



HAL
open science

Etude du champ de contraintes d'une plaque possédant une entaille en V avec différentes acuités et application aux mesures de la ténacité des matériaux fragiles

Lisha Niu

► **To cite this version:**

Lisha Niu. Etude du champ de contraintes d'une plaque possédant une entaille en V avec différentes acuités et application aux mesures de la ténacité des matériaux fragiles. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université Paul Verlaine - Metz, 1994. Français. NNT : 1994METZ015S . tel-01776049

HAL Id: tel-01776049

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01776049v1>

Submitted on 24 Apr 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

THESE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DE METZ

par Lisha NIU

en vue l'obtention du titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE METZ

Mention : Sciences de l'Ingénieur N°7642

Intitulé : Mécanique de la Rupture

**Étude du Champ de Contraintes d'une Plaque
Possédant une Entaille En V avec Différentes
Acuités et Application aux Mesures de la Ténacité
des Matériaux Fragiles**

Soutenue le 30 mars 1994, devant la Commission d'Examen

Mlle. C. ROBIN	Professeur à l'École des mines de Douai	(Rapporteur)
Mr. J. BAHUAUD	Professeur à l'I.N.S.A. de Lyon	(Rapporteur)
Mr. C. CHEHIMI	Maître de conférences à l'Université de Nancy I	
Mr. G. MESMACQUE	Professeur à l'Université de Lille	
Mr. G. PLUVINAGE	Professeur à l'Université de Metz	(Président)

THESE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DE METZ

par **Lisha NIU**

en vue l'obtention du titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE METZ

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv.	19940455
Cote	S/M3 94/15
Loc	Magasin

Mention : Sciences de l'Ingénieur N°7642

Intitulé : Mécanique de la Rupture

Étude du Champ de Contraintes d'une Plaque Possédant une Entaille En V avec Différentes Acuités et Application aux Mesures de la Ténacité des Matériaux Fragiles

Soutenue le 30 mars 1994, devant la Commission d'Examen

Mlle. C. ROBIN	Professeur à l'École des mines de Douai	(Rapporteur)
Mr. J. BAHUAUD	Professeur à l'I.N.S.A. de Lyon	(Rapporteur)
Mr. C. CHEHIMI	Maître de conférences à l'Université de Nancy I	
Mr. G. MESMACQUE	Professeur à l'Université de Lille	
Mr. G. PLUVINAGE	Professeur à l'Université de Metz	(Président)

REMERCIEMENTS

Ce travail a été effectué au Laboratoire de Fiabilité Mécanique de l'Université de METZ sous la direction de Monsieur le Professeur G. PLUVINAGE. Qu'il trouve ici l'expression de ma gratitude pour le soutien et l'aide qu'il m'a constamment fournis.

Je remercie vivement Monsieur le professeur J. BAHUAUT pour son offre de références essentielles et utiles.

Mes remerciements s'adressent vivement à mademoiselle C. ROBIN qui a largement contribué à la réalisation de ce travail.

Mes remerciements s'adressent également à monsieur Ph. JODIN pour sa collaboration efficace et aussi pour son aide à la compréhension de la référence en allemand.

Je remercie chaleureusement les membres du laboratoire auprès desquels j'ai toujours reçu une aide précieuse. Ici je tiens à exprimer mes remerciement à Messieurs CHEHIMI, AZARI, CAGNON, TAMINE, NDIAYE, LABIBES, BOUKHAROUBA, DOSSOU.

Mes remerciement s'adressent également à Mademoiselle ROBIN et Messieurs BAHUAUT, MESMACQUE, CHEHIMI et PLUVINAGE qui ont bien voulu prendre le temps d'examiner ce travail et qui m'ont fait l'honneur de participer au Jury.

SOMMAIRE

	<u>INTRODUCTION GÉNÉRALE</u>	1
PARTIE-1	<u>ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE</u>	4
	<u>INTRODUCTION</u>	5
CHAPITRE I.	<u>CHAMP DE CONTRAINTES EN FOND D'ENTAILLE POUR UNE PLAQUE INFINIE</u>	7
I.1.	Singularité de contraintes en fond d'entaille aiguë en V	7
1.1	Fonction de contraintes de Westergaard	7
1.2	Méthode de Williams	9
I.2	Distribution de contraintes en fond d'entaille émoussée	14
2.1	Méthode de Creager	14
2.2	Méthode de Neuber	15
CHAPITRE II.	<u>CHAMP DE CONTRAINTES EN FOND D'ENTAILLE POUR UNE PLAQUE DE DIMENSIONS FINIES</u>	19
II.1	Méthode de l'équation intégrale de Barone et Robinson	19
1.1	Cas de l'entaille aiguë en V	19
1.2	Cas de l'entaille émoussée en V	22
II.2	Méthode de la transformation conforme	24
2.1	Transformation conforme appliquée à une plaque entaillée	24
2.2	Calcul du champ de contraintes en fond d'entaille	26

CHAPITRE III.	<u>ÉTUDE DU FACTEUR D'INTENSITÉ DE CONTRAINTES</u>	28
III.1	Méthode utilisant une intégrale indépendante du contour	29
III.2	Calcul du facteur d'intensité de contraintes sur une plaque de dimensions finis avec une entaille en V	32
III.3	Méthode de Hasebe pour le calcul du facteur d'intensité de contraintes d'une entaille émoussée	36
3.1	Cas de l'entaille aiguë avec l'état de contraintes symétrique	36
3.2	Entaille émoussée avec l'état de contraintes symétrique	38
3.3	Relation entre le facteur d'intensité d'entaille et le coefficient de concentration de contraintes	38
3.4	Relation entre le critère d'amorçage de rupture à partir d'une fissure et celui à partir d'une entaille	40
III.4	Critère de stabilité d'une entaille	41
	<u>CONCLUSION</u>	45
PARTIE-2	<u>UTILISATION DE LA MÉTHODE DE LA TRANSFORMATION CONFORME</u>	46
	<u>INTRODUCTION</u>	47
CHAPITRE IV.	<u>TRANSFORMATION CONFORME SUR UNE PLAQUE POSSÉDANT UNE ENTAILLE AIGUË OU ÉMOUSSÉE</u>	48
IV.1	Transformation conforme sur une plaque possédant une entaille aiguë	48
1.1	Première transformation	48
1.2	Deuxième transformation	51
1.3	Représentation approximative	52
1.4	Calcul numérique	53

IV.2	Cas d'une entaille émoussée avec un rayon relative petit	59
2.1	Modification de la fonction de Schwartz -Cristoffel	59
2.2	Détermination du rayon en fond d'entaille	61
2.3	Exemple du calcul	62
IV.3	Cas des rayon à fond d'entaille est relativement importants	64
3.1	Modification de la formule de transformation	65
3.2	Méthode du calcul numérique	67
3.3	Exemples	68
CHAPITRE V.	<u>CHAMP DE CONTRAINTE EN FOND D'ENTAILLE</u>	74
V.1	Calcul des contraintes en coordonnées curvilignes	74
1.1	Fonctions potentielles en élasticité	74
1.2	Équations des contraintes en coordonnées curvilignes	75
V.2	Contraintes en représentation conforme	76
2.1	Contraintes en fonction des expressions de Kolosov	76
2.2	Contraintes à l'aide des fonctions de Muskhelishvili	77
2.3	Solution des équations de contraintes	78
V.3	Détermination de $\Phi(\zeta)$ et $\Psi(\zeta)$	79
3.1	Forme générale de $\Phi(\zeta)$	79
3.2	Détermination des coefficients	82
3.3	Expression de $\Phi(\zeta)$ et $\Psi(\zeta)$	83
V.4	Calcul du champ de contraintes	84
4.1	Programme de calcul	84
4.2	Comparaison les résultats avec la méthode des éléments finis	85
4.3	Comparaison les résultats avec la méthode d'équations d'intégrales de Barone et Robinson	88
V.5	Distribution de contraintes dans une plaque soumise à différents types de chargement	90
5.1	Éprouvette CT soumise à une charge concentrée	90
5.2	Éprouvette CT soumise à une traction uniformément répartie	93
5.3	Éprouvette soumise à la flexion simple	95
5.4	Cas d'un joint soudé	97
	<u>CONCLUSION</u>	103

PARTIRE-3. <u>ANALYSE DE LA TÉNACITÉ DES MATÉRIAUX</u>	105
<u>INTRODUCTION</u>	106
CHAPITRE VI. <u>FACTEUR D'INTENSITÉ DE CONTRAINTES SUR DES PLAQUES ENTAILLÉES</u>	107
VI.1 Rappel de la définition des facteurs d'intensité de contraintes	107
VI.2 Caractéristiques du champ de contraintes en fond d'entaille	109
VI.3 Facteur de concentration de contraintes dans le cas d'une entaille émoussée	112
VI.4 Relation entre la distance significative et l'acuité d'entaille	114
VI.5 Facteur d'intensité de contraintes d'entaille dans le cas d'une entaille émoussée	117
5.1 Développement de la méthode de Hasebe	117
5.2 Développement de la méthode de Lukas	118
5.3 Détermination de la distance caractéristique X_c	121
VI.6 Résumé des résultats	123
CHAPITRE VII. <u>TÉNACITÉ DES MATÉRIAUX FRAGILES</u>	124
VII.1 Rappel des méthodes de calcul employées	124
VII.2 Essais de la rupture sur un matériau de molybdene	125
VII.3 Evaluation de la ténacité du matériau	128
<u>CONCLUSION</u>	132
<u>CONCLUSION GÉNÉRALE</u>	133
<u>ANNEXE</u>	135
<u>RÉFÉRENCES</u>	145

INTRODUCTION GÉNÉRALE

L'analyse de la distribution des contraintes et le calcul du facteur d'intensité de contraintes dans le cas d'une entaille aiguë en V ont été largement étudiés avec des différentes méthodes. Toutefois, moins d'attention ont été prêtées au problème d'une entaille émoussée en V.

Une telle étude peut prendre une place essentielle dans le domaine de la mécanique de la rupture. La première raison, tient du fait que pour des matériaux du comportement élasto-plastique, la pointe de fissure ou d'entaille sera émoussée quand elle est soumise à une sollicitation à cause de la déformation plastique. La deuxième, résulte simplement que tous les défauts réels des matériaux ne peuvent pas forcément être considérés comme une fissure ou une entaille idéale. On rencontre souvent des défauts possédant l'acuité relativement importante. En outre, pour des matériaux très fragiles, la ténacité de la rupture ne peut être déterminée qu'à partir d'une éprouvette possédant une entaille émoussée en raison de la difficulté de préparer une pré-fissure.

Les raisons nous ont incité à obtenir le champ de contraintes au voisinage d'un fond d'entaille émoussée, et ensuite à trouver les relations entre les paramètres géométriques et mécaniques afin de déterminer une grandeur appelée le facteur d'intensité de contraintes d'entaille.

Nous avons particulièrement axé notre étude sur le cas d'une entaille émoussée en V qui est plus complexe que celui d'une entaille aiguë. Dans un plan infini, une entaille aiguë en V est déterminée par un paramètre, l'angle d'entaille. Pour décrire une entaille émoussée en V, deux paramètres sont nécessaires, l'angle d'entaille et l'acuité en fond d'entaille. Ce ci entraîne à la fois une complication mathématique et une difficulté dans la définition de la caractéristique du matériau qui représente la zone d'élaboration du processus de rupture.

Dans le cas d'une plaque infinie, il faut citer deux contributions importantes : La première, dans les années 50 de Williams [1] qui a étudié le champ élastique de contraintes et de déplacements en fond d'entaille aiguë en V. L'expression de composants a été déduite à partir d'une fonction d'Airy. La deuxième, en 1958, par Neuber [11] qui a porté ses efforts sur le calcul de la distribution des contraintes en fond d'entaille émoussée. Les formes d'entaille examinées étaient elliptiques, paraboliques et hyperboliques.

Dans le cas d'une plaque de dimensions finies, la transformation conforme couplée avec les équations de l'élasticité utilisant des variables complexes est une des méthodes les plus efficaces pour calculer la distribution des contraintes et des déformations. Dans ce domaine, Bahuaud, Vessiere et Lhermet [19] ont étudié le champ de contraintes dans une plaque rectangulaire possédant une entaille aiguë ou de faible acuité.

Dans notre étude, la méthode de la transformation conforme de Schwartz-Cristoffel a été améliorée et développée pour déterminer le champ de contraintes au voisinage d'une entaille avec une acuité importante dans une plaque finie. Nous avons utilisé une technique d'itération pour l'approche de la transformation exacte que nous souhaitons obtenir. Le calcul a été aussi développé pour d'autres pièces telle qu'un joint soudé ou des entailles elliptiques et paraboliques dans certains cas.

Notre attention a aussi porté sur l'établissement d'une relation entre le facteur d'intensité de contraintes d'entaille et l'acuité de l'entaille. La détermination de la ténacité de matériaux extrêmement fragiles comme un alliage de molybdène a été étudiée, car dans ce cas la fissuration des éprouvettes sans rupture brutale est pratiquement impossible.

le présent mémoire est divisé en trois parties :

La première concerne l'historique et une synthèse bibliographique. Nous nous y rappelons les méthodes diverses pour calculer le champ de contraintes et le facteur d'intensité de contraintes pour une entaille aiguë ou émoussée.

La deuxième partie concerne le calcul de la distribution des contraintes sur une plaque possédant une entaille par transformation conforme. Une plaque avec une entaille émoussée en V a été particulièrement étudiée. Ce problème introduit une complication mathématique importante. Une modification de la méthode de transformation a été développée afin de résoudre la difficulté de transformer l'image du fond d'entaille. Des plaques entaillées avec différents angles d'entaille et différentes formes ont été examinées. Pour obtenir la distribution de contraintes dans toute la plaque, les équations des variables complexes de Kolosov-Muskhelishvili sont utilisées. Le niveau de contraintes en fonction de la distance du fond d'entaille et de l'acuité d'entaille peut ainsi être obtenu en détail.

Nous présenterons dans la troisième partie, l'établissement d'un facteur d'intensité de contraintes d'entaille pour le cas d'une entaille émoussée. La difficulté rencontrée s'explique en raison du fait de l'introduction de plus de coefficients que dans le cas d'une fissure ou d'une entaille aiguë. Une proposition est faite pour définir le facteur d'intensité de contraintes d'entaille qui définit la contrainte en fond d'entaille émoussée ainsi que son gradient. Ensuite, nous étudierons le facteur d'intensité de contraintes critique qui peut être considéré comme un paramètre décrivant la ténacité d'un matériau fragile entaillé.

PREMIÈRE PARTIE :

ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE

INTRODUCTION

**I CHAMP DE CONTRAINTES EN FOND D'ENTAILLE
POUR UNE PLAQUE INFINIE**

**II CHAMP DE CONTRAINTES EN FOND D'ENTAILLE
POUR UNE PLAQUE DE DIMENSIONS FINIES**

**III ÉTUDE SUR LE FACTEUR D'INTENSITÉ DE
CONTRAINTES**

CONCLUSION

PREMIÈRE PARTIE : ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE

INTRODUCTION

La détermination de la distribution des contraintes au voisinage très proche d'un fond d'entaille et le calcul du facteur d'intensité de contraintes pour différentes formes d'entaille présentent un récent regain d'intérêt en mécanique de la rupture. Des études sur l'entaille en V depuis les années 50 avaient été développées par différentes méthodes.

Williams a étudié la singularité de contraintes élastiques en fond d'une entaille en V aiguë dans un plan infini à partir de la théorie de l'élasticité classique en utilisant la fonction de contraintes d'Airy [1]. Le facteur d'intensité de contraintes pour une entaille ainsi obtenu s'accorde avec la définition du facteur d'intensité de contraintes pour une fissure déduit des analyses de Westergaard [2] et d'Irwin [3] si l'on considère qu'une fissure est une entaille d'angle nul. La méthode de Williams a été développée pour le cas d'un comportement élastoplastique à écrouissage linéaire [4] et non-linéaire [5], et le comportement de deux matériaux soudés [6].

Pour l'analyse de la singularité de contraintes en fond d'une entaille aiguë, une autre méthode utilise une intégrale indépendante du contour [7]. Cette intégrale est similaire à celle déduite des travaux de Rice [8] que l'on utilise pour les problèmes de rupture élastoplastique.

Creager et Paris [9] [10] ont donné une méthode pour calculer la distribution des contraintes en fond d'une fissure émoussée dans un plan infini. La fissure est considérée comme un trou elliptique dont le demi-axe majeur a est beaucoup plus grand que le demi-axe mineur b , c'est à dire $a \gg b$. Ils ont calculé le facteur d'intensité de contraintes pour une fissure émoussée. Neuber [11] a étudié le problème d'une entaille émoussée et en a déduit des expressions pour calculer la distribution des contraintes en fond d'entailles elliptiques, paraboliques ou hyperboliques. Il a pour cela proposé l'introduction d'un rayon fictif. Les résultats ont été utilisés pour étudier l'amorçage d'une fissure en fond d'entaille.

Le cas de l'analyse du champ de contraintes en fond d'entaille sur une plaque de dimensions finies est plus complexe que celui d'une plaque infinie. L'effet de bornes doit alors être considéré. Dans ce domaine, les études sont moins nombreuses que celles effectuées sur une plaque infinie. Les méthodes essentielles développées sont la méthode des éléments finis, la méthode de la collocation [12], la méthode de l'intégrale de contour [13] et la méthode de la transformation conforme [14].

La méthode de l'intégrale de contour a été utilisée d'abord par Rzasnicki [13] pour étudier le cas d'une entaille en V sur une plaque rectangulaire ; puis cette méthode a été développée par Barone et Robinson [15]. De bons résultats ont été obtenus avec peu de points aux bornes. Nikooney et Robinson [16] ont modifié la solution précédente et ont déterminé les contraintes et les déplacements proches du fond d'entaille.

La méthode de la transformation conforme de Schwartz-Cristoffel [17] est un moyen très efficace pour résoudre le problème de l'entaille sur une plaque de dimensions finies en couplant les fonctions de variables complexes de Muskhelishvili [18]. La distribution des contraintes et des déplacements est calculée avec une grande précision pour une plaque rectangulaire possédant une entaille en V aiguë. Lherment et Bahuaud [19] ont développé cette méthode dans le cas d'une entaille de rayon faible et ont obtenu des résultats satisfaisants.

Le calcul du facteur d'intensité de contraintes pour l'entaille en V aiguë a été étudié de façon efficace en déterminant l'ordre de singularité en fonction de l'angle d'entaille. Mais pour une entaille émoussée, l'évaluation du facteur d'intensité de contraintes devient très délicate car le caractère de singularité de contraintes disparaît. Hasebe [20-22] a établi une relation entre la concentration de contraintes et le facteur d'intensité de contraintes. Il a proposé une expression du facteur d'intensité de contraintes pour une fissure courte dans les cas d'une entaille aiguë et d'une entaille de rayon faible.

I CHAMP DE CONTRAINTES EN FOND D'ENTAILLE POUR UNE PLAQUE INFINIE

I.1 SINGULARITÉ DE CONTRAINTES EN FOND D'ENTAILLE AIGUË EN V

I.1.1 Fonction de contraintes de Westergaard [2]

La fonction de contraintes d'Airy χ , qui est une fonction biharmonique, est utilisée pour résoudre les problèmes d'élasticité à deux dimensions et peut être représentée par des fonctions complexes :

$$\chi = \operatorname{Re} \bar{\bar{Z}}_1 + y \operatorname{Im} \bar{Z}_1 \quad (\text{I.1-1})$$

ici, **Re** représente la partie réelle et **Im** la partie imaginaire.

$$\text{où : } \quad \bar{\bar{Z}}_1 = \frac{d\bar{\bar{Z}}_1}{dz} , \quad Z_1 = \frac{d\bar{Z}_1}{dz} , \quad z = x + iy$$

Dans la formule (I.1-1), $Z_I(z)$ est la fonction de contraintes de Westergaard [2] et est souvent utilisée pour une structure fissurée à deux dimensions. L'indice inférieur I dans la fonction d'Airy et la fonction de Westergaard indique que le problème est relatif au mode d'ouverture ou " le mode I " de la déformation en fond de fissure.

Les composantes de contraintes associées s'expriment par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \operatorname{Re} Z_1' - y \operatorname{Im} Z_1' \\ \sigma_{yy} &= \operatorname{Re} Z_1' + y \operatorname{Im} Z_1' \\ \sigma_{xy} &= -y \operatorname{Re} Z_1' \end{aligned} \quad (\text{I.1-2})$$

où:

$$Z_1' = \frac{dZ_1}{dz}$$

Dans le cas d'un plan infini contenant une fissure définie par les coordonnées de ses extrémités $(-a, 0)$ et $(a, 0)$ (voir figure [I.1]), la fonction de Westergaard peut être représentée par :

$$Z_I = \frac{g(z)}{(z^2 - a^2)^{1/2}} \quad (\text{I.1-3})$$

ici, $g(z)$ est une fonction analytique qui dépend de la géométrie du plan et des conditions aux limites. Dans le cas de l'application d'une contrainte uniforme σ_g dans un plan infini, on a simplement, $g(a) = \sigma_g a$.

En général, on s'intéresse à une petite zone autour du fond de fissure et dans ce cas, toutes les fonctions de contraintes peuvent être exprimées en fonction des coordonnées polaires locales (figure [I.1]), la fonction de Westergaard devient alors :

$$Z_I = f(t)\sqrt{t} \quad (\text{I.1-4})$$

avec $t = r e^{i\theta}$.

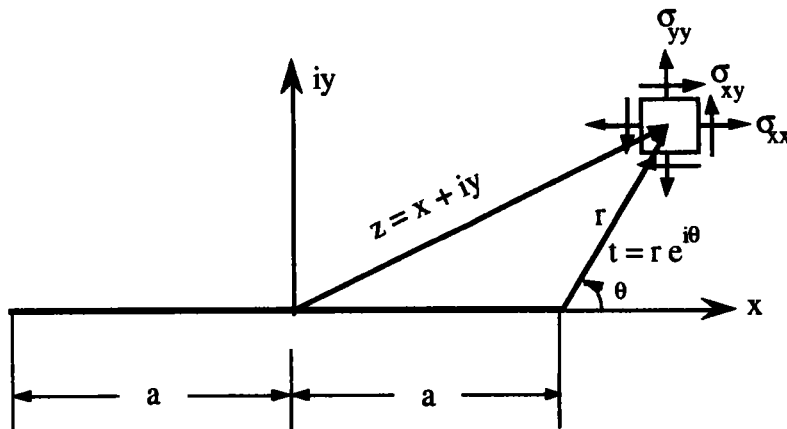


Figure [I.1]: Définition d'une fissure dans un plan infini

Toutefois, quand $r \rightarrow 0$ et $\theta = 0$, pour le mode I, la fonction complexe analytique $f(t)$ s'approche d'une valeur constante réelle, $K_I / (2\pi)^{1/2}$. K_I est nommé " le facteur d'intensité de contraintes en mode I " et est défini par la formule suivante :

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{yy} (r, \theta=0) (2\pi r)^{1/2} \quad (\text{I.1-5})$$

Les contraintes locales représentées en fonction des coordonnées locales polaires deviennent :

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \cos \frac{\theta}{2} (1 - \sin \frac{1}{2}\theta \sin \frac{3}{2}\theta) + \sigma_{ox} + \sum_{n=3}^{\infty} (A_n^{n/2}) r^{\frac{1}{2}n-1} \\ &\quad * \left[\left\{ 2 + (-1)^n + \frac{1}{2}n \right\} \cos \left(\frac{1}{2}n - 1 \right) \theta - \left(\frac{1}{2}n - 1 \right) \cos \left(\frac{1}{2}n - 3 \right) \theta \right] \\ \sigma_{yy} &= \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \cos \frac{\theta}{2} (1 + \sin \frac{1}{2}\theta \sin \frac{3}{2}\theta) + \sum_{n=3}^{\infty} (A_n^{n/2}) r^{\frac{1}{2}n-1} \\ &\quad * \left[\left\{ 2 - (-1)^n - \frac{1}{2}n \right\} \cos \left(\frac{1}{2}n - 1 \right) \theta + \left(\frac{1}{2}n - 1 \right) \cos \left(\frac{1}{2}n - 3 \right) \theta \right] \\ \sigma_{xy} &= \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{1}{2}\theta \cos \frac{3}{2}\theta - \sum_{n=3}^{\infty} (A_n^{n/2}) r^{\frac{1}{2}n-1} \\ &\quad * \left[\left\{ (-1)^n - \frac{1}{2}n \right\} \sin \left(\frac{1}{2}n - 1 \right) \theta - \left(\frac{1}{2}n - 1 \right) \sin \left(\frac{1}{2}n - 3 \right) \theta \right]\end{aligned}\tag{I.1-6}$$

Si la zone de contraintes est très proche du fond de fissure, l'utilisation des premiers termes de la série dans l'expression (I.1-6) donne une précision suffisante pour calculer les composantes de contraintes. Avec cette définition, K_I fixe la singularité de contraintes en fond de fissure.

I.1.2 Méthode de Williams

L'étude de la singularité élastique sur une plaque infinie avec une entaille en V aiguë a été effectuée la première fois en 1952 par Williams [1]. L'expression de contraintes au voisinage du fond d'entaille en a été déduite.

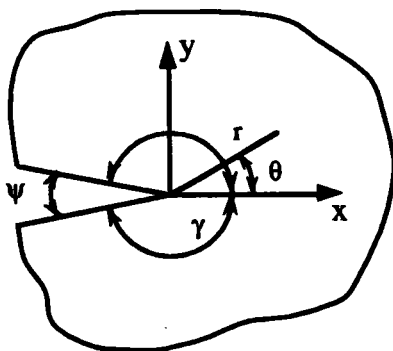


Figure [I.2] : Définition de l'entaille en V aiguë.

Considérons une zone près de la pointe de l'entaille possédant un angle d'ouverture $\psi = 2(\pi - \gamma)$ représentée par la figure [I.2]. Cette zone est définie par $\{(r, \theta) \mid 0 < r < \infty, -\gamma < \theta < \gamma\}$; (r, θ) sont les coordonnées polaires d'un point arbitraire de cette zone mesurées à partir du fond d'entaille.

Par analogie, une fissure peut être représentée comme une entaille possédant un angle d'ouverture nul. ($\gamma = 180^\circ$ ou $\psi = 0$).

Le problème a été étudié dans le cadre de la théorie de l'élasticité. Les équations d'équilibre s'expriment par :

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \quad (\text{I.1-7})$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} = 0$$

Les relations déformation-déplacement s'écrivent :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\theta\theta}}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (\text{I.1-8})$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_{\theta}}{\partial r} - \frac{u_{\theta}}{r}$$

ici u_r et u_{θ} sont respectivement les composantes radiale et angulaire du déplacement.

Quand le comportement du matériaux est élastique linéaire, les relations contraintes-déformations d'un système plan s'écrivent :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{1}{E'} (\sigma_{rr} - \nu \sigma_{\theta\theta}) \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{E'} (\sigma_{\theta\theta} - \nu \sigma_{rr}) \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{2(1+\nu)}{E'} \sigma_{r\theta} \end{aligned} \quad (\text{I.1-9})$$

ici, $E' = E$ pour le problème de contraintes planes et $E' = E/(1-\nu^2)$ pour le problème de déformations planes ; E est la limite d'élasticité et ν le coefficient de Poisson.

En introduisant la fonction de contraintes d'Airy χ , on peut exprimer les contraintes à partir des relation suivantes :

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} \\ \sigma_{r\theta} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \chi}{\partial \theta}\end{aligned}\tag{I.1-10}$$

l'équation de compatibilité s'écrit :

$$r^{-1} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \varepsilon_{\theta\theta}) + r^{-2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (\varepsilon_{rr}) - r^{-1} \frac{\partial}{\partial r} (\varepsilon_{rr}) - 2 r^{-2} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial \theta}) = 0\tag{I.1-11}$$

Avec la formule (I.1-10) l'équation de compatibilité (I.1-11) devient une équation biharmonique :

$$\nabla^4 \chi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2 \chi = 0\tag{I.1-12}$$

Nous introduisons la fonction de contraintes d'Airy χ sous la forme suivante [23] :

$$\chi = r^{-(\lambda-2)} [A \cos(\lambda-2)\theta + B \sin(\lambda-1)\theta \sin \theta]\tag{I.1-13}$$

Ici, A et B sont constantes. λ est un paramètre qui dépend de l'angle d'entaille ψ .

Cette fonction satisfait l'équation biharmonique (I.1-12). Les constantes A et B peuvent être déterminées par les conditions aux limites le long de deux faces de l'entaille qui est un bord libre :

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{r\theta} = 0 \quad \text{quand} \quad \theta = \pm \gamma$$

Introduisons la formule (I.1-13) dans les équations (I.1-10) et utilisons les équations (I.1-8) et (I.1-9). Nous obtenons les équations qui expriment les composants de contraintes σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ et $\sigma_{r\theta}$ au voisinage de l'entaille en V pour le mode I :

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{K_I^*}{C_1 (2\pi r)^\lambda} \left[\cos(\lambda - 2)\theta \cos\lambda\gamma - \frac{\lambda + 2}{\lambda - 2} \cos(\lambda - 2)\gamma \cos\lambda\theta \right] \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{K_I^*}{C_1 (2\pi r)^\lambda} \left[-\cos(\lambda - 2)\theta \cos\lambda\gamma + \cos(\lambda - 2)\gamma \cos\lambda\theta \right] \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{K_I^*}{C_1 (2\pi r)^\lambda} \left[\sin(\lambda - 2)\theta \cos\lambda\gamma - \frac{\lambda}{\lambda - 2} \cos(\lambda - 2)\gamma \sin\lambda\theta \right]\end{aligned}\tag{I.1-14}$$

$$\begin{aligned}u_r &= \frac{K_I^*}{2C_1 G (1 - \lambda) (2\pi r)^\lambda} \left[\cos(\lambda - 2)\theta \cos\lambda\gamma - \frac{\lambda + 2\frac{1 - \nu}{1 + \nu}}{\lambda - 2} \cos(\lambda - 2)\gamma \cos\lambda\theta \right] \\ u_\theta &= \frac{K_I^*}{2C_1 G (1 - \lambda) (2\pi r)^\lambda} \left[\sin(\lambda - 2)\theta \cos\lambda\gamma - \frac{\lambda - \frac{4}{1 + \nu}}{\lambda - 2} \cos(\lambda - 2)\gamma \sin\lambda\theta \right]\end{aligned}\tag{I.1-15}$$

où : $C_1 = \cos(\lambda - 2)\gamma - \cos\lambda\gamma$

Dans les relations (I.1-14) $K_I^*(\gamma)$ est le facteur d'intensité de contraintes pour l'entaille en V.

$$K_I^*(\gamma) = \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{\theta\theta}(\gamma, \theta = 0) (2\pi r)^\lambda\tag{I.1-16}$$

Les valeurs propres de λ dépendent à l'angle d'entaille γ et peuvent être déduites par les conditions aux limites sur les deux faces libres de l'entaille :

$$\sin 2(\lambda - 1)\gamma = \pm (\lambda - 1)\sin 2\gamma\tag{I.1-17}$$

Chaque racine de l'équation (I.1-17) correspond à une solution complète de l'équation (I.1-13). En particulier, nous nous intéressons à trouver le minimum de la partie réelle de la valeur propre λ , $\text{Min}(\text{Re } \lambda)$. Celle-là représente le caractère de la singularité de contraintes et de déplacements en fond d'entaille.

L'évolution de la valeur positive minimale de λ est représentée en fonction de l'angle d'entaille dans la figure [I.3]. On constate que λ augmente de façon monotone au fur et à mesure que l'angle d'entaille ($360^\circ - 2\gamma$) diminue (voir figure [I.3]).

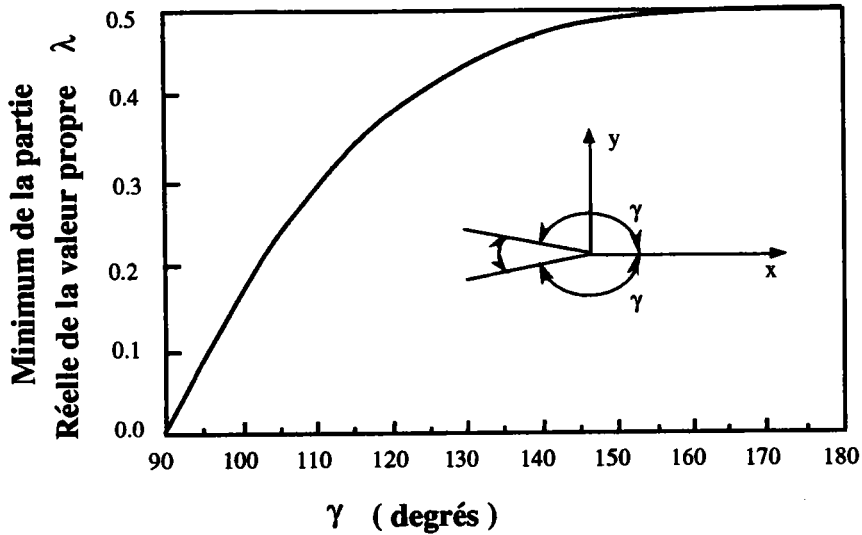


Figure [1.3] : Relation entre la singularité de contraintes λ et l'angle d'entaille.

Récemment, le modèle de Williams a été développé dans le cas d'un comportement du matériau à écrouissage linéaire [4]. les équations d'équilibre et les relations déformation-déplacement sont identiques à (I.1-7), (I.1-8) et sont aussi linéaires.

Le comportement du matériau est décrit par la théorie de la plasticité :

$$E_t \varepsilon_{ij} = \alpha [(1 + \nu) \sigma_{ij} - \nu \sigma_{kk} \delta_{ij}] + \frac{3}{2} (1 - \alpha) (1 - Re \sigma_e^{-1}) s_{ij}; \quad \text{pour } \sigma_e > Re$$

$$E_t \varepsilon_{ij} = \alpha [(1 + \nu) \sigma_{ij} - \nu \sigma_{kk} \delta_{ij}]; \quad \text{pour } \sigma_e < Re \quad (I.1-18)$$

ici : Re est la limite l'élasticité en traction ; E_t le module tangent du matériau en traction ; E le module de Young ; $\alpha = E/E_t$; σ_e est la contrainte effective, elle est définie par :

$$\sigma_e = \left[\frac{3}{2} S_{ij} S_{ij} \right]^{1/2} \quad (I.1-19)$$

et S_{ij} est le déviateur des contraintes représenté par :

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (I.1-20)$$

Dans une zone autour du fond d'entaille, les contraintes dépassent la limite d'élasticité. c'est à dire que σ_e devient très grande et $\sigma_{yy} \sigma_e^{-1} \ll 1$. Dans cette zone, le comportement peut s'exprimer par :

$$E_t \varepsilon_{ij} = \alpha [(1 + \nu) \sigma_{ij} - \nu \sigma_{kk} \delta_{ij}] + \frac{3}{2} (1 + \alpha) S_{ij} \quad (I.1-21)$$

En utilisant la même forme de la fonction d'Airy, nous pouvons obtenir le champ de contraintes et de déformations en fond d'entaille [4].

I.2 DISTRIBUTION DE CONTRAINTES EN FOND D'ENTAILLE ÉMOUSSÉE

I.2.1 Méthode de Creager

Creager et Paris [9, 10] ont étudié la distribution de contraintes au voisinage d'une entaille elliptique.

Ils considèrent un trou elliptique dans une plaque infinie soumise à une contrainte globale dans la direction de l'axe de l'ellipse comme le montre la figure [I.4] ; a et b sont respectivement les longueurs du demi-grand axe et du demi-petit axe, $\rho = b^2/a$ est le rayon de courbure en fond d'entaille.

On utilise un système de coordonnées locales polaires dont l'origine se situe en $(a-\rho/2, 0)$, représenté dans la figure [I.4]. Si la condition $\rho/a \ll 1$ est satisfaite, à partir des équations de Timoshko [24], la distribution de contraintes au voisinage du point $(a, 0)$ peut s'exprimer par les formules suivantes [9] [10] :

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] - \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \frac{\rho}{2r} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] + \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \frac{\rho}{2r} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} - \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \frac{\rho}{2r} \sin \frac{3\theta}{2} \end{aligned} \quad [I.2-1]$$

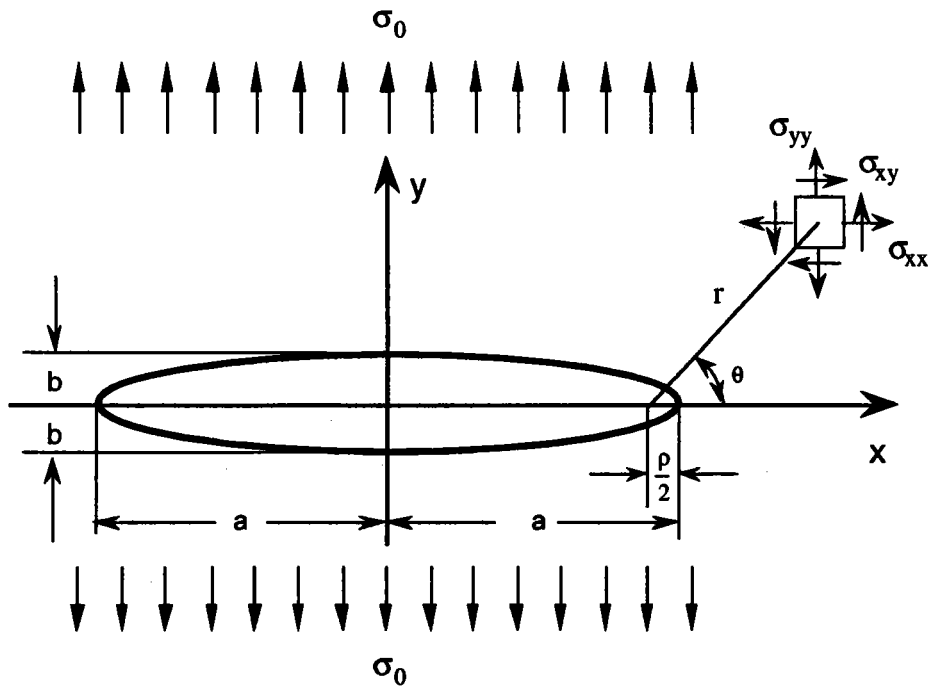


Figure [1.4] : Définitions liées à la géométrie d'un trou elliptique et les conditions aux limites dans la plaque infinie.

Le facteur d'intensité de contraintes pour cette fissure émoussée est alors définie par l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
 K_I(\rho) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \lim_{\rho \rightarrow 0} \sigma_{yy} \left(r = \frac{\rho}{2}, \theta = 0, \rho \right) \rho^{1/2} \\
 &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \lim_{\rho \rightarrow 0} \sigma_{yy}^{\max}(\rho) \rho^{1/2}
 \end{aligned}
 \tag{I.2-2}$$

I.2.2 Méthode de Neuber [11] [30]

Neuber a apporté une contribution importante à l'étude de la distribution des contraintes en fond d'entaille émoussée. Les formes d'entaille étudiées sont elliptiques, paraboliques et hyperboliques. Nous présentons ici le cas d'une entaille parabolique dans un plan infini soumise à une sollicitation symétrique.

dans ce cas, on définit les plans géométriques des z et des w par les relations suivantes :

$$z = w^2 ; \quad x = u^2 - v^2 ; \quad y = 2uv \quad (\text{I.2-3})$$

Le long de la parabole $u = u_0$, le plus petit rayon de courbure ρ se trouve du fond d'entaille où $v = 0$ et vaut :

$$\rho = 2 u_0^2 \quad (\text{I.2-4})$$

et au même point on a :

$$x = x_0 = u_0^2 = \rho / 2 \quad (\text{I.2-5})$$

Considérons les conditions aux limites sur l'entaille $u = u_0$ soumise à une sollicitation symétrique, les composantes des contraintes s'écrivent [11] :

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= 2C_1 \frac{(u^2 - u_0^2)u}{(u^2 + v^2)^2} \\ \sigma_{vv} &= 2C_1 \frac{u^3 + u_0^2 u + 2uv^2}{(u^2 + v^2)^2} \\ \sigma_{uv} &= 2C_1 \frac{(u^2 - u_0^2)v}{(u^2 + v^2)^2} \end{aligned} \quad (\text{I.2-6})$$

C_1 est une constante réelle par analogie avec la mécanique de la rupture. Cette constante peut être remplacée par $K_I / (2 \sqrt{2\pi})$ pour $y = 0$ et $u \rightarrow 0$.

Dans un plan de symétrie, on a $v = 0$ et donc $u = x^{1/2}$, d'où :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = \sigma_{zz} &= 2C_1 (u^{-1} - u_0^2 u^{-3}) \\ \sigma_{yy} = \sigma_{vv} &= 2C_1 (u^{-1} + u_0^2 u^{-3}) \\ \sigma_{uv} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{I.2-7})$$

La distribution des contraintes ainsi obtenue, est montrée dans la figure [I.5]. On remarque la croissance rapide de la contrainte principale σ_{yy} . La seconde contrainte principale σ_{xx} qui en accord avec les conditions aux limites est nulle sur le bord, croît rapidement et

atteint à la distance ρ du bord sa valeur maximale de $\frac{\sqrt{3}}{9} \sigma_{\max}$. Au même endroit, σ_{yy} égale à deux fois plus grand que σ_{xx} . La contrainte maximale prend la valeur :

$$\sigma_{yy}^{\max} = 4C_1/u_0 = 4\sqrt{2}C_1/\rho^{1/2} \quad (u_0 = \sqrt{\rho/2} \quad \text{par (I.2-5)}) \quad (\text{I.2-8})$$

Pour prédire l'amorçage de la fissure en fond d'entaille, les caractéristiques microstructurales du matériau doivent être prises en compte. Neuber a proposé comme critère de la rupture, la ténacité K_{IC} . Pour tenir compte de l'effet de la microstructure, il a défini un rayon fictif ρ_f [11] [30] [31] tel que :

$$\rho_f = \rho + s\rho^* \quad (\text{I.2-9})$$

Où ρ_f est le rayon fictif; ρ est le rayon réel de l'entaille; ρ^* est la longueur de la caractéristique microstructurale du matériau représentée à la figure [I.6] (c'est une constante du matériau) ; le facteur s dépend du type de chargement et du comportement du matériau.

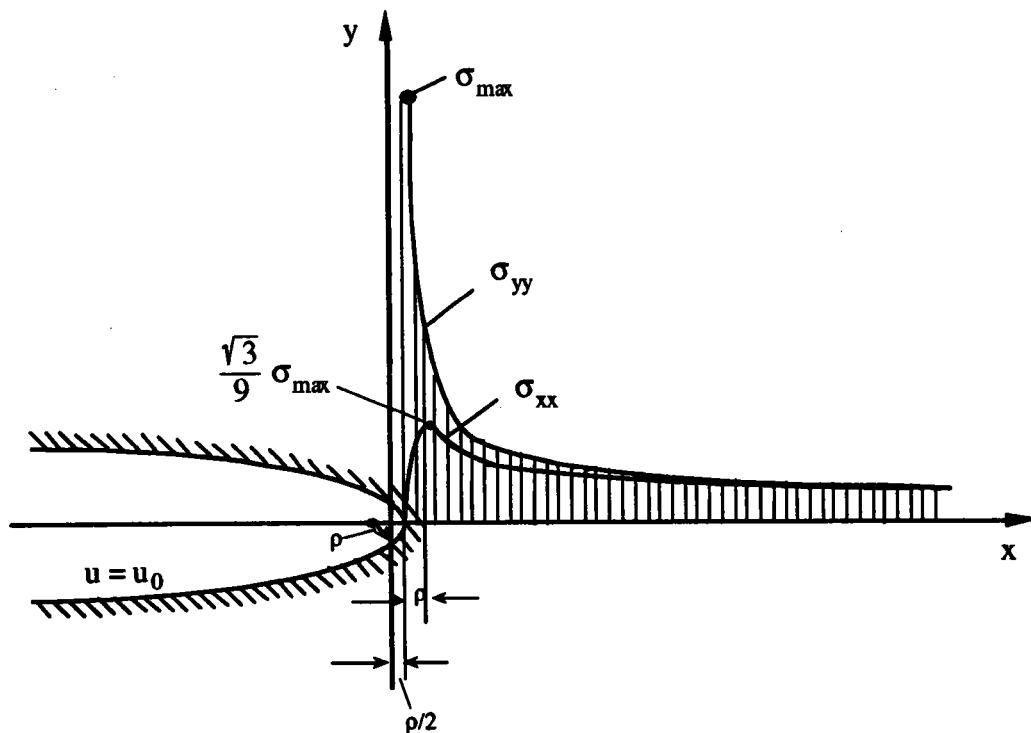


Figure [I.5]: Distribution des contraintes pour un profil parabolique dans le cas de sollicitations symétriques.

Dans le cas d'un chargement de traction et pour une fissure ayant respectivement un angle au sommet de 0° et un rayon d'entaille $\rho = 0$, on obtient :

$$\rho_f = 2\rho^* \quad (\text{I.2-10})$$

Pour une entaille ayant un rayon ρ la formule (I.2-9) devient :

$$\rho_f = \rho + 2\rho^* . \quad (\text{I.2-11})$$

A la pointe de la fissure x prend la valeur $x_0 = \rho/2$. En introduisant la caractéristique microstructurale et en considérant les conditions critiques $K_I = K_{IC}$, $\sigma_g = Re$ (Re est la limite d'élasticité), on obtient :

$$Re = \frac{K_{IC}}{\sqrt{\pi\rho_f}} \quad (\text{I.2-12})$$

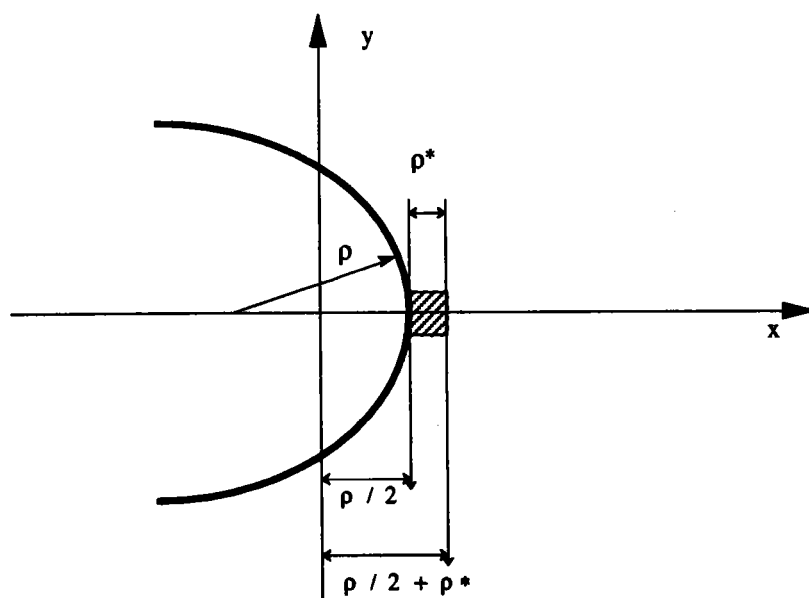


Figure [I.6] : Longueur de la caractéristique microstructurale du matériau , ρ^* .

II CHAMP DE CONTRAINTES EN FOND D'ENTAILLE POUR UNE PLAQUE DE DIMENSIONS FINIES

II.1 MÉTHODE DE L'ÉQUATION INTÉGRALE DE BARONE ET ROBINSON

II.1.1 Cas de l'entaille aiguë en V

La méthode des équations intégrales de Barone et Robinson [15, 16] est une méthode numérique pour calculer la distribution des contraintes dans une région D fermée par un contour L . Par définition un point est dit régulier sur la frontière, si la tangente en ce point varie de façon continue et un point est dit irrégulier, si sa tangente ne peut pas être définie. Un fond d'entaille aiguë est typiquement un point irrégulier. Les points de transition se situent de chaque côté d'un point irrégulier (figure II.1).

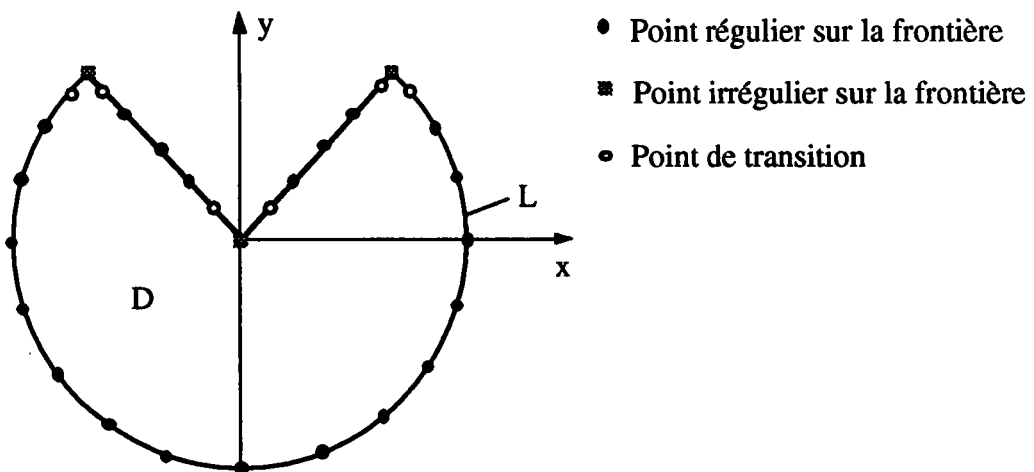


Figure [II.1] : Définition de la frontière et des types de points.

a) Équation intégrale pour les points réguliers de la frontière

Considérons une région $(D+L)$. D signifie la région ouverte et L le contour. Les paramètres du champ réel sont dénotés par $t_j(Q)$ pour les tractions; $u_j(p)$ pour les déplacements et $\sigma_{ij}(p)$ pour les contraintes. Ici p est un point de $(D+L)$ et Q est un point de la frontière.

De plus, considérons un système de forces auxiliaires associés aux forces concentrées F_1 et F_2 qui sont imposées respectivement dans les directions x et y . Ce système est dérivé des solutions de Kelvin. Les tractions et les déplacements aux points limites Q , provoqués par la $i^{\text{ème}}$ force au point P , sont dénotés par :

$$t_{ij}^*(Q) : \text{ pour les tractions ; } \quad u_{ij}^*(Q) : \text{ pour les déplacements ;}$$

Puisque la solution auxiliaire est infinie au point P , une petite région D_ε qui comprend P est enlevée de la région $D+L$.

Si les tractions et les déplacements réels sont développés au point régulier P en séries de Taylor, on obtient la relation réciproque pour $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\alpha_{ij} u_j(P) + \int_L t_{ij}^*(Q) u_j(Q) ds(Q) = \int_L t_j(Q) u_{ij}^*(Q) ds(Q) \quad (\text{II.1-1})$$

où $\alpha_{ij} = 0$, si $i \neq j$.

En introduisant les forces auxiliaires de Kelvin, $\alpha_{11} = F_1$, $\alpha_{22} = F_2$, nous obtenons les déplacements au point P .

b) Équation intégrale aux points irréguliers de la frontière

Le champ de déplacements et de contraintes au voisinage d'un point irrégulier en coordonnées polaires est donné par la solution de Williams sous le forme suivante :

$$\begin{aligned} u_r &= A(\theta) r^\lambda \\ u_\theta &= B(\theta) r^\lambda \\ \sigma_{rr} &= P(\theta) r^{\lambda-1} \\ \sigma_{\theta\theta} &= Q(\theta) r^{\lambda-1} \\ \sigma_{r\theta} &= R(\theta) r^{\lambda-1} \end{aligned} \quad (\text{II.1-2})$$

$$A(\theta) = (\lambda-3+4\nu)[C_1 \cos(\lambda-1)\theta + C_2 \sin(\lambda-1)\theta] + C_3 \cos(\lambda+1)\theta + C_4 \sin(\lambda+1)\theta$$

$$B(\theta) = (\lambda-3+4\nu)[-C_1 \sin(\lambda-1)\theta + C_2 \cos(\lambda-1)\theta] - C_3 \sin(\lambda+1)\theta + C_4 \cos(\lambda+1)\theta$$

$$P(\theta) = 2\mu\lambda\{(\lambda-1)[C_1 \cos(\lambda-1)\theta + C_2 \sin(\lambda-1)\theta] + C_3 \cos(\lambda+1)\theta + C_4 \sin(\lambda+1)\theta\}$$

$$Q(\theta) = -2\mu\lambda\{(\lambda+1)[C_1 \cos(\lambda-1)\theta + C_2 \sin(\lambda-1)\theta] + C_3 \cos(\lambda+1)\theta + C_4 \sin(\lambda+1)\theta\}$$

$$R(\theta) = 2\mu\lambda\{(\lambda-1)[-C_1 \sin(\lambda-1)\theta - C_2 \cos(\lambda-1)\theta] - C_3 \sin(\lambda+1)\theta + C_4 \cos(\lambda+1)\theta\}$$

ici μ est le module de cisaillement. C_1 à C_4 sont des constantes qui peuvent être déterminées par les conditions aux limites.

Nous savons que la combinaison des solutions de Williams est aussi une solution du problème. Donc les expressions suivantes sont des solutions possibles du problème homogène :

$$\begin{aligned}
 u_r &= \sum_m K_m u_{rm} ; & u_{rm} &= A_m (\theta) r^{\lambda_m} \\
 u_\theta &= \sum_m K_m u_{\theta m} ; & u_{\theta m} &= B_m (\theta) r^{\lambda_m} \\
 \sigma_{rr} &= \sum_m K_m \sigma_{rrm} ; & \sigma_{rrm} &= P_m (\theta) r^{\lambda_m - 1} \\
 \sigma_{\theta\theta} &= \sum_m K_m \sigma_{\theta\theta m} ; & \sigma_{\theta\theta m} &= Q_m (\theta) r^{\lambda_m - 1} \\
 \sigma_{r\theta} &= \sum_m K_m \sigma_{r\theta m} ; & \sigma_{r\theta m} &= R_m (\theta) r^{\lambda_m - 1}
 \end{aligned} \tag{II.1-3}$$

ici, K_m représente les déplacements généralisés; la partie réelle de chaque valeur propre λ_m est supérieure ou égale à zéro. Cette solution s'appelle la solution propre de Williams.

Une solution avec la partie réelle de λ_m inférieure à zéro est dénommée solution impropre. Elle est utilisée comme solution auxiliaire pour déterminer les déplacements généralisés. Les expressions sont similaires à celles du champ réel :

$$\begin{aligned}
 u_r^* &= \sum_m K_m^* u_{rm}^* ; & u_{rm}^* &= A_m^* (\theta) r^{\lambda_m^*} \\
 u_\theta^* &= \sum_m K_m^* u_{\theta m}^* ; & u_{\theta m}^* &= B_m^* (\theta) r^{\lambda_m^*} \\
 \sigma_{rr}^* &= \sum_m K_m^* \sigma_{rrm}^* ; & \sigma_{rrm}^* &= P_m^* (\theta) r^{\lambda_m^* - 1} \\
 \sigma_{\theta\theta}^* &= \sum_m K_m^* \sigma_{\theta\theta m}^* ; & \sigma_{\theta\theta m}^* &= Q_m^* (\theta) r^{\lambda_m^* - 1} \\
 \sigma_{r\theta}^* &= \sum_m K_m^* \sigma_{r\theta m}^* ; & \sigma_{r\theta m}^* &= R_m^* (\theta) r^{\lambda_m^* - 1}
 \end{aligned} \tag{II.1-4}$$

ici, $\lambda_m^* = -\lambda_m$; K_m^* est une constante choisie.

c) Solution de Barone et Robinson

Dans cette méthode les équations de la solution propre avec des déplacements inconnus (II.1-3) sont utilisées pour représenter les déplacements au voisinage du point irrégulier jusqu'au point de transition. (Figure II.1). Les équations de la solution auxiliaire impropre sont résolues selon la loi de Betti [16] afin d'obtenir les déplacements généralisés inconnus. Les technique détaillée du développement de la formulation et du calcul numérique sont donnés dans les références [16].

II.1.2 Cas de l'entaille émoussée en V

La méthode est établie à partir de la solution de Barone et Robinson pour l'entaille aiguë. Dans le cas de l'entaille en V émoussée, la surface de l'éprouvette est décomposée en 3 régions (figure [II.2] et figure [II.3]) :

- i) Une petite zone interne ayant pour limite un cercle centré sur l'intersection des deux côté droits de l'entaille ;
- ii) Une zone annulaire adjacente à la zone interne ;
- iii) Une grande région comprenant toute la zone extérieure à la zone d'annulaire.

La zone interne peut être traitée numériquement. Pour la zone d'annulaire, une solution analytique a été développée à partir des solutions de Williams qui sont étendues en incluant les solutions impropres. La grande région est calculée en utilisant les techniques de Barone et Robinson comme dans le cas de l'entaille aiguë.

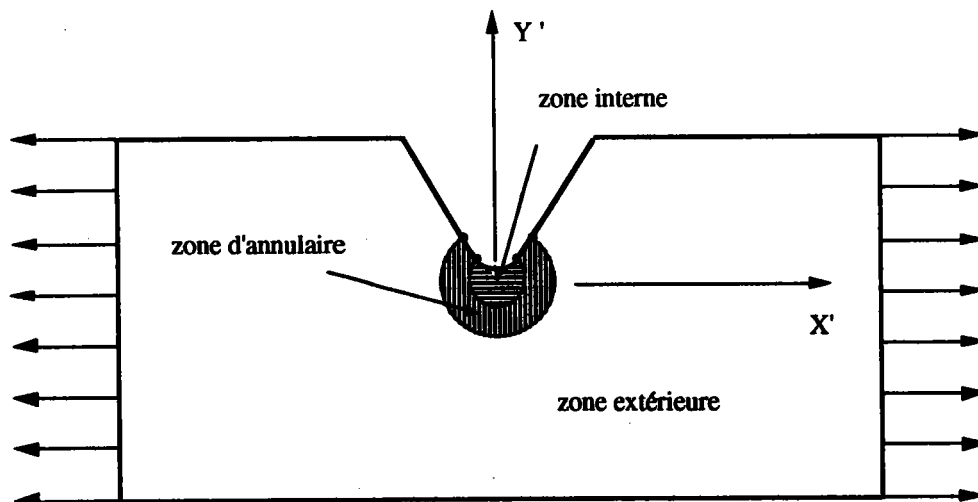


Figure [II.2] : Définition selon Barone et Robinson [15] des trois régions dans une plaque de dimensions finies avec une entaille émoussée

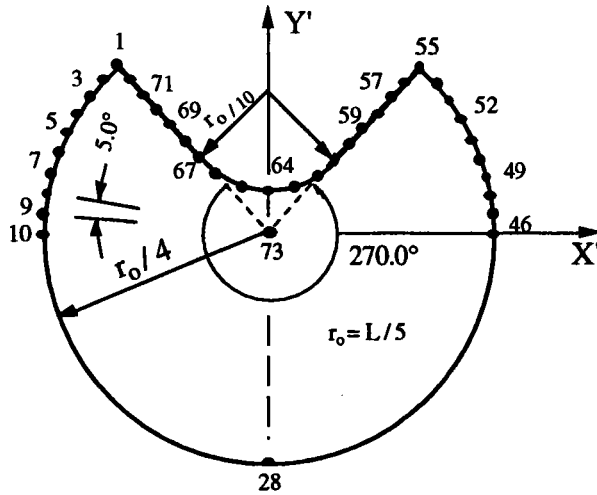


Figure [II.1-3]: Description du contour de la zone interne d'une plaque entaillée.

Ces méthodes sont détaillées dans les références [15] [16]. Un résultat de ce calcul pour la géométrie représentée dans la figure [II.2] est illustré dans la figure [II.1-4].

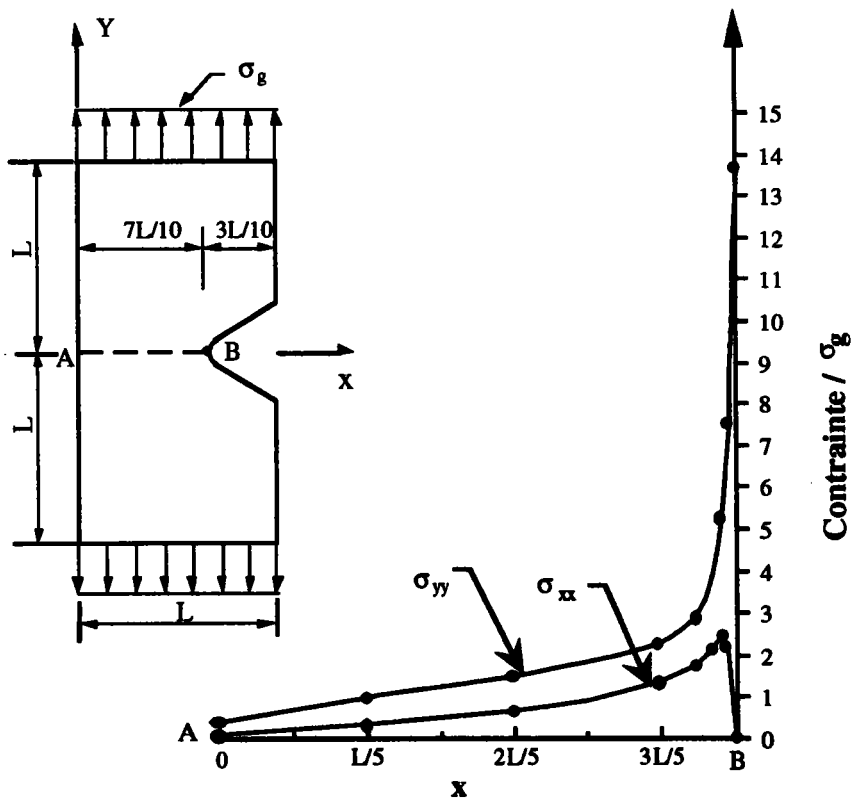


Figure [II.4]: Distribution de contraintes σ_{xx} et σ_{yy} le long de la ligne A B dans une plaque entaillée soumise à une traction.

II.2 MÉTHODE DE LA TRANSFORMATION CONFORME

La méthode de transformation conforme est une méthode très utile pour simplifier le calcul du champ de contraintes et de déplacements sur un objet plan possédant une géométrie complexe. Nous présentons ici l'utilisation de cette méthode dans le cas d'une plaque de dimensions finies possédant une entaille aiguë ou de rayon faible [19]. Cette méthode sera développée et détaillée dans la deuxième partie pour une entaille en V émoussée.

II.2.1 Transformation conforme appliquée à une plaque entaillée

La méthode consiste à utiliser deux transformations successives.

- La première transforme l'intérieur d'une plaque au plan des z en un demi-plan positif dans le plan des w (le plan des z est le plan complexe, $z = x_1 + ix_2$, le plan des w est celui où $w = u_1 + u_2$, voir figure [II.5]). La transformation de Schwartz-Cristoffel est représentée dans ce cas par la formule suivante :

$$Z = m(w) = C'_1 \int_0^w \prod_{i=1}^7 (w - a_i)^{\frac{-\alpha_i}{\pi}} dw + C'_2 \quad (\text{II.2-1})$$

Où C'_1 et C'_2 sont deux constantes [24]. Les valeurs des angles extérieurs α_i de la plaque sont (voir la figure [II.5]) :

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_7 = \pi/2; \quad \alpha_4 = \alpha_6 = \pi/2 - \psi/2; \quad \alpha_5 = \psi - \pi.$$

- La seconde transforme ce demi-plan positif (dans le plan des w) à l'intérieur d'un cercle unité (dans le plan des ξ) par la formule suivante :

$$w = i \frac{1 - \xi}{1 + \xi} \quad (\text{II.2-2})$$

L'image de ces deux transformations est portée par la figure [II.5]. Les points A_i sur le plan des z correspondent aux points a_i [27] sur le plan des w et aux points ζ_i sur le plan des ξ .

En introduisant la formule (II.2.2) dans la formule (II.2.1), on obtient la transformation de l'intérieur de la plaque à l'intérieur du cercle unité :

$$Z = m(\zeta) = C_1 \int_0^{\zeta} \prod_{s=1}^7 \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_s}\right)^{\frac{-\alpha_s}{\pi}} d\zeta + C_2 \tag{II.2-3}$$

La formule (II.2.3) est holomorphe dans le cercle unité. On peut la développer en série de Taylor pour la calculer numériquement.

$$Z = m(\zeta) = C_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \zeta^{n+1} \tag{II.2-4}$$

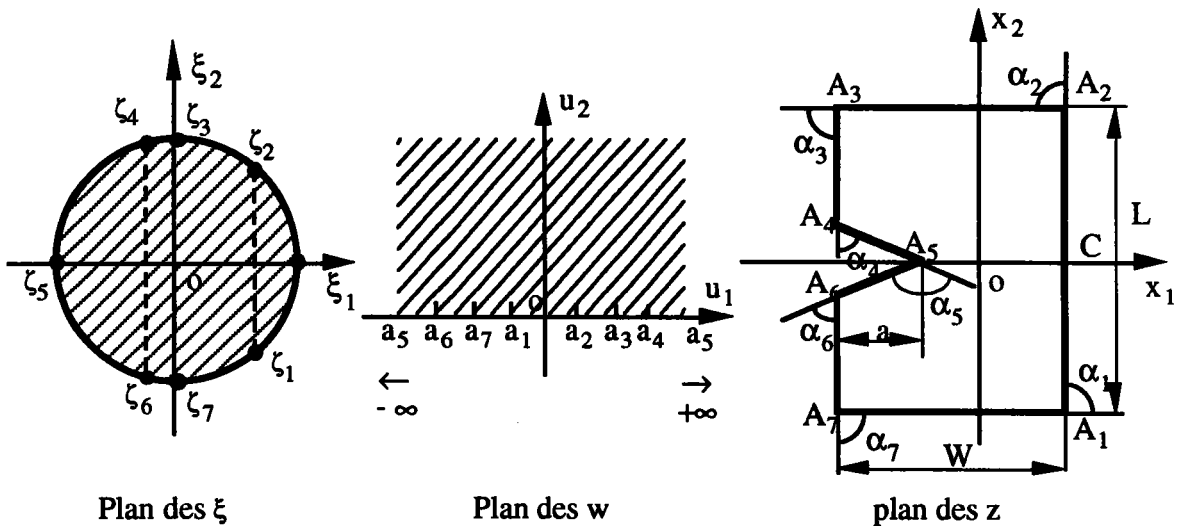


Figure III.5 : Transformations conformes successives de l'intérieur de la plaque en surface intérieure du cercle unité en passant par le demi-plan supérieur

Si l'on veut obtenir une transformation conforme sur une plaque possédant une entaille de faible rayon, la formule (II.2-1) doit être améliorée. L'expression $(w - a_5)^{-\alpha_5/\pi}$ qui correspond au point ζ_5 est remplacée par l'expression $[(w - a'_5)^{-\alpha_5/\pi} + (w - a''_5)^{-\alpha_5/\pi}]$ qui correspond aux points ζ'_5 et ζ''_5 (figure [II.6]). La formule (II.2-3) devient alors :

$$Z = m(\zeta) = C''_1 \int_0^\zeta \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_1}\right)^{\frac{-\alpha_1}{\pi}} \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_2}\right)^{\frac{-\alpha_2}{\pi}} \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_3}\right)^{\frac{-\alpha_3}{\pi}} \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_4}\right)^{\frac{-\alpha_4}{\pi}} \left[\left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_5}\right)^{\frac{-\alpha_5}{\pi}} + \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_5}\right)^{\frac{-\alpha_5}{\pi}}\right] \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_6}\right)^{\frac{-\alpha_6}{\pi}} \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_7}\right)^{\frac{-\alpha_7}{\pi}} d\zeta + C''_2 \quad (\text{II.2-5})$$

où C''_1 et C''_2 sont des nouvelles constantes.

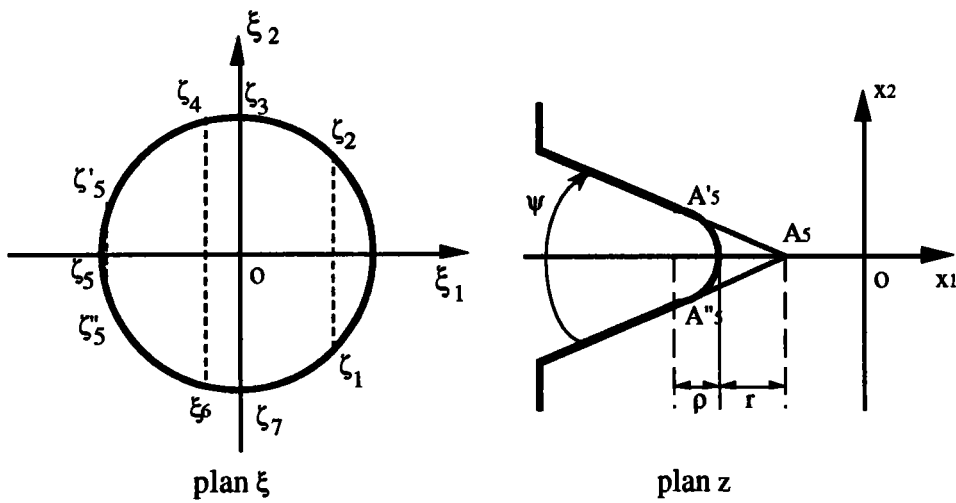


Figure [II.6] : Représentation des points ζ'_5 et ζ''_5 correspondant aux points A'_5 et A''_5 sur le plan des z

II.2.2 Calcul du champ de contraintes en fond d'entaille

Le champ de contraintes sur la plaque entière est obtenu grâce à la fonction complexe de Kolosov-Muskhelishvili [25] [26]. A partir de la théorie élastique, les composantes des contraintes σ_{11} , σ_{22} et σ_{12} sur le plan des z peuvent s'exprimer par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{1}{2} S - \frac{1}{4} (T + \bar{T}) \\ \sigma_{22} &= \frac{1}{2} S + \frac{1}{4} (T + \bar{T}) \\ \sigma_{12} &= \frac{1}{4} i (T - \bar{T}) \end{aligned} \quad (\text{II.2-6})$$

\bar{T} est la fonction conjuguée de T.

Les quantités S et T sont définies de la façon suivante :

$$\begin{aligned} S &= \Phi(z) + \bar{\Phi}(\bar{z}) = \Phi(\zeta) + \bar{\Phi}(\bar{\zeta}) \\ T &= \bar{Z} \Phi'(z) + \Psi(z) = \frac{m(\zeta) \bar{\Phi}'(\bar{\zeta})}{\bar{m}'(\bar{\zeta})} + \bar{\Psi}(\bar{\zeta}) \end{aligned} \quad (\text{II.2-7})$$

\bar{z} et $\bar{\zeta}$ sont les imaginaires conjugués des z et ζ .

$\Phi(\zeta)$ et $\Psi(\zeta)$ sont deux fonctions complexes potentielles, qui s'expriment par :

$$m'(\zeta) \Phi(\zeta) = \sum_{m=1}^m \left\{ \frac{F_m e^{i\alpha'_m}}{\pi \sum_{n=0}^n a_n t_{Am}^n} \left(\frac{\sum_{n=1}^n a_n \zeta^n}{t_{Am} - \zeta} + \sum_{p=1}^n \zeta^{p-1} \sum_{n=p}^n a_n t_{Am}^{n-p} \right) \right\} + \sum_{n=0}^n A_n \zeta^n \quad (\text{II.2-8})$$

$$m'(\zeta) \Psi(\zeta) = \frac{1}{2} \bar{m}'\left(\frac{1}{\zeta}\right) \Phi(\zeta) - \bar{m}\left(\frac{1}{\zeta}\right) \Phi'(\zeta) + \frac{1}{2} \bar{m}'\left(\frac{1}{\zeta}\right) \Phi\left(\frac{1}{\zeta}\right) \quad (\text{II.2-9})$$

$$\Psi(\zeta) = \frac{m'\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\zeta^2 m'(\zeta)} \left\{ \Phi(\zeta) + \bar{\Phi}\left(\frac{1}{\zeta}\right) \right\} - \frac{m\left(\frac{1}{\zeta}\right) \Phi'(\zeta)}{m'(\zeta)} \quad (\text{II.2-10})$$

$m'(\zeta)$ est la dérivée de $m(\zeta)$.

$\bar{m}'(\zeta)$, $\bar{m}(\zeta)$ sont des fonction conjuguées de $m'(\zeta)$ et $m(\zeta)$.

F_m indique les charges concentrées sur les points du contour de la plaque.

$t = e^{i\beta}$ est situé sur le contour du cercle unité au plan des ξ .

En introduisant la formule (II.2-8) dans l'expression (II.2-10) et en utilisant l'algorithme de Gauss, nous pouvons calculer précisément la distribution de contraintes sur la plaque entière [14].

III ÉTUDE DU FACTEUR D'INTENSITÉ DE CONTRAINTES

Les facteurs d'intensité de contraintes caractérisent la singularité du champ de contraintes et de déplacements.

Dans le cas d'une fissure infiniment aiguë, l'ordre de singularité est égale à -0,5. Les facteurs d'intensité de contraintes ont été étudiés particulièrement pour toutes sortes de géométries différentes. La formule essentielle établie pour une plaque infinie soumise au mode I de rupture a été donnée au chapitre I.1-1. Elle est écrite de nouveau ici :

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{yy} (r, \theta=0) (2\pi r)^{1/2}$$

Dans le cas d'une fissure émoussée, si le rayon en fond de fissure est très petit par rapport à la longueur de fissure, l'ordre de singularité est le même que celui d'une fissure aiguë. Le facteur d'intensité de contraintes en mode I est alors représenté comme dans le chapitre I.2-1 par la relation :

$$K_I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \lim_{\rho \rightarrow 0} \sigma_{yy}^{\max}(\rho) \rho^{1/2}$$

Dans le cas d'une entaille aiguë, l'ordre de singularité est fonction de l'angle de l'entaille. Le facteur d'intensité de contraintes a déjà été donné à partir du modèle de Williams pour une plaque infinie et en mode I. On donne l'expression suivante :

$$K_I(\psi) = \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{\theta\theta}(\psi, \theta = 0) \sqrt{2\pi} r^\alpha$$

Dans ce chapitre, d'abord une méthode de l'intégrale de contour similaire à l'intégrale de Rice sera présentée pour l'analyse d'une entaille aiguë dans un plan infini. Ensuite une autre méthode, particulière pour le cas d'une plaque entaillée de dimensions finies sera présentée.

Dans le cas d'une entaille émoussée, beaucoup moins d'études ont été réalisées car le problème de l'expression du champ de contraintes devient plus complexe. La singularité de contraintes et de déplacements disparaît à mesure que le rayon en fond d'entaille augmente. Deux variables, l'angle d'entaille et l'acuité en fond d'entaille, sont les paramètres gouvernant la

distribution de contraintes. Le modèle de Hasebe [22] présenté ici donne la relation entre la concentration de contraintes et le facteur d'intensité de contraintes pour une entaille éoussée.

A la fin de ce chapitre, nous discuterons des critères de ténacité dans le cas d'une entaille aiguë et surtout dans le cas d'une entaille éoussée.

III.1 MÉTHODE UTILISANT UNE INTÉGRALE INDÉPENDANTE DU CONTOUR

L'intégrale J de Rice [8] a été utilisée en mécanique de la rupture pour un comportement élastique ou élastoplastique. L'extension de cette méthode en utilisant un champ auxiliaire de contraintes et déplacements au cas d'une entaille éoussée a permis d'établir une autre intégrale indépendante du contour pour une entaille [7]. Cette intégrale peut être utilisée pour déterminer les coefficients caractéristiques de la singularité de contraintes d'une entaille en V et pour un problème de chargement statique ou dynamique.

Considérons le contour fermé C au voisinage d'une entaille en V comme montré dans la figure [III.1]. L'intégrale I peut être défini de la manière suivante :

$$I = \int_C (\sigma_{ij} \hat{u}_i - \hat{\sigma}_{ij} u_i) n_j dl \quad (\text{III.1-1})$$

Ici, C est le contour fermé ($C = \Gamma + G^+ + G^- + \Gamma^*$, voir la figure [III.1]) ; \hat{u}_{ij} et $\hat{\sigma}_{ij}$ sont les champs auxiliaires de déplacements et contraintes ; n_j est le vecteur normal à C.

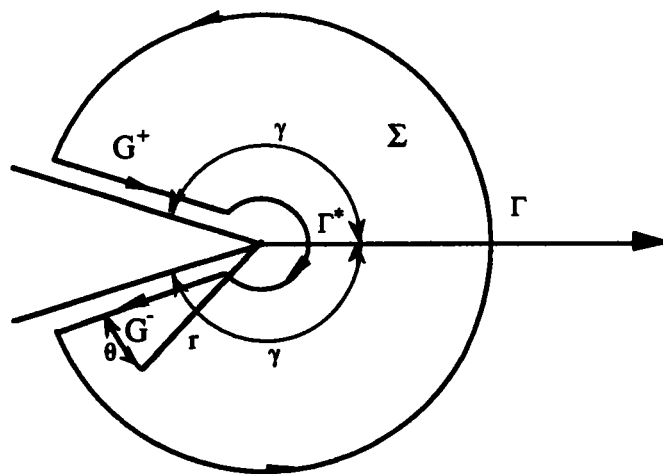


Figure [III.1] : Contour fermé au voisinage d'une entaille en V.

Si les champs auxiliaires sont imposés de façon à satisfaire les conditions suivantes :

$$\sigma_{ij} = \lambda_1 \delta_{ij} \hat{u}_{r,r} + \mu_1 (\hat{u}_{ij} + \hat{u}_{ji}) \quad (\text{III.1-2})$$

$$\hat{\sigma}_{ij,j} = 0$$

Où λ_1 et μ_1 sont les constantes de Lamé, l'application de la théorie de Gauss pour l'intégrale (III.1-1) conduit à l'équation :

$$\int_{\Sigma} (\sigma_{ij} \hat{u}_i - \hat{\sigma}_{ij} u_j) n_j dl = \int_{\Sigma} \rho \ddot{u}_i \hat{u}_i ds \quad (\text{III.1-3})$$

Où Σ est la surface entourée par le contour fermé C , ρ est la densité volumique et \ddot{u}_i est le vecteur d'accélération.

Sur les bords libres, les conditions aux limites sont :

$$\sigma_{\theta\theta} (r, 0) = \sigma_{\theta\theta} (r, 2\gamma) = 0 \quad (\text{III.1-4})$$

$$\sigma_{r\theta} (r, 0) = \sigma_{r\theta} (r, 2\gamma) = 0$$

Sur les parties droites du contour G^+ et G^- , $\hat{\sigma}_{ij} n_i$ et $\sigma_{ij} n_i$ sont égaux à zéro (voir figure [III.1]). On peut réécrire l'équation (III.1-3) afin de définir une intégrale indépendant du contour [7] :

$$\begin{aligned} A &= \int_{\Gamma} (\mathbb{T}_i \hat{u}_i - \hat{\mathbb{T}}_i u_i) dl = \int_{\Gamma} (\mathbb{T}_i \hat{u}_i - \hat{\mathbb{T}}_i u_i) dl - \int_{\Sigma} \rho \ddot{u}_i \hat{u}_i ds \\ &= \int_0^\gamma (\sigma_r \hat{u}_r + \sigma_{r\theta} \hat{u}_\theta - \hat{\sigma}_r u_r - \hat{\sigma}_{r\theta} u_\theta) r d\theta \end{aligned} \quad (\text{III.1-5})$$

En utilisant les résultats de la fonction d'Airy représentés dans le paragraphe [III.2], l'intégrale A se met sous la forme suivante :

$$A = \frac{B}{2\mu_1} \phi(2\gamma) \quad (\text{III.1-6})$$

ici, B est une constante. La fonction angulaire $\phi(2\gamma)$ est présentée dans la figure [III.2] pour différentes valeurs de coefficient de Poisson ν .

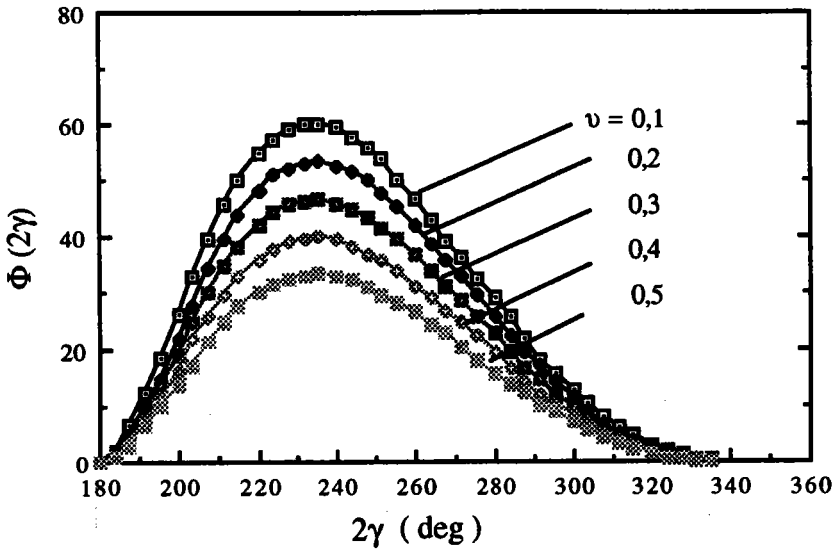


Figure [III.21] : Évaluation de la fonction $\phi(\gamma)$ pour différentes valeurs du coefficient de Poisson ν .

Les facteurs d'intensité de contraintes d'entaille s'expriment suivant :

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} [(2\pi r)^{1/2} \sigma_{\theta\theta}(r,0)] \quad (III.1-7)$$

$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} [(2\pi r)^{1/2} \sigma_{r\theta}(r,0)]$$

La relation entre l'intégrale A et les facteurs d'intensité de contraintes K_I , K_{II} s'écrit :

$$A = d_1 K_I + d_2 K_{II} \quad (III.1-8)$$

où

$$d_1 = -\frac{2(1-\nu)}{3\mu_1} (2\pi)^{1/2} C_1 \quad (III.1-9)$$

$$d_2 = -\frac{2(1-\nu)}{\mu_1} (2\pi)^{1/2} C_2$$

C_1 et C_2 sont constantes.

En utilisant la fonction d'Airy des champs auxiliaires, nous obtenons les solutions pour les contraintes et déplacements auxiliaires qui contiennent les constantes C_1 et C_2 :

$$\hat{\sigma}_{\pi} = r^{-3/2} \left[c_1 \left(\frac{1}{4} \sin \frac{\theta}{2} + \frac{7}{12} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + c_2 \left(\frac{1}{4} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{7}{4} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \right]$$

$$\hat{\sigma}_{\theta\theta} = r^{-3/2} \left[c_1 \left(-\frac{1}{4} \sin \frac{\theta}{2} + \frac{1}{12} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + c_2 \left(-\frac{1}{4} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \right]$$

$$\hat{\sigma}_{r\theta} = r^{-3/2} \left[c_1 \left(\frac{1}{4} \cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4} \cos \frac{3\theta}{2} \right) + c_2 \left(-\frac{1}{4} \sin \frac{\theta}{2} + \frac{3}{4} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \right] \quad (\text{III.1-10})$$

$$\hat{u}_r = \frac{1}{2\mu_1} r^{-1/2} \left\{ c_1 \left[-\frac{1}{2} \sin \frac{\theta}{2} + \frac{1}{3} \left(-\frac{7}{2} + 4\nu \right) \sin \frac{3\theta}{2} \right] + c_2 \left[-\frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} + \left(-\frac{7}{2} + 4\nu \right) \cos \frac{3\theta}{2} \right] \right\}$$

$$\hat{u}_\theta = \frac{1}{2\mu_1} r^{-1/2} \left\{ c_1 \left[-\frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{3} \left(\frac{5}{2} - 4\nu \right) \cos \frac{3\theta}{2} \right] + c_2 \left[\frac{1}{2} \sin \frac{\theta}{2} + \left(\frac{5}{2} - 4\nu \right) \sin \frac{3\theta}{2} \right] \right\}$$

III.2 CALCUL DU FACTEUR D'INTENSITE DE CONTRAINTES SUR UNE PLAQUE DE DIMENSIONS FINIES AVEC UNE ENTAILLE EN V

A.Carpinteri [28] a établi le calcul du facteur d'intensité de contraintes sur une plaque de dimensions finies possédant une entaille en V. L'expression de la singularité du champ de contraintes est associée à la sollicitation extérieure et à la longueur caractéristique représentée par la longueur de l'entaille et la largeur de la plaque.

Pour une plaque entaillée de dimensions finies représentée dans la figure [III.3], il est possible d'écrire l'équation suivante :

$$K_I(\psi) = \sigma_g W^\lambda F_\sigma \left(\frac{a}{W} \right) \quad (\text{III.2-1})$$

ici, σ_g est la contrainte globale, W est la largeur de la plaque, $F_\sigma(a/W)$ est une fonction de forme qui dépend de la géométrie de la structure et du rapport (a/W) .

Si on fait l'hypothèse que le matériau et la géométrie de la structure restent identiques, en utilisant le principe de similitude de la théorie de Buchigam, quand $\psi \rightarrow \pi$, alors $\lambda \rightarrow 0$, on obtient la relation :

$$F_\sigma \left(\frac{a}{W} \right) = \frac{1}{1 - (a/W)} \quad (\text{III.2-2})$$

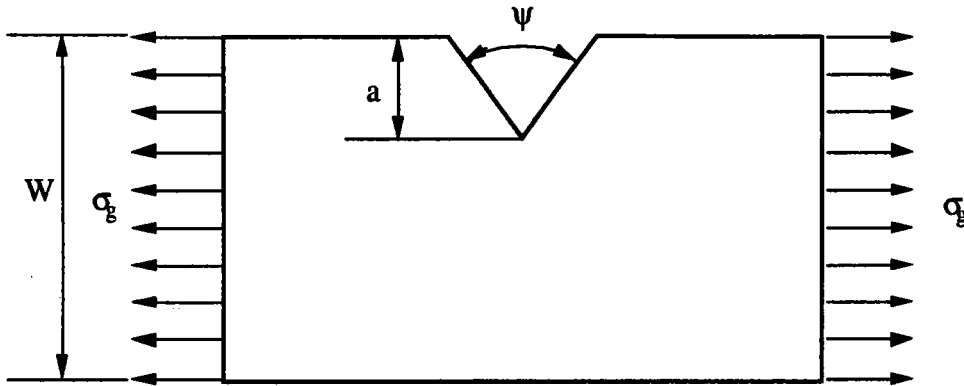


Figure [III.3] : Géométrie de la plaque de dimensions finies et chargement appliqué

Une autre forme de l'expression [28] est proposée par Carpinteri pour une éprouvette de flexion trois points dont la géométrie est montrée dans la figure [III.4]. Cette relation s'écrit :

$$K_I(\psi) = \frac{PL}{tW^{2-\lambda}} F_{\sigma}\left(\frac{a}{W}, \psi\right) \quad (\text{III.2-3})$$

Avec P la charge concentrée, L la longueur de l'éprouvette, t l'épaisseur. ψ est l'angle de l'entaille, λ est un exposant qui dépend de ψ .

On montre expérimentalement que la fonction F_{σ} est pratiquement indépendante de la longueur relative de la fissure a/W . F_{σ} peut donc s'exprimer par une relation suivante :

$$F_{\sigma}\left(\frac{a}{W}, \psi\right) \equiv c(\psi) g\left(\frac{a}{W}\right) \quad (\text{III.2-4})$$

ici, F_{σ} est un produit de deux fonction $c(\psi)$ et $g(a/W)$ de variables séparées ψ et a/W .

On considère deux conditions particulières : $\psi = 0^{\circ}$ et $\psi = 180^{\circ}$.

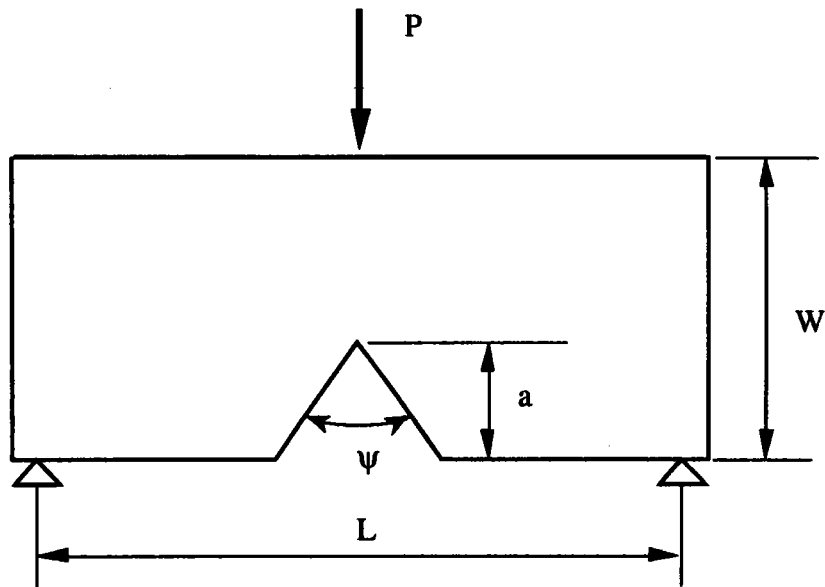


Figure [III.4]: Eprouvette de flexion trois points .

- Le premier cas correspondant à une fissure aiguë et on retrouve la solution classique de la mécanique linéaire de la rupture :

$$K_I(\psi = 0) = K_I = \frac{PL}{t W^{3/2}} F_{\sigma} \left(\frac{a}{W} \right) \quad (\text{III.2-5a})$$

avec

$$F_{\sigma} \left(\frac{a}{W} \right) = 2.9 \left(\frac{a}{W} \right)^{0.5} - 4.6 \left(\frac{a}{W} \right)^{3/2} + 21.8 \left(\frac{a}{W} \right)^{5/2} - 37.6 \left(\frac{a}{W} \right)^{7/2} + 38.7 \left(\frac{a}{W} \right)^{9/2} \quad (\text{III.2-5b})$$

- Le deuxième cas correspondant à une plaque non-entailée, on a alors la relation suivante :

$$K_I(\psi = 180^\circ) = \sigma_g = \frac{PL}{t W^2} g \left(\frac{a}{W} \right) \quad (\text{III.2-6a})$$

avec

$$g \left(\frac{a}{W} \right) = \frac{1.5}{\left(1 - \frac{a}{W} \right)^2} \quad (\text{III.2-6b})$$

La fonction $C(\psi)$ dans l'équation (III.2-4) présente deux valeurs extrêmes: $C(0) = \frac{1}{2}$ et $C(\pi) = 1$. C'est une fonction non-linéaire dont une approximation est proposée sous la forme suivante:

$$C(\pi) \cong \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{\psi}{\pi} \right)^\beta \right] \quad (\text{III.2-7})$$

ici β est un exposant a priori inconnu.

Une formulation plus précise s'écrit par combinaison de $F_\sigma\left(\frac{a}{W}\right)$ et $g\left(\frac{a}{W}\right)$:

$$K_I(\psi) = \frac{Pl}{t W^{(2-\lambda)}} \left\{ F_\sigma\left(\frac{a}{W}\right) + \left(\frac{\psi}{\pi}\right)^\beta \left[g\left(\frac{a}{W}\right) - F_\sigma\left(\frac{a}{W}\right) \right] \right\} \quad (\text{III.2-8})$$

La figure [III.5] présente une famille de courbes représentant la variation du facteur d'intensité de contraintes critique $K_{IC}(\psi)$ en fonction de l'angle d'entaille pour différentes valeurs de β . Le calcul se fait par l'introduction des valeurs expérimentales de la charge critique $P_c(\psi)$. Il faut remarquer que les dimensions (unités) de $K_I(\psi)$ varient avec l'angle d'entaille.

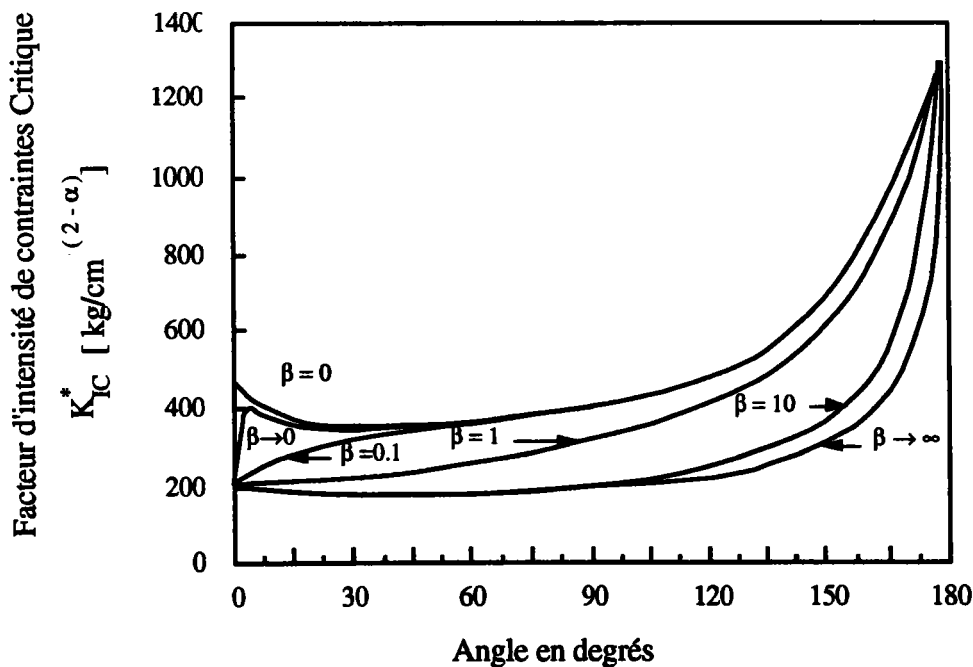


Figure [III.5]: Facteur d'intensité de contraintes à critique en fonction de l'angle d'entaille.

III.3 MÉTHODE DE HASEBE POUR LE CALCUL DU FACTEUR D'INTENSITÉ DE CONTRAINTES D'UNE ENTAILLE ÉMOUSSEE

Hasebe [20] a étudié l'influence de l'acuité en fond d'entaille pour un plan infini. Les propriétés du matériau sont celles de l'élasticité linéaire.

L'entaille en V étudiée est décrite dans la figure [III.6]. L'état de contraintes est symétrique par rapport à l'axe x . Deux paramètres importants, l'angle 2γ et le rayon ρ , caractérisent la forme géométrique de l'entaille.



Figure [III.6]: Entaille en V aiguë et émoussée

Trois cas de conditions aux limites, deux faces libres, deux faces fixes, une face libre et une face fixe sont étudiés par Hasebe. Ici, nous ne présenterons que le premier cas.

III.3.1 Cas de l'entaille aiguë avec l'état de contraintes symétrique

A partir de la solution des fonctions de Williams, les composantes de contraintes au voisinage de l'entaille aiguë s'expriment en fonction des coordonnées polaires [20] par :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= -\sum (m_j+1)r^{m_j} \{ B_j (m_j-2) \cos(m_j\theta) + D_j (m_j+2)\cos(m_j+2)\theta \} \\ \sigma_{\theta\theta} &= \sum (m_j+1)(m_j+2)r^{m_j} \{ B_j \cos(m_j\theta) + D_j \cos(m_j+2)\theta \} \\ \sigma_{r\theta} &= \sum (m_j+1)r^{m_j} \{ B_j m_j \sin(m_j\theta) + D_j (m_j+2) \sin(m_j+2)\theta \} \end{aligned} \right\} \text{(III.3-1)}$$

et

$$B_j \cos(m_j\gamma) + D_j \cos(m_j+2)\gamma = 0 \quad \text{(III.3-2)}$$

Les coefficients B_j et D_j sont déterminés par la condition de chargement ; m_j ($j = 1, 2, 3 \dots$) et sont les racines de l'équation (I.1-13) décrite dans le paragraphe (I.1-2) :

$$\left. \begin{aligned} (m+1) \sin 2\gamma + \sin \{ 2(m+1)\gamma \} &= 0 \\ m &= \lambda - 1 \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.3-3})$$

Les valeurs de m_j dépendent seulement de 2γ . Le tableau III.1 contient les valeurs des premières et deuxièmes racines de l'équation (III.3-3). La première racine m_1 possède une valeur comprise entre 0 et -0,5. Pour chaque angle $2\gamma \geq 180^\circ$, les premiers termes de la formule (III.3-1) sont prédominants par rapport aux seconds lorsque r est petit et sont donc les seuls significatifs. Si on calcule $\sigma_{\theta\theta}$ sur l'axe de symétrie $\theta = 0$, l'expression donnée d'après la formule (III.3-1) devient :

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} &= \sum (m_j+1)(m_j+2)r^{m_j}(B_j+D_j) \\ &= f_{\theta} r^{m_1}/\sqrt{2} + f_{\theta_2} r^{m_2} + f_{\theta_3} r^{m_3} + \dots \end{aligned} \quad (\text{III.3-4})$$

Ici, le coefficient f_{θ} du premier terme est nommé " le facteur intensité d'entaille ". La constante $\sqrt{2}$ est ajouté pour assurer la correspondance avec le facteur d'intensité de contraintes si $2\gamma = 360^\circ$.

Tableau III.1 : Valeurs de m_1 et m_2 en fonction de l'angle d'entaille

2γ	m_1	m_2
180°	0.000	1.00000
190°	- 0.09996	1.00180
200°	- 0.18130	1.01826
210°	- 0.24803	1.10629 ± i 0.09610
220°	- 0.30284	1.00565 ± i 0.19838
230°	- 0.34773	0.91527 ± i 0.23695
240°	- 0.38427	0.83355 ± i 0.25225
250°	- 0.41372	0.75925 ± i 0.25400
260°	- 0.43716	0.69141 ± i 0.24634
270°	- 0.45552	0.62926 ± i 0.23125
280°	- 0.46960	0.57214 ± i 0.20945
290°	- 0.48015	0.51955 ± i 0.18048
300°	- 0.48778	0.47103 ± i 0.14185
310°	- 0.49307	0.42623 ± i 0.08316
320°	- 0.49651	0.46701
330°	- 0.49855	0.20296
340°	- 0.49957	0.12541
350°	- 0.49995	0.05884
360°	- 0.50000	0.00000

En utilisant la formule (III.3-4), nous pouvons exprimer $\sigma_{\theta\theta}(\theta = 0)$ près du fond d'entaille à partir du coefficient f_θ :

$$\sigma_{\theta\theta}(r, \theta = 0) = f_\theta r^{m_1} / \sqrt{2} \quad (\text{III.3-5})$$

Quand $2\gamma = 360^\circ$ (cas d'une fissure), $\sigma_{\theta\theta}$ peut être généralement exprimée suivant [20] :

$$\sigma_{\theta\theta}(r) = K_I / \sqrt{2\pi r} + f_2 + f_3 \sqrt{r} + \dots \quad (\text{III.3-6})$$

où K_I est défini comme le facteur d'intensité de contraintes.

Avec l'expression (III.3-4) on trouve que le facteur d'intensité d'entaille f_θ correspond au facteur d'intensité de contraintes K_I quand $2\gamma = 360^\circ$ (cas de la fissure).

III.3.2 Entaille émoussée avec l'état de contraintes symétrique

D'après Hasebe [20] la valeur de la concentration de contraintes en fond d'entaille peut s'exprimer en fonction du rayon en fond d'entaille ρ . Si on considère la contrainte maximale tangentielle $\sigma_{\theta\theta}^{max}$ en fond d'entaille, son expression est donnée par :

$$\sigma_{\theta\theta}^{max} = h_\theta \rho^{m_1} + h_{\theta 2} \rho^{m_2} + h_{\theta 3} \rho^{m_3} + \dots \quad (\text{III.3-7})$$

Comme $0 \geq m_1 \geq -0.5$, la valeur du premier terme est prépondérante par rapport à celle des autres termes pour un rayon ρ faible. $\sigma_{\theta\theta}^{max}$ peut donc être exprimée approximativement par le premier terme et h_θ est un des facteurs représentant la concentration de contraintes. D'après [12], la série (III.3-7) converge rapidement et $\sigma_{\theta\theta}^{max}$ est obtenue avec une précision suffisante en utilisant les deux ou trois premiers termes de la série.

III.3.3 Relation entre le facteur d'intensité d'entaille et le coefficient de concentration de contraintes

Le rapport du facteur d'intensité d'entaille f_θ avec le coefficient de concentration de contraintes h_θ est dénommé C_θ :

$$C_{\theta} = f_{\theta} / h_{\theta} \quad (\text{III.3-8})$$

C_{θ} ne dépend que de l'angle d'entaille. Le tableau III.2 donne les valeurs de C_{θ} pour des différentes valeurs de l'angle 2γ .

Tableau III.2 : Les valeurs de C_{θ} en fonction de l'angle d'entaille

2γ	C_{θ}	2γ	C_{θ}
180°	1.414	280°	0.506
190°	0.952	290°	0.503
200°	0.775	300°	0.502
210°	0.676	310°	0.501
220°	0.615	320°	0.500
230°	0.576	330°	0.500
240°	0.549	340°	0.500
250°	0.531	350°	0.500
260°	0.519	360°	0.500
270°	0.512		

Si l'expression de $\sigma_{\theta\theta}^{\max}$ est connue en fonction du rayon ρ , f_{θ} peut être obtenu à partir de la formule suivante :

$$f_{\theta} = \lim_{\rho \rightarrow 0} C_{\theta} \sigma_{\theta\theta}^{\max} \rho^{-m_1} \quad (\text{III.3-9})$$

Si une entaille émoussée dégénère en fissure ($2\gamma = 360^{\circ}$), pour $r = 0$, comme dans le cas d'une entaille en V ou elliptique, la relation entre le facteur d'intensité de contraintes et la contrainte maximale en fond d'entaille s'exprime par une relation bien connue [9, 22]:

$$K_I = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sigma_{\theta\theta}^{\max} \sqrt{\pi\rho} \quad (\text{III.3-10})$$

Considérons que h_{θ} est connue dans la série (III.3-7), on en déduit une relation similaire :

$$K_I = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sqrt{\pi} f_{\theta} \quad (2\gamma = 360^{\circ}) \quad (\text{III.3-11})$$

Egalement, les expressions (III.3-9) et (III.3-10) sont identiques quand l'angle d'entaille 2γ est égal à 360° . Le coefficient " $\frac{1}{2}$ " dans la formule (III.3-9) correspond à la valeur $C_\theta = 0,5$ et $K_I = \sqrt{\pi} f_\theta$

III.3.4 Relation entre le critère d'amorçage de rupture à partir d'une fissure et celui à partir d'une entaille

On a montré qu'une fissure peut être considérée comme une entaille particulière avec un angle $2\gamma = 360^\circ$. Il semble donc raisonnable de chercher l'expression du critère d'amorçage de rupture à partir d'une entaille à partir de celui d'une fissure gouverné par la mécanique de la rupture.

On considère une fissure courte issue d'une entaille dans un plan infini. La figure [III.7] montre deux cas, celui d'une entaille aiguë et celui d'une entaille émoussée.

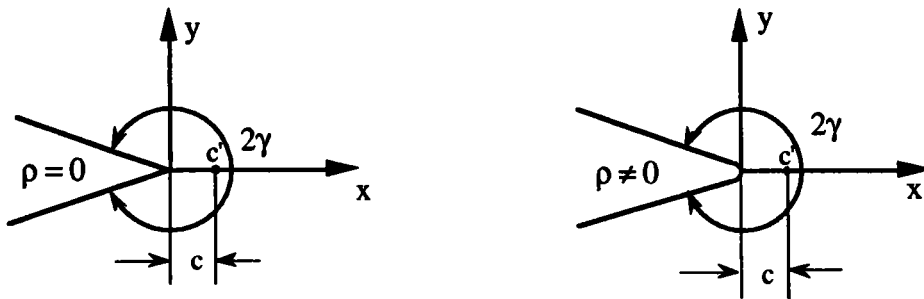


Figure [III.7]: Fissure courte c issue d'une entaille aiguë et d'une entaille émoussée

On définit un facteur d'intensité de contraintes $K_I(c)$ par l'expression suivante:

$$K_I(c) = A \sigma_{\theta\theta}(c) \sqrt{\pi c} \quad (\text{III.3-12})$$

Où c est la longueur de la fissure courte et A dépend de la longueur de la fissure. $\sigma_{\theta\theta}(c)$ est la contrainte que l'on avait au point c' en l'absence de fissure.

Si la valeur de c est petite, $\sigma_{\theta\theta}(c)$ peut être représentée par le premier terme de la formule (III.3-4) dans le cas d'une entaille aiguë:

$$\sigma_{\theta\theta}(c) = f_{\theta} c^{m_1} / \sqrt{2} \quad (\text{III.3-13})$$

En introduisant la formule (III.3-13) dans la formule (III.3-12), on obtient:

$$K_I(c) = A f_{\theta} c^{m_1} \sqrt{\pi c} / \sqrt{2} \quad (\text{III.3-14})$$

Pour la fissure émoussée, la valeur de A dépend uniquement de l'angle d'entaille et la relation $A-2\gamma$ est donnée dans la figure [III.8].

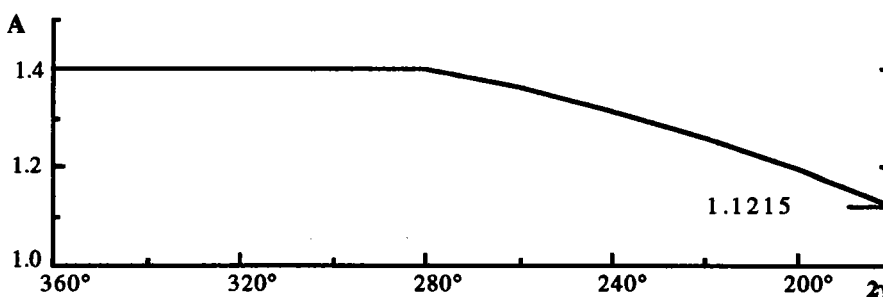


Figure III.8 : Relation entre la constante A et l'angle d'entaille 2γ .

On trouve que le facteur d'intensité de contraintes pour cette fissure courte $K_I(c)$ est exprimé par le facteur d'intensité d'entaille f_{θ} dans le cas d'une entaille aiguë et lorsque f_{θ} est connu, le facteur d'intensité de contraintes pour une fissure courte peut être calculé. Le calcul peut aussi être réalisé inversement.

Dans le cas d'une entaille émoussée, si le rayon ρ est petit, la relation (III.3-10) peut être utilisée. L'expression (III.3-14) devient dans ce cas:

$$K_I(c) = A C_{\theta} \sigma_{\theta\theta}^{\max} \rho^{-m_1} c^{m_1} \sqrt{\pi c} / \sqrt{2} \quad (\text{III.3-15})$$

En conclusion, le modèle de Hasebe a établi les relations suivantes :

- la distribution des contraintes au voisinage d'une entaille aiguë ;
- la distribution des contraintes au voisinage d'une entaille émoussée ;
- la relation entre le facteur d'intensité d'entaille et le coefficient de concentration de contraintes.
- l'expression du facteur d'intensité de contraintes pour une fissure courte issue d'une entaille aiguë ou d'une entaille émoussée.

III.4 CRITÈRE DE STABILITÉ D'UNE ENTAILLE

Le critère de stabilité d'une entaille en V sous sollicitation a été proposé par Knésl [29]. Les conditions de stabilité de l'entaille sont associées au champ de contraintes et à la résistance à la rupture du matériau.

On considère les hypothèses suivantes:

- Le comportement du matériau est élastique, linéaire et homogène.
- Le problème est bidimensionnel en mode I de rupture.

Dans le cas de la mécanique de la rupture fragile, le paramètre de résistance à la rupture du matériau est la ténacité K_{IC} .

Dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture, le critère de stabilité s'écrit:

$$K_I < K_{IC} \quad (\text{III.4-1})$$

ici, K_I est le facteur d'intensité de contraintes du mode I.

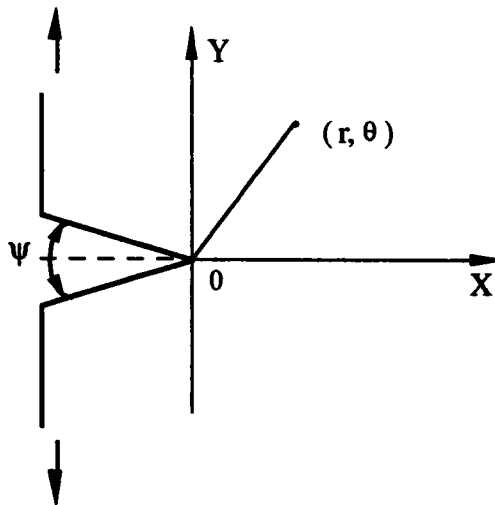


Figure [III.9] : Une entaille en V soumise à une sollicitation symétrique

Dans le cas d'une entaille en V, l'ordre de singularité varie avec l'angle d'entaille comme montré au chapitre I. Avec la méthode de Williams, le champ de contraintes peut s'exprimer par l'une des composantes des contraintes en coordonnées polaires et au voisinage de la pointe de l'entaille [29] :

$$\sigma_{rr} = \frac{H_I}{\sqrt{2\pi}} r^{-\lambda} [(2 - \lambda - \lambda^2) \cos\lambda\theta - q(2 - 3\lambda + \lambda^2) \cos(2 - \lambda)\theta]$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{H_I}{\sqrt{2\pi}} r^{-\lambda} [(2 - 3\lambda + \lambda^2) \cos\lambda\theta + q(2 - 3\lambda + \lambda^2) \cos(2 - \lambda)\theta] \quad \text{[III.4-2]}$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{H_I}{\sqrt{2\pi}} r^{-\lambda} [\lambda(1 - \lambda) \cos\lambda\theta + q(2 - 3\lambda + \lambda^2) \sin(2 - \lambda)\theta]$$

ici, λ et q sont des paramètres variant avec l'angle ψ comme montré dans le tableau III.3. Quand $\psi = 0$, les équations [III.4-2] décrivent le champ de contraintes dans le cas d'une fissure, dans ce cas $\lambda = 0,5$ et $H_I = K_I$.

Tableau III.3 : Valeurs de λ et q en fonction de l'angle d'entaille

ψ (degrés)	λ	q
0	0.500	0.333
10	0.500	0.343
20	0.497	0.373
30	0.488	0.423
40	0.470	0.497
50	0.437	0.595
60	0.384	0.714
70	0.303	0.841
80	0.181	0.951
90	0.000	1.000

Le critère de stabilité peut être associé à une contrainte moyenne calculée comme la moyenne des contraintes $\sigma_{\theta\theta} (\theta = 0)$ sur une distance significative à partir de la pointe d'entaille. De plus, ce critère n'est valable que dans le cas où la contraintes moyenne est inférieure à la contrainte critique. On écrit ce critère à l'aide de la relation suivante:

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{d} \int_0^d \sigma_{\theta\theta} (\theta = 0) dr \quad (\text{III.4-3})$$

Où $\bar{\sigma}$ représente la contraintes moyenne, σ_c la contrainte critique et d la distance caractéristique.

Pour exprimer la quantité de $\bar{\sigma}$, on utilise la condition d'instabilité $\bar{\sigma} = \sigma_c$, pour une fissure on obtient :

$$\sigma_c = \frac{2K_{IC}}{\sqrt{2\pi d}} \quad (\text{III.4-4})$$

Avec une méthode similaire pour l'entaille en V avec un angle ψ , on a :

$$\sigma_c = \frac{H_{IC}}{\sqrt{2\pi}} \frac{(2 - \lambda)(1 + q)}{d^\lambda} \quad (\text{III.4-5})$$

ici, H_{IC} est un facteur d'intensité de contrainte critique d'entaille.

En comparant les équation (III.4-4) et (III.4-5), on a :

$$H_{IC} = h(\psi) K_{IC} \quad (\text{III.4-6})$$

avec

$$h(\psi) = \frac{2d^{\lambda-0.5}}{(2 - \lambda)(1 + q)}$$

Finalement, nous obtenons le critère de stabilité de l'entaille par l'expression suivante:

$$H_I(\psi) < H_{IC}(K_{IC}, \psi) = h(\psi) K_{IC} \quad (\text{III.4-7})$$

Comme le mécanisme de la rupture d'une fissure est associé avec la ténacité K_{IC} , H_{IC} peut être considéré comme la " ténacité déterminée à partir d'une entaille ".

Du point de vue microscopique, on considère que la rupture se produit par clivage qui s'élabore sur une distance caractéristique d égale de 2 à 5 fois la taille du grain du matériau.

Le critère représenté par la relation (III.4-7) crée le lien la ténacité mesurée à partir d'une fissure et celle mesurée à partir d'une d'entaille.

CONCLUSION :

Dans cette partie nous avons résumé les études que nous avons réalisées et concernant le calcul du champ de contraintes en fond d'entaille pour une plaque infinie ou une plaque de dimensions finies. Ainsi que la détermination du facteur d'intensité de contraintes. Le problème de l'entaille émoussée a été moins étudié que celui de l'entaille aiguë en raison de sa complication.

Pour le problème de l'entaille émoussée, des travaux ont été réalisés par Neuber and Hasebe dans le cas d'une plaque infinie. L'intégrale de contour de Robinson est un moyen de calculer le champ de contraintes dans le cas d'une plaque de dimensions définies. la comparaison de leurs résultats avec notre méthode sera faite dans la deuxième partie.

La transformation conforme couplée avec les équations de l'élasticité est une méthode très efficace pour l'étude d'une plaque entaillé de dimensions finies. A partir des résultats Bahaud et autres [14] ont obtenus pour une entaille aiguë ou de faible acuité, nous développerons une méthode pour calculer le champ de contraintes d'une plaque possédant une entaille une acuité relativement importante.

DEUXIÈME PARTIE :
UTILISATION DE LA MÉTHODE DE
LA TRANSFORMATION CONFORME

INTRODUCTION

IV TRANSFORMATION SUR UNE PLAQUE POSSÉDANT UNE
ENTAILLE POINTUE OU ÉMOUSSÉE

V CALCUL DU CHAMP DE CONTRAINTES

CONCLUSION

DEUXIÈME PARTIE : UTILISATION DE LA MÉTHODE DE LA TRANSFORMATION CONFORME

INTRODUCTION

La deuxième partie concerne le calcul de la distribution des contraintes sur une plaque possédant une entaille. La méthode que nous utilisons est celle de la transformation conforme. Grâce au développement de l'informatique, cette méthode présente des avantages pour simplifier le calcul tout en conservant une grande précision.

La base des théorèmes concernant la transformation conforme est décrite au annexe. Le concept de variable complexe est suffisamment connu pour ne pas être abordé ici. Nous présentons directement dans cet annexe le théorème de Schwartz-Cristoffel et les techniques de transformation des géométries. C'est ainsi que pour transformer un polygone en un cercle unité, plusieurs techniques de calcul numérique seront employées.

Au chapitre IV, d'abord nous présenterons l'utilisation de la transformation conforme sur une plaque avec une entaille aiguë en V. Avec la méthode de Schwartz-Cristoffel, la transformation de l'image de cette plaque est effectuée exactement sur toutes les parties .

Nous considérerons ensuite la transformation d'une plaque avec une entaille émoussée en un arc de cercle. Ce chargement introduit une complication mathématique considérable. Une modification de la méthode de Schwartz-Cristoffel a été développée afin de résoudre la difficulté de transformer l'image du fond d'entaille. Une technique d'itération est nécessaire pour l'approche de la transformation exacte que nous souhaitons obtenir surtout lorsque le rayon du fond d'entaille devient relativement grand.

Deux types de plaque, l'une avec une entaille centrale et l'autre avec une entaille latérale sont étudiés par cette transformation. Le rayon du fond d'entaille est choisi variable de 0 à quelques millimètres.

Le but de la transformation conforme étant de calculer le champ de contraintes élastique, au chapitre V les équations des variables complexes de Kolosov-Muskhelishvili seront utilisées pour obtenir la distribution des contraintes dans toute la plaque. Le niveau de contraintes en fonction de la distance au fond d'entaille et de l'acuité d'entaille est analysé dans le but d'étudier le facteur d'intensité de contraintes et le mécanisme de rupture des matériaux fragiles.

IV. TRANSFORMATION CONFORME SUR UNE PLAQUE POSSÉDANT UNE ENTAILLE AIGUË OU ÉMOUSSÉE

IV.1 TRANSFORMATION CONFORME SUR UNE PLAQUE POSSÉDANT UNE ENTAILLE AIGUË

Considérons une plaque rectangulaire contenant une entaille en V aiguë. La plaque est située dans le plan complexe des z où $z = x_1 + i x_2$. Cette plaque supporte une paire de charges appliquées aux points A_3 et A_7 symétriques par rapport à l'axe x_1 . Soit C le contour de la plaque (figure [IV.1])

Le calcul de la transformation conforme est fait par la formule:

$$z = m(\zeta) \quad (\text{IV.1-1})$$

Elle transforme l'intérieur du contour C appartenant au plan des z en l'intérieur d'un cercle unité Γ dans le plan ζ .

Employons les coordonnées cylindriques dans le plan des z , nous obtenons:

$$z = e^{\gamma} = e^{\alpha} e^{i\beta} = r e^{i\theta} \quad (\text{IV.1-2})$$

La méthode consiste à utiliser deux transformations successives, une première transforme l'intérieur du contour C en un demi-plan positif, la seconde transforme ce demi-plan positif en l'intérieur d'un cercle unité.

IV.1.1. Première transformation

Soit un plan des w (w est un plan complexes avec des axes u_1 et u_2) où $w = u_1 + iu_2$ (figure [IV.2]), la transformation de Schwartz-Cristoffel est représentée dans notre cas par la fonction d'image suivante [17][14] :

$$z = m(w) = C'_1 \int_0^w \prod_{s=1}^7 (w - a_s)^{-\frac{\alpha_s}{\pi}} dw + C'_2 \quad (IV.1-3)$$

où C'_1 et C'_2 sont deux constantes. Les valeurs des angles extérieurs de la plaque sont :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \pi / 2 \\ \alpha_4 &= \alpha_6 = \pi / 2 - \psi / 2 \\ \alpha_5 &= \psi - \pi \end{aligned} \quad (IV.1-4)$$

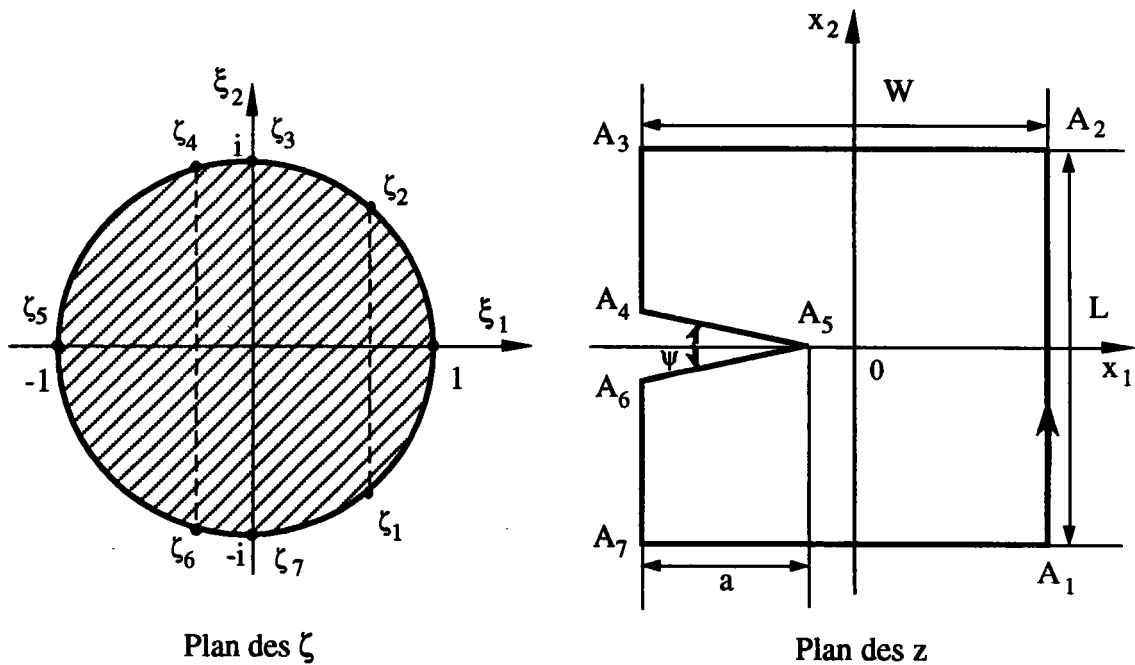


Figure [IV.1] : Transformation conforme de la plaque en l'intérieur du cercle unité.

La fonction (IV.1-3) transforme l'intérieur du contour C en un demi-plan supérieur dans le plan des w (Figure [IV.2]).

Définissons les points correspondants dans les 2 plans z et w :

$$a_1 = -k'; a_2 = k'; a_3 = 1; a_4 = 1/k'; a_5 = \infty; a_6 = -1/k'; a_7 = -1 \quad (IV.1-5)$$

pour connaître les a_j , deux coefficients inconnus k et k' doivent être déterminés.

Désignons par λ_2 et λ_3 les rapports du 2^{ème} et 3^{ème} côté sur le premier côté de la plaque :

$$\lambda_2 = \frac{L_{A_2A_3}}{L_{A_1A_2}} = \frac{w}{L} \quad (IV.1-6)$$

$$\lambda_3 = \frac{L_{A_3A_4}}{L_{A_1A_2}} = \frac{\frac{L}{2} - a \operatorname{tg}\left(\frac{\psi}{2}\right)}{L}$$

D'après la fonction (IV.1-3), les longueurs des côtés $L_{A_1A_2}$, $L_{A_2A_3}$ et $L_{A_3A_4}$ peuvent être calculées par :

$$L_{A_1A_2} = I_1 C'_1 = 2C'_1 \int_0^{k'} \left(\frac{1}{k^2} - w^2\right)^\alpha (1-w^2)^{\frac{-1}{2}} (k'^2 - w^2)^{\frac{-1}{2}} dw$$

$$L_{A_2A_3} = I_2 C'_1 = C'_1 \int_k^1 \left(\frac{1}{k^2} - w^2\right)^\alpha (1-w^2)^{\frac{-1}{2}} (w^2 - k'^2)^{\frac{-1}{2}} dw \quad (IV.1-7)$$

$$L_{A_3A_4} = I_3 C'_1 = C'_1 \int_1^{\frac{1}{k}} \left(\frac{1}{k^2} - w^2\right)^\alpha (w^2 - 1)^{\frac{-1}{2}} (w^2 - k'^2)^{\frac{-1}{2}} dw$$

avec $\alpha = \psi/2\pi - 1/2$

En combinant les équations (IV.1-6) et (IV.1-7), nous obtenons :

$$\begin{cases} I_2(k, k') = (w/L) I_1(k, k') \\ I_3(k, k') = (L/2 - a \operatorname{tg}(\psi/2)) I_1(k, k') \end{cases} \quad (IV.1-8)$$

Les intégrales impropres I_1 , I_2 et I_3 peuvent être calculées par la méthode approchée de Simpson et les équations (IV.1-8) peuvent être résolues par la méthode de Newton-Fourier afin de déterminer les valeurs de a_2 et a_4 .

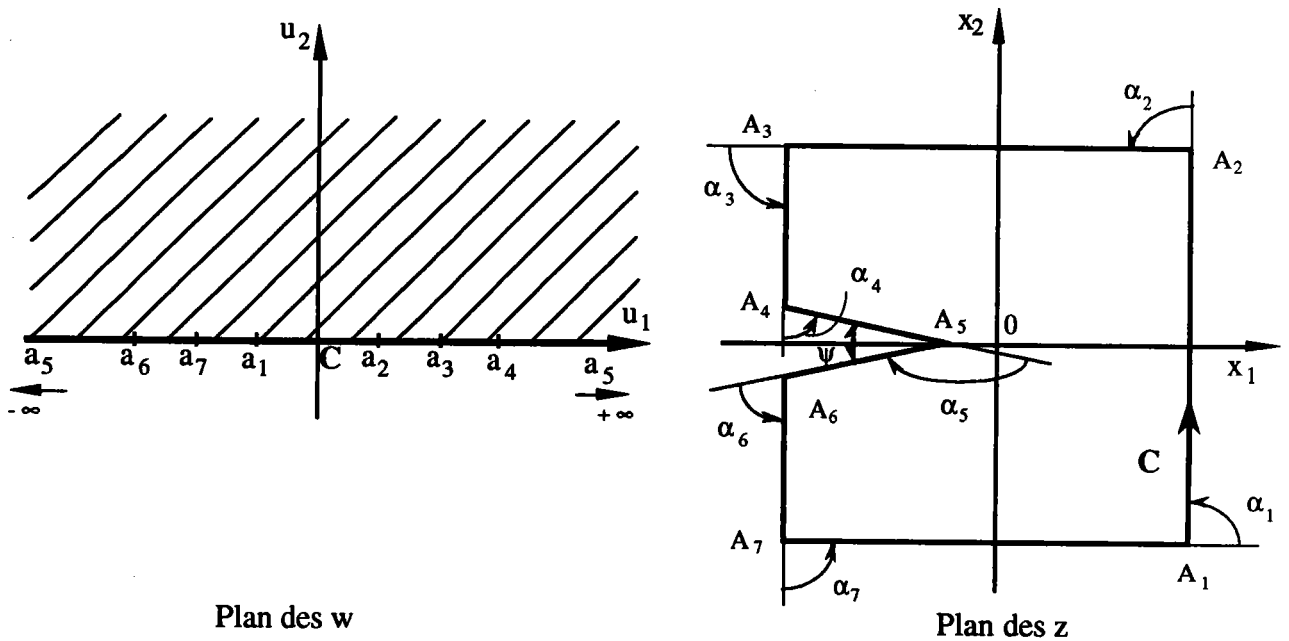


Figure [IV.2] : Transformation conforme de la plaque en un demi-plan supérieur.

IV.1.2 Deuxième transformation

La deuxième transformation conforme transforme le demi-plan supérieur des w en l'intérieur du cercle unité (figure [IV.3]) :

$$w = i \frac{1 - \zeta}{1 + \zeta} \quad (\text{IV.1-9})$$

Si nous appelons ζ_s les points du cercle unité du plan des ζ , ayant les sommets A_s de la plaque pour images, nous obtenons en portant (IV.1-9) dans (IV.1-3) :

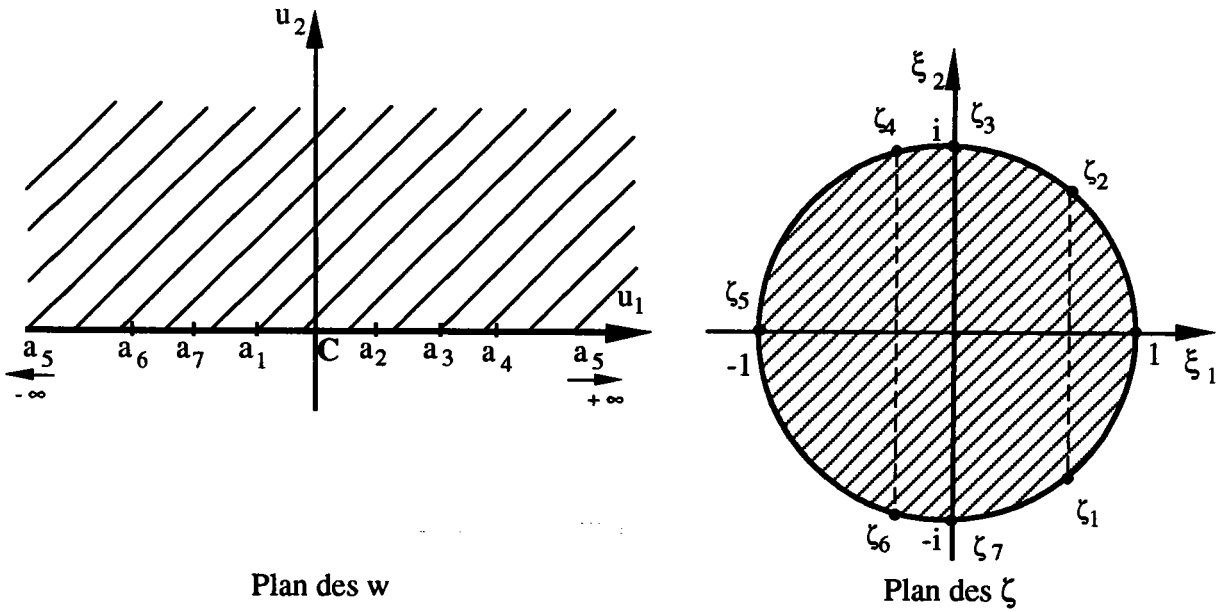


Figure [IV.31] : Transformation conforme du demi-plan en l'intérieur du cercle unité.

$$z = m(\zeta) = C_1 \int_0^{\zeta} \prod_{s=1}^7 \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_s}\right)^{-\frac{\alpha_s}{\pi}} d\zeta + C_2 \quad (IV.1-10)$$

ou :

$$\frac{dz}{d\zeta} = m'(\zeta) = C_1 \prod_{s=1}^7 \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_s}\right)^{-\frac{\alpha_s}{\pi}} \quad (IV.1-11)$$

IV.1.3 Représentation approximative

La fonction de représentation (IV.1-11) est holomorphe dans le cercle unité, elle est développable en série de Taylor .

$$\frac{dz}{d\zeta} = m'(\zeta) = C_1 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n \quad (IV.1-12)$$

d'où en intégrant terme à terme :

$$z = m(\zeta) = C_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \zeta^{n+1} \quad (\text{IV.1-13})$$

Désignons par l'indice E la fonction exacte et par l'indice A la fonction approximative :

$$m'_E(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n = C_1 \left[\prod_{s=1}^7 \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_s} \right)^{\frac{-\alpha_s}{\pi}} \right] \quad (\text{IV.1-14})$$

$$m'_A(\zeta) = \sum_{n=0}^m a_n \zeta^n + \varepsilon_{m+1} \zeta^{m+1} + \varepsilon_{m+2} \zeta^{m+2} \quad (\text{IV.1-15})$$

Soit ζ^* un point du contour, nous choisissons une valeur de m avec une précision suffisante. Les deux coefficients correctifs ε_{m+1} et ε_{m+2} sont calculés par :

$$m'_A(\zeta^*) = m'_E(\zeta^*) \quad (\text{IV.1-16})$$

$$m''_A(\zeta^*) = m''_E(\zeta^*)$$

La fonction $m_A(\zeta)$ modifie évidemment la configuration générale de l'image réelle. Mais si l'ordre du développement est suffisamment grand, la modification sera acceptable.

IV.1.4 Calcul numérique

Le calcul numérique des résultats théoriques développés précédemment n'est possible qu'à l'aide d'un ordinateur.

Un programme a été réalisé pour obtenir une représentation approximative de cette transformation. La figure [IV.4] montre un organigramme modulaire de la procédure de ce calcul numérique.

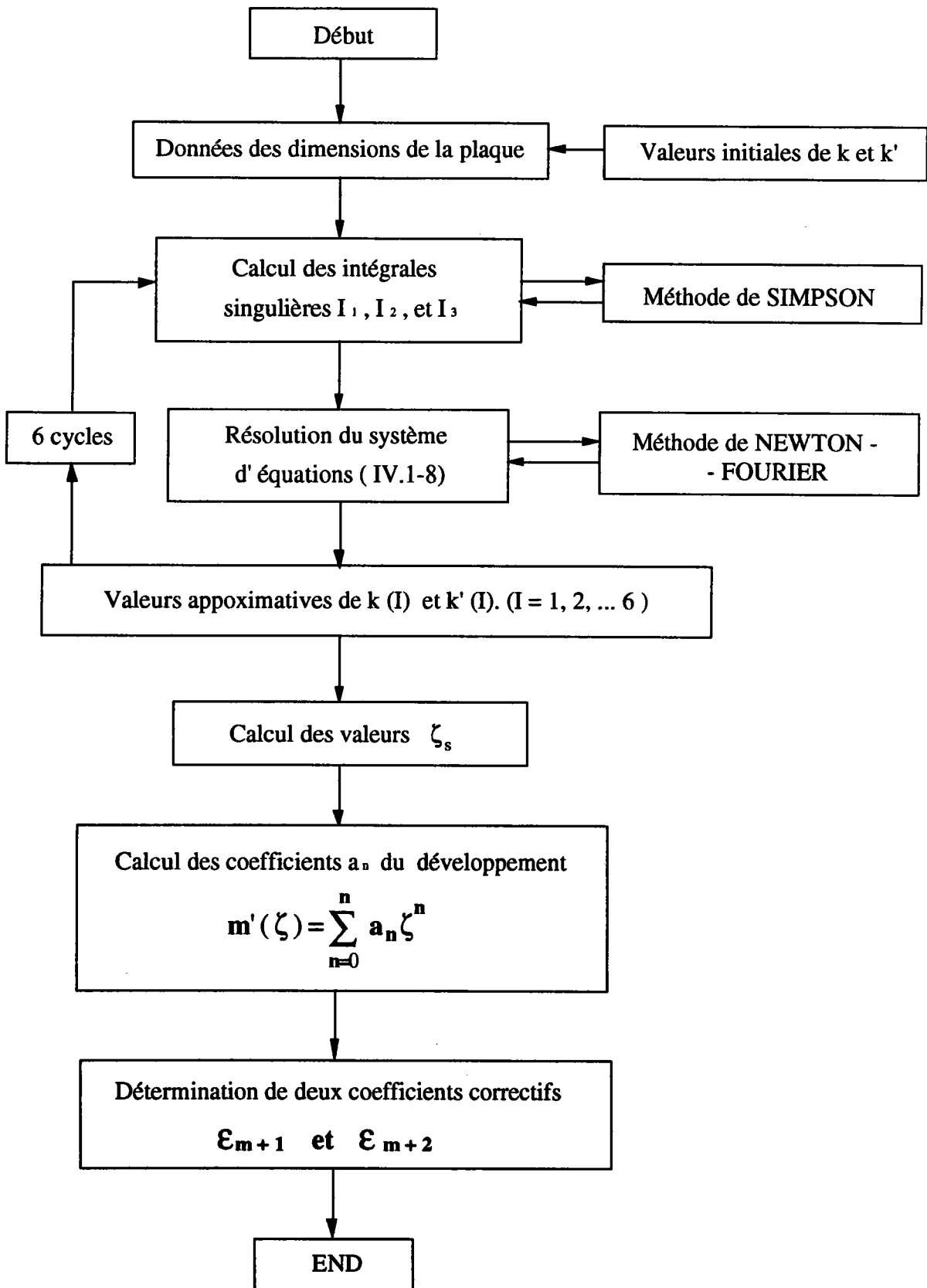


Figure [IV.4]: Programmation pour obtenir une représentation approximative de la transformation conforme.

Le tableau 1 donne les valeurs des coefficients k , k' , ζ_2 et ζ_4 calculés numériquement pour les différents rapports géométriques d'une plaque rectangulaire entaillée, L représente la hauteur de la plaque, W la largeur, a la profondeur de l'entaille et ψ l'angle d'entaille en degrés.

Les valeurs de k , k' , ζ_2 et ζ_4 données dans ce tableau sont obtenues par le programme. Six itérations donnent une précision suffisante. ζ_2 et ζ_4 sont des valeurs complexes présentées en deux parties, la partie réelle et la partie imaginaire.

Tableau 1 : Valeurs de ζ_2 et ζ_4 calculées pour différents rapports géométriques d'une plaque rectangulaire entaillée.

angle d'entaille ψ	H : W : a	k	k'	ξ_2	ξ_4
15°	4 : 2 : 1	0,793743	0,844815	0,167067 0,985957	-0,226973 0,973901
30°	4 : 2 : 1	0,824233	0,849453	0,161729 0,986835	-0,190929 0,981604
45°	4 : 2 : 1	0,856684	0,855019	0,155363 0,987857	-0,153463 0,988154
60°	4 : 2 : 1	0,890608	0,861802	0,147643 0,989041	-0,115336 0,993327
75°	4 : 2 : 1	0,924899	0,870213	0,138129 0,990414	-0,077913 0,996960
90°	4 : 2 : 1	0,957377	0,880847	0,126195 0,992005	-0,043530 0,999052

angle d'entaille ψ	H : W : a	k	k'	ξ_2	ξ_4
15°	2 : 2 : 1	0,943859	0,422924	0,696548 0,717510	-0,057714 0,998333
30°	2 : 2 : 1	0,962732	0,433253	0,683915 0,729562	-0,037962 0,999279
45°	2 : 2 : 1	0,979307	0,445629	0,668634 0,743592	-0,020907 0,999781
60°	2 : 2 : 1	0,991929	0,460662	0,649880 0,760037	-0,008103 0,999967
75°	2 : 2 : 1	0,998773	0,479486	0,606139 0,779711	-0,001228 0,999999

angle d'entaille ψ	H : W : a	k	k'	ξ_2	ξ_4
5°	40 : 18 : 2	0,198669	0,789185	0,232428 0,972613	-0,924059 0,382250
15°	40 : 20 : 3	0,289234	0,721118	0,315780 0,948832	-0,845603 0,533812
45°	40 : 20 : 3	0,331659	0,722383	0,314201 0,949356	-0,801805 0,597586

Les valeurs de ζ_3 , ζ_5 et ζ_7 sont fixées : $\zeta_3 = i$, $\zeta_5 = -1$, et $\zeta_7 = -i$. Les valeurs de ζ_1 et ζ_6 sont les conjuguées des grandeurs complexes de ζ_2 et ζ_4 .

La figure (IV.5) montre un exemple d'un image de transformation sur une plaque avec $H = 20 \text{ mm}$; $W = 20 \text{ mm}$; $a = 10 \text{ mm}$; $\psi = 30^\circ$. L'ordre de développement de formule (IV.1-15) est choisi environ 282 pour assurer une bonne précision.

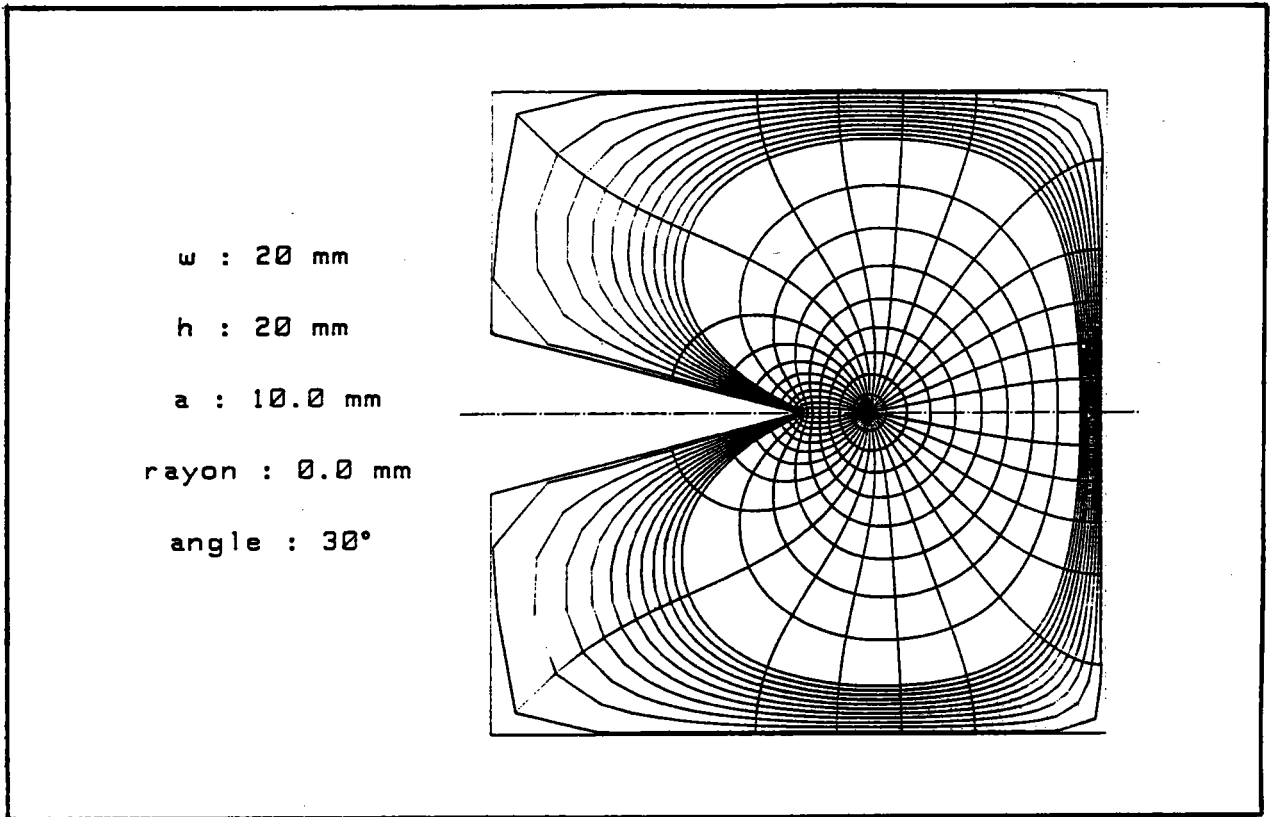


Figure [IV.5]: Transformation exacte d'une plaque avec une entaille aigüe en V.

Le tableau 2 donne les valeurs des coefficient calculées pour obtenir la transformation conforme sur la plaque dont le schéma est présenté ci dessus.

Tableau 2 : Coefficients de transformation conforme correspondant à la plaque montrée dans la figure (IV.5) :

numéro du sommet	s = 1	s = 2	s = 3	s = 4	s = 5	s = 6	s = 7
ζ_s	-0,683915	-0,683915	0,0	+ 0,0379623	1,0	+ 0,0379623	0,0
	-0,729562	0,729562	1,0	+ 0,999279	0,0	- 0,999279	-1,0
α_s	-0,5	-0,5	-0,5	-0,416667	0,833333	-0,416667	-0,5

En général, quand l'ordre de la série (IV.1-15) est assez grand, la précision de la transformation peut être toujours assurée surtout au voisinage du fond d'entaille. La figure (IV.6) montre trois images avec une configuration différente :

- image (a) :

$$\frac{\text{Hauteur}}{\text{Largeur}} = \frac{H}{W} = 3$$

$$\frac{\text{Profondeur}}{\text{Largeur}} = \frac{a}{W} = 0,5$$

$$\text{Angle de l'entaille} = 45^\circ$$

- image (b) :

$$\frac{\text{Hauteur}}{\text{Largeur}} = \frac{H}{W} = 2$$

$$\frac{\text{Profondeur}}{\text{Largeur}} = \frac{a}{W} = 0,5$$

$$\text{Angle de l'entaille} = 60^\circ$$

- image (c) :

$$\frac{\text{Hauteur}}{\text{Largeur}} = \frac{H}{W} = 2$$

$$\frac{\text{Profondeur}}{\text{Largeur}} = \frac{a}{W} = 0,25$$

$$\text{Angle de l'entaille} = 45^\circ$$

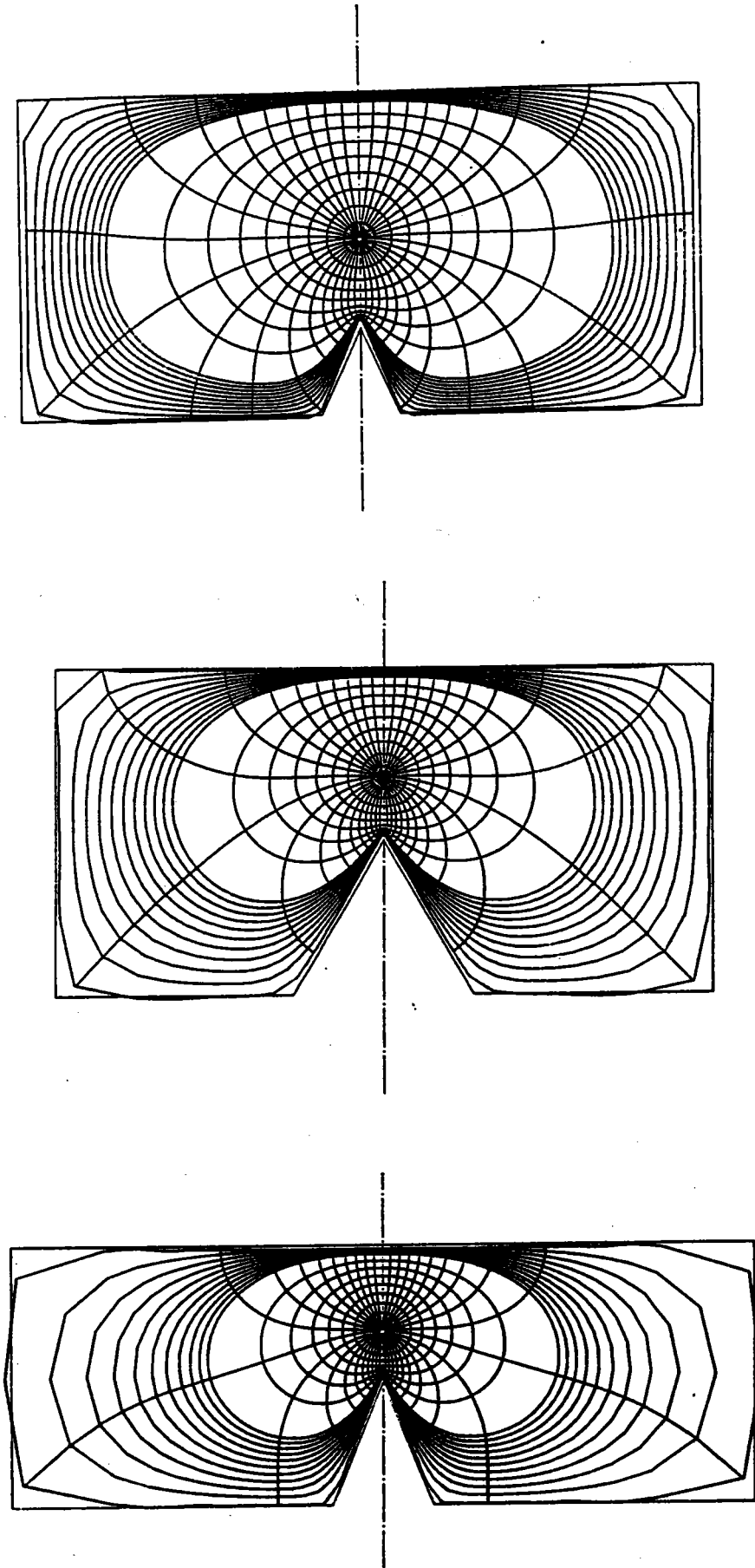


Figure IV.61 : Utilisation de la transformation conforme sur des plaques de dimensions différentes

IV.2 CAS D'UNE ENTAILLE ÉMOUSSÉE AVEC UN RAYON RELATIF PETIT

Du point de vue pratique, une entaille réelle possède toujours une acuité finie. Nous avons donc besoin d'une modèle mathématique qui reproduit cette caractéristique pour obtenir la transformation précise pour chaque entaille d'acuité différente.

L'expression mathématique et le calcul deviennent alors plus compliqués. Cette difficulté peut être surmontée par l'utilisation de informatique.

Une modification de la fonction de Schwartz-Cristoffel a été effectuée pour étendre son utilisation au cas d'une entaille émoussée.

IV.2.1 Modification de la fonction de Schwartz -Cristoffel

Soit ρ le rayon de courbure à fond d'entaille et A'_5 et A''_5 les points tangents aux lèvres de l'entaille (Figure [IV.7]).

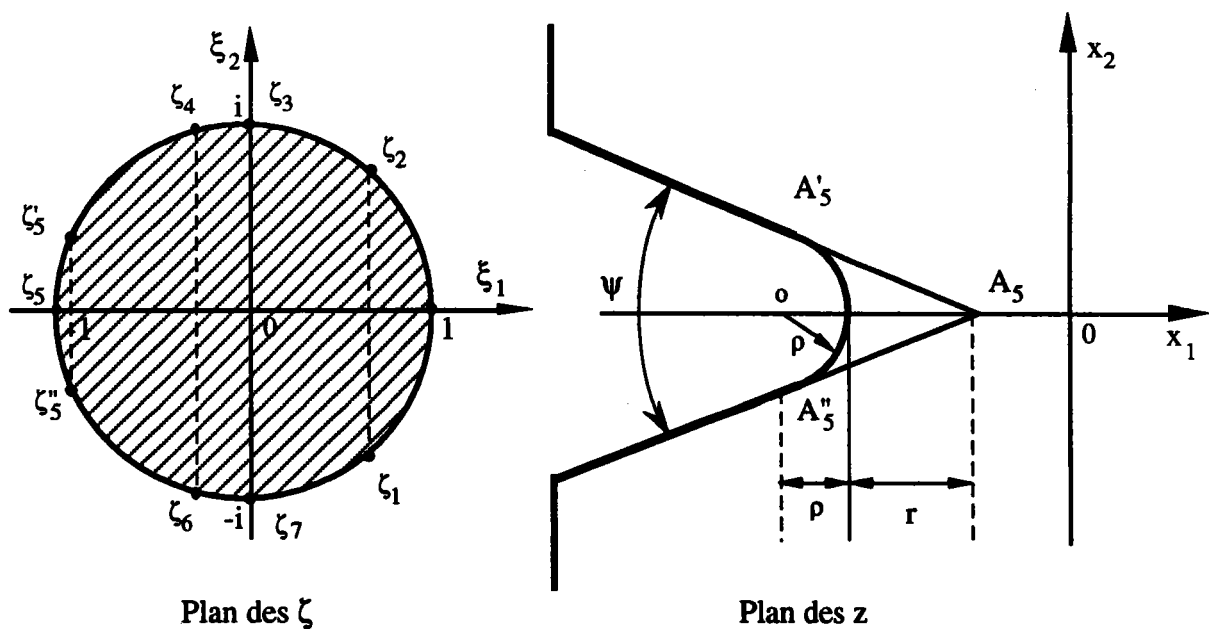


Figure [IV.7] : Représentation des points ξ'_5 et ξ''_5 correspondant aux points A'_5 et A''_5 sur le plan des z .

A partir de la formule (IV.1-3) l'expression $(w - a_5)^{-\alpha_5/\pi}$ qui correspond au point A_5 est remplacée par l'expression :

$$(w - a_5')^{-\frac{\alpha}{\pi}} + (w - a_5'')^{-\frac{\alpha}{\pi}} \quad (\text{IV.2-1})$$

où a_5' et a_5'' sont deux points du plan w correspondant aux A_5' et A_5'' [14]. Donc grâce à la symétrie, la formule (IV.1-3) devient :

$$z = m(w) = C_1' \int_0^w (w - a_1)^{-\frac{\alpha_1}{\pi}} (w - a_2)^{-\frac{\alpha_2}{\pi}} (w - a_3)^{-\frac{\alpha_3}{\pi}} (w - a_4)^{-\frac{\alpha_4}{\pi}} \\ [(w - a_5')^{-\frac{\alpha_5}{\pi}} + (w - a_5'')^{-\frac{\alpha_5}{\pi}} dw] (w - a_6)^{-\frac{\alpha_6}{\pi}} (w - a_7)^{-\frac{\alpha_7}{\pi}} dw + C_2' \quad (\text{IV.2-2})$$

Introduisons la formule (IV.1-9) dans (IV.2-2), il en résulte :

$$z = m(\zeta) = C_1'' \int_0^\zeta \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_1}\right)^{-\frac{\alpha_1}{\pi}} \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_2}\right)^{-\frac{\alpha_2}{\pi}} \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_3}\right)^{-\frac{\alpha_3}{\pi}} \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_4}\right)^{-\frac{\alpha_4}{\pi}} \\ \left[\left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_5'}\right)^{-\frac{\alpha_5}{\pi}} + \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_5''}\right)^{-\frac{\alpha_5}{\pi}} \right] \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_6}\right)^{-\frac{\alpha_6}{\pi}} \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_7}\right)^{-\frac{\alpha_7}{\pi}} d\zeta + C_2'' \quad (\text{IV.2-3})$$

où ζ_5' et ζ_5'' sont deux points du plan ζ , ils correspondent aux points A_5' et A_5'' du plan z .

C_1'' et C_2'' sont deux constantes.

D'après (IV.2-3), nous avons :

$$\frac{dz}{d\zeta} = m'(\zeta) = C_1 \left\{ \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_1}\right)^{-\frac{\alpha_1}{\pi}} \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_2}\right)^{-\frac{\alpha_2}{\pi}} \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_3}\right)^{-\frac{\alpha_3}{\pi}} \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_4}\right)^{-\frac{\alpha_4}{\pi}} \right. \\ \left. \left[\left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_5}\right)^{-\frac{\alpha_5}{\pi}} + \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_5}\right)^{-\frac{\alpha_5}{\pi}} \right] \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_6}\right)^{-\frac{\alpha_6}{\pi}} \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_7}\right)^{-\frac{\alpha_7}{\pi}} \right\} \quad (\text{IV.2-5})$$

La formule (IV.2-5) est développable en série de Taylor :

$$\frac{dz}{d\zeta} = m'(\zeta) = C_1 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n \quad (\text{IV.2-6})$$

Nous utilisons la même méthode que dans le chapitre IV.1 pour obtenir une représentation approximative (IV.1-15). Après différentes tentatives, nous choisissons l'ordre 282 du développement de $m'(\zeta)$ afin d'assurer la précision.

Cette méthode est très efficace lorsque le rayon du fond d'entaille de la plaque est relativement petit.

IV.2.2 Détermination du rayon en fond d'entaille

La modification de la fonction de transformation conforme montre qu'entre les points tangents A_5' et A_5'' et la courbe qui se trouve en fond d'entaille peut être considéré comme une partie du cercle ou plus précisément une partie d'ellipse.

Nous choisissons une méthode approximative et le rayon de courbure s'exprime par la formule suivante :

$$\rho = \frac{[\text{Im} (m(\zeta_5) / \cos(\frac{\Psi}{2}))]^2}{m(e^{i\pi}) - [\text{Re} (m(\zeta_5)) + \text{Im} (m(\zeta_5) \text{tg}(\frac{\Psi}{2}))]} \quad (\text{IV.2-7})$$

ici, ζ_5' est le point du plan des ξ correspondant au point tangent A_5' .

l'autre formule proposée par [19], est aussi valable la détermination du rayon et prend la forme suivante :

$$\rho = [m'(\zeta) \overline{m'(\zeta)}]^{3/2} / \{ m'(\zeta) \overline{m'(\zeta)} + \operatorname{Re} [\zeta m'(\zeta) m''(\zeta)] \} \quad (\text{IV.2-8})$$

La comparaison des valeurs calculées par ces deux formules montre qu'il n'existe pas de différence significative entre elles.

IV.2.3 Exemple du calcul

A titre d'exemple, on considère une plaque de dimensions suivantes :

- longueur de la plaque : 20 mm;
- hauteur de la plaque : 20 mm;
- profondeur de l'entaille : 10 mm;
- angle d'entaille : 30°.

La transformation d'image donne une forme pratiquement identique à celle que nous souhaitons obtenir. Lorsque le rayon d'entaille possède une valeur comprise entre 0,0005 et 0,1 mm, on constate peu de changement dans l'angle et la profondeur de l'entaille. La déformation de l'image de la taille de la plaque reste faible.

La figure (IV.8) montre une transformation obtenue avec une grande précision sur une plaque entaillée en V avec un rayon de 0,1 mm en fond d'entaille.

Tableau 3 : Valeurs des ζ_s et α_s

	s = 1	s = 2	s = 3	s = 4	s' = 5	s'' = 5	s = 6	s = 7
ζ_s	-0,683915	-0,683915	0,0	+0,0379623	0,932071	0,932071	+0,0379623	0,0
	-0,729562	0,729562	1,0	+0,999279	0,362275	-0,362275	-0,999279	-1,0
α_s	-0,5	-0,5	-0,5	-0,416667	0,833333	0,833333	-0,416667	-0,5

La figure (IV.9) illustre une série de fonds d'entailles de différentes acuités et variant de 0,005 à 0,1 mm qui ont été transformées par cette méthode.

On remarque que la courbure de chaque rayon est pratiquement celle d'un arc de cercle ou d'une ellipse. L'angle d'entaille toutefois augmente très légèrement, et la distorsion est certainement indifférente.

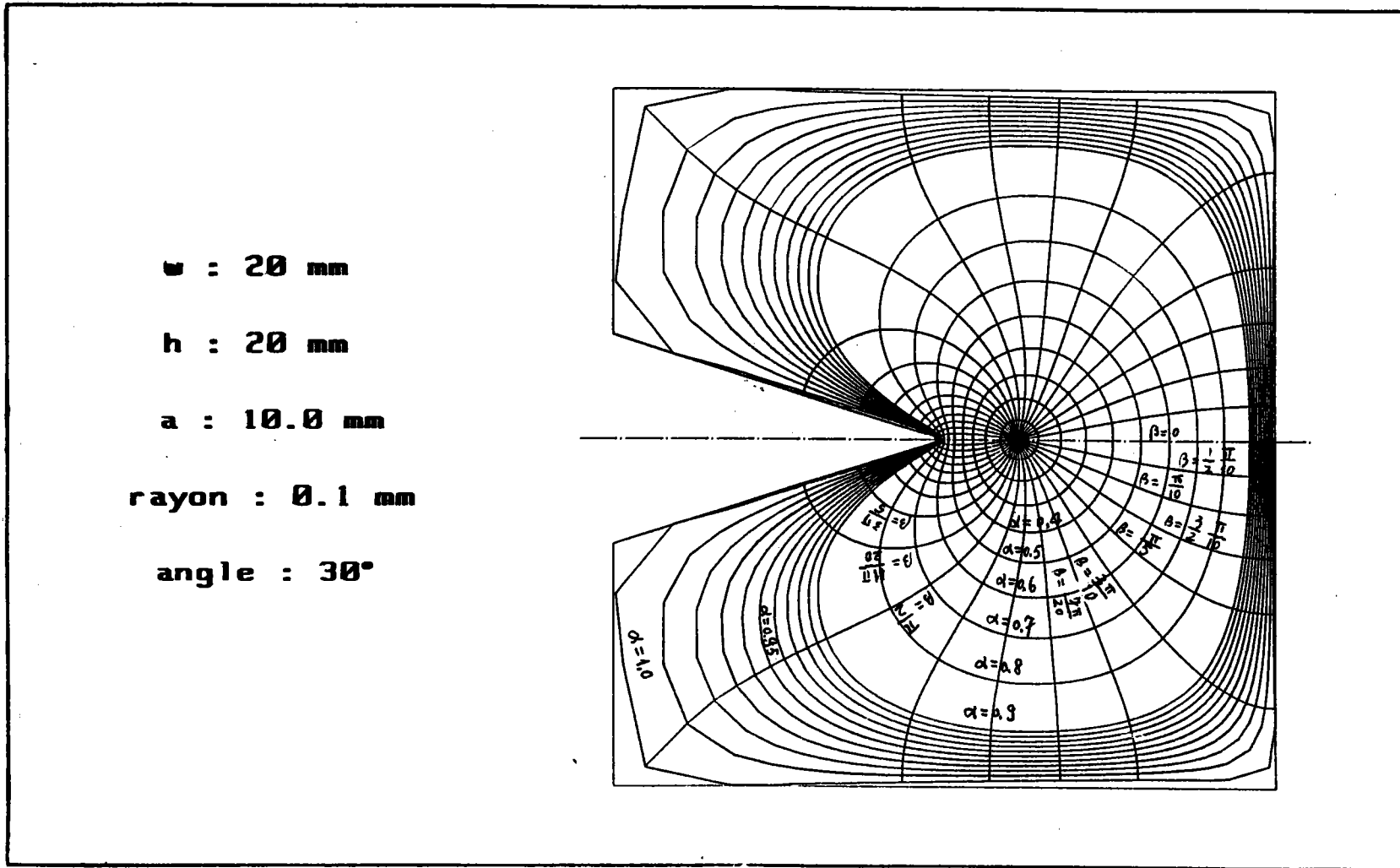


Figure [IV.8] : Transformation conforme d'une plaque avec une entaille en V de faible acuité

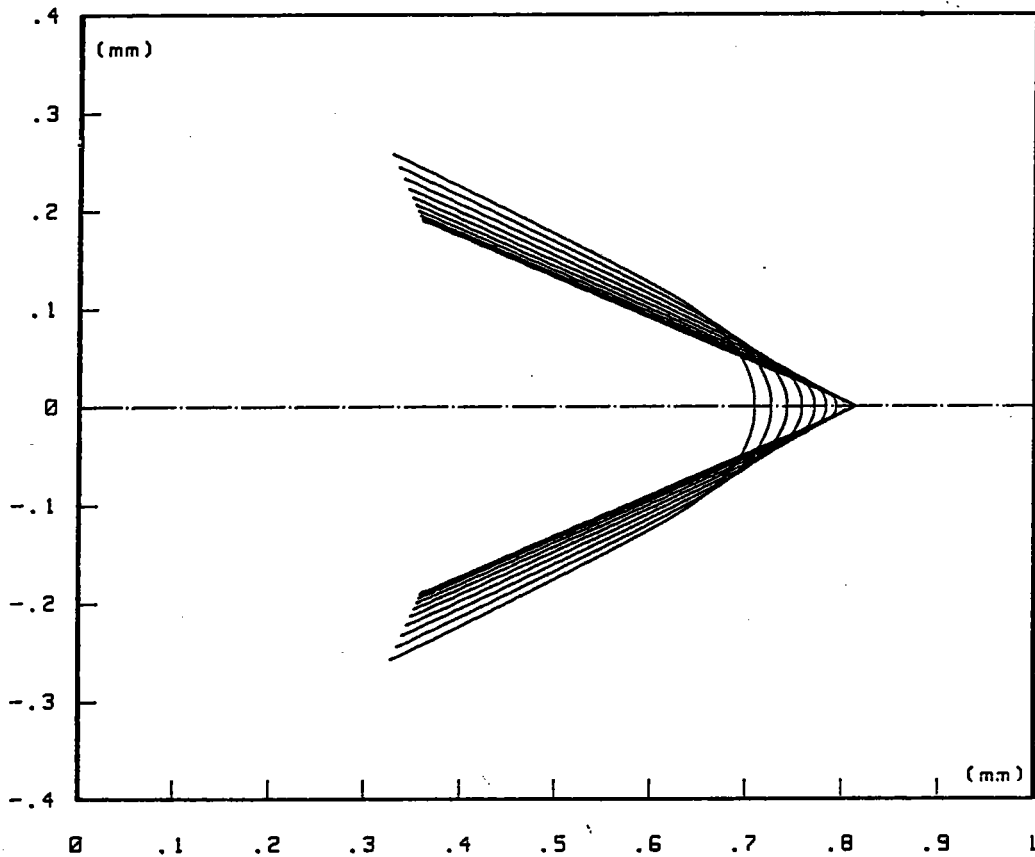


Figure (IV.9) : Représentation de la transformation d'un groupe d'entailles de différents rayons (de 0,005 à 0,1 mm) .

IV.3 CAS DES RAYONS A FOND D' ENTAILLE RELATIVEMENT IMPORTANTS

La méthode précédente présente la transformation approximative d'une plaque possédant une entaille de faible rayon qui peut être considérée comme acceptable compte tenu de la précision obtenue. On remarque que l'erreur dimensionnelle et la distorsion augmentent au fur et à mesure qu'augmente le rayon à fond d' entaille.

Dans l'équation (IV.2-2) le terme $(w - a'_5)^{-\alpha_5/\pi} + (w - a''_5)^{-\alpha_5/\pi}$ qui correspond aux points tangents à l'acuité de l'entaille, remplace le terme $(w - a_5)^{-\alpha_5/\pi}$ qui représente la pointe de l'entaille.

Quand le rayon en fond d'entaille est relativement petit, on remarque que l'angle d'ouverture de l'entaille change très légèrement par rapport la configuration correspondant à celle d'une entaille aiguë. On considère alors que dans le plan de transformation des ξ , les points $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_4$ et ζ_6 ne changent pas de place. Cette hypothèse est obtenue en remplaçant dans l'équation (IV.2-2) le terme $(w - a'_5)^{-\alpha_5/\pi} + (w - a''_5)^{-\alpha_5/\pi}$ qui correspond aux points tangents au fond d'entaille par le terme $(w - a_5)^{-\alpha_5/\pi}$ qui représente la pointe de l'entaille. Le calcul obtenu avec cette hypothèse donne des résultats satisfaisants tels que montrées au paragraphe précédent.

Si l'on veut réaliser une transformation sur une plaque entaillée avec un rayon d'entaille relativement important, la méthode appliquée au cas des petits rayons n'est pas valable. La taille du rayon d'entaille devient comparable aux côtés de la plaque et provoque évidemment un déplacement des points $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_4$ et ζ_6 dans le calcul dans le plan des ξ , ceci est vrai particulièrement pour les points ζ_4 et ζ_6 .

Si on veut calculer la redistribution exacte des ζ_s , on rencontrera beaucoup de difficultés d'un point de vue mathématique. Pour simplifier le calcul, nous choisissons une méthode pratique et approximative.

On remarque en effet que lorsque l'on augmente de façon importante le rayon en fond d'entaille : l'angle de l'entaille ψ , la profondeur de l'entaille a et la largeur de la plaque W voient leur valeur changer de façon appréciable.

Dans ce cas là, ψ , a et W peuvent être considérés comme des fonctions du rayon ρ . Les valeurs calculées dans le cas de l'entaille aiguë sont choisies comme des valeurs initiales, afin de les estimer exactement par un calcul itératif.

IV.3.1 Modification de la formule de transformation

Considérons que ψ_0, a_0 et w_0 les valeurs initiales, qui sont proches des valeurs de l'angle ψ_ρ , de la profondeur de l'entaille a_ρ et de la largeur de la plaque w_ρ que nous désirons obtenir après transformation conforme.

On fait l'hypothèse que les relations entre les valeurs initiales et les valeurs obtenus, sont exprimées par les fonction suivantes :

$$\begin{aligned}\psi_0 &= \psi_\rho + f(\rho) \\ a_0 &= a_\rho + g(\rho) \\ w_0 &= w_\rho + h(\rho)\end{aligned}\tag{IV.3-1}$$

ici $f(\rho)$, $g(\rho)$ et $h(\rho)$ sont des fonctions du rayon en fond d'entaille ρ . Leurs expressions exactes sont a priori inconnues.

Introduisons les fonctions (IV.3-1) dans les formules (IV.1-7), il en résulte :

$$\lambda_2 = \frac{L_{A_2} A_3}{L_{A_1} A_2} = \frac{w_0}{L} = \frac{w_\rho + h(\rho)}{L}\tag{IV.3-2}$$

$$\begin{aligned}\lambda_3 &= \frac{L_{A_3} A_4}{L_{A_1} A_2} = \frac{\frac{L}{2} - a_0 \operatorname{tg}\left(\frac{\psi_0}{2}\right)}{L} \\ &= \frac{\frac{L}{2} - [a_\rho + g(\rho)] \operatorname{tg}\left(\frac{[\psi_\rho + f(\rho)]}{2}\right)}{L}\end{aligned}$$

La formule (IV.1-8) devient :

$$I_2(k, k') = \frac{w_\rho + h(\rho)}{L} I_1(k, k')\tag{IV.3-3}$$

$$I_3(k, k') = \frac{\frac{L}{2} - [a_\rho + g(\rho)] \operatorname{tg}\left(\frac{[\psi_\rho + f(\rho)]}{2}\right)}{L} I_1(k, k')$$

Comme dans les équations (IV.1-7), les fonctions $I_1(k, k')$, $I_2(k, k')$, $I_3(k, k')$ sont définies par les même intégrales :

$$I_1 = 2 \int_0^k \left(\frac{1}{k^2} - w^2\right)^{-\alpha} (1 - w^2)^{-1/2} (k'^2 - w^2)^{-1/2} dw$$

$$I_2 = \int_k^1 \left(\frac{1}{k^2} - w^2\right)^{-\alpha} (1 - w^2)^{-1/2} (w^2 - k'^2)^{-1/2} dw$$

(IV.3-4)

$$I_3 = \int_1^{\frac{1}{k}} \left(\frac{1}{k^2} - w^2\right)^{-\alpha} (w^2 - 1)^{-1/2} (w^2 - k'^2)^{-1/2} dw$$

Par utilisation de la méthode de Simpson pour le calcul des intégrales impropres et de la méthode de Newton-Fourier pour déterminer les valeurs k et k' dans les équations (IV.3-3), nous obtenons les valeurs de a_1 , a_2 , a_4 et a_6 , dans le plan des w . Après transformation du demi-plan supérieur des w en l'intérieur du cercle unité, les valeurs de ζ_1 , ζ_2 , ζ_4 et ζ_6 du plan des ξ sont obtenues pour le cas d'une plaque à partir des paramètres géométriques ψ_ρ , a_ρ et W_ρ .

IV.3.2 Méthode du calcul numérique

Dans les formules (IV.3-1), l'expression des fonctions $f(\rho)$, $g(\rho)$ et $h(\rho)$ est inconnue et ne peut être déterminée à l'initialisation du calcul. Par expérience, nous savons que leurs valeurs ne sont pas éloignées de celles obtenues dans le cas d'une entaille aiguë. Nous faisons l'hypothèse que $f(\rho) = \Delta\psi_1$, $g(\rho) = \Delta a_1$ et $h(\rho) = \Delta W_1$ sont les premiers incréments de ce calcul obtenues par approximations successives et leurs valeurs sont prises comme étant du même ordre de grandeur que la valeur du rayon ρ .

Une première résolution de la transformation donne la configuration de la plaque. La comparaison entre cette configuration et la configuration désirée indique la tendance pour la détermination des seconds incréments $f(\rho) = \Delta\psi_2$, $g(\rho) = \Delta a_2$ et $h(\rho) = \Delta W_2$.

En utilisant un programme par itération, nous résolvons de nouveau le système pour déterminer $\Delta\psi_3$, Δa_3 et ΔW_3 et ainsi de suite jusqu'à atteindre les valeurs très proches des valeurs exactes. La figure [IV.10] montre un organigramme du calcul par itération.

Selon notre expérience, $h(\rho)$ peut être considérée comme une fonction linéaire de ρ , $g(\rho)$ comme une fonction polynomiale de degré 2 et $f(\rho)$ une fonction de polynomiale de degré 3.

Par exemple, dans le cas du $\psi = 45^\circ$, $a : W : L = 1 : 2 : 2$, les relations entre les valeurs obtenues et les valeurs d'entrée sont les suivantes :

$$\begin{aligned} W_\rho &= W_0 + 0,188\rho \\ a_\rho &= a_0 - 4,8016\rho + 2,9524\rho^2 \\ \psi_\rho &= \psi_0 + 35,998\rho - 52,258\rho^2 + 46,689\rho^3 \end{aligned} \quad (\text{IV.3-5})$$

ici, W_ρ , W_0 , a_ρ , a_0 et ρ sont exprimés en millimètre et ψ_ρ et ψ_0 en degrés.

Pour déterminer un rayon en fond d'entaille important plus proche d'un arc cercle, nous préférons utiliser la formule suivante :

$$\rho = \frac{[\operatorname{Im} (m(\zeta_s) / \cos(\frac{\psi}{2}))]^2}{[| \operatorname{Re} (m(\zeta_s)) - \operatorname{Re} (m(\zeta_s)) | + 2 | \operatorname{Im} (m(\zeta_s)) | \operatorname{tg}(\frac{\psi}{2})]} \quad (\text{IV.3-6})$$

IV.3.3 Exemples

Les figures [IV.11] [IV.12] et [IV.13] montrent un exemple de transformation conforme sur une plaque de largeur 20 mm et de hauteur 20 mm. Les rayon en fond d'entaille sont respectivement 0,5 mm 1,0 mm et 1,5 mm. On remarque que la précision de transformation diminue au fur et à mesure qu'augmente le rayon relatif ρ/W . Quand le rayon relatif $\rho/W < 0,05$, l'image de la transformation obtenue est considérée comme satisfaisante.

Le figure [IV.14] donne la transformation de deux plaque qui possèdent une entaille relativement peu profonde avec rayon assez important. Le contour de l'entaille est très proche d'une courbe elliptique ou parabolique. Les résultats sont satisfaisants. On constate que la transformation est obtenue avec plus de précision dans le cas d'une entaille de faible profondeur.

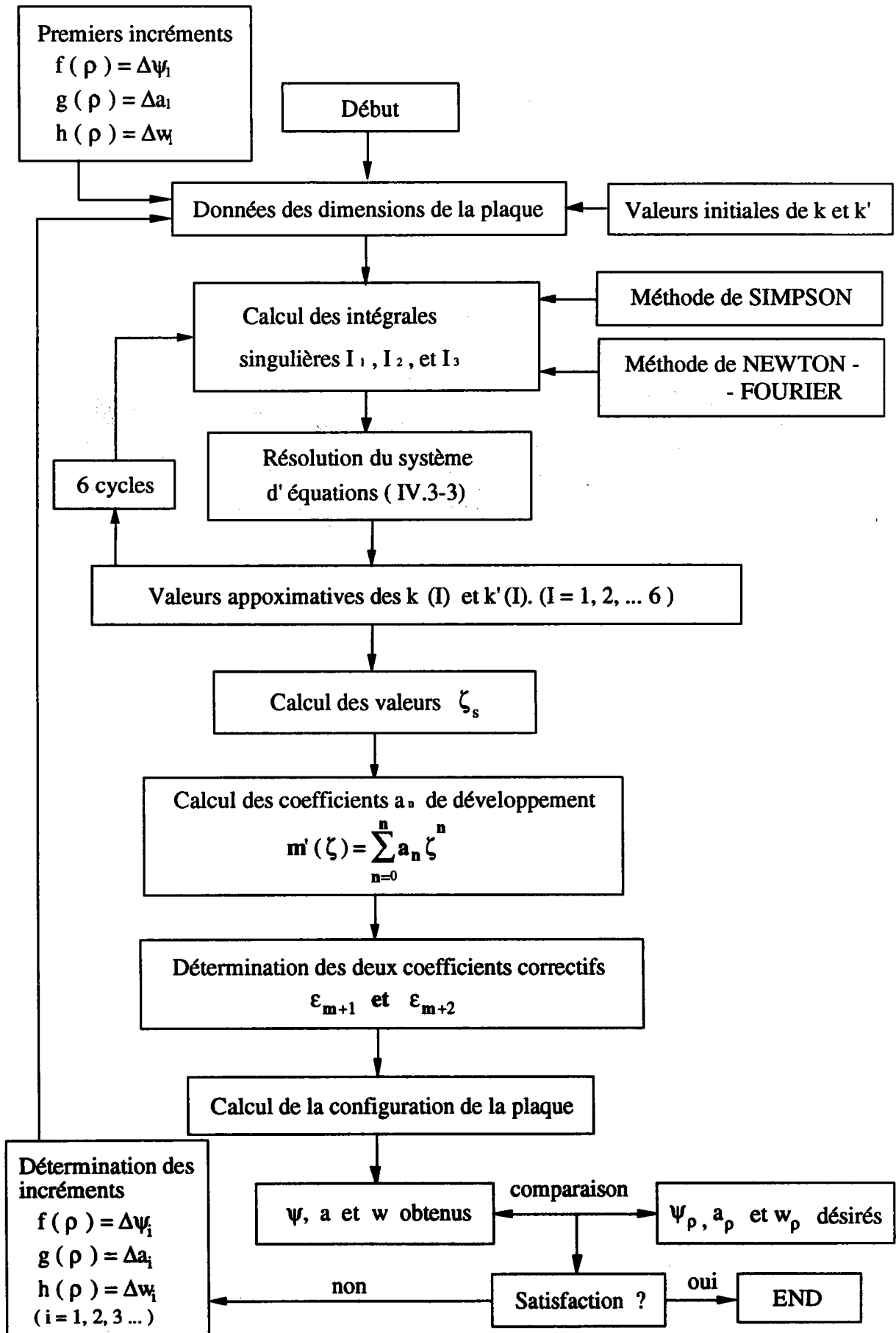


Figure [IV.10]: Organigramme du calcul itératif.

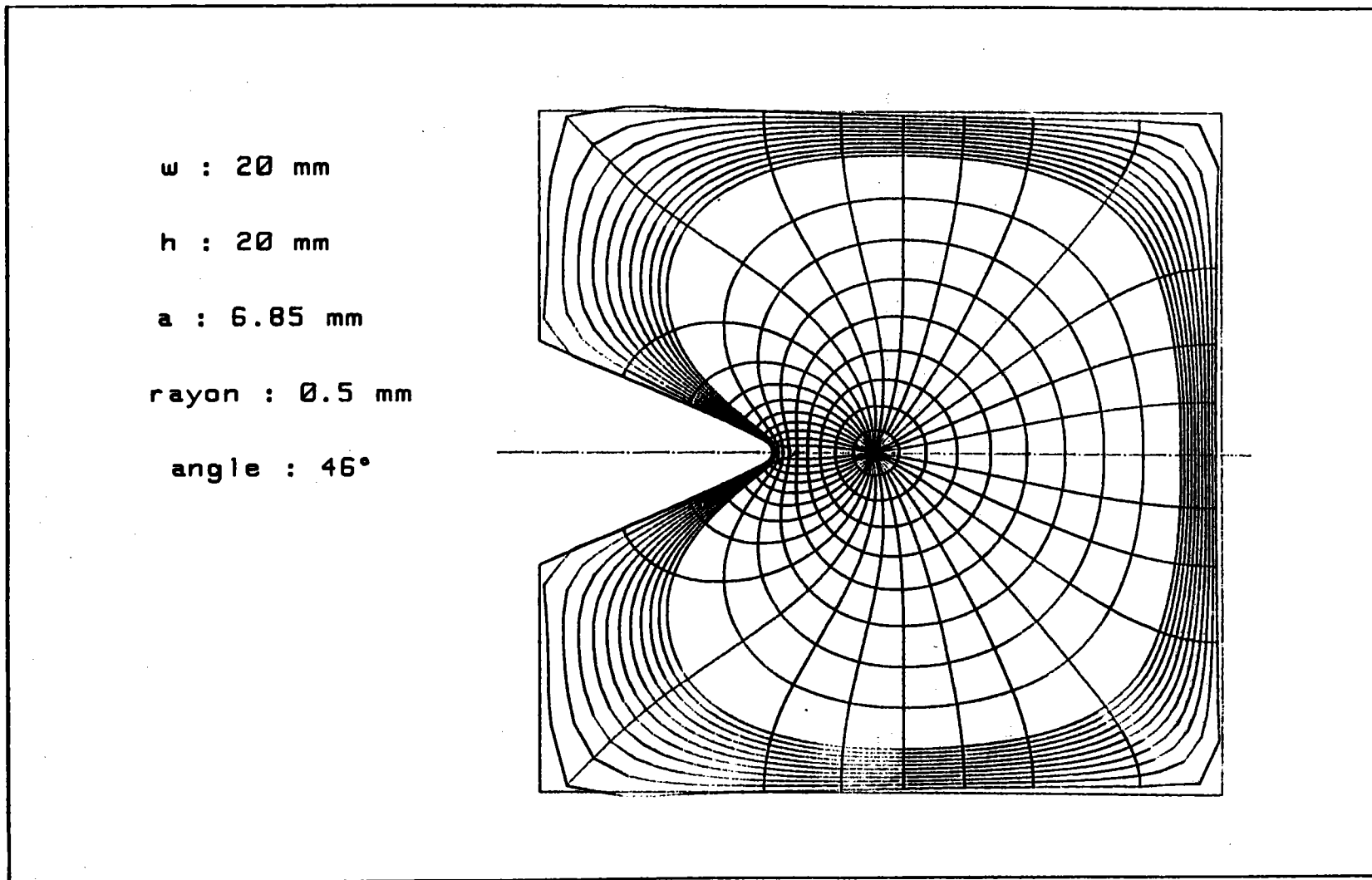


Figure [IV.11] : Transformation conforme sur une plaque avec un rayon en fond d'entaille de 0,5mm

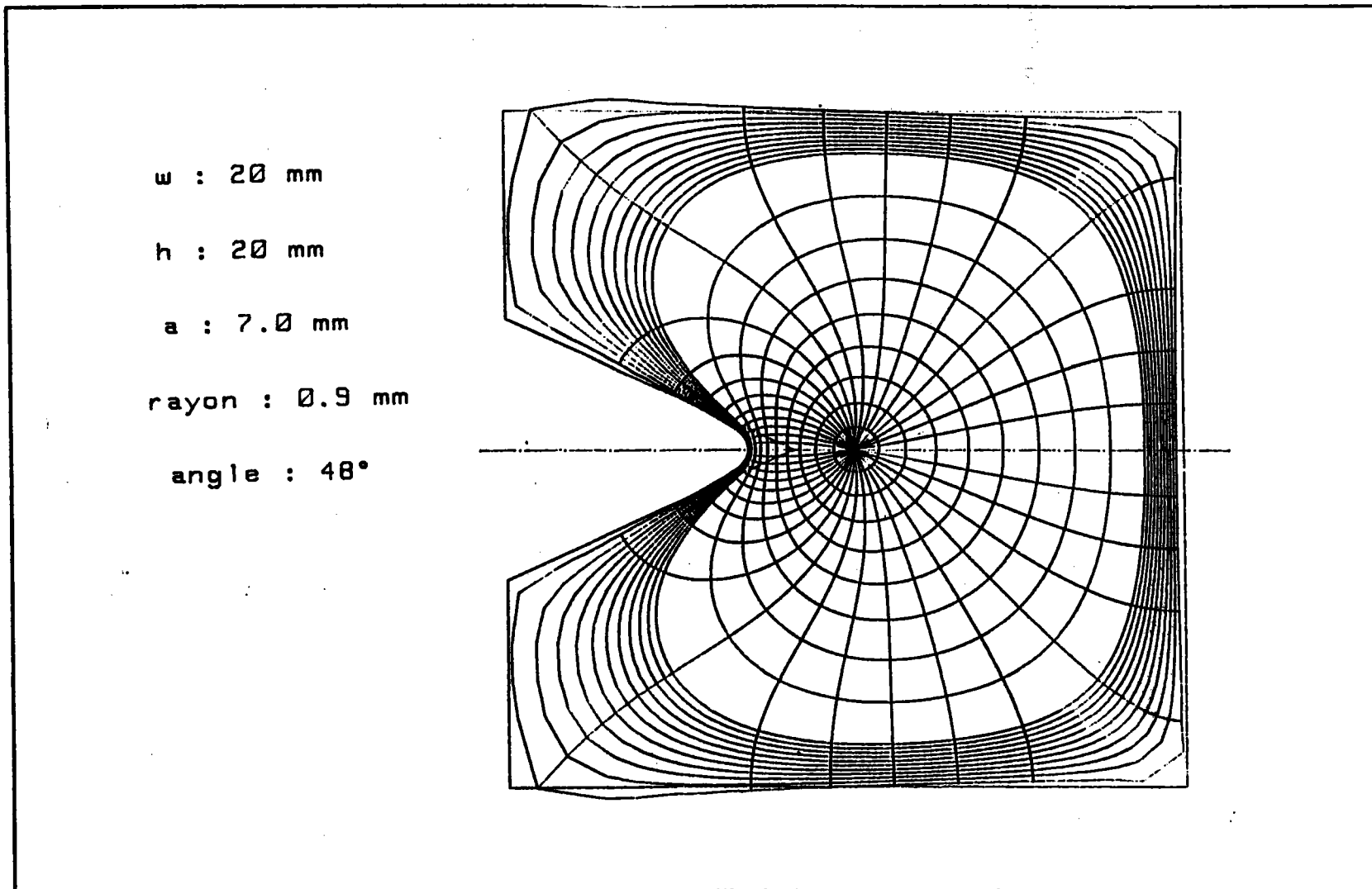


Figure [IV.12] : Transformation conforme sur une plaque avec un rayon en fond d'entaille de $0,9 \text{ mm}$

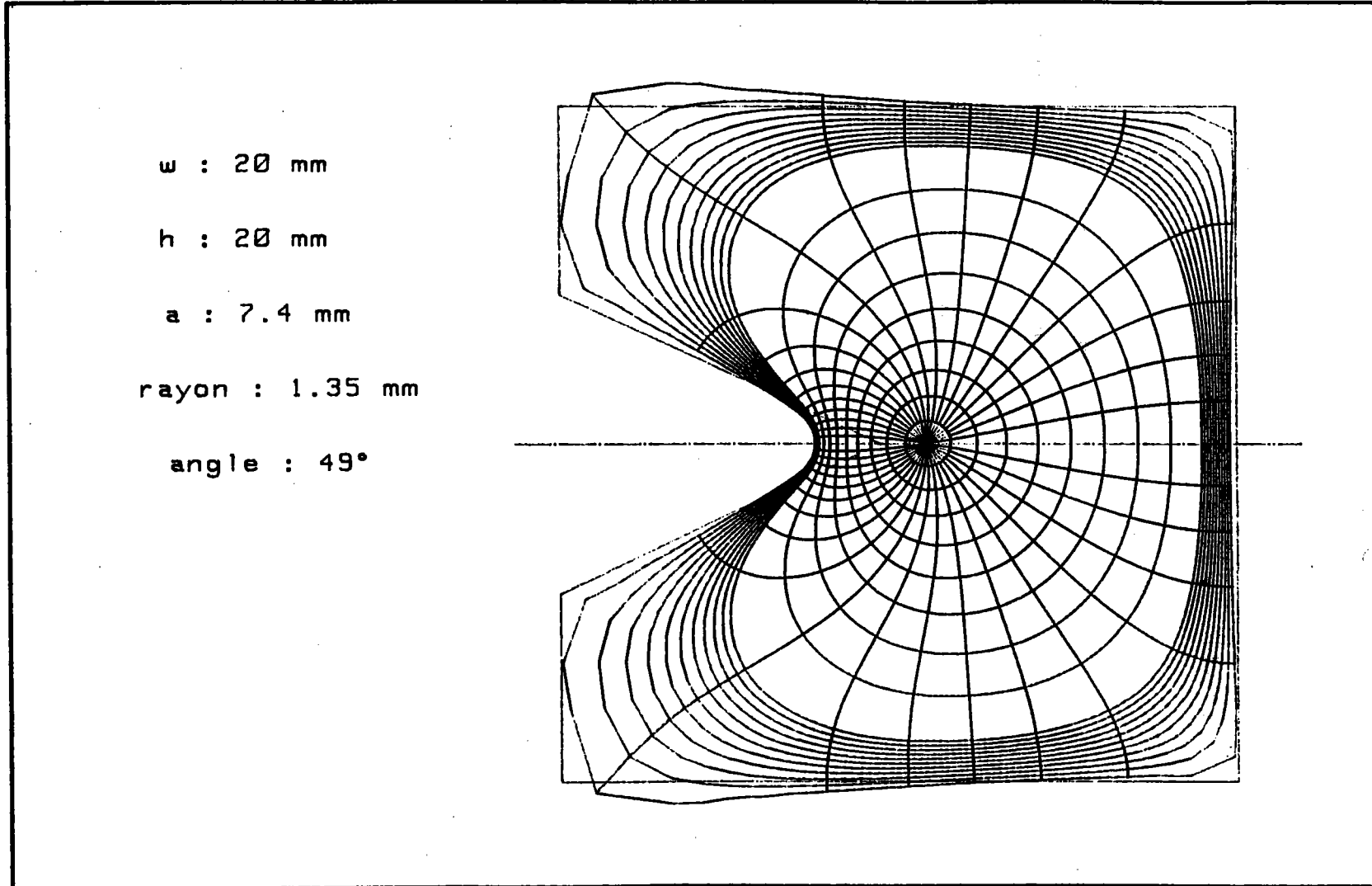


Figure [IV.13] : Transformation conforme sur une plaque avec un rayon en fond d'entaille de 1,35mm

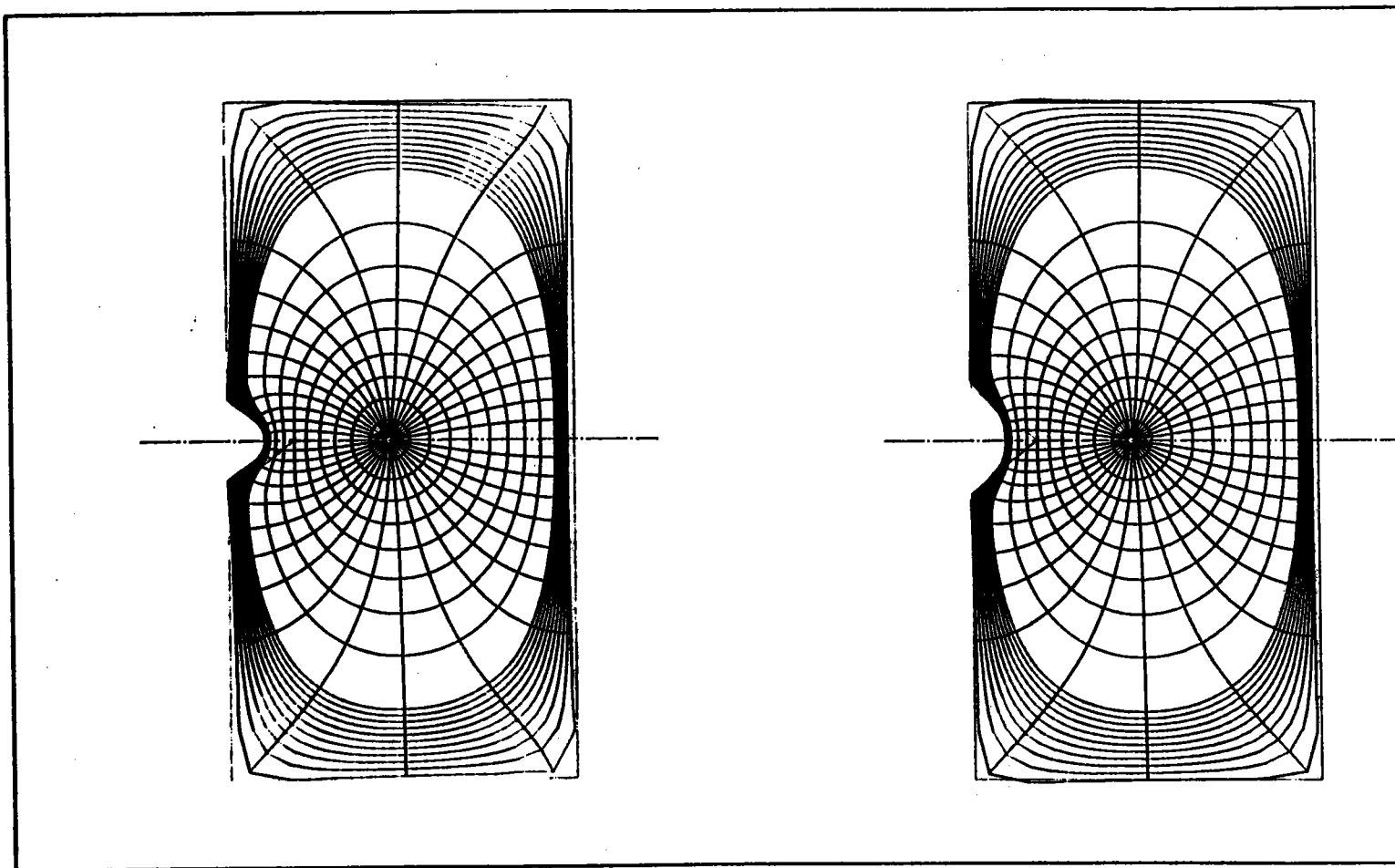


Figure [IV.14] : *Eprouvette possédant une entaille mécanique de forme elliptique (ou hyperbolique)*

V CHAMP DE CONTRAINTES EN FOND D'ENTAILLE

V.1 CALCUL DES CONTRAINTES EN COORDONNÉES CURVILIGNES

V.1.1 Fonctions potentielles en élasticité

A partir de la théorie de l'élasticité, les composantes des contraintes σ_{11} , σ_{22} et σ_{12} sur le plan des z peuvent s'exprimer par (V.1-1) :

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{1}{2} S - \frac{1}{4} (T + \bar{T}) \\ \sigma_{22} &= \frac{1}{2} S + \frac{1}{4} (T + \bar{T}) \\ \sigma_{12} &= -\frac{1}{4} i (T - \bar{T})\end{aligned}\tag{V.1-1}$$

ici \bar{T} est conjuguée de la fonction T , S et T sont les expressions de Kolosov [25], qui sont les combinaisons fondamentales des contraintes :

$$\begin{aligned}S &= \sigma_{11} + \sigma_{22} \\ T &= \sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12}\end{aligned}\tag{V.1-2}$$

Utilisons les expressions de Kolosov-Muskhelishvili pour définir S et T :

$$\begin{aligned}S &= \Phi(z) + \bar{\Phi}(\bar{z}) = \Phi(\zeta) + \bar{\Phi}(\bar{\zeta}) \\ T &= \bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z) = \frac{m(\zeta)\bar{\Phi}'(\bar{\zeta})}{\bar{m}'(\bar{\zeta})} + \bar{\Psi}(\bar{\zeta})\end{aligned}\tag{V.1-3}$$

où $\Phi(\zeta)$ et $\Psi(\zeta)$ sont deux fonctions complexes potentielles, \bar{z} et $\bar{\zeta}$ sont les imaginaires conjugués des paramètres z et ζ .

V.1.2 Equation des contraintes en coordonnées curvilignes

Considérons un réseau orthogonal α, β est un élément d'arc de la courbe β ($\alpha = \alpha_0$) perpendiculaire à la courbe α ($\beta = \beta_0$). Désignons par $\sigma_{\alpha\alpha}$ la contrainte normale et par $\sigma_{\alpha\beta}$ la contrainte tangentielle relative à la facette orientée par α considéré comme sa normale. (Figure [V.1])

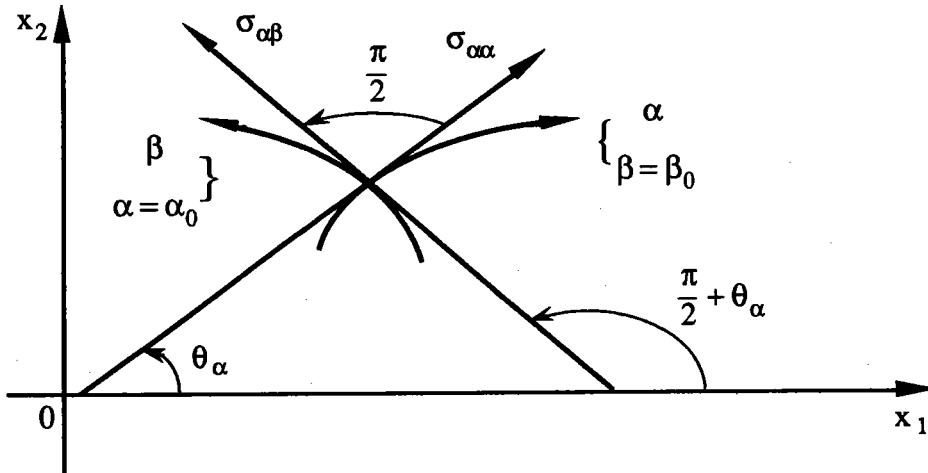


Figure [V.1]: Réseau orthogonal (α, β).

Si nous considérons un élément d'arc de la courbe α ($\beta = \beta_0$), nous définissons $\sigma_{\beta\beta}$ et $\sigma_{\beta\alpha}$. Les formules classiques en coordonnées curvilignes sont données par les expressions de Kolosov :

$$S = \sigma_{\alpha\alpha} + \sigma_{\beta\beta} \quad (\text{V.1-4})$$

$$T e^{2i\theta_\alpha} = \sigma_{\beta\beta} - \sigma_{\alpha\alpha} + 2i \sigma_{\alpha\beta}$$

après transformation :

$$2(\sigma_{\alpha\alpha} + i \sigma_{\alpha\beta}) = S - \bar{T} e^{-2i\theta_\alpha} \quad (\text{V.1-5})$$

$$2(\sigma_{\beta\beta} - i \sigma_{\alpha\beta}) = S + \bar{T} e^{-2i\theta_\alpha}$$

Considérons que le système de coordonnées curvilignes orthogonale (α, β) défini par :

$$z = f(\gamma) = e^\gamma \quad \gamma = \alpha + i\beta \quad (\text{V.1-6})$$

où $f(\gamma)$ est une fonction holomorphe de la variable complexe γ , dont la dérivée est :

$$\frac{dz}{d\gamma} = f'(\gamma) = J e^{i\theta} \quad (\text{V.1-7})$$

Donc, nous avons les relations :

$$J^2 = f'(\gamma) \bar{f}'(\gamma) \quad (\text{V.1-8})$$

$$e^{2i\theta} = f'(\gamma) / \bar{f}'(\gamma)$$

Introduisons les formules (V.1-3) et (V.1-8) dans les équations (V.1-5), il vient :

$$2(\sigma_{\alpha\alpha} + i\sigma_{\alpha\beta}) = \Phi(z) + \bar{\Phi}(\bar{z}) - [z\bar{\Phi}'(\bar{z}) + \bar{\Psi}(\bar{z})] \frac{\bar{f}'(\gamma)}{f'(\gamma)} \quad (\text{V.1-9})$$

$$2(\sigma_{\beta\beta} - i\sigma_{\alpha\beta}) = \Phi(z) + \bar{\Phi}(\bar{z}) + [z\bar{\Phi}'(\bar{z}) + \bar{\Psi}(\bar{z})] \frac{\bar{f}'(\gamma)}{f'(\gamma)}$$

V. 2 CONTRAINTES EN REPRÉSENTATION CONFORME [17, 18, 27, 32]

V.2.1 Contraintes en fonction des expressions de Kolosov

Nous avons montré la représentation conforme $z = m(\zeta)$ qui transforme le système de coordonnées du plan des ζ ($\zeta = e^{\gamma} = e^{\alpha + i\beta}$) en un système de coordonnées curvilignes orthogonales (α, β) du plan des z avec $z = f(\gamma)$. Nous avons donc :

$$f'(\gamma) = \zeta m'(\zeta) \quad (\text{V.2-1})$$

Les équations (V.1-9) et (V.1-3) donnent alors :

$$2(\sigma_{\alpha\alpha} + i\sigma_{\alpha\beta}) = S - \bar{T} \frac{\bar{\zeta} \bar{m}'(\bar{\zeta})}{\zeta m'(\zeta)} \quad (\text{V.2-2})$$

$$2(\sigma_{\beta\beta} - i\sigma_{\alpha\beta}) = S + \bar{T} \frac{\bar{\zeta} \bar{m}'(\bar{\zeta})}{\zeta m'(\zeta)}$$

V.2.2 Contraintes à l'aide des fonctions de Muskhelishvili

Désignons les fonction potentielles par $\Phi_0(z)$ et $\Psi_0(z)$, nous avons d'après (V.1-3) :

$$S = \Phi_0(z) + \bar{\Phi}(\bar{z}) \quad (\text{V.2-3})$$

$$\bar{T} = z \bar{\Phi}_0(z) + \bar{\Psi}_0(\bar{z})$$

Effectuons le changement de variable $z = m(\zeta)$. il vient :

$$\Phi_0(z) = \Phi_0(z) [m(\zeta)] = \Phi(\zeta) \quad (\text{V.2-4})$$

$$\Psi_0(z) = \Psi_0(z) [m(\zeta)] = \Psi(\zeta)$$

En dérivant $\Phi_0(z)$, nous avons :

$$\Phi_0'(z) = \frac{\Phi'(\zeta)}{m'(\zeta)} \quad (\text{V.2-5})$$

Les expressions de Kolosov s'expriment en fonction de ζ par :

$$S = \Phi(\zeta) + \bar{\Phi}(\bar{\zeta}) \quad (\text{V.2-6})$$

$$\bar{T} = \frac{m(\zeta)}{\bar{m}(\bar{\zeta})} \bar{\Phi}'(\bar{\zeta}) + \bar{\Psi}(\bar{\zeta})$$

Introduisons les formules (V.2-6) dans (V.2-2), il vient :

$$2(\sigma_{\alpha\alpha} + i \sigma_{\alpha\beta}) = \Phi(\zeta) + \bar{\Phi}(\bar{\zeta}) - \frac{\bar{\zeta} m(\zeta)}{\zeta m'(\zeta)} \bar{\Phi}'(\bar{\zeta}) - \frac{\bar{\zeta} \bar{m}'(\bar{\zeta})}{\zeta m'(\zeta)} \bar{\Psi}(\bar{\zeta}) \quad (\text{V.2-7})$$

$$2(\sigma_{\beta\beta} - i \sigma_{\alpha\beta}) = \Phi(\zeta) + \bar{\Phi}(\bar{\zeta}) + \frac{\bar{\zeta} m(\zeta)}{\zeta m'(\zeta)} \bar{\Phi}'(\bar{\zeta}) + \frac{\bar{\zeta} \bar{m}'(\bar{\zeta})}{\zeta m'(\zeta)} \bar{\Psi}(\bar{\zeta})$$

V.2.3 Solution des équations de contraintes

Soit C la limite du matériau et choisissons le sens de description de C de telle sorte que le matériau se trouve dans la région G située à gauche (intérieur du contour C). La région D représente l'extérieur du contour C . (voir Figure [V.2]).

Supposons que C correspond à la courbe $\alpha = \alpha_0$ qui a pour image la circonférence Γ de rayon $|\zeta| = e^{\alpha_0} = a$ dans le plan des ζ .

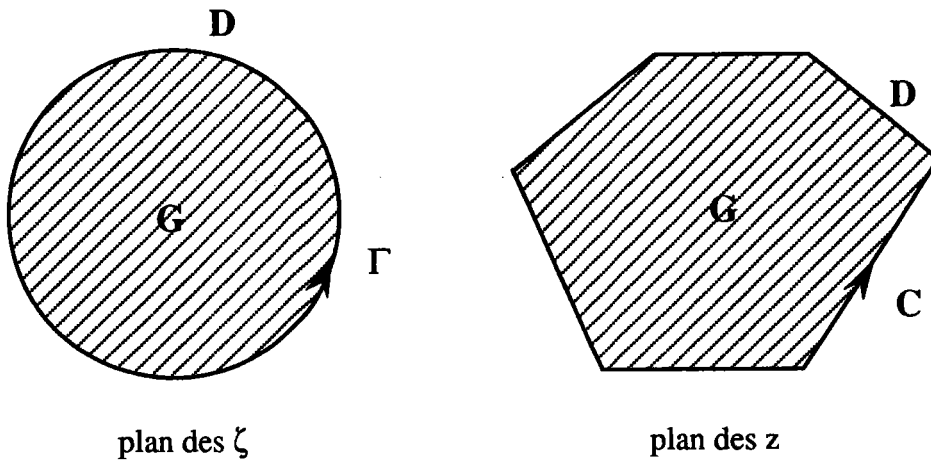


Figure [V.2] : Détermination des limites de la transformation

Dans le matériau, le long d'une courbe β ($\alpha = \text{constante}$), nous avons d'après (V.2-8) :

$$2(\sigma_{\alpha\alpha} + i\sigma_{\alpha\beta})m'(\zeta) = m'(\zeta)\Phi(\zeta) + \overline{m'(\zeta)}\overline{\Phi(\zeta)} - \frac{\overline{\zeta}}{\zeta}[m(\zeta)\overline{\Phi'(\zeta)} + \overline{m(\zeta)}\overline{\Psi'(\zeta)}] \quad (\text{V.2-8})$$

Les fonctions $\Phi(\zeta)$ et $\Psi(\zeta)$ sont holomorphes en G et la fonction $\overline{\Phi(\zeta)}$ est continue en D . Nous avons donc les fonctions suivantes de ζ en D :

$$\sigma_{\alpha\alpha} + i\sigma_{\alpha\beta} = 0 \quad (\text{V.2-9})$$

$$m'(\zeta)\Phi(\zeta) = -\overline{m'(\zeta)}\overline{\Phi\left(\frac{a^2}{\zeta}\right)} + \frac{a^2}{\zeta^2}m(\zeta)\overline{\Phi'\left(\frac{a^2}{\zeta}\right)} + \frac{a^2}{\zeta^2}\overline{m'(\zeta)}\overline{\Psi\left(\frac{a^2}{\zeta}\right)}$$

Effectuons la différence entre (V.2-8) et (V.2-9) et considérons un point t de la circonférence Γ , il vient :

$$\left[m'(t) \Phi(t) \right]^{-G} - \left[m'(t) \Phi(t) \right]^{-D} = 2 (\sigma_{\alpha\alpha}^G + i \sigma_{\alpha\beta}^G) m'(t) \quad (\text{V.2-10})$$

où $\sigma_{G,\alpha\alpha}$ et $\sigma_{G,\alpha\beta}$ sont les conditions aux limites.

La solution de l'équation (V.2-10) est :

$$m'(\zeta) \Phi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} 2 \frac{\left[\sigma_{\alpha\alpha}^G + \sigma_{\alpha\beta}^G \right] m'(t)}{t - \zeta} dt + R(\zeta) \quad (\text{V.2-11})$$

D'après l'équation (V.2-11) la fonction $\Psi(\zeta)$ peut être calculée :

$$m'(\zeta) \Psi(\zeta) = \frac{a^2}{\zeta^2} \overline{m'}\left(\frac{a^2}{\zeta}\right) \left[\Phi(\zeta) + \overline{\Phi}\left(\frac{a^2}{\zeta}\right) \right] - \overline{m}\left(\frac{a^2}{\zeta}\right) \Phi'(\zeta) \quad (\text{V.2-12})$$

V. 3 DÉTERMINATION DE $\Phi(\zeta)$ ET $\Psi(\zeta)$

V. 3. 1 Forme générale de $\Phi(\zeta)$

Dans la formule (V.2-12) $m'(\zeta)$ a un pôle d'ordre n pour $\zeta = \infty$. Il s'en suit que $m'(\zeta)$ et $\Phi(\zeta)$ ont au plus un pôle d'ordre n :

$$R(\zeta) = \sum_{n=0}^n A_n \zeta^n \quad (\text{V.3-1})$$

Faisons l'hypothèse que la plaque est soumise à des forces concentrées et soit F une force appliquée sur un point A du contour. (Figure [V.3]).

La force F en A peut être considérée comme résultante d'une distribution de contraintes uniforme $F / (2 \epsilon)$ sur l'arc $A_1 A_2 = 2 \epsilon$.

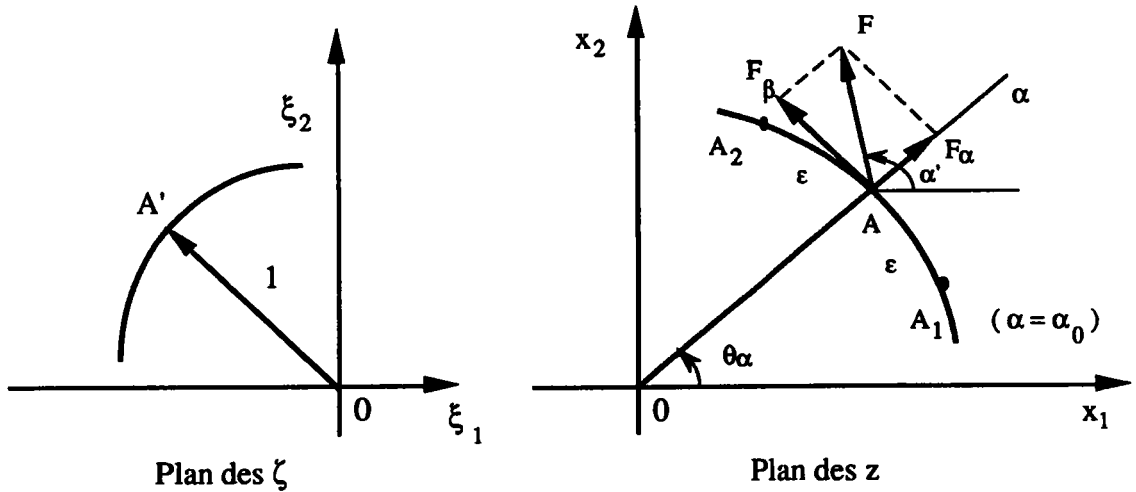


Figure [V.31]: Condition limites.

$$\sigma_{\alpha\alpha} + i\sigma_{\alpha\beta} = \frac{F_{\alpha} + iF_{\beta}}{2\varepsilon} \tag{V.3-2}$$

S'il y a m force F_m , la formule (V.2-11) devient :

$$m'(\zeta)\Phi(\zeta) = \sum_{m=1}^m \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{A_1^* A_2^*} \frac{F_{\alpha} + F_{\beta}}{\varepsilon} \frac{\sum_{n=0}^n a_n \sigma^n}{t - \zeta} dt \right\} + \sum_{n=0}^n A_n \zeta^n \tag{V.3-3}$$

Posons :

$$I_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{A_1^* A_2^*} \frac{F_{\alpha} + F_{\beta}}{\varepsilon} \frac{\sum_{n=0}^n a_n t^n}{t - \zeta} dt = \frac{F_{\alpha}^m + F_{\beta}^m}{2\pi i \varepsilon} \int_{A_1^* A_2^*} \frac{\sum_{n=0}^n a_n t^n}{t - \zeta} dt \tag{V.3-4}$$

$$\int_{A_1^* A_2^*} \frac{\sum_{n=0}^n a_n t^n}{t - \zeta} dt = \frac{2\pi i \varepsilon e^{i\theta_{\alpha}}}{\sum_{n=0}^n a_n t_A^n} \left[\frac{\sum_{n=0}^n a_n \zeta^n}{t_A - \zeta} + \sum_{p=1}^n \zeta^{p-1} \sum_{n=p}^n a_n t_A^{n-p} \right] \tag{V.3-5}$$

$$F_{\alpha} + i F_{\beta} = F e^{i(\alpha' - \theta_{\alpha})} \tag{V.3-6}$$

L'expression (V.3-4) devient :

$$m'(\zeta)\Phi(\zeta) = \sum_{m=i}^m \left[\frac{F_m e^{i\alpha'_m}}{\pi \sum_{n=0}^n a_n t_{Am}^n} \left(\frac{\sum_{n=0}^n a_n \zeta^n}{t_A - \zeta} + \sum_{p=1}^n \zeta^{p-1} \sum_{n=p}^n a_n t_{Am}^{n-p} \right) \right] + \sum_{n=0}^n A_n \zeta^n \tag{V.3-7}$$

Nous supposons que les charges sont symétriques. Pour simplifier les écritures posons :

$$C_m = \frac{i F_m e^{i\alpha'_m}}{\sum_{n=0}^n a_n t_{Am}^n}$$

$$B_{om} = \sum_{s=1}^n a_s t_{Am}^{s-1}$$

... ..

(V.3-8)

$$B_{(n-2)m} = \sum_{s=n-1}^n a_s t_{Am}^{s-n+1}$$

$$D_{nm} = 2 i I_m (B_{nm} C_m)$$

L'expression (V.3-8) devient :

$$m'(\zeta)\Phi(\zeta) = \sum_{m=1}^{\frac{m}{2}} \left[\frac{\sum_{n=0}^n a_n \zeta^n}{\pi i} \left(\frac{C_m}{t_{Am} - \zeta} - \frac{\bar{C}_m}{\bar{t}_{Am} - \zeta} \right) + \sum_{n=0}^n \frac{2 D_{nm}}{\pi} \zeta^n \right] + \sum_{n=0}^n A_n \zeta^n \tag{V.3-9}$$

avec $D_n = 0$ et D_1 réel.

S'il n'y a qu'un groupe de points de chargement, la formule (V.3-9) peut être exprimée par :

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{\pi i} \left(\frac{C}{t_A - \zeta} - \frac{\bar{C}}{\bar{t}_A - \zeta} \right) + \frac{\sum_{n=0}^n \left(A_n + \frac{2D_n}{\pi} \right) \zeta^n}{\sum_{n=0}^n a_n \zeta^n} \quad (\text{V.3-10})$$

V. 3.2 Détermination des coefficients

Maintenant nous devons déterminer les coefficients A_n . D'abord nous pouvons exprimer la condition d'holomorphic sur $\Psi(\zeta)$ à l'aide de la formule (V.2-7).

L'expression $m'(\zeta) \Psi(\zeta)$ donnée par (V.2-7) doit être holomorphe en G et les coefficients de toutes les puissances positives de $1/\zeta$ doivent être nuls.

En utilisant les formules (V.2-7), (V.3-9) et (V.3-10), nous en déduisons une expression sur la condition d'holomorphic :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta^2} (a_{00} A_0 + a_{01} A_1 + \dots + a_{0n} A_n + d_0) &= 0 \\ \frac{1}{\zeta^3} (a_{10} A_0 + a_{11} A_1 + \dots + a_{1n} A_n + d_1) &= 0 \\ \dots \dots & \\ \frac{1}{\zeta^{n+2}} (a_{n0} A_0 + a_{n1} A_1 + \dots + a_{nn} A_n + d_n) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{V.3-11})$$

Ce qui nous donne un système d'équations linéaires à coefficients constants dont les termes a_{mn} et d_n sont réels alors que les inconnues A_n sont complexes.

Posons :

$$A_j = \alpha_j + \beta_j$$

donc :

$$\begin{aligned} (a_{ij}) [\alpha_j] &= -[d_j] \\ (a_{ij}) [\beta_j] &= 0 \end{aligned}$$

Finalement, nous obtenons :

$$(a_{ij}) [A_j] = -[d_j] \quad \text{avec } A_j = \alpha_j \text{ réel}$$

Nous utilisons l'algorithme de Gauss pour résoudre le système (V.3-11).

V. 3.3 Expression de $\Phi(\zeta)$ et $\Psi(\zeta)$

Après un calcul approximatif des inconnues A_n , la valeur de $\Phi(\zeta)$ est donnée :

$$\Phi(\zeta) = \sum_{m=1}^{\frac{m}{2}} \left[\frac{1}{\pi i} \left(\frac{C_m}{t_{Am} - \zeta} - \frac{\bar{C}_m}{\bar{t}_{Am} - \zeta} \right) + \frac{\sum_{n=0}^n \frac{2 D_{nm}}{\pi} \zeta^n}{\sum_{n=0}^n a_n \zeta^n} \right] + \frac{\sum_{n=0}^n A_n \zeta^n}{\sum_{n=0}^n a_n \zeta^n} \quad (\text{V.3-12})$$

et la valeur de Ψ est donné par :

$$\Psi(\zeta) = \frac{m' \left(\frac{1}{\zeta} \right)}{\zeta^2 m'(\zeta)} \left[\Phi(\zeta) + \bar{\Phi} \left(\frac{1}{\zeta} \right) \right] - \frac{m \left(\frac{1}{\zeta} \right) \Phi'(\zeta)}{m'(\zeta)} \quad (\text{V.3-13})$$

Introduisons les expressions (V.3-12) et (V.3-13) dans les équations (V.1-1), nous obtenons le champ de contraintes de la plaque étudiée.

V.4 CALCUL DU CHAMP DE CONTRAINTES

V. 4.1 Programme de calcul

Une programme de calcul a été réalisée avec la méthode des variables complexes de Kolosov-Muskhelishvili. La figure [V.4] montre l'organigramme de calcul du champ de contraintes.

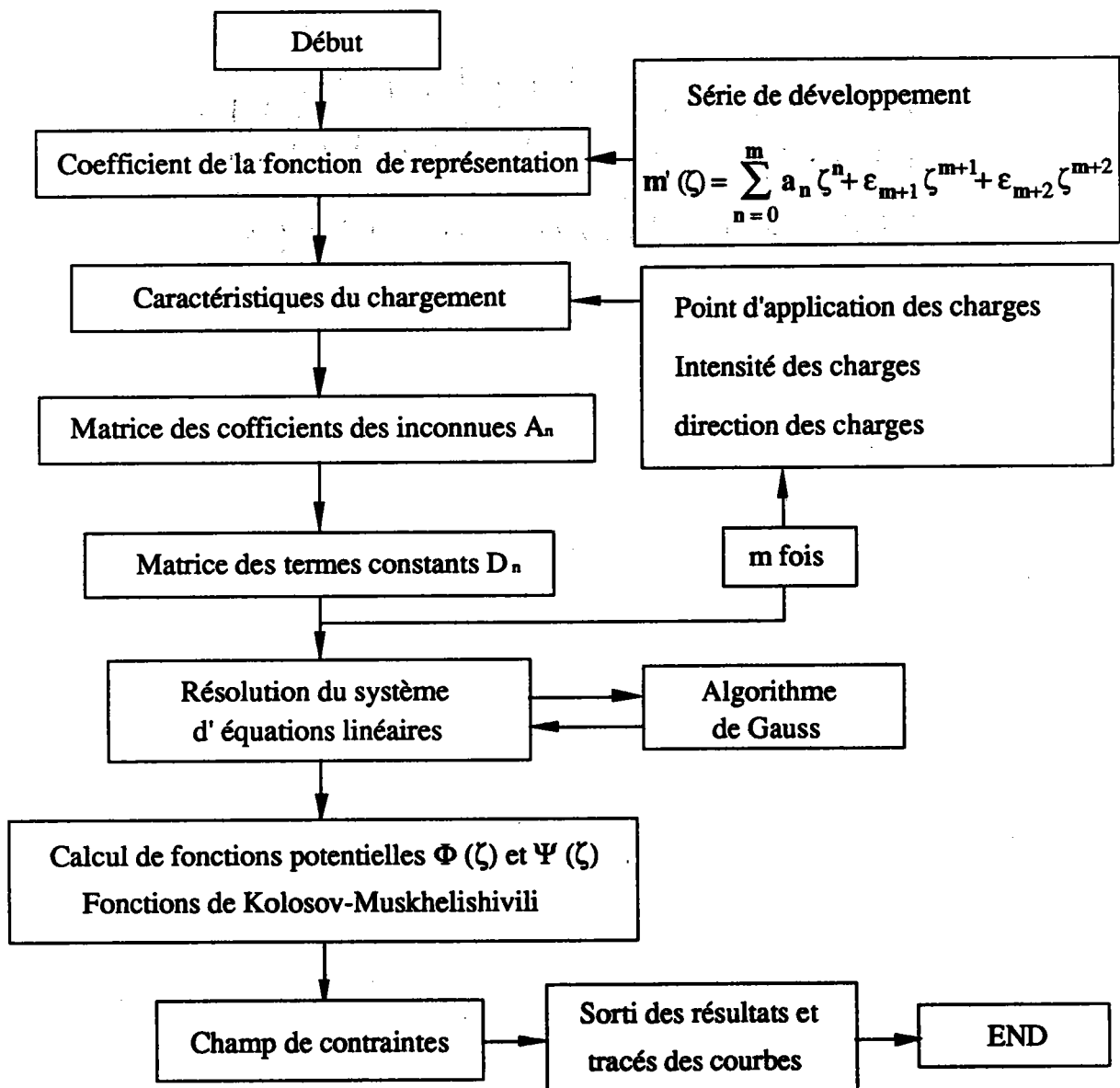


Figure [V.4] : Organigramme du calcul du champ de contraintes.

V.4.2 Comparaison des résultats avec la méthode des éléments finis

Pour vérifier le programme de calcul, une plaque rectangulaire avec entaille en V émoussée est choisie comme indiqué dans la figure [V.5].

Les dimensions de la plaque sont les suivantes :

- longueur de la plaque, $L = 20$ mm.
- hauteur de la plaque, $W = 20$ mm.
- profondeur de l'entaille, $a = 7,25$ mm.
- angle d'ouverture de l'entaille, $\psi = 45^\circ$.
- rayon du fond d'entaille, $\rho = 0,5$ mm.

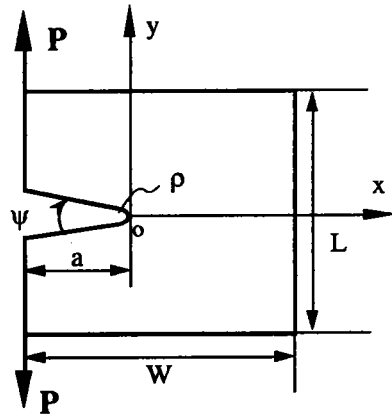


Figure [V.5] : *Eprouvette rectangulaire entaillée soumise à une charge concentrée*

Une charge concentrée est appliquée de chaque côté de l'entaille, symétriquement par rapport à l'axe x .

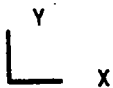
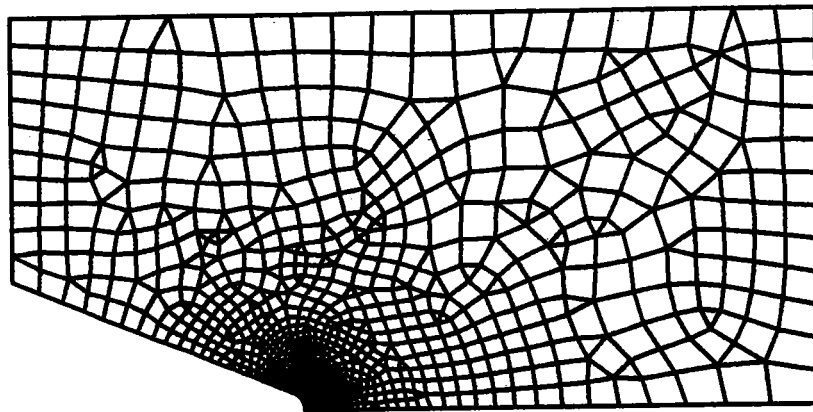
Deux méthodes de calcul sont utilisées, l'une est la transformation conforme et l'autre la méthode des éléments finis.

La figure [V.6] montre le maillage des éléments finis utilisé. Compte tenu de la symétrie de la géométrie et de la déformation, la moitié de la plaque est considérée. Les éléments proches du fond d'entaille sont de taille très petite afin d'assurer la précision du calcul. La figure [V.7] montre un agrandissement de cette partie.

L'image de cette plaque donnée par la transformation conforme a été illustrée à la figure (V.11) du chapitre V.

EPROUVETTE EN V

ECHELLE=0.6187



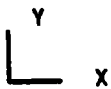
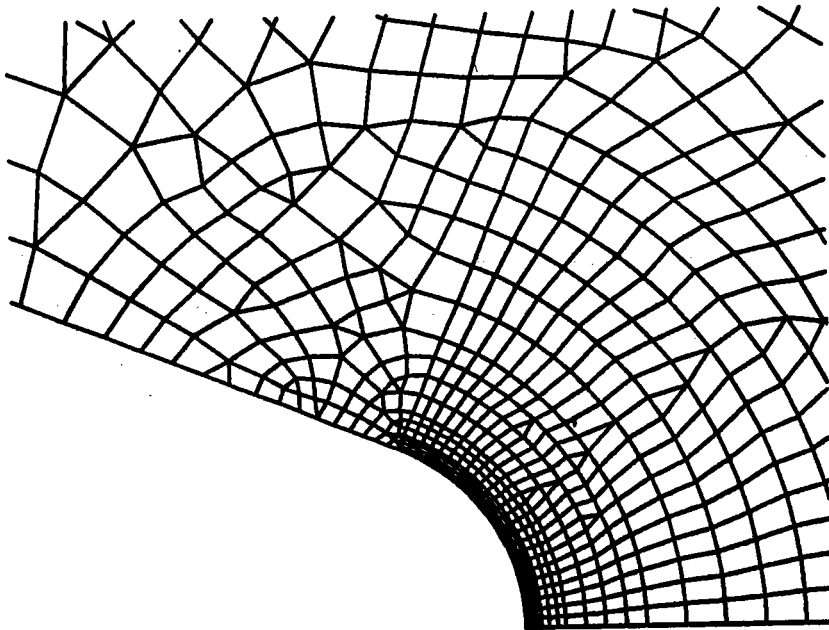
EPROUVETTE EN V R0=0.5MM

SV8TUS 06052311 10-03-93

Figure [V.6] : Schéma du maillage de la moitié de la plaque pour la résolution du problème par éléments finis

EPROUVETTE EN V

ECHELLE=0.6187



ZONE DE L'ENTAILLE

Doc 2311 11-03-99

Figure [V.7] : Agrandissement du maillage au voisinage du fond d'entaille

Une simple comparaison des résultats du calcul par les deux méthodes, méthode des éléments finis et méthode de transformation conforme, est donnée par la figure (V.8). La distribution des contraintes σ_{yy} et σ_{xx} à partir du fond d'entaille et suivant l'axe x montre que la différence entre les deux calculs est inférieure à 3%.

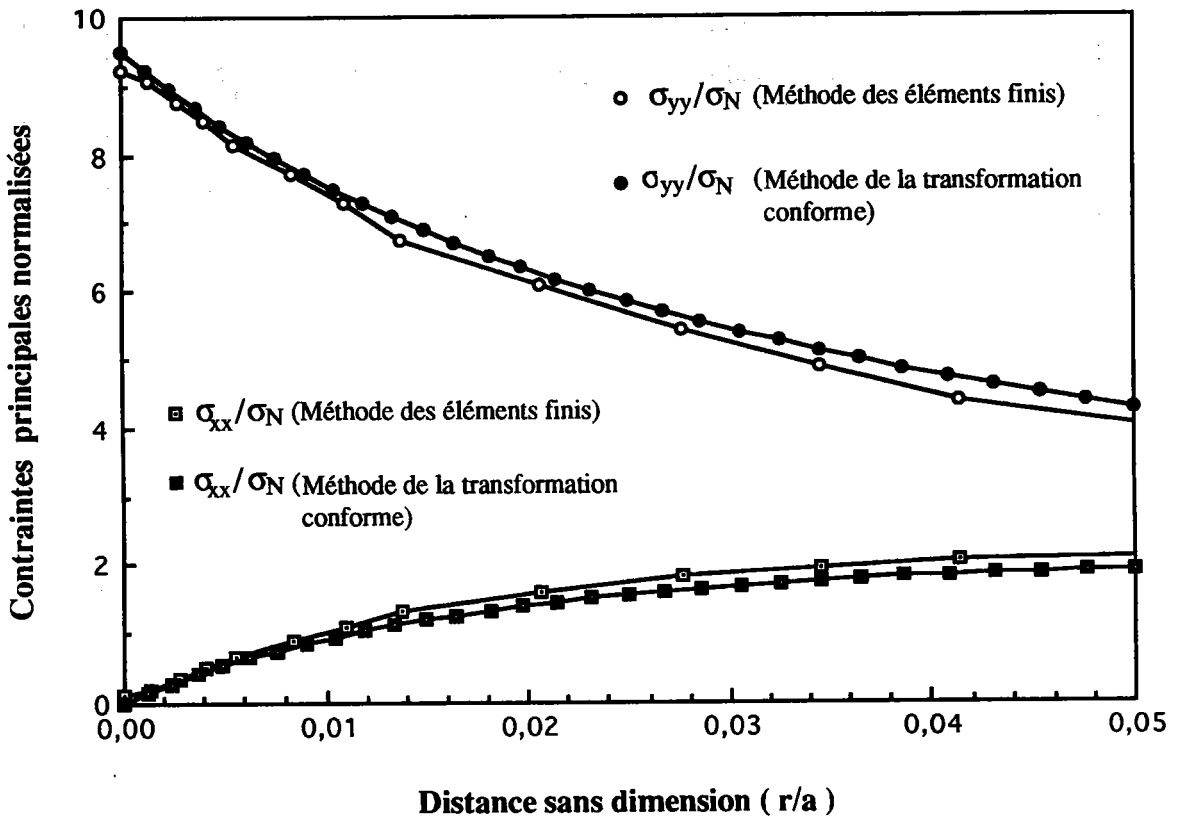


Figure [V.8] : Variation des contraintes normalisées σ_{yy} / σ_n et σ_{xx} / σ_n en fonction de la distance au fond d'entaille le long de l'axe x.

V.4.3 Comparaison des résultats avec la méthode de l'équation intégrale de Barone et Robinson

Nous avons comparé les résultats de calcul obtenu par la méthode de transformation conforme avec celle de l'équation intégrale de Barone et Robinson que nous avons présentée dans la partie de l'étude bibliographique.

Une plaque rectangulaire avec entaille émoussée en V soumise à la traction de dispersion est choisie comme indiqué dans la figure [V.9].

Les dimensions de la plaque sont les suivantes :

- largeur de la plaque $L = 20 \text{ mm}$;
- longueur de la plaque $2L = 40 \text{ mm}$;
- profondeur de l'entaille $3L/10 = 6 \text{ mm}$;
- angle d'ouverture de l'entaille $\psi = 90^\circ$;
- rayon du fond d'entaille $\rho = 0,4 \text{ mm}$.

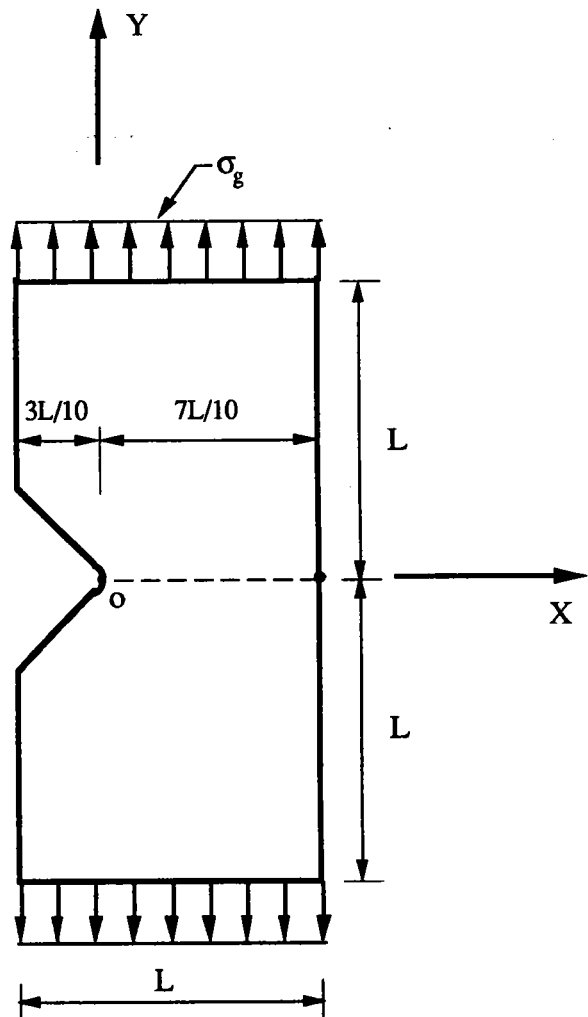


Figure [V.9]: Eprouvette entaillée soumise à la traction de dispersion

La figure [V.10] montre une comparaison des résultats de calcul par ces deux méthodes. La distribution des contraintes σ_{yy} et σ_{xx} à partir du fond d'entaille et suivant l'axe x montre une différence négligeable entre les deux calculs. Ceci apporte une information sur la précision de la méthode de transformation améliorée que nous proposons.

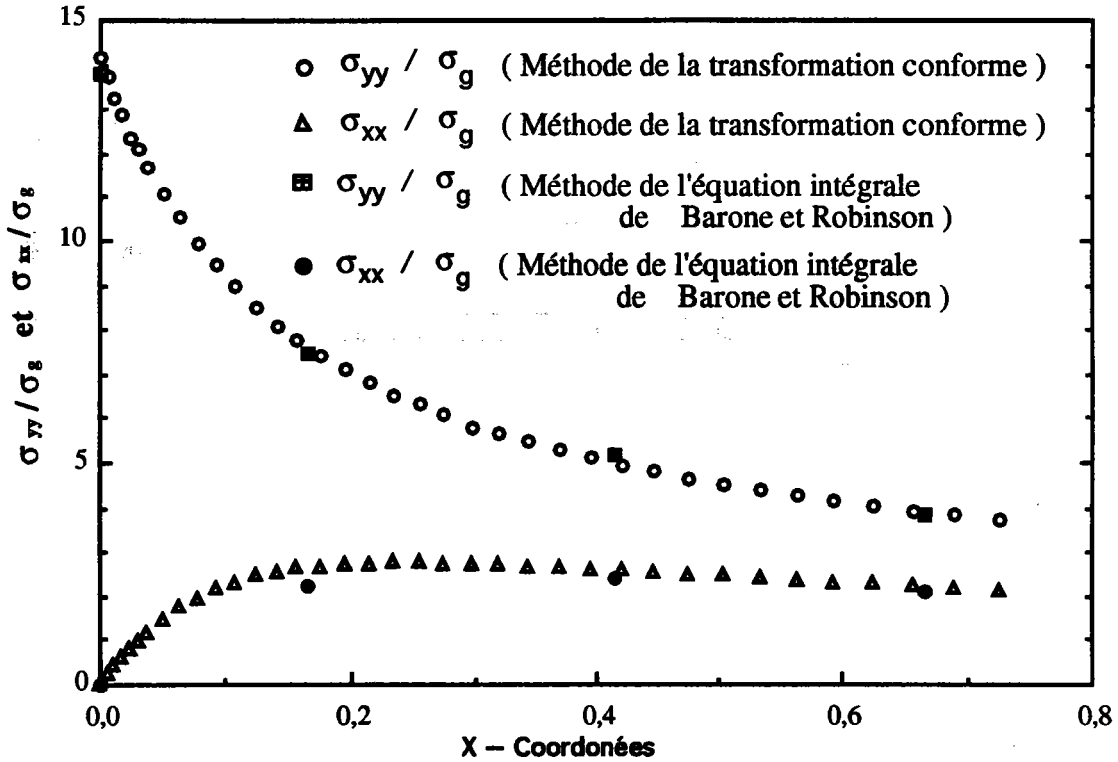


Figure [V.10] : Variation des contraintes normalisées σ_{yy}/σ_g et σ_{xx}/σ_g en fonction de la distance le long de l'axe X

V.5 DISTRIBUTION DE CONTRAINTES DANS UNE PLAQUE SOUMISE A DIFFÉRENTS TYPES DE CHARGEMENT

La méthode de calcul du champ de contraintes que nous avons développée peut être utilisée pour différents cas de chargement, par exemple, traction concentrée, traction uniforme répartie et flexion trois points etc.

Dans cette étude, nous présentons quelques éprouvettes de différents types soumises à diverses sollicitations que l'on utilise actuellement dans notre laboratoire pour des essais de fatigue et de rupture.

V.5.1 Éprouvette CT soumise à une charge concentrée

L'éprouvette CT est fréquemment utilisée pour des essais de résistance à la fatigue et à la rupture. L'éprouvette possédant une entaille émoussée est plus proche des conditions initiales d'utilisations d'une pièce possédant un défaut géométrique.

La géométrie de la pièce étudiée est illustrée dans la figure [V.5]. Des charges concentrées sont appliquées de part et d'autre de l'entaille suivant la direction verticale.

Le rayon en fond d'entaille varie de 0,01 à 0,5 mm. Le calcul de la distribution des contraintes est effectué pour chaque rayon, en utilisant la méthode de transformation conforme. Dans les figures [V.11a] et [V.11b], nous donnons les résultats du calcul au voisinage du fond d'entaille dans la direction de l'axe x.

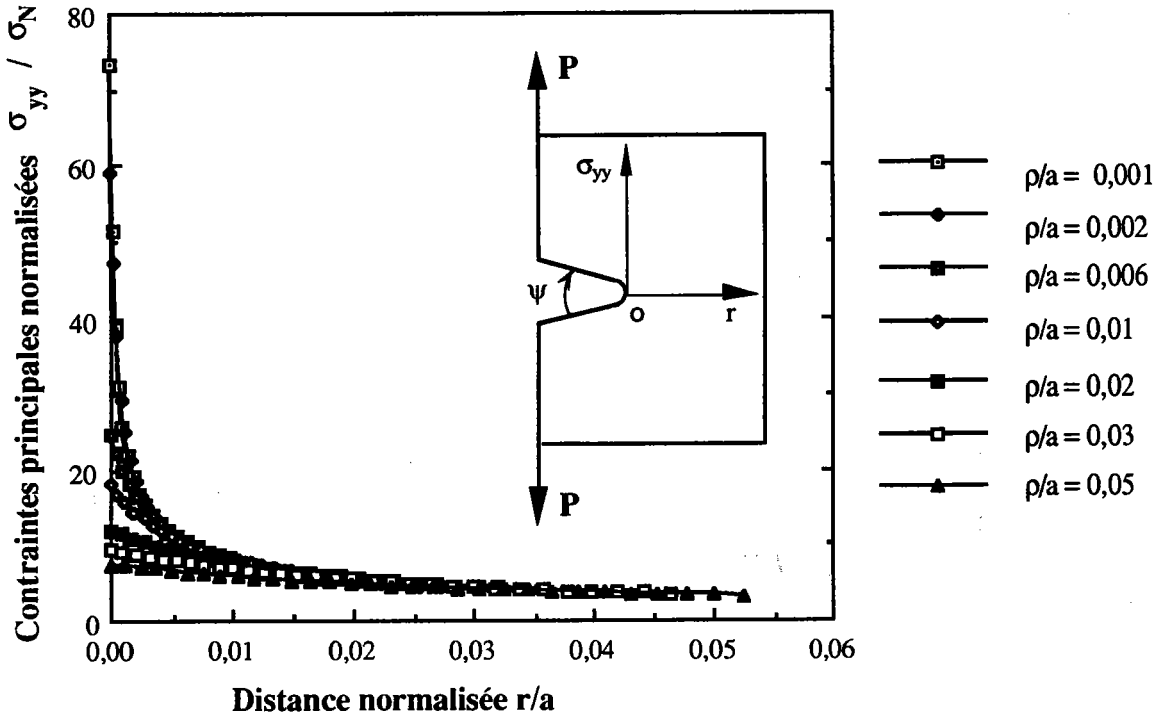


Figure [V.11a] : Distribution de contraintes σ_{yy} en fond l'entaille pour différentes acuités

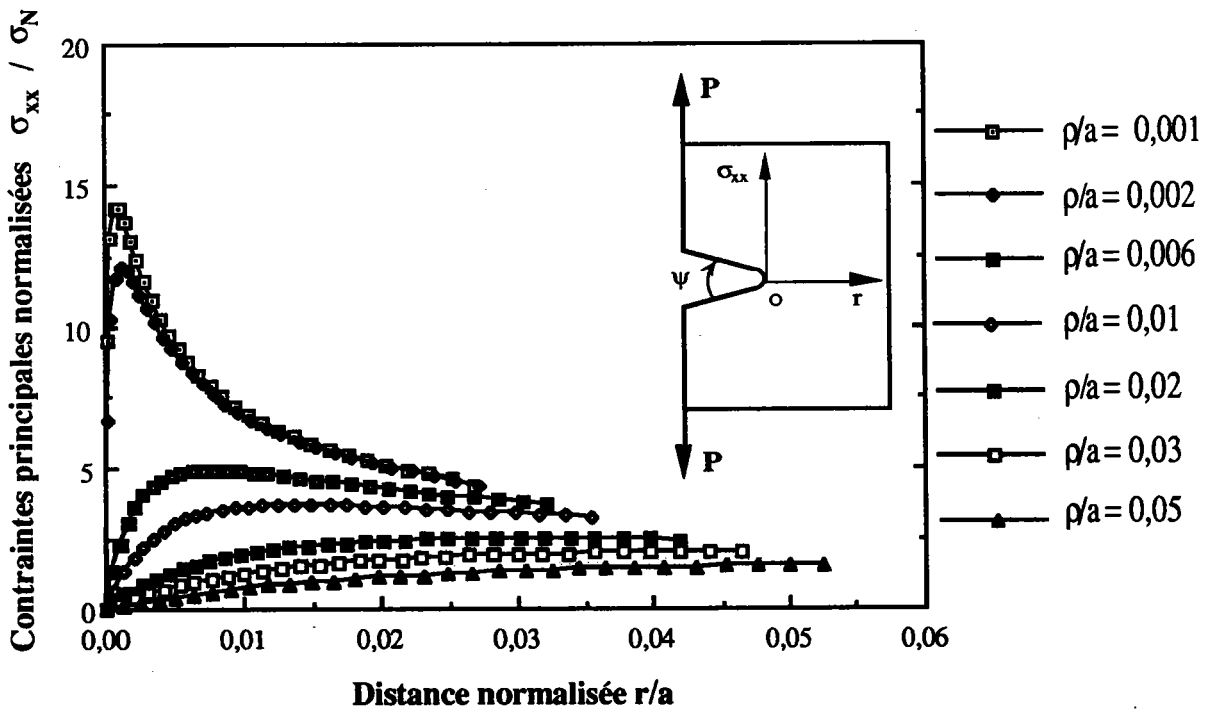


Figure [V.11b] : Distribution de contraintes σ_{xx} en fond d'entaille pour différentes acuités

La valeur maximale de la contrainte normale σ_{yy} est atteinte en fond d'entaille ; elle diminue avec la distance. La contrainte normale σ_{xx} augmente d'abord et diminue ensuite le long de l'axe x. Pour faciliter la comparaison, des unités non dimensionnelles sont employées.

La contrainte non-dimensionnelle s'exprime par le rapport de la contrainte normale sur la valeur nominale.

La contrainte nominale est définie par la formule suivante selon la figure [V.12] :

$$\sigma_N = \left[\frac{P}{B(W-a)} + \frac{3P(W+a)}{(W-a)^2} \right] / 2 \quad (\text{V.5-1})$$

où P, W et a ont été définis par la figure (V.5), B est l'épaisseur.

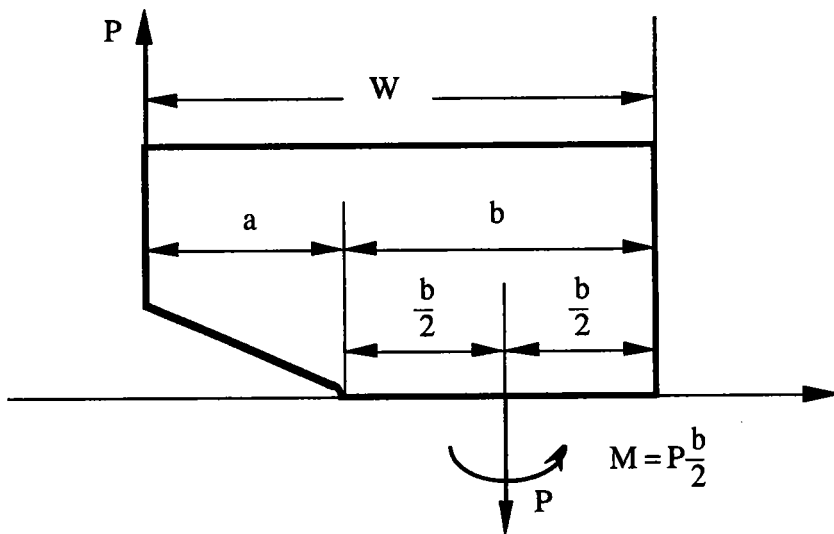


Figure [V.12] : Détermination de la contrainte nominale

5.2. Eprouvette SENT soumise à une traction uniformément répartie

Dans ce cas, la même géométrie d'éprouvette a été utilisée. Le chargement employé est une traction répartie sur deux faces opposées (Figure [V.13]).

- longueur de la plaque, $L = 20$ mm.
- hauteur de la plaque, $W = 20$ mm.
- profondeur de l'entaille, $a = 10,0$ mm.
- angle d'ouverture de l'entaille, $\psi = 45^\circ$.
- rayon du fond d'entaille, ρ est de 0,01 à 0,5.

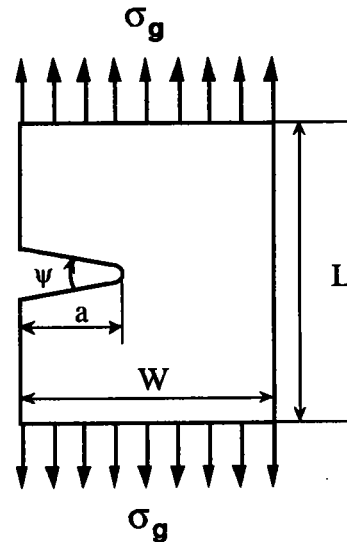


Figure [V.13] : *Eprouvette rectangulaire entaillée soumise à une traction répartie*

Le rayon en fond d'entaille varie de 0,01 à 0,5 en 7 niveaux. La distribution des contraintes le long de l'axe x à partir du fond d'entaille est montrée dans les figures [V.14a] et [V.14b] avec des paramètres non dimensionnels. Dans ce cas, le rapport de contraintes s'exprime par le rapport de contrainte normale sur la contrainte nominale σ_N .

La contrainte nominale est définie par la formule suivante :

$$\sigma_N = \sigma_g W \left(\frac{1}{W - a} \right) \quad (V.5-2)$$

Une forme similaire à celle du premier cas de la distribution de contraintes a été obtenue. Quand le rayon de l'entaille augmente, les contraintes en fond d'entaille diminuent.

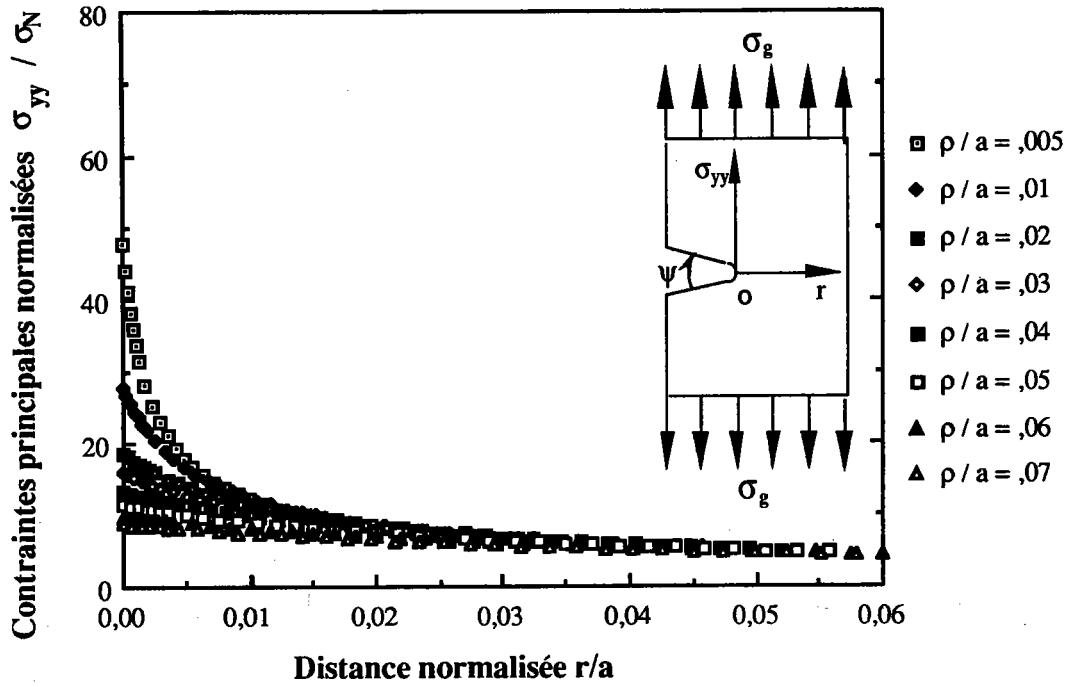


Figure [V.14a] : Distribution de contraintes σ_{yy} / σ_n le long de l'axe r dans une plaque entaillée soumise à une traction uniformément répartie

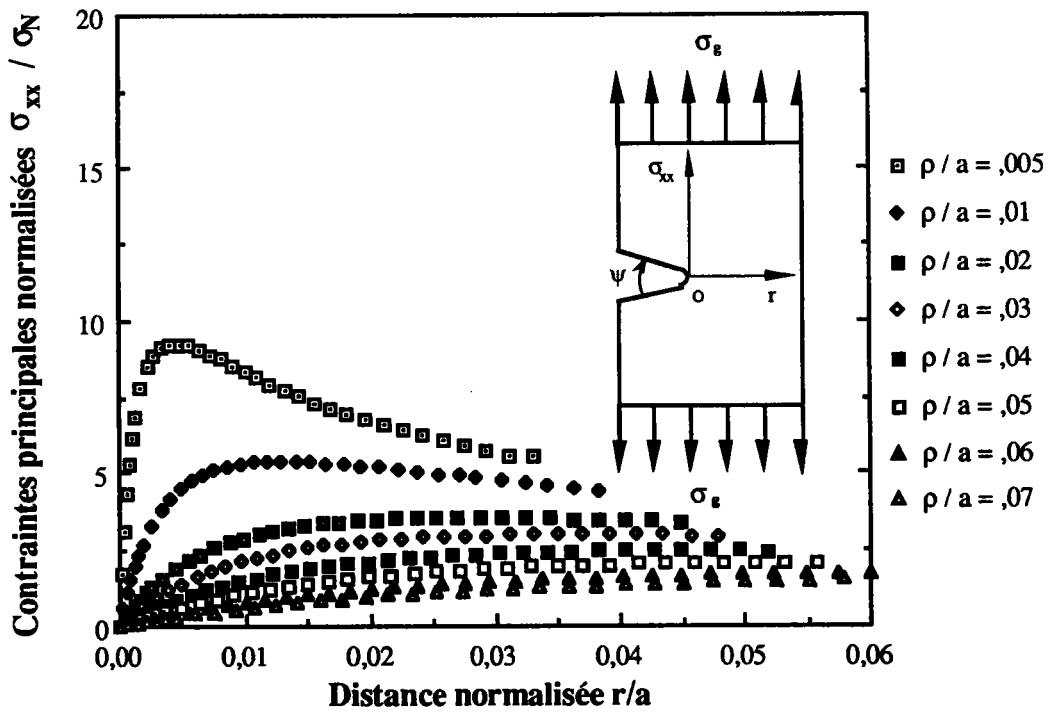


Figure [V.14b] : Distribution de contraintes σ_{xx} / σ_n le long de l'axe r dans une plaque entaillée soumise à une traction uniformément répartie

V.5.3. Eprouvette soumise à la flexion simple

L'influence de la géométrie de l'entaille a été étudiée sur des éprouvettes soumises à la flexion simple comme le montre la figure [V.15].

Un exemple de calcul de la distribution de contraintes avec la méthode de transformation conforme est montré dans les figures [V.16a] et [V.16b]. Le champ de contraintes sur toute la plaque peut être analysé comme dans les autres cas. Ici, nous présentons seulement les contraintes situées sur le ligament à partir du fond d'entaille.

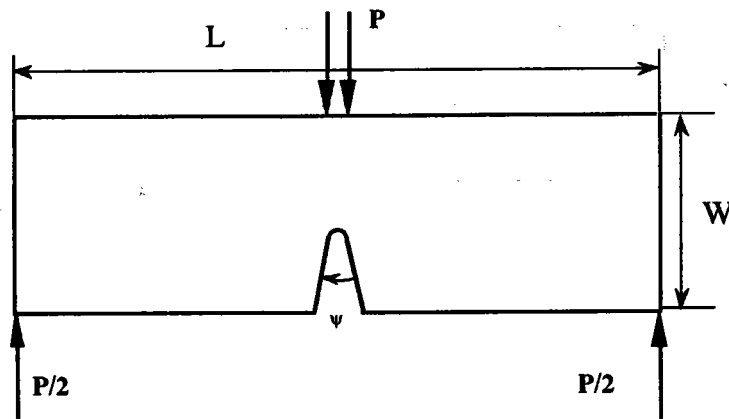


Figure [V.15] : Géométrie de l'éprouvette de flexion trois points

Dans cette figure $W = 20$ mm, $L = 60$ mm, $a = 10$ mm et $\psi = 30^\circ$. Le rayon en fond d'entaille choisi varie de 0,005 à 0,5 mm. Le rapport de contraintes s'exprime ici par le rapport de la contrainte normale sur la contrainte nominale.

La contrainte nominale est définie par la formule suivante :

$$\sigma_N = \frac{3}{2} \frac{PL}{B(W-a)^2} \quad (V.5-3)$$

où L est la longueur, B l'épaisseur, W la largeur de l'éprouvette et P le chargement.

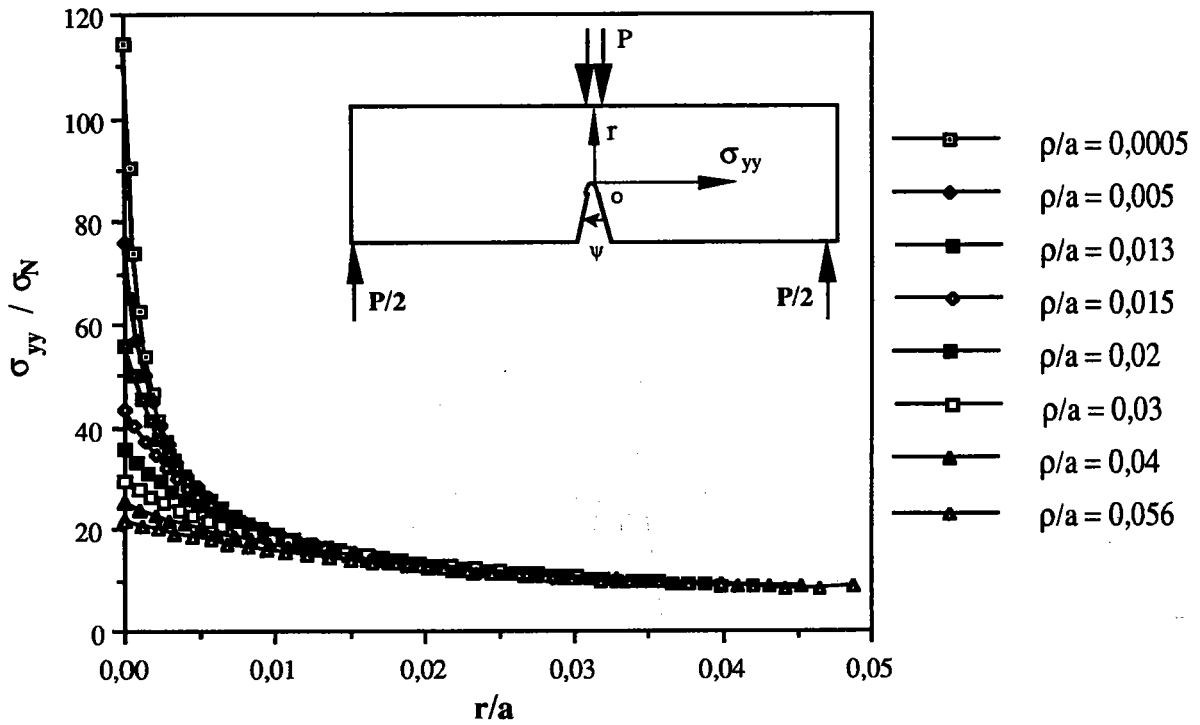


Figure [V.16a] : Distribution de contraintes σ_{yy} / σ_N le long de l'axe r dans une plaque entaillée.

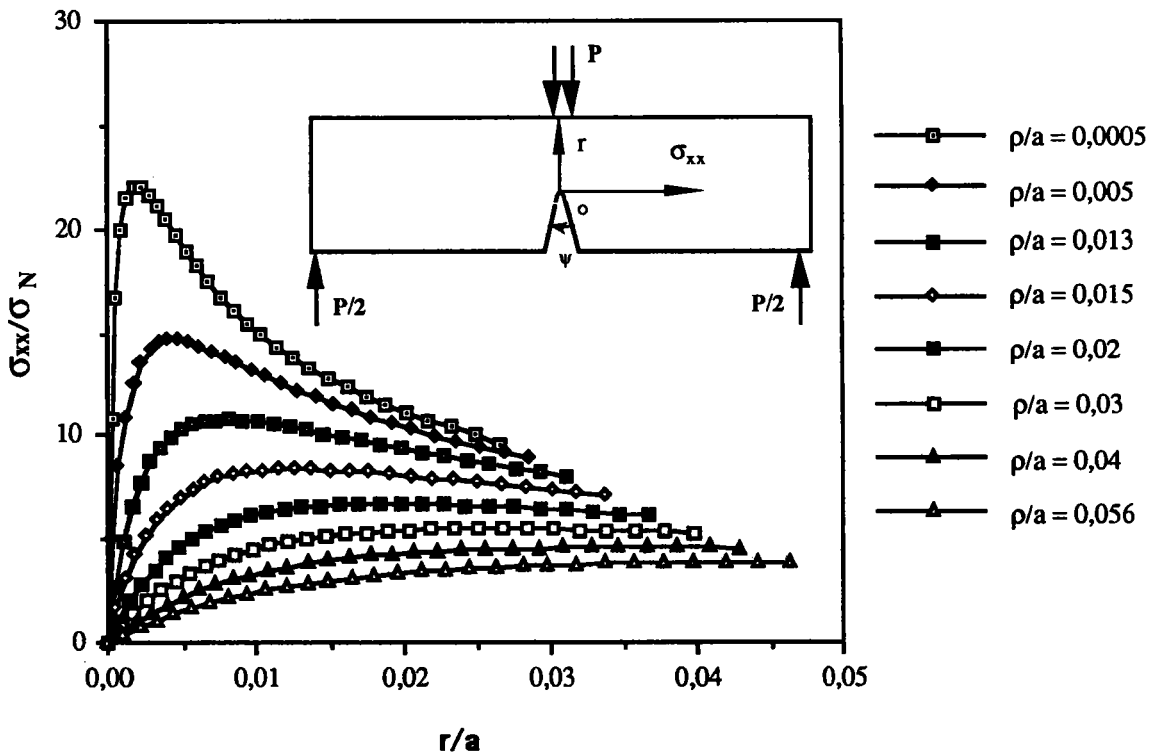


Figure [V.16b] : Distribution de contraintes σ_{xx} / σ_N le long de l'axe r dans une plaque entaillée.

V.5.4. Cas d'un joint soudé

Il s'agit d'un assemblage soudé soumis à une sollicitation cyclique. Pour analyser la résistance à la fatigue, il est nécessaire en premier lieu de calculer le champ de contraintes dans le cordon de soudure.

L'éprouvette simulant un joint soudé est montrée dans la figure (V.17) . Deux cordons de soudure symétriques supportent une sollicitation de flexion.

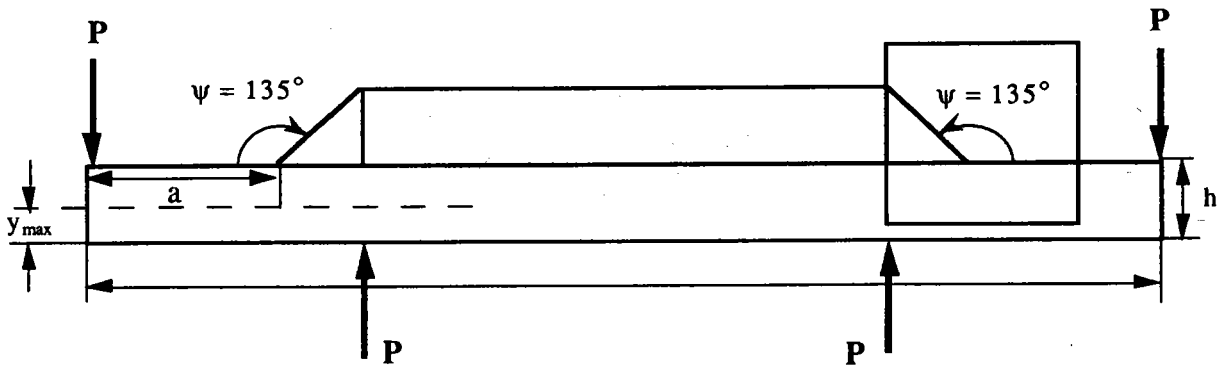


Figure [V.17]: Une éprouvette simulant un joint soudé

Cette éprouvette peut être considérée comme une plaque possédant deux entailles avec des angles obtus. La transformation conforme va être développée pour s'adapter à ce cas. En raison de la présence des deux entailles émoussées qui représentent une cordons de soudure, nous remplaçons l'expression $(w - a_4)^{\frac{-\alpha_4}{\pi}}$ dans la formule (V.1-3) par $(w - a'_4)^{\frac{-\alpha_4}{\pi}} + (w - a''_4)^{\frac{-\alpha_4}{\pi}}$ et $(w - a_6)^{\frac{-\alpha_6}{\pi}}$ par $(w - a'_6)^{\frac{-\alpha_6}{\pi}} + (w - a''_6)^{\frac{-\alpha_6}{\pi}}$. Pour la même raison peut être remplacée par l'expression suivante :

$$z = m(\zeta) = C_1''' \int_0^{\zeta} \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_1}\right)^{\frac{-\alpha_1}{\pi}} \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_2}\right)^{\frac{-\alpha_2}{\pi}} \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_3}\right)^{\frac{-\alpha_3}{\pi}} \left[\left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_4}\right)^{\frac{-\alpha_4}{\pi}} + \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_4''}\right)^{\frac{-\alpha_4}{\pi}} \right] \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_5}\right)^{\frac{-\alpha_5}{\pi}} \left[\left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_6}\right)^{\frac{-\alpha_6}{\pi}} + \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_6''}\right)^{\frac{-\alpha_6}{\pi}} \right] \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_7}\right)^{\frac{-\alpha_7}{\pi}} d\zeta + C_2'''$$

(V.5-4)

C_1''' et C_2''' sont des nouvelles constantes.

Les figures (V.18) et (V.19) montrent la transformation conforme utilisée dans la région de l'entaille (voir la page suivante). Les rayons à fond d'entaille sont respectivement égaux à $\rho = 0$ et $\rho = 0,3$.

La distribution de contrainte est calculée de la même façon que dans les autres cas. La figure (V.20) donne les contraintes principales dans la direction de l'amorçage de la fissure dans le cas d'un rayon d'entaille $\rho = 0,3$.

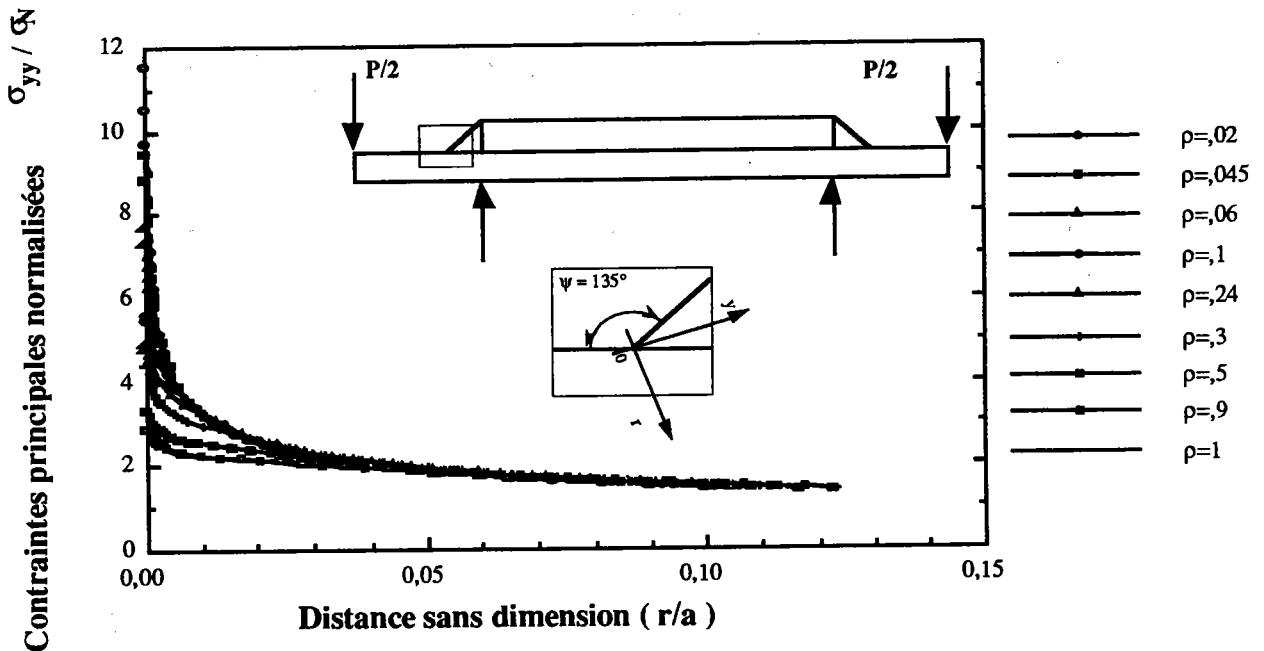


Figure [V.20] : Distribution des contraintes principales σ_{yy} / σ_N le long de l'axe x

La contrainte nominale est définie dans ce cas par la formule suivante :

$$\sigma_N = \left[\frac{M y_{\max}}{J_z} \right] = \left[\frac{(P x) y_{\max}}{\frac{b h^3}{12}} \right] \tag{V.5-5}$$

Les contraintes ont été analysés de façon plus précise près du fond d'entaille, (Figures V.21 et V.23). Les figures V.22 et V.24 montrent l'évolution de la contrainte principale en fonction de la distance à la surface extérieure pour différents génératrices. On observe que les contraintes obtenues sont plus grandes dans le cas de l'entaille aiguë et qu'elles sont plus importante pour les génératrices proches du fond d'entaille.

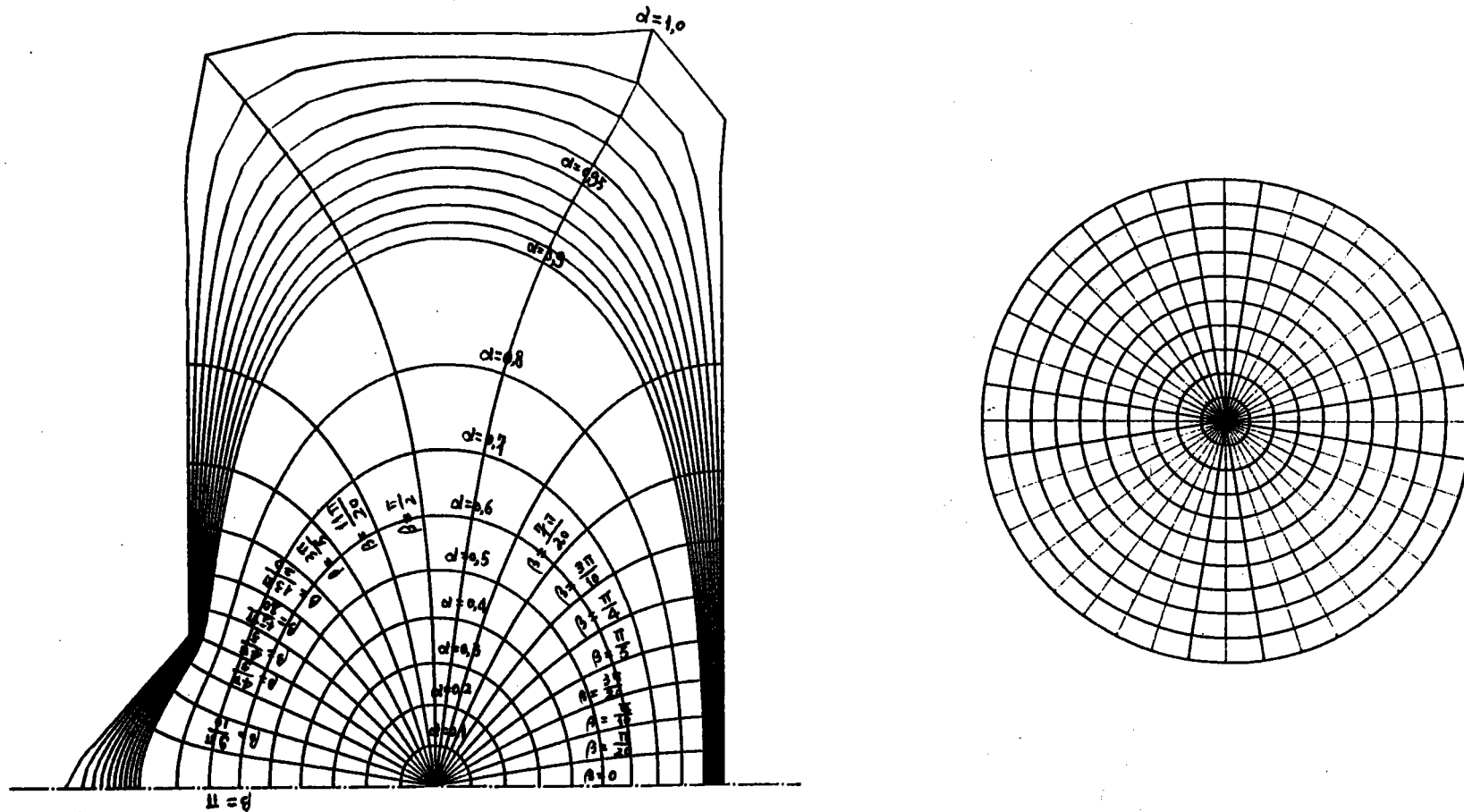


Figure [V.18] : Transformation conforme sur une partie de l'éprouvette simulant un joint soudé et possédant une entaille aiguë

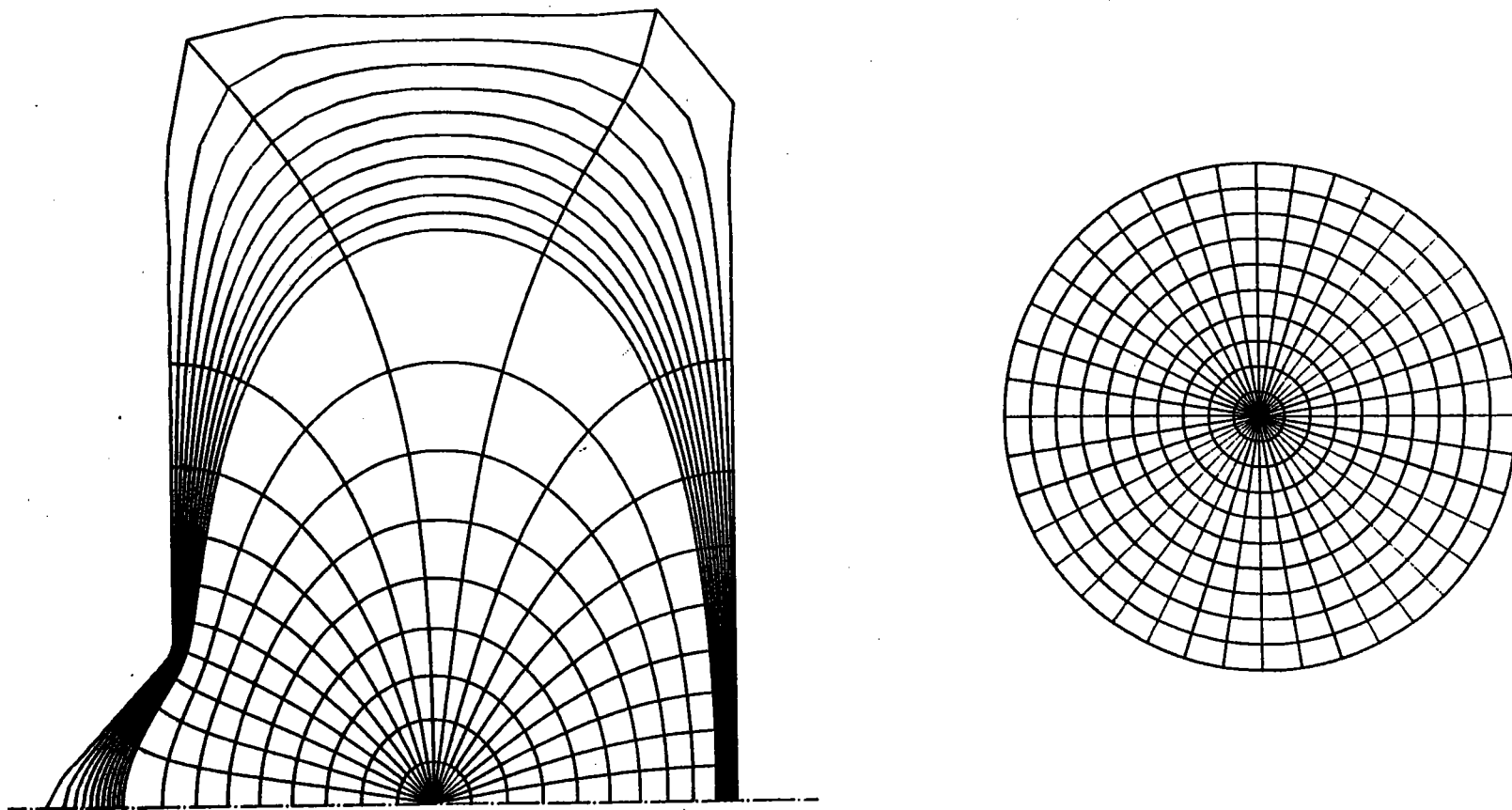


Figure [V.19] : Transformation conforme sur une partie de l'éprouvette simulant un joint soudé et possédant une entaille émoussée

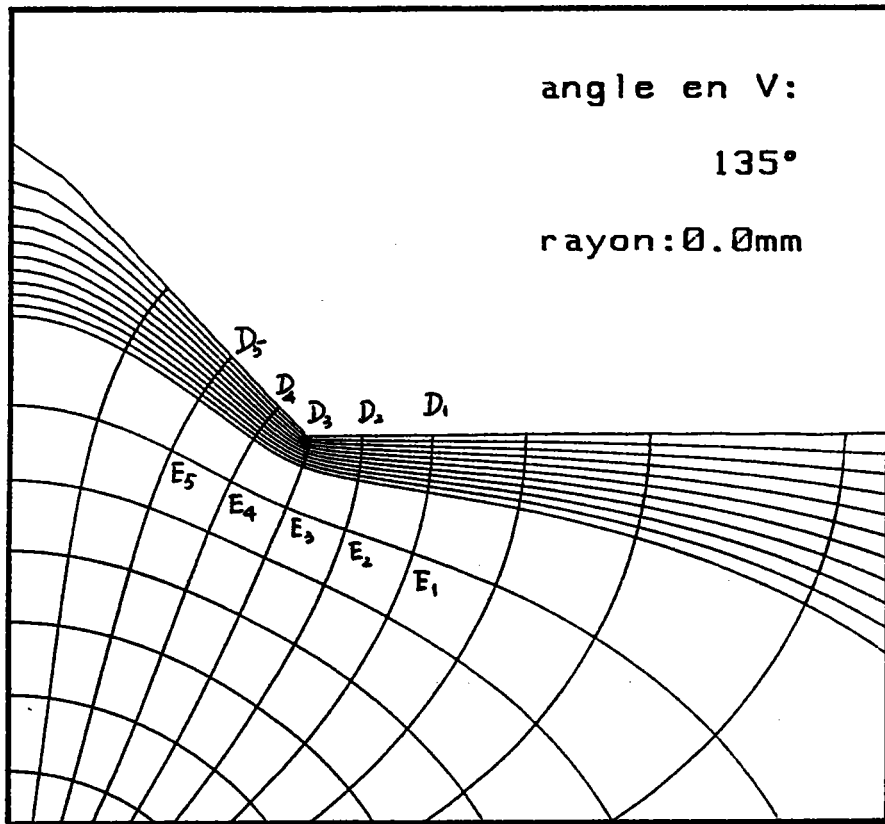


Figure [V.21] : Des courbes orthogonales de la transformation conforme au voisinage d'une entaille

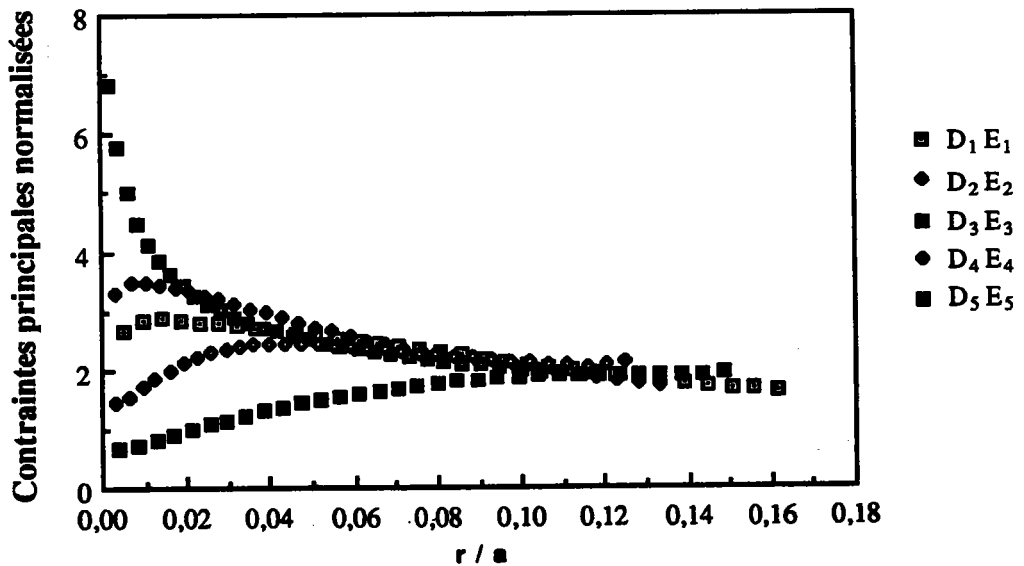


Figure [V.22] : Contrainte principale en fonction de la distance à la surface extérieure pour les différences génératrices marquées dans la figure [V.21]

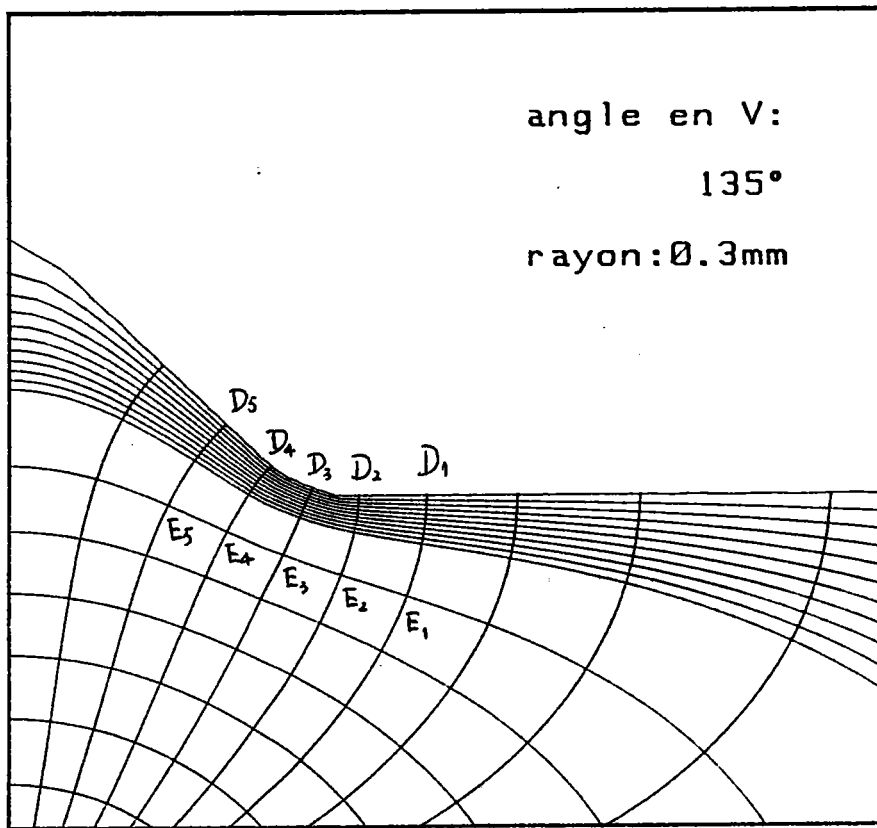


Figure [V.23] : Entaille émoussée avec courbes orthogonales de la transformation conforme

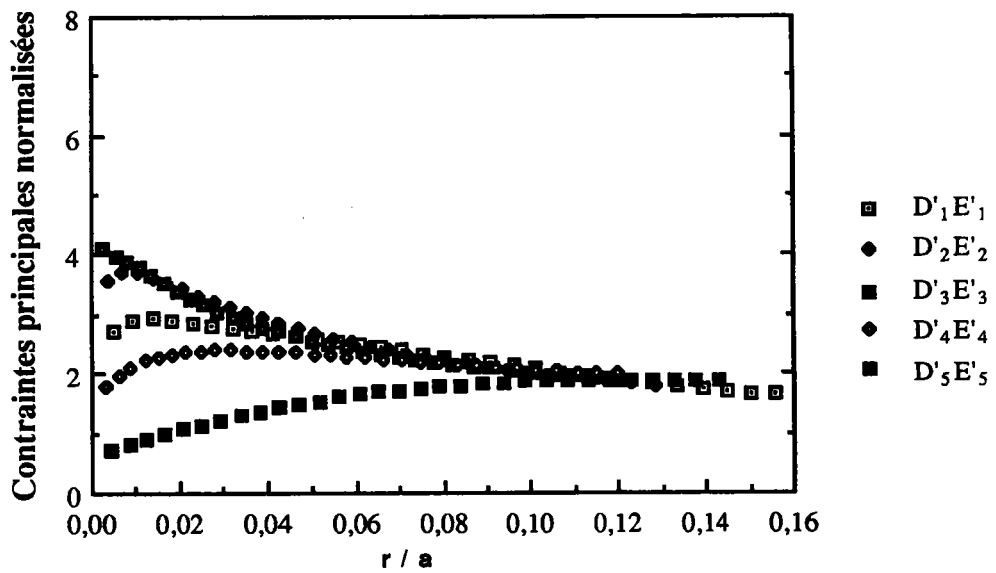


Figure [V.24] : Contrainte principale en fonction de la distance à la surface extérieure pour les différentes génératrices marquées dans la figure [V.23]

L'amorçage de fissure dans le cordon de joint soudé est un problème qu'on rencontre souvent dans l'industrie. Le calcul sur l'éprouvette simulant un joint soudé que nous avons effectué apporte les données nécessaires pour l'analyse du champ de contraintes dans le cordon et l'évaluation de la résistance de l'endurance du matériau. L'étude complète dans ce domaine a été réalisée par un autre chercheur de notre laboratoire.

CONCLUSION

La distribution de contraintes sur la plaque possédant une entaille avec différentes acuités a été calculée par une méthode améliorée de transformation conforme de Schwartz-Cristoffel couplée avec les équations de l'élasticité. Dans le cas d'un rayon en fond d'entaille relativement important, l'expression mathématique de la transformation devient très complexe, Une technique d'itération par un programme informatique a été développée pour résoudre cette difficulté.

Avec cette méthode améliorée nous avons étudié des plaques entaillées avec différentes formes, à savoir une éprouvette rectangulaire avec une entaille en V, une éprouvette de flexion trois points et une éprouvette avec une entaille elliptique ou parabolique. Cette méthode a été aussi développée pour le cas de la simulation d'un joint soudé. La précision de la transformation est satisfaisante même pour un rayon relativement important en fond d'entaille.

Le champ de contraintes au voisinage du fond d'entaille nous permet d'analyser les caractéristiques du facteur d'intensité d'entaille associé à l'acuité d'entaille. Ce problème sera détaillé dans la partie suivante.

TROISIÈME PARTIE :
ANALYSE DE LA TÉNACITÉ DES
MATÉRIAUX

INTRODUCTION

VI FACTEUR D'INTENSITÉ DE CONTRAINTES SUR DES
PLAQUES ENTAILLÉES

VII TÉNACITÉ DES MATÉRIAUX FRAGILES

CONCLUSION

TROISIÈME PARTIE : ANALYSE DE LA TÉNACITÉ DES MATÉRIAUX

INTRODUCTION

Dans les chapitres précédents, nous avons calculé le champ de contraintes dans une plaque entaillée en V, et plus précisément la distribution des contraintes en fond d'entaille avec la méthode de transformation conforme et la théorie d'élasticité.

Dans cette partie, nous allons analyser d'abord le facteur d'intensité de contraintes sur une plaque entaillée. Quand le rayon en fond d'entaille tend vers zéro, ce qui correspond au cas d'une entaille aiguë, on retrouve la singularité du champ de contraintes en fond d'entaille. Quand le rayon en fond d'entaille n'est pas nul, la contrainte prend une valeur finie. Dans ce qui suit, on a établi une relation entre la contrainte normale maximale et le facteur d'intensité de contraintes d'entaille. Nous nous sommes particulièrement attachés à la définition du facteur d'intensité de contraintes pour une entaille émoussée.

Nous étudierons ensuite le facteur d'intensité de contraintes critique pour une entaille émoussée. Ce facteur peut être considéré comme un paramètre décrivant la ténacité d'un matériau fragile entaillé.

VI FACTEUR D'INTENSITÉ DE CONTRAINTES SUR DES PLAQUES ENTAILLÉES

Dans ce chapitre, nous étudions le facteur d'intensité de contraintes en mode I sur des plaques entaillées. Les plaques sont soumises à une sollicitation symétrique par rapport à l'axe de l'entaille.

En général, le facteur d'intensité de contraintes est fonction de la contrainte globale appliquée et de la géométrie. Dans le cas d'une entaille avec une acuité relativement importante, l'influence du rayon en fond d'entaille doit être pris en compte.

Il est intéressant de connaître l'évolution du champ de contraintes en fonction de la variation du rayon en fond d'entaille et d'en déduire la formulation du facteur d'intensité de contraintes.

VI.1 RAPPEL DE LA DÉFINITION DES FACTEURS D'INTENSITÉ DE CONTRAINTES

Le formalisme de la définition du facteur d'intensité de contraintes diffère selon la forme géométrique et le caractère du défaut (aiguë ou émoussée). Dans le cas d'une fissure, rappelons que celui-ci est défini à partir du champ de contraintes selon la formule :

$$\sigma_{ij} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \quad (\text{VI.1-1})$$

Pour des entailles d'angle, les 3 formules les plus souvent utilisées pour calculer le facteur d'intensité de contraintes en mode I sont illustrées dans le tableau (VI-1). Quand l'angle d'entaille $\psi = 0$, on retrouve le cas d'une fissure.

Dans le premier cas, le facteur d'intensité de contraintes est donné par la formule suivante :

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{yy} \quad (\text{VI.1-2})$$

Le deuxième cas concerne une entaille aiguë avec $\psi > 0$, le facteur d'intensité de contraintes d'entaille est égal à :

$$K_I^* (\psi) = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi} \sigma_{yy} r^{\alpha(\psi)} \quad (\text{VI.1-3})$$

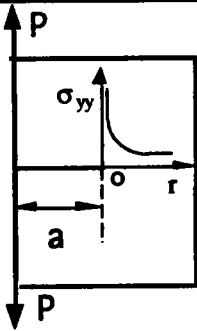
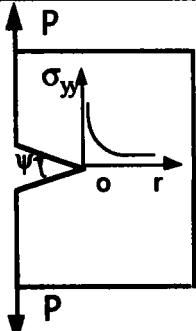
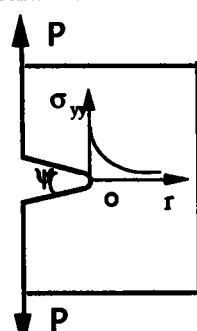
Le troisième cas concerne une entaille un rayon en fond d'entaille est relativement faible. Le facteur d'intensité de contraintes d'entaille d'acuité ρ s'exprime par la formule suivante:

$$K_{\rho}^* (\psi) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sigma_{\max} \rho^{\alpha(\psi)} \quad (\text{VI.1-4})$$

Dans les formules (VI.1-3) et (VI.1-4), quand $\psi = 0^\circ$, $\alpha = 0,5$ et quand $\psi = 180^\circ$, $\alpha = 0$; la relation entre ψ et α est donnée par la formule suivante :

$$\alpha (\psi) = 0.5 - 0.089 \left(\frac{\psi}{\pi}\right) + 0.442 \left(\frac{\psi}{\pi}\right)^2 - 0.853 \left(\frac{\psi}{\pi}\right)^3 \quad (\text{VI.1-5})$$

Tableau (VI-1) formulation du facteur d'intensité de contraintes dans trois cas

Plaque avec une fissure	Plaque avec une entaille aiguë	Plaque avec une entaille d'acuité $\rho \rightarrow 0$
		
K_I pour une fissure:	K_I^* pour une entaille aiguë:	K_{ρ}^* pour une entaille avec une acuité ρ
$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{yy}$	$K_I^* = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi} \sigma_{yy} r^{\alpha}$	$K_{\rho}^* = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sigma_{\max} \rho^{\alpha}$

VI.2 CARACTÉRISTIQUES DU CHAMP DE CONTRAINTES EN FOND D'ENTAILLE

Dans le chapitre VI, nous avons vu que pour le même niveau de chargement, si le rayon en fond d'entaille diminue, la valeur maximale de la contrainte σ_{yy} devient plus importante, et si le rayon $\rho \rightarrow 0$, la contrainte σ_{yy} tend vers l'infini.

Nous présentons de nouveau la distribution des contraintes σ_{yy} en fonction de la distance r à partir du fond d'entaille pour des différents rayons dans un diagramme bi-logarithmique. On remarque que pour chaque valeur du rayon d'entaille, la courbe contrainte σ_{yy} en fonction de la distance est d'abord non linéaire puis elle devient linéaire ; quand le rayon en fond d'entaille augmente cette partie linéaire diminue.

La figure (VI.1) montre le cas d'une éprouvette CT soumise une charge concentrée comme dans la figure (VI.5) du chapitre VI. La figure (VI.2) montre le cas d'une éprouvette de flexion trois points soumise le chargement comme dans le cas de la figure (VI.9). Dans ces figures (VI.1) (VI.2), σ_{yy} représente la contrainte normale perpendiculaire à l'entaille et σ_N la contrainte nominale, B l'épaisseur de la plaque et r la distance mesurée à partir du fond d'entaille dans la direction x . Les valeurs utilisés sont adimensionnelles.

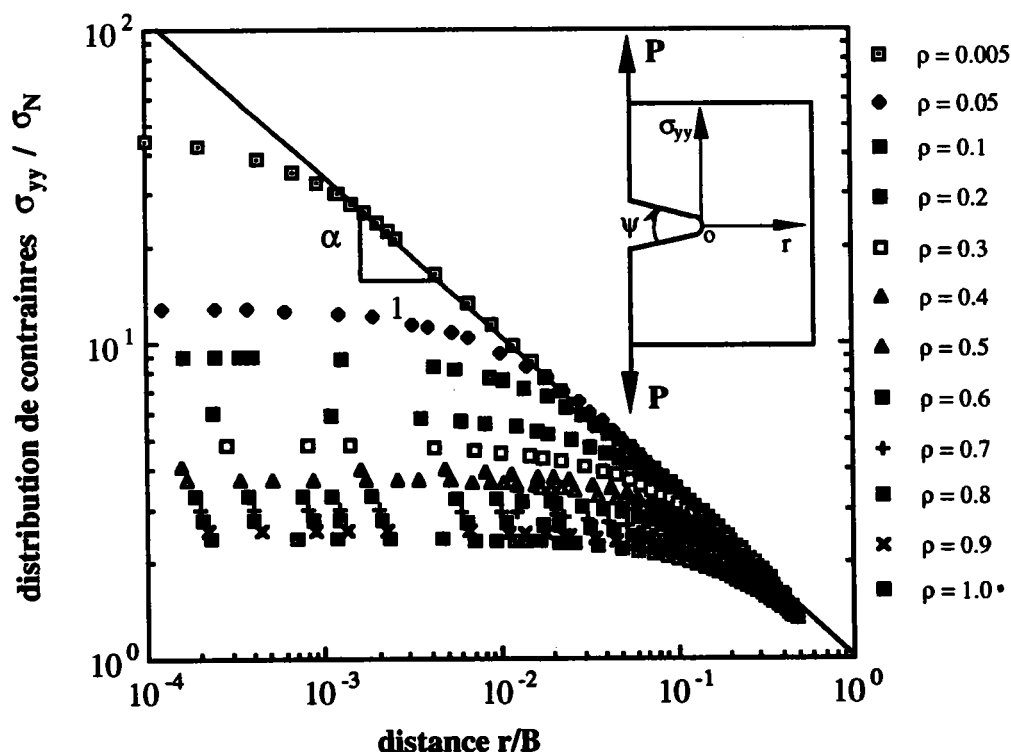


Figure [VI.1]: Distribution des contraintes adimensionnelles en fond d'entaille représentée dans un diagramme bi-logarithmique, cas d'une éprouvette CT

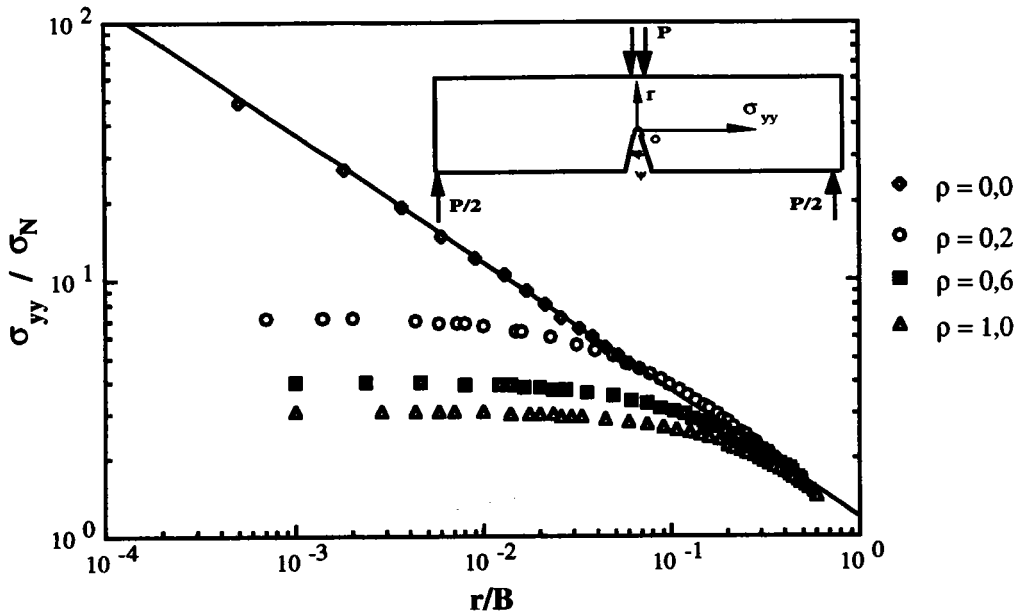


Figure [VI.2] : Distribution des contraintes adimensionnelles dans un diagramme bi-logarithmique, cas d'une éprouvette de flexion trois points

On remarque que la partie linéaire de toutes les courbes possède une pente identique. Cette droite unique correspond précisément au cas d'une entaille avec un rayon d'entaille nul. Cette droite dans le diagramme bi-logarithmique est définie par la relation :

$$\frac{\sigma_{yy}}{\sigma_N} = C' \left(\frac{r}{B} \right)^{-\alpha(\psi)} \quad (\text{VI.2-1})$$

D'une façon générale, la distribution des contraintes le long de l'axe x et pour une entaille émoussée peut être divisée en 3 zones.

-la zone I:

Cette zone I est située dans l'intervalle $[0, X'_m]$ (voir la figure [VI.3]). Dans cette zone, la contrainte varie peu. Quand $r = 0$, elle est égale la contrainte maximale σ_{\max} . Celle-ci est égale au produit du facteur de concentration de contrainte K_t par contrainte nominale σ_N :

$$\sigma_{\max} = K_t \sigma_N \quad (\text{VI.2-2})$$

-la zone II:

Elle est située entre les zones I et III et constitue une zone de transition.

-la zone III :

Dans cette zone, la contrainte varie selon la relation:

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I^*}{\sqrt{2\pi} r^\alpha} \quad (\text{VI.2-3})$$

K_I^* est le facteur d'intensité de contraintes d'entaille.

Dans cette relation, le gradient de contrainte est caractérisé par le terme K_I^* ou facteur d'intensité de contraintes d'entaille d'acuité nulle et par le coefficient α .

Quatre paramètres K_t , X'_m , K_I^* et α permettent donc de caractériser cette distribution de contraintes.

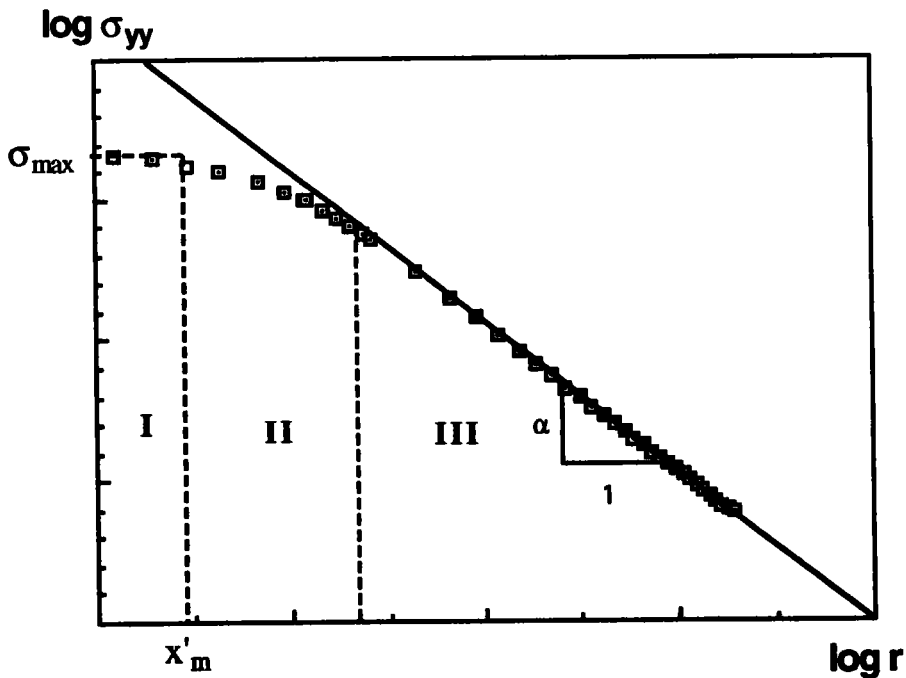


Figure [VI.3] : Définition des trois zones relative à la distribution des contraintes

VI.3 FACTEUR DE CONCENTRATION DE CONTRAINTES DANS LE CAS D'UNE ENTAILLE ÉMOUSSÉE

Le facteur de concentration de contrainte K_t est défini par la relation :

$$K_t = \sigma_{\max} / \sigma_N \quad (\text{VI.3-1})$$

Cette quantité a été calculée pour le cas d'une plaque possédant une entaille latérale dans les cas d'une plaque soumise à une paire de forces concentrées :

$$\sigma_N = \frac{P}{B(W-a)} + \frac{3P(W+a)}{B(W-a)^2} \quad (\text{VI.3-2})$$

où a est la longueur de l'entaille, W la largeur de la plaque, B l'épaisseur et P la charge.

La relation entre le facteur de concentration de contraintes K_t et le rayon à fond d'entaille ρ est présentée dans la figure [VI.4].

On remarque qu'au fur et à mesure que l'acuité ρ augmente, le facteur de concentration de contrainte diminue. Lorsque $\rho \rightarrow 0$, K_t tend vers l'infini, on retrouve la singularité de contraintes d'une entaille.

La présentation de ces résultats dans un diagramme bilogarithmique (Figure [VI.5]) permet de montrer que la variation du facteur de concentration de contraintes au fond d'entaille en fonction de l'acuité peut être représenté par la formule suivante:

$$K_t = D(\rho^\alpha)^{-\beta} \quad (\text{VI.3-3})$$

soit :

$$\sigma_{\max} = \sigma_N D(\rho^\alpha)^{-\beta} \quad (\text{VI.3-4})$$

où D et β sont des constantes.

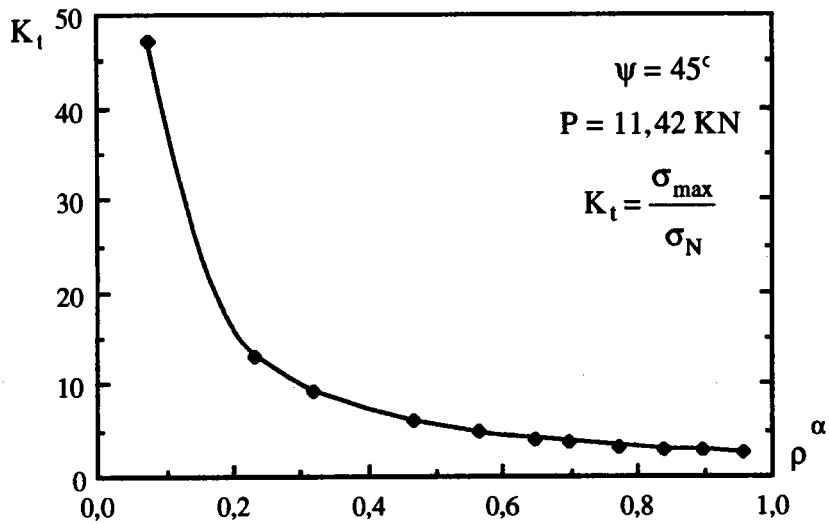


Figure [VI.4]: Évolution du facteur de concentration de contraintes en fonction de l'acuité ; cas d'une éprouvette CT.

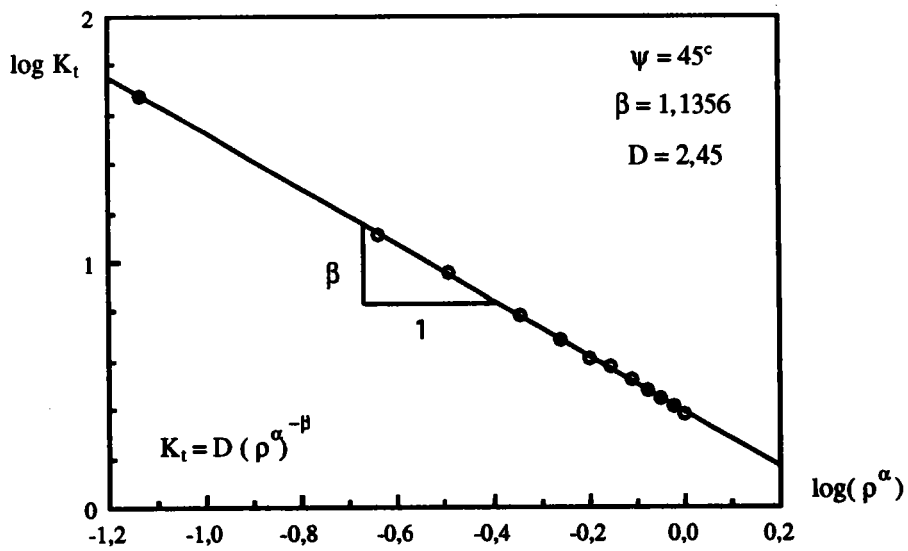


Figure [VI.5]: Évolution de K_t en fonction de ρ^α

VI.4 RELATION ENTRE LA DISTANCE SIGNIFICATIVE ET L'ACUITÉ D'ENTAILLE

La distance significative X'_m n'est pas toujours aisée à définir en raison de l'existence du raccordement de la zone II ou zone intermédiaire. Nous avons recherché une autre définition .

La figure [VI.6] montre les deux définitions possibles correspondant aux abscisse X_m et X_n .

La première définition a été retenue pour les raisons suivantes :

- dans un diagramme bilogarithmique, sauf pour $\rho = 0$, la valeur de X_m est plus simple à déterminer ;
- X_m est définie par l'intersection d'une horizontale d'ordonnée égale à la contrainte maximale et la ligne d'équation (VI.2-1).

La deuxième définition pourrait être utilisée en raison de son caractère physique car X_n est l'abscisse de la limite entre la zone II et la zone III. Quand $r > X_n$, la contrainte σ_{yy} est correctement décrite par l'équation (VI.2-1) ou l'équation (VI.2-3).

La difficulté de sa localisation nous a incité alors à ne retenir que X_m . Utilisant la formule (VI.2-3), la contrainte normalisée maximale $(\sigma_{yy})_{\max}$ peut s'exprimer par le facteur d'intensité de contraintes d'entaille, l'angle d'entaille et la distance significative X_m :

$$(\sigma_{yy})_{\max} = \frac{K_I^*}{\sqrt{2\pi} (x_m)^\alpha} \quad (\text{VI.4-1})$$

L'évolution de la distance significative X_m en fonction de l'acuité ρ est représentée sur la figure [VI.7]. Cette distance est décrite par la relation suivante:

$$X_m = E(\psi) \rho^2 + F(\psi) \rho + G(\psi) \quad (\text{VI.4-2})$$

Où $E(\psi)$, $F(\psi)$, $G(\psi)$ sont des constantes, quand ψ est constant.

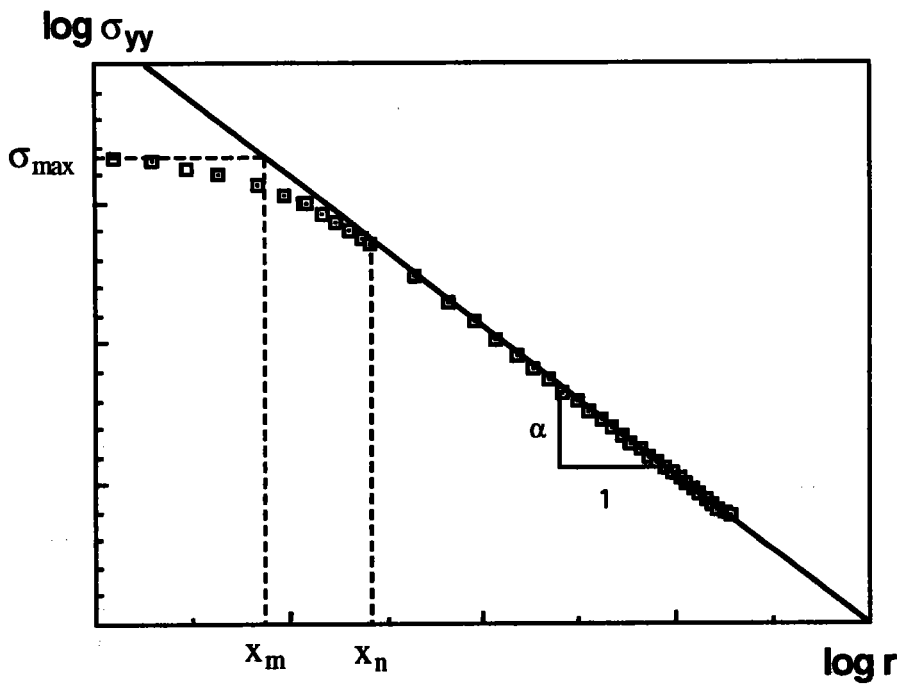


Figure [VI.6] : Définition des distances significatives X_m et X_n

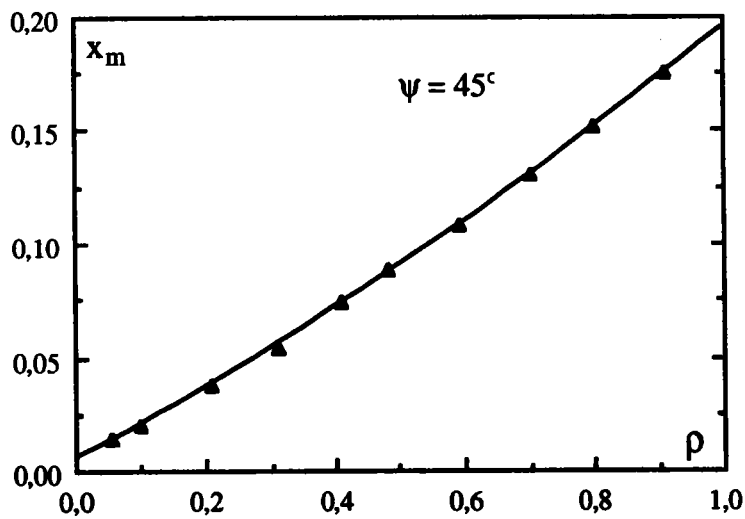


Figure [VI.7] : Évolution de la distance X_m en fonction de l'acuité ρ .

Dans le tableau (VI-2) $E(\psi)$, $F(\psi)$ et $G(\psi)$ sont donnés pour une éprouvette CT avec une entaille d'angle 45° .

Tableau (VI-2) : Valeurs de $E(\psi)$, $F(\psi)$ et $G(\psi)$ dans le cas d'une entaille d'angle 45°

ψ	$E(\psi)$	$F(\psi)$	$G(\psi)$
45°	0.0393	0.1509	0.00542

L'analyse des données obtenues montre $E(\psi)$, $F(\psi)$ et $G(\psi)$ varient avec l'angle d'entaille ψ .

En introduisant la relation (VI.4-2) dans la formule (VI.2-3), on obtient :

$$(\sigma_{yy})_{\max}(\psi, \rho) = \frac{K_I^*}{\sqrt{2\pi} (E(\psi) \rho^2 + F(\psi) \rho + G(\psi))^{0.5}} \quad (VI.4-3)$$

La relation donnant le facteur de concentration de contraintes, conduit à :

$$K_I^* = \sqrt{2\pi} K_t \sigma_N (E(\psi) \rho^2 + F(\psi) \rho + G(\psi))^{0.5} \quad (VI.4-4)$$

Dans les formules (VI.4-3) et (VI.4-4), K_I^* est le facteur d'intensité de contraintes d'entaille. Il caractérise la singularité de contrainte en fond d'une entaille aiguë. Il est identifié avec celui déduit de la formule (VI.1-3).

Pour une plaque avec une entaille aiguë, si le facteur d'intensité de contraintes K_I^* est connu, les relations (VI.4-2) et (VI.4-3), permettent de calculer la contrainte maximale en fond d'entaille avec différentes acuités. Réciproquement, si on connaît la contrainte maximale en fond d'entaille avec une acuité arbitraire, K_I^* peut être calculé.

VI.5 FACTEUR D'INTENSITÉ DE CONTRAINTES D'ENTAILLE DANS LE CAS D'UNE ENTAILLE ÉMOUSSÉE

5.1 Développement de la méthode de Hasebe

Dans la première partie, nous avons montré les méthodes de calcul du facteur d'intensité de contraintes pour le cas d'une entaille émoussée.

La première méthode est celle de l'amélioration de l'expression de Creager (formule (VI.1-4)). Elle est valable quand le rayon en fond d'entaille reste relativement petit.

La deuxième méthode présentée est développée par Hasebe et al [20]. Nous réécrivons ici l'expression du facteur d'intensité de contraintes :

$$K_I(c) = \lim_{\rho \rightarrow 0} A C_{\theta} \sigma_{yy}^{\max} \rho^{\alpha} c^{-\alpha} \sqrt{\pi c} / \sqrt{2} \quad (\text{VI.5-1})$$

C_{θ} est un coefficient en fonction de l'angle de l'entaille qui prend une valeur comprise entre 0,5 et 1,414. A est un coefficient variant entre 1,1215 et 1,414. Si le rayon en fond d'entaille est relativement petit, A ne dépend que l'angle d'entaille et c est la longueur de la fissure en fond d'entaille (voir chapitre III.3).

Lorsque nous analysons le processus de rupture en utilisant un critère local de rupture, nous faisons l'hypothèse comme Ritchie, Knott et Rice [55] que la rupture se produit lorsque la contrainte locale dépasse une valeur critique sur une distance caractéristique X_c qui représente la largeur du volume d'élaboration de la rupture. Dans les conditions d'amorçage de fissure en fond d'entaille émoussée, nous considérons qu'une fissure courte c dans la formule précédente devient égale à la distance caractéristique X_c .

Dans ce cas, la contrainte maximale de σ_{yy} dans la formule (VI.5-1) est calculée avant l'amorçage de la fissure. La formule (VI.5-1) peut être adaptée au cas d'un rayon important, elle devient :

$$K_p^*(X_c, \psi) = A C_{\theta} \sigma_{yy}^{\max} \rho^{\alpha} X_c^{-\alpha} \sqrt{\pi X_c} / \sqrt{2} \quad (\text{VI.5-2})$$

Le coefficient C_{θ} est déterminé par la courbe de la figure [VI.7] issue de la référence [22]. La valeur de A peut être obtenue approximativement par la relation déduite de l'entaille

elliptique [35]. Si $x_c \rightarrow 0$ et ρ devient grand par rapport à la profondeur de l'entaille a , A est proche d'une valeur limite 1,1215.

La validité de la formule (VI.5-2) dans le cas d'un rayon ρ important est mise en question car dans la procédure de développement de cette expression, on supprime la condition $\rho \rightarrow 0$.

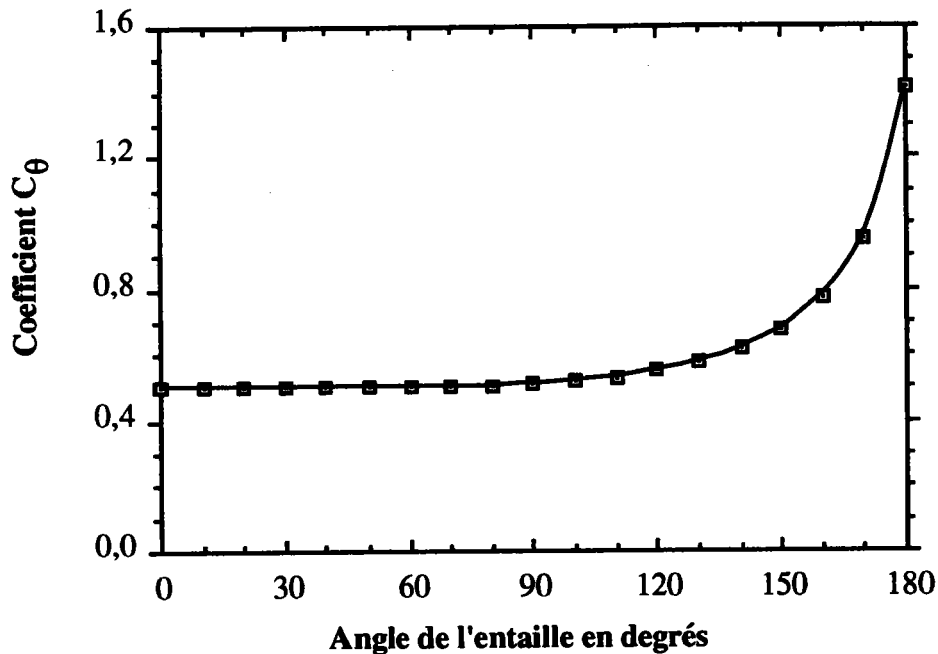


Figure [VI.7] : Détermination du coefficient C_θ [22]

5.2 Développement de la méthode de Lukas

Depuis des années 70, des efforts ont été faits pour obtenir les moyens de calculer le facteur d'intensité de contraintes d'une plaque infinie possédant un trou elliptique prolongé de deux fissures situées dans la direction du grand axe de l'ellipse. D'autres calculs ont été faits pour une entaille elliptique ou une entaille en V avec une fissure en fond d'entaille dans un demi-plan infini (voir la figure [VI.8]).

En considérant une fissure classique, on a proposé une expression qui relie la contrainte globale et la longueur de fissure c [59] :

$$K_I = F \sigma_g \sqrt{\pi(a+c)} \quad (\text{VI.5-3})$$

où σ_g est la contrainte globale, a la profondeur de l'entaille ou la longueur du demi axe de l'ellipse, c la longueur de la fissure. F est un coefficient géométrique qui dépend des rapports b/a et c/ρ s'il s'agit d'un trou ou d'une entaille elliptique ainsi que des rapports c/a et a/ρ et de l'angle de l'entaille ψ .

Si la fissure en fond d'entaille est courte, le calcul peut se faire à partir de la contrainte locale en fond d'entaille représentée par le facteur de concentration de contraintes et la contrainte nominale. Lukas et al [60] ont proposé une formule dans laquelle le facteur de concentration de contraintes est calculé sans tenir compte du cas d'une fissure courte :

$$K_I = 1,1215 K_t \sigma_N \sqrt{\pi c} / \sqrt{1 + 4,5 c/\rho} \quad (\text{VI.5-4})$$

ici, K_t est le facteur de concentration de contraintes, σ_N la contrainte nominale, c la longueur de la fissure et ρ le rayon en fond d'entaille.

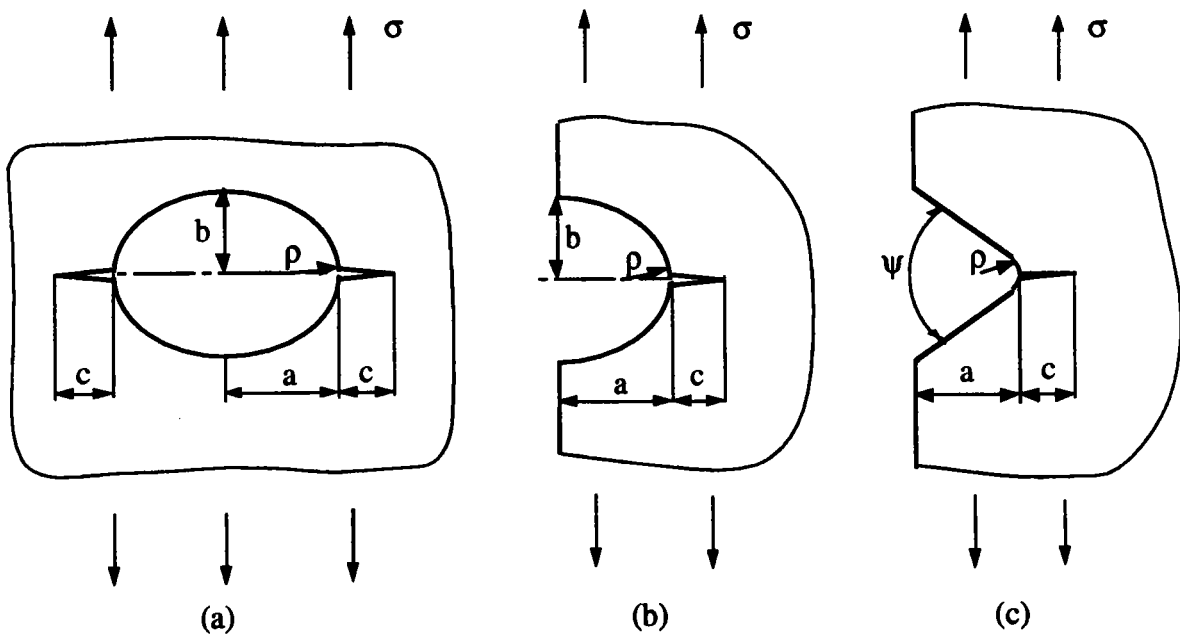


Figure [VI.8]: Schéma d'un trou elliptique possédant deux fissures (a), d'une entaille elliptique avec fissure (b) et d'une entaille en V avec une fissure (c) dans un plan ou un demi-plan infini

La limite d'utilisation de la formule (VI.5-4) pour un trou ou une entaille elliptique est la suivante :

$$c/b < 0,2 \text{ ou } c/\rho < 0,2 (a/b)$$

Nakai [35] a étudié le cas du plan infini, semi-infini et de largeur finie. Il a limité l'application à :

$$c < 0,5 \sqrt{a \rho}$$

Dans la formule (VI.5-4) K_t et σ_N sont déterminés sans tenir compte la fissure c . Par exemple, pour un trou elliptique dans un plan infini comme le montre dans la figure [VI.9], σ_N est égale à la contrainte globale et K_t s'exprime par la relation suivante :

$$K_t = 1 + \frac{2a}{b} \quad (\text{VI.5-5})$$

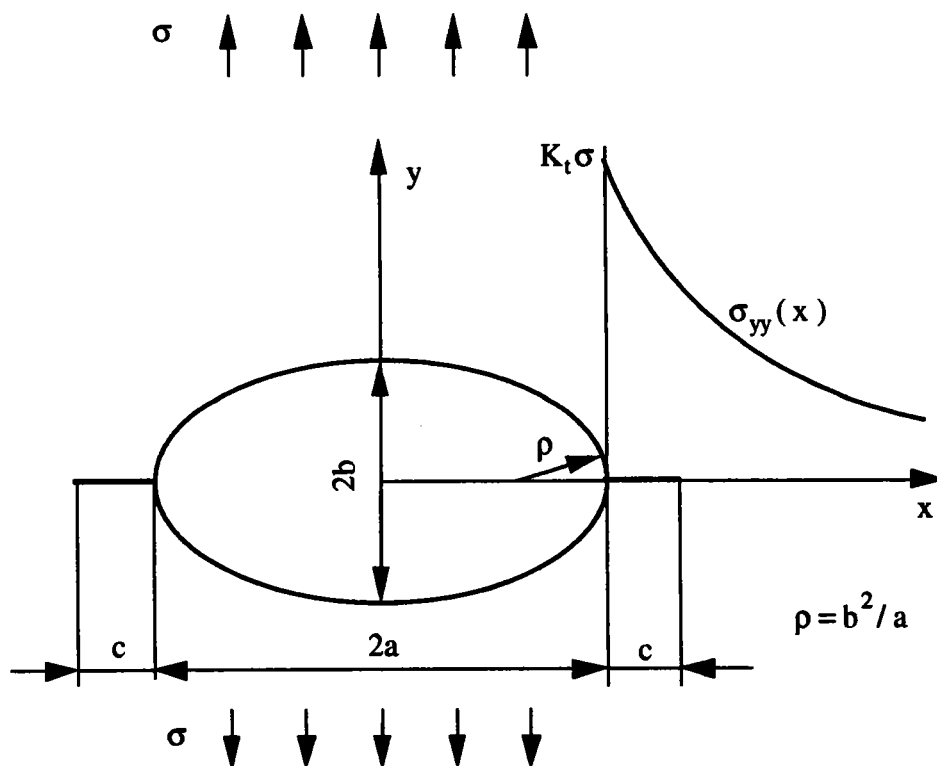


Figure [VI.9]: Définition du facteur de concentration de contraintes

La formule (VI.5-4) permet donc de calculer le facteur d'intensité de contraintes dans le cas une fissure courte au fond d'une entaille émoussée. Mais pour une entaille seule, $c = 0$, la formule conduit à $K_t = 0$. Evidemment, la validité de cette formule cesse dès que la longueur de la fissure $c \rightarrow 0$.

Pour adapter celle ci à notre cas, nous faisons l'hypothèse de remplacer la longueur de fissure par la distance caractéristique X_c . La formule (VI.5-4) devient :

$$K_{\rho}^* = 1,1215 K_t \sigma_N \sqrt{\pi X_c} / \sqrt{1 + 4,5 X_c / \rho} \quad (\text{VI.5-6})$$

où X_c présente la distance caractéristique.

Pour une entaille en V émoussée nous proposons que la limite d'application soit la suivante :

$$X_c / \rho < \frac{0,2}{\tan \frac{\psi}{2}}$$

Cette limite d'utilisation choisie est inférieure à celle proposée par Nakai.

Nous avons effectué dans la deuxième partie, le calcul de la distribution des contraintes sur une plaque avec entaille en V émoussée. Par conséquent, le facteur de concentration de contraintes peut être directement obtenu par ce calcul. Toutefois, la difficulté de détermination de la distance caractéristique X_c subsiste.

5.3 Détermination de la distance caractéristique X_c

Le développement de la méthode d'Hasebe et de la méthode de Lukas adapté au cas d'une entaille émoussée sans fissure, nécessite de substituer la distance caractéristique X_c à la longueur de la fissure courte.

Il est admis que cette distance caractéristique est pour des raisons physiques de l'ordre de grandeur de l'unité microstructurale (taille de grain, taille des plaquettes de bainite, diamètre des fibres etc...). En effet, en considérant le mécanisme de la rupture et la rupture par clivage, Knesl [29] a proposé que pour les métaux X_c soit choisi comme étant égale à 2 à 5 fois de taille de grain du matériau. Une valeur raisonnable de X_c est estimée entre 10μ et 200μ .

La figure [VI.10], montre l'évolution de la distance caractéristique en fonction du facteur d'intensité de contraintes pour différentes acuités. Les données sont relatives du cas d'une éprouvette CT soumise à la charge concentrée comme montré dans la figure [VI.1].

Dans la figure [VI.11] on remarque que pour un rayon d'entaille supérieur à 0,4 mm la distance caractéristique X_c peut être choisie entre 10 et 100 μm pour une définition correcte du facteur d'intensité de contraintes. On sait que la plupart des tailles de grains des alliages métalliques usuels sont situées dans cet intervalle.

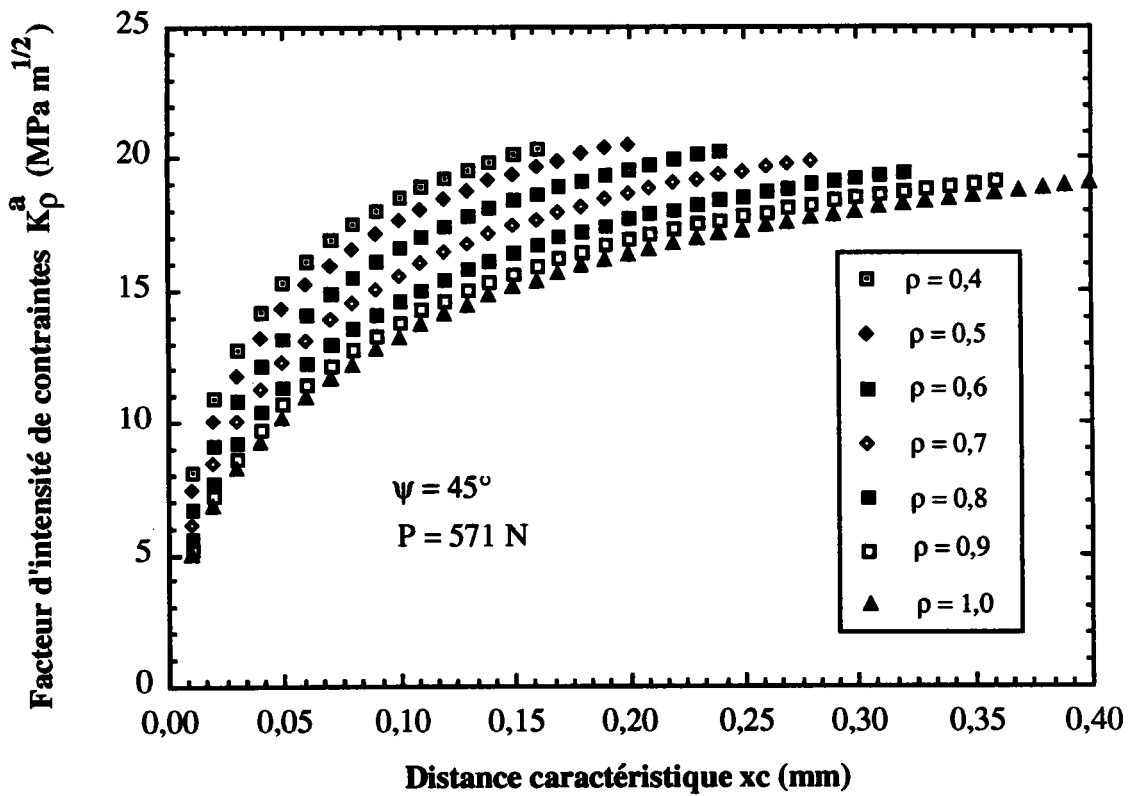


Figure [VI.10]: Variation du facteur d'intensité de contraintes en fonction de la distance caractéristique X_c d'après la formule (VI.5-4)

VI.6 RÉSUMÉ DES RÉSULTATS

En conclusion, nous proposons d'écrire les définitions suivantes pour le facteur d'intensité de contraintes relatifs aux entaille en V :

- (a) pour une entaille aiguë, $\psi > 0$ et $\rho = 0$,

$$K_I^* (\psi) = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi} \sigma_{yy} r^{\alpha(\psi)} \quad (\text{VI.1-3})$$

- (b) Pour une entaille émousée avec un petit rayon, $\psi > 0$ et $\rho \rightarrow 0$,

$$K_\rho^* (\psi) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sigma_{\max} \rho^{\alpha(\psi)} \quad (\text{VI.1-4})$$

- (c) Pour une entaille émousée avec un petit rayon, $\psi > 0$ et $\rho < \rho^*$,

$$K_\rho^* (X_c, \psi) = A C_\theta \sigma_{yy}^{\max} \rho^\alpha X_c^{-\alpha} \sqrt{\pi X_c} / \sqrt{2} \quad (\text{VI.5-2})$$

- (d) Pour une entaille émousée avec un rayon important, $\psi > 0$ et $\rho > \rho^*$,

$$K_\rho^* = 1,1215 K_t \sigma_N \sqrt{\pi X_c} / \sqrt{1 + 4,5 X_c / \rho} \quad (\text{VI.5-6})$$

Dans les cas (c) et (d), ρ^* peut être défini pour une entaille en V par l'expression suivante :

$$\rho^* = 5 (X_c \tan (\psi/2))$$

Il faut remarquer que dans les formules (VI.1-3) et (VI.1-4), l'unité du facteur d'intensité de contraintes d'entaille est de (MPa·m^α) ; mais dans les formules (VI.5-2) et (VI.6) l'unité est de (MPa·√m).

VII TÉNACITÉ DES MATÉRIAUX FRAGILES

Le concept du facteur d'intensité de contraintes trouve son application naturelle dans la détermination de la ténacité des matériaux fragiles tels que les céramiques, verres ou carbures. En effet pour ces matériaux, il est difficile de mesurer la ténacité à partir d'éprouvettes préfiissurées, la réalisation de la préfiissure par fatigue ou par préfiissuration statique conduisant fréquemment à la rupture inopinée de l'échantillon.

Pour ces raisons, on a généralement recours à des éprouvettes entaillées pour la détermination de la ténacité.

VII.1 RAPPEL DES MÉTHODES DE CALCUL EMPLOYÉES

Le calcul de celle-ci se fait :

- soit à partir de la relation de la mécanique linéaire de la rupture en considérant l'entaille comme une fissure :

$$K_{IC} = \frac{P_c}{B W^{1/2}} F_P \left(\frac{a}{W} \right) \quad (\text{VII.1-1})$$

où F_P est une fonction de la géométrie de la fissure, P_c la charge critique, B l'épaisseur de l'éprouvette, a la longueur de la fissure et W la largeur de l'éprouvette.

- soit à partir de la relation de Creager [10] qui est une relation de la mécanique linéaire de la rupture corrigée pour tenir compte de l'effet d'entaille :

$$\frac{K_{IC}}{R_e} = 14,45 \left[\exp \left(\frac{\sigma_{c}^*}{R_e} - 1 \right) - 1 \right]^{1/2} \rho_c^{1/2} \quad (\text{VII.1-2})$$

où σ_{c}^* est la contrainte critique de clivage. ρ_c est l'acuité critique en dessous de laquelle la ténacité K_{IC} est indépendante de l'acuité d'entaille, R_e est la limite d'élasticité du matériau.

La détermination de la ténacité par ces méthodes pour une éprouvette entaillée conduit à une valeur de la ténacité non intrinsèque du matériau. Celle-ci, pour une acuité supérieure à une valeur critique croît linéairement avec la racine carré de l'acuité comme l'indique la relation de Tetelman et autres [47].

Dans le chapitre VI, nous avons discuté la définition du facteur d'intensité de contraintes d'entaille, donné quelques expressions et estimé les limites d'application. Nous montrerons dans ce qui suit à l'aide d'exemple que leurs valeurs critique peut être utilisées pour l'évaluation de la ténacité et conduit à l'obtention d'un paramètre intrinsèque du matériau.

VII.2 ESSAIS DE RUPTURE SUR UN ALLIAGE DE MOLYBDENE

Les essais de rupture ont été réalisées dans notre laboratoire sur un alliage de molybdène appelé TZM [61]. Les éprouvettes choisies sont du type WLCT (Wedge Loading CT). Le but de ces essais était précisément l'obtention de la ténacité du matériau.

Les propriétés mécaniques de ce matériau sont reportées dans le tableau suivant.

Tableau VII.1 : Propriétés mécaniques de TZM

Limite d'élasticité Re	Coefficient de poisson ν	Module d'Young E	Densité ρ	Taille de grain moyenne
830 (MPa)	0.32	320000 (MPa)	10.2 (g/cm ³)	15 (μm)

En général la ténacité du matériau peut être obtenue à partir d'une éprouvette préfiaturée soumise à une charge critique. La préfiaturation par fatigue n'est pas possible en raison de la grande fragilité du matériau. Les essais ont été réalisés sur 4 types d'éprouvettes WLCT différentes par l'acuité d'entaille qui a varié entre 0,5 et 2,0 mm. Les caractéristiques géométriques de ces éprouvettes sont reportées dans le tableau 4.

Tableau VII.2 : Caractéristique géométriques de éprouvettes

N°	Longueur W (mm)	Hauteur h(mm)	Épaisseur B(mm)	Acuité ρ (mm)	Profondeur d'entaille a(mm)	Angle de l'entaille ψ°
WLCT 1	20,0	20,0	20,0	0,5	7,25	45°
WLCT 2	20,0	20,0	20,0	1,0	7,9	45°
WLCT 3	20,0	20,0	20,0	1,5	8,6	45°
WLCT 4	20,0	20,0	20,0	2,0	9,3	45°

La forme de l'éprouvette et la méthode de chargement sont indiqués dans la figure [VII.1]. La charge d'ouverture de l'éprouvette en mode I, P, est déduite de la charge F en tenant compte de l'angle de frottement et de l'angle de l'entaille de l'éprouvette. La formule de passage s'exprime par :

$$P = \frac{F}{2 \tan(\psi/2 + \beta)} \quad (\text{VII.2-1})$$

ici, F est la force appliquée sur le coin, P la composante d'ouverture de l'éprouvette en mode I, ψ l'angle de l'entaille de l'éprouvette. β est l'angle de frottement qui s'écrit :

$$\beta = \tan^{-1} \mu \quad (\text{VII.2-2})$$

où μ est le coefficient de frottement.

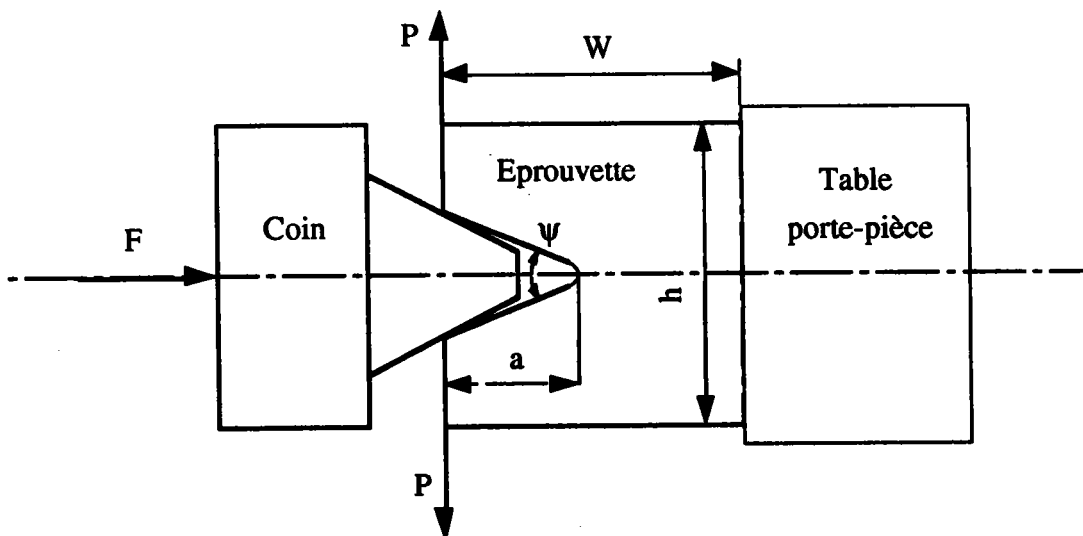


Figure [VII.1]: Forme de l'éprouvette et mode de chargement

L'alliage TZM présente une moindre tendance à la fragilisation par rapport au molybdène pur. Il reste néanmoins un matériau fragile, ce qui explique la rupture brutale des éprouvettes au cours des essais que nous avons réalisées.

La charge d'ouverture critique en mode I, P_c a été reportée en fonction de l'acuité d'entaille dans la figure [VII.2]. On peut constater que l'accroissement de l'acuité d'entaille a pour effet d'augmenter la charge de rupture P_c .

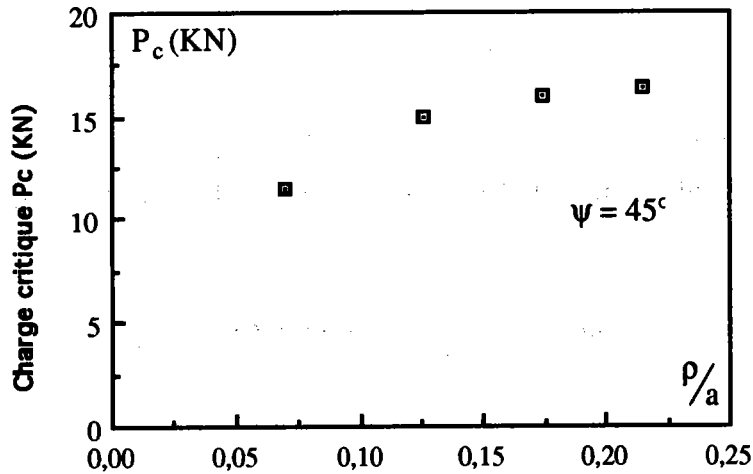


Figure [VII.2]: Valeurs de la Charge critique P_c en fonction de l'acuité d'entaille ρ/a

La connaissance de la charge de rupture P_c et la géométrie de l'éprouvette donnent la possibilité de calculer la distribution de contraintes en fond d'entaille par la méthode de transformation conforme que nous avons présentée précédemment. Les valeurs calculées de la contrainte maximale, le facteur de concentration de contraintes et la contrainte nominale dans la condition critique sont indiqués dans le tableau VII.3.

Tableau VII.3 : Valeurs calculées de la contraintes maximale critiques et du facteur de concentration de contraintes

N°	ρ (mm)	ρ/a	P_c (KN)	$(\sigma_{yy})_{max}$ (MPa)	σ_{Nc} (MPa)	K_t
WLCT1	0,5	0,069	11,42	1223	332	3,68
WLCT2	1,0	0,126	15,02	1106	491	2,25
WLCT3	1,5	0,174	16,04	1006	566	1,78
WLCT4	2,0	0,215	16,40	950	706	1,34

La figure [VII.3] montre qu'il existe une relation pratiquement linéaire entre l'acuité d'entaille relative ρ/a et la contrainte nominale critique de rupture.

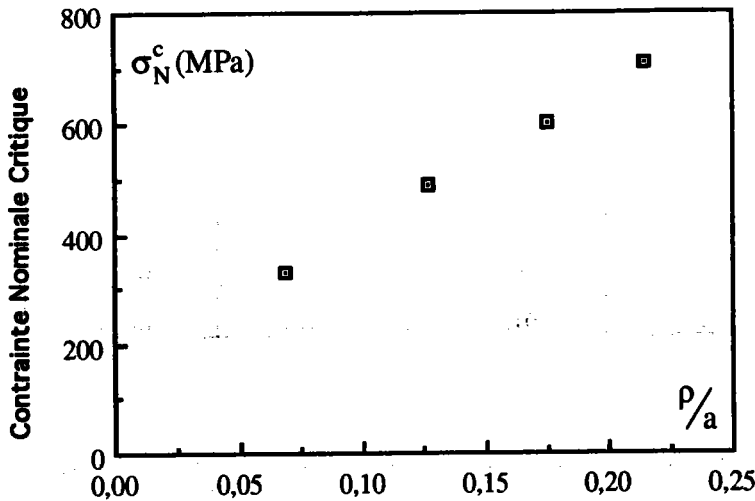


Figure [VII.3] : Evolution de la contrainte nominale critique $\sigma_{c,N}$ en fonction de l'acuité d'entaille relative ρ/a

VII.3 ÉVALUATION DE LA TÉNACITÉ DU MATÉRIAU

En raison de la grande fragilisation du matériau TZM, la ténacité peut être évaluée par le facteur d'intensité de contraintes critique qui est calculé à partir de la mécanique linéaire de la rupture.

Parmi les méthodes de calcul que nous avons présentées précédemment, quatre ont été choisies pour évaluer la ténacité de ce matériau, ce sont :

- (a) La méthode de calcul du facteur d'intensité de contraintes critique en considérant l'entaille comme une fissure, représentée par la formule (VII.1-1) :

$$K_{IC} = \frac{P_c}{B W^{1/2}} F_P \left(\frac{a}{W} \right) \quad (\text{VII.1-1})$$

- (b) La méthode de Creager améliorée représentée par la formule (VI.1-4) :

$$K_{\rho}^* (\psi) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sigma_{\max} \rho^{\alpha(\psi)} \quad (\text{VI.1-4})$$

(c) La méthode par Hasebe exprimée par la formule (VI.5-2) :

$$K_{\rho}^* (X_c, \psi) = A C_{\theta} \sigma_{yy}^{\max} \rho^{\alpha} X_c^{-\alpha} \sqrt{\pi X_c / \sqrt{2}} \quad (\text{VI.5-2})$$

(d) La méthode développée par Lukas exprimée par la formule (VI.5-2) :

$$K_{\rho}^* = 1,1215 K_t \sigma_N \sqrt{\pi X_c / \sqrt{1 + 4,5 X_c / \rho}} \quad (\text{VI.5-6})$$

Conclusion

Les résultats calculés par la méthode (a) sont représentés dans le tableau VII.4. Le calcul par cette méthode donne des valeurs éloignées de la réalité car on considère une entaille émoussée avec rayon important comme une fissure. L'accroissement rapide de la ténacité K_{IC} en fonction du rayon de l'entaille ne représente donc pas intrinsèquement l'évolution de la ténacité du matériau.

Tableau VII.4 : Facteur d'intensité de contraintes critique calculé par la méthode (a)

N°	ρ (mm)	K_{IC} méthode (a) (MPa·m ^{1/2})
WLCT1	0,5	29,54
WLCT2	1,0	45,52
WLCT3	1,5	57,03
WLCT4	2,0	67,87

Les résultats calculés par les méthodes (b), (c) et (d) sont présentés dans le tableau VII.5.

A fin de comparer les résultats, deux valeurs de la distance caractéristique X_c ont été considérées, $X_c = 0,060$ mm et $0,075$ mm, et elles correspondent respectivement à 4 et 5 fois la taille de grain du matériau.

Tableau VII.5 : Facteur d'intensité de contraintes critique calculé par les méthodes (b), (c) et (d)

N°	ρ (mm)	K_{IC} méthode (b) (MPa·m ^α)	K_{IC} méthode (c) (MPa·m ^{1/2}) X_c 0,06 mm	K_{IC} méthode (c) (MPa·m ^{1/2}) X_c 0,075 mm	K_{IC} méthode (d) (MPa·m ^{1/2}) X_c 0,06 mm	K_{IC} méthode (d) (MPa·m ^{1/2}) X_c 0,075 mm
WLCT1	0,5	24,04	18,92	18,96	15,17	16,27
WLCT2	1,0	31,04	24,00	24,05	15,11	16,47
WLCT3	1,5	33,40	26,75	26,81	14,26	15,64
WLCT4	2,0	36,50	29,10	29,16	13,73	15,12

La figure [VII.4] montre l'évolution du facteur d'intensité de contraintes critique en fonction de l'acuité de l'entaille calculé par la méthode de Creager (méthode (b)). En général, l'utilisation de cette méthode est limitée à un faible rayon de l'entaille. Si le rayon d'entaille devient très petit, K_{IC} est alors représentatif de la ténacité. Malheureusement, nous n'avons pas obtenu en raison des difficultés d'usinage un rayon moindre que 0,5 mm. Dans cette figure, on remarque encore un accroissement de la ténacité avec le rayon à fond d'entaille.

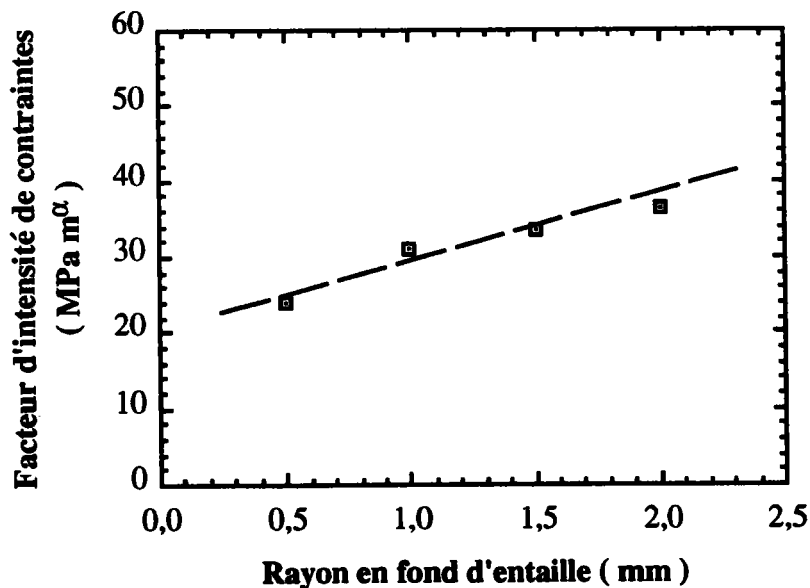


Figure [VII.4]: Valeur de la ténacité K_{IC} calculé par la méthode (b) en fonction du rayon en fond d'entaille

Les méthodes (c) et (d), nécessitent le choix d'une grandeur caractéristique X_c . Dans notre cas, nous proposons une valeur de 4 ou 5 fois de la taille de grain du matériau. L'évolution du facteur d'intensité de contraintes critique calculé par ces deux méthodes en fonction de l'acuité de l'entaille est montré dans la figure [VII.5].

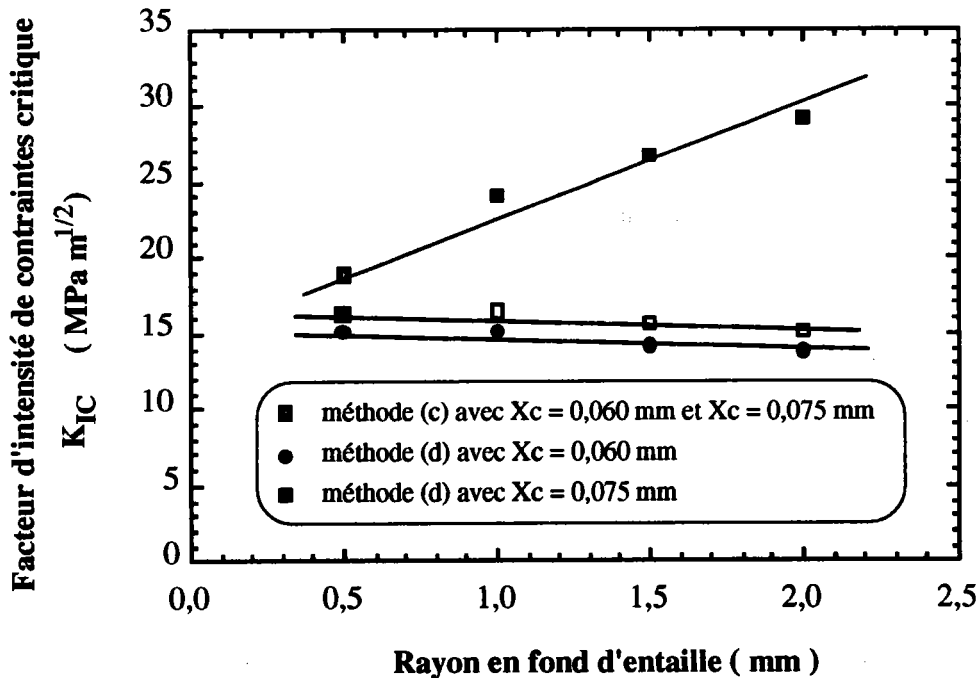


Figure [VII.5] : Evolution du facteur d'intensité de contraintes critique calculé par les méthodes (c) et (d) en fonction de l'acuité de l'entaille

La ténacité K_{IC} calculée par la méthode (c) présente une évolution similaire à celle calculée par la méthode (b). Elle décroît en fonction de l'acuité de l'entaille. En raison du fait que la validité de la formule est limitée normalement à un faible rayon de l'entaille, les résultats présentes ne peuvent qu'évoquer une tendance .

On remarque que lorsque la valeur de la distance caractéristique X_c passe de la valeur de 0,06 à la valeur 0,075, le facteur d'intensité de contraintes calculé par la méthode (c) devient pratiquement constant. Ce-ci donne une grande souplesse de choix à la valeur de X_c . Un autre avantage de cette méthode est ce que le facteur d'intensité de contraintes d'entaille calculé utilise la même unité, à savoir le $MPa \cdot m^{1/2}$, que dans le cas d'une fissure. Il y a donc la facilité d'utilisation par rapport à une ténacité exprimée en $MPa \cdot m^\alpha$.

Le facteur d'intensité de contraintes critique calculé par la méthode (d) est pratiquement indépendant du rayon en fond d'entaille. Il représente donc un critère de ténacité du matériau intéressant. Mais la valeur de cette ténacité varie sensiblement avec la distance caractéristique X_c . L'utilisation de cette méthode nécessite une étude sur le mécanisme de la rupture à l'échelle de la microstructure des matériaux. En outre les dimension de la ténacité s'exprime en $\text{MPa m}^{1/2}$ comme dans la méthode (c).

A partir des résultats obtenus par les méthodes (b), (c) et (d), nous pouvons évaluer que la ténacité de l'alliage de TZM se situe dans l'intervalle environ $[15 \text{ et } 20 \text{ MPa}\cdot\text{m}^{1/2}]$.

CONCLUSION

La distribution de contraintes au voisinage d'une entaille émoussée en V peut être approximativement formulée par les caractéristiques comme la distance significative X_m , l'exposant de singularité α , l'acuité d'entaille ρ et le facteur de concentration de contraintes. Le facteur d'intensité de contraintes pour une entaille aiguë peut être déduit par le champ de contraintes du fond d'une entaille avec l'acuité.

La proposition du facteur d'intensité de contraintes d'entaille pour une entaille émoussée a été faite. L'utilisation de ce facteur comme un critère de ténacité des matériaux fragiles donne certaine validité.

CONCLUSIONS GÉNÉRALES

La distribution de contraintes dans une plaque entaillée peut être calculée par la méthode de transformation conforme couplée avec les équations de l'élasticité de Kolsov-Muskhelishvili. Dans cette étude, nous avons amélioré la méthode de Schwartz-Cristoffel pour adapter la transformation de l'image dans le cas d'une entaille possédant différentes acuités.

Lorsque l'on augmente de façon importante le rayon en fond d'entaille, l'influence de l'angle de l'entaille, de la profondeur de l'entaille et de la largeur de la plaque devient importante. L'interaction de ces paramètres conduit à une expression mathématique très complexe pour la transformation conforme. Nous avons résolu cette difficulté par une technique d'itération effectuée par un programme informatique. La précision de la transformation est satisfaisante avec une très petite distorsion de l'image même pour un rayon relativement important en fond d'entaille.

Cette méthode améliorée a été utilisée pour étudier dans le cas d'une éprouvette rectangulaire avec différents angles et acuités d'entaille en V le champ de contraintes. La distribution de contraintes au voisinage du fond d'entaille peut être obtenue en tout point. La méthode a été aussi développée pour le cas de la simulation d'un joint soudé, d'une éprouvette de flexion trois points ou d'une éprouvette avec une entaille elliptique ou parabolique selon le cas.

La distribution de contraintes en fond d'entaille sur la plaque avec une entaille en V soumise une charge symétrique montre que la contrainte normale σ_{yy} varie avec l'angle et l'acuité de l'entaille. Les coefficients caractéristiques comme la distance significative X_m , le facteur de concentration de contraintes K_t et l'exposant α ont été introduits pour analyser approximativement les contraintes au voisinage du fond d'entaille. Le facteur de concentration de contraintes K_t et la distance significative peut s'exprimer en fonction de l'acuité de l'entaille.

Une équation a été établie pour donner la relation entre la contrainte maximale en fond d'entaille avec différentes acuités et le facteur d'intensité de contraintes pour une entaille aiguë.

Dans le cas d'une entaille émoussée, l'expression caractérisant les contraintes en fond d'entaille devient plus complexe que dans le cas d'une entaille aiguë. Nous avons donné une définition du facteur d'intensité de contraintes pour l'entaille émoussée. La méthode de Hasebe et la méthode de Lukas, qui sont utilisées pour traiter le cas d'une entaille avec une fissure courte, ont été modifiées pour les adapter à notre cas. Une distance caractéristique a été proposée correspondant au mécanisme microstructural de la rupture. Cette distance peut être choisie de l'ordre de grandeur de la taille de grain des matériaux.

Nous avons utilisé cette définition du facteur d'intensité de contraintes d'entaille pour la détermination de la ténacité des matériaux fragiles. En raison des difficultés d'usinage, sur des éprouvettes de l'alliage de molybdène, des essais de rupture ont été effectués pour des éprouvettes WLCT avec une entaille possédant une certaine acuité. Il en ressort que le facteur d'intensité de contraintes d'entaille critique calculé lorsque la charge appliquée est égale à la charge critique peut être considéré comme un paramètre décrivant la ténacité d'un matériau fragile.

La définition du facteur d'intensité de contraintes d'entaille qui s'adapte au cas d'une entaille émoussée est un sujet difficile. Dans ce mémoire, l'étude présentée doit être considérée comme un début. Une continuité et une ouverture vers d'autres problèmes de fatigue et de rupture est envisagée.

ANNEXE : BASE DES THEOREMES ET FONCTIONS DE VARIABLES COMPLEXES

A.1 METHODE DE SCHWARTZ-CRISTOFFEL

A.1.1 Transformation d'un polygone en demi-plan supérieure (première transformation)

Considérons un polygone de n côtés dans le plan des z (z est un plan complexe), dont les angles extérieurs sont $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ (voir Figure [A.1]).

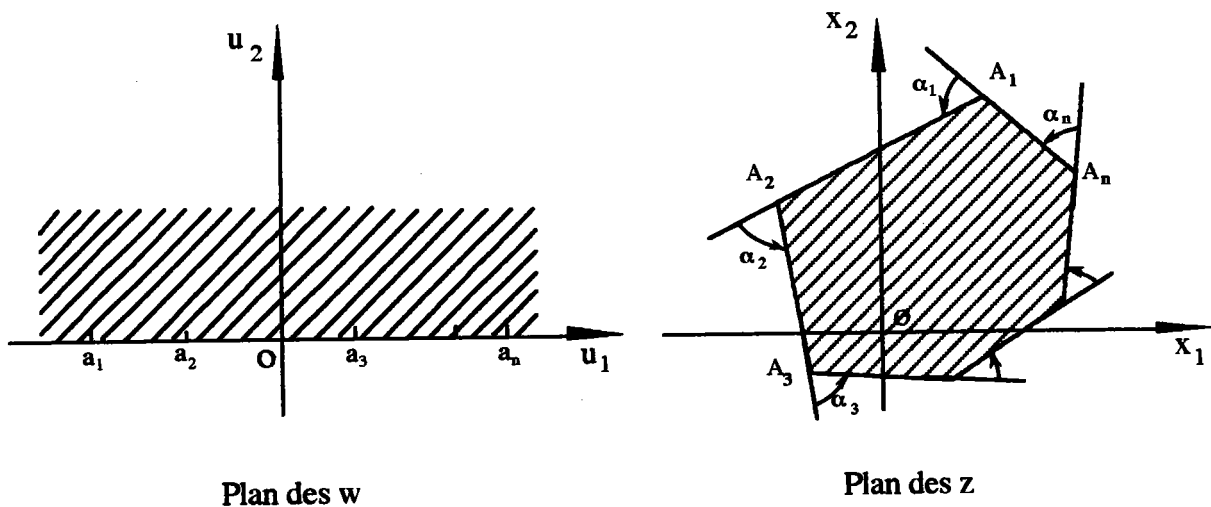


Figure.[A.1]: Transformation d'un demi-plan en un polygone.

Soient A_s ($s = 1$ à n) les sommets de ce polygone qui sont les images des points a_s ($s = 1$ à n) sur l'axe u_1 du plan des w .

L'opérateur qui transforme le demi-plan supérieur des w à l'intérieur du polygone du plan des z est :

$$\frac{dz}{dw} = m'(w) = C_1 \prod_{s=1}^n (w - a_s)^{-\frac{\alpha_s}{\pi}} \quad (\text{A.1-1})$$

La forme intégrale est :

$$z = m(w) = C_1 \int_{w_0}^w \prod_{s=1}^n (w - a_s)^{-\frac{\alpha_s}{\pi}} dw + C_2 \quad (\text{A.1-2})$$

où C_1 et C_2 sont des constantes complexes.

Si un des points a_i prend une valeur infinie, le facteur contenant ce terme a_i va disparaître dans les équations (A.1-1) et (A.1-2).

La fonction de représentation (A.1-2) contient $(2n+2)$ paramètres : $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n ; a_1, a_2 \dots ; a_n ; C_1$ et C_2 dans cette fonction w_0 peut être pris égal à zéro, ce qui revient à changer la constante C_2 .

Nous remarquons que les coordonnées z_k des sommets sont données par les équations :

$$z_k = C_1 \int_0^{a_k} \prod_{s=1}^n (w - a_s)^{-\frac{\alpha_s}{\pi}} dw + C_2 \quad (\text{A.1-3})$$

et que la longueur $L_{A_k A_{k+1}} = |z_{k+1} - z_k|$ d'un côté $A_k A_{k+1}$ est donnée par :

$$L_{A_k A_{k+1}} = |C_1| \int_{a_k}^{a_{k+1}} (w - a_1)^{-\frac{\alpha_1}{\pi}} \dots (w - a_k)^{-\frac{\alpha_k}{\pi}} (a_{k+1} - w)^{-\frac{\alpha_{k+1}}{\pi}} \dots (a_n - w)^{-\frac{\alpha_n}{\pi}} dw \quad (\text{A.1-4})$$

A partir des équations (A.1-3) et (A.1-4), il est possible de préciser le rôle de chaque paramètre.

- Les α_n sont par définition les angles extérieurs du polygone.

- Le paramètre C_2 intervient dans chaque expression (A.1-3) de z_k . Un changement de cette quantité introduit un changement de la même quantité sur tous les z_k ce qui correspond donc à une transformation globale de l'ensemble du polygone.

- Le paramètre C_1 intervient dans chacune des expressions (A.1-3) de z_k et (A.1-4) de la longueur des côtés. Un changement de cette quantité conduit à un polygone semblable qui a subi une rotation.

- Les paramètres a_j sont les points sur le plan des w , correspondant aux sommets du polygone. Le changement de paramètre a_j fait intervenir un changement relatif de longueur de chacun des côtés du polygone.

A.1.2. Choix des paramètres

Quand un polygone A est donné, on recherche la fonction effectuant la transformation du demi-plan en ce polygone A .

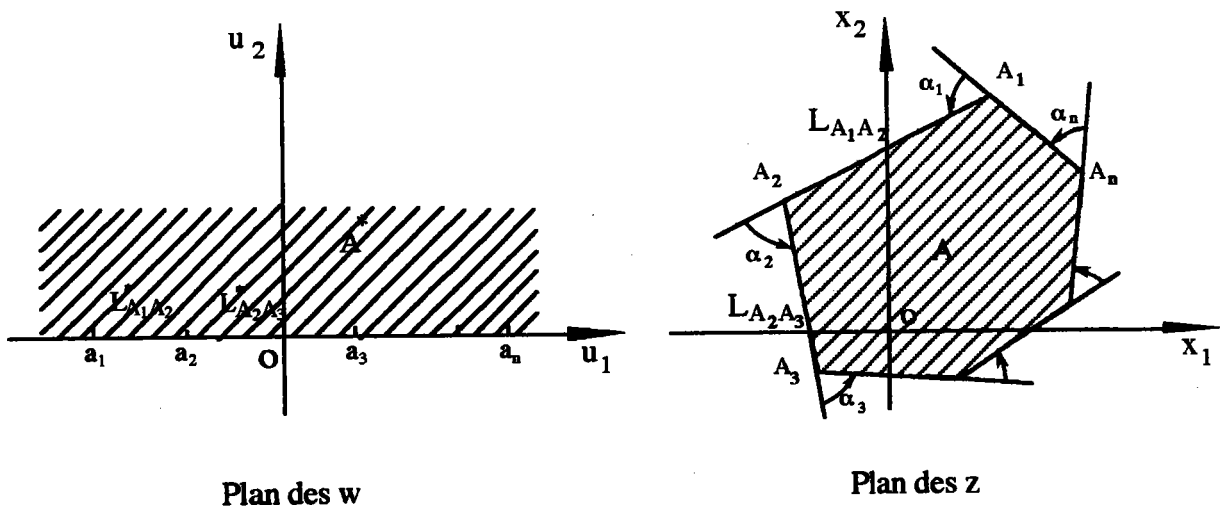


Figure [A.2]: Transformation d'un polygone en demi-plan supérieur.

L'établissement de la fonction de représentation nécessaire pour la détermination des $(n+2)$ paramètres : $a_1, a_2 \dots a_n$; C_1 et C_2 (les $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$, angles extérieurs du polygone sont connus).

Posons :

$$z^* = \int_0^w \prod_{s=1}^n (w - a_s)^{-\frac{\alpha_s}{\pi}} dw \quad (\text{A.1-5})$$

Cette fonction représente le demi-plan supérieur des w à l'intérieur d'un polygone A^* semblable au polygone A correspondant à la fonction z telle que :

$$z = C_1 z^* + C_2 \quad (\text{A.1-6})$$

Les constantes C_1 et C_2 peuvent être déterminées par la comparaison de A et A^* .

Le polygone A^* semblable au polygone A est défini par les angles α_n et par les $(n-3)$ rapports de chaque côté sur le premier à l'exclusion des deux derniers.

Posons :

$$\frac{L_{A_2 A_3}}{L_{A_1 A_2}} = \lambda_2, \dots, \frac{L_{A_{n-2} A_{n-3}}}{L_{A_1 A_2}} = \lambda_{n-2} \quad (\text{A.1-7})$$

Nous avons donc $n-3$ équations pour les n paramètres $a_1, a_2 \dots a_n$. Trois restent arbitraires. Choisissons $a_1 = p_1$; $a_2 = p_2$; ... $a_n = p_n$ et calculons par (A.1-4) et (A.1-5) la longueur des côtés.

$$L_{A_1 A_2}^* = I_1 = \int_{p_1}^{p_2} (w - p_1)^{-\frac{\alpha_1}{\pi}} (p_2 - w)^{-\frac{\alpha_2}{\pi}} (a_3 - w)^{-\frac{\alpha_3}{\pi}} \dots (p_3 - w)^{-\frac{\alpha_n}{\pi}} dw$$

$$L_{A_2 A_3}^* = I_2 = \int_{p_2}^{a_3} (w - p_1)^{-\frac{\alpha_1}{\pi}} (w - p_2)^{-\frac{\alpha_2}{\pi}} (a_3 - w)^{-\frac{\alpha_3}{\pi}} \dots (p_3 - w)^{-\frac{\alpha_n}{\pi}} dw$$

$$\dots \dots \dots \quad (A.1-8)$$

$$L_{A_{n-2} A_{n-1}}^* = I_{n-2} = \int_{a_{n-2}}^{a_{n-1}} (w - p_1)^{-\frac{\alpha_1}{\pi}} \dots (w - a_{n-2})^{-\frac{\alpha_{n-2}}{\pi}} (a_{n-1} - w)^{-\frac{\alpha_{n-1}}{\pi}} (p_3 - w)^{-\frac{\alpha_n}{\pi}} dw$$

Les équations (A.1-8) donne un système de $n-3$ équations à $n-3$ inconnues a_3, a_4, \dots, a_{n-1} .

Introduisons les relations (A. 1-7) dans le système (A.1-8), nous obtenons :

$$\begin{aligned} I_2(a_3, a_4 \dots a_{n-1}) &= \lambda_2 I_1(a_3, a_4 \dots a_{n-1}) \\ I_3(a_3, a_4 \dots a_{n-1}) &= \lambda_3 I_1(a_3, a_4 \dots a_{n-1}) \\ &\dots \dots \dots \\ I_{n-2}(a_3, a_4 \dots a_{n-1}) &= \lambda_{n-2} I_1(a_3, a_4 \dots a_{n-1}) \end{aligned} \quad (A.1-9)$$

Le système (A.1-9) est non linéaire. Les solutions peuvent être déduites par la méthode de Newton-Fourier.

Les intégrales I_i sont impropres. Pour leur calcul, la méthode de Kantorowich et Krylov sera utilisée.

A.1.3. Méthode de Newton -Fourier

Pour résoudre le système (A.1-9) nous supposons que $a_3^*, a_4^* \dots a_{n-1}^*$, sont les solutions exactes du système. Nous prenons des valeurs initiales $a_3^{(0)}, a_4^{(0)} \dots a_{n-1}^{(0)}$ qui sont peu différentes des valeurs $a_3^*, a_4^* \dots a_{n-1}^*$.

Alors chaque équation du système peut être décrite en série de Taylor. On utilise une méthode itérative de résolution .

Le système d'équations est exprimé par :

$$\begin{aligned}
I_2^{(0)} + h_3^{(1)} \frac{\partial I_2^{(0)}}{\partial a_3} + h_4^{(1)} \frac{\partial I_2^{(0)}}{\partial a_4} + \dots + h_{n-1}^{(1)} \frac{\partial I_2^{(0)}}{\partial a_{n-1}} &= \lambda_2 [I_1^{(0)} + h_3^{(1)} \frac{\partial I_1^{(0)}}{\partial a_3} + h_4^{(1)} \frac{\partial I_1^{(0)}}{\partial a_4} + \dots + h_{n-1}^{(1)} \frac{\partial I_1^{(0)}}{\partial a_{n-1}}] \\
I_3^{(0)} + h_3^{(1)} \frac{\partial I_3^{(0)}}{\partial a_3} + h_4^{(1)} \frac{\partial I_3^{(0)}}{\partial a_4} + \dots + h_{n-1}^{(1)} \frac{\partial I_3^{(0)}}{\partial a_{n-1}} &= \lambda_3 [I_1^{(0)} + h_3^{(1)} \frac{\partial I_1^{(0)}}{\partial a_3} + h_4^{(1)} \frac{\partial I_1^{(0)}}{\partial a_4} + \dots + h_{n-1}^{(1)} \frac{\partial I_1^{(0)}}{\partial a_{n-1}}] \\
\dots \dots & \\
I_{n-2}^{(0)} + h_3^{(1)} \frac{\partial I_{n-2}^{(0)}}{\partial a_3} + h_4^{(1)} \frac{\partial I_{n-2}^{(0)}}{\partial a_4} + \dots + h_{n-1}^{(1)} \frac{\partial I_{n-2}^{(0)}}{\partial a_{n-1}} &= \lambda_{n-2} [I_1^{(0)} + h_3^{(1)} \frac{\partial I_1^{(0)}}{\partial a_3} + h_4^{(1)} \frac{\partial I_1^{(0)}}{\partial a_4} + \dots + h_{n-1}^{(1)} \frac{\partial I_1^{(0)}}{\partial a_{n-1}}]
\end{aligned}
\tag{A.1-10}$$

Dans ce système (A.1-10), les inconnues sont les valeurs des différences, $a_4^* - a_i^{(0)} : h_4^{(1)} \dots h_{n-1}^{(1)}$.

Les coefficients de ces inconnues et les termes constants sont les valeurs de $I_1, I_2, I_3 \dots I_{n-1}$ ainsi que leurs dérivées premières par rapport à $a_3, a_4 \dots a_{n-1}$ pour $a_3 = a_3^{(0)}, a_4 = a_4^{(0)}, \dots a_{n-1} = a_{n-1}^{(0)}$.

En résolvant ce système, nous obtenons donc les valeurs $h_3^{(1)}, h_4^{(1)} \dots h_{n-1}^{(1)}$ et compte tenu des valeurs initiales choisies $a_3^{(0)}, a_4^{(0)} \dots a_{n-1}^{(0)}$ nous en déduisons en première approximation :

$$\begin{aligned}
a_3^{(1)} &= a_3^{(0)} + h_3^{(1)} \\
a_4^{(1)} &= a_4^{(0)} + h_4^{(1)} \\
\dots \dots & \\
a_{n-1}^{(1)} &= a_{n-1}^{(0)} + h_{n-1}^{(1)}
\end{aligned}
\tag{A.1-11}$$

Nous pouvons ensuite redévelopper le système de départ en séries de Taylor relatives aux différences : $a_3^* - a_3^{(1)}, a_4^* - a_4^{(1)}, \dots a_{n-1}^* - a_{n-1}^{(1)}$. En considérant la première puissance des différences nous obtenons un système analogue à (A.1-2) qui nous permet de trouver $h_3^{(2)}, h_4^{(2)} \dots h_{n-2}^{(2)}$ d'où :

$$\begin{aligned} a_3^{(2)} &= a_3^{(1)} + h_3^{(2)} \\ a_4^{(2)} &= a_4^{(1)} + h_4^{(2)} \\ &\dots \dots \end{aligned} \tag{A.1-11'}$$

$$a_{n-1}^{(2)} = a_{n-1}^{(1)} + h_{n-1}^{(2)}$$

ce qui constitue la deuxième approximation. Par ce processus, on peut atteindre a_3^* , a_4^* , ...
 a_{n-1}^* .

A.1.4. Méthode de Kantorovich et Krylor

Soit à déterminer l'intégrale de type I_i du système (A.1-8) :

$$I_i = \int_{a_k}^{a_{k+1}} (\zeta - p_1)^{-\frac{\alpha_1}{\pi}} (\zeta - p_2)^{-\frac{\alpha_2}{\pi}} \dots \dots \dots (\zeta - a_k)^{-\frac{\alpha_k}{\pi}} (a_{k+1} - \zeta)^{-\frac{\alpha_{k+1}}{\pi}} (p_3 - \zeta)^{-\frac{\alpha_n}{\pi}} d\zeta \tag{A.1-12}$$

Ces intégrales sont impropres : en effet chaque intégrant peut devenir infini pour les deux bornes d'intégration. Mais ces intégrales impropres existent. Ceci provient directement du théorème de Cauchy, car les nombres a_1, a_2, \dots, a_n sont toujours plus grands que zéro.

Cherchons une méthode de résolution de ces intégrales .

Désignons par $F(\zeta)$ l'intégrant de (A.1-12) :

$$F(\zeta) = (\zeta - p_1)^{-\frac{\alpha_1}{\pi}} (\zeta - p_2)^{-\frac{\alpha_2}{\pi}} \dots \dots \dots (\zeta - a_k)^{-\frac{\alpha_k}{\pi}} (a_{k+1} - \zeta)^{-\frac{\alpha_{k+1}}{\pi}} \dots \dots \dots (p_3 - \zeta)^{-\frac{\alpha_n}{\pi}} \tag{A.1-13}$$

Posons :

$$G(\zeta) = (\zeta - p_1)^{-\frac{\alpha_1}{\pi}} (\zeta - p_2)^{-\frac{\alpha_2}{\pi}} \dots \dots$$

$$(\zeta - a_{k-1})^{-\frac{\alpha_{k-1}}{\pi}} (a_{k+1} - \zeta)^{-\frac{\alpha_{k+1}}{\pi}} \dots \dots (p_3 - \zeta)^{-\frac{\alpha_n}{\pi}} \quad (\text{A.1-14})$$

C'est à dire $F(\zeta)$ au facteur près de la borne inférieure.

Faisons de même pour la borne supérieure, posons :

$$H(\zeta) = (\zeta - p_1)^{-\frac{\alpha_1}{\pi}} (\zeta - p_2)^{-\frac{\alpha_2}{\pi}} \dots \dots$$

$$(\zeta - a_k)^{-\frac{\alpha_k}{\pi}} (a_{k+2} - \zeta)^{-\frac{\alpha_{k+2}}{\pi}} \dots \dots (p_3 - \zeta)^{-\frac{\alpha_n}{\pi}} \quad (\text{A.1-15})$$

En introduisant ces fonction $G(\zeta)$ et $H(\zeta)$ l'intégrant devient :

$$F(\zeta) = (\zeta - a_k)^{-\frac{\alpha_k}{\pi}} [G(a_k) + G'(a_k)(\zeta - a_k)] + (a_{k+1} - \zeta)^{-\frac{\alpha_{k+1}}{\pi}} [H(a_{k+1}) - H'(a_{k+1})(a_{k+1} - \zeta)]$$

$$\{ F(\zeta) - (\zeta - a_k)^{-\frac{\alpha_k}{\pi}} [G(a_k) + G'(a_k)(\zeta - a_k)] - (a_{k+1} - \zeta)^{-\frac{\alpha_{k+1}}{\pi}} [H(a_{k+1}) - H'(a_{k+1})(a_{k+1} - \zeta)] \}$$

(A.1-16)

L'intégrant $F(\zeta)$ est donc séparé en une somme de deux intégrales E_1 et E_2 .

$$E_1 = \int_{a_k}^{a_{k+1}} \{ (\zeta - a_k)^{-\frac{\alpha_k}{\pi}} [G(a_k) + \Phi'(a_k)(\zeta - a_k)] + (a_{k+1} - \zeta)^{-\frac{\alpha_{k+1}}{\pi}} [H(a_{k+1}) - H'(a_{k+1})(a_{k+1} - \zeta)] \} d\zeta$$

$$E_2 = \int_{a_k}^{a_{k+1}} \{ F(\zeta) - (\zeta - a_k)^{-\frac{\alpha_k}{\pi}} [G(a_k) + G'(a_k)(\zeta - a_k)] - (a_{k+1} - \zeta)^{-\frac{\alpha_{k+1}}{\pi}} [H(a_{k+1}) - H'(a_{k+1})(a_{k+1} - \zeta)] \} d\zeta$$

$$I_i = E_1 + E_2$$

L'intégrale E_1 peut être calculée exactement.

L'intégrale E_2 est libre de toute singularité puisque l'intégrand est continu de même que ses dérivées. Nous pouvons donc calculer cette intégrale par l'approximation de Simpson.

A. 2. DEUXIEME TRANSFORMATION HOMOGRAPHIQUE

A. 2.1. Transformation de l'intérieur du cercle en demi-plan supérieur

Le problème consiste à déterminer la transformation homographique qui transforme le demi-plan supérieur des w ($u_2 \geq 0$) en l'intérieur du cercle unité $|\zeta| \leq 1$ (voir la figure [A.3]).

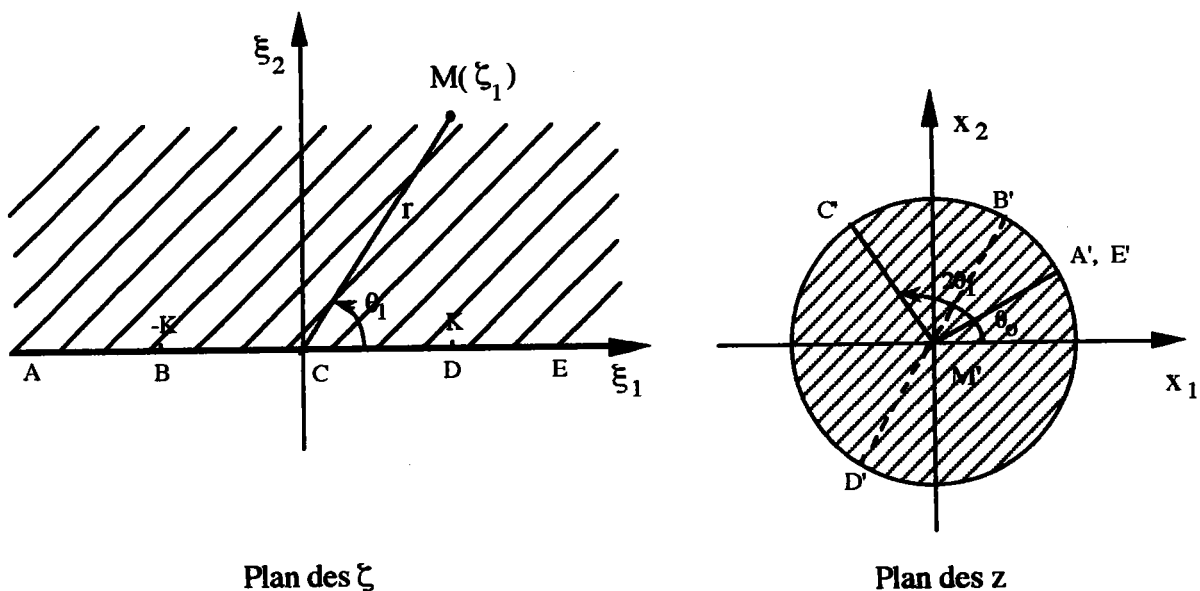


Figure [A.3]: Principe, la transformation d'un demi-plan supérieur en un cercle.

La transformation la plus générale est de la forme :

$$Z = m(\zeta) = e^{i\theta_0} \frac{\zeta - \zeta_1}{\zeta - \bar{\zeta}_1} \quad (\text{A.2-1})$$

où θ_0 est une constante réelle et ζ_1 une constante complexe dont on a le choix pour établir la correspondance entre le plan des ζ et celui des z .

Quand le point w décrit l'axe $u_2 = 0$ dans le plan des w , le point z décrit le cercle du plan des z .

Particulièrement, la transformation de l'intérieur du cercle unité du plan de ζ en demi-plan supérieur du plan des w . (Fig[A.4]) est le problème qu'il nous faut aborder.

La transformation choisie est de la forme :

$$w = i \frac{1 - \zeta}{1 + \zeta} \quad (\text{A.2-2})$$

Cette transformation fait correspondre au demi-plan supérieur des w l'intérieur du cercle unité dans le plan des ζ (Figure [A.4]).

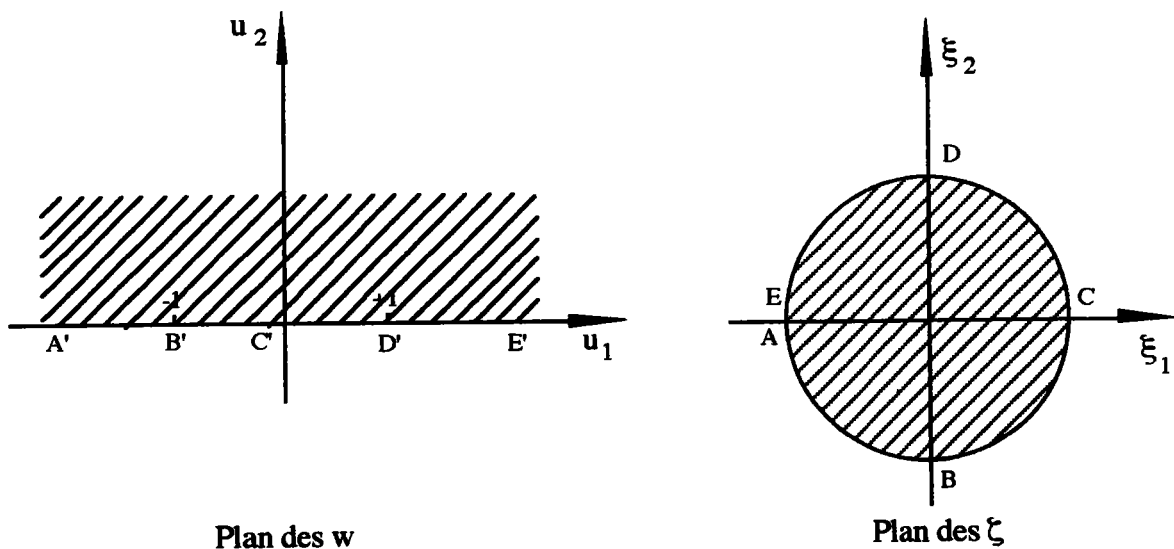


Figure [A.4] : Exemple de transformation d'un demi-plan supérieur en un cercle unitaire.

A. 2.2. Transformation d'un polygone en un cercle unité :

La transformation d'un polygone en un cercle unité peut être réalisée en reportant l'équation (A.2-2) dans (A.1-3).

Si nous appelons ζ_s les points du cercle unité du plan des ζ , ayant les sommets A_s du polygone pour images, nous obtenons après calcul :

$$z = m(\zeta) = C_1 \int_0^{\zeta} \prod_{s=1}^n \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_s}\right)^{-\frac{\alpha_s}{\pi}} dw + C_2 \quad (\text{A.2-3})$$

où :

$$\frac{dz}{d\zeta} = m'(\zeta) = C_1 \prod_{s=1}^n \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_s}\right)^{-\frac{\alpha_s}{\pi}} \quad (\text{A.2-4})$$

La transformation (A.2-3) fait correspondre l'intérieur du cercle unité en l'intérieur du polygone (Figure [A.5]).

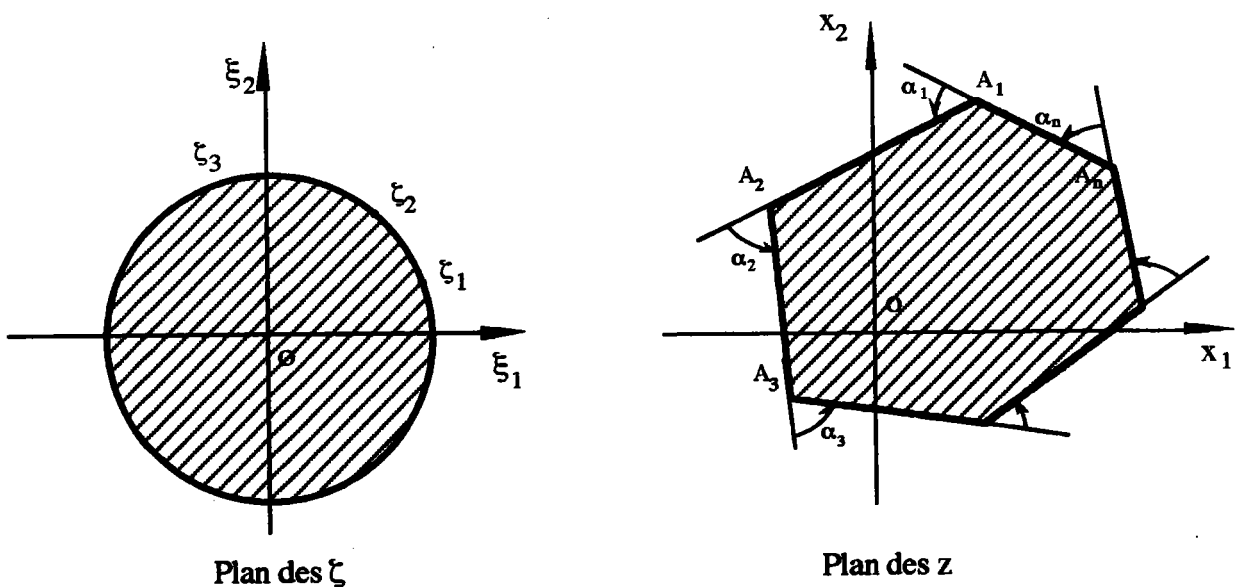


Fig [A.5] : Transformation d'un polygone en un cercle unitaire.

REFERENCES

- [1] M. L. Williams, " Stress singularities resulting from various boundary condition in angular corner of plate in extention " *J. Appl. Mech.*, 74, Dec., pp 526-528 (1952)
- [2] H. M. Westergaard, " Bearing pressure and cracks " *J. Appl. Mech.*, Trans ASME (2), A-49, A-52 (1939)
- [3] G. R. Irwin, " Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate " *J. Appl. Mech.*, 24, pp 361-364 (1957)
- [4] Y. J. Chao and S. Yang : " Singularities at the apex of a sharp V - notch in a linear strain hardening material " *International journal of Fracture*, 57, pp 47-60 (1992)
- [5] L. Xia and T. Wang " Singular behaviour near the tip of a sharp V-notch in a power law hardening materal " *International Journal of Fracture*, 59, pp 83-93 (1993)
- [6] J. P. Dempsey G. B. Sinclair, " On the singular behavior at the vertex of a bi-material wedge " *Journal of Elasticity*, 11, No. 3, pp 317-327 (1981)
- [7] C. Atkinson, J. M. Bastero and J. M. Martinier-Esnaola " Stress analysis in sharp angular notches using auxiliary fields " *Engineering Fracture Mechanics*, 31, No. 4, pp 637-648, (1988)
- [8] J. R. Rice " Mathematical analysis in the mechanics of fracture " , *Fracture Vol.2* Ed. . H. Liebowitz, New York, pp 192-308 (1968)
- [9] M. Creager " The elastic field near the tip of a blunt crack " *Master's Thesis* Lehigh University (1966)
- [10] M. Creager and P. C. Paris " Elastic field equations for blunt cracks with reference to stress corrosion cracking " *International Journal of Fracture* Vol. 3, pp 247-252 (1967)
- [11] H. Neuber " Kerbspannung Lehre " *Springer Berlin* (1985)
- [12] B. Gross and A. Mendelson " Plane elastostatic analysis of V-notched plates " *International Journal of Fracture* Vol.8, No.3, pp 267-276 (1972)
- [13] W. Rzasnicki, A.Mendelson and L. Albers " Application of boundary integral method to elastic analysis of V-notched Beams " NASA TND-7424 (1973)
- [14] G. Vessiere " Champ de contraintes elastiques dans une plaque de dimensions finies comportant une entaille en V " *Thèse de 3e cycle*, Université Claude Bernard, Lyon France (1975)

- [15] M. R. Barone and A. R. Robinson " Determination of elastic stresses at notches and corners by integral equations " *International Journal Solids Structures*, Vol. 8 pp 1319-1338 (1972)
- [16] H. Nikooyen and A. R. Robinson " Approximate determination of stresses and displacements near a rounded notch " *International Journal Solids Structures*, Vol. 17 pp 669-682 (1981)
- [17] A. H. England "Complex variable methods in elasticity" Wiley, New York (1971)
- [18] N. I. Muskhelishvili " Some basic problems on the mathematical theory of elasticity " Noordhoff, Leyden (1952)
- [19] G. Lhermet, G. Vessiere and J. Bahuaud " Determination of stress intensity factors from stress concentrations for V-notched beams " *Engineering Fracture Mechanics* Vol. 28, No.3 pp 331-343 (1987)
- [20] N. Hasebe and Y. Kutanda " Calculation of stress intensity factor from stress concentration factor " *Engineering Fracture Mechanics* Vol. 10, No.2 pp 215-221 (1978)
- [21] J. Iida, N. Hasebe and S. Matuura " Intensity of corner in fixed edge of plane problem " *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE 113, pp 1194-1207 (1987)
- [22] N. Hasebe and T. Nakamura and Jiro Iida " Notch Mecanics for Plane and thin Plate bending problems " *Engineering Fracture Mechanics* Vol. 37, No.1 pp 87-99 (1990)
- [23] A. sewerryn and J. zwolinski " Solution for the stress and displacement fields in the vicinity of a V-notch of negative wedge angle in plane problems of elasticity" *Engineering Fracture Mechanics* , Vol. 44, No.2 pp 275-281 (1993)
- [24] F. Carrier, M. Krook and C. Pearson " Function of a Complex Variable Theory and Technique" Mc. Graw-Hill, (1966)
- [25] N.Sukumar and M.Kumosa " Stress Singularities at Sharp Notches Interpolation Formulas " *International Journal of Fracture*, 58: pp 45-49 (1992)
- [26] F.Zhong and L.Yuqiu " Sub-region mixed finite element analysis of V-notched plates " *International Journal of Fracture*, 56: pp 333-344 (1992)
- [27] Kantorovich and Krylov: " Approximate Methods of Higher Analysis " Noordhoff-Croningen Leyden (1964)
- [28] A. Carpinteri " Stress-singularity and generalized fracture toughness at the vertex of re-entrant corners " *Engineering Fracture Mechanics* Vol. 26, No.1, pp.143-155 (1987)
- [29] Z. Knésl " A Criterion of V-Notch Stability " *International Journal of Fracture* 48, pp 79-83, (1991)
- [30] H. Neuber, Über die Berücksichtigung der Spannungskonzentration bei Festigkeitsberechnungen. *Konstruktion* 20 (7), pp 245-251 (1968)
- [31] D. Radaj and S. Zhang " On the relations between notch stress and crack stress intensity in plane shear and mixed mode loading " *Engineering Fracture Mechanics* Vol. 44, No. 5, pp 691-704 (1993)

- [32] George F. Carrier, Max Krook Carl and E. Pearson " Functions of a complex variable theory and technique " Mcgram-hill book company, New york
- [33] H. Hyakutake, T. Hagio and H.Nisitani " Fracture of FRP plates containing notches or a circular hole under tension" *International Journal Pres. Ves. & Piping* 44. pp 277-290 (1990)
- [34] Jin-de Chen, Yu-wei Wang and De-hong Yu " The controlled fracture technique and its application in metal working " *Engineering Fracture Mechanics* Vol. 39, No. 1, pp 61-69 (1991)
- [35] Y. Nakai, S. Kubo and K. Ohji " Simple formulae of stress intensity factor for cracks emanating from notches " *Trans. Japan Soc. Mech. Engineering*, Vol 50, No 460, pp 2017-2021 (1984)
- [36] G. Glinka " Relations Between the Strain Energy Density Distribution and Elastic-Plastic Stress-Strain Fields Near Cracks and Notches and fatigue life calculation " *Low Cycle Fatigue* ASTM STP 942, pp 1022-1047
- [37] J. G. Merkle and K. H. Schwalbe " An application of the J integral to an incremental analysis of blunting crack behaviour " *Defect Assessment in Components- Fundamentals and Applications*. ESIS/EGF9 Mechanical Engineering Publication, London pp 319-332 (1991)
- [38] T.Fett "Direct Determination of weight functions from Reference Loading Cases and Geometrical Conditions " *Engineering Fracture Mechanics* Vol.42, No. 3, pp 435-444 (1992)
- [39] V.Shivakumar " Green's function for a crack emanating from a circular hole of an infinite steel " *International journal of Fracture* , Vol. 16, No. 4, pp 305-315
- [40] Demetrios D. Raftopoulos and Stametios V. Kartalopou " The reflected and transmitted shadow methods for the study of sharp V-notched plates under pure bending " *Engineering Fracture Mechanics* Vol. 10, pp 553-563
- [41] A. P. Kfourri, H.D.Wong and K.J.Miller " Elastic-plastic finite element analysis of cracked notches in plates under mixed-mode loading " *Fatigue Fract. Engng Mater. Struct.* Vol. 15, No. 8, pp 743-762
- [42] E. Smith " The effect of free surfaces on the K-crack growth resistance curve for a ligament toughened brittle material " *Engineering Fracture Mechanics* Vol. 42, No. 3, pp 453-459 (1992)
- [43] W. K. Wilson and I.-W. Yu " The use of the J-integral in thermal stress crack problems " *International Journal of Fracture* 15, No. 4, (1979)
- [44] V. T. Troshchenko, A. K. Prokopenko and V. N. TOrgov " Surface cracks and the fatigue limitof metals " *Fatigue Fract. Engng Mater.Struct.* Vol. 11, No. 2, pp 123-138 (1988)
- [45] Hp. Lieurade M. Truchon and JF. Flavenot " La prévision de l'amorçage des fissures de fatigue à partir d'entailles " *Revue Française de Mécanique* No. 1 (1992)
- [46] G. Glinka " Energy Denssity Approach to Calculation of Inelastic Strain-Stress Near Notchs and Cracks " *Engineering Fracture Mechanics* Vol. 22, No. 3 pp 485-508 (1985)

- [47] A. S. Tetelman, T. R. Wilshaw and C.A.Rau, Jr. " The critical tensile stress criterion for cleavage " *International Journal Fracture of Mechanics* Vol.4, No.2, pp 147-157 (1968)
- [48] T. Fett " The stress intensity factor for small cracks at the root of a notch " *International Journal of Fracture* 54: pp 57-64, (1992)
- [49] Y.Verreman and J.P.Bailon : "Fatigue of V-notch members short crack behavior and endurance limit " *Engineering Fracture Mechanics* Vol. 28, No. 5/6 pp 773-783 (1987)
- [50] Andrzej Seweryn and Janislaw Zwolinski " Solution for the Stress and Displacement Fields in the Vicinity of a V-Notch of Elasticity ", *Engineering Fracture Mechanics* Vol. 44, No. 2, pp 275-281 (1993)
- [51] Z.D. Kuang and X.P. Xu " Stress and Strain Fields at the tip of a Sharp V-Notch in a power-hardening material ", *International Journal of Fracture* 35: pp 211-224 (1987)
- [52] K.Y. Lin " Singular Finite Elements for the Fracture Analysis of V-Notched Plate " *International Journal for numerical Methodes in Engineering* , Vol. 15, pp 1343-1354 (1980)
- [53] Shao-yui Yang and Yuh J. Chao " Asymptotic deformation and stress fields at the tip of a sharp notch in an elastic-plastic material " *International Journal of Fracture* 54: pp 211-224 (1992)
- [54] Y. Verreman, J. P. Bailon and J.Masounave " Fatigue life prediction of welded joints-a Re-Assessment " *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.* Vol. 10, No. 1, pp 17-36, (1987)
- [55] R. O. Ritchie, J. F. Knott and J. R. Rice " On the relationship between critical tensile stress and fracture toughness in mild steel " *Journal of mechanics physics solids* Vol. 21, pp 359-410 (1973)
- [56] De-yu Cui, Xing Zhang and Dong-shan Fu " Analytical-generalized variational method in solution of the stress intensity factors for a double notch edge crack in an orthotropic plate subjected to pin loads" *Engineering Fracture Mechanics* Vol. 42, No. 3, pp 427-434 (1992)
- [57] Y.Verreman, J.I.Dickson, J.P.Bailon "Generalization of the Kitagawa Diagram to V-Notch Members" *Advances in Fatigue Science and Technology*, by Kluwer Academic Publishers pp 785-798 (1989)
- [58] X.C.Wang,Y.T.Lei and Q.H.Du " A constitutive model and elastoplastic analysis of structures under cyclic loading " *Acta Mechanica Solida Sinica* Vol. 4, No. 1, pp (1991)
- [59] Y. Murakami " A method of stress intensity factor calculation for the crack in the vicinity of an arbitrary shaped hole " *Trans. Japan Soc. Mech. Engineers*, Vol. 44, No. 387, pp 423-432 (1978)
- [60] P. Lukas and M. Klesnil " Fatigue limit of notched bodies " *Material Sci. Engng.*, Vol. 34 No. 1 pp 61-66 (1978).
- [61] Rochdi : Rapport de DESU de Université de Metz (1990).