



HAL
open science

Bandes de cisaillement adiabatique : effets géométriques et effets de conduction

Florence Dinart

► **To cite this version:**

Florence Dinart. Bandes de cisaillement adiabatique : effets géométriques et effets de conduction. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université Paul Verlaine - Metz, 1994. Français. NNT : 1994METZ005S . tel-01776035

HAL Id: tel-01776035

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01776035v1>

Submitted on 24 Apr 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

**INSTITUT SUPÉRIEUR DE GÉNIE MÉCANIQUE ET PRODUCTIQUE
UNIVERSITÉ DE METZ**

THÈSE

présentée à l'Université de METZ par

Florence DINZART

pour l'obtention du grade de

**DOCTEUR de L'UNIVERSITÉ de METZ
en SCIENCES pour l'INGÉNIEUR**

<p>BANDES DE CISAILLEMENT ADIABATIQUE : EFFETS GÉOMÉTRIQUES ET EFFETS DE CONDUCTION</p>
--

à soutenir le 3 février 1994 devant la commission d'examen composée de

C. FRESSENGEAS

J. KLEPACZKO

Y. LEROY

Rapporteur

A. MOLINARI

F. MONTHEILLET

Rapporteur

M. STELLY

Laboratoire de Physique et de Mécanique des Matériaux

Ū.R.A. C.N.R.S. 1215

I.S.G.M.P., Ile du Saulcy, 57045 METZ Cedex 01

Vb 80431 .

S/M3
94/5

*A mes grands-parents,
A mes parents,
A mes soeurs
en témoignage de mon affection sincère.*

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv.	19940145
Cote	S/M3 94/5
Loc	Magasin

C'est au Laboratoire de Physique et de Mécanique des Matériaux qu'a été réalisé ce travail que j'ai l'honneur de vous présenter.

J'ai eu la chance d'être accueillie dans ce laboratoire en 1991 par deux maîtres incontestés en mécanique Mr Claude Fressengeas et Mr Alain Molinari. Ayant inspiré le sujet de ma thèse, ils ont été naturellement mes directeurs.

A leur manière et simultanément, ils m'ont fait découvrir l'importance de la réflexion et du travail approfondi en recherche scientifique.

Ainsi, Mr Fressengeas, dans le cheminement journalier de mes travaux, a su m'insuffler sa rigueur scientifique et sa passion de chercheur. J'ai beaucoup apprécié son dynamisme, sa gentillesse et sa grande disponibilité qui m'ont permis de surmonter les difficultés. Enfin, il n'a cessé de veiller à la rédaction de cet ouvrage insistant sur la clarté de l'expression et la concision de la pensée, supervisant chaque chapitre avec une précision d'orfèvre.

Quand une étape était franchie, mes directeurs me faisaient participer à leurs réflexions et à leurs discussions pour faire le point et fixer de nouveaux objectifs.

Mr Molinari, grâce à une vision panoramique des problèmes, envisageait et mettait sur pied avec Mr Fressengeas des orientations nouvelles toujours pleines d'intérêt. Mr Molinari, à certains moments, a donné des impulsions indispensables à la progression de la recherche, faisant preuve d'un esprit particulièrement critique et rigoureux.

Qu'il me soit permis aussi de remercier Mr Montheillet, Directeur de recherche, et Mr Leroy, Ingénieur de recherche, rapporteurs, pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu accorder à cette étude et leur présence dans mon jury est pour moi un très grand honneur.

Mes remerciements vont également à Mr Klepaczko, Directeur de recherche et chercheur C.N.R.S., et à Mr Stelly, Ingénieur au C.E.A., qui ont accepté de participer au jury.

Je tiens également à remercier tous les enseignants de Mécanique de la Faculté des Sciences de Metz et tous les collègues du Laboratoire qui m'ont accueillie avec bienveillance et sympathie.

Sommaire

Introduction.....	1
Chapitre 1.....	5
Présentation des bandes de cisaillement adiabatique.	
<u>1 Introduction.....</u>	6
<u>2 Mécanismes de formation.....</u>	7
2.1 Historique.....	7
2.2 Techniques expérimentales.....	8
2.3 Observations expérimentales.....	11
<u>3 Modélisations.....</u>	18
3.1 Modèle géométrique unidimensionnel.....	18
3.2 Loi de comportement viscoplastique du matériau.....	18
3.3 Formulation du problème.....	20
3.3.1 Solution homogène adiabatique.....	21
<u>4 Méthodes d'analyse.....</u>	23
4.1 Concepts de bifurcation, d'instabilité et de localisation.....	23
4.2 Analyse de bifurcation.....	24
4.3 Méthodes d'analyse de stabilité linéaire.....	25
4.3.1 Méthode de stabilité linéaire classique.....	25
4.3.2 Analyse de stabilité effective.....	26
4.3.3 Méthode de perturbation linéaire de solutions stationnaires.....	27
4.3.4 Méthode de perturbation linéaire relative.....	28
4.3.5 Conclusion sur les méthodes d'analyse linéaire.....	29
4.4 Méthodes d'analyse non linéaire.....	29
<u>5 Analyse de la morphologie des BCA.....</u>	33
5.1 Etude du stade terminal d'évolution des BCA.....	33
5.2 Structuration par second gradient.....	35
5.3 Structuration par la conduction thermique.....	36

<u>6 Conclusion</u>	39
Annexe du chapitre 1	41
Chapitre 2	43
Analyse locale du cisaillement adiabatique	
<u>1 Introduction</u>	44
<u>2 Formulation du modèle</u>	45
2.1 Description du défaut, modélisation.....	45
2.2 Equations fondamentales.....	49
<u>3. Résultats asymptotiques locaux</u>	51
3.1 Méthode générale et résultats.....	51
3.2 Application au cas de la fonction de Knowles.....	53
<u>4 Résolution complète</u>	53
4.1 Méthode de développement.....	54
4.2 Localisation L_∞	55
4.3 Localisation L_p	57
4.4 Exemple de résolution.....	58
<u>5. Largeur de bande</u>	60
5.1 Définition et méthode de détermination.....	60
5.2 Détermination analytique de la largeur de bande.....	62
5.2.1 Loi de comportement de Knowles.....	63
5.2.2 Lois de comportement adiabatiques.....	63
<u>6. Etudes paramétriques et confrontations expérimentales</u>	66
6.1 Influence des paramètres rhéologiques.....	66
6.2 Influence des paramètres géométriques.....	68
6.2.1 Influence de l'acuité r du défaut.....	68
Combinaisons de défauts de longueur d'onde différentes	
6.2.2 Influence de l'acuité r du défaut.....	69
6.2.3 Influence comparée de l'amplitude et de l'acuité.....	73
<u>7. Conclusions</u>	75

Annexes du chapitre 2.

Annexe n°1	
Résultats asymptotiques locaux.....	77
Annexe n°2	
Fonctions hypergéométriques.....	77
Annexe n°3	
Développement cas particuliers	78
Annexe n°4	
Calcul des termes d'un développement en série.....	79

Chapitre 3.....80

Etude de la stabilité de solutions stationnaires

1 Introduction.....81

2 Formulation du problème.....82

3 Méthode de Galerkin.....85

4 Etude des solutions stationnaires.....86

4.1 Détermination approchée des solutions stationnaires.....86

4.2 Influence des conditions aux limites sur l'existence des solutions stationnaires.....88

4.3 Comparaison des lois de comportement.....90

4.4 Etude de l'influence des paramètres rhéologiques.....92

5 Etude de stabilité linéaire.....96

5.1 Méthode d'analyse approchée.....97

5.2 Contrôle en contrainte.....101

5.3 Contrôle en vitesse.....101

5.4 Conditions aux limites mixtes.....103

6. Conclusion.....107

Annexes du chapitre 3.....110

Annexe n°1

 Identification des paramètres caractéristiques des lois de comportement linéaire en température et puissance.....110

Annexe n°2

 Détermination de la vitesse de perturbation pour des valeurs limites de la température.....111

Chapitre 4	113
Morphologie des BCA dans le stade III ; effets combinés de conduction thermique et de singularités du comportement.	
<u>1 Introduction.</u>	114
<u>2 Formulation du problème.</u>	115
<u>3. Résolution analytique, en l'absence de singularité.</u>	121
3.1 Détermination de la vitesse de déformation.....	122
3.2 Conditions aux limites en vitesse.....	123
3.3 Conditions aux limites thermiques.	124
3.4 Détermination de la vitesse de déformation au centre.....	124
3.5 Définition de la largeur de bande.....	125
3.6 Applications et confrontations expérimentales.....	126
<u>4.Analyse de l'influence de la singularité de comportement.</u>	127
4.1 Présentation de la méthode.....	127
4.2 Comparaisons avec la méthode numérique.....	131
4.3 Résultats.	134
<u>5 Conclusions.</u>	136
Annexe du chapitre 4	138
Conclusion	146
Références bibliographiques	148

Introduction

L'écoulement plastique des matériaux paraît homogène à une échelle macroscopique dans nombre de processus de formage. Cependant, à certains stades de l'histoire de la déformation, le régime d'écoulement homogène est susceptible de devenir instable : un changement de mode de déformation se produit, qui peut aboutir à la localisation intense de la déformation plastique dans une zone d'extension très réduite. C'est le cas des bandes de cisaillement observées lors de l'usinage des métaux et dans le domaine de la balistique terminale.

Les bandes de cisaillement apparaissent notamment dans les métaux et les polymères lors de processus de déformation à grande vitesse : usinage rapide ou perforation de plaques épaisses. Elles consistent en des bandes très étroites ($10\ \mu\text{m}$ à $200\ \mu\text{m}$ dans les aciers) où la structure du matériau subit éventuellement des altérations dues à une forte élévation de la température (Figure n°0-1).

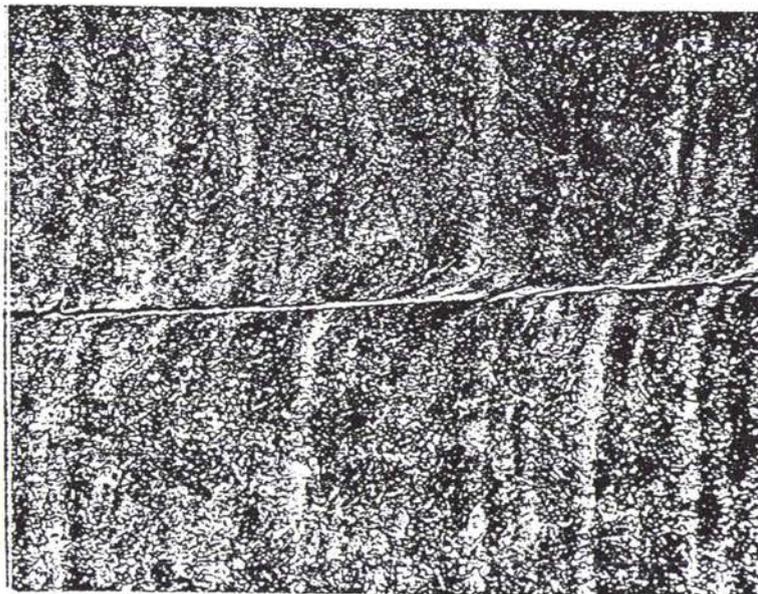


Figure n° 0-1 : Exemple de bande de cisaillement dans un acier 25 NCD 6.
d'après Buisson (1987).

Elles sont observées également dans certains processus quasi-statiques comme la striction d'une tôle emboutie ou celle d'une éprouvette en traction simple. Les matériaux géologiques présentent aussi des bandes de cisaillement

révélées par l'étude de la tectonique des plaques : l'asthénosphère est une région dont l'épaisseur est de l'ordre de plusieurs dizaines de kilomètres, qui découple les plaques lithosphériques du manteau sous-jacent, et qui peut être considérée comme une zone de cisaillement intense, avec des ordres de grandeur très différents de ceux qui prévalent dans les matériaux métalliques (Leroy (1991)). Soulignons la diversité des situations donnant lieu au phénomène de localisation en citant encore la présence de zones de cisaillement intense dans les écoulements d'huiles lubrifiantes ou encore dans les glaciers.

Nous nous intéressons dans ce travail aux instabilités de la déformation plastique conduisant aux bandes de cisaillement dites "adiabatiques" (BCA).

Les bandes de cisaillement isothermes se distinguent des BCA par des mécanismes différents de déstabilisation de l'écoulement uniforme : elles sont le résultat d'un adoucissement purement mécanique du matériau. La décroissance de la contrainte d'écoulement provient alors d'un endommagement du matériau (Cox et Low (1974), Dodd et Atkins (1983)), ou d'effets de texture et de l'existence d'un vertex à la surface de l'écoulement plastique (Fargette (1976), Asaro (1979)). La modélisation de ces phénomènes ne sera pas abordée dans ce travail.

Dans les conditions de formation des BCA (matériaux déformés à vitesse élevée, ou présentant une faible conductivité thermique), une grande partie du travail de déformation plastique se convertit localement en un dépôt de chaleur. Un accroissement local de la déformation dû à une inhomogénéité du matériau ou à un défaut géométrique conduit donc à une élévation locale de la température qui, pour un matériau thermoadouissant, provoque une nouvelle augmentation de la déformation. Ainsi, les BCA sont l'aboutissement d'un cycle autocatalytique catastrophique. Ce mécanisme conduit éventuellement à la rupture ductile des matériaux et des éléments de construction.

Les BCA sont généralement produites en laboratoire par torsion rapide de tubes minces (Marchand et Duffy (1988), Giovanola (1988)). La modélisation associée à cette démarche expérimentale est basée sur l'étude de l'écoulement d'un matériau thermoviscoplastique en cisaillement simple (Figure n° 0-2).

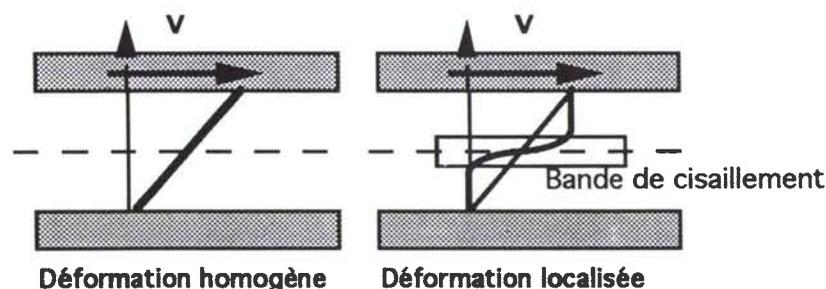


Figure n° 0-2 : Ecoulement plastique en cisaillement simple.

Les modèles adiabatiques unidimensionnels actuellement disponibles permettent l'étude du processus de localisation de la déformation plastique dans le stade précédant la rupture de l'éprouvette. Cependant, ils ne rendent pas compte de l'effet des caractéristiques morphologiques fines et des inhomogénéités matérielles de l'éprouvette sur l'évolution de la localisation ; pour cette raison en particulier, ils ne permettent pas d'interpréter la dispersion de la déformation nominale à la rupture observée expérimentalement. On se propose donc d'étudier l'influence des effets locaux sur l'évolution de la localisation de la déformation plastique.

La diffusion thermique est appelée à jouer un rôle significatif lorsque la largeur de la zone de localisation devient de l'ordre de la longueur caractéristique de la conduction. Le qualificatif "adiabatique" n'est donc plus applicable aux bandes de cisaillement dans ce stade de leur évolution. La structuration de la bande est le résultat d'un équilibre atteint entre les effets non linéaires de localisation et les effets non locaux de la diffusion thermique, qui tendent à limiter et stabiliser le phénomène de localisation de la déformation plastique. On se propose donc d'étudier la compétition entre facteurs localisants et facteurs uniformisants dans le stade terminal des BCA, pour contribuer à la détermination de largeurs de bandes caractéristiques.

Après une revue des techniques expérimentales permettant la description du processus de localisation à travers la mesure de grandeurs caractéristiques (déformations et températures locales, déformations nominales à la rupture ...), nous abordons, dans le chapitre 1, la formulation du problème thermo-viscoplastique ainsi que les modèles unidimensionnels associés. Sont ensuite présentées les méthodes d'analyse de l'évolution des BCA classées en deux familles : méthodes d'analyse linéaires et non linéaires, ainsi que les modèles proposés pour décrire le stade terminal des BCA, et pour déterminer les largeurs de bande caractéristiques.

Au chapitre 2, nous étudions l'influence combinée des paramètres géométriques, d'inhomogénéités matérielles, et des paramètres rhéologiques sur les conditions de localisation de la déformation plastique.

La stabilisation apparente de la largeur de bande dans le stade terminal a conduit de nombreux auteurs à rechercher une solution stationnaire en vitesse de déformation et en température à ce problème thermo-viscoplastique. Le chapitre 3 est consacré à l'étude de la stabilité des solutions stationnaires pour des lois de comportement classiques.

Dans un quatrième chapitre, nous proposons un modèle basé sur l'existence d'une solution stationnaire en vitesse de déformation et instationnaire

Version du 18 Décembre 1993

en température, pour l'étude du stade de structuration des BCA. Les effets de singularité et d'inhomogénéité matérielle sont inclus dans l'analyse.

Chapitre 1

Présentation des bandes de cisaillement adiabatique.

<u>1 Introduction</u>	6
<u>2 Mécanismes de formation</u>	7
2.1 Historique.....	7
2.2 Techniques expérimentales.....	8
2.3 Observations expérimentales.....	11
<u>3 Modélisations</u>	18
3.1 Modèle géométrique unidimensionnel.....	18
3.2 Loi de comportement viscoplastique du matériau.....	18
3.3 Formulation du problème.....	20
3.3.1 Solution homogène adiabatique.....	21
<u>4 Méthodes d'analyse</u>	23
4.1 Concepts de bifurcation, d'instabilité et de localisation.....	23
4.2 Analyse de bifurcation.....	24
4.3 Méthodes d'analyse de stabilité linéaire.....	25
4.3.1 Méthode de stabilité linéaire classique.....	25
4.3.2 Analyse de stabilité effective.....	26
4.3.3 Méthode de perturbation linéaire de solutions stationnaires.....	27
4.3.4 Méthode de perturbation linéaire relative.....	28
4.3.5 Conclusion sur les méthodes d'analyse linéaire.....	29
4.4 Méthodes d'analyse non linéaire.....	29
<u>5 Analyse de la morphologie des BCA</u>	33
5.1 Etude du stade terminal d'évolution des BCA.....	33
5.2 Structuration par second gradient.....	35
5.3 Structuration par la conduction thermique.....	36
<u>6 Conclusion</u>	39
Annexe du chapitre 1	41

Chapitre 1

Présentation des bandes de cisaillement adiabatique.

1 Introduction.

Les bandes de cisaillement adiabatique (BCA) constituent un exemple de la localisation intense de la déformation plastique qui se substitue fréquemment à la déformation homogène d'une structure. Elles apparaissent notamment dans certains alliages métalliques et certains polymères soumis à des sollicitations de cisaillement à grande vitesse. Ces bandes peuvent agir comme des précurseurs de la rupture des matériaux et être ainsi responsables de l'altération des capacités de résistance mécanique d'éléments de construction : on cherche alors à éviter leur apparition et leur développement.

Inversement, ces phénomènes d'endommagement peuvent être recherchés, par exemple pour améliorer les conditions de coupe dans un processus d'usinage à vitesse rapide. On comprend l'intérêt porté aux BCA en constatant la grande diversité de leurs domaines d'observation : procédés de mise en forme à vitesse rapide (formage, magnéto-formage, usinage rapide), impacts balistiques, chocs à grande vitesse et fragmentation d'enveloppes de confinement entre autres.

Les techniques expérimentales actuelles fournissent de nombreuses indications sur la morphologie et les mécanismes de développement des BCA. Après une présentation des différentes techniques expérimentales de caractérisation des BCA, nous détaillons dans ce chapitre les observations qu'elles ont permis d'effectuer, en nous attachant particulièrement à la caractérisation des variables locales : déformation et température, de la largeur de bande et des déformations nominales à la rupture du matériau.

Nous abordons ensuite une étude de différents modèles proposés pour rendre compte de l'apparition et du développement des BCA, en portant de nouveau l'accent sur les caractérisations analytiques de la déformation locale, de la largeur de bande et des déformations à la rupture : nous analysons les modèles unidimensionnels décrivant la localisation de la déformation dans les matériaux

thermo-viscoplastiques. Après formulation des équations fondamentales de ce problème, les méthodes classiques d'analyse de l'apparition et du développement des BCA sont rappelées ainsi que les conclusions qu'elles permettent de tirer quant au mode d'écoulement plastique. Enfin, les modèles proposés pour rendre compte de la morphologie des BCA dans leur stade ultime sont analysés et leurs résultats sont discutés.

2 Mécanismes de formation.

2.1 Historique.

D'après les études récentes menées par Johnson (1987), c'est Tresca (1878), dont le nom est universellement associé au critère de la contrainte de cisaillement maximale, qui établit dans un article originel datant de 1878 l'existence de bandes étroites de déformation intense durant la déformation plastique de nombreux matériaux. Plus tard, Massey (1921) décrit le phénomène de localisation de la déformation plastique sous forme de bandes qualifiées de bandes de chaleur (" Heat lines ") en raison de la forte augmentation de température consécutive à leur formation.

Le mécanisme de l'instabilité thermomécanique établi par Zener et Hollomon en 1944 repose sur l'observation expérimentale suivante : une augmentation locale de la déformation plastique initiée sur un défaut de forme ou une inhomogénéité matérielle entraîne une élévation locale de la température. En effet, 90% du travail de déformation plastique se transforme en énergie calorifique qui est conservée localement lorsque la diffusivité thermique est faible ou lorsque les vitesses de déformation sont élevées. Dans les matériaux thermoviscoplastiques, l'effet déstabilisant de l'adoucissement thermique peut devenir supérieur aux effets stabilisants de la sensibilité à la vitesse de déformation et de l'écrouissage par la déformation. L'écoulement plastique est alors favorisé dans les zones fragilisées, entraînant un adoucissement supplémentaire du matériau. Le mécanisme ainsi amorcé devient rapidement catastrophique et conduit à la localisation de la déformation plastique dans les zones les plus chaudes et les plus déformées. Ce mécanisme est autocatalytique ; il dépend des paramètres rhéologiques du matériau, de la géométrie de la structure et des conditions de chargement aux limites.

2.2 Techniques expérimentales.

Le développement des BCA dans une structure complexe est difficilement contrôlable et reproductible ; c'est pourquoi l'on s'efforce de construire des expériences de laboratoire permettant le contrôle des conditions aux limites, éliminant autant que possible les effets de structure, et assurant l'observabilité des bandes.

Parmi les dispositifs expérimentaux permettant le plus aisément la production contrôlée et l'étude des BCA, on trouve la torsion à grande vitesse de tubes à paroi mince (Figure n° I-1) à l'aide de machines hydrauliques de torsion à grande vitesse (jusqu'à 500 s^{-1}) et de barres de Kolsky (1949) pour des vitesses de déformation de l'ordre de 5.10^3 s^{-1} , et l'essai du double cisaillement pour des vitesses allant jusqu'à 10^5 s^{-1} . Toutes ces méthodes écartent les phénomènes de striction communs aux essais en traction ; on verra cependant qu'elles ne sont pas exemptes d'effets géométriques.

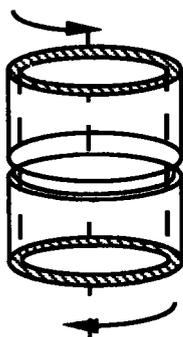


Figure n° I-1: Torsion d'un tube à paroi mince

L'expérience des barres de torsion de Kolsky est décrite par Marchand et Duffy (1988) : elle permet l'asservissement de la déformation moyenne et de la vitesse de déformation moyenne de l'échantillon, et la mesure des déformations et contraintes moyennes dans l'échantillon. L'éprouvette tubulaire de Kolsky (Figure n° I-2) est insérée entre deux barres (Figure n°I-3). Le chargement en torsion est obtenu par relâchement d'un couple préalablement emmagasiné. L'éprouvette est cisailée à grande vitesse (10^3 s^{-1} à 10^4 s^{-1}). Les jauges placées sur les deux barres donnent la contrainte et la déformation moyenne grâce à l'analyse des ondes élastiques incidentes, transmises et réfléchies.

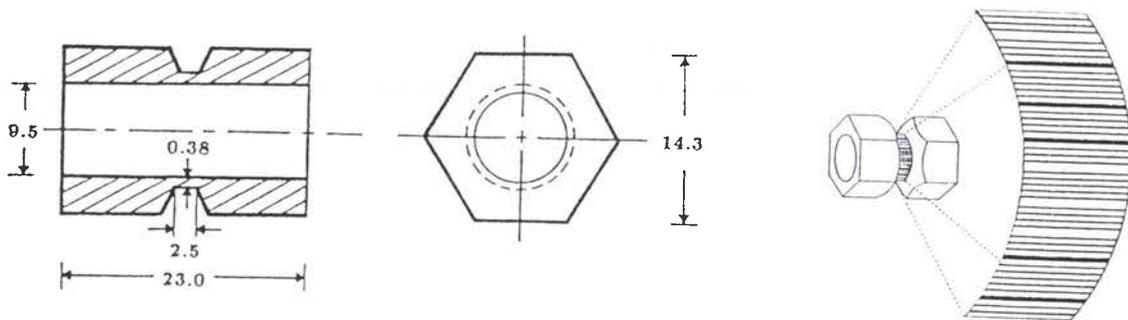


Figure n° I-2 : Détails du spécimen de torsion d'après Marchand Duffy (1988)

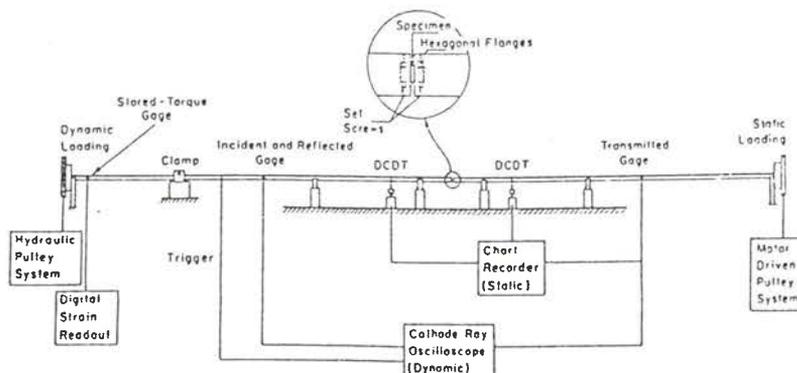


Figure n° I-3 : Barre de Kolsky d'après Marchand Duffy (1988)

Une autre technique d'obtention des BCA a été développée par Klepaczko (1994) en modifiant l'essai de double cisaillement défini par Campbell et Ferguson (1970). Elle consiste à projeter à l'aide d'un canon à gaz un projectile sur un échantillon plaque de forme symétrique adossé à une barre (Figure n° I-4).

Deux zones de cisaillement intenses sont obtenues, de part et d'autre de l'axe de symétrie dans les zones de section réduite ; les effets de bord dus aux concentrations de contrainte en réduisent la partie utile. Les effets de flexion de l'ensemble de l'éprouvette impactée par le projectile peuvent limiter les caractéristiques des essais, et en compliquer l'interprétation. Cependant un choix adéquat des dimensions de l'éprouvette permet de maîtriser ces difficultés.

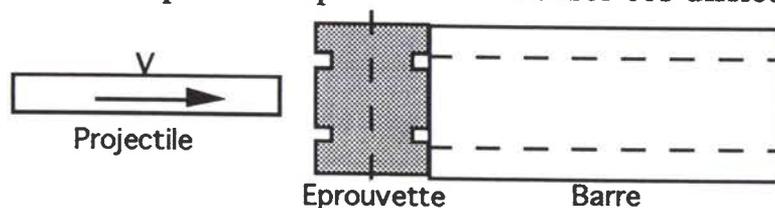


Figure n° I-4 : Expérience du double cisaillement d'après Klepaczko (1994)

La mesure de vitesse du projectile est obtenue par vélocimétrie optique et la mesure de la vitesse de la partie impactée de l'éprouvette par extensométrie optique ; des jauges placées sur la barre à distance suffisante de la section d'appui de l'éprouvette permettent de déterminer les efforts appliqués, grâce à l'analyse de l'onde élastique transmise. Le dépouillement des signaux enregistrés fournit la contrainte et la déformation moyenne dans la zone de cisaillement.

Ce dispositif permet d'avoir accès à une gamme plus étendue de vitesses de déformation (jusqu'à 10^5 s^{-1}) et de contrôler très précisément les conditions aux limites en vitesse imposées à l'échantillon.

Ces appareillages doivent être instrumentés pour permettre la mesure des variables locales, déformation et température à l'intérieur de la bande de cisaillement.

Giovanola (1988) et Marchand et Duffy (1988) ont proposé une méthode de mesure des déformations locales dans la zone d'étude de l'éprouvette (Figure n° I-2) : une grille déposée par photorésistance sur la circonférence de l'éprouvette est photographiée à intervalles de temps rapprochés, et révèle ainsi la morphologie de la déformation locale à la surface de l'éprouvette. Deux lignes des relevés photographiques sont sélectionnées en vue d'une digitalisation. La pente $\alpha(x)$ des lignes en un point de position axiale x est interprétée comme une mesure directe de la déformation plastique locale : $\gamma(x) = \tan \alpha(x)$; la largeur de bande est la plus petite distance séparant deux sections droites de pente uniforme, de part et d'autre de la zone de localisation (Figure n°I-5).

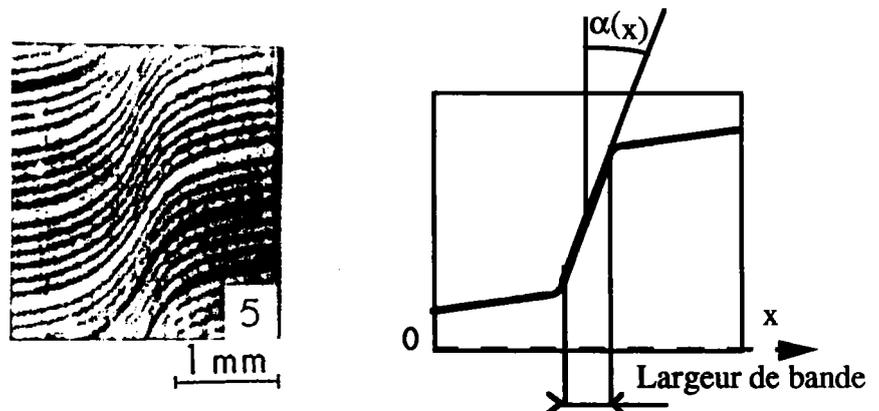


Figure n° I-5: *Photo de grille déformée ; digitalisation d'une ligne*
d'après Marchand et Duffy

Duffy (1984) et Hartley et al (1986) ont élaboré une méthode de relevé de la distribution de la température par mesure du rayonnement infrarouge émis par le spécimen. Le dispositif comprend un détecteur constitué de 12 cellules de mesure carrées de $35 \mu\text{m}$ de coté, espacées de $11 \mu\text{m}$. La sortie de chacune de ces

cellules sur oscilloscope donne le relevé temporel de la température moyennée sur une zone d'émission repérée axialement sur l'échantillon. La largeur de la bande de déformation dans les métaux varie généralement de 10 μm à 200 μm . Or la largeur du spot utilisé par Marchand et Duffy est de 35 μm ; la BCA peut ainsi se former entre deux spots ou encore sur un seul spot. Il en résulte que le gradient de température dans la bande est en général difficilement atteint. Aux longueurs d'onde appartenant au domaine de l'infrarouge, le facteur d'émission de la surface déformée est en outre très sensible aux variations physico-chimiques du matériau, ainsi qu'à sa rugosité (Pina et Hervé (1993)). L'incertitude sur les mesures est donc assez forte. Une technique de mesure plus fine serait donc nécessaire pour exploiter les informations fournies par l'émission de l'échantillon, et pour obtenir une mesure locale de la température dans la bande.

2.3 Observations expérimentales.

La courbe contrainte-déformation dynamique (Figure n° I-6) associée aux séries photographiques (Figure n° I-7) permet la caractérisation des étapes de formation des BCA.

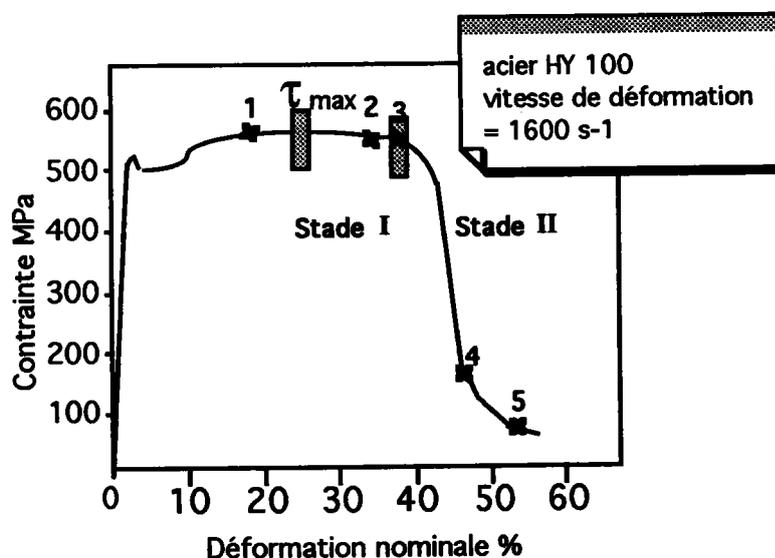


Figure n° I-6 : Courbe contrainte-déformation de cisaillement dynamique montrant les déformations auxquelles sont prises les photos de la figure n° I-7 d'après Marchand et Duffy (1988)

Jusqu'à l'extremum de la contrainte τ_{max} , la distribution de la déformation est homogène axialement et circonférentiellement (Photo n°1 de la figure n° I-7). La

déformation nominale moyenne associée à cet extremum a une valeur constante et reproductible. Le seuil ainsi défini marque le début du premier stade de la localisation (**Stade I**). Au cours de ce stade, la déformation plastique reste homogène circonférentiellement mais présente une distribution axiale inhomogène (Photos n°2,3 de la Figure n° I-7, Figure n° I-8 et Figure n°I-9). Cette inhomogénéité du champ de déformation reste limitée ; l'élévation de température reste faible et les effets de structuration induits par la conduction thermique sont peu importants. On n'observe pas de "bandes de transformation" (Rogers (1979), (1983)) révélant un changement de phase du matériau. Ce stade est d'autant plus long que la viscosité est plus forte.

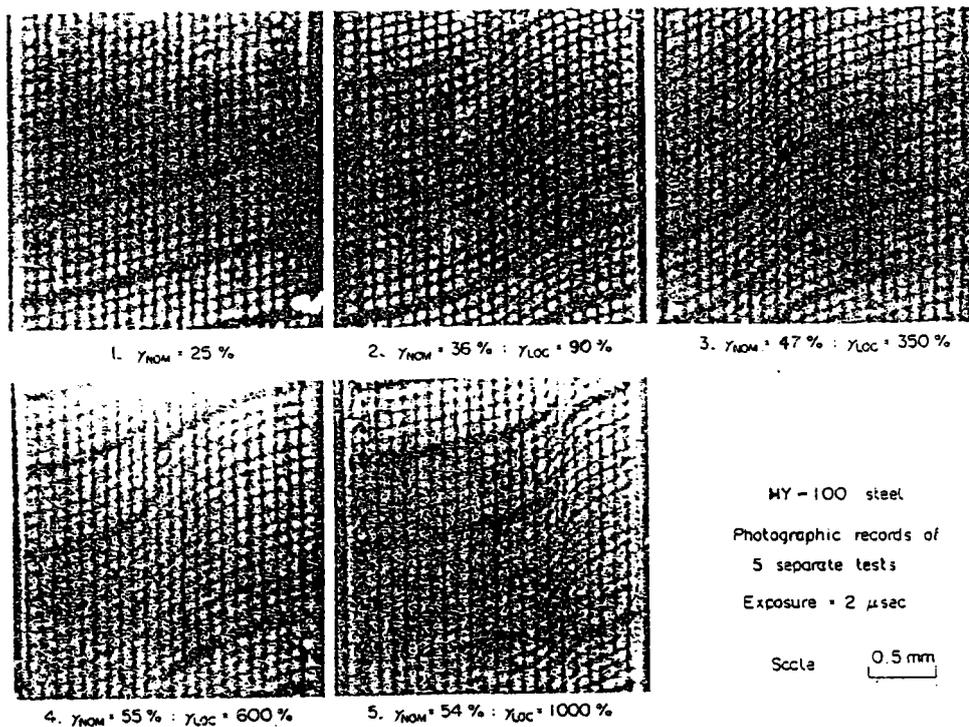


Figure n° I-7 : Photos de la grille
d'après Marchand et Duffy (1988)

La décroissance rapide de la contrainte (Figure n° I-6) marque le début du second stade de localisation (**Stade II**). Dans cette phase, la distribution de déformation devient inhomogène circonférentiellement et la position axiale du plan de cisaillement maximum est fonction de la position circonférentielle (Figures n° I-8 et I-10).

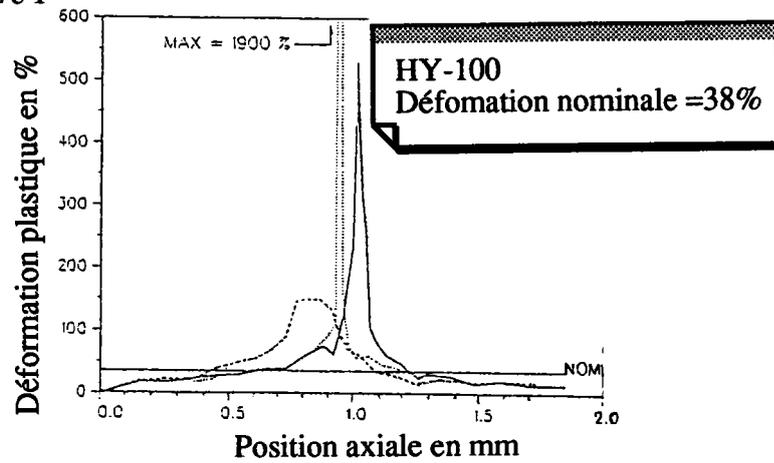


Figure n° I-8 : *Distribution de la déformation en trois points de la circonférence de l'éprouvette*
d'après Marchand et Duffy (1988)

La figure n° I-9 permet de constater que le second stade de la localisation ne se produit pas nécessairement au point de déformation maximale atteint lors du premier stade.

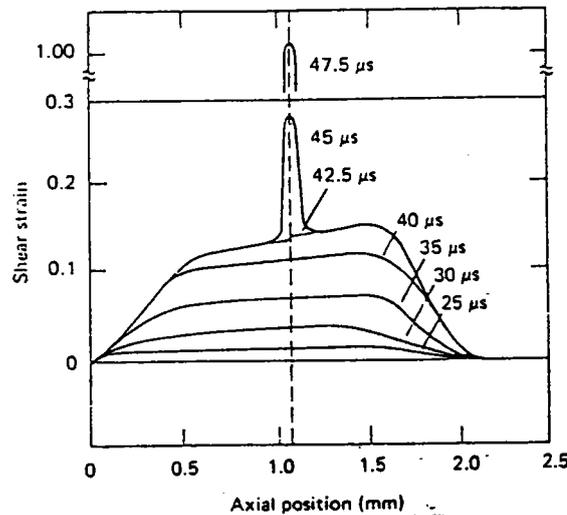


Figure n° I-9 : *Profil de déformation à différents instants*
d'après Giovanola (1988)

Une analyse microscopique des échantillons montre l'initiation de plusieurs bandes de cisaillement individuelles dans des plans distincts (Figure n° I-10).

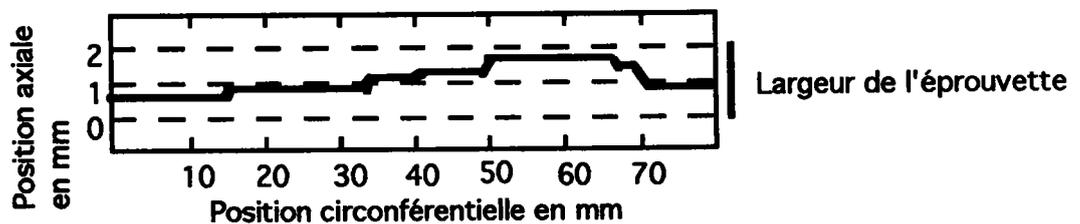


Figure n° I-10 : *Chemin de rupture de cisaillement*
d'après Giovanola (1988)

Les bandes ainsi amorcées interagissent pour se rejoindre en un chemin de rupture unique. Giovanola (1988) interprète ce phénomène en termes de perturbations locales, sous forme de marques d'usinage ou d'irrégularités microstructurales ; celles-ci fourniraient les sites de déclenchement irrégulièrement répartis du second stade de la localisation. Il attribue la perte de résistance du matériau à la croissance de microcavités et à l'endommagement du matériau.

L'analyse expérimentale quantitative du **stade II** concerne la déformation nominale à la rupture et ses corrélations avec la largeur de bande observée ou avec les paramètres qui caractérisent les défauts.

Marchand et Duffy analysent la déformation au centre de la BCA en fonction de la déformation nominale moyenne appliquée à l'échantillon. Ils mettent en évidence un seuil de déformation nominale en-deça duquel aucune localisation ne se produit (Figure n° I-11). Cette déformation nominale seuil marque le passage à un régime d'écoulement où toute déformation supplémentaire appliquée à l'échantillon se concentre dans la BCA. La déformation à rupture de l'éprouvette n'est pas reproductible et semble dépendre fortement des inhomogénéités matérielles et des défauts de surface de l'échantillon.

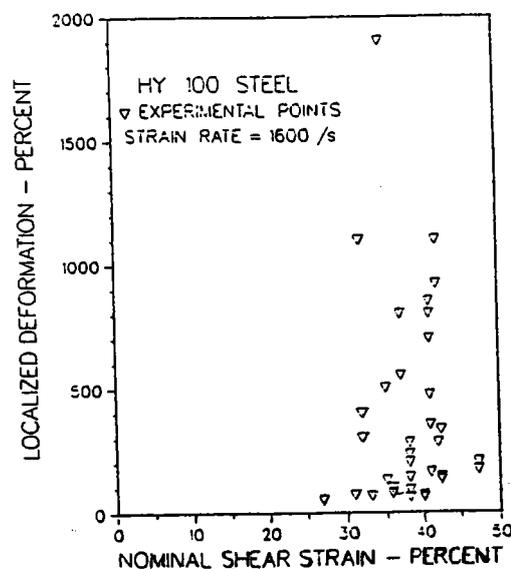


Figure n° I-11 : Déformation critique fonction de la déformation nominale d'après Marchand et Duffy (1988)

Duffy (1991) établit une corrélation entre l'amplitude ϵ d'un défaut de surface mesuré sur l'éprouvette et la déformation nominale associée à la chute en contrainte γ_{nom} . Cette déformation γ_{nom} semble être approximativement une fonction linéaire décroissante de $\ln(\epsilon)$. Ainsi, la déformation nominale γ_{nom} est

d'autant plus faible que le défaut est plus profond. Cependant l'influence de la forme du défaut n'est pas étudiée en général, bien qu'elle ait un rôle à jouer, en particulier pour des éprouvettes de faible épaisseur.

Bien que la méthode de mesure de la largeur de la zone de déformation soit différente suivant les auteurs, une tendance générale se dégage des observations : la largeur de la bande cisillée est d'autant plus faible que la déformation critique au centre de la BCA est plus importante (Figure n° I-12). Marchand et Duffy tracent la déformation localisée au centre de la BCA (γ_{loc}) en fonction de la largeur de bande (w) et proposent une loi empirique liant ces deux grandeurs de la forme $\gamma_{loc}=aw^c$. L'exposant c est négatif, ce qui traduit la localisation de plus en plus intense de la déformation. Cependant, lorsque γ_{loc} devient grand, on observe une stabilisation de la largeur de bande suggérant un équilibre entre la tendance à la localisation et une tendance à l'uniformisation, liée probablement à la diffusion thermique.

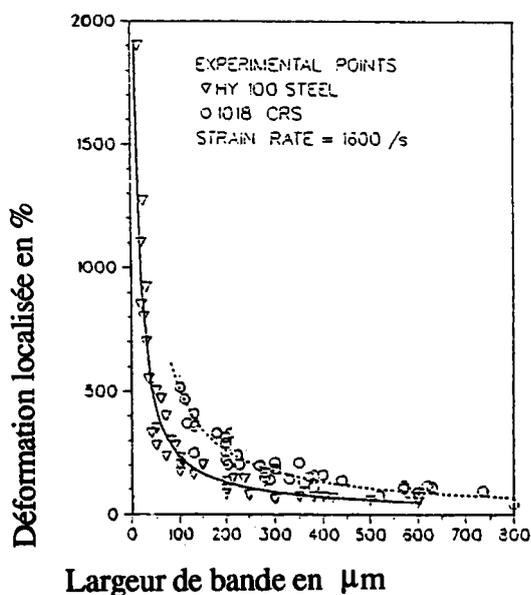


Figure n° I-12 : *Déformation localisée fonction de la largeur de bande*
d'après Marchand et Duffy (1988)

Une analyse temporelle de la température et de la contrainte de cisaillement montre que la chute en contrainte et l'accroissement local de la température sont pratiquement simultanés (Figure n° I-13).

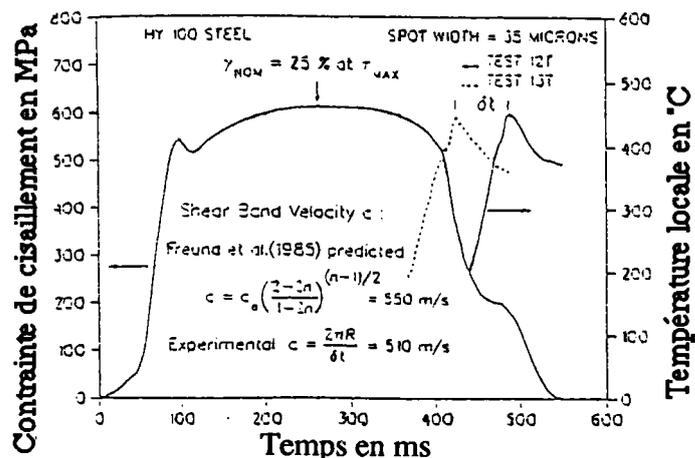


Figure n° I-13 : Courbe contrainte de cisaillement et température d'après Marchand et Duffy (1988)

Les relevés de température montrent l'établissement d'un gradient de température entre la BCA et son voisinage immédiat (Figure n°I-14). Ce gradient est d'autant plus élevé que l'on se rapproche du centre de la BCA.

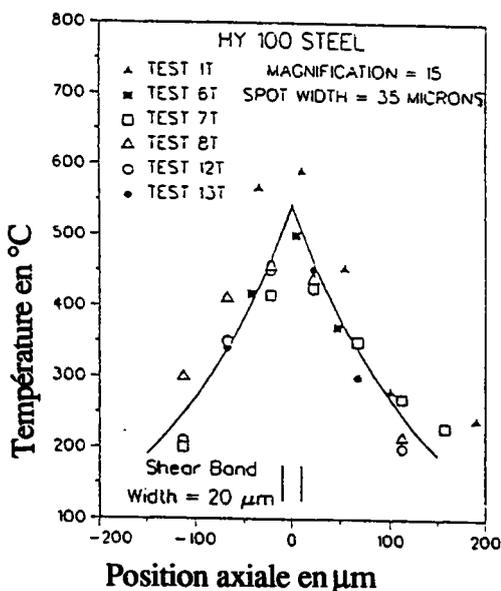


Figure n° I-14 : Profil de température fonction de la position axiale d'après Marchand et Duffy (1988)

Quand la température atteint localement la température d'austénitisation, il se produit un premier changement de phase ; puis lorsque la déformation s'arrête la différence de température entre la BCA et son voisinage provoque une trempe rapide de la zone de localisation due à la diffusion thermique. Des plaquettes de martensite sont observées après ce second changement de phase, qui est métallurgiquement stable.

Ces bandes, intitulées "bandes de transformation" et mises en évidence par Rogers (1973) et Rogers et Shastry (1983), deviennent blanches après attaque au nital (Figure n° I-15). Elles se reconnaissent au scanner par des grains très fins et une microstructure très disloquée (Giovanola (1988)).

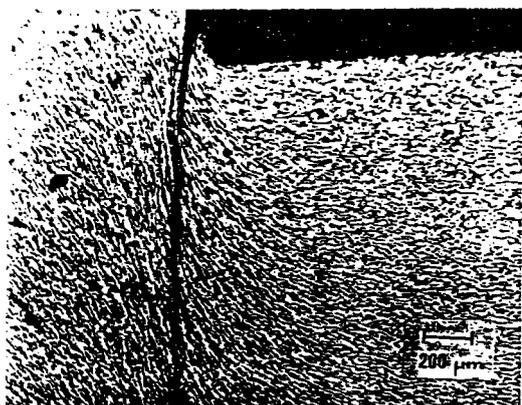


Figure Deformed shear band at corner of impact crater in 1018 steel, cold rolled 67% and impacted at 94 m/s.

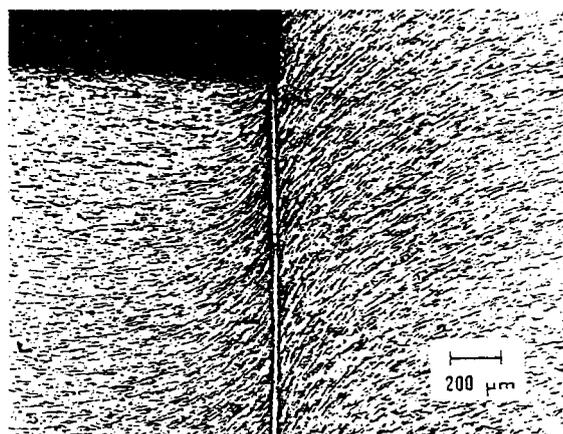


Figure Transformed shear band at corner of impact crater in 1018 steel, cold rolled 67 percent and impacted at 100 m/s.

Figure n° I-15 : Bande de déformation et bande de transformation d'après Rogers (1983)

Giovanola observe que la température au début du **stade II** est inférieure à la température d'austénitisation du matériau. Il suggère donc que les bandes de transformation seraient plus une conséquence de l'élévation de température due au glissement et au frottement des surfaces fracturées que de l'élévation de température due à l'adoucissement thermique.

La localisation de la déformation plastique dans une région dont l'épaisseur est de l'ordre de grandeur de la longueur caractéristique de la conductivité thermique, ainsi que l'existence de forts gradients de température, suggèrent que la conduction thermique devient dans le **stade II** un paramètre déterminant dans la description du processus de localisation, qu'elle a tendance à limiter et à différer.

En résumé, le processus de localisation se décompose en deux stades nécessitant l'utilisation de modèles différents. Un modèle d'instabilité thermomécanique adiabatique est adapté à la description du **stade I**, dominé par les effets de la viscosité et de l'adoucissement thermique du matériau. Le **stade II** correspond à une perte brutale de résistance du matériau. Sa description nécessite l'utilisation d'un modèle tenant compte des effets géométriques locaux, incluant la forme et l'amplitude des défauts, et des phénomènes de diffusion thermique.

Nous allons maintenant rappeler les principales méthodes d'analyse des BCA, ainsi que les conclusions sur lesquelles elles débouchent.

3 Modélisations.

3.1 Modèle géométrique unidimensionnel.

Dans le système du double cisaillement, comme pour les expériences de torsion à grande vitesse, on ramène le problème à celui d'un écoulement de Couette plan unidimensionnel, défini ci-dessous : on étudie le cisaillement simple d'une couche de faible épaisseur $2h$ et de longueur infinie dans la direction y (Figure n° I-16).

Les dérivées de toute quantité par rapport à y et z sont supposées nulles. On admet de plus que la déformation est nulle suivant z . La vitesse v dans la direction y est en général fonction de x et du temps t .

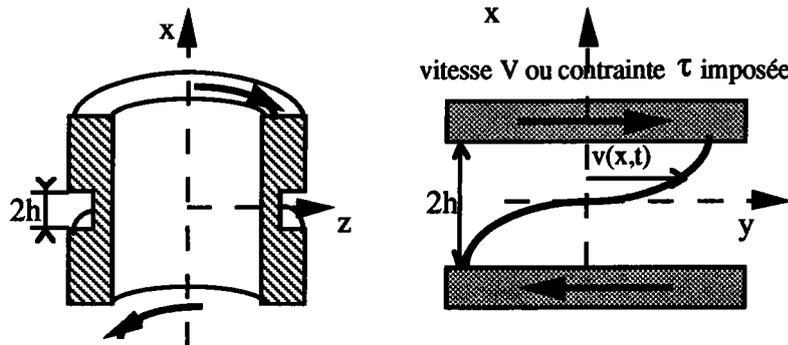


Figure n° I-16 : Modélisation du spécimen ; géométrie du problème

Cette modélisation suppose que la localisation de la déformation plastique soit indépendante de y . Les phénomènes d'amorçage multiple et de propagation ne sont donc pas pris en compte.

3.2 Loi de comportement viscoplastique du matériau.

On admet que le matériau est incompressible et que sa loi de comportement thermoviscoplastique se réduit dans le problème de cisaillement simple à

$$\tau = f(\gamma, \dot{\gamma}, \theta). \quad \text{I-1}$$

où τ , γ , $\dot{\gamma}$, θ représentent respectivement la contrainte de cisaillement, la déformation plastique, la vitesse de déformation plastique et la température absolue. La déformation élastique est négligée.

Dans ce travail, on choisit une loi de comportement qui permet la traduction de la compétition des effets déstabilisants de l'adoucissement thermique et des effets stabilisants du durcissement dû à l'écroutissage et à la sensibilité à la vitesse de déformation. La forme générale de cette loi est :

$$\tau = f(\gamma, \theta) \dot{\gamma}^m \quad \text{I-2}$$

où $f(\gamma, \theta)$ est une fonction dont l'expression tient compte des mécanismes durcissants (blocage des dislocations) et des mécanismes adoucissants (endommagement et adoucissement thermique). m est le coefficient de sensibilité à la vitesse de déformation.

Les développements analytiques utilisent fréquemment $\tau = f(\gamma, \theta) \dot{\gamma}^m$ sous la forme d'une loi puissance multiplicative :

$$\tau = \mu \theta^v \gamma^n \dot{\gamma}^m \quad \text{I-3}$$

où v, n, m sont respectivement le coefficient d'adoucissement thermique, le coefficient d'écroutissage et la sensibilité à la vitesse de déformation. Cette loi est relativement élémentaire car v, n, m sont supposés indépendants de la déformation plastique et de la température. Son intérêt réside dans le fait qu'elle est assez réaliste pour tenir compte des phénomènes majeurs, et assez simple pour permettre des approches analytiques. En l'absence de conduction thermique, on montre que si $v+n > 0$, le durcissement reste prépondérant car il n'existe pas de maximum à la courbe $\tau(\gamma)$; au contraire $v+n < 0$ conduit à un adoucissement thermique prépondérant, pour une déformation assez grande. (Figure n° I-17)

La fonction de Knowles (1976) utilisée pour caractériser l'acier HY-100 permet également la modélisation d'un comportement thermoviscoplastique durcissant puis adoucissant lorsque $n < 1/2$:

$$\tau = f(\gamma) \dot{\gamma}^m \quad \text{avec} \quad f(\gamma) = \gamma(1 + b/n \gamma^2)^{n-1} . \quad \text{I-4}$$

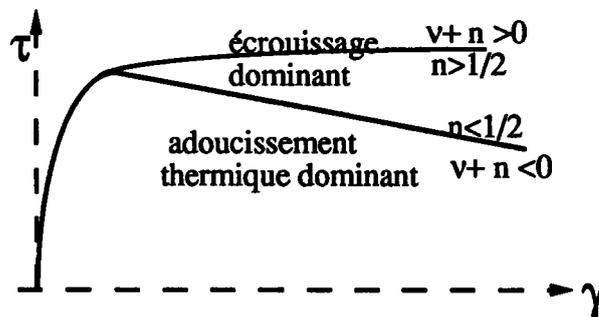


Figure n° I-17 *Comportement thermo-viscoplastique*

3.3 Formulation du problème.

La condition de compatibilité cinématique s'exprime par

$$\dot{\gamma} = \frac{\partial v}{\partial x} . \quad \text{I-5}$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit dans le cas d'une couche d'épaisseur constante :

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} = \rho \frac{\partial v}{\partial t} \quad \text{I-6}$$

où ρ est la masse volumique.

Le premier principe de la thermodynamique s'exprime par :

$$\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} - k \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \beta \tau \dot{\gamma} . \quad \text{I-7}$$

Le premier membre de (I-7) gouverne la diffusion de la chaleur (ρc est la chaleur spécifique volumique, k est le coefficient de conductivité thermique). Le deuxième membre traduit la fraction de travail de déformation plastique transformée en chaleur. Le coefficient de Taylor-Quinney (1934) β est supposé constant, et égal à 0,9 dans le cas des métaux.

La tranche modélisée peut être soumise à des conditions à la frontière

* en vitesse : $v(0,t) = 0$, $v(h,t) = V$ pour $t \geq 0$, où V est la vitesse constante du bord supérieur de la tranche de matériau ; I-8

* en contrainte : $\tau(0,t) = \tau(h,t) = \tau_0$ pour $t \geq 0$, où τ_0 est la contrainte constante appliquée aux frontières (Figure n° I-16) I-9

* mixtes : $(v - V) - \phi(\tau - \tau_0) = 0$ I-10

Les conditions à la limite thermiques se traduisent par :

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \text{ pour } x=h \text{ et } x=0 \text{ dans le cas adiabatique,} \quad \text{I-11}$$

$$\text{et par : } \theta = \bar{\theta} \text{ pour } x=h \text{ et } x=0 \text{ dans le cas isotherme.} \quad \text{I-12}$$

3.3.1 Solution homogène adiabatique.

Si le domaine d'étude de la localisation correspond au début de la phase de chute de la contrainte nominale τ observée sur la courbe de la figure n° I.6 (**Stade I**), les phénomènes de conduction thermique n'interviennent pas ($k=0$ dans I-7).

On se propose donc de déterminer la solution adiabatique du problème formulé en (3.3) pour un matériau dont la loi de comportement est donnée par I.3.

Les conditions initiales homogènes sont :

$$\begin{aligned} \gamma(x,0) &= 0 \\ \dot{\gamma}(x,0) &= \dot{\gamma}_0 \text{ pour } 0 \leq x \leq h. \\ \theta(x,0) &= \theta_0 \end{aligned} \quad \text{I-13}$$

Le système d'équations aux dérivées partielles non linéaire I-14

$$\begin{cases} \frac{\partial \tau}{\partial x} = \rho \frac{\partial v}{\partial t} \\ \dot{\gamma} = \frac{\partial v}{\partial x} \\ \rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} - k \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \beta \tau \dot{\gamma} \\ \tau = \mu \theta^\nu \gamma^n \dot{\gamma}^m \end{cases} \quad \text{I-14}$$

admet une solution homogène exacte :

* pour un contrôle en vitesse (I-8) : $\dot{\gamma}_0$ est une constante : $\dot{\gamma}_0 = V/h$.

$$\begin{aligned} \gamma_0(t) &= \dot{\gamma}_0 t \\ \theta_0(t) &= \left(1 + \frac{\beta \tau_0}{\rho c \theta_0} \frac{1-\nu}{1+n} \gamma_0^{1+n}\right)^{\frac{1}{1-\nu}} \\ \tau_0(t) &= \mu \left(1 + \frac{\beta \tau_0}{\rho c \theta_0} \frac{1-\nu}{1+n} \gamma_0^{1+n}\right)^{\frac{1}{1-\nu}} \gamma_0^n \dot{\gamma}_0^m \end{aligned} \quad \text{I-15}$$

* pour un contrôle en contrainte (I-9) : τ_0 est une constante et seule une solution approchée dans le domaine quasi-statique est ($\rho=0$ dans I-6) accessible au calcul :

$$\dot{\gamma}_0(t) = \gamma_0^{-n/m}(t) \left(1 + \frac{\beta\tau_0}{\rho c \theta_0} \gamma_0(t)\right)^{-\nu/m}$$

$$\theta_0(t) = 1 + \frac{\beta\tau_0}{\rho c \theta_0} \gamma_0(t) \tag{I-16}$$

$$t = \int_0^{\gamma_0} u^{\nu/m} \left(1 + \frac{\beta\tau_0}{\rho c \theta_0} u\right)^{\nu/m} du$$

On obtient ainsi deux expressions de la contrainte de cisaillement, associées l'une au contrôle en contrainte (I-17) et l'autre au contrôle en vitesse (I-18) :

$$\tau = f(\gamma) \dot{\gamma}^m \text{ avec } f(\gamma) = \mu \theta_0^\nu \left(1 + \frac{\beta\tau_0}{\rho c \theta_0^{1-\nu}} \gamma\right)^\nu \gamma^n \tag{I-17}$$

$$\tau = f(\gamma) \dot{\gamma}^m \text{ avec } f(\gamma) = \mu \theta_0^\nu \left(1 + \frac{(1-\nu)\beta\mu\dot{\gamma}_0^m}{\rho c(1+n)\theta_0^{1-\nu}} \gamma^{n+1}\right)^{\nu-1} \gamma^n \tag{I-18}$$

où θ_0 est la température initiale.

Le comportement de la solution homogène dans les différents cas de chargement aux limites varie en fonction des paramètres rhéologiques ; le tableau suivant (Figure n° I-18), emprunté à Fressengeas et Molinari (1987) résume les différents cas possibles.

Boundary conditions	γ_0	$\dot{\gamma}_0/\gamma_0$	θ_0	$\dot{\theta}_0/\theta_0$			
$\nu = 1$	t	$1/t$	$(1 + \alpha \frac{1-\nu}{1+n} \gamma_0^{n+1})^{\frac{1}{1-\nu}}$	$\frac{\alpha \gamma_0^n}{1 + \alpha \frac{1-\nu}{1+n} \gamma_0^{n+1}}$	$\theta_0 _{\infty} = +\infty$ $\nu < 1$ $\dot{\theta}_0 _{\infty} = 0$	$\theta_0 _{\gamma_0 c} = +\infty$ $\nu > 1$ $\dot{\theta}_0 _{\gamma_0 c} = +\infty$	
$\tau = 1$	$n \neq 0$	$\gamma_0^{\frac{n+m}{m(1+\alpha\gamma_0)}} \frac{\nu}{m}$	$1 + \alpha\gamma_0$	$\frac{\alpha \gamma_0^{\frac{n}{m}}}{(1+\alpha\gamma_0)^{(1+\nu)/m}}$	$\nu + n + m < 0$	$\nu + n + m > 0$	
					$\dot{\gamma}_0 _{th} = +\infty$ $\dot{\theta}_0 _{th} = +\infty$	$\dot{\gamma}_0 _{\infty} = 0$ $\dot{\theta}_0 _{\infty} = 0$	
	$n = 0$	$\frac{\theta_0 - 1}{\alpha}$	$\alpha \frac{\theta_0^{-\nu/m}}{\theta_0^{-1}}$	$(1 + \frac{\nu+m}{m} \alpha t)^{\frac{m}{\nu+m}}$	$1 / (1 + \frac{\nu+m}{m} \alpha t)$	$\dot{\gamma}_0 _{th} = +\infty$ $\dot{\theta}_0 _{th} = +\infty$	$\dot{\gamma}_0 _{\infty} = 0$ $\dot{\theta}_0 _{\infty} = 0$

Figure n° I-18 : Comportement de la solution homogène.
D'après Fressengeas et Molinari (1987).

4 Méthodes d'analyse.

4.1 Concepts de bifurcation, d'instabilité et de localisation

Le principal objectif des premières études analytiques a été l'établissement des conditions critiques d'apparition de solutions non uniformes. Ces critères ne préjugent en aucune façon de la stabilité de l'écoulement à long terme et de la localisation éventuelle de la déformation plastique (Figure n°I-19) sous forme de bandes de cisaillement.

Les techniques d'analyse du mode d'écoulement plastique se répartissent en plusieurs catégories :

- les analyses de bifurcation expriment la possibilité pour un matériau soumis à un chargement donné de présenter une non-unicité du mode de déformation : ces critères de bifurcation sont obtenus par une analyse non linéaire exacte.

- les analyses de stabilité linéaires et non linéaires approchées fournissent les conditions pour lesquelles un écoulement homogène perturbé reste stable : suivant les hypothèses et les méthodes adoptées, on obtient différents critères de stabilité exprimant que le développement de la perturbation reste borné ou tend asymptotiquement vers zéro.

- les analyses non linéaires exactes permettent la description du régime d'écoulement et donnent les conditions de localisation intense de la déformation plastique : ces critères de localisation sont en général des critères asymptotiques exprimant que la déformation locale tend vers l'infini.

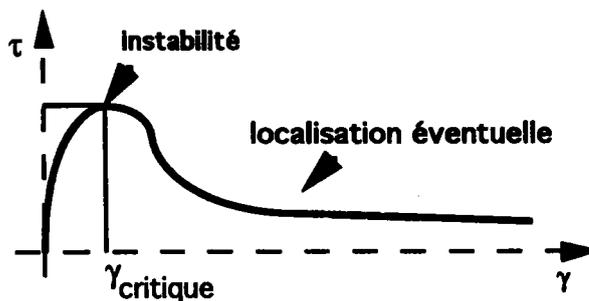


Figure n° I-19 : *Instabilité et Localisation*

Ces méthodes d'analyse ainsi que leurs principales conclusions sont rappelées dans les paragraphes suivants. Elles sont appliquées au problème du cisaillement simple d'un matériau thermoviscoplastique. Les critères de

bifurcation, d'instabilité et de localisation issus des différentes approches sont résumés en annexe pour les lois de comportement rappelées au paragraphe (3.2).

4.2 Analyse de bifurcation.

La bifurcation pour un matériau plastique indépendant du temps est atteinte d'après Drucker (1951) lorsque, pour un incrément de déformation constant, le travail à fournir au matériau en phase de déformation plastique devient plus faible (Figure n° I-20).

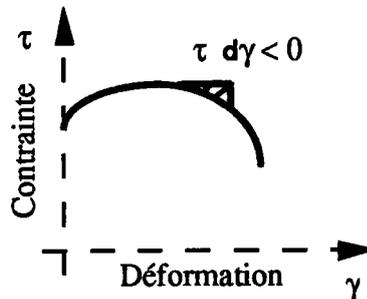


Figure n° I-20

A partir de la formulation précédente, Culver (1973) et Staker (1981) proposent un critère de bifurcation qui traduit un changement de mode d'écoulement plastique pour une déformation supérieure à une déformation seuil : un écoulement non homogène se substitue alors à l'écoulement homogène initial. Cette déformation seuil correspond à l'extremum de la courbe contrainte de cisaillement-déformation adiabatique : on montre que la condition $\partial\tau/\partial\gamma=0$ est la condition d'existence d'une solution inhomogène différente de la solution homogène fondamentale.

Cette méthode est bien adaptée au cas des matériaux dont la loi de comportement est indépendante de la vitesse de déformation, soit une simplification de (I-1) sous la forme $\tau=f(\gamma)$.

Le critère de bifurcation ainsi établi signale le déclenchement du mode d'écoulement bifurqué de la déformation plastique. On en déduit alors pour un chargement donné les matériaux susceptibles de présenter une bifurcation à partir d'une déformation critique.

L'analyse de bifurcation fournit un critère rhéologique qui ne prend pas en considération les défauts géométriques du spécimen. De plus, l'analyse proposée ignore les effets stabilisants de la vitesse de déformation. En effet, dans les matériaux visqueux, un retard souvent important sépare la contrainte maximale et l'apparition effective du mode non-uniforme de déformation.

Aucun renseignement ne peut être extrait de cette analyse sur le développement de l'instabilité et la morphologie de la zone cisailée.

4.3 Méthodes d'analyse de stabilité linéaire.

4.3.1 Méthode de stabilité linéaire classique.

Cette méthode développée, avec succès en mécanique des fluides (Chandrasekhar (1961), Drazin et Reid (1981)) et dans nombre de branches de la physique étudie la stabilité des solutions homogènes vis à vis de petites perturbations inhomogènes. On considère la solution homogène $S_0 = (\gamma_0, \dot{\gamma}_0, \theta_0)$ du problème formulé en (3.3). A un instant donné, on superpose à cette solution une petite perturbation de la forme $\delta S = S^* e^{\eta t} e^{i\xi x}$

où δS représente le vecteur $\begin{pmatrix} \delta\gamma \\ \delta\dot{\gamma} \\ \delta\theta \end{pmatrix}$ et S^* le vecteur amplitude de la perturbation $\begin{pmatrix} \gamma^* \\ \dot{\gamma}^* \\ \theta^* \end{pmatrix}$.

η est une constante représentant le taux de croissance de la perturbation ; ξ est le nombre d'ondes de la perturbation.

Après substitution de la solution perturbée dans le système d'équations I-14 et linéarisation, il apparaît que le vecteur amplitude S^* est solution du système d'équations linéarisées :

$$AS^* = \eta S^* \tag{I-19}$$

où A est une matrice dépendant de S_0 , η et ξ .

Ce système admet une solution S^* non nulle si et seulement si le déterminant de $A - \eta I$ est nul. La stabilité de la solution homogène S_0 dépend du signe de la partie réelle des valeurs propres η de A . Si une racine η a sa partie réelle positive ($\text{Re}(\eta) > 0$) alors $e^{\eta t}$ croît sans limite avec le temps t . Le mode S^* associé à cette racine est instable. La transition du régime stable au régime instable se produit lors du changement de signe de $\text{Re}(\eta)$.

Cette méthode d'analyse permet l'établissement de critères de stabilité qui prennent en considération l'ensemble des phénomènes physiques gouvernant le processus de déformation plastique tels que la conduction thermique et les effets inertiels (Argon (1973)). En outre, la déformation critique et la contrainte critique associées à l'amorçage des BCA sont accessibles au calcul ; comme l'aspect instationnaire de la déformation plastique n'est pas pris en compte, l'évolution prévue pour la perturbation n'est en général valable qu'au tout début du processus d'instabilité.

Les résultats obtenus pour les matériaux à comportement indépendant du temps constituent un cas particulier de l'étude de la stabilité linéaire classique et sont en accord avec les critères issus de l'analyse de bifurcation.

Ces techniques d'analyse linéaire classique permettent de connaître le mode d'évolution initial d'une perturbation de la solution homogène. Cependant, elles ne donnent aucune prévision du comportement à long terme d'un écoulement instable, en particulier quand les effets stabilisants de la sensibilité à la vitesse de déformation sont importants.

La technique d'analyse de stabilité linéaire classique présente en outre d'autres limitations à son application : le taux de croissance η de la perturbation est assimilé à une constante. Or η s'exprime en fonction de la solution homogène S_0 qui n'est pas en général stationnaire. La démarche n'est donc justifiée que si la solution homogène de base varie lentement par rapport à la perturbation.

4.3.2 Analyse de stabilité effective.

L'analyse de stabilité linéaire peut prévoir un mode d'écoulement instable alors que l'analyse de bifurcation ne détecte pas de branche bifurquée ; c'est le cas des matériaux visqueux. Cette contradiction apparente s'explique à l'aide de l'approche de l'instabilité effective : quand l'analyse de bifurcation ne prévoit aucune branche bifurquée, un mode d'écoulement instable peut apparaître mais avec un taux de croissance faible ; lorsque l'analyse de bifurcation décèle une branche bifurquée, le taux de croissance du mode instable devient très important.

La théorie linéarisée rappelée dans le paragraphe précédent prévoit une instabilité quand $\text{Re}(\eta) > 0$. On définit alors un paramètre positif e qui représente une mesure du taux de croissance η des modes instables définis par $\text{Re}(\eta) = e$. Un mode instable peut croître lentement et être supplanté par un autre mode de taux de croissance plus élevé et activé plus tard. L'étude consiste à évaluer le taux de croissance des différents modes et à sélectionner le mode dominant qui gouverne le processus d'instabilité à un taux de croissance e . L'instabilité définie par l'analyse de la stabilité linéaire classique correspond à $e=0$, mais l'instabilité ne devient effective que pour des valeurs suffisamment grandes de e . Il est possible de définir la déformation critique effective pour laquelle l'instabilité se développe avec un taux de croissance donné. On obtient par cette analyse un critère d'instabilité effective qui peut tenir compte du comportement général du matériau en incluant les effets dynamiques et la conduction thermique.

Cette démarche a été appliquée à l'étude des instabilités thermo-viscoplastiques apparaissant dans une tôle en chargement biaxial (Dudzinski-Molinari (1991)).

Le taux de croissance η est supposé constant dans cette analyse ; or il dépend de la solution homogène de base qui est instationnaire. Cette méthode ne s'applique donc que si la vitesse de croissance de la solution de base est négligeable par rapport à la vitesse de croissance de la perturbation.

4.3.3 Méthode de perturbation linéaire de solutions instationnaires.

Les analyses linéarisées classiques ne prennent pas en compte le caractère instationnaire de la solution homogène. Pour en tenir compte, on choisit de tester la stabilité de la solution homogène instationnaire en recherchant l'existence et l'évolution de solutions non homogènes construites en superposant à la solution homogène $S_0=(\gamma_0(t), \dot{\gamma}_0(t), \theta_0(t))$ une perturbation de la forme $S_p = \delta S_p(t) \exp i \xi y$

où $\delta S_p(t) = \begin{pmatrix} \delta \gamma_p(t) \\ \delta \dot{\gamma}_p(t) \\ \delta \theta_p(t) \end{pmatrix}$ est le vecteur amplitude de la perturbation, dépendant du temps ;

ξ est le nombre d'ondes de la perturbation.

Après substitution dans I-14 et linéarisation, on trouve un système d'équations différentielles ordinaires de la forme :

$$\frac{\partial \delta S_p}{\partial t} = A_p(t, \xi) \delta S_p \quad \text{I-20}$$

où la matrice A_p dépend du temps du fait de la non-stationnarité du problème initial. Le cas où les termes de la matrice A_p sont constants est traité par l'analyse de la stabilité linéaire classique. Chacun des termes de la matrice A_p a un comportement connu quand t tend vers l'infini : le comportement asymptotique des valeurs propres de la partie non-intégrable de $A_p(t, \xi)$ gouverne la stabilité linéaire de la solution homogène qui est déterminée au moyen d'un théorème de Coddington-Levinson (1955)(Fressengeas et Molinari (1987)). La déformation limite pour laquelle l'écoulement devient instable est également accessible au calcul ; elle dépend des paramètres rhéologiques et du mode de déformation uniforme.

Cette méthode de perturbation permet l'étude de la stabilité asymptotique de solutions de base non stationnaires. Les critères de stabilité asymptotique obtenus ignorent cependant les effets stabilisants de la sensibilité à la vitesse de déformation.

4.3.4 Méthode de perturbation linéaire relative.

Soit S l'une des grandeurs caractéristiques suivantes $(\theta, \gamma, \dot{\gamma})$; la perturbation δS peut croître sans qu'il y ait localisation car la solution homogène S_0 peut croître dans une plus large mesure que δS de sorte que le défaut relatif $\Delta S = \frac{\delta S}{S}$ décroisse (Figure n° I-21 d'après Molinari (1985)). Par suite, il y a instabilité si $\delta \dot{S} / \delta S > 0$ et instabilité relative si $\Delta \dot{S} / \Delta S > 0$

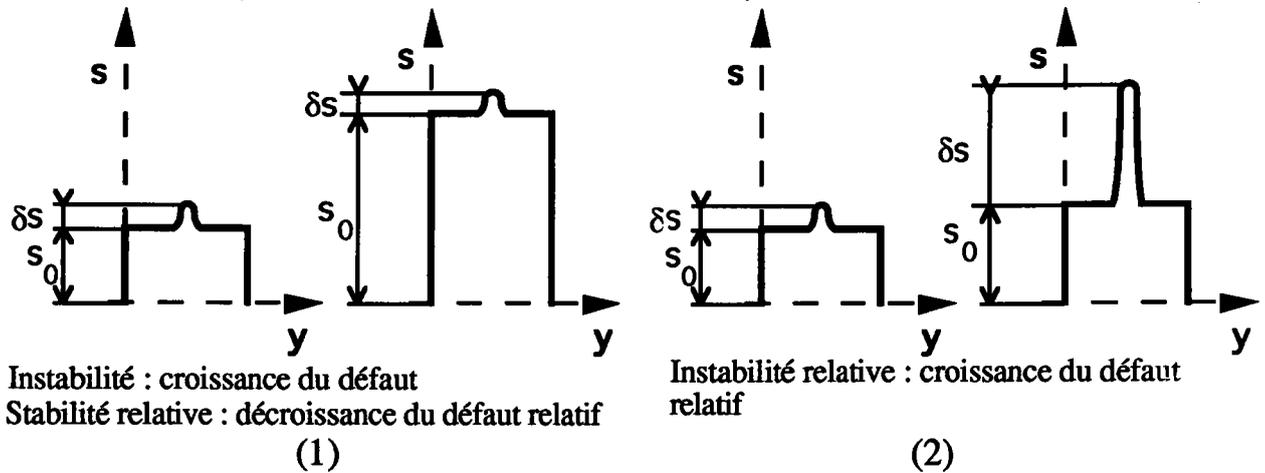


Figure n° I-21 : *Instabilité (1) et instabilité relative (2)*

d'après Molinari []

La méthode de perturbation relative (Fressengeas et Molinari 1987)) systématise cette remarque, de manière à obtenir des critères de stabilité plus pertinents, et plus proches de la notion de localisation. En outre, elle prend en compte l'aspect instationnaire de la solution de base $(\gamma_0, \dot{\gamma}_0, \theta_0)$. Des variables relatives $(\gamma_r, \dot{\gamma}_r, \theta_r)$ sont donc définies en normant les variables $(\gamma, \dot{\gamma}, \theta)$ par une solution homogène $(\gamma_0, \dot{\gamma}_0, \theta_0)$ du système d'équations définis par I-14 :

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_r(t) = \dot{\gamma} / \dot{\gamma}_0 \\ \gamma_r(t) = \gamma / \gamma_0 \\ \theta_r(t) = \theta / \theta_0 \end{cases} \quad \text{I-21}$$

La solution homogène exprimée en termes de variables relatives est alors stationnaire. Sa valeur est : $(1, 1, 1)$. On superpose à la solution homogène relative une perturbation relative de la forme $S_r = \delta S_r(t) \exp i \xi y$ où ξ est le nombre d'ondes.

Le vecteur amplitude $\delta S_r(t)$ est solution du système linéaire suivant :

$$\frac{\partial \delta S_r}{\partial t} = A_r(t, \xi) \delta S_r \quad \text{I-22}$$

où A_r est une matrice dépendant du temps.

La stabilité asymptotique de la solution $\delta S_r=0$ est analysée à l'aide du théorème de Coddington-Levinson. La solution homogène relative est asymptotiquement stable si l'on observe la décroissance à long terme de la perturbation relative. Cette analyse fournit un critère de stabilité relative asymptotique de la déformation plastique pour un matériau de propriétés rhéologiques connues sous des conditions de chargement imposées.

Au contraire des critères de stabilité absolue, les critères de stabilité relative tiennent compte des effets stabilisants de la sensibilité à la vitesse de déformation, et s'identifient avec les critères non-linéaires chaque fois que ceux-ci peuvent être obtenus.

4.3.5 Conclusion sur les méthodes d'analyse linéaire.

Les méthodes linéaires ne sont valables qu'en cas de stabilité : alors seulement les perturbations restent faibles et l'hypothèse de linéarité reste justifiée. En cas d'instabilité au contraire, les perturbations deviennent trop fortes et les conditions de validité ne sont plus vérifiées. On ne peut obtenir en toute rigueur que des conditions suffisantes de stabilité. Dans un problème de localisation, on est donc amené à considérer les méthodes non linéaires si l'on veut décrire l'évolution à long terme de l'instabilité. Cependant lorsque les effets non-linéaires sont déstabilisants, les critères d'instabilité linéaire trouvent leur champ d'application ; c'est le plus souvent le cas lors du processus de localisation de la déformation dans les BCA, pour lequel les critères linéaires d'instabilité relative s'identifient aux critères de localisation non-linéaires.

4.4 Méthodes d'analyse non linéaire.

Les méthodes d'analyse non linéaire permettent la description de la morphologie de l'écoulement plastique dans un nombre restreint de cas particuliers : Dafermos et Hsiao (1983) analysent le régime d'écoulement dynamique d'un fluide newtonien dont la viscosité dépend de la température. Tzavaras (1986) poursuit cette analyse pour un fluide non-newtonien.

De même, les critères de localisation de la déformation plastique issus d'analyses non-linéaires exactes ne sont disponibles que dans certains cas particuliers : le glissement simple quasi-statique (Molinari et Clifton (1983)) ou la traction uniaxiale quasi-statique d'un matériau thermo-viscoplastique non-conducteur de la chaleur (Fressengeas-Molinari (1985)).

Le phénomène de localisation de la déformation plastique est décrit analytiquement par les concepts de localisation asymptotique L_∞ et de localisation finie L_p (Figure n° I-21).

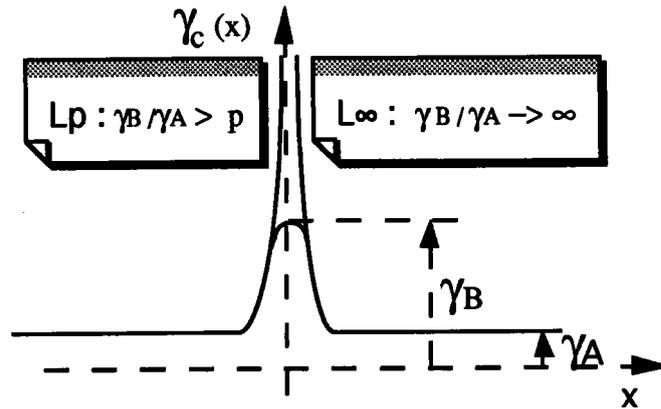


Figure n° I-21 : Localisation L_∞ et localisation L_p

Par définition, la localisation infinie L_∞ est caractérisée par une déformation infinie au centre (B) de la BCA et une déformation finie en tout autre point (A) :

$$\forall A \neq B \quad \exists \gamma_c(A) < \infty \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} \lim \gamma(B)/\gamma(A) = \infty \\ \gamma(A) \rightarrow \gamma_c(A) \end{cases} \quad \text{I-23}$$

La localisation finie L_p se définit par une déformation plastique de valeur finie élevée au centre de la BCA :

$$\exists V_p(B) \quad \exists \gamma_c(A) \text{ tel que } \forall A \notin V_p(B) \quad \begin{cases} \lim \gamma(B)/\gamma(A) \geq p > 1 \\ \gamma(A) \rightarrow \gamma_c(A) \end{cases} \quad \text{I-24}$$

Molinari et Clifton (1987) obtiennent une formulation analytique exacte des conditions de localisation L_∞ pour un matériau thermo-viscoplastique. Le problème se réduit à l'étude du cisaillement simple quasi-statique et adiabatique d'une tranche de faible épaisseur. Un défaut de forme sinusoïdale (Figure n° I-22) est par exemple utilisé. L'épaisseur de la couche cisailée $l(x)$ est décrite par la fonction sinusoïdale :

$$l(x) = li(1 + \frac{\epsilon}{2}(\cos(\frac{2\pi x}{h}) - 1)) \quad \text{I-25}$$

où l_i est l'épaisseur maximale et h la largeur de la couche cisillée ; ε est le paramètre variable de la formulation, il représente l'amplitude du défaut.

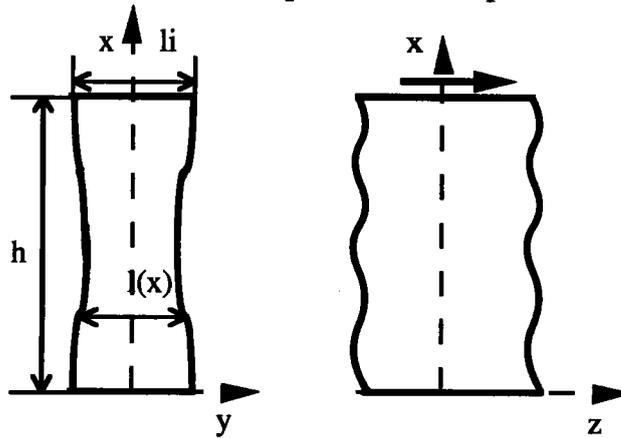


Figure n° I-22 : Géométrie du spécimen et condition de chargement.

L'équation d'équilibre est écrite entre deux points A et B appartenant à la zone de localisation :

$$l(x)\tau(x) = l(0)\tau(0) \quad \text{I-26}$$

où $x=0$ représente le centre (B) de la bande de cisaillement et x un point variable (A) sur le profil du défaut.

Après substitution de la loi de comportement $\tau = f(\gamma, \theta)\dot{\gamma}^m$ prise sous les formes explicitées en I-4, I-17 et I-18 dans I-26, l'équation est intégrée aux points A et B.

$$l(x)^{1/m} \int_{\gamma_0}^{\gamma(x)} f(\xi)^{1/m} d\xi = l(0)^{1/m} \int_{\gamma_0}^{\gamma(0)} f(\xi)^{1/m} d\xi \quad \text{I-27}$$

Le critère de localisation L_∞ en B ($x=0$) s'exprime par la condition d'existence de l'intégrale figurant à droite du signe "=" dans I-27 lorsque $\gamma(A) \rightarrow \gamma_c(A)$. A titre d'illustration, dans le cas d'une expérience de torsion contrôlée en contrainte d'une éprouvette en matériau de loi de comportement $\tau = \mu\theta^\nu \gamma^n \dot{\gamma}^m$, le critère de localisation L_∞ s'exprime par $\nu + n + m < 0$ (Molinari et Clifton (1987)). Cette inégalité met en évidence la compétition entre les effets stabilisants de l'écroutissage ($n > 0$) et la sensibilité à la vitesse de déformation ($m < 0$) et les effets déstabilisants de l'adoucissement thermique ($\nu < 0$).

Les critères de localisation issus de cette analyse non-linéaire exacte sont des critères asymptotiques. Or, seule la localisation L_p peut être suivie expérimentalement par tracé, entre autres, des courbes contrainte-déformation nominale. On est donc amené à étudier, par intégration numérique de I-27 la distribution de la déformation plastique lors de la localisation L_p en pilotant la déformation $\gamma(0)$ au centre de la BCA. On atteint ensuite la déformation nominale

γ_{nom} en moyennant la déformation plastique sur la largeur h de l'éprouvette ; on est alors en mesure de tracer, dans le cadre d'un contrôle en vitesse des bords d'une éprouvette, des courbes contrainte-déformation nominale directement comparables aux courbes disponibles expérimentalement pour des amplitudes ϵ comprises entre 10^{-2} et 10^{-1} . La déformation nominale critique correspondant à la chute brutale de la contrainte γ_c est alors représentée en fonction du logarithme de l'amplitude $\ln(\epsilon)$ dans le domaine d'étude $\epsilon \in [10^{-6} \cdot 10^{-1}]$. On constate, sur la base des résultats numériques, que la courbe $\gamma_c(\ln(\epsilon))$ est approximativement une droite de pente négative parallèle à la courbe expérimentale, mais décalée dans le sens des déformations plus faibles (Figure n° I-23).

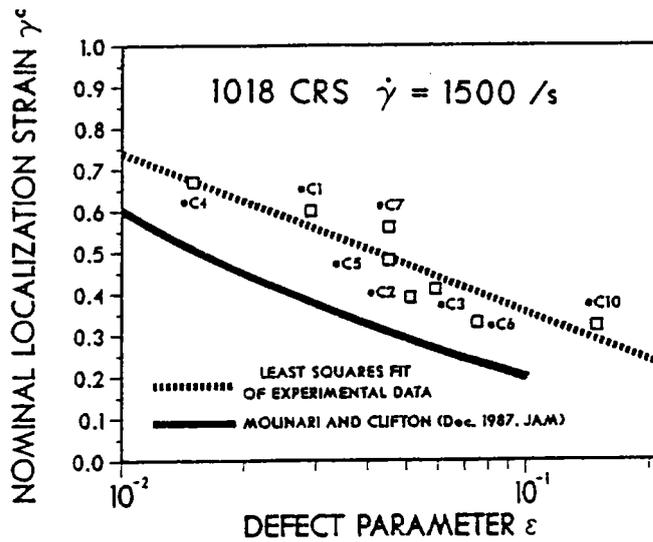


Figure n° I-23 : Dépendance de la déformation nominale en amplitude d'après Duffy (1991)

Le relevé expérimental de la courbe contrainte-déformation nominale montre une variation possible de pente de la chute en contrainte (Figure n°I-24). Ce changement de pente peut provenir de la difficulté à maîtriser les conditions aux limites imposées au bord de l'éprouvette. En théorie, le contrôle réalisé est un contrôle en vitesse, mais expérimentalement on assiste à une combinaison des modes de contrôle en vitesse et en contrainte (Leroy et Molinari (1992)).

Le changement de pente de la chute en contrainte pourrait être également expliqué par une intervention de la forme locale du défaut : en effet, plus un défaut est plat, moins la localisation de la déformation plastique est intense ; les déformations nominales sont alors légèrement croissantes dans le **stade II** et, par suite, on doit observer une chute adoucie de la contrainte.

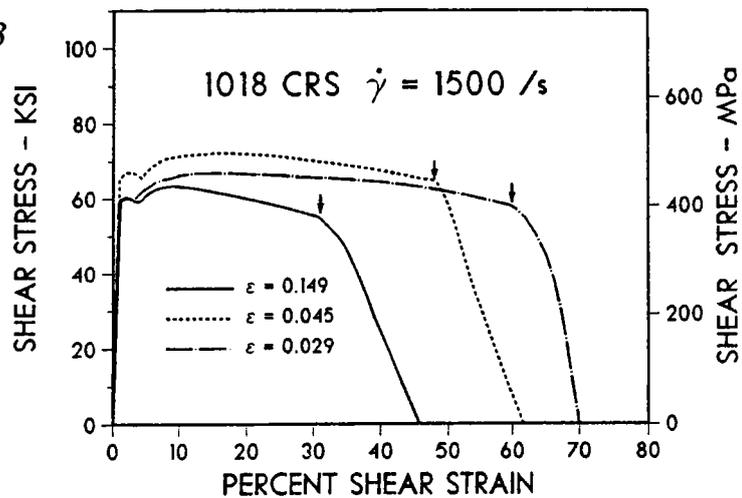


Figure n° I-24 : *Courbe contrainte-déformation nominale.*
d'après Duffy (1991)

Les différences constatées entre les mesures expérimentales et les courbes établies numériquement pourraient ainsi être expliquées par la simplicité excessive de la formulation I-25 : la description du profil de l'éprouvette par une fonction sinusoïdale ne rend pas nécessairement compte de l'acuité des défauts de surface. Une description plus précise utilisant les paramètres de taille et de forme des défauts dans la zone de localisation est susceptible de mieux rendre compte des résultats expérimentaux.

On s'attachera donc dans ce travail à étudier l'influence combinée des inhomogénéités géométriques et matérielles et des paramètres rhéologiques sur le développement et la morphologie des BCA.

5 Analyse de la morphologie des BCA.

5.1 Etude du stade terminal d'évolution des BCA.

Backman et al (1986) ont étudié expérimentalement les effets d'échelle sur la perforation de plaques en aluminium par des projectiles sphériques en acier. En imposant une variation à l'épaisseur de la plaque ou au diamètre de la sphère d'un facteur un tiers, ces auteurs montrent que la largeur de bande est indépendante des effets d'échelle.

L'absence d'effet d'échelle suggère que la morphologie observée dépend surtout d'effets locaux, comme l'équilibre des flux de chaleur, et la présence d'irrégularités géométriques ou d'inhomogénéités matérielles au niveau de la bande. La description de la structuration de la bande nécessite donc l'utilisation

d'un modèle qui prend en compte les effets locaux tels que les défauts géométriques ou les inhomogénéités.

Les observations de Marchand et Duffy suggèrent en outre qu'après une première phase de localisation de la déformation plastique correspondant au stade I, il existe une compétition entre la tendance à la localisation et une tendance à l'homogénéisation de la déformation.

En effet, après une phase de localisation de la déformation plastique (Figure n°I-24), la décroissance de la largeur de bande semble se stabiliser pour les faibles largeurs de bande. Quand la dimension de la largeur de bande devient comparable à la longueur caractéristique de la conduction thermique ou à la longueur de coupure de phénomènes dépendant d'interactions spatiales (hétérogénéités matérielles, interactions entre inclusions ...), on est conduit à penser que l'influence stabilisante des effets non-locaux devient significative. Cette observation a pu conduire à la formulation de modèles basés sur une hypothèse de stationnarité du régime terminal des BCA.

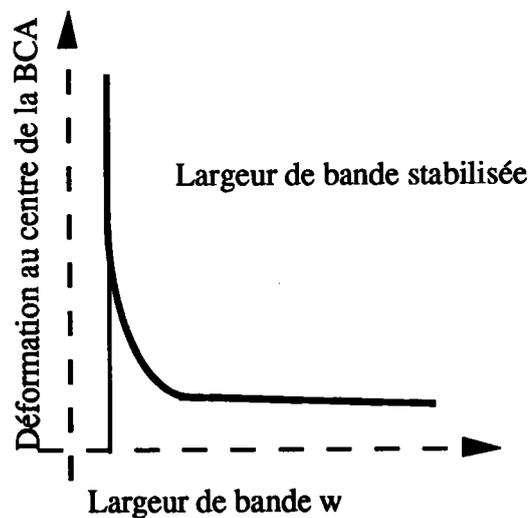


Figure n° I-24 : Description du stade terminal d'évolution des BCA.

Les études analytiques de la structuration de la BCA sont présentées dans ce qui suit par famille de modélisation des effets non-locaux : par gradient de déformation puis par diffusion thermique.

5.2 Structuration par second gradient.

Les interactions s'exerçant entre les dislocations ralentissent la croissance des inhomogénéités : c'est l'origine de l'écroutissage du matériau. On observe, en

outre, à une échelle microstructurale, que les dislocations s'organisent en structures réparties de manière non uniforme dans le matériau. De la même façon, il existe en général une distribution d'hétérogénéités dans le matériau à l'échelle de longueur des inclusions, des cavités ou des fissures. On propose alors pour tenir compte des interactions entre ces défauts microstructuraux, la formulation de lois de comportement non locales intégrant des variables d'espace à la formulation classique. C'est le cas des modèles de Kunin (1983), Aifantis (1984) et Bazant (1984).

Les lois de comportement locales décrivent l'état homogène ; elles sont exprimées sous forme de relations entre variables locales c'est-à-dire entre des valeurs moyennes effectuées sur un volume élémentaire et affectées à un point. Les lois de comportement non locales permettent de transposer à une échelle macroscopique les interactions entre les hétérogénéités, par exemple en introduisant dans la loi de comportement des gradients de déformation d'ordre supérieur à un ; il s'agit alors d'une forme faible d'interactions, légitime lorsque la longueur de coupure au delà de laquelle les interactions entre les inhomogénéités n'interviennent plus de façon significative, est assez petite.

Zbib et Aifantis (1988) proposent une loi de comportement non locale pour un matériau supposé incompressible :

$$\bar{\tau} = \tau(\gamma) - c_1(\gamma)\nabla^2\gamma - c_2(\gamma)|\nabla\gamma|^2 \quad \text{II-28}$$

La contrainte $\tau(\gamma)$ décrit l'état homogène. Les termes $-c_1(\gamma)\nabla^2\gamma - c_2(\gamma)|\nabla\gamma|^2$ sont des termes non-locaux qui traduisent l'inhomogénéité de la microstructure.

Si l'analyse par gradients d'ordre supérieur permet la description de la localisation et de la structuration, les résultats obtenus conservent un caractère formel : les termes $c_1(\gamma)$ et $c_2(\gamma)$ ne sont pas identifiables aisément à partir des caractéristiques rhéologiques connues du matériau. La largeur de bande et l'évolution spatio-temporelle de la contrainte et de la déformation plastique ne sont comparables aux résultats expérimentaux qu'après un protocole compliqué d'identification de paramètres. Une approche moins formelle de la structuration de la BCA consiste à décrire le processus de localisation par la compétition des non-linéarités du problème thermomécanique et de la loi de comportement, et des effets non-locaux provenant de la conduction thermique.

5.3 Structuration par la conduction thermique.

Grâce à une étude numérique par différences finies de l'évolution quasi-statique des BCA dans un matériau élasto-viscoplastique, Merzer (1982) montre que, outre les effets géométriques, la conduction thermique est un facteur structurant de la localisation de la déformation plastique. Un défaut géométrique de forme classique en Π dont le modèle a été proposé originellement par Litonsky (1976)(Figure n°I-25), est introduit pour initialiser une perturbation et amorcer numériquement le phénomène d'instabilité de la déformation plastique.

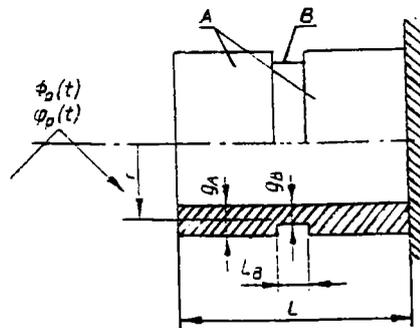


Figure n° I-25 : Défaut géométrique.
d'après Litonsky (1976)

La résolution numérique montre qu'en l'absence de conduction thermique la largeur de bande est identique à la largeur du défaut, et qu'elle lui devient supérieure lorsque la conduction thermique est non nulle (Figure n°I-26) ; Merzer conclut que les facteurs géométriques ne sont pas les seuls effets structurants et qu'il faut leur adjoindre la conduction thermique.

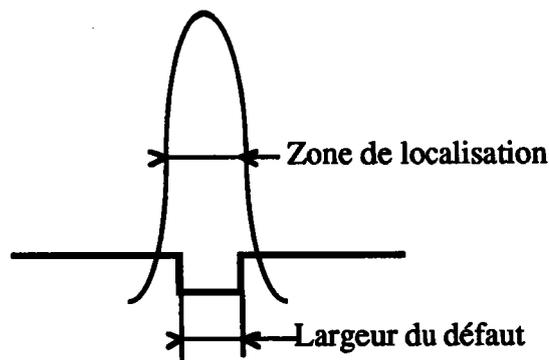


Figure n° I-26 : Analyse de la zone de localisation.

Les effets stabilisants de la conduction thermique limitent le phénomène de localisation de la déformation plastique et favorisent ainsi la structuration de la bande.

Parallèlement aux développements numériques analogues à ceux de Merzer, des études analytiques unidimensionnelles ont tenté l'exploration des mécanismes gouvernant la phase finale de la localisation de la déformation plastique. Ces études sont à la base de diverses définitions de la largeur de bande.

La plus simple consiste en une analyse dimensionnelle menée sur l'équation de conservation de la chaleur, dans l'hypothèse où la distribution des variables est homogène dans la bande : en supposant que la largeur de bande δ est celle qui rend le flux de chaleur dû à la conduction du même ordre de grandeur que le débit de chaleur créé par la déformation plastique, on trouve :

$$\delta = \sqrt{\frac{k\theta_*}{\beta\tau\dot{\gamma}_*}} \quad \text{I-29}$$

Les grandeurs indicées d'une étoile sont les valeurs moyennes dans la BCA. Marchand et Duffy (1988) utilisent cette expression et obtiennent une valeur de la largeur de bande beaucoup plus forte que la valeur expérimentale (δ estimé à 40 μm pour une largeur de bande expérimentale de 20 μm dans un acier HY-100), ce qui tend à montrer qu'il faut inclure dans le modèle un facteur supplémentaire de localisation, par exemple les imperfections géométriques ou les inhomogénéités matérielles.

La stabilisation apparente de la BCA a conduit certains auteurs (Wright (1987) et (1988)) à supposer l'établissement d'un régime stationnaire atteint asymptotiquement. La démarche analytique proposée initialement par Joseph (1965(a) et (b)) pour la résolution d'un problème d'électricité peut s'appliquer à la recherche d'une solution stationnaire du système établi en (3.3), pour un matériau sans écrouissage :

$$\begin{cases} \frac{d\tau}{dx} = 0 \\ \beta\tau\dot{\gamma} + k\frac{d^2\theta}{dx^2} = 0 \end{cases} \quad \text{I-30}$$

La résolution de I-30 pour la loi de comportement $\dot{\gamma} = g(\tau, \theta)$ fournit

$$\frac{d\theta}{dx} = \sqrt{\frac{2\beta\tau}{k}} \sqrt{\int_0^{\theta_*} g(\tau, \eta) d\eta} \quad \text{I-31}$$

La température s'obtient sous forme implicite en fonction de la position spatiale x en intégrant par quadratures l'expression I-31.

Une étude de ce type a été effectuée par Leroy et Molinari (1992) pour différentes lois de comportement et conditions aux limites. Les effets d'écoulement étant négligeables dans le stade terminal d'évolution des BCA, les lois de comportement suivantes, de type Arrhénius, ont été utilisées :

$$\tau = \exp\left(\beta\left(\frac{1}{\theta} - 1\right)\right)\dot{\gamma}^m \quad \text{I-32}$$

$$\tau = \exp(-\beta(\theta - 1))\dot{\gamma}^m \quad \text{I-33}$$

La traduction des conditions aux limites permet la détermination de la contrainte de cisaillement τ en fonction de la température au centre θ_m . On montre par exemple que pour la loi I-33 et les conditions aux limites en contrainte, il existe deux solutions stationnaires lorsque la contrainte est inférieure à la contrainte τ_{critique} : une solution sous-critique stable et une solution sur-critique instable (Figure n° I-27). Au delà de τ_{critique} , il n'existe pas de solution stationnaire.

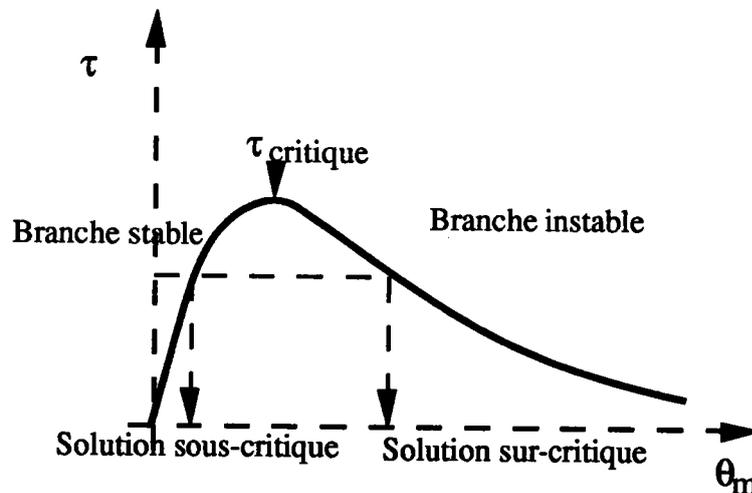


Figure n° I-27 : Etude de la stabilité des solutions stationnaires.

D'après Joseph

Il apparaît qu'une solution stationnaire est en général instable pour les valeurs des paramètres mécaniques correspondant aux métaux dans les conditions de chargement mixte inhérentes aux essais de torsion de Kolsky. De manière complémentaire, le chapitre 3 est consacré à l'étude de la stabilité des solutions stationnaires pour une loi de comportement linéaire en température de la forme $\tau = (1 - a\theta)\dot{\gamma}^m$, et une loi puissance multiplicative $\tau = \theta^v \dot{\gamma}^m$.

On montrera que, pour les valeurs de la température au centre de la bande mesurées expérimentalement, la solution stationnaire se place de nouveau sur la branche instable. Une démarche alternative proposée par Wright (1992) consiste à rechercher une solution stationnaire en vitesse de déformation mais instationnaire en température au problème (I-34) :

$$\begin{cases} \frac{d\tau}{dx} = 0 \\ \frac{d\theta}{dt} = \tau\dot{\gamma} + k \frac{d^2\theta}{dx^2} \end{cases} \quad \text{I-34}$$

L'analyse n'est possible que pour une loi de comportement linéaire en température : $\tau = (1 - a\theta)\dot{\gamma}^m$. Elle sera détaillée au chapitre 4 ; on peut cependant noter d'ores et déjà qu'elle conduit à exprimer la demi-largeur de bande en fonction de la vitesse de déformation au centre de la bande $\dot{\gamma}_0$ sous la forme :

$$\delta = \frac{h}{\dot{\gamma}_0} \quad \text{I-35}$$

La description du stade terminal d'évolution des BCA nécessite par conséquent l'établissement d'un modèle privilégiant davantage les effets locaux. Un tel modèle est développé dans le chapitre 4. Les effets non-linéaires et les effets locaux induits par une singularité du matériau sont inclus dans le modèle ainsi que les effets de conduction thermique conduisant à une certaine stabilisation du processus de localisation.

6 Conclusion.

Au cours de ce premier chapitre, les observations expérimentales de la distribution spatio-temporelle de la déformation plastique et de la température dans les BCA ont été analysées, de manière à dégager les problèmes ouverts qui seront traités dans la suite de ce travail.

En premier lieu, l'influence des effets de géométrie locale sur le processus de localisation de la déformation plastique et sur les déformations nominales à la rupture doit être explicitée, si l'on souhaite obtenir des informations de nature rhéologique à partir d'un essai de torsion mené à son terme.

En second lieu, l'existence de caractéristiques morphologiques nettement définies dans le stade terminal d'évolution des BCA doit être interprétée, car elle

est susceptible de fournir des informations sur le régime local de déformation et sur le mode de rupture qui en résulte.

Différents modèles et méthodes d'analyse tant linéaires que non-linéaires ont été rappelés pour cerner les techniques d'étude qui vont être utilisées dans les trois prochains chapitres et pour présenter un bilan (non exhaustif) des interprétations disponibles dans la littérature, et apportant des éléments de réponse aux problèmes évoqués ci-dessus.

Le modèle à la base de ce développement est unidimensionnel : les défauts géométriques ou structurels sont ramenés au plan de section transverse de l'éprouvette ; les phénomènes de propagation, de nucléation multiple et d'évolution de l'endommagement dans le matériau ne sont pas pris en considération.

L'étude menée dans le second chapitre porte sur l'interprétation de l'influence combinée des inhomogénéités géométriques et matérielles, et des paramètres rhéologiques ou thermo-mécaniques sur l'évolution adiabatique des BCA.

Une analyse de la stabilité des solutions stationnaires au problème thermomécanique posé pour interpréter les BCA dans leur stade terminal est proposée au chapitre 3, pour certaines lois de comportement ; elle montre que la solution stationnaire atteinte asymptotiquement se place sur la branche instable du mode d'écoulement plastique. Elle n'est donc pas atteinte physiquement, et il s'avère nécessaire d'établir un modèle semi-stationnaire : stationnaire en vitesse de déformation et instationnaire en température. Son utilisation, développée dans le chapitre 4, contribue à l'étude de la sensibilité de la largeur de bande aux effets locaux de la géométrie et des inhomogénéités matérielles, combinés aux effets de diffusion thermique.

Annexe du chapitre 1.**Application des méthodes d'analyse.**

Le critère de bifurcation s'exprime par la condition d'existence d'un extremum de la contrainte : $\partial\tau/\partial\dot{\gamma}=0$ pour les solutions uniformes mises en évidence en (3.2) dans le cas d'un écoulement adiabatique quasi-statique (le coefficient de sensibilité à la vitesse de déformation est nul).

Les critères d'instabilité sont établis par Fressengeas et Molinari (1987) pour un matériau thermoviscoplastique de loi de comportement $\tau = \mu\theta^v\dot{\gamma}^n\dot{\gamma}^m$. Les résultats sont rappelés dans le cas d'un écoulement quasi-statique.

Les critères de localisation sont extraits de l'étude menée par Molinari et Clifton (1987) dans le cadre du cisaillement simple adiabatique quasi-statique d'un matériau thermoviscoplastique.

$\tau = f(\dot{\gamma})\dot{\gamma}^m$	contrainte	vitesse	Knowles
$f(\dot{\gamma}) = \mu\theta_0^v \left(1 + \frac{\beta\tau}{\rho c\theta_0^{1-v}} \dot{\gamma}\right)^v \dot{\gamma}^n$		$f(\dot{\gamma}) = \mu\theta_0^v \left(1 + \frac{(1-v)\beta\mu\dot{\gamma}_0^m}{\rho c(1+n)\theta_0^{1-v}} \dot{\gamma}^{n+1}\right)^{1/v-1} \dot{\gamma}^n$	$f(\dot{\gamma}) = \mu\dot{\gamma} \left(1 + \frac{b}{n} \dot{\gamma}^2\right)^{n-1}$
bifurcation (m=0)	$v+n < 0$	$v+n < 0$	$2n < 1$
instabilité	$v+n < 0$	$v+n < 0$	
instabilité asymptotique	$v+n < 0$	$v+n < 0$	
instabilité relative	$v+n+m < 0$	$v+n+m < 0$	
localisation	$v+n+m < 0$	$v+n+m(1-v) < 0$	$2n+m < 1$

Chapitre 2

Analyse locale du cisaillement adiabatique

<u>1 Introduction</u>	44
<u>2 Formulation du modèle</u>	45
2.1 Description du défaut, modélisation.....	45
2.2 Equations fondamentales.....	49
<u>3. Résultats asymptotiques locaux</u>	51
3.1 Méthode générale et résultats.....	51
3.2 Application au cas de la fonction de Knowles.....	53
<u>4 Résolution complète</u>	53
4.1 Méthode de développement.....	54
4.2 Localisation L^∞	55
4.3 Localisation L_p	57
4.4 Exemple de résolution.....	58
<u>5. Largeur de bande</u>	60
5.1 Définition et méthode de détermination.....	60
5.2 Détermination analytique de la largeur de bande.....	62
5.2.1 Loi de comportement de Knowles.....	63
5.2.2 Lois de comportement adiabatiques.....	63
<u>6. Etudes paramétriques et confrontations expérimentales</u>	66
6.1 Influence des paramètres rhéologiques.....	66
6.2 Influence des paramètres géométriques.....	68
6.2.1 Influence de l'acuité r du défaut.....	68
Combinaisons de défauts de longueur d'onde différentes	
6.2.2 Influence de l'acuité r du défaut.....	69
6.2.3 Influence comparée de l'amplitude et de l'acuité.....	73
<u>7. Conclusions</u>	75
<u>Annexes du chapitre 2</u>	
Annexe n°1	
Résultats asymptotiques locaux.....	77

Version du 8 Décembre 1993

Annexe n°2	
Fonctions hypergéométriques	77
Annexe n°3	
Développement cas particuliers.....	78
Annexe n°4	
Calcul des termes d'un développement en série.....	79

Chapitre 2

Analyse locale du cisaillement adiabatique.

1 Introduction.

On s'intéresse, dans ce chapitre, au problème de l'évolution des bandes de cisaillement adiabatique (BCA) dans une éprouvette présentant des défauts de forme et constituée d'un matériau thermoviscoplastique non conducteur de la chaleur comportant des défauts métallurgiques. La phase d'évolution que l'on considère précède la structuration de la bande de cisaillement ; cette étape recouvre le **stade I** et le début du **stade II**, décrits dans le chapitre précédent. Les effets non locaux de la diffusion thermique ne sont pas significatifs dans cette phase d'évolution et sont, de ce fait, négligés. Les effets d'inertie ne sont pas pris en considération.

On analyse l'influence combinée des effets rhéologiques et des effets locaux sur l'évolution et la morphologie de la BCA. Par effets locaux, on entend les effets de forme et d'amplitude des défauts géométriques générés lors de l'usinage, ou représentatifs de stries ou de piqûres à la surface de l'éprouvette dans la zone de localisation de la déformation plastique. Les inhomogénéités matérielles apparaissant dans la zone de localisation (cavités, inclusions ...) produisent également des effets locaux, et sont incluses dans l'analyse. L'endommagement est envisagé de façon élémentaire par l'emploi d'une section efficace.

Les phénomènes d'amorçage multiple ainsi que les phénomènes de propagation de la BCA ne sont pas pris en compte dans cette modélisation unidimensionnelle. Les aspects inhérents à l'évolution tridimensionnelle du défaut, tels que la croissance de microcavités et le changement de profil surfacique du défaut sont également laissés de côté.

Après formulation des équations fondamentales du problème, on exprime des critères de localisation dans lesquels l'acuité des défauts module l'influence des paramètres rhéologiques. Une résolution analytique-numérique complète permet l'étude de la morphologie des BCA en fonction des paramètres rhéologiques et

géométriques. Cette analyse permet une interprétation de la dispersion des déformations nominales à la rupture observée expérimentalement.

2 Formulation du modèle.

2.1 Description du défaut, modélisation.

L'éprouvette tubulaire de Kolsky (1949) présentée au chapitre 1 est cisailée à grande vitesse par application d'un couple de torsion. Le problème est réduit à l'étude du cisaillement simple parallèle à oy d'une couche de demi-épaisseur h suivant l'axe (ox) , d'extension infinie suivant (oy) et de largeur $l(x)$ suivant oz (Figure n°II-1).

On suppose que seule la composante v suivant l'axe (oy) de la vitesse d'une particule est non nulle ; en outre, on admet que les quantités considérées ne dépendent que de l'ordonnée x et du temps t ; le problème ainsi défini est unidimensionnel.

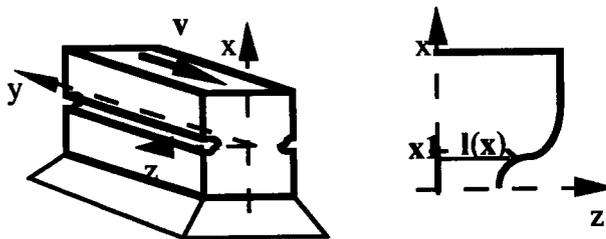


Figure n°II-1 : Géométrie de l'éprouvette et condition de chargement

Le domaine d'étude de la localisation correspond au **stade I** et au début de la phase de chute brutale de la contrainte nominale observée sur une courbe expérimentale de cisaillement simple

Des études numériques (Fressengeas et Molinari (1985 (b))) ont mis en évidence la faible participation des effets dynamiques au phénomène de localisation de la déformation plastique quand la vitesse de déformation n'est pas trop élevée. De plus, les effets de la diffusion thermique qui tendent à différer le processus de localisation et à structurer la distribution de la déformation plastique dans le stade ultime de la localisation sont provisoirement ignorés dans ce développement. Ainsi, la déformation est supposée adiabatique et quasi-statique.

On admet que le matériau constitutif de l'éprouvette est incompressible, et sa déformation élastique est négligée. Les lois de comportement thermo-viscoplastiques sont de la forme générale $\tau = F(\gamma, \theta) \dot{\gamma}^m$ où m est le coefficient de sensibilité de la contrainte d'écoulement à la vitesse de déformation. On utilise

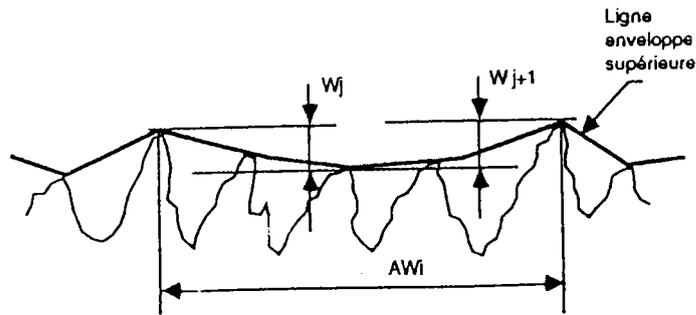


Figure n°II-2 : Etat de surface d'un échantillon.

Le défaut géométrique au voisinage du centre de la bande de cisaillement est décrit par le développement local de la largeur $l(x)$:

$$\forall x \in [-x_1, x_1] \quad l(x) = l(0) + l_r(0)|x|^r \quad \text{II-4}$$

où r représente l'"acuité" du défaut. On suppose $r > 1$ et $l_r(0)$ suffisamment petit de façon à ce que la longueur d'onde du défaut spécifié par II-4 soit assez grande. Une analyse unidimensionnelle est alors légitime. Les micro-défauts de la rugosité ne sont pas modélisés car ils exigeraient une formulation bi-dimensionnelle. En revanche, l'acuité qui leur est propre est prise en compte dans le cas de défauts matériels : les inhomogénéités locales du matériau - cavités, inclusions, fissures - (Figure n°II-3) - sont modélisées par une irrégularité du module μ . Ce paramètre s'exprime au voisinage du centre de la bande de cisaillement par un développement analogue à II-5 :

$$\forall x \in [-x_1, x_1] \quad \mu(x) = \mu(0) + \mu_r(0)|x|^r \quad \text{II-5}$$

Les coefficients r et $\mu_r(0)$ ne sont maintenant astreints à aucune restriction ; lorsque $r < 1$, on décrit les micro-défauts liés à une singularité matérielle. La pente du profil est infinie en $x=0$

En résumé, l'étude des défauts géométriques est réalisée à module μ constant, pour $r > 1$ et $l_r(0)$ suffisamment grand ; l'influence des inhomogénéités matérielles est étudiée à largeur $l(x)$ constante, pour r et $\mu_r(0)$ quelconques. Les résultats présentés dans la suite sont valables pour des défauts quelconques du matériau et pour des défauts géométriques de grande longueur d'onde (Figures n°II-4 et II-5).

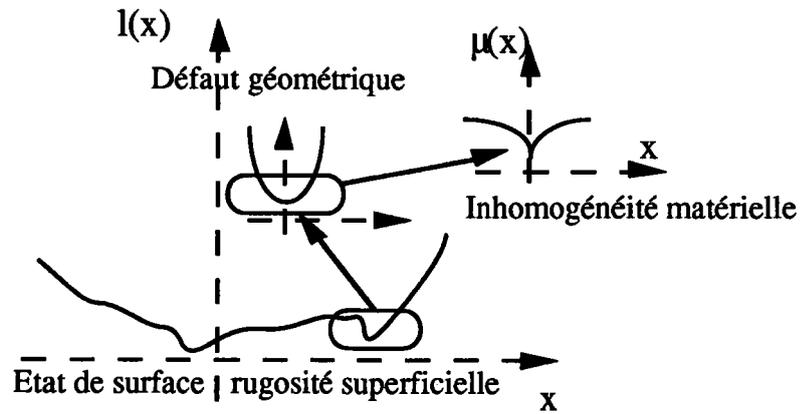


Figure n°II-3 : Définition des défauts.

Le défaut local est raccordé au profil rectiligne de largeur l_i au voisinage du bord du specimen, ou au module μ_i constant au voisinage du bord de l'éprouvette, par l'intermédiaire d'un polynôme d'ordre 5 (respectivement Figure n° II-4 et II-5). Le raccordement obtenu est continûment dérivable à l'ordre 2. La taille relative du défaut est alors $\varepsilon = 1 - \frac{l(0)}{l_i} = 1 - \frac{\mu(0)}{\mu_i}$. La gamme d'amplitude et d'acuité pour la définition de $l(x)$ décrit l'état de surface généré lors de l'usinage et après finition des éprouvettes. Duffy (1991) a mesuré une amplitude ε du défaut géométrique comprise entre 10^{-2} et 10^{-1} . Ce paramètre mesure l'ondulation de grande longueur d'onde du relevé surfacique.

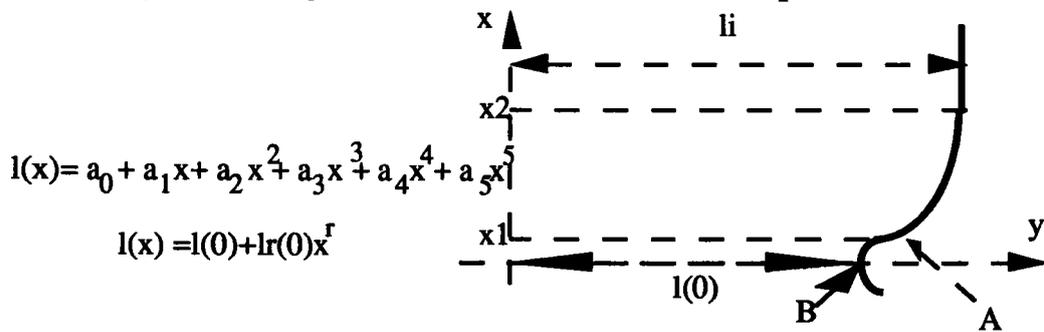


Figure n°II-4 : Définition du défaut géométrique et de son raccord.

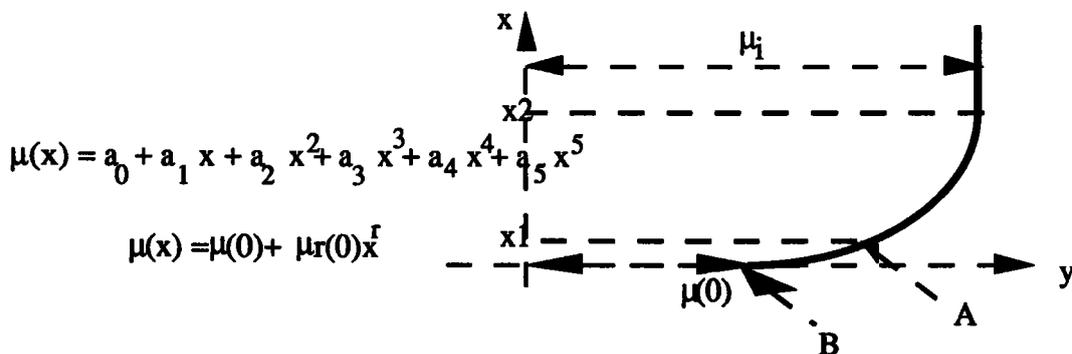


Figure n°II-5: Définition du défaut matériel et de son raccord.

Cependant, il n'existe pas à l'heure actuelle de relevé systématique de l'acuité des défauts lors d'une expérience de localisation de déformation plastique dans une BCA. C'est pourquoi notre objectif n'est pas de fournir une description quantitative susceptible d'être comparée à des résultats expérimentaux dans tous ses aspects, mais seulement d'identifier et de quantifier des tendances.

2.2 Equations fondamentales.

L'équation d'équilibre est écrite entre deux points appartenant à la zone de localisation (Figure n° II-6):

$$\forall x \in [-h, h] \quad \tau(x, t)l(x) = \tau(0, t)l(0) \quad \text{II-6}$$

où $x=0$ représente le centre de la bande de cisaillement et x un point variable sur le profil du défaut.

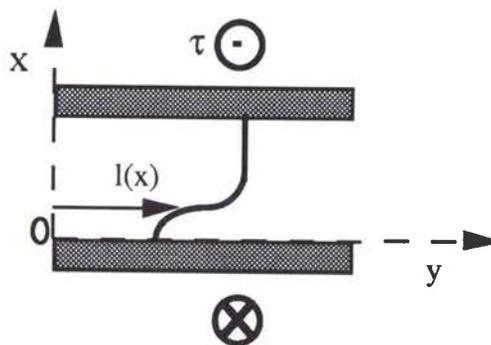


Figure n° II-6 : *Equilibre de la couche cisailée.*

Après substitution de la loi de comportement exprimée sous la forme $\tau = F(\gamma)\dot{\gamma}^m$, l'équation d'équilibre II-6 s'intègre en :

$$\forall x \in [-h, h] \quad (l(x)\mu(x))^{1/m} \int_{\gamma_0}^{\gamma(x)} f(\xi)^{1/m} d\xi = (l(0)\mu(0))^{1/m} \int_{\gamma_0}^{\gamma(0)} f(\xi)^{1/m} d\xi \quad \text{II-7}$$

où γ_0 est la déformation plastique initiale supposée uniforme et $\gamma(0)$ la déformation au centre de la bande.

La loi de comportement $\tau = F(\gamma, \theta)\dot{\gamma}^m$ s'exprime en fonction de $f(\gamma)$ fournie en I-17, I-18, et qui prend les formes données dans le tableau de la figure II-7 suivant le problème abordé :

Fonction de Knowles : cas n°1		$f(\gamma) = \gamma(1 + \frac{b}{n}\gamma^2)^{n-1}$
	l(x) variable $\mu(x)$ constant	l(x) constant $\mu(x)$ variable
Loi adiabatique, contrôle en contrainte : $f(\gamma) = (1 + a_c \gamma)^\nu \gamma^n$ et $a_c = \frac{\beta \tau(x)}{\rho c \theta_0^{1-\nu}}$		
	cas n°2 : $a_c = a_c(x)$ variable	cas n°3 : a_c constant
Loi adiabatique, contrôle en vitesse : $f(\gamma) = (1 + a_v \gamma^{n+1})^{\nu/(1-\nu)} \gamma^n$ avec $a_v = \frac{\mu(x)\beta(1-\nu)\dot{\gamma}_0^m}{\rho c(1+n)\theta_0^{1-\nu}}$		
	cas n°4 : a_v constant	cas n°5 : $a_v = a_v(x)$ variable

Figure n° II-7 : *Détail des cas de résolution possibles.*

Lorsque $f(\gamma)$ s'exprime uniquement en fonction de la déformation plastique sans faire intervenir explicitement l'abscisse x (cas n°1, 3 et 4 du tableau), l'équation d'équilibre II-7 revêt une forme simplifiée que l'on développe ci-dessous pour les conditions de localisation L_∞ et L_p ; sont reportés en annexe les éléments permettant la résolution de l'équation implicite II-7 dans le cas où $a(x)$ est variable.

Rappelons qu'il y a localisation L_∞ de la déformation plastique au point $x=0$ si la déformation en ce point devient infinie tout en conservant une valeur finie pour les autres points du profil.

L'équation II-7 devient alors :

$$\int_{\gamma(x)}^\infty f(\xi)^{1/m} d\xi = (1 - (\frac{l(x)\mu(x)}{l(0)\mu(0)})^{-1/m}) \int_{\gamma_0}^\infty f(\xi)^{1/m} d\xi \tag{II-8}$$

Lorsqu'il y a localisation physique L_p de la déformation plastique au point $x=0$, la déformation prend en ce point une valeur élevée appelée γ_p tout en restant finie en tout autre point.

L'équation II-7 devient alors :

$$\int_{\gamma(x)}^{\gamma_p} f(\xi)^{1/m} d\xi = (1 - (\frac{l(x)\mu(x)}{l(0)\mu(0)})^{-1/m}) \int_{\gamma_0}^{\gamma_p} f(\xi)^{1/m} d\xi \tag{II-9}$$

L'objectif est d'exprimer la déformation plastique $\gamma(x)$ en chacun des points du profil à partir des équations implicites II-8 et II-9. Ces expressions sont des formulations synthétiques qui regroupent en une seule notation les effets des défauts géométriques et des défauts matériels.

Deux méthodes de résolution de ces équations seront successivement abordées ; l'une consiste en un développement asymptotique local, la seconde est une solution analytique complète exprimée à l'aide d'un développement asymptotique en série convergente des intégrales.

3. Résultats asymptotiques locaux.

Les résultats sont présentés pour la fonction $f(\gamma)$ définie à $a(x)$ constant (cas n°1, 3 et 4 de la figure n° II-7). L'analyse asymptotique locale appliquée aux cas où $a(x)$ est variable est reportée en annexe 1.

3.1 Méthode générale et résultats.

En premier lieu, on retrouve le critère de localisation L_∞ rappelé au chapitre 1 en exprimant la condition d'intégrabilité de la fonction $f(\xi)^{1/m}$ intervenant dans l'équation II-8 (Table de la Figure n°II-8).

Dans le cadre de l'étude de la localisation L_∞ , les intégrales figurant dans l'équation d'équilibre II-8 sont exprimées à l'aide d'équivalents valables pour $\gamma(0)$ et $\gamma(x)$ suffisamment grands, obtenus en utilisant les développements établis par Dieudonné (1968). La fonction $f(\gamma)$ a pour équivalent $a_\infty \gamma^{-p}$ pour des déformations suffisamment élevées. L'équation II-8 s'écrit donc :

$$\int_{\gamma(x)}^{\infty} f(\xi)^{1/m} d\xi = \frac{a_\infty^{1/m}}{-p_\infty/m+1} \gamma(x)^{-p_\infty/m+1} = A_\infty \left(1 - \left(\frac{l(x)}{l(0)}\right)^{-1/m}\right) \quad \text{II-10}$$

en notant $A_\infty = \int_{\gamma_0}^{\infty} f(\xi)^{1/m} d\xi$.

Les conditions d'application de ces développements sont vérifiées dans le voisinage immédiat du centre de la BCA. De la même façon, un développement au premier ordre de $\left(1 - \left(\frac{l(x)}{l(0)}\right)^{-1/m}\right)$ est $\frac{l_r(0)}{ml(0)} x^r$.

L'équation II-10 permet donc d'exprimer la déformation $\gamma(x)$ sous la forme :

$$\gamma(x)^{-p_\infty/m+1} = A_\infty \frac{-p_\infty/m+1}{a_\infty^{1/m}} \frac{l_r(0)}{ml(0)} x^r \quad \text{II-11}$$

ou de façon simplifiée :

$$\gamma(x) = \alpha x^{-p}. \quad \text{II-12}$$

Le coefficient p est fourni dans le tableau de la figure n°II-8 pour chacune des formulations de la contrainte de cisaillement abordées (II-1, II-2 et II-3).

Pour que la déformation nominale reste finie, il faut en outre que l'intégrale de la déformation locale existe dans le voisinage de la BCA :

$$\int_0^{x_1} \gamma(x) dx < \infty \quad \text{II-13}$$

La convergence est assurée pour $p < 1$. Les inégalités obtenues sont appelées critères de localisation $L_{\infty, r}$ (Figure n° II-8). Ces critères dépendent des paramètres rhéologiques et de l'acuité du défaut local.

$\tau = \mu f(\gamma) \dot{\gamma}^m$	<u>Knowles</u>	<u>Contrôle en contrainte</u>	<u>Contrôle en vitesse</u>
$f(\gamma)$	$\gamma(1+b/n\gamma^2)^{n-1}$	$(1+b_c\gamma)^v \gamma^n$	$(1+b_v\gamma^{n+1})^{v/v-1} \gamma^n$
p	$r m/(1-2n-m)$	$r m/(-v-n-m)$	$r m(1-v)/(-v-n-m(1-v))$
Instabilité	$2n < 1$	$v+n < 0$	$v+n < 0$
L_{∞}	$2n+m < 1$	$v+n+m < 0$	$v+n+m(1-v) < 0$
$L_{\infty, r}$	$2n+m(1+r) < 1$	$v+n+m(1+r) < 0$	$v+n+m(1-v)(1+r) < 0$

Figure n° II-8 : Critères de Localisation L_{∞} et $L_{\infty, r}$.

A titre d'illustration, dans le cas d'un chargement à contrainte imposée (II-1), le critère $L_{\infty, r}$ prend la forme $v+n+m(1+r) < 0$. Il exprime la compétition des effets déstabilisants de l'adoucissement thermique ($v < 0$) et des effets stabilisants de l'écroutissage ($n > 0$) et de la viscosité ($m > 0$), modulés par la géométrie locale, dans le processus de localisation. Il est plus contraignant que la condition de localisation L_{∞} correspondante : $v+n+m < 0$; en effet, à coefficient d'écroutissage et de sensibilité à la vitesse égaux, la localisation $L_{\infty, r}$ nécessite un adoucissement thermique plus fort que la localisation L_{∞} . La convergence de l'intégrale II-13 n'est assurée, pour un matériau vérifiant la condition de localisation L_{∞} , que pour un défaut ponctuel, obtenu à la limite $r=0$. Le critère de localisation $L_{\infty, r}$ complète la condition L_{∞} dans le cas où $r > 0$ en assurant que la déformation nominale reste finie. On observe dans ce cas que les effets stabilisants de la viscosité sont d'autant plus forts que r est plus grand : le rôle de la viscosité est plus important lors de la localisation sur un défaut caractérisé par une acuité $r > 1$ que sur un défaut d'acuité $r < 1$.

3.2 Application au cas de la fonction de Knowles.

La méthode présentée en (3.1) est maintenant détaillée dans le cas de la fonction de Knowles. On effectue de nouveau des développements asymptotiques locaux au premier ordre des équations II-8 et II-9. Pour l'acier HY-100 pris en exemple, le rapport b/n est de l'ordre de 16000 ; dans l'expression $(1 + \frac{b}{n}\gamma^2)$, 1 peut être négligé devant $\frac{b}{n}\gamma^2$ lorsque γ est assez grand.

La déformation critique au voisinage du centre de la BCA s'exprime alors sous les formes analytiques II-14 et II-15 respectivement dans le cadre d'une localisation L_∞ et d'une localisation L_p :

$$\gamma_c(x) = K(b, n, m) \left(A_\infty \frac{l_r(0)\mu_r(0)}{ml(0)\mu(0)} x^r \right)^{-m/(1-2n-m)} \text{ avec } A_\infty = \int_{\gamma_0}^{\infty} f(\xi)^{1/m} d\xi \quad \text{II-14}$$

$$\gamma_c(x) = K(b, n, m) \left(A_p \frac{l_r(0)\mu_r(0)}{ml(0)\mu(0)} x^r + B_p \right)^{-m/(1-2n-m)} \text{ avec } \begin{aligned} A_p &= \int_{\gamma_0}^{\gamma_p} f(\xi)^{1/m} d\xi \\ B_p &= \int_{\gamma_p}^{\infty} f(\xi)^{1/m} d\xi \end{aligned} \quad \text{II-15}$$

en posant $K(b, n, m) = \left(\left(\frac{n}{b} \right)^{(1-n)} \left(\frac{1-2n-m}{m} \right)^{-m} \right)^{1/(-1+2n+m)}$; on note que ce coefficient s'exprime en fonction des paramètres rhéologiques uniquement.

4 Résolution complète.

Les développements asymptotiques locaux ne font pas intervenir l'amplitude absolue des défauts géométriques et matériels. L'analyse de la déformation $\gamma(x)$ (III-14 et III-15) montre que des variations imposées à $l(0)$ ou $\mu(0)$ n'entraînent pas de modifications notables de la déformation dans le voisinage immédiat de la BCA défini par le domaine de variation $(-x_1, x_1)$ de l'abscisse x . On cherche donc à obtenir une résolution de l'équation II-7 sur toute la largeur de l'éprouvette, pour préciser l'influence relative de l'amplitude et de l'acuité du défaut sur la morphologie de la bande.

4.1 Méthode de développement.

Une solution analytique complète des équations II-8 et II-9 respectivement associées à l'étude de la localisation L_∞ et de la localisation physique L_p est recherchée par un développement en série convergente des intégrales à l'aide de fonctions hypergéométriques ${}_2F_1$ (Gradshteyn, Ryzhik (1965)). Le formulaire de développement en série de Gauss ainsi que les conditions de convergence des fonctions hypergéométriques sont donnés en annexe 2.

Les développements en série sont étudiés dans le cas de la fonction de Knowles II-3 en vue d'une comparaison avec les résultats asymptotiques locaux établis en (3).

Les contraintes de cisaillement adiabatiques II-1 et II-2 sont exprimées à l'aide de la formulation commune II-16 :

$$\tau = \mu \theta_0^\nu f(\gamma) \dot{\gamma}^m \quad \text{avec} \quad f(\gamma) = (1 + a\gamma)^\nu \gamma^n. \quad \text{II-16}$$

La fonction définie en II-16 est identique à la contrainte adiabatique II-1 obtenue pour un contrôle en contrainte : $f(\gamma) = (1 + a_c \gamma)^\nu \gamma^n$. La contrainte adiabatique II-2 associée au contrôle en vitesse nécessite le changement de variable suivant pour être ramenée à la forme II-16 :

$$\begin{cases} \gamma' = \gamma^{n+1} \\ n' = \frac{n}{n+1} (1-m) \\ \nu' = \frac{\nu}{1-\nu} \end{cases} \quad \text{II-17}$$

Alors $\tau = \mu \theta_0^\nu f(\gamma) \dot{\gamma}^m = \mu \theta_0^\nu (1 + a_c \gamma^{n+1})^{\nu/(1-\nu)} \gamma^n \dot{\gamma}^m$ s'exprime sous la forme $\tau = \mu' f(\gamma') \dot{\gamma}'^m = \mu' (1 + a \gamma')^{\nu'} \gamma'^{n'} \dot{\gamma}'^m$.

La méthode est exposée dans la suite pour le paramètre a de II-16 constant ; les éléments permettant l'application de la méthode à $a(x)$ variable sont reportés en annexe 3.

4.2 Localisation L_{∞} .

Nous fournissons ci-dessous les développements en série obtenus pour la contrainte de Knowles d'une part, et la contrainte adiabatique II-16 d'autre part.

Le premier membre de l'équation II-8 s'écrit pour la fonction de Knowles II-3 :

$$\int_{\gamma(x)}^{\infty} (\xi(1 + \frac{b}{n}\xi^2)^{n-1})^{1/m} d\xi = F_{\infty,0}(\gamma(x)) = \left(\frac{b}{n}\right)^{(1+m)/2m} \frac{m}{1-2n-m} (g_0(\gamma))^{1-2n-m/2m} {}_2F_1\left(\frac{1-2n-m}{2m}, \frac{m-1}{2m}; \frac{1-2n+m}{2m}; g_0(\gamma)\right) \quad \text{II-18}$$

avec $g_0(\gamma) = 1 / (1 + \frac{b}{n}\gamma^2)$.

La fonction hypergéométrique ${}_2F_1$ existe si $-1+2n+m < 0$ (Gradshteyn et Ryzhik [3.194.2]) ; cette condition exprime que l'intégrale figurant au premier membre de II-18 est convergente, et l'on retrouve le critère de localisation L_{∞} rappelé en (3).

Les termes du développement en série de Gauss s'expriment par :

$$F_{\infty,0}(\gamma) = \left(\frac{b}{n}\right)^{(m+1)/2m} \frac{m}{1-2n-m} g_0(\gamma)^{(1-2n-m)/2m} \sum_{i=0, k} k_i g_0(\gamma)^i \quad \text{II-19}$$

avec $k_i = \frac{1-2n-m}{1-2n-m+2im} \left(\frac{m-1}{2m}\right)_i \frac{1}{i!}$

Le développement en série II-19 est très rapidement convergent. Dans la zone de localisation, un seul terme du développement est nécessaire.

Une comparaison peut être menée entre les résultats II-14 issus des approximants de Dieudonné (1968) et ceux qui sont fournis par cette méthode de développement en série : le développement en série II-19 limité au premier ordre conduit à :

$$\int_{\gamma_c(x)}^{\infty} (\xi(1 + \frac{b}{n}\xi^2)^{n-1})^{1/m} d\xi = \left(\frac{n}{b}\right)^{(1+m)/2m} \frac{m}{1-2n-n} \left(1 + \frac{b}{n}\gamma_c^2\right)^{1-2n-m/2m} \quad \text{II-20}$$

En supposant $\frac{b}{n}\gamma_c^2 \gg 1$, on retrouve l'expression II-14 proposée en (3.2).

Notons que si la déformation γ_0 est nulle, l'intégrale $A_{\infty} = \int_{\gamma_0}^{\infty} f(\xi)^{1/m} d\xi$ s'exprime simplement par :

$$A_{\infty} = \frac{1}{2} \left(\frac{b}{n}\right)^{(1+m)/2m} B\left(\frac{1-2n-m}{2m}, \frac{1+m}{2m}\right) \quad \text{II-21}$$

où B représente la fonction Beta définie pour des paramètres positifs. On remarque que A_∞ est proportionnel au temps critique de localisation lorsque l'effort de cisaillement F appliqué est constant.

$$\begin{aligned} \tau l = F &\Rightarrow \\ l^{1/m} f(\gamma)^{1/m} d\gamma = F^{1/m} dt &\Rightarrow \\ t_h = \frac{l(0)^{1/m}}{F^{1/m}} \int_{\gamma_0}^{\infty} f(\xi)^{1/m} d\xi &\Rightarrow t_h = \frac{l(0)^{1/m}}{F^{1/m}} A_\infty \end{aligned} \quad \text{II-22}$$

Envisageons maintenant le cas adiabatique : le premier membre de l'équation II-8 s'écrit pour l'expression II-16 de la contrainte adiabatique :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma(x)}^{\infty} ((1+a\xi)^\nu \xi^n)^{1/m} d\xi = F_{\infty,1}(\gamma(x)) \\ = a^{-(1+n/m)} \frac{-m}{\nu+n+m} g_1(\gamma)^{1+n/m} {}_2F_1(-(\nu+n+m)/m, -n/m; -(\nu+n)/m; g_1(\gamma)) \end{aligned} \quad \text{II-23}$$

$$\text{avec } g_1(\gamma) = \frac{1}{1+a\gamma}$$

La fonction hypergéométrique ${}_2F_1$ existe si (Gradshteyn et Ryzhik [3.194.2]) :

- * $-\nu-n-m < 0$ pour un contrôle en contrainte
- * $-\nu-n-m(1-\nu) < 0$ pour un contrôle en vitesse (formule obtenue après le changement de variable II-17). De nouveau, la condition de définition de la fonction hypergéométrique est identique au critère de localisation L_∞ .

Les termes du développement en série de la fonction hypergéométrique s'expriment dans le cas général sous la forme donnée en annexe :

$$\begin{aligned} F_{\infty,1}(\gamma) = \frac{m}{-\nu-n-m} a^{-(1+n/m)} g_1(\gamma)^{-(\nu-n-m)/m} \sum_{i=0, k} b_i g_1(\gamma)^i \\ \text{avec } b_i = \frac{-\nu-n-m}{-\nu-n+m(i-1)} \left(\frac{-n}{m}\right)_i \frac{1}{i!} \end{aligned} \quad \text{II-24}$$

L'équation II-8 s'écrit alors :

$$\frac{F_{\infty}(\gamma(x))}{F_{\infty}(\gamma_0)} = 1 - \left(\frac{l(x)\mu(x)}{l(0)\mu(0)}\right)^{-1/m} \quad \text{II-25}$$

où F_∞ représente alternativement la série $F_{\infty,0}$ ou les séries $F_{\infty,1}$ suivant la loi de comportement et les conditions aux limites considérées (II-1, II-2 ou II-3) L'équation II-25 est résolue numériquement après calcul des termes des séries qui s'expriment en fonction des paramètres rhéologiques uniquement.

Les séries associées aux solutions adiabatiques sont développées jusqu'à l'ordre 16 pour obtenir un rayon de convergence suffisant (Voir en annexe 4 un exemple de développement en série). Le gain en temps de calcul et en précision est très appréciable par rapport à la méthode d'intégration numérique directe des équations II-8 qui nécessite un raffinement du calcul de la déformation plastique au voisinage du centre de la BCA.

4.3 Localisation L_p .

Comme dans le cas de la localisation L_∞ , nous considérons successivement les développements en série relatifs à la fonction de Knowles II-3 et à la contrainte adiabatique II-16.

Le premier membre de l'équation II-9 s'écrit pour la fonction de Knowles II-3 : (Gradshteyn et Ryzhik [3.194.1])

$$\int_0^{\gamma(x)} \left(\xi \left(1 + \frac{b}{n} \xi^2 \right)^{n-1} \right)^{1/m} d\xi = F_{p,0}(\gamma(x)) = \left(\frac{b}{n} \right)^{-(1+m)/2m} \frac{m}{1+m} (h_0(\gamma))^{1+m/2m} {}_2F_1 \left(\frac{1+m}{2m}, \frac{-1+2n+3m}{2m}; \frac{1+3m}{2m}; h_0(\gamma) \right) \quad \text{II-26}$$

avec $h_0(\gamma) = 1 / (1 + 1/\frac{b}{n} \gamma^2)$

Les termes du développement en série de Gauss s'expriment par :

$$F_{p,0} = \left(\frac{n}{b} \right)^{(1+m)/2m} \frac{m}{1+m} h_0(\gamma)^{(1+m)/2m} \sum_{i=0, k} j_i h_0(\gamma)^i \quad \text{II-27}$$

avec $j_i = \frac{1+m}{1+m(2i+1)} \left(\frac{-1+2n+3m}{2m} \right)_i \frac{1}{i!}$

De la même façon, le premier membre de l'équation II-9 s'écrit pour la contrainte adiabatique II-16 : (Gradshteyn et Ryzhik [3.194.1])

$$\int_0^{\gamma(x)} ((1+a\xi)^v \xi^n)^{1/m} d\xi = F_{p,1}(\gamma(x)) = a^{-(1+n/m)} \frac{m}{n+m} (h_1(\gamma))^{1+n/m} {}_2F_1(1+n/m, (v+n+2m)/m; (n+2m)/m; h_1(\gamma)) \quad \text{II-28}$$

$$\text{avec } h_1(\gamma) = \frac{1}{1+1/a\gamma}.$$

Les termes du développement en série de Gauss, donnés en annexe, s'expriment maintenant par :

$$F_{p,1}(\gamma) = \frac{m}{n+m} a^{-(1+n/m)} h_1(\gamma)^{n+m/m} \sum_{i=0,k} a_i h_1(\gamma)^i \quad \text{II-29}$$

$$\text{avec } a_i = \frac{n+m}{n+m(i+1)} \left(\frac{\nu+n+2m}{m} \right)_i \frac{1}{i!}$$

L'équation implicite II-9 s'écrit alors :

$$\frac{F_p(\gamma(0)) - F_p(\gamma(x))}{F_p(\gamma(0)) - F_p(\gamma_0)} = 1 - \left(\frac{l(x)\mu(x)}{l(0)\mu(0)} \right)^{-1/m} \quad \text{II-30}$$

où F_p représente alternativement la série $F_{p,0}$ ou les séries $F_{p,1}$ suivant la loi de comportement et les conditions aux limites considérées (II-1, II-2 ou II-3) L'équation II-30 est résolue numériquement après calcul des termes des séries ; ceux-ci s'expriment en fonction des paramètres rhéologiques seulement.

4.4 Exemple de résolution.

Un exemple de résolution est proposé à ce stade de l'exposé pour illustrer la démarche développée ci-dessous. L'étude systématique de l'influence des paramètres rhéologiques et des effets des défauts géométriques et matériels est repoussée au paragraphe 6.

La loi de comportement choisie est une loi puissance caractérisant le comportement de l'acier CRS 1018 dans le cas d'un contrôle en vitesse des frontières.

$\nu = -0,38$	$\gamma_0 = 0,01$
$n = 0,015$	$\dot{\gamma}_0 = 10^3 s^{-1}$
$m = 0,019$	$\theta_0 = 300K$
$\rho = 7800 \text{ Kg/m}^3$	$c = 500 \text{ J/Kg K}$
	$\mu = 3579 \cdot 10^6 \text{ S.I.}$

Figure n° II-9 : Caractéristiques rhéologiques de l'acier CRS 1018 et conditions de chargement.

La distribution de la déformation plastique est calculée pour une éprouvette présentant un défaut géométrique dont le développement local est

défini par II-4. Le raccord défini entre ce défaut local et le reste de l'échantillon (Figures n° II-4 et II-10) permet de calculer le rapport $\left(\frac{l(x)}{l(0)}\right)^{-1}$ en tout point. On obtient la déformation plastique sur toute la largeur de l'éprouvette (Figure n°II-11) en résolvant l'équation II-30, où la déformation γ_p au centre de la bande est le paramètre de pilotage ($\gamma_p=100\%$).

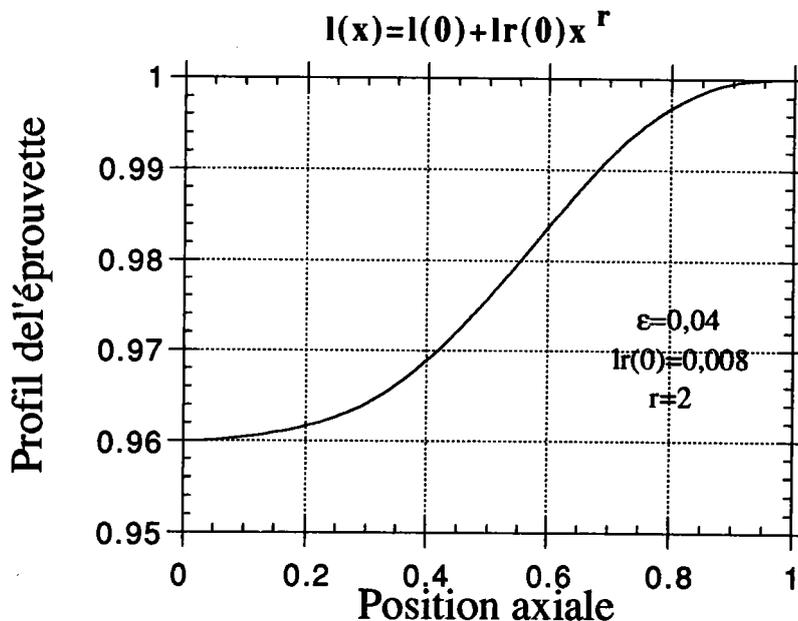


Figure n° II-10 : Profil de l'éprouvette.

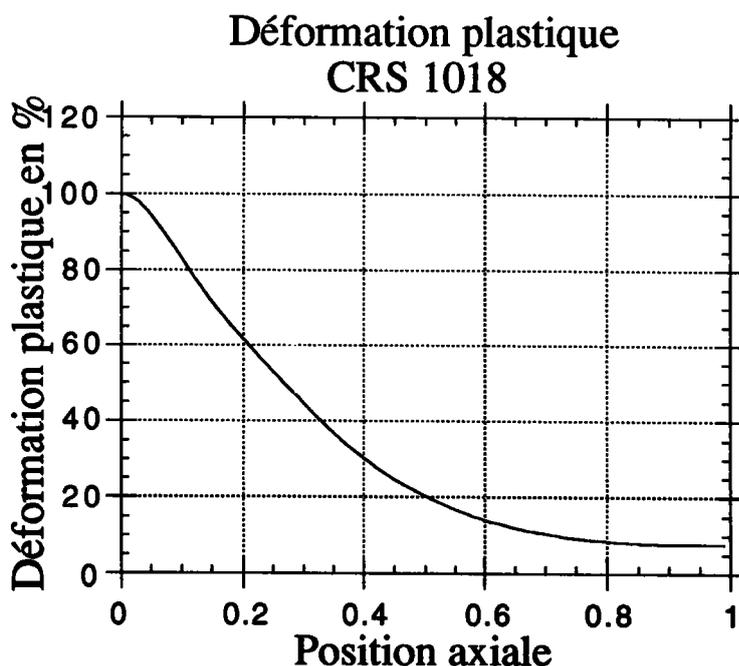


Figure n° II-11 : Distribution de la déformation plastique.

5. Largeur de bande.

On cherche maintenant à donner une définition opératoire de la largeur de bande, et à établir son expression pour les formules analytiques qui viennent d'être fournies au paragraphe 4. Il est clair que les résultats obtenus ne sauraient représenter les largeurs de bande observées dans le stade terminal, car les effets de la conduction thermique ne sont pas inclus dans l'analyse de la déformation. En revanche, ils peuvent être significatifs des largeurs de bande observables en fin de **stade I** (bandes de "déformation") et en début de **stade II**.

5.1 Définition et méthode de détermination.

La largeur de bande est définie arbitrairement à partir de l'abscisse du point d'inflexion de la courbe représentant la déformation plastique en fonction de la position axiale sur l'éprouvette (Figure n° II-11 et II-12). L'abscisse du point d'inflexion est assimilée à la demi-largeur de bande w .

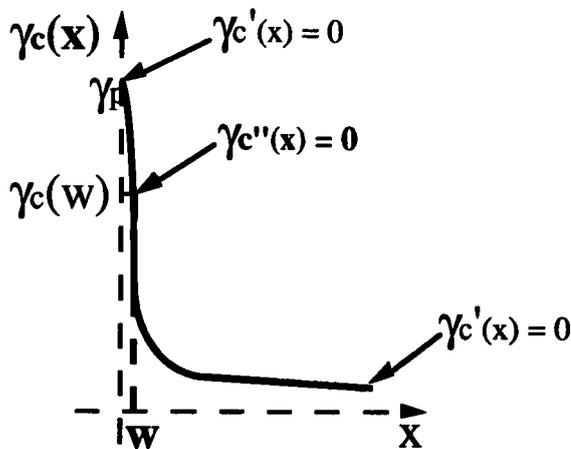


Figure n° II-12: Définition de la largeur de bande.

Cette définition n'est pas la seule possible ; elle suppose en outre qu'une localisation L_p soit réalisée. Pour une localisation asymptotique L_∞ , la largeur de bande est nulle car le point d'inflexion est rejeté à l'infini sur l'asymptote.

La largeur de bande est accessible au calcul soit par une approche asymptotique locale soit au travers d'une résolution basée sur les développements en série des fonctions hypergéométriques (II-26, II-28).

L'analyse de la largeur de bande est proposée ci-dessous pour la fonction de Knowles et pour les lois adiabatiques quasi-statiques II-1 et II-2 avec a

constant, ce qui revient à considérer un défaut géométrique $l(x)$ lors d'un contrôle en vitesse, et un défaut matériel $\mu(x)$ lors d'un contrôle en contrainte.

Dorénavant, le développement du défaut local sera noté $l(x)$ et les formules obtenues pour un contrôle en contrainte et un contrôle en vitesse seront respectivement indicées de la lettre c et de la lettre v.

Montrons que la largeur de bande n'a de sens que pour une localisation finie L_p : par dérivation de l'équation d'équilibre (II-7), la dérivée première de la déformation $\gamma'(x)$ s'écrit alors :

$$\gamma'(x) = -\frac{A_p}{m} \left(\frac{l(x)}{l(0)} f(\gamma(x)) \right)^{-1/m} \frac{l'(x)}{l(x)} \quad \text{II-31}$$

Le gradient de la déformation plastique $\gamma'(x)$ est donc proportionnel à la dérivée première de la fonction caractéristique du défaut $l'(x)$:

$$l'(x) = l_r(0) r x^{r-1}. \quad \text{II-32}$$

La déformation plastique dans un domaine éloigné du centre de la BCA conserve une valeur uniforme (Figure n° II-11) donc $\gamma'(x) = 0$ au bord du specimen. D'autre part, pour un défaut d'acuité $r > 1$, $l'(x) = 0$ et $\gamma'(x) = 0$ en $x=0$; il existe donc un point d'abscisse w pour lequel $\gamma''(w) = 0$.

Si $r < 1$, le défaut présente un profil singulier en $x=0$, $\gamma'(x)$ devient infini quand x tend vers 0. Il est alors impossible de trouver une largeur de bande finie selon la définition adoptée ; la localisation devient ponctuelle.

L'étude de l'évolution de la largeur de bande n'est donc possible que pour des défauts d'acuité strictement supérieure à 1. On constate que l'amplitude du défaut local est faiblement variable dans le voisinage du centre de la BCA si le paramètre r est supérieur à 1 (par exemple $x < 0,1$, Figure n°II-10). Le paramètre $a(x)$ variable apparaissant dans certaines formulations de la loi de comportement (tableau de la figure n°II-7) est donc assimilé à une constante. Les formules développées dans la suite peuvent dans ces conditions être étendues au cas général des lois de comportement II-1 et II-2 pour des défauts quelconques d'acuité $r > 1$.

L'équation vérifiée par les points d'inflexion w est obtenue par dérivation seconde de l'équation d'équilibre (II-7). $\gamma''(w) = 0$ se traduit par :

$$\frac{A_p}{m^2} f(\gamma(w))^{-(1+m)/m} f'(\gamma(w)) = \left(\frac{l(w)}{l(0)} \right)^{1/m} \left[\frac{1+m}{m} - \frac{l(w)l''(w)}{l'^2(w)} \right] \quad \text{II-33}$$

En calculant les points d'intersection de la courbe d'équation (II-33) et du réseau de courbes représentant la déformation plastique $\gamma(x, \gamma_p)$ obtenu à partir de la résolution de II-15 ou de II-30 (Figure n°II-13 et II-14), la largeur de bande w est exprimée en fonction de la déformation plastique au centre de la BCA. Le résultat obtenu sera confronté à la courbe empirique analogue obtenue par Marchand et Duffy (1988) $\gamma_p = \alpha w^p$ (Voir paragraphe 6 ci-dessous).

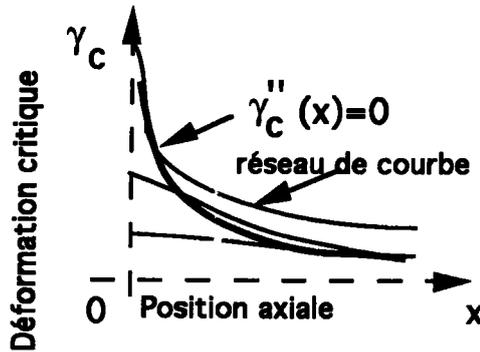


Figure n° II-13 : Méthode de détermination de la largeur de bande.

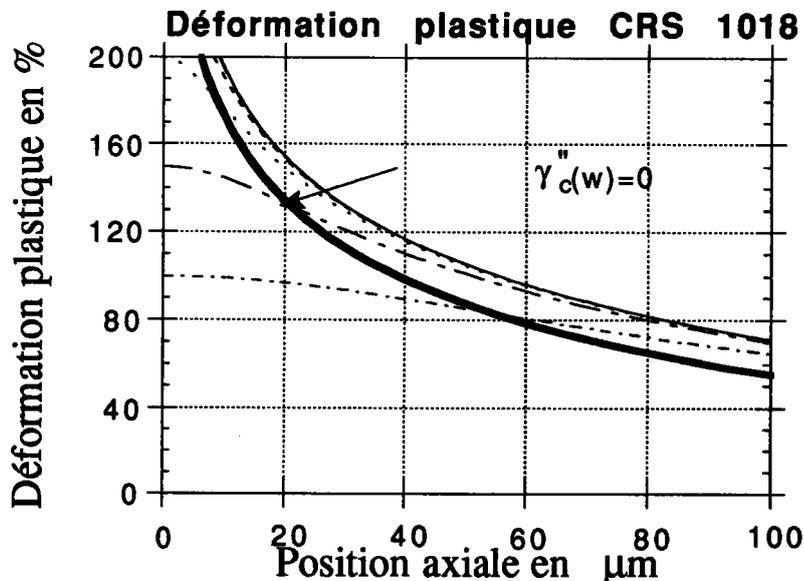


Figure n° II-14 : Illustration de la méthode pour l'exemple développé en 4.4.

5.2 Détermination analytique de la largeur de bande.

La détermination analytique repose sur deux hypothèses conjointes, compatibles avec les observations expérimentales : la déformation dans la BCA est élevée et la largeur de bande est d'autant plus faible que la déformation au centre de la bande est plus élevée.

On est donc amené à effectuer un développement asymptotique local des expressions situées de part et d'autre du signe (=) dans l'équation (II-33).

Le second membre de (II-33) se développe au premier ordre sous la forme $\frac{l(0)}{l_r(0)} \frac{(1-r)}{r} w^{-r}$.

Le premier membre de (II-33) peut faire l'objet d'un développement asymptotique local au premier ordre ou être exprimé d'abord en fonction du développement en série des fonctions hypergéométriques (II-26, II-28), puis faire l'objet d'un développement simplifié.

5.2.1 Loi de comportement de Knowles.

Si l'on prend pour loi de comportement la fonction de Knowles, la demi-largeur de bande w satisfait la relation explicite :

$$\gamma_p = (A_p \left(\frac{b}{n}\right)^{(1-n)/m} \frac{l_r(0)}{m^2 l(0)} \left(\frac{(1-2n)-r}{r-1} - (1-2n-m)\right) w^r)^{-m/(1-2n-m)} \quad \text{II-34}$$

obtenue à l'aide d'un développement local de II-30.

Cette formulation est à rapprocher de l'expression trouvée empiriquement par Marchand et Duffy (1988) :

$$\gamma_p = \alpha w^p \quad \text{II-35}$$

5.2.2 Lois de comportement adiabatiques.

Pour les lois adiabatiques quasi-statiques, le domaine de validité du développement asymptotique au premier ordre est excessivement réduit et nettement en deçà du domaine de validité du second membre de II-33 qui ne dépend lui que de la fonction caractéristique du défaut. La détermination de la largeur de bande passe alors par l'utilisation de la solution complète II-30. Au voisinage du centre de la BCA, le développement au premier ordre de $(1 - \frac{l(x)}{l(0)})^{-1/m}$ conduit d'après II-30 à la valeur de l'abscisse w :

$$w^r = \frac{ml(0)}{l_r(0)} \left(\frac{F_p(\gamma_p) - F_p(\gamma)}{F_p(\gamma_p) - F_p(\gamma_0)} \right) \quad \text{II-36}$$

D'autre part, le premier membre de II-33 s'écrit :

- pour un contrôle en contrainte :

$$f(\gamma)^{-(1+m)/m} f'(\gamma) = n(1+a\gamma)^{-(v+m)/m} \gamma^{-(n+m)/m} \left(1 + \frac{a}{n}(n+v)\gamma\right) \quad \text{II-37}$$

- pour un contrôle en vitesse :

$$f(\gamma)^{-(1+m)/m} f'(\gamma) = n(1+a\gamma^{n+1})^{-(v+m-vn)/m(1-v)} \gamma^{-(n+m)/m} \left(1 + \frac{a}{n} \frac{v+n}{1-v} \gamma^{n+1}\right). \quad \text{II-38}$$

En utilisant le développement de II-33, II-37 et II-38, on exprime la demi-largeur de bande w en fonction de la déformation au point d'abscisse w

$$\text{- pour un contrôle en contrainte : } w^r = \frac{m^2 (1-r)l(0) (1+a\gamma^{n+1})^{(v+m)/m} \gamma^{(n+m)/m}}{A_p r l_r(0) (n+a(v+n)\gamma)} \quad \text{II-39}$$

$$\text{- pour un contrôle en vitesse : } w^r = \frac{m^2 (1-r)l(0) (1+a\gamma^{n+1})^{(v+m-vn)/m(1-v)} \gamma^{(n+m)/m}}{A_p r l_r(0) \left(n+a \frac{v+n}{1-v} \gamma\right)} \quad \text{II-40}$$

Par intersection du réseau de courbes caractérisé par l'équation II-36 et du lieu des points d'inflexion défini par II-39 ou II-40, on est en mesure d'exprimer la déformation au point d'inflexion $\gamma(w)$ en fonction de la déformation plastique γ_p au centre de la BCA. En remplaçant $\gamma(w)$ dans II-36, on exprime la demi-largeur de bande w en fonction de la déformation γ_p au centre de la BCA.

Le problème ainsi formulé se réduit aux équations II-41 et II-42 respectivement associées au contrôle en contrainte et au contrôle en vitesse :

$$F_{p,c}(\gamma_p) = F_{p,c}(\gamma) + a^{1+n/m} (n+m) \frac{(1-r) (1+a\gamma)^{(v+m)/m} \gamma^{(n+m)/m}}{r (n+a(n+v)\gamma)} \quad \text{II-41}$$

$$F_{p,v}(\gamma_p) = F_{p,v}(\gamma) + (m+n) \left(\frac{1}{n+1}\right)^{m+1} a^{(m+n)/(n+1)m} \frac{(1-r) (1+a\gamma^{n+1})^{(v+m-vn)/m(1-v)} \gamma^{(n+m)/m}}{r \left(n+a \frac{v+n}{1-v} \gamma\right)} \quad \text{II-42}$$

Le calcul numérique permet de vérifier que l'abscisse w caractéristique de la demi-largeur de bande se situe en deça du raccordement x_1 du défaut local. La condition d'existence de la largeur de bande (acuité $r > 1$) mise en évidence en (5.1) se retrouve dans les expressions II-34, II-39 et II-40. Les résultats obtenus dans cette section sont donc relatifs à la localisation sur un défaut local d'acuité $r > 1$.

L'établissement d'une expression de la largeur de bande pour des défauts matériels aigus ($r < 1$) nécessite la prise en compte des phénomènes non locaux de diffusion thermique ; ce modèle sera développé au chapitre 4.

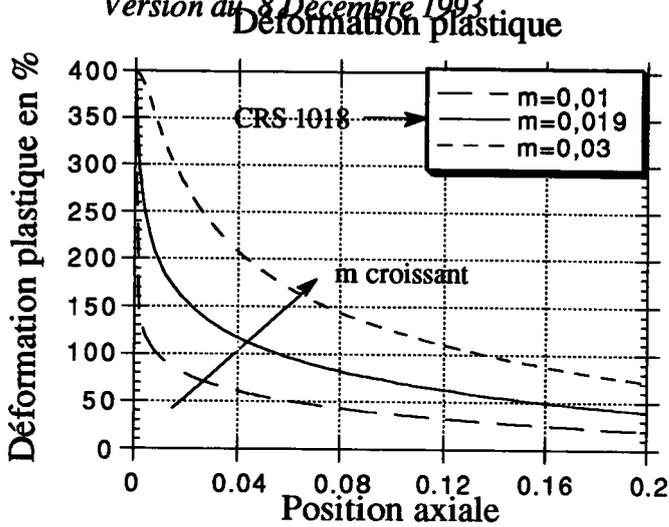


Figure n° II-15 : Déformation plastique

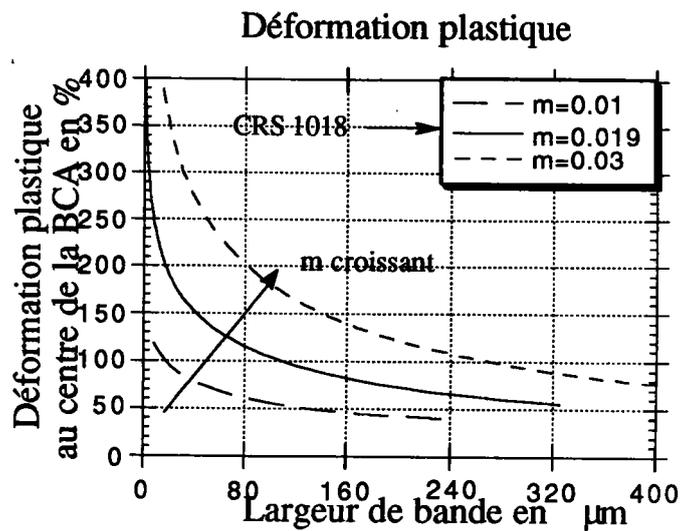


Figure n° II-18 : Etude de la largeur de bande

Variation de la sensibilité à la vitesse de déformation contrôle en vitesse.

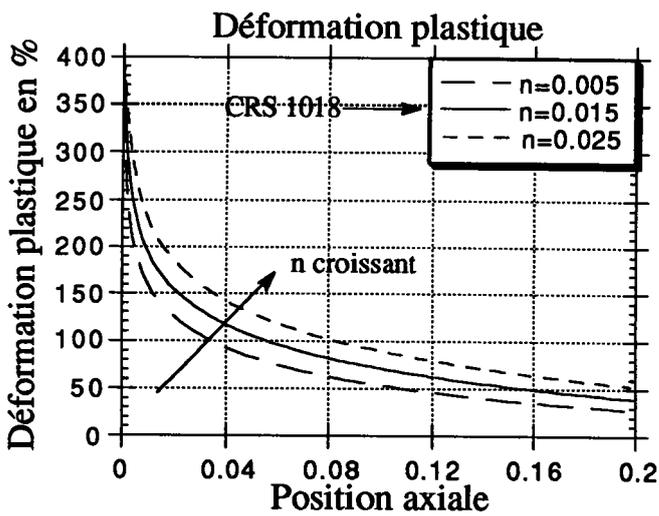


Figure n° II-16 : Déformation plastique

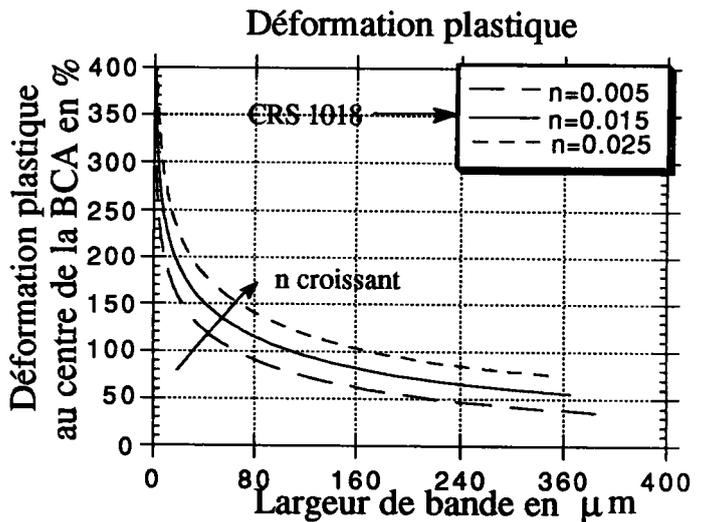


Figure n° II-19 : Etude de la largeur de bande

Variation du coefficient d'écroutissage contrôle en vitesse.

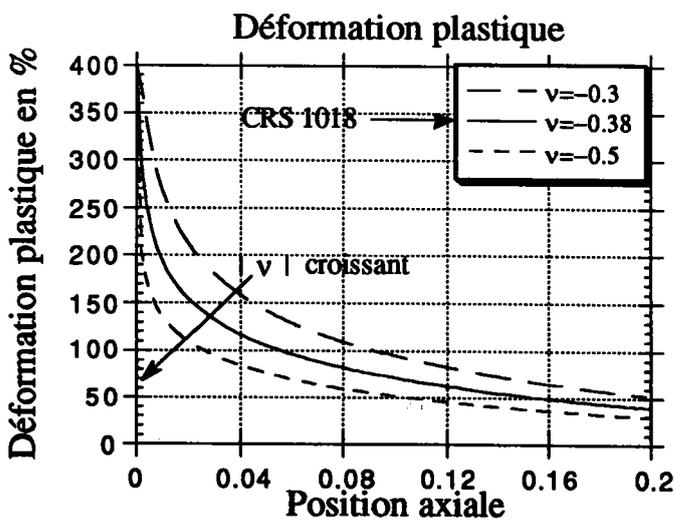


Figure n° II-17 : Déformation plastique

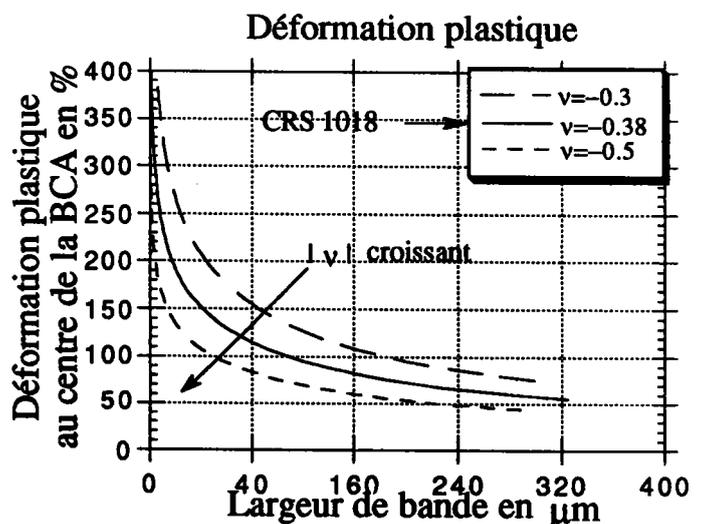


Figure n° II-20 : Etude de la largeur de bande.

Variation du coefficient d'adoucissement thermique contrôle en vitesse.

6. Etudes paramétriques et confrontations expérimentales.

Dans ce paragraphe, on analyse l'influence des paramètres rhéologiques sur la distribution de la déformation plastique et l'évolution de la largeur de bande. L'effet de l'acuité des défauts sur la morphologie des bandes est étudié dans le cas où le comportement du matériau est modélisé par la fonction de Knowles, en vue d'une comparaison avec les résultats expérimentaux obtenus par Marchand et Duffy (1988) sur l'acier HY-100.

Enfin, ce paragraphe se termine par une étude comparative des effets de l'acuité et de l'amplitude sur la distribution de la déformation plastique, les courbes contrainte - déformation et la déformation nominale à la rupture ; cela permet la caractérisation du mode d'action des facteurs géométriques lors du processus de localisation, et l'interprétation de certains résultats expérimentaux.

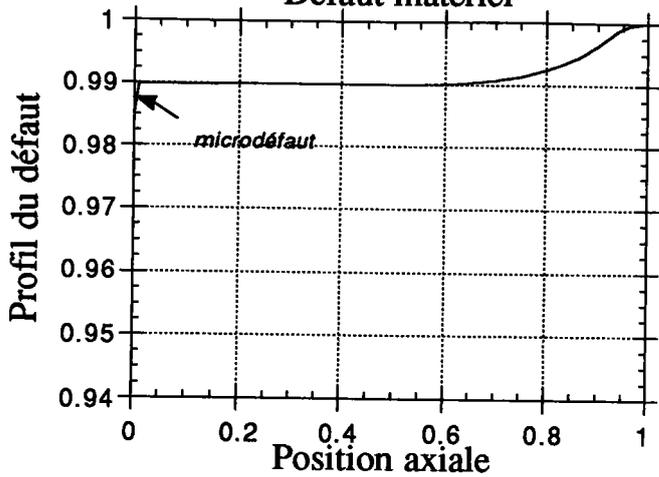
6.1 Influence des paramètres rhéologiques.

L'étude paramétrique se place dans le cadre d'une modélisation du comportement du matériau par la fonction $\tau = \mu \theta^v \gamma^n \dot{\gamma}^m$. Les coefficients de sensibilité à la vitesse m , d'écrouissage n et d'adoucissement thermique v correspondant à l'acier CRS-1018 sont soumis à de faibles variations autour des valeurs expérimentales estimées par Marchand et Duffy (1988), ceci de manière à cerner leur influence sur le processus de localisation. La déformation est supposée quasi-statique et adiabatique ; on choisit de considérer les conditions aux limites en vitesse. La contrainte de cisaillement s'exprime donc par II-2. Les paramètres rhéologiques identifiés par Marchand et Duffy ainsi que les conditions initiales sont résumés dans la table n° II-9.

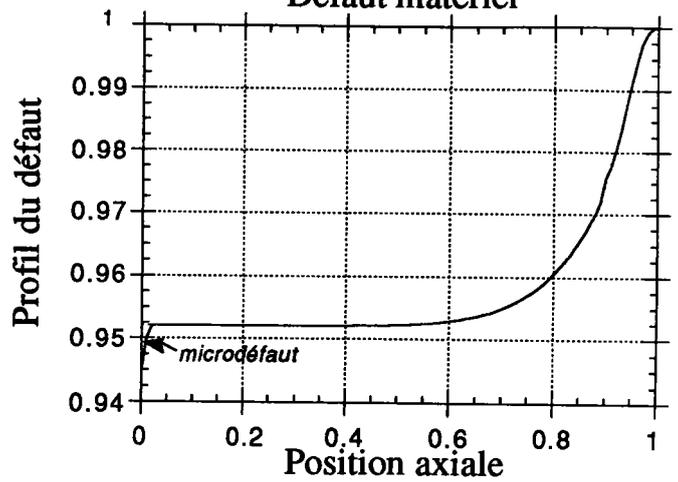
L'analyse de la distribution de la déformation plastique conclut à une localisation plus intense de la déformation plastique si on diminue le coefficient m de sensibilité à la vitesse de déformation (Figure n° II-15) et le coefficient d'écrouissage n (Figure n° II-16), et si on augmente en valeur absolue le coefficient d'adoucissement thermique v du matériau (Figure n° II-17).

De la même façon, la largeur de bande pour une déformation plastique γ_p au centre donnée est d'autant plus faible que la sensibilité à la vitesse et l'écrouissage sont plus faibles, et que l'adoucissement thermique est plus élevé (Figure n° II-18, II-19 et II-20).

Défaut matériel



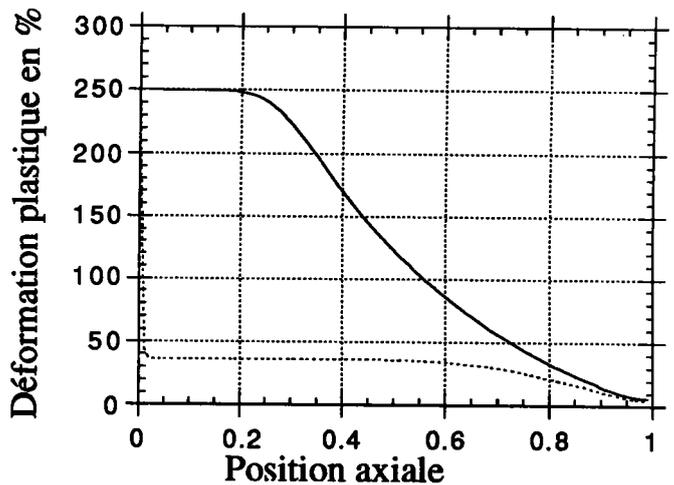
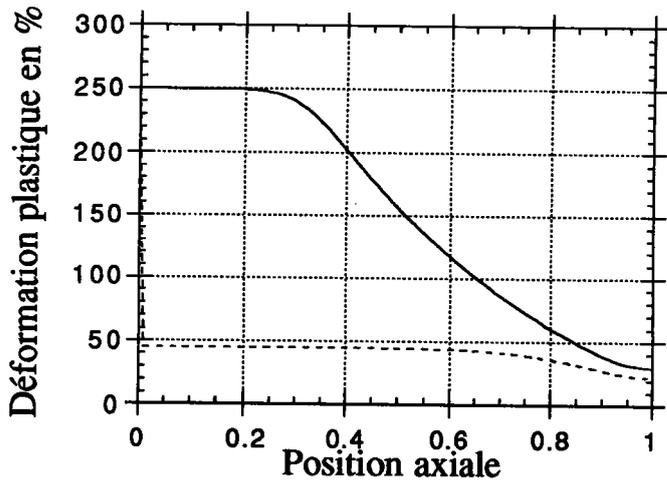
Défaut matériel



Profil de la combinaison des défauts.

Figure n°II-21: défaut "2" de faible amplitude

Figure n°II-22: défaut "2" de forte amplitude

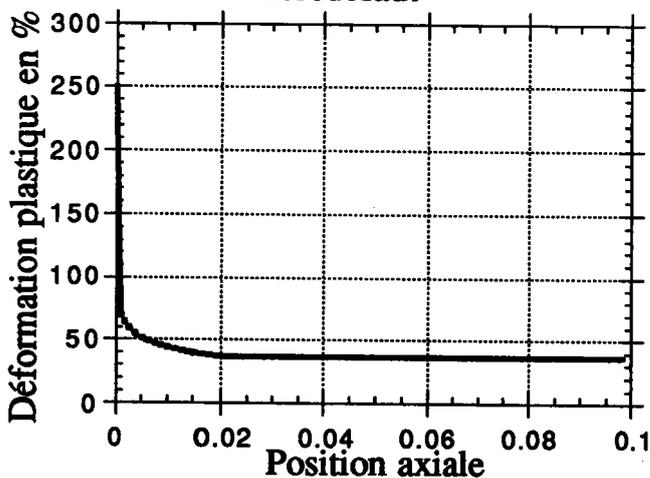


Distribution de la déformation plastique

Figure n° II-23 : défaut de faible amplitude

Figure n° II-24 : défaut de forte amplitude

Microdéfaut



Microdéfaut

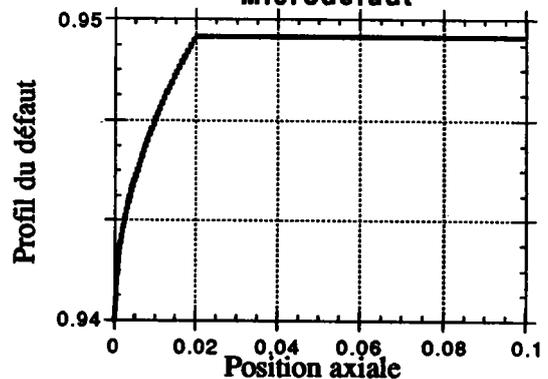


Figure n° II-25 : Distribution de la déformation plastique, défaut de faible amplitude

On peut relever l'originalité de l'influence de la sensibilité à la vitesse de déformation m : les courbes de distribution de la déformation plastique et de largeur de bande sont plus sensibles aux variations de m qu'à celles de n ou de v . Dans le critère de localisation L_∞ , tous ces paramètres rhéologiques ont le même poids ; la sensibilité à la vitesse de déformation joue un rôle privilégié dans le critère de localisation $L_{\infty,r}$: c'est le paramètre sur lequel agit le facteur de forme r . Il serait intéressant de savoir s'il en est de même pour d'autres expressions du comportement visqueux du matériau.

Les valeurs de l'acuité et de l'amplitude du défaut employées dans ce paragraphe sont constantes et égales à $r=2$ et $\epsilon=0,01$. On s'intéresse maintenant à l'influence de ces paramètres sur la localisation de la déformation.

6.2 Influence des paramètres géométriques.

6.2.1 Influence de l'acuité r du défaut ; combinaison de défauts de longueurs d'onde différentes

On se propose d'étudier l'influence de l'acuité r_1 d'un défaut matériel sur la distribution de la déformation plastique. On suppose r_1 inférieure à 1 et pour rendre compte de l'effet de l'amplitude relative du défaut matériel décrit localement par $\mu(x)$ (II-5), on associe au défaut matériel de faible longueur d'onde un défaut matériel de grande longueur d'onde ($r_2 > 1$) et d'amplitude $\mu(0)_2$ variable (Figure n° II-21 et II-22).

Le matériau d'étude est l'acier CRS 1018 dont le comportement est décrit par la loi puissance II-1.

La distribution de la déformation plastique est représentée sur les figures II-23 et II-24 respectivement pour les combinaisons de défauts décrites sur les figures II-21 et II-22. Sont également tracées, à des fins de comparaison, les distributions de déformation pour les éprouvettes présentant seulement le défaut de grande longueur d'onde (en trait fort sur les figures II-23 et II-24).

Outre les effets du défaut de faible longueur d'onde ($r_1 < 1$), on observe les effets de la variation d'amplitude du défaut de grande longueur d'onde : la valeur moyenne de la déformation plastique augmente légèrement quand on réduit l'amplitude du défaut matériel de plus forte longueur d'onde (Figure II-23 et II-24).

Les figures II-23 et II-24 montrent que la localisation devient ponctuelle quand on est en présence d'un défaut d'acuité $r_1 < 1$. Ce phénomène est indépendant de la largeur du défaut matériel (Figure n°II-25) et de l'amplitude relative du défaut.

Rappelons que la description de la morphologie de la bande en présence de défauts d'acuité r inférieure à 1 nécessite l'établissement d'un modèle incluant les effets non-locaux de la diffusion thermique ; ce modèle est développé dans le chapitre 4.

6.2.2 Influence de l'acuité r du défaut.

L'effet de l'acuité des défauts sur la morphologie de la BCA est étudié pour une modélisation du comportement du matériau par la fonction de Knowles. Les paramètres rhéologiques b et n utilisés sont $b=8000$ et $n=0,49$.

La déformation plastique initiale γ_0 a pour valeur moyenne 0,01.

La morphologie de la BCA est étudiée dans le voisinage immédiat du centre de la BCA. La distribution de la déformation et la largeur de la bande sont obtenues à l'aide des développements asymptotiques locaux II-15 et II-34.

L'évolution de la distribution de la déformation plastique de la BCA est tracée à acuité constante ($r=2$) sur la figure II-26. On retrouve un développement de la localisation de la déformation plastique analogue à celui qui est mis en évidence expérimentalement.

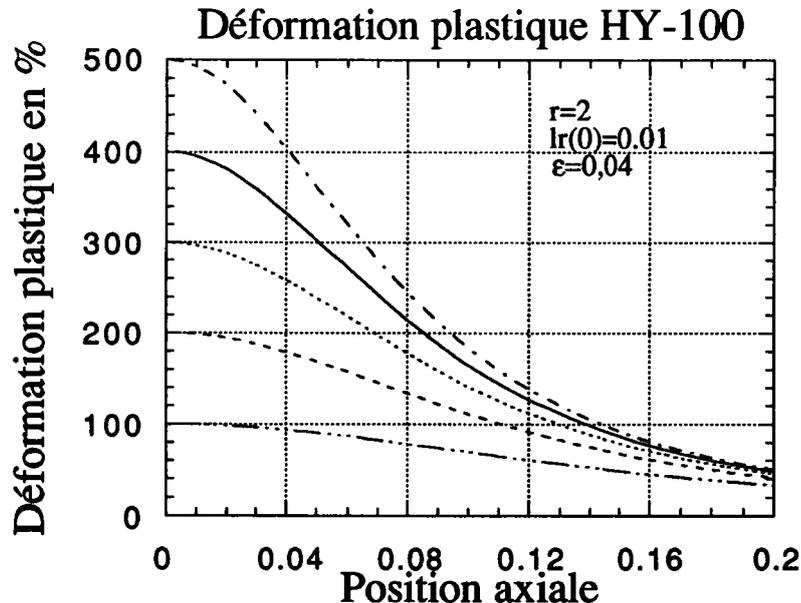


Figure n° II-26: Etude de la morphologie de la BCA

La distribution de la déformation plastique calculée pour différentes acuités (r variant de 1,5 à 3) est tracée sur la figure II-27 ; on note l'intensification de la localisation aux faibles valeurs de r .

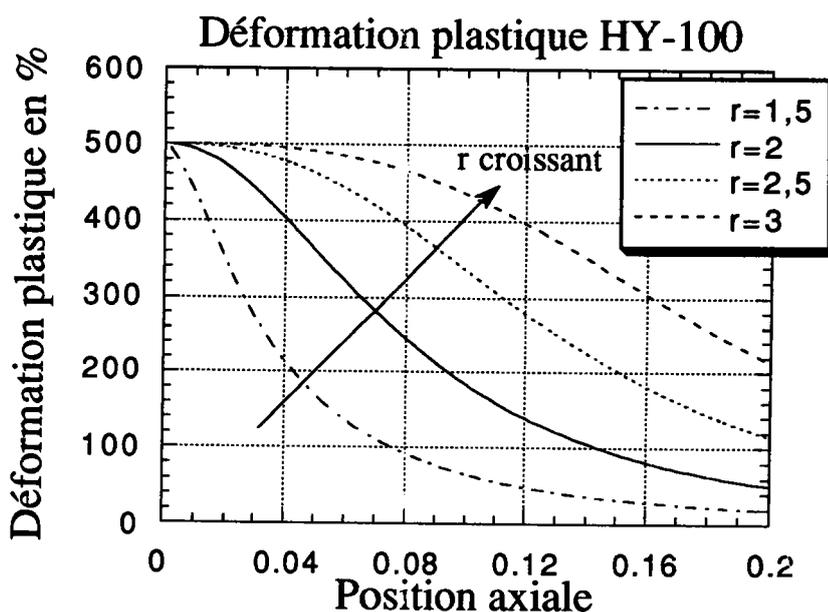


Figure n° II-27 : Distribution de la déformation plastique

L'évolution de la largeur de bande en fonction de la déformation plastique au centre de la BCA est analysée pour des valeurs d'acuité r supérieures à 1. La largeur de bande est d'autant plus faible que le défaut élémentaire est plus aigu. La figure II-28 illustre l'influence de l'acuité sur la courbure de $\gamma_p(w)$.

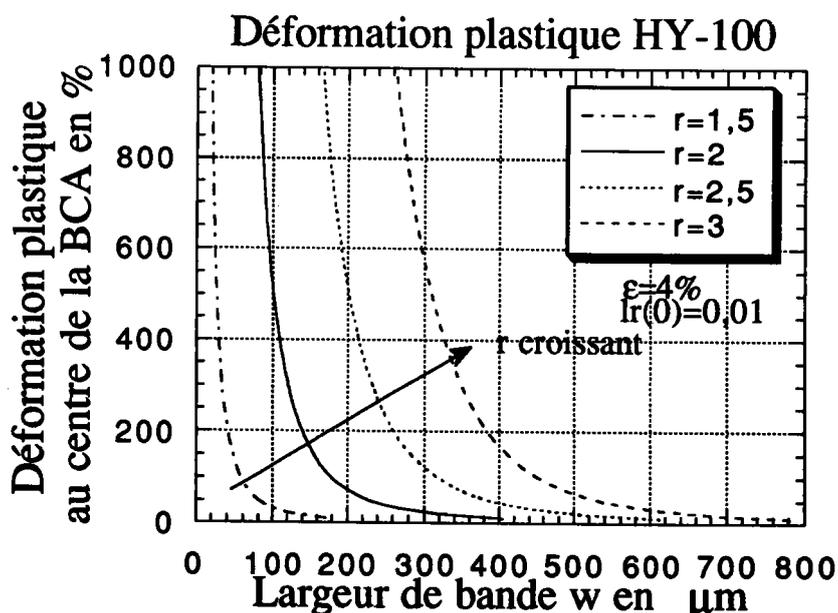


Figure n° II-28 : Etude de la largeur de bande

Une relative stabilisation de la largeur de bande peut être constatée aux fortes acuités, lorsque la déformation γ_p augmente. Ainsi, pour un défaut caractérisé par une acuité de l'ordre de 1,5, on observe une stabilisation de la

largeur de bande autour de 20 μm (Figure n°II-29). Cette valeur est très proche de celle mesurée (Marchand et Duffy (1988)) pour l'acier HY-100 dans le stade ultime de la localisation de la déformation plastique.

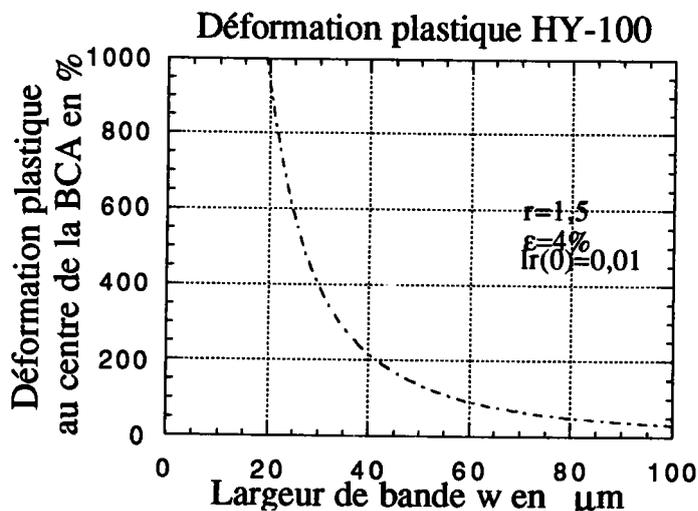


Figure n° II-29 : Cas particulier de la figure II-28.

On constate la similitude entre les courbes numériques et les relevés expérimentaux réalisés par Marchand et Duffy (Figure n°II-30).

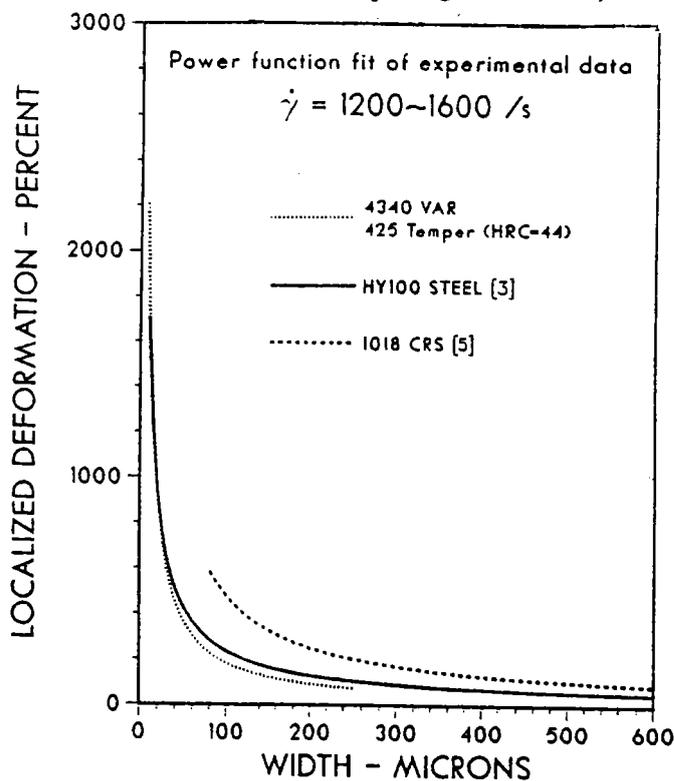
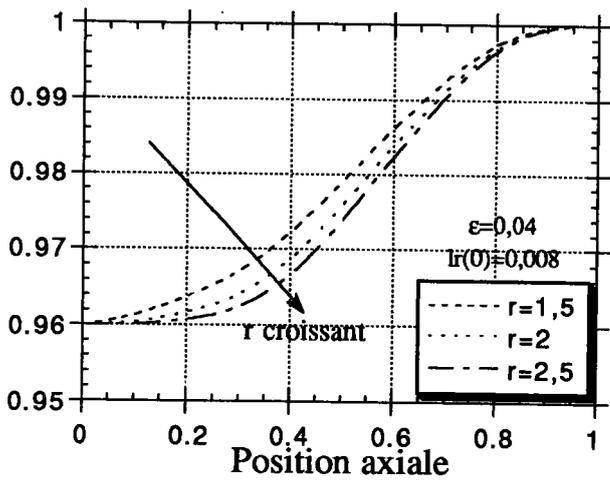


Figure n° II-30 : Étude de la largeur de bande
Eprouvette en HY-100
d'après Marchand et Duffy (1988)

Version du 8 Décembre 1993,
 $l(x)=l(0)+lr(0)x^r$

Profil de l'éprouvette



Profil de l'éprouvette

Figure n° II-31 : à amplitude variable.

$l(x)=l(0)+lr(0)x^r$

Profil de l'éprouvette

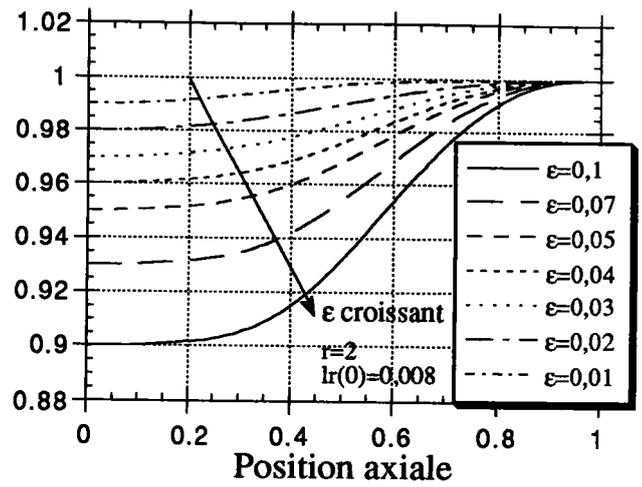
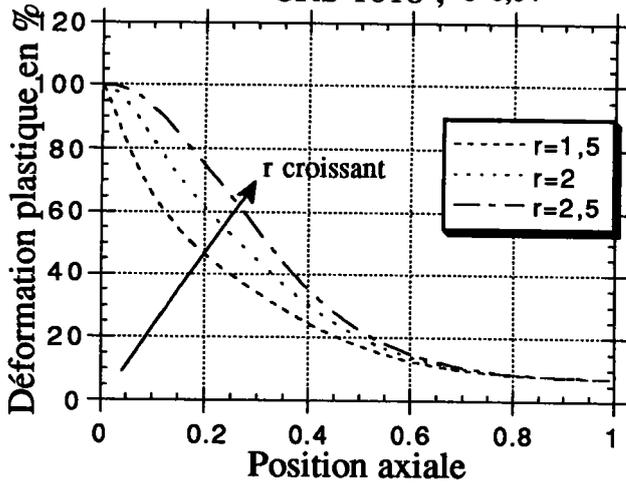


Figure n° II-32 : à acuité variable

Déformation plastique
 CRS 1018 ; $\epsilon=0,04$



Distribution de la déformation plastique contrôlée en vitesse

Figure n° II-33 : à acuité variable.

Déformation plastique
 CRS 1018

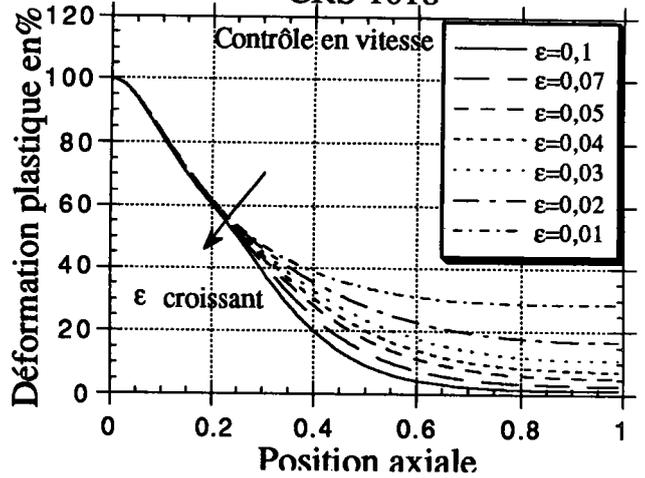
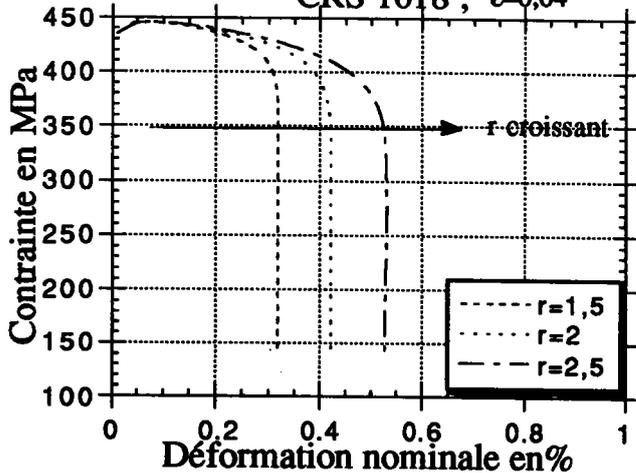


Figure n° II-34 : à amplitude variable

Déformation plastique
 CRS 1018 ; $\epsilon=0,04$



Courbe contrainte-déformation nominale contrôlée en vitesse

Figure n° II-35 : à acuité variable .

Déformation plastique
 CRS 1018

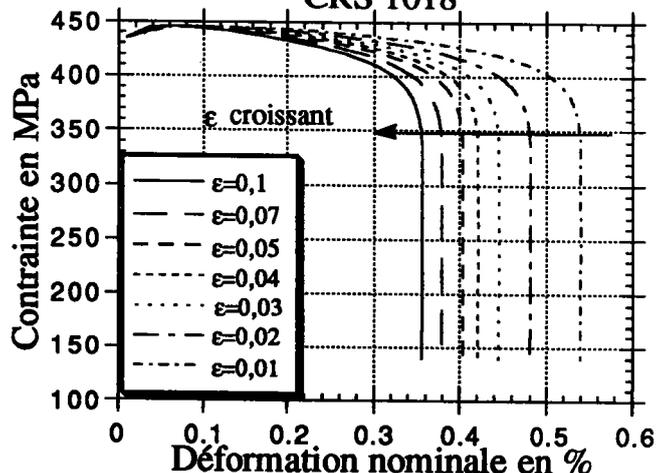


Figure n° II-36 : à amplitude variable.

L'analyse de la valeur stabilisée de la largeur de bande et de la courbure de $\gamma_p(w)$ ainsi qu'une étude paramétrique des formules II-15 et II-34 pourraient conduire après comparaison avec les courbes expérimentales à une identification du défaut élémentaire II-4. Cependant l'objectif n'est pas l'établir "le" profil du défaut dans la zone de localisation. Il est vain de chercher à identifier les paramètres caractéristiques du défaut géométrique $l(0)$, r et $l_r(0)$. Cette démarche consisterait à vouloir assimiler l'état de surface de forme aléatoire de l'éprouvette à un défaut de forme unique caractéristique de l'éprouvette et d'un certain type de matériau. D'autre part, il faut tenir compte du fait que l'analyse proposée ignore, pour l'instant, les effets de la diffusion thermique. On recherche donc essentiellement à évaluer les effets de la géométrie sur la morphologie et la largeur de la BCA. A cet égard, le rôle dominant de l'acuité suggéré par la formulation du critère de localisation $L_{\infty,r}$ se retrouve dans l'analyse de la morphologie et de la largeur de la BCA.

6.2.3 Influence comparée de l'amplitude et de l'acuité.

L'éprouvette étudiée est un tube en acier CRS 1018 soumis à un couple de torsion à vitesse contrôlée (paramètres rhéologiques et conditions de chargement sont indiqués sur la figure n°II-9). La contrainte s'exprime sous la forme de la loi adiabatique II-2 ; on se place dans le cas d'un contrôle en vitesse.

Les profils de défaut sont tracés à amplitude variable pour une acuité $r = 2$ (Figure n° II-32) et à acuité variable pour une amplitude moyenne $\epsilon = 4\%$ (Figure n° II-31). La distribution de la déformation plastique est tracée pour la gamme d'acuité proposée : on note l'intensification de la localisation aux faibles valeurs de r (Figure n° II-33).

On observe la faible influence de l'amplitude sur la distribution de la déformation plastique (Figure n° II-34). Dans la zone de localisation, la variation d'amplitude n'entraîne aucun changement de la déformation plastique γ . Ainsi, la largeur de bande définie par le point d'inflexion de γ dépend uniquement de l'acuité r . La déformation nominale est obtenue en moyennant la déformation critique γ_c sur la largeur totale de l'éprouvette. On constate que cette déformation nominale dépend de l'amplitude (Figure n° II-36) et de l'acuité dans une plus large mesure (Figure n° II-35).

La dépendance $\gamma_c(\epsilon)$ est indiquée en coordonnées semi-logarithmiques sur la figure II-37.

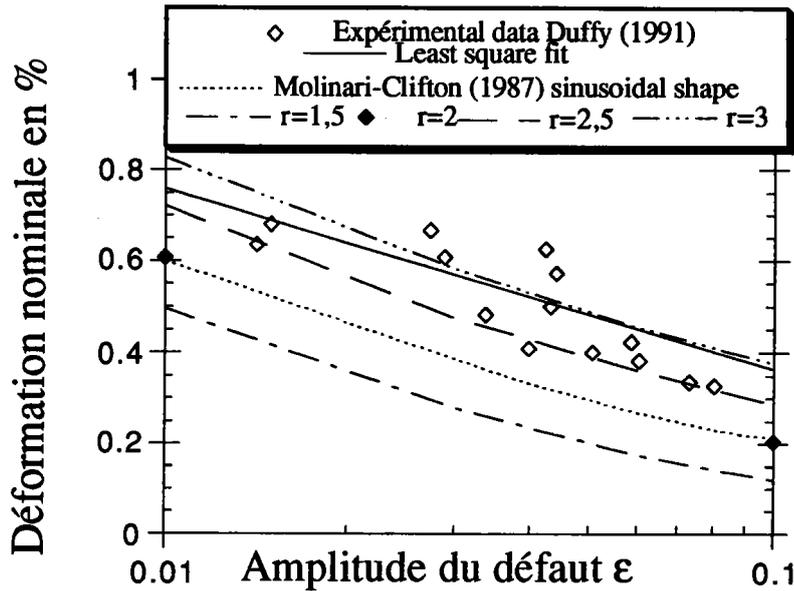


Figure n° II-37 : Courbe déformation nominale à la rupture fonction de l'amplitude du défaut

Elle a été étudiée par Molinari et Clifton (1987) en modélisant le défaut géométrique unidimensionnel par la fonction sinusoidale:

$$l(x) = l_i \left(1 + \frac{\epsilon}{2} \left(\cos \frac{\pi x}{h} - 1 \right) \right) \tag{II-43}$$

où $2h$ représente la largeur de l'éprouvette. Dans notre terminologie, il s'agit là d'un défaut géométrique caractérisé par $r=2$.

Duffy (1991) reprend cette définition d'un défaut moyen et extrait le paramètre ϵ décrivant l'amplitude d'une analyse surfacique. Il mesure ensuite l'influence de l'amplitude sur la chute en contrainte et la déformation nominale à la rupture pour des éprouvettes en acier CRS 1018. La comparaison des résultats de Molinari-Clifton et de Duffy (Figure n°II-37) montre que la décroissance quasi-linéaire de la déformation nominale est bien reproduite par le modèle de Molinari-Clifton, mais que la valeur de la déformation nominale fournie par ce modèle sous-estime la valeur réelle. Cette tendance pourrait être due à l'influence stabilisante de la conduction thermique dans la phase terminale. Cependant Duffy prend pour déformation nominale à la rupture la valeur à partir de laquelle la contrainte semble décroître brutalement (représentée par des flèches sur la Figure n° II-38). A ce stade de développement, les effets de la dissipation thermique sont peu influents ; l'hypothèse d'adiabaticité est donc vérifiée.

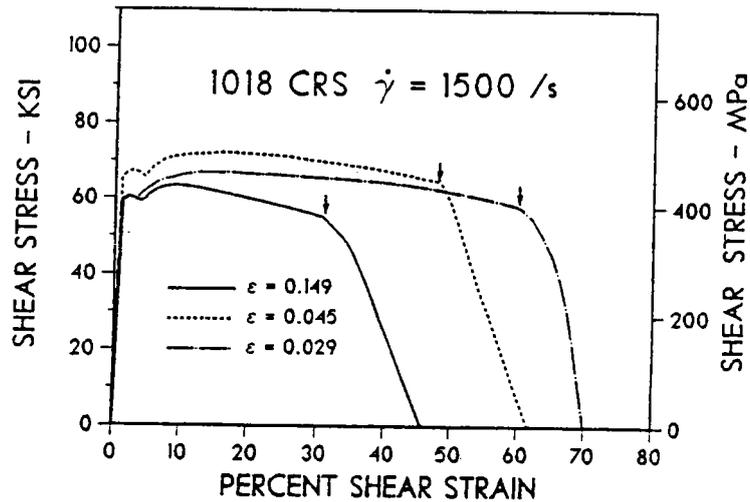


Figure n° II-38: Courbe déformation nominale à la rupture en fonction de l'amplitude du défaut
D'après Duffy (1991)

On peut donc conclure à la nécessité d'une description plus précise du défaut local dans la zone de localisation. La forme du défaut proposée en II-4 apporte une amélioration à la description par une fonction sinusoïdale II-43 : les effets de l'amplitude ϵ et de l'acuité r peuvent alors être étudiés séparément. Le défaut sinusoïdal postulé par Molinari-Clifton et Duffy est reproduit au second ordre en adoptant $r=2$ et $l_r(0)=4\pi^2\epsilon/h^2$; les déformations critiques prévues coïncident alors avec celles de Molinari-Clifton. Une variation de l'acuité se traduit approximativement par une translation verticale de la courbe calculée (Figure n°II-37), ce qui permet d'interpréter l'écart avec la courbe observée par Duffy ; les résultats expérimentaux correspondent à des défauts d'acuité plus faible, de l'ordre de 2,5 à 3. La dispersion des valeurs expérimentales résulte selon cette interprétation de la variété morphologique des défauts.

7. Conclusions.

Le chapitre 2 comprend des résultats relatifs à l'évolution adiabatique des BCA : on a pu fournir des critères de localisation non linéaires (Figure n°II-8) mettant en évidence la conjugaison des facteurs rhéologiques et de facteurs structurels comme l'acuité des défauts.

Les développements asymptotiques locaux et la résolution complète du problème unidimensionnel ont permis d'analyser l'évolution de la largeur de

Version du 9 Décembre 1993

bande dans le **stade I** de la localisation, ainsi que l'influence des défauts sur la déformation nominale à la rupture. Le point de vue défendu est que la dispersion observée des déformations à la rupture est due au faible contrôle que l'on exerce sur la morphologie des défauts géométriques ou matériels.

Nous avons cependant indiqué à plusieurs reprises que l'intensification de la localisation dans le **stade II** ne pouvait être traitée dans un cadre purement adiabatique. C'est pourquoi le chapitre 3 est maintenant consacré à l'étude de l'existence et de la stabilité de solutions destinées à l'interprétation du **stade II**, et dans lesquelles la diffusion thermique joue un rôle essentiel.

Annexes du chapitre 2 :

Annexe n°1 : Résultats asymptotiques locaux

(§ 3)

L'équation d'équilibre II-6 est écrite en utilisant les équivalents de Dieudonné (1968) dans les cas particuliers répertoriés sur la figure II-7.

* Loi adiabatique quasi-statique II-1 : contrôle en contrainte, $l(x)$ variable $\mu(x)$ constant.

$$\text{II-6 devient : } \frac{m}{v+n+m} \gamma(x)^{\frac{v+n+m}{m}} = [1 - (\frac{l(x)}{l(0)})^{\frac{v-1}{m}}] \int_{\gamma_0}^{\infty} \xi^{\frac{v+n}{m}} d\xi$$

$$\text{d'où } \gamma(x) \approx \alpha_c x^{\frac{rm}{v+n+m}}$$

* Loi adiabatique quasi-statique II-2 : contrôle en vitesse, $l(x)$ constant $\mu(x)$ variable.

$$\text{II-6 devient : } \frac{m(1-v)}{v+n+m(1-v)} \gamma(x)^{\frac{v+n+m(1-v)}{m(1-v)}} = [1 - (\frac{\mu(x)}{\mu(0)})^{\frac{1}{m} \frac{v(n+1)}{(1-v)}}] \int_{\gamma_0}^{\infty} \xi^{\frac{v+n}{m(1-v)}} d\xi$$

$$\text{d'où } \gamma(x) \approx \alpha_v x^{\frac{r(1-v)m}{v+n+m(1-v)}}$$

Annexe n°2 : Fonctions hypergéométriques

(§4.1)

Développement en série de Gauss :

$${}_2F_1(a, b; c; z) = {}_2F_1(b, a; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} z^n = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)} \frac{z^n}{n!}$$

où $(a)_n$ désigne le symbole de Pochhammer avec $(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$.

$\Gamma(z)$ est la fonction Gamma de z . Cette fonction vérifie la relation de récurrence :

$$\Gamma(z+n+1) = (n+z)\Gamma(z+n)$$

Elle est donnée par :

$$\Gamma(z+n) = (n-1+z)(n-2+z)\dots(1+z)z!$$

Le rayon de convergence de ces séries de Gauss est le cercle de rayon unité $|z|=1$.

Leur comportement à l'intérieur de ce rayon de convergence est :

- divergent si $\text{Re}(c-b-a) \leq -1$
- absolument convergent si $\text{Re}(c-b-a) > 0$
- convergent en excluant le point $z=1$ si $-1 < \text{Re}(c-b-a) \leq 0$.

Annexe n°3 : Etude de cas particuliers.

* Loi adiabatique quasi-statique II-1 : contrôle en contrainte , $l(x)$ variable $\mu(x)$ constant.

$$a_c(x) = \frac{\beta \tau_0 l(0)}{\rho c \theta_0^{1-\nu} l(x)}$$

L'équation d'équilibre II-7 s'écrit en utilisant les développements en série des fonctions hypergéométriques :

* dans le cas de la localisation L_∞ (à l'aide de II-23) :

$$\frac{F_{\infty,1}(a(x), \gamma_0) - F_{\infty,1}(a(x), \gamma(x))}{F_{\infty,1}(a(0), \gamma_0)} = \left(\frac{l(x)}{l(0)}\right)^{\frac{-1}{m}}$$

* dans le cas de la localisation L_p (à l'aide de II-28) :

$$\frac{F_{p,1}(a(x), \gamma(x)) - F_{p,1}(a(x), \gamma_0)}{F_{p,1}(a(0), \gamma_p) - F_{p,1}(a(0), \gamma_0)} = \left(\frac{l(x)}{l(0)}\right)^{\frac{-1}{m}}$$

* Loi adiabatique quasi-statique II-2 : contrôle en vitesse, $l(x)$ constant $\mu(x)$ variable.

$$a_v(x) = \frac{\mu(x) \beta (1-\nu) \dot{\gamma}_0^m}{\rho c (1+n) \theta_0^{1-\nu}}$$

On reprend la formulation développée dans l'annexe 1 en incluant le changement de variable préconisé par II-17.

Annexe n°4 : Calcul des termes d'un développement en série de Gauss
(§4.1)

Cas particuliers : Contrôle en vitesse

Acier CRS 1018

$m=0.019$

$n=0.015$

$v=-0.38$

Cas de la localisation L_p

1.0000000000000000

-7.48448273131280

29.48276752567200

-75.54433397183400

136.26204277584000

-179.50580670309000

175.40203499170000

-127.18835442915000

67.49365557376500

-25.37157110133000

6.33697007588920

-9.1839927920910E-001

5.1790423050317E-002

1.0038063755163E-003

8.5301238702096E-005

1.2140306551099E-005

2.3416898152245E-006

5.5686551828826E-007

1.5479627647699E-007

4.8624625416552E-008

1.6863528809888E-008

Chapitre 3

Etude de la stabilité de solutions stationnaires

<u>1 Introduction</u>	81
<u>2 Formulation du problème</u>	82
<u>3 Méthode de Galerkin</u>	85
<u>4 Etude des solutions stationnaires</u>	86
4.1 Détermination approchée des solutions stationnaires.....	86
4.2 Influence des conditions aux limites sur l'existence des solutions stationnaires.....	88
4.3 Comparaison des lois de comportement.....	90
4.4 Etude de l'influence des paramètres rhéologiques.....	92
<u>5 Etude de stabilité linéaire</u>	96
5.1 Méthode d'analyse approchée.....	97
5.2 Contrôle en contrainte.....	101
5.3 Contrôle en vitesse.....	101
5.4 Conditions aux limites mixtes.....	103
<u>6. Conclusion</u>	107
Annexes du chapitre 3	110
Annexe n°1	
Identification des paramètres caractéristiques des lois de comportement linéaire en température et puissance.....	110
Annexe n°2	
Détermination de la vitesse de perturbation pour des valeurs limites de la température.....	111

Chapitre 3

Etude de la stabilité de solutions stationnaires.

1 Introduction.

On s'intéresse, dans ce chapitre, à l'existence et à la stabilité des solutions stationnaires du problème thermomécanique dans le stade terminal d'évolution des bandes de cisaillement. Dans cette phase de développement qui correspond au **stade II** décrit au chapitre (1), les effets de la conduction thermique jouent un rôle structurant et stabilisant dans la localisation de la déformation plastique et sont donc pris en considération. L'écrouissage du matériau est lié à la phase instationnaire de développement de la bande. Pour qu'une solution stationnaire puisse s'établir, il ne doit pas intervenir dans la description du comportement du matériau, ce qui est justifié dans le **stade II** où son rôle est justement négligeable. Les solutions stationnaires sont déterminées de manière approchée par la méthode de Galerkin, utilisée aussi dans une étude antérieure par Leroy et Molinari (1992) ; leur stabilité linéaire est ensuite étudiée à l'aide de la même méthode approchée.

Le rôle de différents types de conditions aux limites : contrôle en contrainte, en vitesse ou contrôle mixte sur l'existence des solutions stationnaires, et leurs conséquences quant à la stabilité de ces solutions sont étudiés. Les conditions aux limites thermiques sont supposées isothermes, Leroy et Molinari (1992) ayant montré la faible influence de la condition de radiation sur la stabilité des solutions stationnaires.

Deux lois de comportement sont employées : une loi linéaire en température et une loi puissance multiplicative. On analyse notamment l'influence de la description du comportement du matériau sur les courbes contrainte-température, sur la distribution de la vitesse de déformation, et sur les conditions de stabilité des solutions stationnaires.

Enfin, les effets de l'adoucissement thermique et de la sensibilité à la vitesse de déformation du matériau sont analysés.

2 Formulation du problème.

Le problème est réduit à l'étude du cisaillement simple parallèle à oy d'une couche d'épaisseur $2\bar{h}$ suivant l'axe (ox), d'extension infinie suivant (oy)(Figure n° III-1)

On suppose que seule la composante v suivant l'axe (oy) de la vitesse d'une particule est non nulle ; en outre, on admet que les quantités considérées ne dépendent que de l'ordonnée \bar{x} et du temps \bar{t} . Le problème ainsi défini est unidimensionnel.

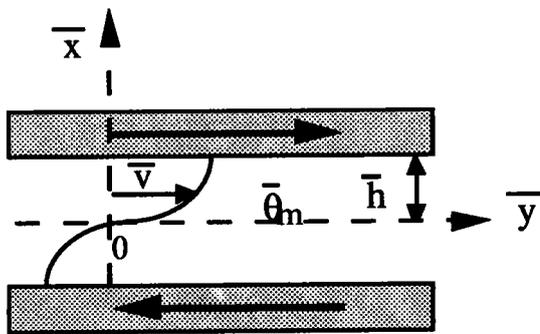


Figure n°III-1 : Modélisation du problème.

Les effets d'inertie ne sont pas pris en compte. L'équation d'équilibre de la couche cisailée s'écrit donc en grandeurs dimensionnelles :

$$\frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \bar{x}} = 0 \quad \text{III-1}$$

L'équation de conservation de l'énergie prend la forme :

$$\bar{\rho} \bar{c} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{t}} = \bar{k} \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial \bar{x}^2} + \bar{\tau} \dot{\bar{\gamma}} \quad \text{III-2}$$

où $\bar{\rho} \bar{c}$ et \bar{k} représentent respectivement la chaleur spécifique volumique et la conductivité thermique. On suppose que le coefficient de Taylor-Quinney est égal à 1, pour alléger l'écriture. Les déformations élastiques du matériau ont une influence négligeable sur les solutions stationnaires ; elles ne sont donc pas prises en considération. On se place au stade II de la localisation de la déformation plastique, correspondant à la structuration de la bande ; l'écrouissage n'est plus significatif dans cette phase de développement, et il est donc négligé.

On se propose d'étudier l'existence et la stabilité de solutions stationnaires pour les lois de comportement suivantes :

* une loi linéaire en température

$$\bar{\tau} = \bar{\tau}_0 \left(1 - a \frac{\bar{\theta}}{\bar{\theta}_0}\right) \left(\frac{\dot{\bar{\gamma}}}{\dot{\bar{\gamma}}_0}\right)^m \quad \text{III-3}$$

Le coefficient a caractérise la sensibilité du matériau à la température : $a > 0$ signifie un adoucissement thermique du matériau. La contrainte n'est définie que pour $1 - a \frac{\bar{\theta}}{\bar{\theta}_0} > 0$, ce qui conduit à une limite sur le domaine de variation en température $\bar{\theta} < \frac{\bar{\theta}_0}{a}$.

* une loi puissance multiplicative, déjà utilisée aux chapitres 1 et 2

$$\bar{\tau} = \bar{\tau}_0 \left(\frac{\bar{\theta}}{\bar{\theta}_0}\right)^v \left(\frac{\dot{\bar{\gamma}}}{\dot{\bar{\gamma}}_0}\right)^m \quad \text{III-4}$$

v est le coefficient d'adoucissement thermique.

$\bar{\tau}_0$, $\bar{\theta}_0$ et $\dot{\bar{\gamma}}_0$ représentent respectivement une contrainte de référence, une température de référence et une vitesse de déformation de référence. m est le coefficient de sensibilité à la vitesse de déformation.

$\bar{\tau}_0$ (MPa)	500
$\dot{\bar{\gamma}}_0$ (s ⁻¹)	10 ³
$\bar{\theta}_0$ (K)	300
\bar{h} (m)	1,25 10 ⁻³
$\bar{\rho}$ (Kg.m ⁻³)	7800
\bar{c} (J Kg ⁻¹ K ⁻¹)	500
\bar{k} (J m ⁻¹ K ⁻¹ s ⁻¹)	54

Figure n° III-2 : Paramètres géométriques, caractéristiques rhéologiques des aciers et conditions de chargement.

Pour modéliser ce problème de cisaillement simple, la vitesse et le flux de chaleur doivent vérifier les conditions de symétrie suivantes au centre de la bande :

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{x}} = 0 \quad \text{et} \quad \bar{v} = 0 \quad \text{en} \quad \bar{x} = 0 \quad \text{III-5}$$

Par une analyse de l'onde incidente et de l'onde transmise dans un essai de torsion à la barre de Kolsky, Leroy et Molinari (1992) mettent en évidence l'existence d'une combinaison linéaire des contrainte et vitesse à la frontière de la couche cisailée :

$$(\bar{v} - \tilde{v}) - \bar{\phi}(\bar{\tau} - \tilde{\tau}) = 0 \quad \text{en} \quad \bar{x} = \bar{h} \quad \text{III-6}$$

Ils identifient le coefficient de combinaison linéaire $\bar{\phi} \in R^-$. $\bar{\phi} = 0$ correspond à un contrôle en vitesse et $\bar{\phi} \rightarrow -\infty$ à un contrôle en contrainte. La vitesse et la contrainte désignées par : \tilde{v} et $\tilde{\tau}$ sont des paramètres donnés par les conditions de chargement (Leroy et Molinari (1992)).

Les conditions à la limite thermiques sont supposées isothermes :

$$\bar{\theta} = \bar{\theta}_0 \quad \text{en} \quad \bar{x} = \bar{h} \quad \text{III-7}$$

On procède alors à une adimensionnalisation du problème en introduisant les variables suivantes :

$$x = \frac{\bar{x}}{\bar{h}}, \quad \theta = \frac{\bar{\theta}}{\bar{\theta}_0}, \quad t = \frac{\bar{t}}{\bar{t}_c} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{\bar{\tau}}{\bar{\tau}_R} \quad \text{III-8}$$

Les quantités qui ont la dimension d'une longueur sont adimensionnalisées par la demi-épaisseur de la couche cisailée \bar{h} .

Le temps a pour facteur d'adimensionnalisation le temps caractéristique de la conduction thermique :

$$\bar{t}_c = \frac{\bar{\rho} \bar{c} \bar{h}^2}{\bar{k}} \quad \text{III-9}$$

\bar{t}_c est le temps pour lequel les effets de conduction sont significatifs sur toute l'épaisseur $2\bar{h}$ de l'échantillon.

La contrainte est normalisée par la contrainte de référence $\bar{\tau}_R$:

$$\bar{\tau}_R = \bar{\tau}_0 (\dot{\gamma}_0 \bar{t}_c)^{-m} \quad \text{III-10}$$

Le système d'équations fondamentales gouvernant le processus de localisation s'écrit donc sous la forme adimensionnelle III-11 :

$$\begin{cases} \frac{\partial \tau}{\partial x} = 0 & (a) \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \lambda \tau \dot{\gamma} & (b) \end{cases} \quad \text{III-11}$$

où l'on introduit la constante adimensionnelle définie par $\lambda = \frac{\bar{\tau}_R}{\bar{\rho} \bar{c} \theta_0}$.

Les formes adimensionnalisées des lois de comportement III-3 et III-4, s'écrivent respectivement :

$$\tau = (1 - a\theta)\dot{\gamma}^m \quad \text{III-12}$$

$$\tau = \theta^v \dot{\gamma}^m \quad \text{III-13}$$

Les conditions à la limite deviennent en variables réduites :

$$v = 0 \quad \text{en} \quad x = 0 \quad \text{III-14}$$

$$(\bar{v} - \tilde{v}) - \bar{\phi}(\bar{\tau} - \tilde{\tau}) = 0 \quad \text{en} \quad x = 1 \quad \text{III-15}$$

$$\theta = 1 \quad \text{en} \quad x = 1 \quad \text{III-16}$$

où \tilde{v} et $\tilde{\tau}$ représentent les vitesses et les contraintes adimensionnelles à la frontière. On remarque la définition de la constante adimensionnelle $\phi = \bar{\phi} \frac{\tilde{v}_c \bar{\tau}_R}{h}$.

3 Méthode de Galerkin.

On ne peut trouver simplement les solutions stationnaires exactes du problème posé en (2) ; c'est pourquoi la méthode approchée de Galerkin est proposée pour étudier l'existence et la stabilité des solutions correspondant à chacune des deux lois de comportement considérées.

Dans ce paragraphe, nous rappelons les principes des méthodes de résolution approchée d'équations différentielles pour situer la méthode de Galerkin parmi les méthodes classiquement utilisées.

Soit un problème aux limites gouverné par un système d'équations différentielles III-17 et les conditions aux limites III-18.

$$L(u) = 0 \quad \text{sur un domaine } R \quad \text{III-17}$$

$$B(u) = b \quad \text{sur la frontière } S \text{ de } R \quad \text{III-18}$$

L est un opérateur différentiel linéaire (additif et homogène) et B est un opérateur de conditions aux limites.

On recherche une approximation notée \tilde{u} de la solution exacte u sous la forme III-19 :

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^N a_i \phi_i \quad \text{III-19}$$

Les coefficients a_i sont appelées les coordonnées généralisées. Les fonctions ϕ_i doivent être continues et satisfaire toutes les conditions aux limites ; elles constituent une base fonctionnelle complète : en augmentant le nombre de coordonnées généralisées, la base proposée permet de décrire une fonction u arbitraire vérifiant les conditions aux limites.

Parmi les fonctions de base fréquemment utilisées, on trouve les fonctions polynomiales, les fonctions trigonométriques et les polynômes de Tchebyshev.

Le choix des fonctions de base est important car il conditionne l'existence et la convergence des solutions recherchées.

Les méthodes d'approximation se classent en deux familles :

* les méthodes variationnelles :

Après expression du problème sous forme variationnelle, les coefficients a_i sont déterminés par la minimisation d'une fonctionnelle (Méthode de Ritz, Kantorovitch).

* les méthodes d'approximation universelles de type résidu pondéré (Galerkin, Milkin, collocation par points).

En remplaçant la fonction u par la fonction approchée \tilde{u} III-19 dans l'équation différentielle III-17, on obtient un résultat non nul $L(\tilde{u})$, fonction erreur ou résidu, noté $A(\tilde{u})$. Une bonne approximation de la solution exacte u est obtenue en ajustant les coefficients a_i de façon à vérifier un critère d'optimisation préalablement établi : minimisation d'une norme, ou conditions d'orthogonalité de la fonction résidu avec des fonctions de pondération.

Nous retenons la méthode de résolution approchée de Galerkin qui est la plus utilisée : les fonctions de pondération sont les fonctions de base ϕ_i . La condition d'orthogonalité s'écrit :

$$\int_R A(\tilde{u})\phi_i dv = 0 \quad \text{pour } i \text{ variant de } 1 \text{ à } N \quad \text{III-20}$$

L'existence et la stabilité des solutions stationnaires au problème posé en (2) sont maintenant étudiées par la méthode de Galerkin pour laquelle le nombre de fonctions test ϕ_i est limité à un.

4 Etude des solutions stationnaires.

4.1 Détermination approchée des solutions stationnaires.

Les solutions stationnaires approchées par la méthode de Galerkin sont notées τ_1 , $\dot{\gamma}_1$ et θ_1 respectivement pour la contrainte, la vitesse de déformation et la température.

La température est exprimée de manière approchée à l'aide de la fonction de base $\phi_1 = 1 - x^2$:

$$\theta_1 = c_1(1 - x^2) + 1 \quad \text{III-21}$$

où c_1 est une constante directement liée à la température au centre de la bande de cisaillement θ_m :

$$c_1 = \theta_m - 1 \quad \text{III-22}$$

θ_m va jouer le rôle d'un paramètre de caractérisation de la solution stationnaire recherchée.

La fonction test ϕ_1 correspond à une parabole choisie pour vérifier les conditions aux limites thermiques. En effet, en $x=0$, $\phi_1=1$ et $\theta_1=\theta_m$; en $x=1$, $\phi_1=0$ et $\theta_1=1$.

La précision de l'interpolation de la température avec une seule fonction est suffisante pour des valeurs de θ_m relativement faibles (Leroy et Molinari (1992)). Le développement est maintenant mené simultanément pour les deux lois de comportement thermo-viscoplastique proposées. Pour clarifier la présentation, les résultats relatifs à la loi linéaire en température sont indicés de la lettre "l", et ceux associés à la loi puissance multiplicative sont indicés de la lettre "p".

Pour exprimer la solution stationnaire approchée par la méthode de Galerkin, on détermine le résidu de l'équation de conservation de l'énergie

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + k\tau\dot{\gamma} = 0 :$$

* pour la loi linéaire en premier lieu :

$$A(c_1\phi_1)_l = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \lambda\tau\dot{\gamma} = \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} + \lambda\tau_{1,l} \frac{1+m}{m} (1 - a\theta_1)^{\frac{-1}{m}} \quad \text{III-23}$$

En posant $a_1 = \frac{1 - a(c_1 + 1)}{ac_1} = \frac{1 - a\theta_m}{a(\theta_m - 1)}$ et en substituant θ_1 défini par III-21, le résidu

III-23 s'écrit :

$$A(c_1\phi_1)_l = -2c_1 + (ac_1)^{\frac{-1}{m}} \lambda\tau_{1,l} \frac{1+m}{m} (a_1 + x^2)^{\frac{-1}{m}} \quad \text{III-24}$$

* en second lieu pour la loi puissance :

$$A(c_1\phi_1)_p = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \lambda\tau\dot{\gamma} = \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} + \lambda\tau_{1,p} \frac{1+m}{m} \theta_1^{\frac{-v}{m}} \quad \text{III-25}$$

En posant $a_2 = \frac{1+c_1}{c_1} = \frac{\theta_m}{\theta_m - 1}$ et en substituant θ_1 défini par III-21, le résidu

III-25 devient :

$$A(c_1\phi_1)_{,l} = -2c_1 + \lambda \tau_{1,l} \frac{1+m}{m} c_1 \frac{-v}{m} (a_2 - x^2)^{\frac{-v}{m}} \quad \text{III-26}$$

La condition d'orthogonalité entre la fonction de base et le résidu s'exprime par :

$$\langle A(c_1\phi_1), \phi_1 \rangle = \int_0^1 A(c_1\phi_1) \phi_1 dx = 0 \quad \text{III-27}$$

L'intégration de III-27 conduit à l'expression approchée de la contrainte en fonction de la température θ_m au centre de la bande de cisaillement ; en notant $c_1 = \theta_m - 1$, on obtient dans le cas de la loi linéaire :

$$\tau_{1,l} = \left[\frac{4c_1(ac_1)^{\frac{1}{m}}}{3\lambda \int_0^1 (a_1 + x^2)^{\frac{-1}{m}} (1-x^2) dx} \right]^{\frac{m}{1+m}} \quad \text{avec} \quad a_1 = \frac{1-a(c_1+1)}{ac_1} = \frac{1-a\theta_m}{a(\theta_m-1)} \quad \text{III-28}$$

et dans le cas de la loi puissance :

$$\tau_{1,p} = \left[\frac{4c_1^{1+\frac{v}{m}}}{3\lambda \int_0^1 (a_2 - x^2)^{\frac{-v}{m}} (1-x^2) dx} \right]^{\frac{m}{1+m}} \quad \text{avec} \quad a_2 = \frac{1+c_1}{c_1} = \frac{\theta_m}{\theta_m - 1} \quad \text{III-29}$$

On est alors en mesure d'exprimer la vitesse de déformation en fonction de l'abscisse x à la température θ_m donnée, pour la loi linéaire et pour la loi puissance respectivement :

$$\dot{\gamma}_{1,l} = \left(\frac{\tau_{1,l}}{1-a\theta_1} \right)^{\frac{1}{m}} \quad \text{III-30}$$

$$\dot{\gamma}_{1,p} = \left(\frac{\tau_{1,p}}{\theta_1^v} \right)^{\frac{1}{m}} \quad \text{III-31}$$

4.2 Influence des conditions aux limites sur l'existence des solutions stationnaires.

Pour discuter de l'influence des conditions aux limites mécaniques imposées à l'échantillon, on exprime la contrainte adimensionnelle $\bar{\tau}$ appliquée à la frontière en fonction de la température au centre θ_m et du coefficient ϕ de combinaison des modes de contrôle. La discussion est limitée dans la suite au cas

d'une barre de torsion de Kolsky pour laquelle on montre que la condition mixte (III-15) prend la forme :

$$\tilde{\tau}_1 = \tau_1 - \frac{v_1|_1}{\phi} \tag{III-32}$$

avec $\tilde{v} = 0$. L'étude de l'influence des conditions à la limite effectuée ci-dessous exclut donc le cas limite $\phi = 0$ du contrôle en vitesse. Il serait facile de s'affranchir de cette condition en adoptant : $v = \tilde{v}$ et $\phi = 0$.

La vitesse au bord $v_1|_1$ s'obtient par intégration de la vitesse de déformation stationnaire :

$$v = \int_0^1 \dot{\gamma}_1 dx = \frac{2c_1}{\lambda\phi} \tag{III-33}$$

Pour une valeur infinie du paramètre ϕ , on est en présence d'un contrôle en contrainte : $\tilde{\tau}_1 = \tau_1$; les conditions d'existence sont identiques à celles mises en évidence au paragraphe 2.2 : il existe une contrainte maximale au delà de laquelle aucune solution stationnaire n'existe. En deçà de cette contrainte seuil, deux ou trois solutions stationnaires existent et sont mises en évidence sur les figure III-3 et III-4. Trois solutions stationnaires sont par exemple admissibles pour la loi linéaire lors d'un contrôle mixte défini par le triplet : $\tilde{\tau}_1 \approx 0,8$, $\tilde{v} = 0$ et $\phi = -100$ (Figure n°III-3).

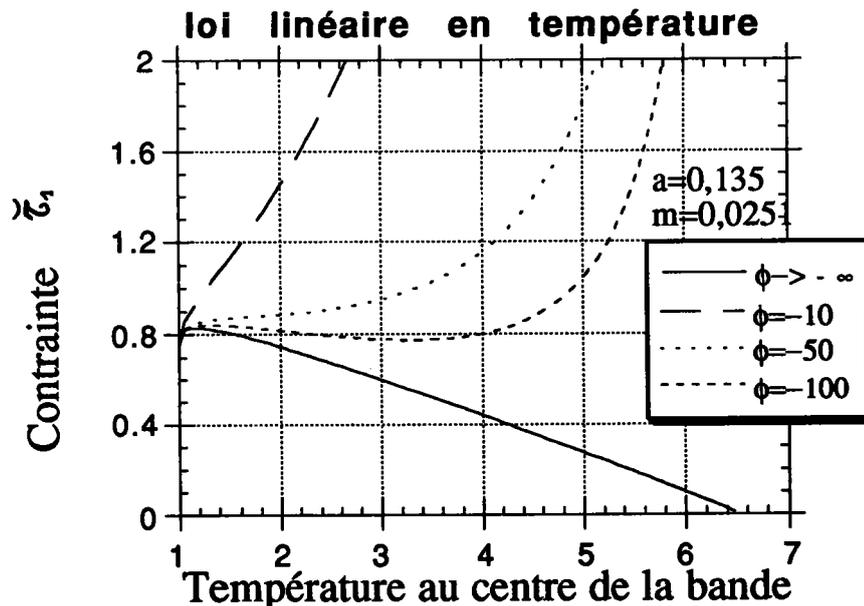


Figure n°III-3 : Influence des conditions aux limites, loi linéaire.

De la même façon, si l'on décrit le comportement par la loi puissance III-13, trois solutions stationnaires peuvent être atteintes pour certaines valeurs de ϕ et un choix adapté de la contrainte $\bar{\tau}_1$ (Figure n°III-4).

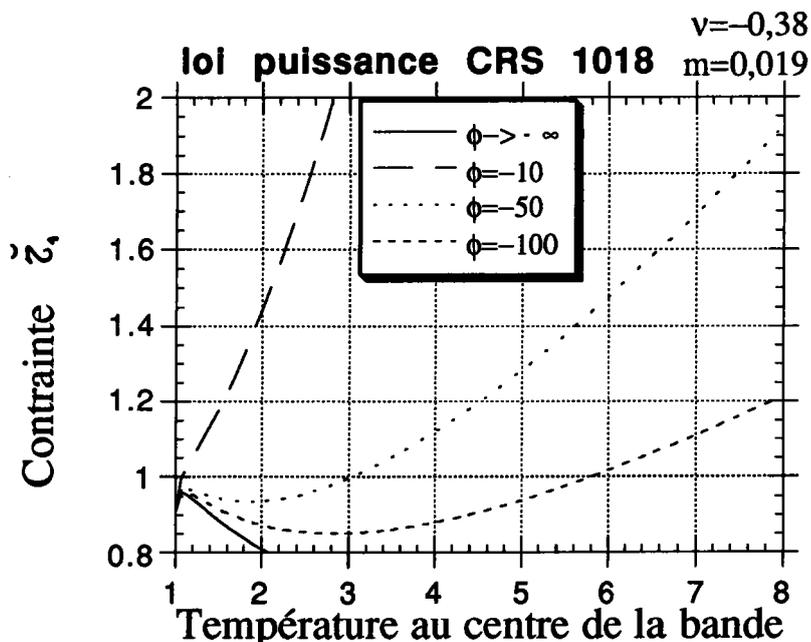


Figure n°III-4 : Influence des conditions aux limites, loi puissance

En conclusion, pour une valeur finie de ϕ , il existe de zéro à trois solutions stationnaires correspondant à une contrainte $\bar{\tau}_1$.

4.3 Comparaison des lois de comportement.

On se place dans le cas de conditions aux limites en contraintes.

Pour discuter de l'influence de la description du comportement sur l'existence et la stabilité de la solution stationnaire, il est nécessaire de considérer un même matériau dont le comportement est décrit alternativement par les deux lois de comportement III-12 et III-13 en ajustant les paramètres rhéologiques caractéristiques. Pour permettre en outre une comparaison avec l'étude menée par Leroy et Molinari (1992), nous avons retenu l'acier HY-100 dont les paramètres rhéologiques sont pour la loi d'Arrhénius :

m=0,012
β=0,33

Les paramètres caractéristiques des lois de comportement III-12 et III-13 sont identifiés par une méthode de linéarisation de la loi d'Arrhénius (Voir les détails de calcul en annexe 1) ; on obtient pour la loi puissance $v=-0,33$ et pour la loi linéaire en température $a=0,248$.

La figure III-5 représente la contrainte approchée en fonction de la température au centre pour les deux lois de comportement ainsi identifiées et pour des conditions aux limites en contrainte.

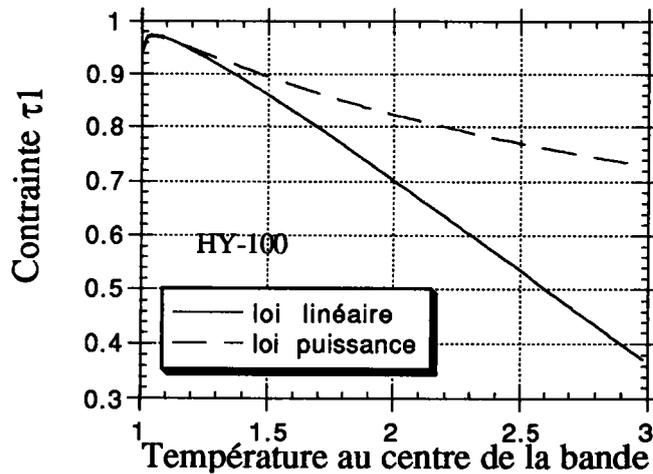


Figure n°III-5 : Comparaison des lois de comportement, courbe contrainte-température.

On constate une bonne coïncidence des extremums de la courbe contrainte-température, l'identification des paramètres rhéologiques étant réalisée au voisinage de $\theta=1$. Au delà de $\theta=1,3$, la chute en contrainte est nettement plus prononcée pour la loi linéaire en température. L'analyse de la distribution de la vitesse de déformation met en évidence une localisation plus intense pour la loi linéaire (Figure n°III-6 et III-7). Pour une température au centre de la bande identique ($\theta_m=2$), la vitesse de déformation prend des valeurs nettement plus faibles lors de la description du comportement par une loi puissance.

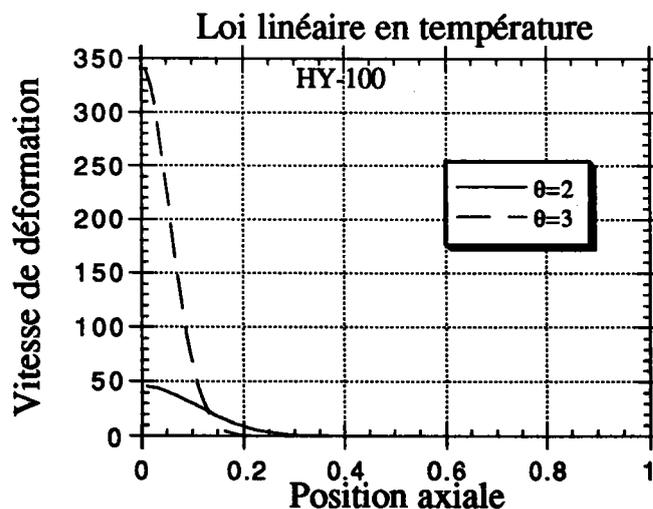


Figure n°III-6 : Distribution de la vitesse de déformation, loi linéaire

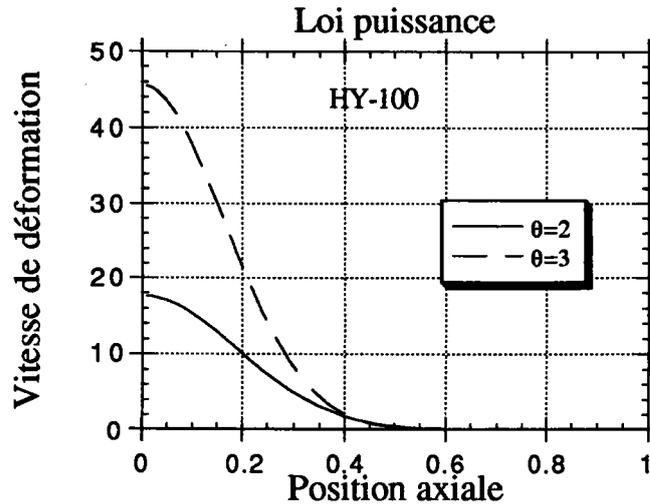


Figure n°III-7 : Distribution de la vitesse de déformation, loi puissance.

4.4 Etude de l'influence des paramètres rhéologiques.

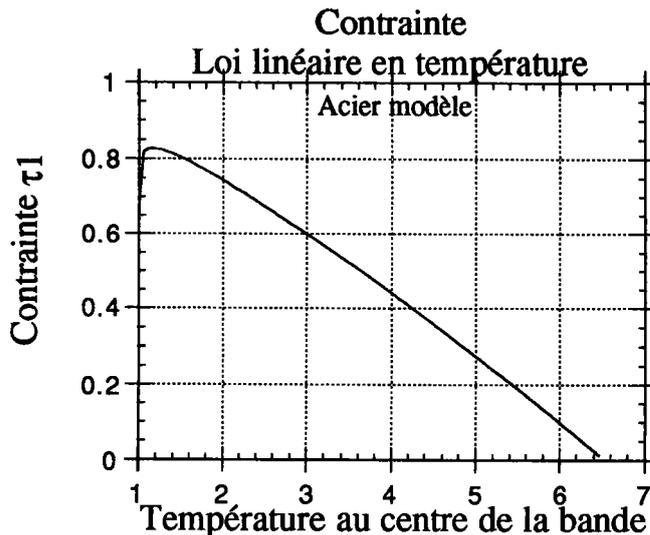
On cherche ici à mettre en évidence l'influence des paramètres rhéologiques sur les conditions d'existence des solutions stationnaires, et sur la distribution des vitesses qu'elles représentent. L'étude est effectuée dans le cas d'un chargement à contrainte constante.

Les courbes représentant la contrainte approchée en fonction de la température au centre de la bande sont successivement présentées pour les deux lois III-12 et III-13 caractérisant le comportement d'un acier modèle et de l'acier CRS 1018.

Les paramètres rhéologiques de l'acier modèle sont extraits des données proposées par Wright (1992) :

$m=0,0251$ $a=0,153$

La contrainte approchée (III-28) est reportée sur la figure III-8.



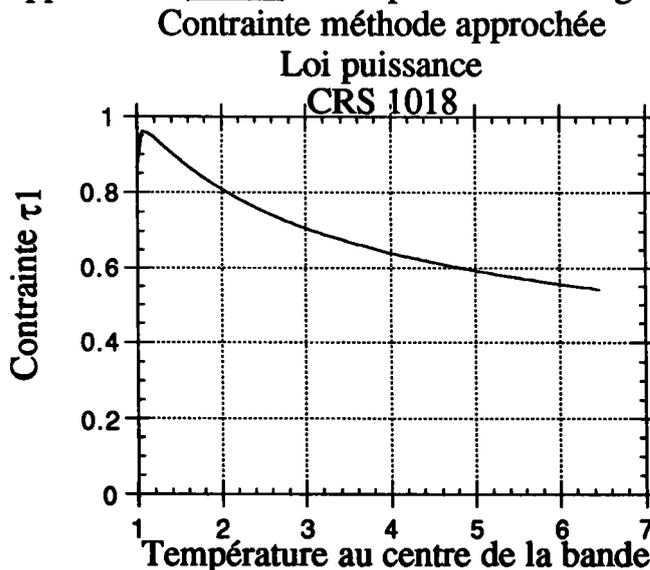
**Figure n°III-8 : Contrainte approchée par la méthode de Galerkin,
Loi linéaire en température**

On constate une décroissance quasi-linéaire à partir de l'extremum, et on retrouve l'annulation de la contrainte prévue par la loi de comportement en $\theta_m=1/a$.

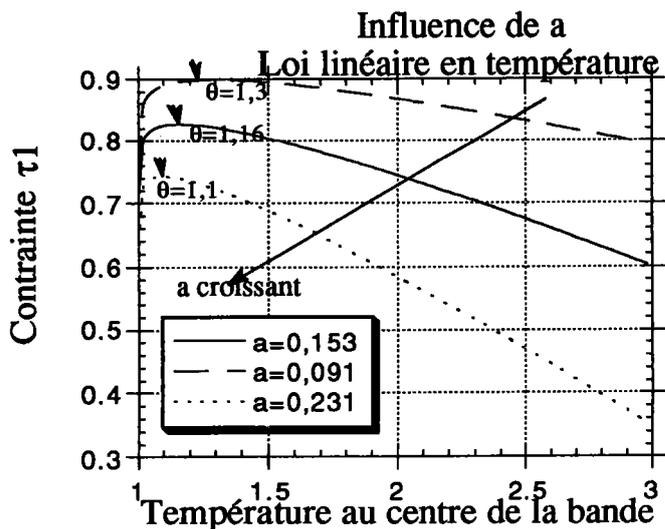
L'étude des solutions stationnaires associées à une loi puissance est menée pour un acier de nuance CRS 1018, déjà étudié dans le chapitre (2). Les caractéristiques rhéologiques sont :

$m=0,019$ $\nu=-0.38$

La contrainte approchée (III-29) est reportée sur la figure III-9.



**Figure n°III-9 : Contrainte approchée par la méthode de Galerkin,
Loi puissance.**



Influence de l'adoucissement thermique sur la conainte approchée,
Figure n°III-10 : loi linéaire en température.

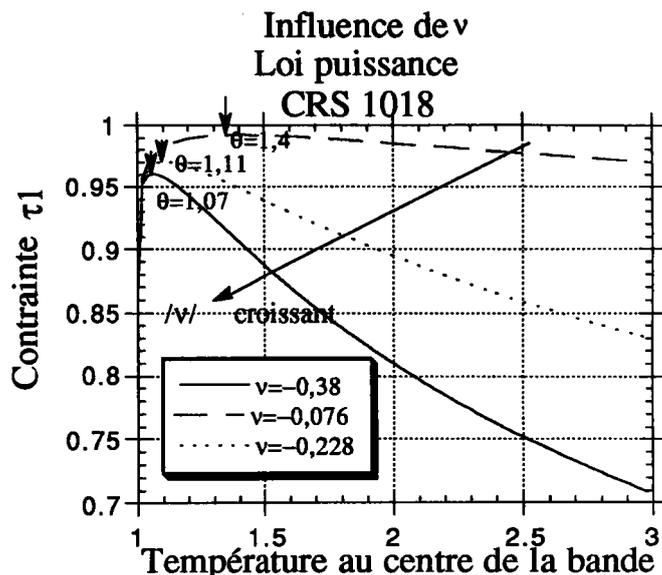
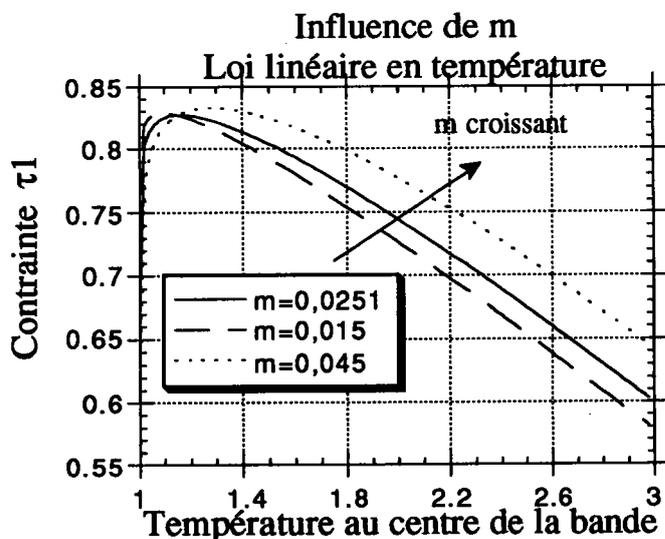


Figure n°III-11 : loi puissance.



Influence de la sensibilité à la vitesse de déformation sur la conainte approchée,
Figure n°III-12 : loi linéaire en température.

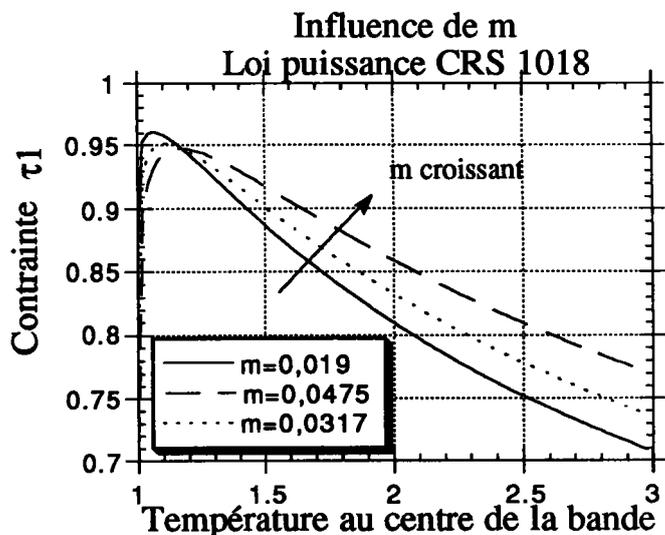
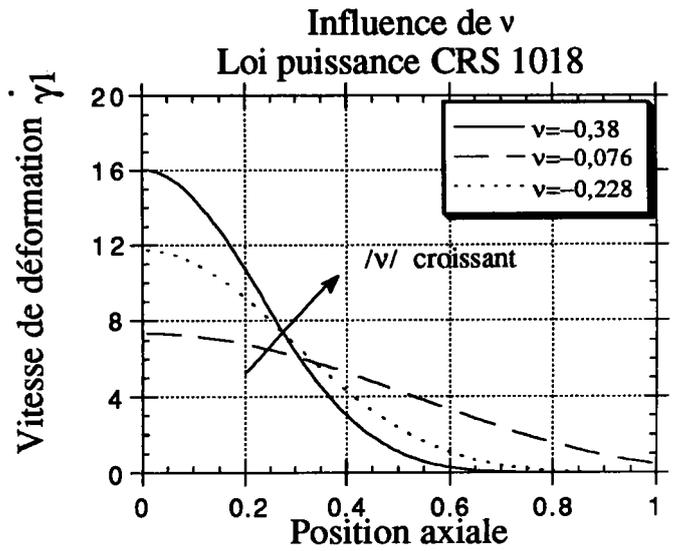
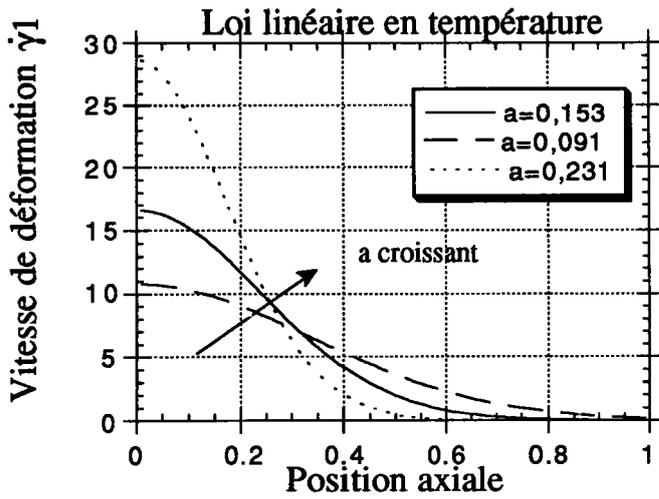
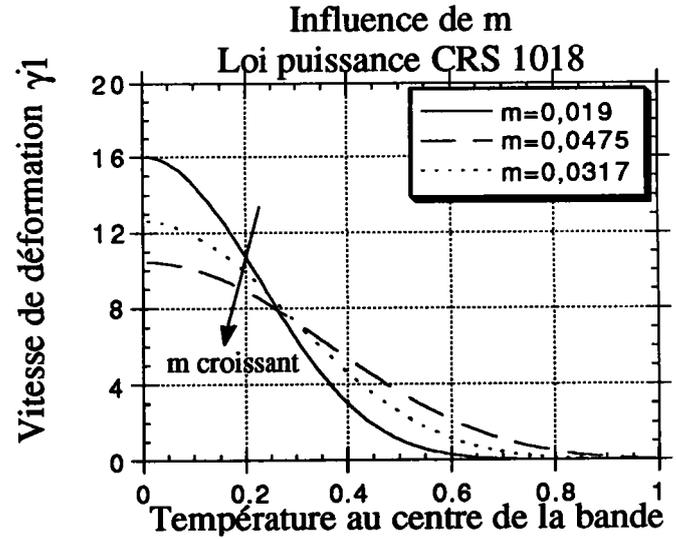
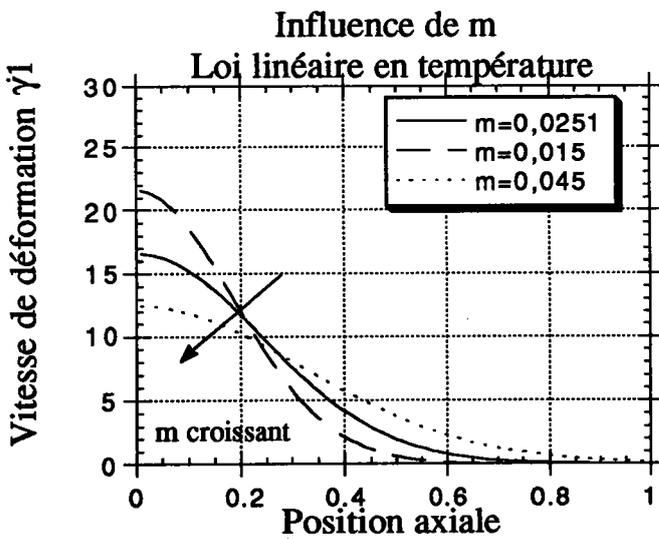


Figure n°III-13 : loi puissance.



Influence de l'adoucissement thermique sur la distribution de la déformation,
Figure n°III-14 : loi linéaire en température. Figure n°III-15: loi puissance.



Influence de la sensibilité à la vitesse de déformation sur la distribution de la déformation,

Figure n°III-16 : loi linéaire en température.

Figure n°III-17: loi puissance.

A contrainte constante, il existe une contrainte maximale au delà de laquelle aucune solution stationnaire n'existe. Le point de transition est unique ; il est influencé par la sensibilité à la vitesse de déformation et par l'adoucissement thermique (Figure n°III-10 à III-13). Quand on augmente la sensibilité à la température du matériau (a pour la loi linéaire en température et $|v|$ pour la loi puissance) ou lorsque l'on diminue la sensibilité à la vitesse de déformation, la contrainte critique est plus faible et se produit pour des valeurs plus faibles de la température au centre de la bande ; on remarque en outre que la chute en contrainte est plus accentuée.

L'influence localisante de l'adoucissement thermique est observée sur la distribution de la vitesse de déformation plastique (Figure n°III-14 et III-15).

Au contraire, la sensibilité à la vitesse uniformise la distribution de la vitesse (Figure n°III-16 et III-17).

5 Etude de stabilité linéaire.

Joseph (1965(b)) analyse l'existence et la stabilité de solutions stationnaires dans un problème de forme mathématique similaire à ce problème de thermomécanique. Il montre qu'au delà d'une valeur critique du courant dans un bobinage, il n'existe pas de distributions stationnaires de température si la résistance électrique dépend non-linéairement de la température générée par effet Joule. En deçà du courant critique, les solutions stationnaires sont représentées par une courbe de même type que celles des figures III-4 et III-5 ; la courbe est composée d'une branche sous-critique stable, en deçà de la température critique, et d'une branche sur-critique instable au delà de cette température. Des distributions de température élevées sont envisageables dans les bobinages électriques par chauffage préalable et maintien de l'état par l'emploi d'un courant de faible intensité. De telles configurations sont instables : perturbées, elles tendent à revenir à un état où la distribution de température est plus faible et compatible avec le courant imposé. Le problème thermomécanique abordé est sensiblement différent en ce sens que la branche sur-critique n'est pas toujours instable (Leroy et Molinari (1992)). De façon analogue, nous allons mettre en oeuvre une analyse de stabilité linéaire approchée des solutions stationnaires (τ_1 , θ_1 , $\dot{\gamma}_1$).

5.1 Méthode d'analyse approchée.

La stabilité linéaire des solutions stationnaires est étudiée par la méthode de Galerkin. On analyse l'évolution de solutions non stationnaires de la forme :

$$\begin{cases} \theta = \theta_1 + \delta\hat{\theta} \exp \eta t \\ \tau = \tau_1 + \delta\hat{\tau} \exp \eta t \\ \gamma = \gamma_1 + \delta\hat{\gamma} \exp \eta t \end{cases} \quad \text{III-35}$$

où $\delta\hat{\tau}$, $\delta\hat{\theta}$ et $\delta\hat{\gamma}$ représentent l'amplitude de la perturbation, supposée petite. η est la vitesse de croissance de la perturbation. Si η est positif, $\exp \eta t$ croît sans limite avec le temps t . La stabilité marginale est obtenue pour $\eta=0$. On observe une stabilité linéaire de la solution stationnaire approchée si η est négatif.

La solution $(\tau_1, \theta_1, \gamma_1)$ vérifie de manière approchée l'équation de l'énergie écrite dans le cas stationnaire :

$$\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} + \lambda \tau_1 \gamma_1 = 0 \quad \text{III-36}$$

On substitue les développements proposés en III-35 dans l'équation de l'énergie III-11(b) en tenant compte de la relation III-36 et en négligeant les termes d'ordre supérieur à un, pour trouver respectivement (loi linéaire, loi puissance) :

$$\frac{\partial^2 \delta\hat{\theta}}{\partial x^2} + \delta\hat{\theta} \left(-\eta - \frac{a}{m(1-a\theta_1)} \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} \right) - \frac{\delta\hat{\tau}}{\tau_1} \left(1 + \frac{1}{m} \right) \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} = 0 \quad \text{III-37}$$

$$\frac{\partial^2 \delta\hat{\theta}}{\partial x^2} + \delta\hat{\theta} \left(-\eta + \frac{v}{m\theta_1} \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} \right) - \frac{\delta\hat{\tau}}{\tau_1} \left(1 + \frac{1}{m} \right) \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} = 0 \quad \text{III-38}$$

La perturbation en température s'écrit de façon approchée à l'aide de la fonction de base ϕ_1 :

$$\delta\hat{\theta} = d_1 (1 - x^2) \quad \text{III-39}$$

où d_1 représente l'amplitude de la perturbation au centre de la bande. Cette expression vérifie les conditions aux limites en température : $\delta\hat{\theta} = 0$ en $x=1$.

Le résidu $A(c_1 \phi_1)$ de l'équation de conservation d'énergie est déterminé après substitution de $\delta\hat{\theta}$ et de θ_1 par leur expression approchée dans III-37 et III-38 :

$$A(c_1 \phi_1)_{,1} = -2d_1 + d_1 (1 - x^2) \left(-\eta + \frac{2}{m(a_1 + x^2)} \right) + 2c_1 \frac{\delta\hat{\tau}}{\tau_{1,1}} \left(\frac{1+m}{m} \right) \quad \text{III-40}$$

$$A(c_1\phi_1)_{,p} = -2d_1 + d_1(1-x^2)\left(-\eta - \frac{2v}{m(a_2-x^2)}\right) + 2c_1 \frac{\delta\hat{\tau}}{\tau_{1,p}} \left(\frac{1+m}{m}\right) \quad \text{III-41}$$

On exprime alors la condition d'orthogonalité du résidu et de la fonction de base ; on en déduit une relation entre le paramètre d_1 , la vitesse de croissance η de la perturbation et le rapport $\frac{\delta\hat{\tau}}{\tau_1}$ respectivement pour la loi linéaire et la loi puissance :

$$\frac{-4d_1}{3} - \frac{8\eta d_1}{15} + \frac{2d_1}{m} \left[\frac{-2}{3} - (a_1+1) + \frac{(a_1+1)^2}{\sqrt{a_1}} \arctan \frac{1}{\sqrt{a_1}} \right] + \frac{4c_1 \delta\hat{\tau}}{3\tau_{1,l}} \left(\frac{1+m}{m}\right) = 0 \quad \text{III-42}$$

$$\frac{-4d_1}{3} - \frac{8\eta d_1}{15} + \frac{2d_1 v}{m} \left[\frac{-2}{3} + (a_2-1) - \frac{(a_2-1)^2}{\sqrt{a_2}} \arg \tanh \frac{1}{\sqrt{a_2}} \right] + \frac{4c_1 \delta\hat{\tau}}{3\tau_{1,p}} \left(\frac{1+m}{m}\right) = 0 \quad \text{III-43}$$

Le rapport $\frac{\delta\hat{\tau}}{\tau_1}$ est déterminé à partir des conditions aux limites.

* Lors d'un contrôle en contrainte, $\delta\hat{\tau} = 0$ en $x=1$, III-44

* Lors d'un contrôle en vitesse, $\delta\hat{v} = 0$ en $x=1$; cette condition se traduit par :

$$\delta\hat{v} = \int_0^1 \delta\hat{\gamma} dx = 0 \quad \text{en } x=1 \quad \text{III-45}$$

On recherche alors l'expression de $\delta\hat{\gamma}$ pour chacune des lois de comportement étudiées :

$$\delta\hat{\gamma} = \frac{-\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2}}{m\lambda\tau_{1,l}} \left(\frac{\delta\hat{\tau}}{\tau_{1,l}} + \frac{a\delta\hat{\theta}}{(1-a\theta_1)} \right) \quad \text{III-46}$$

$$\delta\hat{\gamma} = \frac{-\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2}}{m\lambda\tau_{1,p}} \left(\frac{\delta\hat{\tau}}{\tau_{1,p}} - \frac{v\delta\hat{\theta}}{\theta_1} \right) \quad \text{III-47}$$

Par l'intégration III-45, on en déduit le rapport $\frac{\delta\hat{\tau}}{\tau_1}$:

$$c_1 \frac{\delta\hat{\tau}}{\tau_{1,l}} = d_1 \left[1 - \frac{(a_1+1)}{\sqrt{a_1}} \arctan \frac{1}{\sqrt{a_1}} \right] \quad \text{III-48}$$

$$c_1 \frac{\delta\hat{\tau}}{\tau_{1,p}} = d_1 v \left[1 + \frac{(a_2-1)}{\sqrt{a_2}} \arg \tanh \frac{1}{\sqrt{a_2}} \right]. \quad \text{III-49}$$

* Lors d'un contrôle mixte des conditions aux limites caractérisé par une combinaison linéaire des perturbations en contrainte et en vitesse, on exprime la condition :

$$\delta\hat{v} - \phi\delta\hat{\tau} = 0 \quad \text{en } x=1 \quad \text{III-50}$$

Par la technique d'intégration précédente, on détermine $\frac{\delta\hat{\tau}}{\tau_1}$:

$$\frac{\delta\hat{\tau}}{\tau_{1,i}} = \left(\frac{-2d_1}{2c_1 - \phi m \lambda \tau_{1,i}^2} \right) \left[\frac{(a_1 + 1)}{\sqrt{a_1}} \arctan \frac{1}{\sqrt{a_1}} - 1 \right] \quad \text{III-51}$$

$$\frac{\delta\hat{\tau}}{\tau_{1,p}} = \left(\frac{2d_1 v}{2c_1 - \phi m \lambda \tau_{1,p}^2} \right) \left[1 - \frac{(a_2 - 1)}{\sqrt{a_2}} \arg \tanh \frac{1}{\sqrt{a_2}} \right] \quad \text{III-52}$$

La vitesse de croissance η de la perturbation s'exprime alors à partir de la relation III-42 (resp. III-43) où l'on substitue le rapport $\frac{\delta\hat{\tau}}{\tau_1}$ correspondant aux conditions aux limites choisies ; elle est obtenue en fonction des paramètres rhéologiques, de la conductivité thermique du matériau et de la température au centre de la bande de cisaillement. Nous distinguons les différents cas de contrôle aux limites de l'échantillon dans le tableau résumé de la figure n°III-18.

Contrôle en contrainte :	
$\tau = (1 - a\theta)\dot{\gamma}^m$	$\eta_{,i} = \frac{15}{8} \left[\frac{-4}{3} + \frac{2}{m} \left[\frac{-2}{3} - (a_1 + 1) + \frac{(a_1 + 1)^2}{\sqrt{a_1}} \arctan \frac{1}{\sqrt{a_1}} \right] \right]$ <u>III-53</u>
$\tau = \theta^v \dot{\gamma}^m$	$\eta_{,p} = \frac{15}{8} \left[\frac{-4}{3} + \frac{2v}{m} \left[\frac{-2}{3} + (a_2 - 1) - \frac{(a_2 - 1)^2}{\sqrt{a_2}} \arg \tanh \frac{1}{\sqrt{a_2}} \right] \right]$ <u>III-54</u>
Contrôle en vitesse :	
$\tau = (1 - a\theta)\dot{\gamma}^m$	$\eta_{,i} = \frac{15}{8} \left(\frac{-2(a_1 + 1)}{m} \right) \left[1 + \left(\frac{2(m+1)}{3} - (a_1 + 1) \right) \frac{1}{\sqrt{a_1}} \arctan \frac{1}{\sqrt{a_1}} \right]$ <u>III-55</u>
$\tau = \theta^v \dot{\gamma}^m$	$\eta_{,p} = \frac{15}{8} \left[\frac{4(v-1)}{3} + \frac{2(a_2 - 1)v}{m} \right] \left[1 - \left(\frac{2(m+1)}{3} + (a_2 - 1) \right) \frac{1}{\sqrt{a_2}} \arg \tanh \frac{1}{\sqrt{a_2}} \right]$ <u>III-56</u>
Contrôle mixte :	
$\tau = (1 - a\theta)\dot{\gamma}^m$	$\eta_{,i} = \frac{15}{8} \left[\frac{-4}{3} + \frac{2}{m} \left[\frac{-2}{3} - (a_1 + 1) + \frac{(a_1 + 1)^2}{\sqrt{a_1}} \arctan \frac{1}{\sqrt{a_1}} \right] - \frac{8}{3} \left(\frac{1+m}{m} \right) \frac{c_1}{2c_1 - \phi m \lambda \tau_{1,i}^2} \left[\frac{(a_1 + 1)}{\sqrt{a_1}} \arctan \frac{1}{\sqrt{a_1}} - 1 \right] \right]$ <u>III-57</u>
$\tau = \theta^v \dot{\gamma}^m$	$\eta_{,p} = \frac{15}{8} \left[\frac{-4}{3} + \frac{2v}{m} \left[\frac{-2}{3} + (a_2 - 1) - \frac{(a_2 - 1)^2}{\sqrt{a_2}} \arg \tanh \frac{1}{\sqrt{a_2}} \right] + \frac{8v}{3} \left(\frac{1+m}{m} \right) \frac{c_1}{2c_1 - \phi m \lambda \tau_{1,p}^2} \left[1 - \frac{(a_2 - 1)}{\sqrt{a_2}} \arg \tanh \frac{1}{\sqrt{a_2}} \right] \right]$ <u>III-58</u>

Figure n° III-18 : Expression de la vitesse de croissance de la perturbation.

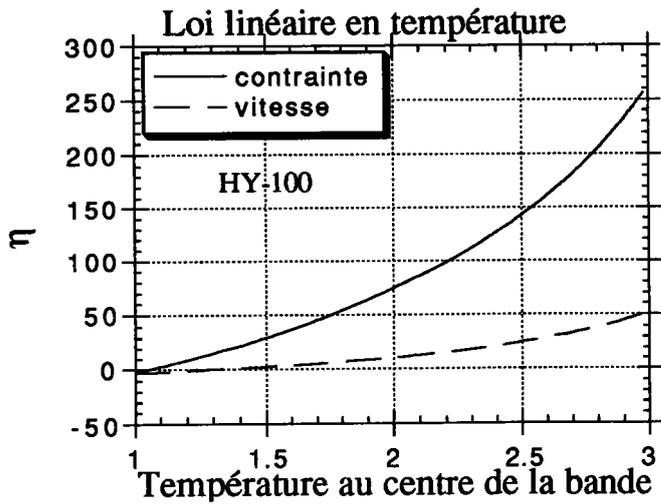


Figure n°III-19 : loi linéaire en température.

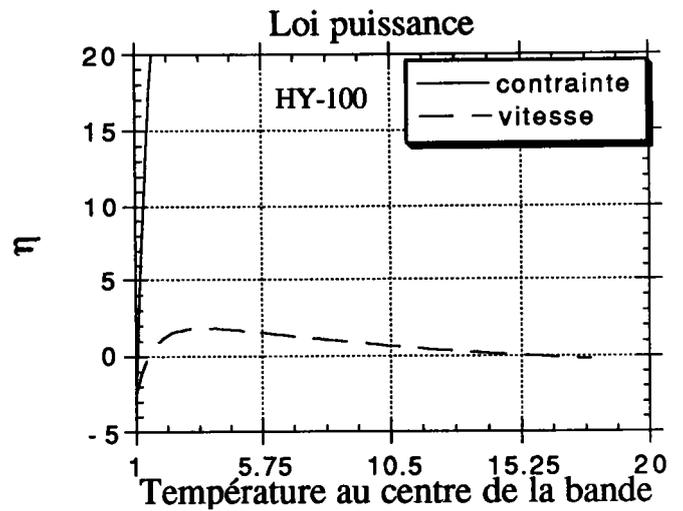


Figure n°III-21 : loi puissance.

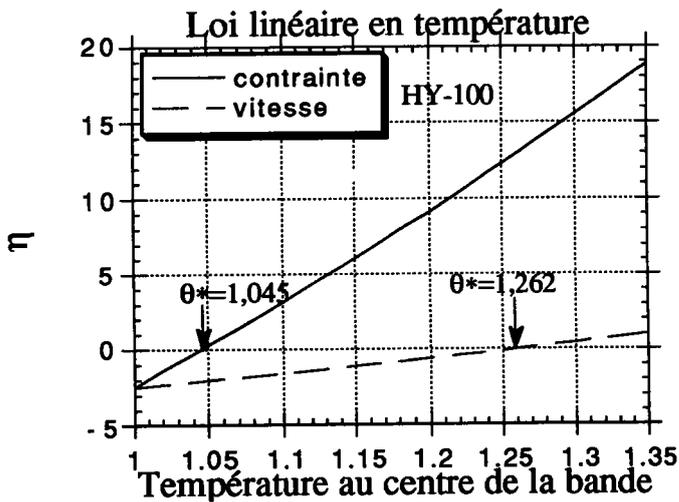


Figure n°III-20 : loi linéaire en température.

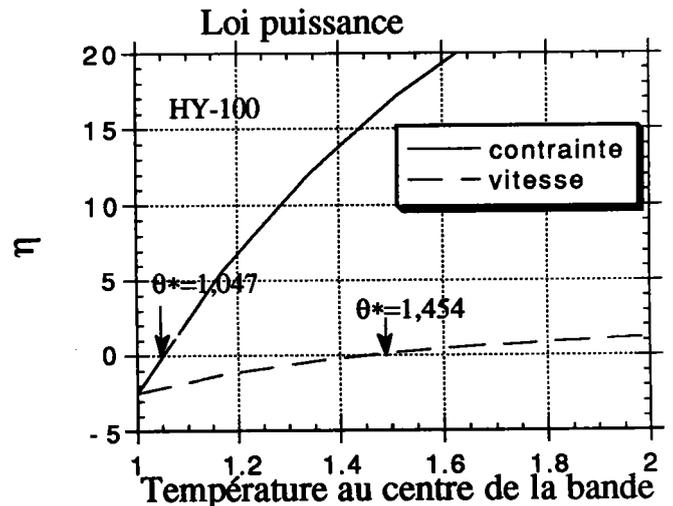


Figure n°III-22 : loi puissance.

5.2 Contrôle en contrainte.

Dans le cas d'un contrôle en contrainte, les vitesses de croissance de la perturbation III-53 et III-54 exprimées respectivement pour les deux lois étudiées III-12 et III-13 sont des fonctions strictement croissantes de la température θ_m (Figure n°III-19 et III-21 en trait continu). En deçà de la température θ_c^* , la vitesse de croissance η est négative, et la solution stationnaire est donc linéairement stable. La température θ_c^* pour laquelle la vitesse de croissance s'annule (Les figures n°III-20 et III-22 fournissent un agrandissement du voisinage de l'origine) constitue une bonne estimation (à 0,3%) de la température critique θ^* associée à l'extremum de la courbe contrainte - température tracée en (4). Au delà de θ^* , la vitesse de perturbation devient positive pour les valeurs d'adoucissement thermique et de sensibilité à la vitesse de déformation caractérisant habituellement le comportement des aciers (Figure n°III-19 et III-20 en trait continu). La branche montante des courbes caractéristiques (Figure n°III-8 et III-9) peut donc être qualifiée de sous-critique ; la branche descendante, pour une température au centre supérieure à θ^* , est qualifiée de branche sur-critique.

La température θ_c^* augmente quand la sensibilité à la vitesse de déformation m augmente et quand l'adoucissement thermique diminue (tableau de la Figure n°III-23). Une augmentation de la température θ_m au centre de la bande de quelques pour-cent est suffisante pour passer d'un régime stable sous-critique à un régime instable sur-critique.

5.3 Contrôle en vitesse.

Dans le cas d'un contrôle en vitesse, la vitesse de croissance de la perturbation η dépend fortement de la loi de comportement.

Pour la loi linéaire, la vitesse de croissance η tend vers l'infini par valeur positive lorsque la température tend vers la limite $1/a$, si la sensibilité à la vitesse de déformation m est inférieure à $1/2$, ce qui généralement le cas pour les aciers (Figure n°III-19 en trait discontinu). On met en évidence une température critique au delà de laquelle la solution stationnaire devient instable. Cette température dépend des paramètres rhéologiques et est supérieure à la température critique déterminée dans le cas d'un contrôle en contrainte (Figure n°III-20).

Pour la loi puissance, η tend vers une valeur finie négative $(-\frac{5}{2}(1-\nu))$ lorsque la température prend des valeurs très élevées. On observe donc un phénomène de restabilisation aux températures élevées (Figure n° III-21). Cependant ces températures de restabilisation sont si élevées qu'elles n'ont aucune

signification physique pour les métaux (Exemple de la figure III-23 : $\theta_v^* = 6,95$ donc $\bar{\theta}_v^* = 6,95 \times 300 = 2085$ K). La vitesse de croissance prend des valeurs positives sur une certaine plage de températures, en particulier pour les paramètres caractérisant le comportement des aciers CRS 1018 et HY-100. Une fenêtre d'instabilité de largeur variable se dessine donc ; les températures choisies dans ce domaine conduisent à une instabilité de la solution stationnaire (Figure n°III-21 en trait discontinu).

Enfin, on retrouve l'effet stabilisant de la sensibilité à la vitesse de déformation et l'effet déstabilisant de l'adoucissement thermique en étudiant l'influence des paramètres rhéologiques sur les températures critiques d'annulation de la vitesse de croissance de la perturbation (Figure n°III-23). En effet, on constate que θ_c^* diminue lorsque a ou $|v|$ augmente, et lorsque m diminue. L'étude des températures critiques θ_c^* montre de plus que la loi linéaire en température III-12 modélise un comportement thermoadouissant plus accentué. Pour l'acier HY-100, la loi puissance prévoit une restabilisation alors que la loi linéaire conclut à une instabilité inconditionnelle à partir de la température critique θ_v^* (Figure n°III-21 et III-22 en trait discontinu).

extremum ($\tau-\theta$)		$\eta=0$ contrainte	$\eta=0$ vitesse
		θ_1^*	θ_c^*
$m=0,0251$	$a=0,0912$	1,159	1,304
	$a=0,153$	1,288	1,169
	$a=0,231$	1,096	1,101
$a=0,153$	$m=0,045$	1,281	1,297
	$m=0,015$	1,096	1,102
$m=0,019$	$v=-0,38$	1,06	1,066
	$v=-0,076$	1,398	1,425
	$v=-0,228$	1,108	1,114
$v=-0,38$	$m=0,0475$	1,398	1,425
	$m=0,0317$	1,108	1,114

Figure n°III-23 : Comparaison de l'extremum des courbes contrainte-température et des conditions d'annulation de la vitesse de croissance de la perturbation.

Le détail des calculs sur le comportement de la vitesse de croissance de la perturbation lorsque la température θ_m tend vers ses limites $1/a$ ou l'infini figure en annexe 2.

5.4 Conditions aux limites mixtes.

On s'intéresse ici à l'influence des conditions aux limites sur la stabilité des solutions stationnaires, car la maîtrise de ces conditions est souvent délicate dans une sollicitation à grande vitesse. La variation des conditions de bord est reflétée par celle du coefficient ϕ ; rappelons que l'on obtient des conditions en vitesse lorsque $\phi \rightarrow 0$ et des conditions en contrainte lorsque $\phi \rightarrow -\infty$.

A partir de III-57 et III-58, on exprime le coefficient de combinaison ϕ_c critique pour lequel la vitesse de croissance de la perturbation s'annule lors d'un contrôle mixte des conditions aux limites (stabilité marginale) :

$\tau = (1 - a\theta)\dot{\gamma}^m$	$\phi_{c,l} = \frac{2c_1}{m\lambda\tau_{1,l}^2} \left[1 - \frac{\frac{(1+m)}{m} \left[\frac{(a_1+1)}{\sqrt{a_1}} \arctan \frac{1}{\sqrt{a_1}} - 1 \right]}{-1 + \frac{3}{2m} \left[\frac{-2}{3} - (a_1+1) + \frac{(a_1+1)^2}{\sqrt{a_1}} \arctan \frac{1}{\sqrt{a_1}} \right]} \right]$	<u>III-59</u>
$\tau = \theta^v \dot{\gamma}^m$	$\phi_{c,p} = \frac{2c_1}{m\lambda\tau_{1,p}^2} \left[1 - \frac{\frac{1+m}{m} \sqrt{1 - \frac{(a_2-1)}{\sqrt{a_2}} \arg \tanh \frac{1}{\sqrt{a_2}}}}{1 - \frac{3v}{2m} \left[\frac{-2}{3} + (a_2-1) - \frac{(a_2-1)^2}{\sqrt{a_2}} \arg \tanh \frac{1}{\sqrt{a_2}} \right]} \right]$	<u>III-60</u>

Figure n°III-24 : Expression de $\phi_{critique}$.

Le tracé des courbes $\phi_c(\theta_m)$ permet de résumer les principaux résultats de l'analyse de stabilité linéaire approchée (Figure n°III-25 et III-26).

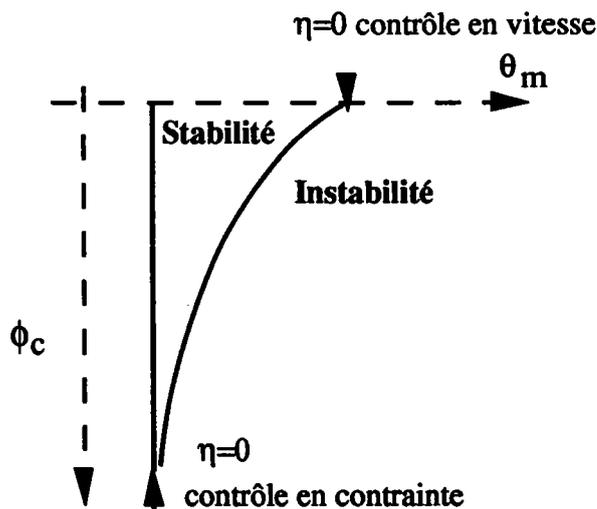


Figure n°III-25 : Etude du $\phi_{critique}$, loi linéaire en température.

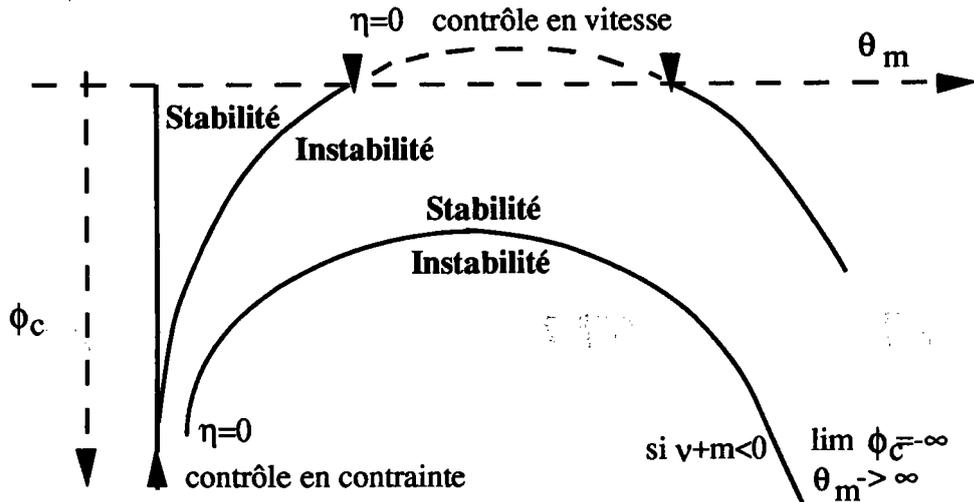
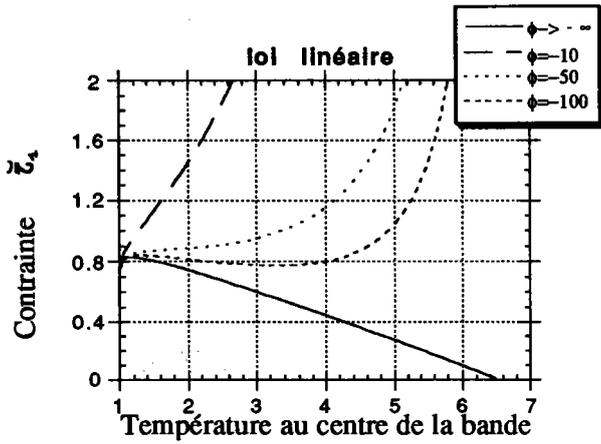


Figure n°III-26 : Etude du $\phi_{critique}$, loi puissance.

En effet, la nullité du dénominateur de $\phi_c(\theta_m)$ met en évidence une asymptote verticale pour laquelle ϕ_c prend des valeurs infinies négatives, cas particulier associé au contrôle en contrainte des frontières. L'étude des conditions d'annulation du numérateur de ϕ_c revient à l'étude des conditions pour lesquelles la vitesse de croissance de la perturbation s'annule dans le cas d'un contrôle en vitesse des bords de l'éprouvette ; de même, pour ϕ_c choisi arbitrairement, les racines θ_m de III-59 ou III-60 fournissent les conditions de stabilité marginale. On décrit alors une fenêtre d'instabilité dont l'existence et l'étendue sont liées au choix des paramètres rhéologiques (Figure n° III-27 pour l'acier modèle).

L'influence déstabilisante de l'adoucissement thermique est de nouveau illustrée par les courbes $\phi_c(\theta_m)$. On constate que pour $|v|$ assez petit la fenêtre d'instabilité disparaît (Figure n° III-28 pour l'acier CRS 1018).



(Rappel de la figure III-3)

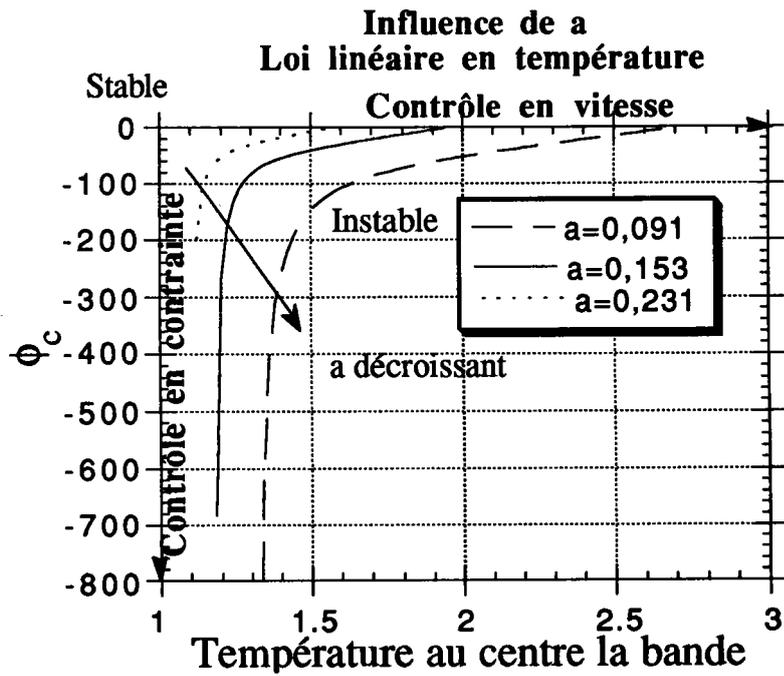
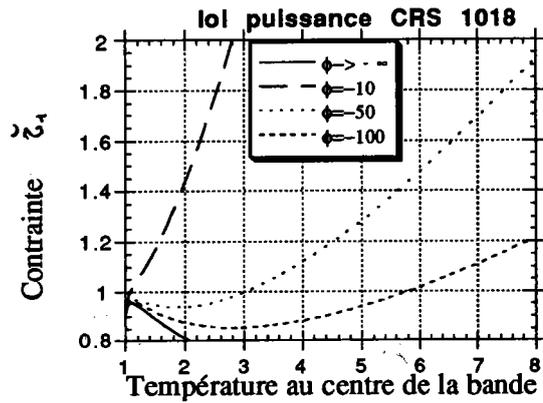


Figure n°III-27 : Etude du $\phi_{critique}$, loi linéaire en température acier modèle .



(Rappel de la figure III-4)

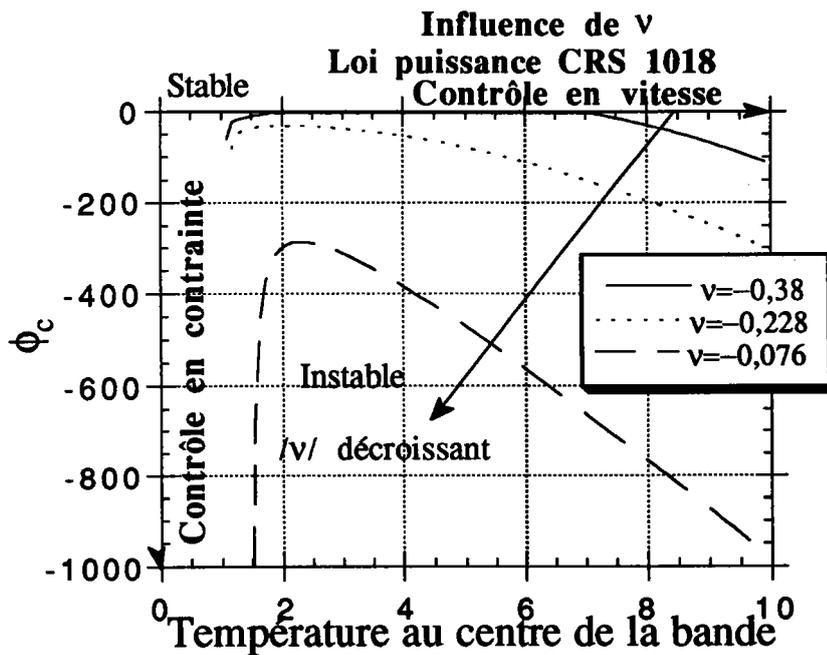


Figure n°III-28 : Etude du $\phi_{critique}$, loi puissance acier CRS 1018.

La comparaison de la loi linéaire en température et de la loi puissance est immédiate sur le tracé de $\phi_c(\theta_m)$ pour l'acier HY-100 (Figure n°III-29) : le domaine d'instabilité se réduit quand on passe d'une description du comportement par une loi linéaire à une description par une loi puissance, notamment pour des conditions voisines du contrôle en vitesse.

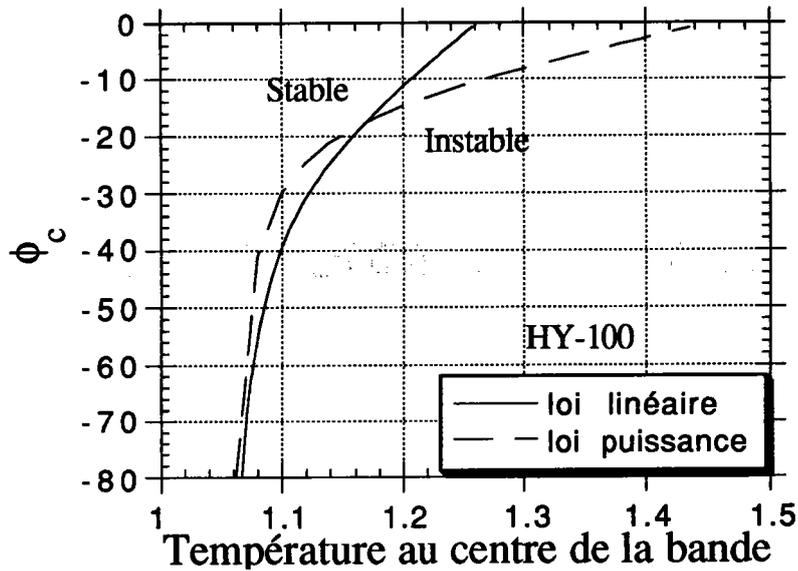


Figure n°III-29 : Etude du $\phi_{critique}$, comparaison loi linéaire en température et loi puissance HY-100.

6. Conclusion.

Ce chapitre a fourni des résultats sur l'existence et la stabilité de solutions stationnaires au problème de la distribution des vitesses de déformation et des températures au cours du **stade II** de localisation de la déformation plastique.

On montre que les conditions aux limites en vitesse sont moins destabilisantes que les conditions en contrainte. Cependant, pour les valeurs usuelles des paramètres rhéologiques dans les aciers, et pour les conditions aux limites mixtes imposées par l'expérience de Kolsky, les solutions stationnaires sont instables et ne sont pas atteintes physiquement.

Certains effets d'échelle peuvent être observés sur la figure III-30, où on a représenté le paramètre ϕ_c de stabilité marginale, en fonction de la température θ_m au centre de la bande, dans le cas de la loi puissance. On observe qu'un état stationnaire donné, par exemple ($-\phi_c = 5 \cdot 10^{-3}$, $\theta_m = 4$), est stable lorsque la largeur \bar{h} de l'échantillon est assez petite ($\bar{h} = 1,25 \cdot 10^{-4} m$), mais devient instable lorsque \bar{h} croît ($\bar{h} = 1,25 \cdot 10^{-3} m$).

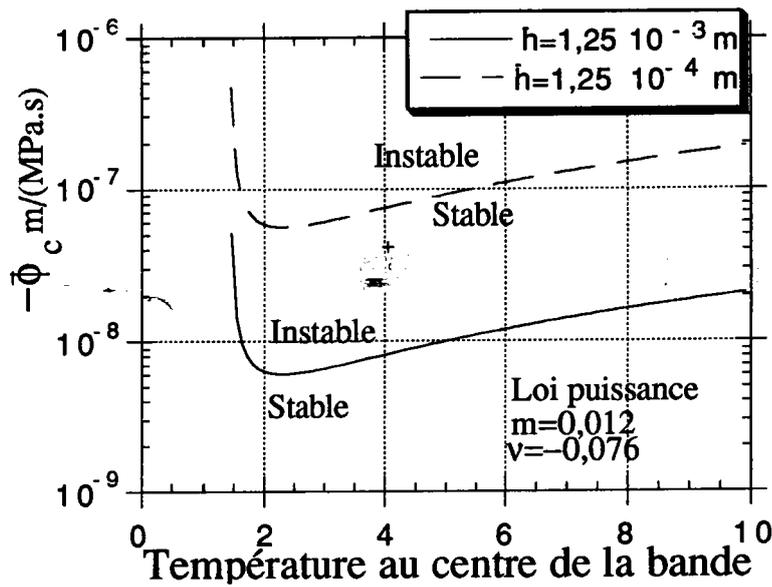


Figure n°III-30 : $\phi_{critique}$ dimensionnel en fonction de la largeur de l'échantillon.

Si la distribution de la déformation plastique calculée peut permettre de définir une largeur de bande, il apparaît que celle-ci est soumise aux effets d'échelle : en effet, si la largeur de l'échantillon double, il en est de même pour la largeur de bande. On sait que cette propriété n'est pas vérifiée par l'expérience. Ces effets sont liés à la conduction thermique et à la formulation du problème aux limites ; à cet égard, il est intéressant de formuler l'analyse en terme de temps caractéristiques.

Le temps \bar{t}_m caractéristique de l'expérience est sa durée totale, en général de l'ordre de 150 μs . Le temps caractéristique de conduction fourni par la relation III-9 ressort à $\bar{t}_c = 0,12s$ pour les valeurs du tableau de la figure II-2 (notamment $\bar{h} = 1,25 \cdot 10^{-3} m$) ; rappelons que c'est le temps nécessaire pour que la conduction thermique ait des effets significatifs sur toute la largeur de l'éprouvette, ce qui permet de comprendre les effets d'échelle sur la largeur de bande.

Il résulte de l'inégalité $\bar{t}_c \gg \bar{t}_m$ qu'une solution stationnaire ne dispose pas d'un temps suffisant pour s'établir.

Si inversement, on choisit pour distance caractéristique de la conduction thermique la distance \bar{d} pour laquelle les effets de conduction sont significatifs durant l'expérience de temps caractéristique \bar{t}_m , : $\bar{d} = \sqrt{\frac{\bar{k}\bar{t}_m}{\rho c}}$, on obtient $\bar{d} = 45 \mu m$, et l'on observe que $\bar{d} \ll \bar{h}$. Ce choix est celui qui sera fait dans le chapitre suivant

Version du 15 Décembre 1993

; il consiste à privilégier une approche locale des effets de conduction, au détriment d'une approche aux limites.

Annexe du chapitre 3.

Annexe n°1 : Identification des paramètres caractéristiques des lois de comportement linéaire en température et puissance.

Le comportement du matériau peut être décrit par les lois thermo-viscoplastiques suivantes :

* la loi d'Arrhénius :

$$\tau = \exp[\beta(\frac{1}{\theta} - 1)] \dot{\gamma}^m$$

* une loi de type exponentielle, linéarisation de la formulation d'Arrhénius au voisinage de $\theta=1$: $-\beta(\frac{1}{\theta} - 1) = -\beta(\frac{1}{1+\varepsilon} - 1) \approx -\beta\varepsilon = -\beta(\theta - 1)$

$$\tau = \exp[-\beta(\theta - 1)] \dot{\gamma}^m$$

Cette linéarisation n'est valable que dans un voisinage de $\theta=1$.

Nous reprenons cette technique de linéarisation pour identifier les paramètres rhéologiques de la loi linéaire et de la loi puissance.

La fonction exponentielle est linéarisée au voisinage de $\theta=1$ sous la forme : $\exp[-\beta(\theta - 1)] \approx 1 - \beta(\theta - 1) = (1 + \beta)(1 - \frac{\beta}{\beta + 1} \theta)$. La fonction puissance s'exprime sous

la forme linéarisée : $\theta^v = (1 + \varepsilon)^v \approx 1 + v\varepsilon = (1 - v)(1 + \frac{v}{1 - v} \theta)$. On assimile donc le paramètre β au paramètre $-v$. La loi de comportement linéaire en température s'écrit adimensionnellement à l'aide des développements précédents au voisinage de $\theta=1$: $\tau = (1 - v)(1 + \frac{v}{1 - v} \theta) \dot{\gamma}^m$. Le coefficient d'adoucissement thermique de la loi

linéaire en température s'exprime sous la forme : $a = \frac{-v}{1 - v} = \frac{\beta}{1 + \beta}$.

Pour faciliter les comparaisons avec les résultats proposés par Leroy et Molinari (1992), les variations imposées aux coefficients d'adoucissement thermique au paragraphe précédent coïncident avec les rapports $\frac{\beta}{m} = 4$, $\frac{\beta}{m} = 8$ et

$$\frac{\beta}{m} = 12.$$

Annexe n°2 : Détermination de la vitesse de perturbation pour des valeurs limite de la température.

$$\theta_m \rightarrow 1$$

* loi de comportement linéaire en température :

On note que $a_1 = \frac{1 - a\theta_m}{a(\theta_m - 1)}$ donc $\lim_{\theta_m \rightarrow 1} \eta_i = \lim_{a_1 \rightarrow \infty} \eta_i$

On utilise un développement de $\frac{1}{\sqrt{a_1}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}\right) \approx \frac{1}{a_1} - \frac{1}{3a_1^2}$ quand $a_1 \rightarrow \infty$

$$\lim_{\theta_m \rightarrow 1} \eta_{c,i} = \frac{-5}{2} \text{ et } \lim_{\theta_m \rightarrow 1} \eta_{v,i} = \frac{-5}{2}$$

* loi de comportement puissance :

On note que $a_2 = \frac{\theta_m}{\theta_m - 1}$ donc $\lim_{\theta_m \rightarrow 1} \eta_p = \lim_{a_2 \rightarrow \infty} \eta_p$

On utilise un développement de $\frac{1}{\sqrt{a_2}} \arg \tanh\left(\frac{1}{\sqrt{a_2}}\right) \approx \frac{1}{a_2} + \frac{1}{3a_2^2}$ quand $a_2 \rightarrow \infty$

$$\lim_{\theta_m \rightarrow 1} \eta_{c,i} = \frac{-5}{2} \text{ et } \lim_{\theta_m \rightarrow 1} \eta_{v,i} = \frac{-5}{2}$$

Pour les deux lois de comportement étudiées et sous n'importe quelle condition de contrôle aux frontières, la vitesse de croissance de la perturbation prend une valeur négative ($\eta = -\frac{5}{2}$) pour une température au centre de la bande $\theta_m=1$. On retrouve la valeur estimée par Leroy et Molinari (1992) pour les lois de comportement d'Arrhénius et exponentielle.

* loi de comportement linéaire en température : $\theta_m \rightarrow \frac{1}{a}$

On note que $a_1 = \frac{1 - a\theta_m}{a(\theta_m - 1)}$ donc $\lim_{\theta_m \rightarrow 1/a} \eta_i = \lim_{a_1 \rightarrow 0} \eta_i$

On calcule $\lim_{a_1 \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{a_1}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}\right) = \lim_{a_1 \rightarrow 0} \frac{\pi}{2\sqrt{a_1}}$

Contrôle en contrainte : $\lim_{\theta_m \rightarrow 1/a} \eta_{c,i} = \lim_{a_1 \rightarrow 0} \frac{15\pi}{8m\sqrt{a_1}} = +\infty$

Contrôle en vitesse : $\lim_{\theta_m \rightarrow 1/a} \eta_{v,i} = \lim_{a_1 \rightarrow 0} \frac{15}{8m} \left(1 - \frac{2(m+1)}{3}\right) \frac{\pi}{\sqrt{a_1}} = +\infty$ si $m < 1/2$.

* loi de comportement puissance : $\theta_m \rightarrow \infty$

On note que $a_2 = \frac{\theta_m}{\theta_m - 1}$ donc $\lim_{\theta_m \rightarrow \infty} \eta_p = \lim_{a_2 \rightarrow 1} \eta_p$

On calcule $\lim_{a_2 \rightarrow 1} \frac{a_2 - 1}{\sqrt{a_2}} \arg \tanh\left(\frac{1}{\sqrt{a_2}}\right) = 0$

Version du 8 Décembre 1993

$$\text{Contrôle en contrainte : } \lim_{\theta_m \rightarrow \infty} \eta_{c,p} = \frac{-5}{2} \left(1 + \frac{\nu}{m}\right)$$

$$\text{Contrôle en vitesse : } \lim_{\theta_m \rightarrow \infty} \eta_{v,p} = \frac{-5}{2} (1 - \nu)$$

Etude des limites en température de ϕ_c :

$$\text{Loi linéaire en température : } \lim_{\theta_m \rightarrow \infty} \phi_c = \lim_{\theta_m \rightarrow \infty} \frac{2c_1}{mk\tau_1^2} \left(1 - \frac{2(1+m)}{3}\right) = +\infty \text{ si } m < 1/2.$$

$$\text{Loi puissance : } \lim_{\theta_m \rightarrow \infty} \phi_c = \lim_{\theta_m \rightarrow \infty} \frac{2c_1}{mk\tau_1^2} \left(\frac{1-\nu}{\nu+m}\right) = -\infty \text{ si } \nu+m < 0$$

Chapitre 4

Morphologie des BCA dans le stade III ; effets combinés de conduction thermique et de singularités du comportement.

<u>1 Introduction</u>	114
<u>2 Formulation du problème</u>	115
<u>3. Résolution analytique, en l'absence de singularité</u>	121
3.1 Détermination de la vitesse de déformation	122
3.2 Conditions aux limites en vitesse.	123
3.3 Conditions aux limites thermiques.....	124
3.4 Détermination de la vitesse de déformation au centre.	124
3.5 Définition de la largeur de bande.	125
3.6 Applications et confrontations expérimentales.....	126
<u>4. Analyse de l'influence de la singularité de comportement</u>	127
4.1 Présentation de la méthode.	127
4.2 Comparaisons avec la méthode numérique.....	131
4.3 Résultats.....	134
<u>5 Conclusions</u>	136
Annexe du chapitre 4	138

Chapitre 4

Morphologie des BCA dans le stade II ; effets combinés de conduction thermique et de singularités du comportement.

1 Introduction.

Ce chapitre est consacré à l'étude de la morphologie des BCA au cours du **stade II** de la localisation, c'est-à-dire au cours de la chute brutale de la contrainte appliquée. Comme au chapitre 3, l'écroûissage du matériau est négligé, ainsi que les effets d'inertie. Il résulte de la très courte durée du **stade II** ($t_m \cong 150\mu s$) que la diffusion de la chaleur générée dans la bande de cisaillement n'est significative que sur une courte distance de part et d'autre de la bande, et que le problème reste en général adiabatique à l'échelle de l'échantillon (quelques mm).

Le chapitre 3 a contribué à montrer qu'une solution stationnaire au problème aux limites est instable dans les conditions usuelles, et qu'elle n'est pas atteinte physiquement.

Pourtant l'évolution de la largeur de bande en fonction de la déformation localisée (Figure n°IV-1) suggère l'existence d'une distribution stationnaire de la vitesse de déformation au cours du **stade II**. C'est aussi ce qui est suggéré par l'observation post-mortem de largeurs de bande bien définies, caractéristiques d'un matériau et d'un chargement donnés. C'est l'hypothèse qui sera la notre dans ce chapitre.

On cherchera à caractériser la largeur de bande au moyen d'une analyse locale, concentrée sur la zone étroite où la diffusion thermique est significative. On négligera tout d'abord l'influence des défauts géométriques ou des irrégularités matérielles ; on étudiera ensuite l'influence de singularités du comportement sur la morphologie des bandes de cisaillement.

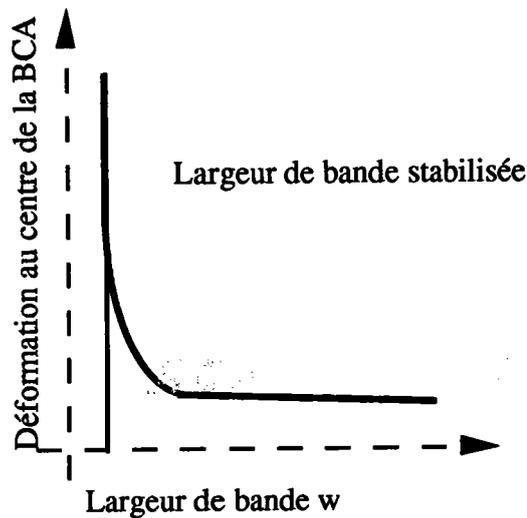


Figure n°IV-1 : Stabilisation de la largeur de bande.

2 Formulation du problème.

Le problème est réduit à l'étude du cisaillement simple parallèle à oy d'une couche d'épaisseur $2\bar{h}$ suivant l'axe (ox), d'extension infinie suivant (oy) (Figure n° IV-2). Seule la composante v suivant l'axe (oy) de la vitesse d'une particule est non nulle. On suppose que la vitesse de déformation ne dépend que de l'ordonnée \bar{x} ; la température dépend de \bar{x} et du temps \bar{t} . Le problème ainsi défini est unidimensionnel.

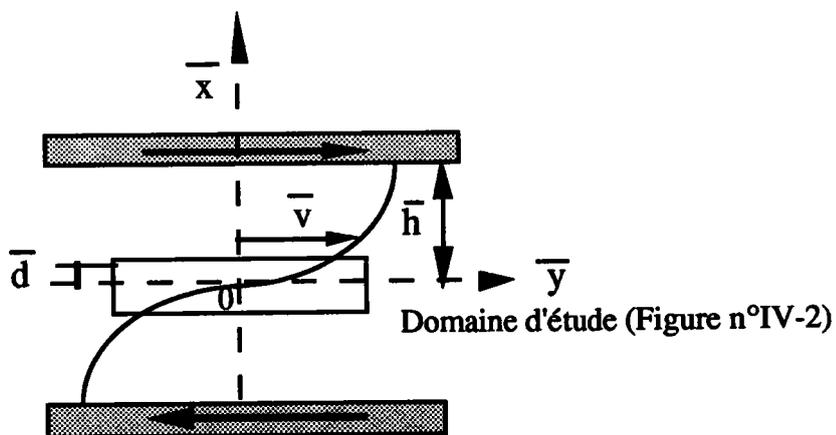


Figure n°IV-2 : Modélisation du problème.

La structuration de la bande est analysée localement au voisinage du centre de la BCA dans un domaine d'étude dont la largeur est de l'ordre de grandeur de la distance caractéristique de conduction \bar{d} , que l'on définit comme suit :

$$\bar{d} = \sqrt{\frac{k_0}{\bar{\rho}\bar{c}\bar{\gamma}_c}} \quad \text{IV-1}$$

où $\bar{\rho}$, \bar{c} et k_0 représentent respectivement la masse volumique, la chaleur spécifique massique et la conductivité thermique. La vitesse de déformation plastique de référence est désignée par $\bar{\dot{\gamma}}_c$. $\bar{t}_c = 1/\bar{\dot{\gamma}}_c$ est le temps caractéristique de développement du processus de localisation ; il représente la durée du **stade II** décrit dans le chapitre 1. Les valeurs $\bar{\rho}$, \bar{c} et k_0 sont des constantes caractéristiques : pour les aciers, $\bar{\rho} = 7800 \text{ Kg.m}^{-3}$, $\bar{c} = 500 \text{ J.Kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ et $\bar{k} = 54 \text{ J.m}^{-1}.\text{K}^{-1}.\text{s}^{-1}$.

La phase de chute brutale de la contrainte est de l'ordre de $150 \mu\text{s}$ pour l'acier HY-100 (Marchand et Duffy (1988))(Figure n°IV-3). La vitesse de déformation $\bar{\dot{\gamma}}_c$ est donc estimée à 6667 s^{-1} et la distance caractéristique de conduction est de l'ordre de $45 \mu\text{m}$.

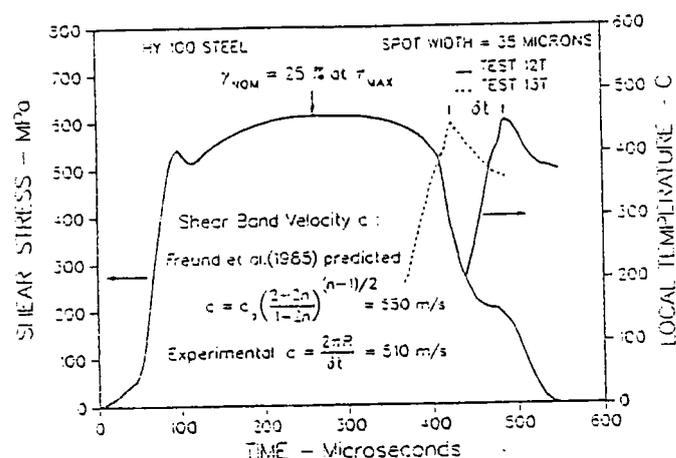


Figure n°IV-3 : Temps caractéristique du stade II, Acier HY-100
d'après Marchand et Duffy (1988).

Dans la résolution de problèmes aux limites en cisaillement simple, les variables d'espace sont souvent adimensionnalisées par la demi-épaisseur de l'éprouvette \bar{h} . Dans ce travail, nous étudions la structuration de la bande localement ; nous choisissons donc d'adimensionnaliser par la distance caractéristique de conduction \bar{d} . Les variables thermomécaniques - température, contrainte, vitesse de déformation au centre - sont ainsi rapportées à des paramètres locaux.

L'éprouvette est constituée d'un matériau thermoviscoplastique présentant une singularité de comportement dans le voisinage du centre de la BCA. Parmi d'autres choix possibles, la singularité de comportement a été reportée sur la conductivité thermique, pour des raisons techniques. Il faut à cet égard noter que l'on ne cherche pas à travers la modélisation adoptée à caractériser le défaut de conduction de façon réaliste à partir des paramètres décrivant l'état de surface ou

les inhomogénéités matérielles d'un échantillon, mais seulement à cerner l'influence d'une singularité sur la morphologie de la bande. Le développement analytique qui s'ensuit présente donc un caractère formel, mais il suggère une interprétation en termes de singularités locales des différences constatées entre les largeurs de bande prévues analytiquement et les valeurs expérimentales associées.

Comme nous l'avons rappelé dans le chapitre 1, une analyse dimensionnelle de l'équation de conservation de l'énergie donne une expression approchée de la largeur de bande δ , dans l'hypothèse où la distribution des variables est homogène dans la bande. Cette largeur correspond à un équilibre du débit de chaleur créé par la déformation plastique et du flux de chaleur dû à la conduction. La largeur de bande calculée par cette approche est nettement supérieure à la largeur expérimentale associée aux mêmes conditions d'étude : Marchand et Duffy (1988) ont estimé δ à 40 μm pour une largeur de bande expérimentale de 20 μm dans un acier HY-100.

Dans le cadre de la modélisation adoptée, la conductivité thermique a pour développement local au voisinage de $x=0$:

$$\bar{k}(\bar{x}) = k_0 \left(1 - k_r \left(\frac{\bar{x}}{d}\right)^r\right) \quad \text{IV-2}$$

où k_0 est la conductivité thermique au centre de la bande. Il existe donc un point de singularité au centre de la bande (Figure n° IV-5). Le paramètre r représente l'acuité de la singularité ; son domaine de variation est tel que $0 < r < 1$. Le paramètre k_r précise la variation de la conductivité thermique ; son interprétation est donnée ci-dessous en fonction de la distance caractéristique de conduction (Figure n°IV-4).

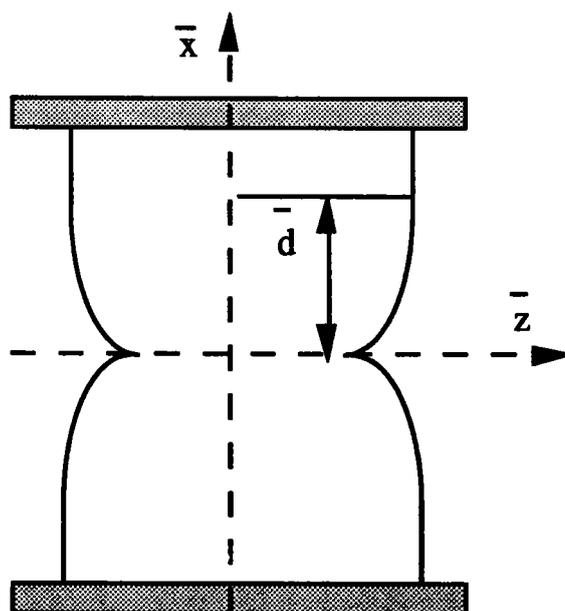


Figure n°IV-4 : Définition du défaut

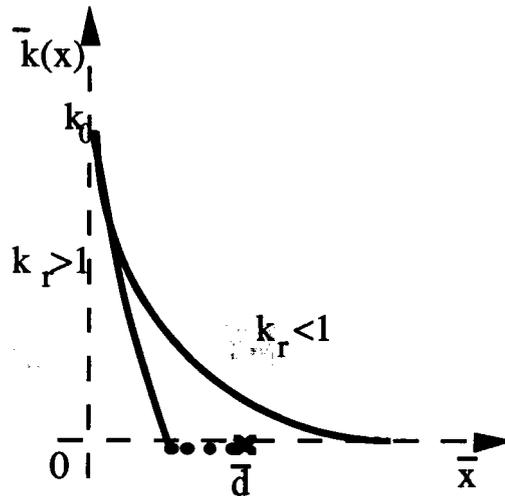


Figure n°IV-5 : *Interprétation des paramètres du défaut.*

Si le paramètre k_r était supérieur à \bar{d} , les phénomènes thermiques deviendraient adiabatiques pour une abscisse inférieure à la distance caractéristique de conduction l . Cette configuration est absurde ; on se limite donc aux valeurs de k_r choisies entre 0 et 1. Différents exemples de singularité sont représentés sur la figure IV-6.

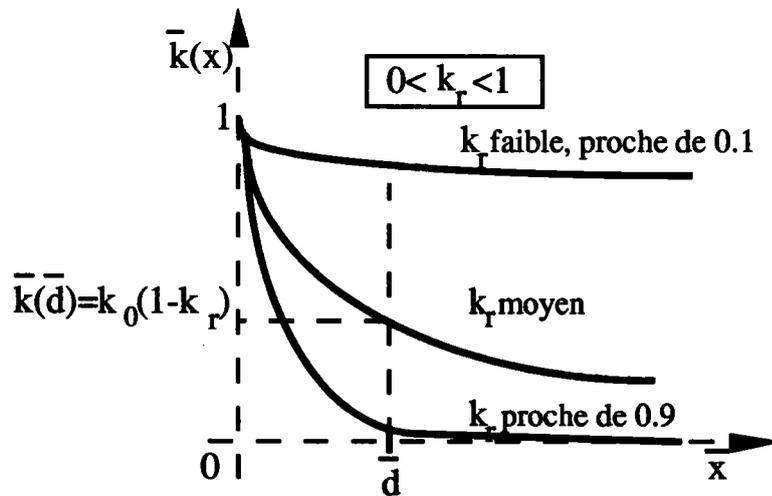


Figure n°IV-6 : *Etude de la variation de k_r .*

Si k_r est faible (proche de 0,1 par exemple), la formulation IV-2 traduit une faible variation de la conductivité thermique ; on retrouve le problème classique où l'échantillon ne présente aucune singularité de comportement. Si k_r prend des valeurs proches de 1, la conductivité thermique est négligeable au delà de la distance caractéristique de conduction ; cette configuration représente un cas limite des phénomènes thermiques observables expérimentalement.

Nous étudions dans la suite l'influence du paramètre k , et de l'acuité r de la singularité sur la distribution de la vitesse de déformation plastique dans un domaine d'étude ajusté sur la distance caractéristique de conduction \bar{d} .

Pour exprimer l'équation de conservation de l'énergie, nous effectuons un bilan thermique sur une tranche d'épaisseur $d\bar{x}$ choisie dans le domaine de variation de la conductivité thermique (Figure n°IV-7).

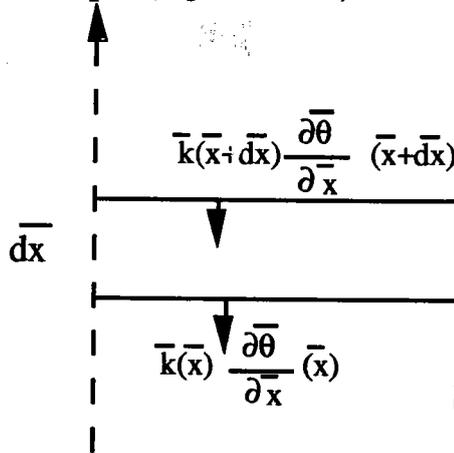


Figure n°IV-7 : Bilan thermodynamique local

L'équation de la chaleur s'écrit alors :

$$\bar{\rho} \bar{c} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\bar{k} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{x}} \right) + \bar{\tau} \dot{\bar{\gamma}} \quad \text{IV-3}$$

On suppose que le coefficient de Taylor-Quinney est égal à 1, pour alléger l'écriture.

Les effets d'inertie ne sont pas pris en compte. L'équation d'équilibre de la couche cisailée s'écrit donc en grandeurs dimensionnelles :

$$\frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \bar{x}} = 0 \quad \text{ou} \quad \bar{\tau} = \bar{\tau}(\bar{t}) \quad \text{IV-4}$$

où $\bar{\tau}$ est la contrainte appliquée au bord de l'éprouvette.

On se place au **stade II** de la localisation de la déformation plastique, correspondant à la structuration de la bande ; les déformations élastiques ont une influence négligeable et l'écroutissement n'est plus significatif dans cette phase de développement. La loi de comportement choisie pour cette étude est une loi linéaire en température :

$$\bar{\tau} = \bar{\tau}_0 \left(1 - a \frac{\bar{\theta}}{\bar{\theta}_0} \right) \left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{\gamma}_0} \right)^m \quad \text{IV-5}$$

$\bar{\tau}_0$, $\bar{\theta}_0$ et $\bar{\dot{\gamma}}_0$ représentent respectivement une contrainte de référence, une température de référence et une vitesse de déformation de référence. Ce sont par exemple les valeurs qui sont atteintes au début du **stade II**. m est le coefficient de sensibilité à la vitesse de déformation. Le paramètre a traduit la sensibilité du matériau à la température. La linéarité en température provient d'une opération de linéarisation de la loi de comportement à partir de la température de référence $\bar{\theta}_0$. Pour modéliser ce problème de cisaillement simple, la vitesse et le flux de chaleur doivent vérifier les conditions de symétrie suivantes au centre de la bande :

$$\bar{v} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{x}} = 0 \quad \text{en} \quad \bar{x} = 0 \quad \text{IV-6}$$

On suppose en outre que la vitesse imposée au bord $\bar{x} = \bar{h}$ est constante et égale à $\bar{v} = \bar{v}_{bord}$, et que les frontières sont adiabatiques.

On procède alors à une adimensionnalisation du problème en introduisant les variables suivantes :

$$x = \frac{\bar{x}}{\bar{d}}, \quad \theta = \frac{\bar{\theta} - \bar{\theta}_0}{\bar{\theta}_0}, \quad t = \frac{\bar{t}}{\bar{t}_c}, \quad k = \frac{\bar{k}}{k_0}, \quad v = \frac{\bar{v}}{\bar{d}\bar{\dot{\gamma}}_c}, \quad \tau = \frac{\bar{\tau}}{\bar{\tau}_R} \quad \text{et} \quad \dot{\gamma} = \frac{\bar{\dot{\gamma}}}{\bar{\dot{\gamma}}_c} = \bar{\dot{\gamma}}_c \quad \text{IV-7}$$

avec $\bar{\tau}_R = \bar{\tau}_0 \left(\frac{\bar{\dot{\gamma}}_c}{\bar{\dot{\gamma}}_0} \right)^m$.

Le temps \bar{t} est rapporté au temps \bar{t}_c caractéristique de l'expérience (Figure n°IV-8) et l'abscisse \bar{x} à la distance caractéristique de conduction \bar{d} .

Pour simplifier l'écriture de l'équation de la chaleur, on utilise le changement de variable IV-8 pour la vitesse de déformation :

$$u = \left(\frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}(0)} \right)^{-m} = \left(\frac{\bar{\dot{\gamma}}}{\bar{\dot{\gamma}}(0)} \right)^{-m} \quad \text{IV-8}$$

où $\dot{\gamma}(0)$ représente la vitesse de déformation au centre de la bande.

La température adimensionnelle s'écrit à l'aide de la loi de comportement IV-5 :

$$\theta(x,t) = \frac{1}{a} (1 - \tau(t) \dot{\gamma}(0)^{-m} u(x)) \quad \text{IV-9}$$

La substitution de IV-9 dans l'équation de l'énergie IV-3 conduit à une séparation des variables d'espace et de temps, et au système d'équations IV-10.

$$\begin{cases} \frac{d\tau}{dt} + \zeta\tau = 0 & (a) \\ k(x)\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d(k(x))}{dx}\frac{du}{dx} = \alpha u^{\frac{-1}{m}} - \zeta u & (b) \end{cases} \quad \text{IV-10}$$

avec $k(x) = 1 - k_r x^r$.

On vérifie aisément que seule une variation linéaire de la température du type de IV-5 permet le découplage de l'équation de la chaleur.

Dans ce calcul, il apparaît une constante d'intégration notée ζ , ainsi qu'une grandeur adimensionnelle α définie par :

$$\alpha = \frac{a\bar{\tau}_R}{\rho\bar{c}\bar{\theta}_0} \dot{\gamma}(0)^{1+m}. \quad \text{IV-11}$$

L'intégration de IV-10(a) est immédiate : elle fournit $\tau = \tau(0)\exp(-\zeta t)$ ou encore $\bar{\tau} = \bar{\tau}(0)\exp(-\zeta\bar{t})$; la décroissance de la contrainte exige $\zeta > 0$. Elle peut être caractérisée expérimentalement par le temps de relaxation \bar{t}_c (Figure n° IV-8).

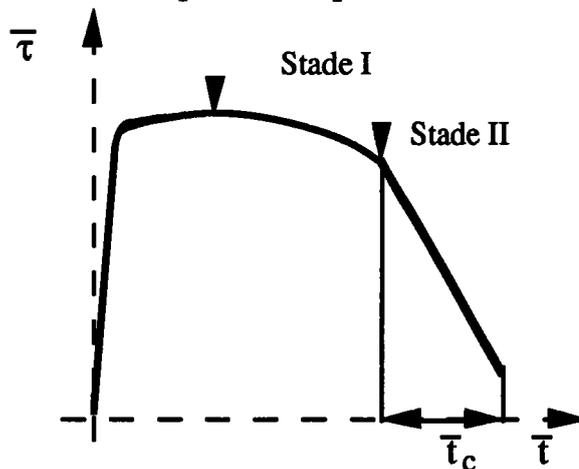


Figure n°IV-8 : Chute de la contrainte dans le stade II en fonction du temps.

Une solution locale de IV-10-b est recherchée dans la suite de ce chapitre.

3. Résolution analytique, en l'absence de singularité.

L'analyse de la structuration de la bande passe par la recherche d'une solution $u(x)$ de l'équation découplée de la chaleur :

$$k(x) \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d(k(x))}{dx} \frac{du}{dx} = \alpha u^{\frac{-1}{m}} - \zeta u \quad \text{IV-13}$$

Avant d'aborder la résolution dans le cas où il existe une singularité, nous présentons la solution pour un échantillon libre de tout défaut, déjà abordée par Wright (1992). L'analyse fournie par Wright est discutée en annexe de ce chapitre.

3.1 Détermination de la vitesse de déformation

Dans le cas où la conduction thermique est constante, l'équation IV-13 s'écrit simplement :

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \alpha u^{\frac{-1}{m}} - \zeta u \quad \text{IV-14}$$

L'équation différentielle IV-14 est une équation du second ordre non linéaire. On se propose d'en déterminer une solution approchée au voisinage de $x=0$, c'est-à-dire pour $u \cong 1$.

La solution locale est recherchée sous la forme d'un développement en série qui vérifie la condition $u(x)=1$ et $\frac{du(x)}{dx} = 0$ en $x=0$:

$$u(x) = \sum_n u_n x^n = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + u_3 x^3 + u_4 x^4 + \dots \quad \text{IV-15}$$

On montre aisément que $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$ pour que les conditions aux limites soient vérifiées. La dérivée au second ordre de la série IV-15 est remplacée dans l'équation IV-14 pour identifier les paramètres u_i .

La solution $u(x)$ développée à l'ordre 4 au voisinage de $x=0$, s'exprime par :

$$u(x) = 1 + \frac{\alpha - \zeta}{2} x^2 - \frac{\alpha(\alpha - \zeta)}{24m} x^4 + \dots \quad \text{IV-16}$$

On en déduit la vitesse de déformation au voisinage de $x=0$ que l'on exprime en ne conservant que les deux premiers termes du développement IV-16 :

$$\frac{\dot{\gamma}(x)}{\dot{\gamma}(0)} = \left(1 + \frac{\alpha - \zeta}{2} x^2\right)^{\frac{-1}{m}} \quad \text{IV-17}$$

Dans cette expression, la vitesse de déformation $\dot{\gamma}(0)$ demeure inconnue.

3.2 Conditions aux limites en vitesse.

On se propose de déterminer la vitesse $\dot{\gamma}(0)$ de déformation au centre en exprimant les conditions aux limites en vitesse.

$$\int_0^h \dot{\gamma}(x) dx = v_0. \quad \text{IV-18}$$

Nous écrivons ici, en utilisant l'adimensionnalisation proposée en IV-7 :

$$v_0 = \bar{v}_{bord} \frac{\bar{t}_c}{d} \quad \text{IV-19}$$

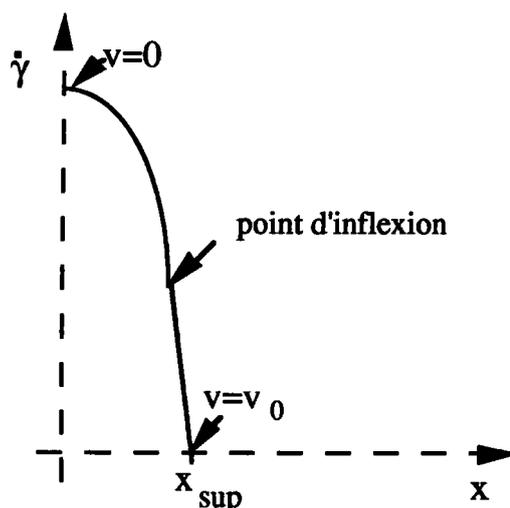


Figure n°IV-9 : Profil de vitesse de déformation dans la zone de localisation.

A partir d'un point x_{sup} dont nous allons déterminer l'abscisse, on suppose que la vitesse de déformation $\dot{\gamma}$ est infiniment petite et que $v = v_0$ (Figure n°IV-9), ce qui permet d'écrire :

$$\int_0^{x_{sup}} \dot{\gamma}(x) dx = v_0 \quad \text{IV-20}$$

Au voisinage de $x=0$, IV-17 admet un développement local :

$$\frac{\dot{\gamma}(x)}{\dot{\gamma}(0)} = 1 - \frac{\alpha - \zeta}{2m} x^2.$$

Le point x_{sup} annulant la vitesse $\dot{\gamma}$ de déformation approchée au second ordre est donc :

$$x_{sup} = \sqrt{\frac{2m}{\alpha - \zeta}}. \quad \text{IV-21}$$

En remplaçant x_{sup} et en conservant un développement au second ordre de $\dot{\gamma}$ au voisinage de $x=0$, la condition aux limites IV-20 devient :

$$\int_0^{\sqrt{\frac{2m}{\alpha-\zeta}}} \left(1 - \frac{\alpha-\zeta}{2m} x^2\right) dx = v_0 \dot{\gamma}(0)^{-1} \quad \text{IV-22}$$

$$\text{soit} \quad \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2m}{\alpha-\zeta}} = v_0 \dot{\gamma}(0)^{-1} \quad \text{IV-23}$$

On vérifie à partir de IV-17 que $\bar{\tau}(x)$ devient très rapidement négligeable au delà de l'abscisse x_{sup} .

3.3 Conditions aux limites thermiques.

Intégrons l'équation IV-14 le long de l'échantillon. Compte tenu des conditions à la limite thermiques $\frac{du}{dx} = 0$ en $x=0$ et $x=h$ et de IV-23, il vient :

$$\int_0^h u dx = \frac{\alpha}{\zeta} v_0 \dot{\gamma}(0)^{-1} \quad \text{IV-24}$$

L'écriture de cette condition est impossible avec la solution locale IV-16 ; en effet, elle requiert une solution complète, ou un raccordement de solutions approchées, que nous n'avons pas été en mesure d'obtenir à ce jour. On trouvera une discussion de cet aspect de l'analyse en annexe.

A défaut, et pour montrer les potentialités de cette approche, la valeur de la constante d'intégration est choisie : $\zeta=1$ ou encore sous forme dimensionnelle $\bar{\zeta} = \bar{\tau}_c^{-1}$. Cela revient à choisir pour ζ la valeur qui lui est fixée par le tracé expérimental de la courbe $\bar{\tau}(\bar{\tau})$. Une discussion de cette approche empirique est fournie en 3.5 sur la base de confrontations avec les largeurs de bande mesurées.

3.4 Détermination de la vitesse de déformation au centre.

Après intégration de IV-20, la vitesse de déformation au centre vérifie l'équation algébrique :

$$\frac{8m}{9v_0^2} \dot{\gamma}(0)^2 - \frac{a\bar{\tau}_R}{\rho\bar{c}\theta_0} \dot{\gamma}(0)^{1+m} + 1 = 0 \quad \text{IV-25}$$

dans laquelle on a substitué $\zeta=1$. Le coefficient de sensibilité à la vitesse de déformation étant très faible pour les aciers, l'équation IV-25 se ramène à une

équation du second degré en $\dot{\gamma}(0)$ que nous écrivons maintenant en variables dimensionnelles (avec $\bar{a} = \frac{a}{\theta_0}$):

$$\frac{8m}{9\bar{v}_{bord}^2} \bar{\gamma}(0)^2 - \frac{\bar{a}\bar{\tau}_0\bar{\gamma}_0^{-m}}{k_0} \bar{\gamma}(0) + \frac{\bar{\rho}\bar{c}}{k_0\bar{t}_c} = 0 \quad \text{IV-26}$$

Cette équation admet deux solutions réelles en $\dot{\gamma}(0)$ si les effets de conduction ne sont pas trop forts. Des approximations des racines de IV-26 peuvent être mises en évidence, compte tenu de l'ordre de grandeur des coefficients.

On vérifie que la première racine est assez proche de celle fournie par la résolution de l'équation du premier degré :

$$-\bar{a}\bar{\tau}_0\bar{\gamma}_0^{-m}\bar{\gamma}(0) + \frac{\bar{\rho}\bar{c}}{\bar{t}_c} = 0 \quad \text{IV-27}$$

$$\text{soit } \bar{\gamma}(0) = \frac{\bar{\rho}\bar{c}}{\bar{t}_c\bar{a}\bar{\tau}_0\bar{\gamma}_0^{-m}} \quad \text{IV-28}$$

obtenue en annulant le terme de second degré, et que la seconde racine est obtenue de manière approchée en résolvant l'équation :

$$\frac{8m}{9\bar{v}_{bord}^2} \bar{\gamma}(0) - \frac{\bar{a}\bar{\tau}_0\bar{\gamma}_0^{-m}}{k_0} = 0 \quad \text{IV-29}$$

$$\text{soit } \bar{\gamma}(0) = \frac{\bar{a}\bar{\tau}_0\bar{\gamma}_0^{-m}}{k_0} \frac{9\bar{v}_{bord}^2}{8m} \quad \text{IV-30}$$

Cette résolution revient à négliger le troisième terme de l'équation IV-26 : la solution associée correspond alors à la solution que l'on obtiendrait avec $\frac{\bar{\rho}\bar{c}}{k_0\bar{t}_c} \equiv 0$ ou plus explicitement avec $\bar{t}_c \rightarrow \infty$. Cette solution n'est pas acceptable ; elle est étrangère au problème posé : elle ne permet pas de modéliser la chute brutale en contrainte dans le stade II.

3.5 Définition de la largeur de bande.

De la même manière qu'au chapitre 2, la largeur de bande est définie à partir de l'abscisse du point d'inflexion de la vitesse $\dot{\gamma}$ de déformation exprimée localement à l'aide de IV-17. On trouve :

$$\frac{\delta}{2} = x_i = \sqrt{\frac{2m}{(2+m)(\alpha-1)}} \quad \text{IV-31}$$

Pour calculer la largeur de bande, on commence par déterminer la vitesse de déformation au centre de la bande par résolution de l'équation IV-25 ou IV-26 ; on détermine alors la constante α à l'aide de IV-11 puis on remplace dans IV-31.

3.6 Applications et confrontations expérimentales.

L'analyse est proposée pour un acier HY-100 dont les caractéristiques rhéologiques sont :

$a=0,248$ $m=0,012$

Les constantes de référence sont : $\bar{\tau}_0 = 500 \text{MPa}$, $\bar{\theta}_0 = 300 \text{K}$ et $\bar{\gamma}_0 = 1.10^3 \text{s}^{-1}$. Le temps caractéristique \bar{t}_c de l'expérience est estimé à $150 \mu\text{s}$ (Voir figure n°IV-2). La vitesse de déformation associée à ce temps \bar{t}_c est $\bar{\gamma}_c = 6667 \text{s}^{-1}$.

La distance caractéristique de conduction est $\bar{d} = 45 \mu\text{m}$.

Marchand et Duffy (1988) imposent une vitesse au bord de l'échantillon : $\bar{v}_{\text{bord}} = 1,625 \text{ms}^{-1}$. Compte tenu du paragraphe 3.4, la vitesse de déformation au centre est $\bar{\gamma}(0) = 7,1.10^4 \text{s}^{-1}$.

La largeur de bande correspondant à cette vitesse de déformation est alors accessible au calcul : $\delta_1 = 22 \mu\text{m}$; elle est voisine de la valeur expérimentale mesurée par Marchand et Duffy pour l'acier HY-100 : $20 \mu\text{m}$.

La largeur de bande obtenue à partir de la seconde solution de l'équation IV-26 est très faible par rapport aux mesures expérimentales : $\delta_2 = 2 \mu\text{m}$; par ailleurs elle est du même ordre de grandeur que la largeur estimée par Wright (Voir en annexe).

Il apparaît que le modèle permet de corréler la largeur de bande et le temps de relaxation de la contrainte de cisaillement. Il possède donc une capacité intéressante d'interprétation du stade II de la localisation. Son développement ultérieur passe par une détermination consistante de la constante d'intégration ζ . Comme nous l'avons déjà indiqué, l'approche locale ne permet pas de satisfaire les conditions aux limites thermiques au bord de l'échantillon ; un raccordement de la solution locale IV-16 et d'une solution extérieure à la BCA devrait

permettre l'écriture de cette condition et la détermination de la constante d'intégration ζ . Ce point de vue est développé plus complètement dans l'annexe à ce chapitre.

En l'état, le temps \bar{t}_c caractéristique du **stade II** est fonction des singularités du specimen et du matériau (rhéologie, défauts de géométrie et de microstructure). Ces influences sont donc incluses implicitement dans la largeur de bande qui vient d'être fournie. On s'attache maintenant à expliciter les effets des singularités sur la morphologie des BCA.

4. Analyse de l'influence de la singularité de comportement.

Nous nous proposons maintenant d'étudier l'influence d'une singularité de comportement du matériau sur la morphologie de la bande. On recherche alors une solution locale de l'équation différentielle dans le cas où une singularité est portée sur l'échantillon au voisinage de $x=0$.

Nous présentons tout d'abord un développement analytique de la solution locale puis nous analysons les comparaisons fournies par un programme de résolution numérique avant de donner les résultats obtenus.

4.1 Présentation de la méthode.

Classiquement les équations différentielles ordinaires du premier ordre ou du second ordre, linéaires à coefficients constants admettent des solutions simples s'exprimant à l'aide de fonctions élémentaires. Les méthodes de résolution de telles équations sont bien connues. Parfois les équations du second ordre linéaires à coefficients variables peuvent s'intégrer par des développements en série représentant des fonctions particulières (fonctions de Bessel, fonctions hypergéométriques,...).

L'équation différentielle IV-32 associée à ce problème de thermo-mécanique est une équation différentielle non linéaire du second ordre à coefficients non constants ; les techniques habituelles d'intégration ne sont pas applicables.

$$\begin{cases} k(x) \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d(k(x))}{dx} \frac{du}{dx} = \alpha u^{\frac{-1}{m}} - \zeta u \\ k(x) = 1 - k_r x^r \\ \frac{dk(x)}{dx} = -k_r r x^{r-1} \end{cases} \quad \text{IV-32}$$

En observant que $k(x)$ s'exprime en fonction de x^r , on se propose tout d'abord de rechercher une solution $u(x)$ sous la forme d'une série de fonctions :

$$u(x) = \sum_n u_n(x) = \sum_n a_n x^{nr} = 1 + a_1 x^r + a_2 x^{2r} + a_3 x^{3r} + \dots + a_n x^{nr} \quad \text{IV-33}$$

Cette série vérifie la condition à la limite $u(x)=1$ en $x=0$.

On dérive la série IV-33 terme à terme au premier ordre et au second ordre :

$$\frac{du(x)}{dx} = a_1 r x^{r-1} + a_2 2r x^{2r-1} + a_3 3r x^{3r-1} + \dots + a_n n r x^{nr-1} \quad \text{IV-34}$$

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} = a_1 r(r-1)x^{r-2} + a_2 2r(2r-1)x^{2r-2} + a_3 3r(3r-1)x^{3r-2} + \dots + a_n n r(nr-1)x^{nr-2} \quad \text{IV-35}$$

On développe le terme $\alpha u^{\frac{-1}{m}}$ de l'équation IV-13 en posant $u(x)=1+w(x)$; la fonction $w(x)$ ainsi définie prend de faibles valeurs au voisinage de $x=0$:

$$\alpha u^{\frac{-1}{m}} = \alpha(1+w)^{\frac{-1}{m}} \approx \alpha(1 - \frac{1}{m}w) \approx \alpha(1 - \frac{1}{m}(a_1 x^r + a_2 x^{2r} + a_3 x^{3r} + \dots + a_n x^{nr})) \quad \text{IV-36}$$

La non-linéarité due au comportement du matériau est ainsi effacée, mais on verra dans ce qui suit que c'est la singularité qui joue le rôle déterminant.

On injecte les développements IV-33 à IV-36 dans l'équation IV-13 et on regroupe les termes présentant des puissances identiques de x :

$k(x) \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d(k(x))}{dx} \frac{du}{dx} = \alpha u^{\frac{-1}{m}} - \zeta u$			
x^{r-2}	$a_1 r(r-1)$	x^0	$\alpha - \zeta$
x^{2r-2}	$a_2 2r(2r-1) - a_1 k_r r(3r-1)$	x^r	$-\frac{\alpha}{m} a_1 - \zeta a_1$
x^{3r-2}	$a_3 3r(3r-1) - a_2 k_r 2r(4r-1)$		
x^{4r-2}	$a_4 4r(4r-1) - a_3 k_r 3r(6r-1)$		

Figure n° IV-11 : Analyse de l'équation IV-13.

L'équation IV-13 ne peut être résolue de cette manière que pour des valeurs particulières de r telles que les exposants du premier membre

apparaissant en première colonne sur la figure IV-12 coïncident avec les exposants du second membre apparaissant dans les colonnes suivantes:

1	2	3	4	5	6
r=	2	1	2/3	1/2	2/5
r-2 =	0	0	0	0	0
2r-2 =	r	0	0	0	0
3r-2 =	2r	r	0	0	0
4r-2 =	3r	2r	r	0	0
5r-2 =	4r	3r	2r	r	0
6r-2 =	5r	4r	3r	2r	r

Figure n°IV-12 : Mise en évidence des cas particuliers de résolution.

On étudie l'influence d'un comportement singulier du matériau décrit par IV-2 avec une acuité $r < 1$. On exclut donc le cas $r=2$ - combinaison des colonnes 1 et 2 de la figure IV-12-. Le coefficient a_1 doit donc vérifier : $a_1 r(r-1) = 0$. Si on choisit le cas $r=1$, on constate une indétermination sur l'ensemble des termes de la série qui se déduisent par récurrence à partir du premier terme a_1 . Il s'ensuit que la seule valeur admissible pour a_1 est 0.

De la même façon, on montre que les valeurs de r telles que $r=1/n$ avec n entier aboutissent à une indétermination sur le terme a_n de rang n .

La résolution de IV-13 est alors réduite aux valeurs de r définies par $r = \frac{2}{2p+1}$ avec p entier. On montre dans ce cas que tous les termes de la série jusqu'à l'ordre $2p$ sont nuls. Par exemple, en reprenant le tableau de la figure n°IV-12, l'association des colonnes 1 et 4 donne $r = 2/3$; avec les colonnes 1 et 6 on obtient $r=2/5$.

Pour les cas particuliers $r=2/3$ et $r=2/5$, les premiers termes non nuls du développement en série de la solution de IV-13 sont mis en évidence ci-dessous :

r=2/3	$a_1 = 0$	$u(x) = 1 + a_3 x^{3r} + a_4 x^{4r} + \dots = 1 + a_3 x^{\frac{3 \cdot 2}{3}} + a_4 x^{\frac{4 \cdot 2}{3}} + \dots$
	$a_2 = 0$	
	$a_3 \neq 0$	
	$a_4 \neq 0$	$u(x) = 1 + a_3 x^2 + a_4 x^{2+\frac{2}{3}} + a_5 x^{2+2\frac{2}{3}} + \dots$
r=2/5	$a_1 = 0$	$u(x) = 1 + a_5 x^{5r} + a_6 x^{6r} + \dots = 1 + a_5 x^{\frac{5 \cdot 2}{5}} + a_6 x^{\frac{6 \cdot 2}{5}} + \dots$
	$a_2 = 0$	
	$a_3 = 0$	
	$a_4 = 0$	$u(x) = 1 + a_5 x^2 + a_6 x^{2+\frac{2}{5}} + a_7 x^{2+2\frac{2}{5}} + \dots$

Figure n°IV-13 : Termes du développement en série.

On remarque que le développement à l'ordre 3 peut être mis sous la forme générique :

$$u(x) = 1 + u_1 x^2 + u_2 x^{2+r} + u_3 x^{2+2r} + \dots \quad \text{IV-37}$$

Les termes u_1 et u_2 de IV-37 ne seront pas déterminés à l'aide des relations de récurrence mises en évidence dans le tableau de la figure n°IV-11 car à chaque valeur de $r = \frac{2}{2p+1}$ les calculs diffèrent. Au contraire, on recherche maintenant u_1 et u_2 pour des valeurs quelconques de r , non nécessairement rationnelles, comprises strictement entre 0 et 1. Pour cela, on substitue directement $u(x)$ approché par IV-37 dans l'équation IV-13.

Les dérivées successives de $u(x) = 1 + u_1 x^2 + u_2 x^{2+r}$ sont :

$$\frac{du(x)}{dx} = 2u_1 x + u_2 (2+r)x^{1+r} \quad \text{IV-38}$$

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} = 2u_1 + u_2 (2+r)(1+r)x^r \quad \text{IV-39}$$

En identifiant les termes de puissance identique au premier et second membre de IV-13, on obtient :

$$\begin{cases} u_1 = \frac{\alpha - \zeta}{2} = \frac{\alpha_1}{2} \\ u_2 = \frac{\alpha_1}{2+r} k_r \\ u_3 = \frac{\alpha_1}{(2+2r)(1+2r)} k_r^2 \end{cases} \quad \text{IV-39}$$

La solution développée au troisième ordre s'exprime donc par :

$$u(x) = 1 + \frac{\alpha_1}{2} x^2 + \frac{\alpha_1}{2+r} k_r x^{2+r} + \frac{\alpha_1}{(2+2r)(1+2r)} k_r^2 x^{2+2r} + \dots \quad \text{IV-40}$$

Une étude de la validité du développement limité de la solution locale est menée en comparant les deux derniers termes du développement à l'ordre 3 soient : $\frac{\alpha_1}{2+r} k_r x^{2+r}$ et $\frac{\alpha_1}{(2+2r)(1+2r)} k_r^2 x^{2+2r}$ au voisinage du point d'inflexion.

Le terme de second ordre est $A_1 = \frac{\alpha_1}{2+r} k_r \left(\sqrt{\frac{2m}{(2+m)\alpha_1}} \right)^{2+r}$; le terme de troisième ordre est $A_2 = \frac{\alpha_1}{(2+2r)(1+2r)} k_r^2 \left(\sqrt{\frac{2m}{(2+m)\alpha_1}} \right)^{2+2r}$. Le rapport $\frac{A_2}{A_1} = \frac{(2+r)}{(2+2r)(1+2r)} k_r \left(\frac{2m}{(2+m)\alpha_1} \right)^{\frac{r}{2}}$ montre que le développement est d'autant plus approprié que le paramètre k_r est plus faible. On retrouve la condition $k_r < 1$ imposée dans le paragraphe 1.

On note que la non-linéarité du comportement du matériau n'a pas de traduction dans les premiers termes montrés en IV-39 ; en effet, le coefficient m n'y apparaît pas. C'est bien la singularité supposée qui joue le premier rôle dans le développement local de la variable u .

On constate que pour $k_r = 0$, on retrouve la solution locale IV-16 au second ordre pour un échantillon ne comportant aucune singularité de comportement dans le voisinage du centre de la BCA, déjà étudiée au paragraphe 3.

On peut montrer que le point d'inflexion de la vitesse de déformation obtenu à partir de la solution locale exprimée par IV-40 est majoré par le point d'inflexion obtenu pour un échantillon sans singularité. On vérifie donc que l'effet de la singularité est de diminuer la largeur de bande.

4.2 Comparaisons avec la méthode numérique.

Dans ce paragraphe, on cherche à tester la validité des développements limités effectués au voisinage de la zone de localisation en les comparant à une solution numérique de l'équation IV-13.

Le programme de résolution numérique utilise une méthode de type prédicteur-correcteur. L'emploi des variables de phase $f_1 = u$ et $f_2 = \frac{du}{dx}$ conduit au système d'équations différentielles du premier ordre (IV-15) :

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x} = f_2 & (a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} = -\frac{dk(x)}{dx} \frac{1}{k(x)} f_2 + \frac{\alpha}{k(x)} f_1^{-1} - \frac{1}{k(x)} f_1 & (b) \end{cases} \quad \text{IV-41}$$

Les conditions aux limites sont définies par :

$$\begin{cases} f_1 = 1 \\ f_2 = 0 \end{cases} \quad \text{en } x = 0. \quad \text{IV-42}$$

On est alors en mesure de comparer la distribution de vitesse au voisinage de $x=0$, obtenue par la méthode numérique et la solution approchée développée au second ordre dans le cas où une singularité de comportement est incluse (Figures n° IV-14 à IV-19). Les figures présentent également la distribution de vitesse approchée dans le cas où il n'y a pas de singularité de comportement pour évaluer la différence des résultats analytiques.

Le paramètre α ($\alpha=1,0653$ -pour l'acier HY-100 $\alpha=1,2$ -) a été choisi de façon à montrer le mieux possible l'influence des paramètres caractéristiques de la singularité On a aussi supposé $\zeta = 1$; ce choix est sans incidence sur l'analyse présentée ici.

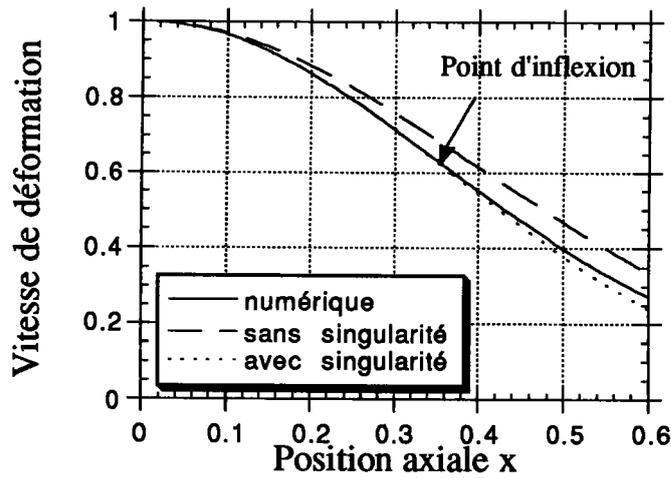


Figure n°IV-14 : Détermination du point d'inflexion, $k_r=0.5$, $r=0.5$.

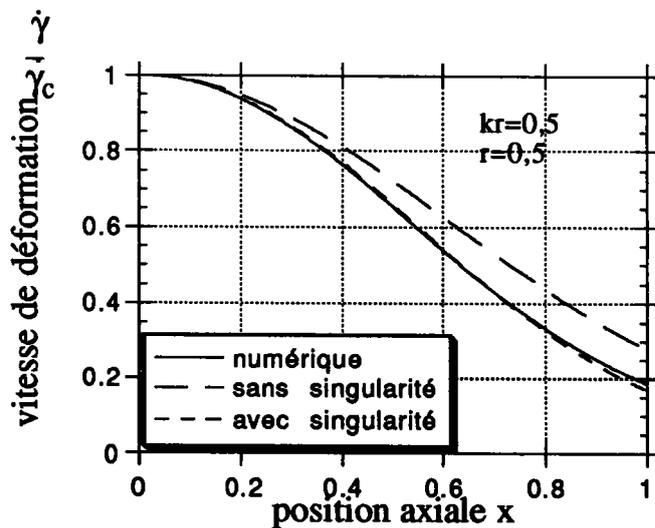


Figure n°IV-15 : kr et acuité moyens.

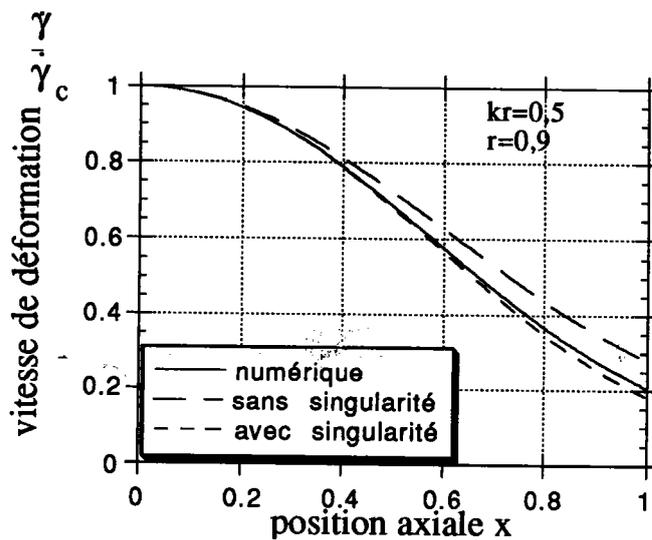


Figure n°IV-16 : acuité r proche de 1.

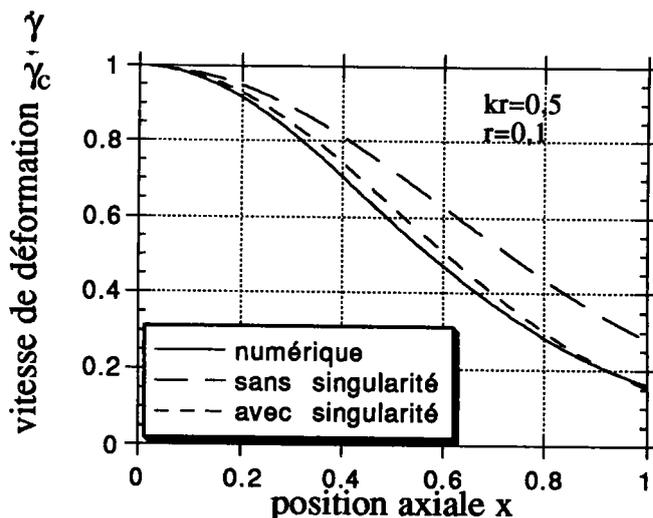


Figure n°IV-17 : acuité r proche de 0.

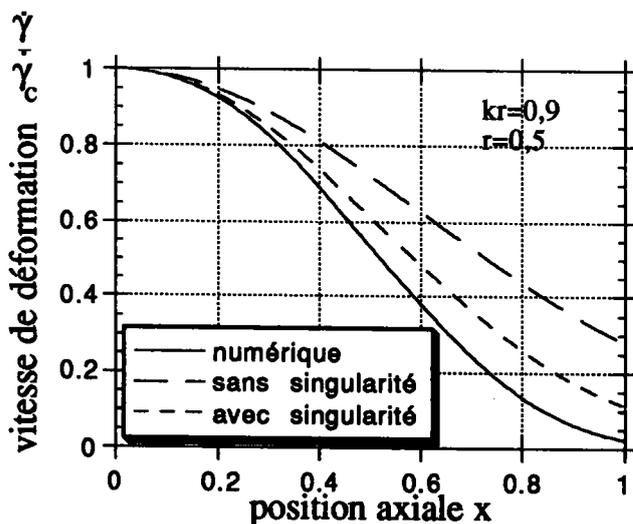


Figure n°IV-18 : k_r proche de 1

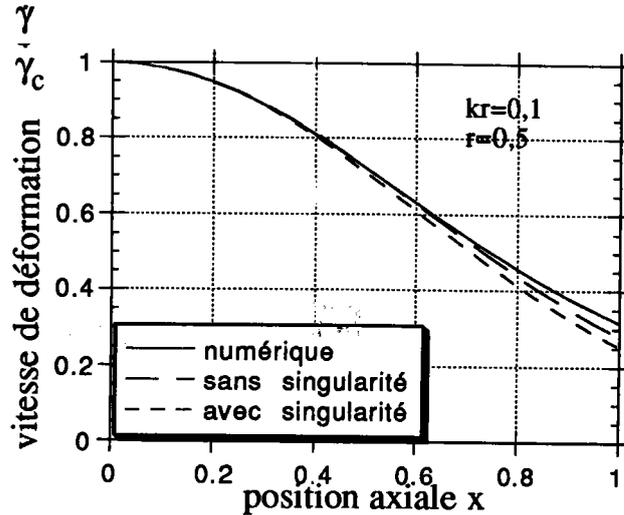


Figure n°IV-19 : kr proche de 0

On vérifie que le développement analytique au second ordre IV-40 rend bien compte des effets de la singularité. On retrouve la limite de validité du développement rencontrée dans l'analyse (Figure n°IV-18) : en effet pour k_r proche de 1, la solution approchée donne des résultats moins précis. On constate que pour des valeurs faibles de l'acuité r , la largeur de bande est réduite (Figure n°IV-15 et Figure n°IV-17). De la même façon, une augmentation du paramètre k_r induit une localisation plus intense de la déformation plastique, diminuant ainsi la largeur de bande (Figure n°IV-18).

L'amélioration apportée par l'ajout d'un terme tenant compte de la singularité dans la solution approchée est appréciable : les effets de la singularité, combinés aux effets des paramètres rhéologiques, peuvent être étudiés directement à partir d'expressions analytiques simples.

4.3 Résultats.

La méthode appliquée au paragraphe 4.1 fournit un développement local IV-40 de $u(x)$ au voisinage de $x=0$. En ne conservant que les trois premiers termes de la solution IV-40, on exprime la vitesse de déformation approchée dans la zone de localisation sous la forme :

$$\dot{\gamma}(x) = \dot{\gamma}_2(x) = \dot{\gamma}(0) \left(1 + \frac{\alpha_1}{2} x^2 + \frac{\alpha_1}{2+r} k_r x^{2+r} \right)^{-1} \tag{IV-43}$$

Le point d'inflexion de la vitesse de déformation $\dot{\gamma}(x)$ définit la demi-largeur de bande ; il est déterminé à l'aide de l'expression de $u(x)$ par résolution de :

$$\frac{1+m}{m} \left(\frac{du}{dx}\right)^2 - u \frac{d^2u}{dx^2} = 0 \quad \text{IV-44}$$

Sa détermination à partir de IV-40 ou de IV-43 n'est pas aisée.

C'est pourquoi un majorant de la vitesse de déformation IV-43 est proposé sous la forme :

$$\dot{\gamma}_1(x) = \dot{\gamma}(0) \left(1 + \frac{\alpha_1}{2+r} k_r x^{2+r}\right)^{\frac{-1}{m}} \quad \text{IV-45}$$

Le point d'inflexion x_1 de la vitesse de déformation exprimée par $\dot{\gamma}_1$ constitue un majorant du point d'inflexion x_2 de $\dot{\gamma}_2$. En effet, on montre que

$$x_1 > x_2 \Leftrightarrow \frac{d^2\dot{\gamma}_2}{dx^2} \Big|_{x=x_1} > 0 \quad (\text{Figure n°IV-20})$$

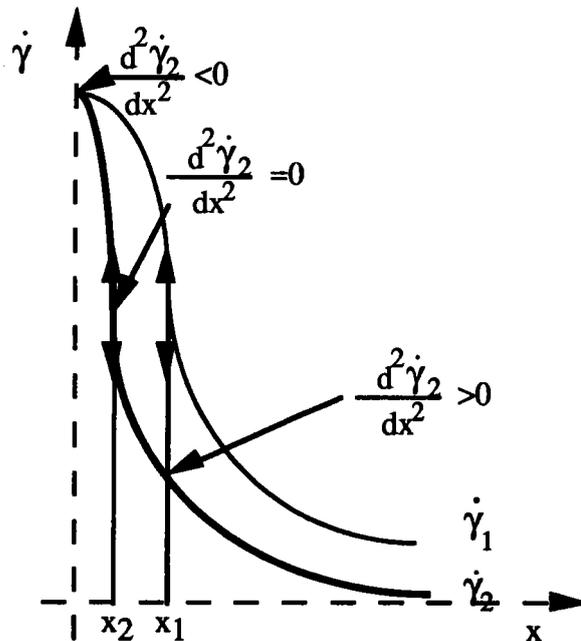


Figure n°IV-20 : Estimation d'un majorant de la largeur de bande.

Le point d'inflexion x_1 de IV-45 est donné par :

$$x_1 = \left[\frac{1}{\left[\left(\frac{1+m}{m}\right) \frac{1}{1+r} - \frac{1}{2+r} \right] \alpha_1 k_r} \right]^{\frac{1}{2+r}} \quad \text{IV-46}$$

$1 + \frac{\alpha_1}{2}x^2 + \frac{\alpha_1}{2+r}k_r x^{2+r}$ dans IV-43 s'écrit également $1 + \frac{\alpha_1}{2}x^2(1 + \frac{2}{2+r}k_r x^r)$. On

montre que $\begin{cases} k_r < 1 \\ r > 0 \\ x < 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{2+r}k_r x^r < 1$, ce qui implique que

$$1 + \alpha_1 x^2 > 1 + \frac{\alpha_1}{2}x^2 + \frac{\alpha_1}{2+r}k_r x^{2+r}.$$

On propose alors un minorant de la vitesse de déformation IV-43 sous la forme :

$$\dot{\gamma}_3(x) = \dot{\gamma}(0)(1 + \alpha_1 x^2)^{\frac{-1}{m}} \quad \text{IV-47}$$

Le point d'inflexion x_3 de IV-47 est donné par :

$$x_3 = \sqrt{\frac{m}{(2+m)\alpha_1}} \quad \text{IV-48}$$

Ces points x_1 et x_3 permettent de cerner l'influence des caractéristiques de la singularité et de la sensibilité à la vitesse de déformation sur la largeur de bande.

On observe qu'une croissance de l'acuité r de la singularité, c'est-à-dire une acuité moins prononcée, conduit à une augmentation de la largeur de bande. La décroissance du paramètre caractéristique k_r tend également à provoquer un accroissement de la largeur de bande. La décroissance de la sensibilité à la vitesse de déformation m rend la bande de cisaillement plus étroite. La relation IV-48 montre que la largeur de bande reste finie lorsque r tend vers zéro, au contraire des résultats obtenus au chapitre 2 (paragraphe 5.1). Ceci traduit la structuration opérée par la conduction thermique.

Le paramètre α_1 agit de la même façon que dans le cas où l'échantillon ne présente aucune singularité de comportement. (Voir le paragraphe 3.)

5 Conclusions.

L'objectif de ce chapitre était d'analyser l'interaction des effets de localisation de la déformation plastique en présence de défauts matériels, et des effets d'homogénéisation dus à la diffusion thermique au cours du **stade II** de développement des bandes de cisaillement.

Le modèle proposé à cet effet repose essentiellement sur une hypothèse de stationnarité du profil des vitesses de déformation ; cette hypothèse est bien

Version de 20 Décembre 1993

étayée par les relevés expérimentaux de l'évolution de la largeur de bande dans différents aciers (Marchand et Duffy (1988)).

En l'état actuel de son développement, le modèle fournit une corrélation entre la vitesse de déformation localisée, la largeur de bande et le temps de relaxation de la contrainte qui est bien vérifiée.

Il permet en outre l'analyse des effets d'une singularité du comportement sur la morphologie de la bande de cisaillement ; en effet les variations de la largeur de bande en fonction de l'acuité de la singularité sont évaluées analytiquement.

Son développement ultérieur a pour but l'évaluation analytique de la largeur de bande et du temps de relaxation de la contrainte de cisaillement.

Annexe du chapitre 4.

Analyse du travail de Wright (1992).

En utilisant les conditions aux limites en $x=0$: $f_1 = 1$ et $f_2 = 0$, l'équation IV-14 s'intègre sous la forme :

$$f_2^2 = \zeta(1 - f_1^2) + \frac{2\alpha m}{1-m} (1 - f_1^{\frac{1-m}{m}}) \quad \text{IV-a-1}$$

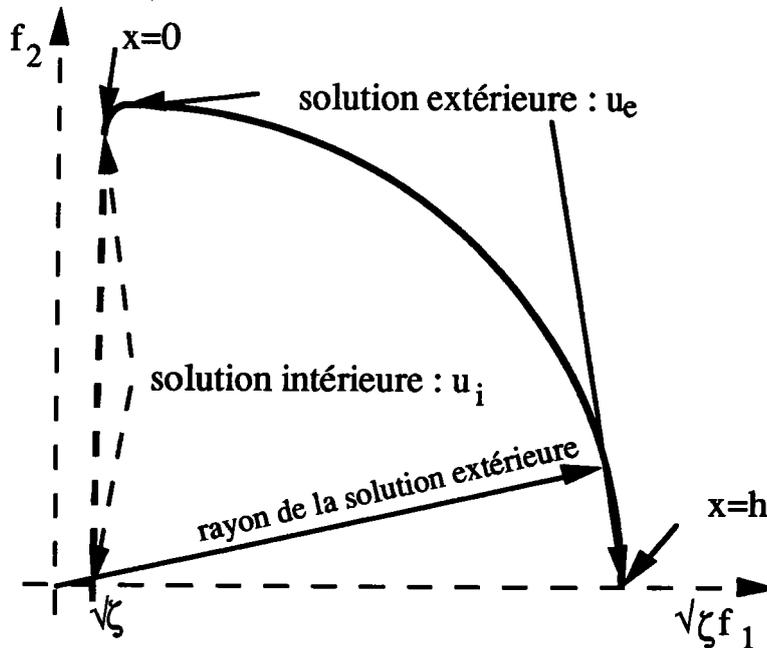


Figure n° IV-a-1 : Trajectoire dans le plan de phase de IV-15 d'après Wright (1992).

Wright calcule numériquement la trajectoire de IV-a-1 dans le plan de phase $(\sqrt{\zeta}f_1, f_2)$ et obtient le tracé reproduit sur la figure n°IV-a-1. Il suggère alors la résolution approchée de IV-13 par séparation de la solution u en une solution intérieure (u_i) pour les valeurs u proches de 1, c'est-à-dire au voisinage de la localisation, et en une solution extérieure à la zone de localisation (u_e) pour les valeurs de f_1 très supérieures à 1. On notera que cette méthode est complètement distincte d'une approche de type "couche limite", avec laquelle elle partage seulement le vocabulaire (solution intérieure, solution extérieure).

1.1 Solution extérieure.

La solution extérieure a pour domaine de validité $f_1^{\frac{-1+m}{m}} \ll 1$ ou $\frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}(0)} \ll 1$.

L'équation IV-a-1 est alors approchée par :

$$f_2^2 + \zeta f_1^2 = \zeta + \frac{2\alpha m}{1-m} \quad \text{IV-a-2}$$

La trajectoire associée dans le plan de phase $(\sqrt{\zeta}f_1, f_2)$ est donc un arc de cercle, centré en 0 et de rayon $\sqrt{\zeta + \frac{2\alpha m}{1-m}}$. La solution extérieure qui vérifie les conditions aux limites thermiques au bord de l'échantillon IV-a-3 :

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \quad \text{en } x = h \quad \text{IV-a-3}$$

s'exprime donc sous la forme IV-a-4 où l'on pose $h = \frac{\bar{h}}{d}$. Observons que $h \gg 1$.

$$u_e = \sqrt{1 + \frac{2m\alpha}{(1-m)\zeta}} \cos \sqrt{\zeta}(h-x) \quad \text{IV-a-4}$$

Wright procède alors à une étude de la constante d'intégration ζ pour lui donner un ordre de grandeur par rapport aux autres variables. Nous rappelons que la solution extérieure est décrite dans le plan de phase par un cercle (Figure IV-a-2 et IV-a-3).

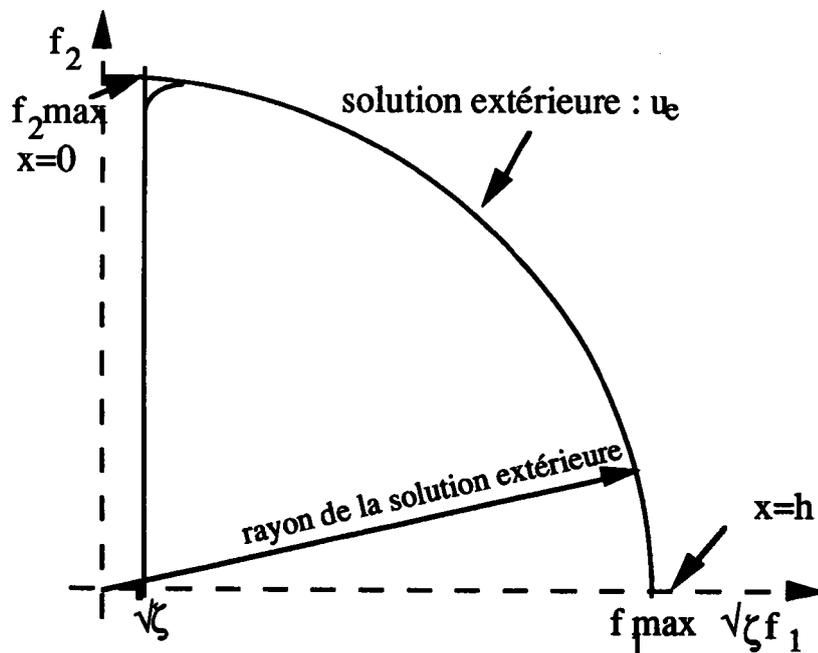


Figure n°IV-a-2 : Etude de la solution extérieure.

La partie de trajectoire pour f_1 compris entre 0 et 1 est étrangère au problème traité.

Wright suppose alors ζ suffisamment faible pour que la valeur maximale de la solution externe (f_{2e}), obtenue pour $x=0$, soit très proche de $\sqrt{\zeta + \lambda}$ avec $\lambda = \frac{2\alpha m}{1-m}$ (Figure n°IV-a-3).

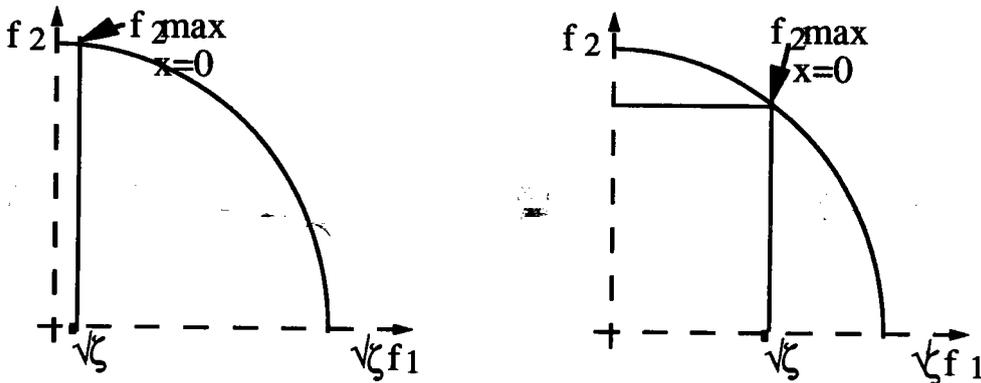


Figure n°IV-a-3 : Etude de la constante d'intégration ζ .
d'après Wright

La valeur prise par la solution extérieure en $x=0$ à l'aide de IV-a-4 vérifie : $\frac{du_e}{dx} = f_{2e} = \sqrt{\zeta + \lambda} \sin \sqrt{\zeta} h$. f_{2e} est donc très proche de $\sqrt{\zeta + \lambda}$ au voisinage de $x=0$ si $\zeta \cong \frac{\pi^2}{4h^2}$. Notons que la solution exacte passe par le point $(f_1 = 1, f_2 = 0)$ pour $x=0$, et que la solution extérieure lui est très éloignée au centre de la bande. La détermination de ζ par le calcul exposé ci-dessus peut donc s'avérer délicate. On observe en effet que si ζ est très petit, la contrainte de cisaillement donnée par IV-10-a reste pratiquement constante, ce qui contredit clairement la chute de contrainte inhérente au stade II.

1.2 Solution intérieure.

Dans la zone de localisation, $u \cong 1$ et en supposant que le terme $\zeta(1 - f_1^2)$ soit petit devant le second membre de IV-a-1, Wright se propose de résoudre :

$$f_2^2 = \frac{2\alpha m}{1-m} (1 - f_1^{\frac{1-m}{m}}) \quad \text{IV-a-5}$$

Wright donne la solution intérieure u_i sous la forme $u_i = 1 + \frac{2m}{1-m} \ln(\cosh(\sqrt{\frac{(1-m)\alpha}{2m}} x))$. La solution exacte de l'équation IV-a-5 est en fait exprimée de façon implicite à l'aide d'une fonction hypergéométrique :

$$\frac{2m(1 - u_i^{\frac{1-m}{m}})}{1-m} {}_2F_1\left(\frac{1}{1-m}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; (1 - u_i^{\frac{1-m}{m}})\right) = \sqrt{\alpha} x \quad \text{IV-a-6}$$

Cette fonction existe si $\frac{1}{1-m} > 0$; un développement en série de Gauss de IV-a-6 est convergent si $m < 1/2$ (cette valeur particulière de m a déjà été rencontrée dans le chapitre 3).

Dans la suite de son étude analytique, Wright ne considère que les deux premiers termes du développement de la solution locale :

$$u_i = 1 + \frac{\alpha}{2} x^2 \quad \text{IV-a-7}$$

Ces deux termes coïncident avec le développement de la solution exacte lorsque ζ est supposé négligeable devant α .

Il est tentant de chercher à raccorder les développements limités de la solution intérieure IV-a-7 et de la solution extérieure IV-a-4 au voisinage de $x=0$. Cette démarche permettrait en effet de résoudre complètement le problème aux limites, en raccordant deux solutions approchées valables localement. C'est ce point de vue que Wright a développé. Il apparaît cependant que les développements au second ordre, seuls praticables analytiquement, ne possèdent pas un domaine de validité suffisamment large pour contenir le point de raccord. Wright cherche à raccorder la solution intérieure IV-a-7 et la solution extérieure IV-a-4 en supposant qu'au point de raccord les dérivées premières sont identiques. Le point de raccord obtenu IV-a-9 ne vérifie pas l'équation (a) du système d'équations IV-a-8 traduisant les conditions de continuité.

$$\begin{cases} 1 + \frac{\alpha x^2}{2} = \sqrt{1 + \frac{2\alpha m}{(1-m)\zeta}} \cos \sqrt{\zeta}(h-x) & (a) \\ \alpha x = \sqrt{\zeta + \frac{2\alpha m}{(1-m)}} \sin \sqrt{\zeta}(h-x) & (b) \end{cases} \quad \text{IV-a-8}$$

$$x_{\text{raccord}} \equiv \sqrt{\frac{2m}{(1-m)\alpha}} \quad \text{IV-a-9}$$

Contrairement à ce que Wright suggère dans son article, la constante d'intégration ζ n'est pas issue de la résolution de IV-a-8 (b) (on obtiendrait alors $\zeta \approx \sqrt{\frac{2m\alpha}{(1-m)}}$) mais par le raisonnement tenu dans le paragraphe 1.1 de l'annexe.

En supposant l'existence d'un point de raccord entre la solution locale et la solution extérieure d'abscisse voisine de 0, Wright représente la solution

complète $u(x)$ sur la figure IV-a-4 et la distribution de la vitesse de déformation associée sur la figure n° IV-a-5.

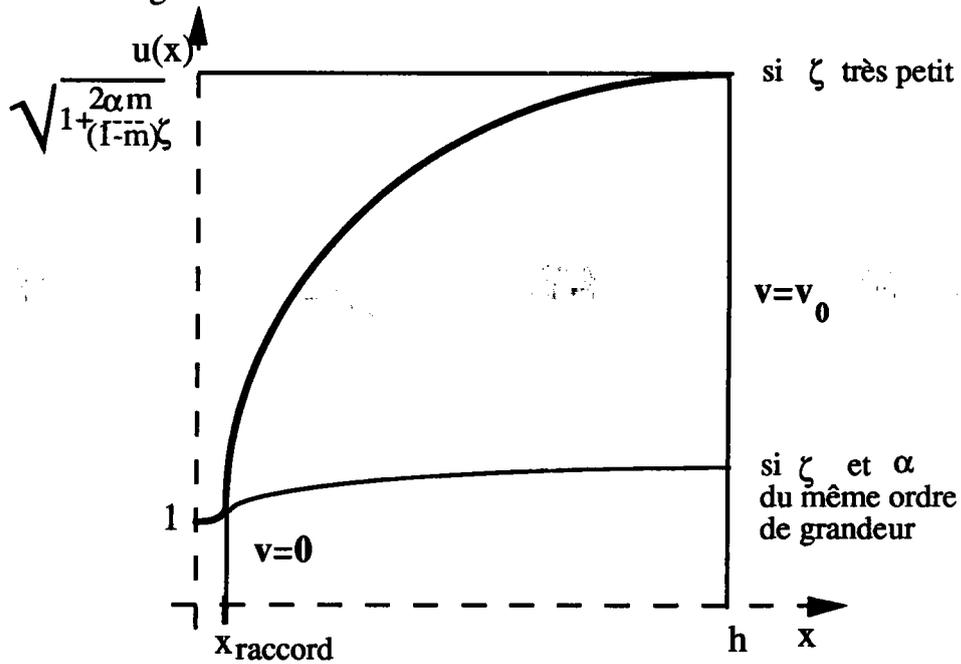


Figure n°IV-a-4 : Représentation de la solution intérieure et extérieure.
d'après Wright.

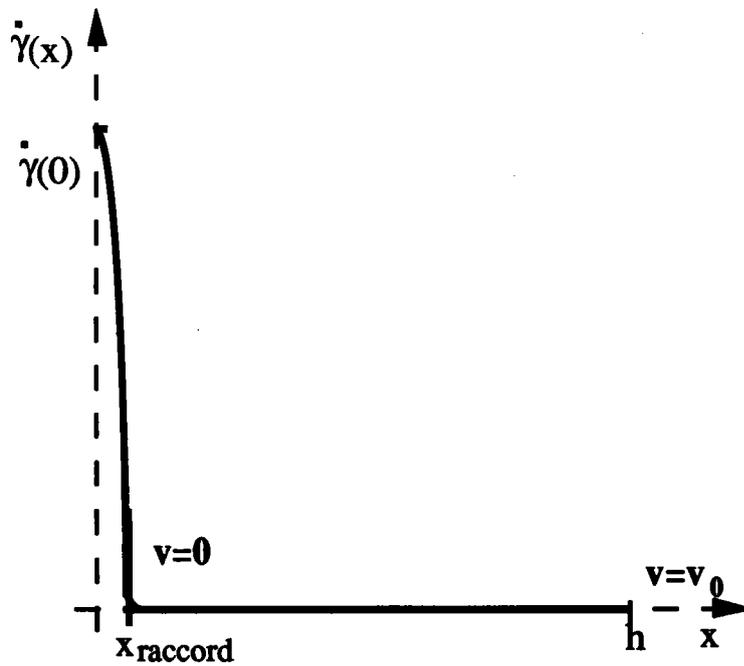


Figure n°IV-a-5 : Distribution de la vitesse de déformation.
d'après Wright.

2 Détermination de la vitesse de déformation au centre de la BCA.

Wright donne une estimation de la vitesse de déformation $\dot{\gamma}(0)$ au centre de la BCA en exprimant la condition à la limite $v = v_0$ en $x = h$ sous la forme de l'équation intégrale IV-a-11 :

$$\int_0^h \dot{\gamma} dx = v_0. \quad \text{IV-a-11}$$

La relation IV-a-11 est équivalente à IV-14 : $\int_0^h u^{\frac{-1}{m}} dx = \frac{v_0}{\dot{\gamma}(0)}$: son intégration, l'utilisation de ce résultat et de la condition à la limite en u impliquent que

$$\int_0^h u dx = \int_0^{x_{\text{raccord}}} u_i dx + \int_{x_{\text{raccord}}}^h u_e dx = \frac{a \dot{\gamma}(0)^m}{5 v_0^m} \quad \text{IV-a-12}$$

Cette relation traduit l'adiabaticité aux frontières.

Wright suppose alors que la contribution de la solution locale à cette intégrale est négligeable devant la contribution de la solution extérieure (Voir Figure n°IV-a-5).

Comme $\int_{x_{\text{raccord}}}^h u_e dx \cong \int_0^h u_e dx = \frac{a \dot{\gamma}(0)^m}{5 v_0^m}$, la vitesse de déformation au centre de la bande est exprimée par :

$$\dot{\gamma}(0) = \left(\frac{a(1-m) \bar{\rho} \bar{c} \bar{\theta}_0}{2m v_0^m \bar{\tau}_0} \right)^{\frac{1}{1-m}} \quad \text{IV-a-15}$$

On constate que pour une capacité calorifique massique $\bar{\rho} \bar{c}$ croissante, $\dot{\gamma}(0)$ est également croissante. Cette tendance est contraire aux observations expérimentales.

De plus, $\dot{\gamma}(0)$ vitesse de déformation caractéristique du centre de la BCA n'est déterminée qu'à partir de la solution extérieure à la zone de localisation. Il apparaît par cette approche que pour n'importe quel phénomène se produisant dans la zone de la localisation, $\dot{\gamma}(0)$ au centre de la bande prend toujours la même valeur.

En fait, Wright effectue une adimensionnalisation par la demi-épaisseur \bar{h} de l'échantillon et obtient pour la vitesse de déformation :

$$\dot{\gamma}(0) = \left(\frac{a(1-m)}{2m} \frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{1-m}} \quad \text{IV-a-16}$$

avec $k = \frac{k_0}{\bar{\rho} \bar{c} \bar{\gamma}_0 \bar{h}^2}$.

Sous forme dimensionnelle, IV-a-15 et IV-a-16 s'expriment encore par :

$$\bar{\gamma}(0) = \left(\frac{a \bar{\tau}_0 \dot{\gamma}_0^{-m}}{2k_0 m} \bar{v}_{bord}^2 \right)^{\frac{1}{1-m}}$$

Il définit la largeur de bande par le point de raccord de la solution locale et de la solution extérieure et obtient $\delta = \sqrt{\frac{2mk}{(1-m)a\dot{\gamma}(0)^{1+m}}}$. Il relie en dernier lieu la vitesse $\dot{\gamma}(0)$ de déformation au centre de la bande à la largeur de bande et obtient :

$$\begin{aligned} x_{raccord} &\equiv \frac{1}{\dot{\gamma}(0)} \\ \frac{\bar{\delta}}{2} = \bar{x}_{raccord} &= \frac{\bar{h}}{\dot{\gamma}(0)} \end{aligned} \quad \text{IV-a-17}$$

On constate que la méthode proposée par Wright fournit une largeur de bande affectée par la largeur de l'échantillon. Si la demi-épaisseur \bar{h} double, la BCA double également, ce qui est en contradiction avec les observations expérimentales.

En appliquant les résultats à un acier modèle dont les caractéristiques adimensionnelles sont données par Wright:

$m=0,0251$ $a=0,153$ $k=0,0022$
et $\dot{\gamma}_0 = 500s^{-1}$

La vitesse de déformation au centre prend la valeur adimensionnelle $\dot{\gamma}(0) = 1628$: ainsi la vitesse de déformation au centre dimensionnelle est égale à $\bar{\gamma}(0) = 1628 * 500 = 8,14 \cdot 10^5 s^{-1}$.

On calcule alors à partir des données : $\bar{x}_{raccord} = \frac{\bar{h}}{\dot{\gamma}(0)} = 1,25 \cdot 10^{-3} / 1628 = 0,768 \mu\text{m}$. La largeur de bande approchée est donc égale à $1,53 \mu\text{m}$. Cette valeur semble beaucoup trop faible pour caractériser une largeur de bande.

En résumé, Wright propose de définir la largeur de bande à partir d'un point de raccord d'une solution intérieure et d'une solution extérieure dont l'existence mathématique n'est pas clairement démontrée ; de plus la vitesse de

Version de 20 Décembre 1993

déformation au centre est estimée à l'aide d'une solution extérieure à la zone de localisation. Le résultat final est soumis aux effets d'échelle et ne semble pas compatible avec les observations expérimentales. Enfin, la constante d'intégration ζ est supposée prendre une valeur négligeable alors qu'elle caractérise la chute en contrainte par l'intermédiaire de l'équation : $\tau = \tau_0 \exp(-\zeta t)$.

Conclusion

Au cours de ce travail, nous nous sommes attachés à évaluer le rôle des défauts géométriques et matériels et de la conduction thermique sur la localisation de la déformation plastique dans une bande de cisaillement "adiabatique". Deux aspects de ce problème peuvent être distingués ; le premier est lié à l'évolution temporelle de la localisation : si l'on sait bien repérer le début du processus de localisation, on est le plus souvent incapable de prévoir la déformation nominale à la rupture. Le second est la morphologie spatiale de la zone de cisaillement intense : il n'existe pas à ce jour de modèle consistant capable de prévoir l'étendue de la zone de localisation observée expérimentalement.

Le modèle de localisation adiabatique développé au chapitre 2 est principalement dévolu aux problèmes de l'évolution des BCA. Il permet l'établissement de critères structurels de localisation asymptotique mettant en évidence la conjugaison des facteurs rhéologiques et des facteurs structurels (défauts, singularités ...) dans le processus de localisation : on montre ainsi que les effets stabilisants de la viscosité sont plus efficaces en présence de défauts de faible acuité. Le modèle permet en outre d'interpréter la dispersion des mesures de déformation nominale à la rupture, en termes d'amplitude et d'acuité des défauts géométriques et matériels générés lors de l'élaboration du spécimen ; l'acuité des défauts ressort notamment comme un facteur de dispersion prépondérant, et très mal contrôlé.

Si l'hypothèse d'adiabaticité est bien vérifiée au cours du premier stade de la localisation, il n'en va pas de même au cours du deuxième stade, c'est-à-dire durant la chute brutale de la contrainte de cisaillement, car celle-ci s'accompagne d'un échauffement considérable de la zone cisailée. Il faut alors prendre en considération les effets de la conduction thermique qui jouent un rôle de stabilisation et d'homogénéisation de la déformation plastique.

La conduction thermique est donc intégrée au modèle développé au chapitre 3, et l'on s'intéresse essentiellement à la morphologie des bandes de cisaillement. En effet la compétition entre la localisation de la déformation par les défauts et l'adoucissement thermique, et l'homogénéisation due à la conduction conduit à une structuration spatiale de la bande de cisaillement. L'idée sous-jacente à ce chapitre (ainsi qu'au suivant) est que si, comme l'expérience le

Conclusion.

suggère, il existe un équilibre entre les deux tendances à la localisation et à l'homogénéisation, une largeur de bande stationnaire peut s'établir. L'étude des régimes stationnaires menée au chapitre 3 montre cependant que dans les conditions inhérentes au **stade II** de localisation dans les aciers, les états stationnaires ne sont pas atteints physiquement. En effet, compte-tenu de l'importance du débit de chaleur créé au sein de la bande de cisaillement et de la brièveté du phénomène, la diffusion de la chaleur ne dispose pas du temps nécessaire pour établir une distribution stationnaire de la température et de la vitesse de déformation. Il est clair en outre que la contrainte de cisaillement ne saurait être stationnaire au cours du **stade II**.

C'est pourquoi l'on est conduit à affiner l'hypothèse de stationnarité en supposant que seule la distribution de la vitesse de déformation reste stationnaire lors de la phase de chute brutale de la contrainte. C'est l'objet du chapitre 4 ; sous cette hypothèse, l'équation de l'énergie est à variables séparables. La résolution permet de corréler la relaxation de la contrainte de cisaillement à la largeur de la bande. Le modèle inclut la notion de défaut matériel, et l'on montre que la bande est d'autant plus étroite que le défaut est plus aigu.

Ce travail ouvre des perspectives intéressantes, car il semble possible de fournir une estimation analytique réaliste de grandeurs facilement mesurables, et significatives du processus de localisation : c'est le cas de la largeur de bande, mais aussi du travail nécessaire pour obtenir la rupture par cisaillement adiabatique.

Les aspects multidimensionnels du processus de localisation ne sont pas pris en considération dans ce travail ; il en est ainsi des problèmes de propagation, ou d'amorçage multiple des BCA sur une distribution aléatoire de défauts. De la même façon, les défauts géométriques très aigus ont été exclus de l'analyse. Il va sans dire que la description du comportement du matériau pourrait être aussi améliorée, au prix d'une complexité croissante du modèle.

Le mérite des modèles développés est qu'ils autorisent la prise en compte des phénomènes majeurs permettant d'interpréter le processus de localisation, tout en conservant un degré de simplicité compatible avec l'utilisation de méthodes analytiques. De manière plus précise l'apport essentiel de ce travail réside dans l'évaluation de l'influence des défauts singuliers sur l'évolution et la morphologie des bandes de cisaillement.

Références bibliographiques

- AIFANTIS E. C. ; "On the microstructure origin of certain inelastic models", *J. Engng. Mat. tech.*, Vol. 106, pp. 326-330, (1984).
- ARGON A. S. ; "The inhomogeneity of plastic deformation", Chapter 7, *American Society of Research, Metals Park, Ohio*, (1973).
- ASARO R. J. ; *Acta Metall.*, Vol. n°27, pp. 445, (1979).
- BACKMAN M. E., FINNEGAN S. A., SCHULZ J. C., PRINGLE J. K. ; "Scaling rules for adiabatic shear", *Metallurgical Applications of Shock-Wave and High-Strain Rate Phenomena*, L. E. Murr, K. P. Staudhammer, M. A. Meyers, pp 675-687, (1986).
- BAZANT Z. P., BELYTSCHKO T. B. , CHANG T. P. ; "Continuum theory for strain softening", *Journal of Engineering Mechanics*, 110, pp. 1666-1693, (1984).
- CAMPBELL J. D., FERGUSON W.G. ; *Phil. Mag.*, Vol. 21, pp. 63-83, (1970).
- CHANDRASEKHAR S. ; *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Oxford Clarendon Press, (1961).
- CODDINGTON E. A., LEVINSON N. ; "Theory of ordinary differential equations", *Mac Graw Hill New-York*, (1955).
- COLEMAN B. C. , HODGDON M. L. ; "A theory of shear bands", *Constitutive Models of Deformation*, SIAM, Philadelphia (1987).
- COX T. B. , LOW J. R.; *Met. Trans.*, Vol. n°5, pp. 1457, (1974).
- CULVER R. S.; *In Metallurgical Effects at High Strain Rate*, Ed. Rhode), pp. 519, Plenum Press, New-York, (1973).
- DAFERMOS C. M., HSIAO L. ; "Adiabatic shearing of incompressible fluids with temperature dependant viscosity", *Q. Appl. Math.*, pp. 41-45, (1983)
- DIEUDONNE J. ; *Calcul infinitésimal*, Hermann, pp. 84-87, (1968).
- DINZART F., FRESSENGEAS C., MOLINARI A. ; "Localisation de la déformation plastique en cisaillement simple, effets locaux de géométrie et d'inhomogénéité matérielle", C.R. Acad. Sci. soumis pour publication.
- DINZART F., FRESSENGEAS C., MOLINARI A. ; "Etude locale du cisaillement adiabatique", Communication avec acte au 11^{ème} Congrès Français de Mécanique, Lille-Villeneuve d'Ascq (Septembre 93).
- DODD B., ATKINS A. G. ; *Acta Met.*, Vol. n°31, pp. 9-15, (1983)
- DRAZIN P. G., REID W. H. ; *Hydrodynamic stability*, Cambridge University Press, (1981).
- DRUCKER D. C. ; *Proc. 1st. U.S. Natl. Congress Appl. Mech.*, pp. 487-491, A.S.M.E., New-York, (1951).

Références bibliographiques.

- DUDZINSKI D., MOLINARI A. ; "Perturbation analysis of thermoviscoplastic instabilities in biaxial loading", *Int. J. Solids Structures*, Vol. 27 n°5, pp. 601-628, (1991).
- DUFFY J. ; "Experimental studies of shear band formation through temperature measurements and high speed photography", *Journal de physique IV Colloque C3, Suppl. au Journal de Physique III*, Vol.1, pp. 646-652, (1991).
- DUFFY J. ; "Mechanics of material behavior, The Daniel C. Drucker Anniversary Volume", *Elsevier Science Publishes BV Amsterdam*, édité par Dvorak et Shield, pp. 75-86, (1984).
- FARGETTE B., WHITWHAM D. ; *Mem. Sci. Rev. Metall.*, Vol n°73, pp 197, (1976).
- FRESSENGEAS C., MOLINARI A. ; *J. Phys.*, Vol. C5, pp. 121, pp. 283, (1985).
- FRESSENGEAS C., MOLINARI A. ; "Inertia and thermal effects on the localization of plastic flow", *Acta. Metall*, Vol.33, pp. 387-396, (1985).
- FRESSENGEAS C., MOLINARI A. ; "Instability and localization of plastic flow in shear at high strain rates", *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 35, n°2, pp. 185-211, (1987).
- GIOVANOLA J.H. ; "Adiabatic shear banding under pure shear loading", *Mechanics of materials* 7, pp. 73-87, (1988).
- GRADSHTEYN I.S., RYZHIK I.M. ; "*Table of integrals series and products*", Academic press, New-York/USA, pp. 284-286, (1965).
- HARTLEY K. A., DUFFY J., HAWLEY R.H. ; "Measurement of the temperature profile during shear band formation in steels deforming at high strain rates", *Brown University Report*, (1986).
- JOHNSON W. ; "Henri Tresca as the originator of adiabatic heat lines", *Int. J. Mech. Sci.*, Vol 29 n°5 pp. 301, (1987).
- JOSEPH D. D. ; "Non-linear heat generation and stability of the temperature distribution in conducting solids", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 8, pp. 281, (1965-a).
- JOSEPH D. D. ; "Stability of frictionally-heated flow", *The Physics of Fluids*, Vol. 8, n°12, pp. 2195-2200, (1965-b).
- KLEPACZKO J. R. ; "An experimental technique for shear testing at high and very high strain rates. The case of a mild steel.", *Int. J. Impact Engng.*, Vol n°15, n°1, pp. 25-39, (1994).
- KOLSKY H. ; *Proc. Phys. Soc. London*, Vol 62 - B, pp. 676-700 (1949).
- KNOWLES J.K. ; "On finite antiplane shear for incompressible elastic materials", *J.Austral. Math. Soc*, Vol. 19B, pp. 400-415, (1976).
- KUNIN I. A. ; "Elastic media with microstructure I et II", *Solid State Sciences - 44 Springer Verlag*, (1983).

Références bibliographiques.

- LEROY Y.M., MOLINARI A. ; "Stability of steady states in shear zones", *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 40, n°1, pp. 181-212, (1992).
- LEROY Y.M.; *Int. J. Solids. Struct.*, Vol. 27 pp. 783, (1991).
- LITONSKY J. ; "Plastic flow of a tube under adiabatic torsion", *Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences série sciences techniques*, Vol. 25 n°1, pp. 7-14, (1976).
- MARCHAND A. & DUFFY J. ; "An experimental study of the formation process of adiabatic shear bands in a structural steel", *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 36 n°3, pp. 251-283, (1988).
- MASSEY H. F.; "The flow of metal during forging", *Proc. Manchester Assoc. Engineers*, pp. 21, (1921).
- MERZER A. M. ; "Modelling of adiabatic shear band development from small imperfections", *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 30 n°5, pp. 323-338, (1982).
- MOLINARI A. ; "Instabilité thermoviscoplastique en cisaillement simple", *Journal of theoretical and applied mechanics*, Vol. 4 n°5, pp. 659-684, (1985).
- MOLINARI A., CLIFTON R.J. ; *C.R.A.S. Paris 296-1*, (1983).
- MOLINARI A., CLIFTON R.J. ; "Analytical characterization of shear localization in thermoviscoplastic materials", *Journal of applied mechanics* , Vol. 54, pp. 806-812, (1987).
- PINA V., HERVE P. ; *Rapport d'activité GDR 972*, (1993).
- ROGERS H. C. ; *Ann. Rev. Mater. Sci.*, Vol N°9, pp. 283, (1979).
- ROGERS H. C. ; " Adiabatic shearing - general nature and materials aspects", *Material Behavior Under High Stress and Ultrahigh Loading Rates - Sagamore Army Materials Research Conference Proceeding*, édité par Mescall et Weiss, Plenum Press, New-York, pp. 101-181, (1983).
- ROGERS H. C., SHASTRY C.V.; "Shock waves and high strain rate phenomena in metals", *M.A. Meyers and L.E. Murr, eds., Plenum Press*, New-York, pp. 285, (1981).
- STAKER M. R. ; *Acta Metall.*, Vol. 4, pp. 683, (1981).
- TRESCA H. ; *Proc. Inst. Mech. Engrs.*, Vol. 30, pp. 301-345, (1878).
- TAYLOR G. I., QUINNEY H. ; *Proc. Royal Soc. London*, Vol. A 143, pp. 307-326, (1934).
- TZAVARAS A. E. ; "Shearing of materials exhibiting thermal softening or temperature dependant viscosity, *Q. Appl. Math.*, Vol n°XLIV, (1986)
- WRIGHT T. W. ; "Steady shearing in a viscoplastic solid", *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 35 n°3, pp. 269-282, (1988).
- WRIGHT T. W., WALTER J.W. ; "On stress collapse in adiabatic shear bands", *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 35 n°6, pp. 701-720, (1987).

Références bibliographiques.

WRIGHT T. W., OCKENDON H.; "A model for fully formed shear bands", *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 40 n°6, pp. 1217-1226, (1992).

ZBIB H. M., AIFANTIS E. C. ; "On the structure and width of shear bands", *Scripta Metallurgica*, Vol. 22, pp. 705-708, (1988).

ZENER C., HOLOMON J.H. ; *J Appl. Phys.*, Vol. 15, pp. 22-32, (1944)