



**HAL**  
open science

# Critères de flambage plastique avec lois de comportement complexes sur l'exemple de l'éprouvette cruciforme

Kaddour Benbagdad

► **To cite this version:**

Kaddour Benbagdad. Critères de flambage plastique avec lois de comportement complexes sur l'exemple de l'éprouvette cruciforme. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université Paul Verlaine - Metz, 1992. Français. NNT: 1992METZ044S . tel-01776009

**HAL Id: tel-01776009**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01776009v1>**

Submitted on 24 Apr 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

INSTITUT SUPÉRIEUR DE GÉNIE MÉCANIQUE ET PRODUCTIQUE

# THÈSE

PRÉSENTÉE A

L'UNIVERSITÉ DE METZ

POUR OBTENIR LE GRADE

DE DOCTEUR

DE

L'UNIVERSITÉ DE METZ

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

- MÉCANIQUE -

PAR

Kaddour BENBAGDAD

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv.	19920905
Cote	S/M3 92/44
Loc	Magasin

**CRITÈRES DE FLAMBAGE PLASTIQUE  
AVEC LOIS DE COMPORTEMENT  
COMPLEXES SUR L'EXEMPLE DE  
L'ÉPROUVETTE CRUCIFORME**

SOUTENUE LE 9 DÉCEMBRE 1992 DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN

**JURY : MM**

M. BERVEILLER	Professeur au L.P.M.M. - I.S.G.M.P
A. CIMETIÈRE	Professeur au L.M.S à POITIERS
A. LÉGER	E.D.F.- D.E.R. à CLAMART
NGUYEN QUOC SON	Directeur de Recherches au C.N.R.S., L.M.S Ecole Polytechnique à PALAISEAU
M. POTIER-FERRY	Professeur au L.P.M.M. - I.S.G.M.P
J. SAINT JEAN PAULIN	Professeur au LM MMAS (METZ) Département de Mathématiques

I.S.G.M.P.

Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux

U.R.A. au C.N.R.S. n° 1215

Faculté des Sciences, Ile du Saulcy 57045 METZ Cedex 01

## AVANT-PROPOS

-----

J'exprime ma profonde reconnaissance à tous ceux qui m'ont aidé et encouragé.

Je remercie tout particulièrement Monsieur le Professeur *M. BERVEILLER* ( L.P.M.M.- I.S.G.M.P ) qui m'a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse et me faire profiter de ses remarques perspicaces lors de la soutenance.

C'est avec enthousiasme que j'adresse mes plus vifs remerciements à Messieurs:

- *A. CIMETIERE* ( Professeur au L.M.S. ( POITIERS ) ),
- *A. LÉGER* ( E.D.F - D.E.R. ( CLAMART ) ),
- *NGUYEN QUOC SON* ( Directeur de Recherches au C.N.R.S.,  
L.M.S., Ecole Polytechnique  
( PALAISEAU ) )

qui ont bien voulu, malgré leurs multiples responsabilités, me consacrer un peu de leurs temps en acceptant d'être mes rapporteurs. Leurs travaux et remarques ont été pour moi source d'enrichissement.

J'exprime mon entière gratitude à Monsieur le Professeur *M. POTIER-FERRY* ( Directeur du L.P.M.M. et Directeur de cette thèse ) pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail, sans qui ce mémoire ne serait pas matérialisé. Il a suivi l'évolution de mon travail avec attention et bienveillance et je lui suis très reconnaissant de l'aide précieuse qu'il m'a apportée par ses conseils et ses critiques constructives.

Je remercie sincèrement Madame le Professeur *J. SAINT JEAN PAULIN* au LM MMAS (Département de Mathématiques ( METZ ) ), d'avoir examiné ce travail et de participer au jury.

Je tiens à remercier tous mes collègues du L.P.M.M. qui, à des titres divers, ont permis de perfectionner cette thèse.  
Je pense particulièrement à *B. COCHELIN, C. GARDIN, J.C. GRANDIDIER et L. SIAD.*

**A la mémoire  
de  
ma mère**

**TABLE DES MATIÈRES**

# TABLE DES MATIÈRES

	Pages
INTRODUCTION	8
PREMIÈRE PARTIE	13
INTRODUCTION	14
I FLAMBAGE ÉLASTIQUE	15
I.1 INTRODUCTION	16
I.2 MODÈLE ÉLÉMENTAIRE DE FLAMBAGE	19
I.2.1 Modèle de la tige rigide	19
I.2.1.1 Bifurcation - Post-flambage.	20
I.2.1.2 Influence des imperfections.	22
I.2.1.3 Stabilité	27
I.3 THÉORIE CLASSIQUE DE LA BIFURCATION POUR LES SYSTÈMES ÉLASTIQUES	
I.3.1 Critère de l'énergie pour la stabilité et critère de bifurcation	30
I.3.2 Réduction de Lyapounov et Schmidt	32
I.4 CONCLUSION	35
II FLAMBAGE PLASTIQUE	36
II.1 INTRODUCTION	37
II.2 LOIS DE COMPORTEMENT CLASSIQUES EN PLASTICITÉ À UN SEUIL	
II.2.1 Comportement élastoplastique.	39
II.2.2 Cas de chargement unidimensionnel	43
II.2.3 Milieux standards généralisés	44



<b>DEUXIÈME PARTIE</b>	<b>90</b>
<b>INTRODUCTION</b>	<b>91</b>
<b>III FLAMBAGE PLASTIQUE AVEC LOIS DE COMPORTEMENT COMPLEXES SUR L'EXEMPLE DE L'ÉPROUVETTE CRUCIFORME</b>	
<b>III.1 INTRODUCTION</b>	<b>93</b>
<b>III.2 MODÉLISATION DU FLAMBAGE DE L'ÉPROUVETTE CRUCIFORME</b>	<b>94</b>
III.2.1 Formulation du problème mécanique	94
III.2.2 Forme générale de la loi de comportement en compression-torsion	95
III.2.3 Équations gouvernant le flambage	98
<b>III.3 PROBLÈME EN VITESSES</b>	<b>103</b>
III.3.1 Loi de comportement	103
III.3.2 Formulation variationnelle: problème en vitesses	104
III.3.2.1 Application: flambage avec les lois classiques	106
III.3.2.2 Discussion	109
<b>III.4 CRITÈRES DE FLAMBAGE PLASTIQUE AVEC LOIS DE COMPORTEMENT COMPLEXES</b>	
III.4.1 Modèle "J <sub>2</sub> avec Coin "	110
III.4.2 Problème en vitesses spécifique au modèle " J <sub>2</sub> avec Coin "	112
III.4.2.1 Formulation du problème en vitesses en ( $\dot{u}, \dot{\theta}$ )	112
III.4.2.2 Critères de bifurcation	117
III.4.2.2.1 Bifurcation	118
III.4.2.2.2 Convexité	120
III.4.2.2.3 Critères	123
III.4.2.2.3.1 Résultats et commentaires	126
III.4.2.2.3.2 Cas sans zone de charge totale	132
<b>III.4.3 Conclusions- orientation</b>	<b>135</b>

<b>III.5 EXTENSION</b>	<b>136</b>
III.5.1 Problème en vitesses	136
III.5.2 Différentes caractérisations de la charge critique	137
III.5.2.1 Introduction des valeurs critiques	137
III.5.2.1.1 Inégalité $\lambda_2 \leq \lambda_1$	139
III.5.2.1.2 Lien entre les charges $\lambda_1$ et $\lambda_2$	140
III.5.2.1.2 1 Les hypothèses	140
III.5.2.1.2 2 A propos de l'inégalité $\lambda_2 \leq \lambda_1$	141
III.5.2.1.2 2 A propos de l'inégalité $\lambda_2 \leq \lambda_1$	142
III.5.3 Condition nécessaire et suffisante de bifurcation	143
III.5.3.1 Lemme	144
III.5.3.2 Définitions - Préliminaires	145
III.5.3.3 Théorème	147
III.5.3.3 1 Démonstration du théorème	147
III.5.3.3 2 Conclusion - Orientation	155
<b>IV POST-FLAMBAGE PLASTIQUE</b>	<b>156</b>
<b>IV.1 INTRODUCTION</b>	<b>157</b>
<b>IV.2 CALCUL DES BRANCHES BIFURQUÉES PAR LA METHODE DE [L<sub>3</sub> ]</b>	
IV.2.1 Mise en œuvre de la méthode	160
IV.2.1.1 Cas où la loi permet une zone de charge totale	160
IV.2.1.1.1 Calcul de la branche bifurquée	161
IV.2.1.1.2 Commentaires	171
IV.2.1.2 Cas où la zone de charge totale est absente	173
IV.2.1.2.1 Calcul de la branche bifurquée	173
IV.2.1.2.2 Commentaire	178
IV.2.3 Conclusion	179
<b>V CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES</b>	<b>180</b>
<b>VI BIBLIOGRAPHIE</b>	<b>183</b>

# INTRODUCTION

## INTRODUCTION

En calcul des structures élastiques, on connaît depuis *Lagrange-Dirichlet* le critère de la seconde variation et la détermination de la charge critique de flambage. Les développements du potentiel élastique ont permis d'obtenir le comportement post-critique des structures minces, telles que des systèmes de poutres, de plaques et de coques minces élastiques. Celui-ci a fait l'objet d'importantes recherches tant théoriques (*Koiter* [K<sub>2</sub>], *Budiansky* [B<sub>5</sub>], *Potier-Ferry* [P<sub>5</sub>]) que numériques (essentiellement la méthode des éléments finis). On peut considérer que la théorie a fourni une base satisfaisante pour la plupart des applications pratiques .

La situation est différente dans le cas des structures élastoplastiques. La présence des déformations plastiques conduit à des non-linéarités plus difficiles à appréhender car les méthodes d'analyse basées sur le potentiel élastique ne sont plus valables. Les études fondamentales de *Von-Karman* [V] et de *Shanley* [S<sub>2</sub>] ont clairement précisé la position du problème de bifurcation qui doit être séparé du problème de stabilité . En 1947, *Shanley* [S<sub>2</sub>] montra qu'une bifurcation d'équilibre à charge croissante ( et non plus constante ) pouvait avoir lieu sans décharge élastique, avec seulement un point de charge neutre. Ce résultat établissait définitivement la charge critique du module tangent. Il restait à exprimer le critère de bifurcation en termes mathématiques et pour des conditions suffisamment générales, ce qui fût fait par *Hill* en 1958 [H<sub>3</sub>]. Il a donné des critères de stabilité et de non-bifurcation à partir d'une condition suffisante d'unicité pour la réponse en vitesses du milieu élastoplastique. Pour l'instant, elle est considérée comme la méthode de calcul optimale de la charge critique. Une réflexion est menée depuis quelques années sur les travaux de *Hill* [H<sub>3</sub>], dans le cadre des milieux standards généralisés. *Nguyen* [N<sub>2</sub>], [N<sub>3</sub>] ( à partir de 1981 ), *Léger et Potier-Ferry* [L<sub>1</sub>], [L<sub>2</sub>], [L<sub>3</sub>], *Cimetière* [C<sub>4</sub>], [C<sub>5</sub>], [C<sub>6</sub>] ont montré que le problème en vitesses pouvait se mettre sous la forme d'une inéquation variationnelle, ce qui conduit à une formulation simple du critère de *Hill*.

Le critère de *Hill* ne permet pas de calculer la charge maximale supportée par la structure car la solution bifurquée existe toujours au-delà de la charge critique, ce qui n'est pas le cas en flambage élastique. Pour calculer la charge maximale, il est nécessaire de mener une étude post-critique qui, en principe, exige des moyens numériques.

Cette analyse difficile est due à *Hutchinson* [  $H_4$  ] qui montre que, juste après la bifurcation, une zone de décharge élastique se développe à partir du point initial de charge neutre. Le développement de cette zone de décharge est essentiel pour calculer la branche bifurquée.

Récemment *Nguyen* [  $N_3$  ], [  $N_5$  ], *Léger et Potier-Ferry* [  $L_2$  ], [  $L_3$  ] ont proposé des axes différents pour réexaminer ces problèmes et les mettre en oeuvre. L'intérêt théorique de ces travaux a été de prendre en compte le fait qu'il s'agissait de problèmes à frontière libre et, en conséquence, d'établir le lien entre la méthode de résolution de ces problèmes et la théorie des inéquations variationnelles. Ces analyses donnent une première approximation de la solution ( par exemple par des courbes charge/flèche ( cf.Fig.1 ) ).

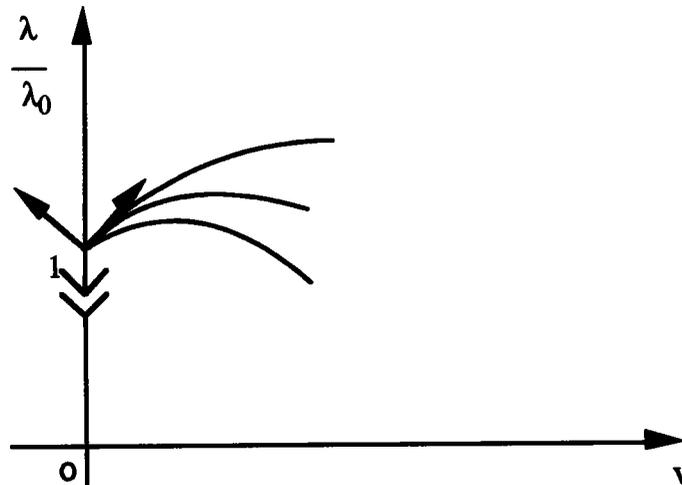


Fig.1: Courbe charge-flèche

Dans la plupart des cas étudiés la charge maximale ne semble guère supérieure à la charge critique du module tangent.

De multiples arguments montrent que le critère du module tangent est véritablement le critère de bifurcation plastique. Il est utilisé avec des aménagements divers: par exemple, dans les codes de calcul une loi " élastique " de type déformation donne d'excellents résultats uniquement en chargement proportionnel. Néanmoins, son application pose des problèmes délicats dans le cas d'un chargement non uniaxial. Ceci est dû au fait que les lois de comportement plastiques habituelles ne sont guère adaptées pour rendre compte de bifurcations.

Un problème demeure pourtant jusqu'à nos jours, lors de l'étude de la bifurcation plastique des plaques et des coques comprimées, à savoir que la loi de la déformation fournit paradoxalement une estimation plus exacte de la charge critique que la loi incrémentale.

Une conséquence en est un débat qui dure depuis 40 ans, sur les causes de cet apparent paradoxe [ H<sub>4</sub> ], [ H<sub>6</sub> ]. D'un côté l'écart entre la théorie et l'expérience est attribué à des imperfections expérimentalement inévitables et dont la théorie des bifurcations élastiques nous a appris qu'elles modifiaient les charges critiques. On se contente alors dans les codes de calcul d'ajuster les rigidités pour améliorer les résultats.

D'un autre côté, on affirme que les causes de l'écart ne sont pas à chercher dans les imperfections, mais plutôt dans l'évolution de la forme des surfaces seuils au cours de la déformation. Ce dernier point de vue a fortement été étayé par l'introduction de modèles de comportement comprenant le développement de Coins sur les surfaces seuils et qui semble susceptible de modifier sensiblement les charges critiques.

Ces modèles de lois sont définies par des relations monotones de degré un entre les vitesses de déformation et de contraintes qui sont générales alors que les lois incrémentales classiques qui ont été remises en cause, sont définies par une relation linéaire en charge et une autre en décharge. Il faut noter que les modèles polycristallins [ H<sub>5</sub> ], [ B<sub>3</sub> ], [ F ] conduisent naturellement à ce type de comportement. C'est pourquoi *Christoffersen et Hutchinson* [C<sub>2</sub>] ont introduit une loi phénoménologique de ce type dont les principales caractéristiques sont de faire intervenir un convexe de plasticité présentant un Coin au point actuel de charge et trois zones pour la vitesse de déformation plastique; une zone de décharge élastique, une zone de charge plastique totale et une zone intermédiaire de charge plastique partielle.

L'objectif de la thèse est de discuter le flambage plastique de l'éprouvette cruciforme dans le cadre de ces lois, en particulier de définir des critères de flambage et de décrire le comportement post-critique.

Le mémoire est organisé en deux parties.

La première fixe le cadre de l'étude et rappelle quelques notions utiles. Dans un premier temps, on revient sur les aspects fondamentaux du flambage élastique. On rappelle sur un modèle simple un nombre de notions et résultats concernant les bifurcations, en particulier sur la liaison qui existe entre perte de stabilité et critère de la seconde variation. Les différents types de bifurcations sont données et l'influence des imperfections est soulignée. La réduction de Lyapounov-Schmidt est présentée comme méthode de calcul du comportement post-critique. Puis, dans un deuxième temps on donne une introduction au flambage plastique et aux problèmes de fond qu'il pose. Après un bref rappel de la loi de plasticité classique à un seuil, des milieux standards généralisés et de la théorie de la déformation sous forme incrémentale, le flambage par flexion d'une poutre élastoplastique circulaire est discuté d'abord dans le cadre de la théorie de la

déformation, puis dans celui de la théorie incrémentale. Après le rappel du critère de *Hill* [  $H_3$  ], et sa confrontation aux différentes charges critiques utilisées dans la littérature ou dans les codes de calcul, ce chapitre introduit la spécificité du problème de l'éprouvette cruciforme.

Les charges critiques sont alors franchement différentes dans le cas du flambage en torsion de l'éprouvette cruciforme, celle donnée par la théorie incrémentale surestime nettement la valeur expérimentale et ne fait paradoxalement intervenir que le module de cisaillement élastique. Pour ces raisons, la loi d'écoulement plastique classique est rejetée et la loi " $J_2$  avec Coin" est mise en rapport avec la nature polycristalline des matériaux. Le cas particulier de la loi " $J_2$  avec Coin" de Christoffersen et Hutchinson est présentée en détail.

La deuxième partie rassemble les principaux résultats originaux de ce mémoire et comporte deux volets. Le premier est consacré au flambage plastique de l'éprouvette cruciforme avec lois de comportement complexes. Après avoir défini la loi de comportement par une fonction potentielle de vitesse de contraintes, fonction homogène de degré deux, strictement convexe et présentant une symétrie naturelle. On montre que les réponses en vitesses de déplacement sont données par les points stationnaires d'une fonctionnelle, dont la forme fait penser au critère de l'énergie potentielle en élasticité. Dès lors, il est naturelle d'essayer de caractériser la charge critique par un critère de type seconde variation. C'est ce qui est fait, d'abord dans le cas de la loi " $J_2$  avec Coin". Le critère de flambage est associé à la perte de convexité stricte du potentiel, ce qui se traduit techniquement par la perte de positivité stricte de sa dérivée seconde. Le calcul explicite de la charge critique conduit à une valeur très intéressante, car inférieure à la fois aux charges critiques données par la loi incrémentale et la loi de la déformation. Une telle valeur est liée au module de cisaillement tangent est susceptible d'être en très bon accord avec la valeur expérimentale. Lorsqu'il existe une zone de charge totale la bifurcation est transverse dans le cas contraire elle est tangente. La caractérisation de la charge critique est reprise ensuite dans le cas général de lois de comportement complexes. La situation est maintenant plus délicate et la caractérisation n'est menée à bien que sous une hypothèse assez restrictive sur la forme du potentiel.

La fin du mémoire est consacrée au post-flambage de l'éprouvette cruciforme. Le comportement est le modèle " $J_2$  avec Coin". On s'assure qu'il existe bien une branche bifurquée à partir de la charge critique, cela en appliquant une technique asymptotique introduite par *Léger et Potier-Ferry* [  $L_2$  ], [  $L_3$  ]. La bifurcation transverse s'effectue par développement des zones de charge partielles.

**PREMIÈRE PARTIE**

## INTRODUCTION

*La première partie reprend les différentes notions nécessaires à la compréhension du phénomène de flambage des structures et fixe le cadre de l'étude.*

*Nous rappelons dans un premier temps, le modèle de la tige rigide qui nous permet une description simple du phénomène d'instabilité et une introduction spécialisée aux concepts qui lui sont associés. Nous abordons ensuite la théorie générale de la stabilité des structures élastiques.*

*Dans un deuxième temps, on présente une introduction détaillée au flambage plastique et aux problèmes de fond qu'il pose. On rappelle les critères usuels de bifurcation, en particulier le critère de Hill [  $H_3$  ] et les charges critiques utilisées dans la littérature ou dans les codes de calculs. Ensuite, on introduit la spécificité du problème de l'éprouvette cruciforme et on montre sur ce type de modèle de structure les écarts et paradoxe obtenus lors du calcul de la charge critique.*

*La fin de cette partie est consacrée à la mise en rapport de la loi "  $J_2$  avec Coin " avec la nature polycristalline des matériaux.*

# FLAMBAGE ÉLASTIQUE

## I FLAMBAGE ÉLASTIQUE

Nous rappelons brièvement les principales notions qui permettent de comprendre la bifurcation dans le domaine élastique. Nous nous sommes inspirés de quelques textes récents: *Damil* (1990) [ D<sub>1</sub> ] et *Potier-Ferry* (1987) [ P<sub>5</sub>].

### I.1 INTRODUCTION

Le flambage est un phénomène d'instabilité qui apparaît dans les structures et qui peut entraîner soit la ruine de celles-ci, (comportement de type coque, voir Fig.1-b), soit des déformations importantes, (comportement de type plaque, voir Fig.1-a). Ce phénomène survient lorsque l'une au moins des dimensions est petite par rapport aux autres.

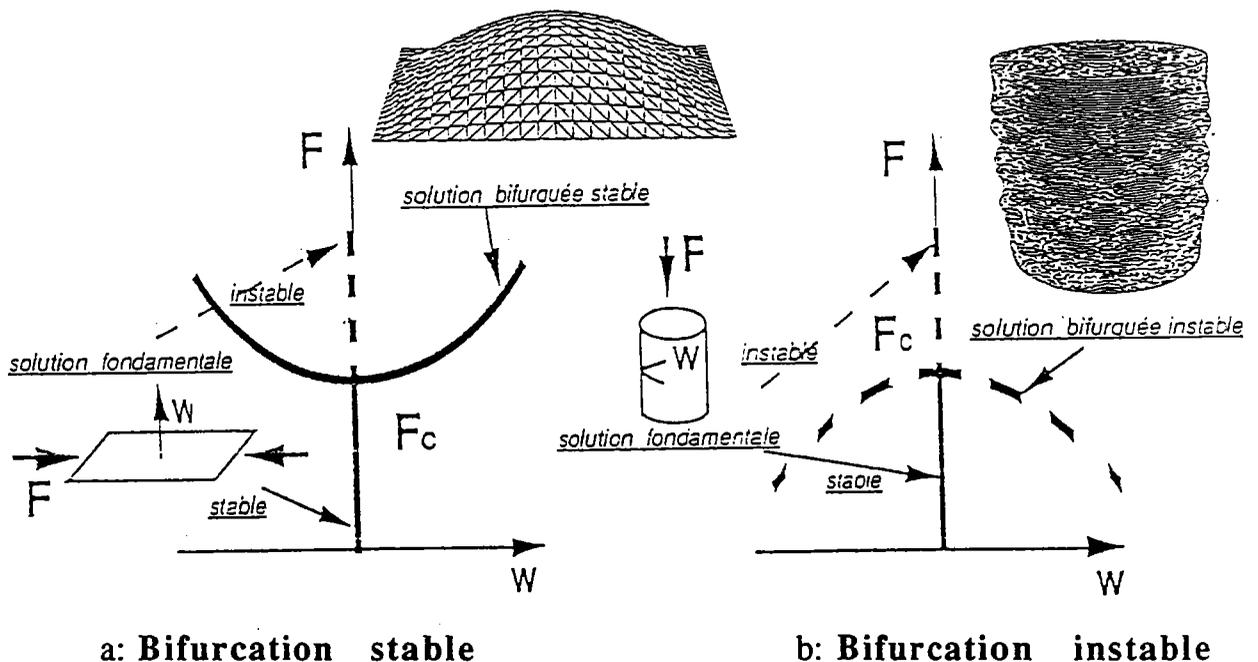


Fig.1: Courbe charge-déplacement

Dans la plupart des réalisations industrielles, on rencontre des structures constituées essentiellement par des éléments minces : poutre, plaque, coque. Citons par exemple :

- le nucléaire (cuve de réacteurs, tuyauteries)
- l'aéronautique (panneaux composites stratifiés, réservoirs)
- le génie civil (plates-formes pétrolières marines, silos)
- l'industrie alimentaire (boîtes de conserves)
- l'automobile

Le dimensionnement au flambage de ces structures minces a suscité un grand nombre de travaux théoriques, expérimentaux et numériques, voir par exemple [ B<sub>s</sub> ], [ P<sub>s</sub> ].  
Le problème du flambage est ancien et les premiers travaux théoriques furent menés par *Euler* en 1744 [ E<sub>2</sub> ] sur le problème d'une poutre soumise à un effort de compression F (cf. Fig. 2).

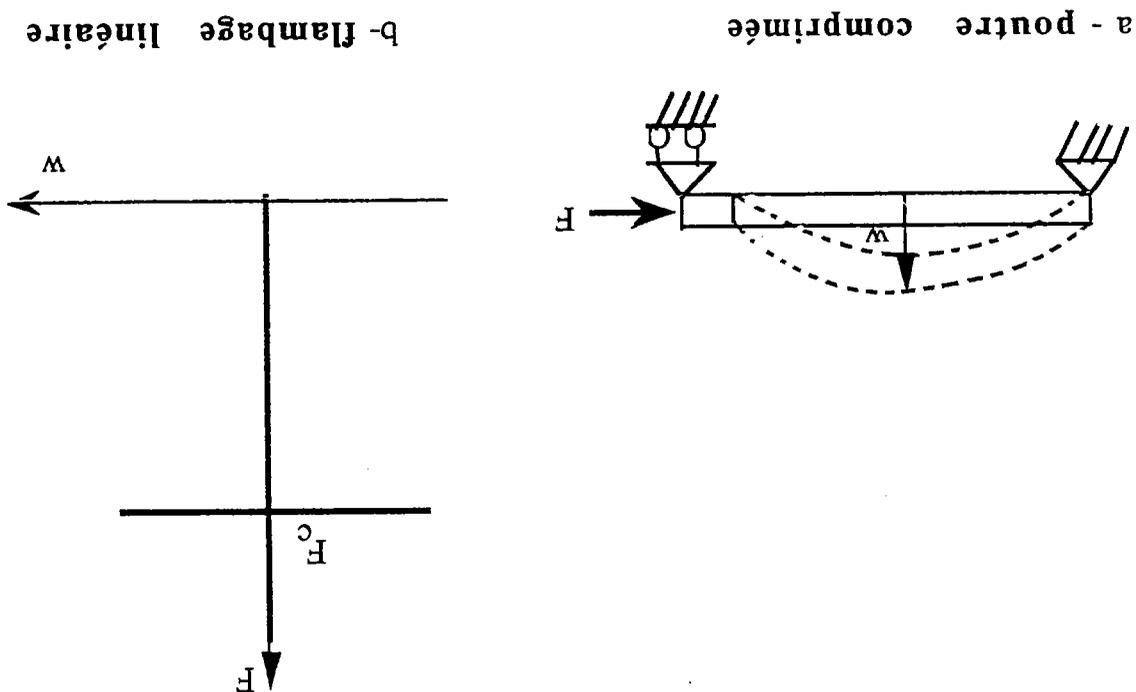


Fig.2: Flambage d'une poutre

Sous l'action de cet effort la poutre se raccourcit en restant droite si la force est petite. En augmentant la charge, l'état non courbé devient *instable* et un nouvel état d'équilibre apparaît : la poutre commence à *flamber*. La charge  $F_c$  à partir de laquelle ce phénomène se produit est appelée *charge de bifurcation* ou *charge de flambage*. La courbe charge-déplacement est donnée par la figure (Fig.2-b).

Les points situés sur la première branche (verticale) correspondent à un état non courbé de la poutre et ceux sur la branche bifurquée (horizontale) à un état flambé.

Dans cette étude nous allons tout d'abord étudier le modèle simple de la tige rigide afin de définir les concepts de base:

- bifurcation, post-bifurcation,
- imperfections,
- stabilité des branches bifurquées

Ensuite nous aborderons la théorie générale du flambage classique. On se limite au cas des systèmes conservatifs, c'est-à-dire des systèmes soumis à des chargements dérivant d'un potentiel. Les équilibres sont alors les points stationnaires de l'énergie potentielle. Le critère naturel de stabilité d'un équilibre est le principe du minimum de l'énergie potentielle qui permet de discuter la stabilité des équilibres à partir des considérations statiques.

## I.2 MODÈLE ÉLÉMENTAIRE DE FLAMBAGE

Dans les théories d'instabilité, en particulier le flambage, des modèles très simples peuvent illustrer certaines caractéristiques essentielles des systèmes complexes. Certains auteurs par exemple *Budiansky* (1979) [ B<sub>5</sub> ], *Potier-Ferry* (1987) [ P<sub>5</sub> ] commencent leur exposé sur la théorie de la bifurcation par l'exemple élémentaire de la tige rigide (cf.Fig. 3).

### I.2.1 Modèle de la tige rigide

Considérons une tige rigide de longueur  $L$  dont l'extrémité supérieure est soumise à une force de module  $\lambda$  constant et dont la direction reste verticale (charge conservative). A l'extrémité inférieure, un ressort élastique exerce un moment de rappel  $f(a)$ , fonction de l'angle  $a$  entre la barre et la direction initiale.

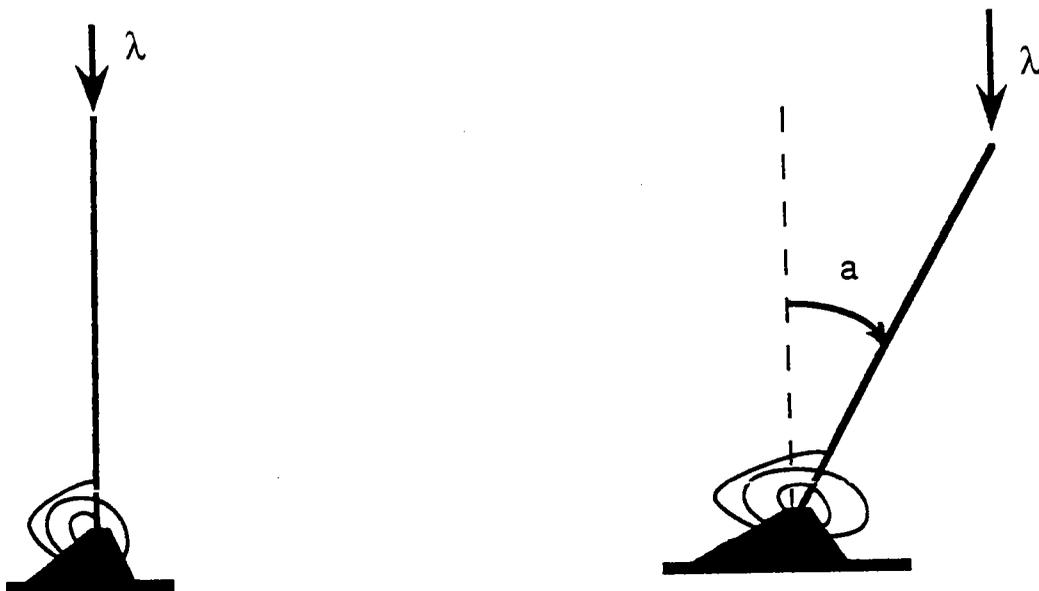


Fig. 3 : Modèle simple ( parfait)

### I.2.1.1 Bifurcation - Post-flambage.

L'équilibre de la tige s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} I \frac{d^2 a}{dt^2} + f(a) - \lambda L \sin a = 0 \end{array} \right. \quad (I.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{où} \\ f(a) = K_1 a + K_2 a^2 + K_3 a^3 + \dots \dots \dots \dots (K_1 > 0) \end{array} \right. \quad (I.2)$$

et I désigne le moment d'inertie de la tige.

Les états d'équilibre sont alors solutions de :

$$f(a) = \lambda L \sin a \quad (I.3)$$

L'équation (I.3) donne deux familles de solutions distinctes dans le plan  $(a, \lambda)$  (cf. Fig 4)

$$\left\{ \begin{array}{l} - \text{La solution fondamentale } a = 0 \text{ valable pour} \\ \text{toute charge } \lambda. \end{array} \right. \quad (I.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} - \text{La solution secondaire donnée par} \end{array} \right. \quad (I.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = \frac{f(a)}{L \sin a} \quad \text{pour } a \neq 0 \end{array} \right.$$

Ces deux branches se coupent au point critique  $(0, \lambda_c)$  appelé *point de bifurcation*. La deuxième branche s'appelle *branche bifurquée*. La *charge de bifurcation*, ou *charge critique*, est donnée par:

$$\lambda_c = \frac{K_1}{L} \quad (I.6)$$

**Remarque**

En général, cette charge est obtenue lorsque l'équation d'équilibre (I.3) linéarisée admet au moins une solution non nulle.

Après développement par rapport à  $a$  et  $(\lambda - \lambda_c)$ , l'équation d'équilibre (I.3) devient :

$$-(\lambda - \lambda_c) a + c_2 a^2 + c_3 a^3 + t - o - s = 0 \quad (I.7)$$

Les termes d'ordre supérieurs ( $t - o - s$ ) sont tels que :

$$t - o - s = 0 (a^4) + 0 (a^3 (\lambda - \lambda_c)).$$

La branche bifurquée est alors donnée par le développement suivant :

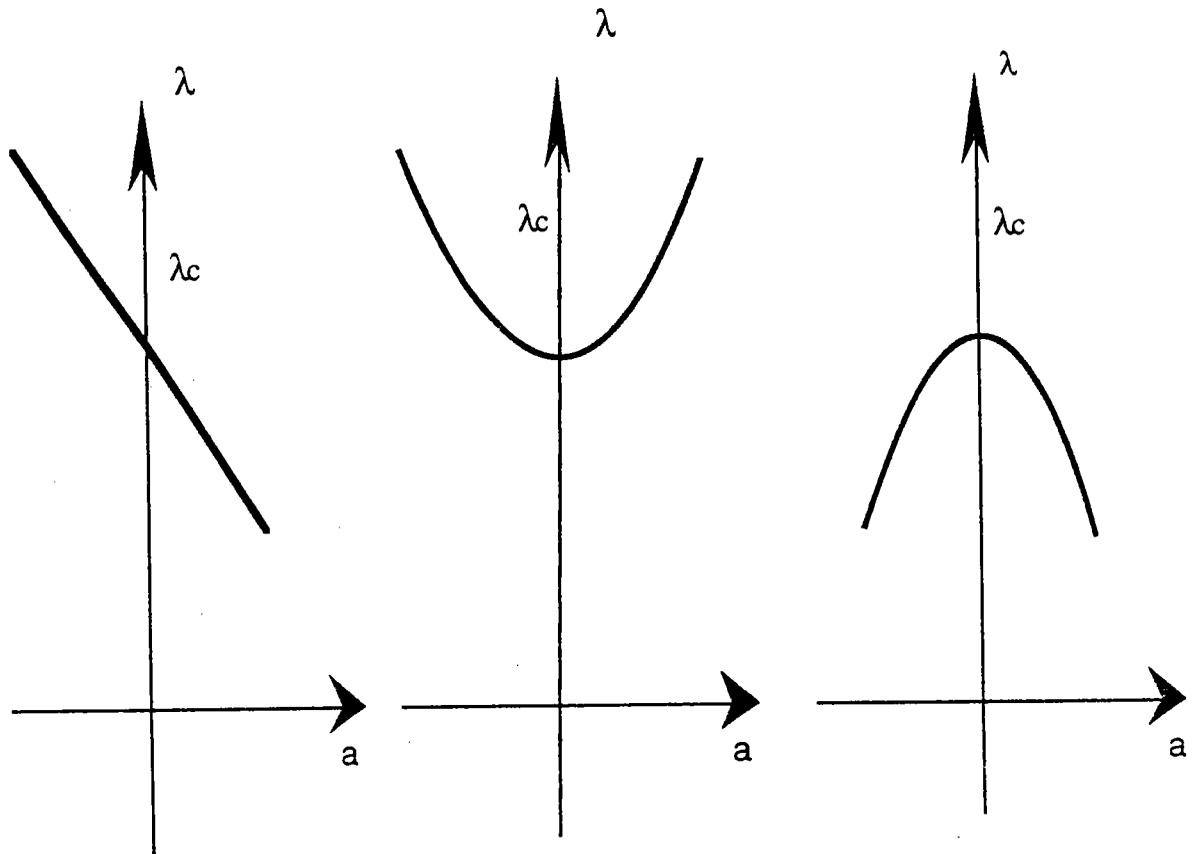
$$\lambda = \lambda_c + c_2 a + c_3 a^2 + \dots \quad (I.8)$$

Les constantes  $c_2$  et  $c_3$  sont données par :

$$c_2 = \frac{K_2}{L}, \quad c_3 = \frac{K_3}{L} + \frac{\lambda_c}{6}$$

La nature de la bifurcation dépend du rang du premier coefficient non nul de la série (I.8). Le passage de la structure de l'état fondamental (I.4) à l'état secondaire (I.8) s'appelle *flambage par bifurcation*. On distingue deux types de bifurcation (cf.Fig. 4) :

- Une bifurcation symétrique ( $c_2 = 0$ ) (cf.Fig. 4.b), (cf.Fig. 4.c).  
pour un ressort symétrique ( $K_2 = 0$ )
- Une bifurcation asymétrique ( $c_2 \neq 0$ ) (cf.Fig.4.b)  
la réponse du ressort est alors asymétrique ( $K_2 \neq 0$ )



(a): **asymétrique**  
( $c_2 \neq 0$ )

(b): **symétrique**  
( $c_2 = 0, c_3 > 0$ )

(c): **symétrique**  
( $c_2 = 0, c_3 < 0$ )

Fig.4 : Types de la bifurcation

### I.2.1.2 Influence des imperfections

Les structures réelles ne sont jamais parfaites. Nous allons alors examiner l'influence d'une imperfection initiale  $a_0$  (cf. Fig.5) sur le comportement des solutions pour le modèle étudié.

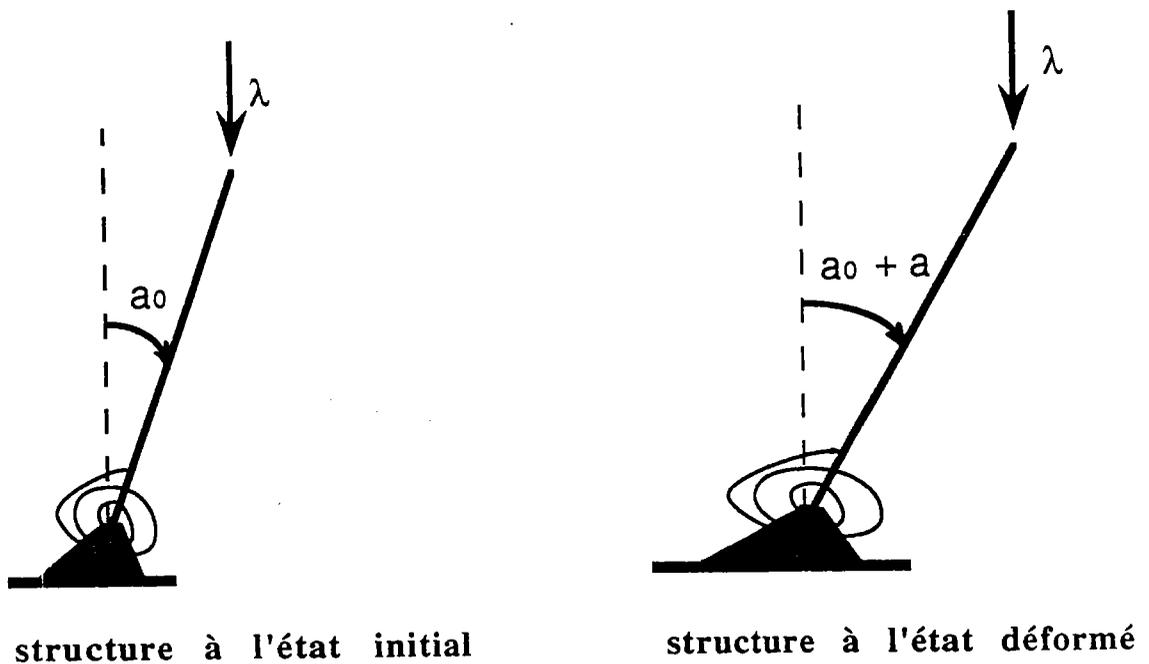


Fig.5 : Modèle imparfait

Les états d'équilibre doivent satisfaire

$$f(a) = \lambda L \sin (a+a_0) \quad (I.9)$$

et dépendent de  $\lambda$ ,  $a$  et de la déviation initiale  $a_0$ .

Ces équilibres sont représentés d'une façon schématique (cf.Fig.6) dans le cas ( $c_2 < 0$ ) pour des valeurs positives et négatives de l'imperfection  $a_0$ .

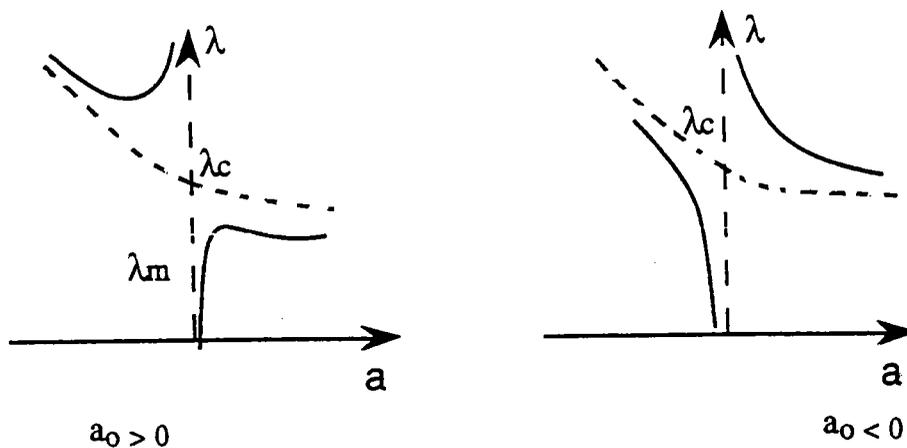


Fig.6 : Branches d'équilibre pour le modèle imparfait  
( $c_2 < 0$ )

En présence d'une *imperfection initiale*  $a_0 \neq 0$ , nous avons cette fois *deux branches différentes*. Lorsque  $a_0$  tend vers zéro, les deux branches perturbées tendent vers les branches parfaites (en pointillés (cf Fig.6)). Pour une valeur positive suffisamment petite de  $a_0$ , il apparaît *une charge maximale*  $\lambda_m < \lambda_c$  qui dépend de  $a_0$ . Pour  $\lambda > \lambda_m$ , l'équilibre statique est impossible au voisinage de  $a_m$  et un processus dynamique apparaît, pouvant entraîner la rupture de la structure. L'état statique final (s'il est possible) ne peut exister au voisinage de  $a_m$ . La charge  $\lambda_m$  est la charge de flambage de la structure imparfaite. Ce genre de flambage associé à une charge maximale est appelé *flambage par point limite*, et s'il est associé à un saut vers une autre configuration, il est appelé "*snaphthrough*" ou "*snap-buckling*" (claquage) (cf.Fig.7).

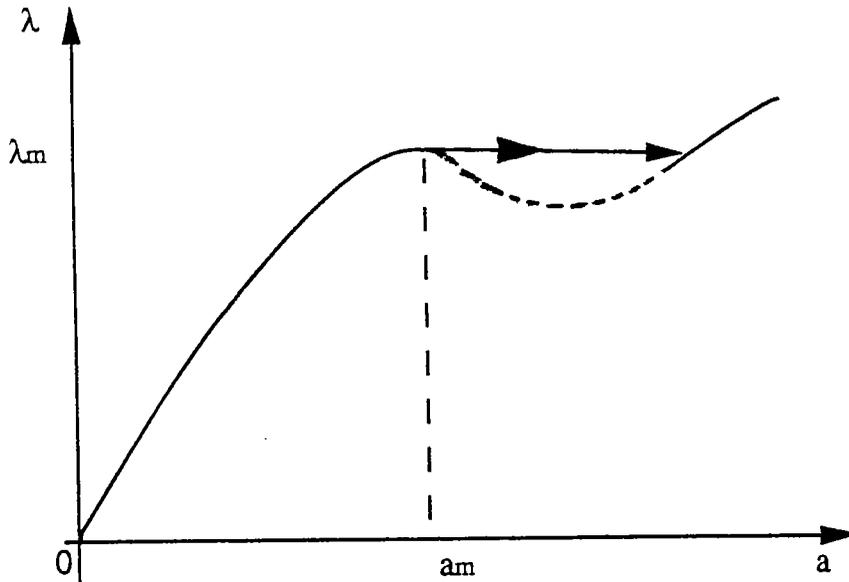


Fig. 7 : Claquage

Ce phénomène n'apparaît pas dans le cas  $a_0 < 0$  de la figure 6. D'autres cas, selon les valeurs des coefficients  $c_i$ , peuvent se présenter. En développant l'équation (I.9) par rapport à  $(\lambda - \lambda_c)$ , on obtient l'équation d'amplitude suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} - (\lambda - \lambda_c) a + c_2 a^2 + c_3 a^3 - \lambda_c a_0 + \text{t.o.s.} = 0 \\ \text{où} \\ \text{t.o.s.} = 0(a^4 + a^3 + (\lambda - \lambda_c) a^2 + a_0 a + a_0 (\lambda - \lambda_c)) \end{array} \right. \quad (\text{I.10})$$

Dans une première approximation, on néglige les termes d'ordre supérieurs dans (I.10) et on obtient l'équation d'amplitude approchée (selon que l'on a une bifurcation symétrique ou asymétrique):

$$\begin{cases} c_3 a^3 - (\lambda - \lambda_c) a - \lambda_c a_0 = 0 & \text{(I.11)} \\ \text{ou} \\ c_2 a^2 - (\lambda - \lambda_c) a - \lambda_c a_0 = 0 & \text{(I.12)} \end{cases}$$

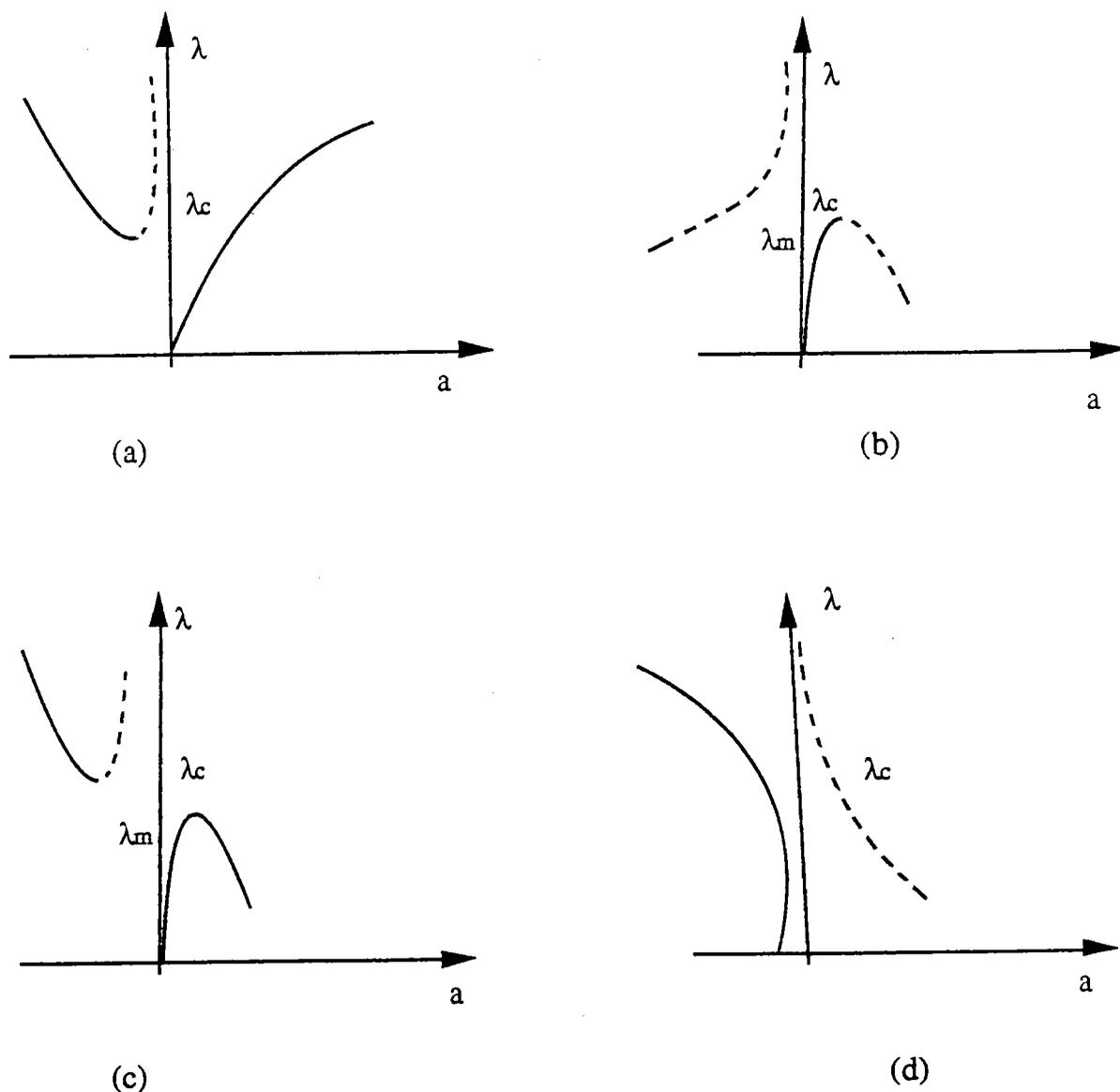


Fig.8: Branches d'équilibre en présence d'une imperfection  
 ——— stable  
 - - - - - instable

On obtient une charge maximale plus petite que la charge critique dans le cas des figures 8-b et 8-c. Le point limite est caractérisé par l'équation  $d\lambda/da = 0$ , ce qui donne:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3 c_3 a_m^2 - (\lambda_m - \lambda_c) = 0 \\ \text{ou} \\ 2 c_2 a_m - (\lambda_m - \lambda_c) = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(I.13)} \\ \\ \text{(I.14)} \end{array}$$

Ce qui conduit à une *réduction de la charge critique* donnée respectivement par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_c - \lambda_m = 3 \left( \lambda_c \frac{a_0}{2} \right)^{2/3} (|c_3|)^{1/3} \\ \lambda_c - \lambda_m = 2 (-\lambda_c a_0 c_2)^{1/2} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(I.15)} \\ \text{(I.16)} \end{array}$$

La réduction de charge, en première approximation, est proportionnelle à  $a_0^{2/3}$  pour une *bifurcation symétrique* (respectivement  $a_0^{1/2}$  pour une *bifurcation non symétrique*). Les structures pour lesquelles cette réduction existe sont qualifiées de *sensibles aux imperfections*. Pour les structures admettant une non-linéarité stabilisante ( $c_3 > 0$ , (cf. Fig. 8-a)) l'imperfection n'entraîne pas de modification importante du comportement de celles-ci. On dit alors qu'elles sont *insensibles aux imperfections*.

### Remarque

*L'étude de la stabilité des branches de solutions dans le cas d'une imperfection initiale est la même que celle dans le cas parfait. Les résultats sont donnés sur la figure 8.*

*Il faut remarquer que les conclusions faites ici sont basées sur l'approximation  $a$ ,  $a_0$  et  $(\lambda - \lambda_c)$  sont des paramètres très petits. Ce qui a conduit à négliger les termes d'ordre supérieurs dans (I.10).*

### I.2.1.3 Stabilité

L'analyse de bifurcation permet une compréhension du comportement post-critique. Cependant d'un point de vue pratique, la stabilité des branches de solutions est un point crucial. Ce qui nous amène à préciser la notion de stabilité.

#### a- Stabilité au sens de Lyapounov

Une position d'équilibre  $u_0$  est stable relativement à la norme  $\|\cdot\|$  si :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta(\varepsilon) > 0, \quad \forall u(0), \quad \|u(0) - u_0\| + \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(0) \right\| < \eta \quad \text{implique} \\ \left\| u(t) - u_0 \right\| + \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(t) \right\| < \varepsilon \end{array} \right.$$

En d'autres termes, une position est stable si pour tout écart initial et pour toute vitesse initiale suffisamment petits, le système reste au voisinage de la position d'équilibre.

#### b- Théorème de Lejeune-Dirichlet

Pour les systèmes conservatifs le critère naturel de la stabilité est le principe du minimum de l'énergie potentielle ( théorème de Lejeune Dirichlet).

Un état d'équilibre  $u_0$  est stable s'il réalise un minimum local strict de l'énergie potentielle totale du système. Cette notion de minimum local implique également le choix d'une norme.

#### Remarque

*Ces définitions sont d'un emploi peu commode puisqu'elles dépendent de la topologie choisie. Les utilisateurs lui préfèrent le critère de la seconde variation (ou Critère de l'énergie).*

### c- Critère de la seconde variation

La position d'équilibre  $u_0$  est stable si la seconde variation de l'énergie potentielle  $P$  est définie positive, elle est instable dans le cas contraire.

#### Remarque

*Dans le cas non conservatif, on utilise le principe de stabilité linéarisé. Un état d'équilibre est stable (ou instable) par rapport aux équations non linéaires s'il l'est par rapport aux équations linéarisées.*

*Pour une étude complète de la stabilité élastique, nous renvoyons aux travaux de Potier-Ferry [ $P_1$ ], [ $P_2$ ], [ $P_3$ ] et [ $P_5$ ].*

#### Application au cas de la tige

L'énergie potentielle totale s'écrit :

$$P(a, \lambda) = L \left\{ - (\lambda - \lambda_c) \frac{a^2}{2} + c_2 \frac{a^3}{3} + c_3 \frac{a^4}{4} + t-o-s \right\} \quad (I.17)$$

Les positions d'équilibre (I.4) et (I.8) sont solutions de:

$$\frac{\partial P}{\partial a} = 0 \quad (I.18)$$

La condition de stabilité est satisfaite si :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial a^2} = - (\lambda - \lambda_c) + 2c_2 a + 3c_3 a^2 + t-o-s > 0 \quad (I.19)$$

La tige est *instable* si:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial a^2} < 0 \quad (I.20)$$

Il est facile de vérifier que la solution fondamentale  $a = 0$  est stable pour  $\lambda < \lambda_c$  et elle est instable pour  $\lambda > \lambda_c$ , où  $\lambda_c$  est la charge de bifurcation. On remarque ainsi que le point de bifurcation coïncide avec le point où la solution perd sa stabilité. La stabilité des branches bifurquées est indiquée sur la figure (Fig.9) où les courbes en pointillés représentent des solutions instables. Quatre cas peuvent se présenter selon les valeurs des coefficients  $c_2$  et  $c_3$ . Pour une bifurcation symétrique ( $c_2 = 0$ ), la branche bifurquée est stable si  $c_3 > 0$  et instable si  $c_3 < 0$ . Pour une bifurcation asymétrique, la solution bifurquée est stable pour  $a < 0$  (si  $c_2 < 0$ ), et instable pour  $a > 0$  (si  $c_2 > 0$ ).

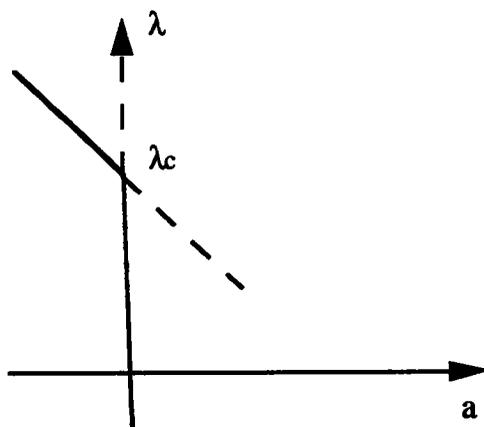
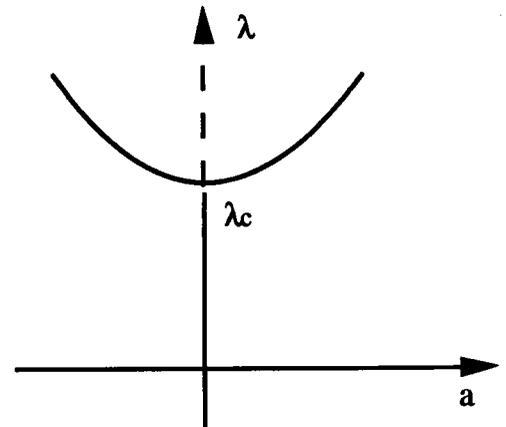
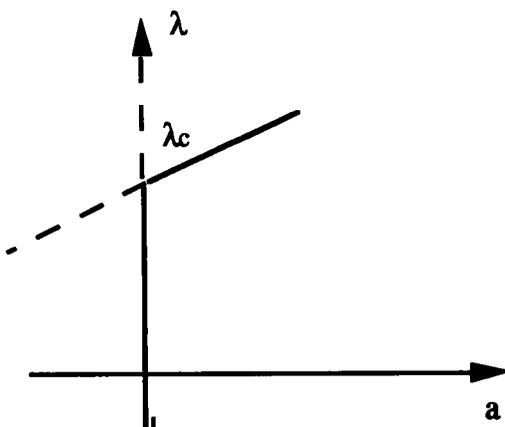
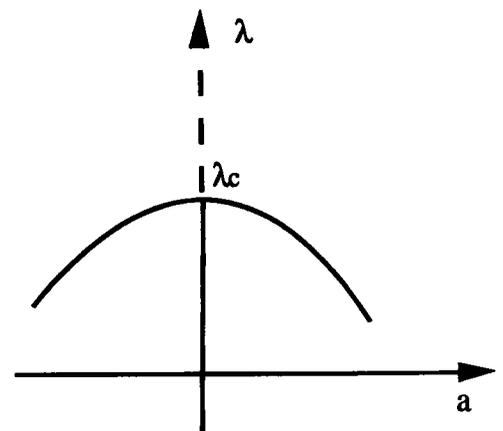
 $(c_2 < 0)$  $(c_3 > 0)$  $(c_2 > 0)$  $(c_3 < 0)$ 

Fig.9 : Stabilité des branches bifurquées

—— Stable  
 - - - - Instable

## Conclusion

Nous venons de voir à travers l'exemple simple de la tige une description simple du phénomène d'instabilité et les principales notions qui lui sont associées.

Nous abordons dans ce qui suit la théorie générale de la stabilité des structures.

### I.3 THÉORIE CLASSIQUE DE LA BIFURCATION POUR LES SYSTÈMES ÉLASTIQUES

Depuis les travaux de *Koiter* [K<sub>2</sub>], les problèmes liés à la stabilité des structures élastiques dont la base est le principe de stationnarité de l'énergie potentielle ont fait l'objet d'importants développements théoriques et numériques [K<sub>2</sub>], [P<sub>5</sub>]. Pour un cadre mathématique précis nous renvoyons aux travaux de *Potier-Ferry* [P<sub>1</sub>], [P<sub>2</sub>], [P<sub>5</sub>]. L'étude précédente sur l'exemple élémentaire de la tige a montré que le problème possédait deux branches de solutions, une branche fondamentale et une branche secondaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 0 \\ \lambda = \lambda_c + c_2 a + c_3 a^2 + \dots \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (I.21) \\ (I.22) \end{array}$$

Le premier coefficient non nul de la série (I.22) donne la nature de la stabilité des solutions bifurquées. Pour les structures sensibles aux imperfections il y a réduction de la charge critique de flambage.

On verra dans ce qui suit le contexte général de la stabilité des structures élastiques.

#### I.3.1 Critère de l'énergie pour la stabilité et critère de bifurcation.

A l'équilibre, l'énergie potentielle  $P$  d'une structure élastique est stationnaire sur l'ensemble des déplacements cinématiquement admissibles noté C.A. Nous supposons que l'énergie potentielle  $P$  est une fonctionnelle qui dépend du déplacement  $u$  et du paramètre de

charge  $\lambda$  mesurant l'intensité des forces extérieures appliquées au système. Une position  $u$  cinématiquement admissible est un état d'équilibre si et seulement si elle est solution de l'équation variationnelle :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta P(u, \lambda) = P'(u, \lambda) \delta u = P_1(\lambda, u, \delta u) = 0 \\ \text{pour toute variation } \delta u \text{ cinématiquement admissible.} \end{array} \right. \quad (I.23)$$

On sait que la stabilité d'une position d'équilibre est donnée par le théorème de *Lejeune-Dirichlet* (critère de l'énergie) qui stipule qu'un équilibre  $u_0$  est stable s'il réalise un minimum strict de l'énergie potentielle. La forme pratique de ce critère de stabilité est obtenue à partir de (I.23) et se traduit par:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } \forall \delta u \in C.A., (\delta u \neq 0) \quad P_2(\lambda, u_0, \delta u) > 0 \quad \text{alors } u_0 \text{ est stable} \\ \text{si } \exists \delta u \neq 0., \quad P_2(\lambda, u_0, \delta u) < 0 \quad \text{alors } u_0 \text{ est instable} \end{array} \right. \quad (I.24)$$

D'après ce critère, la valeur de  $\lambda$  à partir de laquelle l'équilibre est *instable* est obtenue dès que la forme quadratique  $P_2$  cesse d'être définie positive.

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \delta u \in C.A., \quad P_2(\lambda, u_0, \delta u) \geq 0 \\ \exists \delta u = U \neq 0, \quad P_2(\lambda, u_0, U) = 0 \end{array} \right. \quad (I.25)$$

C'est la *stabilité neutre*.

La valeur critique  $\lambda_c$  est la plus petite valeur de  $\lambda$  telle que (I.25) soit satisfaite. Comme  $U$  réalise le minimum de  $P_2(\lambda, u_0, .)$ , la variation de celui-ci est nulle et s'écrit:

$$\delta P_2 = P_{11}(\lambda_c, u_0, U, \delta u) = 0 \quad \forall \delta u \in C.A. \quad (I.26)$$

L'équation (I.26) montre que les équations d'équilibre linéarisées admettent une solution non triviale  $U$  appelée *mode de flambage*.

L'équation (I.26) est aussi une condition nécessaire pour que la branche de solution  $(u_0, \lambda)$  rencontre une autre au point  $(u_0, \lambda_c)$ , qui est alors le *point de bifurcation*.

### Remarque

*En élasticité, il est connu que la perte de stabilité coïncide avec la bifurcation voir par exemple Potier-Ferry (1978) [P<sub>1</sub>]. Ce résultat n'est plus valable en plasticité, on le verra plus loin sur l'exemple de la tige de Shanley.*

Le paragraphe suivant est consacré à une présentation de la réduction de Lyapounov-Schmidt comme méthode de calcul du comportement post-critique.

### **I.3.2 Post-flambage: réduction de Lyapounov et Schmidt**

Le phénomène de flambage a été étudié précédemment sur une structure simplifiée à un degré de liberté. Il s'agissait de trouver la (flèche) l'angle  $\alpha$  en fonction d'une force de compression. Ce problème d'équilibre possède deux branches de solutions données par (I.21) et (I.22). Les objectifs des théories de post-flambage sont les suivants:

- établir que les formules (I.21), (I.22) restent valables pour une structure quelconque avec une définition convenable de  $\alpha$ .
- montrer comment calculer les coefficients  $C_i$  (relation (I.31)).
- évaluer l'influence des défauts géométriques.

### **Principe de la méthode**

La charge critique de flambage d'une structure élastique quelconque a été caractérisée par le problème aux valeurs propres (I.26). On va voir qu'il y a bien une branche bifurquée à partir de cette charge et on discutera la nature de la bifurcation. A cet effet on cherche les extrémums de l'énergie potentielle  $P(\lambda, u)$ , c'est-à-dire les solutions de l'équation variationnelle (I.23). On suppose que la solution fondamentale (valable pour toute charge  $\lambda$ ) est :

$$u = 0, \quad \forall \delta u \in \text{C.A.} \quad P_1(\lambda, 0, \delta u) = 0$$

et que le mode  $U$  est unique à une constante multiplicative près. Pour un exposé détaillé, nous renvoyons au livre [P<sub>5</sub>].

Le principe de la méthode consiste à minimiser  $P$  d'abord dans les directions supplémentaires. On décompose donc l'espace vectoriel en un espace vectoriel de dimension un engendré par le mode propre  $U$  et un sous-espace supplémentaire  $V$ .

$$u = aU + v, \quad a \in \mathbb{R}, \quad v \in V \quad (\text{I.27})$$

Pour  $(\lambda, a)$  fixés et voisins de  $(\lambda_C, 0)$ , on tente une minimisation de l'énergie potentielle  $P$  sur le sous-espace  $V$ :

$$\begin{aligned} \text{Min } P(\lambda, aU+v) \\ v \in V \end{aligned} \quad (\text{I.28})$$

Plutôt que de travailler avec la charge  $\lambda$  on utilise l'incrément de charge  $\mu = \lambda - \lambda_C$ . Après un travail technique (développements de Taylor, théorème des fonctions implicites) on a localement la solution  $\hat{u}(\mu, a)$ . Par suite on parvient à calculer toutes les variables caractérisant l'inconnue  $u$ , à l'exception d'une seule  $a$ . Puis on relie l'inconnue  $a$  au paramètre de charge  $\mu$ . On reporte la solution partielle  $\hat{u}(\mu, a)$  dans l'énergie potentielle. On définit ainsi une énergie potentielle réduite qui ne dépend plus que de l'amplitude  $a$  et de la charge  $\mu$ :

$$F(\mu, a) = P(\lambda_C + \mu, aU + \hat{u}(\mu, a)) \quad (\text{I.29})$$

L'équation reliant  $a$  et  $\mu$  traduit le fait que l'énergie est stationnaire par rapport au déplacement

$$\frac{\partial F}{\partial a}(\mu, a) = 0 \quad (\text{I.30})$$

En théorie, le problème est résolu.

L'équation de bifurcation est obtenue après avoir effectué un développement de *Taylor* dans (I.30). On obtient les termes utiles du développement de *Taylor* de l'énergie potentielle réduite :

$$F(\mu, a) = C_0 \left\{ -\frac{\mu a^2}{2} + C_1 \frac{a^3}{3} + C_2 \frac{a^4}{4} + \text{t.o.s} \right\} \quad (\text{I.31})$$

$$\text{avec: } \begin{cases} C_0 = -2P'_2(U) \\ C_0 \cdot C_1 = 3P_3(U) \\ C_0 \cdot C_2 = 4(P(U) - P_2(v_1)) \end{cases}$$

On peut enfin préciser l'expression de (I.31)

$$C_0 \left\{ -\mu a + C_1 a^2 + C_2 a^3 + 0(\mu^2 a + \mu a^2 + a^4) \right\} \quad (\text{I.32})$$

et par suite, une discussion sur la nature de la bifurcation est donnée à partir de l'équation (I.32).

### Remarque

*Dans un cadre général, un problème d'instabilité de structures peut se ramener à l'étude d'une seule équation algébrique (I.32) où les coefficients  $C_0, C_1, C_2$  peuvent être obtenus facilement.*

*Dans le cas où il existe  $n$  vecteurs propre  $U_i$ , on doit modifier la décomposition de Lyapounov et Schmidt comme suit:*

$$u = \sum_{i=1}^{i=n} a_i U_i + v, \quad v \in V.$$

*On obtient alors  $n$  équations de bifurcations.*

## I.4 CONCLUSION

*Nous venons de rappeler sur le modèle simple de la tige rigide les différentes notions nécessaires à la compréhension du phénomène de flambage des structures élastiques. Ensuite, nous avons abordé la théorie de stabilité et de bifurcation des structures élastiques basée sur le principe de l'énergie potentielle, en particulier sur le lien qui existe entre perte de stabilité et critère de la seconde variation et l'influence des imperfections est soulignée. La réduction de Lyapounov-Schmidt est présentée comme méthode de calcul du post-flambage. Le problème se complique singulièrement lorsqu'apparaît la plasticité et l'analyse de stabilité est nettement distincte de celle des structures élastiques. Ceci est dû au fait que les méthodes d'analyse basées sur le potentiel élastique ne sont plus valables.*

*Une introduction détaillée au flambage plastique et aux problèmes de fond qu'il pose fera l'objet de la deuxième étape de cette première partie .*

**FLAMBAGE PLASTIQUE**

## II FLAMBAGE PLASTIQUE

*Dans la section précédente nous n'avons parlé que du flambage élastique. Pour ce genre de problème, les résultats de flambage (charges critiques de structures simples) existent depuis longtemps et sont formulés dans des cadres mathématiques généraux. On peut considérer que la théorie a fourni une base satisfaisante pour la plupart des applications pratiques.*

*Les résultats concernant le flambage et les instabilités plastiques sont plus récents, incomplets et posent encore des problèmes difficiles. Si pour des structures simples, la valeur de la charge critique a fait l'objet d'un débat de plus de 50 ans a été donnée sans ambiguïté en 1947 par Shanley [ S<sub>2</sub> ]. On sait par ailleurs que l'on peut obtenir dans le cadre théorique de la plasticité incrémentale des valeurs des charges critiques très éloignées de l'expérience lorsque les structures sont un peu plus complexes.*

*Dans ce qui suit, nous rappelons les principales notions qui permettent de comprendre la bifurcation dans le domaine plastique en tenant compte des progrès récents réalisés dans ce domaine (voir par exemple les travaux de Cimetière [ C<sub>4</sub> ], Léger et Potier-Ferry [ L<sub>3</sub> ] et Nguyen [ N<sub>3</sub> ] ).*

### II.1 INTRODUCTION

*L'intérêt des mécaniciens pour le flambage des structures élastoplastiques est ancien. Les premiers résultats significatifs remontent à 1889 avec les travaux d'Engesser [ E<sub>2</sub> ] sur les poutres. Cependant, il a fallu attendre 1947 et l'étude de Shanley [ S<sub>2</sub> ] pour comprendre la véritable nature du flambage élastoplastique. Il restait à exprimer le critère de bifurcation en termes mathématiques et dans des conditions suffisamment générales, ce qui fut fait par Hill en 1958 [ H<sub>3</sub> ].*

*Les principaux aspects théoriques liés à ce problème sont donnés de façon détaillée, notamment par Hutchinson [ H<sub>4</sub> ], Needleman et Tvergaard [ N<sub>1</sub>], .....*

*Depuis quelques années, une réflexion est menée sur les travaux de Hill, dans le cadre des milieux standards généralisés ( voir Nguyen [ N<sub>2</sub>], Léger et Potier-Ferry [ L<sub>3</sub> ],.....). Ces auteurs ont montré que le problème en vitesses pouvait se mettre sous la forme d'une inéquation variationnelle, ce qui conduit à une formulation simple du critère de Hill. Les principaux résultats donnés dans la littérature sont évoqués en tenant compte des progrès récents réalisés dans ce domaine.*

*Un problème relatif à l'étude de la bifurcation plastique des plaques et des coques comprimées demeure pourtant jusqu'à nos jours, à savoir que la loi de la déformation fournit paradoxalement une estimation plus exacte de la charge critique que la loi incrémentale.*

*Dans ce paragraphe, nous nous limiterons à présenter au niveau bibliographique un résumé sur les lois de comportement plastique à un seuil et sur l'interaction flambage-plasticité. On discutera le flambage par flexion d'une poutre élastoplastique circulaire d'abord dans le cadre de la théorie de la déformation, puis dans celui de la théorie incrémentale. Ensuite, nous présenterons les études axées sur les critères usuels de bifurcation suivies de commentaires pour situer le contexte de notre étude qui s'inscrit dans la continuité de ces travaux. Enfin, après avoir mis en cause les lois classiques basées sur le critère de Von-Mises et situé le **paradoxe**, on présente une loi phénoménologique de type Christoffersen et Hutchinson [ C<sub>2</sub>].*

## II.2 LOIS DE COMPORTEMENT CLASSIQUES EN PLASTICITÉ A UN SEUIL\*

La littérature sur le flambage plastique traite du délicat problème du choix de la loi constitutive appropriée pour décrire le comportement du matériau dans la zone plastique.

Dans ce paragraphe nous rappelons brièvement les lois de comportement plastiques à un seuil .

### II.2.1 Comportement élastoplastique: seuil, normalité, écrouissage

Dans le cadre de l'élastoplasticité, la déformation  $\gamma$  en un point peut être considérée comme étant la somme de deux parties,  $\gamma^E$  la déformation élastique réversible,  $\gamma^P$  la déformation plastique irréversible, ce qui s'écrit :

$$\gamma = \gamma^E + \gamma^P \quad (\text{II.1})$$

Le tenseur des déformations élastiques est celui qui est déduit du tenseur des contraintes obéissant à une relation univoque décrite par la loi de *Hooke*. Quant à la relation déformations plastiques- contraintes, elle fait l'objet de plusieurs théories.

### Fonction seuil, critère de charge-décharge

Dans les modèles élastoplastiques intervient une surface seuil qui permet de dissocier les chargements élastiques, des chargements élastoplastiques (cf.Fig.1.a). Supposons que la frontière  $S$  du domaine élastique est régulière et on définit celui-ci par une fonction scalaire  $f(\sigma, A)$  qui dépend de l'état de contrainte  $\sigma$ , de la déformation plastique  $\gamma^P$  et d'un paramètre d'écrouissage  $A$ . Les différents cas de changement de l'élément rencontrés sont illustrés sur la figure ci-dessous ( cf.Fig.1.a).

---

\* Halphen B. et Salençon J. (1981)

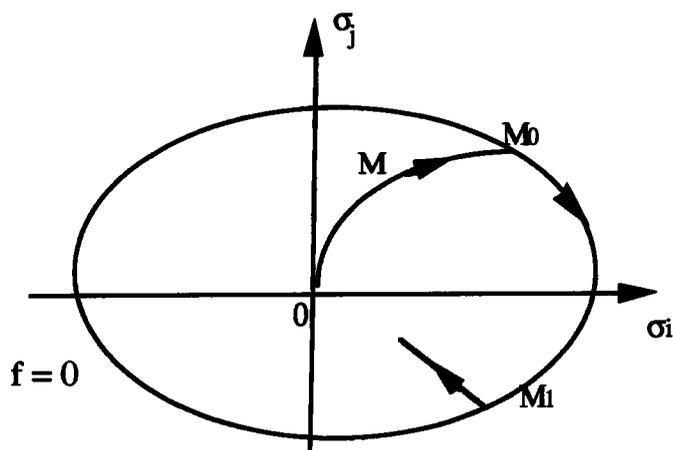


Fig.1.a: **Modèle élastoplastique parfait**

Lors du chargement  $OM_0$  ( $f < 0$ ) le comportement est purement élastique et l'incrément de contraintes  $\dot{\sigma}$  provoque l'incrément de déformation  $\dot{\gamma}^E$ . A partir de  $M_0$  ( $f = 0$ ), le point  $M$  ne peut pas sortir de la surface  $S$ , l'incrément de contraintes  $\dot{\sigma}$  provoque l'incrément de déformation plastique  $\dot{\gamma}^P$ . En  $M_1$  ( $f = 0, \dot{f} < 0$ ) on procède à une décharge, la déformation correspondante est purement élastique.

### Remarque

*La plasticité parfaite est le modèle qui est le plus souvent utilisé dans les calculs de mise en forme.*

### **Critère de charge-décharge (matériau écrouissable)**

La condition de plasticité  $f = 0$  étant satisfaite, il est possible de distinguer les trois cas suivants (cf.Fig.1.b):

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{décharge:} & \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} < 0 \\ \text{charge neutre:} & \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} = 0 \\ \text{charge:} & \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} > 0 \end{array} \right. \quad (\text{II.2})$$

où  $\frac{\partial f}{\partial \sigma}$  représente la normale extérieure à la surface  $S$  au point  $\sigma$ . En cas de décharge ou de charge neutre, l'incrément de déformation plastique est nul ( $\dot{\gamma}^P = 0$ ).

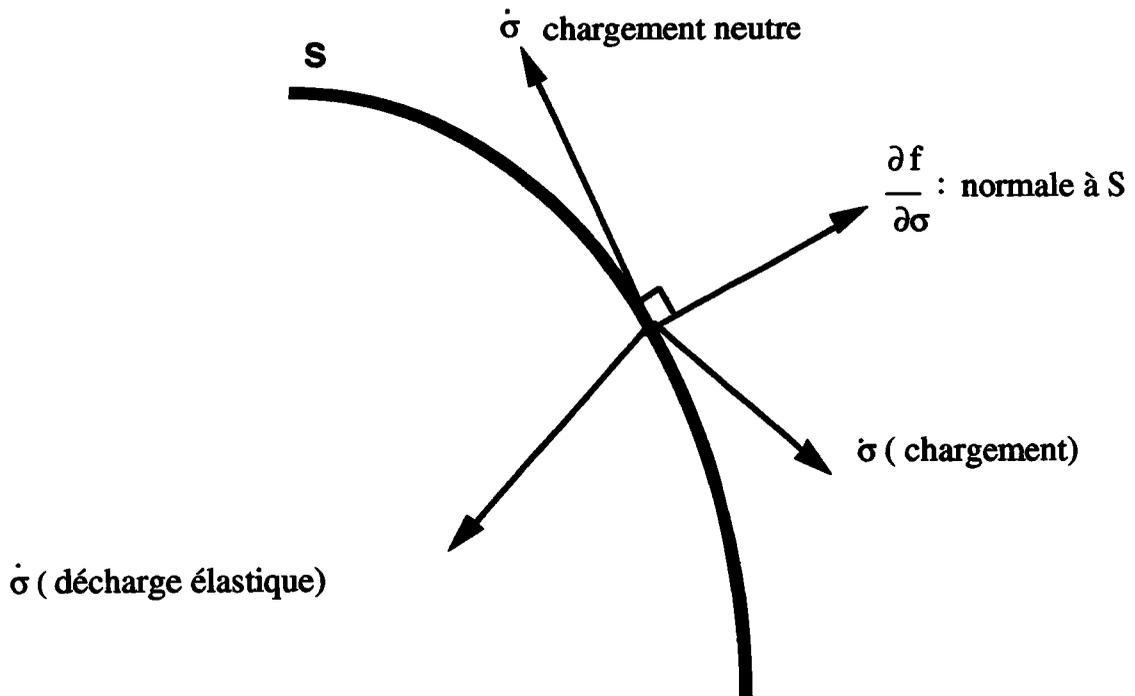


Fig.1.b : Représentation géométrique des conditions de chargement et de rechargement

### Écrouissage

Pour tenir compte de l'écrouissage, on fait dépendre la fonction seuil  $f$  de paramètres d'écrouissage. La surface seuil,  $f = 0$  (cf.Fig.1.a) s'appelle également surface d'écoulement plastique ou surface de charge. Son évolution avec la déformation plastique peut être complexe: dilatation, translation, rotation, distorsion de la surface. Si la surface se dilate uniquement, *l'écrouissage est isotrope* (cf.Fig.2.a): on peut exprimer  $f$  sous la forme  $f = f(\sigma, R)$  où  $R$  est une *variable scalaire d'écrouissage*.

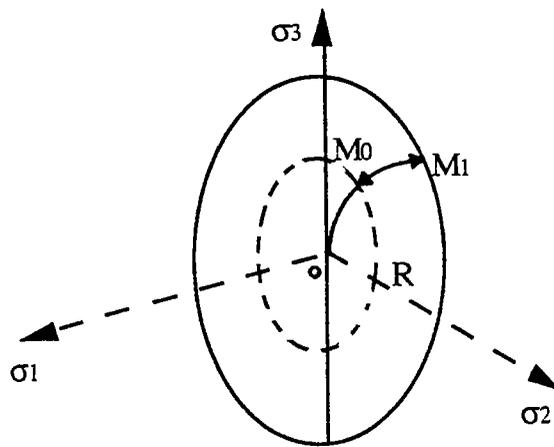


Fig.2.a: Modèle avec écrouissage isotrope

*Physiquement, la variable  $R$  représente par exemple l'augmentation de la densité de dislocations provoquée par la déformation.*

*Si la surface se translate uniquement, l'écrouissage est cinématique ( cf.Fig.2.b): on peut exprimer  $f$  sous la forme  $f = f(\sigma, \mathbf{X})$  où  $\mathbf{X}$  est une variable cinématique tensorielle, qui traduit le déplacement de la surface de charge.*

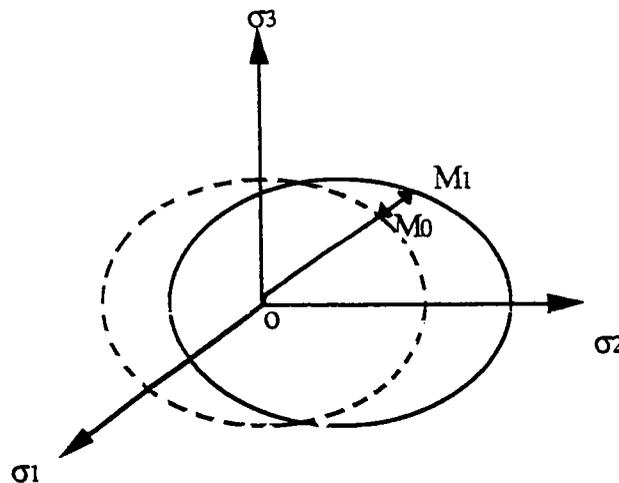


Fig.2.b: Modèle avec écrouissage cinématique

**Remarque**

*Ce type d'écrouissage provoque une anisotropie après déformation plastique. Physiquement, la variable  $R$  représente les microcontraintes internes engendrées par l'incompatibilité des déformations des différents grains du matériau polycristallin.*

*L'écrouissage cinématique est susceptible de rendre compte de l'effet Bauschinger.*

**II.2.2 Cas particulier de chargement unidimensionnel**

Dans cette analyse, la valeur de la contrainte  $\sigma$  correspond à une déformation axiale irréversible.

Le comportement élastoplastique est caractérisé par:

- \* un seuil en deça duquel le comportement est réversible (  $\sigma_0$  pour la première charge (cf.Fig.3)).
- \* une évolution de ce seuil avec la contrainte ( écrouissage ).
- \* l'existence dans le domaine plastique de trois pentes:

en décharge:  $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\sigma_A}{\gamma_A^0}, \text{ on admet généralement qu'elle ne varie pas} \\ \text{avec la déformation plastique,} \\ \text{il s'agit du module d'Young élastique } E. \end{array} \right.$

en charge:  $\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\sigma}{d\gamma}, \text{ on la désigne par } E_T \text{ et on l'appelle} \\ \text{module tangent ,} \\ \frac{\sigma_A}{\gamma_A}, \text{ on la désigne par } E_S \text{ et on l'appelle} \\ \text{module sécant.} \end{array} \right.$

Les trois modules  $E$ ,  $E_T$ ,  $E_S$  vérifient l'inégalité suivante:  $E_T < E_S < E$ .

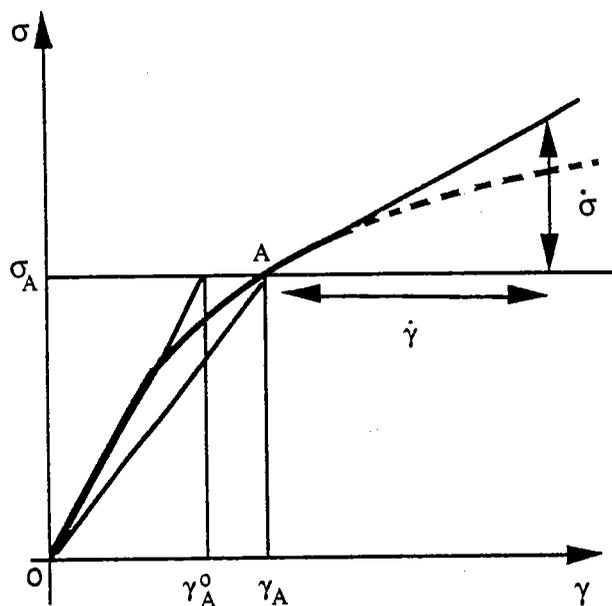


Fig.3: comportement élastoplastique

La plupart des modèles de comportement élastoplastique écrouissable utilisés actuellement par les ingénieurs pour représenter approximativement le comportement réel sont de type standards généralisés et sont définis à partir d'hypothèses thermodynamiques ( voir *Halphen et Nguyen (1975) [ H<sub>1</sub> ]*).

### II.2.3 Milieux standards généralisés

Le formalisme des milieux standards généralisés introduit par *Halphen et Nguyen (1975) [H<sub>1</sub>]* sera à la base de l'analyse de bifurcation du paragraphe (II.4.2). Dans les processus irréversibles de la thermodynamique, l'énergie libre spécifique du matériau  $\psi$  est une quantité importante qui lie les forces généralisées aux déformations généralisées. On rappelle que dans ce cadre, la force généralisée  $A$  associée aux paramètres internes  $\alpha$  est définie de la manière suivante :

$$A = - \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}, \quad \psi = \psi(\gamma, \alpha) \quad (\text{II.3})$$

On suppose que cette force appartient à un certain ensemble  $C$  convexe contenant l'origine et il est défini à partir de la fonction seuil  $f$  de la manière suivante:

$$C = \{ A, f(A) \leq 0 \}$$

La vitesse généralisée  $\dot{\alpha}$  obéit à la loi d'écoulement compatible avec le principe de dissipation maximale c'est-à-dire:

$$\begin{cases} A \in C \\ \dot{\alpha} \in N_C(A) \end{cases} \quad (II.4)$$

où  $N_C(A)$  est le cône des normales extérieures à  $C$  en  $A$ .

#### II.2.4 Lois de comportement incrémentales

Dans le contexte des matériaux obéissant au critère de *Von-Misès* en écrouissage cinématique et en petites déformations, la loi incrémentale s'écrit:

$$\begin{cases} \gamma = \gamma^E + \gamma^P : \text{décomposition de la déformation} \\ \sigma = \frac{\partial W}{\partial \gamma^E} : \text{relation contrainte-déformation élastique} \\ W = W(\gamma^E) : \text{énergie élastique enmagasinée} \end{cases} \quad (II.5)$$

$$\dot{\gamma}^P = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} \begin{cases} \lambda \geq 0 \text{ si } f = 0 \text{ et si } \dot{f} = 0 \\ \lambda = 0 \text{ si } f = 0 \text{ ou si } \dot{f} < 0 \end{cases} \quad \text{la loi de la normalité}$$

Si l'état de contraintes et d'écrouissage est connu, on peut calculer à partir de (II.5)  $\dot{\sigma}$  en fonction de  $\dot{\gamma}$ . En effet, pour un état plastique c'est-à-dire :  $f(\sigma, A) = 0$  on a la formulation de *Hill* donnée à partir du potentiel plastique  $W^*(\dot{\gamma})$ :

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial W^*}{\partial \dot{\gamma}} \quad \text{avec} \quad W^*(\dot{\gamma}) = \frac{1}{2} \left\{ \dot{\gamma} \cdot L \cdot \dot{\gamma} - \frac{\langle N \cdot L \cdot \dot{\gamma} \rangle^2}{H + N \cdot L \cdot N} \right\} \quad (II.6)$$

où  $N = \frac{\partial f}{\partial \sigma}$ , la normale extérieure à la frontière de plasticité.

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right|$$

Le symbole  $\langle a \rangle$  désigne la partie positive de  $a$

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle a \rangle = \begin{cases} a & \text{si } a > 0 \\ -a & \text{si } a \leq 0 \end{cases} \\ L = \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma^2} : \text{le tenseur d'élasticité} \\ H \text{ étant le module d'écroutissage} \end{array} \right. \quad (II.7)$$

### Commentaire

La relation (II.13) n'est pas linéaire, il faut distinguer la charge de la décharge selon le signe de  $N.L.\dot{\gamma}$ . Lorsque  $N.L.\dot{\gamma} \geq 0$  le matériau est en charge plastique.

Le potentiel  $W^*(\dot{\gamma})$  est positivement homogène de degré deux, mais non quadratique. Si l'on introduit le module tangent  $L_T$ , la relation (II.13) s'écrit :

$$\dot{\sigma} = L_T \dot{\gamma} \quad \text{avec } L_T = L - \frac{1}{H + N.L.N} N.L * N.L \quad (II.8)$$

Dans la littérature, l'analyse du flambage plastique fait intervenir deux lois de plasticité. L'une de type fini appelée "loi de la déformation" et l'autre de type différentiel appelée "loi incrémentale".

### II.2.4.1 Loi incrémentale et loi de la déformation

Le principe de la loi de la déformation conduit à la détermination de  $\gamma^P$  en fonction de l'état actuel de contrainte  $\sigma$  sans tenir compte de l'histoire des déformations. Tandis que la loi incrémentale relie l'incrément de la déformation plastique  $\dot{\gamma}^P$  à l'état de contraintes  $\sigma$  et à l'incrément  $\dot{\sigma}$  imposé à partir d'un état  $\sigma$ .

\*

#### Formulations simples

Les formulations simples des ces deux lois sont exposées brièvement lorsque la loi est écrite à partir du critère de *Von-Mises*.

#### II.2.4.1.1 Loi incrémentale en charge

La relation contraintes-déformations s'exprime de la façon suivante :

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{E} \{ (1 + \nu) \dot{\sigma} - \nu \operatorname{tr} \dot{\sigma} \cdot \mathbf{1} \} + F(J_2) \dot{\sigma}^d \quad (\text{II.9})$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} J_2 = \frac{1}{2} \sigma^d \cdot \sigma^d : \text{norme de contrainte au sens de} \\ \text{Von - Mises} \\ \sigma^d = \sigma - \frac{1}{3} \operatorname{tr}(\sigma) \cdot \mathbf{1} : \text{le déviateur des contraintes} \end{array} \right. \quad (\text{II.10})$$

F est une fonction scalaire qui peut être déterminée à partir d'une courbe de traction simple de la manière suivante:

$$F(J_2) = \frac{3}{4} \left( \frac{1}{E_T} - \frac{1}{E} \right) \quad \text{où } E_T \text{ est le module tangent.} \quad (\text{II.12})$$

---


$$* \quad \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### II.2.4.1.2 Loi de la déformation ( en incrémentale )

La relation contraintes-déformations plastiques est de la forme:

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{E} \{ (1 + \nu) \dot{\sigma} - \nu \operatorname{tr}(\dot{\sigma}) \cdot 1 \} + G(J_2) \dot{\sigma}^d + G'(J_2) \dot{\sigma} \quad (\text{II.13})$$

où  $G(J_2)$  est une fonction scalaire et  $G'(J_2)$  est sa dérivée.

Ces deux fonctions peuvent être déterminées à partir d'une courbe de traction et sont données par:

$$\left\{ \begin{array}{l} G(J_2) = \frac{3}{2} \left( \frac{1}{E_S} - \frac{1}{E} \right) \text{ où } E_S \text{ est le module sécant. (II.14)} \\ G'(J_2) = \frac{3}{2} \left( \frac{E}{E_T} - 1 \right) \text{ où } E_T \text{ est le module tangent. (II.15)} \end{array} \right.$$

Il reste que dans le domaine plastique, la détermination de la charge critique est souvent compromise par la présence des zones de décharges élastiques.

## II.3 FLAMBAGE PLASTIQUE D'UNE POUTRE

Historiquement, l'argument "élastique" conduisant à la charge critique du module tangent a été critiqué dès sa parution en 1889 par *Engesser* [E<sub>2</sub>]. Ses détracteurs lui reprochaient de négliger la décharge élastique, ce qui était exact. A cette époque, il a été proposé de généraliser la méthode d'*Euler* ou méthode de l'équilibre adjacent qui, en élasticité, conduit à des solutions à charge constante ( $\lambda$  fixée). Cette condition de charge constante permet de situer la frontière entre la zone élastique et plastique, puis de calculer une charge critique, dite du module réduit  $E_R$ , que l'on associe souvent à *Considère* [C<sub>9</sub>]. Bien que cette approche soit erronée, elle a fait autorité pendant 50 ans. Les observations expérimentales étaient plus proche de la formule du module tangent que de celle du module réduit. L'explication de ce

désaccord a été donnée par *Shanley* [ $S_2$ ] qui a mis en évidence de manière pertinente la véritable nature du flambage élastoplastique.

### II.3.1 Approche de Shanley

La colonne de *Shanley* (cf.Fig.6) a joué un rôle déterminant dans la compréhension du phénomène de flambage élastoplastique correspondant à une bifurcation. Moyennant ce modèle simple, *Shanley* montra qu'une bifurcation d'équilibre à charge croissante (et non plus constante) pouvait avoir lieu sans décharge élastique, avec seulement un point de charge neutre. Ceci établissait définitivement la charge critique du module tangent. Dans cet exemple, lorsqu'on augmente la charge  $\lambda$

( $\dot{\lambda} > 0$ ), la solution fondamentale  $u(\lambda) = 0$  reste stable jusqu'à la valeur critique du module réduit  $\lambda_R$ . Mais la bifurcation est possible pour des

valeurs de  $\lambda$  supérieures ou égales à  $\lambda_T$  (charge critique du module tangent) (cf.Fig.6). Ainsi il est nécessaire de séparer les deux notions de bifurcation et de stabilité qui, contrairement à ce qui se passe en élasticité, ne vont pas toujours ensemble. Pour plus de détail, nous renvoyons par exemple à *Nguyen* [ $N_3$ ], [ $N_4$ ].

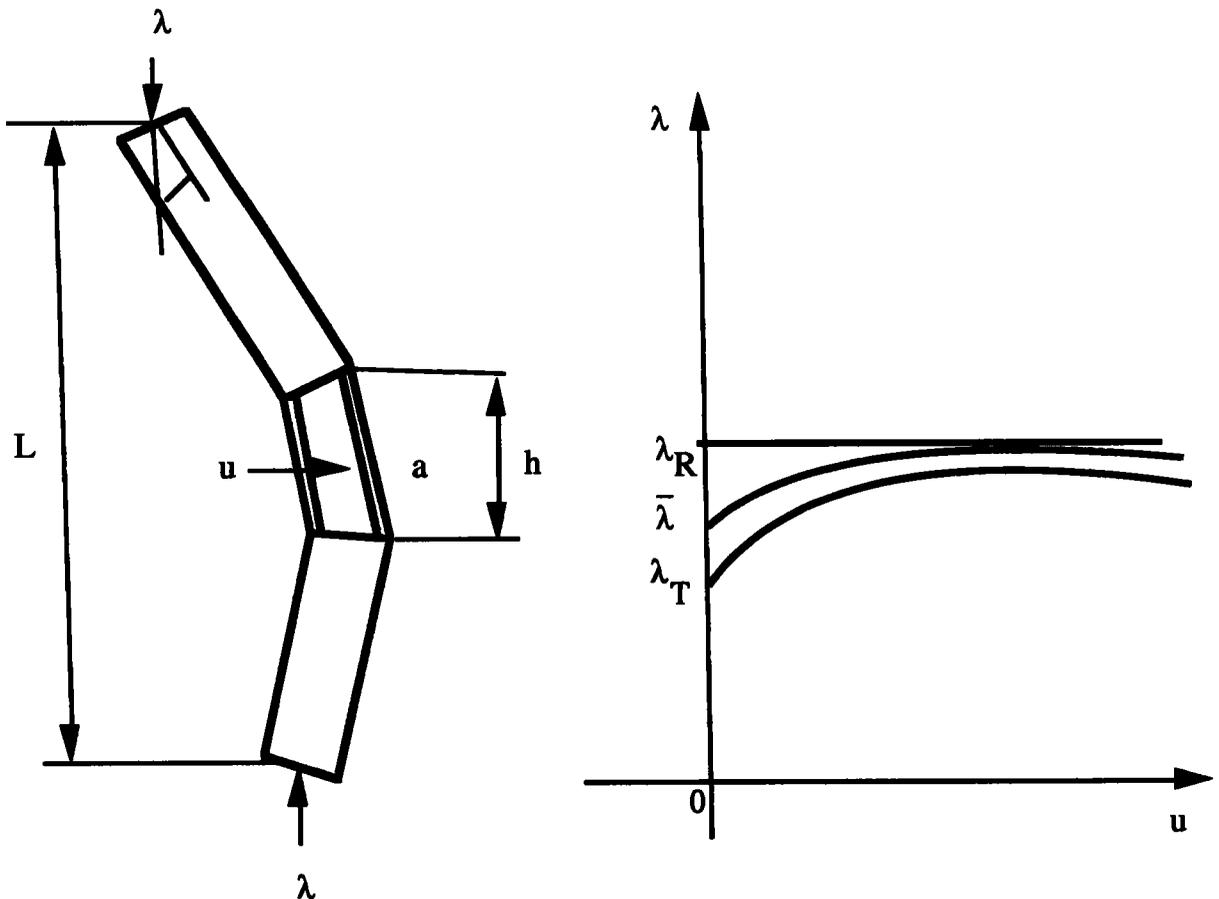


Fig.6: Colonne de Shanley

Pour la suite, il nous semble utile de voir comment on peut généraliser le critère de la seconde variation dans le cas du flambage plastique d'une poutre soumise à une force de compression  $\lambda$  en tenant compte des progrès récents réalisés dans ce domaine (voir par exemple aux travaux de *Léger et Potier-Ferry* [L<sub>3</sub>]).

### II.3.2 Modélisation du flambage d'une poutre

Comme en flambage élastique, les composantes du déplacement et la première composante de la déformation s'expriment à partir du déplacement de la ligne moyenne ( cf.Fig.7):

$$\begin{cases} u_1(x,y) = u(x) - yv'(x) \\ u_2(x,y) = v(y) \end{cases} \quad (\text{II.16})$$

$$\begin{cases} \gamma_{11} = \varepsilon - yv''(x) \\ \quad = u' + \frac{v'^2}{2} - yv''(x) \end{cases} \quad (\text{II.17})$$

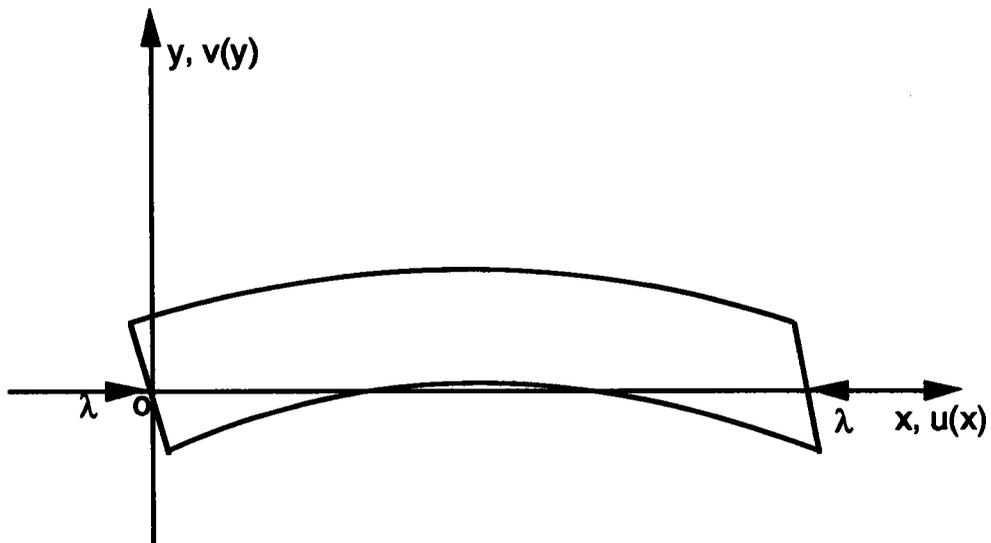


Fig.7: flambage d'une poutre en appui

On a parfois recours à un modèle élastique non linéaire (courbe  $\sigma(\gamma)$ ) en négligeant la décharge élastique. L'énergie de déformation par unité de volume sera:

$$W(\gamma) = \int_0^{\gamma} \sigma(\gamma) d\gamma \quad (\text{II.18})$$

Les équations d'équilibre peuvent être obtenues à partir du théorème des puissances virtuelles:

$$\int_0^l \{ N(\delta u' + v' \delta v') - M \delta v'' \} dx = P_{\text{ext}}(\delta u) \quad (\text{II.19})$$

$$\text{où: } \begin{cases} N(x) = \int_S \sigma(x,y) dy dz: \text{ effort normal} \\ M(x) = \int_S y \sigma(x,y) dy dz: \text{ moment fléchissant} \end{cases} \quad (\text{II.20})$$

### Remarque

*Contrairement au cas élastique, la contrainte  $\sigma(x,y)$  n'est plus affine en  $y$  ( ce qui provenait de  $\sigma = E \gamma_{11}$  ) et le problème en contrainte et déformation plastique est tridimensionnel.*

### **II.3.3 Flambage plastique par la théorie de la déformation**

Dans cette approche on néglige la décharge élastique, ce qui permet d'appliquer le formalisme habituel pour les instabilités élastiques, avec l'énergie potentielle:

$$E(u,v,\lambda) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} W(u' + \frac{v'^2}{2} - y v'') d\Omega + \lambda u(0) \quad (\text{II.21})$$

La seconde variation est:

$$E_2(u,v,\lambda) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ (u' - y v'')^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \gamma_{11}^2} \right) + v'^2 \left( \frac{\partial w}{\partial \gamma_{11}} \right) \right\} d\Omega \quad (\text{II.22})$$

Après intégration sur la section de la poutre, on obtient la même expression qu'en élasticité, mais où le module d'*Young* est remplacé par le module tangent:

$$E_2(u,v,\lambda) = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ E_T u'^2 + E_T I v''^2 - \lambda v'^2 \right\} dx \quad (\text{II.23})$$

Ainsi, la charge critique obtenue de cette manière est donc la même qu'en élasticité, mais avec le module d'*Young* remplacé par le module tangent. Par exemple, en appui simple, on trouve le mode de flambage

$${}^t U = (u(x), v(x)) = (0, \sin(\frac{\pi \cdot x}{L})) \quad (\text{II.24})$$

soit: 
$$\lambda_c = \frac{\pi^2 E_T I}{l^2} \quad (\text{II.25})$$

Néanmoins, si on poursuit cette analyse "élastique" jusqu'au bout, on arrive à une contradiction. En effet, l'analyse non linéaire élastique par la méthode de *Lyapounov et Schmidt*, conduit à une branche bifurquée donnée sous forme asymptotique:

$$\begin{cases} u - u_0(\lambda) = aU + o(a^3) & (\text{II.26}) \\ \lambda - \lambda_0 = o(a^2) \text{ (à cause de la symétrie)} & (\text{II.27}) \end{cases}$$

Soit: 
$$u - u_0(\lambda_0) = aU + O(a^2) \quad (\text{II.28})$$

Or, le mode de flambage est donné par la relation (II.24). Reportant le développement de (II.26) dans la loi de comportement

$$\sigma = \sigma \left( u' + \frac{v'^2}{2} - yv'' \right) \quad (\text{II.29})$$

on obtient:

$$\sigma - \sigma_c = \frac{\pi^2}{L^2} E_T y a \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + O(a^2) \quad (\text{II.30})$$

Comme la variable  $y$  peut prendre des valeurs positives et négatives dans la section de la poutre, toute section aura forcément des parties en charge et d'autres en décharge, en contradiction avec l'hypothèse de départ.

### II.3.4 Flambage plastique par la théorie de la plasticité

La méthode d'Euler (généralisée) ou méthode de l'équilibre adjacent qui, en élasticité, conduit à des solutions à charge constante ( $\lambda$  fixée) permet de situer la frontière entre la zone élastique et plastique, puis de calculer une charge critique, dite du module réduit  $E_R$  ( cf.Fig.8).

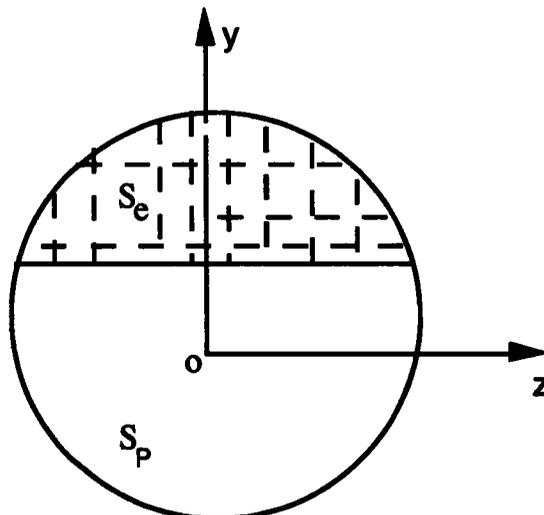


Fig.8: **Caractérisation des deux zones à partir d'une frontière**

$$\dot{\lambda} = -\dot{N} = \dot{v}' \left( \int_{S_P} E_T y dy dz + \int_{S_E} E y dy dz \right) = 0 \quad (\text{II.31})$$

Bien que cette approche ait fut autorité pendant 50 ans, elle est fausse. En effet , les bifurcations plastiques se font toujours à charge croissante (cf.Fig.9), ce qui invalide la condition (II.31).

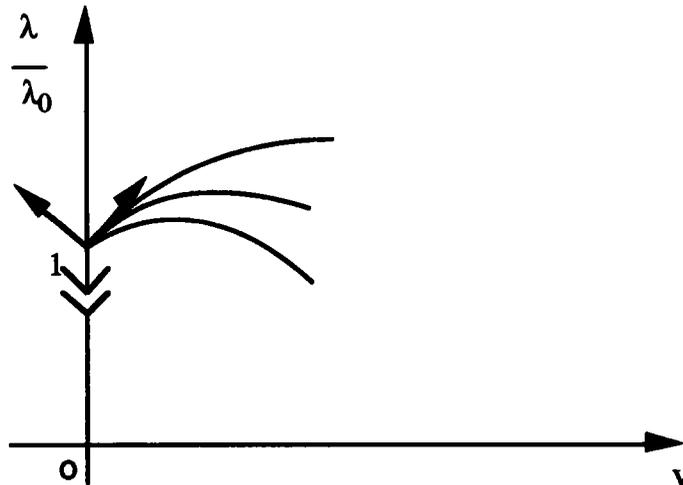


Fig.9: **Branches bifurquées d'une poutre de section circulaire**

La bonne approche consiste à travailler en vitesse, vitesse de déformation et de contrainte et à chercher à partir de quelle valeur de  $\lambda$ , il y a une seconde vitesse possible

(en plus de la solution rectiligne:  $\dot{v}_0 = 0$ ,  $\dot{\sigma}_0 = -\frac{\dot{\lambda}}{S}$ ,  $\dot{u}_0 = \frac{\dot{\sigma}_0}{E_T}$ )

Les équations d'équilibre en vitesse à partir de  $v_0$ ,

$$N = N_0 = -\lambda_0 \quad (\text{II.32})$$

sont:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{N}' = 0 \Rightarrow \dot{N} = -\dot{\lambda} \\ \dot{M}'' + N_0 \dot{v}' = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(II.33)} \\ \text{(II.34)} \end{array}$$

$$\dot{\sigma} = E_T (\dot{u}' - y \dot{v}'') \quad (\text{ou } E (\dot{u}' - y \dot{v}'')) \quad \text{(II.35)}$$

Le choix de  $E$  ou  $E_T$  dépend bien entendu du fait que le point considéré est en charge ou en décharge. Supposons qu'à la bifurcation, toute la poutre est en charge ( $\dot{\sigma} \leq 0$ ), auquel cas le module sera partout  $E_T$ . Formant la résultante et le moment résultant à partir de la loi (II.35), on obtient:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{N} = \int_S \dot{\sigma}(x, y) dy dz = E_T S \dot{u}' \\ \dot{M} = \int_S y \dot{\sigma}(x, y) dy dz = -E_T I \dot{v}'' \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(II.36)} \\ \text{(II.37)} \end{array}$$

D'après (II.33), (II.36) on obtient:

$$\dot{u}'(x) = -\frac{\dot{\lambda}}{S E_T} = \dot{u}'_0(x) \quad \text{(II.38)}$$

Ce qui montre que les deux vitesses (l'une tangente à la solution droite, l'autre tangente à la solution bifurquée) ne se distinguent que par la flèche  $\dot{v}(x)$ . D'après (II.34), (II.37) et  $N_0 = -\lambda$ , on obtient:

$$E_T I \dot{v}^{(4)} + \lambda \dot{v}''(x) = 0 \quad \text{(II.39)}$$

ce qui conduit à la même valeur critique que la théorie de la déformation, soit:

$$\lambda_c = \frac{\pi^2 E_T I}{L^2} \quad (\text{II.40})$$

La vitesse est de la forme:

$$\dot{v}(x) = C \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), \quad C \in \mathbb{R} \quad (\text{II.41})$$

Il reste à vérifier que l'on est bien en charge partout dans la poutre:

$$\dot{\sigma} = E_T \left( \frac{-\dot{\lambda}}{E_T S} + y \frac{\pi^2}{L^2} C \sin\left(\frac{x\pi}{L}\right) \right) \leq 0 \quad (\text{II.42})$$

ce qui est vrai si:

$$* \quad |C| \leq \frac{-\dot{\lambda}}{E_T S} \frac{L^2}{\pi^2} \frac{1}{y_{\max}} \quad (\text{II.43})$$

On trouve donc un intervalle de vitesses possibles à partir de la charge critique du module tangent.

---

\* Les charges critiques fournies par les deux théories coïncident.

\*

## Commentaires

Le calcul de la branche bifurquée peut se faire à partir des vitesses initiales trouvées. En fait, seules les valeurs maximales de l'intervalle (II.43) et  $C = 0$  sont admissibles. Il y a donc un point dans la poutre:

$$(y = \frac{L}{2}, |y| = y_{\max}) \text{ où il y a charge neutre } \dot{\sigma} = 0$$

(II.44)

Au delà de la charge critique, une zone de **décharge élastique** se développe à partir de ce point (cf. Fig.10). Pour le cas d'une poutre, la courbe bifurquée a souvent un maximum peu au dessus de la charge critique.

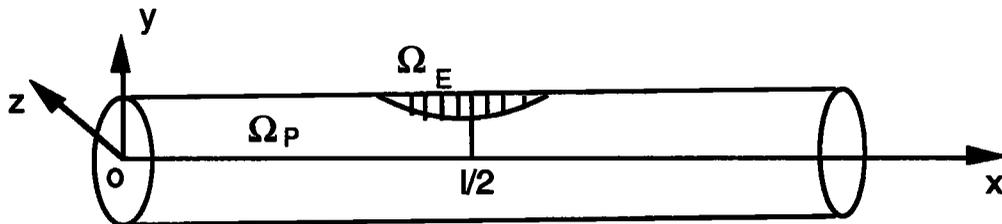


Fig.10: Progression de la zone de décharge pour une poutre de section circulaire

---

\* Pour plus de détail, voir les travaux de:  
Léger A. et Potier-Ferry M.(1988)

## II.4 CRITÈRES USUELS

Pour la suite, il nous semble utile de rappeler brièvement les critères de calcul de la charge critique pour les problèmes de flambage. Les critères usuels de calcul de la charge critique de flambage en élastoplasticité sont:

- le critère de *Hill* qui donne une condition suffisante d'unicité pour le problème en vitesses.
- critères de loi à seuil (formulation en inéquation variationnelle du problème en vitesses).

### II.4.1 Critère de bifurcation de Hill.

Dans le cadre des matériaux élastoplastiques, *Hill* [ H<sub>3</sub> ] a généralisé le principe de *Shanley* pour un milieu continu tridimensionnel. Le principe est caractérisé par une formulation du problème en vitesses de déplacement et est basé sur le critère de l'équilibre neutre faisant appel à un solide de comparaison. La méthode consiste à calculer la charge critique en supposant que le matériau élastoplastique peut être remplacé par un matériau élastique (en fait hypoélastique) dit de comparaison: pour chaque niveau de charge, le comportement incrémental du matériau de comparaison est défini par celui du matériau élastoplastique travaillant sous contrainte plastique croissante.

Pour un exposé complet des connaissances actuelles dans le domaine de flambage élastoplastique, nous renvoyons à l'article de synthèse de *Needleman et Tvergaard* [ N<sub>1</sub> ] et aux articles de *Tvergaard* [ T<sub>3</sub> ] et *Hutchinson* [ H<sub>4</sub> ].

Le critère est basé sur la formulation du problème en vitesses de déplacement, que nous rappelons brièvement.

#### II.4.1.1 Lois hypoélastiques

Dans l'exemple de *Shanley*, la bifurcation s'effectue sans décharge élastique, à charge croissante. Si on admet ce fait comme une propriété

générale, on est conduit à admettre que le potentiel  $W^*(\dot{\gamma})$  non quadratique peut être approché par un potentiel quadratique par morceaux  $\phi(\dot{\gamma})$  défini par:

$$\phi(\dot{\gamma}) = \begin{cases} \frac{1}{2} \dot{\gamma} \cdot L \cdot \dot{\gamma} & \text{: dans la zone élastique} \\ \frac{1}{2} \dot{\gamma} \cdot L_T \cdot \dot{\gamma} & \text{: dans la zone plastique} \end{cases} \quad (\text{II.45})$$

En d'autres termes, le volume plastique au moment de la bifurcation est supposé être en charge. Le comportement incrémental d'un milieu dit hypoélastique s'écrit:

$$\dot{\sigma} = L_C \cdot \dot{\gamma} \quad \text{avec:} \quad L_C = \begin{cases} L & \text{: dans la zone élastique} \\ L_T & \text{: dans la zone plastique} \end{cases} \quad (\text{II.46})$$

$L_C$  étant le module de comparaison élastique.

#### II.4.1.2 Critère de Hill

Soit un milieu élastoplastique qui occupe au repos un domaine borné  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$ . Ce milieu est soumis à un chargement qui dépend du paramètre d'évolution  $\lambda$ . Le chargement est constitué d'une densité de charge volumique  $F(\lambda)$  et d'une densité surfacique d'effort  $T(\lambda)$ , s'exerçant sur une partie  $S_T$  du bord de  $\Omega$ . Sur le reste du bord, le milieu est fixé.

L'état actuel étant supposé connu, les vitesses  $\dot{u}$ ,  $\dot{\sigma}$  s'expriment en fonction des vitesses de force et de déplacement données  $\dot{F}$ ,  $\dot{T}$ ,  $\dot{u}_d$  par la résolution d'un problème aux limites, appelé problème en vitesses. La loi de comportement (II.13) permet de formuler sous forme variationnelle, le problème en vitesses sur la configuration actuelle  $\Omega$ .

La solution  $\dot{u}$  minimise parmi les champs de vitesses  $v$  cinématiquement admissibles la fonctionnelle:

$$\left\{ \begin{array}{l} J(v) = \int_{\Omega} \left\{ W^*(\dot{\gamma}(v)) + \frac{1}{2} \sigma_{ij} v_{k,i} v_{k,j} \right\} d\Omega - \int_{\Omega} \dot{F} v \, dv - \int_{S^T} \dot{T} v \, dS \quad (\text{II.47}) \\ \text{avec:} \\ \dot{\gamma}_{ij}(v) = \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}) : \text{la vitesse de déformation} \\ \text{associée à } v. \end{array} \right. \quad (\text{II.48})$$

Si la solution en vitesse  $v$  n'est pas unique, il y a bifurcation. L'unicité de la solution  $v$  est assurée lorsque  $J(v)$  est strictement convexe. La condition suivante est appelée critère de non bifurcation de *Hill*.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{La non-bifurcation est assurée si la fonctionnelle:} \\ F(v) = \int_{\Omega} \left\{ W^*(\dot{\gamma}(v)) + \frac{1}{2} \sigma_{ij} v_{k,i} v_{k,j} \right\} dv \text{ est strictement} \\ \text{convexe} \end{array} \right. \quad (\text{II.49})$$

Soient  $v^1$  et  $v^2$  deux champs de vitesse quelconque,  $\dot{\gamma}_1$  et  $\dot{\gamma}_2$  les vitesses de déformation associées,  $\dot{\sigma}_1$  et  $\dot{\sigma}_2$  les vitesses de contraintes associées suivant (II.48), la convexité stricte de la fonctionnelle  $F(v)$  se traduit aussi par la monotonie stricte de sa dérivée:

$$\left[ \begin{array}{l} F(v) \text{ strictement convexe} \Leftrightarrow \forall v^1, v^2 \\ \int_{\Omega} \{ (\dot{\sigma}_1 - \dot{\sigma}_2)(\dot{\gamma}_1 - \dot{\gamma}_2) + \sigma_{ij} (v_{k,i}^1 - v_{k,i}^2)(v_{k,j}^1 - v_{k,j}^2) \} d\Omega \geq 0 \end{array} \right. \quad (\text{II.50})$$

Les conditions (II.49) et (II.50) sont un emploi difficile, car la fonction  $W^*(\dot{\gamma})$  est positivement homogène de degré deux, mais non quadratique. C'est la méthode du module tangent que préconisent plusieurs auteurs comme une approximation de la condition (II.49) ou (II.50) qui consiste à remplacer le potentiel  $W^*(\dot{\gamma})$  par un potentiel quadratique  $\phi(\dot{\gamma})$  par morceaux tel que:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \phi(\dot{\gamma}) = W^*(\dot{\gamma}) : & \text{dans la zone élastique} \\ & \text{initiale} \\ \phi(\dot{\gamma}) = \frac{1}{2} \dot{\gamma} \cdot E_T \cdot \dot{\gamma} : & \text{dans la zone plastique} \\ & \text{initiale} \end{array} \right. \quad (\text{II.51})$$

Le problème de vecteurs et de valeurs propres associé au critère de non-bifurcation de *Hill* avec le module tangent est donné par le quotient de *Rayleigh*:

$$q = \text{Max}_{\Omega} \frac{\int_{\Omega} \frac{1}{2} \sigma_{ij} v_{k,i} \cdot v_{k,j} d\Omega}{\int_{\Omega} \phi(\dot{\gamma}(v)) d\Omega} \quad (\text{II.52})$$

Si  $q < 1$ : la forme quadratique est positive et strictement convexe.

On vérifie facilement dans ces conditions que (II.49) est assurée, d'où la non-bifurcation.

L'état critique de bifurcation est atteint pour  $q = 1$  ( $q = 1$  donne seulement une estimation par défaut (dans le sens de la sécurité) de la charge critique de bifurcation)).

## Commentaires

*En résumé, le résultat général établi par Hill est une condition suffisante d'unicité pour la réponse en vitesses. Sous réserve qu'il n'existe pas de bifurcation tangente, cette condition suffisante d'unicité est aussi une condition suffisante de non-bifurcation.*

*Nous soulignons que ce cas générique de bifurcation tangente existe bien. Triantafyllidis (1983) [ T<sub>1</sub> ] a étudié le premier ce type de bifurcation sur un modèle simple de structure ( une variante de la poutre de Hutchinson [ H<sub>4</sub> ] ) qui flambe suivant une bifurcation tangente qu'on va rappeler brièvement dans (II.4.1.3).*

*Dans de nombreuses situations pratiques, c'est également une condition nécessaire de non-bifurcation. Lorsque le flambage débute sans provoquer la décharge élastique, la valeur critique fournie par la méthode de Hill est effectivement la charge critique. Par contre, lorsque la décharge élastique se produit de manière significative dès le début du flambage, le problème de la caractérisation de la charge critique est un problème ouvert, dans le cas des plaques, la charge critique effective peut alors être différente de celle de Hill (cf. Cimetière [ C<sub>5</sub> ])*

\*

---

\* Thèse d'Etat de Cimetière A. (1987)

### II.4.1.3 Le système de Triantafyllidis

On rappelle brièvement le système de *Triantafyllidis* (1983) [  $T_1$  ] de chargement complexe en réponses flexion-torsion et qui flambe suivant une bifurcation tangente. Cette structure est la réunion de deux systèmes de type *Shanley* continus identiques et couplés par une plaque rigide de longueur  $2l'$  (cf.Fig.11). Le déplacement n'est fonction que de trois variables: le déplacement vertical  $u$ , l'angle de flexion  $\theta$ , auxquels s'ajoute un angle de torsion  $\phi$ . Pour ce modèle, la vitesse initiale est la même pour toute branche bifurquée ou fondamentale. Pour plus de détails nous renvoyons à *Triantafyllidis* [  $T_1$  ], *Léger et Potier-Ferry* [  $L_3$  ] .

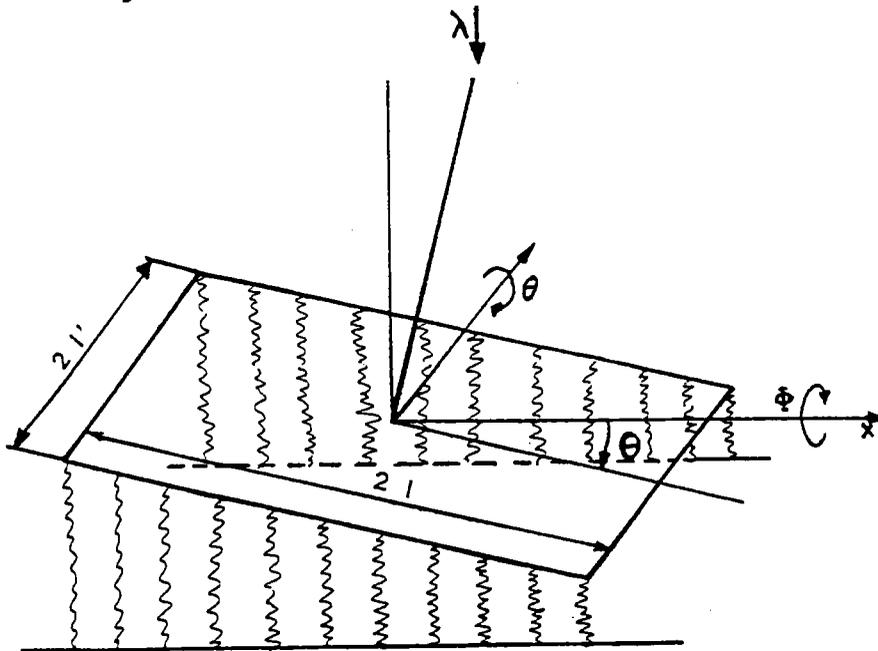


Fig.11: le système de N.Triantafyllidis

Une réflexion est menée depuis quelques années sur les travaux de *Hill* [  $H_3$  ] et de *Hutchinson* [  $H_4$  ], dans le cadre des milieux standards généralisés. *Nguyen* ( à partir de 1981), *Léger et Potier-Ferry* [  $L_3$  ] ainsi que *Cimetière* ([  $C_4$  ], [  $C_5$  ]) ont montré que le problème en vitesses pouvait se mettre sous la forme d'une inéquation variationnelle, ce qui conduit à une formulation simple du critère de *Hill*.

## II.4.2 Critère pour les milieux standards généralisés

Les inéquations variationnelles ont été introduites dans les années 1960 pour des problèmes de contact unilatéral, puis d'un point de vue mathématique [ D<sub>2</sub> ]. On s'est très vite aperçu que les problèmes aux limites des structures plastiques se formulaient dans ce cadre [ L<sub>3</sub> ], [ N<sub>2</sub> ], [ C<sub>4</sub> ]. Il a été démontré qu'en plasticité, les problèmes de bifurcation se discutent à partir d'une inéquation variationnelle. Rappelons que les inéquations variationnelles classiques sont définies à partir d'une forme bilinéaire  $a(v, w)$ , d'une forme linéaire  $(g, w)$  et d'un ensemble convexe fermé  $C$  de la manière suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } v \in C \\ a(v, w-v) \geq (g, w-v), \quad \forall w \in C \end{array} \right. \quad (\text{II.53})$$

### II.4.2.1 Formulation du Problème en vitesses en inéquation variationnelle

Depuis les travaux de *Nguyen* [ N<sub>2</sub> ], on sait que la réponse en vitesses des milieux dissipatifs, de type standards généralisés, est gouvernée par une inéquation dont l'inconnue est la variation du paramètre interne.

On donne comme dans [ L<sub>3</sub> ], [ C<sub>6</sub> ] une variante de cette inéquation, dont l'inconnue est le couple vitesse de déplacement - multiplicateur plastique. Afin de pouvoir rendre compte du flambage, la déformation n'est pas linéarisée dans le modèle, malgré tout elle est supposée petite. L'énergie libre  $\psi$  est une fonction du gradient du déplacement  $\nabla u$  et de paramètres internes  $\alpha(x)$ . Le premier tenseur de *Piola-Kirchhoff* est donné par la relation de comportement:

$$T = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \nabla u}, \quad \psi = \psi(\nabla u, \alpha) \quad (\text{II.54})$$

De plus, le chargement est supposé conservatif et on le représente symboliquement par  $f$ . Sous forme incrémentale, le principe des puissances virtuelles s'écrit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} T \cdot \nabla v \, d\Omega = \langle \dot{f}, v \rangle \\ \text{pour tout } v(x) \text{ cinématiquement admissible C.A.} \end{array} \right. \quad (\text{II.55})$$

La force thermodynamique

$$A = -\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} \quad \text{associée à } \alpha \quad (\text{II.56})$$

est limitée par une fonction seuil  $f(A)$ , telle que le domaine  $f(A) \leq 0$  soit convexe. Dans la zone plastique:

$$\Omega_P = \{ x / f(A(x)) = 0 \} \quad (\text{II.57})$$

La loi d'écoulement suit la règle de normalité:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\alpha} = \kappa n = k \frac{\partial f}{\partial A} \\ k \geq 0, \quad -\dot{f}(\kappa - k) \geq 0, \quad \forall \kappa(x) \geq 0 \end{array} \right. \quad (\text{II.58})$$

où  $n$  désigne la normale à la surface de charge.

Après avoir reporté les lois de comportement (II.54)-(II.56) dans (II.55)-(II.58), le couple  $U = (\dot{u}, \kappa)$  est solution d'une inéquation variationnelle du type:

$$\left\{ \begin{array}{l} V \in C \\ a(U, V-U) \geq (g, V-U), \quad \forall U \in C \end{array} \right. \quad (\text{II.59})$$

pour tout  $U$  élément du cône des vitesses cinématiquement et plastiquement admissibles  $C$  qui est défini par:

$$C = \{(v, \kappa), v \in C.A., \kappa \geq 0 \text{ sur } \Omega_p, \kappa = 0 \text{ sur } \Omega_e = \frac{\Omega}{\Omega_p}\} \quad (II.60)$$

où  $a$  est une forme bilinéaire symétrique,  $(g, v)$  une forme linéaire traduisant la variation de puissance des efforts appliqués.

### Remarque

*La propriété de symétrie de  $a$  est en générale valable pour tous les systèmes obéissant au principe du travail maximal.*

*La loi de comportement donnée dans (II.13) est telle que:*

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial W^*}{\partial \dot{\gamma}} \quad \text{avec} \quad W^*(\dot{\gamma}) = \frac{1}{2} \left\{ \dot{\gamma} \cdot L \cdot \dot{\gamma} - \frac{\langle N \cdot L \cdot \dot{\gamma} \rangle^2}{H + N \cdot L \cdot N} \right\}$$

où le potentiel  $W^*(\dot{\gamma})$  est positivement homogène de degré deux, mais non quadratique. Le signe de  $N \cdot L \cdot \dot{\gamma}$  distingue la charge de la décharge. Lorsque  $N \cdot L \cdot \dot{\gamma} \geq 0$ , le matériau est en charge plastique et si l'on introduit le module tangent  $L_T$ , la relation (II.13) s'écrit :

$$\dot{\sigma} = L_T \cdot \dot{\gamma} \quad \text{avec} \quad L_T = L - \frac{1}{H + N \cdot L \cdot N} N \cdot L \cdot N$$

En introduisant cette loi dans l'inéquation variationnelle (II.60), on aboutit ainsi à la formulation du problème en vitesses qui a été introduit par Hill [H<sub>2</sub>]. Elle fournit effectivement la charge critique.

### II.4.2.2 Critère de bifurcation

Depuis l'article de *Shanley* [S<sub>2</sub>], la condition de bifurcation admise est l'existence d'une seconde vitesse  $v_0$  non symétrique à partir de l'état fondamental différente de la vitesse  $v_f$  le long de la branche de solution fondamentale. Puisque l'inéquation variationnelle (II.59) possède deux solutions, on montre facilement que:

$$a(v_0 - v_f, v_0 - v_f) \leq 0 \quad (\text{II.61})$$

Il est très important de remarquer que la différence  $(v_f - v_0)$  n'est pas forcément dans le cône  $C$ , mais dans l'espace vectoriel engendré par ce cône:

$$\text{Vect } C = \{(w(x), \kappa(x)) / w(x) \in \text{C.A.}, \kappa(x) = 0, \forall x \in \Omega_p\} \quad (\text{II.62})$$

Il est équivalent de remplacer le cône  $C$  par  $\text{Vect } C$ , l'inéquation (II.62) donne une condition nécessaire d'existence de deux vitesses. Pour plus de détails, nous renvoyons à l'article de *Léger et Potier-Ferry* (1988) [L<sub>3</sub>]. Une condition de borne inférieure  $\lambda_0$  de toutes les valeurs de la charge critique  $\lambda$  pour lesquelles il existe au moins deux vitesses est donnée par la caractérisation variationnelle d'un problème de minimisation:

$$q(\lambda) = \min_{v \in \text{Vect } C} \frac{a(v, v)}{\|v\|^2} \quad (\text{II.63})$$

où  $\| \cdot \|$  est une norme de type  $L^2$  définie sur l'ensemble des vitesses. A cause de la symétrie de la forme bilinéaire  $a(v, w)$ ,  $q(\lambda)$  est la plus petite valeur propre de l'opérateur associé à cette forme bilinéaire. D'après l'inégalité (II.62), toute valeur de bifurcation  $\lambda_1$  est telle que  $q(\lambda_1) \leq 0$ . La première valeur de bifurcation  $\lambda_0$  satisfera la condition  $q(\lambda_0) = 0$ . D'après la caractérisation variationnelle du problème de minimisation (II.64), il existe alors pour  $\lambda = \lambda_0$  un mode de flambage plastique  $V = \{ U(x), K(x) \}$  tel que:

$$\exists V \in \text{Vect } C: a(V, u) = 0, \forall u \in \text{Vect } C \quad (\text{II.64})$$

## Commentaires

*La condition de bifurcation plastique (II.65) a une forme semblable au critère de la seconde variation en élasticité, ce qui se traduit numériquement par une matrice de rigidité singulière.*

*Léger et Potier-Ferry [  $L_3$  ] se sont intéressés aux bifurcations plastiques à partir d'un état inhomogène: présence d'une zone élastique et d'une zone plastique non réduite à l'ensemble vide dans le cadre des milieux standards généralisés. Ils ont montré que les ruptures de symétrie ne peuvent se produire que de trois manières différentes:*

- $$\left\{ \begin{array}{l} 1- \text{ apparition d'un point de décharge élastique,} \\ 2- \text{ évolution régulière de la zone de décharge,} \\ 3- \text{ apparition d'une zone de rechargement.} \end{array} \right.$$

*La bifurcation est transverse dans les cas 1 et 2, tangente dans le cas 3.*

### II.4.3 Discussion

La méthode du module tangent, par sa simplicité et sa signification mécanique, est actuellement adoptée dans la plupart des études théoriques ou numériques de stabilité.

Pour les applications pratiques, il est utile de préciser lorsqu'une structure élastoplastique supporte un chargement proportionnel à un paramètre  $\lambda$  ( par exemple :  $F = 0$ ,  $T = \lambda T_0$  ) on distingue les situations suivantes:

- |   |   |
|---|---|
| [ | <p><math>\lambda_p</math>: correspond à l'apparition du premier point plastique dans la structure</p> <p><math>\lambda_L</math>: correspond à la charge limite due à la plasticité, en supposant qu'il n'y a pas de changement de géométrie notable</p> |
|---|---|

$\lambda_E$  : la charge critique d'Euler, la structure étant supposée élastique  
 $\lambda_R$  : la charge critique du module réduit  
 $\lambda_T$  : la charge critique du module tangent.

Ces grandeurs permettent de distinguer plusieurs types de réponses de la structure, en fonction de la charge appliquée  $\lambda$  (cf. Fig.12 ).

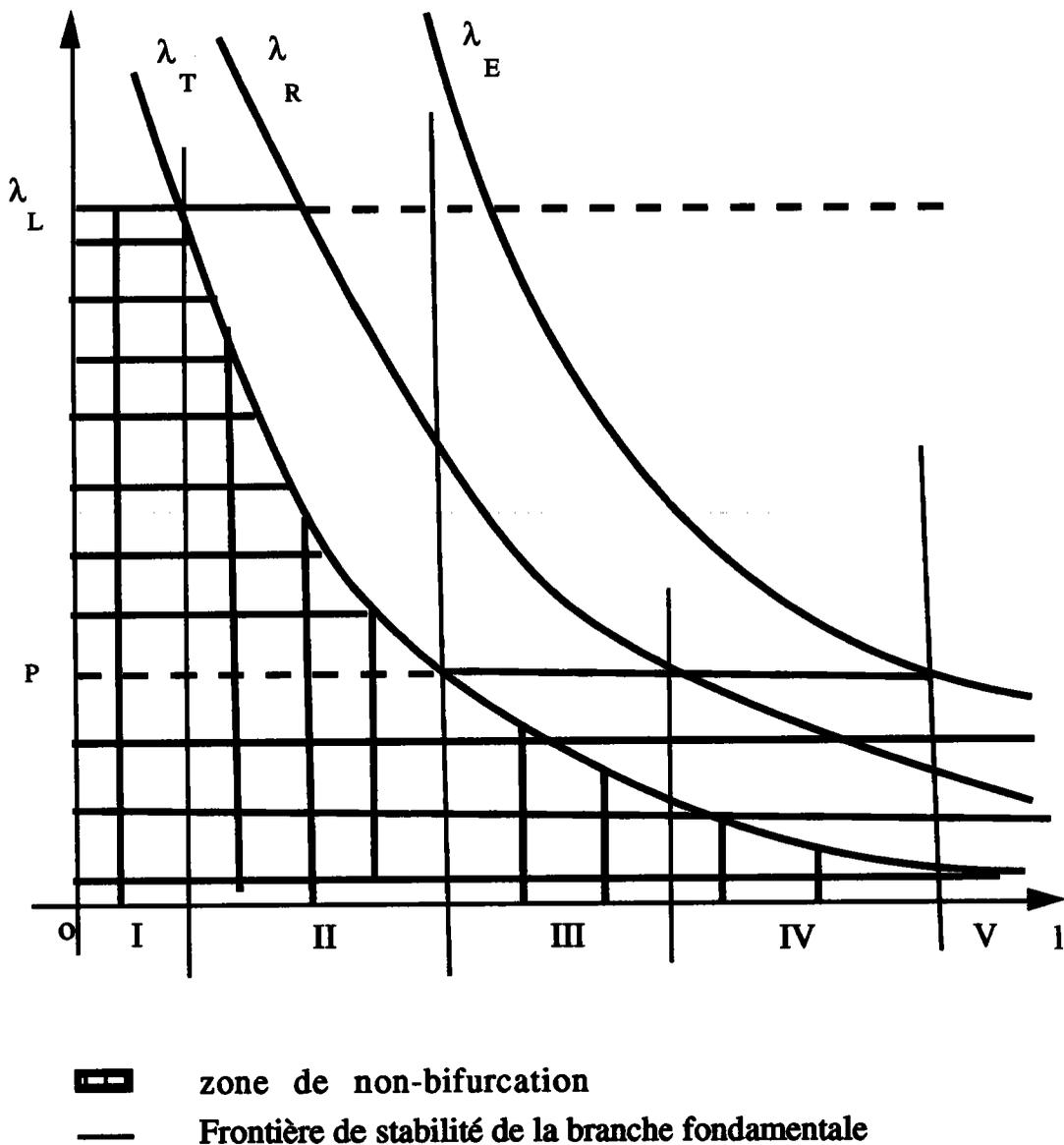


Fig.12: Variation de  $\lambda_T$ ,  $\lambda_R$ ,  $\lambda_E$ , en fonction de l'élançement de la colonne.

Selon la caractéristique 1, la résistance de la structure est limitée par la charge limite  $\lambda_L$  dans la région (I), par bifurcation élastoplastique dans les régions (II),( III), (IV) et par bifurcation élastique dans la région (V). En ce qui concerne les coques, afin de déterminer leur domaine de bifurcation, il est utilisé un coefficient appelé REY défini comme suit:

$$REY = \frac{\lambda_E}{\lambda_Y} \quad \text{où } \lambda_Y \text{ est la limite élastique.} \quad (II.65)$$

Selon *Combescure* [ C<sub>4</sub> ], la structure peut être classée comme rigide si  $REY \geq 5$  et le flambage, s'il se produit, arrive dans le domaine plastique ( région (I)).

Si  $REY < 0.2$ , la structure peut être classée comme simple et le flambage, s'il se produit, arrive dans le domaine élastique ( région (V)).

Enfin, si  $0.2 \leq REY < 5$ , la structure est classée comme intermédiaire ( régions (II), (III), (IV)).

De multiples arguments montrent que le critère du module tangent est véritablement le critère de bifurcation plastique.

Pour les codes de calcul, il est utilisé mais avec des aménagements divers, par exemple dans le code INCA du système CASTEM développé au C.E.A de Saclay par *Combescure* [ C<sub>7</sub>].

Plusieurs méthodes de calcul de *la matrice tangente* de bifurcations plastiques sont programmées.

### 1- Matrice du " module tangent "

La matrice tangente  $D_T$  est déduite de la matrice d'élasticité  $D$  par substitution du module tangent  $E_T$  à la place du module de *Young*, soit:

$$D_T = \frac{E_T}{E} D = \frac{E_T}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu^2}{2} \end{bmatrix}$$

$E_T$  est le module tangent sur la courbe de traction correspondant à la précontrainte  $\sigma$ .

Outre son aspect simple et pratique, ce choix offre la possibilité de prendre en compte d'une façon relativement conservative les effets des imperfections géométriques initiales ainsi que l'influence des contraintes résiduelles.

## 2- Matrice du " module de Von Karman "

Dans ce cas le module réduit de *Von Karman*  $E_R$  a été utilisé, la matrice est alors donnée par:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{D}_T = \frac{E_R}{E} \mathbf{D} \\ \text{où: } E_R = \frac{4EE_T}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_T})^2} \end{array} \right.$$

## 3- Matrice du " module Flow "

La matrice tangente  $\mathbf{D}_T$  est choisie de la manière suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{D}_T = (\mathbf{I} - \mathbf{C})^T \mathbf{D} \\ \text{où: } \mathbf{I} \text{ est la matrice unitaire, } \mathbf{C} \text{ est donnée en fonction du critère} \\ \text{de } \textit{Von-Mises} \text{ par la relation:} \\ \mathbf{C} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)^T \mathbf{D}}{h + \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)^T \mathbf{D} \frac{\partial f}{\partial \sigma}} \\ f = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2)^{1/2}, \quad h = \frac{EE_T}{E - E_T} \end{array} \right.$$

Ce choix de la matrice  $\mathbf{D}_T$ , basé sur la théorie incrémentale de la plasticité conduit à des résultats moins conservatifs que ceux obtenus avec le module tangent.

#### 4- Matrice de " Bosor-INCA "\*\*

La matrice  $D_T$  adoptée par *Bushnell* [  $B_8$  ] dans le programme de Bosor est introduite dans le code INCA. Ce choix est fondé sur la théorie de la déformation. La matrice tangente  $D_T$  est donnée par:

$$D_T = \begin{bmatrix} \frac{E_T}{1-\nu^2} & \frac{\nu E_T}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E_T}{1-\nu} & \frac{E_T}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu+g)} \end{bmatrix} \quad \text{où:} \quad g = \frac{3}{2} \left( \frac{E}{E_S} - 1 \right)$$

La forme de  $D_T$  utilisée dans *Bosor* ne diffère de celle de la méthode du " module tangent " que sur les *termes de cisaillement*. L'utilisation de la matrice de *Bosor* donne d'excellents résultats , mais uniquement en chargement proportionnel (on diminue arbitrairement certains coefficients de rigidité plastiques, voire tous). Néanmoins, dans le cas d'un chargement non uniaxial, son application pose des problèmes. Ceci est dû au fait que les lois de comportement plastiques habituelles ne sont guère adaptées pour rendre compte de bifurcations.

Une illustration très significative est donnée par l'exemple de l'éprouvette cruciforme sous compression axiale ( voir par exemple *Hutchinson* ([  $H_4$ ], [  $H_6$ ] ).

---

\* Codes de Calcul:

- Bushnell D. (1976, 1985)
- Combescure A. (1984, 1991)

\*

## II.5 L'ÉPROUVETTE CRUCIFORME

L'éprouvette cruciforme est l'exemple de structure le plus simple qui illustre le désaccord des prédictions des calculs de la charge critique de flambage données par les lois basées sur le critère de *Von-Mises* à savoir la loi de la déformation et la loi incrémentale ( voir par exemple les études analytiques et numériques de *Onat et Drucker* [O], *Hutchinson et Budiansky* [H<sub>6</sub>] ).

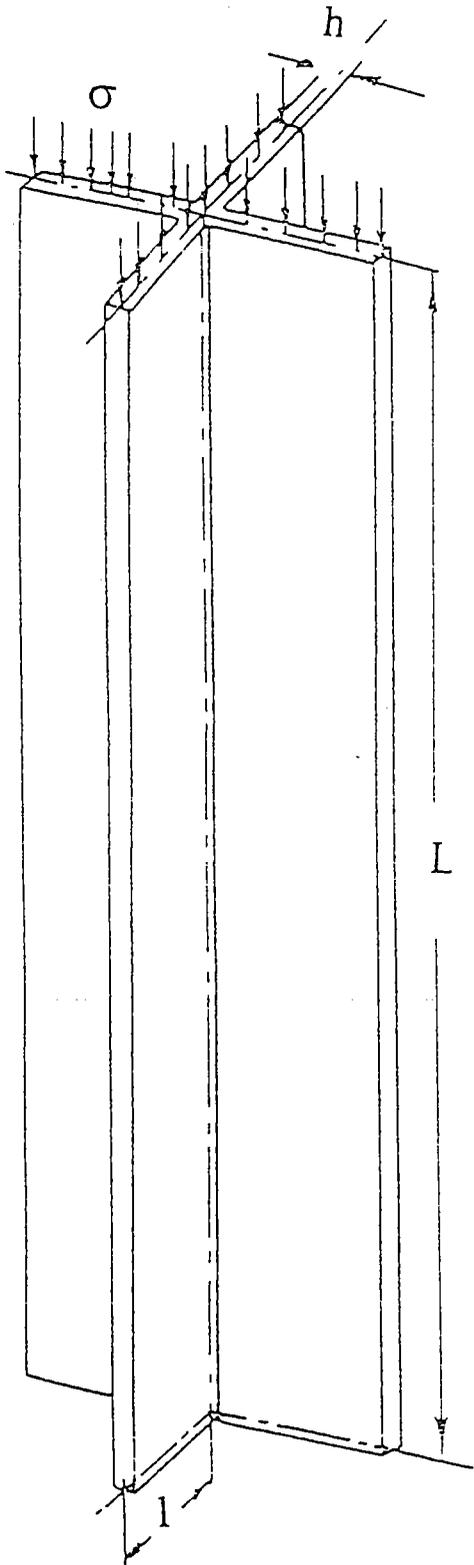
### II.5 L'éprouvette cruciforme et son chargement

L'éprouvette cruciforme est une structure constituée de deux plaques rectangulaires minces soudées en leur milieu, de longueur  $L$ , de largeur  $l$  ( $l \ll L$ ) et d'épaisseur  $h$ . Elle est soumise à une compression axiale  $\sigma$  suivant la direction  $Ox$ . On représente ci-dessous l'état de la structure avant et après flambage où apparaît une instabilité en torsion sous l'effet de la compression  $\sigma$  (cf.Fig.13).

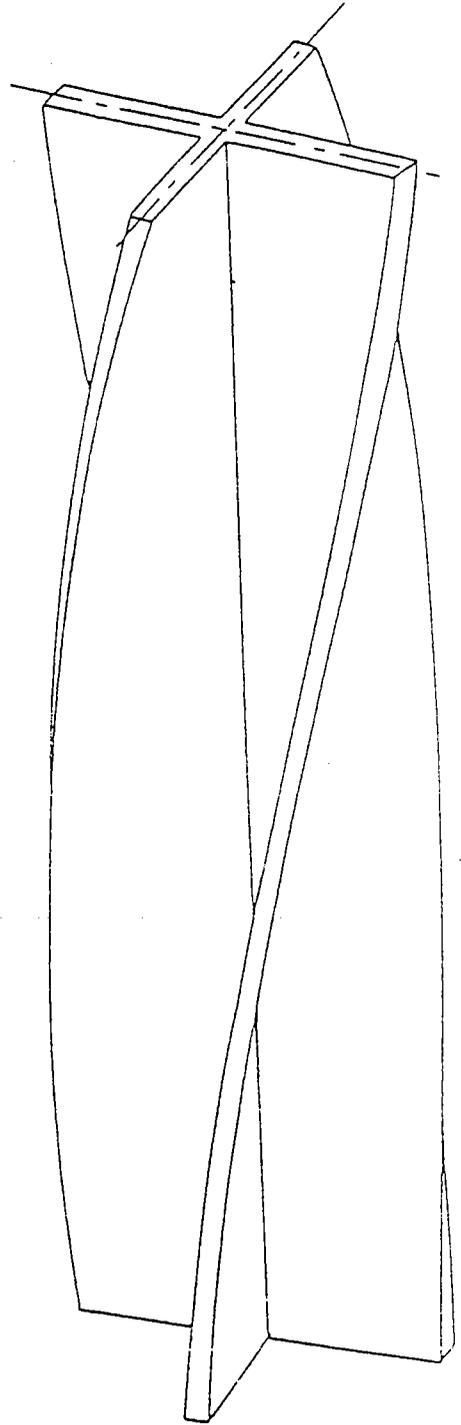
---

\* Pour l'historique de la structure: voir par exemple

- Onat E.T. et Drucker D.C. (1953)
- Hutchinson J.W. (1974)
- Hutchinson J.W. et Budiansky B. (1976)



ÉTAT AVANT FLAMBAGE



ÉTAT APRES FLAMBAGE

**CAS TEST:** ÉPROUVETTE CRUCIFORME SUR APPUIS SIMPLES  
EN COMPRESSION UNIAXIALE

Le mode de flambage est de la forme:

$$w = y \phi(x) \quad (\text{II.66})$$

où  $\phi$  est une fonction quelconque telle que :  $\phi(0) = \phi(L) = 0$ .

### Charges critiques

Pour ce problème, la contrainte critique est connue ( voir *Hutchinson et Budiansky* (1976) [  $H_6$  ] ) pour les lois de type (II.3) et (II.7).

Pour la loi incrémentale en charge on a:

\*

$$\sigma_c = G \left( \frac{h}{l} \right)^2 \quad (\text{II.67})$$

Pour la loi de la déformation on a:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_c = G_s \left( \frac{h}{l} \right)^2 \\ \text{avec :} \\ \frac{G_s}{G} = \left( 1 + 3G \left( \frac{1}{E_s} - \frac{1}{E} \right) \right)^{-1} \end{array} \right. \quad (\text{II.68})$$

Ci-dessus,  $E$  désigne le module d'Young,  $G$  le module de cisaillement élastique et  $E_s$  le module sécant.

---

\* Lors du flambage par torsion d'une éprouvette comprimée de section cruciforme les charges critiques sont alors franchement différentes.

## II.5.2 Écart entre les différentes lois

Une première constatation en faveur de la loi de la déformation a été notée dans ce cas de flambage où une très bonne corrélation avec les expériences a été soulignée comme le montre la figure ci-dessous.

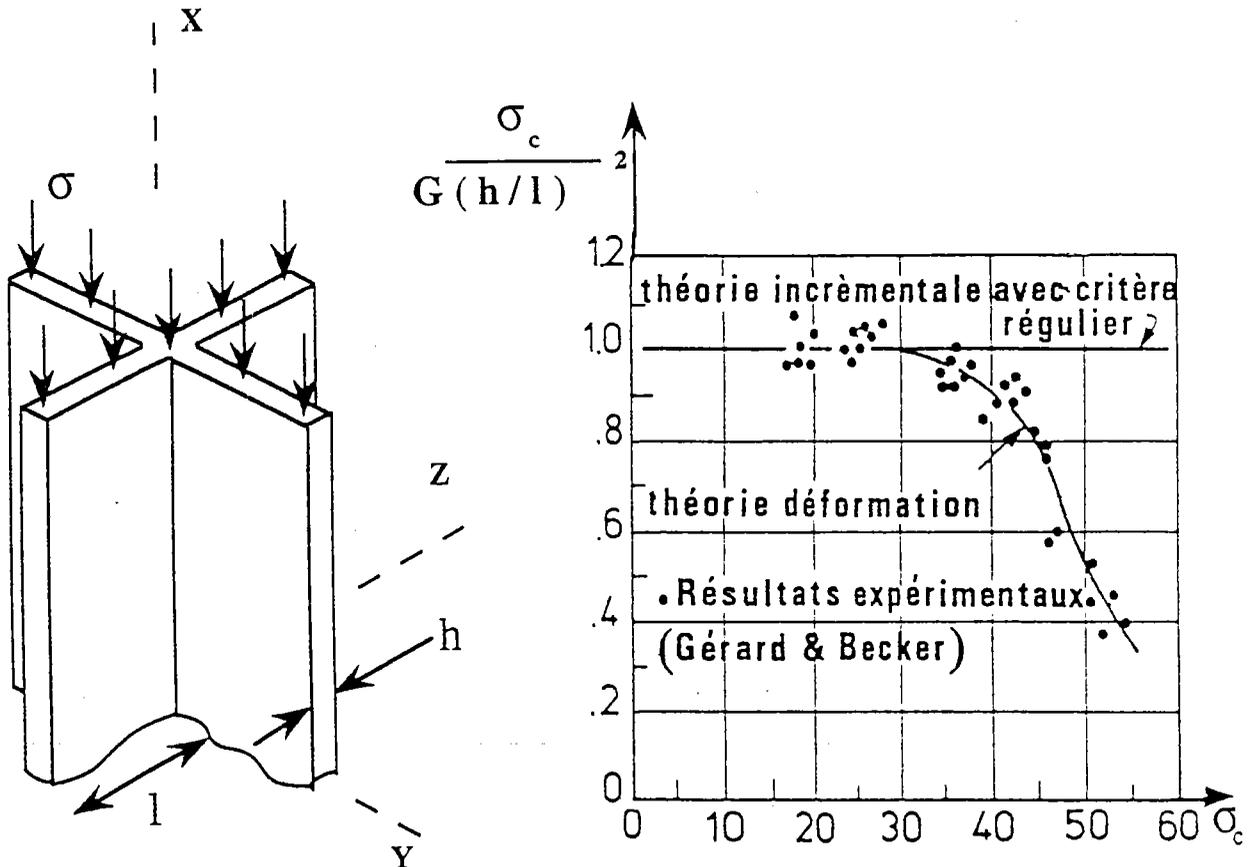


Fig.14 : Comparaison des résultats théoriques et expérimentaux de flambage de l'éprouvette cruciforme ( d'après Hutchinson et Budiansky (1976))

## II.5.3 Discussion

Bien que la loi de la déformation, qui est essentiellement une loi élastique non linéaire soit une fausse modélisation de la plasticité, elle fournit *paradoxalement* une estimation *plus exacte* de la charge critique que la loi incrémentale. Le plus souvent, cette estimation est conservatrice. Certes, les lois de type déformation conduisent à de très bons résultats pratiques, mais uniquement en chargement proportionnel

( voir par exemple les codes de calcul de *Bushnell* ( [ B<sub>7</sub> ], [ B<sub>8</sub> ] ), *Combescure* [ C<sub>6</sub> ] ).

Depuis les études de *Bijlaard* [ B<sub>4</sub> ] les intérêts de la loi de la déformation ont été soulignés par plusieurs auteurs. Elle présente beaucoup d'avantages vis-à-vis de la loi incrémentale:

- **Sens de sécurité:** les charges critiques sont toujours estimées par défaut
- **conformité avec les expériences:** l'exemple classique de l'éprouvette cruciforme
- **insensibilité aux imperfections:** contrairement à la loi incrémentale
- **coût de calcul:** toujours moins élevé qu'en incrémental

Malheureusement, elle ne peut pas prendre en compte la décharge élastique et donc les cycles de chargement complexes.

Cette contradiction a fait l'objet de longues discussions, voir par exemple *Hutchinson et Budiansky* [ H<sub>6</sub> ], *Onat et Drucker* [ O ].

\* Une première tentative d'explication a été fournie par *Onat et Drucker* [ O ] qui montrent dans le cas de l'éprouvette cruciforme que ce désaccord *peut être en partie résolu* en prenant en considération l'effet des petites imperfections initiales dans l'analyse incrémentale, ce qui donne *une réduction* de la charge critique de flambage qui est *proche* de celle fournie par la loi de la déformation. L'étude asymptotique exacte du comportement post-critique initial réalisée par *Hutchinson et Budiansky* [ H<sub>6</sub> ] l'a confirmé.

\* Une deuxième explication possible suppose la formation de coins sur la surface intrinsèque au cours du chargement . Le "coin" a joué un rôle significatif dans les discussions de flambage plastique ( voir *Hutchinson* [ H<sub>4</sub> ] ). Le "coin" sous-entend les modèles physiques de la plasticité des matériaux polycristallins basés essentiellement sur le concept des glissements ( *Hutchinson* [ H<sub>5</sub> ], *Berveiller et Zaoui* [ B<sub>3</sub> ] ).

## II. 6 LOIS DE COMPORTEMENT COMPLEXES

Presque tous les matériaux utilisés dans la pratique sont polycristallins, c'est-à-dire qu'ils sont composés de grains (cristaux) orientés différemment les uns par rapport aux autres. On peut considérer dans ce qui suit le polycristal comme étant une structure complexe. Pour décrire le comportement du polycristal, soumis à un chargement donné, il est nécessaire de connaître le comportement du monocristal.

\*

### II.6.1 Comportement du monocristal

Les expériences montrent que pour un polycristal, la déformation plastique à froid est essentiellement une déformation intragranulaire, c'est-à-dire une déformation à l'intérieur des grains. La déformation intragranulaire se manifeste par l'apparition à l'intérieur des grains de lignes parallèles caractéristiques et il est plus facile de l'étudier dans le cas d'échantillons monocristallins.

Ces lignes observées à l'intérieur du cristal déformé plastiquement sont dues au déplacement par cisaillement de l'ensemble des plans cristallographiques par rapport à d'autres.

### Description

Les solides cristallins se déforment plastiquement à basse température principalement par des glissements le long des plans cristallographiques les plus denses (cf. Fig. 15).

Un système de glissement est caractérisé par un plan et une direction (cf. Fig. 15) : *le plan* suivant lequel il y a *cisaillement* et la *direction* de ce plan suivant laquelle une partie du cristal est translaturée par rapport à l'autre. Les plans de glissement sont habituellement les plans réticulaires les plus denses et la direction de glissement coïncide avec une direction dense du réseau. Par exemple, pour les cristaux à faces centrées, il existe 24 systèmes de glissements équivalents en distinguant les deux sens de glissement. Pour un exposé complet, nous renvoyons à *Berveiller* [B<sub>3</sub>] et à *François, Pineau et Zaoui* [F].

---

\* Sur la microstructure des matériaux, nous renvoyons à :  
Berveiller M. et le livre de François D., Pineau A. et Zaoui A.

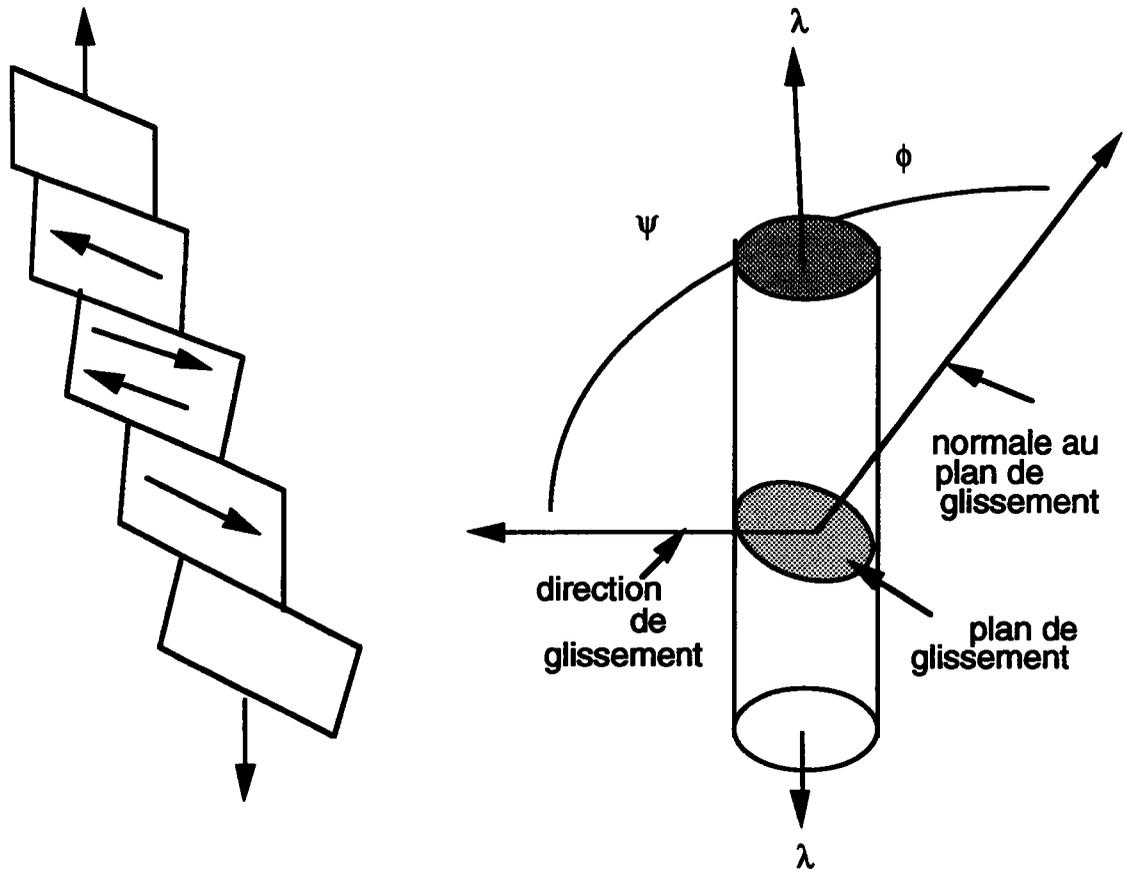


Fig.15: Déformation d'un monocristal par glissement sur les plans de base de la structure.

En cherchant à déterminer la condition critique pour produire un glissement sur un plan cristallographique donné, on s'est aperçu qu'il fallait exercer une cission sur ce plan au moins égale à une valeur critique: il s'agit de la loi de *Schmid* (1929):

*le glissement commence quand la cission résolue sur un plan cristallographique de glissement atteint une valeur critique.*

Si  $\phi$  et  $\psi$  désignent respectivement les angles entre l'axe de traction et la normale au plan de glissement ( Fig.15), la cission est :

$$\tau = \sigma \cdot \cos \phi \cos \psi$$

Parmi tous les mécanismes de déformation plastique possibles, nous nous limitons *au glissement plastique cristallographique* à une échelle large par rapport aux dislocations. Nous supposons également que ce glissement a lieu sous la forme de glissement multiple homogène et obéit à la loi de *Schmid*.

Suivant la nature du cristal, il y a un certain nombre de directions  $m$  et  $n$  admissibles et il faudra associer à chaque système de glissement sa propre cission critique et donc son propre critère de plasticité défini par

$$\begin{cases} f(\sigma) \leq 0 \\ \text{où} \\ f(\sigma) = m_i \cdot \sigma \cdot n_i, \quad 1 \leq i \leq N \end{cases} \quad (\text{II.69})$$

présentant ainsi  $N$  seuils à partir desquels les systèmes sont actifs, c'est le cas des matériaux de forte énergie de faute empilement (Cu, Al,...). Le comportement sera défini à partir des variables cinématiques décrivant la vitesse de glissement plastiques sur les systèmes de glissement actuels. Le domaine élastique ainsi défini ressemble donc plus à un polyèdre complexe qu'à un ellipsoïde comme le suppose le critère de *Von-Mises*.

\*

## II.6.2 Comportement du polycristal

Le comportement du polycristal est encore plus complexe, face à l'ensemble des difficultés déjà évoquées pour le monocristal (cissions critiques sur les systèmes de glissement, état du réseau cristallin (contraintes internes), forme et taille des grains). Supposons que le comportement soit homogène à l'intérieur de chaque grain et obéit à la loi de *Schmid*: selon le type de chargement, le comportement plastique du polycristal résulte de glissement plastique sur les différents systèmes actifs d'un grand nombre de grains.

Pour déterminer le comportement global, il est nécessaire d'effectuer la transition d'échelles permettant de relier les grandeurs locales aux grandeurs macroscopiques sous la forme:  $\sigma = L \cdot \Sigma$  où  $L$  est un tenseur de localisation reliant  $\sigma$  à  $\Sigma$  dépendant de l'état actuel du chargement et de la microstructure actuelle (orientations, cissions critiques, contraintes résiduelles,.....).

Dans le paragraphe suivant, à partir de la nature polycristalline des matériaux on définira les importantes notions caractéristiques d'un trajet de chargement qui seront: *charge totale, charge partielle et décharge élastique*.

---

\* Rapport: Berveiller M. et Col.(1991)

" Modélisation du comportement des métaux en transformations élastoplastiques finies ".

### II.6.3 Zone de charge partielle

A partir d'un état  $\sigma_0$  ( cf.Fig.16(a)), on examine tous les chemins possibles en vitesse des contraintes .

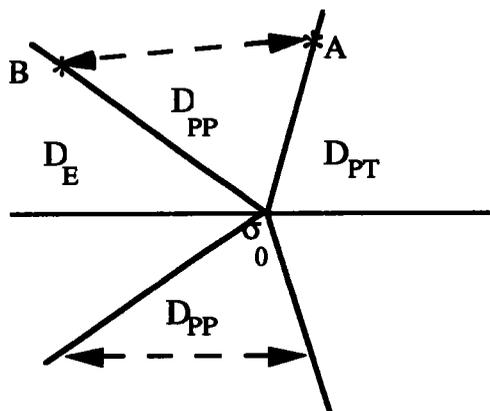


Fig.16(a)

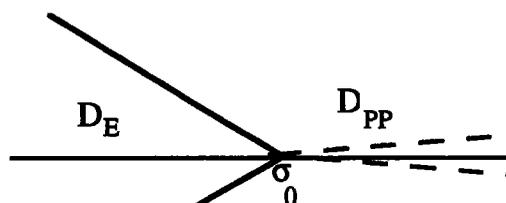


Fig.16(b)

Fig.16: Définition des zones de charge

Dans le cas d'un retour ( cf.Fig.16(a)), tous les glissements s'arrêtent et on est dans la zone de *décharge élastique* ( notée  $D_E$ ).

On suppose que pour un ensemble de chemins, les glissements restent à peu-près les mêmes et correspondent au maximum possible. Ces chemins décrivent une zone appelée *zone de charge totale* ( cf.Fig.16(a)) ( notée  $D_{PT}$ ).

Pour d'autres directions, il y a moins de glissements actifs et leur nombre décroît de A vers B ( cf.Fig.16(a)). Ces chemins décrivent une zone dite *zone de charge partielle* ( cf.Fig.16(a)) ( notée  $D_{PP}$ ).

#### Cas particulier

A partir d'un certain état  $\sigma_0$  ( cf.Fig.16(b)), on suppose que pour un ensemble de chemins, la zone de charge totale se rétrécit jusqu'à ce qu'elle devienne absente. On distinguera dans ce cas seulement deux zones: une zone de *décharge élastique* ( $D_E$ ) et une *zone de charge partielle* ( $D_{PP}$ ).

Les lois de comportement incrémentales basées sur le critère de *Von-Mises* à un seuil qui distinguent seulement la charge de la décharge élastique ne permettent pas de rendre compte de cette notion de charge

partielle. C'est pourquoi *Christoffersen et Hutchinson* (1979) [C<sub>2</sub>], avaient proposé une loi phénoménologique appelée "J<sub>2</sub> avec Coin" qui distingue une zone de décharge élastique (D<sub>E</sub>), une zone de charge totale (D<sub>PT</sub>) et une zone intermédiaire dite zone de charge partielle (D<sub>PP</sub>). Cette loi constitue un compromis entre la loi incrémentale et la loi de la déformation qu'on va rappeler brièvement .

## II.7 MODÈLE DE CHRISTOFFERSEN ET HUTCHINSON

Les prédictions de la bifurcation données à partir de la loi de la déformation sont justifiées par la possibilité de développement d'une singularité " formation de Coins " sur la surface seuil au point de chargement ( cf.Fig.17).

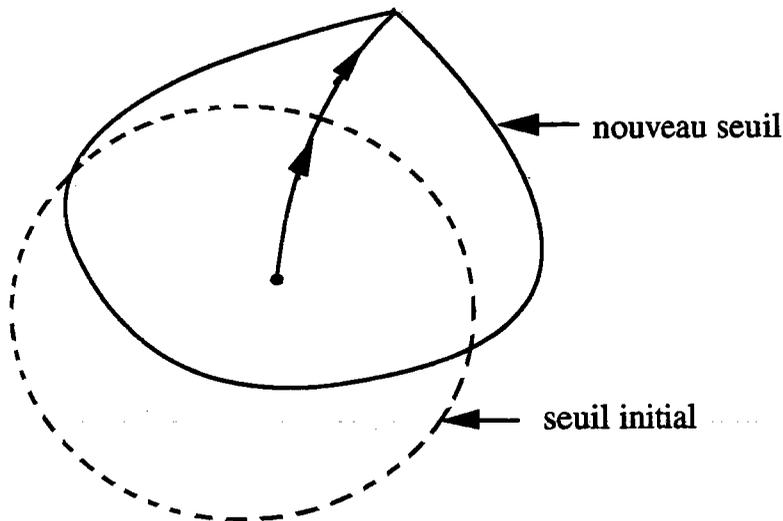


Fig.17 : Développement d'un Coin sur une surface seuil

### Modèle "J<sub>2</sub> avec Coin "

Récemment *Christoffersen et Hutchinson* [ C<sub>2</sub> ], avaient proposé une loi phénoménologique appelée "J<sub>2</sub> avec Coin " qu'on va décrire brièvement. En petites déformations, les complaisances élastiques M Sont supposées définies positives et les vitesses de déformation élastiques  $\dot{\gamma}^E$  et plastiques  $\dot{\gamma}^P$  sont telles que :

---

\* Pour plus de détail sur le modèle "J<sub>2</sub> avec Coin "  
( voir *Christoffersen C. et Hutchinson J.W.* (1979))

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\gamma}^e = M \cdot \dot{\sigma} \\ \dot{\gamma}^P = \dot{\gamma} - \dot{\gamma}^e \end{array} \right. \quad (\text{II.70})$$

$\dot{\gamma}$  étant la vitesse de déformation totale.

Le potentiel élastique en vitesse des contraintes est donné par:

$$W^e(\dot{\sigma}) = \frac{1}{2} M \cdot \dot{\sigma} \cdot \dot{\sigma} \quad (\text{II.71})$$

A l'échelle microscopique, le matériau peut être caractérisé par des relations standards des glissements (voir [ C<sub>2</sub> ]). Ces relations admettent un potentiel convexe en vitesse des déformations plastiques qui est homogène de degré deux en vitesse des contraintes. De ce fait, à l'échelle macroscopique, il existe d'après [ C<sub>2</sub> ] un potentiel convexe en vitesse des contraintes W<sup>P</sup> qui est aussi homogène de degré deux et donne la vitesse des déformations plastiques :

$$\dot{\gamma}^P = \frac{\partial W^P}{\partial \dot{\sigma}} \quad (\text{II.72})$$

Par suite, la vitesse de déformation totale est donnée par:

$$\left\{ \begin{array}{l} W = W^e + W^P \quad (\text{II.73}) \\ \dot{\gamma} = \frac{\partial W}{\partial \dot{\sigma}} \quad (\text{II.74}) \end{array} \right.$$

où W est le potentiel total qui est strictement convexe .

Le seuil dans un voisinage d'un point de chargement est défini à partir d'un cône, son axe s est colinéaire avec le déviateur des contraintes

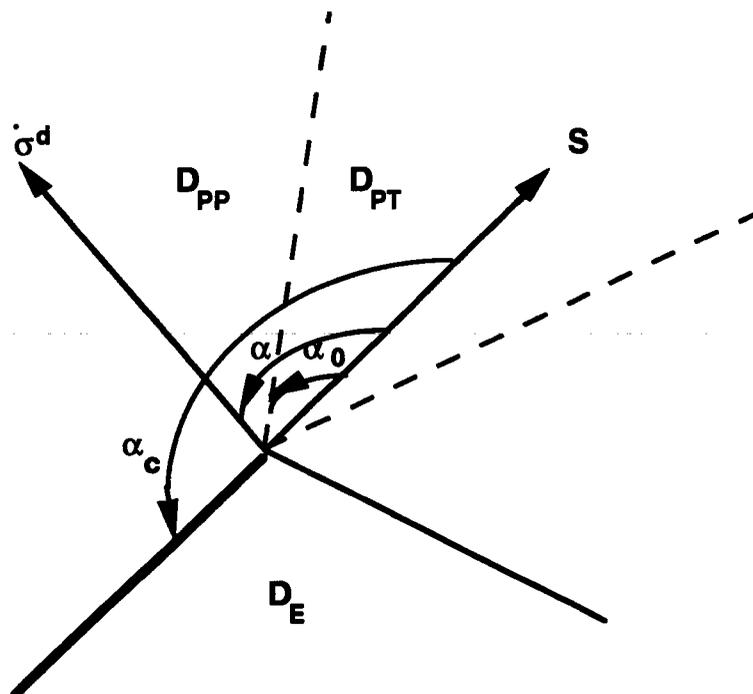
( cf.Fig.18) et il est déterminé à partir de la relation:

$$s = \frac{\sigma^d}{(C \cdot \sigma^d \cdot \sigma^d)^{1/2}} \quad (\text{II.75})$$

où  $\sigma^d$  étant le déviateur des contraintes et où  $C$  est un tenseur qui sera précisé plus loin. On appelle  $\alpha$  l'angle du cône entre la vitesse des contraintes  $\dot{\sigma}$  et la direction  $s$  ( cf. Fig.18 ):

$$\cos \alpha = \frac{C \cdot s \cdot \dot{\sigma}}{(C \cdot \dot{\sigma} \cdot \dot{\sigma})^{1/2}} \quad (\text{II.76})$$

La surface conique séparant la zone de la décharge élastique de la zone de charge plastique est prise à  $\alpha = \alpha_c$  ( cf. Fig.18 ).



- $\left\{ \begin{array}{l} D_E : \text{zone de décharge élastique} \\ D_{PT} : \text{zone de charge totale} \\ D_{PP} : \text{zone de charge partielle} \end{array} \right.$

Fig.18: Caractérisation du coin par la mesure de l'angle  $\alpha$

La figure.18 permet de distinguer trois zones.

La zone de *décharge élastique* ( $D_E$ ) définie par  $\alpha \geq \alpha_c$ .

La zone dite de *charge totale* ( $D_{PT}$ ) est donnée dans le cas  $\alpha \leq \alpha_0$  ( tous les systèmes de glissement possibles sont activés dans le polycristal). Dans cette zone, la relation entre la vitesse de contraintes et de déformations plastiques s'écrit:

$$\dot{\gamma}^P = C \cdot \dot{\sigma} \quad (\text{II.77})$$

où C désigne les complaisances plastiques, symétriques et définies positives. Le potentiel plastique s'écrit:

$$W^P(\dot{\sigma}) = \frac{1}{2} C \cdot \dot{\sigma} \cdot \dot{\sigma} \quad (\text{II.78})$$

La zone intermédiaire dite *zone de charge partielle* ( $D_{PP}$ ) est définie par  $\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_c$ . La relation entre la vitesse de déformation plastique et la vitesse des contraintes est non linéaire, homogène de degré un et continue quand  $\alpha \geq \alpha_c$ .

L'angle  $\alpha_0$  ne doit pas excéder  $\alpha_c - \frac{\pi}{2}$  ( cf.Fig.18). Le potentiel plastique s'écrit:

$$W^P(\dot{\sigma}) = \frac{1}{2} f(\alpha) C \cdot \dot{\sigma} \cdot \dot{\sigma} \quad (\text{II.79})$$

où la fonction  $f(\alpha)$  sera choisie en sorte que la condition de convexité

$$(W^P(\dot{\sigma}_2) - W^P(\dot{\sigma}_1)) - (\dot{\sigma}_2 - \dot{\sigma}_1) \cdot \dot{\gamma}^P \geq 0 \quad (\text{II.80})$$

soit satisfaite et telle que  $\dot{\gamma}^P$  varie continûment avec  $\dot{\sigma}$  à  $\alpha = \alpha_c$  et  $\alpha = \alpha_0$

**Remarque**

Entre la zone de charge totale ( $D_{PT}$ ) et la zone de décharge élastique ( $D_E$ ), la fonction  $f(\alpha)$  peut être choisie de la manière suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} W^P(\dot{\sigma}) = \frac{1}{2} f(\alpha) C \cdot \dot{\sigma} \cdot \dot{\sigma} \\ \text{avec:} \quad f(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{pour } \alpha < \alpha_0 \\ 0 & \text{pour } \alpha \geq \alpha_c \end{cases} \end{array} \right.$$

L'angle  $\alpha$  est homogène de degré zéro en  $\dot{\sigma}$  de sorte que  $W^P$  soit homogène de degré deux en  $\dot{\sigma}$ . De plus la fonction  $f(\alpha)$  est non négative.

En vertu de (II.73) et (II.74) la vitesse de déformation totale s'exprime de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} W(\dot{\sigma}) = \frac{1}{2} (M \cdot \dot{\sigma} \cdot \dot{\sigma} + f(\alpha) C \cdot \dot{\sigma} \cdot \dot{\sigma}) \\ \dot{\gamma} = \frac{\partial W}{\partial \dot{\sigma}} \end{array} \right. \quad (\text{II.81})$$

**Expression des complaisances élastiques et plastiques pour le modèle "  $J_2$  avec Coin "**

Le modèle "  $J_2$  avec Coin " est défini à partir de la loi de la déformation et il coïncide avec cette dernière dans la zone de charge totale ( $D_{PT}$ ) pour des chargements proportionnels. Les complaisances élastiques  $M$  et plastiques  $C$  en un point de chargement sont prises égales aux complaisances de la loi de la déformation et sont données par:

$$* \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{M} = \frac{1}{2G} \mathbf{I} + \frac{1-2\nu}{3E} \text{tr}(\mathbf{1}) \\ \mathbf{C} = \frac{3}{2} \left[ \left( \frac{1}{E_S} - \frac{1}{E} \right) \mathbf{I} + \frac{3}{2} \left( \frac{1}{E_T} - \frac{1}{E_S} \right) \frac{\sigma^d \cdot \sigma^d}{\sigma_e^2} \right] \end{array} \right. \quad (\text{II.82})$$

où  $\mathbf{I}$  est le tenseur identité défini en coordonnées cartésiennes par:

$$I_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \cdot \delta_{jl} + \delta_{il} \cdot \delta_{jk}) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \cdot \delta_{kl},$$

$\sigma_e$  est la contrainte équivalente définie par:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_e^2 = \frac{3}{2} \sigma^d \cdot \sigma^d, \\ \sigma^d = \sigma - \frac{1}{3} \text{tr}(\sigma) \cdot \mathbf{1}: \text{le déviateur des contraintes.} \end{array} \right. \quad (\text{II.83})$$

L'axe du cône  $s$  dans l'espace des vitesses de contraintes est colinéaire à  $\sigma^d$  et en vertu de (II.75), (II.82) il s'écrit:

$$s = \left( \frac{1}{E_T} - \frac{1}{E} \right)^{-1/2} \frac{\sigma^d}{\sigma_e} \quad (\text{II.84})$$

L'angle  $\alpha$  du cône est déterminé à partir de (II.76) et (II.82) de la manière suivante :

---


$$* \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos\alpha = \frac{(\frac{1}{E_T} - \frac{1}{E})^{-1/2} \dot{\sigma}_e}{\frac{3}{2} \left[ (\frac{1}{E_S} - \frac{1}{E}) \dot{\sigma}^d \cdot \dot{\sigma}^d + \frac{3}{2} (\frac{1}{E_T} - \frac{1}{E_S}) \dot{\sigma}_e^2 \right]^{1/2}} \\ \text{où: } \sigma_e \cdot \dot{\sigma}_e = \frac{3}{2} \sigma^d \cdot \dot{\sigma}^d \end{array} \right. \quad (\text{II.85})$$

En vertu de (II.81) et (II.82) le potentiel total en vitesse de contraintes s'écrit:

$$\begin{aligned} W(\dot{\sigma}) = & \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2G} + \frac{3}{2} \left( (\frac{1}{E_S} - \frac{1}{E}) f(\alpha) \right) \dot{\sigma}^d \cdot \dot{\sigma}^d \right] + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{E_T} - \frac{1}{E_S} \right) f(\alpha) \dot{\sigma}_e^2 \\ & + \frac{1-2\nu}{6E} \text{tr}(\dot{\sigma})^2 \end{aligned} \quad (\text{II.86})$$

Par suite, il résulte de (II.81) et (II.85) l'expression de la vitesse de la déformation.

## II.8 CONCLUSION - ORIENTATION

*Le flambage des structures élastoplastiques est encore un problème largement ouvert, bien que les premières études remontent à la fin du siècle dernier. Le premier résultat général sur la stabilité des milieux élastoplastiques a été obtenu par Hill [ H<sub>3</sub> ] à la fin des années 1950. Il s'agit d'une condition suffisante d'unicité pour la réponse en vitesses du milieu élastoplastique et elle reste de nos jours à la base des calculs de charge critique pour les problèmes de flambage. Récemment, Nguyen [ N<sub>2</sub> ], Léger et Potier-Ferry [ L<sub>3</sub> ], Cimetière [ C<sub>4</sub> ] ont montré que dans le cadre des milieux standards généralisés, le problème en vitesses peut se mettre sous la forme d'une inéquation variationnelle ce qui conduit à une formulation simple du critère de Hill [ H<sub>3</sub> ].*

*Un problème demeure pourtant jusqu'à nos jours: les charges critiques prédites par la loi incrémentale de la plasticité surestiment les valeurs expérimentales alors que la loi de la déformation donne des résultats en assez bon accord avec l'expérience. Malheureusement la loi de la déformation ne peut pas prendre en compte la décharge élastique et donc les chargements complexes.*

*Une solution possible consiste à remettre en cause les lois classiques d'écoulement plastique, qui distinguent une zone de charge et une zone de décharge. On considère donc ici des lois définies par des relations monotones de degré un entre les vitesses de déformations et de contraintes qui sont générales alors que les lois incrémentales classiques sont définies par une relation linéaire en charge et une autre en décharge. Il faut noter que les modèles polycristallins [ B<sub>3</sub> ], [ F ], [ H<sub>5</sub> ] conduisent naturellement à ce type de comportement et que Christoffersen et Hutchinson [ C<sub>2</sub> ] ont introduit une loi phénoménologique de ce type.*

*Dans la deuxième partie , on va prendre en compte dans les calculs de flambage plastique des lois de comportement complexes avec un potentiel de vitesses qui est homogène de degré deux et on va essayer de déterminer des critères de bifurcation pour ce type de lois sur l'exemple test de l'éprouvette cruciforme.*

**DEUXIÈME PARTIE**

## INTRODUCTION

*Dans cette deuxième partie, on considère des lois de comportement qui sont définies par des relations monotones de degré un entre les vitesses de déformations et de contraintes. L'exemple phénoménologique le plus connu est la loi de type "J<sub>2</sub> avec Coin" de Christoffersen et Hutchinson [C<sub>2</sub>].*

*On se propose d'étudier les bifurcations pour ces lois de comportement complexes sur l'exemple test de l'éprouvette cruciforme. On essaiera dans un premier temps de donner une condition suffisante en vitesses pour le modèle "J<sub>2</sub> avec Coin" sur l'exemple test puis on vérifiera qu'il y a bien une branche bifurquée à partir de la charge critique ainsi déterminée.*

*Dans un deuxième temps, nous étendrons ce critère à des lois de comportement plus générales qui sont définies par des relations homogènes de degré un entre les vitesses de déformations et de contraintes. Sous une hypothèse assez restrictive sur la forme du potentiel, on tentera d'établir que le critère proposé donne une condition nécessaire et suffisante de bifurcation.*

*La fin de cette partie est consacrée au post-flambage de l'éprouvette cruciforme. Le comportement est le modèle "J<sub>2</sub> avec Coin". Pour s'assurer de l'existence de la branche bifurquée, on appliquera une technique asymptotique introduite par Léger et Potier-Ferry [L<sub>3</sub>].*

**CRITÈRES DE FLAMBAGE  
PLASTIQUE AVEC LOIS DE  
COMPORTEMENT COMPLEXES SUR  
L'EXEMPLE DE L'ÉPROUVETTE  
CRUCIFORME**

### III FLAMBAGE PLASTIQUE AVEC LOIS DE COMPORTEMENT COMPLEXES SUR L'EXEMPLE DE L'ÉPROUVETTE CRUCIFORME

On comprend d'après ce qui a précédé que le choix des lois a fait l'objet de controverses et que le mot *paradoxe* ait été employé. On considère ici des lois de comportement qui sont monotones de degré un entre les vitesses de déformations et de contraintes et qui sont générales.

#### III.1 INTRODUCTION

Il s'agit de prendre en compte dans les calculs de flambage plastique des lois de comportement complexes avec un potentiel de vitesses qui est homogène de degré deux. Ces lois sont de plus en plus opérationnelles pour les modèles " self consistent ". L'exemple phénoménologique le plus connu est la loi de type "  $J_2$  avec Coin " de *Christoffersen et Hutchinson* [  $C_2$  ].

On a pris comme exemple test de structure l'éprouvette cruciforme qui flambe en torsion sous l'effet de la seule compression dans le but de pouvoir ramener notre étude à un problème à deux degrés de liberté.

Dans cette première étape, on verra que pour ce type de lois et dans le cas de l'éprouvette cruciforme, le critère de bifurcation n'est pas de la forme:

$$\left\{ \begin{array}{l} a( U, v ) = 0 \\ \text{où } a \text{ est une forme quadratique} \end{array} \right.$$

On va essayer de déterminer ce critère de bifurcation pour le modèle "  $J_2$  avec Coin " sur l'exemple test de structure puis vérifier qu'il y a bien une branche bifurquée à partir de la charge critique ainsi déterminée. Ensuite, moyennant l'hypothèse où la zone de charge totale disparaît du modèle "  $J_2$  avec Coin ", on essayera d'exhiber un cas générique de bifurcation tangente.

Dans une deuxième étape, nous étendrons ce critère à des lois de comportement complexes qui sont définies par des relations homogènes de degré un entre les vitesses de déformations et de contraintes pour essayer d'établir que ce critère est non seulement une condition suffisante, mais aussi une condition nécessaire de bifurcation.

### III.2 MODÉLISATION DU FLAMBAGE DE L'ÉPROUVETTE CRUCIFORME

L'éprouvette cruciforme (cf.Fig.1) est peut être l'exemple de structure le plus simple qui flambe en torsion sous l'effet de la seule compression. De par sa simplicité, on l'a prise comme modèle test dans le but de pouvoir ramener notre étude à un problème à deux degrés de liberté. Pour ce type de modèle, seules les contraintes  $\sigma_{xx}$  et  $\sigma_{xy}$  sont non nulles et on peut prédire a priori la forme de la solution avant flambage, ainsi que celle du mode de flambage et donc utiliser une approximation de Galerkin.

#### III.2.1 Formulation du problème mécanique

Au repos, la structure est supposée mince, est représentée par le volume  $\Omega$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ,  $\Omega = \omega \times I$ ,  $\omega$ , domaine du plan  $\mathbb{R}^2$ ,  $\omega = ]0, L[ \times ]-1, 1[$ , la surface moyenne de la plaque,  $I = ]-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}[$  l'intervalle d'épaisseur ( $h \ll 1$ ),  $(x, y)$  le point générique de  $\omega$  et  $z \in I$  la variable de l'épaisseur. La structure est en appuis simples sur deux côtés et libre sur les deux autres. Elle est soumise à une compression uniaxiale  $\sigma$  suivant la direction  $Ox$  ( cf.Fig.1).

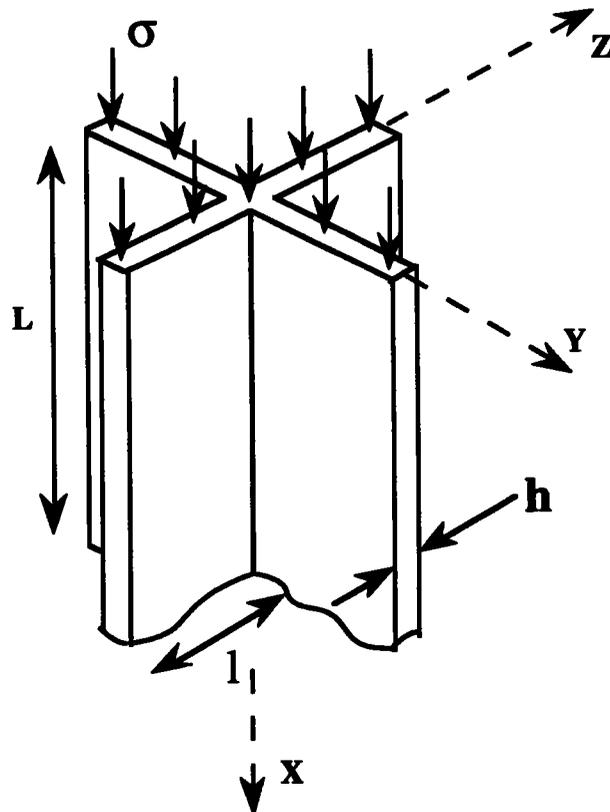


Fig.1: La structure et son chargement

Sous l'effet de la compression, la structure flambe en torsion. Le problème de flambage est caractérisé par:

- { une compression axiale selon la direction Ox avant le flambage,
- { une torsion au moment du flambage.

### III.2.2 Forme générale de la loi de comportement en compression-torsion

On définit la loi de comportement à partir d'une fonction potentielle des vitesses de contraintes:

- { homogène de degré deux,
- { strictement convexe et
- { symétrique.

telle que:

$$\dot{\gamma} = \frac{\partial W}{\partial \dot{\sigma}} \quad \text{avec} \quad W = W(\dot{\sigma}_{xx}, \dot{\sigma}_{xy}) \quad (\text{III.1})$$

#### Commentaires

La relation entre les vitesses de déformations  $\dot{\gamma}$  et de contraintes  $\dot{\sigma}$  est homogène de degré un.

La symétrie de  $W(\dot{\sigma})$  se traduit par :

$$\forall \dot{\sigma}, \quad \text{on a} \quad W(\dot{\sigma}_{xx}, \dot{\sigma}_{xy}) = W(\dot{\sigma}_{xx}, -\dot{\sigma}_{xy}) \quad (\text{III.2})$$

La loi de comportement ( III.1) permet de distinguer plusieurs cas. Dans *le cas classique*, on distingue deux zones suivant la direction de  $\dot{\sigma}$  ( cf.Fig.2.(a) ). Le potentiel est quadratique dans chacune de ces zones et continu à l'interface pour respecter la convexité de la fonction potentielle.

### Orientation

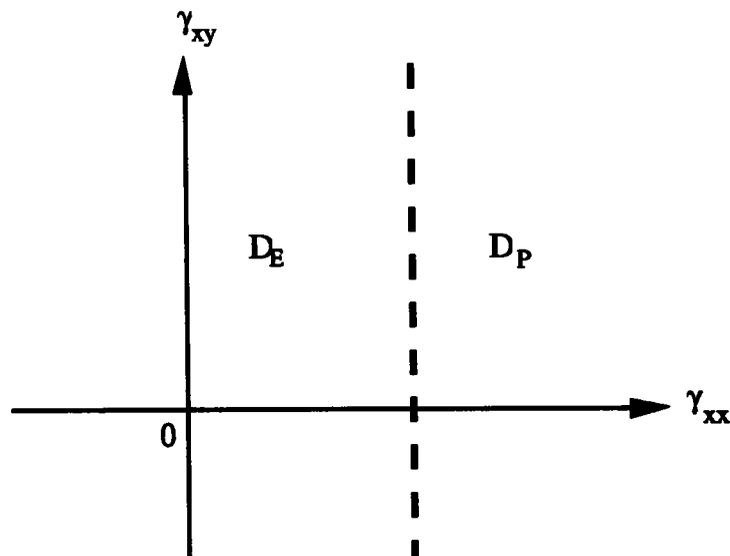
On essaie de voir ce qui se passe pour une loi à deux zones ( cas classique ). Dans ce cas, dans le plan des vitesses des déformations le potentiel s'exprime de la manière suivante:

$$W^*(\dot{\gamma}_{xx}, \dot{\gamma}_{xy}) = \begin{cases} E\dot{\gamma}_{xx}^2 + G\dot{\gamma}_{xy}^2 & (D_E) \\ E_T \dot{\gamma}_{xx}^2 + \mathbb{G}\dot{\gamma}_{xy}^2 & (D_P) \end{cases}$$

En vertu de la continuité on obtient:

$$G = \mathbb{G}$$

Donc *le module de cisaillement*  $\mathbb{G}$  est le module de cisaillement élastique et n'est donc pas affecté de la plasticité . A cet effet, on rejette ce type de lois ( la loi incrémentale à deux zones ) et on prendra en compte pour la suite des lois de comportement non classiques (dites lois complexes).

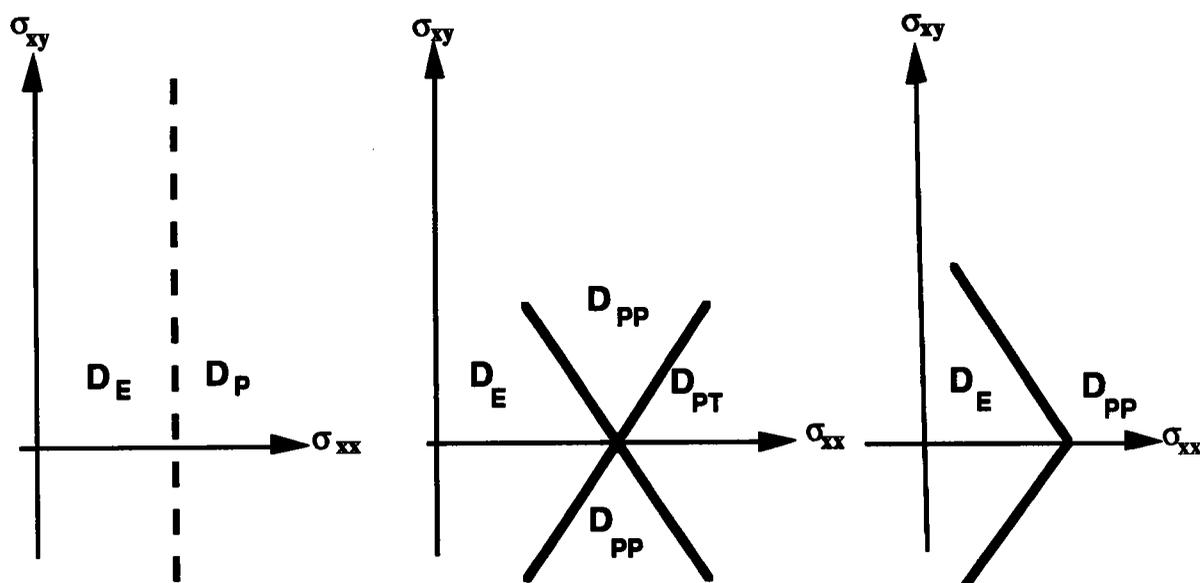


Loi à deux zones ( cas classique )

Dans *les cas non classiques*, deux situations se prèsentent.

Pour *la première* on distingue trois zones suivant la direction de  $\dot{\sigma}$  ( cf.Fig.2.(b) ), le potentiel est quadratique dans la zone de charge totale ( $D_{PT}$ ) et dans celle de décharge élastique ( $D_E$ ) et il est quelconque dans une zone intermédiaire dite zone de charge partielle ( $D_{PP}$ ). Il est continu à l'interface entre ces zones pour respecter la convexité de la fonction potentielle.

Pour *la seconde*, on distingue seulement deux zones ( cf.Fig.2.(c) ) et le potentiel est quadratique dans la zone de décharge élastique ( $D_E$ ), quelconque dans la zone de charge partielle ( $D_{PP}$ ) et continu à l'interface en sorte que la convexité de la fonction potentielle soit respectée.



(a) " Cas classique "    (b) "  $J_2$  avec Coin "    (c) " Absence de zone de charge totale "

$\left\{ \begin{array}{l} D_E : \text{zone de décharge élastique} \\ D_P : \text{zone de charge plastique} \\ D_{PT} : \text{zone de charge totale} \\ D_{PP} : \text{zone de charge partielle} \end{array} \right.$

Fig.2: Trois types de lois incrémentales

### III.2.3 Équations gouvernant le flambage

L'éprouvette cruciforme est une structure constituée par deux plaques minces soudées en leur milieu. L'étude du flambage de l'éprouvette cruciforme revient en fait à l'étude du flambage d'une plaque rectangulaire en appui simple sur deux côtés et libre sur les deux autres ( cf. Fig.3).

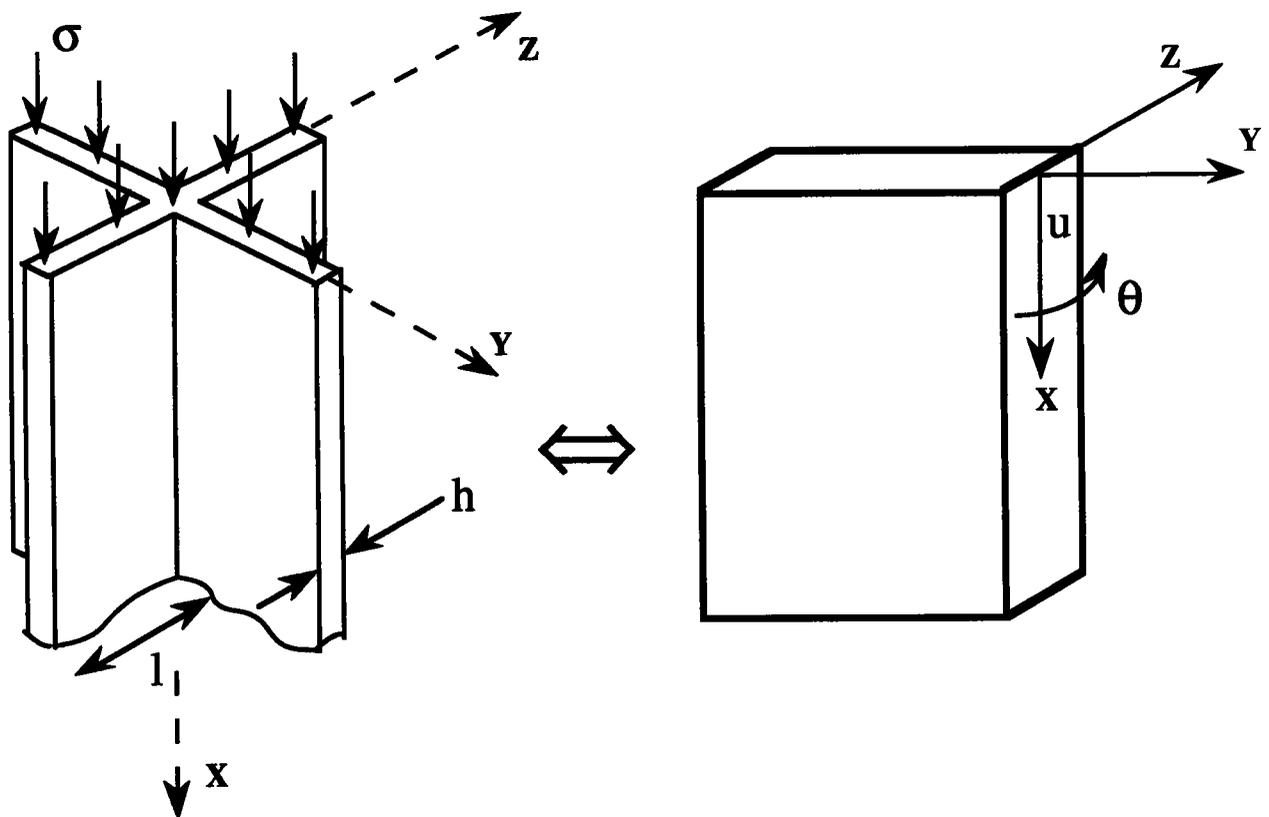


Fig.3 : L'état de référence de la structure

A cet effet, on se met en théorie non linéaire des plaques de Von-Karman. Compte tenu de sa faible épaisseur, la structure est assimilée à son feuillet moyen. Le mode de flambage est approché de la manière suivante:

$$w(x,y) = \frac{xy}{L} \theta \quad (\text{III.3})$$

où  $\theta$  est un paramètre lié à la torsion et  $L$  est la longueur de la plaque. Nous supposons que le déplacement de la surface moyenne ne dépend que de deux paramètres  $u$  (lié à la compression) et  $\theta$  (lié à la torsion) de la manière suivante:

$$\mathbf{u}(x, y) = \left( -\frac{x}{L} u, 0, \frac{1}{L} xy\theta \right) \quad (\text{III.4})$$

### Remarque

*Les composantes du déplacement (Love Kirchhoff) suivant les trois directions sont telles que:*

$$\begin{cases} \mathbf{u}_\alpha(x, y, z) = \mathbf{u}_\alpha(x, y) - zw_{,\alpha}(x, y) , \quad \alpha = 1, 2 \\ \mathbf{u}_3(x, y, z) = w(x, y) \end{cases} \quad (\text{III.5})$$

où  $(\mathbf{u}_\alpha)$  est le déplacement plan,  $w$  étant la déflexion et le symbole  $w_{,\alpha}$  désigne la dérivée partielle de  $w$  par rapport à la variable  $x_\alpha$

La déformation (Green Lagrange) est:

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\mathbf{u}_{\alpha,\beta} + \mathbf{u}_{\beta,\alpha} + w_{,\alpha} w_{,\beta}) - z w_{,\alpha\beta} , \quad \alpha, \beta = 1, 2 \quad (\text{III.6})$$

En vertu de (III.4) et de (III.6), les seules composantes non nulles de la déformation traduisant la compression et la torsion sont:

$$\begin{cases} \gamma_{xx} = -\frac{u}{L} + \frac{y^2}{2L^2} \theta^2 \\ \gamma_{xy} = -\frac{z}{L} \theta + \frac{xy}{2L^2} \theta^2 \end{cases} \quad (\text{III.7})$$

Les composantes du taux de déformation associées sont:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\gamma}_{xx} = - \frac{\dot{u}}{L} + \frac{y^2}{L^2} \theta \dot{\theta} \\ \dot{\gamma}_{xy} = - z \frac{\dot{\theta}}{L} + \frac{xy}{L^2} \theta \dot{\theta} \end{array} \right. \quad (\text{III.8})$$

### Remarque

Comme le déplacement  $(u_i)$ ,  $\gamma$  est définie sur le domaine plan  $\omega$ .

En vertu de (III.7), on remarque que les composantes de la déformation dépendent des trois variables d'espace. Or la forme linéarisée de (III.7) s'écrit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{xx} = - \frac{u}{L} \\ \gamma_{xy} = - \frac{z}{L} \theta \end{array} \right.$$

et ne dépend que de la variable de l'épaisseur. C'est pourquoi nous supposons que les parties membrane et flexion de la plaque ne vont dépendre que de la variable de l'épaisseur  $(|z| \leq \frac{h}{2})$ .

### **Équations d'équilibre**

On rappelle l'expression tridimensionnelle du principe des puissances virtuelles :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{\text{int}}(\delta u) + P_{\text{ext}}(\delta u) = 0 \quad \forall \delta u \text{ C.A.} \quad (\text{III.9}) \\ P_{\text{int}}(\delta u) = - \int_{\Omega} \sigma_{\alpha\beta} \delta \gamma_{\alpha\beta} d\Omega \quad \text{avec } \alpha, \beta = 1, 2 \quad (\text{III.10}) \end{array} \right.$$

Comme seules les contraintes  $\sigma_{xx}$  et  $\sigma_{xy}$  sont non nulles dans le modèle, la contrainte axiale est telle que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = -\frac{\lambda}{2lh} \\ \text{où } \lambda \text{ est la force appliquée} \end{array} \right. \quad (\text{III.11})$$

Le principe des puissances virtuelles peut donc se réécrire en termes de théorie des plaques de la manière suivante:

$$\left[ \begin{array}{l} 2 \int_{\omega} M_{xy} \delta \kappa_{xy} d\omega + \int_{\omega} N_{xx} \delta \gamma_{xx} d\omega = \lambda \delta u(L) \\ \text{où:} \\ \left\{ \begin{array}{l} N_{xx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} dz : \text{la contrainte résultante} \\ M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_{xy} dz : \text{le moment de torsion} \\ \kappa_{xy} = -\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} : \text{la courbure due à la torsion} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (\text{III.12})$$

Depuis les travaux de *Shanley* [ $S_2$ ], on sait que la bonne approche pour étudier les bifurcations plastiques consiste à travailler en vitesses, vitesse de déformation et de contrainte. A cet effet, on dérive (III.12) avec  $\delta u$  constant et en vertu de (III.4) , (III.7) l'équilibre incrémental s'exprime par:

$$\left[ \begin{aligned} & -\frac{2}{L} \int_{\omega} \dot{M}_{xy} \delta \theta \, d\omega + \int_{\omega} \dot{N}_{xx} \left( -\frac{\delta u}{L} + y^2 \frac{\theta \delta \theta}{L^2} \right) \, d\omega - \frac{\lambda}{2IL^2} \int_{\omega} y^2 \dot{\theta} \delta \theta \, d\omega \\ & = \lambda \delta u(L) , \qquad \qquad \qquad \forall \delta u \text{ C.A.} \end{aligned} \right. \quad \text{(III.13)}$$

$$\text{avec: } \left\{ \begin{aligned} \dot{N}_{xx} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \dot{\sigma}_{xx} \, dz \\ \dot{M}_{xy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \dot{\sigma}_{xy} \, dz \end{aligned} \right.$$

\*

\* *Shanley F.* (1947)

Approche: étude des bifurcations plastiques à partir des vitesses.

### III.3 PROBLÈME EN VITESSES

Dans le paragraphe précédent, nous avons mis en évidence les équations traduisant l'équilibre. Pour une simplicité de manipulation et compte-tenu de la convexité de la fonction  $W(\dot{\sigma})$  on essaiera dans ce qui suit, de donner la formulation de ces équations en vitesses des déformations.

#### III.3.1 Loi de comportement

La loi de comportement (III.1) s'inverse par la transformée de Legendre ( $W^*(\dot{\gamma}) = \dot{\sigma} \cdot \dot{\gamma} - W(\dot{\sigma})$ ) et donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\sigma} = \frac{\partial W^*}{\partial \dot{\gamma}} \quad \text{avec} \quad W^* = W^*(\dot{\gamma}_{xx}, \dot{\gamma}_{xy}) \\ \text{où } W^* \text{ est la fonction conjuguée de } W \end{array} \right. \quad (\text{III.14})$$

#### Commentaire

*Compte tenu de la dualité, le potentiel  $W^*(\dot{\gamma})$  est aussi homogène de degré deux, strictement convexe et symétrique.*

*La relation (III.14) se traduit par:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta W^*(\dot{\gamma}_{xx}, \dot{\gamma}_{xy}) = 2\dot{\sigma}_{xy} \delta \dot{\gamma}_{xy} + \dot{\sigma}_{xx} \delta \dot{\gamma}_{xx} \\ \text{ou encore par:} \\ \dot{\sigma}_{xx} = \frac{\partial W^*}{\partial \dot{\gamma}_{xx}} \quad \text{et} \quad 2\dot{\sigma}_{xy} = \frac{\partial W^*}{\partial \dot{\gamma}_{xy}} \end{array} \right. \quad (\text{III.15})$$

Dans le paragraphe qui suit, nous nous concentrerons plus particulièrement sur les méthodes dites variationnelles qui permettent d'obtenir des résultats globaux d'existence de solutions de problèmes non-linéaires ayant une structure variationnelle.

### III.3.2 Formulation variationnelle: problème en vitesses

L'état actuel étant supposé connu, les vitesses de déplacement  $\dot{u}$  et de contraintes  $\dot{\sigma}$  s'expriment en fonction de  $\dot{\lambda}$  ou par la résolution d'un problème aux limites, appelé problème en vitesses.

La loi de comportement (III.14) et l'équation d'équilibre incrémentale (III.13) permettent de formuler le problème en vitesses sous forme variationnelle:

$$\delta \left\{ \int_{\Omega} W^*(\dot{\gamma}(\dot{u})) d\Omega - \lambda \frac{l^2}{6L} \dot{\theta}^2 - \dot{\lambda} \dot{u} \right\} = 0 \quad (\text{III.16})$$

En vertu de (III.16), la solution  $(\dot{u}, \dot{\theta})$  rend stationnaire la fonction suivante:

$$\begin{cases} J(\lambda, \dot{\lambda}; \dot{u}, \dot{\theta}) = \int_{\Omega} W^*(\dot{\gamma}(\dot{u}, \dot{\theta})) d\Omega - \lambda \frac{l^2}{6L} \dot{\theta}^2 - \dot{\lambda} \dot{u} \\ W^*(\dot{\gamma}) = \dot{\sigma} \cdot \dot{\gamma} - W(\dot{\sigma}) \end{cases} \quad (\text{III.17})$$

\*

---

\* Les solutions du problème en vitesses dépendent de la convexité de la fonction  $J(\dot{u}, \dot{\theta})$ .

## Commentaires

La fonction  $\int_{\Omega} W^*(\dot{\gamma}) d\Omega$  est strictement convexe puisque le

potentiel  $W^*(\dot{\gamma})$  l'est. En vertu de (III.17), on distingue deux cas selon le signe de  $\lambda$ .

**Dans le cas où  $\lambda$  est négatif (traction):**

la fonction  $J(\lambda, \dot{\lambda}; \dot{u}, \dot{\theta})$  est strictement convexe en vitesses et le problème:

$$\begin{aligned} & \text{Min } J(\dot{u}, \dot{\theta}) \\ & (\dot{u}, \dot{\theta}) \end{aligned}$$

a une solution unique. Il y a donc une seule vitesse possible qui correspond à la compression. Selon le critère de non-bifurcation de Hill, nous supposerons qu'il n'y a pas de branche bifurquée dans cette zone .

**Dans le cas où  $\lambda$  est positif et assez grand:**

la fonction  $J(\dot{u}, \dot{\theta})$  n'est plus forcément convexe et le problème en vitesses peut avoir plusieurs solutions.

Dans ce qui suit, nous présenterons des résultats typiques de flambage sur des modèles de lois de comportement classiques.

### III.3.2.1 Application: flambage avec les lois classiques

On sait que les lois de comportement basées sur le critère de *Von-Mises* surestiment la charge critique de flambage. Le potentiel pour ces lois est homogène de degré deux et quadratique par morceaux. L'état critique est déterminé à partir du critère

$$\left[ \begin{array}{l} a( U, v ) = 0 \\ \\ \text{où } a \text{ est une forme quadratique} \end{array} \right. \quad ( \text{ III.18} )$$

La forme quadratique  $a$  est définie à partir de:

$$\left\{ \begin{array}{l} a(v, v) = A \dot{u}^2 + ( B - C \lambda ) \dot{\theta}^2 \\ \text{où } v = {}^t( \dot{u}, \dot{\theta} ) \\ \\ \text{avec : } \left\{ \begin{array}{l} A = C_1 \int_{\Omega} d\Omega \\ B = C_2 \int_{\Omega} z^2 d\Omega \\ C = \frac{l^2}{6L} \end{array} \right. \quad \text{où : } \left[ \begin{array}{l} C_1 \text{ et } C_2 \text{ étant des constantes} \\ \text{qui seront précisées plus loin} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad ( \text{ III.19} )$$

Pour la loi *incrémentale* et dans le cas de l'éprouvette cruciforme, le potentiel est donné à partir de ( III.8), s'écrit dans la zone de charge plastique (  $\dot{u} < 0$ ):

$$W^*(z, \dot{u}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2L^2} (E_T \dot{u}^2 + 4z^2 G \dot{\theta}^2) \quad (\text{III.20})$$

et ne dépend que de la variable de l'épaisseur. Dans la zone de décharge élastique ( $D_E$ ), il faut remplacer le module tangent par le module élastique  $E$ . On reporte (III.20) dans (III.19) et après intégration sur  $\Omega$ , on obtient la fonction caractéristique du problème global (dans la zone de charge):

$$\left\{ \begin{array}{l} a(v, v) = \frac{1h}{L} E_T \dot{u}^2 + \frac{1h^3}{3L} G \dot{\theta}^2 - \frac{1^2}{6L} \lambda \dot{\theta}^2 \\ \text{où } {}^t v = (\dot{u}, \dot{\theta}) \end{array} \right. \quad (\text{III.21})$$

La valeur de la contrainte critique est donnée à partir de (III.18) et (III.21). Elle est liée seulement au module de cisaillement élastique  $G$  de la manière suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_c = G \left( \frac{h}{l} \right)^2, \\ G \text{ étant le module de cisaillement élastique.} \end{array} \right. \quad (\text{III.22})$$

On retrouve ainsi la même valeur de la contrainte critique qu'en élasticité.

Tandis que pour *la loi de la déformation*, le potentiel est donné à partir de (III.8) ne dépend aussi que de la variable de l'épaisseur et s'exprime par:

$$W^*(z, \dot{u}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2L^2} (E_T \dot{u}^2 + 4z^2 G_S \dot{\theta}^2) \quad (\text{III.23})$$

Le second membre de (III.23) est fonction du module de cisaillement sécant  $G_S$ . On reporte (III.23) dans (III.19) et après intégration sur  $\Omega$ , on a la fonction caractéristique du problème global :

$$\left\{ \begin{array}{l} a(v, v) = \frac{1h}{L} E_T \dot{u}^2 + \frac{1h^3}{3L} G_S \dot{\theta}^2 - \frac{1^2}{6L} \lambda \dot{\theta}^2 \\ \text{où } t_v = ( \dot{u}, \dot{\theta} ) \end{array} \right. \quad (\text{III.24})$$

La valeur de la contrainte critique est donnée à partir de (III.18) et (III.24). Elle est liée au *module de cisaillement sécant*  $G_S$  de la manière suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_c = G_S \left( \frac{h}{l} \right)^2 \\ \text{avec} \\ \frac{G_S}{G} = \left\{ 1 + 3 G \left( \frac{1}{E_S} - \frac{1}{E} \right) \right\}^{-1} \end{array} \right. \quad (\text{III.25})$$

### III.3.2.2 Discussion

*Nous venons de retrouver les mêmes résultats que ceux donnés dans la littérature pour les calculs de charges critiques pour ce modèle de lois de comportement.*

*Pour la loi incrémentale, le module de cisaillement reste le module élastique et n'est donc pas affecté par la plasticité! Ce résultat mathématiquement exact paraît discutable en ce sens qu'il contredit un certain bon sens, d'ailleurs vérifié par les expériences sur les poutres cruciformes. Il y a donc un réel problème. C'est à propos d'un tel exemple qu'on a pu prononcer le mot paradoxe, comme Bushnell ([ B<sub>7</sub>], [ B<sub>8</sub> ]) a intitulé un de ses articles " the flow theory versus deformation theory paradox ".*

*Pour la loi de la déformation, la charge critique est liée au module de cisaillement sécant ( correspondant au module réduit). Elle fournit une estimation plus basse de la charge critique de flambage que la loi incrémentale. On sait, par ailleurs que les lois de type déformation conduisent à de très bons résultats pratiques mais uniquement en chargement proportionnel. C'est ce dernier choix de module de cisaillement  $G_S$  qu'on retrouve dans le programme Bosor de Bushnell [ B<sub>8</sub> ]. Quoique moins paradoxal, ce choix plus satisfaisant n'est pas complètement justifié.*

*En fait, les lois de comportement incrémentales classiques ne sont guère adaptées pour rendre compte de bifurcations. C'est pourquoi Christoffersen et Hutchinson (1979) [ C<sub>2</sub> ] avaient introduit un modèle appelé "J<sub>2</sub> avec Coin " qui est une vraie loi incrémentale et qui coïncide avec la loi de la déformation pour des chargements proportionnels. Inspirés par les modèles polycristallins (voir par exemple Berveiller et Zaoui (1979) [ B<sub>3</sub> ], Hutchinson (1970) [ H<sub>5</sub> ]) , ce modèle ne distingue pas seulement une zone de charge plastique et une zone de décharge élastique mais introduit une zone intermédiaire dite de charge partielle.*

*Notre prochain souci sera d'étudier les bifurcations avec des lois de comportement complexes qui sont définies par des relations monotones de degré un entre les vitesses de déformations et de contraintes sur l'exemple test de l'éprouvette cruciforme.*

### III.4 CRITÈRES DE FLAMBAGE PLASTIQUE AVEC LOI DE COMPORTEMENT COMPLEXES

Dans cette section, on essaie dans un premier temps d'étudier les bifurcations sur l'exemple test de l'éprouvette cruciforme pour le modèle "  $J_2$  avec Coin " en compression-torsion.

Dans un deuxième temps, on étend ce critère à des lois de comportement complexes qui sont définies par des relations homogènes de degré un entre les vitesses de déformations et de contraintes.

#### III.4.1 Modèle " $J_2$ avec Coin " en compression-torsion

En vertu de (II.86) et de la cinématique de l'éprouvette cruciforme, la relation entre les vitesses de contraintes et de déformations pour le modèle "  $J_2$  avec Coin " est donnée à partir du potentiel de vitesses de contraintes qui s'exprime par:

$$\left\{ \begin{array}{l} W(\dot{\sigma}) = \frac{1}{4G} Q(\beta) \left\{ \frac{2}{3} \dot{\sigma}_{xx}^2 + 2 \dot{\sigma}_{xy}^2 \right\} + \frac{1-2\nu}{6E} \dot{\sigma}_{xx}^2 \\ \text{avec} \\ Q(\beta) = 1 + 3Gf(\alpha) \left\{ \left( \frac{1}{E_T} - \frac{1}{E} \right) \cos^2 \beta + \left( \frac{1}{E_S} - \frac{1}{E} \right) \sin^2 \beta \right\} \end{array} \right. \quad (\text{III.26})$$

où la fonction  $f(\alpha)$  est supposée décroissante de 1 à 0.

Le potentiel  $W(\dot{\sigma})$  est homogène de degré deux et strictement convexe. Les angles  $\alpha$  et  $\beta$  sont des fonctions homogènes de degré zéro, définies dans le même plan de vitesses de contraintes et liées par la relation:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tan(\alpha) = a^{1/2} \tan(\beta) \\ \text{avec} \\ a = \left( \frac{E}{E_S} - 1 \right) \left( \frac{E}{E_T} - 1 \right)^{-1} \end{array} \right. \quad (\text{III.27})$$

Le potentiel défini dans (III.26) s'inverse par la transformée de Legendre et s'écrit dans le plan de vitesse des déformations:

$$W^*(\dot{\gamma}) = Gg(\phi) \left\{ \frac{2}{3} \dot{\gamma}_{xx}^2 + 2 \dot{\gamma}_{xy}^2 \right\} + \frac{E}{6(1-2\nu)} \dot{\gamma}_{xx}^2 \quad (\text{III.28})$$

En vertu de la dualité, la relation entre les angles  $\alpha$  (resp  $\beta$ ) et  $\phi$  qui est donnée par :

$$\tan(\beta - \phi) = -\frac{1}{2} \frac{dQ}{Q d\beta} \quad (\text{III.29})$$

L'angle  $\phi(\dot{\gamma})$  est défini dans le plan de vitesse de déformations, homogène de degré zéro et permet de distinguer trois zones suivant la direction de  $\dot{\gamma}$  (cf.Fig.4).

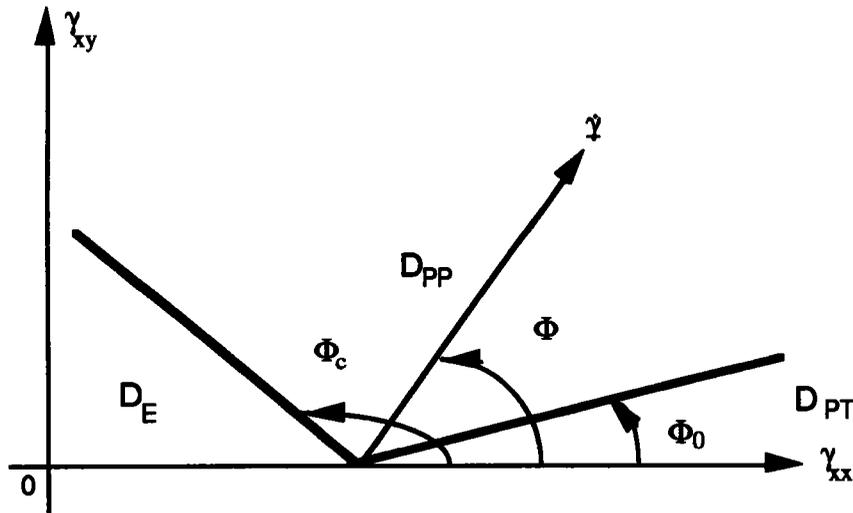


Fig.4: Caractérisation du vertex par la mesure de l'angle  $\phi$ .

### Remarques

Connaissant la fonction  $f(\alpha)$ , on peut déterminer explicitement l'angle  $\phi$  en fonction de l'angle  $\beta$  (resp.  $\alpha$ ) d'après la relation (III.29).

L'angle  $\phi$  croît de façon monotone avec l'angle  $\beta$  (resp.  $\alpha$ ) où  $0 \leq \phi \leq \pi$ .

En vertu de la dualité, la fonction  $g(\phi)$  est décroissante et continue et elle est donnée par :

$$g(\phi) = \frac{\cos^2(\beta - \phi)}{Q(\beta)} \quad (\text{III.30})$$

### III.4.2 Problème en vitesses spécifique au modèle

### " J<sub>2</sub> avec Coin "

Dans ce qui suit, on donne la formulation du problème global en vitesses à deux degrés de liberté.

#### III.4.2.1 Formulation du problème en vitesses en ( $\dot{u}$ , $\dot{\theta}$ )

Nous savons désormais d'après la cinématique de l'éprouvette cruciforme que la forme linéarisée de la déformation ne dépend que de  $\dot{u}$  (compression) de  $\dot{\theta}$  (torsion) et de la variable de l'épaisseur  $z$  de la manière suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\gamma}_{xx} = - \frac{\dot{u}}{L} \\ \dot{\gamma}_{xy} = - z \frac{\dot{\theta}}{L} \end{array} \right. \quad (\text{III.31})$$

L'angle  $\phi(z, \dot{u}, \dot{\theta})$  dans le plan de vitesse des déformations est défini à partir de (III.31) par:

$$\tan(\phi) = z \frac{\dot{\theta}}{\dot{u}} \quad (\text{III.32})$$

On reporte (III.31) dans (III.28), on obtient l'expression du potentiel dans la zone de charge plastique:

$$W^*(z, \dot{u}, \dot{\theta}) = \frac{E}{6(1-2\nu)L^2} \dot{u}^2 + G g(\phi) \left( \frac{2}{3L^2} \dot{u}^2 + \frac{2}{L^2} z^2 \dot{\theta}^2 \right) \quad (\text{III.33})$$

où la fonction  $g(\phi)$  dépend de la loi de comportement, est paire pour raison de symétrie et satisfait la relation:

$$\begin{cases} g(\phi) Q(\beta) = \cos^2(\beta - \phi) \\ \text{avec} \\ g'(0) = 0 \end{cases} \quad (\text{III.34})$$

**Remarque**

*Le potentiel  $W^*(z, \dot{u}, \dot{\theta})$  est homogène de degré deux mais n'est pas quadratique puisqu'il est fonction de  $\phi(z, \dot{u}, \dot{\theta})$ . La fonction  $\phi$  est supposée dérivable en  $(\dot{u}, \dot{\theta})$ .*

En vertu de la dérivabilité de la fonction  $\phi(z, \dot{u}, \dot{\theta})$  et de (III.32) on a:

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial \dot{u}} = -\frac{1}{2\dot{u}} \sin(2\phi) \\ \frac{\partial \phi}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{2\dot{\theta}} \sin(2\phi) \end{cases} \quad (\text{III.35})$$

On reporte (III.28) dans (III.17) et compte tenu (III.32), on obtient après une intégration sur  $\omega$  la fonction  $J(\lambda, \dot{\lambda}; \dot{u}, \dot{\theta})$  caractéristique du problème global qui s'exprime de la manière suivante:

$$J(\lambda, \dot{\lambda}; \dot{u}, \dot{\theta}) = W(\dot{u}, \dot{\theta}) - D\lambda \dot{\theta}^2 - \dot{\lambda} \dot{u}$$

avec

$$W(\dot{u}, \dot{\theta}) = A\dot{u}^2 + B\dot{u}^2 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} g(\phi) dz + C\dot{\theta}^2 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 g(\phi) dz \quad (\text{III.36})$$

où l'angle  $\phi(z, \dot{u}, \dot{\theta})$  est donné par  $\tan(\phi) = z \frac{\dot{\theta}}{\dot{u}}$ ,

$$A = \frac{1h}{3L(1-2\nu)} E, \quad B = \frac{41}{3L} G, \quad C = \frac{41}{L} G, \quad D = \frac{1^2}{6L}$$

### Commentaires

*Le deuxième et le troisième terme de la fonction*

*$W(\dot{u}, \dot{\theta})$  sont homogènes de degré deux mais non quadratiques car les intégrales dépendent de la fonction  $\phi$ .*

*Dans les études classiques, on sait que le critère de non-bifurcation de Hill conduit au critère de la seconde variation et peut s'exprimer de la manière suivante:*

$$\text{Min}_{\dot{u}, \delta \dot{u}} \delta^2 J(\lambda, \dot{\lambda}; \dot{u}, \delta \dot{u}) > 0$$

*Ici, la situation est un peu complexe car la fonction  $J$  dépend de l'angle  $\phi$ . La forme de la fonctionnelle  $J$  fait penser au critère de l'énergie potentielle en élasticité.*

*Dans ce qui suit, on essayera de caractériser la charge critique par un critère de type seconde variation. A travers la démarche qu'on adoptera pour caractériser la bifurcation, on*

*verra que l'intégrale:*

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 g(\phi) dz$$

*joue un rôle décisif dans le calcul de la charge critique et dans l'évolution de la zone de charge partielle.*

Les réponses en vitesses de déplacement sont données par les points stationnaires de la fonctionnelle J.

### Équations en vitesses

En vertu de (III.35) et (III.36), un calcul d'extréma de la fonction J( $\dot{u}$ ,  $\dot{\theta}$ ) donne les équations en vitesses qui s'expriment de la manière suivante:

$$\begin{cases} a(\phi) \dot{u} & + & b(\phi) \dot{\theta} & = & \dot{\lambda} \\ c(\phi) \dot{u} & + & (d(\phi) - \lambda) \dot{\theta} & = & 0 \end{cases} \quad (\text{III.37})$$

où  $a(\phi)$ ,  $b(\phi)$ ,  $c(\phi)$  et  $d(\phi)$  sont des fonctions qui dépendent de la loi de comportement. Elles sont données par:

$$\left[ \begin{aligned}
 a(\phi) &= \frac{2lh}{3L(1-2\nu)} E + \frac{8l}{3L} G \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} g(\phi) dz - \frac{2}{3} \frac{1}{L} G \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sin(2\phi) g'(\phi) dz \\
 b(\phi) &= - \frac{4l}{L} G \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sin^2(\phi) g'(\phi) dz \\
 c(\phi) &= \frac{4l}{3L} G \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \cos^2(\phi) g'(\phi) dz \\
 d(\phi) &= \frac{2}{1} \frac{4}{1} G \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 g(\phi) dz + \frac{6}{1} G \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 \sin(2\phi) g'(\phi) dz
 \end{aligned} \right.$$

La solution :

$$\left\{ \begin{aligned}
 \dot{u}_F &= a^{-1} \text{ où } a = \frac{2}{3} \frac{lh}{L(1-2\nu)} E + \frac{8l}{3L} G g(0) h \\
 \dot{\theta}_F &= 0 \\
 (\cdot) &= \frac{d(\cdot)}{d\lambda} \text{ et } g(0) \text{ est donnée dans (III.34)}
 \end{aligned} \right.$$

est la solution triviale des équations en vitesses (III.37) et correspond à la position rectiligne. Elle est appelée *solution fondamentale*.

## Orientation

*Au niveau de la loi de comportement, nous avons introduit dans le plan des vitesses de déformations des zones coniques où la loi de comportement est linéaire: c'est le cas de la zone de décharge élastique ou de la zone de charge totale. On retrouve ces zones de linéarité au niveau global (variables  $\dot{u}, \theta$ ) si toute la structure est dans une même zone et elles vont jouer un grand rôle dans notre argumentation.*

En vertu de (III.36) et (III.37), la notion de zone de linéarité sera définie de la manière suivante:

### Définition

On appelle *zone de linéarité* (notée  $Z_L$ ) une zone de  $R^2$  où la relation:

$$\dot{u} \rightarrow \nabla W(\dot{u}) \text{ est linéaire}$$

Dans le prochain paragraphe, on essaiera à partir du problème en vitesses (III.37) d'introduire la démarche qu'on adoptera pour caractérisation de la première charge de bifurcation.

### III.4.2.2 Critères de bifurcation

Par souci de simplicité, il s'agit pour la suite de se donner un mode de raisonnement en se basant:

{ d'une part, sur la règle caractérisant la bifurcation(cf.III.4.2.2.1)  
et d'autre part, sur les principaux résultats de convexité liés au problème(cf.III.4.2.2.2)

### III.4.2.2.1 Bifurcation

On rappelle que:

{ la bifurcation est dite *transverse* si elle correspond  
 à des vitesses différentes ( cf.Fig.5.(a)).  
 Elle est dite *tangente* si les deux branches sont  
 tangentes au point de bifurcation ( cf. Fig.5.(b)).

Dans la suite, on va chercher à caractériser les charges critiques en supposant qu'il existe au moins deux vitesses, c'est-à-dire en cherchant des bifurcations transverses. Ceci semble exclure les bifurcations tangentes qui sont génériques. Nous verrons qu'il n'en est rien.

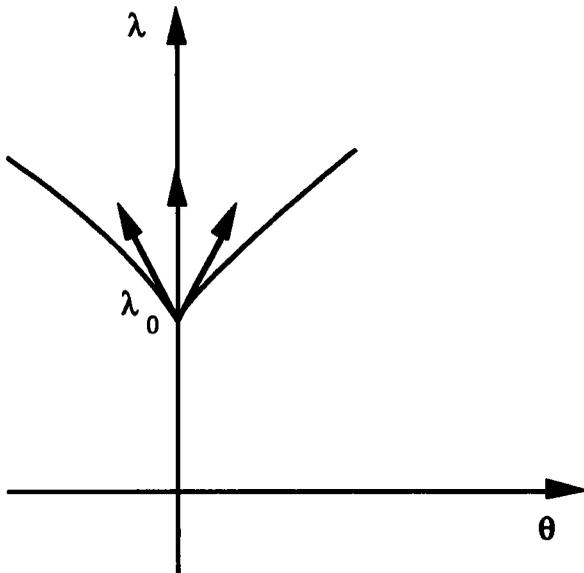


Fig.5.(a)

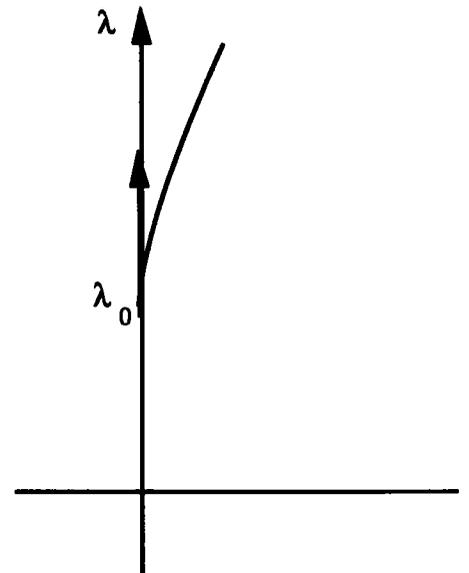


Fig.5.(b)

{ Fig.5.(a): **Vitesses différentes**  $\Rightarrow$  **bifurcation transverse**  
 Fig.5.(b): **Vitesse unique**  $\Rightarrow$  **bifurcation tangente**

Historiquement, *Triantafyllidis* (1983) [ $T_1$ ] a étudié le premier ce type de bifurcation sur un système mécanique (une variante de la poutre de *Hutchinson* [ $H_4$ ] (cf. Fig. 11 (II.4.1.3)). Il a obtenu une expression asymptotique de la solution bifurquée, et a montré ainsi qu'il existe bien une branche bifurquée tangente dès la charge  $\lambda_0$ . Il affirmait qu'avec des chargements complexes, ces bifurcations tangentes pouvaient être aussi fréquentes que celles analysées par *Shanley et Hutchinson*. Ce cas générique de bifurcation a été aussi étudiée par *Léger et Potier-Ferry* [ $L_3$ ], *Nguyen et Triantafyllidis* ainsi que par *Cimetière* [ $C_4$ ]. Plus loin, on verra aussi dans notre étude ce cas générique de bifurcation tangente.

Pour la suite, on admet que les bifurcations sont du type suivant:

### Définition

La bifurcation en  $\lambda_0$  sera dite régulière d'exposant  $\alpha (\alpha > -1)$  si la branche bifurquée  $u_B(\lambda)$  et la branche fondamentale  $u_F(\lambda)$  sont:

$$\left. \begin{array}{l} \text{continues pour } \lambda \geq \lambda_0 \text{ et dérivables pour } \lambda > \lambda_0 \\ \frac{\dot{u}_B(\lambda) - \dot{u}_F(\lambda)}{(\lambda - \lambda_0)^\alpha} \rightarrow U \quad (U \neq 0) \text{ quand } \lambda \rightarrow \lambda_0 \end{array} \right\}$$

### Conséquence

En vertu de la définition et après intégration par rapport à  $\lambda$  on obtient:

$$u_B(\lambda) - u_F(\lambda) = U \frac{(\lambda - \lambda_0)^{\alpha+1}}{1+\alpha} + \dots$$

### Cas particuliers

En vertu de cette dernière relation et selon les valeurs de  $\alpha$ , la bifurcation est:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{transverse pour } \alpha = 0 \text{ ( cf.Fig.5.(a))} \\ \text{tangente pour } \alpha > 0 \text{ ( cf.Fig.5.(b))} \\ \text{de type symétrique élastique pour } \alpha = -\frac{1}{2} \text{ ( cf.Fig.5.(c))} \end{array} \right.$$

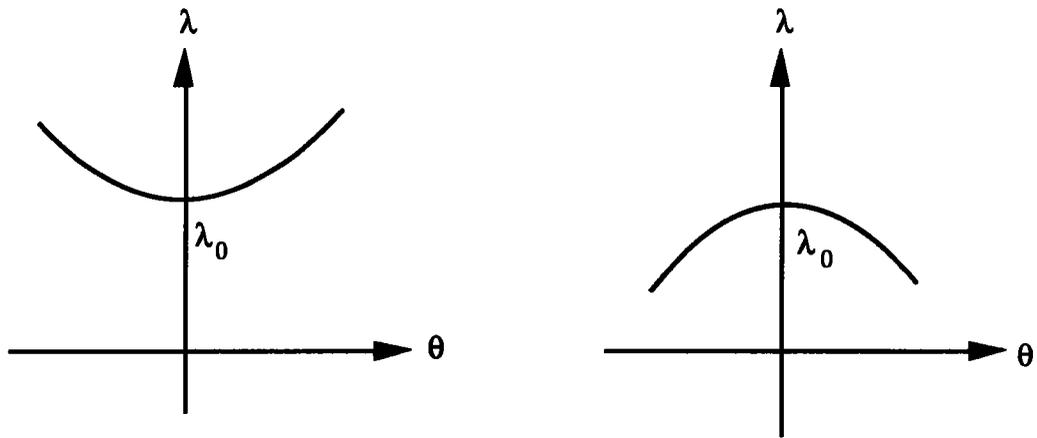


Fig.5.(c): Bifurcation de type symétrique élastique

#### III.4.2.2.2 Convexité

On rappelle brièvement quelques résultats connus de l'analyse convexe ( voir par exemple [  $L_4$  ], [  $C_2$  ], [  $E_2$  ] ).

##### 1° Convexité à l'aide de la seconde variation

- $$\left[ \begin{array}{l} \text{1°- Une fonction } J(\dot{u}) \text{ de classe } C^2 \text{ est convexe} \\ \text{si et seulement si } \delta^2 J(\dot{u}) \geq 0 \quad \forall \dot{u}, \delta \dot{u} \\ \text{2°- Si } \delta^2 J(\dot{u}) > 0 \quad \forall \dot{u}, \delta \dot{u}, \delta \dot{u} \neq 0 \text{ alors la fonction} \\ J(\dot{u}) \text{ est strictement convexe} \end{array} \right.$$

## Commentaires

*L'exemple de la fonction strictement convexe*

$$J(x) = x^4, x \in \mathbb{R},$$

*montre qu'il ne saurait exister en général de réciproque à la condition 2°. En revanche, si on pose :*

$$J(\dot{u}) = \frac{1}{2} a(\dot{u}, \dot{u}) - f \dot{u}$$

*où  $a: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  est une forme bilinéaire, bornée et symétrique,  $f \in X^*$  ( $X^*$ : le dual de  $X$ ) on a:*

$$\delta^2 J(\dot{u}) = a(\delta \dot{u}, \delta \dot{u}) \quad \forall \dot{u}, \delta \dot{u} \in X$$

alors:  $\left\{ \begin{array}{l} - a \text{ positive} \Leftrightarrow J \text{ convexe} \\ - a \text{ est définie positive} \Rightarrow J \text{ strictement convexe} \end{array} \right.$

*En particulier, la condition 2° admet une réciproque dans le cas où  $J$  est une fonctionnelle quadratique sur  $\mathbb{R}^n$  (cf.  $[C_3]$ ):*

**"une fonctionnelle quadratique  $J(\dot{u})$  sur  $\mathbb{R}^n$  est strictement convexe si et seulement si la forme quadratique  $a$  est définie positive".**

*Il est bien connu que :*

**"si  $J(\dot{u})$  est strictement convexe alors son minimum  $\dot{u}$  est unique ( $[C_3]$ )".**

## 2° condition nécessaire de convexité

Compte-tenu de la forme de la fonctionnelle  $J$  et du mode de flambage, on essaie de donner une condition nécessaire restrictive de convexité.

### Condition nécessaire restrictive de convexité

Au voisinage du trajet fondamental, une condition nécessaire restrictive de convexité locale peut s'exprimer de la manière

$$\left[ \begin{array}{l} \text{suivante:} \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 J}{\partial \dot{\theta}^2} (\lambda; \dot{\mathbf{u}}_F) \geq 0 \\ \dot{\mathbf{u}}_F: \text{le trajet fondamental} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \text{(III.38)}$$

### Démonstration

En vertu du mode de flambage, il suffit de considérer la variation par rapport à la variable liée à la torsion :

$$\delta^2 J(\dot{\mathbf{u}}) \geq 0 \quad \forall \dot{\mathbf{u}}, \delta \dot{\mathbf{u}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 J}{\partial \dot{\theta}^2} (\dot{\mathbf{u}}) \geq 0 \quad \forall \dot{\mathbf{u}}$$

En particulier, pour un choix de trajet  $\dot{\mathbf{u}}_F$  on a :

$$J(\dot{\mathbf{u}}) \text{ convexe} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 J}{\partial \dot{\theta}^2} (\lambda; \dot{\mathbf{u}}_F) \geq 0 \\ \dot{\mathbf{u}}_F: \text{le trajet fondamental} \end{array} \right.$$

Dans ce qui suit, en vertu de (III.4.2.2.1) , (III.4.2.2.2. ((III.38)) et en s'appuyant sur l'argument de Hill [H<sub>3</sub> ], on essayera de définir des critères de bifurcation pour le modèle " J<sub>2</sub> avec Coin "

### III.4.2.2.3 Critères de bifurcation

Pour caractériser la bifurcation, on cherche à partir de quelle valeur de  $\lambda$  il y a une vitesse possible en plus de la solution fondamentale à partir des équations en vitesses initiales (III.37) (argument de *Shanley* [S<sub>2</sub>] et *Hill* [H<sub>3</sub>]).

A cet effet, nous définissons *la charge critique*  $\lambda_0$  comme *la première valeur de la charge pour laquelle la fonctionnelle J cesse de satisfaire la condition nécessaire de convexité* (III.38), c'est-à-dire par raison de continuité:

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \dot{\theta}^2} (\lambda_0 ; \dot{\mathbf{u}}_F) = 0 \quad (\text{III.39})$$

A partir de la valeur critique ainsi définie, cherchons si le problème en vitesses peut avoir plusieurs solutions. On sait que pour le flambage plastique d'une poutre les solutions possibles sont toujours en charge plastique. De même on se limitera ici à des vitesses telles que la vitesse de déformation cherchée appartienne en tout point de  $z$  à la zone de charge totale ( $\dot{\gamma} \in (D_{PT})$ ).

Pour que la vitesse de déformation appartienne à la zone de charge totale ( $\dot{\gamma} \in (D_{PT})$ ), elle doit satisfaire les conditions suivantes:

$$\left| \begin{array}{c} \dot{\gamma}_{xy} \\ \dot{\gamma}_{xx} \end{array} \right| - \tan(\phi_0) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad z \left| \begin{array}{c} \dot{\theta}_0 \\ \dot{u}_0 \end{array} \right| - \tan(\phi_0) \leq 0 \quad (\text{III.40})$$

\*

En vertu de (III.37), la vitesse axiale  $\dot{u}_0$  est donnée par:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{u}_0 = a_0^{-1} \\ \text{où:} \\ a_0 = \frac{2}{3} \frac{1h}{L(1-2\nu)} E + \frac{81}{3L} Gg(0)h \end{array} \right.$$

Après le report de la vitesse  $\dot{u}_0$  dans (III.39), la vitesse initiale  $\dot{\theta}_0$  en tout point de  $z$  ( $|z| \leq \frac{h}{2}$ ) se trouve dans un intervalle et elle s'exprime de la manière suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \dot{\theta}_0 \right| \leq \dot{\theta}_{0\max} \\ \text{où : } \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta}_{0\max} = \frac{2}{h} a_0^{-1} \tan(\phi_1), \quad \phi_1 \text{ est l'angle ( cf.Fig.4)} \\ \text{qui définit la frontière de la zone de charge totale} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \text{(III.41)}$$

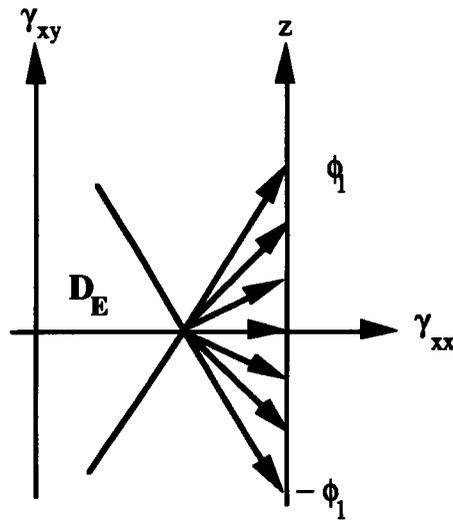
En vertu (III.41), il existe donc plusieurs vitesses possibles le long du trajet fondamental dès la charge  $\lambda_0$  ainsi définie et la bifurcation est transverse.

---

\* Ce mode de raisonnement caractérise la bifurcation tangente.

**Remarque**

Pour une valeur de  $\dot{\theta}_0, \dot{u}_0$  donnée, l'angle  $\phi_0(z, \dot{u}_0, \dot{\theta}_0)$  parcourt un intervalle  $[-\phi_1, \phi_1]$  symétrique par rapport à l'origine. Les angles maximums  $\pm\phi_1$  sont atteints sur les faces de la plaque ( cf. Fig.6).



**Fig.6: L'ensemble des directions  $\phi$  obtenues dans l'épaisseur de la plaque pour une vitesse  $(\dot{u}_0, \dot{\theta}_0)$  donnée**

\*

---

\* L'angle  $\phi_1$  définit la frontière de la zone de charge totale . Il est défini par  $\phi_1 = \phi_0(\pm \frac{h}{2})$  et permet de définir les vitesses admissibles.

### III.4.2.2.3.1 Résultats et commentaires

Le critère de flambage est associé à la perte de convexité stricte du potentiel, ce qui se traduit techniquement par la perte de positivité stricte de sa dérivée seconde. Dans la zone de linéarité ( $Z_L$ ) (zone de charge totale ( $D_{PT}$ )) et au voisinage du trajet fondamental, la condition (III.39) se traduit par:

$$\left[ \begin{array}{l} \lambda_0 = d = \frac{\partial^2 W}{\partial \dot{\theta}^2} (\dot{u}_F) \quad , \quad {}^t \dot{u}_F = (1,0) \\ \text{avec} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial \dot{\theta}^2} (\dot{u}_F) = C_1 g(0) \frac{h^3}{12} \\ \text{où } g(0) \text{ est donnée dans (III.34), } C_1 \text{ est une constante} \end{array} \right.$$

Le calcul explicite de la charge critique conduit à une valeur très intéressante et elle s'exprime de la manière suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_c = G_T \left( \frac{h}{l} \right)^2 \\ \frac{G_T}{G} = \left\{ 1 + 3G \left( \frac{1}{E_T} - \frac{1}{E} \right) \right\}^{-1} \end{array} \right. \quad \text{(III.42)}$$

Une telle valeur semble être en très bon accord avec la valeur expérimentale et elle est liée au **module de cisaillement tangent**.

Elle est **inférieure** à la charge critique donnée dans la littérature qui est calculée à partir du critère élastique par la loi de la déformation qui est liée au **module de cisaillement sécant** de la manière suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_c = G_S \left( \frac{h}{l} \right)^2 \\ \frac{G_S}{G} = \left\{ 1 + 3G \left( \frac{1}{E_S} - \frac{1}{E} \right) \right\}^{-1} \end{array} \right.$$

**Remarques**

Pour  $\lambda > \lambda_0$ , la fonctionnelle  $J$  n'est pas strictement convexe puisqu'au voisinage du trajet fondamental

$$\text{la forme quadratique: } \begin{cases} D^2 J(\lambda; \dot{\mathbf{u}}_F) = \begin{bmatrix} a(\dot{\mathbf{u}}_F) & 0 \\ 0 & d(\dot{\mathbf{u}}_F) - \lambda \end{bmatrix} \\ a > 0 \end{cases}$$

cesse d'être définie positive puisque :

$$d - \lambda = \frac{\partial^2 J}{\partial \dot{\theta}^2}(\lambda; \dot{\mathbf{u}}_F) < 0$$

**Mode de flambage**

Pour la charge critique  $\lambda_0$  donnée par le critère (III.39), il existe un mode de flambage plastique  $U$  caractérisé par:

$$\begin{cases} U \neq 0 \text{ tel que} \\ D^2 J(\lambda_0; \dot{\mathbf{u}}_F) \cdot U = 0 \end{cases}$$

\*

---

\* Il n'est pas encore clairement établi que la solution du problème en vitesses (III.37) est unique avant  $\lambda_0$ .

**Corollaire**

Pour la charge critique  $\lambda_0$ , les seules solutions correspondant à une bifurcation possible parmi cet ensemble de vitesses sont:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{la solution fondamentale } \dot{\theta}_0 = 0 \text{ et,} \\ \text{les valeurs extrêmes } \dot{\theta}_0 = \pm \dot{\theta}_{0\max} \end{array} \right.$$
*Démonstration*

Suivant un argument classique de type *Hutchinson* [H<sub>4</sub>], on suppose que les vitesses initiales admissibles  $(\dot{u}_0, \dot{\theta}_0)$  appartiennent à l'intérieur de la zone de charge totale ( $D_{PT}$ ). Par continuité, la vitesse  $\dot{u}_0(\lambda)$  pour  $\lambda$  voisin de  $\lambda_0$  restera dans l'intérieur de cette zone, dans laquelle le comportement est assimilable à un comportement de type élastique non-linéaire. D'après l'analyse de bifurcation classique, la solution sera du type:

$$\begin{pmatrix} u_0 - u_F(\lambda) \\ \theta_0 \end{pmatrix} = C (\lambda - \lambda_0)^{1/2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + o(\lambda - \lambda_0)^{3/2} \quad (\text{III.42})$$

D'où les contraintes correspondantes

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_{xx}(\lambda_0) \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = C' (\lambda - \lambda_0)^{1/2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + o(\lambda - \lambda_0) \quad (\text{III.43})$$

Il résulte alors de (III.43) que seule la contrainte de torsion  $\sigma_{xy}$  change au début de la branche bifurquée, ce qui contredit l'hypothèse d'une branche de solution à l'intérieur de la zone de charge totale.

Ainsi les solutions physiques qui correspondent à une bifurcation sont les valeurs extrêmes  $\dot{\theta}_0 = \pm \dot{\theta}_{0 \max}$  ( c'est-à-dire les vitesses initiales  $\dot{\theta}_0$  appartiennent au bord de la zone de charge totale ( $D_{PT}$ ) ).

\*

---

\* Argument utilisé aussi par Léger et Potier-Ferry [  $L_3$  ]

## Commentaires

Avec ce choix de vitesses, il y a donc **deux points** dans la plaque  $z = \pm \frac{h}{2}$  à la limite de la zone de charge totale (cf. Fig.7) tel que  $\phi_1 = \phi_0(\pm \frac{h}{2})$ .

Nous montrerons plus loin qu'au-delà de la charge critique  $\lambda_0$ , une zone de charge partielle se développe à partir de ces **points initiaux de charge neutre** au niveau des deux côtés de la plaque (cf. Fig.7).

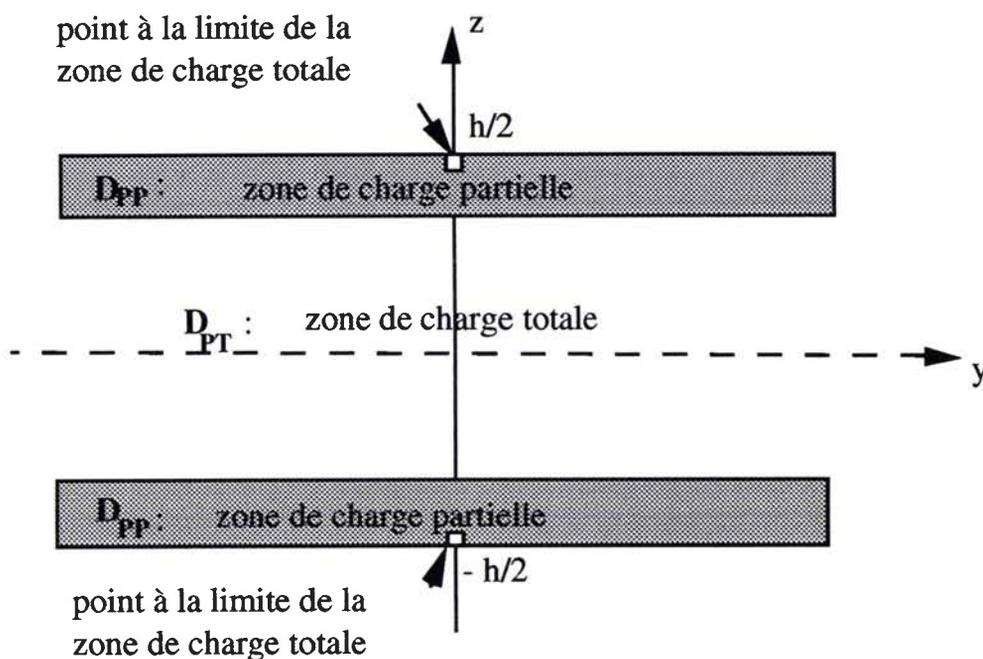


Fig.7: Description de la zone de charge partielle sur la plaque

## Orientation

*En résumé, on a montré que les réponses en vitesses de déplacement sont données par les points stationnaires de la fonctionnelle  $J$  dont la forme fait penser à l'énergie potentielle en élasticité. Dès lors, on a cherché à caractériser la charge critique par un critère de type seconde variation. Ensuite, en reprenant l'argument de Hill, on a proposé un critère de bifurcation correspondant à l'existence de vitesses différentes à partir de charge  $\lambda_0$  donnée par (III.39) dans le cas où la vitesse de déformation appartient à la zone de charge totale. Ce critère est associé à la perte de convexité stricte du potentiel. Le calcul explicite de la charge critique à partir de (III.39) conduit à une valeur très intéressante car elle est inférieure aux charges critiques données dans la littérature et elle semble être en très bon accord avec la valeur expérimentale.*

*Cependant, nous soulignons d'une part que ce critère ne donne qu'une condition suffisante d'existence de vitesses différentes et d'autre part, l'étude faite dans ce contexte ne concernait que le modèle "  $J_2$  avec Coin ".*

*Dans ce qui suit, on essayera d'étudier à partir de cette charge la nature de la bifurcation dans le cas particulier du modèle "  $J_2$  avec Coin " (( absence de la zone de charge totale  $\approx$  (loi à deux zones) ( cf.Fig.2.(c),(III.2.2))).*

### III.4.2.2.3.2 Cas sans zone de charge totale

Jusqu'ici, nous avons proposé un critère de bifurcation pour une loi à trois zones " modèle "  $J_2$  avec Coin " " sur l'exemple de l'éprouvette cruciforme.

Dans ce paragraphe, on essaie d'étudier la nature de la bifurcation dans le cas limite de ce modèle.

A cet effet, on reprend le raisonnement précédent qui a été fait pour une loi à trois zones et on fait disparaître la zone de charge totale ( $D_{PT}$ ) en faisant tendre l'angle  $\phi_0$  vers zéro.

On considère ainsi la loi de comportement à deux zones comme un cas limite de la loi à trois zones (cf.Fig.8).

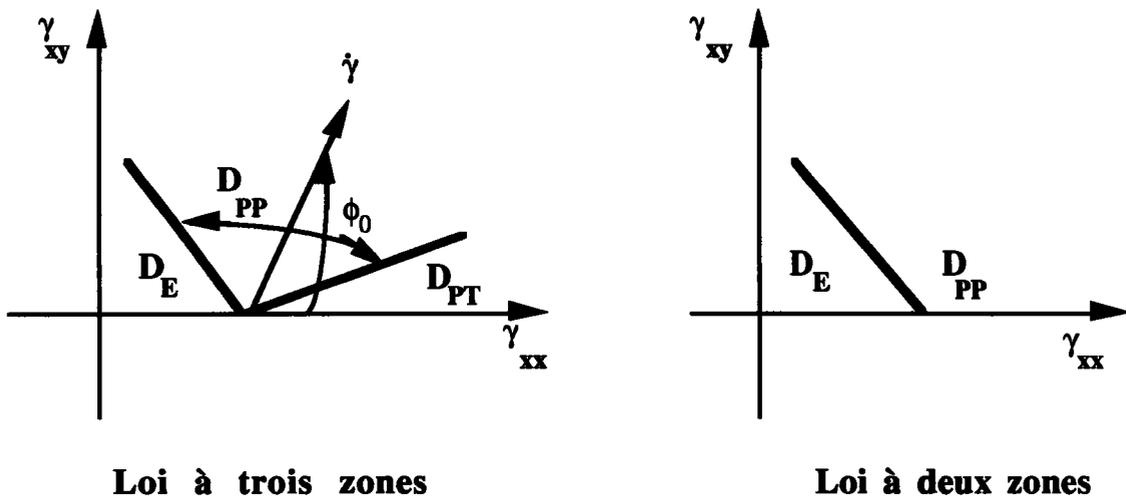


Fig.8: Deux types de lois de comportement

Dans ce cas, on essaie d'expliquer que :

$\left\{ \begin{array}{l} \text{la vitesse initiale est unique au voisinage de la charge critique} \\ \lambda_0 \text{ donnée par la condition (III.39) et la bifurcation est tangente.} \end{array} \right.$

Pour celà, à partir de la charge critique  $\lambda_0$  et en vertu de l'unicité du mode de flambage:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{il existe une constante réelle } C \text{ telle que:} \\ \left( \begin{array}{c} \dot{u}_0 - \dot{u}_F \\ \dot{\theta}_0 \end{array} \right) = C \left( \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right) \end{array} \right. \quad (\text{III.44})$$

La vitesse de déformation le long d'une branche bifurquée est de la forme:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \begin{array}{c} \dot{\gamma}_{xx} - \dot{\gamma}_{xx}^F \\ \dot{\gamma}_{xy} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} 0 \\ -\frac{C z}{L} \end{array} \right) \\ \text{où la contante } C \text{ est indéterminée} \end{array} \right. \quad (\text{III.45})$$

Si  $C$  était non nul, en vertu de la relation (III.45) on a:

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_0(z) \neq 0 \\ \text{puisque } \tan(\phi_0) = \frac{\dot{\gamma}_{xy}}{\dot{\gamma}_{xx}} \end{array} \right.$$

Ceci est absurde puisque la loi a deux zones a été définie lorsque  $\phi_0 \equiv 0$ . Il s'ensuit alors que  $C = 0$  et *la vitesse initiale est unique en  $\lambda_0$* . Toutes ces courbes bifurquées, si elles existent sont donc *tangentes à la branche fondamentale*.

**Remarque**

*Dans ce paragraphe, on s'est contenté d'expliquer l'affirmation de l'existence d'une bifurcation tangente dans le cas où la zone de charge totale disparaît du modèle "J<sub>2</sub> avec Coin".*

*Ce nouveau type de bifurcation générique ne remet pas en cause le critère car on peut penser qu'il existe une bifurcation tangente dès la charge critique et des bifurcations transverses un peu au-dessus.*

*Ceci semble confirmé par un théorème assez général de Cimetière [C<sub>4</sub>] qui a démontré qu'il pouvait exister des vitesses initiales non nulles pour toute charge légèrement supérieure à la charge  $\lambda_0$ .*

*Plus loin, on confirmera cette affirmation de " bifurcation tangente" par une étude post-critique de la branche bifurquée.*

\*

---

\* Les seuls résultats connus sont ceux de Cimetière [ C<sub>4</sub> ] pour le flambage des plaques.

### III.4.3 Conclusions-orientation

*Dans cette étape, en reprenant l'argument de Hill on a proposé un critère de bifurcation pour le modèle "  $J_2$  avec Coin " correspondant à l'existence de plusieurs vitesses à partir de la charge critique  $\lambda_0$ . Ce critère est associé à la perte de convexité stricte du potentiel, ce qui se traduit techniquement par la perte de positivité stricte de sa dérivée seconde. Le calcul explicite de la charge critique conduit à une valeur intéressante, car inférieure à celle donnée généralement dans la littérature à partir d'un critère élastique par la loi de la déformation. Une telle charge est liée au module de cisaillement tangent .*

*Moyennant une hypothèse restrictive où la zone de charge totale disparaît du modèle "  $J_2$  avec Coin " , on a exhibé un cas générique où la vitesse est unique bien que la condition (III.39) soit réalisée.*

*Mais on ne sait pas si  $\lambda_0$  définit effectivement la première charge de bifurcation.*

*Dans ce qui suit on reprendra la charge critique donnée par le critère (III.39) dans le cas de lois de comportement complexes et on essayera d'établir que sous une hypothèse assez restrictive, ce critère est non seulement une condition suffisante de bifurcation mais aussi nécessaire .*

### III.5 EXTENSION

Dans la section (III.4.2.2), nous avons proposé un critère de bifurcation (III.38) correspondant à l'existence de vitesses différentes à partir de la charge critique  $\lambda_0$ . Mais on ne sait pas si  $\lambda_0$  donne la petite charge possible. D'autre part, l'étude précédente ne concernait que le modèle "  $J_2$  avec Coin " .

Dans ce paragraphe, nous allons étendre ce critère à des lois de comportement complexes qui sont définies par des relations homogènes de degré un entre les vitesses de contraintes et de déformations. Puis nous essayerons de montrer que  $\lambda_0$  est bien la plus petite valeur de la charge pour laquelle la vitesse n'est pas unique.

#### III.5.1 Problème en vitesses

On part du problème en vitesses défini par la fonction  $J$  qui dépend de la vitesse  $\dot{\mathbf{u}}$  et d'un paramètre scalaire  $\lambda$  mesurant les efforts extérieurs . Elle s'exprime de la manière suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} J(\lambda, \dot{\lambda}; \dot{\mathbf{u}}) = W(\dot{\mathbf{u}}) - \frac{\lambda}{2} \dot{\theta}^2 - \dot{\lambda} \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{u}} \\ \mathbf{t} \dot{\mathbf{u}} = (\dot{\mathbf{u}}, \dot{\theta}) \quad \text{et} \quad \mathbf{t} \mathbf{f} = (1, 0). \end{array} \right. \quad (\text{III.46})$$

Nous ferons l'hypothèse suivante

$$(\mathbf{H}_1): \dot{\mathbf{u}} \rightarrow W(\dot{\mathbf{u}}) \text{ est : } \left\{ \begin{array}{l} \text{homogène de degré deux, symétrique} \\ \text{et strictement convexe} \end{array} \right.$$

En vertu de (III.46), un équilibre sera une solution de l'équation en vitesses:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla P(\lambda; \dot{\mathbf{u}}) - \dot{\lambda} \mathbf{f} = 0 \\ \text{avec} \\ P(\lambda; \dot{\mathbf{u}}) = W(\dot{\mathbf{u}}) - \frac{\lambda}{2} \dot{\theta}^2 \end{array} \right. \quad (\text{III.47})$$

Lorsque  $\lambda$  augmente on doit s'attendre à rencontrer une plus petite valeur de  $\lambda$  au-delà de laquelle la structure pourra flamber, c'est-à-dire quitter son état d'équilibre.

Dans ce qui suit, on se propose de caractériser à partir du problème en vitesses (III.47) les charges critiques correspondant à un point de bifurcation.

### III.5.2 Différentes caractérisations de la charge critique

Le problème est de savoir pour quels  $\lambda \geq 0$  l'équation en vitesses (III.47) admet des solutions différentes.

#### III.5.2.1 Introduction des valeurs critiques $\lambda_0$ , $\lambda_1$ et $\lambda_2$

Dans ce paragraphe, on donne à partir de (III.47) les différentes caractérisations des charges critiques et des propriétés qui en résultent.

##### (1) Charge critique donnée par le critère (III.39)

Dans la section (III.4.2.2), on a vu que la zone de linéarité ( $Z_L$ ) était à la base du calcul de la charge critique. Dans cette zone de linéarité (zone de charge totale) le critère proposé donne une valeur critique  $\lambda_0$  liée au module de cisaillement tangent. C'est la plus petite valeur positive de  $\lambda$  solution de l'équation:

$$\left\{ \begin{array}{l} d(\lambda_0) = \lambda_0 \\ \quad \text{où} \\ d(\lambda_0) = \frac{\partial^2 W}{\partial \dot{\theta}^2}(\lambda_0, \mathbf{e}_1), \quad \mathbf{e}_1 // \dot{\mathbf{u}}_F \end{array} \right. \quad (\text{III.48})$$

## (2) Charge critique à la Hill

Selon *Hill* la charge critique est quant à elle la plus petite valeur de  $\lambda$  au-delà de laquelle l'unicité de la réponse en vitesses de (III.47) n'est pas assurée. Une telle charge est caractérisée par:

$$\lambda_1 = \text{Inf} \left\{ \begin{array}{l} \lambda \text{ tel qu'il existe } \dot{\mathbf{u}}_1, \dot{\mathbf{u}}_2 \text{ solutions distinctes} \\ \text{de (III.47) pour le même } \lambda \end{array} \right\} \quad (\text{III.49})$$

## (3) Caractérisation de la charge critique à partir du mode de flambage

Il est classique en élasticité de caractériser la charge critique par le critère de la seconde variation. De même, nous allons définir une charge critique par l'existence d'une solution singulière du problème en vitesses.

Cette charge  $\lambda_2$  est la plus petite racine de l'équation:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{il existe } \dot{\mathbf{u}}_0 \neq \mathbf{0}, \text{ solution de (III.47)} \\ \text{tel que } \det D^2 P(\lambda_2; \dot{\mathbf{u}}_0) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{III.50})$$

### Caractérisation équivalente

L'équation (III.50) est équivalente à:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{il existe pour la charge } \lambda_2, \\ \text{un mode de flambage plastique } \mathbf{U} \neq \mathbf{0} \text{ tel que:} \\ D^2 P(\lambda_2; \dot{\mathbf{u}}_0) \cdot \mathbf{U} = 0, \dot{\mathbf{u}}_0 \neq \mathbf{0} \end{array} \right. \quad (\text{III.50.bis})$$

Dans ce qui suit, on essaiera d'introduire les propriétés qui lient ces charges critiques.

### III.5.2.1.1 Inégalité $\lambda_2 \leq \lambda_0$

Pour les charges critiques ainsi définies on a:

#### Proposition

Les valeurs critiques  $\lambda_0$  et  $\lambda_2$  vérifient l'inégalité

$$\lambda_2 \leq \lambda_0$$

#### Démonstration

Remarquons que  $\dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{F}} // \mathbf{e}_1$  est solution de l'équation (III.47).  $D^2 P$  étant homogène de degré zéro, la seconde variation vérifie

$$D^2 P(\lambda_2; \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{F}}) = D^2 P(\lambda_2; \mathbf{e}_1)$$

et elle est diagonale pour raison de symétrie:

$$D^2 P(\lambda; \mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} a(\lambda) & 0 \\ 0 & d(\lambda) - \lambda \end{bmatrix}, \quad a(\lambda) > 0$$

Donc  $\det D^2 P(\lambda_0; \mathbf{e}_1) = 0$

d'après la caractérisation de la charge  $\lambda_0$ , on obtient:

$$\lambda_2 \leq \lambda_0$$

### III.5.2.1.2 Lien entre les charges $\lambda_1$ et $\lambda_2$

Dans ce paragraphe, on introduit quelques hypothèses utiles pour la suite afin de clarifier le lien entre les charges  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ .

#### III.5.2.1.2.1 Les hypothèses

Les hypothèses qu'ont va essayer d'introduire vont nous aider à situer le cadre dans la recherche de la première bifurcation. Il s'agit des hypothèses qui seront liées aux vitesses et aux zones de linéarité.

##### - Enoncé des hypothèses

(H<sub>2</sub>):  $\left[ \begin{array}{l} \text{Supposons que pour une charge } \lambda_1 \text{ il y ait deux vitesses} \\ \dot{\mathbf{u}}_1 \text{ et } \dot{\mathbf{u}}_2 \text{ solutions de l'équation (III.47) et qu'elles} \\ \text{appartiennent à la même zone de linéarité ( } Z_L \text{ ).} \end{array} \right.$

(H<sub>3</sub>):  $\left[ \begin{array}{l} \text{Supposons que pour } \lambda = \lambda_2, \text{ l'une des vitesses } \dot{\mathbf{u}}_0 \text{ solution} \\ \text{de l'équation (III.50) soit à l'intérieur d'une zone} \\ \text{de linéarité ( } Z_L \text{ ).} \end{array} \right.$

Sous ces hypothèses, on affirme que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_2 \leq \lambda_1 \text{ (cf. III.5.2.1.2.2)} \\ \text{et} \\ \lambda_1 \leq \lambda_2 \text{ (cf. III.5.2.1.2.3)} \end{array} \right.$$

### III.5.2.1.2.2 A propos de l'inégalité $\lambda_2 \leq \lambda_1$

L' hypothèse  $(H_2)$  implique

$$\begin{cases} \nabla P(\lambda_1'; \dot{\mathbf{u}}_1) - \dot{\lambda} \mathbf{f} = 0 & (1) \\ \nabla P(\lambda_1'; \dot{\mathbf{u}}_2) - \dot{\lambda} \mathbf{f} = 0 & (2) \end{cases}$$

On fait la différence (1)-(2), on obtient

$$\nabla P(\lambda_1'; \dot{\mathbf{u}}_1 - \dot{\mathbf{u}}_2) = 0$$

Comme P est une fonction homogène de degré deux alors il en résulte

$$D^2 P(\lambda_1'; \dot{\mathbf{u}}_1 - \dot{\mathbf{u}}_2) \cdot (\dot{\mathbf{u}}_1 - \dot{\mathbf{u}}_2) = 0 \text{ avec } \dot{\mathbf{u}}_1 \neq \dot{\mathbf{u}}_2$$

Donc  $\lambda_2 \leq \lambda_1'$ .

#### Commentaire

*Ceci ne démontre pas complètement l'inégalité  $\lambda_2 \leq \lambda_1$ .  
Pour qu'elle soit vraie il faudrait:*

- soit que les deux vitesses différentes existent aussi à la borne inférieure  $\lambda_1$  et que ces deux vitesses vérifient l'hypothèse  $(H_2)$
- soit qu'il existe une suite de nombres  $\lambda_n$  convergeant vers la borne inférieure et satisfaisant l'hypothèse  $(H_2)$ .

### III.5.2.1.2.3 A propos de l'inégalité $\lambda_1 \leq \lambda_2$

Sous  $(H_3)$ ,  $\dot{\mathbf{u}}_0 + t\mathbf{U}$  est solution de l'équation (III.50) car  $\dot{\mathbf{u}}_0 + t\mathbf{U}$  appartient à la zone de linéarité ( $Z_L$ ) pour  $t$  petit ( $\dot{\mathbf{u}}_0 \in Z_L$ ) et d'après l'homogénéité de la fonction  $P$  et la condition (III.50 bis)

$$\nabla P(\lambda_2; \dot{\mathbf{u}}_0 + t\mathbf{U}) = \nabla P(\lambda_2; \dot{\mathbf{u}}_0) + t D^2 P(\lambda_2; \dot{\mathbf{u}}_0) \cdot \mathbf{U} = \nabla P(\lambda_2; \dot{\mathbf{u}}_0) = \hat{\lambda} \mathbf{f}$$

Donc il existe plus de deux vitesses différentes pour  $\lambda = \lambda_2$ .

Comme la charge  $\lambda_1$  est la borne inférieure pour l'existence de deux vitesses, il en résulte:

$$\lambda_1 \leq \lambda_2$$

### Commentaire

*La propriété  $\lambda_1 = \lambda_2$  n'est pas connue mais elle sera vraie si on montre que sous certaines hypothèses, les deux vitesses différentes appartiennent à une même zone de linéarité.*

### Orientation

*Nous aurions souhaité montrer que la première bifurcation est bien caractérisée par le critère (III.39) si la fonction potentielle  $W(\dot{\mathbf{u}})$  est strictement convexe.*

*N'ayant pu y parvenir nous essayerons dans ce qui suit, de montrer que cette propriété est vraie dans le cas d'une hypothèse assez restrictive sur la fonction potentielle.*

### III.5.3 Condition nécessaire et suffisante de bifurcation

On se limitera dans cette étude au cas où la fonction potentielle  $W(\dot{\mathbf{u}})$  satisfait l'hypothèse simplificatrice suivante:

$$(\mathbf{H}_4): \dot{\mathbf{u}} \rightarrow W(\dot{\mathbf{u}}) \text{ est } \begin{cases} \text{homogène de degré deux, symétrique,} \\ \text{et quadratique en quatre morceaux} \\ \text{strictement convexe.} \end{cases}$$

Nous commençons par introduire la fonction potentielle  $W(\dot{\mathbf{u}})$  localement quadratique en *quatre morceaux strictement convexe* (cf.Fig.8) de la manière suivante:

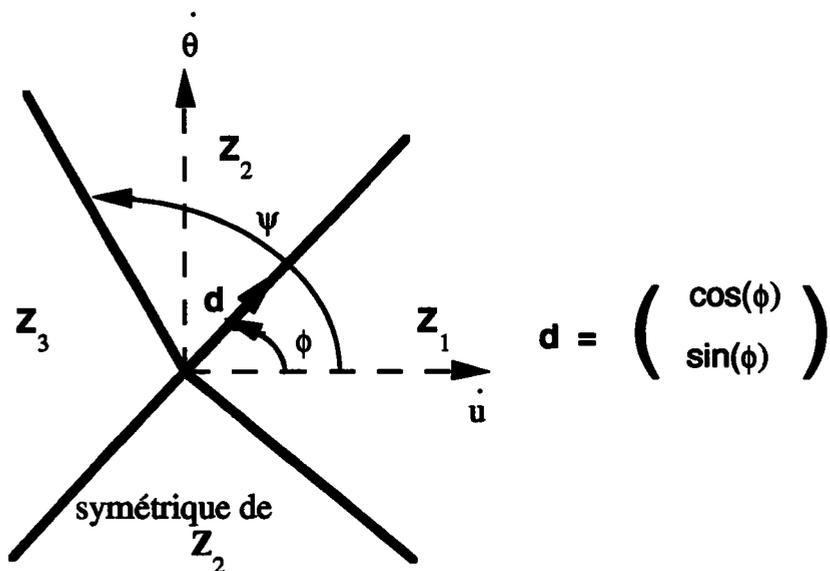


Fig.8: Les quatre morceaux de  $W(\dot{\mathbf{u}})$

$$W(\dot{\mathbf{u}}) = \begin{cases} \frac{1}{2} ( a_1 \dot{u}^2 + d_1 \dot{\theta}^2 ) & \text{dans } (Z_1) \\ \frac{1}{2} ( a_2 \dot{u}^2 + 2b_2 \dot{u}\dot{\theta} + d_2 \dot{\theta}^2 ) & \text{dans } (Z_2) \\ \frac{1}{2} ( a_3 \dot{u}^2 + d_3 \dot{\theta}^2 ) & \text{dans } (Z_3) \end{cases} \quad (\text{III.52})$$

Bien entendu les coefficients  $a_1, d_1, a_2, b_2, d_2$  peuvent varier avec le chargement. De plus, on suppose que l'angle  $\phi$  appartient à l'intervalle  $[0, \frac{\pi}{2}[$ .

En vertu des propriétés du potentiel et de (III.47) découle le lemme suivant:

### III.5.3.1 Lemme

Les conditions de bifurcation (III.47) et (III.50.bis) impliquent:  $\lambda f.U = 0$

#### *Démonstration*

Comme en vertu de l'hypothèse ( $H_4$ ), la fonction  $P$  est homogène de degré deux on a:

$$\nabla P(\lambda; \dot{\mathbf{u}}_0) = D^2 P(\lambda; \dot{\mathbf{u}}_0) \cdot \dot{\mathbf{u}}_0$$

Grâce à la condition (III.50.bis) on a:

$$U \cdot D^2 P(\lambda; \dot{\mathbf{u}}_0) \cdot \dot{\mathbf{u}}_0 = 0 \quad \text{car} \quad U \cdot D^2 P(\lambda; \dot{\mathbf{u}}_0) = 0$$

et en utilisant (III.47), il vient

$$U \cdot D^2 P(\lambda; \dot{u}_0) \cdot \dot{u}_0 = U \cdot \nabla P(\lambda; \dot{u}_0) = \lambda f \cdot U = 0$$

### Remarque

*On verra plus loin que le résultat de ce lemme est indispensable et il implique*

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \dot{u} \partial \dot{\theta}}(\lambda; \dot{u}_0) = \frac{\partial^2 P}{\partial \dot{\theta} \partial \dot{u}}(\lambda; \dot{u}_0) = 0$$

### III.5.3.2 Définitions - Préliminaires

Dans ce paragraphe, on donne une condition nécessaire et suffisante de convexité pour une fonction quadratique par morceaux.

#### III.5.3.2.a Définition

Etant donné une fonction  $W(x)$ , posons :

$$f(t) = W(x + t(y - x))$$

Alors  $W$  est (strictement) convexe si et seulement si  $f$  est (strictement) convexe sur  $[0,1] \forall x, y$

#### III.5.3.2.b Condition nécessaire et suffisante de convexité

Une fonction  $W(x)$  quadratique par morceaux est convexe si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites:

- $$\left\{ \begin{array}{l} 1^\circ W(x) \text{ est convexe sur chaque morceau,} \\ 2^\circ W(x) \text{ est continue,} \\ 3^\circ x_0 \in \text{raccord, } \nabla W(x_0^-) \cdot y \leq \nabla W(x_0^+) \cdot y \\ \text{où } x_0^-, x_0^+, y \text{ étant des vecteurs} \end{array} \right.$$

### Démonstration

En effet, il suffit de montrer que la fonction d'une variable

$$f(t) = W(x + t(y - x)) \quad \text{est convexe.}$$

Ce qui est vrai:

- $$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } f(t) \text{ est convexe sur chaque morceaux,} \\ \text{si } f(t) \text{ est continue et} \\ \text{si } f'(t_-) \leq f'(t_+) \text{ en toute discontinuité de la pente.} \end{array} \right.$$

### Commentaire

*Le vecteur  $y$  peut être choisi d'une manière arbitraire. La condition de monotonie (3°) peut s'exprimer de la manière suivante:*

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 \in \text{raccord, } \nabla W(x_0^-) \cdot y \leq \nabla W(x_0^+) \cdot y \\ y \text{ orthogonal à } d \text{ où } d = \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{pmatrix} \\ \text{où le vecteur } y \text{ sera dirigé de } Z_1 \text{ vers } Z_2 \text{ (cf.Fig.8)} \end{array} \right. \quad \text{III.51.bis}$$

*La condition (III.51.Bis) est équivalente à la monotonie donnée à partir de la croissance des pentes.*

### III.5.3.3 Théorème

**Si la fonction potentielle satisfait l'hypothèse (  $H_4$  )**

*alors les valeurs  $\lambda_0$ ,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont identiques.*

**De plus, à la charge  $\lambda_0$  définie en (III.39), il existe :**

*un mode de flambage défini en (III.50.bis)*

**et**

*une infinité de vitesses différentes.*

## **Orientation**

*La démonstration du théorème est longue et technique. Elle fait intervenir un nombre important de résultats intermédiaires. Elle s'appuie d'une part sur des résultats d'analyse convexe évoqués dans (III.5.3.2) ainsi que sur le lemme stipulant que :*

*" le mode de flambage est orthogonal à  $\lambda f$  ".*

### **III.5.3.3.1 Démonstration du théorème**

Afin d'en faciliter la lecture de la démonstration nous procédons par étapes.

#### **Étape.1**

Dans cette étape, on donne les trois conditions caractérisant la convexité de la fonction potentielle  $W(\mathbf{u})$ .

#### *1° Inégalités classiques*

Elles sont données par:

$$\left\{ \begin{array}{ll} a_1 > 0, & d_1 > 0 & \text{dans } (Z_1) \\ a_2 > 0, & d_2 > 0, & b_2^2 < a_2 d_2 & \text{dans } (Z_2) \\ a_3 > 0, & d_3 > 0 & \text{dans } (Z_3) \end{array} \right.$$

### 2° Condition de continuité

La continuité de la fonction potentielle  $W(\dot{\mathbf{u}})$  à l'interface des zones s'exprime de la manière suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_1 \mathbf{d} \cdot \mathbf{d} = K_2 \mathbf{d} \cdot \mathbf{d} \\ \text{avec} \\ K_1 \text{ et } K_2 \text{ les formes quadratiques de } W(\dot{\mathbf{u}}) \end{array} \right. \quad (\text{III.53})$$

Grâce à (III.52) cette dernière équation s'exprime de la manière suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 \cos^2(\phi) + d_1 \sin^2(\phi) = a_2 \cos^2(\phi) + b_2 \sin(2\phi) + d_2 \sin^2(\phi) \\ \text{pour les zones } (Z_1) \text{ et } (Z_2) \end{array} \right. \quad \text{III.54}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_3 \cos^2(\psi) + d_3 \sin^2(\psi) = a_2 \cos^2(\psi) + b_2 \sin(2\psi) + d_2 \sin^2(\psi) \\ \text{pour les zones } (Z_2) \text{ et } (Z_3) \end{array} \right. \quad \text{III.55}$$

### 3° Monotonie stricte à l'interface

Grâce à la condition (III.51), (III.51.bis) et (III.52) on donne uniquement les expressions analytiques de la monotonie à l'interface qui sont indispensables pour la suite.

(a): Les inégalités traduisant la monotonie pour les zones  $(Z_1)$  et  $(Z_2)$  sont données à partir de la croissance des pentes:

$$\dot{\theta} > 0, \quad \dot{u} \rightarrow \frac{\partial W}{\partial \dot{u}} = \begin{cases} a_1 \dot{u} & \text{dans } (Z_1) \\ a_2 \dot{u} + b_2 \dot{\theta} & \text{dans } (Z_2) \\ a_3 \dot{u} & \text{dans } (Z_3) \end{cases}$$

et

$$\dot{u} > 0, \quad \dot{\theta} \rightarrow \frac{\partial W}{\partial \dot{\theta}} = \begin{cases} d_1 \dot{\theta} & \text{dans } (Z_1) \\ b_2 \dot{u} + d_2 \dot{\theta} & \text{dans } (Z_2) \\ d_3 \dot{\theta} & \text{dans } (Z_3) \end{cases}$$

Ces inégalités s'expriment de la manière suivante

$$\begin{cases} (a_2 - a_1) + b_2 \tan(\phi) \geq 0 & \text{(III.56)} \\ (d_2 - d_1) \tan(\phi) + b_2 \geq 0 & \text{(III.57)} \end{cases}$$

(b): En vertu de (III.51.bis) où le vecteur  $y$  est orthogonal à la direction  $d$  résulte l'expression analytique de la monotonie qui s'exprime de la manière suivante:

$$\begin{cases} (d_1 - a_1) \sin(2\phi) \leq (d_2 - a_2) \sin(2\phi) + 2b_2 \cos(2\phi) & \text{(III.58)} \\ \text{pour les zones } (Z_1) \text{ et } (Z_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (d_2 - a_2) \sin(2\Psi) + 2b_2 \cos(2\Psi) \leq (d_3 - a_3) \sin(2\Psi) & \text{(III.59)} \\ \text{pour les zones } (Z_2) \text{ et } (Z_3) \end{cases}$$

**Étape.2**

On veut maintenant montrer que les charges  $\lambda_0$  et  $\lambda_2$  sont égales. Nous obtenons ce résultat en prouvant seulement l'inégalité  $\lambda_0 \leq \lambda_2$  car l'autre inégalité a été déjà vue (cf. proposition).

**Inégalité**  $\lambda_0 \leq \lambda_2$

La charge critique  $\lambda_0$  est caractérisée par  $\lambda_0 = d_1$  (en vertu de sa définition (III.48)). La charge critique  $\lambda = \lambda_2$  est la plus petite valeur pour laquelle il existe une solution singulière en vitesse.

**Si cette vitesse  $\dot{u}_0$  est dans la zone de linéarité ( $Z_1$ ) :**

$$D^2 P(\lambda_2; \dot{u}_0) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & d_1 - \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (\text{III.60})$$

et donc  $\lambda_0 \leq \lambda_2 = d_1$ .

En vertu de la proposition il en résulte  $\lambda_0 = \lambda_2$ .

### Étape.3

Pour achever la preuve de l'inégalité  $\lambda_0 \leq \lambda_2$ , il faut montrer qu'une solution singulière ne peut pas apparaître d'abord dans la zone ( $Z_2$ ).

Si une vitesse singulière dans la zone ( $Z_2$ ) peut apparaître pour une charge  $\lambda_2'$ , elle vérifie:

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & d_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_0 \\ \dot{\theta}_0 \end{pmatrix} - \lambda_2' \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\lambda} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & d_2 - \lambda_2' \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{III.61})$$

En vertu de (III.61) et grâce au lemme on a: 
$$\begin{cases} U_1 = 0 \\ b_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{III.62})$$

Compte-tenu de (III.61) et (III.58), on obtient  $\lambda_2' = d_2$ .

En vertu de (III.58), les équations (III.54) et (III.57) s'écrivent

$$\begin{cases} a_1 \cos^2(\phi) + d_1 \sin^2(\phi) = a_2 \cos^2(\phi) + d_2 \sin^2(\phi) \end{cases} \quad (\text{III.63})$$

$$\begin{cases} (d_2 - d_1) \tan(\phi) \geq 0 \end{cases} \quad (\text{III.64})$$

En vertu de la condition de la convexité à l'interface (III.60) on a:

$$\begin{cases} d_1 \leq d_2 \\ \text{et donc} \\ \lambda_0 = \lambda_2 \leq \lambda_2' \end{cases}$$

Donc une vitesse singulière apparaît dans la zone ( $Z_1$ ) avant d'apparaître dans la zone ( $Z_2$ ).

Or pour toute vitesse  $\dot{u}_0$  dans la zone de linéarité ( $Z_1$ ), l'équation (III.47) est linéaire et la matrice correspondante est singulière pour  $\lambda = \lambda_0 = \lambda_2$  (d'après (III.60)). Donc toute vitesse dans cette zone est solution. Il y en a donc une infinité.

On en déduit donc **une autre propriété:**

$$\lambda_1 \leq \lambda_0$$

Pour achever la démonstration du théorème, il nous reste à prouver que les charges  $\lambda_1$  et  $\lambda_0$  coïncident.

### Étape.4

L'objectif de cette étape consiste à prouver l'inégalité  $\lambda_1 \geq \lambda_0$  puisqu'on vient de voir que  $\lambda_1 \leq \lambda_0$ .

*Inégalité*  $\lambda_1 \geq \lambda_0$

1° : Pour  $\lambda = 0$

la forme quadratique  $D^2 P(\lambda; \dot{\mathbf{u}}_0)$  est positive.

Pour  $0 \leq \lambda < \lambda_2$

la forme quadratique  $D^2 P(\lambda; \dot{\mathbf{u}}_0)$  n'a pas de valeurs propres nulles, donc elle reste positive.

2° : Pour  $\lambda_1' > \lambda_1$

s'il y a deux vitesses différentes  $\dot{\mathbf{u}}_F$  et  $\dot{\mathbf{u}}_0$  solutions de l'équation en vitesses (III.47). Deux situations se présentent (cf.Fig.9).

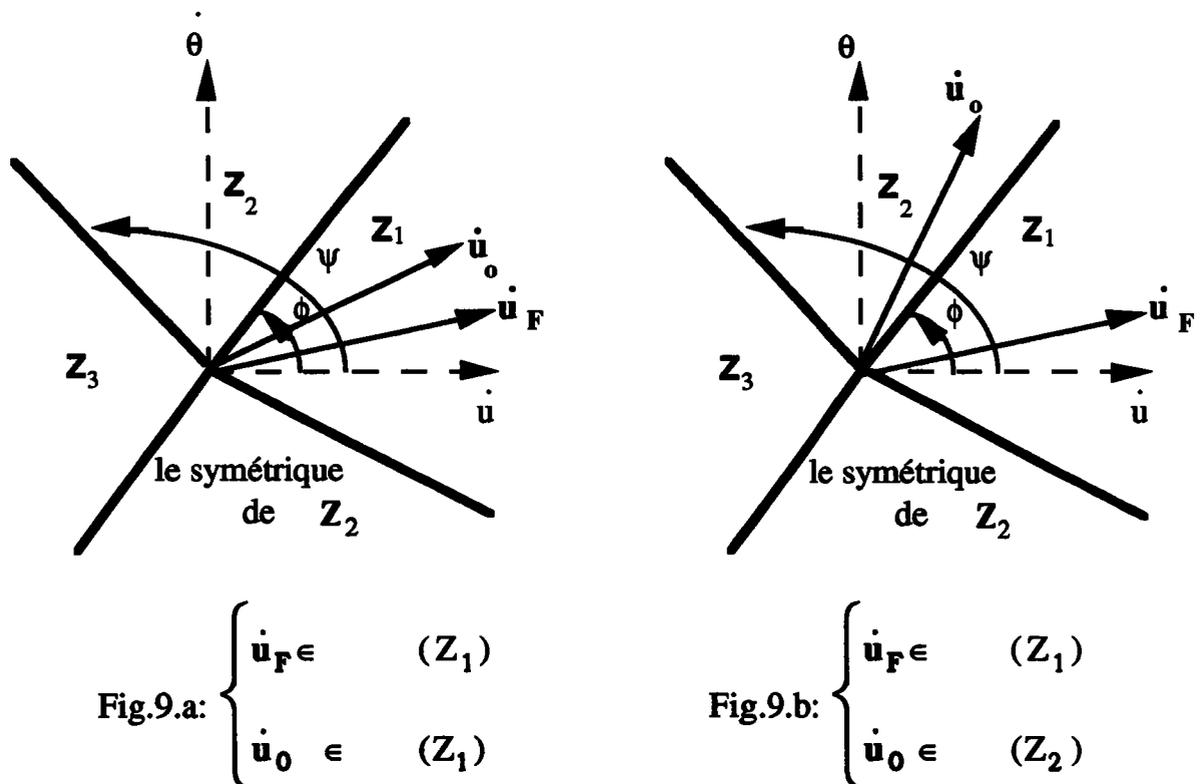


Fig.9: Deux types de situations

**Cas.1:** si ces deux vitesses sont toutes deux dans la zone de linéarité ( $Z_1$ ) (cf.Fig.9.a) alors en vertu de (III.5.2.1.2.2) , on a

$$D^2 P(\lambda; \dot{\mathbf{u}}_0) = 0$$

$$\text{donc } \lambda'_1 > \lambda_2.$$

$$\text{Comme } \lambda_1 = \text{Inf} (\lambda'_1) \quad \text{il en résulte} \quad \lambda_1 \geq \lambda_2.$$

**Cas. 2:** si ces deux vitesses ne sont pas dans la zone de linéarité ( $Z_1$ )

(cf.Fig.9.b) alors  $\dot{\mathbf{u}}_0 \in (Z_2)$  et il est tel que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla P(\lambda'_1; \dot{\mathbf{u}}_F) = \dot{\lambda} \mathbf{f} \text{ dans } (Z_1) \\ \nabla P(\lambda'_1; \dot{\mathbf{u}}_0) = \dot{\lambda} \mathbf{f} \text{ dans } (Z_2) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(III.65)} \\ \text{(III.66)} \end{array}$$

L'équation en vitesses (III.66) admet pour solution

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{u}}_0 = \frac{d_2 - \lambda'_1}{a_2(d_2 - \lambda'_1) - b_2^2} \\ \dot{\theta}_0 = \frac{-b_2}{a_2(d_2 - \lambda'_1) - b_2^2} \end{array} \right. \quad \text{(III.67)}$$

On remarque que si  $a_2(d_2 - \lambda'_1) - b_2^2 > 0$  alors pour que cette vitesse reste à l'intérieur de la zone de linéarité ( $Z_2$ ) (cf.Fig.9.b) il faut

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{u}}_0 > 0 \\ \dot{\theta}_0 > 0 \end{array} \right.$$

et donc  $b_2 < 0$ .

Pour que cette solution appartienne à la zone de linéarité ( $Z_2$ ) (cf.Fig.9.b) il faut et il suffit qu'elle vérifie l'inégalité suivante:

$$\cotan(\psi) \leq \frac{\dot{u}_0}{\dot{\theta}_0} \leq \cotan(\phi) \quad (\text{III.68})$$

Compte-tenu du signe négatif de  $b_2$ , cette dernière inégalité s'écrit:

$$b_2 \cotan(\phi) + d_2 \leq \lambda'_1 \leq b_2 \cotan(\psi) + d_2 \quad (\text{III.69})$$

En vertu de (III.58) et compte-tenu de (III.69) on obtient:

$$d_1 + (a_2 - a_1) + b_2 \tan(\phi) \leq b_2 \cotan(\phi) + d_2 \leq \lambda'_1 \quad (\text{III.70})$$

Il en résulte

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda'_1 \geq \lambda_0, \quad \lambda_0 = d_1 \\ \text{puisque} \\ (a_2 - a_1) + b_2 \tan(\phi) > 0 \text{ (en vertu de (III.56))} \end{array} \right.$$

Donc  $\lambda_1 \geq \lambda_0$

Cela achève la démonstration du théorème.

## Commentaire

*On vient de montrer que sous l'hypothèse restrictive ( $H_4$ ) sur la forme du potentiel, le critère (III.39) proposé est une condition nécessaire et suffisante d'existence de deux vitesses.*

*Nous soulignons que dans le cas où la fonction potentielle est une fonction quelconque strictement convexe, la démonstration de la condition nécessaire semble beaucoup plus délicate. Mais nous pensons que le résultat reste aussi vrai dans ce cas :*

*en effet il est remarquable que le signe positif de la quantité  $\lambda_1 - d_1$  (cf.III.70) est exactement dû à la condition de convexité (III.56).*

### III.5.3.3.1 Conclusion - Orientation

*En résumé, on a proposé un critère de bifurcation pour des lois de comportement complexes considérées ici sur l'exemple test de l'éprouvette cruciforme. Nous soulignons que ce critère donne une condition suffisante de bifurcation. Cette condition est aussi nécessaire dans le cas de l'hypothèse restrictive sur la forme du potentiel  $W(\dot{u})$ .*

*A partir de la charge critique donnée par le critère (III.39) et dans le cas du modèle "  $J_2$  avec Coin ", la bifurcation est:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{transverse: } \left\{ \begin{array}{l} \text{dans le cas où la zone de charge totale} \\ \text{existe} \end{array} \right. \\ \text{et} \\ \text{tangente dans le cas contraire.} \end{array} \right.$$

*En l'absence de résultats directs d'existence de branches bifurquées, la fin du mémoire sera consacrée à la construction de branches de solutions par la mise en rapport de l'incrément de charge et du développement des zones de charge partielles.*

**POST-FLAMBAGE PLASTIQUE**

## IV POST-FLAMBAGE PLASTIQUE

Dans la section (III.4), on a proposé un critère de bifurcation (III.39) pour le modèle "  $J_2$  avec Coin " dans le cas de l'éprouvette cruciforme. En l'absence de résultats directs d'existence de branches bifurquées à partir de la charge critique ainsi définie, on essaiera de donner une construction post-critique de ces branches par la mise en rapport de l'incrément de charge  $\mu$  et du développement des zones de charge partielles.

### IV.1 INTRODUCTION

L'étude du comportement post-critique initial est beaucoup plus complexe que dans le cas des systèmes conservatifs à cause de l'interaction des non-linéarités géométriques et matérielles. Cette étude a été développée par *Hutchinson* [ $H_4$ ], il exprime la charge dans le voisinage du point de bifurcation. Mais le problème de la décharge élastique complique considérablement le problème.

Les résultats remarquables de *Hutchinson* [ $H_4$ ] portent essentiellement sur les points suivants:

si la composante du déplacement suivant le mode est prise comme paramètre du développement asymptotique, le paramètre de force admet un développement fractionnaire à cause du mouvement de la zone de la décharge élastique.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\lambda}{\lambda_c} = 1 + \lambda_1 \theta + \lambda_2 \theta^{(1+\alpha)} + \dots \\ u = u_1 \theta + u_2 \theta^2 + \dots \end{array} \right. \quad (\text{IV.1})$$

$\alpha$  désigne un nombre fractionnaire  $0 < \alpha < 1$  dépendant de la nature du solide au voisinage d'un point de décharge, par exemple  $\alpha = \frac{1}{3}$  pour les plaques et les coques minces.

D'une manière générale,  $\lambda_1$  est positive puisque la bifurcation se produit sous charge croissante et  $\lambda_2$  est négative de sorte que la branche bifurquée admette un point de charge maximum qui est en général proche de la charge critique de bifurcation  $\lambda_0$ .

Une méthode de développement en série entière a été proposée ( $[N_4]$ ,  $[N_4]$ ,  $[L_4]$ ), alors que *Hutchinson* utilisait des puissances fractionnaires. Cette nouvelle approche est systématique, mais sa mise en oeuvre est extrêmement difficile. Pour réexaminer ces problèmes et les mettre en oeuvre, une méthode plus simple est proposée récemment par *Léger et Potier-Ferry*  $[L_3]$  et qui est généralisable à des structures complexes.

Pour notre étude, on appliquera cette dernière technique asymptotique dont on rappelle brièvement le principe.

### Principe de la méthode (cas des poutres élastoplastiques)

Dès que la charge est supérieure à  $\lambda_0$ , il apparaît une zone de décharge élastique à partir du point initial de charge neutre. *Hutchinson*  $[H_4]$  avait montré que cette zone joue un rôle prépondérant dans le calcul au second ordre. La méthode consiste à chercher les relations qui existent entre trois quantités petites, caractéristiques du problème, à savoir:

- l'incrément de charge  $\mu = \lambda - \lambda_0$
- l'incrément de vitesse de déformation plastique  $\beta(x)$ ,
- l'extension longitudinale  $\tau$  de la zone de la décharge élastique (cf. Fig.1)

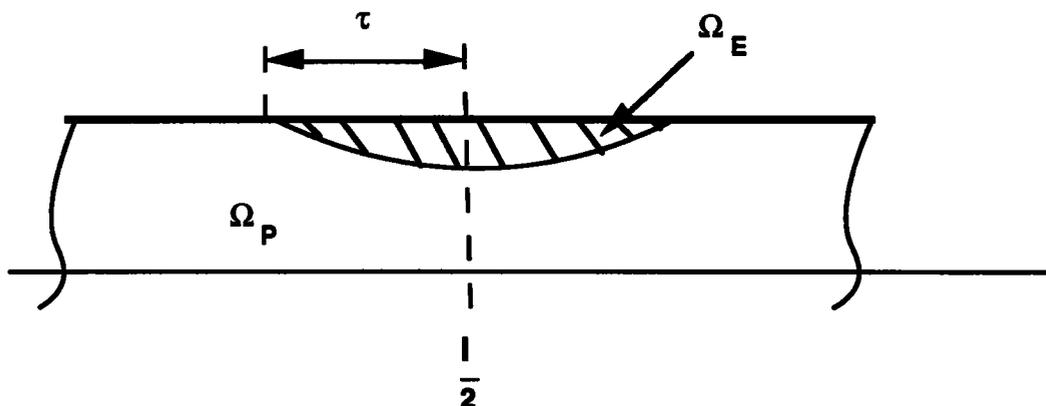


Fig.1: Progression de la zone de décharge pour une poutre de section circulaire

Par rapport aux méthodes précédentes (  $[L_4]$ ,  $[N_4]$  ), le choix de  $\beta(x)$  comme variable principale est un avantage décisif. Ceci permet de retarder au maximum l'introduction de développements en séries posés a priori et évite presque toute discussion sur les " exposants fractionnaires ". Par exemple dans le cas d'une poutre, le comportement post-critique est principalement déterminé par l'apparition, puis la croissance de la zone de décharge élastique à partir d'un point initial de charge neutre ( cf.Fig.1). Ces analyses donnent une première approximation de la solution ( par exemple par des courbes (charge/flèche )). Une particularité de ces courbes est la présence d'un maximum  $\lambda_m$ , avec un écart relativement faible entre la charge de bifurcation et la charge maximale que peut supporter la structure (cf.Fig.2).

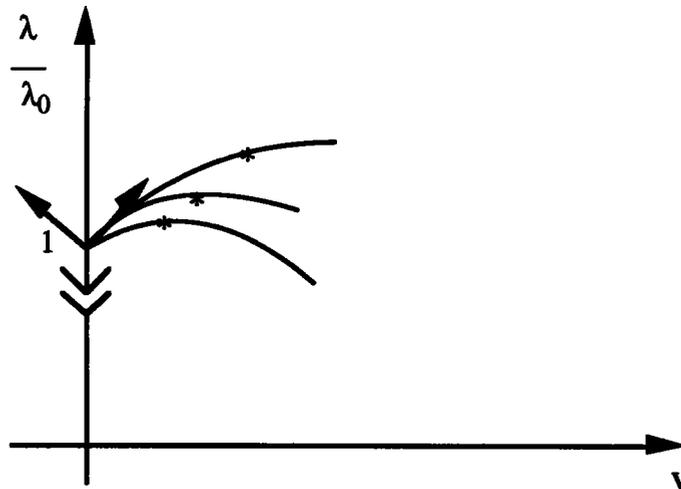


Fig.2: Courbe charge-flèche

Pour un exposé complet, nous renvoyons aux travaux de *Léger et Potier-Ferry* [ $L_3$ ].

## IV.2 CALCUL DES BRANCHES BIFURQUÉES PAR LA MÉTHODE ASYMPTOTIQUE [L<sub>3</sub>]

Pour s'assurer de l'existence d'une branche bifurquée à partir de la charge critique  $\lambda_0$  donnée par le critère de bifurcation (III.39) pour le modèle " J<sub>2</sub> avec Coin ", on appliquera la méthode asymptotique récemment proposée par *Léger et Potier-Ferry* [L<sub>3</sub>]. Le comportement post-critique est principalement déterminé par l'apparition, puis la croissance de la zone de la décharge élastique(cf. (IV.1)).

### IV.2.1 Mise en œuvre de la méthode

Dans ce paragraphe, on appliquera cette technique asymptotique par substituant de *la zone de décharge élastique par la zone de charge partielle*. En vertu du modèle " J<sub>2</sub> avec Coin ", on distinguera deux cas.

- |   |   |
|---|---|
| { | Cas.1: la loi permet une zone de charge totale<br>( cf.IV.2.1.2.1)        |
|   | Cas.2: la zone de charge totale est absente du modèle<br>( cf.IV.2.1.2.2) |

On essayera de confirmer par cette étude post-critique que la bifurcation est bien *transverse* dans le cas.1 et *tangente* dans le cas.2.

#### IV.2.1.1 Cas où la loi permet une zone de charge totale ( D<sub>PT</sub> )

Afin d'en faciliter la lecture du calcul de la branche bifurquée nous procédons par étapes.

#### IV.2.1.1.1 Calcul de la branche bifurquée

Au point de bifurcation  $\lambda = \lambda_0$ , on retient la vitesse initiale donnée dans (III.41) par:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta}_0 = \frac{2}{h} a_0^{-1} \tan(\phi_1) \\ \phi_1 = \phi_0\left(\pm \frac{h}{2}\right), \quad \phi_0(z) = \tan^{-1}\left(z \frac{\dot{\theta}_0}{u_0}\right) \\ \text{où } \dot{u}_0 = a_0^{-1}, \quad a_0 = \frac{2}{3} \frac{1h}{L(1-2\nu)} E + \frac{81}{3L} G g(0)h \\ (\cdot) = \frac{d(\cdot)}{d\lambda} \end{array} \right. \quad (\text{IV.1})$$

et qui correspond à l'apparition des points de charge neutre en  $z = \pm \frac{h}{2}$ .

Suivant l'argument de *Hutchinson* [ $H_4$ ], dès la charge critique de flambage  $\lambda_0$  une zone de charge partielle ( $D_{PP}$ ) de taille croissante se développe à partir de ce point initial de charge neutre (cf.Fig.3).

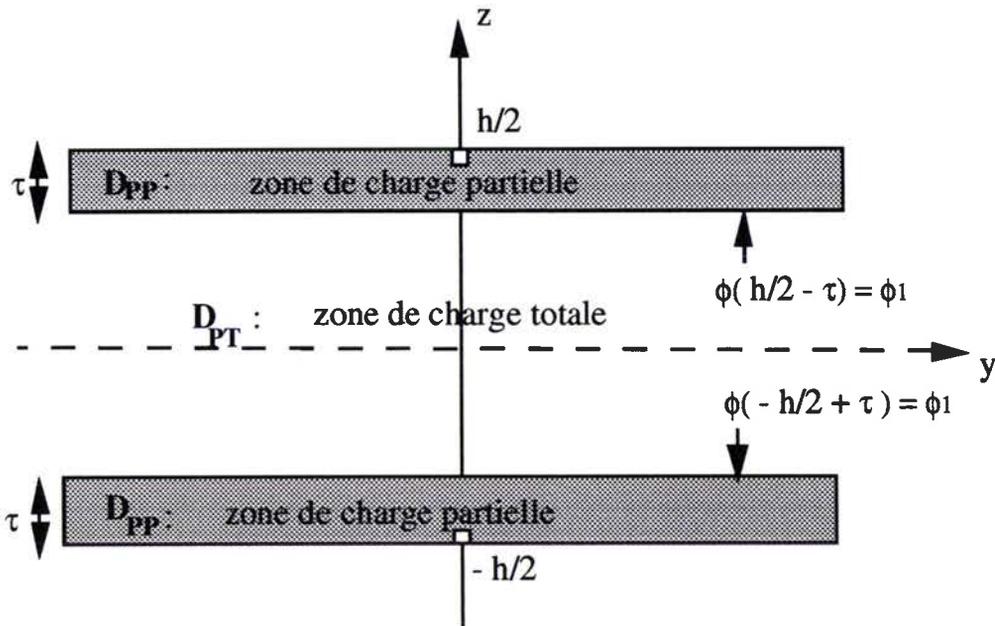


Fig.3: Caractérisation de la largeur de la zone de charge partielle ( $D_{PP}$ )

Nous choisissons  $\tau$ , la largeur de la zone de charge partielle ( $D_{PP}$ ) comme premier paramètre de perturbation. Les autres paramètres de perturbation seront l'incrément de charge  $\mu$  et l'incrément de vitesse de déformation plastique  $\beta(z)$  dans la zone de charge totale ( $D_{PT}$ ) et sont tels que:

$$\left\{ \begin{array}{l} V = \dot{u} - \dot{u}_0 \\ W = \dot{\theta} - \dot{\theta}_0 \quad z \in ] \frac{h}{2} - \tau, \frac{h}{2} [ \\ \beta(z) = \phi(z) - \phi_0(z) \\ \mu = \sigma - \sigma_C \end{array} \right. \quad (IV.2)$$

où  $V$ ,  $W$  sont des incréments de vitesses assez petits. Le choix de  $\tau$  est naturel puisqu'il permet de décrire complètement la frontière libre.

**Étape.1: Description analytique des inconnues dans la zone de charge partielle ( $D_{PP}$ ) en fonction du paramètre géométrique  $\tau$ .**

Nous avons vu que l'angle  $\phi_0(z)$ , qui décrit la vitesse initiale dans l'espace des vitesses des déformations est donné par:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tan(\phi_0(z)) = \frac{\dot{\theta}_0}{\dot{u}_0} \\ \text{où} \\ \phi_1 = \phi_0\left(\pm \frac{h}{2}\right) \end{array} \right. \quad (IV.3)$$

On rappelle aussi que la condition (IV.4) (existence d'un point de charge neutre) a permis de déterminer la vitesse initiale  $\dot{\theta}_0$ .

Après un développement de *Taylor* de la fonction  $\phi(z)$  autour du point  $z = \frac{h}{2}$ , on en déduit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi\left(\frac{h}{2} - \tau\right) = \phi_0\left(\frac{h}{2}\right) - \phi_0'\left(\frac{h}{2}\right)\tau + \beta\left(\frac{h}{2}\right) + 0(\tau\beta) \\ \text{avec:} \quad \left[ \begin{array}{l} \phi_0\left(\frac{h}{2}\right) = \phi_1 \\ \phi_0'\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{1}{h} \sin(2\phi_1) \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (\text{IV.5})$$

La valeur de  $\beta\left(\frac{h}{2}\right)$  peut être obtenue en fonction du paramètre géométrique  $\tau$  grâce à l'équation (IV.5) et à l'équation caractéristique de la frontière entre les deux zones  $\{ \phi\left(\frac{h}{2} - \tau\right) = \phi_1 \}$

$$\beta\left(\frac{h}{2}\right) = \tau \left\{ \frac{1}{h} \sin(2\phi_1) \right\} + 0(\tau^2) \quad (\text{IV.6})$$

Pour raison de commodité, on fait un changement d'échelle sur l'épaisseur des points de ( $D_{PP}$ )

$$\left\{ \begin{array}{l} z = \frac{h}{2} - \tau Z \\ 0 \leq Z \leq 1 \end{array} \right. \quad (\text{IV.7})$$

Par un développement de *Taylor* comme en (IV.5) on peut évaluer la valeur de  $\beta(z)$  dans la zone de charge partielle de la manière suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_0(z) + \beta(z) = \phi_0\left(\frac{h}{2}\right) + \phi_0'\left(\frac{h}{2}\right)\left(z - \frac{h}{2}\right) + \beta\left(\frac{h}{2}\right) + 0(\tau^2) \\ = \phi_1 + \frac{1}{h}\left(z - \frac{h}{2}\right)\sin(2\phi_1) + \frac{1}{h}\tau\sin(2\phi_1) + 0(\tau^2) \\ z \in (D_{PP}) \end{array} \right.$$

D'où la vitesse de déformation plastique  $\beta(z)$  en fonction de la nouvelle variable  $Z$

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta(z) = (1 - Z) \left( \frac{1}{h} \sin(2\phi_1) \right) \tau + 0(\tau^2) \\ z = \frac{h}{2} - \tau Z \quad , \quad 0 \leq Z \leq 1 \end{array} \right. \quad (\text{IV.8})$$

La vitesse de déformation plastique  $\beta(z)$  est désormais connue dans la zone de charge partielle ( $D_{pp}$ ), mais elle l'est en fonction du seul paramètre  $\tau$  qui reste encore indéterminé.

**Étape.2: Relation entre l'incrément de charge  $\mu$  et la largeur  $\tau$  de la zone de charge partielle ( $D_{pp}$ ).**

Nous allons transformer l'équation en vitesses ( III.37) afin de relier l'incrément de charge  $\mu$  à la largeur  $\tau$  de la zone de charge partielle ( $D_{pp}$ ).

A cet effet, nous développons tous les termes de l'équation (III.37) pour  $(\phi, \dot{\theta}, \lambda)$  voisins de  $(\phi_0, \dot{\theta}_0, \lambda_0)$ .

En vertu de la loi de comportement (cf.Fig.3) on a d'une part

$$\left\{ \begin{array}{l} g(\phi) - g(\phi_0) = (\phi - \phi_0) g'(\phi_0) + t - o - s \\ \qquad \qquad \qquad = \beta(z) g'(\phi_0) + t - o - s \\ \\ t - o - s: \text{ termes d'ordres supérieurs} \end{array} \right. \quad (\text{IV.9})$$

et d'autre part:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} g(\phi) dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} g(o) dz + 2 \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (g(\phi) - g(o)) dz \quad (\text{IV.10})$$

En vertu de (IV.9) et (IV.10) on a les estimations des intégrales qui interviennent dans le problème en vitesses (III.37).

$$\begin{aligned}
 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} g(\phi) dz &= hg(o) + 2g'(\phi_1) \int_{\frac{h}{2} - \tau}^{\frac{h}{2}} \beta(z) dz + t - o - s \\
 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 g(\phi) dz &= \frac{h^3}{12} g(o) + 2g'(\phi_1) \int_{\frac{h}{2} - \tau}^{\frac{h}{2}} z^2 \beta(z) dz + t - o - s \\
 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sin(2\phi) g'(\phi) dz &= 4 \cos(2\phi_1) g'(\phi_1) \int_{\frac{h}{2} - \tau}^{\frac{h}{2}} z^2 \beta(z) dz + t - o - s \\
 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 \sin(2\phi) g'(\phi) dz &= 4 \cos(2\phi_1) g'(\phi_1) \int_{\frac{h}{2} - \tau}^{\frac{h}{2}} z^2 \beta(z) dz + t - o - s \\
 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sin^2(\phi) g'(\phi) dz &= 2 \sin(2\phi_1) g'(\phi_1) \int_{\frac{h}{2} - \tau}^{\frac{h}{2}} z \beta(z) dz + t - o - s \\
 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \cos^2(\phi) g'(\phi) dz &= -2 \sin(2\phi_1) g'(\phi_1) \int_{\frac{h}{2} - \tau}^{\frac{h}{2}} z \beta(z) dz + t - o - s
 \end{aligned}
 \tag{IV.11}$$

Compte-tenu de (IV.2) et après le report de (IV.10) dans l'équation en vitesses (III.37) on a la formulation en  $\beta(z)$  de cette équation. Elle s'exprime de la manière suivante:

$$\begin{cases} A(\beta)V + B(\beta)W = D(\beta) \\ B(\beta)V + C(\mu, \beta)W = E(\mu, \beta) \end{cases} \quad (\text{IV.12})$$

où:

$$A(\beta) = \frac{21h}{3L(1-2\nu)}E + \frac{8lh^2}{3L}Gg(o) + (2 + \cos(2\phi_1)) \left( \frac{81G}{3L}g'(\phi_1) \right) \int_{\frac{h}{2}-\tau}^{\frac{h}{2}} \beta(z)dz$$

$$B(\beta) = \frac{81}{L} \sin(2\phi_1) Gg'(\phi_1) \int_{\frac{h}{2}-\tau}^{\frac{h}{2}} z\beta(z)dz$$

$$C(\mu, \beta) = \frac{21^3 h}{3L} \mu + (2 + \cos(2\phi_1)) \left( \frac{81}{L} Gg'(\phi_1) \right) \int_{\frac{h}{2}-\tau}^{\frac{h}{2}} z^2\beta(z)dz$$

$$D(\beta) = \left\{ -(2+\cos(2\phi_1)) \frac{81G}{3L} g'(\phi_1) \int_{\frac{h}{2}-\tau}^{\frac{h}{2}} \beta(z)dz \right\} \dot{u}_o + \dot{\theta}_o \left\{ -\frac{81G}{3L} g'(\phi_1) \sin(2\phi_1) \right\} \int_{\frac{h}{2}-\tau}^{\frac{h}{2}} z\beta(z)dz$$

$$E(\mu, \beta) = \dot{\theta}_o \left\{ -\frac{21^3 h}{3L} \mu - \frac{81G}{L} (2+\cos(2\phi_1)) g'(\phi_1) \right\} \int_{\frac{h}{2}-\tau}^{\frac{h}{2}} z^2\beta(z)dz + \dot{u}_o \left\{ \frac{81G}{3L} \sin(2\phi_1) g'(\phi_1) \int_{\frac{h}{2}-\tau}^{\frac{h}{2}} z\beta(z)dz \right\}$$

En vertu de (IV.8) on a:

$$\beta = 0(\tau)$$

et il en résulte de (IV.12) que:

$$\left\{ \begin{array}{l} A(\beta) = 0(1) , B(\beta) = 0(\tau^2) , D(\beta) = 0(\tau^2) , \\ C(\mu, \beta) = 0(\tau^2 + \mu) , E(\mu, \beta) = 0(\tau^2 + \mu) \end{array} \right. \quad (\text{IV.13})$$

L'incrément de vitesse  $W$  est donné à partir de (IV.12) et il est tel que:

$$W = \frac{AE - BD}{AC - B^2}$$

En vertu de (IV.13), il s'ensuit que le numérateur et le dénominateur de l'incrément de vitesse  $W$  sont du même ordre. Cet ordre s'exprime de la manière suivante:

$$0(\tau^2 + \mu) - 0(\tau^4)$$

De plus, on remarque qu'au-delà de la charge critique,  $BD$  et  $B^2$  sont négligeables devant  $E$  et  $C$  et donc:

$$W \equiv \frac{E}{C}.$$

Comme l'incrément de vitesse  $W$  est assez petit, il en résulte:

$$\left\{ \begin{array}{l} E \equiv 0 \\ C \neq 0 \end{array} \right.$$

Cette dernière condition est équivalente à:

$$0(\tau^2 + \mu) \equiv 0 \quad (\text{IV.14})$$

La relation (IV.14) permet de relier l'incrément de charge  $\mu$  à la largeur  $\tau$  de la zone de charge partielle ( $D_{pp}$ ). Elle s'exprime à partir de (IV.11) de la manière suivante:

$$\mu \equiv \frac{12G}{12h} (2 + \cos(2\phi_0)) g'(\phi_0) \int_{\frac{h}{2} - \tau}^{\frac{h}{2}} z^2 \beta(z) dz \quad (IV.15)$$

**Étape.3: Relation entre l'incrément de charge  $\mu$  et la largeur  $\tau$  de la zone de charge partielle ( $D_{pp}$ )**

En vertu de (IV.8) et après intégration de (IV.15) on obtient:

$$\int_{\frac{h}{2} - \tau}^{\frac{h}{2}} z^2 \beta(z) dz = \frac{h}{8} \sin(2\phi_1) \tau^2 + O(\tau^3) \quad (IV.16)$$

On reporte (IV.16) dans (IV.15) on a l'expression de l'incrément de charge  $\mu$  en fonction de la largeur  $\tau$  de la zone de charge partielle ( $D_{pp}$ ) qui s'exprime de la manière suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu = F(\phi_1) \tau^2 + O(\tau^3) \\ \text{avec} \\ F(\phi_1) = \frac{3G}{21^2} (\sin(2\phi_1))(2 + \cos(2\phi_1)) g'(\phi_1) \end{array} \right. \quad (IV.17)$$

### Remarque

Il s'ensuit de (IV.17) que le second membre de (IV.12) est d'ordre  $\tau^2$ .

#### Étape.4: Relation entre le paramètre de déplacement $\theta$ et l'incrément de charge $\mu$

Pour cela, on élimine le paramètre géométrique  $\tau$  dans (IV.17) et on réintroduit le déplacement  $\theta$ . En reportant (IV.17) dans (IV.8), on constate que  $\beta(z)$  est proportionnel à  $\mu^{1/2}$ . Grâce à  $\beta(z)$  on a l'expression analytique de  $\phi(z)$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi(z) = \phi_1 + G(\phi_1)\mu^{1/2} + O(\mu^{2/3}) \\ \text{avec} \\ G(\phi_1) = \frac{1}{h} \sin(2\phi_1) F^{-1}(\phi_1) \end{array} \right. \quad (\text{IV.18})$$

En vertu de (IV.18), il découle l'expression du développement de l'incrément de déplacement maximum  $\dot{\theta}$  en fonction de l'incrément de charge  $\mu$  et qui s'exprime de la manière suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta} = \frac{d\theta}{d\mu} = \frac{2}{h} a_0^{-1} \tan(\phi) \\ = \phi_1 + G(\phi_1) \mu^{1/2} + O(\mu^2) \end{array} \right.$$

Intégrant  $\frac{d\theta}{d\mu}$ , on obtient le déplacement  $\theta$  en fonction de l'incrément de charge  $\mu$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta = \mu v_1 + \mu^{3/2} v_2 + O(\mu^2) \\ \text{avec:} \quad \left[ \begin{array}{l} v_1 = \frac{2}{h} a_0^{-1} \phi_1 \\ v_2 = \frac{2}{h} a_0^{-1} G(\phi_1) \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (\text{IV.19})$$

### Relation entre l'incrément de charge $\mu$ et l'angle $\theta$

On cherche comme en élasticité un développement de l'incrément de charge  $\mu$  en fonction de l'angle  $\theta$  (aux ordres supérieurs près), on obtient:

$$\begin{cases} \mu = \frac{1}{v_1} \theta - \frac{v_2}{v_1^2} \theta \left( \frac{\theta}{v_1} \right)^{1/2} + 0(\theta^2) \\ \mu = \sigma - \sigma_c \end{cases} \quad (\text{IV.20})$$

Il est donc classique d'en déduire à partir de (IV.20) un développement en puissance fractionnaire, où le premier terme non-linéaire est affecté de la puissance  $\left(\frac{3}{2}\right)$ .

Il s'exprime de la manière suivante:

$$\begin{cases} \frac{\sigma}{\sigma_c} = 1 + \sigma_1 \theta - \sigma_2 \theta^{3/2} + 0(\theta^2) \\ \text{avec:} \quad \begin{cases} \sigma_1 = \frac{1}{v_1 \sigma_c} , & v_1 = \frac{2}{h} a_0^{-1} \phi_1 \\ \sigma_2 = \frac{v_2}{v_1^{5/2} \sigma_c} , & v_2 = \frac{2}{h} a_0^{-1} G(\phi_1) \end{cases} \end{cases} \quad (\text{IV.21})$$

C'est l'apparition de la zone de charge partielle ( $D_{pp}$ ) qui est la cause de la puissance fractionnaire dans (IV.21).

#### IV.2.1.1.2 Commentaires

*Le développement asymptotique obtenu dans (IV.21) est comparable à celui donné par Hutchinson pour une poutre de type Shanley [ S<sub>2</sub>].*

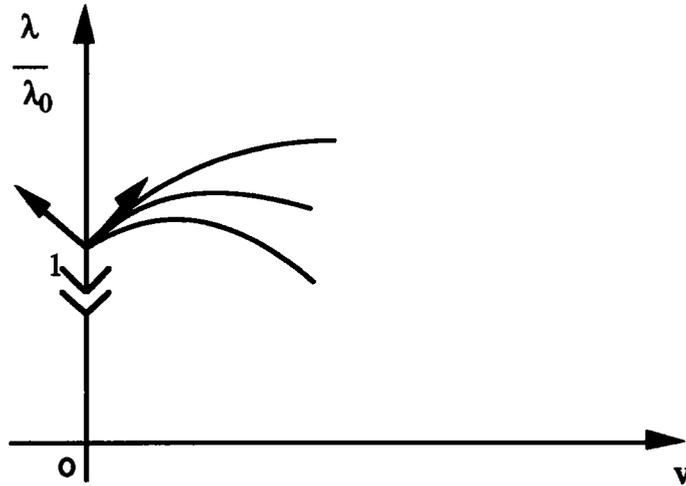
*L'existence du développement en puissance fractionnaire dans (IV.21) est clairement reliée à la progression de la zone de charge partielle ( D<sub>PP</sub> ) . L'intégrale du problème (IV.16) est sa traduction mathématique. Clairement, cette intégrale dépend fortement de la loi de comportement au voisinage du point initial de charge neutre.*

*La principale conséquence d'un développement comme (IV.21) est l'estimation de la charge maximale supportée. En tronquant (IV.21) après le premier terme non linéaire, on obtient :*

$$\begin{cases} v_m = \left( \frac{2}{3} \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)^2 \\ \frac{\sigma_m}{\sigma_c} = 1 + \sigma_1 v_m - \sigma_2 v_m^{3/2} \end{cases} \quad (IV.22)$$

*Nous soulignons que le calcul donné dans (IV.22) n'est pas exact et la formule (IV.22) n'a aucune valeur asymptotique. Mais c'est la seule estimation analytique connue de la charge maximale. On notera que, suivant les valeurs de  $\frac{E_T}{E}$ , cette charge peut n'être guère supérieure à la charge critique du module tangent.*

*Il est classique d'en déduire une courbe  $\sigma = \sigma(\theta)$  à partir de (IV.22).*



**Fig.4: Courbe charge-flèche**

### IV.2.1.2 Cas où la zone de charge totale est absente

Pour confirmer l'affirmation d'existence de bifurcation tangente à partir de la charge  $\lambda_0$  dans le cas générique d'absence de la zone de charge totale du modèle "J<sub>2</sub> avec Coin ". On fera une étude post-critique de la branche bifurquée.

#### IV.2.1.2.1 Calcul de la branche bifurquée

On rappelle que dans ce cas, on a fait disparaître la zone de charge totale en faisant tendre l'angle  $\phi_0$  vers zéro.

A cet effet, on retient la vitesse initiale:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta}_0 = 0 \\ \text{au point de bifurcation } \lambda = \lambda_0 \end{array} \right. \quad (\text{IV.23})$$

Les paramètres de perturbation seront l'incrément de charge  $\mu$  et l'incrément de vitesse de déformation plastique  $\beta(z)$  qui sont donnés par:

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta(z) = 0 + \phi(z) \\ \dot{u} = \dot{u}_0 + V \\ \dot{\theta} = 0 + W \end{array} \right. \quad (\text{IV.24})$$

où  $\phi$ ,  $V$ ,  $W$  sont des quantités assez petites

#### Étape.1: Relation entre l'incrément de charge $\mu$ et le déplacement $\theta$

On essaie de transformer l'équation en vitesses (III.37) afin de pouvoir relier l'incrément de charge  $\mu$  au déplacement  $\theta$ .

On reporte (IV.24) dans l'équation en vitesses (III.37) , on a la formulation en  $\phi(z)$  de cette dernière équation. Elle s'exprime de la manière suivante:

$$\left[ \begin{cases} A_1(\phi) V + B_1(\phi) W = 0 \\ C_1(\phi) V + D_1(\phi) W = 0 \end{cases} \right. \quad (IV.25)$$

où  $A_1(\phi)$ ,  $B_1(\phi)$ ,  $C_1(\phi)$ ,  $D_1(\phi)$  dépendent de la loi de comportement et  $\phi$  est défini par  $\tan(\phi) = z \frac{\dot{\theta}}{\dot{u}}$

où:

$$\left[ \begin{aligned} A_1(\phi) &= \frac{2lh}{3L(1-2\nu)} + \frac{81}{3L} G \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} g(\phi) dz - \frac{2}{3} \frac{1}{L} G \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sin(2\phi) g'(\phi) dz \\ B_1(\phi) &= - \frac{41}{L} G \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sin^2(\phi) g'(\phi) dz \\ C_1(\phi) &= \frac{41}{3L} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \cos^2(\phi) g'(\phi) dz \\ D_1(\phi) &= \frac{2}{3} \frac{13h}{L} (\mu + \sigma_c) + \frac{81G}{L} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 g(\phi) dz + \frac{21G}{L} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 \sin(2\phi) g'(\phi) dz \end{aligned} \right.$$

A l'état initial (  $\phi_0 = 0$  ), Il s'ensuit de (IV.25) que:

$$\begin{cases} A_1(0) \neq 0 \\ B_1(0) = C_1(0) = D_1(0) = 0 \end{cases}$$

### Relation entre le paramètre de déplacement $\theta$ et l'incrément de charge $\mu$

Pour exprimer la solution post-critique comme une relation entre le paramètre de déplacement  $\theta$  et l'incrément de charge  $\mu$ , on choisit un petit paramètre  $\varepsilon$  tel que:

$$\varepsilon = \dot{\theta} \quad (\dot{\theta} \text{ est un paramètre assez petit})$$

Il en résulte de (IV.25) que:

$$\phi(z, \dot{\theta}) = O(\varepsilon)$$

Par un développement de *Taylor* de la fonction  $g(\phi)$  autour de  $\phi = 0$  et compte-tenu des propriétés de la fonction  $g(\phi)$  on a:

$$\begin{cases} g'(\phi) = g'(0) + g''(0)\phi + \dots\dots\dots \\ \text{où} \\ g'(0) = 0, \quad g''(0) < 0 \end{cases} \quad (\text{IV.26})$$

La condition (IV.26) implique

$$g'(\phi) = O(\varepsilon).$$

En vertu de ( IV.26) et (IV.25) on a:

$$\left\{ \begin{array}{l} B_1(\phi) = 0(\varepsilon^2) \\ C_1(\phi) = 0(\varepsilon^2) \end{array} \right. \quad (IV.27)$$

$$\left[ \begin{array}{l} D_1(\phi) = D_1(0) + 0(\mu) + 0(\varepsilon^2) \\ \qquad \qquad \qquad \text{où} \\ D_1(0) = 0 \end{array} \right.$$

Il s'ensuit de (IV.25) que l'incrément de vitesse  $W$  est bien défini si la condition suivante est satisfaite:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 D_1 - B_1 C_1 = 0 \\ A_1 \neq 0 \end{array} \right. \quad (IV.28)$$

Grâce à (IV.27) la condition (IV.28) implique:

$$0(\mu) + 0(\varepsilon^2) - 0(\varepsilon^4) = 0 \quad (IV.29)$$

et elle est équivalente à: 
$$\left\{ \begin{array}{l} D_1(\phi) = 0 \\ \text{ou encore} \\ 0(\mu) = 0(\varepsilon^2) \end{array} \right. \quad (IV.30)$$

Cette dernière relation permet de relier l'incrément de charge  $\mu$  au petit paramètre  $\theta$ .

**Étape.2: Expression analytique de l'incrément de charge  $\mu$  en fonction de  $\theta$  .**

En vertu de (IV.25), la relation(IV.30) s'exprime analytiquement de la manière suivante:

$$\frac{2}{3} \frac{l^3 h}{L} \mu + \frac{2lG}{L} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 \sin(2\phi) g'(\phi) dz = 0 \quad (IV.31)$$

Après intégration de (IV.31) et compte-tenu de (IV.26) on obtient:

$$\begin{cases} \mu = \frac{G}{2} |g''(0)| \left(\frac{h}{l}\right)^2 \theta^2 \\ g''(0) < 0 \end{cases} \quad (IV.32)$$

Ainsi après intégration de (IV.32) par rapport au paramètre de charge  $\mu$  on a:

$$\begin{cases} \theta = K \mu^{3/2} \\ \text{où} \\ K = \frac{4}{3G |g''(0)|} \left(\frac{h}{l}\right)^2 \end{cases} \quad (IV.33)$$

et il en résulte de (IV.33) l'expression analytique de la branche bifurquée qui s'exprime asymptotiquement sous la forme:

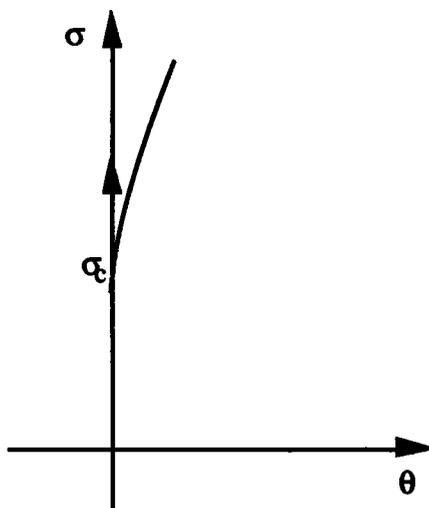
$$\theta = 0(\sigma - \sigma_c)^{3/2} \quad (IV.34)$$

#### IV.2.1.2.2 Commentaires

*Cette étude post-critique confirme bien l'affirmation d'existence d'une bifurcation tangente à partir de la charge critique donnée par le critère(III.39) dans le cas générique du modèle "  $J_2$  avec Coin ".*

*Le calcul explicite de (IV.34) montre que la branche bifurquée est bien tangente à la courbe fondamentale .*

*Il est classique d'en déduire une courbe  $\sigma = \sigma(\theta)$  ( cf.Fig.5)*



**Fig.5: Branche tangente à la courbe fondamentale**

*En particulier, l'exposant fractionnaire  $\frac{3}{2}$  du développement asymptotique est lié à l'appartenance de la zone de charge partielle.*

*Dans la littérature et en particulier en calcul des structures, on ne possède que de peu d'exemples qui illustrent les cas génériques où la bifurcation est tangente. On contribue dans cette étude par donner un nouveau exemple illustrant l'existence d'une bifurcation tangente à partir d'une hypothèse assez restrictive sur le modèle "  $J_2$  avec Coin ".*

### IV.2.3 Conclusions

*L'application de la nouvelle méthode de calcul du post-flambage des branches bifurquées pour le modèle de type "  $J_2$  avec Coin " donne de façon naturelle les développements en puissances fractionnaires. Les termes qui déterminent le post-flambage apparaissent clairement dans une seule équation. L'équation (IV.15) montre que la puissance fractionnaire est clairement reliée à la zone de charge partielle. L'intégrale de l'équation (IV.15) a un rôle décisif pour déterminer cette puissance et à partir de laquelle est déduit l'expression analytique de la branche bifurquée dans le cas où la loi permet une zone de charge totale.*

*Il est aisé de remarquer que cette méthode permet de calculer de façon naturelle et sans hypothèse a priori les branches bifurquées. Cette technique asymptotique est applicable aussi à des structures plus complexes . On pense qu'elle peut prendre en compte les défauts géométriques ainsi que les contraintes résiduelles.*

*Dans le cas où cette zone de charge totale disparaît du modèle "  $J_2$  avec Coin ", la bifurcation est tangente et la construction post-critique l'a confirmée.*

*Dans les applications pratiques et en particulier en mécanique des structures on n'a que peu d'exemples de bifurcation tangente. Ce résultat est très intéressant car il illustre un nouveau exemple de cas générique où la bifurcation est tangente.*

*L'intégrale de l'équation (IV.31) permet de relier l'incrément de charge  $\mu$  au paramètre de déplacement  $\theta$  et ainsi est obtenu l'expression de la branche bifurquée qui est tangente à la branche fondamentale.*

## CONCLUSIONS

## V Conclusions

*Dans la première partie de ce mémoire, nous avons présenté un résumé sur les lois élastoplastiques classiques à un seuil et sur l'interaction flambage-plasticité. Les études axées sur les critères usuels de bifurcation ont été évoquées afin de situer le contexte de notre étude qui s'inscrit dans la continuité de ces travaux. Ensuite, après avoir mis en cause les lois classiques basées sur le critère de Von-Mises et situé le paradoxe, on a présenté une loi phénoménologique de type Christoffersen et Hutchinson.*

*Dans la deuxième partie et dans une première étape, nous avons proposé un critère de bifurcation pour le modèle " $J_2$  avec Coin " sur l'exemple test de l'éprouvette cruciforme. Pour cela, on a cherché si plusieurs vitesses coexistaient à partir d'un certain état critique. Ensuite on a tenté d'étendre ce critère à d'autres lois de comportement complexes qui sont définies par des relations homogènes de degré un entre les vitesses de déformations et de contraintes et on a prouvé que sous une hypothèse assez restrictive sur la forme du potentiel ce critère est non seulement une condition suffisante mais aussi nécessaire de bifurcation .*

*Les résultats obtenus à partir de ce critère sont très intéressants à plusieurs titres. Son application au modèle " $J_2$  avec Coin " donne:*

- *une charge de bifurcation liée au module de cisaillement tangent, elle est inférieure à celle donnée généralement dans la littérature à partir d'un critère élastique par la loi de la déformation et elle est susceptible d'être en très bon accord avec la valeur expérimentale.*
- *A partir de cette charge critique, on a mis en évidence un nouveau cas générique de bifurcation tangente.*
- *La bifurcation est transverse dans le cas où il existe une zone de charge totale et tangente dans le cas où cette zone est absente.*

*L'objet de la deuxième étape est de s'assurer de l'existence de ces branches bifurquées à partir de la charge critique ainsi définie par le critère (III.39). Pour cela on a appliqué la méthode asymptotique proposée par Léger et Potier-Ferry [L<sub>3</sub>]. La bifurcation transverse s'effectue par développement de la zone de charge partielle. La construction post-critique est tout à fait intéressante surtout dans le cas où la zone de charge totale est absente puisqu'elle permet de confirmer l'affirmation d'existence d'une bifurcation tangente. Ce dernier résultat est très intéressant car il constitue un nouveau exemple de cas générique où la bifurcation est tangente ( dont on a pas beaucoup d'exemples en mécanique des structures !!).*

*Des applications de ce critère peuvent être menées, parmi lesquelles nous indiquons:*

*- sa généralisation à des structures quelconques et son utilisation en calcul des structures.*

*Il est possible aussi de tester ces lois de comportement complexes en post-flambage de structures simples, notamment des poutres en compression-torsion ou en flexion-torsion.*

*Il est aussi possible de prendre en compte les " modèles self-consistents " qui conduisent à des potentiels de ce type et qui sont de plus en plus opérationnels.*

**BIBLIOGRAPHIE**

## VI

## BIBLIOGRAPHIE

[ **A<sub>1</sub>** ] Akel S.

Flambage élastoplastique des structures " Thèse de l'E.N.P.C,  
Paris, 1987 "

[ **B<sub>1</sub>** ] Batdorf S.B.

" Theories of plastic buckling ", J. Aeronaut. Sci., 16, 1949, pp.  
405-408.

[ **B<sub>2</sub>** ] Benbagdad K. et Potier-Ferry M.

" Critères de flambage plastique avec lois de comportement  
complexes. "10 Congrès Français de Mécanique, Paris ,  
Septembre 1991 "

[ **B<sub>3</sub>** ] Berveiller M., Zaoui A.

" An extension of the self-consistent sheme to plastically  
flowing polycrystals. In: J. Mech. Phys. Solids, 26, 1979 ,  
pp.325-344".

[ **B<sub>4</sub>** ] Bijlaard P.P.

" Theory and tests of the plastic stability of plates and shells,  
J. Aeronaut., Sci, V.16., 1949.

[ **B<sub>5</sub>** ] Budiansky B.

Theory of Buckling and Post-buckling Behavior of Elastic  
Structures, Adv. in Appl. Mech., pp.1-65.

[ **B<sub>6</sub>** ] Bushnell D.

" Bifurcation Buckling of shells of revolution including large  
deflections, plasticity and creep " Int. J. of solids and  
structures, 1974, V. 10, pp. 1289-1305" .

[ **B<sub>7</sub>** ] Bushnell D.

" Computerized Buckling Analysis of Shells, Nijhoff, Leiden,  
1985"

[ **B<sub>8</sub>** ] Bushnell D.

Bosor J- Program for buckling of Elastic-Plastic shells  
computions and structur. V.6, pp.221-239, 1976.

- [ **B<sub>9</sub>** ] **Brush D.O. - Almroth B.O.**  
 " Buckling of bars, plates and shells." Mac-Gaw Hill Book Company, New-York, 1975.
- [ **C<sub>1</sub>** ] **Chipot M.**  
 " Variational Inequalities and Flow in Porous Medias, Springer- Verlag, Berlin and New York, 1984.
- [ **C<sub>2</sub>** ] **Christoffersen C. and Hutchinson J.W.**  
 " A class of phenomenological corner theories of plasticity, J. Mech.Phys. Solids - Vol. 27, 1979, pp.465-487 " .
- [ **C<sub>3</sub>** ] **Ciarlet P.G.**  
 " Elasticité tridimensionnelle ". Collection: Recherches en Mathématiques Appliquées. Masson, 1986.
- [ **C<sub>4</sub>** ] **Cimetière A.**  
 " Flambage élastoplastique des plaques, Thèse d'Etat, Université de Poitiers, 1987 " .
- [ **C<sub>5</sub>** ] **Cimetière A.**  
 " Flambage naissant des plaques élastoplastiques minces ", C.R.A.S, Paris, t 298, Série II, n°5, 1984.
- [ **C<sub>6</sub>** ] **Cimetière A.**  
 " Condition suffisante de non bifurcation pour les structures élastoplastiques soumises à des chargements complexes ". " 9 Congrès Français de Mécanique, Metz , 5- septembre1989".
- [ **C<sub>7</sub>** ] **Combescure A.**  
 " Stabilité plastique. Le flambage élastique et plastique dans INCA". Ecole CEA- EDF- INRIA- Rocquencourt, 16- 19 janvier 1984.
- [ **C<sub>8</sub>** ] **Combescure A.**  
 " Upon the different theories of plastic buckling. Elements for a choice." " Buckling of Shell Structures, on Land, in the Sea and in the air, Lyon, France, 17-19 September 1991, Edited by J.F. Jullien " .

- [ C<sub>9</sub> ] **Considere A**  
 Résistance des pièces comprimées ( Congrès Int- Proc. construction 3, Librairie Polytechnique, 1891, pp.371).
- [ D<sub>1</sub> ] **Damil N.**  
 " De la théorie de la bifurcation au calcul des structures ".  
 Thèse d'Etat, Casablanca, 1990.
- [ D<sub>2</sub> ] **Duvaut G. et Lions J.L.**  
 " Equations et inéquations en mécanique et en physique,  
 Dunod, Paris, 1972 "
- [ E<sub>1</sub> ] **Engesser F.**  
 " Ueber die Knickfestigkeit Gerader Stabe ( Z.Archiectur Ing.,  
 vol.35, 1889, p.455 )
- [ E<sub>2</sub> ] **Ekeland. I, Temam . R**  
 " Analyse convexe et problèmes variationnels". Etudes  
 Mathématiques, Dunod, Paris, Bruxelles, Montréal, 1974.
- [ E<sub>3</sub> ] **Euler L.**  
 Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minimive  
 Propietate ( Apperdix, De Curvis Elasticis ), Marcum  
 Michaelium Bousquet, Lausanne and Geneve .
- [ F ] **François D., Pineau A., Zaoui A.**  
 " Comportement mécanique des matériaux, V1, éd. Hermes
- [ G ] **Germain P.**  
 " Introduction à la mécanique des milieux continus, Masson,  
 Paris, 1983.
- [ K<sub>1</sub> ] **Kachanov M.**  
 "Foundations of plasticity, chap.10, North Holland Pub, 1976 "
- [ K<sub>2</sub> ] **Koiter W, T.**  
 " On the stability of Elastic Equilibrium, Thésis Delft, English  
 translation NASA techn.Trans.F.10,833 (1967), 1945 ".
- [ H<sub>1</sub> ] **Halphen B. et Nguyen.Q.S.**  
 "Sur les matériaux standards généralisés, J. Méch. , vol.14,  
 1975. p.39-63. "

- [ H<sub>2</sub> ] Halphen B. et Salençon J.  
 " Cours des structures annélastiques " Ecole Nationale des  
 Ponts et Chaussées , 1981, Es167B, n°7013, 225p..
- [ H<sub>3</sub> ] Hill R.  
 " A general Theory of Uniqueness and Stability of Elastic  
 Plastic Solids, J. Méch. Phys. Solids, vol.6, 1958. p.236-249. "
- [ H<sub>4</sub> ] Hutchinson J.W.  
 " Plastic Buckling, Adv. Appl. Mech., vol.14, p.67-144."
- [ H<sub>5</sub> ] Hutchinson J.W.  
 " Elastic/ Plastic behavior of polycristalline métaux and  
 composites. Proc. Roy. Soc. London A 319, 247- 272.
- [ H<sub>6</sub> ] Hutchinson J.W. and Budiansky B.  
 " Analytical and numerical study of the effects of initial  
 imperfections of the inelastic, Buckling of a cruciform  
 column, Buckling of structures ( Edited by B. Budiansky),  
 pp.98-105, Springer, Berlin(1976).
- [ L<sub>1</sub> ] Léger A. et Potier-Ferry M.  
 " Bifurcations plastiques à partir d'un état inhomogène, C.R.  
 Acad. Sci., Paris, t. 303, série II, 1986, p. 111-1114"
- [ L<sub>2</sub> ] Léger A. et Potier-Ferry M.  
 " Une nouvelle méthode pour calculer le postflambage des  
 poutres élastoplastiques, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 304, série  
 II, 1987, p.597-600 "
- [ L<sub>3</sub> ] Léger A. et Potier-Ferry M.  
 " Sur le flambage plastique, J. Méch. Théor. Appl, vol.7, 1988.  
 p.819-857. "
- [ L<sub>4</sub> ] Léger A.  
 " Flambement élastoplastique des poutres " Thèse , Paris 6,  
 1986 "
- [ L<sub>4</sub> ] Lions J.L.  
 " Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites  
 non linéaires, 1969, Dunod.

- [ **N<sub>1</sub>** ] **Needleman A. et Tvergaard V.**  
 "Aspects of Plastic Postbuckling Behavior, in R. Hill 60th Anniversary Volume, H. G. Hopkins and M. J. Sewell éd., Pergamon Press, Oxford, 1982, p.453-498"
- [ **N<sub>2</sub>** ] **Nguyen Q. S.**  
 " Stabilité et bifurcation en rupture et en plasticité (C.R. Acad. Sci. Paris, t.292, Série II, 1981, pp.817- 821).
- [ **N<sub>3</sub>** ] **Nguyen Q. S.**  
 " Bifurcation et stabilité des systèmes irréversibles obéissant au principe de dissipation maximale, J. Mé. Théor. Appl, vol.3, 1984. p.41-61. "
- [ **N<sub>4</sub>** ] **Nguyen Q. S.**  
 " Bifurcation et Analyse postcritique en Rupture Fragile et en Plasticité, Comptes rendus, 300, série II, 1985, pp.191-194.
- [**N<sub>5</sub>** ] **Nguyen Q. S., Radenkovic D.**  
 " Stabilité et bifurcation en plasticité ", Seminaire " le flambement des structures ", S<sup>T</sup> Remy Les Chevreuses (France), 20 au 22 mai 1980, pp.95-116.
- [ **N<sub>6</sub>** ] **Nguyen Q. S., Stolz C.**  
 " Sur la méthode de développement en flambage plastique" C.R. Acad. Sci. Paris, t.300, série II,1985, pp.235-238.
- [ **O** ] **Onat E. T. and Drucker D. C.**  
 " Inelastic instability and incremental theories of plasticity, J. Aeoro-Sci, 20,181-186 (1953) "
- [ **P<sub>1</sub>** ] **Potier-Ferry M.**  
 " Fondements mathématiques de la théorie de la stabilité élastique ". Thèse d'Etat, Paris VI, 1979.
- [ **P<sub>2</sub>** ] **Potier-Ferry M.**  
 " Bifurcation et stabilité pour des systèmes dérivant d'un potentiel ". J .Méca., 17, n° 4, 1978, P.579-608.

- [ P<sub>3</sub> ] Potier-Ferry M.  
 " Critères de l'énergie en élasticité et viscoélasticité,  
 L'Hermite R. Ed. Le flambement des structures, Editions  
 Bâtiment travaux publics, Paris.
- [ P<sub>4</sub> ] Potier-Ferry M.  
 " Towards a catastrophe Theory for the Mechanics of plasticity  
 and Fracture ( Int. J. Engng. Sci., 23, 1985, p. 821 - 837).
- [ P<sub>5</sub> ] Potier-Ferry M.  
 " Buckling and Post-Buckling, Lectures notes in Physics  
 n°288, Springer-Verlag (1987) Ed. Potier-Ferry M. " [ ] :  
 Arbocz J., Potier-Ferry M., Singer J., Tvergaard V.: "
- [ P<sub>6</sub> ] Potier-Ferry M.  
 " Charges limites et théorème d'existence en théorie des  
 plaques élastiques. C.R. Acad. Sci. Paris, 1975, t.280, Série A,  
 pp. 1317-1319.
- [ S<sub>1</sub> ] Sewell M.J.  
 " A Survey of Plastic Buckling, in Stability, H. LEIPHOLZ éd.,  
 Univ. Waterloo Press, Ontario, 1972, pp. 85-197".
- [ S<sub>2</sub> ] Shanley F. R.  
 " Inelastic column Theory, J. Aeronaut. Sci., vol.14, 1947, p.  
 261- 267 "
- [ T<sub>1</sub> ] Triantafyllidis N.  
 " On the bifurcation and postbifurcation Analysis of Elastic-  
 Plastic of Elastic-Plastic Solids under General Prebifurcation  
 Conditions, J. mech. Phys. Solids, vol.31, 1983, p. 499\_510 "
- [ T<sub>2</sub> ] Tvergaard V. et Needleman A.  
 " On the Foundations of Plastic Buckling, in developpements  
 in Thin-Walled Structures, vol. 1, J. Rhodes et A.C. Walker  
 éd, Elsevier Appl. Sci. Publishers, London, 1982, p.205 -  
 233."

**[ T<sub>3</sub> ] Tvergaard V.**

" Effect of plasticity on post-buckling behavior ". Buckling and Post-buckling, Lecture Notes in Physics n°288 , ed. Arbocz et Al, 1987, pp.144-180.

**[ V ] Von Karman T.**

" Untersuchungen uber Knickfestigkeit Mitteilungen uber Forsqchungsarbeiten (V.D.I. Forschungsh, vol.81, 1910 ) "

**[ W ] Washizu K.**

" Variational Methods in Elasticity and Plasticity, 3th ed., Pergamon Press, Oxford,1982.

**[ Z ] Zienkiewicz O. C.**

" La méthode des éléments finis ". Paris: Mac Craw Hill, 1979, 851 p.