



**HAL**  
open science

# Sur quelques problèmes de stabilisation des systèmes non linéaires

Abderrahman Iggidr

► **To cite this version:**

Abderrahman Iggidr. Sur quelques problèmes de stabilisation des systèmes non linéaires. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paul Verlaine - Metz, 1992. Français. NNT : 1992METZ036S . tel-01776001

**HAL Id: tel-01776001**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01776001>**

Submitted on 24 Apr 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

**Thèse présentée à l'UNIVERSITE DE METZ**

pour l'obtention du

**doctorat de l'Université de Metz**

**en Mathématiques**

mention : Mathématiques appliquées,  
par Mr Abderrahman IGGIDR.

Titre de la thèse :

**SUR QUELQUES PROBLEMES DE STABILISATION  
DES SYSTEMES NON LINEAIRES**

Soutenue le 14 décembre 1992 devant le jury composé de :

J.P. GAUTHIER, Professeur à l'INSA de Rouen. Président.

H. HAMMOURI, professeur à l'Université Claude Bernard de Lyon. Rapporteur.

V. JURDJEVIC, professeur à l'Université de Toronto (Canada) . Rapporteur.

A. ROUX, professeur à l'Université de Metz. Rapporteur.

G. SALLET, professeur à l'Université de Metz. Directeur de thèse.

H.J. SUSSMANN, professeur à l'Université de Rutgers (U.S.A).

P. FLORCHINGER, maître de conférence à l'Université de Metz (invité).

1577874

**Thèse présentée à l'UNIVERSITE DE METZ**  
pour l'obtention du  
**doctorat de l'Université de Metz**  
en **Mathématiques**

mention : Mathématiques appliquées.  
par Mr A. IGGIDR.

Titre de la thèse :

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv.	19920775
Cote	S/M <sub>3</sub> 92/36
Loc	Magasin

**SUR QUELQUES PROBLEMES DE STABILISATION**

**DES SYSTEMES NON LINEAIRES**

Résumé :

Dans ce travail on étudie la stabilisation par retour d'état de certains systèmes non linéaires : systèmes à dérive polynomiale homogène (pour lesquels une condition nécessaire et suffisante de stabilisation globale est donnée), systèmes analytiques (résultat local) et systèmes avec intégrateurs. On donne ensuite un résultat de stabilisation par retour d'état estimé à l'aide d'un observateur. Enfin, la dernière partie est consacrée à la stabilisation d'une classe de systèmes stochastiques.

Soutenue le 14 décembre 1992 devant le jury composé de :

- J.P. GAUTHIER, Professeur à l'INSA de Rouen. Président.
- H. HAMMOURI, professeur à l'Université Claude Bernard de Lyon. Rapporteur.
- V. JURDJEVIC, professeur à l'Université de Toronto (Canada) . Rapporteur.
- A. ROUX, professeur à l'Université de Metz. Rapporteur.
- G. SALLET, professeur à l'Université de Metz. Directeur de thèse.
- H.J. SUSSMANN, professeur à l'Université de Rutgers (U.S.A).
- P. FLORCHINGER, maître de conférence à l'Université de Metz (invité).

## REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à G. Sallet, qui a su au cours de ces dernières années, me guider, m'encourager et me faire confiance.

Je voudrais remercier H. Hammouri, V. Jurdjevic et A. Roux qui ont accepté d'être les rapporteurs de ce travail.

Je remercie également H.J. Sussmann, J.P Gauthier et P. Florchinger qui m'ont fait l'honneur de faire partie du jury.

La préparation de cette thèse a été faite au sein du projet CONGE de l'INRIA. A ce titre je tiens à remercier tous ses membres, et en particulier R. Chabour, A. Ferfera et J.C Vivalda, ainsi qu'E. Agostini, qui m'ont toujours aidé.

D'autre part, je voudrais dire qu'il m'a été très agréable de travailler au sein du département de Mathématiques de l'Université de Metz, où les contacts ont été chaleureux et enrichissants.

Enfin, je remercie toutes celles et tous ceux qui m'ont aidé à réaliser ce travail.

# Table des matières

<b>0</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1</b>	<b>RAPPELS ET GENERALITES</b>	<b>7</b>
1.1	Formulation du problème . . . . .	7
1.2	Notions de stabilité . . . . .	7
1.2.1	Définitions . . . . .	7
1.2.2	Fonctions de Lyapunov . . . . .	8
1.2.3	Variété centrale . . . . .	10
1.3	Stabilisation . . . . .	11
1.3.1	Conditions nécessaires . . . . .	12
1.3.2	Systèmes affines à dérive dissipative : méthode de Jurdjevic-Quinn . . . . .	13
1.3.3	Fonctions de Lyapunov "contrôlées" (Arstein [3], Sontag [44]) . . . . .	16
1.3.4	Méthodes indirectes . . . . .	17
<b>2</b>	<b>SYSTEMES POLYNOMIAUX HOMOGENES</b>	<b>19</b>
2.1	Introduction . . . . .	19
2.2	Notations . . . . .	20
2.3	Stabilisation des systèmes polynomiaux pairs . . . . .	20
2.4	Stabilisation des systèmes polynomiaux impairs . . . . .	25
2.5	Stabilisation linéaire des systèmes homogènes dans $\mathbb{R}^2$ . . . . .	28
<b>3</b>	<b>STABILIZATION OF A CLASS OF ANALYTIC SYSTEMS</b>	<b>33</b>
3.1	Introduction . . . . .	33
3.2	Preliminaries and basic results . . . . .	35
3.3	Affine systems with $n - 1$ controls . . . . .	38
3.3.1	Case where $r$ is even . . . . .	38
3.3.2	Case where $r$ is odd . . . . .	43

<b>4</b>	<b>INTEGRATORS AND NONLINEAR STABILIZATION</b>	<b>47</b>
4.1	Introduction . . . . .	47
4.2	Main results . . . . .	48
<b>5</b>	<b>STABILIZATION OF PLANAR NONLINEAR SYSTEMS</b>	<b>55</b>
5.1	Introduction . . . . .	55
5.2	$C^1$ stabilizability: Bilinear approach . . . . .	56
5.3	$C^1$ -stabilization of some critical cases . . . . .	59
<b>6</b>	<b>EXPONENTIAL STABILIZATION AND OBSERVERS</b>	<b>63</b>
6.1	Introduction . . . . .	64
6.2	Stabilization . . . . .	66
6.3	Construction of the observer and stabilization using a state estimation	68
<b>7</b>	<b>STOCHASTIC STABILIZATION</b>	<b>71</b>
7.1	Stochastic stability . . . . .	72
7.2	Setting of the problem . . . . .	74
7.3	Stabilization . . . . .	76
7.4	Related results . . . . .	80
	<b>Bibliographie</b>	<b>83</b>

# 0

## Introduction

Dans cette thèse on s'intéresse au problème de la stabilisation, par retour d'état, de certains systèmes non linéaires.

Dans tout ce qui suit le point d'équilibre sera l'origine et les systèmes considérés seront définis sur  $\mathbb{R}^n$  ou sur un voisinage ouvert de l'origine dans  $\mathbb{R}^n$ .

Le premier chapitre est consacré à des rappels de définitions et résultats classiques de stabilisation, dont certains seront illustrés par des exemples.

Dans le second chapitre on s'intéresse d'abord aux systèmes de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x) + Bu \\ x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^{n-1} \end{cases} \quad (0.1)$$

où  $P$  est un champ polynomial homogène et  $B$  une matrice de rang  $n-1$ . On donne une condition nécessaire et suffisante, portant sur le champ  $P$  et la matrice  $B$ , de globale stabilisabilité, Le feedback stabilisant étant explicitement calculé. (l'essentiel de cette partie a été publié dans [30]).

Il est à remarquer que, exception faite des systèmes linéaires, il y a très peu de systèmes non linéaires pour lesquels une C.N.S. de globale stabilisabilité a été donnée.

Les systèmes de la forme (0.1) ont déjà été étudiés dans [1], sans aucune restriction sur le nombre d'entrées, mais seulement dans le cas où  $P$  est de degré impair et le résultat de [1] donne la condition suffisante de stabilisabilité suivante :

$$\exists Q \text{ matrice définie positive telle que : } B^T Q x = 0 \Rightarrow \langle P(x), Qx \rangle < 0$$



On peut remarquer que cette condition revient à dire que (0.1) admet une fonction de Lyapunov contrôlée quadratique ce qui n'est pas toujours facile à trouver.

Dans la fin de ce chapitre, on étudie les systèmes homogènes plans

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x, u) \\ x \in \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (0.2)$$

où  $X$  est un champ polynomial homogène impair et on donne une condition suffisante de globale stabilisabilité. Comme conséquence, on donne un feedback stabilisateur homogène du fameux exemple des cubiques :

$$\begin{cases} \dot{x} = y^3 \\ \dot{y} = z^3 \\ \dot{z} = u \end{cases} \quad (0.3)$$

Dans le troisième chapitre, on étudie les systèmes analytiques affines en contrôles

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x) + \sum_{i=1}^m u_i Y_i(x) \\ x \in \mathbb{R}^n, u_i \in \mathbb{R} \\ X(0) = 0 \end{cases} \quad (0.4)$$

où l'on suppose que les champs contrôlés  $Y_i$  sont linéairement indépendants à l'origine. On commence par donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les champs  $Y_i$  pour que le système (0.4) soit feedback équivalent au système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = X_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = u \\ x_1 \in \mathbb{R}^{n-m}, x_2 \in \mathbb{R}^m \\ X_1(0, 0) = 0 \end{cases} \quad (0.5)$$

On utilise ensuite cette écriture et les résultats du second chapitre (légèrement modifiés) pour stabiliser localement les systèmes de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x) + \sum_{i=1}^{n-1} u_i Y_i(x) \\ x \in \mathbb{R}^n, u_i \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (0.6)$$

Cette dernière partie a été exposée au NOLCOS'92 (Bordeaux, France) [31].

Le chapitre 4 (constitué d'un article [29] présenté au *Second IFAC Workshop on System Structure and Control*, Prague 1992) s'intéresse à l'étude, du point de vue de la stabilisation, de la relation qui existe entre

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^p \end{cases} \quad (0.7)$$

et le système avec "intégrateur"

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = u \\ x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^p \end{cases} \quad (0.8)$$

Il est bien connu ([47], [35]) que si (0.7) est globalement asymptotiquement stabilisable (G.A.S) avec un feedback de classe  $C^r$  ( $r \geq 1$ ) alors le système (0.8) est G.A.S. Dans [47], les auteurs donnent une démonstration constructive de ce résultat, montrant que si on sait stabiliser (0.7) et si on connaît une fonction de Lyapunov stricte pour le système bouclé alors on peut construire une loi de commande stabilisante pour (0.8). Malheureusement, il n'est pas toujours facile de trouver une fonction de Lyapunov stricte même quand on sait qu'un système est G.A.S, c'est le cas, par exemple, des systèmes à dérive dissipative du type Jurdjevic-Quinn. Notre contribution consiste à montrer, en utilisant le principe d'invariance de LaSalle [38] qu'on n'a pas besoin de connaître une fonction de Lyapunov stricte pour (0.7) mais seulement d'une fonction de Lyapunov "large". On montre aussi que parfois, on peut se contenter de trouver une fonction  $k$  telle que le système

$$\dot{x} = f(x, k(x)) \quad (0.9)$$

admette l'origine comme point d'équilibre stable (pas nécessairement asymptotiquement stable) pour construire un feedback qui fait de l'origine de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$  un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable pour (0.8).

Au chapitre 5 ([11]), on étudie la stabilisation locale des systèmes plans

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x) + uY(x) \\ x \in \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{R} \quad X(0) = Y(0) = 0 \end{cases} \quad (0.10)$$

Le cas  $Y(0) \neq 0$  a fait l'objet de beaucoup de travaux. Par contre, il y a peu de résultats quand  $Y(0) = 0$ .

On commence par rappeler les résultats obtenus dans [12] qui consistent à donner des conditions suffisantes de stabilisation en se basant sur l'étude du système bilinéaire

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + uBx \\ A = \frac{\partial X}{\partial x}(0), B = \frac{\partial Y}{\partial x}(0) \end{cases} \quad (0.11)$$

Dans ce travail, on étudie, en utilisant les techniques de la variété centrale, une classe de ces systèmes pour lesquels le bilinéarisé n'apporte pas de réponse.

Dans le chapitre 6, on considère des systèmes de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + f(x, u) \\ y = Cx \\ x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^p, u \in \mathbb{R}^m, A \in M_{n,n}(\mathbb{R}), B \in M_{n,m}(\mathbb{R}), C \in M_{p,n}(\mathbb{R}) \end{cases} \quad (0.12)$$

où  $(A, B)$  est contrôlable et  $(A, C)$  observable, et  $f$  un champ qui est lipschitzien et qui vérifie en plus :

$$|f_i(x, u)| \leq K \|p_i(x)\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall u \in \mathbb{R}^m \quad (0.13)$$

où  $p_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^i$  est la projection canonique.

On démontre que cette classe de systèmes est globalement exponentiellement stabilisable par feedback linéaire que l'on construit explicitement ; ensuite en supposant que  $f_i(x, u) = f_i(x_1, \dots, x_i, 0, \dots, 0, u)$  (i.e.  $f_i$  ne dépend que des  $i$  premières coordonnées) on construit un observateur pour ces systèmes qui converge exponentiellement et on montre que l'on peut stabiliser (0.12) par retour d'état estimé par l'observateur construit.

Il est à remarquer que cette classe de systèmes a été étudiée par Tsinias dans [49], dans le cas mono-entrée-mono-sortie. Sa démonstration est compliquée et en plus elle ne peut se généraliser facilement aux systèmes multi-entrées, multi-sorties.

Le dernier chapitre montre que la méthode développée au chapitre 6 continue à s'appliquer aux systèmes stochastiques dont le champ de vecteurs (de la partie déterministe) et le bruit aléatoire vérifient des conditions analogues à celles du chapitre 6.

# 1

## RAPPELS ET GENERALITES

### 1.1 Formulation du problème

On considère un système dont l'évolution peut être décrite par le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = X(x(t), u(t)) \\ x \in M, u \in \mathcal{U} \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $M$  est une variété différentiable connexe appelée espace d'état et  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$  espace des contrôles,  $x(t)$  représente l'état du système à l'instant  $t$  et  $X$  est un champ de vecteurs défini sur  $M$ . Dans ce travail,  $M$  sera l'espace  $\mathbb{R}^n$  ou un ouvert convexe de  $\mathbb{R}^n$ .

Le problème auquel on s'intéresse est le suivant : étant donné  $x_0 \in M$ , trouver un feedback  $u = u(x)$  tel que le point  $x_0$  soit un point d'équilibre asymptotiquement stable pour le système bouclé :

$$\dot{x}(t) = X(x(t), u(x(t))) \quad (1.2)$$

Pour cela, rappelons les définitions suivantes.

### 1.2 Notions de stabilité

#### 1.2.1 Définitions

**Définition 1** *Etant donné un système différentiel*

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x) \\ x \in M, X(x_0) = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

on dira que  $x_0$  est un point d'équilibre stable si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \text{ tel que } \|x - x_0\| < \alpha \Rightarrow \forall t \geq 0, \|X_t(x) - x_0\| < \epsilon$$

où  $X_t(x)$  désigne la solution de (1.3) commençant au point  $x$  à l'instant  $t = 0$  i.e.,

$$\left. \frac{dX_t(x)}{dt} \right|_{t=0} = X(x) \text{ et } X_0(x) = x$$

**Définition 2**  $x_0$  est attractif si  $\forall x \in U$  voisinage de  $x_0$ ,  $X_t(x)$  existe pour tout  $t \geq 0$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} X_t(x) = x_0$ .

$x_0$  est globalement attractif si  $\forall x \in M$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} X_t(x) = x_0$ .

**Définition 3**  $x_0$  est asymptotiquement stable s'il est stable et attractif.

$x_0$  est globalement asymptotiquement stable s'il est stable et globalement attractif.

**Définition 4** Si  $x_0$  est un point d'équilibre asymptotiquement stable pour (1.3) et s'il existe deux constantes positives  $K$  et  $\lambda$  telles que l'on ait :

$$\|X_t(x) - x_0\| \leq K \|x - x_0\| e^{-\lambda t}$$

pour tout  $x$  appartenant à un voisinage de  $x_0$  et tout  $t > 0$ , alors on dira que (1.3) est exponentiellement stable en  $x_0$ .

On remarque que pour montrer qu'un point d'équilibre admette une des propriétés ci-dessus en utilisant les définitions, on doit résoudre explicitement le système différentiel (1.3) ; ce qui est, en général difficile voir infaisable. En fait, on utilise plutôt les théorèmes suivants dus à Lyapunov ([25]).

### 1.2.2 Fonctions de Lyapunov

**Théorème 1** S'il existe une fonction  $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ , continue sur un voisinage  $U$  de  $x_0$  et différentiable sur  $U - \{x_0\}$  telle que :

(a)  $V(x_0) = 0$  et  $V(x) > 0$  si  $x \neq x_0$ ,

(b)  $\dot{V}(x) = X.V(x) \leq 0 \quad \forall x \in U$  où  $X.V(x) = \left. \frac{d}{dt} V(X_t(x)) \right|_{t=0} = \langle \nabla V(x), X(x) \rangle$

alors  $x_0$  est un point d'équilibre stable pour (1.3).

Si de plus la fonction  $V$  est telle que

$$(c) \quad \dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \in U - \{x_0\}$$

alors  $x_0$  est asymptotiquement stable.

**Définition 5** Une fonction  $V$  qui satisfait (a) et (b) est appelée fonction de Lyapunov pour (1.3) en  $x_0$ . Si (c) est vérifié alors  $V$  est appelée fonction de Lyapunov stricte pour (1.3) en  $x_0$ .

**Théorème 2** (version globale) S'il existe  $V : M \rightarrow \mathbb{R}$  définie positive et propre (c'est-à-dire l'image réciproque d'un compact de  $\mathbb{R}^+$  est un compact de  $M$ ) telle que

$$X.V(x) < 0 \quad \forall x \in M - \{x_0\}, \quad X.V(x_0) = 0$$

alors  $x_0$  est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable.

On a aussi le théorème inverse suivant (Massera [39], Kurzweil [37]).

**Théorème 3** Si  $X$  est continu et si  $x_0$  est un point d'équilibre asymptotiquement stable alors (1.3) admet une fonction de Lyapunov stricte qui est de classe  $C^\infty$  dans un voisinage de  $x_0$ .

Les théorèmes précédents prouvent que pour montrer qu'un point d'équilibre est asymptotiquement stable, il suffit de trouver une fonction de Lyapunov stricte mais ce n'est pas une chose facile et il n'y a pas de méthodes constructives qui permettent de trouver de telles fonctions. Ceci dit, en général, il est plus facile de trouver une fonction  $V$  définie positive qui vérifie :

$$X.V(x) \leq 0$$

Une telle fonction sera appelée fonction de Lyapunov large pour le champ  $X$  en  $x_0$ . Quand  $X$  admet une fonction de Lyapunov large, on a le résultat suivant qui permet de conclure à l'asymptotique stabilité.

**Théorème 4** (Principe d'invariance de LaSalle [38]) Soit  $V$  une fonction de Lyapunov large, de classe  $C^1$ , pour (1.3) en  $x_0$ . Alors toutes les trajectoires bornées pour  $t \geq 0$  tendent vers  $\Omega$ , le plus grand ensemble invariant par  $X$  et contenue dans

$$E = \{x \in M / X.V(x) = 0\}.$$

Si en plus  $V$  est propre ( $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} V(x) = +\infty$ ) alors toutes les trajectoires sont bornées pour  $t \geq 0$  et donc toutes les trajectoires tendent vers  $\Omega$ . Pour montrer que  $x_0$  est un point d'équilibre asymptotiquement stable, il suffit de montrer que  $\Omega = \{x_0\}$ .

Dorénavant, on prendra  $x_0 = 0$  l'origine de  $\mathbb{R}^n$ .

### 1.2.3 Variété centrale

Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + f(x, y) \\ \dot{y} = By + g(x, y) \end{cases} \quad (1.4)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$ ,  $A$  et  $B$  deux matrices respectivement  $n \times n$  et  $m \times m$  vérifiant :

- toutes les valeurs propres de  $A$  ont une partie réelle nulle ;
- toute valeur propre de  $B$  admet une partie réelle strictement négative.

$f$  et  $g$  sont deux applications de classe  $C^2$ , respectivement de  $\mathbb{R}^{n+m}$  dans  $\mathbb{R}^n$  et de  $\mathbb{R}^{n+m}$  dans  $\mathbb{R}^m$ , vérifiant :

$$\begin{aligned} f(0, 0) &= 0 & f'(0, 0) &= 0 \\ g(0, 0) &= 0 & g'(0, 0) &= 0 \end{aligned}$$

où  $f'(0, 0)$  et  $g'(0, 0)$  sont respectivement les jacobiennes de  $f$  et  $g$  en  $(0, 0)$ .

**Définition 6** Soit  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  une application suffisamment régulière. La sous variété  $y = h(x)$  est une variété centrale pour le système (1.4) si elle est invariante pour (1.4) et si  $h(0) = 0$  et  $h'(0) = 0$ .

**Théorème 5** (cf. [10]) Il existe une variété centrale pour le système (1.4) donnée par  $y = h(x)$  pour  $\|x\| < \delta$  avec  $h$  de classe  $C^2$  et  $\delta > 0$ .

Le flot de (1.4) sur la variété centrale est gouverné par le système

$$\dot{z} = Az + f(z, h(z)) \quad (1.5)$$

**Théorème 6** a) *Si la solution nulle de (1.5) est stable (asymptotiquement stable) (instable) alors il en est de même pour la solution nulle de (1.4).*

b) *Supposons que la solution nulle de (1.5) est stable. Soit  $(x(t), y(t))$  la solution de (1.4) avec  $\|(x(0), y(0))\|$  suffisamment petite, alors il existe  $z(t)$  solution de (1.5) telle que pour  $t \rightarrow +\infty$  on ait :*

$$\begin{cases} x(t) = z(t) + O(e^{-\gamma t}) \\ y(t) = h(z(t)) + O(e^{-\gamma t}) \end{cases} \quad (1.6)$$

où  $\gamma$  est un réel strictement positif.

### 1.3 Stabilisation

Revenons au système contrôlé

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x, u) \\ x \in U, u \in \mathcal{U} \end{cases} \quad (1.7)$$

où  $U$  est un ouvert connexe de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$  et  $X : U \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  est de classe  $C^1$  (resp.  $C^\infty$ ,  $C^\omega$ ) tel que  $X(0, 0) = 0$ .

**Définition 7** *On dira que (1.7) est stabilisable s'il existe un feedback  $u = u(x)$ , au moins continu, tel que le système bouclé :*

$$\dot{x} = X(x, u(x))$$

*admette l'origine comme point d'équilibre asymptotiquement stable.*

Rappelons que le problème de stabilisation est complètement résolu pour les systèmes linéaires ( $X(x, u) = Ax + Bu$ ) mais c'est loin d'être le cas pour les systèmes non linéaires, même les plus simples comme par exemple les systèmes bilinéaires

$$\dot{x} = Ax + uBx$$

On va rappeler les principaux résultats (essentiellement ceux qu'on utilisera par la suite) qui datent des quinze dernières années.



### 1.3.1 Conditions nécessaires

Le théorème suivant dû à Brockett ([8]) donne des conditions nécessaires de stabilisation.

**Théorème 7** *Si le système (1.7) admet un feedback stabilisateur de classe  $C^1$  dans un voisinage de  $0 \in \mathbb{R}^n$  alors :*

- (i) *Le système linéarisé n'admet pas de modes incontrôlables associés à des valeurs propres strictement positives.*
- (ii) *Il existe un voisinage  $N$  de  $(0,0)$  tel que pour tout  $\xi \in N$ , il existe un contrôle  $u_\xi(\cdot)$  défini sur  $[0, +\infty[$  qui ramène le système de l'état  $x = \xi$  en  $t = 0$  à l'état  $x = 0$  en  $t = \infty$ . En d'autres termes, si  $x(t)$  est une solution de  $\dot{x} = X(x, u_\xi)$  vérifiant  $x(0) = \xi$  alors  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ .*

(iii) *L'application*

$$\begin{aligned} \gamma : U \times \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, u) &\longmapsto X(x, u) \end{aligned}$$

*est surjective sur un voisinage de l'origine de  $\mathbb{R}^n$ .*

Par la suite, nous utiliserons le vocabulaire suivant :

**Définition 8** *Un système*

$$\dot{x} = X(x, u)$$

*vérifiant la condition (ii) du théorème de Brockett sera dit stabilisable en boucle ouverte ou encore asymptotiquement contrôlable à l'origine.*

**Remarques :**

1. La condition (ii) est évidemment une condition nécessaire de stabilisabilité quelle que soit la régularité qu'on exige du feedback.
2. Par contre, la condition (i) n'est pas nécessaire si on se contente d'un feedback continu comme le montre l'exemple suivant (dû à Kawski [34]) :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u \\ \dot{x}_2 = x_2 - x_1^3 \end{cases}$$

qui est stabilisable avec

$$u(x) = -x_1 + x_2 + \frac{4}{3}x_2^{\frac{1}{3}} - x_1^3.$$

3. La condition (iii) est également une condition nécessaire à l'existence d'un feedback stabilisateur continu (cf Sontag [45]).

4. Les conditions de Brockett sont loin d'être suffisantes pour l'existence d'un feedback stabilisateur continu. Par exemple, le système défini dans  $\mathbb{R}$  par

$$\dot{x} = f(x, u) = u^6 \sin \frac{\pi}{u}$$

vérifie bien les conditions de Brockett :

- $f$  est de classe  $C^2$  (avec  $f(x, 0) = 0$ ).
- 0 est un point accessible à partir de tout point de  $\mathbb{R}$ .
- L'application  $(x, u) \mapsto u^6 \sin \frac{\pi}{u}$  est surjective.

Cependant, il n'existe pas de feedback continu  $u(x)$ , avec  $u(0) = 0$ , tel que

$$\dot{x} = u(x)^6 \sin \frac{\pi}{u(x)} \tag{1.8}$$

soit asymptotiquement stable.

En effet, pour toute fonction continue  $u$  et pour tout  $\alpha > 0$ , il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $0 < \frac{1}{k} < u(\alpha)$  (si  $u(\alpha) > 0$ ). Par continuité de  $u$ ,  $\exists \bar{x} \in ]0, \alpha[$  tel que  $u(\bar{x}) = \frac{1}{k}$ , soit  $\frac{\pi}{u(\bar{x})} = k\pi$ , et donc  $\bar{x}$  est un autre point d'équilibre pour le système (1.8).

Dans la suite de ce chapitre on rappelle les résultats classiques de stabilisation des systèmes non linéaires.

### 1.3.2 Systèmes affines à dérive dissipative : méthode de Jurdjevic-Quinn

Historiquement, un des premiers résultats significatifs est dû à Jurdjevic et Quinn qui ont utilisé le principe d'invariance de La Salle pour donner une condition suffisante de stabilisabilité pour les systèmes affines en contrôles et dont la dérive est linéaire dissipative.

**Théorème 8** (Jurdjevic-Quinn [33]) *soit*

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x) + uY(x) \\ x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (1.9)$$

où  $X(x) = Ax$  avec  $A$  une matrice  $n \times n$  avec  $n$  valeurs propres imaginaires distinctes.  
Si

$$\{ad^k XY(x), k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{R}^n \quad \forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$$

alors (1.9) est G.A.S avec

$$u = -\langle x, Y(x) \rangle$$

Ce résultat a été ensuite généralisé à des systèmes affines quelconques par plusieurs auteurs, notamment dans [23] [41] sous la forme suivante :

**Théorème 9** ([41]) *soit*

$$\dot{x} = X(x) + \sum_{i=1}^m u_i Y^i(x) \quad (1.10)$$

un système  $C^\infty$  défini sur  $\mathbb{R}^n$  avec  $X(0) = 0$ . S'il existe une fonction  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  définie positive et propre telle que :

(i)  $X.V(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ .

(ii) L'ensemble

$$W = \left\{ x \in \mathbb{R}^n / X^{k+1}V(x) = X^k Y^i V(x) = 0, k \in \mathbb{N}, i = 1, \dots, m \right\}$$

est réduit à  $\{0\}$ .

Alors le système (1.10) bouclé avec  $u_i(x) = -Y^i V(x)$  est globalement asymptotiquement stable à l'origine.

Pour la clarté de la lecture, on rappelle ici la démonstration de ce résultat. Le champ bouclé est

$$Z = X - \sum_{i=1}^m (Y^i V) Y^i$$

On a

$$\dot{V}(x) = Z.V(x) = X.V(x) - \sum_{i=1}^m (Y^i V(x))^2 \leq 0$$

Le système est donc stable. D'après le principe d'invariance de La Salle, toutes les solutions bornées tendent vers  $\Omega$ , le plus grand ensemble invariant par  $Z$  et contenu dans

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n / Z.V(x) = 0\}$$

Remarquons que  $V$  étant propre et  $Z.V(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$ , toutes les trajectoires sont bornées.

D'autre part, soit  $x \in \Omega$ , alors pour tout  $t \geq 0$  on a  $Z_t(x) = X_t(x)$  (puisque sur  $\Omega, Z = X$ ) et, comme  $\Omega$  est  $Z$ -invariant, on a

$$X.V(X_t(x)) = Y^i V(X_t(x)) = 0 \quad \forall t \geq 0$$

ce qui implique que pour tout  $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{d^k}{dt^k} X V(X_t(x))_{t=0} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^k}{dt^k} Y^i V(X_t(x))_{t=0} = 0$$

Mais, par définition de la dérivée de Lie, on a

$$X.V(x) = \frac{d}{dt} V(X_t(x))_{t=0}$$

donc

$$X^{k+1} V(x) = \frac{d^k}{dt^k} X V(X_t(x))_{t=0} = 0 \quad \text{et} \quad X^k Y^i V(x) = \frac{d^k}{dt^k} Y^i V(X_t(x))_{t=0} = 0$$

Ceci montre que  $\Omega \subset W$ , ce qui termine la preuve. ■

### 1.3.3 Fonctions de Lyapunov "contrôlées" (Arstein [3], Sontag [44])

Etant donné un système

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x, u) \\ x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m \end{cases} \quad (1.11)$$

et  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie positive et propre, on dira que  $V$  est une fonction de Lyapunov contrôlée pour le système (1.11) si

$$\inf_{u \in \mathbb{R}^m} \langle \nabla V(x), X(x, u) \rangle < 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

On peut remarquer que si (1.11) admet un feedback stabilisateur continu alors, d'après le théorème inverse de Lyapunov ([39], [37]), (1.11) admet une fonction de Lyapunov stricte de classe  $C^\infty$  et donc (1.11) admet une fonction de Lyapunov contrôlée.

Sontag ([44]) a démontré que si un système affine en contrôles admet une fonction de Lyapunov contrôlée, alors il est stabilisable avec un feedback  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^n - \{0\}$ ; en plus, il a donné une formule explicite du feedback stabilisateur. On rappelle son résultat pour un système mono-entrée. Soit

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + ug(x) \\ x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (1.12)$$

Supposons qu'il existe  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$  de classe  $C^\infty$ , définie positive et propre telle que :

$$\inf_{u \in \mathbb{R}} \langle \nabla V(x), f(x) + ug(x) \rangle < 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

en d'autres termes :

$$\langle \nabla V(x), g(x) \rangle = 0 \Rightarrow \langle \nabla V(x), f(x) \rangle < 0$$

Posons

$$a(x) = \langle \nabla V(x), f(x) \rangle \quad \text{et} \quad b(x) = \langle \nabla V(x), g(x) \rangle$$

alors

$$u(x) = \begin{cases} \frac{-a(x) - \sqrt{a^2(x) + b^4(x)}}{b(x)} & \text{si } b(x) \neq 0 \\ 0 & \text{si } b(x) = 0 \end{cases}$$

stabilise (1.12). En outre,  $u$  sera continue si  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$  tel que

$$x \in B(0, \delta) - \{0\} \Rightarrow \exists u \in \mathbb{R} : \|u\| < \epsilon \text{ et } \langle \nabla V(x), f(x) + ug(x) \rangle < 0.$$

### 1.3.4 Méthodes indirectes

#### première approximation

Il s'agit de méthodes qui consistent à remplacer un système ( $S$ ) par un système plus simple ( $S'$ ) de telle façon que l'étude de ( $S'$ ) permette d'avoir des renseignements concernant le système initial ( $S$ ).

La méthode classique consiste à considérer le linéarisé de ( $S$ ) en l'origine, c'est-à-dire, si ( $S$ ) est donné par

$$(S) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ f(0, 0) = 0 \end{cases}$$

on étudie

$$(S') \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ A = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0), B = \frac{\partial f}{\partial u}(0, 0) \end{cases}$$

On sait alors que si ( $S'$ ) est stabilisable, ( $S$ ) l'est aussi, et avec le même feedback.

Dans le chapitre 2, on donne une généralisation de ce résultat pour une classe de systèmes analytiques où, au lieu de considérer la partie linéaire, ( $S'$ ) sera donné par la première partie homogène qui apparaît dans le développement analytique de la dérive.

Il est à noter que cette méthodologie ne permet de conclure que localement.

### Linéarisation et méthodes analogues

Cela revient à transformer un système de la forme

$$\dot{x} = f(x, u)$$

en un système équivalent du point de vue de la stabilisation par difféomorphisme (local ou si possible global) dans l'espace d'état et/ou dans l'espace des contrôles, ou par reparamétrisation du temps. On peut alors citer les méthodes de linéarisation ou de linéarisation partielle par difféomorphisme et feedback (cf. [40], pp. 176 – 205).

### Etude d'un sous-système

Quand on a un système

$$\dot{x} = f(x, u)$$

qui peut s'écrire

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_2, u) \end{cases} \quad (1.13)$$

avec  $x = (x_1, x_2)$ ,  $x_1 \in \mathbb{R}^{n-p}$ ,  $x_2 \in \mathbb{R}^p$ , la question qu'on peut se poser est la suivante. Existe-t-il  $k : \mathbb{R}^{n-p} \rightarrow \mathbb{R}^p$  telle que  $\dot{x}_1 = f_1(x_1, k(x_1))$  soit stable, asymptotiquement stable ou globalement asymptotiquement stable? Que peut-on alors en conclure pour la stabilisation du système complet (1.13)?

La réponse est qu'en général on ne peut rien dire. Ceci dit, des résultats significatifs ont été énoncés quand

$$f_2(x_2, u) = Ax_2 + Bu,$$

notamment dans [42], concernant la stabilisation globale de

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = Ax_2 + Bu \end{cases}$$

On peut noter aussi que, parfois, l'utilisation des techniques de variété centrale permet l'étude de la stabilisation locale de (1.13).

## 2

# SYSTEMES POLYNOMIAUX HOMOGENES

### 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on considère les systèmes non linéaires de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x) + Bu \\ x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^{n-1} \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est un champ de vecteurs polynomial homogène de degré  $k \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$  (i.e toutes les composantes du champ sont polynomiales homogènes de même degré  $k$ ) et  $B$  est une matrice  $n \times (n - 1)$  de rang  $n - 1$ .

Le but de ce travail est de donner une condition nécessaire et suffisante pour que ces systèmes soit globalement asymptotiquement stabilisables (G.A.S) par feedback régulier ( $C^\infty$ ) et de construire explicitement le feedback stabilisateur. On montre ainsi que le système (2.1) est (G.A.S) si et seulement si il est asymptotiquement stabilisable en boucle ouverte.

Cette classe de systèmes non linéaires est intéressante car d'une part les modèles mathématiques de certains systèmes mécaniques (par exemple les équations de la vitesse angulaire d'un satellite avec deux contrôles) sont de la forme (2.1), d'autre part les techniques de linéarisation ne peuvent pas s'appliquer pour stabiliser localement ce type de systèmes.



## 2.2 Notations

On notera  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire usuel dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $\det$  le déterminant d'une famille de vecteurs et, pour  $(x_1, \dots, x_{n-1})$  une famille de  $n - 1$  vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ , on notera  $x_1 \wedge \dots \wedge x_{n-1}$  le produit vectoriel i.e. l'unique vecteur qui vérifie la relation suivante :

$$\det(x_1, \dots, x_{n-1}, x) = \langle x_1 \wedge \dots \wedge x_{n-1}, x \rangle \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Soient  $b_2, \dots, b_n$  les vecteurs colonnes de la matrice  $B$  et  $b_1$  le vecteur défini par  $b_1 = b_2 \wedge \dots \wedge b_n$ . Comme le rang de  $B$  est égal à  $n - 1$ ,  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  est une base de  $\mathbb{R}^n$ .

## 2.3 Stabilisation des systèmes polynomiaux pairs

**Théorème 1** *Le système (2.1), où  $X$  est un champ de vecteurs homogène pair, est G.A.S si et seulement si le polynôme  $\langle X(x), b_1 \rangle$  change de signe.*

**Preuve :**

$X$  est un champ polynomial homogène de degré  $k = 2p$ ,  $p \in \mathbb{N}^*$ . On va désigner par  $(u_2, \dots, u_n)$  les composantes de  $u$  et par  $(x_1, \dots, x_n)$  les coordonnées de  $x$  dans la base  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ . Dans cette base, le système (2.1) s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \langle X(x), b_1 \rangle \\ \dot{x}_2 = P_2(x) + u_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = P_n(x) + u_n \end{cases} \quad (2.2)$$

où  $P_2, \dots, P_n$  sont des polynômes homogènes de degré  $k = 2p$ .

La condition est nécessaire :

En effet, si  $P_1(x) = \langle X(x), b_1 \rangle$  ne change pas de signe alors l'application

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n-1} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, u) &\mapsto f(x, u) = (\langle X(x), b_1 \rangle, P_2(x) + u_2, \dots, P_n(x) + u_n)^T \end{aligned}$$

ne peut être surjective sur un voisinage de l'origine dans  $\mathbb{R}^n$  et donc, d'après le théorème de Brockett, le système (2.2) ne peut être stabilisable par feedback de classe  $C^1$ . En fait, il n'est même pas stabilisable en boucle ouverte car l'origine ne peut être ni accessible ni asymptotiquement accessible à partir de n'importe quel point de l'ensemble  $\{x_1 > \alpha > 0\}$  (ou  $\{x_1 < -\alpha < 0\}$ ).

La condition est suffisante :

On suppose que  $P_1(x) = \langle X(x), b_1 \rangle$  change de signe donc il existe deux éléments  $\tilde{b}_1$  et  $e_2$  tels que  $P_1(\tilde{b}_1) \cdot P_1(e_2) < 0$ .

Soit  $H = \text{Im}B = \text{Vect}(b_2, \dots, b_n)$ ,  $H$  est d'intérieur vide donc on peut supposer que  $\tilde{b}_1$  n'appartient pas à  $H$ . Soit  $\tilde{b}_2$  un élément de l'intersection de  $H$  et du plan défini par  $\tilde{b}_1$  et  $e_2$ , on peut toujours choisir  $\tilde{b}_2$  de telle façon que  $(\tilde{b}_2, \dots, b_n)$  soit une base de  $H$ . La matrice de passage entre les bases  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  et  $(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, b_3, \dots, b_n)$  est :

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_3 & \beta_3 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \alpha_n & \beta_n & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

où  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_2, \dots, \beta_n$  sont définis par les relations:

$$\tilde{b}_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i \text{ et } \tilde{b}_2 = \sum_{i=2}^n \beta_i b_i$$

avec  $\alpha_1 \neq 0$  et  $\beta_2 \neq 0$

La matrice inverse de  $T$  est :

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\alpha_2/\beta_2\alpha_1 & 1/\beta_2 & 0 & \dots & 0 \\ \star & \gamma_3 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \star & \gamma_n & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Dans la base  $(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, b_3, \dots, b_n)$  le système (2.2) s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{P}_1(\tilde{x}) \\ \dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{P}_2(\tilde{x}) + u_2/\beta_2 \\ \dot{\tilde{x}}_3 = \tilde{P}_3(\tilde{x}) + \gamma_3 u_2 + u_3 \\ \vdots \\ \dot{\tilde{x}}_n = \tilde{P}_n(\tilde{x}) + \gamma_n u_2 + u_n \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\text{où } \tilde{P}_1(\tilde{x}) = \frac{1}{\alpha_1} P_1(T\tilde{x})$$

$\tilde{P}_1$  change de signe dans le plan  $(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2)$  donc on peut écrire :

$$\tilde{P}_1(\tilde{x}) = Q(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) + R(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$$

où  $R(\tilde{x}) = \sum_{i=3}^n \tilde{x}_i R_i(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$  est un polynôme homogène de degré  $2p$  et  $Q(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$  est une fonction polynomiale paire des deux variables  $\tilde{x}_1$  et  $\tilde{x}_2$ .

$Q(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$  change de signe donc peut s'écrire :

$$Q(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = L_1^{r_1} L_2^{r_2} \dots L_q^{r_q} D_1^{m_1} \dots D_s^{m_s}$$

les  $L_1, \dots, L_q$  étant  $q$  formes linéaires indépendantes et  $D_1, \dots, D_s$  des polynômes homogènes irréductibles de degré 2.

Comme  $Q(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$  change de signe, il existe au moins deux exposants  $r_i$  et  $r_j$  qui sont impairs ; quitte à réordonner l'écriture ci-dessus on peut supposer que  $i = 1$  et  $j = 2$ .  $L_1$  et  $L_2$  sont linéairement indépendants donc on peut supposer que  $L_2 = \lambda \tilde{x}_1 + \mu \tilde{x}_2$  avec  $\mu \neq 0$ .

Considérons maintenant le feedback suivant :

$$\begin{cases} u_2(\tilde{x}) = -\beta_2(\tilde{P}_2(\tilde{x}) + \frac{\lambda}{\mu} \tilde{P}_1(\tilde{x}) + \frac{1}{\mu} \tilde{x}_1 L_1^{r_1} L_3^{r_3} \dots L_q^{r_q} D_1^{m_1} \dots D_s^{m_s} + \frac{1}{\mu} L_2^{r_2}) \\ u_3(\tilde{x}) = -\tilde{x}_3 - \tilde{P}_3(\tilde{x}) - \gamma_3 u_2(\tilde{x}) - \tilde{x}_1 R_3(\tilde{x}) \\ \vdots \\ u_n(\tilde{x}) = -\tilde{x}_n - \tilde{P}_n(\tilde{x}) - \gamma_n u_2(\tilde{x}) - \tilde{x}_1 R_n(\tilde{x}) \end{cases} \quad (2.4)$$

On va montrer que ce feedback stabilise le système (2.3). Pour cela, introduisons la fonction suivante :

$$V = \frac{1}{2} \tilde{x}_1^2 + \frac{1}{r_2 + 1} L_2^{r_2 + 1} + \frac{1}{2} \tilde{x}_3^2 + \dots + \frac{1}{2} \tilde{x}_n^2$$

$V$  est une fonction polynomiale, définie positive et propre. Le long des trajectoires du système bouclé (2.3-2.4) on a :

$$\dot{V} = \frac{dV(\tilde{x}(t))}{dt} = \langle \nabla V(\tilde{x}), X(\tilde{x}) \rangle$$

où  $X(\tilde{x})$  est le champ bouclé avec le feedback donné par (2.4).

$$\nabla V(\tilde{x}) = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 + \lambda L_2^{r_2} \\ \mu L_2^{r_2} \\ \tilde{x}_3 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= (x_1 + \lambda L_2^{r_2})\tilde{P}_1(\tilde{x}) + \mu L_2^{r_2}(\tilde{P}_2(\tilde{x}) + u_2(\tilde{x})/\beta_2) + \sum_{i=3}^n x_i(\tilde{P}_i(\tilde{x}) + \gamma_i u_2(\tilde{x}) + u_i(\tilde{x})) \\ &= (x_1 + \lambda L_2^{r_2})\tilde{P}_1(\tilde{x}) - L_2^{r_2}(\lambda \tilde{P}_1(\tilde{x}) + \tilde{x}_1 L_1^{r_1} L_3^{r_3} \dots L_q^{r_q} D_1^{m_1} \dots D_s^{m_s} + L_2^{r_2}) \\ &= \tilde{x}_1 P_1(\tilde{x}) - L_2^{r_2}(\tilde{x}_1 L_1^{r_1} L_3^{r_3} \dots L_q^{r_q} D_1^{m_1} \dots D_s^{m_s}) - L_2^{2r_2} - \sum_{i=3}^n x_i^2 - x_1 \sum_{i=3}^n x_i R_i \\ &= \tilde{x}_1 P_1(\tilde{x}) - \tilde{x}_1 Q(\tilde{x}) - \tilde{x}_1 R(\tilde{x}) - L_2^{2r_2} - \sum_{i=3}^n x_i^2 \end{aligned}$$

d'où:

$$\dot{V} = -L_2^{2r_2} - \sum_{i=3}^n \tilde{x}_i^2 \leq 0 \quad (2.5)$$

Comme la fonction  $V$  est propre et que

$$\dot{V}(\tilde{x}) \leq 0 \quad \forall \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$$

toutes les trajectoires du système bouclé sont bornées et donc, d'après le principe d'invariance de Lasalle, tendent vers  $\Omega$  le plus grand ensemble invariant inclus dans

$$E = \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^n / \dot{V}(\tilde{x}) = 0\}$$

Pour conclure il suffit donc de montrer que  $\Omega = \{0\}$ .

On a  $E = \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^n / \lambda \tilde{x}_1 + \mu \tilde{x}_2 = 0, \tilde{x}_3 = 0, \dots, \tilde{x}_n = 0\}$  (c'est une droite) et sur  $E$  le système s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = 0 \\ \dot{\tilde{x}}_2 = -\frac{\beta_2}{\mu} \tilde{x}_1 L_1^{r_1} L_3^{r_3} \dots L_q^{r_q} D_1^{m_1} \dots D_s^{m_s} \\ \dot{\tilde{x}}_3 = -\tilde{x}_1 R_3(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, 0, \dots, 0) \\ \vdots \\ \dot{\tilde{x}}_n = -\tilde{x}_1 R_n(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, 0, \dots, 0) \end{cases} \quad (2.6)$$

Ceci montre que le seul ensemble invariant inclus dans  $E$  est l'origine, ce qui termine la démonstration du théorème 1.  $\square$

### Exemple 1:

Pour illustrer la méthode développée ci-dessus, on va l'appliquer à la stabilisation de la vitesse angulaire d'un satellite symétrique (deux des moments principaux d'inertie sont égaux) avec deux contrôles. Les équations d'Euler s'écrivent sous la forme simplifiée :

$$\begin{cases} \dot{x} = yz \\ \dot{y} = -xz + u_2 \\ \dot{z} = u_3 \end{cases} \quad (2.7)$$

où  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  et  $u = (u_2, u_3) \in \mathbb{R}^2$

Ce système rentre bien dans la catégorie étudiée avec  $P_1(x, y, z) = yz$ . On peut prendre

$$\tilde{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad e_2 = \tilde{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On a bien  $P_1(\tilde{b}_1) \cdot P_1(e_2) < 0$ .

la matrice de changement de base est :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Son inverse est :

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dans la nouvelle base le système (2.7) s'écrit

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (-x_1 + x_2)(-x_1 - x_2 + x_3) \\ \dot{x}_2 = (-x_1 + x_2)(-x_1 - x_2 + x_3) + x_1(x_1 + x_2 - x_3) + u_2 \\ \dot{x}_3 = 2(-x_1 + x_2)(-x_1 - x_2 + x_3) + x_1(x_1 + x_2 - x_3) + u_2 + u_3 \end{cases} \quad (2.8)$$

On prend (en utilisant les notations de la preuve) :

$$L_1 = -x_1 + x_2 \quad L_2 = -x_1 - x_2 \quad R_3 = -x_1 + x_2$$

Ce qui donne

$$\begin{cases} u_2 = -x_1 - x_2 - 4x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_1x_3 - 2x_2x_3 \\ u_3 = x_1 + x_2 - x_3 + 2x_1^2 - 2x_1x_2 \end{cases}$$

soit, avec les coordonnées initiales

$$\begin{cases} u_2 = -2x - y + xy + xz - 2yz \\ u_3 = -z - 2xy \end{cases}$$

D'après la démonstration du théorème 2, une fonction de Lyapunov (non sticte) pour le système (2.7) bouclé avec le feedback ci-dessus est

$$V = \frac{1}{2} (x^2 + (2x + y)^2 + (2x + y + z)^2)$$

Sa dérivée le long des trajectoires est

$$\dot{V} = -(2x + y)^2 - (2x + y + z)^2 \leq 0$$

Le principe de Lasalle permet alors de conclure.

### Exemple 2 :

Le système

$$\begin{cases} \dot{x} = x(x - y)^3 + xyz^2 + z^4 \\ \dot{y} = u_2 \\ \dot{z} = u_3 \end{cases}$$

est globalement stabilisable avec le feedback suivant :

$$\begin{cases} u_2 = -(x^2 + (x - y)^3 + x(x - y)^3 + xyz^2 + z^4) \\ u_3 = -z - xz^3 - x^2yz \end{cases}$$

## 2.4 Stabilisation des systèmes polynomiaux impairs

**Théorème 2** *Le système (2.1), où  $X$  est un champ polynomial homogène impair, est G.A.S si et seulement si la condition suivante est réalisée :*

- (a) *Il existe  $\lambda = (\lambda_2, \dots, \lambda_n)^T \in \mathbb{R}^{n-1}$  tel que  $\langle X(b_1 + B\lambda), b_1 \rangle < 0$*

**Remarque :**

Si on note  $P_1(x) = \langle X(x), b_1 \rangle$  alors la condition (a) est équivalente à la condition (b) suivante :

$$(b) \quad \exists \lambda = (\lambda_2, \dots, \lambda_n)^T \in \mathbb{R}^{n-1} \text{ tel que } P_1(1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) < 0$$

**Preuve**

Dans la base  $(b_1, \dots, b_n)$  le système (2.1) s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \langle X(x), b_1 \rangle \\ \dot{x}_2 = P_2(x) + u_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = P_n(x) + u_n \end{cases} \quad (2.9)$$

Pour montrer que la condition (a) est suffisante on va prouver la proposition suivante qui donne le feedback stabilisant :

**Proposition 1** *Si la condition (a) est réalisée alors le système (2.9) (et donc le système (2.1)) est G.A.S à l'aide du feedback donné par :*

$$\text{Pour } i \in \{2, \dots, n\} : u_i(x) = \lambda_i P_1(x) - x_1 g_i(x) - (x_i - \lambda_i x_1) - P_i(x) \quad (2.10)$$

où :

$$g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial P_1}{\partial x_i}(x_1, t(x_2, \dots, x_n) + x_1(1-t)(\lambda_2, \dots, \lambda_n)) dt \quad (2.11)$$

**Remarque :**

Dans la formule du feedback ci dessus  $-(x_i - \lambda_i x_1)$  peut être remplacé par toute expression de la forme  $f(x_i - \lambda_i x_1)$  où  $f$  une fonction vérifiant  $zf(z) < 0$  pour tout réel non nul  $z$ . Par exemple si on veut un feedback homogène de même degré que le champ  $X$  il suffira de remplacer  $-(x_i - \lambda_i x_1)$  par  $-(x_i - \lambda_i x_1)^k$ .

**Démonstration de la proposition :**

Considérons la fonction  $\varphi$  définie par :

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= P_1(x_1, tx_2 + (1-t)\lambda_2 x_1, \dots, tx_n + (1-t)\lambda_n x_1) \\ &= P_1(x_1, t(x_2 - \lambda_2 x_1) + \lambda_2 x_1, \dots, t(x_n - \lambda_n x_1) + \lambda_n x_1) \end{aligned}$$

On a :

$$\varphi(1) = P_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = P_1(x)$$

$$\varphi(0) = P_1(x_1, \lambda_2 x_1, \dots, \lambda_n x_1)$$

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \int_0^1 \varphi'(t) dt$$

Ceci montre qu'on peut écrire :

$$P_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = P_1(x_1, \lambda_2 x_1, \dots, \lambda_n x_1) + \sum_{i=2}^n (x_i - \lambda_i x_1) g_i(x)$$

Introduisons alors la fonction suivante :

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{2} \left( x_1^2 + \sum_{i=2}^n (x_i - \lambda_i x_1)^2 \right)$$

$V$  est une fonction définie positive et propre. Sa dérivée le long des trajectoires du système bouclé (2.9 – 2.10) est :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= x_1 P_1(x) + \sum_{i=2}^n (x_i - \lambda_i x_1) (u_i(x) - \lambda_i P_1(x)) \\ &= x_1 P_1(x) - x_1 \sum_{i=2}^n (x_i - \lambda_i x_1) g_i(x) - \sum_{i=2}^n (x_i - \lambda_i x_1)^2 \\ &= x_1 P_1(x_1, \lambda_2 x_1, \dots, \lambda_n x_1) - \sum_{i=2}^n (x_i - \lambda_i x_1)^2 \\ &= x_1^{k+1} P_1(1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) - \sum_{i=2}^n (x_i - \lambda_i x_1)^2 \quad (\text{où } k \text{ est le degré de } P_1, k \text{ est impair}) \end{aligned}$$

On a donc :

$$\dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$$

Ceci prouve que l'origine est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable pour le système bouclé (2.9 – 2.10).

Montrons, maintenant, que la condition (a) est une condition nécessaire pour que le système (2.9) soit stabilisable :

Supposons que  $P_1(1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$  pour tout  $(x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$  alors pour tout  $x_1$  strictement positif et tout  $(x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$  on aura :

$$P_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^k P_1\left(1, \frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1}\right) \geq 0$$

et donc l'origine ne pourra être ni accessible ni asymptotiquement accessible à partir de tout point du demi-espace  $\{x_1 > \alpha > 0\}$ .  $\square$



**Exemple 3 :**

Considérons le système suivant défini dans  $\mathbb{R}^3$  :

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2y = P(x, y, z) \\ \dot{y} = u_2 \\ \dot{z} = u_3 \end{cases} \quad (2.12)$$

On peut remarquer que ce système n'est pas contrôlable car le plan  $x = 0$  est invariant sous l'action de ce champ et ce quels que soient les contrôles utilisés. Cependant on a  $P(1, -1, 0) < 0$ , la condition (a) du théorème 2 est satisfaite et donc ce système est G.A.S. Un feedback stabilisateur est :

$$\begin{cases} u_2 = -x - y - x^2y - x^3 \\ u_3 = -z \end{cases}$$

**Exemple 4 :**

Le système

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2y + z^3 = P(x, y, z) \\ \dot{y} = u_2 \\ \dot{z} = u_3 \end{cases}$$

est G.A.S avec :

$$\begin{cases} u_2 = -y - x^3 \\ u_3 = -x - z - xz^2 - x^2y + x^2z - x^3 - z^3 \end{cases}$$

## 2.5 Stabilisation linéaire des systèmes homogènes dans $\mathbb{R}^2$

Ici on s'intéresse aux systèmes de la forme :

$$\begin{cases} \dot{z} = f(z, u) \\ z = (x, y) \in \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.13)$$

où  $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  est un champ polynomial homogène de degré  $k$  impair. On posera

$$f(x, y, u) = \begin{pmatrix} P(x, y, u) \\ Q(x, y, u) \end{pmatrix}$$

Le but est de trouver un feedback linéaire  $u(x, y) = ax + by$  qui stabilise (2.13). On peut remarquer que si un tel feedback stabilise (2.13) localement alors il le stabilise aussi globalement vu que le système bouclé sera homogène. On a le résultat suivant qui donne une condition suffisante de stabilisation par une commande linéaire :

**Proposition 2** *S'il existe trois nombres réels  $a, b, c$  tels qu'on ait :*

- (i)  $Q(1, c, a + bc) = cP(1, c, a + bc)$
- (ii)  $P(1, c, a + bc) < 0$
- (iii)  $\frac{Q(x, y, ax + by) - cP(x, y, ax + by)}{(y - cx)} < 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \neq cx$

alors (2.13) est G.A.S à l'aide du feedback  $u(x, y) = ax + by$

**Preuve :**

Si on fait le changement de coordonnées  $Y = y - cx$  et  $X = x$ , le système (2.13) s'écrira avec les nouvelles coordonnées :

$$\begin{cases} \dot{X} = P(X, Y + cX, (a + bc)X + bY) \\ \dot{Y} = Q(X, Y + cX, (a + bc)X + bY) - cP(X, Y + cX, (a + bc)X + bY) \end{cases} \quad (2.14)$$

la condition (i) entraîne que la droite  $\Delta : Y = 0$  est une droite invariante pour le système (2.14) car le champ défini par (2.14) est tangent à cette droite en tout point. (iii) implique que cette droite est attractive :

En effet

$$\begin{aligned} \frac{d(Y^2(t))}{dt} &= 2Y(Q(X, Y + cX, (a + bc)X + bY) - cP(X, Y + cX, (a + bc)X + bY)) \\ &= 2(y - cx)(Q(x, y, ax + by) - cP(x, y, ax + by)) \end{aligned}$$

Mais, d'après (iii), cette dernière expression est strictement négative pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \neq cx$ , on a donc

$$\frac{d(Y^2(t))}{dt} < 0$$

ce qui montre que  $Y(t)$  tend vers 0 quand  $t \rightarrow +\infty$  et donc la droite  $\Delta : Y = 0$  est attractive.

Maintenant, sur la droite  $\Delta$  le système est donné par :

$$\dot{X} = P(X, cX, (a + bc)X) \quad (2.15)$$

Comme  $P$  est homogène de degré  $k$  on a

$$P(X, cX, (a + bc)X) = X^k P(1, c, a + bc)$$

Ceci montre, en tenant compte de (ii) et du fait que  $k$  est impair, que le système unidimensionnel (2.15) admet 0 comme point d'équilibre asymptotiquement stable.

En résumé, le système (2.13) admet une droite (qui passe par l'origine) invariante, attractive et sur laquelle le système est asymptotiquement stable ; on en déduit ([43]) que l'origine  $(0, 0)$  est un point d'équilibre asymptotiquement stable pour (2.13) et comme le champ bouclé est homogène le résultat est global.  $\square$

**Exemple 5 :**

$$\begin{cases} \dot{x} = y^3 \\ \dot{y} = u^3 \end{cases} \quad (2.16)$$

On cherche à stabiliser ce système par un feedback linéaire  $u(x, y) = ax + by$ . Appliquer la proposition ci-dessus revient à chercher trois réels  $a, b, c$  vérifiant :

$$(i) \quad (a + bc)^3 = c^4$$

$$(ii) \quad c < 0$$

$$(iii) \quad \frac{(ax + by)^3 - cy^3}{(y - cx)} < 0$$

Or

$$(ax + by)^3 - cy^3 = (ax + (b - c^{1/3})y) \underbrace{\left( (ax + (b + \frac{c^{1/3}}{2})y)^2 + \frac{3}{4}c^{2/3}y^2 \right)}_{\text{défini positif}}$$

donc, pour que (iii) soit satisfaite il suffit de prendre :

$$\begin{cases} b - c^{1/3} = -1 \\ a = c \end{cases}$$

On peut donc prendre  $a = c = -1$  et  $b = -2$ . Ces trois nombres vérifient bien les trois conditions ci-dessus et donc  $u(x, y) = -x - 2y$  stabilise (2.16).

**Corollaire 1** *Si les conditions de la proposition 2 sont réalisées alors le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y, z) \\ \dot{y} = Q(x, y, z) \\ \dot{z} = u \end{cases} \quad (2.17)$$

où  $P$  et  $Q$  sont des polynômes homogènes de même degré impair  $k$ , est L.A.S à l'aide du feedback :

$$u(x, y, z) = (ax + by - z) + aP(x, y, z) + bQ(x, y, z) \quad (2.18)$$

**Preuve :**

Avec le changement de coordonnées suivant :

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = y \\ x_3 = z - (ax + by) \end{cases}$$

le système (2.17) s'écrit

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = P(x_1, x_2, x_3 + ax_1 + bx_2) \\ \dot{x}_2 = Q(x_1, x_2, x_3 + ax_1 + bx_2) \\ \dot{x}_3 = -x_3 \end{cases} \quad (2.19)$$

On conclut en utilisant le théorème de la variété centrale [10].  $\square$

**Corollaire 2** *Si les conditions de la proposition 2 sont réalisées alors le système (2.17) est G.A.S à l'aide du feedback :*

$$u(x, y, z) = (ax + by - z)^k + aP(x, y, z) + bQ(x, y, z) \quad (2.20)$$

**Preuve :**

La démonstration est la même et l'homogénéité du feedback (et donc du champ bouclé) permet le passage du local au global.  $\square$

**Exemple 6 :**

Le système

$$\begin{cases} \dot{x} = y^3 \\ \dot{y} = z^3 \\ \dot{z} = u \end{cases} \quad (2.21)$$

est G.A.S avec :

$$u(x, y, z) = (-x - 2y - z)^3 - y^3 - 2z^3 \quad (2.22)$$

# 3

## STABILIZATION OF A CLASS OF ANALYTIC SYSTEMS

A. Iggidr J.C. Vivalda

INRIA Lorraine (CONGE Project) & URA-CNRS 399 - M.M.A.S.

CESCOM - Technopôle METZ 2000 - 4, rue Marconi

57 070 METZ - FRANCE

e-mail: {iggidr,vivalda}@ilm.loria.fr

**Abstract** In this paper, we investigate the local stabilization of affine analytic systems  $\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{n-1} u_i g_i(x)$  with  $n - 1$  inputs. We state a sufficient condition on the first approximation of  $f$  for which the local asymptotic stabilizability can be achieved; furthermore, we give explicitly the stabilizing feedback.

### 3.1 Introduction

In this paper, we propose a simple sufficient condition for local stabilization, by means of state feedback, of a class of affine systems in the form:

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{n-1} u_i g_i(x) \quad x \in \mathbb{R}^n, u_i \in \mathbb{R} \quad (3.1)$$

where:

1.  $f, g_1, \dots, g_{n-1}$  are analytic vector fields defined in a neighborhood of the origin
2.  $f(0) = 0$ , i.e. the origin is an equilibrium point
3. vectors  $g_1(0), \dots, g_{n-1}(0)$  are linearly independent

We shall say that system (3.1) is locally asymptotically stabilizable (L.A.S.) if there exists (locally) a continuous feedback control  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  such that the origin is an asymptotically stable equilibrium point for the closed-loop system

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{n-1} u_i(x)g_i(x)$$

Planar systems of form (3.1) have been studied by many authors : one can cite Kawski[34], Dayawansa-Martin-Knowles ([16],[17]), Boothby-Marino ([6]) and Hermes [27]. For such systems, since  $g(0) \neq 0$ , one can rectify vector field  $g$ , so after a change of coordinates, system (3.1) can be written:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) + u \end{cases} \quad (3.2)$$

which is easier to study than system (3.1).

When the dimension of the system is greater than 2, it is well known that vector fields  $g_1, \dots, g_{n-1}$  are not, in general, simultaneously rectifiable.

The plan of this paper is as follows. In section 2 we give a necessary and sufficient condition for an affine system:

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m u_i g_i(x) \quad (3.3)$$

to be feedback equivalent to the following system:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = v \end{cases} \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m$$

This kind of system is simpler to stabilize, one can proceed by direct inspection or by stabilization of the reduced system:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, v)$$

(see [42], [9] or [35]).

In section 3, we use this ideas to locally stabilize, when  $m = n - 1$ , systems of the above type. Our result is a generalization of the one given by Boothby and Marino for planar systems (see [6]) and our conditions are weaker.

## 3.2 Preliminaries and basic results

The Lie bracket of two vector fields  $X$  and  $Y$  is denoted by  $[X, Y]$ ; for  $k$  given vector fields  $X_1, \dots, X_k$ , we denote by  $\text{Lie}(X_1, \dots, X_k)$  the Lie algebra generated by  $X_1, \dots, X_k$ .

Consider the following system defined on a neighborhood of the origin in  $\mathbb{R}^n$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_1 = h_1(x) \\ \vdots \\ \dot{y}_{n-m} = h_{n-m}(x) \\ \dot{y}_{n-m+1} = v_{n-m+1} \\ \vdots \\ \dot{y}_n = v_n \end{array} \right. \quad (3.4)$$

where  $h_i : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  are analytic functions such that  $h_i(0) = 0$  and  $v = (v_{n-m+1}, \dots, v_n)$  are the controls.

We shall say that system (3.1) is feedback equivalent to system (3.4) if there exists a transformation  $\psi : u \mapsto v = \alpha(x) + \beta(x)u$  with  $\alpha(0) = 0$ ,  $\alpha$  and  $\beta$  analytic and  $\beta$  is a  $m \times m$  matrix invertible in a neighborhood of the origin and a diffeomorphism  $\varphi$  such that under the action of these transformations in the input space and state space system (3.3) can be written under form (3.4).

**Proposition 1** *Vector fields  $g_1, \dots, g_m$  being linearly independent at the origin, a necessary and sufficient condition for system (3.3) to be feedback equivalent to system (3.4) is that  $\text{Lie}(g_1, \dots, g_m)$  has a constant dimension equal to  $m$  in a neighborhood of the origin.*

**Remark** Our condition is weaker than the well known condition of simultaneous rectifiability of vector fields ([48]):

**Lemma 1** *If vector fields  $g_1, \dots, g_m$  are linearly independent at the origin and if  $[g_i, g_j] \equiv 0$  for all  $i, j = 1, \dots, m$  then there exists a chart on which*

$$g_i = \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

**Proof of proposition** Suppose that  $\text{Lie}(g_1, \dots, g_m)$  has a constant dimension equal to  $m$  in a neighborhood  $\mathcal{O}$  of the origin, then  $\text{Lie}(g_1, \dots, g_m)$  is an integrable  $m$ -dimensional distribution on  $\mathcal{O}$  and so by the Frobenius integrability theorem (see [48]), there exists a chart  $(\varphi, U)$  of the origin such that:



- $\varphi(0) = 0$
- $\varphi(U) = (-\epsilon, \epsilon) \times \cdots \times (-\epsilon, \epsilon)$
- for each  $c_1, \dots, c_{n-m}$  with all  $|c_i| < \epsilon$ , the set

$$\{x \in U / \varphi_1(x) = c_1, \dots, \varphi_{n-m}(x) = c_{n-m}\}$$

is an integral manifold of  $\text{Lie}(g_1, \dots, g_m)$  and any other connected integral manifold of this distribution restricted to  $U$  is contained in one of these sets.

Consider now the transformation  $\varphi : x \mapsto y = \varphi(x)$ , under this transformation, system (3.3) becomes:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= D\varphi \dot{x} \\ &= \varphi_* f(y) + \sum_{i=1}^m u_i \varphi_* g_i(y) \end{aligned} \quad (3.5)$$

In the new system of coordinates, the integral manifolds of  $\text{Lie}(\varphi_* g_1, \dots, \varphi_* g_m)$  are the sets:

$$N_c = \{y \in (-\epsilon, \epsilon) \times \cdots \times (-\epsilon, \epsilon) / y_1 = c_1, \dots, y_{n-m} = c_{n-m}\}$$

for  $y \in (-\epsilon, \epsilon) \times \cdots \times (-\epsilon, \epsilon)$ , the vector  $\varphi_* g_i(y)$  is tangent to a set  $N_c$ , so the  $n - m$  first components of  $\varphi_* g_i(y)$  are zero and system (3.5) can be written:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_1 = h_1(y) \\ \vdots = \vdots \\ \dot{y}_{n-m} = h_{n-m}(y) \\ \dot{y}_{n-m+1} = h_{n-m+1}(y) + \sum_{i=1}^m u_i \tilde{g}_i^{n-m+1}(y) \\ \vdots = \vdots \\ \dot{y}_n = h_n(y) + \sum_{i=1}^m u_i \tilde{g}_i^n(y) \end{array} \right. \quad (3.6)$$

where the  $\tilde{g}_i^j$  are the components of  $\varphi_* g_i$ . Vector fields  $g_1, \dots, g_m$  being linearly independent in a neighborhood of the origin, the same is true for vector fields  $\varphi_* g_1, \dots, \varphi_* g_m$  and the matrix  $(\tilde{g}_i^j(y))$  is locally invertible, then there exists a transformation

$$\psi : u \mapsto v = \alpha(x) + \beta(x)u, \quad (u = (u_1, \dots, u_m), v = (v_{n-m+1}, \dots, v_n))$$

such that  $v_{n-m+j} = \sum_{i=1}^m u_i \tilde{g}_i^{n-m+j}(y) - h_{n-m+j}(y)$ . Under this last transformation system (3.6) takes form (3.4).

Suppose now that system (3.3) is feedback equivalent to system (3.4), then  $\varphi_*g_j$  is a linear combination of the vector fields  $\partial/\partial y_{n-m+1}, \dots, \partial/\partial y_n$ , namely:

$$\varphi_*g_j(y) = \sum_{i=1}^m \beta_{ij}(\varphi^{-1}(y)) \frac{\partial}{\partial y_{n-m+i}}$$

where the  $\beta_{ij}$  are the coefficients of matrix  $\beta$ . Since this matrix is invertible in a neighborhood of the origin, the Lie algebra generated by vector fields  $\varphi_*g_1, \dots, \varphi_*g_m$  is of dimension at least  $m$  in the same neighborhood; moreover, the Lie bracket of two vector fields  $\varphi_*g_j$  and  $\varphi_*g_k$  is clearly a linear combination of the vector fields  $\partial/\partial y_{n-m+1}, \dots, \partial/\partial y_n$ , therefore the dimension of  $\text{Lie}(\varphi_*g_1, \dots, \varphi_*g_m)$  is exactly  $m$  in a neighborhood of the origin.

Now, since  $[g_i, g_j] = \varphi_*^{-1}[\varphi_*g_i, \varphi_*g_j]$ , the dimension of  $\text{Lie}(g_1, \dots, g_m)$  is also equal to  $m$  in a neighborhood of the origin. ■

**Example** Consider the following system defined on  $\mathbb{R}^3$ :

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^2 u_i g_i(x) \quad x = (x_1, x_2, x_3) \quad (3.7)$$

where

$$g_1(x) = e^{x_1} \begin{pmatrix} -2x_3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad g_2(x) = \begin{pmatrix} -2(x_2 + 1) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

and  $f = (f_1, f_2, f_3)$  is an analytic vector field.

Vectors  $g_1(0)$  and  $g_2(0)$  are linearly independent but  $[g_1, g_2](x) = -2(x_2 + 1)g_1(x)$  is not identically nul so lemma 1 cannot apply but since  $[g_1, g_2]$  is colinear with  $g_1$ ,  $\text{Lie}(g_1, g_2)$  has a constant dimension equal to 2 so we can apply proposition 1. Consider the local change of coordinates given by:

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2x_3 + 2x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

and the transformation

$$\psi : (u_1, u_2) \mapsto (v_2 = f_2(\varphi^{-1}(y)) + \exp(y_1 - 2y_2y_3 - 2y_3)u_1, v_3 = f_3(\varphi^{-1}(y)) + u_2)$$

In the new system of coordinates system (3.7) is expressed by:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = f_1(\varphi^{-1}(y)) + 2y_3 f_2(\varphi^{-1}(y)) + 2(y_2 + 1) f_3(\varphi^{-1}(y)) \\ \dot{y}_2 = v_2 \\ \dot{y}_3 = v_3 \end{cases}$$

### 3.3 Affine systems with $n - 1$ controls

In this section, we consider system of kind (3.1) with  $m = n - 1$ , we place ourselves under the assumption of proposition 1, so after suitable transformations, system (3.1) can be written:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = h_1(y) \\ \dot{y}_2 = v_2 \\ \vdots = \vdots \\ \dot{y}_n = v_n \end{cases} \quad (3.8)$$

$h_1$  is an analytic function and so can be written:

$$h_1(y) = \sum_{i=r}^{\infty} P_i(y)$$

where the  $P_i$  are homogeneous polynomials of degree  $i$ .

We denote by  $(e_1, \dots, e_n)$  the basis of  $\mathbb{R}^n$  related to the coordinates  $(y_1, \dots, y_n)$ . According to the evenness of  $r$ , we shall study the problem of the stabilization of system (3.8).

#### 3.3.1 Case where $r$ is even

**Theorem 1** *If the polynomial  $P_r$  takes both positive and negative values, then system (3.8) is stabilizable.*

**Proof**

Since  $P_r(y)$  changes its sign, there exist vectors  $\tilde{e}_1$  and  $b$  such that  $P_r(\tilde{e}_1) \cdot P_r(b)$  is negative. Let  $H = \text{span}(e_2, \dots, e_n)$ ,  $H$  has an empty interior so we can suppose that  $\tilde{e}_1$  does not belong to  $H$ . The plane spanned by vectors  $\tilde{e}_1$ , and  $b$  intersects  $H$  through

$\mathbb{R}\tilde{e}_2$  and without loss of generality we can assume that  $(\tilde{e}_2, e_3, \dots, e_n)$  is a basis of  $H$ . The transformation matrix between the basis  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  and  $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, e_3, \dots, e_n)$  is:

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_3 & \beta_3 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \alpha_n & \beta_n & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_2, \dots, \beta_n$  being such that  $\tilde{e}_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$  and  $\tilde{e}_2 = \sum_{i=2}^n \beta_i e_i$  ( $\alpha_1, \beta_2 \neq 0$ ).

We have:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\alpha_2/\beta_2\alpha_1 & 1/\beta_2 & 0 & \dots & 0 \\ \star & \gamma_3 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \star & \gamma_n & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

In the new basis  $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, e_3, \dots, e_n)$  system (3.8) is given by the set of equations:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{y}}_1 = \tilde{h}_1(\tilde{y}) \\ \dot{\tilde{y}}_2 = \tilde{h}_2(\tilde{y}) + v_2/\beta_2 \\ \dot{\tilde{y}}_3 = \tilde{h}_3(\tilde{y}) + \gamma_3 v_2 + v_3 \\ \vdots \\ \dot{\tilde{y}}_n = \tilde{h}_n(\tilde{y}) + \gamma_n v_2 + v_n \end{cases} \quad (3.9)$$

where  $\tilde{h}_1(\tilde{y}) = \frac{1}{\alpha_1} h_1(T\tilde{y})$ ,  $\tilde{h}_1$  can be written:

$$\tilde{h}_1(\tilde{y}) = l(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) + \sum_{i=3}^n \tilde{y}_i l_i(\tilde{y})$$

where  $l_i(\tilde{y}) = \int_0^1 \frac{\partial \tilde{h}_1}{\partial \tilde{y}_i}(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, t\tilde{y}_3, \dots, t\tilde{y}_n) dt$

and  $l(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) = \tilde{h}_1(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, 0, \dots, 0) = \sum_{i=r}^{\infty} \tilde{P}_i(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$  the  $\tilde{P}_i$  being homogeneous polynomials of degree  $i$ . Moreover,  $P_r$  having a nonconstant sign in the plane spanned by  $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ ,  $\tilde{P}_r$  takes both positive and negative values.

We focus our attention on the system:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{y}}_1 &= l(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) = \tilde{P}_r(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) + \tilde{P}_{r+1}(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) + \dots \\ \dot{\tilde{y}}_2 &= w_2 \end{cases} \quad (3.10)$$

$\tilde{P}_r(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$  can be written:

$$\tilde{P}_r(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) = L_1^{r_1} L_2^{r_2} \dots L_q^{r_q} Q_1^{m_1} \dots Q_s^{m_s}$$

where  $L_1, L_2, \dots, L_q$  are linear forms two by two linearly independent and  $Q_1, \dots, Q_s$  are irreducible homogeneous polynomials of degree 2. Since  $\tilde{P}_r$  changes its sign, at least two exponents  $r_i$  and  $r_j$  are odd; we can assume that  $i = 1, j = 2$  and since  $L_1$  and  $L_2$  are linearly independent, we can suppose that  $L_1 = \lambda \tilde{y}_1 + \mu \tilde{y}_2$  with  $\mu \neq 0$ . Let

$$\begin{aligned} k(\tilde{y}_1) &= \frac{-\lambda \tilde{y}_1 + \gamma \tilde{y}_1^{1+1/r_1}}{\mu} \\ z &= \tilde{y}_2 - k(\tilde{y}_1) \\ h(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, z) &= \int_0^1 \frac{\partial l}{\partial \tilde{y}_2}(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2 - tz) dt \end{aligned}$$

and consider the feedback law:

$$w_2(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) = \frac{-\lambda + \gamma(1 + 1/r_1)\tilde{y}_1^{1/r_1}}{\mu} l(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) - \tilde{y}_1 h(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, z) - z$$

together with the positive definite function:

$$V(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) = \frac{1}{2}(\tilde{y}_1^2 + z^2)$$

Taking into account that  $l(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) = l(\tilde{y}_1, k(\tilde{y}_1)) + zh(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, z)$ , an easy computation shows that  $\dot{V}$ , the derivative of  $V$  along the trajectories of closed-loop system (3.10), is equal to:

$$\dot{V} = \tilde{y}_1 l(\tilde{y}_1, k(\tilde{y}_1)) - z^2$$

In order to show that 0 is an asymptotically equilibrium point for closed-loop system (3.10), it suffices to prove that one can choose  $\gamma$  in such a manner that:

$$\tilde{y}_1 l(\tilde{y}_1, k(\tilde{y}_1)) < 0 \quad \forall \tilde{y}_1 \neq 0 \quad (3.11)$$

Since for  $i \neq 1$ ,  $L_i$  is linearly independent of  $L_1$  and the  $Q_i$ 's are irreducible, we have

$$\tilde{P}_r(\tilde{y}_1, k(\tilde{y}_1)) = \gamma^{r_1} A \tilde{y}_1^{r_1+1} + o(\tilde{y}_1^{r_1+1})$$

with  $A$  a nonzero constant. For  $s \geq r + 2$ ,  $\tilde{P}_s$  is a homogeneous polynomial of degree  $s$  so

$$\tilde{P}_s(\tilde{y}_1, k(\tilde{y}_1)) = o(\tilde{y}_1^{s-1}) = o(\tilde{y}_1^{r+1}), \quad \forall s \geq r + 2$$

and  $\tilde{P}_{r+1}$  can be written:

$$\tilde{P}_{r+1}(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) = \sum_{i=0}^{r+1} \alpha_i \tilde{y}_1^i \tilde{y}_2^{r+1-i}$$

so

$$\tilde{P}_{r+1}(\tilde{y}_1, k(\tilde{y}_1)) = \sum_{i=0}^{r+1} \alpha_i \tilde{y}_1^{r+1} \left( \frac{-\lambda + \gamma \tilde{y}_1^{1/r_1}}{\mu} \right)^{r+1-i}$$

therefore, one can write:

$$l(\tilde{y}_1, k(\tilde{y}_1)) = (\gamma^{r_1} A + B) \tilde{y}_1^{r+1} + o(\tilde{y}_1^{r+1})$$

hence if  $\gamma$  is chosen such that  $\gamma^{r_1} A + B < 0$ , inequality (3.11) holds in a neighborhood of the origin because  $r + 1$  is odd.

Let us return now to system (3.10) and consider the following feedback law:

$$\begin{cases} v_2(\tilde{y}) &= -\beta_2 (\tilde{h}_2(\tilde{y}) + w_2(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)) \\ v_3(\tilde{y}) &= -\tilde{h}_3(\tilde{y}) - \gamma_3 v_2(\tilde{y}) - \frac{\partial V}{\partial \tilde{y}_1} l_3(\tilde{y}) - \tilde{y}_3 \\ &\vdots \\ v_n(\tilde{y}) &= -\tilde{h}_n(\tilde{y}) - \gamma_n v_2(\tilde{y}) - \frac{\partial V}{\partial \tilde{y}_1} l_n(\tilde{y}) - \tilde{y}_n \end{cases}$$

together with the positive definite function:

$$W(\tilde{y}) = V(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) + \frac{1}{2}(\tilde{y}_3^2 + \cdots + \tilde{y}_n^2)$$

Clearly the derivative of  $W$  along the trajectories of closed-loop system (6) is:

$$\dot{W} = \tilde{y}_1 l(\tilde{y}_1, k(\tilde{y}_1)) - z^2 - \tilde{y}_3^2 - \cdots - \tilde{y}_n^2$$

which is obviously negative definite in a neighborhood of the origin. This proves that the above feedback stabilizes system (3.9).  $\blacksquare$

**Example** Let us return to the example in section 2, here we take

$$f_1(x) = \frac{1}{2}[(x_1 + 2x_3 + 2x_2x_3)^2 - x_2^2] + 6(x_1 + 2x_2x_3 + 2x_3)^3$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_2x_3)$$

$$f_3(x) = 0$$

After the change of coordinates described in section 3, we get the system:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \frac{1}{2}(y_1^2 - y_2^2) + y_3(y_1 - y_2) + 6y_1^3 \\ \dot{y}_2 = v_2 \\ \dot{y}_3 = v_3 \end{cases} \quad (3.12)$$

following the notations of the proof of theorem 1 we have:

$$\begin{aligned} h(y_1, y_2, z) &= -y_2 + \frac{z}{2} \\ k(y_1) &= y_1 - \gamma y_1^2 \\ z &= y_2 - k(y_1) \\ V(y_1, y_2) &= \frac{1}{2}(y_1^2 + z^2) \end{aligned}$$

The feedback law defined by:

$$w_2(y_1, y_2) = (1 - 2\gamma y_1)\left(\frac{1}{2}(y_1^2 - y_2^2) + 6y_1^3\right) - y_1\left(-y_2 + \frac{z}{2}\right) - z$$

stabilizes the system:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \frac{1}{2}(y_1^2 - y_2^2) + 6y_1^3 \\ \dot{y}_2 = w_2 \end{cases}$$

provided that  $\gamma + 6 < 0$ , so the feedback law:

$$\begin{aligned} v_2(y) &= w_2(y_1, y_2) \\ v_3(y) &= -(y_1 - y_2)\frac{\partial V}{\partial y_1} - y_3 \end{aligned}$$

stabilizes system (3.12).

**Remark** If the polynomial  $P_r$  is definite (positive or negative), then system (3.8) is not stabilizable at all because  $h_1(y)$  is of one sign in a neighborhood of the origin.

### 3.3.2 Case where $r$ is odd

**Theorem 2** *If there exists  $(\lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$  such that  $P_r(1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) < 0$  then system (3.8) is stabilizable.*

**Proof** Consider the following system derived from system (3.8) :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = P_r(y) \\ \dot{y}_2 = u_2 \\ \vdots \\ \dot{y}_n = u_n \end{cases} \quad (3.13)$$

We claim that the following feedback law stabilizes system (3.13):

$$u_i(x) = \lambda_i P_r(y) - y_1 g_i(y) - (y_i - \lambda_i y_1)^r, i = 2, \dots, n$$

where  $g_i(y) = \int_0^1 \frac{\partial P_r}{\partial y_i}(y_1, t(y_2, \dots, y_n) + y_1(1-t)(\lambda_2, \dots, \lambda_n)) dt$ .

Indeed if we introduce the positive definite function :

$$V(y) = \frac{1}{2} \left( y_1^2 + \sum_{i=2}^n (y_i - \lambda_i y_1)^2 \right)$$

taking into account that  $P_r(y) = P_r(y_1, \lambda_2 y_1, \dots, \lambda_n y_1) + \sum_{i=2}^n (y_i - \lambda_i y_1) g_i(y)$ , we obtain that the derivative of  $V$  along the trajectories of closed-loop system (3.13) is :

$$\dot{V} = y_1^{r+1} P_r(1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) - \sum_{i=2}^n (y_i - \lambda_i y_1)^{r+1}$$

which is negative definite. Now, one can remark that the  $u_i$  are homogeneous polynomials of the same degree as  $P_r$ , so a Massera's theorem ([39]) permits to conclude about L.A.S. of closed-loop system (3.8) with the feedback given above. ■

#### Remarks

1. For planar systems, Boothby and Marino proved in [6] that a sufficient condition for system (3.8) to be stabilizable is that polynomial  $P_r(1, y)$  has at least one real root of multiplicity one and they asked the following question: Is the existence of a real root of odd multiplicity sufficient to ensure the stabilizability of system (3.8)? In sections 3.1 and 3.2 we answer positively to this question. Moreover, in the case where  $r$  is odd or  $r$  is even and  $P_r(1, y)$  has a real root of multiplicity one, the feedback law given in sections 3.1 and 3.2 are analytic.



2. The results of section 3 generalize somewhat the well known theorem: if the linearized of the system  $\dot{x} = f(x, u)$  is stabilizable, then the system itself is stabilizable in the sense that, for analytic affine systems  $\dot{x} = f(x) + Bu$ , if the "first approximation" is stabilizable then so is the affine system itself.

### Conclusion et quelques remarques

Dans la dernière section de ce chapitre on a étudié le système analytique

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = h_1(y) \\ \dot{y}_2 = v_2 \\ \vdots = \vdots \\ \dot{y}_n = v_n \end{cases} \quad (3.14)$$

où

$$h_1(y) = \sum_{i=r}^{\infty} P_i(y)$$

On a montré que si le système à dérive homogène

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = P_r(y) \\ \dot{y}_2 = u_2 \\ \vdots \\ \dot{y}_n = u_n \end{cases} \quad (3.15)$$

est stabilisable alors le système analytique (3.14) est aussi stabilisable.

Ce résultat est analogue au théorème classique concernant l'étude du linéarisé d'un système non linéaire mais il y a quand même une différence importante entre les deux résultats qu'on va préciser ici :

Soit

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ f(0, 0) = 0 \end{cases} \quad (3.16)$$

un système non linéaire et

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.17)$$

son linéarisé à l'origine.

Si (3.17) est stabilisable par un feedback linéaire  $u(x) = Kx$  alors le système (3.16) est localement stabilisable par le même feedback.

Pour les systèmes (3.14) et (3.15) on a la même conclusion si  $r$  est impair (tout feedback homogène de degré  $r$  qui stabilise (3.15) stabilise aussi (3.14) ) mais quand  $r$  est pair ceci n'est plus vrai ou du moins les feedback donnés au chapitre 2 ne stabilisent pas, en général, les systèmes analytiques (3.14).

Pour illustrer cela reprenons l'exemple étudié dans la dernière section

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \frac{1}{2}(y_1^2 - y_2^2) + y_3(y_1 - y_2) + 6y_1^3 \\ \dot{y}_2 = v_2 \\ \dot{y}_3 = v_3 \end{cases} \quad (3.18)$$

Le système homogène associé est

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \frac{1}{2}(y_1^2 - y_2^2) + y_3(y_1 - y_2) \\ \dot{y}_2 = v_2 \\ \dot{y}_3 = v_3 \end{cases} \quad (3.19)$$

D'après le second chapitre un feedback stabilisant (3.19) est

$$\begin{cases} v_2 = -(y_1 + y_2) - (y_1 - y_2)(y_1 + \frac{y_2}{2} + y_3) \\ v_3 = -y_3 - y_1(y_1 - y_2) \end{cases} \quad (3.20)$$

et une fonction de Lyapunov est donnée par

$$V = \frac{y_1^2 + (y_1 + y_2)^2 + y_3^2}{2}$$

on a (d'après chap 1) ;

$$\dot{V} = -(y_1 + y_2)^2 - y_3^2 \leq 0$$

Le principe de LaSalle permet alors de conclure que (3.19) bouclé avec (3.20) est G.A.S.

Maintenant, on va montrer que le système (3.18) avec  $v_2$  et  $v_3$  donnés par (3.20) n'est pas asymptotiquement stable :

Avec le changement de coordonnées

$$\begin{cases} x = y_1 \\ y = y_1 + y_2 \\ z = y_3 \end{cases}$$

le système (3.18) s'écrit

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{2}y(2x - y) + z(2x - y) + 6x^3 \\ \dot{y} = -y - \frac{1}{2}x(2x - y) - z(2x - y) + 6x^3 \\ \dot{z} = -z - x(2x - y) \end{cases} \quad (3.21)$$

D'après le théorème de Carr [10], (3.21) admet une variété centrale

$$\begin{cases} y = h_1(x) \\ z = h_2(x) \end{cases} \quad (3.22)$$

La stabilité de (3.21) est équivalente à celle de

$$\dot{x} = \frac{1}{2}h_1(x)(2x - h_1(x)) + h_2(x)(2x - h_1(x)) + 6x^3 \quad (3.23)$$

Pour étudier (3.23) on commence par déterminer des équivalents de  $h_1$  et  $h_2$  au voisinage de 0 en écrivant

$$h_1(x) = a_2x^2 + \dots \text{ et } h_2(x) = b_2x^2 + \dots$$

et en utilisant le fait que la courbe  $y = h_1(x)$ ,  $z = h_2(x)$  est invariante par le système (3.21) on obtient :

$$h_1(x) = -x^2 + o(x^2) \quad (3.24)$$

$$h_2(x) = -2x^2 + o(x^2) \quad (3.25)$$

Le système (3.23) s'écrit alors :

$$\dot{x} = 5x^3 + o(x^3) \quad (3.26)$$

qui est manifestement instable et donc (3.21) est instable. ■

# 4

## INTEGRATORS AND NONLINEAR STABILIZATION

A. Iggidr G.Sallet

CONGE Project, INRIA Lorraine & URA- CNRS 399 - M.M.A.S.  
University of Metz, CESCO - Technopôle METZ 2000 4, rue Marconi 57 070 METZ

**Abstract:** In this communication, we study the global stabilization, by means of smooth state feedback, of systems ( $S$ ) obtained by adding an integrator to a general nonlinear system ( $\Sigma$ ). We show how to compute the stabilizing feedback for ( $S$ ) when a stricte Lyapunov function for ( $\Sigma$ ) is difficult to find.

**Keywords:** nonlinear systems ,feedback, global stabilization, Lyapunov's function.

### 4.1 Introduction

In this paper we deal with the global stabilization of nonlinear control systems of the form:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = u \end{cases} \quad (4.1)$$

where  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^p$ ,  $u \in \mathbb{R}^p$  and  $f$  is a smooth vector field such that  $f(0, 0) = 0$ . It is well known[36, 42, 47] that if the subsystem:

$$\dot{x} = f(x, y) \quad (4.2)$$

where  $y$  is the input, is globally asymptotically stabilizable (G.A.S) by means of feedback law  $y = k(x)$ , where  $k$  is of class  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , and if there exists a Lyapunov function  $V$  such that

$$\langle \nabla V, f(x, k(x)) \rangle < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0 \quad (4.3)$$

( $V$  is said a strict Lyapunov function for system (4.2) ) then system(4.1) is G.A.S and the stabilizing feedback  $u(x, y)$ , which depends on  $k$  and  $V$ , is explicitly given. However it is not easy to find a function  $V$  satisfying (4.3) even if one knows that the origin is a globally asymptotically stable equilibrium point for the closed loop system

$$\dot{x} = f(x, k(x)) \quad (4.4)$$

The goal of this paper is to weaken these hypotheses. Theorem 1 shows that, to find a stabilizing feedback for system(4.1) , we do not need to have a strict Lyapunov function for (4.2). Theorem 2 shows how to asymptotically stabilize system(4.1) without stabilizing system(4.2).

We recall that the relationship between the stabilizability of (4.2) and (4.1) is an open problem when system (4.2) is stabilizable by means of continuous feedback (not  $C^1$  ). This problem was treated in [15] and [17] from the local stabilization point of view. The authors proved that the local stabilizability of (4.2) is equivalent to the local stabilizability of (4.1) if  $n = p = 1$  and  $f$  is a real analytic function.

## 4.2 Main results

Before given the first theorem we introduce the following notations and definitions:

**Definition 1** We shall say that system (4.2) is of LA SALLE-Type (L-T) if there exist:

1) a function  $k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  of class  $C^r$  ( $r \geq 1$ ) with  $k(0) = 0$

2) a function  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  of class  $C^1$ , definite positive and proper such that:

i)  $X.V(x) \leq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$  where  $X(x) = f(x, k(x))$  and  $X.V$  is the Lie-derivative of  $V$  along the trajectories of the vector field  $X$

(here:  $X.V(x) = \langle \nabla V, X(x) \rangle$  where  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  is the inner product in  $\mathbb{R}^n$ )

ii) The largest invariant set contained in  $E = \{x \in \mathbb{R}^n / X.V(x) = 0\}$  is the origin of  $\mathbb{R}^n$ .

**Definition 2** A scalar function  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  is a weak Lyapunov function for

$$\dot{x} = X(x)$$

if  $V$  is positive definite proper and

$$X.V(x) \leq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$$

By a *proper function* we mean a function

$$V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

such that  $\{x \in \mathbb{R}^n / V(x) \leq \xi\}$  is compact for each  $\xi > 0$ .

Through this paper  $\|\cdot\|$  will denote the usual Euclidian norm in  $\mathbb{R}^n$ ,  $X_t(\cdot)$  is the flow of the vector field  $X$  defined on  $\mathbb{R}^n$ .

**Remarks:**

- 1) System (4.2) is of (L-T)  $\Leftrightarrow \dot{x} = f(x, k(x))$  is globally asymptotically stable (see[38]).
- 2) It is often easier to find  $V$  satisfying (i) and (ii) then a function  $V$  satisfying (4.3) (it is typically the case for mechanical systems for example).

**Theorem 1** *If system (4.2) is of (L-T) then so is system (4.1) and the stabilizing feedback is*

$$u = -y + k(x) + dk(x).f(x, y) - G(x, y)^T.\nabla V(x) \quad (4.5)$$

( $T$ =transpose)

where

$$f(x, y) = f(x, k(x)) + G(x, y).(y - k(x)) \quad (4.6)$$

**Remark:** One can take for  $G$  the matrix:

$$G(x, y) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(x, ty + (1-t)k(x))dt \quad (4.7)$$

**Proof**

(4.2) is of L-T so there exist  $k$  and  $V$  satisfying i and ii of the above definition. Let us denote  $\Omega$  the largest invariant set by  $X$  contained in  $E = \{x \in \mathbb{R}^n / X.V(x) = 0\}$ . By hypotheses  $\Omega = \{0\}$

Let

$$Z(x, y) = \begin{pmatrix} f(x, y) \\ u(x, y) \end{pmatrix}$$

where

$$u(x, y) = -y + k(x) + dk(x).f(x, y) - G(x, y)^T.\nabla V(x)$$

and define (see[47])

$$W(x, y) = V(x) + \frac{1}{2}\|y - k(x)\|^2$$

$W$  is of class  $C^1$ , definite positive and proper

$$\dot{W}(x, y) = Z.W(x, y) = X.V(x) - \|y - k(x)\|^2 \leq 0$$

Note that all trajectories of the closed-loop system are bounded because  $W$  is proper and its derivative is nonpositive.

Let

$$\begin{aligned}\tilde{E} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+p} / Z.W(x, y) = 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+p} / y = k(x) \text{ and } X.V(x) = 0\}\end{aligned}$$

According to Lasalle's theorem (see [38] pp66-67) all solutions tend to  $\tilde{\Omega}$  the largest invariant set by  $Z$  contained in  $\tilde{E}$ . To prove theorem 1 we show that  $\tilde{\Omega}$  is the origin of  $\mathbb{R}^{n+p}$ .

On  $\tilde{\Omega}$  the vector field  $Z$  is given by :

$$Z(x, k(x)) = \begin{pmatrix} X(x) \\ Y(x) \end{pmatrix}$$

where  $Y(x) = dk(x).f(x, k(x)) - G(x, k(x))^T.\nabla V(x)$  and  $X(x) = f(x, k(x))$

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, k(x)) = X(x) \\ \dot{y} = dk(x).f(x, k(x)) - G(x, k(x))^T.\nabla V(x) \end{cases}$$

Let  $(x(t), y(t))$  be a solution of the above system with  $(x(0), y(0)) = (x, k(x)) \in \tilde{\Omega}$ . Since  $\tilde{\Omega}$  is  $Z$ -invariant we have  $(x(t), y(t)) \in \tilde{\Omega}$  for all  $t \geq 0$  but we have

$$\frac{d}{dt}(x(t)) = X(x(t))$$

so  $x(t) = X_t(x)$  where  $X_t(\cdot)$  is the flow of the vector field  $X$  defined on  $\mathbb{R}^n$ .

Consider, now, the following set :

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n / (x, k(x)) \in \tilde{\Omega}\}$$

If  $x \in M$  then  $(x, k(x)) \in \tilde{\Omega}$  and  $(x(t), y(t)) \in \tilde{\Omega}$  since  $\tilde{\Omega}$  is invariant, this implies  $(X_t(x), y(t)) \in \tilde{\Omega}$  but  $y(t) = k(X_t(x))$ .

So we have shown :  $x \in M \Rightarrow (X_t(x), k(X_t(x))) \in \tilde{\Omega} \Rightarrow X_t(x) \in M$ .

This proves that  $M$  is  $X$ -invariant and since  $M$  is contained in  $E$  we have  $M = \{0\}$  and then  $\tilde{\Omega} = \{(0, 0)\}$  which completes the proof of theorem 1.  $\square$

**Example 1.** Consier the following system which evolves in  $\mathbb{R}^4$  :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2x_3 + b_1y \\ \dot{x}_2 = -x_1x_3 + b_2y \\ \dot{x}_3 = b_3y \\ \dot{y} = u \end{cases} \quad (4.8)$$

where  $b_3 \neq 0$  and  $(b_1, b_2) \neq (0, 0)$

The subsystem

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 x_3 + b_1 y \\ \dot{x}_2 = -x_1 x_3 + b_2 y \\ \dot{x}_3 = b_3 y \end{cases} \quad (4.9)$$

is the "famous" system of the angular velocity of a symmetric rigid body . In [41, 47] it is shown that (4.9) is smoothly globally asymptotically stabilizable. Furthermore, in [41] the stabilizing feedback  $k$  is explicitly given ,as well as, a weak Lyapunov function  $V$  such that all the assumptions of theorem 1 are satisfied so our result can be applied to construct the stabilizing feedback for system (4.8). Note that a strict Lyapunov function for system (4.9) has never been found and may be difficult to construct so the results of [36, 42, 47] can not be applied to stabilize system (4.8).

For the following result we suppose that  $f$  is a smooth (i.e.  $C^\infty$ ) vector field.

**Theorem 2** *If there exist a smooth feedback  $k$  (not necessarily a stabilizing one) for system (4.2) and a smooth function  $V$  ,which is definite positive and proper, such that :*

i)  $X.V(x) \leq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$  where  $X(x) = f(x, k(x))$

ii) *The set*

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n / X^{s+1}.V(x) = X^s.Y_i.V(x) = 0, s \in \mathbb{N}, i = 1..p\}$$

where  $Y_i = \frac{\partial f}{\partial y_i}(x, k(x))$ , is reduced to the set  $\{0\}$

then system (4.1) is G.A.S and the stabilizing feedback :

$$u = -y + k(x) + dk(x).f(x, y) - G(x, y)^T.\nabla V(x)$$

where  $G$  is defined by the formula (7).

### Proof

We take  $u = dk(x).f(x, y) - G(x, y)^T.\nabla V(x) + v$  where  $v$  is a new input so system(4.1) can be written :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = Z(x, y) + B(x, y).v = Z(x, y) + \sum_{i=1}^p v_i B_i$$

where

$$Z(x, y) = \begin{pmatrix} f(x, k(x)) + G(x, y).(y - k(x)) \\ dk(x).f(x, y) - G(x, y)^T.\nabla V(x) \end{pmatrix}$$



and  $B_i(x, y) = e_{n+i}$

Introduce

$$W(x, y) = V(x) + \frac{1}{2}\|y - k(x)\|^2$$

$W$  is smooth, definite positive and proper

$$Z.W(x, y) = X.V(x) \leq 0$$

According to [41], the above system is globally asymptotically stabilizable by the feedback

$$v = -B.W(x, y)$$

if the set

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+p}/Z^{s+1}.W(x, y) = Z^s.B_i.W(x, y) = 0, s \in \mathbb{N}, i = 1..p\}$$

is reduced to the origin of  $\mathbb{R}^{n+p}$ .

Since  $Z.W(x, y) = X.V(x)$  and  $B.W = y - k(x)$  we can write :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+p}/y = k(x) \text{ and } x \in C\}$$

where:

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n/X.V(x) = Z^{s+1}.W(x, k(x)) = Z^s.B_i.W(x, k(x)) = 0, s \geq 1, i = 1..p\}$$

We shall show that  $C = S$ .

we have

$$B.W = y - k(x)$$

$$Z.B_i.W = Z.(y_i - k_i(x)) = \langle Z, \nabla(y_i - k_i(x)) \rangle$$

For  $(x, y) \in A$  the vector field  $Z$  is (since  $y = k(x)$ ) :

$$Z = \begin{pmatrix} X(x) \\ dk(x).f(x, k(x)) - G(x, k(x))^T.\nabla V(x) \end{pmatrix}$$

so

$$\begin{aligned} \langle Z, \nabla(y_i - k_i(x)) \rangle = \\ - \langle X, \nabla k_i(x) \rangle + \langle dk(x).f(x, k(x)) - G(x, k(x))^T.\nabla V(x), e_{n+i} \rangle \end{aligned}$$

But

$$\begin{aligned}
& \langle dk(x).f(x, k(x)) - G(x, k(x))^T . \nabla V(x), e_{n+i} \rangle = \\
& \quad \sum_{j=1}^n \frac{\partial k_i}{\partial x_j}(x) f_j(x, k(x)) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial y_i}(x, k(x)) \frac{\partial V}{\partial x_j}(x) \\
& = \langle \nabla k_i(x), X(x) \rangle + \langle \nabla V(x), \frac{\partial f}{\partial y_i}(x, k(x)) \rangle
\end{aligned}$$

Thus

$$Z.B_i.W(x, y) = -Y_i.V(x)$$

where

$$Y_i = \frac{\partial f}{\partial y_i}(x, k(x))$$

Now

$$Z^2.B_i.W(x, y) = Z.(Z.B_i.W)(x, y) = -Z.(Y_i.V(x))$$

Since  $Y_i.V(x)$  is independent of  $y$  we have :

$$Z.(Y_i.V(x)) = X.Y_i.V(x)$$

so

$$Z^2.B_i.W(x, y) = -X.Y_i.V(x)$$

and by induction we prove that for any integer  $s \geq 1$  and any  $(x, y) \in A$  :

$$Z^s.B_i.W(x, y) = -X^{s-1}.Y_i.V(x), i = 1..p \quad (4.10)$$

A similar computation shows that we have also for any integer  $s$  and any  $(x, y) \in A$  :

$$Z^{s+1}.W(x, y) = X^{s+1}.V(x) \quad (4.11)$$

The equalities (4.10) and (4.11) show that  $C = S$  so theorem 2 is proved.  $\square$

**Example 2.** Consider the following system :

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin(xy) = f(x, y) \\ \dot{y} = u \\ (x, y) \in \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (4.12)$$

To stabilize this system we can try to stabilize first the system

$$\dot{x} = \sin(xy)$$

where  $y$  is considered as the control. This system is obviously asymptotically stabilizable by a smooth function  $y = k(x)$  and after we can use theorem 1 to stabilize system (4.12) but the feedback resulting is complicated.

Alternatively we can stabilize system (4.12) by a simpler smooth feedback if we apply theorem 2 as follow :

Introduce :

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2 \text{ and } k(x) = 0$$

we have

$$X.V(x) = 0$$

$$Y = \frac{\partial f}{\partial y}(x, k(x)) = x$$

$$Y.V(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

This shows that  $V$  and  $k$  satisfy the hypotheses of theorem 2 so system (4.12) is (G.A.S) by means of the feedback law:

$$u(x, y) = -y - x \frac{\sin(xy)}{y}$$

# 5

## STABILIZATION OF PLANAR NONLINEAR SYSTEMS

R.Chabour A.Iggidr  
INRIA Lorraine ( CONGE Project ) & URA- CNRS 399 - M.M.A.S.  
CESCOM – Technopôle METZ 2000 4, rue Marconi 57 070 METZ

**Abstract** In this paper, we investigate the  $C^1$ -stabilizability of affine control nonlinear systems in the plane. The feedback laws are given by means of Center Manifold machinery.

**Keywords** Bilinear systems, Center manifold, Stabilization.

### 5.1 Introduction

This paper is a contribution to the local stabilization problem of two dimensional nonlinear systems.

The classical approach is to consider the linearized system at the origin. Bacciotti and Boieri [4] studied the critical case when the linearized system has a simple zero uncontrollable eigenvalue. Here we consider control affine systems of the form:

$$\dot{x} = f(x) + ug(x) \tag{5.1}$$

where  $x \in U$  is a neighborhood of the origin in  $\mathbb{R}^2$ ,  $u$  is a scalar input and  $f, g$  are smooth vector fields such that  $f(0) = 0$ . Several authors ([7],[6],[16],[17],[27],[32],[34]) investigate the stabilizability problem when  $g(0) \neq 0$ . However few results are known ([5],[12],[13],[14]) in the case where  $g(0) = 0$ . The principal difficulties arise from the fact that the linearized system is independent of the control and the vector field  $g$  is not locally rectifiable. To investigate the stabilizability properties (negative or positive) of

such systems a bilinear approach were introduced by Chabour, Sallet and Vivalda in [12], they define the bilinear approximating system of (5.1):

$$\dot{x} = Ax + uBx \quad (5.2)$$

where  $A = \frac{\partial f}{\partial x}(0)$  and  $B = \frac{\partial g}{\partial x}(0)$ .

The goal of this paper is to investigate the  $C^1$ -stabilizability of system (5.1) when its bilinear approximating system (5.2) cannot be used to achieve  $C^1$  local stabilization of system (5.1). As an example consider the following system defined in  $\mathbb{R}^2$ :

$$\begin{cases} \dot{x} = 8x + 2y - \frac{1}{3}(x^2 + xy - 2y^2) + 2ux \\ \dot{y} = x - 6y - \frac{1}{3}(x^2 + xy - 2y^2) - uy \end{cases} \quad (5.3)$$

One can remark that this system is not linear stabilizable and that its bilinear approximating system is not asymptotically controllable to the origin (see [12]). However, we shall show that it can be stabilized thanks to the following feedback law:

$$u = -5 + \frac{1}{3}(x + 2y) \quad (5.4)$$

In the second section an algebraic classification from the  $C^1$  stabilization point of view is given and the critical cases are identified. In the third section, center manifold's techniques are used to study some critical cases.

## 5.2 $C^1$ stabilizability: Bilinear approach

For any  $C^1$  feedback  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  the linear approximation of the closed-loop system

$$\dot{x} = f(x) + u(x)g(x)$$

is  $\dot{x} = (A + u(0)B)x$ .

It follows from theorems of stability in the first approximation that :

i) If system (5.1) is  $C^1$  stabilizable, then there exists  $\lambda \in \mathbb{R}$  such that the eigenvalues of the matrix  $A + \lambda B$  have non positive real parts.

ii) If there exists  $\lambda \in \mathbb{R}$  such that all the characteristic roots of the matrix  $A + \lambda B$  have negative real parts, then system (5.1) is locally stabilizable by constant feedback.

**Definition 1** A system is said critical if it satisfies condition (i) but not condition (ii).

The study of the sign of  $\det(A + \lambda B)$  and  $\text{Tr}(A + \lambda B)$  permits to characterize the critical cases. Here attention is restricted to the two dimensional systems for which  $A \neq \alpha B$  for any  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

$\det(A + \lambda B) = \lambda^2 \det B + \lambda(\text{Tr} A \text{Tr} B - \text{Tr} AB) + \det A$   
and  $\text{Tr}(A + \lambda B) = \text{Tr} A + \lambda \text{Tr} B$  so we get the following classification:

**a) Case when B has no real eigenvalues**

$\text{Tr} B \neq 0$  : (5.1) is stabilizable by constant feedback  
 $\text{Tr} B = 0 \text{Tr} A < 0$  : (5.1) is stabilizable by constant feedback  
 $\text{Tr} B = 0 \text{Tr} A > 0$  : (5.1) is not  $C^1$  stabilizable  
 $\text{Tr} B = 0$  : Critical case ( $a_1$ )

**b) Case where the eigenvalues of B are real without B being diagonalizable**

$\text{Tr} B \neq 0$  : (5.1) is stabilizable by constant feedback  
 $\text{Tr} B = 0 \text{Tr} A > 0$  : (5.1) is not  $C^1$  stabilizable  
 $\text{Tr} B = 0 \text{Tr} A < 0 \text{Tr} AB \neq 0$  : (5.1) is stabilizable by constant feedback  
 $\text{Tr} B = 0 \text{Tr} A < 0 \text{Tr} AB = 0 \det A > 0$  : (5.1) is stabilizable by constant feedback  
 $\text{Tr} B = 0 \text{Tr} A < 0 \text{Tr} AB = 0 \det A < 0$  : (5.1) is not  $C^1$  stabilizable  
 $\text{Tr} B = 0 \text{Tr} A < 0 \text{Tr} AB = 0 \det A = 0$  : Critical case ( $b_1$ )  
 $\text{Tr} B = 0 \text{Tr} A = 0 \text{Tr} AB \neq 0$  : Critical case ( $b_2$ )  
 $\text{Tr} B = 0 \text{Tr} A = 0 \text{Tr} AB = 0$  : (5.1) is not  $C^1$  stabilizable

**c) B diagonalizable  $\text{Tr} B \geq 0 \text{Tr} B \neq 0$**

We set:

$$I = (\text{Tr} A \text{Tr} B - \text{Tr} AB)^2 - 4 \det A \det B$$

$$J = \text{Tr} AB \text{Tr} B - \text{Tr} A \text{Tr}(B^2)$$

$$K = J + \text{Tr} B \sqrt{I}$$

$$L = \text{Tr} A \text{Tr} B - \text{Tr} AB$$

$$\Delta = 2 \text{Tr} A \text{Tr} B \text{Tr} AB - \text{Tr}(A^2)(\text{Tr} B)^2 - (\text{Tr} A)^2 \text{Tr}(B^2)$$

and we get:

$\det B > 0$  : (5.1) is stabilizable by constant feedback  
 $\det B < 0 \text{Tr} A < 0$  : (5.1) is not  $C^1$  stabilizable  
 $\det B < 0 \text{Tr} A = 0 \text{Tr} AB < 0$  : (5.1) is stabilizable by constant feedback  
 $\det B < 0 \text{Tr} A = 0 \text{Tr} AB \geq 0$  : Critical case ( $c_1$ )  
 $\det B < 0 \text{Tr} A > 0 \text{Tr} AB > 0$  : (5.1) is stabilizable by constant feedback  
 $\det B < 0 \text{Tr} A > 0 \text{Tr} AB < 0$  : (5.1) is not  $C^1$  stabilizable  
 $\det B < 0 \text{Tr} A > 0 \text{Tr} AB = 0$  : Critical case ( $c_2$ )  
 $\det B = 0 \text{Tr} A < 0$  : (5.1) is stabilizable by constant feedback

$\det B = 0 \quad L \geq 0 \quad \Delta > 0$  : (5.1) is stabilizable by constant feedback

$\det B = 0 \quad L \geq 0 \quad \Delta < 0$  : (5.1) is not  $C^1$  stabilizable

$\det B = 0 \quad L \geq 0 \quad \Delta = 0$  : Critical case ( $c_3$ )

From this classification, it appears that we have six critical cases. We denote them  $(a_1)$ ,  $(b_1)$ ,  $(b_2)$ ,  $(c_1)$ ,  $(c_2)$ ,  $(c_3)$ . The critical cases are interesting because one cannot say anything about the stabilizability problem directly from the linear or the bilinear approximation.

\* the cases  $(a_1)$ ,  $(b_2)$  can be indirectly solved by the results of [12]. Indeed there exists  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$  such that for a suitable choice of coordinates

$$(A + \lambda_0 B) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

so  $\det(A + \lambda_0 B) > 0$  and  $Tr(A + \lambda_0 B) = 0$ . With these hypothesis CHABOUR, SALLET and VIVALDA [12] proved that system (5.1) can be locally stabilized by homogeneous feedback of degree zero. For the convenience of the reader, we recall their results. Let  $P$  be a symmetric positive definite matrix such that

$$\langle x, P(A + \lambda_0 B)x \rangle = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$$

the stabilizing feedback is :

$$u(x) = \begin{cases} \frac{-\langle x, PBx \rangle}{\langle x, Px \rangle} + \lambda_0 & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

\*For the subcases  $(c_1, J = 0)$ ,  $(c_2)$ ,  $(c_3, L > 0)$  there exists  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$  such that for a suitable choice of coordinates

$$(A + \lambda_0 B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

The bilinear approximation (5.2) is not asymptotically controllable to the origine [13]. For the moment we are not able to say anything about the stabilizability of these systems.

\* To summarize, it remains three subcases not considered:  $(b_1)$ ,  $(c_1, J > 0)$ ,  $(c_3, L = 0)$  For these subcases there exists  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$  such that for a suitable choice of coordinates

$$(A + \lambda_0 B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad \alpha < 0$$

The goal of the third section is to address the  $C^1$  stabilizability of such systems.

### 5.3 $C^1$ -stabilization of some critical cases

Here we consider the cases:

Case a)  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  and  $B = \begin{pmatrix} 0 & a_{011} \\ b_{101} & b_{011} \end{pmatrix}$  where  $a_{011}b_{101} \geq 0$

Case b)  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  and  $B = 0$

**Case a** : One can remark that the bilinear approximating system doesn't permit to conclude about stabilization of system (5.1), so we rewrite it using Taylor expansion of  $f$  and  $g$ , in the neighborhood of the origin as follows:

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{200}x^2 + a_{020}y^2 + a_{110}xy + \\ \quad a_{300}x^3 + a_{030}y^3 + a_{210}yx^2 + a_{120}xy^2 + \dots \\ \quad + u(a_{011}y + a_{201}x^2 + a_{021}y^2 + a_{111}xy + \dots) \\ \dot{y} = -y + b_{200}x^2 + b_{020}y^2 + b_{110}xy + \\ \quad b_{300}x^3 + b_{030}y^3 + b_{210}yx^2 + b_{120}xy^2 + \dots \\ \quad + u(b_{101}x + b_{011}y + b_{201}x^2 + b_{021}y^2 + b_{111}xy + \dots) \end{cases} \quad (5.5)$$

Let us introduce the polynomial expression:

$$P(l) = b_{101}a_{011}l^2 + (b_{101}a_{110} + a_{201} + a_{011}b_{200})l + a_{300} + b_{200}a_{110}$$

with its discriminant

$$\Delta(P) = (b_{101}a_{110} + a_{201} + a_{011}b_{200})^2 - 4b_{101}a_{011}(a_{300} + b_{200}a_{110})$$

In the case where  $a_{011}b_{101} > 0$  we have the following result:

**Proposition 1** *A necessary condition for  $C^1$  stabilizability of system (5.5) is that:*

$$a_{200} = 0 \text{ and } \Delta(P) \geq 0.$$

*If  $a_{200} = 0$  and  $\Delta(P) > 0$  then (5.5) is stabilizable with  $u(x, y) = \tilde{l}.x$  where  $P(\tilde{l}) < 0$*

#### Proof

First we have to choose  $u$  such that  $u(0) = 0$  because if  $u(0) \neq 0$  then the linearized system of (5.5) admits two eigenvalues with real parts of opposite sign so (5.5) cannot be



asymptotically  $C^1$  stabilizable. Since we are interested in  $C^1$  stabilization, we replace  $u$  by the expression

$$u = lx + my + \text{higher order terms} \quad (5.6)$$

After this substitution, we call the right-hand side of (5.5) respectively  $\varphi(x, y)$  and  $\psi(x, y)$ . According to the results of J. Carr [10], system (5.5) admits a center manifold, which can be identified in a neighborhood of the origin with a graph of a function  $h$  such that  $h(0) = (Dh)(0) = 0$ . This function has an asymptotic expansion

$$y = h(x) = c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + \dots \quad (5.7)$$

and satisfies, locally, the equation:

$$(Dh)(x) \cdot \varphi(x, h(x)) - \psi(x, h(x)) = 0 \quad (5.8)$$

The flow on the center manifold is governed by the one-dimensional equation:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varphi(x, h(x)) \\ &= a_{200}x^2 + [l(a_{201} + a_{011}c_2) + a_{110}c_2 + a_{300}]x^3 + \dots \end{aligned} \quad (5.9)$$

It is well known [10] that asymptotic stability of (5.9) is necessary and sufficient for asymptotic stability of (5.5). If  $a_{200} \neq 0$  then system (5.9) is unstable and so is system (5.5).

Now suppose  $a_{200} = 0$ ; taking into account (5.7) and (5.8) an easy computation shows that  $c_2 = b_{200} + lb_{101}$  and system (5.9) becomes:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= [b_{101}a_{011}l^2 + (b_{101}a_{110} + a_{201} + a_{011}b_{200})l + a_{300} + a_{110}b_{200}]x^3 + \dots \\ &= P(l) \cdot x^3 + \dots \end{aligned} \quad (5.10)$$

If  $\Delta(P) < 0$  then  $P(l) > 0$  for all  $l \in \mathbb{R}$  (since  $b_{101}a_{011} > 0$ ) so system (5.10) is obviously unstable.

If  $\Delta(P) > 0$  then one can choose  $\tilde{l}$  such that  $P(\tilde{l}) < 0$ . The corresponding system is

$$\dot{x} = P(\tilde{l})x^3 + \dots$$

which is asymptotically stable. This shows that the feedback  $u = \tilde{l}x$  stabilizes system (5.5). ■

For system (5.3), one has :

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

By applying the feedback law :  $u = -5+v$  with  $v$  as a new input, system (5.3) becomes:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2(-x+y) - \frac{1}{3}(x^2+xy-2y^2) + 2vx \\ \dot{y} = x-y - \frac{1}{3}(x^2+xy-2y^2) - vy \end{cases} \quad (5.11)$$

Matrix  $C = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  has two eigenvalues: 0 and -3.

In the proper basis of  $C$ , system (5.11) is given by:

$$\begin{cases} \dot{X} = 3XY - 2vY \\ \dot{Y} = -3Y + v(-X+Y) \end{cases} \quad (5.12)$$

with :

$$X = \frac{1}{3}(x+2y) \quad Y = \frac{1}{3}(-x+y)$$

System (5.12) has the same form as system (5.5) with  $P(l) = l^2 - 3l$ ;  $P(l) = -1 < 0$  hence one can apply proposition 1 :  $v = X$  is a stabilizing feedback for system (5.12) and this shows that the feedback law  $u = -5 + \frac{1}{3}(x+2y)$  stabilizes system (5.3).

When  $a_{011}b_{110} = 0$  and  $a_{200} = 0$  the flow on the center manifold is governed by the equation:

$$\dot{x} = ((b_{101}a_{110} + a_{201} + a_{011}b_{200})l + a_{300} + a_{110}b_{200})x^3 + \dots \quad (5.13)$$

A similar analysis as above permits to establish the following result:

**Proposition 2** *i) If  $b_{101}a_{110} + a_{201} + a_{011}b_{200} \neq 0$  then system (5.5) is stabilizable by means of feedback  $u = lx$  where  $(b_{101}a_{110} + a_{201} + a_{011}b_{200})l + a_{300} + a_{110}b_{200} < 0$*

*ii) If  $b_{101}a_{110} + a_{201} + a_{011}b_{200} = 0$  and  $a_{300} + a_{110}b_{200} < 0$  then system (5.5) is stabilizable by  $u = 0$*

*iii) If  $b_{101}a_{110} + a_{201} + a_{011}b_{200} = 0$  and  $a_{300} + a_{110}b_{200} > 0$  then system (5.5) is not  $C^1$  stabilizable.*

**Case b** :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = 0$$

System (5.1) can be written:

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{200}x^2 + a_{020}y^2 + a_{110}xy + a_{300}x^3 + a_{030}y^3 + a_{210}yx^2 + a_{120}xy^2 + \dots \\ \quad + u(a_{201}x^2 + a_{021}y^2 + a_{111}xy + a_{301}x^3 + a_{031}y^3 + a_{121}xy^2 + a_{211}x^2y + \dots) \\ \dot{y} = -y + b_{200}x^2 + b_{020}y^2 + b_{110}xy + b_{300}x^3 + b_{030}y^3 + b_{210}yx^2 + b_{120}xy^2 + \dots \\ \quad + u(b_{201}x^2 + b_{021}y^2 + b_{111}xy + b_{301}x^3 + b_{031}y^3 + b_{121}xy^2 + b_{211}x^2y + \dots) \end{cases} \quad (5.14)$$

and

$$u = l + px + qy + \dots$$

If we introduce the polynomial

$$Q(l) = b_{201}a_{111}l^2 + (a_{301} + a_{111}b_{200} + a_{110}b_{201})l + a_{110}b_{200} + a_{300}$$

we establish:

**Proposition 3** i) If  $a_{201} = 0$  and  $a_{200} \neq 0$  then system (5.14) is not  $C^1$  stabilizable

ii) If  $a_{201} = a_{200} = 0$  then system (5.14) is  $C^1$  stabilizable if there exists  $l_0 \in \mathbb{R}$  such that  $Q(l_0) < 0$ . In this case the stabilizing feedback is  $u = l_0x$

iii) If  $a_{201} \neq 0$  then system (5.14) is stabilizable by  $u = \tilde{l} + \tilde{p}x$  where  $\tilde{l} = -\frac{a_{200}}{a_{201}}$  and

$\tilde{p}$  satisfies  $Q(\tilde{l}) + \tilde{p}a_{201} < 0$

**Proof**

Since  $u = l + px + qy +$  higher order terms, system (5.14) has a center manifold  $y = h(x)$ . On this manifold the flow is governed by:

$$\dot{x} = (la_{201} + a_{200})x^2 + [Q(l) + pa_{201}]x^3 + \dots \quad (5.15)$$

**Remark:** When the three propositions of this section do not give an answer to the  $C^1$  stabilizability problem one has to compute higher order terms of  $h$  and to use a similar analysis as above. The algorithm has to be repeated until an answer (negative or positive) is obtained.

# 6

## EXPONENTIAL STABILIZATION AND OBSERVERS

A. Iggidr G.Sallet

CONGE Project, INRIA Lorraine & URA- CNRS 399 - M.M.A.S.

University of Metz, CESCO - Technopôle METZ 2000 4, rue Marconi 57 070

METZ -FRANCE

Phone : (33) 87 20 35 12 - Fax : (33) 87 76 39 77 - e.mail : {iggidr,sallet} @ilm.loria.fr

**Abstract:** In this paper we investigate the stabilizability problem of a class of multi-input multi- output nonlinear systems whose the linearization at the origin is controllable and observable. Under assumptions on the nonlinear part we prove : (a) the system is globally exponentially stabilizable (G.E.S) by means of linear feedback law. (b) the system can be G.E.S using a state estimation given by an observer.

**Keywords:** exponential stabilization, feedback, nonlinear systems, Lyapunov functions, observer.

## 6.1 Introduction

We consider a nonlinear system of the form :

$$\begin{cases} \dot{x} = \tilde{A}x + \tilde{B}u + f(x, u) \\ x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, \tilde{A} \in M_{n,n}(\mathbb{R}), \tilde{B} \in M_{n,m}(\mathbb{R}) \end{cases} \quad (6.1)$$

where  $M_{n,m}(\mathbb{R})$  is the set of the matrix with  $n$  rows and  $m$  columns and the map

$$f = (f_1, \dots, f_n)^T : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

is Lipschitz continuous such that  $f(0,0) = 0$ . We assume that the pair  $(\tilde{A}, \tilde{B})$  is controllable.

**Lemma 1 [46]** *If  $(\tilde{A}, \tilde{B})$  is controllable, then there exist  $T \in GL(n), F \in M_{m,n}(\mathbb{R})$  and  $V \in GL(m)$  such that  $T^{-1}(\tilde{A} + \tilde{B}F)T = A$  and  $T^{-1}\tilde{B}V = B$  where*

$$A = \begin{pmatrix} A_{k_1} & & & & \\ & \dots & & & \\ & & \dots & & \\ & & & A_{k_r} & \\ & & & & \dots \end{pmatrix} \text{ and } B = \begin{pmatrix} b_{k_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \\ & & b_{k_r} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

where each  $A_{k_i}$  has size  $k_i \times k_i$  and is of the form

$$A_{k_i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

and each  $b_{k_i}$  is a column of length  $k_i$  and is of the form

$$b_{k_i} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

According to this lemma, system (6.1) can be written :

$$\dot{x} = Ax + Bu + g(x, u) \quad (6.3)$$

where  $A$  and  $B$  are of the form (6.2) and  $g(x, u) = T^{-1}f(Tx, FTx + u)$

Taking into account the form of  $B$  we can suppose that  $u \in \mathbb{R}^r$  and

$$B = \begin{pmatrix} b_{k_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & b_{k_r} \end{pmatrix}$$

In this paper, we study nonlinear systems of the form (6.3) which have the following property :

(H) There exists a positive constant  $K$  such that for any  $i = 1, \dots, n$  the following holds :

$$|g_i(x, u)| \leq K \|p_i(x)\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall u \in \mathbb{R}^r \quad (6.4)$$

where  $p_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^i$  is the canonical projection and  $\| \cdot \|$  is the usual Euclidean norm on  $\mathbb{R}^n$ .

In section 2, we shall see that if condition (H) is satisfied, then system (6.3) is globally exponentially stabilizable (G.E.S.) at the origin by means of a linear feedback. This is a generalization of a result of Tsiniias [49] who studied the single input systems, our proof is different from its one and it is based on an idea from [24].

In section 3, we suppose in addition that  $g_i(x, u) = g_i(x_1, \dots, x_i, 0, \dots, 0, u)$  so we can construct an observer for system (6.3) with the output

$$y = Cx \quad (6.5)$$

where

$$C = \begin{pmatrix} C_{k_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & C_{k_p} \end{pmatrix}$$

$$C_{k_i} = (1 \quad 0 \quad \dots \quad 0)$$

This observer is of the form :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + g(\hat{x}, u) - \tilde{E}(C\hat{x} - y) \quad (6.6)$$

We show that the error will tend to zero with an exponential rate of convergence and we construct a dynamic feedback which globally exponentially stabilizes system (6.3-6.5).

## 6.2 Stabilization

Let  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha > 1$  and consider the following matrix :

$$\Phi = \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha^{-2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha^{-n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_{k_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Phi_{k_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \Phi_{k_r} \end{pmatrix}$$

where

$$\Phi_{k_i} = \begin{pmatrix} \alpha^{-(k_{i-1}+1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha^{-(k_{i-1}+k_i)} \end{pmatrix}$$

and  $k_0 = 0$

Using the above decomposition, a simple computation can prove the following:

**Lemma 2** *Matrices  $A$ ,  $B$  and  $\Phi$  defined above satisfy :*

$$i) \alpha \Phi^{-1} A \Phi = A$$

ii)  $\forall F \in M_{r,n}(\mathbb{R})$  there exists  $\tilde{F} \in M_{r,n}(\mathbb{R})$  such that

$$B\tilde{F} = \alpha \Phi^{-1} B F \Phi$$

and  $\tilde{F}$  is given by the following formula :

$$\tilde{F} = \alpha B^T \Phi^{-1} B F \Phi$$

$$iii) \forall x \in \mathbb{R}^n : \alpha^{-n} \|x\| \leq \|\Phi x\| \leq \alpha^{-1} \|x\|$$

We can now prove the main result of this section.

**Theorem 1** *If the assumption (H) holds then the system (6.3) is G.E.S. at the origin by means of a linear feedback*

$$u = \tilde{F} x$$

where  $\tilde{F}$  is defined by (ii) and  $F$  is such that  $(A + BF)$  has all its eigenvalues with negative real part.

**Proof**

Since the pair  $(A, B)$  is controllable there exists  $F \in M_{r,n}(\mathbb{R})$  such that  $(A + BF)$  has all its eigenvalues with negative real part. Let  $M = A + BF$ , there exists a symmetric positive definite matrix  $S$  such that  $M^T S + SM = -Q$ ,  $Q$  symmetric positive definite

Now consider the function :

$$V(x) = x^T \Phi S \Phi x$$

$V$  is positive definite and proper ( $V$  is a quadratic Lyapunov function). Let us evaluate its derivative along the trajectories of the closed-loop system

$$\dot{x} = (A + B\tilde{F})x + g(x, \tilde{F}x) = \tilde{M}x + g(x, \tilde{F}x) \quad (6.7)$$

$$\dot{V}(x) = x^T (\Phi S \Phi \tilde{M} + \tilde{M}^T \Phi S \Phi)x + 2x^T \Phi S \Phi g(x, \tilde{F}x)$$

where  $\tilde{M} = A + B\tilde{F}$

Tacking into account (i) and (ii) we have

$$\tilde{M} = A + B\tilde{F} = \alpha\Phi^{-1}A\Phi + \alpha\Phi^{-1}BF\Phi$$

$$\tilde{M} = \alpha\Phi^{-1}(A + BF)\Phi = \alpha\Phi^{-1}M\Phi$$

Therefore :

$$\dot{V}(x) = \alpha x^T (\Phi S M \Phi + \Phi M^T S \Phi)x + 2x^T \Phi S \Phi g(x, \tilde{F}x)$$

$$\dot{V}(x) = -\alpha x^T \Phi Q \Phi x + 2x^T \Phi S \Phi g(x, \tilde{F}x)$$

The matrix  $Q$  is symmetyric definite positive so there exists a positive constant  $a$  such that :

$$x^T \Phi Q \Phi x \geq a \|\Phi x\|^2$$

where  $a = \inf \{z^T Q z / z \in S^{n-1} \text{ the unit sphere in } \mathbb{R}^n\}$

And then :

$$\dot{V}(x) \leq -\alpha a \|\Phi x\|^2 + 2\|\Phi x\| \|S\| \|\Phi g(x, \tilde{F}x)\|$$

According to (H) we have

$$\|\Phi g(x, \tilde{F}x)\|^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha^{2i}} g_i^2(x, \tilde{F}x) \leq K^2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha^{2i}} (x_1^2 + \dots + x_i^2)$$



$$\leq K^2 \sum_{j=1}^n \left( \frac{x_j}{\alpha^j} \right)^2 \left( 1 + \frac{1}{\alpha^2} + \dots + \frac{1}{\alpha^{2(n-j)}} \right) \leq nK^2 \|\Phi x\|^2$$

So

$$\dot{V}(x) \leq (-\alpha a + 2\sqrt{n} K \|S\|) \|\Phi x\|^2$$

If we choose  $\alpha > \text{Max} \left( 1, \frac{2\sqrt{n} K \|S\|}{a} \right)$  then  $\dot{V} \leq -c \|\Phi x\|^2$  where  $c$  is a positive constant.

Since  $\|\Phi x\| \geq \frac{1}{\alpha^n} \|x\|$  it follows that :

$$\dot{V}(x) \leq -c' \|x\|^2$$

where  $c'$  is a positive constant , and this completes the proof of theorem 1.  $\square$

### 6.3 Construction of the observer and stabilization using a state estimation

**Theorem 2** *If the condition (H) is satisfied then there exists  $\tilde{E} \in M_{n,p}(\mathbb{R})$  such that the system (6.6) is an exponential observer for (6.3-6.5).*

**Proof**

The error  $e = \hat{x} - x$  satisfies the following equation :

$$\dot{e} = (A - \tilde{E}C)e + g(\hat{x}, u) - g(x, u) \quad (6.8)$$

since  $(A,C)$  is observable, there exists  $E \in M_{n,p}(\mathbb{R})$  such that  $(A - EC)$  has all its eigenvalues with negative real part.

Remark that :

$$|g_i(x, u) - g_i(\hat{x}, u)| \leq K \|p_i(x - \hat{x})\| = K \|(e_1, \dots, e_i)\|$$

So if we take

$$\tilde{E} = \alpha \Phi^{-1} E C \Phi C^T$$

then , according to the proof of theorem 1, there exists a quadratic Lyapunov function  $W$  such that for  $\alpha$  large enough :

$$\dot{W}(e) \leq -b \|e\|^2, b > 0 \quad \blacksquare$$

Now we use the above results to achieve the stabilization of system (6.3) with the state estimation given by the observer (6.6). Consider the following system defined on  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B\tilde{F}\hat{x} + g(x, \tilde{F}\hat{x}) \\ \dot{e} = (A - \tilde{E}C)e + g(\hat{x}, \tilde{F}\hat{x}) - g(x, \tilde{F}\hat{x}) \end{cases} \quad (6.9)$$

**Theorem 3** *If the assumption (H) holds then (6.9) is globally exponentially stable i.e. the closed-loop system (6.3-6.5), with the state estimation given by the observer (6.6) is G.E.S.*

**Proof**

Since  $e = \hat{x} - x$ , system (6.9) becomes :

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + B\tilde{F})x + B\tilde{F}e + g(x, \tilde{F}\hat{x}) \\ \dot{e} = (A - \tilde{E}C)e + g(\hat{x}, \tilde{F}\hat{x}) - g(x, \tilde{F}\hat{x}) \end{cases} \quad (6.10)$$

According to the proofs of theorem 1 and theorem 2, there exist two quadratic Lyapunov functions  $V$  and  $W$  such that :

$$\begin{aligned} \langle \nabla V(x), (A + B\tilde{F})x + g(x, \tilde{F}\hat{x}) \rangle &\leq -c' \|x\|^2 \\ \langle \nabla W(e), (A - \tilde{E}C)e + g(\hat{x}, \tilde{F}\hat{x}) - g(x, \tilde{F}\hat{x}) \rangle &\leq -b \|e\|^2 \end{aligned}$$

where  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  is the usual Euclidean inner product on  $\mathbb{R}^n$ .

Let  $U$  be the function defined on  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  by :

$$U(x, e) = \beta V(x) + W(e), \beta > 0$$

$U$  is positive definite and proper and we have :

$$\begin{aligned} \dot{U}(x, e) = &\beta \langle \nabla V(x), (A + B\tilde{F})x + g(x, \tilde{F}\hat{x}) \rangle + \beta \langle \nabla V(x), B\tilde{F}e \rangle \\ &+ \langle \nabla W(e), (A - \tilde{E}C)e + g(\hat{x}, \tilde{F}\hat{x}) - g(x, \tilde{F}\hat{x}) \rangle \end{aligned}$$

So

$$\dot{U}(x, e) \leq -\beta c' \|x\|^2 + 2\beta K' \|x\| \|e\| - b \|e\|^2$$

where  $K'$  is a positive constant defined by :

$$\langle \nabla V(x), B \tilde{F} e \rangle \leq 2 K' \|x\| \|e\|$$

If we choose  $\beta$  such that  $0 < \beta < \frac{c' b}{K'^2}$  then  $\dot{U}(x, e)$  is negative definite on  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  and so theorem 3 is proved.

# 7

## STOCHASTIC STABILIZATION

Patrick Florchinger  
Abderrahman Iggidr  
Gauthier Sallet

URA CNRS No 399, Département de Mathématiques,  
UFR MIM, Université de Metz, Ile du Saulcy,  
F57045 METZ Cedex, France

and

INRIA Lorraine, Projet Congé,  
CESCOM, Technopole de Metz 2000,  
4 Rue Marconi,  
F57070 METZ, France.

**Summary** The aim of this paper is to study the stabilizability for a class of multi-inputs nonlinear stochastic systems. We prove under general assumptions the existence of a linear feedback law which stabilizes in probability the system at its equilibrium.

**Key Words** Nonlinear control system, Stochastic stabilization, Feedback law.

### Introduction

The aim of this paper is to study the existence of stabilizing control laws for multi-inputs control nonlinear stochastic differential systems.

The case of single-input deterministic systems of the form

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ \phi(x) \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} g_1(x_1) \\ g_2(x_1, x_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ g_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

where the functionals  $g_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , are Lipschitz continuous has received considerable attention in the literature.

The practical importance of single-output systems of this type is due to the fact that they are observable for any input and that a lot of concrete systems like mechanical systems or bioreactors are of this form (see [22], [24], [18]).

This kind of single-input deterministic systems has been studied from the point of view of the stabilization by means of a linear feedback law (see [49], [18]).

Our contribution in this paper, is to study multi-inputs systems of this type the state of which is corrupted by noise.

Actually, only few results on the stabilization by means of feedback laws of control stochastic differential equations can be found in the literature (see [20], [50], [19]).

Our approach in this paper is based on the stochastic Lyapunov Theorem which gives stability in probability.

This paper is divided in four sections organized as follows. In section 1, we recall some definitions and results on the Lyapunov stability in probability of the solution of a stochastic differential equation proved by Has'minskii [26]. In section 2, we introduce the class of control stochastic differential systems we are dealing with in this paper. In section 3, we state and prove the main result of this paper on the feedback stabilization of the class of control stochastic differential equations introduced in the previous section. In section 4, we discuss the relations between our work and the related literature.

## 7.1 Stochastic stability

The aim of this section is to recall the main definitions and results proved by Has'minskii [26] (chapter V) for the zero state of a stochastic differential equation to be stable in probability.

Let  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  be an usual probability space and denote by  $w$  a standard  $\mathbb{R}^m$ -valued Wiener process defined on this space.

Denote by  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  the complete right-continuous filtration generated by the standard Wiener process  $w$ .

Let  $x_t \in \mathbb{R}^n$  be the stochastic process solution of the stochastic differential equation written in the sense of Itô,

$$x_t = \int_0^t b(x_s) ds + \sum_{k=1}^m \int_0^t \sigma_k(x_s) dw_s^k \quad (7.1)$$

where  $b$  and  $\sigma_k$ ,  $1 \leq k \leq m$ , are Lipschitz functions mapping  $\mathbb{R}^n$  into  $\mathbb{R}^n$  such that

1.  $b(0) = 0$ ,  $\sigma_k(0) = 0$ ,  $1 \leq k \leq m$ .
2. There exists a non-negative constant  $K$  such that

$$|b(x)| + \sum_{k=1}^m |\sigma_k(x)| \leq K(1 + |x|)$$

for every  $x$  in  $\mathbb{R}^n$ .

Furthermore, for any  $s \geq 0$  and  $x \in \mathbb{R}^n$ , denote by  $x_t^{s,x}$ ,  $s \leq t$ , the solution at time  $t$  of equation (7.1) starting from the state  $x$  at time  $s$ .

Then, the main notions of stochastic stability we are dealing with in this paper may be defined by

**Definition 7.1.1** *The solution  $x_t \equiv 0$  of the stochastic differential equation (7.1) is said to be stable in probability if for any  $s \geq 0$  and  $\epsilon > 0$*

$$\lim_{x \rightarrow 0} P \left( \sup_{s < t} |x_t^{s,x}| > \epsilon \right) = 0.$$

Moreover, if for any  $s \geq 0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0} P \left( \lim_{t \rightarrow +\infty} |x_t^{s,x}| = 0 \right) = 1$$

*the solution  $x_t \equiv 0$  of the stochastic differential equation (7.1) is said to be asymptotically stable in probability. It is globally asymptotically stable in probability (G.A.S.P) if*

$$P \left( \lim_{t \rightarrow +\infty} |x_t^{s,x}| = 0 \right) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

**Definition 7.1.2** *The solution  $x_t \equiv 0$  of the stochastic differential equation (7.1) is said to be exponentially stable in mean square if for some positive constants  $A$  and  $\alpha$*

$$E|x_t|^2 \leq A|x_0|^2 \exp(-\alpha t), \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$$

Therefore, denoting by  $L$  the infinitesimal generator associated with the stochastic differential equation (7.1) defined for any function  $\Psi$  in  $C^2(\mathbb{R}^n)$  by

$$L\Psi(x) = \sum_{i=1}^n b^i(x) \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a^{i,j}(x) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i \partial x_j}(x) \quad (7.2)$$

where  $a^{i,j}(x) = \sum_{k=1}^m \sigma_k^i(x) \sigma_k^j(x)$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , one can prove the following stochastic Lyapunov Theorem (see [2], [26]),

**Theorem 7.1.3** *Let  $D$  be a neighbourhood of the point  $x = 0$  which is contained in  $\mathbb{R}^n$  together with its boundary and, assume there exists a Lyapunov function  $V$  defined in  $D$  (i.e. a proper function  $V$  positive definite mapping  $D$  into  $\mathbb{R}$ ) such that*

$$LV(x) \leq 0 \quad (\text{respectively } LV(x) < 0) \quad \forall x \in D, x \neq 0$$

*Then, the solution  $x_t \equiv 0$  of the stochastic differential equation (7.1) is stable (respectively asymptotically stable) in probability. It is G.A.S.P if*

$$LV(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$$

*The solution  $x_t \equiv 0$  of the stochastic differential equation (7.1) is exponentially stable in mean square if there exists a Lyapunov function  $V$  such that*

$$k_1|x|^2 \leq V(x) \leq k_2|x|^2$$

$$LV(x) \leq -k_3|x|^2$$

*for certain positive constants  $k_1, k_2, k_3$ .*

In this paper, we shall make use of the latter Theorem in order to prove that the class of nonlinear stochastic differential equation introduced in the following section is exponentially stabilizable in mean square by means of a linear feedback law.

## 7.2 Setting of the problem

In this section, we introduce the class of control stochastic nonlinear systems we are dealing with in this paper.

Denote by  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  an usual probability space and by  $w$  a standard Wiener process defined on this space with values in  $\mathbb{R}^n$ .

Let  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  be the complete right-continuous filtration generated by the Wiener process  $w$ .

In this paper, we consider the stochastic process  $x_t \in \mathbb{R}^n$  solution of the following multi-inputs stochastic differential equation written in the sense of Itô,

$$x_t = \int_0^t (Ax_s + Bu + f(x_s, u)) ds + \int_0^t g(x_s, u) dw_s \quad (7.3)$$

where

1.  $u$  is a  $\mathbb{R}^r$ -valued control law.
2.  $A$  and  $B$  are matrices in  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  and  $\mathcal{M}_{n \times r}(\mathbb{R})$  in Brunovsky canonical form, i.e.
  - $A$  is a block-diagonal matrix of the form

$$A = \begin{pmatrix} A_{k_1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & A_{k_r} \end{pmatrix}$$

where  $A_{k_i}$ ,  $1 \leq i \leq r$ , is a matrix in  $\mathcal{M}_{k_i}(\mathbb{R})$  given by

$$A_{k_i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

- $B$  is a block-diagonal matrix of the form

$$B = \begin{pmatrix} b_{k_1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & b_{k_r} \end{pmatrix}$$

where  $b_{k_i}$ ,  $1 \leq i \leq r$ , is a column-vector in  $\mathbb{R}^{k_i}$  given by



$$b_{k_i} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3.  $f$  and  $g$  are Lipschitz-continuous functionals mapping  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$  into  $\mathbb{R}^n$  such that

- $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$ .
- There exists  $\Lambda > 0$  such that for any  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  and  $u \in \mathbb{R}^r$ ,

$$|f_i(x, u)| + |g_i(x, u)| \leq \Lambda \|\pi_i(x)\|$$

where  $\pi_i$  denotes the canonical projection of  $\mathbb{R}^n$  onto  $\mathbb{R}^i$  and,  $\|\cdot\|$  denotes the usual Euclidian norm in  $\mathbb{R}^i$ .

On the other hand, introduce the following definition of a stabilizing feedback law for the system (7.3),

**Definition 7.2.1** A control law  $u$  mapping  $\mathbb{R}^n$  into  $\mathbb{R}^r$  is said to be a stabilizing feedback law for the control stochastic system (7.3) if the zero state of the closed-loop system

$$x_t = \int_0^t (Ax_s + Bu(x_s) + f(x_s, u(x_s))) ds + \int_0^t g(x_s, u(x_s)) dw_s \quad (7.4)$$

is exponentially stable in mean square.

## 7.3 Stabilization

In this section, we prove the main result of this paper on the stabilization by means of linear feedback laws of the class of nonlinear systems introduced in the previously.

The main result of this paper is the following,

**Theorem 7.3.1** The control stochastic differential equation (7.3) is exponentially stabilizable in mean square (so it is G.A.S.P) by means of a linear feedback law.

**Proof of Theorem 7.3.1** Let  $\alpha$  be a real number,  $\alpha > 1$ , and denote by  $\Phi$  the diagonal matrix in  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  given by

$$\Phi = \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha^{-n} \end{pmatrix}$$

Note that the matrix  $\Phi$  can be written as the block-diagonal matrix

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_{k_1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \Phi_{k_r} \end{pmatrix}$$

where  $\Phi_{k_i}$ ,  $1 \leq i \leq r$ , is the matrix in  $\mathcal{M}_{k_i}(\mathbb{R})$  defined by

$$\Phi_{k_i} = \begin{pmatrix} \alpha^{-(k_{i-1}+1)} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha^{-(k_{i-1}+k_i)} \end{pmatrix}$$

with  $k_0 = 0$ .

Moreover, for our proof, we need the following auxiliary result which can be proved by an easy computation,

**Lemma 7.3.2** *The following three properties hold,*

1.  $\alpha\Phi^{-1}A\Phi = A$ .
2. For any matrix  $K$  in  $\mathcal{M}_{r \times n}(\mathbb{R})$ , there exists a matrix  $\bar{K}$  in  $\mathcal{M}_{r \times n}(\mathbb{R})$  such that

$$B\bar{K} = \alpha\Phi^{-1}BK\Phi$$

and,  $\bar{K}$  is defined by

$$\bar{K} = \alpha B^* \Phi^{-1} B K \Phi. \quad (7.5)$$

(Here  $\star$  denotes the transposition of matrices)

3. For any  $x$  in  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\alpha^{-n}\|x\| \leq \|\Phi x\| \leq \alpha^{-1}\|x\|.$$

Turning back to the proof of Theorem 7.3.1, we know, since the pair of matrices  $(A,B)$  is completely controllable, that there exists a matrix  $K$  in  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  such that the matrix  $A + BK$  is asymptotically stable.

Setting  $M = A + BK$ , one can deduce easily from properties 1 and 2 in Lemma 7.3.2 that there exists a matrix  $\bar{K}$  in  $\mathcal{M}_{r \times n}(\mathbb{R})$  given by (7.5) (see [28]) such that

$$A + B\bar{K} = \alpha\Phi^{-1}M\Phi. \quad (7.6)$$

In the following, we prove that the linear control law  $u$  defined for any  $x \in \mathbb{R}^n$  by

$$u(x) = \bar{K}x \quad (7.7)$$

is a stabilizing feedback law for the system (7.3).

Therefore, according with Definition 7.2.1, we need to prove that the zero state of the closed-loop system

$$x_t = \int_0^t \left( (A + B\bar{K})x_s + f(x_s, \bar{K}x_s) \right) ds + \int_0^t g(x_s, \bar{K}x_s) dw_s \quad (7.8)$$

deduced from (7.3) when the control law  $u$  is given by (7.7) is asymptotically stable in probability.

Let  $Q_1$  be a symmetric and positive definite matrix in  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Since the matrix  $M$  is asymptotically stable, it is well-known that the Lyapunov equation

$$M^*P_1 + P_1M = -Q_1 \quad (7.9)$$

admits a unique symmetric positive definite solution  $P_1$ .

Therefore, the function  $V$  mapping  $\mathbb{R}^n$  into  $\mathbb{R}$  defined for any  $x$  in  $\mathbb{R}^n$  by

$$V(x) = \langle \Phi P_1 \Phi x, x \rangle \quad (7.10)$$

is a Lyapunov function.

Furthermore, denoting by  $L$  the infinitesimal generator associated with the closed-loop system (7.8), yields

$$\begin{aligned} LV(x) = & \langle (A + B\bar{K})x + f(x, \bar{K}x), DV(x) \rangle \\ & + \frac{1}{2} \text{Tr} \left( g(x, \bar{K}x)g(x, \bar{K}x)^* D^2V(x) \right). \end{aligned} \quad (7.11)$$

Taking into account the expression of  $V$  into (7.11) gives,

$$LV(x) = \langle ((A + B\bar{K})^* \Phi P_1 \Phi + \Phi P_1 \Phi (A + B\bar{K}))x, x \rangle + 2 \langle \Phi P_1 \Phi f(x, \bar{K}x), x \rangle + g(x, \bar{K}x)^* \Phi P_1 \Phi g(x, \bar{K}x). \quad (7.12)$$

Then, according with (7.6), it holds,

$$LV(x) = \alpha \langle \Phi (M^* P_1 + P_1 M) \Phi x, x \rangle + 2 \langle P_1 \Phi f(x, \bar{K}x), \Phi x \rangle + \langle P_1 \Phi g(x, \bar{K}x), \Phi g(x, \bar{K}x) \rangle. \quad (7.13)$$

Moreover, since  $P_1$  solves the Lyapunov equation (7.9), yields

$$LV(x) = -\alpha \langle Q_1 \Phi x, \Phi x \rangle + 2 \langle P_1 \Phi f(x, \bar{K}x), \Phi x \rangle + \langle P_1 \Phi g(x, \bar{K}x), \Phi g(x, \bar{K}x) \rangle. \quad (7.14)$$

Hence,

$$LV(x) = -\alpha \langle Q_1 \Phi x, \Phi x \rangle + \|P_1\| \left( 2 \|\Phi f(x, \bar{K}x)\| \|\Phi x\| + \|\Phi g(x, \bar{K}x)\|^2 \right). \quad (7.15)$$

Furthermore, to conclude the proof of Theorem 7.3.1, one needs the following result,

**Lemma 7.3.3** *Under the hypothesis on functions  $f$  and  $g$  stated in section 2, for any  $x \in \mathbb{R}^n$  yields,*

- $\|\phi f(x, \bar{K}x)\| \leq \sqrt{n}\Lambda \|\phi x\|,$
- $\|\phi g(x, \bar{K}x)\| \leq \sqrt{n}\Lambda \|\phi x\|.$

**Proof of Lemma 7.3.3** For any  $x \in \mathbb{R}^n$  yields,

$$\|\phi f(x, \bar{K}x)\|^2 \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha^{2i}} |f_i(x, \bar{K}x)|^2.$$

Therefore, according with the hypothesis stated in section 2, it holds

$$\|\phi f(x, \bar{K}x)\|^2 \leq \Lambda^2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha^{2i}} (x_1^2 + \dots + x_i^2).$$

Then, one has

$$\|\phi f(x, \bar{K}x)\|^2 \leq \lambda^2 \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i}{\alpha^i} \right)^2 \left( 1 + \frac{1}{\alpha^2} + \dots + \frac{1}{\alpha^{2(n-i)}} \right)$$

which implies

$$\|\phi f(x, \bar{K}x)\|^2 \leq n\Lambda^2 \|\phi x\|^2.$$

Hence, the proof of the first inequality in Lemma 7.3.3 is complete. The second inequality is proved by similar computations.

This concludes the proof of Lemma 7.3.3.

On the other hand, since  $Q_1$  is a symmetric and positive definite matrix, there exists a positive constant  $\gamma_1$  ( $\gamma_1 = \inf\{\langle Q_1 z, z \rangle / \|z\| = 1\}$ ) such that

$$\gamma_1 \|\Phi x\| \leq \langle Q_1 \Phi x, \Phi x \rangle. \quad (7.16)$$

Then, according with (7.15), (7.16) and Lemma 7.3.3 yields,

$$LV(x) \leq \left(-\alpha\gamma_1 + (2\sqrt{n}\Lambda + n^2\Lambda^2)\|P_1\|\right) \|\Phi x\|^2. \quad (7.17)$$

Thus, choosing  $\alpha > \max\left\{1, \frac{2\sqrt{n}\Lambda + n^2\Lambda^2}{\gamma_1}\|P_1\|\right\}$  one has,

$$LV(x) \leq -\lambda_1 \|\Phi x\|^2 \quad (7.18)$$

where  $\lambda_1$  is a positive constant.

Moreover, by means of the left hand side of property 3 in Lemma 7.3.2, yields

$$LV(x) \leq -\frac{\lambda_1}{\alpha^n} \|x\|^2. \quad (7.19)$$

Therefore,  $LV$  is negative definite and, according with Theorem 7.1.3, the zero state of the closed-loop system (7.8) is asymptotically stable in probability.

This completes the proof of Theorem 7.3.1.

## 7.4 Related results

The aim of this section is to situate our work with respect to related results already published in the literature.

The stabilization of the deterministic part of the class of systems considered in this paper (i.e. assuming that  $g \equiv 0$ ) has been investigated when the number of blocks in the Brunovsky form of the matrices in the linear part of the system equals 1 by

Tsinias [49] and Deza, Busvelle, Gauthier and Rakotopara [18] and, for general indices by Iggidr and Sallet [28].

The existence of stabilizing feedback laws for control linear stochastic systems deduced from (7.3) (i.e.  $f \equiv 0$  and  $g(x) = Dx$  where  $D$  is a lower-triangular matrix in  $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ ) has been studied by Gao and Ahmed [20] in the case of matrices  $D$  of the form  $\lambda I, \lambda \in \mathbb{R}$  (the condition on matrix  $D$  given in [20] leads to matrices of such form). A more general condition on the matrix  $D$  which would allow to consider more general matrices than lower-triangular ones in our application is provided in [21] but, the proof of Lemma 3.3 leading to the stabilization result contains an error which seems to be untractable.

Note that by using a different method of proof, one can allow the matrix  $D$  to be more general than lower-triangular (see for exemple [50]). In these latter work, the proof is based on the existence of a solution to a stochastic Lyapunov equation which contains a nonlinear term involving the matrix  $D$  and do not allow to rescale the solution as we are doing in this paper.



# Bibliographie

- [1] A. Andreini, A. Bacciotti, and G. Stefani. Global stabilizability of homogeneous vector fields of odd degree. *Systems & Control Letters*, (10):251–256, (1988).
- [2] L. Arnold. *Stochastic differential equations : Theory and applications*. Wiley–New York, (1974).
- [3] Z. Arstein. Stabilization with relaxed controls. *Nonlinear Anal. TMA*, (7):1163–1173, (1983).
- [4] A. Bacciotti and P. Boieri. Linear stabilizability of planar nonlinear systems. *Math. Control Signals Systems*, (3):183–193, (1990).
- [5] A. Bacciotti and P. Boieri. A characterization of single input planar bilinear systems which admit a smooth stabilizer. *Systems & Control Letters*, (16):139–143, (1991).
- [6] W. Boothby and R. Marino. Feedback stabilization of planar nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, (12):87–92, (1989).
- [7] W.M. Boothby. Stabilization of planar single input systems by smooth feedback. In *Colloque international sur l'analyse des systèmes contrôlés–Lyon*, (1990).
- [8] R.W. Brockett. *Differential Geometric Control Theory*, chapter Asymptotic stability and feedback stabilization, pages 181–191. Brockett, Milmann, Sussmann, 1983.
- [9] C. Byrnes and A. Isidori. New results and examples in nonlinear feedback stabilization. *Systems & Control Letters*, (12):437–442, (1989).
- [10] J. Carr. *Applications of Center Manifold Theory*. Springer Verlag–New York, (1981).
- [11] R. Chabour and A. Iggidr. Stabilization of planar nonlinear systems. In *Second IFAC Workshop on System Structure and Control – Prague(Czechoslovakia)*, 3–5 September, 1992.



- [12] R. Chabour, G. Sallet, and J.C. Vivalda. Stabilization of nonlinear two dimensional systems : a bilinear approach. In *NOLCOS'92 - Bordeaux(France)*, 24–26 june, 1992.
- [13] R. Chabour and J.C. Vivalda. Stabilisation des systèmes bilinéaires dans le plan. *C.R Acad.Sci.Paris.*, (312):1017–1020, (1991).
- [14] R. Chabour and J.C. Vivalda. Stabilisation des systèmes bilinéaires dans le plan par une commande non régulière. In *European Control Conference*, pages 485–487. Hermes, July 1991.
- [15] J.M. Coron and L. Praly. Adding an integrator for the stabilization problem. *Systems & Control Letters*, (17):89–104, (1991).
- [16] W.P. Dayawansa and C.F. Martin. Asymptotic stabilization of two-dimensional real analytic systems. *Systems & Control Letters*, (12):205–211, (1989).
- [17] W.P. Dayawansa, C.F. Martin, and G. Knowles. Asymptotic stabilization of a class of smooth two-dimensional systems. *SIAM J. Control and Optimization*, (28):1321–1349, (1990).
- [18] F. Deza, E. Busvelle, J.P. Gauthier, and D. Rakotopara. High gain estimation for nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, (18):295–299, (1992).
- [19] P. Florchinger. A universal formula for the stabilization of control stochastic differential equations. To appear in *Stochastic Analysis and Applications*.
- [20] Z.Y. Gao and N.U. Ahmed. Stabilizability of certain stochastic systems. *International Journal of Systems Science*, (Vol 17, No 8):1175–1185, (1986).
- [21] Z.Y. Gao and N.U. Ahmed. Feedback stabilizability of nonlinear stochastic systems with state-dependent noise. *International Journal of Control*, (Vol 45, No 2):729–737, (1987).
- [22] J.P. Gauthier and G. Bornard. Observability for any  $u(t)$  of a class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic and Control*, (26):922–926, (1981).
- [23] J.P. Gauthier and G. Bornard. *Outils et modèles mathématiques pour l'automatique et la théorie du signal*, chapter Stabilisation des systèmes non linéaires, pages 307–324. Editions du CNRS, 1981.
- [24] J.P. Gauthier, H. Hammouri, and S. Othman. A simple observer for nonlinear systems, application to bioreactors. To appear in *IEEE trans.aut.control*.
- [25] W. Hahn. *Stability of Motion*. Springer Verlag, (1967).

- [26] R.Z. Has'minskii. *Stochastic stability of differential equations*. Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, (1980).
- [27] H. Hermes. Homogeneous coordinates and continuous stabilizing feedback controls. In *Differential Equations. Stability and Control*. S. Elaydi, 1990.
- [28] A. Iggidr and G. Sallet. Exponential stabilization of nonlinear systems by an estimated state feedback. To appear.
- [29] A. Iggidr and G. Sallet. Integrators and nonlinear stabilization. In *Second IFAC Workshop on System Structure and Control - Prague (Czechoslovakia)*, 3-5 September, 1992.
- [30] A. Iggidr and J.C. Vivalda. Global stabilization of homogeneous polynomial systems in  $\mathbb{R}^n$ . *Nonlinear Anal. TMA*, (Vol 18, No12):1181-1186, (1992).
- [31] A. Iggidr and J.C. Vivalda. Local stabilization of analytic systems with  $n - 1$  inputs. In *NOLCOS'92 - Bordeaux (France)*, 24-26 june, 1992.
- [32] B. Jakubczyk and W. Respondek. Feedback classification of analytic control systems in the plane. In *Colloque international sur l'analyse des systèmes contrôlés-Lyon*, (1990).
- [33] V. Jurdjevic and J.P. Quinn. Controllability and stability. *Journal of Differential Equations*, (28):381-389, (1978).
- [34] M. Kawski. Stabilization of nonlinear systems in the plane. *Systems & Control Letters*, (12):169-175, (1990).
- [35] D.E. Koditscheck. Adaptive techniques for mechanical systems. In *Fifth Yale workshop on adaptive systems*, pages 259-265. Yale University, New Haven, CT, 1987.
- [36] P.V. Kokotovic and H.J. Sussmann. A positive real condition for global stabilization of nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, (13):125-133, (1989).
- [37] J. Kurzweil. On the inversion of liapunov's second theorem on stability of motion. *AMS Translations*, 24:19-77, (1963).
- [38] J. Lasalle and S. Lefschetz. *Stability by Liapunov's direct method with applications*. Academic Press, New-York, (1961).
- [39] J.L. Massera. Contribution to stability theory. *Annals of Mathematics*, (64):182-206, (1956).

- [40] H. Nijmeijer and A.J. van der Schaft. *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer Verlag, (1990).
- [41] R. Outbib and G. Sallet. Stabilizability of the angular velocity of a rigid body revisited. *Systems & Control Letters*, (18):93–98, (1992).
- [42] A. Saberi, P.V. Kokotovic, and H.J. Sussmann. Global stabilization of partially linear composed systems. *SIAM J. Control and Optimisation*, (28):1491–1503, (1990).
- [43] P. Seibert and R. Suarez. On the problem of stability in the presence of an invariant manifold. application to stabilizability of nonlinear control systems. *Reporte de Investigacion UAM-I, Mexico*, Vol. VI, No 4, (1988).
- [44] E.D. Sontag. A universal construction of arstein's theorem on nonlinear stabilization. *Systems & Control Letters*, (13):117–123, (1989).
- [45] E.D. Sontag. Feedback stabilization of nonlinear systems. In *Robust Control of Linear Systems and Nonlinear Control*, pages 61–81. Eds Kaashoek M.A, van Schuppen J.H, Ran A.C.M, Birkhauser, 1990.
- [46] E.D. Sontag. *Mathematical Control Theory*. Springer Verlag, (1990).
- [47] E.D. Sontag and H.J. Sussmann. Further comments on the stabilizability of the angular velocity of the rigid body. *Systems & Control Letters*, (12):213–217, (1988).
- [48] M. Spivak. *Differential geometry*, volume 1. Publish or Perish, Inc, (1979).
- [49] J. Tsiniias. A theorem on global stabilization. *Systems & Control Letters*, (17):357–362, (1991).
- [50] J.L. Willems and J.C. Willems. Robust stabilization of uncertain systems. *SIAM J. Control and Optimization*, (Vol 21, No3):352–374, (1983).