



HAL
open science

Quelques résultats sur la stabilisation des systèmes non linéaires par estimation et retour d'état

Hamadi Jerbi

► **To cite this version:**

Hamadi Jerbi. Quelques résultats sur la stabilisation des systèmes non linéaires par estimation et retour d'état. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paul Verlaine - Metz, 1994. Français. NNT : 1994METZ014S . tel-01776050

HAL Id: tel-01776050

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01776050v1>

Submitted on 24 Apr 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

DB 79394

DBL

Thèse présentée à l'UNIVERSITE DE METZ

pour obtention le grade de
doctorat de l'Université de Metz
Spécialité Mathématiques

par Mr Hamadi JERBI.

Titre de la thèse :

**QUELQUES RÉSULTATS SUR LA STABILISATION
DES SYSTÈMES NON LINÉAIRES
PAR ESTIMATION ET RETOUR D'ÉTAT**

Soutenue le 23 mars 1994 devant le jury composé de :

F. CONRAD	Examineur
J.P. GAUTHIER	Rapporteur
H. HAMMOURI	Rapporteur
A. ROUX	Examineur
G. SALLET	Président

Thèse préparée dans le cadre du projet CONGE
INRIA-LORRAINE & URA CNRS 399

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv.	19940425
Cote	S/M3 94/14
Loc	Majani

REMERCIEMENTS

Ce travail a été réalisé sous la direction scientifique du professeur GAUTHIER SALLET. C'est avec un grand plaisir que je lui exprime toute ma gratitude et mes remerciements les plus sincères.

Je voudrais remercier H. HAMMOURI et J.P. GAUTHIER qui ont accepté d'être les rapporteurs de ce travail.

Monsieur A. ROUX a si gentiment accepté d'être membre de jury de cette thèse. Je lui exprime sincèrement ma reconnaissance.

Monsieur F. CONRAD m'a fait l'honneur d'accepter de faire partie de mon jury de thèse. Je voudrais qu'il accepte mes remerciements les plus sincères.

La préparation de cette thèse a été faite au sein du projet CONGE de l'INRIA. A ce titre je tiens à remercier tous ses membres.

Enfin, je remercie toutes celles et tous ceux qui m'ont aidé à réaliser ce travail.

Table des matières

0	Introduction	3
1	Quelques Remarques Sur la Stabilité et L'Observabilité	7
1.1	Formulation du problème	7
1.2	Notions de stabilité	8
1.2.1	Définitions	8
1.2.2	Fonctions de Lyapunov	9
1.3	Stabilisation	11
1.3.1	Conditions nécessaires de Brockett	11
1.3.2	Systèmes affines à dérive dissipative : méthode de Jurdjevic-Quinn	13
1.4	Notions d'observabilité et d'observateur	15
1.4.1	Définitions de l'observabilité des systèmes non linéaires	15
1.4.2	Observateurs asymptotiques de l'état	18
1.4.3	Observateur de Kalman	19
2	Stabilisation des Systèmes Polynomiaux Homogènes	21
2.1	Introduction	21
2.2	Résultat Principal	22
2.3	Classification et stabilisation	26
2.3.1	Cas où B est diagonalisable	26
2.3.2	Cas où B est à valeur propres réelles sans être diagonalisable	36
2.3.3	Cas où B n'a pas de valeur propre réelle	39
2.4	Stabilisation Locale des Systèmes non Linéaires	41
3	Observateur et Stabilisation Des Systèmes Bilinéaires	43
3.1	Introduction	43
3.2	Résultat Principal	44
3.3	Etude de la Stabilité du Système (Σ) à travers un Observateur	47
3.3.1	Cas où B est à valeur propres réelles sans être diagonalisable	47
3.3.2	Cas où B n'a pas de valeur propre réelle	50

3.3.3	Cas où B est diagonalisable	52
3.3.4	Remarque	59
4	A Robust PI-Controller For Infinite-dimensional Systems	61
4.1	Introduction	61
4.2	Main Result	63
4.2.1	Integral part of the PI-controller	64
4.2.2	Proportional part of the PI-controller	69
4.2.3	PI-controller design	70
4.2.4	Application to a heat exchanger process:	71
4.3	Conclusions	73
	Bibliographie	77

0

Introduction

Dans cette thèse nous allons examiner quelques problèmes sur la stabilisabilité des systèmes non linéaires par retour dynamique de sortie.

Le premier chapitre est consacré à des rappels de définition et résultats classiques concernant la stabilisation, l'observabilité et les observateurs.

Dans le second chapitre on s'intéresse d'abord aux systèmes non linéaires plans de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x) + uBx \\ x \in \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (0.1)$$

où P est un champ de vecteurs polynomial homogène de degré impair ($2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$) et B est une matrice carrée à valeur dans \mathbb{R} . On donne une condition nécessaire et suffisante pour que le système (0.1) soit stabilisable par feedback homogène, et dans le cas où P est homogène de degré $2k + 1$ avec $k \geq 1$ (resp. $k = 0$), on montre que le système (0.1) est stabilisable par un feedback polynomial homogène de degré $2k$ (resp. par un feedback de classe $C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ et homogène de degré zéro). le feedback stabilisant est donné explicitement.

Les systèmes de la forme (0.1) ont déjà été étudiés dans [19] mais seulement dans le cas où P est de degré trois et P, B vérifient une certaine condition. (l'essentiel de cette partie est contenue dans [22]).

Dans la fin de ce chapitre on donne un résultat sur la stabilisation locale du système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + ug(x) \\ x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R} \end{cases}$$

où f et g sont deux champs de vecteurs tels que

$$D^i f_0 = 0 \quad \forall i \leq 2k, \quad g(0) = 0 \quad \text{et} \quad Dg_0 \neq 0$$

Dans le troisième chapitre on étudie la stabilisabilité des systèmes bilinéaires plans, non observables pour toute entrée, par une commande fonction de l'état estimé par un observateur de Kalman.

En général pour les systèmes bilinéaires plans de la forme

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + uBx \\ y = Cx \\ x \in \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{R} \end{cases}$$

($A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $C = (c_1, c_2)$) il existe une seule mauvaise entrée (constante u_b) qui ne distingue pas deux états distincts. Cette mauvaise entrée constitue la singularité du problème. On montre que si le système (Σ) est globalement asymptotique stabilisable alors il existe des feedbacks stabilisateurs et "relativement séparés" de la mauvaise entrée (quand elle existe) et que ces commandes fonctions de l'état estimé par l'observateur de Kalman stabilisent le systèmes (Σ) . (l'essentiel de cette partie est contenue dans [10])

Le chapitre 4 est constitué d'un article qui sera prochainement publié dans International Journal of Control. Ce chapitre s'intéresse à l'étude du système mono-variable suivant

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + bu(t) + w \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

où l'état évolue sur un espace de Hilbert séparable H et l'élément $b \in H$. Nous supposons que l'opérateur A est le générateur infinitesimal d'un C_0 -semigroupe exponentiellement stable sur H , la perturbation w est un élément quelconque de H et l'opérateur de sortie C peut être non-borné mais A -admissible, ou plus précisément C est un opérateur de $D(C) \subset H$ ($D(C)$ désigne le domaine de C) à valeurs dans \mathbb{R} et qui vérifie les propriétés suivantes :

- 1) C est un opérateur A -borné. (i.e. CA^{-1} est un opérateur borné)
- 2) Pour un certain $T > 0$ et pour tout x un vecteur de $D(A)$ (domaine de A), il existe une constante positive K_T telle que

$$\int_0^T |Ce^{tA}x| dt < K_T^2 \|x\|^2.$$

Dans ce cas, nous proposerons un régulateur Proportionnel et Intégral à petits gains

$$\begin{aligned} u(t) &= k_p(y(t) - y_r) + k_i[CA^{-1}b]^{-1}z(t) \\ \dot{z}(t) &= y(t) - y_r, \end{aligned} \quad (\text{PIC})$$

qui stabilise exponentiellement le système en assurant la régulation : pour une constante donnée y_r , l'erreur de sortie $y(t) - y_r$ converge exponentiellement vers zéro indépendamment de la perturbation w . Notre résultat est une généralisation de celui de Pohjolainen (1982) pour des systèmes de dimension infinie avec semigroupes non-analytiques. Afin d'illustrer la méthode de synthèse, nous avons également présenté une application correspondante dans un système thermique.

1

Quelques Remarques Sur la Stabilité et L'Observabilité

1.1 Formulation du problème

On considère les systèmes en temps continu décrits par des équations différentielles de la forme

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = X(x(t), u(t)) \\ x \in M, u \in \mathcal{U} \end{cases} \quad (1.1)$$

où M est une variété différentiable connexe appelée espace d'état et l'entrée u prends ses valeurs dans un sous ensemble \mathcal{U} de \mathbb{R}^p , $x(t)$ représente l'état du système à l'instant t et X est un champ de vecteurs défini sur M , qu'on supposera complet. Dans ce travail, M sera l'espace \mathbb{R}^n ou un ouvert convexe de \mathbb{R}^n .

Les problèmes auxquels on s'intéresse sont les suivants :

- étant donné $x_0 \in M$, trouver un feedback $u = u(x)$ tel que le point x_0 soit un point d'équilibre asymptotiquement stable pour le système bouclé :

$$\dot{x}(t) = X(x(t), u(x(t))) \quad (1.2)$$

est globalement asymptotiquement stable (G.A.S.) en x_0

- pour $x_0 \in M$ donné, trouver un feedback $u = u(\hat{x})$ (\hat{x} désigne une estimation de l'état donnée par l'observateur de Kalman) tel que le système suivant

$$\dot{x}(t) = X(x(t), u(\hat{x}(t))) \quad (1.3)$$

est globalement asymptotiquement stable (G.A.S.) en x_0 .

- On considère le système mono variable suivant

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + bu(t) + w \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

l'état évolue sur H (un espace de Hilbert séparable), $b \in H$, l'opérateur A est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semigroupe exponentiellement stable sur H , la perturbation w est un élément quelconque de H et l'opérateur de sortie C peut être non-borné mais A -admissible. On montre que le régulateur suivant

$$\begin{cases} u(t) = k_p(y(t) - y_r) + k_i[CA^{-1}b]^{-1}z(t) \\ \dot{z}(t) = y(t) - y_r, \end{cases} \quad (\text{PIC})$$

stabilise exponentiellement le système en assurant la régulation et pour une constante donnée y_r , on montre aussi que l'erreur de sortie $y(t) - y_r$ converge exponentiellement vers zéro indépendamment de la perturbation w .

Pour cela, rappelons les définitions suivantes.

1.2 Notions de stabilité

1.2.1 Définitions

Définition 1 On considère le système autonome défini par

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x) \\ x \in M, X(x_0) = 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

et on prendra comme espace d'état une variété M de C^∞ (ou analytique) à dimension n , connexe et paracompacte. Par la suite de ce chapitre M sera l'espace \mathbb{R}^n ou un voisinage de zéro dans \mathbb{R}^n .

On dira que x_0 est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \text{ tel que } \|x - x_0\| < \alpha \Rightarrow \forall t \geq 0, \|X_t(x) - x_0\| < \epsilon$$

et

$$\forall x \in M, \lim_{t \rightarrow +\infty} X_t(x) = x_0$$

où $X_t(x)$ désigne la solution de (1.4) commençant au point x à l'instant $t = 0$ i.e.,

$$\left. \frac{dX_t(x)}{dt} \right|_{t=0} = X(x) \text{ et } X_0(x) = x$$

Définition 2 On dit aussi que x_0 est un point d'équilibre localement asymptotiquement stable s'il existe un voisinage U de x_0 tel que le système

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x) \\ x \in U, X(x_0) = 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

est globalement asymptotiquement stable.

Définition 3 Si x_0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable pour (1.4) et s'il existe deux constantes positives K et λ telles que l'on ait :

$$\|X_t(x) - x_0\| \leq K \|x - x_0\| e^{-\lambda t}$$

pour tout x appartenant à un voisinage de x_0 et tout $t > 0$, alors on dira que (1.4) est exponentiellement stable en x_0 .

On remarque que pour montrer qu'un point d'équilibre admette une des propriétés ci-dessus en utilisant les définitions, on doit résoudre explicitement le système différentiel (1.4) ; ce qui est, en général difficile voir infaisable. En fait, on utilise plutôt les théorèmes suivants dus à Lyapunov ([18]).

1.2.2 Fonctions de Lyapunov

S'il existe une fonction $V : U \rightarrow \mathbb{R}$, continue sur un voisinage U de x_0 et différentiable sur $U - \{x_0\}$ telle que :

(a) $V(x_0) = 0$ et $V(x) > 0$ si $x \neq x_0$,

(b) $\dot{V}(x) = X.V(x) \leq 0 \quad \forall x \in U$ où $X.V(x) = \left. \frac{d}{dt} V(X_t(x)) \right|_{t=0} = \langle \nabla V(x) | X(x) \rangle$

(c) $\dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \in U - \{x_0\}$

alors x_0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable pour (1.4).

Définition 4 Une fonction V qui satisfait (a) et (b) est appelée fonction de Lyapunov pour (1.4) en x_0 , et si de plus la condition (c) est vérifiée alors V est appelée fonction de Lyapunov stricte pour (1.4) en x_0 .

Définition 5 (version globale)

S'il existe $V : M \rightarrow \mathbb{R}$ définie positive et propre (c'est-à-dire l'image réciproque d'un compact de \mathbb{R}^+ est un compact de M) telle que

$$X.V(x) < 0 \quad \forall x \in M - \{x_0\}, \quad X.V(x_0) = 0$$

alors x_0 est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable.

On a aussi le théorème inverse suivant (Massera [34], Kurzweil [28]).

Théorème 1 *Si X est continu et si x_0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable alors (1.4) admet une fonction de Lyapunov stricte qui est de classe C^∞ dans un voisinage de x_0 .*

On a aussi plus d'information sur la fonction de Lyapunov dans le cas où X est un champ de vecteurs continu et homogène de degré p .

Définition 6 *On dit qu'un champ de vecteurs X est homogène de degré p si pour tout x dans \mathbb{R}^n et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$ on a*

$$X(\lambda x) = \lambda^p X(x)$$

Théorème 2 (de Hahn)[18] *Si X est continu, homogène de degré p , de classe $C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ et si x_0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable alors (1.4) admet une fonction de Lyapunov stricte qui est homogène et de classe C^∞ dans un voisinage de x_0 .*

Les théorèmes précédents prouvent que pour montrer qu'un point d'équilibre est asymptotiquement stable, il suffit de trouver une fonction de Lyapunov stricte mais ce n'est pas une chose facile et il n'y a pas de méthodes constructives qui permettent de trouver de telles fonctions. Ceci dit, en général, il est plus facile de trouver une fonction V définie positive qui vérifie :

$$X.V(x) \leq 0$$

Une telle fonction sera appelée fonction de Lyapunov large pour le champ X en x_0 . Quand X admet une fonction de Lyapunov large, on a le résultat suivant qui permet de conclure à l'asymptotique stabilité.

(Principe d'invariance de LaSalle [30]) Soit V une fonction de Lyapunov large, de classe C^1 , pour (1.4) en x_0 . Alors toutes les trajectoires bornées pour $t \geq 0$ tendent vers Ω , le plus grand ensemble invariant par X et contenue dans

$$E = \{x \in M / X.V(x) = 0\}.$$

Si en plus V est propre ($\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} V(x) = +\infty$) alors toutes les trajectoires sont bornées pour $t \geq 0$ et donc toutes les trajectoires tendent vers Ω . Pour montrer que x_0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable, il suffit de montrer que $\Omega = \{x_0\}$.

Dorénavant, on prendra $x_0 = 0$ l'origine de \mathbb{R}^n .

1.3 Stabilisation

Revenons au système contrôlé

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x, u) \\ x \in U, u \in \mathcal{U} \end{cases} \quad (1.6)$$

où U est un ouvert connexe de \mathbb{R}^n , $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ et $X : U \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe C^1 (resp. C^∞ , C^ω) tel que $X(0, 0) = 0$.

Définition 7 On dira que (1.6) est stabilisable s'il existe un feedback $u = u(x)$ tel que le champ $X(x, u(x))$ est au moins continu et le système bouclé :

$$\dot{x} = X(x, u(x))$$

admette l'origine comme point d'équilibre asymptotiquement stable.

Rappelons que le problème de stabilisation est complètement résolu pour les systèmes linéaires ($X(x, u) = Ax + Bu$) mais c'est loin d'être le cas pour les systèmes non linéaires, même les plus simples comme par exemple les systèmes bilinéaires

$$\dot{x} = Ax + uBx$$

On va rappeler les principaux résultats (essentiellement ceux qu'on utilisera par la suite) qui datent des quinze dernières années.

1.3.1 Conditions nécessaires de Brockett

Le théorème suivant dû à Brockett ([6]) donne des conditions nécessaires de stabilisation.

Si le système (1.6) admet un feedback stabilisateur de classe C^1 dans un voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$ alors :

- (i) Le système linéarisé n'admet pas de modes incontrôlables associés à des valeurs propres strictement positives.
- (ii) Il existe un voisinage N de $(0, 0)$ tel que pour tout $\xi \in N$, il existe un contrôle $u_\xi(\cdot)$ défini sur $[0, +\infty[$ qui ramène le système de l'état $x = \xi$ en $t = 0$ à l'état $x = 0$ en $t = \infty$. En d'autres termes, si $x(t)$ est une solution de $\dot{x} = X(x, u_\xi)$ vérifiant $x(0) = \xi$ alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$.

(iii) L'application

$$\begin{aligned} \gamma : U \times \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, u) &\longmapsto X(x, u) \end{aligned}$$

est surjective sur un voisinage de l'origine de \mathbb{R}^n .

Par la suite, nous utiliserons le vocabulaire suivant :

Définition 8 *Un système*

$$\dot{x} = X(x, u)$$

vérifiant la condition (ii) du théorème de Brockett sera dit stabilisable en boucle ouverte ou encore asymptotiquement contrôlable à l'origine.

Remarques :

1. La condition (ii) est évidemment une condition nécessaire de stabilisabilité quelle que soit la régularité qu'on exige du feedback.
2. Par contre, la condition (i) n'est pas nécessaire si on se contente d'un feedback continu comme le montre l'exemple suivant (dû à Kawski [25]) :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u \\ \dot{x}_2 = x_2 - x_1^3 \end{cases}$$

qui est stabilisable avec

$$u(x) = -x_1 + x_2 + \frac{4}{3}x_2^{\frac{1}{3}} - x_1^3.$$

3. La condition (iii) est également une condition nécessaire à l'existence d'un feedback stabilisateur continu (cf Sontag [41]).

Dans la suite de ce chapitre on rappelle les résultats classiques de stabilisation des systèmes non linéaires.

1.3.2 Systèmes affines à dérive dissipative : méthode de Jurdjevic-Quinn

Historiquement, un des premiers résultats significatifs est dû à Jurdjevic et Quinn qui ont utilisé le principe d'invariance de La Salle pour donner une condition suffisante de stabilisabilité pour les systèmes affines en contrôles et dont la dérive est linéaire dissipative.

Théorème 3 (Jurdjevic-Quinn [23]) *soit*

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x) + uY(x) \\ x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (1.7)$$

où $X(x) = Ax$ avec A une matrice $n \times n$ avec n valeurs propres imaginaires distinctes. Si

$$\{ad^k XY(x), k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{R}^n \quad \forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$$

alors (1.9) est G.A.S avec

$$u = -\langle x, Y(x) \rangle$$

Ce résultat a été ensuite généralisé à des systèmes affines quelconques par plusieurs auteurs, notamment dans [14] [35] sous la forme suivante :

Théorème 4 ([35]) *soit*

$$\dot{x} = X(x) + \sum_{i=1}^m u_i Y^i(x) \quad (1.8)$$

un système C^∞ défini sur \mathbb{R}^n avec $X(0) = 0$. S'il existe une fonction $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie positive et propre telle que :

(i) $X.V(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.

(ii) L'ensemble

$$W = \left\{ x \in \mathbb{R}^n / X^{k+1}V(x) = X^k Y^i V(x) = 0, k \in \mathbb{N}, i = 1, \dots, m \right\}$$

est réduit à $\{0\}$.

Alors le système (1.8) bouclé avec $u_i(x) = -Y^i V(x)$ est globalement asymptotiquement stable à l'origine.

Pour la clarté de la lecture, on rappelle ici la démonstration de ce résultat. Le champ bouclé est

$$Z = X - \sum_{i=1}^m (Y^i V) Y^i$$

On a

$$\dot{V}(x) = Z.V(x) = X.V(x) - \sum_{i=1}^m (Y^i V(x))^2 \leq 0$$

Le système est donc stable. D'après le principe d'invariance de La Salle, toutes les solutions bornées tendent vers Ω , le plus grand ensemble invariant par Z et contenu dans

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n / Z.V(x) = 0\}$$

Remarquons que V étant propre et $Z.V(x) \leq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, toutes les trajectoires sont bornées.

D'autre part, soit $x \in \Omega$, alors pour tout $t \geq 0$ on a $Z_t(x) = X_t(x)$ (puisque sur Ω , $Z = X$) et, comme Ω est Z -invariant, on a

$$X.V(X_t(x)) = Y^i V(X_t(x)) = 0 \quad \forall t \geq 0$$

ce qui implique que pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{d^k}{dt^k} X V(X_t(x))_{t=0} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^k}{dt^k} Y^i V(X_t(x))_{t=0} = 0$$

Mais, par définition de la dérivée de Lie, on a

$$X.V(x) = \frac{d}{dt} V(X_t(x))_{t=0}$$

donc

$$X^{k+1} V(x) = \frac{d^k}{dt^k} X V(X_t(x))_{t=0} = 0 \quad \text{et} \quad X^k Y^i V(x) = \frac{d^k}{dt^k} Y^i V(X_t(x))_{t=0} = 0$$

Ceci montre que $\Omega \subset W$, ce qui termine la preuve. ■

Remarque On considère les systèmes bilinéaires dont le dérivé est linéaire dissipative

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + uB(x) \\ x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (1.9)$$

où $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et A est une matrice dissipative : c'est à dire il existe un produit scalaire défini sur \mathbb{R}^n tel que :

(i) $A.V(x) = \langle Ax|x \rangle \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ avec $V(x) = \|x\|^2$.

On suppose que

(ii) L'ensemble

$$W = \{x \in \mathbb{R}^n / A^{k+1}V(x) = A^k B^i V(x) = 0, k \in \mathbb{N}, i = 1, \dots, m\}$$

est réduit à $\{0\}$.

On peut utiliser exactement la même démonstration du théorème-4 pour prouver que la condition (ii) est suffisante pour que le feedback homogène de degré zéro

$$\tilde{u} = -\frac{\langle x|Bx \rangle}{k\|x\|^2} \quad k > 0$$

stabilise le système (1.9).

1.4 Notions d'observabilité et d'observateur

On present d'abord quelques définitions qui seront utiles dans l'étude de l'observabilité et de l'observateur des systèmes non linéaires. Puis on mentionnera brièvement un résultat concernant l'observateur de Kalman.

1.4.1 Définitions de l'observabilité des systèmes non linéaires

On considèrera des systèmes en temps continu décrits par des équations différentielles de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x, u) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (1.10)$$

et on prendra comme espace d'état une variété M de classe C^∞ (ou analytique) à dimension n , connexe et paracompacte. L'entrée u prends ses valeurs dans un sous-ensemble Ω de \mathbb{R}^p ; la sortie y prend ses valeurs dans \mathbb{R}^q . Pour tout $u \in \Omega$, $X(\cdot, u)$ dénote un champ de vecteurs de classe C^∞ sur M , qu'on supposera complet; la fonction h est de classe C^∞ .

Pour un système non linéaire la notion d'observabilité peut être formulé de plusieurs façons. La plus simple est celle qui se rapporte à la notion de distinguabilité des états, propre de la théorie générale des systèmes.

Définition 9 *On rappelle que deux états x_0 et x_1 sont dits indistinguable si pour tout $t_1 \geq t_0$ et pour toute entrée admissible $u : [t_0, t_1] \rightarrow \Omega$ les solutions correspondantes de l'équation différentielle suivante (1.10) satisfont la condition*

$$h[X_u(t_1, x_0)] = h[X_u(t_1, x_1)]$$

Réciproquement, on dit que deux états sont distinguables s'il existe un temps $t_1 \geq t_0$ et une entrée admissible $u : [t_0, t_1] \rightarrow \Omega$ telle que

$$h[X_u(t_1, x_0)] \neq h[X_u(t_1, x_1)]$$

La définition suivante est basée sur cette notion de distinguabilité

Définition 10

Un système est observable en x_0 si tout autre état $x \neq x_0$ est distinguable de x_0 . Un système est observable s'il est observable en tout $x_0 \in M$.

La possibilité de distinguer deux états, selon la définition précédente, est un concept global. Il arrive, peut être, que pour engendrer depuis x_0 et x_1 deux courbes intégrales qui donnent lieu à deux sorties différentes, on a besoin de s'éloigner beaucoup de x_0 ou de x_1 .

Hermann et Krener [20] ont proposé une notion de distinguabilité locale, qui peut être formulée de la façon suivante.

Définition 11 *Soit U un ouvert de M ; deux états $x_0 \in U$ et $x_1 \in U$ sont dits U -distinguables s'il existe un temps $t_1 > t_0$ et une entrée admissible $u : [t_0, t_1] \rightarrow \Omega$ pour la quel on ait*

$$\begin{aligned} X_u(t, x_0) &\in U \text{ pour tout } t \in [t_0, t_1] \\ X_u(t, x_1) &\in U \text{ pour tout } t \in [t_0, t_1] \end{aligned}$$

et soit

$$h[X_u(t_1, x_0)] \neq h[X_u(t_1, x_1)].$$

La définition suivante est basée sur cette notation.

Définition 12 *Un système est observable localement en x_0 s'il existe un ouvert U_0 de x_0 tel que, dans tout ouvert $U \subseteq U_0$ de x_0 , tout autre état $x \neq x_0$ est U – distinguable de x_0 .*

Un système est observable localement s'il est observable localement en tout $x_0 \in M$

Le problème de l'entrée universelle

On déduit immédiatement à partir de la définition qu'on a donné dans la section précédente que, dans un système observable, pour tout couple d'états différents x_0 et x_1 , il existe une entrée admissible qui donne lieu à deux sorties différentes. L'entrée en question peut, naturellement, dépendre du couple d'états qu'on a considéré.

En pratique, il est bien plus intéressant le cas dans lequel, l'entrée u ayant été fixée, tout état différent donne lieu à des sorties différentes.

En effet, seulement dans ce cas on peut reconnaître l'état initial du système à partir d'expériences entrée-sortie. On peut se demander, alors, si une telle entrée existe, éventuellement sous des hypothèses convenables. Le problème a été récemment abordé et résolu d'une manière satisfaisante par Sontag [42], pour les systèmes échantillonnés décrits par des relations polynomiales entrée-état-sortie, et par Sussman [44], pour les systèmes en temps continu de la forme (1.10). Ces auteurs ont déterminé des hypothèses qui assurent l'existence d'une entrée qui permet de distinguer entre tout état initial et, de plus, ont démontré que l'ensemble de toutes les entrées possédant cette propriété est dense, dans l'espace des entrées admissibles avec une topologie convenable.

On mentionne brièvement ici quelques résultats établis dans [44]

Définition 13

Une entrée admissible $u : [t_0, t_1] \rightarrow \Omega$ est dite universelle si, pour tout couple d'états x_0 et x_1 distinguables, on a

$$h[X_u(t, x_0)] \neq h[X_u(t, x_1)] \text{ pour au moins un } t \in [t_0, t_1]$$

Les entrées universelles existent sous des hypothèses très générales, comme on peut le voir dans l'énoncé suivant.

Théorème 5 *Supposons l'espace d'état M qui caractérise les (1.10) soit une variété analytique et que les fonctions $X : M \times \Omega \rightarrow TM$ et $h : M \rightarrow \mathbb{R}^q$ soient elles mêmes analytiques. Supposons en outre que l'ensemble Ω soit contenu dans la fermeture de*

l'intérieur de Ω et que l'intérieur de Ω soit connexe. Alors, pour tout $t_1 > t_0$ il existe une entrée $u : [t_0, t_1] \rightarrow \Omega$ qui est universelle. Cette entrée est une fonction analytique du temps (i.e, elle coïncide, sur $[t_0, t_1]$, avec une fonction analytique définie sur un intervalle ouvert $(t_0 - \xi, t_1 + \xi)$).

Considérons maintenant l'espace des fonctions de class C^∞ définies sur l'intervalle $[a, b]$ de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R}^p , qu'on dénotera par $C^\infty([a, b], \mathbb{R}^p)$, muni de la topologie C^∞ qui est la suivante :

Une suite de fonctions $\{u_\alpha\}$ converge à u pour la topologie C^∞ si et seulement si $\frac{d^j u_\alpha}{dt^j}$ converge à $\frac{d^j u}{dt^j}$ uniformément en $[a, b]$ pour tout j .

On dénotera ensuite par $C^\infty([a, b], \overset{\circ}{\Omega})$ l'espace des fonctions de classes C^∞ définies sur l'intervalle $[a, b]$ de \mathbb{R} , à valeurs dans l'intérieur de Ω ($\overset{\circ}{\Omega}$).

$C^\infty([a, b], \overset{\circ}{\Omega})$ est un ouvert de $C^\infty([a, b], \mathbb{R}^p)$ dans la topologie C^∞ .

On peut alors énoncer le résultat suivant.

Théorème 6 Soient les hypothèses du théorème précédent toutes satisfaites. Alors pour tout $t_1 > t_0$, l'ensemble des entrées universelles est dense dans l'espace $C^\infty([a, b], \overset{\circ}{\Omega})$

Définition 14 on dit que le système (1.10) est observable pour toute entrée si et seulement si toutes les entrées sont universelles.

1.4.2 Observateurs asymptotiques de l'état

La théorie des observateurs asymptotiques de l'état pour les systèmes non linéaires est encore relativement peu développée. On mentionnera brièvement après quelques résultats établis pour les systèmes bilinéaires, qu'on supposera décrits par les équations

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + uBx \\ y = Cx \end{cases} \quad (1.11)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$, ${}^T C \in \mathbb{R}^n$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (${}^T C$ désigne le transposé de C)

Définition 15

Un observateur asymptotique de (1.10) est un système décrit par une équation de la forme

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u, y) \\ \hat{x}(t_0) = \hat{x}_0 \end{cases} \quad (1.12)$$

(où $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$), tel que, si u et y sont respectivement l'entrée et la sortie du système (1.10), l'évolution de \hat{x} vérifie la condition

$$\|\hat{x}(t) - x(t)\| \leq \beta \|\hat{x}_0 - x_0\| \exp \alpha(t - t_0) \quad (1.13)$$

$\beta > 0$ et $\alpha < 0$ étant deux nombres convenables, pour toute entrée admissible u , pour tout x_0 , pour tout \hat{x}_0 , pour tout $t \geq t_0$. Pour des raisons évidentes, il est important que les nombres β et α soient indépendants de l'entrée u .

1.4.3 Observateur de Kalman

On considère les systèmes bilinéaires, qu'on supposera décrits par les équations

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + u(Bx + b) \\ y = Cx \end{cases} \quad (1.14)$$

(où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^n$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

Pour réaliser un observateur asymptotique de l'état du système (1.14) nous allons procéder de la façon suivante. Supposons que les systèmes (1.14) sont observables pour toute entrée et que les entrées prennent ses valeurs dans un compact K de \mathbb{R} .

Pour la clarté de la démonstration nous allons proposer un observateur de l'états du système (1.14) qui est un peu différent a celui de l'observateur de Kalman (pour plus d'information voir [5]). Soit le système décrit par l'équation suivante

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + u(B\hat{x} + b) - S_t^{-1} {}^T C(C\hat{x} - y) \\ \dot{S}_t = -\theta S_t - (A + uB)^T S_t - S_t(A + uB) + {}^T C C \\ \text{où } \hat{x} \in \mathbb{R}^n \text{ "une estimation de l'état"} \end{cases} \quad (1.15)$$

Pour obtenir la condition (1.13), on doit pouvoir choisir S_0 dans \mathcal{S}^+ (\mathcal{S}^+ désigne l'ensemble des matrices définies positives) et θ une constante positive suffisamment grande de façon que la matrice S_t soit bornée indépendamment de t . Soit

$$e(t) = \hat{x}(t) - x(t) \quad (x(t) \text{ est la solution de l'équation (1.14)}).$$

On peut vérifier que $\dot{e} = (A + uB)e - S_t^{-1} {}^T C C e$ et par la suite

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle e(t) | S_t e(t) \rangle &= 2 \langle e(t) | S_t \dot{e}(t) \rangle + \langle e(t) | \dot{S}_t e(t) \rangle \\ &= -\theta \langle e(t) | S_t e(t) \rangle - (C e(t))^2 \end{aligned}$$

ce qui donne successivement

$$\frac{\frac{d}{dt} \langle e(t) | S_t e(t) \rangle}{\langle e(t) | S_t e(t) \rangle} < -\theta \quad \text{et} \quad \langle e(t) | S_t e(t) \rangle \leq k \exp(-\theta t).$$

Il découle de l'équation (1.15) que

$$S_t = \exp(-\theta t) {}^T\Phi_{u(t)}^{-1} S_0 \Phi_{u(t)}^{-1} + \int_0^t \exp(-\theta(t-\tau)) {}^T\Phi_{u(t)}^{-1}(t) {}^T\Phi_{u(\tau)} {}^T C C \Phi_{u(\tau)} \Phi_{u(t)}^{-1}(t) d\tau$$

où $\Phi_u(t)$ désigne la matrice fondamentale des solutions de l'équation $\dot{x} = (A + u(t)B)x$ définie par

$$\frac{d}{dt} \Phi_u(t) = (A + uB)\Phi_u(t) \text{ avec } \Phi_u(0) = Id.$$

On pose $u_{[\tau]}(t) = u(t + \tau)$, on a alors

$$S_t = \exp(-\theta t) {}^T\Phi_{u(t)}^{-1} S_0 \Phi_{u(t)}^{-1} + \int_0^t \exp(-\theta(t-\tau)) {}^T\Phi_{u[\tau]}^{-1}(t-\tau) {}^T C C \Phi_{u[\tau]}^{-1}(t-\tau) d\tau. \quad (1.16)$$

D'autre part comme les systèmes bilinéaires sont observables pour toute entrée, alors il existe une constante δ positive telle que $S_t \geq \delta Id$.

En effet, Il découle de (1.16) que pour un $\alpha > 0$ on a

$$\langle z | S_t z \rangle \geq \int_0^\alpha \exp(-\theta(t-\tau)) (C \Phi_{u[\tau]}^{-1}(t-\tau) z)^2 d\tau \geq \gamma \int_0^\alpha (C \Phi_{u[\tau]}^{-1}(t-\tau) z)^2 d\tau$$

or $\int_0^\alpha (C \Phi_{u[\tau]}^{-1}(t-\tau) z)^2 d\tau \geq \beta_u \|z\|^2$ avec β_u désigne le plus petite valeur propre de la matrice

$$\int_0^\alpha {}^T\Phi_{u[\tau]}^{-1}(t-\tau) {}^T C C \Phi_{u[\tau]}^{-1}(t-\tau) d\tau$$

Soit β l'application définie par $\beta : L_{[0,\alpha]}^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ qui a toute entrée admissible $u \in L_{[0,\alpha]}^\infty$ associe le plus petite valeur propre de la matrice

$$\int_0^\alpha {}^T\Phi_{u[\tau]}^{-1}(t-\tau) {}^T C C \Phi_{u[\tau]}^{-1}(t-\tau) d\tau$$

Il est bien connu que l'application β est faiblement continue de $L_{[0,\alpha]}^\infty$ dans \mathbb{R} (c'est à dire elle est continue sur $L_{[0,\alpha]}^\infty$ muni de la topologie faible) ceci permet d'affirmer que β atteint son minimum sur tout compact \mathcal{K} de $L_{[0,\alpha]}^\infty$.

Soit $\mathcal{K}_0 = \{u \in L_{[0,\alpha]}^\infty \text{ tel que } u(t) \in K\}$ (on rappelle que K est un compact de \mathbb{R}). D'après ce qui précède, il existe $u_0 \in \mathcal{K}_0$ tel que

$$\langle z | S_t z \rangle \geq \gamma \beta_{u_0} \|z\|^2$$

et comme par ailleurs le système bilinéaire (1.14) est observable pour toute entrée, il s'ensuit alors que $\beta_{u_0} > 0$ et

$$\|e(t)\| < \frac{k}{\gamma \beta_{u_0}} \exp(-\theta t).$$

2

Stabilisation des Systèmes Polynomiaux Homogènes

Dans cette partie de la thèse nous nous intéressons à la stabilisation des systèmes non linéaires dans \mathbb{R}^2 de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x) + uBx \\ x \in \mathbb{R}^2 \quad u \in \mathbb{R}, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \end{cases} \quad (2.1)$$

où $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est un champ de vecteurs polynomial homogène de degré impair (i.e les deux composantes du champ sont polynomiales homogènes de même degré $2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$) et B est une matrice carrée à valeur dans \mathbb{R} .

Le but est de proposer des conditions nécessaires et suffisantes d'existence d'un feedback stabilisateur pour de tels systèmes et dans le cas où la stabilisation est possible. Le feedback est donné explicitement.

2.1 Introduction

Si la stabilisation des systèmes linéaires est un problème résolu depuis longtemps, pour les systèmes non linéaires la question est beaucoup plus complexe. Dans ce dernier cas, il n'est pas possible, d'avoir en général des résultats globaux. Classiquement, on obtient des conditions suffisantes de stabilisation locale par un feedback régulier en considérant le système linéarisé autour d'un point d'équilibre. Ainsi Brockett a démontré qu'une condition nécessaire d'existence d'une loi de commande stabilisatrice de classe C^1 en l'origine est que le système linéarisé n'admette pas de mode instable incontrôlable [6]. C'est également en utilisant ce principe que les systèmes dans le plan ont été étudiés du point de vue de la stabilisation locale ([1], [3], [4], [26]).

Z. Artstein [2] a étudié les systèmes du type :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m \end{cases} \quad (2.2)$$

et a donné une condition nécessaire et suffisante pour qu'ils soient stabilisables par feedback presque analytique (i.e. analytique sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$).

Sontag [43] a démontré ce théorème de façon constructive dans le cas des systèmes affines en les contrôles

$$\dot{x} = f(x) + ug(x) \quad (2.3)$$

en donnant explicitement le feedback. Malheureusement, sa méthode nécessite la connaissance d'une fonction de Lyapunov "contrôlée".

Dans le cas où le système est complètement contrôlable, Sussmann [45] a démontré que le système (2.3) peut être stabilisable par une loi de commande analytique par morceaux, mais ce théorème est un résultat d'existence dans le sens où le feedback n'est pas donné explicitement.

Les systèmes non linéaires plans affines en les contrôles de la forme (2.3) ont été étudiés dans le cas où le champ contrôlé g vérifie $g(0) \neq 0$ (voir [4], [25] et [12]).

Les systèmes polynomiaux homogènes sont des systèmes du type (2.3) pour lesquels les champs soumis au contrôle s'annulent à l'origine ($g(0) = 0$) si bien que le système linéarisé, calculé au voisinage de l'origine, devient indépendant du contrôle. Ces systèmes n'ont jamais été étudiés systématiquement et il n'existe à leur sujet que peu de résultats de stabilisation.

Le but de ce travail est de donner une condition nécessaire et suffisante pour que ces systèmes soient globalement asymptotiquement stabilisables (G.A.S) par des feedbacks presque réguliers (i.e. $C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$) et de construire explicitement les feedbacks stabilisateurs. On montre ainsi que le système (2.1) est G.A.S si et seulement si il est asymptotiquement stabilisable en boucle ouverte.

2.2 Résultat Principal

Tout d'abord, nous allons rappeler un résultat préliminaire, puis nous étudierons la stabilisabilité des systèmes (2.1).

Théorème 7 *On considère le système dynamique suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = H_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = H_2(x_1, x_2) \end{cases} \quad (H)$$

(où H_1 et H_2 sont deux fonctions polynomiales homogènes de degré $2k + 1$)
Soit la fonction \mathcal{F} définie par

$$\mathcal{F}(x_1, x_2) = x_2 H_1(x_1, x_2) - x_1 H_2(x_1, x_2)$$

supposons que \mathcal{F} admette des facteurs linéaires dans sa décomposition, c'est à dire

$$\mathcal{F}(x_1, x_2) = \prod_{i=1}^p (t_1^i x_1 + t_2^i x_2)^{n_i} \prod_{i=1}^q Q_i(x_1, x_2)$$

où les Q_i sont des formes quadratiques définies, alors Le système (H) est globalement asymptotiquement stable si et seulement si

$$\langle (H_1(t_2^i, -t_1^i), H_2(t_2^i, -t_1^i))^T | (t_2^i, -t_1^i)^T \rangle < 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, p\}$$

Démonstration En écrivant le système (H) en coordonnées polaires

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad x_1 = r \cos \varphi \quad x_2 = r \sin \varphi \quad \text{avec } 0 < \varphi \leq 2\pi$$

on obtient un système de type

$$\begin{cases} \dot{r} = r^{2k+1} (\cos \varphi H_1(\cos \varphi, \sin \varphi) + \sin \varphi H_2(\cos \varphi, \sin \varphi)) = r^{2k+1} \mathcal{G}(\varphi) \\ \dot{\varphi} = r^{2k} (\sin \varphi H_1(\cos \varphi, \sin \varphi) - \cos \varphi H_2(\cos \varphi, \sin \varphi)) = r^{2k} \mathcal{F}(\cos \varphi, \sin \varphi) \end{cases} \quad (H_1)$$

On pose

$$\begin{aligned} t_2^i &= r_i \cos \varphi_i & \text{et} & & \varphi_{i+p} &= \varphi_i + \pi & \text{si } & 0 < \varphi_i \leq \pi \\ -t_1^i &= r_i \sin \varphi_i & & & \varphi_{i+p} &= \varphi_i - \pi & \text{si } & \pi < \varphi_i \leq 2\pi \end{aligned}$$

On notera ensuite (r, φ) le point de coordonnées $(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$

Soit $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{2p}\} = \{\varphi_1, \dots, \varphi_{2p}\}$ tel que $0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots, < \theta_{2p} \leq 2\pi$.

On construit alors les $2p$ secteurs suivants

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \text{ tel que } \theta_{2p} < \varphi \leq 2\pi \text{ et } 0 < \varphi < \theta_1\} \\ S_i &= \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \text{ tel que } \theta_{i-1} < \varphi < \theta_i\} \quad 1 < i \leq 2p \end{aligned}$$

les secteurs S_i sont stable par le champ de vecteurs (H_1, H_2) . On considère maintenant les demi-droites définies par

$$D_i = \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \text{ tel que } \varphi = \theta_i\}$$

Il est clair que les demi-droites D_i sont des orbites du système (H_1) asymptotiquement stables, en effet sur les demis droites D_i l'équation différentielle (H_1) est réduite à

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r^{2k+1} \mathcal{G}(\theta_i) = \langle (H_1(r \cos \theta_i, r \sin \theta_i), H_2(r \cos \theta_i, r \sin \theta_i))^T | (r \cos \theta_i, r \sin \theta_i)^T \rangle < 0 \\ \dot{\varphi} &= \mathcal{F}(r \cos \theta_i, r \sin \theta_i) = 0 \end{aligned}$$

Pour établir le résultat, nous allons montrer que le système (H_1) est G.A.S. sur les secteurs S_i . Soient $(r_0, \varphi_0) \in S_i$ et l'équation différentielle définie par

$$\begin{cases} \dot{r} = r^{2k+1} \mathcal{G}(\varphi) \\ \dot{\varphi} = r^{2k} \mathcal{F}(\cos \varphi, \sin \varphi) \end{cases} \quad \text{avec } r(0) = r_0 \text{ et } \varphi(0) = \varphi_0 \quad (H_i)$$

Comme par ailleurs S_i est invariant par le champ de vecteurs (H_1, H_2) et $\dot{\varphi}$ ne change pas de signe sur S_i il s'ensuit alors que $\varphi(t)$ solution de l'équation (H_i) tend vers θ_i quand t tend vers $+\infty$ ou bien $\varphi(t)$ tend vers θ_{i+1} et si $r(t)$ est une solution de l'équation (H_i) alors elle vérifie l'équation suivante

$$r(t) = \left[r_0^{-2k} - (2k)t \mathcal{G}(\varphi(t)) \right]^{-\frac{1}{2k}}$$

Dans le cas où $\varphi(t)$ tend vers θ_{i+1} (même démonstration quand $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = \theta_i$) on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathcal{G}(\varphi(t)) = \mathcal{G}(\theta_{i+1})$$

et en utilisant le fait que $\mathcal{G}(\theta_{i+1}) < 0$ on peut affirmer que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} r(t) = 0$$

D'autre part comme (r, φ) vérifie l'équation H_i on peut alors écrire que

$$\frac{dr}{d\varphi} = r \frac{\mathcal{G}(\varphi)}{\mathcal{F}(\cos \varphi, \sin \varphi)} \quad \text{et par suite} \quad r(\varphi) = r_0 \exp \left(\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\mathcal{G}(u)}{\mathcal{F}(\cos u, \sin u)} du \right)$$

On a $\mathcal{G}(\theta_i) = \frac{1}{r^{2k+2}} \langle (H_1(t_2^i, -t_1^i), H_2(t_2^i, -t_1^i))^T | (t_2^i, -t_1^i)^T \rangle < 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, 2p\}$ alors il existe $\varepsilon_i > 0$ tel que

$$|\varphi - \theta_i| < 2\varepsilon_i \quad \text{on a} \quad \mathcal{G}(\varphi) < 0$$

On peut alors raisonner de la façon suivante

$$\begin{aligned} r(\varphi) &= r_0 \exp \left(\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\mathcal{G}(u)}{\mathcal{F}(\cos u, \sin u)} du \right) = r_0 \exp \left(\int_{\varphi_0}^{\varphi} \mathcal{K}(u) du \right) \\ &= r_0 \exp \left(\int_{\varphi_0}^{\theta_i + \varepsilon_i} \mathcal{K}(u) du + \int_{\theta_i + \varepsilon_i}^{\theta_{i+1} - \varepsilon_{i+1}} \mathcal{K}(u) du + \int_{\theta_{i+1} - \varepsilon_{i+1}}^{\varphi} \mathcal{K}(u) du \right) \end{aligned}$$

et comme $\mathcal{F}(\cos u, \sin u) > 0$ pour $\theta_i < u < \theta_{i+1}$ il s'ensuit alors que

$$\begin{aligned} \exp \left(\int_{\varphi_0}^{\theta_i + \varepsilon_i} \mathcal{K}(u) du \right) &< 1 + \exp \left(\int_{\theta_i + \varepsilon_i}^{\theta_{i+1} - \varepsilon_{i+1}} |\mathcal{K}(u)| du \right) \\ \exp \left(\int_{\theta_{i+1} - \varepsilon_{i+1}}^{\varphi} \mathcal{K}(u) du \right) &< 1 + \exp \left(\int_{\theta_i + \varepsilon_i}^{\theta_{i+1} - \varepsilon_{i+1}} |\mathcal{K}(u)| du \right) \end{aligned}$$

et par suite $r(\varphi) < r_0[K_i(1 + K_i)^2]$ avec $K_i = \exp\left(\int_{\theta_i+\varepsilon_i}^{\theta_i+1-\varepsilon_i+1} |\mathcal{K}(u)| du\right)$. Ceci montre que le système (H_1) est globalement asymptotiquement stable.

Définition 16

On appelle fonction caractéristique du système dynamique (H) l'application définie par

$$\mathcal{F}(x_1, x_2) = x_2 H_1(x_1, x_2) - x_1 H_2(x_1, x_2).$$

Dans la suite, nous allons établir une classification pour les systèmes homogènes de degré $2k+1$ avec $k > 0$. En ce qui concerne le cas où $k = 0$ nous proposons le théorème suivant :

Théorème 8 *Etant données une forme quadratique Q définie positive, A et B deux matrices carrées, les deux propositions suivantes sont équivalentes*

- (1) *Le système $\dot{x} = Q(x)Ax + \tilde{u}Bx$ est globalement asymptotiquement stabilisable.*
- (2) *Le système bilinéaire plan $\dot{x} = Ax + \tilde{u}Bx$ est globalement asymptotiquement stabilisable.*

Démonstration (1) \Rightarrow (2) : On montrera plus loin que si le système $\dot{x} = Q(x)Ax + \tilde{u}Bx$ est globalement asymptotiquement stabilisable alors il existe un feedback quadratique $u(x)$ tel que le système suivant:

$$\dot{x} = Q(x)Ax + u(x)Bx \tag{I}$$

est globalement asymptotiquement stable. En vertu du théorème-1, on peut déduire qu'il existe une fonction de Lyapunov stricte V pour le système (I).
Soit

$$\tilde{u}(x) = \frac{u(x)}{Q(x)},$$

comme $u(x)$ et $Q(x)$ sont deux formes quadratiques il s'ensuit que le champ de vecteurs $Ax + \tilde{u}(x)Bx$ est continu sur R^2 . On peut aussi voir facilement que V est une fonction de Lyapunov stricte pour le système $\dot{x} = Ax + \tilde{u}(x)Bx$.

(2) \Rightarrow (1) : Réciproquement si le système bilinéaire plan $\dot{x} = Ax + \tilde{u}Bx$ est globalement asymptotiquement stabilisable, alors il existe un feedback $\tilde{u}(x)$ qui rend le système

$$\dot{x} = Ax + \tilde{u}Bx$$

globalement asymptotiquement stable. Comme $Q(x)$ est une forme quadratique définie positive alors, il est facile de voir que le système $\dot{x} = Q(x)(Ax + \tilde{u}(x)Bx)$ est G.A.S.
Le théorème est ainsi démontré. ■

2.3 Classification et stabilisation

Dans tous ce qui suit, nous nous plaçons dans une base de Jordan de B .

2.3.1 Cas où B est diagonalisable

Dans la base propre de B , on a

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

On distingue les trois cas suivants

1^{er} Cas $\det B > 0$:

Le problème de la stabilisation en boucle fermée du système (2.1) est complètement résolu par le théorème suivant.

Théorème 9 *Si B est diagonalisable et $\det B = \lambda_1 \lambda_2 > 0$ alors pour une constante positive δ suffisamment grande le feedback*

$$u(x_1, x_2) = -\epsilon \delta (x_1^2 + x_2^2)^k \quad \text{où } \epsilon = \frac{|\lambda_1|}{\lambda_1} = \text{signe}(\lambda_1)$$

stabilise le système (2.1)

Démonstration Soit V la fonction définie par

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2} (|\lambda_2| x_1^2 + |\lambda_1| x_2^2)$$

V est une fonction définie positive et propre. Sa dérivée le long des trajectoires du système bouclé (2.1) est donnée par

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, x_2) &= |\lambda_2| x_1 P_1(x_1, x_2) + |\lambda_1| x_2 P_2(x_1, x_2) - \delta \lambda_1 \lambda_2 (x_1^2 + x_2^2)^{k+1} \\ &= (x_1^2 + x_2^2)^{k+1} \left[-\lambda_1 \lambda_2 \delta + \frac{|\lambda_2| x_1 P_1 + |\lambda_1| x_2 P_2}{(x_1^2 + x_2^2)^{k+1}} \right] \end{aligned}$$

il est clair que pour une constante positive δ suffisamment grande, on a

$$\dot{V}(x_1, x_2) < 0 \quad \forall (x_1, x_2) \neq (0, 0)$$

en effet l'application $x \mapsto \frac{|\lambda_2| x_1 P_1 + |\lambda_1| x_2 P_2}{(x_1^2 + x_2^2)^{k+1}}$ est homogène de degré zéro et bornée

sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Ceci prouve que l'origine est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable pour le système bouclé (2.1).

■

2^{ème} Cas det B < 0 :

Dans ces conditions on peut supposer que le système (2.1) s'écrit

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = P_1(x_1, x_2) + u\lambda_1 x_1 \\ \dot{x}_2 = P_2(x_1, x_2) + u\lambda_2 x_2 \end{cases} \quad (2.4)$$

avec $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 < 0$. Soit F la fonction définie par

$$F(x_1, x_2) = -\det \begin{pmatrix} P_1(x_1, x_2) & \lambda_1 x_1 \\ P_2(x_1, x_2) & \lambda_2 x_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 x_1 P_2(x_1, x_2) - \lambda_2 x_2 P_1(x_1, x_2)$$

$F(x_1, x_2)$ est un polynôme homogène de degré $2k + 2$. Le théorème suivant énonce un résultat de non stabilisabilité.

Théorème 10 *Si la fonction F ne vérifie pas l'une des deux conditions suivantes :*

(i) *il existe $c > 0$ tel que $F(1, c) < 0$.*

(ii) *il existe $d < 0$ tel que $F(1, d) > 0$,*

alors, le système (2.4) n'est pas asymptotiquement contrôlable à l'origine.

Démonstration Dans un premier temps on suppose que la condition (i) n'est pas réalisée, c'est à dire

$$F(1, \xi) \geq 0 \quad \forall \xi > 0.$$

Considérons la fonction H_1 définie dans le premier quadrant par

$$H_1(x_1, x_2) = x_1^{-\lambda_2} x_2^{\lambda_1}.$$

Pour tout contrôle admissible, la dérivée de H_1 le long des trajectoires du système (2.4) est

$$\begin{aligned} \dot{H}_1(x_1, x_2) &= x_1^{-\lambda_2-1} x_2^{\lambda_1-1} (\lambda_1 x_1 P_2(x_1, x_2) - \lambda_2 x_2 P_1(x_1, x_2)) \\ &= x_1^{-\lambda_2-1} x_2^{\lambda_1-1} F(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Comme $F(x_1, x_2)$ est une fonction homogène de degré $2k + 2$ alors pour $x_2 > 0$ et $x_1 > 0$ on a $F(x_1, x_2) = x_1^{2k+2} F(1, \frac{x_2}{x_1}) \geq 0$, ce qui prouve que $\dot{H}_1(x_1, x_2)$ est de signe constant quand x_1 et x_2 sont tout les deux positifs. Par conséquent, la région du plan définie par

$$R_c = \{(x_1, x_2) / x_1 > 0, x_2 > 0, x_1^{-\lambda_2} x_2^{\lambda_1} > c\} \quad (c > 0)$$

est stable par le champ de vecteurs $P(x) + uBx$ et par suite le système (2.4) n'est pas asymptotiquement contrôlable à l'origine.

Supposons maintenant que (ii) n'est pas réalisée (i.e., $F(1, \xi) \leq 0 \quad \forall \xi < 0$) et soit H_2 la fonction définie dans le deuxième quadrant par

$$H_2(x_1, x_2) = x_1^{-\lambda_2} (-x_2)^{\lambda_1}; \quad x_1 > 0 \text{ et } x_2 < 0$$

Des calculs analogues montrent que la dérivée de H_2 le long des trajectoires du système bouclé est donnée par

$$\begin{aligned} \dot{H}_2(x_1, x_2) &= -x_1^{-\lambda_2-1} (-x_2)^{\lambda_1-1} (\lambda_1 x_1 P_2(x_1, x_2) - \lambda_2 x_2 P_1(x_1, x_2)) \\ &= -x_1^{-\lambda_2-1} (-x_2)^{\lambda_1-1} F(x_1, x_2) \end{aligned}$$

et comme précédemment on peut encore déduire que l'origine ne pourra être accessible ni asymptotiquement accessible à partir du deuxième quadrant.

Ce qui termine la démonstration du théorème. ■

Par la suite, nous allons prouver que les deux conditions (i) et (ii) sont des conditions suffisantes pour assurer la stabilisabilité du système (2.4). L'idée consiste à construire dans des situations différentes des feedbacks homogènes qui permettent de guider les orbites du système (2.4) vers des axes de stabilités (i.e., les axes où la fonction caractéristique du système bouclé (2.4) est nulle). Ces axes sont eux même invariants et stables le long des trajectoires de (2.4).

Durant toute cette partie ($\det(B) < 0$) nous allons supposer que le système (2.4) s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \tilde{P}_1(x_1, x_2) + ax_2^{2k+1} + u\lambda_1 x_1 \\ \dot{x}_2 = bx_1^{2k+1} + x_2 \tilde{P}_2(x_1, x_2) + u\lambda_2 x_2 \end{cases} \quad (2.5)$$

avec $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ et \tilde{P}_1, \tilde{P}_2 sont deux polynômes homogènes du même degré $2k$ ($k \geq 1$).

Théorème 11 *Si les deux conditions (i) et (ii) sont réalisées alors le système (2.5) est stabilisable par un feedback polynomial et homogène de degré $2k$.*

Démonstration Elle découle de façon immédiate des quatres lemmes suivants :

Lemme 1 *Si les conditions (i) et (ii) sont réalisées et si $ab < 0$ alors le feedback polynomial homogène de degré $2k$ défini par*

$$u_1(x) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\tilde{P}_2(x) - \tilde{P}_1(x) + \frac{2b}{c} x_1^{2k} - \frac{b}{c^2} x_1^{2k-1} x_2 + ac^2 x_1 x_2^{2k-1} - 2cax_2^{2k} \right)$$

stabilise le système (2.5).

Démonstration Soit le système bouclé (2.5) défini par

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \tilde{P}_1(x_1, x_2) + ax_2^{2k+1} + u(x_1, x_2)\lambda_1 x_1 = X_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = bx_1^{2k+1} + x_2 \tilde{P}_2(x_1, x_2) + u(x_1, x_2)\lambda_2 x_2 = X_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

et soit F la fonction définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x_1, x_2) &= x_2 X_1(x_1, x_2) - x_1 X_2(x_1, x_2) \\ &= x_1 x_2 \left(\tilde{P}_1(x_1, x_2) - \tilde{P}_2(x_1, x_2) + (\lambda_1 - \lambda_2)u(x_1, x_2) \right) + ax_2^{2k+2} - bx_1^{2k+2} \end{aligned}$$

On trouve

$$\mathcal{F}(x_1, x_2) = (cx_1 - x_2)^2 \left(-\frac{b}{c^2} x_1^{2k} + ax_2^{2k} \right)$$

Comme par ailleurs $\mathcal{F}(1, c) = 0$ il en résulte que $(X_1(1, c), X_2(1, c)) = \nu(1, c)$. D'autre part, on a

$$\begin{aligned} F(1, c) &= -\det \begin{pmatrix} P_1(1, c) & \lambda_1 \\ P_2(1, c) & \lambda_2 c \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} X_1(1, c) & \lambda_1 \\ X_2(1, c) & \lambda_2 c \end{pmatrix} \\ &= -\det \begin{pmatrix} \nu & \lambda_1 \\ \nu c & \lambda_2 c \end{pmatrix} = \nu c (\lambda_1 - \lambda_2) < 0 \end{aligned}$$

ce qui donne successivement

$$\nu = F(1, c)/c(\lambda_1 - \lambda_2) < 0$$

et

$$\langle (X_1(1, c), X_2(1, c))^T \mid (1, c)^T \rangle = \nu(1 + c^2) < 0$$

Les conditions d'application du théorème-7 sont donc réunies et le système (2.5) est globalement asymptotiquement stable à l'origine.

■

Lemme 2 On suppose que la fonction F vérifie les deux propriétés (i) et (ii). Si $ab > 0$ alors le feedback polynomial homogène de degré $2k$ défini par

$$u_2(x) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\tilde{P}_2(x) - \tilde{P}_1(x) + \frac{(d+c)}{dc} bx_1^{2k} - \frac{b}{dc} x_1^{2k-1} x_2 + adcx_1 x_2^{2k-1} - a(d+c)x_2^{2k} \right)$$

stabilise le système (2.5).

Démonstration On considère le système dynamique en temps continu décrit par l'équation différentielle de la forme

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \tilde{P}_1(x_1, x_2) + ax_2^{2k+1} + u_2(x_1, x_2)\lambda_1 x_1 = X_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = bx_1^{2k+1} + x_2 \tilde{P}_2(x_1, x_2) + u_2(x_1, x_2)\lambda_2 x_2 = X_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

Dans le théorème-7, nous avons associé à tout système homogène en temps continu, une application \mathcal{F} appelée la fonction caractéristique. Pour le système bouclé (2.5), cette fonction est définie par

$$\mathcal{F}(x_1, x_2) = x_2 X_1(x_1, x_2) - x_1 X_2(x_1, x_2) = (cx_1 - x_2)(dx_1 - x_2)\left(-\frac{b}{dc}x_1^{2k} + ax_2^{2k}\right).$$

Comme $F(1, c) < 0$, $F(1, d) > 0$, le même raisonnement utilisé dans le lemme précédent, nous permet de montrer que

$$\langle (X_1(1, c), X_2(1, c))^T | (1, c)^T \rangle = \frac{F(1, c)(1 + c^2)}{c(\lambda_1 - \lambda_2)} < 0$$

et

$$\langle (X_1(1, d), X_2(1, d))^T | (1, d)^T \rangle = \frac{F(1, d)(1 + d^2)}{d(\lambda_1 - \lambda_2)} < 0.$$

Ceci prouve que l'origine est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable pour le système bouclé (2.5).

Le lemme est ainsi démontré. ■

Lemme 3 Si les deux conditions (i) et (ii) sont réalisées, si le couple $(a, b) \neq (0, 0)$ et $ab = 0$ alors le système (2.5) est G.A.S.

Démonstration

Dans un premier temps on suppose que $b \neq 0$. On distingue alors les deux cas suivants :

- $b < 0$

Soit δ une constante positive suffisamment grande, alors le feedback défini par

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\tilde{P}_2(x_1, x_2) - \tilde{P}_1(x_1, x_2) + \frac{b}{d}x_1^{2k} - \delta bx_1 x_2^{2k-1} + \delta \frac{b}{d}x_2^{2k} \right)$$

stabilise le système (2.5). En effet si on considère le système bouclé

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \tilde{P}_1(x_1, x_2) + u(x_1, x_2)\lambda_1 x_1 = X_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = bx_1^{2k+1} + x_2 \tilde{P}_2(x_1, x_2) + u(x_1, x_2)\lambda_2 x_2 = X_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

et sa fonction caractéristique $\mathcal{F}(x_1, x_2) = x_2 X_1(x_1, x_2) - x_1 X_2(x_1, x_2)$ il s'ensuit que

$$\mathcal{F}(x_1, x_2) = -\frac{b}{d} x_1 (dx_1 - x_2) (x_1^{2k} + \delta x_2^{2k}).$$

On voit aisément que $\mathcal{F}(1, d) = 0$ et par conséquent $(X_1(1, d), X_2(1, d)) = \nu(1, d)$.
D'autre part on a :

$$\begin{aligned} F(1, d) &= -\det \begin{pmatrix} P_1(1, d) & \lambda_1 \\ P_2(1, d) & \lambda_2 d \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} X_1(1, d) & \lambda_1 \\ X_2(1, d) & \lambda_2 d \end{pmatrix} \\ &= -\det \begin{pmatrix} \nu & \lambda_1 \\ \nu d & \lambda_2 d \end{pmatrix} = \nu d (\lambda_1 - \lambda_2) > 0 \end{aligned}$$

on peut s'assurer que $\nu = F(1, d)/d(\lambda_1 - \lambda_2) < 0$ et

$$\langle (X_1(1, d), X_2(1, d))^T \mid (1, d)^T \rangle = \nu(1 + d^2) < 0.$$

Des calculs directs montrent que

$$\langle (X_1(0, 1), X_2(0, 1))^T \mid (0, 1)^T \rangle = \frac{\lambda_1 \tilde{P}_2(0, 1) - \lambda_2 \tilde{P}_1(0, 1)}{\lambda_1 - \lambda_2} + \delta \frac{b\lambda_2}{d(\lambda_1 - \lambda_2)}.$$

Il s'ensuit que pour une constante positive δ suffisamment grande on a

$$\langle (X_1(0, 1), X_2(0, 1))^T \mid (0, 1)^T \rangle < 0$$

et le résultat découle immédiatement du théorème-7.

- $b > 0$

En utilisant la même démonstration que précédemment on montre que pour une constante positive δ suffisamment grande le feedback suivant

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\tilde{P}_2(x_1, x_2) - \tilde{P}_1(x_1, x_2) + \frac{b}{c} x_1^{2k} - \delta b x_1 x_2^{2k-1} + \delta \frac{b}{c} x_2^{2k} \right)$$

stabilise le système (2.5).

Réciproquement si $a \neq 0$ et $b = 0$ alors le changement de base dont la matrice de passage est

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

transforme le système (2.5) en

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = b x_2^{2k+1} + x_1 \tilde{P}_2(x_2, x_1) + u \lambda_2 x_1 \\ \dot{x}_2 = x_2 \tilde{P}_1(x_2, x_1) + u \lambda_1 x_2 \end{cases}$$

le problème se ramène ainsi au cas précédent ($b \neq 0$).

Ce qui termine la démonstration du lemme. ■

Enfin et pour terminer, nous allons utiliser les mêmes techniques pour montrer le lemme suivant.

Lemme 4 *On suppose maintenant que $(a, b) = (0, 0)$, si les deux conditions (i) et (ii) sont réalisées, alors pour une constante positive δ suffisamment grande, le feedback suivant*

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\tilde{P}_2(x) - \tilde{P}_1(x) + \delta(cx_1 - x_2)^k(dx_1 - x_2)^k \right)$$

stabilise le système (2.5).

Démonstration On considère le système bouclé

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \tilde{P}_1(x_1, x_2) + u(x_1, x_2) \lambda_1 x_1 = X_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = x_2 \tilde{P}_2(x_1, x_2) + u(x_1, x_2) \lambda_2 x_2 = X_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

Compte tenu de ce qui précède, nous allons montrer la stabilité du système bouclé (2.5) en étudiant sa fonction caractéristique donnée par

$$\mathcal{F}(x_1, x_2) = \delta x_1 x_2 (cx_1 - x_2)^k (dx_1 - x_2)^k$$

On peut également vérifier que

$$\langle (X_1(1, d), X_2(1, d))^T | (1, d)^T \rangle < 0, \quad \langle (X_1(1, c), X_2(1, c))^T | (1, c)^T \rangle < 0$$

et pour δ positif suffisamment grand, on a

$$\langle (X_1(0, 1), X_2(0, 1))^T | (0, 1)^T \rangle = \frac{\lambda_1 \tilde{P}_2(0, 1) - \lambda_2 \tilde{P}_1(0, 1)}{\lambda_1 - \lambda_2} + \delta \frac{\lambda_2}{(\lambda_1 - \lambda_2)} < 0$$

ainsi

$$\langle (X_1(1, 0), X_2(1, 0))^T | (1, 0)^T \rangle = \frac{\lambda_1 \tilde{P}_2(1, 0) - \lambda_2 \tilde{P}_1(1, 0)}{\lambda_1 - \lambda_2} + \delta cd \frac{\lambda_1}{(\lambda_1 - \lambda_2)} < 0$$

Il s'ensuit que zéro est un point d'équilibre G.A.S. pour le système bouclé (2.5) ■

3ème Cas- det B = 0 :

Sans perte de généralité, on peut supposer que $\lambda_1 \neq 0$: en effet comme l'une des deux valeurs propres de B est non nulle alors on peut choisir une base propre de B telle que

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

λ_1 désigne la valeur propre non nulle de B . Dans la nouvelle base, le système (2.5) peut s'écrire sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \tilde{P}_1(x_1, x_2) + ax_2^{2k+1} + u\lambda_1 x_1 \\ \dot{x}_2 = bx_1^{2k+1} + x_2 \tilde{P}_2(x_1, x_2) \end{cases} \quad (2.6)$$

Théorème 12 *Supposons que $a = 0$ alors, le système (2.6) est G.A.S. si et seulement si $\tilde{P}_2(0, 1) < 0$.*

Démonstration Dans un sens, c'est presque immédiat car si $a = 0$ alors la droite : $x_1 = 0$ est invariante par le système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \tilde{P}_1(x_1, x_2) + u\lambda_1 x_1 \\ \dot{x}_2 = bx_1^{2k+1} + x_2 \tilde{P}_2(x_1, x_2) \end{cases} \quad (2.7)$$

et sur cette droite l'équation (2.7) est réduite à $\dot{x}_2 = x_2^{2k+1} \tilde{P}_2(0, 1)$. Il en résulte que si $\tilde{P}_2(0, 1) \geq 0$ alors le système (2.6) n'est pas asymptotiquement stable même en boucle ouverte.

Supposons en sens inverse, que $\tilde{P}_2(0, 1) < 0$ et $b \neq 0$ alors le feedback

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{\lambda_1} (\tilde{P}_2(x_1, x_2) - \tilde{P}_1(x_1, x_2))$$

stabilise le système (2.7). En effet des calculs directs donnent

$$\mathcal{F}(x_1, x_2) = -bx_1^{2k} \quad \text{et} \quad \langle (X_1(0, 1), X_2(0, 1))^T | (0, 1)^T \rangle = \tilde{P}_2(0, 1) < 0$$

D'autre part, si $b = 0$ et $\tilde{P}_2(0, 1) < 0$ alors pour une constante positive δ suffisamment grande le feedback

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{\lambda_1} (\tilde{P}_2(x_1, x_2) - \tilde{P}_1(x_1, x_2) - \delta x_1^{2k})$$

stabilise le système (2.7). ■

Supposons maintenant que $a \neq 0$ sans pert de généralité on peut également supposer que $a > 0$: en effet si $a < 0$ alors le changement de base dont la matrice de passage est $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ transforme le système (2.6) en

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \tilde{P}_1(-x_1, x_2) - ax_2^{2k+1} + u\lambda_1 x_1 \\ \dot{x}_2 = -bx_1^{2k+1} + x_2 \tilde{P}_2(-x_1, x_2) \end{cases}$$

Théorème 13 Dans le cas où $a > 0$ le système (2.6) est G.A.S. si et seulement si la condition suivante est réalisée

(*) il existe un $c > 0$ tel que $bc^{2k+1} + \tilde{P}_2(c, 1) < 0$

Démonstration Si la condition (*) n'est pas réalisée alors

$$\forall \xi > 0 \text{ on a } b\xi^{2k+1} + \tilde{P}_2(\xi, 1) \geq 0$$

et par conséquent la région du plan $\mathcal{R} = \{(x_1, x_2) / x_1 \geq 0, x_2 \geq 1\}$, est invariant par le champ de vecteurs $P + uB$, et par suite le système (2.6) n'est pas asymptotiquement contrôlable à l'origine.

Supposons maintenant qu'il existe $c > 0$ tel que $bc^{2k+1} + \tilde{P}_2(c, 1) < 0$

• $b > 0$

Soit $\mathcal{H}(y) = by^{2k+1} + \tilde{P}_2(y, 1) < 0$ comme $\mathcal{H}(y)$ est un polynôme de degré $2k+1$ et $b > 0$ alors il existe $d < 0$ tel que $\mathcal{H}(d) < 0$ et dans ces conditions le feedback

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{\lambda_1} \left(\tilde{P}_2(x) - \tilde{P}_1(x) + b(c+d)x_1^{2k} + \frac{a}{cd}x_1x_2^{2k-1} - bcdx_1^{2k-1}x_2 - \frac{a(c+d)}{cd}x_2^{2k} \right)$$

stabilise le système (2.6). En effet, soit le système bouclé

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1\tilde{P}_1(x_1, x_2) + ax_2^{2k+1} + u(x_1, x_2)\lambda_1x_1 = X_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = bx_1^{2k+1} + x_2\tilde{P}_2(x_1, x_2) = X_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

et soit \mathcal{F} sa fonction caractéristique $\mathcal{F}(x_1, x_2) = x_2X_1(x_1, x_2) - x_1X_2(x_1, x_2)$ on obtient ainsi

$$\mathcal{F}(x_1, x_2) = (x_1 - cx_2)(x_1 - dx_2) \left(-bx_1^{2k} + \frac{a}{cd}x_2^{2k} \right)$$

Nous pouvons constater que $\mathcal{F}(c, 1) = 0$ il s'ensuit que $(X_1(c, 1), X_2(c, 1)) = \nu(c, 1)$ et par conséquent

$$\nu = X_2(c, 1) = bc^{2k+1} + \tilde{P}_2(c, 1) = \mathcal{H}(c) < 0$$

ce qui donne

$$\langle (X_1(c, 1), X_2(c, 1))^T | (c, 1)^T \rangle = \nu(1 + c^2) < 0$$

et de même on montre que

$$\langle (X_1(d, 1), X_2(d, 1))^T | (d, 1)^T \rangle = \mathcal{H}(d)(1 + d^2) < 0$$

• $b < 0$

Soit le feedback

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{\lambda_1} \left(\tilde{P}_2(x_1, x_2) - \tilde{P}_1(x_1, x_2) + 2cbx_1^{2k} + \frac{a}{c^2}x_1x_2^{2k-1} - bc^2x_1^{2k-1}x_2 - 2\frac{a}{c}x_2^{2k} \right)$$

et le système bouclé

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \tilde{P}_1(x_1, x_2) + ax_2^{2k+1} + u(x_1, x_2)\lambda_1 x_1 = X_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = bx_1^{2k+1} + x_2 \tilde{P}_2(x_1, x_2) = X_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

et soit la fonction définie par

$$\mathcal{F}(x_1, x_2) = x_2 X_1(x_1, x_2) - x_1 X_2(x_1, x_2)$$

Des calculs directs montrent que

$$\mathcal{F}(x_1, x_2) = (x_1 - cx_2)^2 (-bx_1^{2k} + \frac{a}{c^2} x_2^{2k})$$

Nous nous retrouvons dans une situation déjà rencontrée

$$\langle (X_1(c, 1), X_2(c, 1))^T | (c, 1)^T \rangle = \mathcal{H}(c)(1 + c^2) < 0$$

et d'après le théorème-7 le système bouclé (2.6) est globalement asymptotiquement stable

- $b = 0$

Sous ces hypothèses on montre que pour une constante positive δ suffisamment grande le feedback suivant

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{\lambda_1} \left(\tilde{P}_2(x_1, x_2) - \tilde{P}_1(x_1, x_2) - \delta x_1^{2k} + \delta c x_1^{2k-1} x_2 - \frac{a}{c} x_2^{2k} \right)$$

stabilise le système (2.6). En effet, soit le système bouclé

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \tilde{P}_1(x_1, x_2) + ax_2^{2k+1} + u(x_1, x_2)\lambda_1 x_1 = X_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = x_2 \tilde{P}_2(x_1, x_2) = X_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

et soit la fonction $\mathcal{F}(x_1, x_2) = x_2 X_1(x_1, x_2) - x_1 X_2(x_1, x_2)$ le calcul donne

$$\mathcal{F}(x_1, x_2) = x_2(x_1 - cx_2) \left(-\delta x_1^{2k} - \frac{a}{c} x_2^{2k} \right)$$

Il est facile de vérifier que

$$\langle (X_1(c, 1), X_2(c, 1))^T | (c, 1)^T \rangle = \mathcal{H}(c)(1 + c^2) < 0$$

et

$$\langle (X_1(1, 0), X_2(1, 0))^T | (1, 0)^T \rangle = \tilde{P}_2(0, 1) - \delta$$

ce qui montre que pour δ positif suffisamment grand on a

$$\langle (X_1(1, 0), X_2(1, 0))^T | (1, 0)^T \rangle < 0$$

■

2.3.2 Cas où B est à valeur propres réelles sans être diagonalisable

Dans la base propre de B on a

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Théorème 14 Si $\text{Tr}(B) \neq 0$ alors pour δ positive suffisamment grande le feedback

$$u(x_1, x_2) = -\lambda\delta(x_1^{2k} + x_2^{2k})$$

stabilise le système (2.1)

Démonstration Soit V la fonction définie par

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(\lambda^2 x_1^2 + x_2^2).$$

V est une fonction définie, positive et propre. La dérivée de V le long des trajectoires du système bouclé $\dot{x} = P(x) + u(x)Bx$ est

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \lambda^2 x_1 P_1(x) + x_2 P_2(x) - \delta \lambda^2 (x_1^{2k} + x_2^{2k})(\lambda^2 x_1^2 + \lambda x_1 x_2 + x_2^2) \\ &= \left[\frac{\lambda^2 x_1 P_1(x) + x_2 P_2(x)}{x_1^{2k} + x_2^{2k}} - \delta \lambda^2 (\lambda^2 x_1^2 + \lambda x_1 x_2 + x_2^2) \right] (x_1^{2k} + x_2^{2k}) \end{aligned}$$

Il est clair que l'application $x \mapsto \frac{\lambda^2 x_1 P_1 + x_2 P_2}{x_1^{2k} + x_2^{2k}}$ est homogène de degré deux. Cependant comme la fonction $x \mapsto \lambda^2 (\lambda^2 x_1^2 + \lambda x_1 x_2 + x_2^2)$ est définie positive il en résulte que pour une constante δ positive suffisamment grande on a

$$\dot{V}(x_1, x_2) < 0 \quad \forall (x_1, x_2) \neq (0, 0). \blacksquare$$

Dans le cas où $\text{Tr}(B) = 2\lambda = 0$ le système (2.1) peut s'écrire

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = P_1(x_1, x_2) + ux_2 \\ \dot{x}_2 = P_2(x_1, x_2) \end{cases} \quad (2.8)$$

Dans cette partie on introduit une nouvelle notation. Soit

$$P_1(x_1, x_2) = x_2 \tilde{P}_1(x_1, x_2) + ax_1^{2k+1} \quad \text{et} \quad P_2(x_1, x_2) = x_2^2 \tilde{P}_2(x_1, x_2) + bx_1^{2k+1} + dx_2 x_1^{2k}$$

où \tilde{P}_1 est un polynôme homogène degré $2k$ et \tilde{P}_2 est un polynôme homogène degré $2k-1$

Théorème 15 Si pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ on a $P_2(\xi, 1) \geq 0$, alors le système (2.8) n'est pas asymptotiquement contrôlable à l'origine.

Démonstration Pour la démonstration il suffit de remarquer que si $P_2(\xi, 1) \geq 0 \forall \xi \in \mathbb{R}$ alors la région du plan de type $\mathcal{P} = \{(x_1, x_2) / x_1, x_2 \geq 1\}$, est stable par le champ de vecteurs $P + uB$ et par conséquent zéro ne peut être ni accessible ni asymptotiquement accessible à partir de n'importe quel point de \mathcal{P} . ■

Par la suite nous allons supposer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $P_2(c, 1) < 0$. Nous allons envisager les deux cas suivants :

1^{er} Cas: $a = 0$

Dans un premier temps on exclut le cas évident où $b = 0$ (en effet si $b = 0$ alors la droite d'équation : $x_2 = 0$ est une droite des points singuliers)

Théorème 16 *supposons qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $P_2(c, 1) < 0$, alors le système (2.8) est G.A.S.*

Démonstration Soit $\delta_2 = -d - 2cb$ et δ_1 une constante qui vérifie

$$\delta_2^2 + 4\delta_1 b < 0$$

et considérons la fonction $g(x_1, x_2) = -bx_1^{2k} + \delta_1 x_1^{2k-2} x_2^2 + \delta_2 x_1^{2k-1} x_2 - \frac{b}{c^2} x_2^{2k}$. Il est à noter que g est une fonction définie. Soit le feedback

$$u(x_1, x_2) = -\tilde{P}_1(x_1, x_2) + x_1 \tilde{P}_2(x_1, x_2) - (bc^2 + 2c\delta_2 - \delta_1) x_1^{2k} + (\delta_2 c^2 - 2c\delta_1) x_1^{2k-1} x_2 + \delta_1 c^2 x_1^{2k-2} x_2^2 - \frac{b}{c^2} x_1^2 x_2^{2k-2} + 2\frac{b}{c} x_1 x_2^{2k-1} - bx_2^{2k}$$

et le système bouclé

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \tilde{P}_1(x_1, x_2) + ux_2 = X_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = x_2^2 \tilde{P}_2(x_1, x_2) + bx_1^{2k+1} + dx_2 x_1^{2k} = X_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

le calcul de sa fonction caractéristique

$$\mathcal{F}(x_1, x_2) = x_2 X_1(x_1, x_2) - x_1 X_2(x_1, x_2)$$

donne

$$\mathcal{F}(x_1, x_2) = (x_1 - cx_2)^2 g(x_1, x_2)$$

il est facile de voir que

$$\langle (X_1(c, 1), X_2(c, 1))^T | (c, 1)^T \rangle = P_2(c, 1)(1 + c^2) < 0$$

Les hypothèses du théorème-7 sont vérifiées et le système (2.8) est G.A.S. ■

2^{ème} Cas : $a \neq 0$

Dans ces conditions le système (2.8) peut s'écrire sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_1^{2k+1} + x_2\tilde{P}_1(x_1, x_2) + ux_2 \\ \dot{x}_2 = bx_1^{2k+1} + x_2(dx_1^{2k} + x_2\tilde{P}_2(x_1, x_2)) \end{cases} \quad (2.9)$$

On a deux cas à étudier

• $b \neq 0$

si on considère une nouvelle paramétrisation dans l'espace des contrôles définie par $u \rightarrow -\tilde{P}_1 + \frac{a}{b}(dx_1^{2k} + x_2\tilde{P}_2) + u$ et après un changement de base de matrice de passage

$T = \begin{pmatrix} 1 & -a/b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ le système devient

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ux_2 \\ \dot{x}_2 = P_2(x_1 + \frac{a}{b}x_2, x_2) \end{cases}$$

et le problème se ramène ainsi au cas précédent ($a=0$)

• $b = 0$

en utilisant le fait que la droite d'équation $x_2 = 0$ est stable par le champ $P(x) + uBx$ on peut déduire que si $a \geq 0$ alors le système (2.9) n'est pas asymptotiquement contrôlable à l'origine.

Théorème 17 *supposons que $a < 0$ et qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $P_2(c, 1) < 0$ alors le système (2.9) est G.A.S.*

Démonstration considérons le feedback définie par

$$u(x_1, x_2) = -\tilde{P}_1(x_1, x_2) + x_1\tilde{P}_2(x_1, x_2) + c(d-a)x_1^{2k} + (a-d)x_1x_2^{2k-1} + c(d-a)x_2^{2k}$$

et le système bouclé (2.9)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_1^{2k+1} + x_2\tilde{P}_1(x_1, x_2) + u(x_1, x_2)x_2 = X_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = dx_2x_1^{2k} + x_2^2\tilde{P}_2(x_1, x_2) = X_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

des calculs locales montrent que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x_1, x_2) &= x_2X_1(x_1, x_2) - x_1X_2(x_1, x_2) \\ &= (a-d)x_2(x_1 - cx_2)(x_1^{2k} + x_2^{2k}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \langle (X_1(1, 0), X_2(1, 0))^T | (1, 0) \rangle &= a < 0, \\ \langle (X_1(c, 1), X_2(c, 1))^T | (c, 1) \rangle &= P_2(c, 1) < 0 \end{aligned}$$

■

2.3.3 Cas où B n'a pas de valeur propre réelle

Nous nous plaçons dans la base de Jordan de B . Dans cette base la matrice B s'écrit

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Théorème 18 *si B n'a pas de valeur propre réelle et si $\text{Tr}(B) \neq 0$ alors pour δ suffisamment grand le feedback*

$$u(x_1, x_2) = -\alpha\delta(x_1^2 + x_2^2)^k$$

rend le système (2.1) G.A.S.

Démonstration Pour la démonstration il suffit de remarquer que pour δ positif suffisamment grand l'application $V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ est une fonction de Lyapunov stricte pour le système bouclé (2.1)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = P_1(x_1, x_2) + u(\alpha x_1 + \beta x_2) \\ \dot{x}_2 = P_2(x_1, x_2) + u(-\beta x_1 + \alpha x_2) \end{cases}$$

En effet la dérivée de V le long des trajectoires du champ de vecteurs $P(x) + u(x)Bx$ est

$$\dot{V}(x_1, x_2) = x_1 P_1(x_1, x_2) + x_2 P_2(x_1, x_2) - \delta \alpha^2 (x_1^2 + x_2^2)^{k+1}$$

■

Supposons maintenant que $\text{Tr} B = 0$, sous ces hypothèses nous pouvons écrire le système (2.1) sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = P_1(x_1, x_2) + u\beta x_2 \\ \dot{x}_2 = P_2(x_1, x_2) - u\beta x_1 \end{cases} \quad (2.10)$$

Soit F la fonction définie par

$$F(x_1, x_2) = x_1 P_1(x_1, x_2) + x_2 P_2(x_1, x_2)$$

Nous avons le résultat suivant :

Théorème 19 *le système (2.10) est stabilisable par feedback homogène de degré $2k$ si et seulement si la condition suivante est réalisée*
il existe $(c, d) \in \mathbb{R}^2$ tel que $F(c, d) < 0$ (α)

Démonstration

Supposons que la condition (α) n'est pas réalisée c'est à dire $\forall(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$ on a $F(\xi_1, \xi_2) \geq 0$

et considérons la fonction définie par

$$V(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2)/2.$$

V est définie, positive et propre. Le calcul de la dérivée de Lie de V par rapport au champ de vecteur $P(x) + uBx$ donne

$$\dot{V}(x(t)) = F(x(t)) \geq 0$$

il est alors évident que le système (2.10) n'est pas stabilisable même en boucle ouverte.

Reciproquement supposons qu'il existe $(c, d) \in \mathbb{R}^2$ tel que $F(c, d) < 0$ et soit \mathcal{G} le polynôme homogène de degré $2k+2$ définie par $\mathcal{G}(x_1, x_2) = x_2P_1(x_1, x_2) - x_1P_2(x_1, x_2)$. et si on considère la division Euclidienne dans $\mathbb{R}[(x_1, x_2)]$ de \mathcal{G} par $x_1^2 + x_2^2$. Alors il existe deux constantes a, b et un polynôme Q homogène de degré $2k$ tels que

$$\mathcal{G}(x_1, x_2) = Q(x_1, x_2) (x_1^2 + x_2^2) + ax_2^{2k+2} + bx_1x_2^{2k+1}$$

Soit $l_1 = \frac{ac^2 - 2bcd - ad^2}{(c^2 + d^2)^2}$, $l_2 = \frac{bc^2 + 2acd - bd^2}{(c^2 + d^2)^2}$ et δ une constante suffisamment grande telle que $\Psi(x_1, x_2) = \delta(x_1^2 + x_2^2)^k + l_1x_2^{2k} + l_2x_1x_2^{2k-1}$ soit définie. Pour montrer que la condition (2.10) est suffisante pour la stabilité des systèmes de la forme (2.10) on propose de prouver que le feedback suivant

$$u(x) = \frac{1}{\beta} \left(-Q(x) + \delta(dx_1 - cx_2)^2 (x_1^2 + x_2^2)^{k-1} + l_2d^2x_1x_2^{2k-1} + (l_1d^2 - 2l_2dc)x_2^{2k} \right)$$

stabilise le système (2.10). En effet soit le système bouclé

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = P_1(x_1, x_2) + u(x_1, x_2)\beta x_2 = X_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = P_2(x_1, x_2) - u(x_1, x_2)\beta x_1 = X_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

et soit \mathcal{F} la fonction définie par $\mathcal{F}(x_1, x_2) = x_2X_1(x_1, x_2) - x_1X_2(x_1, x_2)$ on trouve

$$\mathcal{F}(x_1, x_2) = (dx_1 - cx_2)^2 \Psi(x_1, x_2)$$

Il est facile de vérifier que

$$\langle (X_1(c, d), X_2(c, d))^T | (c, d)^T \rangle = F(c, d) < 0$$

et par suite le système (2.10) est G.A.S. ■

2.4 Stabilisation Locale des Systèmes non Linéaires

On considère le système non linéaire défini dans un voisinage de l'origine dans \mathbb{R}^n .

$$\dot{x} = f(x) + ug(x) \quad (2.11)$$

où f et g sont deux fonctions telles que $f(0) = g(0) = 0$

Definition

Une fonction p est dite positivement homogène de degré $m \geq 0$, si et seulement si quelque soit x un élément de \mathbb{R}^n et pour tout réel positif λ on a :

$$p(\lambda x) = \lambda^m p(x)$$

On suppose que, $Df_0 \equiv 0$ et $D^i f_0 \equiv 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, 2k\}$ alors, comme $f(0) = 0$ et $g(0) = 0$, on peut alors écrire

$$f(x) = D^{2k+1} f_0 x^{2k+1} + f_1(x)$$

et

$$g(x) = Dg_0 x + g_1(x)$$

avec

$$\|f_1(x)\| \leq M_1 \|x\|^{2k+1} \quad \text{et} \quad \|g_1(x)\| \leq M_2 \|x\| \quad \forall x \in U' \subset U$$

On considère le système suivant :

$$\dot{x} = P(x) + uBx \quad (2.12)$$

où P et B sont définies par

$$P = D^{2k+1} f_0 \quad \text{et} \quad B = Dg_0$$

Par la suite on montre le théorème suivant

Théorème 20 *Si le système (2.12) est stabilisable par un feedback positivement homogène de degré $2k$, alors le système (2.11) est localement asymptotiquement stable.*

Démonstration Soit $u = u(x)$ le feedback positivement homogène de degré $2k$ qui stabilise le système (2.12), et soit $\varphi(x) = P(x) + u(x)Bx$ et $\phi(x) = f_1(x) + u(x)g_1(x)$. Comme par ailleurs u est de classe C^1 sur $U' \setminus \{0\}$, on peut voir que φ et ϕ sont localement lipschitziennes. D'autre part, on a

$$|u(x)| \leq M_0 \|x\|^{2k}$$

On obtient ainsi φ est positivement homogène de degré $2k+1$ et ϕ satisfait

$$\|\phi(x)\| \leq (M_1 + M_0M_2)\|x\|^{2k+1}, \quad \forall x \in U'$$

$$\|\phi(x)\| \leq M\|x\|^{2k+1}, \quad \forall x \in U'$$

avec $M = M_1 + M_0M_2$. En vertu du théorème de Massera [34], la solution $x = 0$ du système $\dot{x} = \varphi(x) + \phi(x)$ est asymptotiquement stable. Ainsi le système (2.11) est localement asymptotiquement stable. ■

3

Observateur et Stabilisation Des Systèmes Bilineaires

3.1 Introduction

Etant donné un système de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (\Gamma)$$

Un problème important de l'automatique est celui de la stabilisation par retour d'état du système $\dot{x} = f(x, u)$. Plusieurs auteurs ont abordé ce sujet en cherchant un feedback $x \rightarrow u(x)$ suffisamment régulier pour que le système bouclé $\dot{x} = f(x, u(x))$ soit globalement asymptotiquement stable.

Cependant le feedback $u(x)$ ne permet pas de stabiliser le système lorsqu'on ne connaît pas l'état $x(t)$. On est donc amené à construire un observateur ($\hat{\Gamma}$), c'est à dire un système dynamique qui produit une estimation de l'état basée sur des observations passées à tout instant.

Dans le cas où le système n'est pas observable pour toute entrée, il existe des entrées qui n'arrivent pas à distinguer deux états distincts. Pour de telles entrées l'observateur ($\hat{\Gamma}$) ne converge pas. Ces mauvaises entrées constituent la singularité du Problème. Il faut donc que le feedback $u(x)$ soit "relativement séparé" de ces mauvaises entrées.

On considère le système bilinéaire plan non observable pour toute entrée

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + uBx \\ y = Cx \\ x \in \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, C = (c_1, c_2) \text{ et } A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \end{cases} \quad (\Sigma)$$

Dans cette partie nous montrons que si le système bilinéaire plan (Σ) est globalement asymptotiquement stabilisable (sauf dans un cas dégénéré) alors, il existe un feedback homogène $u(x)$ tel que le système

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = (A + u(\hat{x})B)\hat{x} - S_t^{-1} {}^T C C e \\ \dot{e} = (A + u(\hat{x})B - S_t^{-1} {}^T C C)e \\ e(t) = \hat{x}(t) - x(t) \end{cases} \quad (\Sigma, O)$$

(la matrice $S(t)$ est la solution de l'équation $\dot{S}_t = -\theta S_t - {}^T(A + uB)S_t - S_t(A + uB) + {}^T C C$ avec S_0 est définie positive) soit globalement asymptotiquement stable.

En d'autres termes nous examinons la stabilisabilité du système (Σ) par une commande fonction de l'état estimé par l'observateur de Kalman (Σ, O) .

3.2 Résultat Principal

Dans le cas où le système (Σ) n'est pas observable pour toute entrée, en général il existe une seule entrée constante u_b qui ne permet pas de distinguer deux états distincts. Cette mauvaise entrée vérifie l'équation linéaire

$$\det \begin{pmatrix} C \\ C(A + u_b B) \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{II})$$

En effet, soit $u_b(t)$ une entrée admissible qui ne distingue pas deux états distincts, alors il existe deux états x_0 et y_0 tels que $x_0 \neq y_0$ et

$$C\Phi_{u_b}(t)x_0 = C\Phi_{u_b}(t)y_0 \quad \forall t \geq 0 \quad (4)$$

où $\Phi_{u_b}(t)$ désigne la matrice fondamentale de l'équation $\dot{x} = (A + u_b(t)B)x$, définie par

$$\frac{d\Phi_{u_b}(t)}{dt} = (A + u_b(t)B)\Phi_{u_b}(t) \text{ avec } \Phi_{u_b}(0) = Id$$

Il découle de (4) que $\forall t \geq 0$ on a $\Phi_{u_b}(t)(x_0 - y_0) \in \text{Ker}(C)$. De plus, en dérivant (4) par rapport au temps, on trouve

$$C(A + u_b(t)B)\Phi_{u_b}(t)x_0 = C(A + u_b(t)B)\Phi_{u_b}(t)y_0, \quad \forall t \geq 0$$

et par suite $\Phi_{u_b}(t)(x_0 - y_0) \in \text{Ker}(C(A + u_b(t)B))$. Ainsi, en posant

$$M(t) = \begin{pmatrix} C \\ C(A + u_b(t)B) \end{pmatrix}$$

on a $\Phi_{u_b}(t)(x_0 - y_0) \in \text{Ker}(M(t))$, $\forall t > 0$. Il s'ensuit alors que $\det M(t) = 0$ d'où $u_b(t) = \text{constante} = u_b$ telle que

$$\det \begin{pmatrix} C \\ C(A + u_b B) \end{pmatrix} = 0$$

Définition 17

On dit que le feedback $u(x)$ est "relativement séparé" de la mauvaise entrée u_b s'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que

$$u(x) \notin]u_b - \varepsilon, u_b + \varepsilon[\quad \forall x \in \mathbb{R}^2$$

Théorème 21 Supposons qu'il existe un feedback $u(x)$ qui stabilise le système (Σ) et qui vérifie les propriétés suivantes

- (i) $u(x)$ est homogène de degré zéro (i.e $u(\lambda x) = u(x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^*$).
- (ii) $u(x)$ est borné et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
- (iii) $u(x)$ est "relativement séparé" de la mauvaise entrée u_b .

Alors la commande u fonction de l'état estimé par (Σ, O) stabilise le système (Σ) .

Démonstration Etant donné un feedback $u(x_1, x_2)$ qui vérifie les deux propriétés (i) et (ii), alors il existe $\delta > 0$ tel que

$$-\delta \leq u(x_1, x_2) \leq u_b - \varepsilon \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{ou bien} \quad u_b + \varepsilon \leq u(x_1, x_2) \leq \delta \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Supposons que $u_b + \varepsilon < u(x_1, x_2) < \delta$, $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ (même démonstration dans le second cas). Le changement de contrôle $\tilde{u} = u - \delta$ transforme le système (Σ) en

$$(\tilde{\Sigma}) \quad \begin{cases} \dot{x} = \tilde{A}x + \tilde{u}Bx \\ y = Cx \end{cases} \quad \text{avec} \quad \tilde{A} = A + \delta B$$

Soit \tilde{u}_b la seule mauvaise entrée de $(\tilde{\Sigma})$ et $\tilde{u}(x_1, x_2)$ le feedback qui stabilise le système $(\tilde{\Sigma})$ alors,

$$\tilde{u}_b = u_b - \delta \quad \text{et} \quad \tilde{u}(x_1, x_2) = u(x_1, x_2) - \delta.$$

Il s'ensuit en particulier que $\tilde{u}(x_1, x_2)$ est homogène de degré zéro tel que

$$|\tilde{u}(x_1, x_2)| \leq |\tilde{u}_b| - \varepsilon < |\tilde{u}_b|.$$

Compte tenu des propriétés de l'Observateur de Kalman (voir § 1.4.1), on a

$$\|e(t)\| < \frac{k}{\gamma \beta_{u_0}} \exp(-\theta t) \quad (4)$$

où β_{u_0} désigne le minimum sur le compact $K_0 = \{u \in L^\infty_{[0, \alpha]} / |u(t)| \leq u_b - \varepsilon\}$ de la fonction $\beta : L^\infty_{[0, \alpha]} \rightarrow \mathbb{R}$ qui a toute entrée admissible $u \in L^\infty_{[0, \alpha]}$ associe la plus petite valeur propre de la matrice

$$\int_0^\alpha {}^T \Phi_{u[\tau]}^{-1}(t - \tau) {}^T C C \Phi_{u[\tau]}^{-1}(t - \tau) d\tau.$$

Montrons que β_{u_0} est strictement positif. Comme $|u(t)| \leq u_b - \epsilon \quad \forall t \in \mathbb{R}$, on peut affirmer que

$$\det \begin{pmatrix} C \\ C(A + u_0(t)B) \end{pmatrix} \neq 0$$

et par suite on a

$$\text{si } x_0 \neq x_1 \text{ alors } \exists t \in [0, \alpha[\text{ tel que } C\Phi_{u_0(t)} x_0 \neq C\Phi_{u_0(t)} x_1$$

Il est alors immédiat de vérifier que la matrice

$$\int_0^\alpha {}^T \Phi_{u_0[\tau]}^{-1}(t - \tau) {}^T C C \Phi_{u_0[\tau]}^{-1}(t - \tau) d\tau$$

est définie positive, ce qui montre que $\beta_{u_0} > 0$.

Par ailleurs comme le système bouclé $\dot{x} = \tilde{A}x + \tilde{u}(x)Bx$ est défini par un champ de vecteurs continu et homogène de degré un, on déduit à partir du théorème-2 qu'il existe une fonction de Lyapunov stricte V homogène telle que

$$1) V(0) = 0 \quad V(x) > 0 \quad \forall x \neq 0 \text{ et } V(x) \rightarrow +\infty \quad \|x\| \rightarrow +\infty$$

$$2) \langle \tilde{A}x + \tilde{u}(x)Bx | V(x) \rangle < 0, \quad \forall x \neq 0 \text{ et les dérivés partielles } \frac{\partial V}{\partial x_i} \text{ sont aussi homogène de degré inférieur au degré de } V.$$

Il s'ensuit qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\left| \frac{\partial V}{\partial x_i} \right| \leq \alpha (1 + V(x))$$

La démonstration du théorème s'achève alors à l'aide des mêmes techniques utilisées par Chabour-Hammouri dans [8]. ■

Exemple 1 On considère le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + uBx \\ y = Cx \end{cases} \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } C = (1, 3)$$

Il est à noter que ce système n'est pas stabilisable par un feedback continu en zéro. comme (A, C) n'est pas observable, il s'ensuit que $u_b = 0$ est la seule mauvaise entrée. On montrera plus loin que le feedback

$$u(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \frac{-3(14\hat{x}_1^2 + 50\hat{x}_1\hat{x}_2 + 207\hat{x}_2^2)}{2\hat{x}_1^2 - 2\hat{x}_1\hat{x}_2 + 15\hat{x}_2^2}$$

Stabilise le système (Σ) , où (\hat{x}_1, \hat{x}_2) désigne une estimation de l'état donnée par l'observateur de Kalman.

3.3 Etude de la Stabilité du Système (Σ) à travers un Observateur

Dans tout ce qui suit nous nous plaçons dans la base de Jordan de B .

Remarque On s'intéresse au cas où (Σ) n'est pas stabilisable par feedback constant. En effet si le système est stabilisable par feedback constant alors il existe tout un intervalle J tel que $\forall u_0 \in J$ les deux valeurs propres de $A + u_0 B$ sont à parties réelle strictement négatives, et les conditions d'application du théorème-21 sont réunies.

3.3.1 Cas où B est à valeur propres réelles sans être diagonalisable

Dans une base de Jordan de B on a

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{et } C = (c_1, c_2)$$

Tenant compte de ce qui précède et de la classification algébrique des systèmes bilinéaires plan donnée dans [9], les deux cas critiques possibles sont :

- i- $\text{Tr}(A) > 0$, $\text{Tr}(B) = 0$ et $\text{Tr}(AB) \neq 0$.
- ii- $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B) = 0$ et $\text{Tr}(AB) = c \neq 0$.

Théorème 22 Si l'une des deux conditions (i) ou (ii) est réalisée, alors le système (Σ) est stabilisable par une commande fonction de l'état estimé par (Σ, O).

Preuve Dans un premier temps on suppose que la condition (i) est réalisée. On considère les deux fonctions suivantes

$$P(x) = 26c^2 x_1^2 + (88ac + 140cd)x_1 x_2 + \left(\frac{849}{2} d^2 + 709ad + \frac{621}{2} a^2 \right) x_2^2,$$

$$Q(x) = (cx_1 - (d + 2a)x_2)^2 + \frac{29}{4}(d + a)^2 x_2^2,$$

la fonction définie positive donnée par

$$V(x) = \left(c^2 x_1^2 - \frac{dc + 5ac}{2} x_1 x_2 - \left(\frac{17}{2} a^2 + \frac{39}{2} da + 10d^2 \right) x_2^2 \right)^2 + \frac{133}{4} \left(\frac{d^2 - a^2}{2} x_2^2 + c(d + a)x_1 x_2 \right)^2$$

ainsi que le feedback homogène de degré zéro défini par

$$u(x) = -b - \frac{(a - d)^2}{4c} - \frac{(d + a)^2 P(x)}{4cQ(x)}$$

On vérifie aisément que V est définie positive et propre. Sa dérivée le long des trajectoires du système bouclé (Σ) est donnée par

$$\dot{V}(x) = \frac{-(a+d)D(x)R(x)}{Q(x)}$$

avec

$$R(x) = \left(cx_1 + \frac{d-a}{2}x_2 \right)^2 + \frac{19}{2}(a+d)^2x_2^2$$

et

$$D(x) = \left(c^2x_1^2 - (cd + 3ac)x_1x_2 - \left(\frac{33}{4}a^2 + \frac{39}{2}ad + \frac{41}{4}d^2 \right) x_2^2 \right)^2 + 33 \left(\frac{d^2 - a^2}{2}x_2^2 + c(d+a)x_1x_2 \right)^2$$

Par ailleurs comme la seule mauvaise entrée (quand elle existe) vérifie l'équation (II), il s'ensuit alors que

1) Si $c_1 = 0$, alors le système (Σ) est observable pour toute entrée.

2) Si $c_1 \neq 0$, alors $u_b = -b - \frac{(a-d)^2}{4c} + c \left(\frac{c_2}{c_1} + \frac{(a-d)}{2c} \right)^2$.

D'un autre côté, il est facile de vérifier que

$$P(x) - Q(x) = 25 \left(cx_1 + \frac{(71d + 46a)}{25}x_2 \right)^2 + \frac{21461}{100}(a+d)^2x_2^2$$

est définie positive, et par conséquent

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 1, \forall x \neq 0.$$

Ainsi, si $Tr(AB) = c > 0$, alors $c \left(\frac{c_2}{c_1} + \frac{(a-d)}{2c} \right)^2 \geq 0$

et en utilisant le fait que pour tout $x \neq 0$ on a $\frac{P(x)}{Q(x)} > 1$ on obtient

$$\begin{aligned} -\frac{(d+a)^2P(x)}{4cQ(x)} - b - \frac{(a-d)^2}{4c} &< -\frac{(d+a)^2}{4c} - b - \frac{(a-d)^2}{4c} \\ &< -b - \frac{(a-d)^2}{4c} + c \left(\frac{c_2}{c_1} + \frac{(a-d)}{2c} \right)^2 \end{aligned}$$

et par conséquent

$$u(x) < -\frac{(d+a)^2}{4c} - b - \frac{(a-d)^2}{4c} < u_b.$$

Les mêmes arguments permettent d'établir que si $Tr(AB) = c < 0$, alors

$$u(x) > -\frac{(d+a)^2}{4c} - b - \frac{(a-d)^2}{4c} > u_b$$

Supposons maintenant que $Tr(A) = Tr(B) = 0$ et $Tr(AB) = c \neq 0$, dans ces conditions on a

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } C = (c_1, c_2) \text{ avec } c \neq 0$$

Le changement de contrôle

$$\tilde{u}(x) = u(x) + \frac{a^2 + bc + 1}{c}$$

transforme le système (Σ) en

$$\begin{cases} \dot{x} = (\tilde{A} + \tilde{u}B)x \\ y = Cx \end{cases} \text{ avec } \tilde{A} = \begin{pmatrix} a & -\frac{a^2+1}{c} \\ c & -a \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de \tilde{A} est égal à $X^2 + 1$, et par conséquent la forme quadratique définie positive

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(c^2 x_1^2 - 2acx_1 x_2 + (a^2 + 1)x_2^2)$$

est une intégrale première pour le champ \tilde{A} . De plus le rang de la famille $\{Bx, adA. Bx, ad^2 A. Bx\}$ est égale à deux en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Il est alors facile de vérifier que pour une constante positive δ le feedback :

$$\tilde{u}(x) = -\frac{L_B V(x)}{\delta V(x_1, x_2)} = \frac{-c^2 x_1 x_2 + acx_2^2}{\delta V(x_1, x_2)}$$

stabilise le système (Σ).

Comme précédemment on a

1) Si $c_1 = 0$, alors le système (Σ) est observable pour toute entrée.

2) Si $c_1 \neq 0$, alors $\tilde{u}_b = c \left(\left(\frac{c_2}{c_1} + \frac{a}{c} \right)^2 + 1/c^2 \right) \neq 0$ et pour une constante positive δ suffisamment grande on a

$$|\tilde{u}(x)| < \frac{|\tilde{u}_b|}{2} < |\tilde{u}_b| \quad \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

Les conditions d'application du théorème-21 sont donc réunies et le système ($\Sigma, 0$) est globalement asymptotiquement stable. ■

3.3.2 Cas où B n'a pas de valeur propre réelle

Nous nous plaçons dans la base de Jordan de B . Dans cette base les deux matrices A et B s'écrivent

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ -\mu & \lambda \end{pmatrix}.$$

Afin d'aboutir à une écriture plus simple du système (Σ) , on utilise le changement de coordonnées dont la matrice de passage est

$$T = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ -e_2 & e_1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } e_1 = (a-d) - \sqrt{(b+c)^2 + (a-d)^2} \quad \text{et } e_2 = b+c$$

Dans la nouvelle base la matrice B reste inchangée et A devient

$$A = \begin{pmatrix} \tilde{a} & (b-c)/2 \\ (c-b)/2 & \tilde{d} \end{pmatrix} \quad \text{avec } \begin{aligned} \tilde{a} &= (ae_1^2 + (c+b)e_1e_2 + de_2^2)/(e_1^2 + e_2^2) \\ \tilde{d} &= (ae_2^2 - (c+b)e_1e_2 + de_1^2)/(e_1^2 + e_2^2) \end{aligned}$$

L'unique situation critique est alors caractérisée par

$$(i) \quad \text{Tr}(A) \geq 0 \quad \text{Tr}(B) = 0 \quad \text{et} \quad -\tilde{a}\tilde{d} = (b+c)^2 - 4ad > 0$$

Théorème 23 *Sous l'hypothèse (i), les feedbacks suivants*

$$u(x_1, x_2) = \frac{t_1x_1^2 + (\tilde{d} - \tilde{a})x_1x_2 + t_2x_2^2}{\mu(x_1^2 + x_2^2)} + \frac{c-b}{2\mu} \quad \text{avec } t_1 > 0 \quad t_2 > 0 \quad \text{et} \quad \tilde{d}\sqrt{\frac{t_1}{t_2}} + \tilde{a} > 0$$

stabilisent le système (Σ) .

Démonstration On considère le système bouclé

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1(x_1, x_2) \\ Y_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} = (x_1^2 + x_2^2) \left[A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + u(x_1, x_2) B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right] \quad (5)$$

Y est un champ de vecteurs homogène de degré trois. Comme la fonction $(x_1^2 + x_2^2)$ est définie positive, alors il est immédiat de vérifier qu'il y a une équivalence entre la stabilité du système (Σ) et celle de l'équation (5).

Soit F la fonction définie par

$$F(x) = x_1Y_2(x_1, x_2) - x_2Y_1(x_1, x_2).$$

Un calcul direct donne

$$F(x_1, x_2) = -(t_1x_1^2 + t_2x_2^2)(x_1^2 + x_2^2).$$

Il est trivial que la fonction F est définie négative. On peut alors invoquer le théorème de Cemina et LLibre [7] pour déduire que le système (5) est globalement asymptotiquement stable si et seulement si l'intégrale

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Y_1(1, x)}{F(1, x)} dx$$

est strictement négative. Un simple calcul donne

$$J = -\frac{\pi}{t_2} \frac{\tilde{d}t + \tilde{a}}{t(t+1)} \quad \text{avec} \quad t = \sqrt{\frac{t_1}{t_2}}$$

et conduit au résultat. ■

Théorème 24 *Si la condition (i) est réalisée, alors le système (Σ) est stabilisable par une commande fonction de l'état estimé par (Σ, O).*

Démonstration Compte tenu de ce qui précède, il existe une seule mauvaise entrée u_b constante qui ne distingue pas deux points distincts. Cependant, pour deux constantes positives t_1 et t_2 suffisamment grandes telles que $\tilde{d}\sqrt{\frac{t_1}{t_2}} + \tilde{a} > 0$, on a

$$|u(x_1, x_2)| \geq |u_b| + 1.$$

Les conditions d'application du théorème-21 sont donc réunies et le système (Σ, O) est globalement asymptotiquement stable. ■

3.3.3 Cas où B est diagonalisable

Dans la base propre de B , on a

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{et } C = (c_1, c_2).$$

Distinguons le cas où $\det B$ égal à zéro de celui où il est différent de zéro. Dans le second cas la seule situation critique est :

i) $\det(B) < 0$ et $bc < 0$

Si on considère le changement de base dont la matrice de passage est

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{-bc} & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

et si on considère une nouvelle paramétrisation dans l'espace de contrôle définie par $u \mapsto \frac{a-d}{\lambda_2 - \lambda_1} + u$, le système (Σ) devient

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= \tilde{a}x_1 + \tilde{c}x_2 + u\lambda_1x_1 \\ \dot{x}_2 &= -\tilde{c}x_1 + \tilde{a}x_2 + u\lambda_2x_2 \\ y &= c_1x_1 + c_2x_2 \end{cases}$$

avec $\tilde{c} = \sqrt{-bc}$ et $\tilde{a} = \frac{d\lambda_1 - a\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \geq 0$.

Théorème 25 Soit $t = \sqrt{\frac{2}{27r}} \sqrt{33r - 1 + 33r^2 - r^3 + (1 + 14r + r^2)^{3/2}}$.

Supposons que la condition (i) est réalisée, alors les feedbacks suivants

$$a) u_1(x_1, x_2) = \frac{\tilde{c}t}{(\lambda_1 - \lambda_2)} \frac{x_2^2}{(x_2^2 + rx_1^2)} \quad \text{avec } r > \frac{(\tilde{c} + \tilde{a})^2(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{\tilde{c}^2\lambda_2^2}.$$

$$b) u_2(x_1, x_2) = -\frac{\tilde{c}t}{(\lambda_1 - \lambda_2)} \frac{x_1^2}{(x_1^2 + rx_2^2)} \quad \text{avec } r > \frac{(\tilde{c} + \tilde{a})^2(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{\tilde{c}^2\lambda_1^2}.$$

stabilisent le système (Σ) .

Démonstration On considère le champ de vecteurs homogène de degré trois

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} Y_1 = (x_2^2 + rx_1^2)(\tilde{a}x_1 + \tilde{c}x_2 + u_1(x_1, x_2)\lambda_1x_1) \\ Y_2 = (x_2^2 + rx_1^2)(-\tilde{c}x_1 + \tilde{a}x_2 + u_2(x_1, x_2)\lambda_2x_2) \end{cases}$$

et la fonction définie par

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2) &= x_1Y_2(x_1, x_2) - x_2Y_1(x_1, x_2) \\ &= -\tilde{c}(rx_1^4 + (r+1)x_1^2x_2^2 + tx_1x_2^3 + x_2^4). \end{aligned}$$

$F(x_1, x_2)$ est une fonction homogène de degré quatre. En vue d'étudier F on commence par rappeler le résultat suivant sur les fonctions homogènes de degré quatre (voir [7]). Soit ψ la fonction définie par

$$\psi(x_1, x_2) = a_0x_1^4 + 4a_1x_1^3x_2 + 6a_2x_1^2x_2^2 + 4a_3x_1x_2^3 + a_4x_2^4$$

on pose

$$\begin{aligned} i_\psi &= a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2 \\ j_\psi &= a_0a_2a_4 + 2a_1a_2a_3 - a_1^2a_4 - a_0a_3^2 - a_2^3 \\ D_\psi &= i_\psi^2 - 27j_\psi^2 \\ H_\psi &= \frac{1}{3^24^2} \begin{vmatrix} \psi_{xx} & \psi_{xy} \\ \psi_{xy} & \psi_{yy} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

où ψ_{xx}, ψ_{xy} et ψ_{yy} désignent les dérivées partielles de second ordre de la fonction ψ . On peut alors énoncer le théorème suivant

Théorème 26 (Cima et Llibre) [7] *Pour une fonction ψ polynomiale et homogène de degré quatre il existe une transformation $\sigma \in GL(2, \mathbb{R})$ qui transforme ψ en l'une des dix formes canoniques suivantes :*

I. $\psi(x_1, x_2) = x_1^4 + 6\mu x_1^2x_2^2 + x_2^4$, $\mu < -\frac{1}{3}$ avec $D_\psi > 0, H_\psi < 0, 12H_\psi^2 - i_\psi\psi^2 > 0$.

II. $\psi(x_1, x_2) = \alpha(x_1^4 + 6\mu x_1^2x_2^2 + x_2^4)$, $|\alpha| = 1$, $\mu > -\frac{1}{3}$, $\mu \neq \frac{1}{3}$ avec $D_\psi > 0, \alpha\psi > 0$
et

$$H_\psi > 0 \text{ et } 12H_\psi^2 - i_\psi\psi^2 < 0$$

III. $\psi(x_1, x_2) = x_1^4 + 6\mu x_1^2x_2^2 - x_2^4$, avec $D_\psi < 0$.

IV. $\psi(x_1, x_2) = \alpha x_2^2(6x_1^2 + x_2^2)$, $|\alpha| = 1$ avec $D_\psi = 0, \alpha j_\psi < 0, 2i_\psi H_\psi - 3j_\psi\psi > 0$.

V. $\psi(x_1, x_2) = \alpha x_2^2(6x_1^2 - x_2^2)$, $|\alpha| = 1$ avec $D_\psi = 0, \alpha j_\psi < 0, 2i_\psi H_\psi - 3j_\psi\psi < 0$.

VI. $\psi(x_1, x_2) = \alpha(x_1^2 + x_2^2)^2$, $|\alpha| = 1$ avec $D_\psi = 0, \alpha j_\psi > 0, 2i_\psi H_\psi - 3j_\psi\psi = 0$,
 $H_\psi > 0$.

VII. $\psi(x_1, x_2) = 6\alpha x_1^2x_2^2$, $|\alpha| = 1$ avec $D_\psi = 0, \alpha j_\psi < 0, 2i_\psi H_\psi - 3j_\psi\psi = 0, H_\psi < 0$.

VIII. $\psi(x_1, x_2) = 4x_1^3x_2$, avec $D_\psi = 0, j_\psi = 0, i_\psi = 0, H_\psi \neq 0$.

IX. $\psi(x_1, x_2) = \alpha x_1^4$, $|\alpha| = 1$ avec $D_\psi = 0, j_\psi = 0, i_\psi = 0, H_\psi = 0, \alpha\psi > 0$.

X. $\psi(x_1, x_2) = 0$.

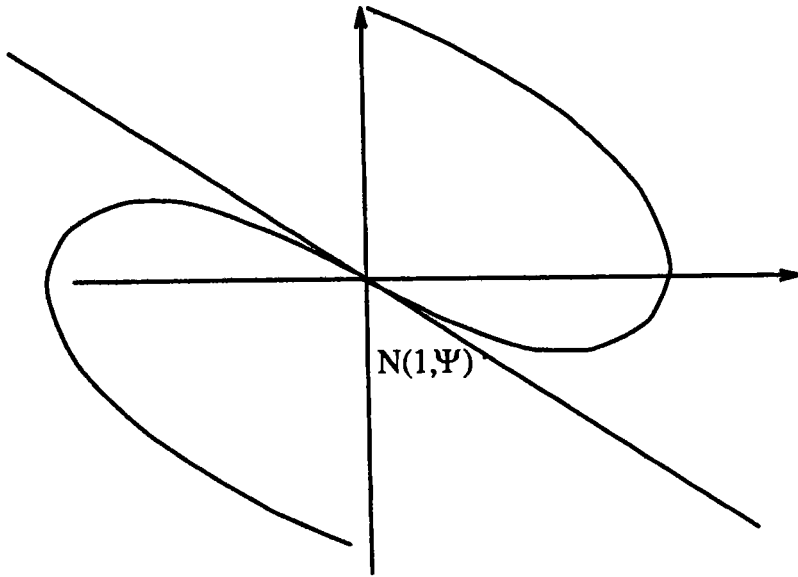
Appliquons le théorème-26 à la fonction F , on a

$$D_F = 0 \quad i_F = \tilde{c}^2 \left(r + 3 \left(\frac{r+1}{6} \right)^2 \right) \quad j_F = \tilde{c}^3 \frac{\sqrt{(1+14r+r^2)^3}}{216} \quad 2i_F H_F - 3j_F F > 0$$

et par suite, il existe une transformation $\sigma \in GL(2, \mathbb{R})$ tel que

$$F(x_1, x_2) = -\tilde{c}z_2^2(6z_1^2 + z_2^2) \text{ avec } (z_1, z_2) = \sigma(x_1, x_2).$$

Il est immédiat de vérifier que les orbites du champ de vecteurs Y sont de la forme



la droite d'équation $z_2 = 0$ est invariante par le champ $Y = (Y_1, Y_2)$, soit

$$(1, \psi) = \sigma^{-1}(z_1, 0).$$

Il est évident que ψ est une racine double de $F(1, x_2) = 0$ ainsi qu'une racine simple de l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial x_2}(1, x_2) = -\tilde{c}x_2 (4x_2^2 + 3tx_2 + 2(r+1)) = 0. \quad (6)$$

Soit ψ_1 et ψ_2 les deux solutions non nulles de l'équation (6), on obtient ainsi

$$\psi_1 = \frac{-3t - \sqrt{9t^2 - 32(1+r)}}{8}, \quad \psi_2 = \frac{-3t + \sqrt{9t^2 - 32(1+r)}}{8}.$$

Il est clair que, $F(1, x_2)$ est croissante sur $] -\infty, \psi_1] \sqcup [\psi_2, 0]$, décroissante sur $[\psi_1, \psi_2] \sqcup [0, +\infty]$ et que $F(1, x_2) \leq 0$. Il en résulte que

$$\psi = \psi_1 = \frac{-3t - \sqrt{9t^2 - 32(1+r)}}{8}.$$

Soit $N = (1, \psi)$ et $T = (T_x, T_y) = Y(N)$. On peut vérifier que

$$\begin{cases} T_x = \left(\tilde{a} + \tilde{c}\psi + \frac{\lambda_1 \tilde{c}t\psi^2}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\psi^2 + r)} \right) (\psi^2 + r) \\ T_y = \left(-\tilde{c} + \tilde{a}\psi + \frac{\lambda_2 \tilde{c}t\psi^2}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\psi^2 + r)} \right) \psi (\psi^2 + r) \end{cases}$$

Pour montrer que zéro est un point d'équilibre stable pour le champ Y , il suffit de montrer que $T_y > 0$. On a d'une part

$$(r^2 + 14r + 1)^3 > (21r^2 + 1 + r^3 + 21r)^2$$

d'où

$$t^2 = \frac{2}{27r} \left(33r - 1 + 33r^2 - r^3 + (1 + 14r + r^2)^{3/2} \right) > 4(r + 1)$$

et puisque $r > (\tilde{c} + \tilde{a})^2(\lambda_1 - \lambda_2)^2 / (\tilde{c}^2 \lambda_2^2)$, il s'ensuit que

$$t > 2 \frac{(\tilde{c} + \tilde{a})(\lambda_2 - \lambda_1)}{\tilde{c} \lambda_2}. \quad (7)$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned} \psi^2 &= \left(18t - 32(1 + r) + 6t\sqrt{9t^2 - 32(1 + r)} \right) / 64 \\ 9t^2 - 32(1 + r) &> 4r \quad \text{et} \quad 6t > 12\sqrt{r} \end{aligned}$$

et donc

$$6t\sqrt{9t^2 - 32(1 + r)} > 12\sqrt{r}(2\sqrt{r}) = 24r.$$

Il vient alors que

$$\psi^2 = \left(18t^2 - 32(1 + r) + 6t\sqrt{9t^2 - 32(1 + r)} \right) / 64 > r \quad \text{et} \quad \frac{\psi^2}{r + \psi^2} > 1/2$$

et d'après l'inégalité (7), on a

$$\frac{t\psi^2}{r + \psi^2} > \frac{(\tilde{c} + \tilde{a})(\lambda_2 - \lambda_1)}{\tilde{c} \lambda_2}.$$

Il s'ensuit que

$$\frac{t\psi^2}{r + \psi^2} \left(-\psi \frac{\lambda_2 \tilde{c}}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \right) > -\psi(\tilde{c} + \tilde{a})$$

et

$$-\tilde{c} + \tilde{a}\psi + \frac{\lambda_2 \tilde{c} t \psi^2}{(\lambda_1 - \lambda_2)(r + \psi^2)} \psi > -\psi \tilde{c} - \tilde{c} > 0$$

ce qui permet d'affirmer que

$$T_y > 0.$$

Nous allons maintenant examiner la stabilité du système (Σ) par le feedback u_2 . Soit le champ de vecteur défini par

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} X_1 &= \tilde{a}x_1 + \tilde{c}x_2 + u_2(x_1, x_2)\lambda_1 x_1 \\ X_2 &= -\tilde{c}x_1 + \tilde{a}x_2 + u_2(x_1, x_2)\lambda_2 x_2 \end{aligned}$$

Le changement de base dont la matrice de passage est

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

transforme le système $\dot{x} = X(x)$ en

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{c} \\ -\tilde{c} & \tilde{a} \end{pmatrix} + \frac{\tilde{c}t}{\lambda_2 - \lambda_1} \frac{\tilde{x}_2^2}{\tilde{x}_2^2 + r\tilde{x}_1^2} \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix}$$

et la démonstration découle de la stabilité du système $\dot{x} = Y(x)$. ■

Théorème 27 *Si la condition (i) est réalisée alors le système (Σ) est stabilisable par une commande fonction de l'état estimé par le système (Σ, O) .*

Démonstration On peut voir aisément que

$$u_b \neq 0$$

D'une part si $\lambda_1 u_b < 0$, on peut déduire que le feedback $u_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ stabilise le système (Σ) ((\hat{x}_1, \hat{x}_2) désigne une estimation de l'état donné par (Σ, O)). En effet le feedback u_1 est homogène de degré zéro et il vérifie

$$\lambda_1 u_1(x_1, x_2) > 0 > \lambda_1 u_b.$$

Les conditions du théorème-21 sont donc réunies.

D'autre part si $\lambda_1 u_b > 0$, alors le feedback $u_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ stabilise le système (Σ) . ■

Dans le cas où $\det B = 0$, nous allons procéder de la même façon que dans les cas précédents. Cependant, le problème est beaucoup plus compliqué. En particulier, il existe des classes de systèmes où il est impossible de construire des feedbacks qui sont "relativement séparés" de la mauvaise entrée (voir exemple 2).

Dans une base appropriée de \mathbb{R}^2 , on a

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si on considère le changement de base dont la matrice de passage est

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{-bc} & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

et si on considère un changement de contrôle du type $u \mapsto \frac{d-a}{\lambda_1} + u$, le système (Σ) devient

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = dx_1 + \tilde{c}x_2 + u\lambda_1x_1 \\ \dot{x}_2 = -\tilde{c}x_1 + dx_2 \\ y = c_1x_1 + c_2x_2 \end{cases} \quad (\Sigma)$$

avec $\tilde{c} = \sqrt{-bc} > 0$. Dans ces conditions le seul cas critique est $0 < \tilde{c} < d$.

Nous nous restreindrons ici au cas où $\frac{c_1}{c_2} \notin \left[-\frac{d}{\tilde{c}}, -\frac{\tilde{c}}{d}\right]$.

Théorème 28 Dans le cas où $\det B = 0$ et $0 < \tilde{c} < d$ et pour $\epsilon \in \mathbb{R}^*$, il existe un feedback u qui stabilise le système (Σ) et qui vérifie la propriété suivante

$$\frac{u}{\lambda_1} > -\frac{d^2 + \tilde{c}^2 + \epsilon^2}{d\lambda_1^2}.$$

Démonstration

Soit $m = -\frac{d^2 + \tilde{c}^2 + \epsilon^2}{d\lambda_1}$, $q = \sqrt{((\tilde{c} - d)^2 + \epsilon^2)((\tilde{c} + d)^2 + \epsilon^2)}$ et $e_1 = \frac{\tilde{c}^2 + d^2 + \epsilon^2 - q}{2\tilde{c}d}$.

On considère les deux matrices

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} d & \tilde{c} \\ -\tilde{c} & d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{B} = \tilde{A} + mB$$

Il est clair que $\det \tilde{B} = -\epsilon^2 < 0$ et par suite \tilde{B} est diagonalisable dans \mathbb{R} . On considère le système décrit par l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} \dot{x} = \tilde{A} + v\tilde{B}x \\ v \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (8)$$

le changement de base dont la matrice de passage est

$$T = \frac{1}{1 - e_1^2} \begin{pmatrix} 1 & -e_1 \\ -e_1 & 1 \end{pmatrix}$$

transforme le système (8) en

$$\dot{z} = (A_1 + vB_1)z \quad (9)$$

avec

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{(qd + 2\tilde{c}^2d)}{q} & \tilde{c}_1 \\ -\tilde{c}_1 & \frac{(qd - 2\tilde{c}^2d)}{q} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_1 = \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix}$$

où

$$t_1 = \frac{-\tilde{c}^2 + d^2 - \epsilon^2 - q}{2d}, \quad t_2 = \frac{-\tilde{c}^2 + d^2 - \epsilon^2 + q}{2d} \quad \text{et} \quad \tilde{c}_1 = \tilde{c} \left(\frac{1 + e_1^2}{1 - e_1^2} \right).$$

On peut alors invoquer le théorème-25 et déduire que le feedback

$$v(z_1, z_2) = \frac{4c^2 d^2}{q^2} - \frac{\tilde{c}_1 t}{(t_1 - t_2)} \frac{z_1^2}{(z_1^2 + r z_2^2)} \quad \text{avec} \quad r > \frac{(\tilde{c}_1 + \theta)^2 (t_1 - t_2)^2}{\tilde{c}_1^2 t_1^2}$$

$$t = \sqrt{\frac{2}{27r}} \sqrt{33r - 1 + 33r^2 - r^3 + (1 + 14r + r^2)^{3/2}} \quad \text{et} \quad \theta = \frac{d(-\tilde{c}^4 + d^4 + 2d^2 \epsilon^2 + \epsilon^4)}{q^2}$$

stabilise le système (9) et par suite, $\tilde{v}(x_1, x_2) = v(x_1 - e_1 x_2, -e_1 x_1 + x_2)$ rend le système (8) globalement asymptotiquement stable. Comme par ailleurs $\tilde{B} = \tilde{A} + mB$, il s'ensuit que le système décrit par l'équation différentielle

$$\dot{x} = (1 + \tilde{v}(x_1, x_2)) \tilde{A}x + m\tilde{v}(x_1, x_2)Bx$$

est globalement asymptotiquement stable.

On peut remarquer que $(\tilde{c} - d)^2 + \epsilon^2 < (\tilde{c} + d)^2 + \epsilon^2$, et par suite

$$\sqrt{(\tilde{c} - d)^2 + \epsilon^2} < \sqrt{(\tilde{c} + d)^2 + \epsilon^2} \quad \text{et} \quad q < (\tilde{c} + d)^2 + \epsilon^2 \quad \text{et} \quad (\tilde{c} - d)^2 + \epsilon^2 < q$$

d'où

$$q + \tilde{c}^2 + d^2 + \epsilon^2 > -2\tilde{c}d \quad \text{et} \quad \tilde{c}^2 + d^2 + \epsilon^2 - q < 2\tilde{c}d$$

ce qui donne

$$e_1 = \frac{\tilde{c}^2 + d^2 + \epsilon^2 - q}{2\tilde{c}d} > -1 \quad \text{et} \quad e_1 = \frac{\tilde{c}^2 + d^2 + \epsilon^2 - q}{2\tilde{c}d} < 1$$

et donc

$$-1 < e_1 < 1 \quad \text{et} \quad \tilde{c}_1 > 0.$$

Il est clair que $1 + \tilde{v}(x_1, x_2) > 0 \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ d'où l'équation

$$\dot{x} = \tilde{A} + m \frac{\tilde{v}(x_1, x_2)}{1 + \tilde{v}(x_1, x_2)} Bx$$

est G.A.S. et par suite le feedback $u(x_1, x_2) = m \frac{\tilde{v}(x_1, x_2)}{1 + \tilde{v}(x_1, x_2)}$ stabilise le système (Σ)

et vérifie

$$\frac{u(x_1, x_2)}{\lambda_1} > m = -\frac{d^2 + \tilde{c}^2 + \epsilon^2}{d\lambda_1^2}.$$

■

Théorème 29 Si B est diagonalisable dans \mathbb{R} et $\det B = 0$ et si on a $\frac{c_1}{c_2} \notin \left[-\frac{d}{\tilde{c}}, -\frac{\tilde{c}}{d}\right]$ alors le système bilinéaire plan est stabilisable par une commande fonction de l'état estimé par (Σ, O) .

Démonstration Dans une base appropriée de \mathbb{R}^2 et par une bonne paramétrisation dans l'espace de contrôle le système (Σ) s'écrit

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + uBx \\ y = c_1x_1 + c_2x_2 \end{cases} \quad \text{avec } A = \begin{pmatrix} d & \tilde{c} \\ -\tilde{c} & d \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Si $c_1c_2 = 0$ alors le système (Σ) est observable pour toute entrée.
- Si $c_1c_2 \neq 0$ alors il existe une et une seule mauvaise entrée qui n'arrive pas à distinguer deux états distincts

$$u_b = \frac{\tilde{c}}{\lambda_1} \begin{pmatrix} c_1^2 + c_2^2 \\ c_1c_2 \end{pmatrix}$$

à partir de l'étude de la fonction $f(\xi) = \frac{\xi^2 + 1}{\xi}$, on déduit que pour $\frac{c_1}{c_2} \notin [-\frac{d}{\tilde{c}}, -\frac{\tilde{c}}{d}]$ et $c_1c_2 < 0$ on a

$$\frac{u_b}{\lambda_1} < -\frac{d^2 + \tilde{c}^2}{d\lambda_1^2}.$$

Dans ces conditions, le feedback $u(x)$ définie dans le théorème-28 vérifie les hypothèses du théorème-21.

En effet, comme $\frac{u_b}{\lambda_1} < -\frac{d^2 + \tilde{c}^2}{d\lambda_1^2}$ et donc pour ϵ assez petit on a

$$\frac{u_b}{\lambda_1} < -\frac{d^2 + \tilde{c}^2 + \epsilon^2}{d\lambda_1^2} < \frac{u(x)}{\lambda_1}.$$

Pour $c_1c_2 > 0$ on a $\frac{u_b}{\lambda_1} > 0$. On montre alors, comme dans la démonstration du théorème-25 que les feedbacks

$$v(x_1, x_2) = -\frac{\tilde{c}t}{\lambda_1} \frac{x_1^2}{(x_1^2 + rx_2^2)} \quad \text{avec } r > \frac{(\tilde{c} + \tilde{a})^2}{\tilde{c}^2}$$

stabilisent le système (Σ), et par conséquent

$$\frac{u_b}{\lambda_1} > 0 > \frac{v(x_1, x_2)}{\lambda_1}.$$

Les conditions d'application du théorème-21 sont donc réunies et le système (Σ, O) est globalement asymptotiquement stable. ■

3.3.4 Remarque

Dans le cas où B de la forme $B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, il existe un certain cas où on ne peut pas trouver des feedbacks qui sont "relativement séparés" de la mauvaise entrée. En effet, soit l'exemple suivant :

Exemple 2 On considère le système suivant

$$(\Gamma_1) \begin{cases} \dot{x} = Ax + uBx \\ y = Cx \\ x \in \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{R} \end{cases}$$

avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = (1, -1)$.

Il découle de l'équation (II) que le système (Γ_1) n'est pas observable pour toute entrée et que la seule mauvaise entrée u_b est égale à -2 .

Dans ces conditions on montre la proposition suivante

Proposition On considère les deux systèmes suivants

$$(\Sigma_1) \begin{cases} \dot{x} = Ax + uBx \\ x \in \mathbb{R}^2, u \geq -2 \end{cases} \quad (\Sigma_2) \begin{cases} \dot{x} = Ax + uBx \\ x \in \mathbb{R}^2, u \leq -2 \end{cases}$$

avec $A = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ and $C = (1, 3)$.

Les systèmes (Σ_1) et (Σ_2) ne sont pas asymptotiquement contrôlable à l'origine.

Preuve Il est à noter que la région de la forme $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_2 > x_1 > 0\}$ est invariante par le système (Σ_1) , et que la paire $(A+2B, -B)$ n'est pas asymptotiquement contrôlable à l'origine (pour la démonstration voir [40]).

La proposition est ainsi démontrée. ■

4

A Robust PI-Controller For Infinite-dimensional Systems

abstract In this paper, we deal with single-input-single-output systems of the form

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + bu(t) + w \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

on a separable Hilbert space H , where the operator A is the generator of an exponentially stable C_0 -semigroup on H , $b \in H$, C is A -admissible linear operator and w is an arbitrary constant disturbance vector in H . We propose a low-gain PI-controller which stabilizes and regulates the system such that for a given reference constant y_r , $y(t)$ tends to y_r independently of w as $t \rightarrow +\infty$. Our result generalizes the previous one of Pohjolainen (1982) in that the semigroup is not necessarily holomorphic. A numerical example will be given to illustrate the application of the theory.

Keywords : Infinite-dimensional systems, PI-controller, spectrum, exponential stability

4.1 Introduction

In Pohjolainen (1982), the finite-dimensional multivariable regulator design theory has been generalized to a class of infinite-dimensional systems where the semigroup of the open loop system is an exponentially stable holomorphic semigroup on some Banach space. For this class of systems, Pohjolainen has given a necessary and sufficient condition for the existence of a robust multivariable PI-controller and proposed a low-gain PI-controller. In the same context, Kobayashi has developed a PI-controller design method using the discretized model of the system only (Kobayashi 1988). They have essentially assumed that the system is governed by an exponentially stable holomorphic semigroup (or exponentially stabilizable holomorphic semigroup by the

proportional part of the PI-controller). There are two reasons for this kind of assumptions. First it is possible to judge the stability of holomorphic semigroup systems on the basis of the spectrum of generators because an holomorphic semigroup is exponentially stable if and only if the spectrum of its generator is situated in the open left half plane (see the theorem 4.3 of Pazy 1983, p.118). Second the smoothing associated with holomorphic semigroups makes it possible to treat the boundary controls via bounded control operators (see the examples in Pohjolainen (1982) and Kobayashi (1988)). However this assumption singles out many infinite-dimensional practical systems whose semigroups are not holomorphic (see Pazy 1983, also Gauthier and Xu 1991, Xu and Gauthier 1991). On the other hand, practically it is not always easy to verify if a semigroup is holomorphic or not. The objective of our paper is to generalize the PI-controller design theory in Pohjolainen (1982) and Kobayashi (1988) to a larger class of infinite-dimensional systems.

In this paper, we consider infinite-dimensional linear systems of the form

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + bu(t) + w \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (\Sigma)$$

on a separable Hilbert space H . For the sake of simplicity, the theory will be developed only for single-input-single-output systems. Straightforward generalization to multi-input-multi-output case can be carried out following Pohjolainen (1982). Here we assume that the operator A is the generator of an exponentially stable C_0 -semigroup on H , $b \in H$, C is a linear A -admissible operator and w is an arbitrary constant disturbance vector in H . We propose the following PI-controller for (Σ) :

$$\begin{aligned} u(t) &= k_p(y(t) - y_r) + k_i[CA^{-1}b]^{-1}z(t) \\ \dot{z}(t) &= y(t) - y_r, \end{aligned} \quad (\text{PIC})$$

where the gains $k_p \in \mathbb{R}$ and $k_i > 0$ are small. Under some weak conditions, we will prove that this low-gain PI-controller stabilizes and regulates the system so that for a given reference constant y_r , $y(t)$ tends to y_r independently of w as $t \rightarrow +\infty$. To illustrate the application of the theory, we will deal with a numerical example which is not under the consideration of the existing theory (Pohjolainen 1985, Logemann and Owens¹ 1989).

In Logemann and Owens² (1989), Logemann and Owen have proposed a frequency-domain approach to the PI-controller design for a large class of infinite-dimensional exponentially stable systems. The PI-controller design has been carried out with transfer functions in order to guarantee input-output stability. Moreover it has been proved in Logemann and Owens¹ (1989) that under some semigroup smoothness assumption, input-output stability of the PI-controlled systems implies also internal exponential

stability. In Pohjolainen (1985), the robust PI-control theory has been investigated for exponentially stable semigroup systems with bounded output operators. Our approach here is the state space approach as compared with that of Logmann and Owens² (1989). We take the state space of the system H to be a Hilbert space. This makes it possible to judge the stability of semigroups on the basis of the spectrum of generators using the result of Huang (1985). We suppose also that $b \in H$ as in Pohjolainen (1982). The latter assumption is more restrictive for certain applications. To our knowledge, it is still an open question how to remove this assumption. The important fact to retain from our paper is that the holomorphy assumption on the semigroups is only technical, but not fundamental in Pohjolainen (1982). This fact makes it possible to apply the frequency-domain PI-controller design approach of Logmann and Owens² (1989) with implication of internal stability to a larger class of infinite-dimensional systems.

4.2 Main Result

We consider systems of the form (Σ) on the separable Hilbert space H with inner product $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$. We let $\sigma(A)$ and $\rho(A)$ denote respectively the spectrum and the resolvent set of a C_0 -semigroup generator A . The order of a C_0 -semigroup e^{tA} is defined as

$$\omega_0(A) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln \|e^{tA}\|/t$$

which does exist. We denote the largest real part of the spectrum by $\sigma_0(A) = \sup\{\Re(\lambda); \lambda \in \sigma(A)\}$. Then we have $\sigma_0(A) \leq \omega_0(A)$. The semigroup e^{tA} is called exponentially stable if and only if $\omega_0(A) < 0$. In general, $\sigma_0(A) < 0$ does not imply that the semigroup is exponentially stable (see the examples in Pazy 1983, p.117 and in Huang 1985). We set $R(\lambda; A) = (\lambda - A)^{-1}$ for all $\lambda \in \rho(A)$. The following fundamental result of Huang (1985) will be used systematically in the paper.

Proposition 1 : *Let e^{tA} be a C_0 -semigroup on the Hilbert space.*

1) *Then the order of the semigroup e^{tA} is $\omega_0(A) = \inf\{\sigma; \sigma > \sigma_0(A) \text{ and}$*

$$\sup_{\Re(\lambda) \geq \sigma} \|R(\lambda; A)\| < +\infty\}.$$

2) *The semigroup is exponentially stable if and only if $\sigma_0(A) < 0$ and there exists $\sigma \in (\sigma_0(A), 0)$ such that*

$$\sup\{\|R(\lambda; A)\|; \Re(\lambda) \geq \sigma\} < +\infty. \quad (1)$$

3) *Moreover $\sigma_0(A) = \omega_0(A)$ if and only if the condition (1) is satisfied for each $\sigma > \sigma_0(A)$.*

Definition 1 : A linear operator $C : \mathcal{D}(C) \subset H \rightarrow \mathbb{R}$ is called A -admissible if it is A -bounded and if for some $T > 0$ and all $x \in \mathcal{D}(A)$ there is a positive constant K_T such that

$$\int_0^T |C e^{tA} x|^2 dt \leq K_T^2 \|x\|_H^2.$$

We suppose throughout the paper that the operator A generates an exponentially stable C_0 -semigroup on H , $b \in H$, $w \in H$ and the output operator C is A -admissible.

4.2.1 Integral part of the PI-controller

First we consider only the integral part of the PI-controller (PIC) with $k_p = 0$. Set $k_I = k_i [CA^{-1}b]^{-1}$. Then the closed loop system is written on the Hilbert space $H \times \mathbb{R}$ as follows :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & k_I b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w \\ -y_r \end{bmatrix} \\ y(t) &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

where $(x(t), z(t)) \in H \times \mathbb{R}$.

Lemma 1 : Let the output operator C be A -admissible. Then the operator $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix}$ generates a C_0 -semigroup on $H \times \mathbb{R}$ with the spectrum $\sigma(\tilde{A}) = \sigma(A) \cup \{0\}$.

Proof : Set $A_1 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ and $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix}$. It is evident that the operator A_1 is the generator of a C_0 -semigroup on $H \times \mathbb{R}$. The operator A_1 perturbed by A_2 is still the generator of a C_0 -semigroup if the finite-rank operator A_2 satisfies the sufficient condition of the theorem 2.1 of Lasiecka and Triggiani (1985). From the fact of A -admissibility of C , the operator CA^{-1} is a continuous linear functional on H , and so there is a unique element $\tilde{c} \in H$ such that $CA^{-1} = \langle \cdot, \tilde{c} \rangle_H$. It is convenient to represent the operator A_2 in the following way. For all $f = (f_1, f_2) \in \mathcal{D}(A_2) \subset H \times \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} A_2 f &= \begin{pmatrix} 0 \\ C f_1 \end{pmatrix} = C f_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = CA^{-1} A f_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \langle A f_1, \tilde{c} \rangle_H \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \langle A_1 f, \begin{pmatrix} \tilde{c} \\ 0 \end{pmatrix} \rangle_{H \times \mathbb{R}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Then the A -admissibility of C implies the sufficient condition of the theorem 2.1 of Lasiecka and Triggiani (1985). Indeed,

$$\int_0^T \left| \langle A_1 e^{tA_1} f, \begin{pmatrix} \tilde{c} \\ 0 \end{pmatrix} \rangle_{H \times \mathbb{R}} \right| dt =$$

$$\int_0^T |C e^{tA} f_1| dt \leq \sqrt{T} \left[\int_0^T |C e^{tA} f_1|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{T} K_T \|f_1\|_H \xrightarrow{T \rightarrow 0} 0.$$

Following the theorem 2.1 of Lasiecka and Triggiani (1985), the operator \tilde{A} generates a C_0 -semigroup.

It is obvious that $\sigma(\tilde{A}) \supset \sigma(A) \cup \{0\}$. Now let $\lambda \notin \sigma(A) \cup \{0\}$. For every $(g_1, g_2) \in H \times \mathbb{R}$, the resolvent equation $(\lambda - \tilde{A}) \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$ has the unique solution

$$f_1 = R(\lambda; A)g_1$$

$$f_2 = \frac{1}{\lambda} \{g_2 + CA^{-1}(-g_1 + \lambda R(\lambda; A)g_1)\}.$$

The application $(\lambda - \tilde{A})^{-1}$ is bounded for all $\lambda \notin \sigma(A) \cup \{0\}$. Hence $\lambda \in \rho(\tilde{A})$. Equivalently, $\sigma(\tilde{A}) = \sigma(A) \cup \{0\}$. □

Remark : If the operator A is the generator of an exponentially stable holomorphic semigroup, it is sufficient to assume that C is A -bounded for \tilde{A} still to generate an holomorphic semigroup on $H \times \mathbb{R}$ (see Pohjolainen 1982). However, it is very reasonable to assume here the A -admissibility of C in order to take into account the proportional part of the PI-controller later on (see our Theorem 2 and Lasiecka and Triggiani 1985).

Lemma 2 : Assume that the operator $A_I = \tilde{A} + \begin{pmatrix} 0 & k_I b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ generates an exponentially stable C_0 -semigroup on $H \times \mathbb{R}$. Then the closed loop system (2) with the integral controller is exponentially stable and for all $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}(A_I)$ and every constant $w \in H$,

$$[y(t) - y_r] \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

Proof : Exponential stability of the closed loop system is evident. Since A_I generates an exponentially stable C_0 -semigroup e^{tA_I} , the point $\{0\}$ is in the resolvent set $\rho(A_I)$ and $A_I^{-1} \in \mathcal{L}(H \times \mathbb{R})$. Write $A_I = A_3 + A_4$, where

$$A_3 = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & -k \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & k_I b \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

with $k > 0$. Then $[C, 0]A_I^{-1} = [C, 0]A_3^{-1}A_3A_I^{-1}$. The operator $A_3A_I^{-1}$ being closed and defined on H , $A_3A_I^{-1} \in \mathcal{L}(H \times \mathbb{R})$ (p.166, Kato 1976). Direct computation proves that $[C, 0]A_3^{-1} \in \mathcal{L}(H \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, and so that the operator $[C, 0]A_I^{-1}$ is bounded. From (2), we have

$$\begin{aligned} y(t) &= [C, 0]e^{tA_I} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + [C, 0] \int_0^t e^{(t-\tau)A_I} \begin{bmatrix} w \\ -y_r \end{bmatrix} d\tau \\ &= [C, 0]A_I^{-1}e^{tA_I}A_I \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + [C, 0]A_I^{-1} [e^{tA_I} - 1] \begin{bmatrix} w \\ -y_r \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Taking the limit as $t \rightarrow +\infty$, we get

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} [y(t) - y_r] = -[C, 0]A_I^{-1} \begin{bmatrix} w \\ -y_r \end{bmatrix} - y_r.$$

To prove that the right side is zero, we set

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = A_I^{-1} \begin{bmatrix} w \\ -y_r \end{bmatrix}.$$

Then

$$A_I \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & k_I b \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w \\ -y_r \end{bmatrix}.$$

It follows that $Cx_1 = -y_r$. This finishes the proof of Lemma 2. \square

From this lemma, it is clear that one of the essential points in the PI-controller design is to achieve exponential stability of the controlled system by properly choosing the integral gain. In the following, we suppose that $CA^{-1}b \neq 0$. Then one of our main results is

Theorem 1 : Assume that $\omega_0(A) < -\alpha < 0$ and $CA^{-1}b \neq 0$. Then there exists a positive number k^* such that the controlled system operator A_I with $k_i \in (0, k^*)$ ($k_p = 0$ in (PIC)) generates an exponentially stable C_0 -semigroup on $H \times \mathbb{R}$.

Proof : From Lemma 1, $\sigma(\tilde{A}) = \sigma(A) \cup \{0\}$. The spectrum $\sigma(\tilde{A})$ can be separated by the vertical line $\lambda = -\alpha + iw$, $w \in \mathbb{R}$ in such a way that in the half plane $\Re(\lambda) \geq -\alpha$, the operator \tilde{A} has the only simple eigenvalue $\{0\}$ as spectrum point.

Write $A_I = \tilde{A} + k_I B$ with $B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ and $k_I = k_i(CA^{-1}b)^{-1}$.

We claim that when the operator \tilde{A} perturbed by a bounded operator $k_I B$ with sufficiently small k_I , the spectrum $\sigma(A_I)$ remains separated by the same vertical line,

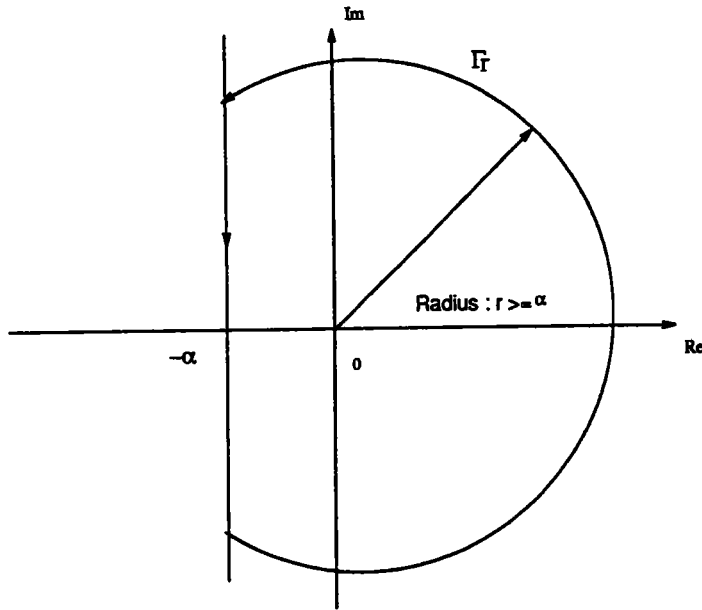


Figure 4.1. Distribution of the spectrum

and moreover that the spectrum point situated in the right of the vertical line is a simple eigenvalue.

Since $\omega_0(A) < -\alpha < 0$, it follows from 1)-Proposition 1 that

$$\sup_{\Re(\lambda) \geq -\alpha} \|R(\lambda; A)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq M < +\infty$$

for some positive number M .

Consider as illustrated in the Fig.1 the positively oriented curve Γ_r , which consists of a part of the vertical line and a part of the circle. This oriented curve Γ_r , separates the spectrum $\sigma(\tilde{A})$ into two parts $\sigma(A)$ and $\{0\}$. Recall that for all $\lambda \notin \sigma(A) \cup \{0\}$, we have

$$R(\lambda, \tilde{A}) = \begin{bmatrix} R(\lambda; A) & 0 \\ CA^{-1}R(\lambda; A) - \frac{1}{\lambda}CA^{-1} & \frac{1}{\lambda} \end{bmatrix}.$$

It is easy to see that for all $r > 0$, on Γ_r ,

$$\begin{aligned} \|R(\lambda; \tilde{A})\|_{\mathcal{L}(H \times \mathbf{R})} &\leq \|R(\lambda; A)\|_{\mathcal{L}(H)} + \frac{1}{|\lambda|} + \|CA^{-1}\|_{\mathcal{L}(H, \mathbf{R})} \|R(\lambda; A)\|_{\mathcal{L}(H)} \\ &+ \frac{1}{|\lambda|} \|CA^{-1}\|_{\mathcal{L}(H, \mathbf{R})} \leq \left(M + \frac{1}{|\lambda|}\right) \left(1 + \|CA^{-1}\|_{\mathcal{L}(H, \mathbf{R})}\right). \end{aligned}$$

Then there exists a positive number M_α such that for all $r \geq \alpha$,

$$\sup_{\lambda \in \Gamma_r} \|R(\lambda; \tilde{A})\|_{\mathcal{L}(H \times \mathbf{R})} \leq M_\alpha. \quad (3)$$

Since the perturbation operator $k_I B$ is bounded, there is a $k_1^* > 0$ such that for all $r \geq \alpha$ and all $k_i \in (0, k_1^*)$,

$$\sup_{\lambda \in \Gamma_r} |k_I| \|B\| \|R(\lambda; \tilde{A})\|_{\mathcal{L}(H \times \mathbf{R})} \leq k_i |(CA^{-1}b)^{-1}| \|B\| M_\alpha < 1. \quad (4)$$

It follows from the theorem 3.18 of (Kato 1976, p.214) that the spectrum $\sigma(\tilde{A} + k_I B)$ of the perturbed operator is likewise separated by Γ_r , and moreover the projector associated with the spectrum point enclosed by Γ_r is one-dimensional because $\{0\}$ is a simple eigenvalue of \tilde{A} . Since this fact is true independent of $r \geq \alpha$, we prove the claim.

Now it is necessary to shift the spectrum point enclosed by Γ_r into the left half plane $\Re(\lambda) < 0$. Referring to the proof of the theorem 3.4 of Pohjolainen (1982), one can show there exists a $0 < k^* \leq k_1^*$ such that for all $k_i \in (0, k^*)$,

$$\sigma_0 \left(\tilde{A} + \frac{k_i B}{CA^{-1}b} \right) < 0.$$

(Recall that $\sigma_0(\cdot)$ was defined at the beginning of this section.) In order to prove exponential stability of e^{tA_I} , we will use the sufficiency part of 3)-Proposition 1. For each $\sigma > \sigma_0(A_I)$, we consider the fixed domain $D_{\alpha, \sigma} = \{\lambda; \Re(\lambda) \geq \sigma, |\lambda| \leq \alpha\}$ which is a compact. By construction of k^* , $D_{\alpha, \sigma} \subset \rho(A_I)$, and so

$$\sup_{\lambda \in D_{\alpha, \sigma}} \|R(\lambda; A_I)\|_{\mathcal{L}(H \times \mathbf{R})} < +\infty. \quad (5)$$

However for all λ such that $\Re(\lambda) \geq \sigma$ and $|\lambda| > \alpha$, we have from (3) and (4)

$$\|R(\lambda; A_I)\|_{\mathcal{L}(H \times \mathbf{R})} \leq \|R(\lambda; \tilde{A})\|_{\mathcal{L}(H \times \mathbf{R})} \left\| \left(1 - \frac{k^* B}{CA^{-1}b} R(\lambda; \tilde{A}) \right)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(H \times \mathbf{R})} < +\infty. \quad (6)$$

Since (5) and (6) are true for each $\sigma > \sigma_0(A_I)$, hence the sufficient condition of 3)-Proposition 1 is satisfied and the semigroup e^{tA_I} is exponentially stable with $\omega_0(A_I) = \sigma_0(A_I)$. From Lemma 2, a good choice of the integral controller is

$$u(t) = \frac{k_i}{CA^{-1}b} z(t) \quad \text{with} \quad \dot{z}(t) = Cx(t) - y_r \quad \text{and} \quad k_i \in (0, k^*). \quad (\text{IC})$$

□

Remark : Referring to Pohjolainen (1982), it is clear that the condition $CA^{-1}b \neq 0$ is also necessary for the system to have an integral controller.

4.2.2 Proportional part of the PI-controller

It is more difficult to well choose the proportional gain k_p in our case. Without assuming that the operator A is the generator of an exponentially stable holomorphic semigroup, we cannot prove the same spectrum separation result as the theorem 3.6 of Pohjolainen (1982) for the perturbed operator $A + k_p bC$. In the case where the operator is regular spectral and the operator C satisfies some condition associated with the spectrum $\sigma(A)$ (see Xu and Sallet 1992), the theorem 3.6 of Pohjolainen (1982) still give a good choice of the proportional gain. In general we have only the following result.

Theorem 2 : *Assume that the operator A is the generator of an exponentially stable semigroup on H and the operator C is A -admissible. There exists a number $k_p^* > 0$ such that for each $k_p \in [-k_p^*, k_p^*]$, the perturbed operator $A + k_p bC$ still generates an exponentially stable semigroup.*

Proof : From the proof of Lemma 1, it is easy to see that the A -admissibility of the operator C implies that the operator $A + k_p bC$ generates a C_0 -semigroup on H . From 2)-Proposition 1, there are some $\alpha > 0$ and some $M > 0$ such that

$$\sup_{\Re(\lambda) \geq -\alpha} \|R(\lambda; A)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq M. \quad (7)$$

We claim that there is a $k_p^* > 0$ such that for each $k_p \in [-k_p^*, k_p^*]$, the half plane $\{\lambda; \Re(\lambda) \geq -\frac{\alpha}{2}\}$ is contained in the resolvent set $\rho(A + k_p bC)$ and

$$\sup_{\Re(\lambda) \geq -\frac{\alpha}{2}} \|R(\lambda; A + k_p bC)\|_{\mathcal{L}(H)} < +\infty.$$

First we prove that for some $K > 0$ and all $x \in \mathcal{D}(A)$, the following condition holds,

$$\int_0^{+\infty} e^{\frac{\alpha t}{2}} |C e^{tA} x| dt \leq K \|x\|_H.$$

Using the Cauchy inequality and the fact of A -admissibility of C , we have

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{\frac{\alpha t}{2}} |C e^{tA} x| dt &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^T e^{\frac{\alpha}{2}(\tau+nT)} |C e^{(nT+\tau)A} x| d\tau \\ &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{\frac{2}{\alpha}} e^{\frac{\alpha T}{2}} e^{\frac{\alpha nT}{2}} \left[\int_0^T |C e^{\tau A} e^{nT A} x|^2 d\tau \right]^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{\frac{2}{\alpha}} e^{\frac{\alpha T}{2}} e^{\frac{\alpha nT}{2}} K_T \|e^{nT A} x\|_H \\ &\leq \frac{\sqrt{2} K_T M e^{\alpha T/2}}{\sqrt{\alpha}} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha nT}{2}} \|x\|_H = K \|x\|_H, \end{aligned}$$

where we have used also the fact that $\|e^{nTA}\| \leq Me^{-nT\alpha}$. From the Laplace transform formula

$$CR(\lambda; A)x = \int_0^{+\infty} Ce^{tA}xe^{-\lambda t}dt, \quad x \in \mathcal{D}(A),$$

it follows from the above that for all $\Re e(\lambda) \geq -\frac{\alpha}{2}$,

$$|CR(\lambda; A)x| \leq K\|x\|_H.$$

Since the domain $\mathcal{D}(A)$ is dense, we have for all $\Re e(\lambda) \geq -\frac{\alpha}{2}$,

$$\|CR(\lambda; A)\|_{\mathcal{L}(H, \mathbb{R})} \leq K. \quad (8)$$

Now take $k_p^* < \frac{1}{\|b\|_H K}$. Then it is easy to prove the claim from (7), (8) and the identity

$$R(\lambda; A + k_p bC) = R(\lambda; A)(1 - k_p bCR(\lambda; A))^{-1}.$$

From 1)-Proposition 1, the operator $A + k_p bC$ generates an exponentially stable semigroup on H whatever $k_p \in [-k_p^*, k_p^*]$. \square

4.2.3 PI-controller design

First we choose the proportional gain following Theorem 2. Then we can apply the result of Theorem 1 to choose the integral gain. Set $A_p = A + k_p bC$. By construction, $A_p^{-1} \in \mathcal{L}(H)$. Note also that $CA_p^{-1} \in \mathcal{L}(H)$. The PI-controlled system is written

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p & k_I b \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w - k_p b y_r \\ -y_r \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix}.$$

In the same way as in the proof of Lemma 1, we can see that in the controlled system (9), the operator

$$\begin{bmatrix} A_p & k_I b \\ C & 0 \end{bmatrix} = A_1 + \langle A_1, \begin{bmatrix} \tilde{c} \\ 0 \end{bmatrix} \rangle_{H \times \mathbb{R}} \begin{bmatrix} k_p b \\ 1 \end{bmatrix}$$

generates a C_0 -semigroup on $H \times \mathbb{R}$. From Theorem 1, the good choice of the integral gain is $k_I = k_i / CA_p^{-1}b$ with sufficiently small $k_i > 0$. If the proportional gain is small, we have

$$CA_p^{-1}b = CA^{-1}b + k_p (CA^{-1}b)^2 \sum_{n=0}^{+\infty} [k_p CA^{-1}b]^n.$$

The dominating term is the term $CA^{-1}b$. Therefore the controller given in (PIC) does also work for small proportional gain. The robustness and practical interest of the PI-controller is a well-known fact (Pohjolainen 1982, Logemann and Owens² 1989, Logemann and Zwart 1992).

4.2.4 Application to a heat exchanger process:

We consider the model of a contraflow heat exchanger process

$$\frac{\partial T_1(x, t)}{\partial t} = -\frac{F_1(t)}{\rho_1 s_1} \frac{\partial T_1(x, t)}{\partial x} - \frac{kl}{c_1 \rho_1 s_1} [T_1(x, t) - T_2(x, t)]$$

$$\frac{\partial T_2(x, t)}{\partial t} = \frac{F_2}{\rho_2 s_2} \frac{\partial T_2(x, t)}{\partial x} + \frac{kl}{c_2 \rho_2 s_2} [T_1(x, t) - T_2(x, t)]$$

with the boundary conditions : $T_1(0, t) = T_{10}$, $T_2(1, t) = T_{20}$ and the output temperature to be regulated : $y(t) = T_2(0, t)$. In this model, we let $T_1(x, t)$ and $T_2(x, t)$ denote the temperatures with respect to time t and the spatial variable x . We suppose that the temperatures T_{10} and T_{20} , the flowrate F_2 and the physical parameters k , l , c_1 , ρ_1 , s_1 , c_2 , ρ_2 and s_2 are positive constants. For further details on the heat exchanger process, the reader is referred to Friedly (1972) and Gauthier and Xu (1991). Here we choose the flowrate $F_1(t)$ as control variable so that the resulted system is bilinear. For a constant flowrate $F_1(t) = F_{10}$, we set

$$m_1 = \frac{F_{10}}{\rho_1 s_1}, m_2 = \frac{F_2}{\rho_2 s_2}, m_3 = \frac{kl}{c_1 \rho_1 s_1}, m_4 = \frac{kl}{c_2 \rho_2 s_2}, \alpha_1 = \frac{m_3}{m_1}, \beta_1 = \frac{m_4}{m_2},$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{m_1} \text{ and } \beta_2 = \frac{1}{m_2}.$$

Then the equilibrium solution of the system is

$$T_1(x) = \frac{\alpha_1 c_0}{\alpha_1 - \beta_1} [e^{(\beta_1 - \alpha_1)x} - 1] + T_{10}$$

$$T_2(x) = \frac{\beta_1 c_0}{\alpha_1 - \beta_1} [e^{(\beta_1 - \alpha_1)x} - e^{(\beta_1 - \alpha_1)}] + T_{20},$$

where $c_0 = (T_{10} - T_{20})/[1 + \frac{\beta_1}{\alpha_1 - \beta_1}(1 - e^{\beta_1 - \alpha_1})]$. Note that the constant $c_0 \neq 0$ if $T_{10} \neq T_{20}$. The linearized model of the system around the equilibrium solution is

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_1(x, t)}{\partial t} \\ \frac{\partial R_2(x, t)}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m_1 \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & m_2 \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1(x, t) \\ R_2(x, t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m_3 & m_3 \\ m_4 & -m_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1(x, t) \\ R_2(x, t) \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} b_1(x) \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} w_1(x) \\ w_2(x) \end{bmatrix} \quad (10)$$

with the boundary conditions : $R_1(0, t) = R_2(1, t) = 0$ and the output $y(t) = T_2(0) + R_2(0, t)$. In the equation (10), $b_1(x) = \frac{\alpha_1 c_0}{\rho_1 s_1} e^{(\beta_1 - \alpha_1)x}$, $R_i(x, t) = T_i(x, t) - T_i(x)$ for $i = 1, 2$ and $u(t) = F_1(t) - F_{10}$. In (10), we have taken into account the exterior disturbance and modelization errors via the terms $w_1(x)$ and $w_2(x)$. The very real objective is to stabilize and regulate the system such that for a given reference constant y_r , $y(t) \rightarrow y_r$ as $t \rightarrow +\infty$ independently of (w_1, w_2) . First we show that the semigroup

of the linerized system is not holomorphic so that it is not under the consideration of the theory of Pohjolainen (1982) and Logemann and Owens¹ (1989). Let the state space be the Hilbert space $H = L^2[0, 1] \times L^2[0, 1]$ with the usual inner product. Consider the operator A_5 and A_6 with

$$A_5 = \begin{bmatrix} -m_1 \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & m_2 \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad A_6 = \begin{bmatrix} -m_3 & m_3 \\ m_4 & -m_4 \end{bmatrix}.$$

The operator A_5 with domain $\mathcal{D}(A_5)$

$$\mathcal{D}(A_5) = \{f; f, f' \in H, f_1(0) = 0, f_2(1) = 0\}$$

is dissipative as well as its adjoint A^* . Hence it generates a C_0 -semigroup e^{tA_5} on H (p.15, Pazy 1983). Then under the bounded perturbation, the operator $A_5 + A_6$ generates a C_0 -semigroup. The semigroup $e^{t(A_5+A_6)}$ is holomorphic if and only if e^{tA_5} is because A_6 is bounded. Direct computations allow to find that

$$R_1(x, t) = \begin{cases} R_{10}(x - m_1 t) & \text{for } x - m_1 t \geq 0, \\ 0 & \text{for } x - m_1 t < 0. \end{cases}$$

and

$$R_2(x, t) = \begin{cases} R_{20}(x + m_2 t) & \text{for } x + m_2 t \leq 1, \\ 0 & \text{for } x + m_2 t > 1. \end{cases} \quad (11)$$

where $\begin{bmatrix} R_1(x, t) \\ R_2(x, t) \end{bmatrix} = [e^{tA_5} R_0](x)$. For any $R_0 \neq 0$, $e^{tA_5} R_0 = 0$ for $t \geq \max\{1/m_1, 1/m_2\}$.

So the semigroup e^{tA_5} is not holomorphic. In Xu *et al.* (1993), using Proposition 1, it has been proved that $e^{t(A_5+A_6)}$ is exponentially stable for each set of positive physical parameters. From (11), one can verify that the output operator $C : H \rightarrow \mathbb{R}$ with $Cf = f_2(0)$ is A_5 -admissible. Hence the operator C is also $(A_5 + A_6)$ -admissible under the bounded perturbation. From Xu *et al.* (1993), we can find that

$$C(A_5 + A_6)^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \end{bmatrix} = -\frac{\alpha_1 \beta_1 \alpha_2 c_0}{2l_1 s_1 (\alpha_1 - \beta_1)^2} \times \frac{h(1)}{g(1)}$$

where

$$\begin{aligned} h(x) &= \beta_1 - 2\alpha_1 + e^{x(\beta_1 - \alpha_1)} [2(\alpha_1 x + 1)(\alpha_1 - \beta_1)] + \beta_1 e^{2x(\beta_1 - \alpha_1)} \\ g(x) &= \alpha_1 - \beta_1 e^{x(\beta_1 - \alpha_1)}. \end{aligned}$$

By deriving the function $h(x)$, one can easily prove that

$$C(A_5 + A_6)^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \end{bmatrix} \neq 0.$$

Then the PI-regulator for the linearized system (10) is

$$\begin{aligned} u(t) &= k_p(R_2(0, t) - y_r) + k_i \left(C(A_5 + A_6)^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} z(t) \\ \dot{z}(t) &= R_2(0, t) - y_r \end{aligned}$$

with $k_p \in \mathbb{R}$ and $k_i > 0$ being small.

Using the finite difference method and the MATLAB programs, we have simulated the PI-controlled exchanger system with the numerical values : $m_1 = 1$, $m_2 = 1.5$, $m_3 = 2$, $T_{01} = 80$, $T_{02} = 10$, $w_1 = 1$ and $w_2 = 1$. By simulation we observe that $k_p = 0.02$ and $k_i = -0.02$ stabilizes and regulates the linearized system. We have also applied the designed PI-controller to the bilinear system. Although we are not able to prove existence and uniqueness theorem for the PI-controlled bilinear system, the numerical result is not significantly different from that of the linearized model as illustrated in the Fig.2, Fig.3 and Fig.4. In spite of the disturbance $w \neq 0$, the output $R_2(0, t)$ is regulated to zéro.

We should note that the results given here are theoretic existence results of PI-controllers. The basic role of the proportional part of the PI-controllers is to speed up the dynamics of the controlled system. However the tuning of the proportional part of the PI-controllers, that is, choosing appropriate proportional gains to improve the stability of the controlled system, is not dealt with here and still remains to be studied. For example, the gains $k_p = 0.02$ and $k_i = -0.02$ might not be the best tuning of the PI-controller for the heat exchanger system.

4.3 Conclusions

In this paper, we have proposed a low-gain PI-controller for linear systems whose dynamic is governed by an exponentially stable semigroup. This generalizes the PI-design theory developed by Pohjolainen (Pohjolainen 1982) in that the semigroup under consideration is not necessarily holomorphic. This generalization could bring the following interests in applications :

- 1) It allows to perform the PI-controller design without verifying the holomorphy of semigroups.
- 2) It allows to apply the PI-controller designing for a larger class of infinite-dimensional systems.

For instance, the dynamic of heat exchanger systems is gouverned by exponentially stable semigroups which are not holomorphic when the diffusion phenomenon is neglected (see Xu and Gauthier 1991, Xu *et al.* 1993, Gauthier and Xu 1991). For the

class of the systems considered here which are not covered in Logemann and Owens¹ (1989) and Pohjolainen (1985), it is clear that input-output stability and internal stability are equivalent (see Logemann and Owens¹ 1989).

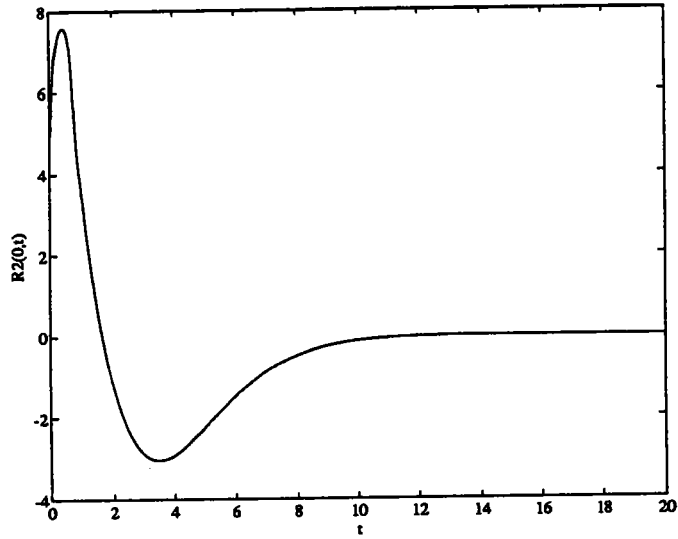


Figure 4.2. PI-Control of The Bilinear System

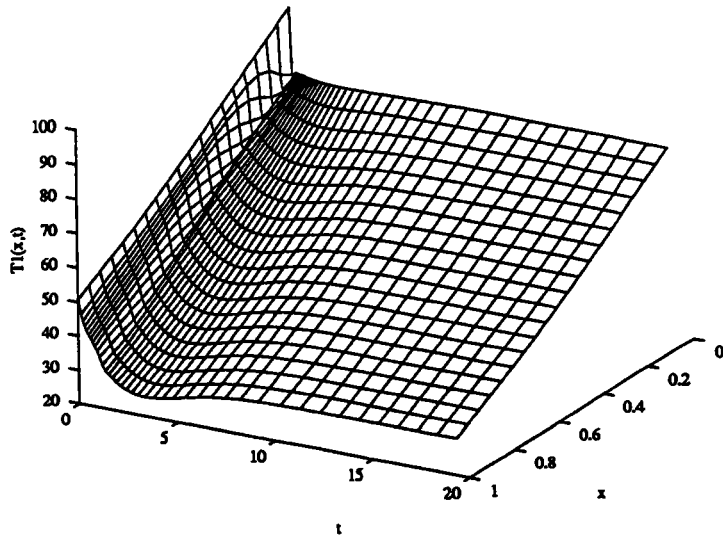


Figure 4.3. PI-Control of The Bilinear System

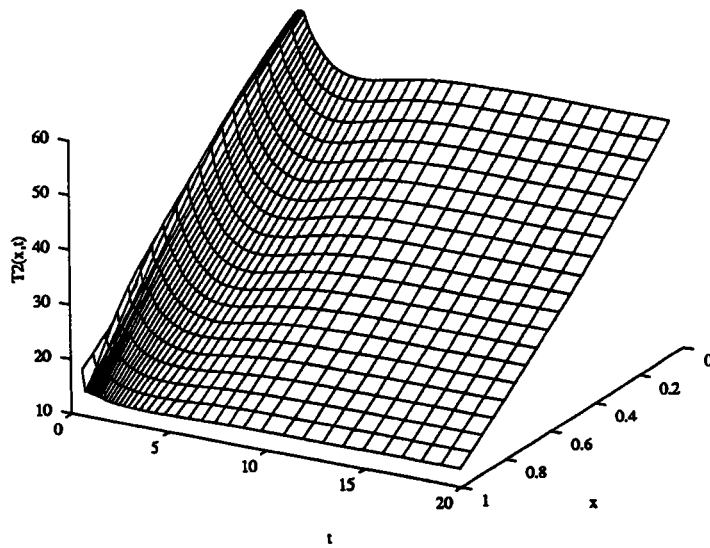


Figure 4.4. PI-Control of The Bilinear System

Bibliographie

- [1] H. Abed - J.H. Fu *Local feedback stabilization and Bifurcation Control, Hopf bifurcation*. Systems & Control Letters - Vol. 7 (pp. 11-17) — 1985
- [2] Z. Artstein *Stabilization with relaxed controls* Nonlinear Analysis Theory Methods and Applications - Vol 7 (pp. 1163-1173) — 1983
- [3] A. Bacciotti - P. Boieri *Linear stabilizability of planar nonlinear systems* Mathematics of control signals and systems - Vol. 3 (pp. 183-193) — 1990
- [4] W. Boothby - R. Marino *Feedback stabilization of planar nonlinear systems* Systems & Control Letters - Vol. 12 (pp. 87-92) — 1989
- [5] G. Bornard, N. Couenne, F. Celle *Regularly persistent observers for bilinear systems* New trends in Nonlinear control Theory- Springer Verlag, n 122, 1989.
- [6] R.W. Brockett. *Differential Geometric Control Theory*, chapter Asymptotic stability and feedback stabilization, pages 181-191. Brockett, Milmann, Sussmann, 1983.
- [7] Anna.Cima and Jaume.Llibre Algebraic and Topological Classification of the Homogeneous Cubic Vector Fields in the plane. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, (14).420-448, (1990).
- [8] R. Chabour and H. Hammouri. Stabilization of planar bilinear systems using an observer configuration, *Appl. Math. Lett.*, 6 (1993), 7-10.
- [9] R. Chabour and J.C. Vivalda. Stabilisation des systèmes bilinéaires dans le plan. *C.R Acad.Sci.Paris.*, (312): pp 1017-1020, (1991).
- [10] R. Chabour and H. Jerbi. On The Stabilization of Planar Bilinear Systems using an Observer Configuration. Soumis à *THE 3rd IEEE Conference on Control Applications*, Août 24-26, 1994
- [11] CURTAIN, R.F., 1988, Equivalence of input-output stability and exponential stability for infinite dimensional systems. *Math. Systems Theory*, vol.21, pp.19-48.

- [12] W.P.Dayawansa, C.F.Martin and G.Knowles. *Asymptotic stabilization of a class of smooth two-dimensional systems*. SIAM J. Control and Optimization, (28) pp.1321-1349, (1990)
- [13] FRIEDLY, J.C., 1972, *Dynamic behavior of processes*, Prentice-Hall, Inc.
- [14] J.P. Gauthier and G. Bornard. *Outils et modèles mathématiques pour l'automatique et la théorie du signal*, chapter Stabilisation des systèmes non linéaires, pages 307-324. Editions du CNRS, 1981.
- [15] J.P. Gauthier - Y. Kupka *A separation principle for bilinear systems with dissipative drift* A paraître dans Systems & Control Letters
- [16] GAUTHIER, J.P., and XU, C.Z., 1991, H^∞ -control of a distributed parameter system with non-minimum phase. *Int. J. Control*, vol.53, No.1, pp.45-79.
- [17] O.M. Grasselli and A.Isidori (1977) *Deterministic state reconstruction and reachability of bilinear control processes* JACC, pp. 1423-1427
- [18] W. Hahn. *Stability of Motion*. Springer Verlag, (1967).
- [19] M.A.Hammami and H.Jerbi. *On the Stabilisation of Homogeneous Cubic Vector Fields in the Plane*. to appear in Applied Mathematics Letters.
- [20] R.Hermann and A.J.Krener (1977) *Nonlinear controllability and observability* IEEE Trans. Aut. Contr., AC 22, pp 728-740
- [21] HUANG, F.L., 1985, Characteristic conditions for exponential stability of linear dynamical systems in Hilbert spaces. *Ann. Diff. Equations*, vol.1, pp.43-56.
- [22] Hamadi.Jerbi and M.A.Hammami and J.C.Vivalda *On the Stabilization of Homogeneous Affine Systems* Soumis à *2nd IEEE MEDITERRANEAN SYMPOSIUM ON NEW DIRECTIONS IN CONTROL & AUTOMATION* Juin 19-22, 1994
- [23] V. Jurdjevic and J.P. Quinn. Controllability and stability. *Journal of Differential Equations*, (28):381-389, (1978).
- [24] KATO, T., 1976, *Perturbation theory for linear operators* (New York : Springer-Verlag).
- [25] M. Kawski. Stabilization of nonlinear systems in the plane. *Systems & Control Letters*, (12):169-175, (1990).
- [26] M. Kawski *Stabilization of nonlinear systems in the plane* Systems & Control Letters - Vol. 12 (pp. 169-175) —1989

- [27] KOBAYASHI, T., 1988, A digital PI-controller for distributed parameter systems. *SIAM J. Contr. and Optim.*, vol.26, pp.1399-1414.
- [28] J. Kurzweil. On the inversion of liapunov's second theorem on stability of motion. *AMS Translations*, 24:19-77, (1963).
- [29] LASIECKA, I., and TRIGGIANI, R., 1985, Finite rank, relatively bounded perturbation of semigroup generators, Part I, well-posedness and boundary feedback hyperbolic dynamics. *Annali Scuola Normale Superior-Pisa* (Classe di Scienze, Serie IV, vol.XII, no.4), pp.641-668.
- [30] J. Lasalle and S. Lefschetz. *Stability by Liapunov's direct method with applications*. Academic Press, New-York, (1961).
- [31] LOGEMANN, H., and ZWART, H., 1992, On robust PI-controller of infinite-dimensional systems. *SIAM J. Contr. and Optim.*, vol.30, pp.573-592.
- [32] LOGEMANN, H., and OWENS¹, D.H., 1989, Multivariable tuning regulators for infinite-dimensional systems with unbounded control and observation. *Proceedings of the 26th Conference on Decision and Control*, Los Angeles, pp.1227-1232.
- [33] LOGEMANN, H., and OWENS², D.H., 1989, Low-gain control of unknown infinite-dimensional systems : A frequency-domain approach. *Dynamics and Stability of Systems*, vol.4, pp.13-29.
- [34] J.L. Massera. Contribution to stability theory. *Annals of Mathematics*, (64):182-206, (1956).
- [35] R. Outbib and G. Sallet. Stabilizability of the angular velocity of a rigid body revisited. *Systems & Control Letters*, (18):93-98, (1992).
- [36] PAZY, A., 1983, *Semigroup of linear operators and applications to partial differential equations* (New York : Springer-Verlag).
- [37] POHJOLAINEN, S.A., 1982, Robust multivariable PI-controller for infinite-dimensional systems. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, vol. 27, pp.17-30.
- [38] POHJOLAINEN, S., 1985, Robust controller for systems with exponentially stable strongly continuous semigroups. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol.111, pp. 622-636.
- [39] N. Rouche - J. Mawhin *Equations différentielles ordinaires - Tôme 2* Masson et Cie - PARIS —1973
- [40] G.Sallet. and P.Adda Controllability for finite families of linear vector fields in the plane. *RAIRO APII* 24, 377-390, (1990).

- [41] E.D. Sontag. Feedback stabilization of nonlinear systems. In *Robust Control of Linear Systems and Nonlinear Control*, pages 61–81. Eds Kaashoek M.A, van Schuppen J.H, Ran A.C.M, Birkhauser, 1990.
- [42] E.D.Sontag (1979) *On the observability of polynomial systems* SIAM J. Control and Optimization, 17, pp. 139-151
- [43] E.D. Sontag *A universal construction of Arstein's Theorem on nonlinear stabilization* Systems and Control Lettres - Vol. 13 (pp. 117–123) —1989
- [44] H.Sussmann (1979) *Single-input observability of continuous-time systems* Math. Systems Theory, 10, pp. 263-284
- [45] H.Sussmann *Subanalytic sets and feedback control*. Journal of Differential Equations, (31) pp.31-52, (1978)
- [46] XU, C.Z., and GAUTHIER, J.P., 1991, Analyse et commande d'un échangeur thermique à contre-courant. *RAIRO APPII*, vol.25, pp.377-396.
- [47] XU, C.Z., GAUTHIER, J.P., and KUPKA, I., 1993, Exponential stability of the heat exchanger equation. *Proceedings of the European Control Conference*, Groningen, The Netherland, pp.303-307.
- [48] XU, C.Z., and Hamadi Jerbi. A Robust PI-Controller For Infinite-dimensional Systems. To appear in *International Journal of Control*.
- [49] XU, C.Z., and SALLET, G., 1992, On spectrum assignment of infinite-dimensional linear systems by bounded linear feedback. *Rapport INRIA*, no.1705, June.