



**HAL**  
open science

# Vibration et stabilité des longues structures flexibles à forme répétitive

El Mostafa Daya

► **To cite this version:**

El Mostafa Daya. Vibration et stabilité des longues structures flexibles à forme répétitive. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université Paul Verlaine - Metz, 1994. Français. NNT : 1994METZ007S . tel-01776037

**HAL Id: tel-01776037**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01776037>**

Submitted on 24 Apr 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

DB 79396

INSTITUT SUPÉRIEUR DE GÉNIE MÉCANIQUE ET PRODUCTIQUE  
UNIVERSITÉ DE METZ

**THÈSE**

S/M3  
94/7  
3e ex.

présentée à l'UNIVERSITÉ de METZ par

**EL MOSTAFA DAYA**

pour l'obtention du grade de

**DOCTEUR en MÉCANIQUE**

**VIBRATION ET STABILITÉ DES LONGUES  
STRUCTURES FLEXIBLES  
À FORME RÉPÉTITIVE**

Soutenue le 25 février 1994 devant le jury composé de :

D. Caillerie  
N. Damil  
R. Ohayon  
M. Potier-Ferry  
J. Saint Jean Paulin  
H. Sanchez-Palencia

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv.	19940225
Cote	S/M3 94/7
Loc	Magasin

Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux U. R. A. CNRS. 1215  
Université de Metz, Ile du Saulcy, 57045 Metz cedex 01.

## Remerciements

*C'est au sein du Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux de l'Université de Metz que j'ai réalisé ce travail sous la direction de Monsieur Michel Potier-Ferry.*

*Ma gratitude et ma reconnaissance s'adressent tout d'abord à Michel qui a accepté de diriger cette thèse. Grâce à son enthousiasme, sa rigueur et son goût passionné pour la recherche scientifique, qu'il a su me faire partager, j'ai trouvé auprès de lui l'aide la plus efficace qui m'a permis de mener à bien cette thèse.*

*Messieurs, les professeurs D. Caillerie et R. Ohayon ont accepté d'examiner et de porter leur jugement sur ce travail. Je tiens à les remercier très vivement.*

*Je remercie également les professeurs N. Damil, J. Saint Jean Paulin et H. Sanchez-Palencia d'avoir acceptés de participer au jury et de l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail*

*Je tiens aussi à remercier tous les membres du L.P.M.M. et plus particulièrement, mes deux acolytes de bureau pour la bonne humeur dans laquelle ce sont passées ces trois années de thèse et de dur travail.*

*Sur un plan moins professionnel mais tout aussi important, j'exprime ma reconnaissance à mes parents sans qui rien n'aurait été possible.*

## **RÉSUMÉ**

Nous étudions la vibration et la stabilité des longues structures flexibles à forme répétitive.

Plus précisément, nous nous intéressons à la détermination des valeurs propres et des modes propres en tenant compte de l'aspect répétitif de ces structures par des analyses à deux échelles. A l'échelle locale, nous résolvons des problèmes locaux qui sont posés sur quelques cellules de base avec des conditions de périodicité. A l'échelle globale, nous introduisons des équations d'amplitudes permettant de rendre compte de la modulation des modes propres.

Nous testons ces méthodes sur deux modèles. Le premier est représentatif des longues structures sans cellule de base, pour lequel nous évaluons une dizaine de valeurs propres avec une assez bonne précision. Le deuxième est représentatif des longues structures flexibles à forme répétitive, pour lequel l'analyse à deux échelles donne de très bons résultats au début et à la fin d'un paquet de valeurs propres.

### Mots clés

**DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES  
CALCULS DES STRUCTURES RÉPÉTITIVES  
STABILITÉ  
VIBRATIONS LINÉAIRES**

## LISTE DES NOTATIONS UTILISÉES

M	matrice de masse
C	matrice d'amortissement
K	matrice de raideur
$u(M,t)$	déplacement à l'instant $t$ d'un point $M$ d'une structure $\Omega$
$\sigma(u)$	tenseur des contraintes de Cauchy
$\varepsilon(u)$	tenseur des déformations linéarisées en fonction du déplacement $u$
$\lambda$	valeur propre.
X	variable globale ou lente
x	variable locale ou rapide
$\eta$	petit paramètre (petit devant 1)
$\varepsilon$	terme d'une perturbation
q	nombre d'ondes
l	longueur d'une cellule de base
L	longueur totale de la structure
$N_c$	nombre de cellules de la structure répétitive
$L(\frac{d}{dx}, \lambda)$	opérateur linéaire auto-adjoint
$a_i(x), A_i(X)$	amplitudes ou enveloppes (solutions des problèmes globaux)
$w_i(x)$	solutions des problèmes locaux
$w_{loc}(x)$	solution localisée
$\Phi(x)$	matrice fondamentale
$\mu(l)$	exposant de Floquet
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$	valeurs propres de la matrice fondamentale sur une cellule de base $\Phi(l)$
$(\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n)$	base de Ritz
$(\bar{w}_1^*, \dots, \bar{w}_n^*)$	base de projection
$\lambda_d$	valeur propre locale correspondant au début d'un paquet

$\lambda_f$

valeur propre locale correspondant à la fin d'un paquet

**TABLE DES MATIÈRES**

<b>INTRODUCTION.....</b>	<b>6</b>
<b>1 ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE .....</b>	<b>10</b>
1.1. Rappels sur les vibrations linéaires.....	10
1.2. Étude bibliographique sur le calcul des structures répétitives et élancées .....	18
<b>2 UNE MÉTHODE ASYMPTOTIQUE A DEUX ECHELLES.....</b>	<b>28</b>
2.1. Introduction.....	28
2.2. Formulation et principe d'une méthode à deux échelles .....	28
2.3. Application de la méthode à un problème d'instabilité cellulaire	37
<b>3 APPLICATION AUX VIBRATIONS DES STRUCTURES RÉPÉTITIVES</b> <b>.....</b>	<b>54</b>
3.1. Introduction.....	54
3.2. Présentation du modèle.....	54
3.3. Écritures du problème de vibration propre .....	55
3.4. Problèmes locaux et modes locaux.....	56
3.5. Analyse des modes et des fréquences propres du calcul direct .	58
3.6. Application de la méthode d'échelle double .....	60
3.7. Équation d'amplitude .....	64
3.8..Prise en compte des conditions aux limites .....	65
3.9. Calcul asymptotique des valeurs propres au second ordre .....	68
3.10. Comparaison entre le calcul direct et le calcul asymptotique..	71
3.11. Conclusions.....	76
<b>4 ETUDE DES EFFETS DE BORDS ET CALCUL ASYMPTOTIQUE AUX</b> <b>ORDRES SUPÉRIEURS.....</b>	<b>78</b>
4.1. Introduction.....	78
4.2. Existence du phénomène de couche limite.....	78
4.3. Calcul de la solution localisée par la méthode de Floquet.....	80

4.4. Calcul asymptotique aux ordres supérieurs .....	87
4.5. Réécriture des conditions aux limites avec la prise en compte de la couche limite.....	88
4.6. Calcul asymptotique des valeurs propres au quatrième ordre ...	91
4.7. Applications et discussions.....	94
4.8. Conclusions.....	102
<b>5 INTERACTION DES MODES LOCAUX PAR UNE MÉTHODE DE RITZ</b> .....	<b>104</b>
5.1. Introduction.....	104
5.2. Couplage de la méthode de Ritz avec une analyse à deux échelles: principes généraux. ....	104
5.3. Applications au modèle de vibration .....	107
5.4. Conclusions.....	124
<b>CONCLUSION.....</b>	<b>126</b>
<b>LISTE BIBLIOGRAPHIQUE.....</b>	<b>128</b>
<b>ANNEXES.....</b>	<b>133</b>
Annexe A .....	133
Annexe B .....	136

## **INTRODUCTION**

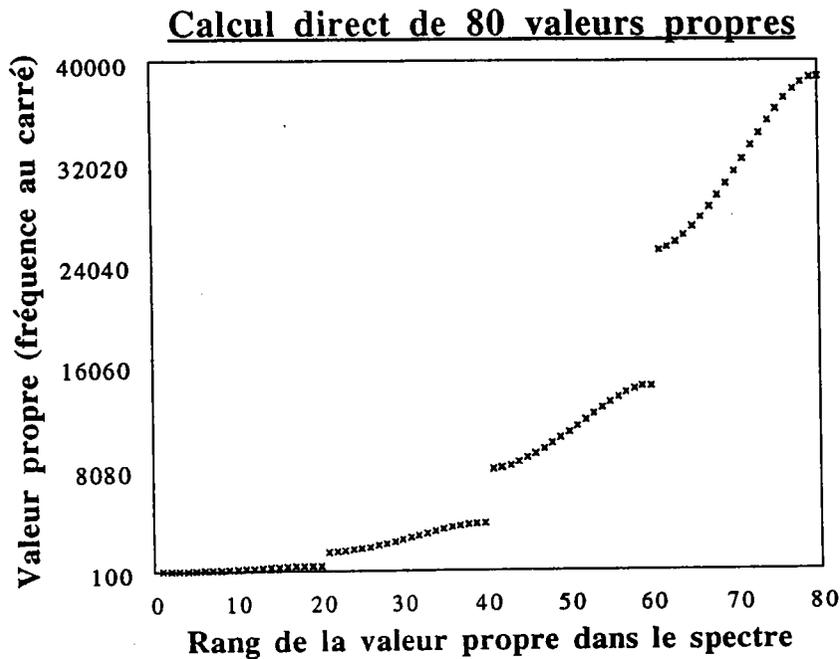
Les longues structures flexibles à forme répétitive sont utilisées dans de nombreux domaines, puisqu'elles offrent un excellent compromis entre leur capacité portante, leur poids et leur prix, par opposition à des poutres de section pleine. On rencontre ce genre de structure dans plusieurs domaines, par exemple dans la construction aéronautique et aérospatiale ( armatures des avions, stations orbitales,...) et dans le domaine de génie civil ( supports des couvertures des stades, des gares, des grandes surfaces,...). Pour ce type de structure, la connaissance détaillée des fréquences et des modes propres de vibration est essentielle pour la prédiction du comportement dynamique de la structure à des perturbations extérieures.

Cependant, l'étude des vibrations de ces structures pose deux types de problèmes:

a) Des problèmes de calcul, liés aux algorithmes de recherche de valeurs propres qui fonctionnent mal dans un tel cas et à la grande taille de la structure (grand temps de calcul et grand espace mémoire).

b) Des problèmes liés à la tenue de la structure, car l'analyse des phénomènes de résonance est très complexe, du fait que ces structures présentent des modes très voisins.

De plus, il est établi que les fréquences propres voisines de vibration de ces structures sont situées dans des paquets distincts. Nous le constatons dans un calcul direct par la méthode des éléments finis des fréquences propres de vibration d'un modèle représentatif de ces structures (figure qui suit).



Dans notre travail, nous proposons une méthode de calcul à deux échelles, l'une locale, l'autre globale, en tenant compte de la forme répétitive que présente ces structures. Ceci permet la décomposition du problème initial qui est de grande taille, en deux problèmes de tailles considérablement réduites. Le premier problème est calculé sur des structures faites de quelques cellules de base, le deuxième introduit des équations d'enveloppe similaires aux équations de Ginzburg-Landau. Cette analyse en double échelle favorise le fonctionnement des algorithmes de recherche de valeurs propres, et permettra la prise en compte des interactions non-linéaires, des phénomènes de résonance et d'instabilités.

Nous présentons ce travail sous forme de cinq chapitres.

Le premier chapitre contient un rappel sur les vibrations linéaires et une revue bibliographique sur le calcul des structures périodiques et élancées. Il en

ressort généralement qu'une analyse en double échelle peut permettre l'évaluation des paquets de valeurs propres à partir des modes locaux. En effet ces méthodes sont opérationnelles pour les problèmes d'instabilités cellulaires.

Le deuxième chapitre contient une description générale de la méthode proposée et les hypothèses de base permettant son utilisation. Nous appliquons ensuite la méthode à un problème représentatif des instabilités cellulaires, c'est-à-dire une structure longue non répétitive, mais dont les modes de déformations sont à peu près périodiques. Cette analyse permet d'obtenir une équation du type Ginzburg-Landau décrivant le problème global. A partir de la résolution de cette équation nous obtenons un nombre considérable de valeurs propres sans effectuer un calcul direct.

Le troisième chapitre contient une application de la méthode pour le calcul des fréquences propres d'une partie d'un paquet de valeurs propres. Le modèle considéré est représentatif des longues structures à forme répétitives. A l'échelle locale nous calculons des modes de vibrations sur quelques cellules de base avec des conditions de périodicité. Nous engendrons ensuite une famille de valeurs propres et de modes propres par modulation d'un mode local donné. Ces dernières valeurs propres permettent de calculer les premières fréquences propres de vibration à l'aide d'une formule asymptotique au second ordre. Dans ce chapitre, nous nous limitons à une analyse très simplifiée des conditions aux limites qui néglige le phénomène de la couche limite. Ce phénomène dû aux effets de bords sera introduit au chapitre suivant.

Dans le quatrième chapitre nous montrons qu'il existe une couche limite et que sa prise en compte permet de pousser le calcul asymptotique aux ordres

supérieurs. Ainsi, nous sommes amené à chercher une solution localisée comme dans les problèmes de perturbation singulière. Cette solution est déterminée par une méthode utilisant la théorie de Floquet qui est bien connue dans l'étude des problèmes de propagation des ondes dans les milieux périodiques. Ensuite nous avons fait une analyse asymptotique complète d'un paquet de valeurs propres. Il en sort que cette méthode est une très bonne approximation du début et la fin du paquet, puisque les modes propres du début et de la fin d'un paquet sont modulés et sont localement périodiques. Cependant elle ne permet pas d'estimer le nombre de valeurs propres par paquet, puisque leur valeur asymptotique des fréquences propres croît indéfiniment en fonction d'un entier  $n$ .

Dans le cinquième chapitre, nous montrons que la prise en compte de l'interaction entre deux modes locaux permet d'évaluer le nombre de valeurs propres dans un paquet. Cette interaction est introduite par la méthode de Ritz qui est couplée à une analyse en double échelle.

## **1 ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE**

### **1.1. Rappels sur les vibrations linéaires**

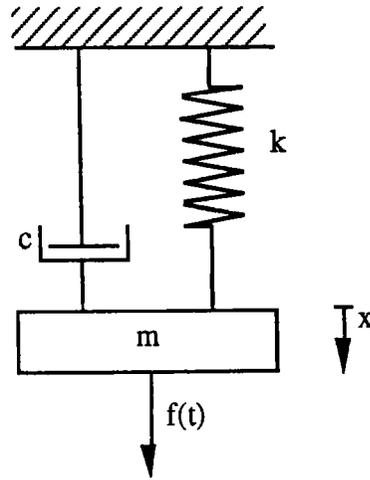
#### **1.1.1. Introduction**

Nous devons à Lord Rayleigh la formulation des principes de la théorie des vibrations telle qu'elle est pratiquée aujourd'hui. Il introduit le concept fondamental d'oscillation d'un système linéaire autour d'une position d'équilibre et montre l'existence des modes et fréquences propres de vibration tant pour les systèmes discrets que les systèmes continus. Afin d'illustrer ces notions de base, nous allons tout d'abord étudier des systèmes simples, puisque leur étude facilite la compréhension du comportement de systèmes complexes possédant un nombre important de degrés de liberté.

Pour plus de précision sur ce qui se fait en matière de vibration des structures, nous renvoyons le lecteur aux livres spécialisés dans ce domaine cités dans la bibliographie (M. Géradin et D. Rixen, "Théorie des vibrations. Application à la dynamique des structures", .....).

#### **1.1.2. Systèmes à un degré de liberté**

Les systèmes à un degré de liberté sont illustrés simplement par le système suivant:



$x$  représente le déplacement de la masse  $m$  à partir de la position d'équilibre déterminée par l'action de la pesanteur.

$k$  est la raideur du ressort produisant sur la masse  $m$  une force  $-kx$ .

$c$  est le coefficient d'amortissement visqueux de l'amortisseur qui produit sur la masse  $m$  une force  $-c \frac{dx}{dt}$ .

$f(t)$  désigne la force extérieure, fonction du temps  $t$ , agissant sur la masse  $m$ .

En appliquant les théorèmes généraux de la dynamique sur le système, on obtient l'équation différentielle traduisant le comportement du système :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = f(t) \quad (1)$$

Le mouvement libre est défini par l'absence de la force extérieure ( $f(t)=0$ ).

La solution générale s'écrit alors sous la forme :

$$x(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} \quad \text{avec} \quad r_{1,2} = -\alpha \omega \pm \omega \sqrt{\alpha^2 - 1}$$

$\omega$  est appelée pulsation naturelle ou propre du système ( exprimé en rad/s). Elle est définie par :  $\omega^2 = \frac{k}{m}$

$\alpha$  est appelée le facteur d'amortissement visqueux et défini par:  $\alpha = \frac{c}{c_c}$  où  $c_c$

est dit coefficient d'amortissement critique :  $c_c = 2m\omega$

Il apparaît clairement que le comportement du système est caractérisé par les paramètres  $\alpha$  et  $\omega$ . La forme des solutions de l'équation différentielle change évidemment suivant la valeur de  $\alpha$ .

En fait les systèmes réels sont toujours plus ou moins amortis mais rarement par un amortissement visqueux. Parmi les amortisseurs les plus courants citons l'amortissement structural et l'amortissement par frottement ou de Coulomb. Le premier est une caractéristique des matériaux et sa valeur est très liée à la température et aux fréquences d'excitation. Le deuxième est dû au mouvement relatif de deux surfaces en contact, il est très difficile à quantifier car il dépend de nombreux paramètres.

Le cas  $\alpha < 1$  le plus important en pratique où la solution peut s'écrire sous la forme:  $x(t) = Ae^{-\alpha\omega t} \sin(\omega_a t + \varphi)$  où  $\omega_a = \omega\sqrt{1-\alpha^2}$  est la pulsation naturelle du système amorti. Les constantes A et  $\varphi$  sont déterminées par la connaissance des conditions initiales.

Enfin, on définit la fréquence naturelle ou propre du système (exprimée en hertz) par f telle que;  $\omega = 2\pi f$ . Et on appelle période du système  $T = \frac{1}{f}$

Les deux autres cas à savoir  $\alpha = 1$  et  $\alpha > 1$  ne se rencontrent que très rarement dans les systèmes mécaniques.

### 1.1.3. Systèmes à N degrés de liberté

La mise en équations des systèmes à N degrés de liberté, s'effectue à partir des théorèmes généraux ou des équations de Lagrange. Elles se présentent sous la forme matricielle suivante:

$$M \frac{d^2X}{dt^2} + C \frac{dX}{dt} + KX = F(t) \quad (1)$$

M est dite la matrice de masse. C est la matrice d'amortissement. K est la matrice de raideur. X et F(t) sont respectivement les vecteurs des déplacements et des forces.

### Propriétés des matrices

La matrice M est diagonale et définie positive, puisque l'énergie cinétique du système est toujours positive sauf si les déplacements sont nuls. Il est facile de voir qu'en l'absence de forces gyroscopiques la matrice C est symétrique et semi-définie positive si le système est dissipatif. Lorsque les forces de rappel sont élastiques et les chargements conservatifs, la matrice de raideur K est symétrique. Si l'équilibre étudié est stable, elle est définie positive.

### Propriétés des modes propres du système

La connaissance des modes propres d'un système est essentielle dans une étude dynamique de celui-ci. Ces modes sont déterminés à partir de l'équation du système conservatif. Ceci se traduit par la relation vectorielle suivante:

$$M \frac{d^2X}{dt^2} + KX = 0$$

où les solutions sont cherchées sous la forme:  $X = xe^{\pm i\omega t}$  avec  $i^2 = -1$

A partir des équations précédentes on obtient le problème aux valeurs propres suivant:

$$[K - \omega^2 M]x = 0$$

Ce système admet N solutions notées  $(\omega_i, x_i)$   $i=1\dots N$ , qui sont les pulsations et modes propres du système.

A partir des propriétés des matrices M et K les modes propres vérifient les conditions d'orthogonalité suivantes:

$$\text{Pour } i \neq j \quad x_i^T M x_j = 0 \quad \text{et} \quad x_i^T K x_j = 0$$

Nous retiendrons que la recherche des fréquences et modes propres d'un système à N degrés de liberté revient à traiter un problème aux valeurs propres.

#### 1.1.4. Vibrations des systèmes continus

Les systèmes continus peuvent être considérés comme une extension des systèmes à N degrés de liberté avec  $N \rightarrow \infty$ . On suppose par la suite que la structure est élastique.

#### Équations et formulation variationnelle en élastodynamique

On désigne par  $\Omega$  le domaine borné occupé par la structure à l'équilibre et par  $n$ , la normale unitaire extérieure au bord  $\partial\Omega$  de  $\Omega$ .

Nous supposons que la structure n'est soumise à aucune force extérieure. Nous nous plaçons dans le cadre de la théorie de l'élasticité linéaire. Dans ce cas les équations de la dynamique écrite dans un repère cartésien sont:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j}(u) - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} &= 0 && \text{dans } \Omega \\ \sigma_{ij}(u)n_j &= 0 && \text{sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

$u(M,t)$  désigne le déplacement à l'instant  $t$  d'un point  $M$  situé dans  $\Omega$ .  $\sigma_{ij}(u)$  est le tenseur des contraintes de Cauchy qui est une fonction de  $u$  grâce à la loi de comportement linéaire.  $\rho$  est la masse volumique.

On s'intéresse aux modes de vibrations de la structure, qui sont cherchés sous la forme:

$$u(M,t) = U(M) \cos \omega t$$

La formulation variationnelle du problème est alors :

trouver  $u$  et  $\lambda$  tel que:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(v) dx - \lambda \int_{\Omega} \rho u v dx = 0 \quad \text{où } \lambda = \omega^2$$

$\forall v$  cinématiquement admissible

$\varepsilon_{ij}(u)$  est le tenseur des déformations linéarisées en fonction de  $u$ .

Pour résoudre ce genre de problème admettant une infinité de solutions, on fait appel aux méthodes de discrétisation: méthodes de Ritz-Galerkine et des éléments finis.

La première consiste à chercher une solution approchée du problème variationnel précédant dans un espace de dimension fini  $N$ . Si  $e_j(M)$  ( $j = 1, \dots, N$ ) désigne une base de cet espace vectoriel, son élément générique  $u^g$  peut s'écrire sous la forme  $u^g = \sum_{i=1}^N \xi_i e_i(M)$ .

La méthode des éléments finis est un cas particulier de celle de Ritz-Galerkine, où  $\xi_i$  coïncide avec la valeur de  $u^g$  aux noeuds du maillage,  $u^g$  étant défini par interpolation à partir des valeurs nodales  $U_i$  appelées degrés de liberté.

Les expressions discrétisées des formes bilinéaires et linéaires intervenant

dans la formulation variationnelle conduisent aux matrices de masse  $M$ , de raideur  $K$  symétriques et définies positives et de dimension  $N$ . Donc le problème se ramène à un problème aux valeurs propres de dimension fini  $N$ :

$$[K - \lambda M]U = 0$$

$U \in \mathbb{R}^N$  et  $\lambda$  sont les inconnues.

### 1.1.5. Méthodes de calculs des valeurs propres

Nous avons vu que, la détermination des modes et fréquences propres tant pour les systèmes discrets que pour les systèmes continus, se ramène toujours au calcul des solutions propres d'un système linéaire homogène:

$$[K - \lambda M]U = 0$$

où les matrices de raideur et de masse sont presque toujours symétriques et définies positives. Les méthodes de résolution de ce type de problème rentrent dans l'une des catégories suivantes :

- Les méthodes basées sur le développement de l'équation caractéristique du système.
- Les méthodes basées sur le calcul du déterminant.
- Les méthodes qui consistent à mettre le problème initial sous une forme soit diagonale soit tridiagonale par des transformations successives.
- Les méthodes d'itération sur les vecteurs propres.
- Les méthodes étagées, qui sont basées sur la construction d'un sous-espace contenant une approximation de la solution recherchée. Ce sous-espace peut être lui-même généré par itération sur les vecteurs propres, par technique

de condensation ou de sous-structuration. Le problème final se ramène alors à la résolution d'un problème d'interaction dans le sous-espace ainsi construit.

L'utilisation de l'une ou l'autre de ces méthodes est très liée au nombre de degrés de liberté du système. Ainsi pour des systèmes ayant un petit nombre de degrés de liberté, on peut directement procéder au développement de l'équation caractéristique par des méthodes semi-analytiques. Mais la plupart des problèmes aux valeurs propres en mécanique sont formulés par la méthode des éléments finis. Dans ce cas la solution la plus efficace consiste à la transformation du problème en séquence de problèmes statiques  $KU=g$ , puisque toutes méthodes dérivées de l'algorithme de puissance (méthode d'itération inverse, méthode de sous-espace et la méthode de Lanczos) sont basées sur ce principe. On adopte alors un algorithme de résolution statique en tirant profit des propriétés des matrices  $K$  et  $M$ . Actuellement, il devient de plus en plus fréquent de traiter des problèmes de très grande taille. Ceci est dû, soit à la taille de la structure étudiée qui réellement grande (treillis spatiaux par exemple), soit au besoin d'affiner les modèles afin d'avoir plus de précision et d'informations. Dans ce cas les méthodes de résolution de base restent valables en considérant tous les aspects d'optimisation (prise en compte des moyens informatiques plus performants, des propriétés de périodicité ou de symétrie de la structure,....etc.). De plus la connaissance des modes propres de vibration d'un système est très intéressante pour calculer la réponse de celui-ci à une excitation extérieure. En effet, la méthode modale, cherchant la réponse sous forme de combinaison linéaire de ces modes propres, est très efficace que la méthode directe quand le nombre de degrés de liberté est grand. Puisqu'elle permet la réduction du nombre des équations du système en considérant les propriétés d'orthogonalité des modes propres établies précédemment.

Le traitement des problèmes de grande taille est un sujet de recherche de grand intérêt aujourd'hui.

## **1.2. Étude bibliographique sur le calcul des structures répétitives et élancées**

### **1.2.1. Introduction**

Nous avons vu que les modes et les fréquences propres de vibration d'une structure mécanique peuvent être calculés par des méthodes classiques et des logiciels existant sur la marché. Toutefois la discrétisation d'une longue structure répétitive peut conduire à un nombre de degrés de liberté très élevé, donc à des coûts de calcul très importants, d'autant plus importants que le nombre de cellules de base est grand. On a l'intuition que ces calculs sont inutiles, car la périodicité de la structure doit permettre d'une part de simplifier l'analyse, d'autre part de mettre en évidence des structures de solutions très particulières. Ces remarques sont également pertinentes pour la réponse à une excitation extérieure, qui nécessite ici la prise en compte d'un grand nombre de modes propres, ou pour l'étude non linéaires des résonances.

Nous exposons une revue des méthodes de calcul des structures périodiques qui existe dans la littérature. Plus proche de notre propos, nous présentons des travaux utilisant les méthodes asymptotiques, la technique des échelles multiples ou la théorie de Floquet, afin d'expliquer certains phénomènes observés expérimentalement ou de prédire les premières fréquences propres des vibrations de la structure.

### **1.2.2. Classification des méthodes de calcul des structures périodiques**

La classification qui existe dans la littérature des méthodes de calcul des structures à forme répétitive, est donnée sous forme de quatre grandes catégories (A. K. Noor, 1988) :

1 - La méthode directe qui calcule la structure sans tenir compte de la périodicité. Cette méthode est basée sur la technique des éléments finis. Elle devient vite coûteuse quand la taille de la structure augmente et peut poser des problèmes de précision. Ces problèmes numériques sont particulièrement vrais pour une étude dynamique, ou de stabilité en linéaire, ou en non-linéaire.

2 - La méthode des champs discrets, qui tient compte de la régularité de la structure. Les équations d'équilibre des noeuds de la cellule de base sont écrites, et résolues en tant qu'équations aux différences finies.

3 - Les approches "structure périodique", pour lesquelles on distingue deux cas:

a) L'utilisation combinée de méthodes aux éléments finis et matrices de transfert (méthode de sous-structuration).

b) L'utilisation de la représentation exacte de la rigidité d'une barre, à partir de laquelle l'analyse de la structure est faite.

4 - Les méthodes d'obtention d'un milieu continu équivalent de la structure discrète (P. Verna, 1988).

A. K. Noor affirme que la deuxième méthode n'est applicable qu'aux structures simplement appuyées à leurs extrémités (M. S. Anderson, 1981. M. S. Anderson, 1982). La troisième permet une économie sensible en espace mémoire et en temps de calcul, mais elle nécessite une description complète de la structure. Tandis que les modèles continus actuels s'intéressent à priori au comportement global de la structure sur lequel ils obtiennent d'excellents résultats (A .K. Noor, 1988). Toutefois ces modèles ne peuvent prétendre être pleinement efficace dans une étude paramétrique même pour une structure de type treillis plan en statique linéaire. La raison essentielle en est que tous ces modèles ne vérifient que des conditions aux limites moyennes ou essentielles. Ils négligent les effets de bords responsables de l'apparition du phénomène de couches limites. Ils ne permettent pas de garantir totalement la tenue mécanique de la structure.

Les travaux de A. K. Noor et de ses coauteurs montrent en général de très bons résultats quant à la prédiction des cinq à huit premières fréquences propres de leur structure (écarts de 1% à 3% parfois 5%). Les résultats sont d'autant plus meilleurs que le nombre de cellules constituant la structure est grand.

### **1.2.3. Utilisation des méthodes asymptotiques dans le calcul des structures élancées**

La solution d'un problème mécanique est souvent très difficile, voire impossible à obtenir exactement. Ceci est dû à la complexité des équations ou des conditions aux limites. Pour la résolution, on peut donc faire appel à des méthodes mathématiques permettant d'obtenir une solution approximative ou asymptotique. Ainsi de nombreux auteurs ont eu recours aux développements asymptotiques pour obtenir des formulations simplifiées du problème. Il s'agit

d'une écriture formelle. Lorsqu'un problème est reconnu dépendre d'un petit paramètre  $\varepsilon$ , les fonctions inconnues  $u(\varepsilon)$  du problème peuvent être cherchées sous la forme d'un développement asymptotique de  $\varepsilon$  (Sanchez-Palencia E., 1980):

$$u(\varepsilon) = \sum_{i=i_0}^{\infty} \varepsilon^i u_i$$

Cette écriture génère une infinité de problèmes où les inconnues sont les  $u_i$ . Chacun de ces problèmes provient de l'identification de la  $i$ -ème puissance du petit paramètre  $\varepsilon$  dans le système initial.

Byskov, 1987 étudie ainsi, l'interaction des modes locaux et globaux de flambement d'une structure à forme répétitive. Il adopte comme petits paramètres les amplitudes des modes de flambement qui sont au nombre de deux; il réalise ainsi un développement asymptotique des déplacements par rapport à ces amplitudes. Ces amplitudes sont solutions de deux équations non-linéaires, comme il est habituel en théorie de la bifurcation; Koiter, 1945, Budiansky, 1974. Il faut noter que cette approche est une application de la théorie générale du flambage qu'elle ne tient pas compte de la forme répétitive de la structure.

Au contraire, les développements asymptotiques en double échelle permettent de prendre en compte la forme répétitive, en distinguant deux échelles de variation et en introduisant un développement asymptotique des opérateurs de dérivations. Ainsi une analyse en double échelle est utilisée par N. Damiel et M. Potier-Ferry, 1986 dans leur étude de post flambage d'une longue plaque rectangulaire en compression axiale (Fig. 1). Cette plaque est prise avec une non-linéarité géométrique et sous les hypothèses de Von Karman, l'incrément de charge étant le petit paramètre, à partir duquel le développement asymptotique de la déformée est écrit (1). Cette étude a permis de retrouver certains phénomènes observés expérimentalement par Boucif et al., 1984 dans le

cas de l'appui simple et par Clement et al., 1981 dans le cas de l'appui encasté. Ainsi on explique la modulation de l'amplitude de la solution (Fig. 2) et l'existence des solutions caractérisées par leurs nombres d'ondes (Problème de sélection). Il faut noter que dans ce cas la structure n'est pas répétitive, mais longue et invariante par translation. Seule la solution est à peu près répétitive. Ce problème est un bon exemple de ce qu'on appelle une instabilité cellulaire, que l'on rencontre dans de nombreux problèmes physiques (voir Wesfreid et Zaleski, 1984). Ici l'amplitude n'est pas décrite par quelques nombres, mais par une fonction  $a(x)$  et on montre qu'elle est solution d'une équation de type Ginzburg-Landau (2):

$$u = \left[ a(x)e^{iqx} + \overline{a(x)}e^{-iqx} \right] \cos(qy) + O(\lambda - \lambda_c) \quad (1)$$

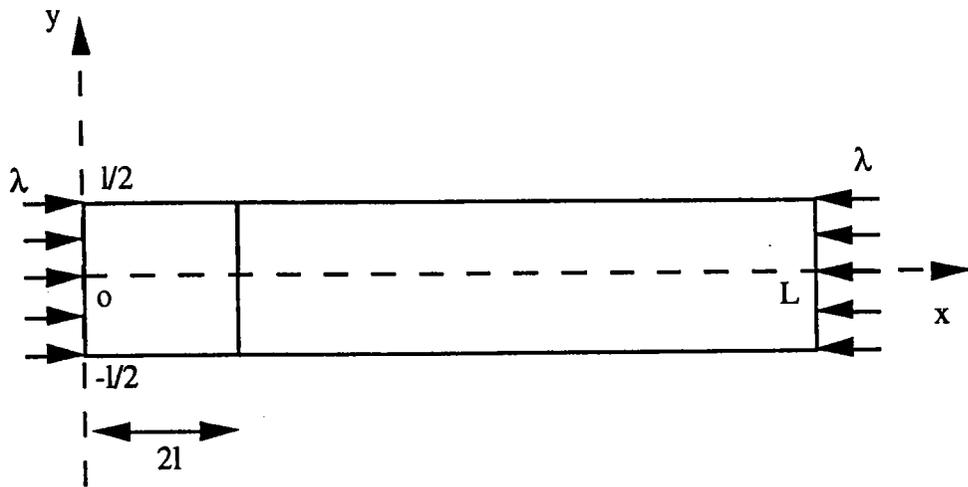
$$4 \frac{d^2}{dx^2} a + (\lambda - \lambda_c)a - a|a|^2 = 0 \quad (2)$$

$\lambda_c$  est la charge critique donnée par la courbe de stabilité neutre.

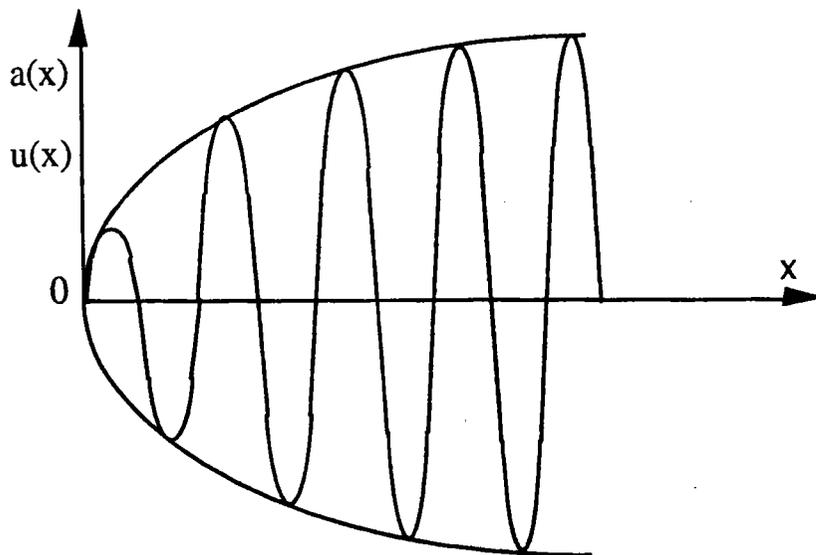
$|a|$  désigne le module du complexe  $a(x)$ .

$q = \frac{\pi}{l}$  est le nombre d'ondes critique.

$a(x)$  représente l'enveloppe de la solution flambée, c'est un nombre complexe: le fait que l'amplitude soit un nombre complexe provient de ce que la structure n'est pas répétitive, mais seulement la solution. On comprend bien que dans ce cas, les solutions  $u$  soient définies à une translation près, donc l'enveloppe  $a(x)$  à un facteur  $e^{i\varphi}$  près.



**Figure 1**



**Figure 2**

Post flambage d'une longue plaque en compression suivant ox  
Flèche dans la moitié de la plaque et l'enveloppe de cette flèche.

Cette étude permet aussi de calculer la première valeur de bifurcation dans le cas où les côtés courts de la plaque sont encastrés:

$$\lambda = \lambda_c + 4 \frac{l^2}{L^2}$$

Cette écriture met en évidence deux effets:

- L'effet de l'élanement de la structure.
- L'effet des conditions aux limites, qui provoquent la modulation de

l'amplitude.

Il a été montré que l'équation de Ginzburg-Landau peut décrire toutes les instabilités cellulaires, Ioos, Demay et Milke, 1980, Damil et Potier-Ferry, 1992. On trouve génériquement la même équation (2), aux coefficients près.

L'étude du flambage des plaques a été faite à deux échelles. L'échelle locale correspond à une plaque rectangulaire de côtés  $2l$  et  $l$ , dont on a étudié le flambage linéaire. On a aussi obtenu le mode de flambage "périodique"  $\cos(qx)\cos(qy)$  et la charge critique  $\lambda_c$ . L'échelle globale correspond à l'équation de Ginzburg-Landau qui permet de prendre en compte les non-linéarités et les conditions aux limites sur les côtés courts.

A. Luongo, 1990 étudie le comportement post critique d'un système de poutre tridimensionnelle sur fondation élastique, en utilisant un développement asymptotique en double échelle de sa flèche. Il établit aussi une équation différentielle du second ordre que vérifie l'amplitude du mode local. Il compare ces résultats avec ceux obtenus en utilisant la méthode de Galerkin. La deuxième bifurcation du mode d'instabilité locale est déterminée sur la branche bifurquée du mode global.

R. S. Chadwick, 1978 a aussi adopté une technique asymptotique dans son étude des vibrations propres d'une longue plaque et de largeur variable en appui simple. Le petit paramètre est le rapport entre la largeur maximale et la longueur totale de la plaque. Il a obtenu les cinq premières fréquences propres asymptotiquement, ainsi que les allures des modes correspondants. Une équation différentielle du second ordre de type Airy, est obtenue pour l'amplitude de la solution de son problème. Il observe que l'existence de couches limites nécessite un traitement localisé, comme dans les problèmes de

perturbations singulières pour pousser le calcul asymptotique aux ordres supérieurs. En effet, la technique asymptotique induit une perte de conditions aux limites à ces ordres. Il signale que son traitement localisé reste valable pour d'autres types de conditions aux limites, bien que chaque cas doive être étudié séparément.

Notons que le point essentiel dans l'utilisation des techniques asymptotiques, est que toutes les dépendances par rapport au petit paramètre doivent être explicitées. Ainsi pour l'étude des vibrations d'un milieu périodique la longueur d'onde doit à priori être développée asymptotiquement (R. Ohayon, 1979), de la même manière qu'en vibration non-linéaire, la période fait partie des inconnues et doit être développer asymptotiquement.

#### **1.2.4. Propagation des ondes dans les longues structures périodiques**

Dans ce paragraphe, nous voulons préciser le fait que les longues structures périodiques se comportent en dynamique comme des filtres. En effet les fréquences propres d'une telle structure se présentent sous forme de paquets distincts qui correspondent aux bandes passantes du système vibratoire. Y. Young et K. Lin, 1989 étudient la réponse dynamique d'une structure treillis en trois dimensions à une excitation sinusoïdale. Ils considèrent que la cellule de base, dotée d'un amortissement, possède à chacune de ses frontières un coefficients de transmission et un coefficient de réflexion. Ils signalent toutefois que la méthode des éléments finis reste une technique très précise pour calculer les paquets des fréquences propres d'une longue structure répétitive. On retrouve ce caractère de filtre dans les travaux de M. Touratier, 1986 où il étudie la propagation des ondes dans une longue structure à forme répétitive. La même

caractéristique est signalée par Seu Yung Lee, 1992 dans son étude de propagation dans une longue poutre élastique à inertie variable et périodique. Ces deux derniers auteurs traitent leur problème par la même méthode: il s'agit de la théorie de Floquet, qui s'applique aux équations différentielles à coefficients périodiques, et que nous utiliserons pour le traitement des couches limites.

### 1.2.5. Conclusions

Les conclusions que nous pouvons tirer de cette étude bibliographique sont les suivantes:

- Une analyse en double échelle d'une telle structure pourrait permettre d'évaluer les paquets de fréquences propres à partir des modes locaux, c'est-à-dire de modes calculés sur quelques cellules de base. En effet ces méthodes sont très opérationnelles pour les problèmes d'instabilités.

- La propagation des ondes dans les milieux périodiques est caractérisée par l'existence d'une bande passante.

- Le traitement des couches limites est nécessaire pour rendre compte des effets des bords, permettant de pousser le calcul asymptotique de la solution aux ordres supérieurs.

L'ambition essentielle de notre travail est de tester les capacités de la technique des échelles doubles à déterminer des paquets de fréquences propres pour les longues structures flexibles à forme répétitive. Cette méthode nous permettra de traiter le problème initial à deux échelles : l'une locale, sur des

structures faites de quelques cellules de base, l'autre globale en cherchant à introduire des équations d'enveloppe similaires aux équations de Ginzburg-Landau.

## **2 UNE MÉTHODE ASYMPTOTIQUE A DEUX ECHELLES**

### **2.1. Introduction**

Nous étudions la vibration et le flambage des longues structures flexibles à forme répétitive par la mise au point de nouvelles méthodes de calcul à deux échelles, l'une locale et l'autre globale. Nous donnons dans la première partie de ce chapitre une description générale de ces méthodes et les hypothèses de base qui permettent leur utilisation. Dans la deuxième partie nous donnons une première application de la méthode pour un modèle représentatif des instabilités cellulaires, c'est-à-dire une structure longue non répétitive, mais dont les solutions sont à peu près périodiques.

### **2.2. Formulation et principe d'une méthode à deux échelles**

#### **2.2.1. Écriture initiale du problème**

Comme nous l'avons noté au premier chapitre, un problème de vibration ou de flambage d'une structure se traduit par un problème de valeurs propres. Nous ne considérons ici que des structures unidimensionnelles. L'inconnu "u" n'est fonction que d'une seule variable "x". Nous écrivons le problème continu (avant discrétisation) sous la forme suivante :

$$L\left(\frac{d}{dx}, \lambda\right)u = 0 \quad (1)$$

$\lambda$  désigne la fréquence propre de vibration ( ou la charge critique dans le cas

d'une étude de flambage ).

$u(x)$  est le mode de vibration (ou de flambage).

$u(x)$  et  $\lambda$  sont les inconnues du problème (1).

$L(\frac{d}{dx}, \lambda)$  est un opérateur linéaire généralement auto-adjoint. Ses coefficients sont périodiques de période 1 par rapport à la variable  $x$ .

Nous appellerons cellule de base l'intervalle  $[0,1]$ . Grâce à la périodicité de l'opérateur, la structure complète est définie par juxtaposition d'un nombre assez grand de cellules de base.

Après discrétisation, le problème (1) se ramène à la résolution numérique d'un système de type :

$$[K - \lambda M]\{U\} = \{0\}$$

$K$  représente la matrice de rigidité élastique de la structure.

$M$  représente la matrice de masse dans le cas d'une étude de vibration (ou la matrice de rigidité géométrique dans le cas d'une étude de flambage).

La résolution de ce type de système est d'autant plus coûteuse en temps et en espace mémoire que les tailles des matrices  $K$  et  $M$  sont grandes. De plus il existe des problèmes de calcul liés aux algorithmes de recherche de valeurs propres, qui fonctionnent mal dans le cas des structures très élancées. Ceci est dû à l'existence des modes très voisins, rendant ainsi, l'analyse des phénomènes de résonance et d'instabilité de la structure plus complexes.

### **2.2.2. Définitions des modes locaux**

Nous chercherons des modes de vibration proches des modes locaux de vibrations, c'est-à-dire des modes de vibrations définis sur une ou quelques cellules de base et avec des conditions de périodicité. Ainsi nous appelons mode

local  $w_0(x)$  toute fonction de période  $pl$  ( $p$  entier positif) telle qu'il existe une fréquence propre  $\lambda_0$  solution de :

$$\begin{cases} L(\frac{d}{dx}, \lambda_0)w_0 = 0 \\ w_0(x) \text{ est } pl \text{ périodique} \end{cases} \quad (2)$$

Le calcul de ces modes locaux et des fréquences propres correspondantes ne pose pas de problème : ici nous le ferons de préférence par la méthode des éléments finis, qui permet de s'adapter à des structures de formes diverses et qui ne requiert que peu de degrés de liberté. Cependant, nous pourrions aussi résoudre directement le problème aux valeurs initiales et regarder les valeurs propres de la matrice fondamentale.

### 2.2.3. Passage local-global par la méthode d'échelle double

Le calcul direct des modes d'instabilités cellulaires ou de certaines structures répétitives fait apparaître des groupes de modes correspondant à des valeurs propres voisines. Ces modes ressemblent à des modes locaux, mais avec une modulation d'amplitude. Or pour une instabilité cellulaire, les modes locaux sont harmoniques et il est connu qu'une superposition d'harmoniques avec des longueurs d'ondes très voisines conduit à une oscillation lentement variable ( $\cos(qx) + \cos(px) = 2 \cos(\frac{q-p}{2}x) \cos(\frac{p+q}{2}x)$ ). Ceci nous permet d'utiliser la méthode d'échelle double et à chercher les inconnues  $u(x)$  et  $\lambda$  sous les formes asymptotiques suivantes( Sanchez-Palencia E., 1980) :

$$u = u_0(x, X) + \eta u_1(x, X) + \eta^2 u_2(x, X) + \dots \quad (2)a$$

$$\lambda = \lambda_0 + \eta \lambda_1 + \eta^2 \lambda_2 + \dots \quad (2)b$$

$\eta$  est un petit paramètre (supposé petit devant 1).

$x$  est dite variable locale ou rapide.

$X=\eta x$  est dite variable globale ou lente, qui décrira ce qui se passe globalement et permettra de prendre en compte les conditions aux limites.

En accord avec la méthode d'échelle double,  $x$  et  $X$  sont considérées comme des variables indépendantes. Donc les dérivées par rapport à la variable  $x$  suivront la règle suivante:

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial X} \quad (3)$$

Afin de respecter l'aspect répétitif des structures qui nous intéressent dans cette étude, on suppose que le déplacement  $u(x,X)$  est périodique de période  $pl$  (selon la variable locale  $x$ ). Ceci assure la continuité du mode entre deux cellules voisines.

En respectant la règle de dérivation (3) et en introduisant les développements asymptotiques (2)a et (2)b des inconnues du problème dans l'équation (1), on obtient une infinité de problèmes. Ces derniers proviennent de l'identification de  $i$ -ème puissance du petit paramètre  $\eta$  dans l'équation de départ (1).

$$L(\partial_x, \lambda_0)u_0 = 0 \quad \text{ordre 1} \quad (4)$$

$$L(\partial_x, \lambda_0)u_1 = F_1(u_0, \lambda_1) \quad \text{ordre } \eta \quad (5)$$

$$L(\partial_x, \lambda_0)u_2 = F_2(u_0, u_1, \lambda_1, \lambda_2) \quad \text{ordre } \eta^2 \quad (6)$$

-----

$$L(\partial_x, \lambda_0)u_n = F_n(u_0, \dots, u_{n-1}, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \quad \text{ordre } \eta^n$$

Compte tenu de l'hypothèse de périodicité en  $x$ , on voit que  $\lambda_0$  est nécessairement une valeur propre correspondant au problème (2). Nous

supposerons pour faciliter l'analyse que le mode local  $w_0(x)$  est un mode simple. De plus l'opérateur  $L(\partial_x, \lambda_0)$  ne dépend que de la variable rapide  $x$  et la méthode d'échelle multiple suppose que les variables  $x$  et  $X$  sont indépendantes. Donc la solution générale de l'équation (4) s'écrit sous la forme:

$$u_0(x, X) = A_0(X)w_0(x)$$

où la fonction  $A_0(X)$  reste à déterminer. Cette fonction est l'amplitude du mode et permet de prendre en compte des solutions modulées. Si le mode est simple, il y a une seule amplitude qui est une fonction à valeurs réelles. Dans le cas des instabilités cellulaires, le mode est double et cette fonction sera à valeurs complexes.

#### 2.2.4. Équation d'amplitude (ou problème global)

Nous avons noté précédemment que le problème (2) est un problème aux valeurs propres. De ce fait, les premiers membres des équations (5), (6), ....etc. sont singuliers. Pour avoir une solution de ces problèmes, une condition de solvabilité s'impose sur leurs seconds membres. Cette condition s'écrit de la manière suivante:

$$\left\langle L\left(\frac{d}{dx}, \lambda_0\right)u_i, w_0 \right\rangle = \langle F_i, w_0 \rangle = 0 \quad \text{pour } i \text{ variant de } 1 \text{ à } n$$

avec

$$\langle f, g \rangle = \int_{pl} f(x)g(x)dx$$

En effet l'opérateur est auto-adjoint, ce qui implique

$$\left\langle L\left(\frac{d}{dx}, \lambda_0\right)u_i, w_0 \right\rangle = \left\langle u_i, L\left(\frac{d}{dx}, \lambda_0\right)w_0 \right\rangle = \langle u_i, 0 \rangle = 0$$

En appliquant cette condition de solvabilité au problème (5), on obtient une équation différentielle vérifiée par l'amplitude  $A_0(X)$  en fonction des modes locaux et de  $\lambda_1$ . Nous verrons la forme de cette équation d'amplitude avec plus de détails dans ce qui suit et pour chaque cas étudié. Ce problème global est un nouveau problème aux valeurs propres dont les inconnues seront les couples  $(A_0(X), \lambda_1)$ .

### 2.2.5. Prise en compte des conditions aux limites et calcul asymptotique du spectre des valeurs propres

Afin de résoudre le problème global, on cherche les conditions aux limites imposées sur l'amplitude  $A_0(X)$  de la façon suivante:

En respectant la règle de dérivation (3), nous réécrivons les conditions aux limites. Par identification à chaque ordre de  $\eta$ , nous obtenons les conditions aux limites qui doivent être vérifiées par les problèmes globaux. Par exemple, si nous avons les conditions d'encastrement au bord  $x=0$ , cela se traduit par :

$$u(0)=0 \text{ et } \frac{d}{dx}u(0) = 0 \tag{8}$$

A partir des équations (8) nous pouvons écrire les développements asymptotiques suivants :

$$u(0) = A_0(0)w_0(0) + \eta u_1(0,0) + O(\eta^2) = 0$$

$$\frac{d}{dx}u(0) = A_0(0)\frac{d}{dx}w_0(0) + \eta\left(\frac{\partial}{\partial x}u_1(0,0) + \frac{d}{dX}A_0(0)w_0(0)\right) + O(\eta^2) = 0$$

Dans beaucoup de cas, le mode local ne vérifie pas les deux identités  $w_0(0) = 0$  et  $\frac{d}{dx} w_0(0) = 0$ . Alors les conditions d'encastrement (8) imposeront une condition au limite pour l'amplitude :

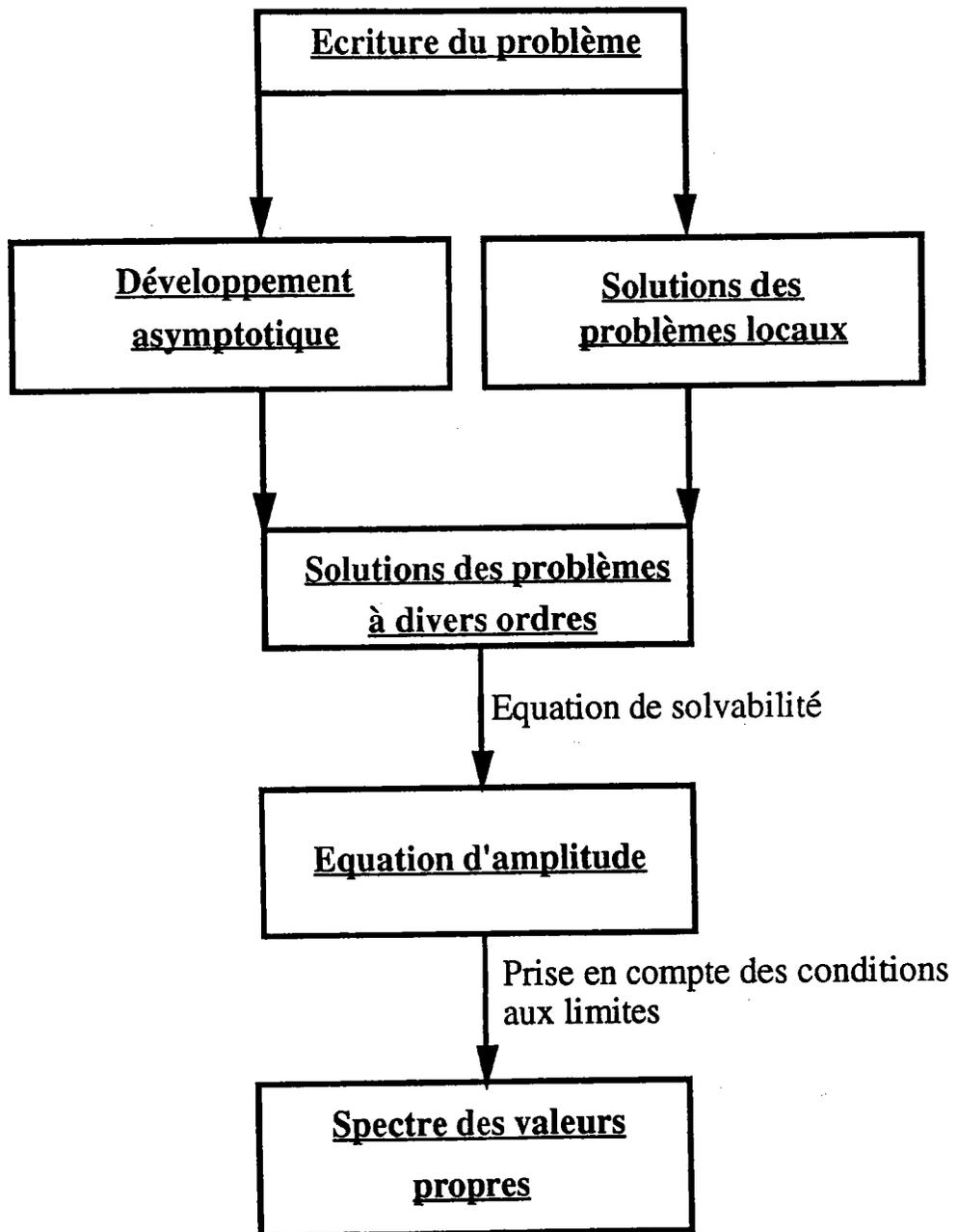
$$A_0(0) = 0.$$

Une fois toutes les conditions aux limites établies, nous pourrons résoudre l'équation différentielle de l'amplitude et déterminer les valeurs possibles des paramètres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . D'où l'écriture du spectre des valeurs propres à cet ordre (avec diverses valeurs possibles de  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ ):

$$\lambda = \lambda_0 + \eta\lambda_1 + \eta^2\lambda_2 + O(\eta^3)$$

Cette analyse en double échelle permet donc de décomposer le problème de valeurs propres initial en deux autres problèmes de valeurs propres. Le premier est local dépendant de la variable rapide  $x$  (revoir l'équation (2)). Le deuxième est global dépendant de la variable lente  $X$  (équation d'amplitude obtenue par l'application de la condition de solvabilité). On verra par la suite que ces deux problèmes aux valeurs propres sont de tailles réduites par rapport au problème initial. Ainsi cette méthode permettra un gain très considérable en temps de calcul et en espace mémoire. De plus le problème local admet généralement des valeurs propres distinctes, ce qui favorise le bon fonctionnement des algorithmes classiques de recherche de valeurs propres.

### 2.2.6. Récapitulatif des démarches de la méthode

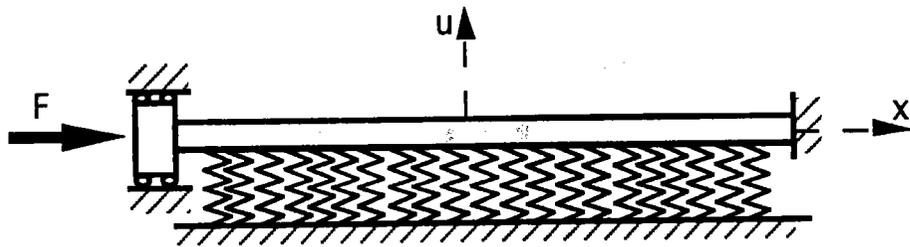


### 2.2.7. Exemples représentatifs

Nous avons essentiellement travaillé sur deux modèles représentatifs des longues structures flexibles à formes répétitives. Le premier porte sur le calcul des charges critiques de flambage, tandis que le deuxième est amené à déterminer les fréquences propres des vibrations.

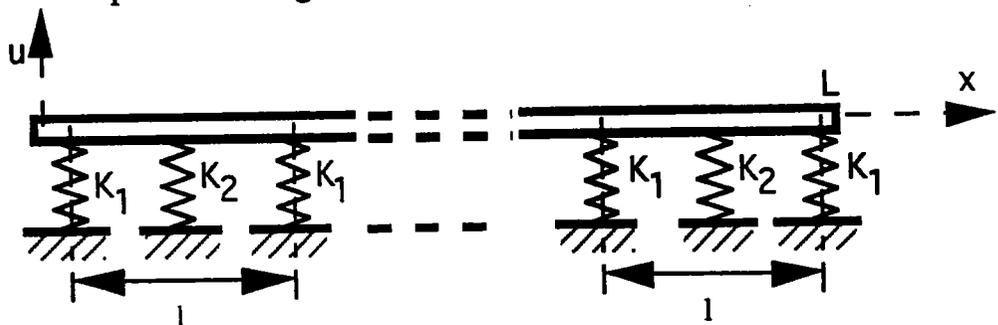
**Premier exemple (Exemple sans cellule de base)**

Nous étudions le flambage d'une poutre sur fondation élastique à raideur répartie. Si la raideur de la fondation est constante, ce modèle est représentatif des problèmes de valeurs propres n'ayant pas de cellule de base. Il possède néanmoins une longueur caractéristique, qui est la longueur d'onde du mode d'instabilité (Wesfreid, J.E. et Zaleski, S., 1984). Nous considérons aussi le cas d'une raideur variable ( et périodique), que nous traiterons par perturbation du cas à raideur constante. Cet exemple doit donc être considéré comme représentatif des instabilités cellulaires et non pas des structures répétitives.



**Deuxième exemple (Exemple avec cellule de base)**

Nous étudions les vibrations propres d'une poutre reposant sur des ressorts répartis de façon discrète et périodique. La longueur  $L$  de la structure est supposée grande devant la longueur  $l$  de la cellule de base. Nous observerons que les modes locaux de vibrations sont à peu près périodiques avec une période égale à un multiple de la longueur de la cellule de base.



La longueur  $L$  de la structure est supposée grande devant la longueur de la cellule de base.

## **2.3. Application de la méthode à un problème d'instabilité cellulaire**

### **2.3.1. Introduction**

Dans cette partie, nous étudions la capacité de la méthode d'échelle double à calculer un certain nombre de charges critiques de flambage du modèle de la poutre élastique sur fondation. Ce modèle a déjà fait l'objet d'étude de post flambage cellulaire des grands domaines (M. Potier-Ferry, 1983, N. Damil, 1990), afin d'expliquer certains phénomènes physiques observés expérimentalement (Boucif et al., 1984). Par rapport aux travaux précédents, nous négligerons les aspects non-linéaires, nous contentant de calculer les valeurs propres. Par contre, nous introduisons une raideur de fondation variable et périodique, pour étudier la transition entre une instabilité cellulaire (sans période imposée) et une étude de structure à forme répétitive. Nous confronterons le résultat asymptotique au calcul direct des charges critiques.

### **2.3.2. Présentation du modèle et équation d'équilibre**

On considère une longue poutre homogène élastique de rigidité à la flexion  $EI$  ( $E$  est le module d'Young et  $I$  est le moment d'inertie de flexion) et de longueur  $L$ , soumise à une force de compression axiale (figure 1). Le déplacement latéral  $u(x)$  est restreint par une fondation élastique provoquant une force de rappel  $K(x)u(x)$  par unité de longueur.

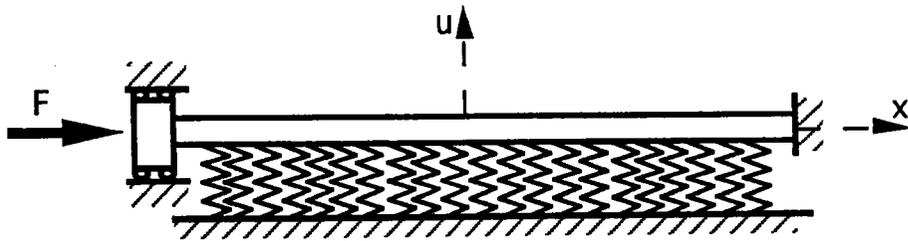


figure 1

L'équilibre de la poutre est donné par :

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} + F \frac{d^2u(x)}{dx^2} + K(x)u(x) = 0 \quad (1)$$

où  $M(x)$  est le moment fléchissant à l'abscisse  $x$ .

A partir des hypothèses d'orthogonalité de Bernouilli et d'un comportement linéaire, on déduit la loi de comportement de flexion en supposant que  $\frac{d^2u(x)}{dx^2}$  est à peu près égale à la courbure de la déformée  $u(x)$ :

$$M(x) = EI \frac{d^2u(x)}{dx^2} \quad (2)$$

Il s'agit ici d'étudier les valeurs propres d'un problème de type instabilité cellulaire, puis l'évolution de ce spectre lorsqu'on passe d'une structure invariante par translation à une structure répétitive. A cet effet, nous supposons que la raideur de la fondation est de la forme :

$$K(x) = k(1 + \varepsilon f(x)) \quad (3)$$

avec  $k > 0$  et  $f(x)$  est une fonction périodique.

$\varepsilon$  est un paramètre petit devant 1 (terme de perturbation).

Nous introduisons les quantités sans dimension suivantes :

$$L_0 = \left(\frac{EI}{k}\right)^{\frac{1}{4}}, x = \frac{x}{L_0}, L = \frac{L}{L_0}, \lambda = \frac{F}{L_0^2 k}$$

A partir des équations (1), (2) et (3), la déformée  $u(x)$  est solution de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^4 u}{dx^4} + \lambda \frac{d^2 u}{dx^2} + (1 + \varepsilon f(x))u = 0 \quad (4)$$

où  $\lambda$  est le paramètre de charge inconnu.

Le problème de flambage se ramène à un problème aux valeurs propres :

On cherche les couples  $(u(x), \lambda)$  solutions de l'équation (4).

### **2.3.3.. Courbe de stabilité neutre du modèle de la poutre sur fondation**

A  $\varepsilon=0$ , nous avons le modèle classique de la poutre sur fondation. Dans ce cas la déformation  $u(x)$  est solution de l'équation différentielle suivante:

$$\frac{d^4 u}{dx^4} + \lambda \frac{d^2 u}{dx^2} + u = 0$$

Le problème admet  $u=0$  comme solution pour toute charge  $\lambda$ . Il est connu que la charge critique  $\lambda_0$  est la plus petite valeur de  $\lambda$  pour laquelle il existe une solution non nulle de l'équation différentielle précédente. Pour les problèmes d'instabilité cellulaire, on peut dans un premier temps négliger les conditions aux limites et chercher des solutions sous la forme :

$$u(x) = \sin(qx + \varphi) = \sin(\varphi)\sin(qx) + \cos(\varphi)\cos(qx)$$

Ces solutions n'existent que pour  $\lambda \geq 2$ . En injectant cette solution dans l'équation différentielle, il vient :

$$\lambda = q^2 + \frac{1}{q^2}$$

La courbe ci-dessous est appelée courbe de stabilité neutre (figure 2). Cette courbe atteint son minimum  $\lambda = 2$  pour la valeur  $q=1$ .

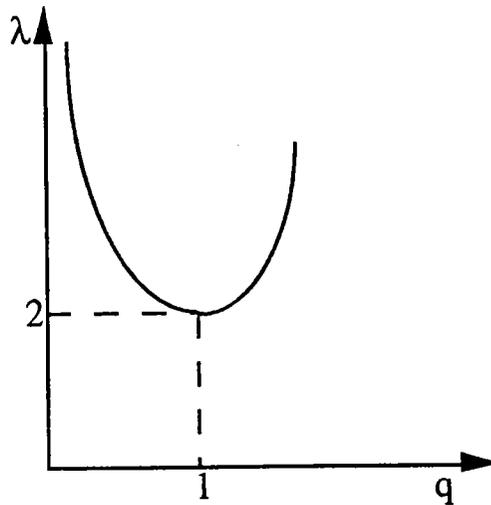


figure 2 courbe de stabilité neutre

Il reste à voir l'effet des conditions aux limites. Supposons par exemple que la poutre soit en appui simple, ce qui se traduit par les conditions aux limites suivantes:

$$\begin{cases} u(0) = \frac{d^2}{dx^2} u(0) = 0 \\ u(L) = \frac{d^2}{dx^2} u(L) = 0 \end{cases}$$

Ces conditions aux limites permettent de déterminer la phase, ici  $\varphi=0$ . Le mode, qui est double avec l'hypothèse d'un mode harmonique (modes  $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$ ), devient simple. D'autre part on obtient une répartition discrète des nombres d'ondes et donc des valeurs propres  $\lambda$  :

$$q = \frac{n\pi}{L} \quad \text{où } n \text{ est un entier.}$$

Nous notons que si la structure est longue ( $L/\pi$  grand), il existe un grand nombre de modes propres correspondant à des nombres d'ondes proches de  $q=1$ . Les valeurs propres sont bien évidemment voisines. On verra plus loin comment prendre en compte des conditions aux limites plus générales.

### 2.3.4..Application de la méthode d'échelle double

A partir de l'équation (4) et à  $\varepsilon=0$ , on résoud un problème de flambage classique. Pour des grandes structures telles que le rapport d'aspect  $L/\pi$  est très grand (N.Damil et M. Potier-Ferry, 1986), la longueur d'onde du mode de flambage est  $2\pi$  et la charge critique correspondante est  $\lambda_0 = 2$ . Ces deux valeurs sont données par la courbe de stabilité neutre précédente.

Nous introduisons un petit paramètre  $\eta$  qui est le rapport entre la longueur d'onde du mode critique ( $2\pi$ ) et la longueur totale de la poutre .

En choisissant le petit paramètre  $\varepsilon$  égal à  $\eta^2$ , on applique la méthode d'échelle double en cherchant les inconnues du problème sous la forme de séries entières en  $\varepsilon$ :

$$u(x) = u(X, x) = \sum_{i=0} \varepsilon^i u_i(X, x)$$

$$\lambda = 2 + \sum_{i=1} \varepsilon^i \lambda_i$$

où  $X = \sqrt{\varepsilon}x$

$x$  est appelée variable rapide ou locale et  $X$  est la variable lente ou globale qui permettra de prendre en compte les conditions aux limites du problème.

En accord avec la méthode d'échelle double  $x$  et  $X$  sont considérées comme des variables indépendantes et donc la dérivée par rapport à  $x$  dans l'équation (4) doit être remplacée par :  $\partial_x + \sqrt{\varepsilon}\partial_X$ .

En injectant les développements asymptotiques de  $u(x)$  et  $\lambda$  et en respectant la règle de dérivation ci-dessus, on obtient les problèmes suivants (à

chaque ordre de  $\epsilon$ ):

$$Lu_0 = 0 \tag{8}$$

$$Lu_1 = -6 \frac{\partial^4}{\partial X^2 \partial x^2} u_0 - f(x)u_0 - 2 \frac{\partial^2}{\partial X^2} u_0 - \lambda_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_0 \tag{9}$$

$$Lu_2 = -6 \frac{\partial^4}{\partial X^2 \partial x^2} u_1 - f(x)u_1 - 2 \frac{\partial^2}{\partial X^2} u_1 - \lambda_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_1 - \frac{\partial^4}{\partial X^4} u_0 - \lambda_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_0$$

.....etc.

Où L est un opérateur linéaire auto-adjoint ne dépendant que de la variable locale x. Et il est de la forme suivante :

$$L = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 1 = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 1 \right)^2$$

Les solutions bornées de (8) sont de la forme:  $u_0(X, x) = A_0(X)e^{ix} + c.c.$  où c.c. dénote le complexe conjugué.

Les modes locaux sont de période  $2\pi$  qui sont  $(e^{ix}, e^{-ix})$  ou  $(\sin(x), \cos(x))$ . Ces modes sont des solutions de l'équation (8) sans prendre en compte les conditions aux limites. Ces dernière seront prise en compte grâce à la variable lente X et à l'amplitude.

### 2.3.5..Équation d'amplitude ou problème global

L'équation (9) n'a de solutions que si les termes en  $e^{ix}$  dans le second membre s'annulent. Ceci est dû à la condition de solvabilité qui s'écrit comme suit :

$$\langle Lu_i, u_0 \rangle = \int_0^L Lu_i u_0 dx = 0$$

puisque'on a  $Lu_0 = 0$  et L auto-adjoint.

Les modes locaux étant de période  $2\pi$ , nous appliquons donc cette

condition sur une période. On a alors:

$$\int_0^{2\pi} \left( -6 \frac{\partial^4}{\partial X^2 \partial x^2} u_0 - f(x) u_0 - 2 \frac{\partial^2}{\partial X^2} u_0 - \lambda_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_0 \right) e^{-ix} dx = 0$$

$$4 \frac{d^2}{dX^2} A + \lambda_1 A - \frac{A}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx - \frac{\bar{A}}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-2ix} dx = 0$$

Ainsi, on obtient une équation différentielle de second ordre vérifiée par l'amplitude complexe  $A_0(X)$ :

$$4 \frac{d^2}{dX^2} A_0 + (\lambda_1 - C_1) A_0 - C_2 \bar{A}_0 = 0 \quad (10)$$

$$\text{où } \begin{cases} C_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx \\ C_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-2ix} dx \end{cases}$$

$C_1$  est un nombre réel et  $C_2$  est un nombre complexe. La solution de l'équation (9) s'écrit alors:  $u_1(X, x) = A_1(X) e^{ix} + \text{c.c.}$

On notera qu'avec une raideur de fondation constante ( $C_1 = C_2 = 0$ ), l'équation (10) n'est autre que l'équation de Ginzburg-Landau linéarisée. La perturbation introduite sur cette raideur va modifier cette équation et les valeurs propres correspondantes. D'abord un écart moyen ( $C_1 \neq 0$ ) conduit à un décalage de valeurs propres ( $\lambda_1$  devient  $\lambda_1 - C_1$ ), ce qui n'est guère surprenant. Cependant un écart avec une harmonique de période double ( $e^{2ix}$ ) introduit un terme nouveau ( $C_2 \neq 0$ ) dont on verra l'effet (§ 2.3.7).

### 2.3.6..Prise en compte des conditions aux limites et calcul asymptotique des charges critiques

La solution asymptotique du problème s'écrit donc sous la forme:

$$u(X, x) = A_0(X)e^{ix} + \varepsilon A_1(X)e^{ix} + \varepsilon^2 A_2(X)e^{ix} + c.c.....etc$$

Prenons le cas où les bords de la poutre sont encastés, ce qui se traduit par les conditions suivantes :

$$\begin{cases} u(0) = \frac{d}{dx} u(0) = 0 \\ u(L) = \frac{d}{dx} u(L) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

Pour prendre en compte ces conditions, il suffit de calculer la dérivée première de  $u(X, x)$  en respectant la règle de dérivation liée à l'emploi de la méthode d'échelle double. Donc la forme asymptotique de la dérivée première de la déformée est :

$$\frac{d}{dx} u(X, x) = iA_0(X)e^{ix} + \varepsilon(iA_1(X)e^{ix} + \frac{d}{dX} A_2(X)e^{ix}) + c.c. + O(\varepsilon^2) + \dots etc$$

Les conditions (11) deviennent alors à l'ordre 1:

$$\text{en } x=0 \quad \begin{cases} A_0(0) + \bar{A}_0(0) = 0 \\ i(A_0(0) - \bar{A}_0(0)) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_0(0) = \bar{A}_0(0) = 0 \end{cases}$$

$$\text{en } x=L \quad \begin{cases} A_0(L\sqrt{\varepsilon}) + \bar{A}_0(L\sqrt{\varepsilon}) = 0 \\ i(A_0(L\sqrt{\varepsilon}) - \bar{A}_0(L\sqrt{\varepsilon})) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_0(L\sqrt{\varepsilon}) = \bar{A}_0(L\sqrt{\varepsilon}) = 0 \end{cases}$$

On peut donc écrire le problème global au premier ordre :

$$\begin{cases} 4 \frac{d^2}{dX^2} A_0 + (\lambda_1 - C_1) A_0 - C_2 \bar{A}_0 = 0 \\ A_0(0) = A_0(L\sqrt{\varepsilon}) = 0 \end{cases} \quad (12)$$

Il est facile de voir que ce dernier problème est un problème aux valeurs propres dont les solutions sont les suivantes:

$$\begin{cases} A_0(X) = a \sin(KX) \\ \lambda_1 = 4K^2 + C_1 \pm |C_2| \\ K = \frac{n\pi}{L\sqrt{\varepsilon}} \end{cases}$$

où  $a$  est un nombre complexe et  $n$  est un entier non nul.

Ainsi l'expression asymptotique du spectre des charges critiques est donnée par:

$$\lambda(n) = 2 + 4 \frac{n^2 \pi^2}{L^2} + \varepsilon(C_1 \pm |C_2|) + O(\varepsilon^2) \quad (13)$$

Par perturbation à partir du mode local double  $(\sin(x), \cos(x))$ , nous avons introduit toute une famille de modes et de valeurs propres indexées par le nombre entier  $n$ . A chaque  $n$  correspondent en fait deux modes propres qui coïncident lorsque  $C_2=0$  : dans ce cas les deux modes sont :

$$A_0(X) = \sin(KX) \text{ et } A_0(X) = i \sin(KX) \quad (14)$$

L'effet de la perturbation introduite sur la raideur est donc aussi de séparer ces deux valeurs propres qui sont coïncidentes à ce niveau de l'analyse (si  $C_2=0$ ).

### 2.3.7.. Validité des calculs asymptotiques

Afin de valider cette approche et les expressions (13) nous avons comparé le calcul asymptotique et le calcul direct des charges critiques. Trois cas ont été traités :

#### PREMIER CAS:

la réponse de la fondation est une constante ( $f(x)=0$ )

Dans ce cas les constantes  $C_1$  et  $C_2$  de l'équation d'amplitude (12) sont nulles. Elle s'écrit sous la forme:

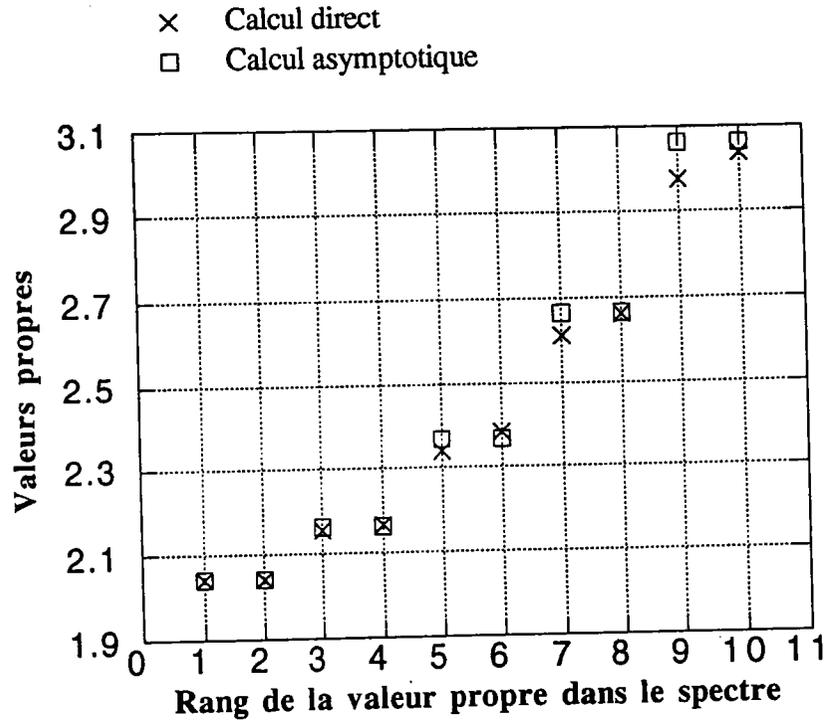
$$\begin{cases} 4 \frac{d^2}{dX^2} A_0 + \lambda_1 A_0 = 0 \\ A_0(0) = A_0(L\sqrt{\varepsilon}) = 0 \end{cases}$$

L'expression asymptotique au second ordre est donnée par:

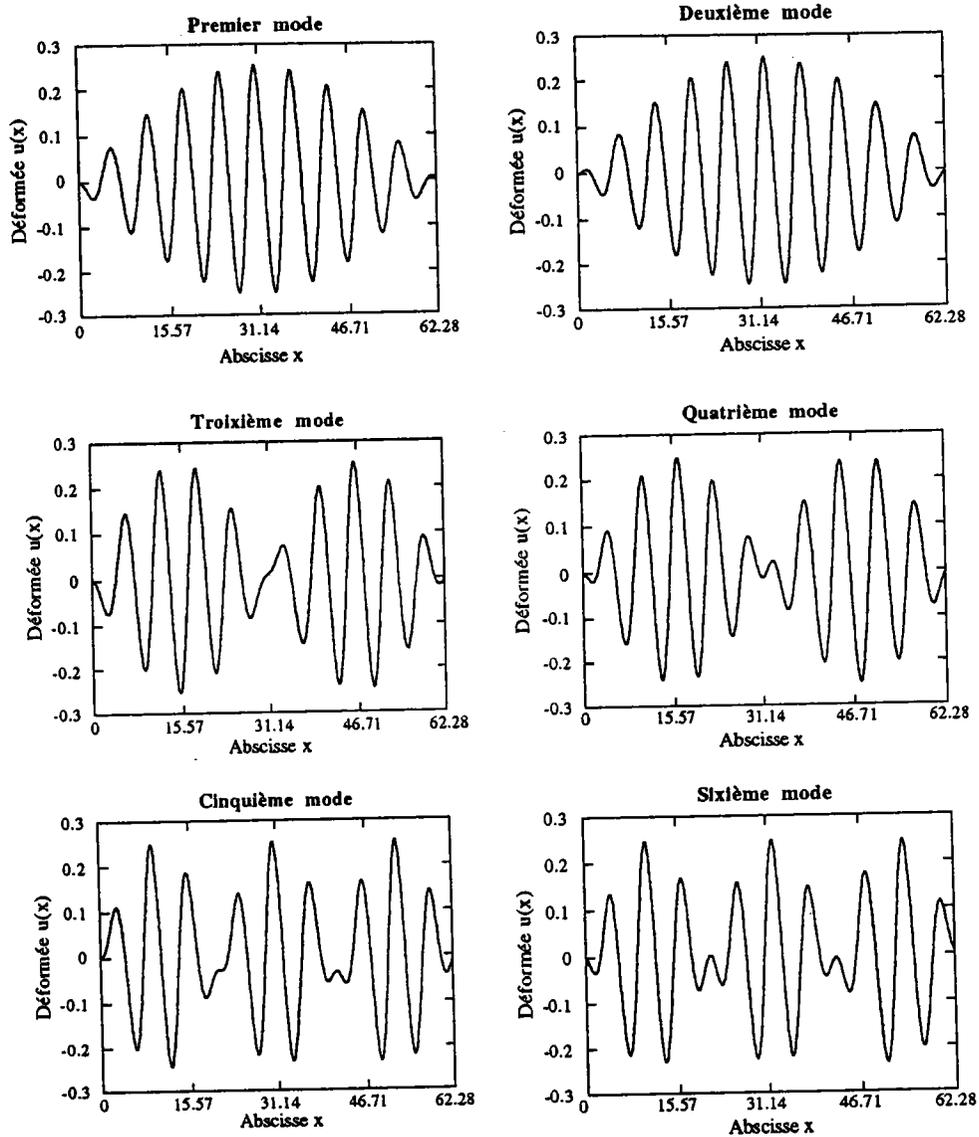
$$\lambda(n) = 2 + 4 \frac{n^2 \pi^2}{L^2} + O(\varepsilon^2)$$

Cette expression montre qu'il y a un effet des conditions aux limites lié à l'élanement de la structure. A ce niveau, nous obtenons les valeurs propres par sous paquets de 2, sans pouvoir séparer ces valeurs doubles. Il est vrai (figure3) que les six premières valeurs propres sont quasiment doubles.

Nous présentons la comparaison entre le calcul direct et le calcul asymptotique des charges critiques et les forme des modes de flambage (les six premiers). On constate que le calcul asymptotique donne les 8 premières valeurs propres à 2% près et les 10 premières à 3% près.

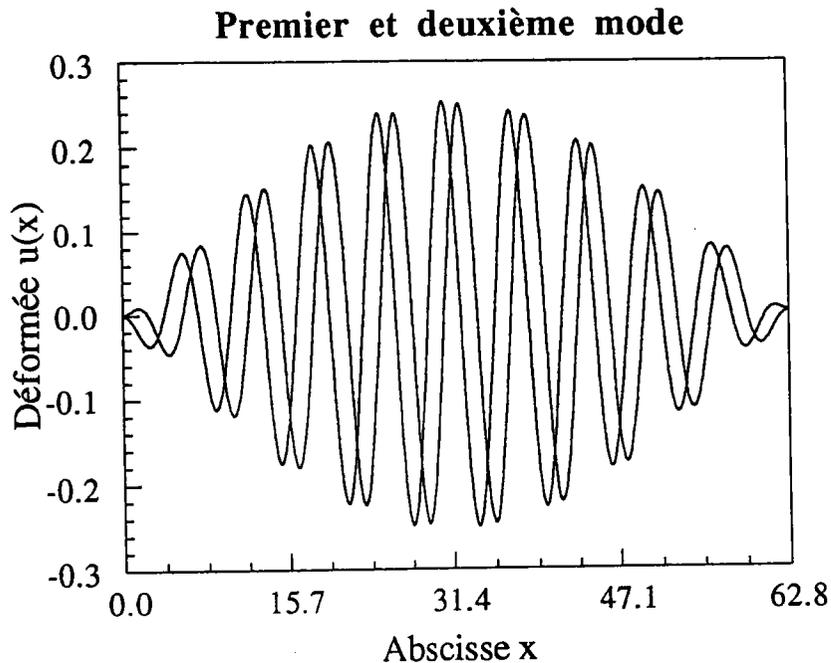


**figure 3** Résultats pour  $\varepsilon=0$  et  $L=10\pi$



**figure 4** Allure des six premiers modes

On constate qu'il existe la même enveloppe pour deux modes locaux, le premier est symétrique et le deuxième est antisymétrique par rapport au milieu du segment par le fait que l'amplitude est complexe, que le mode (14) est double et que les deux modes correspondants ont le même module. En fait les deux amplitudes ne diffèrent que par le facteur  $i$ , ce qui implique un décalage de phase d'un quart de période. Nous illustrons cette remarque par la figure qui suit :



**figure 5 Modes ayant la même enveloppe**

**DEUXIÈME CAS:  $f(x)=\sin(2x)$**

Dans ce cas l'expression asymptotique des charges critiques est donnée par:

$$\lambda(n) = 2 + 4 \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \pm \frac{\varepsilon}{2} + \theta(\varepsilon^2)$$

On remarque qu'il y a un effet de la perturbation et des conditions aux limites. La perturbation permet de séparer les valeurs propres deux à deux pour un entier n donné. Nous avons les mêmes remarques concernant les modes que le cas précédent. Nous présentons des comparaisons entre le calcul direct et le calcul asymptotique des charges critiques pour différentes valeurs de  $\varepsilon$ . Dans tous les cas, la formule asymptotique (13) donne 10 valeurs propres avec une précision de 0,5% près.

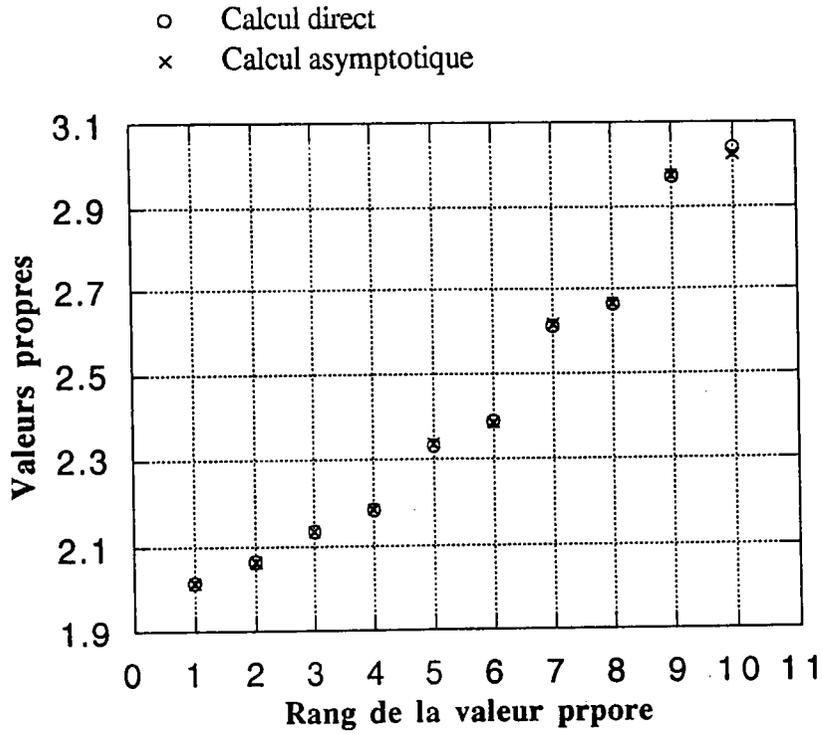


figure 6 Résultats pour  $\varepsilon = 0,05$  et  $L=10\pi$

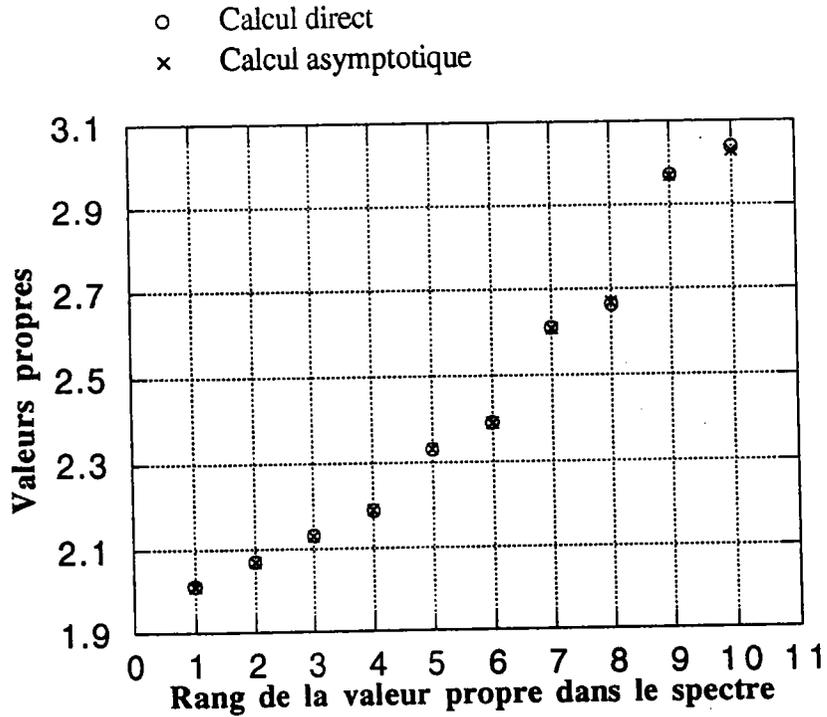
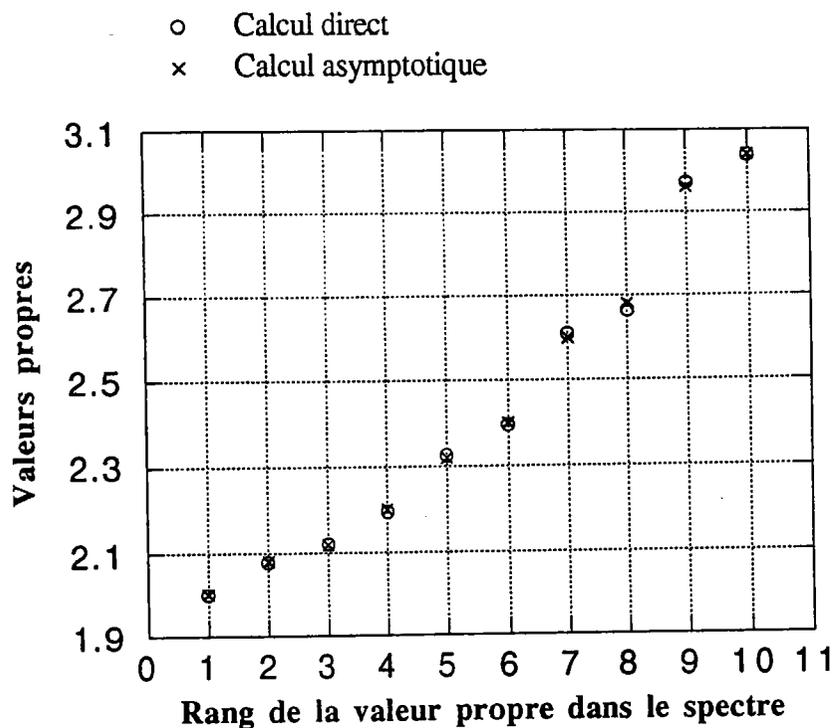


figure 7 Résultats pour  $\varepsilon = 0,06$  et  $L=10\pi$



**figure 8** Résultats pour  $\varepsilon = 0,08$  et  $L=10\pi$

**TROISIÈME CAS:  $f(x)=\sin(x)$**

Dans ce cas nous avons la même formule asymptotique que dans le premier cas. En effet, les constantes  $C_1$  et  $C_2$  sont nulles :

$$\lambda(n) = 2 + 4 \frac{n^2 \pi^2}{L^2} + \theta(\varepsilon^2)$$

On constate que l'influence de la perturbation est inexistante ce qui est confirmé par le calcul exact (à 3% près). Par contre on a toujours l'effet des bords lié aux conditions aux limites. On donne le tableau des valeurs propres  $\lambda_9$  et  $\lambda_{10}$ :

$\varepsilon$	0.00	0.05	0.06	0.09
$\lambda_9$	2.974	2.971	2.970	2.965
$\lambda_{10}$	3.038	3.038	3.038	3.037

- Calcul direct
- × Calcul asymptotique

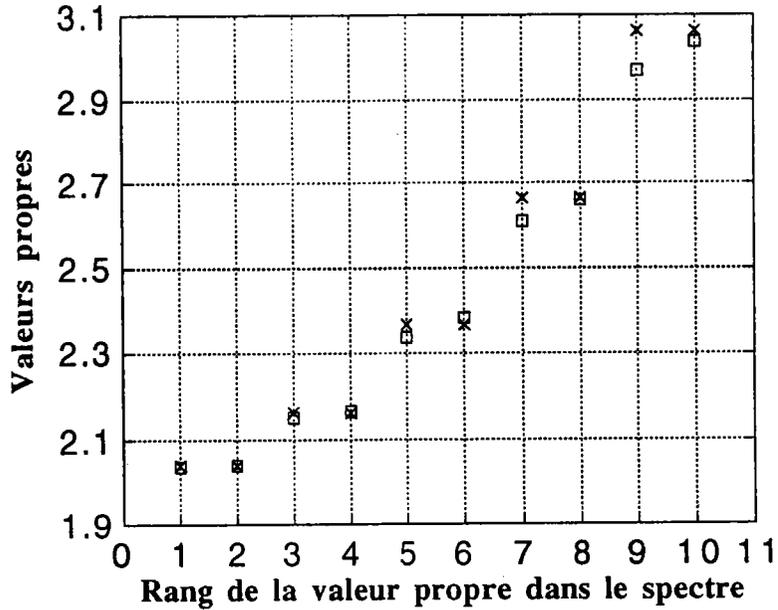


figure 9 Résultats  $\varepsilon = 0.09$  et  $L = 10\pi$

### 2.3.8..Conclusions

A partir des résultats obtenus sur ce modèle représentatif des problèmes de valeurs propres sans cellule de base, il apparaît que les modes globaux vérifient une équation différentielle du second ordre ayant la forme suivante :

$$\begin{cases} 4 \frac{d^2}{dX^2} A_0 + (\lambda_1 - C_1) A_0 - C_2 \bar{A}_0 = 0 \\ A_0(X) \text{ complexe} \end{cases}$$

Cette équation d'amplitude a la même forme que celle utilisée dans les

études de flambage des structures très élancées (équation de type Ginzburg-Landau par exemple). Ces amplitudes prennent bien en compte la modulation des modes locaux qui sont périodiques suivant la variable locale.

Les exemples présentés ici concernent une structure modérément élancée, la longueur correspond à 5 longueurs d'onde. L'analyse asymptotique permet d'évaluer une dizaine de valeurs propres avec une assez bonne précision. Pour une structure deux ou trois fois plus longue, nous avons vérifié que l'analyse asymptotique donne un paquet deux ou trois fois plus important. Donc plus la structure est élancée, plus l'analyse directe est difficile, plus l'analyse asymptotique est efficace.

Cette analyse en échelle double permet de séparer le problème initial, qui est traité sur toute la structure, en deux problèmes aux valeurs propres de taille réduite. Le premier est local et est posé sur une période. Le deuxième est global et sa résolution conduit à l'expression asymptotique des valeurs propres. Ceci peut permettre donc un gain considérable en temps de calcul et en espace mémoire.

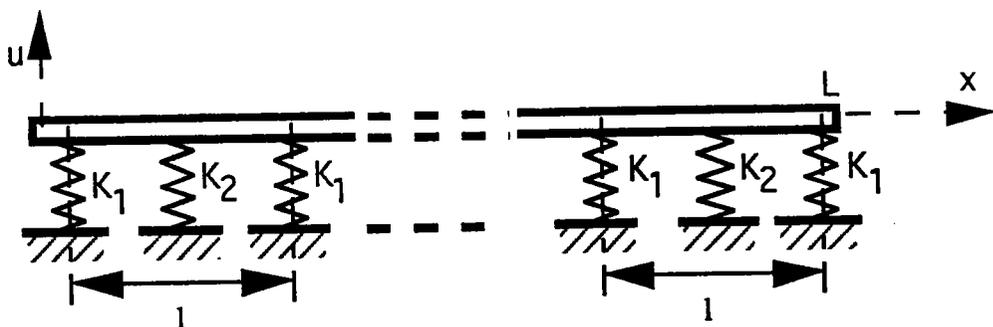
### **3 APPLICATION AUX VIBRATIONS DES STRUCTURES RÉPÉTITIVES**

#### **3.1. Introduction**

Dans ce chapitre, nous étudions les capacités de la méthode proposée précédemment à calculer les premières fréquences propres de vibration d'une longue structure à forme répétitive. Le modèle choisi est représentatif des longues structures flexibles avec cellule de base. On calculera une partie du premier paquet des valeurs propres en comparant le calcul asymptotique et le calcul direct.

#### **3.2. Présentation du modèle**

On s'intéresse à l'étude de vibration propre d'une longue poutre homogène élastique de rigidité à la flexion  $EI$  ( $E$  est le module d'Young et  $I$  est le moment d'inertie de flexion) et de longueur  $L$ , reposant sur une fondation élastique. Cette fondation est constituée de ressorts ( $K_1$  et  $K_2$ ) répartis de façon discrète et périodique (Figure 1). La poutre n'est soumise à aucun effort extérieur.



**Figure 1**

La structure peut être considérée comme l'assemblage d'un grand nombre

de cellules identiques. Chacune de ces cellules est constituée d'une poutre de longueur  $l$  ayant les mêmes caractéristiques que la structure globale, reposant sur deux ressorts  $K_1$  et  $K_2$ .

### 3.3. Écritures du problème de vibration propre

En appliquant le principe des puissances virtuelles:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{\text{int}}(u, \delta u) + P_{\text{ext}}(u, \delta u) = P_{\text{acc}}(\ddot{u}, \delta u) \\ u, \delta u \text{ déplacements cinématiquement admissibles} \\ P_{\text{int}}(u, \delta u) \text{ puissance virtuelle des efforts intérieurs} \\ P_{\text{ext}}(u, \delta u) \text{ puissance virtuelle des efforts extérieurs} \\ P_{\text{acc}}(u, \delta u) \text{ puissance virtuelle des accélérations} \end{array} \right.$$

et en cherchant des solutions de type  $U(x,t) = u(x)e^{i\omega t}$  où  $t$  est le paramètre temps, on obtient l'écriture variationnelle du problème de vibration propre du modèle:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{On cherche } u(x) \text{ cinématiquement admissible et } \omega \\ \text{tels que :} \\ \int_{x=0}^{x=L} EI \frac{d^2}{dx^2} u \frac{d^2}{dx^2} \delta u \, dx + \sum_{i=0}^{i=N_c} K_1 u(i l) \delta u(i l) + \sum_{i=1}^{i=N_c} K_2 u(i l - \frac{l}{2}) \delta u(i l - \frac{l}{2}) = \\ \omega^2 \rho S \int_{x=0}^{x=L} u \delta u \, dx \quad \forall \delta u(x) \text{ cinématiquement admissible} \end{array} \right.$$

$\omega$ : pulsation de vibration propre.

$E$ : module d'Young.

$I$ : moment quadratique.

$\rho$ : masse volumique

$S$ : aire de la section droite.

- l: longueur d'une cellule.
- L: longueur totale de la poutre
- $N_c$ : nombre de cellules de la structure.

En tenant compte du saut de l'effort tranchant au milieu et à chaque extrémité d'une cellule, on peut réécrire le problème de vibration propre de la structure sous la forme suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^4}{dx^4} u(x) = \lambda u(x) \\ \frac{d^3}{dx^3} u(0) = k_1 u(0) \\ \left[ \left[ \frac{d^3}{dx^3} u(il) \right] \right] = k_1 u(il) \quad i = 1..N_c - 1 \\ \left[ \left[ \frac{d^3}{dx^3} u\left(il - \frac{1}{2}\right) \right] \right] = k_2 u\left(il - \frac{1}{2}\right) \quad i = 1..N_c \\ \frac{d^3}{dx^3} u(L) = -k_1 u(L) \end{array} \right. \quad (1)$$

avec  $\lambda = \frac{\omega^2 \rho S}{EI}$  et  $k_i = \frac{K_i}{EI}$  pour  $i = 1$  et  $2$

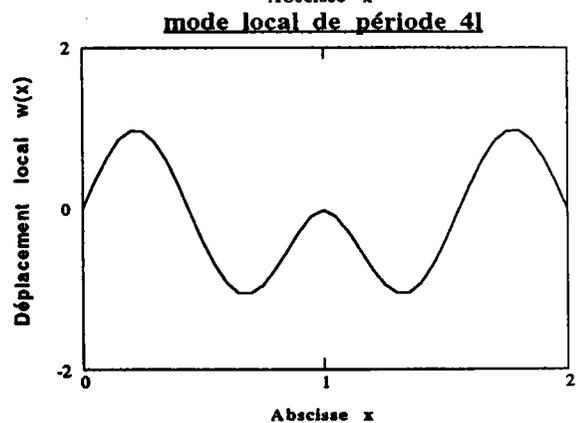
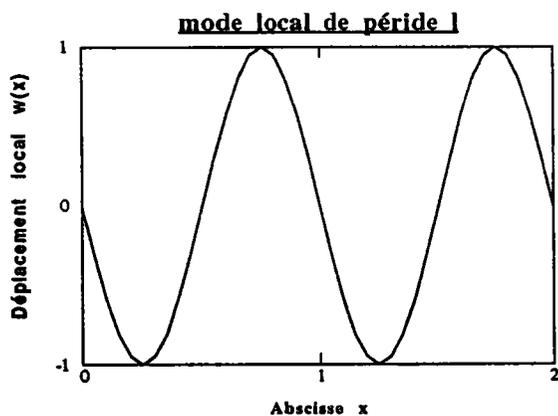
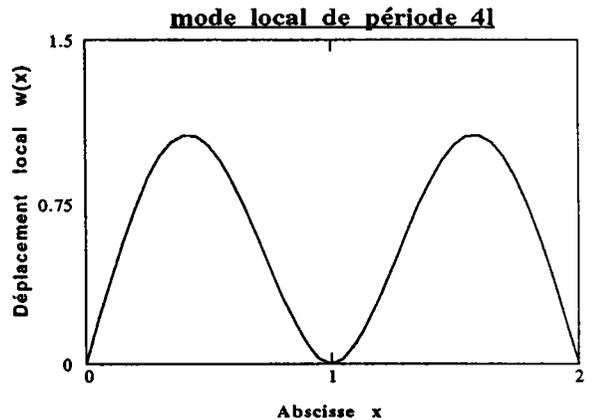
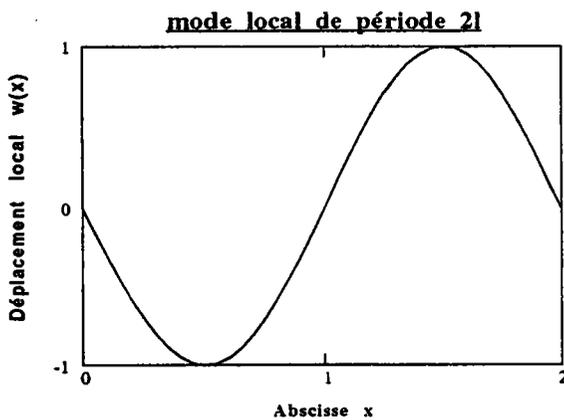
### 3.4. Problèmes locaux et modes locaux

Dans ce paragraphe nous nous intéressons à la définition des problèmes locaux du modèle, sur lesquels notre analyse en échelle double est basée.

On appelle problème local toute solution du problème initial avec des conditions de périodicité sur une, deux, trois,...etc cellules de base. Ce problème local s'écrit de la façon suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^4}{dx^4} w(x) = \lambda w(x) \\ \left[ \left[ \frac{d^3}{dx^3} w(il) \right] \right] = k_1 w(il) \quad i = 0..N_c - 1 \\ \left[ \left[ \frac{d^3}{dx^3} w(il - \frac{1}{2}) \right] \right] = k_2 w(il - \frac{1}{2}) \quad i = 1..N_c \\ w(x) \text{ est périodique sur une, ou deux,.... cellules de base} \end{array} \right.$$

Ce problème local sera donc calculé par la méthode des éléments finis sur une, ou deux,.... cellules de base en tenant compte des conditions de périodicité. Nous présentons ci-dessous des exemples numériques de modes locaux de différentes périodes dans le cas où  $k_1 = 100000$ ,  $k_2 = 0$  et  $l = 1$ .



### **3.5. Analyse des modes et des fréquences propres du calcul direct**

Nous avons effectué un certain nombre de calculs directs pour différentes conditions aux limites (par exemple: cas où les extrémités de la poutre sont encastrées, cas où ils sont en appui simple). Ce calcul direct est basé sur la méthode des éléments finis. L'élément fini utilisé est l'élément poutre de type Hermite. On constate que le spectre des valeurs propres calculé est formé par un ensemble de paquets distincts. Chacun de ces paquets est un ensemble de valeurs propres voisines (Voir l'introduction générale). De plus les premiers modes de chaque paquet sont localement périodiques et modulés. Cette dernière remarque est illustrée par les cas qui suivent (Figure 2 et Figure 3).

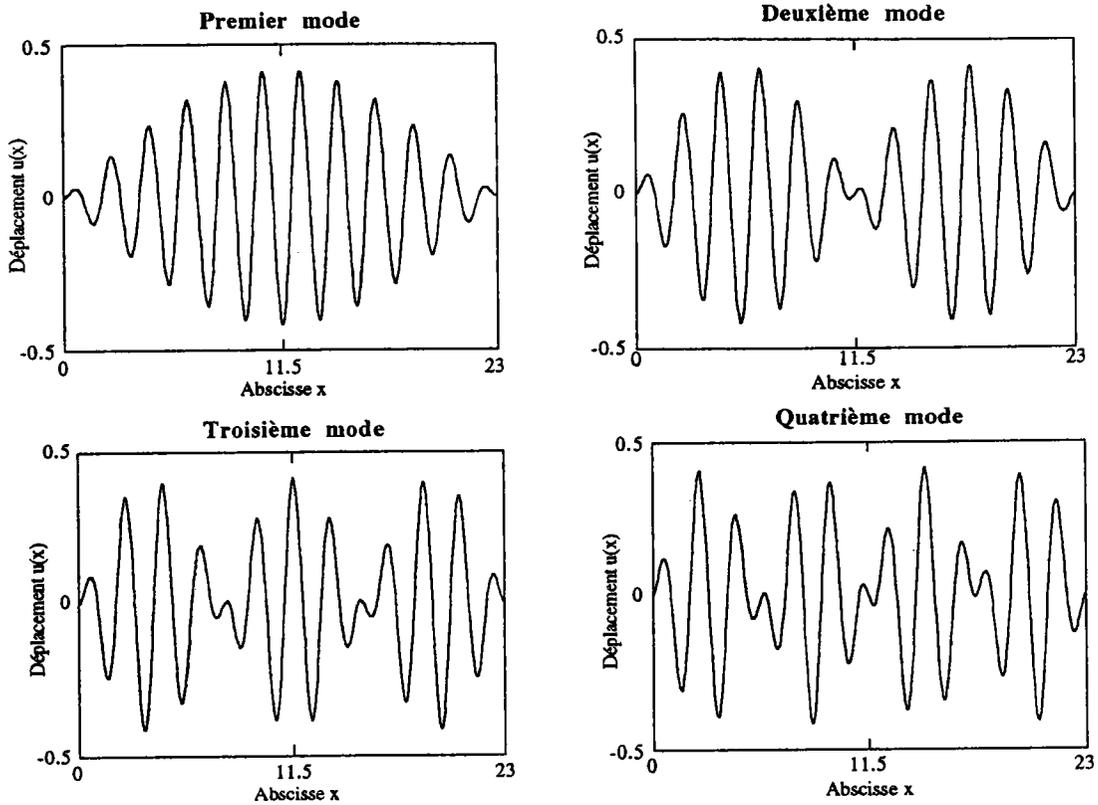
#### **a) Premier cas : Encastrement**

Nous présentons les quatre premiers modes du premier paquet calculés directement sur toute la structure par la méthode des éléments finis. Le cas présenté correspond à un encastrement des deux extrémités de la poutre.

$l=1$   $L=23$  (23 cellules),  $k_1=100000$  et  $k_2=0$

Les autres paramètres sont pris égaux à 1 .

Les valeurs propres correspondantes à ces quatre modes valent respectivement 98.47, 101.6, 107.0 et 114.4.



**Figure 2**

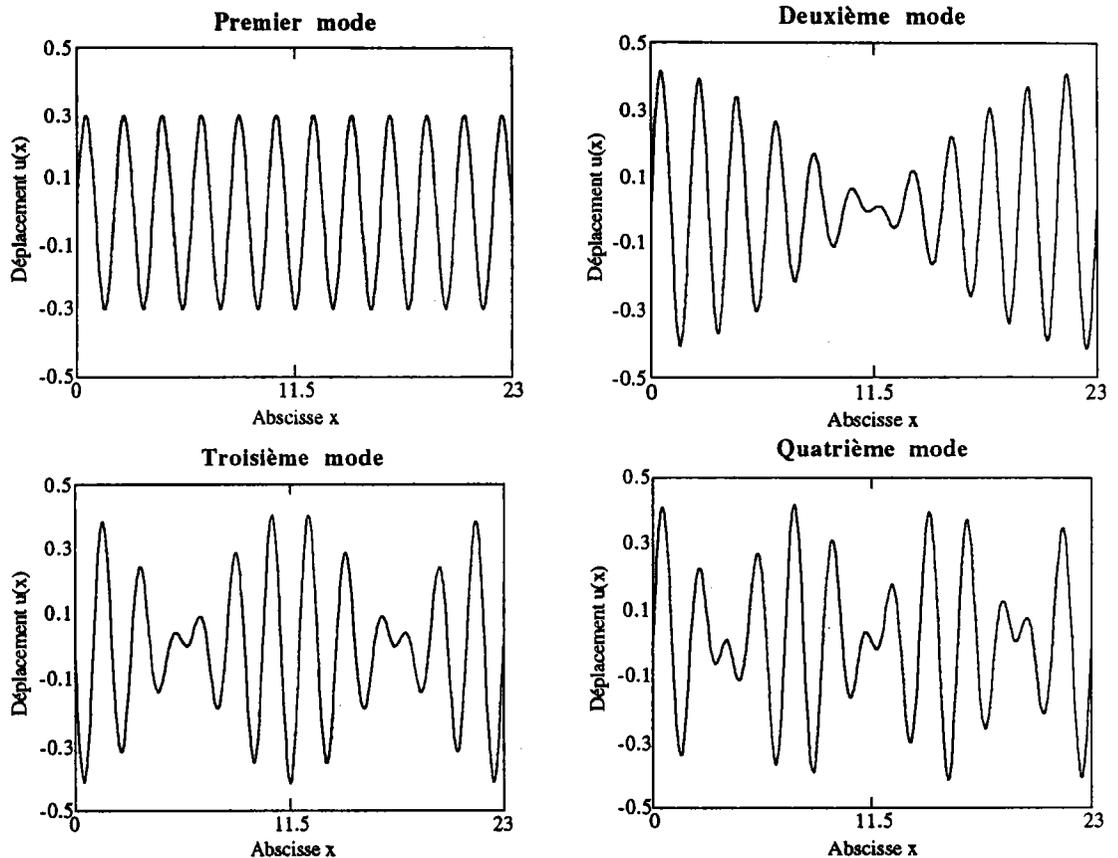
**b) Deuxième cas : Appui simple**

Nous présentons les quatre premiers modes du premier paquet calculés directement sur toute la structure par la méthode des éléments finis. Le cas présenté correspond à un appui simple des deux extrémités de la poutre.

$l=1$   $L=23$  (23 cellules),  $k_1=100000$  et  $k_2=0$

Les autres paramètres sont pris égaux à 1 .

Les valeurs propres correspondantes à ces quatre modes valent respectivement 97.41, 98.47, 101.6 et 107.0.



**Figure 3**

### 3.6. Application de la méthode d'échelle double

Par application de la méthode d'échelle double, on cherche les inconnues du problème  $u$  et  $\lambda$  sous les formes asymptotiques suivantes:

$$u = u_0(X, x) + \eta u_1(X, x) + \eta^2 u_2(X, x) + \eta^3 u_3(X, x) + \dots \text{etc}$$

$$\lambda = \lambda_0 + \eta \lambda_1 + \eta^2 \lambda_2 + \eta^3 \lambda_3 + \eta^4 \lambda_4 + \dots \text{etc}$$

$X = \eta x$  la variable globale (ou lente) qui décrira ce qui se passe globalement.  
 $x$  la variable locale (ou rapide).

$\eta$  est un paramètre petit devant 1, choisi comme étant le rapport entre la longueur d'une cellule et le longueur totale de la structure (supposée très grande):  $\eta = \frac{1}{N_c}$  où  $N_c$  est le nombre de cellules de la structure.

De plus on suppose que le déplacement  $u$  est localement périodique de période  $pl$  (selon la variable rapide  $x$ ), ce qui assure la continuité du mode entre deux cellules voisines.

En introduisant les développements asymptotiques de  $u(x)$  et  $\lambda$  dans l'écriture précédente (1) (§ 3.2), et en respectant la règle de dérivation liée à la méthode d'échelle double, on obtient les problèmes suivants à chaque ordre  $\eta$  :

**Problème à l'ordre  $\eta^0$**

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 \text{ périodique en } x \text{ de période } pl \text{ et deux fois continument différentiable} \\ \frac{\partial^4}{\partial x^4} u_0 - \lambda_0 u_0 = 0 \\ \left[ \left[ \frac{\partial^3}{\partial x^3} u_0(i l) \right] \right] = k_1 u_0(i l) \quad i = 0..N_c - 1 \\ \left[ \left[ \frac{\partial^3}{\partial x^3} u_0\left(i l - \frac{1}{2}\right) \right] \right] = k_2 u_0\left(i l - \frac{1}{2}\right) \quad i = 1..N_c \end{array} \right.$$

**Problème à l'ordre  $\eta$**

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 \text{ périodique en } x \text{ de période } pl \text{ et deux fois continument différentiable} \\ \frac{\partial^4}{\partial x^4} u_1 - \lambda_0 u_1 = -4 \frac{\partial^4}{\partial X \partial x^3} u_0 + \lambda_1 u_0 \\ \left[ \left[ \frac{\partial^3}{\partial x^3} u_1(il) \right] \right] = k_1 u_1(il) - 3 \left[ \left[ \frac{\partial^3}{\partial X \partial x^2} u_0(il) \right] \right] \quad i = 0..N_c - 1 \\ \left[ \left[ \frac{\partial^3}{\partial x^3} u_1(il - \frac{1}{2}) \right] \right] = k_2 u_1(il - \frac{1}{2}) - 3 \left[ \left[ \frac{\partial^3}{\partial X \partial x^2} u_0(il - \frac{1}{2}) \right] \right] \quad i = 1..N_c \end{array} \right.$$

**Problème à l'ordre  $\eta^2$**

$$\left\{ \begin{array}{l} u_2 \text{ périodique en } x \text{ de période } pl \text{ et deux fois continument différentiable} \\ \frac{\partial^4}{\partial x^4} u_2 - \lambda_0 u_2 = -6 \frac{\partial^4}{\partial X^2 \partial x^2} u_0 + \lambda_2 u_0 - 4 \frac{\partial^4}{\partial X \partial x^3} u_1 + \lambda_1 u_1 \\ \left[ \left[ \frac{\partial^3}{\partial x^3} u_2(il) \right] \right] = k_1 u_2(il) - 3 \left[ \left[ \frac{\partial^3}{\partial X \partial x^2} u_1(il) \right] \right] - 3 \left[ \left[ \frac{\partial^3}{\partial X^2 \partial x} u_0(il) \right] \right] \quad i = 0..N_c - 1 \\ \left[ \left[ \frac{\partial^3}{\partial x^3} u_2(il - \frac{1}{2}) \right] \right] = k_2 u_2(il - \frac{1}{2}) - 3 \left[ \left[ \frac{\partial^3}{\partial X \partial x^2} u_1(il - \frac{1}{2}) \right] \right] \\ - 3 \left[ \left[ \frac{\partial^3}{\partial X^2 \partial x} u_0(il - \frac{1}{2}) \right] \right] \quad i = 1..N_c \end{array} \right.$$

Les variables X et x sont considérées indépendantes par la méthode d'échelle double. La solution du problème à l'ordre  $\eta^0$  est de type:

$$u_0(X, x) = A_0(X)w_0(x)$$

où  $w_0(x)$  et  $\lambda_0$  vérifie le problème local suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_0(x) \text{ périodique de période } pl \text{ et deux fois continument différentiable} \\ \frac{d^4}{dx^4} w_0(x) - \lambda_0 w_0(x) = 0 \\ \left[ \left[ \frac{d^3}{dx^3} w_0(il) \right] \right] = k_1 w_0(il) \quad i = 0..p-1 \\ \left[ \left[ \frac{d^3}{dx^3} w_0(il - \frac{1}{2}) \right] \right] = k_2 w_0(il - \frac{1}{2}) \quad i = 1..p \end{array} \right.$$

C'est un problème au valeurs propres qui est calculé sur la cellule de base de la structure avec des conditions de périodicité. On peut écrire le problème à l'ordre  $\eta$  sous la forme:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 \text{ périodique en } x \text{ de période } pl \text{ et deux fois continument différentiable} \\ \ell(\lambda_0)u_1 = -4 \frac{\partial^4}{\partial X \partial x^3} u_0 + \lambda_1 u_0 \\ \left[ \left[ \frac{\partial^3}{\partial x^3} u_1(il) \right] \right] = k_1 u_1(il) - 3 \left[ \left[ \frac{\partial^3}{\partial X \partial x^2} u_0(il) \right] \right] \quad i = 0..N_c - 1 \\ \left[ \left[ \frac{\partial^3}{\partial x^3} u_1(il - \frac{1}{2}) \right] \right] = k_2 u_1(il - \frac{1}{2}) - 3 \left[ \left[ \frac{\partial^3}{\partial X \partial x^2} u_0(il - \frac{1}{2}) \right] \right] \quad i = 1..N_c \end{array} \right.$$

avec  $\ell(\lambda_0) = \frac{\partial^4}{\partial x^4} - \lambda_0$

Sur ce problème nous appliquons la condition de solvabilité suivante:

$$\langle \ell(\lambda_0)u_1, u_0 \rangle = 0 \Leftrightarrow -4A'_0 \langle w_0''', w_0 \rangle + \lambda_1 A_0 \langle w_0, w_0 \rangle = 0$$

En tenant compte de la symétrie du premier mode local  $w_0(x)$ , nous obtenons  $\lambda_1 = 0$  et la solution à l'ordre  $\eta$  est alors:

$$u_1(X, x) = A_1(X)w_0(x) + A'_0(X)w_1(x)$$

où  $w_1(x)$  est la solution du deuxième problème local suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_1 \text{ périodique de période } pl \text{ et deux fois continument différentiable} \\ \frac{d^4}{dx^4} w_1 - \lambda_0 w_1 = -4 \frac{d^3}{dx^3} w_0 \\ \left[ \left[ \frac{d^3}{dx^3} w_1(il) \right] \right] = k_1 w_1(il) - 3 \left[ \left[ \frac{d^2}{dx^2} w_0(il) \right] \right] \quad i = 0..p-1 \\ \left[ \left[ \frac{d^3}{dx^3} w_1(il - \frac{1}{2}) \right] \right] = k_2 w_1(il - \frac{1}{2}) - 3 \left[ \left[ \frac{d^2}{dx^2} w_0(il - \frac{1}{2}) \right] \right] \quad i = 1..p \end{array} \right.$$

### 3.7. Équation d'amplitude

Le problème à l'ordre  $\eta^2$  s'écrit sous la forme:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_2 \text{ périodique en } x \text{ de période } pl \text{ et deux fois continument différentiable} \\ \ell(\lambda_0) u_2 = -6 \frac{\partial^4}{\partial X^2 \partial x^2} u_0 + \lambda_2 u_0 - 4 \frac{\partial^4}{\partial X \partial x^3} u_1 \\ \left[ \left[ \frac{\partial^3}{\partial x^3} u_2(il) \right] \right] = k_1 u_2(il) - 3 \left[ \left[ \frac{\partial^3}{\partial X \partial x^2} u_1(il) \right] \right] - 3 \left[ \left[ \frac{\partial^3}{\partial X^2 \partial x} u_0(il) \right] \right] \quad i = 0..N_c - 1 \\ \left[ \left[ \frac{\partial^3}{\partial x^3} u_2(il - \frac{1}{2}) \right] \right] = k_2 u_2(il - \frac{1}{2}) - 3 \left[ \left[ \frac{\partial^3}{\partial X \partial x^2} u_1(il - \frac{1}{2}) \right] \right] \\ \quad - 3 \left[ \left[ \frac{\partial^3}{\partial X^2 \partial x} u_0(il - \frac{1}{2}) \right] \right] \quad i = 1..N_c \end{array} \right.$$

En appliquant la condition de solvabilité, comme pour le problème précédent, nous obtenons une équation différentielle du second ordre vérifiée par l'amplitude  $A_0(X)$ :

$$C \frac{d^2}{dX^2} A_0 + \lambda_2 A_0 = 0$$

où la constante C est calculée à partir de la détermination des problèmes locaux déterminés précédemment. Elle s'écrit sous la forme:

$$C = \frac{-6\langle w_0'', w_0 \rangle - 4\langle w_1''', w_0 \rangle}{\langle w_0, w_0 \rangle}$$

C'est encore un nouveau problème aux valeurs propres dont les inconnues sont les couples  $(A_0(X), \lambda_2)$ . La solution à l'ordre  $\eta^2$  s'écrit sous la forme:

$$u_2(X, x) = A_2(X)w_0(x) + A_1'(X)w_1(x) + A_0''(X)w_2(x)$$

où  $w_2(x)$  est la solution du troisième problème local suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_2 \text{ périodique de période } pl \text{ et deux fois continument différentiable} \\ \frac{d^4}{dx^4} w_2 - \lambda_0 w_2 = -6 \frac{d^2}{dx^2} w_0 - C w_0 - 4 \frac{d^3}{dx^3} w_1 \\ \left[ \left[ \frac{d^3}{dx^3} w_2(i1) \right] \right] = k_1 w_2(i1) - 3 \left[ \left[ \frac{d^2}{dx^2} w_1(i1) \right] \right] - 3 \left[ \left[ \frac{d}{dx} w_0(i1) \right] \right] \quad i = 0..p-1 \\ \left[ \left[ \frac{d^3}{dx^3} w_2(i1 - \frac{1}{2}) \right] \right] = k_2 w_2(i1 - \frac{1}{2}) - 3 \left[ \left[ \frac{d^2}{dx^2} w_1(i1 - \frac{1}{2}) \right] \right] \\ \quad - 3 \left[ \left[ \frac{d}{dx} w_0(i1 - \frac{1}{2}) \right] \right] \quad i = 1..p \end{array} \right.$$

### 3.8..Prise en compte des conditions aux limites

Afin de résoudre le problème global (équation d'amplitude calculée

précédemment), il faut avoir deux conditions aux limites imposées sur le mode global, puisque l'équation différentielle est du second ordre. Ces conditions sont déterminées en réécrivant les développements asymptotiques des conditions aux limites aux bords. Nous allons traiter deux types de conditions aux limites :

### 3.8.1. Premier cas:

Nous considérons que les bords  $x=0$  et  $x=L$  de la poutre sont encastés, ceci se traduit en chaque bord par les relations suivantes :

$$\begin{cases} u(0) = u(L) = 0 \\ \frac{d}{dx}u(0) = \frac{d}{dx}u(L) = 0 \end{cases}$$

En introduisant l'expression asymptotique de  $u(x)$  dans ces relations, on obtient à chaque extrémité :

$$\begin{cases} A_0 w_0 + \eta(A'_0 w_1 + A_1 w_0) + O(\eta^2) = 0 \\ A_0 w'_0 + \eta(A'_0 w'_1 + A'_0 w_0 + A_1 w'_0) + O(\eta^2) = 0 \end{cases}$$

Pour déterminer les conditions aux limites imposées sur l'amplitude, il faut distinguer deux cas :

a) Si le mode local est tel que  $w_0$  et  $w'_0$  ne sont pas nuls en  $x=0$  et  $x=L$  alors les conditions aux limites que doit vérifier l'amplitude à l'ordre 1 sont :

$$A_0(X=0) = A_0(X=L\eta) = 0$$

b) Si le mode local est tel que  $w_0$  et  $w'_0$  sont nuls et si  $w_1$  n'est pas nul en

$x=0$  et  $x=L$  alors les conditions aux limites que doit vérifier l'amplitude à l'ordre 1 sont :

$$A'_0(X=0) = A'_0(X=L\eta) = 0$$

### 3.8.2. Deuxième cas:

Nous considérons à présent que les bords  $x=0$  et  $x=L$  de la poutre sont en appui simple, ceci se traduit en chaque bord par les relations suivantes :

$$\begin{cases} u(0) = u(L) = 0 \\ \frac{d^2}{dx^2} u(0) = \frac{d^2}{dx^2} u(L) = 0 \end{cases}$$

En introduisant l'expression asymptotique de  $u(x)$  dans ces relations, on obtient à chaque extrémité :

$$\begin{cases} A_0 w_0 + \eta(A'_0 w_1 + A_1 w_0) + O(\eta^2) = 0 \\ A_0 w''_0 + \eta(A'_0 w''_1 + 2A'_0 w'_0 + A_1 w''_0) + O(\eta^2) = 0 \end{cases}$$

Pour déterminer les conditions aux limites imposées sur l'amplitude, il faut distinguer deux cas :

a) Si le mode local est tel que  $w_0$  et  $w''_0$  ne sont pas nuls en  $x=0$  et  $x=L$ , alors les conditions aux limites que doit vérifier l'amplitude à l'ordre 1 sont :

$$A_0(X=0) = A_0(X=L\eta) = 0$$

b) Si le mode local est tel que  $w_0$  et  $w''_0$  sont nuls en  $x=0$  et  $x=L$  alors les conditions aux limites que doit vérifier l'amplitude à l'ordre 1 sont :

$$A'_0(X=0) = A'_0(X=L\eta) = 0$$

De la même façon nous pouvons traiter d'autres types de conditions aux limites. Il faut toutefois souligner que l'approche présentée ici est discutable, parce qu'incomplète. Le développement asymptotique n'est pas forcément valable jusqu'au bord. Près des bords, une couche limite peut exister dès que l'on n'arrive pas à satisfaire les deux conditions aux limites: presque toujours ces solutions localisées près des bords apparaîtront à un certain ordre. Nous les introduisons au chapitre suivant.

### **3.9. Calcul asymptotique des valeurs propres au second ordre**

Reprenons l'équation d'amplitude (problème global) calculée précédemment:

$$C \frac{d^2}{dX^2} A_0 + \lambda_2 A_0 = 0$$

où la constante  $C$  est calculée à partir de la détermination des problèmes locaux. Il est facile de voir que les solutions bornées de cette équation s'écrivent sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0(X) = a \sin(KX) + b \cos(KX) \\ \text{où } a, b \text{ et } K \text{ seront déterminées à partir} \\ \text{des conditions aux limites.} \end{array} \right.$$

Prenons par exemple le cas où on a :  $A_0(X=0) = A_0(X=L\eta) = 0$   
alors la solution globale s'écrit :

$$\begin{cases} A_0(X) = a \sin(KX) \\ K = \frac{n\pi}{L\eta} \quad n = 1, 2, \dots \\ a \text{ une constante arbitraire} \end{cases}$$

En introduisant cette solution dans l'équation d'amplitude, on obtient les valeurs de  $\lambda_2$  :

$$\lambda_2 = \frac{n^2 \pi^2}{L^2 \eta^2} \quad \text{où } n = 1, 2, \dots$$

Ainsi on obtient l'expression asymptotique du spectre des valeurs propres au second ordre en fonction de l'entier  $n$  :

$$\begin{cases} \lambda(n) = \lambda_0 + C \frac{n^2 \pi^2}{L^2} + O(\eta^3) \\ n = 1, 2, \dots \text{ etc} \end{cases}$$

On remarque l'effet de l'élanement de la structure dans cette expression.

Dans le cas où on a :  $A'_0(X=0) = A'_0(X=L\eta) = 0$  on obtient :

$$\begin{cases} \lambda(n) = \lambda_0 + C \frac{n^2 \pi^2}{L^2} + O(\eta^3) \\ n = 0, 1, 2, \dots \text{ etc} \end{cases}$$

La forme de l'amplitude dans ce cas est:

$$\begin{cases} A_0(X) = b \cos(KX) \\ K = \frac{n\pi}{L\eta} \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ b \text{ une constante arbitraire} \end{cases}$$

De la même manière nous pouvons traiter d'autres types de conditions aux limites. Prenons par exemple le cas où le bord  $x=0$  est encasté (Premier cas a)) et le bord  $x=L$  est en appui simple (Deuxième cas b)). Ceci se traduit au niveau de l'amplitude par :

$$A_0(X=0) = \frac{\partial}{\partial X} A_0(X=L\eta) = 0$$

Ainsi on détermine l'amplitude et l'expression asymptotique des valeurs propres.

$$\begin{cases} A_0(X) = a \sin(KX) \\ K = \frac{(2n+1)\pi}{2L\eta} \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ a \text{ une constante arbitraire} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda(n) = \lambda_0 + C \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4L^2} + O(\eta^3) \\ n = 0, 1, 2, \dots \text{etc} \end{cases}$$

Nous rappelons que la constante  $C$  est calculée à partir de la détermination des problèmes locaux. Nous rappelons aussi que la résolution de ces problèmes locaux est faite par la méthode des éléments finis sur une cellule de base en tenant compte des conditions de périodicité imposées sur les modes locaux.

### 3.10. Comparaison entre le calcul direct et le calcul asymptotique

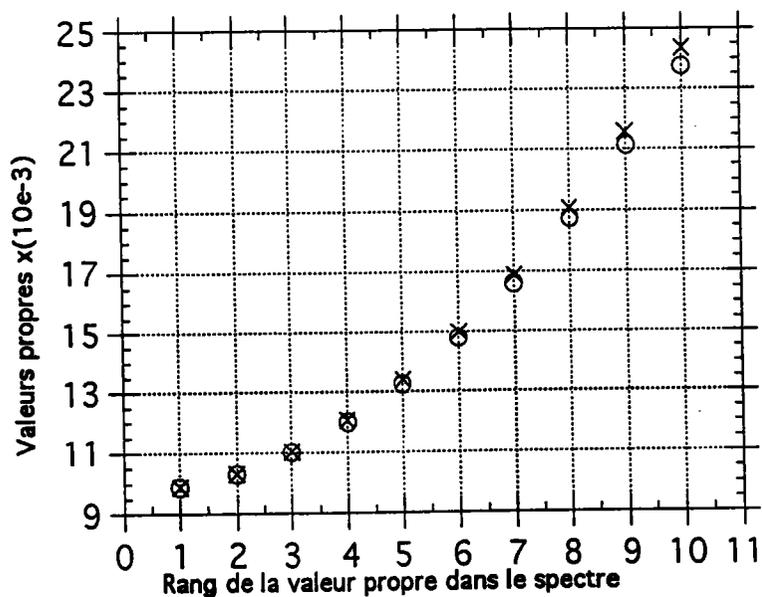
Dans ce paragraphe nous confrontons le calcul asymptotique des valeurs propres déterminé précédemment et leur calcul direct basé sur la méthode des éléments finis en discrétisant toute la structure. Cette comparaison est étudiée pour différents types de conditions aux limites et différentes valeurs des paramètres du modèle.

#### Cas encastré-encastré

Nous traitons le cas où les extrémités  $x=0$  et  $x=L$  de la poutre sont encastrées, ceci pour différentes valeurs des raideurs et des longueurs.

**$k_1 = 100000$ ,  $k_2 = 0$ ,  $l = 10$  et  $L = 200$**

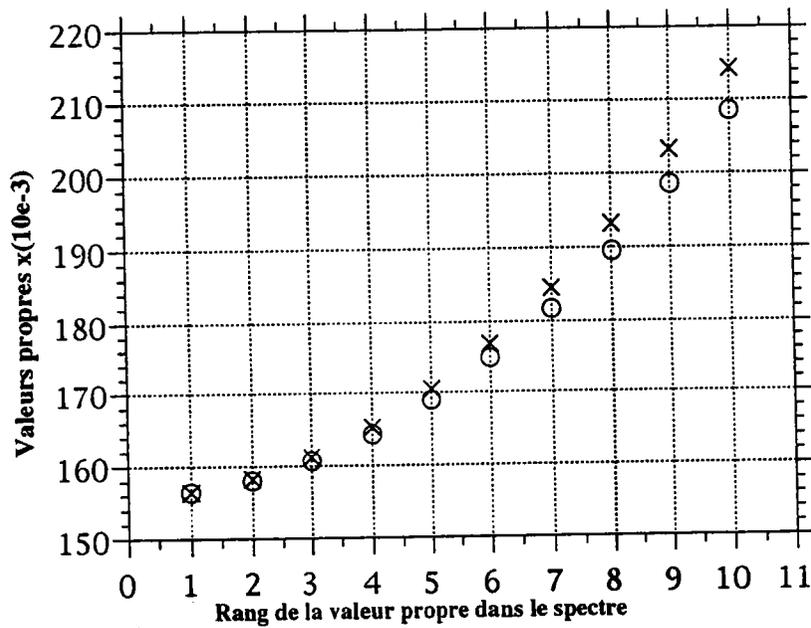
- Calcul numérique direct
- × Calcul asymptotique-numérique



n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\lambda$ exacte (x10e-3)	9.881	10.302	11.000	11.989	13.250	14.800	16.630	18.740	21.130
$\lambda$ ordre2 (x10e-3)	9.887	10.325	11.050	12.078	13.390	15.000	16.900	19.090	21.570

$k_1 = 100000$ ,  $k_2 = 10$ ,  $l = 10$  et  $L = 200$

- Calcul direct
- × Calcul asymptotique-numérique

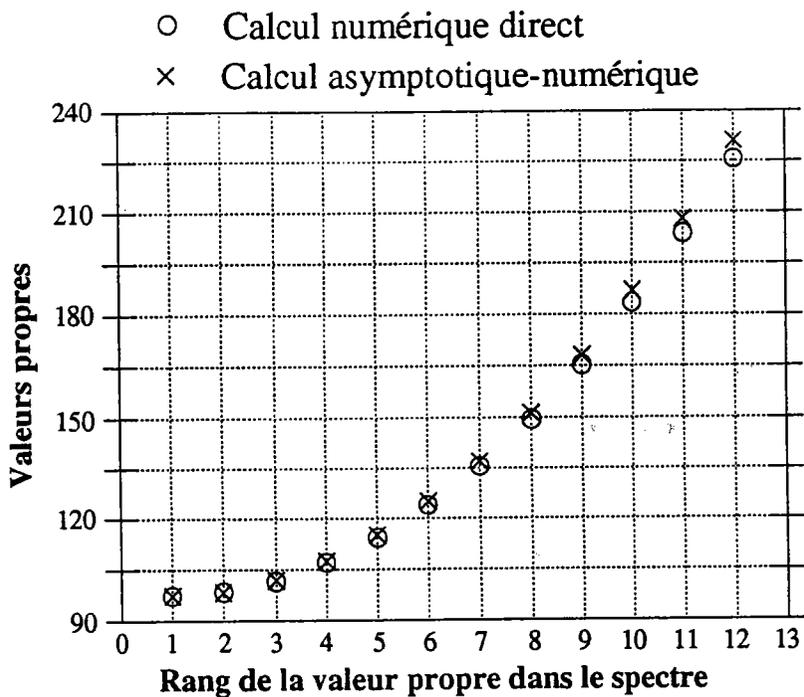


n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\lambda$ exacte	0.1564	0.1580	0.1606	0.1643	0.1691	0.1749	0.1817	0.1896	0.1985
$\lambda$ ordre2	0.1564	0.1582	0.1611	0.1652	0.1705	0.1769	0.1845	0.1932	0.2032

**Cas appui-appui**

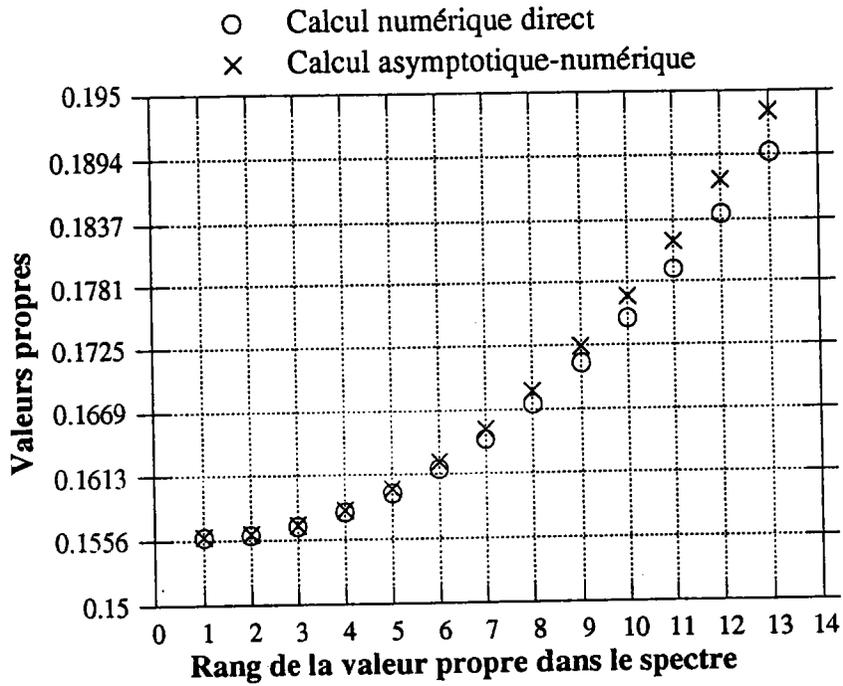
Nous traitons le cas où les extrémités  $x=0$  et  $x=L$  de la poutre sont en appui simple.

**$k_1 = 100000$  ,  $k_2 = 0$  ,  $l = 1$  et  $L = 23$**



n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\lambda$ exacte	97.410	98.470	101.60	107.00	114.40	123.90	135.60	149.50	165.40
$\lambda$ ordre2	97.41	98.515	101.83	107.35	115.08	125.03	137.18	151.54	168.11

**$k_1 = 100000$  ,  $k_2 = 10$  ,  $l = 10$  et  $L = 300$**

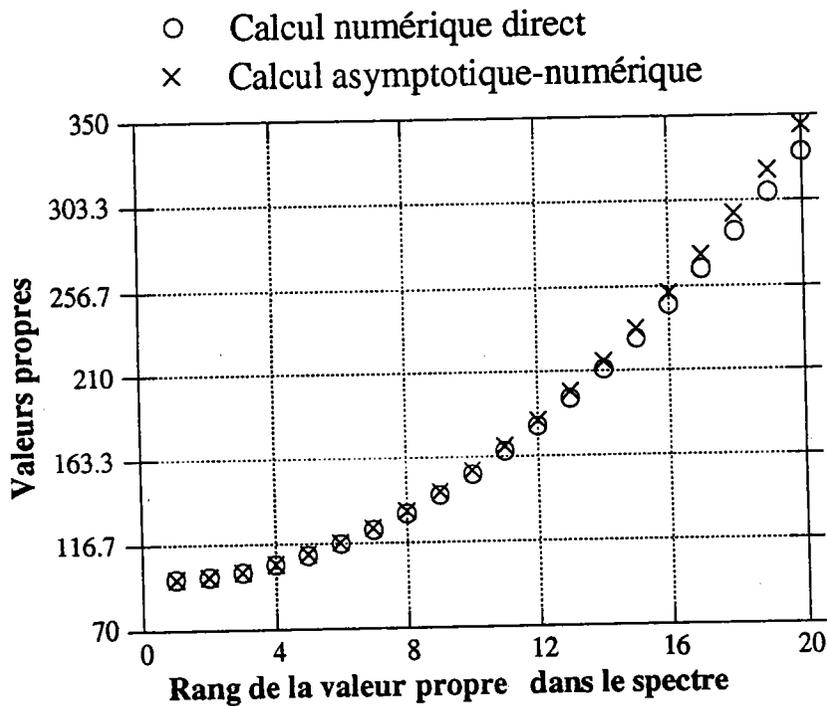


n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\lambda$ exacte	0.1559	0.1561	0.1568	0.1580	0.1596	0.1617	0.1643	0.1674	0.1709
$\lambda$ ordre2	0.1559	0.1561	0.1569	0.1582	0.1600	0.1623	0.1652	0.1685	0.1724

**Cas encastré-appui**

Nous traitons le cas où l'extrémités  $x=0$  est encastrée et l'extrémité  $x=L$  est en appui simple.

**$k_1 = 100000, k_2 = 0, l = 1$  et  $L = 30$**



n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\lambda$ exacte	97.560	98.810	101.30	105.00	110.00	116.30	123.80	132.50	142.50
$\lambda$ ordre2	97.562	98.861	101.46	105.35	110.55	117.04	124.83	133.92	144.31

On voit qu'on obtient avec une très bonne précision (erreur inférieure à 3%) un nombre de valeurs propres de l'ordre de la moitié du nombre de cellules. Nous remarquons aussi que plus le nombre de cellules est grand, plus le paquet de valeurs propres obtenus par l'analyse asymptotique est grand. Toutefois, nous

n'obtenons pas les modes propres avec autant de précision que les valeurs propres. Nous reviendrons sur ces aspects aux chapitres suivants.

### 3.11. Conclusions

Nous avons mis en place une analyse en double échelle des modes de vibration des structures répétitives. A l'échelle locale, nous calculons des modes de vibrations sur quelques cellules de base, avec des conditions de périodicité. Ensuite nous avons engendré une famille de valeurs propres et de modes propres par modulation d'un mode local donné. L'enveloppe de ces modes satisfait une équation différentielle du second ordre à coefficients constants ayant la forme suivante :

$$\begin{cases} C \frac{d^2}{dX^2} A_0 + \lambda_2 A_0 = 0 \\ A_0(X): \text{ amplitude réelle} \end{cases}$$

où la constante C est déterminée par la connaissance de modes locaux.

Cette équation décrit le comportement global d'une famille de modes de vibration propre de la structure. Le problème global est le problème aux valeurs propres ci-dessus auquel nous avons montré comment associer des conditions aux limites. Toutefois nous avons fait des conditions aux limites une analyse très simplifiée qui néglige les couches limites. Cette analyse ne peut donc suffire dans tous les cas. En particulier elle ne permet pas de calculer les termes suivants  $\lambda_3, \lambda_4, \dots$  du développement asymptotique de la valeur propre. C'est ce que nous introduisons au chapitre suivant.

L'analyse en double échelle permet donc un gain en temps de calcul et en espace mémoire, puisque le problème global et le problème local sont des problèmes de taille considérablement réduite par rapport au problème initial. On remarque que la méthode est d'autant plus meilleure que le nombre de cellules

de la structure est grand. Elle nous permet de calculer les premières fréquences de chaque paquet de valeurs propres. Par contre elle ne signale ni la fin du paquet ni le nombre des valeurs propres que contient le paquet, puisque la valeur asymptotique de ces dernières croit en fonction d'un entier  $n$ , en principe indéfiniment (voir les expressions asymptotiques des valeurs propres calculées précédemment).

## **4 ETUDE DES EFFETS DE BORDS ET CALCUL ASYMPTOTIQUE AUX ORDRES SUPÉRIEURS**

### **4.1. Introduction**

Dans ce chapitre nous essayons de compléter l'analyse asymptotique du chapitre précédent en poussant les développements au delà de l'ordre deux. Cela nous amènera à traiter de manière complète et précise les conditions aux limites. En effet le passage d'une équation d'ordre quatre à une équation d'enveloppe d'ordre deux implique la perte d'une condition à chaque extrémité de la structure. La solution asymptotique du chapitre précédent doit donc être corrigée, ce que nous ferons en introduisant à chaque extrémité une solution localisée (ou solution en couche limite) de l'équation initiale. Enfin, nous confrontons les résultats obtenus asymptotiquement et les résultats obtenus par un calcul direct en discrétisant toute la structure.

### **4.2. Existence du phénomène de couche limite**

L'existence du phénomène de couche limite est liée tout simplement à une perte de conditions aux limites lors du passage du modèle initial à l'équation d'enveloppe. En effet les conditions aux limites sont initialement au nombre de quatre (bords encastrés par exemple). Après les développements asymptotiques, il n'y a plus que deux conditions imposées sur l'amplitude  $A_0(X)$ . Prenons par exemple le cas où les extrémités de la poutre sont encastrées avec  $A_0(X=0) = A_0(X=L\eta) = 0$ . La solution globale à l'ordre 1 est de la forme :

$$\begin{cases} A_0(X) = a \sin(KX) \\ K = \frac{n\pi}{L\eta} \quad n = 1, 2, \dots \text{etc.} \\ a \text{ une constante arbitraire} \end{cases}$$

Nous avons trouvé au chapitre 3 des solutions à l'ordre 1 et à l'ordre  $\eta$ , qui s'écrivent respectivement de la manière suivante :

$$\begin{aligned} u_0(X, x) &= A_0(X)w_0(x) \\ u_1(X, x) &= A_1(X)w_0(x) + A'_0(X)w_1(x) \end{aligned}$$

où  $w_0(x)$  et  $w_1(x)$  sont des fonctions calculées sur une cellule de base en tenant compte de conditions de périodicité. Reprenons maintenant l'écriture asymptotique des conditions d'encastrement aux extrémités de la poutre. Selon l'analyse du chapitre précédent, en chaque extrémité nous avons les relations suivantes :

$$\begin{cases} A_0w_0 + \eta(A'_0w_1 + A_1w_0) + O(\eta^2) = 0 \\ A_0w'_0 + \eta(A'_0(w'_1 + w_0) + A_1w'_0) + O(\eta^2) = 0 \end{cases}$$

Les conditions d'encastrement s'écrivent alors à l'ordre  $\eta$  :

$$\begin{cases} A'_0w_1 + A_1w_0 = 0 \\ A'_0(w'_1 + w_0) + A_1w'_0 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Le système (1) est homogène en  $A'_0$  et  $A_1$  dont la solution est en général

unique:

$$\begin{cases} A'_0 = 0 & (2) \\ A_1 = 0 & (3) \end{cases}$$

Or la condition (2) n'est pas satisfaite par la solution trouvée précédemment pour l'amplitude  $A_0(X)$ , ce qui est le signe de l'existence d'une couche limite. Il faut donc introduire des corrections localisées pour satisfaire les conditions aux limites à l'ordre  $\eta$  et au delà.

Dans les problèmes linéaires de perturbations singulières, on peut considérer qu'à partir de l'ordre  $\eta$ , le développement asymptotique de la solution s'écrit comme la somme de deux solutions. La première est valable assez loin des bords, et dans notre cas, elle est localement périodique. La deuxième traduit le comportement localisé de la solution près des extrémités en fonction de la variable rapide. Ceci nous permettra d'ajuster correctement les conditions aux limites des problèmes globaux aux ordres supérieurs. On peut maintenant écrire une expression asymptotique du déplacement  $u(x)$ , qui sera valable à la fois loin des bords et près de l'extrémité  $x=0$  :

$$u(X, x) = u_0(X, x) + \eta(u_1(X, x) + \alpha_1 w_{loc}(x)) + \eta^2(u_2(X, x) + \alpha_2 w_{loc}(x)) + \dots \text{etc} \quad (4)$$

où  $w_{loc}(x) \approx 0$  pour  $x$  loin de 0 et où les  $\alpha_i$  sont des inconnues. La solution localisée est déterminée par une méthode utilisant la théorie de Floquet dont le détail est dans ce qui suit.

### **4.3. Calcul de la solution localisée par la méthode de Floquet**

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à la détermination de la solution localisée du modèle, afin de rendre compte des effets de bords. Cette recherche est introduite en utilisant la théorie de Floquet (D.W. Jordan et P. Smith, 1987), dont nous rappelons quelques éléments de base dans ce qui suit.

**a) Rappels sur la théorie de Floquet**

La théorie de Floquet est destinée à l'étude de la stabilité des solutions périodiques des équations différentielles à coefficients périodiques. Ces équations peuvent être écrites sous la forme d'un système équations différentielles du premier ordre:

$$\frac{d}{dx} \bar{u}(x) = L(x)\bar{u}(x) \quad (5)$$

où  $\bar{u}(x) \in \mathbb{R}^n$ ,  $L(x)$  est une matrice carrée ( $n \times n$ ) dont les coefficients sont périodiques de période 1:  $L(x) = L(x+1)$

**Définition      Matrice fondamentale**

On appelle matrice fondamentale l'opérateur linéaire  $\Phi(x)$  qui associe à la donnée initiale  $\bar{u}(0)$  la solution  $\bar{u}(x)$  du système différentiel (5) :

$$\begin{cases} \bar{u}(0) \xrightarrow{\Phi(x)} \bar{u}(x) \\ \bar{u}(x) = \Phi(x)\bar{u}(0) \end{cases}$$

Cette matrice est rarement périodique comme l'opérateur  $L(x)$ . Elle vérifie le même système différentiel avec comme condition initiale la matrice d'identité dans  $\mathbb{R}^n$ :

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \Phi(x) = L(x)\Phi(x) \\ \Phi(0) = I_n \end{cases} \quad (6)$$

Si  $\Phi(x)$  est la matrice fondamentale du système (5) alors  $\Phi(x+1)$  est aussi solution du système (6). On voit facilement que la matrice fondamentale

satisfait les relations suivantes ( $l$  étant la période de  $L(x)$ ) :

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \Phi(x) = L(x)\Phi(x) \\ \Phi(0) = I_n \\ \Phi(x+1) = \Phi(x)\Phi(1) \\ \Phi(nl) = \Phi^n(1) \end{cases} \quad (7)$$

### **Définitions**

On appelle multiplicateurs de Floquet les valeurs propres  $\mu(l)$  de la matrice  $\Phi(l)$ :

On appelle exposants de Floquet les nombres complexes  $\sigma = \xi + i\tau$  tels que:

$$\mu(l) = \exp(\sigma l)$$

On remarque que si  $\sigma$  est un exposant de Floquet correspondant à  $\mu(l)$  alors  $\sigma + (2\pi ik/l)$ , (où  $k$  un entier relatif) est aussi un exposant de Floquet correspondant à  $\mu(l)$ .

Cet exposant de Floquet permet de caractériser la croissance, la décroissance ou la périodicité des solutions du système, ce qu'on va expliquer dans le détail.

Les vecteurs propres de la matrice fondamentale associés aux exposants de Floquet vont permettre de retrouver les solutions périodiques et de caractériser les solutions localisées.

### **b) Définition et calcul de la matrice fondamentale**

On ramène le problème local (§ 3.4) à un système différentiel du premier ordre à coefficients périodiques dont l'inconnue est:

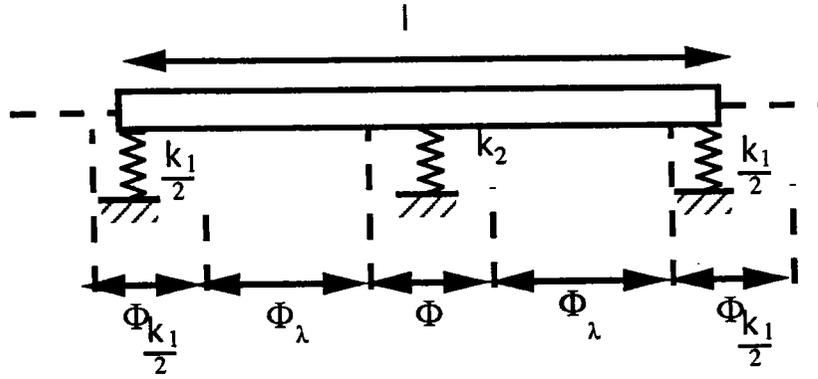
$$\bar{u}(x) = (u(x), u''(x), u'(x), u'''(x)) \in \mathbb{R}^4$$

$$\text{où } u(x) \text{ est solution de } \begin{cases} \frac{d^4}{dx^4} u - \lambda u = 0 \\ \frac{d^3}{dx^3} u(0) = k_1 u(0) \\ \left[ \left[ \frac{d^3}{dx^3} u\left(\frac{1}{2}\right) \right] \right] = k_2 u\left(\frac{1}{2}\right) \\ \frac{d^3}{dx^3} u(1) = -k_1 u(1) \end{cases}$$

La figure qui suit, rappelle la forme de la cellule de base, qui est de longueur 1. Le système différentiel considéré correspond d'une part à l'équation  $u'''' - \lambda u = 0$ , d'autre part aux conditions de discontinuités  $[[u''']] = k_i u$ . Les coefficients sont donc constants, mais avec des distributions de Dirac réparties périodiquement. Nous avons une petite ambiguïté à définir le vecteur  $\bar{u}(0)$  puisqu'il y a discontinuité de  $\bar{u}$  en  $x=0$ . Nous avons donc choisi de définir  $\bar{u}(0)$  comme la demi somme  $\frac{(\bar{u}(0^-) + \bar{u}(0^+))}{2}$ , ce qui revient à affecter en  $x=0, x=1$  un ressort de raideur moitié  $\frac{k_1}{2}$ .

Le calcul de la matrice fondamentale  $\Phi(1)$  et de ses éléments propres est effectué par un calcul formel (détails en annexe C). Le principe est le suivant : on découpe cette matrice en trois matrices de discontinuité et deux matrices correspondant à l'équation différentielle :

$$\Phi(1) = \Phi_{\frac{k_1}{2}} \Phi_{\lambda} \Phi_{k_2} \Phi_{\lambda} \Phi_{\frac{k_1}{2}}$$



Chaque matrice de discontinuité exprime le saut des efforts tranchants dû à un ressort de rigidité  $k$ :

$$\Phi_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice  $\Phi_\lambda$  correspond au passage de  $\bar{u}(0^+)$  à  $\bar{u}(\frac{l}{2})$ . Son expression est un peu plus complexe est obtenue en résolvant l'équation différentielle :

$$u'''' - \lambda u = 0$$

Pour des raisons de symétrie de la cellule de base, on démontre facilement qu'on a la propriété de symétrie suivante :

$$\Phi^{-1}(l) = R\Phi(l)R \quad (8)$$

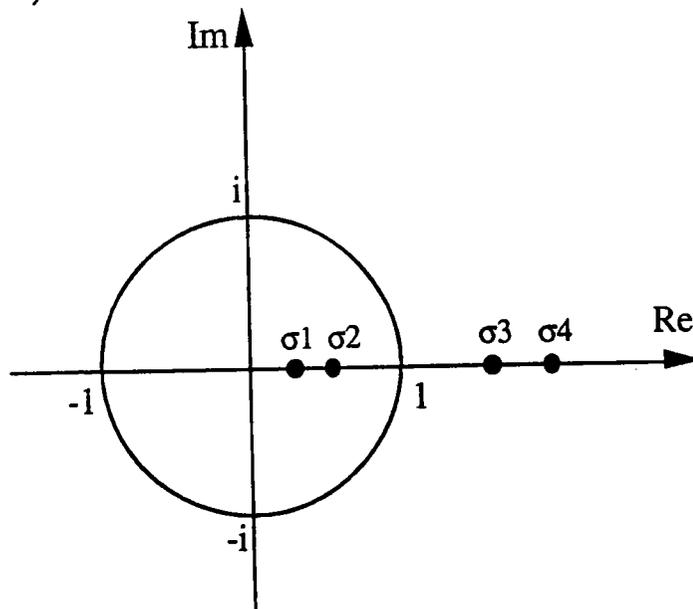
$$\text{où } R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

**c) Évolution des multiplicateurs de Floquet. Solutions localisées**

Dans notre étude, la matrice fondamentale et ses éléments propres (valeurs et vecteurs propres) dépendent de la valeur propre  $\lambda$ . Nous avons analysé l'évolution de ces éléments propres en fonction de ce paramètre pour différentes valeurs des raideurs et de la longueur de la cellule. Sur les exemples présentés précédemment ( par exemple  $k_1=100000, k_2=10, l=10$ ), nous avons testé l'évolution des multiplicateurs de Floquet lorsque le paramètre  $\lambda$  est voisin de la plus petite valeur propre  $\lambda_0$  d'un problème local (voir § 3.4). Nous avons constaté qu'elle obéit au scénario générique décrit ci-dessous.

**Situation pour  $\lambda < \lambda_0$**

On désigne les valeurs propres de la matrice fondamentale par  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ . Quand  $\lambda < \lambda_0$  ces valeurs propres sont réelles et leur position dans le plan complexe est représentée ci-dessous. On notera qu'à cause de la propriété de symétrie (8), ces valeurs propres vont par paires de produit unité ( $\sigma_1\sigma_4=1, \sigma_3\sigma_2=1$ ).

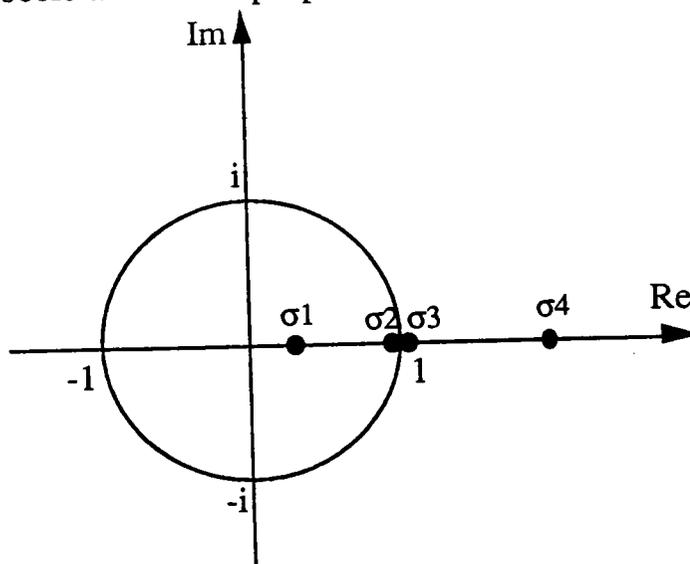


Quand on fait tendre la valeur  $\lambda$  vers  $\lambda_0$ , deux valeurs propres de la

matrice fondamentale tendent vers la valeur 1.

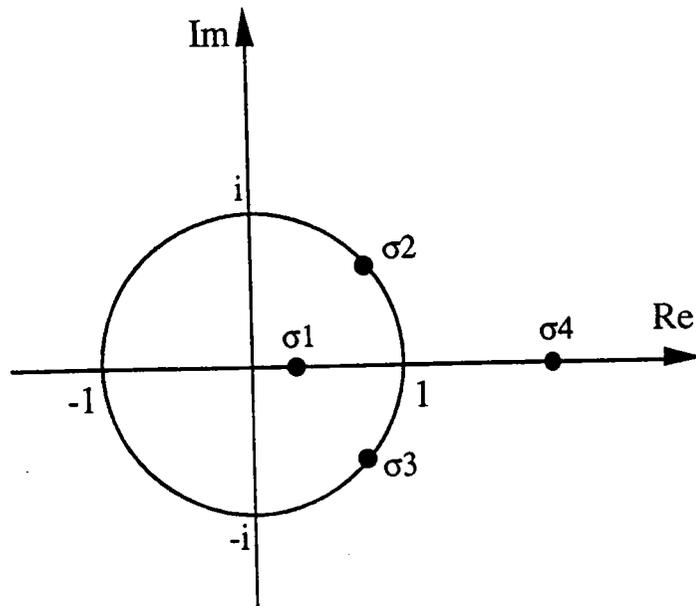
**Situation pour  $\lambda > \lambda_0$**

On désigne toujours les valeurs propres de la matrice fondamentale par  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ . Quand  $\lambda = \lambda_0$ , deux de ces valeurs propres deviennent égales à 1, caractérisant ainsi une solution périodique de période 1. C'est bien sûr la même que celle qui a été calculée par la résolution du premier problème local. La valeur  $\sigma_1$  reste réelle et inférieure à 1 en valeur absolue. Elle correspond, sur la structure répétitive, à une solution qui décroît lorsque  $x$  augmente (voir la relation (7)) : c'est la solution localisée près de l'extrémité  $x=0$  (solution localisée à gauche). Bien entendu  $\sigma_4 = \frac{1}{\sigma_1}$  correspond à la solution localisée près de l'autre extrémité ( solution localisée à droite). Dans la suite, nous noterons par  $w_{loc}(x)$  la solution localisée à gauche, qui est obtenue à partir du vecteur propre associé à la valeur propre réelle  $\sigma_1$  (décroissante):



**Situation pour  $\lambda = \lambda_0$**

A partir de  $\lambda = \lambda_0$  les valeurs propres  $\sigma_2, \sigma_3$  deviennent des complexes conjugués se déplaçant sur le cercle unité.



**Situation pour  $\lambda > \lambda_0$**

Il peut arriver que les multiplicateurs de Floquet arrivent sur le cercle unité en passant par  $\sigma_2 = \sigma_3 = -1$ . Le système aura alors une solution périodique de période  $2l$  pour  $\lambda = \lambda_0$ . Bien entendu la même analyse peut être faite autour d'une solution périodique de période  $pl$  ( $p$  entier positif). Il suffit de considérer la matrice fondamentale  $\Phi(pl)$ .

#### 4.4. Calcul asymptotique aux ordres supérieurs

Nous avons établi dans le chapitre précédant que le problème local à l'ordre  $\eta^i$  vérifie une équation du type :

$$\begin{cases} \ell(\lambda_0)w_i = f_i \\ w_i(x) \text{ périodique et deux fois} \\ \text{continument différentiable} \end{cases}$$

Le premier problème global (à l'ordre 1) est l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$C \frac{d^2}{dX^2} A_0 + \lambda_2 A_0 = 0$$

Il est bien de rappeler que le premier problème local et le premier problème global sont des problèmes aux valeurs propres. Les problèmes aux ordres suivants n'ont de solutions que si ils vérifient la condition de solvabilité. Ceci est dû au fait que leurs premiers membres sont singuliers. Ainsi, si on applique cette condition aux ordres  $\eta$  et  $\eta^2$  (détails du calcul dans l'annexe A), on obtient les problèmes globaux suivants:

### Ordre $\eta$

$$C \frac{d^2}{dX^2} A_1 + \lambda_2 A_1 = C_1 \frac{d^3}{dX^3} A_0 - \lambda_3 A_0$$

### Ordre $\eta^2$

$$C \frac{d^2}{dX^2} A_2 + \lambda_2 A_2 = C_1 \frac{d^3}{dX^3} A_1 + C_2 \frac{d^4}{dX^4} A_0 - \lambda_3 A_1 - \lambda_4 A_0$$

Il est facile de voir que les inconnues de ces problèmes sont respectivement les couples  $(A_1(X), \lambda_3)$  et  $(A_2(X), \lambda_4)$ . Ils manquent les conditions aux limites pour résoudre ces problèmes globaux. Ces conditions sont déterminées dans la suite en tenant compte de la solution localisée caractérisant le phénomène de couche limite.

## **4.5. Réécriture des conditions aux limites avec la prise en compte de la couche limite**

Pour monter comment obtenir les conditions aux limites sur les deux problèmes globaux précédents, nous allons considérer le cas où les extrémités de la poutre sont encastées avec,  $A_0(X=0) = A_0(X=L\eta) = 0$ .

La solution globale à l'ordre 1 est de la forme :

$$\begin{cases} A_0(X) = a \sin(KX) \\ K = \frac{n\pi}{L\eta} \quad n = 1, 2, \dots \text{etc.} \\ a \text{ une constante arbitraire} \end{cases} \quad (9)$$

Les solutions des problèmes asymptotiques (voir § 3.6 et § 3.7) à l'ordre 1,  $\eta$ ,  $\eta^2$  s'écrivent respectivement de la manière suivante :

$$u_0(X, x) = A_0(X)w_0(x)$$

$$u_1(X, x) = A_1(X)w_0(x) + \frac{\partial}{\partial X} A_0(X)w_1(x)$$

$$u_2(X, x) = A_2(X)w_0(x) + \frac{\partial}{\partial X} A_1(X)w_1(x) + \frac{\partial^2}{\partial X^2} A_0(X)w_2(x)$$

où  $w_0(x)$ ,  $w_1(x)$  et  $w_2(x)$  sont des fonctions définies aux paragraphes 3.6 et 3.7 sur une cellule de base.

Reprenons maintenant l'écriture asymptotique des conditions aux limites d'encastement des extrémités de la poutre. Près de l'extrémité  $x=0$  (respectivement  $x=L$ ), la solution asymptotique s'écrit sous la forme (4) (§ 4.2) où  $w_{loc}(x)$  est la solution localisée à gauche (respectivement à droite), calculée par la méthode de Floquet. Nous avons en chaque extrémité les relations suivantes :

$$\begin{cases} A_0 w_0 + \eta(A_0' w_1 + A_1 w_0 + \alpha_1 w_{loc}) + O(\eta^2) = 0 \\ A_0 w_0' + \eta(A_0'(w_1' + w_0) + A_1 w_0' + \alpha_1 w_{loc}') + O(\eta^2) = 0 \end{cases}$$

Les conditions d'encastrement à chaque extrémité deviennent alors à l'ordre  $\eta$  :

$$\begin{cases} A_1 w_0 + \alpha_1 w_{loc} = -A'_0 w_1 \\ A_1 w'_0 + \alpha_1 w'_{loc} = -A'_0 (w'_1 + w_0) \end{cases}$$

En chaque extrémité, c'est un système de deux équations à deux inconnues  $A_1$  et  $\alpha_1$ . La solution de ce système permet d'écrire les conditions aux limites à cet ordre de la façon suivante :

$$\begin{cases} A_1(X=0) = b_0 A'_0(X=0) \\ A_1(X=L\eta) = b_L A'_0(X=L\eta) \end{cases}$$

où les constantes  $b_0$  et  $b_L$  sont calculées à partir de  $w_0, w_1, w_{loc}$  et de leur dérivées, c'est-à-dire des solutions des problèmes locaux et de la solution localisée. Ainsi on récupère les conditions aux limites que doit vérifier le problème global à l'ordre  $\eta$ . De la même manière, on trouve les conditions aux limites imposées sur le problème global à l'ordre  $\eta^2$ . Dans le cas traité (bords encastres), elles s'écrivent exactement comme à l'ordre précédent :

$$\begin{cases} A_2(X=0) = b_0 A'_1(X=0) \\ A_2(X=L\eta) = b_L A'_1(X=L\eta) \end{cases}$$

De la même manière nous pouvons récupérer les conditions aux limites imposées sur les problèmes globaux pour d'autres types de conditions aux limites et des modes locaux différents. Par exemple prenons toujours le cas où les bords sont encastres, mais en cherchant des modes proches d'un mode local

vérifiant  $w_0(0) = w'_0(0)$ . Nous avons établi dans le chapitre précédent qu'on a :

$$A'_0(X=0) = A'_0(X=L\eta) = 0$$

En réécrivant correctement les conditions aux limites avec prise en compte de la solution localisée comme le cas précédent, nous obtenons les conditions aux limites imposées sur le problème global à l'ordre  $\eta$  :

$$\begin{cases} A'_1(X=0) = c_0 A''_0(X=0) \\ A'_1(X=L\eta) = c_L A''_0(X=L\eta) \end{cases}$$

où les constantes  $c_0$  et  $c_L$  sont calculées à partir des solutions des problèmes locaux et de la solution localisée.

#### 4.6. Calcul asymptotique des valeurs propres au quatrième ordre

L'expression asymptotique du quatrième ordre des valeurs propres est :

$$\lambda = \lambda_0 + \eta^2 \lambda_2 + \eta^3 \lambda_3 + \eta^4 \lambda_4 + O(\eta^5)$$

Nous avons calculé le paramètre  $\lambda_2$  pour différents types de conditions aux limites dans le chapitre précédent. Et il reste maintenant à résoudre les problèmes globaux afin de trouver les paramètres  $\lambda_3$  et  $\lambda_4$ . Reprenons le cas traité dans le paragraphe précédant (cas bords encastres où le mode local est tel que  $w_0(0)$  et  $w'_0(0)$  ne s'annulent pas tous les deux). Les écritures des problèmes globaux sont les suivantes :

**Ordre 1**

$$C \frac{d^2}{dX^2} A_0 + \lambda_2 A_0 = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0(X) = a \sin(KX) \\ K = \frac{n\pi}{L\eta} \quad n = 1, 2, \dots \text{etc.} \end{array} \right.$$

$$\lambda_2 = CK^2$$

a une constante réelle arbitraire (on choisit a = 1)

**Ordre  $\eta$**

$$C \frac{d^2}{dX^2} A_1 + \lambda_2 A_1 = C_1 \frac{d^3}{dX^3} A_0 - \lambda_3 A_0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1(X=0) = b_0 A'_0(X=0) \\ A_1(X=L\eta) = b_L A'_0(X=L\eta) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1(X=0) = b_0 A'_0(X=0) \\ A_1(X=L\eta) = b_L A'_0(X=L\eta) \end{array} \right.$$

**ordre  $\eta^2$**

$$C \frac{d^2}{dX^2} A_2 + \lambda_2 A_2 = C_1 \frac{d^3}{dX^3} A_1 + C_2 \frac{d^4}{dX^4} A_0 - \lambda_3 A_1 - \lambda_4 A_0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_2(X=0) = b_0 A'_1(X=0) \\ A_2(X=L\eta) = b_L A'_1(X=L\eta) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_2(X=0) = b_0 A'_1(X=0) \\ A_2(X=L\eta) = b_L A'_1(X=L\eta) \end{array} \right.$$

L'opérateur du premier membre de chacun de ces problèmes est singulier. Une condition de solvabilité s'impose donc sur les seconds membres. Cette condition s'écrit sur le problème global à l'ordre  $\eta$  de la manière suivante :

$$\int_{X=0}^{X=L\eta} (C \frac{d^2}{dX^2} A_1 + \lambda_2 A_1) A_0 dX = \int_{X=0}^{X=L\eta} (C_1 \frac{d^3}{dX^3} A_0 - \lambda_3 A_0) A_0 dX$$

En tenant compte des résultats précédents et en faisant le calcul des

intégrales, on obtient :

$$\begin{cases} \lambda_3 = 2C(b_0 - b_L) \frac{n^2 \pi^2}{L^3 \eta^3} \\ n = 1, 2, \dots \text{etc.} \end{cases} \quad (10)$$

Nous remarquons que ce paramètre dépend de la solution localisée. Deux cas se présentent :

a) Si le nombre de cellules est pair alors pour des raisons de symétrie et de périodicité, on obtient  $b_0 = b_L$ . Par conséquent le paramètre  $\lambda_3$  est nul.

b) Si le nombre de cellules est impair nous avons  $b_0 \neq b_L$ . Dans les cas que nous avons étudié, la valeur du paramètre  $\lambda_3$  est très faible et son influence sur le spectre est négligeable.

Ainsi, nous constatons qu'il n'y a pas d'amélioration du calcul asymptotique du spectre des valeurs propres au troisième ordre.

Nous considérons maintenant le problème global à l'ordre  $\eta^2$  en supposant qu'il y a un nombre pair de cellules ( $b_0 = b_L$ ). On lui applique la condition de solvabilité après avoir résolu les problèmes globaux antérieurs (Ce calcul est traité par un calcul formel, voir annexe B). Nous obtenons alors les valeurs suivantes du paramètre  $\lambda_4$ :

$$\begin{cases} \lambda_4 = \left( \frac{5C_1^2}{4C} + C_2 \right) \frac{n^4 \pi^4}{L^4 \eta^4} \\ n = 1, 2, \dots \text{etc.} \end{cases} \quad (11)$$

Nous remarquons que ce paramètre ne dépend que des problèmes locaux et de la longueur de la structure. Ainsi nous pouvons écrire pour le cas traité, l'expression asymptotique des valeurs propres à l'ordre  $\eta^4$ :

$$\begin{cases} \lambda(n) = \lambda_0 + C \frac{n^2 \pi^2}{L^2} + \left( \frac{5C_1^2}{4C} + C_2 \right) \frac{n^4 \pi^4}{L^4} + O(\eta^5) \\ n = 1, 2, \dots \text{etc.} \end{cases} \quad (12)$$

Nous considérons ensuite les conditions aux limites sur le premier problème global  $A'_0(X=0) = A'_0(X=L\eta) = 0$  et nous adoptons la même démarche que précédemment, on obtient la même formule, mais la première valeur propre correspond à  $n=0$ :

$$\begin{cases} \lambda(n) = \lambda_0 + C \frac{n^2 \pi^2}{L^2} + \left( \frac{5C_1^2}{4C} + C_2 \right) \frac{n^4 \pi^4}{L^4} + O(\eta^5) \\ n = 0, 1, 2, \dots \text{etc.} \end{cases} \quad (13)$$

Dans la suite, on note  $C_3 = \frac{5C_1^2}{4C} + C_2$ .

Nous remarquons qu'il y a un effet des conditions aux limites, mais surtout de l'élanement de la structure. Les constantes  $C, C_1, C_2$  qui définissent ces spectres ne dépendent que de la cellule de base et du mode local considéré. La couche limite n'a d'influence que par l'intermédiaire des constantes  $b_0$  et  $b_L$ . On voit donc qu'il n'y a, dans les cas étudiés aucune influence de cette couche limite sur le spectre, sauf si le nombre de cellules est impair (voir la formule (10)) : dans ce cas son influence reste cependant quantitativement faible. On remarque aussi que l'élanement  $L$  n'intervient que par l'intermédiaire du rapport  $n/L$ . Donc si l'élanement double, le spectre sera deux fois plus divisé. Ceci suggère que le nombre de valeurs propres représentées par ces formules est proportionnel à cet élanement.

#### 4.7. Applications et discussions

Nous confrontons dans ce paragraphe le calcul asymptotique des valeurs propres à l'ordre  $\eta^4$  et le calcul direct effectué en discrétisant toute la structure.

**a) Comparaison du spectre asymptotique et du spectre exact**

Nous examinons, sur deux exemples, dans quelle mesure le calcul au quatrième ordre et les formules (12) (13) permettent d'améliorer l'analyse asymptotique du début du spectre qui avait été faite au chapitre précédent.

**Premier exemple**

**$k_1=100000$   $k_2=0$   $l=1$   $L=20$  (20 cellules)**

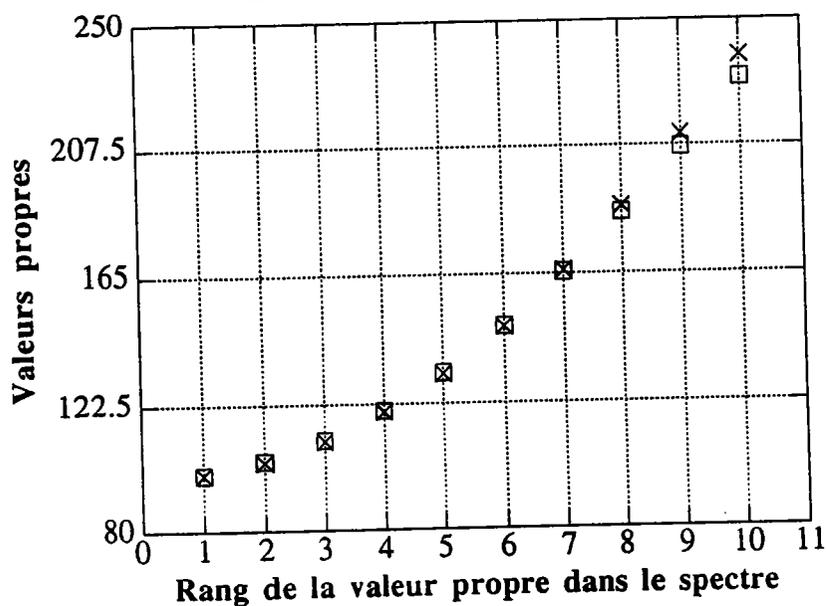
**Les deux extrémités de la poutre sont encastées**

**Valeurs numériques des constantes spectrales :**

$C = 59.194$   $C_2 = -1.013$

× Calcul numérique direct

□ Calcul asymptotique-numérique du quatrième ordre



n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\lambda$ exacte	98.881	103.00	110.00	119.90	132.50	148.00	166.30	187.30	211.10
$\lambda$ ordre2	98.870	103.25	110.55	120.78	133.92	149.99	168.98	190.89	215.72
$\lambda$ ordre4	98.870	103.19	110.40	120.39	133.04	148.21	165.72	185.36	206.90

**Tableau 1**

**Deuxième exemple**

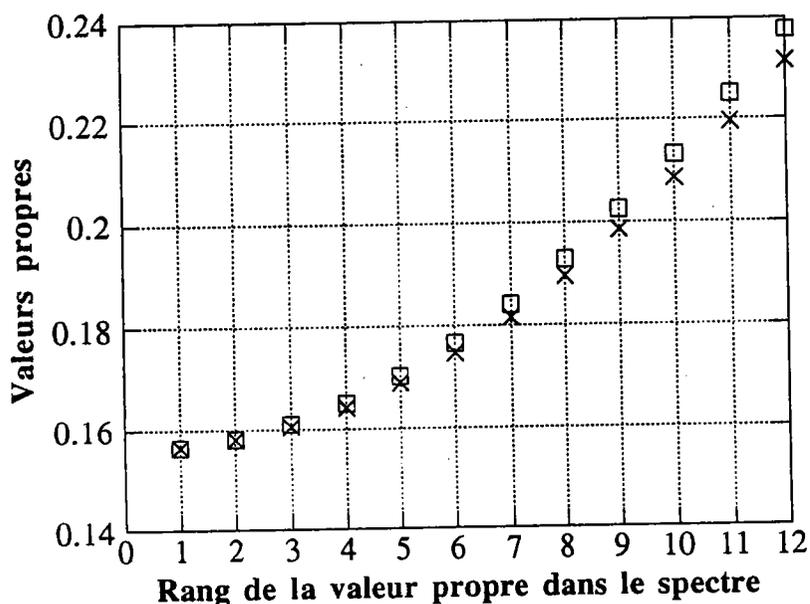
**$k_1=100000$   $k_2=10$   $l=10$   $L=200$  (20 cellules)**

**Les deux extrémités de la poutre sont encastées**

**Valeurs numériques des constantes spectrales :**

$C = 2.368$   $C_2 = 1.0004$

- × Calcul numérique direct
- Calcul asymptotique-numérique du quatrième ordre



n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\lambda$ exacte	0.1564	0.1580	0.1606	0.1643	0.1691	0.1749	0.1817	0.1896	0.1985
$\lambda$ ordre2	0.1564	0.1582	0.1611	0.1652	0.1705	0.1769	0.1845	0.1932	0.2032
$\lambda$ ordre4	0.1564	0.1582	0.1611	0.1652	0.1704	0.1767	0.1842	0.1928	0.2024

**Tableau 2**

**b) Discussions**

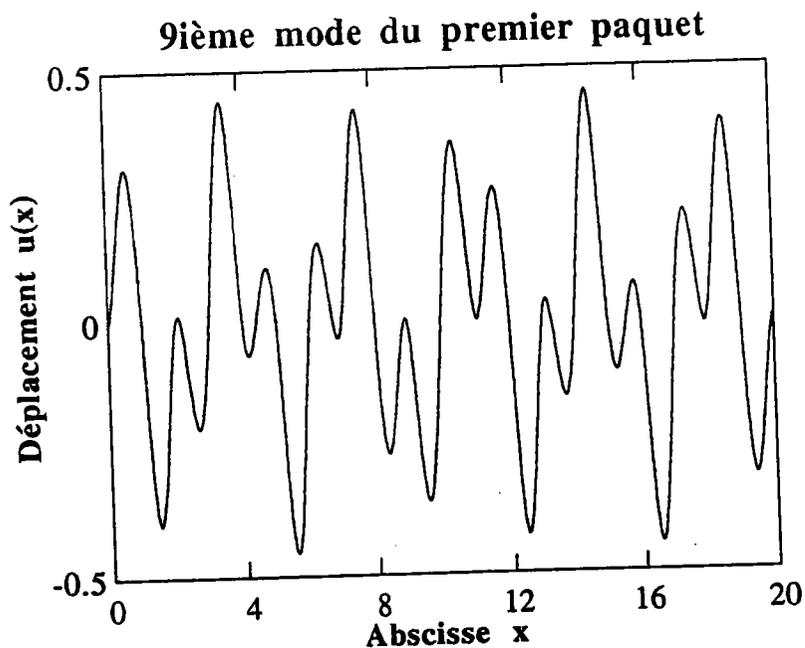
On peut dire que l'analyse asymptotique au quatrième ordre ne permet pas de prendre en compte une bien plus grande partie du spectre. Tout au plus, elle améliore la précision avec laquelle chaque valeur propre est connue (voir Les tableaux 1 et 2). Cette situation est liée à un problème de fond, qu'on peut comprendre en regardant l'évolution de la forme du mode en fonction de l'entier

n. Si le premier et le second mode correspondent parfaitement à l'hypothèse d'un mode à deux échelles de variations, cette situation se dégrade rapidement lorsque n augmente : la longueur d'onde de l'amplitude est proportionnelle à n, comme le montre la formule (9). A partir de la 7<sup>ième</sup> ou la 8<sup>ième</sup> valeur propre, les deux échelles de variation deviennent très proches et on constate sur la figure qui suit, que le 9<sup>ième</sup> mode ne ressemble plus du tout à une modulation du mode local.

Par ailleurs, on sait que chaque paquet de valeurs propres en contient un nombre fini qui dépend en particulier de l'élançement de la structure. Or les formules (12) et (13) ne permettent ni de caractériser, ni d'approcher le nombre de valeurs propres dans un paquet. Elles n'ont donné ici que le début d'un paquet de valeurs propres.

**$k_1=100000$   $k_2=0$   $l=1$   $L=20$  (20 cellules)**

**Les deux extrémités de la poutre sont encastées**



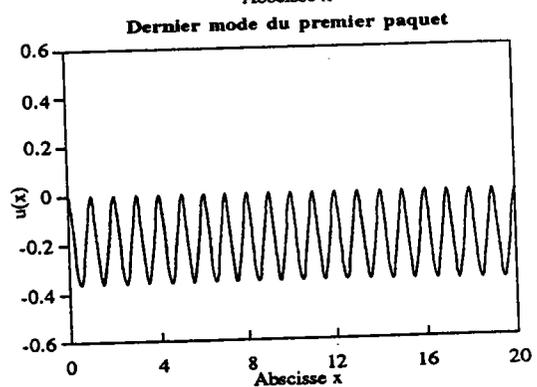
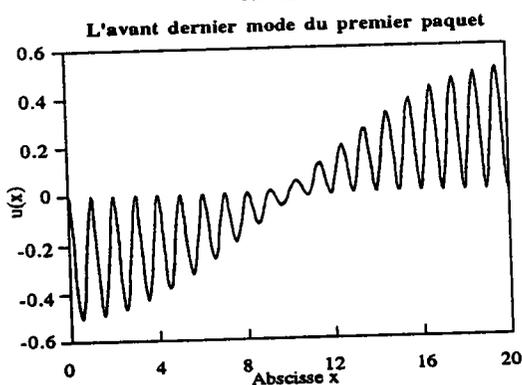
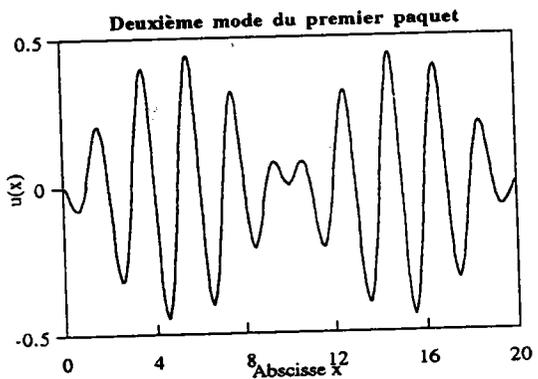
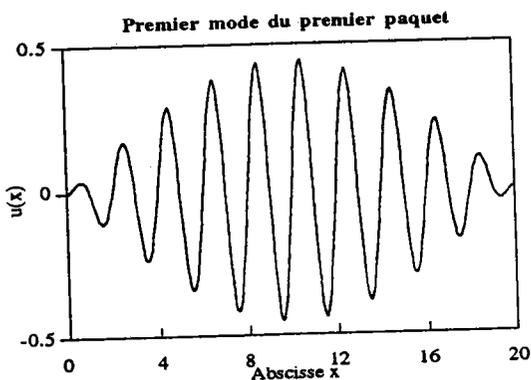
**c) Analyse d'un paquet complet de valeurs propres**

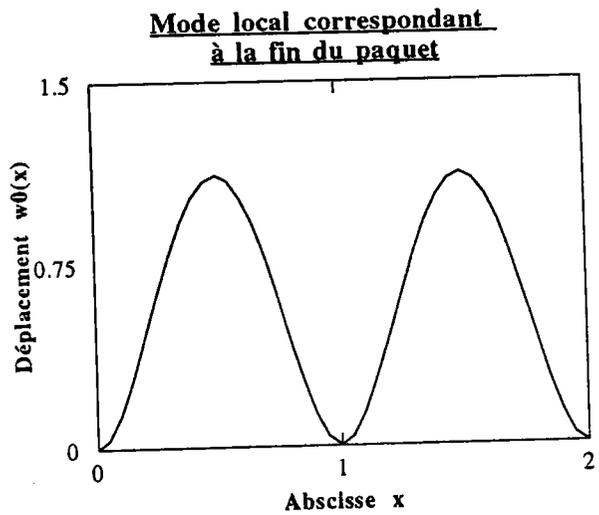
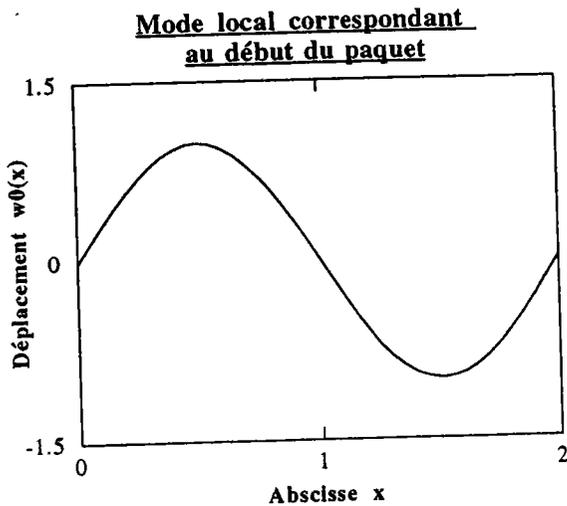
Nous allons nous intéresser maintenant à l'analyse d'un paquet complet de valeurs propres : il s'agit du premier exemple présenté en 4.7.a et nous examinons le premier paquet de valeurs propres.

Tout d'abord, nous examinons la forme des deux premiers et des deux derniers modes du premier paquet, calculés par un calcul direct. Nous présentons aussi pour comparaison les modes locaux correspondants.

**$k_1=100000$   $k_2=0$   $l=1$   $L=20$  (20 cellules)**

**Les deux extrémités de la poutre sont encastées**





Nous constatons que comme les premiers modes, les derniers modes de chaque paquet sont localement périodiques et modulés. En début du paquet les modes correspondent à des modulations du premier mode local, qui est quasiment sinusoïdal et de période 2. On voit clairement que les enveloppes de ces modes sont conformes aux résultats asymptotiques (9) avec  $n=1, n=2$ . On constate aussi que la fin du paquet correspond au deuxième mode local, qui est également d'allure sinusoïdale, mais de moyenne non nulle et de période 1. Ce second mode local est tel que  $w_0(0) = w'_0(0) = 0$  : l'analyse des conditions aux limites est donc différente et elle nous a conduit à la représentation (13) du spectre. Dans le cadre de cette analyse asymptotique, il semble que le dernier mode local correspond bien à  $n=0$  et  $A_0(X)=1$  et l'avant dernier à  $n=1$  et  $A_0(X) = \cos\left(\frac{\pi X}{L}\right)$ . Il est donc parfaitement justifié d'appliquer l'analyse asymptotique à ce second mode local, en espérant obtenir la fin du paquet de valeurs propres.

**d) Représentation asymptotique du début et de la fin d'un paquet de valeurs propres**

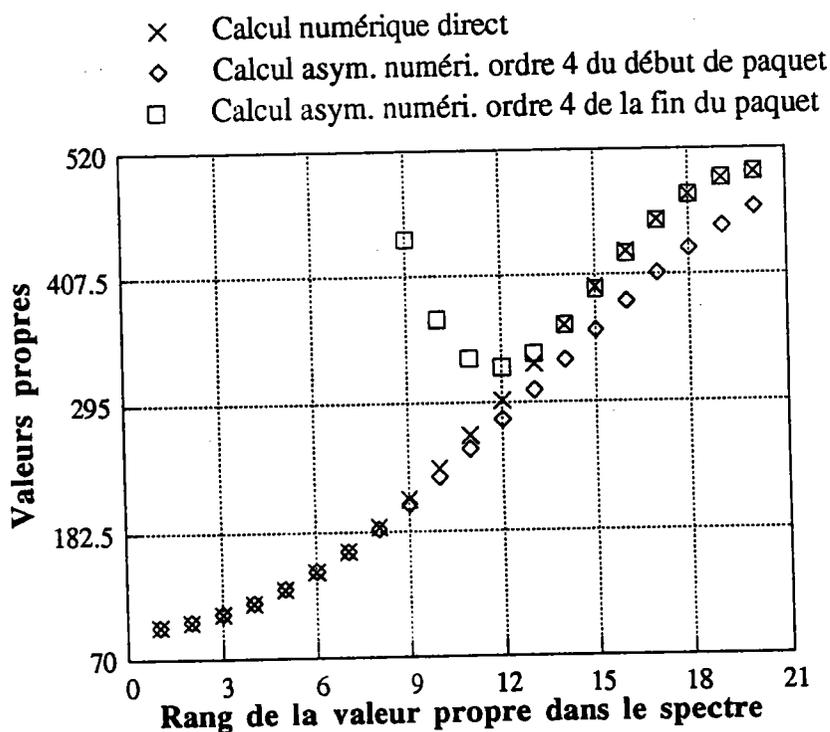
Nous appliquons donc la méthode asymptotique pour l'analyse d'un paquet complet de valeurs propres en considérant dans un premier temps le mode local correspondant au début du paquet, et dans un deuxième temps le mode local correspondant à la fin du paquet. On obtient les résultats suivants :

**$k_1=100000 \quad k_2=0 \quad l=1 \quad L=20$  (20 cellules)**

**Les deux extrémités de la poutre sont encastées**

**Valeurs numériques des constantes spectrales de la fin du paquet :**

$C = -209.94 \quad C_3 = 63.73$



<b>n</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>
<b><math>\lambda</math> exacte</b>	498.9	493.8	478.9	456.1	427.7	396.0	362.28	329.4	297.0
<b><math>\lambda</math> ordre4</b>	499.3	494.15	479.20	455.82	426.35	394.04	363.10	338.63	326.70

**Tableau des valeurs propres de la fin du paquet**

Pour cet exemple le début du paquet est traité dans le premier exemple du paragraphe 4.7.

Nous avons obtenu des résultats semblables pour d'autres types de conditions aux limites et pour différentes valeurs des raideurs et longueur de la structure.

On constate que l'analyse asymptotique d'un paquet complet de valeurs propres fournit une assez bonne approximation du début et la fin du paquet. C'est normal puisque les modes correspondants se présentent comme des modulation d'un mode local périodique. En revanche, le milieu du paquet de valeurs propres n'est pris en compte par aucune des deux représentations asymptotiques. Ce n'est pas surprenant, puisqu'on a vu que le 9<sup>ème</sup> mode ne ressemble ni à une modulation du premier, ni du second mode local. Ce qui est peut être surprenant, c'est que de chaque côté du paquet, les formules asymptotiques donnent de bons résultats pour 7 ou 8 valeurs propres alors que les hypothèses de deux échelles de variations ne sont plus guère valables pour  $n \geq 5$ .

### **e) Évolution des multiplicateurs de Floquet quand $\lambda$ décrit un paquet de valeurs propres**

Nous considérons dans ce paragraphe l'évolution des multiplicateurs de Floquet quand  $\lambda$  décrit le paquet de valeurs propres présenté précédemment. Cette évolution est décrite par le scénario suivant :

- Quand  $\lambda = \lambda_0$ , on a  $\sigma_2 = \sigma_3 = -1$  correspondant ainsi au mode local du début du paquet, qui est périodique de période 2.

- Lorsque  $\lambda$  augmente bien au-delà de  $\lambda_0$ , les deux valeurs propres  $\sigma_2$  et  $\sigma_3 = \bar{\sigma}_2$  évoluent sur la cercle unité. Elles passent donc par des racines n-ièmes de l'unité  $\exp(\frac{2i\pi}{n})$ , ce qui implique l'existence de solutions périodiques de période  $n\lambda$  ( voir la relation (7)) : aussi lorsque  $\sigma_2=i$ , il existe une solution de période  $4\lambda$ .

- Le trajet de la valeur propre  $\sigma_2$  se termine au point  $\sigma_2=1$ , ce qui correspond à une solution de période  $\lambda$ , qui est le mode local du fin du paquet.

- Ensuite le multiplicateur  $\sigma_2$  redevient réel indiquant la fin du premier paquet.

#### **4.8. Conclusions**

Après ces développements sur un modèle représentatif des longues structures flexibles à forme répétitive, nous avons établi les résultats suivants :

- Les premiers modes et les derniers modes du paquet sont bien des modes modulés et localement périodiques.

- Le traitement de la couche limite due aux effets de bords, est nécessaire pour une étude asymptotique cohérente aux ordres supérieurs. En effet, en cherchant la solution localisée par la méthode de Floquet nous avons montré comment réécrire correctement les conditions aux limites et résoudre les problèmes globaux des ordres supérieurs.

- L' analyse asymptotique au quatrième ordre d'un paquet complet de valeurs propres permet d'obtenir un nombre important (à peu près 40%) de valeurs propres sans effectuer un calcul direct coûtant cher en temps CPU et en espace mémoire. Mais cette analyse ne permet pas de montrer qu'il y a un

nombre fini de valeurs propres dans un paquet, ni a fortiori d'estimer ce nombre. De plus la valeur asymptotique de ces valeurs propres croît en fonction d'un entier  $n$ , en principe indéfiniment. Il est clair que même si nous poussons encore le calcul asymptotique aux ordres supérieurs, cette valeur croîtra toujours en fonction de l'entier  $n$ .

- Un début du paquet correspond à un mode local dont la constante  $C$  est positive.

- Une fin du paquet correspond à un mode local dont la constante  $C$  est négative.

- L'analyse asymptotique fournit donc une très bonne approximation pour évaluer une bonne quantité de valeurs propres du début et de la fin de chacun des paquets.

Jusqu'à présent, la méthode n'a pas permis, ni d'évaluer les valeurs propres correspondant au milieu d'un paquet de valeurs propres, ni d'estimer le nombre de valeurs propres dans un paquet. Deux voies semblent possibles pour améliorer cette situation :

1) Trouver une méthode qui permet de coupler les deux modes locaux. En effet l'analyse asymptotique développer ici s'appuie sur des hypothèses qui ne sont plus valables en milieu du paquet en modulant un seul mode local.

2) Chercher d'autres estimations en modulant des modes locaux de période 3l, 4l, 5l,.....etc.

## **5 INTERACTION DES MODES LOCAUX PAR UNE MÉTHODE DE RITZ**

### **5.1. Introduction**

Dans les chapitres précédents, nous avons développé une méthode à deux échelles autour d'un seul mode local. Nous avons pu rendre compte de la modulation de ce mode par une équation d'amplitude de type Ginzburg-Landau. Cette analyse asymptotique permet de calculer un bon nombre de valeurs propres correspondant au début et à la fin d'un paquet. Cependant elle ne permet ni d'évaluer les valeurs propres correspondant au milieu du paquet, ni d'estimer le nombre de valeurs propres dans le paquet.

Dans ce chapitre nous allons essayer de prendre en compte l'interaction entre modes locaux, par une méthode qui couple la technique de Ritz et une analyse à deux échelles. L'analyse à deux échelles a permis de rendre en compte de la modulation d'un mode local. La méthode de Ritz permet d'introduire en plus l'interaction entre les modes locaux., nous pourrons obtenir ainsi des équations d'amplitudes, puisque nous gardons les deux échelles.

### **5.2. Couplage de la méthode de Ritz avec une analyse à deux échelles: principes généraux.**

Dans ce paragraphe, nous présentons la démarche permettant le couplage de la méthode de Ritz avec une analyse à deux échelles.

**a)** On garde les deux variables indépendantes  $x$  et  $X$ , ainsi que la règle de dérivation associée à l'emploi de la méthode d'échelle double :

$$\begin{cases} X = \eta x \\ \frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial X} \end{cases} \quad (1)$$

où  $\eta$  est un petit paramètre (par exemple l'inverse du nombre de cellules de la structure). On renonce aux développements asymptotiques des inconnues du problème initial  $u(x)$  et  $\lambda$  :

$$\begin{aligned} u(x) &= u_0(x, X) + \eta u_1(x, X) + \eta^2 u_2(x, X) + \dots \\ \lambda &= \lambda_0 + \eta \lambda_1 + \eta^2 \lambda_2 + \dots \end{aligned}$$

**b)** On écrit le problème sous la forme d'un système différentiel du premier ordre :

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \bar{u}(x) = L(x) \bar{u}(x) + \lambda M(x) \bar{u}(x) \\ L(x) \text{ et } M(x) \text{ sont des matrices } 4 \times 4 \text{ périodiques} \\ \bar{u}(x) = (u(x), u''(x), u'(x), u'''(x)) \in \mathbb{R}^4 \end{cases} \quad (2)$$

**c)** On applique la méthode de Ritz en cherchant  $\bar{u}(x)$  sous la forme:

$$\begin{cases} \bar{u}(x) = \sum_{i=1}^n a_i(X) \bar{w}_i(x) \\ a_i(X) \text{ amplitudes lentement variable (à valeurs réelles)} \\ \bar{w}_i(x) \text{ fonctions de Ritz périodiques (donc définies localement)} \end{cases} \quad (3)$$

**d) Équations d'amplitudes pour la modulation et l'interaction des modes locaux.**

On introduit la relation (3) dans le problème (2). En respectant la règle de dérivation (1), on obtient l'équation suivante :

$$\eta \sum_{i=1}^n \frac{d}{dX} a_i(X) \bar{w}_i(x) + \sum_{i=1}^n a_i(X) \frac{d}{dx} \bar{w}_i(x) = \sum_{i=1}^n (L(x) \bar{w}_i(x)) a_i(X) + \lambda \sum_{i=1}^n (M(x) \bar{w}_i(x)) a_i(X) \quad (5)$$

On se donne ensuite d'autres fonctions  $\{\bar{w}_i^*(x)\}_{i=1,n}$  périodiques, qu'il faudra choisir judicieusement. On définit un produit scalaire sur la période pl commune à tous les modes locaux considérés (p entier) :

$$\langle \bar{f}(x), \bar{g}(x) \rangle = \int_0^{pl} \bar{f}(x) \cdot \bar{g}(x) dx$$

où  $\bar{f}(x) \cdot \bar{g}(x)$  est le produit scalaire classique des vecteurs  $\bar{f}(x)$  et  $\bar{g}(x)$ .

Nous remarquons l'hypothèse "x, X variables indépendantes" se traduit par :

$$\langle a(X) \bar{f}(x), \bar{g}(x) \rangle = a(X) \langle \bar{f}(x), \bar{g}(x) \rangle$$

Ensuite, nous projetons l'équation (5) sur les n fonctions  $\{\bar{w}_i^*(x)\}_{i=1,n}$  et on obtient les équations suivantes :

$$\sum_{j=1}^n \eta \langle \bar{w}_j, \bar{w}_i^* \rangle \frac{d}{dX} a_j + \left\langle \frac{d}{dx} \bar{w}_j, \bar{w}_i^* \right\rangle a_j = \sum_{j=1}^n \langle L(x) \bar{w}_j, \bar{w}_i^* \rangle a_j + \langle M(x) \bar{w}_j, \bar{w}_i^* \rangle a_j$$

pour  $i \in [1, n]$

On peut réécrire ces équations sous une forme matricielle:

$$\left\{ \begin{array}{l} [S] \left\{ \frac{d\bar{a}}{dx} \right\} = [R] \{\bar{a}\} \\ [S] \text{ et } [R] \text{ sont des matrices carrées de dimension } n \times n \\ \bar{a} \text{ est le vecteur } (a_1, a_2, \dots, a_n) \end{array} \right.$$

C'est un système différentiel vérifiées par les amplitudes  $a_i$ ,  $i \in [1, n]$ , qui sont les inconnues de l'écriture de Ritz (3). Le choix des fonctions  $\bar{w}_i$  et  $\bar{w}_i^*$  est en principe arbitraire : dans la suite nous tiendrons compte pour ce choix de l'analyse asymptotique du troisième chapitre.

Le but de la résolution de ce système associé à des conditions aux limites, est de nous permettre d'évaluer les modes propres et les valeurs propres du problème (2).

### 5.3. Applications au modèle de vibration

Nous appliquons dans ce paragraphe la méthode décrite ci-dessus au modèle de vibration présenté au chapitre 3. Nous nous intéressons tout d'abord au choix de la base de Ritz et de la base de projection.

#### 5.3.1. Réécriture du problème initial

L'équation du modèle de vibration (§ 3.2) peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \bar{u}(x) = L(x)\bar{u}(x) + \lambda M(x)\bar{u}(x) \\ \bar{u}(x) = (u(x), u''(x), u'(x), u'''(x)) \\ \bar{u}(x) \in \mathbb{R}^4 \end{cases} \quad (6)$$

Nous réécrivons ce problème (6) sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \mathbb{1}L(\lambda, \frac{d}{dx}, x) \bar{u}(x) = \bar{0} \\ \mathbb{1}L(x) = \frac{d}{dx} - L(x) - \lambda M(x) \\ \bar{u}(x) = (u(x), u''(x), u'(x), u'''(x)) \\ \bar{u}(x) \in \mathbb{R}^4 \end{cases} \quad (7)$$

$$\text{où } L(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k(x) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et } M(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$k(x)$  est une fonction de type Dirac, qui représente la répartition discrète et périodique des ressorts  $k_1$  et  $k_2$  le long de la poutre (figure 1 du chapitre 3).

### 5.3.2. Réécriture des Problèmes locaux et modes locaux

A partir de l'écriture (6), les modes locaux définis dans le paragraphe 3.4 sont les solutions du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx} \bar{w}_\alpha = L(x)\bar{w}_\alpha + \lambda_\alpha M(x)\bar{w}_\alpha \\ \bar{w}_\alpha \text{ est périodique de période } pl \\ pl \text{ longueur de la cellule de base} \\ \lambda_\alpha \text{ la valeur propre} \end{array} \right. \quad (8)$$

Dans la suite, on notera par  $\bar{w}_d(x)$ ,  $\lambda_d$  le mode local et la valeur propre associée correspondant au début d'un paquet et par  $\bar{w}_f(x)$ ,  $\lambda_f$  le mode local et la valeur propre associée correspondant à la fin du même paquet

### 5.3.3.Stratégie pour obtenir la base de Ritz

Reprenons dans ce nouveau cadre les développements asymptotiques autour d'un seul mode, par exemple le mode local correspondant au début du paquet.

Par la méthode asymptotique décrite aux chapitres précédents nous cherchons les couples  $(\bar{u}(x), \lambda)$  solutions du problème (7) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \bar{u}(x) &= \bar{u}_d(x, X) + \eta \bar{u}_{1d}(x, X) + \dots \\ \lambda &= \lambda_d + \eta \lambda_1 + \eta^2 \lambda_2 + \dots \end{aligned} \quad (9)$$

On introduit alors ces développements asymptotiques dans le problème (7). En respectant la règle de dérivation liée à la méthode des échelles doubles, on obtient les problèmes suivants (à chaque ordre de  $\eta$ ) :

$$\begin{cases} \mathbb{L}(\lambda_d, \partial_x, x) \bar{u}_d = \bar{0} \\ \mathbb{L}(\lambda_d, \partial_x, x) = \frac{\partial}{\partial x} - L(x) - \lambda_d M(x) \\ \bar{u}_d(x, X) \text{ est pl - périodique en } x \end{cases} \quad \text{ordre 1}$$

$$\begin{cases} \mathbb{L}(\lambda_d, \partial_x, x) \bar{u}_{1d} = -\frac{\partial}{\partial X} \bar{u}_d + \lambda_1 \bar{u}_d \\ \bar{u}_{1d}(x, X) \text{ est pl - périodique en } x \end{cases} \quad \text{ordre } \eta$$

La solution du problème à l'ordre 1 s'écrit:  $\bar{u}_d(x, X) = A_0(X) \bar{w}_d(x)$  avec

$$\begin{cases} \mathbb{L}(\lambda_d, \partial_x, x) \bar{w}_d = \bar{0} \\ \bar{w}_d(x) = (w_d(x), w_d''(x), w_d'(x), w_d'''(x)) \in \mathbb{R}^4 \\ \bar{w}_d(x) \text{ est pl - périodique} \end{cases} \quad (10)$$

Nous remarquons ici que la composante  $w_d(x)$  est le mode local correspondant au début du paquet, qui est une solution du problème local défini au paragraphe 3.4.

Au troisième chapitre nous avons écrit l'équation de solvabilité du problème à l'ordre  $\eta$ . Afin d'obtenir la même condition, nous choisissons un vecteur de projection  $\bar{w}_d^*(x)$  tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{L}^*(\lambda_d, \partial_x, x) \bar{w}_d^* = \bar{0} \\ \mathbb{L}^*(\lambda_d, \partial_x, x) = -\frac{\partial}{\partial x} - L^*(x) - \lambda_d M^*(x) \\ L^*(x) \text{ est la matrice transposée de } L(x) \\ M^*(x) \text{ est la matrice transposée de } M(x) \\ \bar{w}_d^*(x) \in \mathbb{R}^4 \\ \bar{w}_d^*(x) \text{ est pl - périodique} \end{array} \right. \quad (11)$$

L'opérateur  $\mathbb{L}^*(\lambda_d, \partial_x, x)$  représente l'adjoint de l'opérateur  $\mathbb{L}(\lambda_d, \partial_x, x)$ .

A partir du système (11), il est aisé de montrer que  $\bar{w}_d^*(x) = (-w_d''', -w_d'', w_d', w_d)$  et que  $\langle \bar{w}_d, \bar{w}_d^* \rangle = 0$ , comme pour les instabilités cellulaires (N. Damil et M. Potier-Ferry, 1992).

De plus l'identité  $\langle \mathbb{L}(\lambda_d, \partial_x, x) \bar{u}_{1d}, \bar{w}_d^* \rangle = 0$  implique  $\lambda_1 = 0$ .

La solution du problème à l'ordre  $\eta$  est alors de la forme :

$$\bar{u}_{1d}(x, X) = A_0'(X) \bar{w}_{1d}(x) + A_1(X) \bar{w}_d(x)$$

où l'amplitude  $A_1(X)$  est inconnue à ce niveau et  $\bar{w}_{1d}(x)$  est la solution du problème local suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{L}(\lambda_d, \partial_x, x) \bar{w}_{1d} = -\bar{w}_d \\ \bar{w}_{1d}(x) \in \mathbb{R}^4, \text{ est pl - périodique} \end{array} \right. \quad (12)$$

Nous définissons le second vecteur de projection  $\bar{w}_{1d}^*(x)$  tel que :

$$\begin{cases} \text{IL}^*(\lambda_d, \partial_x, x) \bar{w}_{1d}^* = -\bar{w}_d^* \\ \bar{w}_{1d}^*(x) \in \mathbb{R}^4, \text{ est pl-périodique} \end{cases} \quad (13)$$

Nous introduirons le couple  $(\bar{w}_d, \bar{w}_{1d})$  dans la base de Ritz et le couple  $(\bar{w}_d^*, \bar{w}_{1d}^*)$  dans la base de projection. Ce choix sera justifié dans le paragraphe qui suit.

#### 5.3.4. Calcul avec deux modes locaux

Dans ce paragraphe, nous procédons à un essai de la méthode du couplage de la méthode de Ritz et de la méthode d'échelle double, avec une base formée de deux modes locaux.

On prends  $(\bar{w}_d, \bar{w}_{1d})$  comme base de Ritz et on cherche alors la solution du problème (7) sous la forme :

$$\bar{u}(x, X) = a_1(X) \bar{w}_d(x) + a_2(X) \bar{w}_{1d}(x) \quad (14)$$

On introduit les expressions de (14) dans le problème (7). Sachant que  $\bar{w}_d(x)$  vérifie le problème (10) (ou (8)) et que  $\bar{w}_{1d}(x)$  vérifie le problème (12), nous obtenons l'équation suivante:

$$\eta \frac{d}{dX} a_1 \bar{w}_d + \eta \frac{d}{dX} a_2 \bar{w}_{1d} = a_2 \bar{w}_d + a_1 (\lambda - \lambda_d) M(x) \bar{w}_d + a_2 (\lambda - \lambda_d) M(x) \bar{w}_{1d}$$

On projette ensuite cette équation sur la base  $(\bar{w}_d^*, \bar{w}_{1d}^*)$ , on obtient le système différentiel suivant:

$$\begin{cases} \eta \frac{d}{dX} a_2 \langle \bar{w}_{1d}, \bar{w}_d^* \rangle = a_1 (\lambda - \lambda_d) \langle M \bar{w}_d, \bar{w}_d^* \rangle + a_2 (\lambda - \lambda_d) \langle M \bar{w}_{1d}, \bar{w}_d^* \rangle \\ \eta \left[ \frac{d}{dX} a_1 - a_2 \right] \langle \bar{w}_d, \bar{w}_{1d}^* \rangle = a_1 (\lambda - \lambda_d) \langle M \bar{w}_d, \bar{w}_{1d}^* \rangle + a_2 (\lambda - \lambda_d) \langle M \bar{w}_{1d}, \bar{w}_{1d}^* \rangle \end{cases}$$

En tenant compte des propriétés de symétrie des modes locaux, le système se simplifie de la manière suivante :

$$\begin{cases} \eta \frac{d}{dX} a_2 \langle \bar{w}_{1d}, \bar{w}_d^* \rangle = a_1 (\lambda - \lambda_d) \langle M \bar{w}_d, \bar{w}_d^* \rangle \\ \eta \frac{d}{dX} a_1 = a_2 \end{cases} \quad (15)$$

Ainsi, nous avons une équation différentielle du second ordre vérifiée par l'amplitude  $a_1(X)$  :

$$\begin{cases} \eta^2 C \frac{d^2}{dX^2} a_1 + (\lambda - \lambda_0) a_1 = 0 \\ C = - \frac{\langle \bar{w}_{1d}, \bar{w}_d^* \rangle}{\langle M \bar{w}_d, \bar{w}_d^* \rangle} \end{cases}$$

Nous pouvons réécrire cette équation sous la forme suivante :

$$\begin{cases} C \frac{d^2}{dx^2} a_1 + (\lambda - \lambda_0) a_1 = 0 \\ C = - \frac{\langle \bar{w}_{1d}, \bar{w}_d^* \rangle}{\langle M \bar{w}_d, \bar{w}_d^* \rangle} \end{cases} \quad (16)$$

Celle-ci ressemble à l'équation d'amplitude obtenue par le développement asymptotique du chapitre 3. La valeur de la constante C est identique à celle obtenue par la méthode asymptotique.

Le choix de la base de Ritz  $(\bar{w}_d, \bar{w}_{1d})$  à partir des modes locaux du développement asymptotique autour d'un seul mode  $w_d$  permet donc de retrouver les résultats de la méthode asymptotique au second ordre. En effet, nous obtenons la même équation d'amplitude. Considérons maintenant les conditions aux limites d'encastrement des extrémités de la poutre, avec par exemple  $w_d = w'_d = 0$  (voir paragraphe 3.7.1). Par la méthode du couplage, nous avons considéré l'approximation suivante :

$$\bar{u}(x) = a_1(X)\bar{w}_d(x) + a_2(X)\bar{w}_{1d}(x)$$

$$\text{avec } \bar{u}(x) = \begin{Bmatrix} u(x) \\ u''(x) \\ u'(x) \\ u'''(x) \end{Bmatrix}, \quad \bar{w}_d(x) = \begin{Bmatrix} w_d(x) \\ w_d''(x) \\ w_d'(x) \\ w_d'''(x) \end{Bmatrix} \quad \text{et } \bar{w}_{1d}(x) = \begin{Bmatrix} w_{1d1}(x) \\ w_{1d2}(x) \\ w_{1d3}(x) \\ w_{1d4}(x) \end{Bmatrix}$$

Les conditions d'encastrement des extrémités de la poutre s'écrivent :

$$\begin{cases} u(0) = \frac{du}{dx}(0) = 0 \\ u(L) = \frac{du}{dx}(L) = 0 \end{cases}$$

Ce qui se traduit, dans le nouveau cadre, par le système suivant :

$$\begin{cases} a_1 w_d + a_2 w_{1d1} = 0 \\ a_1 w'_d + a_2 w_{1d3} = 0 \end{cases}$$

En tenant compte de l'équation (15)b et du fait que  $w_d$  et  $w'_d$  s'annulent en 0 et pl, on obtient les conditions aux limites vérifiées par l'amplitude  $a_1(x)$  :

$$a_1'(0) = a_1'(L) = 0$$

La solution générale de l'équation (16) est de type :

$$a_1(x) = a \sin(kx) + b \cos(kx)$$

A partir des conditions aux limites, il est facile de voir que cette solution s'écrit :

$$\begin{cases} a_1(x) = b \cos(kx) \\ k = \frac{n\pi}{L} \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ \lambda - \lambda_d = Ck^2 \end{cases}$$

Ainsi l'expression des valeurs propres est :

$$\lambda = \lambda_d + C \frac{n^2 \pi^2}{L^2}$$

Ces résultats sont identiques à ceux du calcul asymptotique à l'ordre 2 (voir chapitre 3), ce qui n'est guère surprenant puisque la base de Ritz est choisie à partir des modes locaux obtenus par un développement asymptotique autour du mode local  $w_d$ .

### **5.3.5. Calcul avec quatre modes locaux**

Dans ce paragraphe, nous considérons une base de Ritz calculée à partir de quatre modes locaux. Les deux premiers modes sont des modes locaux

correspondant au début du paquet, les deux derniers sont les modes locaux correspondant à la fin du même paquet. Cette base nous permet de prendre en compte l'interaction entre les modes locaux du début du paquet et de la fin du paquet. On note cette base par  $\bar{w}_d, \bar{w}_{1d}, \bar{w}_f, \bar{w}_{1f}$  tels que :

$\bar{w}_d(x)$  est construit à partir du mode local  $w_d$ , dont la valeur propre associée est  $\lambda_d$ .  $\bar{w}_{1d}$  est construit à partir du problème asymptotique à l'ordre  $\eta$  (§ 4.3.3) du début du paquet, dont la solution est  $w_{1d}$

$\bar{w}_f(x)$  est construit à partir du mode local  $w_f$ , dont la valeur propre associée est  $\lambda_f$ .  $\bar{w}_{1f}$  est construit à partir du problème asymptotique à l'ordre  $\eta$  (§ 4.3.3) de la fin du paquet, dont la solution est  $w_{1f}$ .

On cherche maintenant la solution du problème (7) sous la forme :

$$\bar{w}(x) = a_1(X)\bar{w}_d(x) + a_2(X)\bar{w}_{1d}(x) + a_3(X)\bar{w}_f(x) + a_4(X)\bar{w}_{1f}(x) \quad (17)$$

La base de projection est choisie de la même manière que précédemment. Elle est notée donc par  $(\bar{w}_d^*, \bar{w}_{1d}^*, \bar{w}_f^*, \bar{w}_{1f}^*)$ . On introduit alors l'expression (17) dans le problème (7). En tenant compte du fait que les couples  $(\bar{w}_d, \lambda_d)$  et  $(\bar{w}_f, \lambda_f)$ , sont des solutions du problème (8), on obtient l'équations suivante :

$$\left[ \frac{d}{dx} a_1 - a_2 \right] \bar{w}_d + \left[ \frac{d}{dx} a_3 - a_4 \right] \bar{w}_f + \frac{d}{dx} a_2 \bar{w}_{1d} + \frac{d}{dx} a_4 \bar{w}_{1f} = a_1(\lambda - \lambda_d)M\bar{w}_d + a_2(\lambda - \lambda_d)M\bar{w}_{1d} + a_3(\lambda - \lambda_f)M\bar{w}_f + a_4(\lambda - \lambda_f)M\bar{w}_{1f} \quad (18)$$

On projette l'équation (18) sur la base de projection  $(\bar{w}_d^*, \bar{w}_{1d}^*, \bar{w}_f^*, \bar{w}_{1f}^*)$ , on obtient les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha_1 \left[ \frac{d}{dx} a_1 - a_2 \right] + \alpha_2 \left[ \frac{d}{dx} a_3 - a_4 \right] + \alpha_3 \frac{d}{dx} a_2 + \alpha_4 \frac{d}{dx} a_4 = \\ \alpha_5 (\lambda - \lambda_d) a_1 + \alpha_6 (\lambda - \lambda_d) a_2 + \alpha_7 (\lambda - \lambda_f) a_3 + \alpha_8 (\lambda - \lambda_f) a_4 \end{aligned} \quad (19)a$$

$$\begin{aligned} \alpha_9 \left[ \frac{d}{dx} a_1 - a_2 \right] + \alpha_{10} \left[ \frac{d}{dx} a_3 - a_4 \right] + \alpha_{11} \frac{d}{dx} a_2 + \alpha_{12} \frac{d}{dx} a_4 = \\ \alpha_{13} (\lambda - \lambda_d) a_1 + \alpha_{14} (\lambda - \lambda_d) a_2 + \alpha_{15} (\lambda - \lambda_f) a_3 + \alpha_{16} (\lambda - \lambda_f) a_4 \end{aligned} \quad (19)b$$

$$\begin{aligned} \alpha_{17} \left[ \frac{d}{dx} a_1 - a_2 \right] + \alpha_{18} \left[ \frac{d}{dx} a_3 - a_4 \right] + \alpha_{19} \frac{d}{dx} a_2 + \alpha_{20} \frac{d}{dx} a_4 = \\ \alpha_{21} (\lambda - \lambda_d) a_1 + \alpha_{22} (\lambda - \lambda_d) a_2 + \alpha_{23} (\lambda - \lambda_f) a_3 + \alpha_{24} (\lambda - \lambda_f) a_4 \end{aligned} \quad (19)c$$

$$\begin{aligned} \alpha_{25} \left[ \frac{d}{dx} a_1 - a_2 \right] + \alpha_{26} \left[ \frac{d}{dx} a_3 - a_4 \right] + \alpha_{27} \frac{d}{dx} a_2 + \alpha_{28} \frac{d}{dx} a_4 = \\ \alpha_{29} (\lambda - \lambda_d) a_1 + \alpha_{30} (\lambda - \lambda_d) a_2 + \alpha_{31} (\lambda - \lambda_f) a_3 + \alpha_{32} (\lambda - \lambda_f) a_4 \end{aligned} \quad (19)d$$

avec

$$\begin{cases} \alpha_1 = \langle \bar{w}_d, \bar{w}_d^* \rangle & \alpha_2 = \langle \bar{w}_f, \bar{w}_d^* \rangle & \alpha_3 = \langle \bar{w}_{1d}, \bar{w}_d^* \rangle & \alpha_4 = \langle \bar{w}_{1f}, \bar{w}_d^* \rangle \\ \alpha_5 = \langle M\bar{w}_d, \bar{w}_d^* \rangle & \alpha_6 = \langle M\bar{w}_{1d}, \bar{w}_d^* \rangle & \alpha_7 = \langle M\bar{w}_f, \bar{w}_d^* \rangle & \alpha_8 = \langle M\bar{w}_{1f}, \bar{w}_d^* \rangle \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_9 = \langle \bar{w}_d, \bar{w}_{1d}^* \rangle & \alpha_{10} = \langle \bar{w}_f, \bar{w}_{1d}^* \rangle & \alpha_{11} = \langle \bar{w}_{1d}, \bar{w}_{1d}^* \rangle & \alpha_{12} = \langle \bar{w}_{1f}, \bar{w}_{1d}^* \rangle \\ \alpha_{13} = \langle M\bar{w}_d, \bar{w}_{1d}^* \rangle & \alpha_{14} = \langle M\bar{w}_{1d}, \bar{w}_{1d}^* \rangle & \alpha_{15} = \langle M\bar{w}_f, \bar{w}_{1d}^* \rangle & \alpha_{16} = \langle M\bar{w}_{1f}, \bar{w}_{1d}^* \rangle \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_{17} = \langle \bar{w}_d, \bar{w}_f^* \rangle & \alpha_{18} = \langle \bar{w}_f, \bar{w}_f^* \rangle & \alpha_{19} = \langle \bar{w}_{1d}, \bar{w}_f^* \rangle & \alpha_{20} = \langle \bar{w}_{1f}, \bar{w}_f^* \rangle \\ \alpha_{21} = \langle M\bar{w}_d, \bar{w}_f^* \rangle & \alpha_{22} = \langle M\bar{w}_{1d}, \bar{w}_f^* \rangle & \alpha_{23} = \langle M\bar{w}_f, \bar{w}_f^* \rangle & \alpha_{24} = \langle M\bar{w}_{1f}, \bar{w}_f^* \rangle \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_{25} = \langle \bar{w}_d, \bar{w}_{1f}^* \rangle & \alpha_{26} = \langle \bar{w}_f, \bar{w}_{1f}^* \rangle & \alpha_{27} = \langle \bar{w}_{1d}, \bar{w}_{1f}^* \rangle & \alpha_{28} = \langle \bar{w}_{1f}, \bar{w}_{1f}^* \rangle \\ \alpha_{29} = \langle M\bar{w}_d, \bar{w}_{1f}^* \rangle & \alpha_{30} = \langle M\bar{w}_{1d}, \bar{w}_{1f}^* \rangle & \alpha_{31} = \langle M\bar{w}_f, \bar{w}_{1f}^* \rangle & \alpha_{32} = \langle M\bar{w}_{1f}, \bar{w}_{1f}^* \rangle \end{cases}$$

Nous notons que nous avons utilisé :  $\langle \bar{w}_i, \bar{w}_i^* \rangle = 0$  pour une première simplification de ces équations.

On remarque ici que les expressions (19)a, (19)b, (19)c et (19)d permettent de prendre en compte de l'interaction entre les modes locaux du début et de la fin du paquet. Cette interaction est exprimée à l'aide de certains coefficients de projection  $\alpha_i$ . Nous gardons aussi la modulation de ces modes par l'écriture (17).

Le but essentiel de cette nouvelle analyse est l'obtention des valeurs propres et d'évaluer les modes propres correspondant par la résolution de ces équations .

Nous considérons maintenant le cas particulier où  $k_1 = 100000$ ,  $k_2 = 0$ ,  $l = 1$  et  $L = 20$ . En utilisant les propriétés de symétries des modes locaux, on obtient alors une forme simplifiée des équations d'amplitude (19):

$$\begin{cases} \alpha_3 \frac{da_2}{dx} = \alpha_5(\lambda - \lambda_d)a_1 + \alpha_8(\lambda - \lambda_f)a_4 \\ \alpha_9 \left[ \frac{da_1}{dx} - a_2 \right] + \alpha_{12} \frac{da_4}{dx} = \alpha_{14}(\lambda - \lambda_d)a_2 + \alpha_{15}(\lambda - \lambda_f)a_3 \\ \alpha_{20} \frac{da_4}{dx} = \alpha_{22}(\lambda - \lambda_d)a_2 + \alpha_{23}(\lambda - \lambda_f)a_3 \\ \alpha_{26} \left[ \frac{da_3}{dx} - a_4 \right] + \alpha_{21} \frac{da_2}{dx} = \alpha_{29}(\lambda - \lambda_d)a_1 + \alpha_{24}(\lambda - \lambda_f)a_4 \end{cases} \quad (20)$$

En combinant les équations de ce système nous obtenons une équation différentielle d'ordre 4 vérifiée par l'amplitude  $a_1(x)$ , qui est du type :

$$\frac{d^4}{dx^4} a_1 + g_1(\lambda) \frac{d^2}{dx^2} a_1 + g_2(\lambda) a_1 = 0 \quad (21)$$

où  $g_1(\lambda)$  et  $g_2(\lambda)$  sont des fonctions simples de la valeur propre  $\lambda$  et des valeurs des paramètres  $\lambda_d, \lambda_f, \alpha_i$

Cette dernière reste à résoudre à partir des conditions aux limites considérées. Nous montrerons dans la suite comment obtenir ces conditions aux limites.

### 5.3.6. Discussion des conditions aux limites

La question, qui se pose à ce stade de l'analyse est : comment obtenir les conditions aux limites vérifiées par les amplitudes ? D'après le système différentiel (20) et après le calcul numérique des coefficients de projection ( $\alpha_i$ ), nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} a_2(x) = h_1(\lambda) a_1'(x) + h_2(\lambda) a_1'''(x) \\ a_3(x) = h_3(\lambda) a_1'(x) + h_4(\lambda) a_1'''(x) \\ a_4(x) = h_5(\lambda) a_1(x) + h_6(\lambda) a_1''(x) \end{cases} \quad (22)a$$

L'équation caractéristique de l'équation différentielle (21) est :

$$R^4 + g_1(\lambda) R^2 + g_2(\lambda) = 0 \quad (22)b$$

Cette équation admet quatre solutions  $R_1, R_2, R_3$  et  $R_4$  :

$$\begin{cases} R_1^2 = R_2^2 = \frac{g_1(\lambda) + \sqrt{g_1^2(\lambda) - 4g_2(\lambda)}}{2} = q_1 \\ R_3^2 = R_4^2 = \frac{g_1(\lambda) - \sqrt{g_1^2(\lambda) - 4g_2(\lambda)}}{2} = q_2 \end{cases} \quad (22)c$$

Pour le cas que nous traitons la solution de l'équation différentielle s'écrit

:

$$a_1(x) = b \sin(q_1 x) + c \cos(q_1 x) + d \sin(q_2 x) + e \cos(q_2 x)$$

où les constantes  $b, c, d$  et  $e$  restent à déterminer à partir des conditions aux limites.

D'après les expressions (22), nous pouvons écrire les autres amplitudes sous les formes suivantes:

$$a_2(x) = b_{21}(\lambda) \sin(q_1 x) + c_{21}(\lambda) \cos(q_1 x) + d_{21}(\lambda) \sin(q_2 x) + e_{21}(\lambda) \cos(q_2 x)$$

$$a_3(x) = b_{31}(\lambda) \sin(q_1 x) + c_{31}(\lambda) \cos(q_1 x) + d_{31}(\lambda) \sin(q_2 x) + e_{31}(\lambda) \cos(q_2 x)$$

$$a_4(x) = b_{41}(\lambda) \sin(q_1 x) + c_{41}(\lambda) \cos(q_1 x) + d_{41}(\lambda) \sin(q_2 x) + e_{41}(\lambda) \cos(q_2 x)$$

où les  $b_{i1}(\lambda), c_{i1}(\lambda), d_{i1}(\lambda)$  et  $e_{i1}(\lambda)$  sont des fonctions de l'inconnue  $\lambda$  et des valeurs des paramètres  $\lambda_d, \lambda_f$

Maintenant, pour prendre en compte les conditions aux limites il suffit d'écrire les équations correspondantes dans cette nouvelle analyse ( méthode du couplage de la méthode de Ritz et la méthode d'échelle double), comme nous l'avons fait au paragraphe précédent. Prenons par exemple le cas où les extrémités de la poutre sont encastées :

$$\begin{cases} u(0) = \frac{du}{dx}(0) = 0 \\ u(L) = \frac{du}{dx}(L) = 0 \end{cases}$$

Cela se traduit en chaque extrémité, dans le nouveau cadre par le système suivant :

$$\begin{cases} a_1 w_d + a_2 w_{1d1} + a_3 w_f + a_4 w_{1f1} = 0 \\ a_1 w'_d + a_2 w_{1d3} + a_3 w'_f + a_4 w_{1f3} = 0 \end{cases}$$

puisque, nous avons considéré l'approximation suivante :

$$\bar{u}(x) = a_1 \bar{w}_d + a_2 \bar{w}_{1d} + a_3 \bar{w}_f + a_4 \bar{w}_{1f}$$

$$\text{avec } \bar{u}(x) = \begin{Bmatrix} u(x) \\ u''(x) \\ u'(x) \\ u'''(x) \end{Bmatrix}, \quad \bar{w}_d(x) = \begin{Bmatrix} w_d(x) \\ w''_d(x) \\ w'_d(x) \\ w'''_d(x) \end{Bmatrix} \quad \text{et } \bar{w}_{1d}(x) = \begin{Bmatrix} w_{1d1}(x) \\ w_{1d2}(x) \\ w_{1d3}(x) \\ w_{1d4}(x) \end{Bmatrix}$$

$$\bar{w}_f(x) = \begin{Bmatrix} w_f(x) \\ w''_f(x) \\ w'_f(x) \\ w'''_f(x) \end{Bmatrix} \quad \text{et } \bar{w}_{1f}(x) = \begin{Bmatrix} w_{1f1}(x) \\ w_{1f2}(x) \\ w_{1f3}(x) \\ w_{1f4}(x) \end{Bmatrix}$$

Il est clair que la traduction des conditions aux limites dans la nouvelle analyse, fournit un système de deux équations à quatre inconnues. Nous concluons donc que ces conditions sont dégénérées. En effet la solution que nous pouvons considérer est :

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0 \text{ en chaque extrémité.}$$

Pour rester compatible avec les résultats obtenus par un développement asymptotique autour d'un seul mode (par modulation d'un seul mode), nous avons choisi imposer les conditions trouvées précédemment sans couplage de modes (chapitre 3) :

$$\begin{cases} a_1 = 0 & a'_2 = 0 \\ a'_3 = 0 & a_4 = 0 \end{cases} \text{ en chaque extrémité.}$$

Ceci impose à l'amplitude  $a_1(x)$  d'avoir la forme suivante :

$$a_1(x) = c \sin(Kx) \tag{23}$$

$c$  est une constante arbitraire

$$K = \frac{n\pi}{L} \quad n \text{ entier}$$

Ainsi, il faut choisir  $K$  entre les deux nombres d'ondes possibles  $q_1$  et  $q_2$  (voir les expressions (22)c). Ce choix est fait en traçant les fonctions  $q_1$  et  $q_2$  pour  $\lambda \in [\lambda_d, \lambda_f]$  de façon à avoir la fonction qui correspond à la solution (23), qui est sinusoïdale à cause des conditions aux limites.

Le nombre d'ondes  $K$  décrit toujours un ensemble discret de valeurs propres paramétré par l'entier  $n$ . Par rapport aux analyses des chapitres précédents, c'est l'équation d'amplitude (21) qui a été modifiée. Son équation caractéristique (22)b permet de relier la valeur propre  $\lambda$  du système (6) au nombre d'entier  $n = \frac{KL}{\pi}$  :

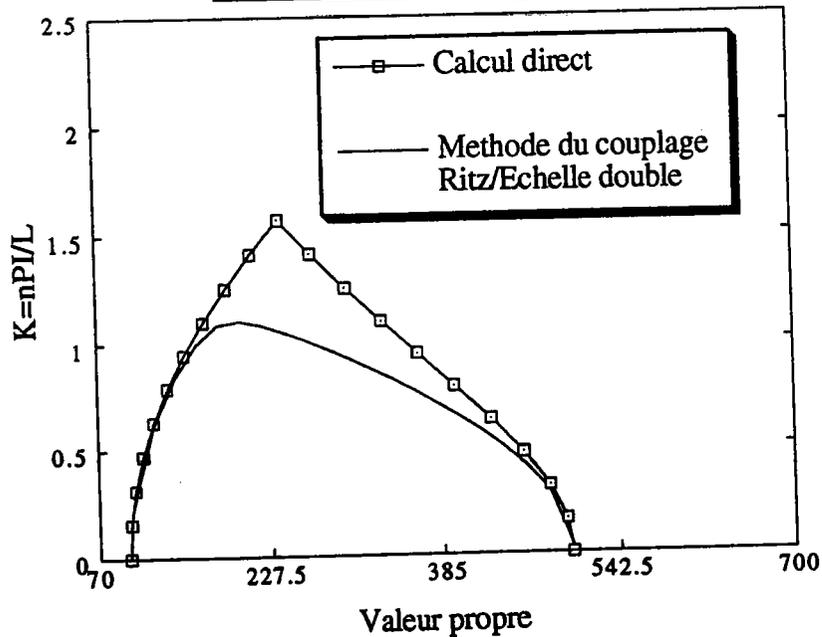
$$\left(\frac{nL}{\pi}\right)^4 + g_1(\lambda)\left(\frac{nL}{\pi}\right)^2 + g_2(\lambda) = 0$$

Chaque valeur de  $\lambda$  correspond à deux valeurs potentielles  $q_1$  et  $q_2$  dont nous choisirons que celle qui correspond à la solution (23). ( $K = \frac{n\pi}{L}$  n entier est une fonction croissante de l'entier n). Ainsi, chaque nombre d'ondes n correspond à deux valeurs propres dans l'intervalle  $[\lambda_d, \lambda_f]$ , la première correspond au début du paquet et la seconde à la fin du paquet.

### 5.3.7. Résultats

Nous confrontons dans ce paragraphe le calcul direct et le calcul par la méthode du couplage précédente (base de Ritz formée par quatre modes locaux). Nous présentons ainsi les résultats obtenus dans le cas où on a:  $k_1 = 100000, k_2 = 0, l = 1$  et  $L = 20$ .

#### Prise en compte de l'interaction entre les modes locaux du début et de la fin du paquet



**Figure 1**

On remarque que pour un entier  $n$  donné, nous avons deux valeurs du paramètre  $\lambda$  (valeur propre du problème initial). La première correspond à un mode de la première moitié du paquet et la deuxième correspond un mode de sa deuxième moitié. Cette remarque est déjà considérée par la méthode asymptotique du chapitre 3 : en effet dans notre analyse asymptotique d'un paquet complet de valeurs propres (chapitre 4), nous pouvons constater à travers des formules asymptotiques (les formules (12), (13) du chapitre 4), que pour un entier  $n$  donné nous avons une valeur propre du début du paquet et une valeur propre de la fin du paquet.

Le début et la fin du paquet sont à peu près bien approché par la nouvelle méthode. Par contre elle approche mal le milieu du paquet comme la méthode asymptotique, ce qui est normal puisque nous n'avons pris en considération que les modes locaux correspondant au début et à la fin du paquet.

Le couplage des modes locaux donne néanmoins un résultat qui était inaccessible par l'analyse des chapitres précédents en modulant un seul mode local. Dans la courbe de la figure 1, le début et la fin du paquet sont nettement marqués. De plus les conditions aux limites réduisent le choix du nombre d'ondes  $K$  à un ensemble discret. Il apparaît donc clairement qu'il n'y a qu'un nombre fini de valeurs propres. Néanmoins, nous ne sommes pas capables d'évaluer précisément ce nombre car la courbe "valeur propre-nombre d'ondes" n'est pas obtenue avec précision au milieu du paquet.

## **5.4. Conclusions**

Nous avons mis en place une nouvelle méthode d'analyse des modes de

vibration des longues structures répétitives. Cette méthode couple à la fois une méthode de Ritz et une analyse à deux échelles. La construction de la base de Ritz reste liée à la méthode asymptotique développée au chapitre précédent. A partir des résultats obtenus , nous pouvons dire que:

La prise en compte de l'interaction entre les modes locaux permet d'approcher un paquet complet de valeurs propres, notamment au début et à la fin.

Nous établissons clairement qu'il y a un nombre fini de valeurs propres dans le paquet et nous évaluons le nombre.

La courbe valeur propre - nombre d'ondes de l'enveloppe est correcte en début et fin du paquet, mais elle reste approximative au milieu du paquet.

Pour améliorer cette méthode, il faut introduire dans la base de Ritz d'autres modes locaux de période 3l, 4l, 5l,....., ce qui nous amènera à travailler sur des cellules de base plus importantes.

## **CONCLUSION**

Dans ce travail nous nous sommes attachés à la mise en place de deux analyses à deux échelles pour étudier des vibrations propres des longues structures flexibles à forme répétitive. La première est une application directe de la technique des échelles multiples, tandis que la seconde méthode couple une approximation de Ritz avec une analyse à deux échelles. L'échelle locale engendre des problèmes locaux qui sont résolus en utilisant quelques cellules de base de la structure avec des conditions de périodicité. L'échelle globale introduit des équations d'amplitudes permettant de rendre compte de la modulation des modes propres.

Ces méthodes ont été testées sur deux modèles. Le premier est représentatif des longues structures sans cellule de base, dont on étudie les instabilités cellulaires. Le deuxième est représentatif des longues structures flexibles à forme répétitive, dont on calcule les fréquences et les modes propres de vibration. Le fait de tenir compte de la forme répétitive de ces structures permet d'effectuer des calculs de valeurs propres sur quelques cellules de base, ce qui nous évite un calcul direct sur toute la structure coûtant cher en temps CPU et en espace mémoire.

Pour le premier modèle, la première méthode a permis d'évaluer une dizaine de valeurs propres avec une assez bonne précision et ceci pour une structures modérément élancée.

Pour le deuxième modèle, la première méthode permet de faire une analyse asymptotique d'un paquet complet de valeurs propres, donnant de très

bons résultats au début et à la fin du paquet. Cependant, elle approche mal le milieu du paquet, ce qui n'est pas surprenant. En effet l'analyse asymptotique s'appuie sur des hypothèses qui ne sont plus valables au milieu du paquet en modulant un seul mode. Ainsi, elle n'a pu signaler le nombre des valeurs propres par paquet. Nous avons montré aussi comment associer des conditions aux limites aux problèmes globaux en tenant compte d'une solution localisée au bord par la méthode de Floquet. Cependant la deuxième méthode permet de détecter la fin d'un paquet en considérant l'interaction des modes locaux par un couplage de la méthode de Ritz et de la méthode d'échelle double. Elle donne aussi de bons résultats du début et de la fin d'un paquet.

En pratique, les deux méthodes semblent être liées, puisque la première nous fournit la base de Ritz utile pour les développements de la deuxième. Ce lien permet de garder l'aspect modulé des modes du début et de la fin du paquet.

Pour améliorer ces méthodes, il faudrait un traitement particulier du milieu du paquet, peut être en revenant sur la théorie de Floquet et donc aux matrices de transfert, ou en cherchant d'autres estimations pour moduler des modes locaux de période 3l, 4l, 5l,...etc. Ceci nous amènerait à travailler sur des cellules de bases plus importantes.

Par la suite, nous espérons étendre ces méthodes à deux échelles :

a) à des structures beaucoup plus complexes et plus réalistes (treillis 2.D, treillis 3.D),

b) aux problèmes dynamiques complets non-linéaires (de résonance et d'instabilités) et aux problèmes de propagation d'ondes.

## **LISTE BIBLIOGRAPHIQUE**

**M. S. Andreson et F.W. Williams, (1986)**

Buckling of periodic lattice structures.

*AIAA Journal, Vol 19, No 6, pp 782-788.*

**M. S. Andreson, (1982)**

Vibration of prestressed periodic lattice structures.

*AIAA Journal, Vol 20, No 6, pp 551-555.*

**M. S. Andreson et F.W. Williams, (1986)**

Natural Vibrating and buckling of general periodic lattice structures.

*AIAA Journal, Vol 24, No 1, pp 163-169.*

**M. Boucif, E. Guyon et J. E. Wesfreid, (1984)**

Role of boundary conditions on mode selection in buckling instability.

*J. Phys. Lett. 45, L-413-L-418.*

**B. Budiansky, (1974)**

Theory of buckling and postbuckling behaviour of elastic structures.

*Advances in Appl. Mech. Vol 14, pp 1-65..*

**E. Byskov, (1988)**

Elastic buckling with infinitely many local modes.

*Mech. Struct. & Mach., Vol 15, No 4, pp 413-435. Marcel Dekker, Inc.*

**D. Caillerie, P. Trompetta et P. Verna, (1989)**

Homogenization of periodic trusses. A new calculus method..

*Congrès IASS 89.*

**R. S. Chadwick, (1978)**

Vibrations of long narrow plates.

*Quarterly of Applied Mathematics, pp 141-154.*

**N. Damil et M. Potier-Ferry, (1986)**

Wavelength selection in the postbuckling of rectangular plate.

*Int. J. Solides structures vol 22, No 5, pp 511-526.*

**N. Damil, (1990)**

De la théorie de la bifurcation au calcul des structures..

*Thèse de doctorat d'etat, Université Hassan II Casablanca-Maroc.*

**N. Damil et M. Potier-Ferry, (1992)**

Amplitude equations for cellular instabilities.

*Dynamics and Stability of Systems vol 7, No 1.*

**J. O. Dow, Z. W. Su , C. C. Feng et C. Bodley, (1985)**

Equivalent continuum representation of structures composed of repeated elements. *AIAA Journal, Vol 23, No 10, 1564-1569.*

**G. Ioos et D. D. Joseph, (1980)**

Elementary stability and bifurcation theory.

*Spring Verlag.*

**G. Ioos, A. Mielke et Y. Demay, (1989)**

Theory of steady Ginzburg-Landau equations in hydrodynamic stability problems..

*European Journal of Mechanics B Fluids vol 8 , pp 229-268.*

**D. W. Jordan et P. Smith, (1987)**

Nonlinear ordinary differential equations.

*(Second edition). Edited by Clarendon Press, Oxford.*

**W. T. Koiter, (1945)**

One the stability of elastic equilibrium..

*Thesis, Delft. English Translation : NASA Techn. Transl. F10,833 (1967).*

**M. Lalanne, P. Berthier et J. Der Hagopian,**

*Mécanique des vibrations linéaires. (Edition Masson).*

**A. Luongo, (1991)**

On the amplitude modulation and localization phenomena in interactive buckling problems. *Int. J. Solids Structures*, Vol 27, No 15, pp 1943-1954. Printed in Great Britain.

**M. Potier-Ferry, (1983)**

Amplitude modulation, phase modulation and localization of buckling patterns. In *Collapse* (Edited by J.M.T. Thompson and G.W.Hunt), pp 149-159. Cambridge Univ. Press, Cambridge.

**M. Potier-Ferry, (1984)**

Wavelength selection and pattern localisation in buckling problems. *Cellular Structures in Instability Problems, Lecture Notes in Physics* (ed. J. E. Wesfreid and S. Zaleski; Springs, Berlin) 43-55.

**J. D. Renton, (1984)**

The beam-like behavior of space trusses. *AIAA Journal*, Vol 22, No 2, 273-280.

**S. Y. Lee , H. Y. Ke et M. J. Kao, (1990)**

Flexural waves in periodic beam. *Journal of Applied Mechanics*, Vol 59, 189-196.

**S. Y. Lee et H. Y. Ke, (1992)**

Flexural wave propagation an elastic beam with periodic structure. *Journal of Applied Mechanics*, Vol 57, 779-783.

**D. J. Mead, (1970)**

Free wave propagation in periodically supported, infinite beams. *J. Sound Vib. vol, 11, No 2, pp 181-197.*

**A. K. Noor et C. M. Andersen, (1979)**

Analysis of beamlike lattice strusses. *Computer methods in Applied Mechanics.and Engineering*, Vol 20, 53-70. North-Holland Publishing Company.

**A. K. Noor et M. P. Nemeth, (1980)**

Analysis of spatial beamlike lattices with rigid joints.

*Computer methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol 24, 35-59. North-Holland Publishing Company.*

**A. K. Noor, (1988)**

Continuum modeling for repetitive lattice structures.

*Appl. Mech. Rev., Vol 41, No 7, 285-296.*

**M. Potier-Ferry, (1984)**

Wavelength selection and pattern localisation in buckling problems.

*Cellular Structures in Instability Problems, Lecture Notes in Physics (ed. J. E. Wesfreid and S. Zaleski; Springs, Berlin) 43-55.*

**R. Ohayon, (1979),**

Homogénéisation par développements asymptotiques mixtes. Vibrations d'un anneau hétérogène à structure périodique..

*C.R.A.S., Paris t 288, 15 01 1979, Série A,-173..*

**J. Sanchez Hubert et E. Sanchez Palencia,**

Vibrating and coupling continuous systems, Asymptotic methods.

*(Edited by Spring-Verlag).*

**M. Touratier, (1986)**

Floquet waves in a body with slender periodic structure.

*Wave Motion , Vol 8, pp 485-495. Elsevier Science Publishers B.V.(North-Holland).*

**P. Verna, (1988)**

Modélisation continue des structures discrètes par homogénéisation.

*Thèse de l'institut Nationale Polytechnique de Grenoble.*

**J. E. Wesfreid et S. Zaleski, (1984)**

Cellular structures in instability problems.

*Lecture Notes in Physics (Springer, Berlin)..*

**Y. Yong et Y. K. Lin, (1990)**

Dynamics of complex truss-type space structures.

*AIAA Journal*, Vol 28, No 7, pp 1250-1258.

## ANNEXES

### Annexe A

#### Calcul asymptotique aux ordres supérieurs pour le modèle de vibration

Dans le troisième nous avons écrit les problèmes asymptotiques jusqu'au second ordre (ordre  $\eta^2$ ) et leurs solutions correspondantes :

$$\begin{aligned}
 u_0(x, X) &= A_0(X)w_0(x) && \text{ordre 1} \\
 u_1(x, X) &= A_1(X)w_0(x) + A'_0(X)w_1(x) && \text{ordre } \eta \\
 u_2(x, X) &= A_2(X)w_0(x) + A'_1(X)w_1(x) + A''_0(X)w_2(x) && \text{ordre } \eta^2
 \end{aligned}$$

Nous écrivons maintenant les problèmes asymptotiques du troisième ordre et du quatrième ordre :

#### Problème asymptotique du troisième ordre

$$\left\{ \begin{array}{l}
 u_3 \text{ périodique en } x \text{ de période } pl \text{ et deux fois continument différentiable} \\
 \ell(\lambda_0) u_3 = -6 \frac{\partial^4}{\partial X^2 \partial x^2} u_1 + \lambda_2 u_1 - 4 \frac{\partial^4}{\partial X \partial x^3} u_2 - 4 \frac{\partial^4}{\partial X^3 \partial x} u_0 + \lambda_3 u_0 \\
 \left[ \left[ \frac{\partial^3}{\partial x^3} u_3(i\ell) \right] \right] = k_1 u_3(i\ell) - 3 \left[ \left[ \frac{\partial^3}{\partial X \partial x^2} u_2(i\ell) \right] \right] - 3 \left[ \left[ \frac{\partial^3}{\partial X^2 \partial x} u_1(i\ell) \right] \right] \\
 \quad - \left[ \left[ \frac{\partial^3}{\partial X^3} u_0(i\ell) \right] \right] \quad i = 0..N_c - 1 \\
 \left[ \left[ \frac{\partial^3}{\partial x^3} u_3(i\ell - \frac{1}{2}) \right] \right] = k_2 u_3(i\ell - \frac{1}{2}) - 3 \left[ \left[ \frac{\partial^3}{\partial X \partial x^2} u_2(i\ell - \frac{1}{2}) \right] \right] \\
 \quad - 3 \left[ \left[ \frac{\partial^3}{\partial X^2 \partial x} u_1(i\ell - \frac{1}{2}) \right] \right] - \left[ \left[ \frac{\partial^3}{\partial X^3} u_0(i\ell - \frac{1}{2}) \right] \right] \quad i = 1..N_c
 \end{array} \right.$$

Nous rappelons que :  $\ell(\lambda_0) = \frac{\partial^4}{\partial x^4} - \lambda_0$

**Problème asymptotique du quatrième ordre**

$$\left\{ \begin{array}{l}
 u_4 \text{ périodique en } x \text{ de période } pl \text{ et deux fois continument différentiable} \\
 \ell(\lambda_0) u_4 = -6 \frac{\partial^4}{\partial X^2 \partial x^2} u_2 + \lambda_2 u_2 - 4 \frac{\partial^4}{\partial X \partial x^3} u_3 - 4 \frac{\partial^4}{\partial X^3 \partial x} u_1 + \lambda_3 u_1 + \lambda_4 u_0 \\
 \left[ \left[ \frac{\partial^3}{\partial x^3} u_4(i l) \right] \right] = k_1 u_4(i l) - 3 \left[ \left[ \frac{\partial^3}{\partial X \partial x^2} u_3(i l) \right] \right] - 3 \left[ \left[ \frac{\partial^3}{\partial X^2 \partial x} u_2(i l) \right] \right] \\
 \quad - \left[ \left[ \frac{\partial^3}{\partial X^3} u_1(i l) \right] \right] \quad i = 0..N_c - 1 \\
 \left[ \left[ \frac{\partial^3}{\partial x^3} u_4(i l - \frac{1}{2}) \right] \right] = k_2 u_4(i l - \frac{1}{2}) - 3 \left[ \left[ \frac{\partial^3}{\partial X \partial x^2} u_3(i l - \frac{1}{2}) \right] \right] \\
 \quad - 3 \left[ \left[ \frac{\partial^3}{\partial X^2 \partial x} u_2(i l - \frac{1}{2}) \right] \right] - \left[ \left[ \frac{\partial^3}{\partial X^3} u_1(i l - \frac{1}{2}) \right] \right] \quad i = 1..N_c
 \end{array} \right.$$

Nous appliquons la condition de solvabilité au problème asymptotique du troisième ordre, nous obtenons une équation différentielle suivante :

$$\langle \ell(\lambda_0) u_3, u_0 \rangle = 0 \Leftrightarrow C A_1'' + \lambda_2 A_1 = C_1 A_0''' - \lambda_3 A_0$$

$$\text{avec } C_1 = \frac{6 \langle w_1'', w_0 \rangle + 4 \langle w_2''', w_0 \rangle + C \langle w_1, w_0 \rangle}{\langle w_0, w_0 \rangle}$$

Nous avons établi dans le chapitre 4 que le paramètre  $\lambda_3$  est quasiment nul. Nous considérons cette remarque pour le calcul du problème globale du deuxième ordre.

La solution du problème du troisième ordre s'écrit alors :

$$u_3(x, X) = A_3(X)w_0(x) + A_2'(X)w_1(x) + A_1''(X)w_2(x) + A_0'''w_3$$

où  $w_3(x)$  est la solution du problème locale suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} w_3 \text{ périodique de période } pl \text{ et deux fois continument différentiable} \\ \frac{d^4 w_3}{dx^4} - \lambda_0 w_3 = -6 \frac{d^2}{dx^2} w_1 - 4 \frac{d^3}{dx^3} w_1 - 4 \frac{d}{dx} w_0 + C_1 w_0 - C w_1 \\ \left[ \left[ \frac{d^3}{dx^3} w_3(i1) \right] \right] = k_1 w_3(i1) - 3 \left[ \left[ \frac{d^2}{dx^2} w_2(i1) \right] \right] - 3 \left[ \left[ \frac{d}{dx} w_1(i1) \right] \right] \\ \quad - \left[ \left[ w_0(i1) \right] \right] \quad i = 0..p-1 \\ \left[ \left[ \frac{d^3}{dx^3} w_3(i1 - \frac{1}{2}) \right] \right] = k_2 w_3(i1 - \frac{1}{2}) - 3 \left[ \left[ \frac{d^2}{dx^2} w_2(i1 - \frac{1}{2}) \right] \right] \\ \quad - 3 \left[ \left[ \frac{d^3}{dx^3} w_1(i1 - \frac{1}{2}) \right] \right] - \left[ \left[ w_0(i1 - \frac{1}{2}) \right] \right] \quad i = 1..p \end{array} \right.$$

Nous appliquons la condition de solvabilité sur le problème asymptotique du quatrième ordre, nous obtenos :

$$\langle \ell(\lambda_0)u_4, u_0 \rangle = 0 \Leftrightarrow CA_2'' + \lambda_2 A_2 = C_1 A_1''' + C_2 A_0'''' - \lambda_4 A_0$$

$$\text{avec } C_1 = 1 + \frac{6\langle w_2'', w_0 \rangle + 4\langle w_1', w_0 \rangle + 4\langle w_3''', w_0 \rangle + C_1\langle w_1, w_0 \rangle + C\langle w_2, w_0 \rangle}{\langle w_0, w_0 \rangle}$$

## Annexe B

Nous présentons ci-dessous le programme formel pour le calcul du paramètre  $\lambda_4$  du cas du quatrième chapitre. Nous donnons aussi le programme formel du cas où les extrémités de la poutre sont en appui simple.

```
#####  
# CAS BORDS ENCASTRES RT NOMBRE DE CELLULES EST PAIR  
#          CALCUL DE LAMDA4  
#####  
#####  
# AMPLITUDE A0(X) ET SA SERIVEE  
#####  
a0(x):=a*sin((n*Pi)/(L*nu)*x);  
ap0(x):=diff(a0(x),x);  
v1:=eval(subs(x=0,ap0(x)));  
v2:=eval(subs(x=L*nu,ap0(x)));  
rel1:=sin(n*Pi)=0;  
rel2:=(cos(n*Pi))^2=1;  
#####  
# EQUATION DIFF DE A1(X)  
#####  
eq1:=diff(a1(x),x$2)+((n*Pi)/(L*nu))^2*a1(x)=(b2/c1)*diff(a0(x),x$3);  
#####  
#SOLUTION A1(X)  
#####  
assign(simplify(dsolve({eq1,a1(0)=f*v1,a1(L*nu)=f*v2},a1(x))));
```

```
a1(0):=eval(subs(x=0,a1(x)));
a1(Lnu):=eval(subs(x=L*nu,a1(x)));
a11(x):=diff(a1(x),x);
a11(0):=eval(subs(x=0,a11(x)));
a11(Lnu):=eval(subs(x=L*nu,a11(x)));
a13(x):=diff(a1(x),x$3);
a04(x):=diff(a0(x),x$4);
#####
# EQUATION DE SOLVABILITÉ SUR LE SECOND MEMBRE
# DE L'EQUATION SUR A2(X)
#####
s1(x):=simplify(a13(x)*a0(x));
t1:=simplify(int(s1(x),x=0..L*nu));
s2(x):=simplify(b3*a04(x)-lam4*a0(x));
t2:=simplify(int(s2(x)*a0(x),x=0..L*nu));
term2:=simplify((b2*t1+t2)/c1);
#####
#ECRITURE A2(0) ET A2(Lnu) avec prise en compte de la solution localisée
#####
a2(0):=f*a11(0);
a2(Lnu):=f*a11(Lnu);
term1:=simplify(a2(0)*v1-a2(Lnu)*v2);
eq1:=collect(term1-term2,n);
eq2:=simplify(eq1,[rel1]);
eq3:=eq2=0;
l:=solve(eq3,lam4);
lamda4:=collect(l,n);
```

**Résultat**

$$\lambda_4 = \left(\frac{5}{4}b_2 + c_1b_3\right) \frac{n^4\pi^4}{L^4\eta^4} \quad n = 1, 2, \dots$$

avec  $c_1 = C$ ,  $b_2 = C_1$ ,  $b_3 = C_2$  pour prendre les notations du chapitre 4

```
#####  
# CAS BORDS EN APPUI SIMPLE ET NOMBRE DE CELLULES EST  
#PAIR  
#CALCUL DE LAMMDA4  
#####  
#####  
# AMPLITUDE A0(X) ET SA SERIVÉE  
#####  
a0(x):=a*cos((n*Pi)/(L*nu)*x);  
ap0(x):=diff(a0(x),x);  
app0(x):=diff(a0(x),x$2);  
v1:=eval(subs(x=0,a0(x)));  
v2:=eval(subs(x=L*nu,a0(x)));  
v11:=eval(subs(x=0,app0(x)));  
v22:=eval(subs(x=L*nu,app0(x)));  
rel1:=sin(n*Pi)=0;  
rel2:=(cos(n*Pi))^2=1;  
#####  
# EQUATION DIFF DE A1(X)  
#####
```

```
eq1:=diff(a1(x),x$2)+((n*Pi)/(L*nu))^2*a1(x)=(b2/c1)*diff(a0(x),x$3);
#####
#SOLUTION A1(X)
#####
assign(simplify(dsolve({eq1,D(a1)(0)=f*v11,D(a1)(L*nu)=f*v22},a1(x))))
;
a11(x):=diff(a1(x),x$2);
v111:=eval(subs(x=0,a11(x)));
v222:=eval(subs(x=L*nu,a11(x)));
a13(x):=diff(a1(x),x$3);
a04(x):=diff(a0(x),x$4);
#####
# EQUATION DE SOLVABILITE SUR LE SECOND MEMBRE
# DE L'EQUATION SUR A2(X)
#####
s1(x):=simplify(a13(x)*a0(x));
t1:=simplify(int(s1(x),x=0..L*nu));
s2(x):=simplify(b3*a04(x)-lam4*a0(x));
t2:=simplify(int(s2(x)*a0(x),x=0..L*nu));
term2:=simplify((b2*t1+t2)/c1);
#####
#ECRITURE A2(0) ET A2(Lnu) avec prise en compte de la solution localisée
#####
a2(0):=f*v111;
a2(Lnu):=f*v222;
term1:=simplify(a2(Lnu)*v2-a2(0)*v1);
eq1:=collect(term1-term2,n);
```

```
eq2:=simplify(eq1,[rel1]);  
eq3:=eq2=0;  
l:=solve(eq3,lam4);  
lambda4:=collect(l,n);
```

```
#####  
# PROGRAMME MAPLE POUR LE CALCUL DE LA MATRICE  
# FONDAMENTALE  
# ET SES VALEURS PROPRES  
#####  
with(linalg):  
#####  
#  
# PROCEDURES DES SIMPLIFICATIONS  
#  
simp := proc()  
  a := args[1];  
  as:= args[2];  
  for i from 1 to 4 do  
    for j from 1 to 4 do  
      as[i,j] :=simplify(a[i,j],trig):  
    od:  
  od:
```

end:

#####

simp1 := proc()

a := args[1];

as:= args[2];

for i from 1 to 4 do

for j from 1 to 4 do

as[i,j] :=simplify(a[i,j]):

od:

od:

end:

#####

combm := proc()

a := args[1];

as:= args[2];

for i from 1 to 4 do

for j from 1 to 4 do

as[i,j] :=combine(a[i,j],trig):

od:

od:

end:

#####

matini:=band([1],4):

mat2:=matrix(4,4):

mat3:=matrix(4,4):

#####

# LES MATICES RAIDEURS

```
#####  
mk2:=matrix(4,4,[[1,0,0,0],[0,1,0,0],[0,0,1,0],[-K2,0,0,1]]);  
mk1:=matrix(4,4,[[1,0,0,0],[0,1,0,0],[0,0,1,0],[-K1/2,0,0,1]]);  
R:=matrix(4,4,[[1,0,0,0],[0,1,0,0],[0,0,-1,0],[0,0,0,-1]]);  
A:=matrix(4,4):  
D:=matrix(4,4):  
Ds:=matrix(4,4):  
IDs:=matrix(4,4):  
INVD:=matrix(4,4):  
INVDS:=matrix(4,4):  
As:=matrix(4,4):  
Ad:=matrix(4,4):  
v(x):=a11*cos(m*x)+a22*sin(m*x)+a33*cosh(m*x)+a44*sinh(m*x):  
v(0):=eval(subs(x=0,v(x))):  
vpp(0):=eval(subs(x=0,diff(v(x),x$2))):  
vp(0):=eval(subs(x=0,diff(v(x),x))):  
vppp(0):=eval(subs(x=0,diff(v(x),x$3))):  
for i from 1 to 4 do  
eq1:=(v(0)=matini[1,i]):  
eq2:=(vpp(0)=matini[2,i]):  
eq3:=(vp(0)=matini[3,i]):  
eq4:=(vppp(0)=matini[4,i]):  
eqs:={eq1,eq2,eq3,eq4}:  
var:={a11,a22,a33,a44}:  
s :=solve(eqs,var):  
assign(s):  
A[1,i]:=subs(x=11,eval(v(x))):
```

```
A[2,i]:=subs(x=11,eval(diff(v(x),x$2))):
A[3,i]:=subs(x=11,eval(diff(v(x),x))):
A[4,i]:=subs(x=11,eval(diff(v(x),x$3))):
a11:='a11':a22:='a22':a33:='a33':a44:='a44':
od:
#
#SIMPLIFICATION DES TERMES DE A
#
simp(A,As):
#####
# CALCUL DE LA MATRICE FONDAMENTALE
#####
D := multiply(mk1,As,mk2,As,mk1):
ID := multiply(R,D,R):
#
#SIMPLIFICATION DES TERMES DE D et ID
#
simp(D,Ds):
simp1(Ds,IDs):
lbd:=band([x],4):
poly:=collect(simplify(combine(det(add(IDs,-lbd)),trig)),x):
a1:=coeff(poly,x,1):
a2:=coeff(poly,x,2):
#####
# CALCUL DES VALEURS PROPRES DE LA MATRICE
FONDAMENTALE
#####
```

```
eq:=(x^4+b1*(x^3+x)+b2*x^2+1)=0:
s :=solve(eq,x):
vsol := vector(4):
vsol := [s]:
fortran(['b1'=a1,'b2'=a2],optimized,filename=`coeff`):
fortran(['sig1' = vsol[1],'sig2' =vsol[2],'sig3' = vsol[3],
'sig4' = vsol[4]],optimized,filename=`valeurs`):
```