



**HAL**  
open science

## Amorçage de fissures par fatigue-contact

Tawfik Tamine

► **To cite this version:**

Tawfik Tamine. Amorçage de fissures par fatigue-contact. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université Paul Verlaine - Metz, 1994. Français. NNT : 1994METZ018S . tel-01776046

**HAL Id: tel-01776046**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01776046v1>**

Submitted on 24 Apr 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

# THÈSE

présentée à

**L'UNIVERSITÉ DE METZ**

par **Tawfik TAMINE**

en vue de l'obtention du titre de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE METZ**

Mention : Sciences de l'Ingénieur N° 7642

Intitulé : Fatigue des matériaux

---

**Amorçage de fissures par fatigue-contact**

---

Soutenue le 30 mars 1994, devant la Commission d'Examen :

Mr	G. PLUVINAGE	: Professeur à l'Université de Metz	(Président)
M <sup>elle</sup>	C. ROBIN	: Professeur à l'École des Mines de Douai	(Rapporteur)
Mr	J. BAHUAUD	: Professeur à l'INSA de Lyon	(Rapporteur)
Mr	C. CHEHIMI	: Maître de conférences à l'Université de Nancy I	
Mr	G. MESMACQUE	: Professeur à l'Université de Lille I	
Mr	C. WEIDER	: Ingénieur de Recherche à UNIMETAL	

UB 79397

# THÈSE

présentée à

**L'UNIVERSITÉ DE METZ**

par **Tawfik TAMINE**

en vue de l'obtention du titre de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE METZ**

Mention : Sciences de l'Ingénieur N° 7642

Intitulé : Fatigue des matériaux

---

## **Amorçage de fissures par fatigue-contact**

---

Soutenue le 30 mars 1994, devant la Commission d'Examen :

Mr	G. PLUVINAGE	: Professeur à l'Université de Metz	(Président)
M <sup>elle</sup>	C. ROBIN	: Professeur à l'École des Mines de Douai	(Rapporteur)
Mr	J. BAHUAUD	: Professeur à l'INSA de Lyon	(Rapporteur)
Mr	C. CHEHIMI	: Maître de conférences à l'Université de Nancy I	
Mr	G. MESMACQUE	: Professeur à l'Université de Lille I	
Mr	C. WEIDER	: Ingénieur de Recherche à UNIMETAL	

BIBLIOTHÈQUE UNIVERSITAIRE L'UNIVERSITÉ DE METZ	
N° Inv.	19940545
Cote	S/172 54/18
Loc.	Magasin
Cat.	OCLC

*A mon père et à ma mère,  
pour leurs soutien et sacrifices.  
A ma sœur, à mon frère ainsi  
qu'à tous mes proches.  
A la mémoire de mon oncle.*

## REMERCIEMENTS

Ce travail a été réalisé au Laboratoire de Fiabilité Mécanique de l'Université de Metz en collaboration avec l'Entreprise Unimetal. Le suivi de ces travaux s'est effectué sous la direction de Monsieur le Professeur G. PLUVINAGE à qui je tiens à exprimer ma plus profonde gratitude pour la confiance, les enseignements et les encouragements permanents qu'il m'a constamment témoignés.

J'adresse mes remerciements à Messieurs WEIDER, BELLOT ainsi qu'à tous les responsables de l'Entreprise Unimetal dont la collaboration a été indispensable dans la réalisation de ces travaux.

Je remercie Messieurs, J. BAHUAUD, professeur à l'INSA de Lyon, G. MESMACQUE, professeur à l'Université de Lille, C. WEIDER, Responsable à Unimetal Recherche, C. ROBIN, Professeur à l'École des Mines de Douai ainsi que Monsieur C. CHEHIMI, maître de conférences à Nancy I de m'avoir fait l'honneur de juger ce travail.

Que mes amis et collègues, Messieurs BOUKHAROUBA, DOSSOU, N'DIAYE, CAGNON, ARNOLD, LABIBES, MANAA et GOUAIR sachent combien je leur suis reconnaissant de l'amitié, des aides et des échanges culturels qu'ils m'ont apportés. Mes remerciements vont aussi à Monsieur et madame SHI, mademoiselle ROBIN ainsi qu'à Messieurs CHEHIMI, JODIN et AZARI.

Je ne saurai oublier tous mes amis et collègues du Laboratoire de Fiabilité Mécanique de l'Université de Metz qui ont participé de près ou de loin à ces travaux; qu'ils trouvent ici mes remerciements.

J'exprime également toute ma reconnaissance à Monsieur S. BAKOWSKI pour son aide et sa contribution au bon déroulement de cette étude.

## SOMMAIRE

INTRODUCTION GÉNÉRALE.....	5
I] ANALYSE DE LA CONCENTRATION DE CONTRAINTES.....	7
I.1] Introduction. ....	7
I.2] Analyse élastique de la concentration de contraintes.....	8
I.2.1] Coefficient de concentration de contraintes $K_t$ . ....	8
I.2.1.1] Approches classiques. ....	8
I.2.1.2] Approches basées sur la mécanique linéaire de rupture.....	12
I.2.2] Coefficient d'effet d'entaille en fatigue et facteur de sensibilité à l'entaille.....	16
I.2.2.1] Approches classiques. ....	17
I.2.2.2] Approches basées sur la mécanique linéaire de rupture.....	19
I.2.2.3] Autres approches utilisées. ....	22
I.2.2.3.1] Approche basée sur la contrainte moyenne. ....	22
I.2.2.3.2] Approches basées sur l'effet du gradient de contraintes.....	23
I.3] Facteurs de concentration de contraintes dans le modèle élasto- plastique.....	26
I.3.1] Méthode de Neuber. ....	26
I.3.2] Méthode de Stowell-Hardrath-Ohman.....	28
I.3.3] Méthode de Molski-Glinka. ....	31
I.4] Conclusions. ....	33

II] CRITÈRES D'AMORÇAGE.....	35
II.1] Introduction.....	35
II.2] Critère de l'amplitude de la contrainte nominale( $\Delta\sigma_N$ ).....	35
II.3] Critère du $\Delta K_I / \sqrt{\rho}$ .....	38
II.4] Critère de l'amplitude de la contrainte maximale ( $\Delta\sigma_{\max}$ ).....	44
II.4.1] Critère basé sur l'analyse élastique.....	44
II.4.2] Utilisation de l'analyse élasto-plastique.....	46
II.4.2.1] Critère selon la méthode de Neuber.....	46
II.4.2.2] Critère selon la méthode de Molski-Glinka.....	51
II.5] Critère du $\Delta\sigma_{\theta\theta}$ à une distance d.....	53
II.6] Critère basé sur les évolutions microstructurales.....	55
II.7] Conclusions.....	57
III] CHAMP DE CONTRAINTES AU VOISINAGE D'UNE ENTAILLE.....	59
III.1] Champ de contraintes au voisinage d'une entaille elliptique ou hyperbolique.....	59
III.2] Champ de contraintes au voisinage d'une entaille en V.....	64
III.3] Conclusions.....	76
IV] CONCLUSION GÉNÉRALE.....	78
V] ÉTUDE EXPÉRIMENTALE.....	80
V.1] Introduction.....	80
V.2] Caractéristiques des éprouvettes et Procédure d'usinage.....	80
V.3] Matériau utilisé.....	84
V.4] Machines d'essais et mode opératoire.....	85

VI] RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX.....	88
VI.1] Résultats obtenus sur les éprouvettes RCT.....	88
VI.1.1] Utilisation de l'analyse élastique de la concentration de contraintes.....	91
VI.1.2] Utilisation du coefficient d'effet d'entaille. ....	92
VI.1.3] Utilisation d'un critère basé sur le facteur d'intensité de contrainte d'entaille. ....	93
VI.1.3.1] Distribution du champ de contraintes au voisinage des différentes entailles.....	94
VI.1.3.2] Facteur d'intensité de contrainte d'entaille en mode I.....	95
VI.1.4] Facteur de sensibilité à l'entaille. ....	103
VI.1.5] Conclusions. ....	105
VI.2] Résultats obtenus pour les éprouvettes en anneaux.....	107
VI.2.1] Méthodes évaluant l'angle d'inclinaison pour lequel l'anneau est sollicité en mode II pur. ....	107
VI.2.1.1] Méthode basée sur une approche analytique. ....	107
VI.2.1.2] Méthode expérimentale.....	111
VI.2.1.3] Méthode aux éléments finis. ....	112
VI.2.2] Utilisation d'un critère basé sur le facteur d'intensité de contraintes d'entaille en mode II. ....	114
VI.2.2.1] Distribution des contraintes au voisinage des différents rayons en fond d'entaille. ....	114
VI.2.2.2] Facteur d'intensité de contrainte d'entaille.....	119
VI.2.3] Utilisation du critère de la contrainte maximale $\sigma_{\theta\theta}^{\max}$ .....	123
VI.2.4] Conclusions.....	124

VI.3] Résultats obtenus en torsion (mode III) .....	125
VI.3.1] Description de la méthode de calcul en torsion.....	125
VI.3.2] Résultats obtenus en contraintes de cisaillement maximale ...	127
VI.3.3] Conclusions.....	131
VII] CONCLUSION GÉNÉRALE .....	135
ANNEXE.....	138
RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	140

## **INTRODUCTION GÉNÉRALE**

L'augmentation progressive des charges par essieu et des vitesses de circulation des trains conduit à des sollicitations de plus en plus sévères auxquelles sont soumis les rails. Trois types principaux de dommages des rails en service sont à envisager:

- la formation et le développement de la tache ovale conduisant à une rupture transversale du rail,
- l'apparition du phénomène d'écaillage,
- l'usure du champignon.

En raison des progrès réalisés par les sidérurgistes quant à l'amélioration de la propreté des aciers, le premier type de dommage a pratiquement disparu.

Par contre, la formation de l'écaillage et l'usure progressive du champignon subsistent jusqu'à présent.

C'est la fatigue contact qui provoque l'écaillage à partir d'inclusion de type silicate ou silico-aluminate. De l'analyse de Hertz qui tient compte de l'influence de la friction en surface, nous pouvons constater que le système de chargement complexe conduit à l'amorçage de fissures de fatigue du type bimodal.

Les examens micrographiques sur des rails présentant ce type de défaut ont montré l'existence de trois surfaces:

- une surface longitudinale qu'on appelle contremarche,
- une surface longitudinale, peu inclinée par rapport à l'horizontale, limitée par la surface active du rail et appelée marche inférieure,
- une surface longitudinale d'inclinaison significative par rapport à la première.

Il semblerait que l'apparition de telles surfaces fissurée soit liée à la présence d'inclusion placées en sous couche du champignon. Par suite de l'usure et de l'apparition de contraintes résiduelles dans la zone plastifiée sous l'effet du chargement, la triaxialité des contraintes augmente et provoque la fissuration par fatigue. La formation de la contremarche nécessite un nombre de cycles

élevé; elle est suivie par la propagation d'une fissure de chaque côté. C'est le développement des deux marches jusqu'en peau du champignon qui provoque l'écaillage et l'usure du champignon.

Pour simuler l'effet d'écaillage dans le rail et plus particulièrement la formation de la contremarche, nous nous sommes intéressés au stade d'amorçage des fissures. Nous avons prélevé des éprouvettes à partir d'un profilé rail sur lesquelles des défauts ont été usinés. Comme le mode de chargement réel est complexe, nous avons mené des essais suivant les trois modes de rupture. Pour le mode I et II, les éprouvettes utilisées comportent des entailles mécaniques.

En mode III, nous avons choisi des défauts superficiels de très faibles dimensions usinés par impact laser. Ces défauts se présentent sous la forme de trous uniques et multiples. Par la présente étude, nous voulons déterminer les courbes d'amorçage pour les différents cas d'ouverture en considérant de façon assez complète la géométrie du défaut notamment l'acuité et l'angle d'entaille.

Le mémoire débute avec une étude bibliographique (quatre chapitres). Elle porte successivement sur l'analyse de la concentration de contraintes, les critères d'amorçage et les champs de contraintes au voisinage d'une entaille.

Enfin un résumé de l'étude bibliographique est donné.

Dans le cinquième chapitre, nous présentons la méthode expérimentale utilisée lors des essais. Les résultats obtenus sont présentés dans le sixième chapitre. Dans cette partie, nous développons le calcul des facteurs d'intensité de contraintes d'entaille et leur utilisation sous la forme de critères d'amorçage.

Le septième chapitre résume par une conclusion les résultats obtenus par la présente étude.

## **I] ANALYSE DE LA CONCENTRATION DE CONTRAINTES.**

### **I.1] Introduction.**

Dans une structure, il est souvent difficile d'éviter la présence de la discontinuité géométrique. Lorsqu'elle est sollicitée, la présence de concentration locale de contraintes provoque un champ de contraintes non uniforme à l'endroit de la discontinuité. Dans le cas d'un chargement statique, la concentration de contraintes locale n'affaiblit pas la résistance statique d'une structure dont le matériau est ductile car la déformation locale plastique au fond du défaut n'affecte pas le comportement de celle-ci. Cette concentration affecte peu la résistance statique d'un corps dont le matériau est ductile à cause de la déformation plastique localisée en fond d'entaille qui n'intervient pas dans le comportement de la structure lors d'un chargement statique. C'est ainsi que la résistance statique d'une barre contenant un trou transversal n'est pas plus basse que celle d'une barre lisse.

C'est la présence de déformations élastique et plastique cyclique qui peuvent être dangereuses au niveau des sites de concentration de contraintes car elles provoquent l'amorçage de fissures.

La concentration de contraintes est un facteur déterminant dans le comportement d'une structure en fatigue car la rupture apparaît toujours au niveau d'un défaut ou d'une discontinuité. Pour quantifier cette concentration de contraintes, deux facteurs ont été introduits. Le premier facteur est noté  $K_t$  et est déterminé à partir de la théorie linéaire élastique. Le second facteur noté  $K_f$ , souvent moins important que  $K_t$  considère le phénomène de fatigue.

L'évolution de la mécanique linéaire de rupture a permis une approche du calcul de ces mêmes facteurs à partir de la distribution de contraintes en tête d'une fissure courte.

Dans le domaine élasto-plastique, les travaux effectués ont aboutis sur les définitions du facteur de concentration de contraintes et de déformations notés  $K_\sigma$  et  $K_\epsilon$

## I.2] Analyse élastique de la concentration de contraintes.

### I.2.1] Coefficient de concentration de contraintes $K_t$ .

#### I.2.1.1] Approches classiques.

En statique, **Peterson** [1] définit le facteur de concentration de contraintes  $K_t$  de deux façons différentes.

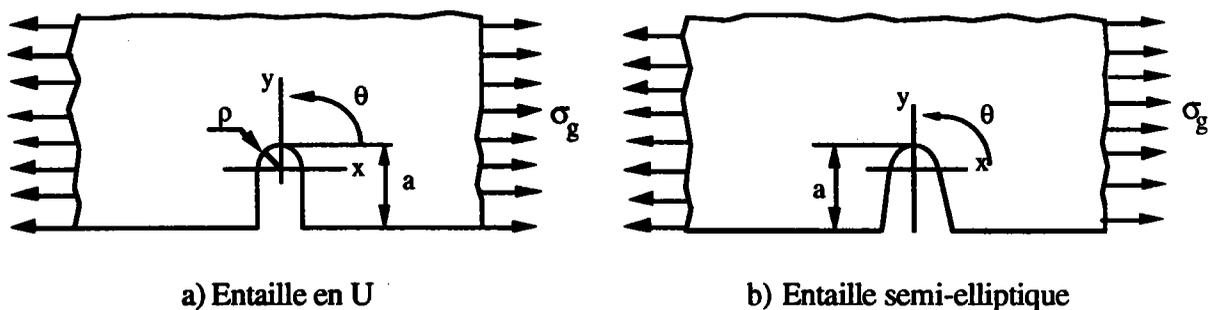
- La première est le rapport de la contrainte maximale  $\sigma_{\max}$  en fond d'entaille sur la contrainte nominale  $\sigma_N$  dans la section entaillée.

$$K_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_N} \quad (\text{I.1})$$

- La seconde est le rapport entre la contrainte maximale  $\sigma_{\max}$  sur la contrainte globale  $\sigma_g$ .

$$K_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_g} \quad (\text{I.2})$$

Dans le cas d'une plaque semi-infinie comportant des entailles en U et des entailles semi-elliptiques (figure I.1), **Baratta & Neal** [2] ont procédé aux calculs des facteurs de concentration de contraintes  $K_t$  pour les différents rapports de  $a/\rho$ .



**Figure I.1.** Géométrie de plaques semi-infinies avec entaille de bord en de U et semi-elliptique, selon [2] & [3].

Pour les différentes valeurs de  $a/\rho$ , ces auteurs [2] regroupent les valeurs des rapports du facteur de concentration de contraintes correspondant à celui de l'entaille en U à celui de l'entaille semi-elliptique obtenus par **Bowie** [3] (tableau I.1). Pour le calcul, ces auteurs divisent la contrainte circonférentielle  $\sigma_{\theta\theta}^{\max}$  par la contrainte globale appliquée.

$a/\rho$	$K_{t,\infty}$	$K_{t,\infty}^*$	$\frac{K_{t,\infty}^*}{K_{t,\infty}}$
1	3,065	3,06	1,00
1,494	—	3,540	—
2,0	3,97	3,96*	1,00
2,25	—	4,136	—
3,0	4,68	4,63*	1,01
3,448	—	4,910	—
4,0	5,28	5,20*	1,01
5,0	—	5,73*	—
5,444	—	5,948	—
6	—	6,16*	—
7	—	6,61*	—
9,00	7,50	7,41	1,01
10	—	7,78	—
16	—	9,625	—
20	10,8	10,7*	1,01
32,1	—	13,320	—
50	—	16,6*	—
81,02	—	20,77*	—
361,4	—	43,2*	—

$K_{t,\infty}$  et  $K_{t,\infty}^*$  sont respectivement les facteurs de concentration de contraintes pour une plaque infinie comportant une entaille de bord en U et en V

**Tableau I.1.** Facteurs de concentration de contraintes pour les entailles en U et semi-elliptique dans une plaque semi-infinie, selon [2] & [3].

Dans le tableau I.1, pour les différentes valeurs de  $a/\rho$ , les facteurs de concentration de contraintes d'entaille en U et semi-elliptiques sont identiques.

Pour une plaque comportant un trou elliptique, **Inglis** [4] utilise la formulation du facteur de concentration de contraintes suivante:

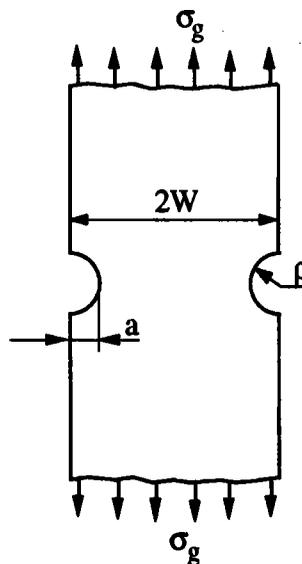
$$K_t = 1 + \sqrt{a/\rho} \quad (\text{I.3})$$

où

$a$  est la profondeur de l'entaille.

Cet auteur obtient des facteurs de concentration de contraintes identiques à ceux de **Baretta** [2] et **Bowie** [3].

Dans le cas d'une plaque de largeur finie et à entailles de bord en U (figure I.2), **Isida** [5] a proposé un facteur de correction qui permet le passage d'une plaque infinie au cas d'une plaque de largeur finie.



**Figure I.2.** Plaque avec deux entailles de bord en U, selon [5]

Ce coefficient de correction est donné par la relation :

$$C_w = \frac{K_t}{K_{t,\infty}} \quad (\text{I.4})$$

avec

$$K_t = (\sigma_{\max}/\sigma_g)(1-a/W) \quad (I.5)$$

où

$\sigma_g$  est la contrainte globale appliquée,  
 $W$  est la demi-largeur de la plaque.

Pour des valeurs de  $a/W$  comprises entre 0 et 0,723, **Bowie [3]** exprime le facteur de correction  $C_w$  sous la forme du polynôme suivante :

$$C_w = [0,993+0,180(a/W) -1,060(a/W)^2 +1,71(a/W)^3] (1-a/W) \quad (I.6)$$

De façon analogue, le facteur de concentration de contraintes pour une plaque infinie est défini par l'équation:

$$K_{t,\infty} = 0,780+2,243 \sqrt{a/\rho} , 1 \leq a/\rho \leq 361 \quad (I.7)$$

Cette équation donne des valeurs se situant à  $\pm 1.5\%$  des valeurs numériques contenues dans le tableau I.1.

La combinaison des relations (I.6) et (I.7) permet d'obtenir une forme générale du facteur de concentration de contraintes pour une plaque finie dont le rapport  $a/\rho$  se situe entre 1 et 361 avec  $a/w$  compris entre 0 et 0,723.

La forme générale obtenue par [3] est la suivante:

$$K_t = C_w K_{t,\infty} = [0,780 + 2,243\sqrt{a/\rho}] [0,993+0,180(a/W) - 1,060(a/W)^2 + 1,710 (a/W)^3] (1-a/W) \quad (I.8)$$

Les résultats présentés montrent que pour un même rayon en fond d'entaille  $\rho$  et pour le même rapport  $a/\rho$ , le facteur de concentration de contraintes associé à l'entaille en U est identique à celui de l'entaille semi-elliptique.

L'auteur [3] note également que le facteur de correction proposé pour une largeur finie de plaque donne une approximation raisonnable du facteur de concentration de contraintes lors des dimensionnements de pièces ou de structures.

### I.2.1.2] Approches basées sur la mécanique linéaire de rupture

Topper & EL Haddad [6], utilisent la distribution des contraintes en tête d'une fissure courte émanant d'une entaille (figure I.3) pour établir les conditions limites entre le facteur de concentration de contraintes théorique d'une entaille émoussée et celui d'une entaille aiguë. Ces auteurs introduisent une approche de type mécanique de rupture pour cette fissure courte.

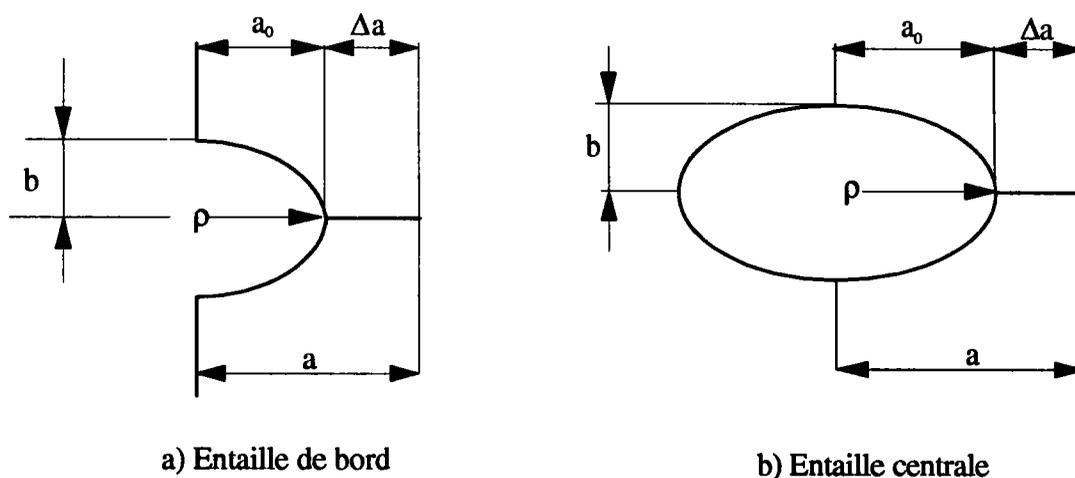


Figure I.3: Géométrie des entailles utilisées par [6].

Pour une fissure courte émanant d'une entaille, la relation liant l'amplitude du facteur d'intensité de contraintes au facteur de concentration de contraintes élastique est donnée par la relation:

$$\Delta K = K_t' \Delta \sigma_N \sqrt{\pi(l_0 + \Delta a)} \quad (\text{I.9})$$

où

$K_t'$  est le facteur de concentration de contraintes théorique fonction de la longueur de fissure,

$\Delta\sigma_N$  est l'amplitude de la contrainte nominale,

$l_0$  est une constante du matériau,

$\Delta a$  est la longueur de fissure mesurée à partir du fond d'entaille.

Pour les entailles centrales et les entailles de bord, la solution approximative de  $K_t'$  est donnée par [6] sous la forme:

$$K_t' = \sqrt{\frac{l_0 + a_0}{\Delta a}} \quad (\text{I.10})$$

avec

$a_0$  : la profondeur de l'entaille.

Dans le cas d'un comportement élastique, les mêmes auteurs en [6], expriment l'amplitude du facteur d'intensité de contraintes sous la forme suivante:

$$\Delta K = F_\sigma \Delta\sigma_g \sqrt{\pi \cdot (l_0 + \Delta a)} \quad (\text{I.11})$$

dans laquelle:

$F_\sigma$  est le facteur géométrique d'ordre unitaire,

$\Delta\sigma_g$  est l'amplitude de la contrainte globale appliquée.

De l'expression (I.11), l'amplitude de la contrainte seuil est:

$$\Delta\sigma_s = \frac{\Delta K_s}{K_t' \sqrt{\pi(l_0 + \Delta a)}} \quad (\text{I.12})$$

où

$\Delta\sigma_s$  et  $\Delta K_s$  sont respectivement l'amplitude de la contrainte et l'amplitude du facteur d'intensité de contraintes seuil.

Pour une fissure très courte, **El Haddad & Topper [7]** montrent que l'amplitude de contrainte  $\Delta\sigma_g$  tend vers la limite d'endurance du matériau  $\Delta\sigma_D$ .

Ils définissent alors la constante  $l_0$  comme égale à :

$$l_0 = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\Delta K_S}{F_\sigma \Delta\sigma_D} \right)^2 \quad (\text{I.13})$$

avec

$\sigma_D$ : limite d'endurance du matériau.

La substitution des relations (I.10) et (I.13) dans (I.12) donne:

$$\Delta\sigma_s = F_\sigma \Delta\sigma_D \sqrt{\frac{\Delta a}{a_0 + \Delta a}} \sqrt{\frac{l_0}{l_0 + \Delta a}} \quad (\text{I.14})$$

Cette équation admet une amplitude de contrainte seuil maximale pour une longueur de fissure  $\Delta a^*$ :

$$\Delta a^* = \sqrt{a_0 \cdot l_0} \quad (\text{I.15})$$

L'amplitude de contrainte seuil maximale notée  $\Delta\sigma_s^{\max}$  est obtenue par [6] en remplaçant la longueur de fissure  $\Delta a$  en (I.14) par  $\Delta a^*$ .

$$\Delta\sigma_s^{\max} = \frac{F_\sigma \cdot \Delta\sigma_D}{1 + \sqrt{\frac{a_0}{l_0}}} \quad (\text{I.16})$$

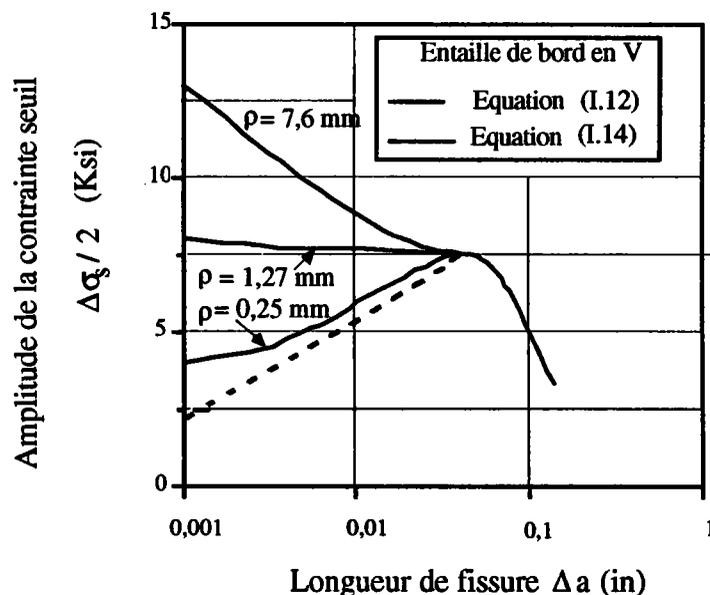
Dans le cas des entailles aiguës, les auteurs en [6] mettent l'amplitude de la contrainte d'amorçage sous la forme du rapport suivant:

$$\Delta\sigma_a = \frac{\Delta\sigma_D}{K_t} \quad (\text{I.17})$$

Pour les entailles émoussées, la contrainte d'amorçage est suffisante pour provoquer l'amorçage et la propagation alors que la contrainte seuil décroît avec la longueur de fissure. Cette contrainte seuil est donc maximale à l'amorçage.

Pour les entailles aiguës, la contrainte seuil est maximale à une longueur finie de fissure.

Pour une certaine valeur du rayon en fond d'entaille, les valeurs des contraintes seuils deviennent identiques. La figure I.4 illustre l'évolution de l'amplitude de la contrainte seuil en fonction de la longueur de fissure.



**Figure I.4.** Évolution de l'amplitude de la contrainte seuil en fonction de la longueur de fissure, selon [6].

Pour une entaille elliptique, Tada & Paris [8] donnent une relation approximative de  $K_t$  de la forme:

$$K_t = 1 + 2 \sqrt{\frac{a_0}{\rho}} \quad (\text{I.18})$$

L'égalité entre les relations (I.16) et (I.17) pour  $F_\sigma = 1$ , permet à [6] d'obtenir la valeur du rayon critique  $\rho_{cr}$ :

$$\rho_{cr} = 4.l_0 \quad (I.19)$$

Dans cette dernière relation, **Topper & El Haddad [6]** constatent que l'influence de  $K_t$  et de la profondeur d'entaille  $a_0$  n'interviennent pas. Cependant, comme  $\rho$  et  $a_0$  définissent le facteur  $K_t$ , les valeurs critiques de  $K_t$  et de  $a$  peuvent être obtenues à partir des relations (I.19) et (I.18).

$$K_{t,cr} = 1 + \sqrt{\frac{a_0}{l_0}} \quad (I.20)$$

et

$$a_{0,cr} = (K_t - 1)^2 l_0 \quad (I.21)$$

où

$K_{t,cr}$  est le facteur de concentration de contraintes critique.  
 $a_{0,cr}$  est la profondeur critique d'entaille.

Pour une entaille émoussée, les paramètres  $\rho$  et  $a_0$  sont plus importants que  $\rho_{cr}$  et  $a_{0,cr}$  alors que le facteur de concentration de contraintes  $K_t$  est plus faible que  $K_{t,cr}$ .

Pour une entaille aiguë,  $\rho$  et  $a_0$  sont inférieurs à  $\rho_{cr}$  et  $a_{0,cr}$  alors que  $K_t$  est plus important que  $K_{t,cr}$ .

### **I.2.2] Coefficient d'effet d'entaille en fatigue et facteur de sensibilité à l'entaille.**

En fatigue, généralement, la présence de l'entaille décroît la résistance à la fatigue mais la décroissance est moins importante que celle prévue par le facteur de concentration de contraintes statique. Cela s'explique par le fait de l'existence de la déformation plastique cyclique locale, par la triaxialité et le gradient de contraintes en fond d'entaille.

**I.2.2.1] Approches classiques.**

Le coefficient de concentration de contraintes en fatigue  $K_f$  appelé également facteur effectif de concentration de contraintes est défini comme étant le rapport de la limite d'endurance sur éprouvettes lisses à la limite d'endurance sur éprouvettes entaillées.

$$K_f = \frac{\sigma_D}{\sigma_D'} \quad (\text{I.22})$$

avec

$\sigma_D'$  : la limite d'endurance d'une éprouvette entaillée.

Pour un matériau donné, la limite d'endurance diminue lorsque le coefficient  $K_t$  augmente. D'autre part, pour des valeurs importantes de  $K_t$ , beaucoup d'auteurs ont remarqué que la limite d'endurance est pratiquement insensible aux variations de la résistance statique de l'acier.

Ces constatations, ont amené ces auteurs à définir en plus du coefficient d'effet d'entaille en fatigue, un coefficient dit de sensibilité à l'entaille noté  $q$  et qui s'exprime en fonction de  $K_t$  et  $K_f$ :

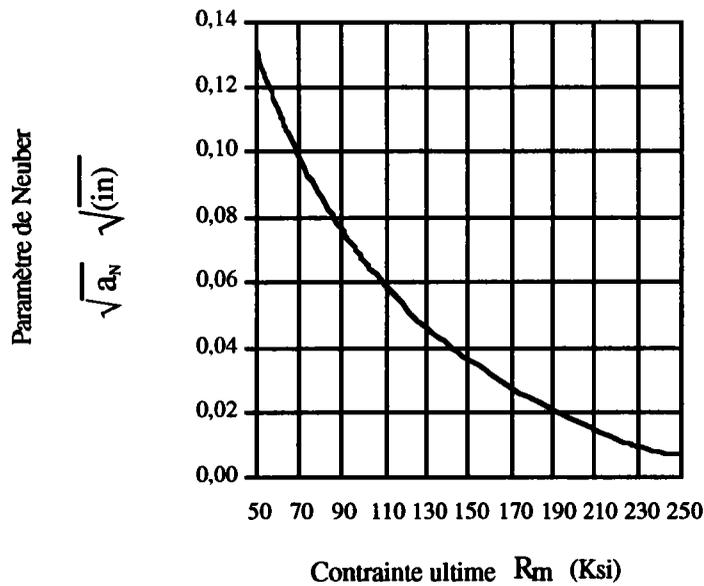
**Neuber [9]** a proposé la relation suivante:

$$q = \frac{K_f - 1}{K_t - 1} = \frac{1}{[1 + (a_N/\rho)^{1/2}]} \quad (\text{I.23})$$

où

$\rho$  est le rayon en fond d'entaille,

$a_N$  est une constante du matériau dont l'évolution avec la contrainte ultime est donnée en figure I.5 .



**Figure I.5.** Évolution du paramètre  $\sqrt{a_N}$  avec la contrainte ultime selon Neuber [9]

**Peterson [10]** trouve que la résistance en fatigue dépend de la contrainte régnant à une certaine profondeur de la surface et suggère l'équation:

$$q = \frac{K_f - 1}{K_t - 1} = \frac{1}{[1 + (a_p/\rho)]} \tag{I.24}$$

où

$a_p$  est une constante du matériau définie par la relation:

$$a_p = 0,0254 \left( \frac{2079}{R_m} \right)^{1.8} \tag{I.25}$$

**Heywood [11]** propose l'expression suivante:

$$q' = \frac{K_f}{K_t} = \frac{1}{1 + 2 \cdot (a_H/\rho)} \tag{I.26}$$

où

$a_H$  est la constante du matériau ;  $a_H = f(R_m)$ , pour les aciers.

**Harris [12]** a exprimé ce facteur par la formule :

$$q = \frac{K_f - 1}{K_t - 1} = 1 - \text{Exp} \left( \frac{-\rho}{a_{Ha}} \right) \quad (\text{I.27})$$

La constante  $a_{Ha}$  est définie par **Harris [12]** comme égale à :

$$a_{Ha} = \frac{1077}{R_m^2} \quad (\text{I.28})$$

### **I.2.2.2] Approches basées sur la mécanique linéaire de rupture.**

En fatigue, **Topper & El Haddad [6]** définissent à partir des relations (I.16), (I.22), le facteur de concentration de contraintes en fatigue par la relation suivante:

$$K_f = \frac{1}{F_\sigma} \left( 1 + \sqrt{\frac{a_0}{l_0}} \right) \quad (\text{I.29})$$

où

$F_\sigma$  est le facteur géométrique d'ordre unitaire.

$a_0$  est la profondeur de l'entaille

$l_0$  est la constante du matériau.

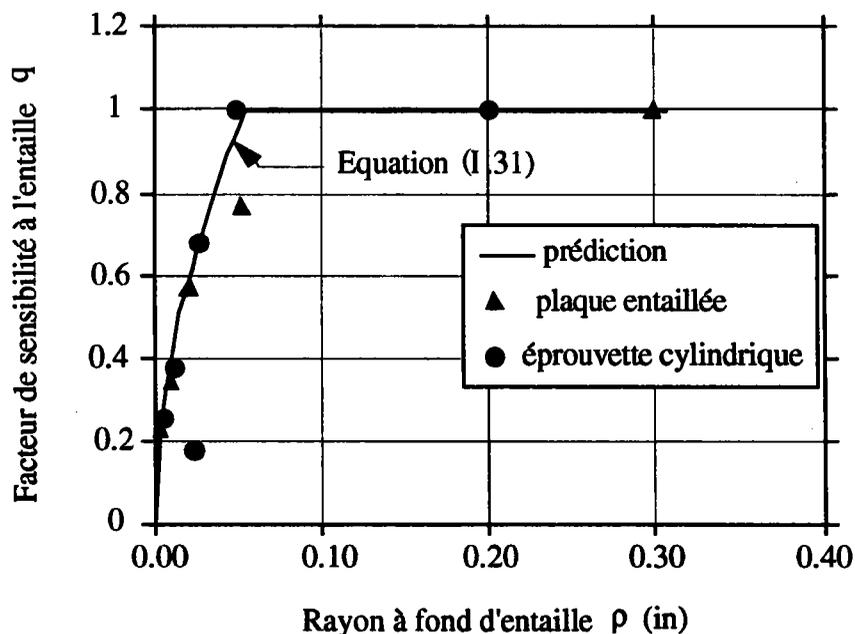
En substituant ( $a_0$ ) de la relation (I.18) et en le réintroduisant dans la relation (I.29), les auteurs obtiennent le facteur d'effet d'entaille suivant:

$$K_f = \frac{1}{F_\sigma} \left( 1 + \frac{K_t - 1}{2\sqrt{l_0/\rho}} \right) \quad [ \rho < 4.l_0 ] \quad (\text{I.30})$$

A partir des relations (I.18) et (I.24), ces auteurs définissent le facteur de sensibilité à l'entaille par les relations:

$$\begin{cases} q = \frac{1}{F_{\sigma}} \sqrt{\frac{\rho}{4.1_0}} & \text{pour } \rho \leq 4.1_0 \\ q = 1 & \text{pour } \rho \geq 4.1_0 \end{cases} \quad (\text{I.31})$$

Cette dernière relation montre que pour une entaille émoussée, la sensibilité à l'entaille varie avec le matériau et le rayon en fond d'entaille alors qu'elle est égale à 1 pour une entaille aiguë. En figure I.6, les auteurs [6] représentent pour une entaille en V de profondeur constante, l'évolution du facteur de sensibilité à l'entaille obtenue à l'aide de (I.31) et la compare avec celle déduite expérimentalement par d'autres auteurs. Cette figure montre que la prédiction donnée par la relation (I.31) est en parfait accord avec les résultats expérimentaux.



**Figure I.6.** Évolution du facteur de sensibilité à l'entaille pour une entaille de bord en V, selon [6].

**M.T.Yu & Du Quesnay [13]** utilisent également le concept de fissure courte pour le dépouillement de leurs essais sur des éprouvettes à entaille centrale. Ces auteurs utilisent deux facteurs de concentration de contrainte en fatigue.

Le premier facteur est relatif au cas d'une entaille aiguë et est donné par la relation:

$$K_f = \frac{\Delta\sigma_D (1 + \sqrt{\Delta a / a})}{F.E.\Delta\varepsilon_D} \quad (I.32)$$

avec

$\Delta a$ : la longueur de fissure,

$E$  : le module d'élasticité,

$\Delta\sigma_D$ : l'amplitude de contrainte limite en fatigue,

$\Delta\varepsilon_D$  : l'amplitude de déformation limite en fatigue,

$F$  : facteur géométrique fonction de la longueur de fissure.

et

$$\bar{a} = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\Delta K_s}{C.E.\Delta\varepsilon_D} \right)^2 \quad (I.33)$$

où

$\bar{a}$  est défini comme une longueur de fissure en mécanique de rupture,

$\Delta K_s$  est l'amplitude du facteur d'intensité de contrainte seuil,

$F$  est un facteur géométrique fonction de la longueur de fissure,

$C$  est le facteur de forme de la fissure dont la valeur est égale 0,71,

$E$  est le module d'élasticité.

Pour le cas d'une entaille émoussée, Ces auteurs [13] utilisent la relation:

$$K_f = K_t \sqrt{\frac{\Delta\sigma_D}{\Delta\varepsilon_D.E}} \quad (I.34)$$

Le rayon en fond d'entaille critique séparant le cas d'une entaille émoussée à celui d'une entaille aiguë est donné par ces auteurs [13] comme égale à:

$$\rho_{cr} = 5.5 \bar{a} \quad (I.35)$$

Dans les relations classiques qui définissent le facteur de concentration de contraintes en fatigue, les différents auteurs introduisent un seul paramètre qui dépend du matériau. L'application de ces équations montrent que  $K_f$  et  $K_t$  tendent à être identiques lorsque le rayon en fond d'entaille devient important.

Cette constatation a amenée certains auteurs à affirmer qu'il n'y a pas seulement que la contrainte maximale qui affecte la limite en fatigue mais qu'il existe également d'autres grandeurs qui ont de l'influent et qui doivent être considérées.

### **I.2.2.3] Autres approches utilisées.**

#### **I.2.2.3.1] Approche basée sur la contrainte moyenne.**

Neuber [14] calcul la contrainte moyenne appliquée à la pièce sur une certaine profondeur  $\rho^*$ . Dans le cas des pièces entaillées, cela revient à calculer le coefficient de concentration de contrainte dans l'entaille avec un rayon fictif  $\rho_f$  donné par la relation:

$$\rho_f = \rho + f.\rho^* \quad (I.36)$$

où

$\rho$  est le rayon en fond d'entaille.

$f$  est une constante qui dépend de la forme de l'éprouvette et de son mode de chargement (tableau I.2).

critère	traction et flexion		torsion et
	plats avec entailles, trous, épaulements f	barreaux avec entaille circulaire f	cisaillement f
de résistance à la fatigue			
contrainte normale	2	2	1
cisaillement maximal	2	$\frac{(2-\nu)}{1-\nu}$	1
énergie de déformation	2,5	$\frac{5 - 2\nu + 2\nu^2}{2 - 2\nu + 2\nu^2}$	1

**Tableau I.2:** Formules et valeurs de la constante f, selon Neuber [14].  
( $\nu$  est le coefficient de Poisson)

### I.2.2.3.2] Approches basées sur l'effet du gradient de contraintes.

Pour définir le facteur de concentration de contraintes en fatigue, **Stieler [15]** utilise le gradient de contraintes normalisé  $\chi$  qu'il substitue au rayon en fond d'entaille  $\rho$ . Cette grandeur est définie par [15] comme égale à :

$$\chi = \frac{d\sigma/dy}{\sigma_{\max}} \quad (\text{I.37})$$

Il définit alors le facteur de sensibilité à l'entaille par la relation:

$$q'' = \frac{K_t}{K_f} = 1 + \sqrt{s_g \cdot \chi} \quad (\text{I.38})$$

où

$s_g$  est une constante du matériau;  $s_g = f(Re)$ ,  $Re$  est la limite d'élasticité.

A partir de la figure I.7, **Buch [16]** décrit le gradient de contrainte par la relation:

$$\begin{cases} \frac{d\sigma}{dy} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_K}{h} \\ \sigma_K = A \cdot \sigma_D \end{cases} \quad (\text{I.39})$$

où

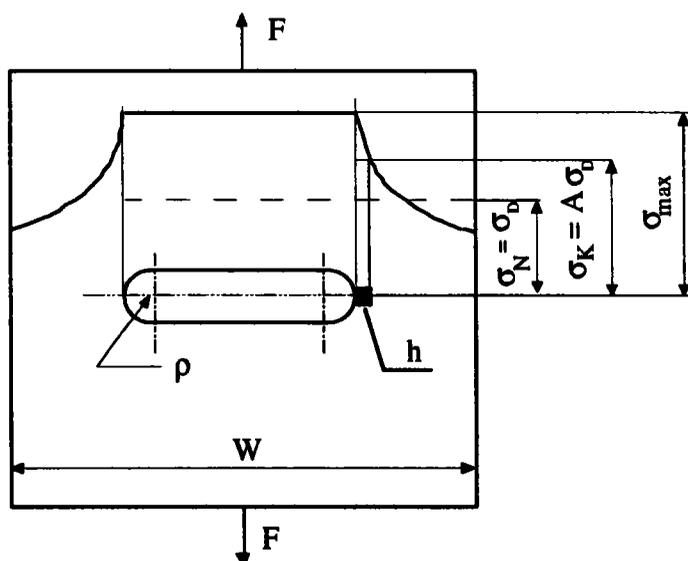
A et h sont des constantes qui dépendent du matériau et du type de chargement,  $\sigma_K$  correspond à la contrainte à la distance h.

Le gradient de contrainte peut être également exprimer sous la forme:

$$\frac{d\sigma}{dy} = B \cdot \frac{\sigma_{\max}}{\rho} \quad (\text{I.40})$$

où

B est un facteur numérique de proportionnalité qui varie avec les conditions de chargement.



**Figure I.7.** Modèle à deux paramètres proposé par **Buch [16]**

Des relations (I.39) et (I.40), il en découle:

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_k}{1 - B \cdot \frac{h}{\rho}} = \frac{A \cdot \sigma_D}{1 - B \cdot \frac{h}{\rho}} \quad (\text{I.41})$$

Lorsque la contrainte nominale atteint la limite d'endurance,  $\sigma_N = \sigma_D$ , **Buch [16]** met la relation précédente sous la forme:

$$\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_N} = \frac{A \cdot \sigma_D}{\sigma_D \cdot \left(1 - B \cdot \frac{h}{\rho}\right)} \quad (\text{I.42})$$

Cette équation peut être également exprimée par la formule:

$$K_f = \frac{K_t}{A} \left(1 - B \cdot \frac{h}{\rho}\right) \quad (\text{I.43})$$

**Peterson [10]** obtient la même relation pour le cas où  $A=1$ .

**Buch [16]** réintroduit dans la relation (I.43) une constante  $\rho_0$  afin d'éviter l'indétermination de cette relation pour  $\rho \rightarrow 0$ :

$$K_f = \frac{K_t}{A} \left(1 - B \cdot \frac{h}{\rho + \rho_0}\right) \quad (\text{I.44})$$

Cette constante  $\rho_0$  est déterminée à partir de la condition pour laquelle à un rayon  $\rho$  très petit le rapport  $K_f/K_t$  a une valeur minimale connue.

Pour une plaque comportant un trou central et sollicitée axialement, l'auteur en [16] exprime  $\rho_0$  pour un rayon  $\rho=0$ ,  $B=2,1$ ,  $K_t=3$  et  $K_f=1$  par :

$$\rho_0 = \frac{6,3 \cdot h}{(3-A)} \quad (\text{I.45})$$

Dans ce cas, la relation générale en (I.44), devient :

$$K_f = \frac{K_t}{A} \left( 1 - \frac{2,1 \cdot h}{\rho + \rho_0} \right) \quad (\text{I.46})$$

Cette dernière relation est à deux paramètres puisque elle prend en considération l'effet du gradient par l'intermédiaire du paramètre  $h$  et la déformation locale via le paramètre  $A$ .

### **I.3] Facteurs de concentration de contraintes dans le modèle élasto-plastique.**

Beaucoup de travaux ont été publiés afin d'exprimer le facteur de concentration de contraintes dans le domaine élasto-plastique. Ces travaux relient le facteur de concentration de contraintes aux grandeurs locales à savoir la contrainte et la déformation locale.

Les relations les plus communément utilisées sont basées sur les méthodes suivantes.

#### **I.3.1] Méthode de Neuber.**

Neuber [17] a démontré que le facteur de concentration de contraintes  $K_t$  peut être relié aux grandeurs locales par la relation:

$$K_t^2 = K_\sigma \cdot K_\epsilon \quad (\text{I.47})$$

où

$K_\sigma$  est le facteur de concentration de contraintes dans le domaine élasto-plastique dont l'équation est:

$$K_\sigma = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\sigma_N} \quad (\text{I.48})$$

$K_\epsilon$  est le facteur de concentration de déformation dans le domaine élasto-plastique et est donné par la relation :

$$K_\epsilon = \frac{\Delta\epsilon}{\Delta\epsilon_N} \quad (\text{I.49})$$

où

$\Delta\sigma$  et  $\Delta\epsilon$  sont respectivement l'amplitude de la contrainte et de la déformation locale,  $\Delta\sigma_N$  et  $\Delta\epsilon_N$  sont respectivement l'amplitude de la contrainte et de la déformation nominale.

On peut également écrire:

$$\Delta\sigma \cdot \Delta\epsilon = K_t^2 \cdot \Delta\epsilon_N \cdot \Delta\sigma_N \quad (\text{I.50})$$

L'amplitude de la déformation est régit par la loi de comportement suivante:

$$\frac{\Delta\epsilon}{2} = \frac{\Delta\sigma}{2 \cdot E} + \left( \frac{\Delta\sigma}{2 \cdot K'} \right)^{1/n'} \quad (\text{I.51})$$

avec

E : module d'élasticité.

K': coefficient de la loi d'écrouissage cyclique.

n': exposant de la loi d'écrouissage cyclique.

Dans le cas particulier des chargements d'amplitude constante, **Neuber [17]** obtient:

$$\Delta\epsilon \cdot \Delta\sigma = \text{constante} \quad (\text{I.52})$$

Par des essais de simulation sur des éprouvettes lisses, **Morrow, Wetzel & Topper [18]** ont montré que le produit  $\Delta\epsilon \cdot \Delta\sigma$  en fond d'entaille détermine le comportement en fatigue des éprouvettes entaillées.

La substitution de  $K_t$  par  $K_f$  dans la loi de Neuber [17] permet d'après ces auteurs d'obtenir des prévisions qui s'accordent mieux avec les résultats expérimentaux. La relation (I.47) prend la forme suivante:

$$K_f^2 = K_\sigma \cdot K_\varepsilon \quad (\text{I.53})$$

### **I.3.2] Méthode de Stowell-Hardrath-Ohman.**

Cette méthode proposée par Stowell [19] et adoptée par Hardath & Ohman [20], permet le calcul du coefficient de concentration de contrainte et le coefficient de déformation en régime élasto-plastique dans le cas d'un chargement monotone. Les relations de base sont les suivantes:

$$K_\sigma = 1 + (K_t - 1) \cdot \frac{E_s}{E}$$

$$K_\varepsilon = K_\sigma \cdot \frac{E_s}{E} \quad (\text{I.54})$$

$$K_\sigma = \frac{\sigma}{\sigma_N}$$

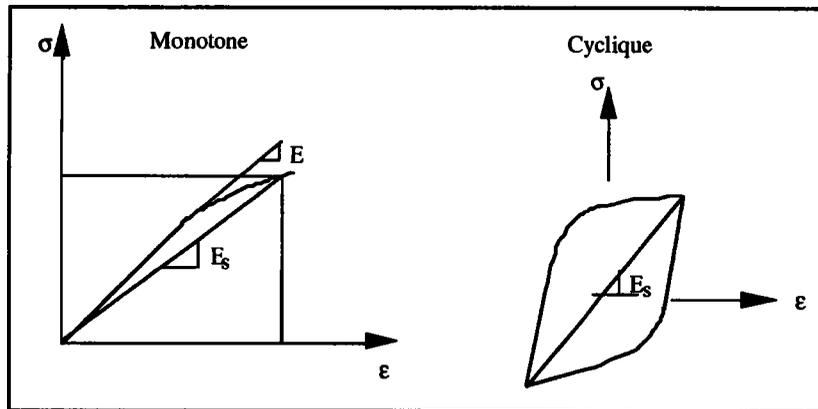
$$K_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_N} \quad (\text{I.55})$$

où

$\sigma$  et  $\varepsilon$  sont respectivement la contrainte et la déformation locale,  
 $\sigma_n$  et  $\varepsilon_n$  sont respectivement la contrainte et la déformation nominale,  
 $E$  est le module de Young,  
 $E_s$  est le module sécant correspondant aux contraintes et déformations locales (figure I.8).

Ce facteur est exprimé selon [20] par l'équation:

$$E_s = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad (\text{I.56})$$



**Figure I.8.** Définition du module sécant en traction et en fatigue selon [19] & [20]

L'extension de la méthode au problème de fatigue a été décrite par Wundt [21]. Dans la relation (I.55),  $K_\sigma$  et  $K_\varepsilon$  deviennent:

$$K_\sigma = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\sigma_N} \quad (\text{I.57})$$

$$K_\varepsilon = \frac{\Delta\varepsilon}{\Delta\varepsilon_N}$$

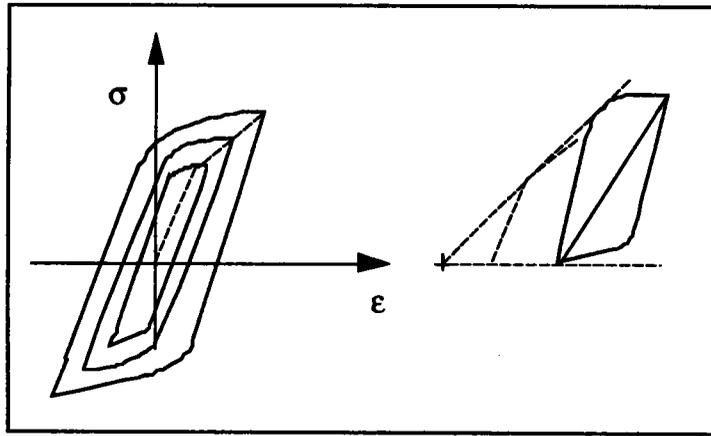
Afin d'obtenir de manière explicite  $K_\varepsilon$ , Zwicky [22] simplifie la méthode en proposant de limiter l'amplitude de la contrainte locale à deux fois la limite d'élasticité cyclique du matériau.

$$\Delta\sigma = 2.Re' \quad (\text{I.58})$$

où

$Re'$  est la limite d'élasticité cyclique.

Zwicky [22] obtient cette dernière relation en supposant qu'en première approximation, il est possible de construire les boucles d'hystérésis (figure I.9) au moyen d'une homothétie de rapport 2 sur la courbe de traction cyclique. En plus, si le matériau est élastique parfaitement plastique, l'excursion de la contrainte à chaque alternance sera égale à deux fois la limite d'élasticité cyclique.

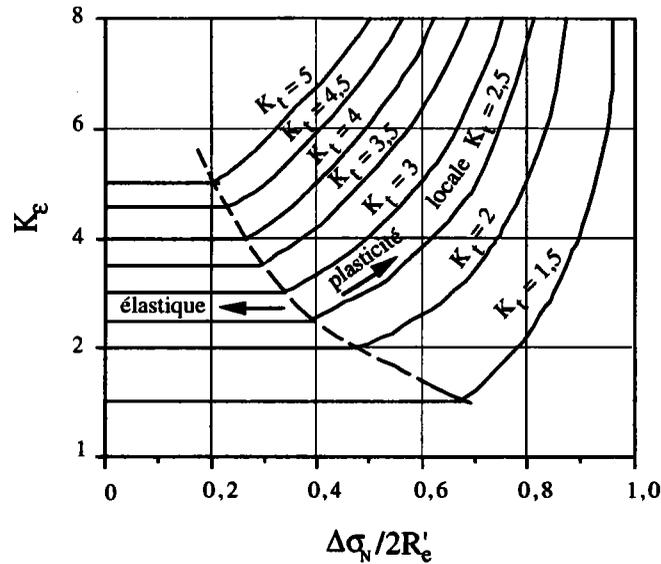


**Figure I.9.** Construction approchée d'une boucle d'hystérésis d'après la courbe de traction cyclique du matériau, **selon [22]**.

En réarrangeant les relations (I.57) et (I.58), le même auteur obtient en contraintes planes:

$$K_{\epsilon} = \frac{K_t - 1}{1 - \frac{\Delta\sigma_N}{2.Re'}} \quad (I.59)$$

En déformations planes, Zwisky [22] représente les variations de  $K_{\epsilon}$  avec  $\Delta\sigma_N/Re'$  sous forme d'abaques (figure I.10).



**Figure I.10.** Variation de  $K_\epsilon$  avec la contrainte nominale selon la méthode **Stowell Hardrath & Ohman**, selon [22].

**I.3.3] Méthode de Molski-Glinka.**

La méthode de **Molski-Glinka** [23] est basée sur l'énergie de déformation absorbée localement. Ces auteurs supposent que l'état des contraintes est uni-axial en fond d'entaille.

ils proposent la règle suivante:

$$K_t^2 = \frac{W_\sigma}{W_N} \tag{I.60}$$

où:

$$W_\sigma = \int_0^\epsilon \sigma(\epsilon) d\epsilon \tag{I.61}$$

avec

$W_\sigma$ : l'énergie de déformation par unité de volume au point le plus sollicité en fond d'entaille.

$$W_N = \int_0^{\epsilon} \sigma_N(\epsilon_N) d\epsilon \quad (I.62)$$

$W_N$  est l'énergie de déformation par unité de volume due à la sollicitation nominale.

Ces auteurs [23] considèrent que la relation (I.60) est encore valable tant que la plasticité en fond d'entaille reste confinée dans un environnement élastique. Connaissant la loi de traction du matériau (I.51),  $W_{\sigma}$  et  $W_N$  sont calculés à l'aide des relations suivantes:

$$W_{\Delta\sigma} = \frac{(\Delta\sigma)^2}{2E} + \frac{2\Delta\sigma}{n'+1} \left(\frac{\Delta\sigma}{2K'}\right)^{1/n'} \quad (I.63)$$

$$W_{\Delta\sigma_N} = \frac{(\Delta\sigma_N)^2}{2E} \quad (I.64)$$

La figure I.11 représente la comparaison des méthodes de calcul de l'énergie de déformation en fond d'entaille selon Neuber [17] et Molski-Glinka [23].

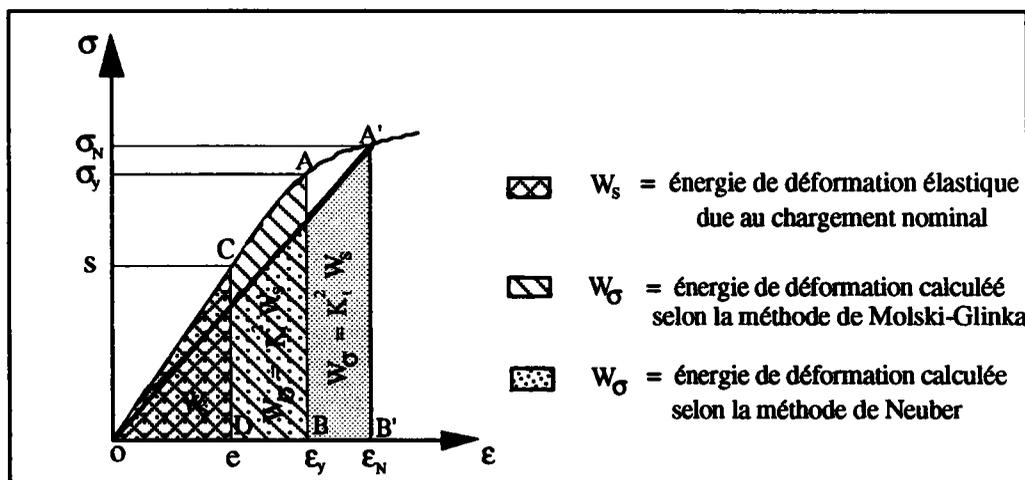


Figure I.11. Comparaison graphique des méthodes de Neuber [17] et de Molski-Glinka [23]

**Neuber [17]** exprime cette énergie en considérant un niveau de contrainte nominale  $\sigma_N$  sur la courbe  $(\sigma, \epsilon)$ . De cette manière, il retrouve l'équivalent de l'aire du triangle rectangle OA'B' en multipliant l'aire du triangle OCD (énergie de déformation due au chargement nominal) par le terme  $K_t^2$ .

Sur la partie non-linéaire de la courbe  $(\sigma, \epsilon)$ , **Molski & Glinka [23]** déterminent un niveau de contrainte plus faible que celui de Neuber qui leur permet d'obtenir l'équivalent de l'aire du triangle curviligne OAB en multipliant l'aire de OCD par  $K_t^2$ .

La méthode de **Molski et Glinka [23]** prévoit une contrainte et une déformation locales plus faibles que celles prévues par la règle de **Neuber [17]**

#### **I.4] Conclusions.**

Ce chapitre présente les différentes approches de calculs des facteurs de concentration de contraintes dans le domaine élastique et élasto-plastique.

En élasticité, **Peterson [1]** interprète le facteur de concentration de contraintes théorique comme étant le rapport de la contrainte maximale sur la contrainte nominale ou globale. Pour une plaque finie à entaille de bord semi elliptique, **Bowie [3]** retrouve le même facteur de concentration de contraintes théorique que **Baratta & Neal [2]** qui considèrent l'entaille de bord en forme de U.

Pour exprimer ce facteur, **Topper et El Haddad [6]** font intervenir le principe du comportement d'une fissure courte par l'approche de la mécanique linéaire de rupture. Ces auteurs présentent un facteur de concentration de contraintes théorique critique  $K_{t,cr}$  qui tient compte du rayon en fond d'entaille critique  $\rho_{cr}$  et une profondeur de fissure critique notée  $a_{0,cr}$ . Ces grandeurs critiques permettent de différencier le cas d'une entaille aiguë à celui d'une entaille émoussée. Pour le premier cas, ces auteurs constatent que le rayon  $\rho$  et la profondeur de fissure  $a_0$  sont plus petits que  $\rho_{cr}$  et  $a_{0,cr}$  alors que  $K_t$  est plus grand que  $K_{t,cr}$ . Pour le second cas,  $\rho$  et  $a_0$  sont plus importants que  $\rho_{cr}$  et  $a_{0,cr}$  alors que  $K_t$  est plus important que le facteur de concentration critique  $K_{t,cr}$ .

En fatigue, différentes relations expriment le facteur de concentration de contraintes  $K_f$  en fonction du facteur  $K_t$ .

Les différents auteurs cités dans ce chapitre introduisent également un facteur de sensibilité à l'entaille qui relie ces deux grandeurs en tenant compte du rayon en fond d'entaille et d'une constante du matériau définie selon l'auteur.

L'approche par la mécanique linéaire de rupture a permis à **M.T.Yu & Du.Quesnay [13]** de définir deux relations différentes du facteur de concentration de contraintes en fatigue. La première concerne l'entaille aiguë, la seconde s'applique au cas de l'entaille émoussée. Pour le facteur de sensibilité à l'entaille, **Topper & El Haddad [6]** définissent deux relations différentes selon le domaine où se situe la valeur du rayon en fond d'entaille. Ces relations s'accordent parfaitement avec les résultats expérimentaux donnés par d'autres auteurs. Comme la plupart des auteurs l'ont remarqué, lorsque le rayon à fond d'entaille devient important, les facteurs  $K_t$  et  $K_f$  tendent à être identiques. Cette constatation a permis à **Neuber [14]**, **Stieler [15]**, **Peterson [10]** et **Buch [16]** de redéfinir le facteur de sensibilité à l'entaille en tenant compte d'une contrainte moyenne à une certaine profondeur où de tenir compte du gradient de contraintes.

Dans le domaine élasto-plastique, **Neuber [17]** relie le facteur de concentration de contraintes théorique  $K_t$  aux facteurs de concentration de contraintes dans le domaine élasto-plastique. Ces derniers facteurs s'expriment à l'aide des contraintes et des déformations locales.

La méthode de **Molski & Glinka [23]** basée sur l'énergie de déformation absorbée localement, relie le facteur de concentration de contraintes théorique  $K_t$  à l'énergie de déformation. Cette méthode prévoit une contrainte et une déformation locales plus faibles que celles prévues par **Neuber [17]**.

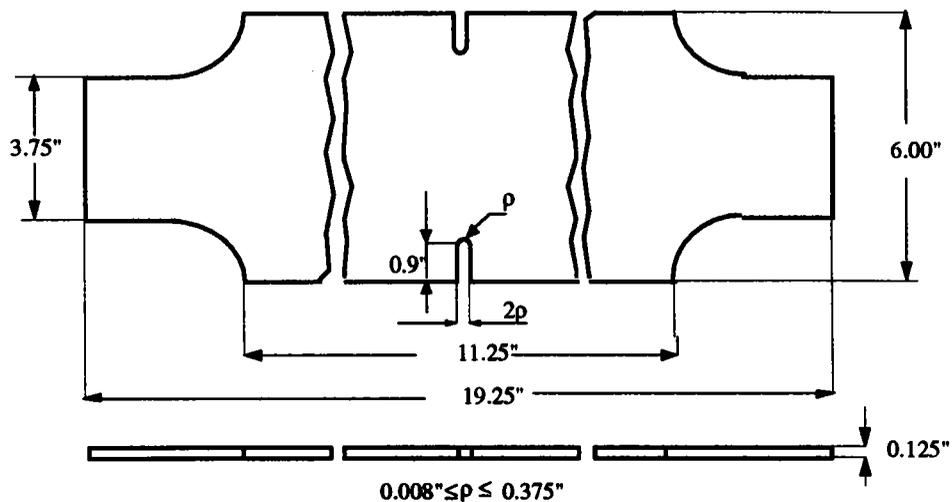
## II] CRITÈRES D'AMORÇAGE.

### II.1] Introduction.

La prédiction de la durée de vie en fatigue de structures entaillées peut être traitée de différentes manières. Pour l'amorçage de fissures, l'approche traditionnelle basée sur la contrainte nominale et le facteur de concentration de contraintes a été suivie de plusieurs autres approches dont celle basée sur la mécanique linéaire de rupture et celle de la déformation locale. D'autres auteurs ont pu également relier le nombre de cycles d'amorçage aux grandeurs microstructurales.

### II.2] Critère de l'amplitude de la contrainte nominale ( $\Delta\sigma_N$ ).

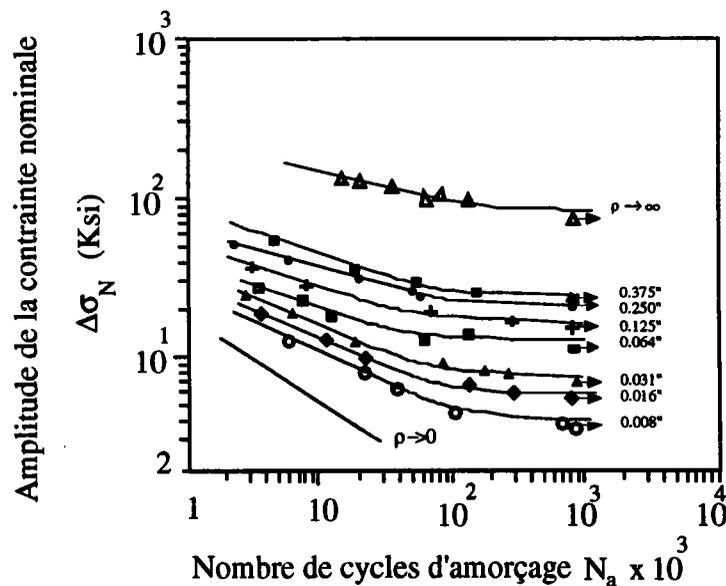
Barsom & Mc Nicol [24] ont mené des essais d'amorçage de fissures sur des éprouvettes à double entailles de bord (figure II.1). Ces éprouvettes en acier du type HY 130 sont sollicitées en traction avec un rapport de charge  $R$  égal à 0.1.



**Figure II.1.** Éprouvette du type HY130 avec double entailles de bord selon [24].

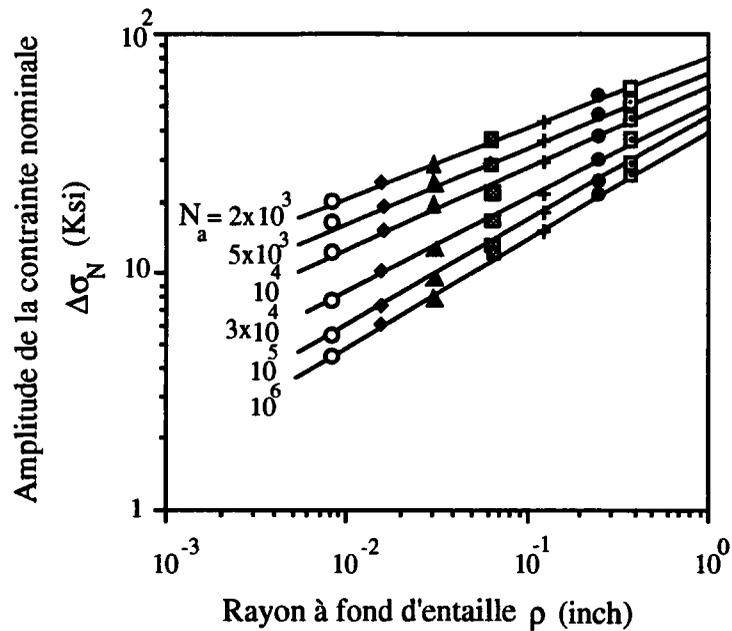
Pour les différents rayons à fond d'entaille utilisés, **Barsom & Mc Nicol [24]** interprètent leurs résultats en terme de couple  $(\Delta\sigma_N, N_a)$  dans un diagramme bilogarithmique (figure II.2).

Les courbes obtenues ont la même allure que celles de Wöhler avec une tendance asymptotique pour les nombres de cycles d'amorçage proches de  $10^6$  cycles. Les résultats montrent également que pour un nombre de cycles fixé, l'amplitude de la contrainte nécessaire à appliquer pour amorcer une fissure croît avec le rayon à fond d'entaille.



**Figure II.2.** Représentation de l'amplitude de la contrainte nominale en fonction du nombre de cycles d'amorçage, selon [24]

A partir de la figure II.2, les mêmes auteurs représentent pour des nombres de cycles fixés, les courbes d'amplitude de contraintes nominale en fonction des rayons à fond d'entaille (figure II.3).



**Figure II.3.** Représentation de l'amplitude de la contrainte nominale en fonction du rayon à fond d'entaille pour différentes valeurs du nombre de cycles d'amorçage, selon [24].

Ils définissent alors l'équation suivante:

$$\Delta\sigma_N = A' (\rho)^{1/m} \quad (\text{II.1})$$

où

$A'$  est une constante pour un nombre de cycles  $N_a$  donné,  
 $m$  est une constante qui croît lorsque le nombre de cycles d'amorçage diminue.

Pour les différents rayons à fond d'entaille, ces mêmes auteurs [24] font apparaître une relation entre le nombre de cycles d'amorçage défini en (figure II.2) pour  $N_a \leq 3 \cdot 10^4$  cycles et l'amplitude de la contrainte nominale. Cette relation est exprimée de la façon suivante.

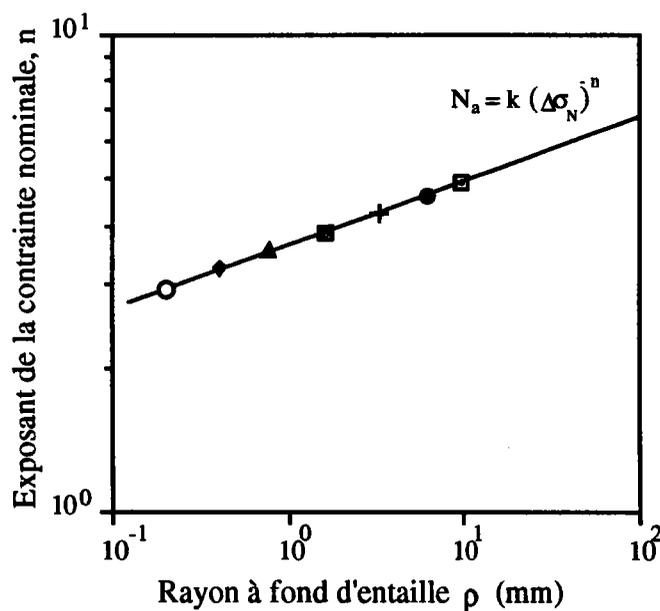
$$N_a = k(\Delta\sigma_N)^{-n} \quad (\text{II.2})$$

où

$k$  est une constante,

$n=2$  pour une fissure en fatigue et peut atteindre la valeur de  $n=8$  pour une éprouvette lisse.

La figure II.4 représente l'évolution linéaire en échelle logarithmique de l'exposant  $n$  en fonction du rayon à fond d'entaille  $\rho$ .

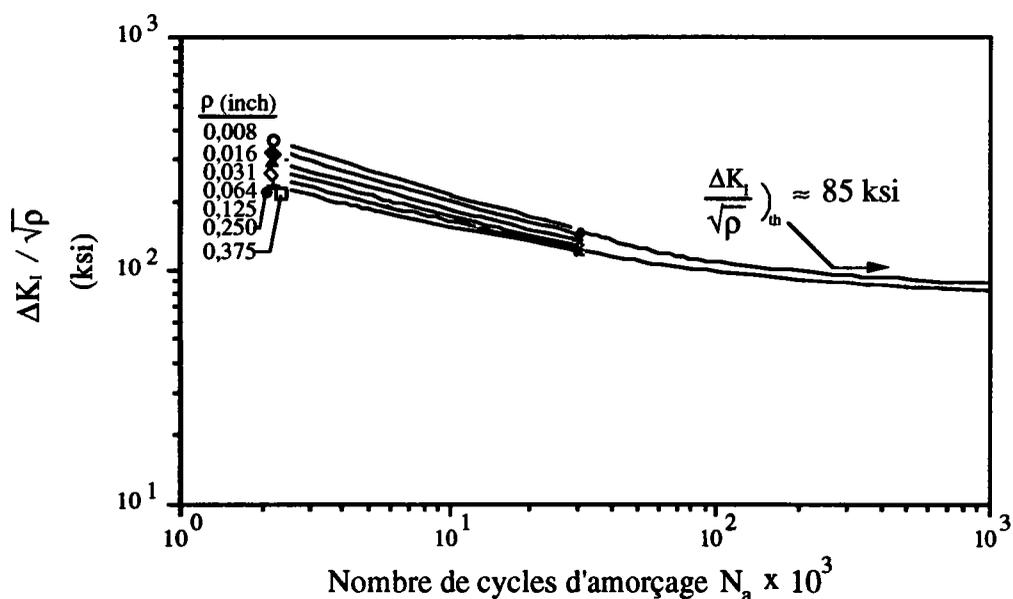


**Figure II.4.** Variation de l'exposant  $n$  en fonction du rayon à fond d'entaille  $\rho$  selon [24].

### II.3] Critère du $\Delta K_I / \sqrt{\rho}$

Comme le champ de contraintes à fond d'entaille peut être exprimé par le rapport  $\Delta K_I / Re\sqrt{\rho}$  ou par  $\Delta K_I / \sqrt{\rho}$  pour le cas d'un seul acier, le nombre de cycles d'amorçage peut être relié au rapport  $\Delta K_I / \sqrt{\rho}$  qui représente la contrainte locale à la distance  $\rho$ . **Barsom & Mc Nicole [24]** expriment le nombre de cycles d'amorçage  $N_a$  en fonction du rapport  $\Delta K_I / \sqrt{\rho}$  (figure.II.5).

Il faut préciser que pour le calcul de l'amplitude du facteur d'intensité de contraintes, les auteurs suscités calculent cette grandeur en considérant l'entaille comme une fissure.



**Figure II.5.** Évolution du nombre de cycles d'amorçage en fonction du paramètre  $\Delta K_I / \sqrt{\rho}$ , d'après [24].

Dans la relation (II.5), le nombre de cycles d'amorçage requis pour amorcer une fissure à partir du fond d'entaille est relié au paramètre  $\Delta K_I / \sqrt{\rho}$  par la relation:

$$N_a = \beta \frac{1}{\left(\frac{K_I}{\sqrt{\rho}}\right)^n} \quad (\text{II.3})$$

où

$\beta$  est une constante

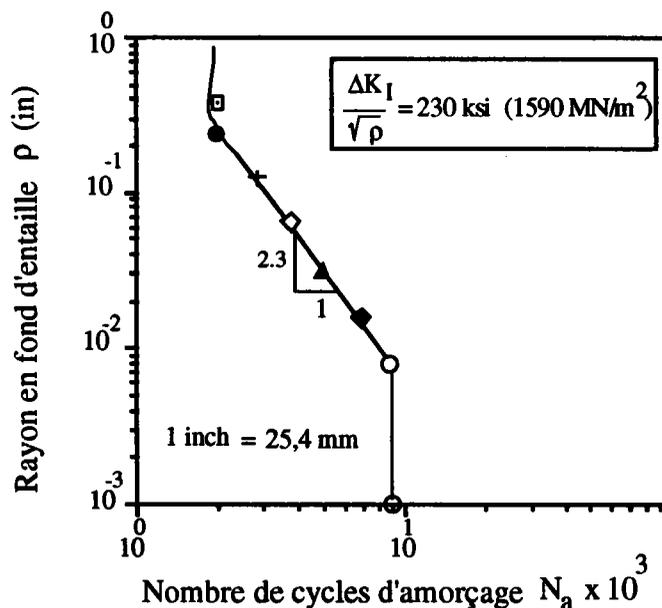
$n$  est un exposant qui décroît avec le rayon à fond d'entaille  $\rho$ .

Pour les différent rayons à fond d'entaille compris dans l'intervalle  $0,008 \text{ in} \leq \rho \leq 0,375 \text{ in}$  ( $0,20 \leq \rho \leq 9,53 \text{ mm}$ ), l'amorçage de la fissure apparaît lorsque:

$$\frac{\Delta K_I}{\sqrt{\rho}} = 85 \text{ ksi (586 MPa)}$$

La figure II.5 montre qu'à une valeur constante du rapport  $\Delta K_I/\sqrt{\rho}$ , le nombre de cycles requis pour amorcer une fissure en fatigue dans le domaine ( $N_a \leq 3 \times 10^4$  cycles) augmente lorsque le rayon à fond d'entaille augmente.

Les auteurs en [24] représentent pour une valeur constante du rapport  $\Delta K_I/\sqrt{\rho}$  l'influence du rayon à fond d'entaille sur le nombre de cycles d'amorçage (figure II.6).



**Figure II.6.** Évolution du nombre de cycles d'amorçage en fonction du rayon en fond d'entaille pour un rapport  $\Delta K_I/\sqrt{\rho}$  fixé, selon [24].

La figure II.6 montre que pour une valeur du rapport  $\Delta K_I/\sqrt{\rho}$  constante et pour un faible nombre de cycles d'amorçage, l'évolution de  $N_a$  est fonction du rapport  $1/\rho^2$ . Cette relation indique que pour une valeur constante de  $\Delta K_I/\sqrt{\rho}$ , le nombre

de cycles d'amorçage requis pour amorcer une fissure à fond d'entaille pour une éprouvette d'épaisseur unitaire est inversement proportionnel au volume d'un élément à fond d'entaille. En d'autre terme, le nombre de cycle d'amorçage de fissures pour les éprouvettes testées décroît lorsque le volume plastifié à fond d'entaille croît. Pour ce type d'acier, ce comportement apparaît lorsque le rayon à fond d'entaille  $\rho \geq 0,25$  in (6,35 mm) et  $\rho \leq 0,008$  in (0,203 mm).

En outre, la figure II.6 montre que le nombre de cycles d'amorçage est indépendant du rayon à fond d'entaille lorsque ce dernier est faible et aussi lorsqu'il devient important c'est à dire lorsque la zone plastifiée a une dimension qui devient significative vis à vis de la longueur de fissure.

**Jack & price [25]** ont étudié l'influence du rayon à fond d'entaille sur le nombre de cycles d'amorçage de manière plus approfondie.

Ces auteurs utilisent l'analyse de **Bilby, Cottrell et Swinden [26]** sur le concept de relaxation plastique à la pointe d'une fissure pour l'obtention du déplacement plastique par cycle de fatigue noté  $\phi$ . La sommation de ces déplacements donne un déplacement critique  $\phi_{cr}$  requis pour l'amorçage de fissures.

La relation entre le nombre de cycle d'amorçage et le déplacement critique  $\phi_{cr}$  est donnée par la relation:

$$N_a = \frac{2 \gamma G}{\pi (\Delta K_I)^2} \quad (\text{II.4})$$

où

$\gamma = \phi_{cr} Re$  : Travail plastique fourni par unité de surface rompue,

Re est la limite d'élasticité du matériau,

G est le module de cisaillement.

Au lieu de prendre la sommation linéaire des déplacements, **Jack & Price [25]** prennent la sommation des carrés de chaque déplacement et la relation donnant le nombre de cycles d'amorçage devient:

$$N_a = f ((\Delta K_I)^{-4}) \quad (\text{II.5})$$

Pour une entaille éoussée, **Jack & Price [25]**, expriment le facteur d'intensité de contraintes effectif en fonction du facteur d'intensité de contraintes par l'expression:

$$K_{\text{eff}} = K_I \left( \frac{\rho_{\text{cr}}}{\rho_{\text{eff}}} \right)^{1/2} \quad (\text{II.6})$$

où

$\rho_{\text{cr}}$  est le rayon critique,  
 $\rho_{\text{eff}}$  est le rayon effectif .

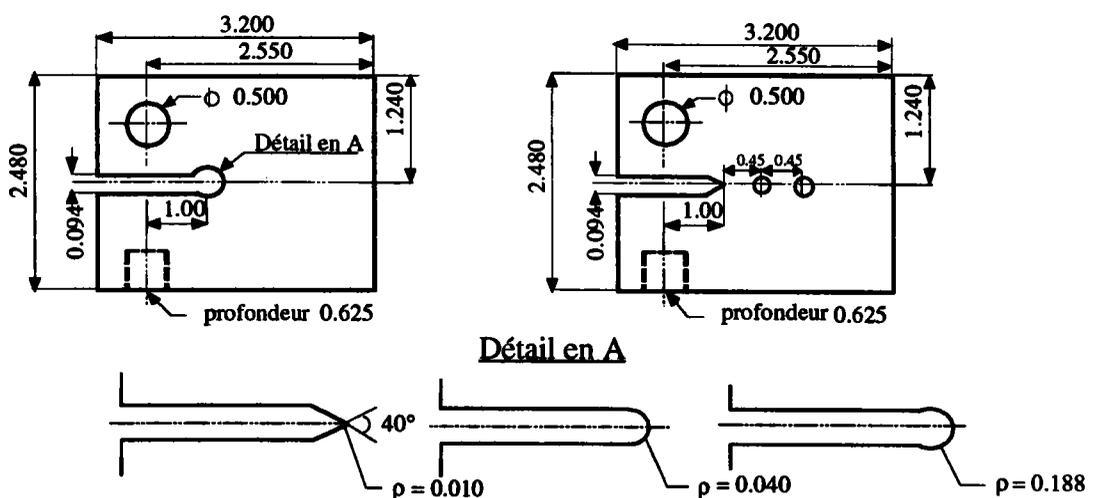
avec

$\rho_{\text{eff}} = \rho$  pour  $\rho \geq \rho_{\text{cr}}$   
 $\rho_{\text{eff}} = \rho_{\text{cr}}$  pour  $\rho \leq \rho_{\text{cr}}$

Ces auteurs [25] présentent leurs résultats sous la forme:

$$N_a = 2,63 \times 10^8 \left( \Delta K_I \sqrt{\rho_{\text{cr}} / \rho_{\text{eff}}} \right)^{-4} \quad (\text{II.7})$$

L'influence de l'environnement sur l'amorçage de fissure en fatigue a fait l'objet d'une étude entreprise par **Clark [27]** sur des éprouvettes du type WOL (figure II.7). Ces éprouvettes en acier 403 sont sollicitées en traction dans une chambre à air ambiant et sous environnement oxygéné à 212°F (100°C).



**Figure II.7.** Éprouvette de traction du type WOL à rayon unique et multiple.  
**d'après [27].**

Pour les éprouvettes WOL à rayon unique et à rayons multiples, Clark [27] représente en figure.II.8 les résultats des cycles d'amorçages en utilisant le paramètre de la mécanique de rupture  $\Delta K_I / \sqrt{\rho}$ .

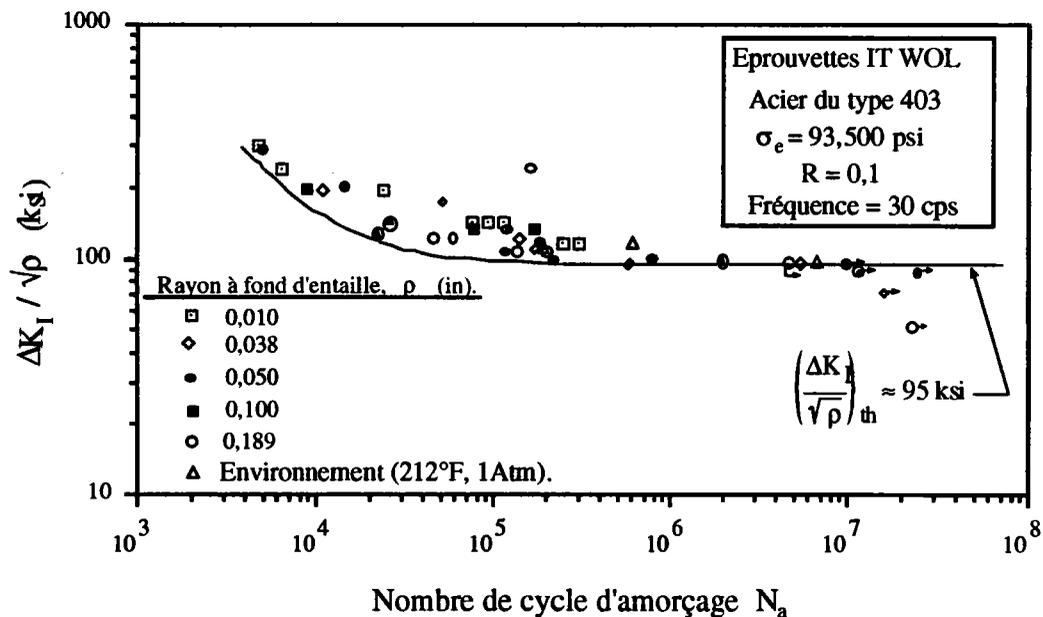


Figure II.8. Évolution du nombre de cycles d'amorçage en fonction de  $\Delta K_I / \sqrt{\rho}$  selon [27].

Pour ce type d'acier, les résultats obtenus en figure II.8 montrent qu'aucune fissure ne s'amorce pour une valeur de  $\Delta K_I / \sqrt{\rho} < 95$  Ksi (654.94 MPa). Pour ces essais, cette valeur représente donc une borne inférieure.

L'auteur remarque également qu'au cours de ces essais, l'effet de l'oxygène à 212°F (100°C) n'a aucune influence sur le nombre de cycles d'amorçage.

Néanmoins, il faut signaler le fait que la durée des essais effectués ne dépassait pas deux semaines. D'après Clark [27], il est possible qu'une exposition plus longue pourrait provoquer une corrosion généralisée qui changerait l'état de surface de l'entaille et provoquerait ainsi l'apparition de fissures pour un nombre de cycles plus faible que prévu.

## II.4] Critère de l'amplitude de la contrainte maximale ( $\Delta\sigma_{\max}$ ).

### II.4.1] Critère basé sur l'analyse élastique.

La relation (II.7) entre la répartition des contraintes à fond d'entaille et le rapport  $\Delta K_I/\sqrt{\rho}$  qui est considéré comme critère d'amorçage a permis à **Barsom [24] Jack & Price [25] et Clark[27]** d'utiliser ce critère afin de dépouiller les résultats d'essais d'amorçage en fatigue qu'ils ont réalisé sur des éprouvettes comportant des entailles de différents rayons.

Comme le facteur de concentration de contrainte peut s'écrire sous la forme:

$$K_t = \frac{1}{\Delta\sigma_N} \frac{2\Delta K_I}{\sqrt{\pi\rho}} \quad (\text{II.8})$$

Il apparaît ainsi que le paramètre  $K_t$  et le critère  $\Delta K_I/\sqrt{\rho}$  relèvent du même type d'analyse et les résultats se présentent d'une façon équivalente.

De nombreux auteurs ont constaté que l'analyse de ce critère faisant intervenir le facteur  $K_t$  donnait des résultats excessifs dans le domaine de la fatigue, surtout en ce qui concerne les faibles rayons à fond d'entaille.

**Baus, Lieurade et al [28]**, utilisent le facteur de concentration de contrainte en fatigue pour le dépouillement des résultats de leurs essais sur des éprouvettes CT comportant différents rayons à fond d'entaille. Ils utilisent la formule de **Neuber [14]**:

$$K_f = 1 + \frac{K_t - 1}{1 + \sqrt{\frac{a_N}{\rho}}} \quad (\text{II.9})$$

où

$a_N$  est une constante qui dépend des caractéristiques mécaniques de l'acier.

Connaissant le facteur de concentration de contraintes en fatigue, on peut calculer dans chaque cas l'amplitude de la contrainte maximale à fond d'entaille par la formule:

$$\Delta\sigma_{\max} = K_f \cdot \Delta\sigma_N \quad (\text{II.10})$$

Pour les éprouvettes CT, l'amplitude de la contrainte nominale est:

$$\Delta\sigma_N = \frac{\Delta P}{B(W-a)} \left( 1 + 3 \frac{W+a}{W-a} \right) \quad (\text{II.11})$$

où

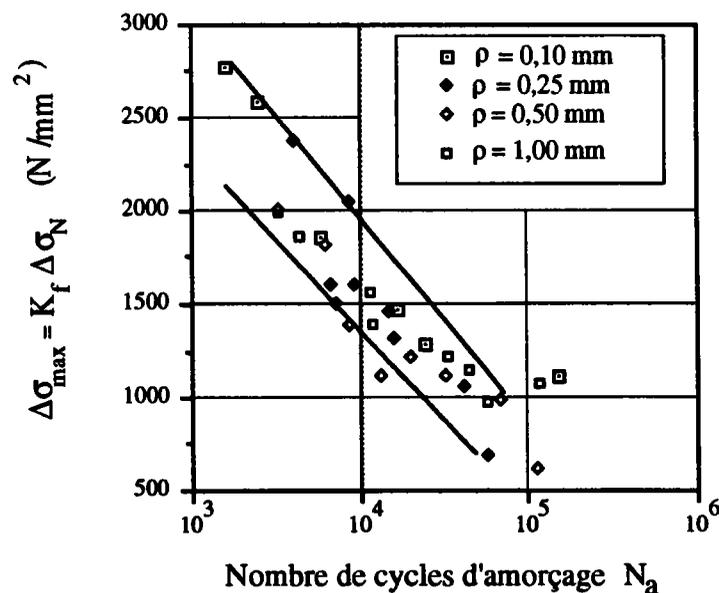
$\Delta P$  est l'amplitude de chargement,

$B$  est l'épaisseur de l'éprouvette,

$W$  est la largeur de l'éprouvette à partir de l'axe de chargement,

$a$  est la profondeur de l'entaille à partir de l'axe de chargement.

En s'inspirant des résultats des essais de flexion rotative, les auteurs [28] ajustent la constante  $a_N$  à la valeur de 0,01 et représentent en figure II.9 les résultats d'amorçage sous forme de couple de points ( $N_a$ ;  $\Delta\sigma_{\max}$ ).



**Figure II.9.** Résultats des essais d'amorçage traités par la formule de Neuber sur des éprouvettes CT du type 35 CD4, selon [28].

### II.4.2] Utilisation de l'analyse élasto-plastique.

Dans cette analyse, le critère tient compte des conditions de plasticité localisées et utilise l'approche locale, c'est à dire que seules les contraintes et les déformations locales gouvernent les mécanismes d'amorçage.

#### II.4.2.1] Critère selon la méthode de Neuber.

D'après **Bignonnet [29]**, lorsqu'on utilise l'approche locale pour construire un critère d'amorçage, on assimile le fond d'entaille à une éprouvette lisse qui subirait les mêmes contraintes et déformations que ce fond d'entaille. Cette constatation est basée sur la règle de **Neuber [17]** qui relie le facteur de concentration de contrainte  $K_t$  aux grandeurs locales par la relation:

$$K_t^2 = K_\sigma \cdot K_\epsilon \quad (\text{II.12})$$

où

$K_t$  est le facteur de concentration de contrainte dans le modèle élastique,  
 $K_\sigma$  est le facteur de concentration de contraintes dans le modèle élasto-plastique  $\left( K_\sigma = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\sigma_N} \right)$

$K_\epsilon$  est le facteur de concentration de contraintes dans le même modèle  $\left( K_\epsilon = \frac{\Delta\epsilon}{\Delta\epsilon_N} \right)$

$\Delta\sigma$  et  $\Delta\epsilon$  sont respectivement l'amplitude de contrainte et de la déformation locales dans le régime élasto-plastique,

$\Delta\sigma_N$  et  $\Delta\epsilon_N$  sont respectivement l'amplitude de contrainte et de la déformation nominale dans le régime élastique.

**Morrow, Wetzell et Topper [18]** étendent la théorie de **Neuber [17]** au cas de la fatigue en présence d'une entaille. Ces auteurs remplacent le facteur  $K_t$  par  $K_f$ . La règle de Neuber devient:

$$K_f^2 = K_\sigma \cdot K_\epsilon \quad (\text{II.13})$$

**Baus, Lieurade et al [28]** utilisent le critère de l'amplitude de la contrainte maximale  $\Delta\sigma_{\max}$  en introduisant la relation de **Morrow et al [18]** pour le dépouillement des essais sur les éprouvettes CT.

Ces auteurs utilisent la relation découlant de (II.12) est qui s'exprime sous la forme:

$$\sqrt{E \Delta\sigma \Delta\varepsilon} = K_f^{EP} \Delta\sigma_N \quad (\text{II.14})$$

où

$K_f^{EP}$  est le paramètre élasto-plastique d'amorçage.

La courbe d'érouissage cyclique permet de relier l'amplitude de la déformation locale à celle de la contrainte locale par l'expression:

$$\frac{\Delta\varepsilon}{2} = \frac{\Delta\sigma}{2E} + \left(\frac{\Delta\sigma}{2K'}\right)^{1/n'} \quad (\text{II.15})$$

où

$E$  est le module d'élasticité,

$K'$  est le coefficient de la loi d'érouissage cyclique,

$n'$  est l'exposant de la loi d'érouissage cyclique.

Par ailleurs la relation entre l'amplitude de déformation totale et le nombre de cycles est donnée par la loi de Manson-coffin sous la forme:

$$\Delta\varepsilon = \frac{\sigma_f'}{E} (2 N_r)^b + \varepsilon_f' (2 N_r)^c \quad (\text{II.16})$$

où

$\sigma_f'$  est le coefficient de résistance cyclique,

$\varepsilon_f'$  est le coefficient de ductilité en fatigue,

$b$  et  $c$  sont les exposants de la loi de Manson- Coffin,

$N_r$  est le nombre de cycles à rupture.

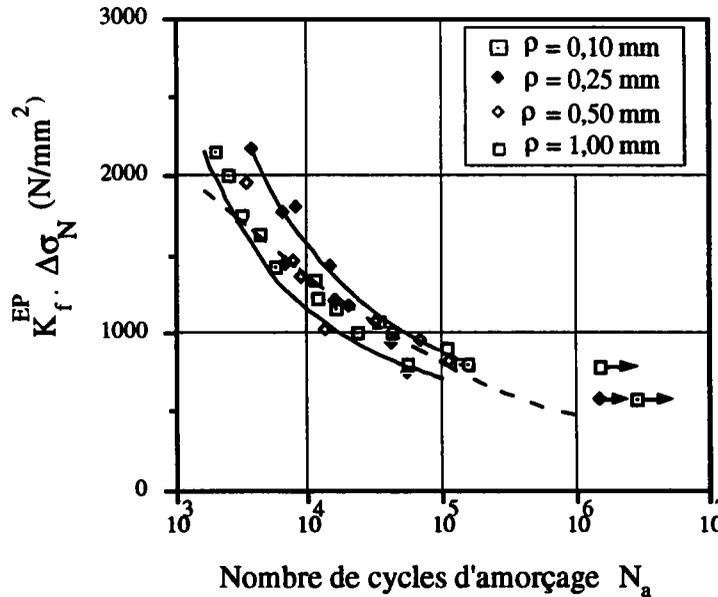
Des relations (II.15) et (II.16), ces auteurs en déduisent la relation entre le paramètre  $\sqrt{E \Delta\sigma \Delta\varepsilon}$  et le nombre de cycles d'amorçage  $N_a$  qui se substitue à  $N_r$ , soit:

$$\sqrt{E \Delta\sigma \Delta\varepsilon} = \sqrt{4K' E (\varepsilon_f' (2N_a)^c)^{n'+1} \left( \frac{K'}{E} (\varepsilon_f' (2N_a)^c)^{n'-1} + 1 \right)} \quad (\text{II.17.a})$$

ou encore

$$\sqrt{E \Delta\sigma \Delta\varepsilon} = \sqrt{4K' E (\varepsilon_f' (2N_a)^c)^{n'+1} \left( \frac{\sigma_f'}{E\varepsilon_f'} (2N_a)^{b-c} + 1 \right)} \quad (\text{II.17.b})$$

Les auteurs en [28] représentent dans un diagramme bilogarithmique (figure II.10), les résultats des essais sous la forme de couples  $(K_f^{EP} \cdot \Delta\sigma_N; N_a)$ .



**Figure II.10.** Résultats des essais d'amorçage selon l'analyse élasto-plastique sur des éprouvettes CT d'acier 35 CD 4, selon [28].

La comparaison entre les deux dernières figures montre que le critère du  $\Delta\sigma_{\max}$  en élasto-plastique rassemble mieux les résultats des essais d'amorçage et tient mieux compte des propriétés de l'acier et de ses capacités d'adaptation que celui du  $\Delta\sigma_{\max} = K_f \Delta\sigma_N$  utilisé en figure II.9.

Pour étudier l'influence du rapport de charge sur le nombre de cycles d'amorçage, X.Zheng [30] utilise l'analyse élasto-plastique pour traiter les résultats d'essais sur des plaques soudées en traction. Cet auteur suppose que l'amorçage de fissure est du à la rupture hypothétique d'une micro-éprouvette localisée en fond d'entaille (figure II.11)

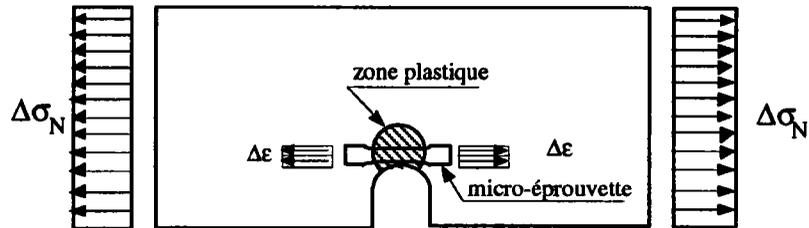


Figure II.11. Zone plastique et micro-éprouvette hypothétique à fond d'entaille selon [30].

Cet auteur, considère l'amplitude de la déformation totale en introduisant l'influence du rapport de charge R. Il obtient:

Pour  $R=0$

$$\Delta\epsilon = 2^{\frac{-n'}{1+n'}} 2 \left(1 - \frac{\Delta\epsilon_e}{\Delta\epsilon}\right)^{\frac{-n'}{1+n'}} \left(\frac{1}{E k'} \left(\sqrt{\frac{1}{2(1-R)}} K_t \Delta\sigma_N\right)^2\right)^{\frac{1}{1+n'}} \quad (\text{II.18.a})$$

Pour  $R= -1$

$$\Delta\epsilon = 2 \left(1 - \frac{\Delta\epsilon_e}{\Delta\epsilon}\right)^{\frac{-n'}{1+n'}} \left(\frac{1}{E k'} \left(\sqrt{\frac{1}{2(1-R)}} K_t \Delta\sigma_N\right)^2\right)^{\frac{1}{1+n'}} \quad (\text{II.18.b})$$

où

$\Delta\varepsilon$  est l'amplitude de la déformation totale,  
 $\Delta\varepsilon_e$  est l'amplitude de déformation élastique.

**X.Zheng [30]**, considère également que la composante de la déformation plastique équivaut à la déformation totale lorsque le nombre de cycles en fatigue est faible. C'est à dire que:

$$\Delta\varepsilon_p \approx \Delta\varepsilon \quad \text{et} \quad (1 - \Delta\varepsilon_e / \Delta\varepsilon)^{-n'/(1+n')} \approx 1 \quad (\text{II.19})$$

Pour exprimer le nombre de cycles d'amorçage, l'auteur utilise la loi de Manson Coffin, la loi de comportement cyclique ainsi que les relations (II.18.a), (II.18.b) et (II.19). Il obtient :

$$2 N_a = 2^{-0,5n' \cdot k_p} \left( \sqrt{\frac{1}{2(1-R)}} K_t \Delta\sigma_N \right)^{k_p} \quad \text{pour} \quad R = 0 \quad (\text{II.20})$$

$$2 N_a = c_p \left( \sqrt{\frac{1}{2(1-R)}} K_t \Delta\sigma_N \right)^{k_p} \quad \text{pour} \quad R = -1 \quad (\text{II.21})$$

où

$$k_p = 2/c (1 + n') \quad \text{et} \quad c_p = \sqrt{E} \sigma_r \varepsilon_r$$

avec

$n'$  : exposant de la loi d'érouissage cyclique,  
 $c$  : exposant de la loi de Manson- Coffin,  
 $E$  : le module d'élasticité,  
 $\sigma_r$  : la contrainte de rupture,  
 $\varepsilon_r$  : la ductilité de rupture.

D'après cet auteur, lorsque  $n'$  croît, la valeur de  $2 \exp(-0,5.k_p)$  en (II.20) tend vers l'unité. Si le produit  $K_t \Delta\sigma/2$  atteint la valeur de  $\sqrt{E} \sigma_r \epsilon_r$ , Le terme 2 en (II.19) et (II.20) peut être négligé.

**X.Zheng [30]** obtient alors une relation unique dont la forme est:

$$N_a = c_p \left( \sqrt{\frac{1}{2(1-R)}} K_t \Delta\sigma_N \right)^{k_p} \quad (\text{II.22})$$

#### **II.4.2.2] Critère selon la méthode de Molski-Glinka.**

**Molski & Glinka [23]** utilisent l'analyse énergétique pour exprimer le facteur de concentration de contraintes. Ils proposent la règle suivante:

$$K_t^2 = \frac{W_{\Delta\sigma}}{W_{\Delta\sigma_N}} \quad (\text{II.23})$$

où

$$W_{\Delta\sigma} = \int_0^{\epsilon} \Delta\sigma(\epsilon) d\epsilon \quad (\text{II.24})$$

et

$$W_{\Delta\sigma_N} = \int_0^{\epsilon_N} \Delta\sigma_N(\epsilon_N) d\epsilon_N \quad (\text{II.25})$$

Pour une amplitude de chargement donnée, **Molski & Glinka [23]** utilisent la courbe d'érouissage cyclique (II.15) pour exprimer  $W_{\Delta\sigma}$  et  $W_{\Delta\sigma_N}$  sous la forme:

$$W_{\Delta\sigma} = \frac{\Delta\sigma^2}{2E} + \frac{2\Delta\sigma}{n'+1} \left( \frac{\Delta\sigma}{2K'} \right)^{1/n'} \quad (\text{II.26})$$

Pour un chargement nominal élastique:

$$W_{\Delta\sigma_N} = \frac{\Delta\sigma^2}{2E} \quad (\text{II.27})$$

En remplaçant  $W_{\Delta\sigma}$  et  $W_{\Delta\sigma_N}$  par leurs expressions en (II.23), **Molski & Glinka [23]** obtiennent pour une amplitude de chargement nominal élastique:

$$K_t \Delta\sigma = \sqrt{4E \left( \frac{\Delta\sigma^2}{4E} + \frac{\Delta\sigma}{n'+1} \left( \frac{\Delta\sigma}{2K'} \right)^{1/n'} \right)} \quad (\text{II.28})$$

ou

$$K_t \Delta\sigma = \sqrt{4E \left( E \left( \frac{\Delta\varepsilon_e}{2} \right)^2 + \frac{2K'}{n'+1} \left( \frac{\Delta\varepsilon_p}{2} \right)^{n'+1} \right)} \quad (\text{II.29})$$

Connaissant la loi de résistance à la fatigue du matériau et son comportement cyclique, la relation reliant les conditions locales au nombre de cycles d'amorçage est :

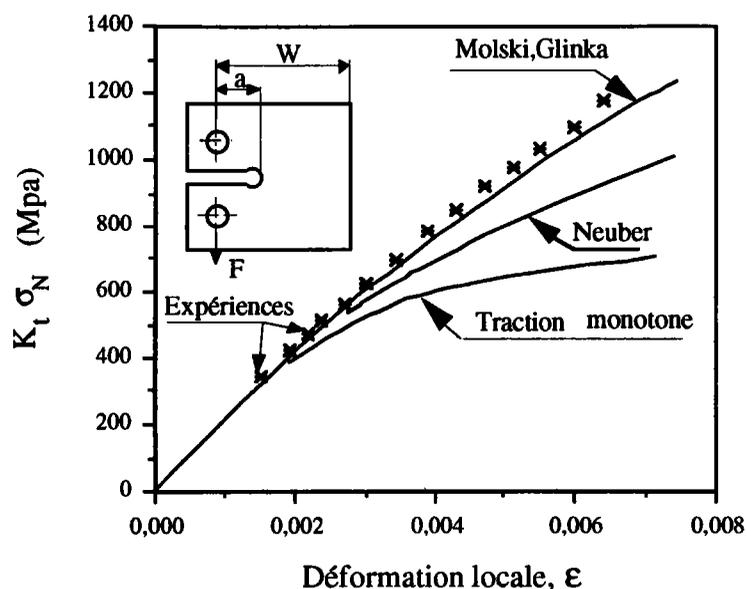
$$\sqrt{4E \left( \frac{\Delta\sigma^2}{4E} + \frac{\Delta\sigma}{n'+1} \left( \frac{\Delta\sigma}{2K'} \right)^{1/n'} \right)} = \sqrt{4K'E \left( \varepsilon'_f (2N)^c \right)^{n'+1} \left( \frac{K'}{E} \left( \varepsilon'_f (2N)^c \right)^{n'-1} + \frac{2}{n'+1} \right)} \quad (\text{II.30})$$

$$= \sqrt{4K'E \left( \frac{E}{K'} \left( \frac{\sigma'_f}{E \varepsilon'_f} (2N)^b \right)^2 + \frac{2}{n'+1} \left( \varepsilon'_f (2N)^c \right)^{n'+1} \right)}$$

**Molski & Glinka [23]** prévoient une contrainte et une déformation locales plus faibles que celles prévues par la règle de Neuber.

De plus, à l'aide de nombreuses mesures de déformation locale effectuées sur éprouvettes entaillées, ces auteurs ont constaté un bon accord entre l'expérience et la prévision par la méthode de l'énergie.

Un exemple de ces comparaisons est donné en figure II.12.



**Figure II.12.** Comparaison entre les déformations locales mesurées et les déformation locales calculées par différentes méthodes.  
Acier RQC 100,  $K_t = 3$ , selon [31].

### II.5] Critère du $\Delta\sigma_{\theta\theta}$ à une distance $d$ .

Depuis les travaux de Creager [32] et [33], on sait calculer les contraintes au voisinage d'une fissure émoussée de rayon à fond d'entaille égal à  $\rho$ . On peut donc déterminer à une distance  $d$  du fond d'entaille, la contrainte normale principale  $\sigma_{\theta\theta}$  (figure II.13). Dans le cas où la sollicitation est en mode I, la contrainte  $\sigma_{\theta\theta}(d)$  se confond avec  $\sigma_y(d)$  et, avec les conventions de la figure II.13, on peut écrire:

$$\sigma_{\theta\theta}(d) = \sigma_{yy}(d) = \frac{K_I}{\sqrt{\pi d}} \frac{2\left(1 + \frac{\rho}{d}\right)}{\left(2 + \frac{\rho}{d}\right)^{3/2}} \quad (\text{II.31})$$

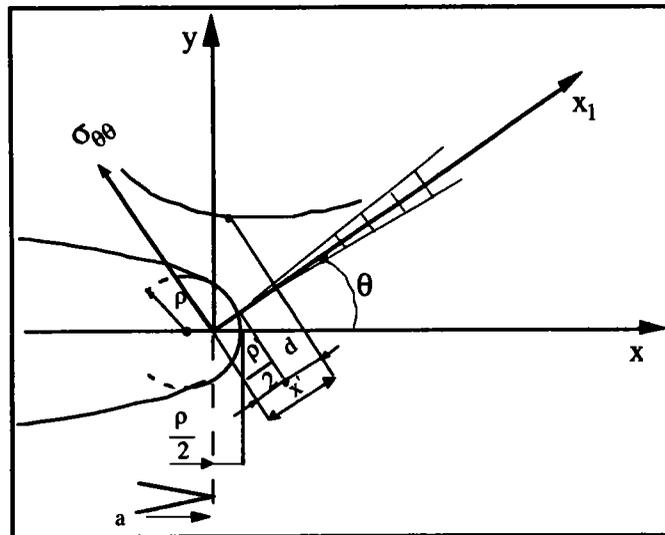


Figure II.13. Convention du repère établie par Creager [33]

**Rabbe, Amzallag et al [34]** utilisent ce critère pour représenter les courbes de dimensionnement pour des constructions en aciers inoxydables austénitiques.

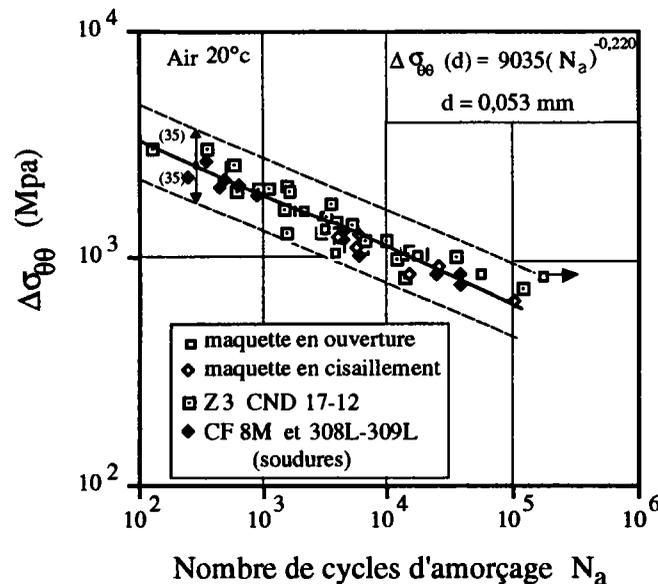
Ces auteurs ont réalisé des essais d'amorçage en fatigue sur des éprouvettes présentant des rayons à fond d'entaille compris entre 0,05 et 4 mm. Ils représentent en figure II.14, les résultats d'essais dans un diagramme bilogarithmique [ $\log \Delta\sigma_{\theta\theta}$ ;  $\log N_a$ ].

Ils représentent l'ensemble des résultats par une courbe d'équation :

$$\Delta\sigma_{\theta\theta}(d) = \sigma_0(d) \cdot N_a^{n(d)} \quad (\text{II.32})$$

Pour chaque valeur de  $d$ , ils calculent les constantes  $\sigma_0(d)$ ,  $n(d)$  et l'écart type  $s$  de la dispersion des résultats expérimentaux autour de la courbe ajustée. La valeur de  $d$  est celle qui minimise au mieux l'écart type  $s$ .

Ainsi comme le montre la figure II.14, est déduite la courbe de dimensionnement et la bande de dispersion permettant d'envisager l'étude de fiabilité des constructions projetées.



**Figure II.14:** Courbes de dimensionnement obtenues avec le critère  $\Delta\sigma_{\theta\theta}$  selon [34].

En connaissant la courbe caractéristique et la distance  $d$  pour un matériau donné, les auteurs en [34], en déduisent le nombre de cycles à l'amorçage.

## II.6] Critère basé sur les évolutions microstructurales.

A l'inverse de l'approche macroscopique qui utilise des critères d'endurance plus ou moins complexes pour le cas multiaxial, ou de l'approche locale de la rupture qui demande de connaître explicitement la loi de comportement, l'approche introduite par **Champaud, Esnouf et al [35]** dans le cas d'amorçage en fatigue de contact Hertzien permet de prendre en compte les transformations microstructurales associées à l'endommagement.

Cette modélisation doit prendre en compte l'apparition de la phase blanche et l'amorçage des fissures en son sein. Les hypothèses introduites sont telles que: l'appellation inclusion est donnée à tout volume de matière particulier existant au sein du matériau et qui présente une loi de comportement plastique différente de celle de la matrice martensitique dans laquelle il est inséré.

Les auteurs [35] supposent que la matrice martensitique se déforme par la création et le mouvement de dislocations.

De plus, la phase blanche résulte de la décomposition de la structure martensitique locale par accumulation de ces dislocations et de leur interaction avec le carbone.

Au voisinage de l'inclusion, la densité de dislocations dans la matrice résulte de l'addition des dislocations initiales et des dislocations créées. Ils supposent alors que la fissuration dans la phase blanche s'amorce lorsque cette densité atteint une valeur critique pour laquelle il y a alors coalescence spontanée des dislocations.

L'amorçage se produira lorsque la contrainte de montée  $\sigma$  dans un empilement de dislocations coin, sera égale à la contrainte de décohésion du matériau, soit environ  $\mu/\Omega$  avec  $\mu$  module de cisaillement et  $\Omega = 5$  dans les métaux.

L'expression de la condition d'amorçage se fait en fonction des contraintes appliquées aux dislocations coins présentes dans le volume considéré.

Ces auteurs appliquent la formule suivante:

$$\frac{\mu}{\Omega} = \frac{\mu b}{\pi(1-\nu) x'} \ln \frac{n_p^2 x'^2}{2h} + \sigma^H + \sigma^I \quad (\text{II.33})$$

où

$\sigma^H$  est le tenseur de contraintes Hertzien

et

$\sigma^I$  est le tenseur de contraintes internes

avec

$$\sigma^H = \frac{\sigma_x^H + \sigma_z^H}{2} \quad (\text{II.34})$$

et

$$\sigma^I = \frac{\sigma_x^I + \sigma_z^I}{2}$$

$n_p$  est le nombre de dislocations dans l'empilement.

Les auteurs [35] considèrent que la densité des dislocations dans la phase blanche est élevée. Ils supposent un réseau carré où  $x'$ , la distance entre deux dislocations dans un empilement est égale à  $h$ , la distance entre deux empilements. Ils supposent que les boucles de dislocation émises près de la particule sont réparties de manière homogène dans la phase blanche.

Ces auteurs utilisent la condition d'Ashby [36] pour une inclusion sphérique de diamètre  $d$ , qui précise le nombre de dislocations nécessaires pour absorber la différence de déformation par cisaillement  $\gamma$  entre la matrice et l'inclusion, et considèrent que  $\gamma$  est indépendant du nombre de cycles  $N$ . Ils déterminent à partir de la relation (II.33), pour  $N = N_a$  l'équation suivante:

$$\left(\frac{N_a \gamma d}{\lambda b d'}\right)^{1/2} \ln \frac{\lambda N_a \gamma d}{4b d'} = \left(\frac{1}{\Omega} - \frac{\sigma^H + \sigma^I}{\mu}\right) \frac{\pi(1-\nu)}{b \sqrt{2}} \quad (\text{II.35})$$

où

$\mu$  est le module de cisaillement du matériau,

$\nu$  est le coefficient de poisson,

$b$  est le vecteur de Burghers des dislocations ( $2,5 \cdot 10^{-10}$  m),

$\lambda$  est la longueur de la phase blanche,

$d'$  est la largeur de la phase blanche.

## II.7] Conclusions.

Dans le domaine élastique, **Barsom & Mc Nicole [24]** expriment le nombre de cycles d'amorçage sous la forme d'une fonction puissance de l'amplitude de la contrainte nominale pour laquelle l'exposant est noté  $n$ . Les auteurs montrent que la valeur de l'exposant  $n$  varie de  $n=2$  pour le cas d'une fissure à  $n=8$  dans le cas où l'éprouvette est lisse.

Lorsque le paramètre  $\Delta K_I / \sqrt{\rho}$  est constant, **Barsom et Mc Nicole [24]** constatent qu'en traçant l'évolution du nombre de cycles d'amorçage en fonction du rayon en fond d'entaille, le nombre de cycles d'amorçage décroît lorsque le volume plastifié en fond d'entaille augmente. Ils constatent également que le nombre de cycles d'amorçage devient indépendant du rayon en fond d'entaille lorsque ce dernier est faible et lorsqu'il devient important, c'est à dire lorsque la plasticité devient significative. **Clark [27]** montre que l'effet de l'environnement n'a aucune influence sur le nombre de cycles d'amorçage.

Certains auteurs comme **Baus, Lieurade et al [28]** ont constaté que pour le calcul de la contrainte maximale, l'intervention du facteur  $K_t$  donnait des

résultats excessifs dans le domaine de la fatigue surtout en ce qui concerne les faibles rayons en fond d'entaille.

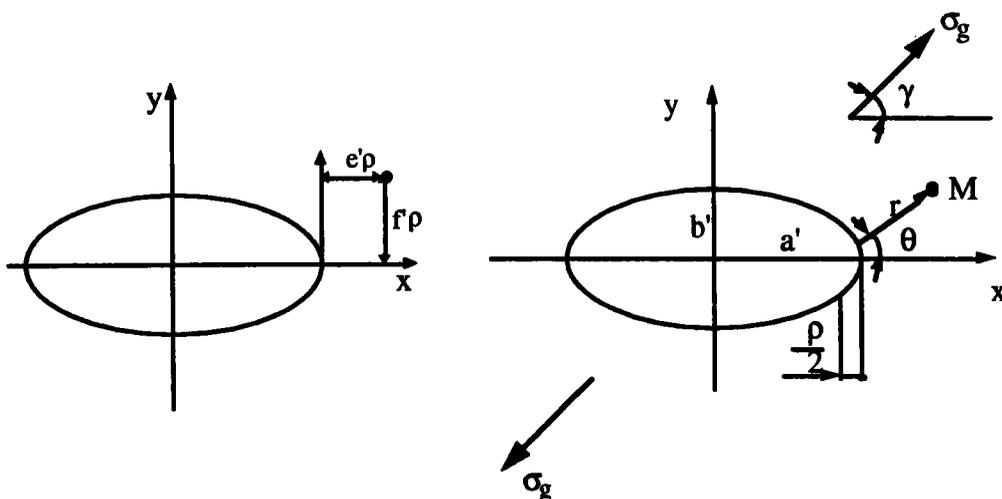
Dans le domaine élasto-plastique **Baus, Lieurade et al [28]**, trouvent moins de dispersion dans leurs résultats expérimentaux lorsqu'ils utilisent le critère du  $\Delta\sigma_{\max}$  à l'aide du coefficient  $K_f$  découlant de la relation de **Morrow et al [18]**. **Truchon [31]** constate que la méthode de **Molski & Glinka [23]** donne des déformations et des contraintes locales moins élevées que celles de **Neuber [17]**. Les déformations locales obtenues par la méthode de **Molski & Glinka [23]** s'accordent bien avec les déformations locales mesurées expérimentalement.

### III] CHAMP DE CONTRAINTES AU VOISINAGE D'UNE ENTAILLE.

#### III.1] Champ de contraintes au voisinage d'une entaille elliptique ou hyperbolique.

Irwin [37] a introduit une importante contribution pour la compréhension des phénomènes de rupture lorsqu'il a montré que la distribution des contraintes au voisinage de la pointe de fissure pouvait être décrite par le facteur d'intensité de contraintes. Chaque facteur d'intensité de contraintes  $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{III}$  est associé à un mode de déformation différent. Au voisinage de la pointe de fissure, les déformations et les contraintes locales peuvent être décrites par la superposition de ces trois modes.

Creager [32] et [33], a étendu cette analyse pour exprimer le champ de contraintes au voisinage d'une entaille. Selon cet auteur, dans de nombreuses applications, il est nécessaire d'avoir un modèle physique qui considère un rayon de courbure non nul à la pointe de fissure. Ce type de fissure émoussée ou entaille peut être représenté mathématiquement par un volume elliptique ou hyperbolique dont le rayon de courbure est plus faible que les dimensions principales de ces géométries. Il considère alors une plaque infinie contenant un trou elliptique, soumise à un chargement de traction noté  $\sigma_g$  faisant un angle  $\gamma$  par rapport au grand axe de l'ellipse (figure III.1).



**Figure III.1.** Représentation du repère local pour une entaille elliptique soumise à un chargement  $\sigma_g$ , selon [33].

Par des transformations complexes, l'auteur [32] et [33] exprime le facteur d'intensité de contraintes en mode I et II par les relations suivantes:

Dans le cas du mode I, le tenseur des contraintes s'exprime par:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3}{2} \theta \right] - \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \frac{\rho}{2r} \cos \frac{3}{2} \theta \\ \sigma_{yy} &= \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3}{2} \theta \right] + \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \frac{\rho}{2r} \cos \frac{3}{2} \theta \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3}{2} \theta - \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \frac{\rho}{2r} \sin \frac{3}{2} \theta\end{aligned}\quad (\text{III.1})$$

Pour le mode II, le tenseur des contraintes est de la forme:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{1/2}} \sin \frac{\theta}{2} \left[ 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3}{2} \theta \right] + \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{1/2}} \frac{\rho}{2r} \sin \frac{3}{2} \theta \\ \sigma_{yy} &= \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{1/2}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3}{2} \theta - \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{1/2}} \frac{\rho}{2r} \sin \frac{3}{2} \theta \\ \tau_{xy} &= \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{1/2}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3}{2} \theta \right] - \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{1/2}} \frac{\rho}{2r} \cos \frac{3}{2} \theta\end{aligned}\quad (\text{III.2})$$

En mode III, Creager [32] et [33] applique à la même plaque qu'en mode I et II, un cisaillement longitudinal dans la direction Z. Il obtient:

$$\begin{aligned}\tau_{xz} &= -\frac{K_{III}}{(2\pi r)^{1/2}} \sin \frac{\theta}{2} \\ \tau_{yz} &= \frac{K_{III}}{(2\pi r)^{1/2}} \cos \frac{\theta}{2}\end{aligned}\quad (\text{III.3})$$

Dans le cas d'une entaille elliptique ou hyperbolique, l'état de contraintes diffère de celui d'une fissure plane par le terme additionnel dépendant du rayon en fond d'entaille. En mode III, la relation reste identique à celle d'une fissure plane.

L'expression de la contrainte hydrostatique  $\sigma_x + \sigma_y$  pour une fissure de courbure finie est la même que celle d'une fissure aigue.

Dans sa thèse, **Creager [33]** aborde le problème de l'extension de fissure due au cisaillement transversal. Cet auteur commente les travaux d'**Erdogan & Sih [38]** qui utilisent le modèle d'une fissure plane et ceux de **Mc Clintock [39]** qui considère une fissure elliptique.

**Erdogan & Sih [38]** supposent que:

- La fissure s'amorce à partir de la pointe de fissure et dans la direction radiale.

- La fissure s'amorce dans le plan perpendiculaire à la direction où l'effort de traction est le plus important.

A partir de ces hypothèses, l'amorçage de la fissure apparaît dans la direction de  $70,5^\circ$  par rapport au plan de la fissure.

**Mc Clintock [39]** introduit les hypothèses suivantes:

- La fissure s'amorce en surface.

- La fissure s'amorce dans le plan perpendiculaire à la direction où l'effort de traction est le plus important.

Dans sa discussion, **Creager [33]** utilise la contrainte hydrostatique qui comme nous l'avons remarqué reste inchangée pour les deux modèles. Cette contrainte s'exprime par la relation:

$$\sigma_t = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = - \frac{2.K_{II}}{(2\pi r)^{1/2}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (\text{III.4})$$

Le long de la surface

$$f^2 = -2e' \quad \text{pour } r/a' \ll 1 \quad (\text{III.5})$$

où

$f$  et  $e'$  sont des paramètres de positionnement du repère,

$a'$  est la distance focale de l'entaille suivant le grand axe.

avec

$$r = \frac{\rho}{\cos\theta + 1} \quad (\text{III.6})$$

$$\sigma_t = -\frac{2.K_{II}}{(2\pi\rho)^{1/2}} \sin\theta \quad (\text{III.7})$$

Pour  $\theta = -\pi/2$ , la contrainte  $\sigma_t$  est maximale.

L'auteur [33] exprime l'angle  $\omega$  que fait la direction perpendiculaire à la contrainte tangentielle maximale avec l'axe des  $x$  par l'équation:

$$\text{tg } \omega = -\frac{de'}{df'} = f' \quad (\text{III.8})$$

pour  $e' = -1/2$   $\text{tg } \omega = 1 \Rightarrow \omega = 45^\circ$  (III.9)

Cette valeur de  $\omega$  est identique à celle obtenue par **Mc Clintock** [39].

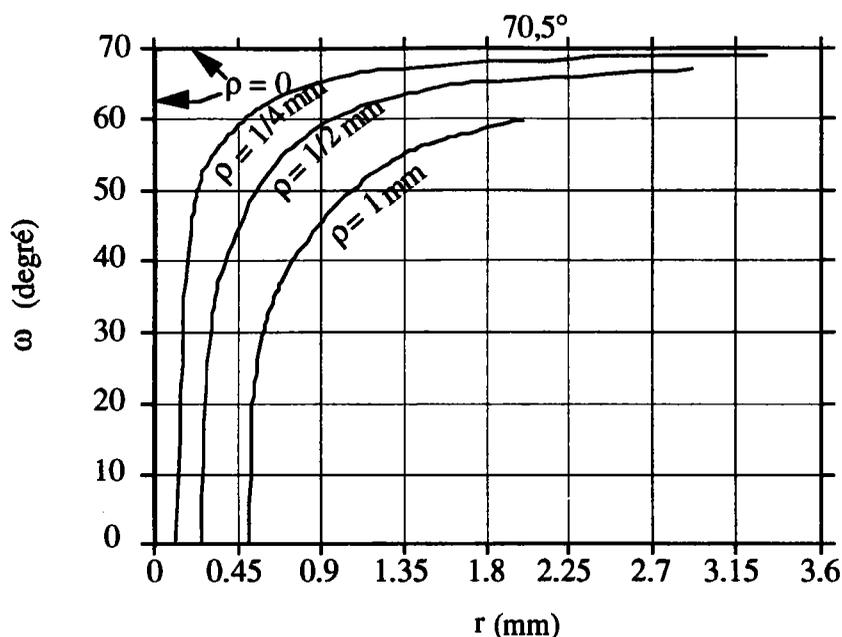
Pour le modèle d'**Erdogan & Sih** [38], l'auteur [33] ne trouve pas de raison d'utiliser la pointe de fissure comme origine du repère.

Il utilise son propre repère dont l'origine a pour coordonnées  $e'\rho$  et  $f'\rho$  avec  $e' = -1/2$ ,  $f' = 0$  (figure III.1).

Pour  $\theta = \omega$ , l'auteur [33] détermine à l'aide de transformations complexes, la relation entre  $\omega$  et  $\rho$ :

$$\cos \omega = \frac{\rho + 1}{3} \quad (\text{III.10})$$

La figure III.2, représente pour les différentes valeurs du rayon en fond d'entaille, l'évolution de l'angle  $\omega$  en fonction des distances  $r$ .



**Figure III.2.** Représentation pour les différents rayons en fond d'entailles de l'évolution de l'angle  $\omega$  en fonction des distances  $r$ , selon [33].

Cette figure montre que lorsque le rayon tend vers zéro, l'origine du repère approche le fond d'entaille et par conséquent, la relation III.4 est considérée comme une relation qui s'applique au cas d'une fissure plane. Dans ce cas précis,  $\omega$  peut varier entre 0 et  $70,5^\circ$  et la distance  $r$  peut être prise entre  $\rho/2$  et  $\infty$ . Si par exemple  $r = \rho/2$ ,  $\omega = 0$ ; si  $r = 5\rho$ ,  $\omega = \arccos(0,4)$ .

Selon Creager [33], lorsqu'on considère le problème de cette manière, la prévision de la direction d'amorçage de fissure reste indéterminée. Le désaccord entre les résultats d'Erdogan & Sih [38] et ceux de Mc Clintock [39] n'est pas principalement due à la différence de forme de la fissure mais plutôt à la différence des critères utilisés.

**III.2] Champ de contraintes au voisinage d'une entaille en V.**

**Williams [40]** est l'un des premiers auteurs à avoir exprimé la distribution des contraintes au voisinage d'une entaille en V sous la forme de série de fonction complexes. Pour exprimer le champ de déplacement, l'auteur utilise la fonction d'Airy qui satisfait aux conditions limites des bords de l'entaille. Il définit à partir des fonctions biharmoniques  $\varpi$  et  $\psi_1$  le champ de déplacement en coordonnées polaires:

$$2\mu U_r = - \frac{\partial \varpi}{\partial r} + (1-\sigma) r \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} \quad (\text{III.11})$$

$$2\mu U_\theta = - \frac{1}{r} \frac{\partial \varpi}{\partial r} + (1-\sigma) r^2 \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \quad (\text{III.12})$$

où

$$\sigma \equiv \nu / (1+\nu),$$

$\nu$  est le coefficient de Poisson,

$\mu$  est le module de cisaillement.

Pour exprimer le champ de contraintes, **Williams [40]** utilise les relations du tenseur des contraintes en coordonnées polaires :

$$\sigma_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varpi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varpi}{\partial r} \quad (\text{III.13})$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \varpi}{\partial r^2} \quad (\text{III.14})$$

$$\tau_{r\theta} = - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varpi}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varpi}{\partial \theta} \quad (\text{III.15})$$

La relation liant la fonction  $\varpi$  à  $\psi_1$  est donnée par [40] sous la forme:

$$\nabla^2 \varpi = \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} \right) \quad (\text{III.16})$$

Les solutions de  $\varpi$  et  $\psi_1$  s'expriment par les relations:

$$\begin{aligned} \varpi(r, \theta, \alpha) &= r^{\alpha+1} [ b_1 \sin(\alpha+1)\theta + b_2 \cos(\alpha+1)\theta + b_3 \sin(\alpha-1)\theta + b_4 \\ &\quad \cos(\alpha-1)\theta ] \\ &\equiv r^{\alpha+1} F(\theta, \alpha) \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

$$\begin{aligned} \psi_1 &= r^m (a_1 \cos m\theta + a_2 \sin m\theta) \\ &\equiv r^m G(\theta, m) \end{aligned} \quad (\text{III.18})$$

où

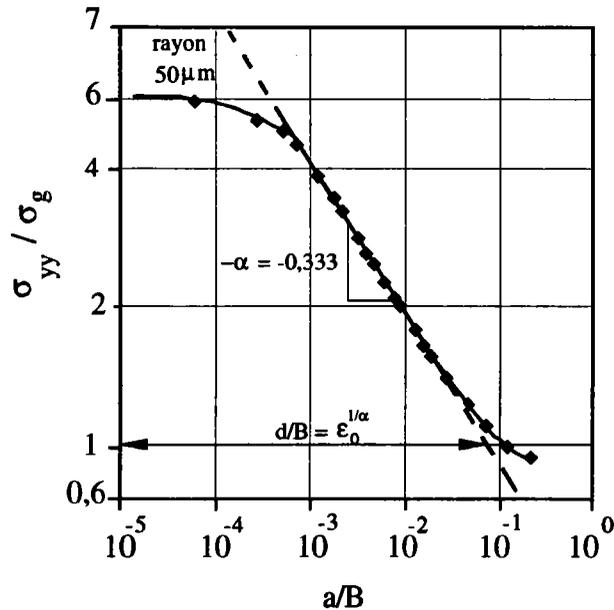
$a_j$  et  $b_j$  sont les coefficients de la série de la fonction contrainte et sont complexes.

$\alpha$  et  $m$  sont les facteurs de contraintes asymptotiques et sont complexes.

Pour des raisons de compatibilité de puissances en (III.16), l'auteur [40] pose  $\alpha = m+1$  et obtient une relation entre les coefficients des termes trigonométriques sous la forme:

$$a_1 = -\frac{4}{\alpha-1} b_3 \quad \text{et} \quad a_2 = \frac{4}{\alpha-1} b_4 \quad (\text{III.19})$$

Dans le cadre des essais sur des assemblage soudés, Verreman et al [41] expriment le facteur d'intensité de contraintes en mode I à partir de la distribution de contraintes donnée par Williams [40]. Ces auteurs, définissent à partir de la figure III.3, la distribution des contraintes à la pointe d'une entaille en V par deux expressions différentes.



**Figure III.3.** Distribution de contraintes au voisinage du joint soudé selon [41].

La première est celle qui consiste à faire l'analogie avec le cas d'une fissure.

$$\frac{\sigma_{yy}}{\sigma_g} = \frac{K_{I(\rho=0, \psi)}}{\sigma_g} \cdot \frac{a^{-\alpha}}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{où} \quad \frac{K_{I(\rho=0, \psi)}}{\sigma_g} = \epsilon_0 B^\alpha \sqrt{2\pi} \quad (\text{III.20})$$

avec

$K_{I(\rho=0, \psi)}$  est le facteur d'intensité de contraintes d'entaille en  $V$  et  $\psi$  angle d'entaille,

$\epsilon_0$  : constante qui dépend de l'angle d'entaille et des dimensions géométriques de l'éprouvette,

$B$ : est l'épaisseur de l'éprouvette.

La seconde expression utilisée par les auteurs [41] définit le facteur d'intensité de contraintes pour une entaille en  $V$  par la relation:

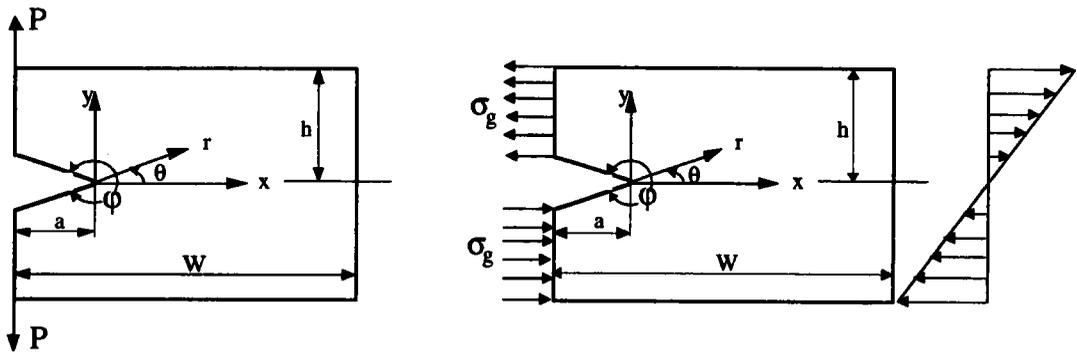
$$\frac{\sigma_{yy}}{\sigma_{gl}} = \left(\frac{a}{d}\right)^{-\alpha} \quad (\text{III.21})$$

avec

$$d = \varepsilon_0^{1/\alpha} B \quad (\text{III.22})$$

$d$  est la distance mesurée à partir du fond d'entaille jusqu'à la droite d'équation  $\sigma_{yy} = \sigma_g$  (figure III.3).

**G.Gross & Mendelson [42]** expriment à partir de la fonction de contraintes  $\bar{\omega}$  donnée par **Williams [40]**, les facteurs d'intensité de contraintes pour une plaque à entaille de bord (figure III.4) sollicitée en mode I et en mode II.



a) Éprouvette d'épaisseur  $B$  sollicitée en mode I

b) Éprouvette d'épaisseur  $B$  sollicitée en mode II

**Figure III.4.** Plaque à entaille de bord en V soumise à un chargement symétrique(mode I) et à un chargement antisymétrique (mode II) selon [42].

La fonction  $\bar{\omega}$  satisfait aux conditions aux frontières des surfaces non sollicitées de l'entaille. Ces conditions se traduisent par le système d'équations:

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha'\varphi/2) & \cos[(\alpha'-2)\varphi/2] \\ \alpha'.\sin(\alpha'\varphi/2) & (\alpha'-2).\sin[(\alpha'-2)\varphi/2] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

et

$$\begin{bmatrix} \sin(\alpha'\varphi/2) & \sin[(\alpha'-2)\varphi/2] \\ \alpha'.\cos(\alpha'\varphi/2) & (\alpha'-2).\cos[(\alpha'-2)\varphi/2] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(III.23)

avec  $A_i = 2b_i$  et  $\alpha' = \alpha + 1$

Les équations caractéristiques donnant les solutions  $\alpha'_n$  sont de la forme:

$$\sin [(\alpha'_n - 1)\varphi] = \pm (\alpha'_n - 1) \sin \varphi \quad (\text{III.24})$$

où

$$\alpha'_n = \alpha'_{r_n} + i\alpha'_{i_n} \quad \text{avec } n = 1, 2, 3, \dots, \infty$$

avec

$\alpha'_{r_n}$  : parties réelles des  $n$  solutions en  $\alpha'_n$ .

et

$\alpha'_{i_n}$  : parties imaginaires des  $n$  solutions en  $\alpha'_n$ .

Des équations (III.23), les valeurs complexes  $A_j$  peuvent se mettre sous la forme:

$$A_{1,n} = \frac{-\cos [(\alpha'_n - 2)\varphi/2]}{\cos (\alpha'_n \varphi/2)} A_{2,n} \quad , \quad A_{3,n} = \frac{-\sin [(\alpha'_n - 2)\varphi/2]}{\sin (\alpha'_n \varphi/2)} A_{4,n} \quad (\text{III.25})$$

La fonction contrainte  $\bar{\omega}$  peut être exprimée par la combinaison de deux fonctions :

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_{\text{paire}} + \bar{\omega}_{\text{impaire}} \quad (\text{III.26})$$

où

$$\bar{\omega}_{\text{paire}} = \sum_{n=1}^{\infty} r^{\alpha'_n} [A_{1,n} \cos (\alpha'_n \theta) + A_{2,n} \cos [(\alpha'_n - 2)\theta]]$$

et

$$\bar{\omega}_{\text{impaire}} = \sum_{n=1}^{\infty} r^{\alpha'_n} [A_{3,n} \sin (\alpha'_n \theta) + A_{4,n} \sin (\alpha'_n - 2)\theta] \quad (\text{III.27})$$

Les expressions des facteurs d'intensité de contraintes en mode I et en mode II sont exprimées par [42] sous la forme suivante:

$$\left. \begin{aligned} K_{I(\rho=0, \varphi)} &= (2\pi)^{1/2} \lim_{r \rightarrow 0} r^{2-\alpha_1'} \sigma_{\theta}(r, 0) \\ K_{II(\rho=0, \varphi)} &= (2\pi)^{1/2} \lim_{r \rightarrow 0} r^{2-\alpha_1'} \tau_{r\theta}(r, 0) \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.28})$$

avec

$\alpha_1'$  : est la première valeur réelle non nulle des solutions  $\alpha_n'$ ,

$K_{I(\rho=0, \varphi)}$  et  $K_{II(\rho=0, \varphi)}$  sont respectivement les facteurs d'intensité de contraintes d'entaille en V pour le mode I et II.

Lorsque l'angle d'entaille n'est pas nul et est inférieur à  $180^\circ$ , la singularité à fond d'entaille est inférieur à  $1/2$  ( $\alpha_1' < 3/2$ ). Pour un angle nul (cas d'une fissure), la singularité à la pointe de la fissure est caractérisée par une valeur de  $1/2$  ( $\alpha_1' = 3/2$ ).

A partir des équations précédentes, **Gross & Mendelson [42]** obtiennent les relations:

$$\begin{aligned} K_{I(\rho=0, \varphi)} &= (2\pi)^{1/2} \alpha_1'(\alpha_1'-1) \left[ -\left( \cos\varphi + \frac{\sin(\alpha_1'\varphi) \sin\varphi}{1+\cos(\alpha_1'\varphi)} \right) + 1 \right] \text{Re}(A_{2,1}) \\ & \hspace{25em} (\text{III.29}) \\ K_{II(\rho=0, \varphi)} &= (2\pi)^{1/2} \left| (\alpha_1'-1) \left[ (\alpha_1'-2) + \alpha_1' \left( \frac{\sin(\alpha_1'\varphi) \sin\varphi}{1-\cos(\alpha_1'\varphi)} - \cos\varphi \right) \right] \text{Re}(A_{4,1}) \right| \end{aligned}$$

Les solutions précédentes satisfont aux conditions le long des surfaces de l'entaille. Pour satisfaire aux conditions sur le reste des autres frontières, **Gross & Mendelson [42]** déterminent les coefficients des termes des séries trigonométriques par la méthode de collocation.

La méthode consiste à tronquer la série sous la forme (III.27) et de déterminer la fonction de contraintes et sa dérivée de manière à satisfaire les conditions limites à un nombre fini ( $p$ ) de frontières choisies. Le nombre d'équations algébriques obtenues correspond à  $(2p)$ .

Les premiers coefficients (pour  $n=1$ ) de la fonction de contraintes seront déterminés à partir de ces équations. La série de la fonction de contraintes tronquée obtenue représente parfaitement la fonction de contraintes réelle et le nombre de frontières ne produit aucun changement sur le premier coefficient de la série qui représente le terme dominant au voisinage de la pointe d'entaille.

A partir de cette résolution, les auteurs [42] donnent les valeurs des facteurs d'intensité de contraintes en mode I et en mode II sous la forme non dimensionnelles (tableau III.1 et III.2).

Pour le mode I, lorsque l'angle  $\varphi$  décroît de  $360^\circ$  (cas d'une fissure) à  $330^\circ$ , la variation du facteur non-dimensionnel  $K_{I(\rho=0,\varphi)} \cdot B \cdot W^{\alpha_1-1} / P$  est de l'ordre de 1% . Cette faible différence est due aux valeurs des singularités ( $\alpha_1-1$ ) qui varient de 0,5000 pour  $\varphi = 360^\circ$  à 0,4996 pour  $\varphi = 330^\circ$ .

En mode II, pour la même valeur du rapport  $h/a$ , la différence entre les valeurs des termes non-dimensionnel  $K_{II(\rho=0,\varphi)} \cdot B \cdot h / P \cdot a^{2-\alpha_1}$  est importante car une légère variation de la singularité provoque une forte variation de  $K_{II(\rho=0,\varphi)}$ .

Angle $\varphi$	rapport $a/W$					
	0,2	0,3	0,4	0,4	0,6	0,7
$K_{I(\rho=0,\varphi)} \cdot B \cdot W^{\alpha_1-1} / P$						
$360^\circ$	1,085	1,614	2,369	3,539	5,537	9,422
$330^\circ$	1,097	1,630	2,389	3,569	5,579	9,491
$300^\circ$	1,169	1,724	2,520	3,756	5,859	9,979
$270^\circ$	1,366	1,978	2,888	4,297	6,736	11,515
$240^\circ$	1,804	2,593	3,766	5,630	8,934	15,551

**Tableau III.1.** Facteur d'intensité de contraintes non-dimensionnel pour une éprouvette à entaille de bord soumise à un effort de traction pure (mode I), selon [42].

Angle $\varphi$	Rapport a/W				
	h/a	0,400	0,333	0,286	0,200
		$K_{II(\rho=0,\varphi)} \cdot B \cdot h / P \cdot a^{2-\alpha_{II}}$			
360°	0,5	0,353	0,353	0,353	0,352
	1,0	0,500	0,500	0,500	0,500
	1,5	0,614	0,612	0,612	0,612
350°	0,5	0,186	0,186	0,186	
	1,0	0,401	0,401	0,401	
	1,5	0,543	0,540	0,540	
340°	1,0	0,278	0,278	0,278	
	1,5	0,456	0,454	0,454	
330°	1,0	0,124	0,124	0,124	
	1,5	0,348	0,346	0,346	

**Tableau III.2.** Facteur d'intensité de contraintes non-dimensionnel pour une éprouvette à entaille de bord soumise à un chargement antisymétrique (mode II), selon [42].

Pour déterminer les facteurs d'intensité de contraintes en présence d'une entaille en V, **Carpenter [44]** développe à partir des relations de **Williams [40]**, un calcul purement théorique basé sur la méthode des intégrales de contours avec des transformations paramétriques.

Pour une plaque à entaille de bord en V, **Lin & Pin Tong [45]** utilisent les relations de **Williams [40]** et déterminent les constantes des séries trigonométriques par le biais des déplacements obtenues à l'aide d'éléments isoparamétriques entourant un élément spécial à fond d'entaille (figure III.5).

Ces auteurs définissent alors les facteurs d'intensité de contraintes sous la forme:

$$K_{I(\rho=0,\gamma)} = \sqrt{2\pi} \alpha_{I1} [1 + \alpha_{I1} - \alpha_{I1} \cos(2\phi') - \cos(2\alpha_{I1}\phi')] \nu_1 / \lambda^{1-\alpha_{I1}} \quad (\text{III.30})$$

$$K_{II(\rho=0,\gamma)} = \sqrt{2\pi} \alpha_{II1} [-1 + \alpha_{II1} - \alpha_{II1} \cos(2\phi') + \cos(2\alpha_{II1}\phi')] \delta_1 / \lambda^{1-\alpha_{II1}}$$

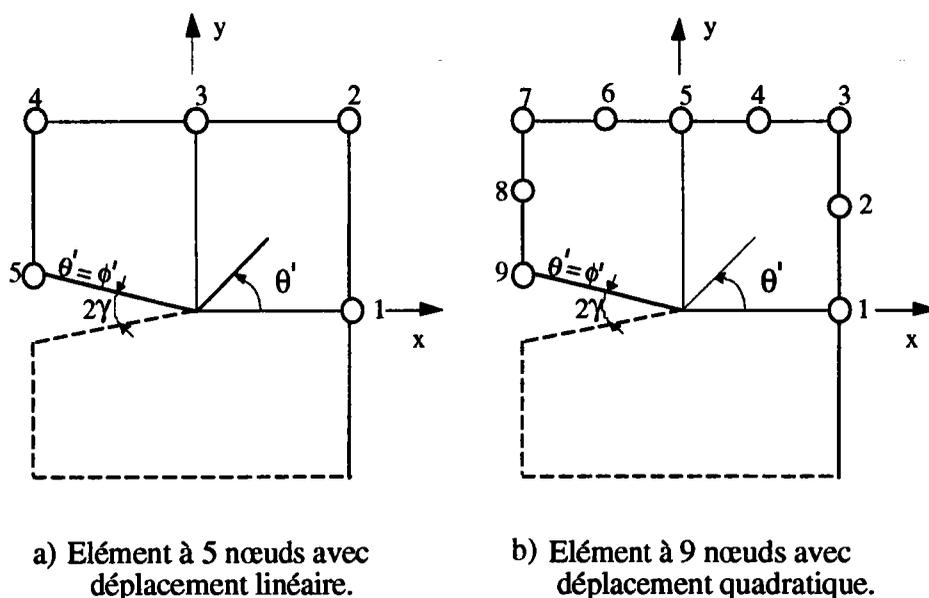


Figure III.5. Géométrie de l'élément à fond d'entaille utilisée par [45].

où

$\alpha_{I1}$  est la première racine réelle de l'équation caractéristique en mode I:

$$\sin(2\alpha_{I1}\phi') = -\alpha_{I1} \sin(2\phi') \quad (\text{III.31.a})$$

$\alpha_{II1}$  est la première solution réelle de l'équation caractéristique en mode II:

$$\sin(2\alpha_{II1}\phi') = \alpha_{II1} \sin(2\phi') \quad (\text{III.31.b})$$

où

$\nu_1$  et  $\delta_1$  sont des réels et correspondent aux coefficients des termes trigonométriques dans les distributions des contraintes données par Williams [40].

$\lambda'$  est la longueur caractéristique de l'élément d'entaille (quadratique ou linéaire) exprimée par la relation suivante:

$$\left(\frac{r}{\lambda'}\right)^{\alpha-1} = \left(\frac{r}{\lambda'}\right)^{\alpha-1} \left\{ \cos \left[ \alpha_i \ln \left( \frac{r}{\lambda'} \right) \right] + i \sin \left[ \alpha_i \ln \left( \frac{r}{\lambda'} \right) \right] \right\} \quad (\text{III.32})$$

avec

$\alpha_r$  et  $\alpha_i$  sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de la solution  $\alpha$

En tableaux III.3 et III.4, les auteurs précédemment cités comparent les valeurs des facteurs d'intensité de contraintes non-dimensionnels obtenus par cette résolution avec celles de Gross [43].

Angle $\gamma$ (deg)	$\alpha_{11}$	$\frac{K_{I(\rho=0,\gamma)}}{\sigma_r \sqrt{\pi} a^{1-\alpha_{11}}}$	$\frac{K_{I(\rho=0,\gamma)(ref[43])}}{\sigma_r \sqrt{\pi} a^{1-\alpha_{11}}}$	Différence en%
0	0,500000	2,018	2,113	-4,5
5	0,500053	2,017	2,113	-4,5
15	0,501453	2,039	2,128	-4,2
30	0,512221	2,176	2,223	-2,1
45	0,544484	2,383	2,473	-3,6

\* $K_{I(\rho=0,\gamma)(ref[43])}$  est le facteur d'intensité de contrainte d'entaille en V calculé par Gross [43].

**Tableau III.3.** Comparaison des valeurs des facteurs d'intensité de contraintes calculées à partir d'un élément à fond d'entaille à 5 nœuds, selon [45] avec celles calculées par [43].

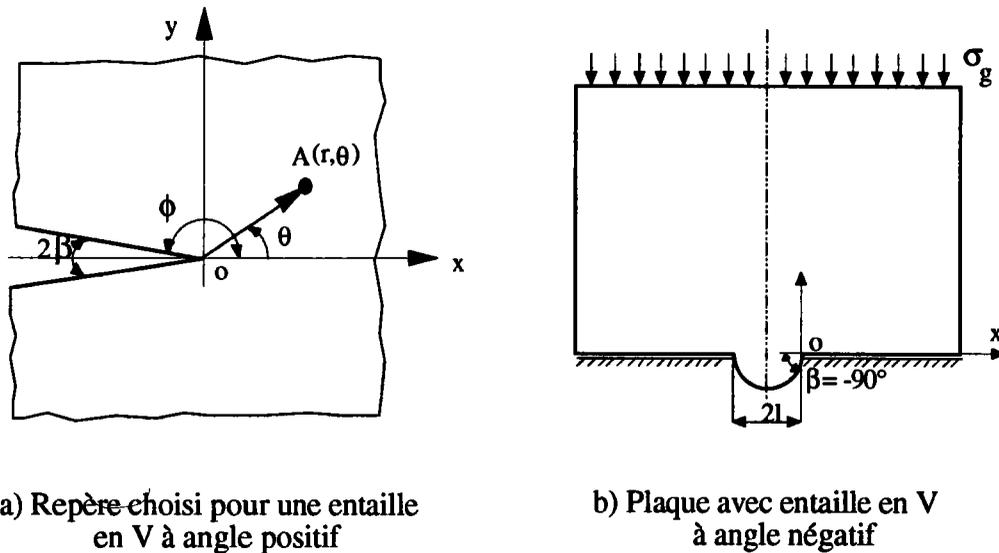
Angle $\gamma$ (deg)	$\alpha_{11}$	$\frac{K_{I(\rho=0,\gamma)}}{\sigma_r \sqrt{\pi} a^{1-\alpha_{11}}}$	$\frac{K_{I(\rho=0,\gamma)(ref[43])}}{\sigma_r \sqrt{\pi} a^{1-\alpha_{11}}}$	Différence en%
0	0,500000	2,104	2,113	-0,4
5	0,500053	2,106	2,113	-0,3
15	0,501453	2,117	2,128	-0,5
30	0,512221	2,229	2,223	+0,3
45	0,544484	2,463	2,473	-0,4

**Tableau III.4.** Comparaison des valeurs des facteurs d'intensité de contraintes calculées à partir d'un élément à fond d'entaille à 9 nœuds, selon [45] avec celles de [43].

Les résultats obtenus montrent que le facteur d'intensité de contraintes calculé à partir de l'élément à 5 nœuds diffère de 5% par rapport à ceux de

**Gross [43].** Lorsque l'élément à 9 nœuds est utilisé avec ses 16 termes en contraintes, les résultats convergent et la différence chute à 1%.

**Seweryn & Zwolinski [46]** ont étudié le cas particulier d'une entaille en V d'angle négatif (figure III.6). Ces auteurs expriment les tenseurs de contraintes sous une forme identique à ceux d'une entaille à angle positif.



a) Repère choisi pour une entaille en V à angle positif

b) Plaque avec entaille en V à angle négatif

**Figure III.6.** Exemple d'une plaque avec entaille de bord en V d'angle négatif soumise à une contrainte normale  $\sigma_g$ , selon [46].

Pour un angle positif, les auteurs [46] ont proposé les relations des tenseurs de contraintes, de déformations et de déplacements suivantes:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ij} &= K_{I(\rho=0, \beta)} r^{-\alpha_I} a_{ij}(\theta) + K_{II(\rho=0, \beta)} r^{-\alpha_{II}} b_{ij}(\theta) \\
 \varepsilon_{ij} &= K_{I(\rho=0, \beta)} r^{-\alpha_I} c_{ij}(\theta) + K_{II(\rho=0, \beta)} r^{-\alpha_{II}} d_{ij}(\theta) \\
 q_i &= K_{I(\rho=0, \beta)} r^{1-\alpha_I} c_{ij}(\theta) + K_{II(\rho=0, \beta)} r^{-\alpha_{II}} d_{ij}(\theta)
 \end{aligned}
 \tag{III.33}$$

où

$K_{I(\rho=0, \beta)}$  et  $K_{II(\rho=0, \beta)}$  sont respectivement les facteurs d'intensité de contraintes d'entaille en V pour le mode I et II,

$a_{ij}(\theta)$ ,  $b_{ij}(\theta)$ ,  $c_{ij}(\theta)$  et  $d_{ij}(\theta)$  sont des combinaisons des fonctions trigonométriques en  $\theta$ .

Pour un angle négatif, les mêmes auteurs proposent des relations similaires qui s'expriment sous la forme:

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{n_I} r^{-\alpha_{Ik}} a_{ijk}(\theta) + \sum_{m=1}^{n_{II}} r^{-\alpha_{II_m}} b_{ijm}(\theta) \tag{III.34}$$

$$u_i = \sum_{k=1}^{n_I} r^{1-\alpha_{Ik}} f_{ik}(\theta) + \sum_{m=1}^{n_{II}} r^{-\alpha_{II_m}} g_{ijm}(\theta)$$

où

$a_{ijk}$ ,  $b_{ijm}$ ,  $f_{ik}$  et  $g_{ijm}$  sont des combinaisons des termes trigonométriques en  $\theta$ .

$\alpha_{Ik}$  et  $\alpha_{II_m}$  sont les solution des équations du type:

$$\sin [2(\alpha_I - 1)\phi] + (\alpha_I - 1) \sin(2\phi) = 0 \tag{III.35}$$

$$\sin [2(\alpha_{II} - 1)\phi] - (\alpha_{II} - 1) \sin(2\phi) = 0$$

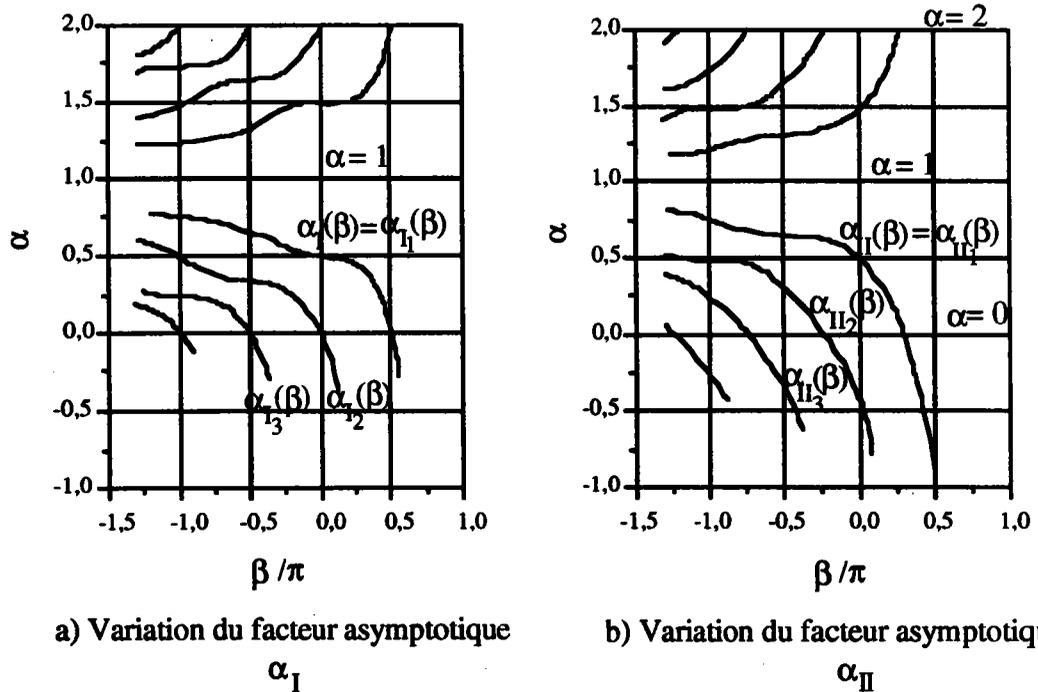


Figure III.7. Variation du facteur  $\alpha_I$  et  $\alpha_{II}$  pour une entaille en V, selon [46].

En (figure III.7.a), la valeur de  $\alpha_I = 1$  correspond au cas où l'entaille est soumise à une force concentrée dans le sens horizontal. En figure (III.7.b), la valeur de  $\alpha_{II} = 1$  correspond au cas où l'entaille est soumise à une force concentrée dans le sens vertical. Pour le cas où un moment concentré est appliqué à la pointe de l'entaille,  $\alpha_{II}$  est égale à 2.

Pour la plaque entaillée d'angle  $\beta = -\pi/2$  (figure III.6.b), les auteurs [46] déterminent les trois premières solutions en mode I ( $\alpha_{I_1} = 2/3$  ;  $\alpha_{I_2} = 1/3$  ;  $\alpha_{I_3} = 0$ ) en remplaçant dans les relations développées du tenseur de contraintes et de déplacements  $\alpha_I$  par  $\alpha_{I_k}$ .

### III.3] Conclusions.

Dans cette dernière partie de la bibliographie, nous avons présenté les travaux de Creager [32] et [33] sur le champ de contraintes au voisinage d'une entaille de rayon de courbure fini et d'angle nul. Afin d'éviter la singularité à fond d'entaille, Creager [32] exprime le tenseur des contraintes au voisinage d'une entaille elliptique ou hyperbolique en prenant comme origine, un repère décalé d'une distance  $\rho/2$  du fond d'entaille. Dans ces relations, cet auteur utilise les facteurs d'intensité de contraintes de fissure établis par Irwin [37] et introduit pour le mode I et II un terme additif en  $\rho$ . En mode III, le tenseur des contraintes est identique à celui d'une fissure. L'auteur [33] aborde le problème d'extension de fissures en commentant les modèles d'Erdogan & Sih [38] et de Mc Clintock [39]. Il montre que le désaccord entre les deux modèles n'est pas seulement du principalement à la différence de la forme de la fissure mais à la différence des critères utilisés.

Concernant les cas des entailles en V, les relations en contraintes et déformations présentées par les différents auteurs s'appuient sur les travaux de Williams [40]. Ces relations tiennent compte des conditions de chargement et de l'exposant de la singularité qui varie en fonction de l'angle d'entaille. Gross & Mendelson [42] trouvent qu'en mode I, la différence entre le facteur d'intensité de contraintes non-dimensionnel pour un angle d'entaille égale à  $360^\circ$  (cas d'une fissure) et celui d'un angle de  $330^\circ$  est de l'ordre de 1%. Cette faible différence est due à une légère variation de l'exposant de la singularité en mode I. Pour le mode II cette différence s'accroît et s'explique par le fait que la variation de l'exposant de la singularité est plus importante.

**Lin & Pin Tong [45]** expriment les facteurs d'intensité de contraintes en mode I et en mode II en tenant compte du premier terme de l'exposant de la singularité et de certains paramètres issus des déplacements des nœuds de l'élément spécial à fond d'entaille. Les résultats obtenus par cette méthode s'accordent bien avec ceux de **Gross [43]** puisque la différence maximale n'est que de 4,5%.

Enfin dans le cas particulier d'un angle d'entaille négatif, **Seweryn & Zwolinski [46]** expriment les distribution des contraintes de la même manière que pour le cas d'un angle d'entaille positif.

#### **IV] CONCLUSION GÉNÉRALE.**

L'étude bibliographique regroupe l'essentiel des travaux existant sur l'amorçage de fissures en fatigue à partir de défauts mécaniques géométriquement définis. Cette étude couvre trois grands thèmes:

1) Dans la première partie, nous avons présenté les différents paramètres qui influence l'amorçage des fissures:

- facteur de concentration de contraintes statique,
- coefficient de concentration de contraintes en fatigue,
- facteur de sensibilité à l'entaille.

Nous constatons que ces grandeurs ont été calculées selon les auteurs, soit dans le domaine élastique soit dans le domaine élasto-plastique. Ces facteurs sont souvent rencontrés en mode I par contre nous n'avons pas relevé des travaux dans les autres modes de sollicitation.

2) Dans la seconde partie nous avons examiné les différents critères qui permettent de prévoir l'amorçage de fissures. Parmi eux nous avons cité :

- Le critère de l'amplitude de la contrainte nominale qui présente l'inconvénient de ne pas prendre en compte l'état de contraintes locales, ceci se traduit par une dispersion importante.

- Le critère de l'amplitude de la contrainte locale  $\Delta K_I/\sqrt{\rho}$  qui regroupe mieux les résultats expérimentaux en comparaison au précédent mais dont le calcul de l'amplitude du facteur d'intensité de contraintes est considéré comme celui d'une fissure. Par conséquent, comme en figure II.6, on peut trouvé un rapport  $\Delta K_I/\sqrt{\rho}$  pour lequel le nombre de cycles d'amorçage est indépendant de la géométrie du défaut .

- Le critère de l'amplitude de la contrainte maximale qui regroupe d'une manière satisfaisante les résultats expérimentaux. Ce critère est calculé en tenant compte de l'acuité de l'entaille et du coefficient de concentration de contraintes

en fatigue  $K_f$ . Ce coefficient est calculé soit à partir de l'analyse élastique soit dans le domaine élasto-plastique. Pour ce domaine, il est nécessaire de connaître la loi de comportement et la courbe de Manson-Coffin.

- Le critère de l'amplitude de la contrainte locale  $\Delta\sigma_{\theta\theta}$  à une distance  $d$  est basé sur la connaissance du champ de contraintes au voisinage de l'entaille, des résultats expérimentaux, et sur le choix de la distance  $d$ . Cette distance est déterminée à partir de différents calculs de fonctions de lissage de façon à minimiser l'écart type de la dispersion. Ensuite l'auteur relie une fonction de contraintes dite locale au nombre de cycles d'amorçage en incorporant la distance  $d$ .

Nous constatons que ce critère ne considère pas l'aspect physique du phénomène et ne peut être applicable que par la connaissance des résultats des essais d'amorçage.

Tous ces critères qui viennent d'être énumérés, ne concernent que l'amorçage en mode I. Dans la littérature, il n'existe pas de travaux sur l'étude d'amorçage de fissures en mode II et III.

3) Dans la troisième partie, nous avons rappelé tous les calculs relatifs au champ de contraintes au voisinage d'une entaille. Nous constatons que pour un défaut elliptique ou hyperbolique, le tenseur de contraintes s'exprime en fonction du facteur d'intensité de contraintes d'une fissure et de l'acuité d'entaille. Pour les entailles en V, seul l'angle d'entaille est considéré. Les facteurs d'intensité de contraintes en mode I et II sont souvent calculés selon différentes méthodes alors que le mode III est très peu courant. Enfin, nous constatons que le calcul des facteur d'intensité de contraintes en présence d'une entaille d'acuité et d'angle finis n' a pas fait l'objet de recherches.

## V] ÉTUDE EXPÉRIMENTALE.

### V.1] Introduction.

Pour étudier le phénomène d'amorçage de fissures à partir d'inclusions, différentes éprouvettes ont été usinées à partir d'un acier à rail préalablement choisi. La complexité du problème nous a amenée à considérer l'amorçage de fissures en mode I et en mode II à partir de défauts mécaniques comportants différents rayons en fond d'entaille et s'est poursuivie par des essais en mode III sur des éprouvettes comportants des défauts uniques et multiples.

### V.2] Caractéristiques des éprouvettes et Procédure d'usinage.

Pour l'étude en mode I, nous avons opté pour des éprouvettes RCT répondant aux normes ASTM et sur lesquelles des entailles de différents rayons ont été usinés (figure V.1).

Pour effectuer les différents rayons à fond d'entaille, nous avons eu recours à l'usinage par électroérosion.

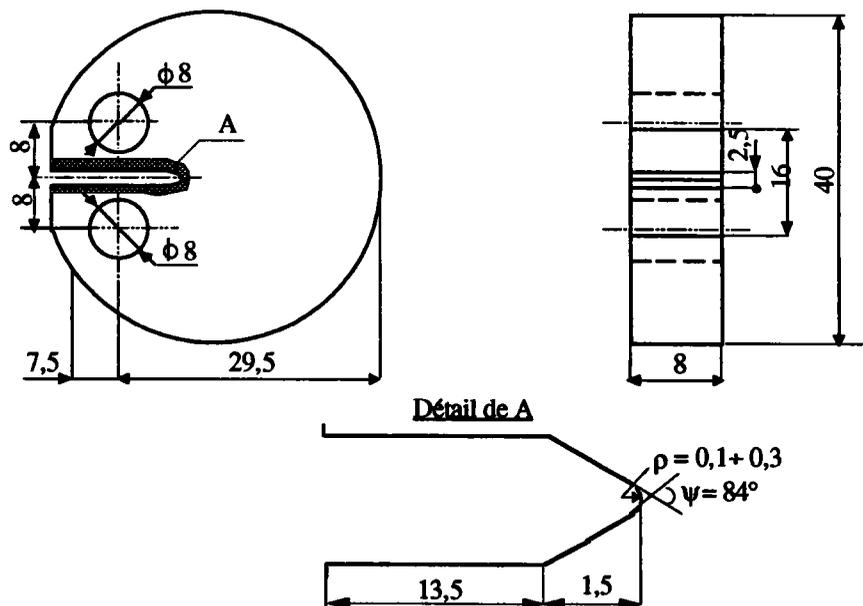


Figure V.1. Éprouvette de traction du type RCT.

Concernant le mode II, le choix s'est fixé sur des éprouvettes en anneaux (figure V.2) car elles permettent d'obtenir par une simple rotation différentes combinaisons des modes I et II.

Les différents rayons à fond d'entaille ont été usiné par électroérosion.

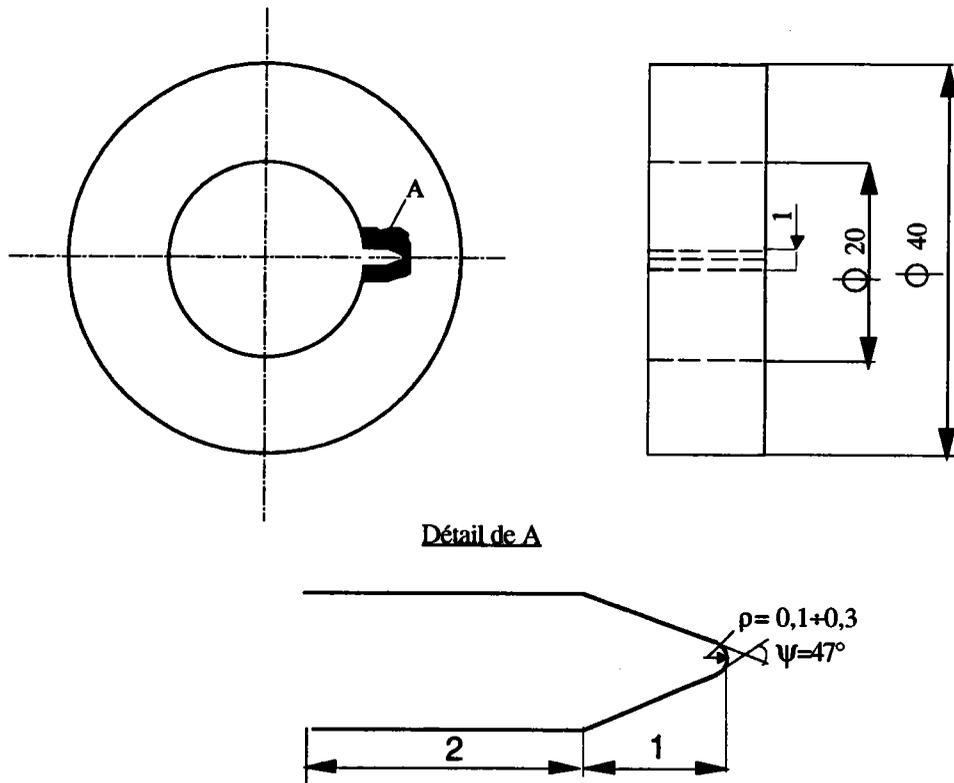
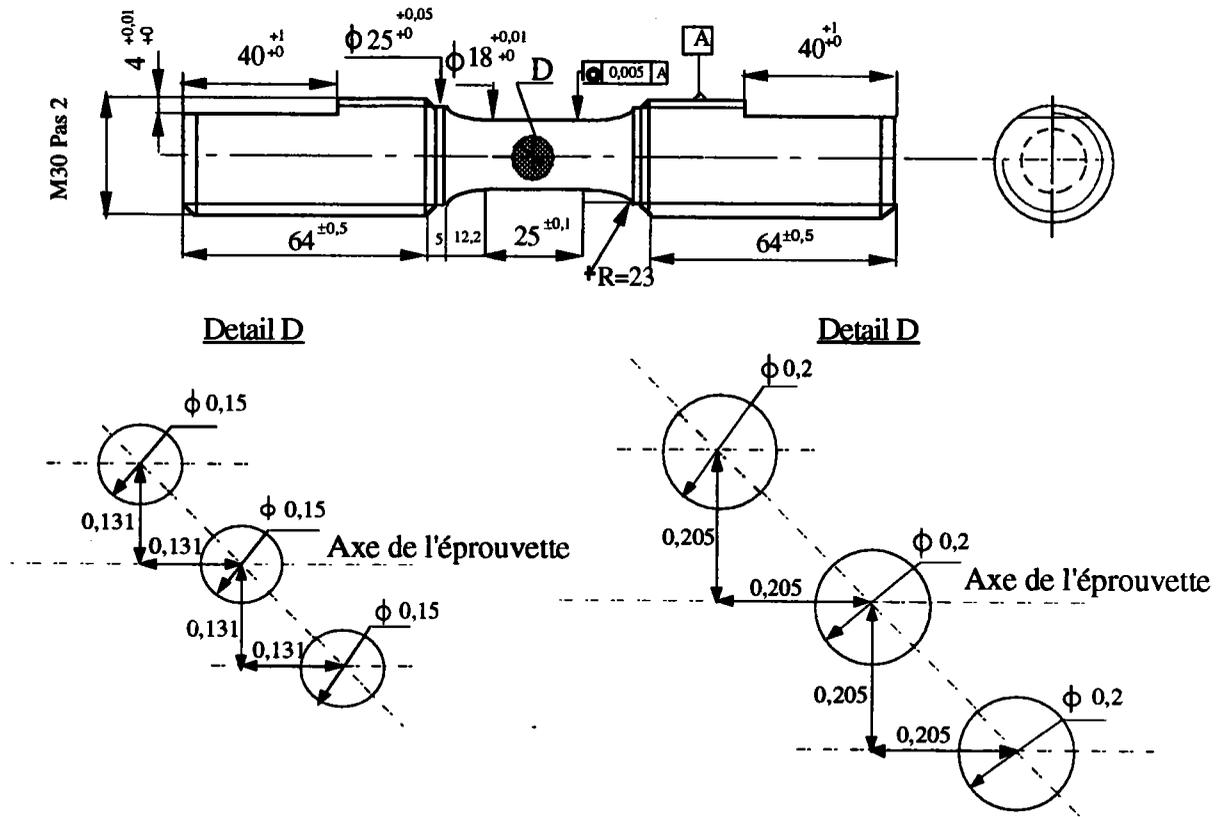


Figure V.2. Anneau à entaille de bord

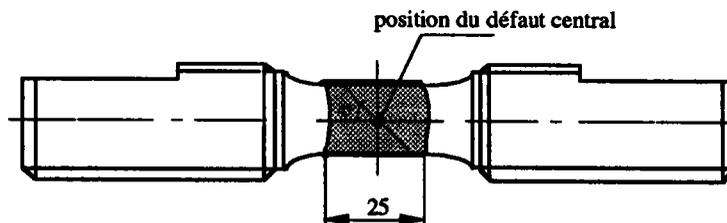
Pour les essais en mode III, il a été nécessaire de décrire une procédure d'usinage afin de respecter les dimensions des défauts et les distances séparants ces derniers.

La figure V.3 représente l'éprouvette de torsion avec les dimensions des défauts et les distances les séparants.



**Figure V.3.** Schéma de l'éprouvette de torsion avec les défauts multiples.

Pour ne pas créer des sites d'amorçage lors de la préparation des éprouvettes de torsion, nous avons évité de faire un marquage à l'aide de pointe métallique. Nous avons alors découpé des morceaux de papier calque correspondant au développement de la surface de la partie utile de l'éprouvette sur lesquels deux droites d'intersection ont été tracées pour situer le défaut central. Sur chacune des éprouvettes, un morceau de papier calque a été collé (figure V.4).



**Figure V.4:** Positionnement du défaut central sur l'éprouvette de torsion.

Pour les défauts uniques de 150  $\mu\text{m}$  et 200  $\mu\text{m}$ , le problème consistait à percer ces défauts juste au niveau du point d'intersection des deux droites (figure V.4).

Pour respecter la cotation de la figure V.3, nous avons utilisé la possibilité de déplacement de la buse de rayonnement laser et la rotation du plateau maintenant l'éprouvette.

Cette procédure d'usinage se base sur la figure V.5 qui montre la position de ces défauts sur les trois plans de la partie utile de l'éprouvette.

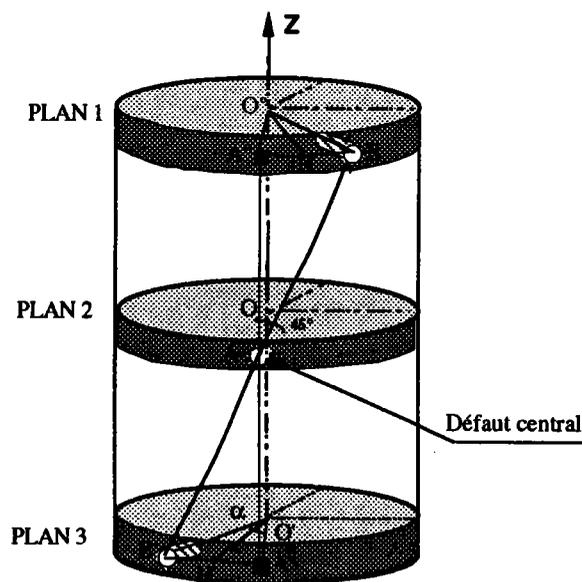


Figure V.5: Position des défauts multiples sur les trois plans de l'éprouvette

L'usinage s'est effectué suivant la procédure suivante:

- Usinage du trou central au niveau du point d'intersection des droites (point A).
- Translation de la buse laser du point A à A'.
- Rotation du plateau avec l'éprouvette d'un angle  $\alpha$  pour le perçage en B.
- On revient au trou central A en exécutant une rotation  $\alpha$  dans le sens inverse et une translation de A' à A.

Les mêmes étapes sont suivies pour l'usinage du défaut symétrique.

Pour respecter la cotation de la figure V.3, nous avons déterminé la translation que devait effectuer la buse laser et la rotation du plateau maintenant l'éprouvette.

Pour les défauts de 150  $\mu\text{m}$ :

$$AA' = AB \cdot \cos(45) = 130,8 \mu\text{m}$$

$$HB = AB/2 = 65,4 \mu\text{m}$$

$$\alpha = 2 \cdot \text{Arcsin}(HB/R) \approx 0,83^\circ$$

où

R est le rayon de la partie utile de l'éprouvette.

Pour les défauts de 200  $\mu\text{m}$ :

$$AA' = AB \cdot \cos(45) = 205,06 \mu\text{m}$$

$$HB = AB/2 = 102,53 \mu\text{m}$$

$$\alpha = 2 \cdot \text{Arcsin}(HB/R) \approx 1,31^\circ$$

Pour pouvoir mesurer précisément l'amorce de fissure, il est nécessaire d'effectuer sur les deux faces des éprouvettes un poli-miroir d'une grande qualité.

### V.3] Matériau utilisé.

Les éprouvettes utilisées ont été prélevées dans le sens transversal d'un profilé rail de repère C375.

L'analyse chimique et les caractéristiques mécaniques du rail sont données dans les tableaux V.1 et V.2

% C	% Mn	% P	% S	% Si	% Al	% H <sup>2</sup>
0,692	1,033	0,014	0,020	0,344	0,002	0,0014

Tableau V.1 . Analyse chimique du matériau

R <sub>m</sub> (MPa)	$\sigma_D$ (MPa)	A%	Z%
minimale 929	243	12	26,2
maximale 945		12,6	22,4

Tableau V.2. Caractéristiques mécaniques du matériau.

#### **V.4] Machines d'essais et mode opératoire.**

Les essais d'amorçage ont été menés sur deux machines servo hydrauliques INSTRON. La première machine de traction-compression dont la capacité est de  $\pm 100$  kN a servi aux essais d'amorçage de fissures sur les éprouvettes RCT et sur les anneaux. La seconde machine de traction-torsion est de même capacité que la première a été utilisée pour les essais de torsion.

Les photographies des **planches I et II** illustrent le déroulement de ces essais sur les deux machines

En mode I et en mode II, les essais ont été effectués à charge contrôlée dans les conditions suivantes:

##### **-Mode I:**

Charge maximale appliquée:  $P_{\max} = 2,8$  à  $5,7$  kN,  
Charge minimale appliquée:  $P_{\min} = 0,28$  à  $0,57$  kN,  
Signal sinusoïdal,  
Rapport de charge:  $R = 0,1$ ,  
Fréquence : 20 Hz,  
Température ambiante.

##### **-Mode II:**

Charge maximale appliquée:  $P_{\max} = 10$  à  $21$  kN,  
Charge minimale appliquée:  $P_{\min} = 0,1$  à  $0,21$  kN,  
Signal sinusoïdal,  
Rapport de charge:  $R = 0,1$ ,  
Fréquence: 20 Hz,  
Température ambiante.

En **mode III**, tous les essais ont été menés à couple contrôlé dans les conditions suivantes:

Couple maximal :  $M_{\text{tmax}} = 230$  à  $330$  N.m,  
Couple minimal:  $M_{\text{tmin}} = 23$  à  $33$  N.m,  
Signal sinusoïdal,  
Rapport de charge:  $R = 0,1$ ,  
Fréquence: 10 Hz,  
Température ambiante.



Photo 1. Machine de fatigue et dispositifs d'essais en mode II

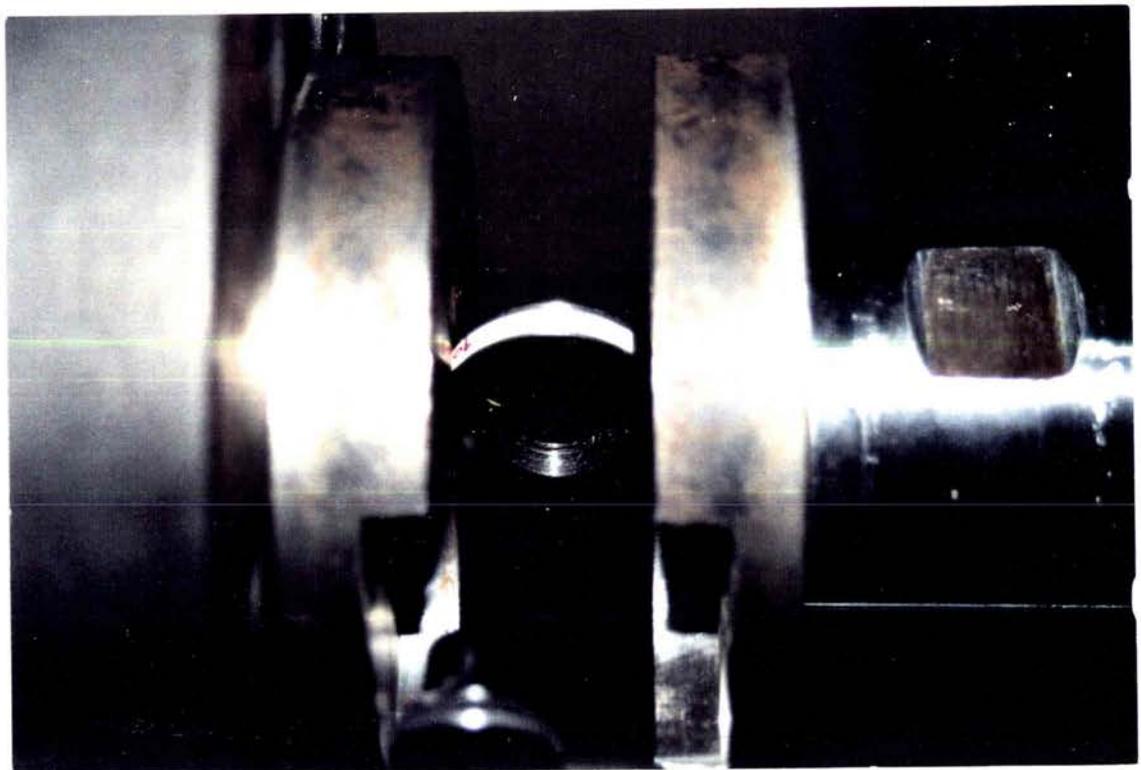


Photo 2. Schéma de montage d'une éprouvette en mode II.

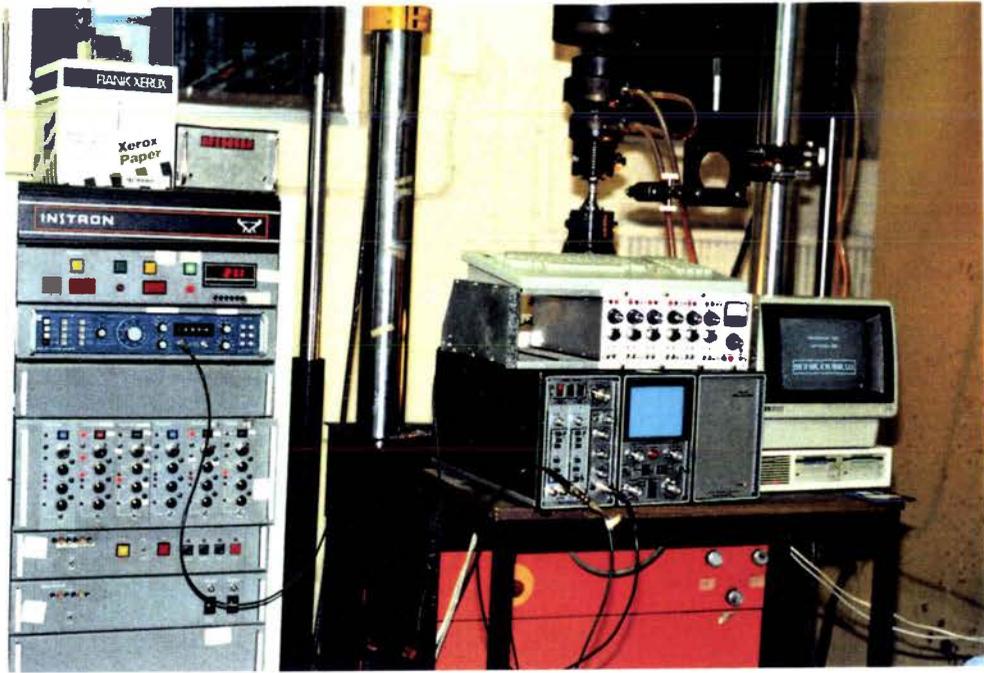


Photo 3. Machine de fatigue et dispositifs d'essais utilisés en torsion



Photo 4. Dispositif d'amarrage de l'éprouvette en torsion

## VI] RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX.

### VI.1] Résultats obtenus sur les éprouvettes RCT.

Pour chaque rayon à fond d'entaille, nous avons calculé les coefficients de concentration de contraintes en faisant le rapport de la contrainte maximale par la contrainte nominale. Ces contraintes sont calculées dans le domaine élastique.

La première est la contrainte nominale  $\sigma_N$  au droit de l'entaille (ligament).

La seconde contrainte est la contrainte maximale  $\sigma_{\max}$  à fond d'entaille, qui fait intervenir l'acuité du fond d'entaille.

On a ainsi:

$$K_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_N} \quad (\text{VI.1})$$

Pour calculer la contrainte nominale  $\sigma_N$  et à cause du mode particulier de chargement de l'éprouvette RCT, nous avons décomposé le tenseur des forces appliquées en un effort de traction pure et un effort de flexion pure.

En supposant que la fibre neutre passe par le milieu du ligament (**annexe**), la contrainte nominale  $\sigma_N$  est de la forme:

$$\sigma_N = \sigma_N^{(t)} + \sigma_N^{(f)} = \frac{P}{(W-a) B} \left( 1 + 3 \frac{W+a}{W-a} \right) \quad (\text{VI.2})$$

où

$\sigma_N^{(t)}$  est la contrainte nominale de traction (**annexe**),

$\sigma_N^{(f)}$  est la contrainte nominale de flexion (**annexe**),

P est la charge appliquée,

W est la largeur de l'éprouvette jusqu'au point de chargement,

a est la profondeur de l'entaille à partir du point de chargement,

B est l'épaisseur de l'éprouvette.

Pour le calcul de la contrainte maximale  $\sigma_{\max}$  à fond d'entaille, nous avons utilisé deux méthodes différentes:

- La première est celle donnée par Creager [32], [33].

$$\sigma_{\max} = \frac{2K_I}{\sqrt{\pi\rho}} \quad (\text{VI.3})$$

où

$K_I$  est le facteur d'intensité de contrainte calculé en prenant pour valeur de la longueur de fissure, la profondeur de l'entaille mécanique.

Pour ce type d'éprouvettes, le facteur d'intensité de contraintes  $K_I$  est donné par la norme ASTM sous la forme suivante:

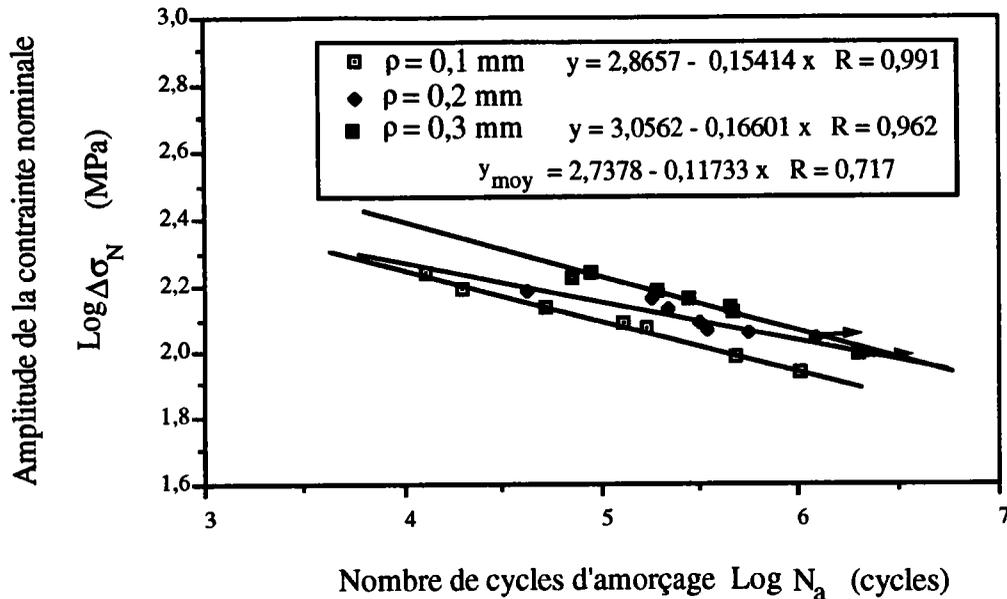
$$K_I = \frac{P}{BW^{1/2}} f\left(\frac{a}{W}\right) \quad (\text{VI.4})$$

avec

$$f\left(\frac{a}{W}\right) = \frac{(2+a/W) \cdot [0,76 + 4,8(a/W) - 11,58(a/W)^2 + 11,43(a/W)^3 - 4,08(a/W)^4]}{(1-a/W)^{3/2}}$$

- La seconde méthode est basée sur un calcul aux éléments finis. Cette méthode permet en outre d'obtenir la répartition des contraintes le long du ligament.

Les résultats d'essais sont préalablement exprimés en figure VI.1 sous la forme de couple  $(\log\Delta\sigma_N, \log N_a)$ .  $\Delta\sigma_N$  est l'amplitude de la contrainte nominale et  $N_a$  le nombre de cycles d'amorçage mesuré pour une longueur de fissure apparente de 0,1 mm.



**Figure VI.1.** Évolution du nombre de cycles d'amorçage  $N_a$  en fonction de l'amplitude de la contrainte nominale  $\Delta\sigma_N$ .

Les résultats obtenus en figure VI.1, montrent que pour un même rayon à fond d'entaille, le faisceau de points s'alignent autour d'une droite. Pour un même nombre de cycles  $N_a$ , il est nécessaire d'appliquer une amplitude de charge plus élevée à l'éprouvette quand le rayon en fond d'entaille augmente.

La contrainte nominale n'informe que sur l'état de contrainte global alors que le calcul aux éléments finis permet une première approche du comportement local.

En effet, par le calcul des distributions de contraintes, on s'aperçoit qu'il existe un gradient de contrainte au niveau du fond de l'entaille mécanique. L'aspect local apparaît donc déterminant et c'est pourquoi nous avons tenté de le prendre en compte.

### VI.1.1] Utilisation de l'analyse élastique de la concentration de contraintes.

Dans le cas de l'analyse élastique de la concentration de contraintes, la répartition des contraintes à fond d'entaille peut être reliée au rapport  $\Delta K_I/\sqrt{\rho}$  qui est choisi comme critère d'amorçage. En figure VI.2, nous avons reporté dans un diagramme les couples de points ( $\text{Log}\Delta K_I/\sqrt{\rho}$ ;  $\text{Log}N_a$ ).

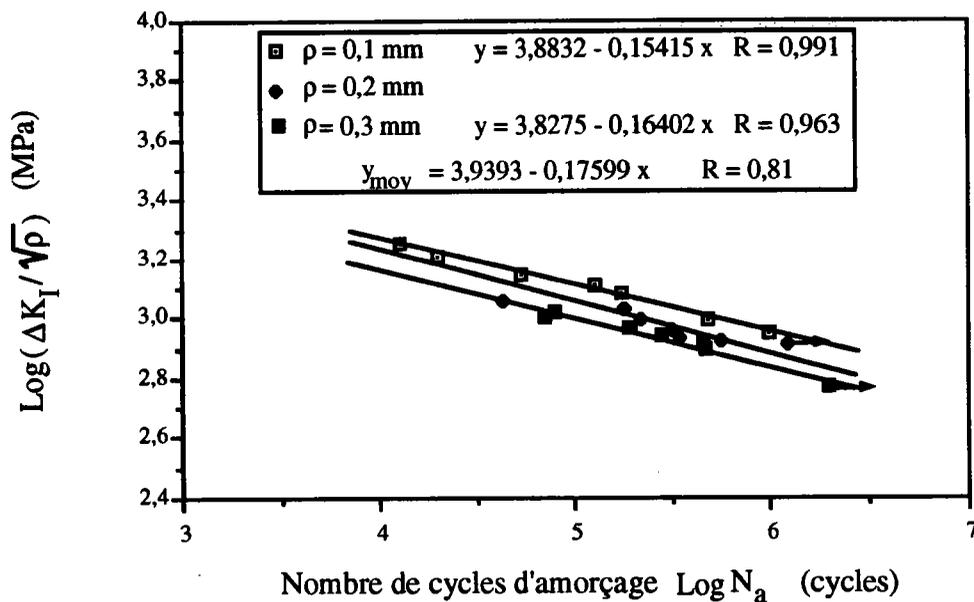


Figure VI.2. Évolution du nombre de cycles d'amorçage  $N_a$  en fonction du rapport  $\Delta K_I/\sqrt{\rho}$ .

Sur cette figure, les points s'alignent encore pour un même rayon en fond d'entaille, mais leurs niveaux en  $\Delta K_I/\sqrt{\rho}$  est d'autant plus bas que le rayon  $\rho$  est plus grand.

### VI.1.2] Utilisation du coefficient d'effet d'entaille.

Comme de nombreux auteurs ont constaté que l'analyse précédente donnait des résultats excessifs dans le domaine de la fatigue, nous avons introduit l'effet d'entaille caractérisé par le coefficient  $K_f$  défini comme étant le rapport de la limite d'endurance d'une éprouvette lisse sur une éprouvette entaillée.

Pour calculer le facteur de concentration de contraintes en fatigue tableau V.1, nous avons utilisé la relation empirique donnée par Neuber [9] :

$$K_f = 1 + \frac{K_t - 1}{1 + \sqrt{\frac{a_N}{\rho}}} \quad (\text{VI.5})$$

Pour déterminer la constante  $a_N$ , nous avons utilisé le graphe donné par Neuber [9] au chapitre I (figure I.3). Pour une résistance ultime moyenne de 937 Mpa, nous avons trouvé la valeur de  $a_N = 0,041$  mm

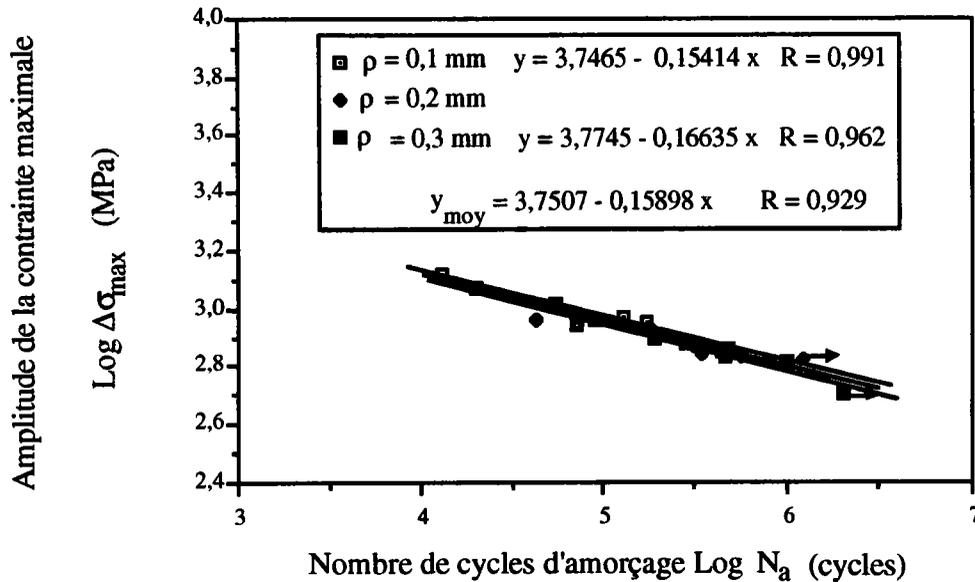
$\rho$ (mm)	$K_t$	$K_f$
0,1	11,7	7,5
0,2	8,5	6,1
0,3	7	5,4

Tableau VI.1. Valeurs des coefficients de concentration de contraintes théorique et en fatigue pour les éprouvettes RCT

Connaissant  $K_f$ , on peut calculer pour chaque cas de charge l'amplitude de la contrainte maximale en fond d'entaille par la formule:

$$\Delta\sigma_{\max} = K_f \Delta\sigma_N \quad (\text{VI.6})$$

Les résultats d'essais traités par cette dernière relation sont représentés en figure VI.3. Sur cette dernière figure, les points se rassemblent beaucoup mieux autour de la droite moyenne que pour les autres critères.



**Figure VI.3.** Évolution du nombre de cycles d'amorçage  $N_a$  en fonction de l'amplitude de la contrainte maximale  $\Delta\sigma_{\max} = K_f \Delta\sigma_N$ .

### **VI.1.3] Utilisation d'un critère basé sur le facteur d'intensité de contrainte d'entaille.**

Le dépouillement des résultats à l'aide de la contrainte locale  $\Delta K_I/\sqrt{\rho}$  présente l'inconvénient de ne pas incorporer tous les paramètres géométriques de l'entaille.

En effet dans notre cas l'entaille comporte en plus de l'acuité  $\rho$  un angle d'entaille noté  $\psi$ . C'est pour cette raison que nous avons adopté un critère qui décrit de façon plus complète la présence du rayon et de l'angle d'entaille.

Ce critère est basé sur la distribution réelle des contraintes en fond d'entaille et tient compte du gradient de contraintes caractérisé par un facteur d'intensité de contraintes noté  $K_{I(\rho,\psi)}$  calculé à une distance  $X_c$  du fond d'entaille. Dans ce cas la distribution des contraintes n'est plus sous la forme  $\sigma_{ij} = f(r^{-0,5})$  mais du type  $\sigma_{ij} = f(r^\alpha)$ . Le critère  $\Delta K_{I(\rho,\psi)}/\rho^\alpha$  où  $\alpha$  est l'exposant de la courbe de la distribution est alors utilisé comme paramètre d'amorçage.

### VI.1.3.1] Distribution du champ de contraintes au voisinage des différentes entailles.

Dans le cas des éprouvettes RCT, les distributions de contraintes ont été obtenues par calcul aux éléments finis. Pour déterminer les contraintes locales, nous avons utilisé des éléments triangulaires avec un maillage dense au voisinage de l'entaille. La résolution a été faite en contraintes planes et en deux dimensions. Nous avons représenté en figure VI.4 les distributions de contraintes au voisinage des différents rayons à fond d'entaille.

En plus des rayons usinés ( $\rho = 0,1, 0,2$  et  $0,3$  mm), nous avons calculé les distributions des contraintes pour  $\rho = 0,5$  mm et  $\rho = 0,7$  mm. Les distributions obtenues sont normalisées successivement avec la contrainte nominale  $\sigma_N$  et avec l'épaisseur  $B$  de l'éprouvette.

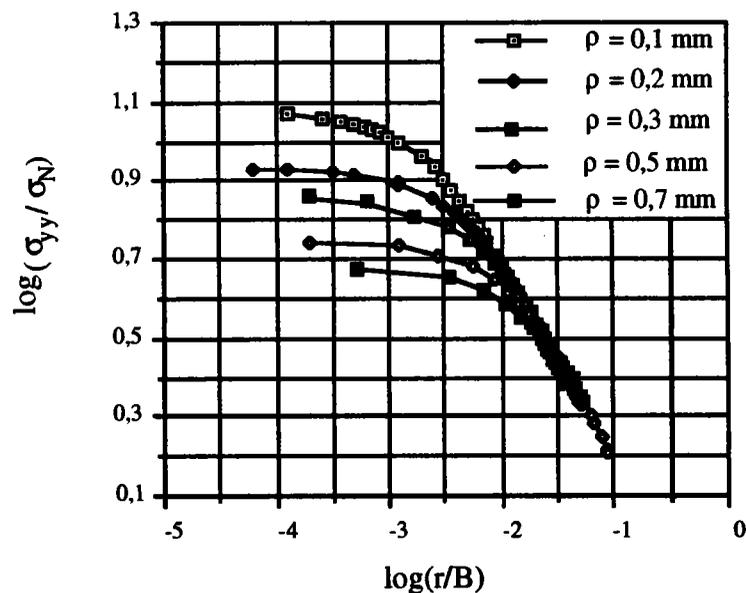


Figure VI.4. Distribution des contraintes au voisinage des différentes entailles.

A partir de cette figure, on détermine la pente dans la partie linéaire de la distribution. Cette partie linéaire est de la forme:

$$\text{Log } \frac{\sigma_{yy}}{\sigma_N} = \text{Log } E - \alpha \text{ Log } \left( \frac{r}{B} \right) \quad (\text{VI.7})$$

où

$E$  est une constante et  $\alpha$  est la pente dans la partie linéaire.

Pour les différentes distributions, nous avons trouvé la même pente  $\alpha$  qui est égale à 0,467. Cette valeur de la pente est identique à celle obtenue par la résolution de l'équation caractéristique donnée en chapitre III par la relation (III.31a) :

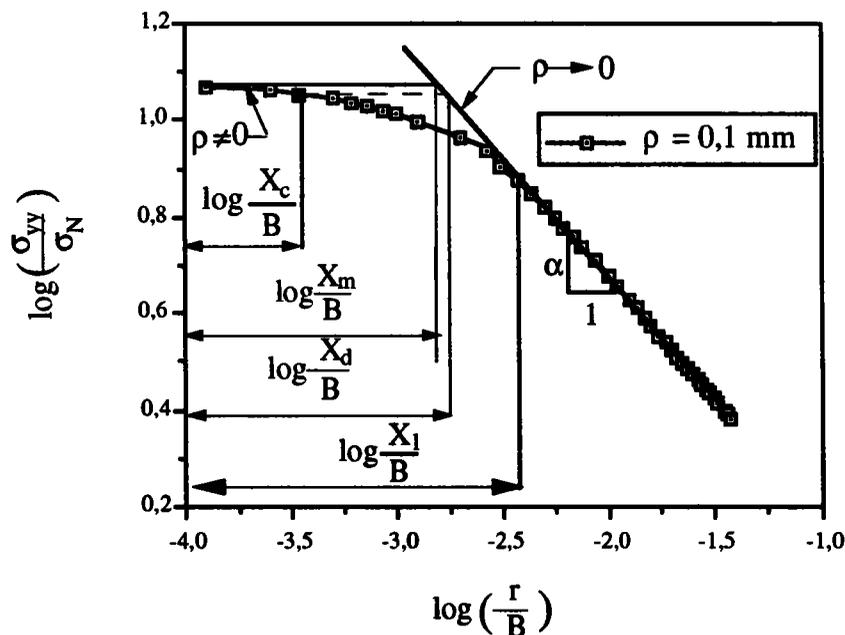
$$\sin(2\alpha\phi') = -\alpha \sin(2\phi')$$

où

$2\phi'$  est l'angle complémentaire de l'angle d'entaille  $\psi$ .

### VI.1.3.2] Facteur d'intensité de contrainte d'entaille en mode I.

Afin d'exprimer un critère tenant compte de la contrainte maximale et de l'effet du gradient de contraintes, nous avons essayé de déterminer la distance caractéristique  $X_c$  où la contrainte maximale est sensiblement constante. Pour exprimer le facteur d'intensité de contraintes, nous avons projeté certains points de la partie courbée sur la partie linéaire de cette distribution (figure V.5).



**Figure VI.5.** Représentation des différentes distances pour une des distributions de contraintes obtenue par le calcul aux éléments finis.

Sur cette figure est représenté la distance caractéristique  $X_c$  et sa projection sur la droite linéaire notée  $X_d$ . Nous avons également la distance projetée de la contrainte maximale sur la droite notée  $X_m$  ainsi que le point d'intersection  $X_1$  entre la courbure et cette même droite .

Pour chaque rayon à fond d'entaille, nous avons calculé ces distances et nous avons représenté en figure VI.6 leurs évolutions en fonction du rayon à fond d'entaille  $\rho$ .

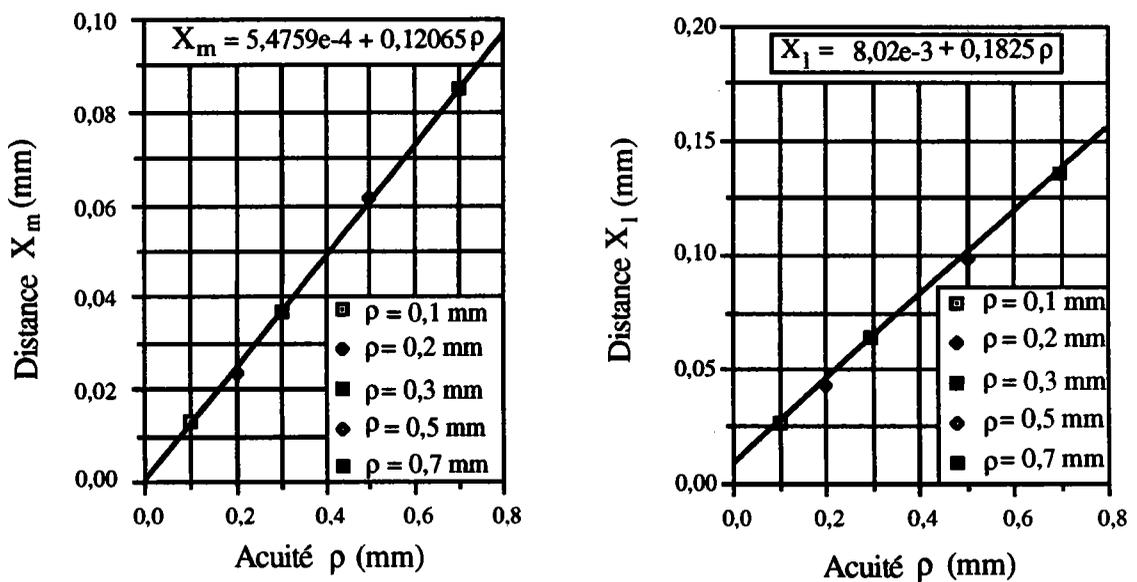
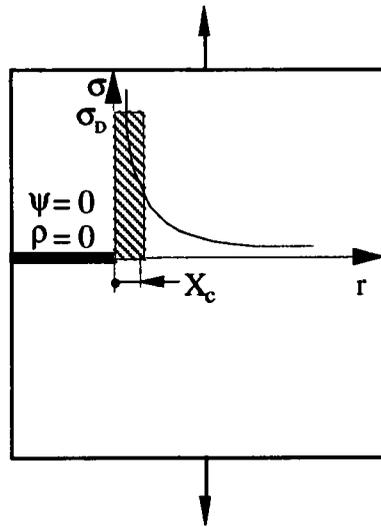


Figure VI.6. Évolution des distances  $X_m$  et  $X_1$  en fonction du rayon à fond d'entaille  $\rho$ .

Dans le cas d'une fissure figure VI.7, Sapounov & Morozov [47] utilisent le critère de résistance basé sur la distribution de contraintes et relie la grandeur  $X_c$  à la limite d'endurance  $\sigma_D$  par la relation:

$$\frac{1}{X_c} \int_0^{X_c} \sigma_{yy} dr \leq \sigma_D \quad (\text{VI.8})$$



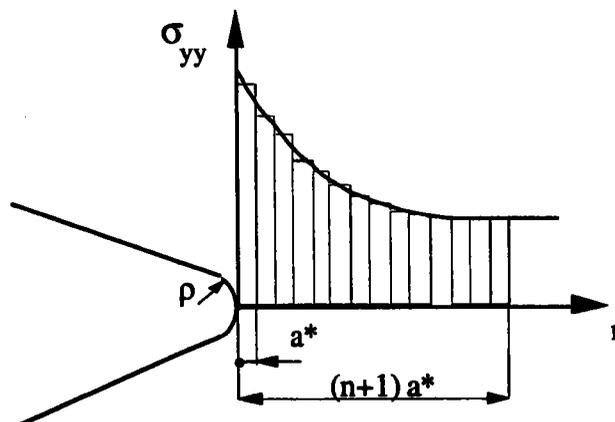
**Figure VI.7.** Représentation d'une plaque contenant une fissure au bord selon [47].

Dans le cas d'une entaille (figure VI.8), Xu Kewein & He Jiawen [48] utilisent la distribution de contraintes élastique suivante:

$$\sigma_{yy} = \frac{K_t \sigma_N}{(1 + mr/\rho)^{1/2}} \quad (\text{VI.9})$$

où

m est une constante.



**Figure VI.8.** Distribution de contraintes et série de blocs de contraintes effectives de longueur  $a^*$ , selon [48].

Ces auteurs [48] se basent sur le principe de la rupture d'un élément microstructural et prétendent que si la mécanique des milieux continue reste valable pour le cas d'un matériau hétérogène, le processus de déformation et de rupture pourrait s'étendre sur une certaine distance  $a^*$  et non sur un point matériel. D'autre part, cette distance est choisie de telle sorte qu'en dessous d'elle le principe de la continuité n'est plus valable. Ces auteurs subdivisent la distribution de contraintes en  $(n+1)$  blocs de contraintes d'égale distance  $a^*$ . Ces auteurs expriment ainsi une contrainte moyenne sur la distance  $a^*$ .

Ils définissent alors pour le premier bloc de contraintes ( $n = 0$ ), une limite théorique en fatigue dont l'équation est la suivante:

$$\overline{\sigma_D} = \frac{\sigma_D (1 + (1 + m a^*/\rho))^{1/2}}{2K_t} \quad (\text{VI.10})$$

Dans notre cas, pour ajuster la fonction de distribution théorique donnée en (VI.9) à nos résultats de contraintes obtenus par le calcul aux éléments finis, nous avons adopté une valeur de  $m = 2,4$ .

En remplaçant  $a^*$  par  $X_c$  dans la relation (VI.10) et en utilisant la formule (VI.8), on obtient:

$$\frac{1}{X_c} \int_0^{X_c} \sigma_{yy} dr = \frac{\sigma_D (1 + (1 + 2.4 X_c/\rho))^{1/2}}{2K_t} \quad (\text{VI.11})$$

Pour la contrainte d'endurance  $\sigma_D = 243$  MPa, nous avons obtenu la valeur de  $X_c = 8\mu\text{m}$ . Cette valeur est pratiquement la même que celle de la constante donnée en figure VI.6 par l'équation  $X_m = f(\rho)$ . Cette distance est fonction du matériau.

Pour déterminer le facteur de concentration de contraintes tenant compte de la présence du rayon  $\rho$  et de l'angle d'entaille  $\psi$ , on utilise le repère dont l'origine est décalée de  $\rho/2$  et le tenseur des contraintes établi par Creager [32] et [33].

En mode I, l'angle  $\theta$  est nul et la distance  $r$  sera égale à  $\rho/2 + X_c$ . Comme la pente de nos distributions est différente de 0,5, le facteur d'intensité de contrainte d'entaille sera égal à:

$$K_{I(\rho,\psi)} = \frac{\sqrt{2\pi} X_c^\alpha \left(\frac{\rho}{X_c} + 2\right)^{1+\alpha}}{2^{1+\alpha} \left(\frac{\rho}{X_c} + 1\right)} \sigma_{yy} \quad (\text{VI.12})$$

où

$K_{I(\rho,\psi)}$  est le facteur d'intensité de contrainte d'entaille en mode I,  
 $\sigma_{yy}$  est la contrainte au point  $X_c$  située sur la courbe de rayon en fond d'entaille  $\rho$  donné.

Cette relation générale introduit l'influence des deux grandeurs géométriques à savoir l'acuité  $\rho$  et l'angle d'entaille  $\psi$ .

Dans le cas particulier d'une entaille en V ( $\rho = 0$  et  $\psi \neq 0$ ), on obtient à partir de l'équation précédente:

$$K_{I(\rho=0,\psi)} = \sqrt{2\pi} X_c^\alpha \sigma_{yy} \quad (\text{VI.13})$$

où

$\sigma_{yy}$  est la contrainte au point  $X_c$  située sur la droite de pente  $\alpha \neq 0,5$  et de rayon  $\rho=0$ .

Cette relation est identique à celle utilisée par Verreman et al [41] pour le cas des joints soudés comportant une entaille en V.

En présence d'une fissure ( $\rho = 0$  et  $\psi = 0$ ), la relation (VI.12) se réduit à:

$$K_{I(\rho=0,\psi=0)} = K_I = \sqrt{2\pi X_c} \sigma_{yy} \quad (\text{VI.14})$$

où

$\sigma_{yy}$  est la contrainte au point  $X_c$  située sur la droite de rayon  $\rho = 0$  et ayant pour pente  $\alpha = 0,5$ .

Pour les amplitudes de charges appliquées, nous avons regroupé aux tableaux (VI.2), (VI.3) et (VI.4) les valeurs de l'amplitude des facteurs d'intensité de contraintes d'entaille  $\Delta K_{I(\rho,\psi)}$  obtenues par la relation (VI.12) et celles de  $\Delta K_I$  calculées par (VI.4).

Amplitude de charge $\Delta P$ en [KN]	$\Delta K_{I(\rho,\psi)}$ en (MPa.m <sup>0,467</sup> )	$\Delta K_I$ en (MPa.m <sup>0,5</sup> )	Nombre de cycles d'amorçage
2,52	12,44	8,93	1,008.10 <sup>6</sup>
2,79	13,77	9,90	481,6.10 <sup>3</sup>
3,42	16,88	12,12	172,6.10 <sup>3</sup>
3,6	17,77	12,76	128,6.10 <sup>3</sup>
3,96	19,55	14,037	53,28.10 <sup>3</sup>
4,5	22,22	15,952	20.10 <sup>3</sup>
5,04	24,88	17,87	13.10 <sup>3</sup>

Tableau VI.2. Valeurs de  $\Delta K_I$  et  $\Delta K_{I(\rho,\psi)}$  pour l'acuité  $\rho = 0,1$  mm.

Amplitude de charge $\Delta P$ en [KN]	$\Delta K_{I(\rho,\psi)}$ en (MPa.m <sup>0,467</sup> )	$\Delta K_I$ en (MPa.m <sup>0,5</sup> )	Nombre de cycles d'amorçage
3,24	15,93	11,49	Éprouvette non amorcée
3,33	16,37	11,80	570,1.10 <sup>3</sup>
3,42	16,81	12,12	345.10 <sup>3</sup>
3,6	17,7	12,76	320.10 <sup>3</sup>
3,96	19,47	14,04	217,2.10 <sup>3</sup>
4,23	20,8	15	181,6.10 <sup>3</sup>
4,5	22,12	15,95	43,4.10 <sup>3</sup>

Tableau VI.3. Valeurs de  $\Delta K_I$  et  $\Delta K_{I(\rho,\psi)}$  pour l'acuité  $\rho = 0,2$  mm

Amplitude de charge $\Delta P$ en [kN]	$\Delta K_{I(\rho,\psi)}$ en $(\text{MPa}\cdot\text{m}^{0,467})$	$\Delta K_I$ en $(\text{MPa}\cdot\text{m}^{0,5})$	Nombre de cycles d'amorçage
2,88	14,12	10,21	Éprouvette non amorcée
3,87	18,97	13,72	$469,6 \cdot 10^3$
4,05	19,86	14,36	$459,4 \cdot 10^3$
4,23	20,74	15	$281,2 \cdot 10^3$
4,5	22,06	15,95	$191 \cdot 10^3$
4,95	24,27	17,55	$71,7 \cdot 10^3$
5,13	25,15	18,2	$81,28 \cdot 10^3$

Tableau VI.4. Valeurs de  $\Delta K_I$  et  $\Delta K_{I(\rho,\psi)}$  pour l'acuit  $\rho = 0,3 \text{ mm}$

Comme nous avons calculé l'amplitude du facteur d'intensité de contraintes d'entaille à la distance  $(\rho/2 + X_c)$ , nous avons représenté en figure VI.9 l'évolution du nombre de cycles d'amorçage en fonction du rapport  $\Delta K_{I(\rho,\psi)} / (\rho/2 + X_c)^{0,467}$ .

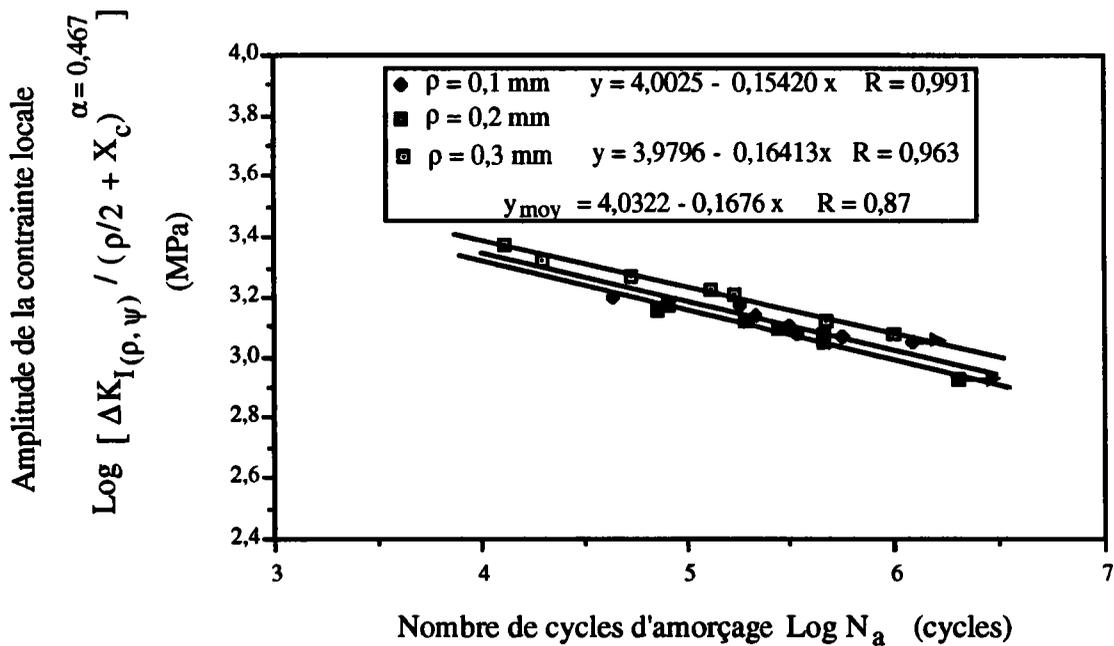


Figure VI.9. Évolution du nombre de cycles d'amorçage  $N_a$  en fonction du rapport  $\Delta K_{I(\rho,\psi)} / (\rho/2 + X_c)^{0,467}$ .

Dans la partie non linéaire de la distribution de contraintes, la contrainte au point  $X_c$  est donnée par la relation (VI.12) :

$$\sigma_{yy}(X_c) = \frac{2^{1+\alpha} \left( \frac{\rho}{X_c} + 1 \right)}{\sqrt{2\pi} X_c^\alpha \cdot \left( \frac{\rho}{X_c} + 2 \right)^{\alpha+1}} K_{I(\rho,\psi)} \quad (\text{VI.15})$$

En regardant de nouveau la figure VI.5, on constate que cette contrainte  $\sigma_{yy}(X_c)$  est égale à la contrainte  $\sigma_{yy}(X_d)$  qui se trouve sur la partie linéaire de la distribution.

Comme cette partie correspond à un rayon à fond d'entaille nul, nous pouvons écrire:

$$\sigma_{yy}(X_c) = \sigma_{yy}(X_d) = \frac{K_{I(\rho=0,\psi)}}{\sqrt{2\pi} \cdot X_d^\alpha} \quad (\text{VI.16})$$

où

$X_c$  est la distance locale mesurée à partir du fond d'entaille,

$X_d$  est la distance comptée à partir du fond d'entaille et correspond à la projection du point de coordonnées  $(X_c, \sigma_{yy}(X_c))$  sur la droite linéaire (figure V.5),

$K_{I(\rho=0,\psi)}$  est le facteur d'intensité de contraintes exprimé à partir de la distribution linéaire correspondant à  $\rho = 0$ .

Nous avons exprimé les facteurs d'intensité de contraintes d'entaille sur la partie courbée et sur la partie linéaire de la distribution. Le premier facteur noté  $K_{I(\rho,\psi)}$  considère la distribution réelle des contraintes avec  $\rho \neq 0$  et  $\psi \neq 0$  alors que pour le second ( $K_{I(\rho=0,\psi)}$ ) l'acuité  $\rho$  est nulle et l'angle d'entaille  $\psi$  est non nul. Ce dernier facteur correspond à une entaille en V et a déjà été exprimé à l'aide de différentes méthodes de calculs (chapitre III). La méthode que nous venons de développer permet à partir des distributions de contraintes de déterminer de façon assez simple les facteurs d'intensité de contraintes au moyen des projections de points.

**VI.1.4] Facteur de sensibilité à l'entaille.**

Pour le calcul du facteur de sensibilité à l'entaille, nous avons utilisé le rapport du coefficient de concentration de contraintes théorique sur le facteur de concentration de contraintes en fatigue. Cette relation découle des travaux de Heywood [11]:

$$q' = \frac{K_f}{K_t} \quad (\text{VI.17})$$

Ce même facteur peut s'écrire sous la forme:

$$q' = \frac{\sigma_D}{\sigma_D'} \cdot \frac{\sigma_N}{\sigma_{\max}} \quad (\text{VI.18})$$

où

$\sigma_D$  est la limite d'endurance d'une éprouvette lisse,

$\sigma_D'$  est la limite d'endurance d'une éprouvette entaillée.

Lorsque la limite en fatigue est atteinte, la contrainte nominale  $\sigma_N$  devient égale à la limite d'endurance d'une éprouvette entaillée  $\sigma_D'$ . Au point  $X_1$  (figure VI.5) il n'y a plus d'influence du rayon à fond d'entaille, on suppose alors que  $\sigma_D = \sigma_{yy}(X_1)$ . On obtient:

$$q' = \frac{\sigma_1}{\sigma_{\max}} \quad (\text{VI.19})$$

$\sigma_1$  est la contrainte au point d'abscisse  $X_1$ .

Si nous utilisons comme référence la figure VI.5, la contrainte maximale  $\sigma_{\max}$  peut être décrite par le facteur d'intensité de contrainte  $K_{I(\rho=0,\psi)}$  à la distance  $X_m$ . Nous aurons:

$$\sigma_{\max} = \frac{K_{I(\rho=0,\psi)}}{\sqrt{2\pi} X_m^\alpha} \quad (\text{VI.20})$$

avec

$X_m$ : abscisse du point où la contrainte est maximale.

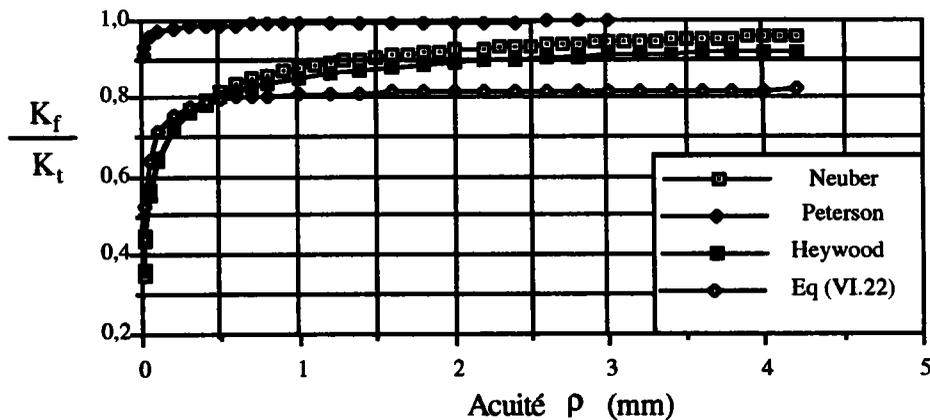
La contrainte au point  $X_1$  peut être également décrite par le même facteur d'intensité de contrainte à l'aide de la relation:

$$\sigma_1 = \frac{K_{I(\rho=0,\psi)}}{\sqrt{2\pi} X_1^\alpha} \quad (\text{VI.21})$$

En réaménageant les relations (VI.21) et (VI.20) dans (VI.19), on obtient une nouvelle forme du facteur de sensibilité à l'entaille:

$$q' = \frac{\sigma_1}{\sigma_{\max}} = \left( \frac{X_1}{X_m} \right)^{-\alpha} \quad (\text{VI.22})$$

Pour décrire l'évolution du facteur de sensibilité à l'entaille en fonction du rayon en fond d'entaille (figure VI.10), nous avons utilisé la relation (VI.20) et les relations établies par certains auteurs cités dans la partie bibliographique (chapitre I).



**Figure VI.10.** Évolution du facteur de sensibilité à l'entaille en fonction de l'acuité  $\rho$

On constate que la courbe obtenue à l'aide de la relation (VI.22) devient asymptotique pour le facteur de sensibilité avoisinant la valeur de 0,82. Pour des rayons en fond d'entaille  $\rho \geq 0,75$  mm, la courbe du facteur de sensibilité à l'entaille obtenue se situe en dessous de celles données par les autres auteurs.

### VI.1.5] Conclusions.

Le dépouillement des résultats par le critère du  $\Delta\sigma_N$  montre que pour une amplitude de contrainte nominale fixée, le nombre de cycles d'amorçage augmente avec le rayon en fond d'entaille.

Inversement, pour une amplitude de contrainte maximale ou pour un rapport  $\Delta K_I / \rho^{0,5}$  fixé, le nombre de cycles d'amorçage diminue lorsque le rayon en fond d'entaille augmente. Sur la base du meilleur coefficient de corrélation, le critère faisant intervenir le facteur de concentration de contraintes en fatigue est celui qui regroupe le mieux les résultats expérimentaux.

Pour les différentes acuités, le calcul des distributions de contraintes donne une même valeur de la pente  $\alpha$  qu'on retrouve également par l'équation (VI.8).

Nous avons déterminé une distance  $X_c$  en nous basant sur un critère de résistance. Cette grandeur dépend donc du matériau.

Nous avons exprimé la forme générale d'un facteur d'intensité de contraintes  $K_{I(\rho,\psi)}$  qui englobe les deux grandeurs géométriques ( $\rho$  et  $\psi$ ). Dans le cas où le rayon en fond d'entaille est nul, on retrouve la relation du facteur d'intensité de contraintes pour une entaille en V. Dans le cas où  $\rho = 0$  et  $\psi = 0$ , nous retrouvons la relation du facteur d'intensité de contraintes pour une fissure.

Ce facteur d'intensité de contraintes d'entaille est basé sur une distribution de contraintes réelle.

Les amplitudes des facteurs d'intensité de contraintes d'entaille  $\Delta K_{I(\rho,\psi)}$  sont plus importantes que celles relatives à une fissure. Néanmoins la dispersion des points expérimentaux reste inchangée si l'on utilise comme critère le rapport  $\Delta K_{I(\rho,\psi)} / \rho^{0,467}$  au lieu de celui du  $\Delta K_I / \rho^{0,5}$ . Comme nous avons calculé l'amplitude du facteur d'intensité de contrainte à une distance  $(\rho/2 + X_c)$ , nous avons pris comme contrainte locale le rapport  $\Delta K_{I(\rho,\psi)} / (\rho/2 + X_c)^{0,467}$ .

Pour caractériser les écarts entre les résultats obtenus avec les différents critères, nous avons reporté les droites de lissage obtenues par la méthode des moindres carrés. Les droites extrêmes qui constituent le faisceau des résultats correspondent au lissage des points expérimentaux en  $\rho = 0,1\text{mm}$  et  $\rho = 0,3\text{ mm}$  alors que la droite moyenne tient compte de tous les points. La dispersion autour de cette droite passe de 19% pour le rapport  $\Delta K_I / \rho^{0,5}$  à 13% pour le cas de  $\Delta K_{I(\rho,\psi)} / (\rho/2 + X_c)^{0,467}$ .

Le critère du  $\Delta\sigma_{\max}$  calculé à l'aide du facteur de concentration de contraintes en fatigue est celui qui rassemble le mieux les points expérimentaux puisque la dispersion des résultats est de l'ordre de 7%. Avec ces 28%, le critère du  $\Delta\sigma_N$  est celui dont la dispersion est la plus grande .

Cette procédure de calcul du facteur d'intensité de contraintes d'entaille, nous a permis de définir le facteur de sensibilité en prenant en considération la distribution des contraintes au voisinage de l'entaille. Cette méthode évite de recourir aux essais d'endurance qui sont parfois longs et coûteux.

**VI.2] Résultats obtenus pour les éprouvettes en anneaux.**

**VI.2.1] Méthodes évaluant l'angle d'inclinaison pour lequel l'anneau est sollicité en mode II pur.**

Pour déterminer l'angle d'inclinaison du plan d'entaille par rapport au chargement appliqué, nous avons utilisé trois méthodes différentes.

**VI.2.1.1] Méthode basée sur une approche analytique.**

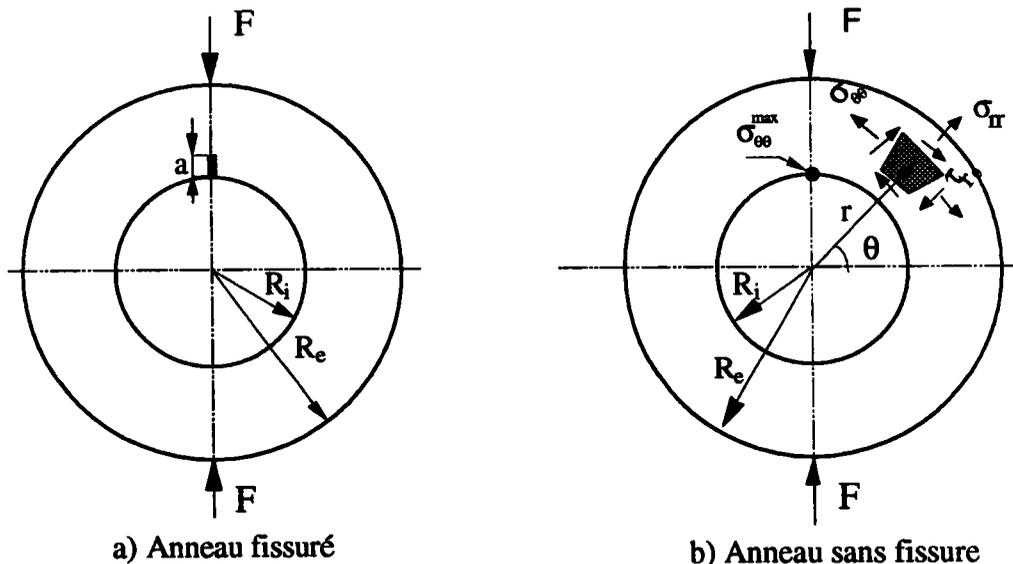
Dans le cas d'un anneau sollicité en mode I (figure VI.11.a), **Ahmad & Ashbaugh [49]** donnent l'expression du facteur d'intensité de contraintes sous la forme:

$$K_I = 1,12 \sigma_{\theta\theta}^{\max} \sqrt{\pi a} \quad (VI.23)$$

où

le facteur de forme 1,12 correspond à celui d'une plaque contenant une fissure de bord.

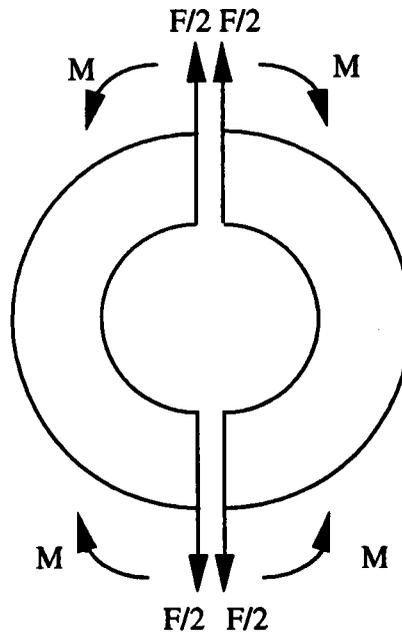
$\sigma_{\theta\theta}^{\max}$  est la contrainte normale maximale pour un anneau sans fissure (figure VI.11b).



**Figure VI.11.** Sollicitation en mode I d'un anneau fissuré et contrainte normale maximale pour un anneau sans fissure selon [49].

Pour obtenir le mode II pur, il faut que le facteur d'intensité de contraintes en mode I ( $K_I$ ) soit nul ou négligeable devant celui du mode II ( $K_{II}$ ). Si nous considérons la relation (VI.23), nous devons déterminer sur un anneau sans fissure, la position d'un point de coordonnées polaires ( $r = R_i$ ,  $\theta$ ) pour laquelle la contrainte  $\sigma_{\theta\theta}$  est la plus faible. Cette position nous donnera un facteur d'intensité de contraintes  $K_I$  négligeable. Pour cela, il est nécessaire de connaître la distribution des contraintes dans un anneau chargé en compression.

Dans le cas d'un anneau soumis à la traction (figure VI.12), **Filon [50]** calcule le tenseur des contraintes par la méthode de Saint Venant. L'auteur résout le problème en procédant à une coupe symétrique dans la direction de l'effort s'exerçant sur l'anneau .



**Figure VI.12.** Principe de Saint Venant pour un anneau en traction.  
selon [50]

L'auteur [50] donne la solution des contraintes normalisées par le terme ( $\pi R_i$ ) sous la forme de deux parties où l'une tient compte du moment de flexion et l'autre de l'effort de traction

La distribution des contraintes pour le cas de la flexion est donnée par les relations suivantes:

$$\sigma_{rr} = G \left( (R_i^2 - R_e^2) \ln \left( \frac{r}{R_e} \right) + \left( \frac{R_e^2}{r^2} - 1 \right) R_i^2 \ln \left( \frac{R_e}{R_i} \right) \right)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = G \left( R_i^2 - R_e^2 + R_e^2 \ln \left( \frac{r}{R_e} \right) - R_i^2 \ln \left( \frac{r}{R_i} \right) - \left( \frac{R_e^2 R_i^2}{r^2} \right) \ln \left( \frac{R_e}{R_i} \right) \right) \quad (\text{VI.24})$$

$$\sigma_{r\theta} = 0$$

où

$(r, \theta)$  sont les coordonnées polaires du point considéré,  
 $R_i$  et  $R_e$  sont respectivement le petit et le grand rayon de l'anneau,

avec

$$G = M \left( \frac{1}{4} (R_e^2 - R_i^2)^2 - R_e^2 R_i^2 (\ln(R_e/R_i))^2 \right) \quad (\text{VI.25})$$

et

$$M = (F R_i / \pi) [0,5 - (\ln(R_i/R_e)) / (1 - (R_i/R_e)^2)]$$

où

$F$  est l'effort de traction.

Pour le cas de la traction la distribution des contraintes est de la forme:

$$\sigma_{rr} = \frac{H(R_i^2 - r^2) (r^2 - R_e^2) \cos\theta}{r^3}$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{H(R_i^2 - r^2) (r^2 - R_e^2) \sin\theta}{r^3} \quad (\text{VI.26})$$

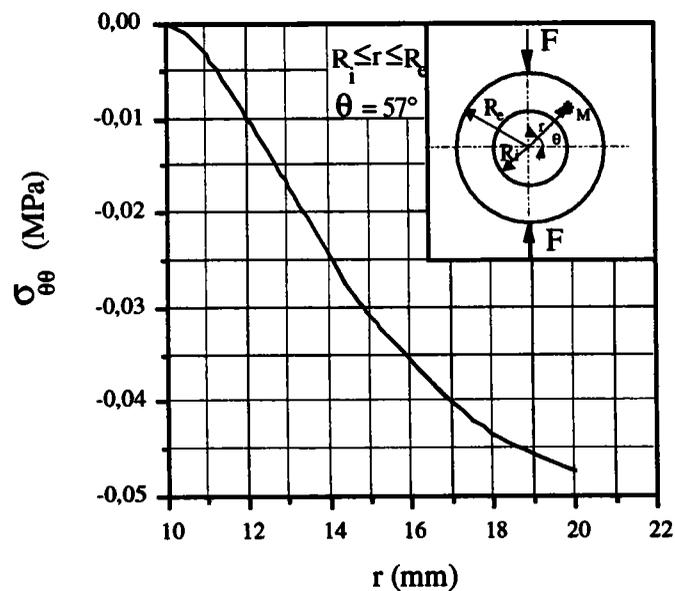
$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{H(R_e^2 R_i^2 - 3r^4 (R_e^2 + R_i^2)) \cos\theta}{r^3}$$

avec

$$H = \frac{0,5F}{(R_e^2 + R_i^2) \ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right) - (R_e^2 - R_i^2)} \quad (\text{VI.27})$$

Nous avons élaboré un programme qui calcul pour un chargement en compression  $F = 1\text{ kN}$  et pour une épaisseur  $B = 1\text{ mm}$ , le tenseur de contraintes en tout point de coordonné  $(r, \theta)$ . Comme l'équation (VI.23) considère la contrainte  $\sigma_{\theta\theta}^{\max}$  au bord intérieur de l'anneau, nous nous sommes limité aux calculs des contraintes aux points de coordonnés  $(r = R_i, \theta)$ .

En faisant varier l'angle  $\theta$  de  $0$  à  $90^\circ$ , nous avons déterminé la position d'un point de coordonnées  $(r = R_i = 10\text{ mm}, \theta = 57^\circ)$  où la contrainte  $\sigma_{\theta\theta}$  est nulle. En prenant cette direction  $(\theta = 57^\circ)$ , nous avons représenté en (figure VI.13) l'évolution de la contrainte  $\sigma_{\theta\theta}$  en fonction des valeurs de  $r$  comprises entre  $R_i = 10\text{ mm}$  et  $R_e = 20\text{ mm}$ .



**Figure VI.13.** Évolution de la contrainte  $\sigma_{\theta\theta}$  en fonction des distances  $r$  pour la direction  $\theta = 57^\circ$ .

En conclusion, la direction pour laquelle  $\sigma_{\theta\theta}$  est nulle fait un angle  $\beta = 33^\circ$  par rapport à l'axe de chargement (angle complémentaire de  $\theta = 57^\circ$ ).

### VI.2.1.2] Méthode expérimentale.

Un capteur d'ouverture a été utilisé pour la détermination de l'angle d'inclinaison pour lequel on obtient le mode II pur. Sur un anneau nous avons collé du papier calque sur lequel nous avons au préalable marqué certaines graduations d'angles.

Lors de l'essai en compression, l'anneau a été positionné selon les graduations d'angles. Pour chaque graduation (chaque rotation de l'anneau), nous avons procédé au relevé du déplacement des lèvres de l'entaille.

La figure VI.14 illustre le schéma de montage du capteur au niveau des lèvres de l'entaille.

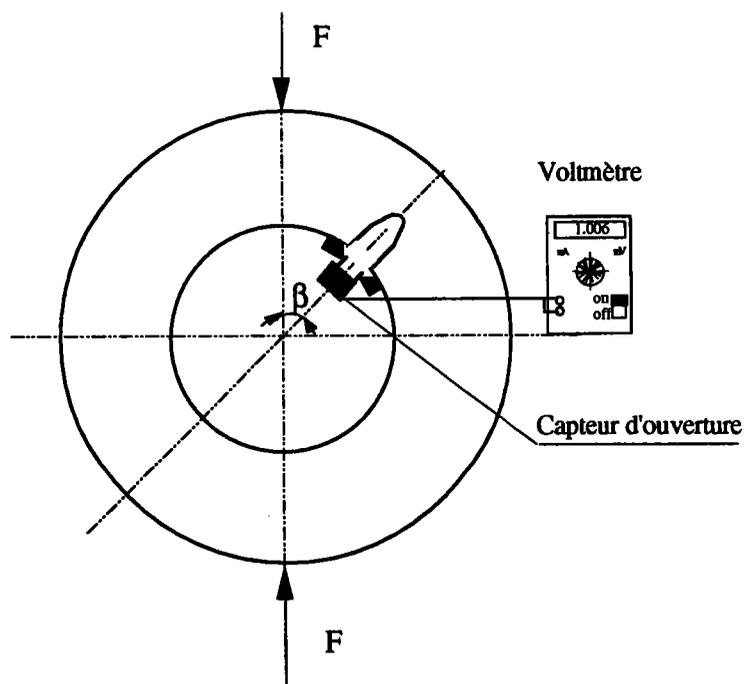


Figure VI.14. Schéma de montage du capteur d'ouverture.

Nous avons présenté en (figure VI.15), les points expérimentaux émanant des différentes mesures ainsi qu'une équation de lissage qui montre bien que pour l'angle d'inclinaison de 33° l'entaille ne s'ouvre pas. Cette méthode expérimentale vient donc appuyer le calcul précédent et montre bien qu'il n'existe que du cisaillement pur.

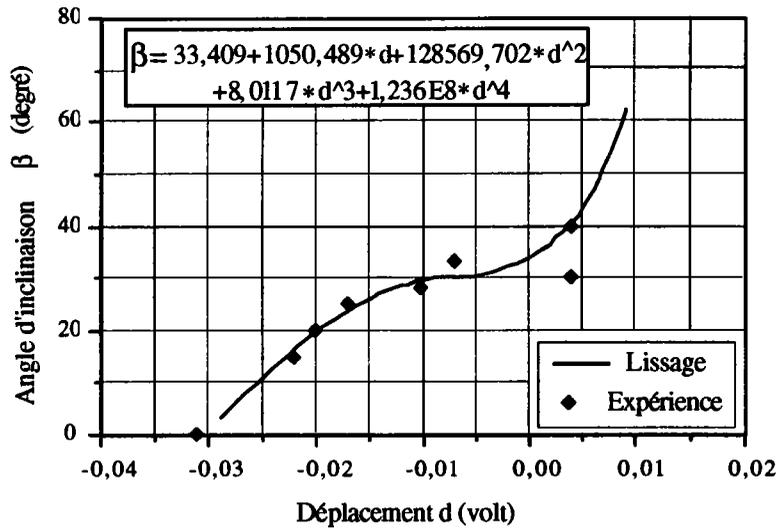


Figure VI.15. Variation du déplacement en fonction de l'angle d'inclinaison.

### VI.2.1.3] Méthode aux éléments finis.

Le calcul a été effectué pour différentes inclinaisons de l'éprouvette par rapport à l'axe de chargement. Pour une inclinaison de 33°, la figure VI.16 et VI.17 montrent d'une part que les contraintes de cisaillement sont très importantes au voisinage de l'entaille et d'autre part que le déplacement de l'entaille se produit sans ouverture.

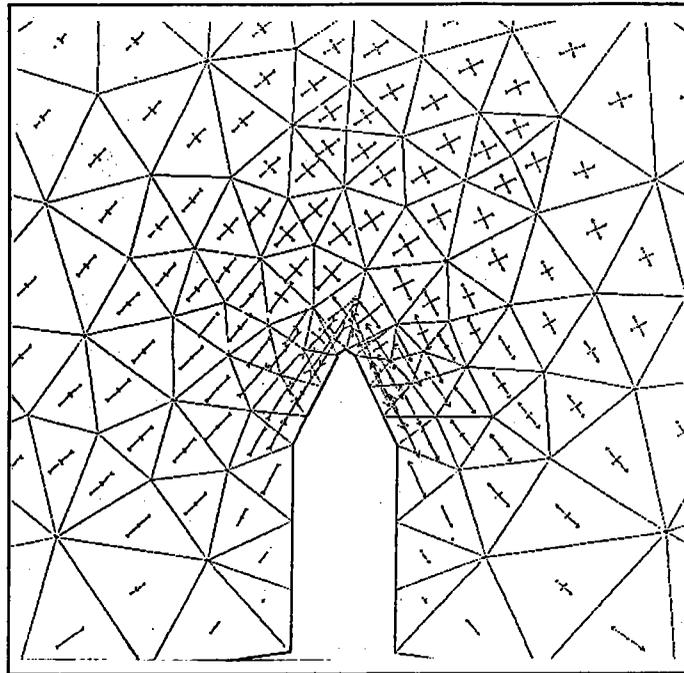


Figure VI.16. Représentation des contraintes principales pour un anneau chargé en compression avec un inclinaison de  $33^\circ$  par rapport au plan de l'entaille.

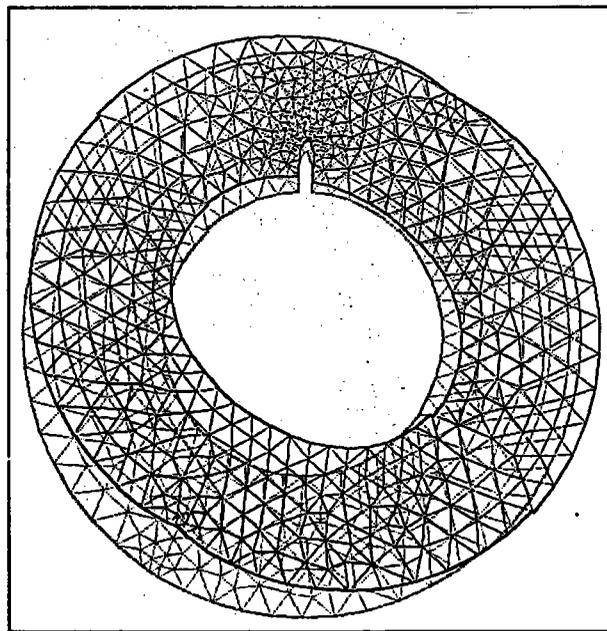
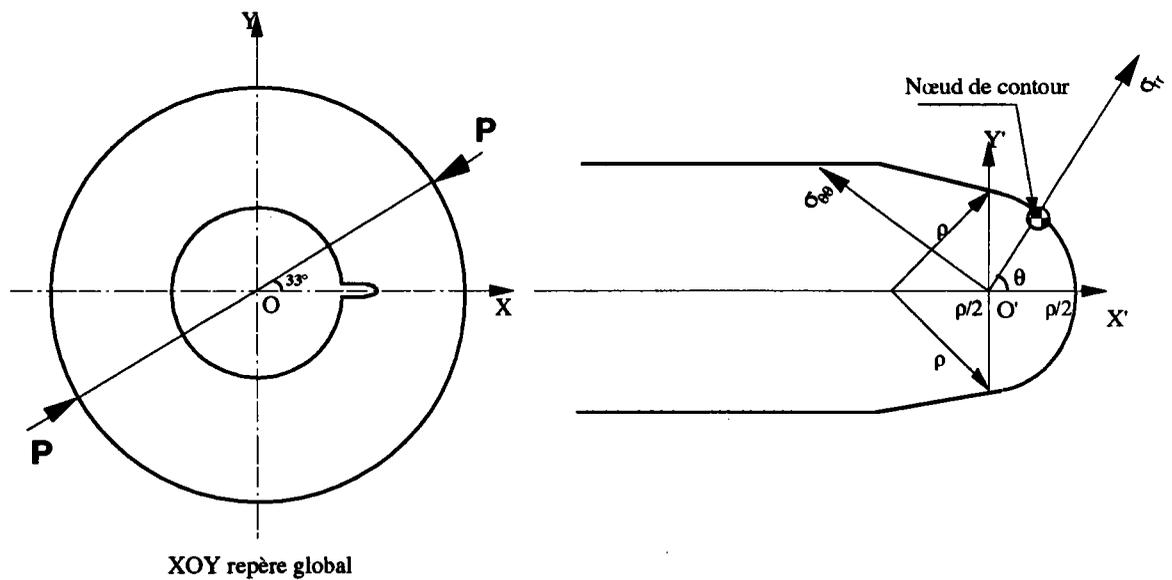


Figure VI.17. Déplacement de l'entaille pour le même anneau à  $33^\circ$ .

## VI.2.2] Utilisation d'un critère basé sur le facteur d'intensité de contraintes d'entaille en mode II.

### VI.2.2.1] Distribution des contraintes au voisinage des différents rayons en fond d'entaille.

Pour déterminer le facteur d'intensité de contraintes d'entaille en mode II, nous avons utilisé la distribution des contraintes au voisinage de l'entaille obtenue au moyen d'un calcul aux éléments finis. Nous nous sommes fixé un repère dont l'axe OX se trouve dans le plan de l'entaille (figure VI.18).



**Figure VI.18.** Détail du contour de l'entaille avec la position du nœud et du repère local.

A l'aide des données géométriques, nous avons construit certains nœuds sur le contour d'entaille afin d'évaluer les valeurs de contraintes en ces points.

Pour déterminer numériquement la direction d'amorçage en mode II, nous avons appliqué le critère de la contrainte circonférentielle maximale énoncé par **Erdogan & Sih [38]**. Ce critère énonce que la rupture se produit dans la direction perpendiculaire à celle où la contrainte  $\sigma_{\theta\theta}$  est maximale, lorsque cette contrainte atteint la valeur critique  $\sigma_{\theta\theta,cr}$ .

En négligeant en première approximation l'effet du rayon  $\rho$  dans les relations (III.1) et (III.2), la contrainte circonférentielle s'exprime par la relation suivante:

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{(2\pi r)^{1/2}} \left[ K_I \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{3}{2} K_{II} \sin\theta \right] \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (\text{VI.28})$$

La direction suivant laquelle  $\sigma_{\theta\theta}$  est maximale est donnée par les solutions des équations aux dérivées partielles.

$$\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} = 0 \quad \text{pour } \theta = \theta_0$$

et

$$\frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta^2} < 0 \quad (\text{VI.29})$$

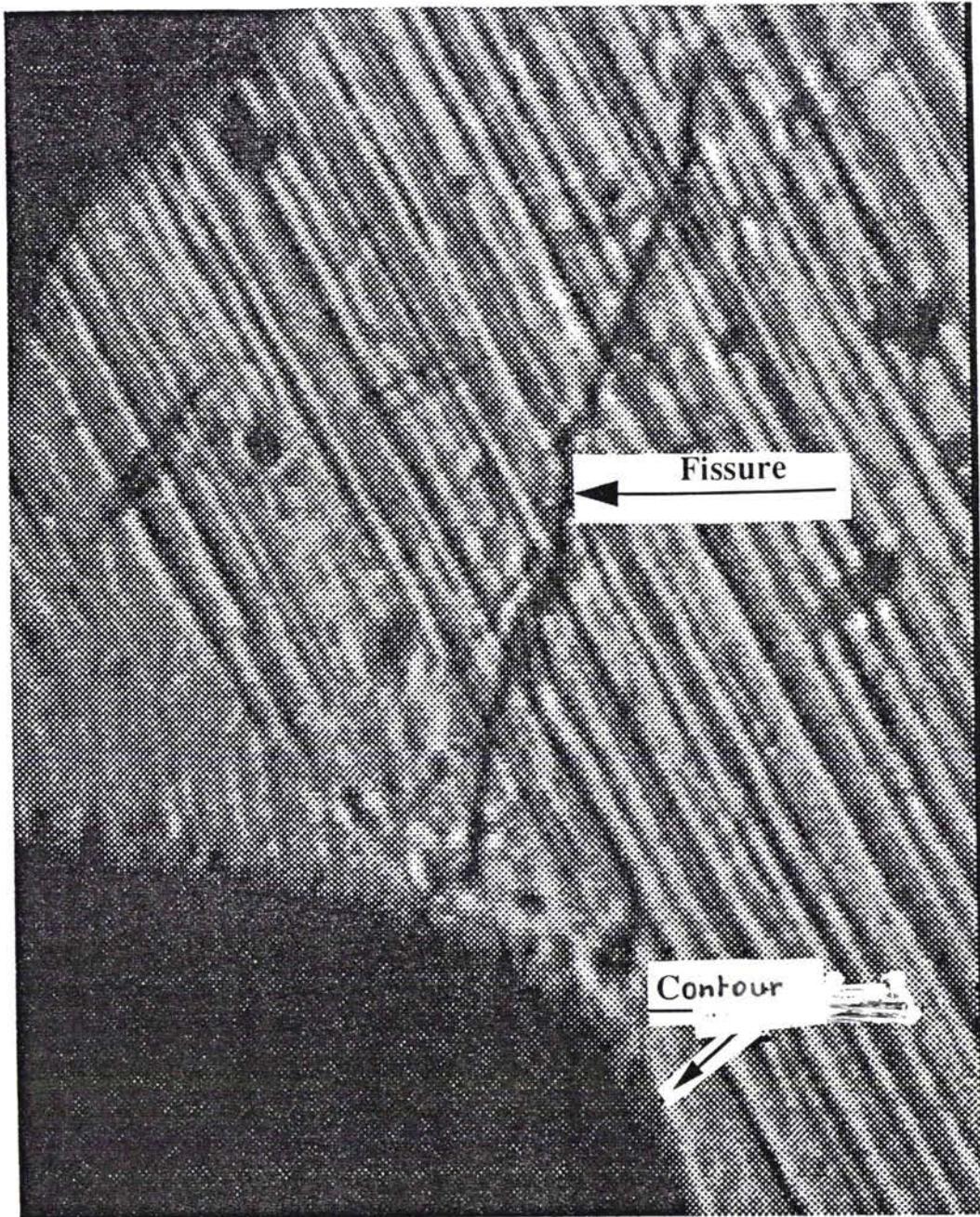
La solution donnant la plus grande valeur de  $\sigma_{\theta\theta}$  est donnée par la relation précédente et s'exprime par la formule:

$$\text{tg}\left(\frac{\theta_0}{2}\right) = \frac{1}{4} \left( \frac{K_I}{K_{II}} \right) \pm \frac{1}{4} \sqrt{\left( \frac{K_I}{K_{II}} \right)^2 + 8} \quad (\text{VI.30})$$

Nous avons effectué une translation du repère global jusqu'à la distance  $\rho/2$  du fond d'entaille. A partir de cette position, nous avons calculé pour tous les points du contour les contraintes en  $\sigma_r$  et  $\sigma_{\theta\theta}$  par une simple rotation du repère (figure VI.18).

La contrainte la plus importante en  $\sigma_{\theta\theta}$  est située au nœud faisant un angle de  $70,5^\circ$  par rapport au plan de l'entaille.

La **planche III** montre le résultat d'un essai d'amorçage effectué sur une éprouvette en anneau. La mesure de l'angle d'apparition de fissure correspond à  $\theta = 70,5^\circ$ .



Amorçage d'une fissure à partir du contour d'entaille correspondant à une acuité  $\rho = 0,2 \text{ mm}$

A titre de comparaison, nous avons déterminé les contraintes en  $\sigma_{rr}$  et  $\sigma_{\theta\theta}$  pour un nœud situé à  $57^\circ$  par rapport au plan de l'entaille. Le tableau VI.5 regroupe les résultats obtenus pour ces deux nœuds du contour. Les couples (X,Y) représentent les coordonnées des nœuds dans le repère global. Les valeurs des contraintes correspondent à un chargement en compression égal à 1kN.

	$\rho=0,1\text{mm}$		$\rho=0,2\text{ mm}$		$\rho=0,3\text{ mm}$	
	$57^\circ$	$70,5^\circ$	$57^\circ$	$70,5^\circ$	$57^\circ$	$70,5^\circ$
X (mm)	12,985	12,974	12,969	12,948	12,954	12,922
Y (mm)	0,0535	0,0674	0,1066	0,1348	0,1599	0,2022
$\sigma_{xx}$ (MPa)	16,560	30,770	13,720	26,120	12,700	24,080
$\sigma_{yy}$ (MPa)	41,490	37,600	34,260	32,040	31,860	29,930
$\tau_{xy}$ (MPa)	-26,150	-34,020	-21,530	-29,130	-19,950	-26,790
$\sigma_{rr}$ (MPa)	10,206	15,429	8,499	13,048	7,951	12,419
$\sigma_{\theta\theta}$ (MPa)	57,984	58,248	47,836	49,713	44,402	46,138
$\tau_{r\theta}$ (MPa)	22,023	28,588	18,139	24,501	16,866	22,661

Tableau VI.5. Valeurs des contraintes aux nœuds situés sur le contour de l'entaille.

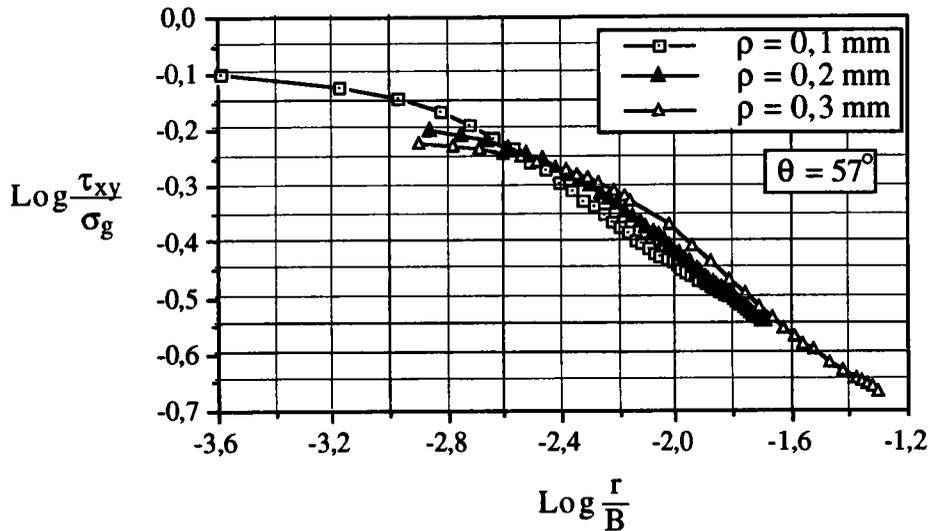
Lors des calculs, nous avons affiné le maillage de telle façon à ce qu'on est une série de nœuds dans les directions de  $57^\circ$  et  $70,5^\circ$ . A partir des contraintes obtenues sur ces nœuds nous avons représenté en figures VI.19 et VI.20 les distributions des contraintes pour le cas des directions de  $57^\circ$  et de  $70,5^\circ$ . Pour la représentation, nous avons pris la valeur absolue de la contrainte  $\tau_{xy}$  en la normalisant par la contrainte globale  $\sigma_g$  qui est donnée par Peterson [10] sous la forme:

$$\sigma_g = \frac{3 P (R_e+R_i)}{\pi B (R_e-R_i)^2} \quad (\text{VI.31})$$

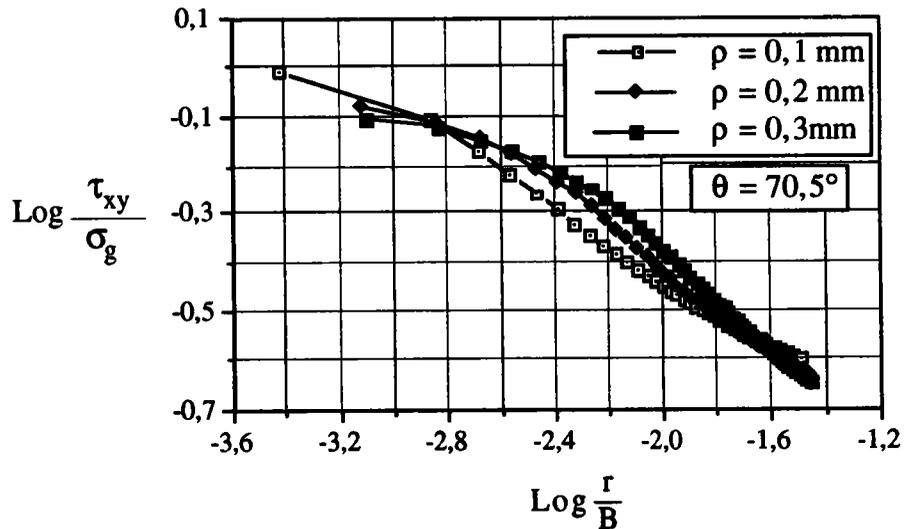
où

- F est la charge appliquée,
- $R_e$  est le rayon extérieur de l'anneau,
- $R_i$  est le rayon intérieur de l'anneau,
- B est l'épaisseur de l'anneau.

En figure VI.19 et VI.20, les valeurs de  $r$  correspondent aux distances séparant les différents nœuds au nœud de contour. Ces distances sont normalisées par l'épaisseur de l'anneau.



**Figure VI.19.** Distribution des contraintes de cisaillement dans la direction  $\theta = 57^\circ$



**Figure VI.20.** Distribution des contraintes de cisaillement dans la direction  $\theta = 70,5^\circ$

A partir des distributions de contraintes obtenues en figure VI.19 et VI.20, nous avons calculé pour les directions de  $57^\circ$  et  $70,5^\circ$  les valeurs des pentes  $\alpha$  dans chaque partie linéaire de la distribution. Le tableau V.6 regroupe les différentes valeurs de ces pentes.

	$\rho = 0,1 \text{ mm}$	$\rho = 0,2 \text{ mm}$	$\rho = 0,3 \text{ mm}$
$\theta = 57^\circ$	$\alpha = 0,43$	$\alpha = 0,45$	$\alpha = 0,46$
$\theta = 70,5^\circ$	$\alpha = 0,462$	$\alpha = 0,48$	$\alpha = 0,49$

**Tableau VI.6.** Valeurs des pentes  $\alpha$  pour les différents rayons en fond d'entaille suivant la direction  $\theta = 57^\circ$  et  $\theta = 70,5^\circ$ .

Les valeurs du tableau VI.6 montrent que pour les deux directions, la pente  $\alpha$  augmente avec le rayon en fond d'entaille. Ce changement de pente peut être attribué au fait que nous ne sommes pas en présence d'une entaille symétrique par rapport au plan de chargement.

### **VI.2.2.2] Facteur d'intensité de contrainte d'entaille**

Pour le mode II, la direction de  $70,5^\circ$  a été déterminée en considérant le repère dont l'origine est située à la distance  $\rho/2$  du fond d'entaille. Nous nous sommes heurté au problème commenté par **Creager [33]** et présenté au chapitre III.

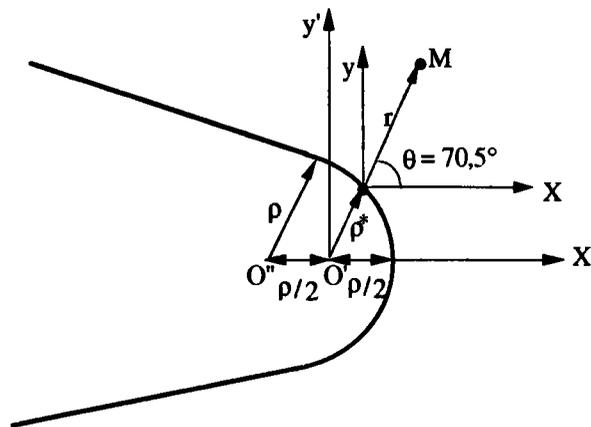
En effet si on considère ce repère (figure VI.21), nous aurons une distance  $r'$  très importante puisque cette dernière est reliée à la direction  $\theta$  par la relation donnée par **Creager [33]** :

$$\cos \theta = \frac{\frac{\rho}{2} + r'}{3} \quad (\text{VI.32})$$

où

$\rho$  est le rayon en fond d'entaille,

$(r', \theta)$  sont les coordonnées polaires d'un point M dans le repère situé à  $\rho/2$ ;  $r' = \rho^* + r$ .



**Figure VI.21.** Représentation des repères utilisés lors des calculs.

La figure III.2 du chapitre III illustre pour certains rayons en fond d'entaille, l'évolution de  $r'$  en fonction des différentes directions  $\theta$ .

Il n'est donc pas possible d'utiliser pour cette direction une forme générale du facteur d'intensité de contraintes d'entaille  $K_{II(\rho \neq 0, \psi)}$  qui tient compte à la fois de l'acuité  $\rho$  et de l'angle d'entaille  $\psi$ .

A partir des distributions de contraintes données en figure VI.19 et VI.20, nous avons déterminé le facteur d'intensité de contraintes  $K_{II(\rho=0, \psi)}$  en considérant comme en mode I (figure VI.5), la distance  $X_d$  qui correspond à la projection du point d'abscisse  $X_c$  sur la droite linéaire de la distribution.

Comme  $X_c$  est fonction du matériau, nous avons pris pour le calcul de  $X_d$ , la valeur de  $X_c$  déterminée en mode I. La contrainte de cisaillement peut être exprimée par la relation:

$$\tau_{xy} = \frac{K_{II(\rho=0, \psi)}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\alpha}{x_d} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (\text{VI.33})$$

Dans le cas où la direction d'amorçage  $\theta$  est nulle, nous obtenons une relation du même type que l'équation (III.28) utilisée par Gross et Mendelson [42].

Nous avons regroupé aux tableaux VI.7, VI.8 et VI.9, les résultats obtenus pour les amplitudes de charges correspondant à nos essais d'amorçage.

$\Delta P$ (kN)	$ \Delta\tau_{xy} $ (MPa)	$ \Delta K_{II(\rho=0,\psi)} $ (MPa.m <sup><math>\alpha</math></sup> )	$\Delta\sigma_{90}^{\max}$ (MPa)	$N_a$ (Cycles)
11,7	364,911	13,77	681,50	$780,5 \cdot 10^3$
11,79	367,72	13,88	686,74	$665 \cdot 10^3$
11,88	370,52	13,98	691,99	$470 \cdot 10^3$
12,33	384,56	14,51	718,198	$282 \cdot 10^3$
12,6	392,98	14,83	733,925	$218,5 \cdot 10^3$
13,5	421,05	15,89	786,35	$180 \cdot 10^3$
14,4	449,12	16,95	838,77	$115 \cdot 10^3$
16,2	505,26	19,07	943,62	$58 \cdot 10^3$
17,1	533,33	20,13	996,04	$23,3 \cdot 10^3$

**Tableau VI.7.** Résultats expérimentaux obtenus en mode II pour le rayon en fond d'entaille  $\rho = 0,1$  mm et  $X_d = 12,68$   $\mu\text{m}$ .

$\Delta P$ (kN)	$ \Delta\tau_{xy} $ (MPa)	$ \Delta K_{II(\rho=0,\psi)} $ (MPa.m <sup><math>\alpha</math></sup> )	$\Delta\sigma_{90}^{\max}$ (MPa)	$N_a$ (Cycles)
12,33	355,104	12,22	612,96	Éprouvette non amorcée
12,42	357,696	12,3	617,43	$800 \cdot 10^3$
12,6	362,88	12,48	626,38	$500 \cdot 10^3$
12,96	373,248	12,84	644,28	$286 \cdot 10^3$
14,76	425,088	14,62	733,76	$185 \cdot 10^3$
15,3	440,64	15,16	760,61	$118 \cdot 10^3$
16,2	466,56	16,05	805,35	$66 \cdot 10^3$
17,1	492,48	16,94	850,09	$44 \cdot 10^3$
17,55	505,44	17,39	872,46	$39 \cdot 10^3$

**Tableau VI.8.** Résultats expérimentaux obtenus en mode II pour le rayon en fond d'entaille  $\rho = 0,2$  mm et  $X_d = 15,96$   $\mu\text{m}$ .

$\Delta P$ (kN)	$ \Delta\tau_{xy} $ (MPa)	$ \Delta K_{II(\rho=0,\psi)} $ (MPa.m <sup>α</sup> )	$\Delta\sigma_{60}^{max}$ (MPa)	$N_a$ (Cycles)
12,96	336,96	11,62	597,95	Éprouvette non amorcée
13,14	341,64	11,78	606,25	824.10 <sup>3</sup>
13,32	346,32	11,94	614,56	460.10 <sup>3</sup>
13,5	351	12,11	622,86	300.10 <sup>3</sup>
15,3	397,8	13,72	705,91	172.10 <sup>3</sup>
16,38	425,88	14,69	755,74	69.10 <sup>3</sup>
17,55	456,3	15,74	809,72	45.10 <sup>3</sup>
18	468	16,14	830,48	40.10 <sup>3</sup>
18,9	491,4	16,95	872,01	35,5.10 <sup>3</sup>

Tableau VI.9. Résultats expérimentaux obtenus en mode II pour le rayon en fond d'entaille  $\rho = 0,3$  mm et  $X_d = 20,09$   $\mu$ m.

Nous avons représenté en figure VI.22, l'évolution du nombre de cycles d'amorçage en fonction du rapport  $\Delta K_{II(\rho=0,\psi)} / X_d^\alpha$ .

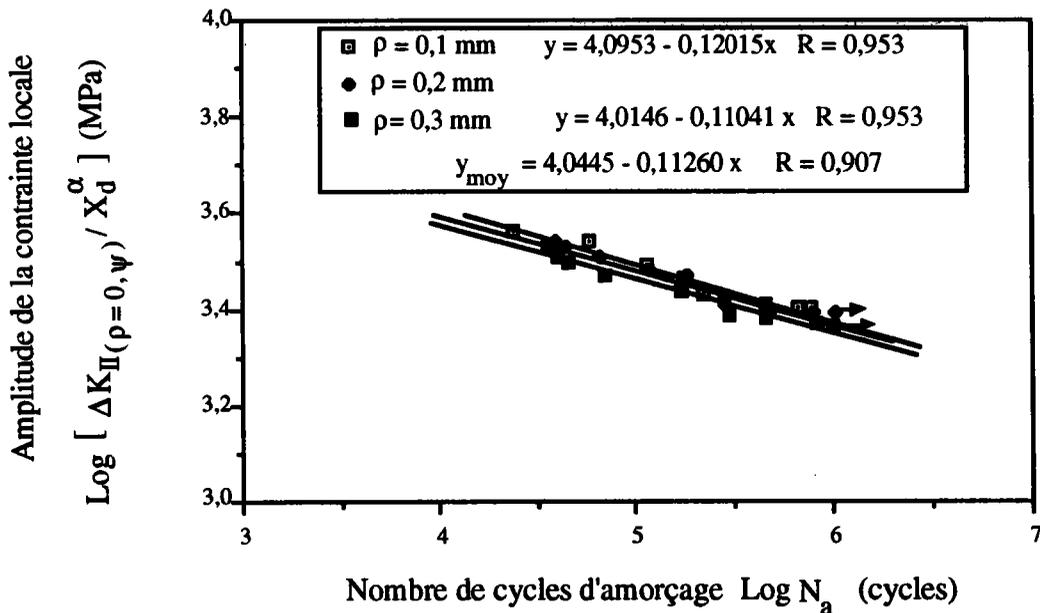
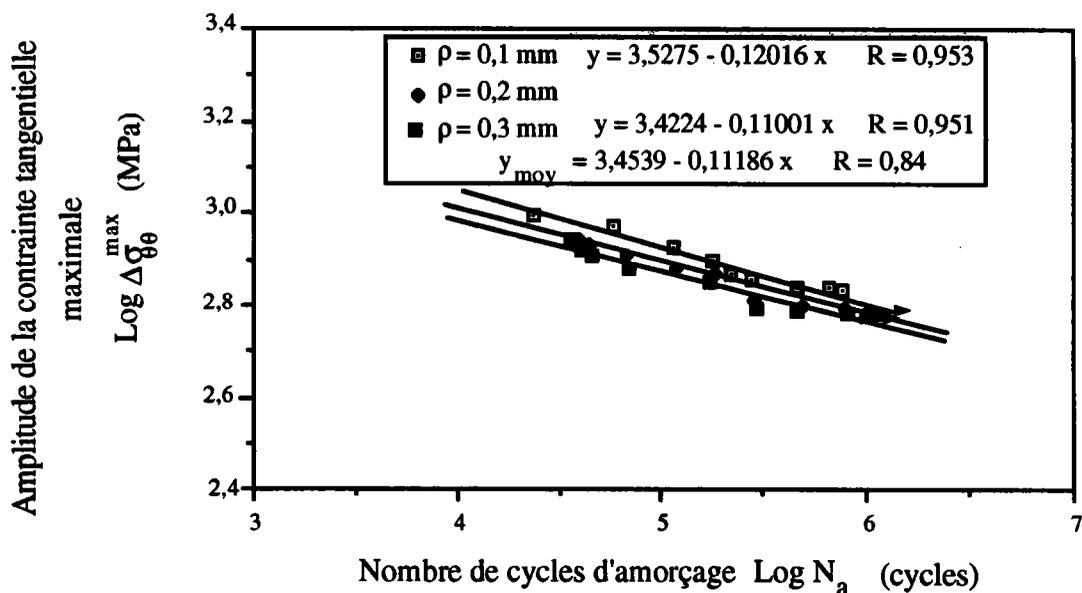


Figure VI.22. Évolution du nombre de cycles d'amorçage en mode II en fonction du rapport  $\Delta K_{II(\rho=0,\psi)} / X_d^\alpha$ .

Sur cette figure, nous avons tracé un faisceau de courbes lissées à partir des points expérimentaux en  $\rho = 0,1$  mm,  $\rho = 0,3$  mm ainsi qu'une courbe moyenne ajustant la totalité des points d'essais. Le rapport en  $\Delta K_{II} (\rho=0, \psi) / x_d^\alpha$  rassemble bien les résultats expérimentaux puisque la dispersion des résultats autour de la courbe moyenne n'est que de 9,3%.

**VI.2.3] Utilisation du critère de la contrainte maximale  $\sigma_{\theta\theta}^{\max}$ .**

A l'aide des valeurs des contraintes obtenues par le calcul aux éléments finis, nous avons représenté en (figure VI.23), l'évolution du nombre de cycles d'amorçage en fonction de l'amplitude de la contrainte maximale. Les points expérimentaux ont tendance à se rapprocher beaucoup plus pour des nombres de cycles avoisinant les  $10^6$  cycles. En dessous d'une amplitude de contrainte de l'ordre de 598 MPa aucune fissure ne s'amorce. Enfin, en comparaison avec le critère précédent, ce critère rassemble moins bien les points expérimentaux puisque la dispersion autour de la droite moyenne est estimée à 16%.



**Figure VI.23.** Évolution du nombre de cycles d'amorçage  $N_a$  en fonction de l'amplitude de la contrainte maximale  $\sigma_{\theta\theta}^{\max}$ .

### VI.2.4] Conclusions.

Les trois méthodes utilisées pour la détermination de l'angle pour lequel on sollicite l'anneau en mode II donnent toutes la même valeur de  $33^\circ$ .

A partir du calcul aux éléments finis nous avons trouvé le nœud de contour où la contrainte  $\sigma_{\theta\theta}$  est maximale. Par le calcul, la direction d'amorçage fait un angle  $\theta = 70,5^\circ$  avec l'axe de l'entaille. Cette angle est identique à celui trouvé expérimentalement.

Pour l'angle de  $70,5^\circ$ , nous avons exprimé le facteur d'intensité de contraintes en mode II en tenant compte de l'angle d'entaille  $\psi$ .

L'évolution du nombre de cycles d'amorçage a été présentée en fonction du rapport  $\Delta K_{II(\rho=0,\psi)}/X_d^\alpha$  et en fonction de la contrainte  $\sigma_{\theta\theta}^{\max}$ .

Les points expérimentaux ont tendance à se rapprocher pour un nombre de cycles proche de  $10^6$  cycles. La dispersion des résultats est de l'ordre de 9,3% pour le critère faisant intervenir le rapport  $\Delta K_{II(\rho=0,\psi)}/X_d^\alpha$  et de 16% pour le critère du  $\sigma_{\theta\theta}^{\max}$ . Enfin nous n'avons pas présenté l'évolution du nombre de cycles d'amorçage en fonction du rapport  $\Delta K_{II(\rho=0,\psi)}/\rho^\alpha$  car la dispersion obtenue dépasse les 35%.

### VI.3] Résultats obtenus en torsion (mode III).

#### VI.3.1] Description de la méthode de calcul en torsion.

Lors des essais, nous avons appliqué différentes valeurs du couple de torsion calculées à partir de la section utile de l'éprouvette. Afin de déterminer les contraintes agissant sur cette partie utile, nous avons construit à l'aide du post-processeur de CAO (Display3), la géométrie de la partie considérée en incluant les défauts. Cette construction est de forme cylindrique et est constituée de plusieurs surfaces et volumes. Pour cette géométrie, il n'est pas possible de faire un calcul en axisymétrie puisque les défauts ne le sont pas. Néanmoins la symétrie dans le plan perpendiculaire ( $xy$ ) à l'axe principal existe et a été considérée.

Pour le maillage, nous avons opté pour l'option FEG (génération des éléments finis) et pour des éléments solides en forme de tétraèdre. Ce choix d'éléments s'est basé sur le fait que pour un cylindre sans défaut, le maillage en automatique génère des éléments tétraédriques. Une fois les volumes maillés, les nœuds se juxtaposant doivent être confondus afin d'éviter une discontinuité de la structure.

Pour appliquer les conditions aux limites, nous avons imposé des déplacements aux nœuds puisque les éléments solides n'ont que trois degrés de liberté en translation ( $u_x, u_y, u_z$ ). Le passage du couple appliqué aux déplacements des nœuds s'effectue en considérant la théorie élastique pour le cas de la torsion de poutre cylindrique à section droite circulaire.

Si nous considérons la figure VI.24, après une rotation d'angle  $\theta'$  par rapport à l'axe  $oz$ , un point  $M(x,y,z)$  d'une section droite vient en  $M'(x+u_x, y+u_y, z+u_z)$  de telle sorte que si  $x = r' \cos\beta'$ ,  $y = r' \sin\beta'$ :

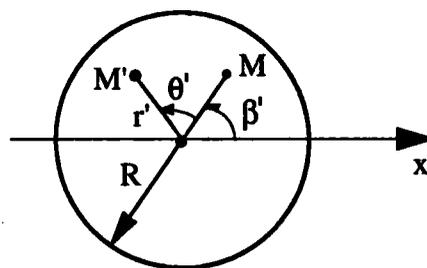


Figure VI.24. Section droite en rotation .

$$\begin{aligned} u_x &= r' \cos(\beta'+\theta') - r' \cos\beta' = x (\cos\theta' - 1) - y \sin\theta' \\ u_y &= r' \sin(\beta'+\theta') - r' \sin\beta' = x \sin\theta' + y (\cos\theta' - 1) \end{aligned} \quad (\text{VI.34})$$

où

$(r', \beta')$  sont les coordonnées polaires du point M,  
 $\theta'$  est l'angle de rotation par rapport à l'axe oz,  
 $u_x$  est le déplacement suivant l'axe ox,  
 $u_y$  est le déplacement suivant l'axe oy.

Si  $\theta'$  est petit nous aurons au premier ordre:

$$\begin{aligned} u_x &= -\theta' y \\ u_y &= \theta' x \end{aligned} \quad (\text{VI.35})$$

Les déformations étant petites nous prenons:

$$\theta' = \gamma' z \quad (\text{VI.36})$$

où

$\gamma'$  représente le déplacement angulaire relatif de deux sections droites distantes de l'unité de longueur.

$z$  est l'ordonnée du point considéré suivant l'axe oz.

En remplaçant la relation (VI.36) dans la relation (VI.35), on obtient les déplacements suivants:

$$\begin{aligned} u_x &= -\gamma' x z \\ u_y &= \gamma' x z \\ u_z &= 0 \end{aligned} \quad (\text{VI.37})$$

La relation entre le déplacement angulaire  $\gamma'$  et le moment de torsion est donné par l'expression :

$$M_t = \mu \gamma' I_0 \quad (\text{VI.38})$$

où

$\mu$  est le module de cisaillement,

$I_0$  est le moment quadratique polaire de la section droite dont l'équation s'exprime sous la forme:

$$I_0 = \frac{\pi R^4}{2} \quad (\text{VI.39})$$

Connaissant le couple de torsion à appliquer et les coordonnées des nœuds, nous pouvons déterminer aisément leurs déplacements à partir des relations précédentes. Ces déplacements sont imposés sur les nœuds se situant sur la base supérieure du cylindre (**planche IV**). Pour la base inférieure qui correspond au plan de symétrie de l'éprouvette, le blocage des déplacements des nœuds s'effectue suivant les trois degrés de liberté (**planche IV**).

### **VI.3.2] Résultats obtenus en contraintes de cisaillement maximale.**

Pour la résolution du problème, nous avons utilisé le solveur Nisa 2 qui permet à partir de la décomposition d'éléments de structure, la détermination de la matrice de rigidité et le calcul des déplacements et des contraintes aux différents nœuds.

Pour les défauts multiples, le calcul aux éléments finis donne des contraintes de cisaillement maximales dans le plan de  $45^\circ$  par rapport à l'axe principale de l'éprouvette. **La planche V** illustre la répartition des isocontraintes au voisinage de ces défauts.

Concernant les défauts uniques, nous avons également obtenu la contrainte de cisaillement maximale dans le plan de  $45^\circ$ .

La planche VI, montre l'amorçage des fissures à 45° de l'axe principal obtenu lors des essais effectués sur des éprouvettes de torsion avec des défauts uniques et multiples.

Par le calcul, nous avons retrouvé le facteur de concentration de contraintes en torsion pour le cas d'un tube contenant un trou traversant. En effet, si nous considérons l'éprouvette représentée en (figure VI.25), la relation du facteur de concentration de contraintes en torsion est donnée par Peterson [1] comme égale à:

$$K_t = \frac{\tau_{\max}}{8 M_t D_e / \pi (D_e^4 - D_i^4)} \quad (\text{VI.40})$$

où

- $\tau_{\max}$  est la contrainte de cisaillement maximale,
- $D_e$  est le diamètre extérieur,
- $D_i$  est le diamètre intérieur du tube,
- $M_t$  est le moment de torsion appliqué.

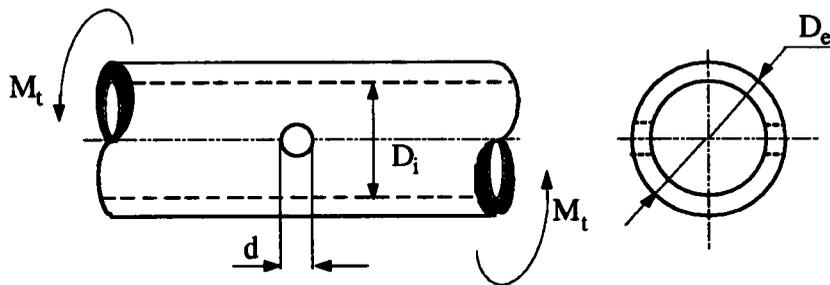


Figure VI.25. Éprouvette tubulaire comportant un trou traversant soumise à un couple de torsion, selon [1].

Peterson [1] donne sous la forme d'abaques la variation du facteur de concentration de contraintes  $K_t$  en fonction du rapport  $d/D_e$  pour  $0 \leq D_i/D_e \leq 0,9$ . Dans le cas particulier où les rapports  $D_i/D_e = 0$  et  $d/D_e \approx 0$ , le facteur de concentration de contraintes en torsion  $K_t$  est égal à 2. Pour les défauts uniques, nous avons retrouvé la même valeur de  $K_t$ .

En tableaux VI.10 et VI.11, nous avons regroupé les résultats expérimentaux ainsi que les contraintes de cisaillement maximales déterminées par le calcul aux éléments finis.

Défaut unique de diamètre 100 $\mu\text{m}$			Défaut unique de diamètre 150 $\mu\text{m}$		
$\Delta M_t$	$\Delta \tau_{\text{max}}$	$N_a$	$\Delta M_t$	$\Delta \tau_{\text{max}}$	$N_a$
(N.m)	(MPa)	(Cycles)	(N.m)	(MPa)	(Cycles)
274	507	$83,95 \cdot 10^3$	288	512,86	$112 \cdot 10^3$
266	490,91	$161 \cdot 10^3$	284	507	$169,82 \cdot 10^3$
265	489,78	$112,2 \cdot 10^3$	271	483,06	$469,90 \cdot 10^3$
261	481,95	$222,8 \cdot 10^3$	268	478,63	$841,39 \cdot 10^3$
253	467,73	$605,34 \cdot 10^3$	266	475,33	$1,50 \cdot 10^3$
251	464,51	$979,49 \cdot 10^3$	265,3	473,15	Éprouvette non amorcée
244	451,80	Éprouvette non amorcée	265	472,10	Éprouvette non amorcée

Tableau VI.10. Résultats obtenus en présence des défauts uniques.

Défauts multiples de diamètre 150 $\mu\text{m}$			Défaut multiples de diamètre 200 $\mu\text{m}$		
$\Delta M_t$	$\Delta \tau_{\text{max}}$	$N_a$	$\Delta M_t$	$\Delta \tau_{\text{max}}$	$N_a$
(N.m)	(MPa)	(Cycles)	(N.m)	(MPa)	(Cycles)
261	627,22	$78 \cdot 10^3$	261	705,83	$32 \cdot 10^3$
239,4	575,31	$130 \cdot 10^3$	243	657,15	$102 \cdot 10^3$
235,8	566,66	$250 \cdot 10^3$	225	608,47	$190 \cdot 10^3$
228,6	549,36	$313 \cdot 10^3$	207	559,80	$330 \cdot 10^3$
217,8	523,40	$380 \cdot 10^3$	195,5	528,70	$710 \cdot 10^3$
211,5	508,26	$833 \cdot 10^3$	189	511,12	Éprouvette non amorcée
207	497,45	Éprouvette non amorcée	-	-	-

Tableau VI.11. Résultats obtenus en présence des défauts multiples.

En figure VI.26 et VI.27, nous avons représenté pour les défauts uniques et multiples les résultats d'essais sous forme de couples de points ( $\text{Log } N_a$ ,  $\text{Log } \tau_{\text{max}}$ ).

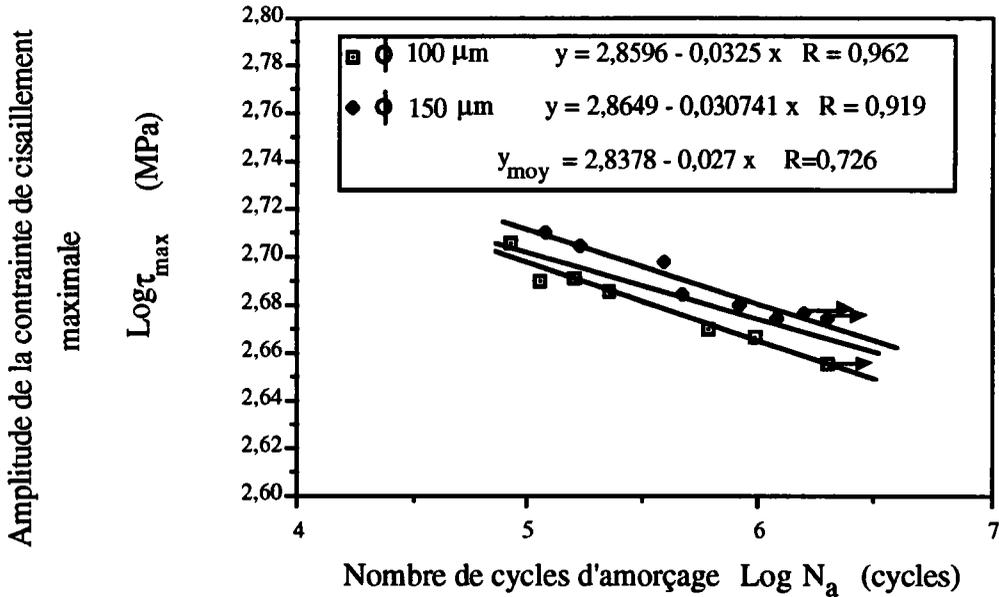


Figure VI.26. Évolution du nombre de cycles d'amorçage en fonction de l'amplitude de la contrainte de cisaillement maximale pour les défauts uniques.

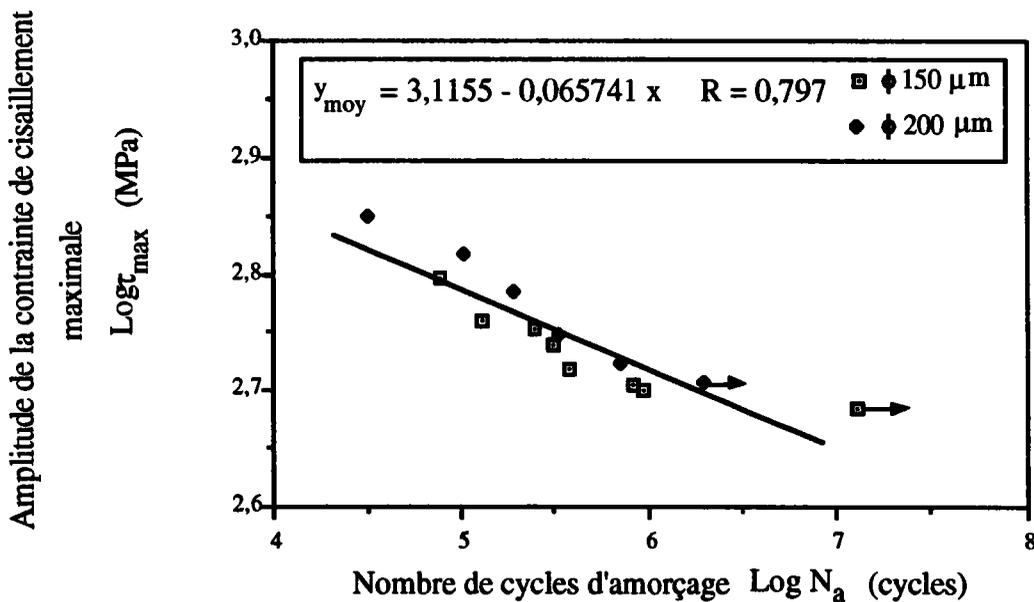
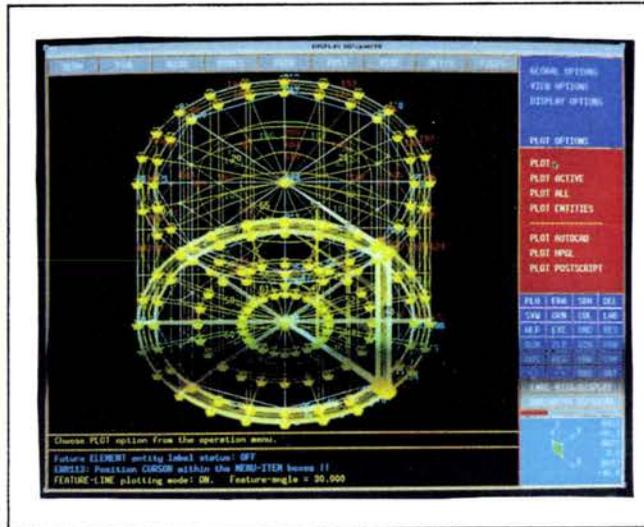


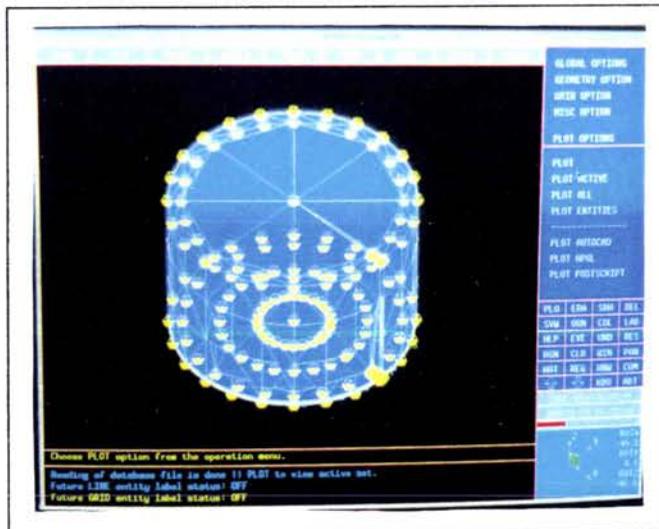
Figure VI.27. Évolution du nombre de cycles d'amorçage en fonction de l'amplitude de la contrainte de cisaillement maximale pour les défauts multiples.

### **VI.3.3] Conclusions.**

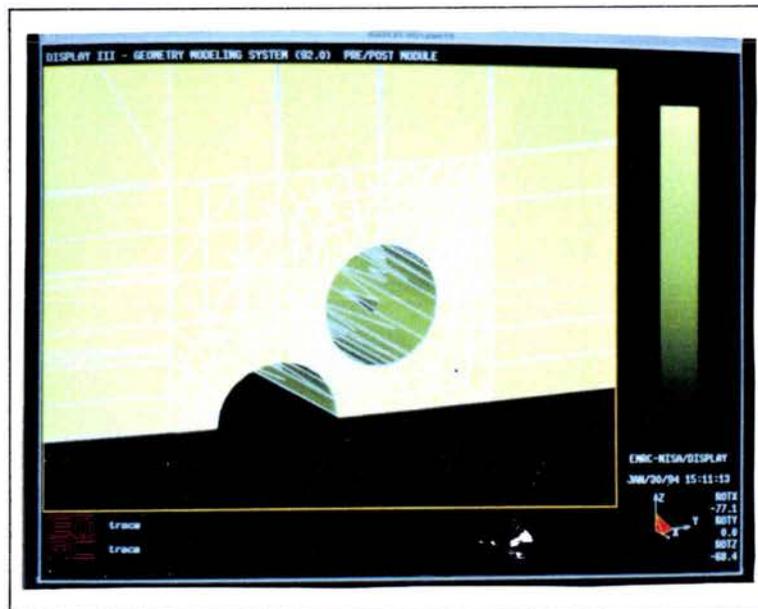
Le tableau VI.10 montre que pour un même couple de torsion, les éprouvettes comportant les défauts uniques de diamètre 100  $\mu\text{m}$  s'amorcent plus vite que ceux de 150  $\mu\text{m}$ . Cette constatation expérimentale est confirmée par le calcul aux éléments finis qui donne une amplitude de contrainte de cisaillement maximale plus élevée au voisinage du défaut de diamètre 100  $\mu\text{m}$ . Pour les défauts multiples (tableau VI.11), à l'inverse des résultats précédents, les essais effectués ont montré que les éprouvettes de torsion avec les défauts multiples de diamètre 200  $\mu\text{m}$  s'amorçaient plus rapidement que ceux de 150  $\mu\text{m}$ . Ces observations expérimentales s'expliquent par le calcul qui donne une plus grande contrainte de cisaillement au voisinage du défaut de 200  $\mu\text{m}$ . Les figures VI.26 et VI.27 montrent que la dispersion moyenne obtenue pour les défauts de 100 et 150  $\mu\text{m}$  est de l'ordre de 27,5% alors que pour les défauts multiples elle se situe au environ de 20%.



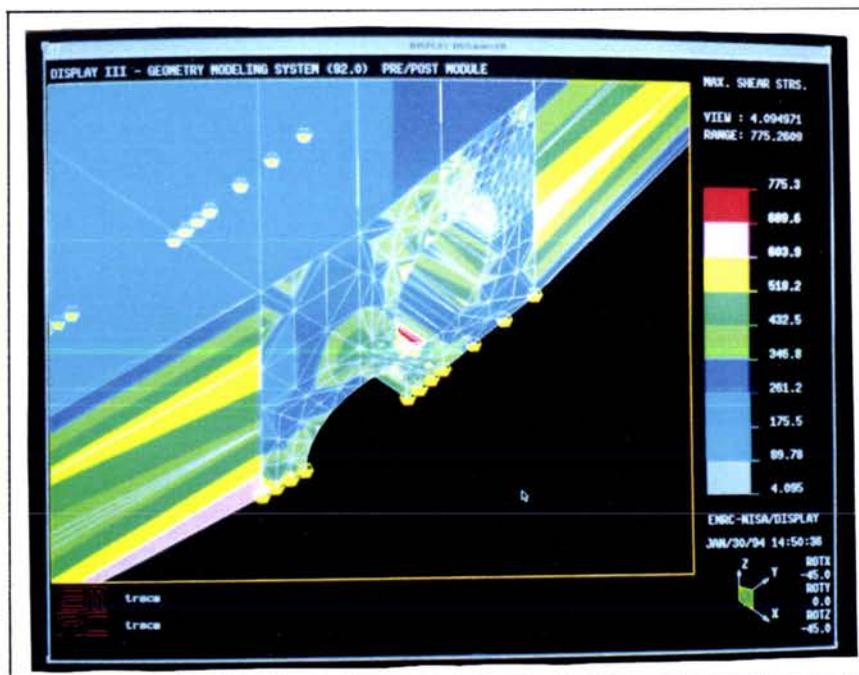
**Photo5.** Volumes créés et conditions aux limites



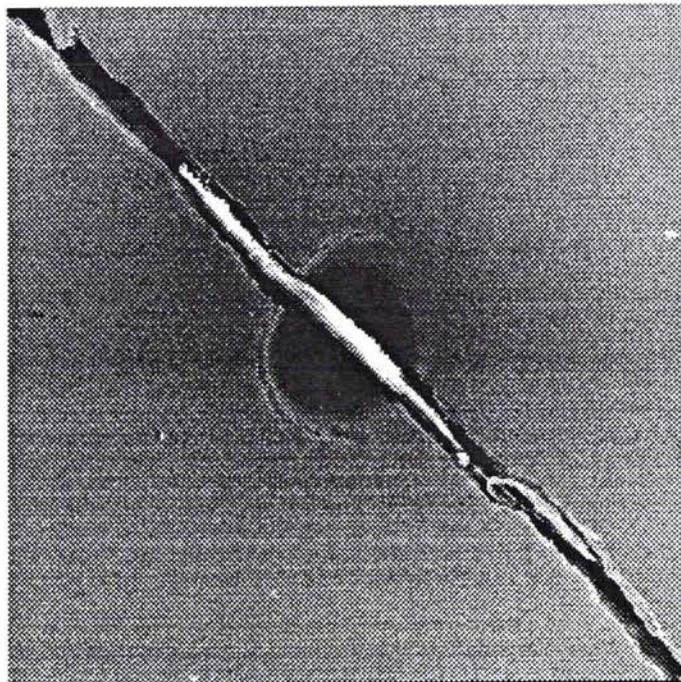
**Photo 6.** Déplacements imposés aux nœuds de la base supérieure et de la section de coupe.



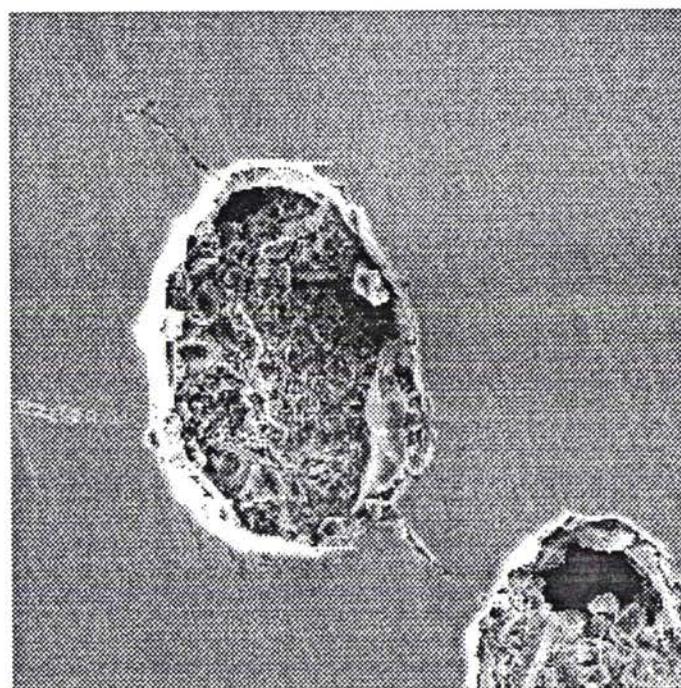
**Photo 7.** Vue en perspective des défauts multiples



**Photo 8.** Répartition des contraintes de cisaillement maximale au voisinage des défauts multiples.



a) Amorçage de fissures en mode III à partir d'un défaut unique.



b) Amorçage de fissures en mode III à partir d'un défaut multiple.

## **VII] CONCLUSION GÉNÉRALE**

L'ensemble des résultats obtenus nous permettent de dégager les observations suivantes:

En mode I, nous avons procédé au dépouillement des résultats à l'aide des critères classiques à savoir :

- critère du  $\Delta\sigma_N$
- critère du  $\Delta K_I/\rho^{0,5}$
- critère du  $\Delta\sigma_{max}$

La disposition des points d'essais et la classification des critères suivant les dispersions obtenues sont identiques à celles des auteurs cités en bibliographie. En effet, pour le premier critère, à une amplitude de la contrainte nominale fixée, le nombre de cycles d'amorçage augmente avec le rayon en fond d'entaille  $\rho$ . Inversement, pour les deux critères suivants, à un niveau de contrainte fixée, le nombre de cycles d'amorçage diminue avec le rayon en fond d'entaille. D'autre part, la dispersion des résultats autour d'une droite moyenne est de 28% pour le critère du  $\Delta\sigma_N$ , 19% pour le rapport  $\Delta K_I/\rho^{0,5}$  et 7% avec le critère du  $\Delta\sigma_{max}$ .

Pour tenir compte de la présence de l'entaille avec ces paramètres  $\rho$  et  $\psi$ , nous avons proposé un critère local où l'amplitude du facteur d'intensité de contraintes est celle d'une entaille et non d'une fissure. L'objectif étant de rassembler au mieux les points expérimentaux autour d'une droite moyenne.

La démarche de calcul du facteur d'intensité de contraintes d'entaille est assez simple puisqu'elle se base essentiellement sur la distribution de contraintes au voisinage de l'entaille. Cette dernière est constituée d'une partie courbée où l'influence de l'acuité est présente suivie d'une partie linéaire correspondant à une acuité nulle. Pour les différents rayons en fond d'entaille, les parties linéaires des distributions se confondent. La pente de cette linéarité est fonction de l'angle d'entaille  $\psi$ . Pour calculer le facteur d'intensité de contraintes d'entaille, nous avons déterminé à l'aide du critère de résistance et par le biais du concept de micro-éprouvette une distance  $X_c$  sur la première partie de la distribution où l'influence du gradient de contraintes est élevée et où la contrainte maximale est sensiblement constante. Cette distance est caractéristique au matériau puisque nous avons considéré la limite

d'endurance. Nous avons alors exprimé une forme générale du facteur d'intensité de contraintes d'entaille au point  $X_c$  en tenant compte des paramètres  $\rho$  et  $\psi$ . Cette relation permet de calculer pour n'importe quel point de la courbe le facteur d'intensité de contraintes d'entaille. Dans le cas où l'acuité et l'angle d'entaille sont nuls ( $\rho = 0$  et  $\psi = 0$ ), nous retrouvons la relation du  $\Delta K_I$  (fissure) et pour un une acuité  $\rho = 0$  et  $\psi \neq 0$ , nous obtenons celle d'une entaille en V ( $\Delta K_{I(\rho=0,\psi)}$ ).

Pour représenter les résultats, le rapport  $\Delta K_{I(\rho,\psi)}/(\rho/2+X_c)^\alpha$  a été considéré comme critère d'amorçage. Ce rapport regroupe mieux les résultats expérimentaux en comparaison avec  $\Delta K_I/\rho^{0,5}$  puisque la dispersion chute de 19% à 13%. Nous avons également exprimé le facteur de sensibilité à l'entaille en considérant en plus de l'acuité  $\rho$ , la présence de l'angle d'entaille  $\psi$  et la distance caractéristique  $X_c$ .

Pour obtenir le mode II pur, nous avons déterminé à l'aide de trois méthodes différentes dont l'une est expérimentale, l'angle d'inclinaison de l'entaille par rapport au chargement.

Ces trois méthodes donnent un angle de  $33^\circ$  qui correspond à un cisaillement pur sans ouverture de l'entaille. Afin de déterminer le facteur d'intensité de contraintes d'entaille en mode II, nous avons suivi la même procédure qu'en mode I. Par le calcul aux éléments finis nous avons obtenu la direction d'amorçage correspondant à  $70,5^\circ$  qui est identique à celle de l'essai. Nous avons représenté la distribution en cisaillement pour cette direction pour laquelle la pente  $\alpha$  dans la partie linéaire varie selon l'acuité  $\rho$ . Nous avons représenté également une distribution à  $57^\circ$  où la variation persistait. Cette variation est due à priori au fait que l'entaille n'est pas symétrique par rapport au chargement. Pour l'angle de  $70,5^\circ$  il nous a pas été possible de déterminer un  $\Delta K_{II(\rho,\psi)}$  en considérant comme en mode I l'origine du repère à  $\rho/2$ . Cette constatation est commentée par Creager [33] dans la partie bibliographique. Néanmoins, nous avons tenu compte de la présence de l'angle d'entaille  $\psi$  en utilisant cette fois-ci la partie linéaire de la distribution. Pour le dépouillement des résultats, nous avons considéré le rapport  $\Delta K_{II(\rho=0,\psi)}/(X_d)^\alpha$  où  $X_d$  correspond à la projection du point  $X_c$  sur la droite. Ce critère donne une dispersion de l'ordre de 9,3% alors qu'avec le critère du  $\Delta \sigma_{\theta\theta}^{\max}$  nous obtenons 16%.

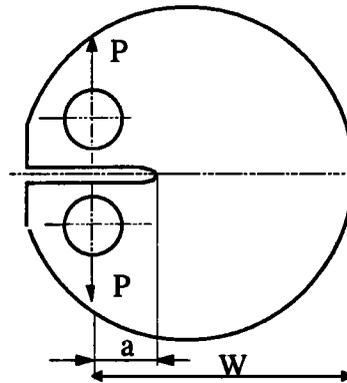
En mode III, nous avons déterminé les contraintes de cisaillement maximales par le calcul aux éléments finis en trois dimensions. Nous avons représenté les courbes d'amorçage en terme d'amplitude de contrainte de cisaillement maximale  $\tau_{\max}$ . Pour les défauts uniques, nous avons trouvé le même facteur de concentration de contrainte que celui d'un cylindre comportant un défaut traversant.

La contrainte de cisaillement maximale pour le petit défaut de diamètre 100  $\mu\text{m}$  est un peu plus grande que celle du défaut de diamètre 150  $\mu\text{m}$ . Ce résultat se confirme par les essais effectués où l'amorçage apparaît plus vite pour le petit défaut.

A l'inverse du défaut unique, la contrainte de cisaillement maximale au niveau des défauts multiples de diamètre 150  $\mu\text{m}$  est plus basse que celle des défauts de 200  $\mu\text{m}$

**ANNEXE**

Pour l'éprouvette RCT (figure A), nous supposons que la ligne neutre se trouve au milieu du ligament.



**Figure A.** Géométrie de l'éprouvette RCT

Si nous décomposons le tenseur des efforts en traction et en flexion, nous obtenons la contrainte nominale en traction :

$$\sigma_N^t = \frac{P}{B(W-a)} \quad (\text{A.1})$$

La contrainte nominale en flexion qui sera égale à:

$$\sigma_N^f = \frac{M_f}{w_f} \quad (\text{A.2})$$

$w_f$  est le module d'inertie de la section considérée qui s'exprime sous la forme:

$$w_f = \frac{I_{xx}}{X_{\max}} \quad (\text{A.3})$$

avec

$$\begin{aligned} X_{\max} &= \frac{W-a}{2} \\ I_{xx} &= \frac{B \cdot (W-a)^3}{12} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

où

$I_{xx}$  est le moment d'inertie de la section du ligament.

Comme la ligne neutre se trouve au milieu du ligament, l'équation du moment de flexion est la suivante:

$$M_f = P \left( a + \frac{W - a}{2} \right) = P \left( \frac{W + a}{2} \right) \quad (\text{A.5})$$

D'où

$$\sigma_N^f = 3 P \frac{W + a}{B(W-a)^2} \quad (\text{A.6})$$

La contrainte nominale totale est la combinaison de la contrainte nominale de traction et celle de flexion:

$$\sigma_N = \sigma_N^t + \sigma_N^f = \frac{P}{B(W-a)} \left( 1 + 3 \frac{W+a}{W-a} \right) \quad (\text{A.7})$$

Comme nous connaissons la relation qui relie la contrainte maximale au facteur d'intensité de contraintes:

$$\sigma_{\max} = \frac{2K_t}{\sqrt{\pi\rho}} \quad (\text{A.8})$$

En remplaçant le facteur d'intensité de contraintes par son expression, nous pouvons exprimer le facteur de concentration  $K_t$  sous la forme:

$$K_t = \frac{2 f\left(\frac{a}{W}\right) (W-a)}{\left( 1 + 3 \frac{W+a}{W-a} \right) \sqrt{\pi\rho W}} \quad (\text{A.9})$$

**RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES.**

- [1] R.E. Peterson., "Stress concentration factor", John Wiley and Sons, New-York, (1974).
- [2] F.I. Baratta, D.M. Neal., "Stress concentration factors in U shaped and semi-elliptical edge notches," Journal of Strain Analysis Vol.5, N°2, pp 121-127, (1970).
- [3] O.L. Boxie., "Analysis of edge notches in a semi-infinite region," Army Materials & Mechanics Research Center AMRA TR 66-07, juin(1966).
- [4] C.E. Inglis., "Stress in a plate due to the presence of cracks and sharp corners," Trans.Instn Nav.Archit, Vol.55 , pp 219, (1913)
- [5] M. Isida, "On the tension of the strip with semicircular notches," Trans.Japan Soc.Mech.Engrs, Vol.19, N°83, pp5, (1953)
- [6] T.H. Topper , M.H. El Haddad, "Fatigue strength prediction of notches based on fracture thresholds," 1st Int.Conf.,Stockholm, Vol.2, EMAS, Warley, U.K, pp 777-797, (1981).
- [7] M.H. El Haddad, T.H Topper et K.N Smith., "Prediction of non propagating cracks," Eng.Fract.Mech,Vol.11, pp 573-584, (1979)
- [8] H. Tada, P.C. Paris & G.R. Irwin., "The stress ananalysis of cracks handbook," Del Research Corp., Hellertown, PA (1973).
- [9] H. Neuber, N.E Frost, K. Marsh & L.P. Pook., "Effect of stress concentration and cracks on fatigue strength," Metal Fatigue, Ed. Oxford U., London W.I, pp 130-200, (1974).
- [10] R.E. Peterson., "Notch Sensitivity," Metal Fatigue, (Edited by G.sines & J.L.Waisman), Mc Graw Hill, New-York, pp 293-306, (1959).

- [11] R.B. Heywood., "Designing by photo-elasticity," Chapman & Hall, London (1952).
- [12] W.J. Harris., "Metallic Fatigue," International Series of Monographs in Aeronautics and Astronautics, Pergamon Press (1961).
- [13] M.T. Yu, D.L. Du Quesnay & T.H. Topper., "Notched fatigue behaviour of two cold rolled steels," Fatigue. Fract. Engng. Mater.Struct. Vol.14, N° 1, pp 89-101, (1991).
- [14] H. Neuber., "Theoretical determination of fatigue strength at stress concentration," Air force Materials Laboratory, Report AFML-TR-68-20, Avril(1968).
- [15] M. Stieler., "Untersuchung ueber die dauerswing festigkeit metallischer bauteile bei raumtemperatur," Dissertation Techn.Hochschule, Stuttgart (1954).
- [16] A. Buch., "Analytical approach to size and notch size effects in fatigue of aircraft material specimens," Materials Science and Engineering, Vol.15, pp 75-85, (1974).
- [17] H. Neuber., "Theory of stress concentration for shear-strained prismatical bodies with arbitrary nonlinear stress-strain law," J. Appl. Mech, Vol.28, pp 544-551, (1969).
- [18] J.D. Morrow, R.M. Wetzel & T.H. Topper., "Laboratory simulation of structural fatigue behaviour," ASTM STP 462 , pp 74-91, (1970).
- [19] E. Stowell., "Stress and strain concentration at a circular hole in an infinite plate", NACA-TN 2073, (1950).
- [20] H.F. Hardrath & L.Ohman., " A study of elastic and plastic stress concentration factors due to notches and fillets in flat plates," NACA Report 1117, (1953).
- [21] B.M. Wundt, "Effect of notches on low-cycle fatigue. A literature survey," ASTM STP 490, (1972).

- [22] E.E. Zwicky, Jr., "Cyclic plastic strain concentration factors.", Transactions ASME, paper 67-WA/PVP-6 (le contenu de cette référence est décrit dans [21]).
- [23] K. Molski, G. Glinka., "A method of elastic-plastic stress and strain calculation at a notch root," Mater.Sci.Engng, N°.50, pp 93-100, (1981).
- [24] J.M. Barsom et R.C. Mc Nicol., "Effect of stress concentration on fatigue crack initiation in HY-130 steel," ASTM STP 559, pp 183-204, (1973).
- [25] A.R. Jack et A.T. Price., "The initiation of fatigue cracks from notches in mild steel plates," International Journal of Fracture Mechanics, Vol.6, N°.4, pp 401-409, Dec.(1970).
- [26] B.A. Bilby, A.H. Cottrell & K.H. Swinden., Proc.Roy.Soc.A.272, pp 304, (1963).
- [27] W.G. Clark, Jr., "Evaluation of the fatigue crack initiation properties of type 403 stainless steel in air and steam environments," ASTM STP 559, pp 205-224, (1974).
- [28] A. Baus, H.P. Lieurade, G. Sanz & M.Truchon., "Etude de l'amorçage des fissures de fatigue sur des éprouvettes en acier à très haute résistance possédant des défauts de formes et de dimensions différentes," CIT du CDS,N°.1, pp 161-190, (1978).
- [29] A. Bignonnet et H. Buthold-Cuan., "Amorçage en fatigue à partir d'une entaille," Proceeding of the 7th International Conference on the Strength of Metals and Alloys, Vol.2, Montreal(Canada), pp 1231-1236, Août (1985).
- [30] X. Zheng., "Local strain range and fatigue crack initiation life," IABSE.Proc., Fatigue colloquium, Lausanne, pp 169-178, Mars (1982).
- [31] M. Truchon., "L'amorçage des fissures de fatigue à partir d'entailles. Application aux joints soudés," Rapport IRSID RE 987, (1982).
- [32] M. Creager et P.C. Paris, "Elastic field equations for blunt cracks with reference to stress corrosion cracking," Int. Jour. Fract., Vol.3, pp 247-252, (1967).

- [33] M. Creager, "The elastic stress field near the tip of blunt crack," Master's Thesis, Lehigh University, (1966).
- [34] P. Rabbe, C. Amzallag, J.C. Devaux et al, "Fatigue et rupture : Applications aux structures," Comptes rendus de la conférence : Matériaux et Structures sous chargement cyclique, Palaiseau, pp 295-304, 28-29 septembre (1978).
- [35] P. Champaud, C. Esnouf et R. Fougères, "Proposition d'un critère d'amorçage des fissures en fatigue de contact Hertzien à partir des évolutions microstructurales du matériau fatigué," Journée de Printemps , Fatigue et Contacts Mécaniques, Ed N°1 de la revue de La S.F.M, pp 159-167, 30-31Mai (1989).
- [36] M.F. Ashby, "Work on hardening of dispersion-hardened cristal," Phil.Mag.Vol.14, (1966).
- [37] G.R. Irwin, "Analysis of stresses and strains near the end of crack traversing a plat," Journal of Applied Mechanics, Transactions of the A.S.M.E, juin (1957).
- [38] F. Erdogan et G.C. Sih, "On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear," J. of Basic Eng , Vol 85, pp 519-527, (1963).
- [39] F.A. Mc Clintock, "Ductile fracture instability in shear," Journal of Applied Mechanics, Vol.25, pp 582-588, (1958).
- [40] M.L. Williams, " Stress singularity resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension," Journal of Applied Mechanics, Vol.19, N°4, pp 526-528, (1952).
- [41] Y. Verreman, J.I. Dickson et J.P. Bailon, "Generalization of the KITAGAWA diagram to V-notch members," Advances in Fatigue Science and Technology, pp 785-798, (1989).
- [42] B. Gross et A. Mendelson, " Plane elastostatic analysis of V-notched plates," International Journal of Fracture Mechanics, Vol.8, N°3, pp 267-276, (1972).

- [43] B. Gross, "Some plane problem elastostatic solutions for plates having a V-notch," Ph.D. thesis, Case Western Reserve University (Jan 1970).
- [44] W.C. Carpenter, "Calculation of fracture mechanics parameters for general corner," *International Journal of Fracture* 24, pp 45-58, (1984).
- [45] K.Y. Lin et Pin. Tong, "Singular finite elements for the fracture analysis of V-notched plate," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.15, pp 1343-1354, (1980).
- [46] A. Seweryn et J. Zwolinski, "Solution for the stress and displacement fields in the vicinity of V-notch of negative wedge angle in plane problems of elasticity," *Eng. Fract. Mech.* Vol.44, N°2, pp 275-281, (1981).
- [47] V.T. Sapounov et E.M. Morozov, *Communication personnelle*, Institut de physique, 31 chaussée Kachizskoe 115409 Moscou (Russie), (1992).
- [48] Xu. Kewein et He. Jiwen, "Prediction on notched fatigue limits for crack initiation and propagation," *Engineering Fracture Mechanics* Vol 41, N°3, pp 405-410, (1992).
- [49] J. Ahmad et N.E. Ashbaugh, " Constant  $K_I$  crack propagation test specimens," *International Journal of Fracture* 19, pp 115-129, (1982).
- [50] L.N.G. Filon, "The stresses in a circular ring," *Selected Engineering Paper* N°12, pp 5-25, (1924).