



**HAL**  
open science

# Hétérogénéités de déformation plastique induites et conséquences sur la formation des bandes de cisaillement et des textures de déformation

Nadia Fakri

► **To cite this version:**

Nadia Fakri. Hétérogénéités de déformation plastique induites et conséquences sur la formation des bandes de cisaillement et des textures de déformation. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université Paul Verlaine - Metz, 1992. Français. NNT : 1992METZ010S . tel-01775968

**HAL Id: tel-01775968**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01775968v1>**

Submitted on 24 Apr 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

VB 74627

**THESE**

préparée à

**L'INSTITUT SUPERIEUR DE GENIE MECANIQUE ET PRODUCTIQUE**

**UNIVERSITE DE METZ**

en vue de l'obtention du grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE METZ**

spécialité

**GENIE PHYSIQUE ET MECANIQUE**

par

**Nadia FAKRI**

**HETEROGENEITES DE DEFORMATION PLASTIQUE INDUITES ET  
CONSEQUENCES SUR LA FORMATION DES BANDES DE  
CISAILLEMENT ET DES TEXTURES DE DEFORMATION**

Soutenue le 20 Février 1992 devant la Commission d'Examen:

Président et Rapporteur:

A.Korbel, Professeur, Academy of Mining and Metallurgy, Krakow (Pologne).

Directeur de thèse:

M.Berveiller, Professeur, Université de Metz.

Rapporteurs:

C.Rey, Professeur, Université de Paris XIII.

J.R.Klepaczko, Professeur, Université de Metz.

Examineurs:

P.Lipinski, Maître de Conférences, Université de Metz.

O.Fassi-Fehri, Professeur, Université de Rabat (Maroc).

M.Friedrich, Ingénieur de Recherches, Sollac Florange

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE -METZ	
N° inv.	19920515
Cote	S/M3 92/10
Loc	Magasin

*A mes parents, ma soeur Hind et toute ma famille*

*A mes amis*

*Avec reconnaissance et affection*

*Ce travail a été réalisé au laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux de l'Institut Supérieur de Génie Mécanique et Productique (Université de Metz).*

*Je tiens à remercier sincèrement Monsieur M. Berveiller, Professeur à l'Université de Metz, qui me fit bénéficier de ses compétences en assurant la direction de ce travail.*

*Je désire exprimer mes cordiales reconnaissances et sympathie à Monsieur P.Lipinski, Maître de Conférences à l'Université de Metz, pour sa participation au jury, ses précieux conseils et sa constante disponibilité qui me permirent de mener à bien ce travail.*

*A Monsieur A.Korbel, Professeur à l'académie des Mines et Metallurgie de Krakovie (Pologne), j'exprime mes sincères remerciements pour sa contribution à la réalisation d'une partie de ce travail et sa participation au jury en qualité de Président et Rapporteur.*

*Je remercie également Monsieur O. Fassi-fehri, Professeur à la Faculté des Sciences de Rabat (Maroc), d'avoir accepté de faire partie du jury.*

*Je tiens à remercier Madame C.Rey, Professeur à l'Université de ParisXI et Monsieur J.R.Klepaczko, Professeur à L'Université de Metz, d'avoir accepté de juger ce travail.*

*A Monsieur M.Friedrich, Ingénieur de Recherches à Sollac (Florange), mes remerciements pour sa participation au jury.*

*Mes meilleurs pensées à tous mes amis et collègues du Laboratoire pour l'ambiance amicale et chaleureuse qui m'a été d'un soutien moral considérable.*

# PLAN

pages

## Chapitre I : Introduction

I/ Généralités sur la déformation plastique des polycristaux métalliques.....	1
II/ Les modèles de la littérature.....	6
Références Bibliographiques.....	11

## Chapitre II : Méthodes théoriques en mécanique physique

I / Introduction.....	14
II / Equations fondamentales de la mécanique des milieux continus.....	14
II.1. Statique.....	15
II.2. Cinématique.....	15
II.3. Conditions de compatibilité.....	16
III / Incompatibilité plastique et distribution des dislocations..	18
III.1. Tenseur densité de dislocations.....	18
III.2. Tenseur d'incompatibilité.....	19
III.3. Relation entre les tenseurs d'incompatibilité et de densité de dislocations.....	20
IV / Incompatibilité plastique et contraintes internes.....	23
IV.1. Contraintes internes.....	23
IV.2. Méthodes de calcul des contraintes internes.....	24
IV.2.1. Méthode du potentiel des contraintes (Kröner /3/ ).....	24
IV.2.2. Méthode du tenseur de Green.....	27
v / Problèmes particuliers.....	28
v.1. Le problème de l'inclusion plastique homogène.....	29
v.1.1. Matrice élastique (Eshelby).....	29
v.1.2. Matrice plastifiée et chargée (Eshelby -Kröner).....	30
v.2. Problème d'une interface plane séparant deux milieux homogènes /5/, /9/.....	36

v . 2 . 1 . Tenseur densité de dislocations.....	37
v . 2 . 2 . Tenseur d'incompatibilité plastique.....	37
v . 2 . 3 . Contraintes internes.....	37
v . 2 . 4 . Energie de déformation élastique.....	38
VI / déformation plastique des polycristaux métalliques.....	39
Références Bibliographiques.....	42

## **Chapitre III : Microhétérogénéités induites et relation avec les contraintes internes**

I / Introduction.....	43
II / Analyse des champs de contraintes et de la densité de dislocations.....	43
II . 1 . Forme générale des hétérogénéités plastiques compatibles.....	43
II . 2 . Champs de contraintes pour une hétérogénéité plastique lenticulaire.....	45
II . 3 . Densité de dislocations associée à l'hétérogénéité plastique.....	48
III / Applications.....	50
III . 1 . Formation des cellules de dislocations.....	50
III . 2 . Formation des microbandes de cisaillement.....	53
IV / Conclusion.....	53
Références Bibliographiques.....	55

## **Chapitre IV : Hétérogénéités plastiques compatibles intragranulaires et lien avec la formation des microbandes de cisaillement et la transition de texture des métaux CFC et CC.**

I / Introduction.....	56
II / Théorie relative à une déformation plastique hétérogène et compatible.....	56
II . 1 . Forme générale du champ de déformation hétérogène.....	57
II . 2 . Cas particulier du champ de déformation hétérogène à glissement simple et glissement multiple homogène.....	59
II . 2 . 1 . Champ de déformation plastique hétérogène à interface plane.....	59

II.2.2. Champ de rotation du réseau cristallin dans la zone à glissement simple.....	63
II.2.3. Condition de compatibilité exprimée en fonction des paramètres de la déformation.	68
III / Application au cas du laminage de métaux.....	70
III.1. Expression de la condition de compatibilité.....	70
III.2. Cas des métaux CFC.....	71
III.2.1. Normales aux plans d'habitat.....	72
III.2.2. Champs de rotation du réseau cristallin.	73
III.3. Cas des métaux CC.....	74
III.3.1. Normales aux plans d'habitat.....	75
III.3.2. Champs de rotation du réseau cristallin.	75
IV / Conclusion.....	76
Références Bibliographiques.....	78
<b>Chapitre v : Formation des bandes de cisaillement et texture associée lors d'un laminage croisé du cuivre</b>	
I / Introduction.....	79
II / Modèles proposés et résultats.....	80
II.1. Introduction.....	80
II.2. Champ de déformation à aspect homogène.....	81
II.3. Champ de déformation à aspect hétérogène.....	82
II.3.1. Glissement multiple homogène.....	82
II.3.1.1. Déformation plane localisée.....	82
II.3.1.2. Cisaillement localisé.....	85
II.3.2. Cisaillement transgranulaire.....	90
III / Conclusion.....	96
Références Bibliographiques.....	98
<b>Chapitre VI : Conclusion générale.....</b>	<b>99</b>



**CHAPITRE I**

***Introduction***

## **I / Généralités sur la déformation plastique des polycristaux métalliques**

Depuis plusieurs années , on assiste au développement et à l'évolution de travaux portant sur la plasticité des métaux et de leurs alliages. Ces études présentent un intérêt à la fois scientifique , technologique et économique dans la mesure où ils visent la compréhension des mécanismes en jeu et par suite la maîtrise des procédés de mise en forme des matériaux par déformation plastique.

Les métaux comme leurs alliages appartiennent à la classe de polycristaux métalliques compte tenu de leur structure granulaire. La prise en compte en plasticité de cette structure initialement hétérogène et désordonnée se heurte à des difficultés dues à la présence des joints de grains ou de phases, des désorientations relatives entre les grains, des interactions à caractère anisotrope entre mécanismes élémentaires de déformation plastique à la fois à l'échelle du grain et de l'agrégat (anisotropie de l'écroutissage etc.....)

La déformation plastique des polycristaux métalliques résulte de plusieurs mécanismes dépendants de la température et des caractéristiques du matériau: glissement cristallographique ou non (pencil glide, card glide), maclage, transformation de phase, glissement aux joints des grains etc.... Notons bien qu'à froid le glissement cristallographique est le mécanisme prédominant (en l'absence de maclage). Il est dû aux défauts linéaires dans les cristaux (multiplication et déplacements des dislocations). Dans ce travail, on se limitera à la plasticité à froid et par suite au seul glissement cristallographique comme mécanisme de déformation plastique .

Un agrégat polycristallin se déformant plastiquement , assiste à une évolution de sa structure inter et intragranulaire, sa texture évolue avec la déformation, la morphologie et la taille de ses grains changent. Souvent, la déformation plastique des polycristaux métalliques s'accompagne d'hétérogénéités sous différentes formes /1/. Plusieurs observations microscopiques en métallographie optique ou électronique révèlent l'existence d'hétérogénéités bien marquées à l'intérieur d'un même grain

/2/,/3/.

En effet, du fait de la désorientation relative des grains, la déformation plastique est différente d'un grain à l'autre. Il se pose alors le problème de la compatibilité entre ces différentes déformations plastiques granulaires. Afin de conserver sa compacité, le polycristal accommode cette incompatibilité par des déformations élastoplastiques additionnelles. La part élastique de l'accommodation entraîne une rotation du réseau cristallin par rapport au repère lié à l'échantillon et donc la formation des textures de déformation du polycristal /2/,/4/. Tandis que l'accommodation plastique se fait par la formation à l'intérieur des grains du polycristal d'hétérogénéités plastiques /5/,/6/. En effet, les joints de grains ou de phases constituent un obstacle au mouvement des dislocations qui, de ce fait s'accumulent dans certaines régions des grains formant des parois à hautes densités de dislocations. Ainsi un champ de contraintes internes intergranulaire à grandes distances en résulte /7/. La relaxation de ces contraintes internes se fait par la formation dans les grains de plans d'habitat convenablement orientés et séparant des régions de modes de déformation différents /8/.

Ces hétérogénéités se manifestent à l'échelle macroscopique (de l'agrégat) sous forme de strictions localisées ou diffuses, de bandes de glissement, de cisaillement ou de pliage /9/,/10/,/11/.

La structure en bandes de cisaillement, apparaît lors des déformations plastiques des polycristaux métalliques plus souvent aux grandes déformations ou (et) aux basses températures /9/,/12/---/19/. Elles sont essentiellement très minces entre 0.1 et 1.0  $\mu\text{m}$  /17/, limitées par des surfaces planes parallèles entre elles, non parallèles aux plans de glissement des grains qu'elles traversent /9/,/12/,/14/. A l'intérieur de ces bandes est localisé un cisaillement très intense dont le plan est parallèle aux surfaces planes limitant celles-ci /20/.

A une échelle à la fois microscopique et macroscopique, la formation des bandes de cisaillement, est directement liée à la déformation macroscopique imposée à l'échantillon polycristallin /9/,/21/,/22/. Des résultats expérimentaux montrent que l'orientation de ces bandes dépend de la nature du chargement imposé. En effet, pour une tôle laminée elles

sont inclinées d'environ  $35^\circ$  par rapport au plan de laminage /22/ et dans le cas de la traction , l'angle entre les bandes et l'axe de traction est proche de  $54^\circ$  /23/.

A l'échelle du grain, on observe la formation de zones à modes de glissement différents séparées par des frontières plus ou moins définies /4/,/24/ . A une échelle plus fine (microscopique), aussi bien en chargement monotone que cyclique, on assiste, à des déformations relativement faibles au développement d'une microstructure de dislocations en forme de cellules de densité de dislocations quasiment nulle limitées par des parois plus ou moins définies de forte densité de dislocations /7/,/25/---/28/, constituant une autre forme d'hétérogénéité plastique dont la forme dépend du mode de déformation imposée au polycristal /29/, (sauf dans le cas des métaux à très faible énergie de faute d'empilement ( $\sim 20 \text{ mJ} / \text{m}^2$ ) pour lesquels on n'observe pratiquement jamais de cellules comme les aciers inoxydables austénitiques). A cette même échelle on observe également une structure en microbandes de cisaillement mettant en oeuvre un changement local considérable du phénomène d'accumulation des dislocations /30/, elles sont réparties de façon dense parallèles entre elles, très fines de l'ordre de  $0.1$  à  $0.2 \mu\text{m}$ . Ces différentes microstructures s'organisent spatialement au fur et à mesure que la déformation progresse, traversent les joints de grains et forment des bandes macroscopiques dues aux concentrations des contraintes locales /21/,/22/.

Dans l'ensemble des matériaux auxquels nous nous intéressons (polycristaux métalliques) nous distinguons deux classes. La première regroupe les métaux à faible énergie de faute d'empilement, les solutions solides contenant des éléments chimiques (métaux alliés) ou déformés à basses températures. La deuxième les métaux à forte énergie de faute d'empilement.

Pour les métaux de la première classe ( fort écrouissage latent ), les bandes de cisaillement sont observées aux basses températures de déformation pour des déformations plastiques relativement faibles, de l'ordre de 50% de réduction /15/. Quant aux métaux de la deuxième classe ( faible écrouissage latent ) tels que le cuivre, les bandes n'apparaissent que pour des

déformations beaucoup plus importantes lorsqu'ils sont déformés à température ambiante /31/, fig. I . 1. L'analyse des courbes de traction expérimentales a permis dans le cas des métaux C.F.C. de distinguer trois stades de déformation /2/:

-Un premier stade de glissement facile où un seul système de glissement est actif et où le taux de durcissement est très faible, de l'ordre de  $10^{-4} \mu$  ( $\mu$  étant le module de cisaillement du matériau).

-Un deuxième stade linéaire où le durcissement constant est important, de l'ordre de  $\mu/250$ . Ce stade est lié à la rotation du cristal favorisant ainsi l'activation d'un second système de glissement.

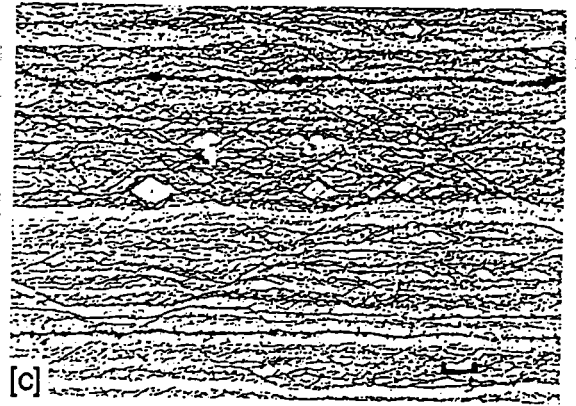
-Un troisième stade à durcissement décroissant du fait de l'apparition des glissements déviés.

Le stade I de glissement simple est beaucoup plus important pour les métaux de la première classe fig. I . 2, d'où l'existence d'un fort écrouissage latent qui rend plus difficile le glissement sur les systèmes secondaires /34/ et par suite ne favorise pas le glissement multiple homogène susceptible de relaxer les contraintes internes d'incompatibilité de la déformation plastique. C'est plutôt par l'intermédiaire d'un glissement hétérogène c'est à dire déformation en zones compatibles de modes de glissements différents en nombre et en nature, que les incompatibilités plastiques de grain à grain pourront être accommodées.

Pour les métaux de la seconde classe dont l'écrouissage latent est faible, la relaxation des contraintes internes d'incompatibilité plastique se fait par le glissement multiple homogène, puisque la structure en bandes n'apparaît là que pour des déformations nettement plus grandes que dans le cas des métaux de la première classe.

Plusieurs observations expérimentales montrent le rôle important des bandes de cisaillement dans l'évolution des propriétés globales des métaux. Il a été observé notamment, suite à la formation de cette structure, une diminution du taux de durcissement global du fait de la division du matériau en zones actives ( bandes ) et zone passive ( matrice ) /35/.

Bien que le développement de la texture cristallographique semble faciliter la formation des bandes de cisaillement, elles ne dépendent ni du développement global de celle-ci, ni du renforcement de certaines de ses



- a) micrographie optique présentant des marques de déformation.
- b) micrographie électronique en transmission présentant des mâcles alignées et des bandes de cisaillement.
- c) micrographie optique présentant un large cisaillement et des macrobandes de cisaillement.

(A) microstructures des sections longitudinales du laiton 70/30 laminé à: a) 17%, b) 65%, c) 95% de réduction. Le segment marqué sur les figures est parallèle au plan de laminage et mesure 10 $\mu$ m dans(a,c) et 1 $\mu$ m dans (b) /31/



- a) section transversale: présence de microbandes.
- b) section longitudinale: présence de microbandes alignées.
- c) section longitudinale: présence d'une bande de cisaillement.

(B) Micrographies électroniques en transmission du cuivre laminé à: a) 17% , b) et c) 97%de réduction. Le segment marqué sur les figures est parallèle au plan de laminage et mesure 1 $\mu$ m /31/

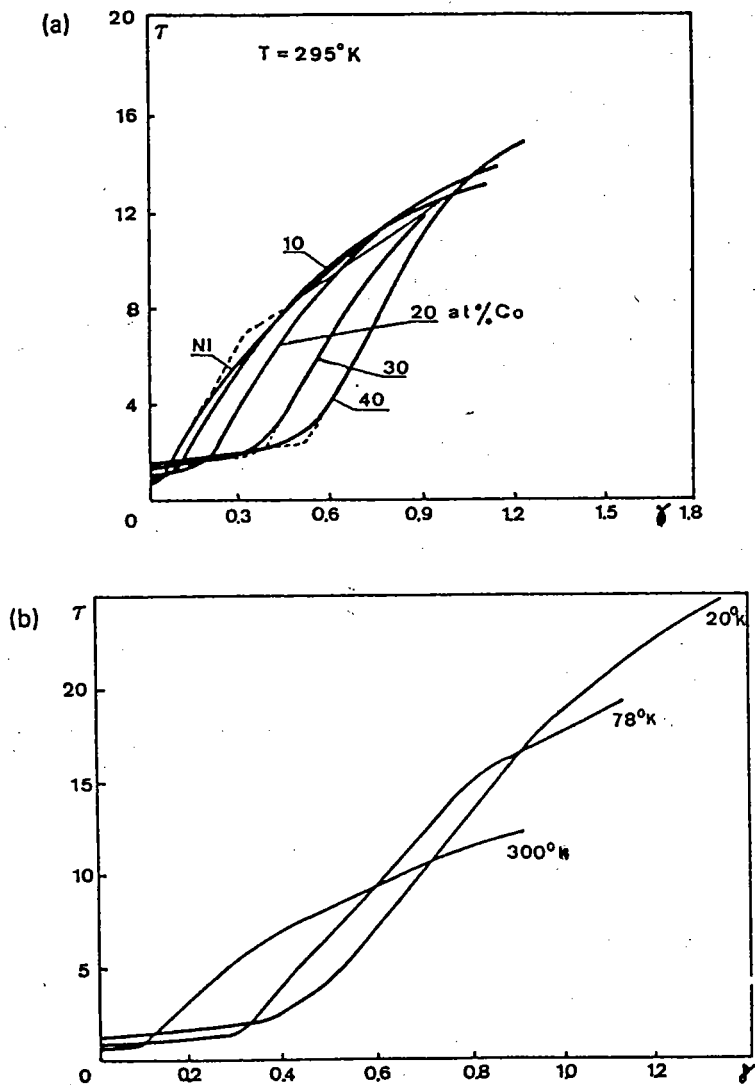


Fig 1.2 Courbes de durcissement par écouissage d'un monocristal de structure C.F.C. (Nickel), a) influence d'un élément d'addition (Cobalt) /32/, b) influence de la température /33/.  $\tau$  et  $\gamma$  sont respectivement, la contrainte de cisaillement critique et le cisaillement plastique.

composantes /21/,/22/,/36/.

Dans la plupart des cas, les bandes de cisaillement se forment dans un milieu où le mode de déformation précédent est homogène, il en résulte la rotation des grains vers la texture finale. Il est toutefois difficile d'attribuer la disparition ou le renforcement de certaines composantes de texture au seul phénomène d'apparition des bandes de cisaillement, puisque celles-ci ne représentent en général pas le seul mode de déformation présent dans le polycristal.

Par ailleurs, différentes études des textures de laminage des différents métaux C.F.C. purs et alliés ont permis de classer ces textures en deux groupes /9/,/17/:

- Le premier regroupe les textures dites "type cuivre",  $\{211\}\langle 111 \rangle + \{110\}\langle 211 \rangle$ , elles sont typiques aux métaux C.F.C. purs.
- Le second regroupe les textures dites "type laiton",  $\{110\}\langle 112 \rangle$ , celles-ci sont plutôt communes aux alliages des métaux C.F.C.

Des travaux récents d'une part sur le cuivre /36/ et d'autre part sur les alliages Al-Mg /21/, ont montré qu'en jouant sur deux paramètres: La température et la direction de chargement, l'instabilité de la sous structure du métal est favorisée. En effet, sur des échantillons pré laminés à 78°K, les bandes de cisaillement peuvent surgir après seulement 2% de réduction à température ambiante lors du laminage "secondaire" ( selon la direction transversale: à 90° par rapport à la direction de laminage "primaire" ), elles représentent le seul mode de déformation et se forment dans une orientation liée au chargement et constante durant celui-ci. Un effet similaire est observé dans le cas où la température est gardée la même pour les deux chargements, "primaire" et "secondaire". Par contre le changement simultané de la température (augmentation ) et de la direction du chargement provoque un cisaillement plus intense dans les bandes. Les bandes de cisaillement naissant de ce type de chargement ont une orientation par rapport à la direction de laminage différente de celle qu'elles auraient eu lors du laminage monotone.

Les mesures de texture /36/ montrent que dès 2% de réduction lors de la sollicitation secondaire, un changement notable de la texture peut être constaté. Après 10% de réduction les composantes "C" (  $\phi_1 = 90^\circ$  ,  $\phi = 35^\circ$  ,



$\phi_2 = 45^\circ$ ) et "S" ( $\phi_1 = 57^\circ$ ,  $\phi = 29^\circ$ ,  $\phi_2 = 63^\circ$ ), représentant la texture type cuivre, disparaissent. Alors que la composante "B" ( $\phi_1 = 35^\circ$ ,  $\phi = 45^\circ$ ,  $\phi_2 = 90^\circ$ ), représentant la texture type laiton, est renforcée. (Les orientations cristallographiques sont repérées par les angles d'Euler selon Bunge /37/).

Ces différentes observations expérimentales montrent le rôle important que jouent les bandes de cisaillement dans l'évolution de la texture et par suite la nécessité de prendre en compte cette structure dans les modèles proposés.

## II / Les modèles de la littérature

Dans le but d'approcher et de décrire le comportement mécanique du polycristal en tant qu'agrégat, différents modèles ont été proposés. Citons parmi les premiers : le modèle de Taylor /38/, de Lin /39/, le modèle statique /40/ et le modèle de Sachs /41/. Ces modèles, bien qu'ayant permis d'aborder des problèmes complexes, ils restent insuffisants du fait de l'excessive simplicité de leurs hypothèses (uniformité des champs de déformations ou de contraintes) ayant des répercussions sur les prévisions du comportement : plastification simultanée de tous les grains, texture trop marquée etc....., dans l'approche de Taylor. Pour Sachs les grains sont considérés comme des monocristaux pouvant se déformer indépendamment les uns des autres ce qui ne nécessite pas de prendre en compte les problèmes de compatibilité des déformations et par suite n'explique pas la préservation de l'hypothèse de continuité du matériau.

Viennent après les modèles de Kröner /42/, Hill /43/, Hutchinson /44/, Zaoui /40/, Lipinski et Berveiller /45/, apportant une approche nouvelle au problème des interactions entre grains. Ces modèles prennent en compte l'accommodation des incompatibilités plastiques par des déformations élastiques ou élastoplastiques dans le cadre du schéma self-consistent. Ils considèrent les interactions entre un grain particulier et l'ensemble des autres grains constituant une matrice infinie continue et homogène où la déformation plastique est uniforme. Seulement, toutes ces approches restent dans l'hypothèse d'uniformité de la déformation plastique

intragranulaire et ne font aucune référence à son aspect hétérogène. Néanmoins, ces modèles peuvent décrire de façon satisfaisante les textures de déformation des métaux où le glissement multiple homogène est le mécanisme de déformation prédominant, comme les métaux purs (Cu, Al, Fe...). Par contre ces mêmes modèles ne peuvent pas prévoir certaines composantes des textures de déformation (type laiton) des métaux à faible énergie de faute d'empilement, des solutions solides ou des métaux déformés aux basses températures /31/.

Une approche intéressante concernant les interactions entre les systèmes de glissement et les joints de grains a été proposée par Rey et Zaoui /24/ pour le bicristal à joint plan et étendue au cas du tricristal par Mussot /46/. L'extension de la méthode au cas du polycristal semble plutôt difficile.

Les tentatives de modélisations sortant de l'hypothèse de l'uniformité de la déformation plastique intragranulaire et prenant en compte son aspect hétérogène sont peu nombreuses. Arminjon /47/ propose un modèle reposant sur la minimisation de la dissipation plastique. Il a pu simuler de façon précise, du moins pour les orientations préférentielles, les textures de déformation des aciers peu alliés sans faire intervenir de facteurs morphologiques ni d'influences des corrélations d'orientations entre grains. Wierzbanski et Berveiller /48/ abordent le problème de la formation de zones homogènes à l'intérieur d'un grain en utilisant le modèle Self-consistent à N-sites.

D'autres auteurs ont proposé pour la structure de bandes de cisaillement des modèles géométriques discutés par Van Houtte, Sevillano et Aernoudt /20/. Ces modèles contribuent à expliquer certains aspects de l'écoulement plastique hétérogène (apparition entre autres de deux familles de bandes). Ils permettent de prévoir en se basant sur des calculs théoriques, le mode de déformation plastique -homogène ou hétérogène- le plus probable.

Or, la compréhension du comportement mécanique macroscopique d'un matériau nécessite plus de détails sur son comportement à l'échelle microscopique.

Dans cette perspective, pour décrire la transition entre les textures type

cuivre et type laiton, plusieurs micromécanismes comme le glissement dévié /53/, le glissement des dislocations partielles /54/ ou l'anisotropie des interactions entre les dislocations des systèmes de glissement /55/ ont été proposés. Une revue détaillée sur cette transition a été faite par B. Bacroix /56/.

Pour Wassermann, le développement des textures type laiton serait dû au mûlage /57/, /58/, ce qui a été contesté par Leffers /59/ qui propose d'expliquer la transition des textures à partir du modèle de Sachs /41/ en s'appuyant sur l'idée d'un glissement primaire important induisant un écrouissage latent considérable comme cela est le cas dans ce travail.

D'autre part, différentes tentatives de description des parois des cellules de dislocations en termes de dislocations discrètes sans tenir compte du mode de déformation ont été réalisées /49/,/50/,/51/. Seulement, l'une des caractéristiques essentielles de cette sous-structure est qu'elle ne peut se développer que si l'énergie élastique associée à l'incompatibilité de la déformation plastique hétérogène reste limitée voire nulle. D'où la nécessité dans la modélisation de tenir compte du mode de déformation.

Bouaouine /8/ discute le mécanisme de formation des microbandes de cisaillement à l'échelle du grain, partant du mécanisme de formation de la structure cellulaire des dislocations. Pour se faire, il utilise la solution d'Eshelby-Kröner du problème de l'inclusion plastique à frontière libre, dans une matrice en écoulement plastique, où contrairement au problème classique, la forme et le volume de l'inclusion sont inconnus. Le mode de déformation dans ce type de problèmes est bien pris en compte. (on rappellera les résultats de ce travail dans le chapitre III).

Mughrabi /7/ développe un modèle simple tenant compte du mode de déformation et considérant le cristal comme un composite constitué de parois dures à forte densité de dislocation séparées par des régions molles à faible densité locale de dislocations. Il montre ainsi que des contraintes internes à longue portée importantes apparaissent dans les cristaux présentant une répartition hétérogène des dislocations développée au cours de la déformation comme conséquence naturelle des conditions de compatibilité dans l'état de contrainte appliquée.

Korbel /52/ propose un modèle reposant essentiellement sur les observations de l'aspect morphologique des microbandes de cisaillement . Il analyse numériquement les propriétés dynamiques de groupes de dislocations et donne une explication du mécanisme de la localisation de la déformation dans les polycristaux métalliques.

Dans ce travail on s'intéresse à une forme particulière des hétérogénéités plastiques, d'une part à l'échelle du grain et d'autre part à l'échelle du polycristal. A l'échelle granulaire ces hétérogénéités se manifestent sous forme de microbandes de cisaillement. Elles sont sous forme de bande de cisaillement macroscopiques à l'échelle de l'agrégat polycristallin.

Nous commencerons donc dans le chapitre I I, par rappeler les notions de base de mécanique physique, dont, la condition de compatibilité du champ de déformation d'un milieu déformable, le lien entre l'incompatibilité plastique, la densité de dislocations et les contraintes internes. Nous rappelons aussi certaines méthodes de calcul des contraintes internes. En application, nous évoquons les solutions des problèmes particuliers de l'inclusion plastique homogène apportées par Eshelby et Kröner et du problème d'une interface plane séparant deux milieux homogènes. A la fin du chapitre nous rappelons les éléments de base de la plasticité cristalline dans le cas des métaux C.F.C. et C.C.

Dans le chapitre I I I, nous rappelons certains résultats concernant les mécanismes de formation de microhétérogénéités plastiques induites en relation avec les contraintes internes d'incompatibilité à partir du problème de l'inclusion plastique homogène de forme particulière.

Dans le chapitre I V, on aborde le problème de l'hétérogénéité de la déformation plastique à l'échelle granulaire, dans le cas des métaux C.F.C. et C.C. à fort écrouissage latent, en considérant qu'elle résulte de la variation spatiale du nombre et de la nature des systèmes de glissement.

Nous considérons donc que les grains du polycristal se déforment selon deux modes de glissement plastiques différents:

- Un glissement multiple homogène aux voisinages des joints des

grains, du fait des fortes contraintes internes d'incompatibilité plastique intergranulaire qui facilitent l'activation des autres systèmes de glissement malgré le fort écrouissage latent.

- Un glissement simple dans les zones complémentaires des grains où l'écrouissage latent s'oppose à l'activation des autres systèmes de glissement.

Dans chaque grain, l'interface entre ces deux zones est considérée plane, c'est à dire, n'introduisant pas de contraintes à grandes distances. L'orientation de celle-ci et l'évolution de la texture dans la zone à glissement simple sont déterminées à partir de la condition de compatibilité des déformation plastiques de part et d'autre de cette interface.

Nous constatons, d'après les résultats obtenus, d'une part, qu'il existe un lien entre l'orientation de ces interfaces compatibles et celle des microbandes de cisaillement, et d'autre part, la présence de certaines composantes des textures de laminage des métaux C.F.C. et C.C. à fort écrouissage latent, non décrites par les modèles considérant une déformation homogène intragranulaire.

Dans le chapitre v, on se place à l'échelle du polycristal et l'on propose un modèle tenant compte de la structure en bandes de cisaillement croisées et symétriques apparaissant souvent sous des conditions particulières de chargement et traversant l'échantillon polycristallin. Ce modèle repose sur l'idée de superposer le comportement de la structure en bandes de cisaillement au comportement du reste du polycristal. De bonnes prévisions de l'évolution de la texture de laminage du polycristal sont obtenues lorsqu'on considère que les bandes symétriques se comportent comme des monocristaux subissant des cisaillements de signes opposés, et le reste du polycristal comme le prévoit le modèle self-consistent.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- /1/- I.L.Dillamore, Proceedings of the 5th International conference on textures of materials, Vol.I, G. Gottstein and K. Lüke, eds., Springer, Berlin (1978) 67.
- /2/- B. Jaoul, Etude de la plasticité et application aux métaux, Ed. Dunod, (1965).
- /3/- W. Truszkowski and J. Krol, Mem. Sci. Rev. Met., 65, p. 907, (1968).
- /4/- M. Berveiller, Thèse d'Etat, Université de Paris Nord, (1978).
- /5/- F. Ronde-Oustau et B. Baudalet, Acta Metall., 25, p.1523, (1977).
- /6/- A. L. Dons et E. Nes, in Actes de "ICOTOM7", Noord Wijkerhout (éd. par C. M. Brakman et al.), pp. 53-57. Netherlands Soc. Mater. Sci. (1984).
- /7/- H. Mughrabi, Acta Metall., 31, n° 9, p.1367, (1983).
- /8/- H. Bouaouine, Thèse d'Etat, Université de Metz, (1988).
- /9/- B.Fargette, D.Whitwham, Mémoires Scientifiques revue Metallurgie, 73, p.197-206, (Mars 1976)
- /10/- L. M. Clarebrough and M. E. Hargreaves, Prog. Met. Phys., 8 (1959) 1.
- /11/- R. W. K. Honeycombe, J. Inst. Met., 80 (1951- 1952) 49.
- /12/- K. Brown, J. Inst. Met., 100 (1972) 341.
- /13/- P.S. Mathur and W.A. Backofen, Met. Trans. 4 (1973) 643.
- /14/- J. Grewen, T. Noda and D. Sauer, Z. Metallkde. 68 (1977) 260.
- /15/- M. Hatherly, Proceeding of the 5th International conference on textures of Materials, Vol. I, G. Gottstein and K. Lüke, eds., Springer, Berlin (1978) 81.
- /16/- M. Blicharsky and S. Gorezyca, Met. Sci. 12 (1978) 303.
- /17/- B.J. Duggan, M. Hatherly, W.B. Hutchinson and P.T. Wakefield, Met. Sci.12 (1978) 343.
- /18/- M.G. Cockroft, "Ductility", AMS, Metals park, ohio (1968) 199.
- /19/- R. Sundberg, L. -E. Olsson and B. Thundal, Jernkont. Ann. 155 (1971) 434.
- /20/- P. Van Houtte, J. Gil Sevillano and E. Aernoudt, " Model for Shear Band Formation in Rolling and Extrusion", Z.f. Metallkde, 70, p.426, 1979.
- /21/- A. Korbél, J. D. Embury, M. Hatherly, P. L. Martin, H. W. Erbsloh, Acta Metall., 34, n°10, p. 1999, (1986).
- /22/- A. Korbél, P. Martin, Acta Metall., 34, n° 10, p. 1905, (1986).
- /23/- A. Korbél, P. Martin, Acta Metall., 36, n°9, pp. 2575-2586, (1988).

- /24/- C.Rey, A.Zaoui, Acta Met., 30, p. 523 (1982).
- /25/- H.Mughrabi , Philos.Mag. , 23, p.897 , (1971).
- /26/- T.Hasegawa and U.F.Kocks , Acta Metall. , 27, p.1705 , (1979).
- /27/- A. T. Winter, Phyl. Mag., 30, p. 719, (1974).
- /28/- K. V. Rasmussen, O. B. Pedersen, Acta Metall., 28, p. 1467, (1980).
- /29/- T. Ungar, L.S. Toth, J. Illy and I. Kovacs, Acta Met., vol. 34, N°7, pp. 1257-1267, (1986).
- /30/- B.Bay, N.Hansen, D.Kuhlmann-wilsdorf, Materials Science and Engineering , A 113 (1989) , pp.385-397.
- /31/-J.Hirsch, K.Lücke and M.Hatherly, Acta metall. vol.36, N°11, pp.2905-2927,1988.
- /32/- P. Haasen, Phil. Mag., 3, p. 384, (1958).
- /33/- J. Meissner, Z. Metallkunde, 50, p. 207, (1959).
- /34/-C.Rey, P.Franciosi, Comp.Rhé. et Struct. des Mat. -CR 15<sup>ème</sup> coll. GFR. Paris, p. 219, (1980).
- /35/-A. Korbel, F. Dobrzanski and M. Richert, "Strain hardening of aluminium at high strains", Acta Metall., 31, p.293 (1983).
- /36/-A. Korbel, J. Bonarski, S. Wierzbinski and F. Dobrzanski, "The Study on Principles of the Control of Global Mecanical and Structural Propertie of Metals During Metal Forming Operations"  
Research Report of the Institut of Metals Working and Physical Metallurgy Academy of Mining and Metallurgy, Krolion, Poland. Contrat n° .7.362.87. (1990).
- /37/-H.J. Bunge, "Mathematische Methododen der Texturanalyse", Akademie Verlag, Berlin, (1969).
- /38/- G.I. Taylor , J.Inst.Metal ,62 , 307 , (1938)
- /39/- T.H.Lin ,J.Mech.Phys.Solids ,5, 143 , (1957)
- /40/- A. Zaoui ,Thèse (Paris) , 1970
- /41/- G.Sachs , Z.der V.D.I. 72, 734 , (1928)
- /42/- E.Kröner ,1961 , Acta. Met., 9, p.155
- /43/- R. Hill , J.Mech ,Phys. Solids , 13 , p. 89 , (1965).
- /44/- J.W.Hutchinson ,Proc.Roy.Soc. A319 ,247 , (1970).
- /45/- P.Lipinski and M.Berveiller , intern.Journal of plasticity ,vol.5 , pp. 149-172 (1989).
- /46/- P. Mussot, Thèse 3<sup>ème</sup> cycle Université de Paris v I, (1983).

- /47/ - M.Arminjon , Acta. Metall. 35 ,No 3 , pp. 615-630 , (1987)
- /48/ - K.Wierzbanowski and M.Berveiller , Cryst. Res.Thech. , 21 , p. 11 ,  
(1980)
- /49/ - P.J.Jackson ,D.Kuhlman-Wilsdorf ,Scripta.Met. 18 , p. 749, (1984)
- /50/ - F.Prinz ,A.S.Argon ,Phys.Stat.Sol., 57a , p.741, (1980)
- /51/ - M.J.Marcinkowski ,Phys.stat.Sol. , 83a , p. 59, (1984)
- /52/ - A.Korbel , Archives of metallurgy , Vol.35 , pp.177-203, Issue 2, (1990).
- /53/- R. E. Smallman, P. Green, Acta Metall., 12, p. 145, (1964).
- /54/- I. L. Dillamore, W. T. Roberts, Acta Metall., 12, p. 281, (1964).
- /55/- P. Franciosi, M. Berveiller, A. Zaoui, Acta Metall., 28, p.273, (1976).
- /56/- B. Bacroix, Ph. D. Thésis, McGill University Canada, (1987).
- /57/- G. Wassermann, Zeit Metallkunde, 54, p. 61, (1963).
- /58/- G. Wassermann, W. Heye, Zeit Metallkunde, 59, p. 693, (1968).
- /59/- T. Leffers, Zeit Metallkunde, 60, p. 785, (1969).



## **CHAPITRE II**

### **Méthodes théoriques en mécanique physique**

## I/ Introduction

Nous rappelons dans ce chapitre les notions de base de la mécanique des solides nécessaires pour aborder les problèmes d'hétérogénéités plastiques. En particulier nous nous intéressons aux solutions des problèmes de l'inclusion plastique homogène apportée par Eshelby /1/ et Eshelby-Kröner /2/ ainsi que le problème d'interface plane séparant deux milieux homogènes.

Il sera nécessaire de rappeler également les éléments de base de la plasticité cristalline dans les cas des métaux C.F.C et C.C sur lesquels portera notre travail.

## II/ Equations fondamentales de la mécanique des milieux continus

Nous nous limitons dans tout ce qui suit aux transformations infinitésimales (petites déformations et petites rotations), dans l'approximation quasi-statique (forces d'inertie négligées). La loi fondamentale de la dynamique impose au champ des contraintes d'obéir aux équations d'équilibre. L'hypothèse de continuité des milieux restreint le champ de déformation à un champ vérifiant les équations de compatibilité. Nous travaillons dans un système de coordonnées cartésiennes rectangulaire, où  $x_1, x_2, x_3$  désignent les coordonnées d'un point  $\vec{r}$  du milieu.  $\vec{u}$ , de coordonnées  $u_1, u_2, u_3$  désigne le champ du déplacement en un point donné. On utilisera la relation suivante:

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl} \quad (\text{II.1})$$

où  $\underline{\epsilon}$  est le tenseur permutation de Ricci:

$$\epsilon_{ijk} = 0 \quad \text{si deux indices au moins sont égaux}$$

$$\epsilon_{ijk} = 1 \quad \text{si permutation paire (1,2,3)}$$

$$\epsilon_{ijk} = -1 \quad \text{si permutation impaire (1,3,2)}$$

et  $\delta_{ij}$  symbole de Kröner tel que:

$$\delta_{ij} = 1 \quad \text{si } i=j$$

$$\delta_{ij} = 0 \quad \text{si } i \neq j$$

### II.1. Statique

Considérons un milieu continu, fini, non déformé, dans un état initial naturel (contraintes nulles). Sous l'effet de forces extérieures réparties en volume (de densité volumique  $F_i$ ), à la surface (de densité superficielle  $T_i^s$ ) et de déplacements imposés à la surface  $u_i^s$ , le milieu sera le siège de contraintes  $\sigma_{ij}$  et d'un champ de déplacement  $u_i$  défini en tout point afin de garder sa compacité.

La loi fondamentale de la dynamique appliquée à ce milieu se traduit par les relations d'équilibre des forces et des moments suivantes:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{ij,j} + F_i = 0 \\ \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \text{ l'absence de couples} \end{array} \right\} \quad (\text{II.2})$$

Le respect des conditions de frontière exige respectivement pour les efforts et pour le déplacement:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{ij} n_j^s = T_i^s \\ u_i = u_i^s \end{array} \right\} \quad \text{à la surface} \quad (\text{II.3})$$

$\vec{n}^s$  étant la normale unitaire extérieure à la surface S

### II.2. Cinématique

Le gradient de déplacement  $\beta_{ij}$  est défini par :

$$\underline{\beta} = \overrightarrow{\text{grad}} \vec{u}$$

ou encore,

$$\beta_{ij} = u_{j,i} \quad (\text{II.4})$$

(on utilise la notation  $f_{,i} = \partial f / \partial x_i$ )

Sa partie symétrique  $\underline{\varepsilon}$  représente le tenseur de déformation et sa partie antisymétrique  $\underline{\omega}$  le tenseur de rotation:

$$\varepsilon_{ij} = (1/2) (\beta_{ij} + \beta_{ji}) = (1/2) (u_{j,i} + u_{i,j}) \quad (\text{II.5})$$

$$\omega_{ij} = (1/2) (\beta_{ij} - \beta_{ji}) = (1/2) (u_{j,i} - u_{i,j}) \quad (\text{II.6})$$

Au tenseur  $\underline{\omega}$  on associe souvent un vecteur adjoin  $\vec{\omega}$  tel que:

$$\omega_j = \epsilon_{ijk} \omega_k \quad (\text{II.7})$$

(on utilise sauf indication contraire, la convention d'Einsten de sommation sur les indices répétés).

En plasticité (inélasticité en général), les quantités  $\underline{\beta}$ ,  $\underline{\varepsilon}$  et  $\underline{\omega}$  peuvent être décomposées en parties élastiques et plastiques (inélastiques) de la manière suivante:

$$\underline{\beta} = \underline{\beta}^e + \underline{\beta}^p$$

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}^e + \underline{\varepsilon}^p \quad (\text{II.8})$$

$$\underline{\omega} = \underline{\omega}^e + \underline{\omega}^p$$

### II.3. Conditions de compatibilité

Un milieu continu donné ne peut être le siège de n'importe quel champ de déformation et de rotation. En effet, afin de préserver sa compacité (absence de trous ou de recouvrements de matière) dans l'espace

euclidien, il faut qu'il y existe un champ de déplacement tel que  $(\beta_{ij} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij})$  en soit le gradient. Autrement dit, la différentielle  $du_i = \beta_{ij} dx_j$  doit être totale exacte et par suite satisfaire aux conditions de Cauchy d'intégrabilité des formes différentielles se traduisant par:

$$\overrightarrow{\text{Rot}} \beta = 0$$

$$\text{ou} \quad \varepsilon_{ijk} \beta_{ki,j} = 0 \quad (\text{II.9})$$

Les équations (II.9) sont les équations des conditions de compatibilité auxquelles est soumis le tenseur  $\underline{\beta}$ , elles supposent les déformations et les rotations imposées séparément. Si seules les déformations  $\underline{\varepsilon}$  sont imposées, les équations de compatibilité ne doivent porter que sur elles. Les rotations doivent donc être éliminées [3], [7]. En utilisant les relations (II.1) et en remplaçant les rotations par leur vecteur adjoint (II.7) nous obtenons donc:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} \beta_{ki,j} &= \varepsilon_{ijk} (\varepsilon_{ki,j} + \omega_{ki,j}) \\ &= \varepsilon_{ijk} (\varepsilon_{ki,j} + \varepsilon_{kim} \omega_{m,j}) \\ &= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ki,j} + (\delta_{li} \delta_{jm} - \delta_{lm} \delta_{ij}) \omega_{m,j} \\ &= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ki,j} + \omega_{j,j} \delta_{li} - \omega_{l,i} \\ &= 0 \end{aligned}$$

pour  $l=i$  et tenant compte de la symétrie de  $\underline{\varepsilon}$  :

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ki,j} + 3 \omega_{j,j} - \omega_{l,i} = 2 \omega_{j,j} = 0$$

donc l'équation (II-9) devient :

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ki,j} - \omega_{l,i} = 0 \quad (\text{II.10})$$

Pour éliminer les rotations, il suffit de dériver (II.10) par rapport à  $m$  et

prendre la partie antisymétrique du résultat par rapport à i et m:

$$\epsilon_{nim} (\epsilon_{ljk} \epsilon_{ki,j} - \omega_{l,i}),m = 0$$

soit:

$$\epsilon_{nim} \epsilon_{ljk} \epsilon_{ki,jm} = 0$$

D'où la forme usuelle des équations de compatibilité de Saint-Venant:

$$\epsilon_{ikl} \epsilon_{jmn} \epsilon_{im,kn} = 0$$

ou, selon la notation de Kröner:

$$\text{Inc } \underline{\underline{\epsilon}} = 0 \quad (\text{II.11})$$

### III/ Incompatibilité plastique et distribution des dislocations

#### III.1. Tenseur densité de dislocations:

Considérons un champ de gradient de déplacement plastique incompatible  $\underline{\beta}^P$  résultant d'une distribution de déformations plastiques  $\underline{\underline{\epsilon}}^P$  et de rotations plastiques  $\underline{\omega}^P$ . Les équations de compatibilité (II.9) portant sur  $\underline{\beta}^P$  n'étant pas satisfaites, on définit en tout point un tenseur  $\underline{\alpha}$ , ne s'annulant que pour  $\underline{\beta}^P$  compatible:

$$\underline{\alpha} = -\overrightarrow{\text{Rot}} \underline{\beta}^P$$

ou encore, 
$$\alpha_{ij} = -\epsilon_{ikl} \beta^P_{ljk} \quad (\text{II.12})$$

Ce tenseur satisfait par définition aux relations de divergence nulle ( $\text{div}(\overrightarrow{\text{Rot}}) = 0$ ):

$$\text{div } \underline{\alpha} = 0$$

soit, 
$$\alpha_{ij,j} = 0$$

Il peut être assimilé à une densité continue de dislocations /3/, /7/. En effet, si l'on considère dans le milieu une surface (S) limitée par une courbe fermée (C), le flux de  $\alpha_{ij}$  à travers cette surface sera:

$$\int_s \alpha_{ij} n_i ds = - \int_s \epsilon_{ikl} \beta_{lj,k}^p n_i ds = - \oint_c \beta_{ij}^p dx_i$$

Cette intégrale n'est pas nulle,  $\beta_{ij}^p$  n'étant pas compatible. Soient  $\vec{b}$  le vecteur résultant et  $d\vec{u}^p$  un champ de déplacement différentiel et local tel que  $du_j^p = \beta_{ij}^p dx_i$ , on obtient alors:

$$\int_s \alpha_{ij} n_i ds = - \oint_c du_j^p = b_j$$

$b_j$ : composante du vecteur de Burgers.

$\alpha$  est donc une densité de dislocations telle que le vecteur de Burgers résultant  $db_j$  des dislocations perçant l'élément de surface ( $n_i ds$ ) est donné par:

$$db_j = \alpha_{ij} n_i ds \quad (II.13)$$

Si  $i=j$  la dislocation est vis (ligne parallèle à  $\vec{b}$ )

Si  $i \neq j$  la dislocation est coin (ligne perpendiculaire à  $\vec{b}$ )

une dislocation discrète sera décrite à l'aide d'une distribution de Dirac. Quant à la condition de divergence nulle, elle signifie que les dislocations ne peuvent se terminer à l'intérieur du milieu.

### III.2. Tenseur d'incompatibilité

Lorsque la déformation totale est compatible, ses parties élastique et plastique ne le sont pas nécessairement:

$$\text{Inc } \xi = 0$$

$$\begin{aligned} \text{or} \quad \text{Inc } \underline{\underline{\varepsilon}} &= \text{Inc}(\underline{\underline{\varepsilon}}^e + \underline{\underline{\varepsilon}}^p) \\ &= \text{Inc } \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \text{Inc } \underline{\underline{\varepsilon}}^p = 0 \end{aligned}$$

$$\text{d'où} \quad \text{Inc } \underline{\underline{\varepsilon}}^e = - \text{Inc } \underline{\underline{\varepsilon}}^p$$

On définit alors un tenseur  $\underline{\underline{\eta}}$  du second ordre symétrique tel que:

$$\underline{\underline{\eta}} = \text{Inc } \underline{\underline{\varepsilon}}^e = - \text{Inc } \underline{\underline{\varepsilon}}^p$$

ou encore,

$$\eta_{ij} = -\varepsilon_{ikl} \varepsilon_{jmn} \varepsilon^p_{lm, kn} \quad (\text{II.14})$$

Ce tenseur est également de divergence nulle:

$$\text{div } \underline{\underline{\eta}} = 0$$

ou encore,

$$\eta_{ij, j} = 0$$

Le tenseur  $\underline{\underline{\eta}}$ , nul quand la déformation plastique  $\underline{\underline{\varepsilon}}^p$  est compatible, mesure bien l'incompatibilité plastique du milieu.

### III.3. Relation entre les tenseurs d'incompatibilité et de densité de dislocations:

Au champ des tenseurs de rotation  $\omega_j$  ou des vecteurs de rotation  $\omega_j$ , il sera utile d'associer un champ de tenseurs de courbure  $k_j$  défini par:

$$k_j = \omega_{j, i} = (1/2) \varepsilon_{jkl} \omega_{kl, i} \quad (\text{II.15})$$

Les conditions de compatibilité (II.10) permettent d'écrire:

$$k_{ij} = \varepsilon_{jkl} \varepsilon_{kl, i} \quad (\text{II.16})$$



Soit  $\epsilon_{nim} \epsilon_{jlk} \epsilon_{ki,lm} = \epsilon_{nim} k_{ij,m} = - \epsilon_{nmi} k_{ij,m}$

ou encore:

$$\overrightarrow{\text{Rot}} K = - \text{Inc } \epsilon \quad (\text{II.17})$$

Par analogie avec la relation (II.16) on peut définir un tenseur de courbure élastique  $\underline{k}^e$  lorsque la déformation plastique imposée n'est pas compatible par:

$$k^e_{ij} = \epsilon_{jlk} \epsilon^e_{ki,l} \quad (\text{II.18})$$

La déformation élastique n'étant pas compatible,  $\underline{k}^e$  ne peut être un gradient de rotation élastique. Il serait alors une contribution partielle au tenseur de courbure élastique  $\underline{K}^e$  que l'on peut définir à partir de la rotation élastique  $\underline{\omega}^e$  par la relation suivante:

$$K^e_{ij} = \omega^e_{j,i} = (1/2) \epsilon_{jkl} \omega^e_{kl,i} \quad (\text{II.19})$$

On peut également définir un tenseur  $\underline{K}'^e$  représentant la différence des tenseurs  $\underline{K}^e$  et  $\underline{k}^e$  par:

$$K'^e_{ij} = K^e_{ij} - k^e_{ij} = \omega^e_{j,i} - \epsilon_{jlk} \epsilon^e_{ki,l} \quad (\text{II.20})$$

Le tenseur  $\underline{K}'^e$  ainsi défini peut être directement lié au tenseur densité de dislocations  $\underline{\alpha}$ . En effet:

$$\epsilon_{jkl} (\beta^e_{li,k} + \beta^p_{li,k}) = 0$$

d'où

$$\epsilon_{jkl} \beta^e_{li,k} = -\epsilon_{jkl} \beta^p_{li,k} = \alpha_{ij}$$

donc

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= \epsilon_{jkl} \beta^e_{li,k} \\ &= \epsilon_{jkl} (\epsilon^e_{li,k} + \omega^e_{li,k}) \\ &= \epsilon_{jkl} \epsilon^e_{li,k} + \epsilon_{jkl} \epsilon_{lim} \omega^e_{m,k} \\ &= \epsilon_{jlk} \epsilon^e_{ki,l} - \omega^e_{j,i} + \omega^e_{k,k} \delta_{ij} \\ &= -k''^e_{ij} + k''^e_{kk} \delta_{ij} \end{aligned}$$

pour  $i=j$  on obtient:

$$\alpha_{ii} = 2 k''^e_{ii} \quad (\text{II.21})$$

d'où

$$k''^e_{ij} = -\alpha_{ij} + (1/2) \alpha_{kk} \delta_{ij} \quad (\text{II.22})$$

La relation (II.22) signifie que le tenseur  $\underline{k}''^e$  représente la partie du tenseur de courbure élastique directement liée à la présence des dislocations et au désordre atomique qui leur est attaché. La partie complémentaire  $\underline{k}'^e$  est alors attachée à la réponse élastique du milieu afin de conserver sa compacité en dépit de la présence des dislocations.

D'après la relation (II.20) :

$$\overline{\text{Rot}} \underline{k}''^e = \underline{\eta} \quad (\text{II.23})$$

ou encore

$$\eta_{ij} = \epsilon_{inm} k''^e_{mj,n}$$

en tenant compte de (II.22) :

$$\eta_{ij} = \epsilon_{imn} \alpha_{jm,n} + (1/2) \epsilon_{inj} \alpha_{kk,n}$$

$\eta$  étant symétrique, nous ne garderons que la partie symétrique du second membre par rapport aux indices  $i$  et  $j$ :

$$\eta_{ij} = (1/2) \{ \epsilon_{imn} \alpha_{jm,n} + \epsilon_{jmn} \alpha_{im,n} + (1/2) \alpha_{kk,n} (\epsilon_{inj} + \epsilon_{jni}) \}$$

$$\eta_{ij} = (1/2) \{ \epsilon_{imn} \alpha_{jm,n} + \epsilon_{jmn} \alpha_{im,n} \}$$

que l'on peut écrire:

$$\eta_{ij} = (\epsilon_{imn} \alpha_{jm,n})_{(ij)} \quad (II.24)$$

où le symbole  $(ij)$  signifie que l'on symétrise le tenseur entre parenthèses par rapport aux indices  $i$  et  $j$ .

En définitif, la formule (II.24) signifie que l'incompatibilité de la déformation plastique s'accompagne de la présence de dislocations induisant des déformations et rotations élastiques (d'après (II.20) et (II.22)) qui elles assurent la compatibilité de la déformation totale.

#### IV/ Incompatibilité plastique et contraintes internes

##### IV.1. Contraintes internes

Un milieu est le siège de contraintes internes si la déformation qui lui est imposée est incompatible. En effet, soit un milieu auquel est imposée une déformation plastique  $\epsilon^p$  incompatible, elle s'accompagne nécessairement d'une déformation additionnelle telle que la déformation totale soit compatible. D'où la présence d'un champ de contraintes internes associé à cette déformation additionnelle et relié à celle-ci, dans le cas où elle est purement élastique, par les lois de l'élasticité que l'on supposera linéaire:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^e \quad (\text{II.25})$$

ou alors,

$$\varepsilon_{ij}^e = S_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (\text{II.26})$$

Ce champ de contraintes doit satisfaire aux conditions d'équilibre qui s'écrivent en l'absence des forces de volume et d'inertie:

$$\text{div } \underline{\sigma} = 0$$

ou

$$\sigma_{ij,j} = 0$$

La condition de compatibilité de la déformation totale devant être vérifiée, on a:

$$\text{Inc} (\underline{\varepsilon}^e + \underline{\varepsilon}^p) = 0$$

En somme, une distribution de déformations plastiques incompatibles, telle que l'on rencontre généralement dans un agrégat polycristallin plastifié, s'accompagne d'un champ de contraintes internes modifiant l'état de contraintes local par rapport à celui dû aux contraintes appliquées.

## IV.2. Méthodes de calcul des contraintes internes

### IV.2.1. Méthode du potentiel des contraintes (Kröner/3/)

Considérons un milieu infini, isotrope, à élasticité linéaire et soumis à un champ  $\underline{\beta}^p$  connu incompatible, dont on déduit les tenseurs  $\underline{\alpha}$  et  $\underline{\eta}$  par:

$$\underline{\alpha} = -\overrightarrow{\text{Rot}} \underline{\beta}^p \quad \text{et} \quad \underline{\eta} = -\text{Inc} \underline{\varepsilon}^p$$

Les champs de déformation élastique  $\underline{\varepsilon}^e$  et de contraintes internes devons satisfaire aux équations fondamentales:

\* Compatibilité de la déformation totale

$$\text{Inc}(\underline{\varepsilon}^p + \underline{\varepsilon}^e) = 0$$

ou

$$\underline{\eta} = \text{Inc} \underline{\varepsilon}^e$$

\* Condition d'équilibre des contraintes

$$\text{div} \underline{\sigma} = 0$$

Le comportement du milieu est donné par les équations (II.25) et (II.26). Ainsi, les équations fondamentales s'écrivent:

$$\text{div} \underline{\sigma} = 0 \quad (\text{II.27})$$

et

$$\text{Inc}(\underline{S} \cdot \underline{\sigma}) = \underline{\eta} \quad (\text{II.28})$$

La méthode du potentiel des contraintes consiste à prendre dans les équations fondamentales  $\underline{\sigma}$  comme inconnue et à introduire un tenseur auxiliaire  $\underline{\chi}$ , symétrique, du second ordre, dit potentiel des contraintes tel que:

$$\underline{\sigma} = \text{Inc} \underline{\chi} \quad (\text{II.29})$$

L'équation (II.27) est alors vérifiée ( $\text{div}(\text{Inc}) \equiv 0$ ) et l'équation (II.28) s'écrit:

$$\text{Inc}(\underline{S} \cdot \text{Inc}(\underline{\chi})) = \underline{\eta} \quad (\text{II.30})$$

dont la solution en  $\underline{\chi}$  conduit à  $\underline{\sigma}$  par l'intermédiaire de (II.29).

Dans le cas de l'élasticité homogène et isotrope la déformation élastique  $\underline{\varepsilon}^e$  s'écrit sous la forme:

$$\varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{2\mu} \left( \sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right)$$

où  $\mu$  est le module de cisaillement et  $\nu$  le coefficient de Poisson.

Il sera commode d'introduire un deuxième tenseur auxiliaire  $\chi'$  défini par:

$$\chi_{ij} = 2\mu \left( \chi'_{ij} + \frac{\nu}{1-\nu} \chi'_{kk} \delta_{ij} \right)$$

ou

(II.31)

$$\chi'_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left( \chi_{ij} - \frac{\nu}{1+2\nu} \chi_{kk} \delta_{ij} \right)$$

Vérifiant:

$$\operatorname{div} \chi' = 0$$

(II.32)

Les équations (II.30) s'écrivent plus simplement:

$$\chi'_{ij, kkl} = \eta_{ij}$$

ou

$$\Delta \Delta \chi' = \underline{\eta}$$

(II.33)

où  $\Delta \Delta$  est l'opérateur bilaplacien.

Pour un milieu infini, la solution de ces équations aux dérivées partielles est:

$$\chi'_{ij}(\vec{r}) = -\frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{V}} \eta_{ij}(\vec{r}') \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{v} dv'$$

(II.34)

Connaissant  $\chi'$  on peut déduire  $\underline{\sigma}$  par l'intermédiaire de (II.31) et (II.29).

### IV.2.2. Méthode du tenseur de Green

Considérons un milieu soumis à un champ de déformation plastique  $\underline{\varepsilon}^p$  connu et incompatible. A ce dernier est associé un champ de déformation élastique additionnel assurant la compatibilité du champ de déformation totale. Les équations de l'élasticité peuvent s'écrire si l'on fait apparaître les déformations totale  $\underline{\varepsilon}$  et plastique  $\underline{\varepsilon}^p$ :

$$\begin{aligned}\underline{\sigma} &= \underline{\underline{C}} \underline{\varepsilon}^e \\ &= \underline{\underline{C}} (\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^p) \\ &= \underline{\sigma}^o - \underline{\underline{C}} \underline{\varepsilon}^p\end{aligned}\quad (\text{II.35})$$

où  $\underline{\underline{C}}$  est le tenseur des constantes élastiques d'ordre 4 et  $\underline{\sigma}^o$  un champ de contraintes auxiliaire.

En l'absence de chargement extérieur, les équations d'équilibre que doit vérifier le champ de contraintes  $\underline{\sigma}$  s'écrivent:

$$\text{div } \underline{\sigma} = \text{div } \underline{\sigma}^o - \text{div} (\underline{\underline{C}} \underline{\varepsilon}^p) = 0 \quad (\text{II.36})$$

Ces équations peuvent être considérées comme celles d'un problème purement élastique pour un milieu soumis à une distribution de forces de volume connue:

$$\vec{F} = - \text{div} (\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\varepsilon}^p) \quad (\text{II.37})$$

Si la réponse en déplacement de ce milieu, à l'application d'une force ponctuelle  $\vec{f}$  en un point  $\vec{r}'$  est connue, nous avons:

$$u_i(\vec{r}) = G_{ij}(\vec{r}, \vec{r}') f_j(\vec{r}') \quad (\text{II.38})$$

Et la réponse à toute distribution continue de forces  $\vec{F}$  sera:

$$u_i(\vec{r}) = \int_v G_{ij}(\vec{r}, \vec{r}') F_j(\vec{r}') dv' \quad (\text{II.39})$$

où  $G_{ij}(\vec{r}, \vec{r}')$  est le tenseur de Green du milieu.

Connaissant  $\vec{u}$ , on en déduit  $\underline{\varepsilon}$  et  $\underline{\sigma}^o$  puis  $\underline{\sigma}$  par (II.35). En élasticité linéaire et pour un milieu homogène, isotrope et infini, on a:

$$G_{ij}(\vec{r}, \vec{r}') = G_{ij}(|\vec{r} - \vec{r}'|) = \frac{1}{16 \pi \mu (1-\nu) \rho} (\rho_{,i} \rho_{,j} + (3-4\nu) \delta_{ij}) \quad (\text{II.40})$$

avec  $\rho = |\vec{r} - \vec{r}'|$

Dans ce cas, pour une déformation plastique sans variation de volume (II.37) et (II.39) s'expriment plus simplement par:

$$F_j = -2\mu \varepsilon_{kj,k}^p$$

et

$$u_i(\vec{r}) = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)} \int_v \frac{\varepsilon_{kj,k}^p}{\rho} (\rho_{,i} \rho_{,j} + (3-4\nu) \delta_{ij}) dv' \quad (\text{II.41})$$

Cette méthode présente l'avantage de résoudre le problème en déplacements auxquels la méthode du potentiel des contraintes ne donne pas directement accès.

## v / Problèmes Particuliers

Dans ce paragraphe, nous nous intéresserons à deux problèmes particuliers par le biais desquels nous aborderons dans les chapitres suivants les problèmes des hétérogénéités des déformations plastiques.



## v.1. Le problème de l'inclusion plastique homogène

### v.1.1. Matrice élastique (Eshelby)

Considérons une inclusion homogène, isotrope, ellipsoïdale, de volume  $V$ , plastifiée uniformément et située dans une matrice élastique infinie non chargée. Eshelby /4/ formule une solution à ce problème en utilisant la méthode du tenseur de Green qui permet de ramener ce problème à celui de la réponse d'un milieu élastique infini à une distribution superficielle de forces réparties à l'interface entre matrice et inclusion. La déformation totale  $\underline{\varepsilon}^I$  de l'inclusion est donnée par Eshelby et s'exprime par:

$$\varepsilon_{ij}^I = S_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{PI} \quad (\text{II.42})$$

où  $\underline{\varepsilon}^{PI}$  est la déformation plastique dans l'inclusion et  $\underline{S}$  le tenseur d'Eshelby dépendant des caractéristiques élastiques du milieu et de la forme de l'inclusion.

$$S_{ijkl} = (1/2) (T_{ijmn}^I + T_{jimn}^I) C_{mnl}^o \quad (\text{II.43})$$

$C_{mnl}^o$ : constantes élastiques du milieu homogène et isotrope

$$T_{ijmn}^I(\vec{r}) = -\frac{1}{V} \int_{V, V'} G_{nj,mi}(\vec{r}-\vec{r}') dv dv' \quad (\text{II.44})$$

$\underline{G}$  étant le tenseur de Green.

Si l'on considère la partie antisymétrique de  $T_{ijmn}^I$ , on peut introduire le tenseur  $\underline{A}$  reliant la rotation totale  $\underline{\omega}^I$ , dans l'inclusion, à la déformation plastique  $\underline{\varepsilon}^P$ :

$$\omega_{ij}^I = A_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{PI} \quad (\text{II.45})$$

où

$$A_{ijkl} = (1/2) (T_{ijmn}^I - T_{jimn}^I) C_{mnl}^o \quad (\text{II.46})$$

\* contraintes dans l'inclusion

$$\sigma_{ij}^I = C_{ijkl}^o \varepsilon_{kl}^{eI}$$

$\varepsilon^{eI}$ : déformation élastique additionnelle de l'inclusion assurant la compatibilité de la déformation totale .

$$\sigma_{ij}^I = C_{ijkl}^o (\varepsilon_{kl}^I - \varepsilon_{kl}^{PI})$$

en utilisant ( I I . 4 2 ) on a:

$$\sigma_{ij}^I = C_{ijkl}^o (S_{klmn} \varepsilon_{mn}^{PI} - \varepsilon_{kl}^{PI})$$

$$\sigma_{ij}^I = C_{ijkl}^o (S_{klmn} - I_{klmn}) \varepsilon_{mn}^{PI} \quad ( I I . 4 7 )$$

$I$ : étant le tenseur unité symétrique d'ordre 4,  $I_{ijkl} = (1/2) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$ .

$\sigma^I$  est le tenseur des contraintes internes dans l'inclusion.

La généralisation de ce résultat au cas d'une matrice plastifiée et chargée conduit aux résultats d'Eshelby-Kröner.

v.1.2. Matrice plastifiée et chargée (Eshelby-Kröner)

Kröner /1/ considère un système (matrice-inclusion) soumis aux contraintes uniformes à l'infini  $\Sigma_{ij}$  et subissant une déformation plastique macroscopique  $\underline{\varepsilon}^P$ . L'inclusion étant comme dans le cas précédent, homogène, isotrope, ellipsoïdale et de volume  $V^I$ .

La matrice et l'inclusion sont plastifiées de façons uniformes, leurs déformations plastiques respectives sont  $\underline{\varepsilon}^{PM}$  et  $\underline{\varepsilon}^{PI}$ .

Soient  $\underline{\varepsilon}^T$  et  $\underline{\Omega}^T$  la déformation et la rotation totales macroscopiques du système. Ces quantités peuvent être décomposées en parties élastiques et plastiques:

$$\underline{E}^T = \underline{E}^e + \underline{E}^p$$

(II.48)

$$\underline{\Omega}^T = \underline{\Omega}^e + \underline{\Omega}^p$$

Les champs de déformation totale et élastique à l'intérieure de l'inclusion sont uniformes et s'expriment dans ce cas, (en gardant les notations du paragraphe (v-1-1)) par:

$$\varepsilon^I_{ij} = E^T_{ij} + S_{ijkl} (\varepsilon^{PI}_{kl} - E^P_{kl}) \quad (\text{II.49})$$

$$\varepsilon^{eI}_{ij} = E^T_{ij} + S_{ijkl} (\varepsilon^{PI}_{kl} - E^P_{kl}) - \varepsilon^{PI}_{ij} \quad (\text{II.50})$$

$$\omega^I_{ij} = \Omega^T_{ij} + A_{ijkl} (\varepsilon^{PI}_{kl} - E^P_{kl}) \quad (\text{II.51})$$

$$\omega^{eI}_{ij} = \Omega^T_{ij} + A_{ijkl} (\varepsilon^{PI}_{kl} - E^P_{kl}) - \omega^{PI}_{ij} \quad (\text{II.52})$$

### \* Contraintes dans l'inclusion

En supposant l'accommodation de l'incompatibilité plastique ( $\varepsilon^{PI}_{ij} - E^P_{ij}$ ) purement élastique, les contraintes dans l'inclusion s'expriment par :

$$\sigma^I_{ij} = C^o_{ijkl} \varepsilon^{eI}_{kl}$$

Compte tenu des relations (II.50) et (II.48), on a:

$$\sigma^I_{ij} = C^o_{ijkl} E^e_{kl} + C^o_{ijkl} (I_{klmn} - S_{klmn}) (E^P_{mn} - \varepsilon^{PI}_{mn})$$

Sachant que  $\Sigma_{ij} = C^o_{ijkl} E^e_{kl}$ , on aboutit à la loi d'interaction suivante:

$$\sigma^I_{ij} = \Sigma_{ij} + C^o_{ijkl} (I_{klmn} - S_{klmn}) (E^P_{mn} - \varepsilon^{PI}_{mn}) \quad (\text{II.53})$$

pour une inclusion sphérique, cas formulé par Kröner:

$$\sigma_{ij}^I = \Sigma_{ij} + 2\mu (1 - \beta) (E_{ij}^P - \varepsilon_{ij}^{PI}) \quad (\text{II.54})$$

où

$$\beta = \frac{2(4-5\nu)}{15(1-\nu)}$$

$\mu$  et  $\nu$  sont respectivement le module de cisaillement et le coefficient de Poisson.

### \* énergie de déformation élastique

$V^I$  et  $V^M$  sont respectivement les volumes de l'inclusion homogène de déformation plastique  $\underline{\varepsilon}^{PI}$  et de la matrice de déformation  $\underline{\varepsilon}^{PM}$ .

La déformation plastique macroscopique  $\underline{\varepsilon}^P$  du système (matrice-inclusion) est telle que:

$$E_{ij}^P = f \varepsilon_{ij}^{PI} + (1-f) \varepsilon_{ij}^{PM} \quad (\text{II.55})$$

où "f" est la fraction volumique de l'inclusion égale à  $(V^I/V)$ .  
L'énergie de déformation élastique du système s'exprime par:

$$W^e = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^e dv \quad (\text{II.56})$$

avec  $\varepsilon_{ij}^e = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^P$

d'où :

$$W^e = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^P) dv$$

La symétrie de  $\underline{\sigma}$  permet d'écrire :

$$\begin{aligned} W^e &= \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} (u_{i,j} - \varepsilon_{ij}^p) dv \\ &= \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} u_{i,j} dv - \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^p dv \\ &= \frac{1}{2} \int_S \sigma_{ij} u_i n_j ds - \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij,j} u_i dv - \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^p dv \end{aligned}$$

les équations d'équilibre imposent au champ de contraintes:

$$\sigma_{ij,j} = 0$$

Le milieu étant soumis aux contraintes uniformes  $\underline{\Sigma}$  à la frontière (S), on a:

$$\sigma_{ij} \cdot n_j = \Sigma_{ij} n_j \quad \text{sur (S)}$$

d'où

$$W^e = \frac{1}{2} \Sigma_{ij} \int_V u_{i,j} dv - \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^p dv$$

(II.57)

Par définition:

$$E_{ij}^T = \int_V \varepsilon_{ij} dv$$

$$\text{où } \varepsilon_{ij} = (1/2) (u_{i,j} + u_{j,i})$$

Compte tenu de la symétrie de  $\Sigma_{ij}$ , on a:

$$V \Sigma_{ij} E_{ij}^T = \Sigma_{ij} \int_V u_{i,j} dv$$

Les contraintes dans la matrice ( $\sigma_{ij}^M$ ) et dans l'inclusion ( $\sigma_{ij}^I$ ) étant uniformes:

$$W^e = \frac{1}{2} V \Sigma_{ij} E_{ij}^T - \frac{1}{2} \int_{V^I} \sigma_{ij}^I \varepsilon_{ij}^{P_I} dv - \frac{1}{2} \int_{V^M} \sigma_{ij}^M \varepsilon_{ij}^{P_M} dv$$

$\sigma^I$ ,  $\varepsilon^{P_I}$ ,  $\sigma^M$  et  $\varepsilon^{P_M}$  étant uniformes respectivement dans l'inclusion et dans la matrice, on a:

$$W^e = (1/2) V \Sigma_{ij} E_{ij}^T - (1/2) V^I \sigma_{ij}^I \varepsilon_{ij}^{P_I} - (1/2) V^M \sigma_{ij}^M \varepsilon_{ij}^{P_M}$$

d'après (II.53):

$$\begin{aligned} \sigma^I &= \underline{\Sigma} + \underline{C}^o (\underline{I} - \underline{S}) (\underline{E}^P - \underline{\varepsilon}^{P_I}) \\ &= \underline{\Sigma} + \sigma^{Ii} \end{aligned}$$

$$\text{d'où} \quad \sigma^{Ii} = \underline{C}^o (\underline{I} - \underline{S}) (\underline{E}^P - \underline{\varepsilon}^{P_I}) \quad (\text{II.58})$$

$\sigma^{Ii}$  désigne le tenseur des contraintes internes dans l'inclusion.

De même pour  $\sigma^M$ :

$$\sigma^M = \underline{\Sigma} + \sigma^{Mi}$$

où  $\sigma^{Mi}$  désigne le tenseur des contraintes internes dans la matrice.

La moyenne des contraintes internes du système étant nulle, on a:

$$V^M \sigma^{Mi} + V^I \sigma^{Ii} = 0 \quad (\text{II.59})$$

$$\text{d'où} \quad \sigma^{Mi} = - (V^I / V^M) \sigma^{Ii}$$

L'expression de l'énergie de déformation élastique devient:

$$\begin{aligned} W^e &= (1/2) V \Sigma_{ij} E_{ij}^T - (1/2) V^M \Sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{P_M} - (1/2) V^I \Sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{P_I} \\ &\quad - (1/2) V^I \sigma_{ij}^{Ii} \varepsilon_{ij}^{P_I} - (1/2) V^M \sigma_{ij}^{Mi} \varepsilon_{ij}^{P_M} \end{aligned}$$

D'après (II.55):

$$-(1/2) V^M \sum_{ij} \varepsilon^{PM}_{ij} - (1/2) V^I \sum_{ij} \varepsilon^{PI}_{ij} = -(1/2) V \sum_{ij} E^P_{ij}$$

En tenant compte de (II.48) et (II.59),  $W^e$  s'exprime par:

$$W^e = (1/2) V \sum_{ij} E^e_{ij} + (1/2) V^I \sigma^{Ii}_{ij} (\varepsilon^{PM}_{ij} - \varepsilon^{PI}_{ij}) \quad (\text{II.60})$$

En substituant l'expression de  $E^P_{ij}$  (II.55) à (II.58) et insérant l'expression obtenue de  $\sigma^{Ii}$  dans (II.60),  $W^e$  s'écrit :

$$W^e = (1/2) V \sum_{ij} E^e_{ij} + (1/2) (1-f) V^I (\varepsilon^{PM}_{ij} - \varepsilon^{PI}_{ij}) C_{ijkl} (I_{klmn} - S_{klmn}) (\varepsilon^{PM}_{mn} - \varepsilon^{PI}_{mn})$$

L'énergie élastique par unité de volume s'exprime donc par:

$$(w^e/v) = (1/2) \sum_{ij} E^e_{ij} + (1/2) (1-f) f (\varepsilon^{PM}_{ij} - \varepsilon^{PI}_{ij}) C_{ijkl} (I_{klmn} - S_{klmn}) (\varepsilon^{PM}_{mn} - \varepsilon^{PI}_{mn}) \quad (\text{II.61})$$

### \*Energie libre complémentaire

l'énergie libre complémentaire du système (matrice-inclusion) soumis à l'action des forces de surface  $F_i = \sum_{ij} n_j (\vec{n}$  étant la normale extérieure à la surface), est par définition:

$$\begin{aligned} W^p &= -W^e + \int_s F_i u_i ds \\ &= -W^e + \int_s \sum_{ij} u_i n_j ds \end{aligned}$$

où  $u_i$  est le champ de déplacement dans le milieu.

$$W^p = -W^e + \sum_{ij} \int_v u_{i,j} dv$$

$$W^p = -W^e + V \sum_{ij} E^T_{ij}$$

$$W^p = -W^e + V \sum_{ij} E^e_{ij} + V \sum_{ij} E^p_{ij}$$

En remplaçant  $W^e$  et  $\underline{E}^P$  par leurs expressions respectives, nous obtenons l'expression de l'énergie libre:

$$W^P = (1/2) V \sum_{ij} E_{ij}^e + V f \sum_{ij} \varepsilon_{ij}^{PI} + V (1-f) \sum_{ij} \varepsilon_{ij}^{PM} \\ - (1/2) (1-f) V^I (\varepsilon_{ij}^{PM} - \varepsilon_{ij}^{PI}) C_{ijkl}^o (I_{klmn} - S_{klmn}) (\varepsilon_{mn}^{PM} - \varepsilon_{mn}^{PI})$$

L'énergie libre par unité de volume notée  $\psi$  sera donc:

$$\psi = (1/2) \sum_{ij} E_{ij}^e + f \sum_{ij} \varepsilon_{ij}^{PI} + (1-f) \sum_{ij} \varepsilon_{ij}^{PM} \\ - (1/2) (1-f) f (\varepsilon_{ij}^{PM} - \varepsilon_{ij}^{PI}) C_{ijkl}^o (I_{klmn} - S_{klmn}) (\varepsilon_{mn}^{PM} - \varepsilon_{mn}^{PI}) \quad (II.62)$$

### v.2. Problème d'une interface plane séparant deux milieux homogènes /5/, /9/

Considérons deux milieux homogènes I et II déformés de façon uniforme respectivement par  $\underline{\beta}^P_1$  et  $\underline{\beta}^P_2$  et séparés par une interface plane (P) de normale unitaire  $\vec{n}$  de composantes  $n_1, n_2, n_3$  dans le repère où sont exprimés les champs  $\underline{\beta}^P_1$  et  $\underline{\beta}^P_2$ .

$\underline{\beta}^P$  est alors un champ de gradient de déformation constant par morceaux pouvant s'écrire sous la forme:

$$\underline{\beta}^P = \underline{\beta}^P_1 + \Delta \underline{\beta}^P \delta_v(r) \quad (II.63)$$

avec  $\Delta \underline{\beta}^P = \underline{\beta}^P_2 - \underline{\beta}^P_1$

$$\delta_v(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } r \in \text{milieu II} \\ 0 & \text{si } r \in \text{milieu I} \end{cases}$$

L'incompatibilité plastique est purement superficielle et est localisée à l'interface (P).



### v. 2. 1. Tenseur densité de dislocations

Le tenseur densité de dislocations exprimé par (II.12) s'exprime en tenant compte de (II.63) par:

$$\alpha_{ij} = - \epsilon_{ikl} \Delta \beta_{ij}^P n_k \delta(s) \quad (\text{II.64})$$

où  $\delta(s)$  est la distribution de Dirac nulle partout sauf sur l'interface.

$\alpha_{ij}$  est donc une distribution de dislocations purement superficielle, ce qui nous amène à définir la densité superficielle par:

$$\bar{\alpha}_{ij} = - \epsilon_{ikl} \Delta \beta_{ij}^P n_k \quad (\text{II.65})$$

### v. 2. 2. Tenseur d'incompatibilité plastique

En partant de la relation (II.24) liant le tenseur d'incompatibilité plastique au tenseur densité de dislocations nous pouvons écrire:

$$\eta_{ij} = (1/2) (\epsilon_{imk} \alpha_{jm} + \epsilon_{jmk} \alpha_{im}) n_k \delta'(s) \quad (\text{II.66})$$

$\delta'$  étant la dérivée de la distribution de Dirac.

On définit le tenseur d'incompatibilité superficielle  $\bar{\eta}$  par:

$$\bar{\eta}_{ij} = (1/2) (\epsilon_{imk} \bar{\alpha}_{jm} + \epsilon_{jmk} \bar{\alpha}_{im}) n_k \quad (\text{II.67})$$

### v. 2. 3. Contraintes Internes

La méthode du potentiel des contraintes utilisée par Berveiller /5/ et Rey /6/, permet de calculer les contraintes internes d'incompatibilité qui s'expriment dans un repère  $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$  lié à l'interface tel que  $(\vec{n} = \vec{x}_2)$  par:

$$\sigma_{ij} = \mu \{ \epsilon_{i2l} \epsilon_{jm2} \bar{\eta}_{lm} - (v/1-v) \bar{\eta}_{kk} (\delta_{ij} - \delta_{i2} \delta_{j2}) \} \text{sgn}(x_2) \quad (\text{II.68})$$

$$\text{sgn}(x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_2 > 0 \\ -1 & \text{si } x_2 < 0 \end{cases}$$

(II.68) s'exprime explicitement par:

$$[\sigma_{ij}] = -\frac{\mu}{1-\nu} \begin{bmatrix} \Delta\varepsilon_{11}^p + \nu \Delta\varepsilon_{33}^p & 0 & (1-\nu) \Delta\varepsilon_{13}^p \\ 0 & 0 & 0 \\ (1-\nu) \Delta\varepsilon_{13}^p & 0 & \Delta\varepsilon_{33}^p + \nu \Delta\varepsilon_{11}^p \end{bmatrix} \text{sgn}(x_2) \quad (\text{II-69})$$

#### v.2.4. Energie de déformation élastique

L'énergie de déformation élastique par unité de volume associée aux contraintes internes est:

$$W^e = (1/2) \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^e \quad (\text{II.70})$$

où  $\varepsilon_{ij}^e$  est lié à  $\sigma_{ij}$  selon les lois de l'élasticité linéaire par:

$$\varepsilon_{ij}^e = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij}$$

En utilisant les expressions des contraintes (II.69),  $W^e$  s'exprime dans le repère lié à l'interface ( $\vec{x}_2 = \vec{n}$ ) par:

$$W^e = \frac{\mu}{4(1-\nu)} \left[ \Delta\varepsilon_{11}^{p^2} + \Delta\varepsilon_{33}^{p^2} + 2\nu \Delta\varepsilon_{11}^p \Delta\varepsilon_{33}^p + 2(1-\nu) \Delta\varepsilon_{13}^{p^2} \right] \quad (\text{II.71})$$

Et dans un repère quelconque, par:

$$W^e = \frac{1}{2E} \left[ (1+\nu) \sigma_{ij} \sigma_{ij} - \nu \sigma_{kk}^2 \right] \quad (\text{II.72})$$

## VI / Déformation plastique des polycristaux métalliques

Pour les métaux, nous admettons que le mécanisme de déformation plastique à froid est essentiellement le glissement cristallographique.

Dans le cas des métaux C.F.C., les plans de glissement sont du type  $\{111\}$  et les directions du type  $\langle 110 \rangle / 8$ ; ce qui correspond à douze systèmes de glissement (tableau II.1). Pour les C.C., les directions de glissement sont du type  $\langle 111 \rangle$ , les plans de glissement peuvent être du type  $\{110\}$  (tableau II-2),  $\{112\}$  ou  $\{123\} / 8$ , correspondant à 48 systèmes de glissement possibles.

Si  $\vec{n}^k$  et  $\vec{m}^k$  sont respectivement la normale au plan de glissement et la direction de glissement du système actif  $k$  et  $\gamma^k$  l'amplitude du glissement sur ce système, on a:

$$\beta_{ij}^p = u_{j,i}^p = \sum_k n_i^k m_j^k \gamma^k \quad (\text{II.73})$$

$$\varepsilon_{ij}^p = \sum_k R_{ij}^k \gamma^k \quad (\text{II.74})$$

Avec  $R_{ij}^k = (1/2) (n_i^k m_j^k + n_j^k m_i^k)$  (II.75)

dit tenseur d'orientation du système  $k$

$$\omega_{ij}^p = \sum_k S_{ij}^k \gamma^k \quad (\text{II.76})$$

Avec  $S_{ij}^k = (1/2) (n_i^k m_j^k - n_j^k m_i^k)$  (II.77)

Notation des systèmes de glissement	systèmes de glissement	
	plan	direction
A2	$(\bar{1}11)$	$[0\bar{1}1]$
A3	$(\bar{1}11)$	$[101]$
A6	$(\bar{1}11)$	$[110]$
B2	$(111)$	$[0\bar{1}1]$
B4	$(111)$	$[\bar{1}01]$
B5	$(111)$	$[1\bar{1}0]$
C1	$(11\bar{1})$	$[011]$
C3	$(11\bar{1})$	$[101]$
C5	$(11\bar{1})$	$[1\bar{1}0]$
D1	$(1\bar{1}1)$	$[011]$
D4	$(1\bar{1}1)$	$[\bar{1}01]$
D6	$(1\bar{1}1)$	$[110]$

**Tableau II.1** : Notation de Schmit et Boas pour les douze systèmes de glissement des métaux C.F.C.

Notation des systèmes de glissement	systèmes de glissement	
	plan	direction
3A	$(101)$	$[\bar{1}11]$
3C	$(101)$	$[11\bar{1}]$
4B	$(\bar{1}01)$	$[111]$
4D	$(\bar{1}01)$	$[1\bar{1}1]$
6A	$(110)$	$[\bar{1}11]$
6D	$(110)$	$[1\bar{1}1]$
5B	$(1\bar{1}0)$	$[111]$
5C	$(1\bar{1}0)$	$[11\bar{1}]$
1D	$(011)$	$[1\bar{1}1]$
1C	$(011)$	$[11\bar{1}]$
2B	$(0\bar{1}1)$	$[111]$
2A	$(0\bar{1}1)$	$[\bar{1}11]$

**Tableau II.2.** Notation des douze systèmes de glissement des métaux C.C.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- /1/- E.Kröner, Acta metall., 9, p.155, (1961).
- /2/- J. D. Eshelby, Prog. in Sol. Mech. Ed. Sneddon-Hill, North Holland, Amsterdam, 2, (1961).
- /3/- E. Kröner, "Dislocation field theory", Summer School Hrazani, Ed. Academia Prague, p.231, (1966).
- /4/- J. D. Eshelby, Proc. Roy. Soc., A 241, p. 376, (1957).
- /5/- M.Berveiller, Thèse d'Etat, université de Paris Nord, (1978).
- /6/- C. Rey, Thèse d'Etat, université de Paris nord, (1980).
- /7/- A. Zaoui, "Dislocations et déformation plastique", Ecole d'été Yrivals, p.307, (1979).
- /8/- B. Jaoul, "Etude de la plasticité et appl. aux métaux", Ed. Dunod., (1965).
- /9/- H. Bouaouine, Thèse d'Etat, Université de Metz, (1988).

## **CHAPITRE III**

**Microhétérogénéités induites en  
relation avec les contraintes  
internes**

## I / Introduction

Dans ce chapitre nous rappellons certains résultats concernant les microhétérogénéités plastiques compatibles /1/ en guise d'introduction au chapitre suivant où la prise en compte de l'hétérogénéité de la déformation plastique est réalisée par l'intermédiaire d'un modèle tiré de ces résultats.

L'analyse de la formation d'hétérogénéités plastiques compatibles a été effectuée à partir du problème de l'inclusion plastique homogène à frontière libre, en considérant un domaine "D" dont la forme et l'orientation sont à priori inconnues, se déformant différemment du milieu homogène dans lequel il est situé.

Les contraintes internes dans un tel domaine sont importantes sauf si la forme et l'orientation de celui-ci sont telles que ces contraintes se relaxent.

Une discussion concernant la formation des microbandes de cisaillement, des cellules et parois de dislocations a été proposée en relation avec les mécanismes de relaxation des contraintes internes.

## II / Analyse des champs de contraintes et de la densité de dislocations

### II.1. Forme générale des hétérogénéités plastiques compatibles

Considérons un milieu infini à élasticité homogène et isotrope, dans lequel s'est développée une déformation plastique constante par morceaux:

- $\varepsilon_{ij}^P$  dans un domaine "D" inconnu
- $E_{ij}^P$  dans le reste du milieu ou "matrice"

En principe, cette hétérogénéité plastique devrait entraîner des contraintes internes importantes sauf si elle possède une forme et une orientation telles que le champ de déformation plastique reste compatible.

Pour un domaine "D" quelconque, ce problème d'inclusion à frontière libre est très difficile à analyser. En se limitant à un domaine "D" de forme ellipsoïdale, la solution d'Eshelby /2/ Kröner /3/ du problème de l'inclusion plastique a pu être utilisée. Les contraintes  $\sigma_{ij}$  dans l'inclusion et l'énergie



élastique  $W$  dans tout le milieu associées à ce problème s'écrivent /2/:

$$\sigma_{ij} = C^{\circ}_{ijkl} (\mathbb{I}_{klmn} - S_{klmn}) (E^P_{mn} - \varepsilon^P_{mn}) \quad (\text{III.1})$$

$$W = (1/2) \sigma_{ij} (E^P_{ij} - \varepsilon^P_{ij}) V \quad (\text{III.2})$$

$\underline{S}$  est le tenseur d'Eshelby dépendant de la forme de "D" et du rapport de Poisson  $\nu$  du milieu.

$\underline{\mathbb{I}}$  désigne le tenseur unité d'ordre 4.

$V$  est le volume du domaine "D"

$C^{\circ}_{ijkl}$  sont les constantes élastiques d'un milieu isotrope tel que:

$$C^{\circ}_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

où  $\lambda = 2\mu (\nu / 1-2\nu)$  est le coefficient de Lamé

$\mu$  et  $\nu$  sont respectivement le module de cisaillement et le coefficient de Poisson du milieu.

Afin de minimiser (voire annuler) l'énergie interne du matériau due aux contraintes internes, il suffit de rechercher les conditions sur l'hétérogénéité plastique  $\Delta \underline{\varepsilon}^P = \underline{E}^P - \underline{\varepsilon}^P$  et sur la microstructure (forme et orientation de "D") qui annulent  $\sigma_{ij}$  et donc  $W$ .

D'après (III.1),  $\sigma_{ij}$  est nulle dans deux cas extrêmes:

$$* \Delta \varepsilon^P_{ij} = 0 \quad (\text{III.3})$$

Cette solution n'impose pas de conditions sur la microstructure et correspond à l'hypothèse de Taylor-Von Misès qui nécessite cinq systèmes de glissement actifs dans "D" pour accommoder l'incompatibilité due à la déformation plastique dans la matrice c'est-à-dire un glissement multiple homogène.

$$* C^{\circ}_{ijkl} (\mathbb{I}_{klmn} - S_{klmn}) \Delta \varepsilon^P_{mn} = 0 \quad (\text{III.4})$$

L'étude de cette seconde possibilité de relaxation des contraintes internes /1/ a montré que pour un champ de déformation plastique de trace nulle

( $\Delta \varepsilon_{kk}^P = 0$ ), seuls l'ellipsoïde de révolution d'épaisseur nulle ( $a=b$  et  $c=0$ ) ou un plan ( $a=0$ ,  $b$  quelconque et  $c$  infini) autorisent une hétérogénéité plastique.

Les conditions de compatibilité d'une telle hétérogénéité plastique sont donc les mêmes que celles du problème d'une interface plane séparant deux milieux semi-infinis de déformations plastiques homogènes et différentes de part et d'autre de cette interface. Nous avons montré dans le chapitre IV que pour une déformation plastique constante par morceaux, la compatibilité à travers l'interface plane n'est possible que si:

$$\text{Det } \Delta \varepsilon^P = 0 \quad (\text{III.5})$$

Donc, pour un ellipsoïde lenticulaire ( $a=b \gg c$ ) si le rapport de forme  $c/a$  tend vers 0, les deux problèmes ; de l'inclusion lenticulaire et de l'interface plane (voir chapitre II) sont équivalents.

Des hétérogénéités plastiques compatibles sont dans ce cas là permises si la condition (III.5) est satisfaite.

Afin d'étudier certains processus de relaxation des contraintes internes associées aux incompatibilités dues aux hétérogénéités plastiques, on se place dans le cas du problème de l'inclusion plastique de forme ellipsoïdale lenticulaire et l'on donne dans ce cas la forme explicite des contraintes internes.

### II.2. Champs de contraintes pour une hétérogénéité plastique lenticulaire

L'ellipsoïde lenticulaire a pour axes  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que:  $a= b \gg c$ . Son repère principal est tel qu'il est représenté dans la fig.III.1:

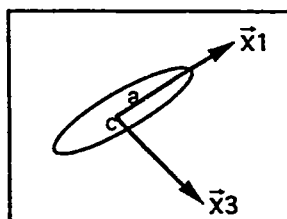


Fig.III.1: repérage d'un ellipsoïde de forme lenticulaire.

Le champ de contraintes associé aux incompatibilités plastiques exprimé dans le repère principal de l'ellipsoïde, est la somme de deux champs distincts  $\sigma^1_{ij}$  et  $\sigma^2_{ij}$  tels que:

$$\sigma_{ij} = \sigma^1_{ij} + \sigma^2_{ij} \quad (\text{III.6})$$

Les termes  $\sigma^1_{ij}$  s'expriment par /2/:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{2\mu} \sigma_{11} = -\frac{\nu}{1-\nu} (\Delta\varepsilon_{11}^p + \Delta\varepsilon_{22}^p) - \Delta\varepsilon_{11}^p \\ \frac{1}{2\mu} \sigma_{22} = -\frac{\nu}{1-\nu} (\Delta\varepsilon_{11}^p + \Delta\varepsilon_{22}^p) - \Delta\varepsilon_{22}^p \\ \frac{1}{2\mu} \sigma_{12} = -\Delta\varepsilon_{12}^p \\ \frac{1}{2\mu} \sigma_{33} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{13} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{23} = 0 \end{array} \right\} \quad (\text{III.7})$$

On peut remarquer qu'au facteur 2 près, les termes  $\sigma^1_{ij}$  sont les mêmes que ceux obtenus pour le problème du bicristal à joint plan évoqué dans le chapitre I I, la normale à l'interface étant dans ce cas  $\vec{x}_3$  au lieu de  $\vec{x}_2$  (voir I I . 69).

Ces termes sont indépendants de la forme de l'ellipsoïde ( c'est-à-dire  $c/a$  ) et ne dépend que de l'orientation de celui-ci par rapport au tenseur  $\Delta\varepsilon^p$ .

Tandis que les termes  $\sigma^2_{ij}$  dépendent à la fois de  $\Delta\varepsilon^p_{ij}$  et du rapport de forme ( $c/a$ ) de l'ellipsoïde et l'on a:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\sigma_{11}^2}{2\mu} &= \frac{13\pi}{32(1-\nu)} \frac{c}{a} \Delta\varepsilon_{11}^P + \frac{16\nu-1}{32(1-\nu)} \pi \frac{c}{a} \Delta\varepsilon_{22}^P - \frac{2\nu+1}{8(1-\nu)} \pi \frac{c}{a} \Delta\varepsilon_{33}^P \\
 \frac{\sigma_{22}^2}{2\mu} &= \frac{13\pi}{32(1-\nu)} \frac{c}{a} \Delta\varepsilon_{22}^P + \frac{16\nu-1}{32(1-\nu)} \pi \frac{c}{a} \Delta\varepsilon_{11}^P - \frac{2\nu+1}{8(1-\nu)} \pi \frac{c}{a} \Delta\varepsilon_{33}^P \\
 \frac{\sigma_{33}^2}{2\mu} &= -\frac{2\nu+1}{8(1-\nu)} \pi \frac{c}{a} (\Delta\varepsilon_{11}^P + \Delta\varepsilon_{22}^P) - \frac{\pi}{4(1-\nu)} \frac{c}{a} \Delta\varepsilon_{33}^P \\
 \frac{\sigma_{12}^2}{2\mu} &= \frac{7-8\nu}{16(1-\nu)} \pi \frac{c}{a} \Delta\varepsilon_{12}^P \\
 \frac{\sigma_{13}^2}{2\mu} &= \frac{\nu-2}{4(1-\nu)} \pi \frac{c}{a} \Delta\varepsilon_{13}^P \\
 \frac{\sigma_{23}^2}{2\mu} &= \frac{\nu-2}{4(1-\nu)} \pi \frac{c}{a} \Delta\varepsilon_{23}^P
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.8})$$

Pour annuler le champ  $\sigma^1$ , il suffit pour un champ  $\Delta\varepsilon^P$  vérifiant (III.5), que l'ellipsoïde soit convenablement orienté. C'est le mécanisme de formation des plans d'habitat /4/, /5/, /6/.

Tandis que le champ  $\sigma^2$  ne peut être annulé que par un ou plusieurs mécanismes particuliers agissant sur la forme (c/a) du domaine lenticulaire "D".

Deux mécanismes différents de relaxation des champs de contraintes  $\sigma^1$  et

$\sigma^2$  faisant intervenir la densité de dislocations sont possibles.

### 11.3. Densité de dislocations associée à l'hétérogénéité plastique

Au champ de contraintes précédent est associée une distribution de dislocations due aux incompatibilités plastiques. Dans ce cas, le tenseur densité de dislocations  $\underline{\alpha}$  est liée au gradient de déplacement plastique par la relation (11.12) du chapitre 11 :

$$\alpha_{ij} = - \epsilon_{ikl} \beta^p_{lj,k}$$

$\underline{\beta}^p$  est un champ constant par morceaux, tel que :

$$\beta^p_{ij} = \beta^{P^0}_{ij} + (\beta^{P^I}_{ij} - \beta^{P^0}_{ij}) \theta(r) \quad (III.9)$$

où  $\underline{\beta}^{P^0}$  et  $\underline{\beta}^{P^I}$  sont respectivement les gradients de déplacement plastiques dans la matrice et dans l'inclusion.  $\theta(r)$  est la fonction indicatrice définie par :

$$\theta(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } r \in D \\ 0 & \text{si } r \notin D \end{cases} \quad (III.10)$$

Le tenseur densité de dislocations  $\alpha_{ij}$  s'exprime en tenant compte de (11.9) par :

$$\alpha_{ij} = - \epsilon_{ikl} (\beta^{P^I}_{ij} - \beta^{P^0}_{ij}) n_k \delta(s) \quad (III.11)$$

où  $n_k$  est une composante de la normale unitaire extérieure au domaine "D". Et  $\delta(s)$  la distribution de Dirac, nulle partout sauf sur la surface de l'inclusion. La densité de dislocations  $\underline{\alpha}$  est donc purement superficielle et correspond à une distribution continue dipolaire de dislocations.

En effet, les deux surfaces latérales de l'inclusion lenticulaire ont pour normales extérieures  $\vec{n} = (0, 0, \pm 1)$  exprimées dans le repère  $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$  principal de l'inclusion et pour coordonnées  $(x_1, x_2$  et  $x_3 = \pm c)$ .

On définit donc la densité superficielle par:

- pour la surface  $x_3 = +c$   $\{ \vec{n} = (0 \ 0 \ 1) \}$

$$\bar{\alpha}_{ij}^{(+)} = \epsilon_{i3l} (\beta^{P I_{ij}} - \beta^{P_0}_{ij}) \quad (\text{III.12})$$

- pour la surface  $x_3 = -c$   $\{ \vec{n} = (0 \ 0 \ \bar{1}) \}$

$$\bar{\alpha}_{ij}^{(-)} = -\epsilon_{i3l} (\beta^{P I_{ij}} - \beta^{P_0}_{ij}) \quad (\text{III.13})$$

En désignant par  $\Delta\beta^P$  la différence  $(\beta^{P I_{ij}} - \beta^{P_0}_{ij})$ , on a:

$$\bar{\alpha}_{ij}^{(+)} = -\bar{\alpha}_{ij}^{(-)} = \begin{bmatrix} -\Delta\beta_{21}^P - \Delta\beta_{22}^P - \Delta\beta_{23}^P \\ \Delta\beta_{11}^P & \Delta\beta_{12}^P & \Delta\beta_{13}^P \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.14})$$

Lorsque les contraintes  $\underline{\alpha}^1$  sont nulles, les composantes  $\Delta\epsilon_{11}^P$ ,  $\Delta\epsilon_{22}^P$  et  $\Delta\epsilon_{12}^P$  de la partie symétrique du tenseur  $\Delta\beta^P_{ij}$  sont nulles et (III.14) devient:

$$\bar{\alpha}_{ij}^{(+)} = \begin{bmatrix} \Delta\omega_{12}^P & 0 & -\Delta\beta_{23}^P \\ 0 & \Delta\omega_{12}^P & \Delta\beta_{13}^P \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

où  $\Delta\omega^P$  est la partie antisymétrique de  $\Delta\beta^P$ , représentant les rotations plastiques. Cette structure dipolaire de dislocations conduit en général à des contraintes internes du fait de la présence des composantes  $\Delta\epsilon_{13}^P$  et

$\Delta\varepsilon^P_{23}$  dans les termes  $\Delta\beta^P_{23}$  et  $\Delta\beta^P_{13}$ . Ces contraintes correspondent au champ  $\underline{\sigma}^2$  décrit précédemment.

En fait la répartition réelle des dislocations dans les parois de dislocations est continue selon son épaisseur. Néanmoins, pour les effets globaux et à grande distance auxquels on s'intéresse, la répartition dipolaire superficielle précédente est une approche admissible.

### III / Applications

Les résultats du paragraphe précédent pourront être utilisés pour analyser certains aspects de la formation des structures cellulaires de dislocations et des microbandes de cisaillement.

#### III.1. Formation des cellules de dislocations

La formation de jonctions de Lomer Cottrell ou d'autres réactions entre dislocations crée des zones dans lesquelles, en plus de l'accumulation des dislocations, le mouvement des mobiles d'entre elles est rendu très difficile par rapport aux autres régions du cristal. Celui-ci initialement homogène, se transforme progressivement en un matériau "biphasé" constitué d'une "matrice" ductile à faible densité de dislocations et de zones de taille et à densité de dislocations croissantes.

Ces zones d'hétérogénéités induites au cours de la déformation plastique doivent avoir les caractéristiques microstructurales correspondant à une énergie élastique interne minimale.

La forme générale lenticulaire favorisant la minimisation des contraintes internes explique l'organisation des dislocations en parois à fortes densité de dislocations. En effet, ces parois ont à priori une forme lenticulaire dont les caractéristiques (orientation et forme) évolueraient avec la déformation plastique pour minimiser le champ de contraintes internes  $\underline{\sigma}$ . Elles doivent tout d'abord être convenablement orientées par rapport au champ de déformation plastique afin d'annuler les contraintes  $\sigma^1$ .

Pour les métaux CFC, les normales aux parois de dislocations ont été calculées /4/ pour différentes combinaisons de systèmes de glissement actifs. Certaines parois correspondent à des plans de glissement (111) ou à

des plans perpendiculaires à la direction de glissement [110] mais dans d'autres cas, les normales aux parois sont plus complexes  $\{ (11\bar{2}), (\bar{1}31), (100) \}$  et peuvent dépendre de l'amplitude du glissement plastique. L'analyse théorique a également permis de retrouver les résultats expérimentaux de Caillard /7/ sur des éprouvettes d'Aluminium.

Le processus d'interactions entre dislocations mobiles et obstacles, et celui du blocage des dislocations de façon à rendre minimale l'énergie élastique associée aux contraintes internes  $\sigma^1$ , contribue à la formation d'une structure cellulaire orientée de dislocations.

En particulier, dans le cas des métaux à faible énergie de faute d'empilement pour lesquels les dislocations sont dissociées et les mécanismes de glissement dévié difficiles, il existe des interactions locales entre dislocations et de ce fait, les parois sont d'épaisseur finie ( $c \neq 0$ ) qui augmente avec la déformation plastique.

Lorsque les contraintes  $\sigma^1$  sont nulles, il subsiste les contraintes  $\sigma^2$  qui s'écrivent dans ce cas :

$$\left( \begin{array}{l} \frac{\sigma_{13}^2}{2\mu} = \frac{\nu-2}{4(1-\nu)} \pi \frac{c}{a} \Delta\varepsilon_{13}^P \\ \frac{\sigma_{23}^2}{2\mu} = \frac{\nu-2}{4(1-\nu)} \pi \frac{c}{a} \Delta\varepsilon_{23}^P \\ \sigma_{11}^2 = \sigma_{22}^2 = \sigma_{33}^2 = \sigma_{12}^2 = 0 \end{array} \right)$$

(III.15)

$\sigma_{11}^2, \sigma_{22}^2, \sigma_{33}^2$  et  $\sigma_{12}^2$  sont nulles du fait que  $\Delta\varepsilon_{11}^P = \Delta\varepsilon_{22}^P = \Delta\varepsilon_{12}^P = 0$  suite à la condition  $\sigma_{ij}^1 = 0$  et  $\Delta\varepsilon_{33}^P = 0$  découlant de la condition "trace  $\Delta\varepsilon^P = 0$ ".

Les composantes  $\sigma_{13}^2$  et  $\sigma_{23}^2$  ne peuvent en général s'annuler que lorsque



le rapport de forme  $c/a$  est nul, dans le cas où  $\Delta\varepsilon^P_{13}$  et  $\Delta\varepsilon^P_{23}$  sont non nuls c'est-à-dire dans le cas d'une déformation hétérogène.

Les contraintes résiduelles dans les parois d'épaisseur finie 'c' de longueur 'a' et convenablement orientées pour annuler les contraintes  $\sigma^1$ , correspondent à des cissons dans les plans des parois. De telles cissons ont été mesurées par Mughrabi /8/ à partir de l'analyse des courbures de dislocations dans une cellule. Pour une déformation plastique de  $2.25 \cdot 10^{-3}$  dans la cellule (les déformations plastiques des parois sont négligeables devant celles des cellules), une épaisseur 'c' des parois de l'ordre de  $0.1 \mu\text{m}$  et une taille moyenne 'a' des cellules égale à  $1.2 \mu\text{m}$ , dans le cas du Cuivre ( $\mu = 75700 \text{ MPa}$ ), la cission  $\sigma_{13}$  est de l'ordre de  $85 \text{ MPa}$ .

D'après (II.15) et dans les mêmes conditions du calcul effectué par Mughrabi,  $\sigma^2_{13}$  vaut  $83 \text{ MPa}$ .

L'accord entre le modèle et les mesures expérimentales peut donc être considéré comme satisfaisant.

La minimisation des contraintes  $\sigma^2_{13}$ ,  $\sigma^2_{23}$  et l'énergie élastique associée, est possible par le biais de deux mécanismes. Le premier étant lié à l'évolution du rapport de forme ( $c/a$ ) et concerne la propagation des parois de dislocations. Le second fait intervenir un cisaillement localisé et très intense appelé microbandes de cisaillement, que l'on évoquera au paragraphe suivant.

Lorsqu'une paroi de longueur 'a' et d'épaisseur 'c' s'est formée de manière à relaxer les contraintes  $\sigma^1$  par une orientation convenable, il subsiste les contraintes du type  $\sigma^2$  et une densité de dislocations dans la paroi. Du fait des interactions locales entre dislocations dues à la dissociation de celles-ci, l'épaisseur 'c' ne peut diminuer. Seulement, les contraintes  $\sigma^2$  étant équilibrées sur tout le volume, il existe en tête de paroi des gradients de contraintes élevés constituant des 'puits' de dislocations mobiles. L'accumulation de celles-ci dans ces régions a pour effet d'augmenter la longueur 'a' au fur et à mesure que la déformation progresse et le rapport de forme ( $c/a$ ) diminue. Ce mécanisme contribue à la diminution du diamètre moyen des cellules de dislocations par propagation des parois.

### III.2. Formation des microbandes de cisaillement

Une autre forme de relaxation des contraintes  $\sigma^2$  peut se faire par cisaillement très intense et localisé dans les domaines lenticulaires. Ce mécanisme est très difficile pour deux raisons:

- La forte densité de dislocations dans les parois et son augmentation avec la déformation plastique.

- Le plan des parois n'est pas forcément un plan de glissement facile. Ce pendant, les contraintes internes augmentent également avec la déformation plastique et peuvent pour quelques dizaines de % de déformation, atteindre localement la limite élastique théorique d'un cristal sans défauts. En effet, si on admet que la déformation dans les parois est nulle, que  $\nu = 1/3$  et  $c/a \approx 0.1$ , on a d'après (III.15):

$$\sigma_{13}^2 \approx 0.4 \mu E^P_{13}$$

Ainsi, malgré la forte densité de dislocations dans les parois, on peut s'attendre à l'apparition d'un cisaillement plastique (par glissement simple ou multiple) très intense et très localisé correspondant aux microbandes de cisaillement.

### IV / Conclusion

Il est très important pour aborder les problèmes des hétérogénéités plastiques souvent présentes, lors des déformations plastiques des polycristaux métalliques, de connaître leurs propriétés:

forme, évolution avec la déformation plastique etc....

En effet, d'après les résultats précédents, nous constatons que des hétérogénéités plastiques totalement compatibles sont des ellipsoïdes lenticulaires ou des plans d'épaisseurs nulles.

Une manière d'aborder ce problème afin de pouvoir analyser la formation de ces hétérogénéités, est de considérer que l'hétérogénéité plastique est de forme lenticulaire et d'orientation quelconque.

Cette configuration induit un champ de contraintes internes très importantes composé lui même de deux champs de contraintes dont le premier peut être

facilement relaxé par une orientation convenable de l'hétérogénéité. Le second champ de contraintes est totalement ou partiellement relâché par la propagation des parois de dislocations d'une part, et la formation des microbandes de cisaillement d'autre part.

Ces deux mécanismes de relaxation des contraintes  $\sigma^2$  aboutissent à la formation d'interfaces planes d'épaisseurs nulles ou quasiment nulles appelées plans d'habitat où la densité de dislocations est purement superficielle. Ces plans d'habitat séparent des régions à modes de déformation (par glissement ou autres) différents.

Une modélisation d'un tel comportement plastique fera l'objet du chapitre suivant dans le but d'une part de vérifier la corrélation entre l'orientation des plans d'habitat compatibles et celle des microbandes de cisaillement et parois de dislocations. Et d'autre part évaluer les conséquences de ces microhétérogénéités sur l'évolution de la texture.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- /1/- H. Bouaouine, Thèse d'Etat, Université de Metz, (1988).
- /2/- J. D. Eshelby, Proc. Roy. Soc., A241, p. 376, (1957).
- /3/- E. Kröner, Acta Metall., 9, p. 155, (1961).
- /4/- M. Berveiller, H. Bouaouine, Arch. of Metall., 32, p. 171, (1987).
- /5/- M. Berveiller, H. Bouaouine, N. Fakri, P. Lipinski, Textures and microst.,  
vol. 8 et 9, pp. 351-379, (1988).
- /6/- M. Berveiller, Thèse d'Etat, Université de Paris Nord, (1978).
- /7/- D. Caillard, Thèse d'Etat, Université de Toulouse, (1984).
- /8/- H. Mughrabi, Acta Metall., 31, n°9, p. 1367, (1983).

## CHAPITRE IV

*Hétérogénéités plastiques compatibles  
intragranulaires et lien avec la  
formation des microbandes de  
cisaillement et la transition de  
texture des métaux CFC et CC*

## I / Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux métaux à fort écrouissage latent pour lesquels la déformation plastique est essentiellement hétérogène (voir chapitre I). Il s'agit de décrire à l'échelle des grains certains aspects de la microstructure et des textures de déformation associés à une forme particulière des hétérogénéités plastiques moyennant un modèle supposant que les grains du polycristal se déforment selon deux modes de déformation plastique différents:

- Un glissement multiple homogène intervenant de préférence aux voisinages des joints des grains où se localise en général une forte concentration des contraintes internes d'incompatibilité intergranulaire qui active d'autres systèmes de glissement malgré le fort écrouissage latent.

- Un glissement simple dans les parties complémentaires des grains. Ce mode est favorisé par l'écrouissage latent qui s'oppose à l'activation des autres systèmes de glissement.

En somme, nous cherchons un champ de déformation plastique hétérogène et compatible présentant deux zones de modes de déformation différents où l'une des zones se déforme par glissement simple et l'autre par glissement multiple homogène. L'interface entre ces deux zones est considérée plane, donc n'introduisant pas de contraintes à grandes distances /1/. L'orientation de celle-ci ainsi que l'amplitude du glissement dans la zone à glissement simple sont déterminées à partir des relations générales de compatibilité de Kröner /2/.

Une application de ce modèle aux cas des métaux C.F.C. et C.C. déformés en laminage, aboutit à la détermination dans le repère macroscopique de laminage, d'une part des orientations des plans d'habitat (interfaces) et d'autre part des champs de rotation du réseau cristallin dans les zones à glissement simple. Ces résultats sont comparés respectivement aux orientations des microbandes de cisaillement et aux textures de laminage observées dans le cas des métaux et alliages à fort écrouissage latent.

## II / Théorie relative à une déformation plastique hétérogène et compatible

Nous supposons que le polycristal macrohomogène de volume " V " est

constitué de " N " familles de grains  $\mathcal{I}$  de fraction volumique  $F^{\mathcal{I}}$  chacune (les grains d'une même famille ont une même orientation).

Dans ce qui suit, on représentera une famille de grains  $\mathcal{I}$  par un grain  $\mathcal{I}$  de cette famille. Cela ne change en rien la nature du problème à étudier, mais le réduit à un problème de polycristal à " N " grains  $\mathcal{I}$ . Nous le formulons en vitesses (les mêmes formules sont valables en petites déformations).

### II.1. Forme générale du champ de déformation hétérogène

Un champ de déformation plastique hétérogène est généralement variable d'un grain à l'autre et à l'intérieur d'un même grain (fig.IV.1).

On désigne par  $\dot{\underline{\epsilon}}^P(\vec{r})$  un tel champ de vitesse de déformation plastique où  $\vec{r}$  est la position dans le polycristal.

L'élasticité du milieu étant supposée homogène et isotrope, la vitesse de déformation plastique macroscopique  $\dot{\underline{\epsilon}}^P$  s'exprime en fonction du champ de vitesse de déformation locale  $\dot{\underline{\epsilon}}^P(\vec{r})$  par:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^P = \frac{1}{V} \int_V \dot{\epsilon}_{ij}^P(\vec{r}) dV \quad (\text{IV.1})$$

Soit, en discrétisant par rapport aux grains:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^P = \sum_{\mathcal{I}} F^{\mathcal{I}} \dot{\epsilon}_{ij}^{\mathcal{I}} \quad (\mathcal{I} = 1, \dots, N) \quad (\text{IV.2})$$

où

$$F^{\mathcal{I}} = \frac{V^{\mathcal{I}}}{V}$$

$V^{\mathcal{I}}$  étant le volume du grain  $\mathcal{I}$  et  $\dot{\underline{\epsilon}}^{\mathcal{I}}$  la moyenne sur le volume d'un grain des vitesses de déformations des différentes zones du grain.

En utilisant la même démarche cette fois dans chaque grain  $\mathcal{I}$  en supposant que  $n_{\mathcal{I}}$  modes de déformation  $y$  sont présents avec chacun une fraction volumique  $f^{\mathcal{I}k} = (V^{\mathcal{I}k} / V^{\mathcal{I}})$ , on obtient:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{\cdot PI} = \sum_k f^{Ik} \dot{\varepsilon}_{ij}^{\cdot PIk} \quad (k=1, \dots, nI) \quad (IV.3)$$

En substituant (IV.3) à (IV.2) on a:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^P = \sum_I F^I \sum_k f^{Ik} \dot{\varepsilon}_{ij}^{\cdot PIk} \quad (IV.4)$$

La vitesse de déformation plastique locale décrite par le tenseur  $\dot{\varepsilon}^{\cdot PIk}$  est liée au mode de déformation particulier "k", associé à l'activation de un ou plusieurs systèmes de glissement de vitesses de glissement  $\dot{\gamma}^{kh}$  et de tenseurs d'orientation  $R^{kh}$  (II.75), par:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{\cdot PIk} = \sum_h R_{ij}^{kh} \dot{\gamma}^{\cdot kh} \quad (IV.5)$$

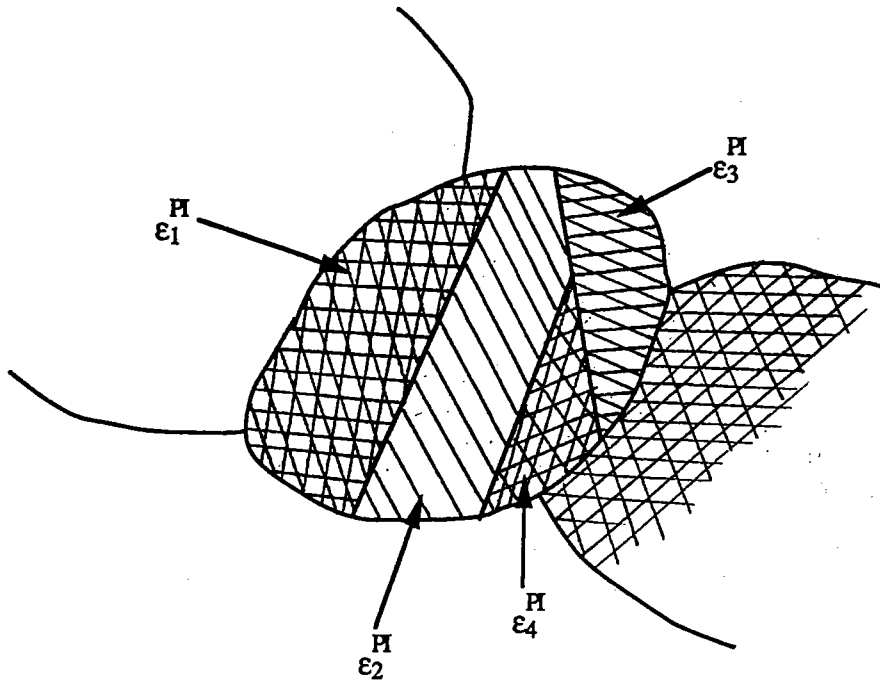
où "h" est le nombre de systèmes actifs pour le mode "k".

En substituant (IV.5) à (IV.4) on obtient:

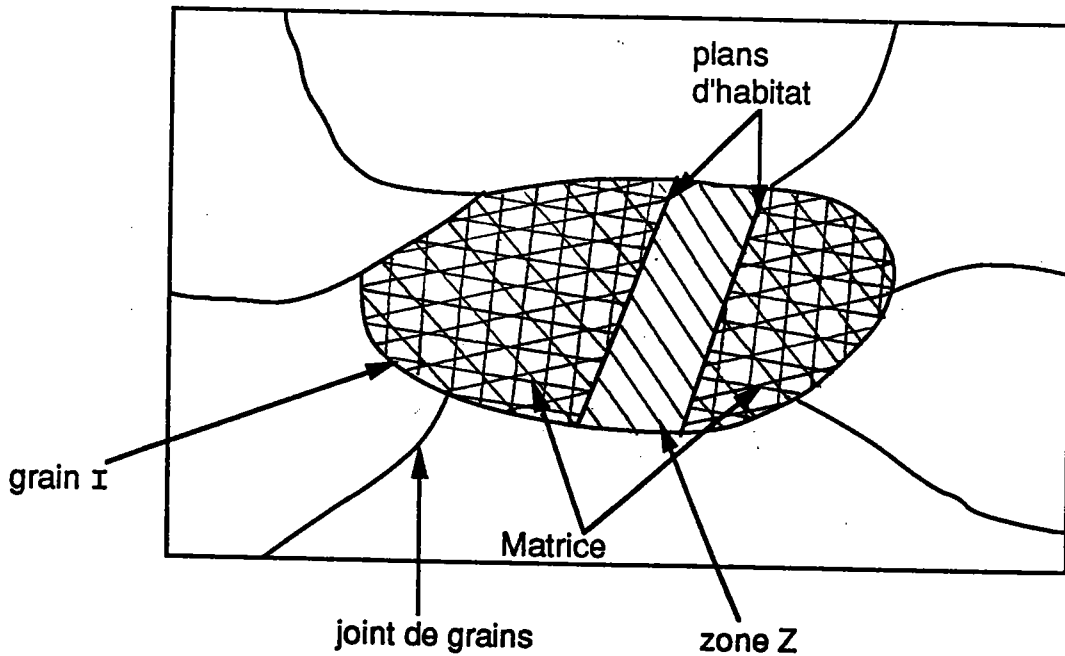
$$\dot{\varepsilon}_{ij}^P = \sum_I F^I \sum_k f^{Ik} \sum_h R_{ij}^{kh} \dot{\gamma}^{\cdot kh} \quad (IV.6)$$

L'expression (IV.6) décrit simultanément les hétérogénéités inter. et intragranulaires de la déformation plastique. Il est toutefois difficile d'exploiter cette expression dans le cas général d'un agrégat polycristallin vu la complexité de la forme des relations décrivant son comportement plastique. On se limitera alors dans ce qui suit aux métaux à fort écrouissage latent pour lesquels il est convenu que souvent un seul système de glissement (ou un nombre réduit) est (sont) actif(s) dans une partie d'un même grain (fig.IV.2). L'autre partie du grain est supposée subir une déformation par glissement multiple homogène.





**Fig. IV. 1** Représentation schématique de la déformation hétérogène dans un grain du polycristal



**Fig. IV. 2** champ de déformation hétérogène considéré dans ce travail  
 zone Z: zone à glissement simple  
 Matrice: zone à glissement multiple homogène

## II.2. Cas particulier du champ de déformation hétérogène à glissement simple et glissement multiple homogène

### II.2.1. Champ de déformation plastique hétérogène à interface plane

Comme Taylor, nous supposons que la vitesse de déformation dans la zone à glissement multiple homogène est égale à la vitesse de déformation macroscopique imposée  $\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^P$ , indépendamment des orientations des grains.

Les relation (IV.6) deviennent dans ce cas:

$$\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}_{ij}^P = f \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}_{ij}^P + \sum_I f^I R_{ij}^{Ih} \dot{\gamma}^{Ih} \quad (\text{IV.7})$$

avec

$$\sum_I f^I + f = 1 \quad (\text{IV.8})$$

"f" étant la fraction volumique de la partie du polycristal à glissement multiple homogène où la vitesse de déformation est  $\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^P$  et "f<sup>I</sup>" la fraction volumique (par rapport au polycristal) de la partie à glissement simple dans le grain I.

A partir de (IV.3), (IV.4), (IV.7) et (IV.8), nous pouvons déduire dans ce cas l'expression de la vitesse de déformation moyenne dans un grain donné:

$$\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}_{ij}^{\text{PI}} = \frac{1}{F^I} \left\{ f^I R_{ij}^{Ih} \dot{\gamma}^{Ih} + (F^I - f^I) \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}_{ij}^P \right\} \quad (\text{IV.9})$$

elle est différente de la vitesse de déformation macroscopique  $\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^P$  sauf dans le cas où f<sup>I</sup> est nulle (pas de zone à glissement simple). Le problème que nous traitons donc est bien celui d'un champ de déformation plastique non homogène à l'intérieur d'un même grain, il est égal à  $R^{Ih}_{ij} \dot{\gamma}^{Ih}$  dans les zones à glissement simple et  $\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^P_{ij}$  dans les zones à glissement multiple.

En négligeant les interactions entre les différentes zones à glissement simple, le problème revient à chercher pour chaque grain une zone à glissement simple de vitesse de déformation  $R^{Ih} \dot{\gamma}^{Ih}$  située dans une matrice de vitesse de déformation plastique homogène  $\dot{E}^P_{ij}$ . La frontière de cette zone étant à priori non définie, sa forme et son orientation sont telles que la compatibilité du champ de vitesse de déformation est assurée. La solution de ce problème, discutée par Bouaouine en petites déformations /1/, montre qu'il est possible de trouver un tel champ (constant par morceaux) pour une frontière en forme d'ellipsoïde aplati orienté convenablement de manière à assurer la compatibilité.

En définitif, le problème se réduit à l'étude des conditions de compatibilité à travers une interface plane séparant deux régions où la déformation se fait par glissement simple dans l'une et glissement multiple homogène dans l'autre.

Les relations qui expriment la compatibilité d'un tel champ de vitesse de déformation peuvent être déduites des relations (IV.11) par:

$$\epsilon_{ikl} \epsilon_{jmn} \dot{E}^P_{lm, kn} = 0$$

Le champ  $\dot{E}^P_{ij}$  s'écrit sous la forme:

$$\dot{E}^P_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij} + \Delta \dot{\epsilon}^P_{ij} \delta_v(r)$$

où  $\Delta \dot{\epsilon}^P_{ij} = \dot{E}^P_{ij} - \dot{\epsilon}^P_{ij}$

et

$$\delta_v(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } r \in \text{matrice} \\ 0 & \text{si } r \notin \text{matrice} \end{cases}$$

la condition de compatibilité s'exprime enfin par:

$$\epsilon_{ikl} \epsilon_{jmn} (\dot{E}^P_{lm} - \dot{\epsilon}_{lm}) N_k N_n = 0 \quad (\text{IV.10})$$

où  $\vec{N}$  est la normale à l'interface entre les deux régions. En substituant la relation (IV.5) à (IV.10), on obtient:

$$\epsilon_{ikl} \epsilon_{jmn} (\dot{E}_{lm}^P - R_{lm}^{Ih} \gamma^{Ih}) N_k N_n = 0$$

(IV.11)

Les relations (IV.11) s'écrivent explicitement:

$$\left( \begin{array}{l} N_2^2 \Delta \epsilon_{33}^{PI} + N_3^2 \Delta \epsilon_{22}^{PI} - 2N_2 N_3 \Delta \epsilon_{23}^{PI} = 0 \\ N_1^2 \Delta \epsilon_{33}^{PI} + N_3^2 \Delta \epsilon_{11}^{PI} - 2N_1 N_3 \Delta \epsilon_{13}^{PI} = 0 \\ N_1^2 \Delta \epsilon_{22}^{PI} + N_2^2 \Delta \epsilon_{11}^{PI} - 2N_1 N_2 \Delta \epsilon_{12}^{PI} = 0 \\ N_3^2 \Delta \epsilon_{12}^{PI} + N_1 N_2 \Delta \epsilon_{33}^{PI} - N_1 N_3 \Delta \epsilon_{23}^{PI} - N_2 N_3 \Delta \epsilon_{13}^{PI} = 0 \\ N_2^2 \Delta \epsilon_{13}^{PI} + N_1 N_3 \Delta \epsilon_{22}^{PI} - N_2 N_3 \Delta \epsilon_{12}^{PI} - N_1 N_2 \Delta \epsilon_{23}^{PI} = 0 \\ N_1^2 \Delta \epsilon_{23}^{PI} + N_2 N_3 \Delta \epsilon_{11}^{PI} - N_1 N_3 \Delta \epsilon_{12}^{PI} - N_1 N_2 \Delta \epsilon_{13}^{PI} = 0 \end{array} \right) \quad (IV.12)$$

Et les composantes de la normale vérifient:

$$N_1^2 + N_2^2 + N_3^2 = 1$$

(IV.13)

Si  $\Delta \epsilon^{PI}$  est exprimé dans son repère principal, le système (IV.12) devient:

$$\left\{ \begin{array}{l} n_2^2 \overset{\cdot}{\Delta}\varepsilon_{33} + n_3^2 \overset{\cdot}{\Delta}\varepsilon_{22} = 0 \\ n_1^2 \overset{\cdot}{\Delta}\varepsilon_{33} + n_3^2 \overset{\cdot}{\Delta}\varepsilon_{11} = 0 \\ n_1^2 \overset{\cdot}{\Delta}\varepsilon_{22} + n_2^2 \overset{\cdot}{\Delta}\varepsilon_{11} = 0 \\ n_1 n_2 \overset{\cdot}{\Delta}\varepsilon_{33} = 0 \\ n_1 n_3 \overset{\cdot}{\Delta}\varepsilon_{22} = 0 \\ n_2 n_3 \overset{\cdot}{\Delta}\varepsilon_{11} = 0 \end{array} \right.$$

(IV.14)

On peut vérifier aisément que ce système n'a de solution non triviale, en  $n_j$ , que si au moins l'une des composantes principales du tenseur  $\overset{\cdot}{\Delta}\varepsilon^{\text{PI}}$  est nulle. Cette condition est équivalente à :

$$\overset{\cdot}{\Delta}\varepsilon_{11} \overset{\cdot}{\Delta}\varepsilon_{22} \overset{\cdot}{\Delta}\varepsilon_{33} = 0$$

(IV.15)

En appliquant les propriétés du troisième invariant scalaire associé au tenseur symétrique du second ordre  $\overset{\cdot}{\Delta}\varepsilon^{\text{PI}}$ , la condition (IV.15) est équivalente à :

$$\det(\overset{\cdot}{\Delta}\varepsilon^{\text{PI}}) = 0$$

(IV.16)

Cette dernière condition est nécessaire pour la compatibilité du champ de vitesse de déformation en question. Cependant, pour une famille de grains  $\text{I}$  d'orientation donnée, lorsque cette condition est satisfaite, c'est à dire lorsqu'il existe un système de glissement qui vérifie cette condition, il est possible de trouver une interface plane de normale  $\vec{n}$ , telle que ses composantes vérifient (IV.14).

Nous obtenons deux solutions orthogonales  $\vec{n}_1$  et  $\vec{n}_2$  (si l'on choisit  $\overset{\cdot}{\Delta}\varepsilon_{22}^{\text{PI}}=0$ ) telles que :

$$\vec{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \quad (\text{IV.17})$$

$$\vec{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix} \quad (\text{IV.18})$$

Le choix  $\Delta \dot{\varepsilon}^{\text{P I}}_{22} = 0$ , n'a pas d'influence sur les normales compatibles transformées dans le repère initial (macroscopique).

On s'intéressera dans ce qui suit tout particulièrement à la zone à glissement simple. Généralement, le glissement plastique dans cette zone est accompagné d'une rotation plastique  $\underline{\omega}^{\text{P I}}$  qui s'accompagne à son tour d'une rotation élastique  $\underline{\omega}^{\text{e I}}$  du réseau cristallin.

### II.2.2. Champ de rotation du réseau cristallin dans la zone à glissement simple

Le champ de vitesse de déformation élastique est par hypothèse nul, puisqu'il s'agit d'un champ de vitesse de déformation plastique compatible n'introduisant pas de contraintes internes d'incompatibilité.

Le champ de vitesse de rotation élastique dans la zone à glissement simple peut être déterminé à partir de la condition de compatibilité du premier ordre (II.9) exprimée dans le repère macroscopique (formulée en vitesses):

$$\overrightarrow{\text{Rot}} (\dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{P}}(\vec{r}) + \dot{\omega}_{ij}^{\text{T}}(\vec{r})) = 0 \quad (\text{IV.19})$$

$\dot{\omega}^{\text{T}}$  désigne le tenseur de vitesse de rotation totale, soit:

$$\epsilon_{ijk} \dot{\omega}_{kij}^{\text{T}} = -\epsilon_{ijk} \dot{\varepsilon}_{kij}^{\text{P}} \quad (\text{IV.20})$$

L'interface entre la zone à glissement simple et la zone à glissement multiple étant plane de normale  $\vec{N}$  (dans le repère macroscopique) et les différentes grandeurs constantes par morceaux, on a:

$$\epsilon_{ijk} \overset{\cdot}{\Delta} \omega_{ki}^T N_j = -\epsilon_{ijk} \overset{\cdot}{\Delta} \epsilon_{ki}^P N_j \quad (\text{IV.21})$$

Avec  $\Delta \overset{\cdot}{\omega}^T = \overset{\cdot}{\Omega}^T - \overset{\cdot}{\omega}^T \mathbf{I}$  (IV.22)

où  $\overset{\cdot}{\Omega}^T$  et  $\overset{\cdot}{\omega}^T \mathbf{I}$  sont respectivement les tenseurs de vitesse de rotation totale dans la matrice et dans la zone à glissement simple.

La rotation dans la matrice étant nulle pour une déformation plane telle que le laminage,  $\Delta \overset{\cdot}{\omega}^T$  s'écrit:

$$\Delta \overset{\cdot}{\omega}^T = -\overset{\cdot}{\omega}^T \mathbf{I} \quad (\text{IV.23})$$

L'expression (IV.21) devient alors:

$$\epsilon_{ijk} \overset{\cdot}{\omega}_{ki}^{\Pi} N_j = \epsilon_{ijk} \overset{\cdot}{\Delta} \epsilon_{ki}^P N_j \quad (\text{IV.24})$$

Les relations (IV.24) constituent un système de neuf équations non indépendantes où les inconnues sont les  $\overset{\cdot}{\omega}^T \mathbf{I}_{ij}$ .

Il sera plus commode de résoudre ce système dans le repère principal de  $\Delta \overset{\cdot}{\epsilon}^{\text{PI}}$  qui s'écrit, compte tenu de la condition (IV.15), sous la forme:

$$\overset{\cdot}{\Delta} \epsilon_{ij}^{\text{PI}} = \begin{bmatrix} \dot{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\lambda} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.25})$$

où

$$\dot{\lambda} = \sqrt{\overset{\cdot}{\Delta} \epsilon_{12}^{\text{PI}2} + \overset{\cdot}{\Delta} \epsilon_{13}^{\text{PI}2} + \overset{\cdot}{\Delta} \epsilon_{23}^{\text{PI}2} - \overset{\cdot}{\Delta} \epsilon_{11}^{\text{PI}} \overset{\cdot}{\Delta} \epsilon_{22}^{\text{PI}} - \overset{\cdot}{\Delta} \epsilon_{22}^{\text{PI}} \overset{\cdot}{\Delta} \epsilon_{33}^{\text{PI}} - \overset{\cdot}{\Delta} \epsilon_{11}^{\text{PI}} \overset{\cdot}{\Delta} \epsilon_{33}^{\text{PI}}}$$

Nous rappelons que le choix de  $\Delta \overset{\cdot}{\epsilon}^{\text{PI}}_{22} = 0$  n'influence pas les normales compatibles exprimées dans le repère macroscopique.

Le système d'équations (IV.24) s'écrit explicitement dans ce repère principal, pour chacune des normales  $\vec{n}_1$  et  $\vec{n}_2$ , compte tenu des relations (IV.17), (IV.18) et (IV.25):

- pour la normale  $\vec{n}_1$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\Pi} \\ \omega_{12} = 0 \\ \dot{\Pi} \\ \omega_{23} = 0 \\ \dot{\Pi} \quad \dot{\lambda} \\ \omega_{13} = \dot{\lambda} \end{array} \right\}$$

- pour la normale  $\vec{n}_2$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\Pi} \\ \omega_{12} = 0 \\ \dot{\Pi} \\ \omega_{23} = 0 \\ \dot{\Pi} \quad \dot{\lambda} \\ \omega_{13} = -\dot{\lambda} \end{array} \right\}$$

Il suffit maintenant de transformer ces expressions dans le repère macroscopique en utilisant les cosinus directeurs des directions principales du tenseur  $\Delta_{\xi}^{\text{P I}}$ , notés:

$\vec{d}_1(u_1, v_1, w_1)$ ,  $\vec{d}_2(u_2, v_2, w_2)$ ,  $\vec{d}_3(u_3, v_3, w_3)$ .

Nous obtenons donc dans le repère macroscopique:

- pour la normale  $\vec{N}_1$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\Pi} \\ \omega_{12} = -\dot{\lambda} w_2 \\ \dot{\Pi} \quad \dot{\lambda} \\ \omega_{13} = \dot{\lambda} v_2 \\ \dot{\Pi} \quad \dot{\lambda} \\ \omega_{23} = -\dot{\lambda} u_2 \end{array} \right\}$$

(IV.26)

- pour la normale  $\vec{N}_2$ :



$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\omega}_{12} = \dot{\lambda} w_2 \\ \dot{\omega}_{13} = -\dot{\lambda} v_2 \\ \dot{\omega}_{23} = \dot{\lambda} u_2 \end{array} \right.$$

(IV.27)

On peut remarquer que:

$$\dot{\omega}_{ij}(\vec{N}_1) = -\dot{\omega}_{ij}(\vec{N}_2)$$

Sachant que :

$$\dot{\omega}_{ij} = \dot{\omega}_{ij}^{eI} + \dot{\omega}_{ij}^{PI}$$

où  $\dot{\omega}^{eI}$  et  $\dot{\omega}^{PI}$  sont respectivement les tenseurs de vitesse de rotation élastique et plastique dans la zone à glissement simple, avec:

$$\dot{\omega}_{ij}^{PI} = S_{ij} \dot{\gamma} \quad (S_{ij} \text{ définit par (II.77)})$$

Les vitesses de rotations élastiques s'expriment alors par:

- pour la normale  $\vec{N}_1$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\omega}_{12} = -\dot{\lambda} w_2 - \dot{\omega}_{12}^{eI} \\ \dot{\omega}_{13} = \dot{\lambda} v_2 - \dot{\omega}_{13}^{eI} \\ \dot{\omega}_{23} = -\dot{\lambda} u_2 - \dot{\omega}_{23}^{eI} \end{array} \right.$$

(IV.28)

- pour la normale  $\vec{N}_2$  :

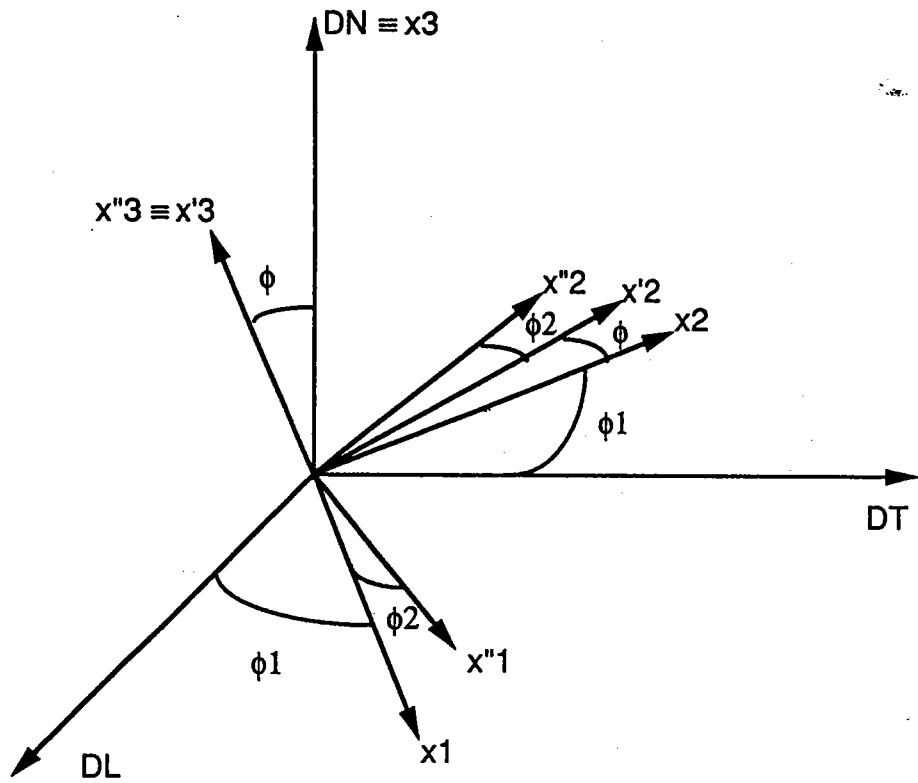
$$\left. \begin{array}{l} \dot{\omega}_{12} = \dot{\lambda} w_2 - \dot{\omega}_{12} \\ \dot{\omega}_{13} = -\dot{\lambda} v_2 - \dot{\omega}_{13} \\ \dot{\omega}_{23} = \dot{\lambda} u_2 - \dot{\omega}_{23} \end{array} \right\} \quad (\text{IV.29})$$

En somme, connaissant la vitesse de déformation macroscopique  $\dot{\underline{\underline{E}}}^P$  et pour un grain  $\mathcal{I}$  donné le système de glissement actif dans la zone à glissement simple, les deux normales  $\vec{N}_i$  peuvent être déterminées à partir de (IV.14) puis transformées dans le repère macroscopique et les composantes de  $\dot{\underline{\underline{\omega}}}^{\mathcal{I}}$  peuvent enfin être déduites de (IV.28) et (IV.29) définissant les deux champs de vitesse de rotation du réseau cristallin dans la zone à glissement simple correspondant aux deux normales  $\vec{N}_1$  et  $\vec{N}_2$ .

Les orientations cristallographiques des grains sont repérées par rapport au repère macroscopique par l'intermédiaire des angles d'Euler  $\phi_1, \phi, \phi_2$  introduits par Bunge /3/, fig.IV.3, et le champ de vitesse de rotation du réseau cristallin est dans ce cas décrit par les taux  $\dot{\phi}_1, \dot{\phi}, \dot{\phi}_2$  tels que:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\phi}_1 = -\dot{\omega}_{12} \cos \phi - \dot{\phi}_2 \\ \dot{\phi} = \sin \phi_1 \dot{\omega}_{13} - \cos \phi_1 \dot{\omega}_{23} \\ \dot{\phi}_2 = -\frac{\cos \phi_1}{\sin \phi} \dot{\omega}_{13} - \frac{\sin \phi_1}{\sin \phi} \dot{\omega}_{23} \end{array} \right\} \quad (\text{IV.30})$$

Les vitesses des rotations élastiques étant exprimées dans le repère macroscopique.



$(DL, DT, DN) \text{ -----} \rightarrow (x_1, x_2, DN)$   
 rot.  $\phi_1$  autour de DN  
 $(x_1, x_2, DN) \text{ -----} \rightarrow (x_1, x'_2, x'_3)$   
 rot.  $\phi$  autour de  $x_1$   
 $(x_1, x'_2, x'_3) \text{ -----} \rightarrow (x''_1, x''_2, x'_3)$   
 rot.  $\phi_2$  autour de  $x'_3$

Fig.IV.3 : Les angles d'Euler

### II.2.3. Condition de compatibilité exprimée en fonction des paramètres de la déformation

Dans ce travail, nous avons choisi de nous placer dans le cas particulier d'un champ de déformation en deux modes: un glissement simple d'une part et un glissement multiple homogène d'autre part. De cette façon nous avons tenu compte de l'écroûissage sans pour autant faire apparaître ses paramètres dans les équations.

Dans ce cas, si l'on désigne par  $\dot{\gamma}$  la vitesse de glissement sur le système actif considéré. Compte tenu des relations (II.75) et (II.77) du chapitre II, les tenseurs de vitesse de déformation  $\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^{\text{PI}}$  et de vitesse de rotation  $\dot{\underline{\underline{\omega}}}^{\text{PI}}$  dans la zone où ce système est actif s'expriment par:

$$\left( \begin{array}{l} \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^{\text{PI}} = \frac{1}{2} (n_i m_j + n_j m_i) \dot{\gamma} = R_{ij} \dot{\gamma} \\ \dot{\underline{\underline{\omega}}}^{\text{PI}} = \frac{1}{2} (n_i m_j - n_j m_i) \dot{\gamma} = S_{ij} \dot{\gamma} \end{array} \right) \quad (\text{IV.31})$$

où  $\vec{n}$  et  $\vec{m}$  sont respectivement la normale au plan de glissement et le vecteur directeur de la direction de glissement.

Pour une vitesse de déformation macroscopique  $\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^{\text{P}}$  donnée, la condition de compatibilité (IV.16) s'écrit sous la forme d'une équation du troisième degré en  $\dot{\gamma}$ :

$$A \dot{\gamma}^3 - B \dot{\gamma}^2 + C \dot{\gamma} - D = 0 \quad (\text{IV.32})$$

avec:

$$\left. \begin{aligned}
 A &= \det (R_{ij}) \\
 B &= R_{11} R_{22} \dot{E}_{33}^P + R_{11} R_{33} \dot{E}_{22}^P + R_{22} R_{33} \dot{E}_{11}^P + 2 R_{12} R_{23} \dot{E}_{13}^P \\
 &\quad + 2 R_{12} R_{13} \dot{E}_{23}^P + 2 R_{13} R_{23} \dot{E}_{12}^P - 2 R_{13} R_{22} \dot{E}_{13}^P - 2 R_{23} R_{11} \dot{E}_{23}^P \\
 &\quad - 2 R_{12} R_{33} \dot{E}_{12}^P - R_{13}^2 \dot{E}_{22}^P - R_{23}^2 \dot{E}_{11}^P - R_{12}^2 \dot{E}_{33}^P \\
 C &= R_{11} \dot{E}_{22}^P \dot{E}_{33}^P + R_{22} \dot{E}_{11}^P \dot{E}_{33}^P + R_{33} \dot{E}_{22}^P \dot{E}_{11}^P + 2 R_{12} \dot{E}_{13}^P \dot{E}_{23}^P \\
 &\quad + 2 R_{23} \dot{E}_{12}^P \dot{E}_{13}^P + 2 R_{13} \dot{E}_{12}^P \dot{E}_{23}^P - R_{11} \dot{E}_{23}^{P^2} - R_{22} \dot{E}_{13}^{P^2} - R_{33} \dot{E}_{12}^{P^2} \\
 &\quad - 2 R_{13} \dot{E}_{13}^P \dot{E}_{22}^P - 2 R_{23} \dot{E}_{23}^P \dot{E}_{11}^P - 2 R_{12} \dot{E}_{12}^P \dot{E}_{33}^P \\
 D &= \det (\dot{E}_{ij}^P)
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.33})$$

La normale  $\vec{n}$  au plan de glissement étant orthogonale à la direction  $\vec{m}$  de glissement, le coefficient A est nul.

Le coefficient D est également nul dans le cas du laminage. Tandis que pour des modes de déformation tels que la traction, il ne l'est pas et agit certainement sur la nature et la morphologie des hétérogénéités associées à de tels modes de déformation.

Le problème tel que nous l'avons posé se heurte à une double indétermination associée à la symétrie cristalline et à la forme des équations (IV.14). En effet, dans le cas des métaux cubiques, plusieurs systèmes de glissement sont susceptibles d'être actifs et sont équivalents du point de vue cristallographique. Les équations (IV.32) pourront être satisfaites pour ces différents systèmes de glissement, il en résulte donc plusieurs champs de rotation du réseau cristallin, d'où une première indétermination car par hypothèse nous supposons que dans la zone en question un seul système est actif. Néanmoins cette indétermination peut être levée en utilisant un critère énergétique comme dans le cas du modèle de Taylor: Le système de glissement à retenir (réel) est celui qui minimise le travail plastique (voir annexe.A. dans /1/). Autrement dit, celui pour lequel la valeur absolue de la vitesse de glissement  $|\dot{\gamma}|$  est minimale. Quant à la deuxième

indétermination, elle provient de la double solution  $\vec{N}_1$  et  $\vec{N}_2$  du système (IV.12) pour une seule valeur de  $\dot{\gamma}$ , donc de  $\Delta \dot{\epsilon}^P$ , vérifiant la condition de compatibilité et dont le système de glissement a été déterminé en utilisant le critère énergétique cité auparavant. Cette double solution décrit deux plans d'habitat distincts et orthogonaux correspondant à deux champs de rotation du réseau cristallin distincts. Afin de lever cette indétermination un critère de stabilité relative a été appliqué pour séparer les deux solutions. Ce critère définit comme normale la plus stable celle qui correspond à l'énergie de déformation élastique (II.72) la plus faible (voir annexe.B. dans /1/).

### III / Application au cas du laminage de métaux

Nous appliquons dans ce paragraphe l'approche précédente dans le cas du laminage des métaux C.F.C. et C.C. et nous comparons par la suite nos résultats aux résultats expérimentaux de références bibliographiques.

#### III.1. Expression de la condition de compatibilité

Nous travaillons dans le repère macroscopique (DL, DT, DN) où :

DL = direction de laminage.

DT = direction transversale.

DN = direction normale au plan de laminage.

Le tenseur de vitesse de déformation macroscopique  $\dot{\epsilon}^P$  dans ce repère est sous la forme :

$$\dot{\epsilon}_{ij}^P = \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}^P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\epsilon}^P \end{bmatrix} \quad (\text{IV.34})$$

Dans ce cas, l'équation (IV.32) s'écrit sous la forme :

$$\dot{\gamma} (B \dot{\gamma} - C) = 0 \quad (\text{IV.35})$$

Cette dernière équation a deux solutions. La première triviale ( $\dot{\gamma} = 0$ ), correspondant à une zone sans glissement dans le grain dont les normales aux interfaces solutions sont (IV.17) et (IV.18) dans le repère macroscopique (le repère macroscopique et le repère principal de  $\dot{\underline{E}}^P$  sont équivalents), elles sont inclinées de  $45^\circ$  par rapport au plan de laminage. La deuxième solution non triviale ( $\dot{\gamma} \neq 0$ ), que nous garderons, s'exprime par:

$$\dot{\gamma} = \frac{C}{B}$$

En remplaçant C et B par leurs valeurs déduites des relations (IV.33) et (IV.34) nous obtenons l'expression explicite de  $\dot{\gamma}$ :

$$\dot{\gamma} = \dot{\underline{E}}^P \frac{R_{22}}{(R_{11}R_{22} - R_{12}^2) - (R_{33}R_{22} - R_{23}^2)} \quad (\text{IV.36})$$

où les  $R_{ij}$  sont les composantes du tenseur d'orientation du système actif considéré, calculées à partir de la relation (II.75). Les composantes de  $\vec{n}$  (normale au plan de glissement) et  $\vec{m}$  (vecteur directeur de la direction de glissement), sont déduites des tableaux II.1 pour les métaux C.F.C. et II.2 pour les métaux C.C.

Remarque: Pour le calcul des composantes  $R_{ij}$ , les vecteurs  $\vec{n}$  et  $\vec{m}$  sont transformés en vecteurs unitaires.

### III.2. Cas des métaux C.F.C.

L'application du modèle pour ce type de métaux nécessite la connaissance de leurs différents systèmes de glissement.

Or, il est bien connu que ces métaux possèdent douze systèmes de glissement du type  $\{111\}\langle 110 \rangle$  (voir tableau.II.1).

Pour effectuer les différents calculs: taux de glissement, normales aux plans d'habitat, champs de rotation du réseau cristallin, nous utilisons un programme informatique qui part d'une valeur donnée du scalaire  $\dot{\underline{E}}^P$  (0.1) et effectue les calculs pour différentes orientations cristallines en balayant l'espace d'Euler de la façon suivante:

Pour une valeur donnée et constante de  $\phi_2$  le calcul des différentes grandeurs est réalisé pour différentes valeurs du couple  $(\phi, \phi_1)$  allant de  $(-20^\circ, -20^\circ)$  à  $(110^\circ, 110^\circ)$  avec des pas de  $(5^\circ, 5^\circ)$ . A la fin de ce traitement le même procédé de calcul est répété pour d'autres valeurs constantes de  $\phi_2$  afin d'avoir une représentation quasi entière du champ de rotation du réseau cristallin.

### III.2.1. Normales aux plans d'habitat

Les normales  $\vec{n}_1$  (IV.17) et  $\vec{n}_2$  (IV.18) sont d'abord transformées dans le repère macroscopique connaissant les cosinus directeurs  $\vec{d}_1 (u_1, v_1, w_1)$ ,  $\vec{d}_2 (u_2, v_2, w_2)$ ,  $\vec{d}_3 (u_3, v_3, w_3)$  des directions principales du tenseur  $\Delta \dot{\epsilon}^{P I}$  correspondant au système actif déterminé auparavant. Ces normales sont ensuite transformées dans la configuration actuelle par les relations classiques de transformation:

$$\dot{N}_i = N_i + \dot{\beta}_{ij}^T N_j$$

avec:

$N_i$ : normale dans la configuration initiale (avant déformation)

$\dot{N}_i$ : normale dans la configuration actuelle (après déformation)

$\dot{\beta}_{ij}^T$ : tenseur gradient de vitesses de déformation

$\dot{\beta}_{ij}^T = \dot{E}_{ij}^P$  du fait que  $\dot{\Omega}_{ij}^T = 0$  et  $\dot{E}_{ij}^e = 0$ .  $N_i$  se transforme donc dans la configuration actuelle de la façon suivante:

$$\dot{N}_i = N_i + \dot{E}_{ij}^P N_j$$

Pour chaque orientation cristalline nous avons donc deux normales, l'une vérifiant le critère de stabilité relative et l'autre ne le vérifiant pas.

Les fig.IV.4 représentent les projections stéréographiques des différentes normales correspondant aux différentes orientations cristallines (à  $\phi_2 = 30^\circ$ ) pour les deux types de normales (le résultat est le même pour les autres sections  $\phi_2 = \text{cte}$ ).



Sur la fig. IV . 4b les pôles sont plus dispersés que sur la fig. IV . 4a, mais les deux figures montrent bien que la répartition des normales n'est pas aléatoire et correspond à deux composantes symétriques par rapport au plan (DN, DT) situées à environ  $38^\circ$  de la direction de laminage. Cet angle est de  $45^\circ$  pour les normales dans la configuration initiale.

Nous constatons donc, que l'orientation de ces plans d'habitat est très proche de celle des microbandes de cisaillement ( $35^\circ$ ) souvent observées lors du laminage des métaux C.F.C. (ou autres) /4/.

Nous pouvons conclure donc qu'il existe un lien étroit entre le mode de glissement hétérogène tel que nous l'avons décrit et pris en compte dans ce travail et la formation des microbandes de cisaillement.

### III.2.2. Champs de rotation du réseau cristallin

Pour une orientation cristallographique donnée ( $\phi_1, \phi, \phi_2$ ), connaissant le système de glissement actif et les deux normales aux plans d'habitat, il est possible de déterminer les champs de rotations cristallographiques correspondant à ses deux normales à partir des relations (IV.28), (IV.29) et (IV.30). Le calcul est effectué pour plusieurs orientations cristallographiques et aboutit à deux champs de rotation du réseau cristallin.

Cependant, il est utile de préciser que dans une famille de grains de même orientation, la formation de l'une ou l'autre interface est possible. Par conséquent, nous prendrons compte de la double rotation du réseau cristallin en séparant les deux solutions selon le critère de stabilité relative, précisé à la fin du paragraphe II, sans pour autant éliminer l'une ou l'autre solution.

Aussi est-il clair que les solutions que nous proposons ne sont pas complètes du fait qu'elles ne contiennent pas d'information sur les champs de rotation dus au glissement multiple homogène dans les autres régions des grains (régions où l'on a imposé une vitesse de déformation macroscopique  $\dot{\underline{E}}^P$ )

les figures IV.5, 6 et 7 représentent les deux champs de rotation du réseau cristallin dans trois sections de l'espace d'Euler:  $\phi_2 = 0^\circ, 45^\circ$  et  $54^\circ$ . Les petits segments représentés sur ces figures désignent les variations

angulaires dues à la déformation (glissement sur le système actif). Le bout du segment marqué d'un point désigne l'orientation après déformation d'un cristallite d'orientation initiale désignée par les coordonnées de l'autre bout de ce segment (non marqué d'un point).

Nous constatons que ces champs de rotation présentent des sources et des puits. Ces derniers correspondent à des orientations cristallographiques initiales pour lesquelles la rotation est pratiquement nulle. Quant aux sources, elles sont formées d'orientations voisines convergeant vers une orientation stable. Pour l'évaluation de la validité de nos résultats, nous comparons ces orientations stables aux composantes des textures expérimentales. Le tableau.IV.1. résume les composantes de texture observées lors du laminage des métaux C.F.C. par Van Houtte /5/ et Hirsh, Virnich et Lüke /6/. Nous retrouvons donc sur les figures.IV.5, 6 et 7 la majorité des composantes expérimentales. En plus, on constate l'existence de nombreuses composantes majeures "G" et "Bs" caractéristiques des textures type laiton. Par contre, les composantes  $\{112\}\langle 111 \rangle$  (Cu) et  $\{123\}\langle 634 \rangle$  (S) sont inexistantes. En effet, ces composantes sont souvent observées dans le cas des métaux tels que le Cuivre ou l'Aluminium pour lesquels le mode de glissement multiple homogène est prédominant et sont bien décrites par le modèle de Taylor et les modèles self-consistents. Il n'est donc pas surprenant de constater l'absence de ces composantes puisque le modèle considère les métaux présentant une déformation hétérogène dans les grains et ne décrit que la partie du champ de rotation associée à la déformation dans la zone à glissement simple.

### III.3. Cas des métaux C.C.

Dans ce cas, il existe trois types de systèmes de glissement possibles:  $\{110\}\langle 111 \rangle$ ,  $\{112\}\langle 111 \rangle$  et  $\{123\}\langle 111 \rangle$  (voir chapitre II). On se limitera dans ce travail aux douze systèmes de glissement du type  $\{110\}\langle 111 \rangle$  (voir tableau.II.2) en tenant compte du fait que le glissement se produit essentiellement sur les plans et dans les directions les plus denses.

Une fois le système de glissement actif déterminé, comme il est indiqué dans le paragraphe II.2.3, les normales aux plans d'habitat et les champs de rotation du réseau cristallin peuvent être déterminés par la même procédure que dans le cas des métaux C.F.C. La seule différence

est que l'on calcule dans ce cas les champs de rotation du réseau cristallin dans des sections à  $\phi_1$  constant pour l'unique raison de pouvoir comparer nos résultats aux résultats expérimentaux.

### III.3.1. Normales aux plans d'habitat

La distribution des orientations des plans d'habitat par rapport au repère macroscopique (DL, DT, DN) est exactement la même que dans le cas des métaux C.F.C. (fig. IV. 4). En effet, les normales aux plans d'habitat dépendent du tenseur d'orientation  $\underline{R}$  et du taux de glissement  $\dot{\gamma}$  dépendant lui même de  $\underline{R}$  qui est identique pour les deux types de métaux C.F.C. et C.C.

Ce dernier résultat est tout à fait cohérent avec les résultats expérimentaux puisque dans les deux types de métaux (C.F.C. et C.C.) lors du laminage, il se forme des microbandes de cisaillement inclinées de  $35^\circ$  environ par rapport au plan de laminage. Nous pouvons là aussi adopter la même conclusion que dans le cas des métaux C.F.C. en ce qui concerne le lien entre le mode de glissement hétérogène pris en compte dans ce travail et la présence des microbandes de cisaillement résultant de la déformation de ces métaux.

### III.3.2. Champs de rotation du réseau cristallin

Les figures IV. 8, 9 et 10 représentent les champs de rotation pour  $\phi_1 = 0^\circ, 50^\circ$  et  $90^\circ$  calculés par le modèle en question et expérimentales déterminés par Bunge /7/ et correspondant à des barres d'acier laminées à 70% de réduction. Nous constatons tout d'abord, en comparant les résultats expérimentaux aux résultats du modèle, que le critère de stabilité évoqué auparavant et correspondant au choix de la normale au plan d'habitat, est bien un critère de séparation de la solution double en deux solutions distinctes. En effet, suivant la section  $\phi_1$  choisie, c'est l'un ou l'autre champ de rotation correspondant à l'un ou l'autre type de normale qui coïncide avec les résultats expérimentaux. Ensuite, sur ces figures (déduites du calcul par le modèle) on constate la présence de certaines composantes de texture détectées expérimentalement mais non

prédites par les modèles classiques. Par conséquent nous pouvons conclure que ces composantes correspondent à un mode de glissement hétérogène à l'échelle granulaire. Il faut cependant bien noter, que dans ce cas aussi l'approche utilisée dans ce travail ne décrit pas les textures associées au mode de glissement multiple homogène présent dans les grains du polycristal.

#### **IV / Conclusion**

Dans ce travail, la notion de modes de déformation a été introduite afin d'aborder le problème des hétérogénéités intragranulaires résultant de la variation spatiale du nombre et de la nature des systèmes de glissement.

Par ailleurs, le glissement multiple homogène est généralement favorisé par le faible écrouissage latent, bien qu'il peut toutefois intervenir même quand celui-ci est important dans les zones à forte concentration des contraintes telles que celles des joints de grains ou des noeuds triples. En effet, dans ces zones le glissement primaire introduit des contraintes internes d'incompatibilité intergranulaire activant d'autres systèmes de glissement aboutissant ainsi à un glissement multiple homogène. Tandis que en dehors de ces zones, si l'écrouissage latent est important, le glissement simple prédomine.

Nous avons donc tenu compte de ce phénomène en considérant un champ de déformation plastique constant par morceaux où coexistent un glissement multiple homogène et un glissement simple séparés par une interface plane. Il se pose alors le problème de compatibilité entre ces deux zones de part et d'autre de l'interface. Ce problème a été abordé en imposant cette compatibilité au départ et en recherchant ensuite le champ constant par morceaux qui la vérifie. Cependant, cette séparation du champ de déformation en deux modes de déformation distincts, fonction de l'écrouissage latent, a des conséquences entre autres, sur la texture du polycristal en question et sa structure.

En effet, à chacun des modes de glissement est associée une texture particulière:

- La texture type cuivre au glissement multiple homogène
- La texture type laiton au glissement simple.

Les parts plus ou moins importantes des différentes composantes de texture

dépendent des fractions volumiques associées à chaque mode, elles mêmes liées à l'écroissage latent (la fraction volumique de la zone à glissement simple augmente certainement avec cet écroissage) mais aussi à la taille des grains. Pour des grains de petites tailles, le glissement multiple homogène peut s'étendre à l'ensemble des grains et favoriser ainsi la texture type cuivre malgré le fort écroissage latent. Une observation similaire à été faite par Lin et Ahlers /8/ soulignant le fait qu'une taille de grain importante conduit à une augmentation de la contribution de la composante type laiton dans le cas des textures de transition. La seconde conséquence de ce modèle est liée à la formation non aléatoire des plans d'habitat pendant l'écoulement plastique du polycristal qui attribue à celui-ci une microstructure particulière se superposant à la structure granulaire initiale et induisant ainsi un "ordre" à grande distance résultant des corrélations d'orientations entre ces plans d'habitat.

Ces résultats nous amènent à penser qu'il existe sans doute un lien très étroit entre la formation de ces plans et le développement des microbandes de cisaillement compte tenu de la similitude de leur orientation.

La prise en compte du mode de déformation hétérogène résultant de l'existence de microstructures particulières s'avère difficile vue la variété des effets à prendre en compte (taille des grains, fractions volumiques des différentes zones fonctions de l'écroissage latent, microstructures s'ajoutant à la structure granulaire, etc.....). Les modèles usuels tels que de Taylor ou le modèle Self-consistent sont insuffisants, il convient en effet de leur superposer la prise en compte de la structure particulière en bandes de cisaillement. Cela fera l'objet du chapitre suivant où l'on se propose de superposer le comportement de cette structure à celui du reste du polycristal parfaitement décrit par le modèle Self-consistent.

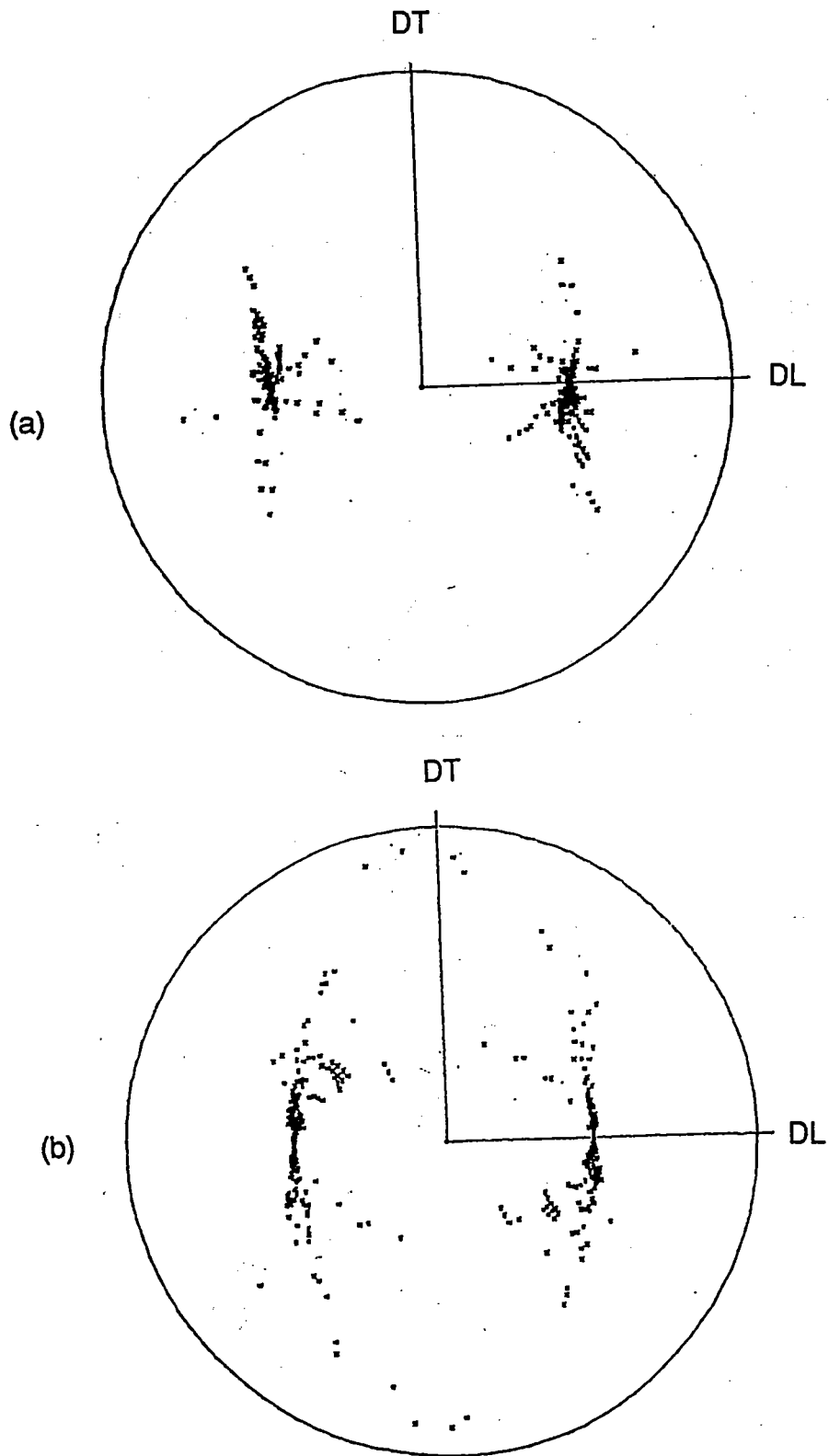


Fig IV. 4 Projections stéréographiques des normales aux plans d'habitat pour différentes orientations cristallographiques à ( $\phi_2 = 30^\circ$ ) dans le cas des métaux CFC et CC, a) vérifiant le critère de stabilité b) ne le vérifiant pas.

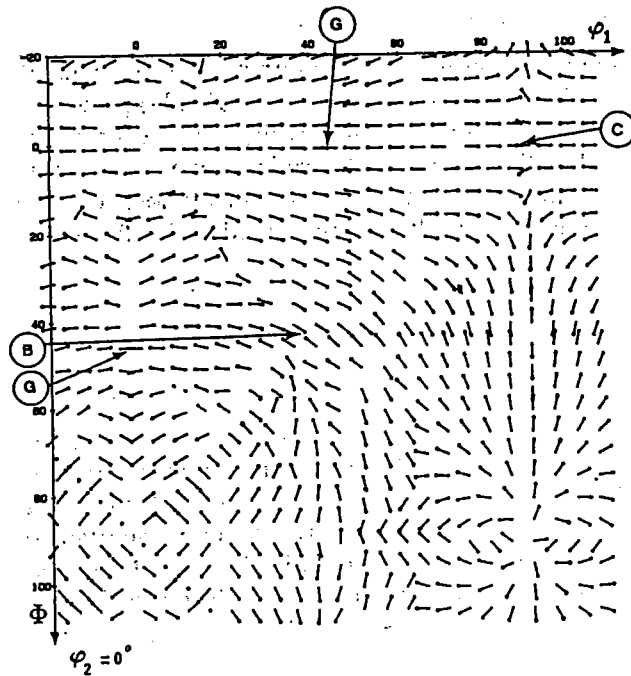


Fig IV. 5 Champ de rotation du réseau cristallin pour les métaux CFC dans la section  $\phi_2 = 0^\circ$ , correspondant aux normales vérifiant le critère de stabilité. Et les composantes de textures expérimentales selon Van Houtte /5/.

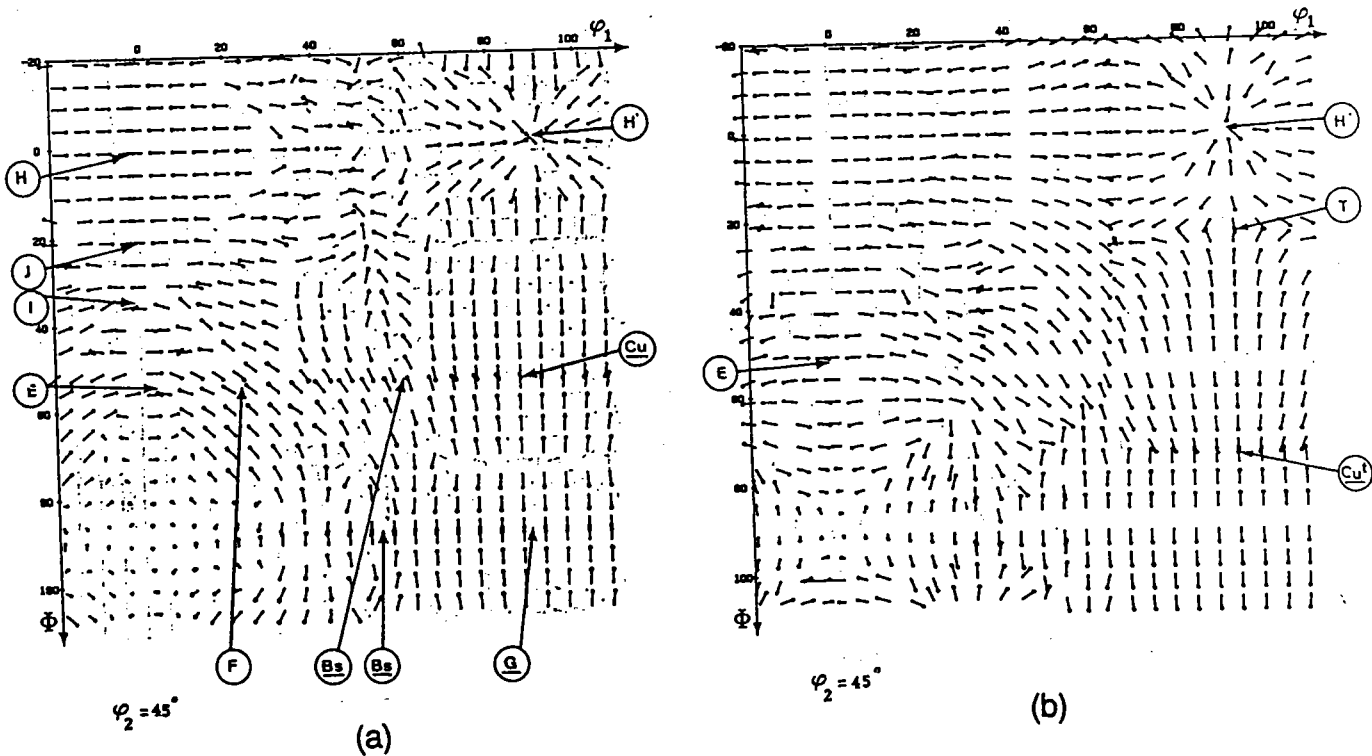


Fig IV. 6 Champ de rotation du réseau cristallin pour les métaux CFC dans la section  $\phi_2 = 45^\circ$ , correspondant aux normales a) vérifiant le critère de stabilité, b) ne le vérifiant pas. Et les composantes de textures expérimentales selon: Van Houtte /5/ (notées A) et Hirsch et all. /6/ (notées  $\Delta$ ).

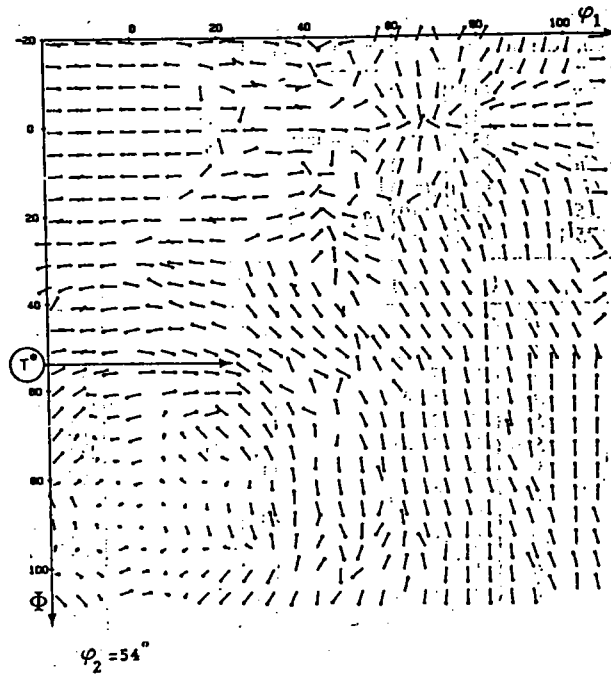
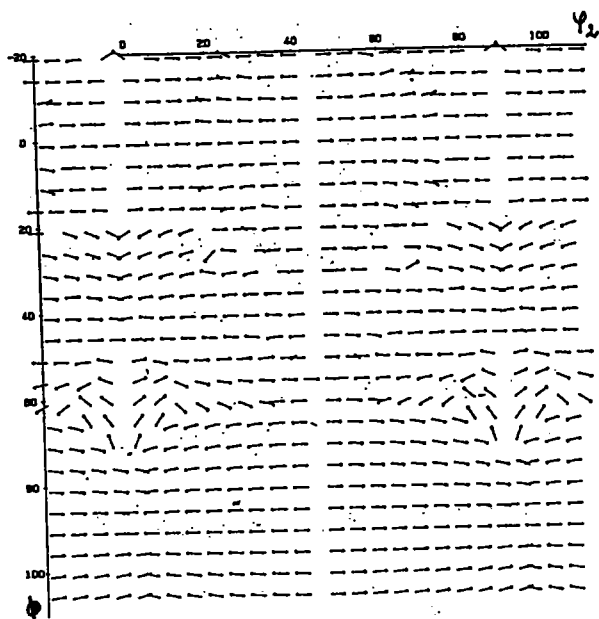


Fig IV.7 Champ de rotation du réseau cristallin pour les métaux CFC dans la section  $\phi_2 = 54^\circ$ , correspondant aux normales vérifiant le critère de stabilité. Et les composantes de textures expérimentales selon Van Houtte /5/.

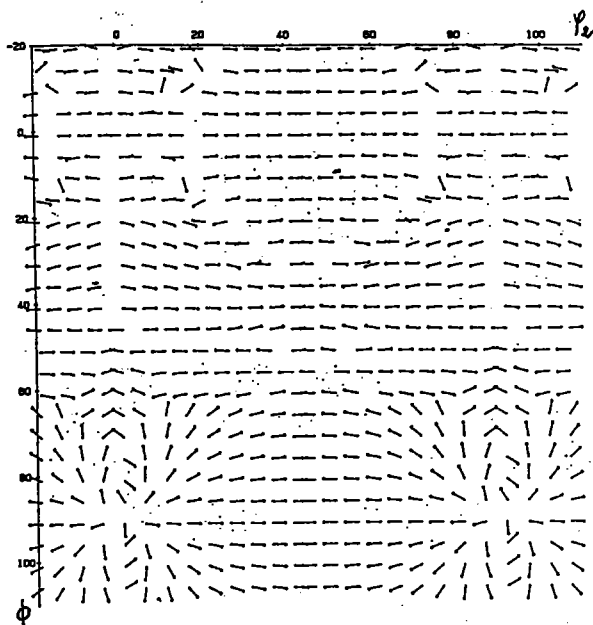
(a)	Cu	$\{112\} \langle 111 \rangle$	$\varphi_1 = 90^\circ$ ,	$\phi = 35^\circ$	$\varphi_2 = 45^\circ$		
	Cu	$\{111\} \langle 112 \rangle$		$\phi = 55^\circ$			
	Cu	$\{332\} \langle 113 \rangle$		$\phi = 65^\circ$			
	Cu'	$\{552\} \langle 115 \rangle$		$\phi = 75^\circ$			
	G	$\{110\} \langle 001 \rangle$		$\phi = 90^\circ$			
	BS	$\{112\} \langle 110 \rangle$		$\phi = 90^\circ$			
	BS	$\{111\} \langle 110 \rangle$	$\varphi_1 = 55^\circ$ , $\varphi_1 = 60^\circ$	$\phi = 55^\circ$			
		$(\varphi_1, \Phi, \varphi_2)$	$(h, k, l)$	$[u, v, w]$			
		$C = (0^\circ, 0^\circ, 90^\circ)$	$(0, 0, 1)$	$[1, 0, 0]$			
		$C = (90^\circ, 0^\circ, 0^\circ)$	$(0, 0, 1)$	$[1, 0, 0]$			
		$T = (90^\circ, 27^\circ, 45^\circ)$	$(4, 4, 11)$	$[11, 11, 8]$			
		$Cu = (90^\circ, 35^\circ, 45^\circ)$	$(1, 1, 2)$	$[1, 1, 1]$			
		$S_1 = (57^\circ, 29^\circ, 63^\circ)$	$(1, 2, 4)$	$[2, 1, 1]$			
		$S_2 = (47^\circ, 37^\circ, 63^\circ)$	$(1, 2, 3)$	$[4, 1, 2]$			
		$S_3 = (59^\circ, 37^\circ, 63^\circ)$	$(1, 2, 3)$	$[6, 3, 4]$			
		$B = (35^\circ, 45^\circ, 0^\circ)$	$(0, 1, 1)$	$[2, 1, 1]$			
		$G = (0^\circ, 45^\circ, 0^\circ)$	$(0, 1, 1)$	$[1, 0, 0]$			
(b)			$T^* = (25^\circ, 51^\circ, 54^\circ)$	$(11, 8, 11)$	$[4, \bar{1}, 4]$		
			$E = (0^\circ, 55^\circ, 45^\circ)$	$(1, 1, 1)$	$[1, \bar{1}, 0]$		
			$F = (30^\circ, 55^\circ, 45^\circ)$	$(1, 1, 1)$	$[1, 2, 1]$		
			$H = (90^\circ, 0^\circ, 45^\circ)$	$(0, 0, 1)$	$[1, \bar{1}, 0]$		
			$(0^\circ, 0^\circ, 45^\circ)$				
			$H' = (90^\circ, 0^\circ, 45^\circ)$	$(0, 0, 1)$	$[\bar{1}, \bar{1}, 0]$		
			$I = (0^\circ, 35^\circ, 45^\circ)$	$(1, 1, 2)$	$[1, \bar{1}, 0]$		
			$J = (0^\circ, 20^\circ, 45^\circ)$	$(1, 1, 4)$	$[1, \bar{1}, 0]$		
			$K = (0^\circ, 0^\circ, 34^\circ)$	$(0, 0, 1)$	$[3, 2, 0]$		
			$K' = (0^\circ, 0^\circ, 56^\circ)$	$(0, 0, 1)$	$[2, 3, 0]$		

Tableau IV.1 Composantes de textures expérimentales de laminage des métaux CFC, a) d'après J. Hirsch, K. H. Virnich, K. Lücke /6/, b) d'après P. Van Houtte /5/.

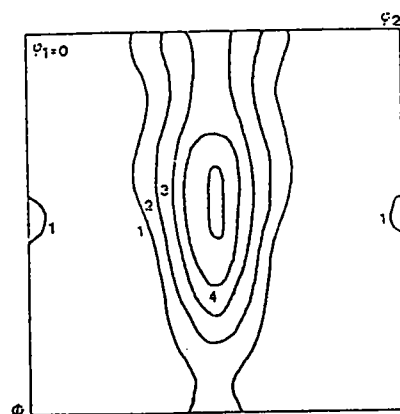




(a)

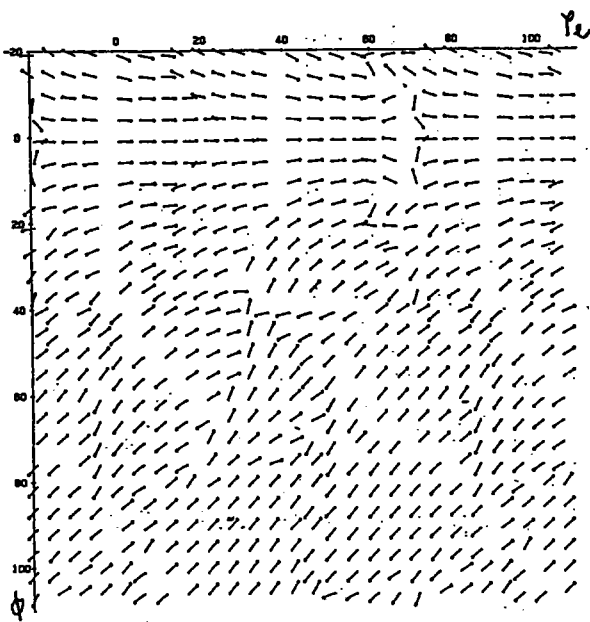


(b)

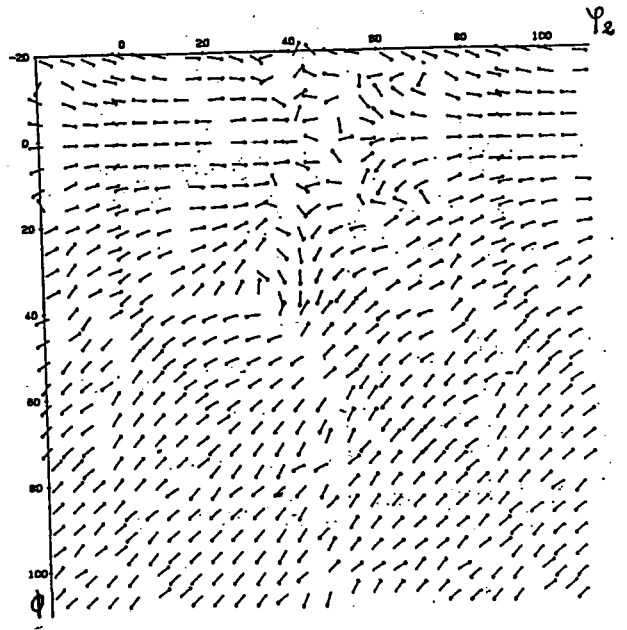


(c)

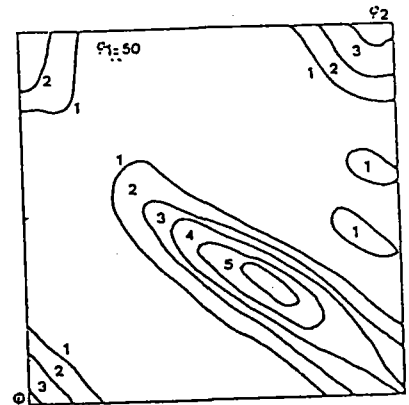
Fig IV. 8 Champ de rotation du réseau cristallin pour les métaux CC dans la section  $\phi_1 = 0^\circ$ , correspondant aux normales a) vérifiant le critère de stabilité, b) ne le vérifiant pas et c) textures expérimentales selon Bunge [7].



(a)

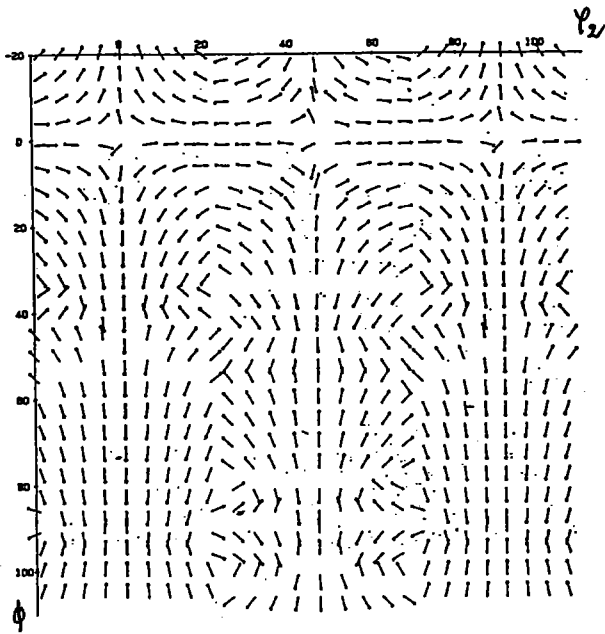


(b)

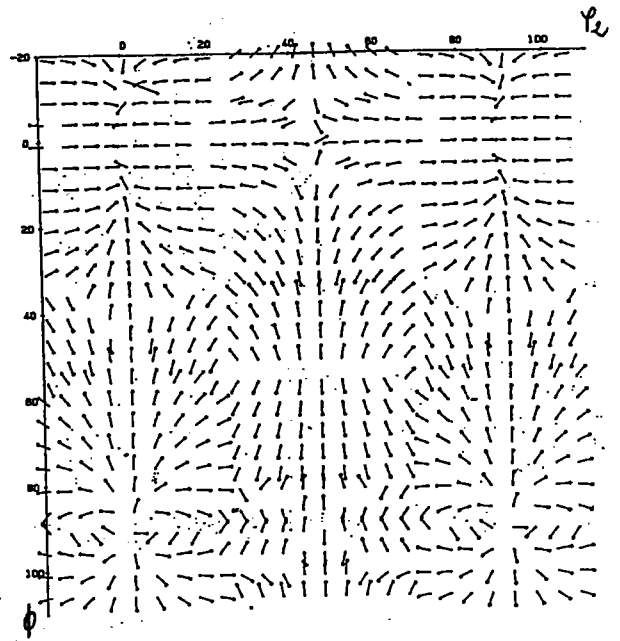


(c)

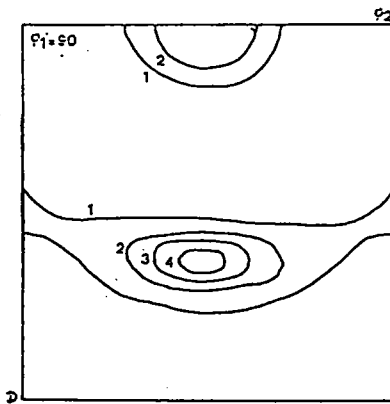
Fig IV.9 Champ de rotation du réseau cristallin pour les métaux CC dans la section  $\phi_1 = 50^\circ$ , correspondant aux normales a) vérifiant le critère de stabilité, b) ne le vérifiant pas et c) textures expérimentales selon Bunge [7].



(a)



(b)



(c)

Fig IV. 10 Champ de rotation du réseau cristallin pour les métaux CC dans la section  $\phi_1 = 90^\circ$ , correspondant aux normales a) vérifiant le critère de stabilité, b) ne le vérifiant pas et c) textures expérimentales selon Bunge [7].

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- /1/- H. Bouaouine, Thèse d'Etat, Université de Metz, (1988).
- /2/- E. Kröner, Kontinuums Theorie der Versetzungen und Eigenspannungen, Berlin, Springer Verlag, (1958).
- /3/- H. J. Bunge, "Mathematische Methododen der texturanalyse", Akademie Verlag, Berlin, (1969).
- /4/- A. Korbel, P. Martin, Acta Metall., 34, n° 10, p. 1905, (1986).
- /5/- P. Van Houtte, ICOTOM 7, pp. 7-23, (1984).
- /6/- J. Hirsch, K. Virnich and K. Lücke, ICOTOM 6, (1), pp. 375-384, (1981).
- /7/- H. J. Bunge, Phys. Stat. Sol., 26, pp. 167-172, (1968).
- /8/- Y. C. Lin and G. A. Ahlers, Met. Trans., 4, pp. 1491-1497, (1973).

## **CHAPITRE V**

**Formation des bandes de cisaillement  
et texture associée lors d'un  
laminage croisé du cuivre**

## I / Introduction

Dans cette partie, on analyse les effets d'un changement de trajet de déformation sur la formation de bandes de cisaillement et les changements de textures qui en résultent. On se place donc naturellement à l'échelle du polycristal.

Les résultats expérimentaux auxquels nous comparons nos résultats des calculs selon les modèles que nous proposons par la suite, sont obtenus par Korbel /1/ sur du cuivre polycristallin dont la taille des grains est de l'ordre de 50 $\mu$ m. Des échantillons de 100 mm de largeur et 2 mm d'épaisseur sont refroidis dans un bain d'azote liquide puis laminés à 60% de réduction. La déformation est imposée par incréments successifs entre lesquels les échantillons sont plongés dans le bain d'azote. Le sens du laminage est gardé durant tout ce premier chargement. Des échantillons "secondaires" de 20 mm de largeur sont ensuite découpés en largeur dans les échantillons "primaires" (prélaminés à 60% de réduction). Ils sont laminés à 2, 5, et 10% de réduction à température ambiante comme le montre la fig.v . 1.

L'analyse de la texture a été faite sur les plans {111}, {200} et {220} par diffraction des rayons CuK $\alpha$ . Les conclusions concernant les changements de la texture sont déduites des analyses des O.D.F. selon la procédure de Pawlik /2/.

La fig.v . 2 représente les figures de pôles dans le plan de laminage d'un échantillon "primaire" laminé à 60% de réduction, tandis que la fig.v . 3 représente celles des échantillons "secondaires" laminés respectivement à 2, 5 et 10% de réduction (après un pré-laminage de 60%). La comparaison des figures de pôles v . 2 et v . 3 montre que la déformation "secondaire" tend à disperser les pôles autour de la direction de laminage, à diminuer les intensités des composantes "C" et "S" de la texture et à faire apparaître dès 10% de réduction une nouvelle composante "B".

Parallèlement, des observations au microscope optique des faces latérales des échantillons "secondaires" ont été réalisées /1/ afin de contrôler le mode de déformation et d'évaluer -si possible- la fraction volumique des bandes de cisaillement. En effet, dès 2% de réduction "secondaire" nous pouvons constater une localisation en bandes de cisaillement comme le

montre la figure v. 4. La présence du mode de déformation homogène est contrôlée par l'observation des reliefs de surface par la technique du contraste de Nomarski. Cependant, l'augmentation de la déformation produit l'augmentation du nombre et l'élargissement des bandes de cisaillement fig. v. 4 b à 4. e. La contribution de la déformation homogène est très faible et ne semble pas augmenter de façon significative avec la déformation. En effet, les faces latérales des échantillons restent planes et les reliefs de surface dans les zones occupées par la matrice ne sont pas observés, fig. v. 4 e et 4 d.

Nous sommes donc amené à penser que le changement que subit la texture, est une conséquence de l'apparition des bandes de cisaillement.

## **II/ Modèles proposés et résultats**

### **II.1. Introduction**

Le modèle self-consistent, sur lequel reposent en partie nos tentatives de modélisation, prend en compte l'accommodation des incompatibilités plastiques par des déformations élastoplastiques en apportant une approche nouvelle au problème des interactions entre les grains. Ces interactions sont assimilées à celles entre chaque grain et le milieu homogène constitué d'un "matériau équivalent", dont le comportement est celui du polycristal pris globalement. Ce dernier n'étant pas connu à l'avance et de façon précise, il est introduit de façon formelle en fonction des paramètres qui le caractérisent et obtenu par identification après avoir considéré tour à tour l'interaction entre chaque grain et le "matériau équivalent" et exprimé que les caractéristiques mécaniques de ce dernier sont les moyennes de celles de chaque grain. Ce traitement conduit à une relation implicite en comportement pouvant être résolue numériquement en partant de l'approximation de Voigt /3/ et en itérant plusieurs fois j'usqu'à une convergence satisfaisante de la méthode.

De récents travaux sur les propriétés plastiques et élastoplastiques des matériaux microhétérogènes et macrohomogènes conduit à la formulation d'une équation intégrale dont la résolution prévoit le comportement mécanique et le développement de la texture des matériaux contenant des

microhétérogénéités /4/, /5/, /6/.

La résolution de cette équation proposée par Lipinski et Berveiller /5/, utilise la méthode autocohérente à un site (modèle self-consistent), elle développe un calcul numérique qui suit entre autres l'évolution des orientations des différents grains d'un échantillon polycristallin auquel est imposé un champ de déformation ou de contraintes macroscopiques.

On se servira dans ce travail de ce calcul numérique pour la prévision de l'évolution de la texture d'échantillons auxquels nous imposons différents champs de déformation macroscopique. Tout d'abord on se propose de calculer les orientations après déformation de 1000 grains initialement orientés de façon isotrope ayant subi un laminage à 60% de réduction (cas A du tableau.v . 1). Les résultats sont donnés sous forme de figures de pôles {111}, {200} et {220}, dans le plan de laminage (DL,DT). La comparaison de ces résultats avec les résultats obtenus par Korbel, montre un bon accord entre les textures expérimentale et calculée (fig.v . 5). Cette dernière (texture calculée) nous servira par la suite de texture initiale.

Dans ce travail, il s'agira dans un premier temps, de calculer la texture après déformation d'un polycristal (à forte énergie de faute d'empilement) en considérant un glissement multiple homogène dans le milieu, sans tenir compte du phénomène de localisation de la déformation plastique. Dans un deuxième temps, la localisation sera prise en compte de deux façons différentes: glissement multiple homogène localisé puis cisaillement transgranulaire dans un pseudo-monocristal orienté pour qu'un seul système de glissement soit activé (voir tableaux . 1). On travaillera dans tout ce qui suit dans le repère macroscopique (DL,DT,DN) lié à l'échantillon.

Le but de ces différentes façons de prendre en compte le phénomène d'apparition des bandes de cisaillement est, d'une part d'approcher le plus possible le comportement de ces bandes dans le polycristal et comprendre les mécanismes mis en jeu par (et dans) celles-ci, et d'autre part souligner l'importance de cette structure dans l'évolution de la texture du polycristal.

## **II.2. Champ de déformation à aspect homogène**

Ce premier modèle, consiste à ne pas tenir compte du phénomène de localisation de la déformation plastique. En effet, nous calculons par le



modèle self-consistent /5/ la texture d'un échantillon de 1000 grains, pré-laminé à 60% de réduction, ayant donc la texture calculée de la figure v. 5b, laminé une seconde fois à 2, 5 et 10% de réduction selon la direction transversale du repère macroscopique de laminage (cas B1 du tableau.v. 1). Les figures de pôles {111}, {200} et {220} dans le plan (DL,DT) obtenues, sont représentées sur la figure v. 6 où à 2 et 5% de réduction on ne distingue pas de changements remarquables de la texture, tandis qu'à 10%, il existe une très faible évolution de celle-ci. Or, ces changements de la texture sont très faibles comparés aux changements observés expérimentalement (fig.v. 3). De plus, le caractère du changement n'est pas exactement le même .

L'hypothèse d'un mode de déformation en glissement multiple homogène n'est donc pas suffisante. Le phénomène de localisation de la déformation plastique s'avère donc d'une grande importance dans le comportement du polycristal, notamment dans l'évolution de sa texture.

Dans ce qui suit, nous en tiendrons compte de trois manières différentes .

### **II.3. Champ de déformation à aspect hétérogène**

#### **II.3.1. Glissement multiple homogène localisé**

##### **II.3.1.1. Déformation plane localisée**

L'idée principale sur laquelle repose ce deuxième modèle, est que les bandes de cisaillement sont considérées comme une forme de localisation de la déformation plastique, sans pour autant tenir compte de leur aspect morphologique. Le mode de déformation local considéré est cependant le glissement multiple homogène. De plus, il sera nécessaire de connaître la fraction volumique des bandes de cisaillement ce qui est possible, au moins à 10% de réduction par déformation secondaire. En effet, l'élargissement des bandes de cisaillement observé au fur et à mesure que la déformation augmente , permet d'évaluer ce paramètre. En comptant le nombre d'intersections entre les bandes de cisaillement et une grille posée sur la face observée de l'échantillon fig.v. 4e, il a été établi par Korbel /1/ que la fraction volumique des bandes de cisaillement à ce stade

de la déformation secondaire (10% de réduction), est sensiblement proche de 40% du volume total de l'échantillon. Nous retiendrons donc, qu'une déformation macroscopique de l'ordre de 0.1 est entièrement accomodée par un volume de bandes de cisaillement occupant 40% du volume total de l'échantillon, la déformation homogène locale dans ce cas étant de l'ordre de 0.25. En effet, le tenseur de déformation macroscopique  $\underline{E}^P$  s'écrit, en fonction de la fraction volumique 'f' des bandes de cisaillement et des tenseurs de déformations homogènes respectifs dans la matrice et dans les bandes,  $\underline{\varepsilon}^{PM}$  et  $\underline{\varepsilon}^{PB}$ , de la manière suivante (voir tableau.v . 1):

$$E_{ij}^P = f \cdot \varepsilon_{ij}^{PB} + (1-f) \varepsilon_{ij}^{PM} \quad (v.1)$$

où

$$\left[ E_{ij}^P \right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & -E \end{pmatrix}$$

$$\left[ \varepsilon_{ij}^{PB} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^B & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon^B \end{pmatrix}$$

Et  $\varepsilon_{ij}^{PM} = 0$  pour  $i$  et  $j = 1, 3$

d'où

$$\varepsilon_{ij}^{PB} = \frac{E_{ij}^P}{f} \quad (v.2)$$

pour  $E=0.1$  et  $f=0.4$ ,  $\varepsilon^B = 0.25$

En partant de l'hypothèse d'un glissement multiple homogène dans les grains constituant les bandes de cisaillement, l'évaluation de l'évolution de la texture par le calcul a été réalisée en appliquant la méthode

autocohérente à un site/5/.

Partant d'un échantillon de 1000 grains de texture à 60% de réduction celle obtenue précédemment par le calcul (fig.v. 5b), nous simulons un laminage secondaire (DT = direction de laminage) à 20% de réduction (cas B2 du tableau v. 1) . Les figures de pôles {111}, {200} et {220} dans le plan (DL,DT) obtenues (fig.v. 7a) représentent l'effet d'une déformation secondaire de 0.2 sur l'évolution de la texture dans les zones de localisation de la déformation (bandes de cisaillement). La comparaison à ce taux de déformation de ce résultat avec les figures de pôles expérimentales (10% de déformation secondaire globale fig.v. 3c), montre un désaccord entre les deux. En effet, les pôles {111} des figures expérimentales subissent une cission et tendent à se répartir autour de la direction de laminage primaire, tandis que sur les figures de pôles calculées on observe plutôt une tendance de répartition de ces maxima autour de la normale au plan de laminage (DN). En effet, ceci est bien le cas si l'on avance plus loin dans la réduction (40%) fig. v. 7b. Il sera utile, afin de bien montrer le désaccord, de superposer à la texture dans les bandes (40% des grains de l'échantillon) , la texture dans la matrice (60% des grains de l'échantillon) qui elle n'a pas bougé lors du laminage secondaire (texture initiale). On se propose alors de superposer la texture de 1000 grains représentant la matrice ( texture initiale, calculée, obtenue à 60% de réduction primaire) et de 1000 autres grains représentant les bandes de cisaillement (texture calculée à 20% de réduction secondaire). Le choix d'une même fraction volumique pour la matrice et les bandes n'affecte en rien les résultats finaux. La comparaison des textures calculée (fig.v. 7c) et expérimentale (fig.v. 3c) montre bien le désaccord entre les résultats expérimentaux et calculés.

L'hypothèse d'une déformation plane localisée (laminage localisé plus intense) est donc insuffisante et ne décrit pas le comportement de la totalité de la bande de cisaillement. En effet, l'observation de la fig.v. 4e révèle l'existence de régions où se croisent deux bandes de cisaillements opposés, symétriques par rapport au plan normal au plan de laminage. Théoriquement, lors d'une déformation plane macroscopique, l'apparition de deux bandes de cisaillements opposés donnerait lieu, dans la région de leur croisement, à une déformation plane plus intense que la déformation plane appliquée à l'échantillon ( expression v. 2). Ce modèle à notre avis,

traiterait le problème uniquement dans une région donnée des bandes de cisaillement.

Néanmoins, nous pouvons considérer que cette approche décrit bien ce qui se passe dans ce type de zones. Il serait question dans ces zones de glissements multiples homogènes donnant lieu à des rotations locales et par suite à une part de l'évolution de la texture.

### 11.3.1.2. Cisaillement localisé

Le présent modèle repose également sur l'idée d'un glissement multiple localisé lors de la déformation secondaire d'un échantillon polycristallin. La morphologie des bandes de cisaillement est de nouveau prise en compte. Par contre, et à la différence du modèle précédent, on distingue les deux types de bandes, symétriques par rapport au plan normal au plan de laminage, présentes dans l'échantillon. On considère que les bandes de type I subissent un cisaillement  $\gamma$  et celles de type II (symétriques aux premières) subissent un autre cisaillement  $\gamma$  opposé au premier. Les fractions volumiques des deux types de bandes sont considérées égales.

#### a)- Forme des tenseurs de déformation plastique des bandes I et II

Nous considérons deux bandes I et II inclinées respectivement des angles  $+\alpha$  et  $-\alpha$  par rapport à la direction de laminage secondaire (DT).

Soit  $R_m(x_1, x_2, x_3)$  un repère lié aux deux bandes. Et le repère  $R_M(DL, DT, DN)$  lié à l'échantillon (fig.v . 8).

Soient  $\vec{u}^I$ , exprimé dans le repère  $R_m$ , et  $\gamma$  les déplacement et glissement dans la bande I (fig.v . 8 a):

$$\vec{u}^I = \begin{pmatrix} 0 \\ -\gamma x_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(v.3)

Le gradient de déplacement exprimé dans le repère  $R_m$  s'écrit:

$$\beta_{ij}^I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{v.4})$$

Le tenseur de déformation plastique exprimé dans le repère  $R_m$  s'écrit :

$$\varepsilon_{ij}^{PI} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\gamma}{2} \\ 0 & -\frac{\gamma}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{v.5})$$

L'expression de  $\underline{\varepsilon}^{PI}$  dans le repère macroscopique  $R_M$  nécessite la connaissance de la matrice de passage de  $R_m$  à  $R_M$ . Cette matrice s'écrit:

$$[a_{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (\text{v.6})$$

L'expression finale de  $\underline{\varepsilon}^{PI}$  dans le repère  $R_M$  lié à l'échantillon est alors:

$$\varepsilon_{ij}^{PI} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\gamma}{2} \sin 2\alpha & -\frac{\gamma}{2} \cos 2\alpha \\ 0 & -\frac{\gamma}{2} \cos 2\alpha & -\frac{\gamma}{2} \sin 2\alpha \end{pmatrix} \quad (v.7)$$

Pour la bande du type II, le calcul est analogue. En remplaçant  $-\gamma$  par  $\gamma$  dans l'expression de  $\underline{\varepsilon}^I$ , on aboutit à l'expression de  $\underline{\varepsilon}^{PII}$  suivante:

$$\varepsilon_{ij}^{PII} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\gamma}{2} \sin 2\alpha & \frac{\gamma}{2} \cos 2\alpha \\ 0 & \frac{\gamma}{2} \cos 2\alpha & -\frac{\gamma}{2} \sin 2\alpha \end{pmatrix} \quad (v.8)$$

Pour pouvoir appliquer ce modèle, il nous sera nécessaire de connaître la valeur de l'angle  $\alpha$ . D'après les observations expérimentales [7], il est voisin de  $\pm 37^\circ$ .

Pour effectuer nos calculs, nous considérons un échantillon polycristallin auquel nous imposons une déformation macroscopique  $\underline{\varepsilon}^P$ . Par hypothèse, il existe au sein du polycristal deux types de bandes symétriques. Par conséquent,  $\underline{\varepsilon}^P$  s'écrit en fonction de la fraction volumique "f", des déformations plastiques  $\underline{\varepsilon}^{PI}$  et  $\underline{\varepsilon}^{PII}$  des deux bandes et de la déformation  $\underline{\varepsilon}^{PM}$  de la matrice (voir tableau.v. 1):

$$\underline{\varepsilon}^P = (f/2) \underline{\varepsilon}^{PI} + (f/2) \underline{\varepsilon}^{PII} + (1-f) \underline{\varepsilon}^{PM} \quad (v.9)$$

nous considérons que la matrice ne se déforme pas ( $\underline{\varepsilon}^{PM} = 0$ ), (v. 9) s'écrit alors:

$$E_{ij}^P = \frac{f}{2} (\varepsilon_{ij}^{PI} + \varepsilon_{ij}^{PII})$$

qui s'écrit explicitement dans le repère macroscopique  $R_M$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & -E \end{pmatrix} = \frac{f}{2} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\gamma}{2} \sin 2\alpha & -\frac{\gamma}{2} \cos 2\alpha \\ 0 & -\frac{\gamma}{2} \cos 2\alpha & -\frac{\gamma}{2} \sin 2\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\gamma}{2} \sin 2\alpha & \frac{\gamma}{2} \cos 2\alpha \\ 0 & \frac{\gamma}{2} \cos 2\alpha & -\frac{\gamma}{2} \sin 2\alpha \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & -E \end{pmatrix} = \frac{f}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma \sin 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \sin 2\alpha \end{pmatrix}$$

La déformation macroscopique  $E$  s'exprime donc en fonction de  $f$ ,  $\gamma$  et  $\alpha$  par:

$$E = \frac{f}{2} \gamma \sin 2\alpha$$

d'où

$$\gamma = \frac{2E}{f \sin 2\alpha} \quad (\text{v. 10})$$

En remplaçant  $\gamma$  par son expression (v. 10) dans (v. 7) et (v. 8), les tenseurs de cisaillement dans les bandes I et II s'expriment en fonction de la déformation macroscopique  $E$  et de l'angle  $\alpha$  d'inclinaison des bandes par :

$$\varepsilon_{ij}^{PI} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E}{2} & -\frac{E}{2 \operatorname{tg} 2\alpha} \\ 0 & -\frac{E}{2 \operatorname{tg} 2\alpha} & -\frac{E}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{v.11})$$

et

$$\varepsilon_{ij}^{PII} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E}{2} & \frac{E}{2 \operatorname{tg} 2\alpha} \\ 0 & \frac{E}{2 \operatorname{tg} 2\alpha} & -\frac{E}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{v.12})$$

### b)- application et résultats

Comme nous l'avons précisé dans le paragraphe a), on se donne un échantillon présentant deux types de bandes I et II symétriques de même fraction volumique lors du laminage secondaire appliqué à tout l'échantillon. Ces deux bandes subissent des cisaillements de signes opposés, le reste de l'échantillon "matrice" ne se déforme pas.

Pour effectuer nos calculs on considère deux échantillons de 1000 grains chacun ayant la texture obtenue par laminage primaire (selon DL) à 60% de réduction (fig.v.5b). A chacun des échantillons on applique respectivement les cisaillements  $\varepsilon^{PI}$  et  $\varepsilon^{PII}$  à différents taux de réduction: 10, 20, 40 et 50%(cas B3 du tableau v.1). La fig.v.9 représente les figures de pôles {111}, {200}, {220} dans le plan (DL,DT) obtenues en superposant les orientations après cisaillement des 2000 grains des deux échantillons. La comparaison des fig.v.9 et fig.v.3 montre un désaccord entre les textures calculée et expérimentale. En effet, les pôles {111} des figures



expérimentales tendent à se répartir autour de la direction de laminage (DL), tandis que sur la fig.v . 9 ces pôles se répartissent plutôt autour de la direction normale (DN) au fur et à mesure que le taux de cisaillement augmente, comme dans le modèle précédent mais de manière plus accentuée.

De ces résultats, nous pouvons déduire que les bandes de cisaillement ne se comportent pas comme une zone de cisaillement localisé activant un glissement multiple. Nous sommes amené à penser que la rotation du réseau cristallin dans les bandes ne serait pas le résultat des rotations des grains les uns par rapport aux autres comme l'oblige le glissement multiple.

### 11.3.2. Cisaillement transgranulaire

Dans ce paragraphe, nous proposons un modèle où les caractéristiques morphologiques des bandes de cisaillement sont prises en compte. Nous considérons alors que les bandes de cisaillement macroscopiques sont composées d'une série de cisaillements transgranulaires régulièrement distribués, faisant référence aux microbandes de cisaillement. Cette série de cisaillements est considérée équivalente à un "glissement simple", non nécessairement cristallographique, dans un pseudo-monocristal. La formation d'une famille de microbandes de cisaillement conduit à une rotation rigide des grains par rapport à la direction transversale secondaire (c.à.d DL: direction de laminage primaire) /7/. La formation d'une seconde famille de microbandes symétrique à la première par rapport au plan normal au plan de laminage, conduit à une rotation des grains opposée à la première de telle manière que la rotation globale dans le milieu soit nulle. Les cisaillements dans l'une et l'autre famille de bandes sont pris égaux au signe près et les fractions volumiques des familles de microbandes égales.

Quant à la rotation locale, elle ne peut être nulle que si le cisaillement est le même dans chaque bande et la distribution des bandes dans l'échantillon régulière. L'examen des photographies fig.v . 4 montre clairement que cela n'est pas le cas: La densité, ainsi que l'épaisseur des bandes varient en fonction de la position dans l'échantillon. Autrement dit, quand la rotation globale est nulle, les blocs locaux ( bandes et matrice ) du matériau subissent des rotations l'un par rapport à l'autre autour de la direction

transversale secondaire (c.à.d. DL). D'ailleurs, les traces d'une seule famille de bandes (fig.v . 4 a) , indique que la famille des bandes symétriques ne se forme pas en même temps que la première (modèle dynamique /8/ ). Le matériau est alors scindé en "blocs rigides" avant la formation de la seconde famille de bandes symétriques. Le "bloc bande" subit une rotation rigide, il entraine le "bloc matrice" qui subit la même rotation rigide afin que le plan de laminage reste plat. Ce n'est qu'après l'apparition de la seconde famille de bandes symétriques aux premières que le "bloc matrice" subit une seconde rotation rigide opposée à la première due à la rotation du "bloc bandes symétriques". De ce fait le "bloc matrice" revient à sa position initiale et n'aura en définitif pas tourné. Par conséquent, on se doit de considérer les rotations dues à chaque famille de bandes indépendamment l'une de l'autre et tenir compte de leurs effets en les superposant. D'autre part, tenant compte du fait qu'il y ait une tendance au regroupement des microbandes de cisaillement au fur et à mesure que la déformation progresse /9/, nous admettons que l'augmentation de la fraction volumique des bandes de cisaillement correspond à un cisaillement local plus intense. Dans nos calculs, nous considérons deux bandes de cisaillement inclinées respectivement de  $+37^\circ$  et  $-37^\circ$  par rapport à la direction de laminage (DT) /7/. Une première bande I appartenant à la première série de bandes et une deuxième bande II appartenant à la deuxième série symétrique à la première. Le calcul des rotations dans ces bandes nécessite là encore, l'introduction d'un deuxième repère  $R_m(x_1, x_2, x_3)$  lié aux deux bandes . Le repère macroscopique  $R_M(DL, DT, DN)$  étant lié à l'échantillon.

Soient  $\vec{u}^I$ , exprimé dans le repère  $R_m$ , et  $\dot{\gamma}$  les taux de déplacement et de cisaillement dans la bande I (fig.v . 8 a), nous avons alors :

$$\vec{u}^I \begin{vmatrix} 0 \\ \dot{\gamma} x_3 \\ 0 \end{vmatrix}$$

( v . 13 )

Le taux du gradient de déplacement exprimé dans le repère  $R_m$  s'écrit :

$$\dot{\beta}_{ij}^I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\gamma} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et par suite, le tenseur du taux de rotation plastique de la bande  $\mathcal{I}$  exprimé dans ce même repère s'écrit:

$$\dot{\Omega}_{ij}^{PI} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\dot{\gamma}}{2} \\ 0 & \frac{\dot{\gamma}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

(v.14)

L'expression de  $\dot{\Omega}_{ij}^{PI}$  dans le repère macroscopique  $R_M$  nécessite la connaissance de la matrice de passage de  $R_m$  à  $R_M$ :

$$[a_{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

(v.15)

Enfin, la conversion du tenseur  $\dot{\Omega}_{ij}^{PI}$  dans le repère macroscopique  $R_M$  donne le tableau suivant:

$$\dot{\Omega}_{ij}^{PI} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\dot{\gamma}}{2} \\ 0 & \frac{\dot{\gamma}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

(v.16)

L'expression du taux de rotation plastique de la bande ne dépend donc pas de la position de celle-ci par rapport au repère macroscopique.

Le calcul est identique pour la bande  $II$ , symétrique à la première (fig.v. 8b), il aboutit à un taux de rotation opposé exprimé dans le repère  $R_M$  par:

$$\dot{\Omega}_{ij}^{PII} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\dot{\gamma}}{2} \\ 0 & -\frac{\dot{\gamma}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

(v.17)

En effet, le taux de rotation global ( $\dot{\Omega}^{PI} + \dot{\Omega}^{PII}$ ) devant être nul,  $\dot{\Omega}^{PI} = -\dot{\Omega}^{PII}$ .

Par ailleurs, nous partons de l'hypothèse des taux des rotations totales (élastiques + plastiques) des bandes nuls ce qui s'exprime par:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\Omega}_{ij}^{TI} = \dot{\Omega}_{ij}^{PI} + \dot{\Omega}_{ij}^{eI} = 0 \\ \dot{\Omega}_{ij}^{TII} = \dot{\Omega}_{ij}^{PII} + \dot{\Omega}_{ij}^{eII} = 0 \end{array} \right\}$$

d'où

$$\begin{cases} \dot{\Omega}_{ij}^{PI} = -\dot{\Omega}_{ij}^{eI} \\ \dot{\Omega}_{ij}^{PII} = -\dot{\Omega}_{ij}^{eII} \end{cases} \quad (v.18)$$

D'après (v.18) les tenseurs taux des rotations élastiques des bandes I et II s'expriment explicitement par:

$$\dot{\Omega}_{ij}^{eI} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\dot{\gamma}}{2} \\ 0 & -\frac{\dot{\gamma}}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \dot{\Omega}_{ij}^{eII} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\dot{\gamma}}{2} \\ 0 & \frac{\dot{\gamma}}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (v.19)$$

Tandis que les taux des rotations locales  $\dot{\omega}^i$  (rotation du  $i^{\text{ème}}$  grain) dans ce cas sont par hypothèse égaux aux taux des rotations macroscopiques des bandes pour tous les grains:

$$\begin{cases} \left( \dot{\omega}_{ij}^{eI} \right)^i = \dot{\Omega}_{ij}^{eI} \\ \left( \dot{\omega}_{ij}^{PI} \right)^i = \dot{\Omega}_{ij}^{PI} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \left( \dot{\omega}_{ij}^{eII} \right)^i = \dot{\Omega}_{ij}^{eII} \\ \left( \dot{\omega}_{ij}^{PII} \right)^i = \dot{\Omega}_{ij}^{PII} \end{cases} \quad (v.20)$$

Ainsi, les orientations cristallographiques des grains étant repérées par rapport au repère macroscopique (lié à l'échantillon) par l'intermédiaire des angles d'Euler  $\phi_1$ ,  $\phi$  et  $\phi_2$  introduits par Bunge /10/ (voir fig.IV.3). Le champ des rotations du réseau cristallin par rapport au repère macroscopique  $R_M$  est cependant décrit par les taux  $\dot{\phi}_1$ ,  $\dot{\phi}$  et  $\dot{\phi}_2$  tels que:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\phi}_1 &= -\cos \phi \dot{\phi}_2 - \dot{\Omega}_{12}^e \\ \dot{\phi} &= \sin \phi_1 \dot{\Omega}_{13}^e - \cos \phi_1 \dot{\Omega}_{23}^e \\ \dot{\phi}_2 &= -\frac{\cos \phi_1}{\sin \phi} \dot{\Omega}_{13}^e - \frac{\sin \phi_1}{\sin \phi} \dot{\Omega}_{23}^e \end{aligned} \right\} \quad (\text{v. 21})$$

les taux des rotations élastiques étant exprimés dans le repère macroscopique  $R_M$ .

Tenant compte des relations (v.19), les relations (v.21) s'écrivent respectivement pour les deux champs des taux des rotations  $\dot{\underline{\Omega}}^{e I}$  et  $\dot{\underline{\Omega}}^{e II}$ :

$$\left. \begin{aligned} \dot{\phi}_1^I &= -\cos \phi \dot{\phi}_2^I \\ \dot{\phi}^I &= -\cos \phi_1 \frac{\dot{\gamma}}{2} \\ \dot{\phi}_2^I &= -\frac{\sin \phi_1}{\sin \phi} \frac{\dot{\gamma}}{2} \end{aligned} \right\} \quad (\text{v. 22})$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\phi}_1^{II} &= -\cos \phi \dot{\phi}_2^{II} \\ \dot{\phi}^{II} &= \cos \phi_1 \frac{\dot{\gamma}}{2} \\ \dot{\phi}_2^{II} &= \frac{\sin \phi_1}{\sin \phi} \frac{\dot{\gamma}}{2} \end{aligned} \right\} \quad (\text{v. 23})$$

Sur les figures v. 10 on représente les figures de pôles {111}, {200}, {220} dans le plan (DL,DT) obtenues pour quatre valeurs du taux de cisaillement

$\dot{\gamma}$ , en superposant les textures obtenues, de deux échantillons de 1000 grains pré laminés à 60% de réduction (ayant la texture de la fig.v . 5 b), auxquels on a imposé les taux de rotations dus aux champs respectifs (v . 2 2) et (v . 2 3) de façon incrémentale pour des valeurs de  $\dot{\gamma}$  allant de 0.2 à 1.0 (cas B4 du tableau . 1).

L'observation des figures de pôles expérimentales à 10% de réduction secondaire (fig.v . 3 c) et des fig.v . 1 0 montre que le meilleur accord entre les figures expérimentales et calculées , est obtenu pour la valeur 0.5 du taux de cisaillement. En effet, le taux de cisaillement transgranulaire local est lié au taux de déformation macroscopique  $\dot{\underline{\underline{E}}}^P$  par une relation analogue à (v . 9). La déformation de la matrice étant nulle on a :

$$\dot{\underline{\underline{E}}}_{ij}^P = \frac{f}{2} (\dot{\underline{\underline{E}}}_{ij}^{PI} + \dot{\underline{\underline{E}}}_{ij}^{PII} )$$

aboutissant à la relation :

$$\dot{\gamma} = \frac{2 \dot{\underline{\underline{E}}}}{f \sin 2\alpha} \quad (v . 2 4)$$

$$\text{Pour } \dot{\underline{\underline{E}}} = 0.1 , f = 0.4 \text{ et } \alpha = 37.5^\circ \Rightarrow \dot{\gamma} = 0.51$$

Cette valeur du taux de glissement correspond à la diminution partielle des rotations des blocs du matériau par les bandes symétriques.

De ce modèle, nous pouvons tirer la conclusion que les bandes de cisaillement se comportent au sein du polycristal comme des monocristaux subissant des cisaillements transgranulaires. Les grains d'une même région ( bande ou matrice ) subissent des rotations rigides ( en blocs ). Les taux des rotations locales dans les deux types de bandes sont respectivement égaux aux taux des rotations macroscopiques des deux bandes ( relations v . 2 0 ).

### III / Conclusion

Afin d'apporter une explication au phénomène de l'évolution de la texture

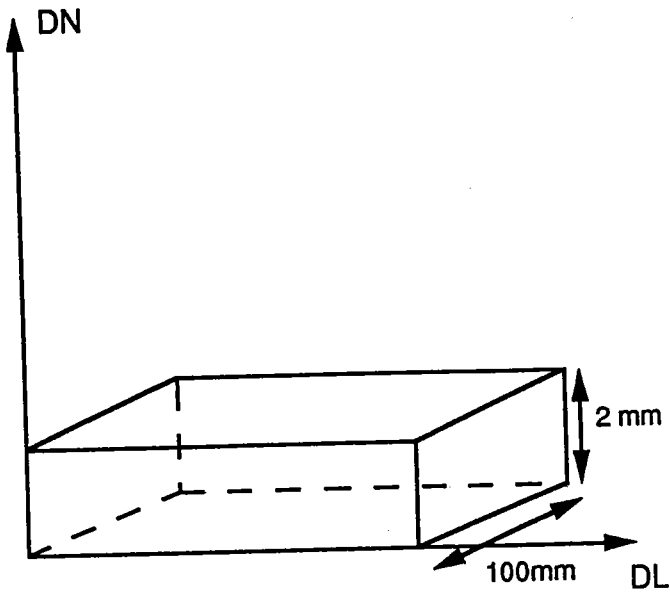
observée sous des conditions de cisaillement intense localisé en bandes de cisaillement, dont on ne connaît pas à priori le mécanisme de comportement, nous avons proposé quatre modèles, ne tenant pas compte du phénomène de localisation de la déformation plastique pour le premier, et en tenant compte pour les trois suivants.

Les modèles considérant un glissement multiple homogène ou localisé, n'aboutissent pas à un accord satisfaisant entre les résultats expérimentaux et calculés. Le mécanisme mis en jeu dans les bandes n'est donc pas équivalent à un glissement multiple localisé dans la totalité des bandes. Néanmoins, il peut l'être dans les régions de croisement de deux bandes symétriques où la déformation est localement équivalente à la déformation macroscopique imposée mais plus intense qu'elle.

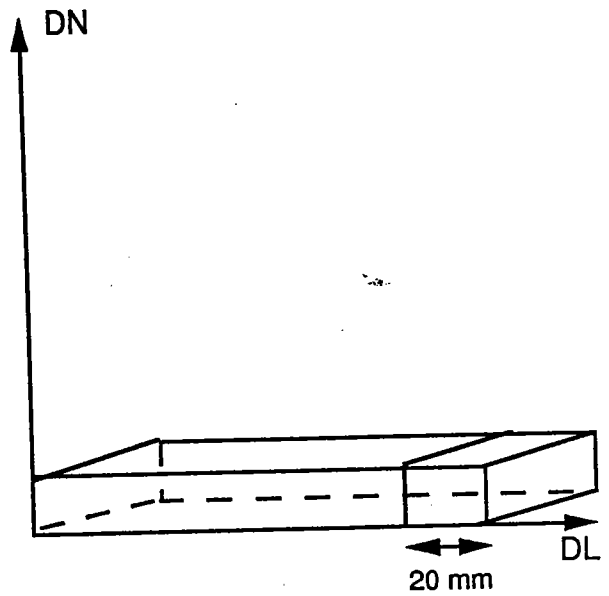
Un meilleur accord est obtenu quand la déformation secondaire est considérée comme une localisation d'un cisaillement transgranulaire sur "un système" pour chacune de deux familles de bandes symétriques, non régulièrement distribuées, induisant des rotations opposées que l'on a superposé.

Ces résultats montrent donc la part très importante des bandes de cisaillement dans l'évolution de la texture. En effet, nous avons pu vérifier que l'apparition des bandes de cisaillement est à l'origine de la transition de texture c'est à dire, passage d'une texture type cuivre à une texture type laiton. Aussi ces mêmes résultats rendent-ils compte du comportement des bandes de cisaillement au sein du polycristal. Ce dernier résultat est d'une grande importance dans la mesure où il nous apporte une nouvelle approche aux phénomènes mis en jeu dans et par les bandes de cisaillement.

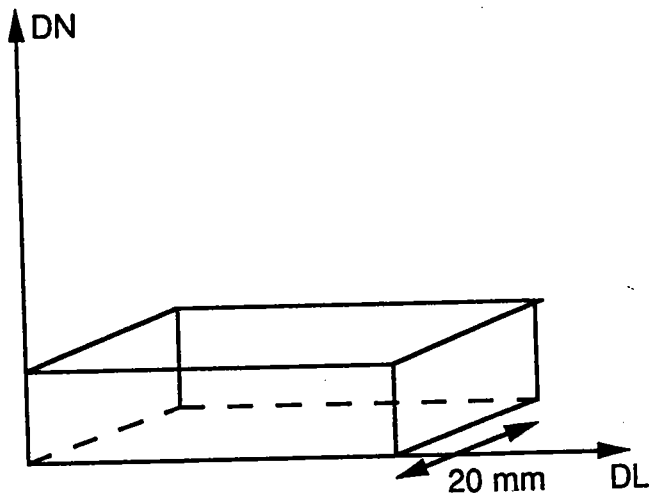




a) Echantillon primaire avant le laminage

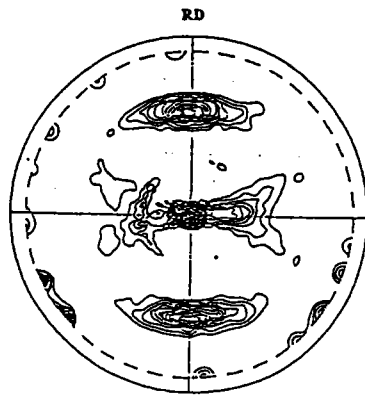


b) Echantillon primaire après laminage à 60% suivant DL auquel on prélève un échantillon de 20 mm de largeur

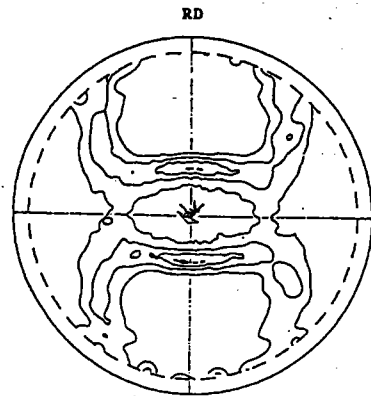


c) Echantillon secondaire prélevé de l'échantillon primaire (b), tourné de 90° autour de DN et laminé ensuite (selon DL) à 2,5 et 10%.

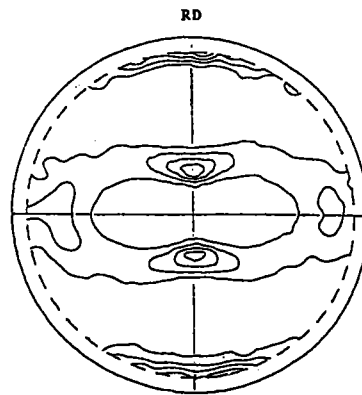
Fig.v.1



110



100



111

fig.v . 2 figures de pôles expérimentales obtenues après 60% de réduction par laminage monotone.

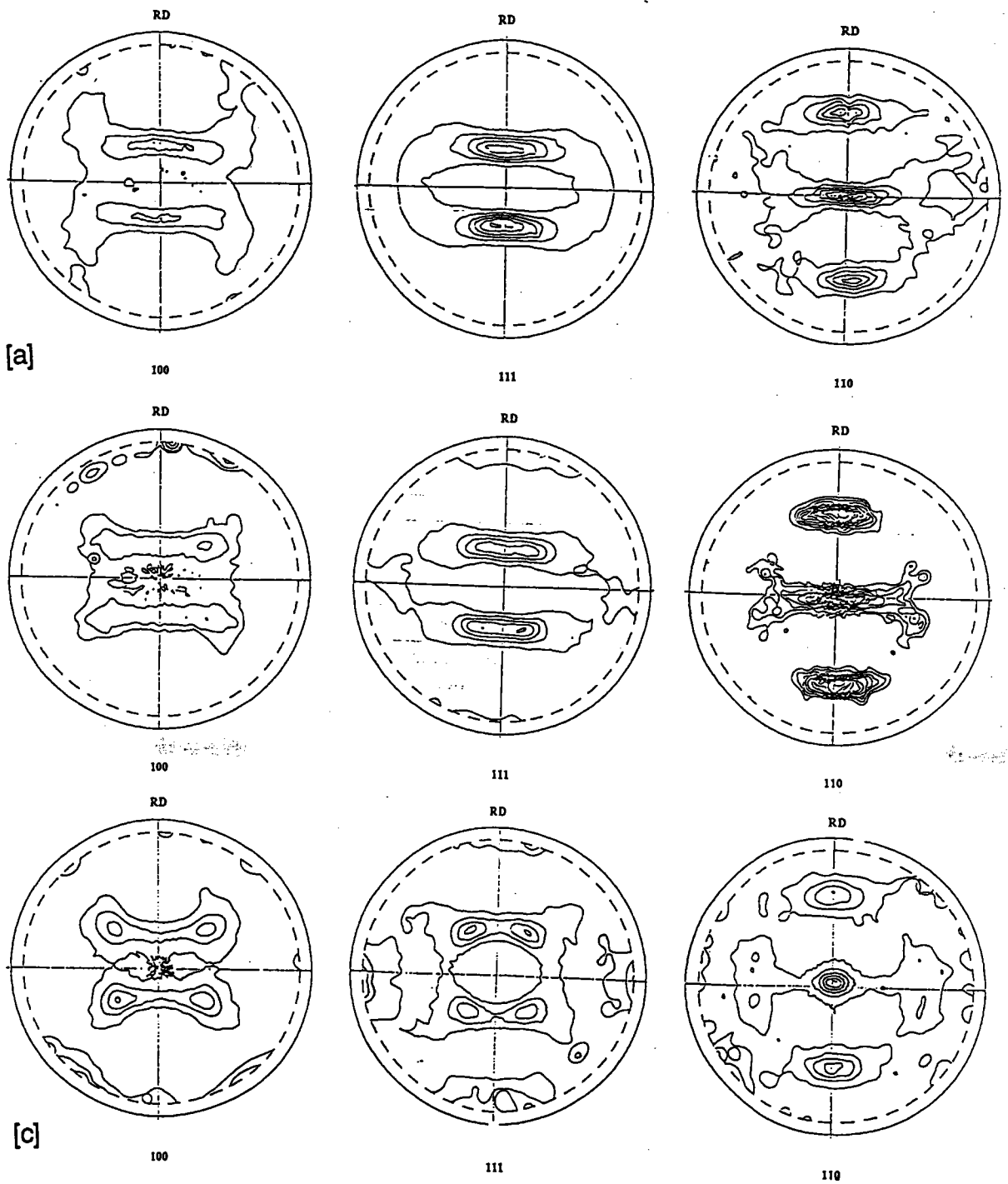
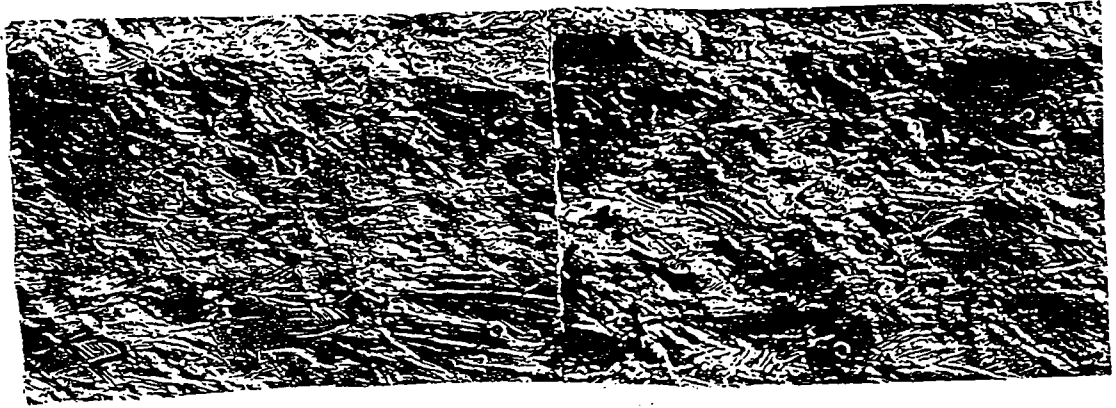
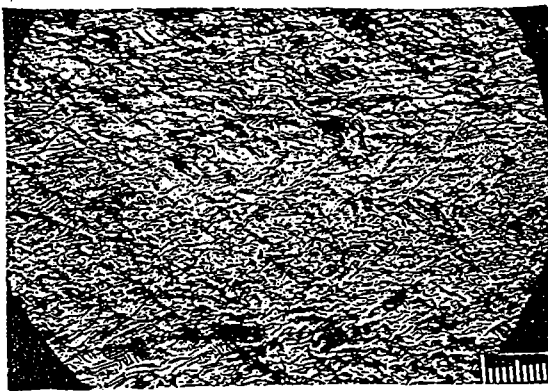


fig.v . 3 figures de pôles expérimentales obtenues après 60% de réduction par laminage primaire puis laminage secondaire à: a) 2%, b) 5%, c) 10% de réduction.

-----> DT (direction de laminage secondaire)



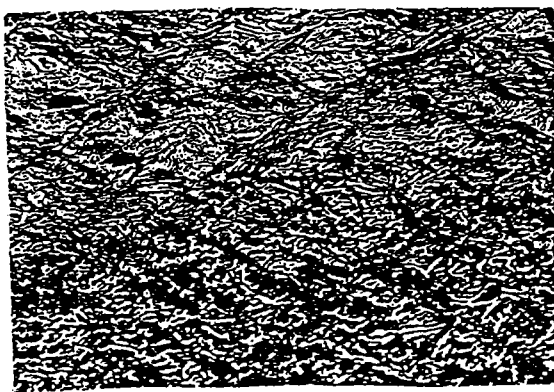
[a]



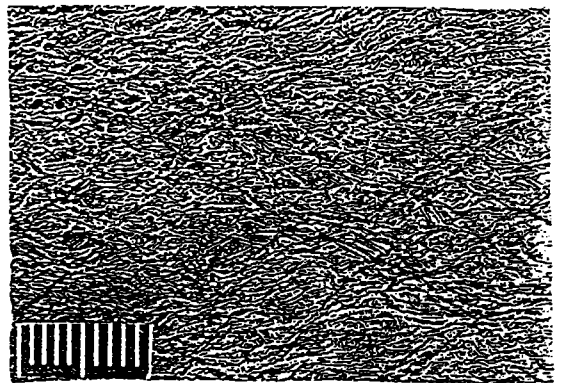
[b]



[c]



[d]



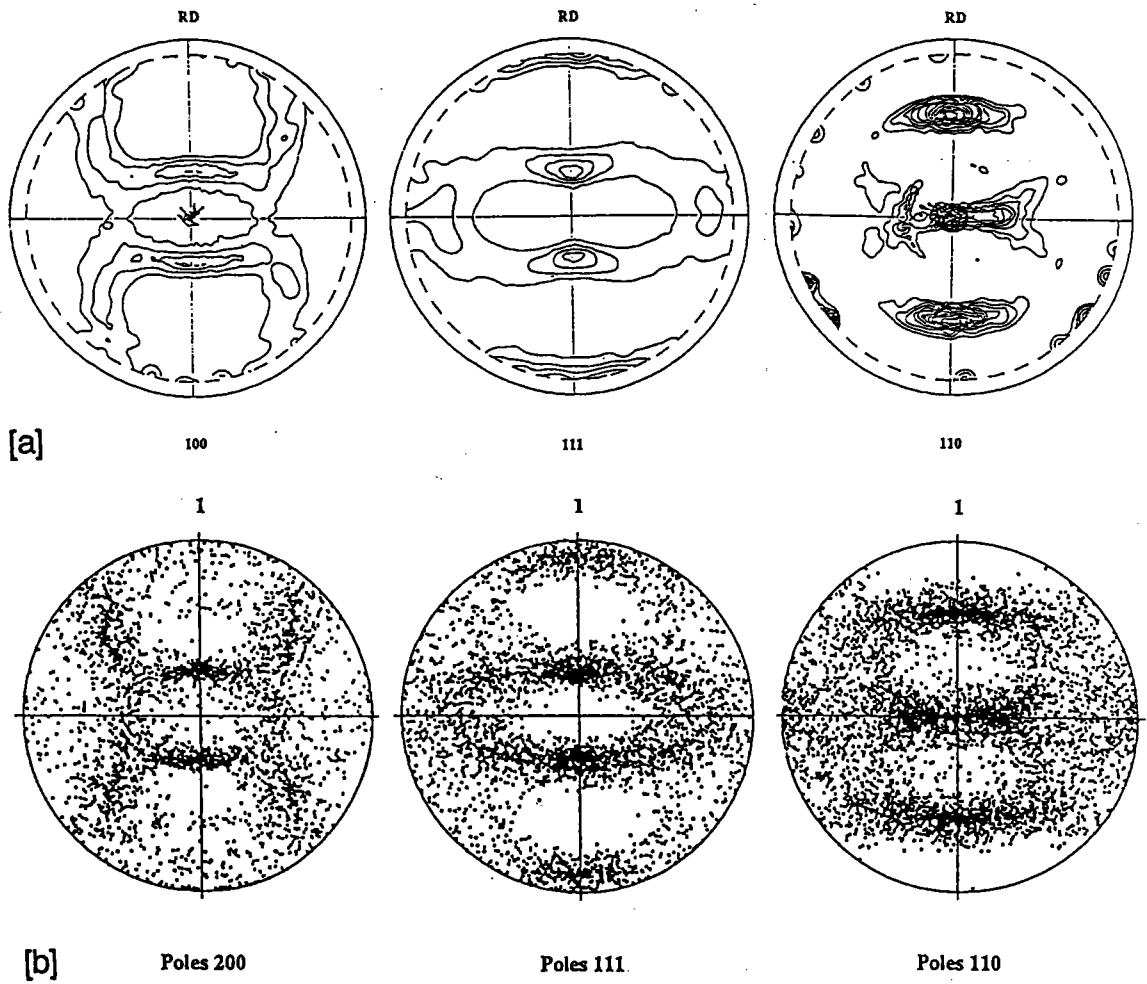
[e]

fig.v.4 micrographies optiques des sections latérales d'échantillons de cuivre pré-laminés à 60% de réduction selon (DL) puis laminés selon (DT) à: a) 2%, b) et c) 5%, d) et e) 10% de réduction.

Cas étudiés		Sollicitations imposées exprimées dans (DL,DT,DN)	Modèles utilisés	Modes de déformation	Champs de rotations				
					Rotations macroscopiques	Rotations locales			
Déformations secondaires	Déformations hétérogènes	A	$E_{ij}^P = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -E \end{bmatrix}$	Self-Consistent	glissement multiple homogène	$\Omega_{ij}^T = \Omega_{ij}^e = \Omega_{ij}^P = 0$	$\begin{matrix} T & e & P \\ \omega_{ij} = \omega_{ij} + \omega_{ij} \\ T & P & e \\ \omega_{ij}, \omega_{ij} \text{ et } \omega_{ij} \neq 0 \end{matrix}$		
		B1	Déformation homogène	$E_{ij}^P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & -E \end{bmatrix}$	Self-Consistent	glissement multiple homogène	$\Omega_{ij}^T = \Omega_{ij}^e = \Omega_{ij}^P = 0$	$\begin{matrix} T & e & P \\ \omega_{ij} = \omega_{ij} + \omega_{ij} \\ T & P & e \\ \omega_{ij}, \omega_{ij} \text{ et } \omega_{ij} \neq 0 \end{matrix}$	
		B2	$E_{ij}^P = f \varepsilon_{ij} + (1-f) \varepsilon_{ij}$	Matrice	$\varepsilon_{ij}^{PM} = 0$	---	---	$\Omega_{ij}^{TM} = \Omega_{ij}^{eM} = \Omega_{ij}^{PM} = 0$	$\omega_{ij}^{TM} = \omega_{ij}^{PM} = \omega_{ij}^{eM} = 0$
				bandeI+II	$\varepsilon_{ij}^{PB} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E/1 & 0 \\ 0 & 0 & -E/1 \end{bmatrix}$	Self-Consistent	glissement multiple homogène	$\Omega_{ij}^{TB} = f \Omega_{ij}^{eB} + (1-f) \Omega_{ij}^{PB} = 0$	$\begin{matrix} TB & eB & PB \\ \omega_{ij} = \omega_{ij} + \omega_{ij} \\ TB & PB & eB \\ \omega_{ij}, \omega_{ij} \text{ et } \omega_{ij} \neq 0 \end{matrix}$
		B3	$E_{ij}^P = \frac{f}{2} (\varepsilon_{ij}^{PI} + \varepsilon_{ij}^{PI}) + (1-f) \varepsilon_{ij}^{PM}$	Matrice	$\varepsilon_{ij}^{PM} = 0$	---	---	$\Omega_{ij}^{TM} = \Omega_{ij}^{eM} = \Omega_{ij}^{PM} = 0$	$\omega_{ij}^{TM} = \omega_{ij}^{PM} = \omega_{ij}^{eM} = 0$
				bandeI	$\varepsilon_{ij}^{PI} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E/2 & -E/2 \operatorname{tg} 2\alpha \\ 0 & -E/2 \operatorname{tg} 2\alpha & -E/2 \end{bmatrix}$	Self-Consistent	glissement multiple homogène	$\Omega_{ij}^{TI} = f \Omega_{ij}^{eI} + (1-f) \Omega_{ij}^{PI} = 0$ $\Omega_{ij}^{eI} = -\Omega_{ij}^{PI}$	$\begin{matrix} eI & eI \\ \omega_{ij} \neq \Omega_{ij} \neq 0 \\ PI & PI \\ \omega_{ij} \neq \Omega_{ij} \neq 0 \end{matrix}$
				bandeII	$\varepsilon_{ij}^{PI} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E/2 & E/2 \operatorname{tg} 2\alpha \\ 0 & E/2 \operatorname{tg} 2\alpha & -E/2 \end{bmatrix}$	Self-Consistent	glissement multiple homogène	$\Omega_{ij}^{TI} = f \Omega_{ij}^{eII} + (1-f) \Omega_{ij}^{PI} = 0$ $\Omega_{ij}^{eII} = -\Omega_{ij}^{PI}$	$\begin{matrix} eII & eII \\ \omega_{ij} \neq \Omega_{ij} \neq 0 \\ PI & PI \\ \omega_{ij} \neq \Omega_{ij} \neq 0 \end{matrix}$
		B4	$E_{ij}^P = \frac{f}{2} (\varepsilon_{ij}^{PI} + \varepsilon_{ij}^{PI}) + (1-f) \varepsilon_{ij}^{PM}$	Matrice	$\varepsilon_{ij}^{PM} = 0$	---	---	$\dot{\Omega}_{ij}^{TM} = \dot{\Omega}_{ij}^{eM} = \dot{\Omega}_{ij}^{PM} = 0$	$\dot{\omega}_{ij}^{TM} = \dot{\omega}_{ij}^{PM} = \dot{\omega}_{ij}^{eM} = 0$
				bandeI	$\dot{\Omega}_{ij}^A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\gamma}/2 \\ 0 & -\dot{\gamma}/2 & 0 \end{bmatrix}$	Calcul direct du champ de rot. IV.22	Cisaillement trans-granulaire	$\dot{\Omega}_{ij}^{TI} = \dot{\Omega}_{ij}^{eI} + \dot{\Omega}_{ij}^{PI} = 0$ $\dot{\Omega}_{ij}^{eI} = -\dot{\Omega}_{ij}^{PI}$	$\begin{matrix} eI & eI \\ \dot{\omega}_{ij} = \dot{\Omega}_{ij} \\ PI & PI \\ \dot{\omega}_{ij} = \dot{\Omega}_{ij} \end{matrix}$
		bandeII	$\dot{\Omega}_{ij}^{eII} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\gamma}/2 \\ 0 & \dot{\gamma}/2 & 0 \end{bmatrix}$	Calcul direct du champ de rot. IV.23	Cisaillement trans-granulaire	$\dot{\Omega}_{ij}^{TI} = \dot{\Omega}_{ij}^{eII} + \dot{\Omega}_{ij}^{PI} = 0$ $\dot{\Omega}_{ij}^{eII} = -\dot{\Omega}_{ij}^{PI}$	$\begin{matrix} eII & eII \\ \dot{\omega}_{ij} = \dot{\Omega}_{ij} \\ PI & PI \\ \dot{\omega}_{ij} = \dot{\Omega}_{ij} \end{matrix}$		

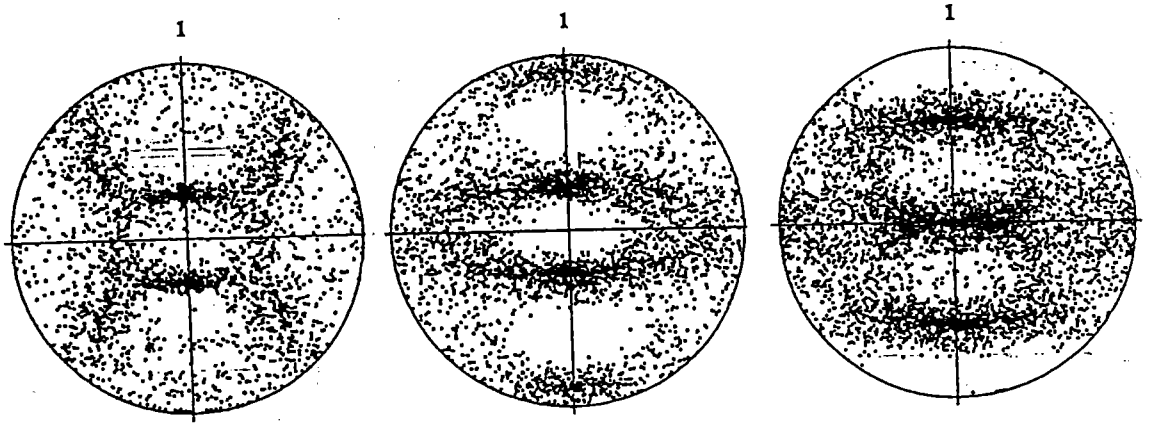
calculées par le modèle Self-Consistent

tableau.v.1



1 = DL

fig.v . 5 figures de pôles a) expérimentales b) calculées selon le cas "A" du tableau . 1 à 60% de réduction par laminage.

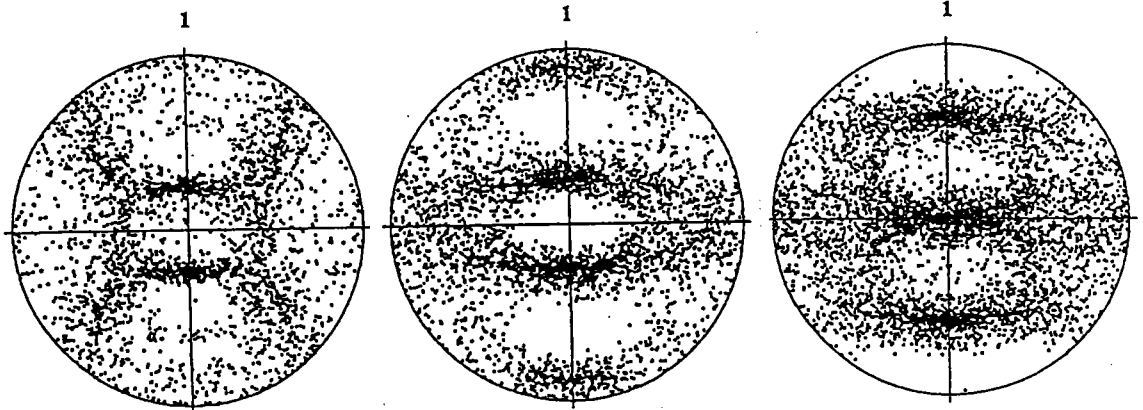


[a]

Poles 200

Poles 111

Poles 110

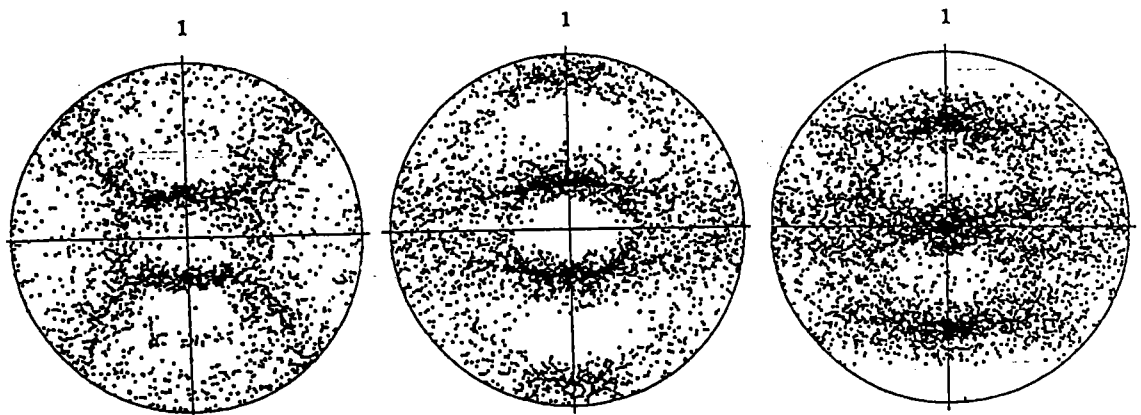


[b]

Poles 200

Poles 111

Poles 110



[c]

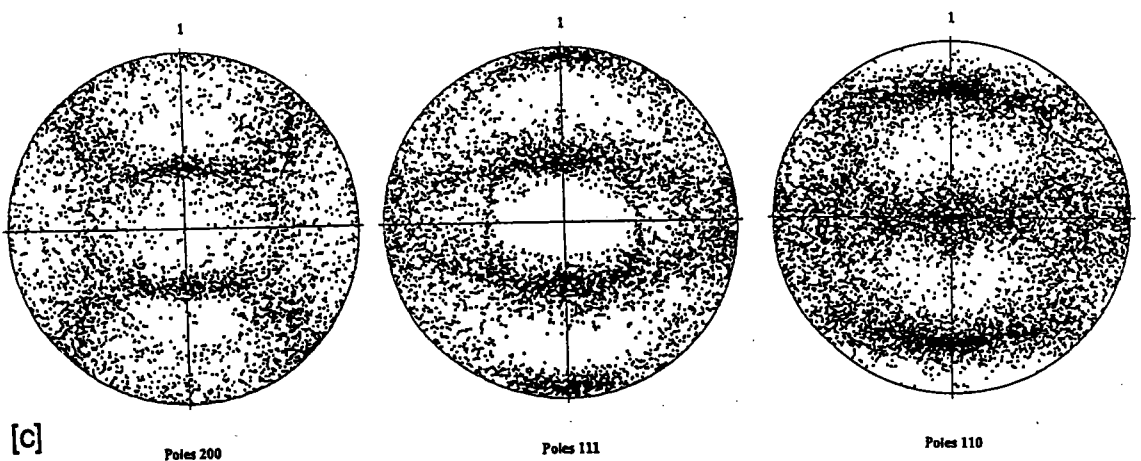
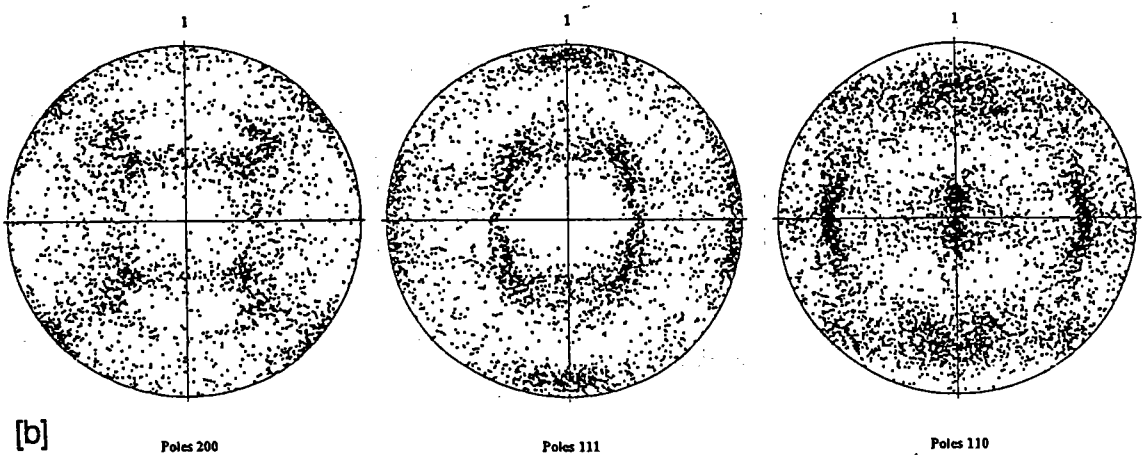
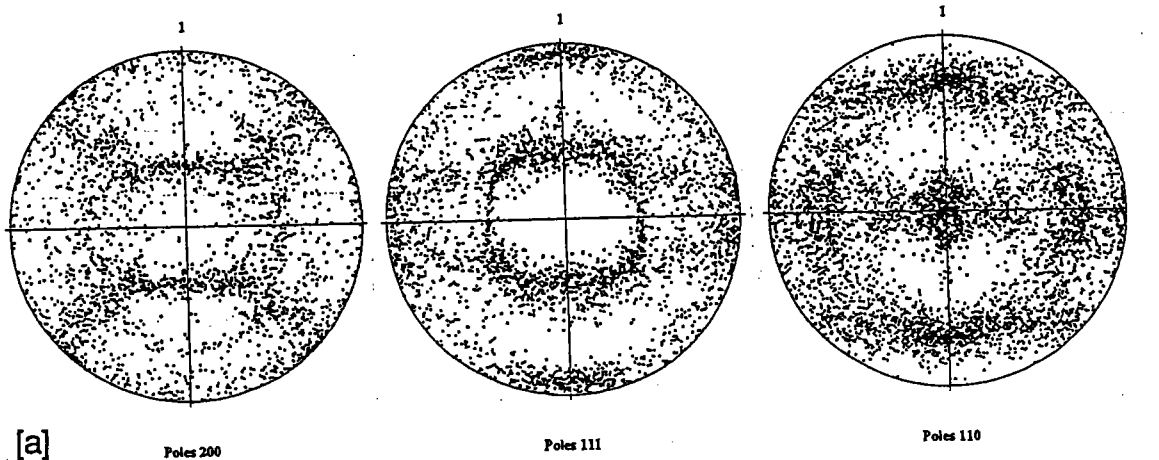
Poles 200

Poles 111

Poles 110

1 = DL

fig.v . 6 figures de pôles calculées selon le cas "B1" du tableau . 1 pour des taux de réductions secondaires de a) 2%, b) 5% et c) 10% après un laminage primaire de 60% de réduction.



1 = DL

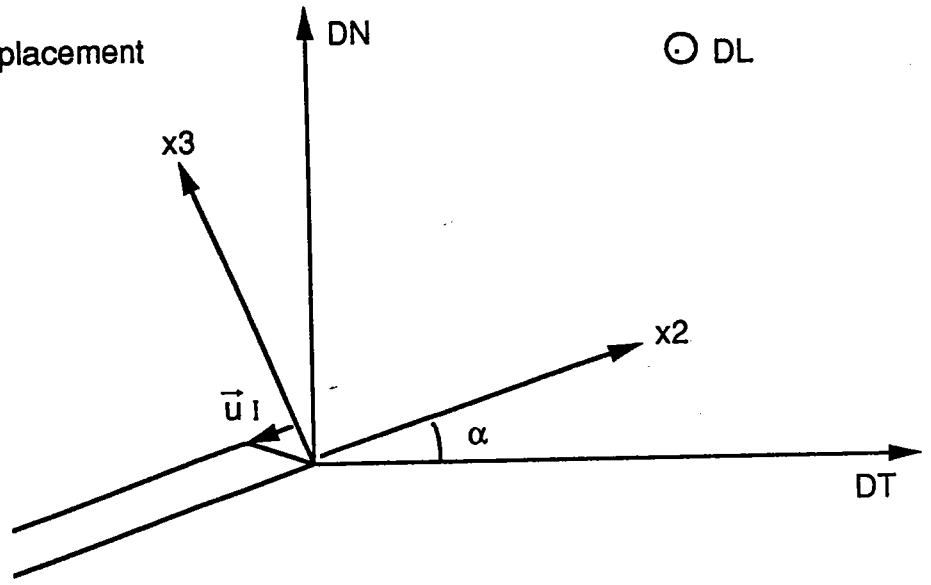
fig.v . 7 figures de pôles calculées selon le cas "B2" du tableau . 1 à: a) 20%, b) 40% de réduction par laminage secondaire après laminage primaire de 60% de réduction. c) superposition des figures du a) aux figures calculées de la fig.v . 5 b



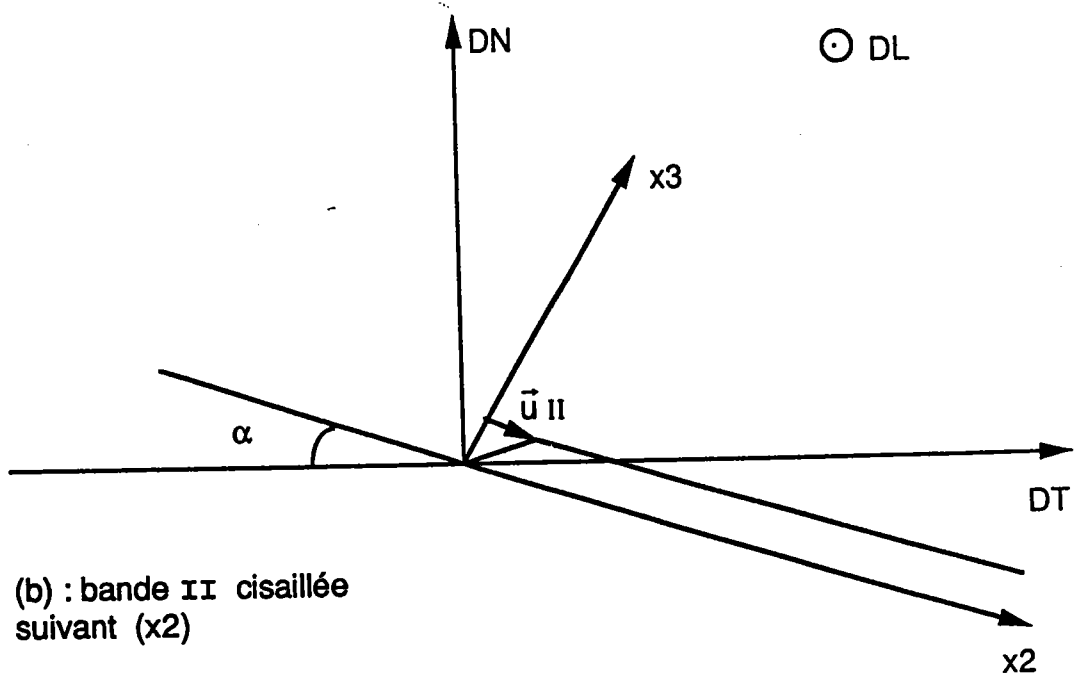
( DL, DT, DN ) : Repère macroscopique

( x1, x2, x3 ) : Repère lié à la bande

$\vec{u}_I$  et  $\vec{u}_{II}$  : vecteurs déplacement

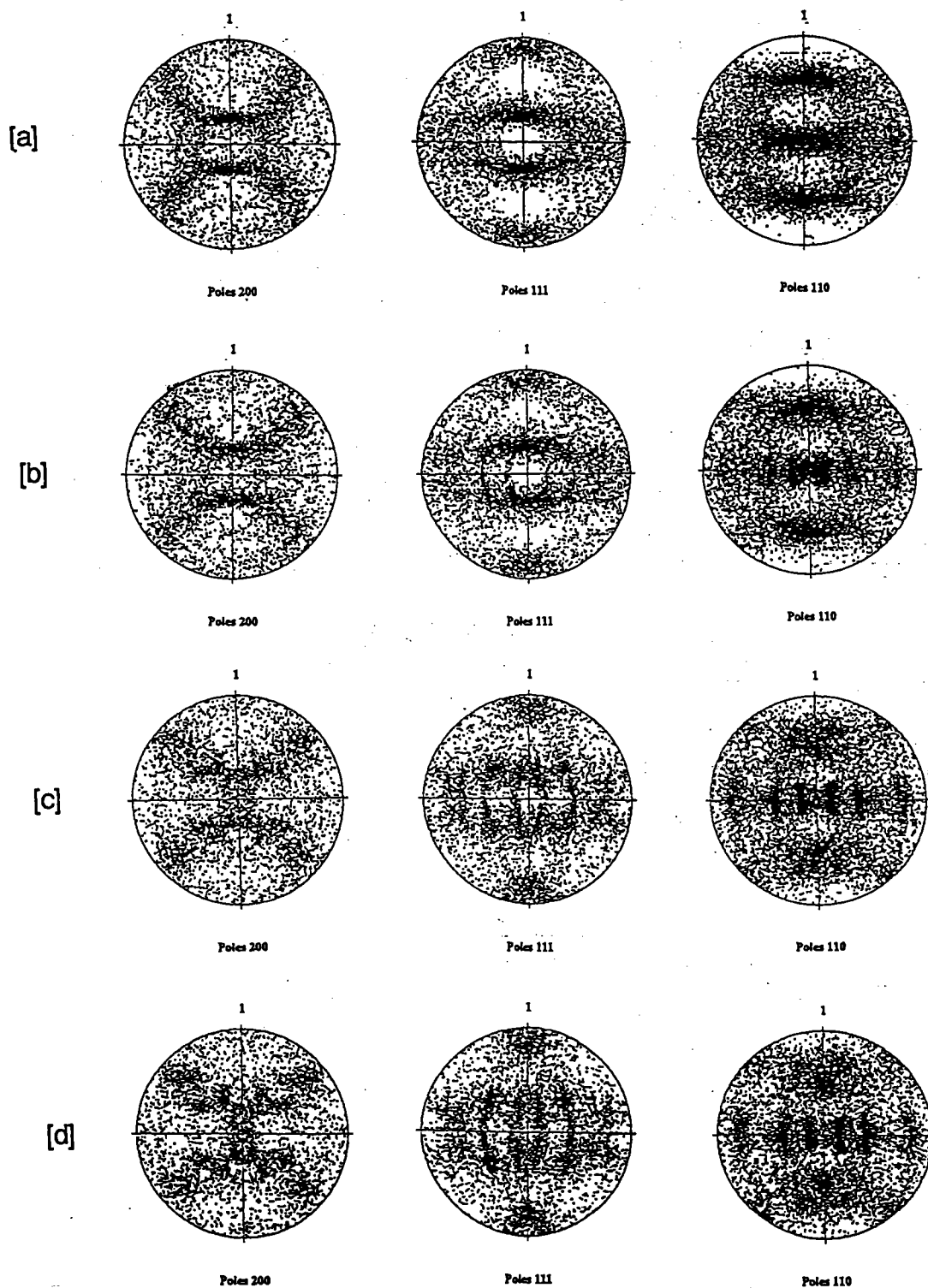


(a): bande I cisailée  
suivant (- x2)



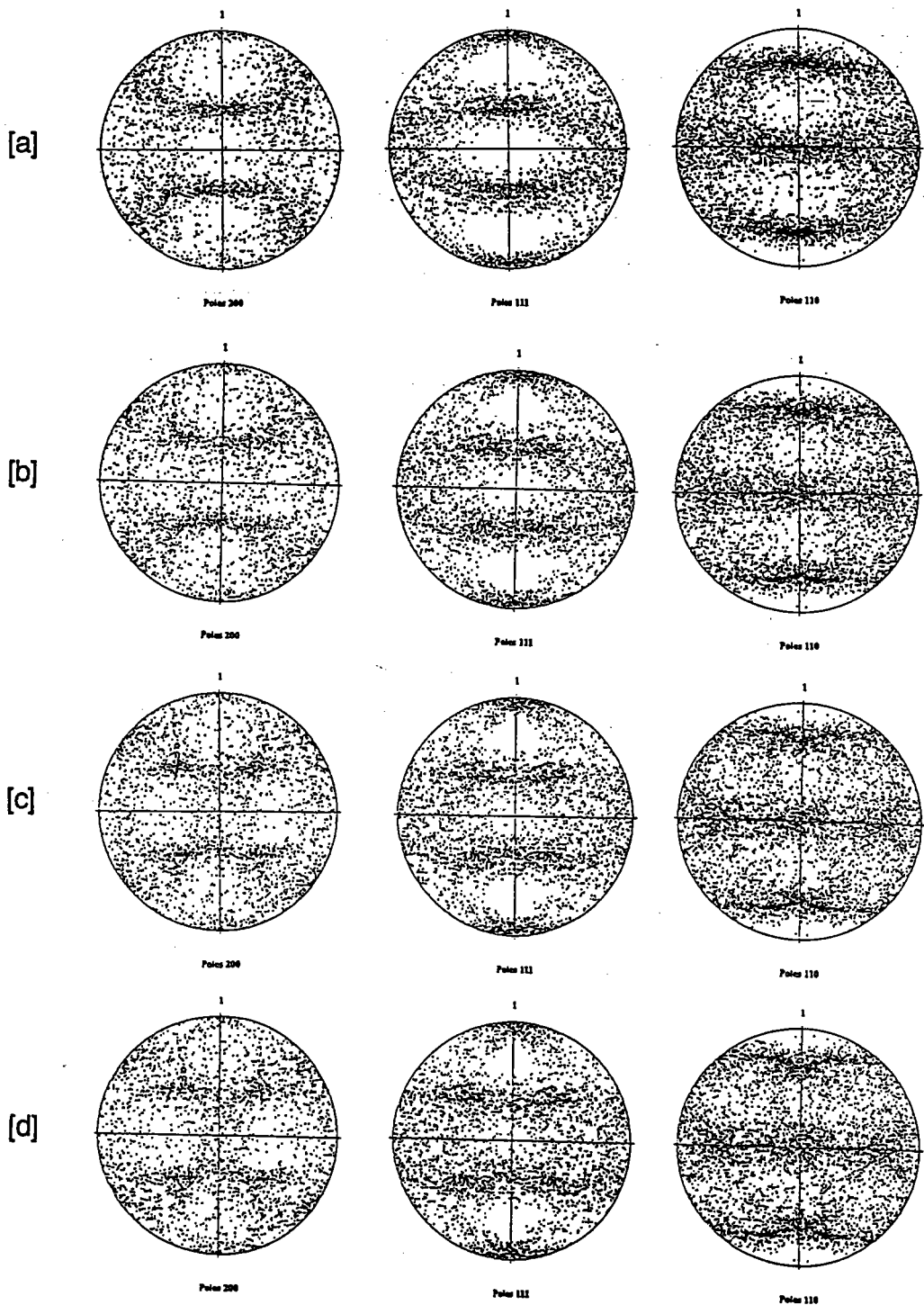
(b) : bande II cisailée  
suivant (x2)

Fig.v.8



1 = DL

fig.v . 9 figures de pôles superposées de deux échantillons laminés à 60% de réduction puis subissant un cisaillement  $\tau$  pour le premier et un cisaillement  $\tau$  pour le second (cas B3 du tableau.v . 1) à : a) 10%, b) 20%, c) 40% et d) 50% de réduction.



1 = DL

fig.v. 10 figures de pôles superposées de deux échantillons laminés à 60% de réduction puis subissant une rotation  $\pi$  pour le premier et une rotation  $\pi/2$  pour le second (cas B4 du tableau.v. 1) à des taux de cisaillement de: a) 0.2, b) 0.4, c) 0.5 et d) 0.6.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- /1/- A. Korbel, J. Bonarski, S. Wierzbinski and F. Dobrzanski, "The Study on Principles of the Control of Global Mechanical and Structural Properties of Metals During Metal Forming Operations"  
Research Report of the Institut of Metals Working and Physical Metallurgy Academy of Mining and Metallurgy, Krolion, Poland. Contrat n° .7.362.87. (1990).
- /2/- K. Pawlik, "determination of the orientation Distribution function From Pole figures in arbitrary defined Cells", Phys. Stat. Sol. (b), 134, 477.
- /3/- W. Voigt, Wied. Ann., 38, pp. 573-587, 1989.
- /4/- P. Lipinski and M. Berveiller, "Elastoplasticity of Microinhomogeneous Metals and Large Strains". Inst. J. Plasticity, 5, 149, 1989.
- /5/- P. Lipinski, J. Krier and M. Berveiller, "Elastoplasticité des Métaux en grandes déformations: Comportement global et évolution de la texture interne", Rev. Phys. Appl., 25, 361, 1990.
- /6/- M Berveiller and A. Zaoui, "An extension of the Self consistent Scheme to Plastically Following Polycrystals", J. Mech. Phys. Sol., 26, 325, 1979.
- /7/- P. Van Houtte, J. Gil Sevillano and E. Aernoudt, "Model for Shear Band Formation in Rolling and Extrusion", Z.f. Metallkunde, 70, 426, 1979.
- /8/- J.Hirsch, K.Lücke and M.Hatherly, Acta metall. vol.36, N° 11, pp.2905-2927, 1988.
- /9/- A. Korbel, J.D. Embury, M. Hatherly, P.L. Martin and H.W. Erbslor, "Microstructural aspect of strain localisation in Al-Mg Alloys", Acta Metall., 34, p. 1999 (1986)
- /10/- H.J. Bunge, "Mathematische Methoden der Texturanalyse", Akademie Verlag, Berlin, (1969).

## **CHAPITRE VI**

### **Conclusion générale**

CONTENTS

Dans ce travail, nous nous sommes intéressé aux hétérogénéités de déformations plastiques des polycristaux métalliques à deux échelles différentes:

- Les microbandes de cisaillement à l'échelle granulaire.
- Les bandes de cisaillement macroscopiques à l'échelle du polycristal.

A l'échelle granulaire, nous avons tenu compte des hétérogénéités plastiques en considérant qu'il se forme dans les grains du polycristal, deux zones à modes de glissement différents:

- Un glissement multiple homogène
- Un glissement simple

Ces deux zones sont séparées par une interface plane ou plan d'habitat (n'introduisant pas de contraintes à grandes distances).

Les relations de compatibilité devant être satisfaites par un tel champ de déformation permettent de confirmer le lien très étroit entre la formation des plans d'habitat et des microbandes de cisaillement dans des orientations non aléatoires et similaires. De plus, la corrélation des orientations des différents plans d'habitat des différents grains, induit un "ordre" à grande distance au sein du polycristal. On est donc amené à penser que la formation des bandes de cisaillement macroscopiques résulte d'un phénomène de coalescence des microbandes de cisaillement présentes dans les grains, facilitée par la corrélation d'orientations de celles-ci.

D'autre part, l'hétérogénéité de la déformation plastique a des conséquences sur la transition des textures du type cuivre au type laiton. En effet, dans le cas des métaux à fort écrouissage latent pour lesquels la déformation plastique est essentiellement hétérogène, on constate l'apparition de composantes de textures type laiton.

A l'échelle du polycristal, nous avons tenu compte de la structure de bandes de cisaillement macroscopiques traversant la totalité de l'échantillon polycristallin.

Afin de bien souligner le rôle très important de cette structure dans l'évolution de la texture, nous avons dans un premier temps proposé un modèle considérant un glissement multiple homogène, autrement dit sans hétérogénéités plastiques. Les textures de déformation obtenues par un tel modèle ne coïncident pas avec les textures de déformation expérimentales.

Par conséquent, il est nécessaire de tenir compte de la localisation de la déformation plastique dans les calculs afin d'approcher le plus possible le comportement réel du polycristal.

D'après les résultats obtenus il s'avère que les bandes de cisaillement macroscopiques représentent une forme particulière de localisation de la déformation plastique. Le mode de déformation de ces bandes n'est pas un glissement multiple homogène dans les grains mais plutôt un cisaillement transgranulaire sur un seul système de glissement. En effet, chaque bande de cisaillement se comporte comme un monocristal subissant un cisaillement dans son plan. Ce comportement particulier conduit à la division de l'échantillon en blocs (matrice et bandes). Ces blocs subissent des rotations rigides afin de conserver la géométrie extérieure de l'échantillon (la surface libre du plan de laminage reste plane), et par conséquent participent à l'évolution de la texture .

Ce travail, se veut une contribution à la modélisation des hétérogénéités plastiques lors des déformations plastiques de polycristaux métalliques.

Nous avons tenté de tenir compte de ces hétérogénéités à la fois à l'échelle du grain et du polycristal. De même, nous avons pu souligner le rôle très important que jouent ces structures hétérogènes, aux deux échelles, dans l'évolution de la texture de laminage des métaux.

De nombreux problèmes concernant les hétérogénéités plastiques restent à résoudre parmi lesquels nous citons un qui découle immédiatement de la présente étude:

Il est important d'établir le lien entre les hétérogénéités intragranulaires (microbandes de cisaillement) et transgranulaires (bandes de cisaillement macroscopiques).

Ce problème à notre sens pourra être abordé dans le cadre du modèle de l'inclusion plastique homogène dans une matrice plastifiée uniformément. L'énergie libre d'un tel système devrait augmenter au fur et à mesure que le chargement imposé au système augmente, jusqu'à une valeur critique de celle-ci et des contraintes internes dans l'inclusion. A partir de cette valeur critique, il y a relaxation de ces contraintes et restitution d'énergie. L'inclusion ( ou microbande ) se propagerait et traverserait toute la matrice

(ou échantillon polycristallin) pour former une bande de cisaillement macroscopique.