

Homogénéisation des équations de viscoélasticité et quelques structures discrètes

Samia Challal

▶ **To cite this version:**

Samia Challal. Homogénéisation des équations de viscoélasticité et quelques structures discrètes. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paul Verlaine - Metz, 1994. Français. NNT : 1994METZ003S . tel-01776033

HAL Id: tel-01776033
https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01776033

Submitted on 24 Apr 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

THESE présentée

pour l'obtention

du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE METZ

Spécialité : Mathématiques
mention : Mathématiques Appliquées

par M^me CHALLAL Samia

Sujet de la thèse :

HOMOGENEISATION DES EQUATIONS DE VISCOELASTICITE ET DE QUELQUES STRUCTURES DISCRETES

soutenue le 28/01/1994

devant la commission composée de :

M^me J. Saint Jean Pauiin	Directeur de thèse
M. G. Allaire	Rapporteur
M. D. Caiilerie	Rapporteur
M. A. Briilard	Examinateur
M^me D. Cioranescu	Examinateur

Remerciements

Je remercie Madame Jeannine Saint Jean Paulin de m'avoir proposée ce travail à travers lequel j'ai pu toucher à différentes applications de l'Homogénéisation et un peu au calcul numérique.
Je la remercie de m'avoir acceptée dans son Laboratoire où j'ai eu l'occasion de découvrir par leurs activités : journées de Metz, séminaires, congrés, cours de DEA, différents aspects des Mathématiques Appliquées.
Je la remercie pour son soutien moral, pour sa confiance, sa patience et ses conseils.

Je tiens à remercier Monsieur Grégoire Allaire qui n'a pas manqué à répondre à mes questions par courrier ou au cours de congré et séminaire. Je le remercie pour ses nombreux encouragements et le grand interêt qu'il a porté à ce travail. Je le remercie d'avoir accepté d'être rapporteur.

Je remercie Monsieur Denis Caillerie pour les nombreux conseils et remarques qu'il m'a faits pour l'avancement de ma recherche. Je le remercie d'avoir accepté d'être rapporteur et pour son encouragement.

Je remercie également :

Monsieur A. Brillard qui a porté attention à ce travail et à ses encouragements,

Madame D. Cioranescu pour l'interêt qu'elle a bien voulu porter à ce travail,

Messieurs M. Amara, D. Teniou et Lamrabet professeurs à l'université d'Alger pour l'interêt porté à ma thèse,

Monsieur Benachour, professeur à l'université de Nancy pour ses encouragements,

Mes collègues des départements de DMI, LFM et à l'ISGMP pour leurs aide et leurs soutien moral.

Je veux aussi exprimer mes plus sincères remerciements à tous mes amis pour l'aide morale qu'ils m'ont apporté.

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ
N° inv. 19940085
Cote S/M3 94/3
Loc Magasin

à mes parents

mes frères et soeurs

à mon mari

Préface

Cette thèse comporte deux problèmes d'Homogénéisation.

Le premier intitulé :

HOMOGENEISATION D'UN PROBLEME DE VISCOELASTICITE AVEC DE PETITS TROUS,

consiste à passer à la limite dans des équations de type élasticité à mémoire instantannée régissant les déplacements d'un fluide visqueux, compressible et barotrope dans un domaine avec de petits obstacles répartis périodiquement. Dans le problème asymptotique un phénomène de mémoire longue apparaît.

Le deuxième problème intitulé :

VERS UNE JUSTIFICATION DE L'HOMOGENEISATION DISCRETE DE VERNA,

vérifie sur quelques exemples simples de structures discrètes, la convergence du problème non homogénéisé vers le problème homogénéisé, obtenu par P. Verna en utilisant une méthode formelle de développement asymptotique.

note : Les deux problèmes étant indépendants, nous avons adopté une pagination séparée des deux parties.

HOMOGÉNÉISATION D'UN PROBLÈME DE VISCOÉLASTICITÉ AVEC DE PETITS TROUS

PLAN

NOTATIONS 1

INTRODUCTION 3

I. CADRE ABSTRAIT 10

I.1. Position du problème d'évolution 10

I.2. Passage à la transformée de Laplace 12

I.3. Position du problème stationnaire 16

I.4. Hypothèses (H1) à (H6) 19

I.5. Passage à la limite 24

I.6. Correcteur pour le déplacement 31

I.7. Estimation d'erreur 37

II. CAS DES PETITS TROUS PÉRIODIQUEMENT RÉPARTIS EN VOLUME . . . 39

II.1. Déscription de la géomètrie considérée 39

II.2. Vérification des hypothèses (H1) à (H6) dans le cas des trous sphériques 41

II.3. Vérification des hypothèses (H1) à (H6) dans le cas des trous de formes quelconque. . 51

A - Cas de la dimension $n = 2$ 51

B - Cas de la dimension $n \geq 3$ 57

II.4. Estimation d'erreur 65

III. CAS DES PETITS TROUS PÉRIODIQUEMENT RÉPARTIS DANS UN HYPERPLAN . . 68

III.1. Déscription de la géomètrie considérée 68

III.2. Vérification des hypothèses (H1) à (H6) 70

A - Cas de la dimension $n \geq 3$ 70

B - Cas de la dimension $n = 2$ 73

III.3. Estimation d'erreur 76

IV. PROBLÈME LIMITE LORSQUE LA TAILLE DES TROUS AUGMENTE OU DIMINUE . . 78

IV.1. Déscription de la géomètrie considérée 78
IV.2. Cas où la taille des trous diminue $a_\varepsilon << c_\varepsilon$ 78
IV.3. Cas où la taille des trous augmente $a_\varepsilon >> c_\varepsilon$ 80
Estimation à priori 80
Hypothèses (H1) à (H6) 82
Vérification des hypothèses (H1) à (H6) 86
A - Cas de la dimension $n \geq 3$ 86
B - Cas de la dimension $n = 2$ 92
Passage à la limite 101

V. AUTRES APPLICATIONS 107

V.1. Problème de la Chaleur avec de petits trous 108
V.2. Problème des Ondes avec de petits trous 114
V.3. Problème de l'élasticité avec de petits trous 120

CONCLUSION 122

Annexe A 123
Annexe B 131
Annexe C 138
Annexe D 143
Annexe E 150

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES. 155

NOTATIONS

La pluspart des notations utilisées dans ce travail sont signalées dés qu'elles sont introduites pour la première fois. Nous tenons cependant à préciser quelques notations d'usage courant et quelques espaces fonctionnels.

$\mathfrak{D}(\Omega)$: espace des fonctions de classe C^∞ à support compact inclus dans Ω.

$\mathfrak{D}'(\Omega)$: le dual de $\mathfrak{D}(\Omega)$

$\frac{\partial}{\partial x_i}$, $\frac{\partial}{\partial t}$ ou $\frac{d}{dt}$: les dérivées partielles par rapport à x_i et à t respectivement.

$\nabla.$: L'opérateur gradient définit par : $\forall u \in \mathfrak{D}(\Omega)$: $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$

$div.$: L'opérateur divergence définit par : $\forall u \in [\mathfrak{D}(\Omega)]^n$: $divu = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial u_n}{\partial x_n}$

$\varepsilon = (\varepsilon_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$: Le tenseur des déformations défini par : $\forall u \in [\mathfrak{D}(\Omega)]^n$: $\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$

$\Delta.$: L'opérateur Laplacien définit par : $\forall u \in \mathfrak{D}(\Omega)$: $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$

$L^p(\Omega)$: espace des fonctions mesurables f telque $\int_\Omega |f|^p < +\infty \quad 1 \leq p < +\infty$

$L^p_{loc}(\Omega)$: espace des fonctions mesurables f telque $\forall K$ compact $\subset \Omega$ $\int_K |f|^p < +\infty \quad 1 \leq p < +\infty$

$L^\infty(\Omega)$: espace des fonctions mesurables f telque $\exists$ C constante, $|f(x)| \leq C$ $p.p$ sur Ω

$H^1_0(\Omega)$: l'adhérence de $\mathfrak{D}(\Omega)$ pour la norme $\|.\|_{1,\Omega} = \|.\|_{H^1_0(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla .|^2 + \int_\Omega |.|^2\right)^{1/2}$

$H^{-1}(\Omega)$: le dual de $H^1_0(\Omega)$

$H^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$: espace des fonctions mesurables f telque $\forall K$ compact $\subset \mathbb{R}^n$ $f\,|_K \in H^1(K)$

$H^{-1}_{loc}(\mathbb{R}^n)$: dual de $H^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$

$W^{1,q}_0(\Omega)$: l'adhérence de $\mathfrak{D}(\Omega)$ pour la norme $\|.\|_{1,q} = \|.\|_{W^{1,q}(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla .|^q + \int_\Omega |.|^q\right)^{1/q}$

$W^{-1,\infty}(\Omega)$: le dual de $W^{1,1}_0(\Omega)$

$W^{1,\infty}(\Omega)$: $= \{ u \in L^\infty(\Omega), \nabla u \in L^\infty(\Omega) \}$

$W^{2,\infty}(\Omega)$: $= \{ u \in W^{1,\infty}(\Omega), \nabla u \in W^{1,\infty}(\Omega) \}$

$|.|_{L^p(\Omega)}$: désignera la norme dans $L^p(\Omega)$ ou $[L^p(\Omega)]^n$

$\|.\|_V$: désignera la norme dans l'espace V ou V^n

$<,>_{V',V}$: désignera le produit de dualité entre V' et V ou entre V'^n et V^n

$\mathcal{L}(V,V')$: L'ensemble des opérateurs linéaires continus de V dans V'

$\mathfrak{D}'(]0,+\infty[,V) = \mathfrak{D}'_+(V)$: L'espace des distributions à valeurs dans V et à support dans $]0,+\infty[$

$\mathfrak{D}'(V) = \mathfrak{D}'(\mathbb{R},V)$: L'espace des distributions à valeurs dans V et à support dans $\mathbb{R}$

$L^2(0,T;V)$: L'espace de Hilbert muni de la norme : $|.|_{L^2(0,T;V)} = \left(\int_0^T \|.\|_V^2 dt\right)^{1/2}$

$L^2(0,T;V')$: Le dual de $L^2(0,T;V)$

$C^m([0,T];V)$: L'espace des fonctions de classe C^m de $[0,T]$ à valeurs dans V

c : désigne les différentes constantes qui interviennent. On précise lorsque c'est nécessaire sa dépendance par rapport aux autres paramètres

$o(\varepsilon^\alpha)$: désigne une fonction de $\varepsilon > 0$ telle que : $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{o(\varepsilon^\alpha)}{\varepsilon^\alpha} = 0$

$O(\varepsilon^\alpha)$: désigne une fonction de $\varepsilon > 0$ telle que : $|O(\varepsilon^\alpha)| \leq c\varepsilon^\alpha$ où c est une constante indépendante de ε.

INTRODUCTION

L'homogénéisation est un outil mathématique qui permet d'étudier les propriétés macroscopiques des milieux hétérogènes à partir de leur composition microscopique et des équations décrivant les phénomènes étudiés au niveau microscopique.
Elle consiste à remplacer le milieu hétérogène par un milieu homogène équivalent.
Ce souci d'associer un milieu homogène au milieu hétérogène est justifié du point de vue numérique (voir [5], [7], [8]) car les calculs deviennent difficiles et impossibles et donc d'interêt pratique inutile.

De nombreuses méthodes ont été développée pour l'étude de tels milieux.
Bensoussan - Lions et Papanicolaou [6] développèrent des méthodes probabilistes et des méthodes de développement asymptotiques (voir aussi [33], [42]) des milieux périodiques.
Luc Tartar [37], [46] a développé la méthode de l'énérgie.
Suivant une idée de Nguetseng [38], Allaire [1] développe une nouvelle méthode : la convergence à double échelle.

Les problèmes à trous sont un exemple d'application de l'homogénéisation.
Le problème se prèsente en général comme suit :
Soit u_ε la solution du problème

$$(\mathcal{P}_\varepsilon) \qquad \begin{cases} Lu_\varepsilon = f \qquad \text{dans} \quad \Omega_\varepsilon \\ + \text{ conditions aux limites} \\ + \text{ conditions initiales} \end{cases}$$

où $(\Omega_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ désigne une famille d'ouverts de $\mathbb{R}^n$ obtenus en otant des fermés $(T_\nu^\varepsilon)_{\nu=1}^{n(\varepsilon)}$ (les trous).
Que se passe t-il pour u_ε, quand ε tend vers 0 ? .

La taille des trous a une grande importance. Dans le cas d'une répartition périodique des trous, on distingue les problèmes à trous dont la taille est de l'ordre de la période. De nombreuses applications de ce type sont traitées dans [33] et on cite le papier [13] vu la construction d'un opérateur de prolongement important permettant de passer à la limite dans de nombreux autres problèmes.
On distingue aussi le cas où le trou occupe presque la totalité de la période. Dans ce cas, il y a peu de matière. On classe dans cette catégorie les structures en treillis (voir par exemple à ce sujet [14], [15], [16], [17]).
Enfin une 3$^{\text{ème}}$ catégorie, celle des petits trous (la taille des trous est très petite devant la période).

Notre travail rentre dans cette dernière catégorie où de nombreux résultats ont été établi pour différents opèrateurs L.

Le cas de l'opérateur Laplacien $L = -\Delta$ avec conditions limites de Dirichlet a été étudié par Cioranescu et Murat [12]. Les trous $(T_\nu^\varepsilon)_{\nu=1}^{n(\varepsilon)}$ sont de taille $a_\varepsilon << \varepsilon$ de formes quelconques, semblables à un trou model T et périodiquement (la période $]-\varepsilon,\varepsilon[^n$) répartis dans tout le volume.

En considérant des trous de formes sphèriques, cette taille est imposée afin qu'on puisse construire des fonctions tests nous permettant de passer à la limite par la méthode de l'énergie. A la limite un terme étrange μ apparait devant l'opérateur $-\Delta$. Pour $n \geq 3$ ce terme μ est proportionnel à la capacité du trou T définie par $capT = \inf_{\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n), \varphi = 1 \text{ sur } T} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi|^2 dx$. En dimension $n = 2$, μ est indépendant de T ; cela provient (voir remarque 2.2 [31]) des propriétés spéciales du potentiel Newtonien en dimension 2, qui font que pour tout fermé borné T, on a $capT = 0$ quand $n = 2$.

Conca et Donato [20] ont étudié le comportement asymptotique des solutions u_ε de l'équation $-\Delta u_\varepsilon = f$ dans Ω_ε avec des conditions de Neumann non homogènes sur le bord des trous. Un terme constant apparaît au deuxième membre de l'équation limite.

Dans [12] d'autres géomètries sont considérées : cas d'une répartition des trous dans un hyperplan traversant Ω, cas de cylindres disposés en forêt et le cas des treillis et grillage.

Toujours pour l'opérateur Laplacien, H. Kacimi dans sa thèse [30] s'est interéssée aux trous de formes elliptiques et en formes de buchettes répartis périodiquement dans tout le volume.

Le cas de l'opérateur Bilaplacien $L = -\Delta^2$ est aussi étudié dans [12] et de nombreuses remarques sont données pour les opérateurs ($L = -div(A\nabla .)$) à coefficients continus.

D. Cioranescu, P. Donato, F. Murat et E. Zuazua [11] ont développé le cas de l'opérateur des Ondes

$$L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta.$$

Le cas des opérateurs de StoKes $L(u,p) = \begin{pmatrix} \nabla p - \Delta u \\ divu \end{pmatrix}$,

et de Navier-StoKes $L(u,p) = \begin{pmatrix} \nabla p - \Delta u + u.\nabla u \\ divu \end{pmatrix}$ a été étudié par Allaire [2] [3](voir aussi [43]).

Allaire a étudié le cas d'une répartition des trous en volume et le cas d'une répartition des trous sur un hyperplan traversant Ω. Dans [2] ou [3], il a considéré le problème avec des conditions limites de Dirichlet puis a repris dans [4] le problème avec des conditions limites de glissement.

Pour une répartition des trous sur un hyperplan H, Brillard [10] a également étudié le problème de Stokes. La différence de son travail avec celui de Allaire est que les trous de [10] sont contenus dans l'hyperplan H alors que dans [2] les intérieurs des trous sont des ouverts non vide de $\mathbb{R}^n$.
Sous les mêmes considérations géomètriques de [10], mais pour des trous de taille de l'ordre de la période, E. Sanchez. Palencia [44] a étudié le problème pour l'opérateur ($L = -\Delta + I$) avec des conditions de Neumann. Enfin, C. Conca [19] a développé le problème de la passoire pour un fluide de Stokes. Ici le fluide passe par les trous de taille de l'ordre de la période.

Notre travail est un problème à petits trous pour l'opérateur de viscoélasticité linéaire

$$(L(u))_i = \rho_o \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a^{(0)}_{ijkh} \frac{\partial u_k}{\partial x_h}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a^{(1)}_{ijkh} \frac{\partial u_k}{\partial x_h}\right)\right)$$

avec $a^{(0)}_{ijkh} = c_o^2 \rho_o \delta_{ij} \delta_{kh}$

$a^{(1)}_{ijkh} = \eta \delta_{ij} \delta_{kh} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jh} + \delta_{ih}\delta_{jk})$

Les techniques utilisées pour passer à la limite sont analogues à celles développées dans [2] et [12].

On considère un ouvert Ω borné connexe et régulier de $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$). De petites particules sont réparties dans ce domaine où beigne un fluide visqueux barotrope et compressible. Le fluide adhère aux particules solides qu'on assimile à de petits trous $(T_\nu^\varepsilon)_{\nu=1}^{n(\varepsilon)}$. ε est un petit paramètre lié à la taille des trous et destiné à tendre vers zéro, $n(\varepsilon)$ désigne le nombre de trous.
On procède à une linéarisation (voir [36] [41]) des équations gouvernant le fluide par rapport à une position initiale. Le déplacement U_ε du fluide est alors solution de :

$$\mathcal{P}(U_\varepsilon) \qquad \begin{cases} \rho_o \dfrac{\partial^2 U_{\varepsilon,i}}{\partial t^2} = \partial_j \sigma_{ij}(U_\varepsilon) + F_i & \text{dans} \quad \Omega_\varepsilon \\ U_\varepsilon(x,t) = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega_\varepsilon \\ U_\varepsilon(x,0) = 0 \quad ; \quad \dfrac{\partial U_\varepsilon}{\partial t}(x,0) = 0 & \text{dans} \quad \Omega_\varepsilon \ , \end{cases}$$

où

$$\sigma_{ij}(u) = c_o^2 \rho_o \delta_{ij}\delta_{kh}\varepsilon_{kh}(u) + (\eta\delta_{ij}\delta_{kh} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jh} + \delta_{ih}\delta_{jk}))\varepsilon_{kh}(\frac{\partial u}{\partial t}).$$

Le problème $\mathcal{P}(U_\varepsilon)$ s'écrit à l'aide de l'opérateur L défini ci-dessus :

$$\begin{cases} L(U_\varepsilon) = F & \text{dans} \quad \Omega_\varepsilon \\ U_\varepsilon(x,t) = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega_\varepsilon \\ U_\varepsilon(x,0) = 0 \quad ; \quad \dfrac{\partial U_\varepsilon}{\partial t}(x,0) = 0 & \text{dans} \quad \Omega_\varepsilon . \end{cases}$$

Pour passer à la limite dans $\mathcal{P}(U_\varepsilon)$, on fait tout d'abord un passage à la transformée de Laplace pour éliminer la variable temps t. On obtient un problème stationnaire $\mathcal{P}(u_\varepsilon)$ où $u_\varepsilon = L(U_\varepsilon)$ est l'image de Laplace de U_ε.
On se place ensuite dans un cadre d'hypothèses abstraites sur les trous $(T_\nu^\varepsilon)_{\nu=1}^{n(\varepsilon)}$.
Ces hypothèses apparaissent comme des conditions natuelles pour passer à la limite dans $\mathcal{P}(u_\varepsilon)$ et de trouver le problème d'évolution correspondant.
Nous utilisons la méthode de l'énérgie mise au point par L. Tartar [37] pour passer à la limite dans $\mathcal{P}(u_\varepsilon)$. Cette méthode consiste à introduire dans la formulation variationnelle de $\mathcal{P}(u_\varepsilon)$ des fonctions tests convenables qui permettent de passer à la limite quand ε tend vers zéro.
Nous démontrons ainsi un théorème général de convergence.

Théorème 1 : *Soit U_ε la solution unique de $\mathcal{P}(U_\varepsilon)$ dans $W[H_0^1(\Omega_\varepsilon)]$.*

Soit $\tilde{U}_\varepsilon$ le prolongement par 0 dans les trous $(T_\nu^\varepsilon)_{\nu=1}^{n(\varepsilon)}$ du déplacement U_ε. On a

$$\tilde{U}_\varepsilon \rightharpoonup U \qquad \text{dans } W[H_0^1(\Omega)] \text{ faible}$$

où U est l'unique solution dans $W[H_0^1(\Omega)]$ de :

$$\begin{cases} \rho_o \dfrac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = \partial_j \sigma_{ij}(U) - (G * U)_i + F_i & \text{dans } \Omega \quad i = 1, ..., n \\ U(x,0) = 0 \, ; \quad \dfrac{\partial U}{\partial t}(x,0) = 0 & \text{dans } \Omega \\ U(x,t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

et G est une matrice $n \times n$ symètrique. L'espace de Hilbert $W[H_0^1(\Omega)]$ est défini par :

$$W[H_0^1(\Omega)] = \left\{ v \in L^2(0,T,[H_0^1(\Omega)]^n) \, ; \ v' \in L^2(0,T,[H_0^1(\Omega)]^n) \, ; \ \frac{d\rho_o v'}{dt} \in L^2(0,T,[H^{-1}(\Omega)]^n) \right\}.$$

On établit également des résultats de correcteurs qui amèliorent la convergence des solutions de $\mathcal{P}(u_\varepsilon)$ et nous donnons une estimation abstraite de l'erreur.

Ce cadre abstrait constitue la première partie de ce travail. Les autres parties (2, 3 et 4) sont consacrées à vérifier dans divers cas concrets ces hypothèses. La partie 5 établie quelques résultats montrant l'interêt de la transformée de Laplace.

La deuxième partie de ce travail étudie le cas où les petits trous sont répartis dans tout le volume. L'ouvert Ω est recouvert d'un maillage régulier de pavés $\left(P_\nu^\varepsilon\right)_{\nu=1}^{n(\varepsilon)}$ tous identiques, à une translation près, au pavé $]-\varepsilon,+\varepsilon[^n$. Chaque pavé P_ν^ε entièrement contenu dans Ω est percé en son centre d'un trou T_ν^ε identique, à une translation près, au fermé $a_\varepsilon T$ ($T \subset B_1$). La taille a_ε est donnée par :

$$a_\varepsilon = \begin{cases} C_o \varepsilon^{\frac{n}{n-2}} & \text{pour} \quad n \geq 3 \\ e^{-\frac{C_o}{\varepsilon^2}} & \text{pour} \quad n = 2 \quad \text{avec } C_o > 0. \end{cases}$$

Le nombre de trous $n(\varepsilon)$ est donné par :

$$n(\varepsilon) = \frac{|\Omega|}{(2\varepsilon)^n}[1 + o(1)].$$

On a alors le théorème suivant :

Théorème 2 : *La matrice G du théorème 1 est donnée par :* $G = L^{-1}(M)$

où $M(\lambda)$ est donnée par :

$$M(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{C_o} \dfrac{\lambda\mu(c_o^2\rho_o + \lambda(\eta+2\mu))}{c_o^2\rho_o + \lambda(3\mu+\eta)} Id & \text{pour} \quad n = 2 \\ \dfrac{C_0^{n-2}}{2^{n+1}} \left(\dfrac{2nm^2 + nm + m + n - 1}{nm(m+1)} \right) (F_k)_{k=1}^n & \text{pour} \quad n \geq 3 \end{cases}$$

avec

$$m = \frac{\lambda\mu}{(c_o^2\rho_o + \lambda(\eta+\mu))} \qquad \text{et} \qquad F_k = \int_{\partial T} a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k) n_j e_i ds$$

$$a_{ijlh} = c_o^2\rho_o\delta_{ij}\delta_{lh} + \lambda(\eta\delta_{ij}\delta_{lh} + \mu(\delta_{il}\delta_{jh} + \delta_{ih}\delta_{jl})) \qquad \lambda \in \mathbb{C} \quad , \quad Re\lambda > \beta > 0$$

n la normale exterieure unitaire à ∂T

ω_k est l'unique solution de :

$$\begin{cases} -\partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k)) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \setminus T \\ \omega_k = 0 & \text{sur } \partial T \\ \omega_k = e_k & \text{à l'infini} \\ |\varepsilon(\omega_k)|_{L^2(\mathbb{R}^n - T)} < +\infty. \end{cases}$$

Si le trou T est une boule de rayon 1, on calcule explicitement la force F_k et, désignant par S_n la surface de la sphère unité de $\mathbb{R}^n$, on trouve :

$$M(\lambda) = \frac{n(n-1)}{2^n} C_o^{n-2} S_n \frac{\lambda\mu(c_o^2\rho_o + \lambda(\eta+2\mu))}{(n-1)c_o^2\rho_o + \lambda((2n-1)\mu + (n-1)\eta)} Id \qquad \text{pour} \qquad n \geq 3.$$

La 3ème partie étudie le cas où les petits trous sont répartis sur un hyperplan traversant Ω. Ceci modèlise une grille de mélange [2] constituée de nombreuses ailettes périodiquement réparties dans le plan H. Ces ailettes ont pour but de dévier et de mettre en rotation le fluide afin de le mélanger et d'homogénéiser ainsi un profil de vitesse, ou bien d'uniformiser dans une section les valeurs d'une quantité transportée par le fluide, comme sa température, ou la concentration d'un polluant.

On recouvre la partie H_ε de Ω contenue dans une bande d'épaisseur 2ε autour de l'hyperplan H par un maillage régulier de pavés $\left(P_\nu^\varepsilon\right)_{\nu=1}^{n(\varepsilon)}$ tous identiques, à une translation près, au pavé $]-\varepsilon,+\varepsilon[^n$. Chaque pavé P_ν^ε entièrement contenu dans H_ε est percé en son centre d'un trou T_ν^ε identique, à une translation près, au fermé $a_\varepsilon T$ ($T \subset B_1$). La taille a_ε est donnée par :

$$a_\varepsilon = \begin{cases} C_o \varepsilon^{\frac{n-1}{n-2}} & \text{pour} \quad n \geq 3 \\ e^{-\frac{C_o}{\varepsilon}} & \text{pour} \quad n = 2 \quad \text{avec } C_o > 0. \end{cases}$$

Le nombre de trous $n(\varepsilon)$ est donné par :

$$n(\varepsilon) = \frac{|\Omega \cap H|}{(2\varepsilon)^{n-1}}[1 + o(1)].$$

On démontre alors le :

Théorème 3 : *La matrice G du théorème 1 est donnée par :* $G = L^{-1}(M)$

où $M(\lambda)$ est donnée par :

$$M(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{C_o} \dfrac{\lambda\mu(c_o^2\rho_o + \lambda(\eta + 2\mu))}{c_o^2\rho_o + \lambda(3\mu + \eta)} Id\, \delta_H & \text{pour} \quad n = 2 \\ \dfrac{C_0^{n-2}}{2^n} \left(\dfrac{2nm^2 + nm + m + n - 1}{nm(m+1)} \right) (F_k)_{k=1}^n \delta_H & \text{pour} \quad n \geq 3 \end{cases}$$

avec m et F_k définis comme au théorème 2 et δ_H est la masse unitée portée par H, définie par :

$$< \delta_H, \phi >= \int_H \phi(s) ds.$$

Il est à signaler que pour $n = 2$, nous avons pu démontrer le théorème pour des trous sphèriques seulement.

Dans la 4ème partie, on montre que la taille des trous considérés dans la 2ème partie est une taille critique car suivant qu'on prend une taille plus grande ou plus petite on a des comportements différents du fluide. On reprend donc l'ouvert Ω_ε décrit comme dans la 2ème partie où on suppose dans un premier temps que la taille des trous a_ε est plus petite que la taille critique. Plus précisément, on suppose que la taille a_ε des trous vérifie :

$$\begin{cases} \lim_{\varepsilon \to 0} \dfrac{a_\varepsilon}{\varepsilon^{n/n-2}} = 0 & \text{pour} \quad n \geq 3 \\ \lim_{\varepsilon \to 0} \dfrac{1}{\varepsilon^2 log a_\varepsilon} = 0 & \text{pour} \quad n = 2. \end{cases}$$

On démontre alors le :

Théorème 4 : *La matrice G du théorème 1 est nulle.*

Autrement dit les trous n'ont aucune influence à la limite. Les obstacles sont trop petits pour perturber l'écoulement initial.

Dans un deuxième temps, on considère le cas des trous plus grands que la taille critique mais de taille toujours petite. Plus précisément, on suppose que la taille a_ε des trous vérifie :

$$\begin{cases} \lim_{\varepsilon\to 0} \dfrac{\varepsilon^{n/n-2}}{a_\varepsilon} = 0 & \text{pour} \quad n \geq 3 \\ \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 log a_\varepsilon = 0 & \text{pour} \quad n = 2 \\ \lim_{\varepsilon\to 0} \dfrac{a_\varepsilon}{\varepsilon} & \text{pour tout} \quad n. \end{cases}$$

On définit le rapport σ_ε par :

$$\begin{cases} \sigma_\varepsilon = \left(\dfrac{\varepsilon^n}{a_\varepsilon^{n-2}}\right)^{1/2} & \text{pour} \quad n \geq 3 \\ \sigma_\varepsilon = \varepsilon \left| log \dfrac{a_\varepsilon}{\varepsilon} \right|^{1/2} & \text{pour} \quad n = 2. \end{cases}$$

On démontre alors le :

Théorème 5 : *Soit U_ε la solution unique de $\mathcal{P}(U_\varepsilon)$ dans $W[H_0^1(\Omega_\varepsilon)]$.*

Soit $\tilde{U}_\varepsilon$ le prolongement par 0 dans les trous $\left(T_\nu^\varepsilon\right)_{\nu=1}^{n(\varepsilon)}$ du déplacement U_ε. On a

$$\frac{\tilde{U}_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon^2} \rightharpoonup U \qquad \text{dans } L^2(0,T\,;\,[L^2(\Omega)]^n) \quad \text{faible} \quad \forall T > 0$$

où U est l'unique solution de l'équation :

$$G * U = F.$$

G est l'image de Laplace inverse de la matrice M donnée par :

$$M(\lambda) = \begin{cases} \pi \dfrac{\lambda\mu(c_o^2\rho_o + \lambda(\eta+2\mu))}{c_o^2\rho_o + \lambda(3\mu+\eta)} Id & \text{pour} \quad n = 2 \\ \dfrac{1}{2^{n+1}} \left(\dfrac{2nm^2 + nm + m + n - 1}{nm(m+1)}\right) (F_k)_{k=1}^n & \text{pour} \quad n \geq 3 \end{cases}$$

avec m et F_k définis comme au théorème 2.

Il existe une analogie remarquable des résultats trouvés avec ceux du Laplacien [12] et de Stokes [2]. Pour le problème stationnaire, à la limite, on a apparition d'un terme étrange.
Un phénomène de mémoire longue caractérise alors le problème d'évolution limite. Le problème initiale était à mémoire instantannée.
On rencontre ce phénomène de mémoire dans de nombreux problèmes d'homogénéisation, voir par exemple [18], [27], [28], [40], [41], [42], [45].
Le terme étrange dépend toujours du trou pour le cas de la dimension $n \geq 3$ et est indépendant pour $n = 2$.

Enfin la $5^{ème}$ partie étudie pour une répartition des petits trous dans tout le volume pour le problème de la Chaleur $L = \frac{\partial}{\partial t} - \Delta$ et le problème des Ondes $L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$, étude rendue facile grâce à la transformée de Laplace. Nous retrouvons par ce procédé les résultats de [11] pour le cas de l'opérateur des Ondes.
Au cours de notre travail nous avons remarqué que nous avons indirectement étudié le cas de l'opérateur de l'élasticité $L = -\partial_j(a_{ijlh}\epsilon_{lh}(.))$. Un résumé de résultats concernant ce cas termine notre travail.

I- CADRE ABSTRAIT

I.1 . Position du problème d'évolution :

On va étudier un fluide visqueux, compressible et barotrope dans un domaine à petit trous.
Soit donc un ouvert Ω borné connexe de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$, de classe C^1 par morceaux.
Soit ε un réel strictement positif qui prend ses valeurs dans une suite de réels qui tend vers zéro.
Pour chaque ε, on considère une suite de fermés disjoints $(T_\nu^\varepsilon)_{1\leq\nu\leq n(\varepsilon)}$: ce sont les trous.
On définit alors l'ouvert perforé Ω_ε par :

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \cup_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} T_\nu^\varepsilon. \tag{I.1.1}$$

On suppose que les trous T_ν^ε sont tels que Ω_ε est un ouvert borné connexe de classe C^1 par morceaux.
Le fluide occupe l'ouvert Ω_ε (cf. Annexe A).

On cherche le déplacement $U_\varepsilon(x,t)$ du fluide tel que :

$$\begin{cases} \rho_o \dfrac{\partial^2 U_{\varepsilon,i}}{\partial t^2} = \partial_j \sigma_{ij}(U_\varepsilon) + F_i & \text{dans} \quad \Omega_\varepsilon \\ U_\varepsilon(x,t) = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega_\varepsilon \\ U_\varepsilon(x,0) = 0 \quad ; \quad \dfrac{\partial U_\varepsilon}{\partial t}(x,0) = 0 & \text{dans} \quad \Omega_\varepsilon \ , \end{cases} \tag{I.1.2}$$

où

$$\sigma_{ij}(u) = c_o^2 \rho_o \delta_{ij}\delta_{kh}\varepsilon_{kh}(u) + (\eta\delta_{ij}\delta_{kh} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jh} + \delta_{ih}\delta_{jk}))\varepsilon_{kh}(\frac{\partial u}{\partial t}),$$

la force $F \in L^2(0,+\infty,(L^2(\Omega))^n)$

c_o est la vitesse du son, ρ_o est la masse volumique du fluide

η et μ sont les coefficients de viscosité tel que : $n\eta + 2\mu > 0$ avec $\mu > 0$.

Au problème (I.1.2), on associe la formulation faible suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } U_\varepsilon \text{ vérifiant } \forall T > 0 \ : \\ U_\varepsilon \in L^2(0,T,[H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^n), U_\varepsilon' \in L^2(0,T,[H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^n), \dfrac{d(\rho_o U_\varepsilon')}{dt} \in L^2(0,T,[H^{-1}(\Omega_\varepsilon)]^n) \\ \dfrac{d}{dt}c(U_\varepsilon', v) + a(U_\varepsilon, v) + b(U_\varepsilon', v) = \displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} F v dx \quad \forall v \in [H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^n \quad \text{dans} \quad \mathfrak{D}'(0,T) \\ U_\varepsilon(0) = 0\,; \quad U_\varepsilon'(0) = 0 \qquad\qquad \text{dans} \quad \Omega_\varepsilon \ , \end{cases} \tag{I.1.3}$$

où

$$c(U,V) = \int_{\Omega_\varepsilon} \rho_o U V dx\,; \qquad a(U,V) = \int_{\Omega_\varepsilon} c_o^2 \rho_o divU divV dx$$

$$b(U,V) = \int_{\Omega_\varepsilon} (\eta divU divV + 2\mu\varepsilon_{ij}(U)\varepsilon_{ij}(V))\, dx.$$

Pour montrer l'existence et l'unicité de la solution (cf Annexe A), on a posé :

$$U_\varepsilon(t) = e^{\beta t} V_\varepsilon(t) \qquad \beta \in \mathbb{R} \quad \beta > 0.$$

Le problème (I.1.3) est équivalent à :

$$\text{(I.1.4)} \quad \begin{cases} \text{Trouver } V_\varepsilon \text{ vérifiant } \forall T > 0 \ : \\ V_\varepsilon \in L^2(0,T,[H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^n), V_\varepsilon' \in L^2(0,T,[H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^n), \dfrac{d(\rho_o V_\varepsilon')}{dt} \in L^2(0,T,[H^{-1}(\Omega_\varepsilon)]^n) \\ \dfrac{d}{dt} c(V_\varepsilon', w) + \tilde{a}(V_\varepsilon, w) + \tilde{b}(V_\varepsilon', w) = \displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} e^{-\beta t} F w dx \quad \forall w \in [H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^n \text{ dans } \mathcal{D}'(0,T) \\ V_\varepsilon(0) = 0 \, ; \quad V_\varepsilon'(0) = 0 \qquad\qquad \text{dans} \quad \Omega_\varepsilon \, , \end{cases}$$

où

$$\tilde{a}(U,V) = \beta^2 c(U,V) + \beta b(U,V) + a(U,V)$$
$$\tilde{b}(U,V) = b(U,V) + 2\beta c(U,V).$$

Nous avons établit (voir Annexe A) les théorèmes suivants :

Théorème I.1.1 : *Il existe une unique solution V_ε du problème (I.1.4). Elle vérifie :*

$$V_\varepsilon \in L^\infty(0,T,[H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^n) \cap L^2(0,T,[H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^n)$$
$$V_\varepsilon' \in L^\infty(0,T,[L^2(\Omega_\varepsilon)]^n) \cap L^2(0,T,[H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^n)$$
$$\frac{d(\rho_o V_\varepsilon')}{dt} \in L^2(0,T,[H^{-1}(\Omega_\varepsilon)]^n) \, ,$$

avec :

$$\|V_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T,[H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^n)} \, , \ \|V_\varepsilon'\|_{L^\infty(0,T,[L^2(\Omega_\varepsilon)]^n)} \leq M(T)$$
$$\|V_\varepsilon'\|_{L^2(0,T,[H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^n)} \, , \ \|\frac{d(\rho_o V_\varepsilon')}{dt}\|_{L^2(0,T,[H^{-1}(\Omega_\varepsilon)]^n)} \leq M(T)$$

où $M(T)$ est une constante positive indépendante de ε.

Théorème I.1.2 : *Il existe une unique solution U_ε du problème (I.1.2). Elle vérifie :*

$$U_\varepsilon \in L^\infty(0,T,[H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^n) \cap L^2(0,T,[H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^n)$$
$$U_\varepsilon' \in L^\infty(0,T,[L^2(\Omega_\varepsilon)]^n) \cap L^2(0,T,[H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^n)$$
$$\frac{d(\rho_o U_\varepsilon')}{dt} \in L^2(0,T,[H^{-1}(\Omega_\varepsilon)]^n) \, ,$$

avec :

$$\|U_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T,[H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^n)} \, , \ \|U_\varepsilon'\|_{L^\infty(0,T,[L^2(\Omega_\varepsilon)]^n)} \leq c(T)$$
$$\|U_\varepsilon'\|_{L^2(0,T,[H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^n)} \, , \ \|\frac{d(\rho_o U_\varepsilon')}{dt}\|_{L^2(0,T,[H^{-1}(\Omega_\varepsilon)]^n)} \leq c(T)$$

où $c(T)$ est une constante positive indépendante de ε.

Remarque I.1.3 : L'hypothèse de régularité C^1 par morceaux et l'hypothèse de connexité pour Ω_ε interviennent pour utiliser l'inégalité de Korn dans Ω_ε et obtenir ainsi les théorèmes d'existence et d'unicité I.1.1 et I.1.2. On pourrait affaiblir ces hypothèses vu qu'on peut se ramener à travailler sur Ω et utiliser une autre inégalité de Korn ne nécéssitant pas l'hypothèse de connexité. Pour faciliter le travail, on se limitera aux hypothèses annoncées.

I.2 . Passage à la transformée de Laplace :

Pour passer à la limite dans le problème (I.1.3), on va se ramener à un problème stationnaire par passage à la transformée de Laplace.

Notation :

On désigne par : u=L(U) la transformée de Laplace de U où U est prolongé par 0 pour $t < 0$.

On pose :

$$T_w^\varepsilon(t) = < \frac{d}{dt} CU_\varepsilon^{'}, w > + a(U_\varepsilon, w) + b(U_\varepsilon^{'}, w) \qquad w \in [H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^n.$$

Nous avons alors les propriétés suivantes :

P1 . $T_w^\varepsilon \in L^2(]0,+\infty[)$:

En effet $$T_w^\varepsilon(t) = \int_{\Omega_\varepsilon} F(t) w dx.$$

$$|T_w^\varepsilon(t)|^2 \leq |F(t)|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} |w|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \in L^1(]0,+\infty[)$$

donc $$T_w^\varepsilon \in L^2(]0,+\infty[).$$

P2 . $\check{T}_w^\varepsilon$ admet une transformée de Laplace :

On note :

$$\check{f} = \begin{cases} f & \text{sur }]0,+\infty[\\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \qquad \text{pour une fonction } f.$$

Si $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des distributions tempérées [21] alors :

$$\check{T}_w^\varepsilon \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \quad \text{car} \quad L^2(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}).$$

Soit $\xi \in \mathbb{R} \quad \xi > 0$ on a :

$$\int_{\mathbb{R}} |e^{-\xi t} \check{T}_w^\varepsilon(t)| dt = \int_0^{+\infty} e^{-\xi t} |T_w^\varepsilon(t)| dt \leq \Big(\int_0^{+\infty} e^{-2\xi t} dt \Big)^{1/2} \Big(\int_0^{+\infty} |T_w^\varepsilon(t)|^2 dt \Big)^{1/2} < +\infty$$

donc $$e^{-\xi t} \check{T}_w^\varepsilon \in L^1(\mathbb{R}) \qquad \forall \xi > 0.$$

Comme $$L^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}); \qquad e^{-\xi t} \check{T}_w^\varepsilon(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \qquad \forall \xi > 0,$$

donc $\check{T}_w^\varepsilon$ admet une transformée de Laplace sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et on a :

$$t_w^\varepsilon(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T_w^\varepsilon(t) dt \qquad Re\lambda > 0, \lambda \in \mathbb{C}.$$

P3 . $\check{U}_\varepsilon$ et $\check{U}'_\varepsilon$ admettent des transformées de Laplace :

On reprend le problème (I.1.4) en V_ε. On a :

$$\frac{d}{dt}c(V_\varepsilon^{'},w) + \tilde{a}(V_\varepsilon,w) + \tilde{b}(V_\varepsilon^{'},w) = \int_{\Omega_\varepsilon} e^{-\beta t}Fwdx \quad \forall w \in [H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^n.$$

On prend $w = V'_\varepsilon(t)$. On intègre de 0 à T, puis on utilise les formules d'intégration établies dans l'annexe A en tenant compte des conditions limites . Nous obtenons :

$$\frac{1}{2}c(V'_\varepsilon(T),V'_\varepsilon(T)) + \frac{1}{2}\tilde{a}(V_\varepsilon(T),V_\varepsilon(T)) + \int_0^T \tilde{b}(V'_\varepsilon(t),V'_\varepsilon(t))dt = \int_0^T < e^{-\beta t}F(t),V'_\varepsilon(t) > dt.$$

De la coercivité des formes c, $\tilde{a}$ et $\tilde{b}$, on déduit l'inégalité ci-dessous :

$$\frac{\gamma_1}{2}|V'_\varepsilon(T)|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \frac{\gamma_2}{2}\|V_\varepsilon(T)\|^2_{H_0^1(\Omega_\varepsilon)} + \gamma_3\int_0^T \|V'_\varepsilon(t)\|^2_{H_0^1(\Omega_\varepsilon)}dt \le \int_0^T |e^{-\beta t}F(t)|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}|V'_\varepsilon(t)|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}dt. \quad (*)$$

D'autre part grâce aux inégalités de Poincaré et de Young, on obtient :

$$\int_0^T |e^{-\beta t}F(t)|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}|V'_\varepsilon(t)|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}dt \le \frac{c(\Omega)}{2}\Big[\frac{1}{\nu}\int_0^T |e^{-\beta t}F(t)|^2_{L^2(\Omega)} + \nu\int_0^T \|V'_\varepsilon(t)\|^2_{H_0^1(\Omega_\varepsilon)}dt\Big] \quad (**)$$

Les inégalités (*) et (**) entrainent

$$(\gamma_3 - \frac{c(\Omega)}{2}\nu)\int_0^T \|V'_\varepsilon(t)\|^2_{H_0^1(\Omega_\varepsilon)}dt \le \frac{c(\Omega)}{2\nu}\int_0^{+\infty} |F(t)|^2_{L^2(\Omega)}.$$

On choisit ν tel que : $\gamma_3 - \frac{c(\Omega)}{2}\nu > 0$ c'est à dire : $\nu < \frac{2\gamma_3}{c(\Omega)}$.

Alors

$$\text{(I.2.1)} \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^T \|V'_\varepsilon(t)\|^2_{H_0^1(\Omega_\varepsilon)}dt \le c & \forall T > 0 \\ \|V'_\varepsilon(T)\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \le c \\ \|V_\varepsilon(T)\|^2_{H_0^1(\Omega_\varepsilon)} \le c \end{cases}$$

où c est une constante indépendante de T et de ε. Donc

$$\text{(I.2.2)} \qquad \begin{cases} V_\varepsilon \text{ est bornée dans } L^\infty(0,+\infty\,;\,[H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^n) \\ V'_\varepsilon \text{ est bornée dans } L^\infty(0,+\infty\,;\,[L^2(\Omega_\varepsilon)]^n). \end{cases}$$

Maintenant, à l'aide de (I.2.1) on montre que $\check{U}_\varepsilon$ et $\check{U}'_\varepsilon$ admettent des transformées de Laplace.

a) $U_\varepsilon = e^{\beta t}V_\varepsilon \quad \beta > 0.$

Soit $\xi \in \mathbb{R}$

$$\int_0^T |U_\varepsilon(t)|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}e^{-\xi t}dt = \int_0^T |V_\varepsilon(t)|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}e^{(\beta-\xi)t}dt \le |V_\varepsilon|_{L^\infty(0,+\infty\,;\,L^2(\Omega_\varepsilon))}\int_0^T e^{-(\xi-\beta)t}dt$$

$$\int_0^T \|U_\varepsilon(t)\|_{H_0^1(\Omega_\varepsilon)}e^{-\xi t}dt = \int_0^T \|V_\varepsilon(t)\|_{H_0^1(\Omega_\varepsilon)}e^{(\beta-\xi)t}dt \le |V_\varepsilon|_{L^\infty(0,+\infty\,;\,H_0^1(\Omega_\varepsilon))}\int_0^T e^{-(\xi-\beta)t}dt.$$

D'après le théorème de convergence monotone de Beppo Levi,

$$\int_0^{+\infty} |U_\varepsilon(t)|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}e^{-\xi t}dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \|U_\varepsilon(t)\|_{H_0^1(\Omega_\varepsilon)}e^{-\xi t}dt \quad \text{convergent} \quad \forall \xi > \beta.$$

Donc $\check{U}_\varepsilon$ admet une transformée de Laplace $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ tel que $Re\lambda > \beta$ $\left(\check{U}_\varepsilon \text{ étant considérée à valeurs dans } [L^2(\Omega_\varepsilon)]^n \text{ ou } [H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^n\right)$ et

$$\underline{u_\varepsilon(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} U_\varepsilon(t) dt.}$$

b) $\underline{U'_\varepsilon = e^{\beta t}(V'_\varepsilon + \beta V_\varepsilon)}$

* *$\check{U}'_\varepsilon$ considérée à valeurs dans $[L^2(\Omega_\varepsilon)]^n$, admet une transformée de Laplace.*

En effet $$\int_0^{+\infty} |U'_\varepsilon(t)|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} e^{-\xi t} dt \leq |V'_\varepsilon + \beta V_\varepsilon|_{L^\infty(0,+\infty\,;\, L^2(\Omega_\varepsilon))} \int_0^{+\infty} e^{-(\xi-\lambda)t} dt,$$

l'intégrale converge pour $\xi > \beta$ donc $\check{U}'_\varepsilon$ admet une transformée de Laplace et

$$\underline{u'_\varepsilon(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} U'_\varepsilon(t) dt \qquad Re\lambda > \beta.}$$

* *$\check{U}'_\varepsilon$ considérée à valeurs dans $[H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^n$, admet une transformée de Laplace.*

En effet : pour $\xi \in \mathbb{R}$ $\xi > \beta$

$$\begin{aligned}
\int_0^T \|U'_\varepsilon(t)\|_{H_0^1(\Omega_\varepsilon)} e^{-\xi t} dt &= \int_0^T e^{-(\xi-\beta)t} |V'_\varepsilon + \beta V_\varepsilon|_{H_0^1(\Omega_\varepsilon)} dt \\
&\leq \int_0^T e^{-(\xi-\beta)t} \left(\|V'_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega_\varepsilon)} + \beta \|V_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega_\varepsilon)} \right) dt \\
&\leq \left(\int_0^{+\infty} \beta e^{-(\xi-\beta)t} dt \right) |V_\varepsilon|_{L^\infty(0,+\infty\,;\, H_0^1(\Omega_\varepsilon))} + \left(\int_0^{+\infty} e^{-2(\xi-\beta)t} dt \right)^{1/2} \left(\int_0^T \|V'_\varepsilon\|^2_{H_0^1(\Omega_\varepsilon)} \right)^{1/2} \\
&\leq c
\end{aligned}$$

où c est une constante indépendante de T.

Donc $\int_0^{+\infty} \|U'_\varepsilon(t)\|_{H_0^1(\Omega_\varepsilon)} e^{-\xi t} dt$ converge pour tout $\xi > \beta$, $\check{U}'_\varepsilon$ admet une transformée de Laplace et

$$\underline{u'_\varepsilon(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} U'_\varepsilon(t) dt \qquad Re\lambda > \beta.}$$

P4 . $\underline{\lambda u_\varepsilon = u'_\varepsilon(\lambda) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C} \qquad Re\lambda > \beta}$

On considère $\check{U}_\varepsilon$ et $\check{U}'_\varepsilon$ comme fonctions à valeurs dans $[L^2(\Omega_\varepsilon)[^n$ ou $[H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^n$.

Soit $\phi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R})$ on a :

$$< \frac{d}{dt}\check{U}_\varepsilon(t), \phi > = - \int_0^{+\infty} U_\varepsilon(t)\phi'(t) dt = U_\varepsilon(0)\phi(0) + \int_0^{+\infty} U'_\varepsilon(t)\phi dt = \int_{\mathbb{R}} \check{U}'_\varepsilon \phi$$

d'où $\qquad \frac{d}{dt}\check{U}_\varepsilon = \check{U}'_\varepsilon \qquad$ dans $\mathfrak{D}'(L^2(\Omega_\varepsilon)) \quad$ ou $\quad \mathfrak{D}'(H_0^1(\Omega_\varepsilon))$

alors $\qquad L(\frac{d}{dt}\check{U}_\varepsilon) = L(\check{U}'_\varepsilon)$

soit $\qquad \lambda u_\varepsilon = u'_\varepsilon(\lambda) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C} \qquad Re\lambda > \beta.$

P5 . $\lambda^2 c(u_\varepsilon, w) + \lambda b(u_\varepsilon, w) + a(u_\varepsilon, w) =< f, w > \qquad \forall w \in [H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^n$

$$T_w^\varepsilon(t) =< \frac{d}{dt} CU_\varepsilon', w > + a(U_\varepsilon, w) + b(U_\varepsilon', w) \qquad w \in [H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^n$$

$$=< \frac{d}{dt} CU_\varepsilon', w > + < U_\varepsilon, Aw >_{H_0^1, H^{-1}} + < U_\varepsilon', Bw >_{H_0^1, H^{-1}}$$

$$t_w^\varepsilon(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T_w^\varepsilon(t) dt$$

$$= \int_0^{+\infty} < \frac{d}{dt} CU_\varepsilon', w > e^{-\lambda t} dt + \int_0^{+\infty} < U_\varepsilon, Aw > e^{-\lambda t} dt + \int_0^{+\infty} < U_\varepsilon', Bw > e^{-\lambda t} dt$$

. $\displaystyle\int_0^{+\infty} < U_\varepsilon, Aw > e^{-\lambda t} dt =< \int_0^{+\infty} U_\varepsilon e^{-\lambda t} dt, Aw >=< u_\varepsilon, Aw >= a(u_\varepsilon, w)$

. $\displaystyle\int_0^{+\infty} < U_\varepsilon', Bw > e^{-\lambda t} dt =< \int_0^{+\infty} U_\varepsilon' e^{-\lambda t} dt, Bw >=< u_\varepsilon', Bw >= \lambda < u_\varepsilon, Bw >= \lambda b(u_\varepsilon, w)$

. $\displaystyle\int_0^T < \frac{d}{dt} CU_\varepsilon', w > e^{-\lambda t} dt = \int_0^T < \frac{d}{dt} CU_\varepsilon', \Big(\frac{e^{-\lambda t} w}{-\lambda}\Big)' > dt$

$$= -\int_0^T < U_\varepsilon', \frac{d}{dt} C\Big(\frac{e^{-\lambda t} w}{-\lambda}\Big)' > dt + c\Big(U_\varepsilon'(T), \Big(\frac{e^{-\lambda t} w}{-\lambda}\Big)'(T)\Big) - c\Big(U_\varepsilon'(0), \Big(\frac{e^{-\lambda t} w}{-\lambda}\Big)'(0)\Big)$$

$$= \lambda \int_0^T < U_\varepsilon', Cw > e^{-\lambda t} dt + e^{-\lambda T} c(U_\varepsilon'(T), w).$$

Nous avons :

$$|c(U_\varepsilon'(T), w)| \le M |U_\varepsilon'(T)|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} |w|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \le M |U_\varepsilon'|_{L^\infty(0,+\infty\,;\, L^2(\Omega_\varepsilon))} |w|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \le c$$

où c est une constante indépendante de T.

En faisant tendre T vers $+\infty$, $e^{-Re\lambda T}$ tend vers 0 car $Re\lambda > \beta > 0$ d'où

. $\displaystyle\int_0^{+\infty} < \frac{d}{dt} CU_\varepsilon', w > e^{-\lambda t} dt = \lambda \int_0^{+\infty} < U_\varepsilon', Cw > e^{-\lambda t} dt = \lambda < \int_0^{+\infty} U_\varepsilon' e^{-\lambda t} dt, Cw >$

$$= \lambda < u_\varepsilon', Cw >= \lambda^2 < u_\varepsilon, Cw >$$

$$= \lambda^2 c(u_\varepsilon, w).$$

. $\displaystyle\int_0^{+\infty} < F(t), w > e^{-\lambda t} dt =< \int_0^{+\infty} F(t) e^{-\lambda t} dt, w >=< f(\lambda), w > .$

Finalement on a pour $Re\lambda > \beta > 0$:

$$\lambda^2 c(u_\varepsilon, w) + \lambda b(u_\varepsilon, w) + a(u_\varepsilon, w) =< f, w > \qquad \forall w \in [H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^n. \qquad (***)$$

Remarque I.2.1 :

La relation $(***)$ nous donne le problème stationnaire qu'on peut écrire encore sous forme :

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \lambda^2 \rho_o u_\varepsilon w + \int_{\Omega_\varepsilon} (c_o^2 \rho_o + \lambda\eta) div u_\varepsilon div w + 2\mu\lambda \int_{\Omega_\varepsilon} \varepsilon_{ij}(u_\varepsilon)\varepsilon_{ij}(w) dx = \int_{\Omega_\varepsilon} f u_\varepsilon dx \ \forall w \in [H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^n.$$

I.3 . Position du problème stationnaire :

Nous avons établit au § I.2 que l'image de Laplace u_ε du déplacement U_ε était solution d'un problème stationnaire. Dans cette partie, nous allons expliciter ce problème puis on donnera une estimation à priori.

D'après la remarque I.2.1 u_ε est solution de :

$$\text{(I.3.1)} \qquad \begin{cases} \text{Trouver } u_\varepsilon \in [H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^n \text{ tel que :} \\ \displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} \lambda^2 \rho_o u_\varepsilon \overline{w} dx + \int_{\Omega_\varepsilon} a_{ijlh} \varepsilon_{lh}(u_\varepsilon) \varepsilon_{ij}(\overline{w}) dx = \int_{\Omega_\varepsilon} f \overline{w} dx \qquad \forall w \in [H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^n \end{cases}$$

où $\overline{w}$ désigne le conjugué complexe de w et $H_0^1(\Omega_\varepsilon)$ est considéré comme un $\mathbb{C}$ espace vectoriel,

les coefficients a_{ijlh} sont donnés par :

$$\text{(I.3.2)} \qquad \begin{cases} a_{ijlh} = c_o^2 \rho_o \delta_{ij} \delta_{lh} + \lambda(\eta \delta_{ij} \delta_{lh} + \mu(\delta_{il}\delta_{jh} + \delta_{ih}\delta_{jl})) \\ \lambda \in \mathbb{C} \quad , \quad Re\lambda > \beta > 0 \quad , n\eta + 2\mu > 0 \quad \mu > 0. \end{cases}$$

D'après ce qui précéde, on sait que ce problème admet une unique solution $u_\varepsilon(\lambda)$. On va montrer directement en utilisant le théorème de Lax-Milgram (cf [27], [47]) l'existence et l'unicité de u_ε.

Théorème I.3.1 : *Il existe une unique solution du système :*

$$\text{(I.3.3)} \qquad \begin{cases} \text{Trouver} \quad u_\varepsilon \in [H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^n \quad \text{tel que} \quad : \\ \lambda^2 \rho_o u_{\varepsilon i} - \partial_j(a_{ijlh} \varepsilon_{lh}(u_\varepsilon)) = f_i \qquad \text{dans} \quad \Omega_\varepsilon \quad i = 1, ..., n. \end{cases}$$

Pour démontrer le théorème nous allons utiliser les lemmes ci-dessous :

Lemme I.3.2 : *Les coefficients a_{ijlh} vérifient*

$$\text{(I.3.4)} \qquad \begin{cases} a_{ijlh} = a_{jilh} = a_{ijhl} = a_{lhij} \\ Re(a_{ijlh}\varepsilon_{ij}\overline{\varepsilon}_{lh}) \geq \beta^* \varepsilon_{ij}\overline{\varepsilon}_{ij} \qquad \forall \varepsilon = (\varepsilon_{ij}) \in \mathbb{C}^{n^2} \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \\ Re(\dfrac{a_{ijlh}}{\lambda}\varepsilon_{ij}\overline{\varepsilon}_{lh}) \geq \alpha^* \varepsilon_{ij}\overline{\varepsilon}_{ij} \qquad \forall \varepsilon = (\varepsilon_{ij}) \in \mathbb{C}^{n^2} \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \\ \beta^* \text{ et } \alpha^* \text{ des constantes} > 0. \end{cases}$$

Démonstration :

Les propriétés de symétrie sont immédiates.

Soit $\varepsilon = (\varepsilon_{ij}) \in \mathbb{C}^{n^2}$ tel que $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$.

$$\begin{aligned} a_{ijlh}\varepsilon_{ij}\overline{\varepsilon_{lh}} &= (c_o^2\rho_o + \lambda\eta)\delta_{ij}\delta_{lh}\varepsilon_{ij}\overline{\varepsilon_{lh}} + \lambda\mu(\delta_{il}\delta_{jh} + \delta_{ih}\delta_{jl})\varepsilon_{ij}\overline{\varepsilon_{lh}} \\ &= (c_o^2\rho_o + \lambda\eta)|\varepsilon_{ii}|^2 + \lambda\mu(\varepsilon_{ij}\overline{\varepsilon_{ij}} + \varepsilon_{ij}\overline{\varepsilon_{ji}}) \\ &= c_o^2\rho_o|\varepsilon_{ii}|^2 + \lambda(\eta|\varepsilon_{ii}|^2 + 2\mu\varepsilon_{ij}\overline{\varepsilon_{ij}}) \qquad \text{car } \varepsilon_{ij} = \overline{\varepsilon_{ji}}. \end{aligned}$$

$$Re(a_{ijlh}\varepsilon_{ij}\overline{\varepsilon_{lh}}) \geq \beta(\eta|\varepsilon_{ii}|^2 + 2\mu\varepsilon_{ij}\overline{\varepsilon_{ij}})$$

$$Re\Big(\frac{1}{\lambda}a_{ijlh}\varepsilon_{ij}\overline{\varepsilon_{lh}}\Big) = \frac{Re\overline{\lambda}}{|\lambda|^2}c_o^2\rho_o|\varepsilon_{ii}|^2 + (\eta|\varepsilon_{ii}|^2 + 2\mu\varepsilon_{ij}\overline{\varepsilon_{ij}}) \geq \eta|\varepsilon_{ii}|^2 + 2\mu\varepsilon_{ij}\overline{\varepsilon_{ij}}$$

* Si $\eta \geq 0$ alors :

$$Re(a_{ijlh}\varepsilon_{ij}\overline{\varepsilon_{lh}}) \geq 2\mu\beta\varepsilon_{ij}\overline{\varepsilon_{ij}}$$
$$Re\Big(\frac{1}{\lambda}a_{ijlh}\varepsilon_{ij}\overline{\varepsilon_{lh}}\Big) \geq 2\mu\varepsilon_{ij}\overline{\varepsilon_{ij}}$$

* Si $\eta < 0$:

On montre facilement par récurrence sur n l'égalité suivante :

$$|\varepsilon_{ii}|^2 = |\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + ... + \varepsilon_{nn}|^2 = n\sum_{i=1}^{n}|\varepsilon_{ii}|^2 - \sum_{1\leq i<j\leq n}|\varepsilon_{ii} - \varepsilon_{jj}|^2.$$

Alors

$$\begin{aligned}
&\eta|\varepsilon_{ii}|^2 + 2\mu\varepsilon_{ij}\overline{\varepsilon_{ij}} \\
&= \eta\,(n\sum_{i=1}^{n}|\varepsilon_{ii}|^2 - \sum_{1\leq i<j\leq n}|\varepsilon_{ii} - \varepsilon_{jj}|^2) + 2\mu\varepsilon_{ij}\overline{\varepsilon_{ij}} \\
&= (\eta n + 2\mu)\sum_{i=1}^{n}|\varepsilon_{ii}|^2 + 2\mu\sum_{i\neq j}\varepsilon_{ij}\overline{\varepsilon_{ij}} - \eta\sum_{i<j}|\varepsilon_{ii} - \varepsilon_{jj}|^2 \\
&\geq \min(\eta n + 2\mu, 2\mu)\varepsilon_{ij}\overline{\varepsilon_{ij}}.
\end{aligned}$$

D'où

$$Re(a_{ijlh}\varepsilon_{ij}\overline{\varepsilon_{lh}}) \geq \beta\min(\eta n + 2\mu, 2\mu)\varepsilon_{ij}\overline{\varepsilon_{ij}}$$
$$Re\Big(\frac{1}{\lambda}a_{ijlh}\varepsilon_{ij}\overline{\varepsilon_{lh}}\Big) \geq \min(\eta n + 2\mu, 2\mu)\varepsilon_{ij}\overline{\varepsilon_{ij}}.$$

Le lemme est vérifié avec $\beta^* = \beta\min(\eta n + 2\mu, 2\mu)$ et $\alpha^* = \min(\eta n + 2\mu, 2\mu)$.

C.Q.F.D.

Remarque I.3.3 :

Faire attention à l'abus de notation utilisé ici. Lorsque le signe $\sum$ est utilisé cela signifie qu'on n'a plus de sommation sur l'indice répété.

Lemme I.3.4 :

Ω étant un ouvert borné de frontière C^1 par morceaux
alors $u \longmapsto (|u|^2_{L^2(\Omega)} + |\varepsilon(u)|^2_{L^2(\Omega)})^{1/2}$ est une norme sur $H^1_0(\Omega)$ équivalente à la norme $\|.\|_{1,\Omega}$.

Démonstration : (voir [25]et [39]).

Démonstration du théorème I.3.1 :

On pose :

$$a(u,v) = \int_{\Omega_\epsilon}\lambda^2\rho_o u\overline{v}dx + \int_{\Omega_\epsilon}a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(u)\varepsilon_{ij}(\overline{v})dx$$
$$< f, v >= \int_{\Omega_\epsilon} f\overline{v}dx$$

. f est une forme anti-linéaire sur $[H^1_0(\Omega_\epsilon)]^n$
. a est une forme sesquilinéaire sur $[H^1_0(\Omega_\epsilon)]^n$

$$a(tu, pv) = t\overline{p}\, a(u, v) \qquad t, p \in \mathbb{C} \text{ et } \forall u, v \in [H_0^1(\Omega_\epsilon)]^n$$

. a est continue sur $[H_0^1(\Omega_\epsilon)]^n \times [H_0^1(\Omega_\epsilon)]^n$
. a est coercive sur $[H_0^1(\Omega_\epsilon)]^n$, en effet :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{\lambda}a(u,u)\right| &\geq Re\left(\frac{1}{\lambda}a(u,u)\right) \\
&= Re\lambda\rho_o \int_{\Omega_\epsilon} |u|^2 + Re \int_{\Omega_\epsilon} \frac{a_{ijlh}}{\lambda}\varepsilon_{ij}(u)\overline{\varepsilon_{ij}(u)}dx \\
&\geq \beta\rho_o |u|^2_{L^2(\Omega_\epsilon)} + \alpha^* \int_{\Omega_\epsilon} \varepsilon_{ij}(u)\overline{\varepsilon_{ij}(u)}dx \\
&\geq min(\beta\rho_o, \alpha^*)\left(|u|^2_{L^2(\Omega_\epsilon)} + |\varepsilon(u)|^2_{L^2(\Omega_\epsilon)}\right).
\end{aligned}$$

Du lemme I.3.4, on déduit la coercivité de la forme a.

D'après le théorème de Lax-Milgram, il existe $u \in [H_0^1(\Omega_\epsilon)]^n$ unique solution du problème (I.3.3).

C.Q.F.D.

Estimation à priori :

Notation :

On désigne par $\tilde{\ }$ l'opérateur de prolongement par 0 dans $\Omega \setminus \Omega_\epsilon$ qui opère de $H_0^1(\Omega_\epsilon)$ dans $H_0^1(\Omega)$.

Soit $\tilde{u_\epsilon}$ le prolongement de u_ϵ par 0 dans $\Omega \setminus \Omega_\epsilon$. On a :

$$\begin{aligned}
&|a(\tilde{u}_\epsilon, \tilde{u}_\epsilon)| \geq c\|\tilde{u}_\epsilon\|^2_{1,\Omega} \\
&|a(\tilde{u}_\epsilon, \tilde{u}_\epsilon)| = \left|\int_\Omega f\tilde{u}_\epsilon\right| \leq |f|_{L^2(\Omega)}|\tilde{u}_\epsilon|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Comme

$$|\tilde{u}_\epsilon|_{L^2(\Omega)} \leq c\|\tilde{u}_\epsilon\|_{1,\Omega}$$

on a finalement

$$\|\tilde{u_\epsilon}\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c|f|_{L^2(\Omega)}$$

où c est une constante indépendante de ε.

Par conséquent la suite $(\tilde{u_\epsilon})_{\epsilon>0}$ est bornée dans $[H_0^1(\Omega)]^n$ indépendamment de ε. Quitte à extraire une sous-suite encore notée $(\tilde{u_\epsilon})_{\epsilon>0}$, on déduit l'existence de $u \in [H_0^1(\Omega)]^n$ tel que :

$$\tilde{u_\epsilon} \rightharpoonup u \text{ dans } [H_0^1(\Omega)]^n \text{ faible.}$$

Dans le but de trouver le problème vérifié par $u(\lambda)$ et le problème en temps correspondant, on introduit à priori le cadre abstrait d'hypothèses suivantes.
Nous vérifierons ces hypothèses dans un premier temps pour le cas des trous (de taille convenablement choisie) périodiquement répartis dans tout Ω et dans un deuxième temps dans le cas des trous périodiquement répartis sur un hyperplan de Ω.

I.4 . Hypothèses H1 à H6 :

On supose que les trous sont tels qu'il existe des éléments ω_k^ε et μ_k tels que $\forall k \in \{1, ..., n\}$, on ait :

(H1) $\omega_k^\varepsilon \in [H^1(\Omega)]^n$

(H2) $\omega_k^\varepsilon = 0$ sur les trous $(T_\nu^\varepsilon)_{\nu=1}^{n(\varepsilon)}$

(H3) $\omega_k^\varepsilon \rightharpoonup e_k$ dans $[H^1(\Omega)]^n$ faible où e_k est le $k^{ième}$ vecteur de base de $\mathbb{R}^n$

(H4) $\mu_k \in [W^{-1,\infty}(\Omega)]^n$

(H5) $\forall (v_\varepsilon)$, v vérifiant :

$v_\varepsilon \rightharpoonup v$ dans $[H^1(\Omega)]^n$ faible, $v_\varepsilon = 0$ sur les trous $(T_\nu^\varepsilon)_{\nu=1}^{n(\varepsilon)}$

et $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a :

$$< -\partial_h(a_{ijlh}\varepsilon_{ij}(\omega_k^\varepsilon)), \varphi(v_\varepsilon)_l >_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} \longrightarrow < \mu_k, \varphi v >_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}$$

(H6) Il existe une distribution $G \in \mathcal{D}'(]0,+\infty[, [W^{-1,\infty}(\Omega)]^{n^2})$ telle que : $G(t) = L^{-1}(M(\lambda))$

où $M(\lambda)$ désigne la matrice définie par ses colonnes $(\mu_k)_{k=1,...,n}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ $Re\lambda > \beta > 0$.

Remarque I.4.1 : L'idée du cadre abstrait d'hypothèses à priori est due à D. Cioranescu et F. Murat [12] et les hypothèses (H1) à (H5) que l'on vient d'énoncer sont simplement celles introduites dans [12] pour l'opérateur Laplacien adaptées à nos équations. L'hypothèse (H6) nous permettra de retrouver le problème en temps.

Remarque I.4.2 : L'hypothèse (H5) peut être remplacée par l'hypothèse (H5)′ plus forte suivante :

(H5)′
$$\begin{cases} -\partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)) = \mu_{k,i}^\varepsilon - \gamma_{k,i}^\varepsilon & \text{dans } \Omega \\ \text{avec} \quad \mu_k^\varepsilon \longrightarrow \mu_k & \text{dans } [H^{-1}(\Omega)]^n \text{ fort} \\ \text{et} \quad \gamma_k^\varepsilon \longrightarrow \mu_k & \text{dans } [H^{-1}(\Omega)]^n \text{ faible} \\ \text{et} \quad \gamma_k^\varepsilon = 0 & \text{dans } [H^{-1}(\Omega_\varepsilon)]^n. \end{cases}$$

La dernière relation signifie : $< \gamma_k^\varepsilon, v >= 0 \quad \forall v \in [H_0^1(\Omega)]^n$ tel que $v = 0$ sur les T_ν^ε.

L'hypothèse (H5) intervient naturellement dans la démonstration du théorème donnant le problème limite du problème stationnaire .
Dans les exemples que nous étudierons, nous montrerons que (H5)′ est satisfaite cela entraînera l'hypothèse (H5).

Dans la suite de ce paragraphe, on va démontrer des résultats qui découlent uniquement des hypothèses (H1) à (H5).

Proposition I.4.3 :

Soient $(\omega_k^\varepsilon, \mu_k)_{1\le k\le n}$ des fonctions qui vérifient les hypothèses (H1)-(H5). Alors si $\mu_k^p = \mu_k.e_p$ on a pour chaque $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$

$$(I.4.1) \qquad < \mu_k^p, \varphi >_{\mathfrak{D}',\mathfrak{D}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{ij}(\omega_k^\varepsilon)\varepsilon_{lh}(\omega_p^\varepsilon)\varphi dx.$$

Par conséquent les coefficients de $M = [\mu_k]_{1\le k\le n}$ sont des mesures de Radon, la matrice M est symétrique ($\mu_k^p = \mu_p^k$) et positive au sens suivant :

$$(I.4.2) \qquad Re < M\phi, \overline{\phi} >_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} \ge 0 \qquad \forall \phi \in [\mathfrak{D}(\Omega)]^n.$$

Démonstration :

Dans (H5), on prend $v_\varepsilon = \omega_p^\varepsilon$ alors :

$$(I.4.3) \qquad < -\partial_h(a_{ijlh}\varepsilon_{ij}(\omega_k^\varepsilon)), \varphi(\omega_p^\varepsilon)_l >_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} \longrightarrow < \mu_k, \varphi e_p >_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega).$$

En intégrant par parties le membre de gauche de (I.4.3), on obtient :

$$< -\partial_h(a_{ijlh}\varepsilon_{ij}(\omega_k^\varepsilon)), \varphi(\omega_p^\varepsilon)_l >_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{ij}(\omega_k^\varepsilon)\varepsilon_{lh}(\omega_p^\varepsilon)\varphi dx + \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{ij}(\omega_k^\varepsilon)(\partial_h\varphi)(\omega_p^\varepsilon)_l dx.$$

Grâce à (H3)

$$\int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{ij}(\omega_k^\varepsilon)(\partial_h\varphi)(\omega_p^\varepsilon)_l dx \longrightarrow 0.$$

En utilisant (I.4.3), on obtient (I.4.1).

La propriété de symétrie de M découle de celle des cœfficients a_{ijlh}.

D'autre part pour tout $\phi \in [\mathfrak{D}(\Omega)]^n$, on a :

$$< M\phi, \overline{\phi} >_{\mathfrak{D}'(\Omega),\mathfrak{D}(\Omega)} = < \mu_q^p, \varphi_q\overline{\varphi}_p > = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{ij}(\omega_q^\varepsilon)\varepsilon_{lh}(\overline{\omega}_p^\varepsilon)\varphi_q\overline{\varphi}_p dx$$

car on a aussi $< \mu_k^p, \varphi >_{\mathfrak{D}',\mathfrak{D}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{ij}(\omega_k^\varepsilon)\varepsilon_{lh}(\overline{\omega_p^\varepsilon})\varphi dx$ puisque $(\overline{\omega}_p^\varepsilon)_\varepsilon$ vérifie (H3).

On pose $X_{ij}^\varepsilon = \varepsilon_{ij}(\omega_q^\varepsilon)\varphi_q$ alors $X_{ij}^\varepsilon = X_{ji}^\varepsilon$ et

$$Re < M\phi, \overline{\phi} > = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega Re(a_{ijlh}X_{ij}^\varepsilon\overline{X_{lh}^\varepsilon})dx \ge \beta^* \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega X_{ij}^\varepsilon\overline{X_{ij}^\varepsilon}dx \ge 0 \quad \text{grâce à (I.3.4).}$$

Enfin on a : $\left|\int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{ij}(\omega_k^\varepsilon)\varepsilon_{lh}(\omega_p^\varepsilon)\varphi dx\right| \le c|\varphi|_{L^\infty(\Omega)} \qquad \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$

avec c une constante indépendante de ε.

Par suite $\quad | < \mu_k^p, \varphi >_{\mathfrak{D}',\mathfrak{D}} | \le c|\varphi|_{C^0(\Omega)} \qquad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega).$

L'élément μ_k^p est une distribution (car limite de distribution) d'ordre 0 c'est donc une mesure de Radon (cf [47]).

C.Q.F.D.

On démontre maintenant la " quasi-unicité " des fonctions ω_k^ε et μ_k associées à la famille de trous $\left(T_\nu^\varepsilon\right)_{\nu=1}^{n(\varepsilon)}$ et vérifiant les hypothèses (H1) à (H5).

Proposition I.4.4 :

Pour une même suite de trous $[(T_\nu^\varepsilon)_{\nu=1}^{n(\varepsilon)}]_{\varepsilon>0}$, *on suppose qu'il existe deux groupes de fonctions* $(\omega_k^\varepsilon, \mu_k)_{k=1}^n$, $(\omega_k^{\varepsilon'}, \mu_k')_{k=1}^n$ *qui vérifient les hypothèses (H1)-(H5), alors on a :*

(I.4.4) $\mu_k' = \mu_k$ *dans* Ω

(I.4.5) $\varepsilon_{ij}(\omega_k^\varepsilon - \omega_k^{\varepsilon'}) \longrightarrow 0$ *dans* $L^2_{loc}(\Omega)$ *fort* $i,j = 1,2,3.$

Démonstration :

En combinant les hypothèses (H5) pour les deux groupes de fonctions $(\omega_k^\varepsilon, \mu_k)$ et $(\omega_k^{\varepsilon'}, \mu_k')$ on obtient :

(I.4.6)
$$\begin{cases} \forall v_\varepsilon\ ,\ v \text{ vérifiant : } v_\varepsilon \rightharpoonup v \text{ dans } [H^1(\Omega)]^n \text{ faible ; } v_\varepsilon = 0 \text{ sur les trous } (T_\nu^\varepsilon)_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} \\ \text{et pour tout } \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega), \quad \text{on a :} \\ < -\partial_h(a_{ijlh}\varepsilon_{ij}(\omega_k^\varepsilon - \omega_k^{\varepsilon'})), \varphi(v_\varepsilon)_l >_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} \longrightarrow < \mu_k - \mu_k', \varphi v >_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} . \end{cases}$$

Dans (I.4.6), on prend $v_\varepsilon = \overline{\omega_k^\varepsilon} - \overline{\omega_k^{\varepsilon'}}$. On obtient :

(I.4.7)
$$< -\partial_h(a_{ijlh}\varepsilon_{ij}(\omega_k^\varepsilon - \omega_k^{\varepsilon'})), \varphi\overline{(\omega_k^\varepsilon - \omega_k^{\varepsilon'})_l} > \longrightarrow 0.$$

On intègre par partie le membre gauche de (I.4.7), il vient que :

$$\int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{ij}(\omega_k^\varepsilon - \omega_k^{\varepsilon'})\varepsilon_{lh}(\varphi\overline{(\omega_k^\varepsilon - \omega_k^{\varepsilon'})})dx \longrightarrow 0.$$

On déduit que :

(I.4.8)
$$\int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{ij}(\omega_k^\varepsilon - \omega_k^{\varepsilon'})\varepsilon_{lh}(\overline{(\omega_k^\varepsilon - \omega_k^{\varepsilon'})}\varphi dx \longrightarrow 0 \qquad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega).$$

Donc

(I.4.9)
$$|\varepsilon(\omega_k^\varepsilon - \omega_k^{\varepsilon'})|_{L^2(K)} \longrightarrow 0 \quad \forall\, K \text{ compact} \subset \Omega.$$

Pour vérifier (I.4.4), on choisit maintenant dans (I.4.6), $v_\varepsilon = \omega_p^\varepsilon$. On a :

(I.4.10)
$$< -\partial_h(a_{ijlh}\varepsilon_{ij}(\omega_k^\varepsilon - \omega_k^{\varepsilon'})), \varphi(\omega_p^\varepsilon)_l > \longrightarrow < \mu_k - \mu_k', \varphi e_p > \qquad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega).$$

On intègre par partie le membre gauche de (I.4.10), alors :

$$\int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{ij}(\omega_k^\varepsilon - \omega_k^{\varepsilon'})\varepsilon_{lh}(\varphi\omega_p^\varepsilon)dx \longrightarrow < \mu_k - \mu_k', \varphi e_p > .$$

Comme φ est à support compact, à l'aide de (I.4.9), on a :

$$< \mu_k - \mu_k', \varphi e_p >= 0 \qquad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega),$$

d'où (I.4.4).

C.Q.F.D.

Remarque I.4.5 : Vérifions (I.4.9) plus en détail.

(I.4.9) $$|\varepsilon(\omega_k^\varepsilon - \omega_k^{\varepsilon'})|_{L^2(K)} \longrightarrow 0 \quad \forall K \text{ compact } \subset \Omega.$$

preuve : Soit K un compact $\subset \Omega$.

Soit $\delta > 0$ tel que $K_\delta = K + \overline{B}(0, 3\delta) \subset \Omega$.

Alors il existe $\varphi_\delta \in \mathfrak{D}(\Omega)$ tel que :

$$\begin{cases} \varphi_\delta = 1 \quad \text{sur} \quad K + \overline{B}(0,\delta) \\ \varphi_\delta = 0 \quad \text{sur} \quad \Omega \setminus (K + \overline{B}(0,3\delta)) \\ \quad 0 \le \varphi_\delta \le 1. \end{cases}$$

Il suffit de prendre (cf [21]) : $$\varphi_\delta = (1_{K+\overline{B}(0,2\delta)} * \psi_\delta) \Big/ \int_{\overline{B}(0,1)} \psi(x)dx$$

où $$\psi_\delta(x) = \frac{1}{\delta^n}\psi(\frac{x}{\delta})$$

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-\|x\|^2}} & \text{pour} \quad \|x\| < 1 \\ 0 & \text{pour} \quad \|x\| \ge 1. \end{cases}$$

Posons $$f_\varepsilon = a_{ijlh}\varepsilon_{ij}(\omega_k^\varepsilon - \omega_k^{\varepsilon'})\varepsilon_{lh}(\overline{\omega_k^\varepsilon - \omega_k^{\varepsilon'}}).$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \int_\Omega f_\varepsilon\varphi_\delta &= \int_K f_\varepsilon\varphi_\delta + \int_{K_\delta\setminus K} f_\varepsilon\varphi_\delta + \int_{\Omega\setminus K_\delta} f_\varepsilon\varphi_\delta \\ &= \int_K f_\varepsilon + \int_{K_\delta\setminus K} f_\varepsilon\varphi_\delta \end{aligned}$$

car $\varphi_\delta = 1$ sur K et $\varphi_\delta = 0$ sur $\Omega \setminus K_\delta$.

D'après (I.4.8) $$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega f_\varepsilon\varphi_\delta = 0.$$

* Montrons que : $\lim_{\delta\to 0}\int_{K_\delta\setminus K} f_\varepsilon\varphi_\delta = 0.$

On a

$$\Big|\int_{K_\delta\setminus K} f_\varepsilon\varphi_\delta\Big| \le \int_{K_\delta\setminus K} |f_\varepsilon| = \int_\Omega |f_\varepsilon 1_{K_\delta\setminus K}| \qquad \text{car} \qquad 0 \le \varphi_\delta \le 1$$

. $|f_\varepsilon 1_{K_\delta\setminus K}| \le |f_\varepsilon| \in L^1(\Omega)$.

. $f_\varepsilon 1_{K_\delta\setminus K} \longrightarrow 0$ p.p $x \in \Omega$ quand $\delta \longrightarrow 0$

en effet , soit $x \in \Omega$

- si $x \in K$ $\quad f_\varepsilon 1_{K_\delta\setminus K} = 0$
- si $x \notin K$ $\quad$ posons $\beta = d(x, K)$ $\beta > 0$. .

Soit $\delta < \dfrac{\beta}{3}$ alors $x \notin K + \overline{B}(0,3\delta) = K_\delta$ car sinon $x = k + z$ avec $k \in K$ et $|z| \leq 3\delta$

on aura alors $$\beta = d(x,K) = \inf_{k\in K} d(x,k) \leq |x-k| = |z| \leq 3\delta$$

soit $\beta \leq 3\delta$ ce qui contredit $\delta < \dfrac{\beta}{3}$.

Donc pour $\delta < \dfrac{\beta}{3} = \dfrac{d(x,K)}{3}$; $f_\varepsilon 1_{K_\delta \setminus K} = 0$

et donc $$f_\varepsilon 1_{K_\delta \setminus K} \longrightarrow 0 \quad \text{p.p } x \in \Omega \quad \text{quand} \quad \delta \longrightarrow 0.$$

D'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on a :

$$\int_\Omega |f_\varepsilon 1_{K_\delta \setminus K}| \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad \delta \longrightarrow 0.$$

* Montrons que : $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_K f_\varepsilon = 0.$

Soit $\eta > 0$

. $\lim_{\delta\to 0} \int_\Omega |f_\varepsilon 1_{K_\delta \setminus K}| = 0$ alors $\exists\, \delta_o(\varepsilon)$ tel que : $\int_{K_{\delta_o}\setminus K} |f_\varepsilon| < \dfrac{\eta}{2}$

. $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega f_\varepsilon \varphi_{\delta_o(\varepsilon)} = 0$ alors $\exists \varepsilon_o$ tel que $\varepsilon < \varepsilon_o$ $\left| \int_\Omega f_\varepsilon \varphi_{\delta_o(\varepsilon)} \right| < \dfrac{\eta}{2}.$

Comme $$\int_K f_\varepsilon = \int_K f_\varepsilon \varphi_{\delta_o(\varepsilon)} = \int_\Omega f_\varepsilon \varphi_{\delta_o(\varepsilon)} - \int_{K_{\delta_o}\setminus K} f_\varepsilon \varphi_{\delta_o(\varepsilon)} \quad \text{puisque } \varphi_{\delta_o(\varepsilon)} = 1 \text{ sur } K,$$

pour $\varepsilon < \varepsilon_o$

$$\begin{aligned} \left| \int_K f_\varepsilon \right| &\leq \left| \int_\Omega f_\varepsilon \varphi_{\delta_o(\varepsilon)} \right| + \left| \int_{K_{\delta_o}\setminus K} f_\varepsilon \varphi_{\delta_o(\varepsilon)} \right| \\ &\leq \left| \int_\Omega f_\varepsilon \varphi_{\delta_o(\varepsilon)} \right| + \int_{K_{\delta_o}\setminus K} |f_\varepsilon| \\ &\leq \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = \eta. \end{aligned}$$

Donc

$$\forall \eta > 0 \quad \exists \varepsilon_o \quad \text{tel que} \quad \forall \varepsilon < \varepsilon_o \quad \left| \int_K f_\varepsilon \right| < \eta.$$

Ceci signifie que :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_K f_\varepsilon = 0.$$

* Conclusion :

$$\alpha^* \|\varepsilon((\omega_k^\varepsilon - \omega_k^{\varepsilon'})\|_{L^2(K)} \leq Re \int_K a_{ijlh} \varepsilon_{ij}(\omega_k^\varepsilon - \omega_k^{\varepsilon'}) \varepsilon_{lh}(\overline{\omega_k^\varepsilon - \omega_k^{\varepsilon'}}) dx = Re \int_K f_\varepsilon$$

d'où

$$|\varepsilon(\omega_k^\varepsilon - \omega_k^{\varepsilon'})|_{L^2(K)} \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad \varepsilon \to 0.$$

C.Q.F.D.

I.5 . Passage à la limite :

Théorème I.5.1 : *Soit u_ε l'unique solution du système suivant :*

$$(I.3.3) \qquad \begin{cases} \text{Trouver} \quad u_\varepsilon \in [H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^n \quad \text{tel que :} \\ \lambda^2 \rho_o u_{\varepsilon i} - \partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(u_\varepsilon)) = f_i \qquad \text{dans} \quad \Omega_\varepsilon \quad i = 1, ..., n\,. \end{cases}$$

On se place sous les hypothèses (H1) à (H5). Alors

$$\tilde{u}_\varepsilon \rightharpoonup u \quad \text{dans} \quad [H_0^1(\Omega)]^n \quad \text{faible},$$

où u est l'unique solution du système homogénéisé :

$$(I.5.1) \qquad \begin{cases} \text{Trouver} \quad u \in [H_0^1(\Omega)]^n \quad \text{tel que :} \\ \lambda^2 \rho_o u_i - \partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(u)) + \mu_i . u = f_i \qquad \text{dans} \quad \Omega \qquad i = 1, ..., n\,. \end{cases}$$

Démonstration :

Pour passer à la limite, nous allons utiliser la méthode de l'énérgie, introduite par L.Tartar [37] [46]. La méthode consiste à introduire dans la formulation variationnelle des fonctions tests particulières, à savoir dans notre cas les fonctions ω_k^ε définies par les hypothèses (H1) à (H5).

D'aprés (I.3.1), on a :

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \lambda^2 \rho_o u_\varepsilon v dx + \int_{\Omega_\varepsilon} a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(u_\varepsilon)\varepsilon_{ij}(v)dx = \int_{\Omega_\varepsilon} f v dx \qquad \forall v \in [H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^n.$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ alors $\varphi\omega_k^\varepsilon|_{\Omega_\varepsilon} \in [H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^n$ donc :

$$(I.5.2) \qquad \int_\Omega \lambda^2 \rho_o \tilde{u}_\varepsilon \varphi \omega_k^\varepsilon dx + \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\tilde{u}_\varepsilon)\varepsilon_{ij}(\varphi\omega_k^\varepsilon)dx = \int_\Omega f\varphi\omega_k^\varepsilon dx$$

ou encore

$$(I.5.3) \qquad \int_\Omega \lambda^2 \rho_o \tilde{u}_\varepsilon \varphi \omega_k^\varepsilon dx + \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\tilde{u}_\varepsilon)\frac{1}{2}[(\partial_i\varphi)(\omega_k^\varepsilon)_j + (\partial_j\varphi)(\omega_k^\varepsilon)_i]dx +$$

$$+ < -\partial_h(a_{ijlh}\varepsilon_{ij}(\omega_k^\varepsilon)), \varphi(\tilde{u}_\varepsilon)_l > - \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)(\partial_h\varphi)(\tilde{u}_\varepsilon)_l dx = \int_\Omega f\varphi\omega_k^\varepsilon dx.$$

Passons à la limite dans l'égalité (I.5.3). On a :

$$\tilde{u}_\varepsilon \rightharpoonup u \quad \text{dans} \quad [H^1(\Omega)]^n \quad \text{faible}$$
$$\omega_k^\varepsilon \rightharpoonup e_k \quad \text{dans} \quad [H^1(\Omega)]^n \quad \text{faible.}$$

L'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ étant compacte, après extraction d'une sous suite on a :

$$\tilde{u}_\varepsilon \longrightarrow u \quad \text{dans} \quad [L^2(\Omega)]^n \quad \text{fort}$$
$$\omega_k^\varepsilon \longrightarrow e_k \quad \text{dans} \quad [L^2(\Omega)]^n \quad \text{fort.}$$

On a alors :

- $\displaystyle\int_\Omega \lambda^2 \rho_o \tilde{u}_\varepsilon \varphi \omega_k^\varepsilon dx \longrightarrow \int_\Omega \lambda^2 \rho_o u.e_k \varphi dx = \int_\Omega \lambda^2 \rho_o u_k \varphi dx$
- $\displaystyle\int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\tilde{u}_\varepsilon)\frac{1}{2}[(\partial_i\varphi)(\omega_k^\varepsilon)_j + (\partial_j\varphi)(\omega_k^\varepsilon)_i]dx \longrightarrow \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(u)\frac{1}{2}[(\partial_i\varphi)\delta_{kj} + (\partial_j\varphi)\delta_{ki}]dx$
- $< -\partial_h(a_{ijlh}\varepsilon_{ij}(\omega_k^\varepsilon)), \varphi(\tilde{u}_\varepsilon)_l >_{H^{-1},H_0^1} \longrightarrow < \mu_k, \varphi u >_{H^{-1},H_0^1}$
- $\displaystyle\int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)(\partial_h\varphi)(\tilde{u}_\varepsilon)_l dx \longrightarrow 0$
- $\displaystyle\int_\Omega f\varphi\omega_k^\varepsilon dx \longrightarrow \int_\Omega f\varphi e_k dx = \int_\Omega f_k \varphi dx.$

D'où

$$\int_\Omega \lambda^2 \rho_o u_k \varphi dx + \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(u)\frac{1}{2}[(\partial_i\varphi)\delta_{kj} + (\partial_j\varphi)\delta_{ki}]dx + < \mu_k, \varphi u >_{H^{-1},H_0^1} = \int_\Omega f_k \varphi dx.$$

En utilisant le résultat suivant (cf [2])

$$\mu_k \in [W^{-1,\infty}(\Omega)]^n \ ; \ u \in [H_0^1(\Omega)]^n \Longrightarrow \mu_k.u \in H^{-1}(\Omega) \quad \text{et} \quad < \mu_k.u, \varphi >_{H^{-1},H_0^1} = < \mu_k, u\varphi >_{H^{-1},H_0^1}$$

et l'égalité

$$\int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(u)\frac{1}{2}[(\partial_i\varphi)\delta_{kj} + (\partial_j\varphi)\delta_{ki}]dx = \int_\Omega a_{iklh}\varepsilon_{lh}(u)\partial_i\varphi dx = < -\partial_i(a_{iklh}\varepsilon_{lh}(u)), \varphi >_{H^{-1},H_0^1},$$

on obtient :

$$\text{(I.5.4)} \qquad \int_\Omega \lambda^2 \rho_o u_k \varphi dx + < -\partial_i(a_{iklh}\varepsilon_{lh}(u)), \varphi >_{H^{-1},H_0^1} + < \mu_k.u, \varphi > = \int_\Omega f_k \varphi dx,$$

ce qui montre que u est solution de (I.5.1).

Reste à vérifier l'unicité de la solution de (I.5.1).

Une formulation variationnelle associée à (I.5.1) est :

$$\text{(I.5.5)} \qquad \begin{cases} \text{Trouver} \quad u \in [H_0^1(\Omega)]^n \quad \text{tel que :} \\ \displaystyle\int_\Omega \lambda^2 \rho_o u.\overline{v} dx + \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(u)\varepsilon_{ij}(\overline{v})dx + < Mu, \overline{v} > = \int_\Omega f\overline{v}dx \qquad \forall v \in [H_0^1(\Omega)]^n. \end{cases}$$

Grâce aux propriétés des coefficients a_{ijlh} (lemme (I.3.2)), on a :

$$\text{(I.5.6)} \qquad Re\Big(\int_\Omega \lambda\rho_o|u|^2dx + \int_\Omega \frac{a_{ijlh}}{\lambda}\varepsilon_{lh}(u)\varepsilon_{ij}(\overline{u})dx + \frac{1}{\lambda} < Mu, \overline{u} >\Big) \geq \beta\rho_o \int_\Omega |u|^2dx + \alpha^* \int_\Omega |\varepsilon(u)|^2dx,$$

d'où la coercivité de l'opérateur $(\lambda^2\rho_o I - \partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(.)) + \mu_i)$ et donc l'existence et l'unicité de la solution de (I.5.1). D'autre part de l'unicité de la solution de (I.5.1), toutes les sous suites convergentes de $(\tilde{u}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ convergent vers la même limite. C'est donc toute la suite qui converge.

C.Q.F.D.

Définition I.5.2 : *On définit l'espace de Hilbert suivant (cf Annexe A) :*

$$\tilde{W}_c[H_0^1(\Omega)] = \Big\{v \in L^2(0,T,[H_0^1(\Omega)]^n) \ ; \ v' \in L^2(0,T,[H_0^1(\Omega)]^n) \ ; \ \frac{dCv'}{dt} \in L^2(0,T,[H^{-1}(\Omega)]^n)\Big\}$$

où C est défini par :

$$< Cu, v > = c(u,v) \quad \forall u, v \in [L^2(\Omega)]^n.$$

Théorème I.5.3 : *Sous les hypothèses (H1) - (H6), on a :*

(I.5.7) *il existe* $U \in \mathcal{D}'(]0,+\infty[,[H_0^1(\Omega)]^n)$ *tel que :* $u(\lambda) = L(U) \qquad Re\lambda > \beta > 0$

(I.5.8) $\tilde{U}_\varepsilon \rightharpoonup U$ *dans* $\tilde{W}_c[H_0^1(\Omega)]$ *faible*

(I.5.9) *la distribution U est l'unique solution du problème :*

$$\begin{cases} \rho_o \dfrac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = \partial_j \sigma_{ij}(U) - (G * U)_i + F_i \qquad \text{dans } \Omega \quad i = 1, ..., n \\ U(x,0) = 0 \ ; \qquad \dfrac{\partial U}{\partial t}(x,0) = 0 \qquad \text{dans } \Omega \\ U(x,t) = 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Remarque I.5.4 : Initialement le problème était du type élasticité à mémoire courte (cf [25]), c'est à dire l'état des contraintes ne dépend que de la déformation à l'instant t et aux instants immédiatement précédents. Après homogénéisation nous avons obtenu un problème d'élasticité à mémoire longue, c'est à dire l'état des contraintes à l'instant t dépend de la déformation à l'instant t et aussi des déformations aux instants antérieurs à t.

Pour démontrer le théorème, nous aurons besoin des deux résultats suivants démontrés dans R. Dautray - J.L. Lions [23].

Théorème I.5.5 : *Soit X un espace de Banach de norme $|.|_X$.*
Une condition nécéssaire et suffisante pour que la fonction $p \longmapsto F(p)$ définie dans $\mathbb{C}$ à valeurs dans X , soit la transformée de Laplace d'une distribution $f \in \mathcal{D}'(]0,+\infty[,X)$ avec supp $f \subset [\alpha,+\infty[$ est que F soit holomorphe dans un demi-plan $]\xi_o,+\infty[\times\mathbb{R}$ à valeurs dans X et vérifie :

$$|F(p)|_X \leq e^{-\xi\alpha} Pol(|p|), \qquad p = \xi + i\eta, \qquad \xi > \xi_o, \qquad \eta \in \mathbb{R}$$

où $Pol(|p|)$ est un polynôme de la variable $|p|$.

Lemme I.5.6 : *Soit Y et Z deux espaces de Banach. $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{C}$. On suppose*

$$\begin{aligned} &a) \quad p \longmapsto \Gamma(p) \quad \text{holomorphe de} \quad \mathcal{O} \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{Y},\mathcal{Z}) \\ &b) \quad \Gamma^{-1}(p) \quad \text{existe pour tout} \quad p = \xi + i\eta, \qquad p \in \mathcal{O}. \end{aligned}$$

Alors $p \longmapsto \Gamma^{-1}(p)$ *est holomorphe de* $\mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{Y},\mathcal{Z})$.

Démonstration du théorème I.5.3 : Elle se fera à partir des lemmes ci-dessous (cf [41]) :

Lemme I.5.7 : *La solution du problème (I.5.1)*

$$(I.5.1) \qquad \begin{cases} \text{Trouver} \quad u_\varepsilon \in [H_0^1(\Omega)]^n \quad \text{tel que :} \\ \lambda^2 \rho_o u_i - \partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(u)) + \mu_i.u = f_i \qquad \text{dans} \quad \Omega \quad i = 1,...,n, \end{cases}$$

est la transformée de Laplace d'une distribution $U \in \mathcal{D}'(]0,+\infty[,[H_0^1(\Omega)]^n)$: $u(\lambda) = L(U)\ Re\lambda > \beta > 0.$

Démonstration :

Le problème (I.5.1) est équivalent à :

$$(I.5.10) \qquad \begin{cases} \text{Trouver} \qquad u \in [H_0^1(\Omega)]^n \qquad \text{tel que :} \\ (A + M)u = f \qquad \text{dans } [H^{-1}(\Omega)]^n \end{cases}$$

où

$$(I.5.11) \qquad (Au)_i = \lambda^2 \rho_o u_i - \partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(u)) \qquad Re\lambda > \beta > 0.$$

L'application qui à $\lambda \in \{Re\lambda > \beta\}$ associe $(A + M)(\lambda) \in \mathcal{L}([H_0^1(\Omega)]^n, [H^{-1}(\Omega)]^n)$ est holomorphe car $A(\lambda)$ est un polynôme en λ et $\lambda \longmapsto M(\lambda)$ est holomorphe grâce à (H6) et au théorème I.5.5.

De plus d'après le théorème I.5.1, l'opérateur $(A+M)(\lambda)$ est inversible pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\{Re\lambda > \beta\}$ donc, grâce au lemme I.5.6, on a :

(I.5.12) $$\lambda \longmapsto (A+M)^{-1}(\lambda) \quad \text{est holomorphe sur} \quad \{Re\lambda > \beta\}.$$

D'autre part, on a l'estimaion suivante :

(I.5.13) $$\begin{cases} \|(A+M)^{-1}(\lambda)\|_{\mathcal{L}([H^{-1}(\Omega)]^n,[H_0^1(\Omega)]^n)} \leq c \\ \text{où c est une constante indépendante de } \lambda. \end{cases}$$

En effet : soit $v \in [H^{-1}(\Omega)]^n$, $\quad \exists!\ u \in [H_0^1(\Omega)]^n$ tel que $\quad v = (A+M)u$.

En utilisant l'inégalité de Korn dans l'inégalité (I.5.6), on a

$$\begin{aligned} \gamma\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} &\leq Re < \frac{1}{\lambda}(A+M)u, \overline{u} > \\ &\leq \frac{1}{|\lambda|}| < (A+M)u, \overline{u} >_{H^{-1},H_0^1} | = \frac{1}{|\lambda|}| < v, \overline{u} >_{H^{-1},H_0^1} | \\ &\leq \frac{1}{|\lambda|}\|v\|_{H^{-1}}\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$

où γ est une constante indépendante de λ.

Donc $$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{c}{|\lambda|}\|v\|_{H^{-1}}.$$

Mais comme $\quad |\lambda| \geq Re\lambda > \beta > 0 \Longrightarrow \frac{1}{|\lambda|} \leq \frac{1}{\beta}$ et $\quad u = (A+M)^{-1}v$, on déduit l'inégalité :

$$\|(A+M)^{-1}v\|_{\mathcal{L}([H^{-1}(\Omega)]^n,[H_0^1(\Omega)]^n)} \leq c\|v\|_{H^{-1}}$$

où c est une constante indépendante de λ d'où (I.5.13).

Maintenant pour conclure il suffit de voir que :

(I.5.14) $$\begin{cases} f \text{ est holomorphe sur } \mathbb{C} \\ \|f(\lambda)\|_{H^{-1}} \leq c|f(\lambda)|_{L^2(\Omega)} \leq cPol(|\lambda|) \end{cases}$$

(car f est la transformée de Laplace de $F \in L^2(0,+\infty\,;\,[L^2(\Omega)]^n)$)

et

(I.5.15) $$u = (A+M)^{-1}f.$$

D'où le lemme .

C.Q.F.D.

Lemme I.5.8 : *La distribution $U \in \mathcal{D}'(]0,+\infty[,[H_0^1(\Omega)]^n)$ du lemme I.5.7 est solution de l'équation*

(I.5.16) $$\rho_o\frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = \partial_j\sigma_{ij}(U) - (G*U)_i + F_i \qquad \textit{dans} \qquad \Omega \quad i = 1,...,n.$$

Démonstration :

Il suffit d'écrire : $u = L(U)$, $\lambda u = L(\frac{dU}{dt})$, $\lambda^2 u = L(\frac{d^2U}{dt^2})$, $Mu = L(G)L(U) = L(G * U)$.

On a :

$$\int_\Omega \lambda^2 \rho_o u.\overline{v}dx + \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(u)\varepsilon_{ij}(\overline{v})dx + < Mu, \overline{v} >= \int_\Omega f\overline{v}dx \qquad \forall v \in [H_0^1(\Omega)]^n$$

soit

$$\int_\Omega L(\rho_o \frac{d^2U}{dt^2})v + a(L(U), v) + b(L(\frac{dU}{dt}), v) + < L(G * U), v >=< L(F), v >$$

d'où

$$< L(\rho_o \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} - \partial_j \sigma_{ij}(U) + (G * U)_i - F_i), v >_{H^{-1}, H_0^1} = 0 \qquad \forall v \in [H_0^1(\Omega)]^n.$$

La transformée de Laplace inverse est unique d'où (I.5.16) .

C.Q.F.D.

Lemme I.5.9 :

(I.5.17) $\tilde{U}_\varepsilon \rightharpoonup U^*$ *dans* $L^\infty(0,T\,;\,[H_0^1(\Omega)]^n)$ *faible* $*$ $\forall T > 0$

(I.5.18) $\tilde{u}_\varepsilon \rightharpoonup u^* = L(U^*)$ *dans* $[H_0^1(\Omega)]^n$ *faible pour* $Re\lambda > \beta > 0$.

Démonstration :

Nous avons montré au § I.2

(I.2.2)
$$\begin{cases} V_\varepsilon \text{ est bornée dans } L^\infty(0,+\infty\,;\,[H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^n) \\ V_\varepsilon' \text{ est bornée dans } L^\infty(0,+\infty\,;\,[L^2(\Omega_\varepsilon)]^n) \end{cases}$$

où $V_\varepsilon = e^{-\beta t}U_\varepsilon \quad \beta > 0.$

Donc $\tilde{V}_\varepsilon$ est bornée dans $L^\infty(0,+\infty\,;\,[H_0^1(\Omega)]^n)$.

$$L^\infty(0,+\infty\,;\,[H_0^1(\Omega)]^n) = \Big(L^1(0,+\infty\,;\,[H^{-1}(\Omega)]^n)\Big)'$$

La boule unité de $L^\infty(0,+\infty\,;\,[H_0^1(\Omega)]^n)$ est compacte pour la topologie faible $*$ (cf [9]), donc après extraction d'une sous suite près notée encore $\tilde{V}_\varepsilon$

(I.5.19) $\tilde{V}_\varepsilon \rightharpoonup V^*$ dans $L^\infty(0,+\infty\,;\,[H_0^1(\Omega)]^n)$ faible $*$.

Soit $\omega \in [H^{-1}(\Omega)]^n$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $Re\lambda > 0$. Alors $e^{-\lambda t}\omega \in L^1(0,+\infty\,;\,[H^{-1}(\Omega)]^n)$.

Donc

$$< \tilde{V}_\varepsilon, e^{-\lambda t}\omega >_{L^\infty(0,+\infty\,;\,[H_0^1(\Omega)]^n), L^1(0,+\infty\,;\,[H^{-1}(\Omega)]^n)} \longrightarrow < V^*, e^{-\lambda t}\omega >_{L^\infty(0,+\infty\,;\,[H_0^1(\Omega)]^n), L^1(0,+\infty\,;\,[H^{-1}(\Omega)]^n)},$$

soit

$$\int_0^{+\infty} < \tilde{V}_\varepsilon, e^{-\lambda t}\omega >_{H_0^1, H^{-1}} \longrightarrow \int_0^{+\infty} < V^*, e^{-\lambda t}\omega >_{H_0^1, H^{-1}}$$

$$< \int_0^{+\infty} \tilde{V}_\varepsilon e^{-\lambda t}, \omega >_{H_0^1, H^{-1}} \longrightarrow < \int_0^{+\infty} V^* e^{-\lambda t}, \omega >_{H_0^1, H^{-1}}$$

$$< \tilde{v}_\varepsilon, \omega >_{H_0^1, H^{-1}} \longrightarrow < v*, \omega >_{H_0^1, H^{-1}} \qquad \forall \omega \in [H^{-1}(\Omega)]^n$$

donc

(I.5.20) $\tilde{v}_\varepsilon \rightharpoonup v^*$ dans $[H_0^1(\Omega)]^n$ faible pour $Re\lambda > 0$.

Il en résulte que : $\tilde{u}_\varepsilon \rightharpoonup u^*$ dans $[H_0^1(\Omega)]^n$ faible pour $Re\lambda > \beta$.

où $U^* = e^{\beta t}V^*$ et $u^* = L(U^*)$.

En effet : soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $Re\lambda > \beta$

$$\begin{aligned}\tilde{u}_\varepsilon(\lambda) &= \int_0^{+\infty} \tilde{U}_\varepsilon e^{-\lambda t} \\ &= \int_0^{+\infty} \tilde{V}_\varepsilon e^{-(\lambda-\beta)t} \\ &= \tilde{v}_\varepsilon(\lambda-\beta).\end{aligned}$$

Mais (I.5.20) entraine

$$\tilde{v}_\varepsilon(\lambda-\beta) \rightharpoonup v^*(\lambda-\beta) \quad \text{dans} \quad [H_0^1(\Omega)]^n \quad \text{faible} \quad \text{pour} \quad Re\lambda > \beta$$

d'où (I.5.18).

La convergence (I.5.17) est une conséquence de (I.5.19).

C.Q.F.D.

Remarque I.5.10 : Au cours de la démonstration du lemme I.5.9, nous avons vu que les convergences (I.5.17) et (I.5.18) étaient à une sous-suite près. Au fait grâce au lemme ci-dessous, ce sont toute les suites qui convergent.

Lemme I.5.11 :

La limite de $\tilde{U}_\varepsilon$ lorsque ε tend vers zéro est unique.

Donc $U^* = U$.

Démonstration :

Supposons que U_1 et U_2 soient deux limites de $\tilde{U}_\varepsilon$ lorsque ε tend vers zéro. D'après (I.5.18) $u_1(\lambda)$ et $u_2(\lambda)$ sont deux limites de $\tilde{u}_\varepsilon$ qui satisfont les équations

(I.5.1)
$$\begin{cases} \text{Trouver} \quad u \in [H_0^1(\Omega)]^n \quad \text{tel que :} \\ \lambda^2\rho_o u_i - \partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(u)) + \mu_i.u = f_i \quad \text{dans} \quad \Omega \quad i = 1,...,n\,. \end{cases}$$

Mais (I.5.1) admet une unique solution, alors : $u_1(\lambda) = u_2(\lambda)$ pour $Re\lambda > \beta$.

De la propriété d'unicité de la transformée de Laplace, on déduit que $U_1 = U_2$.

C.Q.F.D.

Lemme I.5.12 :

(I.5.21) $\tilde{U}_\varepsilon \rightharpoonup U$ *dans* $\tilde{W}_c[H_0^1(\Omega)]$ *faible*

(I.5.22) $U(0) = 0\,;\quad U'(0) = 0$ *dans* Ω.

Démonstration :

Des estimations sur U_ε obtenues dans le théorème I.1.2, on déduit que la suite $\left(\tilde{U}_\varepsilon\right)_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $\tilde{W}_c[H_0^1(\Omega)]$

donc

$$\tilde{U}_\varepsilon \rightharpoonup V \quad \text{dans} \quad \tilde{W}_c[H_0^1(\Omega)] \quad \text{faible.}$$

Comme $\tilde{W}_c[H_0^1(\Omega)] \hookrightarrow C^1([0,T],[L^2(\Omega)]^n)$,

en particulier $\tilde{W}_c[H_0^1(\Omega)] \hookrightarrow L^\infty(0,T\,;\,[L^2(\Omega)]^n)$,

donc $\tilde{U}_\varepsilon \rightharpoonup V$ dans $L^\infty(0,T\,;\,[L^2(\Omega)]^n)$ faible

et $\tilde{U}_\varepsilon \rightharpoonup V$ dans $L^\infty(0,T\,;\,[L^2(\Omega)]^n)$ faible $*$.

Mais $\tilde{U}_\varepsilon \rightharpoonup U$ dans $L^\infty(0,T\,;\,[L^2(\Omega)]^n)$ faible $*$.

Donc : $V = U$ car la topologie faible$*$ est séparée. D'où (I.5.21).

Pour vérifier les conditions initiales (I.5.22), on introduit l'application f suivante :

$$f \,:\, C^1([0,T],[L^2(\Omega)]^n) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$V \longmapsto < U(0),V(0) > + < U'(0),V'(0) >$$

où $< .,. >$ est le produit scalaire dans $[L^2(\Omega)]^n$.

Il est facile de voir que f est un élément de $(C^1([0,T],[L^2(\Omega)]^n))'$ par conséquent

$$< f,\tilde{U}_\varepsilon > \longrightarrow < f,U >$$

car

$$\tilde{U}_\varepsilon \rightharpoonup U \text{ dans } C^1([0,T],[L^2(\Omega)]^n) \text{ faible.}$$

$\left(\tilde{W}_c[H_0^1(\Omega)]\right.$ s'injecte continuement dans $C^1([0,T],[L^2(\Omega)]^n)$ et $\tilde{U}_\varepsilon \rightharpoonup U$ dans $\tilde{W}_c[H_0^1(\Omega)]$ faible.$\left.\right)$

Mais $< f,\tilde{U}_\varepsilon > = 0$ et $< f,U >= ||U(0)||^2_{L^2(\Omega)} + ||U'(0)||^2_{L^2(\Omega)}$ d'où le résultat .

C.Q.F.D.

Lemme I.5.13 :

Le système

$$(I.5.9) \qquad \begin{cases} \rho_o \dfrac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = \partial_j \sigma_{ij}(U) - (G * U)_i + F_i & \text{dans } \Omega \quad i = 1,...,n \\ U(x,0) = 0\,; \qquad \dfrac{\partial U}{\partial t}(x,0) = 0 & \text{dans } \Omega \\ U(x,t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

admet une unique solution $U \in \tilde{W}_c[H_0^1(\Omega)]$.

Démonstration :

L'existence est donnée par les lemmes (I.5.7) (I.5.8) (I.5.9) (I.5.11) et (I.5.12).
L'unicité est vérifiée de la même manière qu'au lemme (I.5.11).

C.Q.F.D.

Les lemmes (I.5.7), ... , (I.5.13) démontrent le théorème I.5.3.

•

I.6 . Correcteur pour le déplacement :

Un correcteur pour le déplacement est un terme que l'on additionne à $\tilde{u}_\varepsilon$ pour obtenir une convergence forte vers u.
Nous suivons ici les idées de [2] dans le cas des équations de Stokes.

Avant d'énnoncer le théorème donnant le terme correcteur on démontre le lemme ci-dessous :

Lemme I.6.1 : *Soit* $\phi = (\phi_k)_{k=1}^n \in [\mathfrak{D}(\Omega)]^n$. *On considère la suite* $(\Delta_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ *définie par :*

$$\Delta_\varepsilon = \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\tilde{u}_\varepsilon - W_\varepsilon\phi)\,\varepsilon_{ij}(\overline{\tilde{u}_\varepsilon - W_\varepsilon\phi})dx \tag{I.6.1}$$

où W_ε *est la matrice carrée formée des vecteurs colonnes* $(\omega_k^\varepsilon)_{k=1}^n$, u_ε *est la solution du problème (I.3.3). Alors :*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Delta_\varepsilon = \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(u-\phi)\varepsilon_{ij}(\overline{u-\phi})dx + < M(u-\phi),(\overline{u-\phi}) > \qquad \forall\phi\in[\mathfrak{D}(\Omega)]^n. \tag{I.6.2}$$

Démonstration :

On développe l'expression de Δ_ε . On obtient :

$$\begin{aligned}\Delta_\varepsilon = &\int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\tilde{u}_\varepsilon)\,\varepsilon_{ij}(\overline{\tilde{u}_\varepsilon})dx + \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(W_\varepsilon\phi)\,\varepsilon_{ij}(\overline{W_\varepsilon\phi})dx - \\ &- \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\tilde{u}_\varepsilon)\,\varepsilon_{ij}(\overline{W_\varepsilon\phi})dx - \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(W_\varepsilon\phi)\,\varepsilon_{ij}(\overline{\tilde{u}_\varepsilon})dx.\end{aligned}$$

Nous avons les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij}(W_\varepsilon\phi) &= \varepsilon_{ij}(\phi_k\omega_k^\varepsilon)\\ &= \frac{1}{2}\Big(\partial_i\phi_k(\omega_k^\varepsilon)_j + \partial_j\phi_k(\omega_k^\varepsilon)_i\Big) + \phi_k\varepsilon_{ij}(\omega_k^\varepsilon).\end{aligned}$$

On fait des intégrations par parties. On obtient :

$$\begin{aligned}\int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(W_\varepsilon\phi)\,\varepsilon_{ij}(\overline{W_\varepsilon\phi})dx = &\int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_p^\varepsilon)\,\varepsilon_{ij}(\overline{\omega_k^\varepsilon})\phi_p\overline{\phi_k}dx + \\ &+ \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_p^\varepsilon)\Big[\frac{1}{2}(\partial_i\overline{\phi_k}(\overline{\omega_k^\varepsilon})_j + \partial_j\overline{\phi_k}(\overline{\omega_k^\varepsilon})_i)\Big]\phi_p dx + \\ &+ \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{ij}(\overline{\omega_k^\varepsilon})\Big[\frac{1}{2}(\partial_l\phi_p(\omega_p^\varepsilon)_h + \partial_h\phi_p(\omega_p^\varepsilon)_l)\Big]\overline{\phi_k}dx + \\ &+ \frac{1}{4}\int_\Omega a_{ijlh}\Big(\partial_l\phi_p(\omega_p^\varepsilon)_h + \partial_h\phi_p(\omega_p^\varepsilon)_l\Big)\Big(\partial_i\overline{\phi_k}(\overline{\omega_k^\varepsilon})_j + \partial_j\overline{\phi_k}(\overline{\omega_k^\varepsilon})_i\Big)dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\tilde{u}_\varepsilon)\,\varepsilon_{ij}(\overline{W_\varepsilon\phi})dx = &< -\partial_l(a_{ijlh}\varepsilon_{ij}(\overline{\omega_k^\varepsilon})),\overline{\phi_k}(\tilde{u}_\varepsilon)_h > - \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{ij}(\overline{\omega_k^\varepsilon})\partial_l\overline{\phi_k}(\tilde{u}_\varepsilon)_h + \\ &+ \frac{1}{2}\int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\tilde{u}_\varepsilon)\Big(\partial_i\overline{\phi_k}(\overline{\omega_k^\varepsilon})_j + \partial_j\overline{\phi_k}(\overline{\omega_k^\varepsilon})_i\Big)dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(W_\varepsilon\phi)\,\varepsilon_{ij}(\overline{\tilde{u}_\varepsilon})dx = &< -\partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)),(\overline{\tilde{u}_\varepsilon})_i\phi_k > - \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)\partial_j\phi_k(\overline{\tilde{u}_\varepsilon})_i + \\ &+ \frac{1}{2}\int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\overline{\tilde{u}_\varepsilon})\Big(\partial_i\phi_k(\omega_k^\varepsilon)_j + \partial_j\phi_k(\omega_k^\varepsilon)_i\Big)dx.\end{aligned}$$

L'expression de Δ_ε devient :

$$\begin{aligned}\Delta_\varepsilon = &\int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\tilde{u}_\varepsilon)\,\varepsilon_{ij}(\overline{\tilde{u}_\varepsilon})dx + \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_p^\varepsilon)\,\varepsilon_{ij}(\overline{\omega_k^\varepsilon})\phi_p\overline{\phi_k}dx + \\ &+ \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_p^\varepsilon)\left[\frac{1}{2}(\,\partial_i\overline{\phi_k}(\overline{\omega_k^\varepsilon})_j + \partial_j\overline{\phi_k}(\overline{\omega_k^\varepsilon})_i\,)\right]\phi_p dx + \\ &+ \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{ij}(\overline{\omega_k^\varepsilon})\left[\frac{1}{2}(\,\partial_l\phi_p(\omega_p^\varepsilon)_h + \partial_h\phi_p(\omega_p^\varepsilon)_l\,)\right]\overline{\phi_k}dx + \\ &+ \frac{1}{4}\int_\Omega a_{ijlh}\Big(\partial_l\phi_p(\omega_p^\varepsilon)_h + \partial_h\phi_p(\omega_p^\varepsilon)_l\Big)\Big(\partial_i\overline{\phi_k}(\overline{\omega_k^\varepsilon})_j + \partial_j\overline{\phi_k}(\overline{\omega_k^\varepsilon})_i\Big)dx - \\ &- < -\partial_l(a_{ijlh}\varepsilon_{ij}(\overline{\omega_k^\varepsilon})), \overline{\phi_k}(\tilde{u}_\varepsilon)_h > + \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{ij}(\overline{\omega_k^\varepsilon})\partial_l\overline{\phi_k}(\tilde{u}_\varepsilon)_h dx - \\ &- \frac{1}{2}\int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\overline{\tilde{u}_\varepsilon})\Big(\partial_i\overline{\phi_k}(\overline{\omega_k^\varepsilon})_j + \partial_j\overline{\phi_k}(\overline{\omega_k^\varepsilon})_i\Big)dx - \\ &- < -\partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)), (\overline{\tilde{u}_\varepsilon})_i\phi_k > + \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)\partial_j\phi_k(\overline{\tilde{u}_\varepsilon})_i dx - \\ &- \frac{1}{2}\int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\overline{\tilde{u}_\varepsilon})\Big(\partial_i\phi_k(\omega_k^\varepsilon)_j + \partial_j\phi_k(\omega_k^\varepsilon)_i\Big)dx.\end{aligned}$$

Maintenant, on passe à la limite dans chacun des termes de l'expression de Δ_ε et dans le même ordre.

i) D'après (I.3.1), on a :

$$\int_\Omega \lambda^2\rho_o|\tilde{u}_\varepsilon|^2dx + \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\tilde{u}_\varepsilon)\varepsilon_{ij}(\overline{\tilde{u}_\varepsilon})dx = \int_\Omega f\overline{\tilde{u}_\varepsilon}dx \longrightarrow \int_\Omega f\overline{u}dx.$$

D'après (I.5.5)

$$\int_\Omega f\overline{u}dx = \int_\Omega \lambda^2\rho_o|u|^2dx + \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(u)\varepsilon_{ij}(\overline{u})dx + < Mu, \overline{u} >$$

comme $\qquad \tilde{u}_\varepsilon \longrightarrow u \qquad$ dans $\quad [L^2(\Omega)]^n \quad$ fort

alors $\qquad \displaystyle\int_\Omega \lambda^2\rho_o|\tilde{u}_\varepsilon|^2dx \longrightarrow \int_\Omega \lambda^2\rho_o|u|^2dx.$

D'où

$$\int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\tilde{u}_\varepsilon)\varepsilon_{ij}(\overline{\tilde{u}_\varepsilon})dx \longrightarrow \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(u)\varepsilon_{ij}(\overline{u})dx + < Mu, \overline{u} > . \qquad (1)$$

ii) Nous avons établis dans la démonstration de la proposition I.4.3 :

$$\int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_p^\varepsilon)\,\varepsilon_{ij}(\overline{\omega_k^\varepsilon})\phi_p\overline{\phi_k}dx \longrightarrow < M\phi, \overline{\phi} >_{H^{-1},H_0^1} . \qquad (2)$$

iii) L'hypothèse (H3) et le théorème de Rellich entraînent :

$$\int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_p^\varepsilon)\left[\frac{1}{2}(\,\partial_i\overline{\phi_k}(\overline{\omega_k^\varepsilon})_j + \partial_j\overline{\phi_k}(\overline{\omega_k^\varepsilon})_i\,)\right]\phi_p dx \longrightarrow 0 \qquad (3)$$

$$\int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{ij}(\overline{\omega_k^\varepsilon})\left[\frac{1}{2}(\,\partial_l\phi_p(\omega_p^\varepsilon)_h + \partial_h\phi_p(\omega_p^\varepsilon)_l\,)\right]\overline{\phi_k}dx \longrightarrow 0 \qquad (4)$$

$$\frac{1}{4}\int_\Omega a_{ijlh}\Big(\partial_l\phi_p(\omega_p^\varepsilon)_h + \partial_h\phi_p(\omega_p^\varepsilon)_l\Big)\Big(\partial_i\overline{\phi_k}(\overline{\omega_k^\varepsilon})_j + \partial_j\overline{\phi_k}(\overline{\omega_k^\varepsilon})_i\Big)dx \longrightarrow \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\phi)\varepsilon_{ij}(\overline{\phi})dx. \qquad (5)$$

iv) On a aussi :

$$< -\partial_l(a_{ijlh}\varepsilon_{ij}(\overline{\omega_k^\varepsilon})), \overline{\phi_k}(\tilde{u}_\varepsilon)_h > \longrightarrow < \mu_k, u\overline{\phi_k} > = < Mu, \overline{\phi} >, \tag{6}$$

en effet dans (I.3.1), on prend $v = \overline{\varphi}\omega_k^\varepsilon \quad \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ alors :

$$\int_\Omega \lambda^2 \rho_o \tilde{u}_\varepsilon \varphi \overline{\omega_k^\varepsilon} dx + \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\tilde{u}_\varepsilon)\varepsilon_{ij}(\varphi\overline{\omega_k^\varepsilon})dx = \int_\Omega f\varphi\overline{\omega_k^\varepsilon}dx$$

soit après intégration par parties :

$$\int_\Omega \lambda^2 \rho_o \tilde{u}_\varepsilon \varphi \overline{\omega_k^\varepsilon} dx + \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\tilde{u}_\varepsilon)\frac{1}{2}[\partial_i\varphi(\overline{\omega_k^\varepsilon})_j + \partial_j\varphi(\overline{\omega_k^\varepsilon})_i] + < -\partial_h(a_{ijlh}\varepsilon_{ij}(\overline{\omega_k^\varepsilon})), \varphi(\tilde{u}_\varepsilon)_l >_{H^{-1},H_0^1} -$$

$$- \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{ij}(\overline{\omega_k^\varepsilon})\partial_h\varphi(\tilde{u}_\varepsilon)_l = \int_\Omega f\varphi\overline{\omega_k^\varepsilon}dx$$

à la limite, on obtient :

$$\int_\Omega \lambda^2\rho_o u.e_k\varphi + \int_\Omega a_{kjlh}\varepsilon_{lh}(u)\partial_j\varphi + \lim_{\varepsilon\to 0} < -\partial_h(a_{ijlh}\varepsilon_{ij}(\overline{\omega_k^\varepsilon})), \varphi(\tilde{u}_\varepsilon)_l >_{H^{-1},H_0^1} = \int_\Omega f\varphi e_k$$

or

$$\int_\Omega f\varphi e_k = \int_\Omega \lambda^2\rho_o u.e_k\varphi + \int_\Omega a_{kjlh}\varepsilon_{lh}(u)\partial_j\varphi + < \mu_k, \varphi u >_{H^{-1},H_0^1}$$

d'où

$$< -\partial_l(a_{ijlh}\varepsilon_{ij}(\overline{\omega_k^\varepsilon})), \varphi(\tilde{u}_\varepsilon)_h > \longrightarrow < \mu_k, u\varphi > .$$

v) Par des arguments analogues aux précédents, on a les limites suivantes :

$$\int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{ij}(\overline{\omega_k^\varepsilon})\partial_l\overline{\phi_k}(\tilde{u}_\varepsilon)_h dx \longrightarrow 0 \tag{7}$$

$$\frac{1}{2}\int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\tilde{u}_\varepsilon)\Big(\partial_i\overline{\phi_k}(\overline{\omega_k^\varepsilon})_j + \partial_j\overline{\phi_k}(\overline{\omega_k^\varepsilon})_i\Big)dx \longrightarrow \int_\Omega a_{kjlh}\varepsilon_{lh}(u)\varepsilon_{ij}(\overline{\phi}) \tag{8}$$

$$< -\partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)), (\overline{\tilde{u}_\varepsilon})_i\phi_k > \longrightarrow < \mu_k, \overline{u}\phi_k > = < M\overline{u}, \phi > \tag{9}$$

$$\int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)\partial_j\phi_k(\overline{\tilde{u}_\varepsilon})_i dx \longrightarrow 0 \tag{10}$$

$$\frac{1}{2}\int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\overline{\tilde{u}_\varepsilon})\Big(\partial_i\phi_k(\omega_k^\varepsilon)_j + \partial_j\phi_k(\omega_k^\varepsilon)_i\Big)dx \longrightarrow \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\overline{u})\varepsilon_{ij}(\phi). \tag{11}$$

De (1) à (11), on déduit que :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Delta_\varepsilon = \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(u)\varepsilon_{ij}(\overline{u})dx + < Mu, \overline{u} > + < M\phi, \overline{\phi} > + \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\phi)\varepsilon_{ij}(\overline{\phi})dx -$$

$$- < Mu, \overline{\phi} > - \int_\Omega a_{kjlh}\varepsilon_{lh}(u)\varepsilon_{ij}(\overline{\phi}) - < M\overline{u}, \phi > - \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\overline{u})\varepsilon_{ij}(\phi).$$

Comme M est symétrique on déduit (I.6.2).

C.Q.F.D.

Théorème I.6.2 :

On se place sous les hypothèses (H1) à (H5). Le déplacement u_ε du problème (I.3.3) vérifie :

$$\tilde{u}_\varepsilon = W_\varepsilon u + r_\varepsilon \tag{I.6.3}$$

où W_ε est la matrice carrée formée des vecteurs colonnes $(\omega_k^\xi)_{k=1}^n$, u est la solution du problème homogénéisé (I.5.1) et r_ε est tel que :

$$r_\varepsilon \longrightarrow 0 \quad \text{dans} \quad [W_0^{1,q}(\Omega)]^n \quad \text{fort} \tag{I.6.4}$$

avec $q = \dfrac{n}{n-1}$ si $n \geq 3$ et $1 \leq q < 2$ si $n = 2$.

Démonstration :

Pour démontrer le théorème, nous allons reprendre ce qui a été fait par Allaire (cf [2]) pour notre cas.

Soit $\xi > 0$, $u \in [H_0^1(\Omega)]^n = \overline{[\mathfrak{D}(\Omega)]^n}$ alors $\exists \phi_\xi \in [\mathfrak{D}(\Omega)]^n$ tel que :

$$\|u - \phi_\xi\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \xi.$$

D'après (I.6.2)

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\tilde{u}_\varepsilon - W_\varepsilon\phi_\xi)\,\varepsilon_{ij}(\overline{\tilde{u}_\varepsilon - W_\varepsilon\phi_\xi})dx = \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(u-\phi_\xi)\varepsilon_{ij}(\overline{u-\phi_\xi})dx + < M(u-\phi_\xi), (\overline{u-\phi_\xi}) >$$

Comme : $$Re \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\tilde{u}_\varepsilon - W_\varepsilon\phi_\xi)\,\varepsilon_{ij}(\overline{\tilde{u}_\varepsilon - W_\varepsilon\phi_\xi})dx \geq \beta^* |\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon - W_\varepsilon\phi_\xi)|^2_{L^2(\Omega)}$$

et $$\tilde{u}_\varepsilon - W_\varepsilon\phi_\xi \in [H_0^1(\Omega)]^n$$

alors d'après les inégalités de Korn et de Poincaré on a :

$$|\nabla(\tilde{u}_\varepsilon - W_\varepsilon\phi_\xi)|^2_{L^2(\Omega)} \leq c\, Re \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\tilde{u}_\varepsilon - W_\varepsilon\phi_\xi)\,\varepsilon_{ij}(\overline{\tilde{u}_\varepsilon - W_\varepsilon\phi_\xi})dx$$

où c est une constante indépendante de ξ et de ε. Donc

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0} |\nabla(\tilde{u}_\varepsilon - W_\varepsilon\phi_\xi)|^2_{L^2(\Omega)} &\leq c \lim_{\varepsilon\to 0} Re \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\tilde{u}_\varepsilon - W_\varepsilon\phi_\xi)\,\varepsilon_{ij}(\overline{\tilde{u}_\varepsilon - W_\varepsilon\phi_\xi})dx \\
&= c\, Re\Big[\int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(u-\phi_\xi)\varepsilon_{ij}(\overline{u-\phi_\xi})dx + < M(u-\phi_\xi), (\overline{u-\phi_\xi}) >\Big] \\
&\leq c\left(|\varepsilon(u-\phi_\xi)|^2_{L^2(\Omega)} + \|M\|_{W^{-1,\infty}(\Omega)}\||u-\phi_\xi|^2\|_{W_0^{1,1}(\Omega)}\right).
\end{aligned}$$

Il est facile de voir que :

$$\begin{aligned}
\||u-\phi_\xi|^2\|_{W_0^{1,1}(\Omega)} &= \int_\Omega |\nabla(|u-\phi_\xi|^2)| \\
&= \int_\Omega |\nabla(u-\phi_\xi).(\overline{u-\phi_\xi}) + (u-\phi_\xi).\nabla(\overline{u-\phi_\xi})| \\
&\leq 2\,|u-\phi_\xi|_{L^2(\Omega)}|\nabla(u-\phi_\xi)|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq 2c|\nabla(u-\phi_\xi)|^2_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

où c est la constante de Poincaré,

donc

$$\lim_{\varepsilon\to 0}|\nabla(\tilde{u}_\varepsilon - W_\varepsilon\phi_\xi)|^2_{L^2(\Omega)} \le c\left(1+2c\|M\|_{W^{-1,\infty}(\Omega)}\right)\|u-\phi_\xi\|^2_{H^1_0(\Omega)}$$
$$\le c\xi^2$$

par conséquent :

il existe $\varepsilon_0(\xi)>0$ tel que $\varepsilon<\varepsilon_0$ on a : $\|\tilde{u}_\varepsilon - W_\varepsilon\phi_\xi\|_{H^1_0(\Omega)} \le c\xi$.

Maintenant, on écrit : $\tilde{u}_\varepsilon - W_\varepsilon u = \tilde{u}_\varepsilon - W_\varepsilon\phi_\xi + W_\varepsilon(\phi_\xi - u)$.

Soit $q \le 2$, on a :

$$|\tilde{u}_\varepsilon - W_\varepsilon u|_{W^{1,q}_0(\Omega)} \le |\tilde{u}_\varepsilon - W_\varepsilon\phi_\xi|_{W^{1,q}_0(\Omega)} + |W_\varepsilon(\phi_\xi - u)|_{W^{1,q}_0(\Omega)}.$$

On a : $H^1_0(\Omega) \hookrightarrow W^{1,q}_0(\Omega) \qquad \forall q \le 2$

alors

$$|\tilde{u}_\varepsilon - W_\varepsilon u|_{W^{1,q}_0(\Omega)} \le c\|\tilde{u}_\varepsilon - W_\varepsilon\phi_\xi\|_{H^1_0(\Omega)} + |W_\varepsilon(\phi_\xi - u)|_{W^{1,q}_0(\Omega)}$$
$$\le \quad c\xi \quad + |W_\varepsilon(\phi_\xi - u)|_{W^{1,q}_0(\Omega)}$$

Pour avoir le théorème il suffit de majorer $|W_\varepsilon(\phi_\xi - u)|_{W^{1,q}_0(\Omega)}$ par $c\xi$.

Estimation de $|W_\varepsilon(\phi_\xi - u)|_{W^{1,q}_0(\Omega)}$:

Si $n \ge 3$: $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2n/n-2}(\Omega)$ avec injection continue,

donc $|W_\varepsilon(\phi_\xi - u)|_{W^{1,q}_0(\Omega)} = |\nabla(W_\varepsilon(\phi_\xi - u))|_{L^q(\Omega)}$

$$= |\nabla W_\varepsilon.(\phi_\xi - u) + W_\varepsilon.\nabla(\phi_\xi - u)|_{L^q(\Omega)}$$

$$\le |\nabla W_\varepsilon.(\phi_\xi - u)|_{L^q(\Omega)} + |W_\varepsilon.\nabla(\phi_\xi - u)|_{L^q(\Omega)}$$

$$\le |\nabla W_\varepsilon|_{L^2(\Omega)}|\phi_\xi - u|_{L^{2n/n-2}(\Omega)} + |W_\varepsilon|_{L^{2n/n-2}(\Omega)}|\nabla(\phi_\xi - u)|_{L^2(\Omega)}$$

avec $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\frac{2n}{n-2}} = \dfrac{n-1}{n} \quad \Longrightarrow \quad q = \dfrac{n}{n-1}$

alors $|W_\varepsilon(\phi_\xi - u)|_{W^{1,q}_0(\Omega)} \le c\left(\|\phi_\xi - u\|_{H^1_0(\Omega)} + |W_\varepsilon|_{H^1(\Omega)}\|\phi_\xi - u\|_{H^1_0(\Omega)}\right)$

$$\le c\xi$$

Si n = 2 : $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ $\forall p$ fini avec inclusion continue .

$$|W_\varepsilon(\phi_\xi - u)|_{W_0^{1,q}(\Omega)} \leq |\nabla W_\varepsilon.(\phi_\xi - u)|_{L^q(\Omega)} + |W_\varepsilon.\nabla(\phi_\xi - u)|_{L^q(\Omega)}$$

$$\leq |\nabla W_\varepsilon|_{L^2(\Omega)}|\phi_\xi - u|_{L^p(\Omega)} + |W_\varepsilon|_{L^p(\Omega)}|\nabla(\phi_\xi - u)|_{L^2(\Omega)}$$

avec $\frac{1}{q} = \frac{1}{2} + \frac{1}{p}$ p fini $\Longrightarrow$ $q < 2$

par conséquent $|W_\varepsilon(\phi_\xi - u)|_{W_0^{1,q}(\Omega)} \leq c\xi.$

Nous avons donc montré que :

$$\forall \xi > 0, \quad \exists \varepsilon_0 > 0 \text{ tel que } \varepsilon < \varepsilon_0 \Longrightarrow |\tilde{u}_\varepsilon - W_\varepsilon u|_{W_0^{1,q}(\Omega)} \leq c\xi$$

avec $\begin{cases} q = \dfrac{n}{n-1} & \text{si } n \geq 3 \\ 1 \leq q < 2 & \text{si } n = 2 \end{cases}$

c'est à dire $r_\varepsilon \longrightarrow 0$ dans $[W_0^{1,q}(\Omega)]^n$ fort.

C.Q.F.D.

Remarque I.6.3 : On peut vérifier (cf [2]) que si on ajoute aux hypothèses du théorème I.6.1 la condition (de régularité pour u) suivante :

(I.6.5) $\begin{cases} u \in [W_0^{1,n}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)]^n \text{ si } & n \geq 3 \\ u \in [W_0^{1,2+\theta}(\Omega)]^2 \text{ si } & n = 2 \text{ et } \theta > 0 \end{cases}$

alors $r_\varepsilon \longrightarrow 0$ dans $[H_0^1(\Omega)]^n$ fort.

Remarque I.6.4 :

Le terme correcteur du déplacement est $(Id - W_\varepsilon)u$ car :

$$(\tilde{u}_\varepsilon - u) \longrightarrow 0 \quad \text{dans} \quad [H_0^1(\Omega)]^n \quad \text{faible}$$

et

$$[\tilde{u}_\varepsilon - u + (Id - W_\varepsilon)u] \longrightarrow 0 \quad \text{dans} \quad [W_0^{1,q}(\Omega)]^n \quad \text{fort.}$$

I.7 . Estimation d'erreur :

Dans ce paragraphe, on va obtenir une majoration de $\|r_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)}$. Elle ne nous donnera que peu de renseignement vu sa forme abstraite mais lorsqu'on explicitera les fonctions $\omega_k^\varepsilon, \mu_k$ qui vérifient (H1) - (H5), on verra qu'elle est de l'ordre de $\varepsilon^{\alpha(n)}$ où $\alpha(n)$ est une fonction de n (dimension de l'espace).

On suppose que la solution du problème homogénéisé (I.5.1) est suffisament régulière, ici $u \in [W^{2,\infty}(\Omega)]^n$ et on suppose que l'hypothèse (H5)' est vérifiée c'est à dire :

$$\text{(H5)}' \quad \begin{cases} -\partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)) = \mu_{k,i}^\varepsilon - \gamma_{k,i}^\varepsilon & \text{dans } \Omega \\ \text{avec} \quad \mu_k^\varepsilon \longrightarrow \mu_k & \text{dans } [H^{-1}(\Omega)]^n \text{ fort} \\ \text{et} \quad \gamma_k^\varepsilon \longrightarrow \mu_k & \text{dans } [H^{-1}(\Omega)]^n \text{ faible} \\ \text{et} \quad \gamma_k^\varepsilon = 0 & \text{dans } [H^{-1}(\Omega_\varepsilon)]^n. \end{cases}$$

On adapte ici le travail de [2] .

Proposition I.7.1 :

On se place sous les hypothèses (H1) - (H5)'. On suppose que la solution u de (I.5.1) vérifie :

$$u \in [W^{2,\infty}(\Omega)]^n. \tag{I.7.1}$$

Soit $r_\varepsilon = \tilde{u}_\varepsilon - W_\varepsilon u.$

On a :

$$|\nabla r_\varepsilon|_{L^2(\Omega)} \leq c\|u\|_{W^{2,\infty}(\Omega)} (\, |Id - W_\varepsilon|_{L^2(\Omega)} + \|M_\varepsilon - M\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|\nabla W_\varepsilon\|_{H^{-1}(\Omega)} \,) \tag{I.7.2}$$

où c ne dépend que de Ω et pas de ε, ni de u et M_ε est la matrice formée des vecteurs colonnes $(\mu_k^\varepsilon)_{k=1}^n$.

Démonstration :

Posons $\lambda_\varepsilon^i = -\partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(r_\varepsilon)).$

On va calculer de 2 façons différentes le produit de dualité $< \lambda_\varepsilon, \overline{r}_\varepsilon >_{H^{-1},H_0^1(\Omega)}$.
Tout d'abord on a :

$$< \lambda_\varepsilon, \overline{r}_\varepsilon >= \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(r_\varepsilon)\,\varepsilon_{ij}(\overline{r}_\varepsilon)\,dx. \tag{I.7.3}$$

D'autre part, on développe λ_ε :

$$\lambda_\varepsilon^i = -\partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\tilde{u}_\varepsilon)) + \partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon))u_k + a_{ijlh}\partial_j u_k \varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon) \tag{I.7.4}$$
$$+\partial_j(a_{ijlh}\partial_l u_k(\omega_k^\varepsilon - e_k)_h) + \partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(u)).$$

Or $$(H5)' \Longrightarrow -\partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)) = \mu_{k,i}^\varepsilon - \gamma_{k,i}^\varepsilon \quad \text{dans } \Omega$$

$$(\text{I.5.1}) \Longrightarrow \lambda^2\rho_o u_i - \partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(u)) + \mu_i.u = f_i \quad \text{dans } \Omega$$

et si on définit $\eta^\varepsilon \in [H^{-1}(\Omega)]^n$ par

$$\eta_i^\varepsilon = \lambda^2\rho_o\tilde{u}_{\varepsilon i} - \partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\tilde{u}_\varepsilon)) - f_i \tag{I.7.5}$$

alors $< \eta^\varepsilon, v >= 0 \quad \forall v \in [H_0^1(\Omega)]^n$ tel que $v = 0$ sur les T_ν^ε,

et l'égalité (I.7.4) devient :

$$\lambda_\varepsilon^i = \lambda^2 \rho_o (u_i - \tilde{u}_{\varepsilon i}) + (\mu_i - \mu_i^\varepsilon) u + \gamma_{k,i}^\varepsilon u_k + a_{ijlh} \partial_j u_k \varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon) + \partial_j (a_{ijlh} \partial_l u_k (\omega_k^\varepsilon - e_k)_h) + \eta_i^\varepsilon . \tag{I.7.6}$$

On calcule le produit de dualité, on obtient :

$$< \lambda_\varepsilon, \overline{r}_\varepsilon > + \lambda^2 \rho_o \int_\Omega |r_\varepsilon|^2 = \int_\Omega (Id - W_\varepsilon) u \overline{r}_\varepsilon + < (M - M_\varepsilon) u, \overline{r}_\varepsilon > + \tag{I.7.7}$$

$$+ \int_\Omega a_{ijlh} \varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon) \partial_j u_k \overline{r}_i^\varepsilon - \int_\Omega a_{ijlh} \partial_l u_k (\omega_k^\varepsilon - e_k)_h \partial_j \overline{r}_i^\varepsilon \, dx.$$

De (I.7.7) on tire la majoration suivante :

$$Re\Big(\frac{1}{\lambda} < \lambda_\varepsilon, \overline{r}_\varepsilon >\Big) + \beta \rho_o \int_\Omega |r_\varepsilon|^2 \le c(\lambda) \Big(|Id - W_\varepsilon|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^\infty(\Omega)} |r_\varepsilon|_{L^2(\Omega)} + \tag{I.7.8}$$

$$+ \|M - M_\varepsilon\|_{H^{-1}(\Omega)} \|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \|r_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} + \|\nabla W_\varepsilon\|_{H^{-1}(\Omega)} \|\nabla u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} |r_\varepsilon|_{L^2(\Omega)} +$$

$$+ |Id - W_\varepsilon|_{L^2(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)} |\nabla r_\varepsilon|_{L^2(\Omega)} \Big)$$

avec $c(\lambda)$ une constante dépendant du module de λ.

Grâce à l'inégalité de Poincaré on a :

$$|r_\varepsilon|_{L^2(\Omega)} \le c \|r_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)}. \tag{I.7.9}$$

L'inégalité (I.7.8) devient alors :

$$Re\Big(\frac{1}{\lambda} < \lambda_\varepsilon, \overline{r}_\varepsilon >\Big) + \beta \rho_o \int_\Omega |r_\varepsilon|^2 \le c(\lambda) \|u\|_{W^{2,\infty}(\Omega)} \Big(|Id - W_\varepsilon|_{L^2(\Omega)} + \tag{I.7.10}$$

$$+ \|M - M_\varepsilon\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|\nabla W_\varepsilon\|_{H^{-1}(\Omega)} \Big) \|r_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Mais grâce à (I.7.3), (I.3.4) et à l'inégalité de Korn, nous avons :

$$Re\Big(\frac{1}{\lambda} < \lambda_\varepsilon, \overline{r}_\varepsilon >\Big) = Re \int_\Omega \frac{a_{ijlh}}{\lambda} \varepsilon_{lh}(r_\varepsilon) \, \varepsilon_{ij}(\overline{r}_\varepsilon) \, dx \ge \alpha^* \|\varepsilon(r_\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)}^2 \ge c \|r_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)}^2. \tag{I.7.11}$$

D'où le résultat annoncé.

C.Q.F.D.

II - CAS DES PETITS TROUS PÉRIODIQUEMENT RÉPARTIS EN VOLUME.

Dans cette partie, nous allons appliquer les résultats du cadre abstrait de la première partie à un cas concret, celui des petits trous périodiquement répartis en volume. On donnera dans un premier temps une déscription géomètrique de cette répartition des trous puis nous vérifierons les hypothèses (H1) à (H6), ce qui donnera un sens à la première partie.

II.1 . Déscription de la géomètrie considérée :

Nous reprenons ici la déscription donnée par [2].

Soit Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$), de classe C^1 par morceaux.
Soit B_1 la boule ouverte de centre l'origine et de rayon 1. On recouvre Ω d'un maillage régulier de pas 2ε dans la direction de chacun des axes de $\mathbb{R}^n$. Chaque cellule du maillage est un cube P_ν^ε identique, à une translation près, à $(-\varepsilon, +\varepsilon)^n$ (voir figure 1). Au centre de chaque P_ν^ε inclus dans Ω, est centré un trou T_ν^ε, l'homothétique de rapport a_ε à un fermé T. On suppose que

(II.1.1)
$$\begin{cases} . \ T \text{ est strictement inclus dans la boule unité } B_1 \\ . \ B_1 \setminus T \text{ est un ouvert connexe de frontière } C^1 \text{ par morceaux.} \end{cases}$$

La taille a_ε est donnée par :

(II.1.2)
$$a_\varepsilon = \begin{cases} C_o \varepsilon^{\frac{n}{n-2}} & \text{pour} \quad n \geq 3 \\ e^{-\frac{C_o}{\varepsilon^2}} & \text{pour} \quad n = 2 \quad \text{avec } C_o > 0. \end{cases}$$

Une simple considération géomètrique nous donne le nombre de trous, soit :

$$n(\varepsilon) = \frac{|\Omega|}{(2\varepsilon)^n}[1 + o(1)]$$

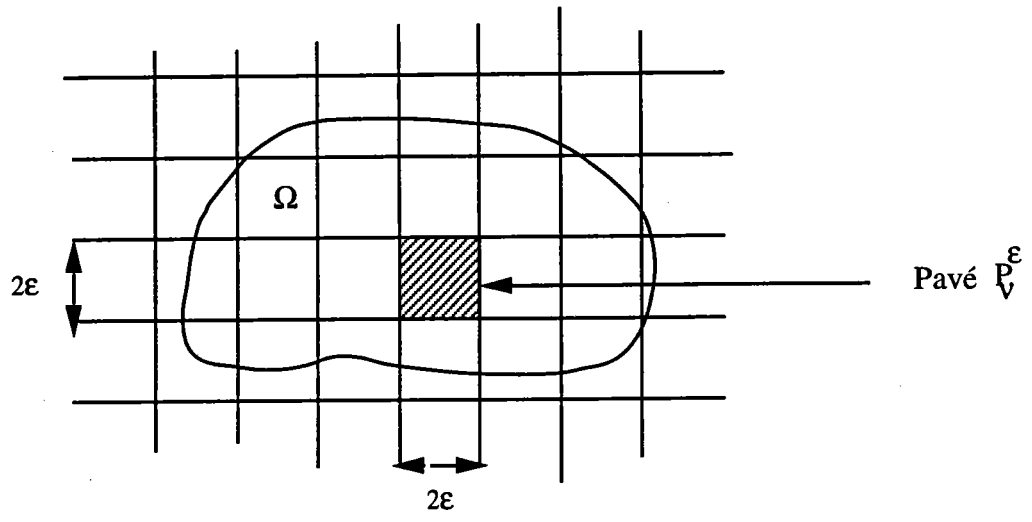
où $|\Omega|$ est la mesure de Ω.

L'ouvert Ω_ε (voir figure 2) est obtenu en otant de l'ouvert Ω les trous T_ν^ε.

(II.1.3)
$$\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \cup_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} T_\nu^\varepsilon.$$

Remarque II.1.1 : La taille a_ε est la taille critique des trous, trouvée pour le cas du Laplacien (cf [12]). Ce sera aussi une taille critique pour notre cas. On verra dans la partie IV que suivant que la taille des trous est plus grande ou plus petite le comportement limite du fluide est différent.

Remarque II.1.2 : L'hypothèse (II.1.1) vérifiée par le trou T fait que Ω_ε est un ouvert borné connexe de frontière C^1 par morceaux. L'hypothèse du cadre abstrait pour l'ouvert Ω_ε est donc vérifiée.



maillage

figure 1

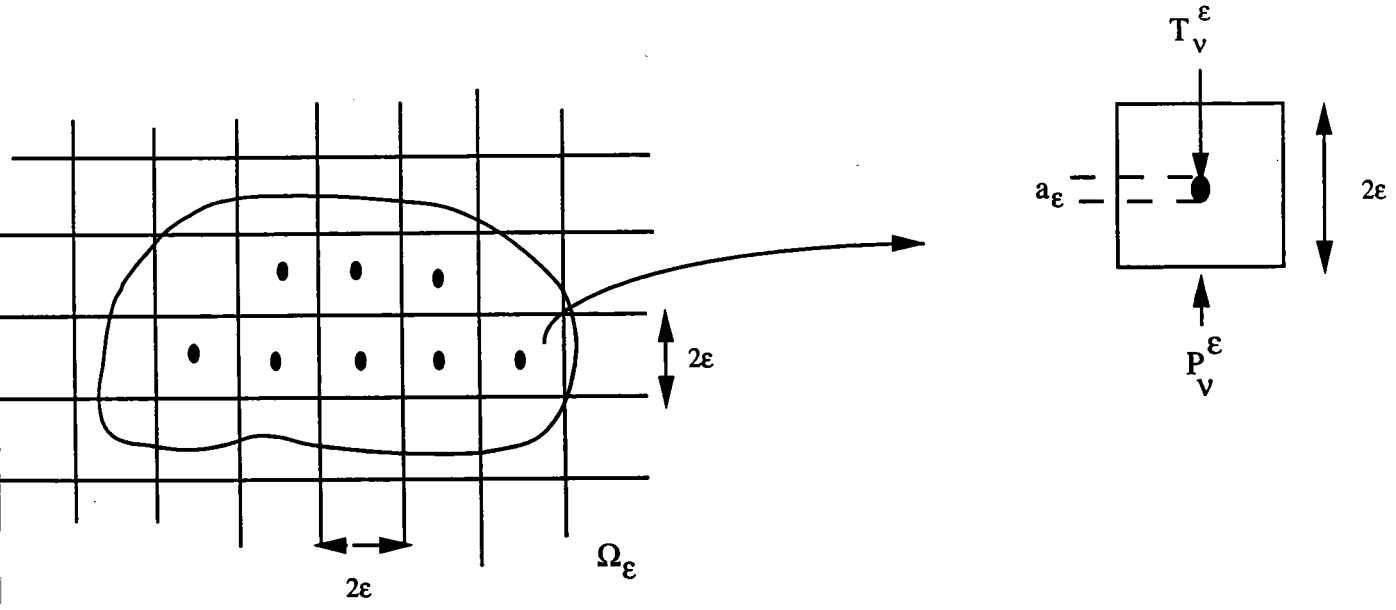


figure 2

II.2 . Vérification des hypothèses (H1) à (H5) dans le cas des trous sphériques :

Nous allons construire et calculer de façon explicite des fonctions $(\omega_k^\varepsilon, \mu_k)_{1\le k\le n}$ qui vérifient les hypothèses (H1) à (H6) lorsque les trous $(T_\nu^\varepsilon)_{\nu=1}^{n(\varepsilon)}$ sont sphériques. Nous traitons ce cas avant le cas des trous de forme quelconque car c'est plus simple et d'autre part cela nous permettra de vérifier l'optimalité de certaines conditions.

Pour tout pavé P_ν^ε entièrement inclus dans Ω, on définit l'ouvert C_ν^ε par :

(II.2.1) $$C_\nu^\varepsilon = B_\nu^\varepsilon \setminus T_\nu^\varepsilon$$

où B_ν^ε est la boule de rayon ε centrée au centre de P_ν^ε.

On définit également l'ouvert K_ν^ε comme étant le complèmentaire de $T_\nu^\varepsilon \cup C_\nu^\varepsilon$ dans P_ν^ε (voir figure 3).

On a

(II.2.2) $$\overline{P_\nu^\varepsilon} = \overline{T_\nu^\varepsilon} \cup \overline{C_\nu^\varepsilon} \cup \overline{K_\nu^\varepsilon}.$$

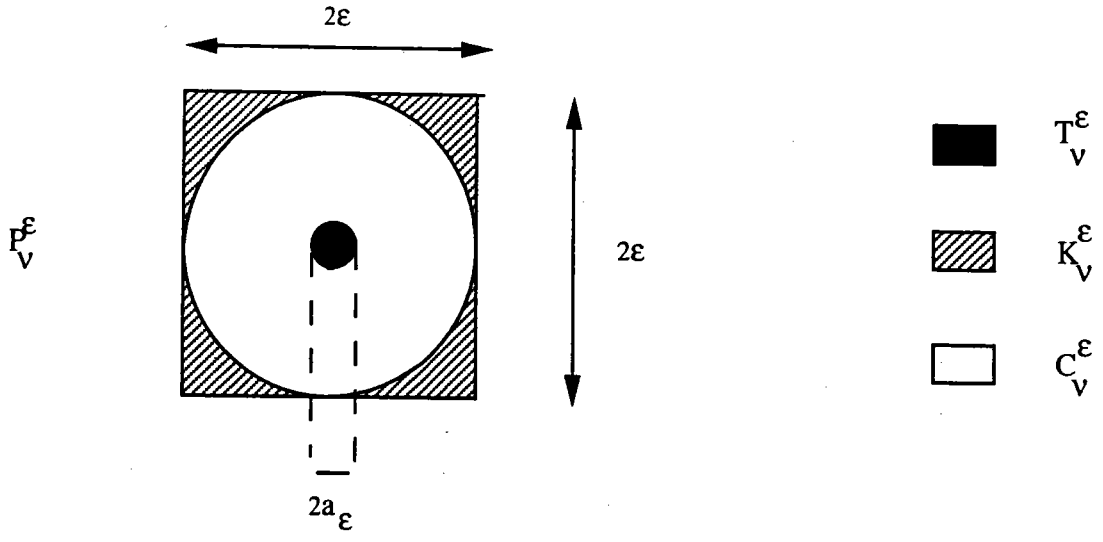


figure 3

On définit alors des fonctions $(\omega_k^\varepsilon)_{1\le k\le n}$ sur l'ouvert Ω par :

(II.2.3)
$$\begin{cases} - \text{ Pour tout pavé } P_\nu^\varepsilon \text{ qui coupe } \partial\Omega, \text{ on pose :} \\ \qquad \omega_k^\varepsilon = e_k \qquad\qquad \text{dans} \quad P_\nu^\varepsilon \cap \Omega \\ - \text{ Pour tout pavé entièrement inclus dans } \Omega, \text{ on pose :} \\ \qquad \omega_k^\varepsilon = e_k \qquad\qquad \text{dans } K_\nu^\varepsilon \\ \quad -\partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)) = 0 \qquad \text{dans } C_\nu^\varepsilon \\ \qquad \omega_k^\varepsilon = 0 \qquad\qquad \text{dans } T_\nu^\varepsilon \\ \text{et} \quad \omega_k^\varepsilon \in [H^1(P_\nu^\varepsilon)]^n. \end{cases}$$

On vérifie facilement qu'il existe une solution unique $\omega_k^\varepsilon \in [H^1(C_\nu^\varepsilon)]^n$ solution du problème :

$$\begin{cases} -\partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)) = 0 & \text{dans } C_\nu^\varepsilon \\ \omega_k^\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial T_\nu^\varepsilon \\ \omega_k^\varepsilon = e_k & \text{sur } \partial C_\nu^\varepsilon \cap \partial K_\nu^\varepsilon, \end{cases}$$

d'où la solution $\omega_k^\varepsilon \in [H^1(P_\nu^\varepsilon)]^n$ de (II.2.3).

Comme C_ν^ε est à symètrie sphérique, on peut calculer explicitement ω_k^ε.
Ce calcul est fait dans l'annexe B. Nous nous contentons de donner ici le résultat.

On prend comme origine de l'espace, le centre de P_ν^ε. On note $(e_k)_{k=1}^n$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. On désigne par $(x_k)_{k=1}^n$ les coordonnées d'un point dans cette base, par $r = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$ la coordonnée radiale et par e_r le vecteur unitaire radial.
Dans l'annexe B, on cherche la solution du système (II.2.3) dans C_ν^ε sous forme :

(II.2.4)
$$\omega_k^\varepsilon = x_k r f(r) e_r + g(r) e_k \qquad \text{pour} \qquad r \in [a_\varepsilon, \varepsilon]$$

où les fonctions f et g sont données par :

<u>si $n \ge 3$</u> :

(II.2.5)
$$\begin{cases} f(r) = \dfrac{1}{r^n}\Big(A + \dfrac{B}{r^2}\Big) + C \\ g(r) = \dfrac{1}{r^n}\Big(-\dfrac{B}{n} + \dfrac{1+2m}{n-2}Ar^2\Big) - \dfrac{n+1+2m}{2(1+nm)}Cr^2 + D \end{cases}$$

avec

(II.2.6)
$$\begin{cases} A = -\dfrac{\varepsilon^n}{a}[1 + o(1)] \\ B = \dfrac{C_0^2}{a}\varepsilon^{\dfrac{n^2}{n-2}}[1 + o(1)] \\ C = \dfrac{1}{a}[1 + o(1)] \\ D = 1 + \dfrac{b}{a}\varepsilon^2[1 + o(1)] \end{cases}$$

où

$$\text{(II.2.7)} \qquad \begin{cases} a = \dfrac{1}{C_0^{n-2}}\left[\dfrac{1}{n} + \dfrac{1+2m}{n-2}\right] \\ b = \dfrac{1+2m}{n-2} + \dfrac{n+1+2m}{2(1+nm)} \\ m = \dfrac{\lambda\mu}{c_o^2\rho_o + \lambda\eta + \lambda\mu} \end{cases}$$

<u>si $n = 2$</u> :

$$\text{(II.2.8)} \qquad \begin{cases} f(r) = \dfrac{A}{1+2m}\dfrac{1}{r^2} + \dfrac{B}{r^4} + C \\ g(r) = -A\log r - \dfrac{B}{2r^2} - \dfrac{2m+3}{2(1+2m)}Cr^2 + D \end{cases}$$

avec

$$\text{(II.2.9)} \qquad \begin{cases} A = -\dfrac{\varepsilon^2}{C_0}[1 + o(1)] \\ B = \dfrac{1}{1+2m}\dfrac{\varepsilon^2}{C_0}e^{-\dfrac{2C_0}{\varepsilon^2}}[1 + o(1)] \\ C = \dfrac{1}{(1+2m)C_0}[1 + o(1)] \\ D = 1 - \dfrac{\varepsilon^2 \log\varepsilon}{C_0}[1 + o(1)]. \end{cases}$$

Il est facile de voir que, de par leur définition même, on a :

$$\omega_k^\varepsilon \in [H^1(\Omega)]^n.$$

Par conséquent (H1) est vérifiée.

De même par construction on a :

$$\omega_k^\varepsilon = 0 \quad \text{sur les trous} \quad \left(T_\nu^\varepsilon\right)_{\nu=1}^{n(\varepsilon)}$$

et donc (H2) est aussi vérifiée.

Avant de montrer que les autres hypothèses (H3) (H4) (H5)′ et (H6) sont vérifiées, nous allons donner des estimations des normes dans différents espaces des fonctions $(\omega_k^\varepsilon)_{1\le k\le n}$.

<u>Lemme II.2.1</u> : *Soient $(\omega_k^\varepsilon)_{1\le k\le n}$ les fonctions définies en (II.2.3).*

On a les estimations suivantes :

(II.2.10) $$|\nabla\omega_k^\varepsilon|^2_{L^2(C_\nu^\varepsilon)} \le c\varepsilon^n$$

(II.2.11)

$$|\omega_k^\varepsilon - e_k|^p_{L^p(C_\nu^\varepsilon)} \le c \begin{cases} \varepsilon^{n+2p} & \text{pour} \quad 1 \le p < \dfrac{n}{n-2} & \text{et} & n \ge 3 \\ \varepsilon^{n^2/n-2}|\log\varepsilon| & \text{pour} \quad p = \dfrac{n}{n-2} & \text{et} & n \ge 3 \\ \varepsilon^{n^2/n-2} & \text{pour} \quad \dfrac{n}{n-2} < p < +\infty & \text{et} & n \ge 3 \\ \varepsilon^2\left(\varepsilon^2|\log\varepsilon|\right)^p & \text{pour} \quad 1 \le p < +\infty & \text{et} & n = 2 \end{cases}$$

où c est une constante qui ne dépend pas de ε.

Démonstration :

Nous reprenons la démonstration faite par Allaire pour le cas des équations de StoKes [2].

On sépare en deux cas selon la valeur de la dimension d'espace n, car les fonctions ω_k^ε ne sont pas exactement du même genre dans ces deux cas.

n ≥ 3 :

Calcul de $|\nabla\omega_k^\varepsilon|^2_{L^2(C_\nu^\varepsilon)}$:

$$\omega_k^\varepsilon = x_k r f(r) e_r + g(r) e_k$$

donc

$$|\nabla\omega_k^\varepsilon|^2_{L^2(C_\nu^\varepsilon)} \leq c\Big(|g'(r)|^2_{L^2(C_\nu^\varepsilon)} + |rf(r)|^2_{L^2(C_\nu^\varepsilon)} + |r^2 f'(r)|^2_{L^2(C_\nu^\varepsilon)} \Big). \tag{II.2.12}$$

Or

$$\begin{cases} g'(r) = -(1+2m)\dfrac{A}{r^{n-1}} + \dfrac{B}{r^{n+1}} - \dfrac{n+1+2m}{1+nm} Cr \\ rf(r) = \dfrac{A}{r^{n-1}} + \dfrac{B}{r^{n+1}} + Cr \\ r^2 f'(r) = -n\dfrac{A}{r^{n-1}} - (n+2)\dfrac{B}{r^{n+1}}. \end{cases} \tag{II.2.13}$$

Par conséquent à l'aide des expressions A, B, C (II.2.6) :

$$\begin{aligned} |\nabla\omega_k^\varepsilon|^2_{L^2(C_\nu^\varepsilon)} &\leq c \int_{a_\varepsilon}^{\varepsilon} \Big(\frac{|A|^2}{r^{2(n-1)}} + \frac{|B|^2}{r^{2(n+1)}} + |C|^2 r^2 \Big) r^{n-1} dr \\ &\leq c \Big[\frac{|A|^2}{r^{(n-2)}} + \frac{|B|^2}{r^{(n+2)}} + |C|^2 r^{n+2} \Big]_{a_\varepsilon}^{\varepsilon} \\ &\leq c(\varepsilon^n + \varepsilon^n + \varepsilon^{n+2}). \end{aligned}$$

Finalement

$$|\nabla\omega_k^\varepsilon|^2_{L^2(C_\nu^\varepsilon)} \leq c\varepsilon^n.$$

Calcul de $|\omega_k^\varepsilon - e_k|^p_{L^p(C_\nu^\varepsilon)}$ *pour* $p \geq 1$:

On a :

$$|\omega_k^\varepsilon - e_k|^p_{L^p(C_\nu^\varepsilon)} \leq c\big(|g(r) - 1|^p_{L^p(C_\nu^\varepsilon)} + |r^2 f(r)|^p_{L^p(C_\nu^\varepsilon)} \big). \tag{II.2.14}$$

Or

$$\begin{cases} g(r) - 1 = \dfrac{1+2m}{n-2}\dfrac{A}{r^{n-2}} - \dfrac{1}{n}\dfrac{B}{r^n} - \dfrac{n+1+2m}{2(1+nm)} Cr^2 + D - 1 \\ r^2 f(r) = \dfrac{A}{r^{n-2}} + \dfrac{B}{r^n} + Cr^2. \end{cases}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} |\omega_k^\varepsilon - e_k|^p_{L^p(C_\nu^\varepsilon)} &\leq c \int_{a_\varepsilon}^{\varepsilon} \Big(\frac{|A|^p}{r^{p(n-2)}} + \frac{|B|^p}{r^{np}} + |C|^p r^{2p} + |D-1|^p \Big) r^{n-1} dr \\ &\leq c \int_{a_\varepsilon}^{\varepsilon} \Big(\frac{|A|^p}{r^{p(n-2)-(n-1)}} + \frac{|B|^p}{r^{np-(n-1)}} + |C|^p r^{2p+n-1} + |D-1|^p r^{n-1} \Big) dr. \end{aligned} \tag{II.2.15}$$

* Soit $p(n-2)-(n-1)<1 \Longleftrightarrow p<\dfrac{n}{n-2}$.

Dans ce cas, grâce à (II.2.6)

$$|\omega_k^\varepsilon - e_k|^p_{L^p(C_\nu^\varepsilon)} \leq c\Big(\frac{|A|^p}{\varepsilon^{p(n-2)-n}} + \int_{a_\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{|B|^p}{r^{np-(n-1)}}dr + |C|^p\varepsilon^{n+2p} + |D-1|^p\varepsilon^n\Big)$$
$$\leq c(\varepsilon^{n+2p} + \varepsilon^{n+2p} + \varepsilon^{n+2p} + \varepsilon^{n+2p})$$

donc

(II.2.16) $$|\omega_k^\varepsilon - e_k|^p_{L^p(C_\nu^\varepsilon)} \leq c\varepsilon^{n+2p}.$$

* Soit $p(n-2)-(n-1)=1 \Longleftrightarrow p=\dfrac{n}{n-2}$.

Dans ce cas, grâce à (II.2.6)

$$|\omega_k^\varepsilon - e_k|^p_{L^p(C_\nu^\varepsilon)} \leq c\Big(|A|^p|log a_\varepsilon| + \frac{|B|^p}{{a_\varepsilon}^{n(p-1)}} + |C|^p\varepsilon^{n+2p} + |D-1|^p\varepsilon^n\Big)$$
$$\leq c(\varepsilon^{n^2/n-2}|log\varepsilon| + \varepsilon^{n^2/n-2})$$

donc

(II.2.17) $$|\omega_k^\varepsilon - e_k|^p_{L^p(C_\nu^\varepsilon)} \leq c\varepsilon^{n^2/n-2}|log\varepsilon|.$$

* Soit $p(n-2)-(n-1)>1 \Longleftrightarrow p>\dfrac{n}{n-2}$.

Dans ce cas, grâce à (II.2.6)

$$|\omega_k^\varepsilon - e_k|^p_{L^p(C_\nu^\varepsilon)} \leq c\Big(\frac{|A|^p}{{a_\varepsilon}^{p(n-2)-n}} + \frac{|B|^p}{{a_\varepsilon}^{n(p-1)}} + |C|^p\varepsilon^{n+2p} + |D-1|^p\varepsilon^n\Big)$$
$$\leq c(\varepsilon^{n^2/n-2} + \varepsilon^{n^2/n-2} + \varepsilon^{n+2p} + \varepsilon^{n+2p})$$

or $\varepsilon^{n+2p} \leq \varepsilon^{n^2/n-2} = \varepsilon^{n+2n/n-2}$

donc

(II.2.18) $$|\omega_k^\varepsilon - e_k|^p_{L^p(C_\nu^\varepsilon)} \leq c\varepsilon^{n^2/n-2}.$$

On considère maintenant le deuxième cas.

n = 2 :

Calcul de $|\nabla\omega_k^\varepsilon|^2_{L^2(C_\nu^\varepsilon)}$:

$$\omega_k^\varepsilon = x_k r f(r) e_r + g(r)e_k$$

donc

$$|\nabla\omega_k^\varepsilon|^2_{L^2(C_\nu^\varepsilon)} \leq c\Big(|g'(r)|^2_{L^2(C_\nu^\varepsilon)} + |rf(r)|^2_{L^2(C_\nu^\varepsilon)} + |r^2f'(r)|^2_{L^2(C_\nu^\varepsilon)}\Big).$$

Or

$$\begin{cases} g'(r) = -\dfrac{A}{r} + \dfrac{B}{r^3} - \dfrac{3+2m}{1+2m}Cr \\ rf(r) = \dfrac{A}{1+2m}\dfrac{1}{r} + \dfrac{B}{r^3} + Cr \\ r^2f'(r) = -\dfrac{2A}{1+2m}\dfrac{1}{r} - \dfrac{4B}{r^3}. \end{cases}$$

Par conséquent à l'aide des expressions A, B, C (II.2.9) :

$$|\nabla\omega_k^\varepsilon|^2_{L^2(C_\nu^\varepsilon)} \leq c\int_{a_\varepsilon}^{\varepsilon}\Big(\frac{|A|^2}{r^2}+\frac{|B|^2}{r^6}+|C|^2r^2\Big)rdr$$
$$\leq c\Big[|A|^2|loga_\varepsilon|+\frac{|B|^2}{a_\varepsilon^4}+|C|^2\varepsilon^4\Big]$$
$$\leq c(\varepsilon^2+\varepsilon^4+\varepsilon^4).$$

Finalement

$$|\nabla\omega_k^\varepsilon|^2_{L^2(C_\nu^\varepsilon)} \leq c\varepsilon^2. \tag{II.2.19}$$

Calcul de $|\omega_k^\varepsilon - e_k|^p_{L^p(C_\nu^\varepsilon)}$ pour $p \geq 1$:

On a :

$$|\omega_k^\varepsilon - e_k|^p_{L^p(C_\nu^\varepsilon)} \leq c\big(|g(r)-1|^p_{L^p(C_\nu^\varepsilon)} + |r^2f(r)|^p_{L^p(C_\nu^\varepsilon)}\big).$$

Or

$$\begin{cases} g(r)-1 = -Alogr - \dfrac{B}{2r^2} - \dfrac{2m+3}{2(1+nm)}Cr^2 + D - 1 \\ r^2f(r) = \dfrac{A}{1+2m} + \dfrac{B}{r^2} + Cr^2. \end{cases}$$

Par conséquent :

$$|\omega_k^\varepsilon - e_k|^p_{L^p(C_\nu^\varepsilon)} \leq c\int_{a_\varepsilon}^{\varepsilon}\Big(|A|^p + \frac{|B|^p}{r^{2p}} + |C|^pr^{2p} + |D-1|^p + |A|^p|logr|^p\Big)rdr.$$

Or

$$\int_{a_\varepsilon}^{\varepsilon}|logr|^prdr = |logr|^p\frac{r^2}{2}|_{a_\varepsilon}^{\varepsilon} - \frac{p}{2}\int_{a_\varepsilon}^{\varepsilon}|logr|^{p-1}rdr.$$

Donc

$$\Big|\int_{a_\varepsilon}^{\varepsilon}|logr|^prdr\Big| \leq c\varepsilon^2|log\varepsilon|^p$$

par conséquent :

$$|\omega_k^\varepsilon - e_k|^p_{L^p(C_\nu^\varepsilon)} \leq c\big(\varepsilon^{2p+2} + \varepsilon^{2p}a_\varepsilon^2 + \varepsilon^{2p+2} + \varepsilon^2(\varepsilon^2|log\varepsilon|)^p + \varepsilon^{2p+2}|log\varepsilon|^p\big)$$

donc

$$|\omega_k^\varepsilon - e_k|^p_{L^p(C_\nu^\varepsilon)} \leq c\varepsilon^2(\varepsilon^2|log\varepsilon|)^p. \tag{II.2.20}$$

Ce qui termine la démonstration du lemme II.2.1.

C.Q.F.D.

Lemme II.2.2 : *Les fonctions $(\omega_k^\varepsilon)_{1\leq k\leq n}$ définies en (II.2.3) vérifient les hypothèses (H1) , (H2) et (H3) et de plus on a :*

$$\omega_k^\varepsilon \longrightarrow e_k \quad \textit{dans} \quad [L^p(\Omega)]^n \quad \textit{fortement pour tout p, tel que :} \quad 1 \leq p < +\infty.$$

Démonstration : Nous suivons la démonstration faite dans [2].

On a déjà vu (avant le lemme II.2.1) que les fonctions $(\omega_k^\varepsilon)_{1\leq k\leq n}$ définies en (II.2.3) vérifient par définition les hypothèses (H1) et (H2).

D'autre part, par définition on a aussi :

$$\text{(II.2.21)} \qquad \begin{cases} |\nabla\omega_k^\varepsilon|^2_{L^2(P_\nu^\varepsilon)} = |\nabla\omega_k^\varepsilon|^2_{L^2(C_\nu^\varepsilon)} \\ |\omega_k^\varepsilon - e_k|^p_{L^p(P_\nu^\varepsilon)} = |\omega_k^\varepsilon - e_k|^p_{L^p(C_\nu^\varepsilon)} + |T_\nu^\varepsilon|. \end{cases}$$

De plus on sait (cf II.1.3) qu'il existe $n(\varepsilon)$ pavés P_ν^ε qui sont inclus dans Ω avec :

$$n(\varepsilon) = \frac{|\Omega|}{(2\varepsilon)^n}[1 + o(1)]$$

donc

$$\text{(II.2.22)} \qquad \begin{cases} |\nabla\omega_k^\varepsilon|^2_{L^2(\Omega)} = \dfrac{|\Omega|}{(2\varepsilon)^n}|\nabla\omega_k^\varepsilon|^2_{L^2(P_\nu^\varepsilon)}[1 + o(1)] \\ |\omega_k^\varepsilon - e_k|^p_{L^p(\Omega)} = \dfrac{|\Omega|}{(2\varepsilon)^n}|\omega_k^\varepsilon - e_k|^p_{L^p(P_\nu^\varepsilon)}[1 + o(1)]. \end{cases}$$

Par conséquent à l'aide du lemme II.2.1 il vient :

$$\begin{cases} |\nabla\omega_k^\varepsilon|^2_{L^2(\Omega)} \leq c \\ |\omega_k^\varepsilon - e_k|^p_{L^p(\Omega)} \leq c\left[\left(\dfrac{a_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^n + \dfrac{1}{\varepsilon^n}|\omega_k^\varepsilon - e_k|^p_{L^p(C_\nu^\varepsilon)}\right] \end{cases}$$

or

$$a_\varepsilon = \begin{cases} C_o\varepsilon^{\frac{n}{n-2}} & \text{si} \quad n \geq 3 \\ e^{-\frac{C_o}{\varepsilon^2}} & \text{si} \quad n = 2 \end{cases}$$

donc

$$|\omega_k^\varepsilon - e_k|^p_{L^p(\Omega)} \leq c \begin{cases} \varepsilon^{2p} & \text{pour} \quad 1 \leq p < \dfrac{n}{n-2} \quad \text{et} \quad n \geq 3 \\ \varepsilon^{2n/n-2}|log\varepsilon| & \text{pour} \quad p = \dfrac{n}{n-2} \quad \text{et} \quad n \geq 3 \\ \varepsilon^{2n/n-2} & \text{pour} \quad \dfrac{n}{n-2} < p < +\infty \quad \text{et} \quad n \geq 3 \\ \left(\varepsilon^2|log\varepsilon|\right)^p & \text{pour} \quad 1 \leq p < +\infty \quad \text{et} \quad n = 2 \end{cases}$$

d'où :

$$\omega_k^\varepsilon \longrightarrow e_k \quad \text{dans} \quad [L^p(\Omega)]^n \quad \text{fort} \quad 1 \leq p < +\infty.$$

Or $\nabla\omega_k^\varepsilon$ est borné dans $[L^2(\Omega)]^{n^2}$ donc :

$$\omega_k^\varepsilon \rightharpoonup e_k \quad \text{dans} \quad [H^1(\Omega)]^n \quad \text{faible.}$$

C.Q.F.D.

Avant de vérifier les hypothèses (H4), (H5)′ et (H6), on remarque que d'après leur construction (voir II.2.3) les fonctions $(\omega_k^\varepsilon)_{1\leq k\leq n}$ sont telles que :

$$-\partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)) = 0 \qquad \text{à l'intérieur des ouverts} \qquad \overset{o}{T}{}_\nu^\varepsilon, C_\nu^\varepsilon \text{ et } K_\nu^\varepsilon$$

par conséquent :

$$\text{(II.2.23)} \qquad \begin{cases} -\partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)) = \mu_{k,i}^\varepsilon - \gamma_{k,i}^\varepsilon \\ \text{où} \quad \mu_k^\varepsilon \text{ est une mesure portée par les sphères } \partial C_\nu^\varepsilon \cap \partial K_\nu^\varepsilon \\ \text{et} \quad \gamma_k^\varepsilon \text{ est une mesure portée par les sphères } \partial T_\nu^\varepsilon. \end{cases}$$

Une intègration par parties élémentaire nous montre que :

$$\text{(II.2.24)} \qquad \begin{cases} \mu_k^\varepsilon = a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)n_j e_i & \text{sur } \partial C_\nu^\varepsilon \cap \partial K_\nu^\varepsilon \\ \gamma_k^\varepsilon = a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)n_j e_i & \text{sur } \partial T_\nu^\varepsilon \end{cases}$$

où $n = e_r^\nu$ est le vecteur radial dans P_ν^ε et r_ν la coordonnée radiale dans P_ν^ε.

On définit alors la mesure δ_ν^ε comme étant la masse unité portée par la sphère $\partial C_\nu^\varepsilon \cap \partial K_\nu^\varepsilon$ et plus précisément :

$$\text{(II.2.25)} \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \qquad < \delta_\nu^\varepsilon, \varphi >_{H^{-1},H_0^1(\Omega)} = \int_{\partial C_\nu^\varepsilon \cap \partial K_\nu^\varepsilon} \varphi(s)ds.$$

On a alors :

$$\text{(II.2.26)} \qquad \mu_k^\varepsilon = \sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)(e_r^\nu . e_j)e_i\delta_\nu^\varepsilon.$$

Vérifier les hypothèses (H4), (H5)′ et (H6) revient en fait à montrer que :

$$\exists \mu_k \in [W^{-1,\infty}(\Omega)]^n \quad \text{tel que :}$$

$$\text{(II.2.27)} \qquad \begin{cases} \cdot\ \mu_k^\varepsilon \longrightarrow \mu_k \qquad \text{dans } [H^{-1}(\Omega)]^n \quad \text{fort} \\ \cdot\ \lambda \longmapsto \mu_k(\lambda) \qquad \text{pour } Re\lambda > \beta \\ \cdot\ |\mu_k(\lambda)| \leq c\, Pol(|\lambda|). \end{cases}$$

Théorème II.2.3 :

Les fonctions $(\omega_k^\varepsilon)_{1\leq k\leq n}$ définies en (II.2.3) et les vecteurs constants $(\mu_k)_{1\leq k\leq n}$ définis par :

$$\text{(II.2.28)} \qquad \begin{cases} \mu_k = \dfrac{n(n-1)}{2^n} C_o^{n-2} S_n \dfrac{\lambda\mu(c_o^2\rho_o + \lambda(\eta+2\mu))}{(n-1)c_o^2\rho_o + \lambda\big((2n-1)\mu + (n-1)\eta\big)} e_k & \text{si} \quad n \geq 3 \\ \mu_k = \dfrac{\pi}{C_o} \dfrac{\lambda\mu(c_o^2\rho_o + \lambda(\eta+2\mu))}{c_o^2\rho_o + \lambda(3\mu+\eta)} e_k & \text{si} \quad n = 2 \end{cases}$$

vérifient les hypothèses (H4), (H5)′ et (H6).

Pour démontrer le théorème II.2.3, on utilise le lemme suivant démontré dans [2].

Lemme II.2.4 :

Soit δ_ν^ε la masse unité portée par la sphère $\partial C_\nu^\varepsilon \cap \partial K_\nu^\varepsilon$ (cf II.2.25).

Pour $n \geq 2$ on a :

$$\text{(II.2.29)} \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} \varepsilon\delta_\nu^\varepsilon \longrightarrow \frac{S_n}{2^n} & \text{dans} \quad H^{-1}(\Omega) \quad \text{fort} \\ \displaystyle\sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} \varepsilon(e_r^\nu . e_k)\, e_r^\nu \delta_\nu^\varepsilon \longrightarrow \frac{S_n}{n2^n} e_k & \text{dans} \quad [H^{-1}(\Omega)]^n \quad \text{fort,} \end{cases}$$

où e_r^ν est le vecteur unitaire radial dans le pavé P_ν^ε.

Démonstration du théorème II.2.3 :

Nous reprenons les mêmes techniques utilisées par Allaire [2].

Les fonctions μ_k définies par (II.2.28) sont des constantes par conséquent (H4) est trivialement vérifiée. D'autre part l'application $\lambda \longmapsto \mu_k(\lambda)$ est une fraction et $|\mu_k(\lambda)| \leq c|\lambda|$ donc (H6) est aussi vérifiée.
Il reste donc à vérifier (H5)'.

On sait que (cf II.2.26)

$$\mu_k^\varepsilon = \sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)(e_r^\nu . e_j)e_i\delta_\nu^\varepsilon$$

or

$$\omega_k^\varepsilon = x_k r f(r) e_r^\nu + g(r)e_k \qquad \text{dans } C_\nu^\varepsilon$$

où e_r^ν est le vecteur radial dans P_ν^ε.

En utilisant l'annexe B, on obtient facilement :

$$\mu_k^\varepsilon = \lambda\mu \sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} \left[g'(\varepsilon)e_k + (\varepsilon^2 f'(\varepsilon) - \varepsilon h(\varepsilon))(e_r^\nu . e_k)e_r^\nu\right]\delta_\nu^\varepsilon \tag{II.2.30}$$

(pour la définition de la fonction h voir l'annexe B).

Si $n \geq 3$:

$$\mu_k^\varepsilon = \lambda\mu \sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} \left[-(1+2m)\frac{A}{\varepsilon^{n-1}} + \frac{B}{\varepsilon^{n+1}} - \frac{n+1+2m}{1+nm}C\varepsilon\right] e_k\delta_\nu^\varepsilon +$$

$$+\lambda\mu \sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} \left[-(n+2)\frac{A}{\varepsilon^{n-1}} - (n+2)\frac{B}{\varepsilon^{n+1}} - \frac{2-n-n^2}{1+nm}C\varepsilon\right](e_r^\nu . e_k)e_r^\nu\delta_\nu^\varepsilon$$

à l'aide de (II.2.5).

Connaissant les valeurs de A, B et C (cf II.2.6), il vient :

$$\mu_k^\varepsilon = \left[(1+2m - \frac{n+1+2m}{1+nm})\frac{1}{a}\sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} \varepsilon\delta_\nu^\varepsilon e_k - (\frac{2-n-n^2}{1+nm} - (n+2))\frac{1}{a}\sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} \varepsilon(e_r^\nu . e_k)e_r^\nu\delta_\nu^\varepsilon\right][1+o(1)].$$

A l'aide du lemme II.2.4 et comme o(1) est une suite réelle qui converge vers zéro, on a :

$$\begin{aligned}
\mu_k^\varepsilon &\longrightarrow \left(1+2m - \frac{n+1+2m}{1+nm}\right)\frac{1}{a}\frac{S_n}{2^n}e_k - \left(\frac{2-n-n^2}{1+nm} - (n+2)\right)\frac{1}{a}\frac{S_n}{n2^n}e_k \\
&= \frac{S_n}{n2^n a}\left(n+2nm - \frac{n(n+1+2m)}{1+nm} - \frac{2-n-n^2}{1+nm} + n+2\right)e_k \\
&= \frac{S_n}{n2^n a}\left(2n+2nm+2 - \frac{2(1+nm)}{1+nm}\right)e_k \\
&= \frac{S_n}{2^{n-1}a}(m+1)e_k \\
&= \mu_k \qquad \text{(en remplaçant a et m par leurs expressions)}.
\end{aligned}$$

Donc pour $n \geq 3$

$$\mu_k^\varepsilon \longrightarrow \mu_k \quad \text{dans} \quad [H^{-1}(\Omega)]^n \quad \text{fort.}$$

Si $n = 2$:

$$\mu_k^\varepsilon = \lambda\mu \sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} \Big(-\frac{A}{\varepsilon} + \frac{B}{\varepsilon^3} - \frac{2m+3}{1+2m} C\varepsilon \Big) e_k \delta_\nu^\varepsilon +$$

$$+ \lambda\mu \sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} \Big(-\frac{4A}{1+2m}\frac{1}{\varepsilon} - \frac{4B}{\varepsilon^3} + \frac{4C}{1+2m}\varepsilon \Big) (e_r^\nu . e_k) e_r^\nu \delta_\nu^\varepsilon$$

à l'aide de (II.2.8).

Connaissant les valeurs de A, B et C (cf II.2.9), il vient :

$$\mu_k^\varepsilon = \Big(\frac{\lambda\mu}{C_o} \Big[1 - \frac{2m+3}{(1+2m)^2} \Big] \sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} \varepsilon \delta_\nu^\varepsilon e_k + \frac{4\lambda\mu}{(1+2m)C_o} \Big[1 + \frac{1}{1+2m} \Big] \sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} \varepsilon (e_r^\nu . e_k) e_r^\nu \delta_\nu^\varepsilon \Big) [1 + o(1)].$$

A l'aide du lemme II.2.4 on obtient :

$$\begin{aligned} \mu_k^\varepsilon &\longrightarrow \frac{\lambda\mu}{C_o} \Big[1 - \frac{2m+3}{(1+2m)^2} \Big] \frac{\pi}{2} e_k + \frac{4\lambda\mu}{(1+2m)C_o} \Big[1 + \frac{1}{1+2m} \Big] \frac{\pi}{4} e_k \\ &= \frac{\lambda\mu\pi}{2C_o} \Big(1 - \frac{2m+3}{(1+2m)^2} + \frac{2}{1+2m} + \frac{2}{(1+2m)^2} \Big) e_k \\ &= \frac{\lambda\mu\pi}{2C_o} \frac{1+m}{1+2m} e_k \\ &= \mu_k \qquad \text{(en remplaçant m par sa valeur).} \end{aligned}$$

D'où

$$\mu_k^\varepsilon \longrightarrow \mu_k \quad \text{dans} \quad [H^{-1}(\Omega)]^2 \quad \text{fort} \qquad \text{si } n = 2.$$

C.Q.F.D.

II.3. Vérification des hypothèses (H1) à (H6) dans le cas des trous de formes quelconques :

On se place dans le cadre géomètrique des petits trous périodiquement répartis en volume. Nous allons séparer le cas de la dimension $n = 2$ des autres cas $n \geq 3$ car les résultats sont différents comme nous l'avons constaté dans le cas des trous sphériques.

A. Cas de la dimension n = 2

Comme pour le cas des trous sphériques, on définit les fonctions $(\omega_k^\varepsilon)_{1\leq k\leq 2}$ par :

(II.3.1)
$$\begin{cases} - \text{ Pour tout pavé } P_\nu^\varepsilon \text{ qui coupe } \partial\Omega, \text{ on pose :} \\ \qquad \omega_k^\varepsilon = e_k \qquad \text{dans } P_\nu^\varepsilon \cap \Omega \\ - \text{ Pour tout pavé entièrement inclus dans } \Omega, \text{ on pose :} \\ \qquad \omega_k^\varepsilon = e_k \qquad \text{dans } K_\nu^\varepsilon \\ \qquad -\partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)) = 0 \qquad \text{dans } C_\nu^\varepsilon \\ \qquad \omega_k^\varepsilon = 0 \qquad \text{dans } T_\nu^\varepsilon \\ \text{et } \omega_k^\varepsilon \in [H^1(P_\nu^\varepsilon)]^2. \end{cases}$$

La définition (II.3.1) a bien un sens et détermine de façon unique ω_k^ε qui appartient à $[H^1(\Omega)]^2$.

Dans le cas général, on ne peut pas calculer explicitement ces fonctions $(\omega_k^\varepsilon)_{1\leq k\leq 2}$. Par contre, si T est d'intérieur non vide (c'est à dire que T contient une petite boule ouverte), on va pouvoir les estimer en les comparant avec les mêmes fonctions définies dans le cas des trous sphériques. En effet, comme $T \subset B_1$ on peut définir la sphère $B_\nu^{a_\varepsilon}$ de rayon a_ε centrée au centre de P_ν^ε.
On a (voir figure 4) $T_\nu^\varepsilon \subset B_\nu^{a_\varepsilon}$.

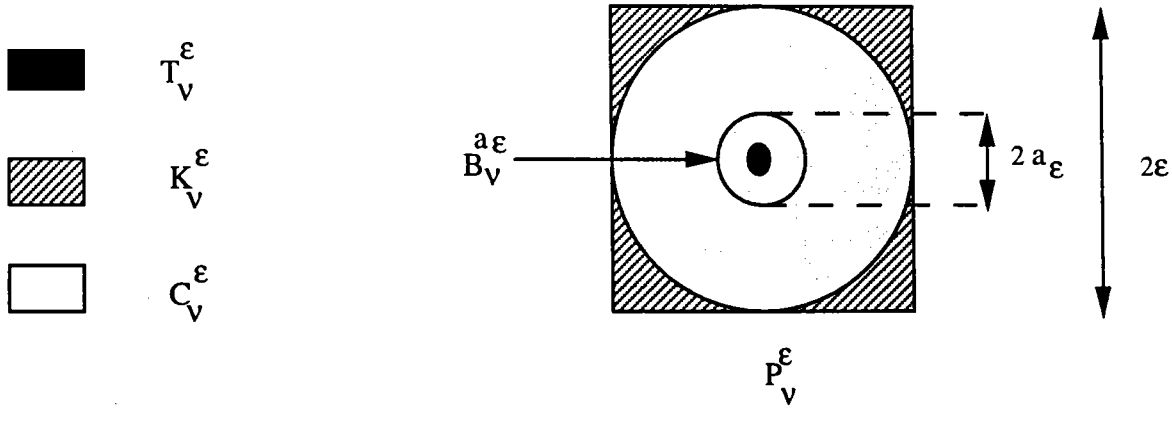


figure 4

On définit alors les fonctions $(\omega_{ok}^{\varepsilon})_{1\leq k\leq 2}$ par :

(II.3.2)
$$\begin{cases} - \text{ Pour tout pavé } P_\nu^\varepsilon \text{ qui coupe } \partial\Omega, \text{ on pose :} \\ \qquad \omega_{ok}^\varepsilon = e_k \qquad\qquad \text{dans } \; P_\nu^\varepsilon \cap \Omega \\ - \text{ Pour tout pavé entièrement inclus dans } \Omega, \text{ on pose :} \\ \qquad \omega_{ok}^\varepsilon = e_k \qquad\qquad \text{dans } K_\nu^\varepsilon \\ \quad -\partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_{ok}^\varepsilon)) = 0 \qquad \text{dans } C_\nu^\varepsilon - B_\nu^{a_\varepsilon} \\ \qquad \omega_{ok}^\varepsilon = 0 \qquad\qquad \text{dans } B_\nu^{a_\varepsilon} \\ \text{et } \; \omega_{ok}^\varepsilon \in [H^1(P_\nu^\varepsilon)]^2. \end{cases}$$

La définition (II.3.2) détermine de façon unique les fonctions $(\omega_{ok}^{\varepsilon})_{1\leq k\leq 2}$ que l'on a calculé au paragraphe II.2, et on a :

$$\omega_{ok}^\varepsilon \in [H^1(\Omega)]^2.$$

On pose :

(II.3.3)
$$\omega_k^{\varepsilon\prime} = \omega_k^\varepsilon - \omega_{ok}^\varepsilon.$$

Lemme II.3.1 : *Les fonctions $(\omega_k^{\varepsilon\prime})_{1\leq k\leq 2}$ définies en (II.3.3) appartiennent à $[H_0^1(\Omega)]^2$ et on a :*

$$|\nabla\omega_k^{\varepsilon\prime}|_{L^2(\Omega)} \leq c\,\varepsilon$$

où c ne dépend pas de ε.

Démonstration :

On adapte la démonstration de [2] à notre cas.

Si on appelle $\delta_\nu^{a_\varepsilon}$ la mesure définie comme étant la masse unité portée par la sphère $\partial B_\nu^{a_\varepsilon}$, alors on vérifie aisément que les fonctions $(\omega_{ok}^{\varepsilon\prime})_{1\leq k\leq 2}$ sont aussi définies par :

(II.3.4)
$$\begin{cases} - \text{ Pour tout pavé } P_\nu^\varepsilon \text{ qui coupe } \partial\Omega, \text{ on a :} \\ \qquad \omega_k^{\varepsilon\prime} = e_k \qquad\qquad \text{dans } \; P_\nu^\varepsilon \cap \Omega \\ - \text{ Pour tout pavé entièrement inclus dans } \Omega, \text{ on a :} \\ \qquad \omega_k^{\varepsilon\prime} = 0 \qquad\qquad \text{dans } \; K_\nu^\varepsilon \text{ et } T_\nu^\varepsilon \\ \quad -\partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^{\varepsilon\prime})) = (a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_{ok}^\varepsilon)(e_r^\nu.e_j))\delta_\nu^{a_\varepsilon} \qquad \text{dans } C_\nu^\varepsilon \\ \text{et } \; \omega_k^{\varepsilon\prime} \in [H_0^1(P_\nu^\varepsilon)]^2. \end{cases}$$

On a : $\omega_k^{\varepsilon\prime} \in [H_0^1(\Omega)]^2.$

Pour avoir l'estimation, on calcule la quantité $(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_{ok}^\varepsilon)(e_r^\nu.e_j)e_i)\delta_\nu^{a_\varepsilon}$ à l'aide des résultats du § II.2. On obtient :

$$\begin{aligned}(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_{ok}^\varepsilon)(e_r^\nu.e_j)e_i)\delta_\nu^{a_\varepsilon} &= \lambda\mu\left[g'(a_\varepsilon)e_k + (a_\varepsilon^2 f'(a_\varepsilon) - a_\varepsilon h(a_\varepsilon)(e_r^\nu.e_k)e_r^\nu\right]\delta_\nu^{a_\varepsilon} \\ &= 2\lambda\mu\frac{1+m}{1+2m}\frac{1}{C_o}\frac{\varepsilon^2}{a_\varepsilon}[1+o(1)]e_k\delta_\nu^{a_\varepsilon}\end{aligned}$$

(pour la définition de la fonction h voir l'annexe B).

Or d'après (II.3.4), $\omega_k^{\varepsilon\prime}$ est l'unique solution dans $[H_0^1(C_\nu^\varepsilon)]^2$ de :

(II.3.5)
$$-\partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^{\varepsilon\prime})) = (a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_{ok}^\varepsilon)(e_r^\nu.e_j))\delta_\nu^{a_\varepsilon} \qquad \text{dans } C_\nu^\varepsilon.$$

De la formulation variationnelle de (II.3.5), on tire :

$$\int_{C_\nu^\varepsilon} a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^{\varepsilon\prime})\,\varepsilon_{ij}(\overline{\omega}_k^{\varepsilon\prime})\,dx = \frac{2}{C_o}\frac{\varepsilon^2}{a_\varepsilon}\lambda\mu\frac{1+m}{1+2m}[1+o(1)]\int_{\partial B_\nu^{a\varepsilon}} \overline{\omega}_k^{\varepsilon\prime}.e_k ds \tag{II.3.6}$$

d'où

$$\int_{C_\nu^\varepsilon} |\varepsilon(\omega_k^{\varepsilon\prime})|^2 \leq c\frac{\varepsilon^2}{a_\varepsilon}\Big|\int_{\partial B_\nu^{a\varepsilon}} \overline{\omega}_k^{\varepsilon\prime}.e_k ds\Big|$$

où c est indépendante de ε.

D'autre part on a : (voir [2])

$$\Big|\int_{\partial B_\nu^{a\varepsilon}} \overline{\omega}_k^{\varepsilon\prime}.e_k ds\Big| \leq ca_\varepsilon|\nabla\omega_k^{\varepsilon\prime}|_{L^2(B_\nu^{a\varepsilon}\setminus T_\nu^\varepsilon)} \tag{II.3.7}$$

où c ne dépend ni de ε, ni de $\omega_k^{\varepsilon\prime}$.

Par conséquent :

$$\int_{C_\nu^\varepsilon} |\varepsilon(\omega_k^{\varepsilon\prime})|^2 \leq c\varepsilon^2|\nabla\omega_k^{\varepsilon\prime}|_{L^2(B_\nu^{a\varepsilon}\setminus T_\nu^\varepsilon)} \leq c\varepsilon^2|\nabla\omega_k^{\varepsilon\prime}|_{L^2(C_\nu^\varepsilon)}$$

d'où

$$|\varepsilon(\omega_k^{\varepsilon\prime})|^2_{L^2(\Omega)} = n(\varepsilon)|\varepsilon(\omega_k^{\varepsilon\prime})|^2_{L^2(C_\nu^\varepsilon)} \leq c\varepsilon^2 n(\varepsilon)|\nabla\omega_k^{\varepsilon\prime}|_{L^2(C_\nu^\varepsilon)} = c\varepsilon^2|\nabla\omega_k^{\varepsilon\prime}|_{L^2(\Omega)}.$$

On conclu à l'aide de l'inégalité de Korn.

C.Q.F.D.

Lemme II.3.2 :

Les fonctions $(\omega_k^\varepsilon)_{1\leq k\leq 2}$ définies en (II.3.1) vérifient les hypothèses (H1), (H2) et (H3) . De plus pour $1 \leq p < +\infty$ on a :

$$|\omega_k^\varepsilon - e_k|_{L^p(\Omega)} \leq c\varepsilon^2|log\varepsilon|. \tag{II.3.8}$$

Démonstration : On reprend la preuve faite par ALLaire [2] pour le cas de Stockes.

De part leur définition, les fonctions ω_k^ε vérifient les hypothèses (H1) et (H2).

Pour démontrer (H3), on remarque que :

$$\omega_k^\varepsilon = \omega_{ok}^\varepsilon + \omega_k^{\varepsilon\prime}.$$

Or à l'aide du lemme II.3.1 et du paragraphe II.2 on a :

$\omega_k^{\varepsilon\prime}$	$\longrightarrow 0$	dans	$[H_0^1(\Omega)]^2$	fort
ω_{ok}^ε	$\rightharpoonup e_k$	dans	$[H^1(\Omega)]^2$	faible.

D'où il vient que :

ω_k^ε	$\rightharpoonup e_k$	dans	$[H^1(\Omega)]^2$	faible.

L'hypothèse (H3) est ainsi vérifiée.

D'autre part (cf [9]), en dimension $n = 2$, pour $P =]-1,1[^2$ on a :

$$|u|_{L^p(P)} \leq c|\nabla u|_{L^2(P)} \qquad \forall u \in H_0^1(P)$$

pour $1 \leq p < +\infty$ et la constante c ne dépend que de p .

Comme $\omega_k^{\varepsilon\prime}$ appartient à $[H_0^1(P_\nu^\varepsilon)]^2$, on en déduit à l'aide d'une homothétie de rapport ε que :

$$|\omega_k^{\varepsilon\prime}|^p_{L^p(P_\nu^\varepsilon)} \leq c\varepsilon^2|\nabla\omega_k^{\varepsilon\prime}|^p_{L^2(P_\nu^\varepsilon)} \leq c\varepsilon^{2p+2}.$$

Or

$$|\omega_k^\varepsilon - e_k|^p_{L^p(\Omega)} \leq c\Big(|\omega_{ok}^\varepsilon - e_k|^p_{L^p(\Omega)} + |\omega_k^{\varepsilon\prime}|^p_{L^p(\Omega)} \Big).$$

D'où

$$|\omega_k^\varepsilon - e_k|^p_{L^p(\Omega)} \leq c\Big(\frac{1}{\varepsilon^2}\varepsilon^2(\varepsilon^2|log\varepsilon|)^p + \frac{1}{\varepsilon^2}\varepsilon^{2p+2}\Big) \leq c(\varepsilon^2|log\varepsilon|)^p$$

où c ne dépend pas de ε.

On en tire la majoration (II.3.8).

C.Q.F.D.

Avant de vérifier (H4), (H5)' et (H6), on remarque qu'on a :

(II.3.9) $$-\partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)) = \mu_{k,i}^\varepsilon - \gamma_{k,i}^\varepsilon \qquad \text{dans } \Omega$$

où

(II.3.10) $$\begin{cases} \mu_k^\varepsilon = \displaystyle\sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_{ok}^\varepsilon)(e_r^\nu.e_j)e_i\delta_\nu^\varepsilon + \sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^{\varepsilon\prime})(e_r^\nu.e_j)e_i\delta_\nu^\varepsilon \\ \gamma_k^\varepsilon = \displaystyle\sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)(e_r^\nu.e_j)e_i\delta_{T_\nu^\varepsilon}. \end{cases}$$

La notation δ_ν^ε désigne la masse unité portée par la sphère de rayon ε inscrite dans P_ν^ε et $\delta_{T_\nu^\varepsilon}$ est la masse unité portée par le bord du trou T_ν^ε.

On a :

(II.3.11) $$\gamma_k^\varepsilon = 0 \qquad \text{dans} \qquad [H^{-1}(\Omega_\varepsilon)]^2.$$

Théorème II.3.3 :

Les fonctions $(\omega_k^\varepsilon)_{k=1}^2$ définies en (II.3.1) et les vecteurs constants μ_k définis par :

(II.3.12) $$\mu_k = \frac{\pi}{C_o}\frac{\lambda\mu(c_o^2\rho_o + \lambda(\eta+2\mu))}{c_o^2\rho_o + \lambda(3\mu+\eta)}e_k \qquad \text{pour} \qquad 1 \leq k \leq 2$$

vérifient les hypothèses (H4), (H5)' et (H6).

Pour démontrer le théorème II.3.3 on aura besoin de la proposition ci- dessous démontrée dans l'annexe C (voir proposition C.5).

Proposition II.3.4 : *Il existe un opérateur R_ε vérifiant :*

(i) $R_\varepsilon \in \mathcal{L}([H_0^1(\Omega)]^n : [H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^n)$

(ii) $u \in [H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^n \Longrightarrow R_\varepsilon\tilde{u} = u$ *dans* Ω_ε.

(iii) Il existe une constante $c > 0$ indépendante de ε et de u tel que :

$$\|R_\varepsilon u\|_{H_0^1(\Omega_\varepsilon)} \leq c\,\|u\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Démonstration du théorème II.3.3 :

Les fonctions μ_k sont des constantes donc (H4) est vérifiée. De plus l'application $\lambda \longmapsto \mu_k(\lambda)$ est une fraction et $|\mu_k(\lambda)| \leq c|\lambda|$ donc (H6) est aussi vérifiée.
Pour vérifier (H5)' il suffit de vérifier que :

$$\mu_k^\varepsilon \longrightarrow \mu_k \quad \text{dans} \quad [H^{-1}(\Omega)]^2 \quad \text{fort.}$$

Or on a montré au § II.2 que :

$$\sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_{ok}^\varepsilon)(e_r^\nu . e_j)e_i\delta_\nu^\varepsilon \longrightarrow \mu_k \quad \text{dans} \quad [H^{-1}(\Omega)]^2 \quad \text{fort.}$$

Alors le lemme sera démontré si on prouve que :

$$\sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^{\varepsilon\prime})(e_r^\nu . e_j)e_i\delta_\nu^\varepsilon \longrightarrow 0 \quad \text{dans} \quad [H^{-1}(\Omega)]^2 \quad \text{fort.}$$

Pour cela, il suffit de montrer que :

pour toute suite $v_\varepsilon \in [H_0^1(\Omega)]^2$ telle que :
$v_\varepsilon \rightharpoonup v$ dans $[H_0^1(\Omega)]^2$ faible,

on ait :

$$< \sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^{\varepsilon\prime})(e_r^i . e_j)e_i\delta_\nu^\varepsilon, v_\varepsilon >_{H^{-1},H_0^1} \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad \varepsilon \longrightarrow 0.$$

Posons :

$$\Delta_\varepsilon = < \sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^{\varepsilon\prime})(e_r^\nu . e_j)e_i\delta_\nu^\varepsilon, v_\varepsilon >_{H^{-1},H_0^1} .$$

Comme on a :

$$-\partial_j a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^{\varepsilon\prime})) = \sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_{ok}^\varepsilon)(e_r^\nu . e_j)e_i\delta_\nu^{a_\varepsilon} + \sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^{\varepsilon\prime})(e_r^\nu . e_j)e_i\delta_\nu^\varepsilon -$$
$$- \sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^{\varepsilon\prime})(e_r^\nu . e_j)e_i\delta_{T_\nu^\varepsilon},$$

on introduit l'application R_ε de la proposition (II.3.4) dans le cas où les trous sont des boules $B_\nu^{a_\varepsilon}$ donc si $v_\varepsilon \in [H_0^1(\Omega)]^2$, alors $R_\varepsilon v_\varepsilon \in [H_0^1(\Omega \setminus \cup_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} B_\nu^{a_\varepsilon})]^2$. On en déduit :

$$\Delta_\varepsilon = < \sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^{\varepsilon\prime})(e_r^\nu . e_j)e_i\delta_\nu^\varepsilon, \tilde{R_\varepsilon v_\varepsilon} >_{H^{-1},H_0^1(\Omega)}$$
$$= < -\partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^{\varepsilon\prime})), (\tilde{R_\varepsilon v_\varepsilon})_i >_{H^{-1},H_0^1(\Omega)}$$
$$= \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^{\varepsilon\prime})\varepsilon_{ij}(\tilde{R_\varepsilon v_\varepsilon}).$$

Ceci entraîne

$$|\Delta_\varepsilon| \leq c\,|\nabla\omega_k^{\varepsilon\prime}|_{L^2(\Omega)}\,|\nabla(R_\varepsilon v_\varepsilon)|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq c'\,\varepsilon\,\|v_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c''\varepsilon$$

car v_ε est bornée.

Par suite : $\Delta_\varepsilon \longrightarrow 0$.

C.Q.F.D.

Remarque II.3.5 : Le théorème II.3.3 ci-dessus montre que la matrice M est la même en dimension $n = 2$ quelque soit la forme des trous $(T_\nu^\varepsilon)_{\nu=1}^{n(\varepsilon)}$.
Aussi le fait que les trous soient tous identiques ne joue aucun rôle dans les résultats précédent. Lorsque la dimension d'espace n est égale à 2, on peut généraliser les résultats de ce paragraphe II.2.A au cas des trous (T_ν^ε) tous de formes différentes, mais de taille a_ε.
En effet l'estimation de $(\omega_k^{\varepsilon\prime})_{k=1}^2$ dans la couronne C_ν^ε ne dépend pas de la forme du trou T_ν^ε mais seulement de sa taille. On obtient alors toujours la même estimation (II.3.8) pour $(\omega_k^{\varepsilon\prime})_{k=1}^2$ et tous les autres résultats se généralisent sans changement. Ainsi la matrice M reste inchangée si les trous sont tous distincts mais de taille égale .

On retrouve donc les mêmes constatations que pour le Laplacien [12] [31] et le cas de Stokes [2] .

Remarque II.3.6 : L'opérateur R_ε construit par Allaire [2] marcherait dans notre cas sous des hypothèses de régularité convenables de Ω et Ω_ε mais sa construction est plus délicate car il devait satisfaire une $4^{ème}$ condition

$$div u = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \qquad \Longrightarrow \qquad div(R_\varepsilon u) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_\varepsilon .$$

C'est pour celà que nous avons construit un autre opérateur de restriction R_ε satisfaisant à la même inégalité de normes.

B. Cas de la dimension $n \geq 3$

On décompose chaque pavé P_ν^ε de la façon décrite par la figure 5.
On appelle D_ν^ε la couronne de rayons extérieur ε et intérieur $\varepsilon/2$ centrée au centre de P_ν^ε et C_ν^ε l'ouvert composé de la boule de rayon $\varepsilon/2$ centrée au centre de P_ν^ε moins le fermé T_ν^ε. Enfin $K_\nu^\varepsilon = P_\nu^\varepsilon \setminus T_\nu^\varepsilon \cup \overline{C}_\nu^\varepsilon \cup \overline{D}_\nu^\varepsilon$.

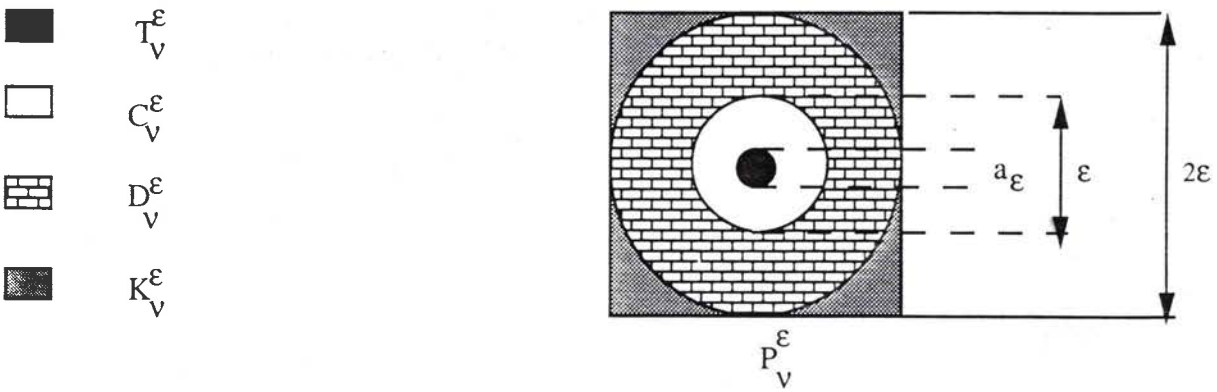


figure 5

Avant de construire les fonctions $(\omega_k^\varepsilon)_{1\leq k\leq n}$, nous allons énoncer quelques résultats utiles.

Lemme II.3.7 : *Le système*

$$(II.3.13)\qquad \begin{cases} -\partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k)) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \setminus T \\ \omega_k = 0 & \text{sur } \partial T \\ \omega_k = e_k & \text{à l'infini} \\ |\varepsilon(\omega_k)|_{L^2(\mathbb{R}^n - T)} < +\infty \end{cases}$$

admet une solution unique.

Démonstration : voir annexe D, Lemme D.1.

Lemme II.3.8 : *Soit ω_k la solution unique du système (II.3.13).*

Soit

$$(II.3.14)\qquad F_k = \int_{\partial T} a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k)n_j e_i ds$$

où n est la normale extérieure à T.

La solution ω_k a le comportement suivant à l'infini :

$$(II.3.15)\qquad \begin{cases} \omega_k = e_k - \dfrac{1}{2\lambda\mu S_n(m+1)}\dfrac{1}{r^{n-2}}\left[\dfrac{2m+1}{n-2}F_k + (F_k.e_r)e_r\right][1+o(1)] \\ \nabla\omega_k = O(\dfrac{1}{r^{n-1}}) \\ a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k)n_j e_i = \dfrac{1}{2S_n(m+1)r^{n-1}}\left[2mF_k + \dfrac{nm+m+n-1}{m}(F_k.e_r)e_r\right] + O(\dfrac{1}{r^n}). \end{cases}$$

Démonstration : voir annexe D, Lemme D.4.

Maintenant, on définit les fonctions $(\omega_k^\varepsilon)_{1\le k\le n}$ de la façon suivante :

$$(II.3.16)\qquad \begin{cases} - \text{ Pour tout pavé } P_\nu^\varepsilon \text{ qui coupe } \partial\Omega, \text{ on pose :} \\ \qquad \omega_k^\varepsilon = e_k \qquad \text{dans} \quad P_\nu^\varepsilon \cap \Omega \\ - \text{ Pour tout pavé entièrement inclus dans } \Omega, \text{ on pose :} \\ \qquad \omega_k^\varepsilon = e_k \qquad \text{dans} \quad K_\nu^\varepsilon \\ \qquad -\partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)) = 0 \qquad \text{dans} \quad D_\nu^\varepsilon \\ \qquad \omega_k^\varepsilon = \omega_k(\dfrac{x}{a_\varepsilon}) \qquad \text{dans} \quad C_\nu^\varepsilon \\ \qquad \omega_k^\varepsilon = 0 \qquad \text{dans} \quad T_\nu^\varepsilon \\ \text{et} \quad \omega_k^\varepsilon \in [H^1(P_\nu^\varepsilon)]^n, \end{cases}$$

où ω_k est la solution du système (II.3.13).

Dans C_ν^ε, on a défini ω_k^ε par : $\omega_k^\varepsilon(x) = \omega_k\left(\dfrac{x}{a_\varepsilon}\right)$.

On a alors : $-\partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)) = 0 \qquad \text{dans } C_\nu^\varepsilon.$

Grâce au lemme II.3.8 on obtient les estimations nécessaires pour ω_k^ε dans C_ν^ε.

Lemme II.3.9 :

Soient $(\omega_k^\varepsilon)_{1\le k\le n}$ les fonctions définies en (II.3.16).

Il existe une constante c qui ne dépend pas de ε telle que :

$$(II.3.17)\qquad |\varepsilon(\omega_k^\varepsilon)|^2_{L^2(C_\nu^\varepsilon)} \le c\varepsilon^n.$$

Sur $\partial C_\nu^\varepsilon \cap \partial D_\nu^\varepsilon$ *on a* $r_\nu = \dfrac{\varepsilon}{2}$ *et :*

$$(II.3.18)\qquad \begin{cases} \omega_k^\varepsilon(r_\nu = \dfrac{\varepsilon}{2}) = e_k + O(\varepsilon^2) \\ \nabla\omega_k^\varepsilon(r_\nu = \dfrac{\varepsilon}{2}) = O(\varepsilon) \\ a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)(e_r^\nu.e_j)e_i = \dfrac{2^n C_o^{n-2}}{4S_n(m+1)}\varepsilon\left[2mF_k + \dfrac{nm+m+n-1}{m}(F_k.e_r^\nu)e_r^\nu\right] + O(\varepsilon^{n/n-2}) \end{cases}$$

(*II.3.19*)
$$|\omega_k^\varepsilon - e_k|^2_{L^2(C_\nu^\varepsilon)} \leq c \begin{cases} \varepsilon^7 & si \quad n=3 \\ \varepsilon^8|log\varepsilon| & si \quad n=4 \\ \varepsilon^{n^2/(n-2)} & si \quad n \geq 5 \end{cases}$$

où c est une constante indépendente de ε.

Démonstration :

Nous reprenons ici la démonstration faite dans [2] avec modification lorsque c'est nécéssaire.

Le lemme II.3.7 nous dit que : $|\varepsilon(\omega_k)|_{L^2(\mathbb{R}^n - T)} \leq c < +\infty$.

On fait le changement d'échelle $x \mapsto \dfrac{x}{a_\varepsilon}$ et comme on a : $\omega_k^\varepsilon(x) = \omega_k\Big(\dfrac{x}{a_\varepsilon}\Big)$ dans C_ν^ε,

il vient :

$$\int_{B_R \setminus T} |\varepsilon(\omega_k)|^2 = \int_{C_\nu^\varepsilon} a_\varepsilon^2 |\varepsilon(\omega_k^\varepsilon)|^2 \frac{1}{a_\varepsilon} \qquad \text{avec} \qquad R = \frac{\varepsilon}{2a_\varepsilon}.$$

Or $a_\varepsilon^{n-2} = C_o^{n-2}\varepsilon^n$.

D'où le résultat :

$$|\varepsilon(\omega_k^\varepsilon)|^2_{L^2(C_\nu^\varepsilon)} \leq a_\varepsilon^{n-2} |\varepsilon(\omega_k)|^2_{L^2(\mathbb{R}^n \setminus T)} \leq c\varepsilon^n.$$

D'autre part, comme $a_\varepsilon = C_o\varepsilon^{n/n-2} << \varepsilon$, on peut appliquer le lemme II.3.8 avec $r = \dfrac{\varepsilon}{2a_\varepsilon}$ et il vient :

$$\begin{aligned}
\omega_k^\varepsilon\Big(r_\nu = \frac{\varepsilon}{2}\Big) &= e_k + O(\varepsilon^2) \\
\nabla\omega_k^\varepsilon\Big(r_\nu = \frac{\varepsilon}{2}\Big) &= \frac{1}{a_\varepsilon} O\Big(\Big(\frac{a_\varepsilon}{\varepsilon}\Big)^{n-1}\Big) = O(\varepsilon) \\
a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)(e_r^\nu . e_j)e_i &= \frac{2^n C_o^{n-2}}{4S_n(m+1)} \frac{a_\varepsilon^{n-2}}{\varepsilon^{n-1}} \Big[2mF_k + \frac{nm+m+n-1}{m}(F_k . e_r^\nu)e_r^\nu\Big] + O\Big(\frac{a_\varepsilon^{n-1}}{\varepsilon^n}\Big) \\
&= \frac{2^n C_0^{n-2}}{4S_n(m+1)} \varepsilon \Big[2mF_k + \frac{nm+m+n-1}{m}(F_k . e_r^\nu)e_r^\nu\Big] + O(\varepsilon^{n/n-2}).
\end{aligned}$$

Il ne reste donc plus qu'à démontrer l'estimation (II.3.19).

Le lemme II.3.8 nous dit que : $\omega_k - e_k = O\Big(\dfrac{1}{r^{n-2}}\Big)$.

Soit B_R la boule ouverte de rayon $R \geq 1$ et centrée sur l'origine. On a :

$$|\omega_k - e_k|^2_{L^2(B_R \setminus T)} = \begin{cases} O(R) & \text{si} \quad n=3 \\ O(LogR) & \text{si} \quad n=4 \\ O(1) & \text{si} \quad n \geq 5, \end{cases}$$

d'autre part :

$$|\omega_k^\varepsilon - e_k|^2_{L^2(C_\nu^\varepsilon)} = a_\varepsilon^n |\omega_k - e_k|^2_{L^2(B_R \setminus T)} \qquad \text{avec} \qquad R = \frac{\varepsilon}{2a_\varepsilon}$$

d'où l'estimation (II.3.19).

C.Q.F.D.

Dans D_ν^ε les fonctions ω_k^ε sont définies par :

$$\text{(II.3.20)} \qquad \begin{cases} -\partial(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)) = 0 & \text{dans } D_\nu^\varepsilon \\ \omega_k^\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial D_\nu^\varepsilon \cap \partial K_\nu^\varepsilon \\ \omega_k^\varepsilon = \omega_k\Big(\dfrac{\varepsilon}{2a_\varepsilon}\Big) & \text{sur } \partial C_\nu^\varepsilon \cap \partial D_\nu^\varepsilon. \end{cases}$$

Ce système admet une unique solution $\omega_k^\varepsilon \in [H^1(D_\nu^\varepsilon)]^n$.

Le lemme suivant nous donne des estimations de ω_k^ε dans D_ν^ε.

Lemme II.3.10 :

Soient $(\omega_k^\varepsilon)_{1\le k\le n}$ les fonctions définies en (II.3.16). On a dans D_ν^ε :

$$\text{(II.3.21)} \qquad \begin{cases} |\nabla\omega_k^\varepsilon|^2_{L^2(D_\nu^\varepsilon)} \le c\,\varepsilon^{n+2} \\ |\omega_k^\varepsilon - e_k|^2_{L^2(D_\nu^\varepsilon)} \le c\,\varepsilon^{n+4} \end{cases}$$

où c ne dépend pas de ε.

Démonstration :

Nous suivons la démonstration faite dans [2].

L'ouvert D_ν^ε est une couronne de rayons exterieur ε et interieur $\varepsilon/2$, qui est homothètique de rapport ε à la couronne D de rayons extérieur 1 et intérieur $1/2$.

Or dans D, on a le résultat suivant :

Pour tout $v \in [H^1(D)]^n$, le système ci dessous (II.3.22) admet une solution unique :

$$\text{(II.3.22)} \qquad \begin{cases} \text{Trouver } w \in [H^1(D)]^n \text{ tel que :} \\ -\partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(w)) = 0 \quad \text{dans } D \\ w = v \quad \text{sur } \partial D \end{cases}$$

et cette solution vérifie si $v \in [W^{1,\infty}(D)]^n$

$$\text{(II.3.23)} \qquad \begin{cases} |\nabla w|_{L^2(D)} \le c\,[\,|v|_{L^\infty(\partial D)} + |\nabla v|_{L^\infty(\partial D)}\,] \\ |w|_{L^2(D)} \le c\,[\,|v|_{L^\infty(\partial D)} + |\nabla v|_{L^\infty(\partial D)}\,]. \end{cases}$$

On considère maintenant le système suivant (II.3.24) dans D_ν^ε qui est équivalent à (II.3.22) dans D :

$$\text{(II.3.24)} \qquad \begin{cases} \text{Trouver } w_\varepsilon \in [H^1(D_\nu^\varepsilon)]^n \text{ tel que :} \\ -\partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(w_\varepsilon)) = 0 \quad \text{dans } D_\nu^\varepsilon \\ w_\varepsilon = v_\varepsilon \quad \text{sur } \partial D_\nu^\varepsilon. \end{cases}$$

Alors en posant :

$$\text{(II.3.25)} \qquad \begin{cases} w(y) = \dfrac{1}{\varepsilon} w_\varepsilon(\varepsilon y) \\ v(y) = \dfrac{1}{\varepsilon} v_\varepsilon(\varepsilon y). \end{cases}$$

On tire de (II.3.23) par une homothétie de rapport ε que :

$$\begin{cases} |\nabla w_\varepsilon|_{L^2(D_\nu^\varepsilon)} \le c\,\varepsilon^{n/2}[\,\dfrac{1}{\varepsilon}|v_\varepsilon|_{L^\infty(\partial D_\nu^\varepsilon)} + |\nabla v_\varepsilon|_{L^\infty(\partial D_\nu^\varepsilon)}\,] \\ |w_\varepsilon|_{L^2(D_\nu^\varepsilon)} \le c\,\varepsilon^{n/2}[\,\dfrac{1}{\varepsilon}|v_\varepsilon|_{L^\infty(\partial D_\nu^\varepsilon)} + |\nabla v_\varepsilon|_{L^\infty(\partial D_\nu^\varepsilon)}\,]. \end{cases}$$

On applique ce résultat pour $v_\varepsilon = \omega_k^\varepsilon - e_k$ sur $\partial D_\nu^\varepsilon \cap \partial C_\nu^\varepsilon$ et il vient grâce au lemme II.3.9 :

$$\begin{cases} |\nabla \omega_k^\varepsilon|^2_{L^2(D_\nu^\varepsilon)} \leq c\varepsilon^{n+2} \\ |\omega_k^\varepsilon - e_k|^2_{L^2(D_\nu^\varepsilon)} \leq c\varepsilon^{n+4}. \end{cases}$$

C.Q.F.D.

Lemme II.3.11 : *Les fonctions $(\omega_k^\varepsilon)_{1\leq k\leq n}$ définies en (II.3.16) vérifient les hypothèses (H1),(H2) et (H3). De plus on a :*

$$|\omega_k^\varepsilon - e_k|_{L^2(\Omega)} \leq c \begin{cases} \varepsilon^2 & si \quad n=3 \\ \varepsilon^2 |log\varepsilon|^{\frac{1}{2}} & si \quad n=4 \\ \varepsilon^{n/(n-2)} & si \quad n \geq 5 \end{cases} \tag{II.3.26}$$

où c est une constante indépendente de ε.

Démonstration :

Les hypothèses (H1) et (H2) sont trivialement vérifiées.

A partir des lemmes II.3.9 et II.3.10, on obtient II.3.26 et

$$|\nabla \omega_k^\varepsilon|^2_{L^2(\Omega)} \leq c.$$

Donc

$$\omega_k^\varepsilon \longrightarrow 0 \quad \text{dans} \quad [L^2(\Omega)]^n \quad \text{fort}$$

et comme ω_k^ε est bornée dans $[H^1(\Omega)]^n$ on a :

$$\omega_k^\varepsilon \rightharpoonup e_k \quad \text{dans} \quad [H^1(\Omega)]^n \quad \text{faible}.$$

C.Q.F.D.

Avant de vérifier les hypothèses (H4) et (H5)', on remarque que :

$$\begin{cases} -\partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)) = \mu_{k,i}^\varepsilon - \gamma_{k,i}^\varepsilon \\ \text{avec} \quad \gamma_k^\varepsilon = 0 \quad \text{dans} \quad [H^{-1}(\Omega_\varepsilon)]^n \\ \text{et} \quad \mu_k^\varepsilon = \sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} (a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)(e_r^\nu . e_j)\, e_i)\, \delta_\nu^{\varepsilon/2} - \partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)\chi_\varepsilon)e_i, \end{cases} \tag{II.3.27}$$

où $\delta_\nu^{\varepsilon/2}$ est la masse unité portée par la sphère de rayon $\varepsilon/2$ centrée au centre de P_ν^ε et χ_ε est la fonction caractéristique de $\cup_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} D_\nu^\varepsilon$.

La démonstration du lemme (II.3.10) nous montre que :

$$|\nabla \omega_k^\varepsilon|^2_{L^2(\cup_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} D_\nu^\varepsilon)} \leq \varepsilon^2 \tag{II.3.28}$$

donc

$$-\partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)\chi_\varepsilon)e_i \longrightarrow 0 \quad \text{dans} \quad [H^{-1}(\Omega)]^n \quad \text{fort.} \tag{II.3.29}$$

Il nous reste à prouver qu'il existe $\mu_k \in [W^{-1,\infty}(\Omega)]^n$ tel que :

$$\sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} (a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)\,(e_r^\nu.e_j)\,e_i)\,\delta_\nu^{\varepsilon/2} \longrightarrow \mu_k \text{ dans } [H^{-1}(\Omega)]^n \text{ fort.}$$

Théorème II.3.12 :

Les fonctions $(\omega_k^\varepsilon)_{k=1}^n$ définies en (II.3.16) et les vecteurs constants μ_k définis par :

$$(II.3.30) \qquad \mu_k = \frac{C_0^{n-2}}{2^{n+1}}\left(\frac{2nm^2+nm+m+n-1}{nm(m+1)}\right)F_k \quad \text{pour} \quad 1 \le k \le n$$

où F_k est donné par (II.3.14),
vérifient les hypothèses (H4) et (H5)'.

Démonstration :

Comme μ_k est un vecteur constant alors $\mu_k \in [W^{-1,\infty}(\Omega)]^n$.

D'autre part le Lemme II.3.9 donne :

$$a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon))\,(e_r^\nu.e_j)\,e_i(r_\nu = \frac{\varepsilon}{2}) = \frac{2^n C_0^{n-2}}{4S_n(m+1)}\varepsilon\left[2mF_k + \frac{nm+m+n-1}{m}(F_k.e_i^r)e_i^r\right] + O(\varepsilon^{n/n-2}).$$

Le lemme II.2.4 nous dit que :

$$(II.3.31) \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} \frac{\varepsilon}{2}\delta_\nu^{\varepsilon/2} \longrightarrow \frac{S_n}{4^n} & \text{dans} \quad H^{-1}(\Omega) \quad \text{fort} \\ \displaystyle\sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} \frac{\varepsilon}{2}\delta_\nu^{\varepsilon} F_k(e_r^\nu.e_k)\,e_r^\nu \longrightarrow \frac{S_n}{n4^n}F_k & \text{dans} \quad [H^{-1}(\Omega)]^n \quad \text{fort.} \end{cases}$$

Or $\varepsilon^{n/n-2} = \varepsilon^{1+2/n-2}$ donc

$$\sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} \varepsilon^{n/n-2}\delta_\nu^{\varepsilon/2} \longrightarrow 0 \qquad \text{dans} \quad H^{-1}(\Omega) \quad \text{fort.}$$

Il nous reste finalement :

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon))\,(e_r^\nu.e_j)\,e_i\delta_\nu^{\varepsilon/2} &\longrightarrow \frac{2^n C_0^{n-2}}{2S_n(m+1)}\left[2m\frac{S_n}{4^n}F_k + \frac{nm+m+n-1}{m}\frac{S_n}{n4^n}F_k\right] \\ &= \frac{2^n C_0^{n-2}}{2.4^n(m+1)}\left[2m + \frac{nm+m+n-1}{nm}\right]F_k \\ &= \frac{C_0^{n-2}}{2^{n+1}(m+1)}\left[2m+1+\frac{m+n-1}{nm}\right]F_k \\ &= \mu_k. \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

Lemme II.3.13 :

Les vecteurs constants μ_k définis par (II.3.30) vérifient l'hypothèse (H6).

Démonstration :

Pour vérifier (H6) il suffit de montrer que :

$$\lambda \longmapsto F_k(\lambda) \in \mathbb{C}^n \text{est holomorphe}$$
$$et$$
$$|F_k(\lambda)| \leq cPol(|\lambda|) \text{ pour } Re\lambda > \beta > 0.$$

On reprend les notations de l'annexe D.

On rappelle que :

$$F_k(\lambda) = \int_{\partial T} a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k)n_j e_i = \int_{B_1} f(\lambda, y)dy$$
$$\omega_k = v_k + a_k$$
$$A(\lambda)v_k = -\tilde{A}a_k \quad \text{avec} \quad (Au)_i = -\partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(u)) \quad \text{et} \quad \tilde{A}\,|_H = A$$
$$A \in \mathcal{L}(H, H') \quad \text{et} \quad \tilde{A} \in \mathcal{L}(V, V').$$

L'application $\lambda \longmapsto A(\lambda) \in \mathcal{L}(H, H')$ (resp. $\tilde{A}(\lambda) \in \mathcal{L}(V, V')$) est holomorphe sur $\{Re\lambda > \beta\}$ car c'est un polynôme et $|A(\lambda)|_{\mathcal{L}(H,H')} \leq c|\lambda|$ (resp. $|\tilde{A}(\lambda)|_{\mathcal{L}(V,V')} \leq c|\lambda|$.)

Il est facile de vérifier à l'aide de I.3.4 que :

$$\begin{cases} \|A^{-1}(\lambda)\|_{\mathcal{L}(H',H)} \leq c \\ \text{où c est une constante indépendante de } \lambda. \end{cases}$$

D'autre part a_k est indépendant de λ donc $\tilde{A}a_k$ est holomorphe sur $\{Re\lambda > \beta\}$.

D'après le lemme I.5.6 $\lambda \longmapsto v_k(\lambda) = A(\lambda)^{-1}(-\tilde{A}a_k)$ est holomorphe et on a : $|v_k|_H \leq c|\lambda|$

d'où

$$\begin{cases} \lambda \longmapsto \omega_k(\lambda) \quad \text{est holomorphe sur } \{Re\lambda > \beta\} \\ \text{et} \quad |\omega_k|_H \leq c\,Pol(|\lambda|). \end{cases}$$

Comme θ est indépendante de λ, on déduit que :

$$\begin{cases} \lambda \longmapsto f(\lambda) = A(\lambda)\tilde{\omega}_k = A(\lambda)((1-\theta)\omega_k) \text{ est holomorphe sur } \{Re\lambda > \beta\} \\ \text{et} \quad |f(\lambda)|_{V'} \leq cPol(|\lambda|). \end{cases}$$

Maintenant pour $h \in \mathbb{C}$ $h \to 0$ on a :

$$\frac{F_k(\lambda+h) - F_k(\lambda)}{h} = \int_{B_1} \frac{f(\lambda+h, y) - f(\lambda, y)}{h} dy = -\int_{B_1} f_h(\lambda, y)dy,$$
$$f_h(\lambda, y) \to \frac{df}{d\lambda}(\lambda, y) \quad \text{quand} \quad h \to 0 \quad \text{car f est holomorphe,}$$
$$f_h(\lambda, y) = \frac{df}{d\lambda}(\lambda + \theta\lambda, y) \qquad 0 < \theta < 1.$$

L'application f est l'image de Laplace d'une distribution de $\mathcal{D}'_+(V')$, donc il en est de même de $\frac{df}{d\lambda}$ alors

$$|\frac{df}{d\lambda}(\lambda)| \leq cPol(|\lambda|)$$

d'où

$$|f_h(\lambda, y)| = |\frac{df}{d\lambda}(\lambda + \theta h)| \leq cPol(|\lambda + \theta h|) \leq c' Pol(|\lambda|)$$

car $\qquad h \to 0 \qquad$ et $\qquad 0 < \theta < 1.$

D'après le théorème de convergence dominé de Lebesgue on déduit que $\lim_{h \to 0} \frac{F_k(\lambda + h) - F_k(\lambda)}{h}$ existe, par suite $\lambda \longmapsto F_k(\lambda)$ est holomorphe sur $\{Re\lambda > \beta\}$. De plus on a :

$$|F_k(\lambda)| \leq \int_{B_1} |f(\lambda, y)|_{V'} dy \leq cPol(|\lambda|)$$

d'où le résultat.

C.Q.F.D.

Remarque II.3.14 :

En dimension $n \geq 3$, la matrice M dépend de la forme du trou T. C'est le cas pour le Laplacien [12] et le problème de Stokes [2].

La quantité $F_k = \int_{\partial T} a_{ijlh} \varepsilon_{lh}(\omega_k) n_j e_i$ apparait comme une force exercée sur le trou T par le fluide. La matrice M, comme dans le cas $n = 2$, nous montre donc la résistance des trous à la limite.

II.4 . **Estimation d'erreur** :

Théorème II.4.1 : *On suppose que la solution du problème homogénéisé (I.5.1) vérifie : $u \in [W^{2,\infty}(\Omega)]^n$. Il existe alors une constante $c > 0$, qui ne dépend que de Ω, T et n telle que :*

$$(II.4.1) \qquad \|\tilde{u}_\varepsilon - W_\varepsilon u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c\|u\|_{W^{2,\infty}(\Omega)} \begin{cases} \varepsilon & si \quad n = 2 \\ \varepsilon + \varepsilon^{2/(n-2)} & si \quad n \geq 3. \end{cases}$$

Pour démontrer le théorème, nous allons utiliser l'estimation d'erreur abstraite obtenue au $7^{ème}$ paragraphe de la 1^{ere} partie. Pour cela, on établit les lemmes qui suivent.

Lemme II.4.2 : *Soient $(\omega_k^\varepsilon)_{1\leq k\leq n}$ les fonctions définies en (II.3.1) si $n = 2$ ou en (II.3.16) si $n \geq 3$ on a :*

$$(II.4.2) \qquad \|\nabla\omega_k^\varepsilon\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq |\omega_k^\varepsilon - e_k|_{L^2(\Omega)}$$

et

$$(II.4.3) \qquad |\omega_k^\varepsilon - e_k|_{L^2(\Omega)} \leq c\varepsilon \qquad \forall n \geq 2.$$

Démonstration :

L'inégalité (II.4.2) est une simple conséquence de la continuité de l'opérateur gradient de $L^2(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$. L'inégalité (II.4.3) est une conséquence des lemmes II.3.2 et II.3.11.

C.Q.F.D.

Lemme II.4.3 :

Soit δ_ν^ε la masse unité portée par la sphère de rayon ε, centrée au centre de P_ν^ε. Pour $n \geq 2$, on a :

$$(II.4.4) \qquad \|\sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} \varepsilon\delta_\nu^\varepsilon - \frac{S_n}{2^n}\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq c\varepsilon$$

$$(II.4.5) \qquad \|\sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} \varepsilon\delta_\nu^\varepsilon (e_k.e_r^\nu)e_r^\nu - \frac{S_n}{n2^n}e_k\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq c\varepsilon$$

où e_r^ν est le vecteur unitaire radial dans le pavé P_ν^ε et c une constante indépendante de ε.

Démonstration : voir Annexe E (Lemme E.2) .

Lemme II.4.4 : *Soient $(\mu_k^\varepsilon)_{1\le k\le n}$ les quantités définies par :*

$$\mu_k^\varepsilon = \sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_{ok}^\varepsilon)(e_r^\nu.e_j)e_i\delta_\nu^\varepsilon + \sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^{\varepsilon\prime})(e_r^\nu.e_j)e_i\delta_\nu^\varepsilon \qquad si\ n=2$$

$$\mu_k^\varepsilon = \sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} (a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)\,(e_r^\nu.e_j)\,e_i)\,\delta_\nu^{\varepsilon/2} - \partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)\chi_\varepsilon)e_i \qquad si\ n\ge 3$$

(voir II.3.10 et II.3.27) où δ_ν^ε est la masse unité portée par la sphère $\partial C_\nu^\varepsilon \cap \partial K_\nu^\varepsilon$, $\delta_\nu^{\varepsilon/2}$ est la masse unité portée par la sphère $\partial C_\nu^\varepsilon \cap \partial D_\nu^\varepsilon$ et χ_ε est la fonction caractéristique de $\cup_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} D_\nu^\varepsilon$. Alors

$$\|\mu_k^\varepsilon - \mu_k\|_{H^{-1}(\Omega)} \le c\begin{cases} \varepsilon & si\ \ n=2 \\ \varepsilon + \varepsilon^{2/(n-2)} & si\ \ n\ge 3 \end{cases} \tag{II.4.6}$$

où c ne dépend pas de ε.

Démonstration : Pour démontrer ce lemme, nous avons utilisé les travaux de [2], [30] et [31].

On considère d'abord le cas n ≥ 3. On a :

$$\|\mu_k^\varepsilon - \mu_k\|_{H^{-1}(\Omega)} \le \|\partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)\chi_\varepsilon)e_i\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|\sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)}(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)\,(e_r^\nu.e_j)\,e_i)\,\delta_\nu^{\varepsilon/2} - \mu_k\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

Le lemme II.3.10 nous dit que :

$$|\nabla\omega_k^\varepsilon|^2_{L^2(D_\nu^\varepsilon)} \le c\,\varepsilon^{n+2}$$

d'où

$$\|\partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)\chi_\varepsilon)e_i\|^2_{H^{-1}(\Omega)} \le c\sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)}|\nabla\omega_k^\varepsilon|^2_{L^2(D_\nu^\varepsilon)} \le c\,\varepsilon^2$$

soit

$$\|\partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)\chi_\varepsilon)e_i\|_{H^{-1}(\Omega)} \le c\,\varepsilon. \tag{II.4.7}$$

Pour majorer l'autre terme, nous allons utiliser les lemmes II.4.3 et II.3.9. On a :

$$(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)(e_r^\nu.e_j)e_i)(r_\nu = \frac{\varepsilon}{2}) = \frac{2^nC_0^{n-2}}{4S_n(m+1)}\varepsilon\left[2mF_k + \frac{nm+m+n-1}{m}(F_k.e_r^\nu)e_r^\nu\right] + r_\varepsilon$$

avec

$$|r_\varepsilon|_{L^\infty(\Omega)} \le c\,\varepsilon^{n/(n-2)}$$

donc

$$\sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)}(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)\,(e_r^\nu.e_j)\,e_i)\,\delta_\nu^{\varepsilon/2} - \mu_k = \frac{2^nC_0^{n-2}}{4S_n(m+1)}\sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)}\left[2mF_k + \frac{nm+m+n-1}{m}(F_k.e_r^\nu)e_r^\nu\right]\varepsilon\delta_\nu^{\varepsilon/2} -$$

$$- \mu_k + \sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} r_\varepsilon\delta_\nu^{\varepsilon/2}.$$

D'après (II.4.5), on a :

$$\left\|\frac{2^nC_0^{n-2}}{4S_n(m+1)}\sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)}[2mF_k + \frac{nm+m+n-1}{m}(F_k.e_r^\nu)e_r^\nu]\varepsilon\delta_\nu^{\varepsilon/2} - \mu_k\right\|_{H^{-1}(\Omega)} \le c\varepsilon. \tag{II.4.8}$$

D'autre part, on a :

$$\left\|\sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} r_\varepsilon\delta_\nu^{\varepsilon/2}\right\|_{H^{-1}(\Omega)} \le c\,\varepsilon^{2/(n-2)}\left\|\sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)}\frac{\varepsilon}{2}\delta_\nu^{\varepsilon/2}\right\|_{H^{-1}(\Omega)} \le c\,\varepsilon^{2/(n-2)} \tag{II.4.9}$$

car d'aprés (II.4.4), la quantité $\left\|\sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} \frac{\varepsilon}{2}\delta_\nu^{\varepsilon/2}\right\|_{H^{-1}(\Omega)}$ est bornée.

Des inégalités (II.4.7), (II.4.8) et (II.4.9), on déduit que :

$$\|\mu_k^\varepsilon - \mu_k\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq c(\varepsilon + \varepsilon^{2/(n-2)}).$$

Pour le <u>cas n = 2</u> , on a :

$$\mu_k^\varepsilon - \mu_k = \sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_{ok}^\varepsilon)(e_r^\nu.e_j)e_i\delta_\nu^\varepsilon - \mu_k + \sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^{\varepsilon\prime})(e_r^\nu.e_j)e_i\delta_\nu^\varepsilon.$$

Or dans la démonstration du théorème II.3.3, nous avons obtenu :

$$\|\sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^{\varepsilon\prime})(e_r^\nu.e_j)e_i\delta_\nu^\varepsilon\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq c\varepsilon \tag{II.4.10}$$

où c ne dépend pas de ε.

D'autre part, un calcul direct nous donne :

$$\sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_{ok}^\varepsilon)(e_r^\nu.e_j)e_i\delta_\nu^\varepsilon = \left[\frac{\lambda\mu}{C_o}(1 - \frac{2m+3}{(1+2m)^2})\sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} \varepsilon\delta_\nu^\varepsilon\, e_k + \right.$$
$$\left. + \frac{4\lambda\mu}{(1+2m)C_o}(1 + \frac{1}{1+2m})\sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} \varepsilon(e_r^\nu.e_k)\, e_r^\nu\delta_\nu^\varepsilon\, e_k\right][1 + o(1)]$$

où $o(1)$ est une fonction vérifiant : $|o(1)| \leq c\varepsilon^2|log\varepsilon|$.

A l'aide du lemme II.4.3, on déduit que :

$$\|\sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_{ok}^\varepsilon)(e_r^\nu.e_j)e_i\delta_\nu^\varepsilon - \mu_k\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq c(\varepsilon + \varepsilon^2|log\varepsilon|)$$

d'où finalement. $\|\mu_k^\varepsilon - \mu_k\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq c\varepsilon$

C.Q.F.D.

<u>Démonstration du théorème II.4.1</u> :

Nous avons obtenu dans la proposition I.7.1 l'inégalité suivante :

$$\|\tilde{u_\varepsilon} - W_\varepsilon u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c\|u\|_{W^{2,\infty}(\Omega)}\,(\,|Id - W_\varepsilon|_{L^2(\Omega)} + \|M_\varepsilon - M\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|\nabla W_\varepsilon\|_{H^{-1}(\Omega)}\,).$$

Le théorème est donc une conséquence directe des lemmes II.4.2 et II.4.4.

C.Q.F.D.

III - CAS DES PETITS TROUS PÉRIODIQUEMENT RÉPARTIS DANS UN HYPERPLAN.

III.1 . Déscription de la géomètrie considérée :

Nous reprenons ici la déscription donnée par [2].

Soit Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$, de classe C^1 par morceaux.
Soit H l'hyperplan de $\mathbb{R}^n$ d'équation $x_n = 0$ qu'on suppose d'intersection non vide avec Ω

$$H = \{ x \in \mathbb{R}^n \ / \ x_n = 0 \}. \tag{III.1.1}$$

Comme H s'identifie naturellement à $\mathbb{R}^{n-1}$, on recouvre H d'un maillage régulier de pas 2ε dans la direction de chacun des axes de $\mathbb{R}^{n-1}$. Chaque cellule du maillage est un cube Q_ν^ε identique, à une translation près, à $(-\varepsilon, +\varepsilon)^{n-1}$ (voir figure 6).

L' ouvert H_ε définit par :

$$H_\varepsilon = \{ x \in \Omega \ / \ x = (x_1, ..., x_n) \ \text{ avec } \ (x_1, ..., x_{n-1}) \in H \ \text{ et } \ |x_n| < \varepsilon \} \tag{III.1.2}$$

est alors recouvert de pavés P_ν^ε de $\mathbb{R}^n$ définis par :

$$P_\nu^\varepsilon = Q_\nu^\varepsilon \times]-\varepsilon, \varepsilon[. \tag{III.1.3}$$

Au centre de chaque P_ν^ε inclus dans H_ε, est centré un trou T_ν^ε, l'homothétique de rapport a_ε du fermé T défini par (II.1.1). La taille a_ε est donnée par :

$$a_\varepsilon = \begin{cases} C_o \varepsilon^{\frac{n-1}{n-2}} & \text{pour} \quad n \geq 3 \\ e^{-\frac{C_o}{\varepsilon}} & \text{pour} \quad n = 2 \quad \text{avec } C_o > 0. \end{cases} \tag{III.1.4}$$

Une simple considération géomètrique nous donne le nombre de trous, soit :

$$n(\varepsilon) = \frac{|\Omega|}{(2\varepsilon)^{n-1}}[1 + o(1)]$$

où $|\Omega|$ est la mesure de Ω.

L'ouvert Ω_ε (voir figure 7) est obtenu en otant de l'ouvert Ω les trous T_ν^ε.

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \cup_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} T_\nu^\varepsilon. \tag{III.1.5}$$

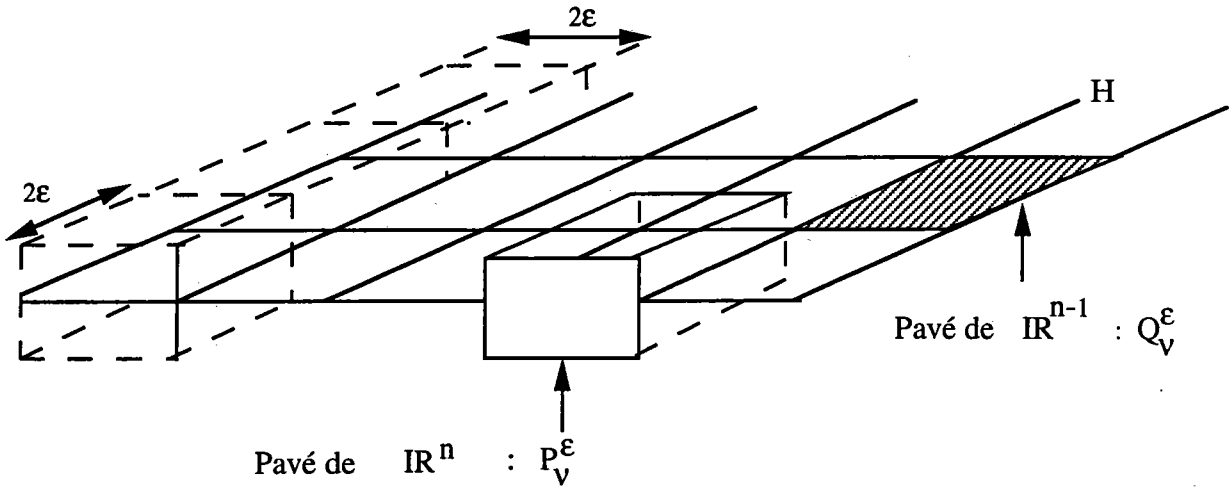


figure 6

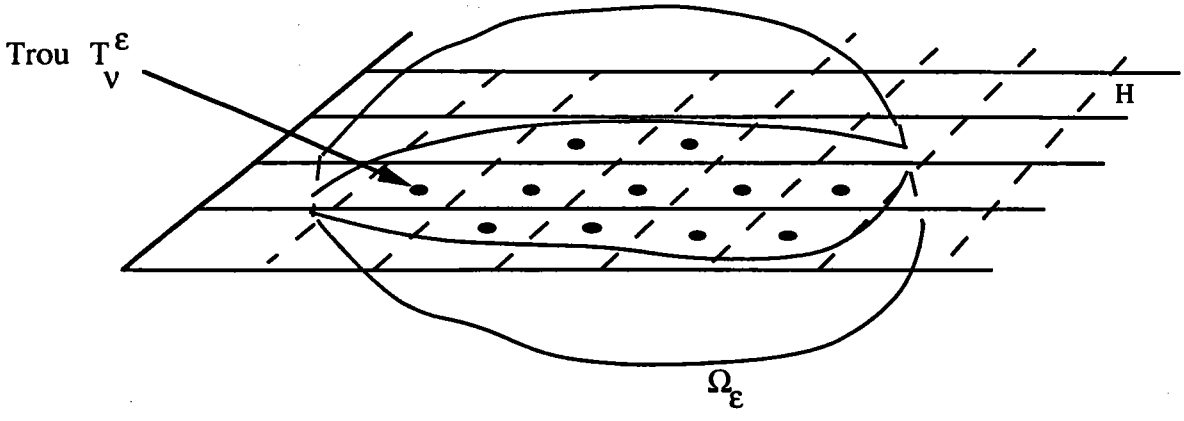


figure 7

III.2 . **Vérification des hypothèses (H1) à (H6)** :

A. Cas de la dimension $n \geq 3$

Nous reprenons ici la même construction des fonctions $(\omega_k^\varepsilon, \mu_k)_{k=1}^n$ que dans le cas d'une répartition en volume des trous.

Seuls le nombre et la taille a_ε des trous changent, aussi nous renvoyons pour tous les détails et notations au cas des trous répartis en volume.

On définit les fonctions $(\omega_k^\varepsilon)_{1\leq k\leq n}$ de la façon suivante :

(III.2.1)
$$\begin{cases} - \text{ Pour tout pavé entièrement inclus dans } H_\varepsilon, \text{ on pose :} \\ \qquad \omega_k^\varepsilon = e_k \qquad \text{dans} \quad K_\nu^\varepsilon \\ \quad - \partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)) = 0 \qquad \text{dans} \quad D_\nu^\varepsilon \\ \qquad \omega_k^\varepsilon = \omega_k(\dfrac{x}{a_\varepsilon}) \qquad \text{dans} \quad C_\nu^\varepsilon \\ \qquad \omega_k^\varepsilon = 0 \qquad \text{dans} \quad T_\nu^\varepsilon \\ \text{et} \quad \omega_k^\varepsilon \in [H^1(P_\nu^\varepsilon)]^n. \\ - \text{ Partout ailleurs on pose :} \\ \qquad \omega_k^\varepsilon = e_k \qquad \text{dans} \quad \Omega \setminus \cup_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} P_\nu^\varepsilon \end{cases}$$

où ω_k est la solution du système (II.3.13)

(II.3.13)
$$\begin{cases} - \partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k)) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \setminus T \\ \omega_k = 0 & \text{sur } \partial T \\ \omega_k = e_k & \text{à l'infini} \\ |\varepsilon(\omega_k)|_{L^2(\mathbb{R}^n - T)} < +\infty. \end{cases}$$

Théorème III.2.1 :

Les fonctions $(\omega_k^\varepsilon)_{k=1}^n$ définies en (III.2.1) et les vecteurs μ_k définis par :

(III.2.2)
$$\mu_k = \frac{C_0^{n-2}}{2^n}\left(\frac{2nm^2 + nm + m + n - 1}{nm(m+1)}\right) F_k\, \delta_H \quad \text{pour} \quad 1 \leq k \leq n$$

vérifient les hypothèses (H1) à (H6).

F_k est donné par (II.3.14)

(II.3.14)
$$F_k = \int_{\partial T} a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k) n_j e_i ds$$

et δ_H est la masse portée par l'hyperplan H, c'est à dire que :

(III.2.3)
$$\forall \varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n) \qquad < \delta_H, \varphi >_{\mathfrak{D}', \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)} = \int_H \varphi(s) ds.$$

Avant de démontrer le théorème nous énonçons le lemme ci-dessous démontré dans [2].

Lemme III.2.2 :

Soit δ_ν^ε la masse unité portée par la sphère de rayon ε centrée au centre du pavé P_ν^ε.

On rappelle que les centres des pavés P_ν^ε sont répartis périodiquement dans l'hyperplan H.

Pour $n \geq 2$, on a :

$$(III.2.4) \qquad \begin{cases} \sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} \delta_\nu^\varepsilon \longrightarrow \dfrac{S_n}{2^{n-1}} & \text{dans} \quad H^{-1}(\Omega) \quad \text{fort} \\ \sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} (e_r^\nu . e_k)\, e_r^\nu \delta_\nu^\varepsilon \longrightarrow \dfrac{S_n}{n 2^{n-1}} e_k \delta_H & \text{dans} \quad [H^{-1}(\Omega)]^n \quad \text{fort,} \end{cases}$$

où e_r^ν est le vecteur unitaire radial dans le pavé P_ν^ε, et où δ_H est la masse unité portée par l'hyperplan H.

Démonstration du théorème III.2.1 :

De part leur définition (III.2.1), les fonctions ω_k^ε vérifient les hypothèses (H1) et (H2).

D'autre part pour vérifier (H3), comme le nombre de trous est de l'ordre de $\dfrac{1}{\varepsilon^{n-1}}$ on remarque que :

$$(III.2.5) \qquad \begin{cases} |\nabla \omega_k^\varepsilon|^2_{L^2(\Omega)} \leq \dfrac{c}{\varepsilon^{n-1}} |\nabla \omega_k^\varepsilon|^2_{L^2(P_\nu^\varepsilon)} \\ |\omega_k^\varepsilon - e_k|^2_{L^2(\Omega)} \leq \dfrac{c}{\varepsilon^{n-1}} |\omega_k^\varepsilon - e_k|^2_{L^2(P_\nu^\varepsilon)} \end{cases}$$

où c ne dépend pas de ε.

Par le Lemme II.3.8, on connait des estimations de ω_k et on en déduit :

$$(III.2.6) \qquad \begin{cases} |\varepsilon(\omega_k^\varepsilon)|^2_{L^2(C_\nu^\varepsilon)} \leq c\,\varepsilon^{n-1} \\ |\omega_k^\varepsilon - e_k|^2_{L^2(C_\nu^\varepsilon)} \leq c \begin{cases} \varepsilon^5 & \text{si} \quad n = 3 \\ \varepsilon^6 |log\varepsilon| & \text{si} \quad n = 4 \\ \varepsilon^{n(n-1)/(n-2)} & \text{si} \quad n \geq 5 \end{cases} \end{cases}$$

où c ne dépend pas de ε

et

$$(III.2.7) \qquad \begin{cases} \omega_k^\varepsilon - e_k = O\Big(\big(\dfrac{a_\varepsilon}{\varepsilon}\big)^{n-2}\Big) = O(\varepsilon) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{sur} \quad \partial C_\nu^\varepsilon \cap \partial D_\nu^\varepsilon \\ \nabla \omega_k^\varepsilon = O\Big(\dfrac{1}{a_\varepsilon}\big(\dfrac{a_\varepsilon}{\varepsilon}\big)^{n-1}\Big) = O(1) \end{cases}$$

car $\quad a_\varepsilon = C_o \varepsilon^{n-1/n-2}$.

Des estimations (III.2.7), on déduit par un raisonnement semblable à celui du lemme II.3.10 que :

$$(III.2.8) \qquad \begin{cases} |\nabla \omega_k^\varepsilon|^2_{L^2(D_\nu^\varepsilon)} \leq c\,\varepsilon^n \\ |\omega_k^\varepsilon - e_k|^2_{L^2(D_\nu^\varepsilon)} \leq c\,\varepsilon^{n+2}. \end{cases}$$

En reportant les estimations (III.2.8) dans D_ν^ε et (III.2.7) dans C_ν^ε, on obtient finalement :

$$\text{(III.2.9)} \qquad \begin{cases} |\nabla \omega_k^\varepsilon|_{L^2(\Omega)} \leq c \\ |\omega_k^\varepsilon - e_k|^2_{L^2(\Omega)} \leq c \begin{cases} \varepsilon^3 & \text{si} \quad n=3 \\ \varepsilon^3 |log\varepsilon| & \text{si} \quad n=4 \\ \varepsilon^{2(n-1)/(n-2)} & \text{si} \quad n \geq 5. \end{cases} \end{cases}$$

Avant de vérifier les dernières hypothèses (H4), (H5)' et (H6), on remarque que :

$$\text{(III.2.10)} \qquad \begin{cases} -\partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)) = \mu_{k,i}^\varepsilon - \gamma_{k,i}^\varepsilon \\ \text{avec} \quad \gamma_k^\varepsilon = 0 \quad \text{dans} \quad [H^{-1}(\Omega_\varepsilon)]^n \\ \text{et} \quad \mu_k^\varepsilon = \sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} (a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)(e_r^\nu . e_j) e_i) \delta_\nu^{\varepsilon/2} - \partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)\chi_\varepsilon)e_i, \end{cases}$$

où $\delta_\nu^{\varepsilon/2}$ est la masse unité portée par la sphère de rayon $\varepsilon/2$ centrée au centre de P_ν^ε et χ_ε est la fonction caractéristique de $\cup_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} D_\nu^\varepsilon$.

A partir des estimations (III.2.8) dans D_ν^ε, on voit facilement que :

$$\text{(III.2.11)} \qquad -\partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)\chi_\varepsilon)e_i \longrightarrow 0 \quad \text{dans } [H^{-1}(\Omega)]^n \text{ fort.}$$

Il nous reste donc à prouver qu'il existe $\mu_k \in [W^{-1,\infty}(\Omega)]^n$ tel que :

$$\sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} (a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)(e_r^\nu . e_j) e_i) \delta_\nu^{\varepsilon/2} \longrightarrow \mu_k \text{ dans } [H^{-1}(\Omega)]^n \text{ fort.}$$

Or, d'après les estimations du lemme II.3.8, on a :

$$\text{(III.2.12)} \quad a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon))(e_r^\nu . e_j) e_i (r_\nu = \frac{\varepsilon}{2}) = \frac{2^n C_0^{n-2}}{4S_n(m+1)} \Big[2mF_k + \frac{nm+m+n-1}{m} (F_k . e_i^r) e_i^r \Big] + O(\varepsilon^{1/n-2}).$$

Le lemme III.2.2 nous dit que :

$$\sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} \delta_\nu^{\varepsilon/2} \longrightarrow \frac{S_n}{4^{n-1}} \delta_H \qquad \text{dans} \quad H^{-1}(\Omega) \quad \text{fort}$$

$$\sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} \frac{\varepsilon}{2} \delta_\nu^\varepsilon F_k(e_r^\nu . e_k) e_r^\nu \longrightarrow \frac{S_n}{n4^{n-1}} F_k \delta_H \qquad \text{dans} \quad [H^{-1}(\Omega)]^n \quad \text{fort.}$$

Par conséquent on a :

$$\sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon))(e_r^\nu . e_j) e_i \delta_\nu^{\varepsilon/2} \longrightarrow \frac{2^n C_0^{n-2}}{4S_n(m+1)} \Big[2m \frac{S_n}{4^{n-1}} F_k + \frac{nm+m+n-1}{m} \frac{S_n}{n4^{n-1}} F_k \Big] \delta_H.$$

Les hypothèses (H4) et (H5)' sont donc vérifiées avec μ_k défini par :

$$\text{(III.2.13)} \qquad \mu_k = \frac{C_0^{n-2}}{2^n} \left(\frac{2nm^2+nm+m+n-1}{nm(m+1)} \right) F_k \, \delta_H \quad \text{pour} \quad 1 \leq k \leq n.$$

Enfin, grâce au lemme II.3.13, on a :

$$\lambda \longmapsto \mu_k(\lambda) \in W^{-1,\infty}(\Omega) \text{ est holomorphe sur } \{Re\lambda > \beta\}$$

et

$$|\mu_k(\lambda)|_{W^{-1,\infty}(\Omega)} \leq c\,|F_k(\lambda)|_{\mathbb{C}^{n^2}} |\delta_H|_{W^{-1,\infty}(\Omega)} \leq cPol(|\lambda|),$$

donc μ_k est l'image de Laplace d'une distribution $\mathcal{D}'_+(W^{-1,\infty}(\Omega))$. D'où (H6).

Ceci termine la démonstration du théorème III.2.1.

C.Q.F.D.

B. Cas de la dimension $n = 2$

On se limite ici au cas des trous de forme sphèrique.

Nous reprenons la même construction des fonctions $(\omega_k^\varepsilon, \mu_k)_{k=1}^2$ que dans le cas d'une répartition en volume des trous.

Seuls le nombre et la taille a_ε des trous changent, aussi nous renvoyons le lecteur pour tous les détails et notations au paragraphe II.2.

On rappelle que pour tout pavé P_ν^ε, B_ν^ε est la boule de rayon ε inscrite dans P_ν^ε,

$$C_\nu^\varepsilon = B_\nu^\varepsilon \setminus T_\nu^\varepsilon \qquad \text{et} \qquad K_\nu^\varepsilon = P_\nu^\varepsilon \setminus \overline{B}_\nu^\varepsilon.$$

On définit les fonctions $(\omega_k^\varepsilon)_{1\le k\le 2}$ de la façon suivante :

(III.2.14)
$$\begin{cases} - \text{ Pour tout pavé entièrement inclus dans } H_\varepsilon, \text{ on pose :} \\ \qquad \omega_k^\varepsilon = e_k \qquad\qquad \text{dans } K_\nu^\varepsilon \\ \quad - \partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)) = 0 \qquad \text{dans } C_\nu^\varepsilon \\ \qquad \omega_k^\varepsilon = 0 \qquad\qquad \text{dans } T_\nu^\varepsilon. \\ - \text{ Partout ailleurs on pose :} \\ \qquad \omega_k^\varepsilon = e_k \qquad \text{dans} \quad \Omega \setminus \cup_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} P_\nu^\varepsilon \\ \text{et} \quad \omega_k^\varepsilon \in [H^1(\Omega)]^2. \end{cases}$$

Théorème III.2.3 :

Les fonctions $(\omega_k^\varepsilon)_{k=1}^2$ définies en (III.2.14) et les vecteurs μ_k définis par :

(*III.2.15*)
$$\mu_k = \frac{2\pi}{C_o} \frac{\lambda\mu(c_o^2\rho_o + \lambda(\eta+2\mu))}{c_o^2\rho_o + \lambda(3\mu+\eta)} e_k\delta_H \quad \textit{pour} \quad 1 \le k \le 2$$

vérifient les hypothèses (H1) à (H6).

Démonstration :

Les fonctions $(\omega_k^\varepsilon)_{k=1}^2$ sont définies de manière unique par (III.2.14) et vérifient évidemment les hypothèses (H1) et (H2). De même, les fonctions μ_k de part leur définition (III.2.15) vérifient les hypothèses (H4) et (H6).

Il reste donc à vérifier (H3) et (H5)'.

En reprenant les calculs de l'annexe B, on peut donner une écriture explicite des fonctions $(\omega_k^\varepsilon)_{k=1}^2$ dans chaque C_ν^ε :

$$\omega_k^\varepsilon = x_k r f(r) e_r + g(r) e_k \tag{III.2.16}$$

avec

$$\begin{cases} f(r) = \dfrac{A}{1+2m}\dfrac{1}{r^2} + \dfrac{B}{r^4} + C \\ g(r) = -A\log r - \dfrac{B}{2r^2} - \dfrac{2m+3}{2(1+2m)} C r^2 + D \end{cases} \tag{III.2.17}$$

et avec

$$\begin{cases} A = -\dfrac{\varepsilon}{C_0}[1 + o(1)] \\ B = \dfrac{1}{1+2m}\dfrac{\varepsilon}{C_0} e^{-\dfrac{2C_0}{\varepsilon}}[1 + o(1)] \\ C = \dfrac{1}{(1+2m)C_0\varepsilon}[1 + o(1)] \\ D = 1 - \dfrac{\varepsilon \log \varepsilon}{C_0}[1 + o(1)]. \end{cases} \tag{III.2.18}$$

En procédant comme en II.2, on obtient les estimations suivantes :

$$\begin{cases} |\nabla \omega_k^\varepsilon|^2_{L^2(C_\nu^\varepsilon)} \leq c\varepsilon \\ |\omega_k^\varepsilon - e_k|^p_{L^p(C_\nu^\varepsilon)} \leq c\varepsilon^2 |\varepsilon \log \varepsilon|^p \qquad \text{pour } 1 \leq p < +\infty. \end{cases} \tag{III.2.19}$$

D'où

$$\begin{cases} |\nabla \omega_k^\varepsilon|_{L^2(\Omega)} \leq c \\ |\omega_k^\varepsilon - e_k|_{L^p(\Omega)} \leq c\varepsilon^{1/p} |\varepsilon \log \varepsilon| \qquad \text{pour } 1 \leq p < +\infty. \end{cases} \tag{III.2.20}$$

On déduit alors que l'hypothèse (H3) est vérifiée.

Avant de vérifier l'hypothèse (H5)', on remarque que d'après leur construction les fonctions $(\omega_k^\varepsilon)_{k=1}^2$ vérifient :

$$-\partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)) = \mu_{k,i}^\varepsilon - \gamma_{k,i}^\varepsilon \qquad \text{dans } \Omega$$

où

$$\begin{cases} \mu_k^\varepsilon = \displaystyle\sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)(e_r^\nu . e_j) e_i \delta_\nu^\varepsilon \\ \gamma_k^\varepsilon = \displaystyle\sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)(e_r^\nu . e_j) e_i \delta_{T_\nu^\varepsilon}. \end{cases} \tag{III.2.21}$$

On a :

$$\gamma_k^\varepsilon = 0 \qquad \text{dans} \qquad [H^{-1}(\Omega_\varepsilon)]^2.$$

Pour finir la démonstration du théorème III.2.3, il suffit de prouver que :

$$\begin{cases} \mu_k^\varepsilon \longrightarrow \mu_k \qquad \text{dans} \qquad [H^{-1}(\Omega)]^2 \qquad \text{fort} \\ \text{avec} \qquad \mu_k = \dfrac{2\pi}{C_o}\dfrac{\lambda\mu(c_o^2\rho_o + \lambda(\eta + 2\mu))}{c_o^2\rho_o + \lambda(3\mu + \eta)} e_k \delta_H \quad \text{pour} \quad 1 \leq k \leq 2. \end{cases} \tag{III.2.22}$$

Un calcul simple comparable à celui fait en II.2, nous donne :

$$\mu_k^\varepsilon = \Big(\frac{\lambda\mu}{C_o}\Big[1 - \frac{2m+3}{(1+2m)^2}\Big]\sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)}\delta_\nu^\varepsilon e_k + \frac{4\lambda\mu}{(1+2m)C_o}\Big[1+\frac{1}{1+2m}\Big]\sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)}(e_r^\nu . e_k)e_r^\nu\delta_\nu^\varepsilon\Big)[1+o(1)].$$

A l'aide du lemme III.2.2 on obtient :

$$\mu_k^\varepsilon \longrightarrow \frac{2\lambda\mu\pi}{C_o}\frac{1+m}{1+2m}e_k\delta_H \qquad \text{dans} \qquad [H^{-1}(\Omega)]^2 \quad \text{fort.}$$

C.Q.F.D.

Remarque III.2.4 :

On a procédé de la même manière qu'en II.2.A pour le cas d'une répartition des trous de formes quelconques dans un hyperplan en dimension $n = 2$. On a trouvé en reprenant les notations du § II.2.A :

$$\omega_k^{\varepsilon\prime} = \omega_k^\varepsilon - \omega_{ok}^\varepsilon$$
$$|\nabla\omega_k^{\varepsilon\prime}|_{L^2(\Omega)} \leq c\sqrt{\varepsilon}$$

$$\mu_k^\varepsilon = \sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_{ok}^\varepsilon)(e_r^\nu . e_j)e_i\delta_\nu^\varepsilon + \sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^{\varepsilon\prime})(e_r^\nu . e_j)e_i\delta_\nu^\varepsilon .$$

La suite

$$\Delta_\varepsilon = < \sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^{\varepsilon\prime})(e_r^\nu . e_j)e_i\delta_\nu^\varepsilon, v_\varepsilon >_{H^{-1},H_0^1}$$

pour les $v_\varepsilon \in [H_0^1(\Omega)]^2$ telle que : $v_\varepsilon \rightharpoonup v$ dans $[H_0^1(\Omega)]^2$ faible, vérifie :

$$\Delta_\varepsilon = \int_{H_\varepsilon} a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^{\varepsilon\prime})\varepsilon_{ij}(\tilde{R_\varepsilon v_\varepsilon})$$

$$|\Delta_\varepsilon| \leq c\,|\nabla\omega_k^{\varepsilon\prime}|_{L^2(\Omega)}\,|\nabla(R_\varepsilon v_\varepsilon)|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq c\sqrt{\varepsilon}\,|\nabla(R_\varepsilon v_\varepsilon)|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$$

où R_ε est l'opérateur de restriction définit en Annexe C.

Ici nous avons (voir Proposition C.6) :

$$|R_\varepsilon u|_{H_0^1(\Omega_\varepsilon)} \leq c\Big(|\nabla u|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}|u|_{L^2(H_\varepsilon)}\Big) \qquad \forall u \in [H_0^1(\Omega)]^n$$

ce qui ne nous permet pas de conclure quant à la convergence des μ_k^ε.

La suite Δ_ε est seulement bornée.

III.3 . **Estimation d'erreur** :

Théorème III.3.1 : *On suppose que la solution du problème homogénéisé (I.5.1) vérifie :* $u \in [W^{1,\infty}(\Omega)]^n$. *Il existe alors une constante* $c > 0$, *qui ne dépend que de* Ω, T *et* n *telle que :*

$$(III.3.1) \qquad \|\tilde{u}_\varepsilon - W_\varepsilon u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c\|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \begin{cases} \varepsilon^{1/2} & si \quad n = 2 \\ \varepsilon^{1/2} + \varepsilon^{1/(n-2)} & si \quad n \geq 3. \end{cases}$$

Remarque III.3.2 : La solution u ne peut avoir la régularité $[W^{2,\infty}(\Omega)]^n$ car les premières dérivées de u sont discontinues à travers l'hyperplan H (en supposant sur f et $\partial\Omega$ des hypothèses de régularité).

Pour démontrer le théorème, on aura besoin des lemmes ci-dessous :

Lemme III.3.3 :

Soient $(\omega_k^\varepsilon)_{1\leq k\leq n}$ *les fonctions définies en (III.2.14) si* $n = 2$ *ou en (III.2.1) si* $n \geq 3$ *on a :*

$$(III.3.2) \qquad \|\nabla\omega_k^\varepsilon\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq |\omega_k^\varepsilon - e_k|_{L^2(\Omega)}$$

et

$$(III.3.3) \qquad |\omega_k^\varepsilon - e_k|_{L^2(\Omega)} \leq c\varepsilon^{1/2} \qquad \forall n \geq 2.$$

où c *est une constante indépendante de* ε.

Démonstration :

L'inégalité (III.3.2) est une simple conséquence de la continuité de l'opérateur gradient de $L^2(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$. L'inégalité (III.3.3) est une conséquence des inégalités (III.2.9) et (III.2.20).

C.Q.F.D.

Lemme III.3.4 : *Soient* $(\mu_k^\varepsilon)_{1\leq k\leq n}$ *les quantités définies par :*

$$\mu_k^\varepsilon = \sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)(e_r^\nu . e_j)e_i\delta_\nu^\varepsilon \qquad si\ n = 2$$

$$\mu_k^\varepsilon = \sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} (a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)\,(e_r^\nu . e_j)\,e_i)\,\delta_\nu^{\varepsilon/2} - \partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)\chi_\varepsilon)e_i \qquad si\ n \geq 3$$

(voir III.2.21 et III.2.10) où δ_ν^ε *est la masse unité portée par la sphère* $\partial C_\nu^\varepsilon \cap \partial K_\nu^\varepsilon$, $\delta_\nu^{\varepsilon/2}$ *est la masse unité portée par la sphère* $\partial C_\nu^\varepsilon \cap \partial D_\nu^\varepsilon$ *et* χ_ε *est la fonction caractéristique de* $\cup_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} D_\nu^\varepsilon$. *Alors*

$$(III.3.4) \qquad \|\mu_k^\varepsilon - \mu_k\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq c \begin{cases} \varepsilon^{1/2} & si \quad n = 2 \\ \varepsilon^{1/2} + \varepsilon^{1/(n-2)} & si \quad n \geq 3 \end{cases}$$

où c *ne dépend pas de* ε.

Démonstration : On procède de la même manière que dans le cas d'une répartition des trous en volume (cf II.4). On utilise le lemme ci-dessous démontré dans l'annexe E (sous le nom Lemme E.4) puis on conclu.

C.Q.F.D.

Lemme III.3.5 :

Soit δ_ν^ε la masse unité portée par la sphère de rayon ε, centrée au centre de P_ν^ε. Pour $n \geq 2$, on a :

$$\|\sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} \delta_\nu^\varepsilon - \frac{S_n}{2^{n-1}}\delta_H\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq c\varepsilon^{1/2} \tag{III.3.5}$$

$$\|\sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} \delta_\nu^\varepsilon (e_k.e_r^\nu)e_r^\nu - \frac{S_n}{n2^{n-1}}e_k\delta_H\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq c\varepsilon^{1/2} \tag{III.3.6}$$

où e_r^ν est le vecteur unitaire radial dans le pavé P_ν^ε et c une constante indépendante de ε.

Lemme III.3.6 :

Pour tout $\phi_\varepsilon \in H^1(H_\varepsilon)$ tel que $\phi_\varepsilon = 0$ sur T_ν^ε $\quad \nu = 1, ..., n(\varepsilon)$, on a :

$$|\phi_\varepsilon|_{L^2(H_\varepsilon)} \leq c\varepsilon^{1/2}|\nabla\phi_\varepsilon|_{L^2(H_\varepsilon)} \tag{III.3.7}$$

où c est une constante indépendante de ε.

Démonstration : On applique le lemme IV.3.1 dans H_ε pour la taille a_ε des trous T_ν^ε (voir [2]).

Démonstration du théorème III.3.1 :

Nous reprenons la démonstration de la proposition I.7.1 pour établir l'estimation d'erreur dans le cas où $u \in W^{2,\infty}(\Omega)$.

Nous avons posé $\qquad \lambda_\varepsilon^i = -\partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(r_\varepsilon)) \qquad$ où $\qquad r_\varepsilon = \tilde{u}_\varepsilon - W_\varepsilon u$

et nous avons établi l'égalité suivante :

$$< \lambda_\varepsilon, \overline{r}_\varepsilon > + \lambda^2\rho_o \int_\Omega |r_\varepsilon|^2 = \int_\Omega (Id - W_\varepsilon)u\overline{r}_\varepsilon + < (M - M_\varepsilon)u, \overline{r}_\varepsilon > + \tag{I.7.7}$$

$$+ \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)\partial_j u_k \overline{r}_i^\varepsilon - \int_\Omega a_{ijlh}\partial_l u_k(\omega_k^\varepsilon - e_k)_h \partial_j \overline{r}_i^\varepsilon dx$$

On déduit alors l'inégalité :

$$Re(\frac{1}{\lambda} < \lambda_\varepsilon, \overline{r}_\varepsilon >) + \beta\rho_o \int_\Omega |r_\varepsilon|^2 \leq c(\lambda)\Big(|Id - W_\varepsilon|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^\infty(\Omega)}|r_\varepsilon|_{L^2(\Omega)} +$$

$$+ \|M - M_\varepsilon\|_{H^{-1}(\Omega)}\|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}\|r_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} + |\nabla W_\varepsilon|_{L^2(H_\varepsilon)}\|\nabla u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}|r_\varepsilon|_{L^2(H_\varepsilon)} +$$

$$+ |Id - W_\varepsilon|_{L^2(\Omega)}\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}|\nabla r_\varepsilon|_{L^2(\Omega)}\Big)$$

avec $c(\lambda)$ une constante dépendant du module de λ.

On applique l'inégalité de Poincaré à r_ε dans Ω et l'inégalité III.3.7, on obtient :

$$Re(\frac{1}{\lambda} < \lambda_\varepsilon, \overline{r}_\varepsilon >) + \beta\rho_o \int_\Omega |r_\varepsilon|^2 \leq c(\lambda)\|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}\Big(|Id - W_\varepsilon|_{L^2(\Omega)} + \|M - M_\varepsilon\|_{H^{-1}(\Omega)} + \varepsilon^{1/2}|\nabla W_\varepsilon|_{L^2(\Omega)}\Big).$$

Grâce à l'inégalité de Korn, on a :

$$\|r_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c(\lambda)\Big(|Id - W_\varepsilon|_{L^2(\Omega)} + \|M - M_\varepsilon\|_{H^{-1}(\Omega)} + \varepsilon^{1/2}|\nabla W_\varepsilon|_{L^2(\Omega)}\Big).$$

Le théorème est alors une conséquence des Lemmes III.3.3, III.3.4 et de l'hypothèse (H3) vérifiée par les fonctions $(\omega_k^\varepsilon)_{k=1}^n$.

C.Q.F.D.

IV - PROBLÈME LIMITE LORSQUE LA TAILLE DES TROUS AUGMENTE OU DIMINUE

Dans cette partie, nous allons montrer que la taille des trous $c_\varepsilon = \begin{cases} C_0\varepsilon^{n/n-2} & \text{pour} \quad n \geq 3 \\ e^{-C_0/\varepsilon^2} & \text{pour} \quad n = 2 \end{cases}$

est une taille critique dans le cas d'une répartition en volume.
En effet le comportement limite du fluide est différent suivant que la taille des trous est plus petite ou plus grande que la valeur c_ε.

IV.1 . Déscription géomètrique :

On reprend la même géomètrie que celle décrite au paragraphe II, et nous faisons une hypothèse supplèmentaire sur le trou T.

On rappelle que Ω est un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) de frontière C^1 par morçeaux. T est un fermé de $\mathbb{R}^n$ tel que :

(IV.1.1)
$$\begin{cases} \cdot \ B_\alpha \subset T \subset B_1 \quad \text{avec} \quad 0 < \alpha < 1 \\ \quad \text{où } B_\alpha \text{ et } B_1 \text{ sont deux boules ouvertes de centre l'origine} \\ \quad \text{et de rayons respectifs } \alpha \text{ et } 1. \\ \cdot \ B_1 \setminus T \text{ est un ouvert connexe de frontière } C^1 \text{ par morceaux.} \end{cases}$$

L'ouvert Ω_ε est obtenu en otant de l'ouvert Ω les trous T_ν^ε périodiquement répartis avec une période 2ε dans la direction de chacun des axes. Les trous T_ν^ε sont homothétiques de rapport a_ε au fermé T. On suppose que :

(IV.1.2)
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{a_\varepsilon}{\varepsilon} = 0.$$

On ne considère que les trous entièrement inclus dans Ω.

IV.2 . Cas où la taille des trous diminue : $(a_\varepsilon << c_\varepsilon)$

Lorsque la taille a_ε des trous est donnée par la valeur critique c_ε, on a vu dans la partie II qu'un terme étrange apparaissait dans le problème homogénéisé.

Nous allons voir que lorsque la taille des trous est inférieure à cette valeur critique, il ne se passe rien. Autrement dit, en dessous de cette valeur, les trous n'ont aucune influence à la limite.

On fait donc l'hypothèse suivante :

(IV.2.1)
$$\begin{cases} \lim_{\varepsilon \to 0} \dfrac{a_\varepsilon}{\varepsilon^{n/n-2}} = 0 & \text{pour} \quad n \geq 3 \\ \lim_{\varepsilon \to 0} \dfrac{1}{\varepsilon^2 log a_\varepsilon} = 0 & \text{pour} \quad n = 2. \end{cases}$$

Remarque IV.2.1 : (cf [2])

Nous avons supposé que $\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon^2 log a_\varepsilon} = 0$ au lieu de $\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{a_\varepsilon}{e^{-1/\varepsilon^2}} = 0$ dans le cas $n = 2$ car il est possible de vérifier que les résultats de la $2^{ème}$ partie sont vrais si on suppose seulement que : $\varepsilon^2 log a_\varepsilon \longrightarrow -C_0$.
En fait, $\varepsilon^2 log a_\varepsilon$ est la quantité qui apparait naturellement dans les calculs des fonctions $(\omega_k^\varepsilon)_{k=1}^2$, et c'est donc selon les diverses valeurs de sa limite que l'on discute.

Théorème IV.2.2 :

Soit u_ε la solution du système (I.3.3). Si la taille des trous (T_ν^ε) vérifie (IV.2.1) alors le cadre abstrait de la $1^{ère}$ partie s'applique toujours et on a :

$$\tilde{u}_\varepsilon \longrightarrow u \qquad dans \qquad [H_0^1(\Omega)]^n \qquad fort$$

où u est l'unique solution du problème (IV.2.2)

(*IV.2.2*)
$$\begin{cases} Trouver \quad u \in [H_0^1(\Omega)]^n \quad tel\ que\ : \\ \lambda^2 \rho_o u_i - \partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(u)) = f_i \qquad dans \quad \Omega \quad i = 1, ..., n\,. \end{cases}$$

Démonstration :

Si a_ε vérifie (IV.2.1), alors on peut construire des fonctions $(\omega_k^\varepsilon)_{k=1}^n$ vérifiant :

$$\omega_k^\varepsilon \longrightarrow e_k \qquad \text{dans} \qquad [H^1(\Omega)]^n \qquad \text{fort.}$$

A cause de (H5), on en déduit que : $\qquad M = 0 \qquad$ dans $\qquad \Omega.$

Or on a :

$$\int_\Omega \lambda^2 \rho_o |\tilde{u}_\varepsilon|^2 dx + \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\tilde{u}_\varepsilon)\varepsilon_{ij}(\overline{\tilde{u}_\varepsilon})dx = \int_\Omega f\overline{\tilde{u}_\varepsilon}dx \longrightarrow \int_\Omega f\overline{u}dx =$$
$$= \int_\Omega \lambda^2 \rho_o |u|^2 dx + \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(u)\varepsilon_{ij}(\overline{u})dx + < Mu, \overline{u} >$$

comme $\qquad \tilde{u}_\varepsilon \longrightarrow u \qquad$ dans $\qquad [L^2(\Omega)]^n \qquad$ fort

alors $\qquad \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\tilde{u}_\varepsilon)\varepsilon_{ij}(\overline{\tilde{u}_\varepsilon})dx \longrightarrow \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(u)\varepsilon_{ij}(\overline{u})dx$

d'où $\qquad \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\tilde{u}_\varepsilon - u)\varepsilon_{ij}(\overline{\tilde{u}_\varepsilon - u})dx \longrightarrow 0.$

Vu la coercivité des a_{ijlh}, on déduit à l'aide de l'inégalité de Korn, que :

$$\tilde{u}_\varepsilon \longrightarrow u \qquad \text{dans} \qquad [H_0^1(\Omega)]^n \qquad \text{fort.}$$

C.Q.F.D.

Remarque IV.2.3 : Le problème d'évolution correspondant à (IV.2.2) est :

$$\begin{cases} \text{Trouver } U \in \tilde{W}_c[H_0^1(\Omega)] \text{ tel que :} \\ \rho_o \dfrac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = \partial_j \sigma_{ij}(U) + F_i \qquad \text{dans } \Omega \quad i = 1, ..., n \\ U(x,0) = 0\,; \qquad \dfrac{\partial U}{\partial t}(x,0) = 0 \qquad \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

IV.3 . Cas où la taille des trous augmente : $(a_\varepsilon >> c_\varepsilon)$

Lorsque la taille des trous augmente, on verra que le déplacement sera donné explicitement en fonction de la matrice M et de la force f. On fait alors l'hypothèse suivante :

(IV.3.1)
$$\begin{cases} \lim_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\varepsilon^{n/n-2}}{a_\varepsilon} = 0 \quad \text{pour} \quad n \geq 3 \\ \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 log a_\varepsilon = 0 \quad \text{pour} \quad n = 2. \end{cases}$$

On définit le rapport σ_ε par :

(IV.3.2)
$$\begin{cases} \sigma_\varepsilon = \left(\dfrac{\varepsilon^n}{a_\varepsilon^{n-2}}\right)^{1/2} \quad \text{pour} \quad n \geq 3 \\ \sigma_\varepsilon = \varepsilon \left| log \dfrac{a_\varepsilon}{\varepsilon} \right|^{1/2} \quad \text{pour} \quad n = 2. \end{cases}$$

On a $$\varepsilon << \sigma_\varepsilon << 1.$$

Estimation à priori :

Pour obtenir une estimation de u_ε à la partie I, nous l'avons prolongé par 0 dans $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$, ce qui nous a permit d'utiliser l'inégalité de Poincaré sans difficulté et d'obtenir

$$\|\tilde{u_\varepsilon}\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c |f|_{L^2(\Omega)}$$

où c est une constante indépendante de ε. Cette inégalité est toujours valable ici mais vu les hypothèses faites sur le trou T, on a une estimation plus fine obtenue grâce au lemme ci-dessous démontré dans [2].

Lemme IV.3.1 : *Soit Ω_ε un ouvert défini suivant le paragraphe IV.1.*

Dans $H_0^1(\Omega_\varepsilon)$ on a l'inégalité de Poincaré suivante :

$$\forall u \in H_0^1(\Omega_\varepsilon) \qquad |u|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq c\, \sigma_\varepsilon\, |\nabla u|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$$

où c est une constante qui ne dépend ni de ε, ni de u et σ_ε est donné par (IV.3.2).

Remarque IV.3.2 : Remarquons que ce lemme n'est pas utile pour la $2^{ème}$ partie car lorsque la taille a_ε vaut la valeur critique, σ_ε est une constante.

Nous avons vu au paragraphe I.3 que :

$$\|\tilde{u_\varepsilon}\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq c\,|f|_{L^2(\Omega)}\,|u_\varepsilon|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$$

avec c est une constante indépendante de ε. Le lemme IV.3.1 nous dit que :

(IV.3.3) $$|u|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq c\,\sigma_\varepsilon\,|\nabla u|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$$

d'où

(IV.3.4) $$\|\tilde{u_\varepsilon}\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c\,\sigma_\varepsilon.$$

On a alors :

$$\tilde{u_\varepsilon} \longrightarrow 0 \qquad \text{dans} \qquad [H_0^1(\Omega)]^n \qquad \text{fort.}$$

Pour étudier le comportement du fluide, nous allons renormaliser le déplacement.

En reportant (IV.3.4) dans (IV.3.3) on a :

$$|\tilde{u_\varepsilon}|_{L^2(\Omega)} \leq c\,\sigma_\varepsilon^2$$

la suite $\dfrac{\tilde{u}_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon^2}$ est bornée dans $[L^2(\Omega)]^n$ donc à une sous suite près on a :

(IV.3.5) $$\frac{\tilde{u_\varepsilon}}{\sigma_\varepsilon^2} \rightharpoonup u \qquad \text{dans} \qquad [L^2(\Omega)]^n \qquad \text{faible.}$$

Pour trouver le problème limite vérifié par u, on va se donner un cadre abstrait d'hypothèses H1-H6 analogue à celui de la partie I avec quelques modifications.

Dans un premier temps nous vérifions ces hypothèses puis en appliquant la méthode de l'énérgie développée par Luc Tartar, nous passons à la limite dans la formulation faible associée au problème en u_ε. Ce qui nous donnera le problème homogénéisé.

Hypothèses H1 à H6 :

On supose que les trous sont tels qu'il existe des éléments ω_k^ε et μ_k tels que $\forall k \in \{1, ..., n\}$, on ait :

(H1) $\omega_k^\varepsilon \in [H^1(\Omega)]^n$

(H2) $\omega_k^\varepsilon = 0$ sur les trous $(T_\nu^\varepsilon)_{\nu=1}^{n(\varepsilon)}$

(H3)
$$\begin{cases} \omega_k^\varepsilon \rightharpoonup e_k & \text{dans } [L^2(\Omega)]^n \text{ faible} \\ (\sigma_\varepsilon \nabla \omega_k^\varepsilon) \text{ borné} & \text{dans } [L^2(\Omega)]^n \end{cases}$$

(H4) $\mu_k \in [L^\infty(\Omega)]^n$

(H5)
$$\begin{cases} \text{Pour toute suite } v_\varepsilon \in [H^1(\Omega)]^n \text{ et pour tout } v \in [L^2(\Omega)]^n \text{ vérifiant :} \\ \quad \begin{cases} v_\varepsilon \rightharpoonup v & \text{dans } [L^2(\Omega)]^n \text{ faible,} \\ |\nabla v_\varepsilon|_{L^2(\Omega)} \leq \dfrac{c}{\sigma_\varepsilon} & \text{où c ne dépend pas de } \varepsilon \\ v_\varepsilon = 0 & \text{sur les trous } (T_\nu^\varepsilon)_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} \end{cases} \\ \text{et pour tout } \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega), \text{ on a :} \\ \quad \sigma_\varepsilon^2 < -\partial_h(a_{ijlh}\varepsilon_{ij}(\omega_k^\varepsilon)), \varphi(v_\varepsilon)_l >_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \longrightarrow \int_\Omega \varphi \mu_k . v \end{cases}$$

(H6) Il existe une distribution $G \in \mathfrak{D}'(]0, +\infty[, [L^\infty(\Omega)]^{n^2})$ telle que : $G(t) = L^{-1}(M(\lambda))$ $Re\lambda > \beta > 0$, où $M(\lambda)$ désigne la matrice définie par ses colonnes $(\mu_k)_{k=1,...,n}$.

Comme dans la $1^{ère}$ partie, l'hypothèse (H5) permet de caractèriser la matrice M.

Proposition IV.3.3 :

Soient $(\omega_k^\varepsilon, \mu_k)_{1 \leq k \leq n}$ des fonctions qui vérifient les hypothèses (H1)-(H5). Alors si $\mu_k^p = \mu_k . e_p$ on a pour chaque $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$

(IV.3.6)
$$< \mu_k^p, \varphi >_{\mathfrak{D}', \mathfrak{D}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \sigma_\varepsilon^2 \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{ij}(\omega_k^\varepsilon)\varepsilon_{lh}(\omega_p^\varepsilon)\varphi dx.$$

Par conséquent les coefficients de $M = [\mu_k]_{1 \leq k \leq n}$ sont des mesures de Radon, la matrice M est symétrique ($\mu_k^p = \mu_p^k$) et positive au sens suivant :

(IV.3.7)
$$Re < M\phi, \overline{\phi} >_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \geq c|\phi|^2_{L^2(\Omega)} \qquad \forall \phi \in [\mathfrak{D}(\Omega)]^n$$

où c est une constante strictement positive indépendante de ε.

Démonstration :

Dans (H5), on prend $v_\varepsilon = \omega_p^\varepsilon$ alors :

$$\sigma_\varepsilon^2 < -\partial_h(a_{ijlh}\varepsilon_{ij}(\omega_k^\varepsilon)), \varphi(\omega_p^\varepsilon)_l >_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} \longrightarrow \int_\Omega \varphi \mu_k . e_p = < \mu_k^p, \varphi >_{\mathfrak{D}',\mathfrak{D}} \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$$

d'où

$$\begin{aligned} < \mu_k^p, \varphi >_{\mathfrak{D}',\mathfrak{D}} &= \lim_{\varepsilon\to 0} \sigma_\varepsilon^2 \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)\partial_j\left(\varphi\omega_p^\varepsilon\right)_i dx \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \sigma_\varepsilon^2 \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)\varepsilon_{ij}(\omega_p^\varepsilon)\varphi dx \ + \ \sigma_\varepsilon \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\sigma_\varepsilon\omega_k^\varepsilon)\partial_j\varphi\left(\omega_p^\varepsilon\right)_i dx. \end{aligned}$$

Or $\nabla(\sigma_\varepsilon\omega_k^\varepsilon)$ et ω_p^ε sont bornées respectivement dans $[L^2(\Omega)]^{n^2}$ et $[L^2(\Omega)]^n$, par conséquent :

$$\sigma_\varepsilon \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\sigma_\varepsilon\omega_k^\varepsilon)\partial_j\varphi\left(\omega_p^\varepsilon\right)_i dx \ \longrightarrow \ 0.$$

Donc $$< \mu_k^p, \varphi >_{\mathfrak{D}',\mathfrak{D}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \sigma_\varepsilon^2 \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)\varepsilon_{ij}(\omega_p^\varepsilon)\varphi dx.$$

On en déduit que M est symètrique et comme $\left(\sigma_\varepsilon^2 a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)\varepsilon_{ij}(\omega_p^\varepsilon)\right)$ est bornée dans $L^1(\Omega)$, que μ_k^p est une mesure de Radon.

De plus, soit $\phi = (\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n) \in [\mathfrak{D}(\Omega)]^n$ on a (cf proposition I.4.3) :

$$< M\phi, \overline{\phi} >_{\mathfrak{D}'(\Omega),\mathfrak{D}(\Omega)} = \lim_{\varepsilon\to 0} \sigma_\varepsilon^2 \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{ij}(\omega_q^\varepsilon)\varepsilon_{lh}(\overline{\omega}_p^\varepsilon)\varphi_q\overline{\varphi}_p dx$$

$$Re < M\phi, \overline{\phi} \ \geq \ \sigma_\varepsilon^2 \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\beta^* \sum_{1\leq i,j\leq n} \int_\Omega \left|\varepsilon_{ij}(\omega_p^\varepsilon)\varphi_p\right|^2\right) \ \geq 0. \qquad (*)$$

Donc M est une matrice positive.

D'autre part l'inégalité de Poincaré dans Ω_ε et l'inégalité de Korn dans Ω impliquent que :

$$\begin{aligned} |\omega_k^\varepsilon\varphi_k|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} &\leq c\,\sigma_\varepsilon^2\,|\nabla(\omega_k^\varepsilon\varphi_k)|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \\ &\leq c\,\sigma_\varepsilon^2\,|\varepsilon(\omega_k^\varepsilon\varphi_k)|^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Un calcul simple donne :

$$\begin{aligned} |\varepsilon(\omega_k^\varepsilon\varphi_k)|^2_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_p^\varepsilon)\,\varepsilon_{ij}(\overline{\omega_k^\varepsilon})\phi_p\overline{\phi_k}dx + \\ &+ \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_p^\varepsilon)\left[\frac{1}{2}(\,\partial_i\overline{\phi_k}(\overline{\omega_k^\varepsilon})_j \ + \ \partial_j\overline{\phi_k}(\overline{\omega_k^\varepsilon})_i\,)\right]\phi_p dx + \\ &+ \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{ij}(\overline{\omega_k^\varepsilon})\left[\frac{1}{2}(\,\partial_l\phi_p(\omega_p^\varepsilon)_h \ + \ \partial_h\phi_p(\omega_p^\varepsilon)_l\,)\right]\overline{\phi_k}dx + \\ &+ \frac{1}{4}\int_\Omega a_{ijlh}\left(\partial_l\phi_p(\omega_p^\varepsilon)_h \ + \ \partial_h\phi_p(\omega_p^\varepsilon)_l\right)\left(\partial_i\overline{\phi_k}(\overline{\omega_k^\varepsilon})_j \ + \ \partial_j\overline{\phi_k}(\overline{\omega_k^\varepsilon})_i\right)dx. \end{aligned}$$

La suite (ω_p^ε) est bornée car $\omega_p^\varepsilon \rightharpoonup e_p$ dans $[L^2(\Omega)]^n$ faible. Donc

$$\left| \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_p^\varepsilon)\left[\frac{1}{2}(\partial_i\overline{\phi_k}(\overline{\omega_k^\varepsilon})_j + \partial_j\overline{\phi_k}(\overline{\omega_k^\varepsilon})_i)\right]\phi_p dx \right| \leq c\sum_{k=1}^n |\nabla\omega_k^\varepsilon|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$\left| \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{ij}(\overline{\omega_k^\varepsilon})\left[\frac{1}{2}(\partial_l\phi_p(\omega_p^\varepsilon)_h + \partial_h\phi_p(\omega_p^\varepsilon)_l)\right]\overline{\phi_k}dx \right| \leq c\sum_{k=1}^n |\nabla\omega_k^\varepsilon|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$\left| \frac{1}{4}\int_\Omega a_{ijlh}\left(\partial_l\phi_p(\omega_p^\varepsilon)_h + \partial_h\phi_p(\omega_p^\varepsilon)_l\right)\left(\partial_i\overline{\phi_k}(\overline{\omega_k^\varepsilon})_j + \partial_j\overline{\phi_k}(\overline{\omega_k^\varepsilon})_i\right)dx \right| \leq c$$

où c est une constante ne dépendant que de ϕ et Ω et indépendante de ε.

D'autre part

$$\int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_p^\varepsilon)\,\varepsilon_{ij}(\overline{\omega_k^\varepsilon})\phi_p\overline{\phi_k}dx = \sum_{1\leq i,j\leq n}\int_\Omega |\varepsilon_{ij}(\omega_p^\varepsilon)\varphi_p|^2$$

d'où

$$|\omega_k^\varepsilon\varphi_k|^2_{L^2(\Omega)} \leq c\left[\sigma_\varepsilon^2\sum_{1\leq i,j\leq n}\int_\Omega |\varepsilon_{ij}(\omega_p^\varepsilon)\varphi_p dx|^2 + \sigma_\varepsilon^2\sum_{k=1}^n |\nabla\omega_k^\varepsilon|^2_{L^2(\Omega} + \sigma_\varepsilon^2\right] \qquad (**)$$

nous avons :

- $\lim_{\varepsilon\to 0}\sigma_\varepsilon^2\sum_{k=1}^n |\nabla\omega_k^\varepsilon|^2_{L^2(\Omega)} = 0$ car $\sigma_\varepsilon\nabla\omega_k^\varepsilon$ est bornée dans $[L^2(\Omega)]^{n^2}$
- $\lim_{\varepsilon\to 0}|\omega_k^\varepsilon\varphi_k|^2_{L^2(\Omega)} \geq |\phi|^2_{L^2(\Omega)}$ en raison de la semi-continuité faible de la norme
- $\lim_{\varepsilon\to 0}\sigma_\varepsilon^2\sum_{1\leq i,j\leq n}\int_\Omega |\varepsilon_{ij}(\omega_p^\varepsilon)\varphi_p|^2 dx \leq \frac{1}{\beta^*}Re < M\phi,\overline{\phi} >$ d'après $(*)$

par passage à la limite dans l'inégalité $(**)$, on obtient :

$$Re < M\phi,\overline{\phi} >_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} \geq c|\phi|^2_{L^2(\Omega)} \qquad \forall\phi\in[\mathfrak{D}(\Omega)]^n.$$

C.Q.F.D.

On démontre maintenant la " quasi-unicité " des fonctions ω_k^ε et μ_k associées à la famille de trous $\left(T_\nu^\varepsilon\right)_{\nu=1}^{n(\varepsilon)}$ et vérifiant les hypothèses (H1) à (H5).

Proposition IV.3.4 :

Pour une même suite de trous $[(T_\nu^\varepsilon)_{\nu=1}^{n(\varepsilon)}]_{\varepsilon>0}$, on suppose qu'il existe deux groupes de fonctions $(\omega_k^\varepsilon,\mu_k)_{k=1}^n$, $(\omega_k^{\varepsilon\prime},\mu_k')_{k=1}^n$ qui vérifient les hypothèses (H1)-(H5), alors on a :

(IV.3.8) $\mu_k' = \mu_k$ *dans* Ω

(IV.3.9) $(\omega_k^\varepsilon - \omega_k^{\varepsilon\prime}) \rightharpoonup 0$ *dans* $[L^2(\Omega)]^n$ *faible*

(IV.3.10) $\sigma_\varepsilon\varepsilon_{ij}(\omega_k^\varepsilon - \omega_k^{\varepsilon\prime}) \longrightarrow 0$ *dans* $L^2_{loc}(\Omega)$ *fort* $i,j = 1,...,n.$

Démonstration :

En combinant les hypothèses (H5) pour les deux groupes de fonctions $(\omega_k^\varepsilon, \mu_k)$ et $(\omega_k^{\varepsilon'}, \mu_k')$ on obtient :

(IV.3.11)
$$\left\{\begin{array}{l} \text{Pour toute suite } v_\varepsilon \text{ et pour tout } v \text{ vérifiant :} \\ \quad \left\{\begin{array}{ll} v_\varepsilon \rightharpoonup v & \text{dans } [L^2(\Omega)]^n \text{ faible} \\ |\nabla v_\varepsilon|_{L^2(\Omega)} \leq \dfrac{c}{\sigma_\varepsilon} & \text{où c ne dépend pas de } \varepsilon \\ v_\varepsilon = 0 & \text{sur les trous } (T_\nu^\varepsilon)_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} \end{array}\right. \\ \text{et pour tout } \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega), \text{ on a :} \\ \quad \sigma_\varepsilon^2 < -\partial_h(a_{ijlh}\varepsilon_{ij}(\omega_k^\varepsilon - \omega_k^{\varepsilon'})), \varphi(v_\varepsilon)_i >_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \longrightarrow \displaystyle\int_\Omega \varphi(\mu_k - \mu_k').v. \end{array}\right.$$

Dans (IV.3.11), on prend $v_\varepsilon = \overline{\omega_k^\varepsilon} - \overline{\omega_k^{\varepsilon'}}$ et $v = 0$.
Il vient en intégrant par parties :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sigma_\varepsilon^2 \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon - \omega_k^{\varepsilon'})\varepsilon_{ij}((\overline{\omega_k^\varepsilon - \omega_k^{\varepsilon'}}))\varphi dx \; + \; \sigma_\varepsilon^2 \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon - \omega_k^{\varepsilon'})(\partial_j\varphi)(\overline{\omega_k^\varepsilon - \omega_k^{\varepsilon'}})_i \; = \; 0.$$

Or les suites $(\sigma_\varepsilon^2 \nabla(\omega_k^\varepsilon - \omega_k^{\varepsilon'}))$ et $(\overline{\omega_k^\varepsilon - \omega_k^{\varepsilon'}})$ sont bornées respectivement dans $[L^2(\Omega)]^{n^2}$ et $[L^2(\Omega)]^n$

donc
$$\sigma_\varepsilon^2 \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon - \omega_k^{\varepsilon'})(\partial_j\varphi)(\overline{\omega_k^\varepsilon - \omega_k^{\varepsilon'}})_i \longrightarrow 0$$

par suite

(IV.3.12)
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sigma_\varepsilon^2 \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon - \omega_k^{\varepsilon'})\varepsilon_{ij}((\overline{\omega_k^\varepsilon - \omega_k^{\varepsilon'}}))\varphi dx \; = \; 0$$

d'où (cf proposition I.4.4)
$$\sigma_\varepsilon \varepsilon(\omega_k^\varepsilon - \omega_k^{\varepsilon'}) \longrightarrow 0 \qquad \text{dans} \quad [L^2_{loc}(\Omega)]^{n^2} \quad \text{fort}$$

et (IV.3.9) s'obtient en combinant l'hypothèse (H3) pour les deux fonctions ω_k^ε et $\omega_k^{\varepsilon'}$.

D'autre part, dans (IV.3.11), on peut aussi prendre $v_\varepsilon = \omega_p^\varepsilon$ et $v = e_p$. Il vient en intégrant par parties :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sigma_\varepsilon^2 \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon - \omega_k^{\varepsilon'})\partial_j\left(\varphi(\omega_p^\varepsilon)_i\right) \; = \; \int_\Omega \varphi e_p.(\mu_k - \mu_k') \; = \; 0$$

car $\sigma_\varepsilon \varepsilon(\omega_k^\varepsilon - \omega_k^{\varepsilon'})$ converge fortement vers 0 dans $[L^2_{loc}(\Omega)]^{n^2}$, et φ est à support compact dans Ω.

Donc
$$\int_\Omega \varphi e_p.(\mu_k - \mu_k') \; = \; 0 \qquad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega) \qquad \text{d'où (IV.3.8).}$$

C.Q.F.D.

Vérification des hypothèses (H1) à (H6) :

Nous allons construire des fonctions $(\omega_k^\varepsilon)_{k=1}^n$ qui vérifient les hypothèses (H1) à (H6) dans le cas $n \geq 3$ puis dans le cas $n = 2$.
Dans les deux cas, on adapte les idées de la $2^{ème}$ partie.

A. Cas de la dimension $n \geq 3$

On reprend la définition (II.3.16) des fonctions $(\omega_k^\varepsilon)_{k=1}^n$:

(IV.3.1)
$$\begin{cases} - \text{ Pour tout pavé } P_\nu^\varepsilon \text{ qui coupe } \partial\Omega, \text{ on pose :} \\ \qquad \omega_k^\varepsilon = e_k \qquad \text{dans} \quad P_\nu^\varepsilon \cap \Omega \\ - \text{ Pour tout pavé entièrement inclus dans } \Omega, \text{ on pose : (cf figure 8)} \\ \qquad \omega_k^\varepsilon = e_k \qquad \text{dans} \quad K_\nu^\varepsilon \\ \qquad - \partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)) = 0 \qquad \text{dans} \quad D_\nu^\varepsilon \\ \qquad \omega_k^\varepsilon = \omega_k(\dfrac{x}{a_\varepsilon}) \qquad \text{dans} \quad C_\nu^\varepsilon \\ \qquad \omega_k^\varepsilon = 0 \qquad \text{dans} \quad T_\nu^\varepsilon \\ \text{et} \quad \omega_k^\varepsilon \in [H^1(P_\nu^\varepsilon)]^n, \end{cases}$$

où ω_k est défini comme solution unique (cf lemme II.3.7) du système (IV.3.14)

(IV.3.14)
$$\begin{cases} - \partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k)) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \setminus T \\ \omega_k = 0 & \text{sur } \partial T \\ \omega_k = e_k & \text{à l'infini} \\ |\varepsilon(\omega_k)|_{L^2(\mathbb{R}^n - T)} < +\infty. \end{cases}$$

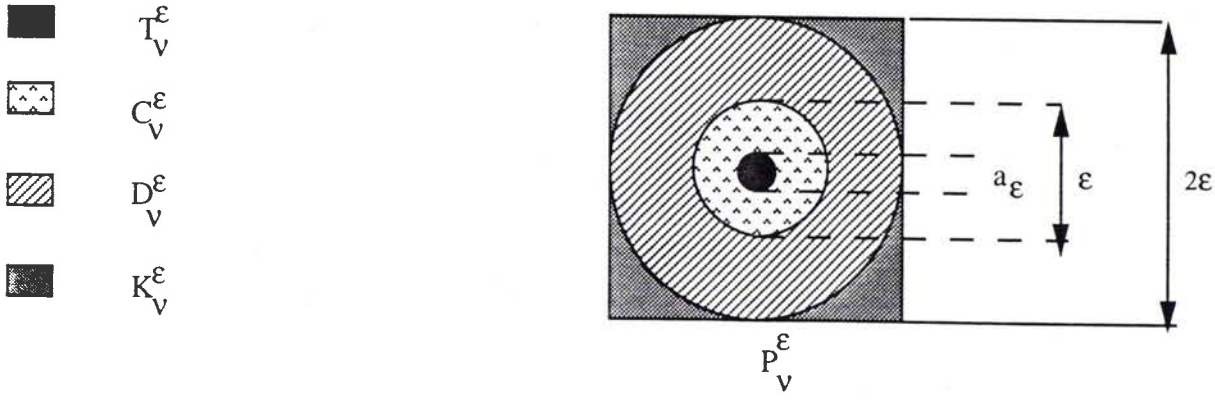


figure 8

Les fonctions $(\omega_k^\varepsilon)_{k=1}^n$ ainsi définies vérifient de façon évidente les hypothèses (H1) et (H2). Pour s'assurer qu'elles vérifient aussi (H3) nous allons en donner des estimations successivement dans C_ν^ε et D_ν^ε.

Lemme IV.3.5 : *Les fonctions $(\omega_k^\varepsilon)_{1\le k\le n}$ définies en (IV.3.13) vérifient :*

(IV.3.15)
$$|\varepsilon(\omega_k^\varepsilon)|^2_{L^2(C_\nu^\varepsilon)} \le c\,\frac{\varepsilon^n}{\sigma_\varepsilon^2}.$$

(IV.3.16)
$$|\omega_k^\varepsilon - e_k|^2_{L^2(C_\nu^\varepsilon)} \le c \begin{cases} a_\varepsilon^n \dfrac{\varepsilon}{a_\varepsilon} & si \quad n=3 \\ a_\varepsilon^n \left|log \dfrac{\varepsilon}{a_\varepsilon}\right| & si \quad n=4 \\ a_\varepsilon^n & si \quad n\ge 5 \end{cases}$$

(IV.3.17)
$$\begin{cases} \omega_k^\varepsilon - e_k &= O\Big(\dfrac{\varepsilon}{\sigma_\varepsilon}\Big)^2 \quad sur\ \partial C_\nu^\varepsilon \cap \partial D_\nu^\varepsilon \\ \nabla\omega_k^\varepsilon &= O\Big(\dfrac{\varepsilon}{\sigma_\varepsilon^2}\Big) \quad sur\ \partial C_\nu^\varepsilon \cap \partial D_\nu^\varepsilon \end{cases}$$

où c est une constante indépendente de ε.

Démonstration :

Le lemme II.3.7 nous dit que : $|\varepsilon(\omega_k)|_{L^2(\mathbb{R}^n - T)} \le c < +\infty.$

Par conséquent :
$$|\varepsilon(\omega_k^\varepsilon)|^2_{L^2(C_\nu^\varepsilon)} \le a_\varepsilon^{n-2} |\varepsilon(\omega_k)|^2_{L^2(\mathbb{R}^n - \setminus T)} \le c\, a_\varepsilon^{n-2}.$$

Comme $\sigma_\varepsilon = \Big(\dfrac{\varepsilon^n}{a_\varepsilon^{n-2}}\Big)^{1/2}$ alors $a_\varepsilon^{n-2} = \dfrac{\varepsilon^n}{\sigma_\varepsilon^2}$, d'où (IV.3.15).

D'autre part nous avons vu dans la démonstration du lemme II.3.9 que :

$$\frac{1}{a_\varepsilon^n}|\omega_k^\varepsilon - e_k|^2_{L^2(C_\nu^\varepsilon)} = |\omega_k - e_k|^2_{L^2(B_R\setminus T)} = \begin{cases} O(R) & \text{si} \quad n=3 \\ O(LogR) & \text{si} \quad n=4 \\ O(1) & \text{si} \quad n\ge 5 \end{cases} \quad \text{avec} \quad R = \frac{\varepsilon}{2a_\varepsilon}$$

et où B_R est la boule ouverte de rayon $R \ge 1$ et centrée sur l'origine.
On en déduit alors (IV.3.16).

Enfin, le lemme II.3.8 nous donne :

$$\begin{cases} \omega_k - e_k &= O\Big(\dfrac{1}{r^{n-2}}\Big) \\ \nabla\omega_k &= O\Big(\dfrac{1}{r^{n-1}}\Big) \end{cases} \quad \text{à l'infini.}$$

On en déduit facilement avec $r = \dfrac{\varepsilon}{2a_\varepsilon}$ que :

$$\begin{cases} \omega_k^\varepsilon - e_k &= O\Big(\dfrac{a_\varepsilon}{\varepsilon}\Big)^{n-2} = O\Big(\dfrac{\varepsilon^2}{\sigma_\varepsilon^2}\Big) \\ \nabla\omega_k^\varepsilon &= \dfrac{1}{a_\varepsilon} O\Big(\dfrac{a_\varepsilon}{\varepsilon}\Big)^{n-1} = O\Big(\dfrac{\varepsilon}{\sigma_\varepsilon^2}\Big). \end{cases}$$

C.Q.F.D.

Lemme IV.3.6 :

Les fonctions $(\omega_k^\varepsilon)_{1\le k\le n}$ définies en (IV.3.13) vérifient :

$$(IV.3.18)\qquad \begin{cases} |\nabla\omega_k^\varepsilon|^2_{L^2(D_\nu^\varepsilon)} \le c\varepsilon^n\Big(\dfrac{\varepsilon}{\sigma_\varepsilon^2}\Big)^2 \\ |\omega_k^\varepsilon - e_k|^2_{L^2(D_\nu^\varepsilon)} \le c\varepsilon^n\Big(\dfrac{\varepsilon}{\sigma_\varepsilon}\Big)^4 \end{cases}$$

où c ne dépend pas de ε.

Démonstration :

On reprend la démonstration du lemme II.3.10. On a donc :

$$|\nabla\omega_k^\varepsilon|^2_{L^2(D_\nu^\varepsilon)} \le c\varepsilon^n\Big[\frac{1}{\varepsilon^2}|\omega_k^\varepsilon - e_k|^2_{L^\infty(\partial D_\nu^\varepsilon\cap\partial C_\nu^\varepsilon)} + |\nabla\omega_k^\varepsilon|^2_{L^\infty(\partial D_\nu^\varepsilon\cap\partial C_\nu^\varepsilon)}\Big]$$
$$|\omega_k^\varepsilon - e_k|^2_{L^2(D_\nu^\varepsilon)} \le c\varepsilon^n\Big[\frac{1}{\varepsilon^2}|\omega_k^\varepsilon - e_k|^2_{L^\infty(\partial D_\nu^\varepsilon\cap\partial C_\nu^\varepsilon)} + |\nabla\omega_k^\varepsilon|^2_{L^\infty(\partial D_\nu^\varepsilon\cap\partial C_\nu^\varepsilon)}\Big].$$

Des estimations (IV.3.17), on déduit :

$$|\nabla\omega_k^\varepsilon|^2_{L^2(D_\nu^\varepsilon)} \le c\varepsilon^n\Big[\frac{1}{\varepsilon^2}\Big(\frac{\varepsilon}{\sigma_\varepsilon}\Big)^4 + \Big(\frac{\varepsilon}{\sigma_\varepsilon^2}\Big)^2\Big] \le c\varepsilon^n\Big(\frac{\varepsilon}{\sigma_\varepsilon^2}\Big)^2$$
$$|\omega_k^\varepsilon - e_k|^2_{L^2(D_\nu^\varepsilon)} \le c\varepsilon^n\Big[\Big(\frac{\varepsilon}{\sigma_\varepsilon}\Big)^4 + \varepsilon^2\Big(\frac{\varepsilon}{\sigma_\varepsilon^2}\Big)^2\Big] \le c\varepsilon^n\Big(\frac{\varepsilon}{\sigma_\varepsilon}\Big)^4.$$

C.Q.F.D.

Lemme IV.3.7 : *Les fonctions $(\omega_k^\varepsilon)_{1\le k\le n}$ définies en (IV.3.13) vérifient l'hypothèse (H3). De plus on a :*

$$(IV.3.19)\qquad |\omega_k^\varepsilon - e_k|_{L^2(\Omega)} \le c \begin{cases} \Big(\dfrac{\varepsilon}{\sigma_\varepsilon}\Big)^2 & si \quad n=3 \\ \Big(\dfrac{\varepsilon}{\sigma_\varepsilon}\Big)^2 |log\dfrac{\varepsilon}{\sigma_\varepsilon}|^{1/2} & si \quad n=4 \\ \Big(\dfrac{\varepsilon}{\sigma_\varepsilon}\Big)^{n/(n-2)} & si \quad n\ge 5 \end{cases}$$

où c est une constante indépendente de ε.

Démonstration :

A l'aide des lemmes IV.3.5 et IV.3.6, on a :

$$|\omega_k^\varepsilon - e_k|^2_{L^2(\Omega)} \le \frac{c}{\varepsilon^n}\big[|\omega_k^\varepsilon - e_k|^2_{L^2(C_\nu^\varepsilon)} + |\omega_k^\varepsilon - e_k|^2_{L^2(D_\nu^\varepsilon)} + |T_\nu^\varepsilon|\big]$$
$$\le \frac{c}{\varepsilon^n}\begin{cases} a_\varepsilon^n\dfrac{\varepsilon}{a_\varepsilon} & +\varepsilon^n\Big(\dfrac{\varepsilon}{\sigma_\varepsilon}\Big)^4 + a_\varepsilon^n \quad si \quad n=3 \\ a_\varepsilon^n|log\dfrac{\varepsilon}{a_\varepsilon}| & +\varepsilon^n\Big(\dfrac{\varepsilon}{\sigma_\varepsilon}\Big)^4 + a_\varepsilon^n \quad si \quad n=4 \\ \varepsilon^n\Big(\dfrac{a_\varepsilon}{\varepsilon}\Big)^n & +\varepsilon^n\Big(\dfrac{\varepsilon}{\sigma_\varepsilon}\Big)^4 + a_\varepsilon^n \quad si \quad n\ge 5 \end{cases}$$
$$\le c\begin{cases} \Big(\dfrac{a_\varepsilon}{\varepsilon}\Big)^{n-1} & +\Big(\dfrac{\varepsilon}{\sigma_\varepsilon}\Big)^4 + \Big(\dfrac{a_\varepsilon}{\varepsilon}\Big)^n \quad si \quad n=3 \\ \Big(\dfrac{a_\varepsilon}{\varepsilon}\Big)^n|log\dfrac{a_\varepsilon}{\varepsilon}| & +\Big(\dfrac{\varepsilon}{\sigma_\varepsilon}\Big)^4 + \Big(\dfrac{a_\varepsilon}{\varepsilon}\Big)^n \quad si \quad n=4 \\ \Big(\dfrac{a_\varepsilon}{\varepsilon}\Big)^n & +\Big(\dfrac{\varepsilon}{\sigma_\varepsilon}\Big)^4 + \Big(\dfrac{a_\varepsilon}{\varepsilon}\Big)^n \quad si \quad n\ge 5. \end{cases}$$

En utilisant l'expression de σ_ε donnée par (IV.3.2) et en comparant les différentes grandeurs , on déduit (IV.3.19).

Pour vérifier complètement (H3), il nous reste à montrer que

(IV.3.20) $\qquad (\sigma_\varepsilon \nabla \omega_k^\varepsilon) \qquad$ est bornée dans $\qquad [L^2(\Omega)]^{n^2}$.

Encore une fois, à l'aide des lemmes IV.3.5 et IV.3.6, on a :

$$\begin{aligned} |\varepsilon(\omega_k^\varepsilon)|^2_{L^2(\Omega)} &= n(\varepsilon)\left[\, |\varepsilon(\omega_k^\varepsilon)|^2_{L^2(C_\nu^\varepsilon)} + |\varepsilon(\omega_k^\varepsilon)|^2_{L^2(D_\nu^\varepsilon)} \right] \\ &\leq \frac{c}{\varepsilon^n}\left[\left(\frac{\varepsilon^n}{\sigma_\varepsilon^2}\right) + \varepsilon^n \left(\frac{\varepsilon}{\sigma_\varepsilon^2}\right)^2 \right] \\ &\leq \frac{c}{\sigma_\varepsilon^2}\left[1 + \left(\frac{\varepsilon}{\sigma_\varepsilon}\right)^2 \right]. \end{aligned}$$

On a $\qquad \left(\dfrac{\varepsilon}{\sigma_\varepsilon}\right)^2 = \left(\dfrac{a_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{n-2} \longrightarrow 0,$

donc la suite $(\sigma_\varepsilon \varepsilon(\omega_k^\varepsilon))$ est bornée dans $[L^2(\Omega)]^{n^2}$.

Comme

$$\sigma_\varepsilon \omega_k^\varepsilon \longrightarrow 0 \qquad \text{dans} \qquad [L^2(\Omega)]^n \qquad \text{fort,}$$

alors

$$|(\sigma_\varepsilon \omega_k^\varepsilon)|^2_{L^2(\Omega)} + |\varepsilon(\sigma_\varepsilon \omega_k^\varepsilon)|^2_{L^2(\Omega)} \leq c$$

à l'aide de l'inégalité de Korn, on déduit (IV.3.20).

C.Q.F.D.

Avant de vérifier les hypothèses (H4) et (H5)', on remarque que :

(IV.3.21)
$$\begin{cases} -\partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)) = \mu_{k,i}^\varepsilon - \gamma_{k,i}^\varepsilon \\ \text{avec} \qquad \gamma_k^\varepsilon = 0 \qquad \text{dans} \quad [H^{-1}(\Omega_\varepsilon)]^n \\ \text{et} \qquad \mu_k^\varepsilon = \displaystyle\sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} (a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)\,(e_r^\nu . e_j)\, e_i)\, \delta_\nu^{\varepsilon/2} - \partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)\chi_\varepsilon)e_i, \end{cases}$$

où $\delta_\nu^{\varepsilon/2}$ est la masse unité portée par la sphère de rayon $\varepsilon/2$ centrée au centre de P_ν^ε et χ_ε est la fonction caractéristique de $\cup_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} D_\nu^\varepsilon$.

Or $\qquad \| -\partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)\chi_\varepsilon)e_i\|^2_{H^{-1}(\Omega)} \leq c\,|(\nabla\omega_k^\varepsilon)\chi_\varepsilon|^2_{L^2(\Omega)} \leq c \displaystyle\sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} |\nabla\omega_k^\varepsilon|^2_{L^2(D_\nu^\varepsilon)}$

donc

(IV.3.22) $\qquad \| -\partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)\chi_\varepsilon)e_i\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq c\,\dfrac{\varepsilon}{\sigma_\varepsilon^2}.$

On en déduit que pour toute suite $v_\varepsilon \in [H^1(\Omega)]^n$ et pour tout $v \in [L^2(\Omega)]^n$ tel que :

$$\text{(IV.3.23)} \qquad \begin{cases} v_\varepsilon \rightharpoonup v & \text{dans} \quad [L^2(\Omega)]^n \quad \text{faible,} \\ |\nabla v_\varepsilon|_{L^2(\Omega)} \leq \dfrac{c}{\sigma_\varepsilon} & \text{où c ne dépend pas de } \varepsilon \\ v_\varepsilon = 0 & \text{sur les trous} \quad (T_\nu^\varepsilon)_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} \end{cases}$$

et pour tout $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$, on a :

$$\text{(IV.3.24)} \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \sigma_\varepsilon^2 \; < -\partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)), \varphi(v_\varepsilon)_i \; >_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \sigma_\varepsilon^2 \; < \sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} (a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)\,(e_r^\nu . e_j)\,e_i)\,\delta_\nu^{\varepsilon/2}, \varphi v_\varepsilon \; >_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}$$

car $\qquad (\sigma_\varepsilon v_\varepsilon) \rightharpoonup 0 \qquad$ dans $\quad [H^1(\Omega)]^n \quad$ faible.

Il nous reste à prouver qu'il existe $\mu_k \in [L^\infty(\Omega)]^n$ tel que :

$$\sigma_\varepsilon^2 \; < \sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} (a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)\,(e_r^\nu . e_j)\,e_i)\,\delta_\nu^{\varepsilon/2}, \varphi v_\varepsilon \; >_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} \longrightarrow \int_\Omega \varphi \mu_k . v.$$

Théorème IV.3.8 :

Les fonctions $(\omega_k^\varepsilon)_{k=1}^n$ définies en (IV.3.13) et les vecteurs constants μ_k définis par :

$$\text{(IV.3.25)} \qquad \mu_k = \left(\frac{2nm^2 + nm + m + n - 1}{nm(m+1)}\right)\frac{F_k}{2^{n+1}} \quad \text{pour} \quad 1 \leq k \leq n$$

où F_k est donné par (II.3.14)
vérifient les hypothèses (H4), (H5) et (H6) .

Démonstration :

Comme μ_k est un vecteur constant alors $\mu_k \in [L^\infty(\Omega)]^n$.
D'autre part grâce au lemme II.3.13, l'hypothèse (H6) est vérifiée.
Le Lemme (II.3.8) donne :

$$a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k)n_j e_i = \frac{1}{2S_n(m+1)r^{n-1}}\left[2mF_k + \frac{nm+m+n-1}{m}(F_k.e_r)e_r\right] + O(\frac{1}{r^n})$$

d'où

$$a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon))\,(e_r^\nu . e_j)\,e_i(r_\nu = \frac{\varepsilon}{2}) = \frac{1}{2S_n(m+1)}\frac{1}{a_\varepsilon}\frac{1}{\left(\frac{\varepsilon}{2a_\varepsilon}\right)^{n-1}}\left[2mF_k + \frac{nm+m+n-1}{m}(F_k.e_i^r)e_i^r\right] +$$

$$+ O\Big(\frac{1}{a_\varepsilon\left(\frac{\varepsilon}{a_\varepsilon}\right)^n}\Big)$$

$$= \frac{2^{n-2}}{S_n(m+1)}\left[2mF_k + \frac{nm+m+n-1}{m}(F_k.e_i^r)e_i^r\right]\frac{\varepsilon}{\sigma_\varepsilon^2} + O\Big(\frac{a_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon^2}\Big).$$

On en déduit :

$$\text{(IV.3.26)} \qquad \sigma_\varepsilon^2 \sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} (a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)\,(e_r^\nu . e_j)\,e_i)\,\delta_\nu^{\varepsilon/2} = \frac{2^{n-2}}{S_n(m+1)}\Big[2mF_k \sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} \varepsilon\delta_\nu^{\varepsilon/2} +$$

$$+ \frac{nm+m+n-1}{m} \sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} (F_k . e_i^r) e_i^r \varepsilon\delta_\nu^{\varepsilon/2}\Big] + O\big(a_\varepsilon\big) \sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} \delta_\nu^{\varepsilon/2}.$$

On sait par le lemme II.2.4 que la mesure définie par l'égalité (IV.3.26) converge fortement dans $[H^{-1}(\Omega)]^n$. Mais ce résultat ne peut pas nous servir ici car la fonction v_ε définie en (IV.3.23) ne converge pas faiblement dans $[H^1(\Omega)]^n$.

Cependant, on peut toujours passer à la limite dans le produit de dualité (IV.3.24).

On a pour (v_ε, v) vérifiant (IV.3.23) (cf [2]) :

$$\text{(IV.3.27)} \qquad \begin{cases} < \sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} \varepsilon\delta_\nu^\varepsilon \,,\, \varphi v_\varepsilon >_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} \longrightarrow \dfrac{S_n}{n}\displaystyle\int_\Omega \varphi v \\ < \sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} \varepsilon\delta_\nu^\varepsilon (e_k . e_r^\nu) . e_r^\nu \,,\, \varphi v_\varepsilon >_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} \longrightarrow \dfrac{S_n}{n2^n}\displaystyle\int_\Omega \varphi v . e_k . \end{cases}$$

On peut passer à la limite dans (IV.3.24), on obtient :

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\to 0}\sigma_\varepsilon^2 &< -\partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)), \varphi(v_\varepsilon)_i >_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} \\ &= \frac{2^{n-2}}{S_n(m+1)}\Big[2mF_k 2.\frac{S_n}{4^n} + \frac{nm+m+n-1}{m} 2.\frac{S_n}{n4^n}F_k\Big]\int_\Omega \varphi v \\ &= \Big(\frac{2nm^2+nm+m+n-1}{nm(m+1)}\Big)\frac{F_k}{2^{n+1}}\int_\Omega \varphi v \\ &= \mu_k \int_\Omega \varphi v. \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

B. Cas de la dimension $n = 2$

On reprend la définition (II.3.1) des fonctions $(\omega_k^\varepsilon)_{k=1}^n$:

(IV.3.28)
$$\begin{cases} - \text{ Pour tout pavé } P_\nu^\varepsilon \text{ qui coupe } \partial\Omega, \text{ on pose :} \\ \qquad \omega_k^\varepsilon = e_k \qquad\qquad \text{dans} \quad P_\nu^\varepsilon \cap \Omega \\ - \text{ Pour tout pavé entièrement inclus dans } \Omega, \text{ on pose : (cf figure 9)} \\ \qquad \omega_k^\varepsilon = e_k \qquad\qquad \text{dans } K_\nu^\varepsilon \\ \quad -\partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)) = 0 \qquad \text{dans } C_\nu^\varepsilon \\ \qquad \omega_k^\varepsilon = 0 \qquad\qquad \text{dans } T_\nu^\varepsilon \\ \text{et} \quad \omega_k^\varepsilon \in [H^1(P_\nu^\varepsilon)]^2. \end{cases}$$

Comme au paragraphe II.3.A, $B_\nu^{a_\varepsilon}$ désigne la boule de rayon a_ε centrée au centre de P_ν^ε. On a $T_\nu^\varepsilon \subset B_\nu^{a_\varepsilon}$.

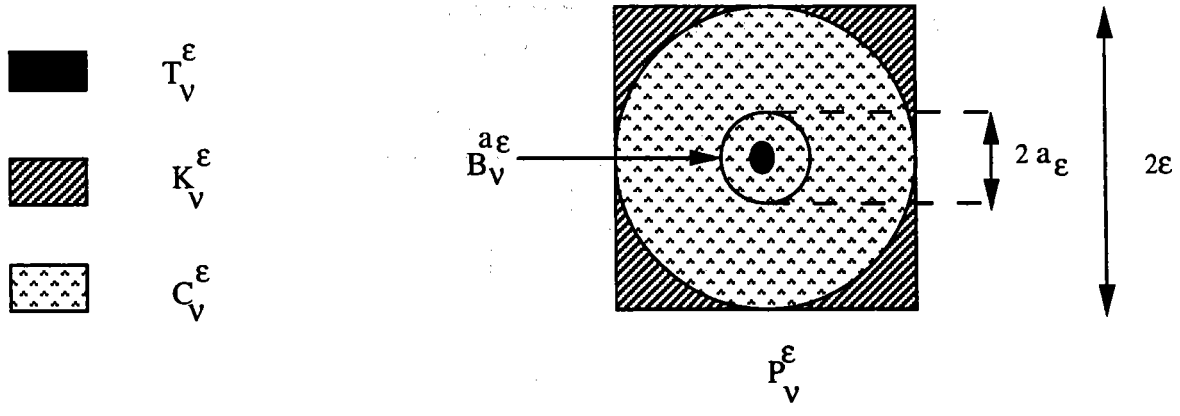


figure 9

On définit alors les fonctions $(\omega_{ok}^{\varepsilon})_{1\leq k\leq 2}$ par :

(IV.3.29)
$$\begin{cases} - \text{ Pour tout pavé } P_\nu^\varepsilon \text{ qui coupe } \partial\Omega, \text{ on pose :} \\ \qquad \omega_{ok}^\varepsilon = e_k \qquad\qquad \text{dans} \quad P_\nu^\varepsilon \cap \Omega \\ - \text{ Pour tout pavé entièrement inclus dans } \Omega, \text{ on pose :} \\ \qquad \omega_{ok}^\varepsilon = e_k \qquad\qquad \text{dans } K_\nu^\varepsilon \\ \qquad -\partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_{ok}^\varepsilon)) = 0 \qquad \text{dans } C_\nu^\varepsilon \setminus B_\nu^{a_\varepsilon} \\ \qquad \omega_{ok}^\varepsilon = 0 \qquad\qquad \text{dans } B_\nu^{a_\varepsilon} \\ \text{et} \quad \omega_{ok}^\varepsilon \in [H^1(P_\nu^\varepsilon)]^2. \end{cases}$$

Il est facile de voir que les fonctions $(\omega_k^\varepsilon)_{1\leq k\leq 2}$ vérifient les hypothèses (H1) et (H2) et que $\omega_{ok}^\varepsilon \in [H^1(\Omega)]^2$.

On pose :

(IV.3.30)
$$\omega_k^{\varepsilon\prime} = \omega_k^\varepsilon - \omega_{ok}^\varepsilon.$$

Par définition on a pour tout pavé P_ν^ε inclus dans Ω :

(IV.3.31)
$$\begin{cases} \omega_k^{\varepsilon\prime} \in [H_0^1(C_\nu^\varepsilon)]^2 \\ -\partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^{\varepsilon\prime})) = (a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_{ok}^\varepsilon)(e_r^\nu.e_j))\delta_\nu^{a_\varepsilon} \qquad \text{dans } C_\nu^\varepsilon \end{cases}$$

où $\delta_\nu^{a_\varepsilon}$ est la masse unité portée par $\partial B_\nu^{a_\varepsilon}$.

Pour vérifier (H3), nous allons d'abord expliciter les $(\omega_{ok}^\varepsilon)_{k=1}^2$.

Lemme IV.3.9 : *Soient $(\omega_{ok}^\varepsilon)_{k=1}^2$ les fonctions définies en (IV.3.29).*

Dans chaque C_ν^ε on a :

$$\omega_{ok}^\varepsilon = x_k r f(r) e_r + g(r) e_k \qquad \text{pour} \qquad r \in [a_\varepsilon, \varepsilon]$$

$$\begin{cases} f(r) = \dfrac{A}{1+2m}\dfrac{1}{r^2} + \dfrac{B}{r^4} + C \\ g(r) = -A\log r - \dfrac{B}{2r^2} - \dfrac{2m+3}{2(1+2m)}Cr^2 + D \end{cases}$$

(*IV.3.32*)
$$\begin{cases} A = -\dfrac{\varepsilon^2}{\sigma_\varepsilon^2}[1 + o(1)] \\ B = \dfrac{1}{1+2m}\dfrac{\varepsilon^2 a_\varepsilon^2}{\sigma_\varepsilon^2}[1 + o(1)] \\ C = \dfrac{1}{(1+2m)}\dfrac{1}{\sigma_\varepsilon^2}[1 + o(1)] \\ D = 1 - \dfrac{\varepsilon^2 \log\varepsilon}{\sigma_\varepsilon^2}[1 + o(1)]. \end{cases}$$

Démonstration :

On reprend les calculs de l'annexe B. On a donc à résoudre le système suivant :

$$\text{(IV.3.33)} \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{1+2m}\dfrac{A}{\varepsilon^2} + \dfrac{B}{\varepsilon^4} + C = 0 \\ \dfrac{1}{1+2m}\dfrac{A}{a_\varepsilon^2} + \dfrac{B}{a_\varepsilon^4} + C = 0 \\ -log\varepsilon A - \dfrac{B}{2\varepsilon^2} - \dfrac{2m+3}{2(1+2m)}\varepsilon^2 C + D = 1 \\ -loga_\varepsilon A - \dfrac{B}{2a_\varepsilon^2} - \dfrac{2m+3}{2(1+2m)}a_\varepsilon^2 C + D = 0. \end{cases}$$

Par substitution, il vient :

$$\text{(IV.3.34)} \qquad \begin{cases} B = \dfrac{a_\varepsilon^2\varepsilon^2}{a_\varepsilon^2+\varepsilon^2}\dfrac{A}{1+2m} \\ C = -\dfrac{1}{a_\varepsilon^2+\varepsilon^2}\dfrac{A}{1+2m} \\ D = A\Big(loga_\varepsilon - \dfrac{\varepsilon^2}{2(a_\varepsilon^2+\varepsilon^2)}\dfrac{1}{1+2m} - \dfrac{2m+3}{2(1+2m)}\dfrac{a_\varepsilon^2}{a_\varepsilon^2+\varepsilon^2}\Big) \\ \dfrac{1}{A} = log\dfrac{a_\varepsilon}{\varepsilon} + \dfrac{1}{(1+2m)^2}\dfrac{\varepsilon^2-a_\varepsilon^2}{a_\varepsilon^2+\varepsilon^2}. \end{cases}$$

On introduit dans (IV.3.34) la quantité $\sigma_\varepsilon^2 = -\varepsilon^2 log\dfrac{a_\varepsilon}{\varepsilon}$ et on obtient ainsi le résultat.

C.Q.F.D.

Lemme IV.3.10 : *Soient $(\omega_{ok}^\varepsilon)_{k=1}^2$ les fonctions définies en (IV.3.29). On a :*

$$\textit{(IV.3.35)} \qquad \begin{cases} |\nabla\omega_{ok}^\varepsilon|_{L^2(\Omega)} \leq \dfrac{c}{\sigma_\varepsilon} \\ |\omega_{ok}^\varepsilon - e_k|_{L^2(\Omega)} \leq c\dfrac{\varepsilon^2}{\sigma_\varepsilon^2} \end{cases}$$

et

$$\textit{(IV.3.36)} \qquad (a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_{ok}^\varepsilon)(e_r^\nu.e_j))\delta_\nu^{a_\varepsilon} = 2\lambda\mu\frac{1+m}{1+2m}\frac{\varepsilon^2}{a_\varepsilon\sigma_\varepsilon^2}[1+o(1)]e_k\delta_\nu^{a_\varepsilon}.$$

Démonstration :

On reprend les calculs du lemme II.2.1. On a :

$$\begin{aligned} |\nabla\omega_{ok}^\varepsilon|_{L^2(C_\nu^\varepsilon)}^2 &\leq c\int_{a_\varepsilon}^{\varepsilon}\Big(\frac{|A|^2}{r} + \frac{|B|^2}{r^5} + |C|^2r^3\Big)dr \\ &\leq c\Big[|A|^2\Big|log\frac{a_\varepsilon}{\varepsilon}\Big| + \frac{|B|^2}{a_\varepsilon^4} + |C|^2\varepsilon^4\Big] \\ &\leq c\frac{\varepsilon^2}{\sigma_\varepsilon^2}. \end{aligned}$$

Le nombre de pavés P_ν^ε dans Ω est de l'ordre de $1/\varepsilon^2$, donc :

$$|\nabla\omega_{ok}^\varepsilon|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{c}{\sigma_\varepsilon}.$$

De même on a :

$$|\omega_k^\varepsilon - e_k|^2_{L^2(C_\nu^\varepsilon)} \leq c\int_{a_\varepsilon}^{\varepsilon}\Big(|D-1-Alogr|^2 + |A|^2 + \frac{|B|^2}{r^4} + |C|^2r^4\Big)rdr.$$

Il est facile de vérifier que :

$$\int_{a_\varepsilon}^{\varepsilon}|A|^2rdr\ ,\ \int_{a_\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{|B|^2}{r^3}dr\ ,\ \int_{a_\varepsilon}^{\varepsilon}|C|^2r^5dr\ \leq c\frac{\varepsilon^6}{\sigma_\varepsilon^4}$$

il reste donc à majorer $\displaystyle\int_{a_\varepsilon}^{\varepsilon}|D-1-Alogr|^2dr$. On a :

$$\int_{a_\varepsilon}^{\varepsilon}|D-1-Alogr|^2 = |D-1|^2\frac{r^2}{2}\Big|_{a_\varepsilon}^{\varepsilon} + |A|^2\int_{a_\varepsilon}^{\varepsilon}(logr)^2rdr - ((D-1)\overline{A} + \overline{(D-1)}A)\int_{a_\varepsilon}^{\varepsilon}rlogrdr \quad (*)$$

$$\int_{a_\varepsilon}^{\varepsilon}(logr)^2rdr = (logr)^2\frac{r^2}{2}\Big|_{a_\varepsilon}^{\varepsilon} - \int_{a_\varepsilon}^{\varepsilon}rlogrdr \qquad \text{et} \qquad \int_{a_\varepsilon}^{\varepsilon}rlogrdr = \frac{r^2}{2}logr\Big|_{a_\varepsilon}^{\varepsilon} - \frac{1}{4}r^2\Big|_{a_\varepsilon}^{\varepsilon}$$

$$A = -\frac{\varepsilon^2}{\sigma_\varepsilon^2}[1 + o(1)]\,; \qquad D-1 = -\frac{\varepsilon^2log\varepsilon}{\sigma_\varepsilon^2}[1 + o(1)]$$

$$(D-1)\overline{A} + \overline{(D-1)}A = 2\frac{\varepsilon^4log\varepsilon}{\sigma_\varepsilon^4}[1 + o(1)]$$

en reportant les égalités ci-dessus dans l'égalité $(*)$, puis en développant les calculs et en simplifiant, on obtient :

$$\int_{a_\varepsilon}^{\varepsilon}|D-1-Alogr|^2 = \Big(\frac{\varepsilon^6}{4\sigma_\varepsilon^4} - \frac{\varepsilon^4a_\varepsilon^2}{2\sigma_\varepsilon^4}\Big((log\varepsilon)^2 + (loga_\varepsilon)^2 - 2loga_\varepsilon log\varepsilon + log\varepsilon - loga_\varepsilon + \frac{1}{2}\Big)\Big)[1 + o(1)]$$

$$= \frac{\varepsilon^6}{4\sigma_\varepsilon^4}\varphi(\varepsilon)[1 + o(1)]$$

avec $\displaystyle\varphi(\varepsilon) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\Big(\frac{a_\varepsilon}{\varepsilon}\Big)^2\Big(\frac{1}{2} + 3log\frac{a_\varepsilon}{\varepsilon} - \Big(1 + log\frac{a_\varepsilon}{\varepsilon}\Big)^2\Big)$ et $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\varphi(\varepsilon) = \frac{1}{4}$

donc

$$\int_{a_\varepsilon}^{\varepsilon}|D-1-Alogr|^2 \leq c\frac{\varepsilon^6}{\sigma_\varepsilon^4}$$

d'où

$$|\omega_{ok}^\varepsilon - e_k|_{L^2(\Omega)} \leq c\frac{\varepsilon^2}{\sigma_\varepsilon^2}.$$

Enfin :

$$(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_{ok}^\varepsilon)(e_r^\nu.e_j))\delta_\nu^{a_\varepsilon} = \lambda\mu\Big(-\frac{A}{a_\varepsilon} + \frac{B}{a_\varepsilon^3} - \frac{2m+3}{1+2m}Ca_\varepsilon\Big)e_k\delta_\nu^{a_\varepsilon} +$$

$$+ \lambda\mu\Big(-\frac{4A}{1+2m}\frac{1}{a_\varepsilon} - \frac{4B}{a_\varepsilon^3} + \frac{4C}{1+2m}a_\varepsilon\Big)(e_r^\nu.e_k)e_r^\nu\delta_\nu^{a_\varepsilon}$$

$$= 2\lambda\mu\frac{1+m}{1+2m}\frac{\varepsilon^2}{a_\varepsilon\sigma_\varepsilon^2}[1 + o(1)]\,e_k\delta_\nu^{a_\varepsilon}.$$

C.Q.F.D.

Lemme IV.3.11 : *Les fonctions $(\omega_k^{\varepsilon\prime})_{1\le k\le 2}$ définies en (IV.3.30) appartiennent à $[H_0^1(\Omega)]^2$ et on a :*

$$|\nabla\omega_k^{\varepsilon\prime}|_{L^2(\Omega)} \le c\frac{\varepsilon}{\sigma_\varepsilon^2} \tag{IV.3.37}$$

$$|\omega_k^{\varepsilon\prime}|_{L^2(\Omega)} \le c\frac{\varepsilon}{\sigma_\varepsilon} \tag{IV.3.38}$$

où c ne dépend pas de ε.

$$\begin{aligned} \omega_k^{\varepsilon\prime} &\longrightarrow 0 \quad \text{dans} \quad [L^2(\Omega)]^2 \quad \text{fort.} \\ \sigma_\varepsilon \nabla\omega_k^{\varepsilon\prime} &\longrightarrow 0 \quad \text{dans} \quad [L^2(\Omega)]^4 \quad \text{fort.} \end{aligned}$$

Démonstration :

$\omega_k^{\varepsilon\prime}$ satisfait dans chaque ouvert C_ν^ε aux équations :

$$\text{(IV.3.39)} \qquad \begin{cases} -\partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^{\varepsilon\prime})) = (a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_{ok}^{\varepsilon})(e_r^\nu.e_j))\delta_\nu^{a_\varepsilon} & \text{dans } C_\nu^\varepsilon \\ \omega_k^{\varepsilon\prime} = 0 & \text{sur } \partial C_\nu^\varepsilon. \end{cases}$$

De la formulation variationnelle de (IV.3.39) on tire :

$$\begin{aligned} \int_{C_\nu^\varepsilon} a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^{\varepsilon\prime})\,\varepsilon_{ij}(\overline{\omega}_k^{\varepsilon\prime})\,dx &= \int_{\partial B_\nu^{a_\varepsilon}} a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_{ok}^{\varepsilon})(e_r^\nu.e_j)(\overline{\omega_k^{\varepsilon\prime}})_i ds \\ &= 2\lambda\mu\frac{1+m}{1+2m}\frac{\varepsilon^2}{a_\varepsilon\sigma_\varepsilon^2}[1+o(1)]\int_{\partial B_\nu^{a_\varepsilon}} \overline{\omega}_k^{\varepsilon\prime}.e_k ds \end{aligned}$$

Or on sait (cf (II.3.7)) que :

$$\left|\int_{\partial B_\nu^{a_\varepsilon}} \overline{\omega}_k^{\varepsilon\prime}.e_k ds\right| \le ca_\varepsilon|\nabla\omega_k^{\varepsilon\prime}|_{L^2(B_\nu^{a_\varepsilon}\setminus T_\nu^\varepsilon)}$$

où c ne dépend ni de ε, ni de $\omega_k^{\varepsilon\prime}$.

Par conséquent :

$$\int_{C_\nu^\varepsilon} |\varepsilon(\omega_k^{\varepsilon\prime})|^2 \le c\frac{\varepsilon^2}{\sigma_\varepsilon^2}|\nabla\omega_k^{\varepsilon\prime}|_{L^2(B_\nu^{a_\varepsilon}\setminus T_\nu^\varepsilon)} \le c\frac{\varepsilon^2}{\sigma_\varepsilon^2}|\nabla\omega_k^{\varepsilon\prime}|_{L^2(C_\nu^\varepsilon)}$$

d'où

$$|\varepsilon(\omega_k^{\varepsilon\prime})|^2_{L^2(\Omega)} = n(\varepsilon)|\varepsilon(\omega_k^{\varepsilon\prime})|^2_{L^2(C_\nu^\varepsilon)} \le c\frac{\varepsilon^2}{\sigma_\varepsilon^2}n(\varepsilon)|\nabla\omega_k^{\varepsilon\prime}|_{L^2(C_\nu^\varepsilon)} = c\frac{\varepsilon^2}{\sigma_\varepsilon^2}|\nabla\omega_k^{\varepsilon\prime}|_{L^2(\Omega)}.$$

On déduit (IV.3.37) à l'aide de l'inégalité de Korn.

L'inégalité (IV.3.38) est une conséquence du lemme IV.3.1 et de (IV.3.37) car $\omega_k^{\varepsilon\prime} \in [H_0^1(\Omega)]^2$ et $\omega_k^{\varepsilon\prime} = 0$ sur les trous T_ν^ε.

C.Q.F.D.

Lemme IV.3.12 :

Les fonctions $(\omega_k^\varepsilon)_{1\le k\le 2}$ *définies en (IV.3.28) vérifient l'hypothèse (H3).*

De plus on a : $$|\omega_k^\varepsilon - e_k|_{L^2(\Omega)} \le c\frac{\varepsilon}{\sigma_\varepsilon}.$$

Démonstration :

On écrit que :

$$\begin{cases} |\omega_k^\varepsilon - e_k|_{L^2(\Omega)} \le |\omega_{ok}^\varepsilon - e_k|_{L^2(\Omega)} + |\omega_k^{\varepsilon\prime}|_{L^2(\Omega)} \\ |\nabla\omega_k^\varepsilon|_{L^2(\Omega)} \le |\nabla\omega_{ok}^\varepsilon|_{L^2(\Omega)} + |\nabla\omega_k^{\varepsilon\prime}|_{L^2(\Omega)} \end{cases}$$

à l'aide des lemmes IV.3.10 et IV.3.11, on obtient :

$$\begin{cases} |\omega_k^\varepsilon - e_k|_{L^2(\Omega)} \le c\left(\dfrac{\varepsilon^2}{\sigma_\varepsilon^2} + \dfrac{\varepsilon}{\sigma_\varepsilon}\right) \le c\dfrac{\varepsilon}{\sigma_\varepsilon} \\ |\nabla\omega_k^\varepsilon|_{L^2(\Omega)} \le c\left(\dfrac{1}{\sigma_\varepsilon} + \dfrac{\varepsilon}{\sigma_\varepsilon^2}\right) \le \dfrac{c}{\sigma_\varepsilon} \end{cases}$$

car $\dfrac{\varepsilon}{\sigma_\varepsilon} \longrightarrow 0.$

C.Q.F.D.

Avant de vérifier (H4), (H5) et (H6), on remarque qu'on a :

$$-\partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)) = \mu_{k,i}^\varepsilon - \gamma_{k,i}^\varepsilon \qquad \text{dans } \Omega$$

où

$$\begin{cases} \mu_k^\varepsilon = \displaystyle\sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_{ok}^\varepsilon)(e_r^\nu.e_j)e_i\delta_\nu^\varepsilon + \sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^{\varepsilon\prime})(e_r^\nu.e_j)e_i\delta_\nu^\varepsilon \\ \gamma_k^\varepsilon = \displaystyle\sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)(e_r^\nu.e_j)e_i\delta_{T_\nu^\varepsilon}. \end{cases}$$

La notation δ_ν^ε désigne la masse unité portée par la sphère de rayon ε inscrite dans P_ν^ε et $\delta_{T_\nu^\varepsilon}$ est la masse unité portée par le bord du trou T_ν^ε.
On a :

$$\gamma_k^\varepsilon = 0 \qquad \text{dans} \qquad [H^{-1}(\Omega_\varepsilon)]^2.$$

A l'aide du lemme IV.3.9, on a :

$$a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_{ok}^\varepsilon)(e_r^\nu.e_j)e_i\delta_\nu^\varepsilon = \frac{\varepsilon}{\sigma_\varepsilon^2}\left[\lambda\mu\left(1 - \frac{2m+3}{(1+2m)^2}\right)e_k + \frac{4\lambda\mu}{1+2m}\left(1+\frac{1}{1+2m}\right)(e_r^\nu.e_k)e_r^\nu\right]\delta_\nu^\varepsilon\,[1+o(1)].$$

On procède comme dans le cas $n \ge 3$, on obtient :

pour toute suite $v_\varepsilon \in [H^1(\Omega)]^n$ et pour tout $v \in [L^2(\Omega)]^n$ tel que :

$$\begin{cases} v_\varepsilon \rightharpoonup v & \text{dans } [L^2(\Omega)]^n \text{ faible,} \\ |\nabla v_\varepsilon|_{L^2(\Omega)} \le \dfrac{c}{\sigma_\varepsilon} & \text{où c ne dépend pas de } \varepsilon \\ v_\varepsilon = 0 & \text{sur les trous } (T_\nu^\varepsilon)_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} \end{cases}$$

et pour tout $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sigma_\varepsilon^2 < \sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_{ok}^\varepsilon)(e_r^\nu.e_j)e_i\delta_\nu^\varepsilon\,,\varphi(v_\varepsilon)_i >_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\lambda\mu\Big[\Big(1-\frac{2m+3}{(1+2m)^2}\Big)e_k < \sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)}\varepsilon\delta_\nu^\varepsilon\,,\,\varphi v_\varepsilon >_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} +$$

$$+ \frac{4\lambda\mu}{1+2m}\Big(1+\frac{1}{1+2m}\Big) < \sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)}\varepsilon\delta_\nu^\varepsilon(e_k.e_r^\nu).e_r^\nu\,,\,\varphi v_\varepsilon >_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}\Big][1+o(1)]$$

$$\longrightarrow \lambda\mu\Big[\Big(1-\frac{2m+3}{(1+2m)^2}\Big)e_k\frac{\pi}{2}\int_\Omega\varphi v + \frac{4\lambda\mu}{1+2m}\Big(1+\frac{1}{1+2m}\Big)e_k\frac{\pi}{4}\int_\Omega\varphi v$$

$$= \lambda\mu\pi\frac{1+m}{1+2m}e_k\int_\Omega\varphi v$$

$$= \mu_k\int_\Omega\varphi v.$$

Pour calculer la limite $\lim_{\varepsilon\to 0}\sigma_\varepsilon^2 < \sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^{\varepsilon\prime})(e_r^\nu.e_j)e_i\delta_\nu^\varepsilon\,,\varphi(v_\varepsilon)_i >_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}$, nous aurons besoin de la proposition ci-dessous :

Proposition IV.3.13 : *Soit Ω_ε un ouvert définit suivant le paragraphe IV.1.*

Pour tout $u \in [H_0^1(\Omega)]^n$, on définit $R_\varepsilon u$ par :

$$\begin{cases} - \text{ Pour tout pavé } P_\nu^\varepsilon \subset \Omega \text{ :} \\ \qquad R_\varepsilon u = u \qquad \text{dans} \quad K_\nu^\varepsilon \\ \qquad R_\varepsilon u = v_\varepsilon \qquad \text{dans} \quad C_\nu^\varepsilon \\ \qquad R_\varepsilon u = 0 \qquad \text{dans} \quad T_\nu^\varepsilon \\ - \text{ Pour les pavés qui coupent } \partial\Omega \text{ :} \\ \qquad R_\varepsilon u = u \qquad \text{dans} \quad P_\nu^\varepsilon \cap \Omega. \end{cases}$$

et où v_ε est la solution unique du système

$$\begin{cases} \text{Trouver } v_\varepsilon \in [H^1(C_\nu^\varepsilon)]^n \text{ tel que :} \\ \qquad -\Delta v_\varepsilon = -\Delta u \qquad \text{dans} \quad C_\nu^\varepsilon \\ \qquad v_\varepsilon = 0 \qquad \text{sur} \quad \partial T_\nu^\varepsilon \\ \qquad v_\varepsilon = u \qquad \text{sur} \quad \partial C_\nu^\varepsilon \setminus \partial T_\nu^\varepsilon. \end{cases}$$

Alors l'opérateur R_ε vérifie :

(i) $R_\varepsilon \in \mathcal{L}([H_0^1(\Omega)]^n \,:\, [H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^n)$

(ii) $u \in [H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^n \Longrightarrow R_\varepsilon\tilde{u} = u \quad dans \quad \Omega_\varepsilon$

(iii) $$\|R_\varepsilon u\|_{H_0^1(\Omega_\varepsilon)} \le c\Big[|\nabla u|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\sigma_\varepsilon}|u|_{L^2(\Omega)}\Big]$$

où c est une constante strictement positive qui ne dépend ni de u, ni de ε.

Démonstration :

En utilisant l'annexe C, les points (i) et (ii) sont vérifiés et on a :

$$|\nabla v_\varepsilon|^2_{L^2(C^\varepsilon)} \leq c\,[\,|\nabla u|^2_{L^2(C^\varepsilon \cup T^\varepsilon)} + \frac{K_\eta^2}{\varepsilon^2}|u|^2_{L^2(C^\varepsilon \cup T^\varepsilon)}\,]$$

où c est une constante qui ne dépend ni de u, ni de ε, et où :

$$K_\eta = \begin{cases} \eta^{n-2/2} & \text{pour} \quad n \geq 3 \\ \dfrac{1}{\sqrt{|log\eta|}} & \text{pour} \quad n = 2 \end{cases} \qquad \eta = \frac{a_\varepsilon}{\varepsilon}.$$

On en déduit

$$\frac{K_\eta^2}{\varepsilon^2} = \begin{cases} \dfrac{a_\varepsilon^{n-2}}{\varepsilon^n} & \text{pour} \quad n \geq 3 \\ \dfrac{1}{\varepsilon^2}\left|log\dfrac{a_\varepsilon}{\varepsilon}\right| & \text{pour} \quad n = 2 \end{cases}$$

(IV.3.40) $$|\nabla(R_\varepsilon u)|^2_{L^2(P_\nu^\varepsilon)} \leq c\,[\,|\nabla u|^2_{L^2(P_\nu^\varepsilon)} + \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2}|u|^2_{L^2(P_\nu^\varepsilon)}\,].$$

On somme les estimations (IV.3.40) pour $\nu \in \{1, ..., n(\varepsilon)\}$, et on obtient :

$$|\nabla(R_\varepsilon u)|^2_{L^2(\Omega)} \leq c\,[\,|\nabla u|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2}|u|^2_{L^2(\Omega)}\,].$$

C.Q.F.D.

Théorème IV.3.14 :

Les fonctions $(\omega_k^\varepsilon)_{k=1}^2$ définies en (IV.3.28) et les vecteurs constants μ_k définis par :

(IV.3.41) $$\mu_k = \pi \frac{\lambda\mu(c_o^2\rho_o + \lambda(\eta + 2\mu))}{c_o^2\rho_o + \lambda(3\mu + \eta)} e_k \qquad \text{pour} \qquad 1 \leq k \leq 2$$

vérifient les hypothèses (H4), (H5) et (H6).

Démonstration :

Les fonctions μ_k sont des constantes donc (H4) est vérifiée. De plus l'application $\lambda \longmapsto \mu_k(\lambda)$ est une fraction et $|\mu_k(\lambda)| \leq c|\lambda|$ donc (H6) est aussi vérifiée.
Pour finir la démonstration du théorème il nous reste donc à vérifier que :

(IV.3.42) $$\sigma_\varepsilon^2 < \sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^{\varepsilon\prime})(e_r^\nu . e_j)e_i\delta_\nu^\varepsilon\,,\varphi(v_\varepsilon)_i >_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} \longrightarrow 0 \qquad \text{lorsque} \qquad \varepsilon \to 0.$$

Pour prouver (IV.3.42), on reprend la démonstration du théorème II.3.3 et on étudie la suite réelle Δ_ε :

$$\Delta_\varepsilon = \sigma_\varepsilon^2 < \sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^{\varepsilon\prime})(e_r^\nu . e_j)e_i\delta_\nu^\varepsilon\,,\varphi(v_\varepsilon)_i >_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} .$$

On introduit l'opérateur de restriction R_ε de la proposition IV.3.13, mais dans le cas où les trous sont les boules $B_\nu^{a_\varepsilon}$ de rayon a_ε, et non sur les trous T_ν^ε. Dans ce cas on a :

$$\begin{aligned} R_\varepsilon(\varphi v_\varepsilon) &= \varphi v_\varepsilon \qquad \text{sur les sphères de rayon } \varepsilon \text{ inscrites dans } P_\nu^\varepsilon \\ R_\varepsilon(\varphi v_\varepsilon) &= 0 \qquad \text{dans } B_\nu^{a_\varepsilon} \end{aligned}$$

donc $$\Delta_\varepsilon = \sigma_\varepsilon^2 < \sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^{\varepsilon\prime})(e_r^\nu . e_j)e_i\delta_\nu^\varepsilon , R_\varepsilon(\varphi v_\varepsilon) >_{H^{-1}(\Omega_\varepsilon),H_0^1(\Omega_\varepsilon)} .$$

On intègre par parties et il vient :

$$\Delta_\varepsilon = \sigma_\varepsilon^2 < -\partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^{\varepsilon\prime})) , \left(R_\varepsilon(\varphi v_\varepsilon)\right)_i >_{H^{-1}(\Omega_\varepsilon),H_0^1(\Omega_\varepsilon)}$$

d'où $$|\Delta_\varepsilon| \leq c\,\sigma_\varepsilon^2\,|\nabla\omega_k^{\varepsilon\prime}|_{L^2(\Omega)}\,|\nabla\left(R_\varepsilon(\varphi v_\varepsilon)\right)|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}.$$

A l'aide du lemme IV.3.11, il vient :

$$|\Delta_\varepsilon| \leq c\,\varepsilon\,|\nabla\left(R_\varepsilon(\varphi v_\varepsilon)\right)|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}.$$

On déduit grâce à la proposition IV.3.12 et aux hypothèses faites sur v_ε que :

$$\begin{aligned} |\Delta_\varepsilon| &\leq c\,\varepsilon\,[\,|\nabla(\varphi v_\varepsilon)|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\sigma_\varepsilon}|(\varphi v_\varepsilon)|_{L^2(\Omega)}\,] \\ &\leq c\,\varepsilon\,[\,|\nabla v_\varepsilon|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\sigma_\varepsilon}|v_\varepsilon|_{L^2(\Omega)}\,] \\ &\leq c\,\frac{\varepsilon}{\sigma_\varepsilon} \end{aligned}$$

donc $$\Delta_\varepsilon \longrightarrow 0$$

d'où (IV.3.42) et (H5) est ainsi vérifiée.

C.Q.F.D.

Passage à la limite :

Théorème IV.3.15 :

Soit u_ε l'unique solution du système suivant :

(*I.3.3*)
$$\begin{cases} \text{Trouver} \quad u_\varepsilon \in [H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^n \quad \text{tel que :} \\ \lambda^2 \rho_o u_{\varepsilon i} - \partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(u_\varepsilon)) = f_i \qquad \text{dans} \quad \Omega_\varepsilon \quad i = 1, ..., n\,. \end{cases}$$

On se place sous les hypothèses (H1) à (H5). Alors

(*IV.3.5*)
$$\frac{\tilde{u}_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon^2} \rightharpoonup u \quad \text{dans} \quad [L^2(\Omega)]^n \quad \textit{faible}$$

où u est la solution unique de l'équation :

(*IV.3.43*)
$$Mu = f.$$

Démonstration :

Pour trouver le problème limite (IV.3.43), nous allons utiliser la méthode de l'énérgie.

D'aprés (I.3.1), on a :

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \lambda^2 \rho_o u_\varepsilon v dx + \int_{\Omega_\varepsilon} a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(u_\varepsilon)\varepsilon_{ij}(v)dx = \int_{\Omega_\varepsilon} f v dx \qquad \forall v \in [H_o^1(\Omega_\varepsilon)]^n.$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. On remplace v par $\varphi\omega_k^\varepsilon$ où $(\omega_k^\varepsilon)_{k=1}^n$ sont les fonctions définies par (IV.3.13) pour $n \geq 3$, par (IV.3.28) pour $n = 2$ et qui vérifient les hypothèses (H1) à (H6). Il vient :

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \lambda^2 \rho_o u_\varepsilon \varphi\omega_k^\varepsilon dx + \int_{\Omega_\varepsilon} a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(u_\varepsilon)\varepsilon_{ij}(\varphi\omega_k^\varepsilon)dx = \int_{\Omega_\varepsilon} f\varphi\omega_k^\varepsilon dx$$

en remplaçant u_ε par $\tilde{u}_\varepsilon$ et en intégrant par parties, on obtient :

(IV.3.44)
$$\int_\Omega \lambda^2 \rho_o \tilde{u}_\varepsilon \varphi\omega_k^\varepsilon dx + \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\tilde{u}_\varepsilon)\frac{1}{2}[(\partial_i\varphi)(\omega_k^\varepsilon)_j + (\partial_j\varphi)(\omega_k^\varepsilon)_i]dx +$$

$$+ < -\partial_h(a_{ijlh}\varepsilon_{ij}(\omega_k^\varepsilon)), \varphi(\tilde{u}_\varepsilon)_l > - \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)(\partial_h\varphi)(\tilde{u}_\varepsilon)_l dx = \int_\Omega f\varphi\omega_k^\varepsilon dx.$$

Passons à la limite dans chacun des termes de l'égalité (IV.3.44).

* $\displaystyle\int_\Omega \lambda^2 \rho_o \tilde{u}_\varepsilon \varphi\omega_k^\varepsilon dx = \sigma_\varepsilon^2\Big(\int_\Omega \lambda^2 \rho_o \frac{\tilde{u}_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon^2}\varphi\omega_k^\varepsilon dx\Big) \longrightarrow 0$

car $\dfrac{\tilde{u}_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon^2}$ et ω_k^ε sont bornées dans $[L^2(\Omega)]^n$

$$* \quad \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\tilde{u}_\varepsilon)\frac{1}{2}[(\partial_i\varphi)(\omega_k^\varepsilon)_j + (\partial_j\varphi)(\omega_k^\varepsilon)_i]dx = \sigma_\varepsilon \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\frac{\tilde{u}_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon})\frac{1}{2}[(\partial_i\varphi)(\omega_k^\varepsilon)_j + (\partial_j\varphi)(\omega_k^\varepsilon)_i]dx$$

$$\longrightarrow 0$$

car $|\nabla\frac{\tilde{u}_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon}|_{L^2(\Omega)} \leq c$ et ω_k^ε est bornée dans $[L^2(\Omega)]^n$.

$$* \quad < -\partial_h(a_{ijlh}\varepsilon_{ij}(\omega_k^\varepsilon)), \varphi(\tilde{u}_\varepsilon)_l >_{H^{-1},H_0^1(\Omega)} \longrightarrow \int_\Omega \varphi\mu_k.u$$

car $\frac{\tilde{u}_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon^2} \rightharpoonup u$ dans $[L^2(\Omega)]^n$ faible et $|\nabla\frac{\tilde{u}_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon^2}|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{c}{\sigma_\varepsilon}$

donc on peut appliquer l'hypothèse (H5) à la suite $\left(\frac{\tilde{u}_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon^2}\right)$.

$$* \quad \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)(\partial_h\varphi)(\tilde{u}_\varepsilon)_l dx = \int_\Omega f\varphi\omega_k^\varepsilon dx = \sigma_\varepsilon \int_\Omega a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\sigma_\varepsilon\omega_k^\varepsilon)(\partial_h\varphi)(\frac{\tilde{u}_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon^2})_l dx \longrightarrow 0$$

car $|\nabla(\sigma_\varepsilon\omega_k^\varepsilon)|_{L^2(\Omega)}$ et $|\frac{\tilde{u}_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon^2}|_{L^2(\Omega)}$ sont bornées.

$$* \quad \int_\Omega f\varphi\omega_k^\varepsilon dx \longrightarrow \int_\Omega f\varphi e_k \qquad \text{car} \qquad \omega_k^\varepsilon \rightharpoonup e_k \quad \text{dans} \quad [L^2(\Omega)]^n \quad \text{faible.}$$

A la limite, on tire de (IV.3.44) :

$$\int_\Omega \mu_k.e_k\varphi dx = \int_\Omega f.e_k\varphi dx \qquad \forall 1 \leq k \leq n$$

d'où $< Mu - f\,,\, \phi >_{\mathfrak{D}',\mathfrak{D}(\Omega)} = 0 \qquad \forall\phi \in [\mathfrak{D}(\Omega)]^n$ soit (IV.3.43).

L'existence et l'unicité d'une solution de (IV.3.43) est vérifiée car la matrice M est inversible d'après la proposition IV.3.3.

Toute les sous-suites de $\frac{\tilde{u}_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon^2}$ convergent vers la même limite u donc toute la suite converge.

C.Q.F.D.

Théorème IV.3.16 : *Sous les hypothèses (H1) - (H6), on a :*

(IV.3.45) *il existe* $U \in \mathfrak{D}'(]0,+\infty[, [L^2(\Omega)]^n)$ *tel que :* $u(\lambda) = L(U) \qquad Re\lambda > \beta > 0$

(IV.3.46) $\frac{\tilde{U}_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon^2} \rightharpoonup U$ *dans* $L^2(0,T\,;\,[L^2(\Omega)])$ *faible* $\forall T > 0$

(IV.3.47) *la distribution U est l'unique solution de l'équation :*

$$G * U = F$$

où G est donné par (H6) et u la solution de (IV.3.43).

Remarque IV.3.17 : Pour le problème de [2] Stokes lorsque la taille des trous est plus grande que la taille critique, on obtenait à la limite une loi de Darcy. La vitesse était directement liée à la presion et aux forces extérieures. On retrouve un résultat analogue pour notre cas. La vitesse est donnée explicitement en fonction des forces extèrieures et un phènomène de mémoire longue apparaît comme dans le cas des trous de taille critique.

Démonstration du théorème IV.3.16 : La démonstration de ce théorème est analogue à celle du théorème I.5.3. Elle se fera à partir des lemmes ci-dessous :

Lemme IV.3.18 : *La solution de l'équation (IV.3.43)*

(IV.3.43) $$Mu = f$$

est la transformée de Laplace d'une distribution $U \in \mathcal{D}'(]0,+\infty[,[L^2(\Omega)]^n)$: $u(\lambda) = L(U)$ $Re\lambda > \beta > 0$.

Démonstration :

L'équation (IV.3.43) est équivalente à : $$u = M^{-1}(\lambda)f$$

donc $$|u|_{L^2(\Omega)} \leq |M^{-1}(\lambda)|_{L^\infty(\Omega)}\,|f|_{L^2(\Omega)}$$

nous avons l'estimaion suivante :

(IV.3.48) $$\begin{cases} |M^{-1}(\lambda)|_{L^\infty(\Omega)} \leq c \\ \text{où c est une constante indépendante de } \lambda. \end{cases}$$

En effet : soit $v \in [\mathcal{D}(\Omega)]^n$, $\exists !\ u \in [\mathcal{D}(\Omega)]^n$ tel que $v = Mu$ (M étant une constante en x),

$$Re < Mu, \overline{u} > \geq c\,|u|^2_{L^2(\Omega)} \quad \text{et} \quad Re < Mu, \overline{u} > = Re < v, \overline{u} > \leq c\,|v|_{L^2(\Omega)}\,|u|_{L^2(\Omega)}$$

donc $|u|_{L^2(\Omega)} \leq c\,|v|_{L^2(\Omega)}$, soit $|M^{-1}v|_{L^2(\Omega)} \leq c\,|v|_{L^2(\Omega)}$ $\forall v \in [\mathcal{D}(\Omega)]^n$

l'inégalité reste vraie pour les $v \in [L^2(\Omega)]^n$ par densité et comme $M^{-1} \in [L^\infty(\Omega)]^{n^2}$ on déduit (IV.3.48).

Par conséquent $$|u|_{L^2(\Omega)} \leq c\,|f|_{L^2(\Omega)}.$$

Sachant que f est la transformée de Laplace de $F \in L^2(0,+\infty\,;\,[L^2(\Omega)]^n)$, on conclu à l'aide du théorème I.5.5.

C.Q.F.D.

Lemme IV.3.19 : *La distribution $U \in \mathcal{D}'(]0,+\infty[, [L^2(\Omega)]^n)$ du lemme IV.3.18 est solution de l'équation*

$$G * U = F.$$

Démonstration :

Il suffit d'écrire : $u = L(U)$, $Mu = L(G)L(U) = L(G*U)$, $f = L(F)$. Alors $L(G*U) = L(F)$. De l'unicité de la transformée de Laplace inverse, on déduit le résultat.

C.Q.F.D.

Lemme IV.3.20 :

(*IV.3.49*) $\quad \dfrac{\tilde{U}_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon^2} \rightharpoonup U^* \quad$ *dans* $\quad L^2(0,T\,;\,[L^2(\Omega)]^n) \quad$ *faible* $\quad \forall T > 0$

(*IV.3.50*) $\quad \dfrac{\tilde{u}_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon^2} \rightharpoonup u^* = L(U^*) \quad$ *dans* $\quad [H_0^1(\Omega)]^n \quad$ *faible pour* $\quad Re\lambda > \beta > 0.$

Démonstration :

Nous avons montré au § I.2

(I.2.2) $\quad \begin{cases} V_\varepsilon \text{ est bornée dans } L^\infty(0,+\infty\,;\,[H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^n) \\ V_\varepsilon' \text{ est bornée dans } L^\infty(0,+\infty\,;\,[L^2(\Omega_\varepsilon)]^n) \end{cases}$

où $\quad V_\varepsilon = e^{-\beta t} U_\varepsilon \quad \beta > 0.$

L'inégalité de Poincaré dans Ω_ε, nous donne : $\quad |V_\varepsilon(t)|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \sigma_\varepsilon^2 \, |\nabla V_\varepsilon(t)|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$

$$\left|\frac{V_\varepsilon(t)}{\sigma_\varepsilon^2}\right|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq c \qquad \forall t > 0.$$

On déduit alors :

1) $$\left|\frac{U_\varepsilon(t)}{\sigma_\varepsilon^2}\right|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq c \qquad \forall t < T < \infty$$

donc la suite $\left(\dfrac{\tilde{U}_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon^2}\right)$ est bornée dans $L^2(0,T\,;\,[L^2(\Omega)]^n)$ d'où (IV.3.49).

2) La suite $\left(\dfrac{\tilde{V}_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon^2}\right)$ est bornée dans $L^\infty(0,+\infty\,;\,[L^2(\Omega)]^n) = \left(L^1(0,+\infty\,;\,[L^2(\Omega)]^n)\right)'$

donc après extraction d'une sous-suite près,

$$\frac{\tilde{V}_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon^2} \rightharpoonup V^* \qquad \text{dans} \quad L^\infty(0,+\infty\,;\,[L^2(\Omega)]^n) \quad \text{faible } *.$$

Soit $\omega \in [L^2(\Omega)]^n$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $Re\lambda > 0$. Alors $e^{-\lambda t}\omega \in L^1(0,+\infty\,;\,[L^2(\Omega)]^n)$.

Donc

$$< \frac{\tilde{V}_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon^2}, e^{-\lambda t}\omega >_{L^\infty(0,+\infty\,;\,[L^2(\Omega)]^n),L^1(0,+\infty\,;\,[L^2(\Omega)]^n)} \longrightarrow < V^*, e^{-\lambda t}\omega >_{L^\infty(0,+\infty\,;\,[L^2(\Omega)]^n),L^1(0,+\infty\,;\,[L^2(\Omega)]^n)},$$

soit

$$\int_0^{+\infty} < \frac{\tilde{V}_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon^2}, e^{-\lambda t}\omega >_{L^2(\Omega)} \longrightarrow \int_0^{+\infty} < V^*, e^{-\lambda t}\omega >_{L^2(\Omega)}$$

$$< \int_0^{+\infty} \frac{\tilde{V}_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon^2} e^{-\lambda t}, \omega >_{L^2(\Omega)} \longrightarrow < \int_0^{+\infty} V^* e^{-\lambda t}, \omega >_{L^2(\Omega)}$$

$$< \frac{\tilde{v}_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon^2}, \omega >_{L^2(\Omega)} \longrightarrow < v^*, \omega >_{L^2(\Omega)} \qquad \forall \omega \in [L^2(\Omega)]^n$$

donc $\dfrac{\tilde{v}_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon^2} \rightharpoonup v^*$ dans $[L^2(\Omega)]^n$ faible pour $Re\lambda > 0$.

Il en résulte que : $\dfrac{\tilde{u}_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon^2} \rightharpoonup u^*$ dans $[L^2(\Omega)]^n$ faible pour $Re\lambda > \beta$

où $U^* = e^{\beta t} V^*$ et $u^* = L(U^*)$.

En effet : soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $Re\lambda > \beta$

$$\left(\frac{\tilde{u}_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon^2}\right)(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{\tilde{U}_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon^2} e^{-\lambda t} dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\tilde{V}_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon^2} e^{-(\lambda-\beta)t} dt$$

$$= \left(\frac{\tilde{v}_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon^2}\right)(\lambda - \beta) \rightharpoonup v^*(\lambda - \beta) \qquad \text{dans } [L^2(\Omega)]^n \text{ faible pour } Re\lambda > \beta$$

d'où (IV.3.50).

C.Q.F.D.

Remarque IV.3.21 : Comme au paragraphe I.5, au cours de la démonstration du lemme IV.3.19 , les convergences (IV.3.49) et (IV.3.50) sont à une sous-suite près. Grâce au lemme ci-dessous, ce sont toute les suites qui convergent.

Lemme IV.3.22 :

La limite de $\left(\dfrac{\tilde{U}_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon^2}\right)$ *lorsque* ε *tend vers zéro est unique.*

Donc $U^* = U$.

Démonstration :

Supposons que U_1 et U_2 soient deux limites de $\left(\dfrac{\tilde{U}_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon^2}\right)$ lorsque ε tend vers zéro. D'après (IV.3.50) $u_1(\lambda)$ et $u_2(\lambda)$ sont deux limites de $\left(\dfrac{\tilde{u}_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon^2}\right)$ qui satisfont à l'équation

(IV.3.43) $$Mu = f.$$

Mais (IV.3.43) admet une unique solution, alors : $u_1(\lambda) = u_2(\lambda)$ pour $Re\lambda > \beta$.

De la propriété d'unicité de la transformée de Laplace, on déduit que $U_1 = U_2$.

C.Q.F.D.

Lemme IV.3.23 :

L'équation $$G * U = F$$

admet une unique solution $U \in L^\infty(0,T\,;\,[L^2(\Omega)]^n) \quad \forall T > 0.$

Démonstration :

L'existence est donnée par les lemmes IV.3.18, IV.3.19, IV.3.20, IV.3.22 et IV.3.23.

L'unicité est aussi vérifiée car $U = G^{-1} * F$ où G^{-1} est l'inverse de G dans l'algèbre de convolution $\mathfrak{D}'(]0,+\infty[,[L^\infty(\Omega)]^{n^2})$, et G^{-1} existe car M^{-1} existe (cf [23] [47]).

C.Q.F.D.

Les lemmes (IV.3.18), ... , (IV.3.23) démontrent le théorème IV.3.16.

V- AUTRES APPLICATIONS

En faisant un passage à la transformée de Laplace du problème de viscoélasticité étudié aux paragraphes I, II, III, et IV, nous nous sommes ramenés à un problème de type élasticité.

Vu la construction des fonctions tests $(\omega_k^\varepsilon)_{1\leq k\leq n}$, nous avons finalement résolu le problème de l'élasticité avec de petits trous.

Aussi ce procédé de passage à la transformée de Laplace nous permet d'étudier de la même façon les problèmes de la Chaleur et des Ondes.

Au fait en faisant un passage à la transformée de Laplace dans ces problèmes, on tombe sur le problème du Laplacien étudié par Cioranescu et Murat [12]. On passe à la limite de la même manière que dans [12] puis on retourne au problème d'évolution.

Le problème des Ondes a été traité par D. Cioranescu, P. Donato, F. Murat et E. Zuazua dans [11] à partir de la formulation faible du problème en temps. Comme les fonctions tests ne dépendaient pas du temps, ils se sont ramenés à des intégrations sur l'espace, ce qui n'était pas possible dans notre cas.

Avec notre méthode, on retrouve leurs résultats.

Dans cette partie, nous allons montrer brièvement comment passer à la limite dans les problèmes de la Chaleur et des Ondes avec de petis trous. On insistera surtout sur l'étape de passage à la transformée de Laplace et le passage inverse.

Nous donnerons également le problème de l'élasticité linéaire avec de petits trous et le problème homogénéisé associé.

Remarquons que cette dernière étude s'obtient à partir de la partie II en faisant $c_o^2\rho_o = 0$ et $\lambda = 1$.

Dans toute la suite la description géomètrique II.1 est adoptée avec Ω et Ω_ε des ouverts bornés seulement pour les problèmes de la Chaleur et des Ondes, Ω et Ω_ε des ouverts bornés connexes de classe C^1 par morceaux pour le problème de l'élasticité.

V.1 . **Problème de la Chaleur avec de petits trous** :

Soient $u_{0\varepsilon} \in L^2(\Omega_\varepsilon)$ et $F_\varepsilon \in L^2(0,+\infty\,;\, L^2(\Omega_\varepsilon))$ tels que :

$$\text{(V.1.1)} \qquad \begin{cases} \tilde{u}_{0\varepsilon} \rightharpoonup u_0 & \text{dans} \quad L^2(\Omega) \quad \text{faible} \\ \tilde{F}_\varepsilon \rightharpoonup F & \text{dans} \quad L^2(0,+\infty\,;\, L^2(\Omega)) \quad \text{faible.} \end{cases}$$

On considère le problème : trouver $U_\varepsilon(x,t)$ tel que :

$$\text{(V.1.2)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dU_\varepsilon}{dt} - \Delta U_\varepsilon = F_\varepsilon & \text{dans} \quad \Omega_\varepsilon \\ U_\varepsilon = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega_\varepsilon \\ U_\varepsilon(0) = u_{0\varepsilon} & \text{dans} \quad \Omega_\varepsilon. \end{cases}$$

Au problème (V.1.2), on associe la formulation faible suivante (cf [24]) :

$$\text{(V.1.3)} \qquad \begin{cases} \text{Trouver } U_\varepsilon \text{ vérifiant } \forall T > 0 \ : \\ U_\varepsilon \in L^2(0,T,H_0^1(\Omega_\varepsilon)), U_\varepsilon' \in L^2(0,T,H^{-1}(\Omega_\varepsilon)) \\ \dfrac{d}{dt}(U_\varepsilon, v) + a(U_\varepsilon, v) = \displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} F_\varepsilon v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega_\varepsilon) \quad \text{dans} \quad \mathfrak{D}'(0,T) \\ U_\varepsilon(0) = u_{0\varepsilon} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{dans} \quad \Omega_\varepsilon\,, \end{cases}$$

où $$a(u,v) = \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u.\nabla v dx.$$

Pour passer à la limite dans (V.1.3), nous allons d'abord faire un passage à la transformée de Laplace pour se ramener à un problème stationnaire. On notera $u = L(U)$ l'image de Laplace de U.

On pose :

$$T_v^\varepsilon(t) = \frac{d}{dt}(U_\varepsilon(t), v) + a(U_\varepsilon, v) \qquad v \in H_0^1(\Omega_\varepsilon).$$

Nous avons alors les propriétés suivantes :

P1 . T_v^ε admet une transformée de Laplace :

En effet $$T_v^\varepsilon(t) = \int_{\Omega_\varepsilon} F_\varepsilon(t) v dx.$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\xi t}|T_v^\varepsilon(t)|dt \le |v|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}\Big(\int_0^{+\infty} e^{-2\xi t}dt\Big)^{1/2}\Big(\int_0^{+\infty} |F_\varepsilon(t)|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)}dt\Big)^{1/2} < +\infty \quad \forall \xi > 0$$

donc T_v^ε admet une transformée de Laplace sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et on a :

$$t_v^\varepsilon(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T_v^\varepsilon(t)dt \qquad Re\lambda > 0\,,\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

P2 . U_ε admet une transformée de Laplace :

On a (cf [24]) $$\frac{d}{dt}(U_\varepsilon(t),v) = < U'_\varepsilon(t), v > \quad \text{dans} \quad \mathfrak{D}'(0,T) \quad \forall v \in H^1_0(\Omega_\varepsilon).$$

L'équation (V.1.3) devient :

$$< U'_\varepsilon(t), v > + a(U_\varepsilon, v) = \int_{\Omega_\varepsilon} F_\varepsilon(t) v dx \qquad \forall v \in H^1_0(\Omega_\varepsilon).$$

On prend $v = U_\varepsilon(t)$ puis on intègre de 0 à T. En tenant compte de la condition initiale, on obtient :

$$\frac{1}{2}|U_\varepsilon(T)|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \int_0^T |\nabla U_\varepsilon|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} dt = \frac{1}{2}|u_{0\varepsilon}|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \int_0^T < F_\varepsilon(t), U_\varepsilon >_{L^2(\Omega_\varepsilon)} dt.$$

Grâce aux inégalités de Young et de Poincaré, on a :

$$\frac{1}{2}|U_\varepsilon(T)|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \int_0^T |\nabla U_\varepsilon|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} dt \leq \frac{1}{2}|u_{0\varepsilon}|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + c(\Omega)\Big(\frac{1}{\nu}\int_0^T |F_\varepsilon(t)|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \nu \int_0^T |\nabla U_\varepsilon|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} dt\Big).$$

Les suites $\tilde{u}_{0\varepsilon}$ et $\tilde{F}_\varepsilon$ sont bornées respectivement dans $L^2(\Omega)$ et $L^2(0,+\infty\,;\, L^2(\Omega))$, donc :

$$\frac{1}{2}|U_\varepsilon(T)|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + (1 - c\nu)\int_0^T |\nabla U_\varepsilon|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} dt \leq M + \frac{c}{\nu}\int_0^{+\infty} |F_\varepsilon(t)|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq M + \frac{c'}{\nu}.$$

On choisit ν tel que : $1 - c\nu > 0$ soit $\nu < \frac{1}{c}$, alors :

(V.1.4)
$$\begin{cases} |U_\varepsilon(T)|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq c \\ \displaystyle\int_0^T |\nabla U_\varepsilon|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq c \end{cases} \qquad \forall T > 0$$

par conséquent $$U_\varepsilon \in L^\infty(0,+\infty\,;\, L^2(\Omega_\varepsilon)) \cap L^2(0,T\,;\, H^1_0(\Omega_\varepsilon)) \qquad \forall T > 0.$$

Soit maintenant $\xi > 0$

$$\int_0^{+\infty} |U_\varepsilon(t)|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} e^{-\xi t} dt \leq |U_\varepsilon|_{L^\infty(0,+\infty\,;\, L^2(\Omega_\varepsilon))} \int_0^{+\infty} e^{-\xi t} dt < +\infty$$

$$\int_0^{+\infty} \|U_\varepsilon(t)\|_{H^1_0(\Omega_\varepsilon)} e^{-\xi t} dt \leq \Big(\int_0^T |\nabla U_\varepsilon|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)}\Big)^{1/2}\Big(\int_0^T e^{-2\xi t} dt\Big)^{1/2} < +\infty$$

donc U_ε considérée comme fonction à valeurs dans $L^2(\Omega_\varepsilon)$ ou $H^1_0(\Omega_\varepsilon)$ admet une transformée de Laplace sur $\mathbb{P}^*_+ \times \mathbb{R}$ et on a :

$$u_\varepsilon(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} U_\varepsilon(t) dt \qquad Re\lambda > \beta.$$

P3 . $\lambda(u_\varepsilon, v)_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + a(u_\varepsilon, v) = (f_\varepsilon, v)_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + (u_{0\varepsilon}, v)_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega_\varepsilon)$

en effet $T_v^\varepsilon(t) = < U_\varepsilon', v >_{H^{-1},H_0^1} + < U_\varepsilon, Av >_{H_0^1,H^{-1}}$ où A est l'opérateur associé à a.

$$t_v^\varepsilon(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T_v^\varepsilon(t)dt$$
$$= \int_0^{+\infty} < U_\varepsilon', v > e^{-\lambda t}dt + \int_0^{+\infty} < U_\varepsilon, Av > e^{-\lambda t}dt$$

. $\int_0^{+\infty} < U_\varepsilon, Av > e^{-\lambda t}dt = < \int_0^{+\infty} U_\varepsilon e^{-\lambda t}dt, Av > = < u_\varepsilon, Av > = a(u_\varepsilon, v)$

. $\int_0^T < U_\varepsilon'(t), v > e^{-\lambda t}dt = \int_0^T < U_\varepsilon', e^{-\lambda t}v > dt$

$$= -\int_0^T < (ve^{-\lambda t})', U_\varepsilon(t) > dt + (U_\varepsilon(T), e^{-\lambda T}v) - (U_\varepsilon(0), v)$$

$$= \lambda \int_0^T < U_\varepsilon, v > e^{-\lambda t}dt + e^{-\lambda T}(U_\varepsilon(T), v) - (u_{0\varepsilon}, v).$$

Comme (cf (V.1.4)) $|U_\varepsilon(T)|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$ est borné indépendamment de T, en faisant tendre T vers $+\infty$, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} < U_\varepsilon', v > e^{-\lambda t}dt = \lambda \int_0^{+\infty} < U_\varepsilon(t), v > e^{-\lambda t}dt - (u_{0\varepsilon}, v)$$
$$= \lambda < \int_0^{+\infty} U_\varepsilon(t)e^{-\lambda t}dt, v > - (u_{0\varepsilon}, v)$$
$$= \lambda < u_\varepsilon, v >_{L^2(\Omega_\varepsilon)} - (u_{0\varepsilon}, v)_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$$

. $\int_0^{+\infty} < F_\varepsilon(t), v > e^{-\lambda t}dt = < \int_0^{+\infty} F_\varepsilon(t)e^{-\lambda t}dt, v > = < f_\varepsilon(\lambda), v >_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$.

Finalement on a pour $Re\lambda > 0$:

$$\lambda(u_\varepsilon, v)_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + a(u_\varepsilon, v) = (f_\varepsilon, v)_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + (u_{0\varepsilon}, v)_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega_\varepsilon).$$

— — — — — —

La propriété P3 nous dit que : u_ε est l'unique solution du problème

(V.1.5)
$$\begin{cases} u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega_\varepsilon) \\ \lambda u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon = f_\varepsilon + u_{0\varepsilon} \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon. \end{cases}$$

Il est facile de voir que nous avons :

(V.1.6)
$$\|\tilde{u}_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega_\varepsilon)} \leq c$$

où c est une constante indépendante de ε.
Alors, à une sous suite près, on a :

(V.1.7)
$$\tilde{u}_\varepsilon \rightharpoonup u \quad \text{dans } H_0^1(\Omega_\varepsilon) \text{ faible .}$$

On reprend alors la même fonction teste ω_ε construite dans [12] et [31] pour l'opérateur Laplacien. Cette fonction vérifie :

(H1) $\omega_\varepsilon \in H^1(\Omega)$

(H2) $\omega_\varepsilon = 0$ sur les trous $(T_\nu^\varepsilon)_{\nu=1}^{n(\varepsilon)}$

(H3) $\omega_\varepsilon \rightharpoonup 1$ dans $H^1(\Omega)$ faible

(H4) $\mu \in W^{-1,\infty}(\Omega)$

(H5) Pour toute suite v_ε et pour tout v vérifiant :

$$\begin{cases} v_\varepsilon \rightharpoonup v & \text{dans } H^1(\Omega) \text{ faible,} \\ v_\varepsilon = 0 & \text{sur les trous } (T_\nu^\varepsilon)_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} \end{cases}$$

et pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a :

$$< -\Delta\omega_\varepsilon, \varphi v_\varepsilon >_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} \longrightarrow < \mu, \varphi v >_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} .$$

où μ est donné par :

(V.1.8)
$$\mu = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2C_0} & \text{si } n = 2 \\ \dfrac{C_0^{n-2}}{2^n} capT & \text{si } n \geq 3 \end{cases}$$

avec $capT = \inf_{\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \varphi = 1 \text{ sur } T} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\varphi|^2$, la capacité du fermé T dans $\mathbb{R}^n$ (cf [12] et [31]).

Maintenant, en appliquant la méthode de l'énergie à l'aide de la fonction ω_ε, on passe à la limite dans (V.1.5). On trouve que u est solution de :

(V.1.9)
$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega_\varepsilon) \\ \lambda u - \Delta u + \mu u = f + u_0 \qquad \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Il nous reste à donner le problème en temps correspondant.

— — — — — —

Définition V.1.1 : (cf [24])

L'espace $$W[H_0^1(\Omega)] = \left\{ v \in L^2(0,T\,;\, H_0^1(\Omega))\,; \quad v' \in L^2(0,T\,;\, H^{-1}(\Omega)) \right\}$$

est un Hilbert pour la norme $$\|v\|_{W[H_0^1(\Omega)]} = \left(|v|^2_{L^2(0,T\,;\, H_0^1(\Omega))} + |v'|^2_{L^2(0,T\,;\, H^{-1}(\Omega))} \right)^{1/2} .$$

Théorème V.1.2 : *Soit u l'unique solution de (V.1.9),*

(V.1.10) *il existe* $U \in \mathcal{D}'(]0,+\infty[, H_0^1(\Omega))$ *tel que :* $u(\lambda) = L(U)$ $\quad Re\lambda > 0$

(V.1.11) $\tilde{U}_\varepsilon \rightharpoonup U$ *dans* $W[H_0^1(\Omega)]$ *faible .*

(V.1.12) *La distribution U est l'unique solution du problème :*

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} - \Delta U + \mu U = F & \text{dans } \Omega \\ U = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ U(0) = u_0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Démonstration : Elle se fait en plusieurs étapes.

étape 1 : *preuve de (V.I.10)*

Le problème (V.1.9) est équivalent à $\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \\ [(\lambda+\mu)I + A]u = f + u_0. \end{cases}$

L'application $\lambda \in \{Re\lambda > 0\} \longmapsto (\lambda+\mu)I + A$ est holomorphe et $|((\lambda+\mu)I + A)^{-1}|_{\mathcal{L}(H^{-1}(\Omega)\,;\, H_0^1(\Omega))} \leq c$ avec c une constante indépendante de λ.

Par conséquent $\lambda \longmapsto u(\lambda) = [(\lambda+\mu)I + A]^{-1}(f + u_0)$ est holomorphe sur $\{Re\lambda > 0\}$

et $|u(\lambda)|_{H_0^1(\Omega)} \leq c(|f|_{L^2(\Omega)} + |u_0|_{L^2(\Omega)}) \leq c\,Pol(|\lambda|)$ où $Pol(|\lambda|)$ est un polynôme en $|\lambda|$, d'où (V.1.10).

étape 2 : *preuve de (V.1.11)*

On déduit de (V.1.4) que : $|\tilde{U}_\varepsilon|_{L^2(0,T\,;\,H_0^1(\Omega))} \leq c$ avec c indépendante de T.

D'autre part on a :

$$< U_\varepsilon'(t), v > = \int_{\Omega_\varepsilon} F_\varepsilon(t)v - a(U_\varepsilon(t), v) \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega_\varepsilon)$$

$$\text{donc} \quad | < U_\varepsilon'(t), v > | \leq |F_\varepsilon(t)|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} |v|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|U_\varepsilon(t)\|_{H_0^1(\Omega_\varepsilon)} \|v\|_{H_0^1(\Omega_\varepsilon)}$$

$$\Longrightarrow \quad \|U_\varepsilon'(t)\|_{H^{-1}(\Omega_\varepsilon)} \leq c\left(|F_\varepsilon(t)|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|U_\varepsilon(t)\|_{H_0^1(\Omega_\varepsilon)}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \int_0^T \|U_\varepsilon'(t)\|^2_{H^{-1}(\Omega_\varepsilon)} \leq c\left(\int_0^T |F_\varepsilon(t)|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \int_0^T \|U_\varepsilon(t)\|^2_{H_0^1(\Omega_\varepsilon)}\right) \leq c$$

par conséquent la suite $\tilde{U}_\varepsilon$ est bornée dans $W[H_0^1(\Omega)]$.

On peut extraire une sous suite notée encore $\tilde{U}_\varepsilon$ tel que :

$$\tilde{U}_\varepsilon \rightharpoonup V \qquad \text{dans} \quad W[H_0^1(\Omega)] \quad \text{faible.}$$

La suite $\tilde{U}_\varepsilon$ étant bornée dans $L^\infty(0,+\infty\,;\,L^2(\Omega))$, on déduit en procédant comme au lemme I.5.9 que :

$$\tilde{u}_\varepsilon \rightharpoonup v = L(V) \qquad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible.}$$

D'après (V.1.7) $v = u(\lambda)$ pour $Re\lambda > 0$, d'où V=U d'après l'unicité de la transformée de Laplace inverse. De l'unicité de la solution de (V.1.9), on déduit que c'est toute la suite qui converge. Ce qui démontre (V.1.11).

étape 3 : $U(0) = u_0$

On considère l'application

$$f : C^0([0,T], L^2(\Omega)) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$V \longmapsto < U(0) - u_0, V(0) - u_0 > = f(V).$$

On a

$$W[H_0^1(\Omega)] \hookrightarrow C^0([0,T]\,;\, L^2(\Omega)) \qquad (\text{ donc f est bien définie })$$
$$\tilde{U}_\varepsilon \rightharpoonup U \qquad \text{dans } W[H_0^1(\Omega)] \text{ faible}$$

donc $$\tilde{U}_\varepsilon \rightharpoonup U \qquad \text{dans } C^0([0,T]\,;\, L^2(\Omega)) \text{ faible.}$$

Comme f est continue alors $f(\tilde{U}_\varepsilon) \longrightarrow f(U)$.

Mais $f(\tilde{U}_\varepsilon) = < U(0) - u_0, \tilde{U}_\varepsilon - u_0 > = < U(0) - u_0, \tilde{u}_{0\varepsilon} - u_0 >_{L^2(\Omega)} \longrightarrow 0$

$f(U) = |U(0) - u_0|^2_{L^2(\Omega)}$ donc $U(0) = u_0$.

étape 4 : *U vérifie $dU/dt - \Delta U + \mu U = F$ dans Ω.*

De (V.1.9), on déduit que :

$$\int_\Omega \lambda u.v + \int_\Omega \nabla u.\nabla v + \mu \int_\Omega u.v = \int_\Omega f.v + \int_\Omega u_0.v \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega). \qquad (*)$$

On écrit que : $$u = L(U) \quad \text{et} \quad \lambda u = L\Big(\frac{dU}{dt}\Big)$$

alors $(*)$ devient : $\forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$< L\Big(\frac{dU}{dt}\Big), v >_{L^2(\Omega)} + < L(\nabla U), \nabla v >_{L^2(\Omega)} + \mu < L(U), v >_{L^2(\Omega)} = < L(F), v >_{L^2(\Omega)} + < L(u_0\delta), v >_{L^2}$$

où δ est la masse de Dirac à l'origine .

d'où $$L\Big(\frac{dU}{dt} - \Delta U + \mu U - F - u_0\delta\Big) = 0 \qquad \text{dans} \quad H^{-1}(\Omega)$$

soit $$\frac{dU}{dt} - \Delta U + \mu U = F + u_0\delta.$$

étape 5 : *preuve de (V.1.12).*

Les étapes 1, 2, 3 et 4 nous donnent l'existence d'une solution du système (V.1.12). L'unicité se démontre par la méthode variationnelle (cf [24]) ou directement par l'absurde. Si U_1 et U_2 sont deux solutions alors $u_1(\lambda)$ et $u_2(\lambda)$ sont solutions de (V.1.9) qui admet une unique solution. Par suite $u_1(\lambda) = u_2(\lambda)$ pour $Re\lambda > 0$, d'où $U_1 = U_2$ par l'unicité de la transformée de Laplace inverse.

C.Q.F.D.

V.2 . Problème des Ondes avec de petits trous :

Soient $u_{0\varepsilon} \in H_0^1(\Omega_\varepsilon)$, $u_{1\varepsilon} \in L^2(\Omega_\varepsilon)$ et $F_\varepsilon \in L^2(0,+\infty\,;\, L^2(\Omega_\varepsilon))$ tels que :

$$\text{(V.2.1)} \qquad \begin{cases} \tilde{u}_{0\varepsilon} \rightharpoonup u_0 & \text{dans} \quad H_0^1(\Omega) & \text{faible} \\ \tilde{u}_{1\varepsilon} \rightharpoonup u_1 & \text{dans} \quad L^2(\Omega) & \text{faible} \\ \tilde{F}_\varepsilon \rightharpoonup F & \text{dans} \quad L^2(0,+\infty\,;\, L^2(\Omega)) & \text{faible.} \end{cases}$$

On considère le problème : trouver $U_\varepsilon(x,t)$ tel que :

$$\text{(V.2.2)} \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2U_\varepsilon}{dt^2} - \Delta U_\varepsilon = F_\varepsilon & \text{dans} \quad \Omega_\varepsilon \\ U_\varepsilon = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega_\varepsilon \\ U_\varepsilon(0) = u_{0\varepsilon}\,; \quad U_\varepsilon'(0) = u_{1\varepsilon} & \text{dans} \quad \Omega_\varepsilon. \end{cases}$$

On associe à (V.2.2) la formulation faible suivante (cf [26] [34]) :

$$\text{(V.2.3)} \qquad \begin{cases} \text{Trouver } U_\varepsilon \text{ vérifiant } \forall T > 0 \ : \\ U_\varepsilon \in L^2(0,T,H_0^1(\Omega_\varepsilon)), U_\varepsilon' \in L^2(0,T,L^2(\Omega_\varepsilon)), U_\varepsilon'' \in L^2(0,T,H^{-1}(\Omega_\varepsilon)) \\ \dfrac{d}{dt}(U_\varepsilon', v) + a(U_\varepsilon, v) = \displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} F_\varepsilon v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega_\varepsilon) \quad \text{dans} \quad \mathfrak{D}'(0,T) \\ U_\varepsilon(0) = u_{0\varepsilon}\,; \quad U_\varepsilon'(0) = u_{1\varepsilon} \qquad\qquad \text{dans} \quad \Omega_\varepsilon\,, \end{cases}$$

où $$a(u,v) = \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u . \nabla v dx.$$

L'étude de ce problème est analogue à celle du problème de la chaleur et du problème de viscoélasticité.

On pose :

$$T_v^\varepsilon(t) = \frac{d}{dt}(U_\varepsilon'(t), v) + a(U_\varepsilon, v) \qquad v \in H_0^1(\Omega_\varepsilon).$$

Nous avons alors les propriétés suivantes :

P1 . T_v^ε admet une transformée de Laplace et :

$$t_v^\varepsilon(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T_v^\varepsilon(t) dt \qquad Re\lambda > 0\,,\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

P2 . U_ε admet une transformée de Laplace :

On a (cf [24]) $$\frac{d}{dt}(U'_\varepsilon(t),v) = < U''_\varepsilon(t), v > \qquad \text{dans} \quad \mathfrak{D}'(0,T) \quad \forall v \in H^1_0(\Omega_\varepsilon).$$

L'équation (V.2.3) devient :

$$< U''_\varepsilon(t), v > + a(U_\varepsilon, v) = \int_{\Omega_\varepsilon} F_\varepsilon(t) v dx \qquad \forall v \in H^1_0(\Omega_\varepsilon).$$

On prend $v = U'_\varepsilon(t)$ puis on intègre de 0 à T. On obtient :

$$\frac{1}{2}|U'_\varepsilon(T)|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \frac{1}{2}|\nabla U_\varepsilon|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} = \frac{1}{2}|u_{1\varepsilon}|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \frac{1}{2}|\nabla u_{0\varepsilon}|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \int_0^T < F_\varepsilon(t), U'_\varepsilon >_{L^2(\Omega_\varepsilon)} dt$$

$$|U'_\varepsilon(T)|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + |\nabla U_\varepsilon|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq c\Big(\int_0^{+\infty} |F_\varepsilon(t)|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \int_0^T |U'_\varepsilon(T)|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} dt \Big).$$

On pose

$$\phi(\sigma) = |U'_\varepsilon(\sigma)|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)}.$$

On déduit alors l'implication ci dessous à l'aide du lemme de Gronwall

$$\phi(T) \leq c + \int_0^T \phi(\sigma) d\sigma \implies \phi(T) \leq c e^T$$

d'où

(V.2.4) $$\begin{cases} |U'_\varepsilon(T)|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq c e^{T/2} \\ \|U_\varepsilon(T)\|_{H^1_0(\Omega_\varepsilon)} \leq c e^{T/2} \end{cases} \qquad \forall T > 0 \text{ et } c \text{ indépendante de } T.$$

Soit maintenant $\xi > 1/2$

. $$\int_0^{+\infty} \|U_\varepsilon(t)\|_{H^1_0(\Omega_\varepsilon)} e^{-\xi t} dt \leq |e^{-t/2} U_\varepsilon|_{L^\infty(0,+\infty\,;\, H^1_0(\Omega_\varepsilon))} \int_0^{+\infty} e^{-(\xi - 1/2)t} dt < +\infty$$

. $$\int_0^{+\infty} |U'_\varepsilon(t)|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} e^{-\xi t} dt \leq |e^{-t/2} U'_\varepsilon|_{L^\infty(0,+\infty\,;\, L^2(\Omega_\varepsilon))} \int_0^{+\infty} e^{-(\xi - 1/2)t} dt < +\infty$$

donc U_ε considérée comme fonction à valeurs dans $H^1_0(\Omega_\varepsilon)$ et U'_ε considérée comme fonction à valeurs dans $L^2(\Omega_\varepsilon)$ admettent des transformées de Laplace sur $\{Re\lambda > 1/2\}$ et on a :

$$u_\varepsilon(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} U_\varepsilon(t) dt \qquad \text{pour} \quad \lambda \in \mathbb{C} \quad Re\lambda > 1/2$$

$$u'_\varepsilon(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} U'_\varepsilon(t) dt \qquad \text{pour} \quad \lambda \in \mathbb{C} \quad Re\lambda > 1/2$$

$$\text{avec} \qquad \lambda u_\varepsilon(\lambda) = u_{0\varepsilon} + u'_\varepsilon(\lambda) \qquad \text{pour} \quad \lambda \in \mathbb{C} \quad Re\lambda > 1/2.$$

P3 . $\lambda^2(u_\varepsilon, v)_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + a(u_\varepsilon, v) = (f_\varepsilon, v)_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \lambda(u_{0\varepsilon}(\lambda), v >_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + (u_{1\varepsilon}, v)_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega_\varepsilon)$

en effet $T_v^\varepsilon(t) =< U_\varepsilon'', v >_{H^{-1},H_0^1} + < U_\varepsilon, Av >_{H_0^1,H^{-1}}$ où A est l'opèrateur associé à a.

$$t_v^\varepsilon(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T_v^\varepsilon(t)dt$$
$$= \int_0^{+\infty} < U_\varepsilon'', v > e^{-\lambda t}dt + \int_0^{+\infty} < U_\varepsilon, Av > e^{-\lambda t}dt$$

. $\int_0^{+\infty} < U_\varepsilon, Av > e^{-\lambda t}dt =< \int_0^{+\infty} U_\varepsilon e^{-\lambda t}dt, Av >=< u_\varepsilon, Av >= a(u_\varepsilon, v)$

. $\int_0^T < U_\varepsilon''(t), v > e^{-\lambda t}dt = \int_0^T < \frac{dU_\varepsilon'}{dt}, e^{-\lambda t}v > dt$

$$= -\int_0^T < \left(ve^{-\lambda t}\right)', U_\varepsilon'(t) > dt + (U_\varepsilon'(T), e^{-\lambda T}v) - (U_\varepsilon'(0), v)$$

$$= \lambda \int_0^T < U_\varepsilon', v > e^{-\lambda t}dt + e^{-(\lambda - 1/2)T}(e^{-T/2}U_\varepsilon'(T), v) - (u_{1\varepsilon}, v).$$

Comme (cf (V.2.4)) $|e^{-T/2}U_\varepsilon(T)|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$ est bornée indépendamment de T, en faisant tendre T vers $+\infty$, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} < U_\varepsilon'', v > e^{-\lambda t}dt = \lambda \int_0^{+\infty} < U_\varepsilon'(t), v > e^{-\lambda t}dt - (u_{1\varepsilon}, v)$$
$$= \lambda < \int_0^{+\infty} U_\varepsilon'(t)e^{-\lambda t}dt, v > -(u_{1\varepsilon}, v)$$
$$= \lambda < u_\varepsilon'(\lambda), v >_{L^2(\Omega_\varepsilon)} - (u_{1\varepsilon}, v)_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$$
$$= \lambda^2 < u_\varepsilon(\lambda), v >_{L^2(\Omega_\varepsilon)} - \lambda(u_{0\varepsilon}, v)_{L^2(\Omega_\varepsilon)} - (u_{1\varepsilon}, v)_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$$

. $\int_0^{+\infty} < F_\varepsilon(t), v > e^{-\lambda t}dt =< \int_0^{+\infty} F_\varepsilon(t)e^{-\lambda t}dt, v >=< f_\varepsilon(\lambda), v >_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$

d'où pour $Re\lambda > 1/2$:

$$\lambda^2(u_\varepsilon, v)_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + a(u_\varepsilon, v) = (f_\varepsilon, v)_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \lambda(u_{0\varepsilon}, v)_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + (u_{1\varepsilon}, v)_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega_\varepsilon).$$

— — — — — —

La propriété P3 nous dit que : u_ε est l'unique solution du problème

(V.2.5)
$$\begin{cases} u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega_\varepsilon) \\ \lambda^2 u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon = f_\varepsilon + \lambda u_{0\varepsilon} + u_{1\varepsilon} \qquad \text{dans } \Omega_\varepsilon. \end{cases}$$

On a alors :

(V.2.6) $\|\tilde{u}_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c$ avec c indépendante de ε.

(V.2.7) $\tilde{u}_\varepsilon \rightharpoonup u$ dans $H_0^1(\Omega)$ faible

à une sous suite près.

A l'aide de la fonction ω_ε de la partie V.1, on passe à la limite dans (V.2.5) par la méthode de l'énergie. On trouve que u est solution de :

$$\text{(V.2.8)} \qquad \begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \\ \lambda^2 u - \Delta u + \mu u = f + \lambda u_0 + u_1 \qquad \text{dans } \Omega \end{cases}$$

où μ est donné par (V.1.8).

Remarquons que comme u est unique, la convergence (V.2.7) a lieu pour toute la suite $(\tilde{u}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$.

Théorème V.2.1 : *Soit u l'unique solution de (V.2.8),*

(V.2.9) *il existe* $U \in \mathcal{D}'(]0,+\infty[, H_0^1(\Omega))$ *tel que :* $u(\lambda) = L(U)$ $\qquad Re\lambda > 1/2$

(V.2.10) $\tilde{U}_\varepsilon \rightharpoonup U$ *dans* $L^\infty(0,T\,;\, H_0^1(\Omega))$ *faible* $*$ $\quad \forall T > 0.$

(V.2.11) *La distribution U est l'unique solution du problème :*

$$\begin{cases} \dfrac{d^2U}{dt^2} - \Delta U + \mu U = F & \text{dans } \Omega \\ U = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ U(0) = u_0\,; \quad U'(0) = u_1 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Démonstration : Elle est analogue à celle du théorème V.1.2.

étape 1 : preuve de (V.2.9)

Le problème (V.2.8) est équivalent à $\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \\ [(\lambda^2+\mu)I + A]u = f + \lambda u_0 + u_1. \end{cases}$

L'application $\lambda \in \{Re\lambda > 1/2\} \longmapsto (\lambda^2+\mu)I + A$ est holomorphe

et $\|((\lambda^2+\mu)I + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H^{-1}(\Omega)\,;\, H_0^1(\Omega))} \le c|\lambda|$ avec c une constante indépendante de λ.

Par conséquent $\lambda \longmapsto u(\lambda) = [(\lambda^2+\mu)I + A]^{-1}(f + \lambda u_0 + u_1)$ est holomorphe sur $\{Re\lambda > 1/2\}$

et $\|u(\lambda)\|_{H_0^1(\Omega)} \le c\,|\lambda|\,(|f|_{L^2(\Omega)} + |\lambda||u_0|_{L^2(\Omega)} + |u_1|_{L^2(\Omega)}) \le c\,Pol(|\lambda|)$

où $Pol(|\lambda|)$ est un polynôme en $|\lambda|$, d'où (V.2.9).

étape 2 : preuve de (V.2.10)

D'après (V.2.4), la suite $e^{-t/2}\tilde{U}_\varepsilon$ est bornée dans $L^\infty(0,+\infty\,;\, H_0^1(\Omega))$ donc après extraction d'une sous suite notée encore $e^{-t/2}\tilde{U}_\varepsilon$,

$$e^{-t/2}\tilde{U}_\varepsilon \rightharpoonup V^* \qquad \text{dans} \quad L^\infty(0,+\infty\,;\, H_0^1(\Omega)) \quad \text{faible } * .$$

Soit $\omega \in H^{-1}(\Omega)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $Re\lambda > 0$. Alors $e^{-\lambda t}\omega \in L^1(0,+\infty\,;\, H^{-1}(\Omega)$ donc :

$$< e^{-t/2}\tilde{U}_\varepsilon, e^{-\lambda t}\omega >_{L^\infty(0,+\infty\,;\, H_0^1(\Omega)),L^1(0,+\infty\,;\, H^{-1}(\Omega))} \longrightarrow < V^*,, e^{-\lambda t}\omega >_{L^\infty(0,+\infty\,;\, H_0^1(\Omega)),L^1(0,+\infty\,;\, H^{-1}(\Omega))}$$

soit

$$\int_0^{+\infty} < e^{-t/2}\tilde{U}_\varepsilon, e^{-\lambda t}\omega >_{H_0^1(\Omega),H^{-1}(\Omega)} \longrightarrow \int_0^{+\infty} < V^*,, e^{-\lambda t}\omega >_{H_0^1(\Omega),H^{-1}(\Omega)}$$

$$< \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda+1/2)t}\tilde{U}_\varepsilon dt, \omega >_{H_0^1(\Omega),H^{-1}(\Omega)} \longrightarrow < \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}V^* dt, \omega >_{H_0^1(\Omega),H^{-1}(\Omega)}$$

donc $\quad \tilde{u}_\varepsilon(\lambda + 1/2) \rightharpoonup \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}V^* dt = v^*(\lambda)$ $\quad$ dans $\quad H_0^1(\Omega)$ $\quad$ faible $\quad$ pour $Re\lambda > 0$

c'est à dire

$$\tilde{u}_\varepsilon(\lambda) \rightharpoonup \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda-1/2)t}V^* dt = v^*(\lambda - 1/2) \quad \text{dans} \quad H_0^1(\Omega) \quad \text{faible} \quad \text{pour } Re\lambda > 1/2$$

mais $\quad \tilde{u}_\varepsilon(\lambda) \rightharpoonup u(\lambda)$ $\quad$ dans $\quad H_0^1(\Omega)$ $\quad$ faible $\quad$ pour $Re\lambda > 1/2$

donc $\quad v^*(\lambda - 1/2) = u(\lambda)$ $\quad$ pour $Re\lambda > 1/2$ $\quad$ et $\quad V^* = e^{-t/2}U.$

On déduit alors que :

$$\tilde{U}_\varepsilon \rightharpoonup U \quad \text{dans} \quad L^\infty(0,T\,;\, H_0^1(\Omega)) \quad \text{faible} * \quad \forall T > 0.$$

De l'unicité d'une solution de (V.2.8), on déduit que c'est toute la suite qui converge, d'où (V.2.10).

étape 3 : $U(0) = u_0$; $\quad U'(0) = u_1$

La condition $U(0) = u_0$ se démontre exactement comme au théorème V.1.2, puisque

$$\tilde{U}_\varepsilon \rightharpoonup U \quad \text{dans} \quad W[H_0^1(\Omega)] \quad \text{faible.}$$

Reste donc à vérifier que : $U'(0) = u_1$.

On a :

$$< U_\varepsilon''(t), v >= -a(U_\varepsilon(t), v) + < F_\varepsilon, v > \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega_\varepsilon)$$

$$\text{donc} \quad | < U_\varepsilon''(t), v > | \leq |F_\varepsilon(t)|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} |v|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|U_\varepsilon(t)\|_{H_0^1(\Omega_\varepsilon)} \|v\|_{H_0^1(\Omega_\varepsilon)}$$

$$\Longrightarrow \quad \|U_\varepsilon''(t)\|_{H^{-1}(\Omega_\varepsilon)} \leq c(\Omega) \left(|F_\varepsilon(t)|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|U_\varepsilon(t)\|_{H_0^1(\Omega_\varepsilon)} \right)$$

$$\Longrightarrow \quad \int_0^T \|U_\varepsilon''(t)\|^2_{H^{-1}(\Omega_\varepsilon)} \leq c \left(\int_0^T |F_\varepsilon(t)|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \int_0^T \|U_\varepsilon(t)\|^2_{H_0^1(\Omega_\varepsilon)} \right) \leq c$$

par conséquent la suite $\tilde{U}_\varepsilon'$ est bornée dans $W[L^2(\Omega)]$

avec $\quad W[L^2(\Omega)] = \left\{ v \in L^2(0,T\,;\, L^2(\Omega)) \,/\, v' \in L^2(0,T\,;\, H^{-1}(\Omega)) \right\}$ $\quad (cf[26])$

On peut extraire une sous suite notée encore $\tilde{U}_\varepsilon'$ tel que :

$$\tilde{U}_\varepsilon' \rightharpoonup U' \quad \text{dans } W[L^2(\Omega)] \text{ faible .}$$

Comme $$W[L^2(\Omega)] \hookrightarrow C^0([0,T]\,;\, H^{-1}(\Omega))$$

on considère, comme au théorème V.1.2, l'application g définie par :

$$g \,:\, C^0([0,T], H^{-1}(\Omega)) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$V \longmapsto < U'(0) - u_1, V(0) - u_1 >_{H^{-1}(\Omega)} = g(V)$$

L'application g est continue donc

$$g(\tilde{U}'_\varepsilon) \longrightarrow g(U').$$

Mais $\quad g(\tilde{U}'_\varepsilon) = < U'(0) - u_1, \tilde{U}'_\varepsilon - u_1 > = < U(0) - u_1, \tilde{u}_{1\varepsilon} - u_1 >_{H^{-1}(\Omega)} \longrightarrow 0$

$g(U') = |U'(0) - u_1|^2_{L^2(\Omega)} \qquad$ donc $\qquad U'(0) = u_1.$

étape 4 :

On écrit que : $$u = L(U)\,, \quad \lambda u = L\Big(\frac{dU}{dt}\Big) \quad \text{et} \quad \lambda^2 u = L\Big(\frac{d^2U}{dt^2}\Big)$$

et on procède comme au théorème V.1.2 (étape 4). Alors U vérifie :

$$\frac{d^2U}{dt^2} - \Delta U + \mu U = F + u_0\delta' + u_1\delta.$$

étape 5 : *preuve de* (V.2.11).

Les étapes 1, 2, 3 et 4 nous donnent l'existence d'une solution du système (V.2.11). L'unicité se démontre par la méthode variationnelle ou directement par l'absurde (voir théorème V.1.2 étape 5).

C.Q.F.D.

V.3 . Problème de l'élasticité avec de petits trous :

On considère le problème : trouver le déplacement u_ε tel que :

$$\text{(V.3.1)} \qquad \begin{cases} -\partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(u_\varepsilon)) = f_i & \text{dans } \Omega_\varepsilon \quad i = 1,...,n \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon \end{cases}$$

où

$$a_{ijlh} = \eta\delta_{ij}\delta_{lh} + \mu(\delta_{il}\delta_{jh} + \delta_{ih}\delta_{jl})$$

η et μ sont les coefficients de Lamé, $\mu > 0$ et $\eta > 0$

$f \in [L^2(\Omega)]^n$ une densité de force volumique.

Au problème (V.3.1), on associe la formulation faible suivante :

$$\text{(V.3.2)} \qquad \begin{cases} \text{Trouver } u_\varepsilon \in [H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^n \text{ tel que :} \\ \displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(u_\varepsilon)\varepsilon_{ij}(v)dx = \int_{\Omega_\varepsilon} fvdx \qquad \forall v \in [H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^n. \end{cases}$$

De la coercivité des coefficients a_{ijlh}, on déduit l'estimation :

$$\text{(V.3.3)} \qquad \|\tilde{u}_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c\|f\|_{L^2(\Omega)}$$

où c est une constante indépendante de ε.

On déduit alors que :

$$\text{(V.3.4)} \qquad \tilde{u}_\varepsilon \rightharpoonup u \quad \text{dans} \quad [H_0^1(\Omega)]^n \quad \text{faible}$$

après extraction éventuelle d'une sous suite notée toujours $\tilde{u}_\varepsilon$.

Il sagit de trouver le problème limite vérifié par u. On construit alors des fonctions tests $(\omega_k^\varepsilon)_{1\leq k\leq n}$ comme au paragraphe II.3 en faisant $c_o^2\rho_o = 0$ et $\lambda = 1$.

Ces fonctions vérifient :

(H1) $\omega_k^\varepsilon \in [H^1(\Omega)]^n$

(H2) $\omega_k^\varepsilon = 0$ sur les trous $(T_\nu^\varepsilon)_{\nu=1}^{n(\varepsilon)}$

(H3) $\omega_k^\varepsilon \rightharpoonup e_k$ dans $[H^1(\Omega)]^n$ faible où e_k est le $k^{ième}$ vecteur de base de $\mathbb{R}^n$

(H4) $\mu_k \in [W^{-1,\infty}(\Omega)]^n$

(H5) $\forall(v_\varepsilon)$, v vérifiant :

$v_\varepsilon \rightharpoonup v$ dans $[H^1(\Omega)]^n$ faible, $v_\varepsilon = 0$ sur les trous $(T_\nu^\varepsilon)_{\nu=1}^{n(\varepsilon)}$

et $\forall \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$, on a :

$$< -\partial_h(a_{ijlh}\varepsilon_{ij}(\omega_k^\varepsilon)), \varphi(v_\varepsilon)_l >_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} \longrightarrow < \mu_k, \varphi v >_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}$$

où les μ_k sont donnés par :

$$\text{(V.3.5)} \qquad \mu_k = \begin{cases} \dfrac{C_0^{n-2}}{2^{n+1}}\left(2 + \dfrac{n-1}{n}\dfrac{(\eta+\mu)^2}{\mu(\eta+2\mu)}\right) F_k & \text{pour} \quad n \geq 3 \\ \dfrac{\pi}{C_0}\dfrac{\mu(\eta+2\mu)}{\eta+3\mu} e_k & \text{pour} \quad n = 2 \end{cases} \qquad 1 \leq k \leq n$$

avec

$$F_k = \int_{\partial T} a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k) n_j e_i$$

et ω_k est l'unique solution du problème :

$$\text{(V.3.6)} \qquad \begin{cases} \text{Trouver} \quad \omega_k \quad \text{tel que} : \\ \quad -\partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k)) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \setminus T \\ \quad \omega_k = 0 & \text{sur } \partial T \\ \quad \omega_k = e_k & \text{à l'infini} \\ \quad \|\varepsilon(\omega_k)\|_{L^2(\mathbb{R}^n - T)} < +\infty. \end{cases}$$

Enfin, en appliquant la méthode de l'énérgie, on introduit ces fonctions tests $(\omega_k^\varepsilon)_{1\leq k\leq n}$ dans la formulation (V.3.2), puis on passe à la limite. Le déplacement u est alors solution de :

$$\text{(V.3.7)} \qquad \begin{cases} \text{Trouver} \quad u \in [H_0^1(\Omega)]^n \quad \text{tel que} : \\ -\partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(u)) + \mu_i . u = f_i \quad \text{dans} \quad \Omega_\varepsilon \quad i = 1, ..., n \end{cases}$$

De plus si $u \in [W^{2,\infty}(\Omega)]^n$, on a :

$$\text{(V.3.8)} \qquad \|\tilde{u}_\varepsilon - W_\varepsilon u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c\|u\|_{W^{2,\infty}(\Omega)} \begin{cases} \varepsilon^{1/2} & \text{si} \quad n = 2 \\ \varepsilon^{1/2} + \varepsilon^{1/(n-2)} & \text{si} \quad n \geq 3. \end{cases}$$

CONCLUSION

Dans ce travail nous avons étudié un problème de viscoélasticité linéaire à mémoire instantannée avec de petits trous.
Dans un 1^{er} temps, les trous sont répartis périodiquement dans tout le volume puis ils sont répartis sur un hyperplan traversant le domaine.
Dans les deux cas le problème limite est un problème de type élasticité à mémoire longue. Ce phénomène met en évidence la résistance des trous à la limite.
Utilisant les mêmes techniques, nous avons également étudié les problèmes de la Chaleur, des Ondes et de l'élasticité.

D'autres applications seraient envisageables pour d'autres conditions limites, d'autres considérations géomètriques ou autres opérateurs toujours pour la famille de domaines à petits trous avec répartition périodique.

Cependant il est intéréssant d'essayer de voir comment on pourrait passer à la limite dans le problème de viscoélasticité directement sans faire de passage à la transformée de Laplace, comme cela est fait pour le problème des Ondes [11]. On pourrait ainsi peut être obtenir des estimations d'erreurs dans des espaces où le temps est tenu en compte.

Annexe A

Etude d'un fluide visqueux, compressible et barotrope dans un domaine Ω

Dans cette annexe, nous donnons une interprétation mécanique des équations utilisées puis on rapporte une méthode variationnelle étudiant un problème d'évolution du $2^{ème}$ ordre en temps. Cette méthode appliquée à notre problème donne l'existence et l'unicité d'une solution.

Soit Ω un ouvert borné connexe de frontière C^1 par morceaux.
On s'interesse aux perturbations d'un fluide visqueux, compressible et barotrope occupant Ω.
Plus précisement, on se donne une position de référence et on étudie le champ de déplacement u par rapport à cette position sous H.P.P (hypothèses des petites perturbations).

A.I - Modélisation

Notation :

. n : la dimension de l'espace

. ρ_o , p_o désignent la densité et la pression respectivement en un point x à l'état d'équilibre

. ρ' , p' désignent les mêmes grandeurs au même point géomètrique dans un petit mouvement

. η et μ sont les coefficients de viscosité du fluide et satisfont :

$$\mu > 0 \quad , \quad n\eta + 2\mu > 0$$

(dans les applications $n = 3$)

. u : le champ de déplacement

. $v = \dfrac{\partial u}{\partial t}$ est le vecteur vitesse

. $c_o = \left(\dfrac{dp}{d\rho}\right)_o^{1/2}$ est la vitesse du son à l'instant t = 0

. ξ est un petit paramètre et $o(\xi^m)$ est une fonction telle que : $lim_{\xi \to 0} \dfrac{o(\xi^m)}{\xi^m} = 0$

. F : une densité de forces volumiques.

A.I.1 . Lois de comportement et équations :

On suppose que l'état de référence est caractérisé par le champ de contraintes :

$$\sigma_{ij}^o = -p_o \delta_{ij}.$$

La loi de comportement du fluide à l'instant t est donnée par :

$$\sigma'_{ij} = -p'\delta_{ij} + (\eta \delta_{ij}\delta_{kh} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jh} + \delta_{ih}\delta_{jk}))\epsilon_{kh}(\frac{\partial u}{\partial t}).$$

On désigne par : $\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - \sigma^o_{ij}$ les contraintes perturbées.

On dispose des équations suivantes :

- *Conservation de la masse* :

On suppose (cf [36]) à l'instant $t = 0$ la densité ρ_o constante dans le fluide. C'est le cas pour un liquide très peu compressible ou un gaz de forces de masse très faibles.

A l'instant t, l'équation de continuité est donnée par :

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + div(\rho' v) = 0.$$

- *Equations du mouvement* :

A l'équilibre les équations du mouvement sont données par :

$$\partial_j \sigma^o_{ij} = 0.$$

A l'instant t, elles sont données par :

$$\partial_j \sigma'_{ij} + F_i = \rho' \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}.$$

A.I.2 . **Hypothèses H.P.P et linéarisation** :

Afin de pouvoir linéariser les équations précédentes, on fait l'hypothèse des petites perturbations. On suppose alors :

$$p' - p_o = o(\xi) \qquad \nabla(p' - p_o) = o(\xi)$$

$$\rho' - \rho_o = o(\xi) \qquad \nabla(\rho' - \rho_o) = o(\xi)$$

$$v = o(\xi) \qquad \nabla v = o(\xi).$$

La linéarisation est obtenue en négligeant les termes en ξ^2.

- *Linéarisation de l'équation de continuité* :

Ona $$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + div(\rho' v) = 0$$

soit $$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + v.\nabla \rho' + \rho' div v = 0.$$

Comme

$$v.\nabla \rho' = o(\xi).o(\xi) = o(\xi^2)$$
$$\rho' div\, v = (\rho_o + o(\xi))divv = \rho_o div\, v + o(\xi^2)$$

d'où

(1) $$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_o div\, v = 0.$$

Intégrons (1)

$$\int_0^t \left(\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_o div\, v\right) dt = 0$$
$$\rho' - \rho_o + \rho_o(divu - divu(0)) = 0.$$

On a $u(0) = 0$ donc :

(2) $$\rho' - \rho_o + \rho_o divu = 0.$$

D'autre part le fluide est compressible, barotrope donc la densité est une fonction de la pression soit :

$$\rho' = h(p')$$

ou par linéarisation : $$\rho' - \rho_o = h'(p_o)(p' - p_o).$$

On établit (voir [36]) que : $$\frac{1}{h'(p_o)} = c_o^2\left(\frac{dp}{dt}\right)_o$$

(3) $$p' - p_o = c_o^2(\rho' - \rho_o).$$

Si on note :

$p = p' - p_o$: la perturbation de la pression

$\rho = \rho' - \rho_o$: la perturbation de la densité

alors on a les relations suivantes :

(4) $$\begin{cases} \rho + \rho_o divu = 0 \\ p = c_o^2\rho \\ p = -c_o^2\rho_o divu. \end{cases}$$

- *Linéarisation de l'équation du mouvement* :

On a :

$$\partial_j\sigma'_{ij} + F_i = \rho'\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

$$\rho'\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \rho'\frac{\partial v_i}{\partial t} = (\rho_o + o(\xi))\frac{\partial v_i}{\partial t} = \rho_o\frac{\partial v_i}{\partial t} + o(\xi^2)$$

soit en tenant compte de la position de référence

(5) $$\partial_j\sigma_{ij} + F_i = \rho_o\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}.$$

A.I.3 . **Position du problème** :

Après linéarisation du problème, le déplacement du fluide est solution de :

(P) $$\begin{cases} \rho_o\dfrac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \partial_j\sigma_{ij}(u) + F_i & \text{dans } \Omega \\ u(x,t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u(x,0) = 0 \ ; \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

où

$$\sigma_{ij}(u) = c_o^2\rho_o\delta_{ij}\delta_{kh}\varepsilon_{kh}(u) + (\eta\delta_{ij}\delta_{kh} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jh} + \delta_{ih}\delta_{jk}))\varepsilon_{kh}(\frac{\partial u}{\partial t})$$

Le problème (P) est un problème d'évolution du $2^{ème}$ ordre en temps. Dautray et Lions [24] ont étudié en détail ce type de problème.
On reprend les principaux résultats faits dans [24] et utiles pour notre travail puis on les appliquera à notre cas.

A.II - Un problème d'évolution du second ordre en temps

A.II.1 . Formulation variationnelle du problème :

* *Données spatiales* :

Soient V et H deux espaces de Hilbert réels séparables tels que :

. V est dense dans H

. H est identifié à son dual.

On a alors

$$V \hookrightarrow H \simeq H' \hookrightarrow V' \qquad \text{avec injections continues et denses.}$$

Notations : On note

$<<,>>$ le produit scalaire et $\|.\|$ la norme dans V

$<,>$ le produit scalaire et $|.|$ la norme dans H.

* *La forme c* :

Soit c une forme bilinéaire continue sur H . Il existe donc $C \in \mathcal{L}(H)$ tel que :

$$c(u,v) =< Cu, v > \qquad \forall u, v \in H.$$

On suppose que : - C est symètrique.

- $\exists \gamma_1 > 0$ tel que $< Cu, v >\geq \gamma_1 |u|_H^2 \quad \forall u \in H.$

Donc C est bijectif et $C^{-1} \in \mathcal{L}(H)$.

* *La forme a* :

Soit a une forme bilinéaire continue sur $V \times V$ vérifiant :

- $a(u,u) \geq \gamma_2 \|u\|_V^2 \quad \forall u \in V \quad \gamma_2 > 0.$
- a symètrique.

On a l'existence d'un opérateur $A \in \mathcal{L}(V, V')$ tel que : $a(u,v) =< Au, v >_{V',V} \quad \forall u, v \in V.$

* *La forme b* :

Soit b une forme bilinéaire continue sur $V \times V$ vérifiant :

- $b(u,u) \geq \gamma_3 \|u\|_V^2 \quad \forall u \in V \quad \gamma_3 > 0.$
- b symètrique.

On a l'existence d'un opérateur $B \in \mathcal{L}(V, V')$ tel que : $b(u,v) =< Bu, v >_{V',V} \quad \forall u, v \in V.$

* *Le problème exacte* :

On se donne $u^0 \in V$, $u^1 \in H$, $f \in L^2(H) = L^2(0,T\,;\, H)$.

On se propose d'étudier le problème suivant :

$$\text{(F)} \qquad \begin{cases} \text{Trouver } u \text{ vérifiant } \forall T > 0 : \\ u \in L^2(0,T,V), u' \in L^2(0,T,V), \dfrac{d(Cu')}{dt} \in L^2(0,T,V') \\ \dfrac{d}{dt}c(u',v) + a(u,v) + b(u',v) = < f, v >_H \quad \forall v \in V \quad \text{dans} \quad \mathfrak{D}'(0,T) \\ u(0) = u^0 ; \quad u'(0) = u^1. \end{cases}$$

Une solution u de (F) vérifie :

$$\text{(S)} \qquad \begin{cases} u \in L^2(0,T,V), u' \in L^2(0,T,V), \dfrac{d(Cu')}{dt} \in L^2(0,T,V') \\ \dfrac{d}{dt}C(u') + Au + Bu' = f \qquad \text{dans} \quad V' \\ u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1. \end{cases}$$

A.II.2 . **Résultats utiles** :

* - *Définitions et propriétés* :

. On introduit l'espace :

$$\tilde{W}_c(V) = \left\{ v ;\ v \in L^2(V) ;\ v' \in L^2(V) ;\ \frac{d}{dt}(Cv') \in L^2(V') \right\} \quad \text{avec} \quad L^2(V) = L^2(0,T ;\ V).$$

C'est un espace de Hilbert pour la norme :

$$v \longmapsto \|v\|_{\tilde{W}_c} = \left(\|v\|^2_{L^2(V)} + \|v'\|^2_{L^2(V)} + \|\frac{d}{dt}(Cv')\|_{L^2(V)} \right)^{1/2}.$$

. On a les injections continues suivantes :

$$\tilde{W}_c(V) \hookrightarrow C^0([0,T] ;\ V) \qquad \text{et} \qquad \tilde{W}_c(V) \hookrightarrow C^1([0,T] ;\ H).$$

. $\mathfrak{D}(]0,T[;\ V)$ est dense dans $\tilde{W}_c(V)$.

* - *Formules d'intégration et de dérivation* :

. $\displaystyle\int_0^T \left[< \frac{d}{dt}Cu', v' > + < u', \frac{d}{dt}Cv' > \right] dt = c(u'(T), v'(T)) - c(u'(0), v'(0)) \quad \forall u, v \in \tilde{W}_c(V)$

. $\displaystyle\int_0^T \left[a(u,v') + a(u',v) \right] dt = a(u(T), v(T)) - a(u(0), v(0)) \quad \forall u, v \in \tilde{W}_c(V)$

. $< \dfrac{d}{dt}Cu', v > = \dfrac{d}{dt}c(u',v) \qquad \text{dans} \quad \mathfrak{D}'(]0,T[) \qquad \forall v \in V.$

A.II.3 . **Existence et unicité d'une solution de (F)** :

Théorème A.II.3.1 : *Il existe une unique solution u du problème (F). Elle vérifie :*

$$u \in L^\infty(0,T;\ V) \cap L^2(0,T;\ V)$$
$$u' \in L^\infty(0,T;\ H) \cap L^2(0,T;\ V)$$
$$\frac{d(Cu')}{dt} \in L^2(0,T;\ V'),$$

avec :

$$\|u\|_{L^\infty(V)} \leq M(T)\Big(\|u^0\| + |u^1| + \|f\|_{L^2(H)}\Big)$$
$$\|u'\|_{L^\infty(H)} \leq M(T)\Big(\|u^0\| + |u^1| + \|f\|_{L^2(H)}\Big)$$
$$\|u'\|_{L^2(V)} \leq M(T)\Big(\|u^0\| + |u^1| + \|f\|_{L^2(H)}\Big)$$

où $M(T)$ est une constante positive.

A.III - Analyse Mathématique

On reprend les équations régissant le fluide décrit au § A.I, soit :

$$(P) \qquad \begin{cases} \rho_o \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \partial_j \sigma_{ij}(u) + F_i & \text{dans } \Omega \\ u(x,t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u(x,0) = 0 \quad ; \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

où

$$\sigma_{ij}(u) = c_o^2 \rho_o \delta_{ij}\delta_{kh}\varepsilon_{kh}(u) + (\eta\delta_{ij}\delta_{kh} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jh} + \delta_{ih}\delta_{jk}))\varepsilon_{kh}(\frac{\partial u}{\partial t}).$$

La formulation variationnelle associée à (P) est :

$$(P_u) \qquad \begin{cases} \text{Trouver } u \text{ vérifiant } \forall T > 0 \ : \\ u \in L^2(0,T,[H_o^1(\Omega)]^n), u' \in L^2(0,T,[H_o^1(\Omega)]^n), \dfrac{d(\rho_o u')}{dt} \in L^2(0,T,[H^{-1}(\Omega)]^n) \\ \dfrac{d}{dt}c(u',v) + a(u,v) + b(u',v) = \displaystyle\int_\Omega f v dx \quad \forall v \in [H_o^1(\Omega)]^n \quad \text{dans } \mathfrak{D}'(0,T) \\ u(0) = 0\,; \quad u'(0) = 0 \qquad\qquad \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

où

$$c(u,v) = \int_\Omega \rho_o uv dx\,; \qquad a(u,v) = \int_\Omega c_o^2 \rho_o divu divv dx$$
$$b(u,v) = \int_\Omega (\eta divu divv + 2\mu\varepsilon_{ij}(u)\,\varepsilon_{ij}(v))\,dx.$$

Les données spatiales du cadre abstrait sont satisfaites ici avec : $V = [H_o^1(\Omega)]^n$; $H = [L^2(\Omega)]^n$.

La forme c répond aux hypothèses du cadre abstrait. Par contre ici la forme a n'est pas coercive. Pour lever cette difficultée, on introduit la fonction $v(t)$ définie par :

$$v(t) = e^{-\beta t}u(t) \qquad \text{avec} \qquad \beta > 0.$$

alors v est solution de :

$$(P_v) \qquad \begin{cases} v \in L^2(0,T,[H_o^1(\Omega)]^n), v' \in L^2(0,T,[H_o^1(\Omega)]^n), \dfrac{d(\rho_o v')}{dt} \in L^2(0,T,[H^{-1}(\Omega)]^n) \\ \dfrac{d}{dt}c(v',w) + \tilde{a}(v,w) + \tilde{b}(v',w) = \displaystyle\int_\Omega e^{-\beta t} f w dx \quad \forall w \in [H_o^1(\Omega)]^n \quad \text{dans} \quad \mathfrak{D}'(0,T) \\ v(0) = 0\,; \quad v'(0) = 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{dans} \quad \Omega\,, \end{cases}$$

où

$$\tilde{a}(u,v) = \beta^2 c(u,v) + \beta b(u,v) + a(u,v)$$
$$\tilde{b}(u,v) = b(u,v) + 2\beta c(u,v).$$

Les formes $\tilde{a}$ et $\tilde{b}$ sont bilinéaires continues et coercives si on montre que b est coercive.

Lemme A.III.1 : *Les coefficients b_{ijlh} définis par :*

$$\begin{cases} b_{ijlh} = \eta\delta_{ij}\delta_{lh} + \mu(\delta_{il}\delta_{jh} + \delta_{ih}\delta_{jl}) \\ \beta > 0, \quad n\eta + 2\mu > 0 \quad \mu > 0 \end{cases}$$

vérifient :

$$b_{ijlh}X_{ij}X_{lh} \geq \min(2\mu, n\eta + 2\mu)X_{ij}X_{ij} \qquad \forall X = (X_{ij}) \in \mathbb{R}^{n^2} \qquad \textit{tel que} \quad X_{ij} = X_{ji}.$$

Démonstration :

Soit $X = (X_{ij}) \in \mathbb{R}^{n^2}$ tel que $X_{ij} = X_{ji}$. Alors :

$$b_{ijlh}X_{ij}X_{lh} = \eta X_{ii}X_{kk} + 2\mu X_{ij}X_{ij}.$$

Si $\eta \geq 0$ alors : $b_{ijlh}X_{ij}X_{lh} \geq 2\mu X_{ij}X_{ij}$.

Si $\eta < 0$ alors : $X_{ii}X_{kk} = n\displaystyle\sum_{i=1}^{n}|X_{ii}|^2 - \sum_{1\leq i<j\leq n}(X_{ii} - X_{jj})^2$ (récurrence sur n).

$$\begin{aligned} b_{ijlh}X_{ij}X_{lh} &= \eta n\sum_{i=1}^{n}|X_{ii}|^2 - \eta\sum_{1\leq i<j\leq n}(X_{ii} - X_{jj})^2 + 2\mu X_{ij}X_{ij} \\ &= (\eta n + 2\mu)\sum_{i=1}^{n}|\varepsilon_{ii}|^2 + 2\mu\sum_{i\neq j}X_{ij}X_{ij} - \eta\sum_{1\leq i<j\leq n}(X_{ii} - X_{jj})^2 \\ &\geq \min(2\mu, n\eta + 2\mu)X_{ij}X_{ij}. \end{aligned}$$

D'où le lemme.

C.Q.F.D.

Remarque A.III.2 : Faire attention à l'abus de notation utilisé dans la démonstration du lemme ci dessus. Lorsque le signe $\sum$ est utilisé, cela signifie qu'on n'a plus de sommation sur l'indice répété.

Maintenant $$b(u,v) = \int_\Omega (\eta divu divv + 2\mu\varepsilon_{ij}(u)\,\varepsilon_{ij}(v))\,dx = \int_\Omega b_{ijlh}\varepsilon_{lh}(u)\,\varepsilon_{ij}(v)\,dx.$$

D'où la cercivité de b à l'aide du lemme A.III.1 et de l'inégalité de Korn.

Le théorème A.II.3.1 est alors vérifié par la fonction v. On obtient un théorème analogue pour u , soit :

Théorème A.III.3 : *Il existe une unique solution u du problème (P_u). Elle vérifie :*

$$u \in L^\infty(0,T;\ [H_0^1(\Omega)]^n) \cap L^2(0,T;\ [H_0^1(\Omega)]^n)$$
$$u' \in L^\infty(0,T;\ [L^2(\Omega)]^n) \cap L^2(0,T;\ [H_0^1(\Omega)]^n)$$
$$\frac{d(Cu')}{dt} \in L^2(0,T;\ [H^{-1}(\Omega)]^{n'}),$$

avec :

$$\|u\|_{L^\infty([H_0^1(\Omega)]^n)} \leq M(T)\Big(\|u^0\| + |u^1| + \|f\|_{L^2([L^2(\Omega)]^n)}\Big)$$
$$\|u'\|_{L^\infty([L^2(\Omega)]^n)} \leq M(T)\Big(\|u^0\| + |u^1| + \|f\|_{L^2([L^2(\Omega)]^n)}\Big)$$
$$\|u'\|_{L^2([H_0^1(\Omega)]^n)} \leq M(T)\Big(\|u^0\| + |u^1| + \|f\|_{L^2([L^2(\Omega)]^n)}\Big)$$

où $M(T)$ est une constante positive .

Remarque A.III.4 : On peut chercher la solution du problème (P_u) dans d'autres espaces en utilisant la théorie des semi-groupes, voir pour cela [41], [42], [32], [29], ou également en utilisant la transformée de Laplace. Le cas du problème de viscoélasticité a été etudié en détail dans [23].

Annexe B

Calcul explicite du problème d'élasticité dans une couronne

Dans cette annexe nous calculons la solution des équations de l'élasticité dans une couronne de rayons interieur a_ε et exterieur ε. Le calcul est rendu possible par la symètrie sphérique de la couronne.

Soit $C_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ a_\varepsilon < |x| < \varepsilon\}$ où a_ε est donné par :

(B.1)
$$\begin{cases} a_\varepsilon = e^{-C_o/\varepsilon^2} & \text{pour} \quad n = 2 \\ a_\varepsilon = C_o \varepsilon^{n/n-2} & \text{pour} \quad n \geq 3 \end{cases}$$

avec $C_o > 0$.

On considère le problème de l'élasticité suivant :

(B.2)
$$\begin{cases} \text{Trouver } \omega_k^\varepsilon \in [H^1(C_\varepsilon)]^n \text{ tel que :} \\ -\partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)) = 0 \quad \text{dans } C_\varepsilon \\ \omega_k^\varepsilon = 0 \quad \text{pour } |x| = a_\varepsilon \\ \omega_k^\varepsilon = e_k \quad \text{pour } |x| = \varepsilon \end{cases}$$

où

e_k est le $k^{ième}$ vecteur unitaire de base de $\mathbb{R}^n$

$a_{ijlh} = c_o^2 \rho_o \delta_{ij}\delta_{lh} + \lambda(\eta\delta_{ij}\delta_{lh} + \mu(\delta_{il}\delta_{jh} + \delta_{ih}\delta_{jl}))$.

Le système (B.2) est équivalent à :

(B.2)'
$$\begin{cases} \text{Trouver } \omega_k^\varepsilon \in [H^1(C_\varepsilon)]^n \text{ tel que :} \\ -(c_o^2\rho_o + \lambda\mu + \lambda\mu)\nabla(div\omega_k^\varepsilon) - \lambda\eta\Delta\omega_k^\varepsilon = 0 \quad \text{dans } C_\varepsilon \\ \omega_k^\varepsilon = 0 \quad \text{pour } |x| = a_\varepsilon \\ \omega_k^\varepsilon = e_k \quad \text{pour } |x| = \varepsilon. \end{cases}$$

On sait que le système (B.2) admet une unique solution et on va la chercher (voir [2]) sous la forme suivante :

(B.3) $$\omega_k^\varepsilon = x_k r f(r) e_r + g(r) e_k \quad \text{pour} \quad r = |x| \in [a_\varepsilon, \varepsilon]$$

avec f et g des fonctions de classe C^2 sur $[a_\varepsilon, \varepsilon]$.

$$\omega_k^\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} x_k x_i r f(r) e_i + g(r) e_k$$

Calculons $div\omega_k^\varepsilon$:

$$\begin{aligned} div\omega_k^\varepsilon &= \frac{\partial g(r)}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(x_k x_i f(r)) \\ &= g'(r)\frac{x_k}{r} + \sum_{i=1}^{n} \left(x_k f(r) + x_i \delta_{ik} f(r) + x_i x_k \frac{x_i}{r} f'(r)\right) \\ &= x_k\left[\frac{\partial g'(r)}{r} + rf'(r) + (n+1)f(r)\right] \end{aligned}$$

donc

(B.4) $$div\omega_k^\varepsilon = x_k\left[\frac{\partial g'(r)}{r} + rf'(r) + (n+1)f(r)\right].$$

Calculons $\Delta\omega_k^\varepsilon$:

$$\Delta\omega_k^\varepsilon = \Delta(g(r))e_k + \sum_{i=1}^{n} \Delta(x_k x_i f(r))e_i$$

$$\Delta(g(r)) = g''(r) + (n-1)\frac{g'}{r}$$

$$\Delta(x_k x_i f(r)) = 2\delta_{ik} f(r) + (n+3)x_k x_i \frac{f'(r)}{r} + x_k x_i f''(r)$$

d'où

(B.5) $$\Delta\omega_k^\varepsilon = \left[g''(r) + (n-1)\frac{g'(r)}{r} + 2f(r)\right]e_k + \left[(n+3)f'(r) + rf''(r)\right]x_k e_k.$$

On rappelle que ω_k^ε vérifie : $-(c_o^2\rho_o + \lambda\mu + \lambda\mu)\nabla(div\omega_k^\varepsilon) - \lambda\eta\Delta\omega_k^\varepsilon = 0$ dans C_ε .

Pour simplifier les calculs, on pose :

(B.6) $$q_k^\varepsilon = -\frac{(c_o^2\rho_o + \lambda\mu + \lambda\mu)}{\lambda\mu} div\omega_k^\varepsilon$$

alors on a :

(B.7) $$\nabla q_k^\varepsilon - \Delta\omega_k^\varepsilon = 0 \qquad \text{dans } C_\varepsilon.$$

Vu l'expression de $div\omega_k^\varepsilon$, q_k^ε s'écrit sous forme :

(B.8) $$q_k^\varepsilon = x_k h(r).$$

Calculons ∇q_k^ε :

$$\begin{aligned} \nabla q_k^\varepsilon &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial q_k^\varepsilon}{\partial x_i} e_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(x_k h(r))e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\delta_{ik} h(r) + x_k \frac{x_i}{r} h'(r)\right)e_i \\ &= h(r)e_k + \sum_{i=1}^{n} x_k h'(r)\frac{1}{r} x_i e_i \\ &= h(r)e_k + x_k h'(r)\frac{1}{r} r e_r \end{aligned}$$

d'où

(B.9) $$\nabla q_k^\varepsilon = h(r)e_k + x_k h'(r)e_r.$$

En tenant compte de (B.5) et (B.9)

$$(\text{B.7}) \Longleftrightarrow [h(r) - g''(r) - (n-1)\frac{g'(r)}{r} - 2f(r)]e_k + x_k[h'(r) - (n+3)f'(r) - rf''(r)]e_r$$

d'où

(B.10) $$h(r) - g''(r) - (n-1)\frac{g'(r)}{r} - 2f(r) = 0$$

(B.11) $$h'(r) - (n+3)f'(r) - rf''(r) = 0.$$

En regroupant les relations (B.4) (B.8), les équations (B.10) (B.11) ainsi que les conditions aux limites, on obtient un système d'équations différentielles à une variable pour f, g et h.

(B.12)
$$\begin{cases} \text{Trouver } f, g \text{ et } h \in C^2[a_\varepsilon\ ,\ \varepsilon] \text{ telles que :} \\ \dfrac{g'(r)}{r} + (n+1)f(r) + rf'(r) = -\dfrac{\lambda\mu}{c_o^2\rho_o + \lambda\eta + \lambda\mu}h(r) \\ h(r) - g''(r) - (n-1)\dfrac{g'(r)}{r} - 2f(r) = 0 \\ h'(r) - (n+3)f'(r) - rf''(r) = 0 \\ f(a_\varepsilon) = g(a_\varepsilon) = 0 \\ f(\varepsilon) = 0 \quad \text{et} \quad g(\varepsilon) = 1. \end{cases}$$

On pose

(B.13) $$m = \frac{\lambda\mu}{c_o^2\rho_o + \lambda\eta + \lambda\mu}.$$

Dans la suite, nous allons étudier séparémment les cas $n = 2$ et $n \geq 3$.

Cas de la dimension n ≥ 3

On cherche f, g et h sous la forme de séries entières. On pose :

(B.14)
$$\begin{cases} f(r) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k r^k \\ g(r) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \beta_k r^k \\ h(r) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma_k r^k. \end{cases}$$

On introduit ces séries entières dans les trois équations du système (B.12) et on identifie terme à terme les coefficients des séries. Il vient :

$$\text{(B.15)} \qquad \begin{cases} (k+2)\beta_{k+2} + (n+k+1)\alpha_k = -m\gamma_k \\ \gamma_k - 2\alpha_k - (k+2)(n+k)\beta_{k+2} = 0 \\ [\gamma_k - (n+k+2)\alpha_k]k = 0 \end{cases}$$

et ceci $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Si $k \neq 0$, alors on tire de (B.15)

$$\begin{cases} (k+2)\beta_{k+2} + (n+k+1)\alpha_k = -m\gamma_k \\ \gamma_k = (n+k+2)\alpha_k \\ (n+k)\alpha_k = (k+2)(n+k)\beta_{k+2} \end{cases}$$

par conséquent :

$$\text{(B.15)} \implies \begin{cases} \alpha_k = 0 & \text{pour} & k \neq -n\,,\ -(n+2)\,,\ 0 \\ \beta_k = 0 & \text{pour} & k \neq -n\,,\ -(n-2)\,,\ 0\,,\ 2 \\ \gamma_k = 0 & \text{pour} & k \neq -n\,,\ 0. \end{cases}$$

De plus on a :

$$\text{(B.16)} \qquad \begin{cases} 2\beta_2 + (n+1)\alpha_0 = -m\gamma_0 \\ 2n\beta_2 = \gamma_0 - 2\alpha_0 \\ \alpha_{-n} = -m\gamma_{-n} + (n-2)\beta_{-n+2} \\ \gamma_{-n} = 2\alpha_{-n} \\ \alpha_{-n-2} = -n\beta_{-n}. \end{cases}$$

Si on pose :

$$\text{(B.17)} \qquad \begin{cases} A = \alpha_{-n} \\ B = \alpha_{-n-2} \\ C = \alpha_0 \\ D = \beta_0, \end{cases}$$

on trouve alors :

$$\text{(B.18)} \qquad \begin{cases} f(r) = \dfrac{1}{r^n}\left(A + \dfrac{B}{r^2}\right) + C \\ g(r) = \dfrac{1}{r^n}\left(-\dfrac{B}{n} + \dfrac{1+2m}{n-2}Ar^2\right) - \dfrac{n+1+2m}{2(1+nm)}Cr^2 + D \\ h(r) = \dfrac{2A}{r^n} + \dfrac{2-n-n^2}{1+mn}C. \end{cases}$$

On rappelle les conditions aux limites du système (B.12)

(B.19)
$$\begin{cases} f(a_\varepsilon) = 0 & g(a_\varepsilon) = 0 \\ f(\varepsilon) = 0 & g(\varepsilon) = 1. \end{cases}$$

On obtient un système linéaire à 4 équations pour les 4 inconnues (A, B, C, D) :

(B.20)
$$\begin{cases} A + \dfrac{B}{\varepsilon^2} + \varepsilon^n C = 0 \\ A - \dfrac{n-2}{n}\dfrac{1}{1+2m}\dfrac{B}{\varepsilon^2} - \dfrac{n+1+2m}{2(1+nm)}\dfrac{n-2}{1+2m}\varepsilon^n C + \dfrac{n-2}{1+2m}\varepsilon^{n-2} D = \dfrac{n-2}{1+2m}\varepsilon^{n-2} \\ A + \dfrac{B}{a_\varepsilon^2} + a_\varepsilon^n C = 0 \\ A - \dfrac{n-2}{n}\dfrac{1}{1+2m}\dfrac{B}{a_\varepsilon^2} - \dfrac{n+1+2m}{2(1+nm)}\dfrac{n-2}{1+2m}a_\varepsilon^n C + \dfrac{n-2}{1+2m}a_\varepsilon^{n-2} D = 0 \end{cases}$$

d'où

(B.21)
$$\begin{cases} B = a_\varepsilon^2 \varepsilon^n \dfrac{1 - \left(\frac{a_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^n}{1 - \left(\frac{a_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2} C \\ A = -\varepsilon^n \left[1 + \left(\frac{a_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2 \dfrac{1 - \left(\frac{a_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^n}{1 - \left(\frac{a_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2}\right] C \\ D = \left(\dfrac{1+2m}{n-2}\dfrac{\varepsilon^n}{a_\varepsilon^{n-2}} \left[1 + \left(\frac{a_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2 \dfrac{1 - \left(\frac{a_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^n}{1 - \left(\frac{a_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2}\right] + \right. \\ \qquad \left. + \dfrac{1}{n}\dfrac{\varepsilon^n}{a_\varepsilon^{n-2}} \left[\dfrac{1 - \left(\frac{a_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^n}{1 - \left(\frac{a_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2}\right] + \dfrac{n+1+2m}{2(1+nm)} a_\varepsilon^2 \right) C \end{cases}$$

avec (B.1) $\quad a_\varepsilon = C_o \varepsilon^{n/n-2} \quad$ alors :

(B.22)
$$\begin{cases} B = C_o^2 \varepsilon^{n^2/n-2} \dfrac{1 - C_o^n \varepsilon^{2n/n-2}}{1 - C_o^2 \varepsilon^{4/n-2}} C \\ A = -\varepsilon^n \left[1 + C_o^2 \varepsilon^{4/n-2} \dfrac{1 - C_o^n \varepsilon^{2n/n-2}}{1 - C_o^2 \varepsilon^{4/n-2}}\right] C \\ D = \dfrac{1}{C_o^{n-2}} \left(\dfrac{1+2m}{n-2} Big[1 + C_o^2 \varepsilon^{4/n-2} \dfrac{1 - C_o^n \varepsilon^{2n/n-2}}{1 - C_o^2 \varepsilon^{4/n-2}}\right] + \right. \\ \qquad \left. + \dfrac{1}{n}\left[\dfrac{1 - C_o^n \varepsilon^{2n/n-2}}{1 - C_o^2 \varepsilon^{4/n-2}}\right] + \dfrac{n+1+2m}{2(1+nm)} C_o^n \varepsilon^{2n/n-2} \right) C. \end{cases}$$

Comme les expressions exactes de A , B , C , D sont assez longues et compliquées , on procède par développements limités en ε au voisinage de zéro.

On en déduit :

(B.23)
$$\begin{cases} A = -\dfrac{\varepsilon^n}{a}[1+o(1)] \\ B = \dfrac{C_o^2}{a}\varepsilon^{n^2/n-2}[1+o(1)] \\ C = \dfrac{1}{a}[1+o(1)] \\ D = 1 + \dfrac{b}{a}\varepsilon^2[1+o(1)] \end{cases}$$

avec

(B.24)
$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{C_o^{n-2}}[\dfrac{1}{n} + \dfrac{1+2m}{n-2}] \\ b = \dfrac{1+2m}{n-2} + \dfrac{n+1+2m}{2(1+nm)}. \end{cases}$$

Cas de la dimension n = 2

Cette fois ci on cherche f, g et h sous la forme de séries entières plus un terme en logarithme pour g. On pose :

(B.25)
$$\begin{cases} f(r) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k r^k \\ g(r) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \beta_k r^k - Alogr \\ h(r) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma_k r^k. \end{cases}$$

Des calculs semblables au cas $n \geq 3$ nous amènent aux expressions suivantes de f, g et h :

(B.26)
$$\begin{cases} f(r) = \dfrac{A}{1+2m}\dfrac{1}{r^2} + \dfrac{B}{r^4} + C \\ g(r) = -Alogr - \dfrac{B}{2r^2} - \dfrac{2m+3}{2(1+2m)}Cr^2 + D \\ h(r) = \dfrac{2A}{1+2m}\dfrac{1}{r^2} - \dfrac{4C}{1+2m}. \end{cases}$$

Le système (B.19) des conditions aux limites pour f et g nous donne un système de quatre équations pour les quatres inconnues (A , B , C , D) :

(B.27)
$$\begin{cases} \dfrac{1}{1+2m}\dfrac{A}{\varepsilon^2} + \dfrac{B}{\varepsilon^4} + C = 0 \\ \dfrac{1}{1+2m}\dfrac{A}{a_\varepsilon^2} + \dfrac{B}{a_\varepsilon^4} + C = 0 \\ -log\varepsilon A - \dfrac{B}{2\varepsilon^2} - \dfrac{2m+3}{2(1+2m)}\varepsilon^2 C + D = 1 \\ -loga_\varepsilon A - \dfrac{B}{2a_\varepsilon^2} - \dfrac{2m+3}{2(1+2m)}a_\varepsilon^2 C + D = 0 \end{cases}$$

avec $a_\varepsilon = e^{-C_o/\varepsilon^2}$ et $C_o > 0$.

D'où

$$\text{(B.28)} \qquad \begin{cases} B = \varepsilon^2 a_\varepsilon^2 C \\ A = -(1+2m)(a_\varepsilon^2 + \varepsilon^2) C \\ D = \left(-(1+2m)(a_\varepsilon^2 + \varepsilon^2) log a_\varepsilon + \dfrac{\varepsilon^2}{2} + \dfrac{2m+3}{2(1+2m)} a_\varepsilon^2\right) C. \end{cases}$$

Les expressions exactes de A , B , C , D sont toujours aussi compliquées, aussi on fait des développements limités en ε au voisinage de zéro. On trouve :

$$\text{(B.29)} \qquad \begin{cases} A = -\dfrac{\varepsilon^2}{C_o}[1 + o(1)] \\ B = \dfrac{1}{1+2m}\dfrac{\varepsilon^2}{C_o} e^{-2C_o/\varepsilon^2}[1 + o(1)] \\ C = \dfrac{1}{(1+2m)C_o} + o(1) \\ D = 1 - \dfrac{1}{C_o}\varepsilon^2 log\varepsilon\,[1 + o(1)]. \end{cases}$$

Annexe C

Construction de l'opérateur de restriction R_ε

Dans cette annexe, nous allons montrer la proposition II.3.4 (nommée ici proposition C.5) et un résultat analogue pour une répartition des trous dans un hyperplan.

Lemmes techniques

Soit $\eta \in \mathbb{R}$ tel que : $0 < \eta < 1$.

Soit T le fermé défini par :

$$\begin{cases} . \ T \text{ est strictement inclus dans la boule unité } B_1 \text{ de } \mathbb{R}^n \\ . \ B_1 \setminus T \text{ est un ouvert connexe de frontière } C^1 \text{ par morceaux.} \end{cases}$$

On désigne par ηT l'homothétique de T de rapport η.

On définit C_η par :

(C.1) $$C_\eta = B_1 \setminus \eta T$$

donc C_η est un ouvert borné connexe de frontière C^1 par morceaux.

Lemme C.1 : *(cf [2])*

Il existe un opérateur linéaire continu L tel que :

(i) $L \in \mathcal{L}([H^1(B_1)]^n, [H^1(C_\eta)]^n)$.

(ii) Pour tout $u \in [H^1(B_1)]^n$ *on a :* $L(u) = u$ *sur* ∂B_1 *et* $L(u) = 0$ *sur* $\partial(\eta T)$.

(iii) Il existe une constante $c > 0$ *qui ne dépend pas de* η *telle que : pour tout* $u \in [H^1(B_1)]^n$, *on a :*

$$|\nabla L(u)|_{L^2(C_\eta)} \leq c\,[\,|\nabla u|_{L^2(B_1)} + K_\eta\,|u|_{L^2(B_1)}\,]$$

où

(*C.2*) $$K_\eta = \begin{cases} \eta^{n-2/2} & \text{pour} \quad n \geq 3 \\ \dfrac{1}{\sqrt{|log\eta|}} & \text{pour} \quad n = 2. \end{cases}$$

Lemme C.2 :

Soit $u \in [H^1(B_1)]^n$. On considère le problème suivant :

(*C.3*)
$$\begin{cases} \text{Trouver } v \in [H^1(C_\eta)]^n \text{ tel que :} \\ -\Delta v = -\Delta u \quad \text{dans } C_\eta \\ v = 0 \quad \text{sur } \partial B_1 \\ v = u \quad \text{sur } \partial(\eta T). \end{cases}$$

Le système (C.3) admet une solution unique v qui dépend linéairement de u et telle que :

(*C.4*)
$$|\nabla v|_{L^2(C_\eta)} \leq c\,[\,|\nabla u|_{L^2(B_1)} + K_\eta\,|u|_{L^2(B_1)}\,],$$

où c ne dépend ni de η, ni de u et K_η est donné par (C.2).

Démonstration :

Posons $v' = v - L(u)$ avec L défini au Lemme C.1. Alors v' est solution de :

$$\begin{cases} -\Delta v' = -\Delta(u - L(u)) \quad \text{dans } C_\eta \\ v' = 0 \quad \text{sur } \partial C_\eta. \end{cases}$$

D'où

$$|\nabla v'|_{L^2(C_\eta)} \leq |\nabla(u - \mathrm{L}(u))|_{L^2(C_\eta)} \leq |\nabla u|_{L^2(C_\eta)} + |\nabla(\mathrm{L}(u))|_{L^2(C_\eta)}.$$

Comme

$$|\nabla v|_{L^2(C_\eta)} \leq |\nabla v'|_{L^2(C_\eta)} + |\nabla(\mathrm{L}(u))|_{L^2(C_\eta)},$$

on déduit (C.4) grâce au Lemme C.1.

C.Q.F.D.

Maintenant, on fixe $\eta = \dfrac{a_\varepsilon}{\varepsilon}$. On pose :

(C.5)
$$\text{avec} \quad \begin{aligned} C^\varepsilon &= \varepsilon C_\eta = B^\varepsilon \setminus T^\varepsilon \\ B^\varepsilon &= \varepsilon B_1\,; \quad T^\varepsilon = a_\varepsilon T. \end{aligned}$$

Lemme C.3 : *Soit $u \in [H^1(B^\varepsilon)]^n$. Le problème suivant :*

(*C.6*)
$$\begin{cases} \text{Trouver } v_\varepsilon \in [H^1(C^\varepsilon)]^n \text{ tel que :} \\ -\Delta v_\varepsilon = -\Delta u \quad \text{dans } C^\varepsilon \\ v_\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \partial T^\varepsilon \\ v_\varepsilon = u \quad \text{sur } \partial C^\varepsilon \setminus \partial T^\varepsilon \end{cases}$$

admet une solution unique, qui dépend linéairement de u et qui vérifie :

(*C.7*)
$$|\nabla v_\varepsilon|^2_{L^2(C^\varepsilon)} \leq c\,[\,|\nabla u|^2_{L^2(C^\varepsilon \cup T^\varepsilon)} + |u|^2_{L^2(C^\varepsilon \cup T^\varepsilon)}\,],$$

où c est une constante strictement positive qui ne dépend ni de ε, ni de u.

Démonstration : (cf [2])

Le système (C.6) est l'équivalent du système (C.3) par le changement de variable suivant :

$$y \in C_\eta \text{ et } x \in C^\varepsilon \implies y = \varepsilon x.$$

On déduit que le système (C.6) admet une solution unique v_ε qui dépend linéairement de u.
Pour obtenir l'estimation recherchée (C.7), on remplace dans l'estimation (C.4) du Lemme C.2

$$u(y) \quad \text{par} \quad \frac{1}{\varepsilon}u(\varepsilon x) \qquad \text{et} \qquad v(y) \quad \text{par} \quad \frac{1}{\varepsilon}v_\varepsilon(\varepsilon x).$$

On obtient :

$$|\nabla v_\varepsilon|^2_{L^2(C^\varepsilon)} \leq c\,[\,|\nabla u|^2_{L^2(C^\varepsilon \cup T^\varepsilon)} + \frac{K_\eta^2}{\varepsilon^2}|u|^2_{L^2(C^\varepsilon \cup T^\varepsilon)}\,].$$

C.Q.F.D.

Cas d'une répartition périodique des trous dans tout le volume.

Soit Ω et Ω_ε les ouverts décrits dans la partie II.1.

Soit $u \in [H_0^1(\Omega)]^n$.

Lemme C.4 : *Le problème suivant :*

(*C.8*)
$$\begin{cases} \text{Trouver } v_\varepsilon \in [H^1(C_\nu^\varepsilon)]^n \text{ tel que :} \\ -\Delta v_\varepsilon = -\Delta u \quad \text{dans} \quad C_\nu^\varepsilon \\ v_\varepsilon = 0 \quad \text{sur} \quad \partial T_\nu^\varepsilon \\ v_\varepsilon = u \quad \text{sur} \quad \partial C_\nu^\varepsilon \setminus \partial T_\nu^\varepsilon \end{cases}$$

admet une solution unique, qui dépend linéairement de u et qui vérifie :

(*C.9*)
$$|\nabla v_\varepsilon|^2_{L^2(C^\varepsilon)} \leq c\,[\,|\nabla u|^2_{L^2(C^\varepsilon \cup T^\varepsilon)} + |u|^2_{L^2(C^\varepsilon \cup T^\varepsilon)}\,],$$

où c est une constante strictement positive qui ne dépend ni de ε, ni de u.

Démonstration :

C'est une conséquence directe du lemme C.3. Il suffit de voir que pour :

$$\eta = \frac{a_\varepsilon}{\varepsilon} \qquad \text{et} \qquad a_\varepsilon = \begin{cases} C_0\varepsilon^{n/n-2} & \text{pour} \quad n \geq 3 \\ e^{-C_0/\varepsilon^2} & \text{pour} \quad n = 2, \end{cases}$$

on a

$$K_\eta = \begin{cases} C_0^{(n-2)/2} & \text{pour} \quad n \geq 3 \\ \dfrac{1}{\sqrt{C_0 + \varepsilon^2 log\varepsilon}} & \text{pour} \quad n = 2. \end{cases}$$

C.Q.F.D.

Maintenant on définit $R_\varepsilon u$ par :

(C.10)
$$\begin{cases} - \text{ Pour tout pavé } P_\nu^\varepsilon \subset \Omega \ : \\ \qquad R_\varepsilon u = u \qquad \text{dans} \quad K_\nu^\varepsilon \\ \qquad R_\varepsilon u = v_\varepsilon \qquad \text{dans} \quad C_\nu^\varepsilon \\ \qquad R_\varepsilon u = 0 \qquad \text{dans} \quad T_\nu^\varepsilon . \\ - \text{ Pour les pavés qui coupent } \partial\Omega \ : \\ \qquad R_\varepsilon u = u \qquad \text{dans} \quad P_\nu^\varepsilon \cap \Omega , \end{cases}$$

et où v_ε est la solution unique du système (C.8).

Proposition C.5 : *L'opérateur R_ε défini par (C.10) vérifie :*

(i) $R_\varepsilon \in \mathcal{L}([H_0^1(\Omega)]^n \ ; \ [H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^n)$

(ii) $u \in [H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^n \Longrightarrow R_\varepsilon \tilde{u} = u \quad dans \quad \Omega_\varepsilon .$

(iii) $$\|R_\varepsilon u\|_{H_0^1(\Omega_\varepsilon)} \leq c \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$$

où c est une constante strictement positive qui ne dépend ni de u, ni de ε.

Démonstration : Le point (i) est vérifié par définition de R_ε.

Si $u \in [H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^n$ alors $u = 0$ sur $\partial T_\nu^\varepsilon$
donc $v_\varepsilon - u$ est solution du problème de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} - \Delta(v_\varepsilon - u) = 0 & \text{dans} \quad C_\nu^\varepsilon \\ v_\varepsilon - u = 0 & \text{sur} \quad \partial C_\nu^\varepsilon , \end{cases}$$

qui admet l'unique solution $v_\varepsilon - u = 0$ d'où $R_\varepsilon \tilde{u} = v_\varepsilon = u$ dans C_ν^ε d'où (ii).
Enfin (iii) est trivialement vérifié grâce au Lemme C.4.

C.Q.F.D.

Cas d'une répartition périodique des trous dans un hyperplan.

Soit Ω et Ω_ε les ouverts décrits dans la partie III.1.

Soit $u \in [H_0^1(\Omega)]^n$.

Lemme C.6 : *Le problème suivant :*

(C.11)
$$\begin{cases} \text{Trouver } v_\varepsilon \in [H^1(C_\nu^\varepsilon)]^n \text{ tel que} \ : \\ \qquad - \Delta v_\varepsilon = - \Delta u \qquad \text{dans} \quad C_\nu^\varepsilon \\ \qquad v_\varepsilon = 0 \qquad \text{sur} \quad \partial T_\nu^\varepsilon \\ \qquad v_\varepsilon = u \qquad \text{sur} \quad \partial C_\nu^\varepsilon \setminus \partial T_\nu^\varepsilon \end{cases}$$

admet une solution unique, qui dépend linéairement de u et qui vérifie :

(C.12)
$$|\nabla v_\varepsilon|^2_{L^2(C^\varepsilon)} \leq c \left[|\nabla u|^2_{L^2(C^\varepsilon \cup T^\varepsilon)} + \frac{1}{\varepsilon} |u|^2_{L^2(C^\varepsilon \cup T^\varepsilon)} \right],$$

où c est une constante strictement positive qui ne dépend ni de ε, ni de u.

Démonstration :

C'est une conséquence directe du lemme C.3. Il suffit de voir que pour :

$$\eta = \frac{a_\varepsilon}{\varepsilon} \qquad \text{et} \qquad a_\varepsilon = \begin{cases} C_0 \varepsilon^{n-1/n-2} & \text{pour} \quad n \geq 3 \\ e^{-C_0/\varepsilon} & \text{pour} \quad n = 2, \end{cases}$$

on a

$$\frac{K_\eta^2}{\varepsilon^2} \leq \frac{c}{\varepsilon} \qquad \forall n \geq 2.$$

C.Q.F.D.

Maintenant on définit $R_\varepsilon u$ par :

(C.13)

$$\begin{cases} - \quad R_\varepsilon u = u \quad \text{dans} \quad \Omega \setminus H_\varepsilon \\ - \text{ Pour tout pavé } P_\nu^\varepsilon \subset H_\varepsilon \text{ :} \\ \qquad R_\varepsilon u = u \quad \text{dans} \quad K_\nu^\varepsilon \\ \qquad R_\varepsilon u = v_\varepsilon \quad \text{dans} \quad C_\nu^\varepsilon \\ \qquad R_\varepsilon u = 0 \quad \text{dans} \quad T_\nu^\varepsilon. \\ - \text{ Pour les pavés qui coupent } \partial\Omega \text{ :} \\ \qquad R_\varepsilon u = u \quad \text{dans} \quad P_\nu^\varepsilon \cap \Omega, \end{cases}$$

et où v_ε est la solution unique du système (C.11).

Proposition C.7 : *L'opérateur R_ε défini par (C.12) vérifie :*

(i) $R_\varepsilon \in \mathcal{L}([H_0^1(\Omega)]^n \ : \ [H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^n)$.

(ii) $u \in [H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^n \Longrightarrow R_\varepsilon \tilde{u} = u \quad dans \quad \Omega_\varepsilon$.

(iii) $$\|R_\varepsilon u\|_{H_0^1(\Omega_\varepsilon)} \leq c \left[|\nabla u|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\varepsilon} |u|^2_{L^2(H_\varepsilon)} \right]$$

où c est une constante strictement positive qui ne dépend ni de u, ni de ε.

Démonstration : La preuve de cette proposition est analogue à celle de la proposition C.5.

Annexe D

Equations de l'élasticité autour d'un obstacle borné et comportement à l'infini.

Dans cette annexe, nous donnons des résultats d'existence et d'unicité ainsi que le comportement à l'infini des équations de l'élasticité autour d'un obstacle borné de $\mathbb{R}^n$ avec $n \geq 3$.
Les estimations à l'infini sont obtenues en écrivant les solutions sous forme intégrale à l'aide de solutions fondamentales dans $\mathbb{R}^n$ (cf [2] et [35]).

Soit T un fermé de $\mathbb{R}^n$ qui vérifie :

(D.1)
$$\begin{cases} T \subset B_1 \text{ où } B_1 \text{ est la boule ouverte de rayon 1 centrée à l'origine} \\ B_1 \setminus T \text{ est un ouvert connexe à frontière } C^1 \text{ par morceaux.} \end{cases}$$

Lemme D.1 : *On se place en dimension $n \geq 3$. Le système suivant :*

(D.2)
$$\begin{cases} -\partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k)) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \setminus T \\ \omega_k = 0 & \text{sur } \partial T \\ \omega_k = e_k & \text{à l'infini} \\ \|\varepsilon(\omega_k)\|_{L^2(\mathbb{R}^n - T)} < +\infty \end{cases}$$

admet une solution unique.

Démonstration :

Soit $\theta \in \mathfrak{D}(B_1)$ avec $\theta = 1$ au voisinage de T (c'est possible puisque T est inclus strictement dans B_1).
On définit $a_k \in [C^\infty(\mathbb{R}^n)]^n$ par : $\quad a_k = (1-\theta)e_k$.
On a immédiatement : $\quad a_k = 0$ au voisinage de T

$$a_k = e_k \text{ dans } \mathbb{R}^n \setminus B_1.$$

On note H le complété de $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n \setminus T)$ pour la norme $\left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus T} |\varepsilon(u)|^2\right)^{1/2}$.

On associe au système (D.2) la formulation variationnelle

(D.3)
$$\begin{cases} \text{Trouver } v_k \in H \text{ tel que :} \\ \int_{\mathbb{R}^n \setminus T} a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(v_k)\varepsilon_{ij}(\overline{\varphi})dx = -\int_{\mathbb{R}^n \setminus T} a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(a_k)\varepsilon_{ij}(\overline{\varphi})dx \quad \forall \varphi \in H. \end{cases}$$

D'après le théorème de Lax-Migram, le système (D.3) admet une unique solution v_k dans H. Une interpretation de (D.3) montre que $\omega_k = v_k + a_k$ vérifie

$$-\partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k)) = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^n - T \quad \text{et} \quad \omega_k = 0 \quad \text{sur} \quad \partial T.$$

D'autre part de la coercivité des coefficients a_{ijlh}, on déduit que $|\varepsilon(\omega_k)|_{L^2(\mathbb{R}^n-T)} < +\infty$.

Finalement ω_k est solution du problème :

$$(\text{ D.4 }) \qquad \begin{cases} -\partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k)) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \setminus T \\ \omega_k = 0 & \text{sur } \partial T \\ |\varepsilon(\omega_k)|_{L^2(\mathbb{R}^n-T)} < +\infty \\ \omega_k \in H. \end{cases}$$

Il est clair que ω_k est l'unique solution de (D.4).

En effet supposons qu'il existe une autre solution ω'_k, alors

$$\omega_k - \omega'_k \in H$$

et est solution unique de la formulation variationnelle suivante :

$$(\text{ D.5 }) \qquad \begin{cases} \text{Trouver} \quad \omega_k - \omega'_k \in H \quad \text{tel que :} \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n\setminus T} a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k - \omega'_k)\varepsilon_{ij}(\overline{\varphi})dx = 0 \qquad \forall \varphi \in H. \end{cases}$$

Or la solution unique de (D.5) est zéro. D'où $\omega_k = \omega'_k$ dans $\mathbb{R}^n \setminus T$.

C.Q.F.D.

Remarque D.2 :

La norme munissant H ne donne pas d'informations sur le comportement à l'infini des fonctions de H. La condition à l'infini du problème (D.2) sera établie par la suite.

Avant d'écrire la solution ω_k du système (D.2) sous forme d'intégrale, on donne une solution fondamentale du système dans $\mathbb{R}^n$ qui va être le "noyau" de la forme intégrale.

Lemme D.3 : *On se place en dimension $n \geq 3$. Une solution de :*

$$(\text{ D.6 }) \qquad -\partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(u_k)) = \delta(x-y)\delta_{kj}$$

est donnée par :

$$(\text{ D.7 }) \qquad u_j^k = \frac{1}{2\lambda\mu S_n(m+1)}\left[\frac{2m+1}{n-2}\frac{\delta_{jk}}{|x-y|^{n-2}} + \frac{(x_k-y_k)(x_j-y_j)}{|x-y|^n}\right]$$

où

$$m = \frac{\lambda\mu}{c_o^2\rho_o + \lambda\eta + \lambda\mu}.$$

Démonstration :

On rappelle les solutions fondamentales dans $\mathbb{R}^n$ du Laplacien et du bi-Laplacien.

(D.8) $$\Delta\Big[-\frac{1}{(n-2)S_n}\frac{1}{|x-y|^{n-2}}\Big] = \delta(x-y) \qquad \text{dans } \mathbb{R}^n \qquad \text{pour} \quad n \geq 3$$

(D.9) $$\Delta^2 E(x-y) = \delta(x-y) \qquad \text{dans } \mathbb{R}^n \qquad \text{pour} \quad n \geq 3$$

avec $$E(x-y) = \begin{cases} -\dfrac{|x-y|}{8\pi} & \text{pour} \quad n = 3 \\ -\dfrac{log|x-y|}{4S_4} & \text{pour} \quad n = 4 \\ \dfrac{1}{2(n-2)(n-4)S_n}\dfrac{1}{|x-y|^{n-4}} & \text{pour} \quad n \geq 3. \end{cases}$$

Soit $\mathcal{F}$ la transformée de Fourier qui opère de $L^2(\mathbb{R}^n)$ dans lui même.

$\forall f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ $$\mathcal{F}(f)(\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i\alpha.x}dx$$

et $$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(f)e^{i\alpha.x}d\alpha = \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}f)(\alpha).$$

Notation :

$$a = c_o^2\rho_o + \lambda\eta + \lambda\mu$$
$$b = \lambda\mu.$$

On prend la transformée de Fourier de (D.6) et on obtient :

(D.10) $$a\alpha_j\alpha.\mathcal{F}(u_k) + b|\alpha|^2\mathcal{F}(u_k^j) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}e^{-i\alpha.y}\delta_{jk}.$$

On multiplie l'égalité (D.10) par α_j puis, on somme sur j :

$$a|\alpha|^2\alpha.\mathcal{F}(u_k) + b|\alpha|^2\alpha.\mathcal{F}(u_k) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}e^{-i\alpha.y}\alpha_k$$

$$(a+b)|\alpha|^2\alpha.\mathcal{F}(u_k) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}e^{-i\alpha.y}\alpha_k$$

d'où

(D.11) $$\alpha.\mathcal{F}(u_k) = \frac{1}{a+b}\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\frac{e^{-i\alpha.y}}{|\alpha|^2}\alpha_k.$$

On reporte (D.11) dans (D.10), on en déduit que :

(D.12) $$\mathcal{F}(u_k^j) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\frac{1}{|\alpha|^2}\frac{e^{-i\alpha.y}}{b}\Big[\delta_{jk} - \frac{a}{a+b}\frac{\alpha_j\alpha_k}{|\alpha|^2}\Big]$$

d'où

(D.13) $$u_k^j = \frac{\delta_{jk}}{b}\overline{\mathcal{F}}\Big(\frac{e^{-i\alpha.y}}{(2\pi)^{n/2}|\alpha|^2}\Big) - \frac{a}{(a+b)b}\overline{\mathcal{F}}\Big(\frac{\alpha_j\alpha_k}{|\alpha|^4}\frac{e^{-i\alpha.y}}{(2\pi)^{n/2}}\Big).$$

Pour calculer $\overline{\mathcal{F}}\Big(\frac{e^{-i\alpha.y}}{(2\pi)^{n/2}|\alpha|^2}\Big)$ et $\overline{\mathcal{F}}\Big(\frac{\alpha_j\alpha_k}{|\alpha|^4}\frac{e^{-i\alpha.y}}{(2\pi)^{n/2}}\Big)$, on utilise les solutions fondamentales du Laplacien et du bilaplacien.

$$(\text{D.8}) \Longrightarrow \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}e^{-i\alpha.y} = -\frac{1}{(n-2)S_n}\mathcal{F}\Big(\Delta\Big(\frac{1}{|x-y|^{n-2}}\Big)\Big) = -\frac{1}{(n-2)S_n}(-|\alpha|^2)\mathcal{F}\Big(\frac{1}{|x-y|^{n-2}}\Big)$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\frac{e^{-i\alpha.y}}{|\alpha|^2} = \frac{1}{(n-2)S_n}\mathcal{F}\Big(\frac{1}{|x-y|^{n-2}}\Big)$$

d'où

$$(\text{D.14}) \qquad \overline{\mathcal{F}}\Big(\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\frac{e^{-i\alpha.y}}{|\alpha|^2}\Big) = \frac{1}{(n-2)S_n}\cdot\frac{1}{|x-y|^{n-2}}.$$

De même pour le bilaplacien :

$$(\text{D.9}) \Longrightarrow \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}e^{-i\alpha.y} = |\alpha|^4\mathcal{F}(E(x-y))$$
$$\Longrightarrow \overline{\mathcal{F}}\Big(\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\frac{e^{-i\alpha.y}}{|\alpha|^4}\Big) = E(x-y)$$
$$\Longrightarrow \frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_k}\overline{\mathcal{F}}\Big(\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\frac{e^{-i\alpha.y}}{|\alpha|^4}\Big) = \frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_k}E(x-y)$$

d'où

$$(\text{D.15}) \qquad \overline{\mathcal{F}}\Big(-\frac{\alpha_j\alpha_k}{|\alpha|^4}\frac{e^{-i\alpha.y}}{(2\pi)^{n/2}}\Big) = \frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_k}E(x-y).$$

(D.13) devient :

$$(\text{D.16}) \qquad u_k^j = \frac{\delta_{jk}}{b}\frac{1}{(n-2)S_n}\cdot\frac{1}{|x-y|^{n-2}} + \frac{a}{(a+b)b}\frac{\partial^2E(x-y)}{\partial x_j\partial x_k}.$$

On établit par un calcul direct :

$$(\text{D.17}) \qquad \frac{\partial^2E(x-y)}{\partial x_j\partial x_k} = \frac{-1}{2(n-2)S_n}\Big[\frac{\delta_{jk}}{|x-y|^{n-2}} - (n-2)\frac{(x_k-y_k)(x_j-y_j)}{|x-y|^n}\Big]$$

d'où le résultat.

C.Q.F.D.

Maintenant, on va étudier le comportement à l'infini de ω_k.

Posons : $\qquad (Au)_i = -\partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(u)).$

Du système (D.2) on tire : $\qquad A\omega_k = 0 \qquad$ dans $\qquad \mathbb{R}^n \setminus T.$

L'opérateur A est hypoelliptique (cf [47]) donc ω_k est de classe C^∞ en dehors d'un voisinage de T.

Soit $\theta \in \mathfrak{D}(B_1)$ tel que $\theta = 1$ sur un voisinage de T. On définit :

(D.18) $$\tilde{\omega_k} = (1-\theta)\omega_k \qquad \text{et} \qquad f = A\tilde{\omega_k}$$

alors

(D.19) $$\tilde{\omega_k} \in [C^\infty(\mathbb{R}^n)]^n ; \quad \tilde{\omega_k} = \omega_k \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^n - B_1 \quad \text{et} \quad f \in (\mathfrak{D}(B_1))^n.$$

Comme ω_k est solution de (D.2), alors $\tilde{\omega_k}$ est solution de :

(D.20) $$\begin{cases} \text{Trouver } \tilde{\omega_k} \text{ tel que :} \\ -\partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\tilde{\omega_k})) = f_i & \text{dans } \mathbb{R}^n \\ \tilde{\omega_k} = e_k & \text{à l'infini} \\ |\varepsilon(\tilde{\omega_k})|_{L^2(\mathbb{R}^n)} < +\infty. \end{cases}$$

D'autre part, par convolution des solutions fondamentales dans $\mathbb{R}^n$ (cf Lemme D.3) avec f, on définit ω'_k :

(D.21) $$\omega'_k = e_k + u_k * f$$

soit

(D.22) $$\omega'_k = e_k + \frac{1}{2\lambda\mu S_n(m+1)}\left[\frac{2m+1}{n-2}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}}dy + \int_{\mathbb{R}^n}\frac{(x-y).f(y)}{|x-y|^n}(x-y)dy\right].$$

Comme $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $u \in (L^1_{loc}(\mathbb{R}^n))^{n^2}$ alors $\omega'_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ (cf [9]).
Par définition des solutions fondamentales, on a : $A\omega'_k = f$ dans $\mathbb{R}^n$.
Lorsque $|x|$ tend vers l'infini, à partir de la définition (D.22) de ω'_k, on obtient les estimations suivantes :

(D.23) $$\begin{cases} \omega'_k = e_k + \dfrac{1}{2\lambda\mu S_n(m+1)}\left[\dfrac{2m+1}{n-2}\dfrac{\int_{B_1} f(y)dy}{|x|^{n-2}} + \dfrac{x.\int_{B_1} f(y)dy}{|x|^n}x + O(\dfrac{1}{|x|^{n-1}})\right] \\ \nabla\omega'_k = O(\dfrac{1}{|x|^{n-1}}). \end{cases}$$

Or

$$\int_{B_1} f(y)dy = \int_{B_1} -\partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\tilde{\omega_k}))e_i = -\int_{\partial B_1} a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\tilde{\omega_k})n_j e_i.$$

Par définition (cf D.18) de $\tilde{\omega_k}$ on a :

$$\tilde{\omega_k} = \omega_k \qquad \text{sur un voisinage de } \partial B_1$$

donc

(D.24) $$\int_{B_1} f(y)dy = -\int_{\partial B_1} a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k)n_j e_i = -F_k$$

où on a posé :

(D.25) $$F_k = \int_{\partial T} a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k)n_j e_i.$$

On pose : $r = |x|$ et $x = re_r$, il vient :

$$(\text{D.26}) \qquad \begin{cases} \omega_k' = e_k - \dfrac{1}{2\lambda\mu S_n(m+1)} \dfrac{1}{r^{n-2}} \left[\dfrac{2m+1}{n-2} F_k + (F_k.e_r)e_r \right] + O\left(\dfrac{1}{r^{n-1}}\right) \\ \nabla\omega_k' = O\left(\dfrac{1}{r^{n-1}}\right). \end{cases}$$

On sait que $\nabla\omega_k' \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ et avec les estimations à l'infini on obtient facilement $|\nabla\omega_k'|_{L^2(\mathbb{R}^n)} < +\infty$

donc $$|\varepsilon(\omega_k')|_{L^2(\mathbb{R}^n)} < +\infty$$

par conséquent ω_k' est solution de (D.20).

Or si V est le complété de $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ pour la norme $|\varepsilon(\,.\,)|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ alors

$$\omega_k' - \tilde{\omega_k} \in V.$$

Le système

$$(\text{D.27}) \qquad \begin{cases} \text{Trouver} \quad v \in V \quad \text{tel que} \ : \\ -\partial_j(a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(v)) = 0 \qquad \text{dans } \mathbb{R}^n \end{cases}$$

admet une solution unique $v = 0$.

$\omega_k' - \tilde{\omega_k}$ est solution de (D.27) alors :

$$\omega_k' = \tilde{\omega_k} \qquad \text{dans} \qquad \mathbb{R}^n \setminus B_1.$$

On en déduit les estimations à l'infini de ω_k.

Lemme D.4 :

Soit ω_k la solution unique du système (D.2).

Soit $$F_k = \int_{\partial T} a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k) n_j e_i$$

où n est la normale exterieure à T.
La solution ω_k a le comportement suivant à l'infini :

$$(\textit{D.28}) \qquad \begin{cases} \omega_k = e_k - \dfrac{1}{2\lambda\mu S_n(m+1)} \dfrac{1}{r^{n-2}} \left[\dfrac{2m+1}{n-2} F_k + (F_k.e_r)e_r \right] [1 + o(1)] \\ \nabla\omega_k = O(\dfrac{1}{r^{n-1}}) \\ a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k) n_j e_i = \dfrac{1}{2S_n(m+1)r^{n-1}} \left[2mF_k + \dfrac{nm+m+n-1}{m} (F_k.e_r)e_r \right] + O(\dfrac{1}{r^n}). \end{cases}$$

Démonstration :

Les deux premières estimations à l'infini de (D.28) ont été vérifiée précédemment. Pour achever la démonstration du lemme il reste à voir le comportement à l'infini de $a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k)n_j e_i$.

De (D.22) on tire :

$$\text{(D.29)} \qquad \frac{\partial \omega_k}{\partial x_i} = \frac{1}{2\lambda\mu S_n(m+1)}\Big[-(2m+1)\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}}(x_i-y_i)dy + \int_{\mathbb{R}^n}\frac{(x-y).f(y)}{|x-y|^n}e_i dy +$$

$$+\int_{\mathbb{R}^n} f_i(y)\frac{x-y}{|x-y|^n}dy - n\int_{\mathbb{R}^n}\frac{(x-y).f(y)}{|x-y|^{n+2}}(x_i-y_i)(x-y)dy\Big] \qquad \text{pour } x \in \mathbb{R}^n \setminus B_1.$$

D'où il vient quand $|x|$ tend vers l'infini :

$$\text{(D.30)} \qquad \frac{\partial \omega_k}{\partial x_i} = \frac{1}{2\lambda\mu S_n(m+1)|x|^{n-1}}\Big[(2m+1)\frac{x_k F_k}{|x|} - \frac{x.F_k}{|x|}e_i - \frac{x}{|x|}F_k^i + n\frac{x.F_k}{|x|^3}x_i x\Big] + O\Big(\frac{1}{|x|^n}\Big).$$

Or

$$\frac{\partial \omega_k}{\partial r} = \nabla\omega_k.e_r = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \omega_k}{\partial x_i}\frac{x_i}{|x|}.$$

D'où

$$\frac{\partial \omega_k}{\partial r} = \frac{1}{2\lambda\mu S_n(m+1)}\frac{1}{|x|^n}\Big[(2m+1)F_k + (n-2)\frac{x.F_k}{|x|^2}x\Big] + O\Big(\frac{1}{|x|^n}\Big)$$

$$\frac{\partial \omega_k}{\partial r} = \frac{1}{2\lambda\mu S_n(m+1)}\frac{1}{r^n}\left[(2m+1)F_k + (n-2)(F_k.e_r)e_r\right] + O\Big(\frac{1}{r^n}\Big)$$

et enfin :

$$\text{(D.31)} \qquad a_{ijlh}\varepsilon_{lh}(\omega_k)n_j e_i = \frac{1}{2S_n(m+1)r^{n-1}}\left[2mF_k + \frac{nm+m+n-1}{m}(F_k.e_r)e_r\right] + O(\frac{1}{r^n}).$$

C.Q.F.D.

Annexe E

Dans cette annexe, nous allons démontrer les lemmes II.4.3 et III.3.4 nommés ici respectivement lemme E.2 et lemme E.4.

Soit $P =]-1,1[^n$ $n \geq 2$, un pavé de $\mathbb{R}^n$ et $P_\varepsilon = \varepsilon P =]-\varepsilon,\varepsilon[^n$ l'homothétique de P de rapport ε (ε réel > 0). On recouvre $\mathbb{R}^n$ de pavés P_ν^ε semblables à une translation près à P_ε.

Soit Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^n$ de frontière C^1 par morceaux.

Première partie

On suppose que Ω contient un nombre entier de périodes $(P_\nu^\varepsilon)_{1\leq\nu\leq n(\varepsilon)}$ avec $n(\varepsilon) = \dfrac{|\Omega|}{(2\varepsilon)^n}$.

Lemme E.1 : *Soit $g \in L^2(P)$ tel que $\dfrac{1}{|P|}\displaystyle\int_P g = 0$. On prolonge g à $\mathbb{R}^n$ par périodicité de période P.*

On pose :

(*E.1*) $$g_\varepsilon(x) = g(\frac{x}{\varepsilon}).$$

Alors :

(*E.2*) $$\|g_\varepsilon\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq c\varepsilon\,|\Omega|^{1/2}$$

où c est une constante positive indépendante de ε et de Ω.

Démonstration :

Ce lemme est vérifié pour g une distribution de $H^{-1}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ périodique et de moyenne nulle (voir pour cela [31]). Le cas où $g \in L^2(P)$ périodique et de moyenne nulle est démontré dans [30].

Lemme E.2 : *Soit δ_ν^ε la masse unité portée par la sphère de rayon ε, centrée au centre de P_ν^ε.*

Pour $n \geq 2$, on a :

(*E.3*) $$\|\sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} \varepsilon\delta_\nu^\varepsilon - \frac{S_n}{2^n}\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq c\varepsilon\,|\Omega|^{1/2}$$

(*E.4*) $$\|\sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} \varepsilon\delta_\nu^\varepsilon(e_k.e_r^\nu)e_r^\nu - \frac{S_n}{n2^n}e_k\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq c\varepsilon\,|\Omega|^{1/2}$$

où e_r^ν est le vecteur unitaire radial dans le pavé P_ν^ε et c une constante indépendante de ε et de Ω.

Démonstration : Pour l'inégalité (E.3) voir [30] .

Pour établir (E.4) , on reprend la démonstration de la convergence de la suite $\sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} \varepsilon \delta_\nu^\varepsilon (e_k.e_r^\nu) e_r^\nu$ dans $[H^{-1}(\Omega)]^n$ fort, faite par Allaire [2] , et on utilise le lemme E.1.

On introduit la fonction auxilliaire t^ε définie sur chaque pavé P_ν^ε par :

$$t^\varepsilon = \frac{1}{2} x_k r e_r^\nu \qquad \text{dans} \quad B_\nu^\varepsilon \qquad \text{où} \quad B_\nu^\varepsilon \text{ est la boule de rayon } \varepsilon \text{ centrée au centre de } P_\nu^\varepsilon.$$

On a alors :

$$\begin{cases} -\Delta t^\varepsilon = -e_k & \text{dans} \quad B_\nu^\varepsilon \\ \dfrac{\partial t^\varepsilon}{\partial n} = \varepsilon (e_k.e_r^\nu) e_r^\nu & \text{sur} \quad \partial B_\nu^\varepsilon \\ t^\varepsilon = 0 & \text{au centre de} \quad B_\nu^\varepsilon. \end{cases}$$

D'autre part, on introduit s^ε définie sur chaque pavé P_ν^ε par :

$$s^\varepsilon = \frac{r^2(3\varepsilon - 2r)}{2\varepsilon} (e_k.e_r^\nu) e_r^\nu \qquad \text{dans} \quad B_\nu^\varepsilon.$$

On a alors :

$$\begin{cases} \Delta s^\varepsilon = (3 - \dfrac{2r}{\varepsilon}) e_k - (n+3) \dfrac{r}{\varepsilon} (e_k.e_r^\nu) e_r^\nu & \text{dans} \quad B_\nu^\varepsilon \\ \dfrac{\partial s^\varepsilon}{\partial n} = 0 & \text{sur} \quad \partial B_\nu^\varepsilon \\ s^\varepsilon = t^\varepsilon & \text{sur} \quad B_\nu^\varepsilon \end{cases} \qquad \text{et} \quad |\Delta s^\varepsilon|_{L^\infty(B_\nu^\varepsilon)} \leq (n+6).$$

On définit $r^\varepsilon \in [H^1_{loc}(\mathbb{R}^n)]^n$ par :

$$\begin{cases} r^\varepsilon = t^\varepsilon - s^\varepsilon & \text{dans } B_\nu^\varepsilon \\ r^\varepsilon = 0 & \text{dans } P_\nu^\varepsilon \setminus B_\nu^\varepsilon. \end{cases}$$

On a :

$$r^\varepsilon = x_k r (\frac{r}{\varepsilon} - 1) e_r^\nu \qquad \text{dans } B_\nu^\varepsilon \qquad \text{et} \qquad |\nabla r^\varepsilon|_{L^\infty(\Omega)} \leq 5\varepsilon.$$

Si χ_B^ε désigne la fonction caractéristique des boules B_ν^ε, on a :

$$-\Delta r^\varepsilon = -\chi_B^\varepsilon e_k + \chi_B^\varepsilon \Delta s^\varepsilon + \sum_\nu \varepsilon \delta_\nu^\varepsilon (e_k.e_r^\nu) e_r^\nu \qquad \text{dans } \mathbb{R}^n$$

par suite :

$$\| \sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} \varepsilon \delta_\nu^\varepsilon (e_k.e_r^\nu) e_r^\nu - \frac{S_n}{n2^n} e_k \|_{H^{-1}(\Omega)} = \| -\Delta r^\varepsilon - \chi_B^\varepsilon \Delta s^\varepsilon + (\chi_B^\varepsilon - \frac{S_n}{n2^n}) e_k \|_{H^{-1}(\Omega)}$$

$$\leq \| \Delta r^\varepsilon \|_{H^{-1}(\Omega)} + \| \chi_B^\varepsilon \Delta s^\varepsilon \|_{H^{-1}(\Omega)} + \| (\chi_B^\varepsilon - \frac{S_n}{n2^n}) e_k \|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

L'opérateur Δ est un isomorphisme de $H_0^1(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$

$$\| \Delta r^\varepsilon \|_{H^{-1}(\Omega)} \simeq |r^\varepsilon|_{H_0^1(\Omega)} = |\nabla r^\varepsilon|_{L^2(\Omega)} = \Big(\int_\Omega |\nabla r^\varepsilon|^2 \Big)^{1/2} \leq |\nabla r^\varepsilon|_{L^\infty(\Omega)} \Big(\int_\Omega \Big)^{1/2} \leq 5\varepsilon |\Omega|^{1/2}.$$

D'autre part $$\|\chi_B^\varepsilon - \frac{S_n}{n2^n}\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq c\varepsilon\,|\Omega|^{1/2}$$

en effet, le lemme E.1 s'applique avec $g = \chi_B - \frac{S_n}{n2^n} = \chi_B - \frac{1}{|P|}\int_P \chi_B$
où χ_B est la fonction caractéristique de la boule unité.

Enfin $$\|\chi_B^\varepsilon \Delta s^\varepsilon\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq c\varepsilon\,|\Omega|^{1/2}$$

grâce au lemme E.1 avec $g(x) = \big((3-2r)e_k - (n+3)r(e_k.e_r)e_r\big)\chi_B$.

C.Q.F.D.

Deuxième partie

Soit H l'hyperplan de $\mathbb{R}^n$ d'équation $x_n = 0$ qu'on suppose d'intersection non vide avec Ω.

(E.5) $$H = \{\, x \in \mathbb{R}^n \;/\; x_n = 0 \,\}.$$

On définit H'_ε et H_ε par :

$$H'_\varepsilon = \{\, x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \text{tel que } x' \in H \text{ et } |x_n| < \varepsilon \,\}$$

$$H_\varepsilon = H'_\varepsilon \cap \Omega = \{\, x = (x', x_n) \in \Omega \quad \text{tel que } x' \in H \text{ et } |x_n| < \varepsilon \,\}.$$

L'ouvert H_ε est recouvert des pavés P_ν^ε de $\mathbb{R}^n$. On suppose qu'il en contient un nombre entier de périodes $(P_\nu^\varepsilon)_{1\leq\nu\leq n(\varepsilon)}$ avec $n(\varepsilon) = \frac{|\Omega \cap H|}{(2\varepsilon)^{n-1}}$ et que les centres des pavés P_ν^ε sont répartis périodiquement dans l'hyperplan H.

Lemme E.3 :

Soit $$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x_n \geq \varepsilon \\ \dfrac{\varepsilon + x_n}{2\varepsilon} & si \quad -\varepsilon < x_n < \varepsilon \\ 0 & si \quad x_n \leq -\varepsilon \end{cases} \qquad et \qquad Y(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x_n > 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

alors on a :

i) $\dfrac{1}{2\varepsilon}\chi_{H'_\varepsilon} = \dfrac{dg_\varepsilon}{dx_n}$ *dans* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

ii) $g_\varepsilon \longrightarrow Y$ *dans* $L^2(\Omega)$ *fort* *et* $|g_\varepsilon - Y|_{L^2(\Omega)} \leq c\varepsilon^{1/2}$

iii) $\dfrac{dY}{dx_n} = \delta_H$ *dans* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

De la continuité de la dérivation de $L^2(\Omega)$ *dans* $H^{-1}(\Omega)$, *on déduit que :*

(*E.6*) $$\|\frac{\chi_{H'_\varepsilon}}{2\varepsilon} - \delta_H\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq c\varepsilon^{1/2}$$

où c désigne une constante indépendante de ε.

Démonstration :

i) Soit $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$

$$< \frac{dg_\varepsilon}{dx_n}, \varphi >_{\mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n),\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)} = - < g_\varepsilon, \frac{d\varphi}{dx_n} > = - \int_{\mathbb{R}^n} g_\varepsilon(x) \frac{d\varphi}{dx_n}$$

$$= - \int_{\mathbb{R}^n \cap [x_n \geq \varepsilon]} g_\varepsilon(x) \frac{d\varphi}{dx_n} - \int_{\mathbb{R}^n \cap [-\varepsilon < x_n < \varepsilon]} g_\varepsilon(x) \frac{d\varphi}{dx_n} - \int_{\mathbb{R}^n \cap [x_n \leq -\varepsilon]} g_\varepsilon(x) \frac{d\varphi}{dx_n}$$

$$= - \int_{\mathbb{R}^n \cap [x_n \geq \varepsilon]} \frac{d\varphi}{dx_n} - \int_{\mathbb{R}^n \cap [-\varepsilon < x_n < \varepsilon]} \frac{\varepsilon + x_n}{2\varepsilon} \frac{d\varphi}{dx_n}.$$

On a :

$$\int_{\mathbb{R}^n \cap [x_n \geq \varepsilon]} \frac{d\varphi}{dx_n} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big(\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{d\varphi}{dx_n} \Big) dx' = - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi(x', \varepsilon) dx'$$

$$\int_{\mathbb{R}^n \cap [-\varepsilon < x_n < \varepsilon]} \frac{\varepsilon + x_n}{2\varepsilon} \frac{d\varphi}{dx_n} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\varepsilon + x_n}{2\varepsilon} \frac{d\varphi}{dx_n} \Big) dx'$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big(\frac{\varepsilon + x_n}{2\varepsilon} \varphi \Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \Big) dx' - \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^n \cap [-\varepsilon < x_n < \varepsilon]} \varphi(x) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi(x', \varepsilon) dx' - \frac{1}{2\varepsilon} \int_{H'_\varepsilon} \varphi(x) dx$$

alors

$$< \frac{dg_\varepsilon}{dx_n}, \varphi >_{\mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n),\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)} = < \frac{1}{2\varepsilon} \chi_{H'_\varepsilon}, \varphi >_{\mathfrak{D}',\mathfrak{D}} \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n) \qquad \text{d'où } i).$$

ii)

$$|g_\varepsilon - Y|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |g_\varepsilon - Y|^2 dx = \int_{\Omega \cap [x_n \geq \varepsilon]} |g_\varepsilon - Y|^2 + \int_{H_\varepsilon} |g_\varepsilon - Y|^2 + \int_{\Omega \cap [x_n \leq -\varepsilon]} |g_\varepsilon - Y|^2$$

$$= \int_{\Omega \cap [x_n \geq \varepsilon]} |1 - 1|^2 + \int_{(\Omega \cap H) \times]-\varepsilon, \varepsilon[} |g_\varepsilon - Y|^2 + \int_{\Omega \cap [x_n \leq -\varepsilon]} |0 - 0|^2$$

$$= \int_{\Omega \cap H} dx' \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |g_\varepsilon - Y|^2 dx_n$$

$$= |\Omega \cap H| \Big(\int_{-\varepsilon}^{0} |\frac{\varepsilon + x_n}{2\varepsilon}|^2 dx_n + \int_0^{\varepsilon} \Big(\frac{\varepsilon + x_n}{2\varepsilon} - 1 \Big)^2 dx_n \Big).$$

Un calcul simple donne : $\displaystyle\int_{-\varepsilon}^{0} |\frac{\varepsilon + x_n}{2\varepsilon}|^2 dx_n = \frac{\varepsilon}{12}$ et $\displaystyle\int_0^{\varepsilon} \Big(\frac{\varepsilon + x_n}{2\varepsilon} - 1 \Big)^2 dx_n = \frac{7}{12}\varepsilon$

d'où $|g_\varepsilon - Y|^2_{L^2(\Omega)} = \frac{2}{3}\varepsilon |\Omega \cap H|$ ce qui démontre *ii)*.

iii) Soit $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$

$$< \frac{dY}{dx_n}, \varphi >_{\mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n),\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)} = - < Y, \frac{d\varphi}{dx_n} > = - \int_{\mathbb{R}^n} Y(x) \frac{d\varphi}{dx_n} = - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big(\int_0^{+\infty} \frac{d\varphi}{dx_n} dx_n \Big) dx'$$

$$= - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi(x', x_n) \Big|_0^{+\infty} dx' = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi(x', 0)\, dx' = < \delta_H, \varphi > .$$

C.Q.F.D.

Lemme E.4 : *Soit δ_ν^ε la masse unité portée par la sphère de rayon ε, centrée au centre de P_ν^ε.*

Pour $n \geq 2$, on a :

$$(E.7) \qquad \| \sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} \delta_\nu^\varepsilon - \frac{S_n}{2^{n-1}} \delta_H \|_{H^{-1}(\Omega)} \leq c\varepsilon^{1/2}$$

$$(E.8) \qquad \| \sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} \delta_\nu^\varepsilon (e_k . e_r^\nu) e_r^\nu - \frac{S_n}{n2^{n-1}} e_k \delta_H \|_{H^{-1}(\Omega)} \leq c\varepsilon^{1/2}$$

où e_r^ν est le vecteur unitaire radial dans le pavé P_ν^ε, c une constante indépendante de ε et δ_H la masse unitée portée par l'hyperplan H.

Démonstration : On applique le lemme E.2 dans H_ε, on obtient :

$$\| \sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} \varepsilon \delta_\nu^\varepsilon - \frac{S_n}{2^n} \|_{H^{-1}(H_\varepsilon)} \leq c\varepsilon |H_\varepsilon|^{1/2}$$

$$\| \sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} \varepsilon \delta_\nu^\varepsilon (e_k . e_r^\nu) e_r^\nu - \frac{S_n}{n2^n} e_k \|_{H^{-1}(H_\varepsilon)} \leq c\varepsilon |H_\varepsilon|^{1/2}.$$

Comme $|H_\varepsilon| = 2\varepsilon \times |\Omega \cap H|$ et $\sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} \delta_\nu^\varepsilon = 0$ dans $\Omega \setminus H'_\varepsilon$,

les inégalités ci dessus deviennent :

$$\| \sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} \delta_\nu^\varepsilon - \frac{S_n}{2^n} \frac{\chi_{H'_\varepsilon}}{\varepsilon} \|_{H^{-1}(\Omega)} \leq c\varepsilon^{1/2}$$

$$\| \sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} \delta_\nu^\varepsilon (e_k . e_r^\nu) e_r^\nu - \frac{S_n}{n2^n} e_k \frac{\chi_{H'_\varepsilon}}{\varepsilon} \|_{H^{-1}(\Omega)} \leq c\varepsilon^{1/2}.$$

Pour obtenir (E.7) et (E.8) il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned} \| \sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} \delta_\nu^\varepsilon - \frac{S_n}{2^{n-1}} \delta_H \|_{H^{-1}(\Omega)} &\leq \| \sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} \delta_\nu^\varepsilon - \frac{S_n}{2^n} \frac{\chi_{H'_\varepsilon}}{\varepsilon} \|_{H^{-1}(\Omega)} + \| \frac{S_n}{2^{n-1}} \Big(\frac{\chi_{H'_\varepsilon}}{2\varepsilon} - \delta_H \Big) \|_{H^{-1}(\Omega)} \\ &\leq \quad c\varepsilon^{1/2} \quad + \frac{S_n}{2^{n-1}} \| \frac{\chi_{H'_\varepsilon}}{2\varepsilon} - \delta_H \|_{H^{-1}(\Omega)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \| \sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} \delta_\nu^\varepsilon (e_k . e_r^\nu) e_r^\nu - \frac{S_n}{n2^{n-1}} e_k \delta_H \|_{H^{-1}(\Omega)} &\leq \| \sum_{\nu=1}^{n(\varepsilon)} \delta_\nu^\varepsilon (e_k . e_r^\nu) e_r^\nu - \frac{S_n}{n2^n} e_k \frac{\chi_{H'_\varepsilon}}{\varepsilon} \|_{H^{-1}(\Omega)} + \\ &\quad + \| \frac{S_n}{n2^{n-1}} e_k \Big(\frac{\chi_{H'_\varepsilon}}{2\varepsilon} - \delta_H \Big) \|_{H^{-1}(\Omega)} \\ &\leq \quad c\varepsilon^{1/2} \quad + \| \frac{S_n}{n2^{n-1}} e_k \Big(\frac{\chi_{H'_\varepsilon}}{2\varepsilon} - \delta_H \Big) \|_{H^{-1}(\Omega)} \end{aligned}$$

et d'utiliser l'inégalité (E.6).

C.Q.F.D.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES :

[1] G. Allaire : Homogenization and Two-Scale Convergence. Siam J. Math. Anal Vol.23, No.6, pp.1482-1518, November 1992.

[2] G. Allaire : Homogénéisation des équations de Stokes et de Navier-Stokes. Thèse de Doctorat de l'université Paris VI 1989

[3] G. Allaire : Homogenization of the Navier-StoKes Equations in Open Sets Perforated with Tiny Holes. Arch. Rational Mech. Anal. 113 (1991). (I) pp 209-259 (II) pp 261-298.

[4] G. Allaire : Homogenization of the Navier-StoKes Equations with a Slip Boundary condition. Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol XLIV, 605-641 (1991).

[5] I. Babuška : Homogenization and its Application. Mathematical and Computational problems, in Numerical solution of partial differential equations - III, SYNSPADE 1975, B Hubbard, Ed. Academic, New York, 1976, pp 89 - 116.

[6] A. Bensoussan - J.L. Lions - G. Papanicolaou : *Asymptotic Analysis for periodic structures. North Holland 1978.* 2^d *edition 1981.*

[7] J.F. Bourgat : Numerical experiments of the homogenization method for operators with periodic coefficients. Rapport de recherche no 277 janvier 1978 IRIA Laboria.

[8] J.F. Bourgat - A. Dervieux : Méthode d'homogénéisation des opérateurs à coefficients périodiques : étude des correcteurs provenant du développement asymptotique. Rapport de recherche no 278 février 1978 IRIA Laboria.

[9] H. Brezis : *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications. Masson 1987* .

[10] A. Brillard : Homogénéisation par épi-convergence de quelques problèmes de la mécanique des milieux continus. Montpellier 2. Thèse 1990.

[11] D. Cioranescu, P. Donato, F. Murat & E. Zuazua : Homogenization and corrector for the wave equation in domains with small holes. Publications du laboratoire d'analyse numérique. Université Pierre et Marie Curie CNRS. R 90032 Octobre 1990.

[12] D. Cioranescu - F. Murat : Un terme étrange venu d'ailleurs. Nonlinear partial differential equations and their applications. Collège de France Seminar volume II 98-138. H.Brezis - J.L.Lions (Editors) . Research Notes in Mathematic 60. Pitman London 1982.

[13] D. Cioranescu - J. Saint Jean Paulin : Homogenization in Open Sets with Holes . Journal of Mathematical Analysis and Applications 71, 590-607 (1979).

[14] D. Cioranescu - J. Saint Jean Paulin : Reinforced and Honey Comb Structures. J. Math. pures et appl. 65, 1986, p.403 à 422.

[15] D. Cioranescu - J. Saint Jean Paulin : Asymptotic analysis of elastic wireworks. Publication du Laboratoire d'Analyse numérique R 89008 mai 1989.

[16] D. Cioranescu - J. Saint Jean Paulin : Towers and Cranes in Linearized elasticity : an asymptotic study. Rapport interne de l'université de Metz no 02 / 89.

[17] D. Cioranescu - J. Saint Jean Paulin : Problèmes de Neumann et de Dirichlet dans des structures réticulées de faible épaisseur. C. R. Acad. Sc. Paris, t.303, Série I, no 1, 1986 p 7 - 10.

[18] D. Cioranescu - J. Saint Jean Paulin : Particules déformables en suspension dans un fluide visqueux. E.D.F. Bulletin de la direction des études et recherches, série C, Mathématiques, informatique No1, 1991, pp53-76.

[19] C. Conca : Etude d'un fluide traversant une paroi perforée (I) et (II). J. Math. pures et appl., 66, (I) pp. 1-43, (II) pp. 45-70 (1987).

[20] C. Conca - P. Donato : Non homogeneous Neumann Problems in Domains with small Holes. M^2AN vol. 22, no 4, 1988, p 561 à 607.

[21] R. Dautray - J. L. Lions : *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques. Méthodes variationnelles.* Tome 4. Masson. Paris 1987.

[22] R. Dautray - J. L. Lions : *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques. Méthodes intégrales et numériques.* Tome 6. Masson. Paris 1987.

[23] R. Dautray - J. L. Lions : *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques. Evolution : Fourier, Laplace.* Tome 7. Masson. Paris 1987.

[24] R. Dautray - J. L. Lions : *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques. Evolution : semi-groupe, variationnel.* Tome 8. Masson. Paris 1987.

[25] G. Duvaut - J.L. Lions : *Les inéquations en mécanique et en physique.* Dunod 1972.

[26] Eberhard Zeidler : *Nonlinear functional Analysis and its Applications II/A. Linear Monotone Operators.* Springer - Verlag 1980.

[27] F. Fleury : Application de la méthode d'homogénéisation à des problèmes de mélange fluide solide. Thèse 1981. Université de Rouen.

[28] G. Francfort, D. Leguillon et P. Suquet : Homogénéisation de milieux viscoélastiques linéaires de Kelvi-Voigt. C. R. Acad. Sc. Paris, t.296 (7 février 1983), Série I, 287- 290.

[29] Goldstein : *Semi-groups of linear operators and applications.* Oxford Mathematical Monographs.

[30] H. Kacimi : Homogénéisation de problèmes de Dirichlet avec de petits trous. Thèse de 3^{eme} cycle. Paris VI 1987.

[31] H. Kacimi - F. Murat : Estimation de l'erreur dans des problèmes de Dirichlet ou apparait un terme étrange. Partial Differentiel Equations and the Calculus of Variations : Essays in Honor of Ennio De Giorgi, ed by F. Colombini, A. Marino, L. Modica & S. Spagnolo, Birkhäuser, Boston, pp. 661-696 (1989).

[32] T. Kato : *Perturbation theory for linear operators.* Berlin Heidelberg New York Springer 1966.

[33] J.L. Lions : *Some Methods in the Mathematical Analysis of Systems and their control. Science Press, Beijing, China 1981. Gordon and Breach, Science Publishers, Inc New YorK.*

[34] J.L. Lions - E. Magenes : *Problèmes aux limites non homogènes et applications.* Volume 1 . Dunod Paris 1968.

[35] M. Lobo - E. Perez : Asymptotic behaviour of elastic body with a surface having small stuck régions. M^2AN vol.22 . n° 4 1988. p 609 - 624.

[36] J. Mandel : *Cours de mécanique des milieux continus.* Paris Gauthier Villars 1966 Tome 1 et 2.

[37] F. Murat : H-convergence. Séminaire d'Analyse Fonctionnelle et Numérique de l'université d'Alger. Mimeographed notes (1978).

[38] G. Nguetseng : A general convergence result for a fonctional related to the theory of homogenization. SIAM J. Math. Anal. Vol 20, No 3, pp. 608 - 623, May 1989.

[39] P.A. Raviart - J.M. Thomas : *Introduction à l'Analyse numérique des équations aux dérivées partielles.* Masson 1988.

[40] J. Sanchez-Hubert : Etude de certaines équations intégrodifférentielles issues de la théorie de l'homogénéisation. Bolletino U.M.I (5) 16-B (1979), 857-875.

[41] J. Sanchez-Hubert : Asymptotic study of the macroscopic behaviour of a solid - fluid mixture. Math. Meth in the Appl. Sci.2 (1980) 1-11.

[42] E. Sanchez-Palencia : *Non-homogeneous Media and Vibration Theory.* Lecture Notes in Physics 127. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg New York 1980.

[43] E. Sanchez-Palencia : On the asymptotics of the fluid flow past an Array of fixed obstacles. Int. J. Engng Sci. Vol.20, No 12, 1291-1301, 1982.

[44] E. Sanchez-Palencia : Boundary value problems in domains containing perforated walls. Nonlinear Partial Equations and their Applications, Collège de France Seminar, Vol.3, ed. by H.Brézis & J.L. Lions, Research notes in mathematics 70, pp.309-325, Pitman, London (1982).

[45] E. Sanchez-Palencia : Methode d'Homogénéisation pour l'étude de Matériaux hétérogènes. Phénomènes de mémoire. Rend. SEM. MAT. Unives. Politecn. Torino. Vol 36 (1977-78).

[46] L. Tartar : Quelques remarques sur l'homogénéisation. Functional Analysis and Numerical Analysis. Japan-France Seminar, ToKyo and Kyoto, 1976 : H. Fujita (Ed) : Japan Society for the Promotion of Science, 1978.

[47] Vo.Khac khoan : *Distributions. Analyse de Fourier. Opérateurs aux dérivées partielles.* Vuibert. Tome 1 et 2.

VERS UNE JUSTIFICATION DE L'HOMOGÉNÉISATION DISCRÈTE DE VERNA

PLAN

INTRODUCTION 1

PREMIÈRE PARTIE : HOMOGÉNÉISATIONS DISCRÈTE ET CONTINUE : COMPARAISON SUR UN EXEMPLE SIMPLE

NOTATIONS 3

INTRODUCTION 4

I. UN EXEMPLE SIMPLE 5

I.1. Présentation de la structure 5

I.2. Approche continue et méthode des échelles multiples 6

I.3. Approche discrète et méthode de Verna 7

I.4. Coincidence entre les deux formalismes et les résultats 11

II. COMPARAISON DU PROBLÈME DISCRET ET DU PROBLÈME HOMOGÉNÉISÉ . . . 12

II.1. Existence et unicité d'une solution du problème discret 12

II.2. Existence et unicité d'une solution du problème homogénéisé 14

II.3. Comparaison des deux solutions 15

A - Etude d'un problème approché par la méthode de Galerkin 15

B - Convergence du problème continu vers le problème homogénéisé 20

C - Convergence du problème discret vers le problème homogénéisé 22

II.4. Analyse numérique 23

DEUXIÈME PARTIE : HOMOGÉNÉISATION DISCRÈTE : EXEMPLE SIMPLE D'UN TREILLIS BIDIMENSIONNEL

NOTATIONS 42

INTRODUCTION 43

I. UN PROBLEME D'ELASTICITE D'UN TREILLIS BIDIMENSIONNEL 44

I.1. Présentation géomètrique 44

I.2. Présentation mécanique 45

I.3. Problème aux différences discrètes 46

I.4. Ecriture d'un problème d'homogénéisation : méthode de Verna 47

I.5. Comparaison du problème discret et du problème homogénéisé 48

A - Etude d'un problème continu 49

B - Approximation par éléments finis $\mathcal{P}_1$ 52

C - Remarques et comparaison 54

II. UN PROBLEME DE THERMIQUE D'UN TREILLIS BIDIMENSIONNEL 56

II.1. Formulation du problème 56

II.2. Approximation par la méthode de Galerkin 57

II.3. Homogénéisation discrète : méthode de Verna 59

II.4. Convergence vers le problème homogénéisé 61

CONCLUSION 63

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES. 64

INTRODUCTION

L'étude des structures répétitives à barres est d'une grande importance vue son vaste champs d'application [26]. En génie civile, par exemple, on distingue les structures supportants les stades, les gares, les grandes surfaces, les ponts, les grues de chantier. Pour l'irrigation, on trouve des structures strictement périodiques, mobiles sur roues, qui portent des tuyaux pour arroser les cultures par voie supérieure. Certains ouvrages de radio-astronomie en télécommunications sont aussi concernés. Aussi, les pylones éléctriques pour la production et l'exploitation de l'énérgie, sans oublier le rôle de ces structures dans la construction aéronautique et aérospatiale.

Elles offrent un exellent compromis entre leur capacité portante, leur poids et leur prix, par opposition à des poutres de section pleine.

De nombreux mécaniciens (voir [9] [13] [14] [15] [16] [18] [20] [21] [22] [24] [26]) ont développé différentes méthodes pour le calcul des structures périodiques et pour l'obtention des continua équivalents. Pour une classification de ces méthodes voir [26].

Les mathématiciens (voir par exemple [3] [4] [5] [6] [7]) étudient la structure du point de vue de la mécanique des milieux continus en tenant compte des paramètres caractérisant la taille de la structure et sa périodicité. Puis, ils passent à la limite sur ces paramètres pour trouver le milieu homogène équivalent.

L'interêt d'un modèle continu équivalent est tout d'abord scientifique car les modèles continus en général offrent une représentation quasi-analytique du comportement global d'une structure répétitive. Ils permettent une compréhension plus fine des phénomènes en jeu.

L'interêt d'un tel modèle est aussi numérique car la méthode des éléments finis, par laquelle, on analyse de telles structures, coûte d'autant plus cher en temps de calcul et en espace mémoire, que la structure répétitive comporte plus de cellules. De plus une perte de précision apparaît lorsque le nombre d'inconnues augmente.

Enfin, l'interêt est aussi économique puisque les modèles continus offrent un gain de temps lors des études de Conception.

P. Verna [26] a développé une méthode formelle permettant de trouver le problème homogénéisé pour des structures en treillis étudiées de manière discrète.

Cette analyse discrète des structures consiste à écrire les équations d'équilibre aux noeuds de la structure et à supposer que les tensions dans les barres sont proportionnelles au déplacement des noeuds. On obtient ainsi en tenant compte des conditions limites un système linéaire.

Verna prend les équations en partie courante de la structure (c'est à dire les équations vérifiées par les points intérieurs à la structure), suppose une régularité des tensions et des déplacements et cherche alors ces grandeurs sous forme de développements asymptotiques par rapport au petit paramètre ε caractérisant la périodicité du milieu de façon à ce que les équations en partie courante soient vérifiées pour tout point. La périodicité du milieu est prise en compte grâce à une notation judicieuse des noeuds. Il obtient ainsi le problème homogénéisé en identifiant suivant les puissances de ε.

Le but de ce travail est de justifier sur quelques exemples et dans un sens à préciser, la convergence du problème non homogénéisé vers le problème homogénéisé trouvé par la méthode formelle de Verna.
Une première partie étudie l'exemple simple d'une structure formée d'une succession de barres, sollicitées en traction pure, de longueurs consécutives l^1 et l^2, de sections respectives A^1 et A^2.
Une deuxième partie étudie les déplacements dans un treillis bidimensionnel puis analyse la même structure du point de vue thermique.

PREMIÉRE PARTIE :

HOMOGÉNÉISATION DISCRÉTE ET CONTINUE : COMPARAISON SUR UN EXEMPLE SIMPLE

NOTATIONS

$2n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) : nombre de noeuds total de la structure

L : longueur de la structure et de la cellule de référence

$Y =]0, L[$: la période

ε : petit paramètre pour l'homogénéisation

j : j est pris dans l'ensemble $\{1, 2\}$. Il numérote les noeuds et les barres de la cellule élémentaire

L_j : longueur de la barre j dans la cellule de référence

l_j : longueur de la barre j dans la cellule courante, soit $l_j = \varepsilon L_j$

E : module de Young du matériau

A_j : section de la barre j

$K^j = \dfrac{EA_j}{L_j}$: raideurs de traction dans la cellule de référence

x_M : abscisse du noeud M

${}^{\alpha}u^j(x_M)$: valeur prise à l'abscisse du noeud M par la fonction déplacement des noeuds de la famille j

${}^{\alpha}f^j(x_{ref_j})$: fonction tension dans les barres de la famille j, x_{ref_j} étant le point de référence de l'effort pour la famille de barres considérées.

INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous allons homogénéiser une structure formée d'une succession de barres, sollicitées en traction pure, de longueurs consécutives l^1 et l^2, de sections respectives A^1 et A^2.

Dans le paragraphe I.1, nous présentons la structure. Dans le paragraphe I.2, nous donnons un modèle continu décrivant les déplacements dans la structure, puis le problème homogénéisé est recherché par la méthode des échelles multiples (voir [1], [17], [26]).

Dans le paragraphe I.3, on donne un modèle discret décrivant les déplacements dans la structure puis le problème homogénéisé est recherché par la méthode développée par Verna (voir [26]).

Une analogie entre la méthode des échelles multiples et celle développée par Verna est faite dans le paragraphe I.4.

Cette partie I constitue l'Appendix F dans la thèse de Verna [26] que nous rapportons ici.

Dans la deuxième partie, nous essayons de trouver le lien existant entre la solution du problème discret et le problème homogénéisé. Une approximation par éléments finis P1 du problème continu nous donne le même système du problème discret. Comme les problèmes limites obtenus par les deux méthodes coïncident, la méthode de l'énérgie [19] nous permet de conclure.

Enfin, quelques tests numériques d'interêt pédagogique sont donnés.

Plan de travail

	Méthode de Verna	Démarche suivie dans ce travail
Modèle continu	—	Etape 1 : Formulation variationnelle d'un problème
Modèle discret	Etape 1 : Ecriture des conditions mécaniques aux noeuds	Etape 2 : Discrètisation par éléments finis P_1 du modèle continu
Modèle continu	Etape 2 : " Relèvement " continu obtenu à partir du modèle continu.	—
Homogénéisation	Etape 3 : Développement asymtotique à partir du relèvement continu.	Etape 3 : Méthode de l'énérgie à partir de la formulation variationnelle.

I. UN EXEMPLE SIMPLE

I.1 . Présentation de la structure :

La structure étudiée est celle décrite par la figure ci dessous :

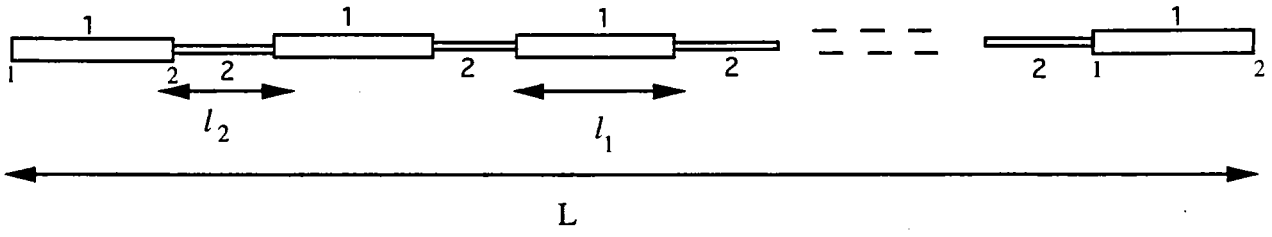


figure 1 : la structure

Elle est composée d'une succession de barres de longueurs consécutives l_1 et l_2 de section respectives A_1 et A_2.

Les barres sont numérotées dans l'ensemble $\{1,2\}$ comme indiqué dans la figure 1.
Les extrémités de chaque barre, appelés noeuds de la structure, sont aussi numérotés dans l'ensemble $\{1,2\}$.

Le nombre de noeuds de la structure est de $2n$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

Les barres 1 et 2 sont homothétiques de rapport ε à des barres de longueurs L_1 et L_2, de sections A_1 et A_2 respectivement (ε est un petit paramètre strictement positif destiné à tendre vers zéro).

La longueur totale de la structure est $L = L_1 + L_2$.

On a les relations suivantes :

$$l_1 = \varepsilon L_1$$
$$l_2 = \varepsilon L_2$$
$$(n-1).\varepsilon.(L_1 + L_2) + \varepsilon L_1 = L = L_1 + L_2.$$

On appellera cellule de base la portion de structure décrite par la figure ci-dessous :

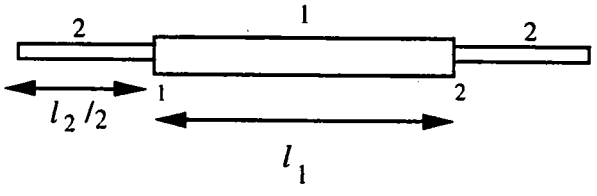


figure 2 : Barre unidimensionnelle composite : cellule de base

Le matériau est de module de Young E.

On suppose que les barres sont en traction pure et que les extrémités de la structure sont soumises à des déplacements.

I.2 . Approche continue et méthode des échelles multiples :

L'équilibre statique linéaire de la structure, décrite en I.1, s'écrit :

$$(1) \qquad \begin{cases} -\frac{d}{dx}\Big(EA(\frac{x}{\varepsilon})\frac{du_\varepsilon}{dx}\Big) = 0 \qquad 0 < x < L \\ u_\varepsilon(0) = \alpha\,; \quad u_\varepsilon(L) = \beta \end{cases}$$

$$(2) \qquad A(\frac{x}{\varepsilon}) = \begin{cases} A_1 & \text{sur les barres 1} \\ A_2 & \text{sur les barres 2} \end{cases}$$

On a une E.D.P à coefficients oscillants. Nous allons chercher le déplacement longitudinal u_ε sous forme du développement asymptotique suivant : (cf [1], [17], [25])

$$(3) \qquad u_\varepsilon(x) = u_0(x,y) + \varepsilon u_1(x,y) + \ldots + \varepsilon^k u_k(x,y) + \ldots$$

où

$$(4) \qquad y = \frac{x}{\varepsilon}$$

et où

$$(5) \qquad \begin{cases} u_j(x,y) & \text{est défini pour} \quad x \in]0,L[\,,\ y \in \mathbb{R} \\ y \longrightarrow u_j(x,y) & \text{est} \quad Y-\text{périodique} \quad Y =]0,L[. \end{cases}$$

Il est clair que :

$$\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,\frac{x}{\varepsilon}) = \Big(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y}\Big)\phi(x,y)\Big|_{y=x/\varepsilon}.$$

On remplace u_ε par son développement asymptotique dans l'équation, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\Big(EA(\frac{x}{\varepsilon})\frac{du_\varepsilon}{dx}\Big) &= \varepsilon^{-2}\frac{\partial}{\partial y}\Big(EA(y)\frac{\partial u_0}{\partial y}\Big) + \\ &+ \varepsilon^{-1}\Big[\frac{\partial}{\partial x}\Big(EA(y)\frac{\partial u_0}{\partial y}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(EA(y)(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y})\Big)\Big] + \\ &+ \varepsilon^{0}\Big[\frac{\partial}{\partial x}\Big(EA(y)(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial u_1}{\partial y})\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(EA(y)(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y})\Big)\Big] + \\ &+ \ldots \\ &\ldots\ldots \\ &+ \varepsilon^{k}\Big[\frac{\partial}{\partial x}\Big(EA(y)(\frac{\partial u_{k-1}}{\partial y} + \frac{\partial u_k}{\partial y})\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(EA(y)(\frac{\partial u_{k+1}}{\partial x} + \frac{\partial u_{k+2}}{\partial y})\Big)\Big] + \\ &+ \ldots\ldots \\ &\ldots \end{aligned}$$

En identifiant suivant les puissances de ε et en tenant compte des conditions de périodicité, nous obtenons les résultats suivants :

Ordre	résultat
-2	$u_0(x,y) = u_0(x)$
-1	$u_1(x,y) = \dfrac{du_0}{dx}\Big(\dfrac{\displaystyle\int_0^y \dfrac{dt}{\overline{EA(t)}}}{\dfrac{1}{L}\displaystyle\int_0^L \dfrac{dt}{\overline{EA(t)}}} - y \Big) + \overline{u}_1(x)$
0	$0 = \dfrac{d}{dx}\Big(\dfrac{1}{\dfrac{1}{L}\displaystyle\int_0^L \dfrac{dt}{\overline{EA(t)}}} \dfrac{du_0}{dx} \Big).$

Les résultats successivement et respectivement nous renseignent :

– les déplacements sont purement macroscopiques au premier ordre (pas de dépendance par rapport à la variable locale y) ;

– le deuxième ordre des déplacements s'exprime en double échelle et est fonction de la dérivée du déplacement macroscopique ;

–l'équation du milieu macroscopique a la même forme que l'équation initiale de la mécanique des milieux continus, et nous indique l'expression de la raideur équivalente de la barre ainsi définie.

Le problème homogénéisé est donc :

$$(6) \qquad \begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\Big(\dfrac{1}{\dfrac{1}{L}\displaystyle\int_0^L \dfrac{dt}{\overline{EA(t)}}} \dfrac{du_0}{dx} \Big) = 0 \qquad 0 < x < L \\ u_0(0) = \alpha\,; \quad u_0(L) = \beta \end{cases}$$

La démarche que nous avons suivis dans cette partie pour trouver (6) est la méthode des échelles multiples.

I.3 . Approche discrète et méthode de Verna :

Dans la modélisation discrète de la structure (voir [8], [10], [14]),

. seules les valeurs des déplacements aux noeuds interviennent,

. les équations d'équilibre ne s'écrivent qu'aux noeuds de la structure,

. les lois de comportement sont les lois de comportement de la mécanique des milieux continus, mais déjà intégrées pour chaque barre.

De ce fait, nous choisissons de noter les déplacements des noeuds :

$$(7) \qquad {}^{(\varepsilon)}u^j(x_M) = {}^{(0)}u^j(x_M) + \varepsilon.{}^{(1)}u^j(x_M) + \varepsilon^2.{}^{(2)}u^j(x_M) + \ldots$$

où (x_M) est l'abscisse du noeud considéré ($M \in \{1, \ldots, 2n\}$), et j est le numéro du noeud correspondant dans la cellule de base $j \in \{1, 2\}$.

De même, les forces dans les barres successives sont notées :

$$(8) \qquad {}^{(\varepsilon)}f^j(x_{ref_j}) = {}^{(0)}f^j(x_{ref_j}) + \varepsilon.{}^{(1)}f^j(x_{ref_j}) + \varepsilon^2.{}^{(2)}f^j(x_{ref_j}) + \ldots$$

j est le numéro de barre correspondante dans la cellule de base $j \in \{1,2\}$; x_{ref_j} est l'abscisse de référence pour la fonction force ${}^{(\varepsilon)}f^j(x_{ref_j})$. Cette abscisse est prise pour les deux forces, égale à l'abscisse du noeud M de la cellule courante appartenant à la famille 1.

Lois de comportement :

Les lois de comportement s'écrivent, puisque nous avons choisi $x_{ref_j} = x_M$:

$$(9) \qquad \begin{aligned} {}^{(\varepsilon)}f^1(x_M) &= \frac{EA_1}{\varepsilon L_1}.({}^{(\varepsilon)}u^1(x_M) - {}^{(\varepsilon)}u^2(x_{M-1})) \\ {}^{(\varepsilon)}f^2(x_M) &= \frac{EA_2}{\varepsilon L_2}.({}^{(\varepsilon)}u^2(x_{M+1}) - {}^{(\varepsilon)}u^1(x_M)). \end{aligned}$$

Chaque ${}^{(\varepsilon)}u^j(x)$ et chaque ${}^{(\varepsilon)}f^j(x)$ est remplacé par le développement asymptotique correspondant. Des développements de Taylor sont utilisés dans les lois de comportement du fait que $x_{M-1} = x_M - l_1 = x_M - \varepsilon.L_1$ et $x_{M+1} = x_M + l_2 = x_M + \varepsilon.L_2$. Puis, les équations (9) sont chacune identifiées suivant les puissances de ε, ce qui nous donne une expression de chaque ${}^{(\alpha)}f^j$ en fonction des ${}^{(\beta)}u^j$:

$$(10) \qquad \begin{aligned} {}^{(\alpha)}f^1(x_M) &= \frac{EA_1}{L_1}.\Big(({}^{(\alpha+1)}u^1(x_M) - {}^{(\alpha+1)}u^2(x_M)) - \sum_{\beta=1}^{\alpha+1} \frac{(-L_1)^\beta}{\beta!} \frac{d^\beta}{dx^\beta}{}^{(\alpha-\beta+1)} u^2(x_M)\Big) \\ {}^{(\alpha)}f^2(x_M) &= \frac{EA_2}{L_2}.\Big(({}^{(\alpha+1)}u^2(x_M) - {}^{(\alpha+1)}u^1(x_M)) + \sum_{\beta=1}^{\alpha+1} \frac{(L_2)^\beta}{\beta!} \frac{d^\beta}{dx^\beta}{}^{(\alpha-\beta+1)} u^2(x_M)\Big) \end{aligned}$$

Note 1 : *Le choix de l'abscisse de référence pour une force n'influe pas sur la valeur du terme d'ordre α de son développement asymptotique (voir Annexe B [26]).*

Equations d'équilibre :

Les équations d'équilibre respectives des noeuds M et $M+1$ s'écrivent :

$$(11) \qquad \begin{aligned} -{}^{(\varepsilon)}f^1(x_M) + {}^{(\varepsilon)}f^2(x_M) &= 0 \\ -{}^{(\varepsilon)}f^2(x_M) + {}^{(\varepsilon)}f^1(x_{M+2}) &= 0. \end{aligned}$$

Des développement de Taylor sont utilisés dans les équations (11), afin que l'équation d'équilibre du noeud M ne fasse apparaître que (x_M) comme variable d'espace, et que celle du noeud $M+1$ ne fasse apparaître que (x_{M+1}). En d'autres termes, les équations d'équilibre sont identifiées à l'abscisse du noeud considéré. Comme $x_M = x_{M+1} - \varepsilon L_2$ et $x_{M+2} = x_{M+1} + \varepsilon L_1$, alors les équations d'équilibre à l'ordre α s'écrivent :

$$(12) \qquad \begin{aligned} 0 &= -{}^{(\alpha)}f^1(x_M) + {}^{(\alpha)}f^2(x_M) \\ 0 &= -{}^{(\alpha)}f^2(x_{M+1}) + {}^{(\alpha)}f^1(x_{M+1}) + \sum_{\beta=1}^{\beta=\alpha} \Big(-\frac{(-L_2)^\beta}{\beta!} \frac{d^\beta}{dx^\beta}{}^{(\alpha-\beta)} f^2(x_{M+1}) + \\ &\qquad + \frac{(L_1)^\beta}{\beta!} \frac{d^\beta}{dx^\beta}{}^{(\alpha-\beta)} f^1(x_{M+1})\Big). \end{aligned}$$

Note 2 :

Une solution est recherchée telle que les équations en partie courante soient vérifiées quel que soit x.

Résolution :

La résolution ordre après ordre du problème nous permet d'obtenir les fonctions ${}^{(\alpha)}u^j$ et ${}^{(\alpha)}f^j$.
L'identification des équations commence à l'ordre -1, car la rigidité des barres est d'ordre -1.

ordre – 1

- Equations d'équilibre :

$$0 = -{}^{(-1)}f^1(x) + {}^{(-1)}f^2(x)$$
$$0 = -{}^{(-1)}f^2(x) + {}^{(-1)}f^1(x).$$

- Lois de comportement :

$${}^{(-1)}f^1(x) = \frac{EA_1}{L_1}({}^{(0)}u^1(x) - {}^{(0)}u^2(x))$$
$${}^{(-1)}f^2(x) = \frac{EA_2}{L_2}({}^{(0)}u^2(x) - {}^{(0)}u^1(x)).$$

- Nous obtenons immédiatement :

$${}^{(0)}u^1 = {}^{(0)}u^2$$
$${}^{(-1)}f^1 = 0$$
$${}^{(-1)}f^2 = 0.$$

Nous noterons ${}^{(0)}u^j$ par ${}^{(0)}u$ et ${}^{(-1)}f^j$ par ${}^{(-1)}f$ pour $j = 1, 2$.

ordre 0

- Equations d'équilibre :

$$0 = -{}^{(0)}f^1(x) + {}^{(0)}f^2(x)$$
$$0 = -{}^{(0)}f^2(x) + {}^{(0)}f^1(x).$$

- Lois de comportement :

$${}^{(0)}f^1(x) = \frac{EA_1}{L_1}({}^{(1)}u^1(x) - {}^{(1)}u^2(x) + L_1\frac{d}{dx}{}^{(0)}u^1(x))$$
$${}^{(0)}f^2(x) = \frac{EA_2}{L_2}({}^{(1)}u^2(x) - {}^{(1)}u^1(x) + L_2\frac{d}{dx}{}^{(0)}u^2(x)).$$

- Nous obtenons immédiatement :

$${}^{(1)}u^2(x) - {}^{(1)}u^1(x) = \frac{d}{dx}({}^{(0)}u(x)).L_1L_2.\frac{\frac{1}{EA_2} - \frac{1}{EA_1}}{\frac{L_2}{EA_2} + \frac{L_1}{EA_1}}$$
$${}^{(0)}f^1(x) = {}^{(0)}f^2(x) = \frac{d}{dx}({}^{(0)}u(x)).\frac{L_1 + L_2}{\frac{L_2}{EA_2} + \frac{L_1}{EA_1}}.$$

En particulier, l'expression de la force, que nous noterons ${}^{(0)}f$, définit un module équivalent à la traction :

$$EA_{eq} = \frac{L_1 + L_2}{\frac{L_2}{EA_2} + \frac{L_1}{EA_1}}.$$

ordre 1

- Equations d'équilibre :

$$0 = -{}^{(1)}f^1(x) + {}^{(1)}f^2(x)$$
$$0 = -{}^{(1)}f^2(x) + {}^{(1)}f^1(x) + \frac{d}{dx}.({}^{(0)}f(x)).L_1 + \frac{d}{dx}.({}^{(0)}f(x)).L_1.$$

- Lois de comportement :

$${}^{(1)}f^1(x) = \frac{EA_1}{L_1}({}^{(2)}u^1(x) - {}^{(2)}u^2(x) + L_1\frac{d}{dx}{}^{(1)}u^2(x) - \frac{L_1^2}{2}\frac{d^2}{dx^2}{}^{(0)}u^2(x))$$
$${}^{(1)}f^2(x) = \frac{EA_2}{L_2}({}^{(2)}u^2(x) - {}^{(2)}u^1(x) + L_2\frac{d}{dx}{}^{(1)}u^2(x) + \frac{L_2^2}{2}\frac{d^2}{dx^2}{}^{(0)}u^2(x)).$$

- De même que précédemment, nous obtenons :

$${}^{(2)}u^2(x) - {}^{(2)}u^1(x) = \frac{d}{dx}({}^{(1)}u(x)).L_1L_2.\frac{\frac{1}{EA_2} - \frac{1}{EA_1}}{\frac{L_2}{EA_2} + \frac{L_1}{EA_1}} - \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}({}^{(0)}u(x)).L_1L_2.\frac{\frac{L_1}{EA_2} - \frac{L_2}{EA_1}}{\frac{L_2}{EA_2} + \frac{L_1}{EA_1}}$$
$${}^{(1)}f^1(x) = {}^{(1)}f^2(x) = \frac{L_1 + L_2}{\frac{L_2}{EA_2} + \frac{L_1}{EA_1}}\left(\frac{d}{dx}({}^{(1)}u^2(x)) + \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}({}^{(0)}u(x)).(L_2 - L_1)\right).$$

Et, en ajoutant les deux équations d'équilibre, nous obtenons :

$$\frac{d}{dx}({}^{(0)}f(x)) = 0 \tag{13}$$

qui s'écrit aussi :

$$\frac{d}{dx}\left(EA_{eq}\frac{d}{dx}({}^{(0)}u(x))\right) = 0. \tag{14}$$

ordres suivants

L'écriture aux ordres suivants est similaire.

I.4 . Coïncidence entre les deux formalismes et les résultats

Formalismes : Pour cet exemple unidimensionnel, les deux formalismes utilisés coïncident, de la façon suivante :

- si $y = y_1 = L_1$ (à L près, puisque les fonctions sont Y-périodiques), alors $u_k(x, y_1)$ correspond à ${}^{(k)}u^1$;
- si $y = y_2 = 0$ (à L près), alors $u_k(x, y_2)$ correspond à ${}^{(k)}u^2$;

Résultats :

- Les deux approches mettent en évidence que le premier ordre (ordre 0) des déplacements ne dépend que de x , la variable d'espace macroscopique ; et cette fonction doit vérifier la même équation d'équilibre (équation (6) et équation (14)).
- A l'ordre 1, pour l'approche continue :

- si $y = y_2 = 0$, alors $u_1(x, y_2) = \overline{u}_1(x)$;
- si $y = y_1 = L_1$, alors

$$u_1(x, y_1) = \frac{d}{dx}(u_0(x)).L_1 L_2.\frac{\frac{1}{EA_1} - \frac{1}{EA_2}}{\frac{L_2}{EA_2} + \frac{L_1}{EA_1}} + \overline{u}_1(x).$$

Alors,
$$u_1(x, y_1) - u_1(x, y_2) = {}^{(1)}u^1(x) - {}^{(1)}u^2(x)$$

- Si nous définissons, pour l'approche continue :

$${}^{(0)}f(x, y) = EA(y).\left(\frac{d}{dx}({}^{0}u(x)) + \frac{\partial^1 u(x, y)}{\partial y}\right)$$

alors
$${}^{(0)}f(x, y_1) = {}^{(0)}f(x, y_2) = {}^{(0)}f^1(x) = {}^{(0)}f^2(x).$$

Conclusion :

Cet exemple élémentaire montre la correspondance et la cohérence entre la méthode d'homogénéisation des milieux continus et l'adaptation qui en est faite pour les milieux discrets. Pour un exemple plus complexe, il est clair qu'aucun parallèle aussi évident n'existe. Simplement, la géométrie et les caractéristiques locales sont identifiées par des indices, au lieu d'être décrites par une variable d'espace locale et continue.

II. COMPARAISON DU PROBLÉME DISCRET ET DU PROBLÈME HOMOGÉNÉISÉ

Dans cette partie, nous allons répondre à la question suivante :

Commet le problème discret approche t-il le problème continu homogénéisé ? .

II.1. Existence et unicité d'une solution du problème discret :

On rappelle que nous étudions une structure comme décrite par la figure ci-dessous avec la convention des notations précédentes.

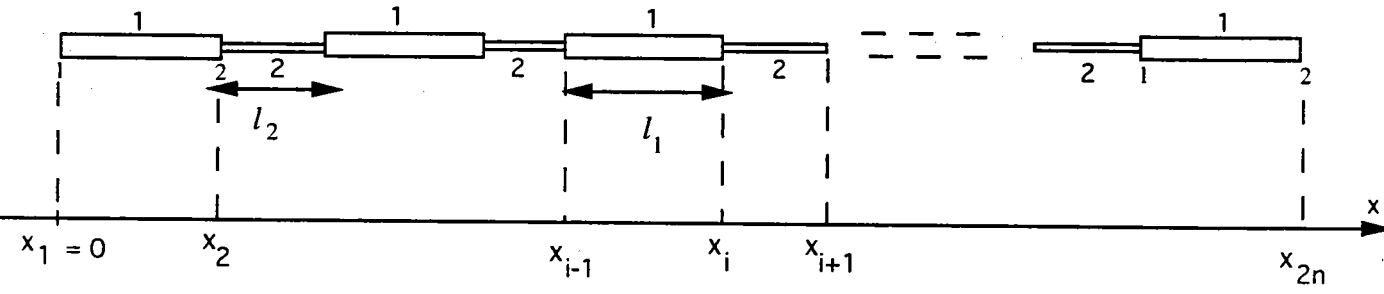


figure 3 : modélisation unidimensionnelle de la structure

Notations :

Les noeuds sont donnés par :

$$x_1 = 0$$

$$x_i = \begin{cases} x_{i-1} + \varepsilon L_1 & \text{si} \quad i \text{ est pair} \\ x_{i-1} + \varepsilon L_2 & \text{si} \quad i \text{ est impair} \end{cases} \qquad 2 \leq i \leq 2n-1$$

$$x_{2n} = L.$$

Les constantes de rigidité des barres 1 et 2 sont notées respectivement :

$$K^1 = \frac{EA_1}{L_1} \quad , \quad K^2 = \frac{EA_2}{L_2}.$$

On dispose des équations suivantes :

$$\begin{cases} -\,{}^{(\varepsilon)}f^1(x_{2p}) + {}^{(\varepsilon)}f^2(x_{2p}) = 0 \\ -\,{}^{(\varepsilon)}f^2(x_{2p}) + {}^{(\varepsilon)}f^1(x_{2p+2}) = 0 \qquad 1 \leq p \leq n-1 \\ {}^{\varepsilon}u^2(0) = \alpha\,; \quad {}^{\varepsilon}u^1(L) = \beta \end{cases}$$

avec les lois de comportements :

$$\begin{cases} {}^{(\varepsilon)}f^1(x_M) = \dfrac{EA_1}{\varepsilon L_1}({}^{(\varepsilon)}u^1(x_M) - {}^{(\varepsilon)}u^2(x_{M-1})) \\ {}^{(\varepsilon)}f^2(x_M) = \dfrac{EA_2}{\varepsilon L_2}({}^{(\varepsilon)}u^2(x_{M+1}) - {}^{(\varepsilon)}u^1(x_M)) \\ x_M \ : \ \text{abscisse du noeud } M \text{ appartenant à la famille 1.} \end{cases}$$

Le système d'équations devient :

$$\begin{cases} \dfrac{EA_1}{\varepsilon L_1}\left({}^{(\varepsilon)}u^1(x_{2p}) - {}^{(\varepsilon)}u^2(x_{2p-1})\right) + \dfrac{EA_2}{\varepsilon L_2}\left({}^{(\varepsilon)}u^2(x_{2p+1}) - {}^{(\varepsilon)}u^1(x_{2p})\right) = 0 \\ \dfrac{EA_2}{\varepsilon L_2}\left({}^{(\varepsilon)}u^2(x_{2p+1}) - {}^{(\varepsilon)}u^1(x_{2p})\right) + \dfrac{EA_1}{\varepsilon L_1}\left({}^{(\varepsilon)}u^1(x_{2p+2}) - {}^{(\varepsilon)}u^2(x_{2p+1})\right) = 0 \qquad 1 \le p \le n-1 \\ {}^{(\varepsilon)}u^2(0) = \alpha\,; \quad {}^{(\varepsilon)}u^1(L) = \beta, \end{cases}$$

d'où le système linéaire :

$$(15)\quad \begin{cases} -(K^1+K^2)^{(\varepsilon)}u^1(x_2) + K^{2(\varepsilon)}u^2(x_3) = -K^1\alpha \\ K^{2(\varepsilon)}u^1(x_2) - (K^1+K^2)^{(\varepsilon)}u^2(x_3) + K^{1(\varepsilon)}u^1(x_4) = 0 \\ \ddots \qquad \ddots \qquad \ddots \\ K^{1\,(\varepsilon)}u^2(x_{2p-1}) - (K^1+K^2)^{(\varepsilon)}u^1(x_{2p}) + K^{2\,(\varepsilon)}u^2(x_{2p+1}) = 0 \\ K^{2\,(\varepsilon)}u^1(x_{2p}) - (K^1+K^2)^{(\varepsilon)}u^2(x_{2p+1}) + K^{1\,(\varepsilon)}u^1(x_{2p+2}) = 0 \\ \ddots \qquad \ddots \qquad \ddots \qquad \ddots \\ K^{1\,(\varepsilon)}u^2(x_{2n-3}) - (K^1+K^2)^{(\varepsilon)}u^1(x_{2n-2}) + K^{2\,(\varepsilon)}u^2(x_{2n-1}) = 0 \\ K^{2\,(\varepsilon)}u^1(x_{2n-2}) - (K^1+K^2)^{(\varepsilon)}u^2(x_{2n-1}) = -K^1\beta \end{cases}$$

soit en écriture matricielle :

$$\mathcal{A}.U^\varepsilon = b$$

où

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -(K^1+K^2) & K^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ K^2 & -(K^1+K^2) & K^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \cdots & K^1 & -(K^1+K^2) & K^2 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & K^2 & -(K^1+K^2) & K^1 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & K^1 & -(K^1+K^2) & K^2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & K^2 & -(K^1+K^2) \end{pmatrix}$$

$$U^\varepsilon = \begin{pmatrix} {}^{(\varepsilon)}u^1(x_2) \\ {}^{(\varepsilon)}u^2(x_3) \\ \vdots \\ {}^{(\varepsilon)}u^1(x_{2p}) \\ {}^{(\varepsilon)}u^2(x_{2p+1}) \\ \vdots \\ {}^{(\varepsilon)}u^1(x_{2n-2}) \\ {}^{(\varepsilon)}u^2(x_{2n-1}) \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad b = \begin{pmatrix} -K^1\alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -K^1\beta \end{pmatrix}.$$

Lemme II.1.1 :

La matrice $\mathcal{A}$ du système (15) a les propriétés suivantes :

(i) *$\mathcal{A}$ est symètrique*

(ii) *$(-\mathcal{A})$ est définie positive, c'est à dire :*

$$
\begin{aligned}
&{}^tX(-\mathcal{A})X \geq 0 \quad \forall X \in \mathbb{R}^{2n-2} \\
&{}^tX(-\mathcal{A})X = 0 \Longleftrightarrow X = 0.
\end{aligned}
$$

Démonstration :

$$
\text{Soit } X \in \mathbb{R}^{2n-2} \qquad X = \begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_{2p} \\ X_{2p+1} \\ \vdots \\ X_{2n-2} \\ X_{2n-1} \end{pmatrix}.
$$

En faisant un raisonnement par récurrence sur n, il est facile d'établir la relation suivante :

$$
\begin{aligned}
{}^tX(-\mathcal{A})X = {} & K^1X_2^2 + K^2(X_2 - X_3)^2 + K^1(X_3 - X_4)^2 + \ldots \\
& \ldots + K^1(X_{2p-1} - X_{2p})^2 + K^2(X_{2p} - X_{2p+1})^2 + \ldots + K^2(X_{2n-2} - X_{2n-1})^2 + K^1X_{2n-1}^2.
\end{aligned}
$$

On en déduit alors le lemme.

C.Q.F.D.

La matrice $\mathcal{A}$ est donc inversible et le système (15) admet une unique solution.

Proposition II.1.2 :

Le problème discret (15) admet une unique solution.

II.2. **Existence et unicité d'une solution du problème homogénéisé** :

Le problème homogénéisé est donné par

$$
(16) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(EA_{eq}\dfrac{d}{dx}\left({}^{(0)}u(x)\right)\right) = 0 \qquad 0 < x < L \\ \\ {}^{(0)}u(0) = \alpha\,; \quad {}^{(0)}u(L) = \beta. \end{cases}
$$

La solution est donnée explicitement par :

$$
{}^{(0)}u(x) = \frac{\beta - \alpha}{L}x + \alpha.
$$

II.3. **Comparaison des deux solutions** :

A . Etude d'un problème approché par la méthode de Galerkin

Dans cette partie, on approche le problème (1) par une méthode d'éléments finis P_1 .

On rappelle que le déplacement longitudinal de la barre pour une modélisation continue est solution de :

(1)
$$\begin{cases} -\frac{d}{dx}\left(EA(\frac{x}{\varepsilon})\frac{du_\varepsilon}{dx}\right) = 0 & 0 < x < L \\ u_\varepsilon(0) = \alpha\,; \quad u_\varepsilon(L) = \beta \end{cases}$$

avec

$$A(\frac{x}{\varepsilon}) = \begin{cases} A_1 \quad \text{si} \quad x_{i-1} \le x \le x_i \quad \text{et} \quad i \text{ est pair} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad i = 2, \ldots, 2n \\ A_2 \quad \text{si} \quad x_{i-1} \le x \le x_i \quad \text{et} \quad i \text{ est impair.} \end{cases}$$

Relèvement des conditions limites :

On considère le relèvement des conditions limites défini par :

(17)
$$r_\varepsilon(x) = \begin{cases} -\frac{\alpha}{x_2}x + \alpha & \text{si} \quad x_1 \le x \le x_2 \\ 0 & \text{si} \quad x_2 \le x \le x_{2n-1} \\ \frac{\beta(x - x_{2n-1})}{(x_{2n} - x_{2n-1})} & \text{si} \quad x_{2n-1} \le x \le x_{2n}. \end{cases}$$

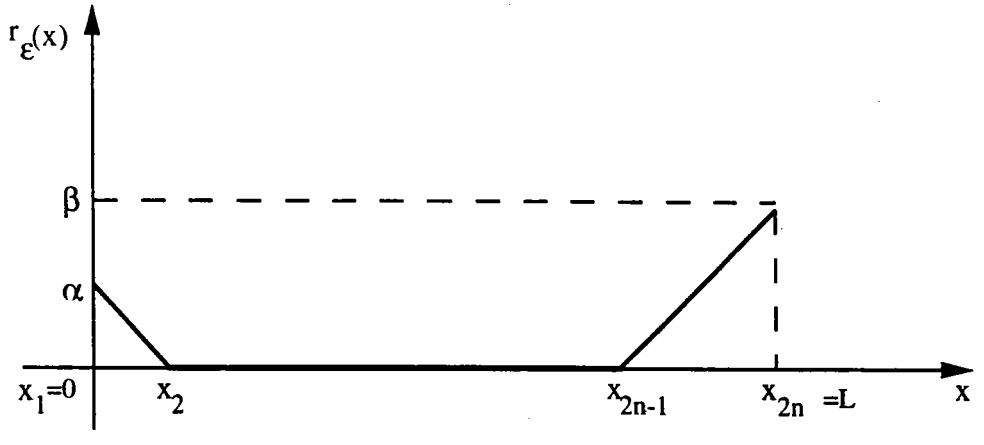


figure 4 : le relèvement r_ε

On a :

$$r_\varepsilon \in H^1(0,L)$$

$$\frac{dr_\varepsilon}{dx} = \begin{cases} -\dfrac{\alpha}{x_2} & \text{si} \quad x_1 \le x \le x_2 \\ 0 & \text{si} \quad x_2 \le x \le x_{2n-1} \\ \dfrac{\beta}{(x_{2n} - x_{2n-1})} & \text{si} \quad x_{2n-1} \le x \le x_{2n}. \end{cases}$$

Remarque II.3.1 :

Le choix d'un tel relèvement sera justifié par la suite. Au fait, grâce à ce relèvement on obtient, après approximation, un système linéaire identique au système (15).

Problème $(\mathcal{P})$:

Posons : $$\overline{u}_\varepsilon = u_\varepsilon - r_\varepsilon.$$

Le problème (1) est équivalent à trouver $\overline{u}_\varepsilon$ solution de

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\Big(EA(\dfrac{x}{\varepsilon})\dfrac{d\overline{u}_\varepsilon}{dx}\Big) = \dfrac{d}{dx}\Big(EA(\dfrac{x}{\varepsilon})\dfrac{dr_\varepsilon}{dx}\Big) & 0 < x < L \\ \overline{u}_\varepsilon(0) = 0\,; \quad \overline{u}_\varepsilon(L) = 0. \end{cases}$$

Problème $(\mathcal{P}_f)$:

Une formulation variationnelle faible du problème $(\mathcal{P})$ est :

$$(\mathcal{P}_f) \qquad \begin{cases} \text{Trouver } \overline{u}_\varepsilon \in H_0^1(0,L) \text{ tel que :} \\ \displaystyle\int_0^L EA(\frac{x}{\varepsilon})\frac{d\overline{u}_\varepsilon}{dx}\frac{dv}{dx} = -\int_0^L EA(\frac{x}{\varepsilon})\frac{dr_\varepsilon}{dx}\frac{dv}{dx} \qquad \forall v \in H_0^1(0,L). \end{cases}$$

D'après le théorème de Lax-Milgram, on a existence et unicité d'une solution de $(\mathcal{P}_f)$.

Problème $(\mathcal{P}_\varepsilon)$: Approximation

Soit

$$V_\varepsilon = \Big\{ v \in C^0([0,L]) \quad / \quad v(0) = v(L) = 0\,; \quad v_{|[x_i,x_{i+1}]} \in P_1, \quad 2 \le i \le 2n-1 \Big\}$$

où P_1 est l'ensemble des polynômes de degré 1.

L'espace V_ε est un sous espace vectoriel de dimension fini de $H_0^1(0,L)$ [23]. Il dépend de ε car n dépend de ε.

La base canonique $(\varphi_i)_{2\leq i\leq 2n-1}$ de V_ε définie par :

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij} \qquad 2 \leq i,j \leq 2n-1$$

est donnée par :

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & \text{si} \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \dfrac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} & \text{si} \quad x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

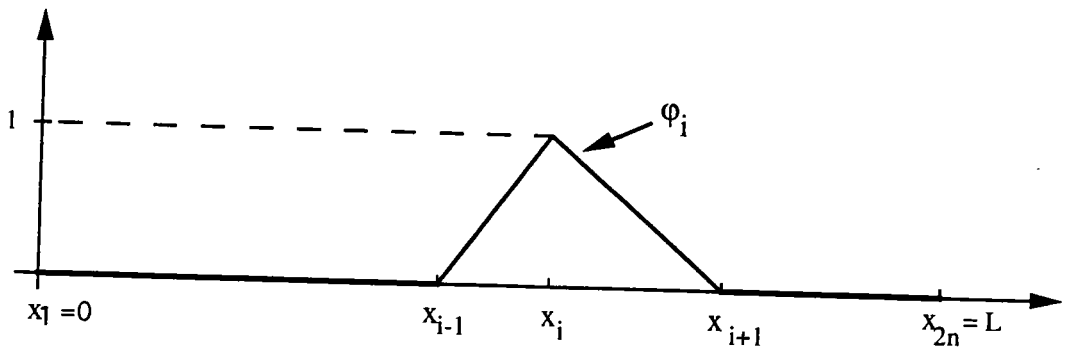


figure 5 : les fonctions φ_i

Le problème approché associé à $(\mathcal{P}_f)$ s'écrit :

$(\mathcal{P}_\varepsilon)$

$$\begin{cases} \text{Trouver} \quad w_\varepsilon \in V_\varepsilon \quad \text{tel que} \quad : \\ \displaystyle\int_0^L EA(\frac{x}{\varepsilon})\frac{dw_\varepsilon}{dx}\frac{dv}{dx} = -\int_0^L EA(\frac{x}{\varepsilon})\frac{dr_\varepsilon}{dx}\frac{dv}{dx} \qquad \forall v \in V_\varepsilon. \end{cases}$$

Posons

$$a(u,v) = \int_0^L EA(\frac{x}{\varepsilon})\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}.$$

On cherche w_ε sous forme :

$$w_\varepsilon(x) = \sum_{i=2}^{2n-1} w_\varepsilon(x_i)\varphi_i(x),$$

alors $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ est équivalent à :

$$\sum_{i=2}^{2n-1} w_\varepsilon(x_i)a(\varphi_i,\varphi_j) = -\int_0^L EA(\frac{x}{\varepsilon})\frac{dr_\varepsilon}{dx}\frac{d\varphi_j}{dx} \qquad \forall j = 2,...,2n-1$$

soit le système :

$$
(18)\quad \left\{
\begin{array}{l}
a(\varphi_2,\varphi_2)w_\varepsilon(x_2) + a(\varphi_2,\varphi_3)w_\varepsilon(x_3) = -\displaystyle\int_0^L EA(\frac{x}{\varepsilon})\frac{dr_\varepsilon}{dx}\frac{d\varphi_2}{dx} \\
a(\varphi_2,\varphi_3)w_\varepsilon(x_2) + a(\varphi_3,\varphi_3)w_\varepsilon(x_3) + a(\varphi_3,\varphi_4)w_\varepsilon(x_4) = -\displaystyle\int_0^L EA(\frac{x}{\varepsilon})\frac{dr_\varepsilon}{dx}\frac{d\varphi_3}{dx} \\
\qquad \ddots \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad\qquad \ddots \\
a(\varphi_i,\varphi_{i-1})w_\varepsilon(x_{i-1}) + a(\varphi_i,\varphi_i)w_\varepsilon(x_i) + a(\varphi_i,\varphi_{i+1})w_\varepsilon(x_{i+1}) = -\displaystyle\int_0^L EA(\frac{x}{\varepsilon})\frac{dr_\varepsilon}{dx}\frac{d\varphi_i}{dx} \\
\qquad \ddots \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad \ddots \\
a(\varphi_{2n-2},\varphi_{2n-3})w_\varepsilon(x_{2n-3}) + a(\varphi_{2n-2},\varphi_{2n-2})w_\varepsilon(x_{2n-2}) + a(\varphi_{2n-2},\varphi_{2n-1})w_\varepsilon(x_{2n-1}) = \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = -\displaystyle\int_0^L EA(\frac{x}{\varepsilon})\frac{dr_\varepsilon}{dx}\frac{d\varphi_{2n-2}}{dx} \\
a(\varphi_{2n-2},\varphi_{2n-1})w_\varepsilon(x_{2n-2}) + a(\varphi_{2n-1},\varphi_{2n-1})w_\varepsilon(x_{2n-1}) = \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = -\displaystyle\int_0^L EA(\frac{x}{\varepsilon})\frac{dr_\varepsilon}{dx}\frac{d\varphi_{2n-1}}{dx}.
\end{array}
\right.
$$

En tenant compte du support des fonctions φ_i, le calcul des coefficients $(a(\varphi_i,\varphi_j))$ est rendu facile. Le système (18) s'écrit alors sous forme matricielle :

$$\mathcal{A}_\varepsilon . W^\varepsilon = b_\varepsilon$$

où

$$
\mathcal{A}_\varepsilon = \begin{pmatrix}
-\frac{(K^1+K^2)}{\varepsilon} & \frac{K^2}{\varepsilon} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\frac{K^2}{\varepsilon} & -\frac{(K^1+K^2)}{\varepsilon} & \frac{K^1}{\varepsilon} & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\cdots & \frac{K^1}{\varepsilon} & -\frac{(K^1+K^2)}{\varepsilon} & \frac{K^2}{\varepsilon} & 0 & \cdots \\
\cdots & 0 & \frac{K^2}{\varepsilon} & -\frac{(K^1+K^2)}{\varepsilon} & \frac{K^1}{\varepsilon} & \cdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & \frac{K^1}{\varepsilon} & -\frac{(K^1+K^2)}{\varepsilon} & \frac{K^2}{\varepsilon} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{K^2}{\varepsilon} & -\frac{(K^1+K^2)}{\varepsilon}
\end{pmatrix}
$$

$$
W^\varepsilon = \begin{pmatrix} w_\varepsilon(x_2) \\ w_\varepsilon(x_3) \\ \vdots \\ w_\varepsilon(x_{2p}) \\ w_\varepsilon(x_{2p+1}) \\ \vdots \\ w_\varepsilon(x_{2n-2}) \\ w_\varepsilon(x_{2n-1}) \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad b_\varepsilon = \begin{pmatrix} -K^1\alpha/\varepsilon \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -K^1\beta/\varepsilon \end{pmatrix}.
$$

Estimation d'erreur d'interpolation :

Le second membre $\left(\frac{d}{dx}\left(EA(\frac{x}{\varepsilon})\frac{dr_\varepsilon}{dx}\right)\right)$ du problème $(\mathcal{P})$ est un élément de $H^{-1}(0,L)$, donc $\overline{u}_\varepsilon \in H^1(0,L)$.
On déduit alors l'estimation d'erreur d'interpolation suivante :

(19) $$|\overline{u}_\varepsilon - w_\varepsilon|_{L^2(0,L)} \leq c\,\varepsilon\,|\overline{u}_\varepsilon|_{1,(0,L)}.$$

Maintenant, dans le problème $(\mathcal{P}_f)$, on prend $v = \overline{u}_\varepsilon$. On a alors :

$$\int_0^L EA(\frac{x}{\varepsilon})\left(\frac{d\overline{u}_\varepsilon}{dx}\right)^2 = -\int_0^L EA(\frac{x}{\varepsilon})\frac{dr_\varepsilon}{dx}\frac{d\overline{u}_\varepsilon}{dx}$$

d'où l'inégalité

$$\left|\frac{d\overline{u}_\varepsilon}{dx}\right|_{L^2(0,L)} \leq c\left|\frac{dr_\varepsilon}{dx}\right|_{L^2(0,L)}$$

avec c une constante indépendante de ε.

Le relèvement r_ε étant connu explicitement, un calcul direct nous donne :

$$\left|\frac{dr_\varepsilon}{dx}\right|_{L^2(0,L)} = \left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{L_1}\right)^{1/2}.\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$
$$|r_\varepsilon|_{L^2(0,L)} = \left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{3}.L_1\right)^{1/2}.\sqrt{\varepsilon}.$$

Par conséquent

(20) $$|\overline{u}_\varepsilon - w_\varepsilon|_{L^2(0,L)} \leq c\sqrt{\varepsilon}.$$

On résume les résultats ci-dessus dans la proposition suivante.

Proposition II.3.2 :

Soient

- u_ε *l'unique solution de* (1),
- r_ε *le relèvement des conditions limites définies par* (17),
- ω_ε *l'unique solution du problème* $(\mathcal{P}_\varepsilon)$.

On pose $$\overline{u}_\varepsilon = u_\varepsilon - r_\varepsilon.$$

Alors

(20) $$|\overline{u}_\varepsilon - w_\varepsilon|_{L^2(0,L)} \leq c\sqrt{\varepsilon}$$

où c est une constante indépendante de ε.

B. Convergence du problème continu vers le problème homogénéisé

Dans cette partie, nous allons établir la convergence de u_ε solution de (1) vers u_0 solution de (6) par la méthode de l'énergie développée par Tartar [19].

On reprend donc le problème (1)

$$(1) \qquad \begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left(EA\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)\dfrac{du_\varepsilon}{dx}\right) = 0 & 0 < x < L \\ u_\varepsilon(0) = \alpha\,; \quad u_\varepsilon(L) = \beta. \end{cases}$$

Cette fois, on choisit comme relèvement des conditions limites la fonction r^* définie indépendamment de ε par :

$$(21) \qquad r^*(x) = \frac{\beta - \alpha}{L}x + \alpha.$$

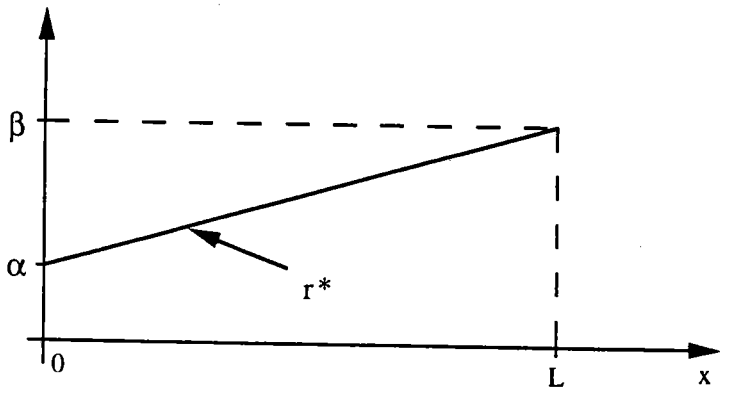


figure 6 : le relèvement r*

Problème $(\mathcal{P}^*)$:

Posons : $$\overline{u}_\varepsilon^* = u_\varepsilon - r^*.$$

Le problème (1) est alors équivalent à trouver $\overline{u}_\varepsilon^*$ solution de

$$(\mathcal{P}^*) \qquad \begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left(EA\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)\dfrac{d\overline{u}_\varepsilon^*}{dx}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(EA\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)\dfrac{dr^*}{dx}\right) & 0 < x < L \\ \overline{u}_\varepsilon^*(0) = 0\,; \quad \overline{u}_\varepsilon^*(L) = 0. \end{cases}$$

Problème $(\mathcal{P}_f^*)$:

Une formulation variationnelle faible du problème $(\mathcal{P}^*)$ est :

$$(\mathcal{P}_f^*) \qquad \begin{cases} \text{Trouver } \overline{u}_\varepsilon^* \in H_0^1(0,L) \text{ tel que :} \\ \displaystyle\int_0^L EA\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\frac{d\overline{u}_\varepsilon^*}{dx}\frac{dv}{dx} = -\int_0^L EA\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\frac{dr^*}{dx}\frac{dv}{dx} \qquad \forall v \in H_0^1(0,L). \end{cases}$$

D'après le théorème de Lax-Milgram, on a existence et unicité d'une solution de $(\mathcal{P}_f^*)$.

Estimation à priori :

En prenant $v = \overline{u}_\varepsilon^*$ dans $(\mathcal{P}_f^*)$, il est facile de voir que l'on a :

$$\Big|\frac{d\overline{u}_\varepsilon^*}{dx}\Big|_{L^2(0,L)} \leq c$$

où c est une constante indépendante de ε.

Alors, on peut extraire une sous suite notée encore $\overline{u}_\varepsilon^*$ telle que :

$$(22) \qquad \overline{u}_\varepsilon^* \rightharpoonup \overline{u}^* \qquad \text{dans} \quad H_0^1(0,L) \quad \text{faible.}$$

Problème limite :

Proposition II.3.3 :

Soient $\overline{u}_\varepsilon^*$ l'unique solution du problème $(\mathcal{P}_f^*)$ et r^* le relèvement défini par (21).

On pose : $$\overline{u}_\varepsilon^* = u_\varepsilon - r^*.$$

Alors on a :

$$(23) \qquad \overline{u}_\varepsilon^* \rightharpoonup \overline{u}^* \qquad \textit{dans} \quad H_0^1(0,L) \quad \textit{faible.}$$

$$(24) \qquad u_\varepsilon \rightharpoonup \overline{u}^* + r^* = u \qquad \textit{dans} \quad H^1(0,L) \quad \textit{faible,}$$

où u est l'unique solution de (6)

$$(6) \qquad \begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\Big(\dfrac{1}{\dfrac{1}{L}\displaystyle\int_0^L \frac{dt}{EA(t)}}\dfrac{du_0}{dx}\Big) = 0 \qquad 0 < x < L \\ u_0(0) = \alpha\,; \quad u_0(L) = \beta. \end{cases}$$

On a donc $u = u_0$.

Démonstration : (voir [19]).

C . Convergence du problème discret vers le problème homogénéisé

Dans ce pragraphe, nous allons répondre à la question posée au début de cette partie II.

D'aprés ce qui précéde, on remarque que les systèmes linéaires (15) et (18) sont équivalents. Donc

$$U^\varepsilon = W^\varepsilon \tag{33}$$

La proposition suivante nous montre comment les valeurs des déplacements ${}^{(\varepsilon)}u^j(x_i) = \omega_\varepsilon(x_i)$ aux noeuds approchent en un certain sens le problème limite.

Proposition II.3.4 :

Soient ω^ε l'unique solution de $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ et u l'unique solution de (6).

Alors il existe une sous-suite de ω_ε, notée encore ω_ε, telle que :

$$\omega_\varepsilon \longrightarrow u \quad \text{dans} \quad L^2(0,L) \quad \text{fort} . \tag{34}$$

Démonstration :

On écrit :

$$\begin{aligned} \omega_\varepsilon - u &= \omega_\varepsilon - u_\varepsilon + u_\varepsilon - u \\ &= (\omega_\varepsilon - \overline{u}_\varepsilon) + r_\varepsilon + (u_\varepsilon - u) \end{aligned}$$

Or

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \quad \text{dans} \quad H^1(0,L) \quad \text{faible},$$

donc d'après le théorème de Rellich [2], on peut extraire une sous-suite notée encore u_ε tel que

$$u_\varepsilon \to u \quad \text{dans} \quad L^2(0,L) \quad \text{fort.}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} |r_\varepsilon|_{L^2(0,L)} &\leq c\sqrt{\varepsilon} \\ |\omega_\varepsilon - \overline{u}_\varepsilon|_{L^2(0,L)} &\leq c\sqrt{\varepsilon}, \end{aligned}$$

donc $\omega_\varepsilon \longrightarrow u$ dans $L^2(0,L)$ fort à une sous-suite près.

C.Q.F.D.

Remarque II.3.5 :

La convergence (34) établie ci-dessus est la meilleure possible car l'estimation d'erreur d'interpolation (20) est la meilleure possible.

V.4. **Analyse numérique** :

Dans cette partie, nous comparons la solution discrète (solution du système linéaire (15)) avec la solution homogénéisée (solution de l'équation (6)).

La solution (6) du problème homogénéisé est représentée exactement puisque elle est connue explicitement. Pour représenter la solution discrète, on fait varier le nombre de noeuds de la structure et dans chaque cas, on discute suivant les rapports $\frac{A_1}{A_2}$ et $\frac{L_1}{L_2}$ qui marquent repectivement l'oscillation du coefficient de l'équation (1) et la répartion des barres dans la cellule de référence.

On remarque, lorsque $\frac{A_1}{A_2} \simeq 1$(voir figures 7 et 8) que la solution discrète approche bien la solution homogénéisée et que l'approximation est d'autant meilleure que le rapport $\frac{L_1}{L_2}$ est grand. Ceci s'explique par le fait que

$$\varepsilon = \frac{1 + \frac{L_1}{L_2}}{(1 + \frac{L_1}{L_2})(n-1) + \frac{L_1}{L_2}},$$

donc pour n fixé, lorsque $\frac{L_1}{L_2}$ augmente, ε se comporte comme $\frac{1}{n-1}$.

Les figures 7 et 8 sont réalisées respectivements pour $n = 26$ et $n = 51$, soit pour des structures à 52 et à 102 noeuds.

La table 1 donne des estimations d'erreurs dans les espaces $L^\infty(0, L)$, $L^2(0, L)$ et $H^1(0, L)$.

Par contre, lorsque $\frac{A1}{A2} >> 1$ (voir figures 9 et 10), on note un certain décalage des valeurs discrètes par rapport à la solution homogénéisée. Ceci est dû à la forte oscillation du coefficient de l'EDP (1).

On fait les mêmes remarques que ci-dessus, les figures 9 et 10 sont réalisées respectivements pour $n = 26$ et $n = 51$, soit pour des structures à 52 et à 102 noeuds. La table 2 donne des estimations d'erreurs dans les espaces $L^\infty(0, L)$, $L^2(0, L)$ et $H^1(0, L)$.

L'erreur en $H^1(0, L)$ est importante. Il faudrait chercher un correcteur pour le déplacement pour l'améliorer.

Les calculs sont réalisés à l'aide du logiciel Mathematica [28].

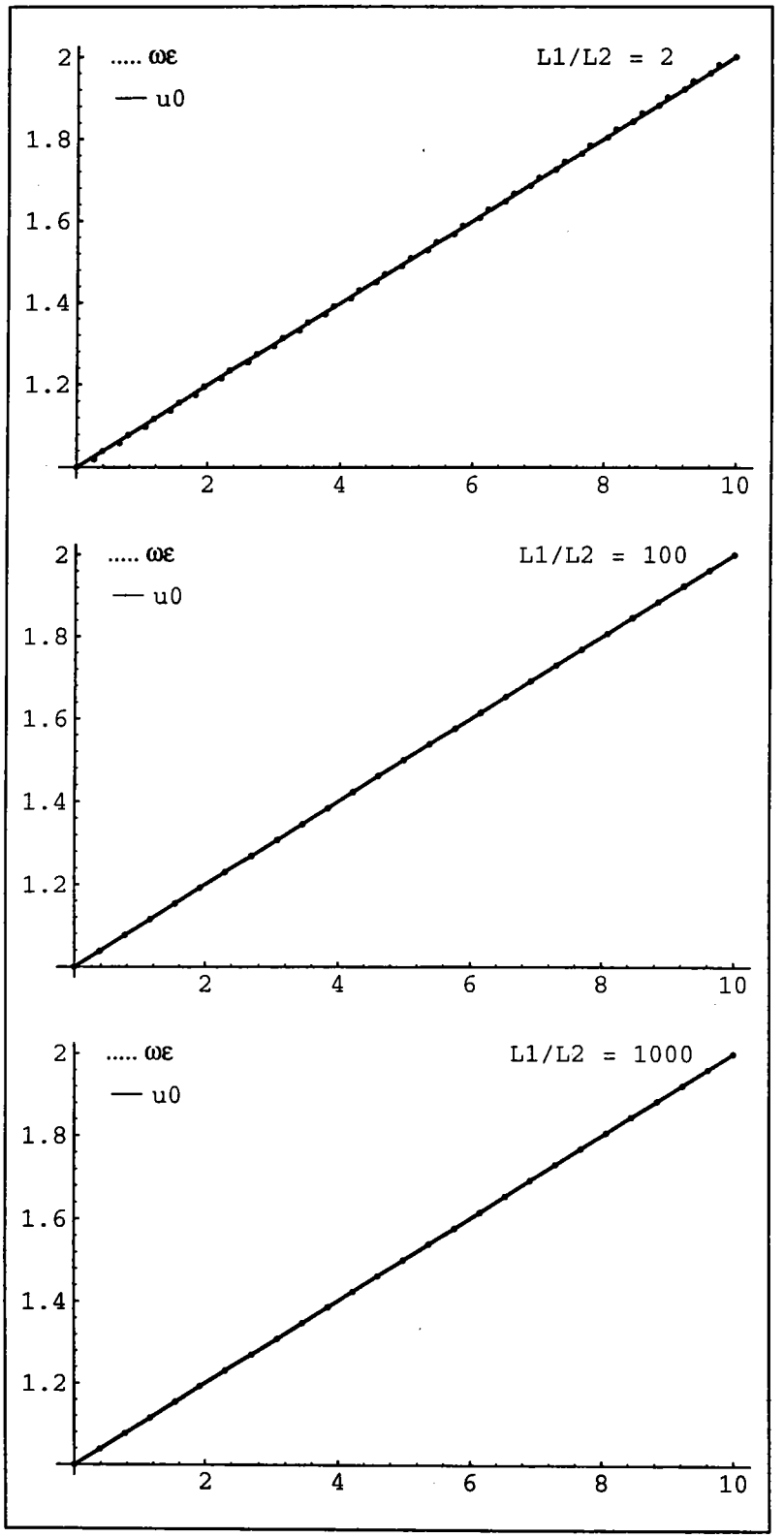


figure 7 : Comparaison de ω_ϵ avec u_0 pour $\frac{A_1}{A_2} = 2$ et $n = 26$.

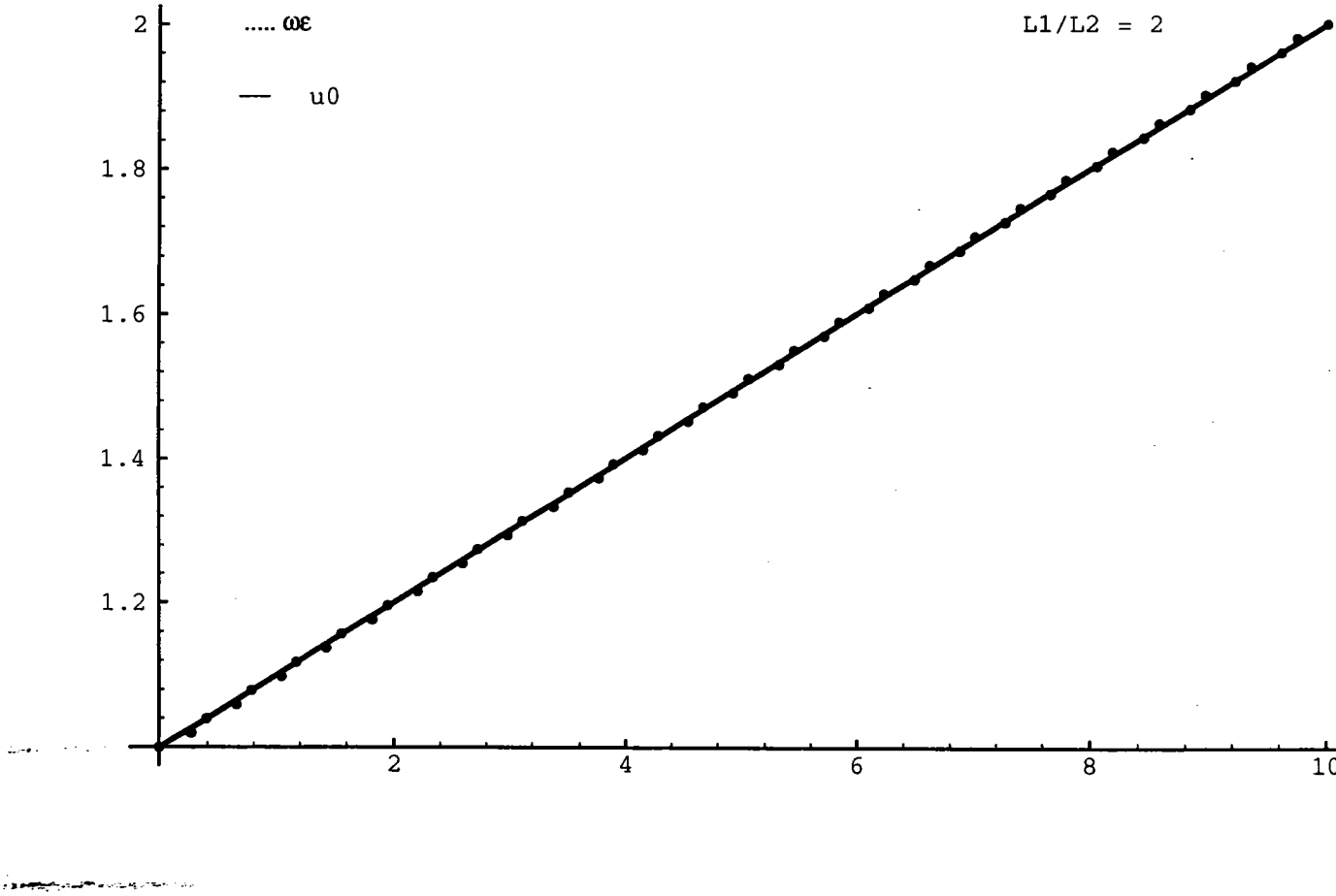


figure 7.a : Zoom du premier graphe de la figure 7.

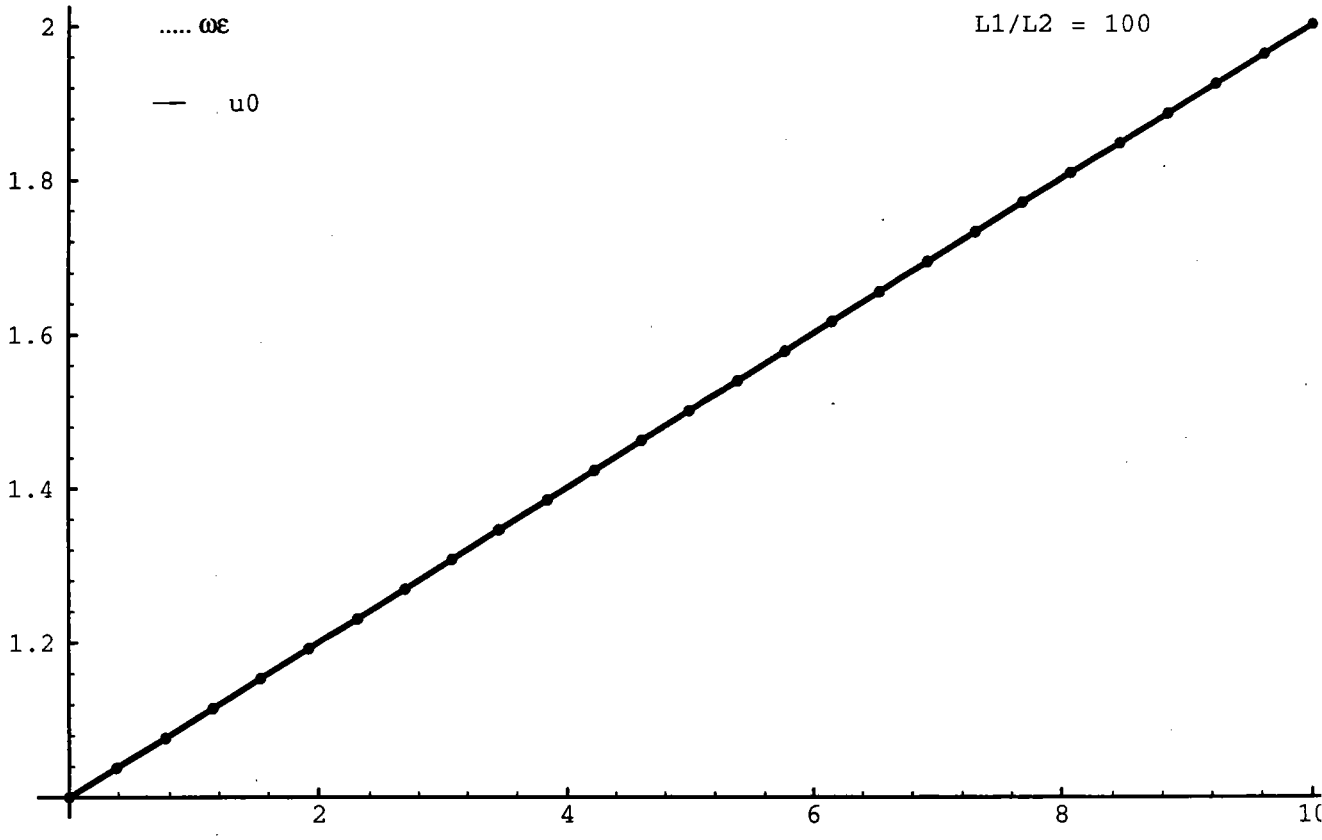


figure 7.b : Zoom du deuxième graphe de la figure 7.

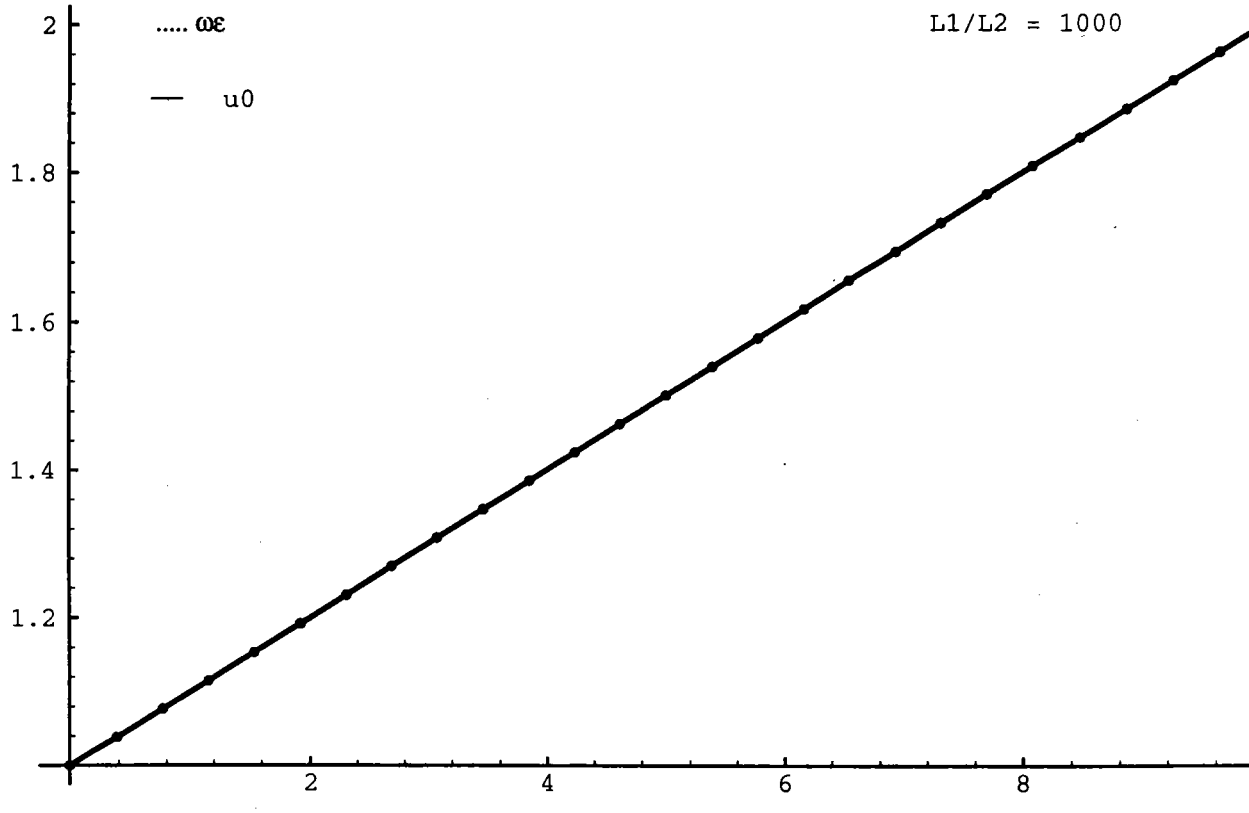


figure 7.c : Zoom du troisième graphe de la figure 7.

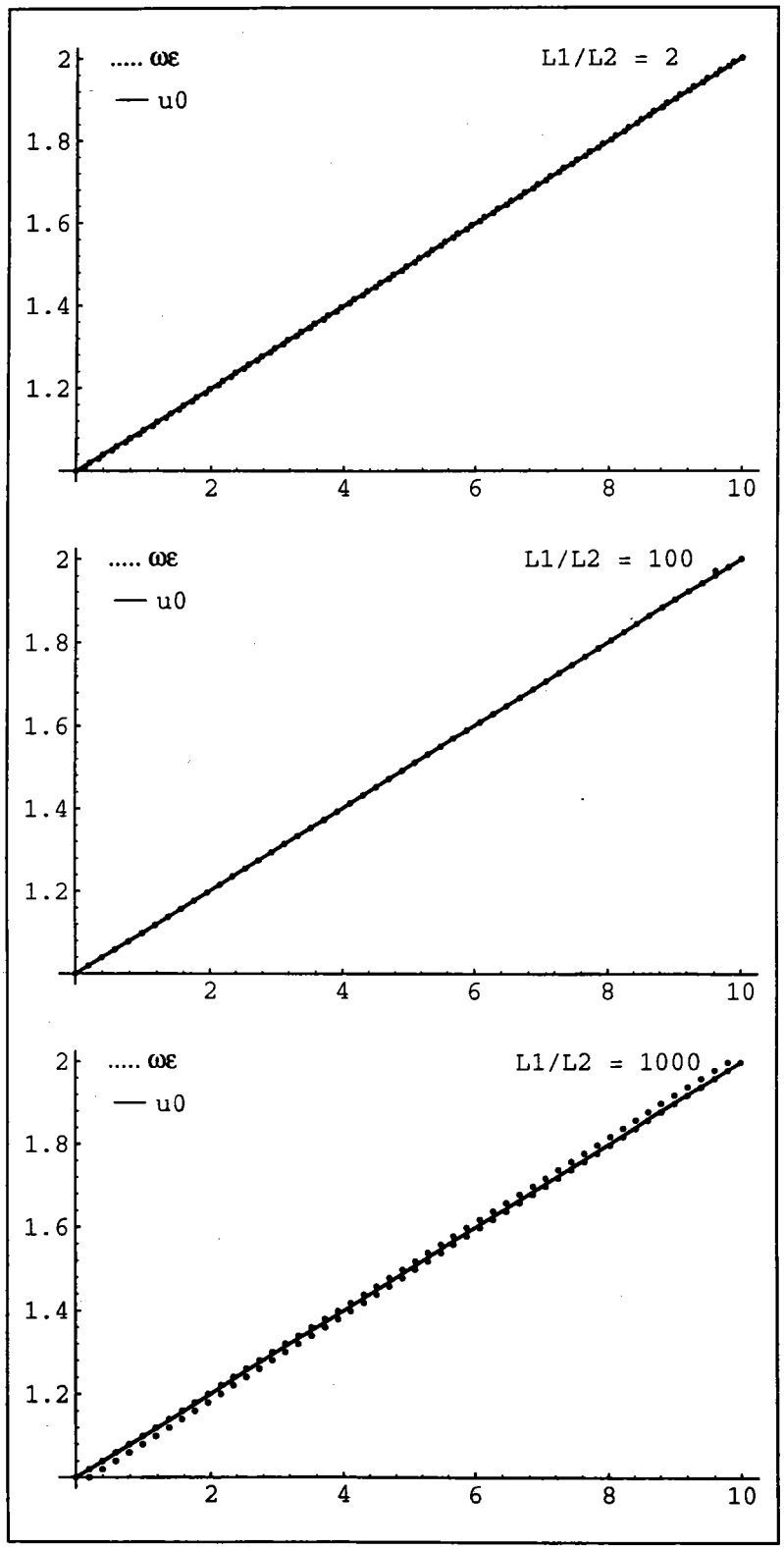


figure 8 : Comparaison de ω_ε avec u_0 pour $\frac{A_1}{A_2} = 2$ et $n = 51$.

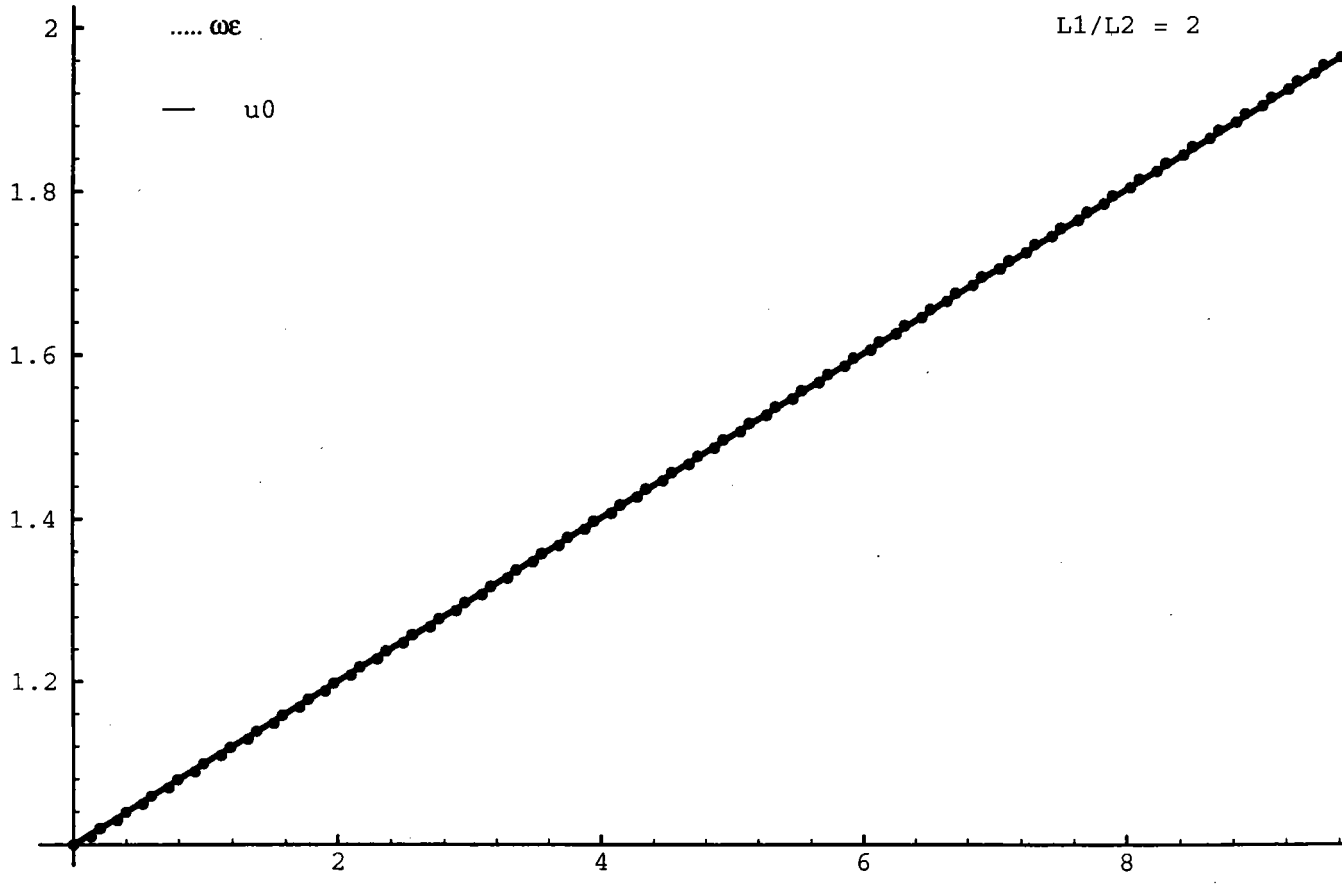


figure 8.a : Zoom du premier graphe de la figure 8.

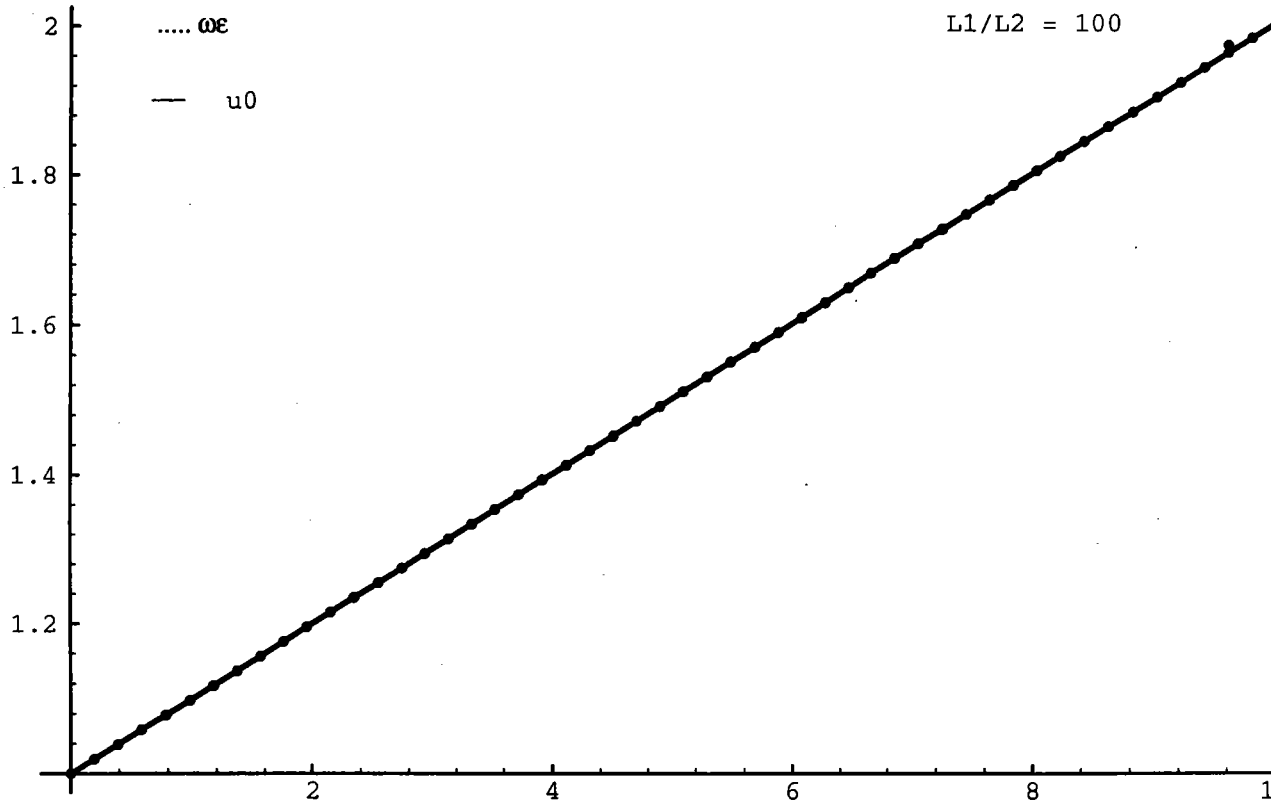


figure 8.b : Zoom du deuxième graphe de la figure 8.

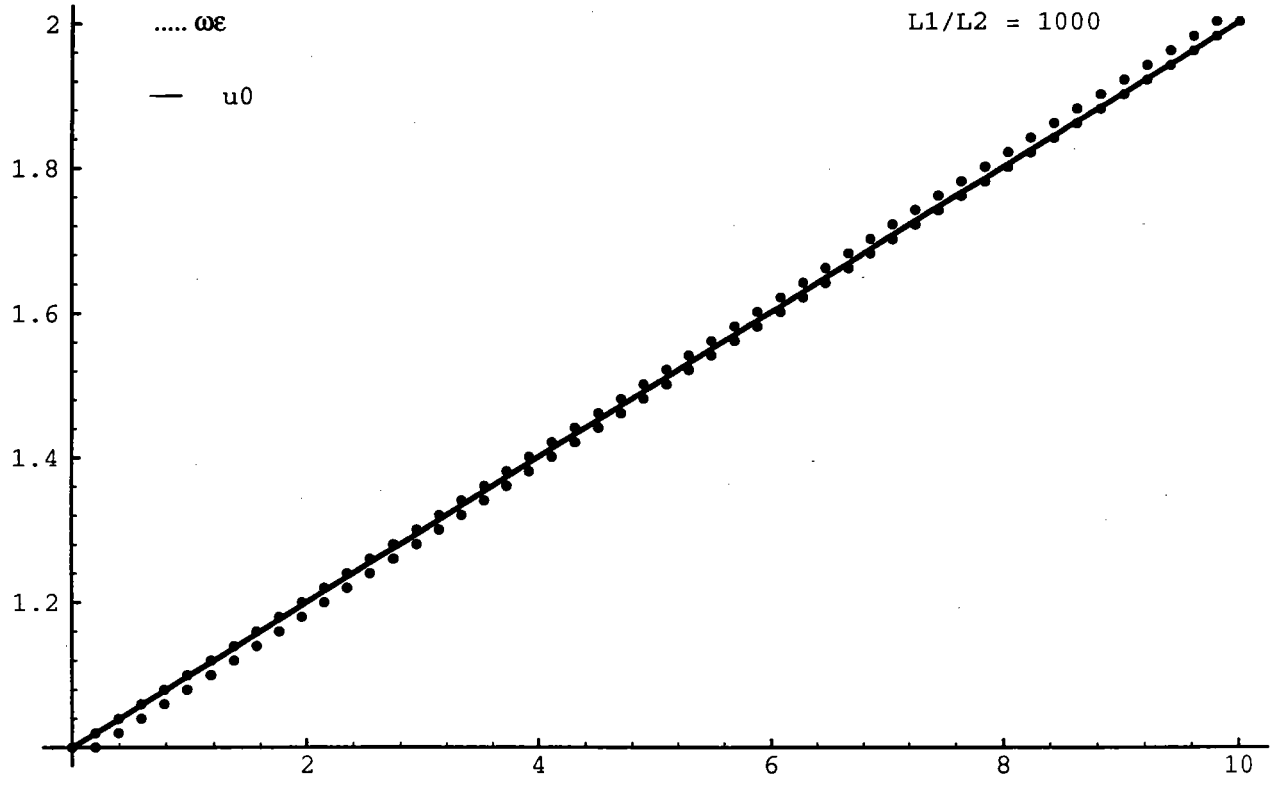


figure 8.c : Zoom du troisième graphe de la figure 8.

	n = 26			n = 51		
$\frac{L_1}{L_2}$	$\sup\lvert \omega_\varepsilon - u_0 \rvert$	$\frac{\lvert \omega_\varepsilon - u_0 \rvert_{L^2}}{\lvert u_0 \rvert_{L^2}}$	$\frac{\lvert \omega_\varepsilon - u_0 \rvert_{H^1}}{\lvert u_0 \rvert_{H^1}}$	$\sup\lvert \omega_\varepsilon - u_0 \rvert$	$\frac{\lvert \omega_\varepsilon - u_0 \rvert_{L^2}}{\lvert u_0 \rvert_{L^2}}$	$\frac{\lvert \omega_\varepsilon - u_0 \rvert_{H^1}}{\lvert u_0 \rvert_{H^1}}$
2	0.00636	0.13613	4.07865	0.00325	0.09691	7.90803
100	0.00035	0.16495	2.84306	0.01017	0.11776	5.39804
1000	0.00003	0.16566	2.82044	0.01954	0.11816	26.3521

Table 1 : Convergence de l' erreur $\omega_\varepsilon - u_0$ pour $\frac{A_1}{A_2} \approx 1$

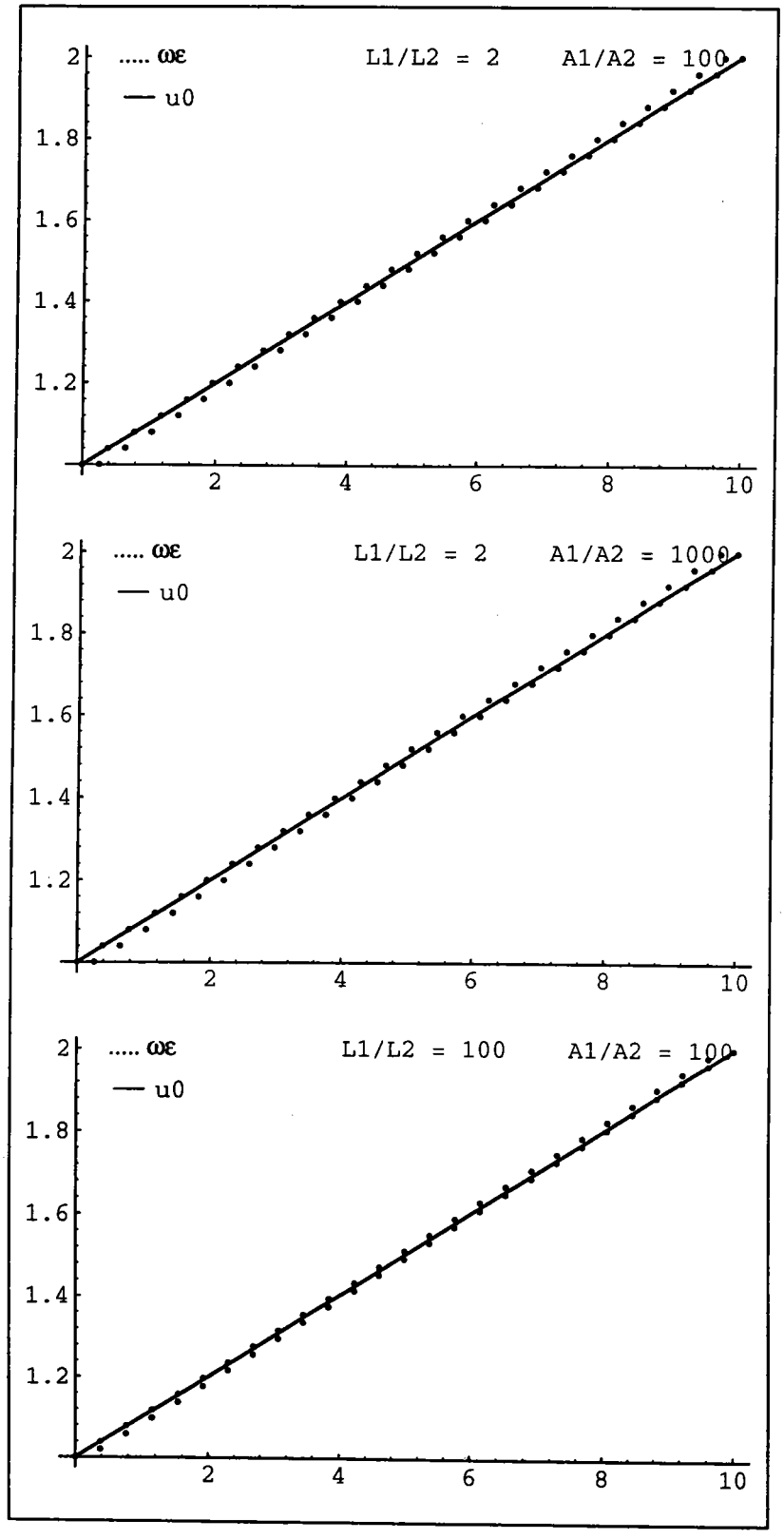


figure 9 : Comparaison de ω_ϵ avec u_0 pour $\frac{A_1}{A_2} >> 1$ et $n = 26$.

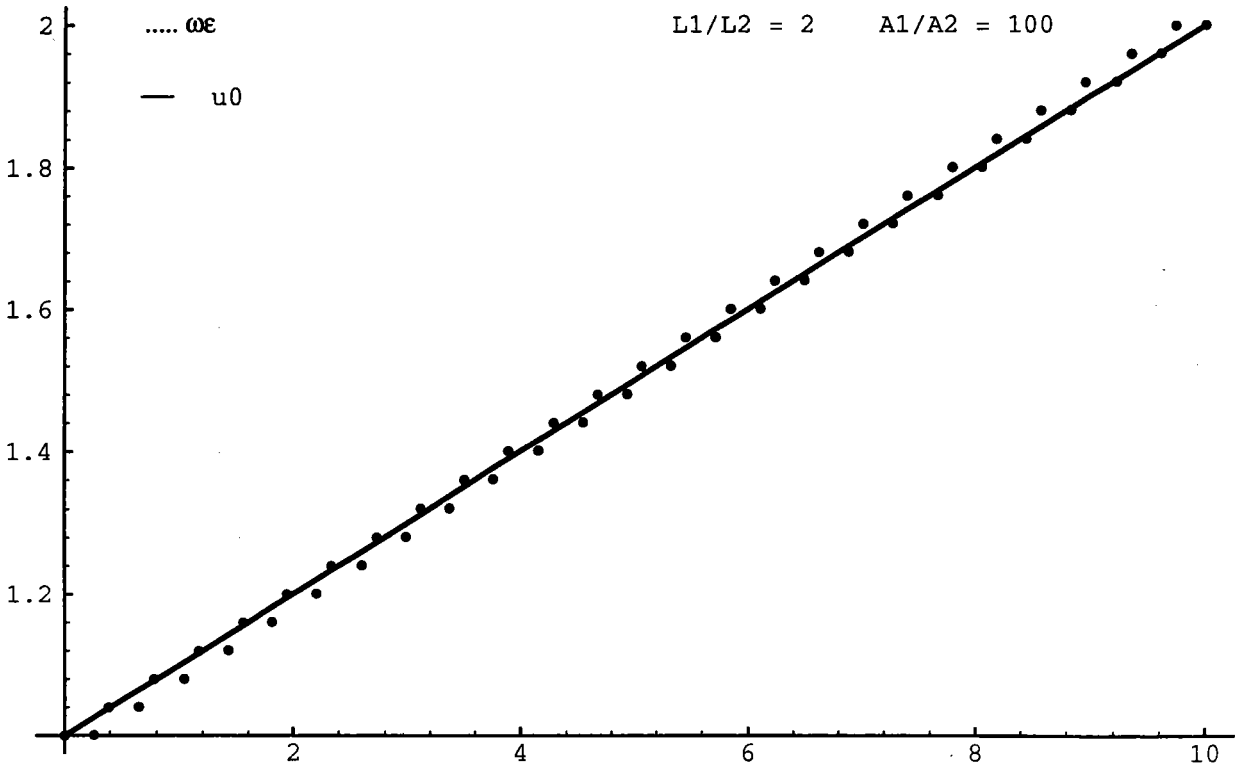


figure 9.a : Zoom du premier graphe de la figure 9.

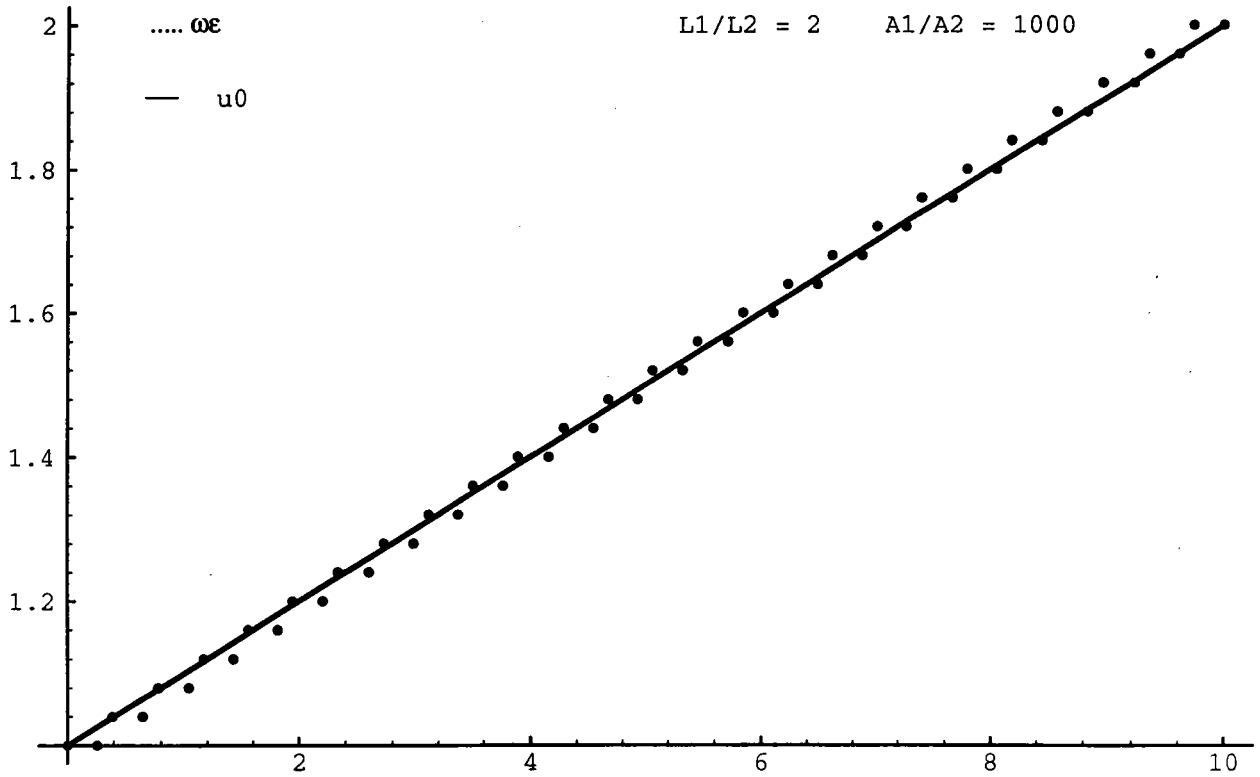


figure 9.b : Zoom du deuxième graphe de la figure 9.

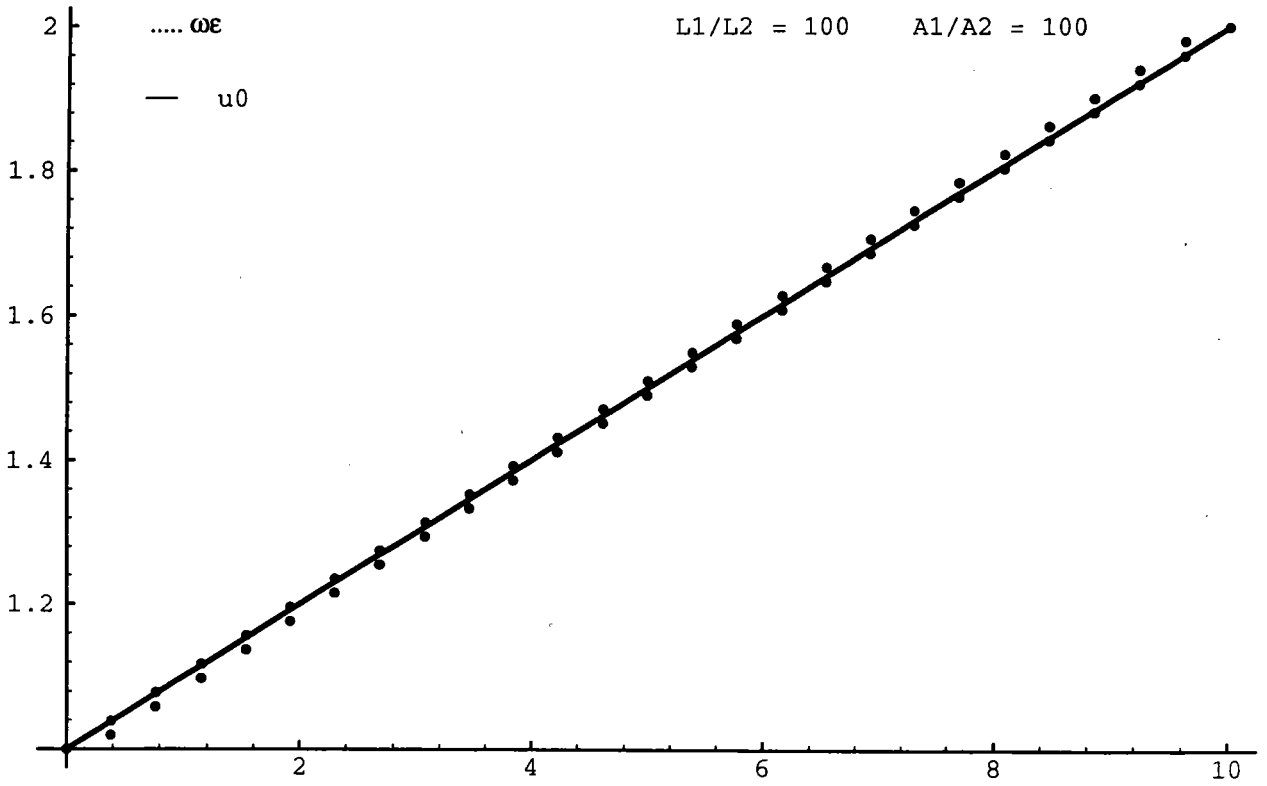


figure 9.c : Zoom du troisième graphe de la figure 9.

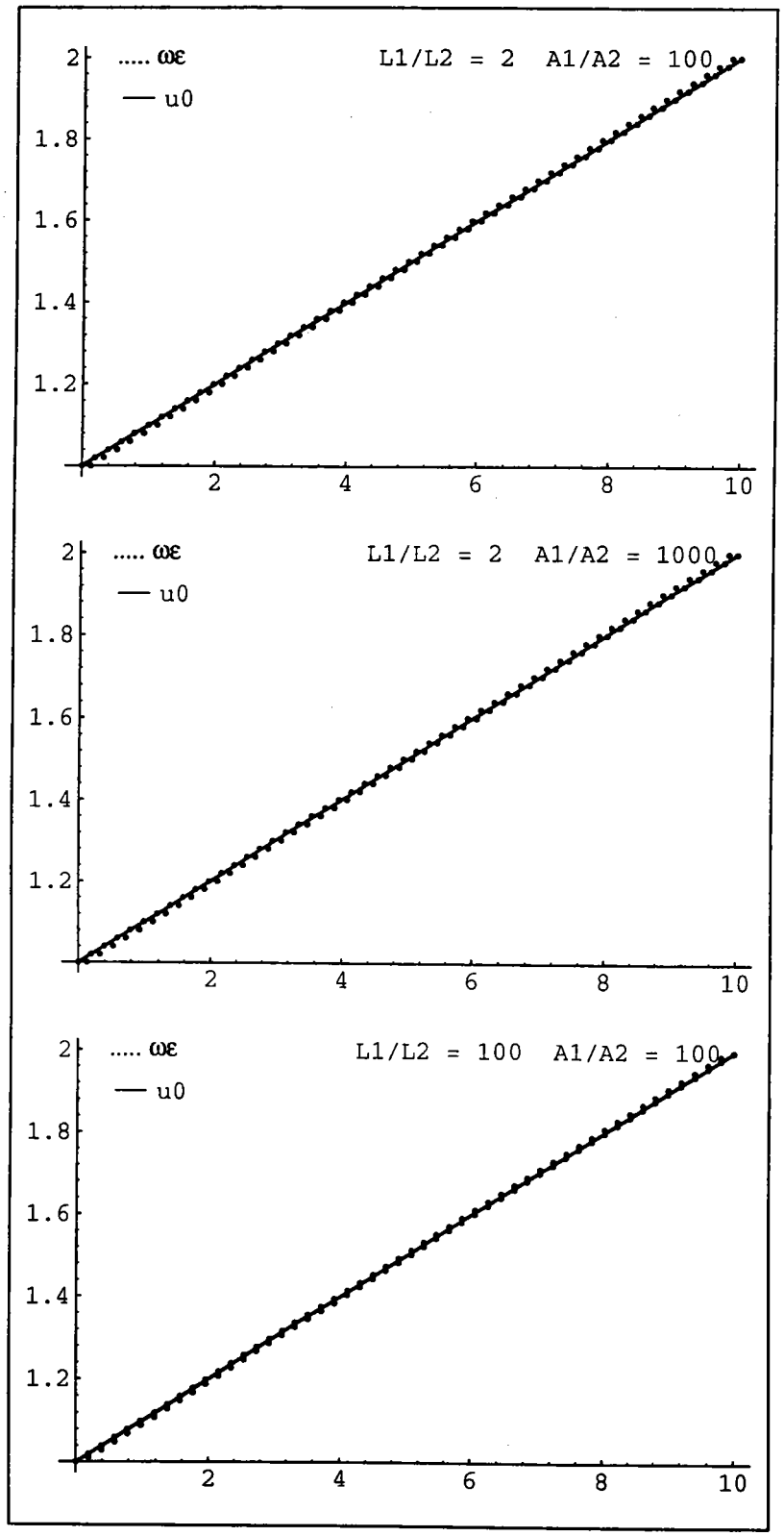


figure 10 : Comparaison de ω_ϵ avec u_0 pour $\frac{A_1}{A_2} >> 1$ et $n = 51$.

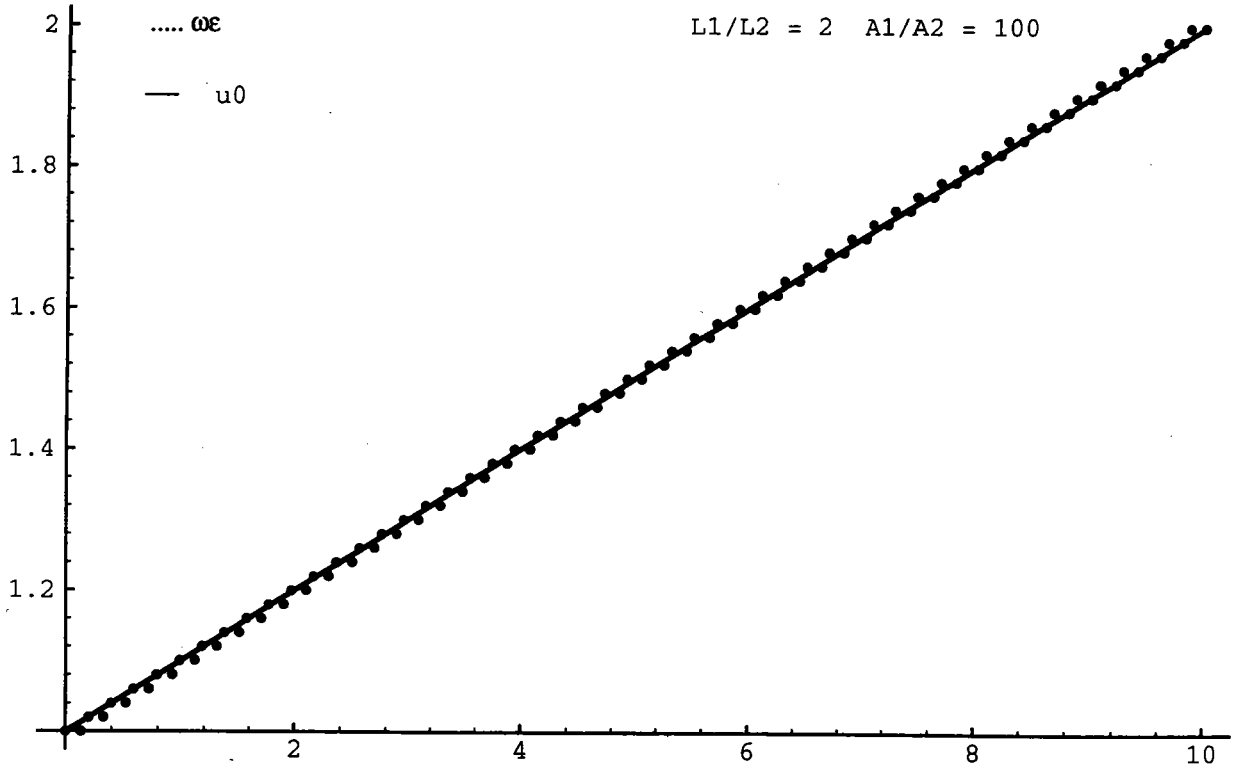


figure 10.a : Zoom du premier graphe de la figure 10.

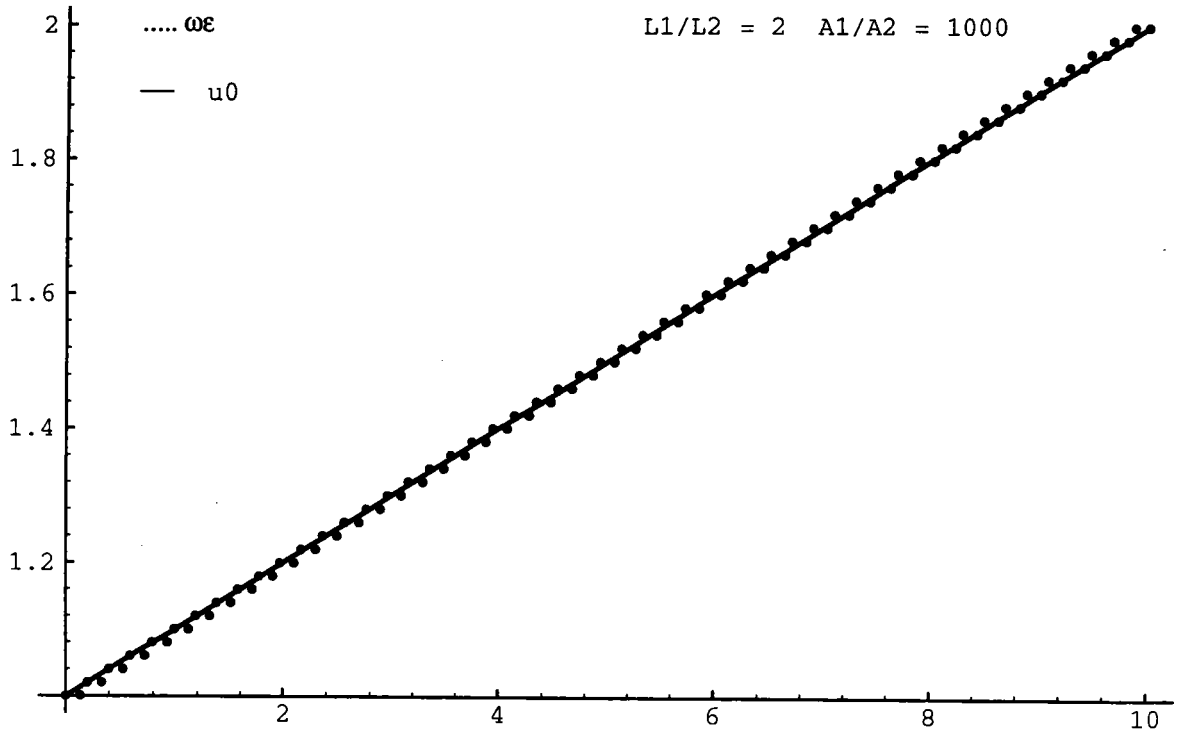


figure 10.b : Zoom du deuxième graphe de la figure 10.

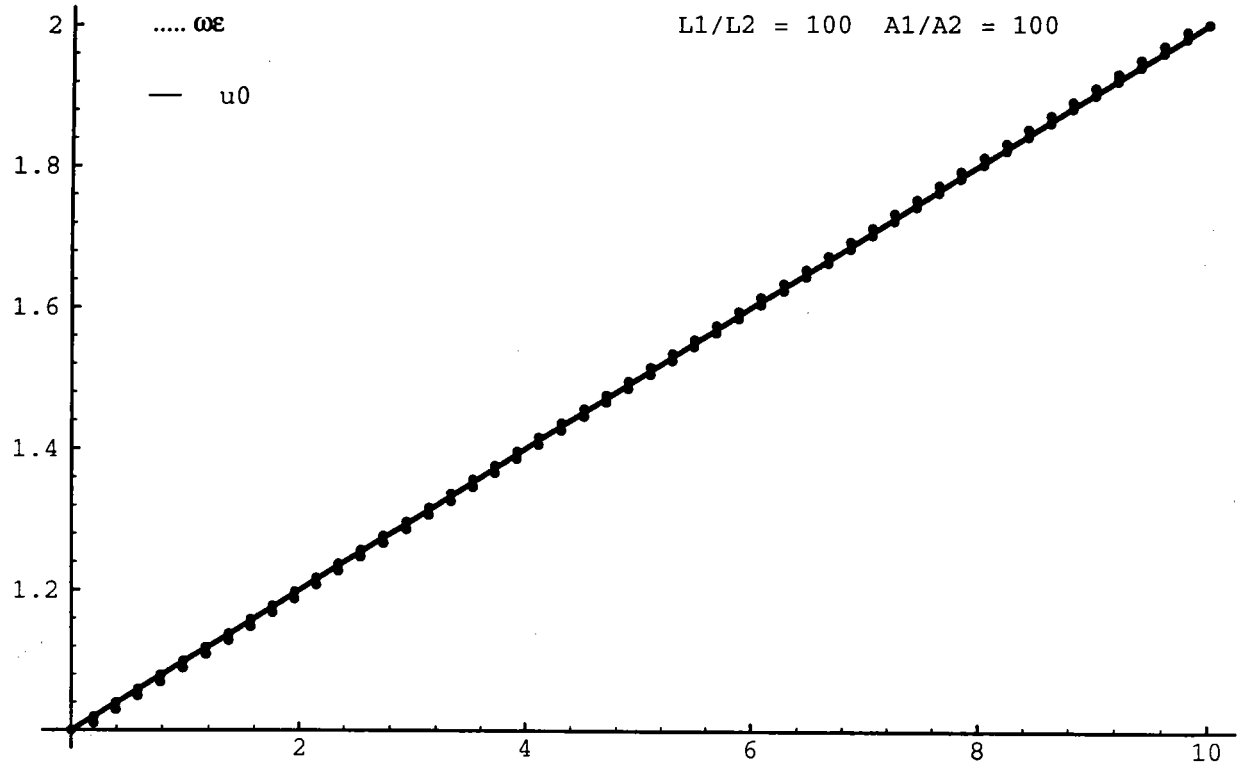


figure 10.c : Zoom du troisième graphe de la figure 10.

		n = 26			n = 51		
$\frac{A_1}{A_2}$	$\frac{L_1}{L_2}$	$\sup\lvert \omega_\varepsilon - u_0 \rvert$	$\frac{\lvert \omega_\varepsilon - u_0 \rvert_{L^2}}{\lvert u_0 \rvert_{L^2}}$	$\frac{\lvert \omega_\varepsilon - u_0 \rvert_{H^1}}{\lvert u_0 \rvert_{H^1}}$	$\sup\lvert \omega_\varepsilon - u_0 \rvert$	$\frac{\lvert \omega_\varepsilon - u_0 \rvert_{L^2}}{\lvert u_0 \rvert_{L^2}}$	$\frac{\lvert \omega_\varepsilon - u_0 \rvert_{H^1}}{\lvert u_0 \rvert_{H^1}}$
100	2	0.02519	0.13603	4.14631	0.01276	0.09688	7.97495
1000	2	0.02589	0.13603	4.14971	0.01311	0.09687	7.97935
100	100	0.01848	0.16472	3.3682	0.00951	0.11768	5.9126

Table 2 : Convergence de l' erreur $\omega_\varepsilon - u_0$ pour $\frac{A_1}{A_2} >> 1$.

DEUXIÉME PARTIE :

HOMOGÉNÉISATION DISCRÉTE : EXEMPLE SIMPLE D'UN TREILLIS BIDIMENSIONNEL

NOTATIONS

$2(n+1)$ $(n \in \mathbb{N}^*)$: nombre de noeuds total de la structure

L : longueur de la structure et des barres horizontales de la cellule de référence

K : longueur de la barre verticale de la cellule de référence

ε : petit paramètre pour l'homogénéisation

j : j est pris dans l'ensemble $\{1,2\}$. Il numérote les noeuds de la cellule élémentaire

l : longueur des barres horizontales dans la cellule courante, soit $l = \varepsilon L$

k : longueur de la barre verticale dans la cellule courante, soit $k = \varepsilon K$

E : module de Young du matériau

A_h, A_b, A_v : section des deux barres horizontales et de la barre verticale respectivement dans la cellule de référence

H, B, V : constantes de rigidité des barres horizontales et verticale repectivement :

$$H = \frac{EA_h}{L}, \quad B = \frac{EA_b}{L}, \quad V = \frac{EA_v}{K}$$

F_a^j, $j \in \{1,2\}$, $a \in \{x,y\}$: la composante suivant l'axe a de la force extérieure au noeud j

$F_{ia}^j = F_a^j(x_i)$: valeur de la force F_a^j au noeud numéro j d'abscisse x_i

$^{(\varepsilon)}u_i^j(x)$: valeur de la i$^{\text{ème}}$ composante du noeud j d'abscisse x

$\lambda_h, \lambda_b, \lambda_v$: les conductivités thermiques des deux barres horizontales et de la barre verticale respectivement dans la cellule de référence

$\tilde{H}$, $\tilde{B}$, $\tilde{V}$: constantes données par :

$$\tilde{H} = \frac{\lambda_h}{L}, \quad \tilde{B} = \frac{\lambda_b}{L}, \quad \tilde{V} = \frac{\lambda_v}{K}$$

f^j, $j \in \{1,2\}$: flux de chaleur au noeud j

$f_i^j = f^j(x_i)$: valeur du flux de chaleur f^j au noeud j d'abscisse x_i

$H^1(0,K)/\mathbb{R}$: espace quotient de $H^1(0,K)$ par $\mathbb{R}$.

INTRODUCTION

Dans cette partie, nous allons justifier la méthode de Verna sur quelques exemples. Nous essayons de trouver un lien entre le système de départ et le problème homogénéisé.

Dans le chapitre I, on étudie les déplacements dans un treillis bidimensionnel. Tout d'abord, on fait une étude mécanique puis on applique la méthode de Verna pour trouver le problème homogénéisé. Dans le paragraphe I.5, on introduit un problème variationnel qu'on approche par une méthode d'éléments finis. On peut identifier le système obtenu par cette approximation au système discret obtenu par Verna par une analyse mécanique. On passe à la limite dans le problème continu et on trouve le même problème homogénéisé.

Dans le chapitre II, on s'interesse à la même structure du point de vue thermique. On fait une approximation du problème par la méthode de Galerkin, puis on applique la méthode de Verna pour les équations en partie courante du système. On obtient ainsi un problème homogénéisé qu'on justifie en passant à la limite dans les équations de départ.

Ceci justifie dans un sens la méthode de Verna.

I. UN PROBLEME D'ELASTICITE D'UN TREILLIS BIDIMENSIONNEL

I.1 . Présentation géomètrique :

La structure que l'on étudie est celle décrite par la figure 1 ci-dessous :

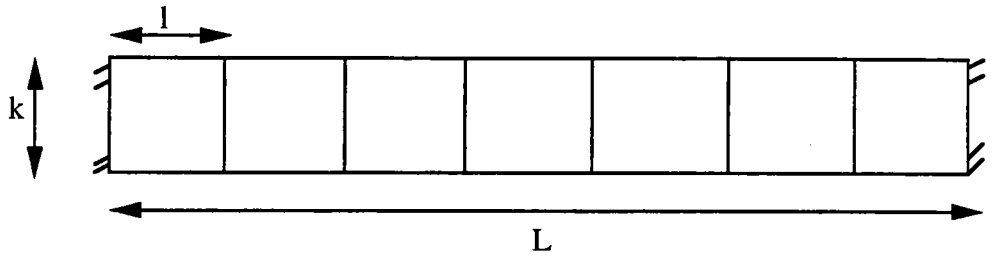


figure 1

Elle est composée de cellules identiques homothétiques de rapport ε à une cellule de référence.

Soient l la longueur de base de la cellule courante, k sa hauteur , $(n+1)$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ le nombre de cellules élémentaires de la structure, ε le petit paramètre $\varepsilon = \dfrac{1}{n+1}$.

On définit la cellule de référence (voir figure 2) comme suit : L, K les dimensions correspondantes avec : $l = \varepsilon L \quad , \quad k = \varepsilon K$.

Il y a 2 noeuds (1 et 2) et 3 barres dans la cellule courante.

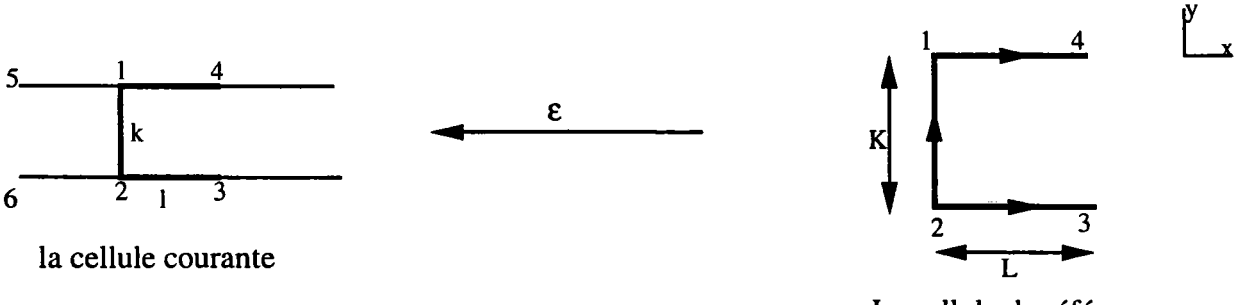


figure 2

I.2 . **Présentation mécanique** :

Toutes les barres de la cellule de référence ont des rigidités différentes. On suppose le même milieu élastique linéaire avec de petites déformations pour les barres et de petits déplacements pour les noeuds.

Lois de comportements des barres : Les tensions dans les barres sont :

barres	Origine	extrémité	tension
	1	4	$h^{\varepsilon,14}$
	2	1	$v^{\varepsilon,21}$
	2	3	$b^{\varepsilon,23}$

Les tensions dans les différentes barres sont liées aux déplacements par les relations ci-dessous :

$$h^{\varepsilon,14} = H.(u_1^{\varepsilon,4} - u_1^{\varepsilon,1})$$
$$b^{\varepsilon,23} = B.(u_1^{\varepsilon,3} - u_1^{\varepsilon,2})$$
$$v^{\varepsilon,21} = V.(u_2^{\varepsilon,1} - u_2^{\varepsilon,2}).$$

La direction des tensions est celle des barres.

Forces extérieures : Le calcul asymptotique montre que les forces extérieures doivent être en :

- ε^2 pour les forces extérieures horizontales
- ε pour les forces extérieures verticales .

Conditions aux limites : On impose les déplacements nuls sur les bords latéraux.

Equilibre de la structure : La structure étant répétitive, écrire les équations d'équilibre de la stucture revient à écrire l'équilibre de la cellule courante.

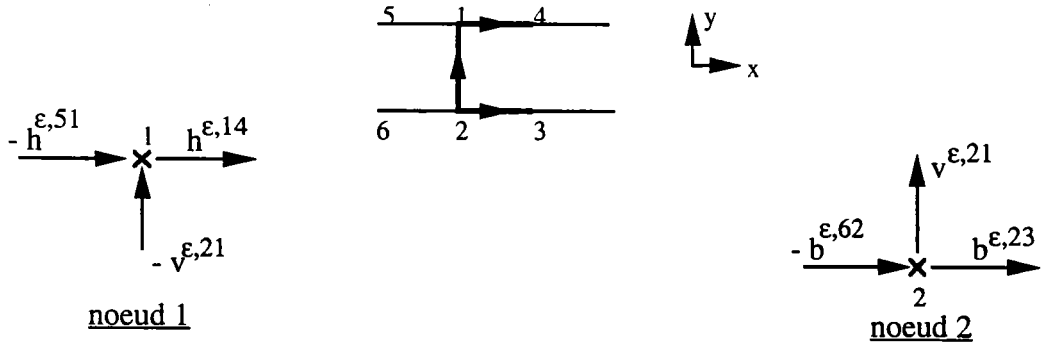


figure 3 : Numérotation des noeuds autour de la cellule courante. Signe positif des tensions.

Les équations d'équilibre de la cellule courante sont :

$$(1x.\varepsilon) \qquad -h^{\varepsilon,51} + h^{\varepsilon,14} + \varepsilon^2 F_x^1 = 0$$
$$(1y.\varepsilon) \qquad -v^{\varepsilon,21} + \varepsilon F_y^1 = 0$$
$$(2x.\varepsilon) \qquad -b^{\varepsilon,62} + b^{\varepsilon,23} + \varepsilon^2 F_x^2 = 0$$
$$(2y.\varepsilon) \qquad v^{\varepsilon,21} + \varepsilon F_y^2 = 0$$

où $F_a^j \quad j \in \{1,2\} \quad a \in \{x,y\}$ est la composante suivant l'axe a de la force extérieure au noeud j

I.3 . **Problème aux différences discrètes** :

Ecriture du problème discret :

On écrit le problème précédent à l'aide des fonctions tensions $h^\varepsilon, b^\varepsilon$ et v^ε. On désigne par : ${}^\varepsilon u_i^j(x_M)$ la composante i du noeud j d'abscisse x_M.

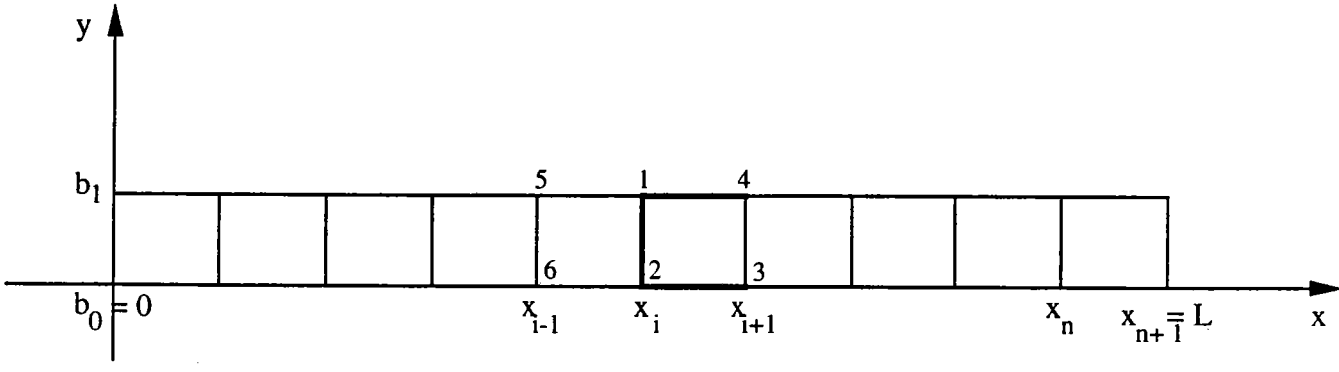


figure 4

Les lois de comportement s'écrivent :

$$\begin{aligned} h^\varepsilon(x_i) &= H.({}^\varepsilon u_1^1(x_{i+1}) - {}^\varepsilon u_1^1(x_i)) \\ b^\varepsilon(x_i) &= B.({}^\varepsilon u_1^2(x_{i+1}) - {}^\varepsilon u_1^2(x_i)) \\ v^\varepsilon(x_i) &= V.({}^\varepsilon u_2^1(x_i) - {}^\varepsilon u_2^2(x_i)). \end{aligned}$$

Les équations d'équilibre en partie courante : $i = 1, ..., n$

$$\begin{aligned} &(1x.\varepsilon) && -h^\varepsilon(x_{i-1}) + h^\varepsilon(x_i) + \varepsilon^2 F_x^1(x_i) = 0 \\ &(1y.\varepsilon) && -v^\varepsilon(x_i) + \varepsilon F_y^1(x_i) = 0 \\ &(2x.\varepsilon) && -b^\varepsilon(x_{i-1}) + b^\varepsilon(x_i) + \varepsilon^2 F_x^2(x_i) = 0 \\ &(2y.\varepsilon) && v^\varepsilon(x_i) + \varepsilon F_y^2(x_i) = 0. \end{aligned} \qquad x_i = i\varepsilon L$$

Les conditions limites :

$$\begin{aligned} {}^\varepsilon u_1^1(x_0) = {}^\varepsilon u_1^2(x_0) = 0 \\ {}^\varepsilon u_1^1(x_n) = {}^\varepsilon u_1^2(x_n) = 0. \end{aligned}$$

Existence et unicité du problème discret :

On remplace les tensions par leurs expressions et on écrit les équations précédentes sous forme matricielle. Tout d'abord, on remarque qu'une condition nécéssaire d'existence est que les forces extérieures satisfassent :

$$F_y^1 + F_y^2 = 0.$$

D'autre part, on constate que les équations du système se découplent et le problème revient à résoudre :

$$
(1)\quad
\begin{cases}
2B^{(\varepsilon)}u_1^2(x_1) \;-B^{(\varepsilon)}u_1^2(x_2) \;= \varepsilon^2 F_{1x}^2 \\
\quad\ddots \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad \ddots \\
-B^{(\varepsilon)}u_1^2(x_{i-1}) \;+2B^{(\varepsilon)}u_1^2(x_i) \;-B^{(\varepsilon)}u_1^2(x_{i+1}) \;= \varepsilon^2 F_{ix}^2 \qquad 2 \le i \le n-1 \\
\quad\ddots \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad \ddots \\
-B^{(\varepsilon)}u_1^2(x_{n-2}) \;+2B^{(\varepsilon)}u_1^2(x_{n-1}) \;= \varepsilon^2 F_{nx}^2 \\
\\
2H^{(\varepsilon)}u_1^1(x_1) \;-H^{(\varepsilon)}u_1^1(x_2) \;= \varepsilon^2 F_{1x}^2 \\
\quad\ddots \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad \ddots \\
-H^{(\varepsilon)}u_1^1(x_{i-1}) \;+2H^{(\varepsilon)}u_1^1(x_i) \;-H^{(\varepsilon)}u_1^1(x_{i+1}) \;= \varepsilon^2 F_{ix}^1 \qquad 2 \le i \le n-1 \\
\quad\ddots \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad \ddots \\
-H^{(\varepsilon)}u_1^1(x_{n-2}) \;+2H^{(\varepsilon)}u_1^1(x_{n-1}) \;= \varepsilon^2 F_{nx}^1 \\
\\
v^\varepsilon(x_i) = V({}^{(\varepsilon)}u_2^1(x_i) - {}^{(\varepsilon)}u_2^2(x_i)) = \varepsilon F_y^2 \qquad 1 \le i \le n
\end{cases}
$$

où $\qquad F_{ia}^j = F_a^j(x_i) \qquad j \in \{1,2\} \quad a \in \{x,y\} \quad i \in \{1,n\}.$

Ce système n'admet pas une unique solution en déplacement. On a unicité des composantes ${}^{(\varepsilon)}u_1^1$, ${}^{(\varepsilon)}u_1^2$ et la tension v^ε est connue explicitement.

I.4 . Ecriture d'un problème d'homogénéisation : méthode de Verna

Nous allons chercher les déplacements solution du problème sous la forme :

$$
{}^{(\varepsilon)}u_i^j(x) = \sum_{\alpha=0}^{+\infty} \varepsilon^{\alpha(\alpha)}u_i^j(x)
$$

avec

j : le numéro de la famille auquel le noeud appartient

i : la $i^{ème}$ composante du déplacement

${}^{(\alpha)}u_i^j$: le déplacement d'ordre α du noeud d'abscisse x.

Vu les relations liants tension et déplacements, on cherche les tensions $f^\varepsilon \in \{h^\varepsilon, b^\varepsilon, v^\varepsilon\}$ sous la forme :

$$
f^\varepsilon(x) = \sum_{\alpha=0}^{+\infty} \varepsilon^{\alpha(\alpha)}f(x)
$$

avec x une abscisse de référence, ici elle coïncide avec l'origine de la barre.

On suppose la note 2 de la première partie et des hypothèses de régularité des tensions et des déplacements.

Ecriture des lois de comportements :

$$
\begin{aligned}
h^\varepsilon(x) &= H.({}^\varepsilon u_1^1(x+\varepsilon L) - {}^\varepsilon u_1^1(x)) \\
b^\varepsilon(x) &= B.({}^\varepsilon u_1^2(x+\varepsilon L) - {}^\varepsilon u_1^2(x)) \\
v^\varepsilon(x) &= V.({}^\varepsilon u_2^1(x) - {}^\varepsilon u_2^2(x)).
\end{aligned}
$$

Lois de comportements : identification à un ordre quelconque

On remplace les déplacements et les tensions par leurs développement asymptotique. On utilise la formule de Taylor puis, on identifie formellement suivant les puissances de ε. Les tensions dans les tiges à l'ordre α s'écrivent :

$$
\begin{aligned}
{}^{(\alpha)}h(x) &= H \sum_{\beta=1}^{\alpha} \frac{L^\beta}{\beta\,!} \frac{d^\beta}{dx^\beta} {}^{(\alpha-\beta)}u_1^1 \\
{}^{(\alpha)}b(x) &= B \sum_{\beta=1}^{\alpha} \frac{L^\beta}{\beta\,!} \frac{d^\beta}{dx^\beta} {}^{(\alpha-\beta)}u_1^2 \\
{}^{(\alpha)}v(x) &= V({}^{(\alpha)}u_2^1(x) - {}^{(\alpha)}u_2^2(x)).
\end{aligned}
$$

Equations d'équilibre en partie courante : identification à un ordre quelconque

En procédant comme ci dessus, les équations aux noeuds identifiées à chaque ordre s'écrivent :

$$
\begin{aligned}
(1x) \quad & - \sum_{\beta=1}^{\alpha} \frac{(-L)^\beta}{\beta\,!} \frac{d^\beta}{dx^\beta} {}^{(\alpha-\beta)}h(x) + \delta_{\alpha 2} F_x^1 = 0 \\
(1y) \quad & - {}^{(\alpha)}v(x) + \delta_{\alpha 1} F_y^1 = 0 \\
(2x) \quad & - \sum_{\beta=1}^{\alpha} \frac{(-L)^\beta}{\beta\,!} \frac{d^\beta}{dx^\beta} {}^{(\alpha-\beta)}b(x) + \delta_{\alpha 2} F_x^2 = 0 \\
(2y) \quad & - {}^{(\alpha)}v(x) + \delta_{\alpha 1} F_y^2 = 0.
\end{aligned}
$$

Obtention du comportement macroscopique de la structure :

On exploite les équations d'équilibre à l'ordre α et les lois de comportement à l'ordre α. On trouve le problème suivant donnant le comportement macroscopique de la structure :

$$
(2) \qquad \begin{cases}
- HL^2 \dfrac{d^2}{dx^2}({}^{(0)}u_1^1) = F_x^1 \\
{}^{(0)}u_1^1(0) = {}^{(0)}u_1^1(L) = 0 \\
\\
- BL^2 \dfrac{d^2}{dx^2}({}^{(0)}u_1^2) = F_x^2 \\
{}^{(0)}u_1^2(0) = {}^{(0)}u_1^2(L) = 0 \\
\\
{}^{(0)}v(x) = F_y^1.
\end{cases}
$$

I.5 . Comparaison du problème discret et du problème homogénéisé :

Le but de ce paragraphe est de trouver un lien entre la solution discrète du problème (1) et de la solution continue du problème (2), dite solution du problème homogénéisé.

Pour se faire, on introduit dans la partie A un problème (P), puis, on l'approche par une méthode d'éléments finis dans la partie B. Le problème approché obtenu coïncide avec le système (1). La partie C répond alors à notre question.

A. Etude d'un problème continu

L'idée d'un tel modèle vient des papiers de Griso [11].

Notations : On pose :

$$b_0 = 0$$
$$b_1 = \varepsilon K$$
$$R_\varepsilon = \left(\cup_{i=1}^{n} \{x_i\}\times]0, K[\right) \cup \left(\cup_{j=0}^{1}]0, L[\times\{b_j\}\right).$$

L'ensemble R_ε désigne l'ensemble des barres de la structure privé des deux barres latérales.

On désigne par :

v_0^ε , v_1^ε les déplacements dans les barres horizontales inférieures et supérieures respectivement.
$(u_i^\varepsilon)_{i=1}^n$ les déplacements dans les barres verticales d'abscisse $x = x_i$.

On introduit alors l'espace :

$$H^1(R_\varepsilon) = \left\{ U^\varepsilon = ((u_i^\varepsilon)_{i=1}^n\ ;\ v_0^\varepsilon, v_1^\varepsilon) \in \left(H^1(0,\varepsilon K)/\mathbb{R}\right)^n \times (H_0^1(0,L))^2 \right\}.$$

C'est un espace de Hilbert pour la norme :

$$\|U^\varepsilon\|_{H^1(R_\varepsilon)} = \left(\left|\frac{dv_0^\varepsilon}{dx}\right|^2_{L^2(0,L)} + \left|\frac{dv_1^\varepsilon}{dx}\right|^2_{L^2(0,L)} + \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{du_i^\varepsilon}{dy}\right|^2_{L^2(0,\varepsilon K)} \right)^{1/2}$$

Le problème (P) : On considère le problème suivant :

$$(P) \qquad \begin{cases} \text{Trouver } U^\varepsilon \in H^1(R_\varepsilon) \text{ tel que :} \\ \displaystyle\int_{R_\varepsilon} ES^\varepsilon \partial U^\varepsilon \partial W = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}^1 u_i'(b_1) + \sum_{i=1}^{n} F_{iy}^2 u_i'(b_0) + \varepsilon\Big(\sum_{i=1}^{n} F_{ix}^2 v_0'(x_i) + \sum_{i=1}^{n} F_{ix}^1 v_1'(x_i) \Big) \\ \quad \forall W = ((u_i')_{i=1}^n\ ;\ v_0', v_1') \in H^1(R_\varepsilon). \end{cases}$$

où $$S^\varepsilon = \begin{cases} A_b & \text{pour les barres inférieures} \\ A_h & \text{pour les barres supérieures} \\ A_v & \text{pour les barres verticales} \end{cases}$$

A_b, A_h et A_v désignent les sections des barres de la cellule de référence.

$$\int_{R_\varepsilon} ES^\varepsilon \partial U^\varepsilon \partial W = \int_0^L EA_b \frac{dv_0^\varepsilon}{dx}\frac{dv_0'}{dx} + \int_0^L EA_h \frac{dv_1^\varepsilon}{dx}\frac{dv_1'}{dx} + \sum_{i=1}^{n} \int_0^{\varepsilon K} EA_v \frac{du_i^\varepsilon}{dy}\frac{du_i'}{dy}.$$

On suppose que : $F_{iy}^1 = F_y^1(x_i)$, $F_{ix}^1 = F_x^1(x_i)$, $F_{iy}^2 = F_y^2(x_i)$, $F_{ix}^2 = F_x^2(x_i)$

avec $F_y^1, , F_x^1$ et F_x^2 sont des fonctions continues.

On suppose aussi que : $F_y^1 + F_y^2 = 0$.

Sous ces hypothèses, d'après le théorème de Lax-Milgram, le problème (P) admet une unique solution.

Interprètation du problème (P) :

On remarque que le problème (P) se découple en les problèmes ci-dessous :

$(P_{v_0^\varepsilon})$
$$\begin{cases} \text{Trouver } v_0^\varepsilon \in H_0^1(0,L) \text{ tel que :} \\ \displaystyle\int_0^L EA_h \frac{dv_0^\varepsilon}{dx}\frac{dv_0'}{dx} = \varepsilon \sum_{i=1}^n F_{ix}^2 v_0'(x_i) \qquad \forall v_0' \in H_0^1(0,L) \end{cases}$$

$(P_{v_1^\varepsilon})$
$$\begin{cases} \text{Trouver } v_1^\varepsilon \in H_0^1(0,L) \text{ tel que :} \\ \displaystyle\int_0^L EA_h \frac{dv_1^\varepsilon}{dx}\frac{dv_1'}{dx} = \varepsilon \sum_{i=1}^n F_{ix}^1 v_1'(x_i) \qquad \forall v_1' \in H_0^1(0,L) \end{cases}$$

$(P_{u_i^\varepsilon})_{1\le i\le n}$
$$\begin{cases} \text{Trouver } u_i^\varepsilon \in H^1(0,\varepsilon K)/\mathbb{R} \text{ tel que :} \\ \displaystyle\int_0^{\varepsilon K} EA_v \frac{du_i^\varepsilon}{dy}\frac{du_i'}{dy} = F_{iy}^1 u_i'(b_1) + F_{iy}^2 u_i'(b_0) \qquad \forall u_i' \in H^1(0,\varepsilon K)/\mathbb{R}. \end{cases}$$

On déduit alors que $U^\varepsilon = \big((u_i^\varepsilon)_{i=1}^n\,;\, v_0^\varepsilon, v_1^\varepsilon\big)$ est solution de :

(S)
$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\Big(EA_h \dfrac{dv_0^\varepsilon}{dx}\Big) = \displaystyle\sum_{i=1}^n \varepsilon F_{ix}^2 \delta_{x_i} \qquad \text{sur }]0,L[\\ v_0^\varepsilon(0) = v_0^\varepsilon(L) = 0 \\ \\ -\dfrac{d}{dx}\Big(EA_h \dfrac{dv_1^\varepsilon}{dx}\Big) = \displaystyle\sum_{i=1}^n \varepsilon F_{ix}^1 \delta_{x_i} \qquad \text{sur }]0,L[\\ v_1^\varepsilon(0) = v_1^\varepsilon(L) = 0 \\ \delta_{x_i} \text{ est la masse de Dirac au point } x_i \\ \\ -\dfrac{d}{dx}\Big(EA_v \dfrac{du_i^\varepsilon}{dy}\Big) = 0 \qquad \text{sur }]0,\varepsilon K[\qquad 1 \le i \le n \\ EA_v \dfrac{du_i^\varepsilon}{dy}(b_1^-) = EA_v \dfrac{du_i^\varepsilon}{dy}(b_0^+) = F_{iy}^1. \end{cases}$$

Remarque I.5.1 : Les u_i^ε sont donnés explicitement à une constante près par

$$u_i^\varepsilon = \frac{F_{iy}^1}{EA_v} y.$$

Estimation à priori :

. Prenons $v_0' = v_0$ dans $(P_{v_0^\varepsilon})$, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^L EA_h \Big(\frac{dv_0^\varepsilon}{dx}\Big)^2 &= \frac{1}{L}\sum_{i=0}^n (x_{i+1}-x_i) F_x^2(x_i) v_0(x_i) \\ &\le c|v_0^\varepsilon|_{C^0([0,L])} \sum_{i=0}^n (x_{i+1}-x_i)|F_x^2(x_i)| \\ &\le c'|v_0^\varepsilon|_{H_0^1(0,L)} \end{aligned}$$

car $\quad H^1(0,L) \hookrightarrow C^0([0,L]) \quad$ et $\quad \displaystyle\sum_{i=0}^n (x_{i+1}-x_i)|F_x^2(x_i)| \longrightarrow \int_0^L |F_x^2(x_i)|dx$

donc

(3)
$$\left| \begin{array}{l} |v_0|_{H_0^1(0,L)} \leq c \\ \text{avec } c \text{ une constante indépendante de } \varepsilon. \end{array} \right.$$

. De même, on vérifie que :

(4)
$$\left| \begin{array}{l} |v_1|_{H_0^1(0,L)} \leq c \\ \text{avec } c \text{ une constante indépendante de } \varepsilon. \end{array} \right.$$

. Pour le problème en u_i^ε, on effectue le changement de variable : $y = \varepsilon t \quad t \in]0, K[$,

soit $\tilde{u_i^\varepsilon}(t) = u_i^\varepsilon(\varepsilon t) = u_i^\varepsilon(y) \qquad \tilde{u_i^\varepsilon} \in H^1(0,K) \quad$ et $\quad \dfrac{d\tilde{u_i^\varepsilon}}{dt}(t) = \varepsilon \dfrac{du_i^\varepsilon}{dy}(\varepsilon t).$

Le problème en u_i^ε devient :

$$(P_{\tilde{u_i^\varepsilon}})_{1 \leq i \leq n} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \tilde{u_i^\varepsilon} \in H^1(0,K)/\mathbb{R} \text{ tel que :} \\ \dfrac{1}{\varepsilon} \displaystyle\int_0^K EA_v \frac{d\tilde{u_i^\varepsilon}}{dt} \frac{du_i'}{dt} = F_{iy}^1(u_i'(K) - u_i'(0)) \qquad \forall u_i' \in H^1(0,K)/\mathbb{R}. \end{array} \right.$$

On a $\quad \tilde{u_i^\varepsilon}(t) = \varepsilon \dfrac{F_{iy}^1}{EA_v} t \quad$ à une constante près,

et

(5)
$$\left| \begin{array}{l} \forall i = 1, ..., n \\ |\tilde{u_i^\varepsilon}|_{C^0([0,K])} \leq c\varepsilon \\ \displaystyle\sum_{i=1}^n \left| \frac{d\tilde{u_i^\varepsilon}}{dt} \right|_{L^2(0,K)} \leq c \\ \text{avec } c \text{ une constante indépendante de } \varepsilon. \end{array} \right.$$

Passage à la limite :

Proposition I.5.2 :

Soient v_0^ε, v_1^ε et $\tilde{u_i^\varepsilon}$ les solutions des problèmes $(P_{v_0^\varepsilon}), (P_{v_1^\varepsilon})$ et $(P_{\tilde{u_i^\varepsilon}})$ respectivement. Alors, on a :

$$\begin{array}{l} v_0^\varepsilon \longrightarrow v_0 \quad \text{dans} \quad H_0^1(0,L) \quad \text{faible} \\ v_1^\varepsilon \longrightarrow v_1 \quad \text{dans} \quad H_0^1(0,L) \quad \text{faible} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{d\tilde{u_i^\varepsilon}}{dt} \rightharpoonup U \quad \text{dans} \quad L^2(0,L) \quad \text{faible,} \end{array}$$

où v_0 est solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\dfrac{d}{dx}\left(B \dfrac{dv_0}{dx}\right) = \dfrac{F_x^2}{L^2} \qquad 0 < x < L \\ v_0(0) = v_0(L) = 0, \end{array} \right.$$

v_1 est solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\dfrac{d}{dx}\left(H \dfrac{dv_1}{dx}\right) = \dfrac{F_x^1}{L^2} \qquad 0 < x < L \\ v_1(0) = v_1(L) = 0, \end{array} \right.$$

et U est donné par

$$U = \frac{1}{LKV} \int_0^L F_y^1(x)dx.$$

Démonstration :

Les convergences ci-dessus sont une conséquence immédiate des estimations (3), (4) et (5).

D'autre part, il est facile de passer à la limite dans les problèmes $(P_{v_0^\varepsilon}), (P_{v_1^\varepsilon})$.

En effet, soit $\varphi \in \mathfrak{D}(0,L)$, on a :

$$\cdot \quad \int_0^L \frac{EA_h}{L}\frac{dv_0^\varepsilon}{dx}\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{L^2}\sum_{i=0}^{n}(x_{i+1}-x_i)F_x^2(x_i)\varphi(x_i)$$

$$\varepsilon \to 0 \quad \int_0^L B\frac{dv_0}{dx}\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{L^2}\int_0^L F_x^2(x)\varphi(x)dx$$

$$\cdot \quad \int_0^L \frac{EA_h}{L}\frac{dv_1^\varepsilon}{dx}\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{L^2}\sum_{i=0}^{n}(x_{i+1}-x_i)F_x^1(x_i)\varphi(x_i)$$

$$\varepsilon \to 0 \quad \int_0^L H\frac{dv_1}{dx}\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{L^2}\int_0^L F_x^1(x)\varphi(x)dx$$

de même, on a :

$$\cdot \quad \int_0^K EA_v\Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{d\tilde{u}_i^\varepsilon}{dy}\Big)\frac{d\varphi}{dy} = 0$$

$$\varepsilon \to 0 \quad \int_0^K EA_v U\frac{d\varphi}{dy} = 0 \quad \forall\varphi \in \mathfrak{D}(0,K) \quad \Longrightarrow \quad U = C^{st}.$$

Identifions U : soit $\psi \in H^1(0,K)$, on a :

$$EA_v\int_0^K \Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{d\tilde{u}_i^\varepsilon}{dy}\Big)\frac{d\psi}{dy} = \frac{1}{L}\Big(\sum_{i=0}^{n}(x_{i+1}-x_i)F_y^1(x_i)\Big)(\psi(K)-\psi(0)) - \varepsilon F_y^1(0)(\psi(K)-\psi(0))$$

$$\varepsilon \to 0 \quad \int_0^K EA_v U\frac{d\varphi}{dy} = \Big(\frac{1}{L}\int_0^L F_y^1(x)dx\Big)(\psi(K)-\psi(0))$$

soit $\qquad U = \dfrac{1}{LKV}\displaystyle\int_0^L F_y^1(x)dx.$

C.Q.F.D.

B. Approximation par éléments finis P_1

Pour les problèmes $(P_{u_i^\varepsilon})$, on a la solution explicitement :

$$u_i^\varepsilon(y) = u_i^\varepsilon(0) + \frac{F_{iy}^1}{EA_v}y \qquad 0 \le y \le \varepsilon K \qquad 1 \le i \le n.$$

Pour les problèmes $(P_{v_0^\varepsilon})$ et $(P_{v_1^\varepsilon})$, on approche l'espace $H_0^1(0,L)$ par :

$$V_\varepsilon = \Big\{ v \in C^0[0,L] \quad / \quad v_{|]x_i,x_{i+1}[} \in P_1, \quad v(0) = v(L) = 0 \quad i = 0,n \Big\}.$$

La base canonique de V_ε est donnée par :

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & \text{si} \quad x_{i-1} \le x \le x_i \\ \dfrac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} & \text{si} \quad x_i \le x \le x_{i+1} \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \qquad 1 \le i \le n = \dim V_\varepsilon$$

On cherche l'approximation $v_0^{a\varepsilon} \in V_\varepsilon$ de v_0^ε sous forme :

$$v_0^{a\varepsilon} = \sum_{i=1}^{n} v_0^\varepsilon(x_i)\varphi_i(x),$$

solution de :

$(P_{v_0^{a\varepsilon}})$

$$\begin{cases} \text{Trouver } v_0^{a\varepsilon} \in V_\varepsilon \text{ tel que :} \\ \displaystyle\int_0^L EA_b \frac{dv_0^{a\varepsilon}}{dx}\frac{dv_0'}{dx} = \varepsilon \sum_{i=1}^{n} F_{ix}^2 v_0'(x_i) \qquad \forall v_0' \in V_\varepsilon. \end{cases}$$

Système équivalent à :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (v_0^\varepsilon(x_i))_{i=1}^n \text{ tel que :} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} EA_b v_0^\varepsilon(x_i) \int_0^L \frac{d\varphi_i}{dx}\frac{d\varphi_j}{dx} = \varepsilon F_{jx}^2 \qquad \forall j = 1, \ldots n. \end{cases}$$

On a

$$\int_0^L \frac{d\varphi_i}{dx}\frac{d\varphi_j}{dx} = \begin{cases} -1/\varepsilon L & \text{si} \quad j = i-1 \text{ ou } i+1 \\ 2/\varepsilon L & \text{si} \quad j = i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'où on a :

$$(P_{v_0^{a\varepsilon}}) \iff \begin{cases} 2Bv_0^\varepsilon(x_1) & -Bv_0^\varepsilon(x_2) & = \varepsilon^2 F_{1x}^2 \\ \ddots & \ddots & \ddots \\ -B\, v_0^\varepsilon(x_{i-1}) & +2B\, v_0^\varepsilon(x_i) & -B\, v_0^\varepsilon(x_{i+1}) = \varepsilon^2 F_{ix}^2 \qquad 2 \le i \le n-1 \\ \ddots & \ddots & \ddots \quad \ddots \\ & -B\, v_0^\varepsilon(x_{n-1}) & +2B\, v_0^\varepsilon(x_n) = \varepsilon^2 F_{nx}^2. \end{cases}$$

De la même manière, on cherche $v_1^{a\varepsilon}$ approximation de v_1^ε dans V_ε sous forme :

$$v_1^{a\varepsilon} = \sum_{i=1}^{n} v_1^\varepsilon(x_i)\varphi_i(x).$$

Soit alors le système suivant :

$$\begin{cases} 2Hv_1^\varepsilon(x_1) & -Hv_1^\varepsilon v_1^\varepsilon(x_2) & = \varepsilon^2 F_{1x}^2 \\ \ddots & \ddots & \ddots \\ -H\, v_1^\varepsilon(x_{i-1}) & +2H\, v_1^\varepsilon(x_i) & -H\, v_1^\varepsilon(x_{i+1}) = \varepsilon^2 F_{ix}^1 \qquad 2 \le i \le n-1 \\ \ddots & \ddots & \ddots \quad \ddots \\ & -H\, v_1^\varepsilon(x_{n-1}) & +2H\, v_1^\varepsilon(x_n). = \varepsilon^2 F_{nx}^1. \end{cases}$$

Enfin, les u_i^ε vérifient :

$$V(u_i^\varepsilon(b_1) - u_i^\varepsilon(b_0)) = \varepsilon F_{iy}^1.$$

Soit donc l'ensemble des équations suivantes :

$$
(6)\qquad \left\{\begin{array}{llll}
2Bv_0^\varepsilon(x_1) & -Bv_0^\varepsilon(x_2) & = \varepsilon^2 F_{1x}^2 & \\
\ddots & \ddots & \ddots & \\
-B\,v_0^\varepsilon(x_{i-1}) & +2B\,v_0^\varepsilon(x_i) \quad -B\,v_0^\varepsilon(x_{i+1}) & = \varepsilon^2 F_{ix}^2 & 2 \le i \le n-1 \\
\ddots & \ddots \quad \ddots & \ddots & \\
& -B\,v_0^\varepsilon(x_{n-1}) \quad +2B\,v_0^\varepsilon(x_n) & = \varepsilon^2 F_{nx}^2 & \\
2Hv_1^\varepsilon(x_1) & -Hv_1^\varepsilon(x_2) & = \varepsilon^2 F_{1x}^2 & \\
\ddots & \ddots & \ddots & \\
-H\,v_1^\varepsilon(x_{i-1}) & +2H\,v_1^\varepsilon(x_i) \quad -H\,v_1^\varepsilon(x_{i+1}) & = \varepsilon^2 F_{ix}^1 & 2 \le i \le n-1 \\
\ddots & \ddots \quad \ddots & \ddots & \\
& -H\,v_1^\varepsilon(x_{n-1}) \quad +2H\,v_1^\varepsilon(x_n) & = \varepsilon^2 F_{nx}^1 & \\
V(u_i^\varepsilon(b_1) - u_i^\varepsilon(b_0)) & = \varepsilon F_{iy}^1 & 1 \le i \le n. &
\end{array}\right.
$$

C. Remarques et comparaisons

On remarque que nous avons obtenu un système (6) identique au système (1), obtenu en écrivant les équations d'équilibre aux noeuds, avec les identifications ci-dessous :

$$
\begin{aligned}
{}^{(\varepsilon)}u_1^1(x_i) &= v_1^\varepsilon(x_i) \\
{}^{(\varepsilon)}u_1^2(x_i) &= v_0^\varepsilon(x_i) \\
{}^{(\varepsilon)}u_2^1(x_i) &= u_i^\varepsilon(b_1) \\
{}^{(\varepsilon)}u_2^2(x_i) &= u_i^\varepsilon(b_0).
\end{aligned}
$$

Proposition I.5.3 : *Le problème discret (1) converge vers le problème homogénéisé (2) comme ci-dessous :*

$$
\begin{aligned}
&i) \quad \sum_{i=1}^{n} {}^{(\varepsilon)}u_1^2(x_i)\varphi_i(x) \longrightarrow {}^0u_1^2 \quad \textit{dans} \quad L^2(0,L) \quad \textit{fort.} \\
&ii) \quad \sum_{i=1}^{n} {}^{(\varepsilon)}u_1^1(x_i)\varphi_i(x) \longrightarrow {}^0u_1^1 \quad \textit{dans} \quad L^2(0,L) \quad \textit{fort.} \\
&iii) \quad \sum_{i=1}^{n} V({}^{(\varepsilon)}u_2^1(x_i) - {}^{(\varepsilon)}u_2^2(x_i)) \longrightarrow \frac{1}{LK}\int_0^L F_y^1(x)dx.
\end{aligned}
$$

Démonstration : C'est une conséquence des estimations d'erreur d'interpolation. En effet :

. v_0^ε est de régularité $H^1(0,L)$ car le second membre $\sum_{i=1}^{n} F_{ix}^2 \delta_{x_i} \in H^{-1}(0,L)$,

donc on a l'estimation suivante : $|v_0^\varepsilon - v_0^{a\varepsilon}|_{L^2(0,L)} \leq c\varepsilon |v_0^\varepsilon|_{1,(0,L)}$

mais $|v_0^\varepsilon|_{1,(0,L)} \leq c$

d'où

$$\left| \begin{array}{l} |v_0^\varepsilon - v_0^{a\varepsilon}|_{L^2(0,L)} \leq c\varepsilon \\ v_0^{a\varepsilon} = \sum_{i=1}^{n} v_0^\varepsilon(x_i)\varphi_i(x) = \sum_{i=1}^{n} {}^{(\varepsilon)}u_1^2(x_i)\varphi_i(x). \end{array} \right.$$

. De même on a :

$$\left| \begin{array}{l} |v_1^\varepsilon - v_1^{a\varepsilon}|_{L^2(0,L)} \leq c\varepsilon \\ v_1^{a\varepsilon} = \sum_{i=1}^{n} v_1^\varepsilon(x_i)\varphi_i(x) = \sum_{i=1}^{n} {}^{(\varepsilon)}u_1^1(x_i)\varphi_i(x). \end{array} \right.$$

. $V(u_i(b_1) - u_i(b_0)) = V({}^{(\varepsilon)}u_2^1(x_i) - {}^{(\varepsilon)}u_2^2(x_i)) = \varepsilon F_{iy}^1$.

On déduit de la proposition I.5.2 , du théorème de Rellich et des estimations ci-dessus les convergences *i*) et *ii*) à des sous suites près. Mais comme les limites sont uniques, ce sont toutes les suites qui convergent. La convergence *iii*) est établie dans la proposition I.5.2.

C.Q.F.D.

II. UN PROBLEME DE THERMIQUE D'UN TREILLIS BIDIMENSIONNEL

II.1 . Formulation du problème :

On introduit l'ensemble $V(R_\epsilon)$ définit par :

$$V(R_\epsilon) = \Big\{ U^\epsilon = ((u_i^\epsilon)_{i=1}^n \,;\, v_0^\epsilon, v_1^\epsilon) \;/\; u_i^\epsilon \in H^1(0,\epsilon K)\ 1 \le i \le n, \quad v_j^\epsilon \in H_0^1(0,L)\ 0 \le j \le 1,$$
$$u_i^\epsilon(b_j) = v_j^\epsilon(x_i) \quad 1 \le i \le n, 0 \le j \le 1 \Big\}$$

avec

$$R_\epsilon = \left(\cup_{i=1}^n \{x_i\}\times]0,\epsilon K[\right) \cup \left(\cup_{j=0}^1]0,L[\times\{b_j\}\right).$$

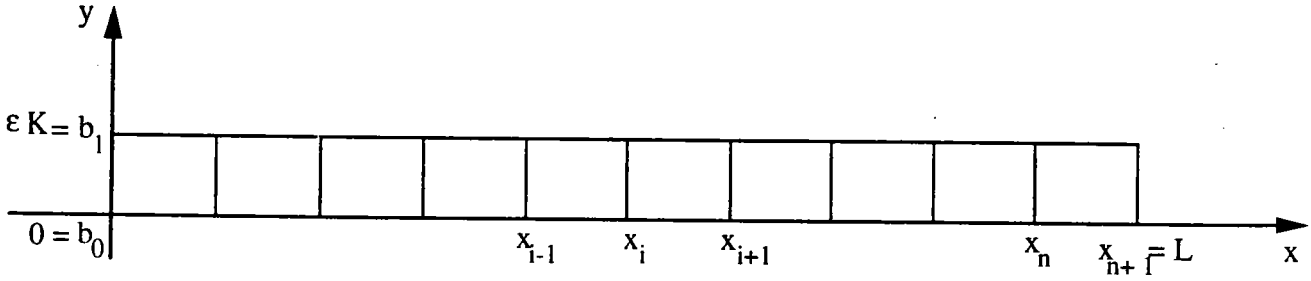


figure 5

Il est facile de vérifier que l'espace $V(R_\epsilon)$ muni de la norme :

$$\|U^\epsilon\|_{V(R_\epsilon)} = \left(\left|\frac{dv_0^\epsilon}{dx}\right|^2_{L^2(0,L)} + \left|\frac{dv_1^\epsilon}{dx}\right|^2_{L^2(0,L)} + \sum_{i=1}^n \left|\frac{du_i^\epsilon}{dy}\right|^2_{L^2(0,\epsilon K)} \right)^{1/2}$$

est un espace de Hilbert.

Position du problème : On se propose d'étudier le problème suivant :

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} \text{Trouver } U^\epsilon \in V(R_\epsilon) \text{ tel que :} \\ \displaystyle\int_{R_\epsilon} \lambda^\epsilon \partial U^\epsilon \partial W = \sum_{i=1}^n \epsilon f_i^1 u_i'(b_1) + \sum_{i=1}^n \epsilon f_i^2 u_i'(b_0) \\ \quad \forall\, W = ((u_i')_{i=1}^n \,;\, v_0', v_1') \in V(R_\epsilon), \end{cases}$$

où

$$\lambda^\epsilon = \begin{cases} \lambda_b & \text{pour les barres }]x_i, x_{i+1}[\times\{b_0\} \quad i = 0,\dots,n \\ \lambda_h & \text{pour les barres }]x_i, x_{i+1}[\times\{b_1\} \quad i = 0,\dots,n \\ \lambda_v & \text{pour les barres } \{x_i\}\times]b_0, b_1[\quad i = 0,\dots,n+1. \end{cases}$$

λ_b, λ_h et λ_v désignent les conductivités thermiques des barres de la cellule de référence.

$$\int_{R_\epsilon} \lambda^\epsilon \partial U^\epsilon \partial W = \int_0^L \lambda_b \frac{dv_0^\epsilon}{dx}\frac{dv_0'}{dx} + \int_0^L \lambda_h \frac{dv_1^\epsilon}{dx}\frac{dv_1'}{dx} + \sum_{i=1}^n \int_0^{\epsilon K} \lambda_v \frac{du_i^\epsilon}{dy}\frac{du_i'}{dy}.$$

Sous l'hypothèse de continuité des fonctions f^1 et f^2, le problème $(\mathcal{P})$ admet une unique solution d'après le théorème de Lax-Milgram.

Interprètation du problème ($\mathcal{P}$) :

En prenant des fonctions tests convenables et en faisant des intégrations par parties, il est facile de vérifier que le problème ($\mathcal{P}$) est équivalent formellement au problème thermique suivant :

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\Big(\lambda_b \dfrac{dv_0^\varepsilon}{dx}\Big) = 0 & \text{sur }]x_i, x_{i+1}[\quad \forall i = 0, ..., n \\ -\dfrac{d}{dx}\Big(\lambda_h \dfrac{dv_1^\varepsilon}{dx}\Big) = 0 & \text{sur }]x_i, x_{i+1}[\quad \forall i = 0, ..., n \\ -\dfrac{d}{dy}\Big(\lambda_v \dfrac{du_i^\varepsilon}{dy}\Big) = 0 & \text{sur }]0, \varepsilon K[\quad \forall i = 1, ..., n \\ \lambda_b\Big(\dfrac{dv_0^\varepsilon}{dx}(x_i^-) - \dfrac{dv_0^\varepsilon}{dx}(x_i^+)\Big) - \lambda_v \dfrac{du_i^\varepsilon}{dy}(b_0^+) = \varepsilon f_i^2 & \forall i = 1, ..., n \\ \lambda_h\Big(\dfrac{dv_1^\varepsilon}{dx}(x_i^-) - \dfrac{dv_1^\varepsilon}{dx}(x_i^+)\Big) + \lambda_v \dfrac{du_i^\varepsilon}{dy}(b_1^-) = \varepsilon f_i^1 & \forall i = 1, ..., n \\ v_0^\varepsilon(0) = v_0^\varepsilon(L) = 0 \qquad v_1^\varepsilon(0) = v_1^\varepsilon(L) = 0 \\ u_i^\varepsilon(b_j) = v_j(x_i) \quad j = 0, 1 \quad i = 1, ..., n. \end{cases}$$

II.2 . **Approximation par la méthode de Galerkin** :

On approche l'espace $V(R_\varepsilon)$ par l'espace V_ε défini par :

$$V_\varepsilon = \Big\{ U^\varepsilon = ((u_i^\varepsilon)_{i=1}^n \,;\, (v_j^\varepsilon)_{j=0}^1) \,/\, \quad u_{i|]0,\varepsilon K[}^\varepsilon \in P_1 \quad \forall i = 1, ..., n,$$
$$v_{j|]x_i,x_{i+1}[}^\varepsilon \in P_1 \quad \forall i = 0, ..., n \,; \quad v_j^\varepsilon(x_0) = v_j^\varepsilon(x_{n+1}) = 0 \quad \forall j = 0, 1,$$
$$u_i^\varepsilon(b_j) = v_j(x_i) \quad j = 0, 1 \text{ et } i = 1, ..., n \Big\}.$$

Lemme II.2.1 : *V_ε est un sous espace vectoriel de $V(R_\varepsilon)$ de dimension $2n$.*

Démonstration : Il est facile de vérifier que la famille $\{\Phi_i^0, \Phi_i^1\}_{i=1}^n$ de V_ε définie par :

$$\Phi_i^0 = \Big(\frac{b_1 - y}{b_1} e_i \,;\, \varphi_i, 0\Big)$$
$$\Phi_i^1 = \Big(\frac{y}{b_1} e_i \,;\, 0, \varphi_i\Big)$$

est une base de V_ε,

où e_i est le i$^{\text{ème}}$ vecteur de base canonique de $\mathbb{R}^n$ et φ_i les fonctions définies dans la partie I.5.B.

Un élément $U^\varepsilon = ((u_i^\varepsilon)_{i=1}^n \,;\, (v_j^\varepsilon)_{j=0}^1)$ de V_ε s'écrit dans cette base comme suit :

$$U^\varepsilon = \sum_{i=1}^n v_0^\varepsilon(x_i)\Phi_i^0 + \sum_{i=1}^n v_1^\varepsilon(x_i)\Phi_i^1.$$

C.Q.F.D.

Posons

$$\mathcal{A}(U,W) = \int_{R_\epsilon} \lambda^\epsilon \partial U^\epsilon \partial W\,; \qquad < F,W > = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon f_i^1 u_i'(b_1) + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon f_i^2 u_i'(b_0).$$

Le problème $(\mathcal{P})$ s'écrit alors :

$$\begin{cases} \text{Trouver } U^\epsilon \in V(R_\epsilon) \text{ tel que} & : \\ \mathcal{A}(U^\epsilon, W) = < F,W > & \forall W \in V(R_\epsilon). \end{cases}$$

Au problème $(\mathcal{P})$, on associe le problème approché suivant :

$$(\mathcal{P}_a) \qquad \begin{cases} \text{Trouver } U_\epsilon^a \in V_\epsilon \text{ tel que} & : \\ \mathcal{A}(U_\epsilon^a, W^a) = < F,W^a > & \forall W^a \in V_\epsilon. \end{cases}$$

Le problème $(\mathcal{P}_a)$ est équivalent à :

$$\begin{cases} \text{Trouver } U_\epsilon^a \in V_\epsilon \text{ tel que} & : \\ \mathcal{A}(U_\epsilon^a, \Phi_j^0) = < F,\Phi_j^0 > & \forall j = 1,...,n \\ \mathcal{A}(U_\epsilon^a, \Phi_j^1) = < F,\Phi_j^1 > & \forall j = 1,...,n. \end{cases}$$

U_ϵ^a s'écrit sous forme : $$U_\epsilon^a = \sum_{i=1}^{n} v_0^\epsilon(x_i)\Phi_i^0 + \sum_{i=1}^{n} v_1^\epsilon(x_i)\Phi_i^1.$$

Le système devient donc :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \left(v_0^\epsilon(x_i), v_1^\epsilon(x_i)\right)_{i=1}^{n} \text{ tel que} & : \\ \sum_{i=1}^{n} v_0^\epsilon(x_i)\mathcal{A}(\Phi_i^0,\Phi_j^0) + \sum_{i=1}^{n} v_1^\epsilon(x_i)\mathcal{A}(\Phi_i^1,\Phi_j^0) = < F,\Phi_j^0 > \\ \sum_{i=1}^{n} v_0^\epsilon(x_i)\mathcal{A}(\Phi_i^0,\Phi_j^1) + \sum_{i=1}^{n} v_1^\epsilon(x_i)\mathcal{A}(\Phi_i^1,\Phi_j^1) = < F,\Phi_j^1 >. \end{cases}$$

Tenant compte du support des fonctions φ_i, on a :

$$\mathcal{A}(\Phi_i^0,\Phi_j^0) = \begin{cases} -\tilde{B}/\varepsilon & \text{pour} \quad j = i-1, i+1 \\ (2\tilde{B}+\tilde{V})/\varepsilon & \text{pour} \quad j = i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\mathcal{A}(\Phi_i^1,\Phi_j^1) = \begin{cases} -\tilde{H}/\varepsilon & \text{pour} \quad j = i-1, i+1 \\ (2\tilde{H}+\tilde{V})/\varepsilon & \text{pour} \quad j = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\mathcal{A}(\Phi_i^0,\Phi_j^1) = \begin{cases} -\tilde{V}/\varepsilon & \text{pour} \quad j = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le système s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{cccccccc}
(2\tilde{B}+\tilde{V})v_0^\varepsilon(x_1) & -\tilde{B}v_0^\varepsilon(x_2) & & -\tilde{V}v_1^\varepsilon(x_1) & & & = \varepsilon^2 f_1^2 & \\
-\tilde{V}v_0^\varepsilon(x_1) & +(2\tilde{H}+\tilde{V})v_1^\varepsilon(x_1) & -\tilde{H}v_1^\varepsilon(x_2) & = \varepsilon^2 f_1^1 & & & & \\
\ddots & \ddots & \ddots & & & & & \\
-\tilde{B}v_0^\varepsilon(x_{i-1}) & +(2\tilde{B}+\tilde{V})v_0^\varepsilon(x_i) & -\tilde{B}v_0^\varepsilon(x_{i+1}) & -\tilde{V}v_1^\varepsilon(x_i) & = \varepsilon^2 f_i^2 & & & \\
 & -\tilde{V}v_0^\varepsilon(x_i) & -\tilde{H}v_1^\varepsilon(x_{i-1}) & +(2\tilde{H}+\tilde{V})v_1^\varepsilon(x_i) & -\tilde{H}v_1^\varepsilon(x_{i+1}) & = \varepsilon^2 f_i^1 & & \\
\ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\
-\tilde{B}v_0^\varepsilon(x_{n-1}) & +(2\tilde{B}+\tilde{V})v_0^\varepsilon(x_n) & -\tilde{V}v_1^\varepsilon(x_n) & & = & \varepsilon^2 f_n^2 & & \\
 & -\tilde{V}v_0^\varepsilon(x_n) & -\tilde{H}v_1^\varepsilon(x_{n-1}) & +(2\tilde{H}+\tilde{V})v_1^\varepsilon(x_n) & = & \varepsilon^2 f_n^1 & &
\end{array}\right.$$

soit sous forme matricielle :

$$Q.U^\varepsilon = r$$

où

$$Q = \begin{pmatrix}
M & N & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
N & M & N & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\cdots & N & M & N & 0 & \cdots \\
\cdots & 0 & N & M & N & \cdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & N & M & N \\
0 & 0 & \cdots & 0 & N & M
\end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 2\tilde{B}+\tilde{V} & -\tilde{V} \\ -\tilde{V} & 2\tilde{H}+\tilde{V} \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} -\tilde{B} & 0 \\ 0 & -\tilde{H} \end{pmatrix}$$

$$U^\varepsilon = \begin{pmatrix}
v_0^\varepsilon(x_1) \\ v_1^\varepsilon(x_1) \\ \vdots \\ v_0^\varepsilon(x_i) \\ v_1^\varepsilon(x_i) \\ \vdots \\ v_0^\varepsilon(x_n) \\ v_1^\varepsilon(x_n)
\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad r = \begin{pmatrix}
< F, \Phi_1^0 > \\ < F, \Phi_1^1 > \\ \vdots \\ < F, \Phi_i^0 > \\ < F, \Phi_i^1 > \\ \vdots \\ < F, \Phi_n^0 > \\ < F, \Phi_n^1 >
\end{pmatrix}.$$

II.3 . Homogénéisation discrète : méthode de Verna

Dans ce paragraphe, nous suivons les mêmes étapes décrites dans le chapitre I afin de trouver le problème homogénéisé.

On considère les équations en partie courante suivante :

$$\left\{\begin{array}{l}
-\tilde{B}v_0^\varepsilon(x_{i-1}) + (2\tilde{B}+\tilde{V})v_0^\varepsilon(x_i) - \tilde{B}v_0^\varepsilon(x_{i+1}) - \tilde{V}v_1^\varepsilon(x_i) = \varepsilon^2 f_i^2 \\
-\tilde{V}v_0^\varepsilon(x_i) - \tilde{H}v_1^\varepsilon(x_{i-1}) + (2\tilde{H}+\tilde{V})v_1^\varepsilon(x_i) - \tilde{H}v_1^\varepsilon(x_{i+1}) = \varepsilon^2 f_i^1.
\end{array}\right.$$

Au système de différences discrètes ci-dessus, on associe le schéma de différence continue suivant :

$$\left\{\begin{array}{l}
-\tilde{B}v_0^\varepsilon(x-\varepsilon L) + (2\tilde{B}+\tilde{V})v_0^\varepsilon(x) - \tilde{B}v_0^\varepsilon(x+\varepsilon L) - \tilde{V}v_1^\varepsilon(x) = \varepsilon^2 f^2(x) \\
-\tilde{V}v_0^\varepsilon(x) - \tilde{H}v_1^\varepsilon(x-\varepsilon L) + (2\tilde{H}+\tilde{V})v_1^\varepsilon(x) - \tilde{H}v_1^\varepsilon(x+\varepsilon L) = \varepsilon^2 f^1(x).
\end{array}\right.$$

On va chercher v_0^ε et v_1^ε sous forme :

$$v_0^\varepsilon = \sum_{\alpha=0}^{+\infty} \varepsilon^\alpha v_0^{(\alpha)}(x)$$
$$v_1^\varepsilon = \sum_{\alpha=0}^{+\infty} \varepsilon^\alpha v_1^{(\alpha)}(x).$$

On développe les termes de la forme $g(x+\varepsilon L), g(x-\varepsilon L)$ à l'aide de la formule de Taylor. On reporte dans les équations puis on identifie suivant les puissances de ε. On obtient les équations à l'ordre α suivantes :

$$\begin{cases} \tilde{V}(v_0^{(\alpha)}(x) - v_1^{(\alpha)}(x)) - \tilde{B}\sum_{k=1}^{\alpha}\left(\frac{(-L)^k + (L)^k}{k\,!}\right)\frac{d^k v_0^{(\alpha-k)}(x)}{dx^k} = \delta_{\alpha 2} f^2(x) \\ \tilde{V}(v_1^{(\alpha)}(x) - v_0^{(\alpha)}(x)) - \tilde{H}\sum_{k=1}^{\alpha}\left(\frac{(-L)^k + (L)^k}{k\,!}\right)\frac{d^k v_1^{(\alpha-k)}(x)}{dx^k} = \delta_{\alpha 2} f^1(x). \end{cases}$$

Résolution : La résolution ordre après ordre du problème permet d'obtenir les fonctions $v_0^{(\alpha)}$ et $v_1^{(\alpha)}$.

ordre 0 : $v_0^{(0)} = v_1^{(0)} = v^{(0)}$.

ordre 1 : $v_0^{(1)} = v_1^{(1)} = v^{(1)}$.

ordre 2 :

$$\tilde{V}(v_0^{(2)} - v_1^{(2)}) - \tilde{B}L^2\frac{d^2}{dx^2}v^{(0)} = f^2$$
$$\tilde{V}(v_1^{(2)} - v_0^{(2)}) - \tilde{H}L^2\frac{d^2}{dx^2}v^{(0)} = f^1.$$

Nous obtenons :

$$-(\tilde{B}+\tilde{H})L^2\frac{d^2}{dx^2}v^{(0)} = f^2 + f^1$$
$$v_0^{(2)} - v_1^{(2)} = D^2(f^1, f^2) \ : \ \text{fonction de } f^1 \text{ et } f^2.$$

ordre 3 :

$$\tilde{V}(v_0^{(3)} - v_1^{(3)}) - \tilde{B}L^2\frac{d^2}{dx^2}v^{(1)} = 0$$
$$\tilde{V}(v_1^{(3)} - v_0^{(3)}) - \tilde{H}L^2\frac{d^2}{dx^2}v^{(1)} = 0.$$

Nous obtenons :

$$v^{(1)} = 0$$
$$v_0^{(3)} = v_1^{(3)} = v^{(3)}.$$

ordre 4 :

$$\tilde{V}(v_0^{(4)} - v_1^{(4)}) - \tilde{B}L^2\frac{d^2}{dx^2}v_0^{(2)} - \frac{\tilde{B}L^4}{12}\frac{d^4}{dx^4}v^{(0)} = 0$$
$$\tilde{V}(v_1^{(4)} - v_0^{(4)}) - \tilde{H}L^2\frac{d^2}{dx^2}v_1^{(2)} - \frac{\tilde{H}L^4}{12}\frac{d^4}{dx^4}v^{(0)} = 0.$$

Nous obtenons :

$$-\frac{d^2}{dx^2}(v_0^{(2)} + v_1^{(2)}) = \frac{L^2}{12}\frac{d^4}{dx^4}v^{(0)}$$
$$\tilde{V}(v_0^{(4)} - v_1^{(4)}) = D^4(f^1, f^2).$$

ordre 5 :

$$\tilde{V}(v_0^{(5)} - v_1^{(5)}) - \tilde{B}L^2\frac{d^2}{dx^2}v^{(3)} = 0$$
$$\tilde{V}(v_1^{(5)} - v_0^{(5)}) - \tilde{H}L^2\frac{d^2}{dx^2}v^{(3)} = 0.$$

Nous obtenons :

$$v^{(3)} = 0$$
$$v_0^{(5} = v_1^{(5)} = v^{(5)}.$$

ordres suivants : De proche en proche, on determine ainsi tous les $v_j^{(\alpha)}$ $j = 0, 1$.

Le comportement macroscopique de la structure est décrit par :

$$(\mathcal{P}_h) \qquad \begin{cases} -\frac{d}{dx}\Big((\tilde{B}+\tilde{H})\frac{dv^{(0)}}{dx}\Big) = \frac{f^2+f^1}{L^2} \\ v^{(0)}(0) = v^{(0)}(L) = 0. \end{cases}$$

II.4 . Convergence vers le problème homogénéisé :

Afin d'obtenir des estimations dans des espaces ne dépendant pas de ε, on fait le changement de variable

$$t \in [0, K] \longmapsto \varepsilon t = y \in [0, \varepsilon K].$$

Le problème $(\mathcal{P})$ est alors équivalent à :

$$(\tilde{\mathcal{P}}) \qquad \begin{cases} \text{Trouver } \tilde{U}^\varepsilon \in \tilde{V}(R_\epsilon) \text{ tel que :} \\ \displaystyle\int_0^L \lambda_b \frac{dv_0^\varepsilon}{dx}\frac{dv_0'}{dx} + \int_0^L \lambda_h \frac{dv_1^\varepsilon}{dx}\frac{dv_1'}{dx} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\varepsilon}\int_0^K \lambda_v \frac{d\tilde{u}_i^\varepsilon}{dy}\frac{d\tilde{u}_i'}{dy} = \sum_{i=1}^n \varepsilon f_i^1 v_1'(x_i) + \sum_{i=1}^n \varepsilon f_i^2 v_0'(x_i) \\ \quad \forall\, W = ((\tilde{u}_i')_{i=1}^n\,;\; v_0', v_1') \in \tilde{V}(R_\epsilon), \end{cases}$$

où $\tilde{V}(R_\epsilon) = \Big\{ \tilde{U}^\varepsilon = ((\tilde{u}_i^\varepsilon)_{i=1}^n\,;\; v_0^\varepsilon, v_1^\varepsilon) \;/\; \tilde{u}_i^\varepsilon \in H^1(0,K)\ 1 \le i \le n, \quad v_j^\varepsilon \in H_0^1(0,L) \quad 0 \le j \le 1,$
$\tilde{u}_i^\varepsilon(0) = v_0^\varepsilon(x_i) \quad \tilde{u}_i^\varepsilon(K) = v_1^\varepsilon(x_i) \quad 1 \le i \le n \Big\}$

Proposition II.4.1 : *Après extraction d'une sous suite, on a les convergences suivantes :*

$$i) \quad v_1^\varepsilon \longrightarrow v_1 \quad \text{dans} \quad H_0^1(0,L) \quad \text{faible.}$$
$$ii) \quad v_0^\varepsilon \longrightarrow v_0 \quad \text{dans} \quad H_0^1(0,L) \quad \text{faible.}$$
$$iii) \quad \sum_{i=1}^n \frac{d\tilde{u}_i}{dy} \longrightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^2(0,K) \quad \text{fort.}$$

où $(\tilde{B}v_0 + \tilde{H}v_1)/(\tilde{B}+\tilde{H})$ *est l'unique solution de :*

$$(\mathcal{P}_h) \qquad \begin{cases} -\frac{d}{dx}\Big((\tilde{B}+\tilde{H})\frac{dv^{(0)}}{dx}\Big) = \frac{f^2+f^1}{L^2} & \text{dans }]0, L[\\ v^{(0)}(0) = v^{(0)}(L) = 0. \end{cases}$$

Démonstration : De la formulation faible $(\tilde{\mathcal{P}})$, on déduit les estimations ci-dessous :

$$\begin{cases} |v_1^\varepsilon|_{H_0^1(0,L)} \leq c \\ |v_0^\varepsilon|_{H_0^1(0,L)} \leq c \\ \dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left|\frac{d\tilde{u}_i}{dy}\right|^2_{L^2(0,K)} \leq c \end{cases}$$

où c est une constante indépendante de ε.

D'où les convergences $i), ii)$ et $iii)$.

Soit maintenant $\psi \in \mathfrak{D}(]0,L[)$, $\left((\psi(x_i))_{i=1}^n\,;\ \psi\,,\ \psi\right)$ est un élément de $\tilde{V}(R_\varepsilon)$, donc on a :

$$\int_0^L \lambda_b \frac{dv_0^\varepsilon}{dx}\frac{d\psi}{dx} + \int_0^L \lambda_h \frac{dv_1^\varepsilon}{dx}\frac{d\psi}{dx} = \varepsilon \sum_{i=1}^{n} (f_i^2 + f_i^1)\psi(x_i)$$

$$\int_0^L \left(\tilde{B}\frac{dv_0^\varepsilon}{dx} + \tilde{H}\frac{dv_1^\varepsilon}{dx}\right)\frac{d\psi}{dx} = \frac{1}{L^2}\sum_{i=0}^{n}(x_{i+1} - x_i)(f^2(x_i) + f^1(x_i))\psi(x_i).$$

On fait tendre ε vers 0, on obtient :

$$\int_0^L \left(\tilde{B}\frac{dv_0}{dx} + \tilde{H}\frac{dv_1}{dx}\right)\frac{d\psi}{dx} = \frac{1}{L^2}\int_0^L (f^2 + f^1)\psi,$$

ceci pour tout $\psi \in \mathfrak{D}(]0,L[)$. D'où

$$-\frac{d}{dx}\left(\tilde{B}\frac{dv_0}{dx} + \tilde{H}\frac{dv_1}{dx}\right) = \frac{1}{L^2}(f^2 + f^1) \qquad \text{dans }]0,L[.$$

Par conséquent $(\tilde{B}v_0 + \tilde{H}v_1)/(\tilde{B} + \tilde{H})$ est l'unique solution de $(\mathcal{P}_h)$.

C.Q.F.D.

Remarque II.4.2 : Ainsi, on voit qu'on retrouve le même problème homogénéisé obtenu par la méthode de Verna. Ici, nous n'avons pas comparé la solution approchée de $(\mathcal{P}_a)$ à la solution de $(\mathcal{P})$ donc on ne voit pas la convergence de $(\mathcal{P}_a)$ vers $(\mathcal{P}_h)$.

Remarque II.4.3 :

Remarquons que si les barres horizontales sont identiques donc $\tilde{H} = \tilde{B}$, on aura :

$$\frac{v_0 + v_1}{2} \quad \text{l'unique solution de} \quad (\mathcal{P}_h).$$

CONCLUSION

Dans ce travail, nous avons essayé de justifier la méthode de Verna [26].

L'idée est de trouver à chaque fois un modèle continu dont une approximation coïnciderait avec le problème discret de Verna et de pouvoir après passer à la limite.

Ceci n'est qu'un essai. La difficulté est apparente pour d'autres structures telles que les structures en N [26].

Un travail récent de M. Vogelius [27] étudie la relation entre des réseaux éléctriques plans et des modèles à conductance continue. Il part de l'énérgie totale aux noeuds du réseau éléctrique donc d'un modèle discret, interpole la différence de potentiel aux noeuds et se ramène ainsi à un problème continu, puis passe à la limite sur le nombre de noeuds pour trouver le problème homogénéisé.

On constate donc une analogie entre le type de problème étudié dans ce travail et le travail de M. Vogelius. La difficulté essentielle est de trouver la bonne interpolation.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES :

[1] A. Bensoussan - J.L. Lions - G. Papanicolaou : *Asymptotic Analysis for periodic structures. North Holland 1978. 2^d edition 1981.*

[2] H. Brezis : *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications. Masson 1987.*

[3] D. Cioranescu - J. Saint Jean Paulin : Influence of the relative magnitude of several small parameters in thin tall structures. Rapport interne de l'université de Metz . No 04/92.

[4] D. Cioranescu - J. Saint Jean Paulin : Reinforced and Honey Comb Structures. J. Math. pures et appl. 65, 1986, p.403 à 422.

[5] D. Cioranescu - J. Saint Jean Paulin : Asymptotic analysis of elastic wireworks. Publication du Laboratoire d'Analyse numérique R 89OO8 mai 1989.

[6] D. Cioranescu - J. Saint Jean Paulin : Towers and Cranes in Linearized elasticity : an asymptotic study. Rapport interne de l'université de Metz no 02 / 89.

[7] D. Cioranescu - J. Saint Jean Paulin : Problèmes de Neumann et de Dirichlet dans des structures réticulées de faible épaisseur. C. R. Acad. Sc. Paris, t.303, Série I, no 1, 1986 p 7 - 10.

[8] J. Courbon : *Résistance des matériaux. Dunod Paris 1971.*

[9] J.O. Dow, Z.W. Su & C.C. Feng : Equivalent Continuum Representation of Structures Composed of Repeated Elements. AIAA Journal Vol. 23, No.10. 1564-1569. October 1985.

[10] S. Dubigeon : *Technique et documentation. Mécanique des milieux continus. ENSM 1986.*

[11] G. Griso : Etude d'un problème elliptique avec conditions de Neumann dans un domaine réticulé (à paraître).

[12] G. Griso : Etude asymptotique d'une grue (à paraître).

[13] A. Hrenikoff, Vancouver, British Columbia, Canada : Solution of Problems of Elasticity by the Framework Method. Journal Of Applied Mechanics. A-169, A-175, December, 1941.

[14] J.F. Imbert : *Analyse des stuctures par éléments finis. CEPADUES EDITIONS 1984.*

[15] L. Kollar : Analysis Of Double-Layer Space Trusses With Diagonally Square Mesh By The Continuum Method. Acta Technica Academiae Scientiarum, Tomus 76 (3-4), pp.273-292 (1974).

[16] L. Kollar : Continuum Method Of Analysis For Double Layer Space Trusses Of "Hexagonal Over Triangular" Mesh. Acta Technica Academiae Scientiarum, Tomus 86 (1-2), pp.55-77 (1978).

[17] J.L. Lions : *Some Methods in the Mathematical Analysis of Systems and their control. Science Press, Beijing, China 1981. Gordon and Breach, Science Publishers, Inc New YorK.*

[18] D. McHenry : A Lattice Analogy for the Solution of Stress Problems. Journal Of The Institution Of Civil Engineers. No. 2. 1943-44 December 1943.