



**HAL**  
open science

## Produits star sur les variétés de Poisson

Mohsen Masmoudi,

► **To cite this version:**

Mohsen Masmoudi,. Produits star sur les variétés de Poisson. Mathématiques générales [math.GM].  
Université Paul Verlaine - Metz, 1992. Français. NNT : 1992METZ042S . tel-01775996

**HAL Id: tel-01775996**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01775996v1>**

Submitted on 24 Apr 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

# T H E S E

Présentée  
A l'Université de Metz  
pour obtenir le grade de



*Docteur de L'Université de Metz*  
*Spécialité Mathématiques*

Par

Mohsen MASMOURI

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv.	19920855
Cote	S/M3 92/42
Loc	Magasin

Produits star sur les variétés de Poisson

*Soutenue le 7 Avril 1992*

Devant la commission d'examen

Didier ARNAL  
Lionel BERARD BERGERY  
Claude ROGER  
André ROUX

Président du jury  
Examineur  
Rapporteur  
Rapporteur

## REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer toute ma gratitude et mes remerciements les plus sincères à D. Arnal, qui a su au cours de ces dernières années, me guider, m'encourager et me faire confiance.

Je voudrais remercier A. Roux et C. Roger qui ont accepté d'être les rapporteurs de ce travail.

Je remercie également L. Berard Bergery qui m'a fait l'honneur de participer à ce jury.

Enfin, je remercie tous ceux qui m'ont encouragé à réaliser ce travail.

A mes parents,  
à ma femme,  
à mes enfants,  
et à mes frères et soeurs.

## TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION .....	1
I- GENERALITES .....	8
1- Algèbres de Lie graduées associées à un espace vectoriel .....	8
a- Algèbre de Lie graduée .....	8
b- Algèbres de Lie associées à un espace vectoriel .....	10
c- Cohomologie associée à une algèbre de Lie graduée .....	11
2- Déformation formelle .....	12
a- Applications multilinéaires formelles .....	12
b- Déformation formelle .....	15
c- Equivalence entre déformations formelles .....	17
3- Connexions et opérateurs différentiels .....	19
a- Applications locales et symboles .....	19
b- Connexions sur $M$ .....	22
4- Variété de Poisson et opérateurs tangentiels sur une variété de Poisson régulière .....	23
a- Variété de Poisson .....	23
b- Connexions sur une variété de Poisson régulière .....	25
c- Opérateurs tangentiels sur une variété de Poisson régulière .....	26
5- Produit-star et déformations de l'algèbre de Lie de Poisson sur une variété de Poisson .....	27
a- Définitions et propriétés .....	27
b- Cohomologie de Hochschild de $(N, m)$ .....	31
c- L'invariant cohomologique universel d'une structure de Poisson .....	33
II- PRODUITS-STAR TANGENTIELS ET DEFORMATIONS TANGENTIELLES DE L'ALGEBRE DE LIE DE POISSON SUR UNE VRIETE DE POISSON REGULIERE .....	35
1- Définitions et propriétés .....	35
2- Cohomologie de Hochschild tangentielle de $(N, m)$ .....	37
3- Le terme $M_2$ d'un produit-star tangentiel .....	37
4- Cohomologie de Chevalley tangentielle de $(N, P)$ .....	39
a- définitions et propriétés .....	39
b- Autre façon de définir $S_\Gamma^3$ .....	42
c- Calcul de $H_{loc,t,nc}^1(N)$ , $H_{loc,t,nc}^2(N)$ et $H_{loc,t,nc}^3(N)$ .....	44
5- Le terme $M_3$ d'un produit-star tangentiel .....	56
6- Relations entre produit-star tangentiel et déformation formelle tangentielle de $(N, P)$ .....	57
7- Produit-star de Moyal .....	60
III- UNE PREMIERE DEMONSTRATION DE L'EXISTENCE DE PRODUITS-STAR TANGENTIEL SUR UNE VARIETE DE POISSON REGULIERE .....	62
1- L'application $\Theta_\lambda^r$ .....	62
2- Existence de déformations formelles tangentielles de $(N, P)$ .....	66
3- Existence de produits-star tangentiels sur une variété de Poisson régulière .....	72

IV- UNE DEUXIEME DEMONSTRATION DE L'EXISTENCE DE PRODUITS-STAR TANGENTIEL SUR UNE VARIETE DE POISSON REGULIERE .....	73
1- Définitions et propriétés .....	73
2- L'algèbre $I(U)\theta^{x_0} \oplus N_\nu(U)$ .....	75
3- Les automorphismes principaux tangentiels .....	78
4- Existence de produits-star tangentiels sur une variété de Poisson régulière ....	83
V- PRODUIT-STAR COVARIANT SUR LES ORBITES D'UNE ALGEBRE DE LIE	87
1- Définitions .....	87
2- Existence de produits-star sur une variété symplectique .....	88
3- Paramétrisation des orbites de la représentation coadjointe .....	96
4- Existence de produit-star covariant .....	104
BIBLIOGRAPHIE .....	107

## INTRODUCTION

Soit  $V$  un espace vectoriel sur un corps  $\mathbb{K}$ . Existe-il des structures d'algèbre ou d'algèbre de Lie sur  $V$ ? Si oui ces structures sont-elles équivalentes? Si on munit l'ensemble des structures d'algèbre ou d'algèbre de Lie sur  $V$  d'une topologie, un point  $A_0$  donné de cet ensemble est-il rigide c'est à dire existe-t-il un voisinage de ce point qui ne contient que des structures équivalentes à  $A_0$ ? Une manière d'aborder ces questions est de partir d'une structure  $A_0$  sur  $V$  et d'essayer de la déformer, c'est à dire d'introduire l'espace  $V_\nu$  des séries formelles en  $\nu$  à coefficients dans  $V$  et de chercher l'existence et l'équivalence de structures du type

$$A_\nu = A_0 + \nu A_1 + \nu^2 A_2 + \dots$$

du même type que  $A_0$ . Cette idée a été développée par Gerstenhaber [11]. A. Nijenhuis et R. Richardson [26] ont posé des questions analogues en géométrie différentielle: Un espace topologique donné peut-il être muni d'une structure de variété différentiable?...

Rappelons très rapidement quelques définitions de cette théorie des déformations. Soit  $V$  un espace vectoriel sur corps  $\mathbb{K}$ . Considérons  $M(V) = \bigoplus_{p \geq -1} M^p(V)$  l'espace vectoriel gradué des applications multilinéaires sur  $V$  et notons par  $A(V) = \bigoplus_{p \geq -1} A^p(V)$  son image par l'opérateur d'antisymétrisation.  $M(V)$  et  $A(V)$  peuvent être munis de deux structures d'algèbre de Lie respectives  $\Delta$  et  $[\cdot, \cdot]$  telles que l'ensemble des solutions de l'équation de déformation

$$A \Delta A = 0 \quad A \in M^1(V)$$

(respectivement

$$[A, A] = 0 \quad A \in A^1(V))$$

soit l'ensemble des structures d'algèbres associatives sur  $V$  (respectivement l'ensemble des structures d'algèbres de Lie sur  $V$ ).

Considérons  $V_\nu$  l'espace des séries formelles à coefficient dans  $V$ .

### Définition

Une application multilinéaire sur  $V_\nu$  est dite formelle si et seulement si il existe une suite  $(A_r)_{r \geq 0}$  d'éléments de  $M^a(V)$  telle que  $\forall x_\nu^{(0)}, \dots, x_\nu^{(a)} \in V_\nu$ .

$$A_\nu(x_\nu^{(0)}, \dots, x_\nu^{(a)}) = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k \sum_{r+s_0+\dots+s_a=k} A_r(x_{s_0}^{(0)}, \dots, x_{s_a}^{(a)}).$$

### Définition

Une déformation formelle d'une structure d'algèbre ou d'algèbre de Lie  $A$  sur  $V$  est une structure d'algèbre associative ou de Lie  $A_\nu$  sur  $V_\nu$  telle que

- 1-  $A_\nu$  est formelle,
- 2-  $(A_\nu)_0 = A$ .

Nous ne nous posons pas ici le problème de la convergence de ces séries et nous resterons au niveau formel.

Dans [5] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz et D. Sternheimer ont proposé une formulation de la mécanique quantique utilisant cette théorie. En effet, la mécanique classique est bien décrite par l'algèbre des observables: les fonctions  $C^\infty$  sur l'espace des phases  $M$ .  $M$  est de façon naturelle une variété symplectique donc l'algèbre des observables est à la fois une algèbre associative et une algèbre de Lie pour le crochet de Poisson. Le problème de la quantification d'un système classique est celui de construire un modèle mathématique pour le système quantique satisfaisant le " principe de correspondance " c'est à dire tel que si l'on suppose le quantum d'action " nul " ou " infiniment petit ", on retrouve le système classique de départ. Dans [5] les auteurs traduisent cette problématique en utilisant la théorie des déformations. Plus précisément, ils traduisent le principe de correspondance en imposant que les espaces des observables classiques respectivement quantiques coïncident et que cet espace commun soit muni, dans le cas quantique, d'une structure d'algèbre associative formelle  $\star$  avec  $\hbar$  ou un multiple comme paramètre de déformation telle que  $\star$  soit une déformation du produit usuel et

$$\frac{1}{2\nu}(u \star v - v \star u)$$

soit une déformation du crochet de Poisson. Ils ont donc introduit la notion de produit-star, déformation formelle de la multiplication de  $C^\infty(M)$  pilotée par le crochet de Poisson. Depuis les questions d'existence et d'équivalence de produits-star sur les variétés symplectiques ont été largement étudiées. M. Gerstenhaber [11] avait montré que les problèmes de déformation sont liés à des problèmes de cohomologie. J. Vey, A. Lichnerowicz, O.M. Neroslavski et A.T. Vlassov ont montré l'existence de produits-star sur  $M$  si  $b_3(M) = 0$ . S.Gutt et A. Lichnerowicz ont déterminé les cohomologies de Chevalley et de Hochschild associées à ce problème [12]. P.B.A Lecomte et M. De Wilde ont repris ces calculs [14] et ont prouvé [15] l'existence d'une déformation formelle du crochet de Poisson solution d'une équation dans le sous-espace des éléments formels de  $A(V_\nu)$ . Ils ont déduit alors l'existence d'un produit-star sur une variété symplectique quelconque. Ils ont étudié à la fin de leur article les problèmes d'équivalences. En 1988 H. Omori, Y Maeda et A. Yoshioka ont proposé une deuxième démonstration de l'existence de produit-star en recollant des produits-star construits sur les ouverts d'un recouvrement de la variété [21]. Cette dernière démonstration a été simplifiée par P.B.A Lecomte et M. De Wilde dans [16]. Elle a été écrite d'une façon encore plus élémentaire par D. Arnal J. Ludwig et moi même dans [4].

Par ailleurs, à partir de l'étude des transformations canoniques, A. Lichnerowicz fut amené à introduire la notion de variété de Poisson [18] comme généralisation contravariante de celle de variété symplectique. Une structure de Poisson est définie sur une variété différentiable par un 2-tenseur contravariant antisymétrique  $\Lambda$  vérifiant  $[\Lambda, \Lambda] = 0$  au sens du crochet de Schouten [28]. Si le rang de  $\Lambda$  est constant la variété de Poisson sera dite régulière. Dans ce cas  $\Lambda$  détermine sur la variété un feuilletage symplectique. Dans [19] A. Lichnerowicz généralise la notion de produits-star sur les variétés de Poisson. Cette généralisation est possible et représente le cadre naturel de ces déformations car l'existence d'une structure d'algèbre de Lie locale sur l'espace des fonctions  $C^\infty$  sur une variété différentiable est équivalent à l'existence d'une structure de Poisson sur cette variété. Dans le même article il définit les produits-star tangentiels sur une variété de Poisson régulière. Ce sont les produits-star qui se restreignent aux feuilles symplectiques.

Signalons qu'un exemple fondamental de variété de Poisson est le dual  $\mathfrak{g}^*$  d'une algèbre de Lie, les feuilles symplectiques sont alors les orbites de la représentation coadjointe. Nos résultats permettent de prouver l'existence, sur l'ouvert dense des feuilles ~~de~~ de dimension maximale, d'un produit-star qui se restreint à chaque feuille, objet essentiel dans l'analyse harmonique par déformation. Puisqu'on connaît des exemples où aucun produit-star sur  $\mathfrak{g}^*$  entier peut se restreindre aux feuilles [33], ce résultat est dans ce cas le meilleur possible.

Enfinement, les méthodes de quantification géométrique sont très fructueuses lorsqu'elles sont appliquées à la construction de représentations unitaires de groupes de Lie  $G$ , groupes de symétrie du système. Les produits-star sont aussi très utilisés en analyse harmonique. Pour ce faire, on cherche à construire sur les orbites  $W$  de la représentation coadjointe de  $G$ , qui sont des variétés symplectiques, des produits-star covariants [2] c'est à dire tels que, pour tout  $X$  et  $Y$  dans l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  de  $G$ , on ait

$$\frac{1}{2\nu}(\tilde{X}_* \tilde{Y} - \tilde{Y}_* \tilde{X}) = [X, Y] = \{\tilde{X}, \tilde{Y}\}$$

où  $\tilde{X}$  est l'élément de  $C^\infty(W)$  défini par

$$\tilde{X}(\xi) = \langle \xi, X \rangle \quad \forall \xi \in W.$$

Dès qu'un tel produit-star est donné, on peut en effet construire une représentation de  $G$  [3]. La condition de covariance est un problème de déformation relative portant sur une sous-algèbre de Lie de dimension finie de  $C^\infty(W)$  qui n'est pas aisé à traduire en termes de condition sur des opérateurs différentiels.

Dans la première partie de ce travail, nous avons essayé de généraliser les idées et les techniques de P.B.A Lecomte et M. De Wilde [15] [16] concernant les variétés symplectiques pour établir deux démonstrations différentes de l'existence de produits-star tangentiels sur une variété de Poisson régulière. Dans la deuxième partie, j'ai détaillé les travaux fait par D. Arnal J. Ludwig et moi même dans [4]. Dans ce dernier article on propose une démonstration plus élémentaire de l'existence de produits-star sur une variété symplectique et on prouve l'existence de produits-star covariants sur une orbite de la représentation coadjointe d'un groupe de Lie connexe, si celle ci admet une polarisation réelle [7]. Plus précisément ce travail est divisé en cinq chapitres:

## Chapitre I

Dans les deux premiers paragraphes de ce chapitre j'ai rappelé quelques définitions et propositions de base de la théorie des déformations. La notion de symbole a été définie dans le paragraphe 3. Dans le paragraphe 4 on a défini les variétés de Poisson et les variétés de Poisson régulières et on a rappelé quelques propriétés dues à A. Lichnerowicz de ces dernières variétés, enfin on a défini la notion de tangentialité pour les applications multilinéaires d'un produit de fibrés vectoriels sur ces variétés dans un autre. Dans le paragraphe 5 on a essayé de rassembler les définitions et les propriétés des produits-star sur les variétés de Poisson.

## Chapitre II

Dans ce chapitre on a commencé par généraliser quelques résultats concernant l'équivalence des produits-star et des produits-star faibles au cas d'une variété de Poisson régulière. On a obtenu:

### **Théorème: II-1-1**

Tout produit-star faible tangentiel  $M_\nu$  est tangentielllement équivalent à un produit-star tangentiel  $M'_\nu$ .

Plus précisément il existe un élément tangentiel de  $(M^0(N))_\nu$ :

$$T_\nu = (1 + \nu^2 p(\nu^2))id$$

où  $p$  est une série formelle à valeur dans  $I$ :

$$p(\nu) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \nu^k \quad a_k \in I$$

tel que

$$M_\nu = T_\nu^*(M'_\nu).$$

Après avoir défini les outils  $\rho^*$ ,  $\mathbb{B}$  et  $\partial''$ , on établit quelques unes de leurs propriétés qui vont être utiles pour généraliser la première démonstration de l'existence de produits-star sur les variétés symplectiques. En particulier, on a

### **Proposition: I-4-3**

Les deux assertions suivantes sont vraies:

- (i)  $\wedge_{loc,t,nt}(\wedge^1(M), \wedge(M)) \subset \mathbb{B}$ ,
- (ii)  $A_{loc,t,nc}(N) = \rho^*(\wedge_{loc,t,nt}(\wedge^1(M), N))$ .

A la fin de ce chapitre on a calculé les trois premiers groupes de cohomologie de Chevalley tangentielle d'une variété de Poisson régulière:

### **Théorème: II-4-2**

Soit  $\Gamma$  une connexion linéaire sans torsion adaptée au feuilletage de  $(M, \Lambda)$ . Alors,

- (i) Tout 1-cocycle différentiel est 1-différentiel,
- (ii) Tout 2-cocycle  $C$  tangentiel et différentiel  $n - c$  s'écrit sous la forme:

$$C = aS_\Gamma^3 + C_1 + \partial B$$

où  $a \in I$ ,  $C_1$  est un 2-cocycle 1-différentiel tangentiel  $n - c$  et  $B \in A_{diff,t,nc}^0(N)$ .

### **Théorème: II-4-3**

Supposons que  $rg \Lambda = 2n > 2$ .

Soit  $\Gamma$  une connexion linéaire sans torsion adaptée au feuilletage. alors, tout 3-cocycle différentiel  $n - c$  et tangentiel  $C$  s'écrit sous la forme:

$$C = S_\Gamma^3 \wedge L_X + \lambda(T_\Gamma^2 - C'_1) + C_1 + \partial B.$$

où  $X \in L_t, \lambda \in I, C'_1$  est une 3-cochaine 1-différentielle tangentielle n-c,  $C_1$  est un 3-cocycle 1-différentiel tangentiel n-c et  $B$  est une 2-cochaine différentielle tangentielle n-c. Plus précisément, pour que  $\lambda T_\Gamma^2$  ( $\lambda \neq 0$ ) apparaisse dans la décomposition d'au moins un 3-cocycle différentiel tangentiel n-c, il faut et il suffit qu'il existe un  $\lambda$  dans  $I$  tel que  $\lambda \mu^*(\tau)$  soit un cobord.

### Chapitre III

A l'aide des outils introduits dans le chapitre II, on a pu construire une application  $\Theta_\Lambda^\tau$  qui a les mêmes propriétés que celle construite dans le cas symplectique [15] et qui laisse en plus stable le sous espace des éléments tangentiels de  $A_{loc,nc}(N)$ . On a donc pu énoncé comme dans le cas symplectique la proposition suivante

#### Proposition: III-2-1

L'équation

$$(\nu D_\nu + id)L_\nu + \frac{1}{2}\Theta_\Lambda^\tau(L_\nu, L_\nu) = 0. \quad (*)$$

admet une solution unique  $L_\nu$  telle que

$L_0 = P, L_1 = \rho^*(T) + \partial E$   $T \in Z_{loc,t,nt}^2(\wedge(\wedge^1(M), N), \partial'') \cap T_t(M), E \in A_{loc,t,nc}^0(N)$   
et  $L_2 = \frac{-1}{2}(D^\tau + id)\Theta_\Lambda^\tau(L_1, L_1) + aS_\Gamma^3, a \in I$ . De plus,

- (i) cette solution est une déformation formelle tangentielle de  $P$ ,
- (ii) si  $a = 0$  et  $E = 0$  cette déformation est 1-différentielle,
- (iii) si  $L_1 = 0$  alors  $\forall k \geq 1, L_{2k+1} = 0$ . De plus  $L'_\nu = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k L_{2k}$  est l'unique solution de l'équation:

$$(2\nu D_\nu + id)L'_\nu + \frac{1}{2}\Theta_\Lambda^\tau(L'_\nu, L'_\nu) = 0,$$

avec  $L'_0 = P, L'_1 = aS_\Gamma^3$ .

Comme dans le cas symplectique on a pu déduire de cette proposition deux propositions intéressantes:

#### Proposition: III-2-3

Toute déformation formelle tangentielle d'ordre  $k \geq 0$  de  $(N, P)$  s'étend à une déformation formelle tangentielle de  $(N, P)$ .

#### Proposition: III-3-1

Tout produit-star tangentiel ou produit-star faible tangentiel d'ordre  $2k$  ( $k \geq 2$ ) est prolongeable en un produit-star tangentiel ou un produit-star faible tangentiel.

Ceci achève la preuve de l'existence.

### Chapitre IV

La deuxième démonstration d'existence de produits-star sur une variété symplectique consiste à recoller des produits-star construits sur des ouverts  $U_\alpha$ , domaines de cartes de Darboux et formant un recouvrement contractile de la variété. Ce recollement est possible

si on montre l'existence d'une famille  $T_{\alpha\beta}$  d'isomorphismes entre ces produits-star vérifiant

$$T_{\alpha\beta}^{-1} = T_{\beta\alpha},$$

et

$$T_{\alpha\beta} \circ T_{\beta\gamma} \circ T_{\gamma\alpha} = id.$$

Dans ce chapitre on montre que cette méthode se généralise sans beaucoup de difficultés aux variétés de Poisson régulières et on obtient essentiellement:

**Théorème: IV-4-1**

Soit  $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$  un recouvrement contractile de  $M$  tel que les  $U_\alpha$  soient les domaines de cartes adaptées  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ . Alors, il existe une collection d'applications tangentielles:

$$T_\alpha : N_\nu(U_\alpha) \rightarrow N_\nu(U_\alpha),$$

telle que  $T_\alpha - id$  soit formel, différentiel, tangentiel et n-c et telle que

$$T_\alpha^* M_\alpha = T_\beta^* M_\beta,$$

sur chaque intersection non vide  $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$ .

Donc, si on définit  $M_\nu$  sur  $M$  par

$$M_\nu = T_\alpha^* M_\alpha \quad \text{sur } U_\alpha,$$

alors  $M_\nu$  sera un produit-star tangentiel sur  $(M, \Lambda)$ .

## Chapitre V

Dans le premier paragraphe de ce chapitre, on a rappelé la définition des produits-star covariants sur une orbite de la représentation coadjointe d'un groupe de Lie. Dans le deuxième paragraphe, on a proposé une autre démonstration de l'existence de produits-star sur une variété symplectique. En s'inspirant des travaux de N.V. Pedersen [27] et dans le but de l'utiliser dans la démonstration finale on a établi:

**Théorème: V-3-1 [4]**

Soit  $W = G/G_{\xi_0}$  une orbite de  $G$  dans  $\mathfrak{g}^*$  de dimension  $2n$ . Supposons qu'il existe une polarisation réelle  $\mathfrak{h}$  en  $\xi_0$ . Alors, il existe un recouvrement de  $W$  par des cartes de Darboux  $(U_i, \varphi_i)$  tel que pour tout  $X$  dans  $\mathfrak{g}$ ,  $\tilde{X}/U$  s'écrit sous la forme:

$$\tilde{X}/U(\xi) = \sum_{j=1}^n \alpha_j(q) p_j + \alpha_0(q).$$

où

$$\varphi_i(\xi) = (p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$$

et  $\alpha_0, \dots, \alpha_n$  sont des fonctions  $C^\infty$  en  $q$ .

De plus, ces ouverts apparaissent comme des ouverts d'un fibré affin  $L$  au dessus de  $G/H$ .

Si  $\mathfrak{h}$  satisfait la condition de Pukanszky, alors  $(\varphi_i(U_i))_i$  recouvre le fibré affiné  $L$  en entier.

Enfin, dans le dernier paragraphe de ce chapitre on a prouvé le théorème suivant.

**Théorème: V-4-1**

Soit  $G$  un groupe de Lie connexe et soit  $W = G/G_{\xi_0}$  une orbite de  $G$  dans  $\mathfrak{g}^*$  admettant une polarisation réelle  $\mathfrak{h}$  en  $\xi_0$ . Alors, il existe un produit-star covariant sur  $W$ .

## I- GENERALITES

Dans ce chapitre, on précise les notions et les notations que nous allons utiliser. Il s'agit de notions classiques dues à Gerstenhaber, Lichnerowicz, Lecomte et De Wilde, les notations sont essentiellement de Lecomte et De Wilde [15].

### 1- Algèbres de Lie graduées associées à un espace vectoriel

#### a- Algèbre de Lie graduée

##### Définition: I-1-1

Une algèbre graduée du type  $\mathbb{Z}$  est un espace vectoriel gradué du type  $\mathbb{Z}$ ,  $E = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} E^n$  muni d'une application bilinéaire:

$$\circ : E \times E \rightarrow E,$$

vérifiant:

$$\forall n, p \in \mathbb{Z}$$

$$E^n \circ E^p \subset E^{n+p}.$$

##### Définition: I-1-2

Une algèbre de Lie graduée du type  $\mathbb{Z}$  est une algèbre graduée du type  $\mathbb{Z}$ ,  $(E, \circ)$  vérifiant:

$$(i) \forall A \in E^a, \forall B \in E^b$$

$$A \circ B = (-1)^{ab+1} B \circ A.$$

$$(ii) \forall A \in E^a, \forall B \in E^b, \forall C \in E^c, \text{ on a}$$

$$(-1)^{ac} A \circ (B \circ C) + (-1)^{ba} B \circ (C \circ A) + (-1)^{cb} C \circ (A \circ B) = 0.$$

” Identité de Jacobi graduée ”.

##### Remarque: I-1-1

Cette définition n'est valable que dans le cas où  $E$  est un espace vectoriel sur un corps  $\mathbb{K}$  de caractéristique différente de 2 et 3. Si la caractéristique de  $\mathbb{K}$  est égale à 2, la définition sera changée et si elle est égale à 3 il faut ajouter à la définition:

$$(iii) \forall A \in E, \quad (A \circ A) \circ A = 0.$$

Dans la suite, on ne considère que des espaces vectoriels sur un corps de caractéristique différente de 2 et on note en général les éléments homogènes de  $E$  par des lettres majuscules et leur degré par les lettres minuscules correspondantes.

**Proposition: I-1-1**

Soit  $(E, \cdot)$  une algèbre graduée du type  $\mathbb{Z}$  vérifiant une des deux conditions suivantes.

(i)  $\cdot$  est associative.

(ii)  $\forall A \in E^a, \forall B \in E^b, \forall C \in E^c$ , on a

$$A.(B.C) - (A.B).C = (-1)^{bc}(A.(C.B) - (A.C).B).$$

Alors, l'espace vectoriel gradué  $E$  muni du produit  $[\cdot]$  défini par

$$[A, B] = A.B - (-1)^{ab}B.A, \quad \forall A \in E^a, \forall B \in E^b,$$

est une algèbre de Lie graduée.

**Démonstration**

Dans le cas (ii) l'identité de Jacobi graduée peut se déduire de la façon suivante.

La condition (ii) peut s'écrire sous la forme:

$$(-1)^{ac}(A.B).C - (-1)^{(a+b)c}(A.C).B = (-1)^{ac}A.[B, C],$$

de même on a

$$(-1)^{ba}(B.C).A - (-1)^{(b+c)a}(B.A).C = (-1)^{ba}B.[C, A],$$

$$(-1)^{cb}(C.A).B - (-1)^{(c+a)b}(C.B).A = (-1)^{cb}C.[A, B].$$

En considérant la somme de ces trois relations, on aura

$$\begin{aligned} & (-1)^{ac}[A, B].C + (-1)^{ab}[B, C].A + (-1)^{bc}[C, A].B \\ &= (-1)^{ac}A.[B, C] + (-1)^{ba}B.[C, A] + (-1)^{cb}C.[A, B]. \end{aligned}$$

Soit encore,

$$\begin{aligned} & (-1)^{ac}(A.[B, C] - (-1)^{a(c+b)}[B, C].A) + (-1)^{ba}(B.[C, A] - (-1)^{b(c+a)}[C, A].B) \\ & \quad + (-1)^{cb}(C.[A, B] - (-1)^{c(a+b)}[A, B].C) = 0. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Dans le cas où le corps est de caractéristique 3, si  $A$  est dans  $E^a$  avec  $a$  pair alors:

$$[A, A] = 0,$$

si non

$$[A, A] = 2A.A,$$

et la condition (ii) écrite pour  $A = B = C$  sera

$$[A, A] = 0.$$

## b- Algèbres de Lie graduées associées à un espace vectoriel

Soit  $V$  un espace vectoriel sur un corps  $\mathbb{K}$  de caractéristique 0. On note  $M^a(V)$  l'espace des applications  $(a+1)$ -linéaires de  $V$  dans  $V$ . L'opérateur d'antisymétrisation  $\alpha$  sur  $M^a(V)$  est défini par:

$$\forall A \in M^a(V), \forall x_0, \dots, x_a \in V,$$

$$\alpha(A)(x_0, \dots, x_a) = \frac{1}{(a+1)!} \sum_{\sigma \in P_{a+1}} \text{sign}\sigma A(x_{\sigma(0)}, \dots, x_{\sigma(a)}).$$

où  $P_{a+1}$  est le groupe des permutations de  $\{0, \dots, a\}$  et  $\text{sign}\sigma$  désigne la signature de  $\sigma$ . On note  $A^p(V)$  l'espace  $\alpha(M^p(V))$ .

Considérons les deux espaces vectoriels gradués:

$$M(V) = \bigoplus_{p \geq -1} M^p(V) \quad \text{et} \quad A(V) = \bigoplus_{p \geq -1} A^p(V).$$

Dans [26], Nijenhuis et Richardson ont pu munir les deux espaces  $M(V)$  et  $A(V)$  de structures d'algèbre de Lie respectives  $\Delta$  et  $[\cdot, \cdot]$  telles que l'ensemble des solutions de l'équation de déformation

$$A\Delta A = 0, \quad A \in M^1(V),$$

(respectivement,

$$[A, A] = 0, \quad A \in A^1(V),$$

soit l'ensemble des structures d'algèbres associatives sur  $V$  ( respectivement l'ensemble des structures d'algèbres de Lie sur  $V$ ).

L'application

$$\Delta : M(V) \times M(V) \rightarrow M(V)$$

est définie par

$$\forall A \in M^a(V), \forall B \in M^b(V)$$

$$A\Delta B = i(B)A + (-1)^{ab+1}i(A)B.$$

où

$$i(B)A = 0 \text{ si } A \in M^{-1}(V),$$

$$i(B)A(x_0, \dots, x_{a+b}) = \sum_{k=0}^a (-1)^{kb} A(x_0, \dots, B(x_k, \dots, x_{k+b}), \dots, x_{a+b}), \text{ si } A \in M^a(V) \text{ avec } a > -1 \text{ et } B \in M^b(V).$$

L'application:

$$[\cdot, \cdot] : A(V) \times A(V) \rightarrow A(V)$$

est définie par

$$\forall A \in A^a(V), \forall B \in A^b(V),$$

$$[A, B] = \frac{(a+b+1)!}{(a+1)!(b+1)!} \alpha(A\Delta B).$$

Le fait que  $(M(V), \Delta)$  soit une algèbre de Lie, et par suite que  $(A(V), [,])$  soit une algèbre de Lie, est une conséquence directe de la proposition I-1-1 et du lemme suivant

**Lemme: I-1-1**

$\forall A \in M^a(V), \forall B \in M^b(V), \forall C \in M^c(V)$ , on a

$$i(i(C)B)A - i(C)i(B)A = (-1)^{bc}(i(i(B)C)A - i(B)i(C)A).$$

**Proposition: I-1-2**

(i) Si  $\beta$  est une  $(b+1)$ -forme sur  $V$ ,  $\gamma$  est une  $(c+1)$ -forme sur  $V$  et  $x, y$  sont deux éléments de  $V$ , alors on a

$$[\beta \otimes x, \gamma \otimes y] = (\gamma \wedge i(y)\beta) \otimes x + (-1)^{cb+1}(\beta \wedge i(x)\gamma) \otimes y.$$

En particulier, si  $A \in A(V)$  et  $x \in V$ , alors  $[A, x]$  est le produit intérieur  $i(x)A$ .

(ii) Si  $A \in M^0(V) = A^0(V)$  et si  $B \in M^b(V)$  ou  $A^b(V)$ , alors on a  
 $\forall x_0, \dots, x_b \in V$ ,

$$A \circ B(x_0, \dots, x_b) = A(B(x_0, \dots, x_b)) - \sum_{i=0}^b B(x_0, \dots, A(x_i), \dots, x_b),$$

où  $\circ$  désigne  $\Delta$  ou  $[,]$ .

Il en résulte que  $A \rightarrow A \circ B$  est l'extension naturelle de l'action adjointe de  $A$  sur  $M^0(V)$ .

(iii)

\* Si  $A \in M^1(V)$ , on a

$$A\Delta A(x, y, z) = 2(A(A(x, y), z) - A(x, A(y, z)))$$

\* Si  $A \in A^1(V)$ , on a

$$[A, A](x, y, z) = 2(A(A(x, y), z) + A(A(y, z), x) + A(A(z, x), y)).$$

En particulier  $(V, A)$  est une algèbre associative si et seulement si  $A\Delta A = 0$  et une algèbre de Lie si et seulement si  $A \in A^1(V)$  et  $[A, A] = 0$ .

**c- Cohomologie associée à une algèbre de Lie graduée.**

**Proposition: I-1-3**

Soit  $(E, \circ)$  une algèbre graduée et soit  $F$  un idéal gradué de  $E$  ( i.e. un sous-espace gradué vérifiant  $E \circ F \subset F$  et  $F \circ E \subset F$ ). Notons  $\pi$  la projection canonique de  $E$  sur  $E/F$ . Alors, il existe une unique structure d'algèbre graduée sur  $E/F$  telle que  $\pi$  soit un homomorphisme d'algèbres graduées.

Si de plus  $(E, \circ)$  est une algèbre de Lie graduée, alors cette structure définit sur  $E/F$  une structure d'algèbre de Lie graduée.

**Proposition: I-1-4**

Soit  $(E, \circ)$  une algèbre de Lie graduée du type  $\mathbb{Z}$  et soit  $A \in E^1$  tel que l'on ait

$$A \circ A = 0.$$

Alors l'application,

$$\partial_A : E \rightarrow E$$

$$B \in E^b \mapsto (-1)^b A \circ B,$$

est homogène de degré 1 et vérifie

$$(i) \partial_A \circ \partial_A = 0,$$

$$(ii) \forall B \in E, \forall C \in E^c,$$

$$\partial_A(B \circ C) = (-1)^c (\partial_A B) \circ C + B \circ (\partial_A C).$$

Il en résulte que  $\circ$  induit, sur l'espace de cohomologie  $H(E, \partial_A) = \ker \partial_A / \text{im} \partial_A$ , une structure d'algèbre de Lie graduée.

**Démonstration**

Les deux égalités vérifiées par  $\partial_A$  sont des conséquences directes de l'identité de Jacobi graduée. De (ii) on déduit que  $\ker \partial_A = Z(E, \partial_A)$  est une sous-algèbre de Lie graduée de  $E$  et que  $\text{im} \partial_A = B(E, \partial_A)$  est un idéal de  $Z(E, \partial_A)$ . La deuxième partie de la proposition est donc une conséquence de la proposition I-1-3.

Si  $E = M(V)$  et  $A \in M^1(V)$  est tel que  $A \Delta A = 0$ , alors l'opérateur de cohomologie  $\partial_A$  est l'opérateur de cohomologie de Hochschild de l'algèbre associative  $(V, A)$ .

Si  $E = A(V)$  et  $A \in A^1(V)$  est tel que  $[A, A] = 0$ , alors l'opérateur de cohomologie  $\partial_A$  est l'opérateur de cohomologie de Chevalley de la représentation adjointe de l'algèbre de Lie  $(V, A)$ .

**2- Déformation formelle****a- Applications multilinéaires formelles**

Soit  $V$  un espace vectoriel. On note par  $V_\nu$  l'espace des séries formelles:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \nu^k x_k \quad (x_k \in V).$$

**Définition: I-2-1**

Un élément  $A_\nu$  de  $M^a(V_\nu)$  est dit formel si et seulement si il existe une suite  $(A_r)_{r \geq 0}$  d'éléments de  $M^a(V)$  telle que l'on ait

$$\forall x_\nu^{(0)}, \dots, x_\nu^{(a)} \in V_\nu,$$

$$A_\nu(x_\nu^{(0)}, \dots, x_\nu^{(a)}) = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k \sum_{r+s_0+\dots+s_a=k} A_r(x_{s_0}^{(0)}, \dots, x_{s_a}^{(a)}).$$

$A_r$  est appelé la composante d'ordre  $r$  de  $A_\nu$ . On notera dans la suite:

$$A_\nu = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k A_k$$

**Proposition: I-2-1**

Un élément  $A_\nu$  de  $M^a(V_\nu)$  est formel si et seulement si on a

$$\nu A_\nu(x_\nu^{(0)}, \dots, x_\nu^{(a)}) = A_\nu(x_\nu^{(0)}, \dots, \nu x_\nu^{(i)}, \dots, x_\nu^{(a)}),$$

pour tout  $i \leq a$  et  $x_\nu^{(0)}, \dots, x_\nu^{(a)}$  dans  $V_\nu$ .

**Démonstration**

Il est clair que la condition est nécessaire.

Soit  $A_\nu$  un élément de  $M^a(V_\nu)$  vérifiant la condition de la proposition. Pour tout  $r \in \mathbb{N}$  on définit l'élément  $A_r$  de  $M^a(V)$  par

$$\forall x_0, \dots, x_a \in V,$$

$$A_r(x_0, \dots, x_a) = (A_\nu(x_0, \dots, x_a))_r,$$

(la composante d'ordre  $r$  de la série  $A_\nu(x_0, \dots, x_a)$ ).

Soit  $k$  un élément de  $\mathbb{N}$  et soit  $x_\nu^{(0)}, \dots, x_\nu^{(a)}$   $(a+1)$ -éléments de  $V_\nu$  alors on a

$$(A_\nu(x_\nu^{(0)}, \dots, x_\nu^{(a)}))_k = (A_\nu(\sum_{s_0=0}^k \nu^{s_0} x_{s_0}^{(0)}, \dots, \sum_{s_a=0}^k \nu^{s_a} x_{s_a}^{(a)}))_k = \sum_{r+s_0+\dots+s_a=k} A_r(x_{s_0}^{(0)}, \dots, x_{s_a}^{(a)}).$$

**Corollaire: I-2-1**

Si  $A_\nu, A_\nu^{(0)}, \dots, A_\nu^{(a)}$  sont des éléments respectifs de  $M^a(V_\nu), M^{p_0}(V_\nu), \dots, M^{p_a}(V_\nu)$  ( $a, p_0, \dots, p_a \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$ ) formels, alors l'élément de  $M^{p_0+\dots+p_a}(V_\nu)$

$$A_\nu(A_\nu^{(0)}(\dots), \dots, A_\nu^{(a)}(\dots))$$

est aussi formel.

**Proposition: I-2-2**

Si  $T_\nu \in M^0(V_\nu)$  est une application formelle, alors l'application  $id + \nu T_\nu$  est bijective et on a

$$(id + \nu T_\nu)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \nu^k T_\nu^k.$$

En particulier, si la première composante  $T_0$  d'un élément formel  $T_\nu$  de  $M^0(V_\nu)$  est bijective, alors l'application  $T_\nu$  est bijective, et si  $T_0^{-1} T_\nu = id + \nu T'_\nu$  alors on a

$$T_\nu^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \nu^k T'_\nu{}^k T_0^{-1}.$$

**Remarque: I-2-1**

On peut considérer la série formelle

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \nu^k T_\nu^k,$$

car pour  $x_\nu$  dans  $V_\nu$ , la  $i^{\text{eme}}$  composante de  $\nu^k T_\nu^k(x_\nu)$  est nulle pour  $k > i$  et par suite celle de

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \nu^k T_\nu^k(x_\nu)$$

est égale à

$$\sum_{s=0}^i (-1)^s (T_\nu^s(x_\nu))_{i-s}.$$

**Démonstration**

Soit  $T_\nu$  comme dans la première partie de la proposition. Pour déduire le résultat il suffit de remarquer que puisque  $T_\nu$  est formelle, pour tout  $x_\nu$  dans  $V_\nu$ , la  $i^{\text{eme}}$  composante de

$$(1 + \nu T_\nu) \left( \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \nu^k T_\nu^k(x_\nu) \right)$$

est égale à celle de

$$(1 + \nu T_\nu) \left( \sum_{k=0}^i (-1)^k \nu^k T_\nu^k(x_\nu) \right),$$

qui est égale à celle de  $x_\nu$ .

La deuxième partie de la proposition est simple à vérifier.

D'après la définition, l'ensemble des éléments formels de  $M^p(V_\nu)$  ou de  $A^p(V_\nu)$  s'identifie naturellement à  $(M^p(V))_\nu$  ou  $(A^p(V))_\nu$ .

**Proposition: I-2-3**

$(M(V))_\nu$  et  $(A(V))_\nu$  sont des sous-algèbres de Lie graduées respectives de  $(M(V_\nu), \Delta)$  et  $(A(V_\nu), [,])$ .  
De plus, si

$$A_\nu = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k A_k$$

est un élément de  $(M(V))_\nu$  ou de  $(A(V))_\nu$  et si  $\circ$  désigne  $\Delta$  ou  $[,]$ , alors on a

$$(A_\nu \circ A_\nu)_k = \sum_{i+j=k} A_i \circ A_j.$$

**Démonstration**

D'après le corollaire I-2-1  $(M(V))_\nu$  et  $(A(V))_\nu$  sont stables par  $\Delta$  et  $[,]$ .

**b- Déformation formelle****Définition: I-2-2**

Soit  $(V, A)$  une algèbre associative ou de Lie.

(i) Une déformation formelle  $A_\nu$  de  $(V, A)$  est une structure d'algèbre associative ou de Lie sur  $V_\nu$  telle que

1-  $A_\nu$  est formelle,

2-  $(A_\nu)_0 = A$ .

(ii) Une déformation formelle d'ordre  $k$  ( $k \in \mathbb{N}$ )  $A_\nu$  de  $(V, A)$  est un élément formel de  $M(V_\nu)$  ou de  $A(V_\nu)$  tel que

$$(A_\nu \Delta A_\nu)_l = 0 \quad \forall l \leq k.$$

ou

$$([A_\nu, A_\nu])_l = 0 \quad \forall l \leq k.$$

**Remarque: I-2-2**

Une déformation d'ordre  $k$  de  $(V, A)$  induit sur  $V_\nu / \nu^{k+1} V_\nu$  une structure d'algèbre associative ou de Lie.

**Proposition: I-2-4**

Soit  $(V, A_0)$  une algèbre associative ou de Lie. Une application formelle bilinéaire

$$A_\nu = \sum_{i=0}^{\infty} \nu^i A_i$$

est une déformation formelle d'ordre  $k$  de  $A_0$  si et seulement si on a

$$2\partial_{A_0} A_i = J_i \quad \forall i \leq k.$$

où

$$J_i = \sum_{r+s=i, r,s \neq 0} A_r \Delta A_s. \text{ ou } J_i = \sum_{r+s=i, r,s \neq 0} [A_r, A_s].$$

De plus dans ce cas on a

$$\partial_{A_0} J_{k+1} = 0.$$

### Démonstration

On notera par  $\circ$  le produit  $\Delta$  ou  $[,]$ . Sachant que pour tout  $B$  dans  $M^1(V)$  ou  $A^1(V)$  on a

$$\partial_{A_0} B = -A_0 \circ B,$$

on déduit facilement que

$$\forall i \leq k \quad (A_\nu \circ A_\nu)_i = J_i - 2\partial_{A_0} A_i,$$

d'où le résultat.

D'autre part d'après l'identité de Jacobi graduée pour toute application formelle  $A_\nu$  on a

$$A_\nu \circ (A_\nu \circ A_\nu) = 0$$

Or, si  $A_\nu$  est une déformation formelle d'ordre  $k$  de  $A_0$ , la composante d'ordre  $i \leq k$  de  $(A_\nu \circ A_\nu)$  est nulle et donc la composante d'ordre  $k+1$  de

$$A_\nu \circ (A_\nu \circ A_\nu)$$

est égale à

$$2A_0 \circ \left( \sum_{i+j=k+1} A_i \circ A_j \right) = 2A_0 \circ J_{k+1} = 2\partial_{A_0} J_{k+1}.$$

Car d'après l'identité de Jacobi graduée écrite pour  $A_0, A_0, A_{k+1}$  on a

$$A_0 \circ (A_0 \circ A_{k+1}) = A_0 \circ (A_{k+1} \circ A_0) = 0.$$

Supposons qu'on ait construit une déformation formelle d'ordre  $k$

$$A_\nu = \sum_{i=0}^{\infty} \nu^i A_i$$

d'un élément  $A_0$  vérifiant

$$A_0 \circ A_0 = 0.$$

On considère

$$J_{k+1} = \sum_{i+j=k+1, i,j \neq 0} A_i \circ A_j.$$

D'après la proposition précédente,  $J_{k+1}$  est un cocycle pour  $\partial_{A_0}$ . Si ce cocycle est un cobord on peut choisir  $A_{k+1}$  dans  $M^1(V)$  ou  $A^1(V)$  tel que

$$2\partial_{A_0}A_{k+1} = J_{k+1}.$$

Et donc  $A_\nu + \nu^{k+1}A_{k+1}$  sera une déformation formelle d'ordre  $k+1$  de  $A_0$ . Il en résulte donc que l'obstruction au prolongement d'une déformation à l'ordre  $k+1$  est la classe de cohomologie de  $J_{k+1}$  pour  $\partial_{A_0}$ . Remarquons que  $A_{k+1}$  est déterminé à un cocycle près et que le fait que  $J_{k+2}$  soit un cobord ou non (donc la possibilité de prolonger cette déformation à l'ordre  $k+2$  ou non) peut dépendre du choix de  $A_{k+1}$ .

### c- Equivalence entre déformations formelles

Soit  $V$  un espace vectoriel. On note  $G_\nu(V)$  le groupe formé par les éléments de  $(M^0(V))_\nu$  de premier terme égal à l'identité

$$G_\nu(V) = \{T_\nu \in (M^0(V))_\nu / (T_\nu)_0 = id\}.$$

Pour  $T_\nu$  dans  $G_\nu(V)$  et  $A_\nu$  dans  $(M^a(V))_\nu$ , on note  $T_\nu^*A_\nu$  l'action naturelle de  $G_\nu(V)$  sur  $(M(V))_\nu$ :

$$\forall x_\nu^{(0)}, \dots, x_\nu^{(a)} \in V_\nu$$

$$T_\nu^*A_\nu(x_\nu^{(0)}, \dots, x_\nu^{(a)}) = T_\nu A_\nu(T_\nu^{-1}(x_\nu^{(0)}), \dots, T_\nu^{-1}(x_\nu^{(a)})).$$

Remarquons que

$$(T_\nu^*A_\nu)_0 = (A_\nu)_0.$$

#### Définition: I-2-3

Soient  $A_\nu$  et  $A'_\nu$  deux déformations formelles d'une algèbre associative ou de Lie  $(V, A_0)$ .

(i)  $A_\nu$  et  $A'_\nu$  sont dites équivalentes si et seulement s'il existe  $T_\nu$  dans  $G_\nu(V)$  tel que

$$A_\nu = T_\nu^*A'_\nu$$

(ii)  $A_\nu$  et  $A'_\nu$  sont dites équivalentes jusqu'à l'ordre  $k$  pour un certain  $k$  dans  $\mathbb{N}$  si et seulement s'il existe  $T_\nu$  dans  $G_\nu(V)$  tel que

$$(A_\nu)_i = (T_\nu^*A'_\nu)_i \quad \forall i \leq k.$$

**Proposition: I-2-5**

Soient

$$A_\nu = \sum_{i=0}^{k+1} \nu^i A_i \quad \text{et} \quad A'_\nu = \sum_{i=0}^{k+1} \nu^i A'_i$$

deux déformations formelles d'une algèbre associative ou de Lie  $(V, A_0)$  équivalentes jusqu'à un ordre  $k$ . Il existe donc  $T_\nu$  dans  $G_\nu(V)$  tel que

$$(A_\nu)_i = (T_\nu^* A'_\nu)_i \quad \forall i \leq k.$$

Posons

$$A''_{k+1} = (T_\nu^* A'_\nu)_{k+1}.$$

Alors, si  $A_{k+1} - A''_{k+1}$  est un cobord pour  $\partial_{A_0}$ ,  $A_\nu$  et  $A'_\nu$  sont équivalentes jusqu'à l'ordre  $k+1$ .

**Démonstration**Supposons qu'il existe  $B$  dans  $M^0(V)$  tel que

$$A_{k+1} - A''_{k+1} = \partial_{A_0} B.$$

D'après la proposition I-2-2 on a

$$(1 + \nu^{k+1} B)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \nu^{(k+1)i} B^i.$$

Il est clair que

$$((1 + \nu^{k+1} B)^* A_\nu)_i = (A_\nu)_i \quad \forall i \leq k,$$

et que

$$((1 + \nu^{k+1} B)^* A_\nu)_{k+1} = A_{k+1} + B \circ A_0,$$

(o désigne  $\Delta$  ou  $[, ]$ ).

On a donc

$$(1 + \nu^{k+1} B)^* A_\nu = A_\nu + \nu^{k+1} B \circ A_0$$

jusqu'à l'ordre  $(k+1)$ .

Mais on a

$$B \circ A_0 = -\partial_{A_0} B = A''_{k+1} - A_{k+1}$$

et par suite

$$(1 + \nu^{k+1} B)^* A_\nu = A'_\nu$$

jusqu'à l'ordre  $(k+1)$ .**Remarque: I-2-3** $A_{k+1} - A''_{k+1}$  est un cocycle car on a

$$A_\nu \circ A_\nu - T_\nu^*(A'_\nu) \circ T_\nu^*(A'_\nu) = 0 \quad (*).$$

Sachant que

$$\forall i \leq k \quad (A_\nu)_i = (T_\nu^*(A'_\nu))_i$$

la composante d'ordre  $k + 1$  du premier membre de (\*) est égale à

$$\partial_{A_0}(A_{k+1} - A''_{k+1}).$$

### 3- Connexions et opérateurs différentiels

Soit  $M$  une variété différentiable connexe à base dénombrable de dimension  $n$ . On désigne par  $N$  l'espace des fonctions  $C^\infty$  sur  $M$ . On note  $H(M)$  l'espace des champs de vecteur sur  $M$  et par  $\wedge^p(M)$  l'espace des  $p$ -formes sur  $M$ . On pose

$$\wedge(M) = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} \wedge^p(M).$$

#### a- Applications locales et symboles

Soient  $E^1, \dots, E^p$  et  $F$ ,  $(p + 1)$ -fibrés vectoriels sur  $M$  de fibres respectifs  $E_0^1, \dots, E_0^p$  et  $F_0$ . On note  $\Gamma(E^i)$  (respectivement  $\Gamma(F)$ ) l'espace des sections  $C^\infty$  sur  $E^i$  (respectivement sur  $F$ ).

#### Définition: I-3-1 [31]

Une application multilinéaire

$$C : \Gamma(E^1) \times \dots \times \Gamma(E^p) \rightarrow \Gamma(F)$$

est dite locale si et seulement si on a

$$\forall s_i \in \Gamma(E^i)$$

$$\text{Supp } C(s_1, \dots, s_p) \subset \bigcap_{i=1}^p \text{Supp } s_i,$$

où  $\text{Supp } s$  désigne le support de  $s$ .

#### Théorème: I-3-1 (Peetre) [31]

Si

$$C : \Gamma(E^1) \times \dots \times \Gamma(E^p) \rightarrow \Gamma(F)$$

est une application multilinéaire locale, alors  $C$  est localement un opérateur multidifférentiel:

Si  $(U, \varphi)$  est une carte de  $M$  avec  $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$  et  $U$  relativement compact, et si on se donne une trivialisations de  $E^1, \dots, E^p$  et  $F$  sur  $U$ , alors:

$$\forall s_i \in \Gamma(E^i)$$

$$C(s_1, \dots, s_p)/x = \sum A_{\alpha_1, \dots, \alpha_p, x} (D_x^{\alpha_1} \bar{s}_1, \dots, D_x^{\alpha_p} \bar{s}_p),$$

où  $\bar{s}_i$  est l'expression locale de  $s_i$  et  $A_{\alpha_1, \dots, \alpha_p, x}$  est une application  $p$ -linéaire de  $E_0^1 \times \dots \times E_0^p$  dans  $F_0$ . De plus cette somme est finie.

**Définition: I-3-2 [31]**

Une application locale  $C$  est dite  $k$ -différentielle si et seulement si pour tout ouvert relativement compact  $U$ , l'opérateur différentiel associé à  $C$  ne fait apparaître que des dérivés d'ordre au plus  $k$ . Elle sera dite différentielle si elle est  $k$ -différentielle pour un certain  $k \in \mathbb{N}$ .

Si  $C$  est locale on définit l'ordre total  $r_C$  de  $C$ , sur un certain  $U$ , comme étant le maximum des  $|\alpha_1| + \dots + |\alpha_p|$  tel que

$$x \mapsto A_{\alpha_1, \dots, \alpha_p, x}$$

n'est pas identiquement nulle sur  $U$ .

Il est bien connu [31][15] que si  $C$  est locale et d'ordre total  $r_C$  sur un certain  $U$ , l'application définie par

$$\forall x \in U$$

$$\sigma_{C,x}(\xi_1, \dots, \xi_p) = \sum_{|\alpha_1| + \dots + |\alpha_p| = r_C} (\xi_1)^{\alpha_1} \dots (\xi_p)^{\alpha_p} A_{\alpha_1, \dots, \alpha_p, x} \quad \xi_i \in T_x^* M.$$

est intrinsèque et appelée le symbole total de  $C$ .

On définit de la même façon l'ordre lexicographique  $\bar{r}_C$  d'une application locale  $C$  comme étant le plus grand dans l'ordre lexicographique des  $p$ -uplets  $(|\alpha_1|, \dots, |\alpha_p|)$  vérifiant

$$|\alpha_1| + \dots + |\alpha_p| = r_C,$$

et

$$x \mapsto A_{\alpha_1, \dots, \alpha_p, x}$$

n'est pas identiquement nulle sur  $U$ .

Le symbole lexicographique de  $C$ ,  $\bar{\sigma}_C$  est défini par

$$\forall x \in U, \forall \xi_1, \dots, \xi_p \in T_x^* M$$

$$\bar{\sigma}_{C,x}(\xi_1, \dots, \xi_p) = \sum_{(|\alpha_1|, \dots, |\alpha_p|) = \bar{r}_C} (\xi_1)^{\alpha_1} \dots (\xi_p)^{\alpha_p} A_{\alpha_1, \dots, \alpha_p, x}.$$

Dans la suite, lorsqu'il n'y aura aucune ambiguïté, on omettra d'indiquer le point en lequel le symbole est considéré.

**Remarques: I-3-1**

- (i) pour les applications différentielles, le symbole est défini globalement sur la variété  $M$ .
- (ii) Une application  $p$ -linéaire  $k$ -différentielle est d'ordre total au plus  $pk$ .

### Exemples

(i) Soit  $T$  un  $p$ -tenseur contravariant non nul sur  $M$ , définissons l'application  $C$  de  $N \times \dots \times N$  dans  $N$  par

$$\forall u_1, \dots, u_p \in N$$

$$C(u_1, \dots, u_p) = T(du_1, \dots, du_p).$$

Alors  $C$  est 1-différentielle d'ordre total  $p$  et on a

$$\forall \xi_1, \dots, \xi_p \in \Lambda^1(M),$$

$$\sigma_C(\xi_1, \dots, \xi_p) = T(\xi_1, \dots, \xi_p).$$

De même on a

$$\bar{r}_C = (1, \dots, 1) \text{ et } \bar{\sigma}_C = \sigma_C.$$

(ii) La différentielle extérieure est un opérateur 1-différentiel d'ordre total 1 et de symbole défini par

$$\forall \xi \in \Lambda^1(M), \forall \omega \in \Lambda^p(M),$$

$$\sigma_d(\xi)(\omega) = \xi \wedge \omega.$$

(iii) Le crochet de Lie de l'algèbre des champs de vecteurs de  $M$  est un opérateur 1-différentiel de  $H(M) \times H(M) \rightarrow H(M)$  d'ordre total 1 et de symbole défini par

$$\forall \xi_1, \xi_2 \in \Lambda^1(M), \forall X_1, X_2 \in H(M),$$

$$\sigma_{[\cdot, \cdot]}(\xi_1, \xi_2)(X_1, X_2) = \langle X_1, \xi_2 \rangle X_2 - \langle X_2, \xi_1 \rangle X_1.$$

### Cas particulier

Considérons le cas  $E^1 = \dots = E^p = F = M \times \mathbb{R}$ ,  $M \times \mathbb{R}$  étant le fibré trivial. Dans ce cas une section  $C^\infty$  est un élément de  $N$ . De plus, dans ce cas  $E_0^1 = \dots = E_0^p = F_0 = \mathbb{R}$  et donc  $A_{\alpha_1, \dots, \alpha_p, x}$  sera définie par la donnée de  $A_{\alpha_1, \dots, \alpha_p, x}(1, \dots, 1)$  et on peut donc l'identifier à un élément de  $\mathbb{R}$ ,  $\sigma_C$  sera alors un polynôme en  $\xi_1, \dots, \xi_p$  à coefficients dans  $N$ .

On étend la notion de symbole comme suit Si  $r$  est plus petit ou égal à l'ordre total d'une application locale  $C$ , on définit le symbole d'ordre  $r$  sur un ouvert  $U$  comme précédemment si non le symbole d'ordre  $r$  sera l'application identiquement nulle. De la même façon on définit le symbole lexicographique d'ordre  $\bar{r}$ .

### Proposition: I-3-1

Soit  $C$  une application  $p$ -linéaire locale et soient  $A_1, \dots, A_p$ ,  $p$  applications  $a_i$ -linéaires locales telles que la composition

$$C(A_1(\dots), \dots, A_p(\dots))$$

ait un sens. Alors, le symbole d'ordre  $r_C + r_{A_1} + \dots + r_{A_p}$  de l'application déduite de cette composition est

$$\sigma_C(\xi_1 + \dots + \xi_{a_1}, \dots, \xi_{a_1 + \dots + a_{p-1} + 1} + \dots + \xi_{a_1 + \dots + a_p})$$

$$= \prod_{i=1}^p \sigma_{A_i}(\xi_{a_1 + \dots + a_{i-1} + 1}, \dots, \xi_{a_1 + \dots + a_i}).$$

le symbole lexicographique est obtenu par la même formule en remplaçant  $\sigma_C$  et  $\sigma_{A_i}$  par le symbole lexicographique correspondant.

## b- Connexions sur $M$

Soit  $\Gamma$  une connexion sur  $M$ . On note par  $\nabla$  la dérivé covariante associée à  $\Gamma$ . On désigne par  $V_p(M)$  (respectivement  $V^p(M)$ ) l'espace des  $p$ -tenseurs covariants sur  $M$  (respectivement l'espace des  $p$ -tenseurs contravariants sur  $M$ ).

On définit

$$\nabla : V_p(M) \rightarrow V_{p+1}(M)$$

par

$$\nabla T(X_1, \dots, X_{p+1}) = \frac{1}{p+1} \sum_{i=1}^{p+1} \nabla_{X_i} T(X_1, \dots, \hat{i}, \dots, X_{p+1}),$$

où

$$\nabla_X T(X_1, \dots, X_p) = X(T(X_1, \dots, X_p)) - \sum_{i=1}^p T(X_1, \dots, \nabla_X X_i, \dots, X_p).$$

Il est clair que  $\nabla^p$  envoie  $N$  sur  $V_p(M)$  et que son symbole est donné par

$$(\xi_1, \dots, \xi_p) \mapsto \xi_1 \vee \dots \vee \xi_p$$

où  $\vee$  désigne le tenseur de complète symétrisation.

Il en résulte qu'un élément  $k$ -différentiel  $C$  de  $M^0(N)$  s'écrit d'une façon unique sous la forme

$$C(u) = \sum_{p=0}^{\infty} \langle T_p, \nabla^p u \rangle, \quad \forall u \in N,$$

avec  $T_p \in V^p(M)$ .

De même, un élément  $C$  différentiel de  $M^p(N)$  s'écrit sous la forme

$$C(u_0, \dots, u_p) = \sum_{k_0, \dots, k_p} \langle T_{k_0, \dots, k_p}, \nabla^{k_0} u_0 \otimes \dots \otimes \nabla^{k_p} u_p \rangle$$

où  $T_{k_0, \dots, k_p}$  est un  $k_0 + \dots + k_p$  - tenseur contravariant symétrique par rapport à tous les arguments  $(k_0 + \dots + k_i) + j$   $j \in \{1, \dots, k_{i+1}\}$  ([15] [19]).

Dans la suite, on notera par  $M_{loc}(N)$ ,  $M_{diff}(N)$ ,  $M_{nc}(N)$ ,  $M_{loc,nc}(N)$ , ... ou  $A_{loc}(N)$ ,  $A_{diff}(N)$ ,  $A_{nc}(N)$ ,  $A_{loc,nc}(N)$ , ... les sous espaces de  $M(N)$  ou  $A(N)$  des éléments locaux, différentiels, nuls sur les constantes, locaux et nuls sur les constantes, ...

## 4- Variété de Poisson et opérateurs tangentiels sur une variété de Poisson régulière

### a- Variété de Poisson

Soit  $M$  une variété différentiable de dimension  $m$ . Soient  $E$  et  $E'$  deux espaces vectoriels. On note par  $\wedge^r(E, E')$  l'espace des applications  $r$ -linéaires alternées de  $E$  dans  $E'$  et on pose

$$\wedge(E, E') = \bigoplus_{r \geq 0} \wedge^r(E, E').$$

On définit l'application

$$\rho^* : \wedge(\wedge^1(M), N) \rightarrow A_{nc}(N),$$

par:

$$\forall T \in \wedge^r(\wedge^1(M), N),$$

$$\rho^*(T)(u_1, \dots, u_r) = T(du_1, \dots, du_r), \quad \forall u_1, \dots, u_r \in N.$$

Il n'est pas difficile de vérifier que le sous espace gradué de  $A_{nc}(N)$  formé des éléments qui sont images des tenseurs contravariants sur  $M$ , i.e les éléments de  $A_{loc,nc}(N)$  vérifiant  $\forall u_0, u_1, \dots, u_r \in N$ ,

$$C(u_0 u_1, u_2, \dots, u_r) = u_0 C(u_1, u_2, \dots, u_r) + u_1 C(u_0, u_2, \dots, u_r)$$

est une sous algèbre de  $(A(N), [, ])$ . De même, il n'est pas difficile de voir que la restriction de  $\rho^*$  au sous espace des tenseurs contravariants sur  $M$  est un isomorphisme. Il en résulte que  $\rho^*$  induit sur le sous espace gradué des tenseurs contravariants sur  $M$  une structure d'algèbre de Lie graduée qu'on note toujours par  $[, ]$ . On retrouve ainsi le crochet de Schouten sur les tenseurs [28]. En effet si  $A$  est un  $r$ -tenseur et  $B$  est un  $s$ -tenseur, alors  $[A, B]$  est un  $(r + s + 1)$ -tenseur qui peut être défini de la manière suivante  
Pour toute  $(r + s + 1)$  forme fermée  $\beta$  on a

$$i([A, B])\beta = (-1)^{s(r+1)} i(A) di(B)\beta + (-1)^r i(B) di(A)\beta,$$

(voir [19]).

#### Définition: I-4-1

Une structure de Poisson est définie sur  $M$  par la donnée d'un 2-tenseur contravariant  $\Lambda$  vérifiant

$$[\Lambda, \Lambda] = 0.$$

Elle est dite régulière si  $\Lambda$  est de rang constant  $2n$ . Dans ce cas  $q = m - 2n$  est appelé la codimension de la variété de Poisson.

La donnée d'une structure de Poisson  $\Lambda$  sur  $M$  induit sur  $N$  une structure d'algèbre de Lie définie par

$\forall u, v \in N$ ,

$$\{u, v\} = P(u, v) = \Lambda(du, dv).$$

Inversement, une structure d'algèbre de Lie locale

$$\{, \} : N \times N \rightarrow N,$$

vérifiant

$$\{uv, w\} = u\{v, w\} + v\{u, w\} \quad \forall u, v, w \in N,$$

définit sur  $M$  une structure de Poisson.

Les variétés de Poisson régulières ont été introduites par A. Lichnerowicz dans [18] comme généralisation naturelle des variétés symplectiques. En effet, considérons une variété symplectique  $(M, F)$ ,  $F$  étant une 2-forme fermée de rang  $2n$ . On note

$$\mu : TM \rightarrow T^*M,$$

l'isomorphisme de fibrés vectoriels défini par:

$$\mu(X) = -i(X)F, \quad \forall X \in TM.$$

On note  $\rho$  l'isomorphisme inverse de  $\mu$ .

Les isomorphismes  $\mu$  et  $\rho$  s'étendent aux fibrés tensoriels. Si on note par  $\Lambda$  le 2-tenseur contravariant image de  $F$  par  $\rho$  alors on a:

$$[\Lambda, \Lambda] = 0.$$

Une variété de Poisson régulière  $(M, \Lambda)$  admet un feuilletage [19] en variétés symplectiques de dimension  $2n$ , les feuilles étant les variétés intégrales maximales. Ces variétés possèdent la propriété énoncée dans le théorème suivante:

**Théorème: I-4-1 [19]**

*Soit  $(M, \Lambda)$  une variété de Poisson régulière. Alors  $M$  admet des atlas de cartes canoniques ou naturelles dans lesquelles les seules composantes non nulles de  $\Lambda$  sont:*

$$\Lambda^{i, i+n} = -\Lambda^{i+n, i} = 1, \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

*Ces cartes seront dites de Darboux ou adaptées au feuilletage (ou adaptées tout court lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté).*

**Exemple de variété de Poisson.**

Un exemple simple de variété de Poisson non régulière est fourni par la représentation coadjointe d'une algèbre de Lie: Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie de dimension finie sur  $\mathbb{R}$ , on note par  $\mathfrak{g}^*$  l'espace vectoriel dual de  $\mathfrak{g}$ . Considérons le 2-tenseur  $\Lambda$  de  $\mathfrak{g}^*$  défini par  $\forall \xi \in \mathfrak{g}^*, \forall X, Y \in \mathfrak{g}$ ,

$$\Lambda_\xi(X, Y) = \langle \xi, [X, Y] \rangle$$

On vérifie facilement que, compte tenu de l'identité de Jacobi sur  $\mathfrak{g}$ , le 2-tenseur  $\Lambda$  détermine sur  $\mathfrak{g}^*$  une structure de Poisson dont les feuilles symplectiques sont les orbites de la représentation de  $G$  dans  $\mathfrak{g}$ .

La donnée d'une structure de Poisson  $\Lambda$  sur  $M$  permet de définir un morphisme

$$\rho : \wedge^1(M) \rightarrow H(M),$$

$$\omega \mapsto i(\omega)\Lambda.$$

Ce morphisme s'étend en une application de  $\wedge(H(M), \wedge(M))$  dans  $\wedge(\wedge^1(M), \wedge(M))$ .

Dans la suite on posera

$$\mu^* = \rho^* \circ \rho',$$

où  $\rho'$  est la restriction de  $\rho$  à  $\wedge(H(M), N)$ .

**Définition: I-4-2**

Soit  $u$  un élément de  $N$ . On appelle champ de vecteur hamiltonien associé à  $u$ , le champ

$$H_u = \rho(du) = [\Lambda, u].$$

**b- Connexions sur une variété de Poisson régulière.**

Soit  $(M, \Lambda)$  une variété de Poisson régulière. Soit  $\Gamma$  une connexion sans torsion sur  $M$ . Considérons la 1-forme de connexion associée à  $\Gamma$ :

$$\omega_j^i = \sum_{k=1}^m \Gamma_{j,k}^i dx^k.$$

**Définition: I-4-3 [19]**

$\Gamma$  est dite adaptée au feuilletage si et seulement si dans toute carte adaptée on a

$$\Gamma_{i,k}^a = 0,$$

pour tout  $a > 2n$ ,  $i \leq 2n$  et  $k \in \{1, \dots, m\}$ .

Soit  $\nabla$  la dérivation covariante associée à  $\Gamma$ .

**Définition: I-4-4**

$\Gamma$  est dite de Poisson si et seulement si:

$$\nabla\Lambda = 0.$$

Les deux propositions suivantes ont été établies par A.lichnerowicz dans [19].

**Proposition: I-4-1**

Toute connexion de Poisson est adaptée au feuilletage.

**Proposition: I-4-2**

Sur toute variété de Poisson régulière, il existe des connexions de Poisson. Par restriction à une feuille, une telle connexion définit une connexion symplectique sur la feuille.

**c- Opérateurs tangentiels sur une variété de Poisson régulière**

Soit  $(M, \Lambda)$  une variété de Poisson régulière et soit  $\Gamma$  une connexion adaptée au feuilletage. Notons par  $\nabla$  la dérivation covariante associée à  $\Gamma$ . Soit  $C$  une application  $r$ -linéaire de  $N$  dans  $N$ , alors d'après (I-3) pour tout ouvert relativement compact, domaine d'une carte adaptée  $U$ , il existe une famille de tenseurs contravariants  $T_{k_1, \dots, k_r}$  symétrique par rapport aux indices  $(k_1 + \dots + k_i) + j \quad j \in \{1, \dots, k_{i+1}\}$  telle que:

$$C(u_1, \dots, u_r) = \sum_{k_1, \dots, k_r} \langle T_{k_1, \dots, k_r}, \nabla^{k_1} u_1 \otimes \dots \otimes \nabla^{k_r} u_r \rangle .$$

**Définition: I-4-5 [19]**

$C$  est dite tangentielle si et seulement si dans tout ouvert relativement compact domaine d'une carte adaptée  $U$ , les tenseurs  $T_{k_1, \dots, k_r}$  sont tangentiels, c'est-à-dire sont des sections convenables des puissances tensorielles de  $T\mathcal{F}$ .  $T\mathcal{F}$  étant le sous-fibré vectoriel de  $TM$  défini par les vecteurs tangents aux feuilles.

Cette définition est indépendante du choix de la connexion adaptée au feuilletage  $\Gamma$ , comme le prouve le lemme suivant

**Lemme: I-4-1**

Soit  $\Gamma$  une connexion adaptée au feuilletage, alors dans toute carte adaptée

$(U, x^1, \dots, x^m)$ , les composantes tangentielles  $\nabla_{i_1, \dots, i_r} u$  de la dérivé covariante d'un élément  $u$  dans  $N$  sur  $U$  ne s'exprime qu'en termes des dérivés partielles tangentielles:

$$\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial}{\partial x^{i_h}} u \quad h \leq r, \quad i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, 2n\}.$$

Soient  $E^1, \dots, E^r$  et  $F$   $(r+1)$ -fibrés vectoriels sur  $M$  de fibres respectifs  $E_0^1, \dots, E_0^r$  et  $F_0$  admettant des bases respectives  $(e_i^1)_{i \in I^1}, \dots, (e_i^r)_{i \in I^r}$  et  $(f_j)_{j \in J}$ .

Soit  $C$  une application  $r$ -linéaire locale de  $\Gamma(E^1) \times \dots \times \Gamma(E^r)$  dans  $\Gamma(F)$ .

Soit  $U$  un ouvert relativement compact domaine d'une carte adaptée, alors il existe une famille d'applications  $r$ -linéaires  $(C_j)_{j \in J}$  de  $\Gamma(E^1) \times \dots \times \Gamma(E^r)$  dans  $N$  telle que l'on ait

$$\forall s_i \in \Gamma(E^i),$$

$$C(s_1, \dots, s_r)/U = \sum_{finie} C_j(s_1, \dots, s_r) f_j.$$

Donc si pour tout  $i_1 \in I^1, \dots, i_r \in I^r$  et  $u_1, \dots, u_r \in N$  on pose

$$C_j^{i_1, \dots, i_r}(u_1, \dots, u_r) = C_j(u_1 e_{i_1}^1, \dots, u_r e_{i_r}^r),$$

alors on a

$$C(s_1, \dots, s_r) = \sum_{\text{finie } i_1 \in I_0^1, \dots, i_r \in I_0^r} C_j^{i_1, \dots, i_r}(s_1^{i_1}, \dots, s_r^{i_r}) f_j,$$

où

$$s_k = \sum_{i_k \in I_0^k} s_k^{i_k} e_{i_k}^k.$$

**Définition: I-4-6**

$C$  est dite *tangentielle* si et seulement si pour tout  $j \in J$  et  $i_1 \in I^1, \dots, i_r \in I^r$ , l'application  $C_j^{i_1, \dots, i_r}$  est tangentielle.

**Remarque: I-4-1**

Il est évident que cette définition ne dépend pas du choix des bases des fibres.

**5- Produit-star et déformations de l'algèbre de Lie de Poisson sur une variété de Poisson**

**a- Définitions et propriétés**

Soit  $(M, \Lambda)$  une variété de Poisson ( $\Lambda \neq 0$ ). L'espace  $N$  des fonctions  $C^\infty$  sur  $M$  est muni d'une structure d'algèbre associative définie par le produit habituel  $m$  et d'une structure d'algèbre de Lie définie par le crochet de Poisson  $P$ . On note par  $I$  le centre de l'algèbre de Poisson  $(N, P)$ : les éléments de  $I$  sont les fonctions  $f$  satisfaisant à

$$\{u, f\} = 0 \quad \forall u \in N,$$

ce qui peut s'écrire

$$H_u f = 0 \quad \forall u \in N,$$

où  $H_u$  est le champ de vecteur hamiltonien associé à  $u$  (cf définition I-4-2). On les appellera donc les fonctions invariantes de  $N$  ou les invariants.

Sachant que  $m\Delta P = 0$  ( $P$  est un cocycle pour la cohomologie de Hochschild de  $(N, m)$ ) la définition suivante a un sens.

**Définition: I-5-1**

Un produit-star faible est une déformation formelle  $M_\nu$  de  $m$  de la forme

$$M_\nu = m + \nu P + \sum_{k \geq 2} \nu^k M_k$$

*vérifiant*

$$(i) M_k(u, v) = (-1)^k M_k(v, u), \quad \forall u, v \in N,$$

(ii)  $M_k$  est local,

(iii)  $M_k$  est nulle sur les constantes ( n-c) pour  $k$  impair.

Il sera dit produit-star si et seulement si  $M_k$  est n-c pour tout  $k$  plus grand ou égal à

2.

Dans ce paragraphe, on se propose de généraliser quelques résultats proposés dans [15] dans le cas symplectique concernant les produits-star faibles.

**Proposition: I-5-1**

Si  $M_\nu$  est un produit-star faible, alors on a

$$M_{2k} = M'_{2k} + a_k m \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

où

$$a_k \in I \text{ et } M'_{2k} \in M^1_{loc,nc}(N).$$

La démonstration de cette proposition utilise le lemme suivant

**Lemme I-5-1**

Soit  $A$  un élément de  $M^1_{loc}(N)$  alors:

(i)  $m\Delta A$  est n-c si et seulement si  $A = A' + am$  avec  $a \in N$  et  $A' \in M^1_{loc,nc}(N)$ .

(ii)  $P\Delta A = 0$  si et seulement si il existe  $a \in I$  tel que  $A = am$ .

**Démonstration du lemme I-5-1**

(i) On a

$$\forall u, v, w \in N$$

$$m\Delta A(u, v, w) = A(u, v)w - uA(v, w) + A(uv, w) - A(u, vw) \quad (*)$$

Si  $A = A' + am$  alors on a

$$m\Delta A(u, v, w) = A'(u, v)w - uA'(v, w) + A'(uv, w) - A'(u, vw)$$

et donc si  $A'$  est n-c, il en est de même de  $m\Delta A$ .

Inversement si  $m\Delta A$  est n-c on définit  $A'$  par

$$A'(u, v) = A(u, v) - uvA(1, 1).$$

En prenant  $u = v = 1$  dans (\*), on aura

$$A(1, 1)w - A(1, w) = 0,$$

et donc

$$A'(1, w) = 0.$$

De même, en prenant  $v = w = 1$  dans (\*) on aura

$$A'(u, 1) = 0.$$

(ii) Il s'agit de montrer que si  $P\Delta A = 0$ , alors  $A$  est d'ordre zéro et donc de la forme

$$A = am$$

avec  $a \in N$ .

Supposons que  $A$  est d'ordre  $(r_0, r_1)$  sur un ouvert relativement compact quelconque de  $M$  et notons par  $\sigma$  le symbole lexicographique d'ordre  $(r_0, r_1)$  de  $A$  sur cet ouvert. D'après la proposition I-3-1, le symbole lexicographique de  $P\Delta A$  est le terme de plus haut degré dans l'ordre lexicographique en  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  de la quantité suivante

$$\begin{aligned} & \Lambda(\xi_1 + \xi_2, \xi_3)\sigma(\xi_1, \xi_2) - \Lambda(\xi_1, \xi_2 + \xi_3)\sigma(\xi_2, \xi_3) \\ & + \Lambda(\xi_1, \xi_2)\sigma(\xi_1 + \xi_2, \xi_3) - \Lambda(\xi_2, \xi_3)\sigma(\xi_1, \xi_2 + \xi_3) \\ = & \Lambda(\xi_1, \xi_3)\sigma(\xi_1, \xi_2) + \Lambda(\xi_1, \xi_2)\sigma(\xi_1 + \xi_2, \xi_3) + \Lambda(\xi_2, \xi_3)\sigma(\xi_1, \xi_2) \\ & - \Lambda(\xi_1, \xi_2 + \xi_3)\sigma(\xi_2, \xi_3) - \Lambda(\xi_2, \xi_3)\sigma(\xi_1, \xi_2 + \xi_3). \end{aligned}$$

\* Supposons que  $r_1 > 1$ , alors ce terme est

$$\Lambda(\xi_1, \xi_3)\sigma(\xi_1, \xi_2),$$

on aura donc  $\sigma = 0$  ce qui est absurde.

\* Supposons que  $r_1 = 1$ , alors ce terme est

$$\Lambda(\xi_1, \xi_3)\sigma(\xi_1, \xi_2) + \Lambda(\xi_1, \xi_2)\sigma(\xi_1, \xi_3).$$

En prenant  $\xi_2 = \xi_3$  on aura

$$\Lambda(\xi_1, \xi_2)\sigma(\xi_1, \xi_2) = 0,$$

ce qui n'est pas possible.

On a donc nécessairement  $r_1 = 0$ .

\* Supposons que  $r_0 \geq 1$  alors ce terme est

$$\Lambda(\xi_1, \xi_2)\sigma(\xi_1, \xi_3),$$

ce qui est absurde aussi.

On a donc  $(r_0, r_1) = (0, 0)$  et par suite il existe  $a \in N$  tel que:

$$A = am.$$

D'autre part pour tout  $u, v$  dans  $N$  on a

$$P\Delta A(u, v, 1) = 0,$$

et donc

$$P(u, av) = aP(u, v) \quad \forall u, v \in N,$$

et par suite:

$$a \in I.$$

### Démonstration de la proposition I-5-1

Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Supposons que pour tout  $p < k$  il existe  $a_p \in I$  tel que

$$M_{2p} = M'_{2p} + a_p m,$$

avec

$$M'_{2p} \in M_{loc,nc}^1(N).$$

Du fait que la composante d'ordre  $2k$  de  $M_\nu \Delta M_\nu$  est nulle, on déduit que  $m \Delta M_{2k}$  est n-c et donc d'après le I-5-1, il existe  $a_k$  dans  $N$  tel que

$$M_{2k} = M'_{2k} + a_k m,$$

avec

$$M'_{2k} \in M_{loc,nc}^1(N).$$

D'autre part en calculant la composante d'ordre  $(2k+1)$  de  $M_\nu \Delta M_\nu$  on déduit que  $P \Delta M_{2k}$  est n-c. On aura donc

$$(P \Delta a_k m)(u, v, 1) = P(u, a_k v) - a_k P(u, v) = 0 \quad \forall u, v \in N,$$

et par suite

$$a_k \in I.$$

Soit

$$M_\nu = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k M_k$$

un produit-star faible, alors,

$$P_\nu = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k M_{2k+1}$$

est une déformation formelle de  $(N, P)$ . En effet, puisque la composante d'ordre  $2k+2$  de  $M_\nu \Delta M_\nu$  est nulle, on a

$$\sum_{i+j=k} (M_{2i+1} \Delta M_{2j+1}) + \sum_{i+j=k+1} (M_{2i} \Delta M_{2j}) = 0.$$

Il suffit alors de remarquer, que si  $A$  et  $B$  sont des éléments symétriques de  $M^1(N)$ , on a

$$\alpha(A \Delta B) = 0.$$

On a aussi:

$$P_\nu = \frac{1}{\lambda} \alpha(M_\lambda) / \nu = \lambda^2,$$

car

$$\alpha(M_{2i+1}) = M_{2i+1},$$

et

$$\alpha(M_{2i}) = 0.$$

On dira que  $P_\nu$  dérive de  $M_\nu$ .

## b- Cohomologie de Hochschild de $(N, m)$

On note par  $\delta$  l'opérateur de cohomologie de Hochschild correspondant à  $m$ . On a donc

$$\forall A \in M^a(N),$$

$$\delta(A) = (-1)^a m \Delta A.$$

Il est simple de voir que les sous-espaces  $M_{loc}(N)$ ,  $M_{loc,nc}(N)$ ,  $M_{diff}(N)$  et  $M_{diff,nc}(N)$  sont stables par  $\delta$ . On note par  $\tilde{H}_{loc}(N)$ ,  $\tilde{H}_{loc,nc}(N)$ ,  $\tilde{H}_{diff}(N)$  et  $\tilde{H}_{diff,nc}(N)$  les groupes de cohomologie de Hochschild associés à ces espaces vectoriels.

La description de ces groupes est due à J. Vey [19]. En effet il a obtenu le théorème suivant

### **Théorème: I-5-1**

L'espace  $\tilde{H}_{diff}^p(N)$  est isomorphe à l'espace des  $p$ -tenseurs contravariants alternés sur  $M$ .

### **Remarque: I-5-1**

La cohomologie de Hochschild est définie sur une variété différentiable quelconque, mais si cette variété est paracompacte le théorème sera vrai pour  $\tilde{H}_{loc}^p(N)$  aussi.

Les deux propositions suivantes permettent de déduire le symbole de  $A$  à partir de celui de  $\delta A$  lorsque  $A$  est dans  $M_{diff}^0(N)$  ou  $M_{diff}^1(N)$ .

### **Proposition: I-5-2 [6] [15]**

Soit  $A$  un élément de  $M_{diff}^0(N)$ , si  $\delta A$  est d'ordre  $s > 1$  alors  $A$  est d'ordre  $s$  et on a

$$\sigma_A(\xi) = \frac{-1}{s} \bar{\sigma}_{\delta A}(\xi, \xi).$$

### **Démonstration**

Supposons que l'ordre de  $A$  est  $s > 1$ , alors le symbole d'ordre  $s$  de  $\delta A$  est défini par

$$\sigma_{\delta A}(\xi_1, \xi_2) = \sigma_A(\xi_1) - \sigma_A(\xi_1 + \xi_2) + \sigma_A(\xi_2) \quad (*).$$

Il est clair qu'en développant  $\sigma_A(\xi_1 + \xi_2)$ , les termes d'ordre  $(s, 0)$  et  $(0, s)$  se simplifient et que le symbole lexicographique de  $\delta A$  d'ordre  $(s-1, 1)$  est égal à

$$\frac{d}{dt} \sigma_A(\xi_1 + t\xi_2) /_{t=0} \quad (**).$$

Si l'ordre de  $\delta A$  est plus petit que  $s$  alors de (\*) on déduit que  $\sigma_A = 0$  ce qui est absurde. D'autre part, en prenant  $\xi_1 = \xi_2$  dans (\*\*) on aura

$$\sigma_A(\xi) = \frac{-1}{s} \bar{\sigma}_{\delta A}(\xi, \xi).$$

**Proposition: I-5-3 [6] [15]**

Soit  $A$  un élément de  $M_{diff,nc}^1(N)$  d'ordre  $(r_0, r_1)$ , alors,

(i) Si  $r_1 > 1$ ,  $\delta A$  est d'ordre au plus  $(r_0, r_1 - 1, 1)$ . De plus si  $\bar{\sigma}_{\delta A}$  est le symbole de  $\delta A$  correspondant à cet ordre, on a

$$\bar{\sigma}_A(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{r_1} \bar{\sigma}_{\delta A}(\xi_1, \xi_2, \xi_2).$$

(ii) Si  $r_1 = 1$  et si  $\delta A$  est d'ordre plus petit que  $(r_0 - 1, 1, 1)$ , il existe un élément  $T$  de  $M_{diff,nc}^0(N)$  tel que  $A - \delta A$  soit d'ordre plus petit que  $(r_0, 1)$ .

**Démonstration**

Le symbole d'ordre  $r_0 + r_1$  de  $\delta A$  est donné par

$$\sigma_A(\xi_2, \xi_3) - \sigma_A(\xi_1 + \xi_2, \xi_3) + \sigma_A(\xi_1, \xi_2 + \xi_3) - \sigma_A(\xi_1, \xi_2).$$

Si  $r_1 > 1$ , en développant  $\sigma_A(\xi_1, \xi_2 + \xi_3)$ , on déduit que les termes d'ordre  $(r_0, r_1, 0)$  se simplifient et que les termes d'ordre  $(r_0, r_1 - 1, 1)$  sont

$$\frac{d}{dt} \bar{\sigma}_A(\xi_1, \xi_2 + t\xi_3) /_{t=0}.$$

En prenant  $\xi_2 = \xi_3$  on déduit la première partie de proposition.

Si  $r_1 = 1$ , on vérifie facilement que les termes d'ordre  $(r_0, 1, 0)$  se simplifient de même ceux d'ordre  $(r_0, 0, 1)$  et que le symbole d'ordre  $(r_0 - 1, 1, 1)$  est donné par

$$-\frac{d}{dt} \bar{\sigma}_A(\xi_1 + t\xi_2, \xi_3) /_{t=0} + \frac{d}{dt} D(\xi_1, \xi_2 + t\xi_3) /_{t=0} \quad (*)$$

où  $D$  est le terme d'ordre  $(r_0 - 1, 2)$  de  $\sigma_A$ . Il est facile de voir que

$$\frac{d}{dt} D(\xi_1, \xi_2 + t\xi_3) /_{t=0}$$

est symétrique en  $\xi_2, \xi_3$ .

Supposons que  $\delta A$  soit d'ordre plus petit que  $(r_0 - 1, 1, 1)$  alors (\*) sera égal à zéro et par suite

$$-\frac{d}{dt} \bar{\sigma}_A(\xi_1 + t\xi_2, \xi_3) /_{t=0}$$

sera aussi symétrique en  $\xi_2, \xi_3$ .

Soit  $T$  un élément de  $M_{diff,nc}^0(N)$  de symbole

$$\sigma_A(\xi_1, \xi_1).$$

Le symbole de  $\delta T$  est égal à

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt}\sigma_A(\xi_1 + t\xi_2, \xi_1 + t\xi_2)/_{t=0} &= -\frac{d}{dt}\sigma_A(\xi_1 + t\xi_2, \xi_3)/_{t=0/\xi_3=\xi_1} - \sigma_A(\xi_1, \xi_2) \\ &= -\frac{d}{dt}\sigma_A(\xi_1 + t\xi_1, \xi_2)/_{t=0} - \sigma_A(\xi_1, \xi_2) = -(r_0 + 1)\sigma_A(\xi_1, \xi_2). \end{aligned}$$

Il en résulte que  $A + \frac{1}{r_0+1}\delta T$  est d'ordre plus petit que  $(r_0, 1)$ .

### c- L'invariant cohomologique universel d'une structure de Poisson

Soit  $(M, \Lambda)$  une variété de Poisson. L'opérateur de cohomologie de Chevalley  $\partial$  correspondant à la représentation adjointe de  $(N, P)$  est défini par

$\forall A \in A^a(N)$ ,

$$\partial A = (-1)^a [P, A].$$

Cet opérateur laisse stable les sous-espaces de  $A(N)$   $A_{loc}(N)$ ,  $A_{loc,nc}(N)$ ,  $A_{diff}(N)$  et  $A_{diff,nc}(N)$ .

Soit  $\Gamma$  une connexion linéaire sans torsion de  $M$ . Considérons la 2-cochaine  $S_\Gamma^3$  de  $(N, P)$ , définie localement, dans toute carte  $(U, \varphi)$  ( $\varphi = (x^1, \dots, x^m)$ ) par:

$\forall u, v \in N$

$$S_\Gamma^3(u, v)/_U = -\Lambda^{k,l}(L(H_u)\Gamma)_{s,k}^r(L(H_v)\Gamma)_{r,l}^s$$

où  $L$  désigne la dérivation de Lie.

En utilisant les propriétés de la dérivation de Lie, un calcul direct nous prouve que  $S_\Gamma^3$  est un cocycle de Chevalley.

Dans [19] A. Lichnerowicz a prouvé que ce cocycle est un invariant de la structure de Poisson de la variété et qu'il n'est jamais exact. Voici ses résultats proposés à ce propos avec leur preuves sans calcul explicite.

#### Proposition: I-5-4

La 2-classe  $\beta$  de cohomologie, élément de  $H_{diff}^2(N)$  (deuxième groupe de cohomologie de Chevalley associé à  $A_{diff}(N)$ ), définie par le 2-cocycle  $S_\Gamma^3$  est indépendante du choix de la connexion  $\Gamma$ .

#### Démonstration

Soient  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  deux connexions sans torsion et notons  $T$  le 2-tenseur définissant leur différence. Alors un calcul direct prouve que

$$S_{\Gamma'}^3 - S_\Gamma^3 = \partial(A_{T,\Gamma} + \frac{1}{2}B_T)$$

où  $A_{T,\Gamma}$  et  $B_T$  sont les deux éléments de  $A_{diff}^0(N)$  définis par

$$A_{T,\Gamma}(u)/_U = -\Lambda^{k,l}T_{s,k}^r(L(H_u)\Gamma)_{r,l}^s.$$

$$B_T(u)/U = -\Lambda^{k,l} T_{s,k}^r (L(H_u)T)_{r,l}^s,$$

### Théorème I-5-1

Sur toute variété de Poisson  $(M, \Lambda)$ , la 2-classe  $\beta$  de cohomologie, l'élément de  $H_{diff}^2(N)$  défini par les 2-cocycles  $S_\Gamma^3$ , est un invariant toujours  $\neq 0$  de la structure de Poisson  $\Lambda$ .

### Démonstration

Supposons tout d'abord que  $(M, \Lambda)$  est régulière et que  $\Gamma$  est une connexion de Poisson. Considérons une carte adaptée  $(U, \varphi)$  ( $\varphi = (x^1, \dots, x^m)$ ). Puisque  $\Gamma_{i,k}^a = 0$  pour  $a > 2n$ , on a

$$L(H_u)\Gamma_{i,k}^a = 0 \quad \forall a > 2n, \forall u \in N.$$

Il en résulte que  $S_\Gamma^3$  peut s'écrire sur  $U$ ,

$$S_\Gamma^3(u, v)/U = -\Lambda^{k,l} (L(H_u)\Gamma)_{j,k}^i (L(H_v)\Gamma)_{i,l}^j \quad k, l, i, j \leq 2n,$$

et ne fait intervenir que les connexions symplectiques sur les feuilles induites par  $\Gamma$ . D'autre part d'après [12], on peut écrire

$$S_\Gamma^3(u, v)/U = \Lambda^{k_1, l_1} \Lambda^{k_2, l_2} \Lambda^{k_3, l_3} (L(H_u)\Gamma)_{k_1, k_2, k_3} (L(H_v)\Gamma)_{l_1, l_2, l_3},$$

où  $L(H_u)\Gamma$  est vu comme un 3-tenseur complètement symétrique.

Dans ce cas  $S_\Gamma^3$  est tangentielle de type  $(3, 3)$ .

Dans [18] A. Lichnerowicz a établi que si  $A$  est un endomorphisme local de  $N$  tel que  $\partial A$  soit une 2-cochaîne  $s$ -différentielle,  $A$  est nécessairement un opérateur différentiel d'ordre  $s$ . Par suite si  $S_\Gamma^3$  était exact, il serait le cobord d'un opérateur différentiel d'ordre 3, or un tel cobord n'est jamais de type  $(3, 3)$ .

Si  $(M, \Lambda)$  est non régulière, on désigne par  $2n$  le rang maximum de  $\Lambda$ . Soient  $U$  et  $U'$  deux domaines de  $M$  tels que  $\bar{U} \subset U'$  et  $\Lambda^n$  est partout  $\neq 0$  sur  $U'$ . La restriction  $\Lambda_{\bar{U}}$  de  $\Lambda$  à  $\bar{U}$  définit sur  $\bar{U}$  une structure de variété de Poisson régulière.

Supposons que  $S_\Gamma^3$  est exact, il existe alors un opérateur différentiel  $A$  sur  $N$  tel que  $S_\Gamma^3 = \partial A$ .

Si  $u$  et  $v$  sont deux fonctions  $C^\infty$  sur  $\bar{U}$ , alors on peut les prolonger sur  $M$  et on a

$$S_\Gamma^3(u, v)/\bar{U} = (\{A(u), v\} + \{u, A(v)\} - A(\{u, v\}))/\bar{U} \quad (*).$$

Si  $A_{\bar{U}}$  est la restriction de  $A$  à  $\bar{U}$ , et  $\Gamma_{\bar{U}}$  la restriction de  $\Gamma$  à  $\bar{U}$  alors d'après (\*) on a

$$S_{\Gamma_{\bar{U}}}^3 = \partial A_{\bar{U}} \quad \text{sur } \bar{U},$$

ce qui contredit la première partie de la démonstration.

## II- PRODUITS-STAR TANGENTIELS ET DEFORMATIONS TANGENTIELLES DE L'ALGÈBRE DE LIE DE POISSON SUR UNE VARIÉTÉ DE POISSON RÉGULIÈRE

Soit  $(M, \Lambda)$  une variété de Poisson régulière de dimension  $m$ . On suppose que les feuilles sont de dimension  $2n$  et de codimension  $q$ , on a alors  $m = 2n + q$ . Les notations sont celles de I. On indexera les sous-ensembles formés par les éléments tangentiels par la lettre  $t$ .

### 1- Définitions et propriétés

#### Définition: II-1-1

Une application formelle sur  $N$ ,

$$A_\nu = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k A_k$$

est dite tangentielle si et seulement si pour tout  $k \geq 0$ ,  $A_k$  est tangentielle.

En particulier, puisque la multiplication  $m$  et le crochet de Poisson  $P$  sont tangentiels, un produit-star faible

$$m + \nu P + \sum_{k \geq 2} \nu^k M_k$$

est dit tangentiel si et seulement si pour tout  $k \geq 2$ ,  $M_k$  est tangentielle, et une déformation formelle de  $P$

$$P + \sum_{k \geq 1} \nu^k P_k$$

est dite tangentielle si et seulement si pour tout  $k \geq 1$ ,  $P_k$  est tangentielle.

#### Définition: II-1-2

Soit  $A_0$  une application 2-linéaire de  $N$  dans  $N$  tangentielle définissant sur  $N$  une structure d'algèbre associative ou de Lie.

Deux déformations formelles tangentielles équivalentes de  $A_0$ ,  $A_\nu$  et  $A'_\nu$  sont dites tangentiellement équivalentes si et seulement si l'opérateur d'équivalence  $T_\nu$  est tangentiel.

#### Théorème: II-1-1

Tout produit-star faible tangentiel  $M_\nu$  est tangentiellement équivalent à un produit-star tangentiel  $M'_\nu$ .

Plus précisément, il existe un élément tangentiel de  $(M^0(N))_\nu$

$$T_\nu = (1 + \nu^2 p(\nu^2))id,$$

où  $p$  est une série formelle à valeurs dans  $I$

$$p(\nu) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \nu^k \quad a_k \in I,$$

tel que

$$M_\nu = T_\nu^*(M'_\nu).$$

### Démonstration

Soit  $M_\nu = \sum_{i=0}^{\infty} \nu^i M_i$  un produit-star faible tangentiel et soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Supposons qu'il existe un produit-star tangentiel d'ordre  $2(k-1)$ ,  $\sum_{i=0}^{2(k-1)} \nu^i M'_i$  et  $(k-1)$  éléments de  $I$   $b_1, \dots, b_{k-1}$  tels que la relation

$$M_\nu = \left(1 + \sum_{i=1}^{k-1} b_i \nu^{2i}\right) \sum_{i=0}^{2(k-1)} \nu^i M'_i \quad (*)$$

soit vraie jusqu'à l'ordre  $2(k-1)$ .

D'après la proposition I-5-1, il existe  $c_k \in I$  et  $A_k \in M_{loc,nc}^1(N)$  tels que

$$M_{2k} = c_k m + A_k.$$

Remarquons que, puisque  $M_{2k}$  et  $m$  sont tangentielles,  $A_k$  est nécessairement tangentielle.

Posons

$$M'_{2k-1} = M_{2k-1} - \sum_{i=1}^{k-1} b_i M'_{2k-2i-1},$$

$$M'_{2k} = A_k - \sum_{i=1}^{k-1} b_i M'_{2k-2i},$$

$$b_k = c_k.$$

$M'_{2k-1}$  et  $M'_{2k}$  sont manifestement tangentielles. On vérifie sans beaucoup de difficulté que

$$\sum_{i=1}^{2k} \nu^i M'_i$$

est un produit-star tangentiel d'ordre  $2k$  et que la relation

$$M_\nu = \left(1 + \sum_{i=1}^k b_i \nu^{2i}\right) \sum_{i=0}^{2k} \nu^i M'_i$$

est vraie jusqu'à l'ordre  $2k$ . Sachant que la relation (\*) est évidente pour  $k=2$  on a prouvé l'existence d'un produit-star tangentiel  $M_\nu$  et d'une suite d'éléments de  $I$   $(b_k)_{k \geq 1}$  tels que:

$$M_\nu = \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \nu^{2i}\right) M'_\nu.$$

Notons  $(1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \nu^{2i})$  l'inverse de  $(1 + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \nu^{2i})$ .

Sachant que  $I$  est une sous-algèbre de  $(N, m)$  et que  $a_1 = -b_1$  et pour tout  $k \geq 2$ ,  $a_k$  s'exprime d'une façon polynômiale en  $a_i$  ( $i < k$ ) et  $b_i$  ( $i \leq k$ ), on déduit que  $a_k$  est dans  $I$  pour tout  $k \geq 1$ . Posons

$$T_\nu = (1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \nu^{2i}) id.$$

En remarquant que  $M'_\nu$  est tangentiel, donc  $I$ -bilinéaire, on voit facilement que

$$M_\nu = T_\nu^*(M'_\nu).$$

## 2- Cohomologie De Hochschild tangentielle de $(N, m)$

$m$  étant tangentiel, l'opérateur de Hochschild laisse stable le sous-espace des éléments tangentiels de  $M_{loc}(N)$ .

Pour étudier l'existence des produits-star Tangentiels sur les variétés de Poisson régulières on aura besoin d'une version tangentielle du théorème de Vey en dimensions 2 et 3. A. Lichnerowicz a étudié cette question dans [19] et il a démontré d'une façon explicite la proposition suivante

### Proposition: II-2-1

Pour  $k = 2$  ou  $3$ , les espaces de cohomologie de Hochschild tangentielle  $\tilde{H}_{diff,t}^k(N)$  sont isomorphes aux espaces des  $k$ -tenseurs contravariants antisymétriques tangentiels.

Mais comme dans le cas général puisque la variété est supposée paracompacte, cette proposition reste vraie pour  $\tilde{H}_{loc,t}^k(N)$  et  $\tilde{H}_{loc,t,nc}^k(N)$ .

## 3- Le terme $M_2$ d'un produit-star tangentiel

Le terme  $M_2$  d'un produit-star tangentiel doit être local tangentiel  $n$ -c vérifiant

$$-\delta M_2 + P\Delta P = 0.$$

Le symbole de  $P\Delta P$  est égal à

$$2\Lambda(\xi_1, \xi_2)\Lambda(\xi_1, \xi_3) \quad (*)$$

(\*) est le symbole de  $\delta T$  si le symbole de  $T$  est égal à

$$4(\Lambda(\xi_1, \xi_2))^2.$$

De la proposition I-5-3, on déduit que, quitte à le corriger par un cobord, on peut choisir  $M_2$  tel que son symbole soit

$$4(\Lambda(\xi_1, \xi_2))^2.$$

Soit  $\Gamma$  une connexion de Poisson sur  $(M, \Lambda)$ . Introduisons l'opérateur  $P_\Gamma^2$  défini sur chaque domaine  $U$  d'une carte adaptée par

$$P_\Gamma^2(u, v)/U = \Lambda^{ik} \Lambda^{jl} \nabla_{ij} u \nabla_{kl} v \quad (u, v \in N).$$

$P_\Gamma^2$  est manifestement tangentiel.

Comme dans le cas symplectique on a la proposition suivante

**Proposition: II-3-1**

*Le terme  $M_2$  d'un produit-star tangentiel d'ordre au moins 2 est de la forme*

$$M_2 = \frac{1}{2} P_\Gamma^2 + \delta T,$$

où  $\Gamma$  est une connexion de Poisson sur  $(M, \Lambda)$  et  $T$  est un élément de  $M_{loc, t, nc}^0(N)$ .

**Démonstration**

Soit  $(U, \varphi)$  une carte adaptée. Rappelons que  $\nabla_{ij} u$  est la composante d'ordre  $(i, j)$  de  $\nabla^2 u$  dans la base  $(dx_r \otimes dx_s)_{r, s \in \{1, \dots, m\}}$ .

Considérons le 4-tenseur contravariant  $\Lambda^2$  défini par

$$(\Lambda^2)^{i_1 i_2 i_3 i_4} = \Lambda^{i_1 i_3} \Lambda^{i_2 i_4}.$$

Alors  $P_\Gamma^2$  peut s'écrire sous la forme

$$P_\Gamma^2(u, v) = \langle \Lambda^2, \nabla^2 u \otimes \nabla^2 v \rangle,$$

et par suite on a

$$\begin{aligned} \delta P_\Gamma^2(u, v, w) &= u.P_\Gamma^2(v, w) + P_\Gamma^2(u, vw) - w.P_\Gamma^2(u, v) - P_\Gamma^2(uv, w) \\ &= -2 \langle \Lambda^2, \nabla^2 u \otimes (\nabla v \vee \nabla w) - (\nabla u \vee \nabla v) \otimes \nabla^2 w \rangle, \end{aligned}$$

où  $\vee$  désigne le tenseur de symétrisation.

D'autre part,  $\Gamma$  étant de Poisson, on a

$$P(u, v) = \langle \Lambda, \nabla u \otimes \nabla v \rangle.$$

Et donc

$$\begin{aligned} P \Delta P(u, v, w)/U &= 2 \left( P(P(u, U), w) - P(u, P(v, w)) \right) / U \\ &= 2 \Lambda^{ij} \nabla_i (\Lambda^{kl} \nabla_k u \nabla_l v) \nabla_j w - 2 \Lambda^{ij} \nabla_i u \nabla_j (\Lambda^{kl} \nabla_k v \nabla_l w). \end{aligned}$$

Or,  $\Gamma$  est sans torsion, et par suite

$$\nabla_{ij} u = \frac{1}{2} (\nabla_i \nabla_j u + \nabla_j \nabla_i u)$$

on déduit donc que

$$P\Delta P = \frac{1}{2}\delta P_{\Gamma}^2.$$

Soit

$$M_{\nu} = m + \nu P + \nu^2 M_2$$

un produit-star tangentiel d'ordre 2. D'après la proposition I-2-4,  $2P\Delta M_2$  est un cocycle pour la cohomologie de Hochschild tangentielle. Puisque  $M_2$  est symétrique  $\alpha(P\Delta M_2) = 0$  donc  $P\Delta M_2$  est un cobord et par suite on peut étendre  $M_{\nu}$  à l'ordre 3. Pour pouvoir l'étendre à l'ordre 4, on doit choisir  $M_3$  tel que  $2P\Delta M_3 + M_2\Delta M_2$  soit un cobord. Puisqu'il est un cocycle pour qu'il soit un cobord il faut et il suffit que

$$\alpha(P\Delta M_3 + M_2\Delta M_2) = 0,$$

soit

$$[P, M_3] = 0,$$

et par suite  $M_3$  est un cocycle pour la cohomologie de Chevalley tangentielle.

#### 4- Cohomologie de Chevalley tangentielle de $(N, P)$

##### a- Définitions et propriétés

L'opérateur de cohomologie de Chevalley  $\partial$  correspondant à la représentation adjointe de  $(N, P)$  est défini par  
 $\forall A \in A^a(N),$

$$\partial A = (-1)^a [P, A].$$

On pourra vérifier facilement que  $A_{loc,t,nc}(N)$  est stable par  $\partial$ . On notera  $H_{loc,t,nc}(N)$  le groupe de cohomologie de Chevalley correspondant à  $A_{loc,t,nc}(N)$ . Dans la suite, on notera par  $H_t(M)$  l'espace des champs de vecteur sur  $M$  tangents aux feuilles.

Noutons  $\partial'$  l'opérateur de cobord de Chevalley-Eilenberg [10] associé à la représentation de  $H(M)$  définie par la dérivée de Lie sur l'espace  $\wedge(M)$  des formes  $C^{\infty}$  sur  $M$ .

On a donc

$$\partial' C(X_0, \dots, X_p) = \sum_{i=0}^p (-1)^i L_{X_i} C(X_0, \dots, \hat{i}, \dots, X_p) + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} C([X_i, X_j], \dots, \hat{i}, \dots, \hat{j}, \dots),$$

où

$$L_X = i_X d + di_X$$

et  $\hat{i}$  indique l'omission du champ de vecteur  $X_i$ .

On établit comme dans le cas symplectique [15] la proposition suivante

**Proposition : II-4-1** $\forall C \in \wedge(H(M), N)$ 

$$(\mu^* \circ \partial')(C) = (\partial \circ \mu^*)(C).$$

**Démonstration**Il suffit de remarquer que si  $C$  est dans  $\wedge^p(H(M), N)$ , on a $\forall u_0, \dots, u_{p-1} \in N$ 

$$\mu^*(C)(u_0, \dots, u_{p-1}) = C(H_{u_0}, \dots, H_{u_{p-1}})$$

et que pour tout  $u$  dans  $N$ , on a

$$L_{H_u} \Lambda = 0.$$

Dans la proposition suivante on montre que tout vecteur tangent aux feuilles est image par  $\rho$  d'une forme sur  $M$ .**Proposition: II-4-2**Soit  $X$  un élément de  $H_t(M)$ , alors il existe  $\omega$  dans  $\wedge^1(M)$  telle que

$$X = \rho(\omega).$$

**Démonstration**Soient  $(U, x^1, \dots, x^m)$  et  $(U', y^1, \dots, y^m)$  deux cartes naturelles de  $M$  telles que $U \cap U' \neq \emptyset$ 

On a

$$X/U = \sum_{i=1}^{2n} X_i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{et} \quad X/U' = \sum_{i=1}^{2n} X'_i \frac{\partial}{\partial y^i}.$$

Considérons les deux formes

$$\omega_U = \sum_{i=1}^{2n} (-1)^{\chi_n(i)+1} X_{s(i)} dx^i,$$

et

$$\omega_{U'} = \sum_{i=1}^{2n} (-1)^{\chi_n(i)+1} X'_{s(i)} dy^i,$$

où  $\chi_n$  est la fonction caractéristique de  $\{1, \dots, n\}$  et  $s(i) = \begin{cases} i+n & \text{si } i \leq n \\ i-n & \text{si } i > n \end{cases}$ .  
 $\omega_U$  et  $\omega_{U'}$  sont deux formes définies respectivement sur  $U$  et  $U'$  telles que

$$\rho(\omega_U) = X/U \quad \text{et} \quad \rho(\omega_{U'}) = X/U'.$$

De plus si

$$dy^i = \sum_{j=1}^m f_{ij} dx^j \quad \text{sur } U \cap U',$$

alors des relations:

$$\sum_{i=1}^{2n} X_i dx^i = \sum_{i=1}^{2n} X'_i dy^i \quad \text{sur } U \cap U',$$

et

$$\sum_{j=1}^{2n} (-1)^{X_n(j)} f_{k,j} f_{r,s(j)} = \Lambda(dy^k, dy^r) = \begin{cases} (-1)^{X_n(k)} & \text{si } r = s(k) \\ 0 & \text{si non} \end{cases},$$

on déduit directement que

$$\omega_U = \omega_{U'} \quad \text{sur } U \cap U'.$$

Pour établir le théorème d'existence de produit-star tangentiel, en généralisant la méthode utilisée dans [15] dans le cas symplectique, on aura besoin de décrire les espaces de cocycles

$$Z_{loc,t,nc}^p(N) = \{A \in A_{loc,t,nc}^{p-1}(N) \mid \partial A = 0\}$$

pour  $p \leq 3$ . Pour les variétés de Poisson, cette description ne se fait plus à l'aide de  $\mu^*$  et les espaces de cocycle de  $\Lambda_{loc}(H(M), \Lambda(M))$  pour  $\partial'$  comme dans le cas symplectique mais à l'aide de  $\rho^*$  et les espaces de cocycles d'un sous-espace de  $\Lambda_{loc,t}(\Lambda^1(M), N)$  pour un opérateur de cobord  $\partial''$  qu'on définira ultérieurement.

On pose

$$\mathbb{B} = \rho\left(\Lambda(H(M), \Lambda(M))\right)$$

et on définit sur  $\mathbb{B}$  un opérateur de cohomologie  $\partial''$  par  $\forall T \in \mathbb{B}$  si  $T = \rho(C)$ , alors

$$\partial'' T = \rho(\partial' C).$$

Cette définition est indépendante du choix de  $C$  car, si  $C$  et  $C'$  sont deux éléments de  $\Lambda^p(H(M), \Lambda(M))$  tels que

$$C(\rho(\omega_1), \dots, \rho(\omega_p)) = C'(\rho(\omega_1), \dots, \rho(\omega_p))$$

pour tout  $\omega_1, \dots, \omega_p$  dans  $\Lambda^1(M)$ , alors

$$\partial' C(\rho(\omega_1), \dots, \rho(\omega_{p+1})) = \partial' C'(\rho(\omega_1), \dots, \rho(\omega_{p+1})),$$

pour tout  $\omega_1, \dots, \omega_{p+1}$  dans  $\Lambda^1(M)$ .

#### Définition: II-4-1 [19]

Nous dirons qu'une 1-forme  $\omega$  est transverse si et seulement si elle est nulle sur les champs de vecteurs tangents aux feuilles.

On note  $\Lambda_{loc,t,nt}(\Lambda^1(M), \Lambda(M))$  l'espace des applications multilinéaires locales tangentielles de  $\Lambda^1(M)$  dans  $\Lambda(M)$  nulles sur les formes transverses. On a alors la proposition suivante

**Proposition: II-4-3**

Les deux assertions suivantes sont vraies.

- (i)  $\wedge_{loc,t,nt}(\wedge^1(M), \wedge(M)) \subset \mathbb{B}$ ,  
(ii)  $A_{loc,t,nc}(N) = \rho^*(\wedge_{loc,t,nt}(\wedge^1(M), N))$ .

**Démonstration**

(i) On choisit un sous-espace supplémentaire de  $H_t(M)$  dans  $H(M)$  et on l'appelle  $V$ .

Soit  $T$  un élément de  $\wedge_{loc,t,nt}^p(\wedge^1(M), \wedge(M))$ . Du fait que  $T$  est nulle sur les formes transverses, l'application  $C$  définie par

$$C(X_1, \dots, X_p) = \begin{cases} T(\omega_1, \dots, \omega_p) & \text{si } \forall i X_i \in H_t(M) \text{ et } \rho(\omega_i) = X_i \\ 0 & \text{si un des } X_i \text{ est dans } V \end{cases}$$

est bien définie. De plus on a bien

$$T = \rho(C).$$

(ii) On note par:

- $V_1$  : l'espace des 1-formes exactes  
 $V_2$  : l'espace des 1-formes transverses

et par  $V_3$  un supplémentaire de  $V_1 + V_2$  dans  $\wedge^1(M)$ .

Soit  $C$  un élément de  $A_{loc,t,nc}^p(N)$ . On définit l'application  $T$  par

$$T(\omega_0, \dots, \omega_p) = \begin{cases} C(u_0, \dots, u_p) & \text{si } \forall i \omega_i = du_i \\ 0 & \text{si un des } \omega_i \text{ est dans } V_2 \cup V_3. \end{cases}$$

Cette construction est possible car si  $du$  est transverse alors  $u$  est invariant et par suite  $C(u, \dots) = 0$  car  $C$  est tangentiel n-c. Il est bien clair que  $T \in \wedge_{loc,t,nt}(\wedge^1(M), N)$  et que  $\rho^*(T) = C$ .

**b- Autre façon de définir  $S_\Gamma^3$ .**

On peut construire le cocycle de Vey  $S_\Gamma^3$  d'une manière intrinsèque: Soit  $\Gamma$  une connexion linéaire et notons par  $\nabla$  sa dérivation covariante. On note par  $L_X \nabla$  la dérivée de Lie de  $\nabla$  dans la direction de  $X$ :

$$(L_X \nabla)(Y, Z) = [X, \nabla_Y Z] - \nabla_{[X, Y]} Z - \nabla_Y [X, Z].$$

Considérons l'application

$$\Phi_\Gamma : H(M) \times H(M) \rightarrow \wedge^2(M),$$

définie par

$$\Phi_\Gamma(X_0, X_1)(Y_0, Y_1) = \frac{1}{2} \text{tr}[L_{X_0} \nabla(Y_0).L_{X_1} \nabla(Y_1) - L_{X_0} \nabla(Y_1)L_{X_1} \nabla(Y_0)].$$

On a alors la proposition suivante

**Proposition: II-4-4 [15] [24] [19] [22]**

(i)  $\Phi_\Gamma$  est un cocycle non exacte de  $(\wedge(H(M), \wedge(M)), \partial')$

(ii) le symbole total de  $\Phi_\Gamma$  est donné par

$$\sigma_\Phi (\xi_0, \xi_1)(X_0, X_1) = \text{tr}(X_0 \otimes \xi_0 \cdot X_1 \otimes \xi_1) \cdot \xi_0 \wedge \xi_1.$$

(iii) Si on se limite à des connexions  $\Gamma$  sans torsion, la classe de cohomologie  $[\Phi_\Gamma]$  est indépendante de la connexion choisie.

(iv) Si  $\Gamma$  est adaptée au feuilletage  $\rho(\Phi_\Gamma)$  est tangentiel.

Définissons l'application locale  $S_\Gamma^3$  sur  $N^2$  par

$$S_\Gamma^3(u, v) = \langle \Lambda, \rho(\Phi_\Gamma)(du, dv) \rangle = \langle \Lambda, \Phi_\Gamma(H_u, H_v) \rangle.$$

Un calcul direct de  $\partial S_\Gamma^3$  prouve que

$$(\partial S_\Gamma^3)(u_0, u_1, u_2) = - \langle \Lambda, (\partial' \Phi_\Gamma)(H_{u_0}, H_{u_1}, H_{u_2}) \rangle \quad (*).$$

De la relation (\*) on déduit directement les résultats énoncés dans la proposition I-5-4 et le théorème I-5-1. De même, de la relation (\*) on déduit facilement que le symbole de  $S_\Gamma^3$  est défini par

$$\sigma_{S^3} (\xi_0, \xi_1) = (\Lambda(\xi_0, \xi_1))^3.$$

Enfin rappelons la construction de l'opérateur  $T_\Gamma^2$  qui sera utile pour déterminer les 3-cocycles de Chevalley tangentiels sur  $M$ . On note par  $A^\nabla$  l'opérateur différentiel de  $H(M)$  dans les champs d'endomorphismes de  $TM$  défini par

$$A^\nabla : X \mapsto [Y \rightarrow \nabla_Y X].$$

Définissons l'application

$$T_\Gamma : H(M)^3 \rightarrow N,$$

par

$$T_\Gamma(X, Y, Z) = \frac{1}{3!} \sum_{X, Y, Z} \text{tr} A^\nabla(X) \{ [A^\nabla(Y), A^\nabla(Z)] + 3R(Y, Z) \},$$

où  $S$  désigne la somme sur les permutations circulaires de  $X, Y, Z$  et  $R$  est le tenseur de courbure de  $\Gamma$ . Considérons l'application

$$T_\Gamma^2 : N^3 \rightarrow N,$$

définie par

$\forall u, v, w \in N$

$$T_\Gamma^2(u, v, w) = T_\Gamma(H_u, H_v, H_w).$$

**Proposition:II-4-5** [15] [24] [19] [22]

(i) l'application  $T_\Gamma$  est une 3-cochaine de  $(\wedge(H(M), \wedge(M)), \partial')$ , dont le cobord est la 4-forme fermée  $\tau$  donnée par

$$\tau(X_0, X_1, X_2, X_3) = \frac{1}{8} \sum_a \varepsilon_a \operatorname{tr} R(X_{a_0}, X_{a_1}) R(X_{a_2}, X_{a_3}).$$

(ii) le symbole de  $T_\Gamma$  est donné par

$$\sigma_T(\xi_0, \xi_1, \xi_2)(X_0, X_1, X_2) = \operatorname{tr}(X_0 \otimes \xi_0 \cdot X_1 \otimes \xi_1 \cdot X_2 \otimes \xi_2).$$

(iii) la classe de cohomologie de Rham de  $\tau$  est indépendante de la connexion choisie.

(iv) le symbole total de la 3-cochaine  $T_\Gamma^2$  est donné par

$$\sigma_{T^2}(\xi_0, \xi_1, \xi_2) = -\Lambda(\xi_0, \xi_1)\Lambda(\xi_0, \xi_2)\Lambda(\xi_1, \xi_2).$$

(v) Si  $\Gamma$  est adaptée au feuilletage, alors  $\rho(T_\Gamma)$  et  $T_\Gamma^2$  sont tangentiels.

**c- Calcul de  $H_{loc,t,nc}^1(N), H_{loc,t,nc}^2(N)$  et  $H_{loc,t,nc}^3(N)$**

Dans ce sous-paragraphe on se propose de calculer les 3 premiers groupes de cohomologie de Chevalley tangentiel de  $(N, P)$ . La méthode utilisée pour calculer ces groupes de cohomologie est celle utilisée par D. Arnal, P. Lecomte, M. De Wilde, S. Gutt et D. Melotte pour calculer les espaces de cohomologie de Chevalley dans le cas symplectique et dans le cas où  $M$  est le dual d'une algèbre de Lie munie de la structure de variété de Poisson déduite de la représentation coadjointe.

Par une récurrence basée sur l'ordre lexicographique et l'ordre total on corrige successivement un cocycle en lui soustrayant un cobord ou un cocycle de type connu de façon à diminuer son ordre. Après un nombre fini de corrections, on est ramené à un cocycle d'ordre au plus 1.

Mais commençons par décrire rapidement les étapes de la démonstration d'une proposition (énoncée et démontrée en [33].[24]) qui va fournir une description assez restrictive du symbole principal d'un cocycle tangentiel et par suite elle va permettre de réduire le nombre d'étapes de cette récurrence.

Plaçons-nous dans un domaine d'une carte adaptée  $U$ . Pour tout  $x$  dans  $U$ , on appelle  $V$  le sous-espace de  $T_x^*M$  engendré par les vecteurs  $(dx^i(x))_{i \in \{1, \dots, 2n\}}$ . En tout point  $x \in U$ ,  $\Lambda$  est non dégénéré et donc symplectique sur  $V$ , on note  $sp(V)$  l'algèbre de Lie symplectique correspondante.

Il est bon de remarquer qu'en tout point de  $U$  le symbole d'une cochaîne tangentielle est un polynôme en  $\xi_i$  avec  $\xi_i$  dans  $V$ . Les démonstrations des deux propositions suivantes sont données en [24].

**Proposition: II-4-6**

Si  $\mu$  désigne l'opérateur de dualité associé à  $\Lambda$ , les endomorphismes  $\mu(\xi) \otimes \xi$  ( $\xi \in V$ ) de  $V$  engendrent l'algèbre  $sp(V)$ .

**Proposition: II-4-7**

Tout polynôme homogène de degré 2 en  $\xi_1 \dots \xi_s$  ( $\xi_i \in V$ ) antisymétrique et à valeurs dans un espace vectoriel  $E$  s'identifie à une application  $s$ -linéaire antisymétrique sur  $sp(V)$  à valeurs dans  $E$ .

La représentation naturelle  $(V, \rho)$  du groupe linéaire général  $GL(V)$ :

$$\rho(A) : \xi \mapsto A(\xi)$$

s'étend à l'espace des polynômes sur  $V$  noté  $P(V)$ , par l'homomorphisme de groupe de Lie  $\bar{\rho}$  défini par la relation

$$(\bar{\rho}(A)P)(\xi_1, \dots, \xi_s) = P(A^{-1}(\xi_1), \dots, A^{-1}(\xi_s)).$$

La représentation correspondante  $\bar{\rho}_*$  de l'algèbre de Lie  $gl(V)$  de  $GL(V)$  et par suite de la sous-algèbre  $sp(V)$ , est définie par

$$\bar{\rho}_*(A)(P) = \frac{d}{dt} \bar{\rho}(\exp tA)P /_{t=0}.$$

Dans le cas particulier où  $A$  est l'application  $\mu(\xi) \otimes \xi$  on obtient

$$\bar{\rho}_*(\mu(\xi) \otimes \xi)P(\xi_1, \dots, \xi_s) = \sum_{i=1}^s \Lambda(\xi_i, \xi) \xi D_{\xi_i} P(\xi_1, \dots, \xi_s),$$

(voir II-5-3 pour la notation  $\xi D_{\xi_i} P(\xi_1, \dots, \xi_s)$ ).

Pour la cohomologie de Chevalley-Eilenberg associée à la représentation  $(P(V), \bar{\rho}_*)$  de  $sp(V)$ , une  $p$ -cochaîne est une application  $p$ -linéaire antisymétrique de  $sp(V)$  dans  $P(V)$ . L'opérateur de cobord associé à cette cohomologie  $\Delta$  est défini par

$$\begin{aligned} \Delta C(A_0, \dots, A_p) &= \sum_{i=0}^p (-1)^i \bar{\rho}_*(A_i) C(A_0, \dots, \hat{i}, \dots, A_p) \\ &+ \sum_{i < j} (-1)^{i+j} C([A_i, A_j], \dots, \hat{i}, \dots, \hat{j}, \dots), \end{aligned}$$

où  $[ ]$  désigne le commutateur des endomorphismes de  $V$ .

Maintenant considérons une  $p$ -cochaîne de Chevalley tangentielle nulle sur les constantes d'ordre lexicographique

$$(r_0, \dots, r_{k_1-1}, 2, \dots, 2, \underset{(k_2)}{1}, \dots, 1).$$

D'après la proposition II-4-6 pour  $x \in U$ ,  $\xi_{k_2}, \dots, \xi_{p-1} \in V$  fixés, le symbole lexicographique  $\bar{\sigma}_c$  peut être vu comme étant l'évaluation en  $\mu(\xi_i) \otimes \xi_i$  ( $k_i \leq i < k_2$ ) d'une cochaîne de  $sp(V)$  à valeurs dans l'espace des polynômes en  $\xi_0, \dots, \xi_{k_1-1}$  qu'on note toujours par  $\bar{\sigma}_c$ .

Un calcul direct nous prouve la proposition suivante

**Proposition: II-4-8 [24]**

Si  $C$  est un cocycle tangentiel  $n$ -c non 1-différentiel d'ordre lexicographique:

$$(r_0, \dots, r_{k_1-1}, 2, \dots, 2, \underset{(k_2)}{1}, \dots, 1),$$

alors on a

$$\bar{\sigma}_{\partial C} = \pm \Delta \bar{\sigma}_C.$$

L'algèbre  $sp(V)$ , est simple et on a d'après [9],

$$Ker \Delta = P_{in} \otimes C_{in} \oplus im \Delta,$$

où  $P_{in}$  est l'espace des polynômes invariants par l'action du groupe  $Sp(V)$  et  $C_{in}$  l'espace des cochaines scalaires invariantes sur  $sp(V)$ .

D'autre part d'après [30], un élément de  $P_{in}$  ou de  $C_{in}$  évalué en des  $A_i$  de la forme  $\mu(\xi_i) \otimes \xi_i$  est un polynôme en  $\Lambda(\xi_i, \xi_j)$ .

Notons  $P$  l'ensemble des polynômes en  $\Lambda(\xi_i, \xi_j)$  de degré  $> 2$  en chaque  $\xi_i$ ,  $C$  l'ensemble des polynômes en  $\Lambda(\xi_i, \xi_j)$  de degré 2 en chaque  $\xi_i$  et  $Q$  l'ensemble des fonctions en  $x$  et  $\xi_i$ ,  $C^\infty$  en  $x$  et polynômiales en  $\xi_i$  et de degré  $\leq 1$  en chaque  $\xi_i$ .

Notons  $P \otimes C \otimes Q$  l'enveloppe linéaire des polynômes

$$(\xi_0, \dots, \xi_{p-1}) \mapsto a(\xi_{\varepsilon(0)}, \dots, \xi_{\varepsilon(i)}) b(\xi_{\varepsilon(i+1)}, \dots, \xi_{\varepsilon(j)}) c(\xi_{\varepsilon(j+1)}, \dots, \xi_{\varepsilon(p-1)})$$

où  $a \in P$ ,  $b \in C$  et  $c \in Q$  et  $\varepsilon$  est une permutation de  $\{0, \dots, p-1\}$ .

On a alors, comme dans le cas symplectique la proposition suivante

**Proposition II-4-9 [24][33]**

Soit  $C$  un cocycle de Chevalley tangentiel  $n - c$  alors  $C$  peut s'écrire sous la forme

$$C = C' + \partial E',$$

où  $E'$  est une cochaîne tangentielle  $n - c$  et  $C'$  un cocycle tangentiel  $n - c$  d'ordre au plus égal à celui de  $C$ , dont le symbole total appartient à  $P \otimes C \otimes Q$ .

**Démonstration**

Si  $\bar{\sigma}_C$  est de degré au plus 1 en chaque  $\xi_i$  il n'y a rien à démontrer.

Si  $C$  est d'ordre

$$(r_0, \dots, r_{k_1-1}, 2, \dots, 2, \underset{(k_2)}{1}, \dots, 1) \quad (r_{k_1-1} > 2),$$

on a vu que pour  $x \in U$ ,  $\xi_{k_2}, \dots, \xi_{p-1} \in V$  fixés  $\bar{\sigma}_C$  peut être vu comme étant l'évaluation en  $\mu(\xi_i) \otimes \xi_i$  ( $k_1 \leq i < k_2$ ) d'une cochaîne de  $sp(V)$  à valeurs dans l'espace des polynômes en  $\xi_0, \dots, \xi_{k_1-1}$ . Mais puisque  $C$  est un cocycle et d'après la proposition (II-4-7), cette

cochaine est un élément de  $\ker \Delta$ . Donc pour  $x, \xi_{k_2}, \dots, \xi_{p-1}$  fixés il existe un élément  $P$  de  $P_{in} \otimes C_{in}$  et une cochaine  $E$  de  $sp(V)$  tels que:

$$\bar{\sigma}_C(\xi_0, \dots, \xi_{p-1}) = (P + \Delta E)(\mu(\xi_{k_1}) \otimes \xi_{k_1}, \dots, \mu(\xi_{k_2-1}) \otimes \xi_{k_2-1}).$$

Maintenant il suffit de corriger  $C$  par le cobord d'une cochaine tangentielle dont le symbole est égal à l'évaluation de la cochaine  $E$  en  $\mu(\xi_i) \otimes \xi_i$  (Pour les  $\xi_i$  convenables  $k_1 \leq i < k_2$ ).

Sachant la forme des éléments de  $P_{in} \otimes C_{in}$  et en faisant varier  $\xi_{k_2}, \dots, \xi_{p-1}$  on déduit le résultat par récurrence. Enfin remarquons que si l'ordre de  $C$  ne contient pas des 1 ou des  $r_i > 2$  la démonstration reste la même et s'il ne contient pas des 2,  $\bar{\sigma}_C$  sera vu comme une 0-cochaine de  $sp(V)$ .

Etablissons un lemme classique:

### Lemme II-4-1

Un  $p$ -cocycle tangentiel  $n - c$  ne peut être d'ordre lexicographique  $(r_0, \dots, r_{p-1})$  avec  $r_{p-1} > 3$ .

### Démonstration

Remarquons que d'après la proposition I-3-1 et puisque  $\Lambda$  est bilinéaire, le symbole total d'ordre  $r_0 + \dots + r_{p-1} + 2$  de  $\partial C$  est donné par

$$\sigma_{\partial C}(\xi_0, \dots, \xi_p) = \sum_{i < j} (-1)^j \Lambda(\xi_i, \xi_j) [\sigma_C(\dots, \xi_i + \xi_j, \hat{j} \dots)] - \sigma_C(\dots, \xi_j, \hat{j} \dots) - \sigma_C(\dots, \hat{j} \dots)] \quad (*).$$

Supposons que  $r_{p-1} > 3$ . En considérant les termes d'ordre  $(r_0, \dots, r_{p-1} - 1, 3)$  dans (\*) et sachant que  $C$  est un cocycle on aura

$$\Lambda(\xi_{p-1}, \xi_p) \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} (\bar{\sigma}_C(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{p-1} + t\xi_p)) /_{t=0} = 0,$$

ce qui est absurde car ceci veut dire que  $\bar{\sigma}_C = 0$ .

Notons par  $L_t$  la sous-algèbre de Lie des champs de vecteurs tangents aux feuilles  $X$  vérifiant

$$L_X \Lambda = 0$$

et par  $L^*$  celle des champs hamiltoniens et posons

$$L_t = L^* \oplus L_S.$$

Le lemme suivant est utile pour la description des 2-cocycles tangentiels  $n - c$ .

**Lemme: II-4-2**

Si le symbole total d'un cocycle tangentiel  $C$  est de la forme

$$f \cdot \Lambda(\xi_0, \xi_1)^3,$$

alors  $f$  est dans  $I$ .

(Remarquons qu'il n'y a pas de différence entre symbole total et symbole lexicographique dans ce cas).

**Démonstration**

Pour  $i \in \{1, \dots, 2n\}$  on note par  $[i]$  le  $2n$ -uplet  $(0, \dots, \underset{(i)}{1}, 0, \dots)$  et on définit  $s$  par

$$s[i] = \begin{cases} [i+n] & \text{si } i \leq n \\ [i-n] & \text{si } i > n \end{cases}$$

$\chi_n$  désigne toujours la fonction caractéristique de  $\{1, \dots, n\}$ . Ainsi, avec ces notations, si on se place dans le domaine d'une carte adaptée  $U$ , on a

$$\Lambda(\xi_0, \xi_1) = \sum_{l=1}^n (-1)^{\chi_n(i)+1} \xi_0^{[i]} \xi_1^{s[i]}.$$

Il existe un opérateur différentiel sur  $U, D_U$  d'ordre total au plus 5 tel que pour tout  $u_0, u_1$  dans  $N$  et  $x$  dans  $U$ , on ait

$$C(\bar{u}_0, \bar{u}_1)/U(x) = \sum_{\substack{|\alpha|=3 \\ |\beta|=3}} C_{\alpha, \beta}(x) D_x^\alpha \bar{u}_0 D_x^\beta \bar{u}_1 + D_U(\bar{u}_0, \bar{u}_1)(x)$$

plus précisément  $C_{\alpha, \beta}$  est le produit de  $f$  par un entier, et si  $\alpha_0 = 3[1]$  et  $\beta_0 = 3s[1] = 3[n+1]$  alors:

$$C_{\alpha_0, \beta_0} = f.$$

Pour tout  $u_0, u_1, u_2$  dans  $N$  et  $x$  dans  $U$  on a

$$\begin{aligned} & \partial C(\bar{u}_0, \bar{u}_1, \bar{u}_2)/U(x) = \\ & \sum_{u_0, u_1, u_2}^S \sum_{i=1}^n (-1)^{\chi_n(i)+1} D_x^{[i]} \left( \sum_{\substack{|\alpha|=3 \\ |\beta|=3}} C_{\alpha, \beta} D^\alpha \bar{u}_0 D^\beta \bar{u}_1 + D_U(\bar{u}_0, \bar{u}_1) \right) D_x^{s[i]} \bar{u}_2 \\ & - \sum_{|\alpha|=|\beta|=3} C_{\alpha, \beta}(x) D_x^\alpha \left( \sum_{i=1}^n (-1)^{\chi_n(i)+1} D^{[i]} \bar{u}_0 D^{s[i]} \bar{u}_1 \right) D_x^\beta \bar{u}_2 \\ & - D_U \left( \sum_{i=1}^n (-1)^{\chi_n(i)+1} D^{[i]} \bar{u}_0 D^{s[i]} \bar{u}_1, \bar{u}_2 \right)(x) = 0 \quad (**) \end{aligned}$$

Soit  $k \in \{1, \dots, 2n\}$ , en considérant les termes d'ordre  $(\alpha_0, \beta_0, s[k])$  en  $u_0, u_1, u_2$  dans (\*\*), on aura

$$D_x^{[k]} C_{\alpha_0, \beta_0} = D_x^{[k]} f = 0 \quad \forall x \in U.$$

et par suite  $f \in I$ .

**Théorème: II-4-2 [22]**

Soit  $\Gamma$  une connexion linéaire sans torsion adaptée au feuilletage de  $(M, \Lambda)$  alors:

(i) Tout 1- cocycle différentiel est 1- différentiel.

(ii) Tout 2- cocycle  $C$  tangentiel et différentiel  $n - c$  s'écrit sous la forme:

$$C = aS_{\Gamma}^3 + C_1 + \partial B,$$

où  $a \in I$ ,  $C_1$  est un 2-cocycle 1-différentiel tangentiel  $n-c$  et  $B \in A_{diff,t,nc}^0(N)$ .

**Démonstration**

(i) Soit  $C$  un 1-cocycle différentiel quelconque, on a alors,

$$\sigma_{\partial C}(\xi_0, \xi_1) = -\Lambda(\xi_0, \xi_1)(\sigma_C(\xi_0 + \xi_1) - \sigma_C(\xi_0) - \sigma_C(\xi_1)) = 0.$$

Remarquons que puisqu'on n'a pas supposé  $C$  tangentiel,  $\xi_0$  et  $\xi_1$  sont des éléments quelconques de  $T_x^*M$ .

Mais puisque le polynôme  $\Lambda(\xi_0, \xi_1)$  n'est pas identiquement nul, on a

$$\sigma_C(\xi_0 + \xi_1) = \sigma_C(\xi_0) + \sigma_C(\xi_1) \quad \forall \xi_0, \xi_1 \in T_x^*M.$$

Ceci n'est possible que si  $\sigma_C$  est un polynôme de degré 1 en chacune de ses variables.

(ii) Soit  $C$  un cocycle différentiel tangentiel d'ordre  $(r_0, r_1)$ . Vu l'antisymétrie de  $C$ , on a toujours  $r_0 \geq r_1$ .

D'après la proposition II-4-8, quitte à corriger  $C$  par un cobord, on peut supposer que son symbole total est dans  $P \otimes C \otimes Q$ . En particulier son symbole lexicographique sera dans  $P \otimes C \otimes Q$ . Mais comme tout élément de  $P$  ou de  $C$  est un polynôme à au moins 2 arguments,  $\bar{\sigma}_C$  est soit un élément de  $P$  soit un élément de  $Q$ . Dans ce dernier cas le cocycle est 1-différentiel. D'autre part d'après le lemme II-4-1,  $r_1 \leq 3$ .

- Si  $r_1 = 3$ , alors  $r_0 = 3$  et  $\bar{\sigma}_C$  est de la forme:

$$\bar{\sigma}_C(\xi_0, \xi_1) = a\Lambda(\xi_0, \xi_1)^3,$$

avec  $a \in N$ . Mais d'après le lemme II-4-2,  $a \in I$  et par suite  $\bar{\sigma}_C$  coïncide avec le symbole du cocycle tangentiel  $n-c$   $aS_{\Gamma}^3$ . Donc  $C - aS_{\Gamma}^3$  sera un cocycle d'ordre total  $< 6$ .

- Si  $r_1 = 2$ , alors les seuls éléments possibles de  $C$  sont de la forme

$$b\Lambda(\xi_0, \xi_1)^2,$$

qui ne peuvent pas être le symbole d'une cochaîne antisymétrique puisqu'ils sont symétriques en  $\xi_0, \xi_1$ .

Le lemme suivant est utile pour la description des 3- cocycle tangentiels  $n - c$ .

et par suite  $f \in I$ .

**Théorème: II-4-2 [22]**

Soit  $\Gamma$  une connexion linéaire sans torsion adaptée au feuilletage de  $(M, \Lambda)$  alors:

- (i) Tout 1-cocycle différentiel est 1-différentiel.
- (ii) Tout 2-cocycle  $C$  tangentiel et différentiel  $n - c$  s'écrit sous la forme:

$$C = aS_{\Gamma}^3 + C_1 + \partial B,$$

où  $a \in I$ ,  $C_1$  est un 2-cocycle 1-différentiel tangentiel  $n-c$  et  $B \in A_{diff,t,nc}^0(N)$ .

**Démonstration**

- (i) Soit  $C$  un 1-cocycle différentiel quelconque, on a alors,

$$\sigma_{\partial C}(\xi_0, \xi_1) = -\Lambda(\xi_0, \xi_1)(\sigma_C(\xi_0 + \xi_1) - \sigma_C(\xi_0) - \sigma_C(\xi_1)) = 0.$$

Remarquons que puisqu'on n'a pas supposé  $C$  tangentiel,  $\xi_0$  et  $\xi_1$  sont des éléments quelconques de  $T_x^*M$ .

Mais puisque le polynôme  $\Lambda(\xi_0, \xi_1)$  n'est pas identiquement nul, on a

$$\sigma_C(\xi_0 + \xi_1) = \sigma_C(\xi_0) + \sigma_C(\xi_1) \quad \forall \xi_0, \xi_1 \in T_x^*M.$$

Ceci n'est possible que si  $\sigma_C$  est un polynôme de degré 1 en chacune de ses variables.

- (ii) Soit  $C$  un cocycle différentiel tangentiel d'ordre  $(r_0, r_1)$ . Vu l'antisymétrie de  $C$ , on a toujours  $r_0 \geq r_1$ .

D'après la proposition II-4-8, quitte à corriger  $C$  par un cobord, on peut supposer que son symbole total est dans  $P \otimes C \otimes Q$ . En particulier son symbole lexicographique sera dans  $P \otimes C \otimes Q$ . Mais comme tout élément de  $P$  ou de  $C$  est un polynôme à au moins 2 arguments,  $\bar{\sigma}_C$  est soit un élément de  $P$  soit un élément de  $Q$ . Dans ce dernier cas le cocycle est 1-différentiel. D'autre part d'après le lemme II-4-1,  $r_1 \leq 3$ .

- Si  $r_1 = 3$ , alors  $r_0 = 3$  et  $\bar{\sigma}_C$  est de la forme:

$$\bar{\sigma}_C(\xi_0, \xi_1) = a\Lambda(\xi_0, \xi_1)^3,$$

avec  $a \in N$ . Mais d'après le lemme II-4-2,  $a \in I$  et par suite  $\bar{\sigma}_C$  coïncide avec le symbole du cocycle tangentiel  $n-c$   $aS_{\Gamma}^3$ . Donc  $C - aS_{\Gamma}^3$  sera un cocycle d'ordre total  $< 6$ .

- Si  $r_1 = 2$ , alors les seuls éléments possibles de  $C$  sont de la forme

$$b\Lambda(\xi_0, \xi_1)^2,$$

qui ne peuvent pas être le symbole d'une cochaîne antisymétrique puisqu'ils sont symétriques en  $\xi_0, \xi_1$ .

Le lemme suivant est utile pour la description des 3-cocycle tangentiels  $n - c$ .

**Lemme: II-4-3**

(i) Si le symbole d'un 3-cocycle tangentiel  $n - c$  est de la forme

$$\bar{\sigma}_C(\xi_0, \xi_1, \xi_2) = \Lambda(\xi_0, \xi_1)^3 \langle X, \xi_2 \rangle \quad X \in H_t(M),$$

alors  $X$  est dans  $L_t$ .

(ii) Si le symbole d'un 3 cocycle tangentiel  $n - c$  est de la forme

$$\bar{\sigma}_C(\xi_0, \xi_1, \xi_2) = \lambda \Lambda(\xi_0, \xi_1) \Lambda(\xi_0, \xi_2) \Lambda(\xi_1, \xi_2),$$

alors  $\lambda$  est dans  $I$ .

**Démonstration**

Afin de simplifier les calculs, faisons la remarque suivante : si on se place dans le domaine d'une carte adaptée et si on associe à chaque cochaîne  $C$  tangentielle  $n - c$  un polynôme  $P_C$  obtenu à partir de l'expression locale de  $C$  en remplaçant  $D_x^{\alpha_i} u_i$  par  $\xi_i^{\alpha_i}$ , alors un calcul direct nous prouve que le polynôme associé à  $\partial C$  s'obtient par la formule

$$\begin{aligned} P_{\partial C}(\xi_0, \dots, \xi_p) &= \sum_{i < j} (-1)^j \Lambda(\xi_i, \xi_j) [P_C(\dots, \xi_i + \binom{\xi_j}{i}, \dots, \hat{j} \dots) \\ &\quad - P_C(\dots, \binom{\xi_j}{i}, \dots, \hat{j} \dots) - P_C(\dots, \hat{i}, \dots)] \\ &\quad + \sum_{i=0}^p (-1)^i \langle i(\xi_i) \Lambda, dP_C(\dots, \hat{i}, \dots) \rangle. \end{aligned}$$

où  $dP_C$  est le polynôme obtenu en dérivant les coefficients de  $P_C$ .

Dans le cas  $p = 3$ , cette formule s'écrit

$$\begin{aligned} P_{\partial C}(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \Lambda(\xi_0, \xi_1 + \xi_2 + \xi_3) P_C(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ &\quad - \Lambda(\xi_1, \xi_0 + \xi_2 + \xi_3) P_C(\xi_0, \xi_2, \xi_3) + \Lambda(\xi_2, \xi_0 + \xi_1 + \xi_3) \\ &\quad \quad P_C(\xi_0, \xi_1, \xi_3) - \Lambda(\xi_3, \xi_0 + \xi_1 + \xi_2) P_C(\xi_0, \xi_1, \xi_2) \\ &\quad - \Lambda(\xi_0, \xi_1) P_C(\xi_0 + \xi_1, \xi_2, \xi_3) + \Lambda(\xi_0, \xi_2) P_C(\xi_0 + \xi_2, \xi_1, \xi_3) \\ &\quad - \Lambda(\xi_0, \xi_3) P_C(\xi_0 + \xi_3, \xi_1, \xi_2) + \Lambda(\xi_1, \xi_2) P_C(\xi_0, \xi_1 + \xi_2, \xi_3) \\ &\quad - \Lambda(\xi_1, \xi_3) P_C(\xi_0, \xi_1 + \xi_3, \xi_2) - \Lambda(\xi_2, \xi_3) P_C(\xi_0, \xi_1, \xi_2 + \xi_3) \\ &\quad + \langle i(\xi_0) \Lambda, dP_C(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \rangle - \langle i(\xi_1) \Lambda, dP_C(\xi_0, \xi_2, \xi_3) \rangle \\ &\quad + \langle i(\xi_2) \Lambda, dP_C(\xi_0, \xi_1, \xi_3) \rangle - \langle i(\xi_3) \Lambda, dP_C(\xi_0, \xi_1, \xi_2) \rangle \quad (*) \end{aligned}$$

(i) Notons par  $D_1$  les éléments d'ordre (3,2,1) et par  $D_2$  les éléments d'ordre (4,1,1) de  $P_C$ .

En considérant les termes d'ordre (3,3,1,1) de (\*) on déduit que

$$-\Lambda(\xi_2, \xi_0) D_1(\xi_1, \xi_0, \xi_3) + \Lambda(\xi_2, \xi_1) D_1(\xi_0, \xi_1, \xi_3)$$

$$\begin{aligned}
& +\Lambda(\xi_3, \xi_0)D_1(\xi_1, \xi_0, \xi_2) - \Lambda(\xi_3, \xi_1)D_1(\xi_0, \xi_1, \xi_3) \\
& -\frac{1}{2}\Lambda(\xi_0, \xi_1)\frac{d^2}{dt^2}D_2(\xi_0 + t\xi_1, \xi_2, \xi_3)/_{t=0} - \Lambda(\xi_0, \xi_2)D_1(\xi_1, \xi_0, \xi_3) \\
& +\Lambda(\xi_0, \xi_3)D_1(\xi_1, \xi_0, \xi_2) + \Lambda(\xi_1, \xi_2)D_1(\xi_0, \xi_1, \xi_3) \\
& -\Lambda(\xi_1, \xi_3)D_1(\xi_0, \xi_1, \xi_2) + \langle i(\xi_2)\Lambda, d \langle X, \xi_3 \rangle \Lambda(\xi_0, \xi_1)^3 \rangle \\
& - \langle i(\xi_3)\Lambda, d \langle X, \xi_2 \rangle \Lambda(\xi_0, \xi_1)^3 \rangle = 0.
\end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}\Lambda(\xi_0, \xi_1)\frac{d^2}{dt^2}D_2(\xi_0 + t\xi_1, \xi_2, \xi_3)/_{t=0} + \Lambda(\xi_0, \xi_1)^3 \\
& (\langle i(\xi_2)\Lambda, d \langle X, \xi_3 \rangle \rangle - \langle i(\xi_3)\Lambda, d \langle X, \xi_2 \rangle \rangle) = 0.
\end{aligned}$$

Mais en considérant les termes d'ordre (4,2,1,1) de (\*) on aura :

$$\begin{aligned}
& \Lambda(\xi_2, \xi_0)D_1(\xi_0, \xi_1, \xi_3) + \Lambda(\xi_2, \xi_1)D_2(\xi_0, \xi_1, \xi_3) \\
& -\Lambda(\xi_3, \xi_0)D_1(\xi_0, \xi_1, \xi_2) - \Lambda(\xi_3, \xi_1)D_2(\xi_0, \xi_1, \xi_2) \\
& +\Lambda(\xi_0, \xi_1)\frac{d}{dt}D_2(\xi_0 + t\xi_1, \xi_2, \xi_3)/_{t=0} \\
& +\Lambda(\xi_0, \xi_2)D_1(\xi_0, \xi_1, \xi_3) - \Lambda(\xi_0, \xi_3)D_1(\xi_0, \xi_1, \xi_2) \\
& \Lambda(\xi_1, \xi_2)D_2(\xi_0, \xi_1, \xi_3) - \Lambda(\xi_1, \xi_3)D_2(\xi_0, \xi_1, \xi_2) = 0.
\end{aligned}$$

Soit

$$\Lambda(\xi_0, \xi_1)\frac{d}{dt}D_2(\xi_0, t\xi_1, \xi_2, \xi_3)/_{t=0} = 0.$$

D'ou,

$$D_2 \equiv 0.$$

Et par suite on a

$$\langle i(\xi_2)\Lambda, d \langle X, \xi_3 \rangle \rangle - \langle i(\xi_3)\Lambda, d \langle X, \xi_2 \rangle \rangle = 0,$$

et donc

$$X \in L_t.$$

En effet, d'après la formule énoncée au début de la démonstration du lemme,  $X$  est dans  $L_t$  si et seulement si

$$\begin{aligned}
& -\Lambda(\xi_0, \xi_1)(\langle X, \xi_0 + \xi_1 \rangle - \langle X, \xi_1 \rangle - \langle X, \xi_0 \rangle) \\
& + \langle i(\xi_0)\Lambda, d \langle X, \xi_1 \rangle \rangle - \langle i(\xi_1)\Lambda, d \langle X, \xi_0 \rangle \rangle \\
& = \langle i(\xi_0)\Lambda, d \langle X, \xi_1 \rangle \rangle - \langle i(\xi_1)\Lambda, d \langle X, \xi_0 \rangle \rangle = 0.
\end{aligned}$$

(ii) Notons par  $D_3$  les termes d'ordre (2,2,1) de  $P_C$ . En considérant les termes d'ordre (2,2,2,1) dans (\*) on aura

$$-\Lambda(\xi_3, \xi_0)D_3(\xi_1, \xi_2, \xi_0) + \Lambda(\xi_3, \xi_1)D_3(\xi_0, \xi_2, \xi_1)$$

$$\begin{aligned}
& -\Lambda(\xi_3, \xi_2)D_3(\xi_0, \xi_1, \xi_2) - \Lambda(\xi_0, \xi_1)\frac{d}{dt}D_3(\xi_0 + \xi_1, \xi_2, \xi_3)_{/t=0} \\
& + \Lambda(\xi_0, \xi_2)\frac{d}{dt}D_3(\xi_0 + t\xi_2, \xi_1, \xi_3)_{/t=0} - \Lambda(\xi_0, \xi_3)D_3(\xi_1, \xi_2, \xi_0) \\
& \quad + \Lambda(\xi_1, \xi_2)\frac{d}{dt}D_3(\xi_0, \xi_1 + t\xi_2, \xi_3)_{/t=0} \\
& \quad + \Lambda(\xi_1, \xi_3)D_3(\xi_0, \xi_2, \xi_1) - \Lambda(\xi_2, \xi_3)D_3(\xi_0, \xi_1, \xi_2) \\
& - \langle i(\xi_3)\Lambda, d\lambda(\Lambda(\xi_0, \xi_1)\Lambda(\xi_0, \xi_2)\Lambda(\xi_1, \xi_2)) \rangle = 0.
\end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned}
& -\Lambda(\xi_3, d\lambda)\Lambda(\xi_0, \xi_1)\Lambda(\xi_0, \xi_2)\Lambda(\xi_1, \xi_2) - \Lambda(\xi_0, \xi_1) \\
& \frac{d}{dt}D_3(\xi_0 + t\xi_1, \xi_2, \xi_3)_{/t=0} + \Lambda(\xi_0, \xi_2)\frac{d}{dt}D_3(\xi_0 + t\xi_2, \xi_1, \xi_3)_{/t=0} \\
& \quad + \Lambda(\xi_1, \xi_2)\frac{d}{dt}D_3(\xi_0, \xi_1 + t\xi_2, \xi_3)_{/t=0} = 0.
\end{aligned}$$

Maintenant, pour  $\xi_3$  fixé on peut voir  $D_3$  comme une cochaîne de  $sp(V)$  et l'équation devient

$$-\Lambda(\xi_3, d\lambda)\Lambda(\xi_0, \xi_1)\Lambda(\xi_0, \xi_2)\Lambda(\xi_1, \xi_2) + \nabla D_3(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$$

Mais comme  $C_{in}$  est en somme directe avec  $im \nabla$  on aura

$$\Lambda(\xi_3, d\lambda) = 0,$$

et donc

$$\lambda \in I.$$

### **Théorème: II-4-3**

Supposons que  $rg \Lambda = 2n > 2$ .

Soit  $\Gamma$  une connexion linéaire sans torsion adaptée au feuilletage. Alors, tout 3-cocycle différentiel  $n - c$  et tangentiel  $C$  s'écrit sous la forme:

$$C = S_\Gamma^3 \wedge L_X + \lambda(T_\Gamma^2 - C'_1) + C_1 + \partial B,$$

où  $X \in L_t, \lambda \in I, C'_1$  est une 3-cochaîne 1-différentielle tangentielle  $n-c$ ,  $C_1$  est un 3-cocycle 1-différentiel tangentiel  $n-c$  et  $B$  est une 2-cochaîne différentielle tangentielle  $n-c$ .

Plus précisément pour que  $\lambda T_\Gamma^2$  ( $\lambda \neq 0$ ) apparaisse dans la décomposition d'au moins un 3-cocycle différentiel tangentiel  $n-c$  il faut et il suffit qu'il existe un  $\lambda$  dans  $I$  tel que  $\lambda \mu^*(\tau)$  soit un cobord.

### **Remarque: II-4-1**

Si  $\mu^*(\tau)$  est un cobord alors pour tout  $\lambda$  dans  $I$ ,  $\lambda \mu^*(\tau)$  est un cobord. Mais il se peut qu'il existe un  $\lambda$  dans  $I$  tel que  $\lambda \mu^*(\tau)$  soit un cobord sans que  $\mu^*(\tau)$  soit un cobord. En effet, il suffit de considérer les deux exemples suivant

(i) Soit  $M_1$  une variété symplectique telle que  $\mu^*(\tau_1)$  est un cobord et  $M_2$  une autre telle que  $\mu^*(\tau_2)$  n'est pas un cobord. Pour la variété de Poisson  $M = ]0, 1[ \times (M_1 \cup M_2)$ ,  $\mu^*(\tau)$  n'est

pas un cobord bien que, si on considère la fonction invariante  $\lambda$  qui vaut 1 sur  $]0, 1[ \times M_1$  et 0 sur  $]0, 1[ \times M_2$ , alors  $\lambda\mu^*(\tau)$  est un cobord.

(ii) Soit  $M'$  une variété symplectique connexe telle que  $\mu^*(\tau')$  n'est pas un cobord, et soit  $U$  un ouvert contractile de  $M$ . Considérons la variété de Poisson

$$M = (M' \times \mathbb{R}) \setminus ((M' \setminus U) \times ]-\infty, 0]).$$

Pour  $M$ ,  $\mu^*(\tau)$  n'est pas un cobord bien que, si  $\lambda$  désigne la fonction invariante qui vaut 1 sur  $U \times ]-\infty, 0]$  et 0 sur  $M' \times ]0, \infty[$  alors  $\lambda\mu^*(\tau)$  est un cobord.

### Démonstration du Théorème II-4-2

Rappelons qu'on effectue une récurrence basée sur l'ordre total et l'ordre lexicographique et que d'après la proposition II-4-8, on peut supposer que  $\bar{\sigma}_C$  est dans  $P \otimes C \otimes Q$ . D'autre part rappelons la formule

$$\begin{aligned} \sigma_{\partial C}(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \Lambda(\xi_0, \xi_1 + \xi_2 + \xi_3)\sigma_C(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ &- \Lambda(\xi_1, \xi_0 + \xi_2 + \xi_3)\sigma_C(\xi_0, \xi_2, \xi_3) + \Lambda(\xi_2, \xi_0 + \xi_1 + \xi_3) \\ &\quad \sigma_C(\xi_0, \xi_1, \xi_3) - \Lambda(\xi_3, \xi_0 + \xi_1 + \xi_2)\sigma_C(\xi_0, \xi_1, \xi_2) \\ &- \Lambda(\xi_0, \xi_1)\sigma_C(\xi_0 + \xi_1, \xi_2, \xi_3) + \Lambda(\xi_0, \xi_2)\sigma_C(\xi_0 + \xi_2, \xi_1, \xi_3) \\ &- \Lambda(\xi_0, \xi_3)\sigma_C(\xi_0 + \xi_3, \xi_1, \xi_2) + \Lambda(\xi_1, \xi_2)\sigma_C(\xi_0, \xi_1 + \xi_2, \xi_3) \\ &- \Lambda(\xi_1, \xi_3)\sigma_C(\xi_0, \xi_1 + \xi_3, \xi_2) - \Lambda(\xi_2, \xi_3)\sigma_C(\xi_0, \xi_1, \xi_2 + \xi_3) \quad \left( \begin{array}{c} * \\ * \end{array} \right). \end{aligned}$$

Supposons que  $C$  est d'ordre  $(r_0, r_1, r_2)$ . Par le lemme 6-1 on peut supposer que  $r_2 \leq 3$ .

a) si  $r_2 = 3$  alors  $\xi_2$  est l'un des arguments d'un polynôme élément de  $P$ . Puisque les éléments de  $P$  sont des polynômes en  $\Lambda(\xi_i, \xi_j)$  avec  $i < j$ , ceci n'est possible que si  $\bar{\sigma}_C$  est dans  $P$ . Vu que  $\bar{\sigma}_C$  est homogène en  $\xi_0, \xi_1$  et  $\xi_2$  et que  $r_0 \geq r_1 \geq r_2$ , les seuls éléments possibles sont des multiples par des fonctions de

$$\alpha(\xi_0, \xi_1, \xi_2) = \Lambda(\xi_0, \xi_1)^p \Lambda(\xi_0, \xi_2)^3 \quad (p \geq 3),$$

ou de

$$\beta(\xi_0, \xi_1, \xi_2) = \Lambda(\xi_0, \xi_1)^p \Lambda(\xi_0, \xi_2)^2 \Lambda(\xi_1, \xi_2) \quad (p \geq 2).$$

(i)  $\bar{\sigma}_C = \lambda.\alpha$ .

Notons par  $D$  le terme d'ordre  $(p+3, p-1, 4)$  de  $\sigma_C$ . Ce terme peut être non nul car pour des raisons de symétrie en  $\xi_1, \xi_2$ ,  $p > 3$ . D'autre part, d'après la proposition II-4-8  $D$  est dans  $P$ .

En cherchant les termes d'ordre  $(p+3, p-1, 3, 3)$  dans  $(*)$  on aura

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Lambda(\xi_1, \xi_2)\frac{d^2}{dt^2}\bar{\sigma}_C(\xi_0, \xi_1 + t\xi_2, \xi_3)/_{t=0} - \frac{1}{2}\Lambda(\xi_1, \xi_3) \\ \frac{d^2}{dt^2}\bar{\sigma}_C(\xi_0, \xi_1 + t\xi_3, \xi_2)/_{t=0} - \frac{1}{2}\Lambda(\xi_2, \xi_3)\frac{d^2}{dt^2} \\ D(\xi_0, \xi_1, \xi_2 + t\xi_3)/_{t=0} = 0 \quad (***) \end{aligned}$$

Puisque  $rg \Lambda = 2n > 2$ , on peut choisir  $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$  linéairement indépendants. Le premier terme de (\*\*\*) vaut

$$\frac{p(p-1)}{2} \lambda \Lambda(\xi_1, \xi_2) \Lambda(\xi_0, \xi_1)^{p-2} \Lambda(\xi_0, \xi_2)^2 \Lambda(\xi_0, \xi_3)^3,$$

et c'est le seul monôme de ce type dans (\*\*\*). Puisque  $p > 3$ , on déduit que

$$\lambda = 0,$$

et par suite:

$$\bar{\sigma}_C = 0.$$

(ii) Si  $\bar{\sigma}_C = \lambda \beta$ .

Notons par  $D_1$  les termes d'ordre  $(p+1, p+2, 3)$  et par  $D_2$  les termes d'ordre  $(p+1, p+1, 4)$  dans  $\sigma_C$ . On a donc:

$$D_1(\xi_0, \xi_1, \xi_2) = -\bar{\sigma}_C(\xi_1, \xi_0, \xi_2) = -\lambda \Lambda(\xi_1, \xi_0)^p \Lambda(\xi_1, \xi_2)^2 \Lambda(\xi_0, \xi_2).$$

Cherchons les termes d'ordre  $(p+1, p+1, 3, 3)$  dans (\*).

Si  $p > 2$  ces termes sont

$$\frac{1}{2} \Lambda(\xi_0, \xi_2) \frac{d^2}{dt^2} \bar{\sigma}_C(\xi_0 + t\xi_2, \xi_1, \xi_3) /_{t=0} - \frac{1}{2} \Lambda(\xi_0, \xi_3)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \bar{\sigma}_C(\xi_0 + t\xi_3, \xi_1, \xi_2) /_{t=0} + \frac{1}{2} \Lambda(\xi_1, \xi_2)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} D_1(\xi_0, \xi_1 + t\xi_2, \xi_3) /_{t=0} - \frac{1}{2} \Lambda(\xi_1, \xi_3)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} D_1(\xi_0, \xi_1 + t\xi_3, \xi_2) /_{t=0} - \frac{1}{2} \Lambda(\xi_2, \xi_3)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} D_2(\xi_0, \xi_1, \xi_2 + t\xi_3) /_{t=0} (** ** *)$$

Si  $p = 2$  il faut ajouter

$$-\frac{1}{2} \Lambda(\xi_0, \xi_1) \frac{d^2}{dt^2} \bar{\sigma}_C(\xi_0 + t\xi_1, \xi_2, \xi_3) /_{t=0}.$$

Cherchons le coefficient du monôme

$$\Lambda(\xi_0, \xi_1)^{p-2} \Lambda(\xi_0, \xi_2) \Lambda(\xi_0, \xi_3)^2 \Lambda(\xi_1, \xi_2)^2 \Lambda(\xi_1, \xi_3).$$

En prenant  $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$  linéairement indépendants, dans les deux cas ce monôme n'apparaît qu'en développant le premier terme de (\*\*\*) avec un coefficient égal à  $\frac{1}{2} \lambda p(p-1)$  et le 4<sup>eme</sup> terme avec un coefficient égal à  $-\frac{1}{2} (-\lambda) (-1)^{p-2} p(p-1)$  On aura donc

$$\lambda \frac{p(p-1)}{2} (1 + (-1)^p) = 0.$$

Si  $\lambda \neq 0$  alors  $p$  est impair et par suite  $\Lambda(\xi_0, \xi_1)^{p+2}$  est antisymétrique. Il peut être donc le symbole d'une 2-cochaine tangentielle, plus précisément si  $B$  est une 2-cochaine tangentielle n-c de symbole

$$\frac{2\lambda}{(p+2)(p+1)} \Lambda(\xi_0, \xi_1)^{p+2},$$

alors le symbole lexicographique de  $\partial B$  est  $\bar{\sigma}_C$ .

b) Commençons par traiter le cas  $r_2 = 1$  avant celui  $r_2 = 2$ .

Si  $r_2 = 1$ , alors  $C$  est ou bien 1-différentiel ou bien  $\bar{\sigma}_C$  est de la forme:

$$\bar{\sigma}_C(\xi_0, \xi_1, \xi_2) = \Lambda(\xi_0, \xi_1)^p \langle X, \xi_2 \rangle \quad (p \geq 2),$$

où  $X$  est un élément de  $H_t(M)$ .

Pour des raisons de symétrie en  $\xi_0$  et  $\xi_1$ ,  $p$  est impair. D'autre part si on suppose que  $r_1 > 3$  ( $p > 3$ ), alors en considérant les termes d'ordre  $(p, p_1, 3, 1)$  dans  $(*)$ , on aura

$$\frac{1}{2} \Lambda(\xi_1, \xi_2) \frac{d^2}{dt^2} \bar{\sigma}_C(\xi_0, \xi_1 + t\xi_2, \xi_3) /_{t=0} = 0.$$

Il en résulte donc que  $p = 3$ . Mais, d'après le lemme II-4-3,  $X$  est dans  $L_t$ . Dans ce cas  $\bar{\sigma}_C$  coïncide avec le symbole du cocycle tangentiel n-c  $S_\Gamma^3 \wedge L_X$ .

c)  $r_2 = 2$

Dans ce cas il n'est pas difficile de voir que  $\bar{\sigma}_C$  ne peut être que de la forme

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_C(\xi_0, \xi_1, \xi_2) &= \lambda \Lambda(\xi_0, \xi_1) \Lambda(\xi_0, \xi_2) \Lambda(\xi_1, \xi_2) \\ &= \lambda \sigma_{T^2}(\xi_0, \xi_1, \xi_2). \end{aligned}$$

Mais, pour que le symbole de  $\lambda T_\Gamma^2$  coïncide avec celui d'un 3-cocycle tangentiel il faut et il suffit qu'il existe une 3-cochaine tangentielle  $C'_1$  d'ordre  $< (2, 2, 2)$  telle que

$$\partial(\lambda T_\Gamma^2 - C'_1) = 0,$$

soit

$$\lambda \partial \mu^*(T_\Gamma) = \partial C'_1,$$

ou encore et d'après la proposition II-4-1,

$$\lambda \mu^*(\partial' T_\Gamma) = \lambda \mu^*(\tau) = \partial C'_1.$$

Mais, cette égalité implique que  $C'_1$  est 1-différentielle car  $\tau$  est une 4-forme.

Maintenant, si au lieu de considérer les cochaines différentielles tangentielles, on considère les cochaines locales tangentielles, localement les résultats seront identiques et un simple raisonnement de globalisation comme celui de [24] prouve la proposition suivante

### Proposition: II-4-10

Pour  $k \leq 3$ :

$$H_{loc,t,nc}^k(N, \partial) \simeq H_{diff,t,nc}^k(N, \partial).$$

Dans la suite on note  $T(M)$  l'espace des tenseurs contravariants antisymétriques sur  $M$  et par  $T_t(M)$  le sous-espace des éléments tangentiels de  $T(M)$ .

D'après les théorèmes II-4-2 et II-4-3 et les propositions II-4-1 et II-4 et vu la définition de  $\partial''$ , on a la proposition suivante :

**Proposition II-4-11**

$$Z_{loc,t,nc}^1(N, \partial) = \rho * \left( Z_{loc,t,nt}^1((\wedge^1(M), N), \partial'') \cap T_t(M) \right)$$

$$Z_{loc,t,nc}^2(N, \partial) = \left( \rho * (Z_{loc,t,nt}^2((\wedge^1(M), N), \partial'') \cap T_t(M)) + B_{loc,t,nc}^2(N, \partial) \right) \oplus I S_{\Gamma}^3$$

$$Z_{loc,t,nc}^3(N, \partial) = \left( \rho * (Z_{loc,t,nt}^3((\wedge^1(M), N), \partial'') \cap T_t(M)) + B_{loc,t,nc}^3(N, \partial) \right) \oplus S_{\Gamma}^3 \wedge L_S.$$

**5- Le terme  $M_3$  d'un produit star tangentiel.**

Soit  $\Gamma$  une connexion de Poisson.

**Proposition: II-5-1**

Tout produit-star tangentiel d'ordre 3 est de la forme

$$m + \nu P + \nu^2 \left( \frac{1}{2} P_{\Gamma}^2 + \delta B \right) + \nu^3 \left( \frac{1}{3!} S_{\Gamma}^3 + \partial B + \rho^*(T) \right)$$

où  $B$  est dans  $M_{loc,t,nc}^0(N) = A_{loc,t,nc}^0(N)$  et  $T$  est un 2-tenseur contravariant tangentiel sur  $M$ .

Ce produit-star est prolongeable à l'ordre 4 si et seulement si  $T$  est un cocycle (pour  $\partial''$ ).

**Démonstration**

Rappelons que le terme  $M_2$  d'un produit-star tangentiel est de la forme  $\frac{1}{2} P_{\Gamma}^2 + \delta B$  où  $B$  est dans  $M_{loc,t,nc}^0(N)$ .

Le terme  $M_3$  d'un produit-star tangentiel doit être tel que

$$P \Delta M_2 + m \Delta M_3 = 0.$$

D'une part un calcul direct prouve que

$$\frac{1}{3!} m \Delta S_{\Gamma}^3 + \frac{1}{2} P \Delta P_{\Gamma}^2 = 0.$$

Et d'autre part on a

$$m \Delta \partial B + P \Delta \delta B = -(m \Delta [P, B] + P \Delta (m \Delta B)) = 0$$

Il en résulte donc que

$$m \Delta \left( \frac{1}{3!} S_{\Gamma}^3 + \partial B \right) + P \Delta M_2 = 0$$

et par suite

$$m\Delta(M_3 - \frac{1}{3!}S_\Gamma^3 + \partial B) = 0.$$

Donc,  $M_3 - \frac{1}{3!}S_\Gamma^3 + \partial B$  est un cocycle de Hochschild tangentiel, il est donc de la forme  $\rho^*(T)$ .  $T$  est un tenseur contravariant tangentiel. On a vu que ce produit-star est prolongeable à l'ordre 4 si et seulement si  $M_3$  est un cocycle de Chevalley et donc, si et seulement si  $T$  est un cocycle.

## 6- Relations entre produit-star tangentiel et déformation formelle tangentielle de $(N, P)$

Soit

$$M_\nu = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k M_k,$$

un produit-star tangentiel alors,

$$P_\nu = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k M_{2k+1}$$

est une déformation formelle tangentielle de  $(N, P)$ . En effet, puisque pour tout  $k$  dans  $\mathbb{N}$  la composante d'ordre  $(2k+2)$  de  $M_\nu \Delta M_\nu$  est nulle on a

$$\sum_{i+j=k} (M_{2i+1} \Delta M_{2j+1}) + \sum_{i+j=k+1} (M_{2i} \Delta M_{2j}) = 0.$$

Mais, puisque pour tout  $i$ ,  $M_{2i}$  est symétrique, alors

$$\alpha(M_{2i} \Delta M_{2j}) = 0.$$

$P_\nu$  peut s'écrire aussi sous la forme

$$P_\nu = \frac{1}{\lambda} \alpha(M_\lambda) /_{\nu=\lambda^2}.$$

On dira que  $P_\nu$  dérive de  $M_\nu$ .

### Proposition: II-6-1

Une déformation formelle ne peut dériver qu'au plus d'un produit-star tangentiel faible, i.e. l'application

$$M_\nu \mapsto \frac{1}{\lambda} \alpha(M_\lambda) /_{\nu=\lambda^2}$$

est injective.

### Démonstration

Soit  $P_\nu$  une déformation formelle tangentielle de  $(N, P)$ . Supposons que  $P_\nu$  dérive de deux produits-star tangentiels faibles  $M_\nu$  et  $M'_\nu$ .

Posons

$$A_\nu = M'_\nu - M_\nu$$

alors, on a

$$A_\nu = \sum_{k=1}^{\infty} \nu^{2k} A_k.$$

Il s'agit de démontrer que:  $A_\nu = 0$ .

On a la relation suivante:

$$2M_\nu \Delta A_\nu + A_\nu \Delta A_\nu = M'_\nu \Delta M'_\nu - M_\nu \Delta M_\nu = 0 \quad (*).$$

Supposons que  $A_\nu \neq 0$ . Soit  $A_k$  le premier terme non nul de  $A_\nu$ .  
La relation (\*) écrite à l'ordre  $2k + 1$  devient

$$P \Delta A_k = 0.$$

Donc, d'après la proposition I-4-2, il existe  $a_k$  dans  $I$  tel que

$$A_k = a_k m.$$

D'autre part en considérant les termes d'ordre  $2k + 3$  de (\*) on aura

$$P \Delta A_{k+1} + a_k M_3 \Delta m = 0.$$

Mais,

$$(M_\nu \Delta M_\nu)_3 = 2(m \Delta M_3 + P \Delta M_2) = 0.$$

Donc,

$$P \Delta (A_{k+1} - a_k M_2) = 0.$$

Et par suite, et toujours d'après la proposition I-4-2 il existe  $a_{k+1}$  dans  $I$  tel que

$$A_{k+1} = a_k M_2 + a_{k+1} m.$$

Maintenant l'équation (\*) écrite à l'ordre  $2k + 2$  devient:

$$2a_k m \Delta M_2 = 0.$$

Or,

$$m \Delta M_2 = -P \Delta P \neq 0,$$

donc,

$$a_k = 0.$$

Ce qui est absurde car on a supposé que  $A_k \neq 0$ . D'où le résultat.

**Proposition: II-6-2**

Une déformation formelle tangentielle

$$L_\nu = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k L_k,$$

de  $(N, P)$  dérive d'un produit-star tangential faible si et seulement si on a

$$L_1 = \frac{1}{3!} S_\Gamma^3 + \rho^*(T) + \partial E,$$

où  $\Gamma$  est une connexion de Poisson,  $T$  est dans  $Z_{loc,t,nt}^2((\wedge^1(M), N), \partial'')$  et  $E$  est dans  $A_{loc,t,nc}^0(N)$ .

**Démonstration**

On reprend la méthode de [15].

Les remarques suivantes sont utiles pour la démonstration:

Pour tout  $A$  et  $B$  dans  $M^1(N)$ .

(i)  $A\Delta B(u, v, w)$  est symétrique en  $u, w$  si l'une des deux applications  $A$  et  $B$  est symétrique et l'autre est antisymétrique.

(ii)  $A\Delta B(u, v, w)$  est antisymétrique en  $u, w$  si les applications  $A$  et  $B$  sont toutes les deux symétriques ou antisymétriques.

Soit  $L_\nu$  une déformation formelle de  $P$  de premier terme  $L_1 = \frac{1}{3!} S_\Gamma^3 + \rho^*(T) + \partial E$ . Nous savons déjà que  $m + \nu P + \nu^2(\frac{1}{2}P_\Gamma^2 + \delta E) + \nu^3 L_1$  est un produit-star tangential d'ordre 3.

Supposons que pour un certain  $k \geq 2$  on a pu construire un produit-star faible tangential d'ordre  $2k$ ,  $M_\nu = \sum_{i=0}^{2k} \nu^i M_i$  tel que

$$M_{2i+1} = L_i \quad \forall i < k.$$

Considérons:

$$A_{2k+1} = (M_\nu \Delta M_\nu)_{2k+1} = \sum_{i+j=2k+1, i, j \neq 0} M_i \Delta M_j.$$

$A_{2k+1}$  est un cocycle de la cohomologie de Hochschild tangentielle tel que

$$\alpha(A_{2k+1}) = 0.$$

Il est donc un cobord et par suite, il existe  $C_{2k+1}$  dans  $M_{loc,t}^1(N)$  tel que:

$$A_{2k+1} = 2\delta C_{2k+1}.$$

Mais d'après (i), on peut choisir  $C_{2k+1}$  antisymétrique et par suite  $M'_\nu = M_\nu + \nu^{2k+1} C_{2k+1}$  sera un produit-star faible tangential d'ordre  $2k+1$ . Il existe donc  $R$  dans  $T_t(M)$  tel que

$$\alpha((M'_\nu \Delta M'_\nu)_{2k+2}) = \rho^*(R).$$

Or,

$$\alpha((M'_\nu \Delta M'_\nu)_{2k+2}) = \left[ \sum_{i=0}^k \nu^{2i+1} L_i, \sum_{i=0}^k \nu^{2i+1} L_i \right] - 2\delta C_{2k+1}.$$

Puisque on a

$$[L_\nu, L_\nu] = 0,$$

alors,

$$\alpha((M'_\nu \Delta M'_\nu)_{2k+2}) = 2\partial(L_k - C_{2k+1}).$$

Donc  $R$  est un cobord. Il existe donc  $T'$  dans  $T_t(M)$  tel que

$$R = \partial''(T').$$

$C_{2k+1} - L_k - \rho^*(T')$  est un cocycle de la cohomologie de Chevalley tangentielle. Sachant la forme de  $M_3$ , on peut écrire la formule suivante:

$$C_{2k+1} = L_k + aM_3 + \rho^*(T) + \partial E.$$

où  $a \in I$ ,  $T \in T_t(M)$  et  $E \in A_{loc,t,nc}^0(N)$ .

On vérifie bien que

$$M_\nu + \nu^{2k-2}2am + \nu^{2k}(aM_2 + \delta E) + \nu^{2k+1}L_k$$

est un produit-star faible tangentiel d'ordre  $2k + 1$  tel que

$$M_{2i+1} = L_i \quad \forall i \leq k.$$

Maintenant supposons que pour un certain  $k \geq 1$  on a pu construire un produit-star faible

tangentiel  $M_\nu = \sum_{i=0}^{2k+1} \nu^i M_i$  tel que:

$$M_{2i+1} = L_i \quad \forall i \leq k.$$

Alors,

$$\alpha((M_\nu \Delta M_\nu)_{2k+2}) = ([L_\nu, L_\nu])_k = 0,$$

et par suite il existe  $M_{2k+2}$  dans  $M_{loc,t}^1(N)$  tel que

$$(M_\nu \Delta M_\nu)_{2k+2} = \sum_{i+j=2k+2, i,j \neq 0} M_i \Delta M_j = 2\delta M_{2k+2}.$$

D'après (ii) on peut choisir  $M_{2k+2}$  symétrique et par suite  $M_\nu + \nu^{2k+2}M_{2k+2}$  sera un produit-star faible tangentiel d'ordre  $2k + 2$  tel que

$$M_{2i+1} = L_i \quad \forall i \leq k.$$

## 7- Produit-star de Moyal

Supposons que la variété de Poisson régulière  $(M, \Lambda)$  est plate alors il existe un produit-star tangentiel sur  $M$  appelé produit-star de Moyal. En effet, si  $\Gamma$  est une connexion de

Poisson plate sur  $M$  et  $\nabla$  sa dérivation covariante, alors on peut munir  $M$  d'une carte adaptées globale  $(M, x^1, \dots, x^m)$  telle que

$$\nabla_i(u) = \frac{\partial u}{\partial x^i}.$$

Définissons les opérateurs différentiels  $P^{(k)}$  sur  $M$  par

$$P^{(k)}(u, v) = \sum_{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_k} \Lambda^{i_1, j_1} \dots \Lambda^{i_k, j_k} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial u}{\partial x^{i_k}} \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial v}{\partial x^{j_k}}.$$

Alors on a la proposition suivante

**Proposition: II-7-1 (Produit-star de Moyal) [32]**

*L'application formelle*

$$M_\nu = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\nu^k}{k!} P^{(k)},$$

définie sur la variété de Poisson régulière plate  $(M, \Lambda)$  un produit-star tangential appelé produit-star de Moyal.

**Démonstration**

Il suffit de remarquer que

$$P^{(k+1)} = P.P^{(k)}$$

où  $\cdot$  désigne le produit habituel des opérateurs différentiels sur  $M$ .

### III- UNE PREMIERE DEMONSTRATION DE L'EXISTENCE DE PRODUITS-STAR TANGENTIELS SUR UNE VARIETE DE POISSON REGULIERE

Soit  $(M, \Lambda)$  une variété de Poisson régulière. On conserve les notations de II.

#### 1- L'application $\Theta_\Lambda^\tau$

Considérons

$$\tau : A_{loc,nc}(N) \rightarrow \wedge_{loc}(\wedge^1(M), N)$$

un inverse à droite de  $\rho^*$  sur  $\wedge_{loc}(\wedge^1(M), N)$ .

Soit  $(U, \varphi)$   $\varphi = (x^1, \dots, x^m)$  une carte adaptée contractile de  $M$ . Soit  $F_U$  la 2-forme définie sur  $U$  par

$$F_U = \sum_{i=1}^n dx^i \wedge dx^{i+n}.$$

$F_U$  étant fermée et  $U$  contractile, il existe donc une 1-forme sur  $U$ ,  $\omega_U$  telle que

$$F_U = d\omega_U \quad \text{sur } U.$$

Remarquons que  $\omega_U$  est caractérisée par la relation

$$P/U = \partial\rho(\omega_U).$$

On définit l'application

$$\Theta_\Lambda^\tau : A_{loc,nc}(N) \times A_{loc,nc}(N) \rightarrow A_{loc,nc}(N),$$

par

$$\forall A \in A_{loc,nc}(N), \forall B \in A_{loc,nc}^b(N),$$

$$\Theta_\Lambda^\tau(A, B)/U = \rho^*i(\omega_U)\tau([A, B]) - (-1)^b[\rho^*i(\omega_U)\tau(A), B] - [A, \rho^*i(\omega_U)\tau(B)].$$

Cette définition a un sens car elle ne dépend pas du choix de  $\omega_U$ . En effet si  $U$  et  $U'$  sont deux domaines de deux cartes adaptées contractiles alors sur  $U \cap U'$  on a

$$\partial\rho(\omega_U) = \partial\rho(\omega_{U'}),$$

et par suite si  $x_0$  est un élément de  $U \cap U'$  il existe un voisinage de  $x_0$ ,  $U''$  domaine d'une carte adaptée et un élément  $v$  de  $N$  tels que

$$\omega_U - \omega_{U'} = dv \quad \text{sur } U'',$$

et donc on aura

$$(\Theta_\Lambda^\tau(A, B)/U - \Theta_\Lambda^\tau(A, B)/U')/U'' = i(v)[A, B] - (-1)^b[i(v)A, B] - [A, i(v)B] = 0$$

d'après l'identité de Jacobi sur l'algèbre de Lie  $(A(N), [, ])$ .

La proposition suivante est simple à démontrer.

**Proposition: III-1-1**

Soient  $A \in A_{loc,nc}^a(N)$ ,  $B \in A_{loc,nc}^b(N)$  et  $C \in A_{loc,nc}^c(N)$  alors on a

(i)  $\Theta_\Lambda^r(A, B) \in A_{loc,nc}^{a+b-1}(N)$ ,

(ii)  $\Theta_\Lambda^r(A, B) = (-1)^{ab+1} \Theta_\Lambda^r(B, A)$ ,

(iii)  $S_{a,b,c}(-1)^{ac}(\Theta_\Lambda^r([A, B], C) - [A, \Theta_\Lambda^r(B, C)]) = 0$ ,

où  $S_{a,b,c}$  désigne la somme cyclique sur toutes les permutations cycliques de  $\{a, b, c\}$ .

On construit à partir de  $\Theta_\Lambda^r$ , l'opérateur

$$D^r : A_{loc,nc}(N) \rightarrow A_{loc,nc}(N)$$

$$A \mapsto \Theta_\Lambda^r(A, P).$$

La proposition suivante est utile pour établir quelques propriétés de  $D^r$ .

**Proposition: III-1-2**

Soit  $(U, \varphi)$   $\varphi = (x^1, \dots, x^m)$  une carte adaptée de  $M$  et soit  $\omega$  une 1-forme définie sur  $U$  telle que  $d\omega = F_U$ . Alors on a

(i)  $\forall u \in N$

$$[\rho(\omega), H_u] = H_{\rho(\omega)(u)} - H_u,$$

(ii) Si  $T \in \mathbb{B} \cap \wedge^r(\wedge^1(M), N)$  et  $T = \rho(C)$ ,

$$L_{\rho(\omega)} \rho^*(T) = \rho^*(\rho(L_{\rho(\omega)} C)) - r \rho^*(T),$$

(iii)  $\forall u, v \in N$ ,

$$L_{\rho(\omega)} F_U(H_u, H_v) = -F_U(H_u, H_v) = -\Lambda(du, dv),$$

(iv)

$$L_{\rho(\omega)} \circ \partial = \partial \circ L_{\rho(\omega)} - \partial.$$

**Démonstration**

(i) Pour tout  $X$  tangent aux feuilles on a

$$\begin{aligned} F_U(H_{\rho(\omega)(u)}, X) &= -d(\rho(\omega)(u))(X) = -L_{\rho(\omega)} du(X) \\ &= L_{\rho(\omega)} i(H_u) F_U(X) = F_U([\rho(\omega), H_u], X) + L_{\rho(\omega)} F_U(H_u, X). \end{aligned}$$

Or,

$$L_{\rho(\omega)} F_U = di(\rho(\omega)) F_U = F_U.$$

Puisque tous les champs de vecteur apparus dans les égalités précédentes sont tangents aux feuilles on en déduit directement le résultat.

- (ii) Conséquence directe de (i).  
 (iii) Il suffit de remarquer que

$$L_{\rho(\omega)}P = -P.$$

**Proposition: III-1-3**

Soit  $\tau$  un inverse à droite de  $\rho^*$  tel que

$$\tau(A_{loc,t,nc}(N)) = \wedge_{loc,t,nt}(\wedge(M), N),$$

et soient  $(U, \varphi)$   $\varphi = (x^1, \dots, x^m)$  une carte adaptée de  $M$  et  $\omega$  une 1-forme définie sur  $U$  telle que  $d\omega = F_U$ . Alors, on a

$$\forall A \in A_{loc,t,nc}^a(N),$$

$$D^\tau(A) = -(a+1)A + \rho^*i(\omega)(\partial''\tau - \tau\partial)A.$$

**Démonstration**

Pour tout  $A \in A_{loc,t,nc}^a(N)$ , on a

$$D^\tau(A) = \rho^*i(\omega)\tau([A, P]) + [\rho^*i(\omega)\tau(A), P] - [A, \rho^*i(\omega)\tau(P)].$$

Puisque

$$\tau(P) = \Lambda,$$

on a

$$\rho^*i(\omega)\tau(P) = L_{\rho(\omega)},$$

et par suite,

$$\begin{aligned} D^\tau(A) &= (L_{\rho(\omega)} - \partial\rho^*i(\omega)\tau - \rho^*i(\omega)\tau\partial)A \\ &= \rho^*i(\omega)(\partial''\tau - \tau\partial)A + (L_{\rho(\omega)} - \rho^*\partial''i(\omega)\tau - \rho^*i(\omega)\partial''\tau)\rho^*(\tau(A)). \end{aligned}$$

Or si

$$\tau(A) = \rho(C),$$

on a

$$\begin{aligned} &(L_{\rho(\omega)} - \rho^*\partial''i(\omega)\tau - \rho^*i(\omega)\partial''\tau)\rho^*(\tau(A)) \\ &= \rho^* \circ \rho(L_{\rho(\omega)}(C) - \partial'i(\rho(\omega))C - i\rho(\omega)\partial'C) - (a+1)A = -(a+1)A. \end{aligned}$$

Grâce aux outils qu'on a introduit  $(\mathbb{B}, \rho, \dots)$ , nous pouvons maintenant construire, comme dans le cas symplectique [15], un  $\tau$  particulier afin de simplifier  $D^\tau$ .

**Proposition: III-1-4**

Il existe un inverse à droite de  $\rho^*$ ,  $\tau$  tel que

$$\tau(A_{loc,t,nc}(N)) = \wedge_{loc,t,nt}(\wedge(M), N),$$

et vérifiant:

- (i)  $\tau \circ \rho^* = id$  sur  $T(M)$  l'espace des tenseurs contravariants antisymétriques sur  $M$ ,
- (ii)  $\rho^*i(\omega)(\partial''\tau - \tau\partial) = 0$  sur  $Z_{loc,t,nc}^p(N, \partial)$  pour  $p \leq 3$  et sur  $B_{loc,t,nc}(N, \partial)$ ,
- (iii)  $\rho^*i(\omega)(\partial''\tau - \tau\partial) = -id$  sur  $IS_\Gamma^3$  et sur  $S_\Gamma^3 \wedge L_S$ .

### Démonstration

On reprend la méthode de [15].

Pour  $p = 1$  ou  $p > 3$ , on décompose  $A_{loc,t,nc}^{p-1}(N)$  de la façon suivante

$$A_{loc,t,nc}^{p-1}(N) = \rho^*(T_t(M)) \oplus \rho^*(\partial''E) \oplus \rho^*(F),$$

où  $T_t(M)$  est l'espace des tenseurs tangentiels et  $E$  et  $F$  sont tels que

$$\rho^*(B_t^p(M)) \oplus \rho^*(\partial''E) = \rho^*(B_{loc,t,nt}^p((\wedge^1(M), N), \partial'')),$$

$B_t^p(M)$  étant l'image de  $T_t^{p-1}(M)$  par  $\partial''$ .

Considérons:

- $\Psi$  : un inverse à droite de  $\rho^* : E \rightarrow \rho^*(E)$ ,
- $\sigma$  : un inverse à droite de  $\partial : \rho^*(E) \rightarrow \partial(\rho^*(E))$ ,
- $\tau_2$  : un inverse à droite de  $\rho^* : F \rightarrow \rho^*(F)$ .

Pour  $p = 2$  ou  $p = 3$  on remplace successivement  $\rho^*(F)$  par  $IS_\Gamma^3 \oplus \rho^*(F')$  ou  $(S_\Gamma^3 \wedge L_S) \oplus \rho^*(F')$ .

Dans ces cas on choisit

$$\tau_2(S_\Gamma^3) = \langle \Lambda, \rho(\Phi_\Gamma) \rangle,$$

et on pose

$$\tau_2(aS_\Gamma^3) = a\tau_2(S_\Gamma^3) \quad \forall a \in I,$$

et

$$\tau_2(S_\Gamma^3 \wedge L_X) = \langle \Lambda, \rho(\Phi_\Gamma) \rangle \wedge L_X \quad \forall X \in S.$$

On définit donc  $\tau$  par

- \* l'inverse de  $\rho^* : T_t(M) \rightarrow \rho^*(T_t(M))$  sur  $\rho^*(T_t(M))$ ,
- \*  $\partial'' \circ \Psi \circ \sigma$  sur  $\rho^*(\partial''(E))$ ,
- \*  $\tau_2$  sur  $\rho^*(F)$ .

### Proposition: III-1-5

Si  $\tau$  est comme dans la proposition III-1-4, alors l'application  $D^\tau$  vérifie les propriétés suivantes

- (i)  $D^\tau \circ \partial = \partial \circ D^\tau - \partial$ ,
- (ii)  $D^\tau + k.id = 0$  sur  $B_{loc,t,nc}^k(N, \partial)$  pour tout  $k \geq 1$ ,
- (iii)  $D^\tau + id = 0$  sur  $Z_{loc,t,nc}^1(N, \partial)$ ,
- (iv)  $(D^\tau + 2.id)(D^\tau + 3.id) = 0$  sur  $Z_{loc,t,nc}^2(N, \partial)$ ,
- (v)  $(D^\tau + 3.id)(D^\tau + 4.id) = 0$  sur  $Z_{loc,t,nc}^3(N, \partial)$ ,
- (vi)  $(D^\tau + id)^2 = 0$  sur  $A_{loc,t,nc}^0(N)$ ,
- (vii)  $(D^\tau + 2.id)^2(D^\tau + 3.id) = 0$  sur  $A_{loc,t,nc}^1(N)$ ,
- $(D^\tau + 2.id)^2 = 0$  sur  $A_{1-diff,t,nc}^1(N)$ ,

(viii)  $(D^\tau + 3.id)^2(D^\tau + 4.id) = 0$  sur  $A_{loc,t,nc}^2(N)$ ,  
 $(D^\tau + 3.id)^2 = 0$  sur  $A_{1-diff,t,nc}^2(N)$ .

**Démonstration**

(i) D'après la proposition III-1-1 pour tout  $A$  dans  $A_{loc,nc}(N)$  on a

$$2\Theta_\Lambda^\tau([A, P], P) - [A, \Theta_\Lambda^\tau(P, P)] - 2[P, \Theta_\Lambda^\tau(P, A)] = 0.$$

Sachant que  $\Theta_\Lambda^\tau(P, P) = D^\tau(P) = -2P$ , cette relation devient

$$D^\tau \circ \partial(A) - \partial \circ D^\tau(A) + \partial(A) = 0.$$

(ii) Il suffit de remarquer que sur  $B_{loc,t,nc}(N, \partial)$ ,  $\rho^*i(\omega)(\partial''\tau - \tau\partial) = 0$  sur tout ouvert  $U$  et pour toute 1-forme  $\omega$  sur  $U$  vérifiant  $d\omega = F_U$ .

(iii) D'après la proposition II-4-11 on a

$$Z_{loc,t,nc}^1(N, \partial) = \rho^*((Z_{loc,t,nt}^1(\wedge^1(M), N), \partial'') \cap T_t(M)).$$

Mais si  $U$  et  $\omega$  sont comme dans (ii), alors  $\rho^*i(\omega)(\partial''\tau - \tau\partial) = 0$  sur  $\rho^*((Z_{loc,t,nt}^1, \partial'') \cap T_t(M))$ .

(iv) (v) Toujours d'après la proposition II-4-11 on a

$$Z_{loc,t,nc}^2(N, \partial) = \rho^*((Z_{loc,t,nt}^2(\wedge^1(M), N), \partial'') \cap T_t(M)) + B_{loc,t,nc}^2(N, \partial) \oplus IS_\Gamma^3.$$

Et,

$$Z_{loc,t,nc}^3(N, \partial) = \rho^*((Z_{loc,t,nt}^3(\wedge^1(M), N), \partial'') \cap T_t(M)) + B_{loc,t,nc}^3(N, \partial) \oplus (S_\Gamma^3 \wedge L_S).$$

Or,

$$D^\tau + 2.id = 0 \text{ sur } \rho^*((Z_{loc,t,nt}^2(\wedge^1(M), N), \partial'') \cap T_t(M)),$$

$$D^\tau + 3.id = 0 \text{ sur } IS_\Gamma^3 \text{ et sur } \rho^*((Z_{loc,t,nt}^3(\wedge^1(M), N), \partial'') \cap T_t(M)),$$

$$D^\tau + 4.id = 0 \text{ sur } S_\Gamma^3 \wedge L_S.$$

(vi) (vii) (viii) D'après (i) et (ii) sur  $A_{loc,t,nc}^p(N)$  on a

$$\partial \circ (D^\tau + (p+1).id) = (D^\tau + (p+2).id) \circ \partial = 0,$$

et donc

$$(D^\tau + (p+1).id)(A_{loc,t,nc}^p(N)) \subset Z_{loc,t,nc}^{p+1}(N, \partial),$$

et par suite (vi), (vii) et (viii) seront des conséquences directes de (iii), (iv) et (v).

**2- Existence de déformations formelles tangentielles de  $(N, P)$**

**Définition: III-2-1**

Une déformation formelle d'ordre  $k$  de  $P$  est dite la directrice d'une déformation formelle de  $P$ ,  $L_\nu$  si et seulement si elle est égale à  $L_\nu$  jusqu'à l'ordre  $k$ .

Si  $V$  est un espace vectoriel on note par  $D_\nu$  l'application:

$$D_\nu : V_\nu \rightarrow V_\nu$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \nu^k u_k \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} k \nu^{k-1} u_k.$$

**Proposition: III-2-1**

L'équation

$$(\nu D_\nu + id)L_\nu + \frac{1}{2}\Theta_\Lambda^\tau(L_\nu, L_\nu) = 0 \quad (*)$$

admet une solution unique  $L_\nu$  telle que:

$L_0 = P$ ,  $L_1 = \rho^*(T) + \partial E$   $T \in Z_{loc,t,nt}^2((\wedge^1(M), N), \partial'')$   $\cap T_t(M)$ ,  $E \in A_{loc,t,nc}^0(N)$   
 et  $L_2 = \frac{-1}{2}(D^\tau + id)\Theta_\Lambda^\tau(L_1, L_1) + aS_\Gamma^3$ ,  $a \in I$ .

(i) Cette solution est une déformation formelle tangentielle de  $P$ .

(ii) Si  $a = 0$  et  $E = 0$ , cette déformation est 1-différentielle.

(iii) Si  $L_1 = 0$  alors  $\forall k \geq 1$ ,  $L_{2k+1} = 0$ . De plus  $L'_\nu = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k L_{2k}$  est l'unique solution de l'équation

$$(2\nu D_\nu + id)L'_\nu + \frac{1}{2}\Theta_\Lambda^\tau(L'_\nu, L'_\nu) = 0$$

$$L'_0 = P, L'_1 = aS_\Gamma^3.$$

**Démonstration**

Nos résultats précédents permettent de suivre la méthode de [15]

a) L'équation (\*) est vérifiée à l'ordre 0 et 1. En effet,  
 à l'ordre 0:

$$L_0 + \frac{1}{2}\Theta_\Lambda^\tau(L_0, L_0) = P + \frac{1}{2}D^\tau(P) = 0,$$

à l'ordre 1:

$$\begin{aligned} & 2L_1 + \frac{1}{2}\Theta_\Lambda^\tau(L_0, L_1) + \frac{1}{2}\Theta_\Lambda^\tau(L_1, L_0) \\ &= (D^\tau + 2.id)L_1 = (D^\tau + 2.id)(\rho^*(T)) + (D^\tau + 2.id)(\partial E) = 0, \end{aligned}$$

car

$$D^\tau + 2.id = 0,$$

sur  $Z_{loc,t,nt}^2((\wedge^1(M), N), \partial'')$   $\cap T_t(M)$  et sur  $B_{loc,t,nc}^2(N, \partial)$ .

b) Le terme  $L_2$  doit être tel que

$$(D^\tau + 3.id)L_2 + \frac{1}{2}\Theta_\Lambda^\tau(L_1, L_1) = 0.$$

Il est simple de voir que, puisque  $\rho^*(T)$  est 1-différentiel,  $\frac{1}{2}\Theta_\Lambda^\tau(\rho^*(T), \rho^*(T))$  est 1-différentiel. Or sur  $A_{1-diff,t,nc}^1(N)$  on a

$$(D^\tau + 3.id)(D^\tau + id) + id = (D^\tau + 2.id)^2 = 0.$$

Et par suite

$$\frac{1}{2}\Theta_{\Lambda}^{\tau}(\rho^*(T), \rho^*(T)) = -(D^{\tau} + 3.id)(D^{\tau} + id)\frac{1}{2}\Theta_{\Lambda}^{\tau}(\rho^*(T), \rho^*(T)).$$

Désignons par  $A$  la quantité  $\rho^*(T)$  ou  $\partial E$ . Il s'agit de montrer que

$$\Theta_{\Lambda}^{\tau}(A, \partial E) = -(D^{\tau} + 3.id)(D^{\tau} + id)\Theta_{\Lambda}^{\tau}(A, \partial E).$$

En effet en écrivant cette relation pour  $\rho^*(T)$  et  $\partial E$ , et en considérant la somme avec la relation précédente on aura

$$(D^{\tau} + 3.id)L_2 + \frac{1}{2}\Theta_{\Lambda}^{\tau}(L_1, L_1) = 0,$$

avec

$$L_2 = \frac{1}{2}(D^{\tau} + id)\Theta_{\Lambda}^{\tau}(L_1, L_1).$$

Mais puisque pour tout  $a$  dans  $I$ ,  $(D^{\tau} + 3.id)(aS_{\Gamma}^3) = 0$  la relation reste vraie si on ajoute à  $L_2$   $aS_{\Gamma}^3$ .

D'après la proposition III-1-1 on a

$$\Theta_{\Lambda}^{\tau}(A, \partial E) = \partial\Theta_{\Lambda}^{\tau}(E, A) + D^{\tau}([E, A]) + [D^{\tau}(A), E] + [A, D^{\tau}(E)].$$

Dans les deux cas on a  $D^{\tau}(A) = -2A$ . Et par suite on aura

$$\Theta_{\Lambda}^{\tau}(A, \partial E) = \partial\Theta_{\Lambda}^{\tau}(E, A) - (D^{\tau} + 3.id)([A, E]) + [(D^{\tau} + id)(E), A].$$

$(D^{\tau} + id)(E)$  est un cocycle car  $\partial(D^{\tau} + id)(E) = (D^{\tau} + 2.id)(\partial E) = 0$ , il est donc 1-différentiel. Par suite  $[(D^{\tau} + id)(E), A]$  est ou bien un cobord si  $A = \partial E$  ou bien un cocycle 1-différentiel si  $A = \rho^*(T)$ . Dans les deux cas,  $(D^{\tau} + 2.id)([(D^{\tau} + id)(E), A]) = 0$  de même  $(D^{\tau} + 2.id)(\partial\Theta_{\Lambda}^{\tau}(A, E)) = 0$  et donc on peut écrire la relation

$$\partial\Theta_{\Lambda}^{\tau}(A, E) - [(D^{\tau} + id)(E), A] = (D^{\tau} + 3.id)(\partial\Theta_{\Lambda}^{\tau}(A, E) - [(D^{\tau} + id)(E), A]),$$

et par suite on aura la relation

$$\Theta_{\Lambda}^{\tau}(A, \partial E) = (D^{\tau} + 3.id)(\partial\Theta_{\Lambda}^{\tau}(A, E) - [(D^{\tau} + id)(E), A] - [A, E]).$$

Finalement on a

$$(D^{\tau} + 2.id)^2(\Theta_{\Lambda}^{\tau}(A, \partial E)) = 0,$$

car  $(D^{\tau} + 2.id)^2(D^{\tau} + 3.id) = 0$  sur  $A_{Loc,t,nc}^1(N)$ . En utilisant le fait que  $(D^{\tau} + 3.id)(D^{\tau} + id) + id = (D^{\tau} + 2.id)^2$ , on déduit le résultat.

D'autre part, on vérifie bien que  $L_2$  est le deuxième terme d'une déformation formelle de  $P$ . En effet d'après la proposition III-1-1 on a

$$\partial\Theta_{\Lambda}^{\tau}(L_1, L_1) = -D^{\tau}([L_1, L_1]) + 2[D^{\tau}(L_1), L_1] = -(D^{\tau} + 4.id)([L_1, L_1]).$$

Cette formule peut s'écrire sous la forme

$$(D^\tau + 4.id)([L_1, L_1]) - 2\partial L_2 = 0,$$

car

$$-2\partial L_2 = \partial(D^\tau + 1)(\Theta_\Lambda^\tau(L_1, L_1)) = (D^\tau + 2.id)(\partial\Theta_\Lambda^\tau(L_1, L_1) = -\partial\Theta_\Lambda^\tau(L_1, L_1).$$

Mais on a

$$[L_1, L_1] = [\rho^*(T), \rho^*(T)] + \partial([2\rho^*(T) + \partial E, E]).$$

Donc,

$$(D^\tau + 3.id)([L_1, L_1]) = 0.$$

Et par suite, la relation devient

$$[L_1, L_1] - 2\partial L_2 = 0.$$

c) L'équation (\*) admet une solution unique si on se donne  $L_1$  et  $L_2$ . En effet supposons que  $L_\nu = \sum_{i=0}^{k-1} \nu^i L_i$  est une solution d'ordre  $k-1$  ( $k > 2$ ) alors a l'ordre  $k$  l'équation s'écrit

$$(D^\tau + (k+1).id)(L_k) + \frac{1}{2} \left( \sum_{i+j=k, i,j \neq 0} \Theta_\Lambda^\tau(L_i, L_j) \right) = 0 \quad (**).$$

Mais puisque  $(D^\tau + 2.id)^2(D^\tau + 3.id) = 0$  sur  $A_{loc,t,nc}^1(N)$  alors pour tout  $p$  différent de 2 et 3  $(D^\tau + p.id)$  est inversible sur  $A_{loc,t,nc}^1(N)$  et par suite l'équation (\*\*) admet une solution unique dans  $A_{loc,t,nc}^1(N)$ .

d) La solution est une déformation formelle de  $P$ . En effet supposons que c'est vrai jusqu'à l'ordre  $k-1$  ( $k > 2$ ).

On a

$$\begin{aligned} (\nu D_\nu + 2.id)([L_\nu, L_\nu]) &= 2[(\nu D_\nu + id)(L_\nu), L_\nu] = -[\Theta_\Lambda^\tau(L_\nu, L_\nu), L_\nu] \\ &= -\Theta_\Lambda^\tau([L_\nu, L_\nu], L_\nu) \quad (***) \end{aligned}$$

car, on a

$$[\Theta_\Lambda^\tau(L_\nu, L_\nu), L_\nu] - \Theta_\Lambda^\tau([L_\nu, L_\nu], L_\nu) = 0.$$

Sachant que, pour  $i < k$   $([L_\nu, L_\nu])_i = 0$ , le terme d'ordre  $k$  de (\*\*\*) est

$$(D^\tau + (k+2).id)([L_\nu, L_\nu])_k = 0,$$

puisque  $(D^\tau + (k+2).id)$  est inversible sur  $A_{loc,t,nc}^2(N)$ , on aura

$$([L_\nu, L_\nu])_k = 0.$$

e) Si  $a = 0$  et  $E = 0$ , alors  $L_\nu$  est dans  $A_{1-diff,nc}^1(N_\nu)$ . Pour prouver cette assertion il suffit de remarquer que si  $A$  et  $B$  sont 1-différentiels alors  $[A, B]$  et  $\Theta_\Lambda^\tau(A, B)$  sont 1-différentiels.

f) Si  $L_1 = 0$ , alors  $L_{2k+1} = 0$  pour tout  $k$  dans  $\mathbb{N}$ . Supposons que cette assertion soit vraie jusqu'à l'ordre  $k - 1$  pour un certain  $k \geq 2$ . L'équation (\*) écrite à l'ordre  $2k + 1$  devient

$$(D^\tau + (2k + 2).id)(L_{2k+1}) + \frac{1}{2} \left( \sum_{i+j=2k+1} \Theta_\Lambda^\tau(L_i, L_j) \right) = 0.$$

Sachant que si la somme de deux entiers est impair alors un de ces entiers est impair on déduit

$$(D^\tau + (2k + 2).id)(L_{2k+1}) = 0,$$

et par suite

$$L_{2k+1} = 0.$$

Maintenant il est clair que  $L'_\nu = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k L_{2k}$  est solution de l'équation

$$(2\nu D_\nu + id)L'_\nu + \frac{1}{2} \Theta_\Lambda^\tau(L'_\nu, L'_\nu) = 0,$$

$$L'_0 = P, \quad L'_1 = aS_\Gamma^3.$$

### Définition: III-2-2

Une déformation (multi-paramétrée) de  $P$  est une série formelle:

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^p} \nu^\alpha L_\alpha, \quad \nu = (\nu_1, \dots, \nu_p),$$

définissant une structure d'algèbre de Lie sur l'espace  $N_\nu$  des séries formelles

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^p} \nu^\alpha u_\alpha, \quad u_\alpha \in N.$$

On pose

$$\nu D_\nu = \sum_{i=1}^p \nu_i D_{\nu_i}$$

et on note par  $(e_1, \dots, e_p)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^p$ .

La démonstration de la proposition suivante se déduit facilement de celle de la proposition précédente.

### Proposition: III-2-2

L'équation

$$(\nu D_\nu + id)L_\nu + \frac{1}{2} \Theta_\Lambda^\tau(L_\nu, L_\nu) = 0$$

admet une solution unique  $L_\nu$  telle que

$$L_0 = P, \quad L_{e_i} = \rho^*(T_i) + \partial E_i$$

$(T_i \in Z_{loc,t,nt}^2((\wedge^1(M), N), \partial'') \cap T_t(M), E_i \in A_{loc,t,nc}^0(N))$  et  $L_{e_i+e_j} = \frac{-1}{2}(2 - \delta_{ij})(D^\tau + id)\Theta_\Lambda^\tau(L_{e_i}, L_{e_j}) + a_{ij}S_\Gamma^3$ , ( $a_{ij} \in I$ ).

(i) Cette solution est une déformation formelle tangentielle de  $P$ .

(ii) Si pour tout  $i, j$   $a_{ij} = 0$  et  $E_i = 0$ , cette déformation est 1-différentielle.

De même l'équation

$$(2\mu D_\mu + \nu D_\nu + id)L_{\mu,\nu} + \frac{1}{2}\Theta_\Lambda^\tau(L_{\mu,\nu}, L_{\mu,\nu}) = 0,$$

admet une solution unique telle que

$$L_{0,0} = P, L_{e_i,0} = a_i S_\Gamma^3 \quad (a_i \in I)$$

$L_{0,e_i} = \rho^*(T_i) + \partial E_i$  ( $T_i \in Z_{loc,t,nt}^2((\wedge^1(M), N), \partial'') \cap T_t(M), E_i \in A_{loc,t,nc}^0(N))$  et

$$L_{0,e_i+e_j} = \frac{-1}{2}(2 - \delta_{ij})(D^\tau + id)\Theta_\Lambda^\tau(L_{0,e_i}, L_{0,e_j}) + a_{ij}S_\Gamma^3, \quad (a_{ij} \in I).$$

### Proposition: III-2-3

Toute déformation formelle tangentielle d'ordre  $k \geq 0$  de  $(N, P)$  s'étend à une déformation formelle tangentielle de  $(N, P)$ .

### Démonstration

Soit  $L_\nu = \sum_{i=0}^{\infty} \nu^i L_i$  une déformation formelle tangentielle de  $(N, P)$  jusqu'à l'ordre  $k$ .

$L_1$  étant un cocycle tangentiel, il est de la forme

$$L_1 = \rho^*(T_1) + \partial E_1 + a_1 S_\Gamma^3,$$

où  $T_1 \in Z_{loc,t,nt}^2((\wedge^1(M), N), \partial'') \cap T_t(M), E_1 \in A_{loc,t,nc}^0(N)$  et  $a_1 \in I$ .

Considérons la solution  $L_{\mu,\nu}^{(1)}$  de l'équation

$$(2\mu D_\mu + \nu D_\nu + id)L_{\mu,\nu} + \frac{1}{2}\Theta_\Lambda^\tau(L_{\mu,\nu}, L_{\mu,\nu}) = 0,$$

telle que  $L_{1,0} = a_1 S_\Gamma^3$  et  $L_{0,1} = \rho^*(T_1) + \partial E_1$   $\mu, \nu \in \mathbb{R}$  Alors  $L_\nu^{(1)} = L_{\nu,\nu}^{(1)}$  est une déformation formelle de  $P$  telle que:  $L_1^{(1)} = L_1$ . Par suite  $L_2 - L_2^{(1)}$  est de la forme

$$L_2 - L_2^{(1)} = \rho^*(T_2) + \partial E_2 + a_2 S_\Gamma^3,$$

où  $T_2 \in Z_{loc,t,nt}^2((\wedge^1(M), N), \partial'') \cap T_t(M), E_2 \in A_{loc,t,nc}^0(N)$  et  $a_2 \in I$ .

Considérons maintenant la solution  $L_{\mu,\nu}^{(2)}$  de l'équation

$$(2\mu D_\mu + \nu D_\nu + id)L_{\mu,\nu} + \frac{1}{2}\Theta_\Lambda^\tau(L_{\mu,\nu}, L_{\mu,\nu}) = 0$$

telle que:  $L_{e_i,0} = a_i S_\Gamma^3$  et  $L_{0,e_i} = \rho^*(T_i) + \partial E_i$  ( $i = 1, 2$ ) et  $\mu, \nu \in \mathbb{R}^2$ . Alors il est simple de vérifier que  $L_\nu^{(2)} = L_{(\nu,\nu^2),(\nu,\nu^2)}$  est une déformation formelle tangentielle de  $P$  égale à  $L_\nu$  jusqu'à l'ordre 2.

Supposons qu'on ait construit de cette façon  $a_1, \dots, a_{k-1}, T_1, \dots, T_{k-1}, E_1, \dots, E_{k-1}$  et  $L_\nu^{(k-1)}$ , alors on a

$$L_k - L_k^{(k-1)} = \rho^*(T_k) + \partial E_k + a_k S_\Gamma^3.$$

Par suite si on considère la solution  $L_{\mu,\nu}^{(k)}$  de l'équation

$$(2\mu D_\mu + \nu D_\nu + id)L_{\mu,\nu} + \frac{1}{2}\Theta_\lambda^\tau(L_{\mu,\nu}, L_{\mu,\nu}) = 0,$$

telle que  $L_{e_i,0} = a_i S_\Gamma^3$  et  $L_{0,e_i} = \rho^*(T_i) + \partial E_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) et  $\mu, \nu \in \mathbb{R}^k$ . Alors  $L_\nu^{(k)} = L_{(\nu, \nu^2, \dots, \nu^k), (\nu, \nu^2, \dots, \nu^k)}$  est une déformation formelle tangentielle de  $P$  égale à  $L_\nu$  jusqu'à l'ordre  $k$ .

### 3-Existence de produits-star tangentiels sur une variété de Poisson régulière.

#### Proposition: III-3-1

*Tout produit-star tangential ou produit-star faible tangential d'ordre  $2k$  ( $k \geq 2$ ) est prolongeable en un produit-star tangential ou un produit-star faible tangential.*

#### Démonstration

a) Soit  $M_\nu$  un produit-star faible tangential d'ordre  $2k$  alors  $L_\nu = \sum_{i=0}^{k-1} \nu^i M_{2i+1}$  est une déformation formelle tangentielle de  $P$  d'ordre  $k-1$ . Elle est donc prolongeable en une déformation formelle de  $P$ ,  $L'_\nu$ . Mais nous savons que  $L'_\nu$  dérive d'un produit-star faible tangential  $M'_\nu$  et que  $M'_\nu$  est égal à  $M_\nu + a\nu^{2k-2}(m + \nu^2 M_2) + \nu^{2k} \delta E$  ( $a \in I$ ) jusqu'à l'ordre  $2k$ . Pour un choix convenable de  $a$  et  $E$ ,  $(id - a\nu^{2k-2})(id - \nu^{2k} E)^* M'_\nu$  coïncide avec  $M_\nu$  jusqu'à l'ordre  $2k$ .

b) Soit  $M_\nu$  un produit-star tangential d'ordre  $2k$ . D'après a) il est prolongeable en un produit-star faible tangential, mais ce dernier est équivalent à un produit-star tangential égal à  $M_\nu$  jusqu'à l'ordre  $2k$ .

## IV - UNE DEUXIEME DEMONSTRATION DE L'EXISTENCE DE PRODUITS-STAR TANGENTIELS SUR UNE VARIETE DE POISSON REGULIERE

Soit  $(M, \Lambda)$  une variété de Poisson régulière [19] de dimension  $2n + q$  ( $n, q \in \mathbb{N}$ ), ( $n > 0$ ).

On va maintenant donner une seconde preuve de l'existence de produits star tangentiels sur  $M$  en suivant la méthode de De Wilde et Lecomte [16] qui est une simplification des idées de Maeda, Omori et Yoshioka [21] qui consistent à recoller des produits star locaux équivalents à ceux de Moyal définis sur des domaines de cartes contractiles.

### 1 - Définitions et propriétés

Soit  $(U, \varphi)$  une carte adaptée de  $(M, \Lambda)$ .

#### Définitions: IV-1-1

Soit  $x_0$  un point de  $U$ . On définit sur  $U$  le champ de vecteur  $\xi_{x_0}$  par

$$\xi_{x_0} = \sum_{i=1}^{2n} (x - x_0)^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

#### Définition: IV-1-2

Pour  $x_0$  dans  $U$  on définit l'application  $\theta^{x_0}$  sur  $N_\nu(U)$  par

$$\theta^{x_0} = -2id + 4\nu D_\nu + L_{\xi_{x_0}}.$$

On définit enfin sur  $U$  le crochet de Moyal  $P_\nu$  comme dans le chapitre précédent par

$$P_\nu = \sum_r \frac{\nu^r}{r!} P^{(2r+1)}.$$

#### Proposition: IV-1-1

$\theta^{x_0}$  est une dérivation de  $(N_\nu(U), P_\nu)$ .

#### Démonstration

Il suffit de remarquer que, pour tout  $u$  et  $v$  de  $N(U)$ ,

$$P^{(2k+1)}(L_{\xi_{x_0}}(u), v) + P^{(2k+1)}(u, L_{\xi_{x_0}}(v)) = L_{\xi_{x_0}} P^{(2k+1)}(u, v) + 2(2k + 1)P^{(2k+1)}(u, v).$$

#### Proposition: IV-1-2

Si  $H_t^1(U) = 0$  alors l'espace des dérivations tangentielles de  $(N_\nu(U), P_\nu)$  est la somme de  $I(U)\theta^{x_0}$  et de l'espace des dérivations intérieures.

### Démonstration

On reprend la méthode de [16]

Soit  $D$  une dérivation tangentielle de  $(N_\nu(U), P_\nu)$ . Un raisonnement semblable à celui du cas symplectique [17] montre qu'il existe  $a_\nu$  dans l'espace  $I_\nu(U)$  des séries formelles à coefficients dans  $I(U)$  et une dérivation formelle tangentielle,

$$D' = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k D'_k,$$

tels que

$$D = D' + a_\nu \circ D,$$

où  $\circ$  désigne le produit de séries formelles.

En effet,

$U$  étant non compact, l'algèbre de Lie  $(N_\nu(U), P_\nu)$  est toujours égale à son idéal dérivé. On note  $Ent P_\nu$  l'ensemble des éléments  $T$  de  $M_{loc,t}^0(N_\nu(U))$  vérifiant

$$T(P_\nu(u_\nu, v_\nu)) = P_\nu(T(u_\nu), v_\nu) = P_\nu(u_\nu, T(v_\nu)) \quad \forall u_\nu, v_\nu \in N_\nu(U).$$

Il est simple de voir que pour tout  $T$  et  $T'$  dans  $Ent P_\nu$ ,  $[D, T]$  est dans  $Ent P_\nu$  et  $[T, T']$  s'annule sur l'idéal dérivé de  $N_\nu(U)$  et par suite sur  $N_\nu(U)$ . De plus, puisque  $\nu 1$  est dans  $Ent P_\nu$ , pour tout  $T$  de  $Ent P_\nu$ , on a

$$T(\nu u_\nu) = \nu T(u_\nu) \quad \forall u_\nu \in N_\nu(U),$$

donc  $T$  est formel. Maintenant, il n'est pas difficile de prouver que, si  $A$  est une application tangentielle de  $N(U)$  dans  $N(U)$  vérifiant

$$A(P(u, v)) = P(T(u), v) = P(u, T(v)) \quad \forall u, v \in N(U),$$

alors il existe  $c$  dans  $I(U)$  tel que

$$A = c.id.$$

Donc une démonstration par récurrence prouve que, si  $T = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k T_k$  est un élément de  $Ent P_\nu$ , alors il existe une suite d'éléments de  $I(U)$ ,  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  telle que

$$T_k = a_k.id \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Donc, si on pose  $a_\nu = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k a_k$ , alors on a

$$T(u_\nu) = a_\nu \circ u_\nu \quad \forall u_\nu \in N_\nu(U).$$

En particulier, il existe  $a_\nu$  dans  $I_\nu(U)$  tel que

$$D(\nu u_\nu) - \nu D(u_\nu) = a_\nu \circ u_\nu \quad \forall u_\nu \in N_\nu(U),$$

d'où le résultat.

Remarquons que  $D(1)$  est dans  $I_\nu(U)$ . Donc quitte à remplacer  $D$  par  $D - D(1)\theta^{x_0}$ , on peut supposer que les  $D'_k$  sont n-c.

Pour tout  $u, v$  dans  $N(U)$ , on a

$$D(P_\nu(u, v)) = P_\nu(D(u), v) + P_\nu(u, D(v)) \quad (*).$$

En considérant les termes d'ordre 0 de (\*) on a

$$D_0(\{u, v\}) + a_0 \frac{1}{3!} P^{(3)}(u, v) = \{D_0(u), v\} + \{u, D_0(v)\}.$$

$P^{(3)}$  n'étant pas un cocycle exact pour la cohomologie de Chevalley tangentielle, on en déduit que  $a_0$  est nul et que  $D_0$  est un cocycle de Chevalley tangentiel n-c, mais puisque  $H_t^1(U) = 0$ , alors  $D_0$  est un cobord et par suite il existe  $f_0$  dans  $N(U)$  telle que

$$D_0(u) = \{f_0, u\} \quad \forall u \in N(U).$$

En considérant les termes d'ordre 1 de (\*) on a

$$D_1(\{u, v\}) + a_1 \frac{1}{3!} P^{(3)}(u, v) + D_0\left(\frac{1}{3!} P^{(3)}(u, v)\right) = \frac{1}{3!} P^{(3)}(D_0(u), v) + \frac{1}{3!} P^{(3)}(u, D_0(v)) \\ + \{D_1(u), v\} + \{u, D_1(v)\}.$$

Mais puisque

$$D_0\left(\frac{1}{3!} P^{(3)}(u, v)\right) = \frac{1}{3!} P^{(3)}(D_0(u), v) + \frac{1}{3!} P^{(3)}(u, D_0(v)),$$

on voit que  $a_1 = 0$  et que  $D_1$  est un cocycle de Chevalley.

Maintenant, le résultat final se déduit facilement d'une démonstration par récurrence.

## 2- L'algèbre $I(U)\theta^{x_0} \oplus N_\nu(U)$ .

Soit  $N_\nu(U)$  l'espace des séries formelles en  $nu$  à coefficients dans  $N(U)$ . On définit sur l'espace  $A_{\nu, x_0}(U) = I(U)\theta^{x_0} \oplus N_\nu(U)$  le crochet suivant

$$[\lambda\theta^{x_0} + u_\nu, \mu\theta^{x_0} + v_\nu] = \lambda\theta^{x_0}(v_\nu) - \mu\theta^{x_0}(u_\nu) + P_\nu(u_\nu, v_\nu) \quad (u_\nu, v_\nu \in N_\nu(U), \lambda, \mu \in I(U)).$$

$A_{\nu, x_0}(U)$  muni de ce crochet est une algèbre de Lie, et si  $y_0$  est un autre élément de  $U$ ,  $A_{\nu, x_0}(U)$  est équivalente à  $A_{\nu, y_0}(U)$ . En effet, puisque

$$L_{\xi_{x_0}} = L_{\xi_{y_0}} + ad_\nu \rho_{x_0 - y_0},$$

où

$$\rho_u(x) = \sum_{i=1}^n (u^i x^{i+n} - u^{i+n} x^i),$$

l'application

$$\begin{aligned} J_{y_0, x_0} : A_{\nu, x_0}(U) &\rightarrow A_{\nu, y_0}(U) \\ \lambda\theta^{x_0} + u_\nu &\mapsto \lambda\theta^{y_0} + u_\nu + \lambda\rho_{x_0 - y_0} \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'algèbres de Lie.

D'autre part,  $\nu^k N_\nu(U)$  est un idéal de  $A_{\nu, x_0}(U)$ . On note par  $A_{\nu, x_0}^{(k)}(U)$  le quotient  $A_{\nu, x_0}(U)/\nu^k N_\nu(U)$ .

**Proposition: IV-2-1**

*Le centre de  $A_{\nu, x_0}(U)$  est réduit à zéro.*

**Démonstration**

Soit  $z = \lambda\theta^{x_0} + u_\nu$  un élément du centre. Soit  $y_0$  un point de  $U$ , alors dans  $A_{\nu, y_0}(U)$ , on a

$$[\theta^{x_0} - \rho_{x_0 - y_0}, z] = (-2id + 4\nu D_\nu + L_{\xi_{y_0}})(u_\nu + \lambda\rho_{x_0 - y_0}) = 0,$$

c'est à dire, pour  $i > 0$ :

$$(-2 + 4i + L_{\xi_{y_0}})(u_i) = 0,$$

et donc en particulier

$$u_i(y_0) = 0,$$

et, pour  $i = 0$ , on a

$$u_0(y_0) = -\lambda(y_0)\rho_{x_0 - y_0}(y_0),$$

d'où

$$\forall x \in U, \quad u_0(x) = \lambda(x)\rho_{x_0}(x).$$

Puisque  $\theta^{x_0}(u_0) = -u_0$ , on a

$$[\lambda\theta^{x_0} + u_0, u_0] = -\lambda u_0 = 0,$$

donc

$$\lambda^2 \rho_{x_0} = 0,$$

et par suite

$$u_0 = 0,$$

car  $\rho_{x_0}$  ne dépend que de  $x^1, \dots, x^{2n}$  et  $\lambda$  ne dépend que de  $x^{2n+1}, \dots, x^{2n+q}$ .

**Proposition: IV-2-2**

*Les dérivations tangentielles de  $A_{\nu, x_0}(U)$  sont des dérivations intérieures.*

**Démonstration**

Soit  $D$  une dérivation tangentielle de  $A_{\nu, x_0}(U)$ .  $D$  étant  $I(u)$ -linéaire elle est de la forme

$$D(\lambda\theta^{x_0} + u_\nu) = (\lambda a + \alpha(u_\nu))\theta^{x_0} + T(u_\nu) + \lambda d_\nu.$$

où  $a$  est un élément de  $I(U)$ ,  $d_\nu$  un élément de  $N_\nu(U)$  et

$$\alpha : N_\nu(U) \rightarrow I, \quad T : N_\nu(U) \rightarrow N_\nu(U).$$

$T$  étant tangentielle.

On a

$$\begin{aligned} D([u_\nu, v_\nu]) &= \alpha(u_\nu)\theta^{x_0}(v_\nu) - \alpha(v_\nu)\theta^{x_0}(u_\nu) + [T(u_\nu), v_\nu] + [u_\nu, T(v_\nu)] \\ &= \alpha([u_\nu, v_\nu])\theta^{x_0} + T([u_\nu, v_\nu]). \end{aligned}$$

Puisque  $(N_\nu(U), P_\nu)$  est égal à son idéal dérivé, on en déduit que  $\alpha$  est identiquement nulle et par suite que  $T$  est une dérivation tangentielle de  $N_\nu(U)$ . On a donc

$$D(\lambda\theta^{x_0} + u_\nu) = a\lambda\theta^{x_0} + \lambda d_\nu + T(u_\nu).$$

Si on se restreint à un ouvert  $W$  inclus dans  $U$  tel que  $H_t^1(W) = 0$ , alors on a

$$T = ad_\nu f_\nu^W + b_\nu^W \theta^{x_0},$$

où  $f_\nu^W$  appartient à  $N_\nu(W)$  et  $b_\nu^W$  à  $I_\nu(W)$ .

Mais on a

$$\theta^{x_0}(u_\nu) = [\theta^{x_0}, u_\nu],$$

donc,

$$\begin{aligned} [f_\nu^W, \theta^{x_0}(u_\nu)] + b_\nu^W \theta^{x_0}(\theta^{x_0}(u_\nu)) &= [a\theta^{x_0} + d_\nu, u_\nu] + [\theta^{x_0}, [f_\nu^W, u_\nu] + b_\nu^W \theta^{x_0}(u_\nu)] \\ &= a\theta^{x_0}(u_\nu) + [d_\nu, u_\nu] + \theta^{x_0}([f_\nu^W, u_\nu]) + \theta^{x_0}(b_\nu^W \theta^{x_0}(u_\nu)). \end{aligned}$$

Soit encore,

$$\begin{aligned} [f_\nu^W, \theta^{x_0}(u_\nu)] + b_\nu^W \theta^{x_0}(\theta^{x_0}(u_\nu)) &= [a\theta^{x_0} + d_\nu, u_\nu] + [\theta^{x_0}(f_\nu^W), u_\nu] + [f_\nu^W, \theta^{x_0}(u_\nu)] \\ &\quad + b_\nu^W (\theta^{x_0}(\theta^{x_0}(u_\nu))) + 4\nu D_\nu(b_\nu^W) \theta^{x_0}(u_\nu). \end{aligned}$$

D'où

$$a\theta^{x_0}(u_\nu) + [d_\nu, u_\nu] + [\theta^{x_0}(f_\nu^W), u_\nu] + 4\nu D_\nu(b_\nu^W) \theta^{x_0}(u_\nu) = 0,$$

ou encore,

$$(a + 4\nu D_\nu(b_\nu^W))\theta^{x_0}(u_\nu) + ad(\theta^{x_0}(f_\nu^W) + d_\nu)(u_\nu) = 0.$$

Pour  $u_\nu = \nu$ , on obtient

$$a + 4\nu D_\nu(b_\nu^W) = 0.$$

$a$  est donc identiquement nulle et  $b_\nu^W$  se réduit à  $b_0$  qui est dans  $I(W)$ . Donc

$$ad(\theta^{x_0}(f_\nu^W) + d_\nu) \equiv 0.$$

Et par suite

$$\theta^{x_0}(f_\nu^W) + d_\nu = k_\nu \quad k_\nu \in I_\nu(W).$$

Enfin on a

$$D/W = ad_{A_{\nu, x_0}(W)}(a^W \theta^{x_0} + g_\nu^W),$$

avec  $a^W = b_0$  et  $g_\nu^W = f_\nu^W + k'_\nu$ , où  $k'_\nu$  est un élément de  $I_\nu(W)$  vérifiant

$$\theta^{x_0}(k'_\nu) = -k_\nu.$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} D/W(\lambda \theta^{x_0} + u_\nu) &= \lambda d_\nu + ad_\nu f_\nu^W(u_\nu) + b_0 \theta^{x_0}(u_\nu) \\ &= \lambda(-\theta^{x_0}(f_\nu^W) + k_\nu) + ad_\nu f_\nu^W(u_\nu) + b_0 \theta^{x_0}(u_\nu) \\ &= b_0 \theta^{x_0}(u_\nu) - \lambda(-\theta^{x_0}(f_\nu^W + k'_\nu)) + [f_\nu^W + k'_\nu, u_\nu] \\ &= ad_{A_{\nu, x_0}(W)}(a^W \theta^{x_0} + g_\nu^W)(\lambda \theta^{x_0} + u_\nu). \end{aligned}$$

Maintenant, si  $W_1$  et  $W_2$  sont deux ouverts de  $U$  tels que  $H_t^1(W_1) = H_t^1(W_2) = 0$  alors  $a^{W_1}$  et  $a^{W_2}$  d'une part,  $g_\nu^{W_1}$  et  $g_\nu^{W_2}$  d'autre part coïncident sur  $W_1 \cap W_2$  et par suite il existe  $a$  dans  $I(U)$  et  $g_\nu$  dans  $N_\nu(U)$  tels que

$$D = ad_{A_{\nu, x_0}(U)}(a \theta^{x_0} + g_\nu).$$

### 3- Les automorphismes principaux tangentiels.

Soient  $(U, \varphi_\alpha)$  et  $(U, \varphi_\beta)$  deux cartes adaptées de  $M$ . On indexe par  $\alpha$  les objets correspondants à  $(U, \varphi_\alpha)$ : Par exemple on notera

$$\theta_\alpha = \theta^{x_\alpha}, \quad A_{\alpha, \nu, x_\alpha}(U).$$

Notons  $N_\nu^{(k)}(U)$ , l'espace  $N_\nu(U)/\nu^k N_\nu(U)$ .

#### Définition: IV-3-1

Un isomorphisme principal tangentiel d'ordre  $k > 0$  de  $N_\nu(U)$  ou de  $N_\nu^{(k')}(U)$  ( $k' > k$ ) est un isomorphisme

$$T : (N_\nu(U), P_\alpha) \rightarrow (N_\nu(U), P_\beta)$$

ou,

$$T : N_\nu^{(k')}(U) \rightarrow N_\nu^{(k')}(U),$$

du type

$$T = id + \nu^k T'_\nu,$$

avec  $T'_\nu$  formel, local, tangentiel et n-c.

Un raisonnement semblable à celui du cas symplectique ([16]) nous montre que, si  $\alpha = \beta$  et si  $H_t^1(U) = 0$ ,  $T$  est de la forme

$$T = \exp \nu^k \text{ad}(u_\nu),$$

pour un certain  $u_\nu$  de  $N_\nu(U)$  ou  $N_\nu^{(k')}(U)$ .

**Définition: IV-3-2**

Un isomorphisme principal tangentiel  $Q$  d'ordre  $k > 0$  de  $A_{\alpha, \nu, x_\alpha}(U)$  dans  $A_{\beta, \nu, x_\beta}(U)$  ou de  $A_{\alpha, \nu, x_\alpha}^{(k')}(U)$  dans  $A_{\beta, \nu, x_\beta}^{(k')}(U)$  est un isomorphisme tangentiel tel que

$$Q(\theta_\alpha) = \theta_\beta \pmod{N_\nu(U)} \quad \text{ou} \quad \pmod{N_\nu^{(k')}(U)},$$

et tel que  $Q/N_\nu(U)$  ou  $Q/N_\nu^{(k')}(U)$  soit un isomorphisme principal tangentiel d'ordre  $k$ .

**Proposition: IV-3-1**

Si  $H_t^1(U) = 0$ , alors tout isomorphisme principal tangentiel d'ordre  $k > 0$  de  $N_\nu(U)$  (respectivement de  $N_\nu^{(k')}(U)$ ) peut être étendu en un isomorphisme principal tangentiel  $Q$  défini par

$$Q : \begin{cases} \theta_\alpha & \mapsto \theta_\beta + q_\nu \\ u_\nu & \mapsto T(u_\nu) \end{cases}$$

où  $q_\nu$  est caractérisé par

$$\text{ad}_\beta(q_\nu) = -\theta_\beta + T \circ \theta_\alpha \circ T^{-1},$$

et est unique mod  $I_\nu(U)$  (resp mod  $I_\nu(U) + \nu^k N_\nu(U)$ ).

**Démonstration**

$Q$  étant défini comme dans la proposition est un isomorphisme principal tangentiel qui prolonge  $T$  si et seulement si pour tout  $\lambda, \mu$  dans  $I(U)$  et pour tout  $u_\nu, v_\nu$  dans  $N_\nu(U)$ ,

$$Q([\lambda\theta_\alpha + u_\nu, \mu\theta_\alpha + v_\nu]) = [Q(\lambda\theta_\alpha + u_\nu), Q(\mu\theta_\alpha + v_\nu)].$$

Soit

$$\begin{aligned} T(\lambda\theta_\alpha(v_\nu) - \mu\theta_\alpha(u_\nu) + [u_\nu, v_\nu]) &= [\lambda\theta_\beta + \lambda q_\nu + T(u_\nu), \mu\theta_\beta + \mu q_\nu + T(v_\nu)] \\ &= \lambda\theta_\beta(\mu q_\nu + T(v_\nu)) - \mu\theta_\beta(\lambda q_\nu + T(u_\nu)) \\ &\quad + [q_\nu, \lambda T(v_\nu) + \mu T(u_\nu)] + [T(u_\nu), T(v_\nu)]. \end{aligned}$$

En particulier pour  $\lambda = 1, \mu$  et  $u_\nu$  nuls, on a

$$\text{ad}_\beta(q_\nu)(T(v_\nu)) = -\theta_\beta(T(v_\nu)) + T(\theta_\alpha(v_\nu)).$$

Et donc

$$ad_\beta(q_\nu) = -\theta_\beta + T \circ \theta_\alpha \circ T^{-1}.$$

Inversement,  $-\theta_\beta + T \circ \theta_\alpha \circ T^{-1}$  est une dérivation tangentielle formelle de  $(N_\nu(U), P_\beta)$  et puisque  $H_i^1(U) = 0$ , alors il existe  $q_\nu$  unique (modulo  $I_\nu(U)$ ) tel que

$$-\theta_\beta + T \circ \theta_\alpha \circ T^{-1} = ad_\beta(q_\nu).$$

### Proposition: IV-3-2

Si  $U$  est connexe, les automorphismes principaux tangentiels d'ordre  $k$  de  $A_{\nu, x_0}(U)$  sont de la forme

$$\exp ad_{A_{\nu, x_0}(U)}(f_\nu) \quad (f_\nu \in N_\nu(U), f_i \in I \text{ pour } i < k).$$

De plus si  $\exp ad_{A_{\nu, x_0}(U)}(f_\nu)$  et  $\exp ad_{A_{\nu, x_0}(U)}(g_\nu)$  sont deux automorphismes principaux tangentiels d'ordre  $k$  et si

$$\exp ad_{A_{\nu, x_0}(U)}(f_\nu) \circ \exp ad_{A_{\nu, x_0}(U)}(g_\nu) = \exp ad_{A_{\nu, x_0}(U)}(h_\nu),$$

alors, on a

$$h_\nu = f_\nu + g_\nu \text{ mod } \nu^{k+1}.$$

### Démonstration

Soit  $Q$  un automorphisme principal tangential d'ordre  $k$ . Donc  $Q$  est de la forme

$$Q : \begin{cases} \theta_\alpha & \mapsto \theta_\beta + q_\nu \\ u_\nu & \mapsto u_\nu + \nu^k T_\nu(u_\nu) \end{cases}$$

où  $T_\nu$  est tangential.

Puisque

$$ad_\nu(q_\nu) = (1 + \nu^k T_\nu) \circ \theta^{x_0} \circ (1 + \nu^k T_\nu)^{-1} - \theta^{x_0},$$

alors, on a

$$ad_\nu(q_\nu) \equiv 0 \text{ mod } \nu^{k+1}.$$

En effet soit  $u_\nu = \sum_{i \geq 0} \nu^i u_i$  un élément de  $N_\nu(U)$ . Il est bien clair que pour  $i < k$  les termes d'ordre  $i$  de

$$(1 + \nu^k T_\nu) \circ \theta^{x_0} \circ (1 + \nu^k T_\nu)^{-1}(u_\nu) - \theta^{x_0}(u_\nu),$$

sont nuls. De plus les termes d'ordre  $k$  de  $(1 + \nu^k T_\nu)^{-1}(u_\nu)$  sont  $u_k - T_0(u_0)$  et donc ceux de

$$(1 + \nu^k T_\nu) \circ \theta^{x_0} \circ (1 + \nu^k T_\nu)^{-1}(u_\nu),$$

sont

$$\theta^{x_0}(u_k) - \theta^{x_0}(T_0(u_0)) + T_0(\theta^{x_0}(u_0)),$$

et par suite ceux de  $ad_\nu(q_\nu)(u_\nu)$  sont

$$-\theta^{x_0}(T_0(u_0)) + T_0(\theta^{x_0}(u_0)) = 0,$$

car ils sont les termes d'ordre  $k$  de

$$Q([\theta^{x_0}, u_\nu]) - [Q(\theta^{x_0}), Q(u_\nu)].$$

On déduit donc que

$$\forall i \leq k \quad q_i \in I(U).$$

Considérons

$$D : \begin{cases} \theta^{x_0} & \mapsto \theta^{x_0} + \nu^k q_k \\ u_\nu & \mapsto \nu^k T_0(u_\nu) \end{cases}$$

Il est bien clair que  $D$  induit une dérivation tangentielle sur  $A_{\nu, x_0}^{(k)}(U)$ . Il est donc de la forme

$$ad_{A_{\nu, x_0}(U)}(\nu^k q'_k) \quad \text{mod } \nu^{k+1},$$

et par suite

$$Q = \exp ad_{A_{\nu, x_0}(U)}\left(\sum_{i=1}^{k-1} \nu^i c_i + \nu^k q'_k\right) \quad \text{mod } \nu^{k+1},$$

où les  $c_i$  sont telles que

$$\theta^{x_0}(\nu^i c_i) = \nu^i q_i,$$

soit encore

$$c_i = (-2 + 4i)^{-1} q_i.$$

Considérons

$$Q \circ \exp - ad_{A_{\nu, x_0}(U)}\left(\sum_{i=1}^{k-1} \nu^i c_i + \nu^k q'_k\right)$$

c'est un automorphisme principal tangentiel d'ordre  $k + 1$ . En appliquant de nouveau le même raisonnement et par récurrence on déduit l'existence d'une suite  $(q'_j)_{j \geq k}$  telle que

$$Q = \exp ad_{A_{\nu, x_0}(U)}\left(\sum_{i=1}^{k-1} \nu^i c_i + \sum_{j=k}^N \nu^j q'_j\right) \quad \text{mod } \nu^{N+1} \quad \forall N \geq k,$$

et par suite

$$Q = \text{expad}_{A_\nu, x_0}(U) \left( \sum_{i=1}^{k-1} \nu^i c_i + \sum_{j \geq k} \nu^j q'_j \right).$$

Si on a

$$\text{expad}_{A_\nu, x_0}(U)(f_\nu) \circ \text{expad}_{A_\nu, x_0}(U)(g_\nu) = \text{expad}_{A_\nu, x_0}(U)(h_\nu),$$

on a

$$\begin{aligned} \theta^{x_0} + [g_\nu, \theta^{x_0}] + [f_\nu, \theta^{x_0}] + \frac{1}{2}[g_\nu, [g_\nu, \theta^{x_0}]] + [f_\nu, [g_\nu, \theta^{x_0}]] + \dots = \\ \theta^{x_0} + [h_\nu, \theta^{x_0}] + \frac{1}{2}[h_\nu, [h_\nu, \theta^{x_0}]] + \dots \end{aligned}$$

et donc on a

$$g_\nu + f_\nu = h_\nu \quad \text{mod } \nu^{k+1},$$

car  $g_0, \dots, g_k, f_0, \dots, f_k$  sont dans  $I(U)$ .

### Lemme: IV-3-1

Soit

$$S = \text{exp ad}_{A_\nu, x_0}(U)(f_\nu) \quad \text{et} \quad T = \text{exp ad}_{A_\nu, x_0}(U)(g_\nu)$$

où  $f_\nu$  et  $g_\nu$  sont dans  $N_\nu(U)$  et  $f_0, g_0$  dans  $I(U)$ . Alors on a

$$S \circ T = \text{exp ad}_{A_\nu, x_0}(U)(h_\nu),$$

pour un certain  $h_\nu$  de  $N_\nu(U)$ .

### Démonstration

D'après la proposition précédente, on a

$$\text{expad}_{A_\nu, x_0}(U)(f_\nu) \circ \text{expad}_{A_\nu, x_0}(U)(g_\nu) = \text{expad}_{A_\nu, x_0}(U)(f_\nu + g_\nu) \quad \text{mod } \nu.$$

Supposons qu'on puisse construire  $R = \text{expad}_{A_\nu, x_0}(U)(h_\nu)$  tel que  $S \circ T$  et  $R$  induisent le même automorphisme tangentiel sur  $A_{\nu, x_0}^{(k)}(U)$  pour un certain  $k \geq 1$ . Alors on a

$$S \circ T \circ R^{-1}(\alpha) = \alpha + \varphi(\alpha) \quad \forall \alpha \in A_{\nu, x_0}(U),$$

où

$$\varphi : A_{\nu, x_0}(U) \rightarrow \nu^k N_\nu(U).$$

Par construction,  $\varphi$  induit une dérivation sur  $A_{\nu, x_0}^{(k+1)}(U)$ . Elle est donc de la forme

$$\varphi = \text{ad}_{A_\nu, x_0}(U)(\nu^k h'_k) \quad \text{mod } \nu^{k+1},$$

donc

$$S \circ T \circ R^{-1} = ad_{A_\nu, x_0}(U)(\nu^k h'_k) \quad \text{mod } \nu^{k+1},$$

et par suite

$$S \circ T = ad_{A_\nu, x_0}(U)(h_\nu + \nu^k h'_k) \quad \text{mod } \nu^{k+1}.$$

#### 4- Existence de produits-star tangentiels sur une variété de Poisson régulière

Soit  $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$  un recouvrement contractile de  $M$  tel que les  $U_\alpha$  soient les domaines de cartes adaptées  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ . On note  $M_\alpha$  le produit de Moyal dans la carte  $U_\alpha$ ,

$$M_\alpha = \sum_{r \geq 0} \frac{\nu^r}{r!} P^{(r)}.$$

##### **Théorème: IV-4-1**

*Il existe une collection d'applications tangentielles*

$$T_\alpha : N_\nu(U_\alpha) \rightarrow N_\nu(U_\alpha),$$

*telle que  $T_\alpha - id$  soit formel, différentiel, tangential et n-c et telle que*

$$T_\alpha^* M_\alpha = T_\beta^* M_\beta,$$

*sur chaque intersection non vide  $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$ .*

*Et donc si on définit  $M_\nu$  sur  $M$  par*

$$M_\nu = T_\alpha^* M_\alpha \quad \text{sur } U_\alpha,$$

*alors  $M_\nu$  sera un produit-star tangential sur  $(M, \Lambda)$ .*

##### **Démonstration**

Fixons un ordre total sur  $A$  et notons  $U_{\alpha\beta\dots\gamma}$  l'ouvert  $U_\alpha \cap U_\beta \cap \dots \cap U_\gamma$  qui est, par hypothèse, contractile.

Si  $U_{\alpha\beta}$  n'est pas vide,  $M_\alpha$  et  $M_\beta$  sont tangentiellement équivalents sur  $U_{\alpha\beta}$  [19]. Il existe donc

$$R_{\alpha\beta} = id + \nu^2 T'_{\alpha\beta, \nu^2}$$

où  $T'_{\alpha\beta, \nu^2}$  est formel, différentiel, tangential, n-c, tel que

$$R_{\alpha\beta} : (N_\nu(U_{\alpha\beta}), M_\beta) \rightarrow (N_\nu(U_{\alpha\beta}), M_\alpha)$$

soit un isomorphisme [19]. Donc  $T_{\alpha\beta} = id + \nu T'_{\alpha\beta, \nu}$  est un isomorphisme de  $(N_\nu(U_{\alpha\beta}), P_\beta)$  dans  $(N_\nu(U_{\alpha\beta}), P_\alpha)$ .

Pour tout  $\alpha$  dans  $A$  on fixe un  $x_\alpha$  dans  $U_\alpha$  et on pose

$$A_\alpha(U_\alpha) = A_{\nu, x_\alpha}(U_\alpha).$$

On choisit  $T_{\alpha\beta}$  pour  $\alpha < \beta$  et on définit  $T_{\beta\alpha}$  par

$$T_{\beta\alpha} = T_{\alpha\beta}^{-1}.$$

Puisque  $T_{\alpha\beta}$  est un isomorphisme principal tangentiel d'ordre 1 il peut être prolonger en un isomorphisme principal tangentiel d'ordre 1

$$Q_{\alpha\beta} : A_\beta(U_{\alpha\beta}) \rightarrow A_\alpha(U_{\alpha\beta}).$$

Posons encore

$$Q_{\beta\alpha} = Q_{\alpha\beta}^{-1}.$$

Si  $U_{\alpha\beta\gamma} \neq \emptyset$ , alors

$$Q_{\alpha\beta\gamma} = Q_{\alpha\beta} Q_{\beta\gamma} Q_{\gamma\alpha}$$

est un automorphisme principal tangentiel d'ordre 1 de  $A_\alpha(U_{\alpha\beta\gamma})$ . D'après la proposition IV-3-2,  $Q_{\alpha\beta\gamma}$  est de la forme

$$Q_{\alpha\beta\gamma} = \exp ad_{A_\alpha}(q_{\alpha\beta\gamma}).$$

où

$$q_{\alpha\beta\gamma} = \sum_{i=0}^{\infty} \nu^i q_{\alpha\beta\gamma}^i \quad q_{\alpha\beta\gamma}^0 \in I(U_{\alpha\beta\gamma}).$$

Il s'agit de montrer que  $q_{\alpha\beta\gamma}^1$  est complètement antisymétrique en  $\alpha, \beta, \gamma$ . Pour tout  $\delta$  dans  $A$ , puisque

$$[Q_{\alpha\beta}(q_{\beta\gamma\delta}), u_\nu] = Q_{\alpha\beta}([q_{\beta\gamma\delta}, Q_{\beta\alpha}(u_\nu)]) \quad \forall u_\nu \in A_\alpha(U_\alpha),$$

alors on a

$$Q_{\alpha\beta} Q_{\beta\gamma\delta} Q_{\beta\alpha} = \exp ad_{A_\alpha}(Q_{\alpha\beta}(q_{\beta\gamma\delta})).$$

D'autre part on a

$$Q_{\alpha\beta\gamma} = Q_{\alpha\beta} Q_{\beta\gamma\delta} Q_{\beta\alpha} Q_{\alpha\beta\delta} Q_{\alpha\gamma\delta}^{-1}.$$

Donc d'après la proposition IV-3-2 on a

$$q_{\alpha\beta\gamma} = Q_{\alpha\beta}(q_{\beta\gamma\delta}) + q_{\alpha\beta\delta} - q_{\alpha\gamma\delta} \quad \text{mod } \nu^2.$$

Mais puisque

$$Q_{\alpha\beta}(q_{\beta\gamma\delta}) = q_{\beta\gamma\delta} \quad \text{mod } \nu^2,$$

on a

$$q_{\alpha\beta\gamma}^0 = q_{\beta\gamma\delta}^0 + q_{\alpha\beta\delta}^0 - q_{\alpha\gamma\delta}^0$$

et

$$q_{\alpha\beta\gamma}^1 = q_{\beta\gamma\delta}^1 + q_{\alpha\beta\delta}^1 - q_{\alpha\gamma\delta}^1 \quad (*).$$

Puisque  $Q_{\alpha\beta\alpha} = id$  on a:  $q_{\alpha\beta\alpha}^1 = 0$ . Si on pose  $\delta = \alpha$  dans (\*) on a

$$q_{\alpha\beta\gamma}^1 = q_{\beta\gamma\alpha}^1.$$

De plus  $Q_{\alpha\beta\gamma}^{-1} = Q_{\alpha\gamma\beta}$ , donc

$$q_{\alpha\beta\gamma}^1 = -q_{\alpha\gamma\beta}^1.$$

On a aussi  $Q_{\alpha\beta\gamma} = Q_{\alpha\beta}Q_{\beta\gamma\alpha}Q_{\beta\alpha}$  et donc

$$q_{\alpha\beta\gamma}^1 = q_{\beta\gamma\alpha}^1.$$

Il en résulte que  $q_{\alpha\beta\gamma}$  est antisymétrique en  $\alpha, \beta, \gamma$ .

Soit  $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$  une partition de l'unité localement finie subordonnée à  $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ . On a

$$q_{\alpha\beta\gamma}^1 = s_{\beta\gamma}^1 + s_{\alpha\beta}^1 - s_{\alpha\gamma}^1,$$

où

$$s_{\alpha\beta}^1 = \sum_{\mu \in A} \varphi_\mu q_{\alpha\beta\mu}^1.$$

Remarquons que  $s_{\alpha\beta}^1$  est antisymétrique en  $\alpha\beta$ .

On définit  $Q_{\alpha\beta}^1$  par

$$Q_{\alpha\beta}^1 = \exp ad_{A_\alpha} \left( -\frac{\nu}{2} s_{\alpha\beta}^1 \right) \circ Q_{\alpha\beta} \circ \exp ad_{A_\alpha} \left( \frac{\nu}{2} s_{\beta\alpha}^1 \right).$$

On a bien

$$Q_{\beta\alpha}^1 = (Q_{\alpha\beta}^1)^{-1},$$

et

$$Q_{\alpha\beta\gamma}^1 = \exp ad_{A_\alpha} (q'_{\alpha\beta\gamma}),$$

où

$$q'_{\alpha\beta\gamma} = q_{\alpha\beta\gamma} + \nu (s_{\beta\alpha}^1 + s_{\alpha\gamma}^1 + s_{\gamma\beta}^1) \pmod{\nu^2}.$$

Et donc on a

$$q'_{\alpha\beta\gamma} \in I_\nu(U_{\alpha\beta\gamma}) \pmod{\nu^2}.$$

Et par suite  $Q_{\alpha\beta\gamma}^1$  est un automorphisme principal tangentiel (car on a modifié  $Q_{\alpha\beta}$  par  $\exp ad_{A_\alpha}(\cdot)$  qui est tangentiel) d'ordre 2.

Par récurrence on peut construire une famille d'isomorphismes tangentiels d'ordre  $k+1$ ,  $Q_{\alpha\beta}^k$  telle que

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad Q_{\alpha\beta}^k = Q_{\alpha\beta}^{k+1} \pmod{\nu^{k+1}}.$$

On définit  $Q'_{\alpha\beta}$  par

$$Q'_{\alpha\beta} = Q_{\alpha\beta}^k \pmod{\nu^{k+1}} \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

et on considère la restriction  $T'_{\alpha\beta}$  de  $Q'_{\alpha\beta}$  à  $N_\nu(U_{\alpha\beta})$ . On a donc construit ainsi une famille d'isomorphismes tangentiels telle que

$$T'_{\alpha\beta} T'_{\beta\alpha} = id,$$

et

$$T'_{\alpha\beta}T'_{\beta\gamma}T'_{\gamma\alpha} = id.$$

Posons

$$S_{\alpha,\nu} = \sum_{\mu \in A} \varphi_{\mu} T'_{\mu\alpha}.$$

Alors

$$S_{\alpha,\nu} = id + \nu S'_{\alpha,\nu},$$

où  $S'_{\alpha,\nu}$  est formel différentiel n-c et tangentiel et on a

$$T'_{\alpha\beta} = S_{\alpha,\nu}^{-1} S_{\beta,\nu},$$

et donc

$$(S_{\beta,\nu}^{-1})^* P_{\beta} = (S_{\alpha,\nu}^{-1})^* P_{\alpha} \quad \text{sur } U_{\alpha\beta}.$$

Soit encore

$$(S_{\beta,\nu^2}^{-1})^* M_{\beta} = (S_{\alpha,\nu^2}^{-1})^* M_{\alpha} \quad \text{sur } U_{\alpha\beta}.$$

# V- PRODUIT-STAR COVARIANT SUR LES ORBITES D'UNE ALGÈBRE DE LIE

## 1- Définitions

Soit  $G$  un groupe de Lie réel connexe et soit  $\mathfrak{g}$  son algèbre de Lie. Notons par  $\mathfrak{g}^*$  le dual de  $\mathfrak{g}$ . Le groupe  $G$  agit sur  $\mathfrak{g}^*$  par la représentation coadjointe

$$G \times \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$$

$$(g, \xi) \mapsto g \cdot \xi = \xi \circ Ad_{g^{-1}}.$$

$\mathfrak{g}^*$  est munie d'une structure de Poisson par la donnée du 2-tenseur contravariant antisymétrique  $\Lambda$  défini par

$$\Lambda_\xi(X, Y) = \langle \xi, [X, Y] \rangle \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}, \forall \xi \in \mathfrak{g}^*.$$

Soit  $W = G/G_{\xi_0}$  une orbite de  $G$  dans  $\mathfrak{g}^*$  ( $G_{\xi_0}$  étant le stabilisateur de  $\xi_0$  dans  $G$ ). La 2-forme  $F$  déduite de la restriction de  $\Lambda$  définit sur  $W$  une structure de variété symplectique

$$F(X^*, Y^*)(\xi) = \langle \xi, [X, Y] \rangle \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}, \forall \xi \in W,$$

où  $X^*$  est le champ de vecteur fondamental associé à  $X$  défini par

$$X^*(\xi) = \frac{d}{dt}(\exp - tX \cdot \xi) /_{t=0} = \xi \circ ad(X).$$

### Définition: V-1-1 [2]

Un produit-star sur  $W$  est dit covariant si et seulement si, pour tout  $X, Y$  de  $\mathfrak{g}$ ,

$$\frac{1}{2\nu}(\tilde{X}_* \tilde{Y} - \tilde{Y}_* \tilde{X}) = [X, Y] = \{\tilde{X}, \tilde{Y}\} = \Lambda(d\tilde{X}, d\tilde{Y}),$$

où  $\tilde{X}$  est l'élément de  $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$  défini par

$$\tilde{X}(\xi) = \langle \xi, X \rangle \quad \forall \xi \in \mathfrak{g}^*.$$

Cette notion est essentielle si l'on veut utiliser le star produit sur l'orbite pour construire des représentations de  $G$ . En effet, dès qu'elle est remplie, l'application de  $\mathfrak{g}$  dans l'espace des dérivations de  $*$  définie par

$$X \mapsto \frac{1}{2\nu}(\tilde{X} * . - . * \tilde{X}),$$

est une représentation de  $\mathfrak{g}$  qui peut d'ailleurs toujours être intégrée au groupe connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ . L'utilisation de star produits en analyse harmonique passe donc toujours par la définition de star produits covariants sur des orbites de la représentation coadjointe.

## 2- Existence de produits-star sur une variété symplectique

La preuve de [16], [20] d'existence de produits star sur une variété symplectique par recollement de produits chacun équivalent à celui de Moyal sur un ouvert contractile, peut être exprimée de façon élémentaire (c'est à dire en évitant les calculs de la cohomologie de Chevalley de la première partie) en utilisant la cohomologie de Čech de la variété. Nous allons exposer ici cette façon de voir les choses d'abord parce qu'elle permet de trouver de manière naturelle les premières conditions nécessaires d'existence de star produit ( $H^3(W) = 0$ ) [25], ensuite parce qu'elle nous permettra de prouver l'existence de star produit covariant dans la seconde partie du chapitre.

### Théorème: V-2-1 [4]

Soit  $(M, F)$  une variété symplectique telle que  $H_{\check{C}ech}^3(M) = 0$ , alors il existe en produit-star sur  $M$ .

### Démonstration

On se donne un recouvrement contractile localement fini  $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$  de  $M$  tel que chaque  $U_\alpha$  est le domaine d'une carte de Darboux, et, pour tout  $r$  dans  $\mathbb{N}^*$ , on pose

$$U_{\alpha_1 \dots \alpha_r} = U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2} \cap \dots \cap U_{\alpha_r}.$$

Soit  $k$  un élément de  $\mathbb{N}^*$ . Supposons que sur chaque  $U_\alpha$  il existe un produit-star  $*_\alpha$

$$u *_\alpha v = \sum_{r=0}^{\infty} \nu^r C_{r,\alpha}(u, v),$$

tel que pour tout  $\alpha, \beta$  dans  $A$  sur  $U_{\alpha,\beta}$  on ait

$$C_{r,\alpha} = C_{r,\beta} \quad \forall r < 2k \quad (*).$$

On note par  $C_r$  l'opérateur globalement défini sur  $M$  dont la restriction à chaque  $U_\alpha$  est  $C_{r,\alpha}$  et on cherche à modifier les produits-star  $*_\alpha$  sur chaque  $U_\alpha$  pour que la relation (\*) soit vraie jusqu'à l'ordre  $2k + 2$ . Sur  $U_{\alpha,\beta}$ ,  $C_{2k,\beta} - C_{2k,\alpha}$  est un cocycle de Hochschild symétrique il est donc un cobord. Il existe donc une application linéaire de  $C^\infty(U_{\alpha,\beta})$  dans  $C^\infty(U_{\alpha,\beta})$ ,  $A_{\alpha,\beta}$  telle que pour chaque  $u, v$  de  $C^\infty(U_{\alpha,\beta})$ , on ait

$$C_{2k,\beta}(u, v) - C_{2k,\alpha}(u, v) = \delta A_{\alpha,\beta}(u, v) = u A_{\alpha,\beta}(v) - A_{\alpha,\beta}(uv) + A_{\alpha,\beta}(u)v.$$

$C_{2k+1,\alpha} - C_{2k+1,\beta} - \partial A_{\alpha,\beta}$  est alors aussi un cocycle de Hochschild mais antisymétrique. Il existe donc une 2-forme  $\omega_{\alpha,\beta}$  [12] telle que pour chaque  $u, v$ , on ait

$$(C_{2k+1,\alpha} - C_{2k+1,\beta} - \partial A_{\alpha\beta})(u, v) = \omega_{\alpha\beta}(H_u, H_v).$$

En écrivant la relation de Jacobi pour les crochets déformés

$$[u, v]_{*\alpha} = \frac{1}{2\nu}(u *_{\alpha} v - v *_{\alpha} u),$$

et

$$[u, v]'_{*\beta} = \frac{1}{2\nu} \exp -\nu^{2k} A_{\alpha\beta} (\exp \nu^{2k} A_{\alpha\beta}(u) *_{\beta} \exp \nu^{2k} A_{\alpha\beta}(v) \\ - \exp \nu^{2k} A_{\alpha\beta}(v) *_{\beta} \exp \nu^{2k} A_{\alpha\beta}(u)),$$

on en déduit

$$d\omega_{\alpha\beta} (H_u, H_v, H_w) = 0 \quad \forall u, v, w \in C^{\infty}(U_{\alpha\beta}).$$

La 2-forme  $\omega_{\alpha\beta}$  est donc fermée et il existe un champ de vecteur  $X_{\alpha\beta}$  sur  $U_{\alpha\beta}$ , tel que

$$\omega_{\alpha\beta}(H_u, H_v) = \partial L_{X_{\alpha\beta}}(u, v) \quad \forall u, v \in C^{\infty}(U_{\alpha\beta}).$$

On pose

$$H_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} + L_{X_{\alpha\beta}}.$$

On a

$$\delta H_{\alpha\beta} = \delta A_{\alpha\beta} = C_{2k,\beta} - C_{2k,\alpha}$$

et

$$\partial H_{\alpha\beta} = \partial A_{\alpha\beta} + \partial L_{X_{\alpha\beta}} = C_{2k+1,\beta} - C_{2k+1,\alpha}.$$

Donc, on peut modifier les 2 produits-star  $*_{\alpha}$  et  $*_{\beta}$  sur  $U_{\alpha\beta}$  pour les faire coïncider jusqu'à l'ordre  $2k + 1$  inclus.

Choisissons  $H_{\alpha\beta}$  pour  $\alpha < \beta$  et  $H_{\beta\alpha} = -H_{\alpha\beta}$ .

Posons alors

$$H_{\alpha\beta\gamma} = H_{\alpha\beta} + H_{\beta\gamma} + H_{\gamma\alpha}.$$

On définit ainsi sur  $U_{\alpha\beta\gamma}$  un objet totalement antisymétrique en  $\alpha\beta\gamma$  tel que

$$\delta H_{\alpha\beta\gamma} = \delta H_{\alpha\beta} + \delta H_{\beta\gamma} + \delta H_{\gamma\alpha} = 0 \quad (**),$$

et

$$\partial H_{\alpha\beta\gamma} = \partial H_{\alpha\beta} + \partial H_{\beta\gamma} + \partial H_{\gamma\alpha} = 0 \quad (***) .$$

De (\*\*), on déduit que  $H_{\alpha\beta\gamma}$  est un champ de vecteur et de (\*\*\*), on déduit qu'il est hamiltonien. Il existe donc une fonction  $h_{\alpha\beta\gamma}$  telle que

$$H_{\alpha\beta\gamma}(u) = \partial h_{\alpha\beta\gamma}(u) = \{h_{\alpha\beta\gamma}, u\} \quad \forall u \in C^{\infty}(U_{\alpha\beta\gamma}).$$

Cette fonction  $h_{\alpha\beta\gamma}$  est déterminée à une constante près. On la choisit pour  $\alpha < \beta < \gamma$  et pour les autres possibilités, on choisit  $h_{\alpha\beta\gamma}$  complètement antisymétrique en  $\alpha\beta\gamma$ .  
On a enfin par construction

$$H_{\alpha\beta\gamma} - H_{\alpha\beta\delta} + H_{\alpha\gamma\delta} - H_{\beta\gamma\delta} = 0 \quad \text{sur } U_{\alpha\beta\gamma\delta}.$$

Donc il existe une constante  $c_{\alpha\beta\gamma\delta}$  telle que

$$h_{\alpha\beta\gamma} - h_{\alpha\beta\delta} + h_{\alpha\gamma\delta} - h_{\beta\gamma\delta} = c_{\alpha\beta\gamma\delta}.$$

On peut alors considérer la donnée des  $c_{\alpha\beta\gamma\delta}$  comme une 3-cochaine de Čech: elle est complètement antisymétrique et par construction on a

$$c_{\alpha\beta\gamma\delta} + c_{\alpha\beta\gamma\epsilon} - c_{\alpha\beta\delta\epsilon} + c_{\alpha\gamma\delta\epsilon} - c_{\beta\gamma\delta\epsilon} = 0.$$

C'est donc un 3-cocycle et puisque  $H_{\check{C}ech}^3(M)$  est nul, il existe une 2-cochaine  $d_{\alpha\beta\gamma}$  telle que

$$c_{\alpha\beta\gamma\delta} = d_{\alpha\beta\gamma} - d_{\alpha\beta\delta} + d_{\alpha\gamma\delta} - d_{\beta\gamma\delta}.$$

On remplace alors les fonctions  $h_{\alpha\beta\gamma}$  par

$$g_{\alpha\beta\gamma} = h_{\alpha\beta\gamma} - d_{\alpha\beta\gamma}.$$

On a toujours pour tout  $\alpha, \beta, \gamma$  dans  $A$ :

$$H_{\alpha\beta\gamma} = \partial g_{\alpha\beta\gamma} \quad \text{sur } U_{\alpha\beta\gamma}.$$

Mais de plus, on a

$$g_{\alpha\beta\gamma} - g_{\alpha\beta\delta} + g_{\alpha\gamma\delta} - g_{\beta\gamma\delta} = 0,$$

ce qui nous permet de définir

$$s_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma \in A} \psi_{\gamma} g_{\alpha\beta\gamma} \quad \text{sur } U_{\alpha\beta},$$

où  $\psi_{\alpha}$  est une partition de l'unité subordonnée au recouvrement  $(U_{\alpha})$ . Par construction, ces fonctions vérifient, pour tout  $\alpha, \beta, \gamma$  dans  $A$ ,

$$g_{\alpha\beta\gamma} = s_{\alpha\beta} + s_{\beta\gamma} + s_{\gamma\alpha} \quad \text{sur } U_{\alpha\beta\gamma}.$$

Donc si on pose

$$G_{\alpha\beta} = H_{\alpha\beta} - \partial s_{\alpha\beta},$$

on a

$$\delta G_{\alpha\beta} = \delta H_{\alpha\beta},$$

$$\partial G_{\alpha\beta} = \partial H_{\alpha\beta},$$

et

$$G_{\alpha\beta} + G_{\beta\gamma} + G_{\gamma\alpha} = 0.$$

Cette relation nous permet de définir sur chaque  $U_\alpha$  l'opérateur différentiel

$$K_\alpha = \sum_{\gamma \in A} G_{\alpha\gamma} \psi_\gamma.$$

Ces opérateurs sont tels que pour tout  $\alpha, \beta$  de  $A$ ,

$$G_{\alpha\beta} = K_\beta - K_\alpha \quad \text{sur } U_{\alpha\beta}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} C_{2k,\alpha} - \delta K_\alpha &= C_{2k,\beta} - \delta H_{\alpha\beta} - \delta K_\alpha \\ &= C_{2k,\beta} - \delta(G_{\alpha\beta} + K_\alpha) \\ &= C_{2k,\beta} - \delta K_\beta \\ C_{2k+1,\alpha} - \partial K_\alpha &= C_{2k+1,\beta} - \partial K_\beta. \end{aligned}$$

Donc, si on pose sur chaque  $U_\alpha$

$$\begin{aligned} u *'_\alpha v &= \exp \nu^{2k} K_\alpha (\exp -\nu^{2k} K_\alpha(u) * \exp \nu^{2k} K_\alpha(v)) \\ &= \sum_{r \geq 0} \nu^r C'_{r,\alpha}(u, v) \quad \forall u, v \in C^\infty(U_\alpha), \end{aligned}$$

on a quel que soit  $\alpha, \beta$ ,

$$C'_{r,\alpha} = C'_{r,\beta} \quad \forall r < 2k + 2.$$

Ce qui achève la preuve, par induction sur  $r$ .

### **Théorème: V-2-2 [4]**

*Soit  $(M, F)$  une variété symplectrique, alors il existe un produit-star sur  $M$ .*

### **Démonstration**

Conservons les notations de la démonstration précédente. En particulier partons des produits star  $*_\alpha$  sur chaque  $U_\alpha$ , coïncidant jusqu'à l'ordre  $k$ . La donnée de  $*_\alpha$  permet de définir une application linéaire

$$\Phi_\alpha : C^\infty(U_\alpha)/\mathbb{R} \rightarrow \text{Der}(*_\alpha),$$

(où  $\text{Der}(*_\alpha)$  désigne l'ensemble des dérivations de  $(N_\nu(U_\alpha), *_\alpha)$  par

$$\Phi_\alpha(f)(u) = \frac{1}{2\nu}(f *_\alpha u - u *_\alpha f).$$

On considère l'ensemble  $C_\alpha$  des champs conforme sur  $U_\alpha$ :

$$C_\alpha = \{\xi_\alpha / L_{\xi_\alpha} F = F \text{ sur } U_\alpha\}.$$

Cet ensemble est un espace affine d'espace vectoriel directeur  $C^\infty(U_\alpha)/\mathbb{R}$ , puisque si  $\xi_\alpha$  et  $\xi'_\alpha$  sont deux tels champs, le champs  $\xi'_\alpha - \xi_\alpha$  est hamiltonien

$$L_{\xi'_\alpha - \xi_\alpha} F = 0,$$

et il existe une fonction  $f$ , définie à une constante près, telle que

$$\xi'_\alpha - \xi_\alpha = H_f.$$

Fixons un point d'origine et des coordonnées canoniques  $(x^i)$  dans  $U_\alpha$  et considérons le champ:

$$\xi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2n} x^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{1}{2} r \frac{\partial}{\partial r},$$

( $2n$  est la dimension de  $M$ ).  $\xi$  est un champ conforme.

D'autre part, soit  $g$  une fonction  $C^\infty$  sur  $U_\alpha$  alors la seule solution  $C^\infty$  de l'équation

$$L_\xi \varphi + (2p - 1)\varphi = g \quad (p > 0)$$

est

$$\varphi(r) = 2 \int_0^1 s^{4p-3} g(sr) ds.$$

Si  $\xi'$  est un autre champ conforme, on a

$$\begin{aligned} L_{\xi'} \varphi + (2p - 1)\varphi &= L_\xi \varphi + (2p - 1)\varphi + \{f, \varphi\} \\ &= g - \partial \varphi(f). \end{aligned}$$

On suppose donc que, pour chaque  $U_\alpha$ , on se donne, en plus du produit star  $*_\alpha$ , une application affine

$$D_\alpha : C_\alpha \rightarrow Der(*_\alpha)$$

telle que

$$1) D_\alpha(\xi_\alpha) = \nu D_\nu + L_{\xi_\alpha} + \sum_{r>0} D_\alpha^{2r}(\xi_\alpha)$$

$$2) D_\alpha(\xi_\alpha + H_f) = D_\alpha(\xi_\alpha) + \Phi_\alpha(f).$$

On va prolonger simultanément le recollement des  $*_\alpha$  et la définition des  $D_\alpha$ .

Remarquons que ces hypothèses imposent déjà que, si  $\xi_{\alpha\beta}$  est conforme sur  $U_{\alpha\beta}$ ,

$$D_\beta(\xi_{\alpha\beta}) - D_\alpha(\xi_{\alpha\beta}) = \sum_{r>0} \nu^{2r} (D_\beta^{2r}(\xi_{\alpha\beta}) - D_\alpha^{2r}(\xi_{\alpha\beta}))$$

est à l'ordre  $2k$  près une dérivation de  $*_\alpha$  ou  $*_\beta$ , i.e.,

$$\sum_{2s+t=r} (D_\beta^{2s} - D_\alpha^{2s})(\xi_{\alpha\beta})(C_t(u, v)) = \\ C_t((D_\beta^{2s} - D_\alpha^{2s})(\xi_{\alpha\beta})(u), v) + C_t(u, (D_\beta^{2s} - D_\alpha^{2s})(\xi_{\alpha\beta})(v))$$

(Dans cette formule,  $C_t$  désigne soit  $C_{t,\alpha}$  soit  $C_{t,\beta}$ ). Pour  $r = 2$ , on trouve

$$\delta(D_\beta^2 - D_\alpha^2)(\xi_{\alpha\beta}) = 0$$

et pour  $r = 3$ , on obtient

$$\partial(D_\beta^2 - D_\alpha^2)(\xi_{\alpha\beta}) = 0.$$

Il existe donc une fonction  $f_{\alpha\beta}^2$  dans  $C^\infty(U_{\alpha\beta})$  telle que

$$(D_\beta^2 - D_\alpha^2)(\xi_{\alpha\beta}) = \partial f_{\alpha\beta}^2.$$

Remarquons que  $f_{\alpha\beta}^2$  ne dépend pas de  $\xi_{\alpha\beta}$  car, si  $\xi'_{\alpha\beta}$  est un autre champ conforme sur  $U_{\alpha\beta}$ , alors

$$(D_\beta^2 - D_\alpha^2)(\xi'_{\alpha\beta}) = (D_\beta^2 - D_\alpha^2)(\xi_{\alpha\beta}).$$

On peut donc écrire

$$(D_\beta - D_\alpha)(\xi_{\alpha\beta}) = \nu^2 \Phi_\alpha(f_{\alpha\beta}^2) + \nu^4 D_1^4(\xi_{\alpha\beta}) + \dots$$

Supposons que pour un certain  $t < k$  on ait pu écrire  $(D_\beta - D_\alpha)(\xi_{\alpha\beta})$  sous la forme:

$$(D_\beta - D_\alpha)(\xi_{\alpha\beta}) = \sum_{r=1}^{t-1} \nu^{2r} \Phi_\alpha(f_{\alpha\beta}^{2r}) + \nu^{2t} D_{t-1}^{2t}(\xi_{\alpha\beta}) + \nu^{2t+2} D_{t-1}^{2t+2}(\xi_{\alpha\beta}) + \dots$$

avec des fonctions  $f_{\alpha\beta}^{2r}$  ne dépendant pas de  $\xi_{\alpha\beta}$ , pour tout  $r < t$ . En écrivant que

$$(D_\beta - D_\alpha)(\xi_{\alpha\beta}) - \sum_{r=1}^{t-1} \nu^{2r} \Phi_\alpha(f_{\alpha\beta}^{2r})$$

est une dérivation à l'ordre  $2k$  près de  $*_\alpha$  et  $*_\beta$ , on obtient

$$\partial D_{t-1}^{2t}(\xi_{\alpha\beta}) = \delta D_{t-1}^{2t}(\xi_{\alpha\beta}) = 0$$

et donc il existe  $f_{\alpha\beta}^{2t}$  dans  $C^\infty(U_{\alpha\beta})$  telle que

$$(D_\beta - D_\alpha)(\xi_{\alpha\beta}) = \sum_{r=1}^t \nu^{2r} \Phi_\alpha(f_{\alpha\beta}^{2r}) + \nu^{2t+2} D_t^{2t+2}(\xi_{\alpha\beta}) + \dots$$

Le raisonnement ci-dessus nous prouve que  $f_{\alpha\beta}^{2t}$  ne dépend pas de  $\xi_{\alpha\beta}$ . Il en résulte que  $(D_\beta - D_\alpha)(\xi_{\alpha\beta})$  est de la forme

$$(D_\beta - D_\alpha)(\xi_{\alpha\beta}) = \sum_{r=1}^{k-1} \nu^{2r} \Phi_\alpha(f_{\alpha\beta}^{2r}) + \nu^{2k} D_{\alpha\beta}^{2k} + \dots$$

Maintenant,

$$D_\alpha(\xi_{\alpha\beta}) - \exp -\nu^{2k} H_{\alpha\beta} \circ D_\beta(\xi_{\alpha\beta}) \circ \exp \nu^{2k} H_{\alpha\beta},$$

si  $H_{\alpha\beta}$  sont les opérateurs différentiels introduits plus haut, est une dérivation à l'ordre  $2k + 2$  près de  $*_\alpha$ . On a donc:

$$D_\alpha^{2k}(\xi_{\alpha\beta}) - D_\beta^{2k}(\xi_{\alpha\beta}) - (L_{\xi_{\alpha\beta}} H_{\alpha\beta} + 2k H_{\alpha\beta}) = \left[ - \sum_{r=1}^{k-1} \nu^{2r} \Phi_\alpha(f_{\alpha\beta}^{2r}) \right]_{2k} + \partial g_{\alpha\beta}^{2k}(\xi_{\alpha\beta}).$$

où  $\left[ - \sum_{r=1}^{k-1} \nu^{2r} \Phi_\alpha(f_{\alpha\beta}^{2r}) \right]_{2k}$  désigne les termes d'ordre  $2k$  de  $\left[ - \sum_{r=1}^{k-1} \nu^{2r} \Phi_\alpha(f_{\alpha\beta}^{2r}) \right]$  et  $g_{\alpha\beta}^{2k}(\xi_{\alpha\beta})$

est un élément de  $C^\infty(U_{\alpha\beta})$  qui, cette fois, peut dépendre de  $\xi_{\alpha\beta}$ .

Précisément, si on change  $\xi_{\alpha\beta}$  en  $\xi_{\alpha\beta} + H_f$ , on a

$$\begin{aligned} D_\alpha^{2k}(\xi_{\alpha\beta} + H_f) &= D_\alpha^{2k}(\xi_{\alpha\beta}) + C_{2k+1,\alpha}(f, \cdot), \\ D_\beta^{2k}(\xi_{\alpha\beta} + H_f) &= D_\beta^{2k}(\xi_{\alpha\beta}) + C_{2k+1,\beta}(f, \cdot) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} D_\alpha^{2k}(\xi_{\alpha\beta} + H_f) - D_\beta^{2k}(\xi_{\alpha\beta} + H_f) - (L_{\xi_{\alpha\beta} + H_f} H_{\alpha\beta} + 2k H_{\alpha\beta}) = \\ D_\alpha^{2k}(\xi_{\alpha\beta}) - D_\beta^{2k}(\xi_{\alpha\beta}) - (L_{\xi_{\alpha\beta}} H_{\alpha\beta} + 2k H_{\alpha\beta}) - \partial H_{\alpha\beta}(f, \cdot) - L_{H_f} H_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Donc, on a

$$\begin{aligned} \partial g_{\alpha\beta}^{2k}(\xi_{\alpha\beta} + H_f) &= \partial g_{\alpha\beta}^{2k}(\xi_{\alpha\beta}) - (\partial H_{\alpha\beta})(f, \cdot) - \{f, H_{\alpha\beta}\} + H_{\alpha\beta}(\{f, \cdot\}) \\ &= \partial(g_{\alpha\beta}^{2k}(\xi_{\alpha\beta}) + H_{\alpha\beta}(f)). \end{aligned}$$

On choisira donc un  $\xi_{\alpha\beta}$  pour chaque  $U_{\alpha\beta}$  ( $\alpha < \beta$ ), un  $g_{\alpha\beta}^{2k}$  pour ce  $\xi_{\alpha\beta}$  et on posera

$$g_{\alpha\beta}^{2k}(\xi_{\alpha\beta} + H_f) = g_{\alpha\beta}^{2k} + H_{\alpha\beta}(f) \quad \forall f \in C^\infty(U_{\alpha\beta}).$$

Si  $\xi_{\alpha\beta\gamma}$  est un champ conforme sur  $U_{\alpha\beta\gamma}$ , on aura alors

$$(D_\beta - D_\alpha)(\xi_{\alpha\beta\gamma}) + (D_\gamma - D_\beta)(\xi_{\alpha\beta\gamma}) + (D_\alpha - D_\gamma)(\xi_{\alpha\beta\gamma}) = 0.$$

Ceci implique par induction que

$$f_{\alpha\beta}^2 + f_{\beta\gamma}^2 + f_{\gamma\alpha}^2 = c_{\alpha\beta\gamma}^2 \in \mathbb{R}$$

$$f_{\alpha\beta}^{2(k-1)} + f_{\beta\gamma}^{2(k-1)} + f_{\gamma\alpha}^{2(k-1)} = c_{\alpha\beta\gamma}^{2(k-1)} \in \mathbb{R}$$

et donc

$$-(L_{\xi_{\alpha\beta\gamma}} H_{\alpha\beta\gamma} + 2k H_{\alpha\beta\gamma}) = \partial g_{\alpha\beta\gamma}^{2k}(\xi_{\alpha\beta\gamma}).$$

Mais on a vu que  $H_{\alpha\beta\gamma}$  est de la forme  $\partial h_{\alpha\beta\gamma}$  et on a

$$-(L_{\xi_{\alpha\beta\gamma}} \partial h_{\alpha\beta\gamma} + 2k \partial h_{\alpha\beta\gamma}) = -\partial(L_{\xi_{\alpha\beta\gamma}} h_{\alpha\beta\gamma} + (2k-1)h_{\alpha\beta\gamma}).$$

Donc, si  $\varphi_{\alpha\beta\gamma}$  est la solution  $C^\infty$  de l'équation

$$-(L_{\xi_{\alpha\beta\gamma}} \varphi + (2k-1)\varphi) = g_{\alpha\beta\gamma}^{2k}(\xi_{\alpha\beta\gamma}),$$

on aura

$$\partial(L_{\xi_{\alpha\beta\gamma}}(\varphi_{\alpha\beta\gamma} - h_{\alpha\beta\gamma}) + (2k-1)(\varphi_{\alpha\beta\gamma} - h_{\alpha\beta\gamma})) = 0,$$

où

$$L_{\xi_{\alpha\beta\gamma}}(\varphi_{\alpha\beta\gamma} - h_{\alpha\beta\gamma}) + (2k-1)(\varphi_{\alpha\beta\gamma} - h_{\alpha\beta\gamma}) = c'_{\alpha\beta\gamma}.$$

La seule solution  $C^\infty$  de cette équation est constante, donc

$$H_{\alpha\beta\gamma} = \partial \varphi_{\alpha\beta\gamma}.$$

Mais  $\varphi_{\alpha\beta\gamma}$  ne dépend pas du choix de  $\xi_{\alpha\beta\gamma}$  puisque, si on considère un autre champ conforme  $\xi'_{\alpha\beta\gamma} = \xi_{\alpha\beta\gamma} + H_f$  on a l'équation

$$-(L_{\xi'_{\alpha\beta\gamma}} \varphi + (2k-1)\varphi) = g_{\alpha\beta\gamma}^{2k}(\xi'_{\alpha\beta\gamma}) = g_{\alpha\beta\gamma}^{2k}(\xi_{\alpha\beta\gamma}) + H_{\alpha\beta\gamma}(f).$$

Soit encore

$$-(L_{\xi'_{\alpha\beta\gamma}} \varphi + (2k-1)\varphi) - \{f, \varphi\} = g_{\alpha\beta\gamma}^{2k}(\xi_{\alpha\beta\gamma}) + \{\varphi_{\alpha\beta\gamma}, f\},$$

dont une solution  $C^\infty$  est bien sûr:  $\varphi = \varphi_{\alpha\beta\gamma}$  et c'est la seule.

Maintenant, pour tout champ conforme  $\xi_{\alpha\beta\gamma\delta}$  sur  $U_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ,

$$g_{\alpha\beta\gamma}^{2k}(\xi_{\alpha\beta\gamma\delta}) = g_{\alpha\beta}^{2k}(\xi_{\alpha\beta\gamma\delta}) + g_{\beta\gamma}^{2k}(\xi_{\alpha\beta\gamma\delta}) + g_{\gamma\alpha}^{2k}(\xi_{\alpha\beta\gamma\delta}).$$

Donc,

$$g_{\alpha\beta\gamma}^{2k}(\xi_{\alpha\beta\gamma\delta}) - g_{\alpha\beta\delta}^{2k}(\xi_{\alpha\beta\gamma\delta}) + g_{\alpha\gamma\delta}^{2k}(\xi_{\alpha\beta\gamma\delta}) - g_{\beta\gamma\delta}^{2k}(\xi_{\alpha\beta\gamma\delta}) = 0$$

et, par construction, si

$$\varphi_{\alpha\beta\gamma\delta} = \varphi_{\alpha\beta\gamma} - \varphi_{\alpha\beta\delta} + \varphi_{\alpha\gamma\delta} - \varphi_{\beta\gamma\delta},$$

alors

$$(L_{\xi_{\alpha\beta\gamma\delta}}\varphi_{\alpha\beta\gamma\delta} + (2k-1)\varphi_{\alpha\beta\gamma\delta}) = 0 \quad \begin{pmatrix} ** \\ ** \end{pmatrix}.$$

Donc la seule solution  $C^\infty$  de  $\begin{pmatrix} ** \\ ** \end{pmatrix}$  est zéro.

Mais alors on est ramené à la fin de la preuve précédente puisque

$$H_{\alpha\beta\gamma} = \partial\varphi_{\alpha\beta\gamma},$$

et

$$\varphi_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0.$$

On pose donc comme ci-dessus

$$s_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma} \varphi_{\alpha\beta\gamma} \psi_{\gamma} \text{ sur } U_{\alpha\beta}$$

$$G_{\alpha\beta} = H_{\alpha\beta} - \partial s_{\alpha\beta}$$

$$K_{\alpha} = \sum_{\gamma} G_{\alpha\gamma} \psi_{\gamma}$$

et on change les produits-star en

$$\begin{aligned} u *'_{\alpha} v &= \exp \nu^{2k} K_{\alpha} (\exp -\nu^{2k} K_{\alpha} u *_{\alpha} \exp -\nu^{2k} K_{\alpha} v) \\ &= \sum_{r \geq 0} \nu^r C'_{r,\alpha}(u, v). \end{aligned}$$

Alors on a

$$C'_{2k,\alpha} = C'_{2k,\beta},$$

et

$$C'_{2k+1,\alpha} = C'_{2k+1,\beta}.$$

Enfin, on pose

$$D'_{\alpha}(\xi_{\alpha}) = \exp \nu^{2k} K_{\alpha} \circ D_{\alpha}(\xi_{\alpha}) \circ \exp -\nu^{2k} K_{\alpha},$$

et on a poussé la récurrence à l'ordre  $k+1$ . Ce qui achève la preuve du théorème.

### 3- Paramétrisation des orbites de la représentation coadjointe

Soit  $G$  un groupe de Lie connexe. On garde les notations de 1 et on rappelle d'abord des constructions de Pedersen [27]. Pour tout  $\xi$  dans  $\mathfrak{g}^*$ , on définit la forme bilinéaire

$$B_{\xi} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$$

par

$$B_{\xi}(X, Y) = \langle \xi, [X, Y] \rangle \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Soit  $\xi_0$  un élément de  $\mathfrak{g}^*$  et soit  $W = G/G_{\xi_0}$  l'orbite de  $G$  dans  $\mathfrak{g}^*$  passant par  $\xi_0$ . Supposons qu'il existe une polarisation réelle en  $\xi_0$  (c'est à dire qu'il existe une sous-algèbre  $Ad(G_{\xi_0})$ -invariante  $\mathfrak{h}$  de  $\mathfrak{g}$  telle que  $\mathfrak{h}$  soit un sous-espace isotrope maximal pour  $B_{\xi_0}$ ). Soit  $H_0$  le sous-groupe analytique de  $G$  d'algèbre de Lie  $\mathfrak{h}$ . On pose

$$H = G_{\xi_0} \cdot H_0,$$

$H$  et  $H_0$  sont deux sous-groupes fermés de  $G$ .

Pour tout point  $\xi = g \cdot \xi_0$  de  $W$ , on note

$$\mathfrak{h}_{\xi} = Ad(g)(\mathfrak{h}),$$

et

$$H_{\xi} = g \cdot H \cdot g^{-1}.$$

Considérons

$$F_{\xi} = \{X_{\xi}^*, X \in \mathfrak{h}_{\xi}\}.$$

$F_{\xi}$  est une polarisation géométrique invariante de  $W$ , pour tout  $s$  dans  $G$ , si on note  $\gamma(s)$  l'application de  $W$  dans  $W$  définie par:

$$\gamma(s)(\xi) = s \cdot \xi,$$

alors on a:

$$\gamma(s)_* F_{\xi} = F_{s \cdot \xi}.$$

Le sous-groupe  $H$  définit une structure de fibré sur  $W = G/G_{\xi_0}$  de base  $G/H$ :

$$\begin{aligned} \Pi : W = G/G_{\xi_0} &\rightarrow G/H \\ g \cdot \xi_0 &\mapsto g \cdot H \end{aligned}$$

(si  $g \cdot \xi_0 = g' \cdot \xi_0$  alors  $g^{-1}g'$  est dans  $G_{\xi_0}$  et par suite dans  $H$ .)

Les fibres sont difféomorphes à  $H/G_{\xi_0} \simeq H \cdot \xi_0$ . En effet, la fibre passant par  $\xi = s \cdot \xi_0$  est

$$L(\xi) = \{s \cdot h \cdot \xi_0 / h \in H\}.$$

En particulier  $\mathfrak{h}_{\xi} = \mathfrak{h}_{\xi'}$  si  $\xi$  et  $\xi'$  sont dans la même fibre, on le notera parfois par  $\mathfrak{h}_{\Pi(\xi)}$ .

On considère les deux sous-espaces de  $C^{\infty}(W)$

$$\mathcal{E}_F^0(W) = \{\varphi \in C^{\infty}(W) / \varphi(s \cdot h \cdot \xi) = \varphi(s \cdot \xi) \quad \forall s \in G \quad \text{et} \quad \forall h \in H\},$$

et

$$\mathcal{E}_F^1(W) = \{\varphi \in C^{\infty}(W) / \{\varphi, f\} \in \mathcal{E}_F^0(W) \quad \forall f \in \mathcal{E}_F^0(W)\}.$$

**Remarques: V-3-1**

(i) Le crochet de Poisson de deux éléments de  $\mathcal{E}_F^1(W)$  est dans  $\mathcal{E}_F^1(W)$  car celui-ci est le normalisateur pour le crochet de Poisson de  $\mathcal{E}_F^0(W)$ . On appelle parfois le sous espace  $\mathcal{E}_F^1(W)$  l'espace des fonctions (géométriquement) quantifiables sur  $W$ .

(ii)  $F_\xi$  étant invariante, on peut montrer que, pour tout  $X$  dans  $\mathfrak{g}$ , la restriction de  $\tilde{X}$  à  $W$  qu'on note toujours  $\tilde{X}$  est dans  $\mathcal{E}_F^1(W)$

Soit  $\mathfrak{m}$  un supplémentaire de  $\mathfrak{h}$  dans  $\mathfrak{g}$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m} \quad (\text{en tant qu'espaces vectoriels}),$$

et soit  $X_1, \dots, X_n$  une base de  $\mathfrak{m}$  contenant  $n$  éléments, si  $2n = \dim W$ . Considérons

$$O_{\mathfrak{m}} = \{\xi \in W/X_1, \dots, X_n \text{ soient linéairement indépendants modulo } \mathfrak{h}_\xi\},$$

alors on a les deux lemmes suivants

**Lemme: V-3-1 [27]**

$O_{\mathfrak{m}}$  est un ouvert  $F$ -invariant de  $W$ .

**Lemme: V-3-2 [27]**

Si on note  $(G/H)_{\mathfrak{m}}$  l'image de  $O_{\mathfrak{m}}$  par  $\Pi$ , alors l'application

$$\begin{aligned} \Phi : O_{\mathfrak{m}} &\rightarrow \mathbb{R}^n \times (G/H)_{\mathfrak{m}} \\ \xi &\mapsto (\langle \xi, X_1 \rangle, \dots, \langle \xi, X_n \rangle, \Pi(\xi)) \end{aligned}$$

est un difféomorphisme sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n \times (G/H)_{\mathfrak{m}}$ .

De plus l'image de  $(G/H)_{\mathfrak{m}}$  est égal à  $\mathbb{R}^n \times (G/H)_{\mathfrak{m}}$  si et seulement si  $\mathfrak{h}$  satisfait la condition de Pukanszky.

Soit  $(V, \tau)$ ,  $\tau = (x^1, \dots, x^n)$ , une carte de  $G/H$  telle que

$$V \subset (G/H)_{\mathfrak{m}}.$$

Considérons  $U = \Pi^{-1}(V)$ . On définit alors les fonctions  $t_1, \dots, t_n$  et  $q_1, \dots, q_n$  sur  $U$  par

$$\begin{aligned} t_i(\xi) &= \langle \xi, X_i \rangle \\ q_i(\xi) &= x^i(\Pi(\xi)) \end{aligned}$$

pour tout  $i$  de 1 à  $n$  et tout point  $\xi$  de  $U$ .

**Lemme: V-3-3 [27]**

Si  $\sigma = (t_1, \dots, t_n, q_1, \dots, q_n)$ , alors  $(U, \sigma)$  est une carte de  $O_{\mathfrak{m}}$ .

Il est bien évident qu'on peut définir  $\mathcal{E}_F^0(O)$  et  $\mathcal{E}_F^1(O)$  pour chaque ouvert  $O$  de  $W$ .

**Lemme: V-3-4 [27]**

On a

$$\mathcal{E}_F^0(U) = \{\varphi \in C^\infty(U) / \frac{\partial \varphi}{\partial t_i} = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}\}$$

$$\mathcal{E}_F^1(U) = \{\varphi \in C^\infty(U) / \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_i \partial t_j} = 0 \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}\}.$$

**Lemme: V-3-5 [27]**Tout élément  $\varphi$  de  $\mathcal{E}_F^1(U)$  s'écrit d'une façon unique sous la forme

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i \tilde{X}_i / U + \varphi_0.$$

où  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$  sont des éléments de  $\mathcal{E}_F^0(U)$ .En particulier, pour tout  $X$  de  $\mathfrak{g}$ , il existe  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  dans  $\mathcal{E}_F^0(U)$  tels que

$$\tilde{X} / U = \sum_{i=1}^n \alpha_i \tilde{X}_i + \alpha_0.$$

Soit  $\mathcal{V}$  un voisinage de zéro dans  $\mathfrak{h}$  tel que l'application  $\exp$  soit un difféomorphisme (de  $\mathcal{V}$  dans un ouvert de  $H_0$ ). Définissons l'application

$$\chi : \exp \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C},$$

par

$$\chi(\exp X) = e^{\langle \xi_0, X \rangle}.$$

Soit  $G_0$  un ouvert de  $G$  de la forme  $\exp \mathcal{U} \cdot \exp \mathcal{V}$ . Considérons

$$E = \{\varphi : G_0 \rightarrow \mathbb{C} / \varphi(x.h) = \chi(h^{-1})\varphi(x) \quad \forall x \in G_0, \forall h \in \exp \mathcal{V} \text{ tels que } x.h \in G_0\}.$$

Posons

$$V_0 = G_0 / H.$$

Remarquons qu'à toute application  $C^\infty$ 

$$f : V_0 \rightarrow \mathbb{C}$$

(qu'on peut voir comme élément de  $\mathcal{E}_F^0(U)$ ), on peut associer un élément  $\varphi$  de  $E$  en posant

$$\varphi(\exp X \cdot \exp Y) = \chi(\exp -Y) f(\exp X.H).$$

On définit localement un objet  $\rho$  (une représentation locale de  $G$ ) de la façon suivante Pour tout  $a$  et  $x$  de  $G_0$  tels que  $a^{-1}x$  soit encore dans  $G_0$  et pour tout  $\varphi$  dans  $E$ , on définit  $(\rho(a)\varphi)(x)$  par

$$(\rho(a)\varphi)(x) = \varphi(a^{-1}x).$$

Si  $a, b$  et  $x$  sont dans  $G_0$  et tels que  $ab, (ab)^{-1}x$  et  $a^{-1}x$  appartiennent à  $G_0$ , alors on a

$$(\rho(ab)\varphi)(x) = (\rho(a) \circ \rho(b)\varphi)(x).$$

On a aussi, si  $h$  et  $x$  sont assez près de l'identité

$$\varphi(xh) = \varphi(xhx^{-1}.x) = \chi(h^{-1})\varphi(x).$$

Pour tout  $h$  dans  $\exp \mathcal{V} \cap (x^{-1}.\exp \mathcal{V}.x)$ , on pose:

$$\chi_x(xhx^{-1}) = \chi(h^{-1}).$$

On a

$$(\rho(xh^{-1}x^{-1})\varphi)(x) = \varphi(xhx^{-1}x) = \varphi(xh) = \chi_x(xhx^{-1})\varphi(x) = \chi(h^{-1})\varphi(x).$$

Définissons maintenant  $d\rho(X)$  sur  $E$  par

$$d\rho(X)\varphi(x) = \frac{d}{dt}\varphi(\exp -tX.x)/_{t=0}.$$

Remarquons que  $d\rho(X)\varphi$  est défini en tout point  $x$  de  $G_0$  et pour tout  $X$  dans  $\mathfrak{g}$ , que cette fonction appartient à  $E$  et qu'on a bien

$$d\rho([X, Y]) = d\rho(X) \circ d\rho(Y) - d\rho(Y) \circ d\rho(X) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

$d\rho$  est une représentation de  $\mathfrak{g}$ . Calculons cette représentation sur  $C^\infty(V)$ . Soit  $X$  dans  $\mathfrak{h}$ . Puisque

$$\varphi(\exp tX.x) = \chi(\exp -tX)\varphi(x) = e^{-t\langle \xi_0, X \rangle}\varphi(x),$$

alors on a

$$(d\rho(Ad_x(-X))\varphi)(x) = \langle \xi_0, -X \rangle \varphi(x).$$

Donc si  $Y = Ad_x(-X)$  est dans  $\mathfrak{h}_{x, \xi_0}$ , on a

$$(d\rho(Y)\varphi)(x) = \langle \xi_0, Ad_{x^{-1}}Y \rangle \varphi(x) = \langle \xi, Y \rangle \varphi(x) \quad (\xi = x.\xi_0).$$

Mais si on écrit  $Y$  sous la forme  $\tilde{Y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \tilde{X}_i + \alpha_0$ , alors on a

$$\alpha_i(\Pi(\xi)) = 0 \quad \forall i > 0.$$

En effet,

$$Y_\xi^*(u) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(\Pi(\xi))X_i^*(u) = 0,$$

soit

$$\alpha_i(\Pi(\xi)) = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\},$$

car les  $X_i^*$  engendrent l'espace tangent en  $\Pi(\xi)$  à  $G/H$ . Donc, on a

$$\tilde{Y}(\xi) = \alpha_0(\Pi(\xi))$$

et par suite

$$(d\rho(Y)\varphi)(x) = \alpha_0(\Pi(\xi))\varphi(x).$$

Maintenant si  $Y$  est dans  $\mathfrak{m} \Rightarrow X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{g}$ , alors, on a

$$\tilde{Y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \tilde{X}_i \quad \text{avec} \quad \alpha_i \in \mathbb{R}$$

donc,

$$(d\rho(Y)\varphi)(x) = \frac{d}{dt} \varphi(\exp -tY.\Pi(\xi)) /_{t=0} = Y_\xi^*(\varphi)(x).$$

Notons  $Diff^1(V)$  l'espace des opérateurs différentiels d'ordre au plus 1 sur  $V$  et définissons l'application

$$\delta : \mathcal{E}_F^1(U) \rightarrow Diff^1(V),$$

par

$$\delta(u) = \sum_{i=1}^n \beta_i X_i^* + \beta_0$$

si

$$u = \sum_{i=1}^n \beta_i \tilde{X}_i + \beta_0.$$

Le fait que  $d\rho$  soit une représentation nous permet de généraliser à notre situation le résultat suivant de Pedersen

**Proposition: V-3-1 [27]**

*L'application  $\delta$  est un isomorphisme d'algèbres de Lie.*

**Démonstration**

Soient

$$u = \sum_{i=1}^n \beta_i \tilde{X}_i + \beta_0 \quad \text{et} \quad v = \sum_{i=1}^n \gamma_i \tilde{X}_i + \gamma_0$$

deux éléments de  $\mathcal{E}_F^1(U)$ . Alors,

$$\begin{aligned}
\{u, v\} &= \left\{ \sum_{i=1}^n \beta_i \tilde{X}_i + \beta_0, \sum_{j=1}^n \gamma_j \tilde{X}_j + \gamma_0 \right\} \\
&= \sum_{i,j=1}^n (\beta_i (X_i^* \gamma_j) \tilde{X}_j + \beta_i \gamma_j X_i^* (\tilde{X}_j) - \gamma_j (X_j^* \beta_i) \tilde{X}_i) + \sum_{i=1}^n \beta_i X_i^* \gamma_0 - \sum_{j=1}^n \gamma_j X_j^* \beta_0.
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
\delta(u) \circ \delta(v) \varphi &= \left( \sum_{i=1}^n \beta_i X_i^* + \beta_0 \right) \left( \sum_{j=1}^n \gamma_j (X_j^* \varphi) + \gamma_0 \varphi \right) \\
&= \sum_{i,j=1}^n \beta_i (X_i^* \gamma_j) X_j^* \varphi + \beta_i \gamma_j (X_i^* \cdot X_j^* \varphi) + \sum_{i=1}^n \beta_i \gamma_0 X_i^* \varphi \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \beta_i X_i^* \gamma_0 \cdot \varphi + \sum_{j=1}^n \beta_0 \gamma_j X_j^* \varphi + \beta_0 \gamma_0 \varphi.
\end{aligned}$$

Donc,

$$(\delta(u) \circ \delta(v) - \delta(v) \circ \delta(u)) \varphi$$

est égal à

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j=1}^n (\beta_i (X_i^* \gamma_j) X_j^* - \gamma_j (X_j^* \beta_i) X_i^* + \beta_i \gamma_j [X_i, X_j]^*) \varphi + \sum_{i=1}^n \beta_i \gamma_0 X_i^* \varphi - \sum_{j=1}^n \gamma_j \beta_0 X_j^* \varphi \\
&\quad + \left( \sum_{i=1}^n \beta_i X_i^* \gamma_0 - \sum_{j=1}^n \gamma_j X_j^* \beta_0 \right) \varphi + \sum_{j=1}^n \beta_0 \gamma_j X_j^* \varphi - \sum_{i=1}^n \gamma_0 \beta_i X_i^* \varphi
\end{aligned}$$

c'est à dire à

$$\begin{aligned}
&\delta \left( \sum_{i=1}^n \beta_i \gamma_0 \tilde{X}_i - \sum_{j=1}^n \gamma_j \beta_0 \tilde{X}_j + \sum_{i=1}^n \beta_i (X_i^* \gamma_0) - \sum_{j=1}^n \gamma_j (X_j^* \beta_0) + \sum_{j=1}^n \beta_0 \gamma_j \tilde{X}_j - \sum_{i=1}^n \gamma_0 \beta_i \tilde{X}_i \right) \varphi \\
&\quad + \delta \left( \sum_{i,j=1}^n (\beta_i (X_i^* \gamma_j) \tilde{X}_j - \gamma_j (X_j^* \beta_i) \tilde{X}_i) \right) \varphi + \sum_{i,j=1}^n \beta_i \gamma_j [X_i, X_j]^* \varphi.
\end{aligned}$$

Puisque  $[X_i, \tilde{X}_j]$  est dans  $\mathcal{E}_F^1(U)$ , on a

$$\begin{aligned}
\delta([X_i, \tilde{X}_j]) &= d\rho([X_i, X_j]) = d\rho(X_i) \circ d\rho(X_j) - d\rho(X_j) \circ d\rho(X_i) \\
&= \delta(\tilde{X}_i) \circ \delta(\tilde{X}_j) - \delta(\tilde{X}_j) \circ \delta(\tilde{X}_i).
\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\delta\left(\sum_{i,j=1}^n \beta_i \gamma_j [X_i, \tilde{X}_j]\right) = \sum_{i,j=1}^n \beta_i \gamma_j \delta([X_i, \tilde{X}_j])$$

car  $\beta_i$  et  $\gamma_j$  sont dans  $\mathcal{E}_F^0(U)$ . On en déduit

$$\delta(u) \circ \delta(v) - \delta(v) \circ \delta(u) = \delta(\{u, v\}).$$

Le fait que  $\delta$  est surjective est évident. D'autre part si  $\delta(u) = 0$ , alors on a

$$\beta_i(\Pi(\xi)) = 0 \quad \forall i \geq 0, \quad \forall \xi \in U$$

$u$  est donc nul.

### **Théorème: V-3-1 [4]**

Soit  $W = G/G_{\xi_0}$  une orbite de  $G$  dans  $\mathfrak{g}^*$  de dimension  $2n$ . Supposons qu'il existe une polarisation réelle  $\mathfrak{h}$  en  $\xi_0$ . Alors il existe un recouvrement de  $W$  par des cartes de Darboux  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  tel que pour tout  $X$  dans  $\mathfrak{g}$ ,  $\tilde{X}/U_\alpha$  s'écrit sous la forme

$$\tilde{X}/U_\alpha(\xi) = \sum_{j=1}^n \alpha_j(q) p_j + \alpha_0(q),$$

où

$$\varphi_\alpha(\xi) = (p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n),$$

et  $\alpha_0, \dots, \alpha_n$  sont des fonctions  $C^\infty$  dépendant seulement des variables  $q$ .

De plus ces ouverts apparaissent comme des ouverts d'un fibré affiné  $L$  au dessus de  $G/H$ .

Si  $\mathfrak{h}$  satisfait la condition de Pukanszky, alors  $(\varphi_\alpha(U_\alpha))_\alpha$  recouvre le fibré affiné  $L$  en entier.

### **Démonstration**

Considérons une carte  $(U, \sigma)$  autour de  $\xi_0$  comme dans le lemme V-3-2 alors pour tout  $i$  dans  $\{1, \dots, n\}$ ,  $\frac{\partial}{\partial t_i}$  est un élément de  $Diff^1(V)$ . Notons  $p_i$  l'image de cet élément par l'application inverse de  $\delta$

$$p_i = \delta^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\right).$$

$(U, (p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n))$  est une carte de  $W$  autour de  $\xi_0$  telle que

$$\{p_i, q_j\} = \delta_{ij} \quad \text{et} \quad \{p_i, p_j\} = \{q_i, q_j\} = 0.$$

Si  $u$  est un élément de  $\mathcal{E}_F^1(U)$ , alors

$$u(\xi) = \delta^{-1}\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i(t) \frac{\partial}{\partial t_i} + \alpha_0(t)\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(q) p_i + \alpha_0(q).$$

En particulier pour chacune des fonctions  $\tilde{X}$ .

Cette construction peut se faire autour d'un élément quelconque de  $W$ . On a donc un atlas de telles cartes sur  $W$ .

Maintenant, si on se place dans une intersection  $U \cap U'$ , on a un changement de cartes

$$q \mapsto q' = \Psi(q) \quad p \mapsto p' = \Theta(p, q).$$

Mais  $p'$  est dans  $\mathcal{E}_F^1(U \cap U')$  comme  $p$ , donc

$$p' = \sum_{i=1}^n A_i(q)p_i + A_0(q).$$

Les fonctions

$$(p, q) \mapsto (p', q')$$

définissent alors un fibré affine  $L$  au dessus de  $G/H$  et  $W$ . apparaît comme un ouvert de ce fibré.

La fin de la démonstration est une conséquence directe du lemme V-3-2.

#### 4- Existence de produit-star covariant

Soit  $W = G/G_{\xi_0}$  une orbite de  $G$  dans  $\mathfrak{g}^*$  de dimension  $2n$  admettant une polarisation réelle  $\mathfrak{h}$  en  $\xi_0$ . Considérons un ouvert  $U$  de  $W$  qui est le domaine d'une carte de l'atlas défini dans le théorème V-3-1.

##### Définition: V-4-1

Soit

$$T : N(U) \times \dots \times N(u) \rightarrow N(u)$$

une application  $r$ -linéaire. On dira que  $T$  possède la propriété  $P_k$  pour  $k$  dans  $\mathbb{N}$  si et seulement si:

$$T(u_1, \dots, u_r) \in C^\infty(q)^{d_1 + \dots + d_r - k}[p] \quad \forall (u_1, \dots, u_r) \in C^\infty(q)^{d_1}[p] \times \dots \times C^\infty(q)^{d_r}[p],$$

où  $C^\infty(q)^d[p]$  est l'espace des fonctions  $C^\infty$  sur  $U$  polynômiales en  $p$  de degré inférieur ou égal à  $d$ .

Si  $t$  désigne le plus grand des  $k$  tels que  $T$  possède  $P_k$ , on dira que  $T$  est d'ordre  $t$ .

##### Lemme: V-4-1

Soit  $T = \sum T_{\alpha_1, \dots, \alpha_r} D^{\alpha_1} \otimes \dots \otimes D^{\alpha_r}$  une application  $r$ -linéaire différentielle alors  $T$  est d'ordre  $t$  si et seulement si, pour tous les multi-indices  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ , on a

$$T_{\alpha_1, \dots, \alpha_r} \in C^\infty(q)^{\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^n \alpha_i^j - t}[p]$$

(si  $\alpha_i = (\alpha_i^1, \dots, \alpha_i^n, \dots, \alpha_i^{2n})$ ).

### Démonstration

Supposons que  $T$  soit d'ordre  $t$  et supposons qu'il existe  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  tel que

$$T_{\alpha_1, \dots, \alpha_r} \notin C^\infty(q) \sum_{i=1}^r \sum_{j=i}^n \alpha_i^{j-t} [p].$$

Appelons  $(\alpha_{0,1}, \dots, \alpha_{0,r})$  le plus petit (pour l'ordre lexicographique) des  $2rn$ -uplets vérifiant la propriété précédente et considérons les fonctions  $u_1, \dots, u_r$  définies par

$$u_k(p, q) = p_1^{\alpha_{0,k}^1} \dots p_n^{\alpha_{0,k}^n} \cdot q_1^{\alpha_{0,k}^{n+1}} \dots q_n^{\alpha_{0,k}^{2n}}.$$

Alors, on a

$$T(u_1, \dots, u_r) = T_{\alpha_{0,1}, \dots, \alpha_{0,r}} \notin C^\infty(q) \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^n \alpha_{0,i}^{j-t} [p],$$

ce qui contredit le fait que  $T$  est d'ordre  $t$ . La réciproque est évidente.

### Proposition: V-4-1

Rappelons que  $\delta$  désigne l'opérateur de cohomologie de Hochschild. Soit  $T$  une application linéaire de  $N(U)$  dans  $N(U)$  différentielle,  $n$ -c et telle que  $\delta T$  soit d'ordre  $t$ . Alors, quitte à la corriger par un cocycle,  $T$  est d'ordre  $t$ .

### Démonstration

Soit  $T = \sum_{\alpha} T_{\alpha} D^{\alpha}$  comme dans la proposition et supposons que  $T$  ne soit pas d'ordre d'ordre  $t$ . Il existe alors  $\alpha$  tel que:

$$T_{\alpha} \notin C^\infty(q) \sum_{i=1}^n \alpha^i - t [p].$$

Si  $|\alpha| = 1$  alors  $T_{\alpha} D^{\alpha}$  est un cocycle, on peut donc le retrancher de  $T$ .

Supposons maintenant qu'il existe  $\alpha$  tel que

$$T_{\alpha} \notin C^\infty(q) \sum_{i=1}^n \alpha^i - t [p] \quad \text{et} \quad |\alpha| \neq 1.$$

Appelons  $\alpha_0$  le plus grand des  $2n$ -uplets vérifiant cette propriété, et  $i_0$  le plus petit des entiers tel que

$$\alpha_0^{i_0} \neq 0.$$

Alors le coefficient des termes d'ordre  $(\alpha_0 - [i_0], [i_0])$  dans  $\delta T$  est

$$T_{\alpha_0} \notin C^\infty(q) \sum_{i=1}^n \alpha_0^i - t [p],$$

ce qui contredit le fait que  $\delta T$  est d'ordre  $t$ .

### Définition: V-4-2

Soit  $A_{\nu} = \sum_{k \geq 0} \nu^k A_k$  une application  $r$ -linéaire formelle de  $N_{\nu}(U) \times \dots \times N_{\nu}(U)$  dans  $N_{\nu}(U)$ ,  $A_{\nu}$  est dite correcte si et seulement si pour tout  $k$  dans  $\mathbb{N}$ ,  $A_k$  est d'ordre au plus  $k$ .

**Théorème: V-4-1 [4]**

Soit  $G$  un groupe de Lie connexe et soit  $W = G/G_{\xi_0}$  une orbite de  $G$  dans  $\mathfrak{g}^*$  admettant une polarisation réelle  $\mathfrak{h}$  en  $\xi_0$ . Alors il existe un produit-star covariant sur  $W$ .

**Démonstration**

Remarquons tout d'abord que si un produit-star sur  $W$  est correct, il sera covariant, puisque les fonctions  $\tilde{X}$  sont affines dans les variables  $p$ .

La démonstration de ce théorème reste identique à celle du théorème V-2-2. En effet il suffit de considérer un recouvrement  $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$  de  $W$  comme dans le théorème V-3-1 et de choisir une partition de l'unité  $\psi_\alpha$  ne dépendant que des variables  $q$  subordonnée à ce recouvrement et de faire les remarques suivantes

i) On peut choisir les produit-star  $(*_\alpha)$  corrects car ceux de Moyal dans les variables  $p$  et  $q$  le sont.

ii) On peut choisir  $A_{\alpha\beta}$  correcte de même que  $L_{X_{\alpha\beta}}$  et par suite  $H_{\alpha\beta}$  sera correcte.

iii) On peut imposer à  $D_\alpha(\xi_\alpha)$  d'être correcte, mais puisque  $H_{\alpha\beta}$  est correcte, alors:

$$D_\alpha(\xi_{\alpha\beta}) - \exp -\nu^{2k} H_{\alpha\beta} \circ D_\beta(\xi_{\alpha\beta}) \circ \exp \nu^{2k} H_{\alpha\beta}$$

sera encore correcte.

iv) Puisque la partition de l'unité est fonction des seuls  $q$ ,  $K_\alpha$  sera correcte et par suite  $*'_\alpha$  et  $D'_\alpha(\xi_\alpha)$  seront aussi corrects.

## REFERENCES

- [1] D. Arnal *Differential Cohomology of  $C^\infty(G^*)$*  Journ. of Geometry and Physics, Vol 4, p. 439-467 (1987)
- [2] D. Arnal, J.C. Cortet, P. Molin et G. Pinczon *Covariance and Geometrical invariance in  $\star$  quantization* J. Math. Phys. 24 (2) p. 276-283 (1983).
- [3] D. Arnal, M. Cahen et S. Gutt *Representation of compact Lie groups and Quantisation by deformation* Acad. Royale de Belgique LXXIV 45 ,p. 123-141 (1988)
- [4] D. Arnal J. Ludwig et M. Masmoudi *Covariant star-products a paraitre*
- [5] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz et D. Sternheimer “ *Deformation and Quantization*” Ann. of Phys. 111 p. 61-151 (1978)
- [6] R. Berger “ *Cohomologie différentiable des algèbres de polynomes, de leur localisées ou de leur complétées et des variétés*” Public. Univ. Lyon 5/A (1982).
- [7] J. Dixmier *Les algèbres enveloppantes* Gauthier-Villars, Paris (1972)
- [8] M. Cahen, M. De Wilde et S. Gutt *Local cohomology of the algebra of  $C^*$  functions on a connected manifold* Letters in Mathematical Physics, p. 157-167 (1980)
- [9] P. Cartier *Théorie des algèbres semi-simples* Exp. Séminaire Sophus Lie, Ecole Normale Supérieure, Paris 1954-1955
- [10] C. Chevalley et S. Eilenberg *Cohomology theory of Lie groups and Lie algebra* Trans of the American Math. Soc 63, p.85-124 (1948)
- [11] M. Gerstenhaber *On the deformations of rings and algebras* Ann. of Math., 79, p. 59-103 (1964).
- [12] S. Gutt *Déformations formelles de l’algèbre des fonctions différentiables sur une variété symplectique*, Thèse, Université de Bruxelles;
- [13] S. Gutt *An explicit  $\star$ -product on the cotangent bundle to a Lie group* Lett. Math. Phys. 7 p. 249-258 (1983).
- [14] M. De Wilde, S. Gutt et P.B.A. Lecomte *A propos des deuxième et troisième espaces de cohomologie de l’algèbre de Lie de Poisson d’une variété symplectique* Ann. Inst. H. Poincaré, Vol.40,1, p.77-83 (1984).
- [15] M. De Wilde et P.B.A. Lecomte *Formal deformations of the Poisson Lie algebra of a symplectic manifold and star-products, existence, equivalence, derivations*. NATO ASI Series, C247, p.897-960 (1988)  
et  
M. De Wilde et P.B.A. Lecomte *Existence of star-product and of formal deformations of the Poisson Lie algebra of arbitrary symplectic manifold* Lett. Math. Phys. 7, p. 487-496

- (1983).
- [16] M. De Wilde et P.B.A. Lecomte *Existence of star products revisited* Preprint Université de Liège.
- [17] M. De Wilde et P.B.A. Lecomte *Existence of star-products on exact symplectic manifolds* Ann. Inst. Fourier, Grenoble 35,2, p.117-143 (1985).
- [18] A. Lichnerowicz *Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées* J. of Diff. Geom . p.253-300 (1977)
- [19] A. Lichnerowicz *Variétés de Poisson et feuilletages* . Ann. Fac. Toulouse p. 195-262 (1982)
- [20] A. Lichnerowicz *Sur les algèbres formelles associées par déformation à une variété symplectique* Ann. di Matem, t123,p.287-330 (1980).
- [21] H. Omori, Y. Maeda and A. Yoshioka “*Weyl manifolds and deformation quantization*” To be published in *Advances in Mathematics*.
- [22] M. Masmoudi *Tangential formal deformation of the Poisson bracket and tangential star-product on a regular Poisson manifold* (a paraitre) ,J.G.P
- [23] M. Masmoudi *Une deuxième démonstration de l’existence de produits-star tangentiels sur une variété de Poisson régulière* (a paraitre) Cont. Aca. Des. Scien
- [24] D. Melotte *Cohomologie de Chevalley associée aux variétés de Poisson* thèse Université de Liege (1988-1989)
- [25] O.M. Neroslavsky et A.T. Vlassov “*Sur les déformations de l’algèbre des fonctions d’une variété symplectique*” C.R. Acad. SC. Paris, Serie I, 292 p. 71-73 (1981)
- [26] A. Nijenhuis et R. Richardson *Deformation of Lie algebra structures* J. of Math. and Mechanics, 17, p.89-105 .(1967)
- [27] N.V. Pedersen *On the symplectic structure of coadjoint orbits of (solvable) Lie groups and applications, I* Math. Annalen 281 p. 633-669 (1988).
- [28] J.A. Schouten *On the differential operators of first order in tensor calculus* Conv. Int. Geom. Diff. Italia (1953).
- [29] J. Vey *Déformation du crochet de Poisson sur une variété symplectique* Comment. Math. Helv. 50, p. 421-454 (1975).
- [30] H. Weyl *The classical groups, their invariants and representations* Princeton Math . (1946).
- [31] J. Peetre *Une caractérisation abstraite des opérateurs différentiels* Math Scandinavica,8, p. 116-120.
- [32] J.E. Moyal, *Proceedings Cambridge Philosophical Society*145, p.99 (1949).

[33] D. Arnal, M. Cahen et S. Gutt *Deformations on coadjoint orbits* J.G.P Vol 3 n. 3 (1986).