



**HAL**  
open science

# Comportement plastique des tôles sous sollicitation biaxiale et analyse numérique de la mise en forme par gonflement hydraulique

Rachid Mesrar

► **To cite this version:**

Rachid Mesrar. Comportement plastique des tôles sous sollicitation biaxiale et analyse numérique de la mise en forme par gonflement hydraulique. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université Paul Verlaine - Metz, 1991. Français. NNT : 1991METZ007S . tel-01775930

**HAL Id: tel-01775930**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01775930>**

Submitted on 24 Apr 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

VB 69091

INSTITUT SUPERIEUR DE GENIE MECANIQUE ET PRODUCTIQUE

UNIVERSITE DE METZ

# THESE

Présentée à

L'UNIVERSITE DE METZ

pour obtenir

LE GRADE DE

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE

par

Rachid MESRAR

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv.	19910145
Cote	51m3 91/7
Loc	Magasin

COMPORTEMENT PLASTIQUE DES TOLES SOUS  
SOLLICITATION BIAXIALE ET ANALYSE NUMERIQUE  
DE LA MISE EN FORME PAR GONFLEMENT HYDRAULIQUE



*Soutenue le 26 juin 1991 devant la commission d'examen composée de :*



C. TEODOSIU	Directeur de Recherches, CNRS (Président)
G. FERRON	Professeur à l'Université de Metz (Directeur de Thèse)
C. FRESSENGEAS	Professeur à l'Université de Metz (Rapporteur)
C. LEVAILLANT	Professeur à l'Ecole des Mines de Paris (Rapporteur)
P. MARCHAND	Ingénieur-Chercheur, Ledep-Sollac
A. ZEGHLOUL	Maître de Conférences à l'Université de Metz

Cette étude a été effectuée au **Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux** de l'Université de Metz (URA CNRS n° 1215).

Je suis heureux à l'occasion de cette thèse d'exprimer ma sincère gratitude à Messieurs les Professeurs **M. Berveiller** et **M. Potier-Ferry** qui m'ont accueilli dans ce laboratoire et m'ont apporté leurs encouragements tout au long de ce travail.

Je tiens à exprimer ma vive reconnaissance au Professeur **G. Ferron** qui a dirigé cette recherche, m'a assuré un encadrement permanent et m'a fait bénéficier de ses compétences scientifiques. Je le remercie de la profonde amitié qu'il me témoigne et du soutien qu'il m'a apporté dans la rédaction de ce mémoire.

Je suis heureux d'exprimer ma sincère gratitude et ma profonde reconnaissance à Monsieur **A. Zegloul** qui a co-dirigé cette recherche pour les encouragements et l'aide qu'il m'a apportés. L'immense intérêt qu'il porte à la recherche, l'amitié qu'il me témoigne ont été pour moi un exemple et un soutien permanent.

Je remercie tous les membres du Jury, en particulier Messieurs les Professeurs **C. Fressengeas**, **C. Levillant**, **P. Marchand** et **C. Teodosiu** de l'intérêt qu'ils ont montré pour cette thèse en acceptant de la juger.

Je remercie tout le personnel du Laboratoire, chercheurs et techniciens qui ont participé à l'accomplissement de ce travail. En particulier, **Madame Marcelet** pour ses services précieux et **Mademoiselle Mettetal** qui a assuré un travail dactylographique de grande qualité.

# TABLE DES MATIERES

## INTRODUCTION GENERALE

### PARTIE A - COMPORTEMENT PLASTIQUE BIAXIAL DE DIFFERENTS ACIERS D'EMBOUTISSAGE

A-I- ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE	2
A-I-1- Introduction	2
A-I-2- Détermination expérimentale des surfaces d'écoulement plastique	2
A-I-3 Modélisation des surfaces d'écoulement plastique	8
A-I-4 Comportement plastique du polycristal	12
A-I-5 Conclusion	15
A-II- ETUDE DE L'ECROUISSAGE DE DIFFERENTS ACIERS	16
A-II-1 Introduction	16
A-II-2 Description du dispositif expérimental de traction biaxiale	16
A-II-3 Conditions expérimentales	21
A-II-4 Comportement plastique des différents aciers	29
A-III- ANALYSE DES RESULTATS	44
A-III-1 Introduction	44
A-III-2 Critères de Von-Misès et de Hill et lois d'écoulements associées	44
A-III-3 Analyse des résultats de la consolidation des quatre aciers sous les différents chemins de déformation	46
A-III-4 Conclusion	58
BIBLIOGRAPHIE DE LA PARTIE A	59

## PARTIE B - MODELISATION DU GONFLEMENT HYDRAULIQUE D'UNE TOLE

NOTATIONS	61
<b>B-I- ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE</b>	<b>63</b>
B-I-1 Introduction	63
B-I-2 Description physique de l'essai	64
B-I-3 Solution de Hill	66
B-I-4 Résolution numérique du problème	73
<b>B-II- FORMULATION ANALYTIQUE DU GONFLEMENT HYDRAULIQUE</b>	<b>88</b>
B-II-1 Introduction	88
B-II-2 Equation de base d'un processus de formage axisymétrique	88
B-II-3 Déformations	91
B-II-4 Rayons de courbure	92
B-II-5 Equations d'équilibre	93
B-II-6 Processus du gonflement hydraulique	93
B-II-7 Calcul incrémental	95
<b>B-III- SIMULATIONS NUMERIQUES DU GONFLEMENT HYDRAULIQUE. DISCUSSION ET RESULTATS</b>	<b>98</b>
B-III-1 Introduction	98
B-III-2 Précision du programme de calcul	98
B-III-3 Tendances générales : distribution des déformations et forme de la membrane	101
B-III-4 Influence de la capacité d'écrouissage	108
B-III-5 Influence de $\epsilon_0$	111
B-III-6 Influence de la sensibilité à la vitesse de déformation	113
B-III-7 Influence de l'anisotropie	114
B-III-8 Influence de la forme de la surface de charge	117
B-III-9 Comparaison avec les résultats expérimentaux de la littérature	121
B-III-10 Conclusion	124
<b>CONCLUSION GENERALE</b>	<b>125</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE DE LA PARTIE B</b>	<b>127</b>
<b>ANNEXES</b>	<b>130</b>

## INTRODUCTION GENERALE

Le développement des moyens de calcul a permis au cours des dernières années, des progrès considérables en calcul des structures. Un des objectifs actuels consiste à incorporer des lois de comportement plus fines dans les codes de calcul utilisés. Dans le cas du comportement plastique des matériaux, ces lois de comportement plastique des matériaux plus complexes ou plus fines peuvent être obtenues à partir d'essais plus généraux que les essais de traction simple ; on peut citer par exemple l'essai qui consiste à soumettre des tubes minces à une charge axiale, une torsion et une pression interne (ou externe) combinées. Néanmoins la caractérisation du comportement plastique des matériaux pose encore des problèmes expérimentaux difficiles, particulièrement lorsque ceux-ci se présentent sous forme de tôles. Il y a, parallèlement, un développement important des calculs d'homogénéisation, ou calculs "micro-macro". Les progrès enregistrés dans ce domaine contribuent en particulier à une prévision de l'évolution des textures dans les procédés d'élaboration, ainsi qu'à une meilleure appréhension des instabilités au cours des procédés de mise en forme.

Le présent travail est divisé en deux parties. La première partie a pour objet de caractériser le comportement plastique de quatre nuances de tôles d'acier, en effectuant des essais sous différents trajets de déformation. Quelques essais avec changement du trajet de déformation ont en outre été réalisés. Cette caractérisation du comportement plastique a été effectuée à l'aide d'un dispositif de traction biaxiale mis au point au cours d'un travail antérieur de l'équipe de recherche. Les résultats obtenus ont d'abord été analysés en comparant les essais sous différents trajets de déformation. Les essais séquentiels traction biaxiale-traction uniaxiale ont par ailleurs permis de mettre en évidence le caractère anisotrope de l'écroutissage.

La deuxième partie de ce travail traite d'un procédé particulier de mise en forme des tôles, à savoir le gonflement hydraulique ou essai Jovignot. Par rapport aux "études antérieures nous avons apporté un soin particulier à l'analyse et la compréhension de l'influence des différents paramètres caractérisant le comportement plastique sur la pression de gonflement, la distribution des déformations et la forme de la membrane déformée. Les influences de l'écroutissage, de la sensibilité à la vitesse de déformation et de la forme de la surface d'écoulement ont ainsi été analysées, et les prévisions du calcul ont été confrontées aux résultats expérimentaux de la littérature.

# **PARTIE A**

**COMPORTEMENT PLASTIQUE BIAXIAL  
DE DIFFERENTS ACIERS D'EMBOUTISSAGE**



## Chapitre A-I- Etude bibliographique

### **A-I-1- Introduction**

La caractérisation du comportement plastique des matériaux nécessite en particulier la connaissance ou la détermination de leur surface de charge, et de l'évolution de cette surface en fonction des contraintes ou des déformations appliquées. Lorsque les surfaces de charge sont identifiées au potentiel plastique, on connaît alors, à partir du principe du travail maximal de Hill, les incréments de déformation plastique pour un chargement correspondant à un point particulier de ces surfaces (loi de normalité).

Les surfaces de charge représentent un élément essentiel, non seulement pour décrire le comportement plastique et l'anisotropie associée mais aussi pour modéliser convenablement les procédés de mise en forme des matériaux ainsi que les instabilités qui peuvent survenir lors de ces opérations de mise en forme (par exemple les striction et les bandes de cisaillement, ainsi que les phénomènes de plissement dans le cas de l'emboutissage des tôles). Toutefois, de nombreuses difficultés sont rencontrées, lorsqu'on veut suivre l'évolution de ces surfaces, tant sur le plan expérimental que théorique.

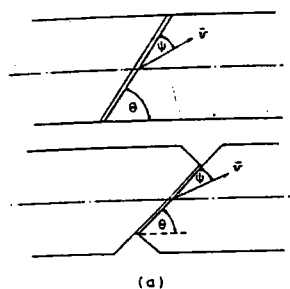
Dans ce qui suit, nous allons présenter l'essentiel des techniques expérimentales utilisées dans la détermination des surfaces de charge ainsi que les modélisations développées au cours de ces dernières années et qui permettent la prévision de ces surfaces par le calcul.

### **A-I-2- Détermination expérimentale des surfaces d'écoulement plastique**

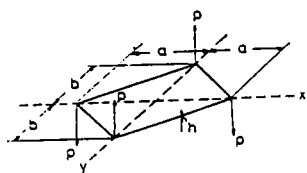
#### **A-I-2-1- Eprouvettes et techniques expérimentales**

Les éprouvettes utilisées dans les expériences de la plasticité peuvent être classées en trois catégories selon leur forme : tubes minces, éprouvettes plates minces et éprouvettes plates épaisses. La méthode qui consiste à soumettre des tubes minces à une charge axiale, une torsion et une pression interne (ou externe) combinées est la plus favorable car elle donne un état de contraintes quasi-uniforme. Toutefois, des problèmes peuvent être rencontrés concernant la précision d'usinage, les effets de bords et éventuellement une flexion parasite de l'éprouvette.

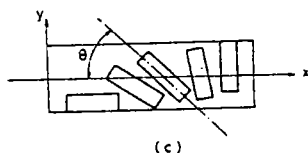
En ce qui concerne les produits plats, la figure A-I-1 montre les méthodes d'obtention d'un état de contraintes combiné en utilisant des éprouvettes plates minces et épaisses. La figure A-I-1(a) indique la méthode d'application d'une traction à des éprouvettes entaillées ou rainurées. L'état de contraintes combiné est produit dans la bande. La figure A-I-1(b) présente une méthode de chargement transversal de plaques rhombiques aux angles de l'éprouvette. L'état de contraintes combiné est produit dans la partie centrale de la plaque par flexion. Pour avoir un état de contraintes uniforme dans l'épaisseur de la plaque, Hazell et Marin [1] ont proposé l'utilisation de plaques "composites" constituées d'une zone centrale alvéolée sur les surfaces de laquelle sont collées deux plaques de faible épaisseur. Ceci permet de considérer la contrainte comme raisonnablement uniforme dans l'épaisseur de chacune des plaques. La figure A-I-1(c) montre la méthode qui consiste à découper des éprouvettes de traction uniaxiale dans plusieurs directions d'une tôle par rapport à la direction de préchargement en traction simple. Cette méthode a été proposée par Szczepinski [2] pour la détermination du seuil plastique dans la nouvelle direction de chargement. La figure A-I-1(d) montre une éprouvette en forme de croix [3-5] conçue pour être soumise à une traction biaxiale. Une autre forme d'éprouvette présentant des fentes dans les zones de raccordement avec les têtes de fixation avait été proposée antérieurement par Monch et Galster [4], elle permet d'avoir une région de déformation homogène de l'ordre de 75 % (figure A-I-2).



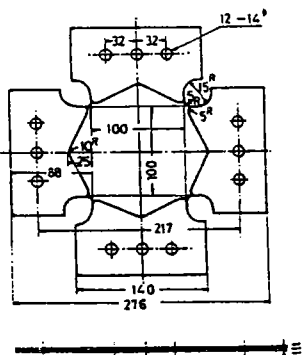
(a)



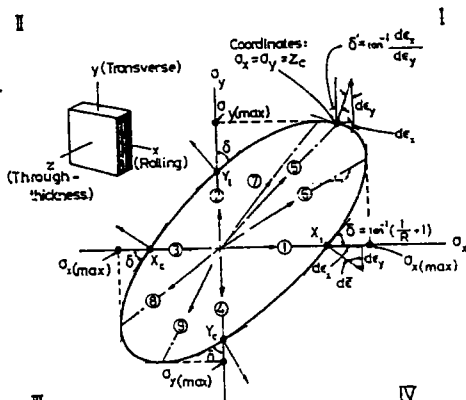
(b)



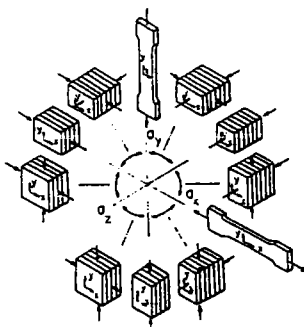
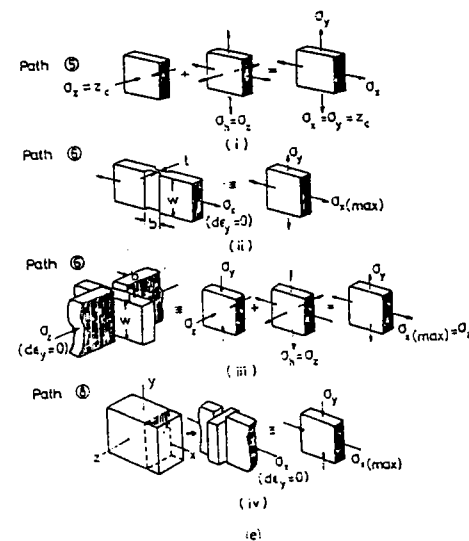
(c)



(d)



III



(f)

**Fig. A-I-1 : Méthodes permettant d'obtenir un état de contraintes combiné, ou un changement de sollicitation (d'après K. Ikegami [6])**

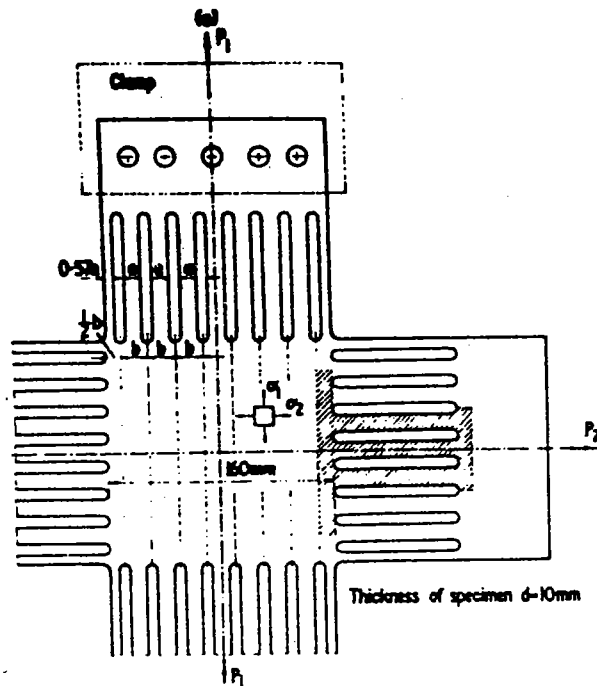


Fig. A-I-2 : Géométrie de l'éprouvette cruciforme proposée par Monch et Galster [4]

En améliorant l'éprouvette proposée par Monch et Galster, Makindé [7] a proposé une autre éprouvette en forme de croix (figure A-I-3). Elle a été conçue de façon à obtenir une déformation aussi homogène que possible dans la partie utile. Pour cela il convient de prévoir :

- des évidements longitudinaux le long des bras, afin de diminuer leur rigidité transversale et de réaliser une déformation aussi homogène que possible de la zone située au centre de la croix.

- une diminution d'épaisseur de la partie centrale (partie utile) afin que la déformation plastique soit essentiellement concentrée dans cette région de l'éprouvette.

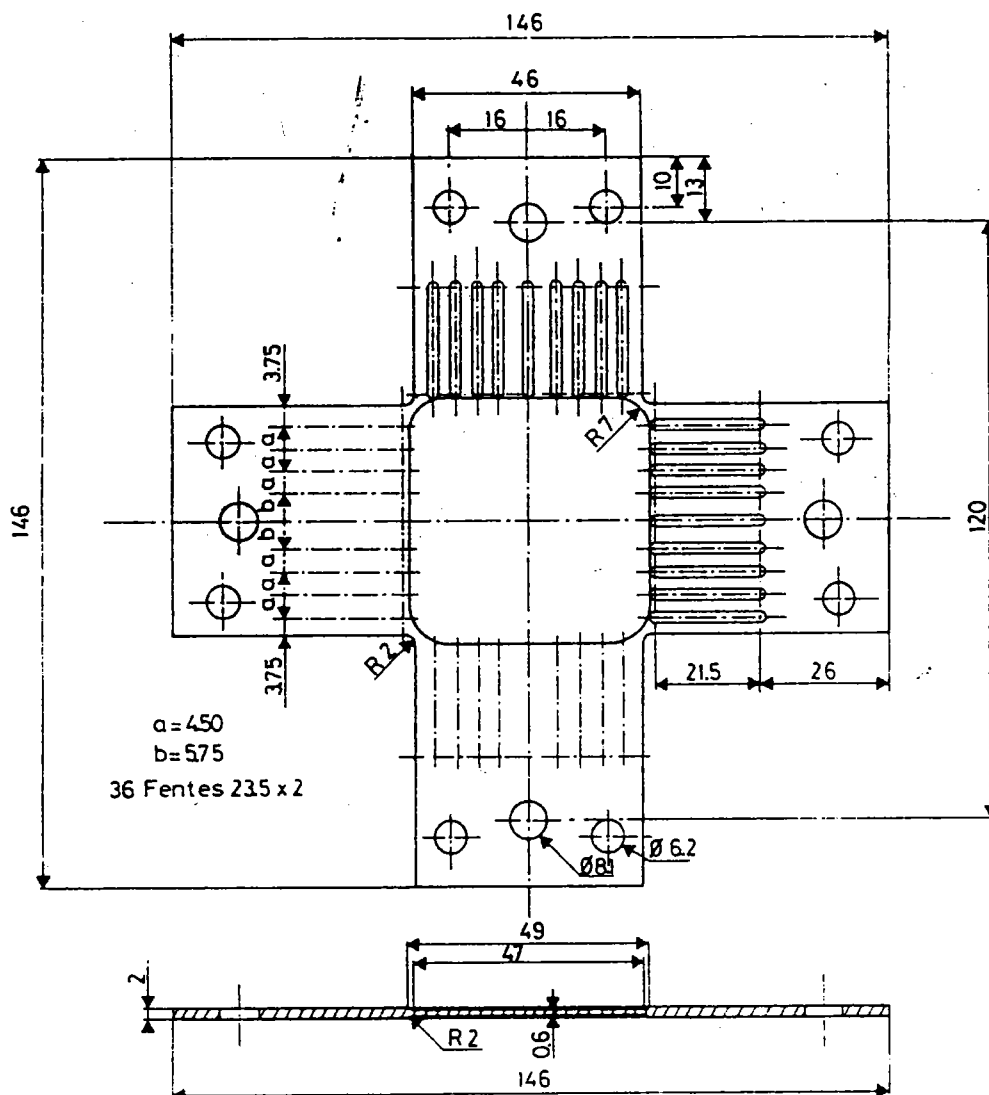


Fig. A-I-3: Géométrie de l'éprouvette cruciforme proposée par Makindé [7]

Les figures A-I-1(e) et A-I-1(f) montrent les méthodes qui consistent à utiliser un empilement de tôles minces ou épaisses collées ensemble [5]. La compression biaxiale de ces tôles permet d'étudier tous les quadrants du plan déviateur des contraintes. Dans ce type d'essais, les contraintes mesurées dépendent du rapport entre la hauteur de l'échantillon et l'épaisseur de l'empilement ; il faut aussi que les faces des tôles soient planes et parallèles, deux à deux, après collage ce qui est très difficile à réaliser.

#### **A-I-2-2- Représentation des surfaces de charge.**

La représentation des surfaces de charge dépend du type d'essais. Elle fait généralement appel à des axes correspondant aux contraintes qui varient dans l'essai considéré. D'autre part, on utilise aussi fréquemment le plan déviateur, appelé aussi plan  $\pi$ , d'équation  $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$ , dans l'espace des contraintes principales.

#### **A-I-2-3- Facteurs influençant la surface de charge**

En supposant que la déformation plastique est incompressible et indépendante de la pression hydrostatique, le comportement de la surface de charge est étudié expérimentalement en fonction des paramètres suivants :

- 1) Intensité et direction du préchargement.
- 2) Influence de la température.
- 3) Influence du temps d'application de la déformation (fluage, vieillissement) et de la vitesse de déformation.

L'anisotropie liée aux textures du matériau joue évidemment un rôle essentiel dans les résultats. En fonction de ces paramètres, les discussions ont porté sur les points suivants :

a- Comportement des surfaces de charge : changement de forme, translation et rotation.

b- Particularité de formes des surfaces de charge : effet Bauschinger, effet cross, existence de points anguleux.

c- Normalité des vecteurs incréments de déformation plastique aux surfaces de charge, ce qui constitue une méthode de vérification du travail plastique maximum.

### A-I-3- Modélisation des surfaces d'écoulement plastique

Le seuil de plasticité unidimensionnel définit le domaine d'élasticité dans un espace de contrainte à une dimension (figure A-I-5). La généralisation de cette notion au cas tridimensionnel représente le critère de plasticité. Il définit le domaine, dans l'espace des contraintes, à l'intérieur duquel toute variation de contrainte n'engendre que des variations de déformation élastique.

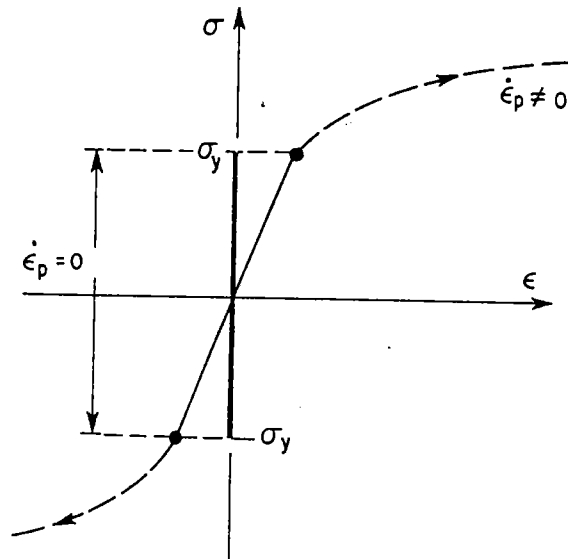


fig. A-I-5 : Domaine d'élasticité unidimensionnel

Le moyen le plus simple de mettre en évidence ce domaine dans un espace à deux dimensions est d'utiliser des essais de traction (ou compression)- torsion sur des tubes minces.

#### A-I-3-1- Modèles d'écrouissage cinématique

Dans le cas le plus général, la surface d'écoulement subit au cours d'une déformation plastique à la fois une translation, et un changement de forme et de dimension. Les modèles d'écrouissage cinématique mettent en avant la translation de la surface d'écoulement.

Prager (1955) a proposé un modèle d'écrouissage cinématique dans lequel la surface seuil ne change ni de forme, ni de dimensions mais se déplace dans l'espace des contraintes. Cette fonction seuil s'écrit :

$$f(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) = k \quad (\text{A-I-1})$$

où  $k$  est une constante et  $\alpha_{ij}$  est une variable tensorielle qui représente la translation de la surface de charge qui, selon Prager se fait suivant la normale extérieure à la surface d'écoulement au point de chargement. Dans ces conditions on a :

$$\dot{\alpha}_{ij} = C \dot{\epsilon}_{ij} \quad (\text{A-I-2})$$

où  $C$  est une constante.

Ziegler (1959) a modifié le modèle de Prager en supposant que la translation de la surface de charge, se fait suivant la direction du vecteur joignant le centre de la surface d'écoulement au point de chargement, ce qui donne :

$$\dot{\alpha}_{ij} = (\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) \dot{\mu} \quad (\text{A-I-3})$$

avec  $\dot{\mu} > 0$ .

En remplaçant la dérivée particulaire  $\dot{\alpha}_{ij}$  par la dérivée de Jaumann  $\alpha_{ij}^{\Delta}$  Dudzinski [8] a généralisé le modèle d'écrouissage développé par Prager et Ziegler au cas des grandes déformations.

### A-I-3-2- Modèles d'écrouissage isotrope

Ce sont ceux qui supposent une dilatation de la surface de charge. L'équation de la frontière du domaine fait intervenir a priori toutes les composantes du tenseur des contraintes et la variable d'écrouissage, qui se réduit à une variable scalaire dans le cas de l'écrouissage isotrope ; choisissons la variable seuil de plasticité en traction simple  $\sigma_s$

$$f(\sigma_{ij}, \sigma_s) = 0 \quad (\text{A-I-4})$$

Dans l'hypothèse d'un matériau initialement isotrope, la frontière du domaine est invariante par changement de repère, la fonction  $f$  ne dépend donc que des trois invariants du tenseur  $\sigma$  :

$$f(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}, \sigma_s) = 0 \quad (\text{A-I-5})$$

Dans le cas des matériaux métalliques, on observe généralement l'incompressibilité plastique et l'indépendance du comportement vis-à-vis de la contrainte hydrostatique. Il suffit alors de faire intervenir le tenseur déviateur des contraintes :

$$\sigma' = \sigma - \frac{1}{3} \sigma_I I \quad (\text{A-I-6})$$



et les deux invariants du déviateur,  
 $S_{II} = \frac{1}{2} \text{Tr} (\sigma'^2)$  et  $S_{III} = \frac{1}{3} \text{Tr} (\sigma'^3)$ . La relation

$$f(S_{II}, S_{III}, \sigma_s) = 0 \quad (\text{A-I-7})$$

est l'expression générale des critères isotropes de plasticité pour un matériau incompressible. Dans l'espace des contraintes  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , la frontière est représentée par un cylindre dont l'axe est la trissectrice du repère. Notons qu'à la place des invariants  $S_{II}$  et  $S_{III}$  on peut utiliser les invariants homogènes associés :

$$J_2(\sigma) = (3 S_{II})^{1/2} = \left( \frac{3}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} \right)^{1/2} \quad (\text{A-I-8})$$

$$J_3(\sigma) = \left( \frac{27}{2} S_{III} \right)^{1/3} = \left( \frac{9}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{jk} \sigma'_{ki} \right)^{1/3} \quad (\text{A-I-9})$$

### Critère de Tresca

Le critère de Tresca prédit que l'écoulement plastique interviendra lorsque la contrainte de cisaillement maximale atteindra une valeur critique. Le critère peut s'écrire :

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_E \text{ ou } \sigma_1 - \sigma_3 = 2k \quad (\text{A-I-10})$$

$\sigma_E$  désignant la limite élastique en traction simple,  $k$  la limite élastique en cisaillement et  $\sigma_1$  et  $\sigma_3$  étant les contraintes principales extrêmes (classées dans l'ordre  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ ).

Le lieu limite dans le plan  $\pi$  est un hexagone régulier.

### Critère de Von-Misès

Le critère de Von-Misès prévoit que l'écoulement aura lieu lorsque le deuxième invariant du tenseur déviateur des contraintes  $J_2$  atteindra une valeur critique :

$$J_2 = k^2 \quad (\text{A-I-11})$$

ou en fonction des contraintes principales :

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 6k^2 = 2 \sigma_E^2 \quad (\text{A-I-12})$$

Ce critère peut être interprété physiquement en considérant soit que l'énergie de distorsion élastique emmagasinée dans le matériau atteint une valeur critique, soit que la contrainte de cisaillement sur les plans octaédriques atteint une valeur critique.

Le lieu limite prévu par le critère de Von-Misès dans le plan  $\pi$  est un cercle de rayon

$$\sqrt{2}k = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_E$$

### Critères de Hill

Hill [19] a introduit un critère tenant compte de l'anisotropie initiale du matériau. La fonction seuil s'exprime sous la forme d'une fonction quadratique des contraintes principales. Dans le cas d'un état de contraintes planes ( $\sigma_1, \sigma_2$ ) il s'exprime :

$$F\sigma_2^2 + G\sigma_1^2 + H(\sigma_1 - \sigma_2)^2 = (G + H) \bar{\sigma}^2 \quad (\text{A-I-13})$$

où F, G, H sont des coefficients représentant l'état d'anisotropie du matériau et où la contrainte équivalente  $\bar{\sigma}$  est une mesure de la dimension de la surface de charge.

Il a été observé que ce critère ne rend pas compte correctement de la surface d'écoulement, en particulier pour des matériaux ayant un coefficient d'anisotropie  $r$  inférieur à l'unité. Ce coefficient d'anisotropie est défini, pour les tôles, comme le rapport des déformations en largeur et en épaisseur dans un essai de traction simple. Hill [9] a proposé un second critère afin de répondre aux insuffisances de son premier critère.

L'expression de ce nouveau critère s'écrit :

$$(1+2r) (\sigma_1 - \sigma_2)^m + (\sigma_1 + \sigma_2)^m = 2(1+r) \bar{\sigma}^m \quad (\text{A-I-14})$$

On remarque que la forme de cette nouvelle fonction seuil n'est plus quadratique, mais dépend d'un paramètre  $m$  qui doit être déterminé expérimentalement. On notera que  $m$  doit être supérieur ou égal à 1 pour que la surface d'écoulement soit convexe.

### Critère de Budiansky

Récemment, une formulation générale du comportement plastique pour des matériaux présentant une isotropie planaire, a été proposée par Budiansky [10]. La surface d'écoulement est décrite sous forme paramétrique, pour un état de contrainte plane par :

$$\begin{cases} \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\sigma_b} = g(\psi) \cos\psi \\ \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\sigma_s} = g(\psi) \sin\psi \end{cases} \quad (\text{A-I-15})$$

où  $g$  est une fonction telle que  $g(0) = g\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) = 1$  et  $\sigma_s$  et  $\sigma_b$  sont respectivement les contraintes d'écoulement en cisaillement et en déformation équi-biaxiale.

La formulation proposée par Budiansky présente un avantage considérable par rapport aux critères présentés précédemment, car elle permet de décrire d'une manière précise la forme réelle de la surface d'écoulement moyennant le choix d'une fonction  $g(\psi)$  qui décrive correctement les données expérimentales.

On a assisté par ailleurs ces dernières années à un important développement des calculs "micro-macro", qui permettent de déterminer théoriquement les surfaces d'écoulement et leur évolution lorsque les mécanismes élémentaires de déformation sont supposés connus, ainsi que les données relatives à la texture.

#### A-I-4- Comportement plastique du polycristal

##### A-I-4-1- Equations générales

Un matériau polycristallin déformé est soumis, compte-tenu du caractère cristallographique de la déformation plastique des grains, à des champs de contraintes  $\underline{\sigma}$  et de déformation  $\underline{\varepsilon}$  non uniformes. Cette hétérogénéité intrinsèque du comportement du polycristal est modifiée par une éventuelle texture cristallographique, initiale ou induite par la déformation plastique. La texture morphologique, liée à la forme des grains, joue aussi un rôle important [11].

La résolution rigoureuse du problème devrait respecter deux types d'équations : les équations d'équilibre qui, en l'absence de forces de volume, s'expriment sous la forme :

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (\text{A-I-16})$$

et les conditions de compatibilité qui, dans l'hypothèse des petites perturbations s'écrivent :

$$\varepsilon_{ijk} \left( \frac{\partial \beta_{lk}}{\partial x_j} \right) = 0 \quad (\text{A-I-17})$$

où  $\underline{\beta}$  est le gradient de déformation totale.

La loi de Schmid est souvent utilisée au niveau microscopique :

$$\tau^s = m_{ij}^s \sigma_{ij} \leq \tau_c^s \quad (\text{A-I-18})$$

où  $\tau^s$  et  $\tau_c^s$  désignent respectivement la cission résolue et la cission résolue critique sur le système de glissement  $s$  et où  $m_{ij}^s = b_i^s n_j^s$  avec  $\underline{n}^s$  désignant la normale au plan de glissement et  $\underline{b}^s$  désignant la direction de glissement du système  $s$ .

Les modèles qui essaient de prévoir le comportement macroscopique du polycristal à partir du comportement microscopique prennent en compte de façon plus ou moins précise les conditions précédentes. Nous allons rappeler brièvement quelques uns de ces modèles.

#### A-I-4-2- Le modèle statique

Ce modèle considère que le champ de contraintes dans chaque grain est égal au champ macroscopique. Dans ces conditions, les conditions de comptabilité ne sont évidemment pas vérifiées.

#### A-I-4-3- Le modèle de Taylor

Proposé par Taylor en 1938 [12] ce modèle considère que la déformation plastique est uniforme, de sorte qu'en tout point

$$\epsilon_{ij}^P = E_{ij}^P \quad (\text{A-I-19})$$

où  $E_{ij}^P$  est la déformation plastique macroscopique.

Lin [11] a généralisé le modèle de Taylor en supposant que la déformation totale est uniforme :

$$\epsilon_{ij}^T = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^P = E_{ij}^e + E_{ij}^P = E_{ij}^T \quad (\text{A-I-20})$$

Compte tenu de l'incompressibilité de la déformation plastique, si l'on suppose que l'élasticité est isotrope on obtient la relation :

$$\sigma_{ij} = \Sigma_{ij} + 2\mu \left( E_{ij}^P - \epsilon_{ij}^P \right) \quad (\text{A-I-21})$$

où  $(\Sigma_{ij})$  désigne le tenseur des contraintes macroscopique.

Une autre présentation du modèle revient à exprimer que le gradient Eulérien des vitesses ( $L_{ij} = v_{i,j}$ , où  $\underline{v}$  désigne la vitesse des particules) est égale à sa valeur

macroscopique. Il en va alors de même pour les taux de déformation et de rotation, parties symétrique et antisymétrique de  $\underline{L}$ .

L'approche de Bishop et Hill [14] rejoint le modèle de Taylor. En tenant compte de la condition d'incompressibilité plastique cinq systèmes de glissement actifs sont nécessaires, dans chaque grain, pour assurer la déformation plastique imposée.

Le modèle de Taylor a représenté la première approche systématique de la plasticité du polycristal. Il a permis d'aborder de nombreux problèmes jusque là ignorés. Compte-tenu de sa simplicité, il conduit toutefois à des prévisions qui divergent parfois de façon significative de la réalité.

Barlat [15] a fait un calcul de surfaces de charge, pour des matériaux isotropes, basé sur le modèle de Taylor.

Ces surfaces sont comparées à celles de Von-Misès et de Tresca (fig. A-I-6).

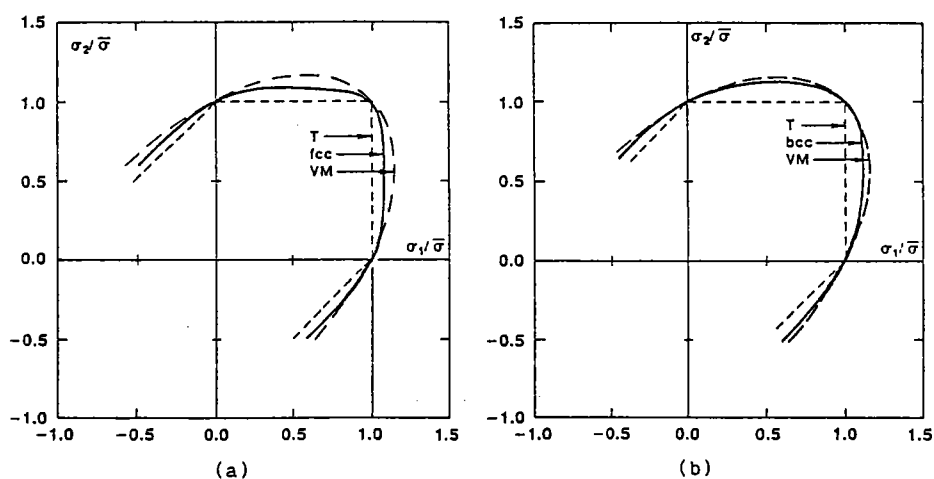


fig. A-I-6 : Surfaces de charge calculées avec le modèle de Taylor, pour un matériau c.f.c (a) et c.c (b) d'après [15]

On observe, sur la fig. A-I-6, et particulièrement pour le matériau c.f.c, que la courbure de la surface de charge aux points de traction simple et de déformation équi-biaxiale est plus forte que celle prévue par le critère de Von-Misès.

Dans sa méthode de calcul, Barlat suppose que chaque grain de l'agrégat est soumis à la même déformation et que la texture cristallographique est isotrope.

#### A-I-4-4- Les modèles auto-cohérents

Ces modèles ont pour but de résoudre avec plus de réalisme le problème de l'interaction entre un grain particulier et la matrice environnante, qui présente les propriétés (à déterminer) du matériau homogénéisé. Les différentes approches en petites déformations ont été étendues au cas des grandes déformations, en particulier par Lipinski et Berveiller [16], Nemat-Nasser et Obata [17] et Molinari et Coll [18]. Ces derniers auteurs obtiennent, dans le cas d'un comportement viscoplastique, une équation de la forme :

$$(s_{ij} - \bar{s}_{ij}) = K_{ijkl} (D_{kl} - \bar{D}_{kl}) \quad (\text{A-I-22})$$

où  $(s_{ij})$  et  $(\bar{s}_{ij})$  désignent respectivement le tenseur déviateur des contraintes microscopique et macroscopique.  $(D_{kl})$  et  $(\bar{D}_{kl})$  désignent les tenseurs des vitesses de déformation microscopique et macroscopique respectivement et  $\underline{K}$  est un tenseur d'ordre quatre qui dépend des propriétés du polycristal et de la forme du grain.

Ce type de modèles est très utile pour retracer l'influence de l'histoire du chargement et peut fournir une modélisation de l'effet Bauschinger, ce qui est impossible avec les autres modèles [11].

#### A-I-5- Conclusion

Les résultats expérimentaux concernant la détermination des surfaces de charge sont encore divergents et parfois contradictoires et leur interprétation dépend fortement de la définition du seuil d'écoulement plastique et du type d'éprouvettes utilisées. Par ailleurs, les modèles d'écrouissage, cinématique ou isotrope, fournissent une description approchée de l'évolution de ces surfaces. Le modèle le plus utilisé est celui où l'écrouissage est supposé isotrope et où la fonction seuil de Von-Mises (1913) ou de Hill (1950) est considérée. Nous avons signalé que ces surfaces ne rendent pas correctement compte de la forme de la surface de charge d'un certain nombre de matériaux. D'autres fonctions, comme celle de Hill (1979), ont été proposées pour offrir plus de souplesse. La fonction seuil proposée par Budianski (1984) offre une plus grande souplesse, et peut être utilisée simplement pour ajuster les résultats expérimentaux ou les prévisions théoriques des surfaces d'écoulement, lorsque l'anisotropie de l'écrouissage est négligée.

## Chapitre A-II - Etude de l'écroutissage de différents aciers

### A-II-1- Introduction

Après une brève description du dispositif expérimental utilisé dans cette étude, nous allons présenter, dans ce chapitre, les résultats des essais que nous avons réalisés sur quatre nuances d'acier qui nous ont été fournies par la société SOLLAC. Deux types d'essais ont été effectués :

1- Des essais de traction biaxiale avec différents chemins de déformation : déformation plane, déformation équibiaxiale et déformation avec un rapport de déformation  $\rho = 1/2$ . Ces essais ont été effectués d'abord avec la direction de laminage parallèle à la direction de plus grande déformation puis avec la direction de laminage parallèle à la direction de plus petite déformation.

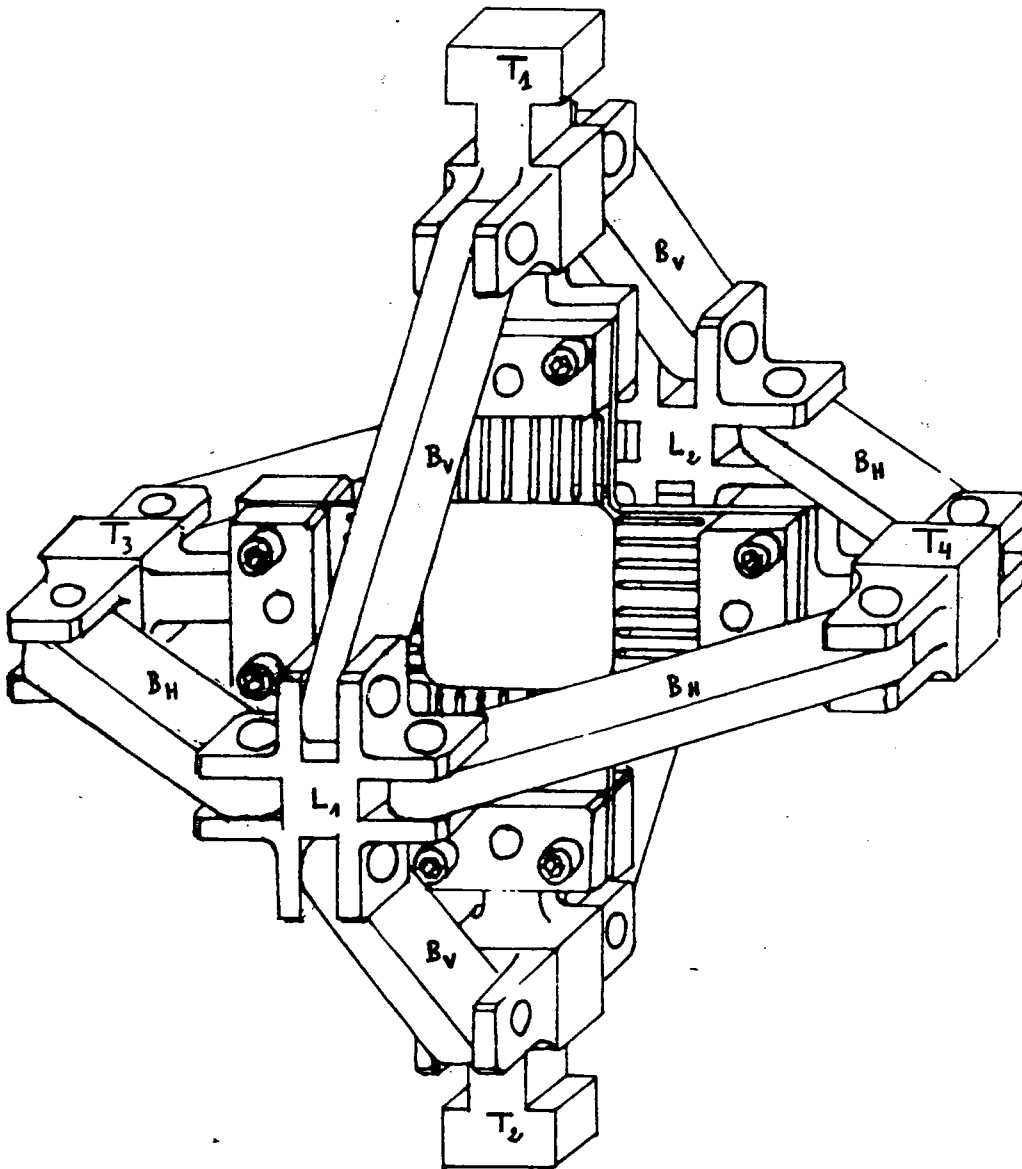
2- Des essais de traction simple. Dans ce type d'essais, les éprouvettes de traction simple ont été prélevées suivant les trois directions à  $0^\circ$ ,  $45^\circ$  et  $90^\circ$  par rapport à la direction de laminage. Enfin des essais de traction simple sur des échantillons prélevés dans des tôles prédéformées sous chargement biaxial seront présentés dans le chapitre A-III.

### A-II-2- Description du dispositif expérimental de traction biaxiale

Pour réaliser les essais de traction biaxiale nous avons utilisé un dispositif qui a été mis au point par Makindé [7]. Ce dispositif permet de réaliser à l'aide d'une machine de traction simple des essais d'expansion biaxiale sur des éprouvettes cruciformes.

#### A-II-2-1 Principe de fonctionnement du dispositif

Il s'agit d'un mécanisme articulé à biellettes, conçu de manière à découpler l'effort de traction fourni par la machine d'essai en un système de forces agissant selon deux directions orthogonales de déplacement imposées. Une vue cavalière du dispositif est donnée sur la fig. A-II-1 dans le cas d'un rapport de déformation de 1. L'éprouvette est fixée sur les quatre têtes  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$ , et  $T_4$ , à l'aide de plaquettes de serrages. L'ensemble est ensuite positionné sur la machine de traction par l'intermédiaire des têtes  $T_1$  et  $T_2$  et testé en traction. En cours d'essai, la déformation du cadre "vertical" constitué des quatre biellettes  $B_v$  assure le rapprochement des deux pièces de liaison  $L_1$  et  $L_2$  qui entraîne à son tour la déformation du cadre "horizontal" constitué des quatre biellettes  $B_h$ . Dans ce cas, l'écartement des deux



**fig A-II-1** Vue en perspective du dispositif de traction biaxiale



têtes  $T_3$  et  $T_4$  est égal à celui des deux têtes  $T_1$  et  $T_2$  (en supposant négligeables les déformations du montage) et l'éprouvette est soumise à une déformation équi-biaxiale.

Afin d'obtenir des rapports de déformation  $\rho = \epsilon_2/\epsilon_1$  compris entre 0 et 1, Makindé [7] a conçu le même mécanisme avec des géométries différentes pour les biellettes situées dans les plans horizontal et vertical. Après une étude cinématique simple, il a montré qu'il suffit de reporter les axes des biellettes horizontales sur les pièces  $L_1$  et  $L_2$  pour obtenir un rapport de déformation de la partie utile de l'éprouvette pratiquement constant en cours d'essais (fig. A-II-2).

Une sollicitation correspondant à la déformation plane ( $\rho=0$ ) est facilement réalisable en remplaçant le système précédent de biellettes par deux biellettes reliant directement les têtes  $T_3$  et  $T_4$  de part et d'autre du plan de symétrie de l'éprouvette (fig. A-II-3).

### **A-II-2-2 Géométrie de l'éprouvette**

En ce qui concerne l'éprouvette que nous avons utilisée dans les essais de traction biaxiale, elle a une forme de croix et elle a été mise au point par Makindé [7] de façon à obtenir une déformation aussi homogène que possible dans la partie utile. Pour cela il convient de prévoir :

- des évidements longitudinaux le long des bras, afin de diminuer leur rigidité transversale et de réaliser une déformation aussi homogène que possible de la zone située au centre de la croix.

- une diminution d'épaisseur de la partie centrale (partie utile) afin que la déformation soit concentrée dans cette zone. La figure A-II-4 montre une photo de cette éprouvette.

### **A-II-2-3 Dispositif expérimental**

Une vue d'ensemble du dispositif est donnée sur la figure A-II-5. Il est constitué par :

- une machine de traction à vis ZWICK avec sa baie de commande.

- deux conditionneurs de jauge, KWS 273. D4, chacun d'eux alimentant en tension continue et constante un capteur de force.

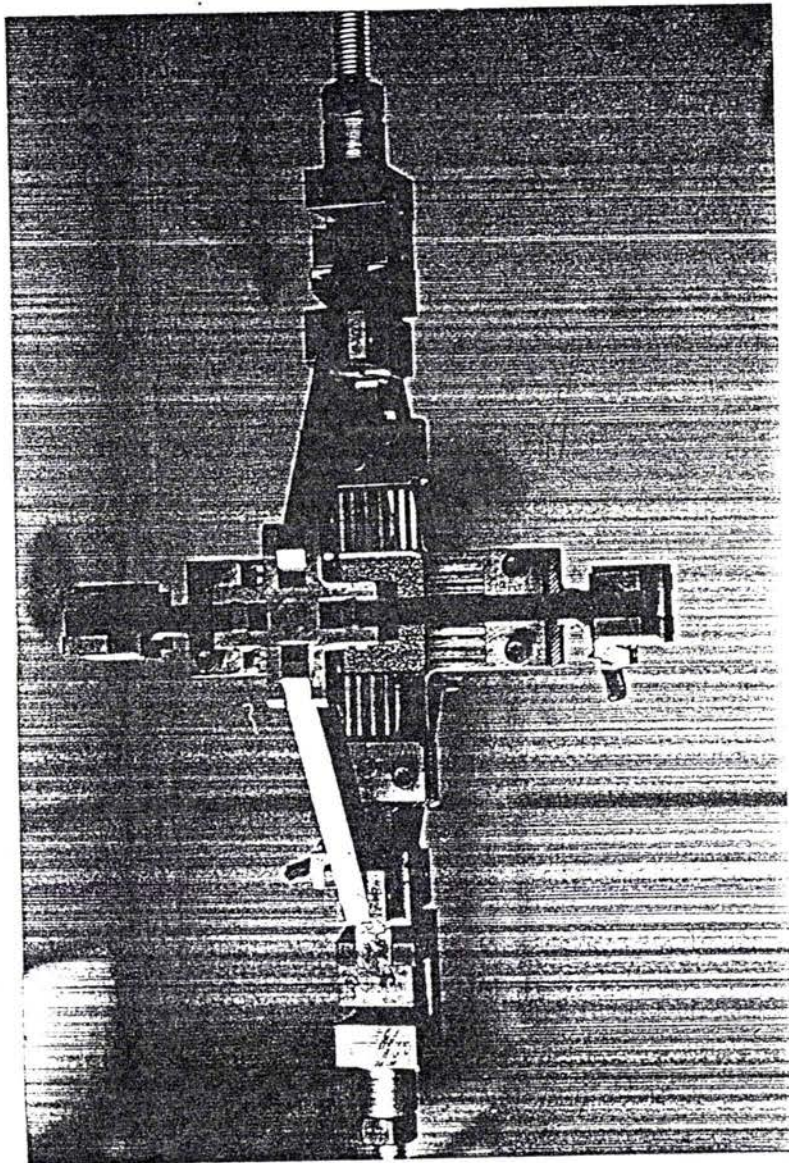


Fig. A-II-2 : Photo du dispositif monté sur la machine de traction ZWICK. Le rapport de déformation est  $\rho = \epsilon_2/\epsilon_1 = 1$

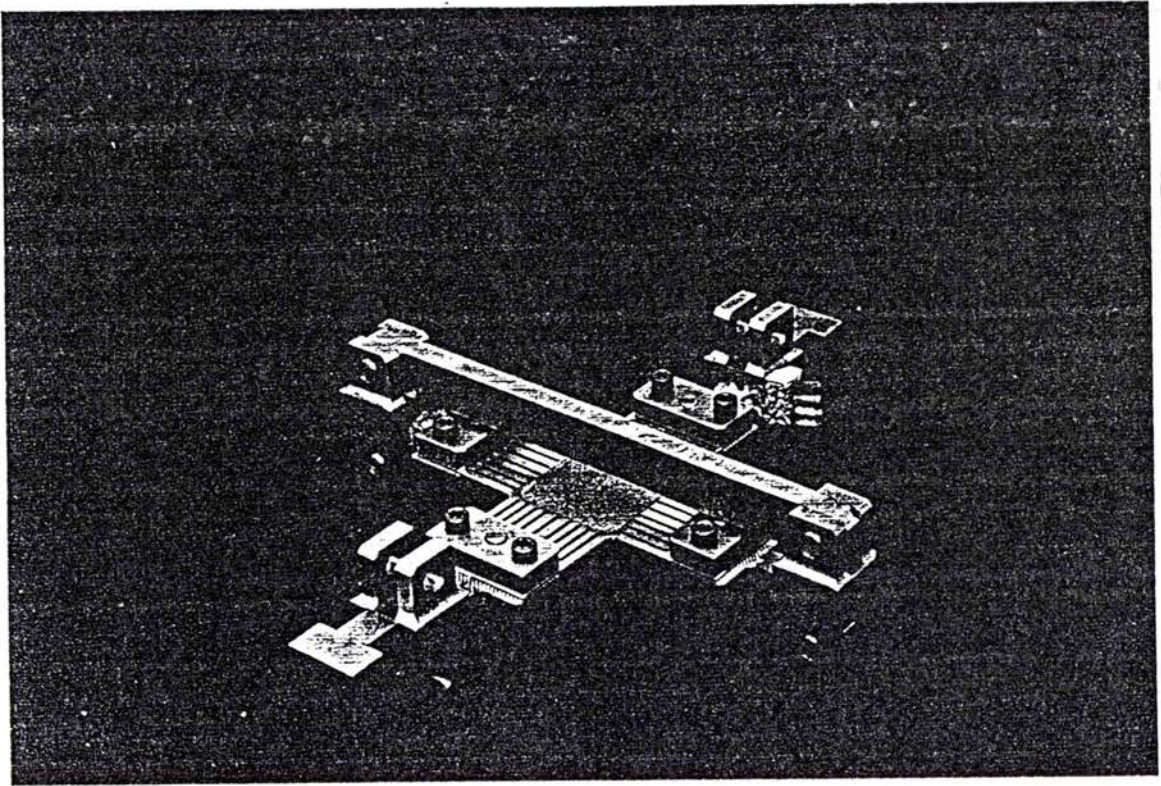


Fig. A-II-3 : Photo du montage pour  $\rho = 0$ . On observe de part et d'autre de l'éprouvette deux bielles qui permettent de bloquer tout déplacement relatif des deux têtes "horizontales" de l'éprouvette.

- un système d'enregistrement x-t à deux voies, Kipp et Zonen permettant de tracer en temps réel la courbe force-temps pour chaque capteur.

- un micro-ordinateur HP 9000 permettant le pilotage de la machine ZWICK et l'acquisition des données concernant la machine.

### **A-II-3- Conditions expérimentales**

Nous rappelons que le dispositif de traction biaxiale que nous avons utilisé permet de couvrir le domaine de l'expansion avec des rapports de déformation  $\rho = \epsilon_2/\epsilon_1$  compris entre 0 et 1.

#### **A-II-3-1- Usinage des éprouvettes**

Les éprouvettes ont été usinées :

- par fraisage sur une fraiseuse à commande numérique pour le contour de l'éprouvette, les perçages et les fentes.

- par électroérosion pour la partie centrale ; cette opération a été réalisée sur une seule face, afin d'obtenir une bonne uniformité de l'épaisseur de l'éprouvette. Cette technique, par rapport au fraisage, présente l'avantage de conduire à un écrouissage très faible de la surface usinée.

Nous avons également réalisé sur la machine ZWICK une compression des bras des éprouvettes, au niveau des brins reliant les têtes à la partie utile. Cette compression a été effectuée sous une charge de 15 t correspondant à une contrainte de compression de 75 MPa. Grâce à cette précaution, nous n'avons pas obtenu de déformation plastique appréciable des brins lors des essais.

#### **A-II-3-2- Matériaux et traitements thermiques**

Tous les essais que nous avons réalisés ont été effectués à température ambiante et les éprouvettes n'ont subi aucun traitement thermique ultérieur. Nous avons laissé les matériaux dans l'état dans lequel il nous ont été fournis par SOLLAC.

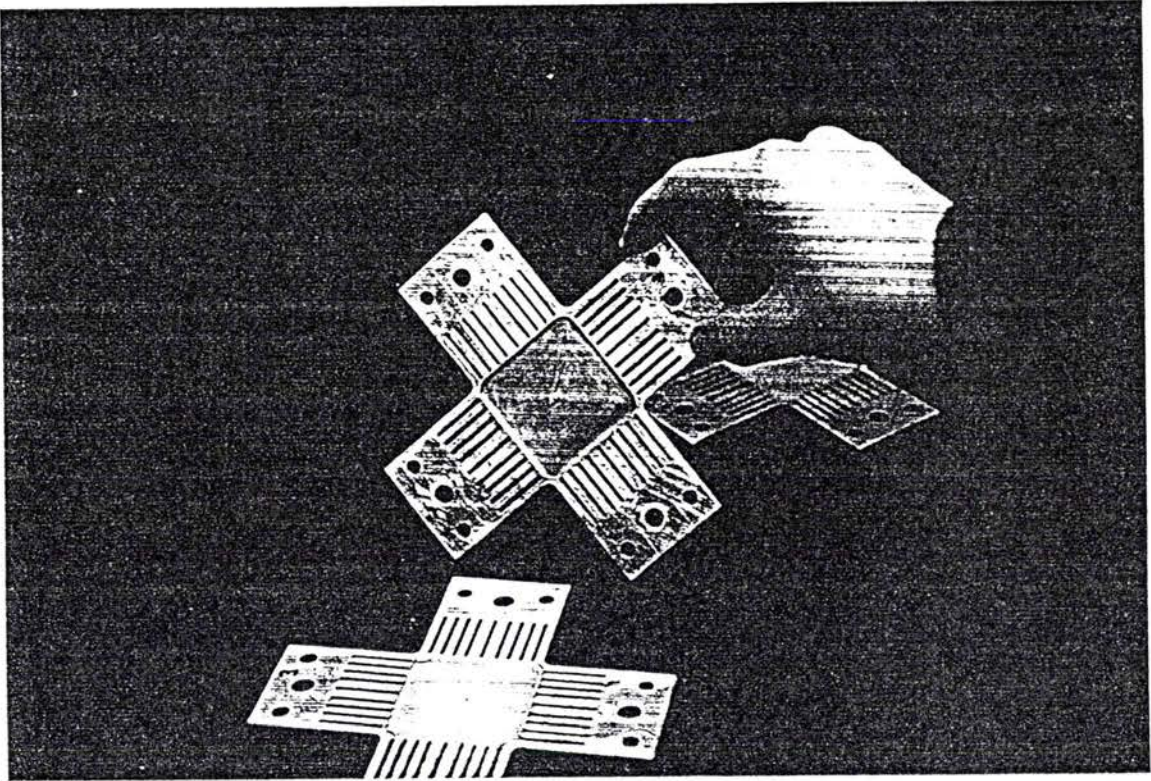


fig. A-II-4 Photo d'une éprouvette en forme de croix avant déformation

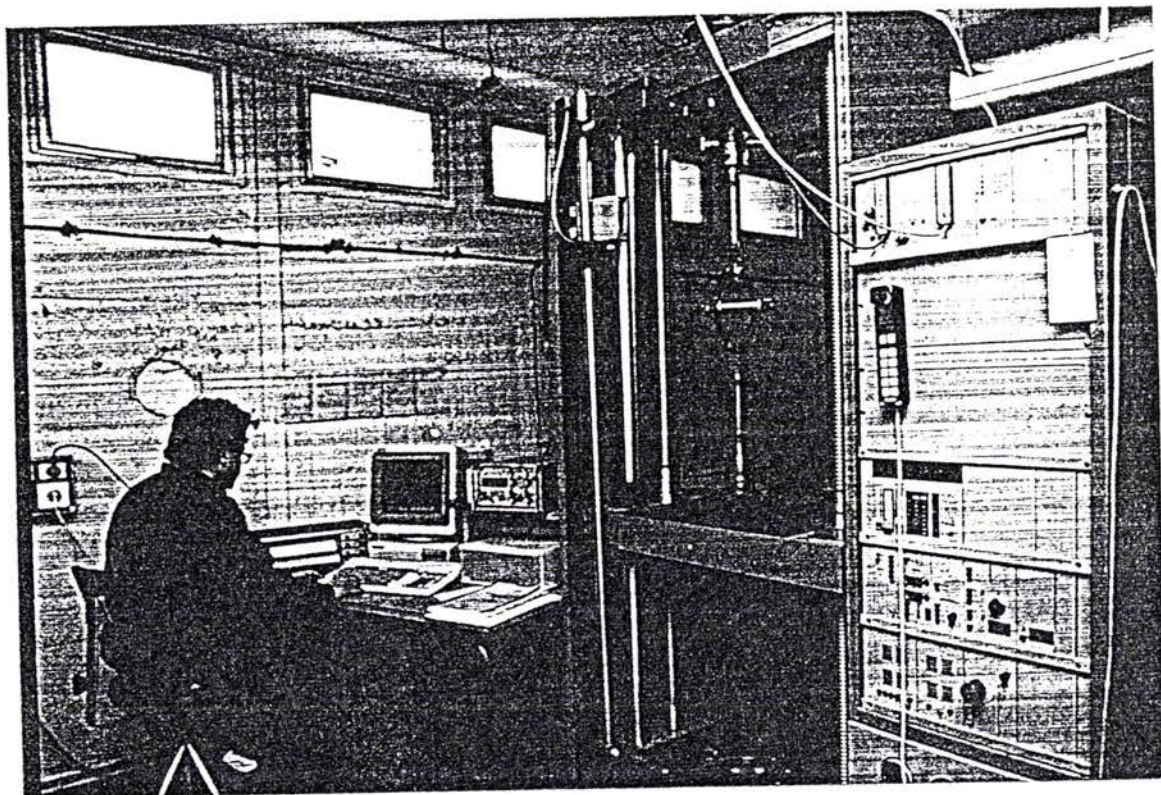
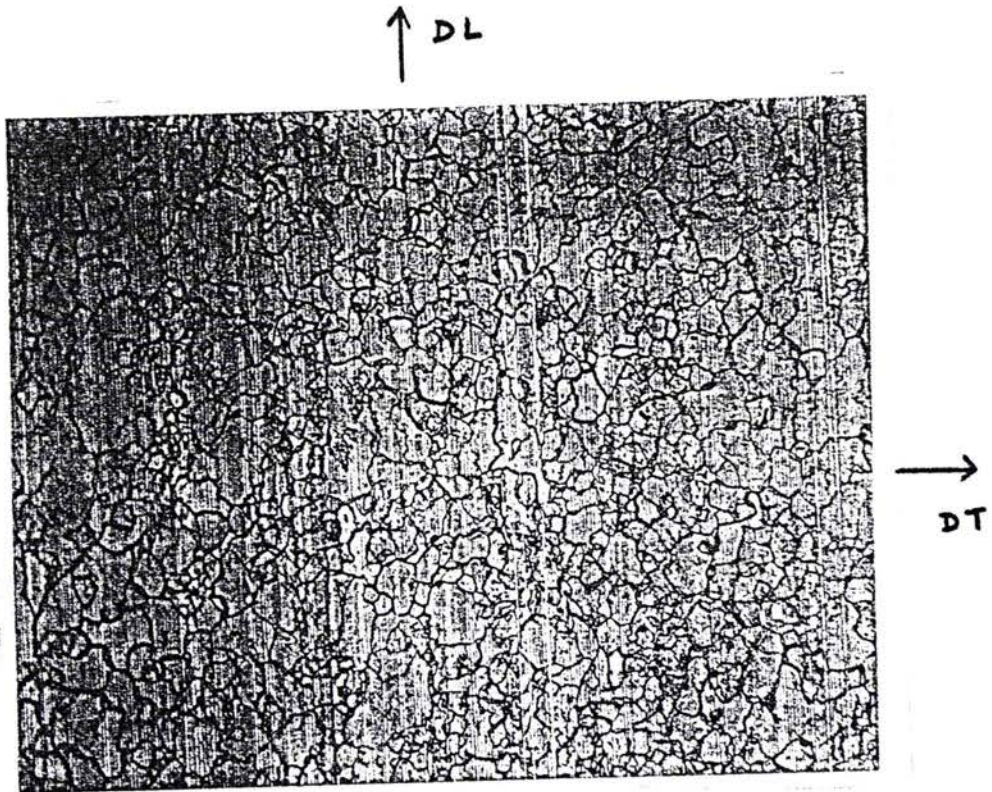


fig. A-II-5 : Vue de l'ensemble de l'équipement expérimental avec le dispositif de traction biaxiale sur la machine Zwick.

Acier à dispersoïdes

L'examen micrographique que nous avons effectué sur ce matériau est donné par la figure A-II-6. La taille moyenne des grains est de  $16 \times 20 \mu\text{m}$



échelle :  $50 \mu\text{m}$

Fig. A-II-6 : Micrographie de l'acier à dispersoïde

**- Acier solpress**

La composition chimique de l'acier Solpress est donnée par le tableau suivant :

C	Mn	P	S	N	Si	Al	Nb	Zr	Ca	Cu	Ni	Cr	Ti
18	184	9	12	5	11	37	1	-	-	43	53	30	187

Les caractéristiques fournies par SOLLAC sont résumées dans le tableau suivant :

Sens	e	$\Delta$	Re	Rm	A %	Palier %
Travers	1,5	40	140	325	38,4	0

Par ailleurs, l'examen micrographique de l'acier Solpress est donné par la figure A-II-5. La taille moyenne des grains est de  $33 \times 35 \mu\text{m}$

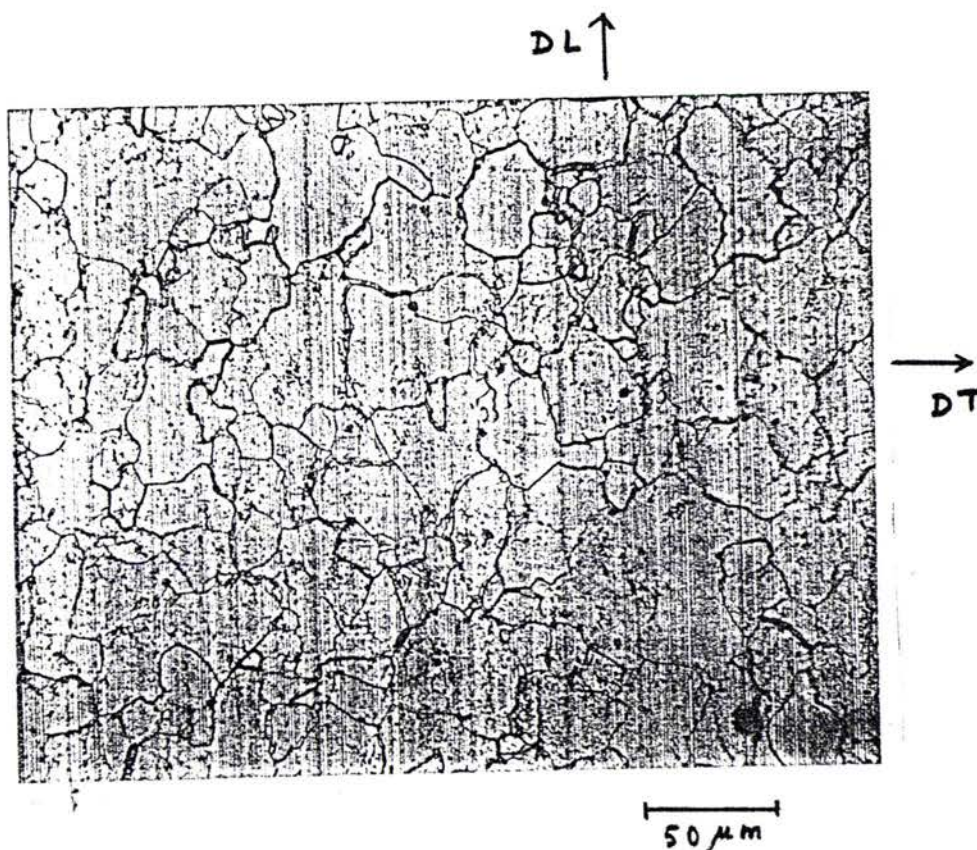


Fig. A-II-7 : Micrographie de l'acier Solpress



- Acier ES

La composition chimique de l'acier E.S est donnée par le tableau suivant :

C	Mn	P	S	N	Si	Al	Nb	Zr	Ca	Cu	Ni	Cr	
39	284	10	11	5,2	7	52	-	-	-	48	54	25	

Les caractéristiques fournies par SOLLAC sont données par le tableau suivant :

Sens	e	$\Delta$	Re	Rm	A %	Palier %
Travers	1,52	43,0	170	316	41,4	0

L'examen micrographique de l'acier E. S est donné par la figure A-II-6. La taille moyenne des grains est de  $30 \times 27 \mu\text{m}$

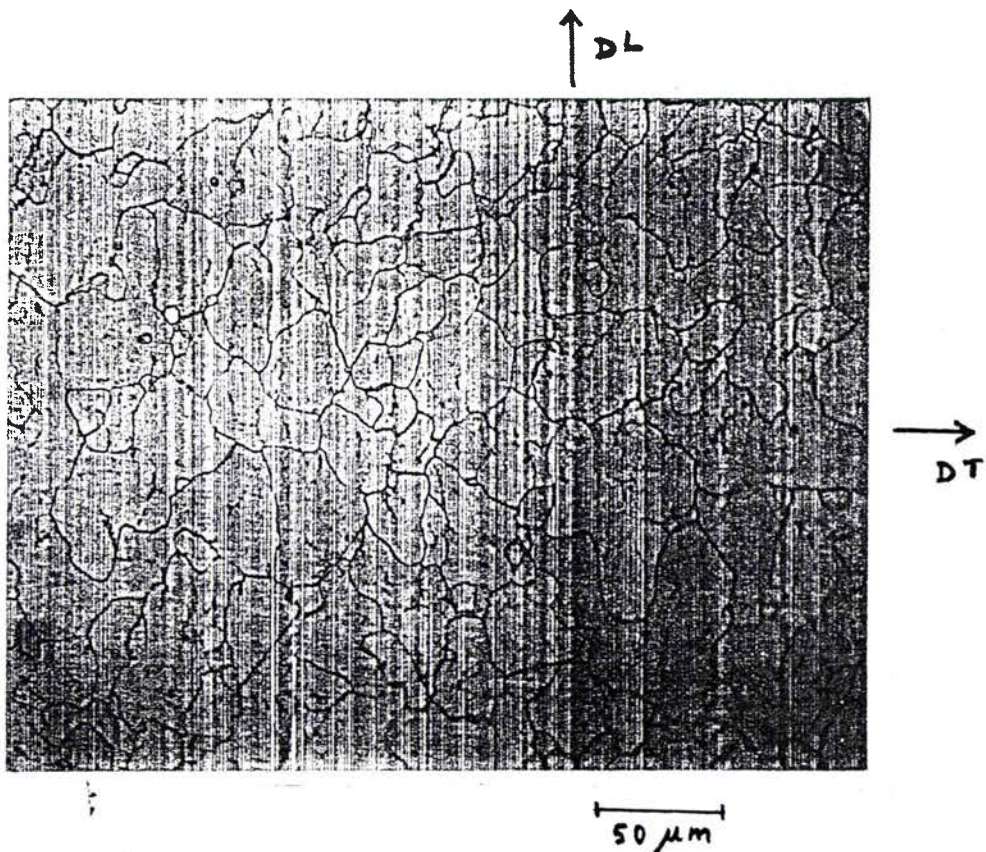


Fig. A-II-8 : Micrographie de l'acier E.S

- Acier Soldur 40

La composition chimique de l'acier Soldur 40 est donnée par le tableau suivant :

C	Mn	P	S	N	Si	Al	Nb	Zr	Ca	Cu	Ni	Cr	
58	521	11	14	3,4	13	30	71	-	-	45	46	21	

Les caractéristiques fournies par SOLLAC sont données par le tableau suivant :

Sens	e	$\Delta$	Re	Rm	A %	Palier %
Travers	1,46	81,3	413	513	23,3	0

L'examen micrographique de l'acier Soldur 40 est donné par la figure A-II-7. La taille moyenne des grains est de  $10 \times 11 \mu\text{m}$

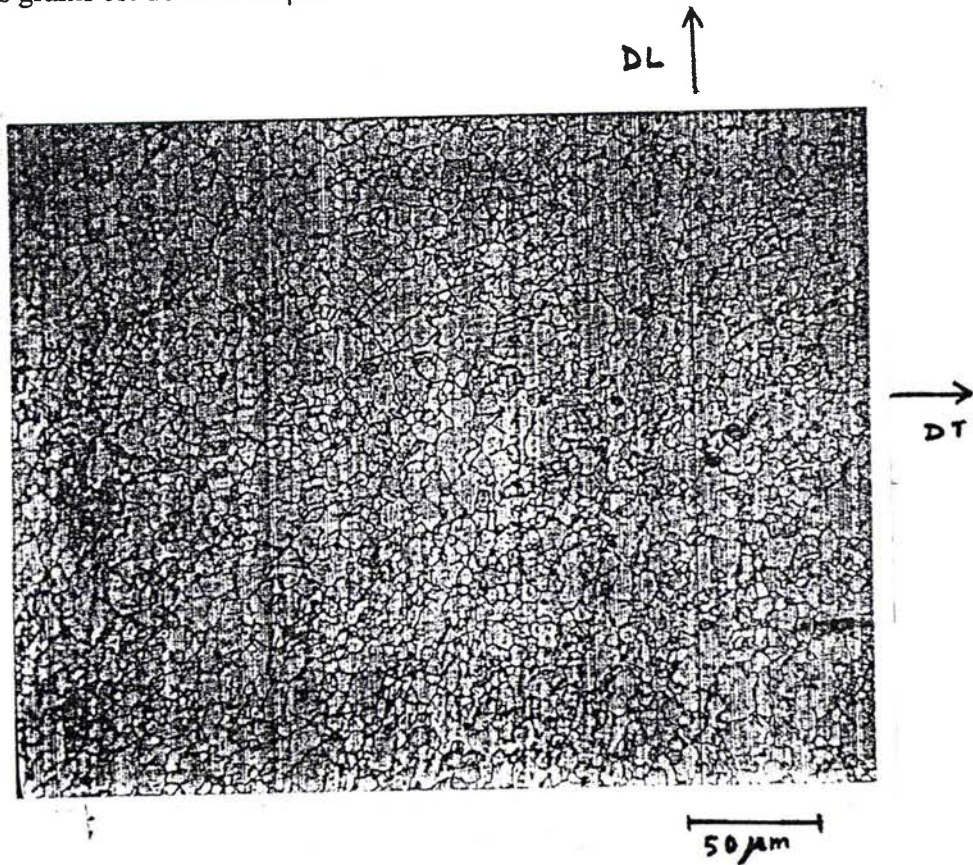


Fig. A-II-9 : Micrographie de l'acier Soldur 40

### **A-II-3-3- Pilotage de la machine de traction**

La machine de traction utilisée est une machine à vis ZWICK, composée d'un bâti et d'une baie de commande interfacée à un micro-ordinateur HP 9000 qui assure le pilotage et l'acquisition des données force en fonction du temps. Les essais ont été effectués à vitesse de traverse constante : 1 mm/mn.

### **A-II-3-4 Dépouillement des essais**

Le principe que nous avons adopté dans le dépouillement des essais de traction uniaxiale et biaxiale est le même et il est résumé dans l'annexe A-I.

Il convient de noter que le dépouillement des essais suppose que la déformation est homogène le long de l'éprouvette.

On notera enfin que pour décrire le comportement plastique des matériaux étudiés les courbes contrainte-déformation ont été ajustées suivant la loi de SWIFT :

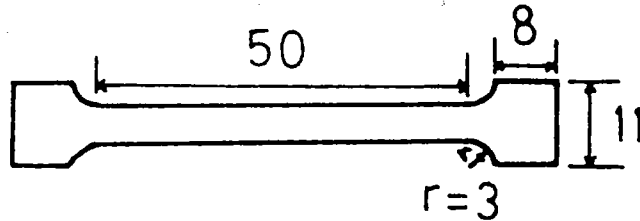
$$\bar{\sigma} = K (\epsilon_0 + \bar{\epsilon})^n \quad (\text{A-II-1})$$

où  $K$ ,  $\epsilon_0$  et  $n$  sont des constantes.

Ceci a été fait pour tous les chemins de déformation.

### **A-II-3-5- Essais de traction uniaxiale**

Les essais de traction uniaxiale ont permis en particulier de caractériser l'état d'anisotropie des matériaux par l'intermédiaire de la mesure du coefficient  $r$  (défini comme étant le rapport entre la déformation en largeur et en épaisseur). Ce coefficient, en raison de l'anisotropie planaire des tôles, dépend du sens de prélèvement de l'éprouvette. Ainsi pour caractériser de façon satisfaisante l'anisotropie des matériaux étudiés des éprouvettes ont été prélevées dans les tôles à  $0^\circ$ ,  $45^\circ$  et  $90^\circ$  de la direction de laminage. Le schéma des éprouvettes est donné sur la fig. A-II-10.



**Fig. A-II-10 :** Schéma d'une éprouvette de traction uniaxiale

Des sections espacées d'environ 16 mm ont été repérées tout le long de la partie utile des éprouvettes pour la détermination du coefficient d'anisotropie  $r$ . Les coefficients d'anisotropie ont été déterminés par mesure directe des largeurs et épaisseurs avant et après déformation, au niveau des repères situés tout le long de la partie utile des éprouvettes. Ces mesures ont été effectuées à l'aide de deux palmers : un palmer à pointes et un palmer numérique, les valeurs de dimensions retenues correspondent à une moyenne de plusieurs mesures pour chaque repère.

L'hypothèse d'isotropie planaire, qui sera ensuite utilisée dans la modélisation du gonflement hydraulique, conduit à définir des valeurs moyennes dans le plan de la tôle, soit, pour le paramètre  $r$  :

$$\bar{r} = \frac{r_0 + 2 r_{45} + r_{90}}{4} \quad (\text{A-II-2})$$

où  $r$  est le coefficient d'anisotropie moyen.

#### **A-II-4- Comportement plastique des différents aciers**

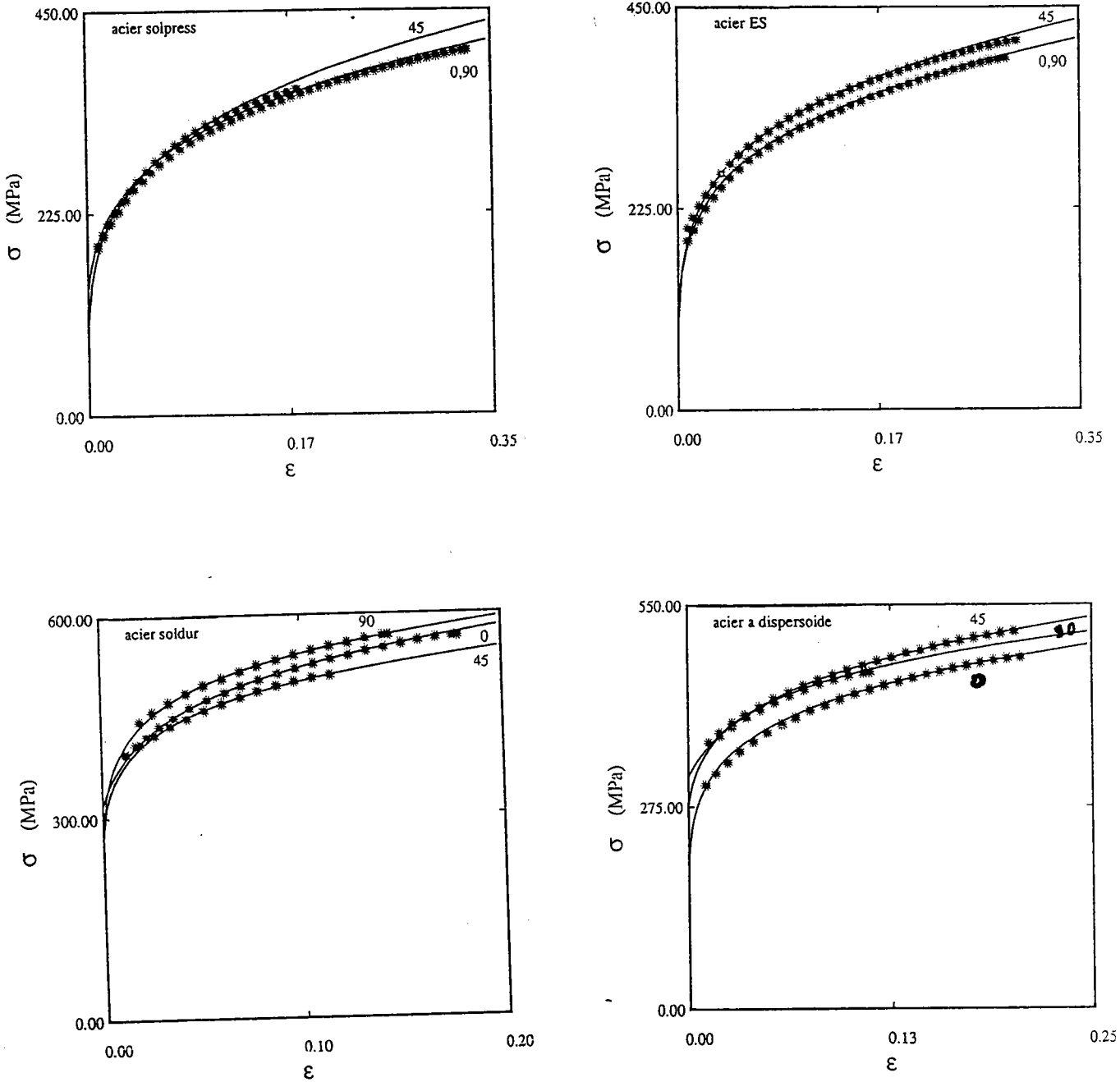
Dans ce paragraphe, nous présentons les résultats des essais de caractérisation du comportement plastique des différents aciers testés.

Ces essais comprennent : des essais de traction uniaxiale, des essais de déformation plane, des essais de déformation équi-biaxiale et des essais à  $\rho = \frac{1}{2}$  où  $\rho = \varepsilon_2/\varepsilon_1$  est le rapport des déformations principales.

#### **A-II-4-1- Caractérisation du comportement plastique en traction uniaxiale**

Les courbes  $\sigma$ - $\varepsilon$  obtenues dans les trois directions de traction sont reportées sur la figure A-II-11. Les courbes en trait plein correspondent à un ajustement selon la loi de SWIFT. Pour les deux aciers Solpress et ES, les courbes de traction à  $0^\circ$  et  $90^\circ$  coïncident pratiquement. La courbe de traction à  $90^\circ$  est par contre au dessus de celle à  $0^\circ$  pour l'acier à dispersoïdes, et pour l'acier Soldur 40. Les courbes de traction à  $45^\circ$  tendent à montrer un écrouissage plus fort, sauf pour l'acier Soldur 40.

Les paramètres de la loi  $\sigma$ - $\varepsilon$  et le coefficient d'anisotropie  $r$  sont reportés sur le tableau A-II-1. On remarque, conformément aux prévisions du critère de Hill, que lorsque  $r_{45} < r_0 \leq r_{90}$ , alors  $\sigma_0 \leq \sigma_{90} < \sigma_{45}$ . Ceci est observé pour les aciers solpress et ES. Par contre, lorsque  $r_0 \leq r_{90} < r_{45}$ , alors  $\sigma_{45} < \sigma_0 \leq \sigma_{90}$ , comme cela est observé pour l'acier Soldur. Enfin, l'acier à dispersoïdes n'est pas cohérent vis-à-vis de ces prévisions. On sait toutefois [7] que l'identification des paramètres du critère de Hill par mesure de  $r$  et par mesure des niveaux de contraintes pour différentes directions de traction ne conduit pas, dans le cas général, à des résultats concordants.



**fig. A-II-11 :** Courbes expérimentales  $\sigma - \epsilon$  obtenues en traction uniaxiale sur les quatre nuances d'acier, dans les trois directions à  $0^\circ$ ,  $45^\circ$  et  $90^\circ$  de la direction de laminage. Les courbes (—) correspondent aux ajustements des points (\*\*\*) suivant la loi de Swift.

Acier Solpress				
Paramètre	Sens de prélèvement			Valeurs moyennes
	0°	45°	90°	
K	527	568	527	548
$\epsilon_0$	0,0027	0,0008	0,0027	0,0017
n	0,2251	0,2492	0,2251	0,2371
r	1,94	1,43	2,32	1,78

Acier ES				
Paramètre	Sens de prélèvement			Valeurs moyennes
	0°	45°	90°	
K	527	554	527	541
$\epsilon_0$	0,0011	0,0003	0,0011	0,0007
n	0,2281	0,2287	0,2281	0,2284
r	1,94	1,39	2,49	1,80

Acier Soldur				
Paramètre	Sens de prélèvement			Valeurs moyennes
	0°	45°	90°	
K	749	679	736	710
$\epsilon_0$	0,0045	0,0010	0,0004	0,0017
n	0,1597	0,1328	0,1332	0,1396
r	0,71	1,51	0,71	1,11

Acier à dispersoïdes				
Paramètre	Sens de prélèvement			Valeurs moyennes
	0°	45°	90°	
K	616	665	620	642
$\epsilon_0$	0,0024	0,0110	0,0010	0,0063
n	0,1323	0,1649	0,1612	0,1558
r	0,57	0,98	0,72	0,82

**Tableau A-II-1 :**

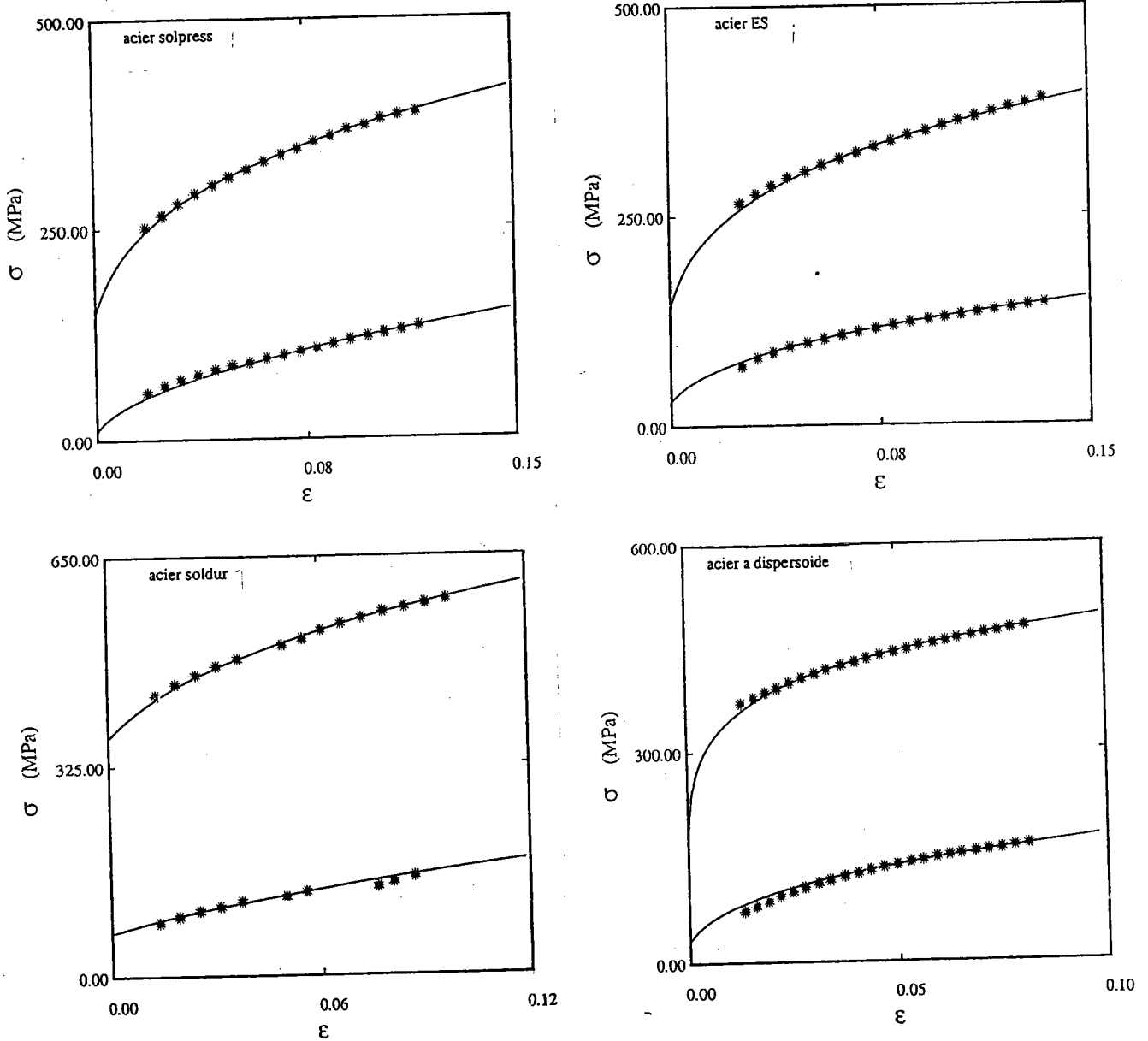
Valeurs des paramètres d'érouissage et d'anisotropie mesurées sur les différents aciers. Les paramètres K,  $\epsilon_0$ , n et r sont précisés pour les différentes orientations de l'éprouvette.

#### A-II-4-2- Caractérisation du comportement plastique en déformation plane

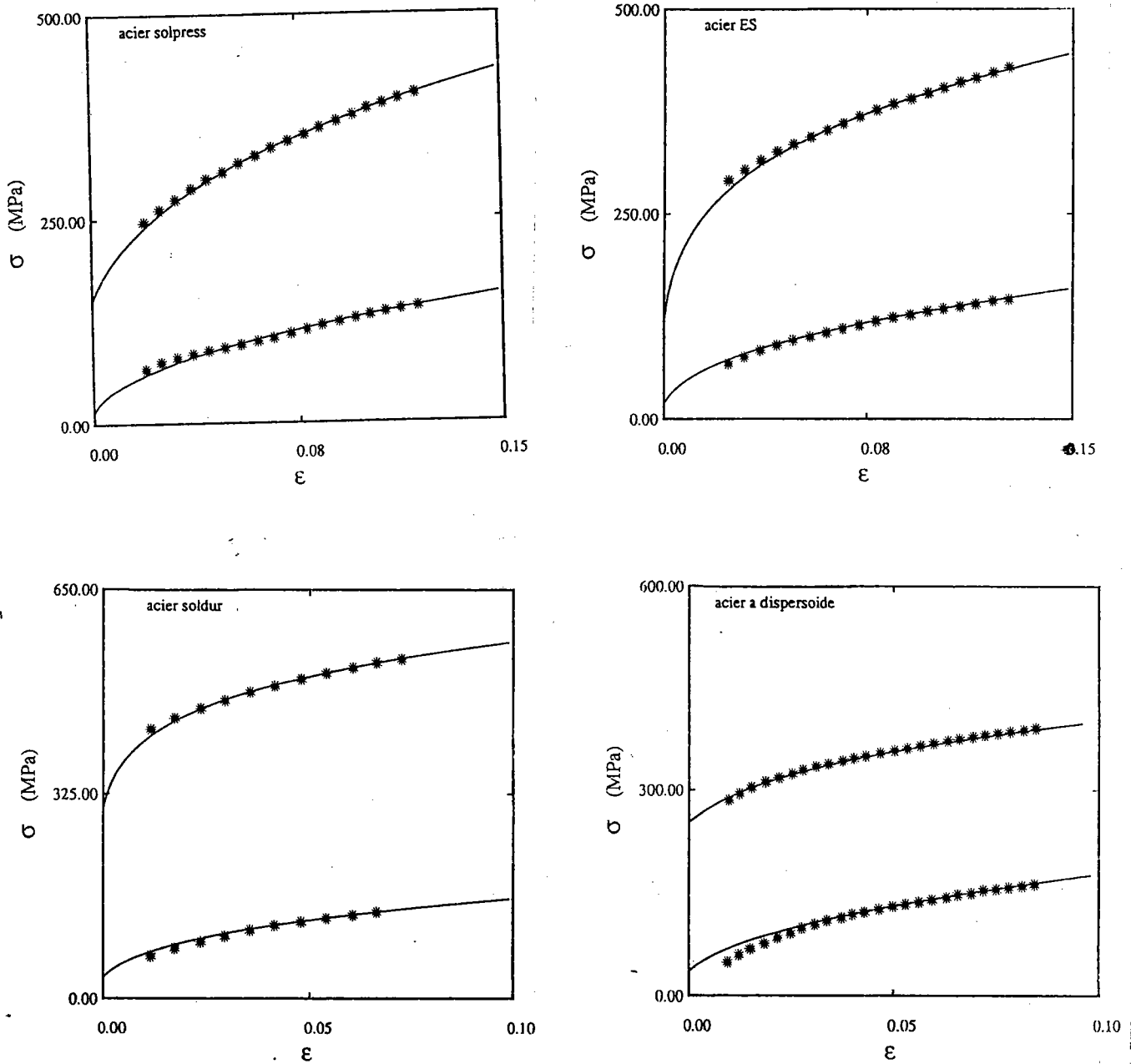
Dans le cas de la déformation plane, deux essais ont été effectués sur les quatre matériaux : dans le premier, la contrainte principale  $\sigma_1$  (avec  $\sigma_1 > \sigma_2$ ) a été appliquée parallèlement à la direction de la laminage et dans le deuxième essai,  $\sigma_1$  a été appliquée perpendiculairement à la direction de laminage. La déformation  $\epsilon_2$  étant nulle, les courbes ( $\sigma_1, \sigma_2$ ) ont été tracés et ajustées en fonction de la déformation principale  $\epsilon_1$ . Les figures A-II-12 et A-II-13 montrent l'allure de ces courbes et le tableau A-II-2 précise les paramètres de la loi de SWIFT pour les quatre aciers.

On observe sur ces courbes que le rapport des contraintes principales  $\alpha = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ , qui avec le critère de Von-Mises vaut  $\frac{1}{2}$ , est beaucoup plus faible que cette valeur. On peut admettre, en raison de l'élasticité des bielles et des bras de l'éprouvette, que la partie centrale de l'éprouvette subit un retard de mise en charge, et un léger rétreint. Cet effet est toutefois très faible, au moins lorsque les déformations  $\epsilon_1$  deviennent suffisamment grandes, et ne peut expliquer l'écart avec les prévisions du critère de Von-Mises. Le rapport  $\sigma_2/\sigma_1$  obtenu expérimentalement remet donc en cause la forme de la surface de charge prévue par ce critère.





**Fig. A-II-12 :** Courbes expérimentales  $\sigma_1, \sigma_2$  en fonction de  $\epsilon_1$  des quatre nuances d'acier pour l'essai de déformation plane avec l'axe de grande contrainte parallèle à la direction de laminage. Les courbes (—) correspondent aux ajustements des points (\*\*\*\*) suivant la loi de Swift.



**Fig. A-II-13 :** Courbes expérimentales  $\sigma_1, \sigma_2$  en fonction de  $\epsilon_1$  des quatre aciers pour l'essai de déformation plane avec l'axe de plus grande contrainte perpendiculaire à la direction de laminage. Les courbes (—) correspondent aux ajustements des points (\*\*\*\*) suivant la loi de Swift.

Acier Solpress				
Contraintes		Paramètres		
		K(MPa)	$\epsilon_0$	n
$\sigma_1//DL$	$\sigma_1$	694	0,0034	0,270
	$\sigma_2$	318	0,0024	0,433
$\sigma_1\perp DL$	$\sigma_1$	794	0,0061	0,326
	$\sigma_2$	402	0,0009	0,489

Acier ES				
Contraintes		Paramètres		
		K(MPa)	$\epsilon_0$	n
$\sigma_1//DL$	$\sigma_1$	639	0,0023	0,253
	$\sigma_2$	325	0,0026	0,405
$\sigma_1\perp DL$	$\sigma_1$	734	0,0009	0,262
	$\sigma_2$	376	0,0010	0,449

Acier Soldur 40				
Contraintes		Paramètres		
		K(MPa)	$\epsilon_0$	n
$\sigma_1//DL$	$\sigma_1$	951	0,0143	0,223
	$\sigma_2$	497	0,0220	0,526
$\sigma_1\perp DL$	$\sigma_1$	802	0,0015	0,150
	$\sigma_2$	376	0,0014	0,373

Acier à dispersoïdes				
Contraintes		Paramètres		
		K(MPa)	$\epsilon_0$	n
$\sigma_1//DL$	$\sigma_1$	719	0,0001	0,161
	$\sigma_2$	437	0,0009	0,386
$\sigma_1\perp DL$	$\sigma_1$	614	0,0099	0,192
	$\sigma_2$	509	0,0031	0,463

**Tableau A-II-2 :** Valeurs des paramètres de la loi d'écroutissement de Swift pour les deux essais de déformation plane sur les quatre aciers. Dans le premier essai l'axe de plus grande contrainte est parallèle à la direction de laminage (DL) alors que dans le deuxième essai, il est perpendiculaire à la direction de laminage.

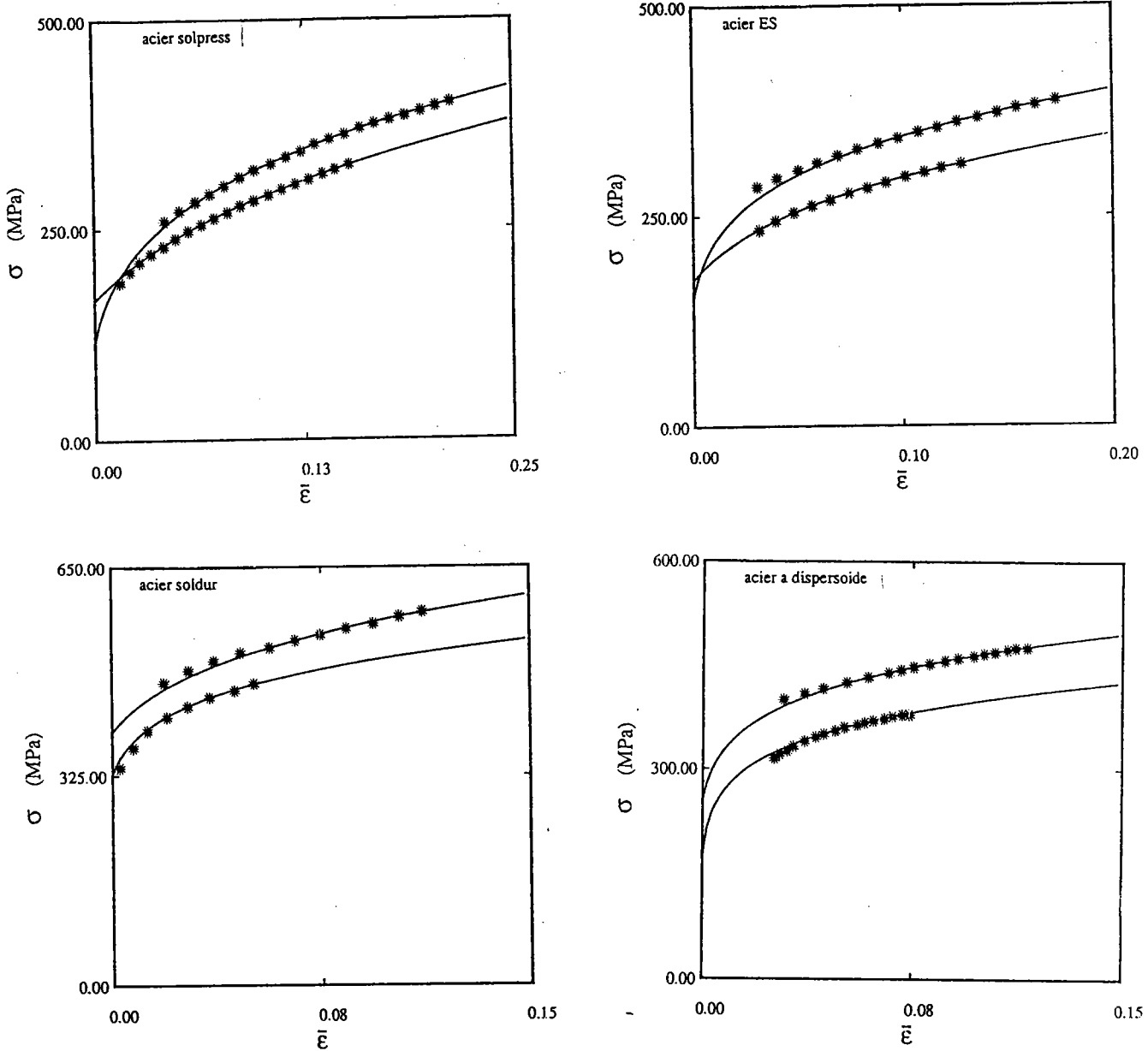
### A-II-4-3- Caractérisation de la déformation plastique pour $\rho = \frac{1}{2}$

Deux essais avec un rapport de déformation  $\rho = \frac{1}{2}$  ont été effectués sur chacun des quatre aciers : dans le premier, la contrainte principale  $\sigma_1$  a été prise parallèle à la direction de laminage et dans le deuxième essai,  $\sigma_1$  a été maintenue perpendiculaire à la direction de laminage.

Les courbes ( $\sigma_1, \sigma_2$ ) ont été tracées et ajustées en fonction de la déformation équivalente  $\varepsilon$ , au sens de Von-Misès.

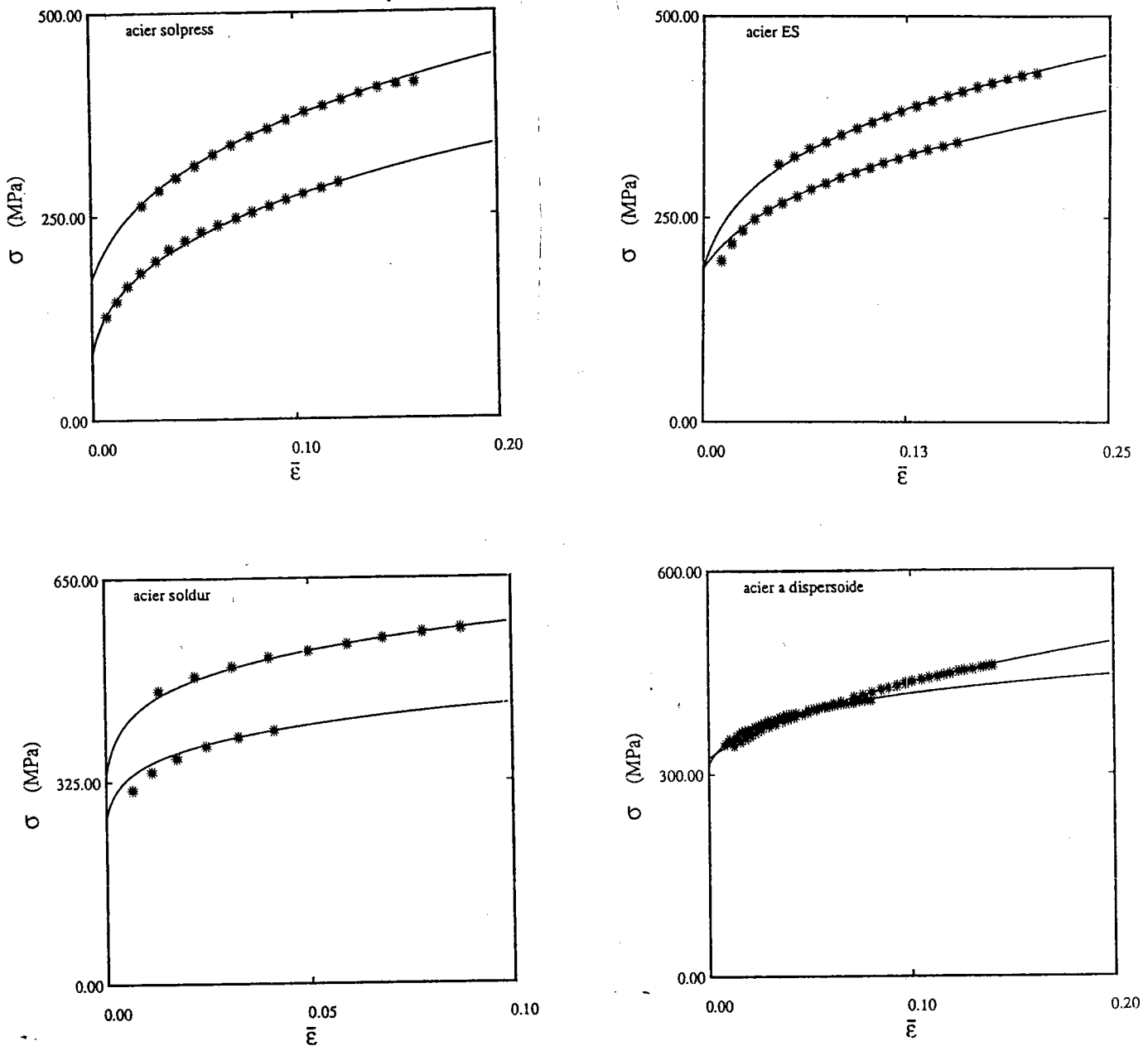
Les figures A-II-14 et A-II-15 montrent l'allure de ces courbes et le tableau A-II-3 donne les paramètres de la loi de Swift.

On observe sur ces courbes que la valeur du rapport des contraintes principales qui, avec le critère de Von-Misès vaut  $\frac{4}{3}$ , est quasiment respectée pour tous les matériaux, sauf pour l'acier à dispersoïdes lorsque l'axe de plus grande contrainte est perpendiculaire à la direction de laminage (fig. A-II-13) où les deux contraintes  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  semblent avoir pratiquement la même valeur pour une déformation équivalente  $\varepsilon < 0.10$ .



**Fig. A-II-14 :**

Courbes expérimentales  $\sigma_1, \sigma_2$  en fonction de  $\bar{\epsilon}$  des quatre aciers obtenues avec l'essai relatif à un rapport de déformation  $\rho = \frac{1}{2}$ , avec l'axe de plus grande contrainte parallèle à la direction de laminage. Les courbes (—) correspondent aux ajustements des points (\*\*\*) suivant la loi de Swift.



**Fig. A-II-15 :**

Courbes expérimentales  $\sigma_1, \sigma_2$  en fonction de  $\epsilon$  des quatre aciers obtenues avec l'essai relatif à un rapport de déformation  $\rho = \frac{1}{2}$ , avec l'axe de plus grande contrainte perpendiculaire à la direction de laminage. Les courbes (—) correspondent aux ajustements des points (\*\*\*) suivant la loi de Swift.

Acier Solpress				
Contraintes		Paramètres		
		K(MPa)	$\epsilon_0$	n
$\sigma_1//DL$	$\sigma_1$	627	0,0028	0,290
	$\sigma_2$	598	0,0262	0,353
$\sigma_1\perp DL$	$\sigma_1$	696	0,0067	0,279
	$\sigma_2$	558	0,0020	0,312

Acier ES				
Contraintes		Paramètres		
		K(MPa)	$\epsilon_0$	n
$\sigma_1//DL$	$\sigma_1$	570	0,0023	0,218
	$\sigma_2$	517	0,0147	0,257
$\sigma_1\perp DL$	$\sigma_1$	627	0,0065	0,239
	$\sigma_2$	542	0,0165	0,258

Acier Soudur 40				
Contraintes		Paramètres		
		K(MPa)	$\epsilon_0$	n
$\sigma_1//DL$	$\sigma_1$	818	0,0117	0,165
	$\sigma_2$	690	0,0040	0,134
$\sigma_1\perp DL$	$\sigma_1$	752	0,0008	0,113
	$\sigma_2$	582	0,0009	0,112

Acier à dispersoïdes				
Contraintes		Paramètres		
		K(MPa)	$\epsilon_0$	n
$\sigma_1//DL$	$\sigma_1$	662	0,0018	0,151
	$\sigma_2$	576	0,0004	0,158
$\sigma_1\perp DL$	$\sigma_1$	688	0,0377	0,228
	$\sigma_2$	518	0,0045	0,923

**Tableau A-II-3 :** Valeurs des paramètres de la loi d'écroutissage de Swift pour les deux essais de déformation avec  $\rho = \frac{1}{2}$  pour les quatre aciers.

Dans le premier essai l'axe de plus grande contrainte est parallèle à la direction de laminage alors que dans le deuxième essai, il est perpendiculaire à la direction de laminage.

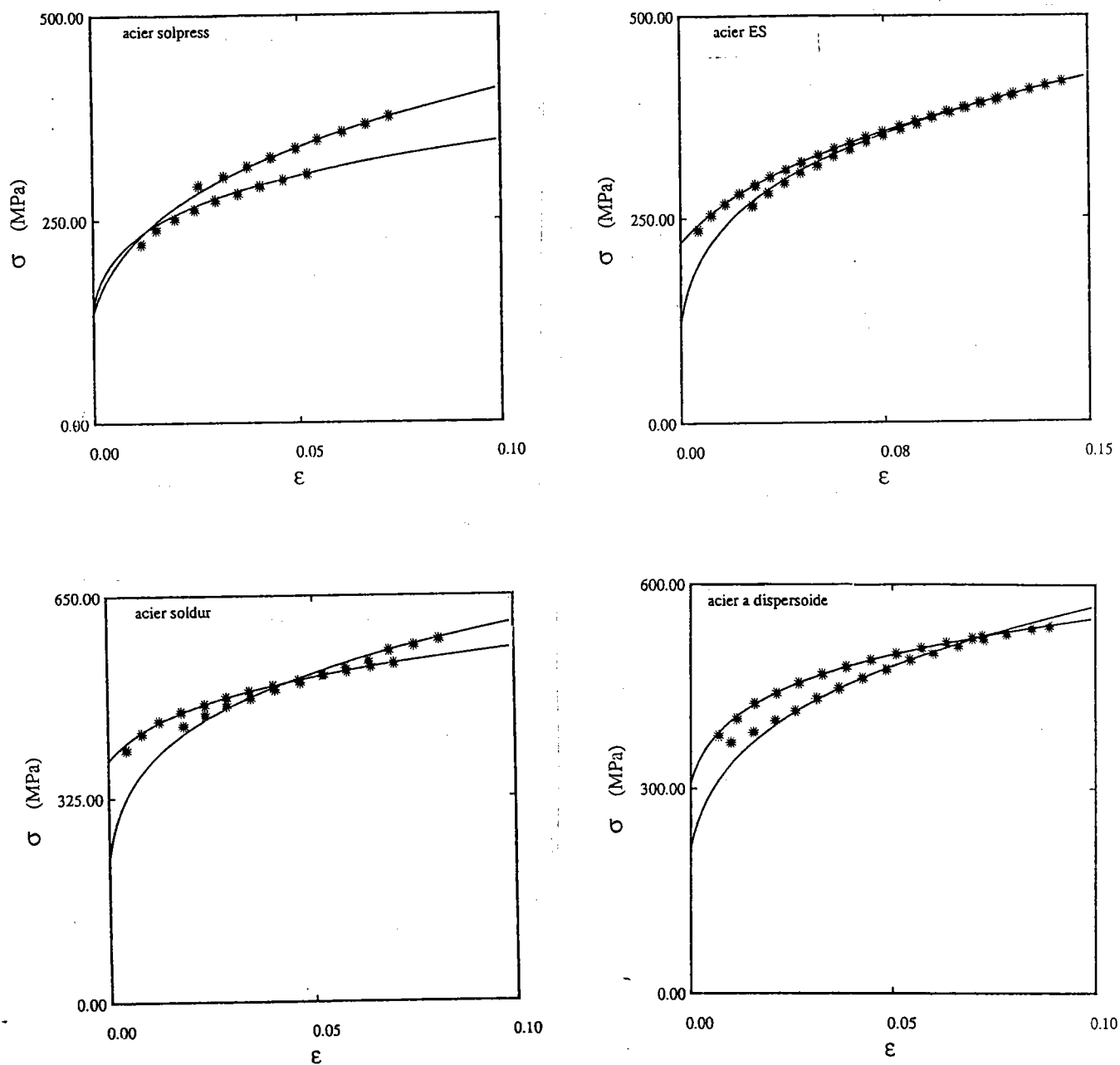
#### **A-II-4-4- Caractérisation du comportement plastique en déformation équi-biaxiale**

Pour ce type d'essai, la déformation imposée est la même selon les deux axes de l'éprouvette aux déformations élastiques près du montage : la figure A-II-16 montre les courbes  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  en fonction de  $\epsilon_1 = \epsilon_2$  pour les quatre matériaux, avec l'axe de la machine de traction parallèle à la direction de laminage pour les aciers ES et Soldur et perpendiculaire à la direction de laminage pour l'acier à dispersoïdes et l'acier Solpress. Le tableau A-II-4 précise les paramètres de la loi de Swift.

On observe sur la figure A-II-14 que les deux courbes relatives aux deux directions de traction ont tendance à se confondre pour une déformation  $\epsilon > 0.05$  et ce pour l'acier Soldur 40 et l'acier à dispersoïdes, alors qu'elles ont pratiquement confondues pour l'acier ES et différentes pour l'acier Solpress.

Il convient toutefois de noter que l'élasticité du montage introduit un retard dans le chargement selon la direction perpendiculaire à l'axe de la machine de traction. Les courbes contraintes-déformations obtenues peuvent néanmoins être considérées comme fiables à partir de quelques pour-cent de déformation.





**Fig. A-II-16 :** Courbes expérimentales  $\sigma_1, \sigma_2$  en fonction de  $\epsilon_1 = \epsilon_2$  des quatre aciers pour l'essai de déformation équi-biaxiale. L'axe de plus grande contrainte est parallèle à la direction de laminage. Les courbes (—) correspondent aux ajustements des points (\*\*\*) suivant la loi de Swift.

Acier Solpress				
Contraintes		K	$\epsilon_0$	n
$\sigma_1 \perp \text{DL}$	$\sigma_1$	789	0,0020	0,286
	$\sigma_2$	538	0,0009	0,192

Acier ES				
Contraintes		K	$\epsilon_0$	n
$\sigma_1 // \text{DL}$	$\sigma_1$	712	0,0014	0,270
	$\sigma_2$	714,08	0,0169	0,288

Acier Soudur				
Contraintes		K	$\epsilon_0$	n
$\sigma_1 // \text{DL}$	$\sigma_1$	985	0,0009	0,211
	$\sigma_2$	784	0,0062	0,136

Acier à dispersoïdes				
Contraintes		K	$\epsilon_0$	n
$\sigma_1 \perp \text{DL}$	$\sigma_1$	994	0,0018	0,245
	$\sigma_2$	774	0,0020	0,149

**Tableau A-II-4 :**

Valeurs des paramètres de la loi d'écroutissage de Swift pour l'essai de déformation équi-biaxiale sur les quatre aciers.

L'axe de plus grande contrainte est parallèle à la direction de laminage pour les aciers ES et Soudur et perpendiculaire à la direction de laminage pour les aciers Solpress et à dispersoïdes.

## Chapitre A-III- Analyse des résultats

### A-III-1- Introduction

Les résultats obtenus sous différents chemins de déformation ont d'abord été analysés par comparaison avec les prévisions du critère de Von-Misès et du critère de Hill. Cette analyse a été effectuée en supposant que l'état du matériau peut être caractérisé par une variable scalaire correspondant à la déformation équivalente associée à chacun de ces critères. Constatant que ces critères ne rendent pas compte correctement du comportement des matériaux étudiés, nous avons été amenés à construire des surfaces de charge dans l'hypothèse d'un écrouissage isotrope .

Nous avons ensuite réalisé des essais de traction simple sur des échantillons prélevés dans des tôles prédéformées sous chargement biaxial de façon à obtenir des points correspondant au même état d'écrouissage. Les résultats de ces essais font ressortir l'aspect anisotrope de l'écrouissage qui ne pouvait pas être mis en évidence par la comparaison des résultats sous différents chemins de déformation.

### A-III-2- Critères de Von-Misès et de Hill et lois d'écoulement associées

Nous rappelons brièvement les expressions associées aux critères de Von-Misès et de Hill. Ces expressions seront utilisés pour comparer les courbes contrainte-déformation équivalentes obtenues dans les différents essais.

#### A-III-2-1- Critère de Von-Misès

Dans le cas d'un état de contraintes planes, l'expression du critère de Von-Misès s'écrit :

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2 \quad (\text{A-III-1})$$

où  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  désignent les deux contraintes principales non nulles, et où la contrainte équivalente  $\sigma$  est une mesure de la dimension de la surface de charge.

La loi de normalité prescrit, d'autre part, que le vecteur incrément de déformation plastique est dirigé selon la normale extérieure à la surface de charge, soit :

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (\text{A-III-2})$$

où  $f(\sigma_{ij}) = 0$  est l'équation de la surface de charge et  $\lambda$  est un scalaire positif.

En posant  $\alpha = \sigma_2/\sigma_1$ , cette loi conduit à :

$$\rho = \frac{\dot{\epsilon}_2}{\dot{\epsilon}_1} = \frac{2\alpha - 1}{2 - \alpha} \quad (\text{A-III-3})$$

où  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  sont définis par la relation (A-III-2).

La vitesse de déformation équivalente est définie à partir du principe d'équivalence du travail plastique, soit :

$$\sigma \ \dot{\epsilon} = \sigma_1 \dot{\epsilon}_1 + \sigma_2 \dot{\epsilon}_2 \quad (\text{A-III-4})$$

La vitesse de déformation équivalente est alors donnée par :

$$\frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \dot{\epsilon}_1^2 + \dot{\epsilon}_1 \dot{\epsilon}_2 + \dot{\epsilon}_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A-III-5})$$

On rappelle, enfin, que pour un chemin de déformation linéaire, les relations (A-III-3) et (A-III-5) s'écrivent simplement en remplaçant les vitesses de déformation plastique par les déformations plastiques cumulées.

#### A-III-2-2- Critère de Hill

Afin de rendre compte d'une anisotropie initiale présente dans les matériaux, nous considérons le critère de Hill [19], dans lequel nous choisissons d'identifier la contrainte équivalente  $\sigma$  à la contrainte de traction simple dans la direction 1 :

$$(G + H) \overline{\sigma}^2 = (G + H) \sigma_1^2 - 2H \sigma_1 \sigma_2 + (H + F) \sigma_2^2 \quad (\text{A-III-6})$$

où F, G, H sont des constantes caractérisant l'état d'anisotropie initiale du matériau et les indices 1 et 2 désignent les axes d'anisotropie initiale, qui sont supposés ne pas changer au cours de la déformation.

Pour  $F = G = H = 1$ , on retrouve le critère de Von-Misès.

La loi de normalité nous donne :

$$\rho = \frac{\dot{\epsilon}_2}{\dot{\epsilon}_1} = \frac{(F + H) \alpha - H}{(G + H) - H \alpha} \quad (\text{A-III-7})$$

avec  $\alpha = \sigma_2/\sigma_1$ .

La vitesse de déformation équivalente s'exprime alors :

$$\frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon} = \sqrt{\frac{(G + H)}{(FG + GH + HF)}} \left[ (F + H) \dot{\epsilon}_1^2 + 2H \dot{\epsilon}_1 \dot{\epsilon}_2 + (G + H) \dot{\epsilon}_2^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A-III-8})$$

Les paramètres F, G et H s'expriment en fonction des coefficients d'anisotropie  $r_0$  et  $r_{90}$  de la manière suivante :

$$\frac{F}{G} = \frac{r_0}{r_{90}} \quad ; \quad \frac{F}{H} = \frac{1}{r_{90}} \quad (\text{A-III-9})$$

La contrainte équivalente s'exprime alors :

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{r_{90}(1+r_0)}} \left[ r_{90} (1+r_0) \sigma_1^2 - 2r_0 r_{90} \sigma_1 \sigma_2 + r_0 (1+r_{90}) \sigma_2^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A-III-10})$$

et la déformation équivalente (pour un chemin de déformation proportionnel) a pour expression :

$$\bar{\varepsilon} = \sqrt{\frac{(1+r_0)}{r_0 (1+r_0+r_{90})}} \left[ r_0 (1+r_{90}) \varepsilon_1^2 + 2r_0 r_{90} \varepsilon_1 \varepsilon_2 + r_{90} (1+r_0) \varepsilon_2^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A-III-11})$$

### **A-III-3- Analyse des résultats de la consolidation des quatre aciers sous les différents chemins de déformation**

#### **A-III-3-1- Courbes contrainte-déformation équivalentes**

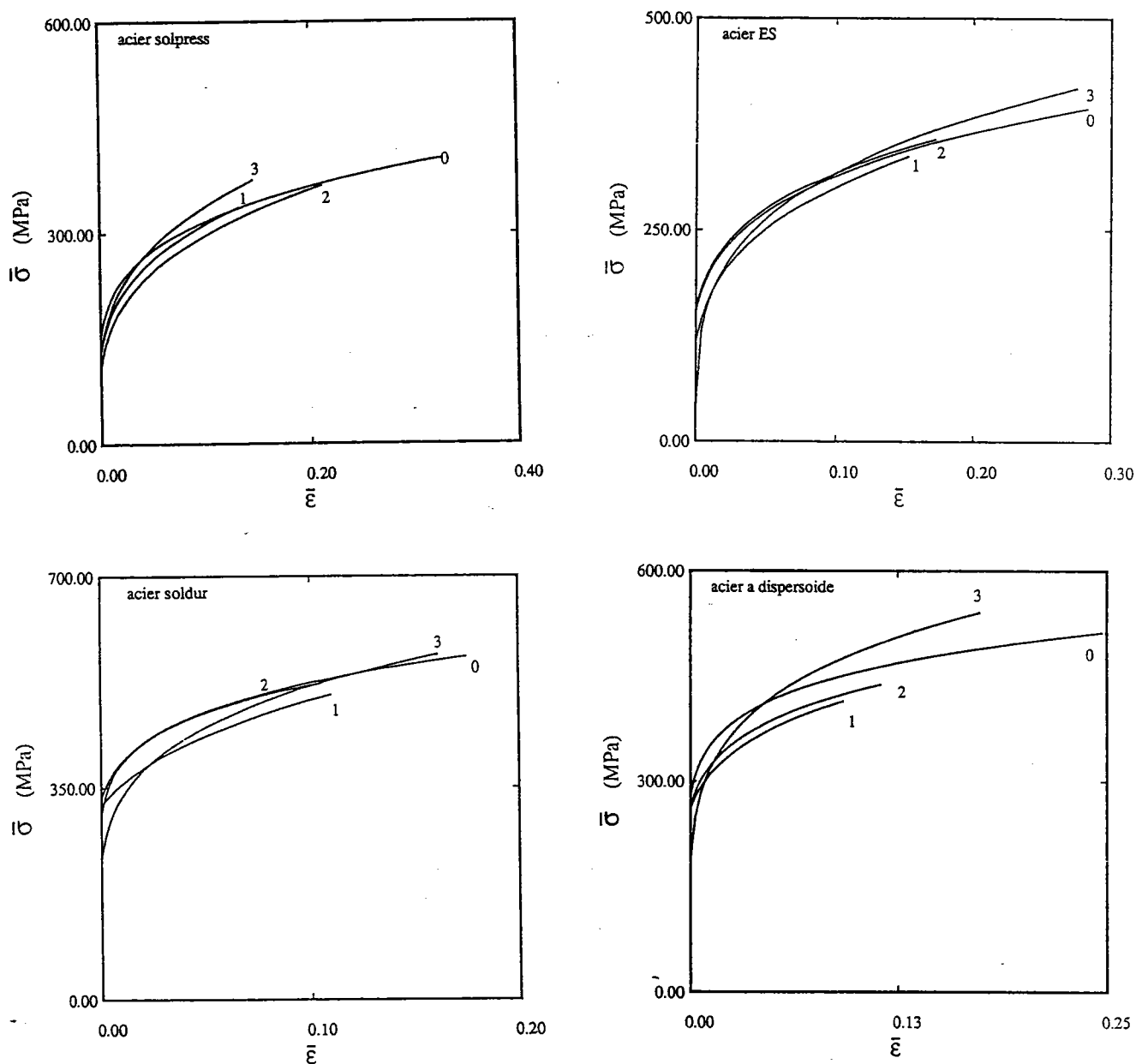
Les figures A-III-1- et A-III-2 montrent les courbes expérimentales contrainte-déformation équivalentes obtenues selon le critère de Von-Misès et ajustées avec la loi d'écroutissement de Swift. Les courbes de la figure A-III-1 ont été obtenues avec  $\sigma_1$  parallèle à la direction de laminage, alors que celles de la figure A-III-2 ont été obtenues avec  $\sigma_1$  perpendiculaire à la direction de laminage.

Dans cette analyse des résultats, nous avons choisi de définir la contrainte équivalente  $\bar{\sigma}$  en utilisant les résultats expérimentaux relatifs à la plus grande contrainte et en prenant pour rapport des contraintes  $\alpha = \sigma_2/\sigma_1$  les prévisions du critère de Von-Misès à savoir :

$$\alpha = \frac{2\rho + 1}{2 + \rho} \quad (\text{A-III-12})$$

On constate tout d'abord que l'écroutissement est plus faible en traction simple ( $\alpha = 0$ ). Les contraintes équivalentes obtenues en déformation plane ( $\rho = 0$ ) sont plus faibles qu'en déformation équi-biaxiale ( $\rho = 1$ ) sauf dans le cas de l'acier ES ( $\sigma_1 \perp DL$ ).

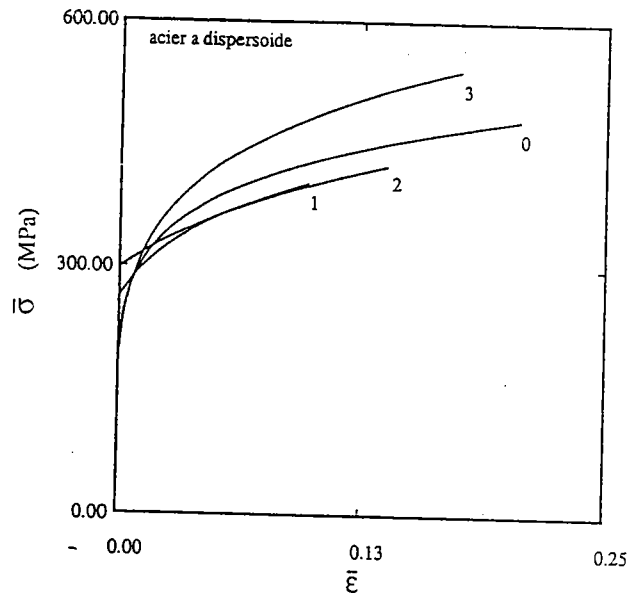
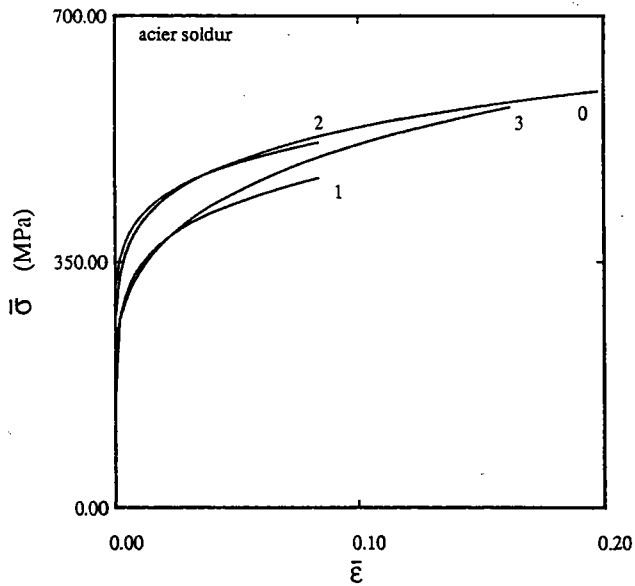
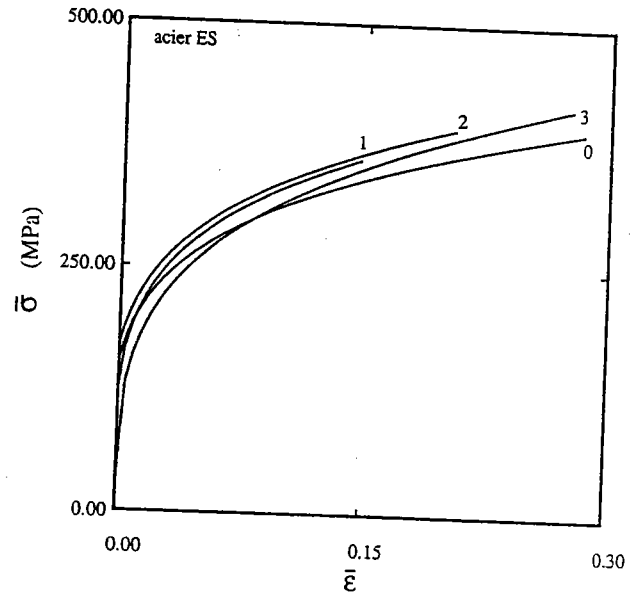
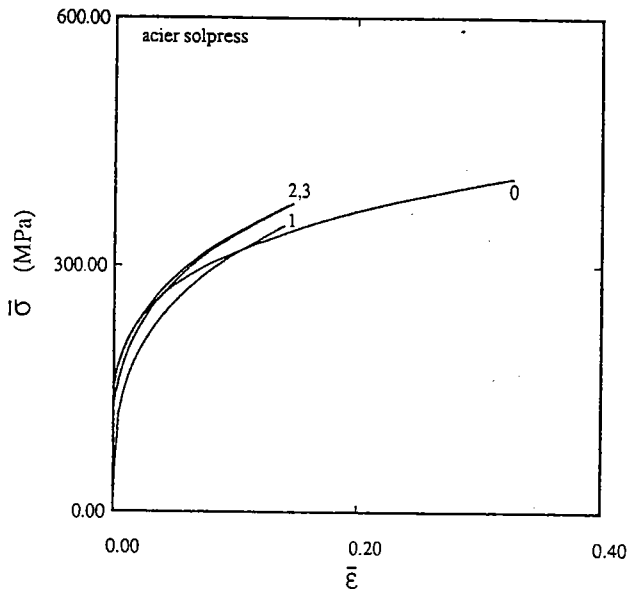
Pour les aciers Solpress et ES qui présentent des valeurs  $r_0$  et  $r_{90}$  supérieures à 1, les courbes obtenues en déformation équi-biaxiale sont rapidement supérieures à celles obtenues en traction simple.



**Fig A-III-1 :** Courbes  $\bar{\sigma}$  -  $\bar{\epsilon}$  des quatre aciers ajustées en utilisant la loi

d'érouissage de Swift en adoptant le critère de Von-Misès

- courbe 0 :  $\alpha = 0$
- courbe 1 :  $\rho = 0$  ( $\sigma_1 // DL$ )
- courbe 2 :  $\rho = \frac{1}{2}$  ( $\sigma_1 // DL$ )
- courbe 3 :  $\rho = 1$  ( $\sigma_1 // DL$ )



**Fig A-III-2:** Courbes  $\bar{\sigma}$  -  $\bar{\epsilon}$  des quatres aciers ajustées en utilisant la loi

d'écroutissage de Swift en adoptant le critère de Von-Misès

- courbe 0 :  $\alpha = 0$

- courbe 1 :  $\rho = 0$  ( $\sigma_1 \perp DL$ )

- courbe 2 :  $\rho = \frac{1}{2}$  ( $\sigma_1 \perp DL$ )

- courbe 3 :  $\rho = 1$  ( $\sigma_1 \perp DL$ )

Pour l'acier Soldur qui présente des valeurs de  $r_0$  et  $r_{90}$  inférieures à 1, les courbes obtenues en déformation équibiaxiale restent par contre en dessous de celles obtenues en traction simple jusqu'à des déformations d'au moins 10 %.

Enfin, dans le cas de l'acier à dispersoïdes on constate que les contraintes en déformation équibiaxiale sont rapidement supérieures aux contraintes en traction simple bien qu'il présente des valeurs de  $r_0$  et  $r_{90}$  inférieures à 1.

### **A-III-3-2- Représentation des résultats dans le plan des contraintes**

Une autre représentation des résultats consiste à reporter pour une déformation équivalente donnée les couples de valeurs expérimentales ( $\sigma_1, \sigma_2$ ) dans le plan correspondant et à comparer les points ainsi obtenus avec les surfaces de charge théoriques.

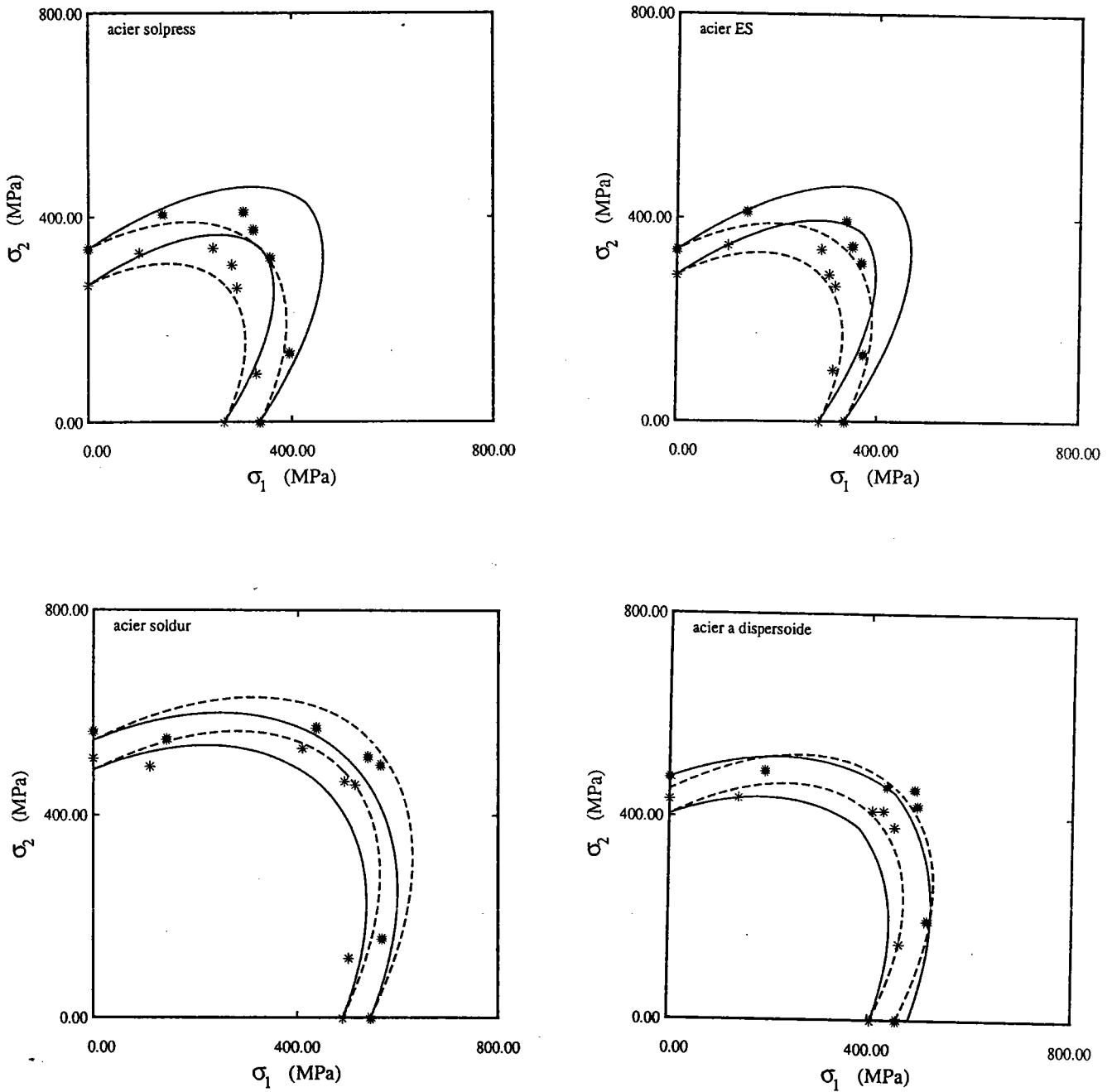
La figure A-III-3 montre ces résultats pour chaque acier et pour deux niveaux de déformation équivalente au sens de Von-Misès. Ces deux niveaux de déformation ont été définis de façon à couvrir au maximum le niveau de déformation atteint dans les essais.

En raison de l'anisotropie initiale des matériaux, nous avons également reporté les prévisions du critère de Hill (équation A-III-10). Le report des points expérimentaux pour des déformations équivalentes correspondant à ce critère n'a pas été effectué, compte-tenu des faibles différences qui en auraient résulté.

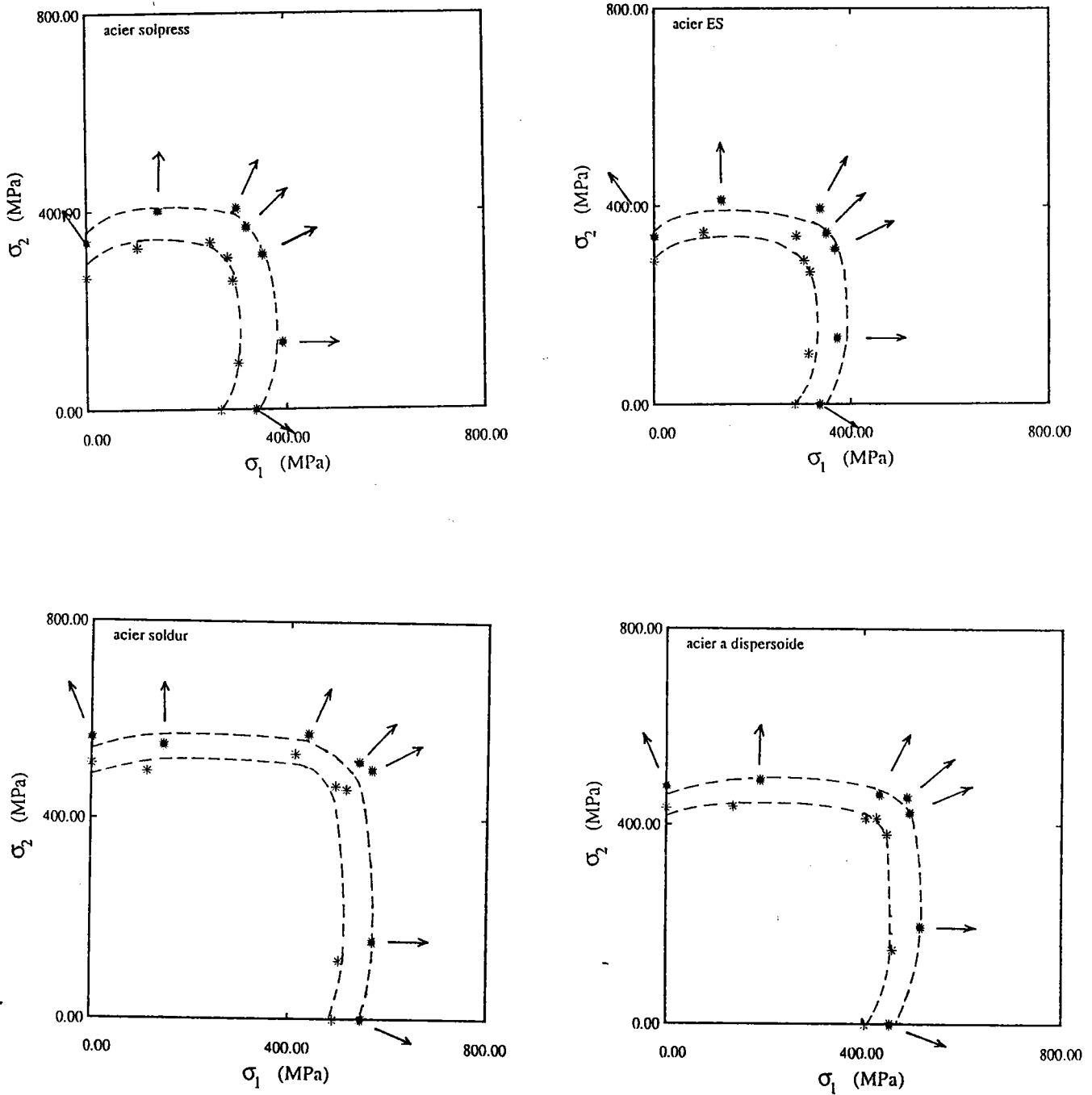
Pour les deux matériaux : acier Solpress et acier ES qui présentent des valeurs  $r_0$  et  $r_{90}$  supérieures à 1, on constate que les prévisions du critère de Hill surestiment les contraintes au voisinage de l'expansion équibiaxiale et que les niveaux de contrainte dans ce domaine sont en fait intermédiaires entre les prévisions du critère de Von-Misès et du critère de Hill. De même, dans le cas de l'acier Soldur qui présentent des valeurs de  $r_0$  et  $r_{90} < 1$ , les contraintes au voisinage de l'expansion équibiaxiale sont intermédiaires entre les prévisions des critères de Von-Misès et de Hill. Enfin les niveaux de contrainte obtenus dans le cas de l'acier à dispersoïdes au voisinage de l'expansion équibiaxiale se situent légèrement au dessus des prévisions des deux critères.

Afin d'obtenir des renseignements plus précis sur les surfaces de charge, nous avons reconsidéré les points expérimentaux en traçant des surfaces de charge joignant ces différents points (figure A-III-4).





**fig. A-III-3 : Surfaces de charge des quatre aciers à deux valeurs de déformation équivalente :  $\epsilon = 0.07$  et  $\epsilon = 0.14$  (0.05 et 0.10 pour l'acier Soldur). Les courbes (----) sont déduites du critères de Misès alors que les courbes (—) sont déduites du critère quadratique de Hill. Les points expérimentaux ont été reportés en tenant compte des axes d'anisotropie avec  $\sigma_1 // DL$  et  $\sigma_2 \perp DL$ .**



**fig. A-III-4 :** Surfaces de charge obtenues sur les quatre aciers à deux niveaux de la déformation équivalente :  $\varepsilon = 0.07$  et  $\varepsilon = 0.14$  (0.05 et 0.10 pour l'acier Soudur). Les flèches indiquent les normales à la surface d'écoulement. Les surfaces en pointillés correspondent au meilleur ajustement des résultats expérimentaux.

Dans la détermination de ces surfaces de charge, nous avons respecté les prescriptions suivantes :

- Les surfaces doivent être convexes.
- La loi de normalité doit être respectée.
- Un écart de l'ordre de 5 % sur les contraintes est admis dans le tracé de ces courbes.

On est ainsi conduit à construire des surfaces qui présentent les particularités suivantes :

- La courbure de ces surfaces est particulièrement accentuée au voisinage de l'expansion équibiaxiale et au contraire faible au voisinage de la déformation plane.

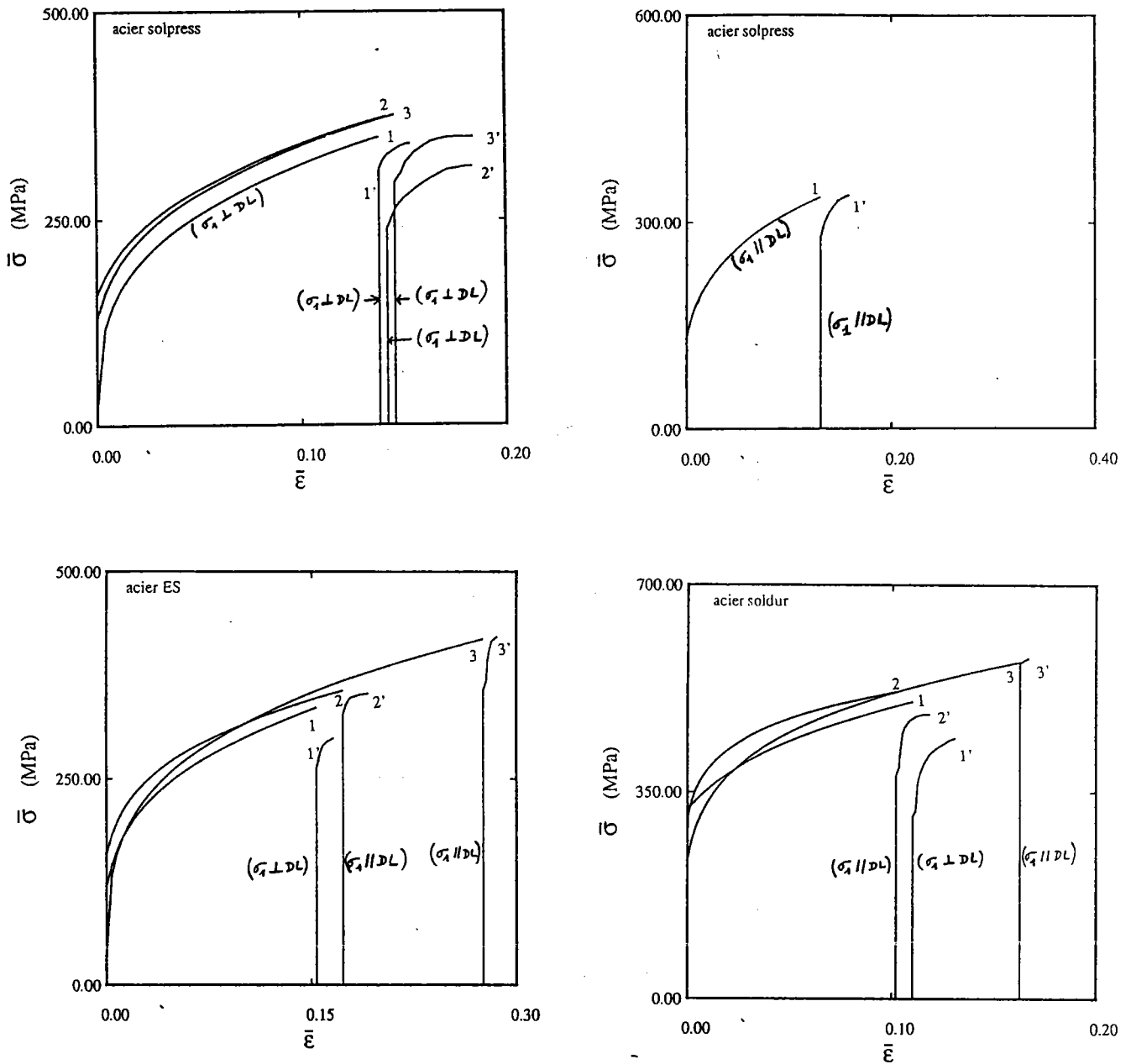
- Le rapport des contraintes entre la plus grande contrainte principale en déformation plane et la contrainte en traction simple est proche de 1 pour l'acier Soldur et l'acier à dispersoïdes pour lesquels les valeurs de  $r_0$  et  $r_{90}$  sont inférieures à 1, de sorte que dans ces deux cas les surfaces de charge présentent une allure générale proche du critère de Tresca.

#### **A-III-4- Analyse des résultats d'essais séquentiels traction biaxiale-traction uniaxiale**

Pour les différents essais de traction biaxiale nous nous sommes efforcés d'arrêter les essais suffisamment tôt (avant rupture de l'éprouvette) afin de prélever dans celles-ci des éprouvettes de traction simple. Ce prélèvement a été réalisé par découpe sur une mini tronçonneuse, suivie d'un polissage des côtés de l'éprouvette ainsi obtenue.

##### **A-III-4-1- Courbes contrainte-déformation équivalentes.**

Les résultats sont d'abord présentés sur la figure A-III-5 sous la forme des courbes contrainte-déformation de Von-Mises, pour le premier chargement biaxial, puis pour la traction simple consécutive à ce premier chargement. Certains essais ayant conduit à une rupture quasi immédiate de l'éprouvette, sans déformation plastique appréciable, n'ont pas été retenus. On observe, de façon générale, que les niveaux de contrainte au cours du second trajet de traction simple sont inférieurs à ceux obtenus à la fin du premier trajet. Par ailleurs, on note dans la plupart des cas une forte consolidation initiale, suivie d'une saturation rapide de la contrainte.



**Fig. A-III-5 :** Comparaison des courbes  $\sigma - \varepsilon$  (critère de Misès) des quatre aciers sous chargement monotone et après différentes prédéformations en chargement biaxial.

- courbe 1 =  $\rho = 0$  monotone ( $\sigma_1 // DL$ )
- courbe 2 :  $\rho = 1/2$  monotone ( $\sigma_1 // DL$ )
- courbe 3 :  $\rho = 1$  monotone ( $\sigma_1 // DL$ )
- courbe 1' :  $\alpha = 0$  consécutive à la courbe 1
- courbe 2' :  $\alpha = 0$  consécutive à la courbe 2
- courbe 3' :  $\alpha = 0$  consécutive à la courbe 3

#### A-III-4-2- Représentation des résultats dans le plan des contraintes

Les couples de points correspondants aux contraintes à la fin du premier trajet, et à la limite élastique lors du second trajet de traction simple sont reportés sur la figure A-III-6. En raison de la forte consolidation initiale lors du second trajet, nous avons porté la limite élastique pour ce second trajet sous la forme d'un segment : la valeur inférieure correspond à la perte de linéarité alors que la valeur supérieure est obtenue par une extrapolation arrière de la courbe après le transitoire de forte consolidation.

Les portions de surface de charge joignant ces couples de points sont tracées en traits pleins sur la figure A-III-6. Nous avons utilisé la valeur "supérieure" de limite élastique en traction simple pour ce tracé. La forme même donnée à cette portion de surface est largement arbitraire, son tracé servant essentiellement à repérer les couples de points correspondants.

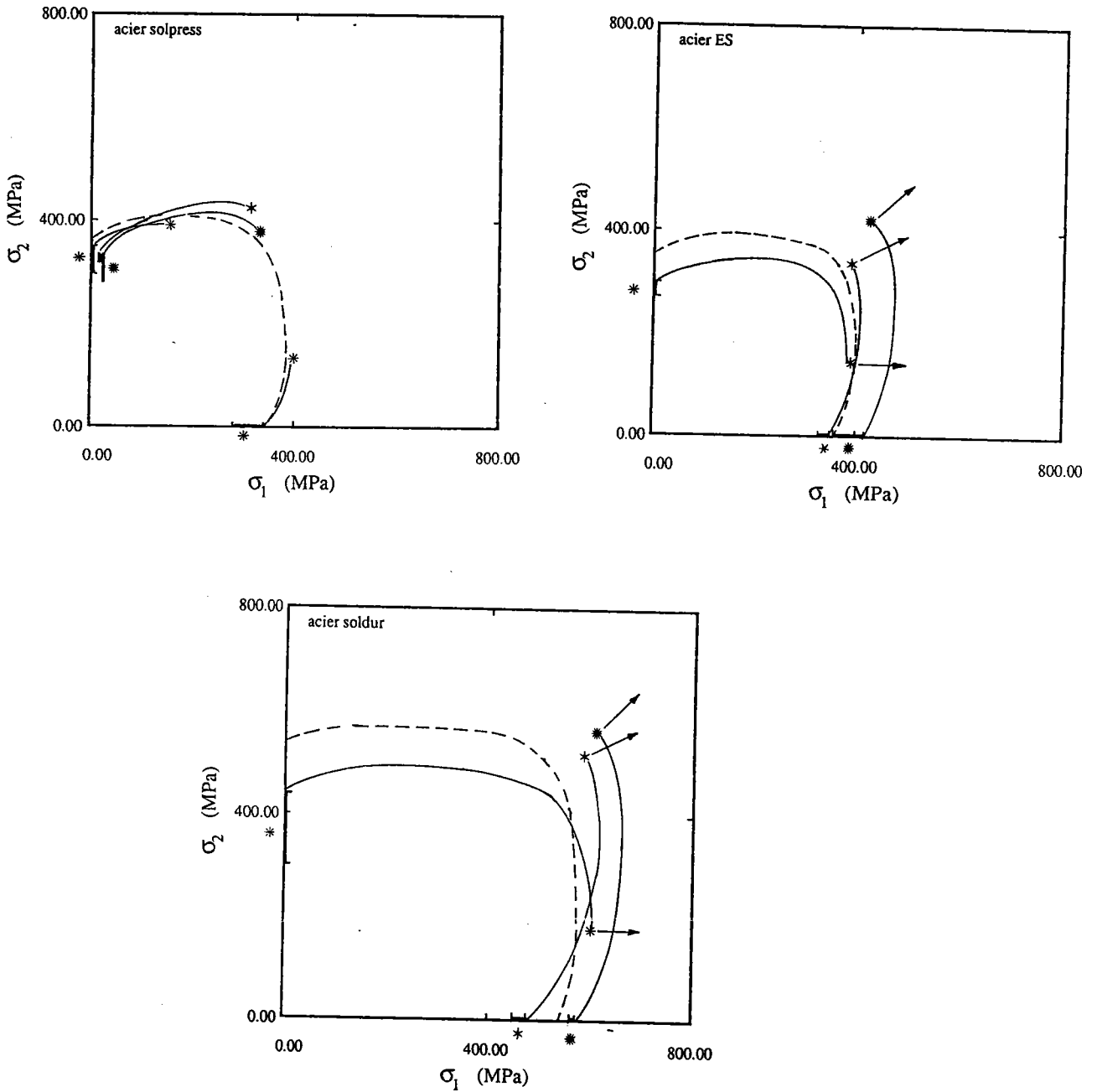
Les surfaces de charge obtenues préalablement par l'analyse des essais sous différents chemins de déformation sont également reportées pour comparaison. On observe, par rapport à ces surfaces obtenues dans l'hypothèse d'un écrouissage isotrope, que les surfaces obtenues pour un même état de déformation révèlent un aspect "directionnel" ou anisotrope de l'écrouissage. Ces dernières sont en effet "allongées" dans la direction du préchargement.

#### A-III-4-3- Quantification de l'anisotropie de l'écrouissage

Afin de quantifier le caractère anisotrope de l'écrouissage, nous avons eu recours au paramètre  $\theta$  défini par Schmitt [20] pour mesurer l'ampleur du changement de chemin de déformation.

$$\theta = \frac{d\epsilon_p : d\epsilon}{(d\epsilon_p : d\epsilon_p)^{1/2} (d\epsilon : d\epsilon)^{1/2}}$$

où  $d\epsilon_p$  et  $d\epsilon$  sont les tenseurs incrément de déformation, pour le premier et le second trajet respectivement. Ce paramètre, introduit par Schmitt pour rendre compte de l'anisotropie de l'écrouissage au niveau microscopique (durcissement latent et effet Bauschinger) est ici utilisé pour analyser les résultats "macroscopiques" de changements de trajet de déformation. On peut donc s'attendre à ce que l'influence éventuelle de l'anisotropie microscopique de l'écrouissage soit "obscurcie" par les effets, en particulier, d'évolution de texture.



**Fig. A-III-6 :** Portions de surface de charge joignant les couples de points correspondants aux contraintes à la fin du premier trajet, et à la limite élastique lors du second trajet, et à la limite élastique lors du second trajet de traction simple.

Les valeurs particulières de  $\theta$  rencontrées dans les essais sont :

$\theta = 0$  : prédéformation en déformation plane, suivie d'une traction uniaxiale, les axes de plus grande contrainte étant orthogonaux.

$\theta = \sqrt{3}/2\sqrt{7}$  : prédéformation  $\rho = 1/2$ , suivie d'une traction uniaxiale, les axes de plus grande contrainte étant orthogonaux.

$\theta = 0.5$  : prédéformation équi-biaxiale, suivie d'une traction uniaxiale.

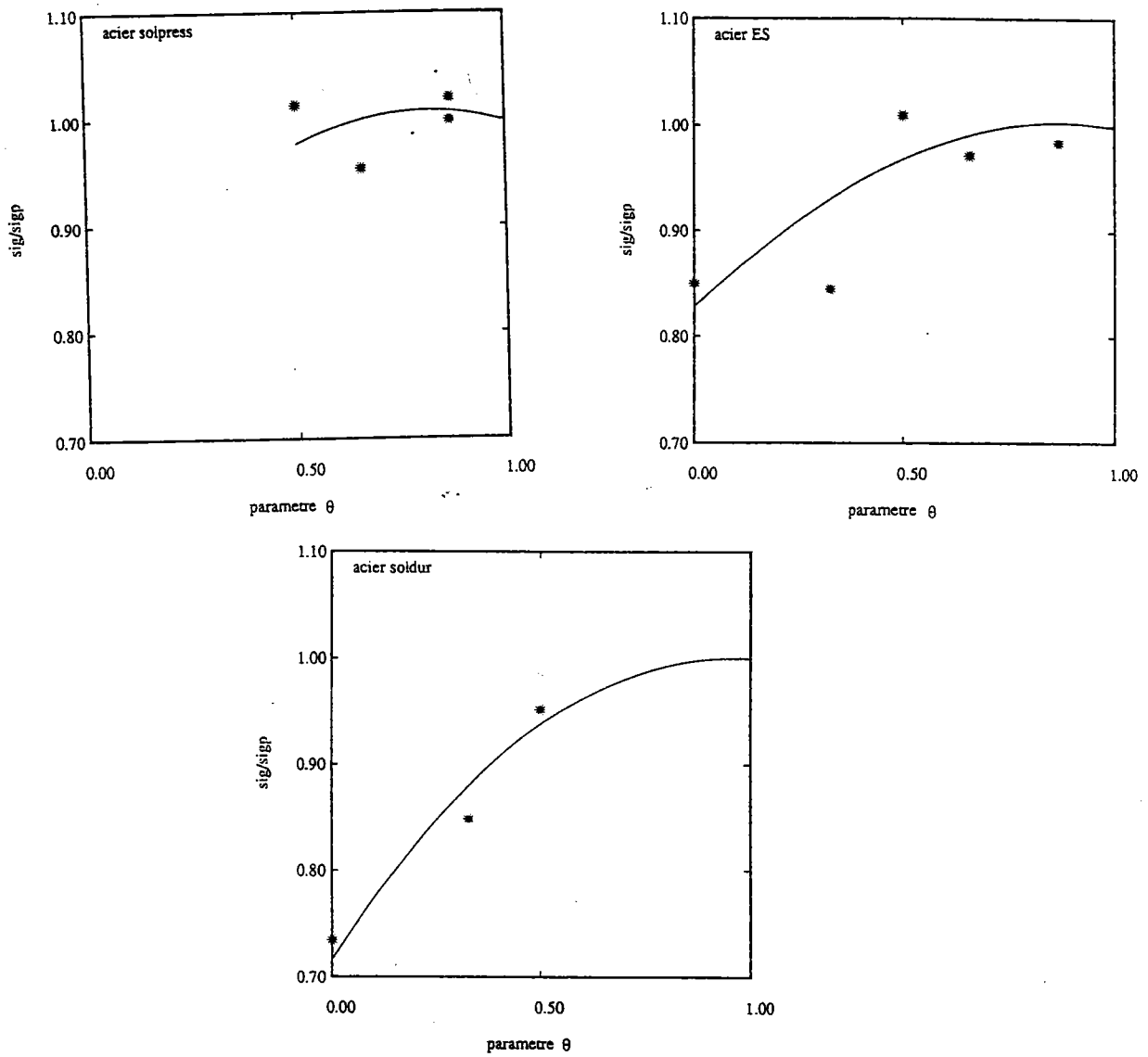
$\theta = \sqrt{3}/\sqrt{7}$  : prédéformation  $\rho = 1/2$ , suivie d'une traction uniaxiale, les axes de plus grande contrainte étant parallèles.

$\theta = \sqrt{3}/2$  : prédéformation en déformation plane, suivie d'une traction uniaxiale, les axes de plus grande contrainte étant parallèles.

Les valeurs précédentes ont été établies en supposant que le matériau a un comportement isotrope en traction simple ( $\rho = - 1/2$ ).

L'influence de  $\theta$  a été examinée sur le rapport des contraintes  $\sigma/\sigma_p$  défini par Schmitt [20] comme le rapport de la contrainte élastique à recharge sur la contrainte équivalente de prédéformation.

Nous avons pris pour  $\sigma$  la limite élastique "supérieure" de contrainte à recharge, et pour  $\sigma_p$  la contrainte d'écoulement en traction simple monotone, pour la déformation équivalente de Von-Misès correspondant à celle au moment du changement de trajet. Les résultats sont reportés sur la figure A-III-7. L'allure des courbes obtenues montre l'influence prépondérante du caractère directionnel de l'écrouissage, par rapport à l'effet du durcissement latent qui devrait conduire à des valeurs de  $\sigma/\sigma_p$  supérieures à 1 pour  $\alpha = 0$ .



**Fig. A-III-7 :** Evolution schématique du rapport de la contrainte équivalente  $\sigma$  après recharge sur la contrainte de prédéformation  $\sigma_p$ , en fonction du paramètre de changement de chemin de déformation  $\theta$ .



### A-III-5- Conclusion

Les essais de traction biaxiale ont d'abord été analysés en comparant les résultats obtenus pour différents trajets de déformation sur la base de la déformation équivalente de Von-Mises. Nous avons ainsi été conduits à tracer des surfaces de charge en supposant que l'érouissage est isotrope. Ces surfaces présentent des caractéristiques systématiques pour toutes les nuances d'acier : forte courbure au voisinage de la déformation équi-biaxiale, faible courbure au voisinage de la déformation plane. Les essais séquentiels permettent, par contre, d'obtenir des points, dans le plan de contraintes planes ( $\sigma_1, \sigma_2$ ), correspondant effectivement au même état d'érouissage des matériaux. On observe alors un effet marqué d'érouissage anisotrope, avec une "distorsion" des surfaces qui a été quantifiée en utilisant un paramètre introduit par Schmitt [20] pour mesurer l'ampleur du changement de chemin de déformation. Cette distorsion des surfaces va dans le sens d'un "allongement" des surfaces, dans la direction de chargement.

Ces résultats posent le problème d'une modélisation des surfaces de charge et de leur évolution dans les simulations des procédés de formage. Sous réserve que les différents points de la structure suivent des trajets de déformation relativement linéaires, une estimation correcte des niveaux de contraintes aux différents points ou noeuds de la structure peut être fournie par un modèle d'érouissage isotrope associé à des surfaces de charge telles que celles obtenues dans cette étude en comparant les résultats pour différents trajets de déformation. C'est le point de vue qui a été adopté dans l'étude du gonflement hydraulique développée dans la partie B. Ce point de vue est justifié pour cet essai dans la mesure où la portion de surface de charge décrite par les différents points de la structure est limitée au voisinage de la traction équi-biaxiale.

**Bibliographie de la partie A**

- 1- C.R. Hazell et J. Marin,  
Int. J. Mech. Sci. Vol. 9 (1967) pp. 57-63
- 2- W. Szczepinski  
Mech. Stos. 2, 15 (1963) pp. 275-294
- 3- E. Shiratori et K. Ikegami,  
Bull. Tokyo Inst. Tech. n° 82 (1967), pp. 105-118
- 4- E. Monch et D. Galsten,  
Brit. J. Applied. Phys., vol 14 (1963) pp. 810-812
- 5- Y. Tozawa, "Mechanics of sheet metal forming" (Eds) D.P. Koistinen et N.M. Wong,  
Plenam Press, NY (1978) pp. 81-110
- 6- K. Ikegami,  
J. Soc. Mat. Sci., vol. 24, 1976
- 7- A. Makindé,  
Thèse de doctorat de l'Université, Poitiers, 1986
- 8- D. Dudzinski,  
Thèse de l'Université, Metz, 1986
- 9- R. Hill,  
Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 85 (1979) 129
- 10- B. Budiansky,  
in G.T. Dvorak and R.T. Schield (eds.), Mechanics of mterial Behaviour,  
Elsevier, Amsterdam, 1984, 9.p 15
- 11- G. Canova,  
Thèse d'état, Université de Metz, 1986
- 12- G.I. Taylor,  
1938, J. Inst. Metals 62, 307
- 13- T.H. Lin,  
J. Mech. Phys. Sol., vol 5, 1957, p. 143
- 14- J.F.W. Bishop and R. Hill,  
Phil. Mag., vol. 42, 1951, p. 414
- 15- F. Barlat,  
Mat. Sci. Eng., 91 (1987), 55-72
- 16- P. Lipinski and M. Berveiller,  
Int. J. Plasticity, in Press
- 17- S. Nemat-Nasser and M. Obata,  
Proc. R. Soc. London, A407 (1987), 343-375

- 18- A. Molinari, G.R. Canova and S. Ahzi,  
Acta Metall., 35 (1987), 2983-2994
- 19 - R. Hill  
"The Mathematical Theory of plasticity", Clarendon Press (1950) p. 317
- 20 - J.H. Schmitt,  
Thèse d'Etat, Université de Grenoble, 1986

# **PARTIE B**

**MODELISATION DU  
GONFLEMENT HYDRAULIQUE  
D'UNE TOLE**

## NOTATIONS

H	hauteur au pôle de la membrane
K, $\varepsilon_0$ , $\dot{\varepsilon}_0$ , n	constantes du matériau
M	exposant figurant dans le critère non quadratique de Hill
N	$\rho_\theta/\rho_s$ , rapport des rayons de courbure principaux de la membrane
R	coefficient d'anisotropie
X	$\sigma_y/\sigma_u$
Y	$\sigma_y/\sigma_s$
a	rayon de la membrane
$a_{ij}$ , $b_{ij}$ , $c_{ij}$ , $d_{ij}$	coefficients de la matrice de rigidité au gonflement
$g(\psi)$	rayon polaire du point courant de la surface de charge normalisée $\Gamma$
h	épaisseur de la membrane
$K_0$ , $K_1$	coefficients de la fonction $g(\psi)$
m	$\partial \ln \bar{\sigma} / \partial \ln \dot{\varepsilon}$ , coefficient de sensibilité à la vitesse de déformation
P	pression hydrostatique
r, $\theta$ , z	coordonnées cylindriques
s	abscisse curviligne le long de la membrane
t	temps
$\Gamma$	surface de charge normalisée (Modèle de Budiansky)
$\alpha$	$\sigma_2/\sigma_1$ ou $\sigma_\theta/\sigma_s$ , rapport des contraintes
$\gamma$	$\partial \ln \bar{\sigma} / \partial \ln \dot{\varepsilon}$ , coefficient d'écrouissage
$\varepsilon$	déformation logarithmique
$\bar{\varepsilon}$	déformation équivalente
$\varphi$	pente du profil de la membrane
$\rho$	$\dot{\varepsilon}_2/\dot{\varepsilon}_1$ ou $\dot{\varepsilon}_\theta/\dot{\varepsilon}_s$ , rapport des vitesses de déformation
$\rho_s$ , $\rho_\theta$	rayons de courbure principaux de la membrane
$\sigma$	contrainte de Cauchy
$\sigma_b$	contrainte d'écoulement en déformation équi-biaxiale
$\sigma_{ps}$	contrainte d'écoulement en traction plane
$\sigma_u$	contrainte d'écoulement en traction uniaxiale
$\sigma_s$	contrainte d'écoulement en cisaillement simple
$\bar{\sigma}$	contrainte équivalente
$\psi$	angle polaire du point courant de la surface de charge normalisée $\Gamma$
$\Delta \xi$	incrément de la variable $\xi$ durant l'intervalle de temps $\Delta t$
$\dot{\xi}$	dérivée par rapport au temps de la variable $\xi$

indices inférieurs

1, 2	directions principales dans le plan de la tôle
s, $\theta$	directions méridienne et circonférentielle de la membrane
n	direction normale à la membrane
i	indice de noeud ( $i = 1, n$ )

indices supérieurs

o	état initial
---	--------------

## CHAPITRE B-I

### ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE

#### **B-I-1 - Introduction**

Parmi les essais simulatifs du formage des tôles, ceux qui font intervenir au maximum l'expansion biaxiale du matériau sont effectués soit à l'aide d'un poinçon hémisphérique, soit par l'action d'une pression de fluide. Dans les deux cas, la tôle peut être bloquée entre la matrice et le serre-flan, si l'on souhaite éviter tout avalement de la tôle et favoriser ainsi l'expansion biaxiale.

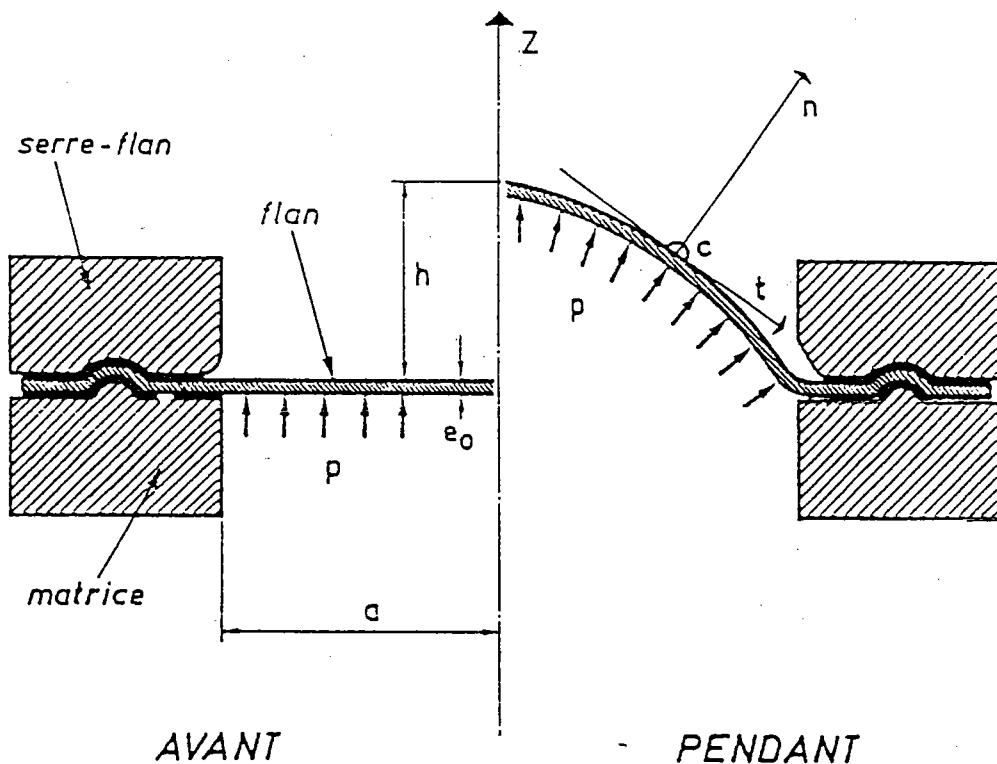
L'essai de formage sous pression hydraulique proposé par Jovignot en 1930 continue à être étudié, en particulier en France (sous le nom de gonflement hydraulique) et aux Etats-Unis (sous le nom de bulge-test). Par rapport aux autres essais simulatifs du formage, où la distribution des efforts exercés par le poinçon n'est pas connue a priori, il permet une détermination, à partir de mesures au pôle, des caractéristiques contrainte-déformation en expansion équibiaxiale. Un autre avantage majeur de cet essai est que l'on peut déterminer le comportement du matériau pour des déformations beaucoup plus importantes que dans le cas de l'essai usuel de traction simple. Cette possibilité d'obtenir les caractéristiques d'écrouissage en grandes déformations est très appréciable, puisque dans les processus de formage les déformations atteintes sont généralement importantes.

Le premier objectif des études expérimentales de gonflement hydraulique était la détermination des caractéristiques contrainte-déformation des métaux en expansion biaxiale. Ces recherches comprennent, entre autres, les travaux de Brown et Sachs [1], Gleyzal [2], Brown et Thompson [3], Weil et Newmark [4], Mellor [5], Ilahi, Parmar et Mellor [6] et Ilahi et Paul [7]. En supposant que le matériau constituant le diaphragme obéit à certains modèles de plasticité, Gleyzal [2], Hill [8], Weil et Newmark [4], Weil [9], Woo [10], Storakers [11], Chater et Neale [12,13] et Kim et Yang [14,15] ont par ailleurs considéré les aspects théoriques du problème.

Dans ce chapitre nous rappelons les principales analyses du problème du gonflement hydraulique, ainsi que les résultats de comparaisons entre calcul et expérience. Mais auparavant, nous allons présenter une description physique de ce processus.

### B-I-2 - Description physique de l'essai

Un flan est bloqué entre une matrice circulaire, ou elliptique, et un serre-flan (fig. B-I-1). Un jonc de retenue peut être utilisé pour empêcher la tôle de glisser radialement. Un fluide sous pression  $P$  gonfle le flan. Au fur et à mesure du gonflement, la courbure de la tôle déformée croît et tend à consolider le diaphragme. L'écroûissage du métal fait de même, mais inversement l'aminçissement dû à l'expansion affaiblit la structure. On peut considérer avec une bonne approximation que les effets de flexion sont négligeables lorsque le rapport entre l'épaisseur et le rayon du flan est suffisamment faible. Dans ce cas la structure peut être traitée comme une membrane, en ne considérant que les effets de traction dans le plan tangent à la tôle.



**Fig. B-I-1** : Schéma d'un essai d'expansion biaxiale Jovignot

La rupture marque la fin de l'essai. Les critères retenus sont :

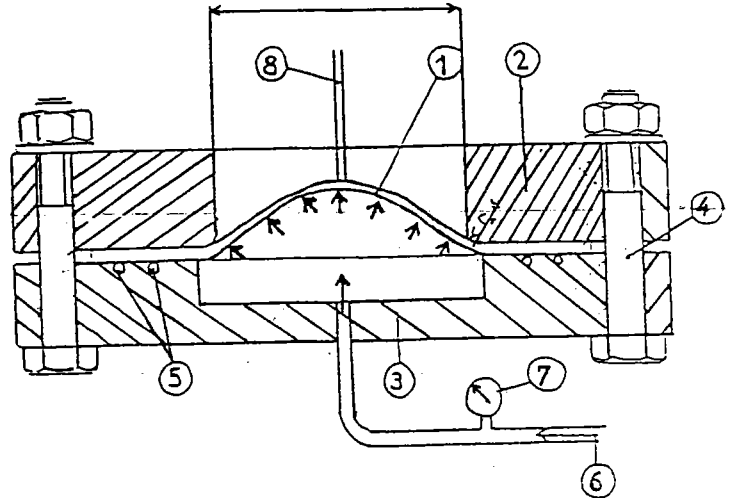
- la flèche au pôle à la rupture
- la pression maximale enregistrée au cours de l'opération.

Les figures B-I-2 et B-I-3 donnent le principe de l'essai, et la photographie d'une éprouvette après essai. Un dispositif approprié permet l'enregistrement de la flèche au pôle de l'embouti en fonction de la pression.

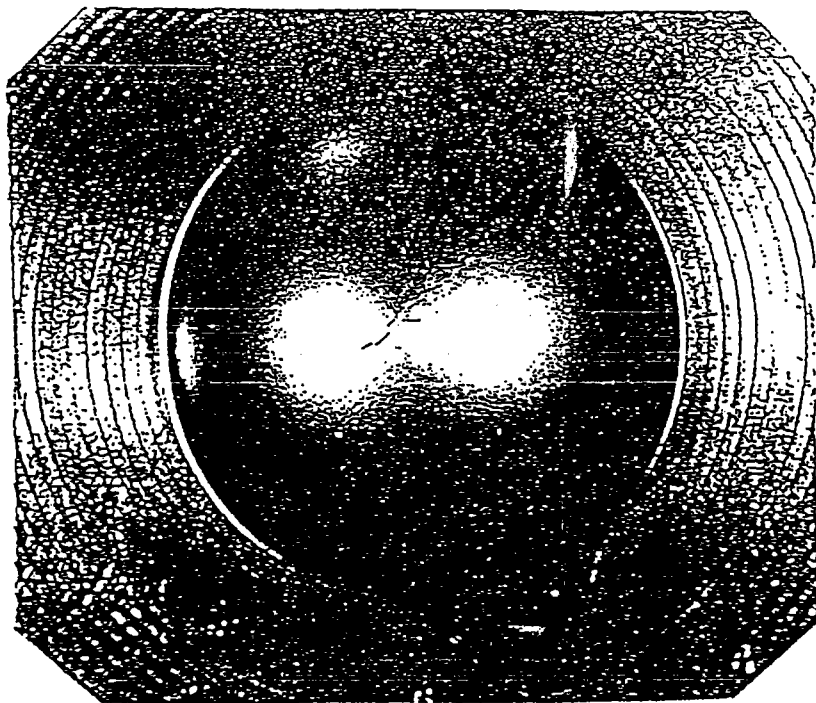


L'introduction de l'extensomètre biaxial [17] a rendu possible la détermination précise et rapide des courbes contrainte-déformation biaxiales. Le dispositif automatique de gonflement hydraulique équipé d'un contrôle de la vitesse de déformation a amélioré la fiabilité du test et a minimisé le temps de l'essai [18]. Cependant, l'essai de gonflement hydraulique n'a pas été, jusqu'à présent, accepté comme un test standard, en raison des imprécisions qui existent encore dans la procédure d'essai [18].

- 1 Eprouvette
- 2 Matrice
- 3 Anneau serre-flan
- 4 Vis de blocage
- 5 Joints d'étanchéité
- 6 Arrivée d'huile sous pression
- 7 Manomètre
- 8 Palpeur d'enregistrement de la flèche



**Fig. B-I-2 :** Principe et appareillage



**Fig. B-I-3 :** Eprouvette emboutie

### B-I-3 - Solution de Hill [4]

#### B-I-3-1 - Equations de base

Nous considérons un diaphragme circulaire de rayon  $a$  et d'épaisseur initiale  $h^0$ , où  $h^0/a$  est suffisamment faible pour que l'on puisse négliger les contraintes de flexion et de cisaillement. Si le matériau présente un comportement à isotropie planaire, la membrane sous pression devient alors une surface de révolution, et nous pouvons utiliser les coordonnées cylindriques pour décrire le problème (fig. B-I-4).

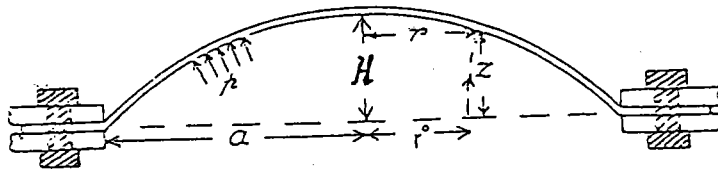


Fig. B-I-4 : Profil de la membrane sous pression

Le rayon courant d'une particule est noté  $r$ , l'épaisseur courante est notée  $h$  et l'inclinaison de la normale à la surface par rapport à l'axe de révolution, par  $\varphi$ . Les rayons de courbure principaux de la membrane s'expriment :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{\theta} = \frac{r}{\sin \varphi} \\ \rho_s = \frac{1}{\cos \varphi} \frac{dr}{d\varphi} \end{array} \right. \quad (\text{B-I-1})$$

où  $\rho_{\theta}$  est le rayon de courbure circonférentiel, et  $\rho_s$  est le rayon de courbure tangentiel (ou méridien).

Les rayons de courbure ne sont pas indépendants puisque l'élimination de  $\varphi$  à partir de (B-I-1) conduit à :

$$\frac{r}{\rho_{\theta}} \frac{d\rho_{\theta}}{dr} = 1 - \frac{\rho_{\theta}}{\rho_s} \quad (\text{B-I-2})$$

D'autre part, les rayons de courbure sont égaux au pôle, mais ils ne le sont pas pour un point quel-

conque, sauf si la membrane est localement sphérique.

Si on désigne par  $\sigma_\theta$  et  $\sigma_s$  les contraintes principales dans le plan de la tôle, les équations d'équilibre d'une membrane mince dans les directions normale et tangentielle sont respectivement :

$$\begin{cases} \frac{P}{h} = \frac{\sigma_\theta}{\rho_\theta} + \frac{\sigma_s}{\rho_s} \\ \frac{\partial}{\partial r} (r h \sigma_s) = h \sigma_\theta \end{cases} \quad (\text{B-I-3})$$

Les équations peuvent s'exprimer en utilisant (B-I-1) et (B-I-2) comme suit :

$$\begin{cases} \sigma_\theta = \frac{P}{2h} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho_\theta) = \frac{P}{2h} \left( 2 - \frac{\rho_\theta}{\rho_s} \right) \rho_\theta \\ \sigma_s = \frac{P}{2h} \rho_\theta \end{cases} \quad (\text{B-I-4})$$

En particulier, le rapport des rayons de courbure,  $N = \rho_\theta / \rho_s$ , est lié au rapport des contraintes  $\alpha = \sigma_\theta / \sigma_s$  par la relation :

$$\alpha = 2 - N \quad (\text{B-I-5})$$

Les contraintes sont exprimées par (B-I-4) directement en fonction de la pression et de la géométrie du diaphragme. Notons que si  $\rho_\theta \geq \rho_s$ , alors  $\sigma_\theta \leq \sigma_s$ . Le champ des contraintes vérifie l'équation de la surface de plasticité :

$$f(\sigma_\theta, \sigma_s) = \bar{\sigma}(\bar{\epsilon}) \quad (\text{B-I-6})$$

où  $\bar{\sigma}$  est la contrainte équivalente,  $\bar{\epsilon}$  est la déformation équivalente et  $f$  est une fonction homogène des contraintes. Nous négligeons les déformations élastiques et nous adoptons les relations résultant de la théorie de l'écoulement associées au critère de Von-Mises :

$$\rho = \frac{\dot{\epsilon}_\theta}{\dot{\epsilon}_s} = \frac{2\sigma_\theta - \sigma_s}{2\sigma_s - \sigma_\theta} = \frac{2\alpha - 1}{2 - \alpha} \quad (\text{B-I-7})$$

où  $\dot{\epsilon}_\theta$  et  $\dot{\epsilon}_s$  sont respectivement les vitesses de déformation circonférentielle et méridienne. La con-

dition d'incompressibilité est :

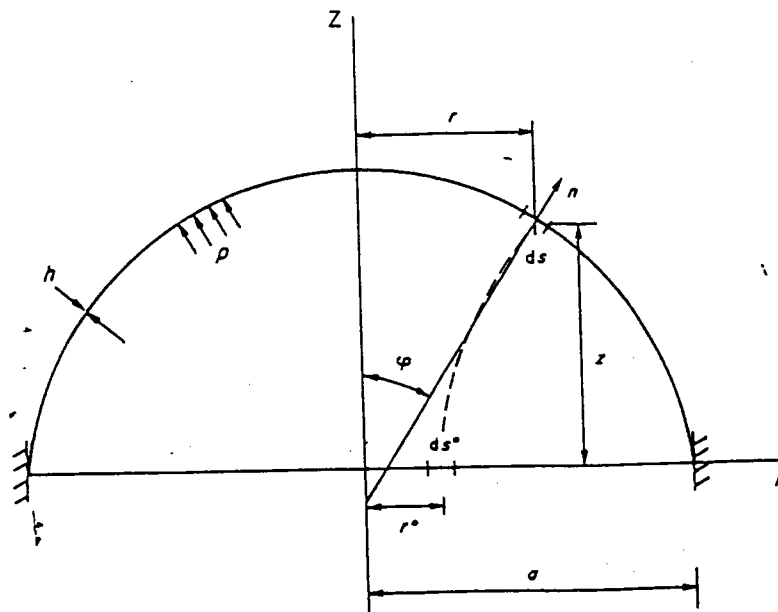
$$\dot{\epsilon}_s + \dot{\epsilon}_\theta + \frac{\dot{h}}{h} = 0 \quad (\text{B-I-8})$$

Les conditions aux limites à la périphérie sont :

$$u, v, z = 0 \quad \text{pour} \quad r = a \quad (\text{B-I-9})$$

En pratique, la matrice présente un bord torique afin d'éviter la rupture à ce niveau. Les conditions aux limites définies ci-dessus ne sont donc pas rigoureusement satisfaites, mais lorsque le rayon de congé de la matrice est inférieur à  $a/10$ , le désaccord devient négligeable. La condition (B-I-9) implique que la déformation circonférentielle s'annule à la périphérie. La déformation radiale, par contre, peut s'annuler ou non à la périphérie, en fonction des caractéristiques du matériau. Quand le métal est parfaitement recuit, il apparaît intuitivement que la périphérie doit se déformer afin qu'une contrainte tangentielle suffisante équilibre la poussée de la pression à travers la membrane. A partir de là et selon (B-I-6),  $\sigma_\theta = 1/2 \sigma_s$  à la périphérie. La périphérie peut cependant cesser de se déformer lorsqu'elle devient suffisamment écrouie par rapport au reste du diaphragme.

### B-I-3-2 - Solution particulière



**Fig. B-I-5** : Profil de la membrane déformée dans un plan méridien

Si on exprime la vitesse d'une particule dans le repère  $(\vec{e}_s, \vec{n})$  (voir fig. B-I-5), on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\epsilon}_s = \frac{dV_s}{ds} + \frac{V_n}{\rho_s} \\ \dot{\epsilon}_\theta = \frac{V_s}{r} \cos \varphi + \frac{V_n}{r} \sin \varphi \end{array} \right. \quad (\text{B-I-10})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\epsilon}_s = \frac{dV_s}{ds} + \frac{V_n}{\rho_s} \\ \dot{\epsilon}_\theta = \frac{V_s}{r} \cos \varphi + \frac{V_n}{r} \sin \varphi \end{array} \right. \quad (\text{B-I-11})$$

où  $V_s$  et  $V_n$  sont respectivement les composantes des vitesses méridienne et normale de la particule.

D'où l'expression du rapport des vitesses de déformation :

$$\rho = \frac{\dot{\epsilon}_\theta}{\dot{\epsilon}_s} = \frac{V_s \cos \varphi + V_n \sin \varphi}{r \left( \frac{dV_s}{ds} + \frac{V_n}{\rho_s} \right)} \quad (\text{B-I-12})$$

En identifiant (B-I-7) à (B-I-12), on obtient l'équation :

$$V_s \cos \varphi + V_n \sin \varphi - \rho r \left( \frac{dV_s}{ds} + \frac{V_n}{\rho_s} \right) = 0$$

soit :

$$\frac{dV_s}{ds} + \frac{V_n}{\rho_s} - \frac{V_s}{\rho r} \cos \varphi - \frac{V_n}{\rho r} \sin \varphi = 0 \quad (\text{B-I-13})$$

Hill a choisi de supposer la déformée sphérique à chaque instant, donc les rayons de courbure sont égaux et on a :

$$\rho_s = \rho_\theta = \frac{r}{\sin \varphi}$$

$$N = \rho_\theta / \rho_s = 1$$

Et compte tenu de la relation (B-I-5), le rapport des contraintes  $\alpha$  est égal à 1 et le rapport des vitesses de déformation  $\rho$  est aussi égal à 1.

L'équation (B-I-1) devient alors :

$$\frac{dV_s}{ds} - V_s \frac{\cos \varphi}{r} = 0$$

soit :

$$\frac{dV_s}{V_s} = \cotan \varphi \, d\varphi \quad (\text{B-I-14})$$

puisque  $ds = \rho_s \, d\varphi = r/\sin \varphi \, d\varphi$ .

La solution de (B-I-14) est :

$$V_s = K \sin \varphi \quad \text{où } K \text{ est une constante d'intégration.}$$

En reportant cette expression de  $V_s$  dans les équations (B-I-10) et (B-I-11), on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\epsilon}_s = \frac{K \sin \varphi \cos \varphi + V_n \sin \varphi}{r} = K \frac{\cos \varphi}{\rho_s} + \frac{V_n}{\rho_s} \\ \dot{\epsilon}_\theta = \frac{K \sin \varphi \cos \varphi + V_n \sin \varphi}{r} = K \frac{\cos \varphi}{\rho_s} + \frac{V_n}{\rho_s} \end{array} \right. \quad (\text{B-I-15})$$

$$(\text{B-I-16})$$

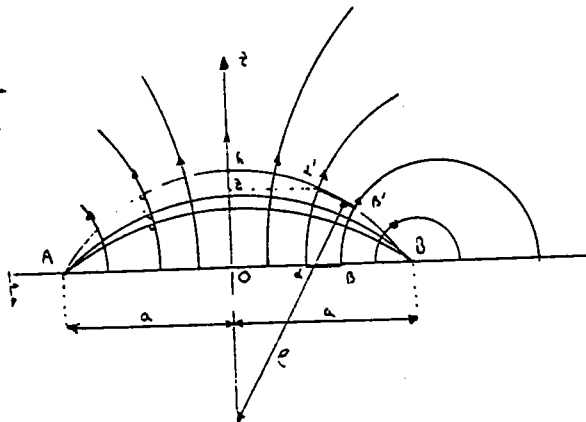
Ces relations montrent que les vitesses de déformation sont égales et que la déformation est donc équi-biaxiale.

D'autre part, les conditions aux limites à la périphérie sont :

$$\varphi = \varphi_{\text{MAX}} \quad , \quad v_n = 0 \quad \text{et} \quad \dot{\epsilon}_\theta = 0$$

Ceci conduit à :  $K \cos \varphi_{\text{MAX}} = 0$  et donc  $K = 0$

La vitesse est donc purement normale, à chaque instant, lorsque la déformée est sphérique, c'est-à-dire portée par  $\vec{n}$ . Les trajectoires des particules sont donc des cercles, situés dans des plans méridiens et appartenant au faisceau de points limites A et B (fig. B-I-6).



**Fig. B-I-6 :** Trajectoires matérielles dans un plan méridien

Les contraintes  $\sigma_s = \sigma_\theta$  sont données par :

$$\sigma_s = \sigma_\theta = \frac{P\rho_\theta}{2h} \quad \text{avec} \quad \rho_\theta = \frac{r}{\sin \varphi}$$

soit avec  $\varepsilon_h = \ln (h/h^0)$  :

$$d\sigma_s + \sigma_s d\varepsilon_h = 0$$

En expansion équi-biaxiale et avec le critère de Von-Mises on a :

$$\sigma_s = \sigma_\theta = \bar{\sigma} \quad \text{et} \quad \varepsilon_h = -\bar{\varepsilon} = -2\varepsilon_s = -2\varepsilon_\theta$$

Ce qui donne :

$$d\bar{\sigma} - \bar{\sigma} d\bar{\varepsilon} = 0$$

ou par intégration

$$\bar{\sigma} = K e^{\bar{\varepsilon}} \tag{B-I-17}$$

où K est une constante d'intégration représentant la contrainte d'écoulement initiale.

Il en résulte que :

$$\sigma_s = \sigma_\theta = \frac{P\rho_\theta}{2h} = \bar{\sigma} = K e^{-\varepsilon_h} = K \frac{h^0}{h}$$

D'où

$$P = \frac{2 K h^0}{\rho_\theta} = \frac{2 K h^0}{\rho_s} \tag{B-I-18}$$

Le rayon de courbure du diaphragme s'exprime en fonction de la hauteur au pôle H par :

$$\rho_\theta = \rho_s = \frac{a^2 + H^2}{2H} \tag{B-I-19}$$

Compte tenu de (B-I-19), l'expression de la pression devient :

$$P = \frac{4 k h^0 H}{a^2 + H^2} \quad (\text{B-I-20})$$

En conclusion, la solution de Hill est la solution analytique exacte du problème du gonflement hydraulique pour un matériau de Von-Mises dont la loi d'écroutissage est donnée par la relation (B-I-17). Cette loi de comportement  $\bar{\sigma}(\bar{\epsilon})$  avec concavité dirigée vers le haut ne correspond pas à la réalité. La solution du problème passe par une analyse numérique où l'on se donne la loi de comportement du matériau.

### B-I-3-3 - Déformation à l'instabilité

Brown et Sachs [1] ont trouvé que lorsque la pression atteint son maximum, un gonflement secondaire commence à se développer dans la zone polaire du diaphragme et ce phénomène se poursuit sous une pression qui ne cesse de baisser. Ainsi, l'instabilité se manifesterait par l'apparition de ce gonflement secondaire.

D'autres résultats montrent le développement d'une striction en épaisseur passant par le pôle. Ce phénomène est comparable à celui de la striction d'une éprouvette en traction simple. Le critère d'instabilité s'écrit donc, au pôle :

$$\frac{dP}{P} = \frac{d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}} + \frac{dh}{h} - \frac{d\rho_{\theta}}{\rho_{\theta}} = 0 \quad (\text{B-I-21})$$

Evaluons séparément les termes de (B-I-21) en fonction d'une seule variable, la déformation équivalente  $\bar{\epsilon}$  au pôle. Pour un corps se consolidant suivant une loi puissance  $\sigma = A \epsilon^n$  :

$$\frac{d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}} = n \frac{d\bar{\epsilon}}{\bar{\epsilon}}$$

Par ailleurs :

$$\frac{dh}{h} = - d\bar{\epsilon}$$

Enfin, en utilisant les résultats de la solution cinématique de Hill



$$\rho \approx \frac{a^2 + H^2}{2H} \approx \frac{a e^{\bar{\epsilon}/2}}{2\sqrt{e^{\bar{\epsilon}/2} - 1}}$$

et

$$\frac{d\rho}{\rho} \approx \frac{d\bar{\epsilon}}{2} - \frac{1}{4} \frac{e^{\bar{\epsilon}/2} d\bar{\epsilon}}{e^{\bar{\epsilon}/2} - 1}$$

Il s'agit là, évidemment, d'une analyse approchée, puisque, comme nous venons de le voir, la déformée n'est sphérique que dans le cas d'une loi  $\bar{\sigma} = K \exp(\bar{\epsilon})$ .

Finalement, la condition d'instabilité s'écrit :

$$\frac{n}{\bar{\epsilon}} \approx \frac{3}{2} - \frac{1}{4} \frac{e^{\bar{\epsilon}/2}}{e^{\bar{\epsilon}/2} - 1} \quad (\text{B-I-22})$$

Un développement limité fournit :

$$\bar{\epsilon} \approx \frac{4}{11} (2n + 1) \quad (\text{B-I-23})$$

On peut conclure qu'un fort exposant d'écrouissage  $n$  favorise l'expansion biaxiale puisqu'il retarde l'apparition de l'instabilité. Mais on constate en outre que, contrairement au test de traction, il est toujours possible d'effectuer une déformation sans instabilité, même avec un corps rigide parfaitement plastique (ici  $\bar{\epsilon} \approx 4/11$ ). Ceci tient à ce qu'au départ, la consolidation par croissance de la courbure surpasse toujours l'affaiblissement par amincissement.

#### **B-I-4 - Résolution numérique du problème**

Plusieurs chercheurs se sont intéressés à l'étude des procédés de formage axisymétriques et en particulier au cas du gonflement hydraulique. Les analyses présentes dans la littérature sont nombreuses. D'une façon générale, on peut les classer en deux catégories, celles qui sont basées sur la méthode des différences finies (Woo [10], Wang et Shammamy [16], Ilahi *et al.* [6]) et celles qui sont basées sur la méthode des éléments finis (Iseki *et al.* [19], Kobayashi et Kim [20], Zhou et Lian [21]).

Dans ce paragraphe, nous allons rappeler quelques-unes de ces analyses et discuter leurs résultats.

B-I-4-1 - Analyse de Woo

Woo [10] a développé une méthode d'analyse générale pour l'étude des processus de formage axisymétriques des tôles métalliques. Cette méthode basée sur la théorie incrémentale de la plasticité, utilise des approximations successives sur les contraintes et les déformations dans le matériau, en supposant que celui-ci obéit à une loi contrainte-déformation du type :

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_0 + A \bar{\epsilon}^n \quad (\text{B-I-24})$$

où  $\bar{\sigma}$  et  $\bar{\epsilon}$  sont respectivement la contrainte équivalente et la déformation équivalente, A et n sont des constantes du matériau et  $\bar{\sigma}_0$  est la contrainte d'écoulement initiale.

Woo a appliqué cette méthode générale au cas particulier du processus du gonflement hydraulique. L'étude a porté sur deux matériaux qui sont le cuivre recuit et l'acier doux. Des comparaisons entre les résultats expérimentaux et théoriques ont été effectuées. Les courbes contrainte-déformation de ces deux matériaux et les résultats expérimentaux de Mellor [22] sont présentés sur les figures B-I-7 et B-I-8. Les contraintes et déformations équivalentes sont définies à partir du critère de Von-Mises.

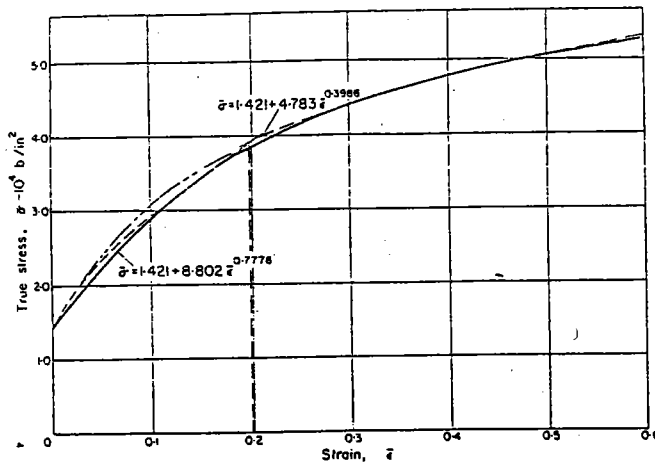
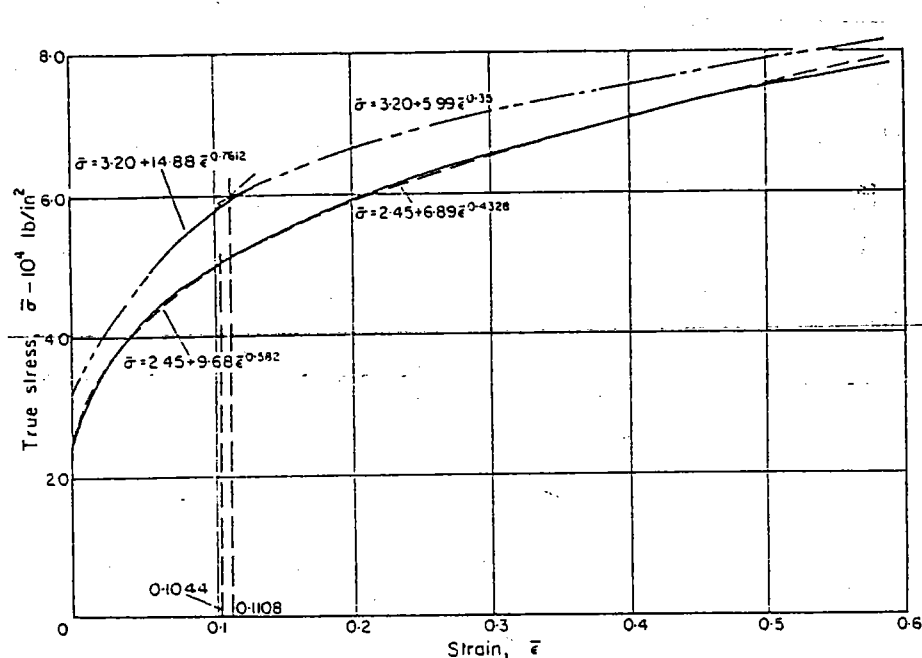


Fig. B-I-7 : Courbe contrainte-déformation (P.B. Mellor)  
 Cuivre doux, épaisseur initiale = 0.0365 in  
 ———— essai de laminage  
 - - - - - essai du gonflement hydraulique  
 (d'après Woo [10])

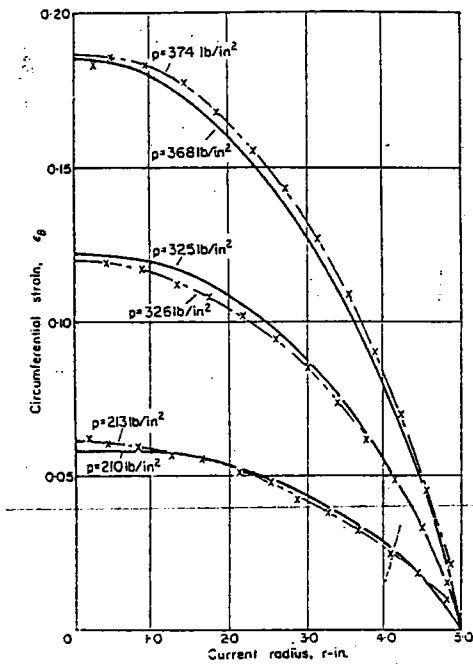


**Fig. B-I-8 :** Courbe contrainte-déformation (P.B. Mellor)  
 Acier doux, épaisseur initiale = 0.0347 in  
 ———— essai de laminage  
 - - - - - essai du gonflement hydraulique  
 (d'après Woo [10])

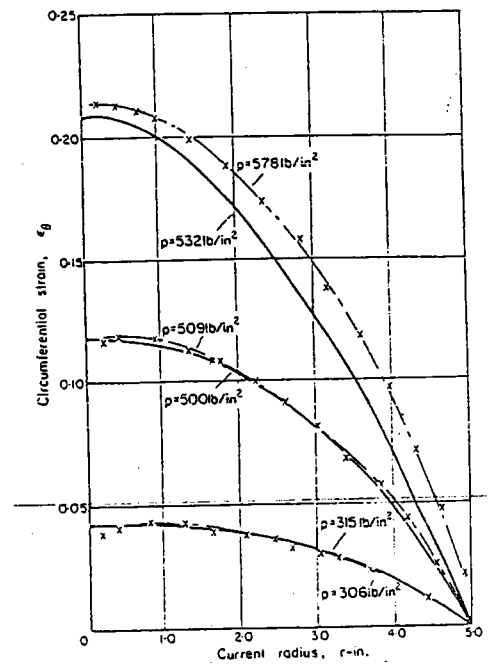
On peut voir sur la fig. B-I-7, que pour le cuivre recuit, la courbe contrainte-déformation obtenue à partir de l'essai du gonflement hydraulique ne diffère pas beaucoup de celle obtenue par l'essai de laminage à froid, alors que pour l'acier doux (fig. B-I-8), la différence est appréciable entre les deux types d'essai.

#### - Distribution de la déformation

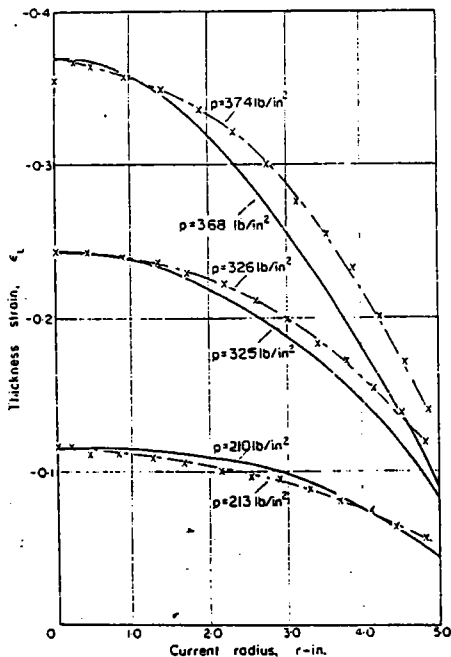
Les figures B-I-9 à B-I-12 donnent la distribution des déformations et leur évolution pour les deux matériaux. Sur ces figures on voit que l'accord entre les résultats théoriques et expérimentaux est assez satisfaisant pour les deux matériaux, à l'exception des déformations en épaisseur, à pression élevée. On remarque aussi que l'accord est meilleur, dans le cas du cuivre recuit, pour les déformations circonférentielles.



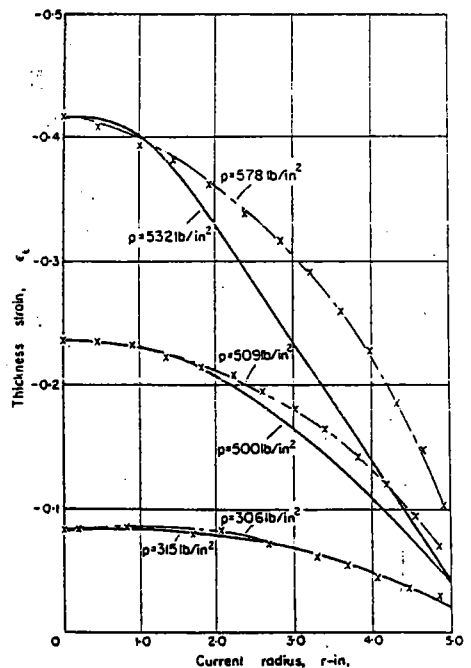
**Fig. B-I-9 :** Distribution de la déformation circconférentielle - cuivre recuit épaisseur initiale = 0.035 in  
 ——— résultats théoriques (Woo)  
 - - - - - résultats expérimentaux (Mellor)  
 (d'après Woo [10])



**Fig. B-I-10 :** Distribution de la déformation circconférentielle - acier doux épaisseur initiale = 0.0347 in  
 ——— résultats théoriques (Woo)  
 - - - - - résultats expérimentaux (Mellor)  
 (d'après Woo [10])



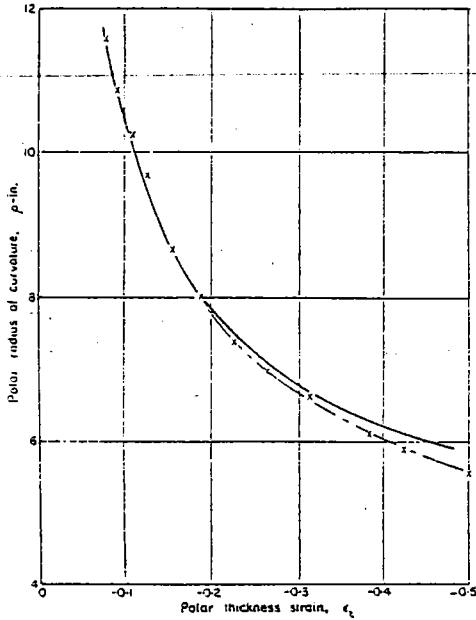
**Fig. B-I-11 :** Distribution de la déformation en épaisseur - cuivre recuit épaisseur initiale = 0.0365 in  
 ——— résultats théoriques (Woo)  
 - - - - - résultats expérimentaux (Mellor)  
 (d'après Woo [10])



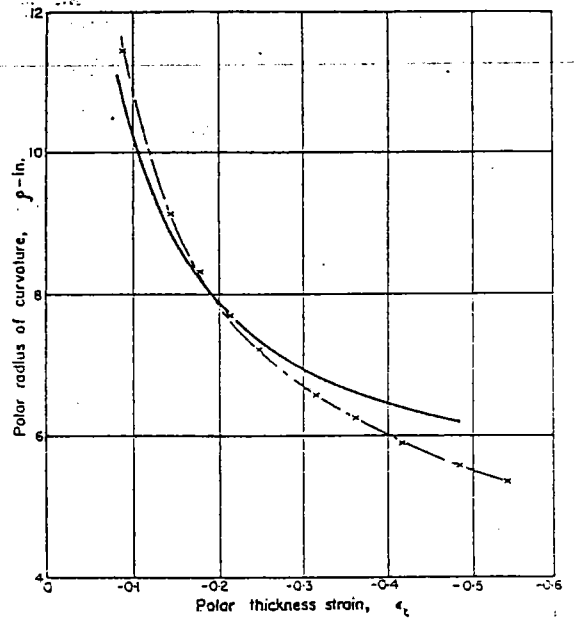
**Fig. B-I-12 :** Distribution de la déformation en épaisseur - acier doux épaisseur initiale = 0.0347 in  
 ——— résultats théoriques (Woo)  
 - - - - - résultats expérimentaux (Mellor)  
 (d'après Woo [10])

- Relation entre le rayon de courbure et la déformation au pôle

En ce qui concerne la relation entre le rayon de courbure et la déformation en épaisseur au pôle, on voit (figs. B-I-13 et B-I-14) que les courbes expérimentales sont presque identiques pour le cuivre et l'acier doux. Pour le cuivre recuit, un bon accord entre les résultats théoriques et expérimentaux a été obtenu (fig. B-I-13) alors que dans le cas de l'acier doux, la corrélation est bonne, seulement pour les petites déformations en épaisseur correspondant à une faible pression.



**Fig. B-I-13 :** Relation entre le rayon de courbure et la déformation en épaisseur au pôle - cuivre recuit épaisseur initiale = 0.0365 in  
 ——— résultats théoriques (Woo)  
 - - - - - résultats expérimentaux (Mellor)  
 (d'après Woo [10])



**Fig. B-I-14 :** Relation entre le rayon de courbure et la déformation en épaisseur au pôle - acier doux épaisseur initiale = 0.3347 in  
 ——— résultats théoriques (Woo)  
 - - - - - résultats expérimentaux (Mellor)  
 (d'après Woo [10])

B-I-4-2 - Analyse de Wang et Shammamy

Wang et Shammamy [16] ont analysé le problème du gonflement hydraulique d'une tôle sur la base de deux théories de la plasticité : la théorie incrémentale et la théorie de la déformation totale. Le matériau constituant la tôle est supposé écrouissable et anisotrope dans la direction de l'épaisseur. D'après l'analyse de ces auteurs, la théorie incrémentale prévoit que la pression atteint son maximum puis décroît lorsque la déformation au pôle croît, alors que la théorie de la déformation totale conduit, selon eux, à une déformation limite au-delà de laquelle les équations n'ont plus de solution physiquement interprétable.

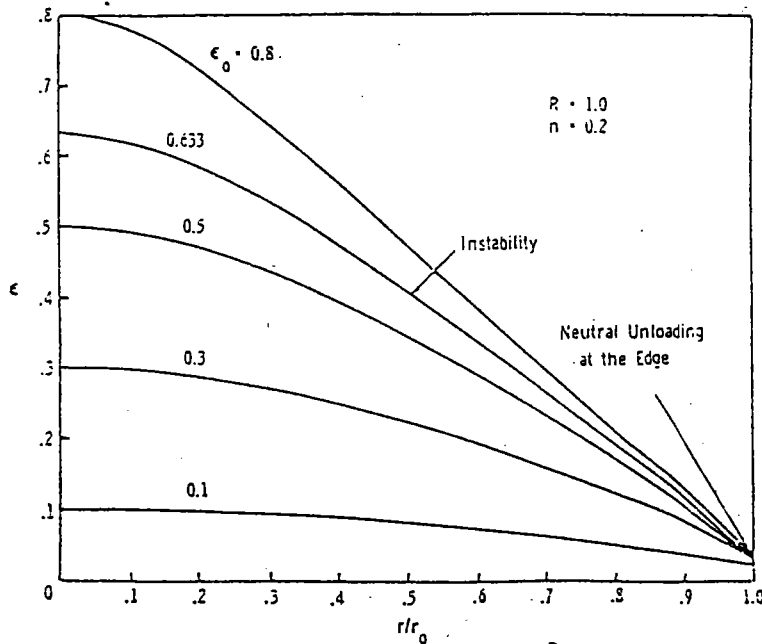
La loi d'écroutissement qu'ils ont adoptée est celle d'Hollomon :

$$\bar{\sigma} = K \bar{\epsilon}^n$$

où  $\bar{\sigma}$  et  $\bar{\epsilon}$  sont respectivement la contrainte équivalente et la déformation équivalente correspondant au critère de Hill et K et  $n$  (exposant d'écroutissement) sont des constantes du matériau.

Dans la présentation de leurs résultats numériques, Wang et Shammamy ont pris le cas où  $R = 1$  et  $n = 0.2$  comme exemple d'illustration. Ils ont ensuite analysé ces résultats en considérant deux stades de la déformation. Le premier stade est celui où la pression est croissante et le deuxième est celui où la pression atteint son maximum (instabilité) et le dépasse (post-instabilité).

La figure B-I-15 montre la distribution des déformations équivalentes  $\epsilon$ .



**Fig. B-I-15** : distribution de la déformation équivalente pour différentes valeurs de la déformation équivalente au pôle,  $\epsilon_0$ .  
(d'après Wang et Shammamy [16])

Cette figure montre que la périphérie du diaphragme  $r = r^0$  (où  $r^0$  est le rayon du diaphragme) est déformée dès les premiers stades du gonflement. Ce résultat est logique, puisque la membrane doit s'écrouter pour pouvoir supporter la pression appliquée. Aux stades avancés du gonflement, la périphérie se décharge. Cette situation de non chargement ou de déchargement de la périphérie alors que la pression croît encore a été discutée par Hill [8]. Ceci est possible physiquement, puisque la périphérie peut effectuer une rotation, comme une charnière, afin de diminuer les rayons de courbure et supporter des valeurs supérieures de la pression.

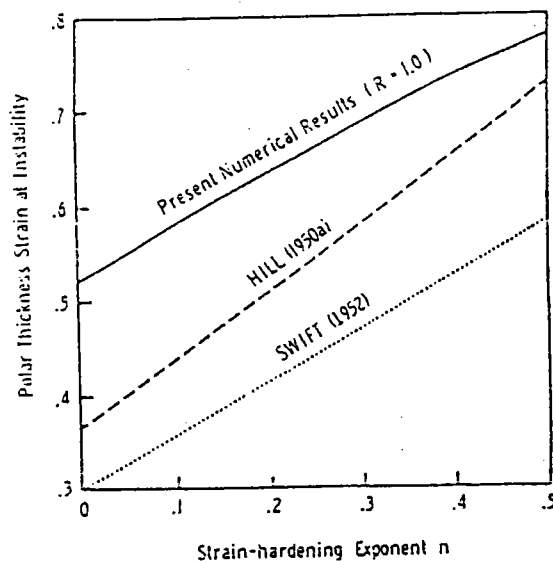
- Comparaison des résultats de Wang et Shammamy avec d'autres résultats théoriques

Hill [8] a pu obtenir (voir § B-I-3) une expression approchée qui relie la déformation en épaisseur au pôle à l'instabilité,  $\epsilon_h^*$ , à l'exposant d'écrouissage  $n$  :

$$\epsilon_h^* = \frac{4}{11} (1 + 2n)$$

Swift (1952) a d'autre part établi un critère sur l'instabilité de la déformation plastique en contrainte plane. En appliquant ce critère au cas du gonflement hydraulique, Swift a obtenu pour une courbe contrainte-déformation uniaxiale obéissant à la loi  $\bar{\sigma} = K \bar{\epsilon}^n$ , une expression approchée de  $\epsilon_h^*$  :

$$\epsilon_h^* = -\frac{1}{2} \left[ \frac{33}{10} + n - \left( \frac{729}{100} - \frac{3}{5}n + n^2 \right)^{1/2} \right] \quad (\text{B-I-27})$$



**Fig. B-I-17 :** Distribution de la déformation en épaisseur, à l'instabilité, en fonction de l'exposant d'écrouissage  $n$

— résultats numériques de Wang et Shammamy [16]

- - - - résultats numériques de Hill (1950)

..... résultats numériques de Swift (1952)

(d'après Wang et Shammamy [16])

La figure B-I-17 montre les résultats obtenus avec les deux expressions ci-dessus de la déformation en épaisseur, au pôle, à l'instabilité, et les résultats numériques obtenus par Wang et Shammamy. Cette figure montre que les analyses de Hill, et surtout de Swift, sous-estiment gravement la déformation en épaisseur au pôle à l'instabilité. Avec notre modélisation, nous retrouverons pratiquement les mêmes résultats que ceux obtenus par Wang et Shammamy (voir fig. B-III-14, chap. B-III).

### B-I-4-3 - Analyse d'Ilahi *et al.*

Ilahi *et al.* [6] ont développé une méthode de résolution du problème du gonflement hydraulique d'un diaphragme circulaire et ils l'ont appliquée au cas de l'aluminium recuit. Les résultats obtenus sont en bonne corrélation avec les résultats expérimentaux réalisés par ces mêmes auteurs. Ils ont montré que le choix d'une surface de charge décrite par le nouveau critère de Hill donne des résultats satisfaisants.

Pour décrire les caractéristiques d'érouissage du matériau, ces auteurs ont utilisé la loi d'Hollomon :  $\bar{\sigma} = K \bar{\epsilon}^n$ , où  $\bar{\sigma}$  et  $\bar{\epsilon}$  désignent respectivement la contrainte équivalente et la déformation équivalente et K et n sont des constantes du matériau. D'autre part, le critère de Hill (1979) sur lequel ils se sont basés dans leur analyse a pour expression :

$$2(1+R)\sigma_u^M = (1+2R)|\sigma_\theta - \sigma_s|^M + |\sigma_\theta + \sigma_s|^M \quad (\text{B-I-28})$$

où  $\sigma_u$  est la contrainte d'écoulement en traction uniaxiale et M est un exposant  $\geq 1$ , R est le coefficient d'anisotropie et  $\sigma_s$  et  $\sigma_\theta$  sont respectivement les contraintes radiale et circonférentielle.

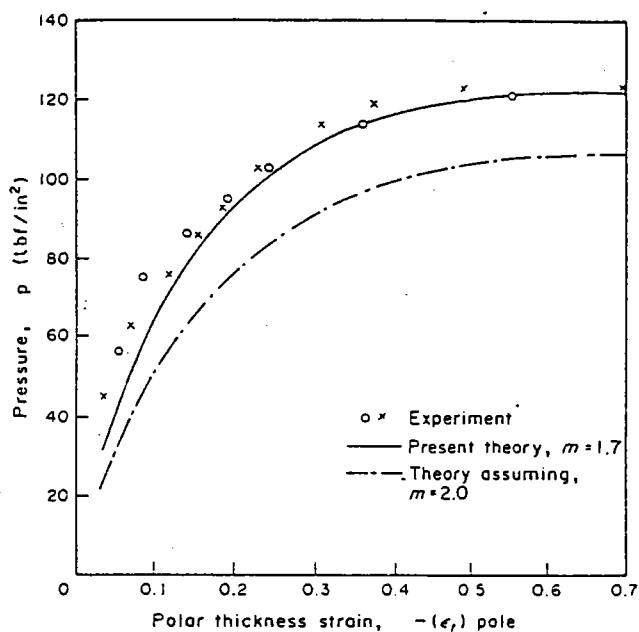
#### - Résultats expérimentaux

Ilahi *et al.* ont utilisé une matrice de 10 in de diamètre et une tôle d'épaisseur initiale 0.035 in, ce qui justifie l'utilisation dans les calculs de l'hypothèse de membrane avec une bonne approximation. Sur le plan expérimental, ce grand diamètre a rendu plus faciles les mesures de la géométrie du diaphragme et de la distribution des déformations. Pour mesurer les déformations circonférentielles, Ilahi *et al.* ont utilisé des cercles gravés sur la tôle par procédé photographique. Les déformations en épaisseur ont été aussi mesurées directement, grâce à un système de jauges. Deux séries de résultats expérimentaux sur la pression, la hauteur au pôle, la déformation en épaisseur au pôle et le rayon de courbure au pôle, sont présentées sur les figures B-I-18 à B-I-20.

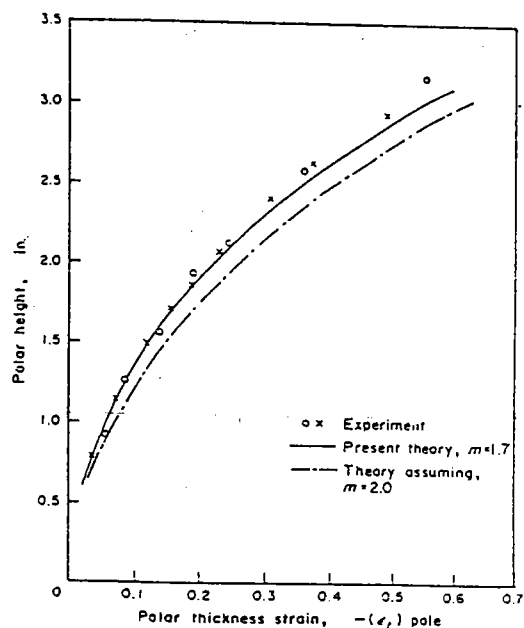
#### Résultats théoriques et comparaison avec l'expérience

L'évolution de la pression calculée, avec  $M = 1.7$  et  $M = 2$ , est présentée sur la figure B-I-18 pour être comparée aux résultats expérimentaux. Les valeurs de pression calculées sont plus fortes avec  $M = 1.7$  ce qui s'explique par le fait que les contraintes obtenues avec cette valeur sont plus fortes, dans le domaine compris entre la déformation plane et la déformation équi-biaxiale, que celles résultant du critère quadratique de Hill ( $M = 2$ ). Ce choix de surface d'écoulement est cohérent avec les résultats expérimentaux [6] qui montrent que le critère quadratique de Hill sous-estime les

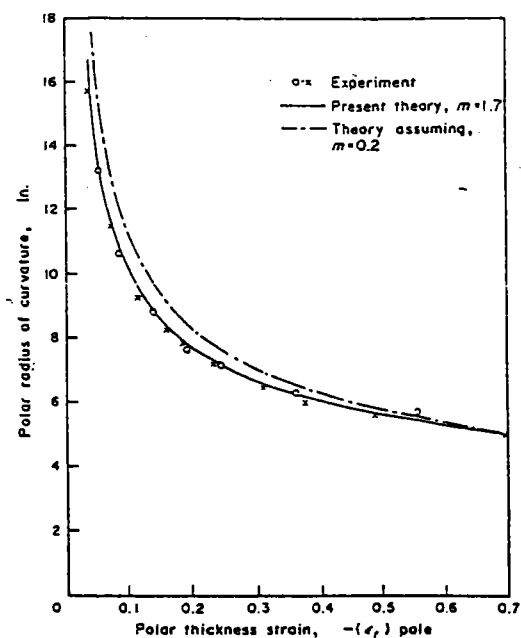




**Fig. B-I-18 :** Variation de la pression en fonction de la déformation en épaisseur au pôle. Aluminium :  $n = 0.269$  et  $R = 0.635$  (d'après Ilahi et al. [6])



**Fig. B-I-19 :** Variation de la hauteur au pôle en fonction de la déformation en épaisseur au pôle. Aluminium :  $n = 0.269$  et  $R = 0.635$  (d'après Ilahi et al. [6])



**Fig. B-I-20 :** Variation de la courbure en fonction de la déformation en épaisseur au pôle. Aluminium :  $n = 0.269$  et  $R = 0.635$  (d'après Ilahi et al. [6])

contraintes en déformation équi-biaxiale. La figure B-I-19 montre la relation entre la hauteur et la déformation en épaisseur au pôle. L'accord entre les résultats expérimentaux et théoriques est satisfaisant avec  $M = 1.7$  et on voit que, pour une hauteur au pôle donnée, le calcul avec  $M = 2$  prévoit un amincissement plus fort au pôle de la membrane. Les courbes, décrivant la variation du rayon de courbure au pôle en fonction de la déformation en épaisseur au pôle, sont présentées sur la fig. B-I-20. Il est clair qu'il y a une bonne corrélation entre l'expérience et le calcul théorique avec  $M = 1.7$ . D'autre part, pour de grandes déformations, lorsque le rayon de courbure au pôle devient presque égal au rayon de la tôle, l'écart entre les deux courbes théoriques devient très réduit.

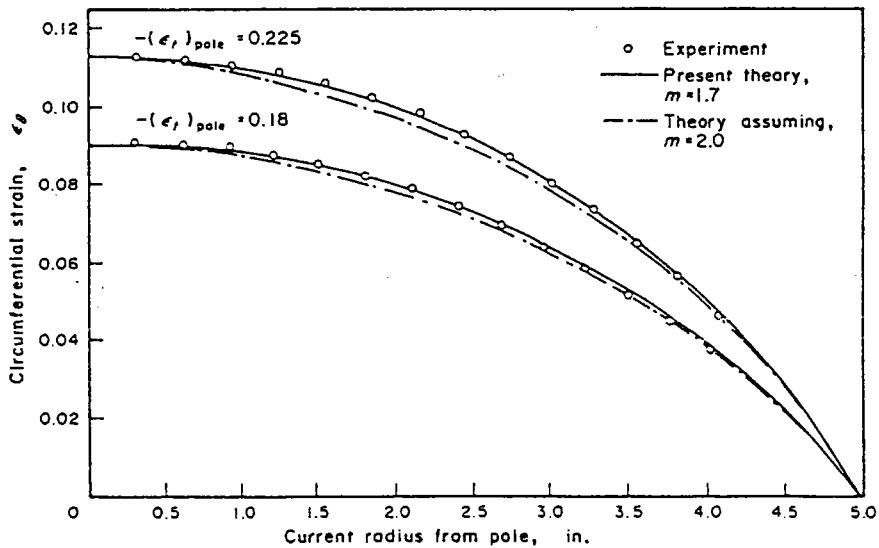


Fig. B-I-21 : Distribution de la déformation circonférentielle. Aluminium :  $n = 0.269$  et  $R = 0.635$  (d'après Ilahi et al. [6])

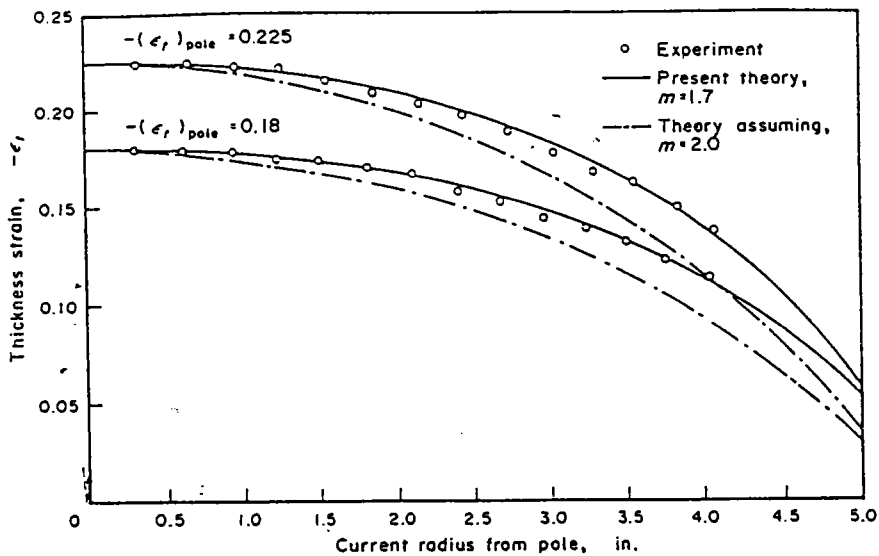


Fig. B-I-22 : Distribution de la déformation en épaisseur. Aluminium :  $n = 0.269$  et  $R = 0.635$  (d'après Ilahi et al. [6])

Les figures B-I-21 et B-I-22 montrent, respectivement, les distributions des déformations circonférentielles et des déformations en épaisseur, pour deux stades de la déformation :  $\epsilon_h(o) = 0.18$  et  $\epsilon_h(o) = 0.225$ . La comparaison entre les résultats théoriques et expérimentaux est établie à la même déformation en épaisseur. On constate qu'il y a une bonne corrélation entre la théorie et l'expérience concernant la distribution des déformations circonférentielles (fig. B-I-21) et il apparaît que la déformation circonférentielle est imposée par la géométrie du processus de gonflement et ne dépend pratiquement pas de la surface d'écoulement adoptée. Par contre, la fig. B-I-22 montre que la distribution de la déformation en épaisseur dépend beaucoup de la surface choisie.

#### B-I-4-4 - Analyse de Zhou et Lian

Zhou et Lian [21] ont introduit quatre formes différentes du nouveau critère de Hill (1979) dans leurs calculs basés sur la méthode des éléments finis. Ces calculs ont porté sur un matériau rigide-plastique obéissant à une loi d'écroutissement du type :  $\bar{\sigma} = K \bar{\epsilon}^n$  où  $\bar{\sigma}$  et  $\bar{\epsilon}$  sont respectivement la contrainte équivalente et la déformation équivalente et K et n sont des constantes du matériau.

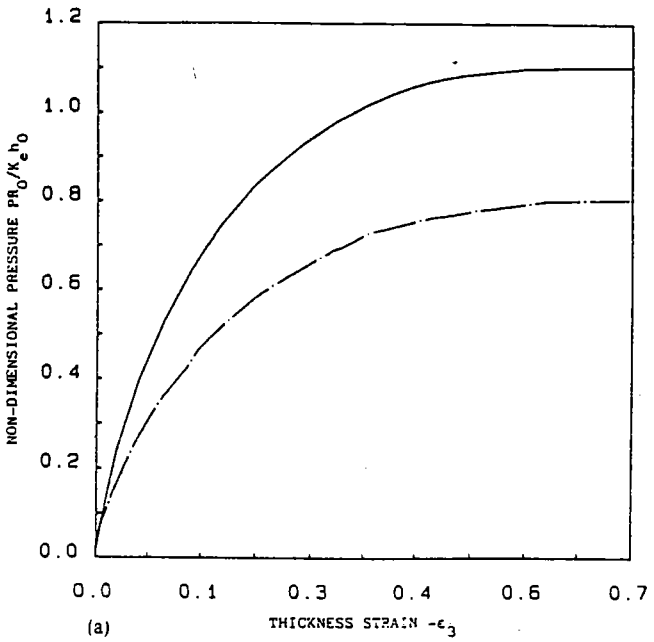
Des comparaisons entre les résultats numériques et expérimentaux ont montré que certaines formes du nouveau critère de Hill permettent de bien simuler le processus du gonflement hydraulique des tôles métalliques. Une étude numérique de l'influence de la forme de la surface utilisée sur la déformation a été aussi effectuée. Ils ont trouvé que cette influence peut être analysée par deux paramètres caractéristiques,  $\alpha$  et  $\beta$  dont l'expression est donnée plus loin.

Pour examiner la validité de leur formulation, Zhou et Lian ont comparé leurs résultats numériques aux résultats expérimentaux et théoriques d'Ilahi *et al.* [6] sur l'aluminium recuit. Les résultats obtenus sont proches de l'expérience et en bon accord avec ceux d'Ilahi *et al.* [21].

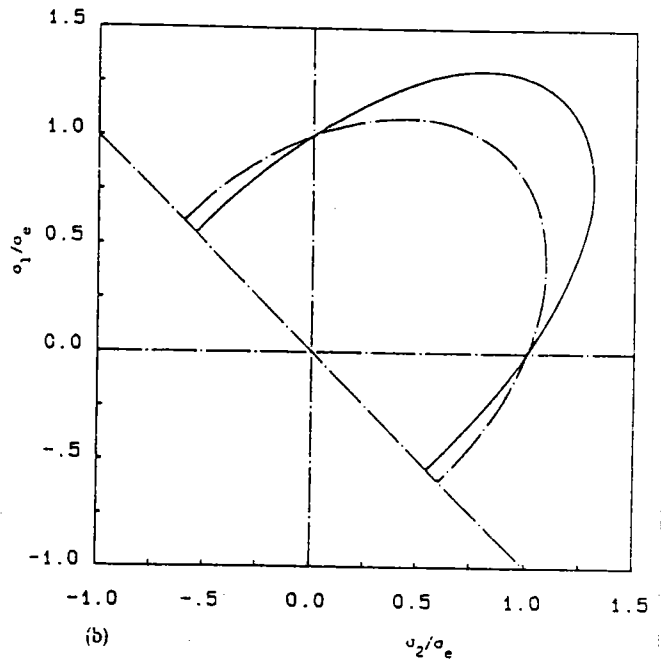
#### - Influence de la forme de la surface de charge sur la pression

Les différences entre les diverses formes du critère de Hill sont si variées qu'il est difficile de décrire l'influence de la forme de la surface de charge sur le gonflement d'une tôle d'une façon complète et précise. Cependant, Zhou et Lian ont trouvé un moyen simple pour étudier cette influence, grâce au paramètre  $\alpha = \sigma_b / \sigma_u$  qui leur permet d'exprimer les caractéristiques géométriques de la forme de la surface de charge.  $\sigma_b$  et  $\sigma_u$  sont respectivement les contraintes d'écoulement en déformation équibiaxiale et en traction uniaxiale.

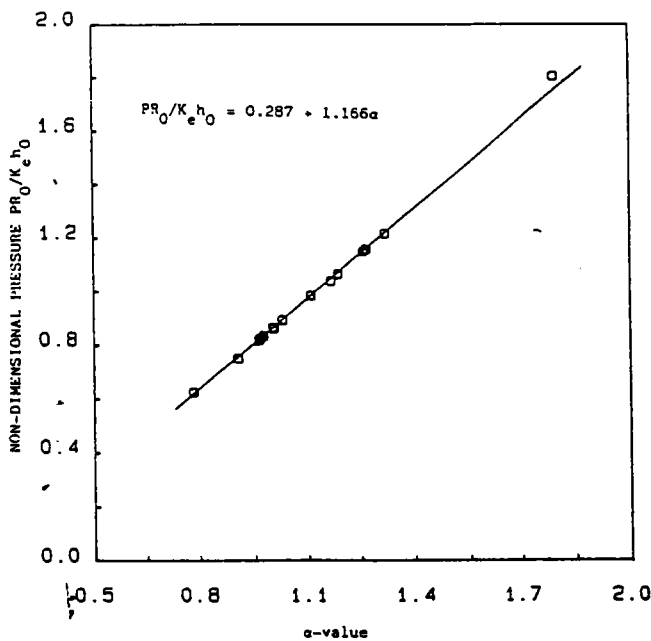
La fig. B-I-23(a) montre la variation de la pression adimensionnelle en fonction de la déformation en épaisseur, et ce pour deux valeurs du paramètre  $\alpha$  :  $\alpha = 1.166$  et  $\alpha = 0.904$ . La fig. B-I-23(b) montre les deux surfaces de charge correspondant aux deux valeurs de  $\alpha$ . On peut voir qu'une pression élevée est nécessaire pour assurer le gonflement du matériau correspondant à une grande valeur du paramètre  $\alpha$ .



**Fig. B-I-23(a) :** Variation de la pression adimensionnelle en fonction de la déformation en épaisseur  
 —  $\alpha = 1.166$   
 - -  $\alpha = 0.904$   
 (d'après Zhou et Lian [21])



**Fig. B-I-23(b) :** Surfaces de charge relatives aux deux valeurs de  $\alpha$  (d'après Zhou et Lian [21])



**Fig. B-I-24 :** Variation de la pression adimensionnelle en fonction de  $\alpha$  à une hauteur au pôle  $H = 0.5 a$  (d'après Zhou et Lian [21])

La fig. B-I-24 montre qu'il y a une relation pratiquement linéaire entre la pression adimensionnelle et le paramètre  $\alpha$ , et ce pour différentes formes du critère de Hill (avec différentes valeurs de M et différentes valeurs de R). La relation de linéarité entre la pression et le paramètre  $\alpha$  a été établie à une hauteur au pôle  $H = 0.5 a$ .

- Influence de la forme de la surface de charge sur la distribution de la déformation

Afin de décrire l'influence de la forme de la surface de charge sur la distribution des déformations, Zhou et Lian ont introduit un autre paramètre qui représente les caractéristiques géométriques de la forme de la surface de charge. Ce paramètre est défini par :

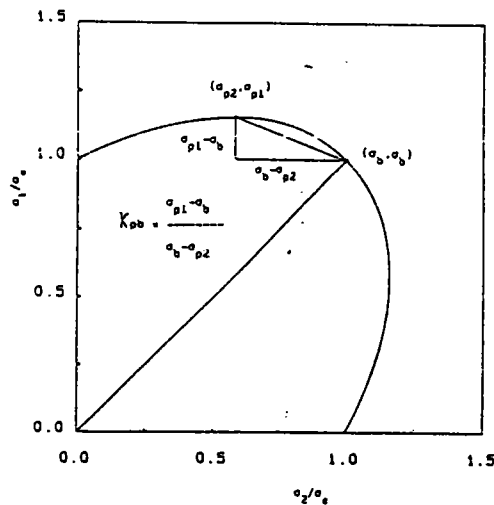
$$\beta = K_{pb} / \alpha \quad (\text{B-I-29})$$

avec

$$K_{pb} = \frac{\sigma_{p1} - \sigma_b}{\sigma_b - \sigma_{p2}} \quad (\text{B-I-30})$$

où  $\sigma_{p1}$  et  $\sigma_{p2}$  sont respectivement la plus grande et la plus petite contrainte d'écoulement en déformation plane et  $\sigma_b$  est la contrainte d'écoulement en déformation équi-biaxiale.

La signification géométrique de  $K_{pb}$  est qu'il représente la "pente moyenne" entre le point de la déformation plane et le point de la déformation équi-biaxiale sur la surface de charge, comme cela est montré sur la fig. B-I-25.



**Fig. B-I-25** : Diagramme schématique permettant la détermination du paramètre  $K_{pb}$  (d'après Zhou et Lian [21])

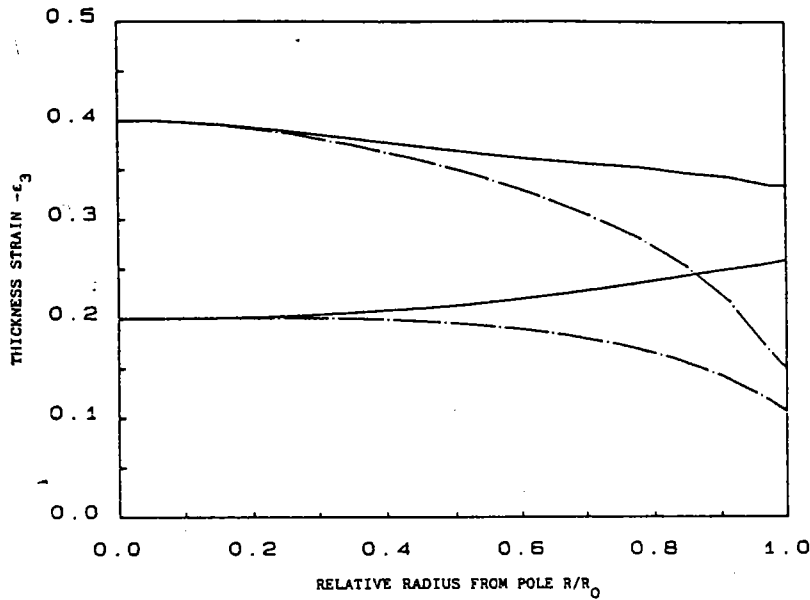


Fig. B-I-26(a) : Distribution de la déformation en épaisseur relativement à deux valeurs de  $\beta$  :  
 —  $\beta = 0.1068$   
 - -  $\beta = 0.2873$  (d'après Zhou et Lian [21])

La figure B-I-26(a) montre la distribution de la déformation en épaisseur pour deux valeurs :  $\epsilon_h^{\text{pôle}} = -0.4$  et  $\epsilon_h^{\text{pôle}} = -0.2$  et ce pour deux valeurs du paramètre  $\beta$  :  $\beta = 0.1068$  et  $\beta = 0.2873$ . Par ailleurs la figure B-I-26(b) montre les surfaces de charge et les surfaces des vitesses de déformation correspondant aux deux valeurs de  $\beta$ .

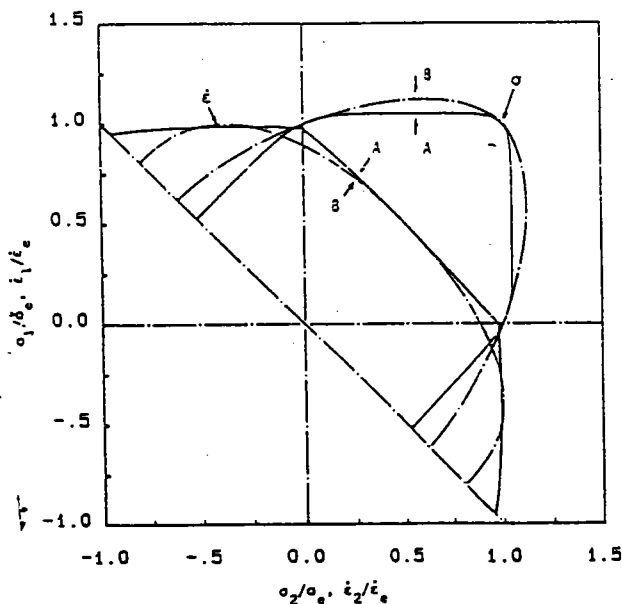


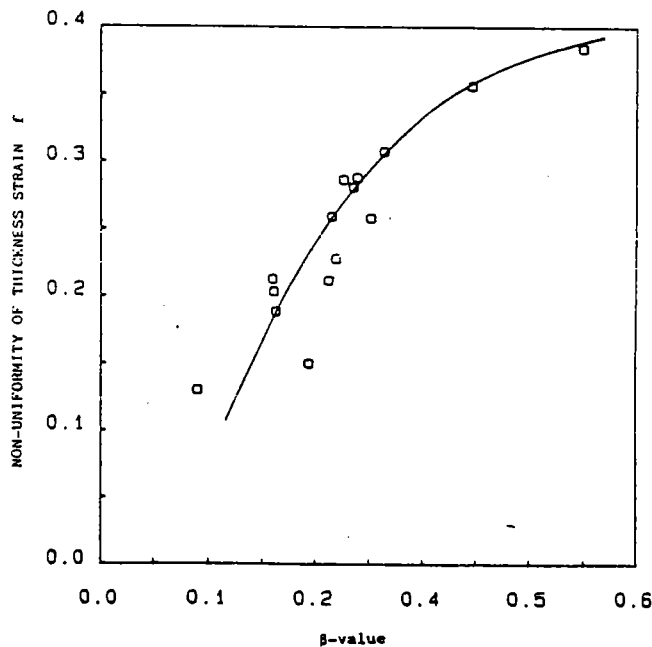
Fig. B-I-26(b) : Surfaces de charge et surfaces des vitesses de déformation relativement à  $\beta_A = 0.1068$  et  $\beta_B = 0.2873$  (d'après Zhou et Lian [21])

Il est évident que la surface de charge à petite valeur du paramètre  $\beta$  ( $\beta = 0.1068$ ) produit une distribution de la déformation en épaisseur plus homogène.

Pour décrire l'inhomogénéité de la déformation en épaisseur, Zhou et Lian proposent l'introduction d'un troisième paramètre qui est :

$$f = \frac{\epsilon_h^{\text{pôle}} - \epsilon_h^{\text{périphérie}}}{\epsilon_h^{\text{pôle}} + \epsilon_h^{\text{périphérie}}} \quad (\text{B-I-31})$$

où  $\epsilon_h^{\text{pôle}}$  et  $\epsilon_h^{\text{périphérie}}$  désignent respectivement la déformation en épaisseur au pôle et à la périphérie. En introduisant ce paramètre, l'influence de la forme de la surface de charge sur l'homogénéité de la déformation en termes de  $\beta$  et  $f$  peut être observée sur la fig. B-I-27 où la hauteur au pôle a été choisie égale à  $H = 0.5 a$ .



**Fig. B-I-27** : Inhomogénéité de la distribution de la déformation en épaisseur  
(d'après Zhou et Lian [21])

La figure B-I-27 montre que l'inhomogénéité de la déformation croît lorsque  $\beta$  croît. Si on se réfère aux figs. B-I-25 à B-I-27, il est clair que la valeur de  $\beta$  a une influence éminente sur la distribution de la déformation. Cependant, la dispersion des résultats, visible sur la fig. B-I-27, laisse penser qu'une description plus détaillée de la surface de charge est nécessaire pour caractériser la distribution de la déformation.

## CHAPITRE B-II

### FORMULATION ANALYTIQUE DU GONFLEMENT HYDRAULIQUE

#### B-II-1 - Introduction

Ce chapitre a pour objet de mettre au point un calcul par différences finies du gonflement hydraulique d'une tôle. Nous nous limitons ici à un comportement à isotropie planaire du matériau, ainsi qu'au cas d'une matrice circulaire, de sorte que la tôle déformée reste axisymétrique. L'approximation de membrane sera utilisée dans les calculs : on sait que cette approximation est correcte pour un rayon du flan  $a \gg h^0$ . Enfin, la représentation polaire de la surface de charge proposée par Budiansky [29] sera utilisée, afin de pouvoir étudier de façon détaillée l'influence de la forme de cette surface.

L'introduction d'une surface de charge dont la forme n'est pas fixée a priori constitue l'élément nouveau de notre formulation par rapport aux études antérieures. De plus peu de résultats sont présentés dans la littérature concernant l'influence de la viscosité, qui est prise en compte dans notre modélisation.

#### B-II-2 - Equations de base d'un processus de formage axisymétrique

La formulation analytique du problème de gonflement hydraulique que nous présentons ici est applicable à un matériau rigide-viscoplastique qui a un comportement à isotropie planaire et qui obéit à la théorie de l'écoulement avec écrouissage isotrope. Les relations de base proposées par Budiansky [29] dans sa formulation générale de l'écrouissage isotrope (1982, 1984) sont utilisées ici. Nous rappelons que cette formulation s'appuie sur une représentation polaire de la surface d'écoulement (fig. B-II-1).

Pour un état de contraintes planes, cette surface est décrite sous forme paramétrique par :

$$\begin{cases} \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\sigma_b} = g(\psi) \cos \psi \\ \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\sigma_s} = g(\psi) \sin \psi \end{cases} \quad (\text{B-II-1})$$



où  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont les deux contraintes principales non nulles et  $g(\psi)$  est une fonction représentant le rayon polaire du point courant de la surface de charge normalisée. Les paramètres de normalisation  $\sigma_b$  et  $\sigma_s$  sont respectivement les contraintes d'écoulement en traction équibiaxiale et en cisaillement et  $\psi$  est l'angle polaire associé avec :

$$g(0) = g\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) = 1$$

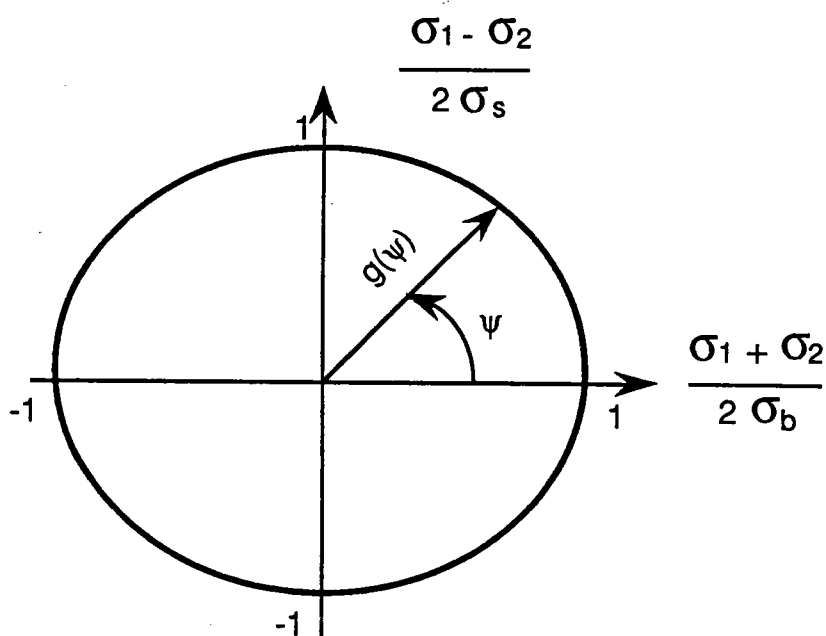


Fig. B-II-1: Représentation polaire du lieu d'écoulement plastique suivant la formulation de Budiansky

On montre, à partir des équations (B-II-1), que l'angle polaire  $\psi$  est lié au rapport des contraintes principales  $\alpha = \sigma_2/\sigma_1$  par :

$$\operatorname{tg} \psi = Y \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \quad (\text{B-II-2})$$

avec

$$Y = \sigma_b/\sigma_s \quad (\text{B-II-3})$$

Le rapport des vitesses de déformation  $\rho = \dot{\epsilon}_2/\dot{\epsilon}_1$ , obtenu à partir de la loi de normalité, peut être exprimé par :

$$\rho = \frac{g' (\sin \psi + Y \cos \psi) + g (\cos \psi - Y \sin \psi)}{g' (\sin \psi - Y \cos \psi) + g (\cos \psi + Y \sin \psi)} \quad (\text{B-II-4})$$

La contrainte d'écoulement en traction uniaxiale  $\sigma_u$  est choisie pour jouer le rôle de la contrainte équivalente  $\bar{\sigma}$ , alors :

$$\bar{\sigma} = \frac{Y \sigma_1}{X g (\sin \psi + Y \cos \psi)} \quad (\text{B-II-5})$$

avec

$$X = \sigma_v/\sigma_u \quad (\text{B-II-6})$$

La vitesse de déformation plastique équivalente est obtenue à partir du calcul de la puissance plastique :

$$\dot{\bar{\epsilon}} = \frac{2 X g^2 \dot{\epsilon}_1}{g' (\sin \psi - Y \cos \psi) + g (\cos \psi + Y \sin \psi)} \quad (\text{B-II-7})$$

Les relations ci-dessus fournissent une description générale du comportement à isotropie planaire. Pour  $g(\psi) = 1$  elles se réduisent à celles qu'on applique dans le cas du critère quadratique de Hill (avec  $X = \sqrt{(1+R)/2}$  et  $Y = \sqrt{1+2R}$  où  $R$  est le coefficient d'anisotropie défini comme étant le rapport entre les déformations en largeur et en épaisseur dans un essai de traction simple) ou celui de Von-Mises (avec  $X = 1$  et  $Y = \sqrt{3}$ ). Les fonctions non quadratiques proposées par Hill [30] et par Bassani [31] représentent aussi des cas particuliers de la formulation de Budiansky.

Nous supposons que le matériau a un comportement rigide-viscoplastique. La capacité d'écroutissage et la sensibilité à la vitesse de déformation plastique sont décrites en utilisant une relation entre la contrainte, la déformation et la vitesse de déformation équivalentes du type :

$$\bar{\sigma} = f(\bar{\epsilon}) (\dot{\bar{\epsilon}}/\dot{\epsilon}_0)^m \quad (\text{B-II-8})$$

soit, sous forme différentielle :

$$d \ln \bar{\sigma} = \gamma(\bar{\epsilon}) d\bar{\epsilon} + m d \ln \dot{\bar{\epsilon}} \quad (\text{B-II-9})$$

où  $\dot{\epsilon}_0$  représente une vitesse de déformation de référence,  $f(\dot{\epsilon})$  est la loi d'écouissage à  $\dot{\epsilon}_0$ ,  $\gamma(\dot{\epsilon}) = (1/f)(df/d\dot{\epsilon})$  est le coefficient d'écouissage et  $m$  est le coefficient de sensibilité à la vitesse de déformation.

### B-II-3 - Déformations

Une tôle mince circulaire de rayon  $a$  et d'épaisseur initiale  $h^0$ , bloquée à sa périphérie entre une matrice et un serre-flan, est soumise sur l'une de ses faces à une pression normale et des forces méridiennes (forces de frottement). La géométrie du diaphragme déformé, dans un plan méridien, est donnée par la figure B-II-2.

Les déformations logarithmiques, méridienne et circonférentielle, sont respectivement :

$$\epsilon_s = \ln(ds/ds^0) \quad (\text{B-II-10})$$

et

$$\epsilon_\theta = \ln(r/r^0) \quad (\text{B-II-11})$$

où  $ds$  et  $ds^0$  sont les longueurs d'un tronçon du profil méridien dans la configuration déformée et la configuration non déformée et  $r$  et  $r^0$  sont les positions radiales d'une particule donnée dans les deux configurations, déformée et non déformée.

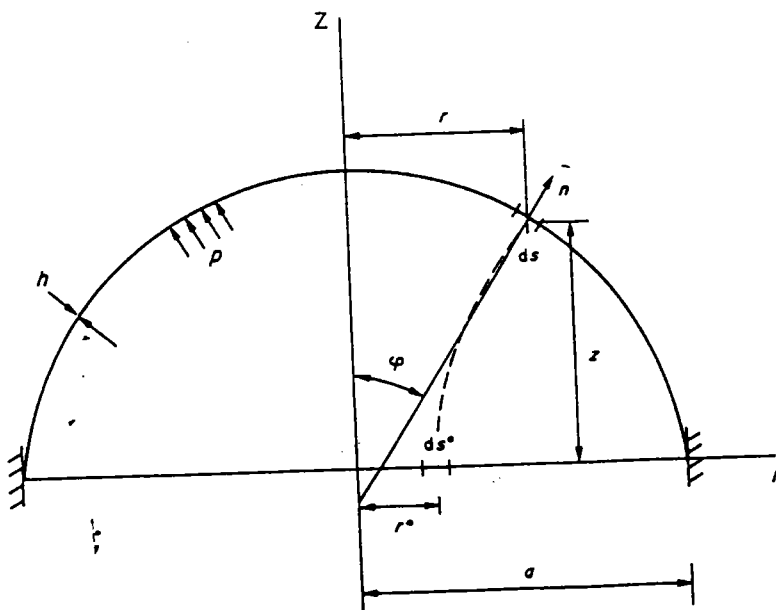


Fig. B-II-2 : Géométrie du diaphragme déformé dans un plan méridien

L'épaisseur courante de la tôle est obtenue, à tout instant, à partir de la condition de l'incompressibilité plastique :

$$h = h^0 r^0 ds^0 / r ds \quad (\text{B-II-12})$$

#### B-II-4 - Rayons de courbure

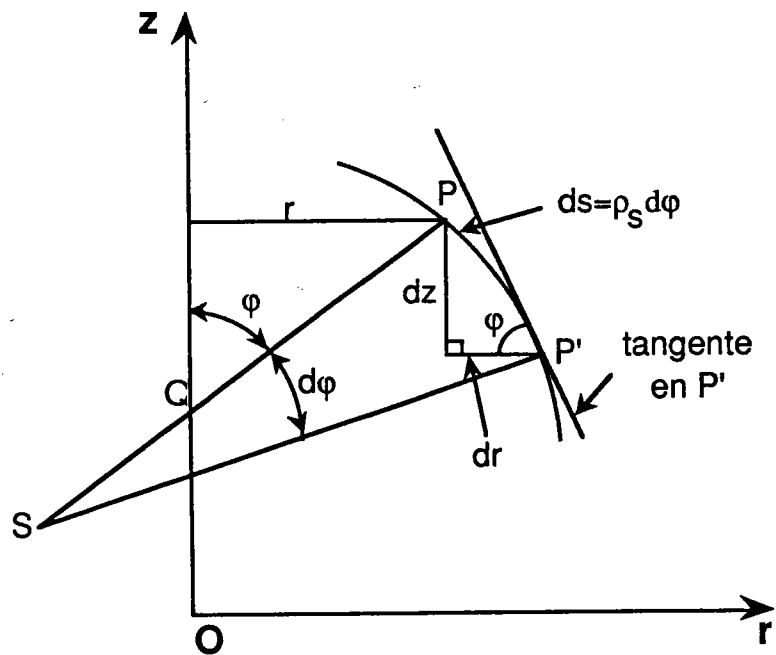


Fig. B-II-3 : Rayons de courbure principaux

Les deux rayons de courbure principaux sont donnés par :

$$\rho_s = \overline{PS} = \frac{\partial s}{\partial \varphi} \quad (\text{B-II-13})$$

et

$$\rho_\theta = \overline{PQ} = \frac{r}{\sin \varphi} \quad (\text{B-II-14})$$

où  $\varphi$  est l'angle que fait la normale en tout point du diaphragme avec l'axe de révolution oz (fig. B-II-3).

### B-II-5 - Equations d'équilibre

Les contraintes méridiennes et circonférentielles de Cauchy  $\sigma_s$  et  $\sigma_\theta$  respectent les équations d'équilibre dans les deux directions, méridienne et circonférentielle, respectivement :

$$\frac{P_s}{\cos \varphi} + \frac{\partial}{\partial r} (h \sigma_s) + h \frac{\sigma_s - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (\text{B-II-15})$$

et

$$\frac{P_N}{h} - \frac{\sigma_s}{\rho_s} - \frac{\sigma_\theta}{\rho_\theta} = 0 \quad (\text{B-II-16})$$

où  $P_N$  et  $P_s$  désignent respectivement les forces normale et méridienne (de frottement) par unité de surface du diaphragme déformé.

### B-II-6 - Processus du gonflement hydraulique

Dans le cas particulier d'une pression hydrostatique  $P$  (c'est-à-dire, avec  $P_N = P(t)$  et  $P_s = 0$ ), l'équation (B-II-15) est avantageusement remplacée par l'équilibre des forces verticales, ce qui donne :

$$\sigma_s = \frac{P \rho_\theta}{2h} \quad (\text{B-II-17})$$

En remplaçant l'expression de  $\sigma_s$  ci-dessus dans l'équation (B-II-16) on obtient :

$$\sigma_\theta = \frac{P \rho_\theta}{2h} (2 - N) \quad (\text{B-II-18})$$

où  $N = \rho_\theta / \rho_s$  est le rapport des rayons de courbure principaux. Ainsi le rapport des contraintes  $\alpha = \sigma_\theta / \sigma_s$  ne dépend que du rapport des rayons de courbure ; en effet, d'après (B-II-17) et (B-II-18) on a :

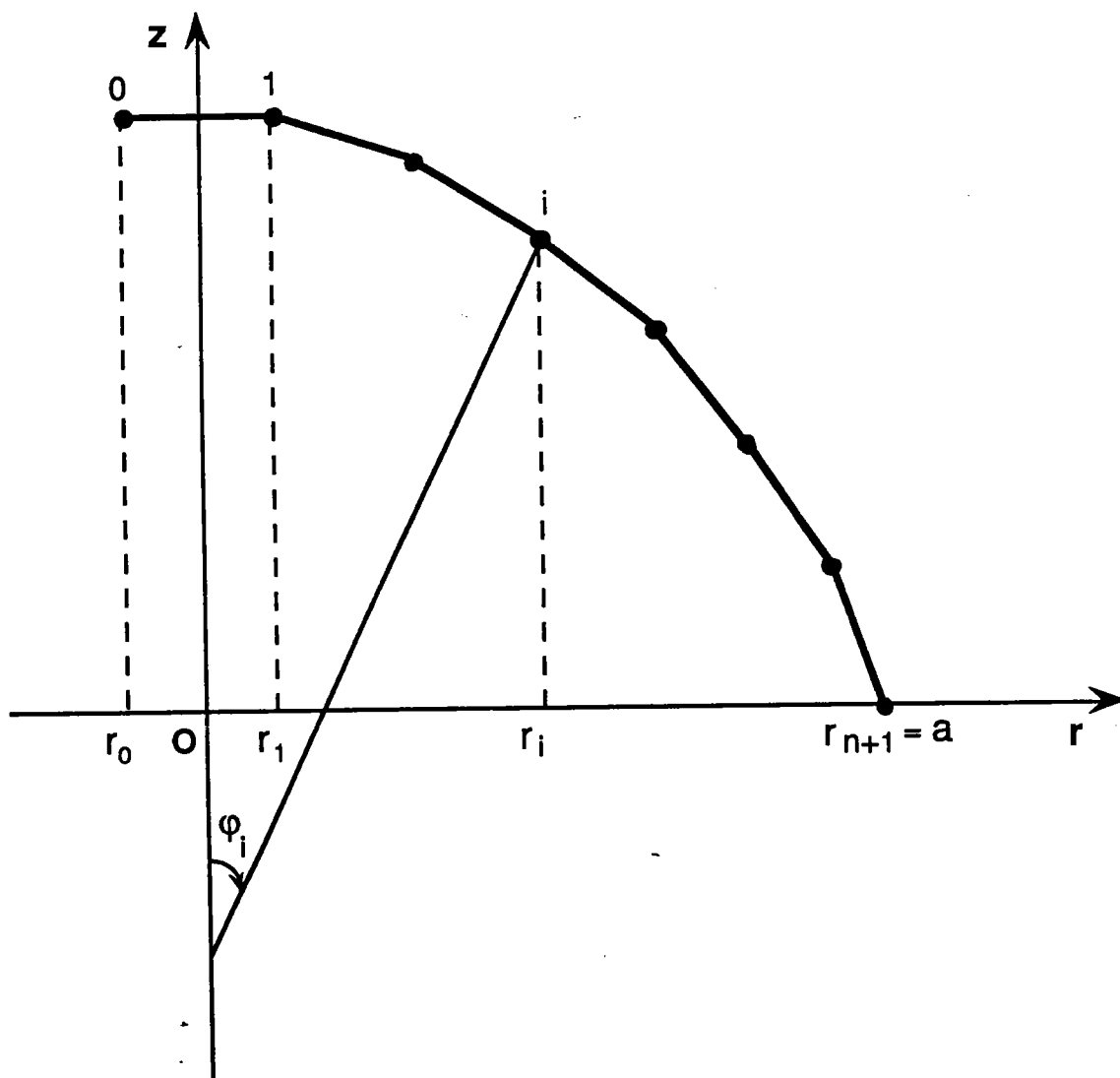
$$\alpha = 2 - N \quad (\text{B-II-19})$$

Supposons, maintenant, que les vecteurs position  $\langle r_i, z_i \rangle$  d'un certain nombre de particules, ou noeuds, qui occupaient initialement la position  $\langle r_i^0, z_i^0 \rangle$ , sont connus à un stade donné du calcul. Alors, les valeurs de  $\epsilon_{si}$ ,  $\epsilon_{\theta i}$ ,  $h_i$ ,  $\rho_{si}$  et  $\rho_{\theta i}$  sont déterminées à cet instant par une discrétisation des équations (B-II-10 à B-II-14). Si, en plus, la pression  $P$  est connue, alors les valeurs de  $\sigma_{si}$ ,  $\sigma_{\theta i}$  et  $\alpha_i$  peuvent être déterminées facilement à partir des relations (B-II-17 à B-II-19).

Les équations de base du paragraphe (B-II-3) peuvent être utilisées (en prenant comme directions 1 et 2, les directions méridienne et circonférentielle respectivement) pour déterminer :

- l'angle polaire  $\psi_i$  (équ. B-II-2)
- le rapport des vitesses de déformation  $\rho_i$  (équ. B-II-4)
- et la contrainte équivalente  $\bar{\sigma}_i$  (équ. B-II-5).

Le profil de la membrane est discrétisé par  $(n + 2)$  noeuds (fig. B-II-4).



**Fig. B-II-4** : Discrétisation du profil de la membrane

Le noeud 0 est symétrique du noeud 1, par rapport à l'axe de révolution oz, ainsi :

$$r_0^o = -r_1^o \quad ; \quad z_0^o = z_1^o \quad ; \quad r_0 = -r_1 \quad \text{et} \quad z_0 = z_1 \quad \text{par symétrie.}$$

Le noeud (n + 1) situé sur la périphérie est bloqué, ce qui donne :

$$r_{n+1}^o = r_{n+1} = a \quad \text{et} \quad z_{n+1}^o = z_{n+1} = 0$$

Remarques :

- Toutes les quantités définies ci-dessus sont calculées pour les noeuds  $i = 1, n$ .
- Afin d'éviter d'avoir des valeurs infinies de  $\rho_s$  et  $\rho_\theta$ , nous avons supposé que la forme initiale de la membrane est sphérique, avec une grande valeur du rayon de courbure initial :

$$\rho_s(o) / a = \rho_\theta(o) / a = 100$$

### B-II-7 - Calcul incrémental

Le but du calcul incrémental est de déterminer les incréments de déplacement  $\langle \Delta r_i, \Delta z_i \rangle$  pendant l'intervalle de temps  $\Delta t$ , ou pour l'incrément de pression  $\Delta P$ . Par conséquent, la forme de la membrane et toutes les autres quantités (à savoir  $\epsilon_{si}, \epsilon_{\theta i}, h_i, \rho_{si}, \rho_{\theta i}, \sigma_{si}, \sigma_{\theta i}$  et  $\alpha_i$ ) seront déterminées à l'instant  $t + \Delta t$  ou pour  $P + \Delta P$ .

Après quelques dérivations analytiques (voir Annexe B), les incréments  $\Delta \epsilon_{si}; \Delta \epsilon_{\theta i}; (\Delta \rho_{si} / \rho_{si}); (\Delta \rho_{\theta i} / \rho_{\theta i})$  et  $(\Delta h_i / h_i)$  peuvent être exprimés en fonction des incréments de déplacement  $\Delta r_j$  et  $\Delta z_j$  ( $j = i-1, i, i+1$ ).

Un premier groupe d'équations est imposé par la loi de normalité,  $\rho_i = \Delta \epsilon_{\theta i} / \Delta \epsilon_{si}$ . Le résultat est de la forme :

$$\sum_{j=i-1}^{i+1} (a_{ij} \Delta r_j + b_{ij} \Delta z_j) = 0 \quad (\text{B-II-20})$$

Un deuxième groupe d'équations est obtenu, en exprimant de deux façons l'incrément de la contrainte équivalente,

D'abord, l'équation (B-II-5) donne après différentiation (avec  $\sigma_1 = \sigma_s$ ) :

$$\frac{\Delta \bar{\sigma}_i}{\bar{\sigma}_i} = \frac{\Delta \sigma_{s_i}}{\sigma_{s_i}} - \frac{g_i (\sin \psi_i + Y \cos \psi_i) + g_i (\cos \psi_i - Y \sin \psi_i)}{g_i (\sin \psi_i + Y \cos \psi_i)} \Delta \psi_i \quad (\text{B-II-21})$$

où  $\Delta \sigma_{s_i}/\sigma_{s_i}$  peut être calculé à partir de l'équation (B-II-17), ce qui donne :

$$\frac{\Delta \sigma_{s_i}}{\sigma_{s_i}} = (\Delta P/P) + (\Delta \rho_{\theta_i}/\rho_{\theta_i}) - (\Delta h_i/h_i) \quad (\text{B-II-22})$$

D'autre part,  $\Delta \psi_i$  peut être exprimée en fonction de  $\Delta \alpha_i$ , par différentiation de l'équation (B-II-2) :

$$\Delta \psi_i = -2 \sin \psi_i \cos \psi_i [\Delta \alpha_i / (1 - \alpha_i^2)] \quad (\text{B-II-23})$$

Soit en fonction des incréments des rayons de courbure principaux, par différentiation de l'équation (B-II-19) :

$$\Delta \alpha_i = (\rho_{\theta_i}/\rho_{s_i}) [(\Delta \rho_{s_i}/\rho_{s_i}) - (\Delta \rho_{\theta_i}/\rho_{\theta_i})] \quad (\text{B-II-24})$$

Puisque  $(\Delta \rho_{s_i}/\rho_{s_i})$ ,  $(\Delta \rho_{\theta_i}/\rho_{\theta_i})$  et  $(\Delta h_i/h_i)$  sont connus en fonction de  $\Delta r_j$  et  $\Delta z_j$ , l'incrément  $(\Delta \bar{\sigma}_i/\bar{\sigma}_i)$  peut être exprimé en fonction de  $\Delta r_j$ ,  $\Delta z_j$  et  $(\Delta P/P)$  en combinant les équations (B-II-21 à B-II-24).

Une autre expression de  $(\Delta \bar{\sigma}_i/\bar{\sigma}_i)$  est obtenue à partir de la loi de comportement sous forme différentielle, à savoir :

$$\Delta \bar{\sigma}_i/\bar{\sigma}_i = \gamma (\bar{\epsilon}_i) \Delta \bar{\epsilon}_i + m \Delta \bar{\epsilon}_i/\bar{\epsilon}_i \quad (\text{B-II-25})$$

où  $\Delta \bar{\epsilon}_i$  est connu en fonction de  $\psi_i$  et  $\Delta \epsilon_{s_i}$ , en utilisant l'équation (B-II-7) exprimée en termes d'incrément de déformation.  $\Delta \bar{\epsilon}_i/\bar{\epsilon}_i$  peut être écrit en fonction des valeurs de  $\Delta \bar{\epsilon}_i$  pendant deux intervalles de temps successifs. La comparaison entre les deux expressions de  $(\Delta \bar{\sigma}_i/\bar{\sigma}_i)$  conduit finalement à une équation de la forme :

$$\sum_{j=i-1}^{i+1} (c_{ij} \Delta r_j + d_{ij} \Delta z_j) = \left( \frac{\Delta P}{P} \right) + m \quad (\text{B-II-26})$$



Les équations (B-II-20) et (B-II-26) forment donc un système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=i-1}^{i+1} (a_{ij} \Delta r_j + b_{ij} \Delta z_j) = 0 \\ \sum_{j=i-1}^{i+1} (c_{ij} \Delta r_j + d_{ij} \Delta z_j) = \left(\frac{\Delta P}{P}\right) + m \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(B-II-20)} \\ \text{(B-II-26)} \end{array}$$

où  $a_{ij} = F_1 (r_i, z_i, \rho_i)$  ;  $b_{ij} = F_2 (r_i, z_i, \rho_i)$   
 $c_{ij} = F_3 (\gamma_i, m, \alpha_i, r_i, z_i, \Delta \epsilon_i)$  ;  $d_{ij} = F_4 (\gamma_i, m, \alpha_i, r_i, z_i, \Delta \epsilon_i)$

Le système ci-dessus peut être mis sous forme matricielle comme suit :

$$\left[ \begin{array}{c} \text{Matrice} \\ \text{de} \\ \text{rigidité} \\ \text{au} \\ \text{gonflement} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \Delta r_1 \\ \Delta z_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \Delta r_i \\ \Delta z_i \\ \vdots \\ \vdots \\ \Delta r_n \\ \Delta z_n \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ \frac{\Delta P}{P} + m \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{\Delta P}{P} + m \end{array} \right]$$

Les incréments de déplacement sont ainsi déterminés pour chaque incrément de pression  $\Delta P$  en résolvant ce système linéaire de  $2n$  équations. La géométrie de la tôle est ensuite réactualisée, et la procédure de calcul est répétée.

Pour résoudre le système ci-dessus, nous avons mis au point un logiciel dont l'organigramme est donné en annexe-B.

## CHAPITRE B-III

### SIMULATIONS NUMERIQUES DU GONFLEMENT HYDRAULIQUE DISCUSSION ET RESULTATS

#### B-III-1 - Introduction

Ce chapitre présente les résultats de la mise en oeuvre numérique de la formulation par différences finies du problème du gonflement hydraulique exposée dans le chapitre précédent. Tout d'abord, la précision du programme de calcul est évaluée par rapport à la solution analytique de Hill, dans le cas d'un matériau rigide-plastique obéissant à la théorie de l'écoulement avec une surface de charge de Von-Mises, un écrouissage isotrope et une loi contrainte-déformation de la forme  $\bar{\sigma} = K \exp(\bar{\epsilon})$ . Des comparaisons avec des résultats obtenus à l'aide du code de calcul ABAQUS sont également présentées.

Nous présentons ensuite les résultats de simulations numériques, en mettant l'accent sur l'influence des paramètres décrivant le comportement plastique ou viscoplastique sur l'inhomogénéité inhérente au gonflement hydraulique. En effet, les paramètres du matériau qui ont une influence importante sur la stabilité de l'écoulement plastique (comme par exemple, dans l'approche de localisation de Marciniak-Kuczinski [27,28]) doivent aussi influencer la distribution des déformations et la forme de la membrane déformée au cours du gonflement hydraulique. Les influences de la capacité d'écrouissage, de l'anisotropie, de la sensibilité à la vitesse de déformation et de la forme de la surface de charge seront donc examinées. Les résultats numériques seront aussi comparés aux résultats expérimentaux de la littérature.

#### B-III-2 - Précision du programme de calcul

Les pas de calcul et le nombre de noeuds utilisés ont été fixés d'une façon définitive lorsque nous avons constaté qu'aucune différence significative entre les résultats numériques n'était observée lorsqu'on augmentait le nombre de noeuds ou de pas de calcul. Les pas de calcul ont été pris de façon à ce que le noeud relatif au pôle subisse une flèche additionnelle égale à  $\Delta H/a = 0.005$  et la distance initiale entre noeuds a été prise égale à  $dr^0/a = 0.02$  (soit 50 noeuds).

La solution analytique de Hill [8] pour un matériau rigide-plastique obéissant à la théorie de l'écoulement avec une loi contrainte-déformation du type  $\bar{\sigma} = K \exp(\bar{\epsilon})$  a été utilisée pour valider le

programme de calcul. Nous avons trouvé que toutes les quantités calculées au pôle sont à moins de 1,5% des résultats analytiques jusqu'à la pression maximale, c'est-à-dire pour une hauteur au pôle  $H/a = 1$ .

Le tableau ci-dessous résume les comparaisons faites sur trois quantités : la pression adimensionnelle  $Pa/2h^\circ K$  ; la déformation en épaisseur au pôle  $\epsilon_h(o)$  ; et le rayon de courbure au pôle  $\rho_s(o)/a = \rho_\theta(o)/a$ . Pour  $H/a = 1$  on a :

	Solution analytique de Hill	Nos calculs par différences finies
$Pa/2h^\circ K$	1	1,0089
$\epsilon_h(o)$	$2 \ln 2 = 1,3862$	1,3728
$\rho_s(o)/a = \rho_\theta(o)/a$	1	1,0034

Nous rappelons que dans la solution analytique de Hill, les trois quantités ont pour expression :

$$\frac{Pa}{2h^\circ K} = \frac{2 a H}{a^2 + H^2} = \frac{2}{\frac{a}{H} + \frac{H}{a}} \quad (\text{B-III-1})$$

$$\epsilon_h(o) = 2 \ln \left( 1 + \frac{H^2}{a^2} \right) \quad (\text{B-III-2})$$

$$\rho_s(o)/a = \rho_\theta(o)/a = \frac{a^2 + H^2}{2 a H} = \frac{1}{2} \left( \frac{a}{H} + \frac{H}{a} \right) \quad (\text{B-III-3})$$

Le programme a aussi été comparé aux résultats obtenus par la méthode des éléments finis du code de calcul ABAQUS.

Les figures B-III-1 et B-III-2 montrent la distribution de l'évolution des déformations méridiennes.

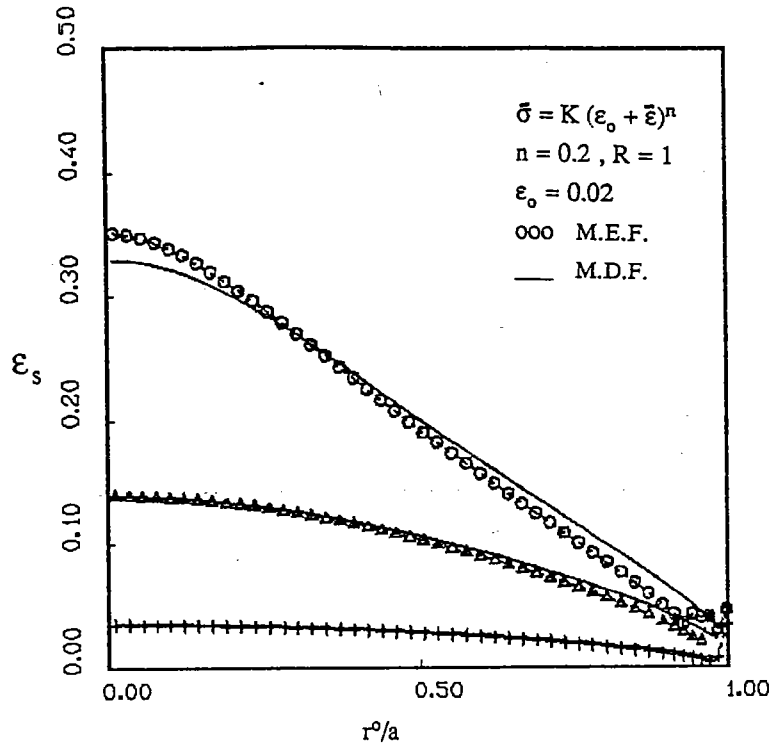


Fig. B-III-1 : Distribution de la déformation méridienne pour  $h^0/a = 0.005$

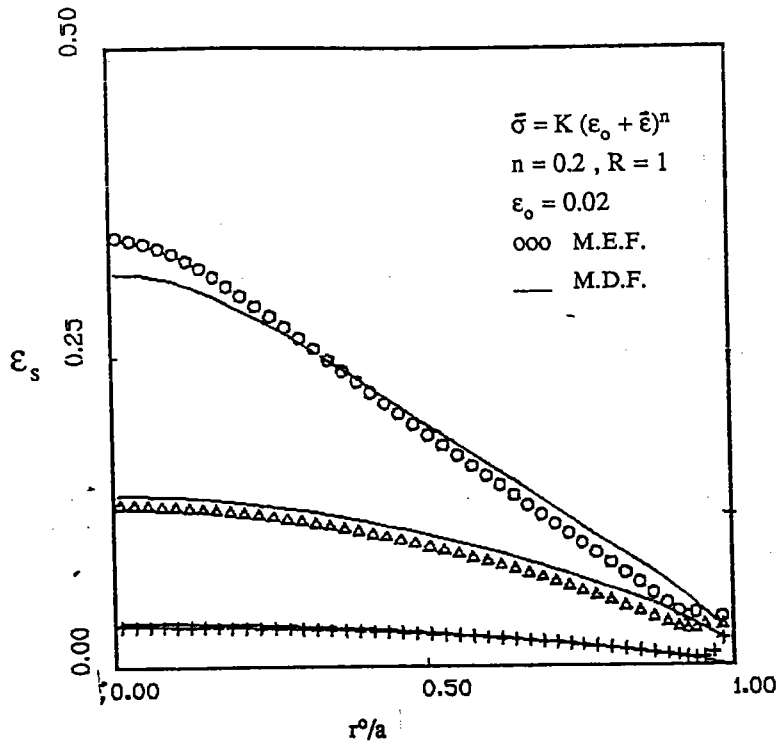


Fig. B-III-2 : Distribution de la déformation méridienne pour  $h^0/a = 0.025$

diennes en fonction du rayon initial de la tôle, et ce pour un matériau obéissant à la loi puissance  $\bar{\sigma} = K (\epsilon_0 + \epsilon)^n$  avec  $n = 0.2$  ;  $\epsilon_0 = 0.02$  et  $R = 1$ . Les calculs ont été effectués par la méthode des éléments finis (ooo) et par la méthode des différences finies (\_\_\_).

Dans le cas des calculs par la M.E.F., les calculs ont été effectués sur des éléments de coques axisymétriques d'épaisseur 1 mm dans un premier temps (fig. B-III-1), puis sur des éléments d'épaisseur 5 mm (fig. B-III-2) et pour un rayon  $a = 200$  mm. L'épaisseur n'intervient pas dans le résultat pour le calcul de membrane que nous avons mis au point ; on peut dire que la corrélation entre les deux méthodes de calcul est bonne dans le premier cas (fig. B-III-1,  $h^0/a = 0.005$ ), notamment dans les premiers stades du gonflement ( $H/a = 0.2$  à  $0.4$ ). Cependant, pour une hauteur au pôle  $H/a = 0.6$ , un écart de 2% est observé au pôle entre les deux méthodes.

Dans le deuxième cas (fig. B-III-2) où le rapport  $h^0/a = 0.025$ , l'écart entre les deux méthodes apparaît beaucoup plus tôt et ce pour une hauteur au pôle  $H/a = 0.4$  par exemple. Néanmoins, l'écart entre les deux méthodes ne dépasse pas 5,5% sur les valeurs au pôle. On peut conclure que l'approximation de membrane utilisée dans notre méthode des différences finies donne des résultats très proches du calcul par éléments finis utilisant des éléments de coque, lorsque le rapport  $h^0/a$  est suffisamment faible.

### **B-III-3 - Tendances générales : Distribution des déformations et forme de la membrane**

Une des quantités les plus sensibles pour analyser l'influence des paramètres rhéologiques du matériau sur la distribution des déformations et son évolution au cours du gonflement hydraulique est donnée par le rapport des rayons de courbure principaux en tout point de la membrane,  $N = \rho_\theta/\rho_s$  [26].

Pour  $N < 1$ , la membrane est localement "allongée" (par rapport à la sphère prise comme référence) ; pour  $N > 1$ , elle est "aplatie" (fig. B-III-3). D'après l'équation (B-II-19) "l'aplatissement" est associé à des valeurs du rapport des contraintes  $\alpha = \sigma_\theta/\sigma_s$  inférieures à l'unité, tandis que "l'allongement" est associé à des valeurs de  $\alpha$  supérieures à 1.

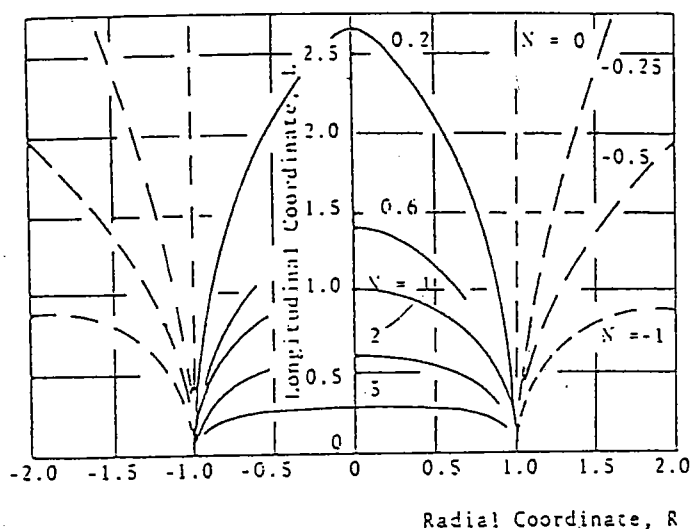
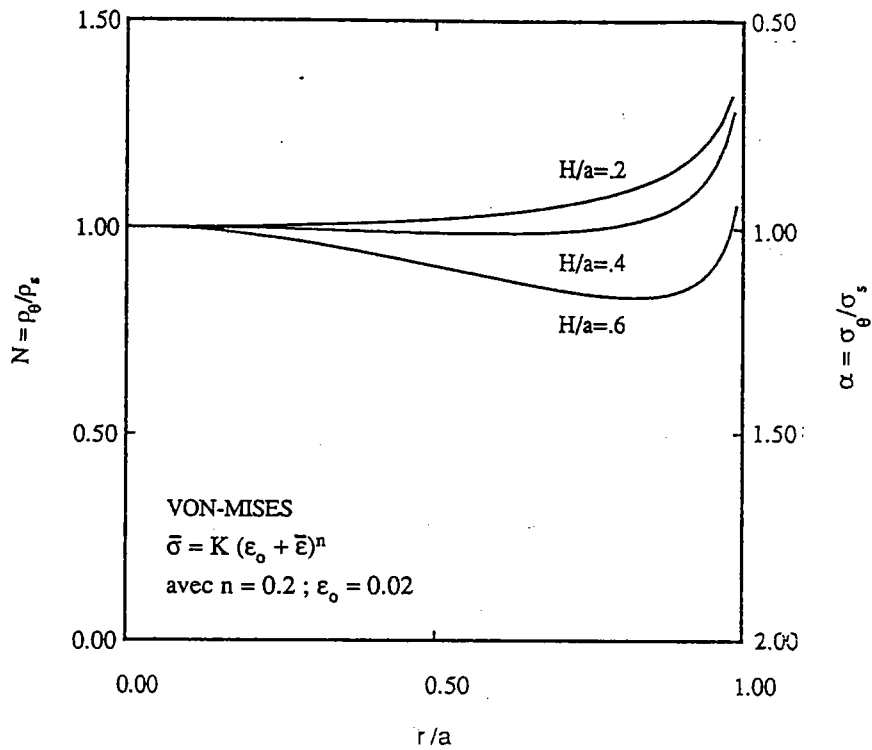


Fig. B-III-3 : Forme de la membrane d'après [26]

On rappelle que l'on se place dans le cas où le matériau présente un comportement à isotropie planaire, de sorte que la membrane déformée soit de révolution autour de l'axe  $oz$  et que la déformation soit entièrement caractérisée par l'étude dans un plan méridien. La symétrie de révolution autour de l'axe  $oz$  et les conditions d'encastrement impliquent que le matériau est dans un état de déformations (ou de contraintes) équi-biaxial au pôle, et en état de déformation plane à la périphérie. En conséquence,  $\alpha$  doit varier de la valeur 1 au pôle à la valeur 0.5 à la périphérie (dans le cas de la surface d'écoulement de Von-Mises) et donc  $N$  doit varier entre 1 et 1.5. Une exception correspond au cas où la périphérie ne se déforme pas dans la direction méridienne. Les valeurs de  $\alpha$  et de  $N$  à la périphérie ne peuvent alors être déterminées à partir de la condition de déformation plane. Cette situation est observée en particulier dans l'analyse de Hill [8].

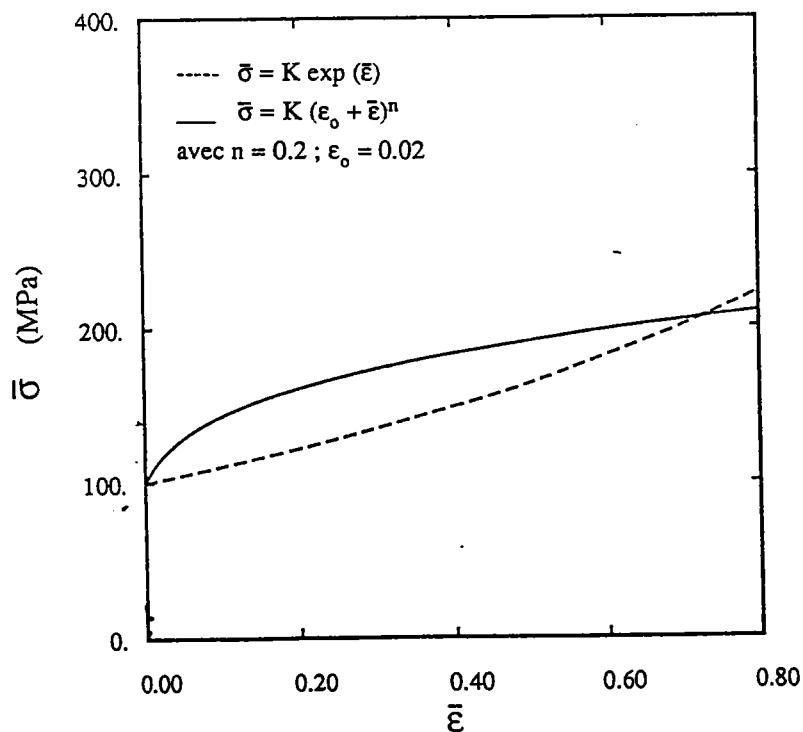
Il convient ici de rappeler que l'analyse de Hill s'appuie sur l'hypothèse cinématique selon laquelle le diaphragme se déforme en une membrane sphérique. Cette analyse représente la solution exacte pour un matériau rigide-plastique obéissant à la théorie de l'écoulement avec une surface de charge de Von-Mises, un écrouissage isotrope, et une loi contrainte-déformation,  $\bar{\sigma} = K \exp(\bar{\epsilon})$  (ce qui correspond à un coefficient d'écrouissage  $\gamma = d \ln \bar{\sigma} / d \bar{\epsilon} = 1$  quel que soit le niveau de la déformation). Cette solution de Hill sera notée par la suite "la solution à coefficient d'écrouissage constant" (C.E.C.) ; on l'utilisera comme référence pour comprendre comment la distribution des déformations et la forme de la membrane déformée sont liées aux paramètres rhéologiques du matériau.

La figure B-III-4 montre l'évolution de la forme de la membrane pour un matériau insensible à la vitesse de déformation, obéissant à une loi d'écrouissage de Swift de forme puissance,  $\bar{\sigma} = K (\epsilon_0 + \bar{\epsilon})^n$ .



**Fig. B-III-4** : Evolution de la forme de la membrane en fonction du rayon courant

La figure B-III-5 montre, pour interprétation des résultats, les courbes contrainte-déformation équivalentes pour ce matériau et pour le matériau C.E.C.



**Fig. B-III-5** : Courbes contrainte-déformation équivalentes des deux matériaux

On observe, pour le matériau obéissant à la loi puissance (fig. B-III-4), que la membrane est "aplatie" pour de faibles valeurs de la hauteur au pôle ( $H/a = 0.2$ ). Toutefois, pour des valeurs croissantes de la hauteur au pôle, la membrane devient "allongée" sur la majeure partie de sa surface, à l'exception d'une région étroite près de l'encastrement où la membrane reste "aplatie". Ce comportement peut être analysé par comparaison avec celui observé pour le matériau C.E.C. Au début du gonflement, la forte capacité d'écroutissage du matériau entraîne une répartition des déformations moins hétérogène que dans le cas du matériau C.E.C. avec, en particulier, une légère déformation méridienne à la périphérie, alors que celle-ci reste nulle au cours du gonflement pour le matériau C.E.C. (fig. B-III-6).

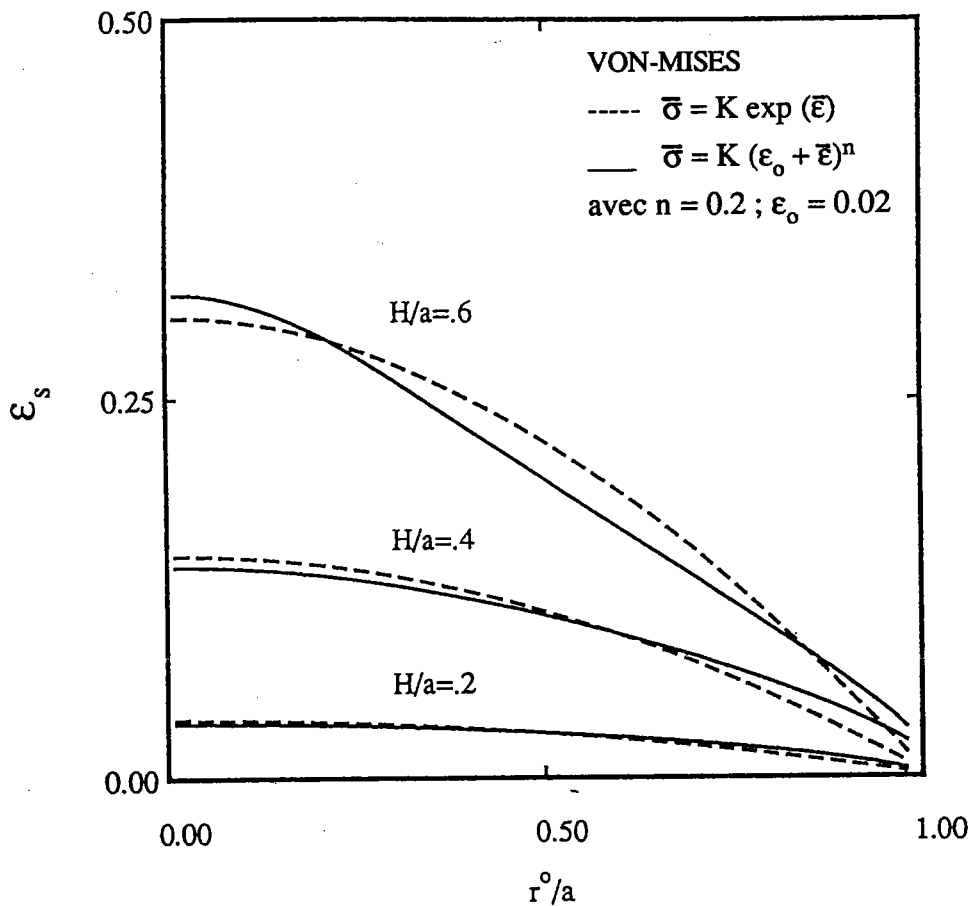


Fig. B-III-6 : Distribution et évolution de la déformation méridienne

En relation avec cette distribution des déformations tout le long du profil de la membrane, le rapport des contraintes  $\alpha = \sigma_\theta / \sigma_s$  varie de façon monotone de la valeur 1 au pôle à la valeur 0.5 à l'encastrement (fig. B-III-4,  $H/a = 0.2$ ). Toutefois, en raison de la déformation plus forte près du pôle, la capacité d'écroutissage de la zone polaire décroît plus fortement que celle de la périphérie au fur et à mesure du gonflement, ce qui conduit à une amplification de la déformation près du pôle



et oblige la partie externe de la membrane à se déformer plus rapidement dans la direction circonférentielle que dans la direction méridienne. Cette tendance vers une stagnation de la déformation méridienne  $\epsilon_s$  pour la partie externe de la membrane est visible sur la figure B-III-6 ( $H/a = 0.6$ ). Cette évolution correspond à une croissance du rapport des vitesses de déformation  $\rho = \dot{\epsilon}_\theta / \dot{\epsilon}_s$ , qui se traduit par l'intermédiaire de la loi de comportement, par une croissance du rapport des contraintes  $\alpha = \sigma_\theta / \sigma_s$ , de sorte que la membrane devient de plus en plus "allongée".

Une autre conséquence de cette évolution est que le rayon de courbure au pôle, pour une hauteur au pôle donnée (fig. B-III-7) ou pour une déformation en épaisseur au pôle donnée (fig. B-III-8) est plus faible pour la loi puissance  $\bar{\sigma} = K (\epsilon_o + \bar{\epsilon})^n$  que pour le matériau C.E.C., du moins dans les stades avancés du gonflement.

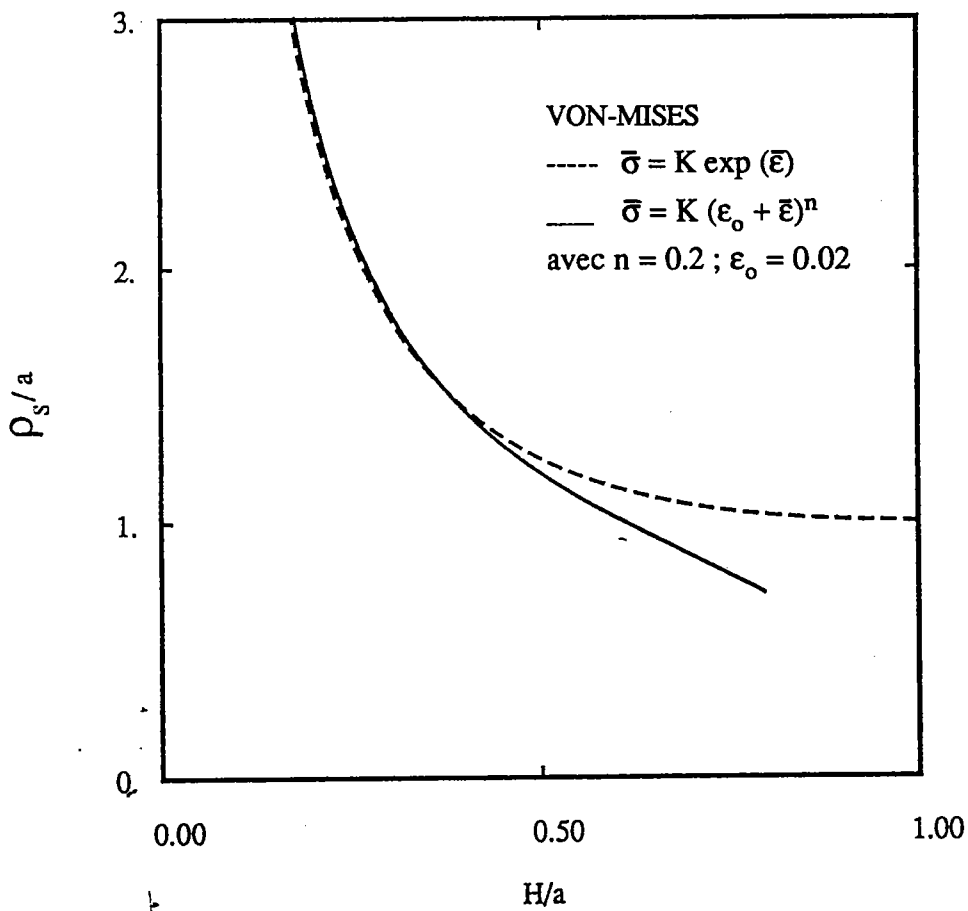


Fig. B-III-7 : Evolution de la courbure en fonction de la hauteur au pôle

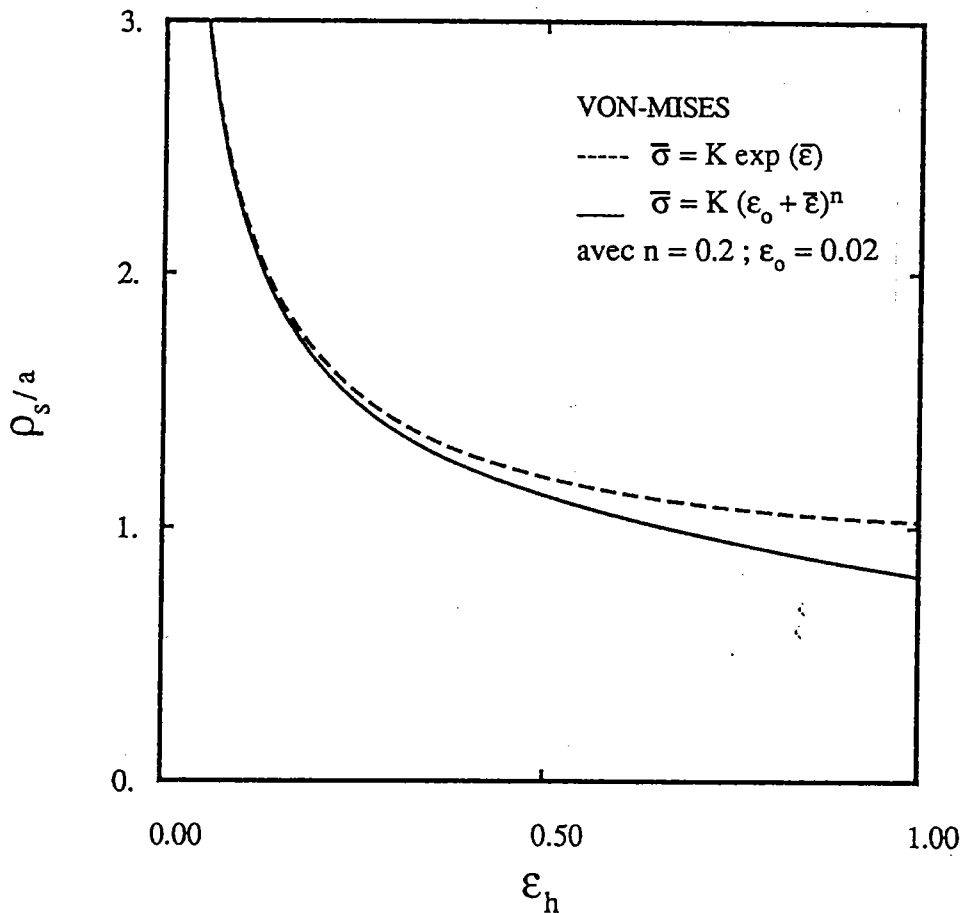


Fig. B-III-8 : Evolution de la courbure en fonction de la déformation en épaisseur au pôle

Les différences entre le matériau obéissant à la loi puissance et le matériau C.E.C. représentent des tendances générales pour des matériaux recuits, qui présentent une capacité d'écroutissage initialement élevée mais rapidement décroissante en fonction de la déformation.

L'écart à la sphéricité, qui peut devenir important lorsqu'on considère le rapport des rayons de courbure principaux, est également visible quand on examine la forme de la membrane déformée (fig. B-III-9).

Une analyse détaillée sur la forme de la membrane déformée a été effectuée par Shang *et al.* [26]. Leurs résultats sur des tôles de cuivre (fig. B-III-10) montrent le même comportement que celui de la fig. B-III-4. Cependant, les auteurs n'ont pas spécifié les paramètres du matériau, ce qui a rendu impossible une comparaison quantitative.

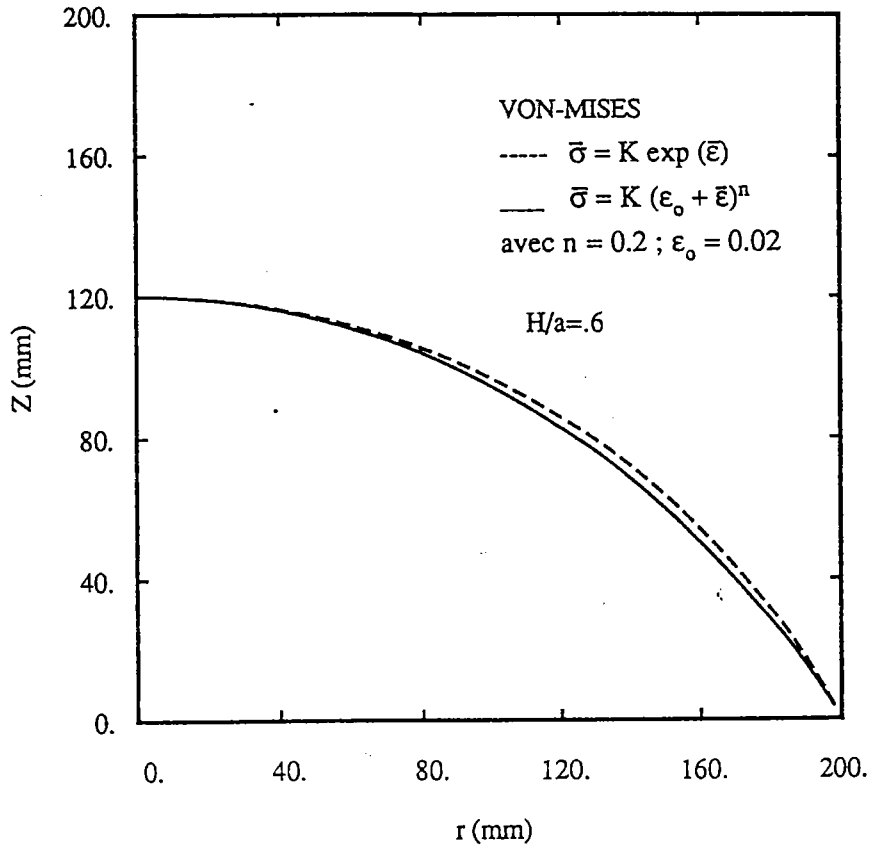


Fig. B-III-9 : Forme de la membrane à une hauteur au pôle  $H/a = 0.6$

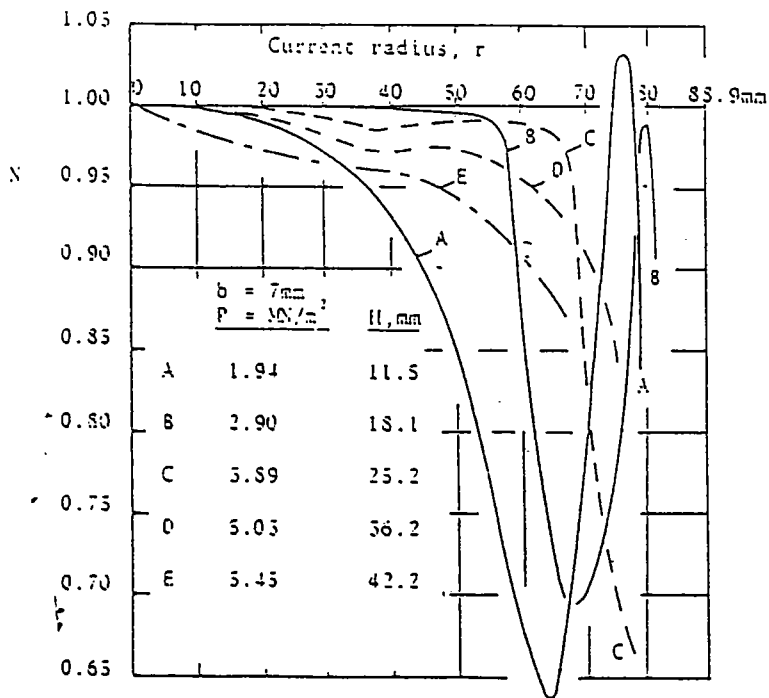


Fig. B-III-10 : Evolution de la forme de la membrane durant l'hydroformage [26]

### B-III-4 - Influence de la capacité d'écrouissage

L'influence de la capacité d'écrouissage du matériau a été analysée en utilisant la loi de Swift,  $\bar{\sigma} = K (\epsilon_0 + \bar{\epsilon})^n$ . Le coefficient d'écrouissage  $\gamma$  à déformation nulle a d'abord été choisi égal à 10 pour tous les matériaux, de sorte que  $\epsilon_0$  est alors lié à l'exposant d'écrouissage  $n$  par la relation  $\epsilon_0/n = 0.1$ . Le gonflement a également été étudié pour un matériau rigide-parfaitement plastique ( $n = 0$ ).

Les courbes contrainte-déformation équivalentes des matériaux étudiés sont présentées sur la figure B-III-11.

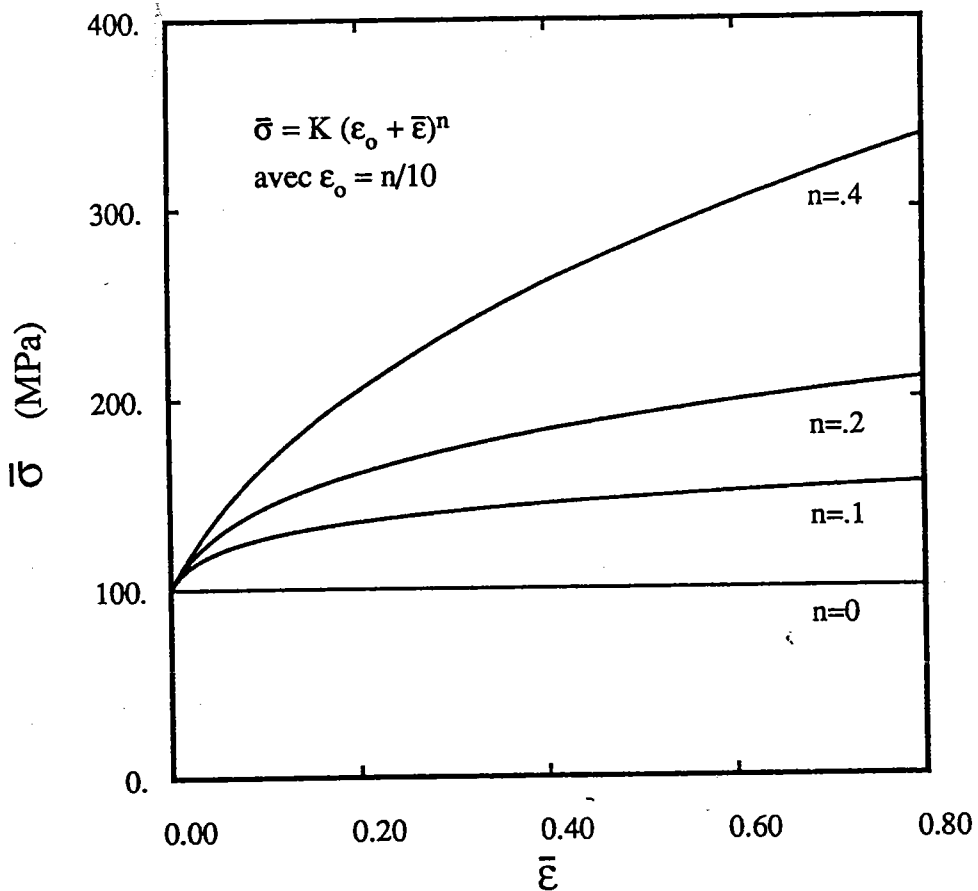


Fig. B-III-11 : Courbes contrainte-déformation équivalentes des matériaux étudiés

La décroissance du coefficient d'écrouissage  $\gamma$  est plus lente pour les matériaux présentant une forte valeur de l'exposant d'écrouissage  $n$ . Ceci a pour conséquence de retarder l'évolution décrite précédemment. Ainsi on observe, à hauteur au pôle donnée et pour les fortes valeurs de  $n$ , que "l'allongement" de la membrane est moins prononcé (ou pas encore apparu) pour  $n$  grand (fig. B-III-12). On observe aussi que la déformation au pôle est plus faible et que la répartition des déformations méridiennes est moins hétérogène (fig. B-III-13).

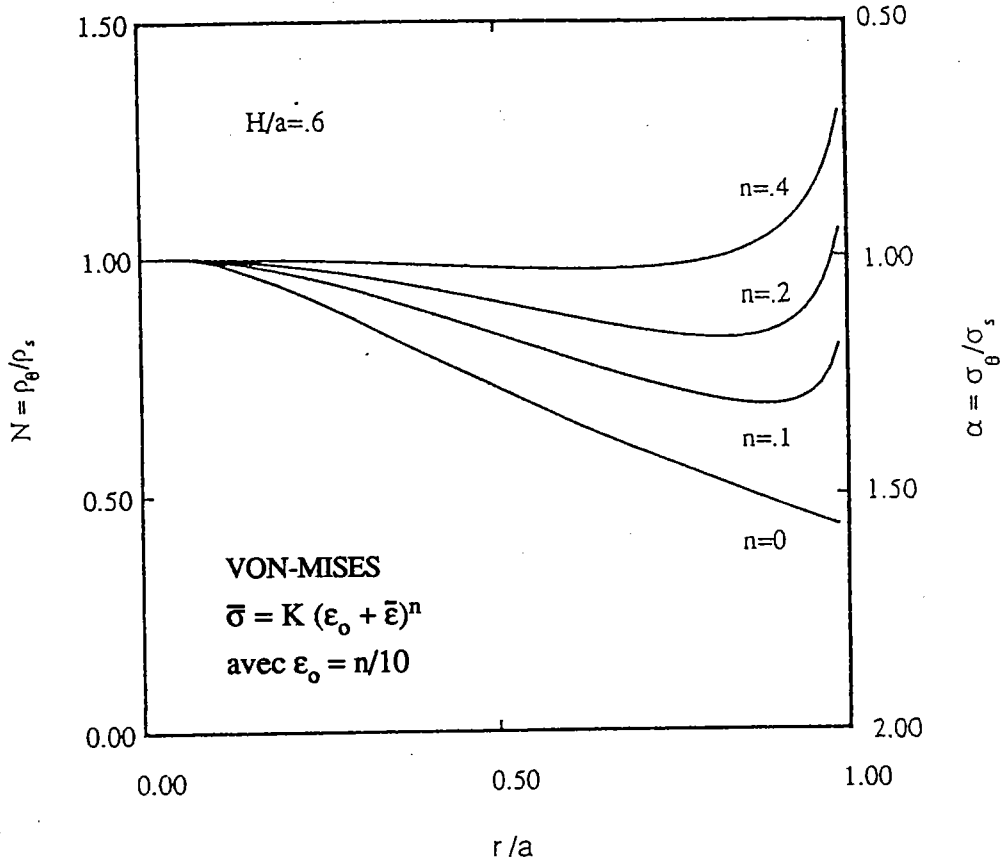


Fig. B-III-12 : Evolution de la forme de la membrane en fonction de n

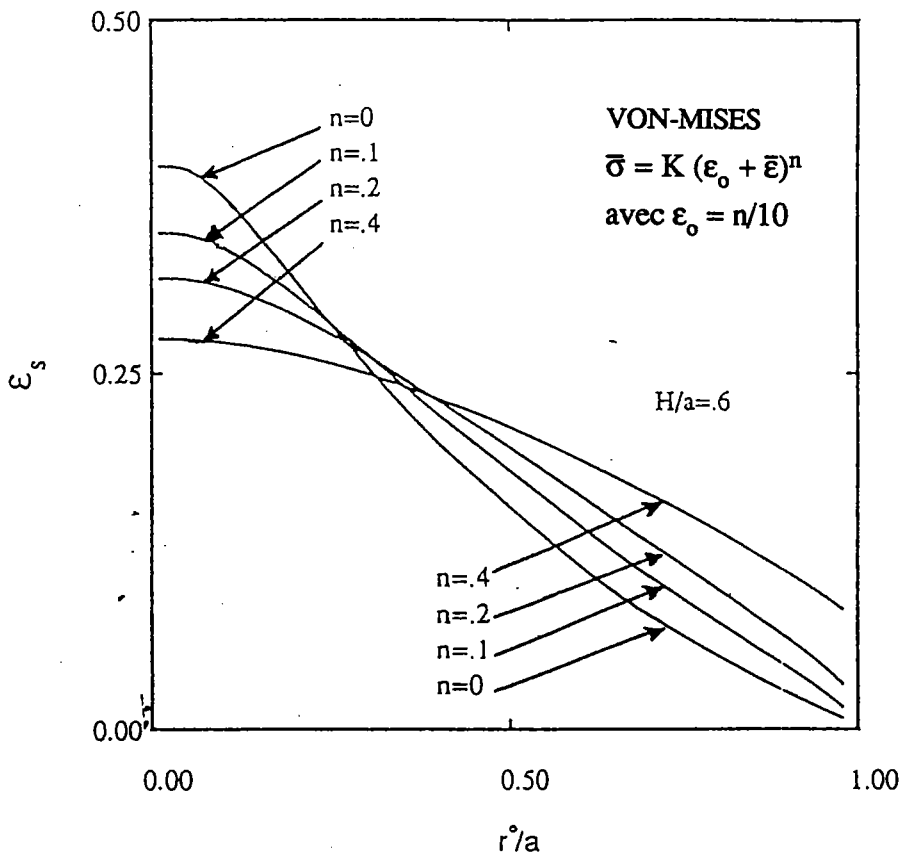
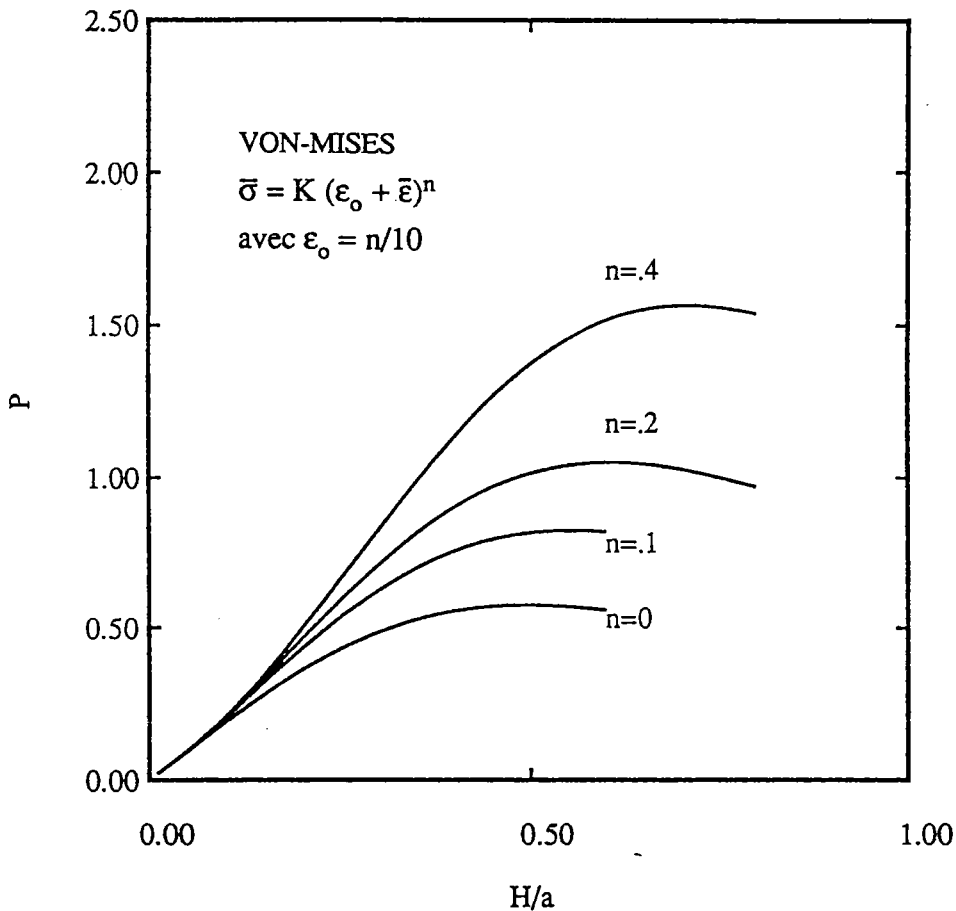


Fig. B-III-13 : Influence de l'exposant d'écroutissement sur la distribution de la déformation méridienne

Comme cela a été noté par Wang et Shammamy [16], la périphérie de la membrane cesse pratiquement de se déformer dans les stades avancés du gonflement. La déformation méridienne subie par la membrane, à la périphérie, croît depuis la valeur zéro pour le matériau parfaitement plastique jusqu'à  $\epsilon_s \sim 0.09$  pour  $n = 0.4$ . En accord avec l'effet stabilisant du durcissement, la hauteur au pôle à l'instabilité ( $P = P_{MAX}$ ) croît de la valeur  $H/a = 0.50$  pour  $n = 0$  jusqu'à la valeur  $H/a = 0.715$  pour  $n = 0.4$  (fig. B-III-14).



**Fig. B-III-14** : Influence de l'exposant d'écroutissement sur la hauteur au pôle à l'instabilité ( $P = P_{MAX}$ )

La figure B-III-15 montre par ailleurs l'évolution de la déformation en épaisseur au pôle, à l'instabilité, en fonction de  $n$ .

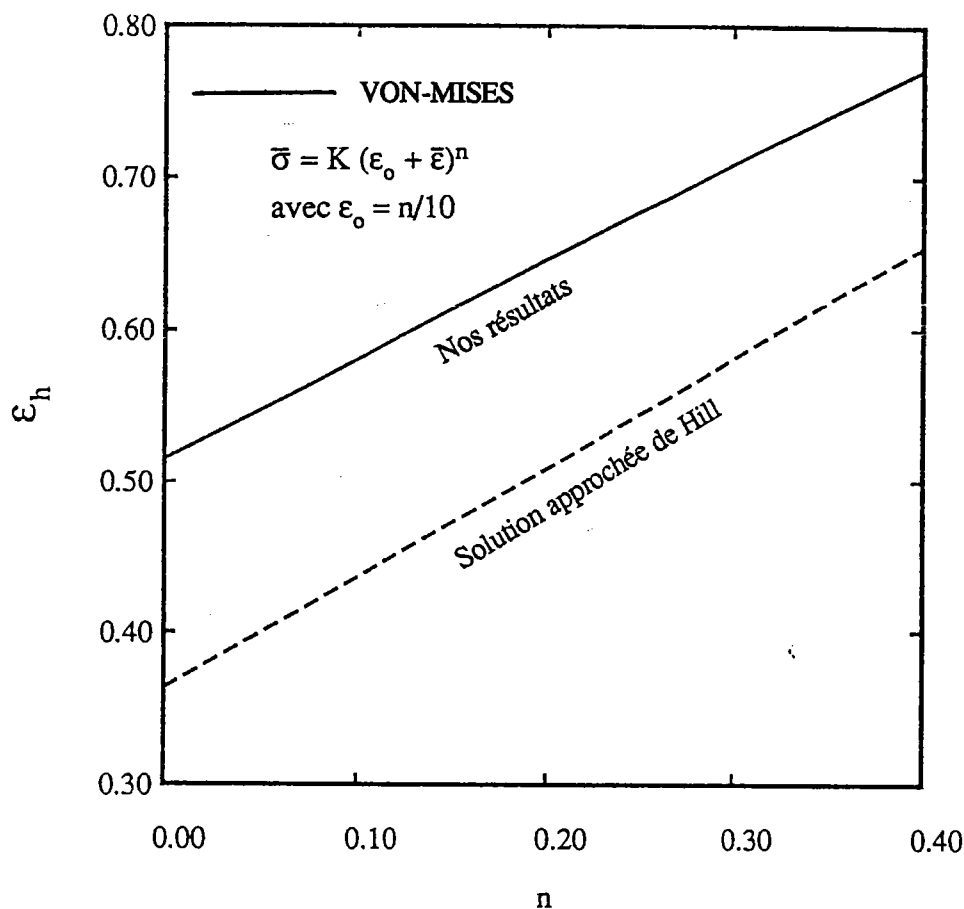


Fig. B-III-15 : Evolution de la déformation en épaisseur au pôle, à l'instabilité, en fonction de  $n$

Les résultats obtenus indiquent des valeurs de  $\epsilon_h(o)$ , à l'instabilité, nettement plus fortes que celles déduites analytiquement par Hill [8]. En particulier, la valeur trouvée pour le matériau parfaitement plastique ( $n = 0$ ) est de 0.515 (alors que l'analyse de Hill prévoit la valeur  $\epsilon_h(o) = 4/11 \sim 0.36$ ) tandis que la valeur trouvée pour  $n = 0.4$  est  $\epsilon_h(o) = 0.771$ . Par contre, nos résultats sont en très bon accord avec ceux obtenus par Wang et Shammamy [16].

### B-III-5 - Influence de $\epsilon_0$

L'influence de  $\epsilon_0$  pour une valeur donnée de l'exposant d'écroutissage  $n$  a également été étudiée pour simuler le comportement de matériaux pré-écrouis (ou n'ayant pas subi de recuit final, matériaux "mi-durs" ou "durs"). Pour une hauteur au pôle donnée, l'allongement de la membrane et l'inhomogénéité des déformations méridiennes sont plus prononcés lorsque  $\epsilon_0$  augmente. En fait, le comportement observé, par exemple, pour  $n = 0.2$  et  $\epsilon_0 = 0.18$  est proche de celui obtenu pour  $n = 0.1$  et  $\epsilon_0 = 0.01$  (fig. B-III-16 et fig. B-III-17).

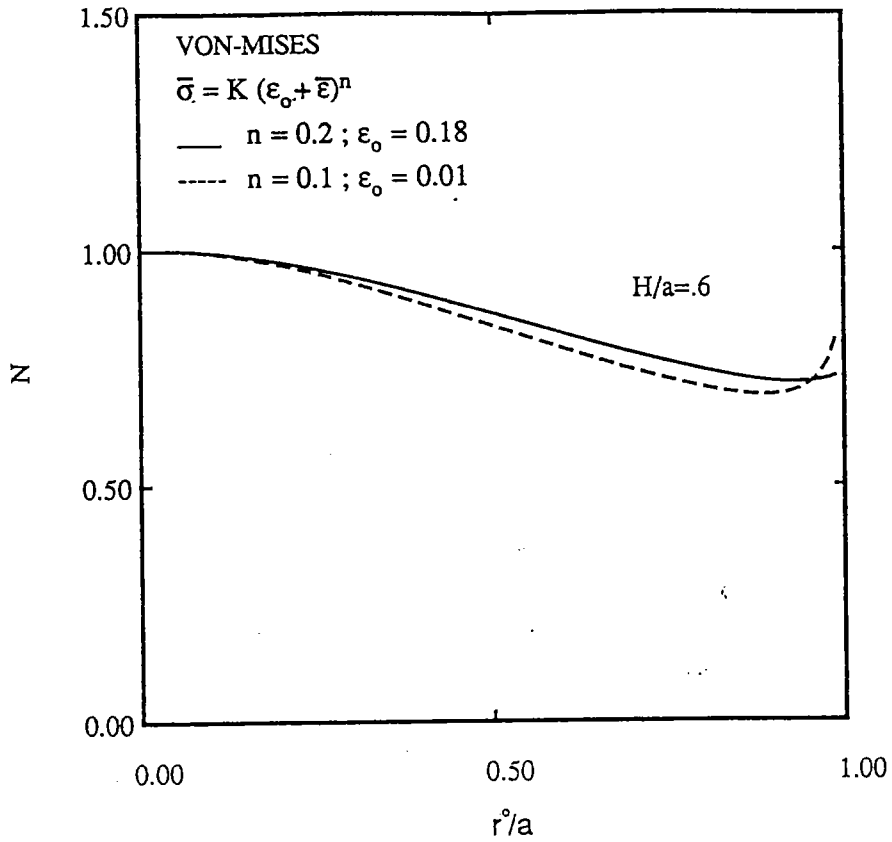


Fig. B-III-16 : Influence de  $\epsilon_0$  sur la forme de la membrane à une hauteur au pôle  $H/a = 0.6$

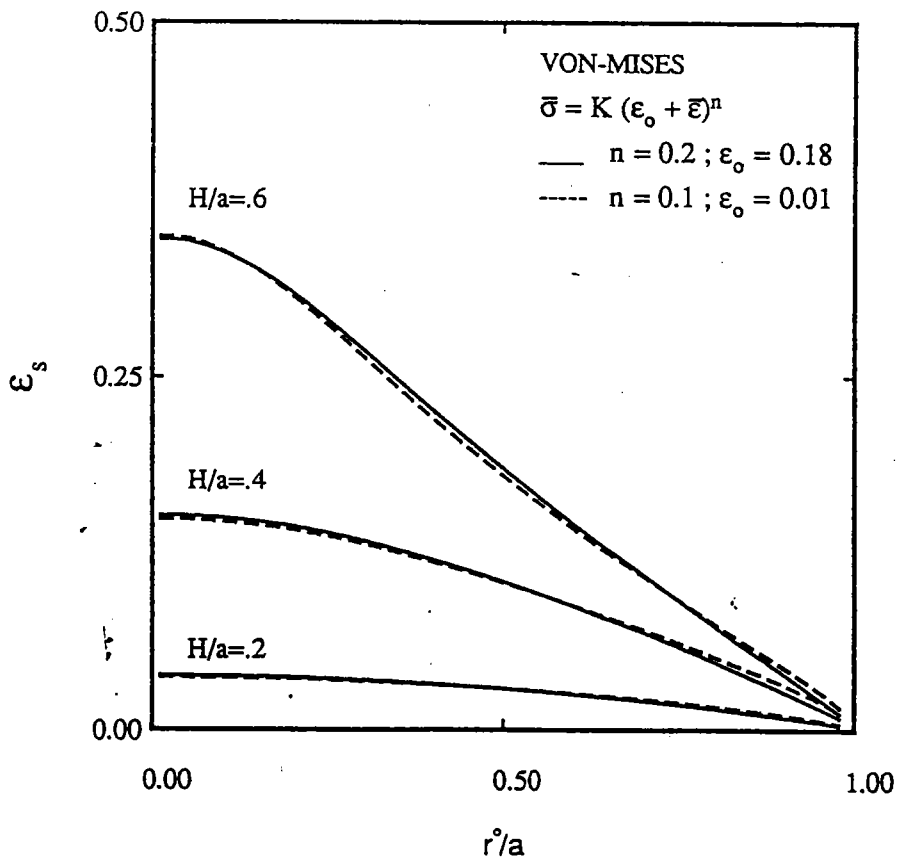


Fig. B-III-17 : Influence de  $\epsilon_0$  sur la distribution de la déformation méridienne



Les deux couples de valeurs conduisent à des courbes contrainte-déformation équivalentes assez proches entre  $\bar{\epsilon} \sim 0.1$  et  $\bar{\epsilon} \sim 0.4$  (fig. B-III-18).

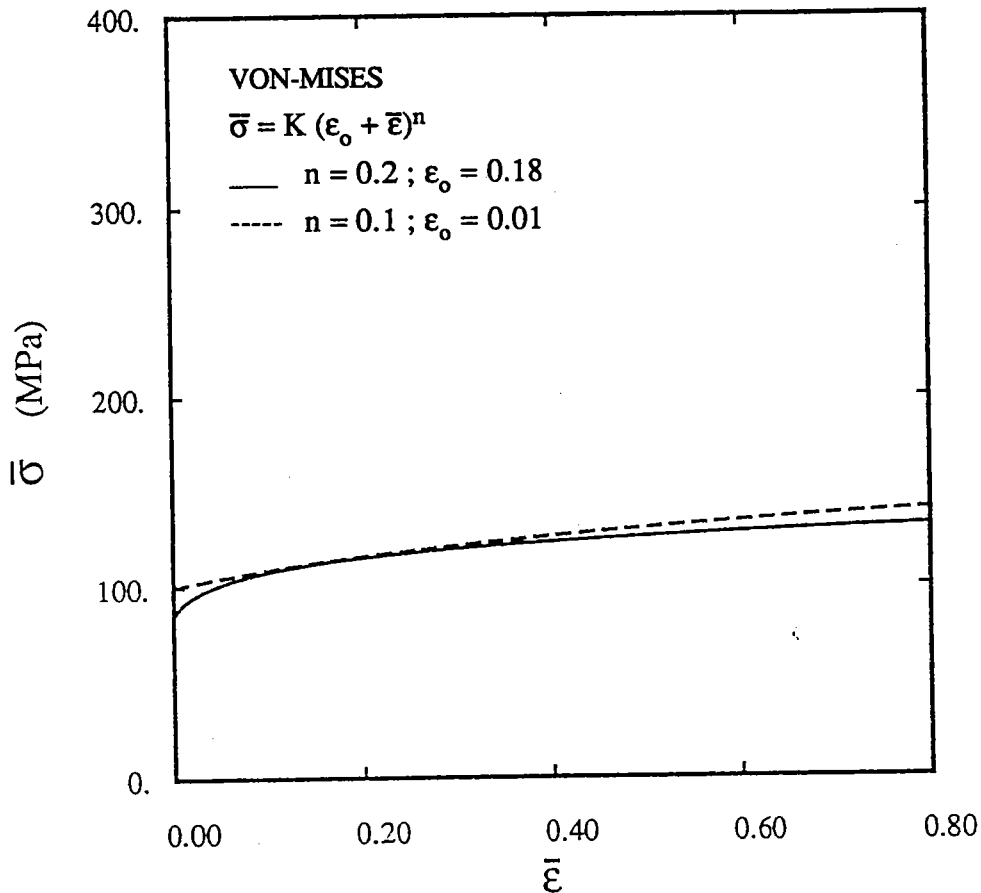
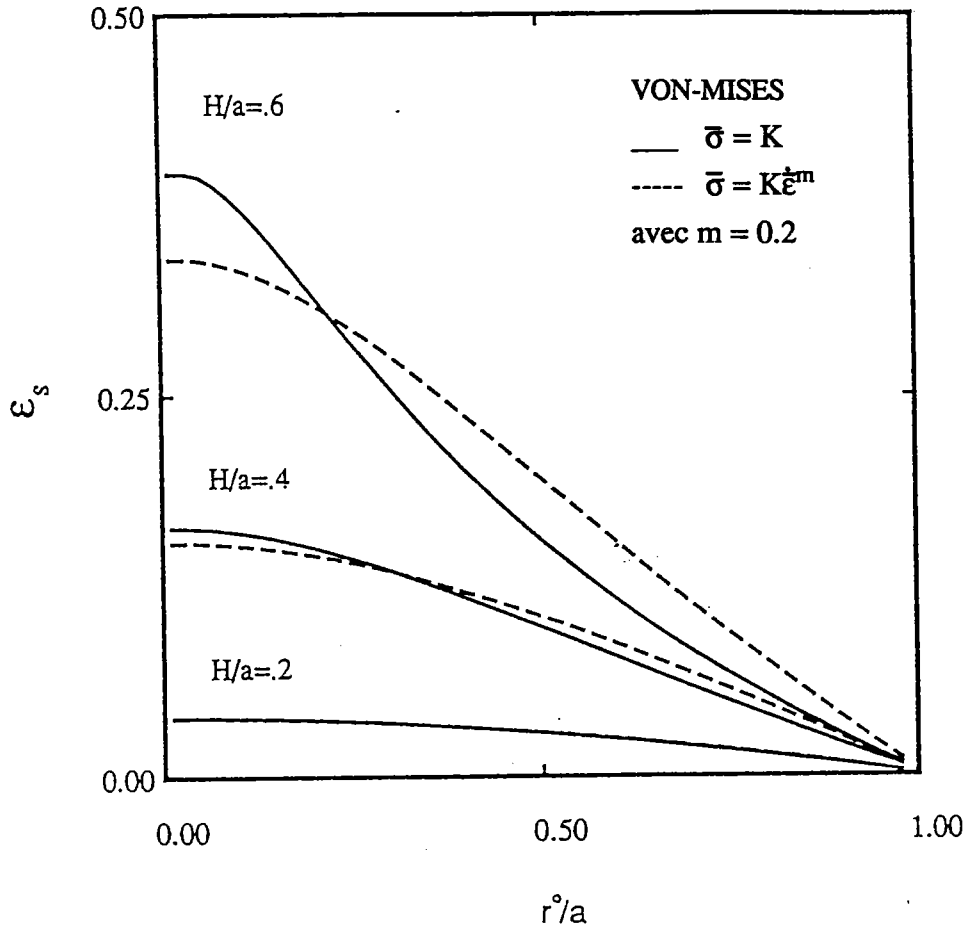


Fig. B-III-18 : Courbes contrainte-déformation équivalentes des deux matériaux étudiés

### B-III-6 - Influence de la sensibilité à la vitesse de déformation

En raison des conditions aux limites du processus de gonflement hydraulique, les gradients de vitesses de déformation ne sont pas très prononcés à travers une partie importante de la membrane et ne se développent pas de façon significative durant le gonflement. L'influence de la vitesse de déformation, qui tend à ralentir le développement des gradients de vitesses de déformation, est de ce fait très faible pour des valeurs faibles du coefficient de sensibilité à la vitesse de déformation, caractéristiques du comportement à basses températures ( $m \sim 0.01 - 0.02$ ) et ne devient significative que pour des valeurs de  $m$  assez élevées.

La distribution des déformations méridiennes est présentée par la figure B-III-19 pour un matériau parfaitement plastique et pour un matériau sensible à la vitesse ( $m = 0.2$ ) mais non écrouissable.

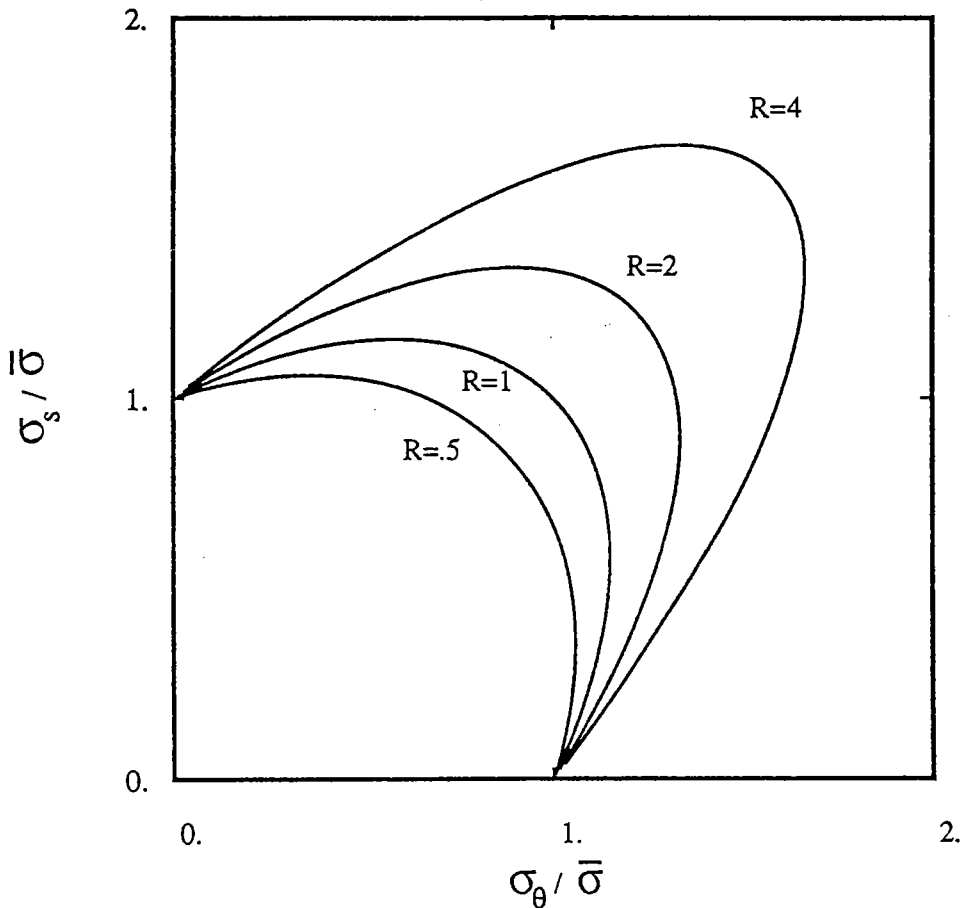


**Fig. B-III-19:** Influence de la vitesse de déformation sur la distribution de la déformation méridienne

Pour cette forte valeur de  $m$ , la distribution des déformations méridiennes devient plus uniforme que pour le matériau parfaitement plastique dans les stades avancés du gonflement. Cependant, contrairement aux matériaux écrouissables, on n'observe pas de déformation appréciable à la périphérie.

### **B-III-7 - Influence de l'anisotropie**

Le critère quadratique de Hill [32] est utilisé ici avec l'hypothèse d'isotropie planaire. L'anisotropie est caractérisée par le coefficient  $R$ , défini comme étant le rapport entre les déformations en largeur et en épaisseur dans un essai de traction simple. L'influence de l'anisotropie peut être expliquée par les variations de la forme de la surface de charge de Hill en fonction de  $R$ . En effet, l'ellipse de Hill dans le plan  $(\sigma_1, \sigma_2)$  (où  $\sigma_1 \equiv \sigma_s$  et  $\sigma_2 \equiv \sigma_\theta$  pour le problème du gonflement hydraulique) est allongée selon l'axe  $\sigma_1 = \sigma_2$  pour des valeurs de  $R$  plus grandes que 1 (respectivement, contractée pour  $R$  plus petit que 1), figure B-III-20.



**Fig. B-III-20 :** Evolution de la forme de la surface de charge de Hill en fonction de  $R$

Il en résulte tout d'abord que les contraintes, dans le domaine de sollicitations rencontrées dans l'essai du gonflement hydraulique (c'est-à-dire entre la déformation équibiaxiale et la déformation plane), augmentent par rapport à la contrainte de référence  $\bar{\sigma}$  correspondant à la traction uniaxiale lorsque  $R$  augmente. Il s'ensuit que la pression nécessaire pour assurer le gonflement de la tôle augmente lorsque  $R$  augmente, figure B-III-21.

Une autre conséquence de l'anisotropie est observée sur la distribution des déformations et son évolution, figure B-III-22.

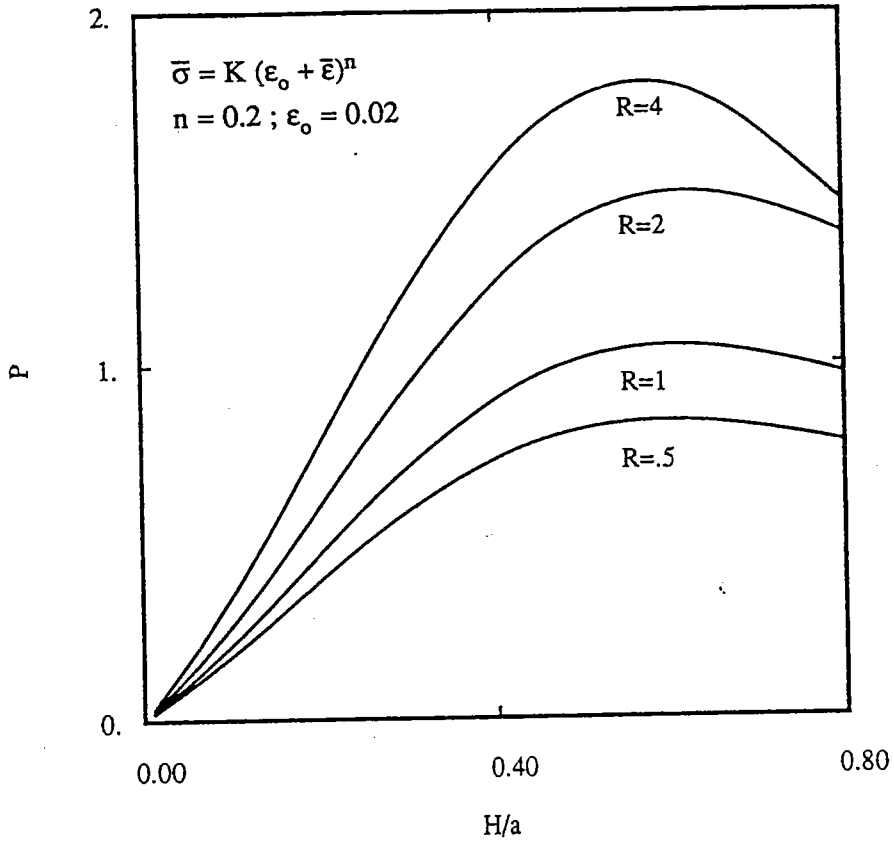


Fig. B-III-21 : Influence de l'anisotropie sur la pression du gonflement

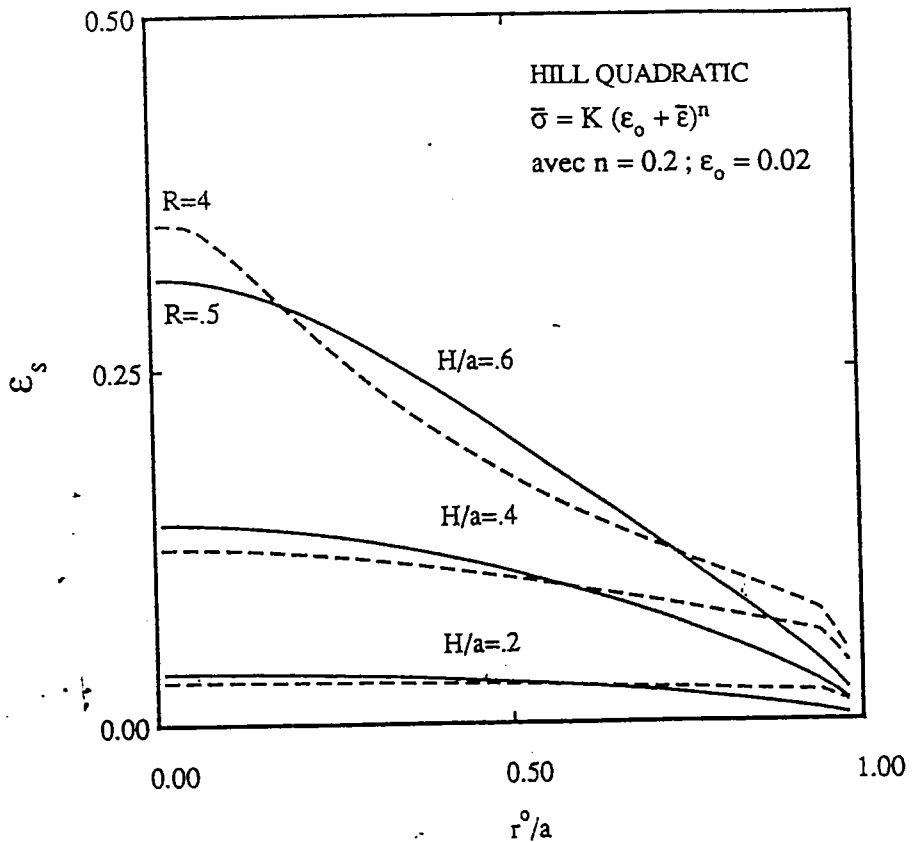


Fig. B-III-22 : Influence de l'anisotropie sur la distribution de la déformation méridienne

Dans les premiers stades du gonflement, la distribution des déformations méridiennes est plus uniforme pour les fortes valeurs de R. Ce résultat est également associé à la forme de la surface de charge. En effet, la courbure de la surface de charge au voisinage de la traction équibiaxiale augmente lorsque R augmente (ou, de façon équivalente, le rapport entre la plus grande contrainte principale en déformation plane et la contrainte en déformation équibiaxiale  $\sigma_{ps}/\sigma_b = \sqrt{2(1+R)/(1+2R)}$  diminue lorsque R augmente). Ceci a pour résultat de rendre la déformation plus homogène, et en particulier de favoriser la déformation méridienne près de l'encastrement pour de fortes valeurs de R. Toutefois, toujours pour de fortes valeurs de R, lorsque le gonflement progresse, la partie externe subit à la fois un plus fort durcissement mécanique (écrouissage) et géométrique (c'est-à-dire présente de plus faibles rayons de courbure dans le plan méridien), de sorte que la déformation est transférée à la partie centrale de la membrane dans les stades avancés du gonflement.

#### **B-III-8 - Influence de la forme de la surface de charge**

L'influence de la forme de la surface de charge a également été étudiée pour une valeur fixée de R, en utilisant des surfaces de charge correspondant à des fonctions non quadratiques des contraintes. Quelques tendances générales sont maintenant bien établies dans le cas des polycristaux C.F.C. ou C.C. Ces résultats qui sont obtenus ou bien expérimentalement, par comparaison des courbes contrainte-déformation sous différents chemins de chargement [33,34], ou bien par des calculs micro-macro utilisant le modèle d'homogénéisation de Taylor-Bishop-Hill [35-37], indiquent que la surface de charge (par comparaison avec l'ellipse de Hill) présente une faible courbure près de la déformation plane et une forte courbure dans le voisinage de la traction équibiaxiale. Nous avons également obtenu les mêmes tendances pour les différents aciers étudiés dans la partie A (Fig. A-III-4). Une telle modification dans la forme de la surface de charge peut être obtenue, en utilisant la représentation paramétrique de Budiansky (équs. B-II-1) avec  $g(\psi)$  de la forme :

$$g(\psi) = 1 + k_1 [\cos(2\psi) - \cos(6\psi)] \quad (\text{B-III-4})$$

avec  $k_1 < 0$ . La surface de charge correspondant à l'expression ci-dessus (avec  $k_1 = -0.025$ ) est présentée sur la figure B-III-23(a) pour  $R = 1$ , en même temps que l'ellipse de Von-Mises.

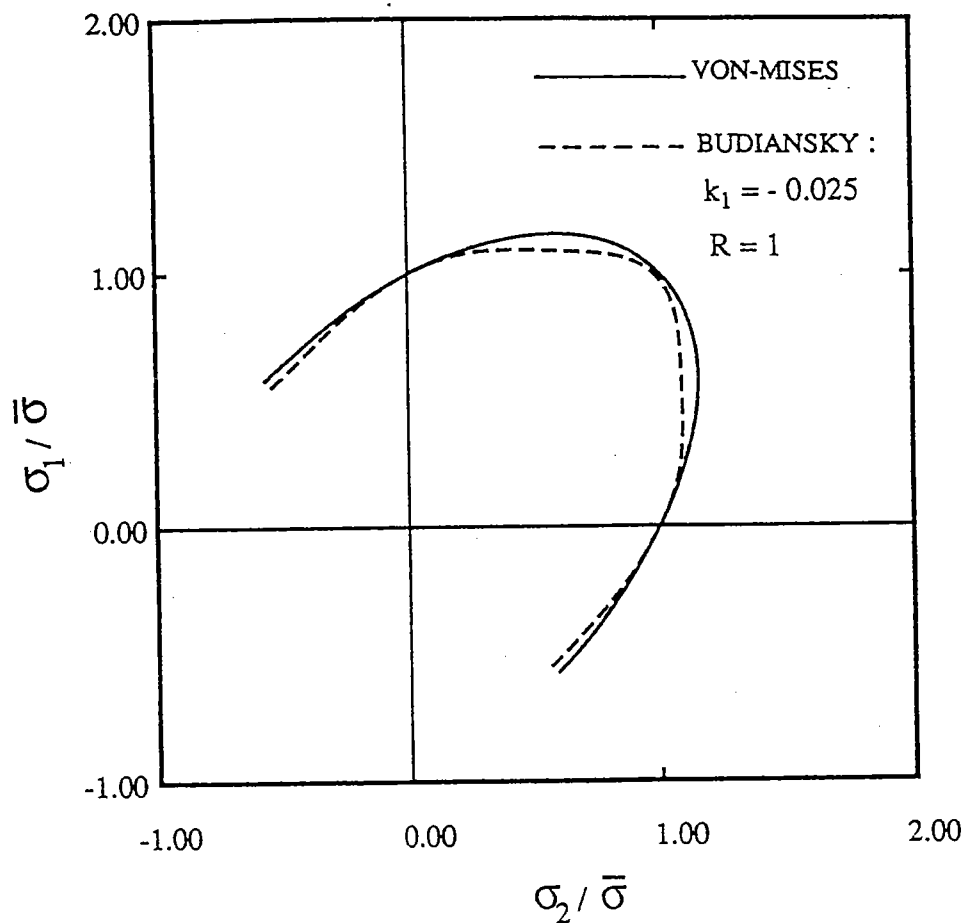


Fig. B-III-23(a) : ---- Surface de charge de Budiansky correspondant à  
 $g(\psi) = 1 - 0.025 [\cos(2\psi) - \cos(6\psi)]$   
 — Surface de charge de Von-Mises

On peut observer que la surface décrite par l'équation (B-III-4) s'accorde bien avec la surface de charge calculée par Barlat [36] en utilisant le modèle d'homogénéisation de Taylor-Bishop-Hill sur des métaux C.F.C. avec une texture cristallographique isotrope. L'hypothèse d'écroutissage isotrope utilisée dans ce travail revient à négliger le développement de la texture.

En comparaison, avec le matériau de Von-Mises, la distribution des déformations méridiennes est plus uniforme pour de faibles hauteurs au pôle avec la surface décrite par (B-III-4). Pour des hauteurs au pôle assez élevées, la déformation tout près du pôle devient importante et la dépression des déformations méridiennes est plus prononcée dans la zone intermédiaire entre le pôle et la périphérie (fig. B-III-23(b)).

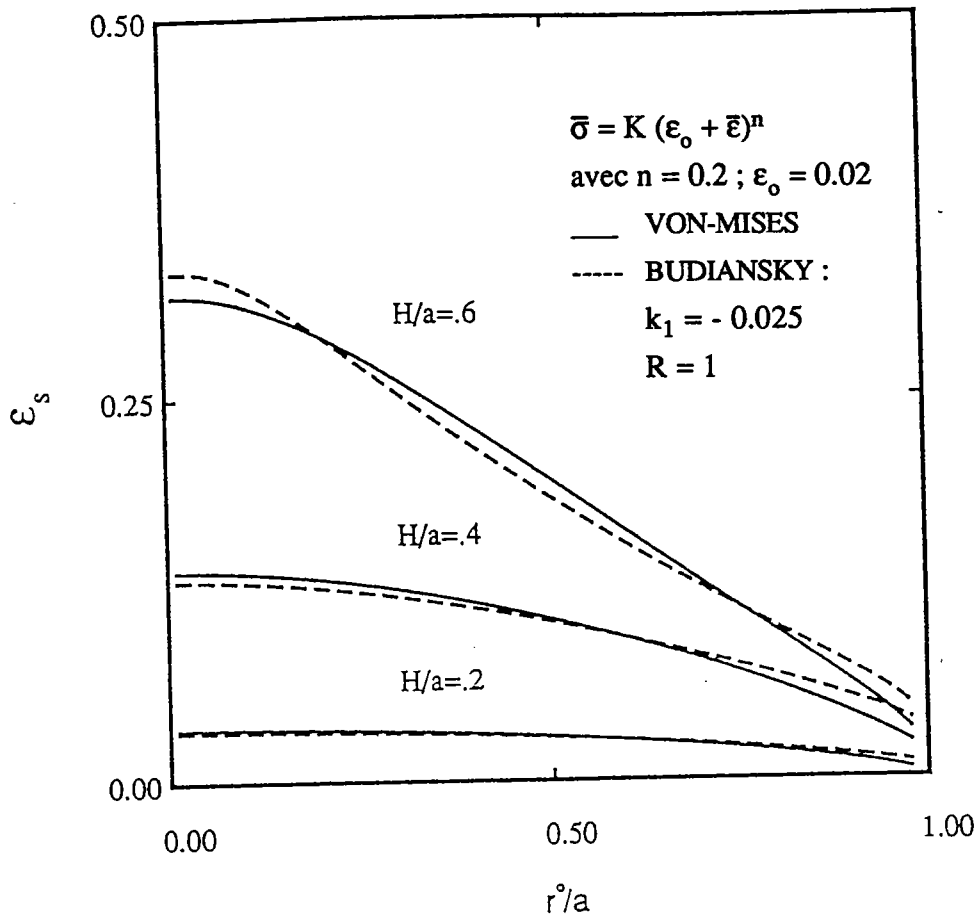


Fig B-III-23(b) : Influence de la forme de la surface de charge sur la distribution de la déformation

Ce comportement est le même que celui prévu, pour de grandes valeurs de  $R$ , avec le critère quadratique de Hill, et s'explique de la même façon, par la forte courbure de la surface de charge au voisinage de la traction équi-biaxiale.

Afin de mettre en évidence la non-linéarité des chemins de déformation suivis par les différentes particules, ceux-ci sont représentés pour plusieurs points à différentes positions radiales sur les figures B-III-24(a) et B-III-24(b) pour les deux matériaux. On peut observer que la non-linéarité des chemins de déformation est particulièrement accentuée, pour les positions radiales intermédiaires, avec la surface décrite par (B-III-4). Cette facilité de déviation du chemin de déformation est elle-aussi liée à la forte courbure de la surface décrite par (B-III-4), au voisinage de la traction équi-biaxiale.

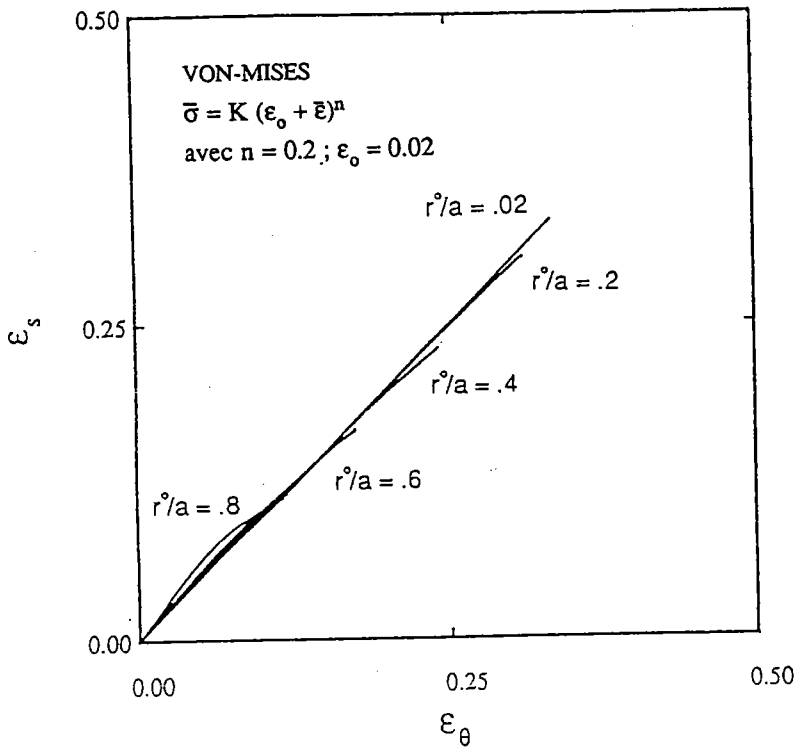


Fig. B-III-24(a) : Chemins de déformation de quelques particules, obtenus avec la surface de charge de Von-Mises

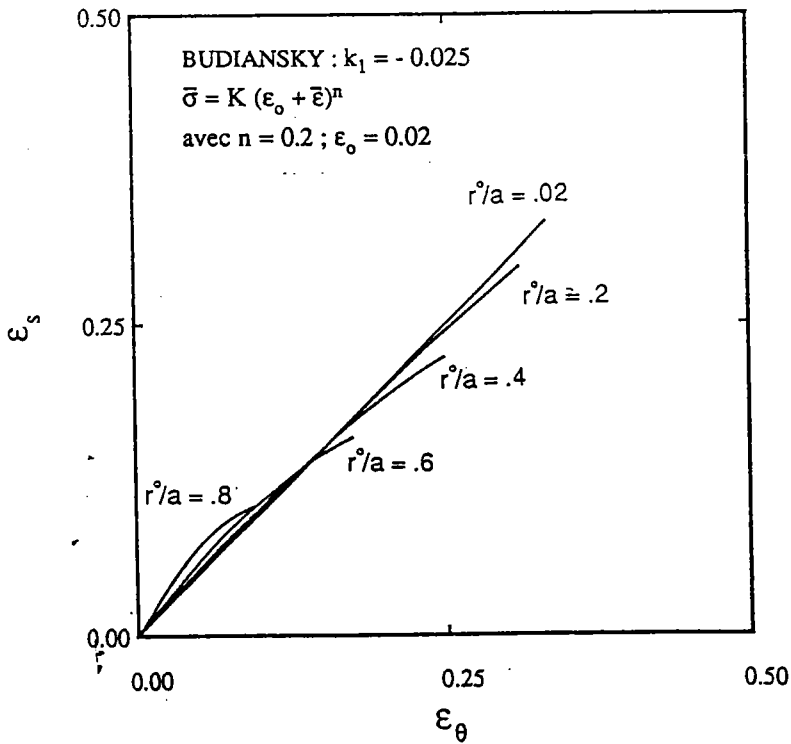


Fig. B-III-24 (b) : Chemins de déformation de quelques particules, obtenus avec la surface décrite par l'équation (B-III-4).



### B-III-9 - Comparaison avec les résultats expérimentaux de la littérature

#### B-III-9-1 - Relation entre la pression et la déformation en épaisseur au pôle

En considérant que les caractéristiques d'écroutissage et de sensibilité à la vitesse sont généralement connues avec une bonne précision, le principal paramètre qui peut modifier le calcul de la pression est lié à l'estimation des contraintes au voisinage de la traction équibiaxiale par rapport à la contrainte de référence uniaxiale  $\sigma_u = \bar{\sigma}$ . Avec le critère quadratique de Hill, le rapport entre la contrainte d'écoulement en traction équibiaxiale et la contrainte d'écoulement en traction uniaxiale est égal à :  $\sigma_y/\sigma_u = \sqrt{(1+R)/2}$ . Le désaccord entre l'expérience et le calcul de la pression de gonflement provient surtout d'une estimation non satisfaisante de ce rapport des contraintes.

Une illustration de l'influence de ce rapport ( $\sigma_y/\sigma_u$ ) est fournie par des tôles d'aluminium, avec des valeurs de R inférieures à 1. Dans ce cas, le rapport ( $\sigma_y/\sigma_u$ ) déterminé expérimentalement est plus grand que celui prévu par le critère quadratique de Hill [38]. En accord avec ce comportement, des calculs effectués par Ilahi *et al.* [6] montrent que la pression calculée avec le critère quadratique de Hill est plus faible que celle déterminée expérimentalement. Finalement, Ilahi *et al.* [6] ont obtenu une bonne prévision du comportement expérimental en utilisant la forme suivante du critère non quadratique de Hill :

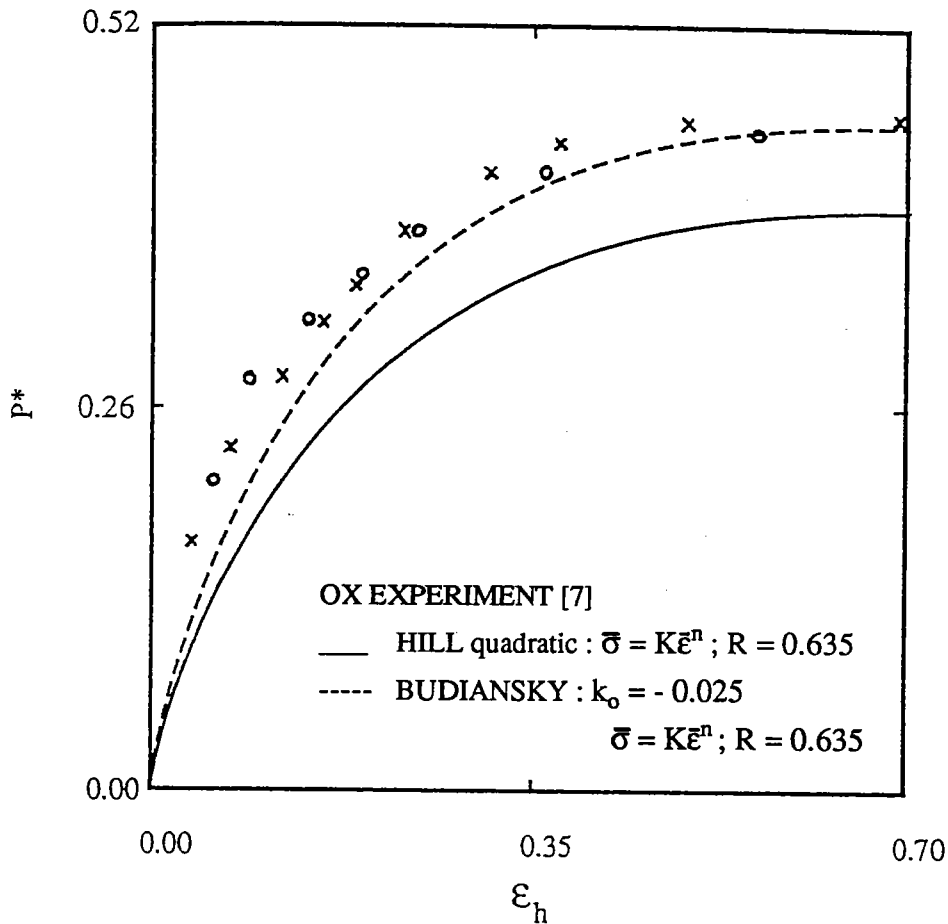
$$(1 + 2R) |\sigma_1 - \sigma_2|^M + |\sigma_1 + \sigma_2|^M = 2(1 + R) \bar{\sigma}^M \quad (\text{B-III-5})$$

qui conduit à un rapport ( $\sigma_y/\sigma_u$ ) croissant pour M décroissant. Cependant, cette surface de charge présente un inconvénient, qui est celui d'une courbure infinie au point de traction équibiaxiale pour  $M < 2$ . Pour cette raison, une fonction  $g(\psi)$ , qui conduit à une surface de charge très proche de celle fournie par l'équation (B-III-5) est adoptée ici :

$$g(\psi) = 1 + k_0 [1 - \cos(4\psi)] \quad (\text{B-III-6})$$

la valeur de  $k_0$  devant être ajustée à celle de M dans (B-III-5).

Une comparaison entre les résultats expérimentaux d'Ilahi *et al.* [6] et la variation théorique de la pression en fonction de la déformation en épaisseur au pôle est présentée par la figure B-III-25.



**Fig. B-III-25 :** Résultats de comparaison calcul-expérience sur la variation de la pression en fonction de la déformation en épaisseur

Les dimensions et les paramètres du matériau sont :

$a = 5 \text{ in}$  ;  $h^0 = 0.035 \text{ in}$  ;  $K = 19166 \text{ lbf/in}^2$  ;  $n = 0.269$  et  $R = 0.635$ .

La valeur de  $k_o$  adoptée dans (B-III-6) ( $k_o = -0.025$ ) a été ajustée pour fournir une surface de charge très proche de la valeur de  $M$  donnée par Ilahi *et al.* ( $M = 1.7$ ). La corrélation satisfaisante entre l'expérience et le calcul basé sur l'adoption de la surface décrite par la relation (B-III-6) est une conséquence du rapport ( $\sigma_v/\sigma_u$ ) résultant du choix de cette surface :  $\sigma_v/\sigma_u = 1.005$ , alors que ce rapport est de 0.904 dans le cas du critère quadratique de Hill.

**B-III-9-2 - Relation entre le rayon de courbure et la déformation en épaisseur au pôle**

Cette relation est tout à fait importante pour les essais expérimentaux où la loi contrainte-déformation en traction équiaxiale est déterminée à partir de mesures effectuées au pôle de la membrane. Les résultats expérimentaux d'Ilahi *et al.* [6] sur l'aluminium recuit sont comparés (fig. B-III-26) avec trois simulations numériques. La courbe calculée avec  $\bar{\sigma} = K \exp(\bar{\epsilon})$ ,  $R = 1$  et  $g(\psi) = 1$ , reproduit la solution analytique de Hill. Comme nous l'avons discuté au paragraphe (B-III-3), le rayon de courbure au pôle est plus faible lorsqu'une loi puissance contrainte-déformation est utilisée. Avec le critère quadratique de Hill, un bon accord avec l'expérience est obtenu pour les grandes déformations. Avec le modèle de Budiansky, cet accord est également amélioré pour les petites déformations en adoptant la fonction  $g(\psi)$  donnée par la relation (B-III-6).

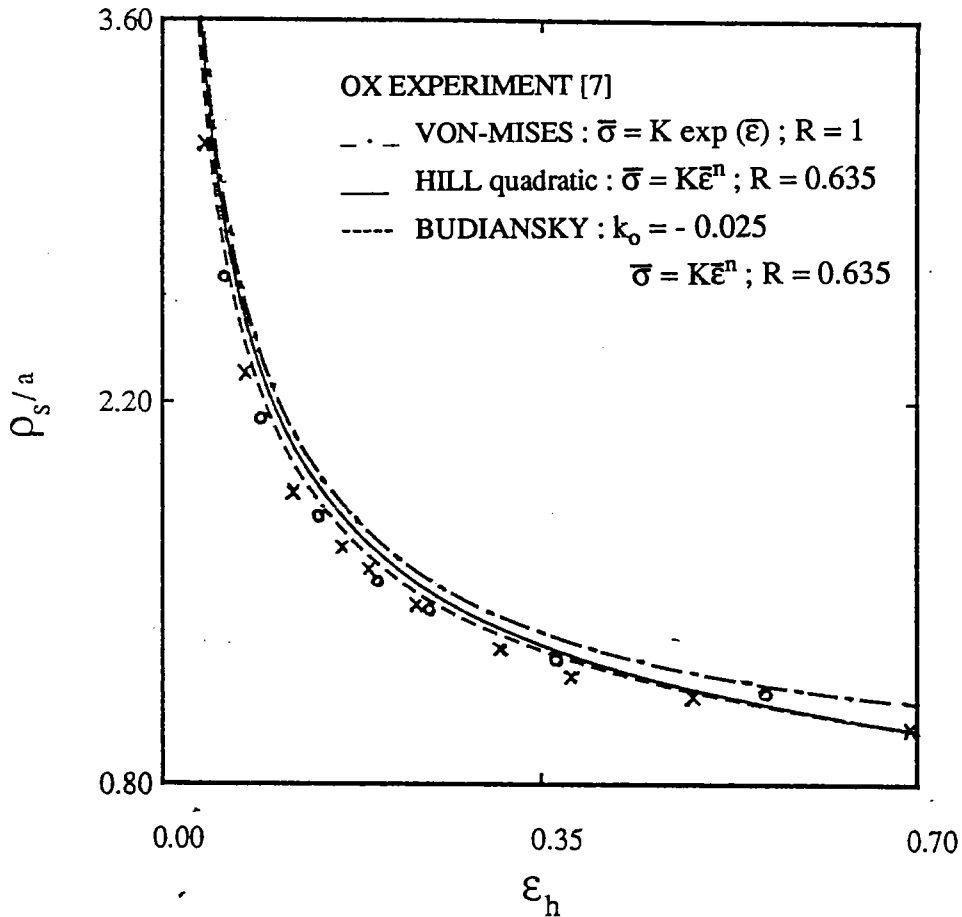


Fig. B-III-26 : Résultats de comparaison calcul-expérience sur la variation de la courbure en fonction de la déformation en épaisseur

### B-III-10 - Conclusion

Le problème du gonflement hydraulique d'une tôle a été analysé sur la base d'une méthode de différences finies, dans le cas d'un matériau rigide-viscoplastique à isotropie planaire. Une série de valeurs de  $n$  (exposant d'écroutissage) et de  $m$  (coefficient de sensibilité à la vitesse de déformation) a été examinée. Des changements réalistes de la forme de la surface de charge ont également été considérés, en utilisant les relations proposées par Budiansky dans sa formulation générale de l'écroutissage isotrope [29]. Les résultats sont résumés comme suit :

- 1 - La pression nécessaire pour assurer le gonflement hydraulique d'une tôle, augmente avec l'exposant d'écroutissage  $n$  et/ou avec le rapport entre la contrainte d'écoulement en traction équibiaxiale et la contrainte d'écoulement en traction uniaxiale  $\sigma_y/\sigma_u$ .
- 2 - La sensibilité à la vitesse de déformation tend à diminuer l'inhomogénéité de la déformation, mais cet effet ne devient significatif que pour les fortes valeurs de  $m$  et dans les stades avancés du gonflement.
- 3 - La membrane déformée devient de plus en plus allongée avec la progression du gonflement. Il en résulte que le rayon de courbure au pôle est plus faible que celui prévu par la solution cinématique de Hill qui suppose que le diaphragme est sphérique.
- 4 - La distribution des déformations méridiennes et en épaisseur est plus uniforme dans les premiers stades du gonflement, pour de fortes valeurs de la courbure de la surface de charge, au voisinage de la traction équibiaxiale (ou pour de petites valeurs du rapport entre la plus grande contrainte d'écoulement en déformation plane et la contrainte d'écoulement en déformation équibiaxiale). Ce comportement est inversé dans les stades avancés du gonflement.
- 5 - Un accord quantitatif avec les expériences effectuées sur l'aluminium a été trouvé sur la base d'une amélioration réaliste de la surface de charge.

Dans la mesure où les caractéristiques d'écroutissage et de sensibilité à la vitesse de déformation sont généralement déterminées avec une bonne précision, il apparaît clairement que ce sont les caractéristiques de la forme de la surface d'écoulement, encore insuffisamment connues, qui doivent être particulièrement étudiées, afin d'obtenir des prévisions correctes dans les simulations numériques des procédés de formage.

## CONCLUSION GENERALE

Une étude expérimentale du comportement plastique des tôles métalliques sous sollicitation biaxiale a tout d'abord été réalisée sur quatre nuances d'aciers d'emboutissage, grâce à un dispositif original de traction biaxiale. Les essais sous différents trajets de déformation ont été analysés dans l'hypothèse d'un écrouissage isotrope. Les surfaces d'écoulement obtenues montrent un certain nombre de tendances systématiques pour toutes les nuances étudiées : la courbure de ces surfaces est importante au voisinage de l'expansion équi-biaxiale, et faible au voisinage de la déformation plane. Le rapport des contraintes en déformation plane est d'autre part plus faible que prévu par les critères classiques de Von-Mises ou de Hill. Les essais séquentiels traction biaxiale - traction uniaxiale montrent toutefois, par rapport à cette première analyse, que l'écrouissage présente un caractère directionnel ou anisotrope, les surfaces d'écoulement étant en fait "allongées" dans la direction du chargement. Cet effet devrait être modélisé pour rendre compte du comportement des matériaux pour des chemins de déformation fortement non-linéaires. Dans le cas de chargements faiblement non linéaires, il est raisonnable de penser que les surfaces obtenues avec l'hypothèse d'écrouissage isotrope permettent de prévoir avec une bonne précision les contraintes dans le matériau.

Dans la seconde partie de ce travail, nous avons mis au point un programme de calcul par différences finies d'un procédé particulier de mise en forme des tôles, à savoir le gonflement hydraulique. Dans la mesure où les chemins de déformation sont faiblement non linéaires pour cet essai, nous avons introduit dans ce programme un modèle d'écrouissage isotrope permettant de rendre compte avec une grande flexibilité de différentes formes de surfaces d'écoulement. Une analyse systématique de l'influence des paramètres d'écrouissage, de sensibilité à la vitesse de déformation et de forme de la surface d'écoulement a été réalisée. En même temps, les résultats ont été interprétés compte-tenu des conditions aux limites et de la géométrie particulière de l'essai de gonflement hydraulique. Des confrontations entre les prévisions du programme et des résultats expérimentaux de la littérature ont enfin montré qu'un bon accord calcul/expérience pouvait être obtenu grâce à une prise en compte plus réaliste des caractéristiques de forme de la surface d'écoulement.

Les études expérimentales du type de celle réalisées dans la première partie de ce travail sont assez peu nombreuses, en particulier dans le domaine de l'expansion. Il nous semble utile de les poursuivre, à la fois en relation avec une caractérisation métallurgique du matériau (densité de dislocations, taille et forme des cellules de dislocations...) et par comparaison avec les prévisions du calcul. Un autre prolongement de ce travail, en cours

de développement, consiste à s'intéresser aux conditions d'instabilité dans les tôles déformées dans le domaine de l'expansion. En effet, la plupart des analyses théoriques de l'instabilité en expansion se réfèrent à une tôle sollicitée dans son plan, alors qu'un étirage biaxial pouvant conduire à une striction survient dans les procédés de formage par un chargement latéral de la tôle, comme cela est le cas dans le gonflement hydraulique, ou dans divers essais de poinçonnement. Il est donc souhaitable d'examiner les conditions d'instabilité pour ces divers essais "hors-plan", et de comparer les résultats avec ceux obtenus avec les modèles de localisation ou de perturbation, où la tôle est supposée être sollicitée dans son plan.

**Bibliographie de la partie B**

- 1 - W. F. Brown and G. Sachs,  
Trans. ASME 70, p. 241 (1948)
- 2 - A. Gleyzal,  
J. App. Mech. 15, p. 288 (1948)
- 3 - W. F. Brown and F. C. Thompson,  
Trans. ASME 71, p. 575 (1949)
- 4 - N. A. Weil and N. M. Newmark,  
J. App. Mech. 22, p. 533 (1955)
- 5 - P.B. Mellor,  
J. Mech. Phys. Solids 4, p. 41 (1956)
- 6 - M. F. Ilahi, A. Parmar and P.B. Mellor,  
Int. J. Mech. Sci. 23, p. 221 (1981)
- 7 - M.F. Ilahi and T. K. Paul,  
Int. J. Mech. Sci. 27, p. 275 (1985)
- 8 - R. Hill,  
Phil. Mag. (ser. 7) 41, p. 1133 (1950)
- 9 - N. A. Weil,  
J. App. Mech. 26, p. 621 (1959)
- 10 - D. M. Woo,  
Int. J. Mech. Sci. 6, p. 303 (1964)
- 11 - R. Hill and B. Storakers,  
J. Mech. Phys. Solids. 28, p. 27 (1980)
- 12 - E. Chater and K. W. Neale,  
Int. J. Mech. Sci. 27, p. 453 (1985)
- 13 - E. Chater and K. W. Neale,  
Int. J. Mech. Sci. 25, p. 235 (1983)
- 14 - Y. J. Kim and D. Y. Yang,  
Int. J. Mech. Sci. 27, p. 453 (1985)
- 15 - D. Y. Yang and Y. J. Kim,  
Int. J. Mech. Sci. 28, p. 825 (1986)
- 16 - N. M. Wang and M. R. Shallaly,  
Int. J. Mech. Solids 17, p. 43 (1969)
- 17 - W. Johnson and J. L. Durcan,  
Sheet Metal. Indus. 42, p. 271 (1965)
- 18 - A. J. Ranta-Eskola,  
Int. J. Mech. Sci. 21, p. 457 (1979)

- 19 - H. Iseki, T. Jimma and T. Murota  
Bull. J.S.M.E. 17, p. 1240 (1974)
- 20 - S. Kobayashi and J. H. Kim,  
in *Mechanics of Sheet Metal forming*, Ed. D. P. Koistinen and N. W. Wang,  
Plenum Press, p. 341 (1978)
- 21 - D. Zhou and J. Lian,  
Int. J. Mech. Sci. 31, n° 4, p. 249 (1989)
- 22 - P. B. Mellor,  
Ph. D. Thesis, Sheffield University (1954)
- 23 - N. M. Wang,  
in *Numerical Analysis of Forming Processes*, Ed. J.F.T. Pittman,  
O.C. Zienkiewicz, R.D. Wood and J. M. Alexander, John Wiley, p. 117 (1984)
- 24 - J. L. Duncan,  
Bull. Mech. Eng. Educ. 4, p. 29 (1965)
- 25 - H.J. Kleemola and A. J. Ranta-Eskola,  
Metall. Trans. A, 7, p. 595 (1976)
- 26 - H. M. Shang, F. S. Chau, C. J. Tay and S. L. Toh,  
13th Biennial Congress IDDRG, Melbourne, Australia, p. 106 (1984)
- 27 - Z. Marciniak and K. Kuczinski,  
Int. J. Mech. Sci. 9, p. 609 (1967)
- 28 - G. Ferron and A. Molinari,  
in *Forming Limit Diagrams : Concepts, Methods and Applications*, Ed.  
R.H. Wagoner, K. S. Chan and S. P. Keeler, TMS, p. 11 (1989)
- 29 - B. Budiansky,  
in *Mechanics of Material Behaviour*, Ed. G. J. Doorak and R. T. Shield,  
Elsevier Science pub., p. 15 (1984)
- 30 - R. Hill,  
Math. Proc. Cam. Phil. Soc. 75, p. 179 (1979)
- 31 - J. L. Bassani,  
Int. J. Mech. Sci. 19, p. 651 (1977)
- 32 - R. Hill,  
Proc. R. Soc. London, A 193, p. 281 (1948)
- 33 - S. S. Hecker,  
in *Proc. ICM 4, Stockholm Sweden*, Ed. J. Carlson and N. G. Ohlson,  
Pergamon Press Oxford, p. 129 (1983)
- 34 - R. H. Wagoner,



- Metall. Trans. A, 13, p. 1491 (1982)
- 35 - R. W. Logan and W. F. Hosford,  
Int. J. Mech. Sci. 22, p. 419 (1980)
- 36 - F. Barlat,  
Mat. Sci. and Eng. 91, p. 55 (1987)
- 37 - F. Barlat and O. Richmond  
Mat. Sci. and Eng. 95, p. 15 (1987)
- 38 - J. Woodthorpe and R. Pearce,  
Int. J. Mech. Sci. 12, p. 341 (1970)

## ANNEXE-A-1

## DEPOUILLEMENT DES ESSAIS DE TRACTION

Le dépouillement des essais de traction s'appuie sur une décomposition de l'allongement total en allongement élastique et en allongement plastique. Dans le cas d'un essai de traction simple, l'allongement total est représenté par le déplacement de la traverse, et l'allongement élastique incorpore les comportements du montage de traction (bâti, tiges de traction et cellule de mesure de la force) et de l'éprouvette. Pour un essai de traction biaxiale par contre, le comportement élastique suivant chaque axe de l'éprouvette dépend du rapport des déformations principales,  $\rho = \varepsilon_2/\varepsilon_1$ , imposé, et du système de mise en charge du dispositif. Ainsi, dans un essai biaxial, l'allongement élastique de la "machine" incorpore les comportements du dispositif et de la machine de traction. Nous écrivons alors que :

$$\Delta l = \Delta l_m + \Delta l_e + \Delta l_p \quad (\text{A-A-1})$$

où les indices m, e et p désignent respectivement la machine, et les contributions élastique et plastique de l'éprouvette. Pour un essai de traction biaxial  $\Delta l_m$  dépend de l'axe de l'éprouvette considérée.

Le comportement élastique de la machine est caractérisé par une souplesse  $S_m$ , telle que  $\Delta l_m = S_m F = S_m A_o \sigma_c$  où  $F$  désigne la charge,  $A_o$  la section initiale et  $\sigma_c$  la contrainte de Kirchhoff. Cette souplesse peut être facilement déterminée à l'aide d'une éprouvette dont la montée élastique est bien définie et dont le module d'Young est connu. La déformation plastique  $\varepsilon_p$  de l'éprouvette (ou suivant chaque axe de l'éprouvette biaxiale considérée) étant définie sous forme logarithmique,  $\Delta l_p$  est donné par :

$$\Delta l_p = l_o (e^{\varepsilon_p} - 1) \quad (\text{A-A-2})$$

où  $l_o$  désigne la longueur initiale de l'éprouvette.

Enfin, la déformation élastique  $\varepsilon_e$  de l'éprouvette (qui en toute rigueur devrait être exprimée sous forme logarithmique pour respecter l'additivité des déformations élastique et plastique) est utilisée sous forme conventionnelle dans la loi de Hooke :

$$\Delta l_e = \frac{l_p \sigma}{E'} \quad (\text{A-A-3})$$

où  $l_p = l_0 + \Delta l_p$ ,  $\sigma$  la contrainte définie dans la configuration déchargée (on considérera qu'elle représente très sensiblement la contrainte de Cauchy en raison des faibles déformations élastiques), et :

$$E' = \begin{cases} E'_1 = \frac{E}{1 - \alpha \nu} & (\text{direction verticale}) \\ E'_2 = \frac{\alpha E}{\alpha - \nu} & (\text{direction horizontale}) \end{cases} \quad (\text{A-A-4})$$

où  $\alpha = \sigma_2/\sigma_1$  est le rapport des contraintes principales,  $\nu$  est le coefficient de Poisson et  $E$  le module d'Young.

Avec  $l_p = l_0 e^{\varepsilon_p}$  et  $\sigma = \sigma_c e^{\varepsilon_p}$  (cette dernière relation découlant de l'incompressibilité plastique), nous obtenons :

$$\Delta l_e = \frac{l_0 \sigma_c}{E'} e^{2\varepsilon_p} \quad (\text{A-A-5})$$

La relation (A-A-1) peut être réécrite sous la forme d'une équation du second degré en  $\varepsilon^{EP}$  :

$$\frac{\sigma_c}{E'} e^{2\varepsilon_p} + e^{\varepsilon_p} - \left( 1 + \frac{\Delta l}{l_0} S_m \frac{A_0 \sigma_c}{l_0} \right) = 0 \quad (\text{A-A-6})$$

Le couple  $(\sigma, \varepsilon_p)$  est finalement obtenu à partir des valeurs expérimentales  $(\sigma_c, \Delta l)$  par les relations suivantes :

$$\varepsilon_p = \ln \left[ \frac{-1 + \sqrt{1 + 4 \frac{\sigma_c}{E'} \left( 1 + \frac{\Delta l}{l_0} S_m \frac{A_0 \sigma_c}{l_0} \right)}}{2 (\sigma_c / E')} \right] \quad (\text{A-A-7})$$

et

$$\sigma = \sigma_c e^{\varepsilon_p} \quad (\text{A-A-8})$$

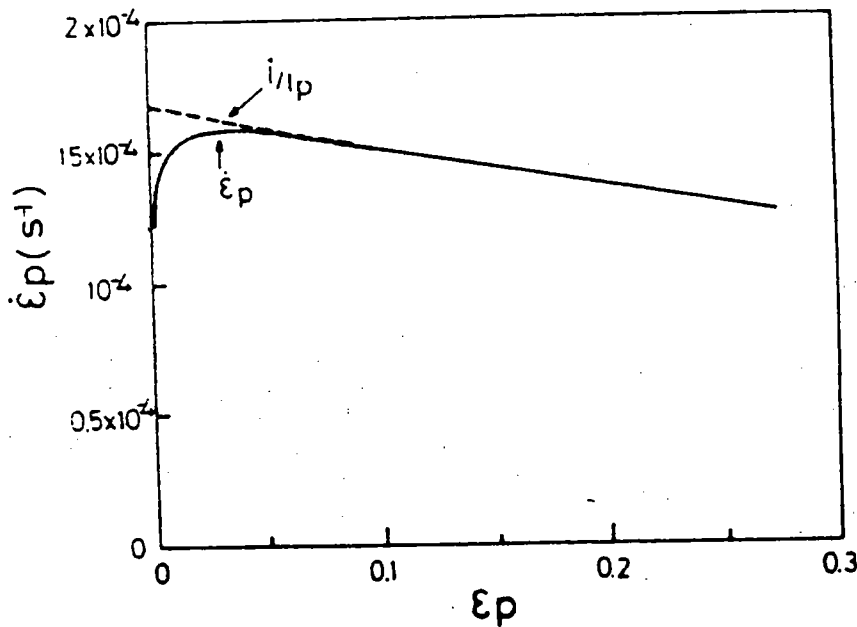
La vitesse d'allongement plastique  $l_p$  s'obtient par dérivation de l'équation (A-A-1). La vitesse de déformation plastique  $\dot{\epsilon}_p = l_p/l_p$  est donnée par :

$$\dot{\epsilon}_p = \frac{\dot{l} - \left( S_m A_o + \frac{l_o}{E} e^{2\epsilon_p} \right) \sigma_c}{l_o e^{\epsilon_p}} \quad (\text{A-A-9})$$

en négligeant le terme

$$\left( 2 \frac{l_o \sigma_c}{E} e^{2\epsilon_p} \cdot \dot{\epsilon}_p \right)$$

La figure (A-A-1) montre l'évolution de  $\dot{\epsilon}_p$  pour l'aluminium A5 en traction uniaxiale dans le cas où la vitesse de traverse  $l = v$  est de 0,5 mm/mn.

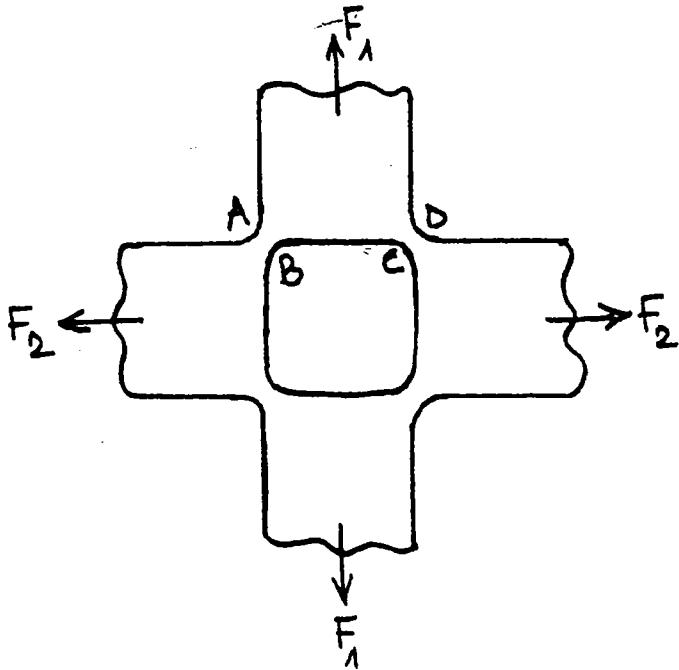


**Fig. (A-A-1) :** Evolution de  $\dot{\epsilon}_p$  en fonction de  $\epsilon_p$  pour l'aluminium A5 en traction à l'ambiante. La vitesse de traverse est de 0,5 mm/mn (d'après [8])

## ANNEXE-A-II

## CALCUL DE LA SECTION EFFICACE DE L'ÉPROUVETTE

Nous donnons sur la figure ci-dessous une schématisation de l'éprouvette avec les forces de traction dans les deux axes de l'éprouvette.



Nous désignons par  $e_p$  et  $l_p$ , respectivement, l'épaisseur et la longueur de la zone AB ou CD et par  $e$  et  $l$ , respectivement, l'épaisseur et la longueur utiles de la partie centrale amincie, BC. Nous considérons d'abord la force  $F_1$ .

1° Dans les directions AB et CD, l'éprouvette est supposée être en déformation plane (la largeur AB est supposée constante) et la section de cette partie (AB + CD) est donnée par :

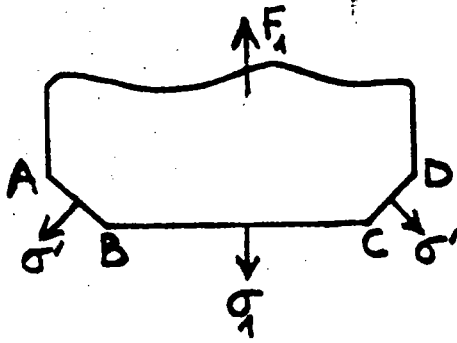
$$S_p = 2 l_p e_p \quad (\text{A-A-10})$$

2° Dans la zone BC, l'éprouvette est en traction biaxiale et sa section est donnée par :

$$S_1 = l e \quad (\text{A-A-11})$$

Soit  $s_1$  la contrainte dans la zone BC et  $s'$  les contraintes dans les zones AB et CD (voir schéma ci-dessous), alors l'équilibre donne pour la force appliquée :

$$F_1 = 2 l_p e_p \cos(45) \cdot \sigma' + l e \cdot \sigma_1 \quad (\text{A-A-12})$$



En posant  $\alpha_1 = \sigma'/\sigma_1$  ; la contrainte dans la partie utile sous l'action de la force  $F_1$  est donnée par :

$$\sigma_1 = \frac{F_1}{\sqrt{2} l_p e_p \alpha_1 + l e} \quad (\text{A-A-13})$$

Cela donne comme section "efficace" dans la direction de  $F_1$  :

$$S_{e_1} = \sqrt{2} l_p e_p \alpha_1 + l e \quad (\text{A-A-14})$$

Un calcul analogue pour la force  $F_2$  donne, avec  $\alpha_2 = \sigma'/\sigma_2$  :

$$\sigma_2 = \frac{F_2}{\sqrt{2} l_p e_p \alpha_2 + l e} \quad (\text{A-A-15})$$

Cela donne comme section "efficace" dans la direction de  $F_2$  :

$$S_{e_2} = \sqrt{2} l_p e_p \alpha_2 + l e \quad (\text{A-A-16})$$

Ainsi, pour un matériau isotrope sous déformation équi-biaxiale, le critère de Von-Mises donne  $\sigma_1 = \sigma_2$  et  $\alpha_1 = \alpha_2 = 2/\sqrt{3}$ . De ce fait, la section efficace est la même dans les deux directions, à savoir :

$$S_e = \frac{2\sqrt{2} l_p e_p}{\sqrt{3}} + l e \quad (\text{A-A-17})$$

D'une façon générale, pour un chemin de déformation différent de la déformation équi-biaxiale, il faut recalculer  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  et donc la section efficace.

Ainsi, dans le cas de la déformation plane, et toujours avec le critère de Von-Mises :  $\sigma_2 = \sigma_1/2$ . On trouve alors  $\alpha_1 = 1$  et  $\alpha_2 = 2$ .

Alors que, dans le cas d'un chemin de déformation caractérisé par un rapport de déformation  $\rho = 1/2$ , et toujours avec le critère de Von-Mises :  $\sigma_2 = 4/5 \sigma_1$ . On trouve alors  $\alpha_1 = 2\sqrt{7}/5$  et  $\alpha_2 = \sqrt{7}/2$ .

Le tableau ci-dessous regroupe tous les résultats ci-dessus en donnant l'expression de la "section efficace" pour chaque chemin de déformation.

Mode de déformation	$\alpha_1$	$\alpha_2$	Section efficace dans la direction de $F_1$ : $S_{e_1}$	Section efficace dans la direction de $F_2$ : $S_{e_2}$
équi-biaxiale : $\rho = 1$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{2\sqrt{2}l_p e_p}{\sqrt{3}} + l_e$	$\frac{2\sqrt{2}l_p e_p}{\sqrt{3}} + l_e$
plane : $\rho = 0$	1	2	$\sqrt{2}l_p e_p + l_e$	$2\sqrt{2}l_p e_p + l_e$
$\rho = \frac{1}{2}$	$\frac{2\sqrt{7}}{5}$	$\frac{\sqrt{7}}{2}$	$\frac{2\sqrt{14}}{5} l_p e_p + l_e$	$\frac{\sqrt{14}}{2} l_p e_p + l_e$

Si l'on fait une erreur dans l'estimation de  $\sigma'/\sigma_1$  ou  $\sigma'/\sigma_2$  en raison de l'utilisation du critère de Von-Mises, l'erreur sur la section efficace est faible en raison de la section relativement faible des zones AB et CD par rapport à celle de la zone BC. Par exemple, le rapport  $l_p e_p / \sqrt{2} l_e$  est de l'ordre de 7,5%. Une erreur de 10% sur  $\alpha_1$  ou  $\alpha_2$  conduit alors à une erreur inférieure à 1% pour la section efficace.

