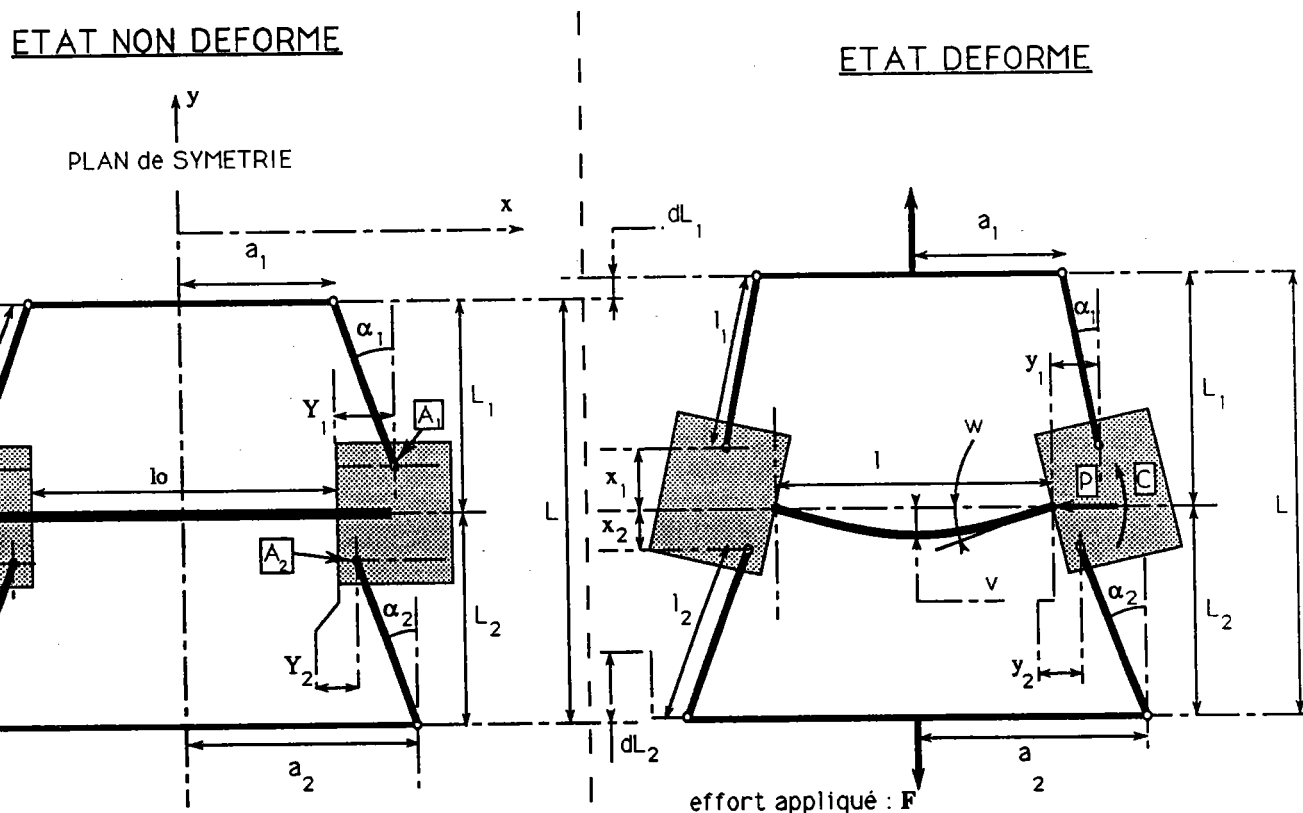


FIGURE 36 : Schéma de principe du montage expérimental

## b) Simulation numérique du montage

Pour atteindre ces objectifs, nous avons simulé le "comportement" du montage. L'éprouvette est représentée par une poutre possédant un comportement linéaire élastique et le montage est supposé rigide. Deux approches sont alors utilisées pour simuler l'évolution de la géométrie du montage lorsqu'on le soumet à un effort de traction croissant :

- la première bien adaptée aux sollicitations de flexion pure et aux grands déplacements, suppose que la déformée de la poutre soit circulaire
- la seconde ne s'applique que dans le cadre des petites déformations et des rotations modérées, mais elle offre l'avantage de bien prendre en compte l'effet de l'effort normal.

Les équations permettant de déterminer la configuration du montage soumis à effort  $F$  se divisent en trois groupes (Fig. 36) :

### \* Géométrie

Fermeture géométrique

$$a_2 + l_2 \sin \alpha_2 = l/2 - x_2$$

$$l_2 \cos \alpha_2 = L_2 + y_2$$

$$a_1 - l_1 \sin \alpha_1 = l/2 + x_1$$

$$L_1 = y_1 + l_1 \cos \alpha_1$$

Rotation de la tête

$$x_1 = X_1 \cos w - Y_1 \sin w$$

$$y_1 = X_1 \sin w + Y_1 \cos w$$

$$x_2 = X_2 \cos w - Y_2 \sin w$$

$$y_2 = X_2 \sin w + Y_2 \cos w$$

### \* Equilibre

Equilibre du mors

$$F/2 (\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2) - P = 0$$

$$- C + F/2 (x_1 - x_2 + y_2 \tan \alpha_2 - y_1 \tan \alpha_1) = 0$$

où  $P$  et  $C$  sont la force de compression et le couple appliqués au bord de l'éprouvette par le mors.

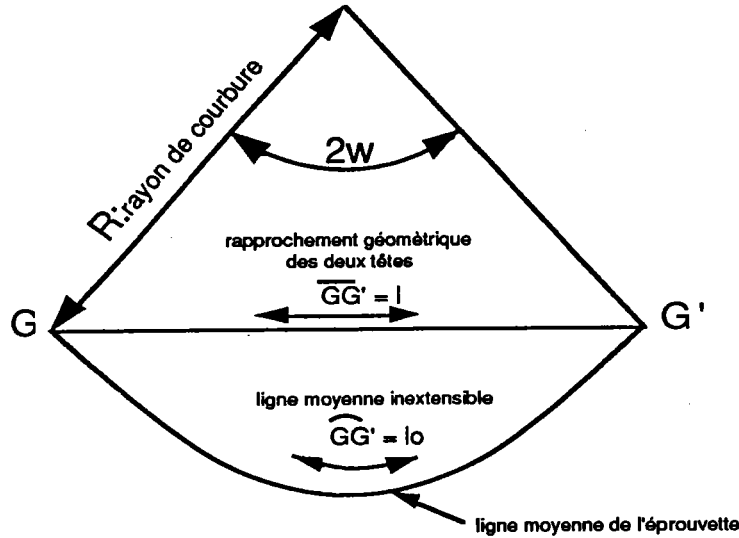
### \* Comportement éprouvette

Hypothèse de déformée circulaire

Hypothèse de petites déformations et rotations modérées

c) Hypothèse de déformée circulaire

La ligne moyenne est considérée inextensible et le rapprochement des deux têtes s'exprime directement en fonction de la flèche au centre



$$\left. \begin{aligned} GG' &= 2Rw = l_0 \\ GG' &= 2R \sin w = l \end{aligned} \right\} l - l_0 = -l_0 \left(1 - \frac{\sin w}{w}\right)$$

où  $R$  est le rayon de courbure. Ce dernier est relié à la rotation de la tête par :  $R = l_0/2w$ . La flèche au centre s'exprime aussi en fonction de la rotation  $w$  :

$$v = \frac{-l_0}{2w} (1 - \cos w) \quad (26)$$

La résolution du problème dans le cas d'une déformée circulaire s'obtient en procédant pas à pas, les incréments étant déterminés en résolvant le système différentiel suivant :

$$l_2 \cos \alpha_2 d\alpha_2 = dl/2 + dx_2$$

$$-l_1 \cos \alpha_1 d\alpha_1 = dl/2 + dx_1$$

$$-l_2 \sin \alpha_2 d\alpha_2 = dL_2 + dy_2$$

$$l_1 \sin \alpha_1 d\alpha_1 = -dL_1 + dy_1$$

$$dx_1 = -dw y_1$$

$$dx_2 = -dw y_2$$

$$dy_1 = dw x_1$$

$$dy_2 = dw x_2$$

$$dl = l_0 dw [\cos w/w - \sin w/w^2]$$

$$\text{et } dL = dL_1 + dL_2 = \{l_0/2 [\cos w/w - \sin w/w^2] (\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2) - y_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + y_2 \operatorname{tg} \alpha_2 + x_1 - x_2\}$$

Pour simuler l'évolution du montage, il suffit alors de se donner l'incrément d'allongement de ce dernier (dL), ce qui correspond sur la machine de traction au déplacement que l'on impose. A chaque pas il est alors possible de connaître les nouvelles positions des différentes pièces mais aussi la flèche par la relation (26) et le rapport M/N au centre (moment fléchissant sur effort normal)

$$\frac{M}{N}(o) = \frac{x_1 - x_2 - y_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + y_2 \operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2} + v(o)$$

Remarquons que la simulation du montage est indépendante du matériau et que la rigidité globale du stratifié est évaluée en mesurant l'effort qu'il faut appliquer pour obtenir un allongement donné du montage.

#### d) Hypothèse des petites déformations et rotations modérées

Avec ces hypothèses il est possible de déterminer la flèche et la rotation en chaque point de l'éprouvette en résolvant les équations de la Résistance des Matériaux qui s'expriment de la façon suivante :

$$\frac{dN_i}{dx} = 0$$

$$\frac{dT_i}{dx} = 0$$

$$\frac{d^2 M_i}{dx^2} - N_i \frac{d^2 v}{dx^2} = 0$$

$$N_i = ES \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{dv}{dx} \right)^2$$

$$M_i = EI \frac{d^2 v}{dx^2}$$

où  $M_i$ ,  $N_i$ ,  $T_i$  sont les efforts intérieurs à l'abscisse  $x$ ,  $v(x)$  la flèche et  $u(x)$  le déplacement dans la direction  $x$ .

Nous obtenons avec les conditions aux limites suivantes (Symétrie, Couple imposé  $C$ , Force imposée  $F$ , et  $v = 0$  aux mors) :

Rotation de la tête

$$w = \frac{-C}{P} \sqrt{\frac{-P}{EI}} \operatorname{tg} \left[ \sqrt{\frac{-P}{EI}} \frac{l_0}{2} \right]$$



Flèche au centre

$$v(o) = \frac{C}{P} \left( \frac{1}{\cos \left[ \sqrt{\frac{-P}{EI}} \frac{l_o}{2} \right]} - 1 \right)$$

Rapprochement des deux têtes

$$\frac{l - l_o}{2} = \frac{P}{ES} \frac{l_o}{2} + \frac{P}{2EI} \left( \frac{C}{P \cos \left[ \sqrt{\frac{-P}{EI}} \frac{l_o}{2} \right]} \right)^2 \left( \frac{l_o}{4} - \frac{\sin \left[ \sqrt{\frac{-P}{EI}} l_o \right]}{4 \sqrt{\frac{-P}{EI}}} \right)$$

où E, I, S sont respectivement le module d'Young (global du stratifié), le moment quadratique, et la section de l'éprouvette.

En différenciant les équations, il est possible de résoudre le problème par la méthode de Newton-Raphson, et de décrire ainsi l'évolution du montage au cours du chargement de traction.

### c) Résultat

Les solutions qui ont été retenues (Fig. 38-39-40) permettent d'appliquer au composite trois chargements où le rapport M/N au centre évolue peu (Fig. 41-42-43) et il est égal respectivement à -18 mm, -0,5 mm et -1 mm. Pour une éprouvette de 3 mm d'épaisseur, le premier cas correspond à un état de flexion presque pure, et les deux autres conduisent à deux répartitions de déformations représentées sur la figure 37 (dans le cas d'un matériau homogène linéaire isotrope). Les sections des bielles et des axes sont dimensionnées pour supporter les contraintes au cours d'un essai effectué sur une éprouvette en Carbone, ce qui justifie le doublement des bielles et leur montage en chape.

Au niveau des mors, l'éprouvette est simplement montée dans une fente. Comme l'épaisseur de cette dernière peut être variable, des cales apairées sont insérées entre le mors et l'éprouvette. La transmission des efforts s'effectue simplement par le fond de la fente où l'éprouvette prend appui.

$$\frac{M}{N} (O) = \frac{\sigma_{\text{moment fléchissant}}}{\sigma_{\text{effort normal}}} * \frac{h}{6}$$

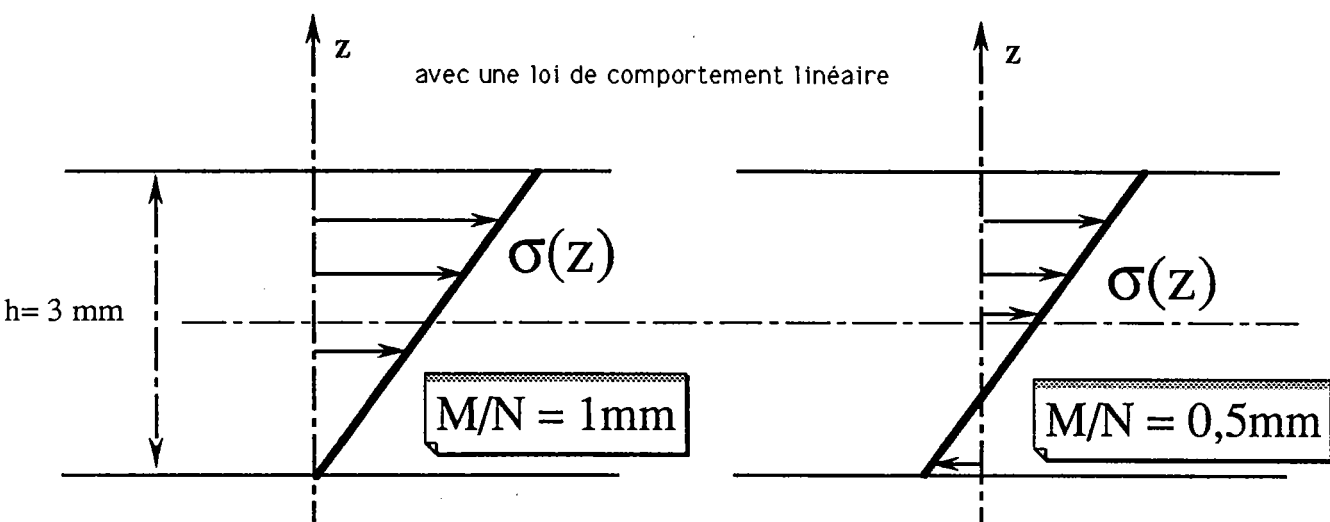


FIGURE 37 : Champs de contraintes obtenus (matériau linéaire homogène)

### MONTAGE DE FLEXION PURE

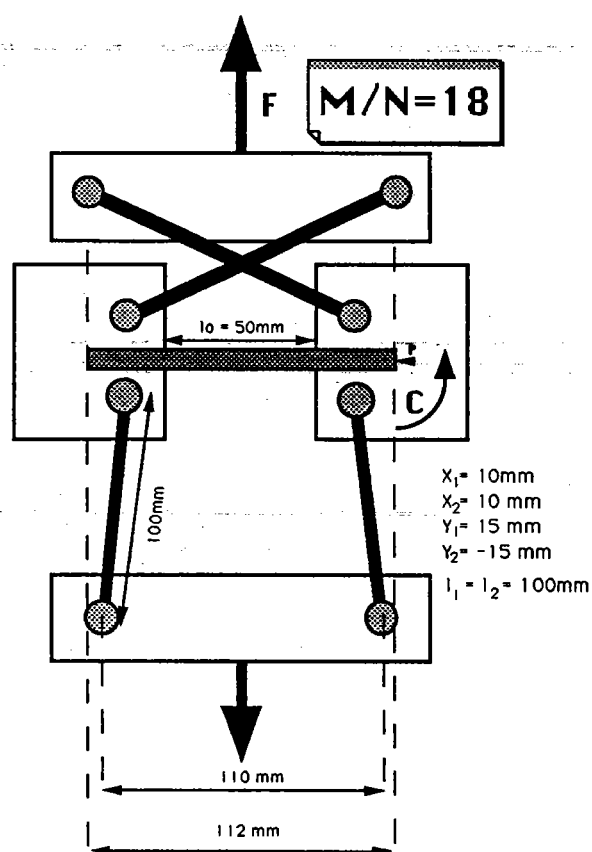
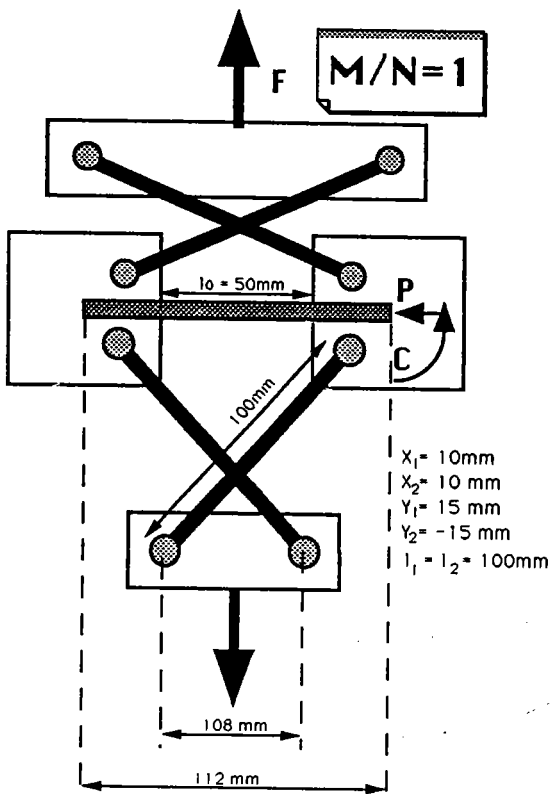


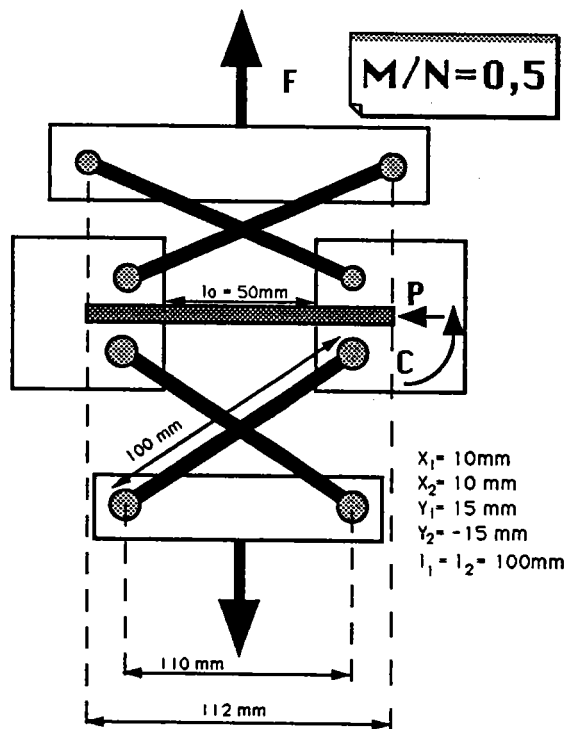
FIGURE 38 : Montage de flexion  $M/N = -18 \text{ mm}$

## MONTAGE DE FLEXION-COMPRESSION



**FIGURE 39 : Montage de flexion-compression  $M/N = -1\text{mm}$**

## MONTAGE DE FLEXION-COMPRESSION



**FIGURE 40 : Montage de flexion-compression  $M/N = -0,5\text{mm}$**

## SIMULATION de FLEXION

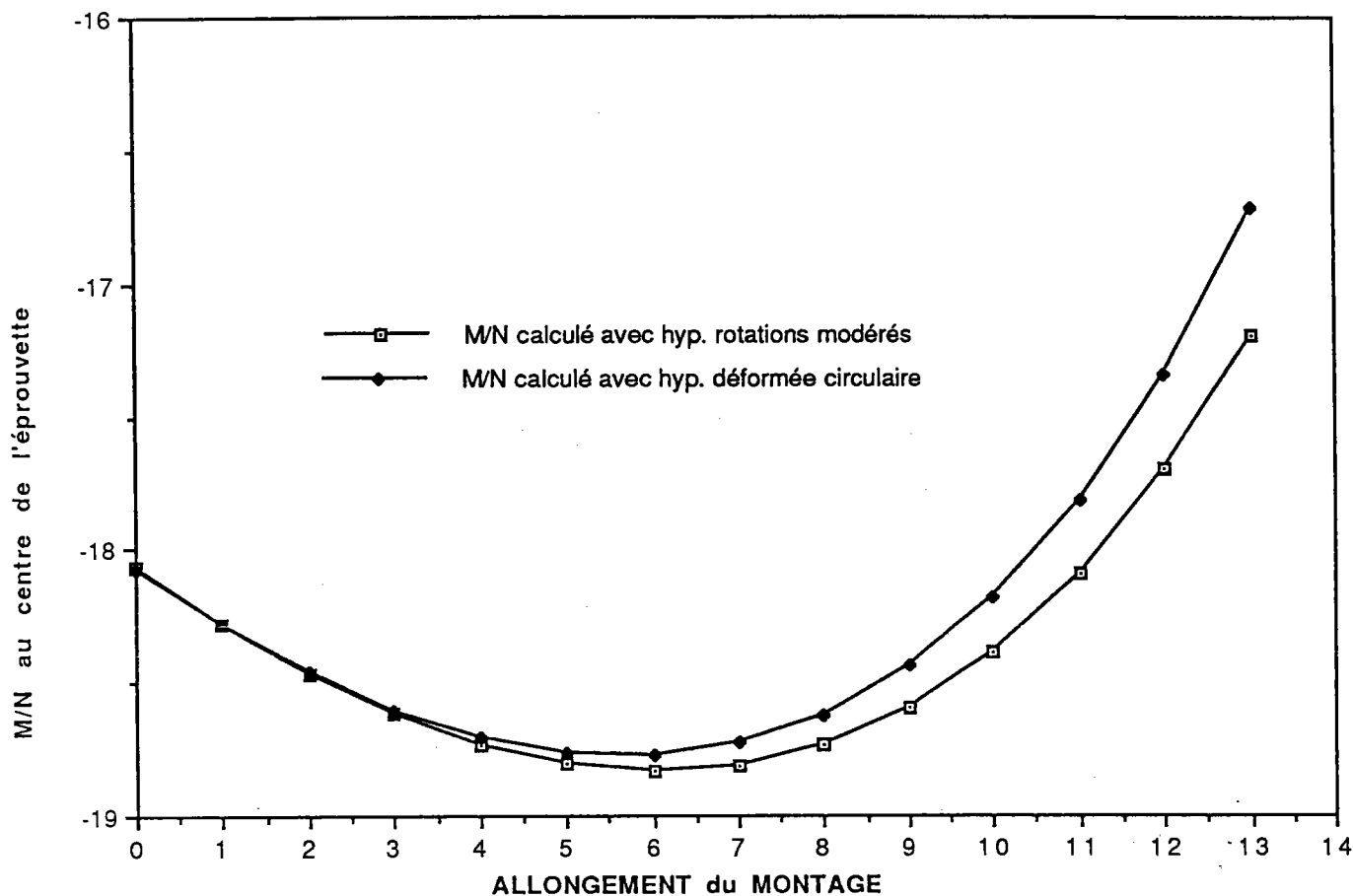


FIGURE 41 : Evolution du rapport  $M/N$ (au centre) cas de la flexion "pure"

## SIMULATION de FLEXION COMPRESSION

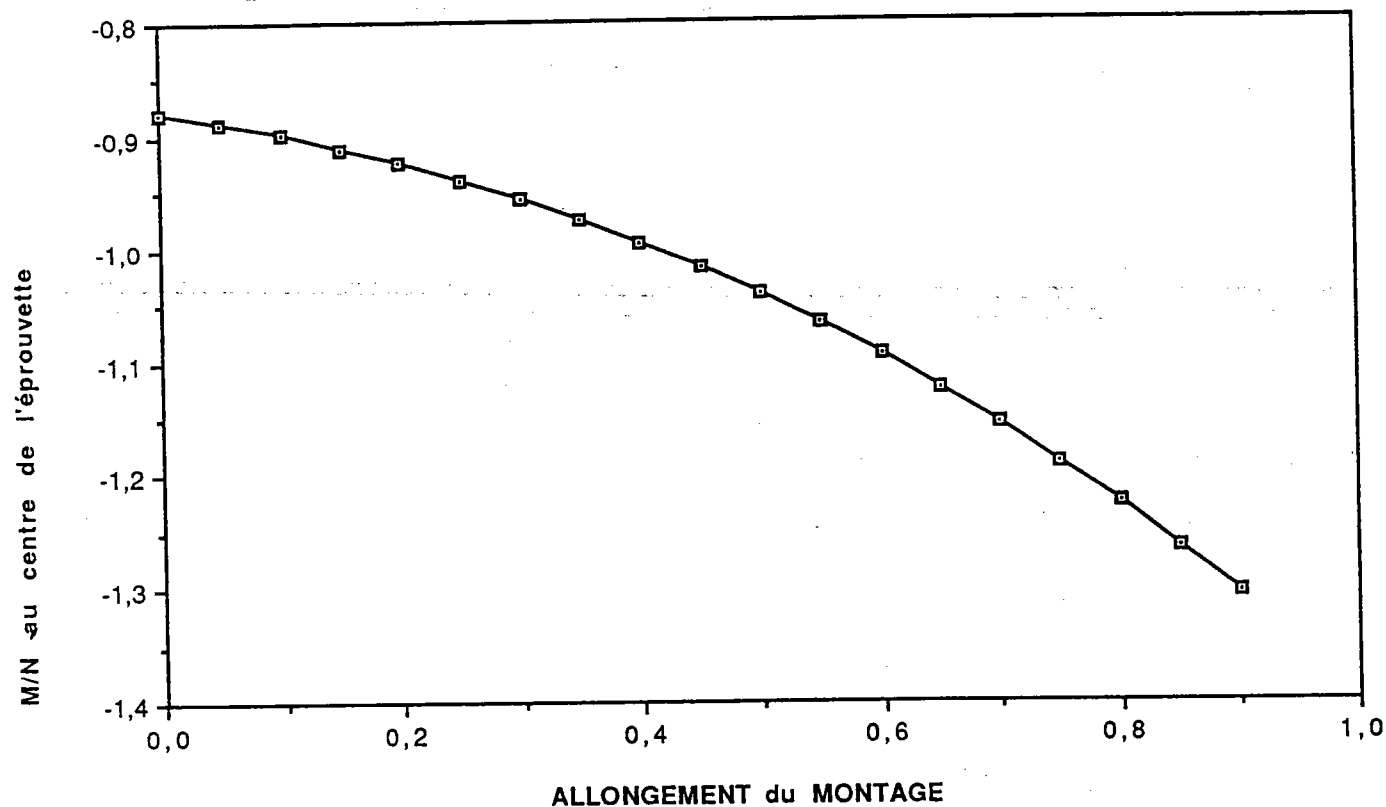


FIGURE 42 : Evolution du rapport  $M/N$ (au centre) (flexion compression avec  $M/N=-1\text{mm}$ )

## SIMULATION de FLEXION COMPRESSION

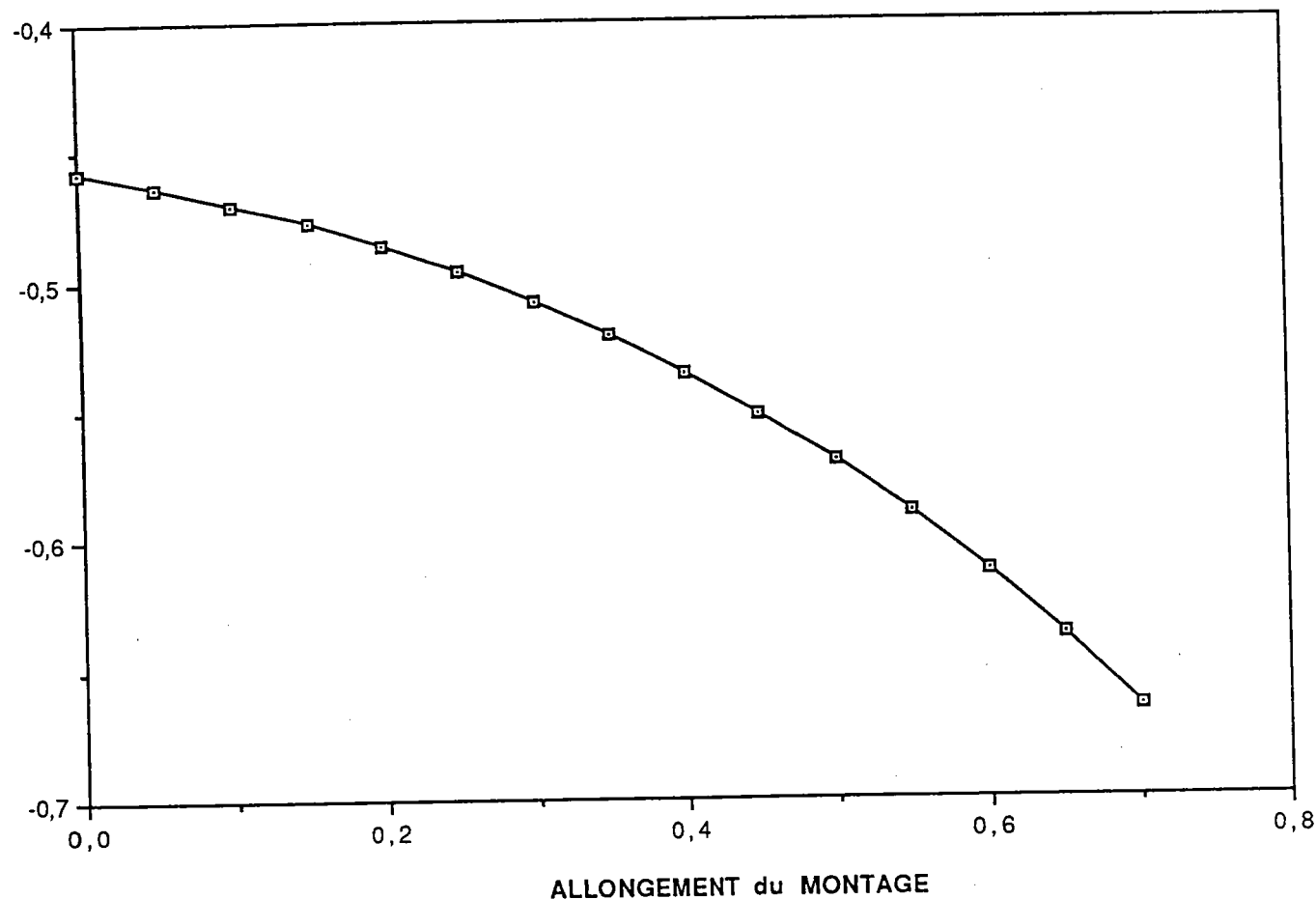


FIGURE 43 : Evolution du rapport M/N(au centre) (flexion compression avec M/N=-0,5mm)

### 3. FABRICATION ET DESCRIPTION DES EPROUVETTES TESTEES

La majorité des essais de flexion quatre points et de compression pure étant menés sur des Carbone Epoxy, nous avons choisi de tester des stratifiés Verre Epoxy. Ces composites possèdent une forte résistance et une faible rigidité. Leur mise en oeuvre ne demande que peu de matériel.

Comme le paramètre essentiel à l'apparition du microflambage est le module de cisaillement de la résine, des phénomènes similaires aux Carbone-Epoxy doivent être observés. De plus la faible rigidité du Verre devrait faciliter l'instabilité.

Les deux matériaux de base que nous avons utilisés sont :

- STRATIPREG de chez VETROTEX : Verre E pré-imprégné d'une résine epoxy qui se présente sous la forme d'une mèche bobinée de largeur égale à 8 mm.
- La fabrication d'une plaque s'effectue par enroulement autour d'un support recouvert d'une feuille.

le de mylar. Le pas d'enroulement est alors en relation directe avec l'épaisseur du pli. Pour changer l'orientation du pli suivant, il suffit de faire effectuer 1/4 de tour à la plaque support. Au L.M.A. de Besançon, Monsieur Varchon a fabriqué à notre intention deux plaques, une unidimensionnelle et un empilement de neuf couches symétriques avec des directions à 0° et 90° alternées. La polymérisation a été effectuée sur une machine de traction dotée de deux plateaux chauffants. Ce système permet de respecter le cycle thermique et de pression entraînant la polymérisation. Les découpes de ces plaques avec une scie à ruban nous a permis d'obtenir trois stratifiés :

- . unidirectionnel d'épaisseur ~ 2,15mm
- . [90/0/90/0/90]<sub>s</sub> d'épaisseur ~ 2,03mm
- . [0/90/0/90/0]<sub>s</sub> d'épaisseur ~ 2,03mm

- VICOTEX (M10/42%/1131) de chez BROCHIER qui est un tissu verre epoxy à armature unidirectionnel d'une épaisseur de 0,19 mm. La fabrication faite au L.M.A. de Besançon se déroule en plusieurs étapes :

- . découpage du pli à la taille du moule et dans la direction désirée
- . superposition des plis pour créer le stratifié en effectuant un compactage
- . fermeture du moule et mise en place dans la machine de traction entre les deux plateaux chauffants
- . polymérisation.

Deux séquences d'empilement ont été obtenues à partir de la plaque fabriquée :

- . [0<sub>4</sub>/90<sub>4</sub>]<sub>s</sub> épaisseur 3,6mm
- . [90<sub>4</sub>/0]<sub>s</sub> épaisseur 3,6mm

Au cours de la fabrication de ces matériaux, la montée en température, nécessaire à la polymérisation rend la matrice fluide, qui peut alors s'écouler. Par conséquent, il est nécessaire de mesurer la fraction volumique de fibre après la fabrication. Pour cela, il suffit de peser le stratifié d'une part et les fibres contenues dans ce dernier en brûlant la résine d'autre part.

Par cette méthode nous avons obtenu :

- . unidirectionnel                      f =
- . [90/0] 9 couches                      f =
- . [0<sub>4</sub>/90<sub>4</sub>]<sub>s</sub>                              f =

Pour l'unidirectionnel et les empilements à 9 couches, les taux de fibres sont anormalement élevés. En effet, lors de la fabrication une quantité non négligeable de cette résine s'est échappée. Sur les figures 44 à 48 nous pouvons observer les sections de tous les composites qui ont été testés.

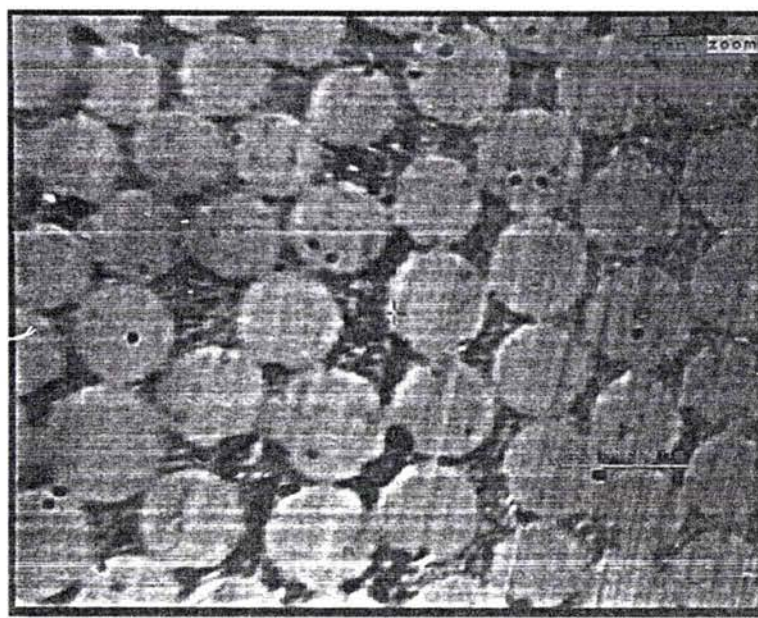
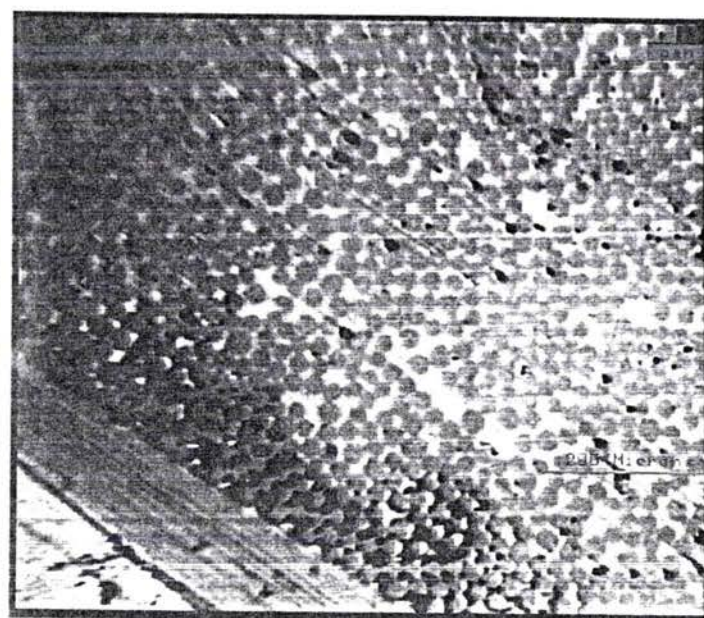


FIGURE 44 : Photographie de la section de l'unidirectionnel UD VEE1

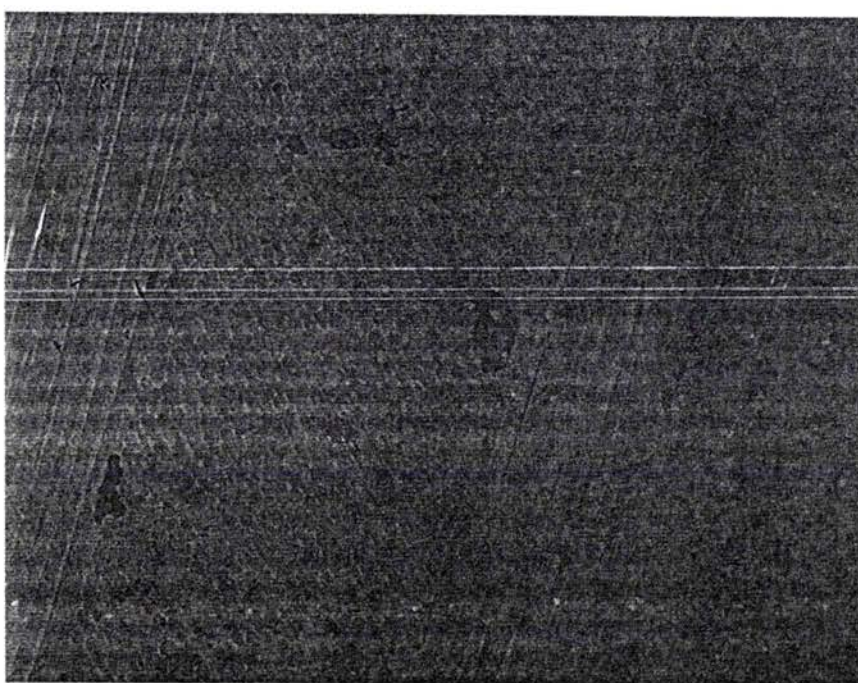


FIGURE 45 : Photographie de la section du stratifié (9 couches) P1 VEE2



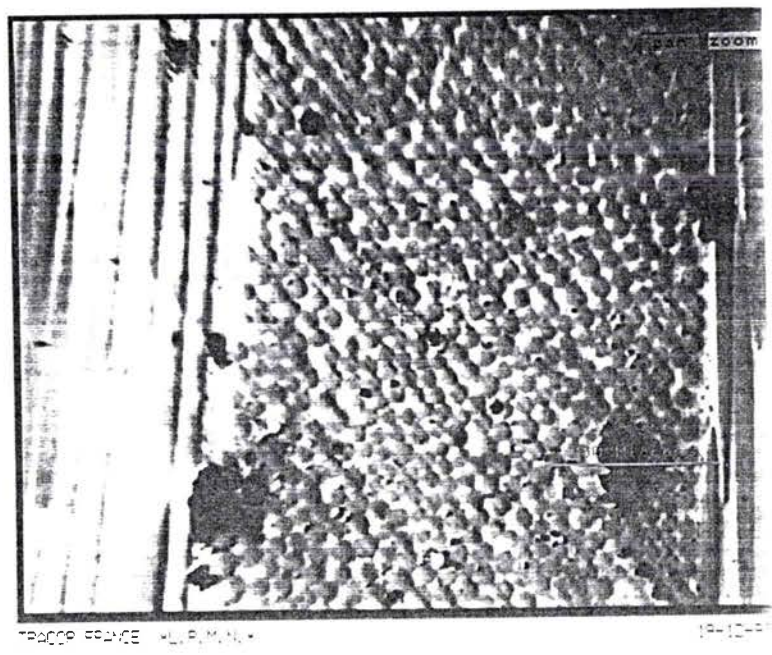


FIGURE 46 : Photographie de la section du stratifié (9 couches) P2 VEE2

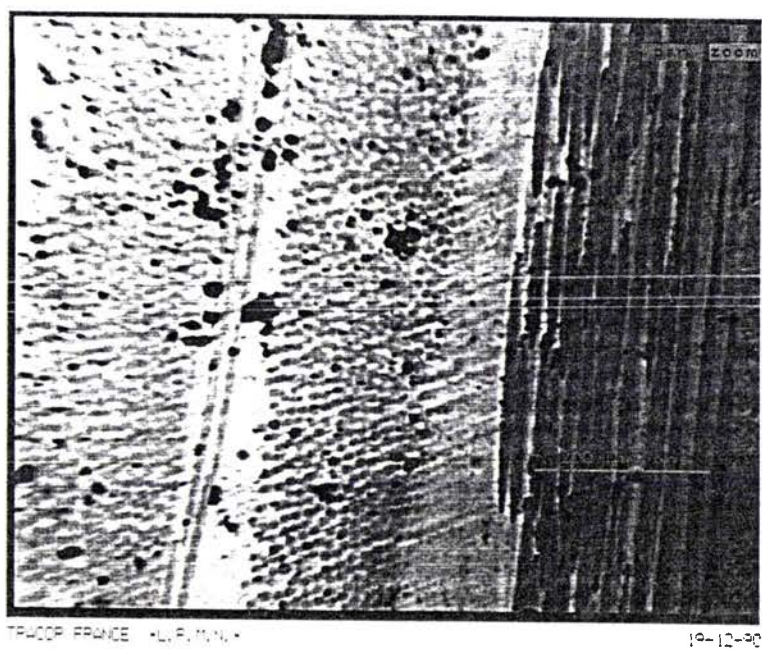


FIGURE 47 : Photographie de la section du stratifié (16 couches) P4 VEE3



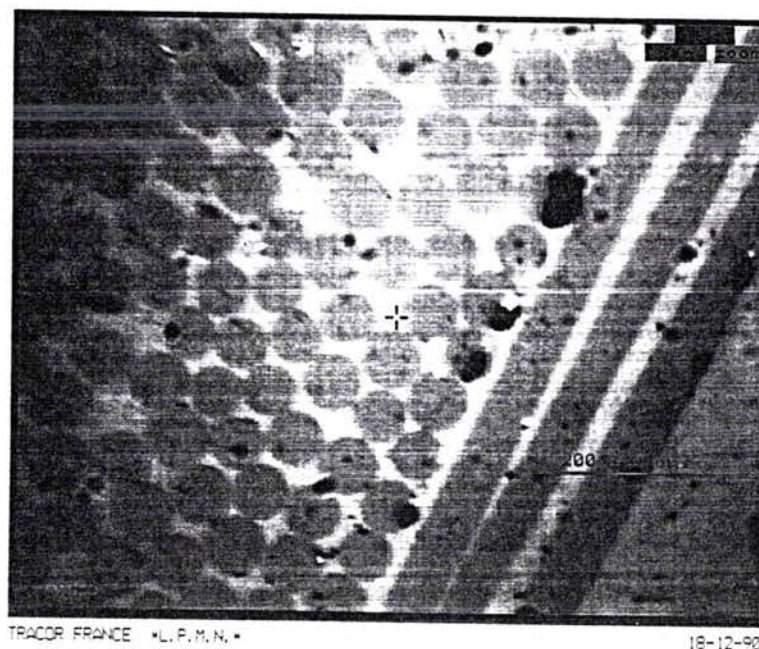


FIGURE 48 : Photographie de la section du stratifié (9 couches) P5 VEE3

#### 4. DESCRIPTION DU DEROULEMENT DES ESSAIS

##### a) Matériel

Les essais ont été effectués sur une machine de traction ZWICK pilotée par un ordinateur HP. Un allongement croissant est appliqué entre les deux têtes du montage. La vitesse de traverse est très faible (1 mm/mn). Au cours de l'essai, l'évolution de l'allongement du montage  $\Delta L$  (mesuré par un extensiomètre à pince fixé sur la console supérieure et inférieure du montage) et de la force de traction (F) appliquée sur le montage, sont mesurés. Un enregistreur à bande et une table (Y-T) permettent de tracer l'évolution de ces deux paramètres au cours du temps.

Pour mesurer les déformations au centre de l'éprouvette sur les faces supérieures et inférieures, deux jauges de 350  $\Omega$  sont utilisées. Chacune de ces jauges fait partie d'un pont de deux jauges. Les compensations sont collées sur le même matériau que l'éprouvette (chute de composite issue de la découpe). Un conditionneur couplé avec un enregistreur à bande nous permet d'obtenir l'évolution des déformations au cours du temps.

Du fait de la compacité du montage, nous avons choisi de mesurer la flèche de l'éprouvette et la rotation des mors par photographie. Le déclenchement s'effectuant manuellement en fonction de la force affichée (par exemple : photo tous les 100N). Cela nous a permis de photographier le mode de rupture de l'éprouvette et l'endommagement extérieur.

#### b) Eprouvettes et tests effectués

Avec les trois montages (flexion =  $M/N = -18\text{mm}$ ,  $M/N = -1\text{mm}$ ,  $M/N = -0,5\text{mm}$ ) nous avons testé les cinq empilements précédemment décrits. Afin de simplifier la lecture des résultats, nous avons codifié les éprouvettes de la façon suivante :

|                                                                                                                     |                                                                                                                                                                   |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| UD n° VEE <sub>1</sub><br>(STRATIPREG)                                                                              | Unidirectionnel Verre Epoxy taillé dans la plaque E <sub>1</sub><br>n° numéro de l'éprouvette testée qui est préalablement mesurée (épaisseur, largeur, longueur) |
| P <sub>1</sub> n° VEE <sub>2</sub><br>(STRATIPREG)<br>P <sub>1</sub> [90°/0°/90°/0°/90°] <sub>s</sub>               | Empilement P <sub>1</sub> de couches unidirectionnelles Verre Epoxy taillé dans la plaque E <sub>2</sub> (9 couches)                                              |
| P <sub>2</sub> n° VEE <sub>2</sub><br>(STRATIPREG)<br>P <sub>2</sub> [0°/90°/0°/90°/0°] <sub>s</sub>                | Empilement P <sub>2</sub> de couches unidirectionnelles Verre Epoxy taillé dans la plaque E <sub>2</sub> (9 couches)                                              |
| P <sub>3</sub> n° VEE <sub>2</sub><br>(STRATIPREG)<br>P <sub>3</sub> [+45°/-45°/+45°/-45°/+45°] <sub>s</sub>        | Empilement P <sub>3</sub> de couches unidirectionnelles Verre Epoxy taillé dans la plaque E <sub>2</sub> (9 couches)                                              |
| P <sub>4</sub> n° VEE <sub>3</sub><br>(VICOTEX)<br>P <sub>4</sub> [0 <sub>4</sub> °/90 <sub>4</sub> °] <sub>s</sub> | Empilement P <sub>4</sub> de tissu de Verre Epoxy taillé dans la plaque E <sub>3</sub> (16 couches)                                                               |
| P <sub>5</sub> n° VEE <sub>3</sub><br>(VICOTEX)<br>P <sub>5</sub> [90 <sub>4</sub> °/0 <sub>4</sub> °] <sub>s</sub> | Empilement P <sub>5</sub> de tissu de Verre Epoxy taillé dans la plaque E <sub>3</sub> (16 couches)                                                               |

Remarquons que toutes les éprouvettes issues d'une même plaque (E<sub>1</sub> ou E<sub>2</sub> ou E<sub>3</sub>) ont subi le même cycle de polymérisation et possèdent en moyenne la même fraction volumique que

celle donnée dans le paragraphe précédent (mesurée sur des chutes de découpe).

### c) Problèmes rencontrés au cours des essais

#### Essais de Flexion (M/N = -18mm)

Au cours des différents essais de flexion, nous avons été confrontés à deux problèmes :

- La mesure des déformations sur les empilements  $P_4$  et  $P_5$  s'est avérée très difficile. Nous nous sommes aperçus que l'humidité ambiante faisait fluctuer les valeurs mesurées. Il était impossible de stabiliser la capacitance du pont. VISHAY MICROMESURES nous a prescrit le remède : ce tissu Verre Epoxy muni des jauges doit être recouvert d'une résine de silicone.

- Le montage tel qu'il est conçu ne nous a pas permis d'atteindre la rupture des composites UD. En effet, le déplacement maximal de notre montage n'a conduit qu'à une déformation de 2,5% sur la face comprimée. Les principales raisons sont la faible épaisseur (2,15 mm) de l'éprouvette et sa faible rigidité en comparaison de sa forte résistance.

#### Essais de Flexion - Compression (M/N = -0,5mm ; M/N = -1mm)

La minceur des éprouvettes ainsi que leur faible rigidité conduisent à des charges critiques de compression très basses. Par conséquent, pour des longueurs d'éprouvettes de 50 mm, un flambage global apparaît dès le début du chargement. Ceci nous a obligé à réduire cette longueur afin d'éviter l'instabilité de l'éprouvette qui se caractérise par l'apparition d'une déformation de flexion indésirable.

Avec certaines éprouvettes nous sommes parvenus à éviter l'instabilité en compression mais c'est tout le montage qui s'est avéré instable. En effet, sur la figure 67 les deux mors se sont décalés verticalement. Ce problème est insoluble ; simplement il est nécessaire de revoir la conception globale du montage.

Quand cette instabilité n'apparaît pas, les deux déformations sont négatives et leur rapport est compris entre 0,5 et 1 ( $\epsilon_{\text{inf}}/\epsilon_{\text{sup}}$ ). En résumé, l'éprouvette est soumise à un état de compression presque pure.

Numériquement, nous avons eu quelques difficultés pour simuler le "comportement" du

montage, et de tels rapports n'ont pu être obtenus qu'en prenant en compte les défauts de fabrication du montage dans la simulation (cotes :  $a_1, a_2, x_1, x_2, y_1, y_2, l_1, l_2$ ). Il s'est avéré que les deux configurations ( $M/N = -0,5\text{mm}$  ;  $M/N = -1\text{mm}$ ) du montage sont très sensibles aux imperfections d'usinage.

Pour résoudre le problème et obtenir le rapport désiré, il est nécessaire de concevoir des axes réglables en position et de calibrer le montage avec un matériau linéaire (en traction et compression). Malgré ces inconvénients, nous verrons que ces essais de flexion compression permettent d'obtenir des résultats intéressants sur la déformation à rupture.

## 5. Résultats des essais

### a) Comportement élastique en compression

Le premier objectif de ces essais est d'établir la loi de comportement élastique  $\sigma(\epsilon)$  en fonction de la séquence d'empilement et du chargement appliqué à l'éprouvette. Grâce à la simulation numérique (hypothèse de déformée circulaire), il est possible d'établir cette loi de comportement à partir des seules informations expérimentales qui sont l'effort appliqué sur le montage, l'allongement du montage et les déformations sur les faces supérieures et inférieures.

En observant les résultats des essais de flexion menés sur tous les empilements, il s'avère que les déformations de traction et de compression sont sensiblement identiques. La légère supériorité de la déformation de compression provient du fait qu'au cours de l'essai un léger effort de compression est appliqué à l'éprouvette. Pour valider ce résultat, nous avons alors simulé les essais en supposant que le matériau possède une même loi de comportement linéaire en traction et en compression.

Pour l'unidirectionnel (UD), le module d'Young a été obtenu en réalisant un essai de traction sur une éprouvette. Avec un module de 61 000 MPa, nous sommes parvenus à une excellente corrélation entre les résultats expérimentaux et numériques (hypothèse de rotation modérée). Pour bien illustrer cette parfaite concordance, nous avons tracé sur les figures (49-50) les déformations mesurées et calculées ainsi que l'effort appliqué sur le montage (mesuré et calculé) en fonction de l'allongement du montage. La linéarité du comportement en compression est indubitablement mise en évidence sur la figure (51) où les rapports (mesurés et calculés) entre les déformations de traction et de compression sont tracés en fonction de l'allongement du montage. Remarquons que la légère différence observée (Fig. 50) entre la force mesurée et celle calculée s'explique d'une part, par l'hypothèse de rotation modérée qui n'est plus valable en fin d'essai, et d'autre part par un manque de précision sur le module d'Young.

# COMPARAISON des RESULTATS EXPERIMENTAUX et NUMERIQUES

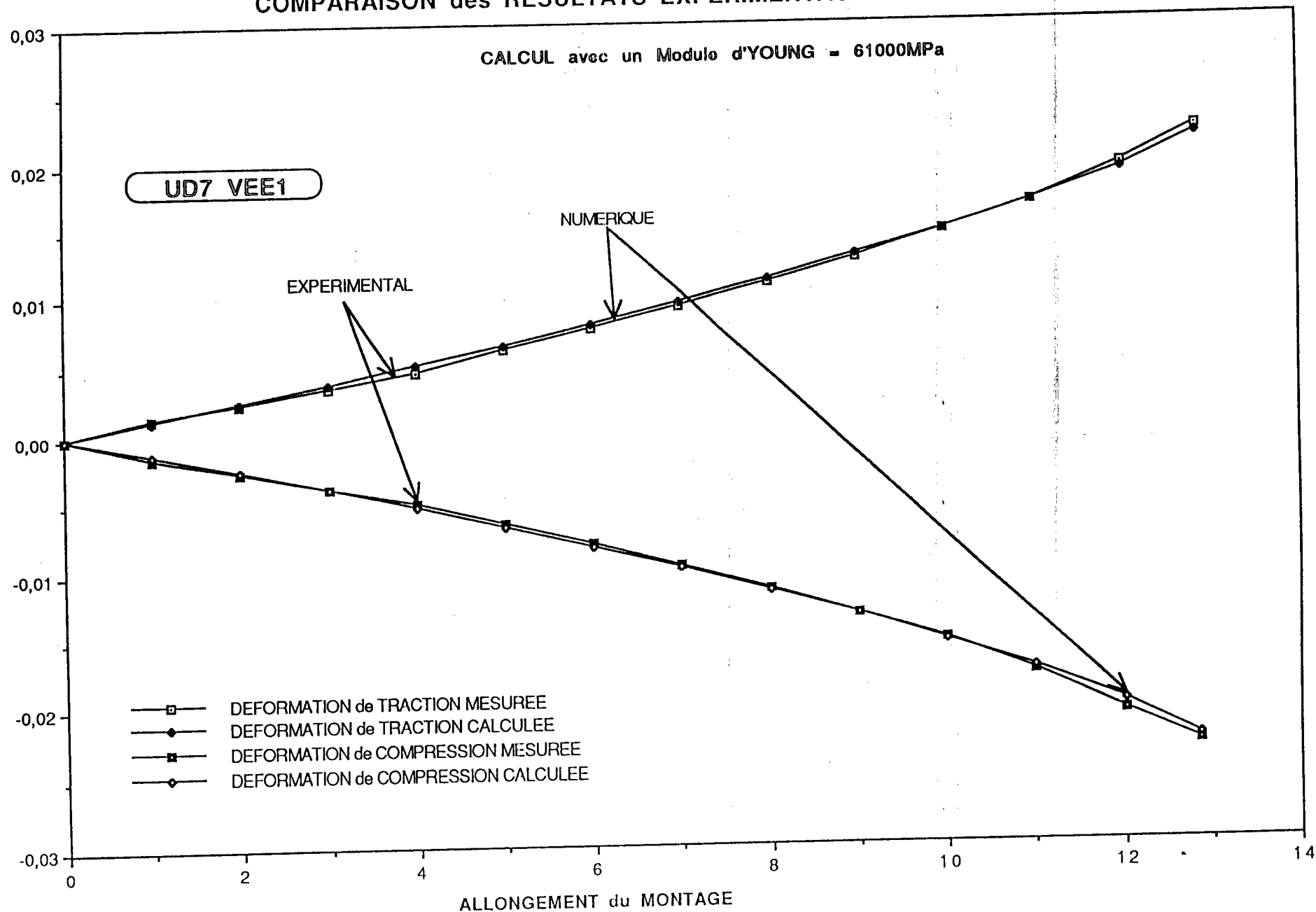


FIGURE 49 : Déformations mesurées et calculées au cours d'un essai de flexion ( cas de l'UD7)

# COMPARAISON de la FORCE MESUREE ET CALCULEE

CALCUL avec un Module d'YOUNG = 61000MPa

UD7 VEE1

—□— FORCE MESUREE  
—●— FORCE CALCULEE

MESUREE

NUMERIQUE

ALLONGEMENT du MONTAGE

FIGURE 50 : Force calculée et mesurée au cours d'un essai de flexion (cas de l'UD7)

RAPPORT des DEFORMATIONS de COMPRESSION et de TRACTION

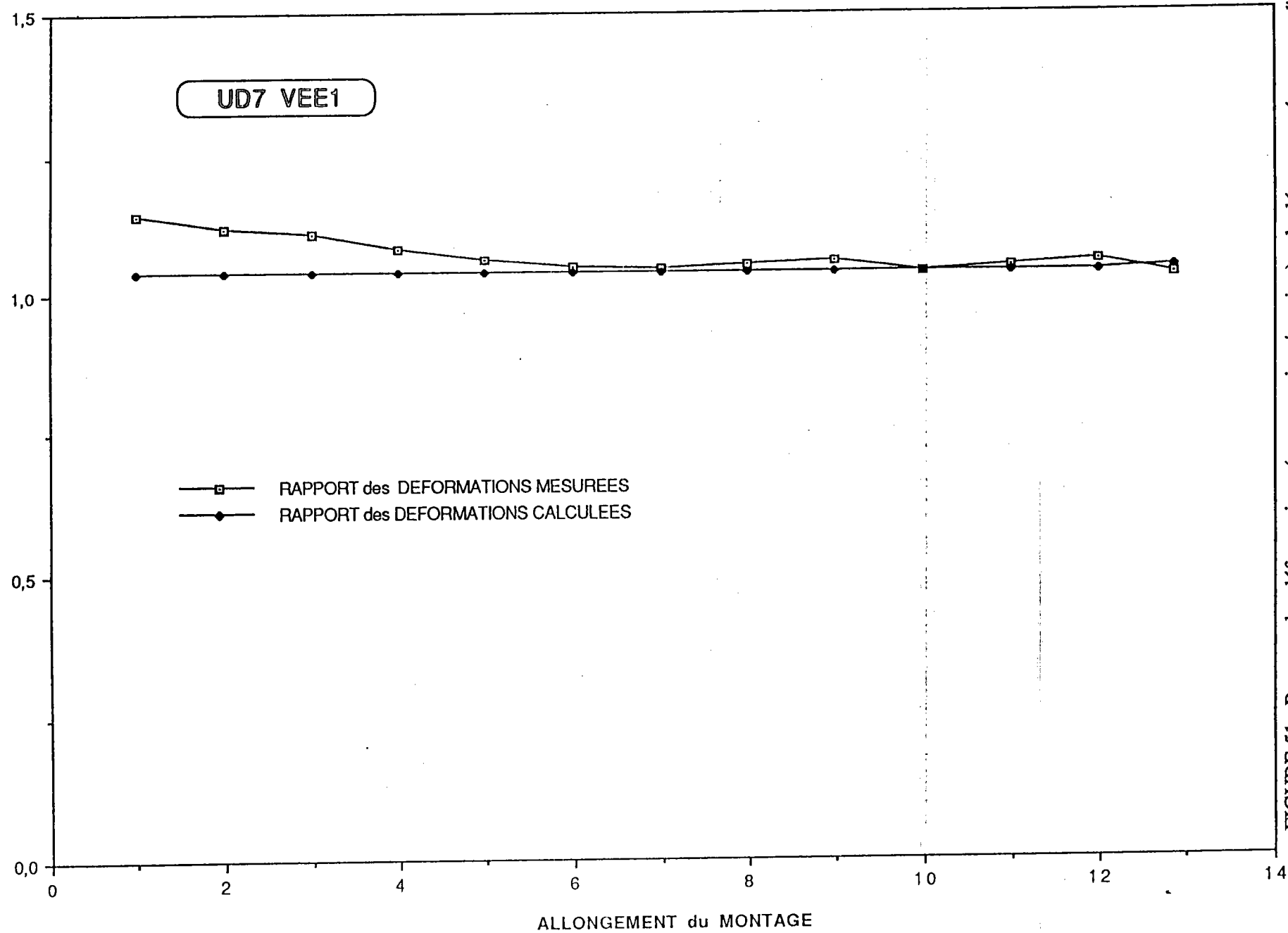


FIGURE 51 : Rapport des déformations (compression /traction) calculé et mesuré au cours d'un essai de flexion ( cas de l'UD7)

En ce qui concerne les empilements  $P_1$ ,  $P_2$  (9 couches d'unidirectionnels ( $0^\circ/90^\circ$ ) (STRATIPREG) et  $P_4$ ,  $P_5$  (16 couches de tissu VICOTEX), les caractéristiques mécaniques servant à la simulation sont obtenues à partir de :

- un essai de traction qui nous donne le module d'Young de l'empilement suivant la direction principale
- la rigidité de flexion du stratifié obtenue en ajustant les résultats expérimentaux et numériques sur un des empilements.

Une fois que l'on a déterminé ces deux caractéristiques mécaniques, il est possible d'en déduire les rigidités de chacun des plis et de vérifier la parfaite concordance des résultats avec le(s) autre(s) empilement(s). Par exemple sur les figures (52-53) sont représentés les résultats numériques ainsi obtenus. La corrélation avec les déformations mesurées est bonne. En revanche, le calcul de la force est plus approximatif, uniquement dans le cas des empilements  $P_1$  et  $P_2$  à cause de la mauvaise précision sur les rigidités issues des essais de traction et des hypothèses limitatives de la simulation. Malgré ceci, un résultat est certain ; les rapports entre les déformations de compression et de traction restent constants tout au long des essais et ils sont proches de ceux obtenus par le calcul en supposant le comportement linéaire en traction et compression.

De plus, nous avons soumis l'éprouvette UD8 VEE<sub>1</sub> (unidirectionnel STRATIPREG) à diverses charges-décharges de flexion. Le tableau (8) où sont reportés les efforts appliqués sur le montage, les déformations de compression et de traction ainsi que leur rapport à la fin de chacun des chargements, démontre clairement le caractère réversible du comportement en compression dans le sens des fibres. En effet, malgré le nombre important de cycles et les niveaux élevés de déformation atteints, les déformations et leurs rapport évoluent peu.

En conclusion, le comportement en compression des composites à fibres longues et des tissus à armature unidirectionnelle en Verre Epoxy est linéaire en compression. Pour l'unidirectionnel, il s'avère être élastique jusqu'à des déformations avoisinant 2%.

Rappelons que dans les travaux de VITTECOQ [1991] les essais de flexion quatre points ont montré que les stratifiés Carbone Epoxy ont un comportement non linéaire élastique en compression avec une perte de rigidité en compression pouvant dépasser 15% en fin de chargement. Comme les Verre-Epoxy ont un comportement linéaire, nous pensons qu'en compression l'aspect non linéaire du comportement des Carbone-Epoxy est principalement dû au comportement intrinsèque de la fibre. Certes les défauts, notamment les défauts d'alignement, pourraient expliquer cette nonlinéarité, mais nos composites présentaient aussi d'importants défauts d'alignement. Cette non-linéarité de la fibre pourrait être la conséquence des microplissements sur la surface de la fibre, comme GREENWOOD [1974] l'a observé sur des fibres de Kevlar (Chapitre 2, Fig.10).



| N° du chargement | Effort sur le montage fin du cycle | Déformation de compression | Déformation de traction | Rapport entre les deux déformations |
|------------------|------------------------------------|----------------------------|-------------------------|-------------------------------------|
| 1                | 400N                               | 0,708%                     | 0,689%                  | 1,028                               |
| 2                | 400N                               | 0,715%                     | 0,689%                  | 1,038                               |
| 3                | 400N                               | 0,717%                     | 0,689%                  | 1,042                               |
| 4                | 1000N                              | 1,450%                     | 1,320%                  | 1,101                               |
| 5                | 1000N                              | 1,450%                     | 1,320%                  | 1,101                               |
| 6                | 1000N                              | 1,450%                     | 1,310%                  | 1,108                               |
| 7                | 1000N                              | 1,440%                     | 1,300%                  | 1,103                               |
| 8                | 1000N                              | 1,440%                     | 1,300%                  | 1,103                               |
| 9                | 1000N                              | 1,440%                     | 1,300%                  | 1,103                               |
| 10               | 1000N                              | 1,430%                     | 1,300%                  | 1,1                                 |

Après 1 heure 15 sous un chargement de 1000N

|  |  |        |        |       |
|--|--|--------|--------|-------|
|  |  | 1,420% | 1,290% | 1,101 |
|--|--|--------|--------|-------|

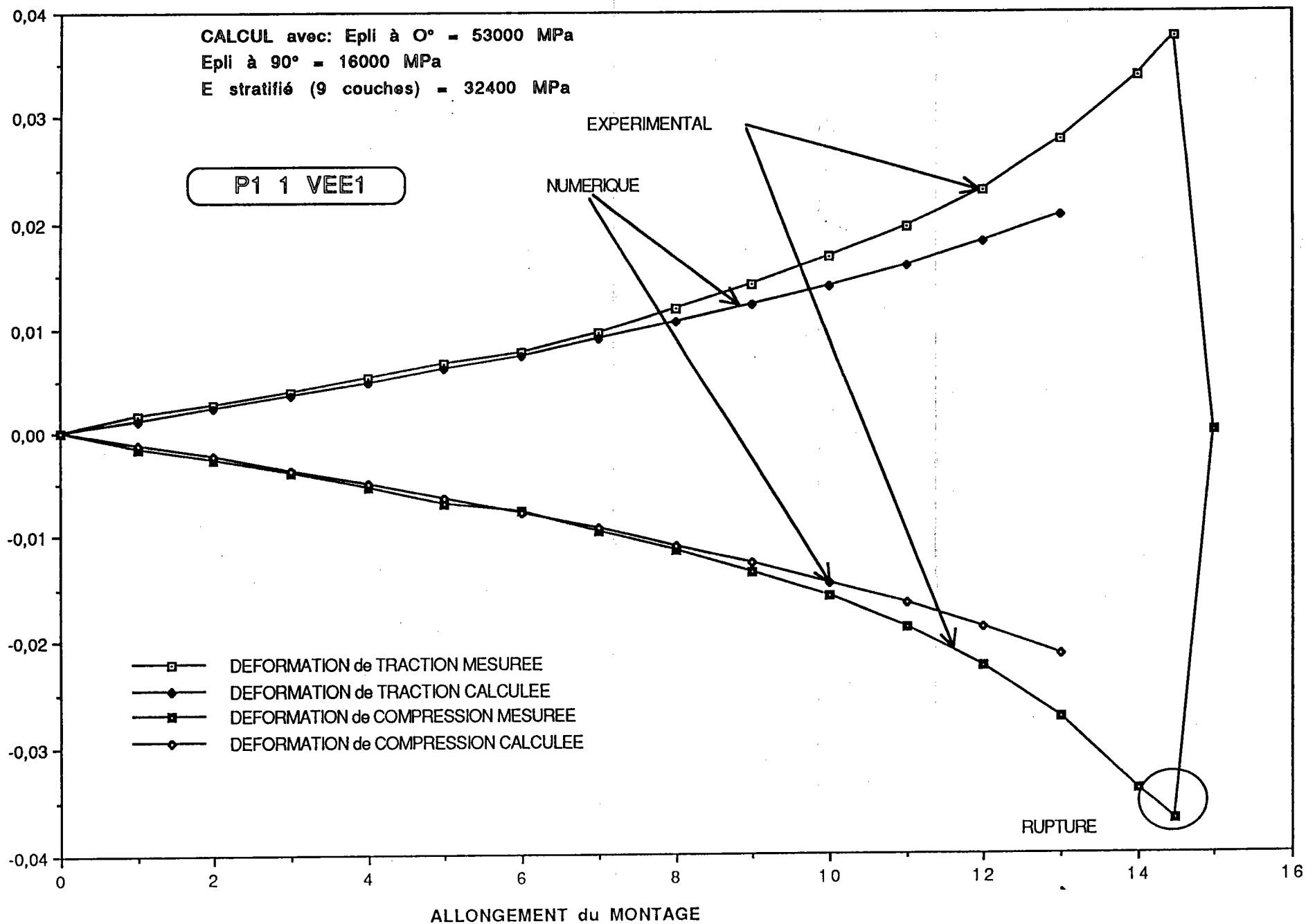
Cycles suivants

|    |       |        |        |       |
|----|-------|--------|--------|-------|
| 11 | 1200N | 1,610% | 1,450% | 1,105 |
| 12 | 1300N | 1,650% | 1,490% | 1,103 |
| 13 | 1300N | 1,650% | 1,490% | 1,103 |
| 14 | 1400N | 1,710% | 1,550% | 1,106 |
| 15 | 1300N | 1,650% | 1,510% | 1,095 |
| 16 | 1300N | 1,650% | 1,490% | 1,1   |
| 17 | 2200N | 2,370% | 2,080% | 1,14  |

TABLEAU 7 :Résultats de charges et de décharges effectuées sur un UNIDIRECTIONNEL

**FIGURE 52 : Résultats obtenus avec l'empilement de 9 couches P1**

# COMPARAISON des RESULTATS EXPERIMENTAUX et NUMERIQUES



FORCE APPLIQUEE sur le MONTAGE (N)

CALCUL avec: Epli à 0° = 53000 MPa  
Epli à 90° = 16000 MPa  
E stratifié (9 couches) = 32400MPa

P1 1 VEE1

—□— FORCE MESUREE  
—●— FORCE CALCULEE

MESUREE

NUMERIQUE

0

2

4

6

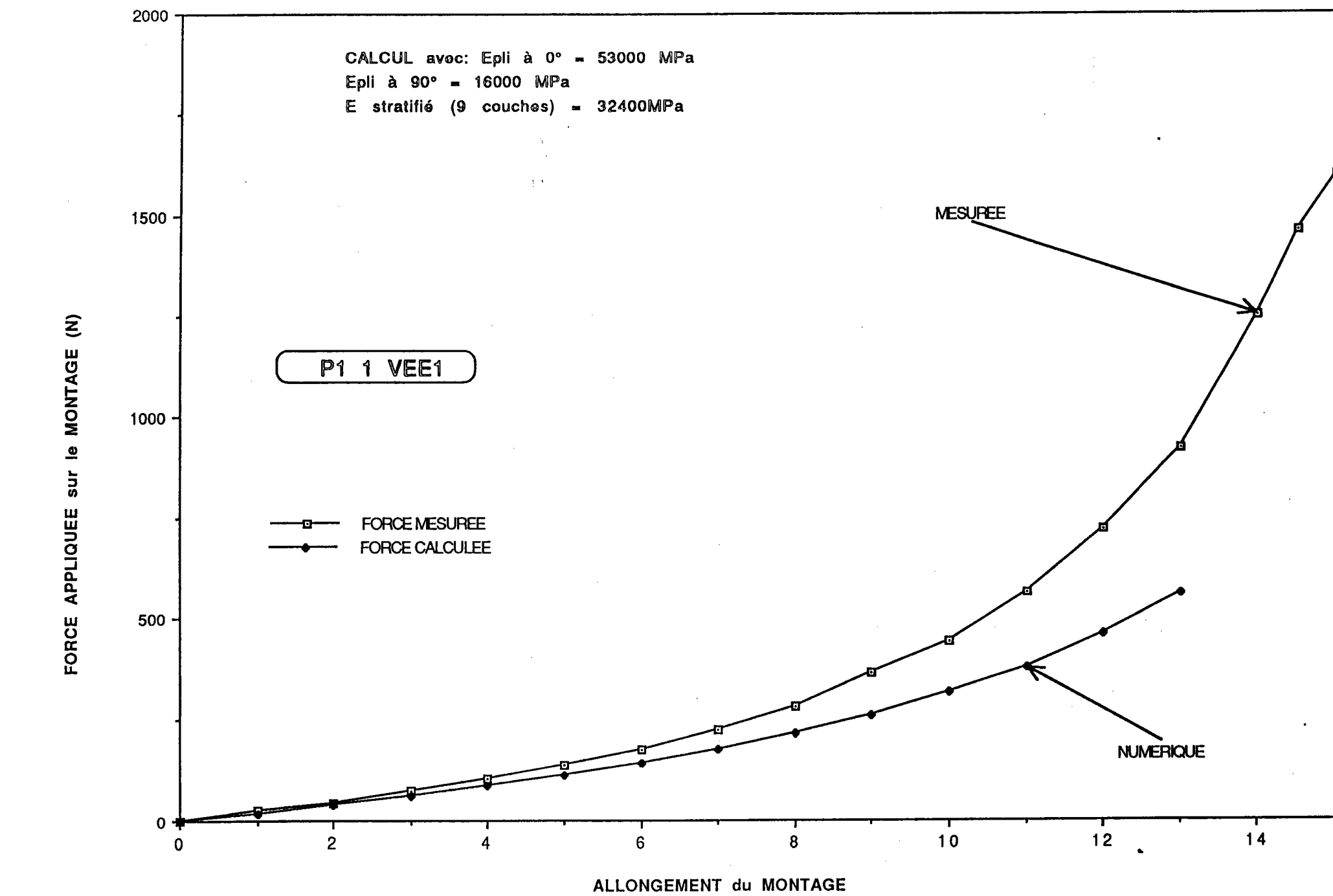
8

10

12

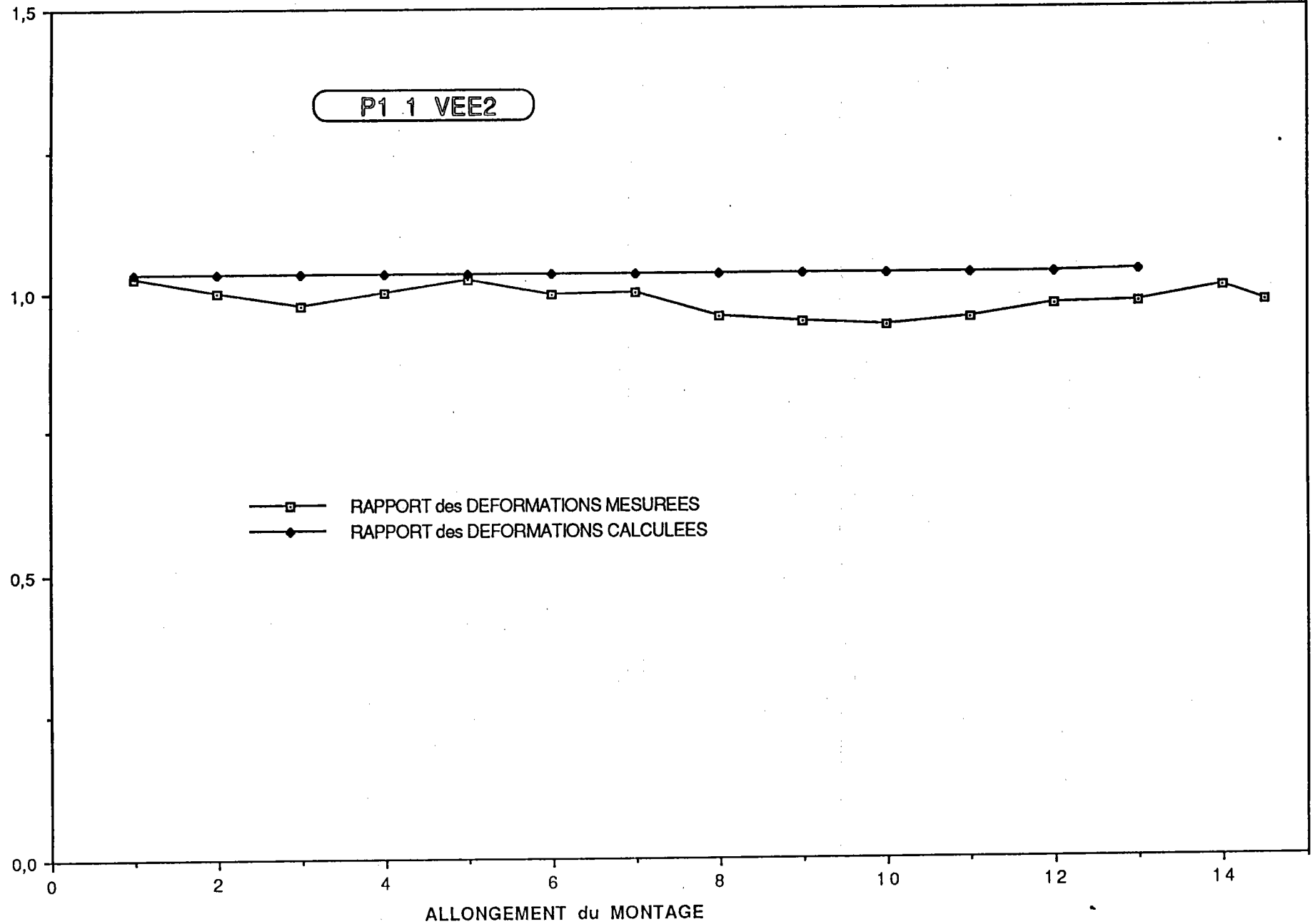
14

ALLONGEMENT du MONTAGE



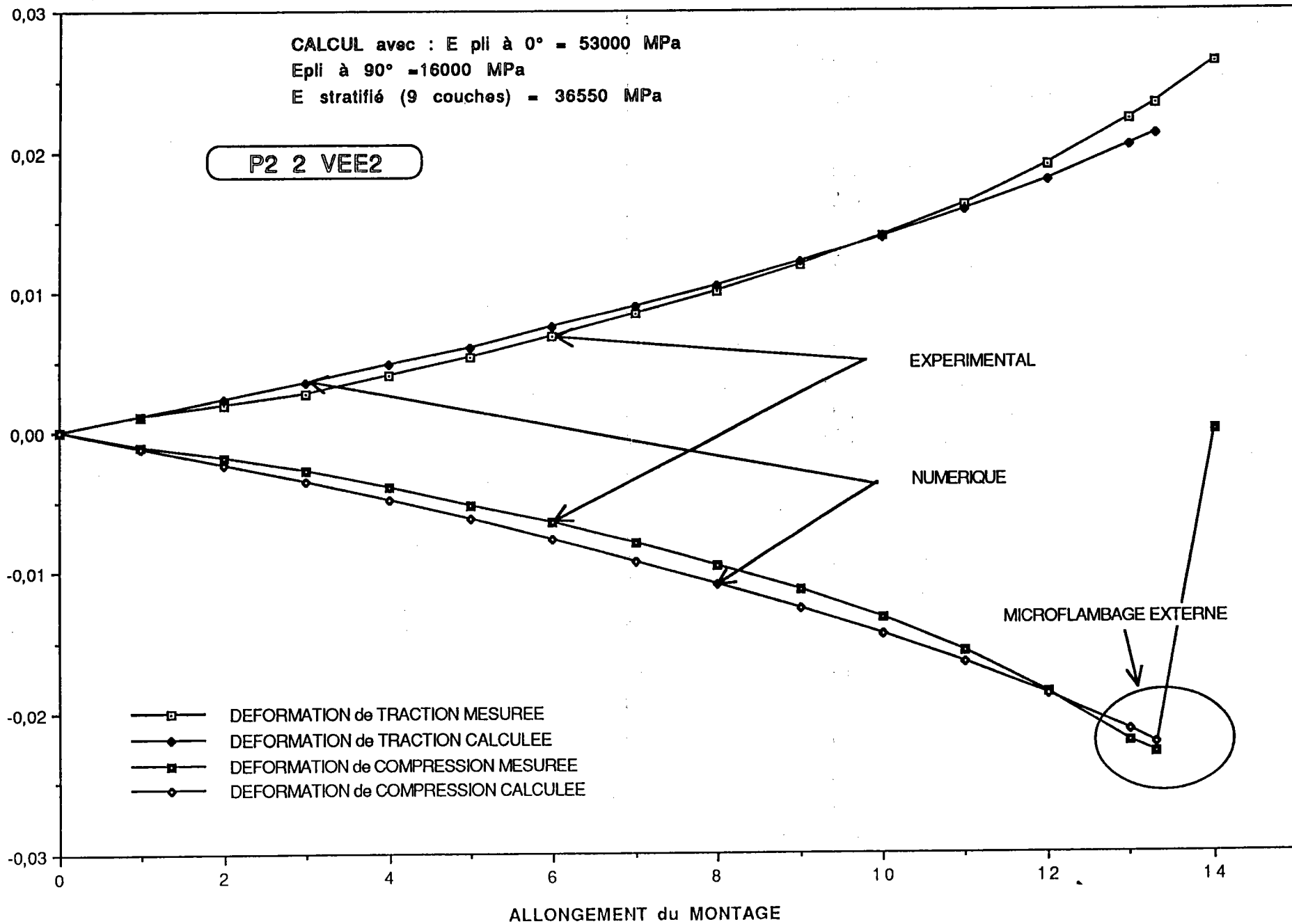
# RAPPORT des DEFORMATIONS de COMPRESSION et de TRACTION

DEFORMATION de COMPRESSION / DEFORMATION de TRACTION



**FIGURE 53 : Résultats obtenus avec l'empilement de 9 couches P2**

# COMPARAISON des RESULTATS EXPERIMENTAUX et NUMERIQUES

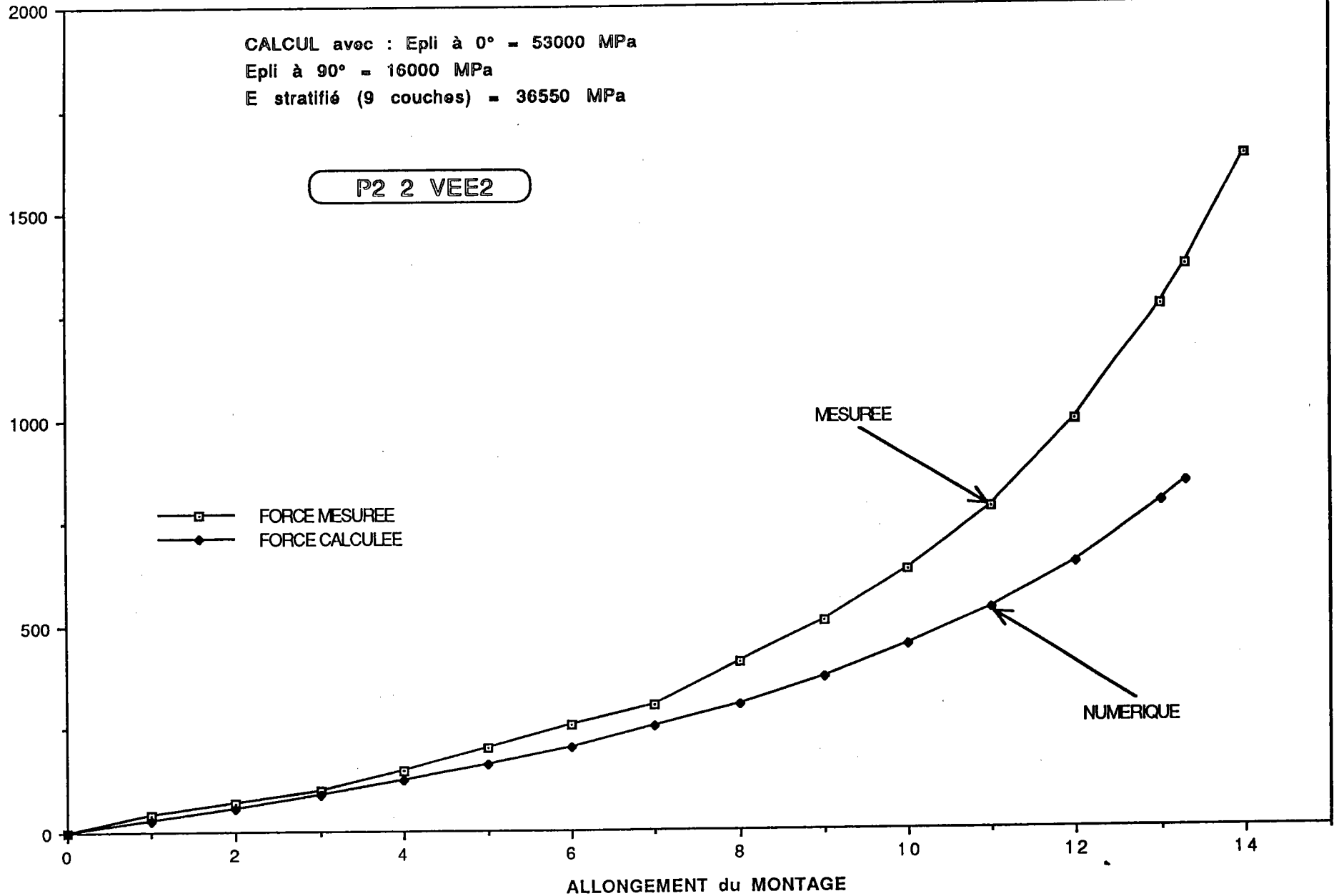


# COMPARAISON de la FORCE MESUREE et CALCULEE

CALCUL avec :  $E_{pli}$  à  $0^\circ$  = 53000 MPa  
 $E_{pli}$  à  $90^\circ$  = 16000 MPa  
 $E$  stratifié (9 couches) = 36550 MPa

P2 2 VEE2

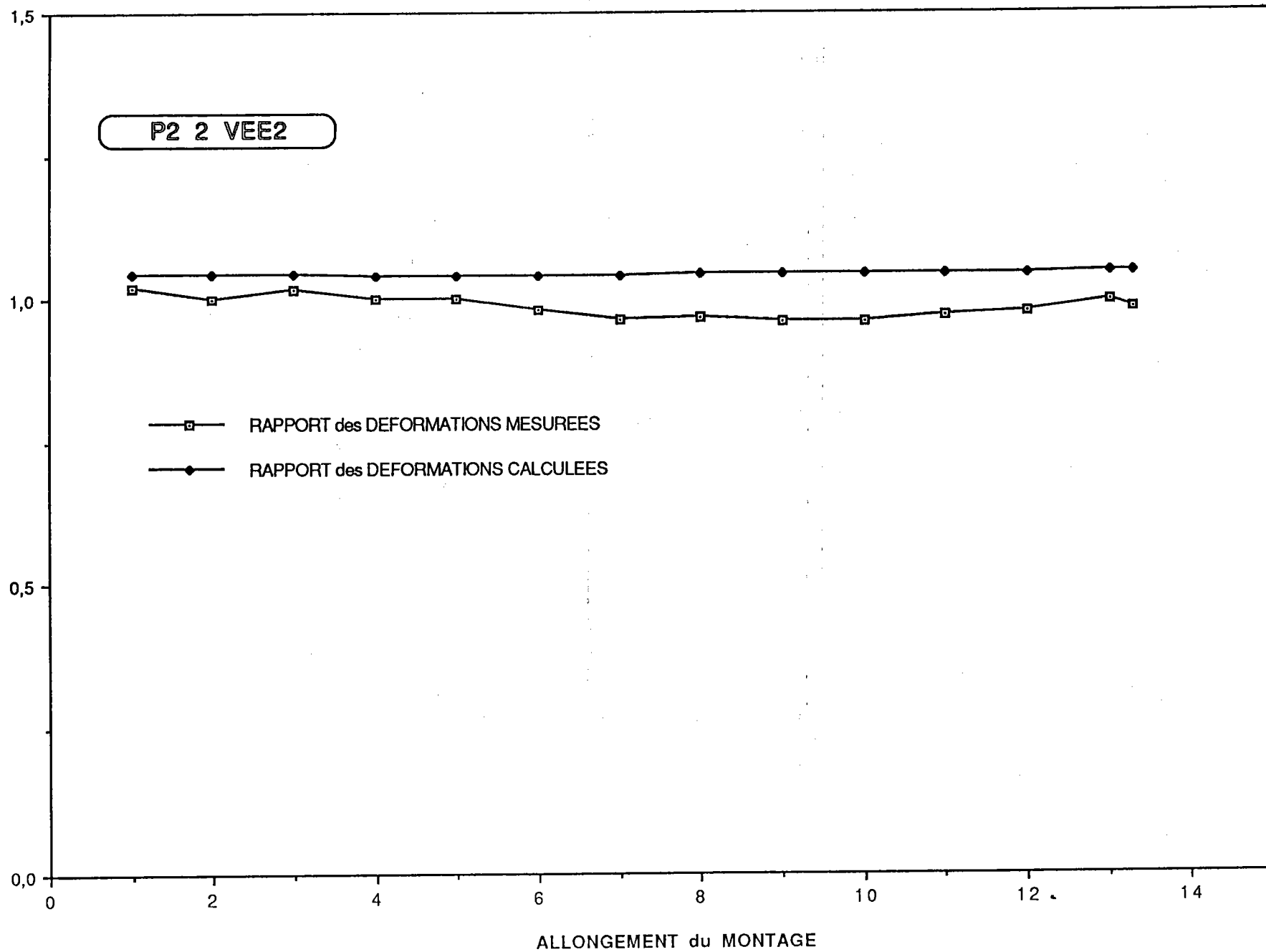
FORCE APPLIQUEE sur le MONTAGE (N)





# RAPPORT des DEFORMATIONS de COMPRESSION et de TRACTION

DEFORMATION de COMPRESSION / DEFORMATION de TRACTION



## **b) Rupture sous sollicitations de flexion et flexion-compression**

### **\* Description des tableaux de résultats**

Pour mieux comparer et comprendre les mécanismes de rupture (mode et déformation à rupture), nous avons réuni l'ensemble des résultats dans trois tableaux (8-9-10). Chacun d'entre eux contient les informations suivantes :

- Sur la première ligne on trouve la désignation des éprouvettes testées. Remarquons que dans le premier tableau sont répertoriées toutes les éprouvettes issues de la plaque  $E_1$  (STRATIPREG, UD), dans le second celles de la plaque  $E_2$  (STRATIPREG, 9 couches), et dans le dernier celles de la plaque  $E_3$  (tissus VICOTEX, 16 couches).

- Sur la seconde ligne est reporté le type de montage utilisé au cours de l'essai, (FLEXION ( $M/N = -18$  mm),  $M/N = -1$  mm,  $M/N = -0,5$  mm) ainsi que la longueur de l'éprouvette ( $l_0$ ).

- Mais les deux données précédentes ne suffisent pas pour caractériser le chargement que subit l'éprouvette. En effet, au cours des essais de flexion-compression ( $M/N = -1$  mm,  $M/N = -0,5$  mm), un flambage global de l'éprouvette peut apparaître (grande longueur d'éprouvette), ce qui a pour effet d'induire un état de flexion (Fig. 55) dans le composite. Une diminution de la longueur des éprouvettes ne résout toujours pas le problème car le montage est instable et, après chacune des instabilités, le chargement de compression évolue. Toutefois, pour caractériser la répartition des sollicitations dans l'épaisseur, nous avons choisi comme paramètre le rapport entre la déformation de la face inférieure de l'éprouvette et celle de la face supérieure (voir la figure du montage 38 ou 39 ou 40) à la rupture. En dessous de cette donnée, nous avons noté si le rapport est constant ou variable au moment de cette rupture. Remarquons que ce rapport reste constant au cours de tous les essais de flexion mais seulement dans quelques essais de compression.

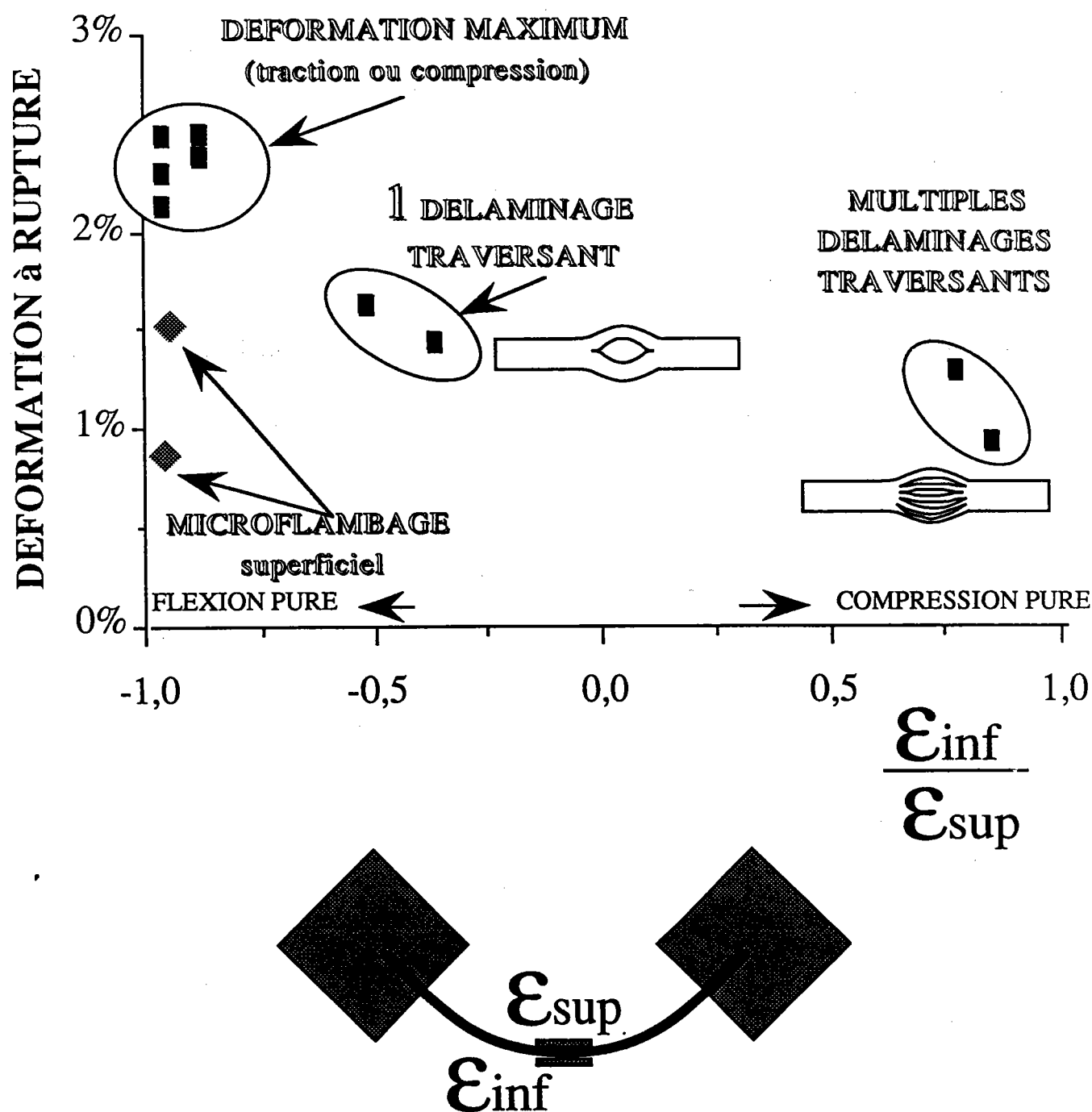
- Sur la ligne suivante sont reportées les déformations à rupture. Dans le cas de l'unidirectionnel STRATIPREG; nous avons donc reporté dans le tableau la déformation maximale atteinte. Avec ces mêmes composites et les empilements  $P_2$ , un phénomène superficiel de microflambage est apparu, rendant impossible la mesure de la déformation en compression. Nous avons alors indiqué la déformation lors de l'initiation de ce phénomène (indice microflambage). La seconde valeur (supérieure) correspond à la valeur maximale mesurée sur la face en traction non endommagée.

- Pour finir, sur les deux dernières lignes sont exposés brièvement le mode de rupture et les commentaires sur le déroulement de l'essai.

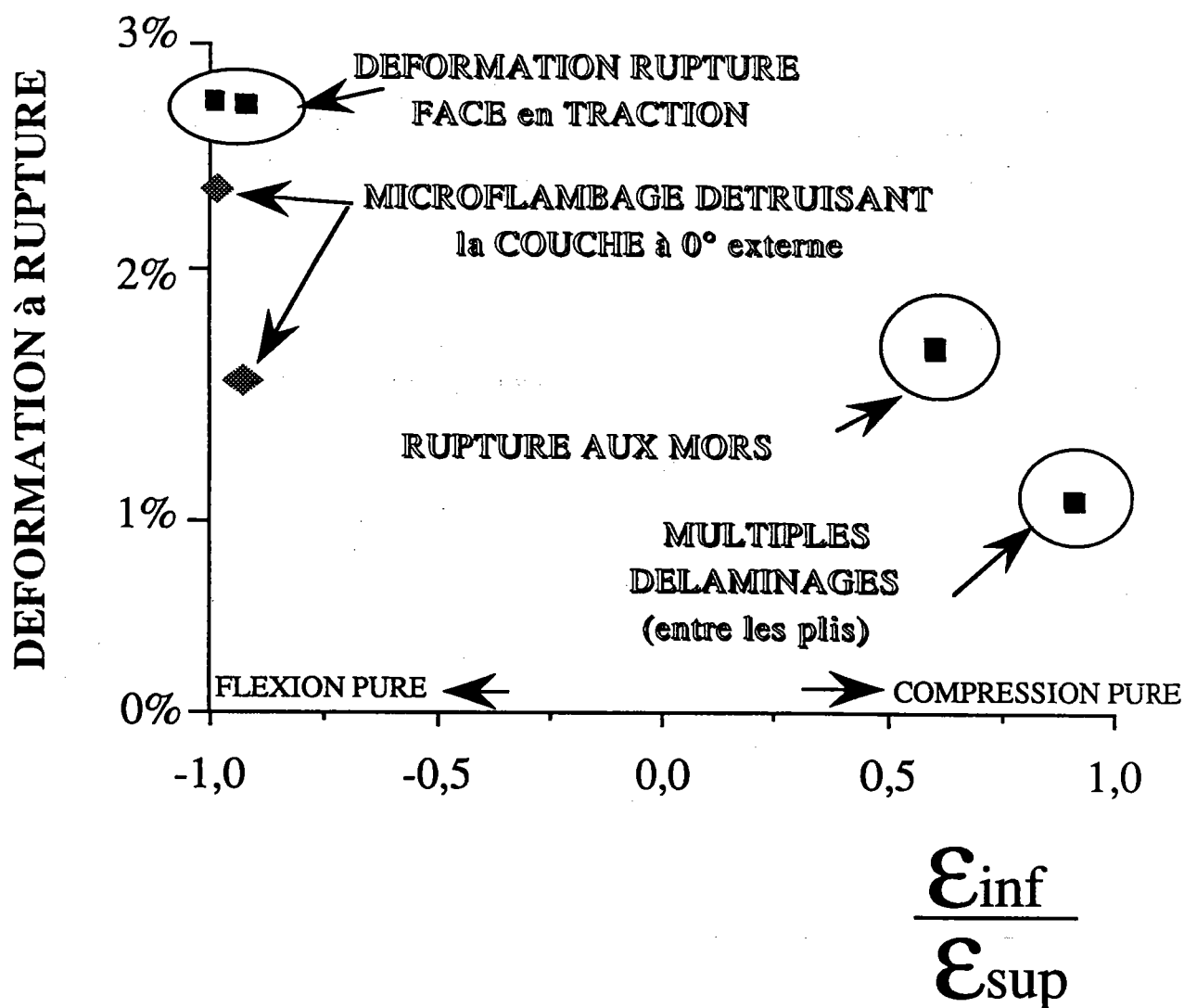
| COMMENTAIRES                                                            | MODES de RUPTURE                        | Deformations à RUPTURE                          | Rapport des déformations à la rupture | Type d'essai                           | Nom de l'éprouvette |
|-------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------|-------------------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------------------|---------------------|
| PLUSIEURS CHARGES ET DECHARGES                                          | MICROFLAMBAGE EXTERNE                   | 0,84%<br>microflambage<br>$\epsilon_t > 2,5\%$  | -0,96                                 | FLEXION<br>$l_0 = 50 \text{ mm}$       | UD1 VEE1            |
| PAS DE RUPTURE EN TRACTION                                              | MICROFLAMBAGE EXTERNE                   | 1,48%<br>microflambage<br>$\epsilon_t > 2,15\%$ | -0,96                                 | FLEXION<br>$l_0 = 50 \text{ mm}$       | UD2 VEE1            |
| PAS DE RUPTURE EN TRACTION                                              | DECOLLEMENT BRUTAL DES JAUGES           | $> 2,4\%$                                       | -0,88                                 | FLEXION<br>$l_0 = 50 \text{ mm}$       | UD3 VEE1            |
| MAXIMUM DU MONTAGE ATTEINT                                              | AUCUNE RUPTURE NI ENDOMMAGEMENT VISIBLE | $> 2,3\%$                                       | -0,96                                 | FLEXION<br>$l_0 = 50 \text{ mm}$       | UD7 VEE1            |
| MAXIMUM DU MONTAGE ATTEINT<br>ESSAI DE FATIGUE (RESULTATS TABLEAU N°7 ) | AUCUNE RUPTURE NI ENDOMMAGEMENT VISIBLE | $> 2,48\%$                                      | -0,88                                 | FLEXION<br>$l_0 = 50 \text{ mm}$       | UD8 VEE1            |
| FLAMBAGE GLOBAL de l'EPROUVETTE                                         | 1 DELAMINAGE TRAVERSANT                 | 1,45%                                           | -0,37<br>à la rupture                 | M/N = -1 mm<br>$l_0 = 50 \text{ mm}$   | UD4 VEE1            |
| RUPTURE en COMPRESSION SANS INSTABILITE                                 | MULTIPLES DELAMINAGES                   | 0,94%                                           | +0,85<br>constant                     | M/N = -1 mm<br>$l_0 = 20 \text{ mm}$   | UD10 VEE1           |
| FLAMBAGE GLOBAL de l'EPROUVETTE                                         | 1 DELAMINAGE TRAVERSANT                 | 1,64%                                           | -0,52<br>à la rupture                 | M/N = -0,5 mm<br>$l_0 = 50 \text{ mm}$ | UD6 VEE1            |
| INSTABILITE du MONTAGE                                                  | MULTIPLES DELAMINAGES                   | 1,3%                                            | +0,77<br>constant                     | M/N = -0,5 mm<br>$l_0 = 20 \text{ mm}$ | UD9 VEE1            |

TABLEAU 8 : Rupture des composites unidirectionnels (UD VEE1)

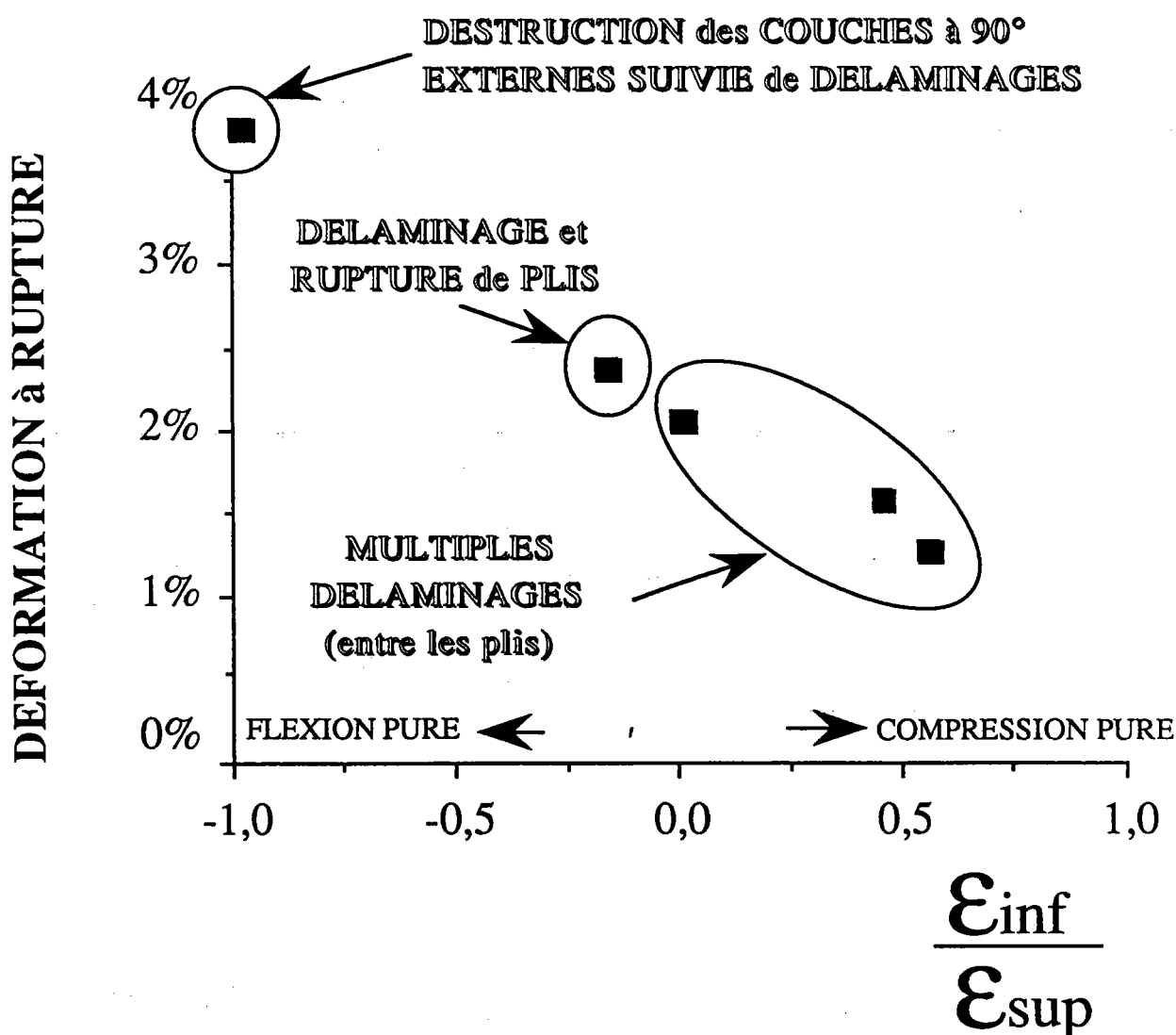
# DEFORMATIONS à RUPTURE de l' UD VERRE -EPOXY (vetrotex)



# DEFORMATIONS à RUPTURE du STRATIFIE 9 COUCHES (0°/90°/0°/90°/0°)<sub>s</sub>



# DEFORMATIONS à RUPTURE du STRATIFIE 9 COUCHES (90°/0°/90°/0°/90°)<sub>s</sub>



| Nom de l'éprouvette | Type d'essai                          | Rapport des déformations à la rupture | Deformations à RUPTURE                         | MODES de RUPTURE                                                                            | COMMENTAIRES                                                |
|---------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| P1:1 VEE2           | FLEXION<br>$l_0 = 50 \text{ mm}$      | -0,99                                 | 3,84%                                          | DESTRUCTION DES COUCHES à 90° EXTERNES SUIVIS DE DELAMINAGES                                |                                                             |
| P1:11 VEE2          | M/N = -0,5mm<br>$l_0 = 20 \text{ mm}$ | +0,0014<br>à la rupture               | 2,08%                                          | DELAMINAGE et RUPTURE DE PLIS                                                               | FLAMBAGE GLOBAL de l'EPROUVETTE                             |
| P1:4 VEE2           | M/N = -0,5mm<br>$l_0 = 16 \text{ mm}$ | +0,55<br>constant                     | 1,3%                                           | MULTIPLES DELAMINAGES ENTRE LES PLIS                                                        | AUCUNE INSTABILITE                                          |
| P1:12 VEE2          | M/N = -0,5mm<br>$l_0 = 25 \text{ mm}$ | -0,17<br>à la rupture                 | 2,4%                                           | MULTIPLES DELAMINAGES ENTRE LES PLIS                                                        | FLAMBAGE GLOBAL de l'EPROUVETTE                             |
| P1:3 VEE2           | M/N = -1 mm<br>$l_0 = 16 \text{ mm}$  | +0,45<br>à la rupture                 | 1,6%                                           | MULTIPLES DELAMINAGES ENTRE LES PLIS (RUPTURE AUX MORS)                                     | INSTABILITE DU MONTAGE PUIS FLAMBAGE GLOBAL de l'EPROUVETTE |
| P2:1 VEE2           | FLEXION<br>$l_0 = 50 \text{ mm}$      | -0,94                                 | 1,6%<br>microflambage<br>$\epsilon_t = 2,72\%$ | MICROFLAMBAGE AYANT DESTRUIT LA COUCHE EXTERNE à 0°                                         |                                                             |
| P2:2 VEE2           | FLEXION<br>$l_0 = 50 \text{ mm}$      | -1                                    | 2,4%<br>microflambage<br>$\epsilon_t = 2,74\%$ | MICROFLAMBAGE AYANT DESTRUIT LA COUCHE EXTERNE à 0° ET PLISSEMENT D'UNE COUCHE INTERNE à 0° |                                                             |
| P2:3 VEE2           | M/N = -0,5mm<br>$l_0 = 16 \text{ mm}$ | 0,59<br>constant                      | 1,7%                                           | RUPTURE "EN CHAPEAU" AUX MORS (RUPTURE DE FIBRES)                                           | AUCUNE INSTABILITE APRES LE QUATRIEME CHARGEMENT            |
| P2:4 VEE2           | M/N = -1 mm<br>$l_0 = 16 \text{ mm}$  | +0,9<br>constant                      | 1,08%                                          | MULTIPLES DELAMINAGES ENTRE LES PLIS                                                        | INSTABILITE DU MONTAGE                                      |

TABLEAU 9 : Rupture des stratifiés de 9 couches (P1 et P2 VEE2)

| Nom de l'éprouvette | Type d'essai                           | Rapport des déformations à la rupture | Deformations à RUPTURE | MODES de RUPTURE                                                    | COMMENTAIRES                                                                                        |
|---------------------|----------------------------------------|---------------------------------------|------------------------|---------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| P4:5 VEE3           | FLEXION<br>$l_0 = 50 \text{ mm}$       | -0,95                                 | 3,04%                  | RUPTURE AUX MORS                                                    |                                                                                                     |
| P4:2 VEE3           | FLEXION<br>$l_0 = 50 \text{ mm}$       | -0,88                                 | 3 %                    | RUPTURE DU PLI à 0°,<br>FACE EN COMPRESSION                         |                                                                                                     |
| P4:3 VEE3           | M/N = -1 mm<br>$l_0 = 25 \text{ mm}$   | +0,57<br>au maximum                   | 2,2%<br>(max)          | ENDOMMAGEMENT<br>DANS LES MORS PUIS<br>RUPTURE EN<br>"CHAPEAU"      | INSTABILITE DU MONTAGE                                                                              |
| P4:4 VEE3           | M/N = -0,5 mm<br>$l_0 = 30 \text{ mm}$ | +0,92<br>au maximum                   | 1,38%<br>(max)         | ENDOMMAGEMENT<br>DANS LES MORS PUIS<br>RUPTURE EN<br>"CHAPEAU"      | VALEUR DU RAPPORT DONNE<br>AU MAXIMUM CAR IL Y A<br>BEAUCOUP<br>D'ENDOMMAGEMENT AVANT<br>LA RUPTURE |
| P5:2 VEE3           | FLEXION<br>$l_0 = 50 \text{ mm}$       | -1,05                                 | 2,2%                   | RUPTURE DE LA<br>COUCHE à 90° EXTERNE<br>PRECEDE<br>D'ENDOMMAGEMENT |                                                                                                     |
| P5:5 VEE3           | FLEXION<br>$l_0 = 50 \text{ mm}$       | -1                                    | 2,2%                   | RUPTURE DE LA<br>COUCHE à 90° EXTERNE<br>PRECEDE<br>D'ENDOMMAGEMENT | PROBLEME DE<br>CAPACITANCE                                                                          |
| P5:1 VEE3           | M/N = -0,5 mm<br>$l_0 = 30 \text{ mm}$ | -0,12<br>à la rupture                 | 3,8%                   |                                                                     | FLAMBAGE GLOBAL de<br>l'EPROUVETTE                                                                  |
| P5:4 VEE3           | M/N = -0,5 mm<br>$l_0 = 25 \text{ mm}$ | +0,33<br>à la rupture                 | 1,68%                  | RUPTURE EN<br>"CHAPEAU" AUX MORS                                    | INSTABILITE DU MONTAGE<br>PUIS FLAMBAGE GLOBAL de<br>l'EPROUVETTE                                   |
| P5:3 VEE3           | M/N = -1 mm<br>$l_0 = 25 \text{ mm}$   | +0,24<br>à la rupture                 | 1,84%                  | RUPTURE EN<br>"CHAPEAU"                                             | INSTABILITE DU MONTAGE<br>PUIS FLAMBAGE GLOBAL de<br>l'EPROUVETTE                                   |

TABLEAU 10 : Rupture des stratifiés 16 couches de tissu (P4 et P5 VEE3)



### \* Description des modes de rupture

Sur l'ensemble des empilements et des chargement testés, plusieurs modes de rupture ont été observés :

- le microflambage : il se caractérise par un décollement des fibres de la surface qui, sous l'effet de la charge de compression, "micro"-flambent. Ces décollements de fibres sont répartis uniformément (Fig. 54-58) sur la face en compression et les longueurs (d'onde) sont initialement de l'ordre de la demie épaisseur du composite.

Ce phénomène est apparu uniquement au cours des essais de flexion sur les composites unidirectionnels STRATIPREG et les empilements  $P_2$  de 9 couches unidirectionnelles du même produit. Pour l'unidirectionnel, seule la peau externe du composite semble être affectée et aussi bien la propagation que la multiplication de ces décollements de fibres se sont avérées stables. De plus, le phénomène n'est pas répétitif puisque seulement deux éprouvettes sur cinq (provenant toutes de la même plaque) ont été sujettes à un microflambage. En revanche, au cours des essais de flexion effectués sur les empilements  $P_2$  (9 couches  $(0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ)_s$ ), le microflambage est apparu comme sur l'unidirectionnel en peau externe, mais il a pénétré dans l'épaisseur et s'est propagé sur toute la longueur de l'éprouvette. D'ailleurs si l'on poursuit le chargement, toute la couche externe à  $0^\circ$  peut ainsi être détruite lorsque toutes les fibres sont séparées entre elles. Dans la suite du scénario la couche à  $90^\circ$  située sous le pli endommagé se rompt rapidement du fait de sa faible résistance. Toutes les contraintes de compression sont alors supportées par le pli à  $0^\circ$  suivant qu'il peut être sujet à un plissement en fin d'essai (cas de l'éprouvette  $P_{22}$  VEE<sub>2</sub>) (Fig54).

Aussi bien pour le composite à 9 couches que pour l'unidirectionnel, les seuils d'apparition de ce microflambage sont tous différents (0,84%, 148%, 1,6%, 2,4%), ce qui démontre un certain caractère aléatoire (défaut de surface ?).

- Le principal mode de rupture des stratifiés testés est le délaminage (multiple ou unique) traversant de part en part la largeur de l'éprouvette. Si l'on analyse précisément les résultats, il est très intéressant de remarquer que, plus le champ de déformation tend vers celui d'une compression pure, plus le nombre de délaminages est grand et plus la déformation à rupture est faible. Il semble que ce mode de délaminage multiple est le plus pénalisant des modes de rupture. En effet, c'est au cours des essais de compression "pure" (rapport des déformations proche de 1) que les déformations limites mesurées sont les plus faibles (par exemple UD10 VEE<sub>1</sub> :  $\epsilon$  rupture = 0,94% ;  $P_2$  4 VEE<sub>2</sub> :  $\epsilon$  rupture = 1,08% ;  $P_1$  4 VEE<sub>2</sub> :  $\epsilon$  rupture = 1,3%).

Malheureusement, comme ces ruptures sont apparues brutalement, nous n'avons pu observer si l'initiation de ces délaminages est due à un effet de bord.

- Uniquement sur les stratifiés à 16 couches (tissus à armature unidirectionnelle VICOTEX) nous avons observé (Fig.64) des ruptures de pli en chapeau. En excluant le cas particulier de l'empilement  $P_5$  ( $90_4/0_8/90_4$ ) soumis à de la flexion, ces ruines de plis sont dues principalement aux ruptures de fibres sous la charge de compression. Au cours des essais sur de tels matériaux, un endommagement apparaît très tôt, il peut s'observer clairement sur la figure 64 au niveau des mors (multiples fissures). De plus, de nombreuses émissions acoustiques (oreille humaine) ont été constatées dès les débuts de chargement. Ce mode peut s'expliquer soit par la présence d'une importante porosité initiale.

- Dans les autres cas ( $P_2$ : 3,  $P_1$  : 3,  $P_4$  : 5), les ruptures se sont localisées au bord et par conséquent il serait hasardeux d'en tirer des conclusions.

Sous une sollicitation de flexion, la rupture des stratifiés  $P_5$  et  $P_1$  a débuté sur la face en traction. Ceci est compréhensible car les plis externes sont des plis à  $90^\circ$  et sous des déformations de traction faibles (sollicitant la matrice), ils s'endommagent et rompent rapidement. Sur les résultats expérimentaux, cela se traduit par des informations erronées de la jauge inférieure.

#### \* Remarques

Pour toutes les éprouvettes testées, il s'avère que la déformation à rupture du stratifié est directement liée au rapport des deux déformations. En omettant le cas de microflambage, on peut remarquer une décroissance des déformations à rupture lorsque le rapport des déformations (déformation face inférieure sur déformation face supérieure) croît. Cela signifie que la résistance du stratifié dépend d'abord du chargement et qu'elle est plus grande si la part de flexion dans la déformation est plus importante. Remarquons que VITTECOQ [1991] a obtenu un résultat tout à fait similaire. En effet, les déformations à rupture des Carbone-Epoxy mesurées sous une sollicitation de flexion pure sont supérieures à celles obtenues par un essai de compression pure.

C'est l'instabilité du montage et celle de l'éprouvette qui nous ont permis d'appliquer des chargements divers, et par conséquent de montrer que la déformation à rupture dépend de la répartition des déformations dans l'épaisseur du stratifié. En ce qui concerne les contraintes, la conclusion est identique puisque le matériau est linéaire jusqu'à des niveaux de déformation supérieurs aux limites à rupture obtenues par les essais de compression. En effet, sur l'unidirectionnel, nous avons montré que le comportement en compression reste linéaire et élastique pour des déformations dépassant 1,6%, qui sont à comparer avec la déformation à rupture en compression obtenue sur l'UD10 qui est de 0,94%.

Ceci met clairement en évidence que la rupture est dépendante du chargement et plus précisément de sa répartition dans l'épaisseur.

## 6. Problèmes posés par une modélisation de la rupture

Suite à l'analyse sur les modes de rupture présentés au paragraphe précédent, deux phénomènes distincts sont à appréhender :

- \* le microflambage
- \* le délaminage.

En ce qui concerne le microflambage, nous avons essayé de confronter les résultats expérimentaux avec les modèles du type ROSEN qui conduisent à une contrainte à rupture égale au module de cisaillement. Nous avons alors effectué un essai de flexion sur un empilement de 9 couches  $(+45^\circ/-45^\circ/+45^\circ/-45^\circ/+45^\circ)_s$  ( $P_3$ ), ce qui nous a permis d'obtenir ( $E_{45}$ ) le module d'Young sécant dans une direction inclinée à  $45^\circ$  par rapport à celle des fibres. Puis, en appliquant la relation :

$$\frac{1}{G} = \frac{4}{E_{45}} - \frac{1}{E_{90^\circ}} - \frac{1}{E_{0^\circ}} + \frac{2 \nu_{12}}{E_{0^\circ}}$$

| Déformation de compression | E (MPa) | G (MPa) | rupture = G/E |
|----------------------------|---------|---------|---------------|
| 0,00104   0,1%             | 21853   | 8791    | 14%           |
| 0,0016   0,16%             | 21712   | 8700    | 14%           |
| 0,0024   0,24%             | 19751   | 7505    | 12%           |
| 0,0034   0,34%             | 17475   | 6265    | 10%           |
| 0,00524   0,52%            | 14350   | 4774    | 8%            |
| 0,00744   0,74%            | 11433   | 3564    | 6%            |
| 0,0098   0,98%             | 9157    | 2720    | 4,5%          |
| 0,0126   1,26%             | 7370    | 2112    | 3,5%          |
| 0,0204   2,04%             | 4806    | 1311    | 2%            |
| 0,04   4%                  | 2760    | 725     | 1,20%         |

De plus, en observant la forme de l'éprouvette  $P_3$  après l'essai, il est incontestable que la non linéarité du comportement provient de phénomènes anélastiques (plasticité et endommagement).

Il est évident que ces modèles appliqués brutalement, ne nous apportent aucune information utilisable, puisque pour des déformations inférieures à 1% la déformation à rupture obtenue est dans tous les cas supérieure à 4%. De plus la déformation de microflambage  $\epsilon_{ROSEN}$  (colonne de droite) est peut être sous évaluée car elle tient compte de non-linéarité de plasticité et d'endommagement, alors que le comportement del'UD est apparu réversible en flexion. De même nos modèles sont incomplets, puisque les déformations  $\epsilon_{12}$   $\epsilon_{23}$  (dans le plan des fibres) ne sont pas prises en compte, et ils ne peuvent en aucun cas fournir un résultat quantitatif.

En conclusion, nous pensons que les modèles actuels de microflambage sont incapables de prédire la déformation à rupture et d'explicitier simplement les mécanismes. Mais que doit-on faire ?

Pour ce qui est du microflambage, une nouvelle campagne d'essais est nécessaire mais en prenant soin d'observer précisément et microscopiquement la surface du composite afin de comprendre le mécanisme et son initiation. Comme le phénomène n'est pas répétitif, il est raisonnable de penser que ce phénomène superficiel est principalement dû aux conditions de préparation des éprouvettes qui induiraient des défauts à leurs surfaces (rupture interface fibre-matrice, mauvaise polymérisation, forte fraction volumique).

En ce qui concerne l'apparition de délaminages sous charges de compression, la dépendance du chargement est très claire. De plus, le phénomène semble très répétitif et indépendant de la séquence d'empilement. Aucune interprétation simple ne semble s'imposer. Tout d'abord il est inutile d'espérer utiliser la mécanique de l'endommagement localement pour prévoir l'initiation d'un tel phénomène, puisque le comportement est élastique jusqu'à 4,7% et que certaines ruptures par délaminage sont bien plus précoces. D'autre part, un critère de rupture du type  $f(\sigma) = 0$  ou  $f(\epsilon) = 0$  n'est pas compatible avec nos résultats expérimentaux. En effet, si l'on identifie les coefficients d'un tel critère sur un essai de flexion, cela peut devenir catastrophique, surtout si le composite est soumis à un état de compression pure au cours de son service. En revanche, il serait possible de mettre en place un critère portant sur les efforts de membrane et de flexion (par exemple  $f(M, N) = 0$ ), ce qui pourrait permettre une prévision pratique de la rupture, mais ne permettrait pas de comprendre l'origine du phénomène.

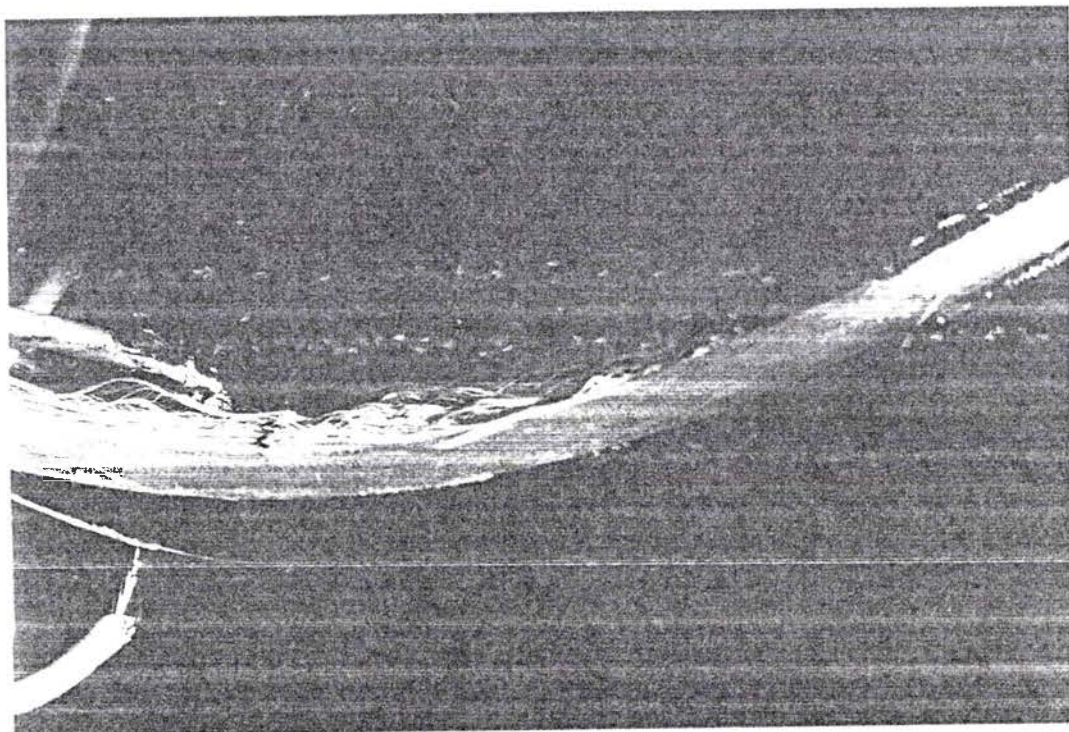


FIGURE 54 : Microflambage de l'unidirectionnel soumis à de la flexion (UD2 VEE1)

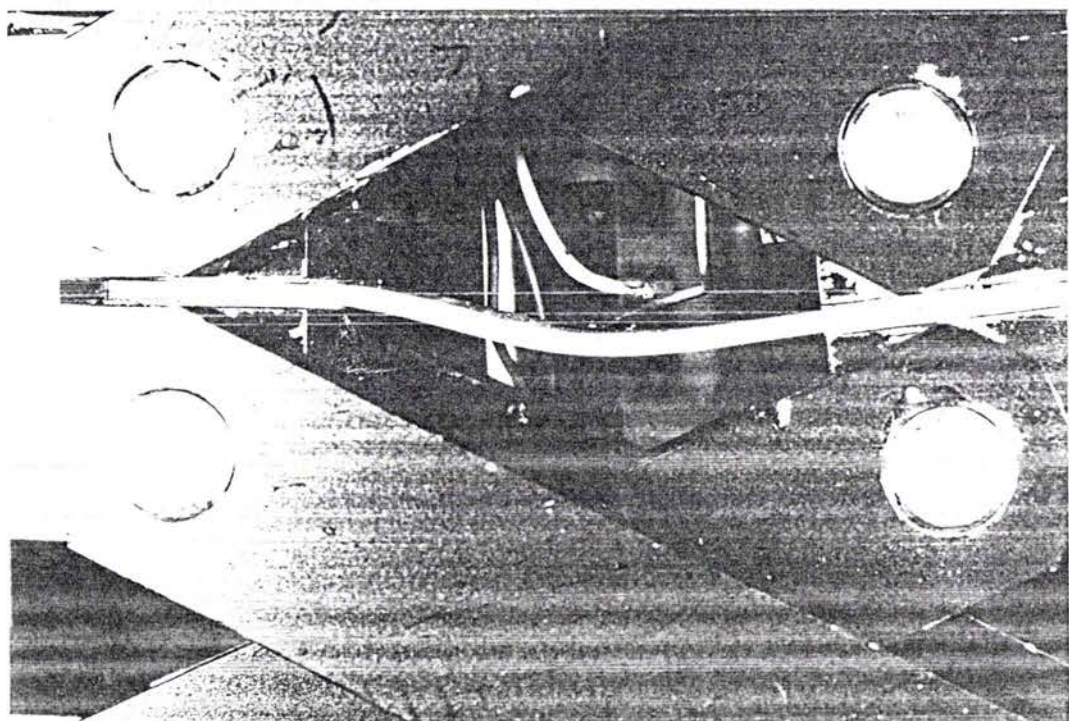


FIGURE 55 : Flambage de l'éprouvette unidirectionnelle soumis à un état de flexion-compression (UD6 VEE1)



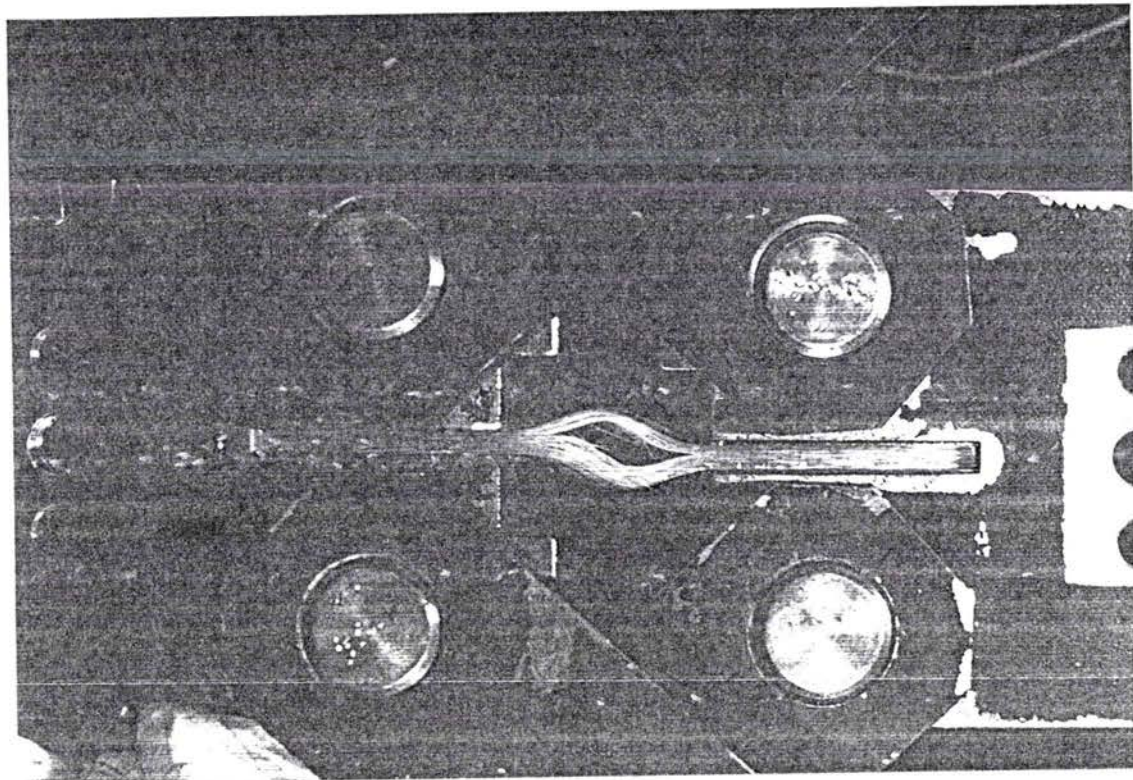


FIGURE 56 : Rupture en flexion compression de l'unidirectionnel (UD9 VEE1)  
rapport des déformations à rupture = 0,77



FIGURE 57 : Rupture en flexion compression de l'unidirectionnel (UD10 VEE1)  
rapport des déformations à rupture = 0,85



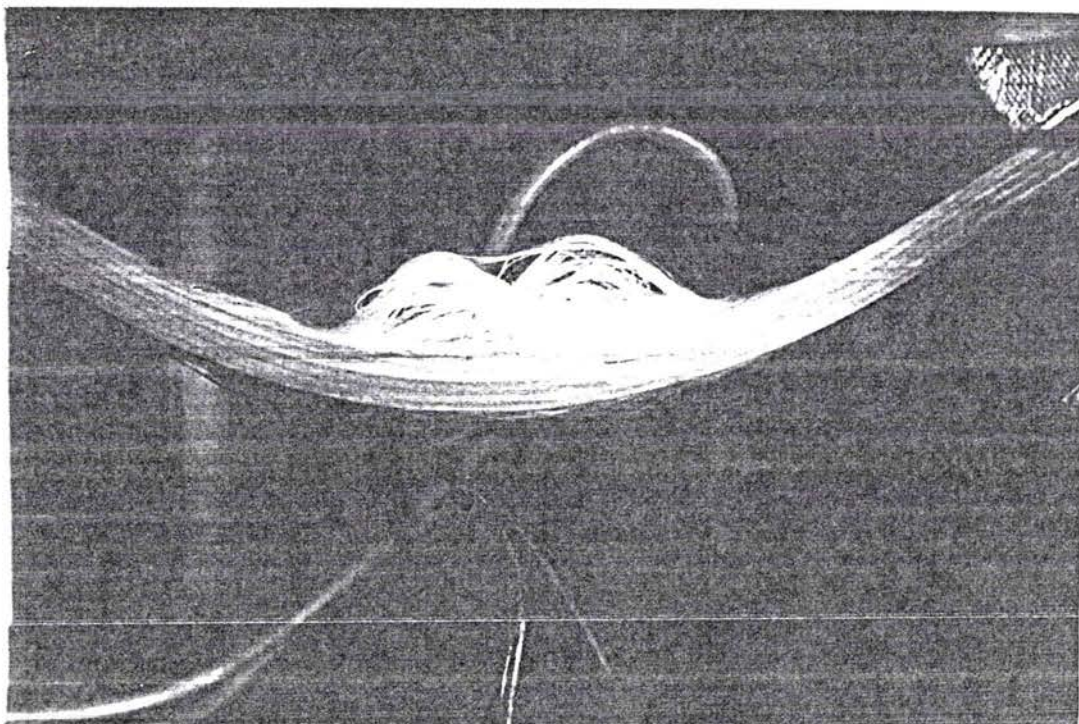


FIGURE 58 : Microflambage des stratifiés (9 couches) P2 soumis à de la flexion ( P2:2 VEE2)

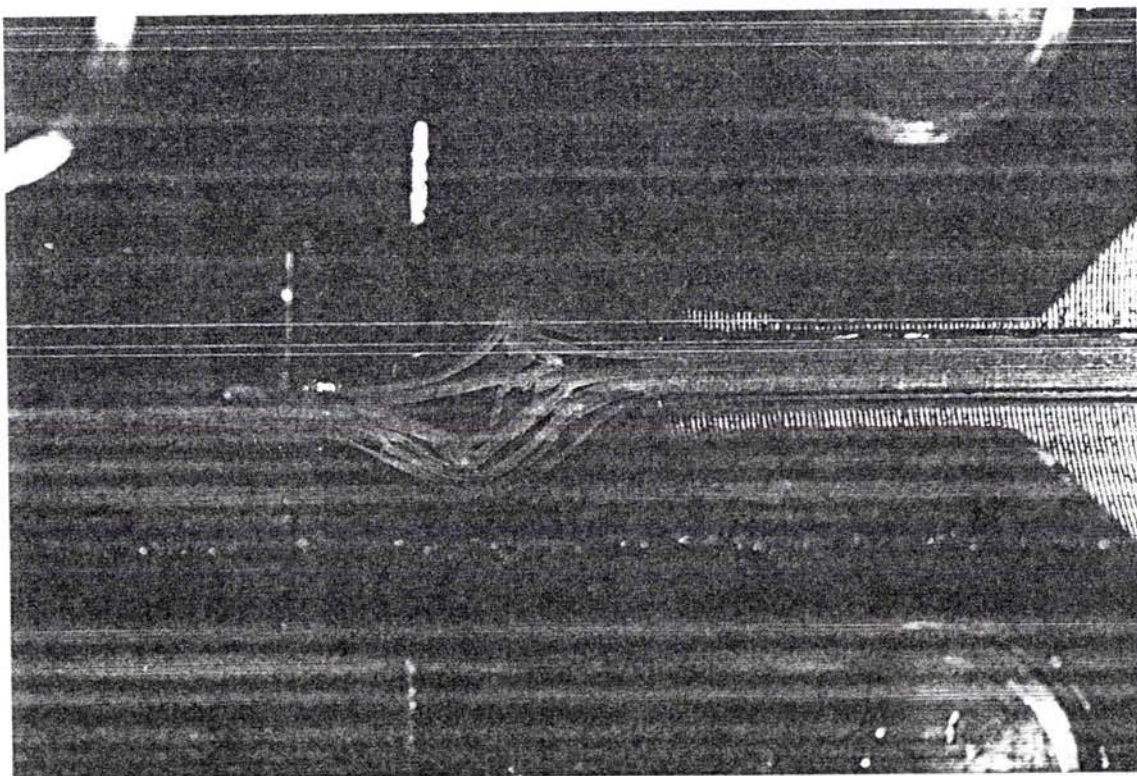


FIGURE 59 : Rupture en flexion compression du stratifié 9 couches (P2:4 VEE2)  
rapport des déformations à rupture = 0,9



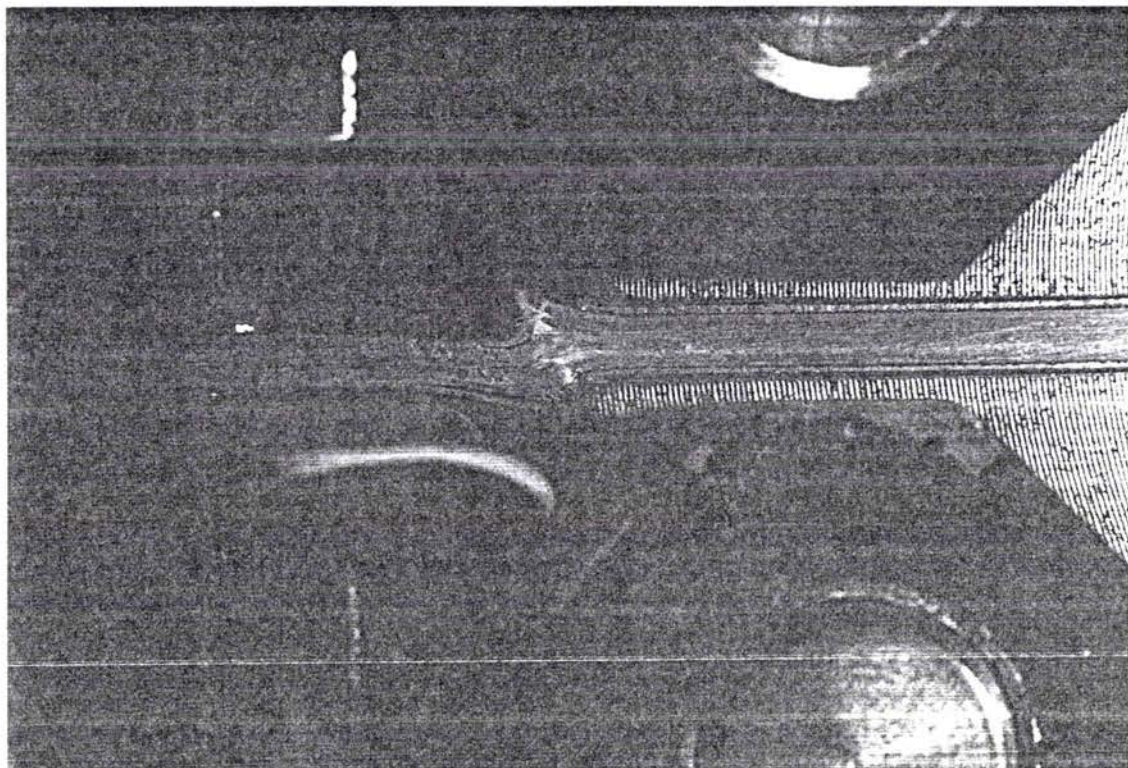


FIGURE 60 : Rupture aux mors ( P2:3 VEE2)

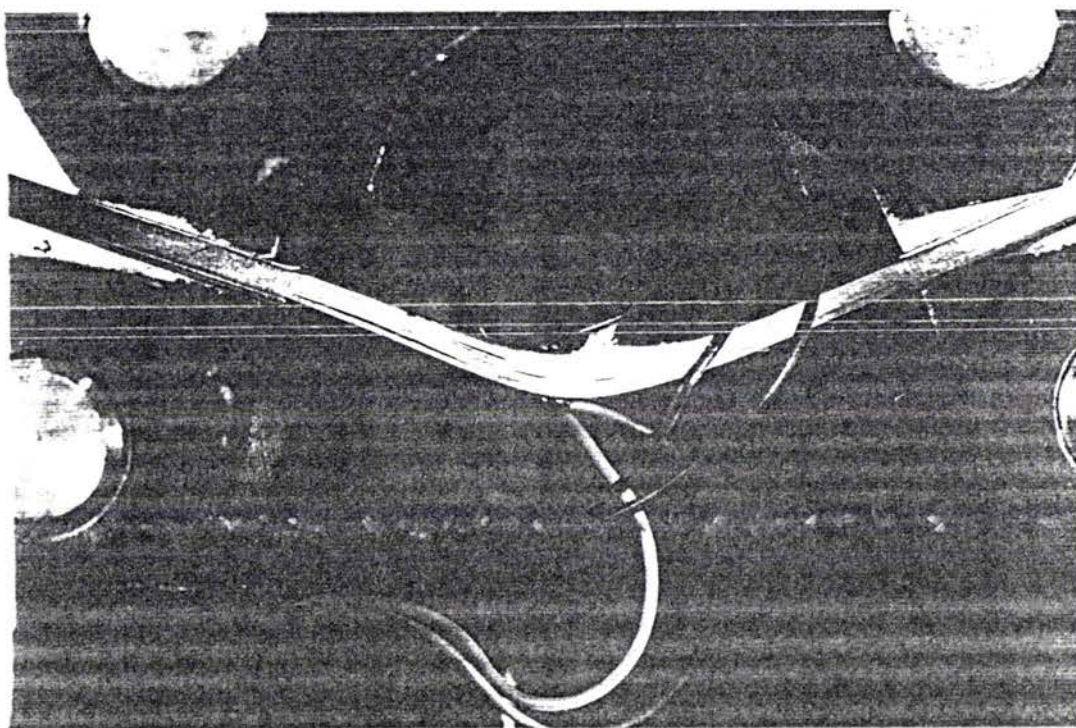


FIGURE 61 : Rupture en flexion du stratifié 9couches (P1:1 VEE2)



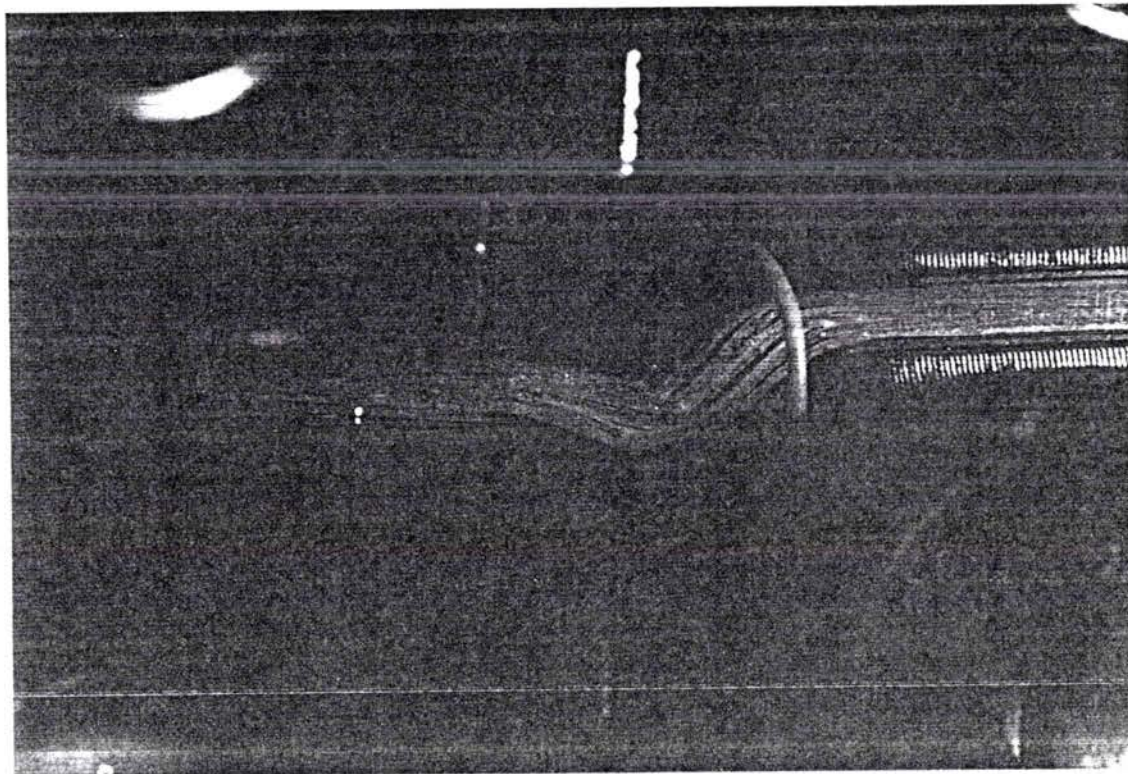


FIGURE 62 : Rupture en flexion-compression du stratifié (9 couches) ( P1:4 VEE2)  
Rapport des déformations = 0,55

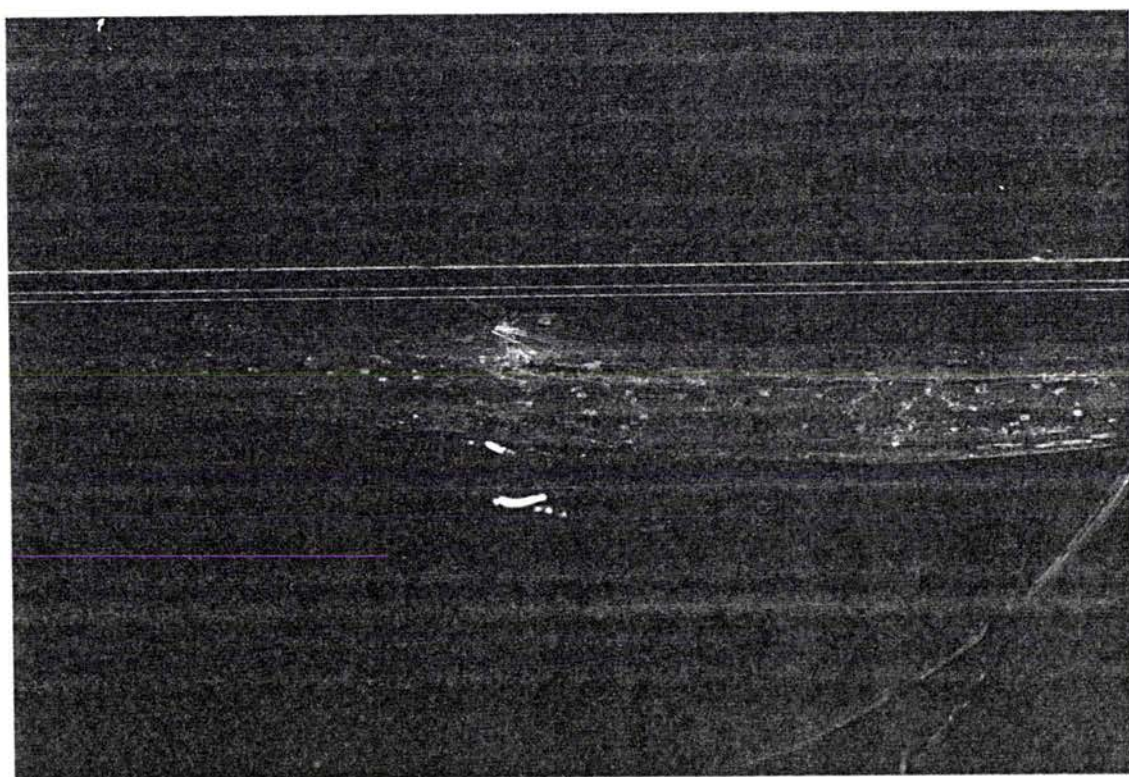


FIGURE 63 : Rupture en flexion du stratifié 16 couches (P4:2 VEE3)



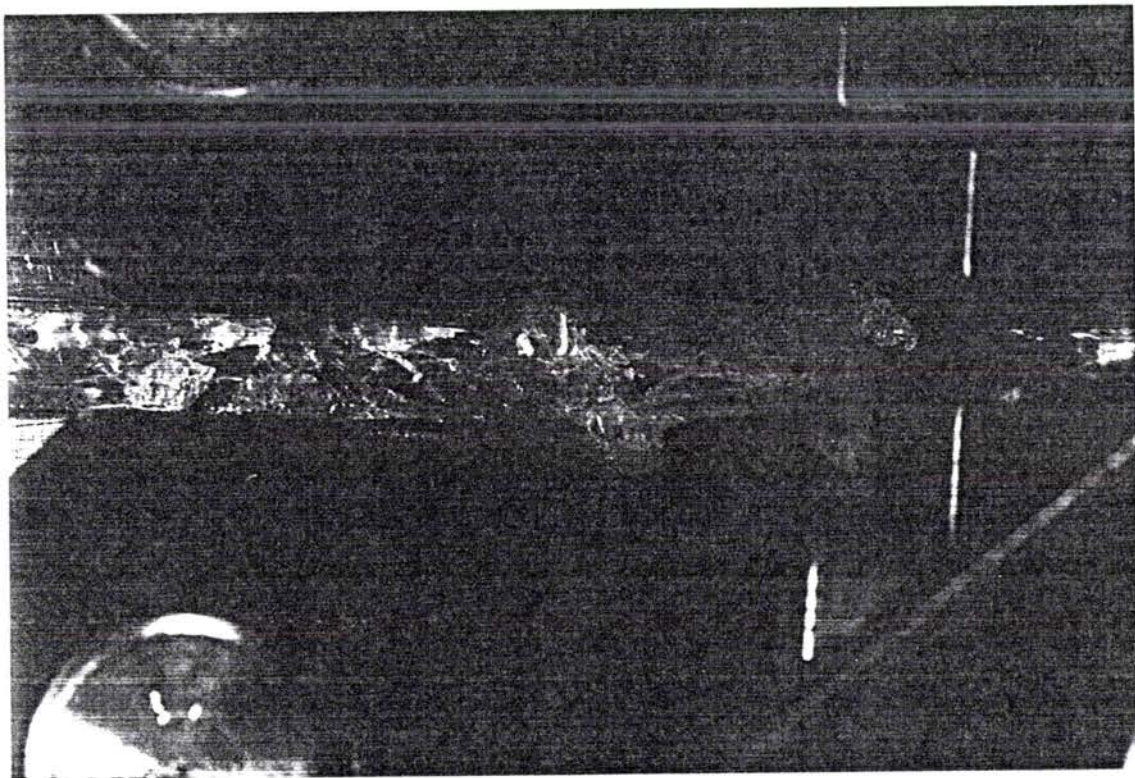


FIGURE 64 : Rupture en flexion-compression du stratifié (16 couches) ( P4:3 VEE2)  
Rapport des déformations = 0,57

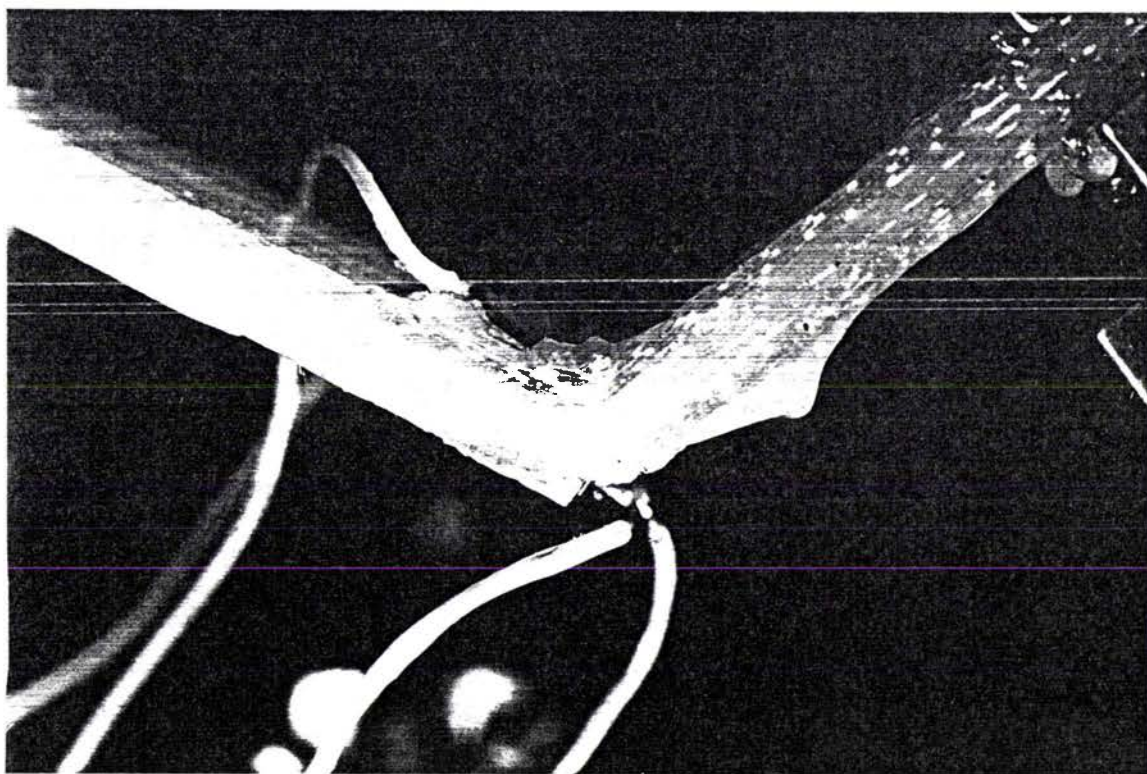


FIGURE 65 : Rupture en flexion du stratifié 16 couches (P5:5 VEE3)



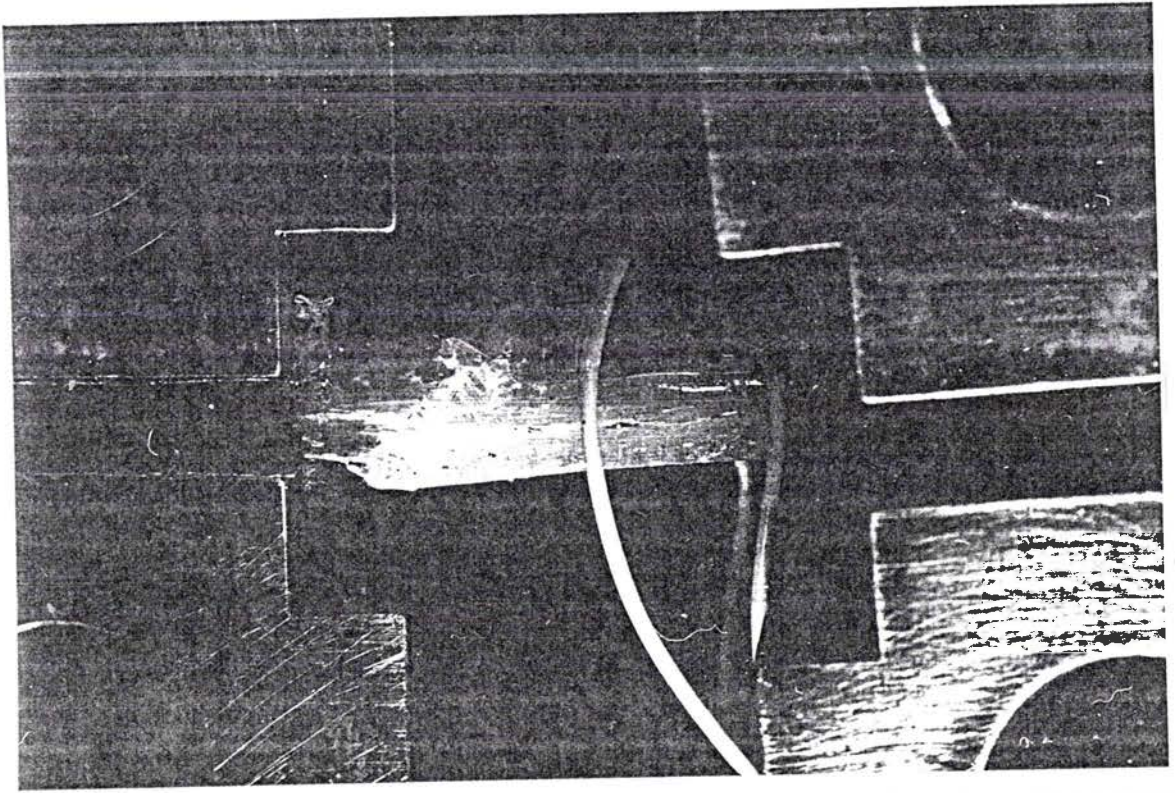


FIGURE 66 : Rupture en flexion-compression du stratifié (16 couches) ( P5:3 VEE2)  
Rapport des déformations = 0,24

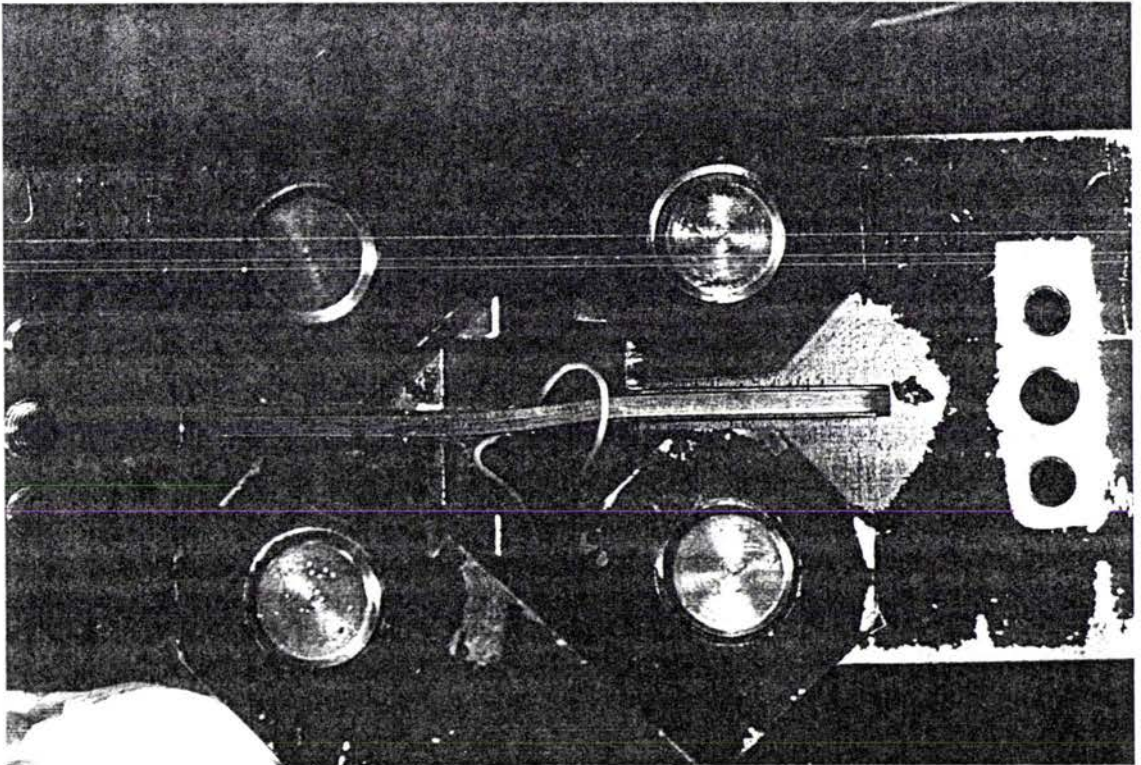


FIGURE 67 : Instabilité du montage



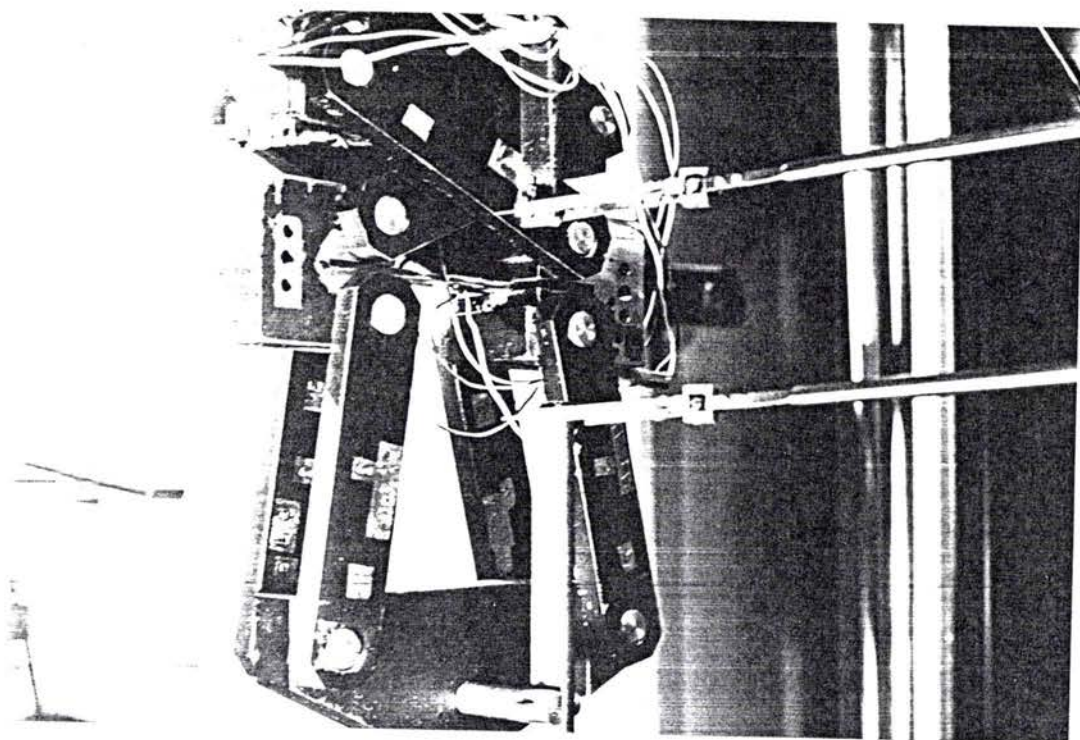


FIGURE 68 : Photo du montage

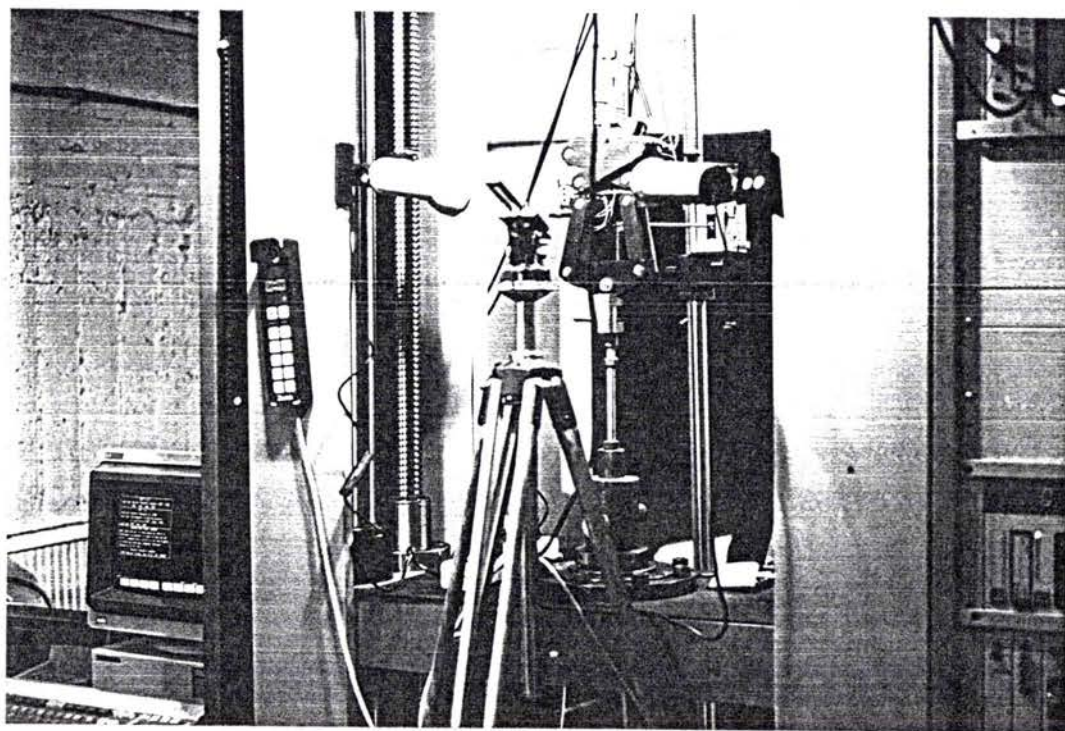


FIGURE 69 : Vue d'ensemble

## CONCLUSION

Dans ce travail, nous nous sommes attachés à comprendre et modéliser le comportement en compression des matériaux composites. De nombreux résultats d'essais sur les Carbone-Epoxy disponibles dans la littérature sont clairs: il apparaît une moindre rigidité et une diminution de la résistance des unidirectionnels sous charge de compression.

La majorité des auteurs expliquent ce phénomène par l'apparition d'un microflambage ou d'une instabilité en cisaillement. Mais ces modèles n'établissent pas de façon claire si le phénomène de microflambage est la cause principale de la baisse des caractéristiques mécaniques en compression des unidirectionnels. Les modèles connus de microflambage conduisent à des déformations critiques nettement plus élevées que la déformation à rupture. De plus c'est une instabilité de type locale qui ne peut en aucun cas décrire l'influence de la séquence d'empilement, de l'épaisseur ou du chargement ( ce qui est vérifié expérimentalement), et ils ne donnent aucune information raisonnable sur la longueur d'onde.

Nous avons proposé deux modèles ne possédant pas les mêmes inconvénients, ils sont établis à partir d'une approche micro-macro à deux échelles. Les équations de la stabilité obtenues font intervenir des dérivées dans le sens de l'épaisseur du stratifié, ce qui montre que le microflambage doit être compris comme une instabilité de structure et pas seulement comme une instabilité locale. La contrainte de microflambage est alors fonction de la séquence d'empilement et du chargement ainsi que de la longueur d'onde. Il est essentiel de remarquer que nos deux modèles sont incapables de donner une information quantitative. En effet nous avons négligé la rigidité en cisaillement dans le plan des fibres, qui est essentielle pour décrire correctement et complètement le microflambage. Mais ils nous ont permis de mettre en évidence l'effet d'épaisseur en utilisant une approche multi-échelle.

Avant de poursuivre notre étude théorique nous avons voulu mettre en évidence une éventuelle relation entre le chargement et les caractéristiques mécaniques. Un montage de flexion-compression a été conçu. Il nous a permis de solliciter les éprouvettes sous divers types de chargement. Nous avons testé 5 stratifiés Verre-Epoxy différents. Les résultats mettent en évidence de façon sérieuse que le comportement de ces stratifiés est linéaire. Nous avons vérifié, dans le cas de l'unidirectionnel, que le matériau est élastique jusqu'à des valeurs élevées de la déformation. En ce qui concerne la rupture, une forte dépendance du chargement fut remarquée. Par conséquent la résistance dépend du chargement et elle est plus grande lorsque la part de flexion dans la déformation est plus importante.

## ANNEXE 1

Seconds membres des problèmes au second ordre (p 108):

$$h_1(y) = \begin{vmatrix} {}_o\dot{O}_{23}^{33} \\ {}_o\dot{O}_{33}^{33} + \lambda_M + 2\mu_M \end{vmatrix}$$

$$h_2(y) = \begin{vmatrix} {}_o\dot{O}_{22}^{33} + \frac{{}_o\dot{O}_{23}^{23}}{2} + \lambda_M + 2\mu_M \\ {}_o\dot{O}_{23}^{33} + \frac{{}_o\dot{O}_{33}^{23}}{2} \end{vmatrix}$$

$$h_3(y) = \begin{vmatrix} -\frac{{}_o\dot{O}_{22}^{33}}{2} \\ -\frac{{}_o\dot{O}_{23}^{33}}{2} - \mu_M \end{vmatrix}$$

$$h_4(y) = \begin{vmatrix} -\frac{{}_o\dot{O}_{22}^{23}}{2} + \mu_M \\ -\frac{{}_o\dot{O}_{33}^{23}}{2} \end{vmatrix}$$

$$h_5(y) = \begin{vmatrix} -{}_o\dot{O}_{23}^{22} - \frac{{}_o\dot{O}_{22}^{23}}{2} \\ -{}_o\dot{O}_{33}^{22} - \frac{{}_o\dot{O}_{23}^{23}}{2} - \mu_M - \lambda_M \end{vmatrix}$$

$$h_6(y) = \begin{vmatrix} -{}_o\dot{O}_{22}^{22} - \lambda_M - 2\mu_M \\ -{}_o\dot{O}_{23}^{22} \end{vmatrix}$$

où  ${}_o\dot{O}_{ij}^{kh}$  et le  $ij^{\text{ème}}$  terme du tenseur :  $\dot{O}^{kh}_o$  solution du problème kh.

$$f_1(y) = \begin{vmatrix} \lambda_M W_{1,2}^{33} + \mu_M V_{1,3}^{33} \\ \mu_M V_{1,2}^{33} + (\lambda_M + 2\mu_M) W_{1,3}^{33} \end{vmatrix}$$

$$f_2(y) = \begin{vmatrix} (\lambda_M + 2\mu_M) V_{1,2}^{33} + \lambda_M \frac{W_{1,2}^{23}}{2} - \frac{\lambda_M}{2} + \mu_M \left( W_{1,3}^{33} + \frac{V_{1,3}^{23}}{2} \right) + \frac{\mu_M}{2} \\ \mu_M \left( W_{1,2}^{33} + \frac{V_{1,2}^{23}}{2} \right) + \lambda_M V_{1,3}^{33} + (\lambda_M + 2\mu_M) \frac{W_{1,3}^{23}}{2} \end{vmatrix}$$

$$f_3(y) = \begin{vmatrix} (\lambda_M + 2\mu_M) \left( -\frac{V_{1,2}^{23}}{2} \right) + \mu_M \left( -\frac{W_{1,3}^{23}}{2} \right) \\ \mu_M \left( -\frac{W_{1,2}^{23}}{2} \right) + \frac{\mu_M}{2} + \lambda_M \left( -\frac{V_{1,3}^{23}}{2} \right) - \frac{\lambda_M}{2} \end{vmatrix}$$

$$f_4(y) = \begin{vmatrix} \lambda_M \left( \frac{W_{1,2}^{23}}{2} \right) + \frac{\lambda_M}{2} + \mu_M \frac{V_{1,3}^{23}}{2} - \frac{\mu_M}{2} \\ \mu_M \left( \frac{V_{1,2}^{23}}{2} \right) + (\lambda_M + 2\mu_M) \frac{W_{1,3}^{23}}{2} \end{vmatrix}$$

$$f_5(y) = \begin{vmatrix} (\lambda_M + 2\mu_M) \left( -\frac{V_{1,2}^{22}}{2} \right) + \lambda_M (-W_{1,2}^{22}) + \mu_M \left( -V_{1,3}^{22} - \frac{W_{1,3}^{22}}{2} \right) \\ \mu_M \left( -V_{1,2}^{22} - \frac{W_{1,2}^{23}}{2} \right) - \frac{\mu_M}{2} + \lambda_M \left( -\frac{V_{1,3}^{23}}{2} \right) + (\lambda_M + 2\mu_M) (-W_{1,3}^{22}) + \frac{\lambda_M}{2} \end{vmatrix}$$

$$f_6(y) = \begin{vmatrix} (\lambda_M + 2\mu_M) (-V_{1,2}^{22}) + \mu_M (-W_{1,3}^{22}) \\ \mu_M (-W_{1,2}^{22}) + \lambda_M (-V_{1,3}^{22}) \end{vmatrix}$$

où  $V_{i,j}^{kh}$  est la dérivée par rapport à  $y_j$  du déplacement  $V_i$  (direction  $y_2$ ) solution du problème kh.

## ANNEXE 2

**Détermination de la constante  $C_2(x)$  (p 108):**

$$C_2(x) = C_2 + r_2(x) y_1 \wedge y$$

Arbitrairement, nous avons choisi d'annuler le déplacement microscopique de la fibre. A l'ordre  $\eta$  nous obtenons

- le déplacement en translation nous donne  $C_2 = 0$
- l'annulation de la rotation nous conduit à résoudre :

$$\text{rot}_x(u_1) + \text{rot}_y(u_2) = 0 \quad (a)$$

Or sur le bord de la fibre :

$$\begin{aligned} u_1(\partial\varphi) = & -V_o k_2 \sin k_2 x_2 \begin{vmatrix} -f y_2 & 0 \\ 0 & \frac{dW_o}{dx_3} \sin k_2 x_2 \end{vmatrix} - f y_3 \\ & + \frac{1}{2} \left( \frac{dV_o}{dx_3} + k_2 W_o \right) \cos k_2 x_2 \begin{vmatrix} -f y_3 \\ -f y_2 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \left( -k_2 W_o + \frac{dV_o}{dx_3} \right) \cos k_2 x_2 \begin{vmatrix} -f y_3 \\ f y_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} \text{rot}_x(u_1(\partial\varphi)) = & \left[ \left( -\frac{dV_o}{dx_3} k_2 \sin k_2 x_2 \right)_{f y_2} - \left( \frac{dW_o}{dx_3} k_2 \cos k_2 x_2 \right)_{f y_3} \right. \\ & \left. + \left( \frac{d^2 V_o}{dx_3^2} \cos k_2 x_2 \right)_{f y_3} + \left( k_2^2 W_o \sin k_2 x_2 \right)_{f y_2} \right] y_1 \end{aligned} \quad (b)$$

Le second terme de l'équation (a) s'exprime sur le bord de la fibre :



$$\begin{aligned}
 \text{rot}_y (u_2 (\partial\varphi)) = & \left[ \left( \frac{dV_o}{dx_3} k_2 \sin k_2 x_2 \right)_{f_2} y_2 - \left( \frac{d^2 V_o}{dx_3^2} \cos k_2 x_2 \right)_{f_3} y_3 \right. \\
 & + \left. \left( \frac{dW_o}{dx_3} k_2 \cos k_2 x_2 \right)_{f_3} y_3 + \left( W_o k_2^2 \sin k_2 x_2 \right)_{f_2} y_2 \right] y_1 \\
 & + 2 r_2 (x) y_1
 \end{aligned} \tag{c}$$

Grâce aux deux relations précédentes (c), (b) et à l'équation (a), nous en déduisons que :

$$C_2 (x) = 0$$

### ANNEXE 3

**Coefficients  ${}^1C^{jk}$  (p 123) :**

On note  $\eta$  demi largeur de la cellule de base.

$\mathbf{n}$  : normale à l'interface s'exprime  $\mathbf{n} = n_2 \mathbf{y}_2 + n_3 \mathbf{y}_3$

$${}^2C^{22} = \frac{\eta^2}{E_M S_f} \int_{\partial\phi} \left\{ \left( -(\lambda_M + 2\mu_M) V_1^{22} + {}^2\dot{O}_{22}^{22} \right) n_2 + \left( -\mu_M W_1^{22} + {}^2\dot{O}_{23}^{22} \right) n_3 \right\} ds$$

$${}^3C^{33} = \frac{\eta^2}{E_M S_f} \int_{\partial\phi} \left\{ \left( \mu_M V_1^{33} + {}^3\dot{O}_{23}^{33} \right) n_2 + \left( (\mu_M + 2\mu_M) W_1^{33} + {}^3\dot{O}_{33}^{33} \right) n_3 \right\} ds$$

$${}^2C^{23} = \frac{\eta^2}{E_M S_f} \int_{\partial\phi} \left\{ \left( \mu_M \left( -V_1^{22} - W_1^{23} - \frac{f y_2}{2} \right) + {}^2\dot{O}_{23}^{23} \right) n_2 + \left( \lambda_M \left( -\frac{V_1^{23}}{2} + \frac{f y_3}{2} \right) + (\lambda_M + 2\mu_M) (-W_1^{22}) + {}^2\dot{O}_{33}^{23} \right) n_3 \right\} ds$$

$${}^3C^{23} = \frac{\eta^2}{E_M S_f} \int_{\partial\phi} \left\{ \left( (\lambda_M + 2\mu_M) V_1^{33} + \lambda_M \left( \frac{W_1^{23}}{2} - \frac{f y_2}{2} \right) + {}^3\dot{O}_{22}^{23} \right) n_2 + \left( \mu_M \left( W_1^{33} + \frac{V_1^{23}}{2} + \frac{f y_3}{2} \right) + {}^3\dot{O}_{23}^{23} \right) n_3 \right\} ds$$

$${}^2C^{33} = \frac{\eta^2}{E_M S_f} \int_{\partial\phi} \left\{ \left( \lambda_M \left( \frac{W_1^{23}}{2} + \frac{f y_2}{2} \right) + {}^2\dot{O}_{22}^{33} \right) n_2 + \left( \mu_M \left( \frac{V_1^{23}}{2} - \frac{f y_3}{2} \right) + {}^2\dot{O}_{23}^{33} \right) n_3 \right\} ds$$

$${}^3C^{22} = \frac{-\eta^2}{E_M S_f} \int_{\partial\phi} \left\{ \left( \mu_M \left( -\frac{W_1^{23}}{2} + \frac{f y_2}{2} \right) + {}^3\dot{O}_{23}^{22} \right) n_2 + \left( \lambda_M \left( -\frac{V_1^{23}}{2} - \frac{f y_3}{2} \right) + {}^3\dot{O}_{33}^{22} \right) n_3 \right\} ds$$

où  ${}^q_1\dot{O}^{kh}_{ij}$  est le  $ij^{\text{ème}}$  terme du tenseur des contraintes au second ordre solution du problème q-kh, et  $(V^{kh}_1, W^{kh}_1)$  sont les composantes du déplacement au premier ordre  $U_1$  solution du problème kh.

## BIBLIOGRAPHIE

- Allix O. -Girard F. -Ladevèze P. & Vittecoq F., 1988, "Composite 2D à fibres haute résistance : caractérisation du comportement de compression", JNC6, Paris, October 1988, pp. 515-526.
- Allix O., 1989, "Modélisation du comportement des composites stratifiés : Application à l'analyse du délaminage", Thèse, Université Pierre et Marie Curie.
- Andrieux S., 1989, "Composite à matrice viscoélastique comportement macroscopique et critères de décohésion", Proceedings du 9<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique, Metz, Vol. 2, Septembre 1989, pp. 396-397.
- Anquez L., 1990, "La rupture en compression des matériaux composites à fibres longues", Note de structure n° f26395 LA/JC, AMD-BA, Janvier 1990.
- Berhnart G., 1982, "Mécanique de la rupture des matériaux composites. Etude du délaminage par une méthode analytique", Thèse, Institut National Polytechnique de Toulouse.
- Berveiller M. & Zaoui A., 1979, "An extension of the self-consistent scheme to plastically flowing polycrystals", Journal Mechanicals and Physicals Solids, Vol. 26, pp. 325.
- Boll D.J. -Jensen R.M. & Coroner L., 1990, "Compression behavior of single Carbon filaments embedded in an Epoxy polymer", Journal of Composite Materials, Vol. 24, February 1990, pp. 208-219.
- Bord C. & Weiss J., 1983, "Les matériaux composites", Tome I et Tome II, Editions de l'Usine Nouvelle.
- Chamis C.C., 1984, "Simplified composite micromechanics equation for strength, fracture toughness and environmental effects", Sampe Quaterly, Vol. 15, n° 4, July 1984.
- Cochelin B. & Potier-Ferry M., 1990, à paraître.
- Davis J.G., 1975, "Compressive strength of fiber-reinforced composite materials", American Society for Testing Materials, pp. 364-377.
- Destuynder P., 1986, "Une théorie asymptotique des plaques minces en élasticité linéaire", Edition Masson.
- Dumontet H., 1985, "Boundary layer stresses in elastic composite in local effects in the analysis of structures", P. Ladevèze Editeur, Elsevier Sciences Publishers, pp. 215-232.
- Dumontet H. -Engrand O. & Lecuyer F., 1987, "Comparaison des méthodes de couche limite pour l'analyse des effets de bord dans les matériaux composites", Annales des Composites, 1987/1, Effets de bords et singularités dans les matériaux composites, Chatenay-Malabry, Novembre 1987, pp. 51-64.
- Engrand D., 1985, "Local effects calculations in composite plates by a boundary layer method", Local effects in analysis of structures, P. Ladevèze Editeur, Elsevier Sciences Publishers.
- Gay D., 1989, "Matériaux composites", Hermès.
- Gilletta D., 1985, "Composites 2D : modélisation mécanique et identification de la couche élémentaire", Thèse Docteur Ingénieur, Université Pierre et Marie Curie.
- Grandidier J.C. & Potier-Ferry M., 1990, "Microflambage des fibres dans un matériau composite à fibres longues", Comptes-rendus de l'Académie des Sciences de Paris, t. 310, Série 2, pp. 1-6.
- Greszczuk L.B., 1982, "On failures modes of unidirectional composites under compressive loading", in Fracture of Composite Materials, G.C. Sih and V.P. Tamuzs, editions Martinus Nijhoff Publishers, The Hague, pp. 231-244.
- Greenwood J.H. & Rose P.G., 1974, "Compressive behaviour of Kevlar 49 fibres and composites", Journal of Materials Science, Vol. 9, pp. 1809-1814.

- Gressier M. -Krasucki F. - Marigo J.J. & Pideri C., 1989, "Modélisation de l'endommagement des composites à fibres par décohésion et fissuration", Proceedings du 9<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique, Metz, Vol. 2, Septembre 1989, pp. 386-387.
- Greszczuk L.B., 1975, "Microbuckling failure of circular fiber-reinforced composites", AIAA Journal, Vol 13, n° 10, October 1975.
- Guädke M.,  $\otimes \otimes \otimes$ , "Hygrothermomechanical behavior of carbon fiber reinforced epoxies", Thèse.
- Hanasaki S. & Hasegawa Y., 1974, "Compressive strength of unidirectional fibrous composites", Journal Composite Materials, Vol.8, July 1974, pp. 306-309.
- Harris C.E. -Lee J.W., 1988, "A micromechanics model for the effective Young's modulus of a piecewise-isotropic laminate with way patterns", Journal of Composite Materials, Vol. 22, August 1988, pp. 717-741.
- Hashin Z., 1980, "Failure criteria for unidirectional fiber composite", ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol. 47, pp. 329-334.
- Herrmann L.R. -Mason W.E. & Chan S.T.K., 1967, "Response of reinforcing wires to compressive states of stress", Journal Composite Materials, Vol. 1, pp. 212-227.
- Hill R. & Hutchinson J.W., 1975, "Bifurcation phenomena in the plane tension test", Journal Mechanics and Physics of Solids, Vol. 23, pp. 239.
- Hoffman, 1967, "The brittle strength of orthotropic materials", Journal of Composite Materials, Vol. 1, pp. 200-206.
- Karama M., 1990, "Caractérisation au cisaillement d'un tissu de carbone/résine epoxy de sous forme de plaque", Proceeding de Textile Composites in Building Construction, Edition P. Hamelin and G. Verchery, Pluralis, Juillet 1990, pp. 211-220.
- Kulkarni S.V. -Rice J.S. & Rosen B.W., 1975, "An investigation of the compressive strength of Kevlar 49 / epoxy composite", Composites, Vol. 6, n° 5, Septembre 1975, pp. 217-225.
- Ladevèze P., 1983, "Sur le principe de St Venant en élasticité", Journal de Mécanique Théorique et Appliquée, Vol. 1, pp. 161-184.
- Ladevèze P., 1987, "Les modèles classiques et leurs extensions pour le calcul des plaques", Calcul des structures et intelligence artificielle, Edition J.M. Fouet, P. Ladevèze et R. Ohayon, Pluralis.
- Ladevèze P. & Pecastaing F., 1988, "The optimal version of Reissner Theory", Journal of Applied Mechanics, Vol. 55, pp. 413-418.
- Lager J.R. & June R.R., 1969, "Compressive strength of boron-epoxy composites", Journal Composites Materials, Vol. 3, January 1969, pp. 48-56
- Lanir Y. & Fung Y.C.B., 1972, "Fiber composite columns under compression", Journal Composite Materials, Vol. 6, July 1972, pp. 387-401.
- Leguillon D. & Sanchez-Palencia E., 1986, "Calcul des singularités de bord dans les composites", JNC5, Paris, Edition Pluralis, Septembre 1986.
- Léné F., 1984, "Contribution à l'étude des matériaux composites et de leur endommagement", Thèse d'état, Université Pierre et Marie Curie.
- Marigo J.J. & Pideri C., 1987, "Decohesion criteria in fibred composites and reinforced beams for plates", Proceedings of the European Mechanics Colloquium : Mechanical behaviour of adhesive joints, St Etienne, Edition G. Verchery and A.H. Cardon, Pluralis, 1987.
- Marigo J.J. -Mialon P. -Michel J.C. & Suquet P., 1987, "Plasticité et homogénéisation : un exemple de prévision des charges limites d'une structure hétérogène périodique", Journal de Mécanique théorique et appliquée, Vol. 6, N° 1, pp. 47-75.

- Marigo J.J., 1988, "Modelling of brittle and fatigue damage for elastic material by growth of microvoids", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 21, N° 4, pp. 861-874.
- Masson J.J. -Baron C. & Schulte K., 1988, "Comportement sous chargements cycliques alternés et en compression de stratifiés Carbone/Bismaléimide", JNC6, Paris, Octobre 1988, pp. 661-671.
- Michel J.C., 1984, "Homogénéisation de matériaux élastoplastiques", Thèse, Université Pierre et Marie Curie.
- Peters P.W.M., 1988, "Etude de la fissuration transverse dans des composites stratifiés multidirectionnels", JNC6, Paris, Octobre 1988, pp. 379-394.
- Potier-Ferry M., 1985, "Foundation of elastic postbuckling theory", *Lecture notes in Physics* 288, Springer Verlag, pp. 1-82.
- Rosen B.W., 1964, "Mechanics of composite strengthening", *Fiber Composite Materials*, American Society for Metals.
- Sadowski M.A., 1967, "Buckling of fibers", *Transaction of ASME, Journal of Applied Mechanics*, December 1967, pp. 1011-1016.
- Sanchez-Palencia E., 1980, "Non homogeneous media and vibration theory", *Lecture Notes in Physics*, Springer-Verlag, n° 127, Berlin.
- Schaffers W.J., 1976, "Buckling in fiber-reinforced elastomers", *Textile Research Journal*, Avril 1976, pp. 502-512.
- Schuerch H., 1966, "Predicting of compressive strength in uniaxial boron fiber metal matrix composite materials", *AIAA Journal*, Vol. 4, n° 1, pp. 102-106.
- Steif P.S., 1987, "An exact two-dimensional approach to fiber micro-buckling", *International Journal Solids Structures*, Vol. 23, n° 9, pp. 1235-1246.
- Steif P.S., 1988, "A simple model for the compressive failure of weakly bonded fiber reinforced composites", *Journal of Composite Materials*, Vol. 22, September 1988, pp. 818-828.
- Stevanovic M. & Nesic O., 1987, "Caractéristiques en compression et défaillance due à la compression des composites carbone/époxyde", *Annales des composites*, 1987/2, pp. 123-139.
- Suquet P.M., 1982, "Plasticité et homogénéisation", Thèse d'Etat, Université Pierre et Marie Curie.
- Suquet P.M., 1983, "Analyse limite et homogénéisation", *Compte-rendu de l'Académie des Sciences*, Paris, t. 296, Série II, p. 1355-1358.
- Talierco A., 1989, "Strength criteria for fiber reinforced composite materials", Cours : "Comportement des composites. Endommagement-Rupture", Université Pierre et Marie Curie, Breaux-sans-Nappe, Janvier 1989.
- Timoshenko S.P., 1922, "On the transverse vibrations of bars of uniform cross-section", *Phil. Mag.*, Vol. 43, pp. 125-131.
- Tsai S.W. & Wu E.W., 1971, "A general theory of strength for anisotropic materials", *Journal of Composites Materials*, Vol. 5, pp. 58-81.
- Tsai S.W. -Hahn H.T., 1980, "Introduction to composite material", Technomic Published Company, Vol. X.
- Vittecoq E., 1991, "Sur le comportement en compression des composites stratifiés Carbone-Epoxy", Thèse, Université Pierre et Marie Curie.
- Wang A.S.D., 1979, "A non-linear microbuckling model predicting the compressive strength of unidirectional composites", *American Society of Mechanical Engineers*, September 1979.
- Wu E.M., 1974, "Phenomenological anisotropic failure criterion", *Composite materials*, Vol. 2, *Mechanics of composite material*, Academic Press.