



**HAL**  
open science

## Contribution à l'étude de l'aptitude au formage d'alliages de symétrie hexagonale

Jean-Jacques Fundenberger

► **To cite this version:**

Jean-Jacques Fundenberger. Contribution à l'étude de l'aptitude au formage d'alliages de symétrie hexagonale. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université Paul Verlaine - Metz, 1992. Français. NNT : 1992METZ039S . tel-01776005

**HAL Id: tel-01776005**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01776005>**

Submitted on 24 Apr 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

079 368

**CONTRIBUTION A L'ETUDE DE L'APTITUDE AU FORMAGE  
D'ALLIAGES DE SYMETRIE HEXAGONALE**

PAR

Jean-Jacques FUNDENBERGER

-----  
THESE

Soutenu le 15 janvier 1992 à l'UFR MIM-Sciences de  
l'Université de Metz, en vue de l'obtention du grade de

Docteur d'Université - mention : Sciences de l'Ingénieur

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv.	19920805
Cote	S/M3 92/39
Loc	Magasin



**JURY**

MM	F. WAGNER	Professeur à l'Université de Metz	Directeur de thèse
	P. VAN HOUTTE	Professeur à l'Uni. de Leuven (Belgique)	Rapporteur
	G. CANOVA	Directeur de Recherches, GPM2, ENSPG, S <sup>1</sup> Martin d'Herès	Rapporteur
Mme	M.J. PHILIPPE	Professeur à l'Université de Metz	Examineur
MM	M. ARMINJON	Docteur habilité en Sciences Physiques, Institut de Mécanique -3S- Grenoble	Examineur
	B. CHENAL	Ingénieur de Recherche Centre de Recherches de Voreppe S.A.	Examineur
	C. ESLING	Professeur à l'Université de Metz	Examineur

## SOMMAIRE

Introduction .....	3
I) Les surfaces de charge .....	5
I-1) Définition .....	5
I-2) Modélisation des surfaces de charge .....	8
I-2-1) Les critères plastiques phénoménologiques .....	8
-Tresca .....	8
-Von Mises .....	8
-Hill .....	10
-Budianski .....	10
-Gotoh .....	11
I-2-2) Les modèles polycristallins .....	12
I-2-2-1) Taylor-Bishop-Hill .....	12
a) Hypothèses .....	12
b) Description de la méthode .....	12
c) Les modes de déformation à considérer .....	14
d) Détermination des $m_1^{mn}$ .....	15
e) Calcul des $\bar{M}$ .....	17
f) Sections dans la C.L.E.P. .....	17
g) Limites .....	18
I-2-2-2) Statique .....	19
a) Hypothèses .....	19
b) Description méthode .....	19
c) Limites .....	22
I-2-2-3) Auto-cohérent .....	23
a) Hypothèses .....	23
b) Le modèle auto-cohérent .....	23
c) Méthode de détermination de la CLEP .....	26
I-3) Détermination expérimentale .....	27
I-4) Application aux cubiques .....	29
I-4-1) Spécificité du cubique .....	29
I-4-2) Les matériaux étudiés .....	29
a) Microstructure .....	30
b) Texture .....	30
c) Propriétés mécaniques .....	31
II) Application aux hexagonaux .....	47
II-1) Spécificité des hexagonaux .....	47
II-1-1) Le glissement .....	47
II-1-2) Le maclage .....	48
II-1-3) Le maclage haute température dans les alliages de zirconium .....	48
II-2) Choix des cisssions et modélisation .....	52
a) Coefficient d'anisotropie .....	52
b) Evolution de texture .....	54

II-2-1) Le zirconium .....	61
- La microstructure .....	61
- La texture .....	61
- Les conditions de simulation .....	61
- Les propriétés mécaniques .....	62
- Discussion .....	62
II-2-2) Les alliages de titane .....	76
- Les microstructures .....	76
- Les textures .....	77
- Les conditions de simulation .....	77
- Les propriétés mécaniques .....	78
- Discussion .....	79
II-2-3) Le zinc .....	79
- La microstructure .....	89
- La texture .....	89
- Les conditions de simulation .....	89
- Les propriétés mécaniques .....	90
- Discussion .....	90
III) Les courbes limite de formage .....	94
III-1) Définition .....	94
III-2) Détermination expérimentale .....	94
III-2-1) Essais simulatifs .....	94
a) Le retreint .....	94
b) La traction plane .....	95
c) L'expansion .....	95
III-2-2) Dépouillement des essais .....	95
III-2-3) Facteurs influençant les CLF .....	95
a) Coefficient d'anisotropie .....	95
b) Coefficient d'écrouissage .....	96
c) Epaisseur matériau .....	96
d) Vitesse de déformation .....	96
e) Taille des grilles .....	96
f) Trajectoire de déformation .....	97
III-3) CLF théoriques .....	101
III-3-1) Le critère de Swift .....	101
III-3-2) Le critère de Hill .....	103
III-3-3) Analyse de la bifurcation .....	107
III-3-4) Approche avec défaut initial .....	111
III-3-4-1) Cas isotrope (Marciniak et al.) .....	111
III-3-4-2) Cas anisotrope: prise en compte de la texture .....	114
III-4) Résultats .....	116
Conclusion .....	121

## INTRODUCTION

Parmi les métaux de symétrie hexagonale certains possèdent des caractéristiques spécifiques très intéressantes. Le titane par exemple allie faible densité et haute résistance mécanique, ce qui en fait un matériau de choix pour la construction aéronautique. Le zirconium trouve des applications dans l'industrie nucléaire du fait de sa faible section de capture des neutrons thermiques. Le zinc de par sa très bonne résistance à la corrosion est très utilisé dans le bâtiment.

Cependant pour exploiter les propriétés fort intéressantes de ces matériaux, il faut les mettre en forme. Les difficultés d'emboutissage du titane et du zirconium ont conduit les métallurgistes et les mécaniciens à s'interroger sur la nature des mécanismes mis en jeu lors du formage.

Le but du présent travail est de développer des outils fiables pour prévoir et comprendre la formabilité de tôles d'alliages à symétrie hexagonale.

Pour l'emboutisseur, les deux limites de l'écoulement plastique sont :

- l'état de contrainte à appliquer afin de déclencher cet écoulement,
- l'état de déformation qui conduit à la striction ou la rupture.

Les courbes limite d'écoulement plastique (CLEP) et les courbes limite de formage (CLF) définissent ces deux limites.

Les CLF permettent une évaluation directe de la formabilité d'une tôle, elles constituent donc un excellent indicateur de la capacité au formage. Les métaux hexagonaux présentent généralement une anisotropie marquée qui doit être prise en compte lors du calcul des CLF. La prise en compte de l'anisotropie est faite à travers les courbes limite d'écoulement plastique (CLEP) qui décrivent sous quels états de contraintes la déformation plastique apparaît. La détermination des CLEP s'effectue grâce à un modèle de déformation plastique qui tient compte des mécanismes microscopiques de déformation plastique et de la texture cristallographique. Les derniers développements en matière d'analyse de texture garantissent la positivité des figures de pôles recalculées et de la fonction densité des orientations (FDO). Le soin à apporter à la détermination de la texture est motivé par l'influence primordiale qu'elle exerce sur la formabilité. Pour accéder à la texture globale de la tôle par exemple, la mesure des figures de pôles par diffraction des rayons X nous oblige à faire plusieurs mesures dans l'épaisseur.

Chaque alliage possède un système de glissement prépondérant qui est dans la plupart des cas bien identifié. Néanmoins pour accommoder la déformation plastique, l'intervention de systèmes secondaires est nécessaire. Les données concernant ces systèmes secondaires qui peuvent être du glissement ou du maclage, sont souvent partielles. L'identification en microscopie électronique à

transmission est longue et difficile. Cependant les fréquences d'apparition des différents systèmes de déformation observées en microscopie, fournissent un point de départ à la modélisation. En se basant sur l'évolution de texture et le recalcul du coefficient d'anisotropie et de la limite élastique, la modélisation permet de comprendre l'influence des différents paramètres.

Dans une étape ultérieure l'introduction des CLEP dans les codes de calcul par éléments finis permet d'introduire l'anisotropie dans le comportement plastique.

Dans une première partie, nous présenterons la modélisation des courbes limite d'écoulement plastique. La détermination expérimentale des CLEP n'est pas aisée, c'est pourquoi la confrontation du modèle et de l'expérience est basée sur des caractéristiques mécaniques classiques telles que limite élastique et coefficient d'anisotropie. La majeure partie de l'étude et des résultats théoriques concerne le modèle de Taylor-Bishop-Hill. On présentera également quelques résultats obtenus avec un modèle statique et un modèle auto-cohérent.

Dans le chapitre I on exposera la méthode de calcul des CLEP après un rappel théorique des modèles utilisés. Une étape préliminaire consiste à calculer les CLEP dans le cas de deux alliages d'aluminium (de symétrie cubique) dans le but de valider la démarche et de mettre en évidence l'influence de la texture sur les CLEP et sur la formabilité.

Dans le chapitre II, le calcul des CLEP adaptées à la symétrie hexagonale a été appliqué aux alliages de zirconium, de titane et de zinc. On discutera de la validité des résultats théoriques en s'appuyant sur les valeurs expérimentales du coefficient d'anisotropie et de la limite élastique.

Enfin dans le chapitre III, on présentera la méthode que l'on prévoit d'utiliser pour calculer les CLF en tenant compte de l'anisotropie par l'intermédiaire des CLEP. Les CLF expérimentales des quatre alliages étudiés ont été tracées. Dans deux cas, les CLF théoriques ont également été déterminées.

## I) Les courbes limites d'écoulement plastique

### I-1) Définition

En chargement uniaxial, l'écoulement plastique survient lorsque la contrainte atteint une valeur seuil appelée limite élastique. Pour des chargements plus complexes, on définit une surface qui représente les états de contrainte pour lesquels la limite élastique est atteinte. Cette courbe limite d'écoulement plastique (CLEP) est caractérisée par une fonction seuil:

$$f(\sigma_{ij}) = 0. \quad (I-1)$$

où  $\sigma_{ij}$  désigne le tenseur des contraintes.

Dans la suite on fera l'hypothèse que les matériaux étudiés ont un comportement plastique indépendant de la pression hydrostatique. Ceci revient à dire que la fonction seuil ne dépend que du déviateur  $S_{ij}$  du tenseur des contraintes:

$$f(S_{ij}) = 0. \quad (I-2)$$

La CLEP est donc une surface dans l'espace des contraintes déviatoriques de dimension 5. Pour des raisons de commodité de lecture, on trace des représentations bidimensionnelles des CLEP. On distingue habituellement 2 types de représentations planes [1], [2] et [3]:

- les coupes (sections)
- les projections

La figure I-1, est une représentation schématique tridimensionnelle de la différence entre une section et une projection de la CLEP. On notera que les directions de déformation dans le cas d'une section ne sont pas forcément contenues dans le plan de coupe. Un sous-espace sera appelé fermé si la section et projection coïncident dans ce sous-espace d'après la définition donnée par Canova [2]. Dans ce cas incrément de déformation et incrément de contrainte sont contenus dans le sous-espace.

Une représentation particulière très utilisée est la section qui passe par l'origine et qui est perpendiculaire à la première trissectrice. On la nomme la section dans le plan  $\pi$ .

Pour des matériaux obéissant à la loi de Schmid, le principe du travail maximum permet d'établir d'importantes propriétés:

- la fonction seuil est le potentiel plastique ce qui se traduit par les relations:  $D_{ij} = \lambda \frac{\delta f}{\delta \sigma_{ij}}$  (I-3)

qui montrent que le vecteur vitesse de déformation plastique  $D_{ij}$  est normal à la CLEP.

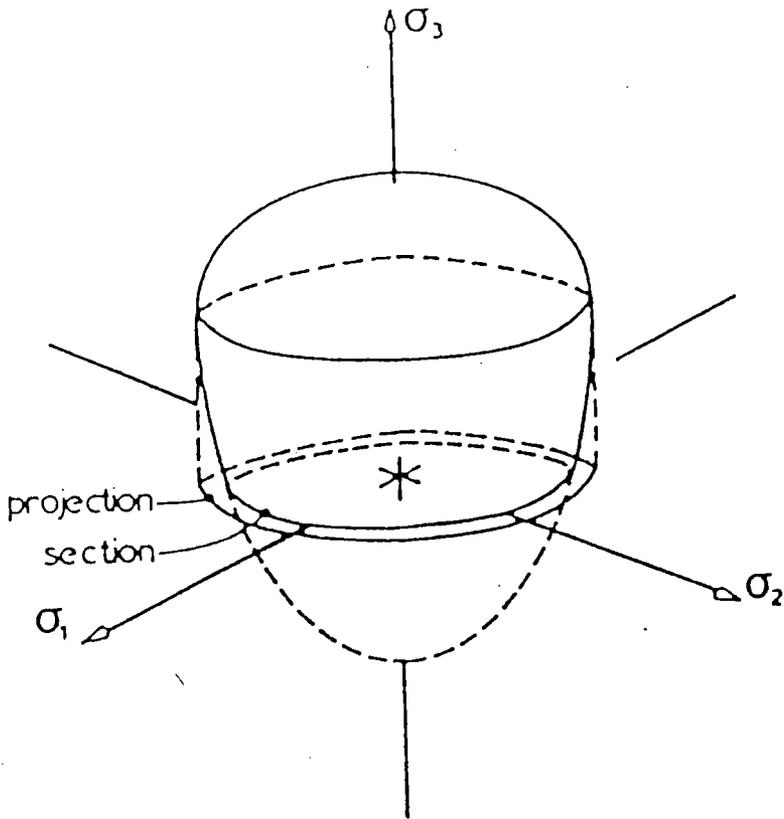


Fig. I-1: Illustration schématique de la différence entre une section et une projection de la CLEP. [2]

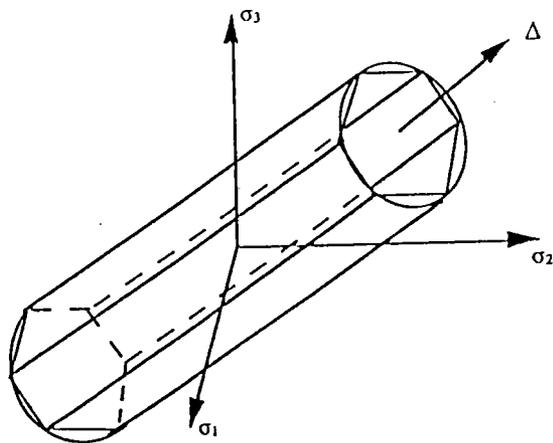


Fig. I-3: Représentation géométrique des critères de Misès (cylindre circulaire) et de Tresca (prisme hexagonal) d'après [5].

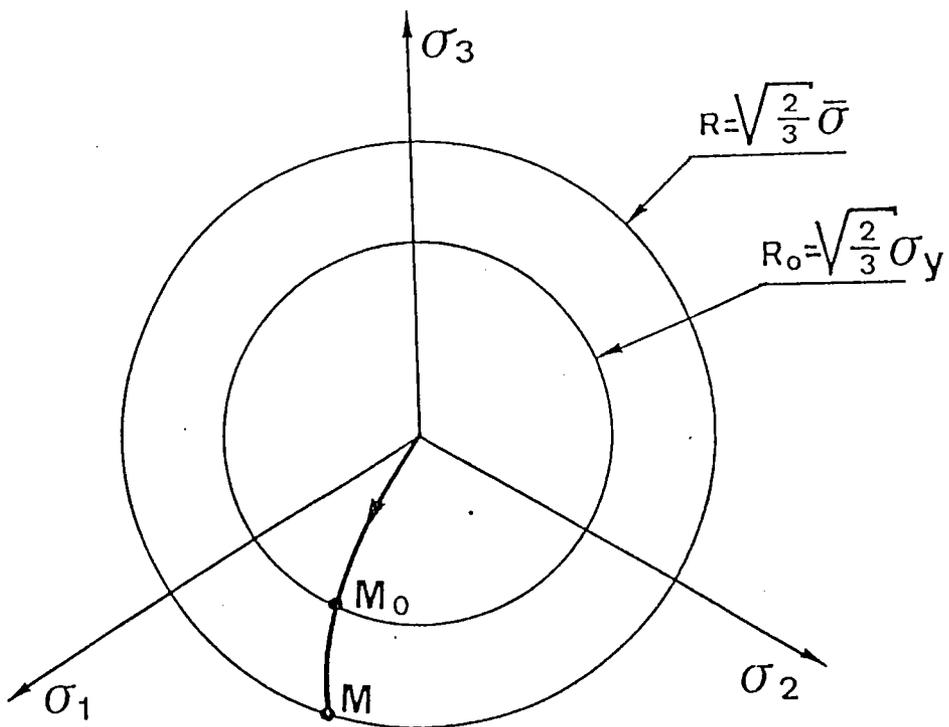
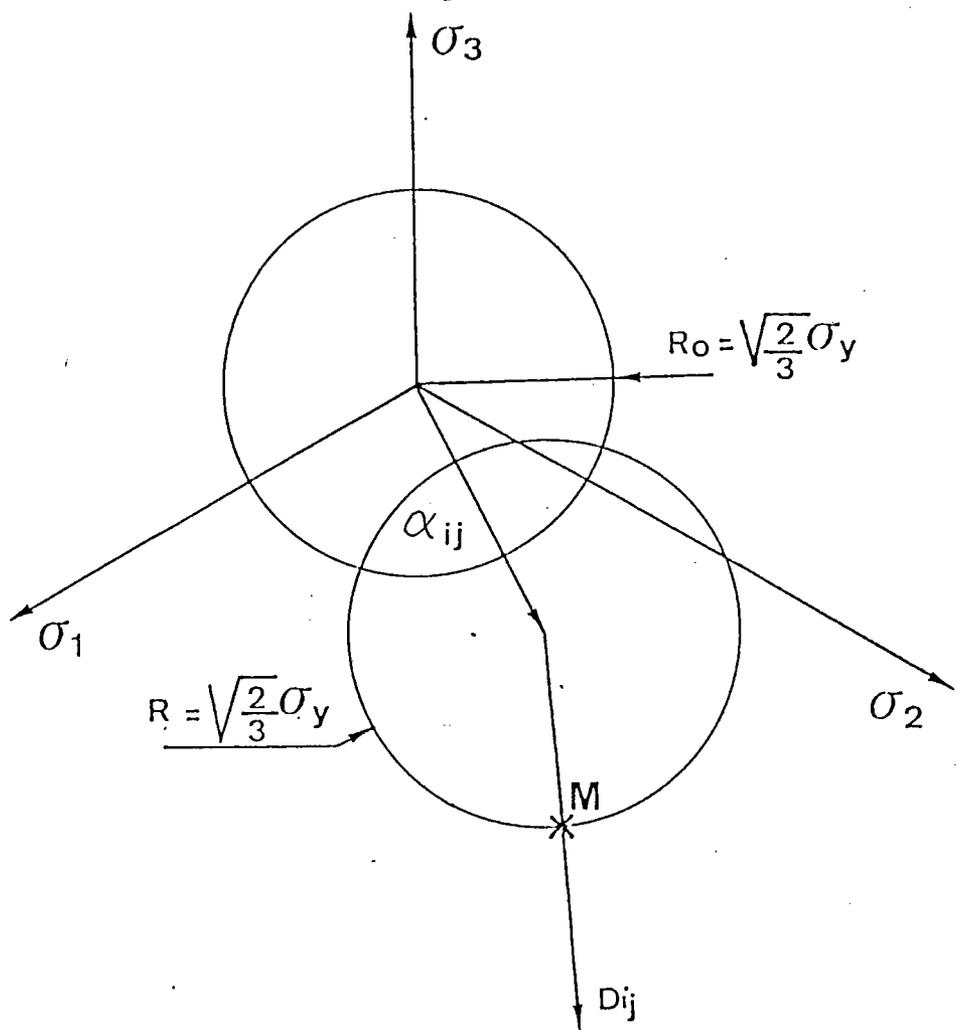


Fig. I-2: Illustration de l'effet de l'érouissage isotrope et de l'érouissage cinématique sur la CLEP.

- la CLEP est convexe.

De même qu'en traction uniaxiale la limite élastique évolue au cours de la déformation plastique, la CLEP est modifiée par l'érouissage. On distingue différents types d'érouissage (voir fig. I-2):

- érouissage isotrope: la CLEP se dilate uniformément par rapport à l'origine.

- érouissage cinématique: la CLEP se déplace dans l'espace des contraintes sans changer ni de forme ni de dimension. (il peut être linéaire ou non linéaire)

- érouissage mixte: c'est une combinaison des deux érouissage précédents.

## I-2) Modélisation

### I-2-1) Les critères plastiques (phénoménologiques)

#### - Tresca

Il y a plastification dès que le cisaillement maximal atteint une valeur critique. D'après le cercle de Mohr, le cisaillement maximal est égal à la demi-différence des contraintes principales extrêmes. Le critère de Tresca peut donc s'écrire:

$$\text{Sup } \sigma_i - \text{Inf } \sigma_j = 2\tau_p \quad (\text{I-4})$$

où  $\sigma_i$  et  $\sigma_j$  sont les contraintes principales du tenseur  $\sigma$ .

Dans l'espace des contraintes principales, la CLEP associée au critère de Tresca est un prisme hexagonal régulier dont l'axe est la première trissectrice (voir fig. I-3).

#### - Von Mises

Von Mises définit un critère isotrope indépendant de la pression hydrostatique qui s'écrit en fonction du second invariant  $J_2$ :

$$J_2 = k^2 \quad (\text{I-5})$$

avec  $J_2 = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}$  où  $S_{ij}$  représente le déviateur des contraintes

et  $k = \frac{1}{\sqrt{3}} R_p$  où  $R_p$  représente la limite d'élasticité en traction uniaxiale.

En réécrivant:

$$R_p = \sqrt{\frac{3}{2} S_{ij} S_{ij}} \quad (\text{I-6})$$

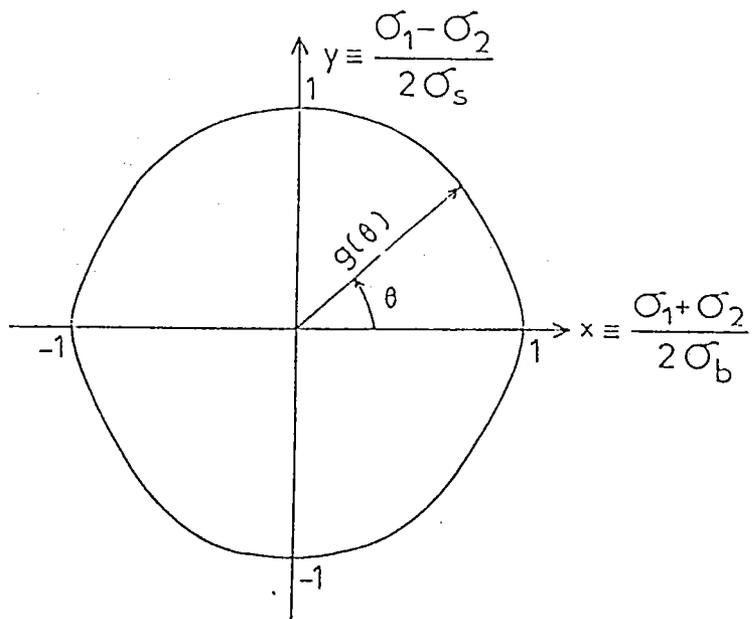


Fig. I-4: Description de la surface d'écoulement d'après Budianski cité par Dudzinski [23].

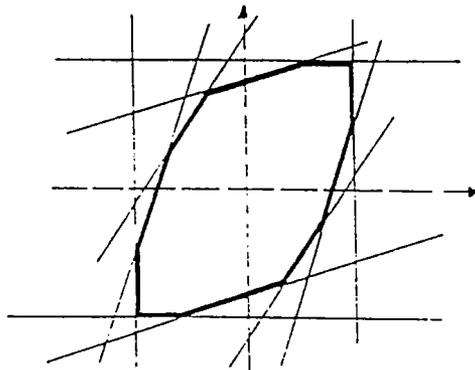


Fig. I-5: Définition de la CLEP par un ensemble de plans tangents [9]

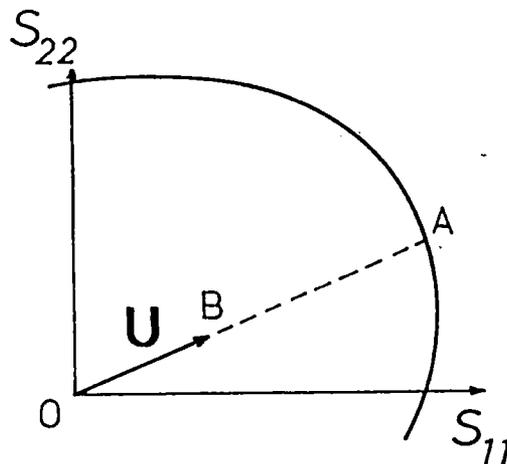


Fig. I-6: Définition du vecteur U servant à la construction d'une section de la CLEP, d'après P. Van Houtte [9].

Dans l'espace des contraintes principales, la CLEP associée au critère de Von Mises est un cylindre d'axe la première trissectrice (voir fig. I-3). Ce critère a l'avantage d'avoir une expression analytique simple, par contre la restriction aux matériaux isotropes, ainsi que la non prise en compte de l'effet Bauschinger limitent son utilisation.

- Hill

En 1948 Hill propose un critère anisotrope basé sur une forme quadratique, qui n'est pas influencé par une pression hydrostatique et qui se réduit au critère de Von Mises dans le cas isotrope. Dans les axes principaux d'anisotropie ce critère s'écrit:

$$1 = F(\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + G(\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + H(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 2L\sigma_{yz}^2 + 2M\sigma_{zx}^2 + 2N\sigma_{xy}^2$$

(I-7)

Ce critère correspond en fait au critère de Von Mises "anisotropisé" et appliqué au cas particulier de la symétrie orthotrope que l'on rencontre dans les tôles minces laminées par exemple. De nombreux auteurs ont montré que ce critère présente "de graves lacunes" [4].

En 1979 il propose un nouveau critère pour palier au comportement "anormal" de certains alliages qui présentent des coefficients d'anisotropie faibles. Ce nouveau critère s'écrit (dans les axes principaux d'anisotropie):

$$S^m = F(S_2 - S_3)^m + G(S_2 - S_1)^m + H(S_3 - S_1)^m \quad (I-8)$$

Toutefois la forme quadratique subsiste et limite le critère aux matériaux insensibles au signe de la contrainte (effet Bauschinger). On peut tenir compte de cet effet en ajoutant au critère de Hill une forme linéaire qui permet d'avoir une contrainte différente en traction et en compression par exemple [5].

- Budianski

a proposé une fonction paramétrée adaptée à des matériaux à anisotropie transverse sollicités dans un plan (voir fig. I-4):

$$f_p(v) \cos(v) = \frac{S_1 + S_2}{2S_b}$$

$$f_p(v) \sin(v) = \frac{S_1 - S_2}{2S_s}$$

(I-9)

avec:  $S_b$  et  $S_s$  les contraintes d'écoulement en expansion équibiaxée et en cisaillement respectivement.

$f_p(v)$  le rayon polaire d'un point de la CLEP  
v l'angle polaire.

- Gotoh [6]

a proposé une fonction polynômiale du 4<sup>ième</sup> degré:

$$\begin{aligned} \sigma^4 = & C_1 \sigma_{xx}^4 + C_2 \sigma_{xx}^3 \sigma_{yy} + C_3 \sigma_{xx}^2 \sigma_{yy}^2 + C_4 \sigma_{xx} \sigma_{yy}^3 + C_5 \sigma_{yy}^4 \\ & + \sigma_{xy}^2 (C_6 \sigma_{xx}^2 + C_7 \sigma_{xx} \sigma_{yy} + C_8 \sigma_{yy}^2) + C_9 \sigma_{xy}^4 \end{aligned} \quad (i-10)$$

où les axes x et y correspondent avec les axes principaux d'anisotropie, et les coefficients  $C_1$  à  $C_9$  sont déterminés à partir d'essais simples.

La motivation de Gotoh est basée sur la constatation que le critère de Hill (1948) ne permettait pas de prévoir la formation de plus de 4 cornes lors d'un essai d'emboutissage de coupelle. Or certains alliages présentent lors de cet essai 6 ou 8 cornes. De plus Gotoh souligne que même si le critère de Hill prédit de façon satisfaisante le coefficient d'anisotropie  $r(\alpha)$ , les variations de la limite élastique calculées ne suivent pas les valeurs mesurées.

## I-2-2) Les modèles polycristallins

Les critères phénoménologiques, s'ils donnent des résultats cohérents dans certains cas, pèchent par contre en ce qui concerne la prise en compte des phénomènes physiques. Le passage des phénomènes microscopiques aux propriétés macroscopiques est réalisé grâce à des modèles de déformation plastique. Dans la suite nous nous intéresserons plus particulièrement au modèle de Taylor-Bishop-Hill, mais aussi aux modèles statique et auto-cohérents.

### I-2-2-1) Taylor-Bishop-Hill [7], [8]

#### a) Les hypothèses

Les hypothèses de ce type de modèle sont:

- La déformation plastique est réalisée par glissement et éventuellement par maclage. La loi de Schmid dicte à partir de quelle contrainte un système devient actif.

- La déformation que subit chaque grain est identique à celle que subit le polycristal.

- La sélection de la combinaison des systèmes de déformation actifs dans un grain (5 dans le cas de la déformation totalement imposée D.T.I.) se fait à l'aide d'un critère de minimum d'énergie de déformation. L'hypothèse de la déformation totalement imposée n'est justifiée que dans le cas où l'interaction entre les grains est forte. Or lorsque la forme des grains n'est plus équiaxe, mais très allongée (par tréfilage par exemple) ou très aplatie (par laminage par exemple), l'interaction entre les grains est négligeable sur une composante ou deux composantes de déformation respectivement. On parle alors de théorie de déformation partiellement imposée (DPI).

#### b) Description de la méthode

La méthode pour calculer les CLEP à partir d'un modèle de Taylor a déjà été largement traité dans la littérature [2], [3], [9], [10], [11] et [12].

Un modèle de Taylor-Bishop-Hill permet de calculer pour un grain d'orientation  $g$  le facteur de Taylor  $M(g, q)$  correspondant à un tenseur de déformation  $E(q)$ :

$$M(g, q) \dot{E}_{eq} = \sum_{s=1}^n |\dot{\gamma}_s| \quad (I-11)$$

avec:  $\dot{\gamma}_s$  le glissement sur le système  $s$

$$\dot{E}_{eq} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{E}_{ij} \dot{E}_{ij}} \text{ la déformation équivalente}$$

Le travail plastique par unité de volume pour ce grain est donné par:

$$W = \tau^C M \dot{E}_{eq} \quad (I-12)$$

avec  $\tau^C$  la sission critique du cristal supposée égale pour tous les systèmes de glissement.

D'où en moyennant sur l'ensemble du polycristal:

$$\bar{W} = \tau^C \bar{M} \dot{E}_{eq} \quad (I-13)$$

Le travail plastique moyen sur le polycristal peut également se calculer de la manière suivante:

$$\bar{W} = \dot{E}_{ij} S_{ij} \quad (I-14)$$

avec:  $\dot{E}_{ij}$  le tenseur des déformations

$S_{ij}$  le déviateur du tenseur des contraintes

d'où en égalant les 2 expressions du travail plastique:

$$\dot{E}_{ij} S_{ij} = \tau^C \bar{M} \dot{E}_{eq} \quad (I-15)$$

Cette égalité est la base de la méthode. Les composantes  $S_{ij}$  du déviateur des contraintes sont les inconnues. La méthode consiste à calculer les facteurs de Taylor moyens  $\bar{M}$  pour différents modes de déformation  $\dot{E}_{ij}$ . En fait chaque association  $\dot{E}_{ij}$ ,  $\bar{M}$  définit un plan tangent à la surface de charge, en multipliant ces plans tangent on construit la CLEP comme étant l'enveloppe intérieure ( voir fig. I-5).

La pondération des facteurs de Taylor par la texture est basée sur l'hypothèse que la distribution des facteurs de Taylor en fonction des orientations peut se développer sur la base des fonctions harmoniques sphériques généralisées [13], c'est à dire:

$$M(q, g) = \sum_l \sum_m \sum_n m_l^{mn}(q) \cdot r_l^{mn}(g) \quad (I-16)$$

la distribution des facteurs de Taylor est alors totalement caractérisée par les coefficients  $m_l^{mn}(q)$ , et le calcul des quantités moyennes est alors très aisé car la FDO est également développée sur la base des fonctions harmoniques sphériques.

### c) Les modes de déformation à considérer

Le tenseur des déformations  $E$  possède 5 composantes indépendantes, ce qui conduit à un nombre très élevé de modes de déformation distincts. En considérant que l'anisotropie ne dépend que de la texture, Van Houtte [9] a énoncé un théorème qui permet de réduire le nombre de modes de déformation.

**Théorème:** Si un échantillon anisotrope possède un axe de symétrie d'ordre 2 (au moins), alors cet axe est une direction principale de déformation s'il coïncide avec une direction principale de contrainte.

Pour des tôles, l'axe  $X_3$  est direction principale et axe de symétrie, ce qui entraîne que  $X_3$  est aussi une direction principale de déformation et donc que:  $E_{23}=E_{13}=0$ . En fait on utilise pour générer les facteurs de Taylor, des tenseurs de la forme:

$$\begin{pmatrix} \overset{P}{E}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \overset{P}{E}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \overset{P}{E}_{33} \end{pmatrix}$$

Car en vertu du théorème énoncé par Van Houtte, et comme dans le cas des tôles l'axe 3 est une direction principale de contrainte, les tenseurs qui possèdent une composante  $E_{12}$  non nulle sont déduits des tenseurs diagonaux  $\overset{P}{E}_{ij}$  par une rotation d'angle  $\psi$  autour de l'axe 3.

Les coefficients  $m_1^{mn}(q)$  subissent la même rotation ( en les multipliant par les fonctions harmoniques sphériques de la rotation  $\psi$  autour de l'axe 3), on complète ainsi les modes de déformation se rapportant à la mise en forme.

Pour le calcul numérique on construit 3 familles de tenseurs:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -q_1 & 0 \\ 0 & 0 & -(1-q_1) \end{pmatrix} \quad 0 < q_1 < 0.5$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -(1-q_2) & 0 \\ 0 & 0 & -q_2 \end{pmatrix} \quad 0 < q_2 < 0.5$$

$$\begin{pmatrix} -q_3 & 0 & 0 \\ 0 & -(1-q_3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 0 < q_3 < 0.5$$

Pour assurer une résolution acceptable, les facteurs de contraction  $q_i$  prennent les valeurs discrètes suivantes: 0, 0.1, 0.2, 0.29, 0.37, 0.44, 0.5.

d) Détermination des coefficients  $m_1^{mn}$ .

Nous examinerons deux approches du problème de la détermination des coefficients  $m_1^{mn}(q)$ : une méthode des moindres carrés, et une autre utilisant l'orthogonalité des fonctions  $T_1^{mn}(g)$  [10], [13], [14].

\* Moindres carrés.

Soit  $M'(q, g)$  le facteur de Taylor pour un facteur de contraction  $q$  et une orientation  $g$ . On connaît le facteur de Taylor  $M(q, g_i)$  pour un nombre  $N$  d'orientations  $g_i$ . Soit

$$M'(q, g) = \sum_l \sum_m \sum_n m_1^{mn}(q) T_l^{mn}(g) \quad (I-17)$$

en utilisant le formalisme des fonctions harmoniques sphériques. Les inconnues sont les coefficients  $m_1^{mn}(q)$ . La méthode des moindres carrés consiste à chercher les coefficients  $m_1^{mn}(q)$  tels que l'expression suivante soit minimum:

$$\sum_{i=1}^N w_i \left[ M(q, g_i) - M'(q, g_i) \right]^2 = \text{minimum} \quad (I-18)$$

avec  $w_i$  le poids de l'orientation  $g_i$ .

en remplaçant  $M'(q, g)$  on obtient:

$$\sum_{i=1}^N w_i \left[ M(q, g_i) - \sum_l \sum_m \sum_n m_1^{mn}(q) T_l^{mn}(g_i) \right]^2 = \text{minimum} \quad (I-19)$$

On dérive par rapport à  $m_1^{m', n'}(q)$

$$\sum_{i=1}^N w_i \left[ T_{1, n'}^{m', n'}(g_i) \left[ M(q, g_i) - \sum_l \sum_m \sum_n m_1^{mn}(q) T_l^{mn}(g_i) \right] \right] = 0 \quad (I-20)$$

En développant:

$$\sum_{i=1}^N w_i T_{1, n'}^{m', n'}(g_i) M(q, g_i) = \sum_{i=1}^N w_i \left[ T_{1, n'}^{m', n'}(g_i) \sum_l \sum_m \sum_n m_1^{mn}(q) T_l^{mn}(g_i) \right] \quad (I-21)$$

$$\sum_{i=1}^N w_i T_{1, n'}^{m', n'}(g_i) M(q, g_i) = \sum_l \sum_m \sum_n m_1^{mn}(q) \sum_{i=1}^N w_i T_{1, n'}^{m', n'}(g_i) T_l^{mn}(g_i) \quad (I-22)$$

d'où:

$$\sum_l \sum_m \sum_n m_1^{mn}(q) \alpha_{l,l}^{m,mn,n} = a_{l,l}^{m,n'} \quad (\text{I-23})$$

avec:

$$\alpha_{l,l}^{m,mn,n} = \sum_{i=1}^N w_i T_{l,l}^{m,n'}(g_i) T_1^{mn}(g_i) \quad (\text{I-24})$$

et

$$a_{l,l}^{m,n'} = \sum_{i=1}^N w_i T_{l,l}^{m,n'}(g_i) M(q, g_i) \quad (\text{I-25})$$

Les coefficients  $m_1^{mn}(q)$  sont solution du système linéaire (I-23). L'inconvénient de la méthode réside dans le grand nombre d'opérations de calculs.

\* En considérant les propriétés d'orthogonalité des fonctions  $T_1^{mn}$ .

C'est la méthode qui a été utilisée dans le présent travail.

On multiplie les deux membres de l'expression (I-16) par  $T_1^{mn*}(g)$ , le complexe conjugué de  $T_1^{mn}(g)$  d'où:

$$M'(q, g) T_{l,l}^{m,n'}(g) = \sum_l \sum_m \sum_n m_1^{mn}(q) T_1^{mn}(g) T_{l,l}^{m,n'}(g) \quad (\text{I-26})$$

en tenant compte de la relation d'orthogonalité des fonctions  $T_1^{mn}$  et en intégrant la relation (I-26) sur l'ensemble des orientations, on obtient:

$$m_1^{mn}(q) = \frac{(2l+1)}{8\pi^2} \int_g M'(q, g) T_1^{mn*}(g) dg \quad (\text{I-27})$$

On connaît la valeur de  $M'(q, g)$  en  $N$  points  $g_i$  :  $M(q, g_i)$

$$m_1^{mn}(q) = \frac{(2l+1)}{8\pi^2} \sum_{i=1}^N M(q, g_i) \int_{g_i} T_1^{mn*}(g_i) dg_i \quad (\text{I-28})$$

e) Calcul des facteurs de Taylor moyens.

Le calcul de  $\overline{M}$  revient à tenir compte de l'anisotropie macroscopique induite par la texture cristallographique.

$$\overline{M}(q) = \int_{\mathcal{g}} M(q, g) f(g) dg \quad (\text{I-29})$$

où  $f(g)$  désigne la fonction de densité des orientations cristallographiques (FDO).

A l'aide du formalisme des fonctions harmoniques sphériques, le calcul du facteur de Taylor moyen est aisé en utilisant les coefficients  $C_1^{mn}$  de l'analyse de texture:

$$\overline{M}(q) = \sum_l \sum_m \sum_n \frac{m_1^{mn}(q) C_1^{mn}}{2l+1} \quad (\text{I-30})$$

Pour chaque mode de déformation caractérisé par  $q$ , on calculera le facteur de Taylor moyen qui représente un plan tangent à la CLEP. Il est clair que l'expression (I-30) est une formulation générale qui suppose que les coefficients  $m_1^{mn}$  et  $C_1^{mn}$  se rapportent à un développement en séries du facteur de Taylor et de la FDO sur des bases qui soient adaptées à la symétrie cristalline.

f) Sections dans la C.L.E.P.

Pour des raisons de commodité de représentation, on génère des sections bidimensionnelles à travers l'espace des contraintes. On se fixe une direction  $U$  dans l'espace des contraintes pour laquelle on cherche l'intersection avec la C.L.E.P.. Par le choix des différentes directions  $U$  on sélectionne la section que l'on désire représenter. Pratiquement on exprime  $U$  dans une base de vecteurs unitaires  $\sigma_x, \sigma_y$  et le choix de cette base fixe la section:

$$\sigma_x(1, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$\sigma_y(0, 1, 0, 0, 0, 0)$$

avec comme convention d'écriture  $(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{12})$

N'importe quel état de contrainte  $\sigma$  dans la section  $(\sigma_{11}, \sigma_{22})$  s'écrit comme combinaison linéaire de  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$ :  $\sigma = \alpha \sigma_x + \beta \sigma_y$ .

Soit en coordonnées polaires:  $\sigma = \sigma_p U$  (I-31)

$$\text{et } U = \cos(\gamma) \sigma_x + \sin(\gamma) \sigma_y \quad (\text{I-32})$$

La question posée est de savoir à partir de quel niveau de contrainte  $\sigma_p$  on atteint la limite élastique pour une direction  $U$  donnée.

D'après l'équation (I-15):

$$\bar{M} = \frac{\sigma_{ij}}{\tau^c} \frac{\dot{E}_{ij}}{\dot{E}_{\text{équi}}} = \frac{\sigma_p U_{ij} \dot{E}_{ij}}{\tau^c \dot{E}_{\text{équi}}} \quad (\text{I-33})$$

En exprimant U non plus sous forme de vecteur mais sous forme tensorielle.

$$\text{d'où} \quad \sigma_p = \frac{\tau^c \bar{M}}{U_{ij} (\dot{E}_{ij} / \dot{E}_{\text{équi}})} \quad (\text{I-34})$$

et la limite est atteinte pour  $\sigma_e = \text{Min}[\sigma_p (\dot{E}_{ij} / \dot{E}_{\text{équi}})]$  en se limitant aux cas positifs:  $0 \leq U_{ij} \cdot (\dot{E}_{ij} / \dot{E}_{\text{équi}})$

Ce qui permet de construire la section de la CLEP en faisant varier  $\gamma$  de 0 à  $2\pi$ .

#### g) Limites.

Le modèle de Taylor-Bishop-Hill:

- ne permet pas de simuler la transition élasto-plastique.
  - ne satisfait pas les conditions d'équilibre.
  - la prise en compte de l'écrouissage n'est pas aisée.
  - présente une bonne adéquation avec le formalisme des harmoniques sphériques utilisé dans l'analyse de texture, ce qui facilite la prise en compte de l'anisotropie induite par la texture.
- Les calculs relatifs à la prise en compte de la texture sont très rapides car toute la partie modélisation plastique est précalculée.

## I-2-2-2) Statique

### a) Hypothèses

Les hypothèses de base du modèle utilisé sont:

- la déformation plastique a lieu par glissement et maclage.
- la contrainte que subit le monocristal est égale à la contrainte dans le polycristal.
- la loi de comportement du monocristal est du type:

$$\dot{\gamma}_S(g) = \dot{\gamma}_0 \left( \frac{\tau^S}{\tau_0^S} \right)^{1/m} \quad (\text{I-35})$$

où  $g$  désigne l'orientation du grain. En adoptant une loi de comportement viscoplastique, le nombre de systèmes de déformation actifs n'est pas limité à un seul comme dans le cas du modèle de Sachs. L'hypothèse que l'état de contrainte dans chaque grain est l'état de contrainte macroscopique implique que les conditions d'équilibre soient satisfaites. La compatibilité aux joints de grains n'est pas assurée par ce modèle.

### b) Description de la méthode [16]

En plasticité classique, l'incrément de déformation dérive d'un potentiel plastique  $h$ :

$$d\varepsilon_{ij} = dl \frac{\delta h}{\delta \sigma_{ij}} \quad (\text{I-36})$$

Si le potentiel plastique est identifiable à la surface d'écoulement, l'équation (I-36) implique que le vecteur incrément de déformation est perpendiculaire à la surface de charge selon le principe du travail maximal.

Le monocristal suit une loi de comportement viscoplastique:

$$\dot{\gamma}_S(g) = \dot{\gamma}_0 \operatorname{sgn}(\tau^S) \left| \frac{\tau^S}{\tau_0^S} \right|^{1/m} \quad (\text{I-37})$$

En écriture vectorielle à 5 dimensions [15] et en introduisant le tenseur de Schmid:

$$\dot{\gamma}_s(g) = \dot{\gamma}_0 \operatorname{sgn}(m_i^s S_i) \frac{|m_i^s S_i|^{1/m}}{(\tau_0^s)^{1/m}} \quad (\text{I-38})$$

La puissance plastique pour un monocristal s'écrit, lorsqu'on s'affranchit du facteur  $\operatorname{sgn}(m_i^s S_i)$ :

$$\dot{W}(g, S) = \sum_s \tau_s \dot{\gamma}_s \quad (\text{I-39})$$

$$\dot{W}(g, S) = \sum_s \frac{|m_i^s(g) S_i|^{1+1/m}}{(\tau_0^s)^{1/m}} \quad (\text{I-40})$$

Ce qui nous permet de construire une fonction potentiel plastique:

$$f(S) = \frac{m}{m+1} \dot{W}(g, S) \quad (\text{I-41})$$

qui vérifie:

$$\dot{\epsilon}_j = \frac{\delta f(S)}{\delta S_j} \quad (\text{I-42})$$

Pour un grain, le vecteur vitesse de déformation s'écrit:

$$\dot{\epsilon}_j(g) = \sum_s m_j^s(g) \dot{\gamma}_s(g) \quad (\text{I-43})$$

\* Dans le cas d'un monocristal:

En normant le vecteur vitesse de déformation:

$$\dot{\epsilon}_j \dot{\epsilon}_j = \sum_{j=1}^5 \left[ \sum_s m_j^s \dot{\gamma}_s \right]^2 = 1 \quad (\text{I-44})$$

en remplaçant  $\dot{\gamma}_s$  selon (I-35) dans l'expression (I-44) on obtient une relation entre le vecteur déformation et le vecteur contrainte. Pour construire une section de la CLEP, on se fixe une direction de contrainte dans la section désirée, ce qui réduit le nombre d'inconnues à une seule ( $\lambda$ ), le module du vecteur contrainte.

$$S_x = \lambda \cos(\alpha)$$

$$S_y = \lambda \sin(\alpha)$$

en introduisant  $S_x$  et  $S_y$  dans l'équation de la norme du vecteur déformation:

$$\bar{\varepsilon}_j \bar{\varepsilon}_j = \sum_{j=1}^5 \left( \sum_s m_j^s \lambda^{1/m} \gamma_0 \frac{|m_x^s \cos(\alpha) + m_y^s \sin(\alpha)|^{1/m}}{(\tau_0^s)^{1/m}} \right)^2 = 1$$

(I-45)

On obtient donc une équation dans laquelle seul  $\lambda$  est inconnu, on en tire:

$$\lambda = \left( \gamma_0^2 \sum_{j=1}^5 \left( \sum_s m_j^s \frac{|m_x^s \cos(\alpha) + m_y^s \sin(\alpha)|^{1/m}}{(\tau_0^s)^{1/m}} \right) \right)^{-m/2}$$

(I-46)

\* Dans le cas d'un polycristal:

On applique la même démarche que dans le cas du monocristal, en intégrant sur l'ensemble du polycristal:

$$\bar{\varepsilon}_i = \int_g \varepsilon_i(g) dg = \int_g \sum_s m_i^s(g) \gamma_s(g) dg$$

(I-47)

$$\frac{\bar{\varepsilon}_i}{\bar{\varepsilon}_i} = 1$$

(I-48)

Soit:

$$\sum_{i=1}^5 \left( \int_g \sum_s m_i^s(g) \gamma_s(g) dg \right)^2 = 1$$

(I-49)

Le calcul d'une section donne:

$$\sum_{i=1}^5 \left( \int_g \sum_s m_i^s(g) \lambda^{1/m} \gamma_0 \frac{|m_x^s \cos(\alpha) + m_y^s \sin(\alpha)|^{1/m}}{(\tau_0^s)^{1/m}} dg \right)^2 = 1$$

(I-50)

On en déduit  $\lambda$ :

$$\lambda = \left[ \sum_{i=1}^5 \left[ \int_g \sum_s m_i^s(g) \gamma_0 \frac{|m_x^s \cos(\alpha) + m_y^s \sin(\alpha)|^{1/m}}{(\tau_0^s)^{1/m}} dg \right]^2 \right]^{-m/2} \quad (I-51)$$

### c) Limites

Le non respect des conditions de compatibilité est accentué par la loi de comportement en puissance du monocristal, ce qui signifie de fortes incompatibilités aux joints de grains, ce qui n'est pas réaliste.

La démarche présentée ne permet de construire qu'une section de la CLEP, pour définir complètement (ou avec une certaine résolution) la surface de charge, il faudrait calculer un certain nombre de sections ce qui conduit à des temps de calcul très supérieurs à ceux nécessaires à la modélisation de type Taylor.

## a) Hypothèses

L'approche auto-cohérente viscoplastique que nous avons utilisé dans le présent travail a été décrite par Molinari et co-auteurs [17], [18]. Les hypothèses de bases du modèle utilisé sont:

- le monocristal suit une loi de comportement viscoplastique
- le milieu est infini
- la déformation est uniforme dans le grain
- la loi d'interaction est issue du problème de l'inclusion dans un milieu homogène équivalent.
- l'influence directe des voisins n'est pas prise en compte

## b) Le modèle auto-cohérent

La relation contrainte-cisaillement microscopique est une loi viscoplastique:

$$\frac{\tau^s}{\tau_0^s} = \left( \frac{\gamma^s}{\gamma_0^s} \right)^m \quad (\text{I-52})$$

avec:  $\tau_s$  la cission réduite appliquée sur le système de glissement  $s$ .  
 $\tau_0^s$  une contrainte critique de référence correspondant au cisaillement  $\gamma_0^s$ .

$\gamma^s$  le cisaillement plastique sur le système  $s$ .

Dans un repère macroscopique le tenseur de déformation  $D_{ij}$  s'écrit:

$$D_{ij} = \sum_s r_{ij}^s \gamma^s \quad (\text{I-53})$$

avec:

$$r_{ij}^s = \frac{b_i^{s,s} n_j^s + b_j^{s,s} n_i^s}{2} \quad (\text{I-54})$$

où  $n^s$  et  $b^s$  désignent respectivement la normale au plan de glissement et la direction de glissement du système de glissement  $s$ .

En introduisant le déviateur du tenseur des contraintes  $S_{ij}$  et la loi viscoplastique on obtient l'expression de la loi de comportement non linéaire du monocristal:

$$\frac{D_{ij}}{\gamma_0} = \sum_s r_{ij}^s \left( \frac{r_{kl}^s s_{kl}}{\tau_0^s} \right)^{1/m} \quad (\text{I-55})$$

Durant la déformation  $\tau_0^s$  peut évoluer pour rendre compte de l'écoulement à travers une matrice d'écoulement  $H^{sr}$ :

$$\tau_0^s = \sum_r H^{sr} \gamma^r \quad (\text{I-56})$$

$r_{ij}^s$  évolue également au cours de la déformation à cause de la rotation du réseau.

Finalement par inversion de la relation (I-55) et en considérant le comportement tangent, la loi de comportement locale s'écrit:

$$\mathbf{S} = \mathbf{A}(\mathbf{D}) : \mathbf{D} + \mathbf{S}^0(\mathbf{D}) \quad (\text{I-57})$$

avec:  $\mathbf{A}$  un tenseur défini par:  $A_{klmn}(\mathbf{D}) = \left[ \frac{\delta G}{\delta S}(\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{D})) \right]_{klmn}^{-1}$

et:  $\mathbf{G}$  défini par l'équation (I-54) réécrite:  $D_{ij} = G_{ij}(\mathbf{S})$

Le tenseur des contraintes  $\sigma$  s'obtient en ajoutant un terme de pression hydrostatique:

$$\sigma = \mathbf{A}(\mathbf{D}) : \mathbf{D} + \mathbf{S}^0(\mathbf{D}) + \rho \mathbf{I} \quad (\text{I-58})$$

avec:  $\rho$  la pression hydrostatique

$\mathbf{I}$  le tenseur identité

Les quantités  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{S}^0$  ne sont pas uniformes, toutefois on les décompose en une partie uniforme et une partie qui représente les fluctuations locales soit:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{A}^0 + \mathbf{A} \\ \mathbf{S}^0 &= \mathbf{S}^{00} + \mathbf{S}^0 \end{aligned} \quad (\text{I-59})$$

avec  $\mathbf{A}^0$  et  $\mathbf{S}^{00}$  les quantités uniformes et  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{S}^0$  les variations locales.

On suppose d'autre part que:

$$\overline{\mathbf{S}} = \mathbf{A}^0 \overline{\mathbf{D}} + \mathbf{S}^{00} \quad (\text{I-60})$$

où  $\mathbf{A}^0$  et  $\mathbf{S}^{00}$  sont fonctions de  $\overline{\mathbf{D}}$

Les équations d'équilibre:  $\sigma_{ij,j} + f_i = 0$  appliquées à (I-58) en tenant compte de (I-59), on obtient les équations de Navier suivantes:

$$A_{ijkl}^0 v_{k,lj} - \rho_{,i} + f_i = 0 \quad (I-61)$$

où les quantités  $f_i$  peuvent être considérées comme des forces volumiques fictives.

L'incompressibilité donne:

$$L_{kk} = v_{k,k} = 0 \quad (I-62)$$

où  $L_{kk}$  désigne le gradient de vitesses.

Les équations (I-61) et (I-62) peuvent être résolues grâce aux fonctions de Green qui traduisent l'effet au point M d'un changement survenu en un point M'. La solution est une équation s'écrivant:

$$D_{ij}^g = \bar{D}_{ij} + \int_v \Gamma_{nmi j}^{gg'} \left( A_{ijkl} D_{kl} + S_{ij}^0 \right) (g') dx \quad (I-63)$$

$$\text{avec: } \Gamma_{nmi j}^{gg'} = \frac{1}{v_g} \left[ \int_{v_{g'}} \Gamma_{nmi j} (r-r') d^3 r' \right] d^3 r \quad (I-64)$$

où  $\Gamma = 1/4(G_{ni,mj} + G_{mi,nj} + G_{nj,mi} + G_{mj,ni})$  avec  $G_{ij}$  les fonctions de Green. On notera que  $\Gamma_{nmi j}^{gg'}$  tend vers zéro quand la distance entre les grains  $g$  et  $g'$  augmente.

En discrétisant le polycristal en un nombre fini de grains dans lesquels la contrainte est supposée uniforme, on peut écrire:

$$D_{ij}^g = \bar{D}_{ij} + \sum_{g'} \Gamma_{ijkl}^{gg'} \left[ S_{kl} - \bar{S}_{kl} - A_{klmn}^0 (D_{nm} - \bar{D}_{mn}) \right] \quad (I-65)$$

Si on néglige l'influence des voisins (modèle à 1 site), on aboutit à la formule d'interaction suivante:

$$S^g - \bar{S} = (\Gamma^{-1} + A^0) : (D^g - \bar{D}) \quad (I-66)$$

où le tenseur  $\Gamma$  tient compte de l'interaction due à la forme des grains car c'est le résultat d'une intégrale sur le volume du grain. L'approche auto-cohérente consiste à calculer  $A^0$  de manière à assurer:

$$\begin{aligned} \langle S \rangle &= \bar{S} \\ \langle D \rangle &= \bar{D} \end{aligned} \quad (I-67)$$

avec  $\langle \rangle$  la valeur moyenne volumique sur le polycristal.

On résoud ainsi le problème qui consiste à chercher le gradient de déplacement local et le gradient des contraintes local connaissant le tenseur gradient de déplacement macroscopique.

### c) Méthode de détermination de la CLEP

On calcule les tenseurs de contraintes microscopiques associés à chaque grain pour différents de mode de déformation macroscopique dans le cas d'un polycristal constitué de  $n$  grains orientés aléatoirement. La prise en compte de la texture de l'échantillon se fera en pondérant les tenseurs de contraintes par la valeur de la FDO.

Le calcul de la moyenne pondérée par la FDO des tenseurs de contraintes locales permet de déterminer le tenseur des contraintes macroscopique qui est représenté par un point sur la CLEP.

Chaque mode de déformation macroscopique donne donc un point sur la CLEP. Pour construire une CLEP il faut donc balayer l'ensemble des modes de déformation susceptibles d'intervenir lors du formage d'une tôle. Cela représente un temps de calcul assez conséquent, c'est pourquoi nous nous sommes limité aux 21 modes de déformations déjà utilisés avec le modèle de Taylor. En imposant la déformation, les contraintes vont être la réponse du matériau à la sollicitation, cela signifie qu'on ne contrôle pas la direction choisie dans l'espace des contraintes. La construction de sections particulières dans la CLEP est donc pratiquement impossible. Une solution serait de faire passer une courbe analytique à travers les points calculés. Van Houtte [3] a proposé une expression analytique de la CLEP calculée à partir d'un modèle de Taylor, dans le but d'introduire l'anisotropie plastique dans un code de calcul par éléments finis.

### I-3) Détermination expérimentale

La détermination expérimentale des surfaces de charge se heurte au nombre très important d'essais à effectuer pour connaître la surface avec une certaine résolution. De plus bon nombre de ces essais sont très particuliers et de mise en oeuvre délicate. Toutefois certains points sont accessibles à la mesure à travers l'essai de traction-compression uniaxial. En annexe I sont détaillées quelques techniques permettant de mesurer certains points.

Dans le présent travail c'est sur les points établis en traction que nous allons baser la confrontation entre la mesure et le calcul.

Les essais de traction ont été menés à vitesse de traverse constante de 5 mm/min, à la température ambiante. La mesure des déformations est confiée à un dispositif comportant deux capteurs de déplacement, l'un mesure l'allongement dans la direction de traction, l'autre dans la direction perpendiculaire. Ce qui permet la mesure en continu des déformations durant l'essai.

Le coefficient d'érouissage  $n$  déterminé correspond à la loi d'Hollomon:

$$\sigma = k\varepsilon^n \quad (\text{I-68})$$

Le coefficient d'anisotropie  $r = \varepsilon_{22}/\varepsilon_{33}$  est mesuré en continu durant l'essai de traction. Le coefficient  $r$  est évalué tous les 2% dans le domaine plastique, et la valeur retenue est la moyenne sur une plage où les variations de  $r$  en fonction de la déformation sont faibles.

La limite élastique est la limite élastique conventionnelle à 0,2% de déformation permanente. La limite élastique réelle doit être déterminée grâce à des cycles de chargement-déchargement ou à une étude de relaxation qui demande des essais longs et donc coûteux. De plus l'utilisation de la limite élastique conventionnelle permet avec une éprouvette de déterminer  $\sigma_e$ ,  $r$  et  $n$  et en menant l'essai jusqu'à rupture de déterminer les déformations à rupture. L'économie de matière est à rapprocher des quantités limitées de matière disponibles liées aux conditions d'élaboration particulières. Des éprouvettes de traction prélevées à un angle  $\alpha$  par rapport à la direction de laminage (DL) permettent de rendre compte de l'anisotropie dans le plan de la tôle ( $\alpha$  varie de 0° à 90° par pas de 15°). La valeur moyenne de  $r(\alpha)$  dans le plan de la tôle est calculée selon [20]:

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \frac{r_0 + 2r_{45} + r_{90}}{4} \\ \Delta r &= \frac{r_0 - 2r_{45} + r_{90}}{2} \end{aligned} \quad (\text{I-69})$$

La confrontation expérience-mesure est faite sur la base des limites élastique mesurées et calculées pour différent angles  $\alpha$ .

Les contraintes à la limite élastique calculées sont obtenues à un facteur multiplicatif près quelle que soit la méthode de calcul. Ce facteur est défini de manière à minimiser l'écart entre les valeurs mesurées et les valeurs

calculées. On peut également envisager un calage sur  $\sigma_e(0^\circ)$ , la limite élastique mesurée dans DL.

Le coefficient d'anisotropie  $r(0^\circ)$  constitue également un bon indicateur de la forme de la CLEP au point  $(s_{11}, s_{22}=0, s_{33}=0, s_{12}=0, s_{13}=0, s_{23}=0)$ . En effet il est directement lié à la pente de la CLEP par:

$$r = \frac{1}{-1-1/\rho} \quad (\text{I-70})$$

avec  $-1/\rho$  la pente de la CLEP au point de contrainte de traction uniaxiale.

#### I-4) Application aux cubiques

L'application aux cubiques de la démarche décrite dans les paragraphes précédents constitue une validation du calcul des surfaces de charge.

L'étude des matériaux à symétrie cubique a porté sur 2 alliages d'aluminium présentant des textures très différentes. Le but est de démontrer l'influence de la texture sur les propriétés mécaniques et notamment sur la formabilité. La modélisation plastique a été effectuée à l'aide d'un modèle de Taylor en déformation totalement imposée. Ce choix s'est imposé dans le cas de l'alliage AlMgSi en raison des grains quasiment équiaxes. Dans le cas de l'alliage AlLi la microstructure très hétérogène peu favorable à une relaxation, nous a fait choisir le modèle de déformation totalement imposée.

##### I-4-1) Spécificité du cubique

L'aluminium est un cubique à faces centrées, la famille de systèmes de glissement qui réalise l'accommodation plastique est donc :  $(111)\langle 110 \rangle$ .

Le maillage dans le cas des cubiques n'apparaît que pour des vitesses de déformation très élevées qui ne sont en général pas atteintes lors d'opérations de mise en forme classiques.

##### I-4-2) Les matériaux étudiés

La composition chimique des alliages étudiés est donnée dans le tableau (I-1).

Alliage		Li %	Cu %	Mg %	Zn %	Fe %	Si %	Ti %	Zr %	Cr %	Mn %
AlLi	min	1,70	1,80	1,10	0,04	0,30	0,20	0,10	0,04		
	max	2,30	2,50	1,90	0,16				0,16		
AlMgSi	min			0,30			1,00				
	max		0,20	0,65	0,10	0,40	1,40	0,10		0,05	0,15

Tableau (I-1) : Composition des alliages d'aluminium étudiés.

L'alliage AlMgSi référencé ASG25 est un alliage industriel. Il a été laminé à chaud jusqu'à une épaisseur de 4mm, l'épaisseur finale de 1,3mm a été obtenue par laminage à froid. Un traitement de mise en solution suivi d'une trempe donne à l'alliage AlMgSi ses propriétés finales.

L'alliage AlLi référencé 2091 a été laminé à chaud jusqu'à 3,7mm puis par laminage à froid son épaisseur a été réduite jusqu'à 1,6mm. Un recuit d'une heure à 415°C achève les traitements thermomécaniques. Notons que le traitement

subi par cet alliage ne correspond pas à un traitement industriel dans le cadre de la mise en forme. Son but est plutôt de produire une texture particulière.

#### a) Microstructure

La caractérisation microstructurale a été effectuée en microscopie optique. La préparation des échantillons a consisté en un polissage électrolytique suivi d'une attaque électrolytique.

La taille des grains de l'alliage AlMgSi est plutôt homogène et de l'ordre de 50µm. Les grains sont légèrement allongés dans la direction de laminage.

La taille des grains de l'alliage AlLi est inhomogène, des bandes de gros grains (70µm) allongés, partiellement recristallisés, cohabitent dans une structure de grains très fins (3µm). Cette microstructure particulière est due aux conditions non industrielles de recuit.

#### b) Texture

Pour chaque tôle les figures incomplètes (111), (200) et (220) ont été mesurées par diffraction de RX grâce à un goniomètre de texture. La fonction de distribution des orientations (F.D.O.) a été calculée en utilisant la méthode harmonique [13] [21].

Dans cette méthode, la FDO est exprimée sur la base des fonctions harmoniques sphériques généralisées. En introduisant la positivité dans les figures de pôle et dans l'ODF, on obtient un jeu de coefficients qui décrivent la texture:

$$f(g) = \sum_l \sum_m \sum_n C_l^{mn} T_l^{mn}(g) \quad (I-71)$$

Grâce aux coefficients  $C_l^{mn}$ , il est aisé de calculer les figures de pôles complètes ainsi que les sections de la FDO dans l'espace d'Euler.

Pour améliorer les données expérimentales dans le cas de l'alliage AlMgSi, la taille de grain nous a conduit à effectuer plusieurs mesures à travers l'épaisseur de la tôle. Ainsi les figures utilisées pour l'analyse sont en fait la superposition de figures de pôles mesurées en surface, à 3/4, à 1/2 et à 1/4 de l'épaisseur.

Les figures de pôles présentées dans les figures (I-7) et (I-8) sont les fdp recalculées après analyse. Dans le cas de l'AlLi, le maximum de la FDO atteint la valeur de 12 en multiple de l'isotropie, la texture est marquée (fig. (I-9)). L'orientation principale est caractérisée par une fibre partielle avec la direction <211> dans D.L..

La texture de AlMgSi est moins marquée avec un maximum de 6 en multiple de l'isotropie (voir figure (I-10)). Une composante est l'orientation (001)<100> (texture cube sur face). L'analyse révèle également des composantes secondaires

qui ne sont pas négligeables et qui atténuent l'effet de la texture cube sur face.

Les textures de ces 2 tôles sont différentes, ce qui laisse présager des propriétés qui reflèteront cette différence.

### c) Propriétés mécaniques.

Dans le cas de l'alliage AlLi, la contrainte à la limite élastique et la contrainte maximale sont élevées et présentent de larges variations avec l'angle de prélèvement par rapport à D.L.. L'allongement maximum est relativement faible (15%). Les courbes de traction sont typiques d'alliages présentant des effets Portevin - Le Chatelier (voir figure (I-11)).

L'alliage AlMgSi présente une contrainte à la limite élastique et une contrainte maximale qui varie très peu avec l'angle de prélèvement. L'allongement maximum atteint 30%. Les courbes de traction contrainte-déformation sont lisses (fig. (I-11)).

Les variations du coefficient d'écroutissage dans le plan de la tôle sont faibles pour l'alliage AlMgSi (Fig. (I-12)). La valeur moyenne vaut 0,265.

Les variations sont plus importantes pour l'alliage AlLi avec un maximum à 45° de la direction de laminage, mais les valeurs restent faibles. Dans la cas de l'alliage AlLi les valeurs du coefficient d'écroutissage sont à considérer avec précaution, car les courbes de traction présentent de fortes discontinuités dues à l'effet Portevin - Le Chatelier.

Le coefficient d'anisotropie de l'alliage AlMgSi varie peu avec l'angle de prélèvement  $\alpha$  ( $\bar{r}=0,548$ ;  $\Delta r=0,156$ ). Les valeurs calculées varient de la même manière et elles sont très proches des valeurs mesurées (Fig. (I-13)).

Le coefficient d'anisotropie de l'alliage AlLi varie fortement avec l'angle  $\alpha$ , le maximum est localisé à 50° par rapport à D.L. ( $\bar{r}=1,016$ ;  $\Delta r=1,795$ ). La confrontation avec les valeurs calculées est un peu moins satisfaisante, car les variations calculées sont quelque peu supérieures à celles mesurées (Fig. (I-14)).

Ne perdons pas de vue que les calculs ne prennent en compte que la texture et aucun autre paramètre structural. Des effets d'anisotropie microstructurale telle que microbande et forêts de dislocations ont également une influence sur l'anisotropie de la contrainte à la limite élastique [22].

Les surfaces de charge sont à première vue similaires pour les deux alliages (Fig. (I-15) et (I-16)). Nous nous limiterons donc pour la confrontation expérience-calcul à la comparaison des contraintes à la limite élastique en

traction uniaxiale pour des angles de prélèvement allant de 0° à 90° au pas de 15°.

En ce qui concerne l'alliage ALi, il y a des différences entre le calcul et la mesure, mais elles restent faibles ( Fig. (I-17)). Les valeurs calculées suivent les mêmes variations que les valeurs expérimentales.

Pour la tôle d'AlMgSi, les valeurs calculées et mesurées sont quasiment constantes (Fig. (I-18)). Les différences relatives sont faibles dans les 2 cas: moins de 5,5% pour l'alliage AlMgSi et moins de 2,2% pour l'alliage ALi.

La conclusion de cette première étude est que l'application de la méthode de calcul des CLEP aux alliages d'Aluminium (de symétrie cubique) donne des résultats dans l'ensemble satisfaisants. Les écarts observés dans le cas l'alliage ALi peuvent s'expliquer par la microstructure très hétérogène due au traitement non industriel subit par cette tôle. Les discontinuités de la courbe de traction peuvent nous amener à remettre en cause les valeurs expérimentales du coefficient d'anisotropie de l'alliage ALi. Globalement nous pouvons considérer que la modélisation des propriétés mécaniques étudiées est validée. Ceci nous encourage à étendre l'étude aux matériaux hexagonaux.

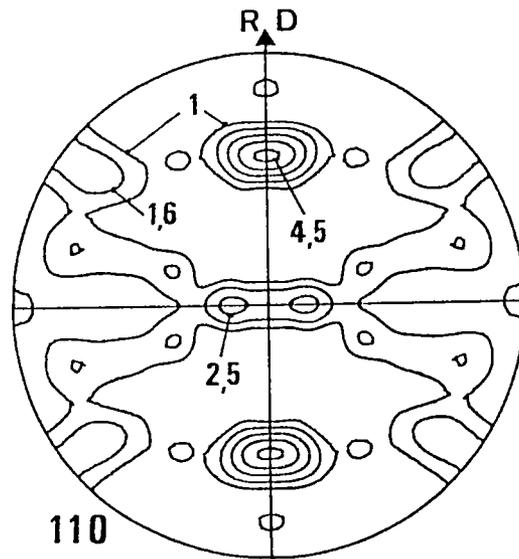
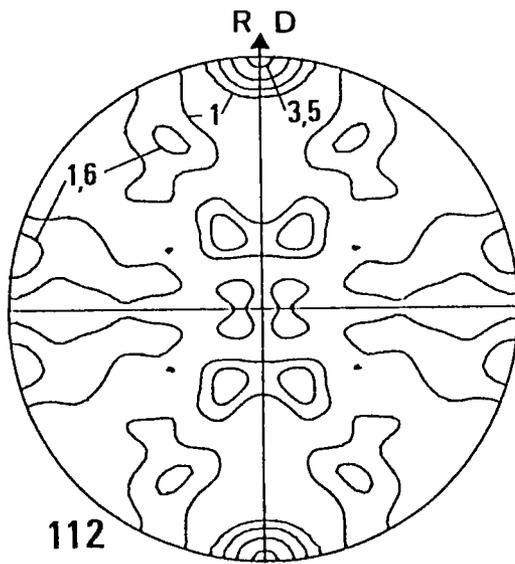
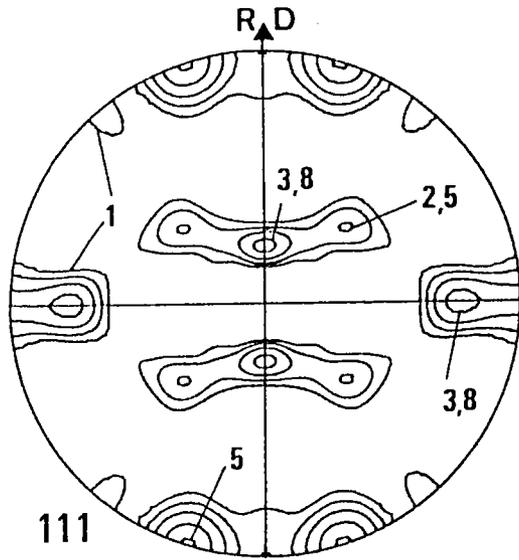
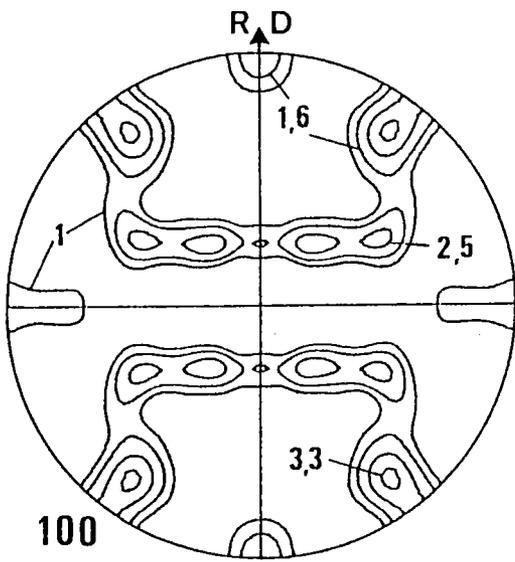


Fig. I-7: Figures de pôles recalculées après analyse de l'alliage AlLi

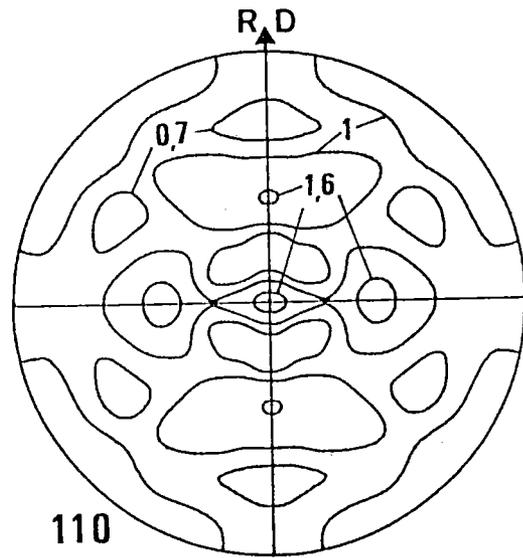
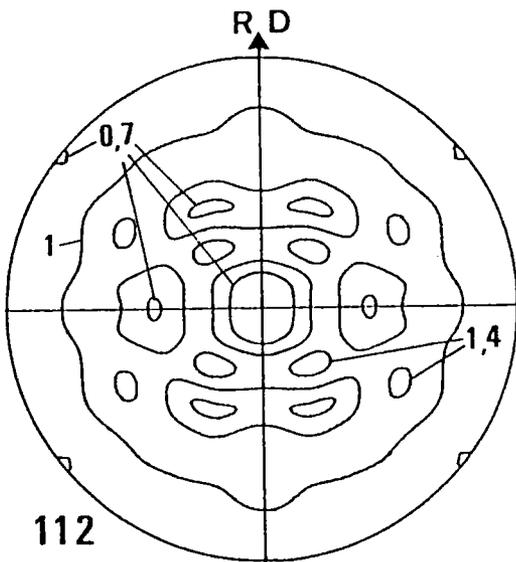
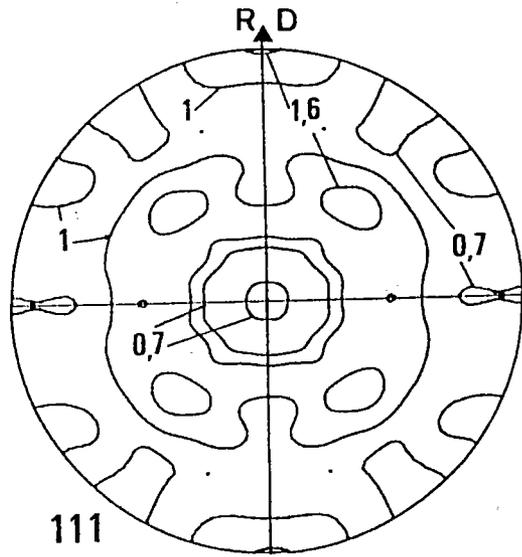
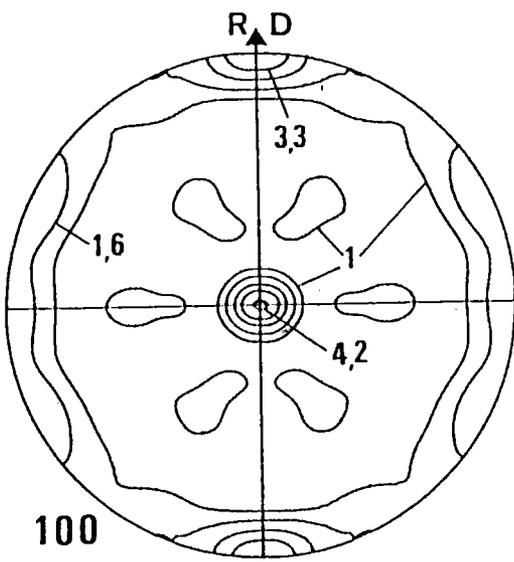


Fig. I-8: Figures de pôles recalculées après analyse de l'alliage AlMgSi

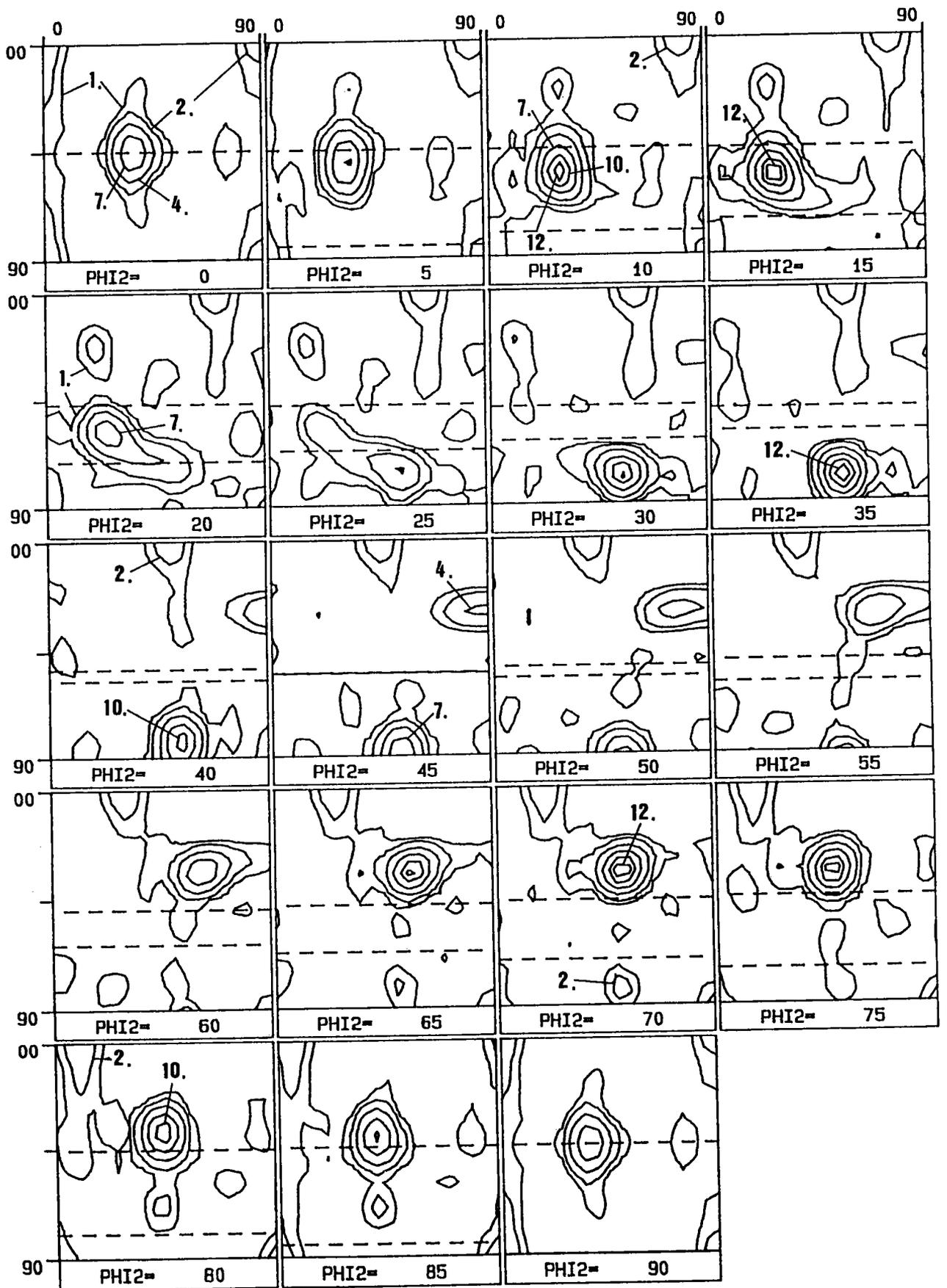


Fig. I-9: Sections de la FDO de l'alliage AlLi

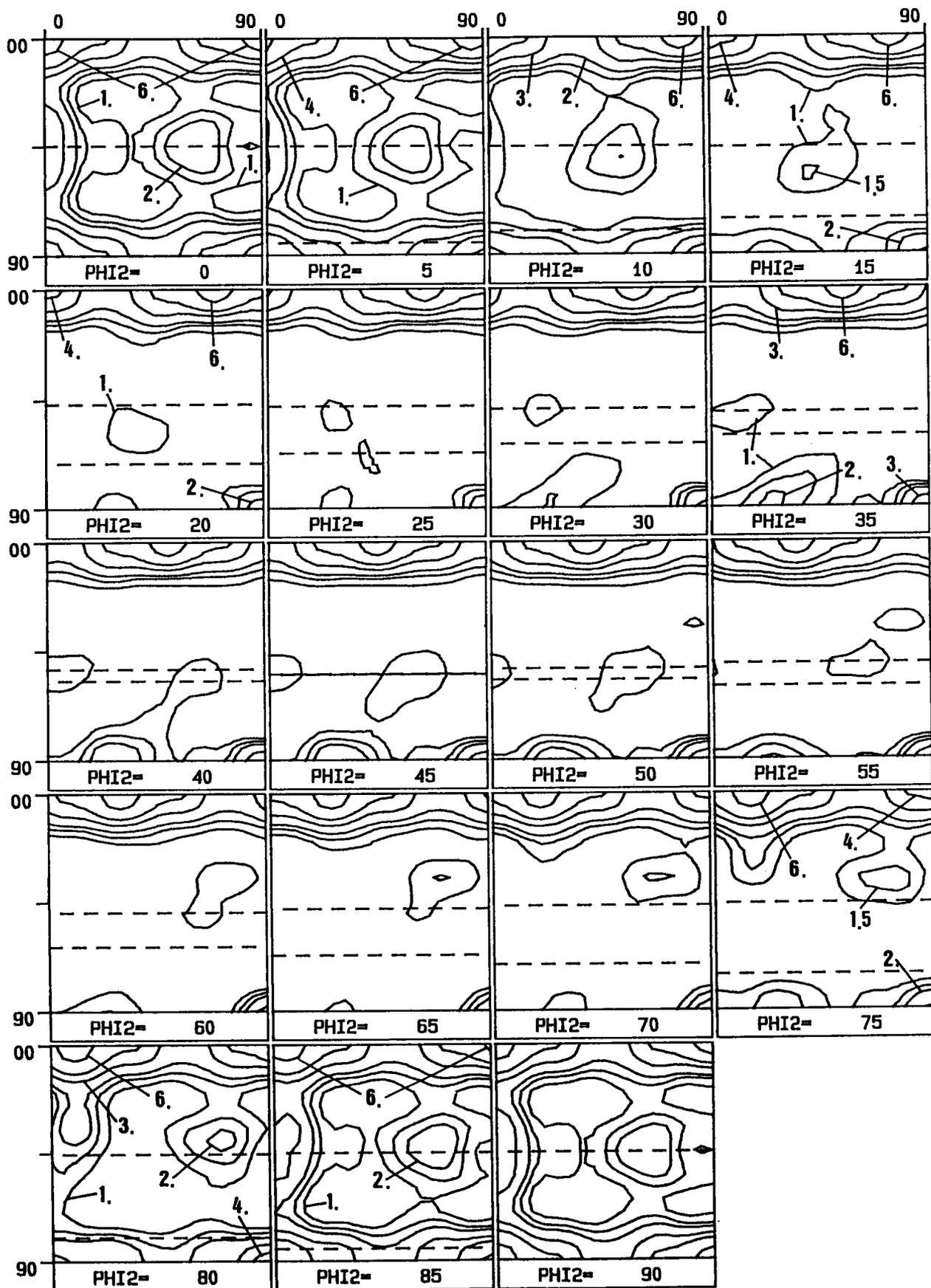


Fig. I-10: Sections de la FDO de l'alliage AlMgSi

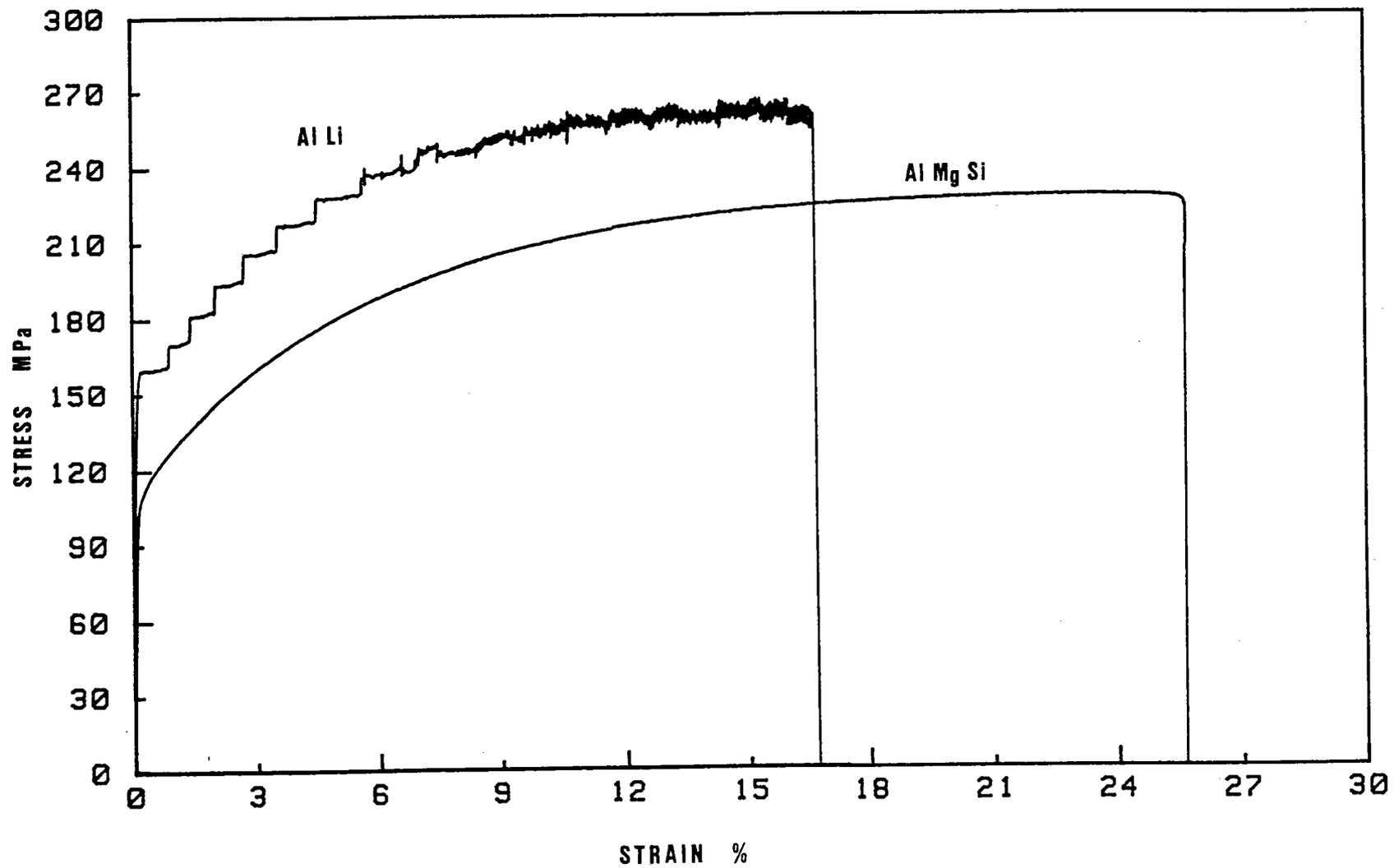


Fig. I-11: Courbes de traction des alliages AlLi et AlMgSi montrant de nombreuses discontinuités dues à l'effet Portevin-Le Chatelier dans le cas de l'AlLi.

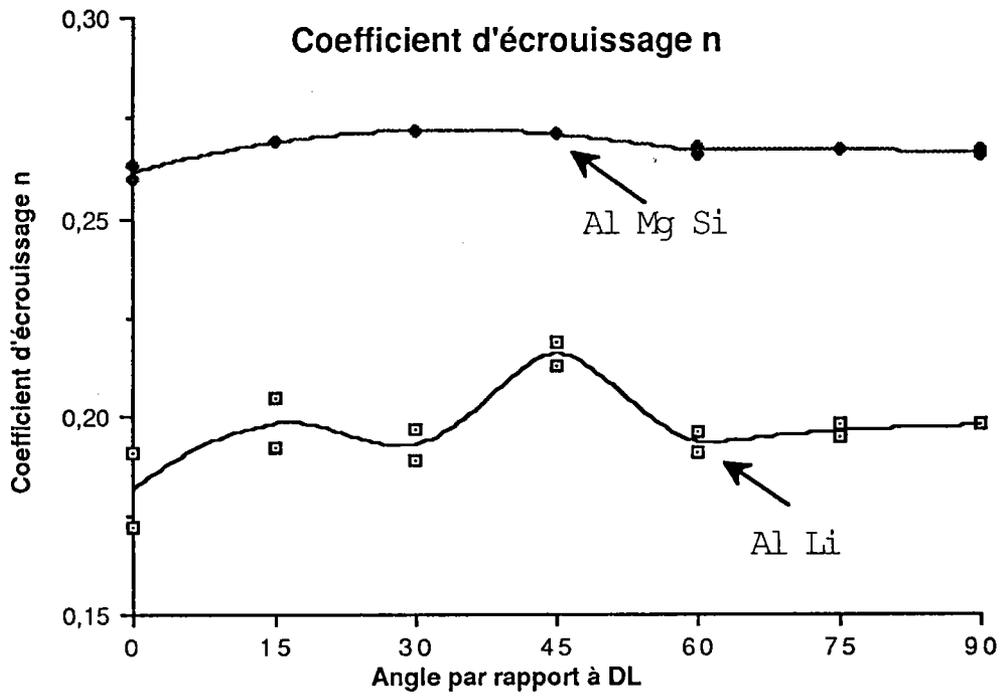


Fig. I-12: Coefficient d'érouissage  $n$  en fonction de l'angle de prélèvement: comparaison des deux alliages.

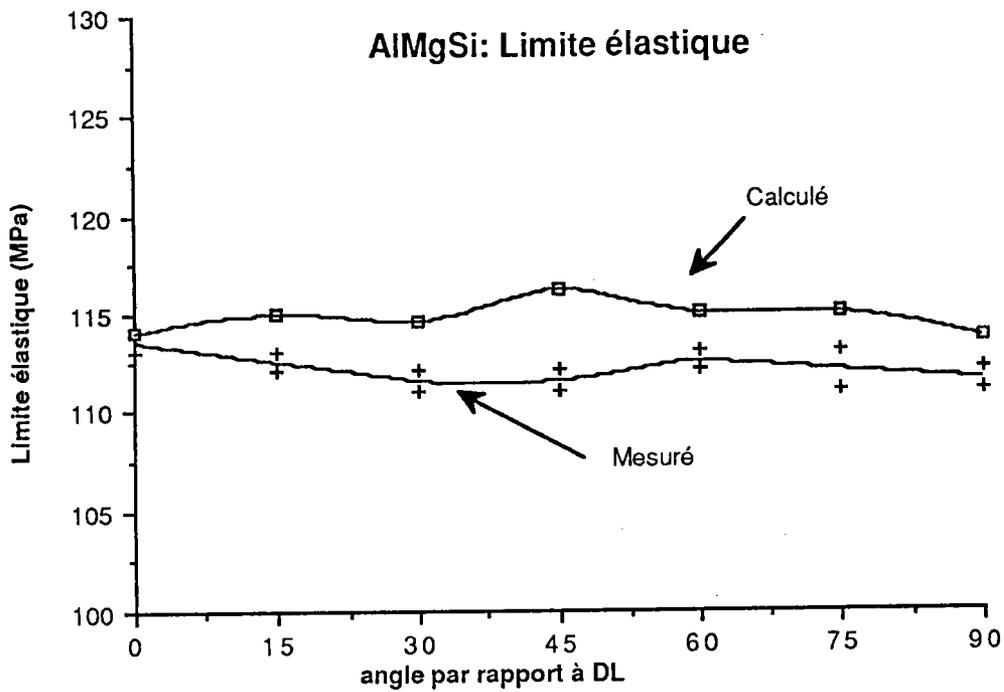


Fig. I-18: Limite élastique en fonction de l'angle de prélèvement: comparaison entre la mesure et le calcul pour l'alliage AlMgSi.

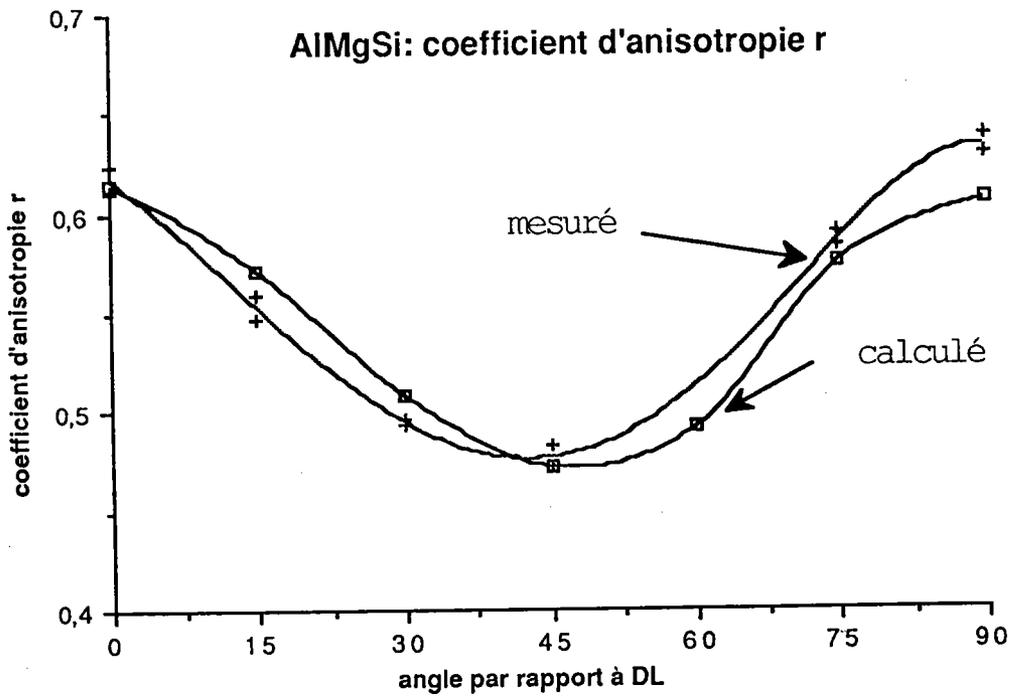


Fig. I-13: Coefficient d'anisotropie r en fonction de l'angle de prélèvement: comparaison entre la mesure et le calcul pour l'alliage AlMgSi.

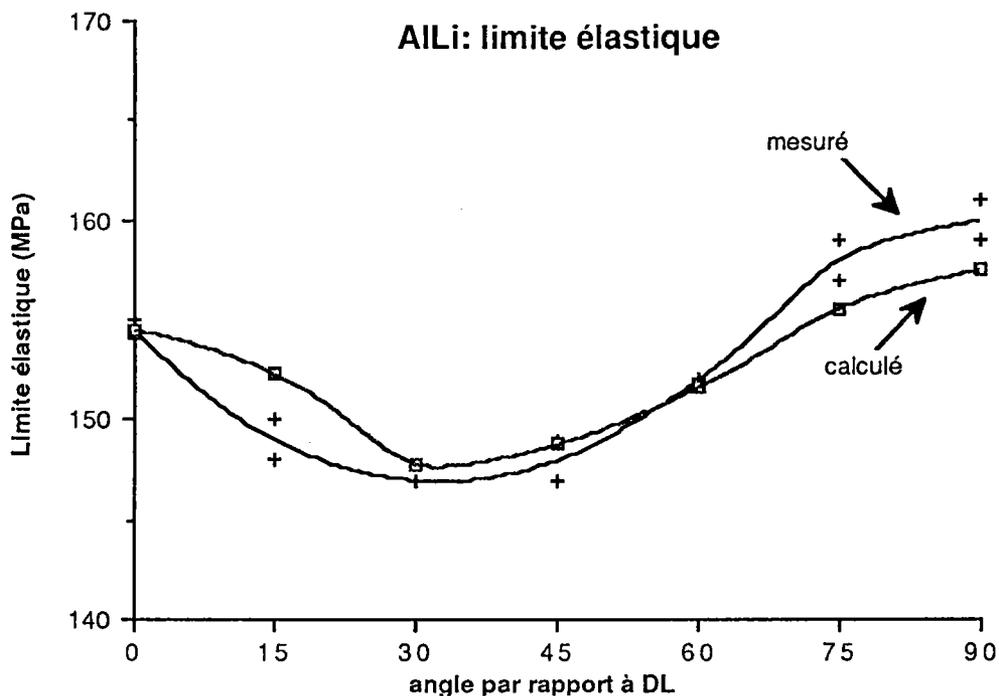


Fig. I-17: Limite élastique en fonction de l'angle de prélèvement: comparaison entre la mesure et le calcul pour l'alliage AlLi.

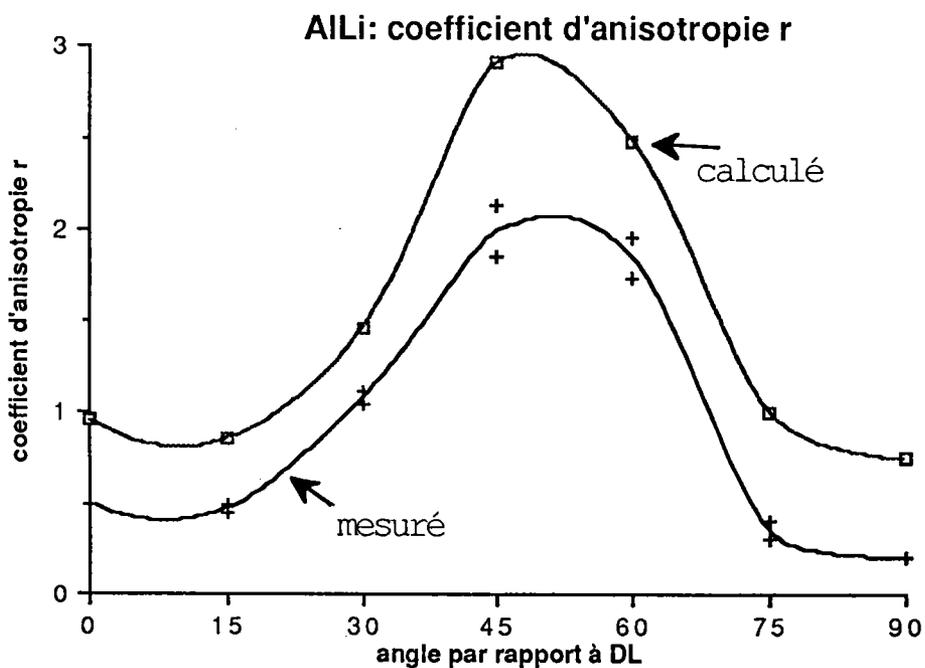


Fig. I-14: Coefficient d'anisotropie r en fonction de l'angle de prélèvement: comparaison entre la mesure et le calcul pour l'alliage AlLi.

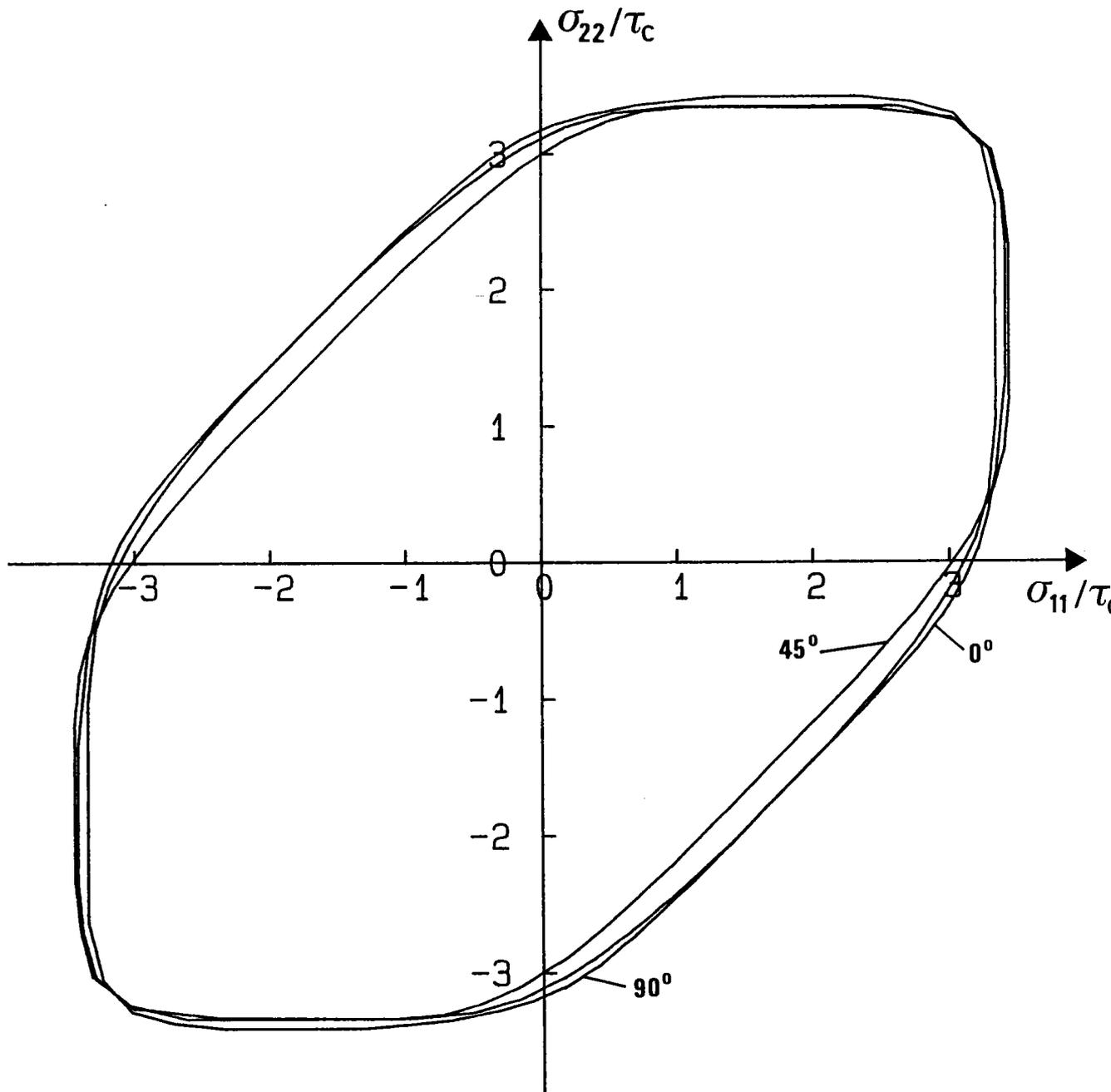


Fig. I-15: CLEP calculée pour l'alliage AlLi, dans des repères tournés de  $0^\circ$ ,  $45^\circ$  et  $90^\circ$  par rapport à la direction de laminage.

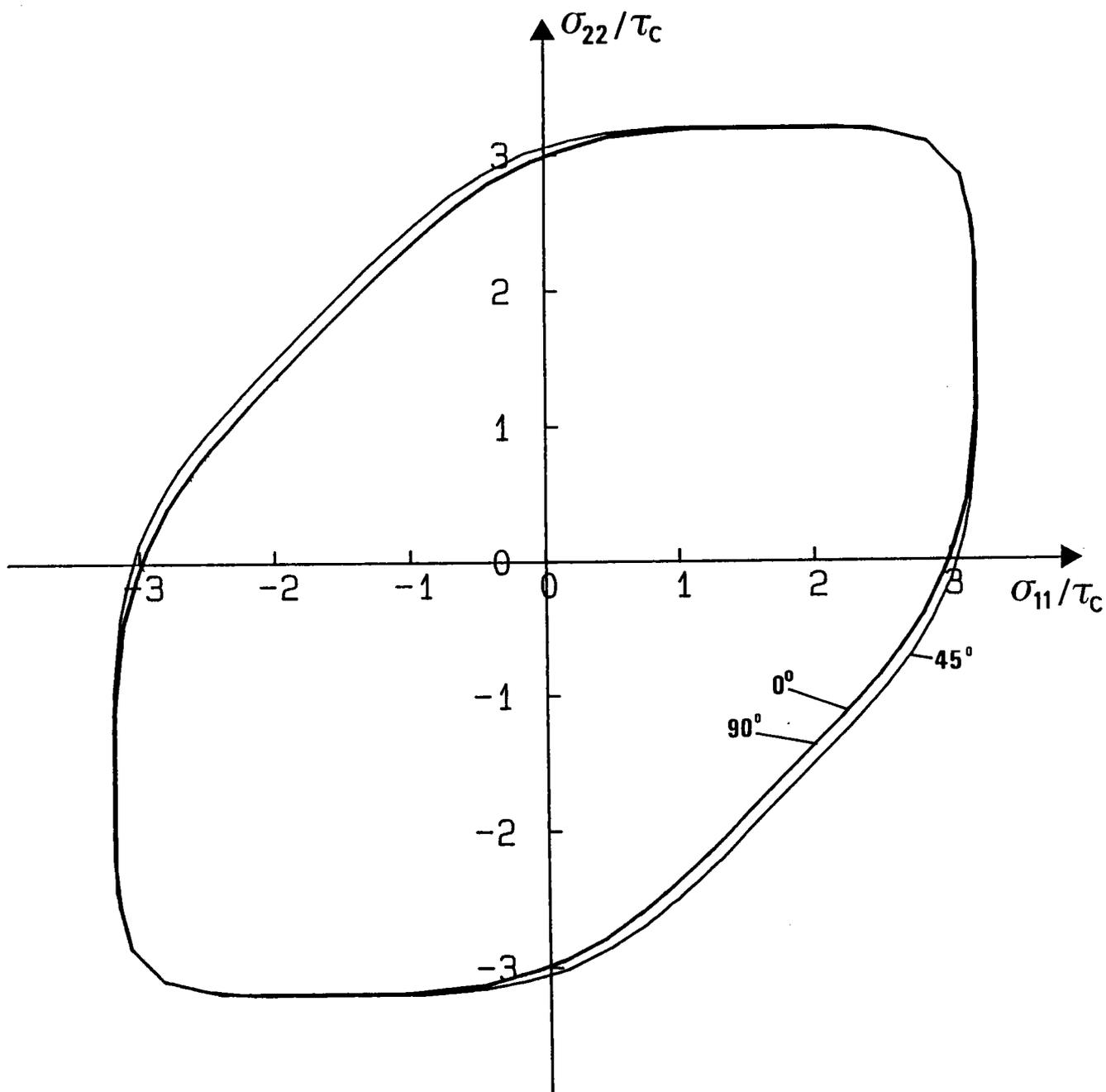
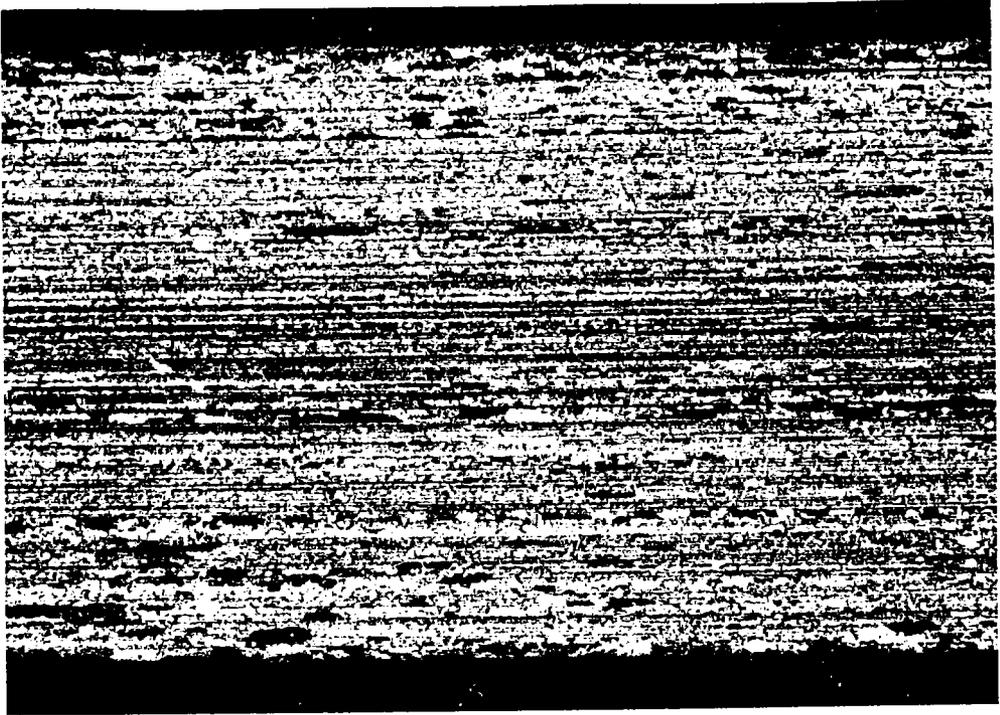
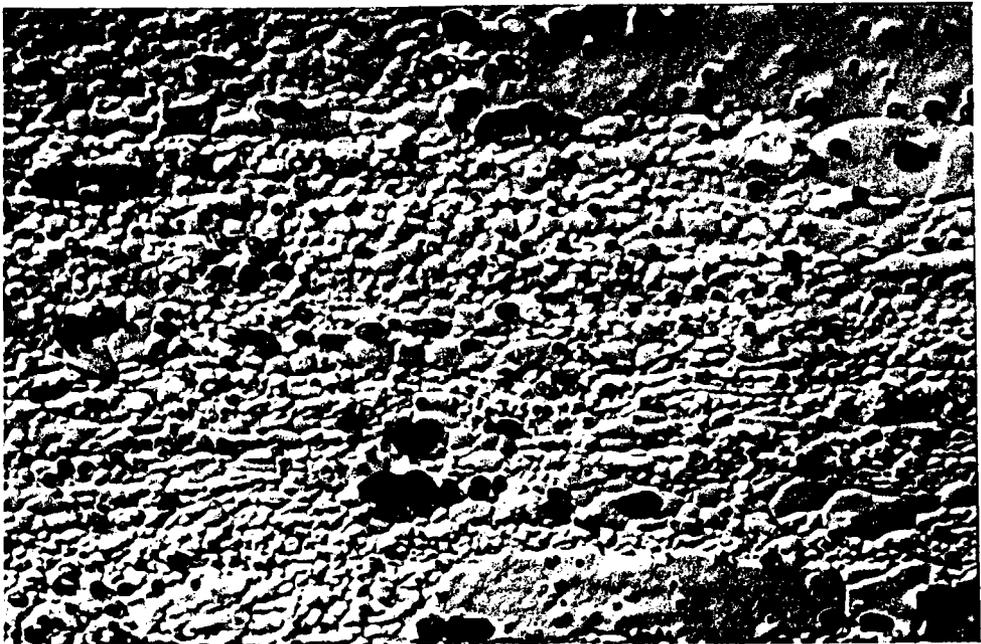


Fig. I-16: CLEP calculée pour l'alliage AlMgSi, dans des repères tournés de  $0^\circ$ ,  $45^\circ$  et  $90^\circ$  par rapport à la direction de laminage.



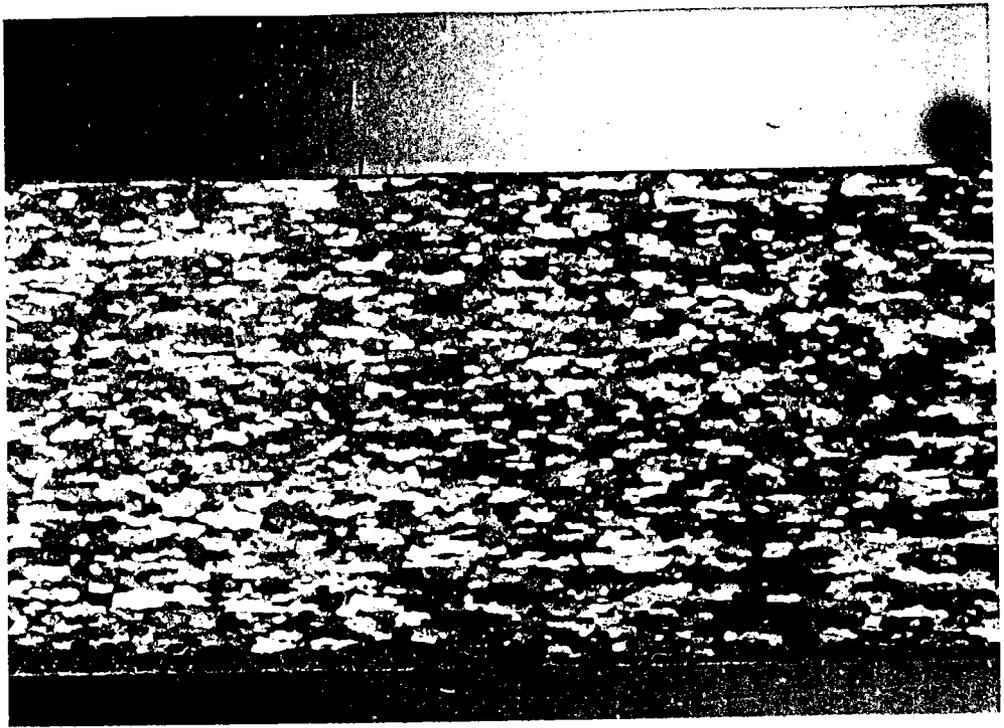
1 mm

Micrographie 3: Alliage AlLi: la micrographie de la tranche fait apparaître une microstructure sous forme de bandes parallèles à la direction de laminage.



50  $\mu$ m

Micrographie 4: Alliage AlLi: des bandes de gros grains partiellement recristallisés cohabitent dans une structure de grains très fins.



1 mm

Micrographie 1: Alliage AlMgSi: la micrographie de la tranche de la tôle montrant l'homogénéité de la microstructure à travers l'épaisseur.



50  $\mu$ m

Micrographie 2: Alliage AlMgSi: les grains sont légèrement allongés dans la direction de laminage.

## BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE I

- [1] Canova G.R., Kocks U.F., Tomé C.N. and Jonas J.J.  
The yield surface of textured polycrystals, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol 33, N°4, pp 371-397 (1985)
- [2] Canova G.R.  
Relations entre texture, anisotropie lois de comportement et instabilités plastiques dans les polycristaux. Thèse d'Etat, Université de Metz (1986).
- [3] Van Houtte P., Mols K., Van Bael A., and Aernoudt E.  
Application of yield loci calculated from texture data. *Textures and Microstructures*, Vol.11, pp.23-39 (1989)
- [4] Bradley D.  
On the anomalous behaviour of anisotropic sheet metals. *Int. J. Mech. Sci.* Vol. 26, N°2, pp 113-118 (1984)
- [5] François D., Pineau A. et Zaoui A.  
Comportement mécanique des matériaux. Ed. Hermes (1991)
- [6] Gotoh M.  
A theory of plastic anisotropy based on a yield function of fourth order (plane stress state), I and II. *Int. J. Mech. Sci.*, Vol.19, pp 505-520 (1977)
- [7] Van Houtte P.  
A comprehensive mathematical formulation of an extended Taylor-Bishop-Hill model. *Textures and Microstructures*, Vol 8,9, pp. 313-350 (1988).
- [8] Bunge H.J.  
Some applications of the Taylor theory of polycrystal plasticity. *Kristall Techn.*, N°5, pp.145-175.
- [9] Van Houtte P.  
Calculation of the yield locus of textured polycrystals using the Taylor and the relaxed Taylor theory. *Textures and Microstructures*, Vol.7, pp.29-72 (1987)
- [10] Bunge H.J., Schulze M. and Grzesik D.  
Calculation of the yield locus of polycrystalline materials according to the Taylor theory. *Peine Salzgitter Berichte*, pp.1-31 (1980).
- [11] Mols K., Van Praet K. and Van Houtte P.  
A generalized yield locus calculation from texture data. *Proc. ICOTOM 7 Holland* (1984).
- [12] Carre C.  
Application du modèle de Taylor et du critère de Hill au calcul des courbes limites d'écoulement plastique de tôles minces anisotropes de zirconium et de zircaloy IV : comparaison avec les essais expérimentaux. Thèse de 3<sup>ème</sup> cycle, Orsay (1984)
- [13] Bunge H.J.  
*Texture Analysis in Materials Science*. Butterworths London ed. (1982)
- [14] Klein H.  
Berechnung des Fließfeldes im Orientierungsraum durch Reihenentwicklung numerischer Daten aus der Taylortheorie. Diplomarbeit (1984)
- [15] Lequeu P., Gilormini P., Montheillet F., Bacroix B. and Jonas J.J.  
Yield surfaces for textured polycrystals -I. Crystallographic approach. *Acta Metall.* Vol.35, N°2, pp.439-451 (1987).
- [16] Toth L.S.  
Communication privée.
- [17] Molinari A., Canova G.R. and Ahzi S.  
A self consistent approach of the large deformation polycrystal viscoplasticity. *Acta Metall.* Vol.35, N°12, pp.2983-2994 (1987)

- [18] Wenk H.R., Canova G.R., Molinari A. and Mecking H.  
Texture development in halite: comparison of Taylor model and self-consistent theory. Acta Metall. Vol.37, N°7, pp.2017-2029 (1989)
- [19] Ahzi S.  
Une approche auto-cohérente pour le comportement des polycristaux viscoplastiques en grandes déformations. Thèse d'Université, Metz (1987).
- [20] Parnière P. et Sanz G.  
Appréciation des caractéristiques d'emboutissabilité des tôles minces. Ecole d'été de Métallurgie Physique de Villars-sur-Ollon, Editions du CNRS (1976).
- [21] Dahms M. and Bunge H.J.  
A positivity method for the determination of complete orientation distribution functions. Textures and Microstructures, Vol.10, pp.21-35 (1988)
- [22] Juul Jensen D. and Hansen N.  
Flow stress anisotropy in aluminium. Acta Met., Vol.38, N°8, pp.1369-1380 (1990).

## II) Application aux hexagonaux

Les résultats calculés dans le cas des matériaux cubiques sont cohérents avec les mesures, c'est pourquoi nous envisageons d'adapter la même démarche au cas des matériaux hexagonaux. L'anisotropie de ces matériaux est dans la plupart des cas plus prononcée que celle des cubiques [1]. La valeur expérimentale du coefficient d'anisotropie par exemple peut varier de 1,5 à 4,5 dans le plan de la tôle. L'influence des conditions de simulation sur les prévisions est d'autant plus marquée que l'anisotropie est forte.

Après avoir fait des rappels sur les modes de déformation, nous examinerons plus en détail les résultats expérimentaux et théoriques obtenus dans le cas de tôles de Titane, de Zirconium et de Zinc, le but de cette partie étant de calculer les CLEP.

### II-1) Spécificités des hexagonaux

#### II-1-1) Le glissement

Par rapport aux cubiques, les hexagonaux se distinguent par une plus grande richesse de systèmes de déformation. Classiquement selon le critère de Peierls-Nabarro [2] on distingue d'une part les matériaux dont le rapport  $c/a$  est inférieur à la valeur 1.633 (correspondant à l'empilement de sphères dures), et d'autre part ceux dont le  $c/a$  est supérieur.

$c/a > 1.633$ , ces matériaux ont pour glissement facile le glissement basal.

$c/a < 1.633$ , c'est le glissement prismatique qui est le glissement facile.

Une seule famille de systèmes de glissement de multiplicité relativement basse comme c'est le cas pour le basal et le prismatique ne permet pas d'accommoder la déformation plastique au delà de quelques pour-cent de déformation. Les systèmes secondaires mais aussi le glissement dévié et/ou le maclage jouent alors un rôle important. Dans le tableau II-1 sont consignés les cinq principaux systèmes de glissements qui interviennent dans les métaux de structure hexagonale [2].

Plans de glissement		Directions de glissement	
Nom	Indice	Indice	Symbol
Basal	$(0\ 0\ 0\ 1)$	$\langle 1\ 1\ \bar{2}\ 0 \rangle$	$\vec{a}$
Prismatique	$[1\ 0\ \bar{1}\ 0]$	$\langle 1\ 1\ \bar{2}\ 0 \rangle$	$\vec{a}$
Pyramidal 1ère espèce	$[1\ 0\ \bar{1}\ 0]$	$\langle 1\ 1\ \bar{2}\ 0 \rangle$	$\vec{a}$
Pyramidal 1ère espèce	$[1\ 0\ \bar{1}\ 0]$	$\langle 1\ 1\ \bar{2}\ 3 \rangle$	$\vec{c}+\vec{a}$
Pyramidal 2ème espèce	$[1\ 1\ \bar{2}\ 2]$	$\langle 1\ 1\ \bar{2}\ 3 \rangle$	$\vec{c}+\vec{a}$

Tableau II-1: Définition des 5 principaux systèmes de glissement [14].

### II-1-2) Le maclage

L'importance du maclage dans la déformation plastique des matériaux hexagonaux a été soulignée par de nombreux auteurs [2], [3], [4] et [6]. Il est communément admis que le maclage est favorisé par une diminution de la température et/ou une augmentation de la vitesse de déformation. Les influences de la taille de grain et de l'amplitude de déformation sont également bien connus. On trouvera dans le tableau II-2 les différentes familles de maclage que l'on rencontre dans les matériaux étudiés.

K1	K2	n1	n2	S
$\{1\ 0\ \bar{1}\ 2\}$	$\{1\ 0\ \bar{1}\ \bar{2}\}$	$\pm \langle 1\ 0\ \bar{1}\ \bar{1} \rangle$	$\pm \langle 1\ 0\ \bar{1}\ 1 \rangle$	$\pm 1/3 \langle 1\ \bar{2}\ 1\ 0 \rangle$
$\{1\ 0\ \bar{1}\ 1\}$	$\{1\ 0\ \bar{1}\ \bar{3}\}$	$\langle 1\ 0\ \bar{1}\ \bar{2} \rangle$	$\langle 3\ 0\ \bar{3}\ 2 \rangle$	$1/3 \langle 1\ \bar{2}\ 1\ 0 \rangle$
$\{1\ 1\ \bar{2}\ 2\}$	$\{1\ 1\ \bar{2}\ \bar{4}\}$	$1/3 \langle 1\ 1\ \bar{2}\ \bar{3} \rangle$	$1/3 \langle 2\ 2\ \bar{4}\ 3 \rangle$	$\langle 1\ \bar{1}\ 0\ 0 \rangle$
$\{1\ 1\ \bar{2}\ 1\}$	$\{0\ 0\ 0\ 2\}$	$1/3 \langle \bar{1}\ \bar{1}\ 2\ 6 \rangle$	$1/3 \langle 1\ 1\ \bar{2}\ 0 \rangle$	$\langle \bar{1}\ 1\ 0\ 0 \rangle$

Tableau II-2: Définitions des principaux systèmes de maclage [3].

Dans le tableau II-2, les éléments de maclage sont définis par:

- le plan de macle K1
- la direction de macle n1
- le deuxième plan non distordu est K2 avant déformation
- la direction de cisaillement par rapport à K2 est n2.
- le taux de cisaillement S

### II-1-3) Le maclage haute température dans les alliages de Zirconium

Lors de l'étude de l'influence de la température sur le formage d'alliage de zirconium, nous avons constaté une augmentation de la fraction volumique maclée avec la température, ce qui n'est pas conventionel. En reprenant d'anciens

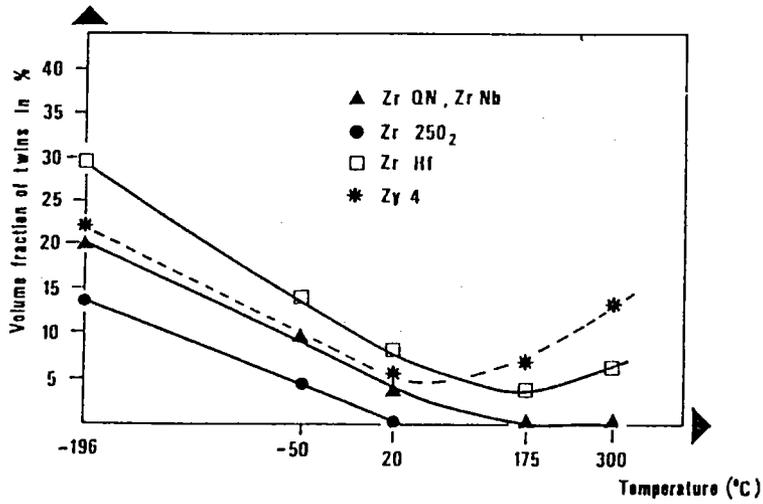


Fig. II-1: Evolution de la fraction volumique maclée en fonction de la température pour différents alliages de Zr [8].

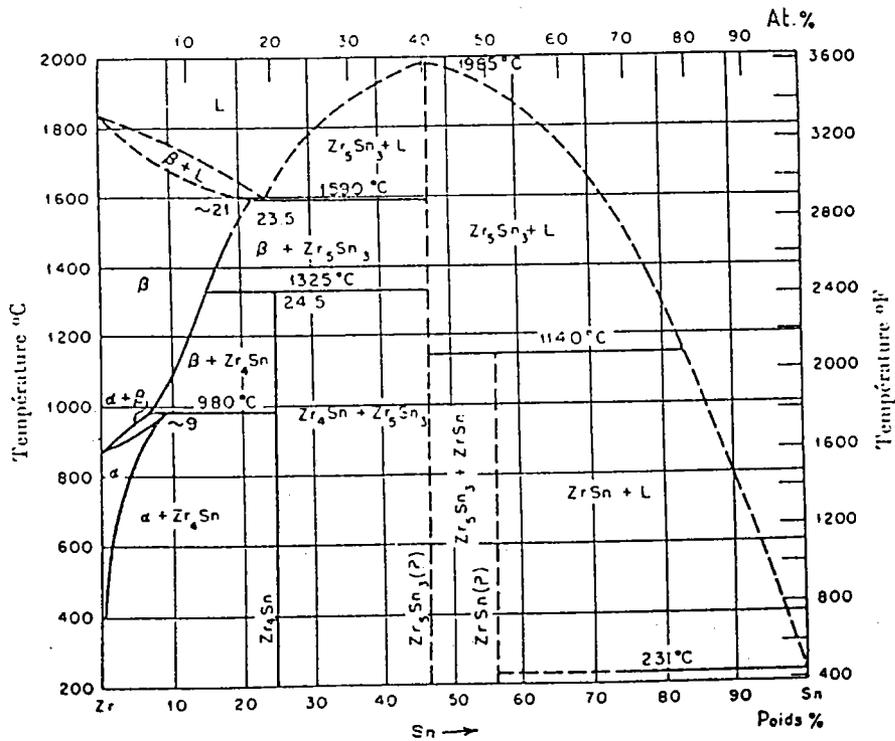


Fig. II-2: Diagramme d'équilibre Zr-Sn montrant l'augmentation de la solubilité avec la température [10].

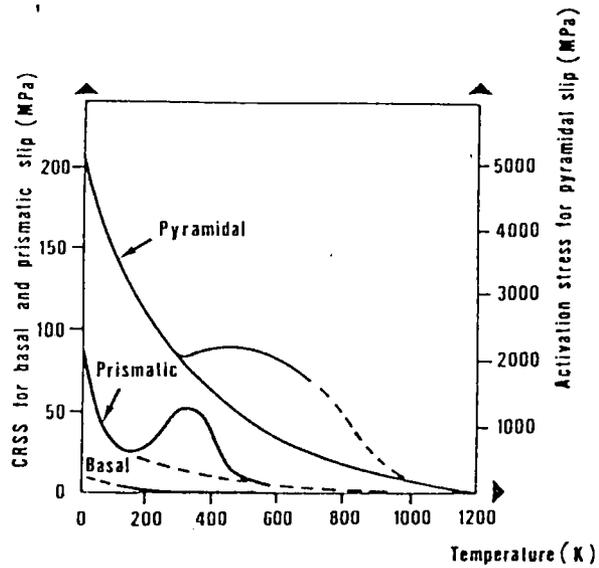


Fig. II-3: Evolution non monotone de la cission critique du glissement prismatique dans le cas du béryllium [7].

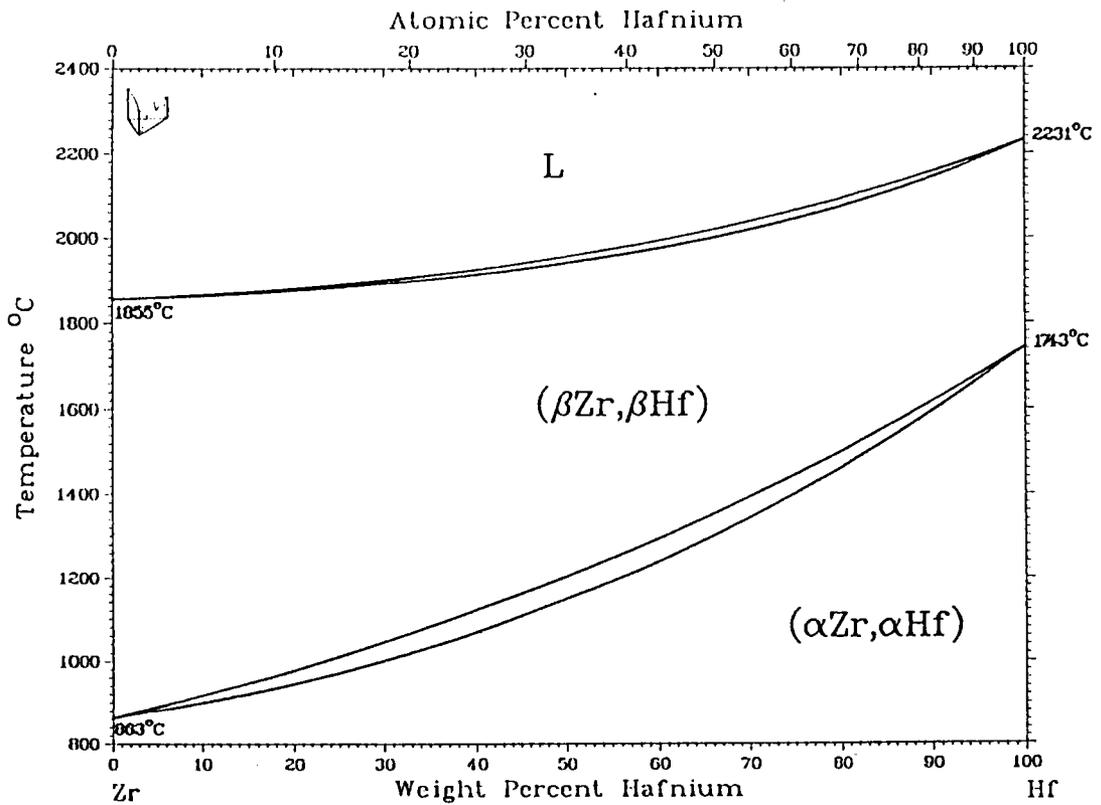


Fig. II-4: Diagramme d'équilibre Zr-Hf; la solubilité du Hf dans le Zr n'augmente pas avec la température [9].

résultats [3], et en complétant l'étude initiale, nous avons mis en évidence l'effet de la température et des éléments d'addition sur l'apparition du maclage dans le cas des alliages de Zirconium. Les alliages concernés sont:

Zr de Qualité Nucléaire (QN) contenant peu d'oxygène (900ppm)

Zr contenant 2500 ppm d'oxygène

Zr Hf

Zr Sn (Zircaloy 4)

Zr Nb, le Niobium n'entre pas complètement en solution dans la phase  $\alpha$ .

On s'est attaché à avoir pour tous les alliages une taille de grain identique d'environ 10 à 20 $\mu$ m. Le choix des alliages a été tel qu'il permet de rendre compte de l'influence des éléments interstitiels (O<sub>2</sub>) et des éléments de substitution (Sn, Hf, Nb). La déformation de 10% est réalisée par un essai de traction uniaxiale à une vitesse constante de 5mm/min et dans une gamme de température allant de -196°C à + 250°C.

Les textures cristallographiques avant déformation des différents alliages sont comprises entre deux extrêmes:

- une texture de fibre: axe c dans DN et  $\{10\bar{1}0\}$  aléatoirement distribué.

- une texture à composante majeure c à 40° de DN dans le plan DN-DT, et  $\{10\bar{1}0\}$  à 30° de DL. Dans les deux cas cela correspond à la texture de recristallisation.

En tout état de cause, les facteurs d'orientation pour le maclage calculés pour ces 2 textures extrêmes ne sont guères différents et ne peuvent en aucun cas justifier les différences observées quant à l'apparition du maclage. L'évolution de la fraction volumique maclée est visualisée dans la figure (II-1). L'évolution de -196°C à 20°C est classique. Dans la partie de 20°C à 350°C on observe des variations non prévisibles. Le rôle de l'oxygène est d'abaisser la fraction volumique maclée. On constate d'autre part le comportement très différent des alliages ZrSn et ZrHf par rapport aux autres alliages.

Hobson et Mac Hargue [5], et Stiegler et al [6] ont noté pour des alliages Nb-V une diminution de l'énergie de faute d'empilement quand le taux de l'élément en substitution augmente. Comme l'énergie de faute d'empilement est liée à l'apparition du maclage de par son influence sur la nucléation, une énergie de faute d'empilement qui diminue favorise l'apparition du maclage. Une première explication consiste à dire qu'une augmentation de la température implique une augmentation de la solubilité donc une diminution de l'énergie de faute d'empilement, d'où une fraction volumique maclée plus importante. Cette approche s'applique à l'alliage ZrSn du fait de la solubilité croissante avec la température de l'étain dans le zirconium (voir figure (II-2)).

Beuers et al [7] expliquent que dans le cas du Beryllium, la cission critique de glissement prismatique augmente au-dessus de 170K à cause du glissement dévié sur les plans de base, ce qui entraîne le blocage des autres systèmes de glissement (voir figure (II-3)). Ce blocage induit une augmentation de la contrainte ce qui amène l'activation du maclage, cette interprétation peut s'appliquer pour expliquer l'évolution de la fraction volumique maclée dans le cas du ZrHf où la solubilité n'augmente pas avec la température (figure (II-4)). Ces deux approches peuvent justifier la variation non monotone de la fraction volumique maclée en fonction de la température.

## II-2) Choix des cissions et modélisation

Les observations faites au microscope électronique à transmission permettent de déterminer approximativement la fréquence avec laquelle les différents systèmes interviennent. Ces observations ne sont possibles que pour de faibles taux de déformation car la multiplication des dislocations après 10% de déformation est telle que la détermination de vecteurs de Burgers n'est plus possible. L'identification des systèmes de déformation n'est pas aisée, en effet la détermination de vecteur de Burgers est longue et délicate.

En tout état de cause, les cissions critiques dont on a besoin en modélisation ne sont pas déterminables directement. La seule façon de se faire une idée est de travailler avec des monocristaux, mais dans ce cas on peut se demander dans quelle mesure le comportement du monocristal isolé est comparable à celui d'un grain dans le polycristal en particulier lorsque le maclage intervient. A cause de l'effet de la taille de grain, celui-ci peut être présent dans un monocristal et pas dans un alliage à grains fins. D'autre part la densité de dislocations dans un monocristal de plusieurs  $\text{cm}^3$  élaboré avec précaution est-elle comparable à celle existant dans un grain?

Pour valider les cissions critiques utilisées deux approches sont proposées:

- le calcul du coefficient d'anisotropie
- l'évolution des textures

a) Le calcul du coefficient d'anisotropie

Les observations au microscope électronique permettent d'identifier les systèmes de glissement et/ou maclage et de donner un domaine de variation des cissions critiques en se basant sur la fréquence d'apparition des systèmes.

La démarche consiste à chercher dans le domaine de variation défini à l'aide des observations microscopiques, le jeu de cissions critiques qui permet de calculer

les coefficients d'anisotropie les plus proches de ceux évalués expérimentalement [11], [12] et [13].

Déterminer pour chaque jeu de cissions la CLEP complète selon la méthode exposée au paragraphe I-2-2-1) dans le but de calculer le coefficient d'anisotropie en utilisant l'équation I-70, aboutirait à des temps de calculs considérables. C'est pourquoi dans ce cas précis nous n'avons pas appliqué cette démarche, mais nous avons plutôt utilisé une variante plus classique du modèle de Taylor pour calculer le coefficient d'anisotropie et sa variation en fonction de l'angle de prélèvement. En considérant le tenseur de déformation suivant:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -q_i & 0 \\ 0 & 0 & -(1-q_i) \end{pmatrix} \quad (\text{II-1})$$

et en faisant varier  $q_i$ , le principe du travail plastique maximum implique que le facteur de Taylor est minimum pour la valeur  $q_{\min}$  de  $q_i$  correspondant à la traction uniaxiale [13]. Le coefficient d'anisotropie  $r$  se déduit de  $q_{\min}$  par:

$$r = \frac{q_{\min}}{1-q_{\min}} \quad (\text{II-2})$$

Pour déterminer  $r$  pour un angle de prélèvement  $\alpha$  par rapport à la direction de laminage, il faut exprimer le tenseur de déformation (II-1) dans un repère tourné d'un angle  $-\alpha$  par rapport à D.L.. Pour chaque jeu de cissions critiques, on calculera  $r(\alpha)$ , ce qui représente  $7 \cdot 10$  appels au modèle de Taylor (on calcule pour 7 angles  $\alpha$  et pour 10 valeurs de  $q_i$ ). Le nombre de jeux de cissions critiques varie selon les matériaux de 20 à 252. La sélection du jeu de cissions le mieux adapté est basée sur un critère de moindres carrés.

Globalement les cissions issues de ce calcul ne donnent pas entière satisfaction. Les variations de  $r(\alpha)$  ne retracent que grossièrement les variations mesurées. Dans certains cas les variations calculées vont à l'encontre de celles mesurées. Une première explication peut être trouvée dans le critère qui ne pénalise pas les croisements de courbes mais plutôt les grands écarts. Dans le cas du coefficient d'anisotropie, bien que sa valeur ne nous soit pas indifférente, ce sont les variations en fonction de l'angle  $\alpha$  qui nous intéressent le plus. Notons également que les pas tant sur  $q_i$  que sur les cissions sont relativement grands pour des raisons de volume de calculs. Pour affiner les résultats à ce stade, il faudrait réduire les pas de calcul ou/et utiliser un algorithme d'optimisation. La détermination des coefficients d'anisotropie est délicate, Toth [14] par exemple a mis en évidence l'influence pour la symétrie cubique, du nombre d'orientations utilisé dans la modélisation. Il semblerait que même des orientations de faible fraction volumique jouent un rôle non négligeable dans la prédiction de  $r(\alpha)$ .

En définitive, dans l'état actuel des logiciels, la recherche du jeu de cissions basée sur minimisation de l'écart entre les valeurs mesurées et calculées de  $r(\alpha)$ , ne donne pas entière satisfaction. Ceci explique pourquoi dans la suite

la recherche du jeu de cissons s'effectue en modulant "manuellement" les valeurs des cissons critiques autour des valeurs données par les microscopiste. Les valeurs de  $r(\alpha)$  et de  $\sigma_e$  sont évalués à l'aide de la CLEP.

#### b) L'évolution de texture

La confrontation entre les évolutions de texture expérimentale et modélisée lors du laminage à froid est un critère qui permet de juger de la validité des conditions de modélisation et notamment des valeurs des cissons critiques. Ce point de vue est partagé par de nombreux auteurs [4], [15] et [17].

Nous nous sommes plus particulièrement intéressés aux résultats de F.E. Mellab [15] qui dans sa thèse a étudié l'évolution des textures de différents métaux hexagonaux: zinc, titane, zirconium.

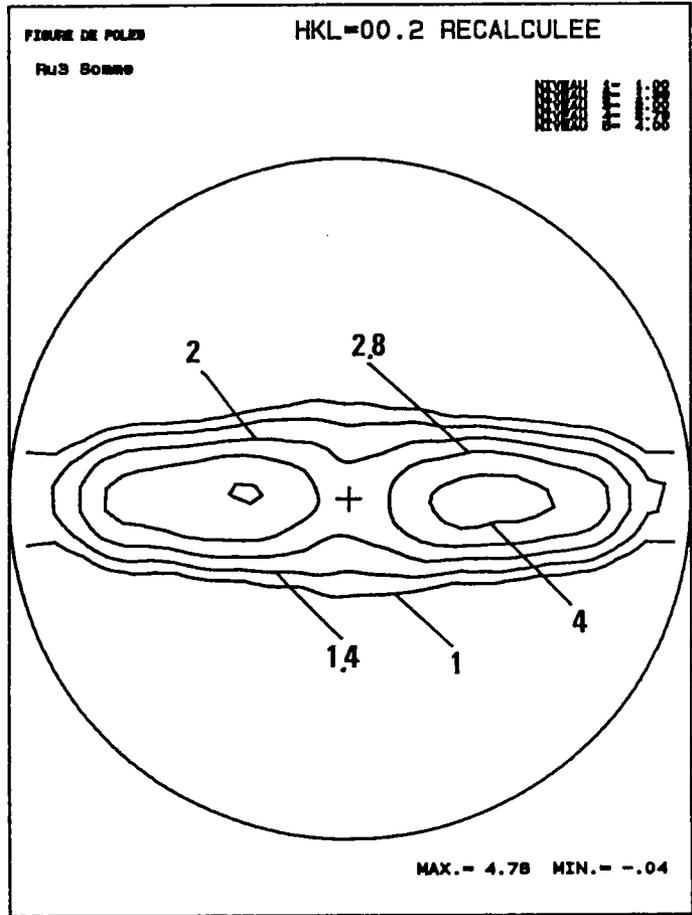
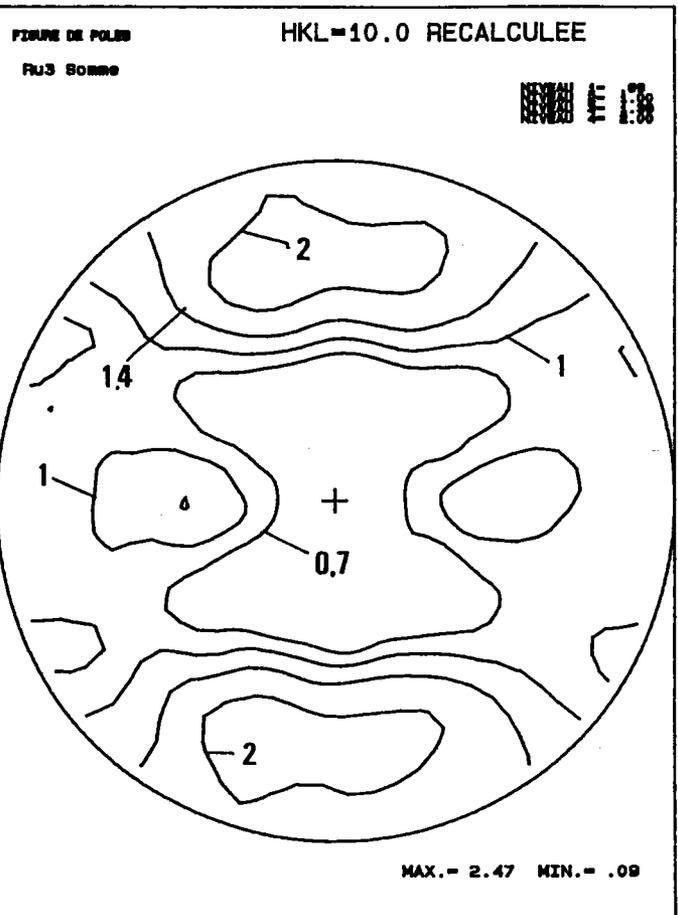


Fig. II-5: Figures de pôles (00.2) et (10.0) recalculées après analyse de la tôle Ru3 à l'état initial.

COST 506 Zr Ru 3 (Somme Fdp corrigees)

COST 506 Ru 3 BdF = mesure

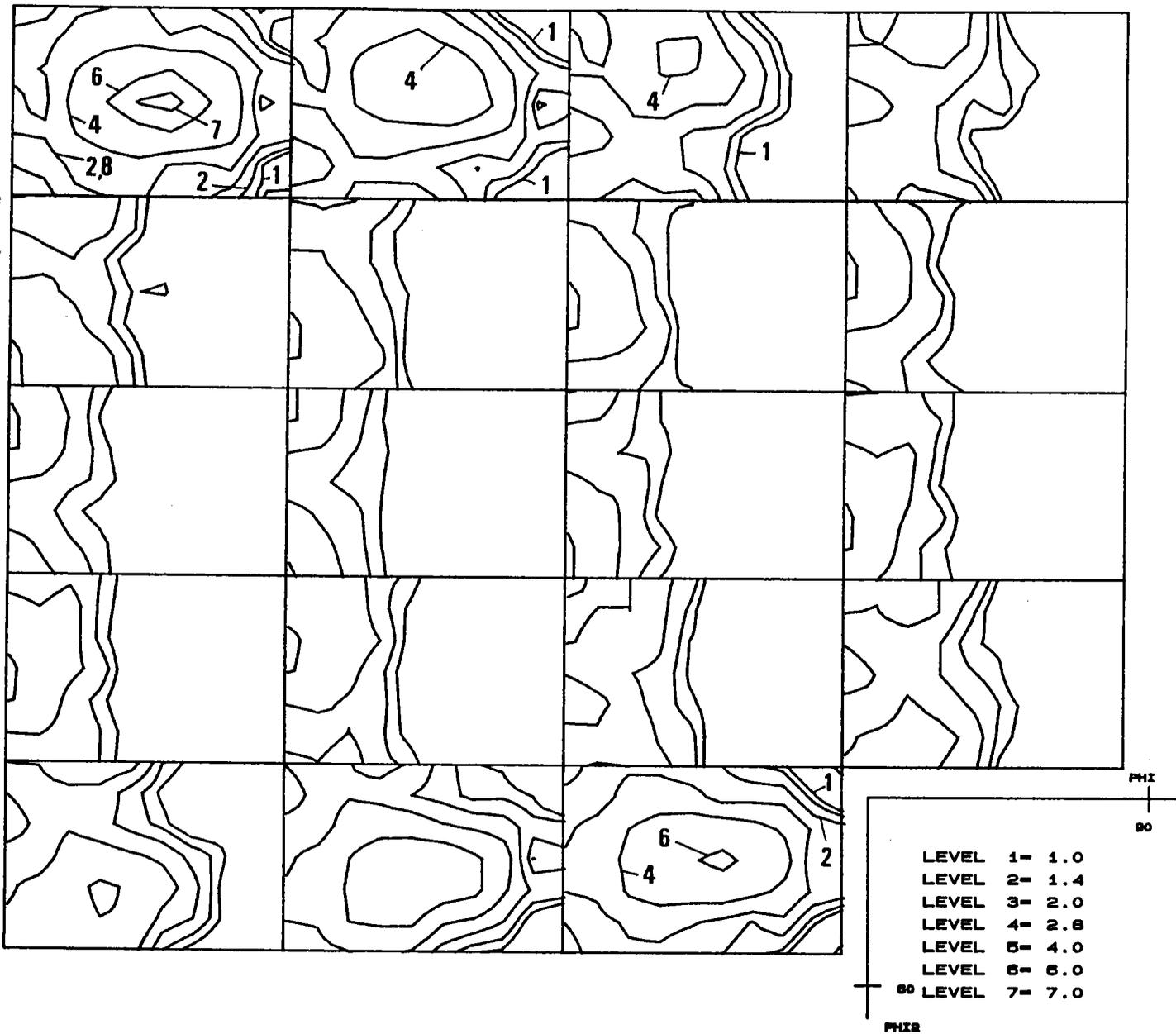


Fig. II-6: Sections de la FDO de la tôle Ru3 à l'état initial. ( $\phi_1=0^\circ$  à  $180^\circ$  par pas de  $10^\circ$ ).

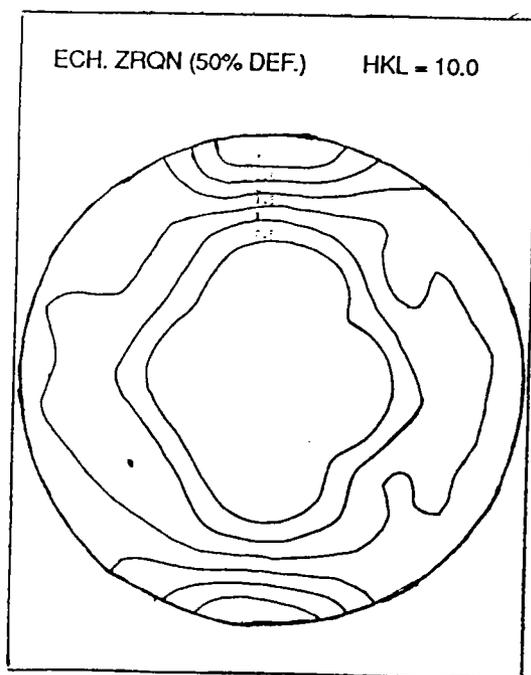
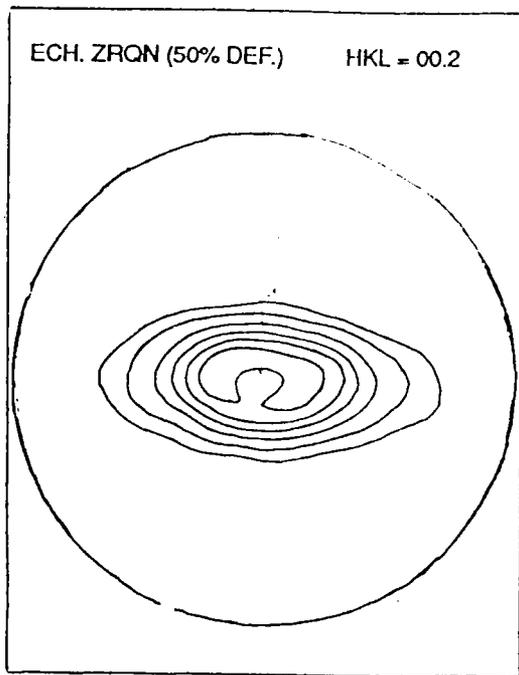


Fig. II-8: Figures de pôles (00.2) et (10.0) de Ru3 après 50% de laminage.

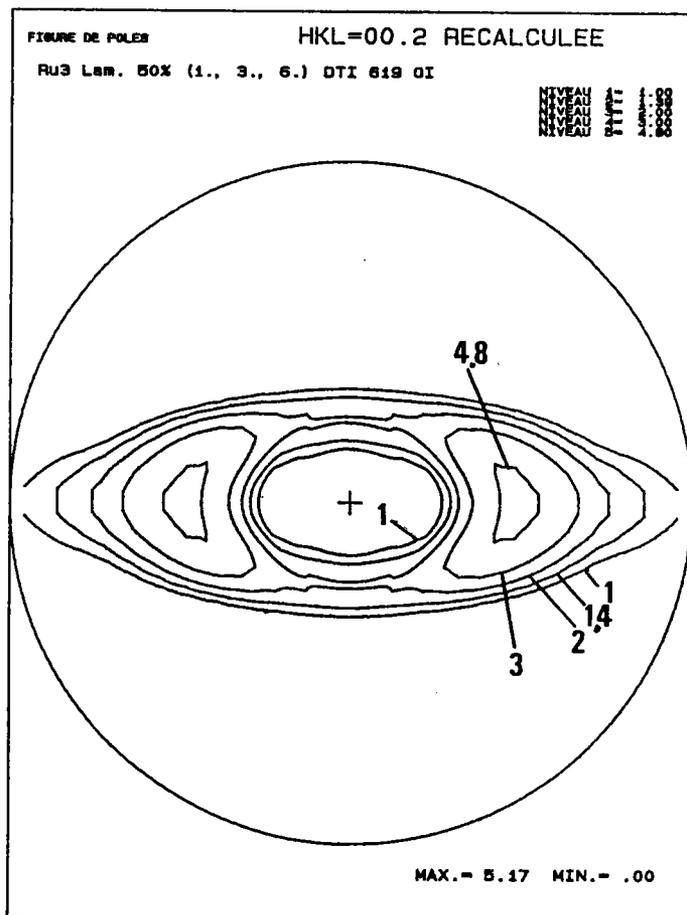
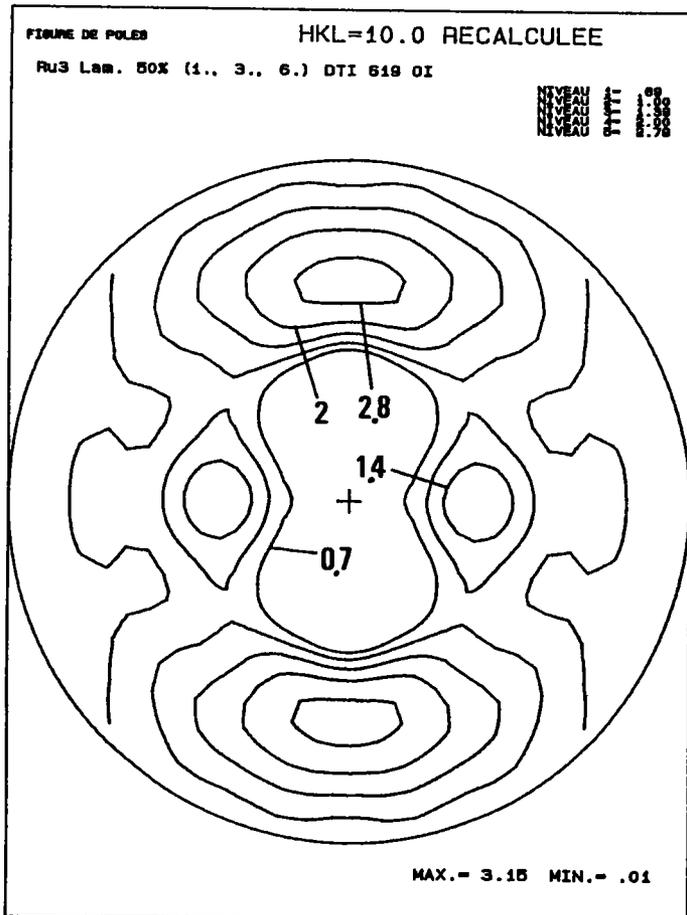


Fig. II-7: Figures de pôles (00.2) et (10.0) simulées après 50% de laminage.

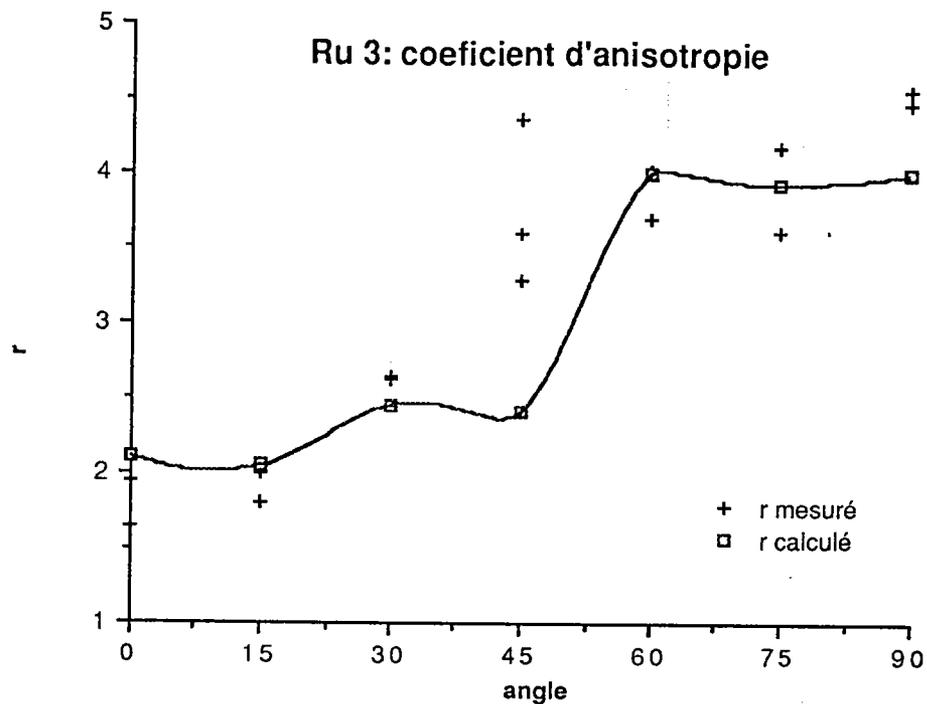


Fig. II-9: Coefficient d'anisotropie  $r$  en fonction de l'angle de prélèvement: comparaison entre la mesure et le calcul pour la tôle Ru3.

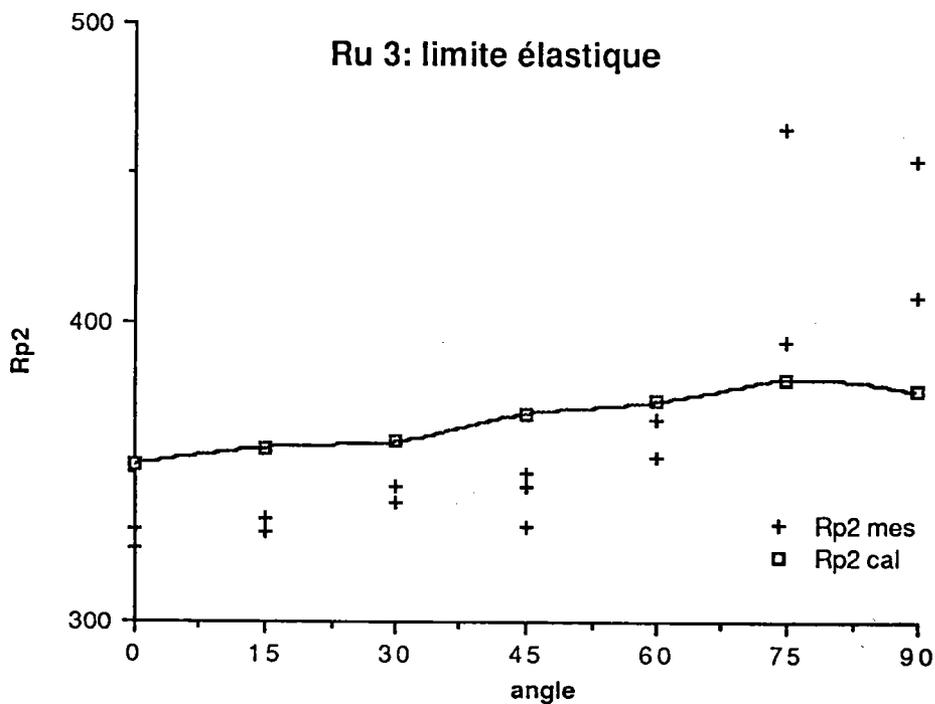


Fig. II-10: Limite élastique en fonction de l'angle de prélèvement: comparaison entre la mesure et le calcul pour la tôle Ru3.

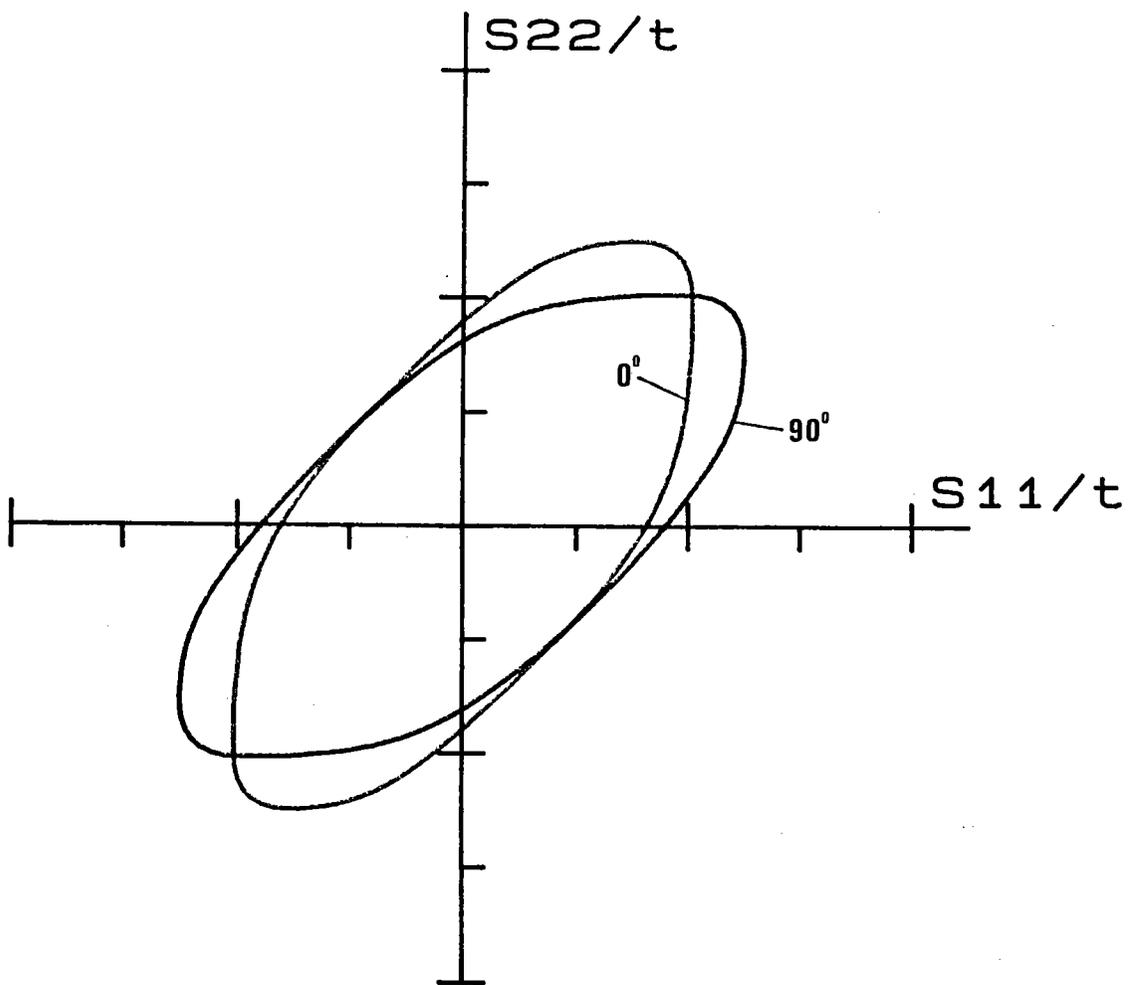


Fig. II-11: CLEP calculée pour l'alliage Ru3 dans des repères tournés de  $0^\circ$  et  $90^\circ$  par rapport à la direction de laminage.

Ru3 Statique (m=5.)

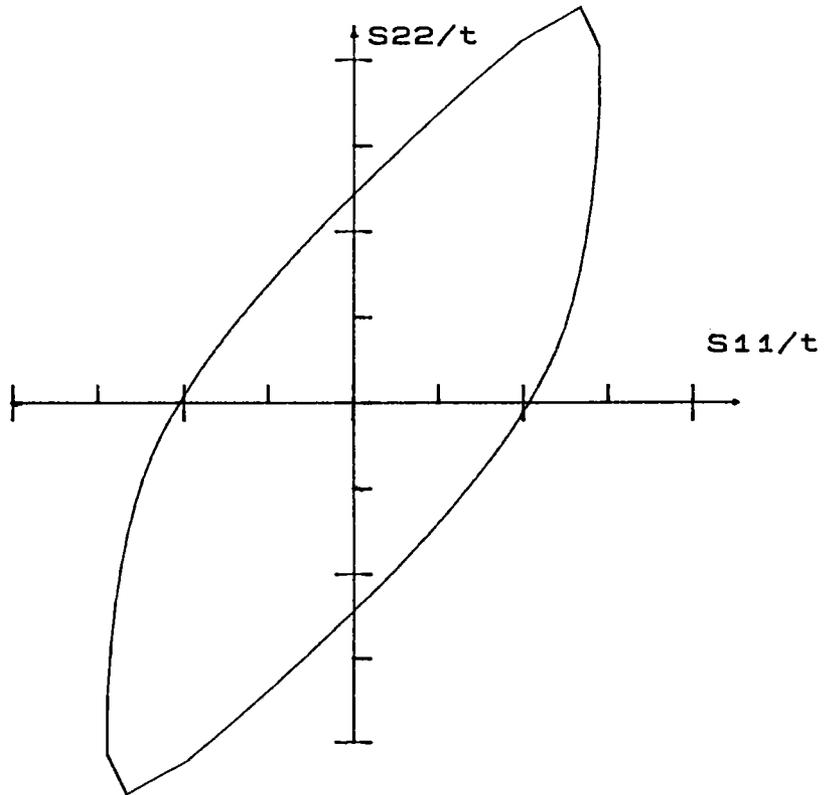


Fig. II-12: CLEP calculée pour l'alliage Ru3 avec le modèle statique.

## II-2-1) Zirconium

L'alliage étudié est un alliage Zr-Hf dont la composition chimique est donnée dans le tableau II-3; dans la suite cette tôle sera dénommée Ru3. La tôle de Ru3 a subi un laminage à chaud jusqu'à une épaisseur de 6mm puis l'épaisseur finale de 3mm a été obtenue par laminage à froid. Un traitement de recristallisation a suivi le laminage à froid.

	Hf %	Fe+Cr ppm	Ni ppm	N ppm	O ppm	H ppm
Ru 3	2,2	460	50	24	830	4

Tableau II-3: Composition chimique de la tôle Ru3.

### - La microstructure

La micrographie 5 effectuée au microscope optique en lumière polarisée présente la microstructure initiale de l'alliage. La taille de grain est d'environ 10-15 $\mu$ m. Dans l'ensemble les grains présentent une structure équiaxe qui est due à la recristallisation.

### - La texture

La texture initiale a fait l'objet de 3 déterminations dans l'épaisseur de la tôle. Les figures de pôles (00.2) et (10.0) (voir figures (II-5)) montrent que les axes c sont inclinés d'environ 45° par rapport à DN dans le plan DN-DT. Les plans (10.0) sont proches de DL. Dans les sections de la FDO (voir figure (II-6)) on distingue une composante majeure à  $\varphi_1=0^\circ$ ,  $\Phi=45^\circ$  et  $\varphi_2=30^\circ$ . Le maximum de la FDO atteint 7,4 pour cette composante.

### - Les conditions de simulation

Les micrographies de la tôle Ru3 déformée montrent que le maclage n'intervient pas du moins lors de déformations à l'ambiante et jusqu'à 10% de déformation. Le système de glissement prismatique est le système prépondérant [2].

Dans le présent travail, les meilleurs résultats ont été obtenus avec la combinaison suivante de cisssions critiques:

- prismatique : 1.
- pyramidal a : 3.
- pyramidal c+a : 6.

en utilisant le modèle de Taylor dans sa version DTI en raison de la structure équiaxe des grains.

Par rapport aux résultats obtenus par Mellab [15], qui s'est intéressé à l'évolution de la texture lors du laminage, nous avons augmenté la contrainte critique sur le pyramidal  $\alpha$  et nous avons diminué celle sur  $c+a$ , car les variations de la limite élastique et du coefficient d'anisotropie n'étaient pas reproduites correctement.

Dans ces conditions de simulation, l'évolution de texture simulée lors du laminage diffère notablement de l'expérience (voir figures (II-7) et (II-8)). Une première explication consiste à invoquer le fait que l'évolution de texture intègre 50% de déformation alors que la limite élastique et le coefficient d'anisotropie sont mesurés dans les premiers stades de la déformation plastique. Pour une déformation de 50% les évolutions des cisssions critiques (écrouissage) sont à prendre en compte. Les valeurs des cisssions diffèrent donc selon qu'il s'agisse d'une déformation de quelques pour-cents ou de quelques dizaines de pour-cents. Pour tenir compte de l'écrouissage d'une manière moins empirique, il faudrait connaître la matrice d'écrouissage qui traduit l'évolution des cisssions au cours de la déformation et l'interaction des différents systèmes.

#### - Les propriétés mécaniques

La figure (II-9) présente les variations du coefficient d'anisotropie dans le plan de la tôle. Les coefficients calculés suivent les mêmes variations que ceux mesurés. Toutefois, le calcul s'écarte sensiblement de la mesure pour un angle de  $45^\circ$  par rapport à DL.

La confrontation entre la mesure et le calcul de la limite élastique est retracée dans la figure (II-10). Le calcul sous-estime fortement l'anisotropie plane. Cependant le sens de variation est respecté. L'écart le plus important se situe pour des angles de  $75-90^\circ$ . La limite élastique en sens travers est mal reproduite. On notera l'augmentation de la plage de variation des mesures dans cette zone.

Les sections  $(S_{11}, S_{22})$  des CLEP à  $0^\circ$  et à  $90^\circ$  (voir figure (II-11)) sont symétriques par rapport à l'origine comme on pouvait s'y attendre en l'absence de maillage et en ayant les mêmes cisssions critique dans les deux sens de glissement. Qualitativement, la forme des courbes entre l'expansion et la traction plane laisse supposer une meilleure ductilité en sens travers qu'en sens long. C'est effectivement le cas comme on le verra sur les CLF.

Les CLEP calculées à l'aide du modèle statique sont présentées figure (II-12).

#### - Discussion

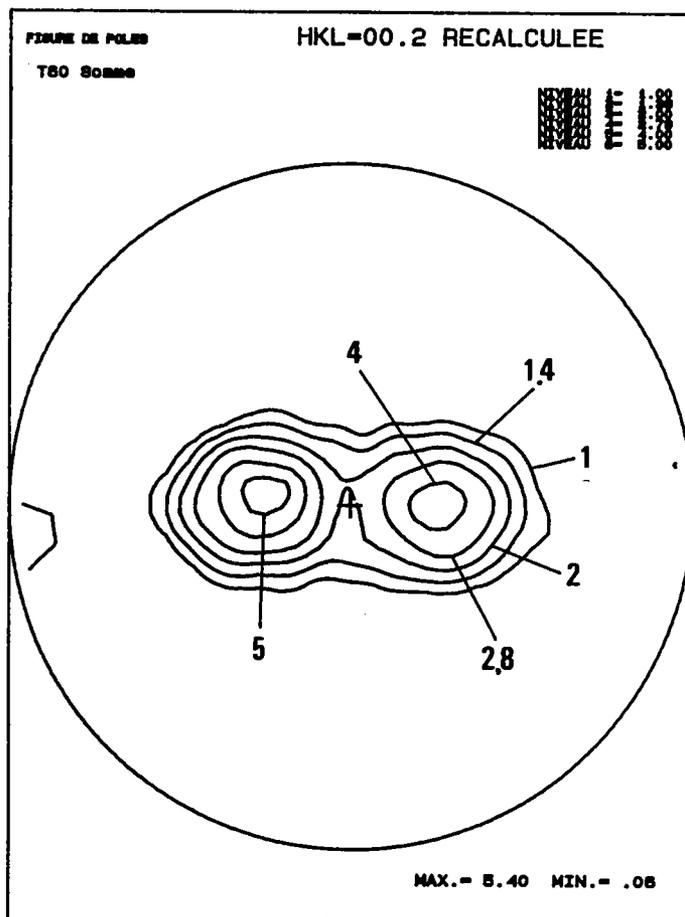
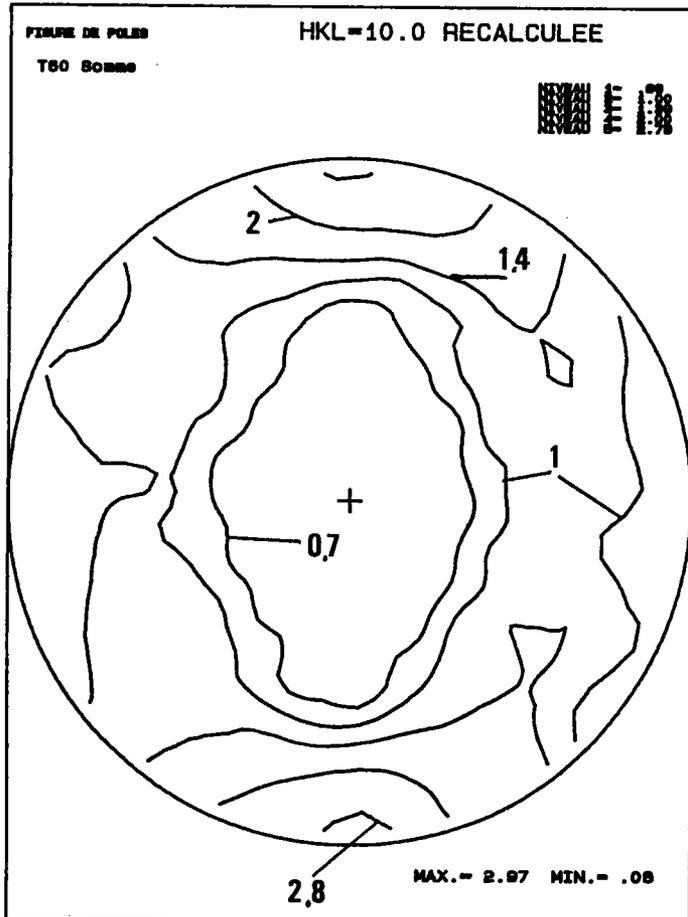


Fig. II-13: Figures de pôles (00.2) et (10.0) recalculées après analyse de la tôle T60 à l'état initial.

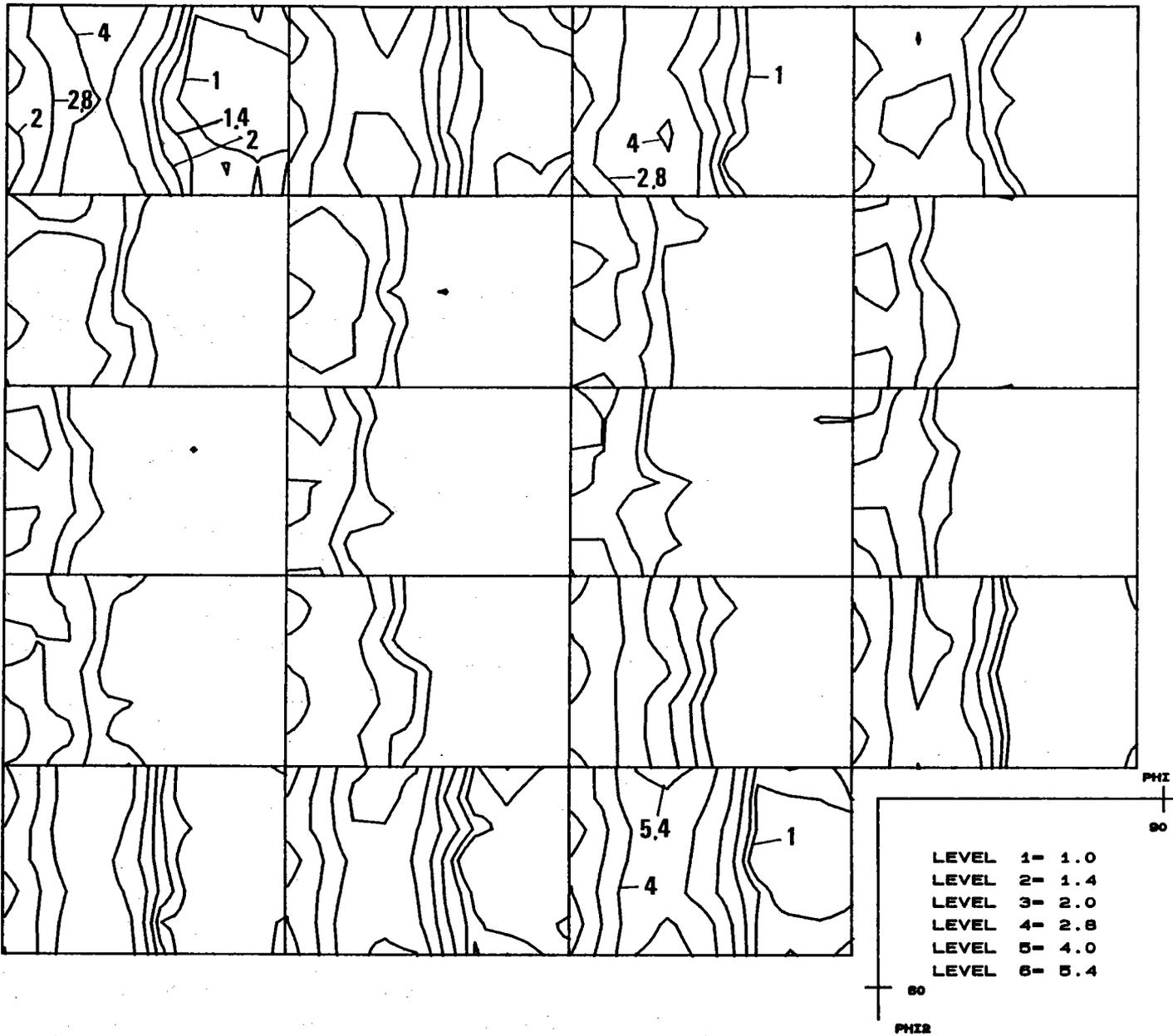


Fig. II-14: Sections de la FDO de titane T60 à l'état initial. ( $\phi_1=0^\circ$  à  $180^\circ$  par pas de  $10^\circ$ ).

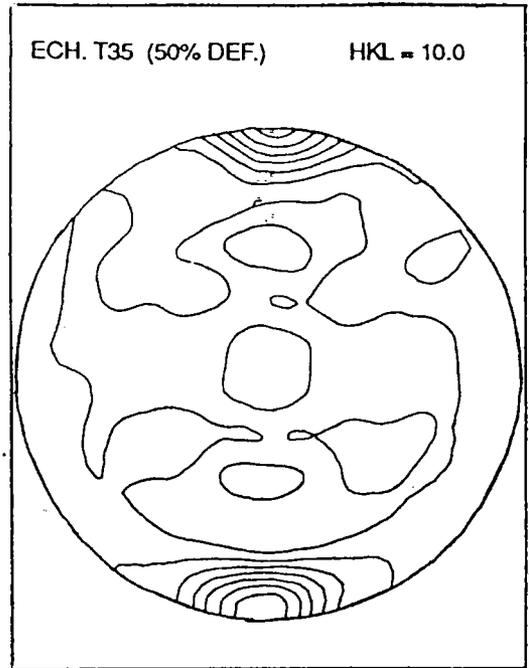
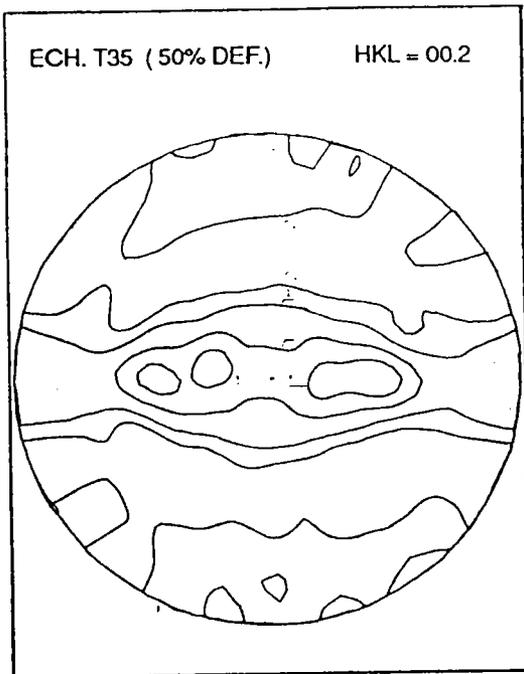


Fig. II-16: Figures de pôles (00.2) et (10.0) de T35 après 50% de laminage.

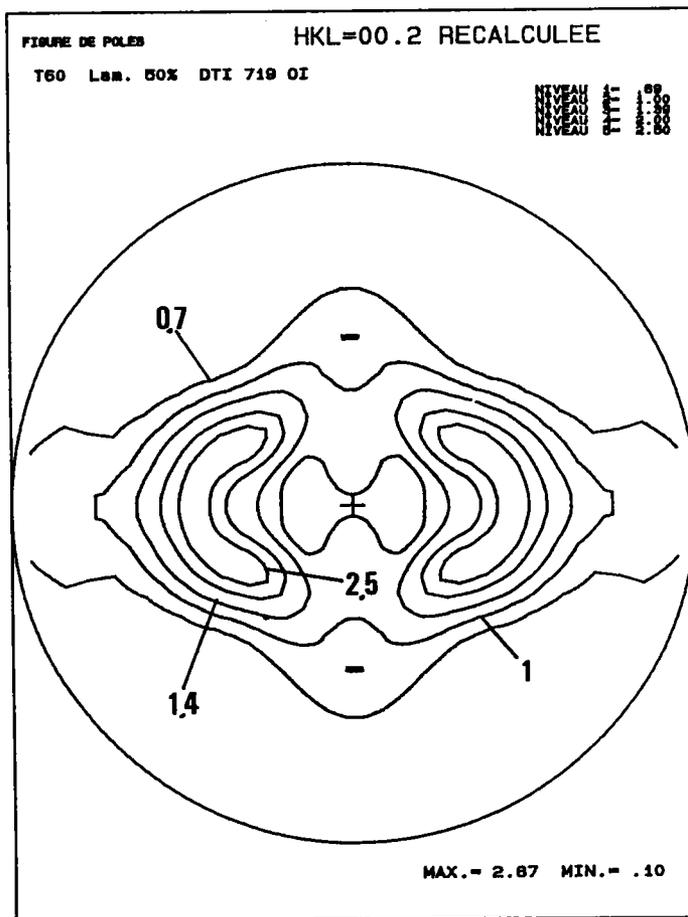
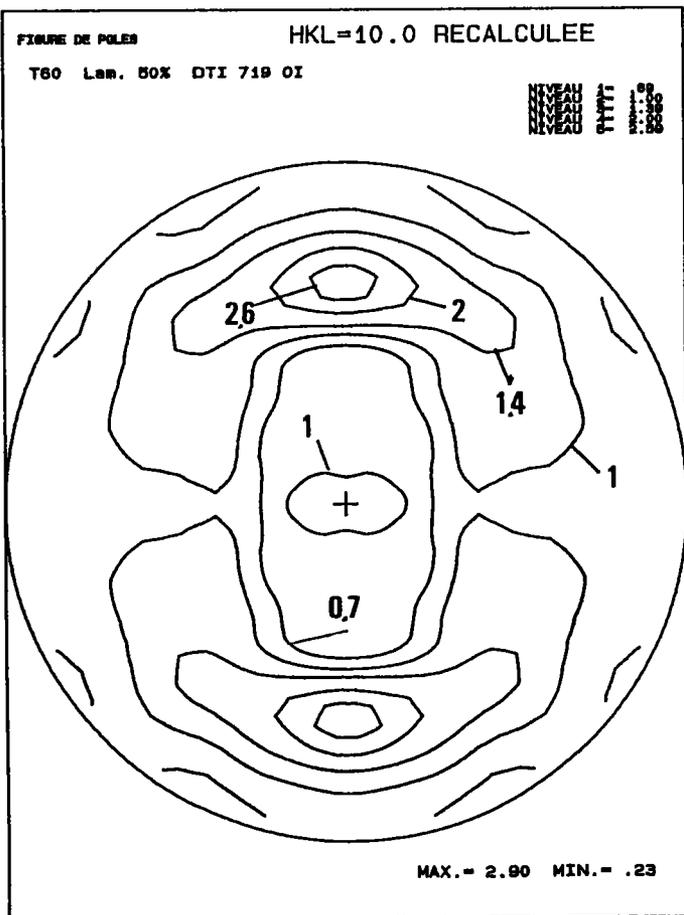


Fig. II-15: Figures de pôles (00.2) et (10.0) simulées après 50% de laminage.

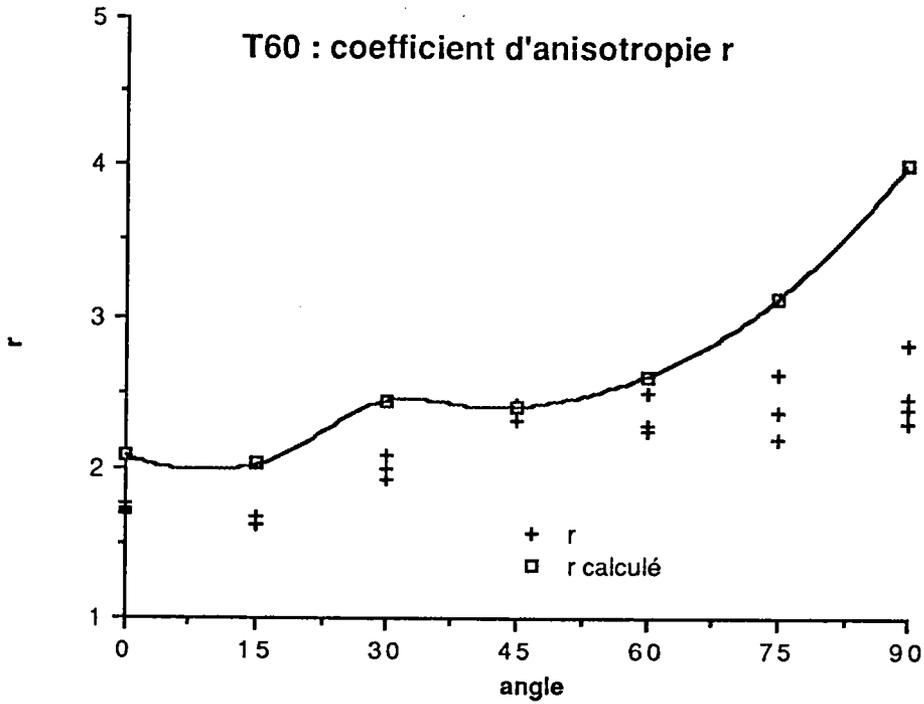


Fig. II-17: Coefficient d'anisotropie r en fonction de l'angle de prélèvement: comparaison entre l'expérience et le calcul pour la tôle de T60.

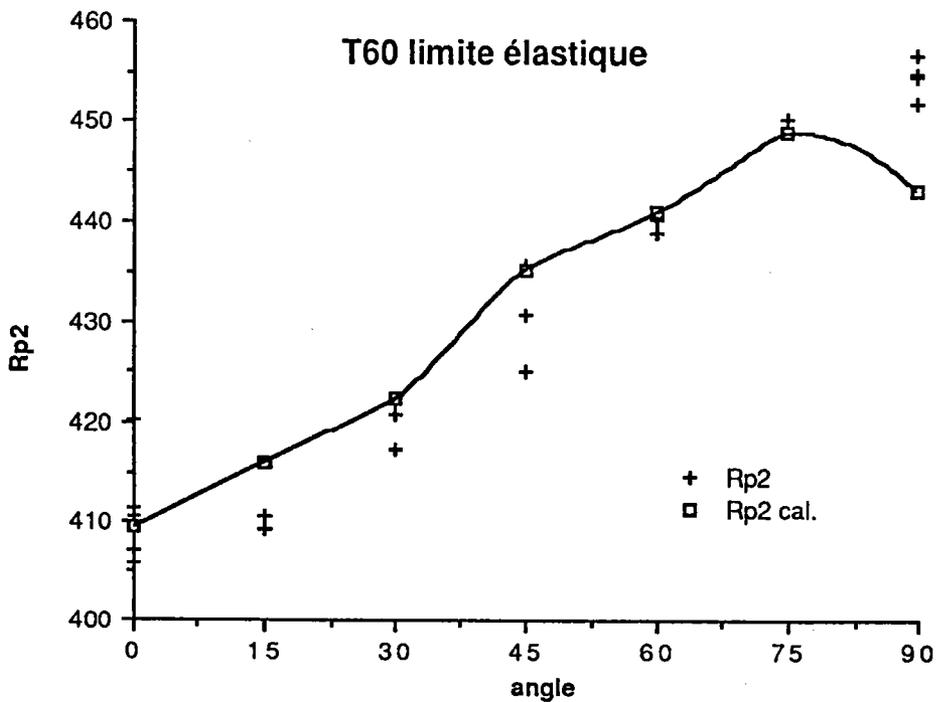


Fig. II-18: Limite élastique en fonction de l'angle de prélèvement: comparaison entre l'expérience et le calcul pour la tôle T60.

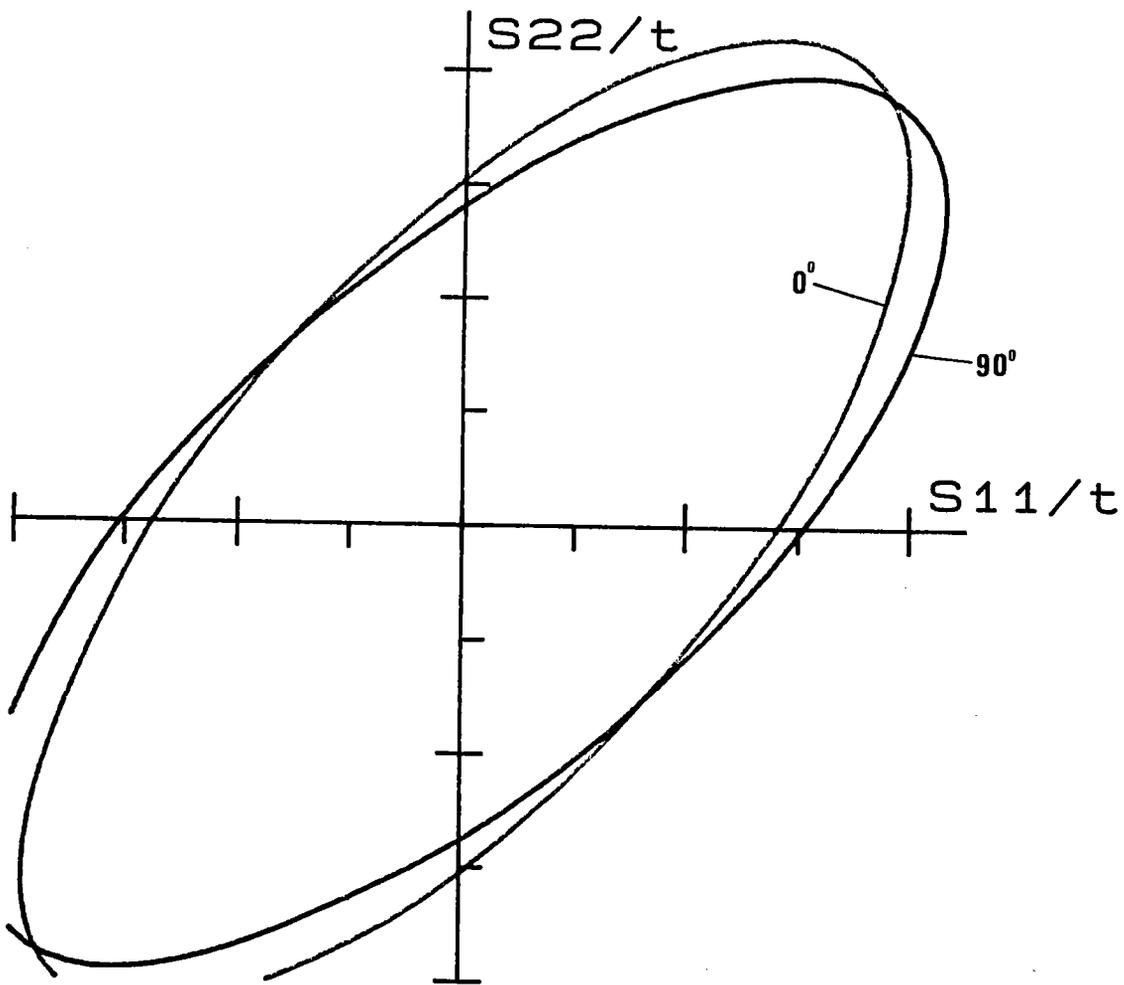


Fig. II-19: CLEP calculée pour le titane T60 dans des repères tournés de  $0^\circ$  et  $90^\circ$  par rapport à la direction de laminage.

T60 Statique (m=5.)

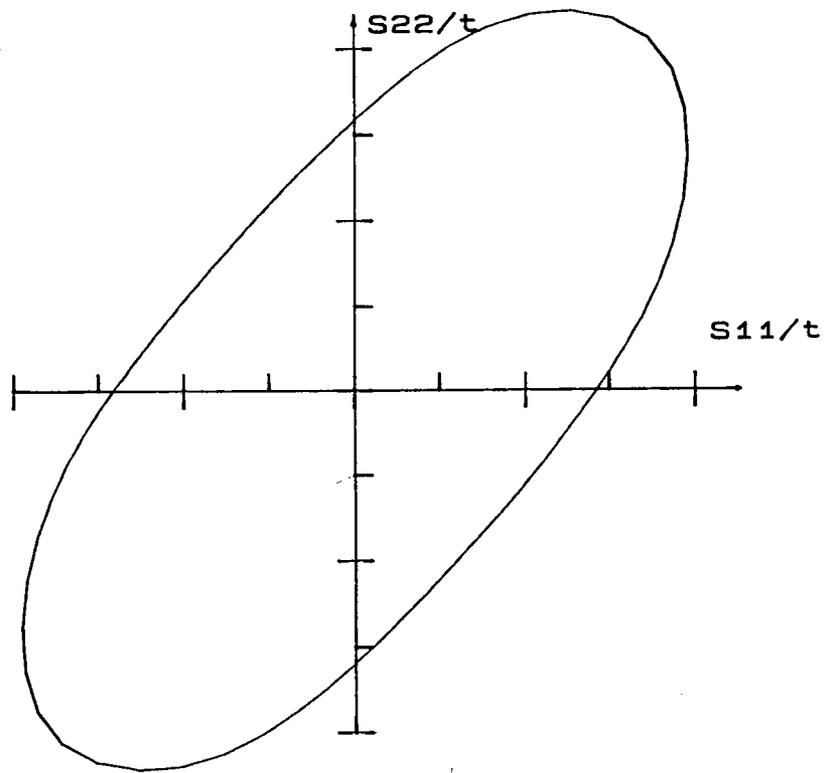


Fig. II-20: CLEP calculée pour le titane T60 à l'aide du modèle statique.

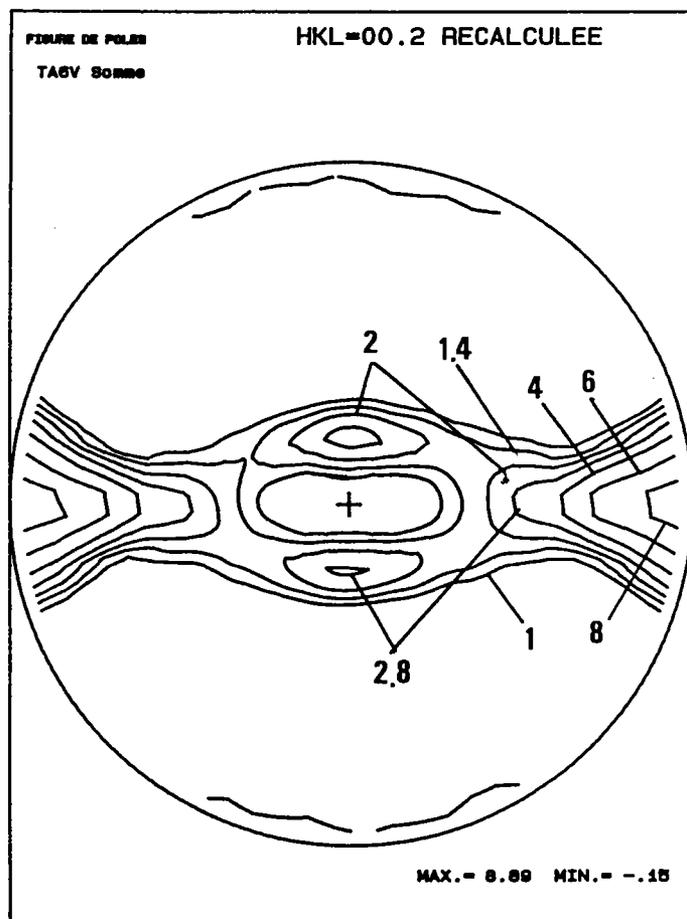
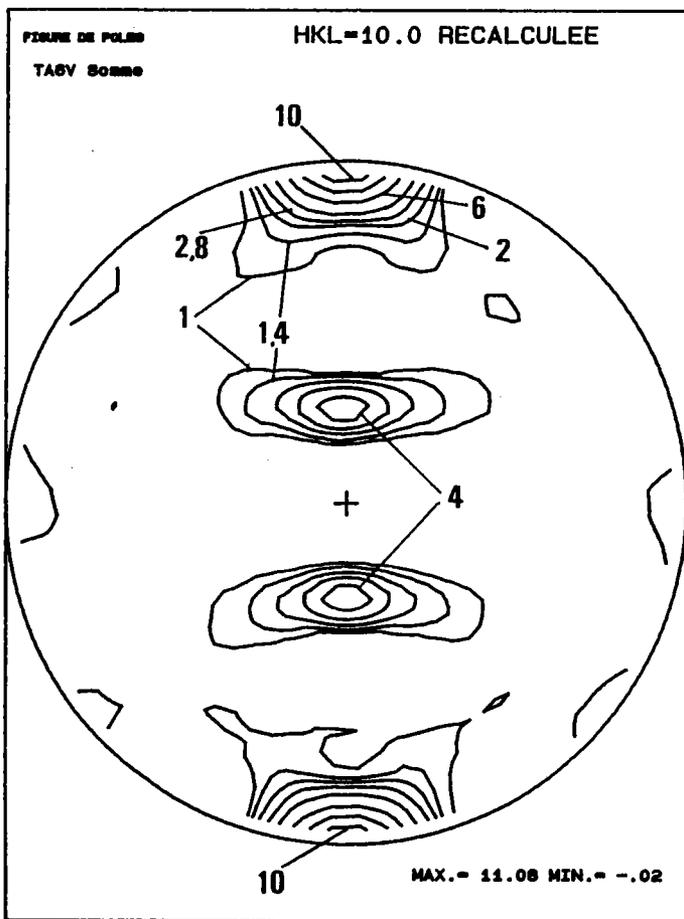


Fig. II-21: Figures de pôles (00.2) et (10.0) recalculées après analyse de la tôle de TA6V à l'état initial.

COST 506 TA6V (Somme)

COST 506 TA6V BdF= min FdP

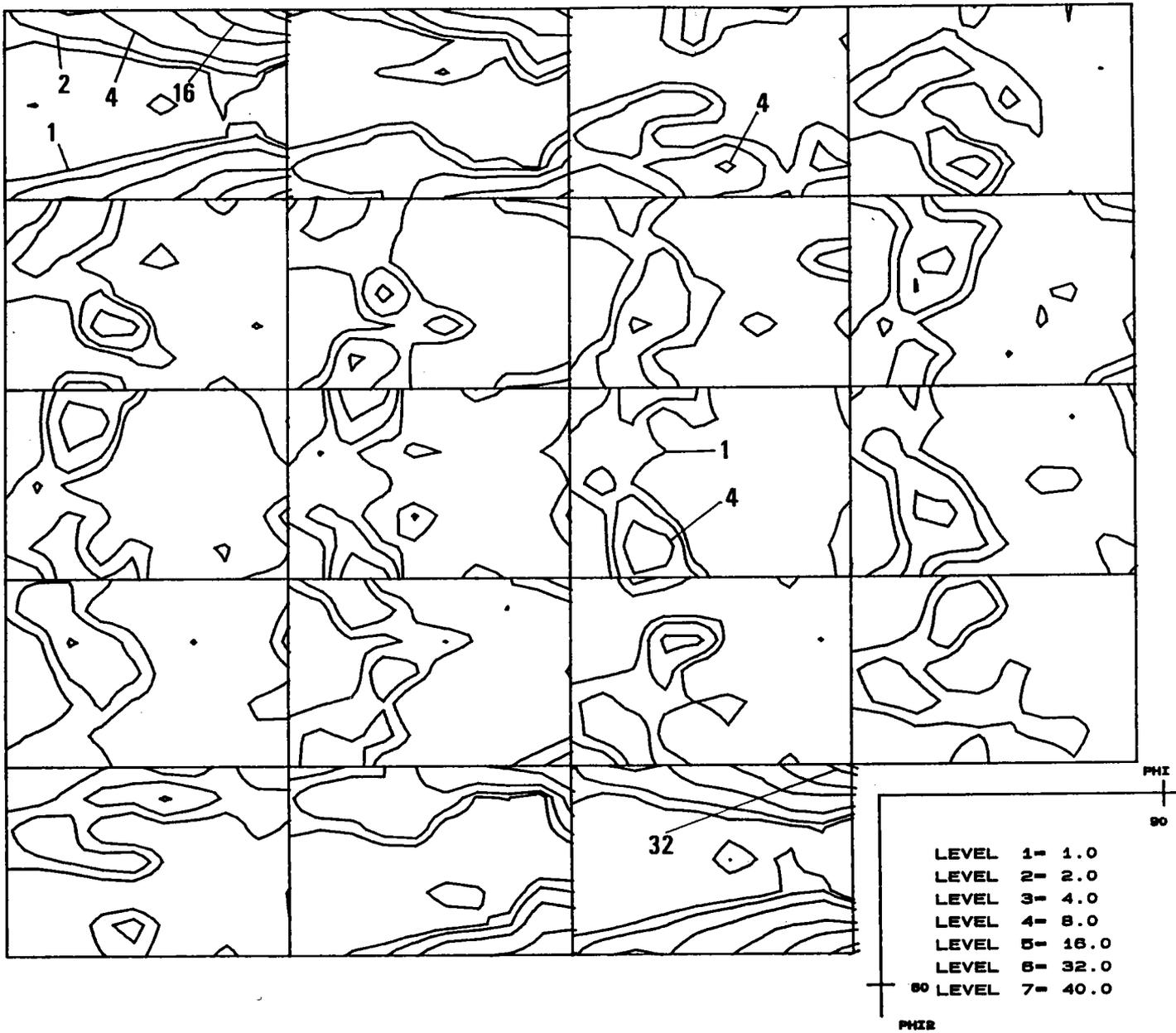


Fig. II-22: Section de la FDO de TA6V à l'état initial. ( $\phi_1=0^\circ$  à  $180^\circ$  par pas de  $10^\circ$ ).

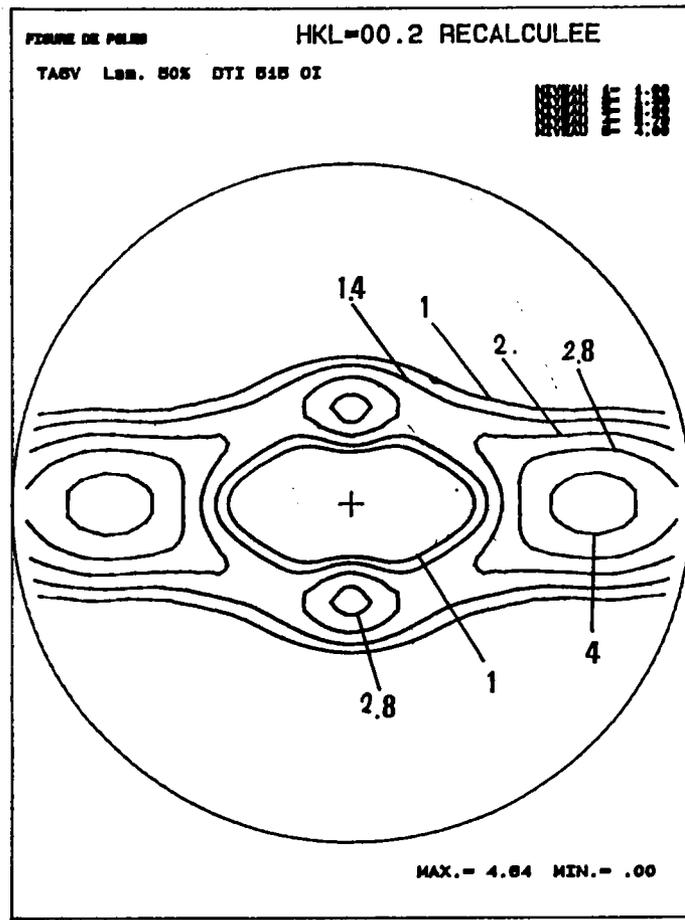
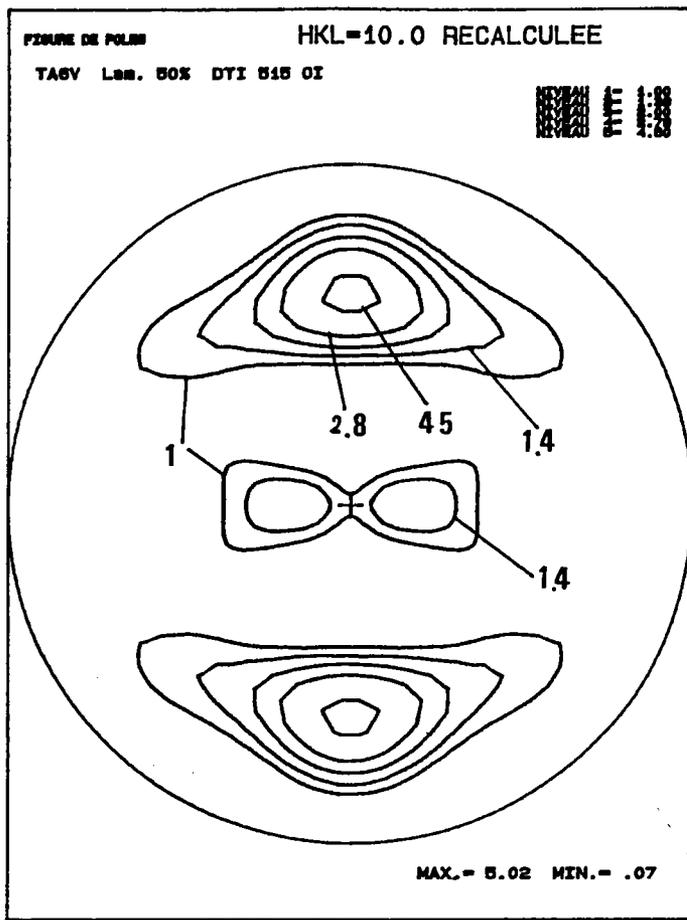


Fig. II-23: Figures de pôles (00.2) et (10.0) simulées après 50% de laminage.

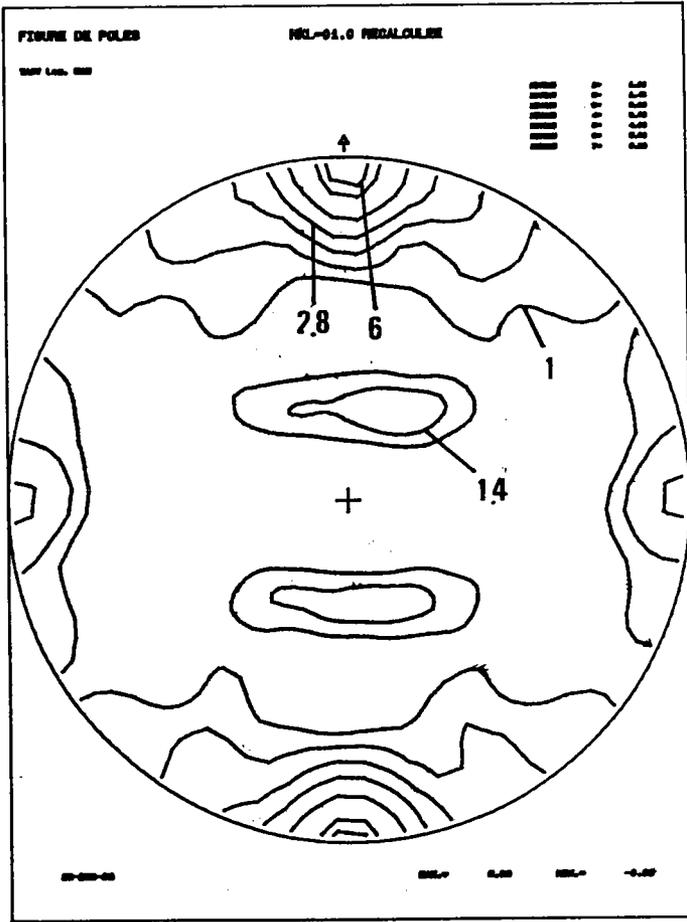
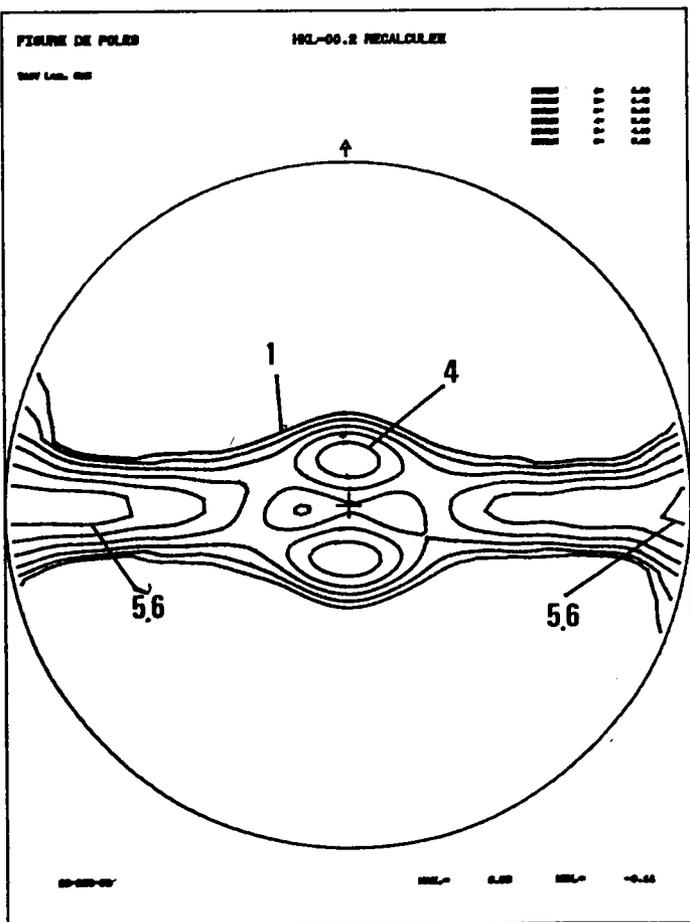


Fig. II-24: Figures de pôles (00.2) et (10.0) de TA6V après laminage de 50%

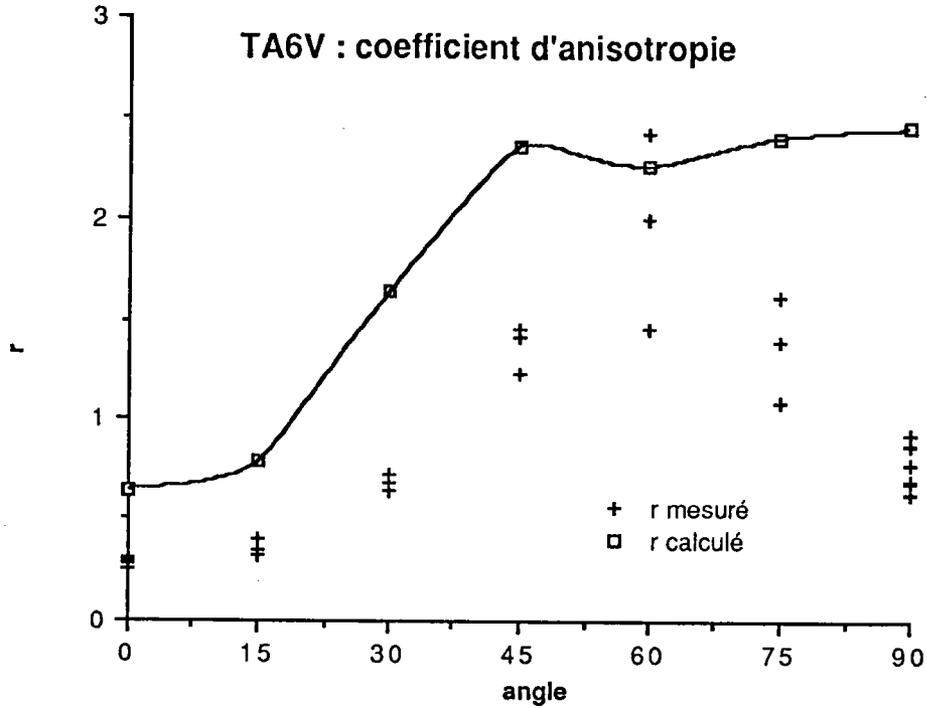


Fig. II-25: Coefficient d'anisotropie en fonction de l'angle de prélèvement: comparaison entre la mesure et le calcul dans le cas du TA6V.

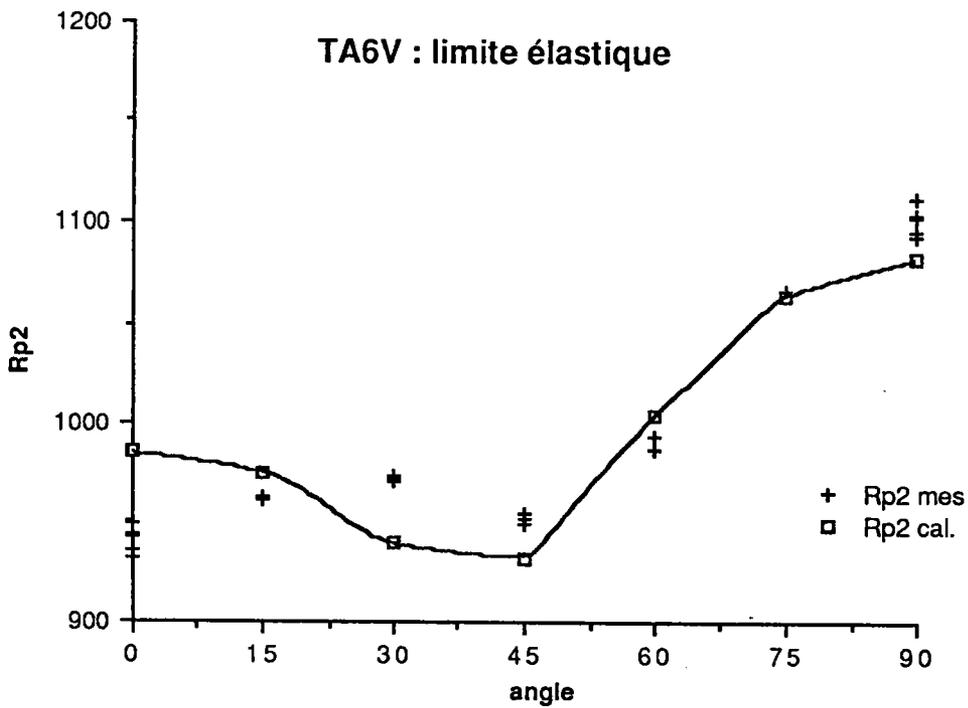


Fig. II-26: Limite élastique en fonction de l'angle de prélèvement: comparaison entre le calcul et la mesure dans le cas du TA6V.

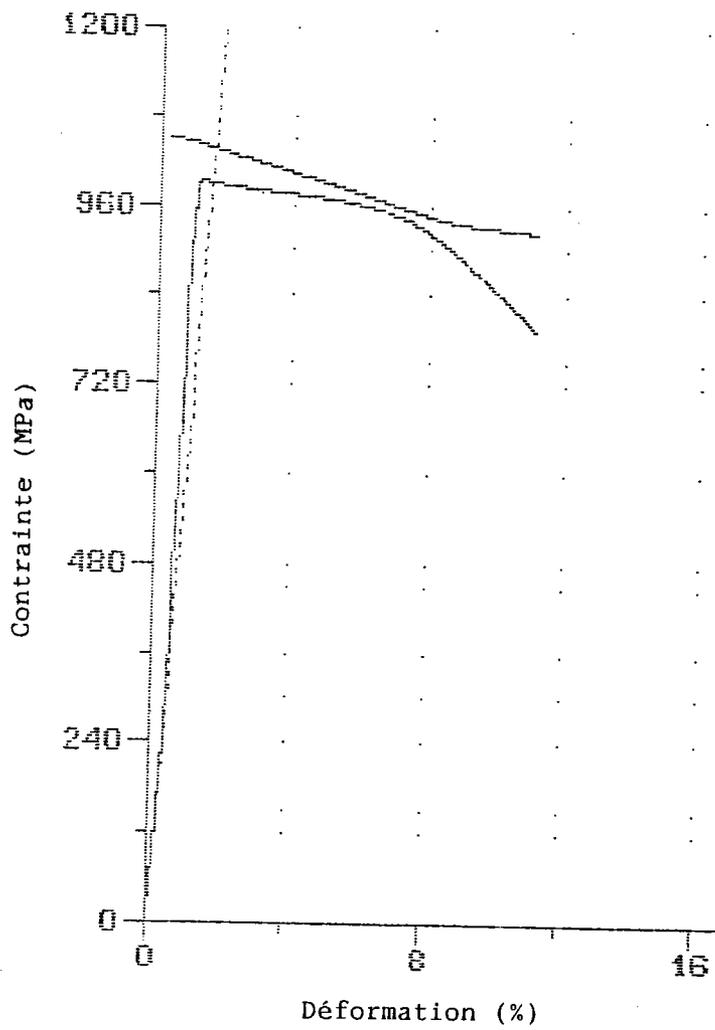
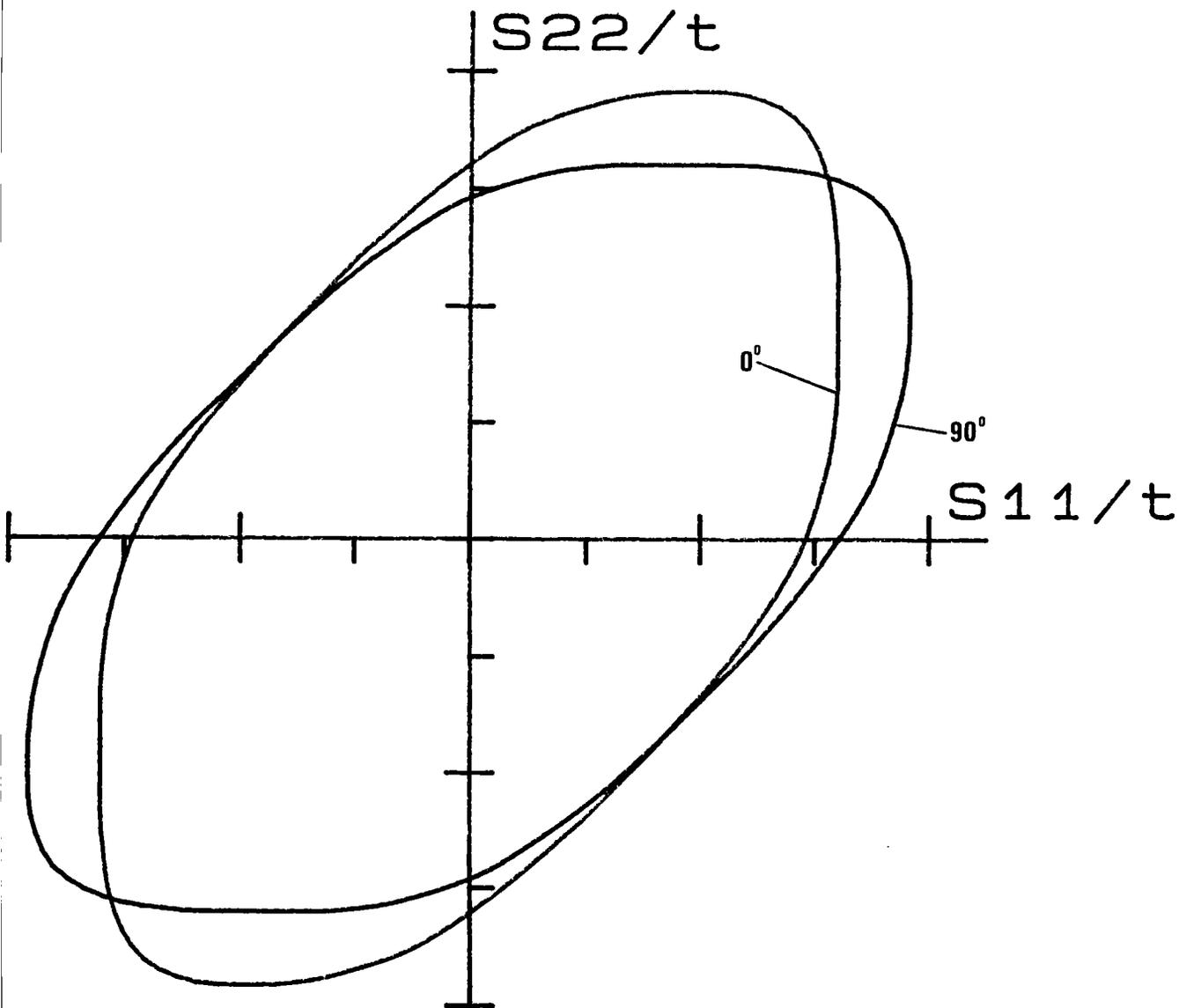


Fig. II-27: Courbe de traction mettant en évidence le faible allongement réparti de TA6V en traction  $\sigma_{\text{r}} \dot{\sigma} 60''$ .



g. II-28: CLEP du TA6V calculée dans des repères tournés de  $0^\circ$  et  $90^\circ$  par rapport à la direction de laminage.

# TA6V STATIQUE

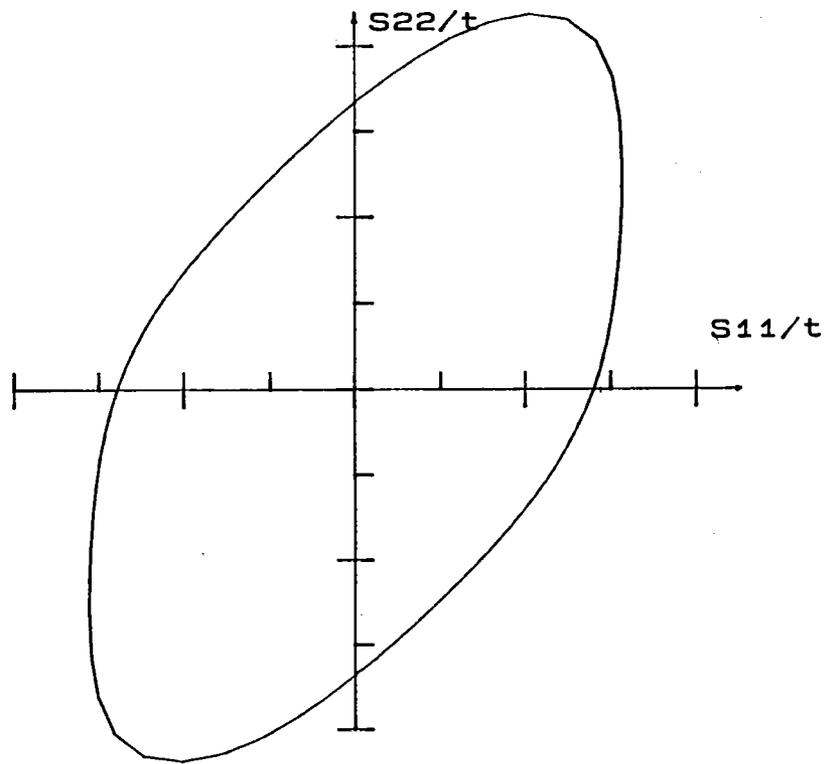


Fig. II-29: CLEP du TA6V calculée à l'aide du modèle statique.

Le début des courbes est bien simulé, les différences entre les mesures et le calcul s'accroissent pour des angles de 75-90° pour la limite élastique. En ce qui concerne le coefficient d'anisotropie, la tendance générale est bien reproduite, avec une courbe en deux parties: une valeur de r faible pour des angles jusqu'à 45° et une valeur élevée pour des angles supérieurs à 45°.

En utilisant les cissons:

prisma: 1.  
 pyra. a: 2.  
 pyra. c+a: 10.  
 maillage {1012}: 4.5  
 maillage {1122}: 25.

qui d'après Mellab [15] mènent à la bonne évolution de texture, c'est à dire les axes a dans DL et les axes c à 20° de DN, les variations de la limite élastique calculée sont contraires aux mesures. Les raisons que l'on peut invoquer sont les mêmes qu'au paragraphe concernant les conditions de simulation.

#### II-2-2) Titane

L'étude porte sur deux alliages de titane: TA6V et T60, leurs compositions sont données dans le tableau II-4. Notre choix s'est porté sur ces deux alliages car leurs textures sont très différentes.

Les deux tôles de titane ont été laminées à chaud jusqu'à 6mm d'épaisseur. Puis par laminage à froid l'épaisseur de la tôle de TA6V a été réduite à 3,8mm, la suite du traitement a consisté en un recuit d'une heure à 720°C. La tôle passe à 3mm d'épaisseur par laminage à froid qui est à nouveau suivi d'un recuit d'une heure à 720°C.

La tôle de T60 a subi un traitement similaire, mis à part l'épaisseur finale qui est de 2mm et le recuit qui se fait à 620°C.

	Al (%)	C (%)	Fe (%)	H (ppm)	N (%)	O (%)	Si (%)	V (%)
T60		0,02	0,04	<3	0,01	0,21	<0,01	
TA6V	6,08	0,023	0,15	11	0,0071	0,147		3,87

Tableau II-4: Composition chimique des alliages de titane.

#### - Les microstructures

Sur la micrographie 6 de la tôle T60 les grains sont équiaxes et d'une taille homogène d'environ 40µm.

La microstructure de la tôle TA6V est très inhomogène (micrographie 7). On trouve des bandes de grains fins (3µm) en alternance avec des bandes de grains plus gros (10µm) partiellement recristallisés. On remarquera la seconde phase β

cubique, qui ségrège aux joints de grains  $\alpha$  sous forme de nodules d'une taille inférieure à  $1\mu\text{m}$ .

#### - Les textures

La tôle de T60 présente une texture peu marquée avec un maximum de 5,9 dans la FDO. La composante principale est une orientation pour laquelle les axes c sont inclinés de  $30^\circ$  par rapport à DN dans le plan DN-DT, les axes a étant dans DL. Cette orientation correspond aux angles d'Euler suivants:  $\varphi_1=0^\circ$ ,  $\Phi=30^\circ$ ,  $\varphi_2=0^\circ$  (voir figure (II-14)).

La texture de la tôle de TA6V est très marquée comme le confirme le maximum de la FDO qui atteint une valeur de 42. La composante majeure est telle que les axes c sont dans DT et les axes a dans DL, les angles d'Euler correspondant sont:  $\varphi_1=0^\circ$ ,  $\Phi=90^\circ$ ,  $\varphi_2=0^\circ$ . Comme composante secondaire on distingue des axes c inclinés de  $20$  à  $30^\circ$  par rapport à DN dans le plan (DN-DT) (voir figure (II-21)).

#### - Les conditions de simulation

Dans le cas du titane T60, le maclage intervient. Les systèmes de maclage pris en compte pour la modélisation sont les suivants:  $\{10\bar{1}2\}$   $\langle 10\bar{1}\bar{1}\rangle$  et  $\{11\bar{2}2\}$   $\langle 11\bar{2}\bar{3}\rangle$ . Les simulations faites par Mellab [15] sur du titane T35 ont conduit l'auteur à choisir l'option DPI et les valeurs de cisssions suivantes:

- 1. pour le prismatique
- 2. pour le pyramidal a
- 4.5 pour le maclage  $\{10\bar{1}2\}$   $\langle 10\bar{1}\bar{1}\rangle$
- 10. pour le pyramidal c+a
- 25. pour le maclage  $\{11\bar{2}2\}$   $\langle 11\bar{2}\bar{3}\rangle$

En utilisant ces valeurs de cisssions critiques, les variations expérimentales de  $r$  et de  $\sigma_e$  ne sont pas retrouvées par le calcul.

Les conditions de simulation qui nous ont donné les meilleurs résultats au sens des caractéristiques mécaniques sont:

- 1. pour le prismatique
- 9. pour le pyramidal a
- 12. pour le pyramidal c+a
- 10. pour le maclage  $\{10\bar{1}2\}$   $\langle 10\bar{1}\bar{1}\rangle$
- 15. pour le maclage  $\{11\bar{2}2\}$   $\langle 11\bar{2}\bar{3}\rangle$

en utilisant la variante DTI du modèle de Taylor.

L'étape de simulation de l'évolution de la texture lors du laminage a conduit à des résultats assez éloignés de l'expérience (voir figures (II-15) et (II-16)). L'explication que l'on peut avancer est basée (comme dans le cas de Ru3) sur la prise en compte de l'érouissage.

Les observations faites par Zefferer et al [16] ont montré qu'il n'y a pas de maillage dans le TA6V. Les systèmes observés sont: le prismatique, le pyramidal a, et le pyramidal c+a. Les cissons critiques qui permettent une prévision réaliste des propriétés mécaniques sont:

- 1. pour le prismatique
- 2. pour le pyramidal a
- 8. pour le pyramidal c+a

La modélisation est faite avec les déformations totalement imposées dans le modèle de Taylor. Les évolutions des textures de laminage calculées et mesurées sont présentées dans les figures (II-23) et (II-24). La texture simulée diffère de celle mesurée dans l'inclinaison des axes c que l'on ne retrouve pas à 90° de DN mais plutôt à 80° de DN. Les plans (10.0) ne sont pas dans DL, mais à 80° de DN dans le plan (DN-DL). Par contre on retrouve la composante secondaire avec les axes c à 30° de DN dans le plan (DN-DL), qui est présente sur les figures mesurées.

#### - Les propriétés mécaniques

Les variations dans le plan de la tôle du coefficient d'anisotropie, de la limite élastique ( $\sigma_e$ ) et du coefficient d'érouissage sont présentées dans les figures (II-15) et (II-16) pour l'alliage T60 et (II-25) et (II-26) pour l'alliage TA6V.

Dans le cas de la tôle de T60, les valeurs calculées sont en bon accord avec les mesures. On remarquera que pour un angle de prélèvement de 90°, la différence s'accroît aussi bien pour  $r$  que pour  $\sigma_e$ . Le coefficient d'anisotropie est dans l'ensemble sur-évalué par le modèle.

Pour le TA6V la limite élastique est reproduite avec une bonne fidélité. Le coefficient d'anisotropie par contre est sur-estimé par le calcul et à partir de 60° la tendance expérimentale n'est pas reproduite. Dans le cas du TA6V, les mesures du coefficient d'anisotropie sont délicates car le domaine des allongements répartis est très faible comme le montre la courbe de traction présentée en figure (II-27). De plus l'allongement diminue avec l'angle de prélèvement, c'est pourquoi la fiabilité des valeurs de  $r$  mesurés à des angles supérieurs à 60° est à mettre en cause. Ceci se traduit également par une augmentation de la variation statistique des mesures à partir de 60°.

Les CLEP calculées avec le modèle de Taylor pour des angles de 0° et 90° sont présentées en figure (II-28). La CLEP calculée avec le modèle statique est présentée en figure (II-29).

Pour comprendre les différences constatées entre le calcul et la mesure à 90° pour la tôle de T60, nous nous sommes intéressés à l'activité des systèmes de glissement. Les activités des systèmes de glissement en traction ST sont comparées à celles en traction SL. Les résultats sont consignés dans le tableau II-5.

	DTI		DPI	
	Traction SL	Traction ST	Traction SL	Traction ST
prismatique	33,44%	32,73%	76,65%	78,79%
pyramidal a	36,91%	39,97%	3,82%	3,89%
pyramidal c+a	28,70%	26,26%	17,25%	15,48%
maclage (10 $\bar{1}2$ )	0,95%	1,04%	2,28%	1,84%
maclage (11 $\bar{2}2$ )	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%

Tableau II-5: Activité des systèmes de déformation dans le cas du T60.

La différence des activités entre la traction SL et la traction ST est faible. On notera une légère augmentation du pyramidal a au détriment essentiellement du pyramidal c+a. En utilisant le modèle de Taylor dans sa version DPI, dans les mêmes conditions, la limite élastique en ST est proche de la mesure, en SL par contre l'accord est nettement moins bon. Le coefficient d'anisotropie calculé à 90° tend vers l'infini et la CLEP est nettement plus allongée. Avec l'option DPI, l'activité du glissement prismatique augmente fortement, parallèlement le pyramidal a diminue beaucoup. La modélisation utilisant la variante DPI exagère fortement l'anisotropie.

Dans le cas du TA6V, les différences entre les coefficients d'anisotropie calculés et mesurés peuvent s'expliquer par les difficultés expérimentales (faible allongement réparti) et la microstructure très inhomogène.

### II-2-3) Zinc

Contrairement aux alliages de Zr et de Ti étudiés précédemment, le système de glissement principal du zinc est le glissement basal. Le zinc apporte donc une variation utile à la validation des modèles. L'alliage de Zinc utilisé est un alliage fourni par la Société Vielle Montagne, contenant 0,16% de Cuivre, et 0,076% de Titane, référencé Zn6 (coulée 80126). La tôle a été laminée à chaud

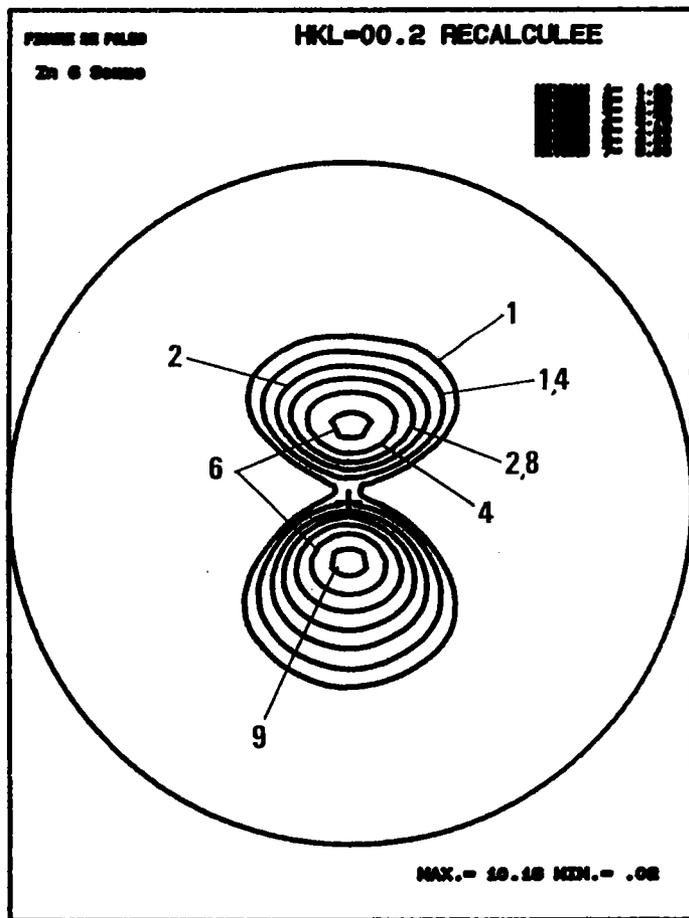
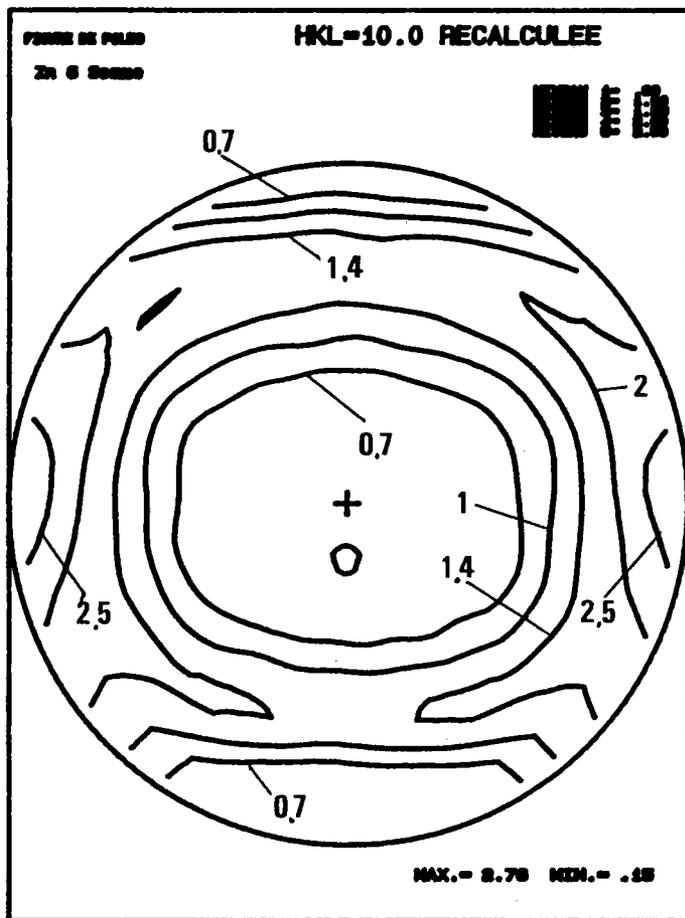


Fig. II-30: Figures de pôles recalculées après analyse dans le cas du Zn6 à l'état initial.

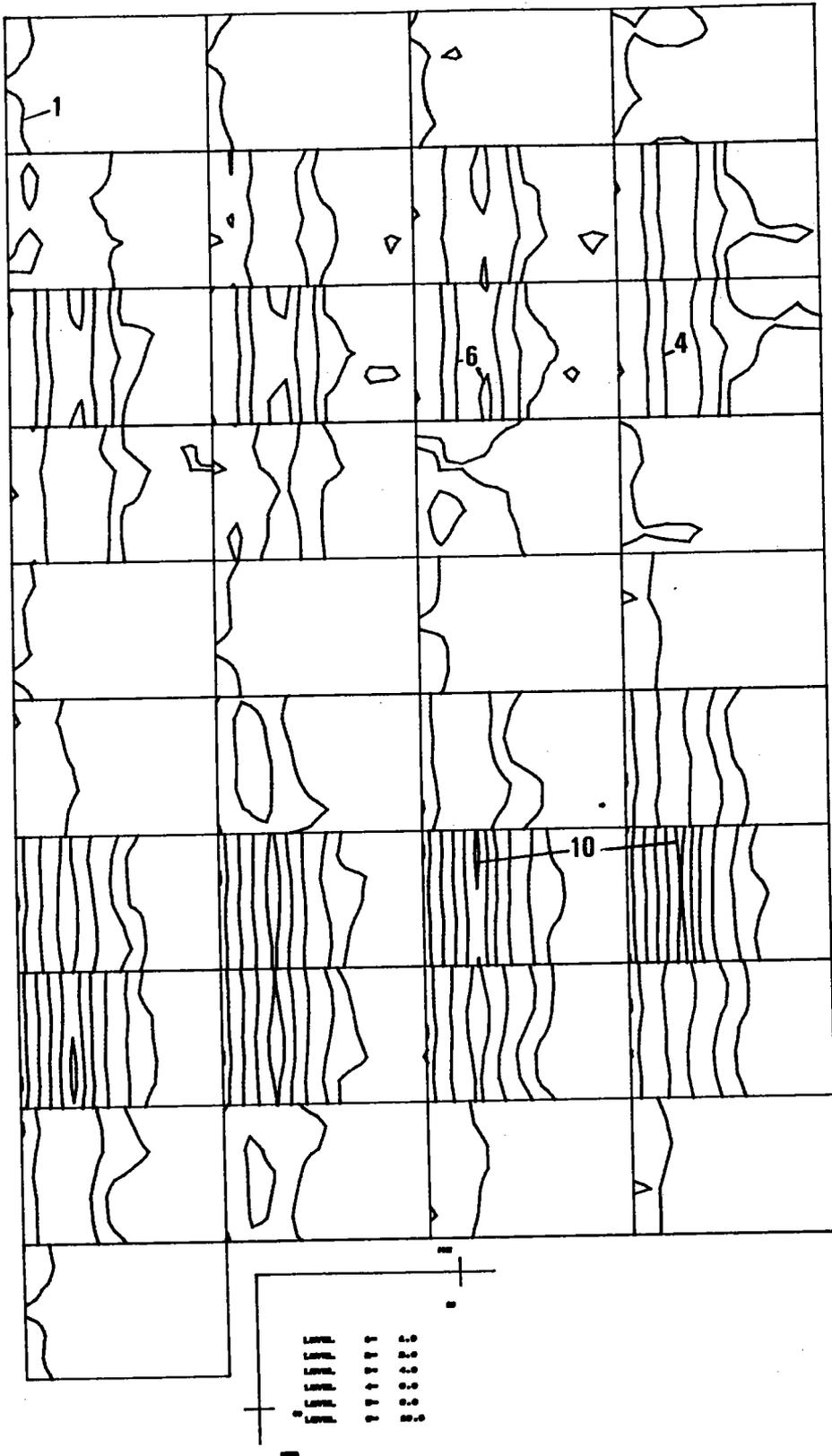


Fig. II-31: Sections de la FDO de Zn6 à l'état initial. ( $\phi_1=0^\circ$  à  $360^\circ$  par pas de  $10^\circ$ ).

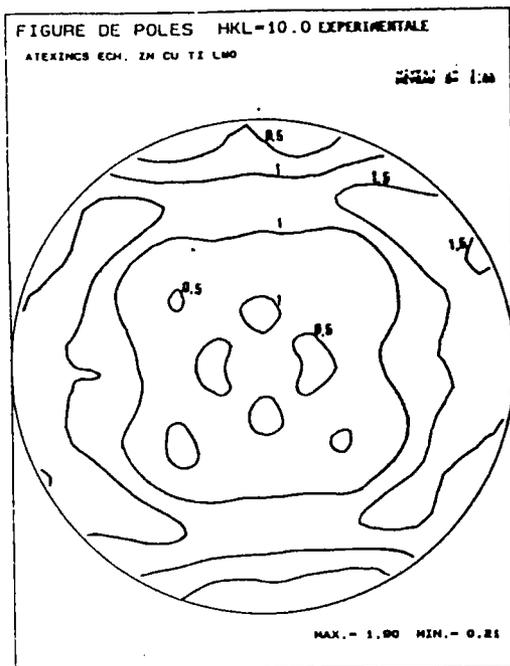
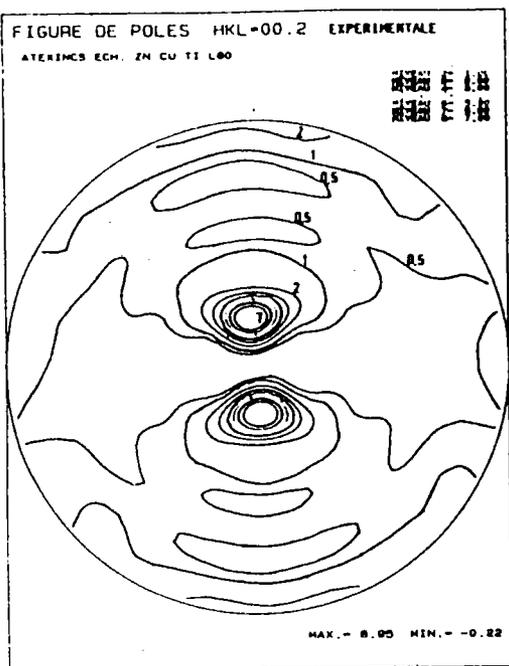


Fig. II-33: Figures de pôles (00.2) et (10.0) de Zn6 après 50% de laminage.

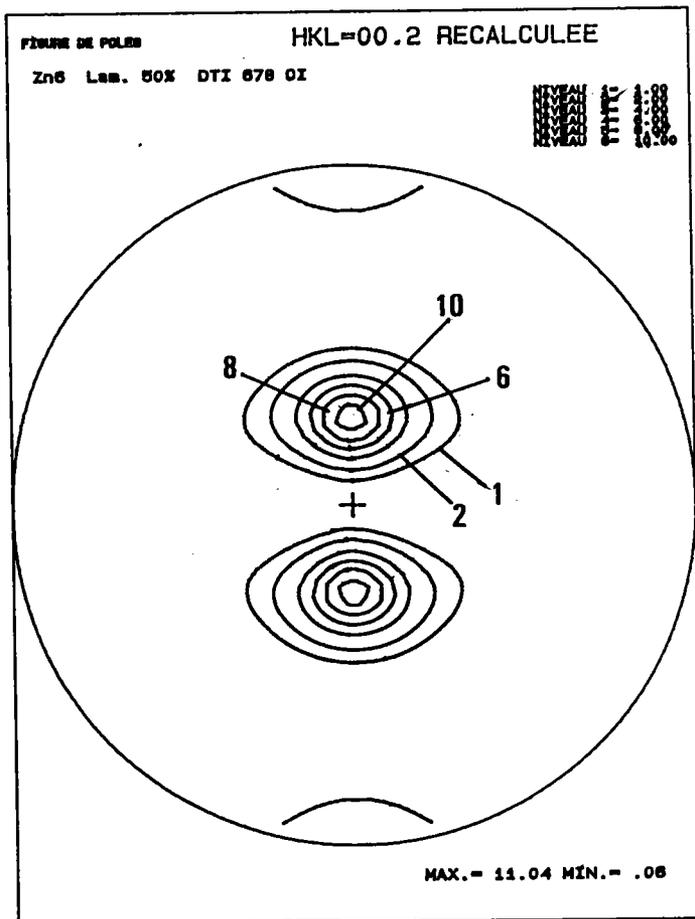
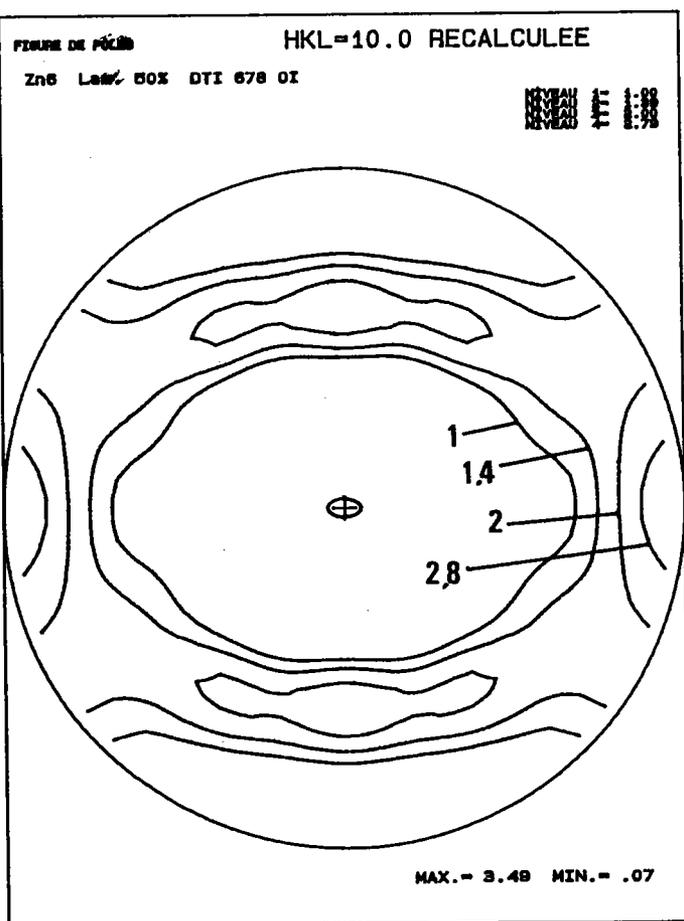


Fig. II-32: Figures de pôles (00.2) et (10.0) simulées après 50% de laminage.

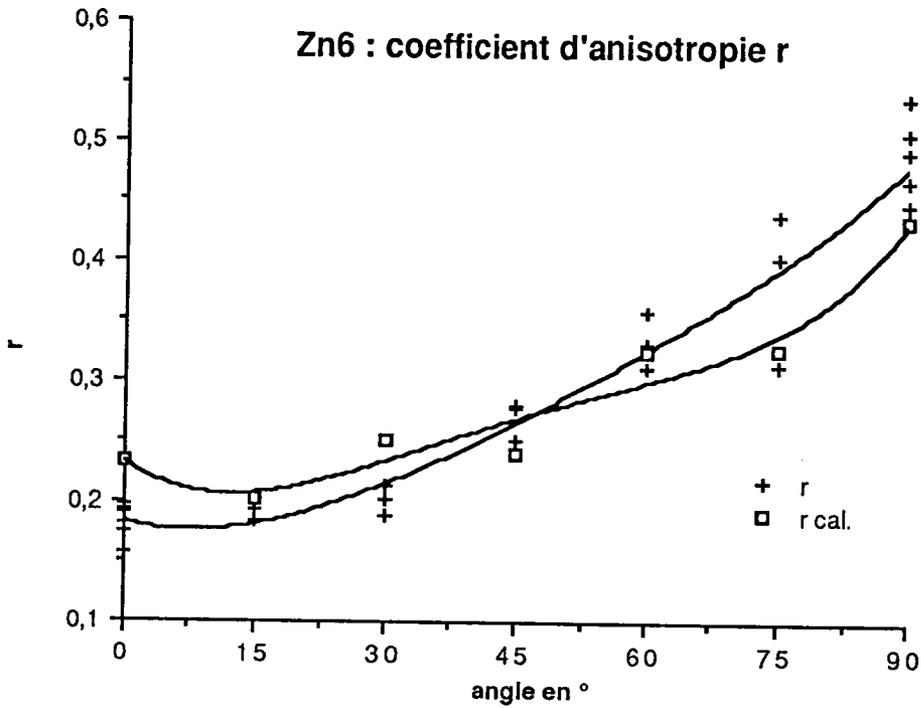


Fig. II-34: Coefficient d'anisotropie en fonction de l'angle de prélèvement: comparaison entre la mesure et le calcul dans le cas du Zn6.

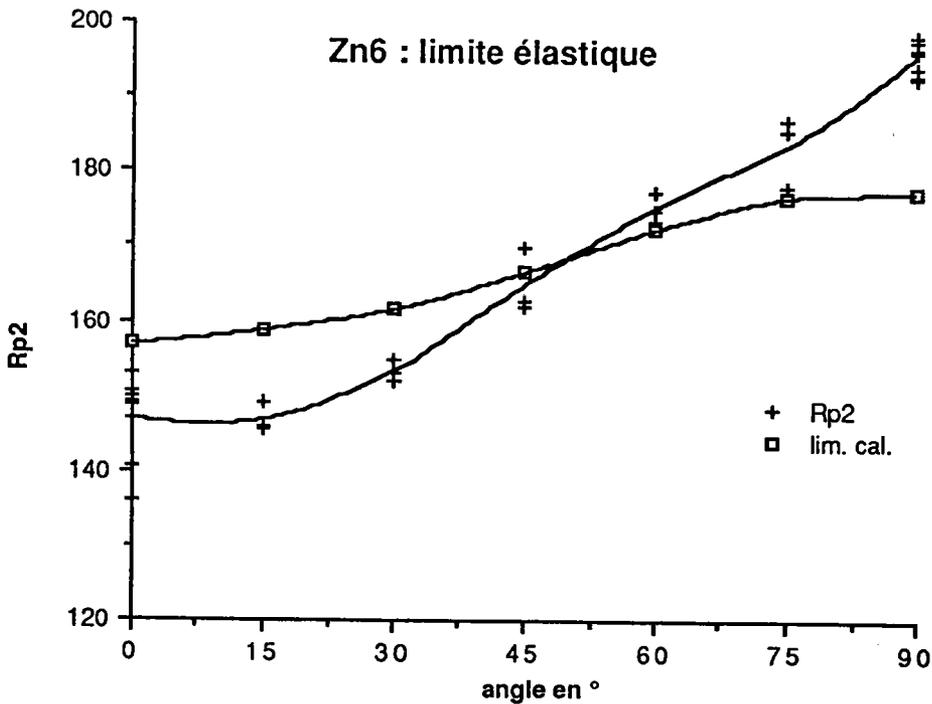


Fig. II-35: Limite élastique en fonction de l'angle de prélèvement: comparaison entre la mesure et le calcul dans le cas du Zn6.

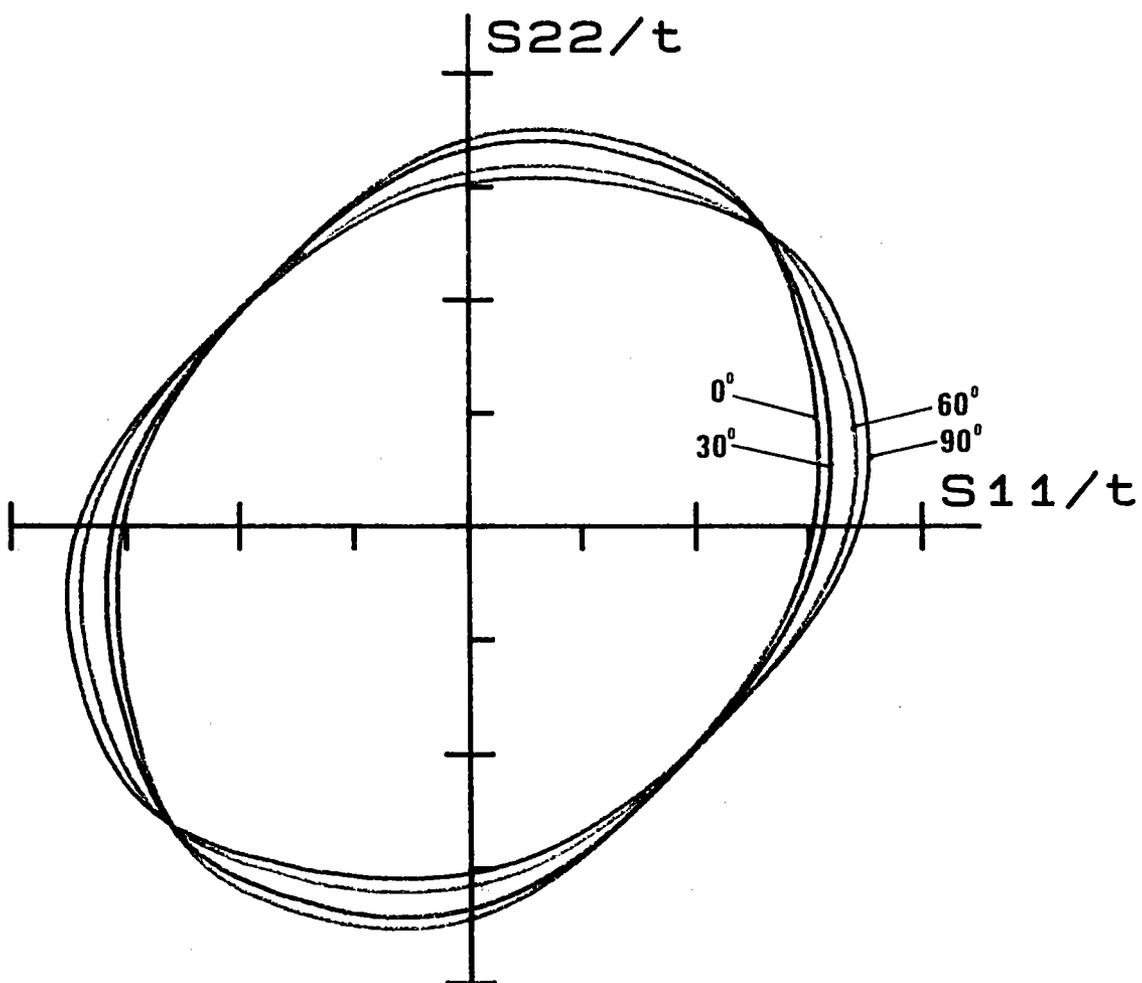


Fig. II-36: CLEP calculée pour Zn6 dans des repères tournés de  $0^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  et  $90^\circ$  par rapport à DL.

Zn6 Statique (m=5.)

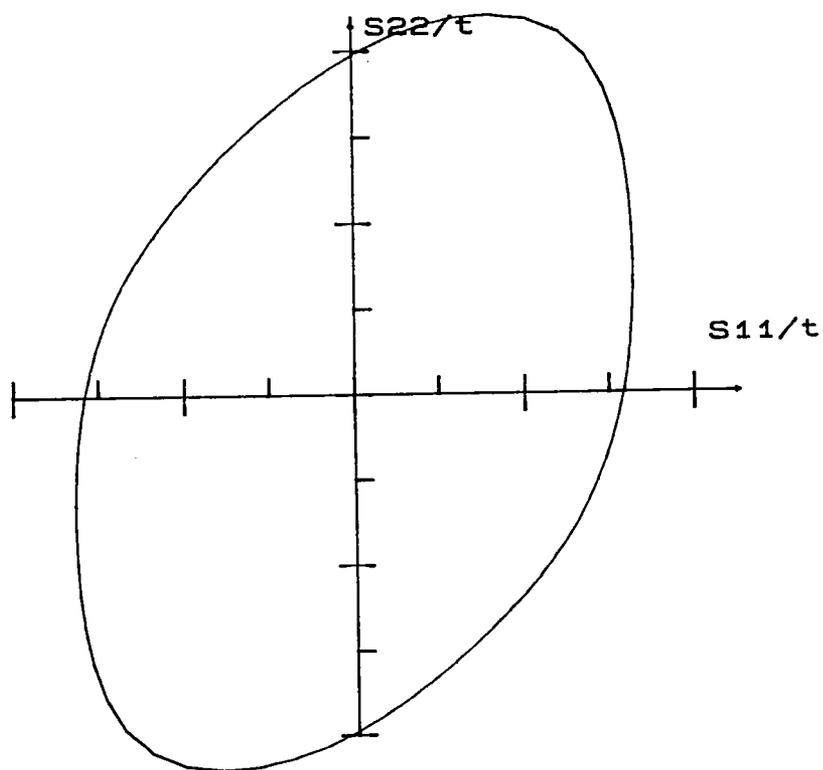
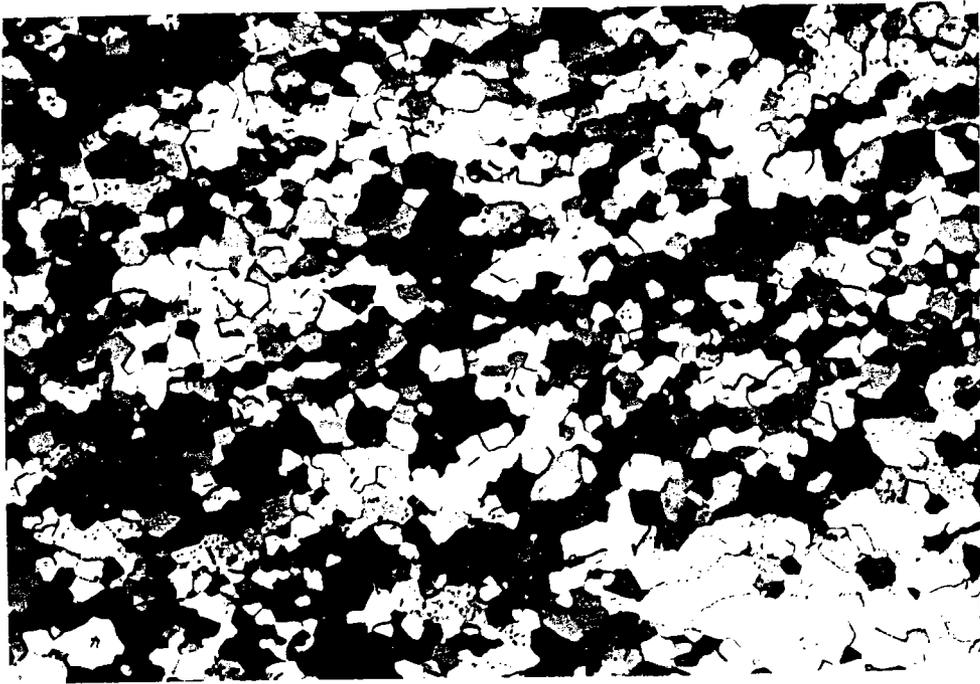
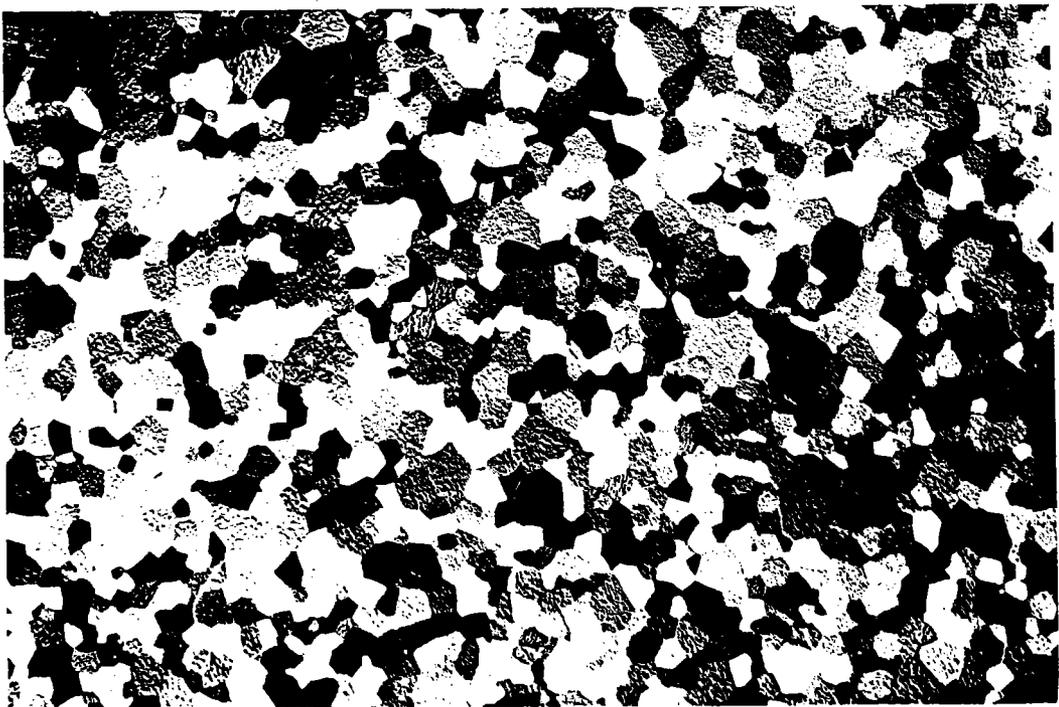


Fig. II-37: CLEP calculée pour le Zn6 à l'aide du modèle statique.



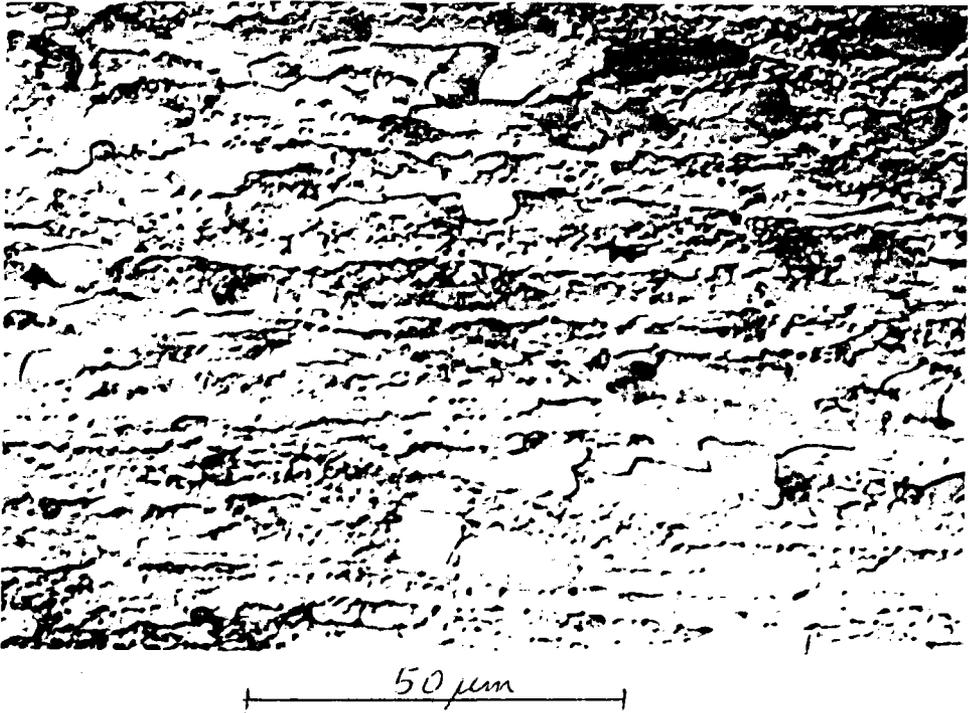
0.2 mm

Micrographie 5: Alliage Ru3: la recristallisation engendre une microstructures équiaxe.

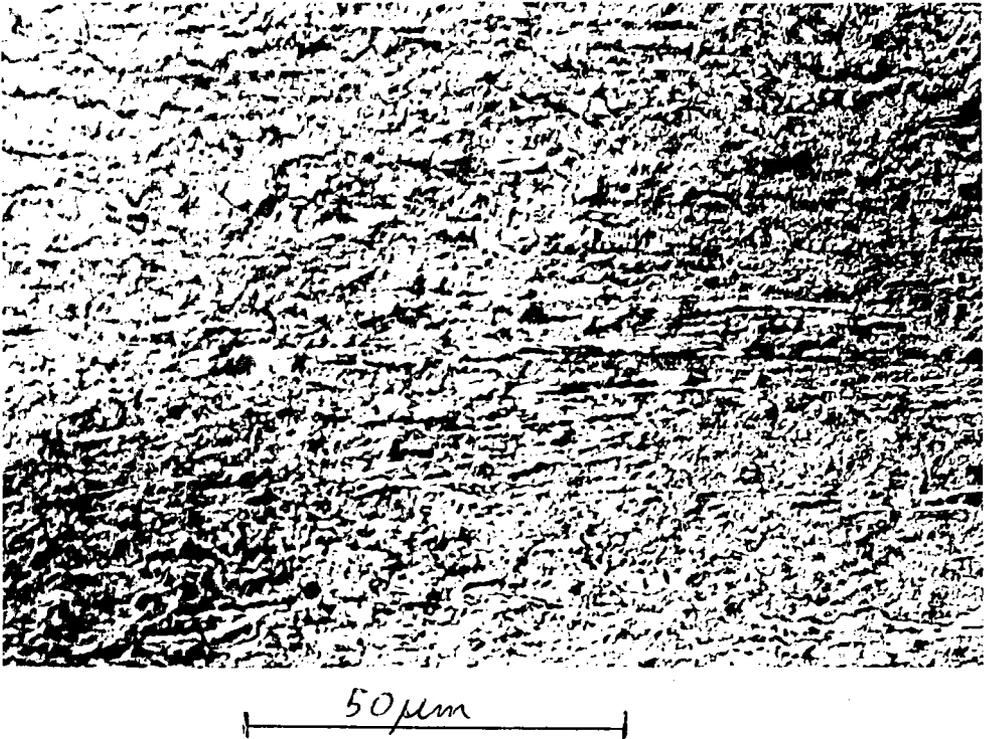


0.5 mm

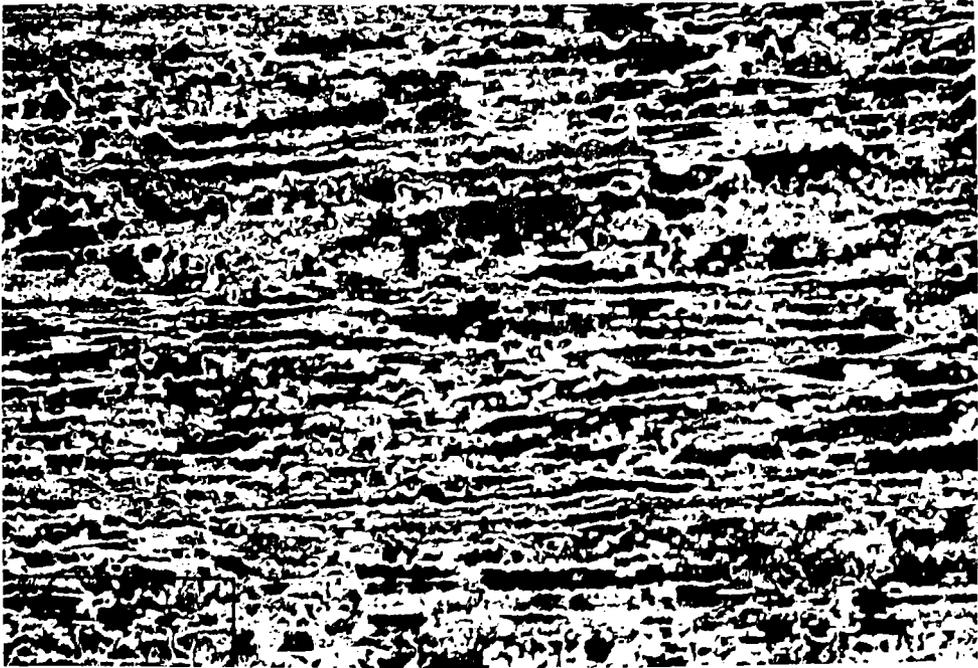
Micrographie 6: Alliage T60: la microstructure est équiaxe.



Micrographie 7: Alliage TA6V: la microstructure est inhomogène, des bandes de grains très fins alternent avec des grains plus gros.



Micrographie 8: Alliage Zn6: la microstructure est relativement inhomogène.



50  $\mu\text{m}$

Micrographie 9: Alliage Zn6: micrographie en fond sombre montrant la repartition de la seconde phase:

puis à froid jusqu'à une épaisseur de 1mm en subissant des recuits intermédiaires.

#### - La microstructure

La micrographie 8 montre la répartition de la seconde phase de  $TiZn_{15}$  aux joints de grains. La taille des grains de la phase  $\alpha$  est d'environ  $10\mu m$ .

#### - La texture

La texture initiale moyenne sur une demi-épaisseur de la tôle montre que les axes c sont inclinés de  $20^\circ$  environ par rapport à DN dans le plan DN-DL. Les axes  $\langle 1010 \rangle$  sont situés dans DT. Les figures de pôles ne reflètent pas la symétrie d'échantillon orthorhombique, cette dissymétrie est très visible sur les figures de pôles (00.2), on remarque nettement que les axes c inclinés dans la direction +DL sont moins intenses que ceux inclinés dans la direction -DL. L'évolution de la texture que nous avons mesurée sur une demi-épaisseur montre que cette dissymétrie très accentuée à la surface, diminue en progressant vers le coeur pour s'effacer presque complètement à mi-épaisseur.

Ces mesures confirment celles faites par Beaujean [18] qui s'est intéressé à la différence de texture entre les deux faces de la tôle de cet alliage. Cet auteur a constaté que la figure de pôles (00.2) de la face supérieure et celle de la face inférieure étaient dissymétriques, mais que l'une pouvait se déduire de l'autre par une rotation de  $180^\circ$  autour de DN. L'explication que l'on peut avancer est que la déformation n'est pas homogène dans l'épaisseur de la tôle lors du laminage. Le contact des rouleaux du laminoir engendre un cisaillement en sous-surface. De plus, la répartition de la seconde phase en filets parallèles à DL, empêche une homogénéisation lors de la recristallisation. On peut donc supposer que les fdp dans l'autre demi-épaisseur sont identiques mais tournée de  $180^\circ$  autour de DN. Ce qui permet de justifier la symétrisation des figures mesurées.

Le maximum de la FDO (voir figure (II-31)) est d'environ 11, la composante majeure qui se dégage est une fibre caractérisée par:  $\varphi_1=270^\circ$ ,  $\Phi=20^\circ$  et  $\varphi_2$  quelconque.

Signalons enfin que la texture expérimentale mesurée sur une demi-épaisseur a été symétrisée avant d'être utilisée dans les simulations. En effet au paragraphe I-2-2-1), il est supposé que la texture présente au moins un axe d'ordre 2 pour que la modélisation présentée puisse s'appliquer.

#### - Les conditions de simulation

D'après les travaux de Philippe et co-auteurs [17], les systèmes de déformation qui sont actifs dans ce type d'alliages sont:

- le glissement basal de manière prépondérante
- le glissement dévié sur les plans prismatiques et les plans pyramidaux du type  $(1\ 1\ -2\ 2)$ .

En utilisant ces conditions de simulation et les cisssions critiques suivantes 1,15 et 10 pour le basal, le prismatique et le pyramidal  $c+a$ , respectivement, la prédiction de l'évolution de texture lors du laminage est très proche de la texture mesurée, comme en attestent les figures (II-32) et (II-33).

#### - Les propriétés mécaniques

La limite élastique du Zn6 varie fortement dans le plan de la tôle (voir figure (II-35)). Le calcul reproduit la tendance, mais l'anisotropie dans le plan de la tôle est sous-estimée.

Le coefficient d'anisotropie moyen est faible  $\bar{r}=0,3$ , avec  $\Delta r=0,061$ . Les valeurs calculées sont en bon accord avec les mesures quoique les amplitudes de variations sont légèrement sous-estimées (voir figure (II-34)).

Le coefficient d'écrouissage est faible.

La figure (II-36) montre les variations de la section  $(S_{11}, S_{22})$  de la CLEP en fonction de l'angle de prélèvement. On remarquera l'évolution de la courbure entre l'expansion et la traction plane en fonction de l'angle de prélèvement. La forte pente de la courbe au point  $S_{22}=0$  est à rapprocher de la faible valeur du coefficient d'anisotropie.

#### - Discussion

Globalement l'anisotropie plane est sous-estimée par le calcul comme le montre les courbes  $\sigma_e(\alpha)$  et  $r(\alpha)$ . La présence de la seconde phase a une influence certaine sur les propriétés mécaniques. De plus le fait que cette seconde phase forme des chapelets alignés dans la direction de laminage peut expliquer le renforcement de l'anisotropie plane des propriétés mécaniques et notamment l'augmentation de la limite élastique en sens travers.

Dans l'ensemble l'accord entre la mesure et le calcul est tout à fait satisfaisant, la différence relative est inférieure à 10% pour la limite

élastique et le coefficient d'anisotropie calculé s'inscrit quasiment dans les variations statistiques des mesures.

Comparaison des résultats du modèle de Taylor et du modèle statique.

La figure (II-37) regroupe pour les quatre alliages les coefficients d'anisotropie  $r$  et les limites élastiques mesurés, calculés à l'aide du modèle de Taylor et calculés grâce au modèle statique. Le modèle statique tel qu'il a été mis en oeuvre ici permet uniquement de calculer la section  $(S_{11}, S_{22})$  de la CLEP, c'est pourquoi seules les grandeurs calculées dans un repère tourné de  $0^\circ$  (S.L.) et de  $90^\circ$  (S.T.) sont accessibles. Le coefficient de sensibilité à la vitesse a été pris égal à 5. dans le cas du modèle statique, ceci dans le but d'assurer l'intervention de plusieurs systèmes de glissement. Les cisssions critiques utilisées sont identiques pour les deux modèles à celles qui ont permis de calculer les CLEP.

La limite élastique est calculée (dans le cas du modèle de Taylor comme dans le cas du modèle statique) à un facteur multiplicatif près. Ce facteur a été ajusté au sens des moindres carrés aux mesures à  $0^\circ$  et à  $90^\circ$ .

Les différences les plus marquées sont observées pour le coefficient d'anisotropie. Le modèle statique exagère systématiquement la valeur de  $r(90^\circ)$ . Dans le cas de la tôle Ru3, la valeur de  $r(90^\circ)$  calculée par le modèle statique atteint tend vers l'infini.

En ce qui concerne la limite élastique, le modèle de Taylor a tendance à sous-évaluer l'anisotropie plane. Le modèle statique fournit dans ce cas des résultats plus proches des valeurs calculées.

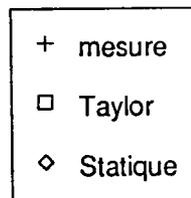
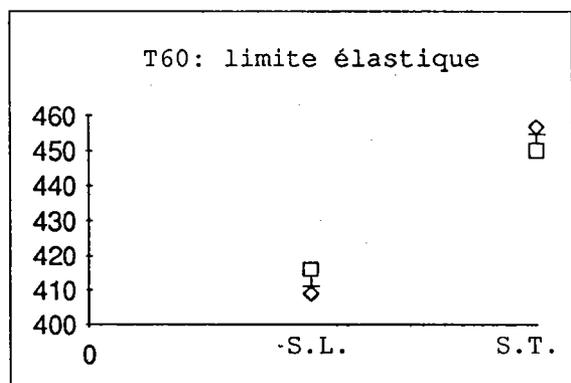
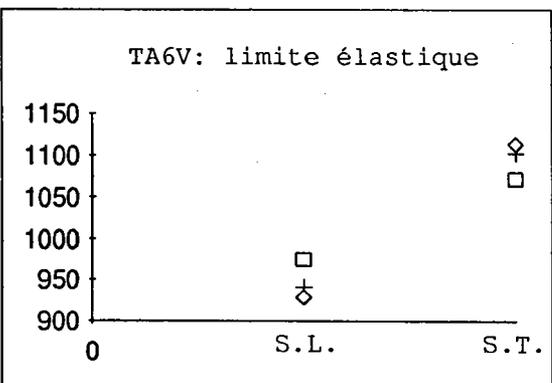
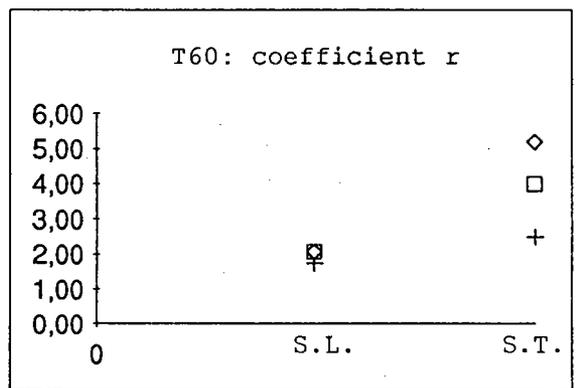
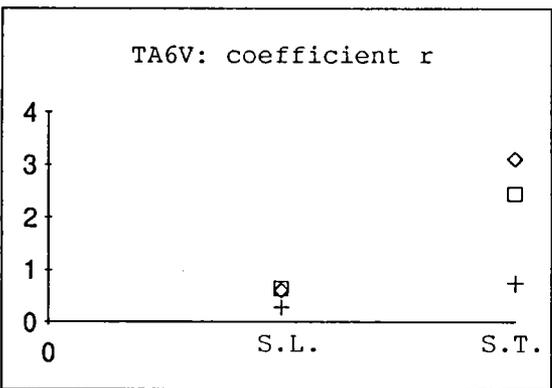
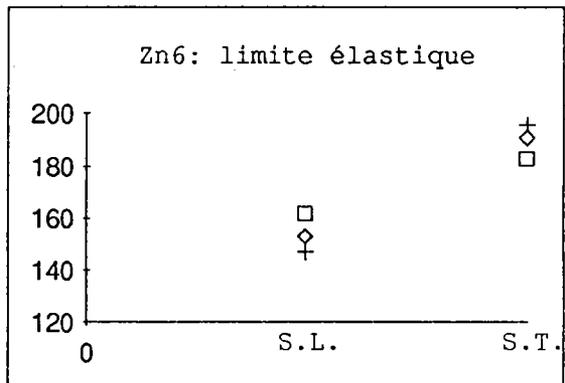
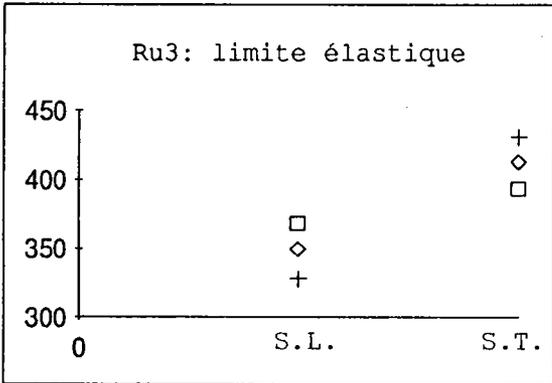
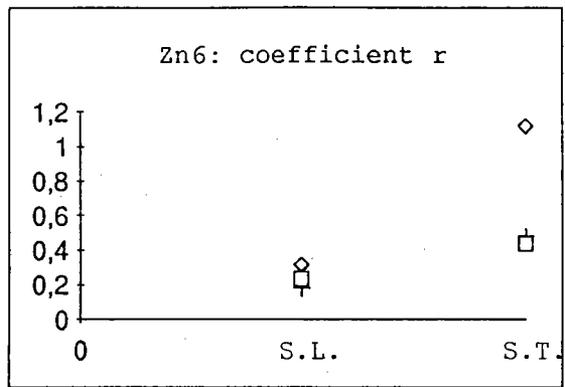
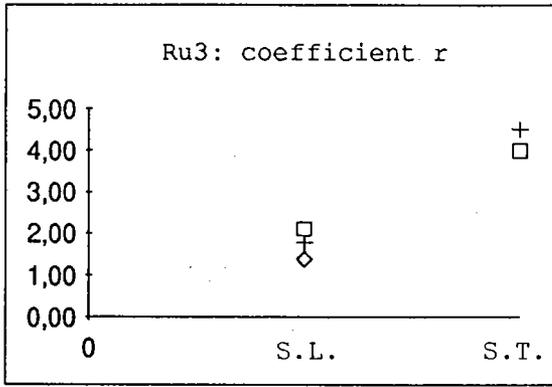


Fig. II-37: Comparaison des résultats du modèle de Taylor et du modèle statique.

## BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE II

- [1] Wassermann G. und Grewen J.  
Texturen metallischer Werkstoffe. Springer Verlag (1962).
- [2] Partridge P.G.  
The crystallography and deformation modes of hexagonal close-packed metals. Metallurgical Reviews, (1967).
- [3] Philippe M.J.  
Contribution à l'étude de la déformation des matériaux hexagonaux. Thèse d'Etat, Université de Metz, (1983).
- [4] Philippe M.J., Esling C. and Hocheid B.  
Role of twinning in texture development and in plastic deformation of hexagonal materials. Textures and Microstructures. Vol.7, pp.265-301, (1988).
- [5] Hobson D.O. and McHargue C.J.  
J. Metals Vol.15, pp.91, (1963).
- [6] Stiegler J.O. and McHargue C.J.  
Deformation twinning. Metallurgical Society, Conference 25, pp.209-235, (1963).
- [7] Beuers J., Jönsson S. and Petzow G.  
TEM-in situ deformation of beryllium single crystals - A new explanation for the anomalous temperature dependence of the critical resolved shear stress for prismatic slip. Acta Metall. Vol.35, N°9, pp.2277-2287, (1987).
- [8] Fundenberger J.J., Philippe M.J. and Esling C.  
Mechanical twinning at high temperature in some hexagonal alloys. Scripta Metall. Vol.24, pp.1215-1220, (1990).
- [9] Binary alloy phase diagrams. American Society for Metals, Ohio.
- [10] Herenguel J.  
Metallurgie spéciale, tome III, Le zirconium et ses alliages. Presses Universitaires de France (1962).
- [11] Pochettino A., Dervin P., Naka S., Lassalmonie A., Pernot M. & Penelle R.  
Computation of yield loci and deep drawing ability of a commercial purity titanium sheet by using Taylor model. Proceedings ICOTOM 6, Japan (1981).
- [12] Carre C.  
Application du modèle de Taylor et du critère de Hill au calcul des courbes limites d'écoulement plastique de tôles minces anisotropes de zirconium et de zircaloy IV : comparaison avec les essais expérimentaux. Thèse de 3<sup>ème</sup> Cycle, Orsay, (1984).
- [13] Bunge H.J., Schulze M. and Grzesik D.  
Calculation of the yield locus of polycrystalline materials according to the Taylor theory. Peine Salzgitter, p.1-31 (1980).
- [14] Toth L.S. and Van Houtte P.  
Discretization techniques for orientation distribution functions. Textures and Microstructures. Vol.19, pp.229-244, (1992).
- [15] Mellab F.E.  
Contribution à l'étude des textures de déformation des alliages hexagonaux. Thèse de l'Université de Metz (1992).
- [16] Zefferer S. and Schwartz R.  
Technical Report, Brite Euram.
- [17] Philippe M.J., Mellab F.E., Wagner F., Esling C. and Wegria J.  
Modelling of texture evolution for materials of hexagonal symmetry. Acta Met. Mater. (à paraître 1993)
- [18] Beaujean I.  
Communication privée.

### III) Les courbes limite de formage

Les courbes limite de formage (CLF) ont été introduite pour la première fois par Keeler (1965) qui s'est limité au quadrant  $\epsilon_2 > 0$ . Goodwin (1968) a étendu les CLF au domaine  $\epsilon_2 < 0$  [2].

#### III-1) Définition

Les CLF sont tracées dans le plan des déformations principales ( $\epsilon_1 - \epsilon_2$ ). Elles représentent la limite de formage associée à un mode de déformation donné dans le cadre des déformations par emboutissage.

Les CLF à rupture représentent la limite supérieure de formage admissible pour une tôle avant rupture.

Ces courbes se sont révélées insuffisantes car la rupture ductile est précédé par la striction localisée. La striction s'accompagne d'un amincissement local aboutissant à une dégradation de l'état de surface qui est inadmissible pour des raisons de résistance mécanique ou pour des raisons esthétiques.

Les CLF à striction définissent la limite à partir de laquelle la striction apparaît.

#### III-2) Détermination expérimentale

Le principe consiste à faire varier le mode de déformation d'une tôle et à mesurer dans chaque cas les déformations à rupture et à striction. Pour générer les différents modes de déformation on distingue deux approches:

- les essais simulatifs (traction uniaxiale, traction plane, expansion ...)
- les méthodes utilisant un outillage unique (Nakazima, Gronostajski et Dolny, Marciniak ...)

##### III-2-1) Essais simulatifs

Dans le présent travail, les CLF ont été tracées à partir des résultats d'essais simulatifs. La construction des CLF nécessite dans ce cas la mise en oeuvre de toute une palette d'essais mécaniques dans le but de couvrir l'ensemble du domaine de déformation généré en emboutissage (du rétreint jusqu'à l'expansion équi-biaxiale).

##### a) Le rétreint

C'est un domaine qui est limité par la droite  $\epsilon_1 = \frac{-(r+1)}{r} \epsilon_2$  et la droite  $\epsilon_2 = 0$ .

L'essai permettant de décrire un tel état de contrainte est l'essai de traction. En faisant varier la forme de l'éprouvette on balaye l'ensemble du domaine.

## b) La traction plane

C'est un état de déformation qui se caractérise par:  $\epsilon_2=0$ . La simulation d'un tel état est faite par un essai de pliage ou un essai de traction sur éprouvettes entaillées.

## c) L'expansion

L'expansion est caractérisé par:  $\epsilon_1>0$  et  $\epsilon_2>0$ . Les limites de ce domaine sont:  $\epsilon_2=0$  et la droite  $\epsilon_1=\epsilon_2$ . L'essai simulatif est dans ce cas l'essai d'expansion biaxiale par gonflement hydraulique ou encore essai Jovignot.

### III-2-2) Dépouillement des essais

Le dépouillement des essais consiste en fait à lire les déformations d'un marquage imprimé sur l'éprouvette avant essai. Les déformations sont lues grâce à un épiscopes qui autorise un grandissement de 20.

Les déformations à rupture se lisent directement de part et d'autre de la rupture. En ce qui concerne la striction, la détermination est plus délicate. La méthode employée est celle proposée par Bragard [2]. L'idée est de dire que de part et d'autre de la rupture les déformations suivent une loi parabolique, le sommet de la parabole correspondant à la déformation à striction. L'avantage de cette méthode c'est qu'elle permet de tracer avec une seule éprouvette un point à rupture et un point à striction sur les CLF.

### III-3) Facteurs influençant les CLF

Nous tenterons ici de passer en revue les principaux facteurs influençant les CLF. Dans le but d'avoir à l'esprit que ces courbes ne définissent pas une limite stricte mais plutôt une zone au voisinage de laquelle des défauts peuvent apparaître sur des emboutis.

#### a) Le coefficient d'anisotropie

Le coefficient d'anisotropie  $r$  n'influence pas directement le niveau des CLF, mais joue un rôle sensible dans les trajectoires  $\epsilon_1=f(\epsilon_2)$  au cours de la déformation. Si l'on admet que  $r$  ne varie pas ou varie peu durant la déformation plastique, la trajectoire de déformation en traction uniaxiale est donnée par:

$\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 \frac{(r+1)}{r}$ . Ce raisonnement simpliste donne les tendances: pour une valeur élevée de  $r$ , la CLF dans le domaine du retreint tend vers  $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$ , la formabilité s'en trouve améliorée. Dans le domaine de l'expansion par contre, une valeur élevée de  $r$  diminue les possibilités de formage.

#### b) Le coefficient d'érouissage

Le coefficient d'érouissage ne traduit que très partiellement l'évolution de la surface de charge. Néanmoins, selon des études expérimentales citées par Jalinier [1], un coefficient d'érouissage accru traduit un gain de ductilité uniforme. Toutes choses égales par ailleurs, ceci entraîne une élévation des CLF à striction et à rupture (voir figure (III-1)). On note également un aplatissement des courbes dans le domaine de l'expansion avec l'augmentation du coefficient d'érouissage.

#### c) L'épaisseur du matériau

Une augmentation de l'épaisseur initiale de la tôle entraîne une augmentation du niveau des déformations [1]. Ce résultat est bien connu des emboutisseurs qui savent pertinemment qu'une pièce présentant des difficultés à la mise en forme, peut très bien être réussie au augmentant l'épaisseur. L'influence de l'épaisseur semble plus sensible en expansion qu'en rétreint.

#### d) La vitesse de déformation

Les travaux de M.J. Philippe [3], [4] sur du Zirconium et du Titane ont montré qu'une augmentation de la vitesse de déformation entraîne une diminution du niveau des déformations sauf dans le cas où le maclage est fortement actif. Parallèlement, une augmentation de température élève les CLF.

#### e) La taille des grilles

Dans toutes les méthodes de détermination expérimentale des CLF, la mesure des déformations en surface est une étape nécessaire. Pour que cette mesure soit significative, il faut que la déformation soit homogène dans l'épaisseur de la tôle, c'est à dire que l'épaisseur reste faible face aux autres dimensions. La taille des grilles utilisées influence les valeurs des déformations déterminées dans le sens où la mesure est l'intégration des déformations sur un pas de la

grille [2]. On conçoit que plus le pas de la grille sera faible, plus on se rapprochera des valeurs des déformations locales. On s'aperçoit que le facteur taille de grille influe fortement sur le niveau des CLF à rupture car le gradient de déformation est élevé (voir figure (III-2)).

En ce qui concerne les CLF à striction, le gradient de déformation est moins important, la taille des grilles a donc une influence moins marquée. Il convient cependant de noter que lors de l'utilisation d'éprouvettes à déformation très localisée (éprouvettes entaillées par exemple, pour la simulation de la traction plane), le diamètre des grilles peut avoir une influence très sensible sur la mesure à striction. D'où une erreur se traduisant par une sous-évaluation des déformations.

Lors de l'essai de gonflement (expansion), la courbure de la tôle entraîne une erreur de mesure liée à l'utilisation de l'épiscope pour la mesure des déformations. Cette erreur est d'autant plus faible que la taille des grilles est plus petite. La correction à effectuer dans ce cas consiste à calculer la longueur de l'arc.

Soulignons enfin qu'une taille de grille faible augmente le temps et la difficulté d'exploitation et donc les erreurs de mesure. Le choix d'un diamètre de réseau sera donc un compromis entre la précision et la facilité de mesure, en tenant compte des dimensions des éprouvettes.

#### f) La trajectoire de déformation

Les CLF sont déterminées en chemin de déformation linéaire. Des études [4] et [3] ont montré un effet très marqué des trajectoires de déformation sur l'évolution des CLF. En général une déformation en retreint suivie d'une déformation en expansion conduit à un point de la CLF plus élevé qu'en chemin direct. La séquence de déformation expansion-retteint par contre diminue les possibilités de formage du métal. D'après Jalinier [1], il semblerait que les microstructures obtenues en traction soient moins bloquées que celle obtenues après expansion. En effet lors d'un essai de traction les dislocations sont moins bloquées par les cellules de dislocations qu'en expansion où les cellules de dislocations ont des parois épaisses et difficiles à franchir.

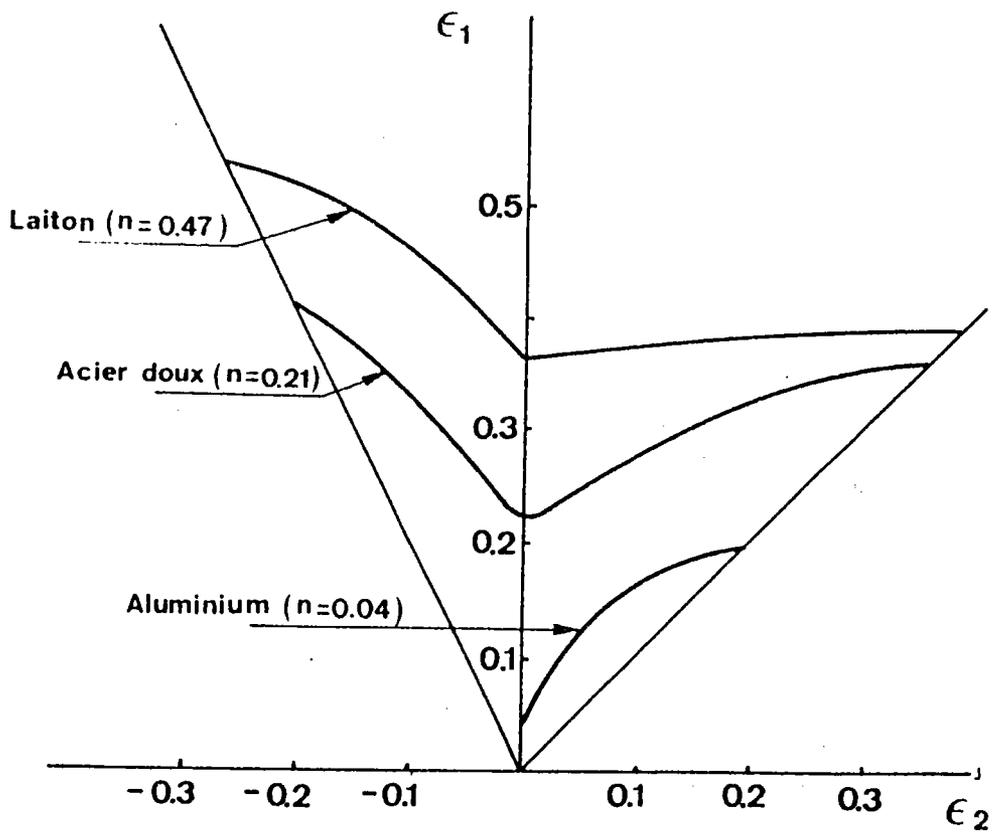


Fig. III-1: Influence du coefficient d'érouissage sur les CLF [1].

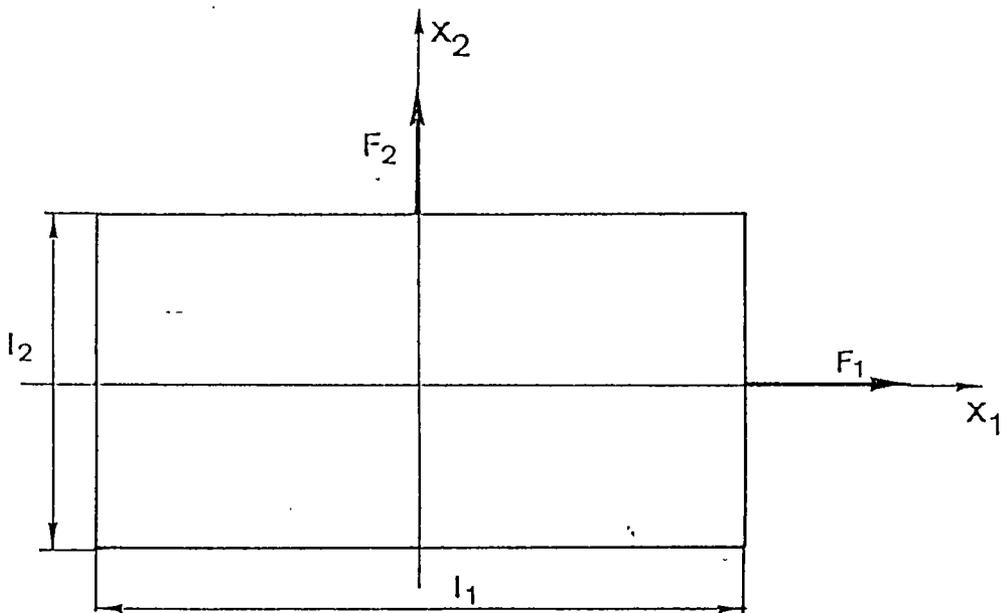


Fig. III-3: Géométrie de la plaque mince soumise à un chargement biaxial [5].

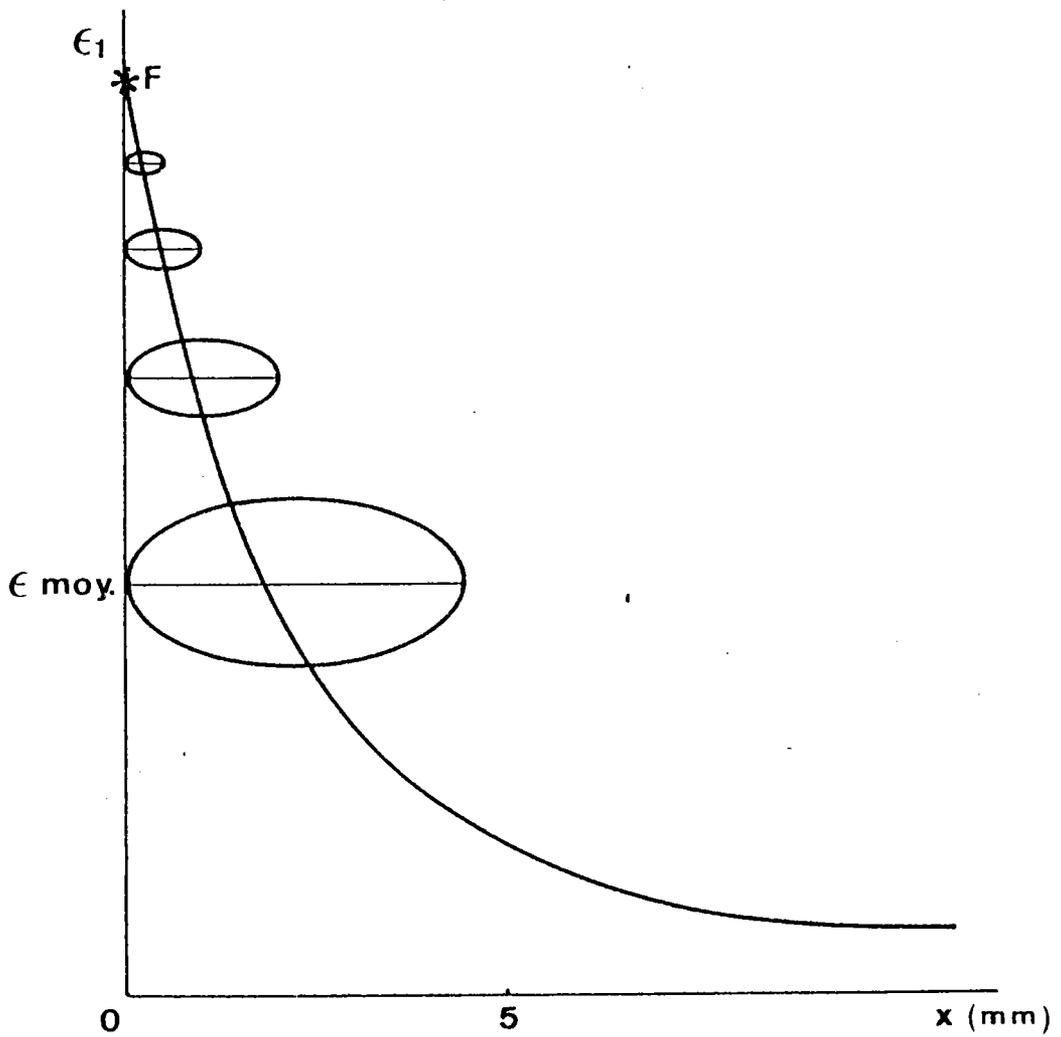


Fig. III-2: Influence de la taille des grilles sur la déformation moyenne mesurée lorsqu'un fort gradient de déformation existe [1].

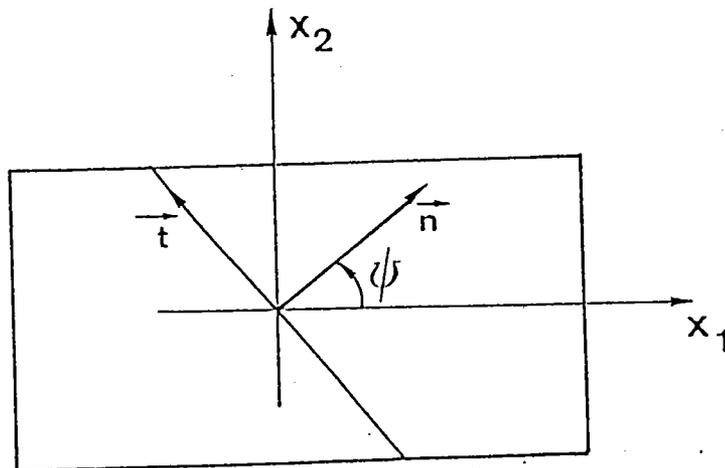


Fig. III-5) Définition géométrique de la ligne d'extension nulle (Hill) d'après [6].

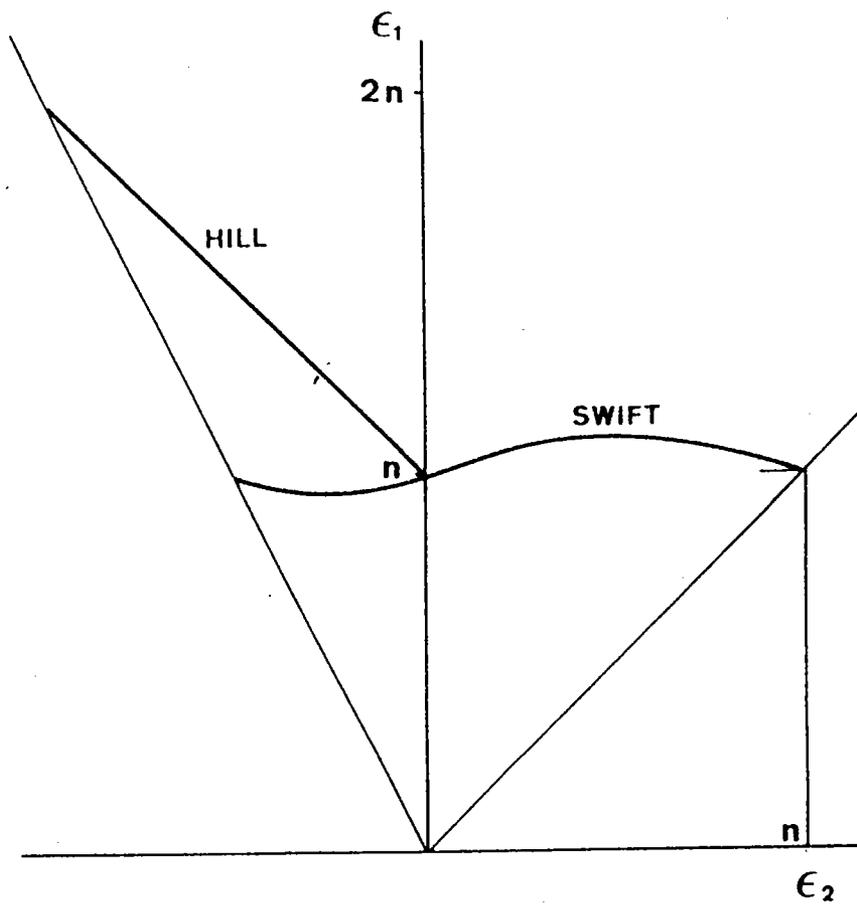


Fig. III-4: Courbes théoriques d'apparition de la striction diffuse (Swift) et de la striction localisée (Hill) d'après Jalinier [1].

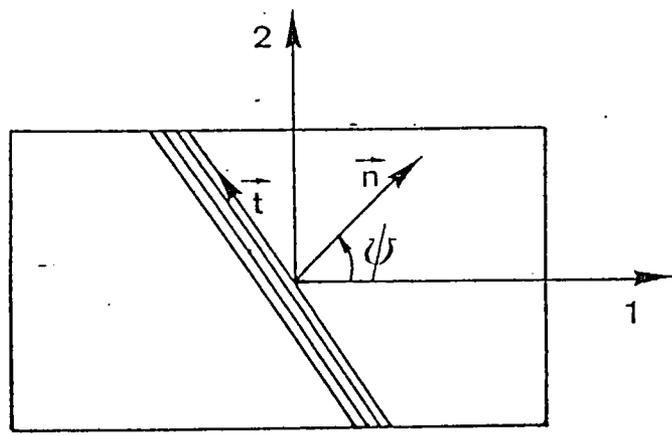


Fig. III-6: Définition géométrique de la bande de localisation (Stören et al.) d'après [6].

### III-3) CLF théoriques

#### III-3-1) Le critère de Swift [5]

Swift [5], [6] prévoit l'apparition de la striction diffuse dans les matériaux isotropes d'après un critère de force maximale. En traction biaxiale (voir figure (III-3)), l'expression des forces est:

$$\begin{aligned} F_1 &= \sigma_1 \cdot h \cdot l_2 \\ F_2 &= \sigma_2 \cdot h \cdot l_1 \end{aligned} \quad (\text{III-1})$$

elles atteignent un maximum lorsque:

$$\begin{aligned} \frac{dF_1}{F_1} &= \frac{d\sigma_1}{\sigma_1} + \frac{dl_2}{l_2} + \frac{dh}{h} = 0 \\ \frac{dF_2}{F_2} &= \frac{d\sigma_2}{\sigma_2} + \frac{dl_1}{l_1} + \frac{dh}{h} = 0 \end{aligned} \quad (\text{III-2})$$

$$\text{or} \quad \frac{dl_1}{l_1} = d\varepsilon_1 ; \quad \frac{dl_2}{l_2} = d\varepsilon_2 ; \quad \frac{dh}{h} = d\varepsilon_3 \quad (\text{III-3})$$

$$\text{de plus l'incompressibilité donne: } \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0 \quad (\text{III-4})$$

donc:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_1}{\sigma_1} &= d\varepsilon_1 \\ \frac{d\sigma_2}{\sigma_2} &= d\varepsilon_2 \end{aligned} \quad (\text{III-5})$$

Aux extrémités de la plaque, le chargement imposé est tel que:

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \alpha = \text{Cste} \quad (\text{III-6})$$

En faisant l'hypothèse d'un matériau dont le comportement plastique est isotrope, et d'un chargement en contraintes planes ( $\sigma_3=0$ ), la contrainte équivalente s'exprime d'après Von Mises par:

$$\bar{\sigma}^2 = 3J_2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 \quad (\text{III-7})$$

La loi de normalité permet d'écrire:

$$\frac{d\varepsilon_1}{2-\alpha} = \frac{d\varepsilon_2}{2\alpha-1} = \frac{-d\varepsilon_3}{1+\alpha} = \frac{d\varepsilon}{2\sqrt{1-\alpha+\alpha^2}} \quad (\text{III-8})$$

Un incrément de déformation plastique  $d\bar{\epsilon}$  va engendrer un incrément de la contrainte équivalente qui s'exprime:

$$d\bar{\sigma} = \frac{(2-\alpha)d\sigma_1 + (2\alpha-1)d\sigma_2}{2\sqrt{1-\alpha+\alpha^2}} \quad (\text{III-9})$$

En utilisant les équations (III-5), (III-7), (III-8) et (III-9) on obtient:

$$\frac{d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}} = \frac{4\alpha^3 - 3\alpha^2 - 3\alpha + 4}{4(1-\alpha+\alpha^2)^{3/2}} d\bar{\epsilon} \quad (\text{III-10})$$

Plus généralement la condition de striction diffuse s'écrit [7]:

$$\frac{d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}} < \frac{\sigma_1 \left( \frac{\delta f}{\delta \sigma_1} \right)^2 + \sigma_2 \left( \frac{\delta f}{\delta \sigma_2} \right)^2}{\left[ \sigma_1 \frac{\delta f}{\delta \sigma_1} + \sigma_2 \frac{\delta f}{\delta \sigma_2} \right] \frac{\delta f(\sigma)}{\bar{\sigma}}} d\bar{\epsilon} \quad (\text{III-11})$$

$$\text{avec } f = \bar{\sigma}^2$$

La loi d'Hollomon  $\bar{\sigma} = k\bar{\epsilon}^n$  permet d'écrire:

$$\frac{d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}} = \frac{4n(1-\alpha+\alpha^2)^{3/2}}{4\alpha^3 - 3\alpha^2 - 3\alpha + 4} d\bar{\epsilon} \quad (\text{III-12})$$

ou encore:

$$\epsilon_1 = \frac{2n(1-\alpha+\alpha^2)(2-\alpha)}{4\alpha^3 - 3\alpha^2 - 3\alpha + 4} \quad (\text{III-13})$$

D'où:  $\epsilon_1 = n$  pour  $\alpha = 0$  (traction)  
 $\alpha = 1/2$  (traction plane)  
 $\alpha = 1$  (expansion équibiaxée)

Parnière et Sanz [2] citent Venter et Malherbe qui ont grâce aux résultats de Goodwin et Keeler confirmés les résultats de Swift dans le domaine biaxé mais ils ont également montré que les prévisions étaient loin de la réalité dans le domaine du retreint (voir figure (III-4)).

L'approche de Hill consiste à dire que la striction localisée se développe suivant une ligne d'extension nulle dans le plan de la tôle. On définit un repère  $(X_1, X_2)$  lié aux axes d'anisotropie, et un repère  $(x_t, x_n)$  lié à la ligne où la déformation va se localiser, et tourné d'un angle  $\psi$  par rapport à  $(X_1, X_2)$  (voir figure III-5)). L'extension nulle dans la direction  $x_t$  s'écrit:

$$d\varepsilon_{tt} = d\varepsilon_1 \sin^2\psi + d\varepsilon_2 \cos^2\psi \quad (\text{III-14})$$

$$d\varepsilon_{tt} = 0 \text{ pour } \text{tg}^2\psi = \frac{-d\varepsilon_2}{d\varepsilon_1} = -R \quad (\text{III-15})$$

L'angle  $\psi = \text{arctg}\sqrt{-R}$  n'est défini que pour  $R < 0$ , donc selon cette approche la localisation de la striction n'est possible que dans le domaine du retreint.

En traction uniaxiale ( $R=2$ ), l'angle de localisation vaut:  $\psi = 54,74^\circ$ .

En traction plane ( $R=0$ ),  $\psi=0^\circ$ .

La striction le long de la ligne d'extension nulle se produit quand la force normale  $F_n$  passe par un maximum:

$$F_n = \sigma_{nn} S\psi \quad (\text{III-16})$$

où  $S\psi$  représente la section de la tôle.

$$\frac{dF_n}{F_n} = \frac{d\sigma_{nn}}{\sigma_{nn}} + \frac{dS\psi}{S\psi} \quad (\text{III-17})$$

Au moment précis de la l'apparition de la striction l'état de contrainte est supposé être encore uniforme dans la tôle:

$$\sigma_{nn} = \sigma_1 (\cos^2\psi + \alpha \sin^2\psi) \quad (\text{III-18})$$

avec  $\sigma_2 = \alpha \sigma_1$

$$\text{et } \frac{d\sigma_{nn}}{\sigma_{nn}} = \frac{d\sigma_1}{\sigma_1} = \frac{d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}} \quad (\text{III-19})$$

la striction se développe suivant une ligne d'extension nulle donc:

$$\frac{dS\psi}{S\psi} = \frac{dh}{h} = d\varepsilon_3 \quad (\text{III-20})$$

La théorie de l'écoulement permet d'écrire:

$$d\varepsilon_3 = \frac{-d\varepsilon(1+\alpha)}{2(1-\alpha+\alpha^2)^{1/2}} \quad (\text{III-21})$$

d'où:

$$\frac{d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}} = \frac{d\varepsilon(1+\alpha)}{2(1-\alpha+\alpha^2)^{1/2}} \quad (\text{III-22})$$

Une formulation plus générale [7]:

$$\frac{d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}} < \frac{\frac{\delta f}{\delta \sigma_1} + \frac{\delta f}{\delta \sigma_2}}{\frac{\delta f(\bar{\sigma})}{\delta(\bar{\sigma})} d\bar{\varepsilon}} \quad (\text{III-23})$$

$$\text{avec } f = \bar{\sigma}^2$$

Dans le cas où le matériau suit une loi d'écroutissage d'Hollomon on peut écrire:

$$\frac{d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}} = n \frac{d\bar{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon}} \quad (\text{III-24})$$

on obtient donc:

$$n = \frac{(1+\alpha) \bar{\varepsilon}}{2(1-\alpha+\alpha^2)^{1/2}} \quad (\text{III-25})$$

ce qui équivaut à  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = n$

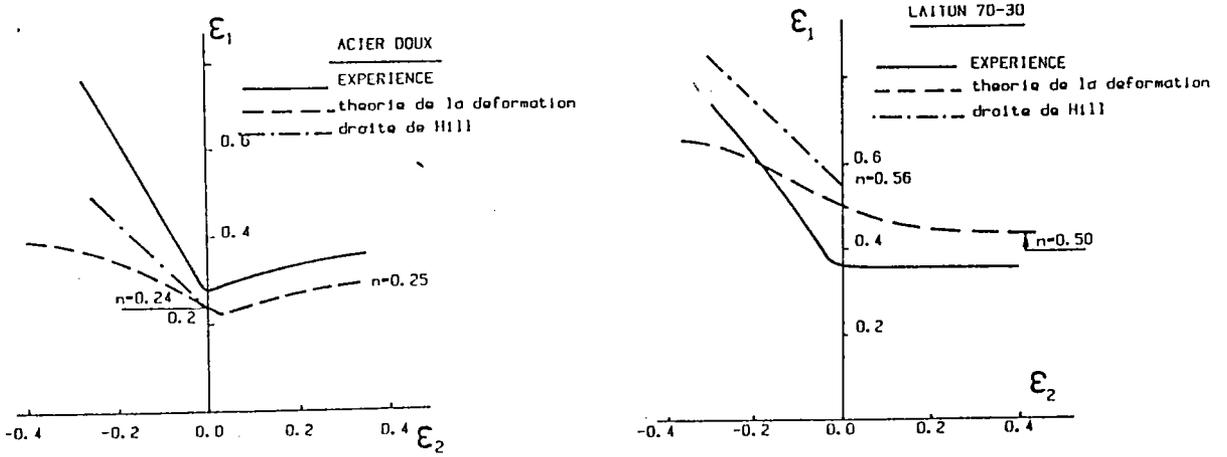


Fig. III-7: CLF théoriques obtenues avec l'analyse de la bifurcation [9].

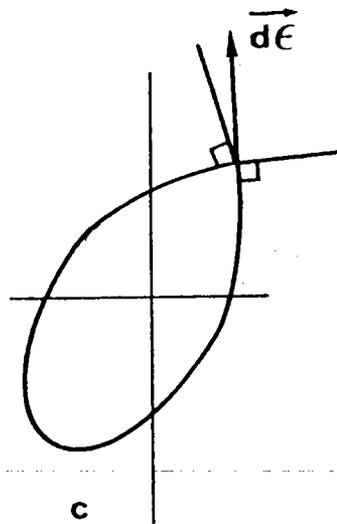


Fig. III-8: CLEP présentant un point anguleux (vertex).

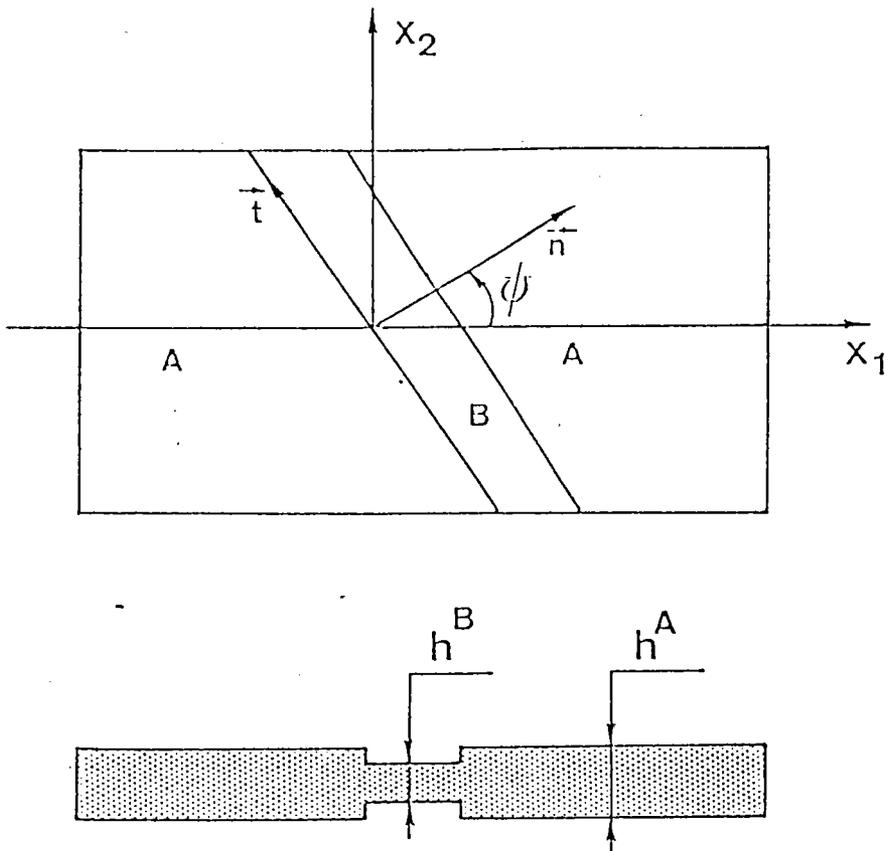


Fig. III-9: Définition géométrique de la bande de sous-épaisseur (Marciniak et al.).

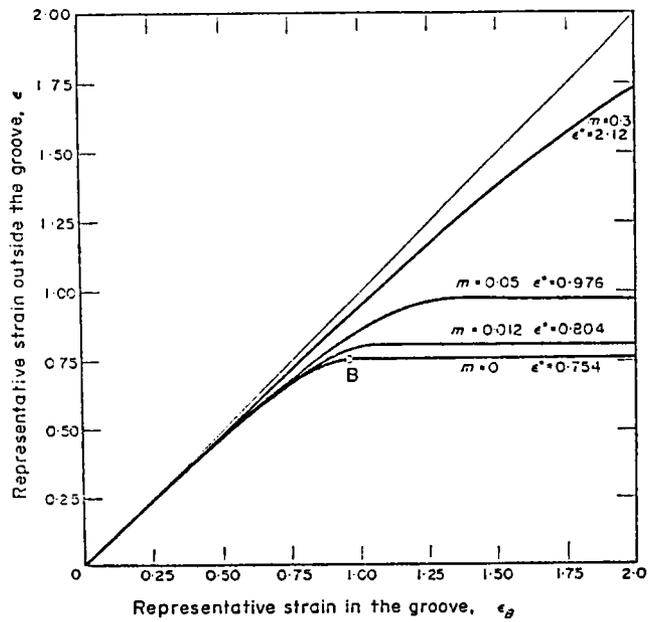


Fig. III-10: Influence du coefficient de sensibilité à la vitesse de déformation.

### III-3-3) Analyse de la bifurcation

Stören et Rice [8] ont montré qu'en expansion la théorie de la déformation permet de simuler l'effet de vertex qui apparaît sur la surface d'écoulement au point de charge et qui conduit à l'apparition de bandes de striction localisée. Ces vertex auraient comme origine des effets de texture aux grandes déformations.

L'analyse se rapporte à une tôle d'épaisseur uniforme  $H$  soumise à un chargement biaxial plan, dans le repère des contraintes principales la géométrie de la bande de localisation de la déformation est représentée dans la figure (III-6). Le chargement est tel que:

$$\frac{\sigma_{22}}{\sigma_{11}} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \text{constante} \quad (\text{III-26})$$

où  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  désignent les contraintes principales.

Le champ des vitesses noté  $v_i$  varie à travers la bande de localisation, et est supposé uniforme en dehors de la bande. Dans la suite la notation  $\Delta$  désigne la différence entre les variables en dehors et dans la bande de localisation. A la bifurcation, la discontinuité de vitesse est:

$$\Delta v_i = v_i^A - v_i^B = f_i(x_1 \cos \psi + x_2 \sin \psi) = f_i(n_j x_j) \quad (\text{III-27})$$

où A fait référence à l'intérieur de la bande, et B à l'extérieur.  
et  $n_j$  sont les composantes de la normale à la bande.

En termes de gradient de vitesse, le saut de gradient s'écrit:

$$\Delta \left( \frac{\delta v_i}{\delta x_j} \right) = \frac{\delta (\Delta v_i)}{\delta x_j} = f_i' (n_k x_k) n_j = g_i n_j \quad (\text{III-28})$$

avec  $g_i = f_i' (n_k x_k)$

Les équations d'équilibre dans le plan de la tôle s'écrivent:

$$\frac{\delta H \sigma_{ij}}{\delta x_i} = 0 \quad (\text{III-29})$$

La conservation de la quantité de mouvement:

$$\frac{\delta}{\delta x_i} \left( \frac{\delta}{\delta t} (H \sigma_{ij}) \right) = 0 \quad (\text{III-30})$$

ou encore en tenant compte des équations d'équilibre:

$$\frac{\delta}{\delta x_i} \left( \frac{\dot{H}}{H} \sigma_{ij} + \dot{\sigma}_{ij} \right) = 0 \quad (\text{III-31})$$

le point  $\dot{\phantom{x}}$  désignant la dérivée matérielle

$$\text{or } \frac{\dot{H}}{H} = D_{33} \quad (\text{III-32})$$

avec  $D_{ij} = 1/2 (v_{i,j} + v_{j,i})$  où  $v_{i,j} = \frac{\delta v_i}{\delta x_j}$

à la bifurcation:

$$\frac{\delta}{\delta x_i} (\Delta D_{33} \sigma_{ij} + \Delta \dot{\sigma}_{ij}) = 0 \quad (\text{III-33})$$

Les quantités  $D_{33}$  et  $\dot{\sigma}_{ij}$  ne varient qu'à travers la bande de localisation, en dehors de la bande ils sont supposés uniformes, donc:

$$n_i \sigma_{ij} \Delta D_{33} + n_i \Delta \dot{\sigma}_{ij} = \text{constante} = 0 \quad (\text{III-34})$$

Pour établir les relations qui lient  $\Delta D_{33}$  et  $\Delta \dot{\sigma}_{ij}$  aux fonctions  $g_i$ , il faut définir les équations constitutives. On suppose le matériau incompressible et initialement isotrope. La théorie de la déformation s'écrit:

$$\varepsilon_i = \mu S_i \quad (\text{III-35})$$

où les  $S_i$  sont les valeurs principales du déviateur des contraintes, et  $\varepsilon_i$  les valeurs principales des déformations. L'expression de la contrainte équivalente  $\bar{\sigma}$  et de la déformation effective  $\bar{\varepsilon}$  est:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} S_i S_i} \quad (\text{III-36})$$

$$\bar{\varepsilon} = \sqrt{\frac{2}{3} \varepsilon_i \varepsilon_i} \quad (\text{III-37})$$

d'où:

$$\mu = \frac{3}{2} \frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} \quad (\text{III-38})$$

La dérivation matérielle de la loi constitutive donne:

$$\dot{S}_i = \frac{2}{3} E_S \dot{\varepsilon}_i - S_i (E_S - E_T) \frac{S_k \dot{\varepsilon}_k}{(\bar{\sigma})^2} \quad (\text{III-39})$$

où  $E_S = \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\varepsilon}}$  est le module sécant et  $E_T = \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}}$  est le module tangent.

L'état de contraintes planes implique que:

$$S_1 = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2}{3}$$

$$S_2 = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1}{3}$$

(III-40)

Des équations (III-39) et (III-40), on tire:

$$\dot{\sigma}_1 = \frac{2}{3} E_S (2\dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2) - (E_S - E_T) (\sigma_1 \dot{\varepsilon}_1 + \sigma_2 \dot{\varepsilon}_2) \frac{\sigma_1}{(\bar{\sigma})^2}$$

$$\dot{\sigma}_2 = \frac{2}{3} E_S (\dot{\varepsilon}_1 + 2\dot{\varepsilon}_2) - (E_S - E_T) (\sigma_1 \dot{\varepsilon}_1 + \sigma_2 \dot{\varepsilon}_2) \frac{\sigma_2}{(\bar{\sigma})^2} \quad (\text{III-41})$$

Le principe d'objectivité implique que les équations qui traduisent le comportement du matériau soient invariantes dans un changement de référentiel. La dérivée de Jaumann (notée  $\nabla$ ), est une dérivée objective qui est calculée dans un référentiel lié à la particule et tournant avec elle à la vitesse angulaire définie par le tenseur vitesse de rotation  $\Omega_{ij}$  [6]. La dérivée de Jaumann est liée à la dérivée particulaire par:

$$\overset{\vee}{\sigma}_{ij} = \overset{\circ}{\sigma}_{ij} - \Omega_{ik}\sigma_{kj} - \Omega_{jk}\sigma_{ki} \quad (\text{III-42})$$

où  $\Omega_{ij} = 1/2(v_{i,j} - v_{j,i})$

En se plaçant dans les axes principaux et en tenant compte des conditions de chargement ( $\sigma_{i3}=0$ ):

$$\begin{aligned} \overset{\vee}{\sigma}_1 &= \overset{\circ}{\sigma}_1 \\ \overset{\vee}{\sigma}_2 &= \overset{\circ}{\sigma}_2 \\ \overset{\vee}{\sigma}_{12} &= \overset{\circ}{\sigma}_1\Omega_{12} + \overset{\circ}{\sigma}_2\Omega_{21} \end{aligned} \quad (\text{III-43})$$

En réécrivant les équations constitutives:

$$\begin{aligned} \overset{\vee}{\sigma}_1 &= \hat{L}_{11}\overset{\circ}{\epsilon}_1 + \hat{L}_{12}\overset{\circ}{\epsilon}_2 \\ \overset{\vee}{\sigma}_2 &= \hat{L}_{12}\overset{\circ}{\epsilon}_1 + \hat{L}_{22}\overset{\circ}{\epsilon}_2 \\ \overset{\vee}{\sigma}_{12} &= 2\hat{L}_s\overset{\circ}{\epsilon}_{12} \end{aligned} \quad (\text{III-44})$$

avec:

$$\begin{aligned} \hat{L}_{11} &= \frac{4}{3}E_s - (E_s - E_t) \left[ \frac{\sigma_1}{\sigma} \right]^2 \\ \hat{L}_{22} &= \frac{4}{3}E_s - (E_s - E_t) \left[ \frac{\sigma_2}{\sigma} \right]^2 \\ \hat{L}_{12} &= \frac{2}{3}E_s - (E_s - E_t) \left[ \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{III-45})$$

et le module de cisaillement instantané:

$$\hat{L}_s = \frac{E_s}{3} \log \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right) \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \quad (\text{III-46})$$

avec  $\lambda_i$  les dilatations principales.

Finalement les équations constitutives s'écrivent comme étant des relations linéaires entre  $\overset{\circ}{\sigma}_{ij}$  et  $v_{i,j}$ :

$$\overset{\circ}{\sigma}_{ij} = K_{ijpr} (v_{p,r}) \quad (\text{III-47})$$

inversement:

$$D_{33} = M_{ij} (v_{i,j}) \quad (\text{III-48})$$

Les coefficients  $K_{ijpr}$  et  $M_{ij}$  sont des fonctions de l'état de contrainte et des paramètres du matériau tels que l'écroutissage, les constantes élastiques, etc. Si on admet que ces coefficients sont les mêmes en tout point de la tôle jusqu'à l'instant de la bifurcation, on peut écrire:

$$\Delta \overset{\circ}{\sigma}_{ij} = K_{ijpr} \Delta (v_{p,r}) = K_{ijpr} n_r g_p \quad (\text{III-49})$$

et

$$\Delta D_{33} = M_{ij} \Delta (v_{i,j}) = M_{ij} n_j g_i \quad (\text{III-50})$$

En injectant les équations (III-49) et (III-50) dans (III-34) on obtient un système d'équations linéaires homogènes en  $g_1, g_2$ :

$$(n_i \sigma_{ij} M_{pr} n_r + n_i K_{ijpr} n_r) g_p = 0 \quad (\text{III-51})$$

Le départ de la localisation intervient si ce système admet des solutions non nulles si le déterminant est nul:

$$\det(n_i \sigma_{ij} M_{pr} n_r + n_i K_{ijpr} n_r) = 0 \quad (\text{III-52})$$

Pour une loi d'écoulement du type Hollomon:  $\bar{\sigma} = C \bar{\epsilon}^n$ , un chemin proportionnel de déformation caractérisé par  $\rho = \epsilon_2 / \epsilon_1$ , l'analyse de Stören et Rice donne des résultats qui traduisent correctement la tendance expérimentale dans le domaine du biaxé (voir figure (III-7)). Dans le domaine du retreint par contre, la courbe calculée est assez éloignée de l'expérience.

Dans le domaine de traction biaxée ( $\rho > 0$ ), l'angle de localisation  $\psi_c = 0$  minimise la déformation critique qui vaut alors:

$$\epsilon_{1c} = \frac{3\rho^2 + n(2+\rho)^2}{2(2+\rho)(1+\rho+\rho^2)} \quad (\text{III-53})$$

Les résultats de Stören et Rice sont meilleurs que ceux obtenus avec la théorie de l'écoulement et un écoulement isotrope. Cela s'explique par le fait que cette théorie permet de simuler l'apparition d'un point anguleux (vertex) sur la surface d'écoulement. Un tel point anguleux permet au vecteur vitesse de déformation de tourner librement dans le cône des normales, (voir figure (III-8)) ce qui amène le matériau plus rapidement à un état de déformation plane correspondant à l'instabilité. Dans la théorie de l'écoulement par contre, le vecteur vitesse de déformation doit respecter la normalité.

### III-3-4) Approche avec défaut initial

#### III-3-4-1) Matériau isotrope hétérogène

L'analyse présentée ici se base sur les travaux de Marciniak et Kuczynski [10] et [11] initialement limités à l'expansion, Hutchinson et Neale ont étendu l'approche au domaine du retreint. On suppose la préexistence dans la tôle d'un défaut géométrique que l'on modélise sous la forme d'une bande ayant une épaisseur inférieure à celle de la tôle (voir figure (III-9)). Ce défaut géométrique peut être par exemple:

- une distribution non uniforme d'impuretés ou de micro-cavités dues à l'endommagement initial.

- une variation d'épaisseur

Dès le début de la déformation, le défaut localise l'écoulement, la méthode consiste à déterminer les déformations dans la tôle et dans le défaut. La striction est atteinte lorsque la vitesse de déformation dans la tôle tend vers zéro.

On distingue deux zones dans la tôle:

- la zone A d'épaisseur  $h^A$

- la zone B d'épaisseur  $h^B$

Le défaut géométrique initial est caractérisé par:

$$\zeta = \frac{h^A(0) - h^B(0)}{h^A(0)} > 0 \quad (\text{III-54})$$

avec  $h^A(0)$  et  $h^B(0)$  les épaisseurs initiales des zones A et B respectivement.

La bande de sous-épaisseur est inclinée d'un angle  $\psi$  ( de valeur initiale  $\psi(0)$ ) par rapport aux axes principaux de déformation.

Au extrémités de la tôle on impose un chargement radial tel que:

$$\rho = \frac{d\varepsilon_2^A}{d\varepsilon_1^A} = \frac{\varepsilon_2^A}{\varepsilon_1^A} = \text{Constante} \quad (\text{III-55})$$

$\varepsilon_2^A$  et  $\varepsilon_1^A$  sont les déformations logarithmiques, les directions 1 et 2 sont les directions principales des déformations et des contraintes. La rotation de la bande est donnée par:

$$\text{tg}(\psi) = \frac{\lambda_1^A}{\lambda_2^A} = \exp\left[(1-\rho)\varepsilon_1^A\right] \text{tg}(\psi(0)) \quad (\text{III-56})$$

où  $\lambda_1^A$  et  $\lambda_2^A$  désignent les dilatations principales dans les directions 1 et 2, et

$\psi(0)$  l'inclinaison initiale de la bande.

La rotation de la bande au cours de la déformation est donc donnée par:

$$\Phi = \psi - \psi(0) \quad (\text{III-57})$$

Les conditions d'équilibre de la bande s'écrivent:

$$\begin{aligned} \sigma_{nn}^A h^A &= \sigma_{nn}^B h^B \\ \sigma_{nt}^A h^A &= \sigma_{nt}^B h^B \end{aligned} \quad (\text{III-58})$$

d'où:

$$\frac{\sigma_{nn}^B}{\sigma_{nt}^B} = \frac{\sigma_{nn}^A}{\sigma_{nt}^A} \quad (\text{III-59})$$

où n et t désignent les directions normale et tangentielle à la bande.

Dans la zone A de déformation homogène un simple changement d'axes donne:

$$\begin{aligned} \sigma_{nn}^A &= \sigma_1^A \cos^2\psi + \sigma_2^A \sin^2\psi \\ \sigma_{tt}^A &= \sigma_1^A \sin^2\psi + \sigma_2^A \cos^2\psi \\ \sigma_{nt}^A &= \left[ -\sigma_1^A + \sigma_2^A \right] \cos\psi \sin\psi \end{aligned} \quad (\text{III-60})$$

La compatibilité de la déformation des deux zones le long de l'axe t impose:

$$d\varepsilon_{tt}^A = d\varepsilon_{tt}^B \quad (\text{III-61})$$

Les équations précédentes, les relations contraintes-déformation données par la théorie de l'écoulement et une loi d'écrouissage du type:

$$\bar{\sigma}^A = k \bar{\varepsilon}^n \bar{\dot{\varepsilon}}^m \quad (\text{III-62})$$

avec n: le coefficient d'écrouissage

m: le coefficient de sensibilité à la vitesse

$\bar{\sigma} = \sqrt{3/2 s_{ij}s_{ij}}$  la contrainte équivalente

$\bar{\varepsilon} = \int_0^t \dot{\varepsilon} dt$  la déformation plastique cumulée, avec:

$$\bar{\dot{\varepsilon}} = \sqrt{2/3 \dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}}$$

permettent d'écrire les équations de la localisation:

$$(1-B-G)^{1/2} H \left[ 1-B \left( \frac{\bar{d\varepsilon}^A}{\bar{d\varepsilon}^B} \right)^2 \right]^{-1/2} \left( \frac{\bar{d\varepsilon}^A}{\bar{d\varepsilon}^B} \right)^m = (1-\zeta) \left( \frac{\bar{\varepsilon}^B}{\bar{\varepsilon}^A} \right)^n \exp(C\bar{\varepsilon}^A + \varepsilon_3^B)$$

(III-63)

avec:

$$\frac{d\varepsilon_3^B}{d\varepsilon^B} = - \frac{A}{H} \left[ 1 - B \left( \frac{d\varepsilon^A}{d\varepsilon^B} \right)^2 \right]^{1/2} - D \frac{d\varepsilon^A}{d\varepsilon^B} \quad (\text{III-64})$$

où A, B, C, D, et G sont des paramètres qui ne dépendent que du rapport  $\rho$  et de l'inclinaison de la bande:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ B &= \frac{3(\sin^2\psi + \rho\cos^2\psi)^2}{4(1+\rho+\rho^2)} \\ C &= \frac{\sqrt{3}(1+\rho)}{2\sqrt{1+\rho+\rho^2}} \\ D &= \frac{\sqrt{3}(\sin^2\psi + \rho\cos^2\psi)}{4\sqrt{1+\rho+\rho^2}} \\ G &= \frac{(\rho-1)^2 \sin^2\psi \cos^2\psi}{1+\rho+\rho^2} \\ H &= \left[ 1 + \left( \frac{2(\rho-1)\sin\psi \cos\psi}{(2\rho+1)\sin^2\psi + (\rho+2)\cos^2\psi} \right)^2 \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (\text{III-64})$$

Pour un défaut initial  $\zeta_0$  et un angle  $\psi(0)$  initial donnés on se fixe un chemin de déformation  $\rho$ , et on résoud l'équation (III-63) selon un schéma de Runge-Kutta à l'ordre 4. On obtient donc l'évolution de la déformation dans le défaut  $\varepsilon_B$  en fonction de la déformation dans la zone homogène  $\varepsilon_A$ . La striction est atteinte lorsque la vitesse de déformation dans la zone A tend vers zéro, ce qui signifie que la déformation est totalement localisée dans le défaut. Il faut toutefois noter que cette définition de la striction ne convient plus dès que le matériau est sensible à la vitesse de déformation. En effet si on s'intéresse à l'influence du coefficient de sensibilité à la vitesse sur les courbes décrivant la déformation dans le défaut en fonction de la déformation dans la zone homogène ( voir figure (III-10)), on s'aperçoit que pour  $m=0,3$ , le rapport  $d\varepsilon_A/d\varepsilon_B$  ne s'annule pas. En conséquence Marciniak [11] a proposé un critère d'apparition de la striction basé sur la déformation suivant l'épaisseur. La déformation critique correspondant à la striction peut alors se définir de la manière suivante: la limite de formage est atteinte lorsque  $\varepsilon_3$  est égal à une valeur limite  $\varepsilon_3^*$ .

III-3-4-2) Cas anisotrope

La prise en compte de l'anisotropie dans l'approche avec défaut initial se fait à travers la CLEP [12]. La démarche de départ est la même que dans le cas isotrope les équations d'équilibre (III-58) et de compatibilité (III-61) sont inchangées. La loi d'érouissage est également supposée être de la forme (III-62). En utilisant les mêmes notations que dans le cas isotrope, les équations d'équilibre peuvent être réécrites sous la forme:

$$h^A \left( \frac{\sigma_{nn}^A}{\sigma^A} \right) \bar{\sigma}^A = h^B \left( \frac{\sigma_{nn}^B}{\sigma^B} \right) \bar{\sigma}^B \quad (\text{III-65})$$

En introduisant la loi d'érouissage (III-62), on obtient:

$$h^A \left( \frac{\sigma_{nn}^A}{\sigma^A} \right) (\bar{\varepsilon}^A + \varepsilon_0)^n \left( \frac{\sigma}{\bar{\varepsilon}^A} \right)^m = h^B \left( \frac{\sigma_{nn}^B}{\sigma^B} \right) (\bar{\varepsilon}^B + \varepsilon_0)^n \left( \frac{\sigma}{\bar{\varepsilon}^B} \right)^m \quad (\text{III-66})$$

or la définition des déformations logarithmiques conduit à:

$$h^A = h^A(0) \exp(\varepsilon_{33}^A)$$

et

$$h^B = h^B(0) \exp(\varepsilon_{33}^B) \quad (\text{III-67})$$

d'où l'équation de la localisation:

$$\exp(\varepsilon_{33}^A) \left( \frac{\sigma_{nn}^A}{\sigma^A} \right) (\bar{\varepsilon}^A + \varepsilon_0)^n \left( \frac{\sigma}{\bar{\varepsilon}^A} \right)^m = D_0 \exp(\varepsilon_{33}^B) \left( \frac{\sigma_{nn}^B}{\sigma^B} \right) (\bar{\varepsilon}^B + \varepsilon_0)^n \left( \frac{\sigma}{\bar{\varepsilon}^B} \right)^m \quad (\text{III-68})$$

avec  $D_0 = h^B(0)/h^A(0)$  un paramètre caractérisant le défaut initial.

Un simple changement d'axes dans la zone de déformation homogène donne:

$$\begin{aligned} \sigma_{nn}^A &= \sigma_{xx}^A \cos^2 \psi + \sigma_{yy}^A \sin^2 \psi \\ \sigma_{tt}^A &= \sigma_{xx}^A \sin^2 \psi + \sigma_{yy}^A \cos^2 \psi \\ \sigma_{nt}^A &= (-\sigma_{xx}^A + \sigma_{yy}^A) \cos \psi \sin \psi \end{aligned} \quad (\text{III-69})$$

$$\text{d'où: } \frac{\sigma_{nn}^A}{\sigma^A} = \frac{\sigma_{xx}^A}{\sigma^A} \cos^2 \psi + \frac{\sigma_{yy}^A}{\sigma^A} \sin^2 \psi \quad (\text{III-70})$$

Dans un souci de clarté on traite les deux membres de l'équation (III-68) séparément:

$$P_g = P_d \quad (\text{III-71})$$

avec:

$$P_G = \exp(\varepsilon_{33}^A) \left[ \frac{\sigma_{nn}^A}{\sigma^A} \right] (\bar{\varepsilon}^A + \varepsilon_0)^n \left( \frac{\sigma}{\varepsilon^A} \right)^m \quad (\text{III-72})$$

et:

$$P_d = D_0 \exp(\varepsilon_{33}^B) \left[ \frac{\sigma_{nn}^B}{\sigma^B} \right] (\bar{\varepsilon}^B + \varepsilon_0)^n \left( \frac{\sigma}{\varepsilon^B} \right)^m \quad (\text{III-73})$$

On s'intéressera dans un premier temps au terme  $P_G$  qui concerne la partie A de la tôle de déformation homogène. En tenant compte de (III-70) on obtient:

$$P_G = \exp(\varepsilon_{33}^A) \left[ \frac{\sigma_{xx}^A}{\sigma^A} \cos^2 \psi + \frac{\sigma_{yy}^A}{\sigma^A} \sin^2 \psi \right] (\bar{\varepsilon}^A + \varepsilon_0)^n \left( \frac{\sigma}{\varepsilon^A} \right)^m \quad (\text{III-74})$$

Le chargement aux extrémités de la plaque est donné par  $\rho^A$ : selon l'équation (III-55).

La déformation selon l'axe 3,  $\varepsilon_{33}^A$  est exprimé en fonction de  $\varepsilon_{xx}^A$  et de  $\rho^A$  à

l'aide de la condition d'incompressibilité:

$$\varepsilon_{33}^A = -\varepsilon_{xx}^A (1 + \rho^A) \quad (\text{III-75})$$

Les rapports  $\frac{\sigma_{xx}^A}{\sigma^A}$  et  $\frac{\sigma_{yy}^A}{\sigma^A}$  sont évalués grâce à la CLEP. Si on suppose que les axes

principaux des contraintes dans la région A sont confondus avec le repère (DL, DT, DN) dans lequel est défini la texture, alors  $\sigma_{xy}=0$ . C'est ainsi que la CLEP se réduit à la section  $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy})$  dans laquelle on recherche l'état de contrainte associé à  $\rho^A$ .

Dans la mesure où l'on fait varier  $\varepsilon_{xx}^A$  de manière incrémentale, le terme  $P_G$  est connu.

Le but est maintenant de calculer le terme  $P_d$  (équation (III-71)) qui régit l'évolution des déformations et des contraintes dans le défaut. La recherche de la solution est basée sur une approche numérique [12] et [13]. On impose une valeur pour le rapport:

$$\frac{\sigma_{yy}^B}{\sigma_{xx}^B}$$

on en déduit la valeur du rapport:

$$\left[ \frac{\sigma_{xy}^B}{\sigma_{xx}^B} \right] = \frac{\left[ \frac{\sigma_{xy}^A}{\sigma_{xx}^A} \right] \alpha^A + \sin \psi \cos \psi \left[ \frac{\sigma_{yy}^B}{\sigma_{xx}^B} - \frac{\sigma_{yy}^A}{\sigma_{xx}^A} \right]}{\alpha^A} \quad (\text{III-76})$$

$$\text{avec } \alpha^A = \left( \begin{array}{c} \sigma_{YY}^A \\ \frac{\sigma_{YY}^A}{\sigma_{XX}^A} \end{array} \right) \sin^2 \psi - \cos^2 \psi$$

En imposant des valeurs aux deux rapports ci-dessus, on impose l'état de contrainte dans le défaut. Connaissant l'état de contrainte, on en déduit grâce à la CLEP, l'incrément de déformation. En tenant compte de la condition de compatibilité, tout est connu dans le terme  $P_d$ . On cherche ainsi l'état de contrainte dans le défaut qui permet de satisfaire la condition (III-71). Lorsque la condition (III-71) est satisfaite, on évalue le rapport des vitesses de déformation dans la zone homogène et dans le défaut:  $\frac{\dot{\epsilon}^A}{\dot{\epsilon}^B}$ . La limite de formage est atteinte lorsque ce rapport tend vers zéro.

#### III-4) Résultats

Lors de la mise en oeuvre pratique de l'approche avec défaut initial dans le cas anisotrope, des problèmes d'analyse numérique ont notablement retardé l'avancement des travaux, c'est pourquoi aucun résultat cohérent n'a pu être produit jusqu'à ce jour. Les résultats théoriques présentés ici ont été obtenus à l'aide d'un logiciel développé par Toth [14] qui est pour l'essentiel basé sur une approche semblable à celle décrite au paragraphe III-3-3-2).

Les CLF expérimentales ont été tracées pour les quatre alliages étudiés (voir figures (III-11) à (III-14)). On vérifie que la limite de formage dans le domaine du retreint est lié à la valeur du coefficient d'anisotropie. Pour le zinc dont le coefficient d'anisotropie est faible les points de la CLF en retreint sont proches de la traction plane. Pour les alliages de titane et de zirconium qui présentent des coefficients d'anisotropie plus élevés, la CLF tend vers la droite  $\epsilon_1 = -\epsilon_2$ . En expansion par contre le zinc possède des capacités de déformation nettement supérieures à celles du zirconium. Pour les alliages de titane, les CLF ne sont pas tracées dans le domaine de l'expansion car l'épaisseur (3mm) de ces tôles dépasse les capacités (flancs de 60mm) de la machine d'expansion biaxiale dont nous disposons.

Dans deux cas (TA6V et Zn6) nous disposons également de résultats de simulation fournis par Toth. Dans le cas du TA6V, l'accord entre les mesures et le calcul est satisfaisant aussi bien dans le domaine du retreint que de la traction plane.

Dans le cas du zinc, le calcul prévoit correctement la limite de formage en expansion et en traction plane. Par contre la pente de la CLF dans le domaine du retreint diverge par rapport aux mesures.

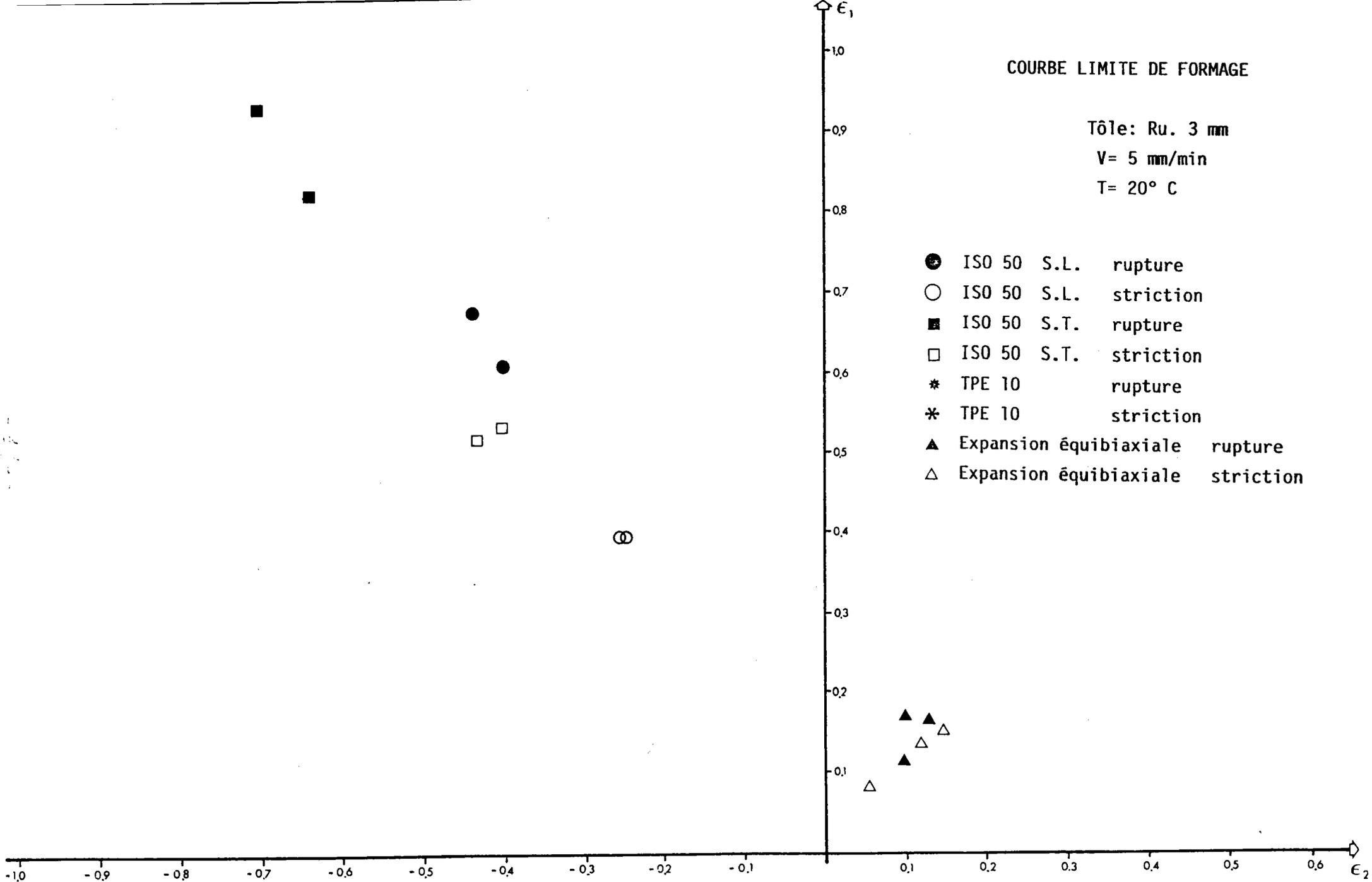


Fig. III-11: CLF expérimentales de la tôle Ru3

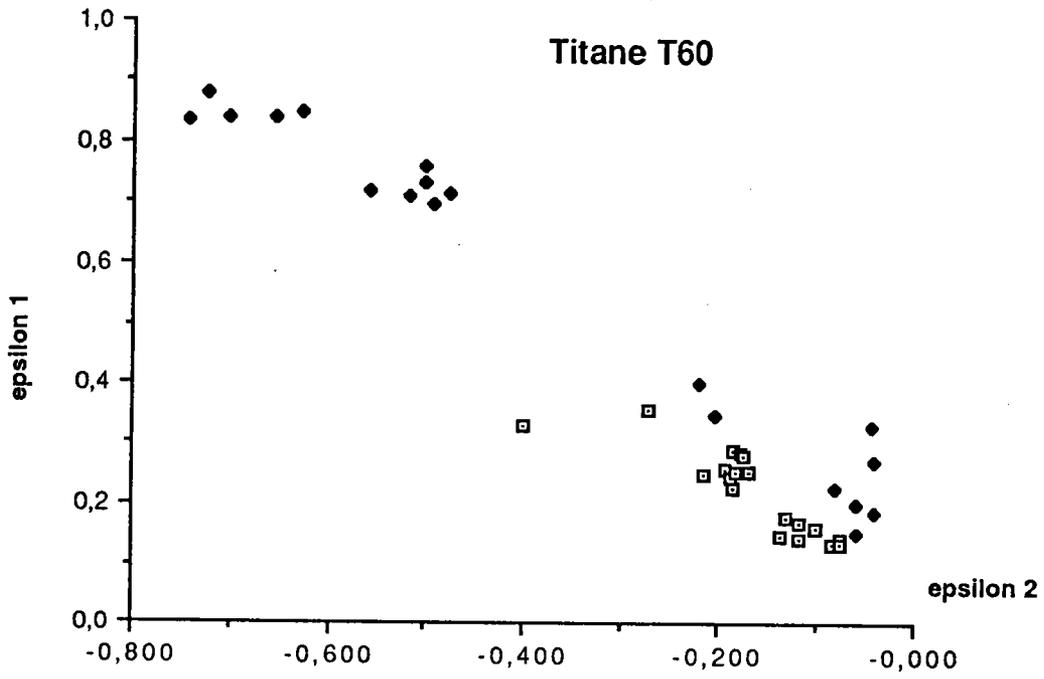


Fig. III-12: CLF expérimentales de la tôle de titane T60.

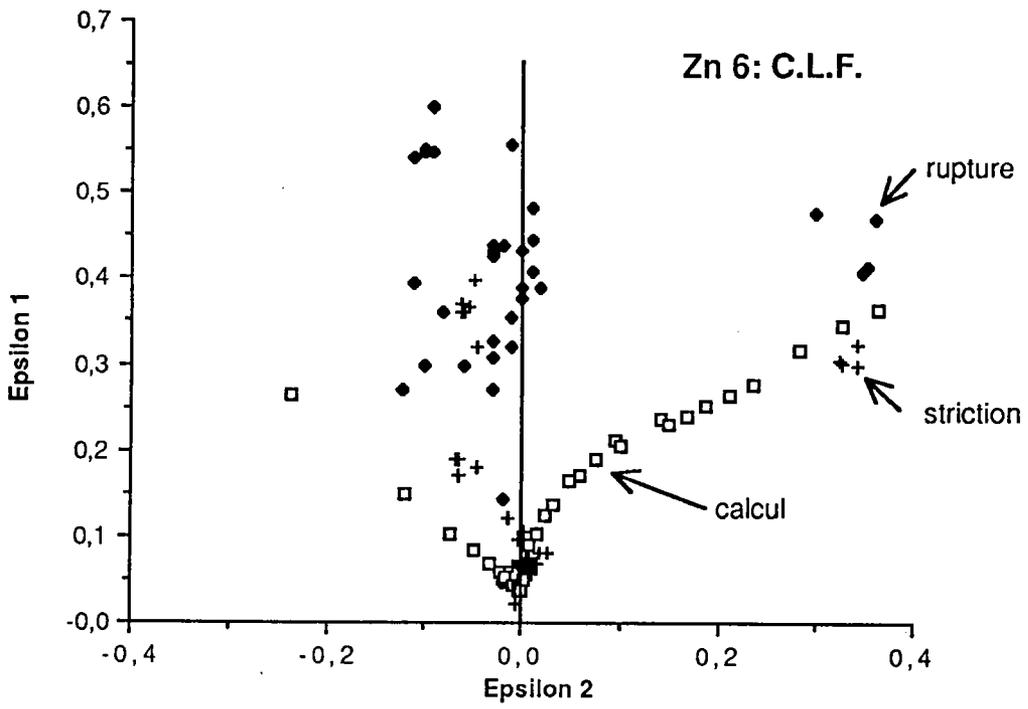


Fig. III-14: CLF expérimentales et théoriques de la tôle de Zn6.

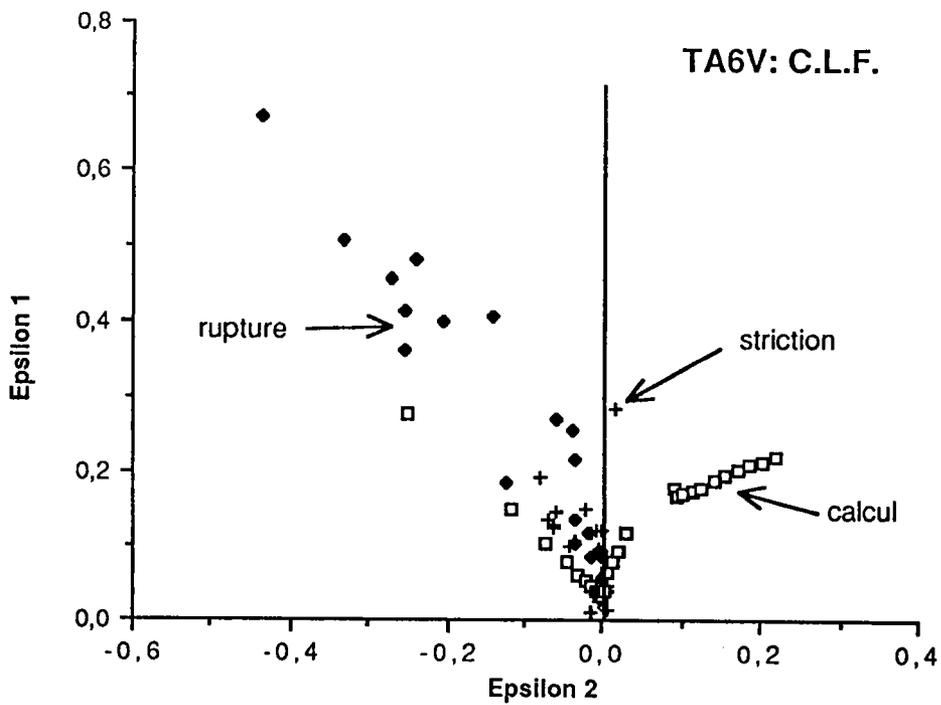


Fig. III-13: CLF expérimentales et théoriques de la tôle de TA6V.

### BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE III

- [1] Jalinier J.M.  
Mise en forme et endommagement. Thèse d'Etat, Université de Metz (1981).
- [2] Parnière P. et Sanz G.  
Appréciation des caractéristiques d'emboutissabilité des tôles minces. Ecole d'été de Metallurgie Physique de Villars-sur Ollon, édition du CNRS (1976).
- [3] Philippe M.J.  
Contribution à l'étude de la déformation des matériaux hexagonaux. Thèse d'Etat, Université de Metz (1983).
- [4] Philippe M.J., Esling C. and Hocheid B.  
Role of twinning in texture development and in plastic deformation of hexagonal materials. Textures and Microstructures, Vol.7, pp.265-301, (1988).
- [5] Swift H.W.  
Plastic instability under plane stress. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol.1, pp.1-18, (1952).
- [6] Dudzinski D.  
Application du modèle d'érouissage cinématique à la mise en forme. Influence de la température sur la limite de formage. Thèse de 3ème cycle, Université de Metz (1986).
- [7] Hill R.  
On discontinuous plastic states, with special reference to localized necking in thin sheets. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol.1, pp.19-30, (1952).
- [8] Stören S. and Rice J.R.  
Localized necking in thin sheets. J. Mech. Phys. Solids, Vol.23, pp.421-441, (1975).
- [9] Moussy F. et Franciosi P.  
Physique et mécanique de la mise en forme des métaux. Presses du CNRS
- [10] Marciniak Z. and Kuczynski K.  
Limit strains in the processes of stretch-forming sheet metal. Int. J. Mech. Sci. Vol.9, pp.609-620, (1967).
- [11] Marciniak Z., Kuczynski K. and Pokora T.  
Influence of the plastic properties of a material on the forming limit diagram for sheet metal in tension. Int. J. mech. Sci., Vol.15, pp.789-805, (1973).
- [12] Barlat F. and Lian J.  
Plastic behavior and stretchability of sheet metals. Part I: a yield function for orthotropic sheets under plane stress conditions. Int. J. Plas. Vol.5, pp.51-66, (1989).
- [13] Lian J., Barlat F. and Baudalet B.  
Plastic behavior and stretchability of sheet metals. Part II: effect of yield surface shape on sheet forming limit. Int. J. Plas. Vol.5, pp.131-147, (1989)
- [14] Toth L.S.  
Communication privée.

## CONCLUSION

Les coefficients d'anisotropie et les limites élastique en traction uniaxiale déduits de la CLEP calculée à l'aide du modèle de Taylor, sont globalement en accord avec les mesures. Ceci nous permet de valider le calcul des CLEP pour des matériaux à symétrie hexagonale.

Les discussions à propos des cisssions critiques ont permis de mettre en évidence que:

la limite élastique est moins sensible aux valeurs des cisssions critique que le coefficient d'anisotropie. Par contre le choix de la variante (DPI ou DTI) du modèle de Taylor a une influence très importante sur les résultats et notamment sur le coefficient d'anisotropie. Pour le titane T60 par exemple, un jeu de cisssions critiques qui donne des valeurs comparables à l'expérience en version DTI, peut conduire à des valeurs de coefficient d'anisotropie tendant vers l'infini si la variante DPI est utilisée. L'explication réside dans la très forte influence que le choix de la variante exerce sur l'activité des systèmes de glissement comme les résultats obtenus dans le cas du T60 le montrent.

Les évolutions de texture calculées à partir des cisssions qui donnent les meilleures prédictions de  $r(\alpha)$  et de  $\sigma_e(\alpha)$ , ne reproduisent en général que très moyennement les textures de déformation mesurées. Ceci pose le problème de l'adaptation de la modélisation aux différentes phases de la déformation plastique. En d'autres termes, il faut tenir compte de l'érouissage lors de la déformation plastique. Se pose alors la question de la loi d'érouissage à utiliser. Seule une étude expérimentale spécifique peut répondre à cette question.

L'érouissage détermine également l'évolution des CLEP au cours de la déformation. Cette étape ultérieure de prédiction de l'évolution des CLEP n'est envisageable que si les CLEP déterminées à l'état initial sont confirmées par des investigations expérimentales supplémentaires. Ces mesures complémentaires concernent les limites élastiques en compression qui mettent en évidence l'effet Bauschiger. Les mesures que nous avons effectuées dans le cadre du présent travail ne permettent pas de valider les CLEP dans le domaine de la compression. La forme et l'évolution des CLEP jouent un rôle essentiel dans la prévision des CLF. Une étude plus systématique pourra être menée lorsque les problèmes numériques rencontrés dans la mise en oeuvre du calcul des CLF avec des surfaces d'écoulement anisotrope seront résolus.

Les résultats obtenus à l'aide du logiciel développé par Toth pour l'alliage de zinc et l'alliage de titane TA6V sont encourageants. Ces résultats peuvent certainement être affinés en mesurant de façon soignée les coefficients d'érouissage et de sensibilité à la vitesse de déformation.